ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΣΤΑΤΙΚΗ

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

1.— *Μαθηματικὰ* Α', Β'
2.— *Χημεία*
3.— *Ἐφηρμοσμένη Ἠλεκτροχημεία*
4.— *Μηχανικὴ* Α', Β'
5.— *Ραδιοτεχνία* Α', Β'
6.— *Εἰσαγωγὴ στὴν τεχνικὴ τῆς Τηλεφωνίας*
7.— *Τεχνολογία Μηχανουργικῶν Μετρήσεων*
8.— *Μηχανολογικὸν Σχέδιον*
9.— *Κινητήριαι Μηχαναὶ* Α', Β', Γ'
10.— *Στοιχεῖα Μηχανῶν*
11.— *Τεχνολογία Συγκολλήσεων*
12.— *Ἠλεκτρολογία* Α', Β', Γ'
13.— *Ἠλεκτρικαὶ Μηχαναὶ* Α', Β'
14.— *Ἐργαστηριακαὶ Ἀσκήσεις Ἠλεκτρολογίας*
15.— *Γενικὴ Δομικὴ* Α', Β', Γ'
16.— *Οἰκοδομικὴ* Α', Β', Γ', Δ'
17.— *Οἰκοδομικαὶ Σχεδιάσεις*
18.— *Σχεδιάσεις Τεχνικῶν Ἔργων*
19.— *Τοπογραφία*
20.— *Δομικὰ Ὑλικὰ* Α', Β'

'Ο Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «'Ιδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισε τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν, ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν 'Ιδρύματος, ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς 'Ελλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. 'Απὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἵδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς. 'Εκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Τὸ ὅλον ἔργον ἤρχισε μὲ τὴν ὑποστήριξιν τοῦ 'Υπουργείου Βιομηχανίας, τότε ἁρμοδίου διὰ τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν, καὶ συνεχίζεται ἤδη μὲ τὴν ἔγκρισιν καὶ τὴν συνεργασίαν τοῦ 'Υπουργείου 'Εθνικῆς Παιδείας, βάσει τοῦ Νομοθετικοῦ Διατάγματος 3970/1959.

Αἱ ἐκδόσεις τοῦ 'Ιδρύματος διαιροῦνται εἰς τὰς ἀκολούθους βασικὰς σειράς, αἱ ὁποῖαι φέρουν τοὺς τίτλους:

«Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνίτη», «Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ», «Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ βοηθοῦ Χημικοῦ», «Τεχνικὴ Βιβλιοθήκη».

'Εξ αὐτῶν ἡ πρώτη περιλαμβάνει τὰ βιβλία τῶν Σχολῶν Τεχνιτῶν,

ἡ δευτέρα τὰ βιβλία τῶν Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν, ἡ τρίτη τῶν Σχολῶν Τεχνικῶν βοηθῶν Χημικῶν, ἡ τετάρτη τὰ βιβλία τὰ προοριζόμενα διὰ τὰς ἀνωτέρας Τεχνικὰς Σχολὰς (ΚΑΤΕ, ΣΕΛΕΤΕ, Σχολαὶ Ὑπομηχανικῶν). Παραλλήλως, ἀπὸ τοῦ 1966 τὸ Ἵδρυμα ἀνέλαβε καὶ τὴν ἔκδοσιν βιβλίων διὰ τὰς Δημοσίας Σχολὰς Ε.Ν.

Αἱ σειραὶ αὗται θὰ ἐμπλουτισθοῦν καὶ μὲ βιβλία εὐρυτέρου τεχνικοῦ ἐνδιαφέροντος χρήσιμα κατὰ τὴν ἄσκησιν τοῦ ἐπαγγέλματος.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος καταβάλλουν κάθε προσπάθειαν, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῇ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμή των ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς ἀπόρους μαθητάς.

Οὕτω προσφέρονται εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν τῶν καθηγητῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῆς τεχνικῆς μας παιδείας αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ρ. ΓΚΡΟΣ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΣΤΑΤΙΚΗ

ΑΘΗΝΑΙ
1976

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ Μηχανικὴ ἀποτελεῖ ἕνα ἀπὸ τὰ βασικὰ μαθήματα διὰ τὴν κατανόησιν τῶν θεμάτων τῆς Τεχνικῆς. Ἑπομένως ἡ καλὴ γνῶσις της εἶναι ἀπαραίτητος διὰ κάθε τεχνικόν.

Ὁ ἀνὰ χεῖρας τόμος, ὑπὸ τὸν τίτλον «Στατική», ἀποτελεῖ τὸν πρῶτον τόμον τοῦ βιβλίου «Μηχανική» τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου.

Ἡ «Στατική» εἶναι κατ᾽ ἀρχὴν διδακτικὸν σύγγραμμα, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιθυμῶ νὰ δώσω εἰς σαφῆ, πλήρη καὶ συστηματικὴν μορφήν, μὲ ἰδιαιτέραν ἐπεξήγησιν καὶ τονισμὸν τῶν σημαντικωτέρων ἀρχῶν καὶ τύπων, περιληπτικὴν εἰκόνα τῆς περιοχῆς αὐτῆς τῶν γνώσεων.

Ἡ ἁπλῆ τοποθέτησις ἀριθμητικῶν τιμῶν εἰς ἑτοίμους τύπους, χωρὶς τὴν συνειδητοποίησιν τοῦ νοήματός των καὶ ἡ λύσις στατικῶν προβλημάτων μόνον διὰ συνταγῶν, ὁδηγεῖ εἰς τὴν τεχνικὴν ἡμιμάθειαν καὶ εἰς ἀδυναμίαν κατανοήσεως καὶ ἀντιμετωπίσεως τῶν πολυμόρφων προβλημάτων τῆς πράξεως. Διὰ τοῦτο, παρὰ τὴν συντομίαν ποὺ ἐπεδίωξα, αἱ ἀρχαὶ καὶ οἱ τύποι δὲν ἐπεξηγοῦνται μόνον ἀλλὰ καὶ ἀποδεικνύονται πλήρως. Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν νόμων τῆς Στατικῆς εἰς τὴν τεχνικὴν πρᾶξιν, χωρὶς νὰ ἀπαιτῆται ἡ χρῆσις ἄλλων βοηθημάτων.

Ἡ ἐκλογὴ τῆς ὕλης ἐγένετο κατὰ τρόπον, ὥστε κάθε κεφάλαιον νὰ ἀποτελῇ εἰ δυνατὸν ἕνα χωριστὸν σύνολον, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ μελετηθῇ ἀνεξαρτήτως τῶν ἄλλων. Ἔτσι τὸ βιβλίον ἀπευθύνεται πρὸς κάθε σπουδαστὴν ἀδιακρίτως τοῦ κύκλου σπουδῶν του ἢ τῆς εἰδικεύσεώς του.

Συγχρόνως ἐξυπηρετεῖ καὶ τὸν τεχνικόν, ποὺ ἀσχολεῖται μὲ τὰς ἐφαρμογάς, εἰς τὸ νὰ ἐπαναφέρῃ εἰς τὴν μνήμην του τὰς μεθόδους ὑπολογισμοῦ τῶν προβλημάτων τῆς στατικῆς.

Ἀπὸ τὸν σπουδαστὴν δὲν ἀπαιτοῦνται ὑψηλαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις. Ἀνώτερα μαθηματικὰ δὲν χρησιμοποιοῦνται ἂν καὶ θὰ ἁπλούστευον τὴν ἀνάπτυξιν ὡρισμένων βασικῶν ἐννοιῶν, ὅπως π.χ. τοῦ κέντρου βάρους.

Ἡ Μηχανικὴ εἶναι ἡ περιοχὴ τῆς Τεχνικῆς, εἰς τὴν ὁποίαν, μὲ σχετικῶς ὀλίγους βασικοὺς νόμους καὶ μεθόδους, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ πολυποίκιλα προβλήματα τῶν ἐφαρμογῶν. Αἱ δυσχέρειαι τοῦ σπουδαστοῦ συνίστανται οὐσιαστικῶς εἰς τὸ ὅτι δὲν τοῦ εἶναι πάντοτε εὔκολον τὰς γνώσεις ἐκ τῆς θεωρίας νὰ τὰς χρησιμοποιήσῃ ὀρθῶς καὶ ἐπωφελῶς διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Ἡ λύσις αὐτὴ πρέπει νὰ εἶναι ἀποτέλεσμα συστηματικῆς ἐργασίας. Εἰς τὰ παραδείγματα τοῦ βιβλίου παρουσιάζεται ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον ὀφείλει νὰ προχωρῇ ὁ σπουδαστὴς πρὸς τὴν λύσιν. Ἡ πορεία αὐτὴ ἐμφανίζει τὰ ἀκόλουθα στάδια:

α) Κατανόησις τοῦ προβλήματος.

β) Κατάρτισις τοῦ σχεδίου λύσεως.

γ) Λύσις.

δ) Ἔλεγχος τῆς λύσεως.

Ἡ σωστὴ ἐφαρμογὴ τῶν νόμων εἰς τὴν Τεχνικὴν καὶ ἡ εὕρεσις ὀρθῶν ἀριθμητικῶν ἀποτελεσμάτων ἀποτελεῖ ἀνάγκην διὰ τὸν τεχνικόν. Οἱ σκοποὶ αὐτοὶ ἐξασφαλίζονται μόνον διὰ τῆς κατ' ἰδίαν ἐργασίας τοῦ σπουδαστοῦ ἐπὶ παραδειγμάτων ἐκ τῆς πράξεως.

Διὰ τοῦτο παρατίθενται πολυάριθμα παραδείγματα, τὰ ὁποῖα συμπληροῦν τὸ κείμενον καὶ σημαντικῶς συμβάλλουν εἰς τὴν κατανόησιν τῆς ὕλης. Τὰ παραδείγματα εἶναι ἁπλᾶ. Περιέχουν γενικῶς μόνον τὸ ἄμεσον θέμα χωρὶς περίπλοκον τεχνικὴν ἐπένδυσιν διὰ νὰ μὴ ἀποσπάσουν τὸν σπουδαστὴν ἀπὸ τὸν κύριον στόχον καὶ τὸν ἐμπλέξουν εἰς δευτερεύοντας ὑπολογισμούς.

Μὲ τὰς ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὴν μέθοδον ἐπιλύσεως ἀναφέρονται πάντοτε εἰς τὴν προηγηθεῖσαν ὕλην καὶ τὰ παραδείγματα, ἐπιδιώκω νὰ δώσω εἰς τὸν σπουδαστὴν τὴν δυνατότητα νὰ ἐφαρμόσῃ πρακτικῶς τὰ ὅσα ἔμαθε. Μὲ τὴν παράθεσιν τοῦ ἀποτελέσματος τῆς λύσεως τὸν βοηθῶ νὰ ἐλέγξῃ ἐὰν εἰργάσθη ὀρθῶς. Τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ δίδονται μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν ἀπὸ ὅ,τι ἡ φύσις τῶν προβλημάτων ἀπαιτεῖ. Τοῦτο ἐγένετο πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως τοῦ σπουδαστοῦ, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἐθισθῆ εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος. Πάντως εἶναι ἀπαραίτητον εἰς τὰς ἀσκήσεις καὶ ἰδίως ὅπου ζητεῖται λύσις διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀναλυτικῆς καὶ γραφικῆς μεθόδου ὑπολογισμοῦ, νὰ συγκρίνωνται μεταξύ των ἡ ἀκρίβεια, ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος καὶ ἡ ἐποπτεία τῆς μεθόδου λύσεως τοῦ προβλήματος διὰ κάθε μέθοδον.

Μεγάλη σημασία ἀπεδόθη εἰς τὴν ποιότητα τῶν σχημάτων. Ἡ καλὴ παρουσίασίς των διευκολύνει τὴν κατανόησιν καὶ δημιουργεῖ τὴν σαφήνειαν ποὺ δὲν δίδει πάντοτε καὶ ἡ πλέον ἐκτεταμένη ἐπεξήγησις.

Ὡς μονὰς δυνάμεως χρησιμοποιεῖται τὸ κιλοπόν (kilopond). Παρ' ὅλον ὅτι τὸ χιλιόγραμμον δὲν ἔχει ἀναγνωρισθῆ διεθνῶς ὡς μονὰς τῆς μάζης μόνον καὶ ὁ ἄνθρωπος τῆς καθημερινῆς ζωῆς δὲν ἔχει ἀκόμη σαφῆ ἀντίληψιν τοῦ κιλοπόν, ἐν τούτοις νομίζω ὅτι ἡ χρησιμοποίησίς του εἶναι ἀπαραίτητος διὰ νὰ σταματήσῃ κάποτε ἡ σύγχυσις μεταξὺ τῆς μονάδος δυνάμεως καὶ μάζης.

Θὰ ἀπετέλει χαρὰν καὶ συγχρόνως ἀνταμοιβὴν τῆς ἐργασίας μου ἐὰν τὸ βιβλίον εἰς τὴν μορφήν του αὐτὴν εὕρισκε εἰς τοὺς σπουδαστὰς καὶ τοὺς τεχνικοὺς τῆς πράξεως τὴν ἀπήχησιν, ἡ ἐλπὶς τῆς ὁποίας μοῦ ἔδωσε τὴν δύναμιν νὰ ἀναλάβω αὐτὴν τὴν προσπάθειαν.

Εὐχαριστῶ θερμῶς ὅλους ὅσους μὲ ἐβοήθησαν εἰς τὴν πραγματοποίησίν της καὶ ἰδιαιτέρως τὴν Ἐπιτροπὴν Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου, ἡ ὁποία μὲ τὴν ἔνθερμον συμπαράστασίν της καὶ τὰς πολυτίμους συμβουλὰς καὶ ὑποδείξεις της συνέβαλε ἀποφασιστικῶς εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ.

Ὁ Συγγραφεύς

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ Η ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΗΣ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

Βασικαὶ ἔννοιαι τῆς Στατικῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

Συνεπίπεδοι συντρέχουσαι δυνάμεις. Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

Συνεπίπεδοι συντρέχουσαι δυνάμεις. Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς μεθόδου τῶν προβολῶν (ἀναλυτική).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

Συνεπίπεδοι τυχοῦσαι δυνάμεις. Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

Συνεπίπεδοι τυχοῦσαι δυνάμεις. Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς μεθόδου τῶν προβολῶν (ἀναλυτική).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

Κέντρον βάρους. Εὐστάθεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

'Απλαῖ δοκοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

Ἐπίπεδα δικτυώματα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ Μηχανικὴ καὶ ἡ διαίρεσίς της.

Μηχανικὴ ὀνομάζεται τὸ τμῆμα τῆς Φυσικῆς, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὴν κίνησιν καὶ τὴν ἰσορροπίαν τῶν σωμάτων.

Ἀναλόγως πρὸς τὴν κατάστασιν τῶν σωμάτων διαιρεῖται εἰς τρία μέρη:

1. Μηχανικὴν τῶν στερεῶν.

2. Μηχανικὴν τῶν ὑγρῶν.

3. Μηχανικὴν τῶν ἀερίων.

Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ θὰ ἀσχοληθοῦμε εἰδικῶς μὲ τὰ στερεὰ μόνον σώματα, τὰ ὁποῖα περισσότερον ἀπὸ τὰ ἄλλα χρησιμοποιεῖ ὁ τεχνικὸς ἐπάνω εἰς τὴν γῆν.

Συνεπῶς μᾶς ἐνδιαφέρει μόνον ἡ μηχανικὴ τῶν στερεῶν, ἡ ὁποία διαιρεῖται ἐπίσης εἰς τρία μέρη:

1) Τὴν Στατικήν. 2) Τὴν Κινηματικὴν καὶ 3) τὴν Δυναμικήν.

Ἡ *Στατικὴ* ἐξετάζει τὰ *σώματα ποὺ εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν*. Ἕνα σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, ὅταν ὅλαι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτοῦ, ἐξουδετερώνουν ἡ μία τὴν ἄλλην, ὁπότε λέγομε ὅτι αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦν. Τότε ἡ συνολικὴ δρᾶσις τῶν δυνάμεων εἶναι μηδὲν καὶ ὡς ἐκ τούτου εἴτε τὸ σῶμα ἠρεμεῖ, εἴτε ὅλα του τὰ σημεῖα κινοῦνται εὐθυγράμμως μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα. Διὰ νὰ εὕρωμε ὅμως τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα πολλῶν δυνάμεων πρέπει νὰ μάθωμε νὰ τὰς συνθέτωμε καὶ νὰ τὰς ἀναλύωμε. Ἀκριβέστερον ἑπομένως εἶναι νὰ εἰποῦμε ὅτι ἡ Στατικὴ ἐξετάζει *τὴν ἰσορροπίαν τῶν δυνάμεων μαζὶ μὲ τὴν σύνθεσιν καὶ τὴν ἀνάλυσίν των.*

Οἱ νόμοι καὶ οἱ κανόνες τῆς Στατικῆς ἐφαρμόζονται εἰς τὰς διαφόρους δομικὰς καὶ μηχανολογικὰς κατασκευάς, ὅπου εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζωμε τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπ' αὐτῶν. Παραλλήλως εἰς μίαν κατασκευὴν δομικὴν ἢ μηχανολογικὴν πρέπει νὰ καθορίσωμε τὰς διαστάσεις της κατόπιν ὑπολογισμοῦ. Οἱ ὑπολογισμοὶ αὐτοὶ τῶν διαστάσεων πρέπει νὰ γίνωνται κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε νὰ εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ κατασκευὴ κάτω ἀπὸ τὴν ἐπίδρασι τῶν δυνάμεων, ποὺ θὰ τὴν ἐπιβαρύνουν, δὲν ὑπάρχει κίνδυνος νὰ θραυσθῇ ἢ νὰ ὑποστῇ ἀπαραδέκτους παραμορφώσεις. Συγχρόνως ὅμως δὲν ἐπιτρέπεται νὰ γίνεται σπατάλη ὑλικοῦ, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐξευρίσκεται κάθε φορὰν ἡ πλέον οἰκονομικὴ διατομὴ τῆς κατασκευῆς.

Εἰς τὴν Στατικήν, ὅπως θὰ ἐξετάσωμε εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον, δεχόμεθα, διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε τὰ προβλήματά της, ὅτι τὰ σώματα δὲν παραμορφώνονται. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως κάθε σῶμα ὑφίσταται παραμορφώσεις ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων. Εἶναι ἀπαραίτητον ὅπως αἱ παραμορφώσεις αὐταὶ (μήκυνσις, βράχυνσις, κάμψις, στροφὴ κλπ.) διὰ κάθε ὑλικὸν παραμείνουν τόσον μικραί, ὥστε νὰ μὴ παραβλάπτουν τὴν χρησιμότητα τῆς κατασκευῆς. Ἑπομένως πρέπει νὰ γίνουν ὑπολογισμοὶ καὶ διὰ τὰς παραμορφώσεις αὐτάς.

Εἰδικῶς μὲ τὸ θέμα αὐτὸ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν διαστάσεων καὶ τῶν παραμορφώσεων τῶν κατασκευῶν ἀσχολεῖται ἰδιαίτερον τμῆμα τῆς Μηχανικῆς, ἡ «Ἀντοχὴ τῶν Ὑλικῶν».

Τὸ δεύτερον τμῆμα τῆς μηχανικῆς τῶν στερεῶν εἶναι, ὅπως εἴπαμε, ἡ ***Κινηματική***, ἡ ὁποία ἐρευνᾷ τὴν κίνησιν, χωρὶς νὰ ἐξετάζῃ τὰς δυνάμεις ποὺ τὴν προκαλοῦν.

Ἡ Δυναμικὴ τέλος ἐρευνᾷ τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος μαζὶ μὲ τὰ αἴτια, δηλαδὴ τὰς δυνάμεις ποὺ τὴν προκαλοῦν. Μεταβολὴ τῆς ταχύτητος σημαίνει ἀλλαγὴν εἴτε τοῦ μεγέθους της, εἴτε τῆς διευθύνσεώς της.

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ

1·1 Γενικά.

Εἴπαμε προηγουμένως ὅτι ἡ Στατικὴ μελετᾶ τὴν σύνθεσιν, τὴν ἀνάλυσιν καὶ τὴν ἰσορροπίαν τῶν δυνάμεων. Μὲ τὴν μελέτην δὲ αὐτὴν ἠμπορεῖ ἡ Στατικὴ νὰ ὁρίσῃ ποῖαι εἶναι αἱ συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ πληροῦνται, ὥστε αἱ δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν εἰς ἕνα σῶμα, νὰ μὴ τὸ θέτουν εἰς κίνησιν ἢ νὰ μὴ μεταβάλλουν τὴν ταχύτητά του. Εἰδικώτερον δὲ ἡ ***Στατικὴ τῶν Στερεῶν*** ἐρευνᾷ τὰς συνθήκας ἰσορροπίας τοῦ ἀπολύτως στερεοῦ σώματος.

Τί εἶναι ὅμως τὸ ἀπολύτως στερεὸν σῶμα; ***Ἀπολύτως στερεὸν σῶμα καλεῖται κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον δὲν παραμορφώνεται ὅσαι καὶ ἂν εἶναι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπάνω του.*** Τέτοιου εἴδους ὅμως σώματα εἶναι ἰδεατά, δὲν ὑπάρχουν δηλαδὴ εἰς τὴν πραγματικότητα, διότι ὅλα τὰ σώματα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων παραμορφώνονται, ἄλλα περισσότερον καὶ ἄλλα ὀλιγώτερον. Ἡ παραδοχὴ ὅμως αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ δεχθοῦμε ὅτι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τῶν σωμάτων αὐτῶν, ποὺ δὲν παραμορφώνονται, διατηροῦν ἀμετάβλητα τὰ χαρακτηριστικά των. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἁπλοποιεῖται πολὺ ἡ ἐξέτασις τῶν προβλημάτων τῆς Στατικῆς.

Εἰς τὰ σχέδια τῶν ἑπομένων κεφαλαίων δὲν δεικνύομε πάντοτε τὰ στερεὰ σώματα, ἐπάνω εἰς τὰ ὁποῖα δροῦν αἱ δυνάμεις. Εἶναι ὅμως αὐτονόητον ὅτι παντοῦ, ὅπου ὑπάρχουν καὶ σχεδιάζονται δυνάμεις, ὑπάρχει πάντοτε ἕνα σῶμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις αὐταί.

1·2 Δύναμις.

Διὰ νὰ μεταβάλῃ ἕνα σῶμα τὴν κίνησίν του ἢ νὰ παραμορφωθῇ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ κάποια αἰτία. Τὴν αἰτίαν αὐτήν, τὴν ὁποίαν δὲν τὴν βλέπομε ἀλλὰ τὴν ἀντιλαμβανόμεθα ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματά της, π.χ. ὡς ἔντασιν τῶν μυῶν μας κατὰ τὴν ἀνύψωσιν ἑνὸς σώματος, κατὰ τὴν ὤθησιν ἑνὸς ὀχήματος ἢ κατὰ τὴν ἔντασιν ἑνὸς ἐλατηρίου· τὴν ὀνομάζομε *δύναμιν*.

Ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἡ γῆ ἕλκει ἕνα σῶμα καλεῖται *βάρος τοῦ σώματος*.

Μονὰς μετρήσεως τῆς δυνάμεως.

Διὰ νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ μετροῦμε τὰς διαφόρους δυνάμεις καὶ νὰ δίδωμε τὸ ἀριθμητικόν των μέγεθος, πρέπει νὰ ἔχωμε ἐκ τῶν προτέρων καθορίσει τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν δυνάμεων.

Ὡς μονὰς δυνάμεως ἔχει ὁρισθῇ τὸ κιλοπὸν (ἢ χιλιοπόν), τὸ ὁποῖον συμβολίζεται μὲ τὰ γράμματα kp.

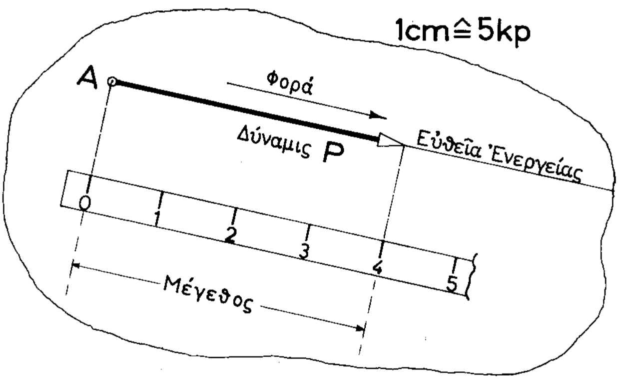
Τὸ κιλοπὸν εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος ποὺ ἔχει ἕνα λίτρον ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 4^0 C, εἰς μέσον γεωγραφικὸν πλάτος καὶ εἰς τὸ ὑψόμετρον τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Εἰς τὴν πρᾶξιν χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης καὶ ἕνα πολλαπλάσιον τῆς μονάδος αὐτῆς τὸ μεγαπὸν $= 1{,}0$ Mp $= 1\,000{,}0$ kp.

Χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα τῆς δυνάμεως. Γραφικὸς Καθορισμός.

Δυνάμεθα νὰ καθορίσωμε ἐπακριβῶς μίαν δύναμιν, ὅταν γνωρίζωμε:

1) Τὸ μέγεθός της, π.χ. 10 kp.
2) Τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας της.
3) Τὴν φοράν της καὶ
4) τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της, π.χ. Α (σχ. 1·2 α).

Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν παριστάνομε τὴν δύναμιν γραφικῶς μὲ ἕνα ἄνυσμα. Τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος παριστᾶ τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα. Π.χ. ὅταν 1 cm παριστᾶ 5 kp (1 cm $\triangleq$ 5 kp) καὶ μετρήσωμε ἄνυσμα μήκους 4 cm, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ δύναμις ποὺ παριστάνεται ἔχει μέγεθος 20 kp.



Σχ. 1·2α.

Ἡ *αἰχμὴ* (βέλος) τοῦ ἀνύσματος παριστᾶ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως.

Ἡ *ἀρχὴ* ἢ *τὸ πέρας* τῆς δυνάμεως εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της.

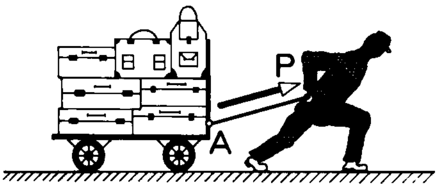
Παράδειγμα.

Ἕνα βαγόνι πλῆρες ἀποσκευῶν ἕλκεται ἢ ὠθεῖται ἀπὸ τὸ σημεῖον A μέσω μιᾶς χαλυβδίνης ράβδου, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸ A (σχ. 1·2β καὶ 1·2γ).

Ἀντιλαμβανόμεθα εὐκόλως ὅτι:

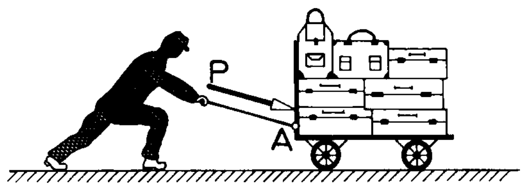
Τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως P, ποὺ χρειάζεται διὰ νὰ μετακινηθῆ τὸ βαγόνι πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἢ πρὸς τὰ ὀπίσω, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ φορτίον του.

Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς δυνάμεως συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῆς ράβδου.



Σχ. 1 · 2 β.

Ἡ φορά της ὁρίζεται ἀπὸ τὸ βέλος, τὸ ὁποῖον, ἐὰν μὲν ἕλκωμε τὸ βαγόνι, διευθύνεται πρὸς τὸ μέρος μας (σχ. 1 · 2 β), ἐὰν δὲ



Σχ. 1·2 γ.

ὠθοῦμε τὸ βαγόνι, ἔχει τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν (σχ. 1 · 2 γ). Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως εἶναι τὸ σημεῖον Α, ὅπου στερεώνεται ἡ ράβδος ἐπάνω εἰς τὸ βαγόνι.

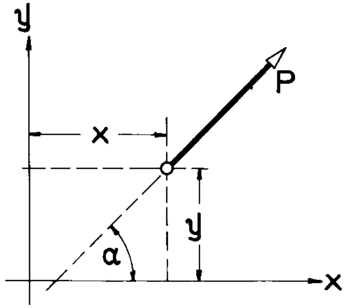
Ἀναλυτικὸς καθορισμός.

Δυνάμεθα νὰ καθορίσωμε πλήρως μίαν δύναμιν εἰς μίαν οἱανδήποτε θέσιν ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον, ὅταν ἔχωμε τὰ ἑξῆς τρία ἀριθμητικά της στοιχεῖα (σχ. 1 · 2 δ):

1) Τὸ *μέγεθος* (π.χ. 10 kp).

2) Τὴν *διεύθυνσιν*, ἡ ὁποία ὁρίζεται διὰ τῆς γωνίας α ὡς πρὸς τὸν ἄξονα x τυχόντος συστήματος συντεταγμένων. Ἡ γωνία αὐτὴ προκύπτει, ὅταν ὁ θετικὸς ἄξων x στραφῇ ἀντιθέτως πρὸς τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, μέχρις ὅτου συμπέσῃ μὲ τὴν δύναμιν (π.χ. $\alpha = 40^0$).

3) Τὴν *θέσιν*, λ.χ. τὰς συντεταγμένας x καὶ y τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της (π.χ. x = 18 cm, y = 15 cm).



Σχ. 1·2 δ.

Συνισταμένη καὶ συνιστῶσαι.

Μία δύναμις, ἡ ὁποία ἐπιφέρει εἰς ἕνα σῶμα τὰ ***ἴδια ἀποτελέσματα*** μὲ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐπιφέρουν συγχρόνως δύο ἢ περισσότεραι δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν ἐπάνω εἰς τὸ σῶμα αὐτό, καλεῖται ***συνισταμένη*** τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

Αἱ δυνάμεις, ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ὁποίων ἔχει τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα μὲ τὴν συνισταμένην, ὀνομάζονται ***συνιστῶσαι.***

Ὅταν ζητοῦμε νὰ εὕρωμε τὴν συνισταμένην δύο ἢ περισσοτέρων συνιστωσῶν, τότε λέγομε ὅτι κάνομε ***σύνθεσιν δυνάμεων.*** Ἀντιστρόφως, ὅταν ἀνευρίσκωμε τὰς συνιστώσας δυνάμεις μιᾶς συνισταμένης, λέγομε ὅτι κάνομε ***ἀνάλυσιν τῶν δυνάμεων.*** Ὥστε:

Σύνθεσις δυνάμεων καλεῖται ἡ εὕρεσις τῆς συνισταμένης των.

Ἀνάλυσις δυνάμεως καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν συνιστωσῶν της.

Τὴν συνισταμένην τὴν χαρακτηρίζομε συχνὰ μὲ τὸ κεφαλαῖον λατινικὸν γράμμα R.

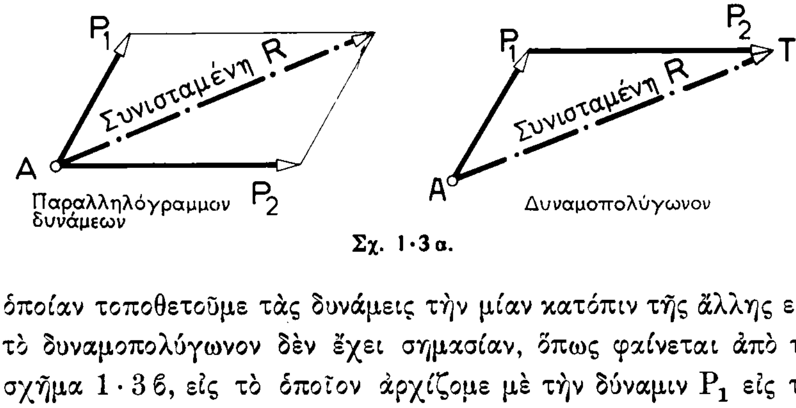
1·3 Ἀρχαὶ τῆς στατικῆς.

Παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων.

Ἐὰν λάβωμε δύο δυνάμεις P_1 καὶ P_2, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς, τὸ Α π.χ., τότε ἡ συνισταμένη των θὰ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς δυνάμεις (σχ. 1·3 α).

Εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα καταλήγομε ἐπίσης ὡς ἑξῆς:

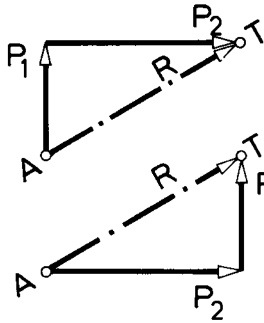
Λαμβάνομε τυχὸν σημεῖον Α καὶ φέρομε παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν P_1 καὶ ἀπὸ τὸ τέλος τῆς P_1 παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν P_2, τηροῦντες βεβαίως τὴν φορὰν τῶν δυνάμεων. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμε τὴν ἀρχὴν Α τῆς πρώτης δυνάμεως P_1 μὲ τὸ τέλος Τ τῆς τελευταίας δυνάμεως P_2, ἡ εὐθεῖα ΑΤ ἀποτελεῖ τὴν συνισταμένην R τῶν δύο δυνάμεων. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον προκύπτει καλεῖται δυναμοπολύγωνον (σχ. 1·3 α). Ἡ σειρὰ κατὰ τὴν



Σχ. 1·3 α.

ὁποίαν τοποθετοῦμε τὰς δυνάμεις τὴν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον δὲν ἔχει σημασίαν, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 1·3 β, εἰς τὸ ὁποῖον ἀρχίζομε μὲ τὴν δύναμιν P_1 εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τοποθετοῦμε εἰς τὸ τέλος της τὴν δύναμιν P_2 ἔτσι, ὥστε τὰ βέλη νὰ εἶναι τὸ ἕνα μετὰ τὸ ἄλλο. Θὰ εἴχαμε ἀκριβῶς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα, ἐὰν ἀρχίζαμε εἰς τὸ Α μὲ τὴν P_2 καὶ εἰς τὸ τέλος της ἐθέταμε τὴν P_1.

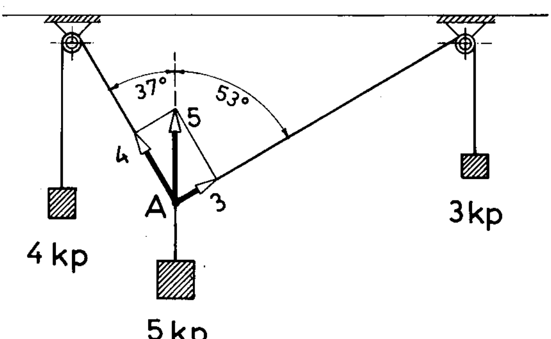
Δυνάμεθα πειραματικῶς νὰ ἀποδείξωμε τὴν ἀρχὴν τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων. Δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμε ὅτι ἡ ἀνάλυσις ἢ ἡ σύνθεσις δυνάμεων, τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦμε ἐπάνω εἰς τὸ χαρτί, ἀντιστοιχεῖ πράγματι εἰς φαινόμενα, εἰς γεγονότα.



Σχ. 1·3β.

Ἂς ἀναφέρωμε ἕνα παράδειγμα:

Τρία νήματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα προσδένονται τρία διαφορετικὰ σώματα, τὰ ἑνώνομε εἰς ἕνα κοινὸν κόμβον (σχ. 1·3γ).

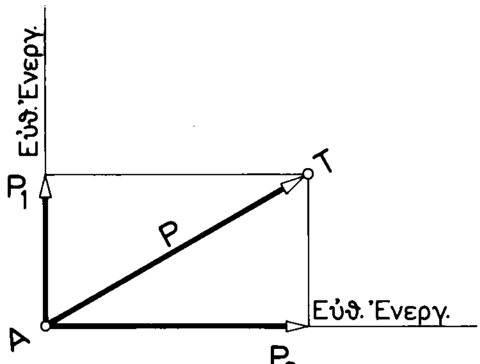


Σχ. 1·3γ.

Ἡ θέσις ἰσορροπίας Α, τὴν ὁποίαν θὰ πάρῃ μόνος του ὁ κόμβος, ὅταν τὸν ἀφήσωμε ἐλεύθερον, εἶναι ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν αἱ τρεῖς δυνάμεις σχηματίζουν παραλληλόγραμμον.

Προκειμένου νὰ ἀναλύσωμε μίαν δύναμιν εἰς δύο διδομένας διευθύνσεις, ἐνεργοῦμε κατὰ τρόπον ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.

Φέρομε δηλαδὴ ἀπὸ τὸ ἄκρον Α καὶ Τ τῆς δυνάμεως Ρ, ἡ ὁποία μᾶς δίδεται, παραλλήλους πρὸς τὰς διδομένας εὐθείας ἐνεργείας. Μὲ τὸν τρόπον δὲ αὐτὸν σχηματίζομε τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων καὶ συνεπῶς εὑρίσκομε τὰς ζητουμένας συνιστώσας P_1 καὶ P_2 (σχ. 1·3 δ).



Σχ. 1·3 δ.

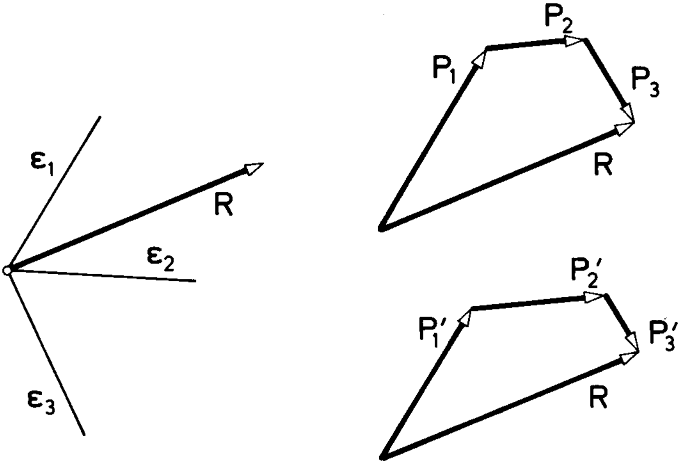
Ἡ ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς περισσοτέρας τῶν δύο συνιστωσῶν μὲ κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς εἶναι ἕνα πρόβλημα, ποὺ ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ ἀπείρους λύσεις.

Ζητεῖται π.χ. νὰ ἀναλυθῇ ἡ γνωστὴ δύναμις R εἰς τρεῖς συνιστώσας δυνάμεις, ἐνεργούσας ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ἐνεργείας ε_1 ε_2 καὶ ε_3.

Δύο ἐκ τῶν δυνατῶν λύσεων δίδονται εἰς τὸ σχῆμα 1·3 ε.

Τόσον αἱ δυνάμεις P_1, P_2 καὶ P_3, ὅσον καὶ αἱ P_1', P_2' καὶ P'_3 εἶναι συνιστῶσαι τῆς R κατὰ τὰς δοθείσας εὐθείας ἐνεργείας.

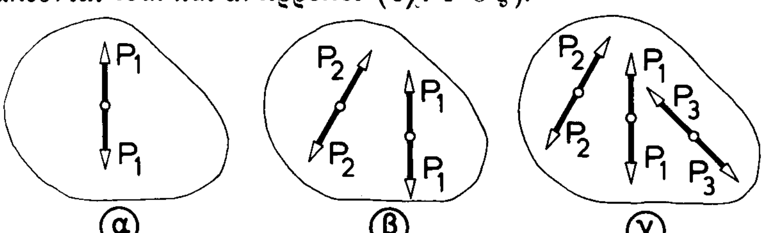
Ἡ ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς τρεῖς συνιστώσας, τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας δὲν τέμνονται εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον εἶναι δυνατή.



Σχ. 1·3 ε.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις δυνάμεων.

Δύο δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μὲν τὸ ἴδιον μέγεθος καὶ δροῦν ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας ἐνεργείας, ἀλλὰ ἔχουν ἀντίθετον διεύθυνσιν, καλοῦνται *ἴσαι καὶ ἀντίρροποι* (σχ. 1·3ζ).



α) Τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ. β) καὶ γ) Τὸ σύστημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσορροπῇ.

Σχ. 1·3ζ.

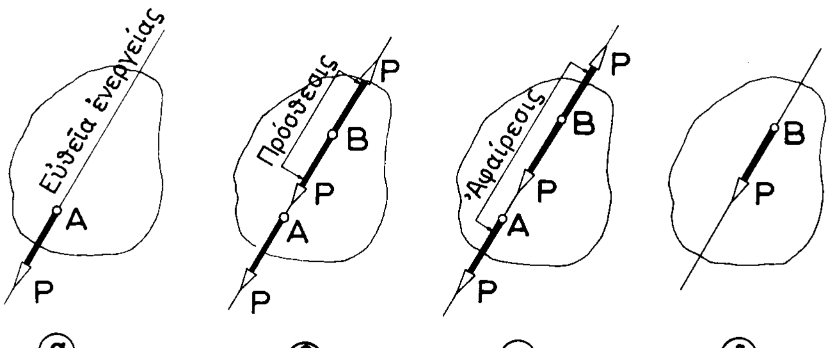
Τέτοιου εἴδους δυνάμεις ἠμποροῦν νὰ προστεθοῦν ἢ νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ ἕνα ἀπολύτως στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἰσορροπεῖ, χωρὶς νὰ μεταβάλλουν τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας του.

Μετάθεσις τῶν δυνάμεων ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐνεργείας των.

Εἰς ἕνα ἀπολύτως στερεὸν σῶμα καὶ μόνον εἰς αὐτὸ κάθε δύναμις ἠμπορεῖ νὰ μετακινηθῇ ἐλευθέρως ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας της χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἐπίδρασίς της ἐπάνω εἰς τὸ σῶμα.

Ἑπομένως τὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα προκαλεῖ μία δύναμις εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της.

Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ εἶναι συνέπεια τῆς προηγουμένης, ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχῆμα 1 · 3 η.



α) Ἀρχικὴ θέσις δυνάμεως.

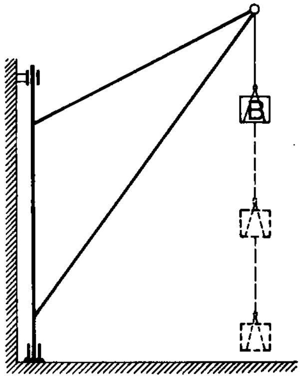
β) Πρόσθεσις δύο ἴσων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων.

γ) Ἀφαίρεσις δύο ἴσων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων.

δ) Ἡ δύναμις μετεκινήθη ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β.

Σχ. 1·3 η.

Ἠμποροῦμε νὰ ἀντιληφθοῦμε εὐκόλως πῶς γίνεται ἡ μετάθεσις μιᾶς δυνάμεως, ἐὰν τὴν ἐφαρμόσωμε εἰς ἕνα σῶμα μέσω ἑνὸς σχοινίου. Π.χ. προκειμένου νὰ ἀνυψώσωμε τὸ βάρος Β (σχ. 1 · 3 θ), ἡ δύναμις ποὺ καταβάλλομε παραμένει ἡ ἰδία ἀνεξαρτήτως ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ συρματοσχοίνου, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦμε.

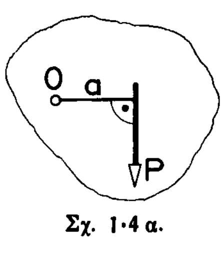


Σχ. 1·3 θ.

1·4 Στατικὴ ῥοπή.

Ἐὰν εἰς ἕνα στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ περιστρέφεται γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖον O, δράσῃ μία δύναμις P, ἡ ὁποία δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ O, τότε τὸ σῶμα θὰ στραφῇ (σχ. 1 · 4 α). Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ μέγεθος τῆς στροφῆς αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως P καθὼς καὶ ἀπὸ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν α μεταξὺ τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ σημείου O.

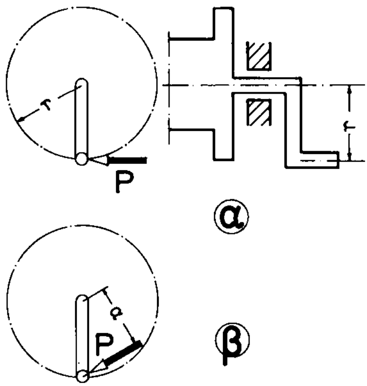
Ἡ ἀπόστασις αὐτὴ α, δηλαδὴ τὸ μῆκος τῆς καθέτου ἀπὸ τὸ O ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς P, καλεῖται *μοχλοβραχίων* τῆς δυνάμεως. Τὸ μέγεθος $M = P \cdot \alpha$ καλεῖται *στατικὴ ῥοπή*.



Σχ. 1·4 α.

Τὴν ἔννοιαν « στατικὴ ροπὴ » εἶναι δυνατὸν νὰ τὴν ἀντιληφθοῦμε εὐκόλως εἰς τὸ βαροῦλκον. Ἐὰν περιστρέψωμε τὸ βαροῦλκον ἔτσι, ὥστε ἡ δύναμις P νὰ ἐφάπτεται συνεχῶς εἰς τὴν περίμετρον τοῦ βαρούλκου, τότε ἡ ροπὴ εἶναι ἴση μὲ $M = P \cdot r$.

Ἐὰν ἡ δύναμις P ἀσκῆται κατὰ τυχοῦσαν διεύθυνσιν, τότε ἡ ροπὴ εἶναι ὁπωσδήποτε μικροτέρα τῆς προηγουμένης καὶ ἴση μὲ $M = P \cdot \alpha$ (σχ. 1·4β).



Σχ. 1·4 β.

Εἰς πολλὰς ἐφαρμογὰς τῆς καθημερινῆς ζωῆς χρησιμοποιοῦμε τὸ δεδομένον ὅτι ἡ ροπὴ ἠμπορεῖ νὰ αὐξηθῆ μόνον ἐὰν μεγαλώση εἴτε ἡ δύναμις, εἴτε ὁ μοχλοβραχίων.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ δύναμις τοῦ ἀνθρώπου εἶναι περιωρισμένη, αὐξάνομε κατ' ἀνάγκην τὸν μοχλοβραχίονα, ὅπως π.χ. εἰς τὴν μανιβέλλαν, τὸ γερμανικὸν κλειδί, τὴν ἀρίδα τοῦ ξυλουργοῦ κλπ.

1. *Ὁρισμός. Ἡ στατικὴ ροπὴ ἢ ἁπλῶς ἡ ροπὴ μιᾶς δυνάμεως P ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον O ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν μοχλοβραχίονά της.*

Αἱ συνήθεις μονάδες τῆς ροπῆς εἶναι τὸ kpm (χιλιοπόμετρον) ἢ διὰ μεγαλύτερα μεγέθη τὸ Mpm (μεγαπόμετρον).

Τὸ μέγεθος τῆς στατικῆς ροπῆς δυνάμεως P ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν δύναμιν ὡς βάσιν καὶ τὸ σημεῖον O ὡς κορυφὴν (σχ. 1·4γ). Πράγματι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $(OAB) = E = P\frac{\alpha}{2}$, ἄρα:

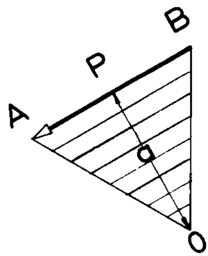
$$M = 2E.$$

Εἰς τὸ σχῆμα 1·4γ ἔστω ὅτι ἡ δύναμις $P = 100\,\text{kp}$ καὶ ὁ μοχλοβραχίων $\alpha = 0{,}6\,\text{m}$. Τότε ἡ στατικὴ ροπή:

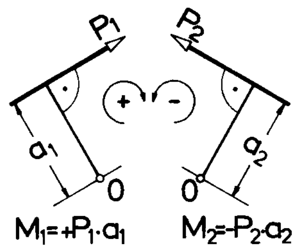
$$M = P\alpha = 100\,\text{kp} \times 0{,}6\,\text{m} = 60\,\text{kpm}.$$

Ὅταν ἡ δύναμις P στρέφῃ τὸ σῶμα κατὰ τὴν φορὰν περιστροφῆς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, τότε λέγομε ὅτι ἡ ροπὴ ἔχει δεξιόστροφον φορὰν καὶ τὴν καθορίζομε ὡς *θετικήν* (+).

Ὅταν ἀντιστρόφως ἡ δύναμις P στρέφῃ τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἀντίθετον ἔννοιαν, τότε ἡ ροπὴ εἶναι ἀριστερόστροφος καὶ τὴν καθορίζομε ὡς ἀρνητικὴν (—) (σχ. 1·4δ).



Σχ. 1·4γ.



Σχ. 1·4δ.

2. *Ἀρχὴ τῶν ροπῶν.*

Ὅπως ὑπάρχει συνισταμένη τῶν δυνάμεων, ἔτσι ὑπάρχει καὶ συνισταμένη τῶν ροπῶν των. Ἔστω ὅτι ἔχομε τρεῖς ροπὰς M_{P1}, M_{P2} καὶ M_{P3} τῶν δυνάμεων P_1, P_2 καὶ P_3 ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον.

Ἡ ροπὴ M_R τῆς συνισταμένης R τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν της P_1, P_2 καὶ P_3. Δηλαδή:

$$M_R = M_{P1} + M_{P2} + M_{P3}.$$

Ἂς ἀποδείξωμε τώρα τὴν ὀρθότητα αὐτῆς τῆς προτάσεως. Ἂς λάβωμε τὴν περίπτωσιν δύο δυνάμεων P_1 καὶ P_2 μὲ συνισταμένην R καὶ ἄς ἀποδείξωμε ὅτι ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον O, ποὺ ἐκλέγομε τυχαίως, ἔχομε $M_R = M_{P1} + M_{P2}$.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα 1·4ε προκύπτει ὅτι:

$M_{P1} = 2 \times$ ἐμβαδὸν $OAB = b\,\alpha_1$.

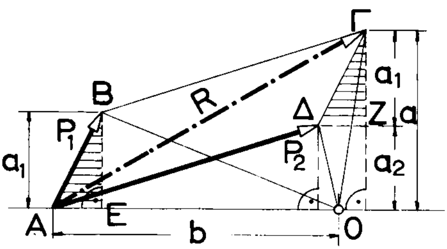
$M_{P2} = 2 \times$ ἐμβαδὸν $OA\Delta = b\,\alpha_2$.

$M_R = 2 \times$ ἐμβαδὸν $OA\Gamma = b\,\alpha$.

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ τὰς διαγραμμίσεις εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ AB καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, δεδομένου ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

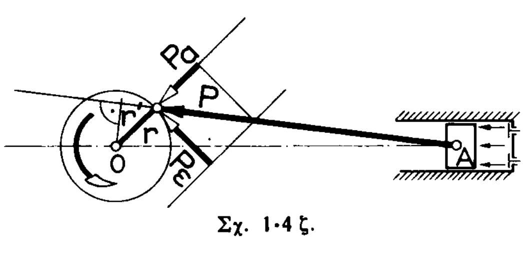
Ἄρα: $BE = \Gamma Z$ καὶ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$· ἑπομένως:

$$M_{P\,1} + M_{P\,2} = b\alpha_1 + b\alpha_2 = b\,(\alpha_1 + \alpha_2) = b\alpha = M_R\,.$$



Σχ. 1·4ε.

Ἂς ἐξετάσωμε τώρα καὶ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀρχῆς αὐτῆς εἰς ἕνα στροφαλοφόρον ἄξονα μηχανῆς ἐσωτερικῆς καύσεως (σχ. 1·4ζ).



Σχ. 1·4ζ.

Αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι παράγονται ἀπὸ τὴν ἔκρηξιν τοῦ καυσίμου εἰς τὸν κύλινδρον τῆς μηχανῆς, ὠθοῦν τὸ ἔμβολον A.

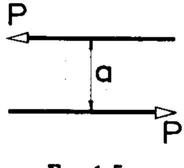
Ἡ εὐθύγραμμος ὅμως αὐτὴ ὤθησις μὲ τὸν διωστῆρα καὶ τὸν στροφαλοφόρον ἄξονα μετατρέπεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν. Ἡ ροπή, ἡ ὁποία δρᾷ ἐπὶ τοῦ στροφαλοφόρου ἄξονος Ο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν δύναμιν P, ποὺ μεταβιβάζεται μὲ τὸν διωστῆρα, καθὼς καὶ ἀπὸ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν r′ τῆς εὐθείας ἐνεργείας της ἀπὸ τοῦ ἄξονος Ο.

$$M = P r'.$$

Ἐὰν ἀναλύσωμε τὴν P εἰς δύο συνιστώσας, μίαν P_ε κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης καὶ μίαν P_α κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος, ἡ ροπὴ θὰ ἰσοῦται μὲ $M = P r' = P_\varepsilon \, r$, διότι ἡ P_ε, εἶναι ὡς ἐφαπτομένη πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα r, ἐνῷ ἡ P_α δὲν προκαλεῖ ροπήν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας της διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

1·5 Ζεῦγος δυνάμεων.

Δύο ἴσαι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς παράλληλοι δυνάμεις ἀποτελοῦν *ζεῦγος δυνάμεων*. Ἡ ἀπόστασις α μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων τοῦ ζεύγους καλεῖται *μοχλοβραχίων* (σχ. 1·5α).



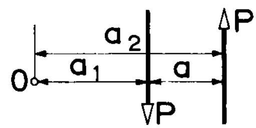
Σχ. 1·5α.

Ἕνα ζεῦγος δυνάμεων ἔχει συνισταμένην μηδὲν καὶ προκαλεῖ μόνον μίαν στατικὴν ροπήν. Ἡ ροπὴ αὐτὴ ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς δυνάμεως ἐπὶ τὴν μεταξύ των ἀπόστασιν α, εἶναι δὲ ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου στροφῆς Ο. Πράγματι, ἂς ὑπολογίσωμε τὴν ροπὴν τοῦ ζεύγους ὡς πρὸς ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον Ο (σχ. 1·5β). Ὁ μοχλοβραχίων τῆς μιᾶς δυνάμεως P τοῦ ζεύγους εἶναι α_1 καὶ τῆς ἄλλης α_2.

Συνεπῶς ἔχομε $M = P\alpha_1 - P\alpha_2 = -P(\alpha_2 - \alpha_1) = -P\alpha$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὰ χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα τοῦ ζεύγους εἶναι:

α) *Τὸ μέγεθος*, τὸ ὁποῖον, ἀνεξαρτήτως τοῦ ποία εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου στροφῆς, εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς δυνάμεως P ἐπὶ τὸν μοχλοβραχίονα τοῦ ζεύγους α.



Σχ. 1·5 β.

β) *Τὸ πρόσημον*, δηλαδὴ τὸ σημεῖον μὲ τὸ ὁποῖον δηλοῦμε τὴν κατεύθυνσιν τῆς στροφῆς. Διὰ τὸ δεξιόστροφον ζεῦγος τὸ πρόσημον εἶναι θετικόν (+), διὰ τὸ ἀριστερόστροφον ἀρνητικόν (—).

Τὴν φορὰν τοῦ ζεύγους εὑρίσκομε εὐκόλως. Ἂν π.χ. φαντασθοῦμε τὸ σημεῖον στροφῆς τοποθετημένον ἐπάνω εἰς τὴν μίαν δύναμιν, τότε ἡ φορὰ περιστροφῆς τῆς ἄλλης δυνάμεως μᾶς δίδει τὴν φορὰν περιστροφῆς τοῦ ζεύγους.

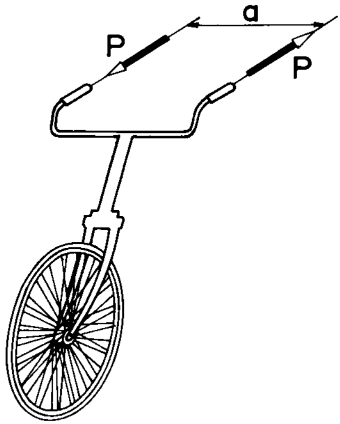
Τί εἶναι πράγματι ἕνα ζεῦγος δυνάμεων καὶ ποῖα εἶναι τὰ ἀποτελέσματά του, τὸ ἀντιλαμβανόμεθα εἰς τὸ τιμόνι ἑνὸς ποδηλάτου (σχ. 1·5γ).

Τὸ μέγεθος τοῦ ζεύγους εἶναι τόσο μεγαλύτερον, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ δύναμις P, μὲ τὴν ὁποίαν στρέφομε τὸ τιμόνι καὶ ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀπόστασις α μεταξὺ τῶν δύο χειρῶν μας.

Ἐάν, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸ σχῆμα μας, τὸ ζεῦγος εἶναι ἀριστερόστροφον, τὸ ποδήλατον θὰ στραφῇ πρὸς τὰ ἀριστερά, ἐὰν εἶναι δεξιόστροφον θὰ στραφῇ πρὸς τὰ δεξιά.

Ἀντικατάστασις ἑνὸς ζεύγους δυνάμεων δι' ἑνὸς ἄλλου.

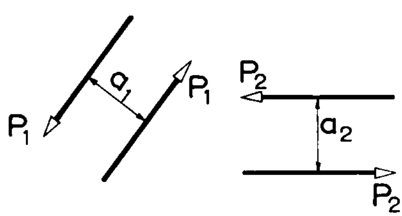
Ἕνα ζεῦγος δυνάμεων μὲ ροπὴν $P_1\ \alpha_1$ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ἀπὸ ἕνα ἄλλο ζεῦγος $P_2\ \alpha_2$, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ



Σχ. 1·5 γ.

ἴδιον ἐπίπεδον, ἐὰν αἱ ροπαί των ἔχουν τὸ ἴδιον μέγεθος καὶ πρόσημον (σχ. 1·5 δ), δηλαδή:

$$P_1\,\alpha_1 = P_2\,\alpha_2.$$



Σχ. 1·5 δ.

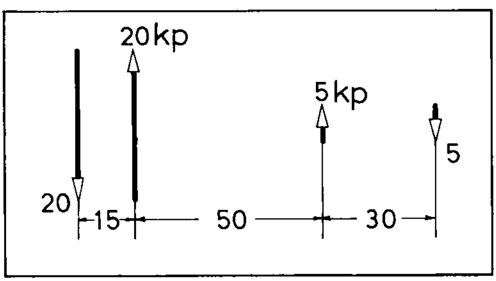
Ἐπίσης πολλὰ ζεύγη δυνάμεων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον ἠμποροῦν νὰ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ ἕνα. Κατὰ τὸν τρόπον δηλαδὴ αὐτὸν ἔχομε καὶ ἐδῶ *σύνθεσιν* πολλῶν ζευγῶν.

Σύνθεσις πολλῶν ζευγῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διὰ νὰ συνθέσωμε πολλὰ ζεύγη δυνάμεων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, προσθέτομε κατ' ἀρχὰς τὰ θετικὰ (δεξιόστροφα) ζεύγη καὶ κατόπιν τὰ ἀρνητικὰ (ἀριστερόστροφα). Ἔπειτα ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο τὸ μικρότερον. Ἡ διαφορὰ ποὺ προκύπτει εἴτε εἶναι θετικὴ εἴτε ἀρνητική, ἀναλόγως τοῦ ἂν τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ ἀθροίσματα εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς ἀθροίσεως ὀνομάζεται ἀλγεβρικὸς καὶ παρίσταται μὲ τὸ γράμμα **Σ**, δηλαδὴ $M = \Sigma P \alpha$.

Παράδειγμα.

Μᾶς ζητεῖται νὰ συνθέσωμε τὰ δύο ζεύγη ροπῶν, τὰ ὁποῖα δροῦν εἰς τὸ σῶμα τοῦ σχήματος 1·5 ε.



Σχ. 1·5 ε.

Λύσις.

Ἐξ' ὅσων ἐμάθαμε τὸ ζητούμενον ζεῦγος ροπῶν ἰσοῦται μέ:

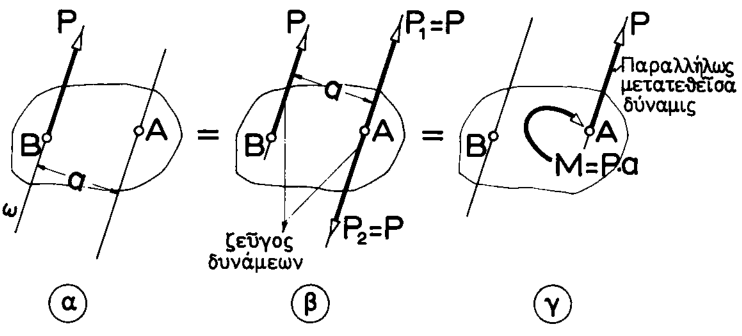
$$M = +5 \times 30 - 20 \times 15 = -150 \text{ kpcm}.$$

Ἐπομένως τὸ ζεῦγος ποὺ προέκυψε εἶναι ἀριστερόστροφον μὲ μέγεθος 150 kpcm, ποὺ σημαίνει δύο ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις, π.χ. 10 kp μὲ ἀπόστασιν μεταξύ των 15 cm ἢ 15 kp μὲ μοχλοβραχίονα 10 cm ἢ 30 kp μὲ μοχλοβραχίονα 5 cm κλπ. Τὸ ζεῦγος αὐτὸ δυνάμεων ἠμπορεῖ νὰ ἐνεργῇ εἰς οἱανδήποτε θέσιν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος.

Μετάθεσις τῶν δυνάμεων παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας των.

Εἰς τὴν παράγραφον 1 · 3 εἴδομεν, ὅτι μία δύναμις ἠμπορεῖ νὰ μετακινηθῇ κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ἐνεργείας της ε, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἐπίδρασίς της ἐπάνω εἰς τὸ στερεὸν σῶμα. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιον, ὅταν μετακινηθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας της.

Εἰς τὸ σχῆμα 1 · 5 ζ (α) δίδεται ἡ δύναμις Ρ καὶ ζητοῦμε νὰ μετακινηθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας της εἰς τὸ σημεῖον Α, εἰς ἀπόστασιν α ἀπ' αὐτῆς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἐπίδρασίς της.



Σχ. 1 · 5 ζ.

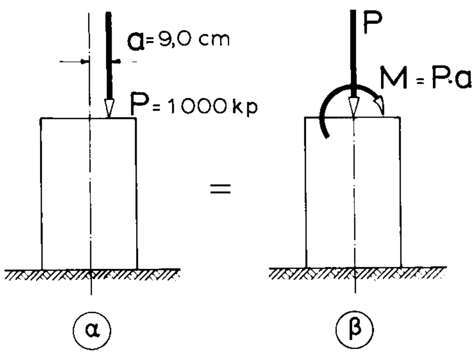
Εἰς τὸ σημεῖον Α ἠμποροῦμε νὰ τοποθετήσωμε δύο ἴσας καὶ ἀντιρρόπους δυνάμεις $P_1 = P_2 = P$ μὲ εὐθεῖαν ἐνεργείας παράλληλον πρὸς τὴν ε, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ τίποτε εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων [σχ. 1 · 5 ζ (β)].

Αἱ τρεῖς δυνάμεις Ρ, P_1, P_2 ἔχουν τὴν ἰδίαν ἐπίδρασιν, ποὺ εἶχε μόνη ἡ ἀρχικὴ δύναμις Ρ. Αἱ δύο ἀπὸ αὐτάς, ἡ Ρ καὶ ἡ P_2, ἀποτελοῦν δεξιόστροφον ζεῦγος δυνάμεων μὲ μέγεθος $M = +P\alpha$, ἐνῶ ἡ $P_1 = P$ εἶναι ἡ μετατεθεῖσα παραλλήλως δύναμις. Ἐπειδή, ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν παράγραφον 1 · 5, ἡ ἐπίδρασις τοῦ ζεύγους εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου στροφῆς, τὸ χαρακτηρίζομε δι' ἑνὸς τόξου, τοῦ ὁποίου τὸ βέλος μᾶς παρέχει τὴν φορὰν τοῦ ζεύγους [σχ. 1·5ζ (γ)].

Ὥστε εἶναι δυνατὸν νὰ μετακινήσωμε μίαν δύναμιν P παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας της εἰς ἀπόστασιν α, ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ ἐπίδρασίς της πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν δύναμιν P, ποὺ μετεκινήθη, μίαν ῥοπὴν μὲ μέγεθος $M = P\alpha$.

Παράδειγμα.

Εἰς τὸ ὑποστύλωμα τοῦ σχήματος 1·5η (α) ἐνεργεῖ ἡ δύναμις $P = 1\,000$ kp εἰς ἀπόστασιν $\alpha = 9$ cm ἀπὸ τὸν ἄξονά του. Ζητεῖται νὰ μετακινηθῇ ἡ δύναμις P παραλλήλως πρὸς τὰ ἀριστερά, ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ τὸν ἄξονα τοῦ ὑποστυλώματος.



Σχ. 1·5 η.

Λύσις.

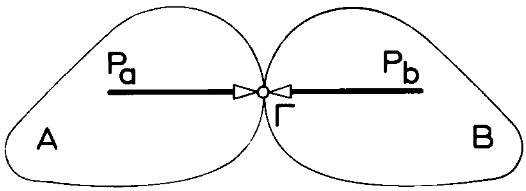
Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἐγκαρσία μετατόπισις, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ ἡ ἐπίδρασις τῆς ἀρχικῆς δυνάμεως P, πρέπει τὸ νέον σύστημα δυνάμεων [σχ. 1·5η(β)] νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν δύναμιν $P = 1\,000$ kp εἰς τὴν νέαν θέσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ μίαν ῥοπὴν θετικήν, διότι εἶναι δεξιόστροφος, ἴσην μέ:

$$M = +P \cdot \alpha = 1\,000\,\text{kp} \cdot 0{,}09\,\text{m} = +90\,\text{kpm}.$$

1·6 Δρᾶσις καὶ ἀντίδρασις. Στήριξις τῶν σωμάτων.

Δρᾶσις καὶ ἀντίδρασις.

Δύο σώματα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς ἠρεμίαν, ἐφάπτονται εἰς ἕνα σημεῖον των, τὸ Γ (σχ. 1·6 α). Ἔστω ὅτι τὸ



Σχ. 1·6 α.

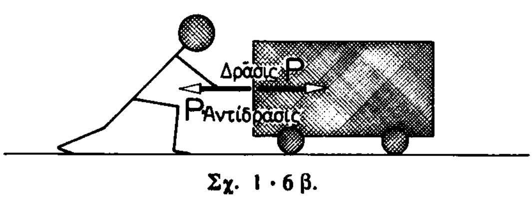
σῶμα Α ἀσκεῖ ἐπάνω εἰς τὸ σῶμα Β μίαν δύναμιν P_a. Τὰ δύο σώματα τότε μόνον παραμένουν εἰς ἠρεμίαν, ὅταν καὶ τὸ σῶμα Β ἀσκῇ ἐπάνω εἰς τὸ Α μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν P_b .

Ἡ P_a ὀνομάζεται *δρᾶσις*.

Ἡ P_b ὀνομάζεται *ἀντίδρασις*.

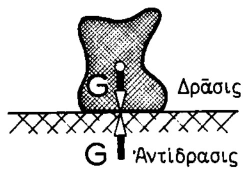
Παράδειγμα.

Ἕνας ἐργάτης ὠθεῖ ἕνα βαγόνι. Μὲ τοὺς μῦς καὶ τὸ σῶμα του ἀσκεῖ ἐπάνω εἰς τὸ βαγόνι μίαν δύναμιν (δρᾶσιν) Ρ. Τὸ βαγόνι ἀσκεῖ ἐπίσης ἐπάνω εἰς τὸν ἐργάτην μίαν δύναμιν (ἀντίδρασιν) ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς Ρ (σχ. 1·6 β).



Σχ. 1·6 β.

Ἕνα σῶμα βάρους G ἑδράζεται ἐπάνω εἰς τὸ δάπεδον. Τὸ σῶμα ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ δαπέδου δύναμιν (δρᾶσιν) G. Τὸ δάπεδον ἀντιδρᾶ ἐπὶ τοῦ σώματος μὲ μίαν δύναμιν (ἀντίδρασιν) ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς G (σχ. 1·6γ).



Σχ. 1·6 γ.

Συμπέρασμα: Ὅπου ὑπάρχει δρᾶσις ἐκεῖ ἐμφανίζεται συγχρόνως καὶ ἀντίδρασις.

Στήριξις τῶν σωμάτων.

Κάθε σῶμα ἀσκεῖ εἰς τὰς στηρίξεις του δυνάμεις, δηλαδὴ ἀσκεῖ δράσεις ἐπάνω εἰς τὰς στηρίξεις του.

Ἀλλὰ διὰ νὰ διατηρῆται ἡ ἰσορροπία τοῦ σώματος πρέπει, ὅπως εἴπαμε, νὰ ἀσκοῦν καὶ αἱ στηρίξεις ἐπάνω εἰς τὸ σῶμα δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, δηλαδὴ νὰ ἀσκοῦνται εἰς τὸ σῶμα αὐτὸ ***ἀντιδράσεις στηρίξεως***.

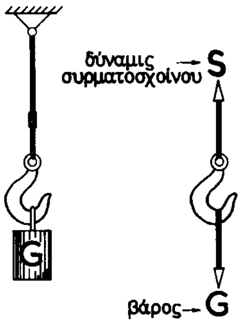
Ὥστε αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπάνω εἰς ἕνα στερεὸν σῶμα, δὲν ἐμφανίζονται ποτὲ μόναι των, ἀλλὰ πάντοτε μαζὶ μὲ τὰς ἀντιδράσεις εἰς τὰς θέσεις στηρίξεώς του.

Προκειμένου νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τῆς στατικῆς, ἀντικαθιστοῦμε τὰς στηρίξεις τῶν σωμάτων μὲ τὰς ἀντιδράσεις καὶ ἐξετάζομε τὸ σῶμα ὡς ἐὰν ἦτο ἐλεύθερον. Π.χ. εἰς τὸ ἄγκιστρον τοῦ σχήματος 1·6δ ἀντικαθιστοῦμε τὸ συρματόσχοινον μὲ μίαν δύναμιν S κατὰ τὸν ἄξονά του μὲ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὸ φορτίον ποὺ ἀνυψώνει μὲ τὸ βάρος του, δηλαδὴ τὴν δύναμιν G.

Μόνον κατ᾿ αὐτὸν τὸν τρόπον ἠμποροῦμε νὰ ἐξετάσωμε τὰς συνθήκας ἰσορροπίας τοῦ σώματος μὲ τὰς μεθόδους ποὺ θὰ μάθωμε ἀργότερα.

Ὅλαι αἱ δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν ἐπάνω εἰς τὸ σῶμα, δηλαδὴ τὰ φορτία καὶ αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως, πρέπει νὰ ἰσορροποῦν. Ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς στηρίξεως ἠμποροῦν νὰ ἀναπτυχθοῦν ἀντιδράσεις διαφόρου τύπου.

Τρία εἶναι τὰ εἴδη στηρίξεως τῶν σωμάτων: ἡ πάκτωσις, ἡ σταθερὰ στήριξις ἢ ἄρθρωσις καὶ ἡ κινητὴ στήριξις ἢ κύλισις. Θὰ τὰς ἐξετάσωμεν εἰς τὴν παράγραφον 7·3.



Σχ. 1·6 δ.

1·7 Μέθοδοι στατικοῦ ὑπολογισμοῦ.

Εἴπαμε ὅτι ἡ στατικὴ ἀσχολεῖται μὲ τὴν σύνθεσιν καὶ τὴν ἀνάλυσιν τῶν δυνάμεων.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς θέματα συνθέσεως καὶ ἀναλύσεως δυνάμεων, ὑπάρχουν δύο μέθοδοι: 1) Ἡ γραφικὴ καὶ 2) ἡ ἀναλυτική.

Μέχρι πρὸ 40 ἐτῶν ἡ προτίμησις ἐστρέφετο πρὸς τὰς γραφικὰς μεθόδους (Γραφοστατική).

Σήμερον ὅμως προτιμῶνται αἱ ἀναλυτικαὶ μέθοδοι, αἱ ὁποῖαι καὶ ἀκριβέστεροι εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ταχύτεραι. Πάντως καὶ διὰ τὰς δύο μεθόδους ἀπαιτοῦνται σχήματα καὶ γραφικαὶ παραστάσεις, διότι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον παρακολουθεῖται ἐναργέστερον καὶ ἐλέγχεται καλύτερον ἡ πορεία τῶν δυνάμεων καὶ ἔτσι ἀποφεύγονται τὰ λάθη.

Ἕνας σῶστὸς στατικὸς ὑπολογισμὸς πρέπει:

α) Νὰ εἶναι σαφὴς μὲ καθαρὸν καὶ ὀρθῶς ταξινομημένον περιεχόμενον.

β) Νὰ περιέχη τὰ ἴδια ἀριθμητικὰ στοιχεῖα (διαστάσεις κλπ), ποὺ ἀναγράφονται εἰς τὰ κατασκευαστικὰ σχέδια.

γ) Νὰ παρακολουθῆ τὴν πραγματικὴν πορείαν τῶν δυνάμεων.

Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ ἐπιβάλλει νὰ ὑπολογίζεται πρῶτον ἐκεῖνο τὸ τμῆμα τοῦ ἔργου, ποὺ θὰ κατασκευασθῆ τελευταῖον.

δ) Νὰ ἠμπορῆ κανεὶς νὰ τὸν ἐλέγξη εὐκόλως. Αὐτὸ εἶναι ἀπαραίτητον καὶ διὰ τὴν ἁρμοδίαν Κρατικὴν Ὑπηρεσίαν, ἡ ὁποία θὰ προβῆ εἰς τὸν ἔλεγχον, ἀλλὰ καὶ διὰ τὸν κατασκευαστήν, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ τὸν παρακολουθῆ εὐχερῶς.

Ἡ ἀκρίβεια τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις εἶναι ὑπεραρκετή, δηλαδὴ ἐπαρκοῦν τὰ τρία πρῶτα ψηφία ἑνὸς ἀποτελέσματος, π.χ. ἀντὶ 34 581 ἠμπορεῖ νὰ τεθῆ 34 600. Ὑπερβολικὴ ἀκρίβεια θὰ ἦτο ἄσκοπος, δεδομένου ὅτι αἱ φορτίσεις καὶ τὰ ἴδια βάρη, ποὺ λαμβάνονται εἰς τὸν ὑπολογισμόν, εἶναι τιμαὶ κατὰ προσέγγισιν ποὺ ἠμποροῦν νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὰς πραγματικὰς πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω κατὰ $10\,^0/_0$.

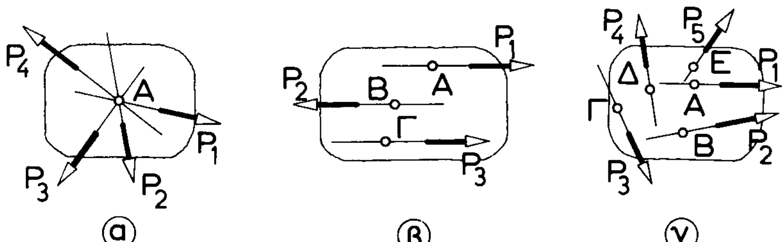
1·8 Τύποι συστημάτων δυνάμεων.

Πολλαὶ δυνάμεις, ὅταν δροῦν μαζί, ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δυνάμεων. Αἱ δυνάμεις ὅμως αὐταὶ εἶναι δυνατὸν ἄλλοτε μὲν νὰ εὑρίσκωνται ὅλαι ἐπάνω εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον καὶ ἄλλοτε εἰς διαφορετικὰ ἐπίπεδα.

Ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 1·8 α, αἱ δυνάμεις P_1, P_2, P_3 κλπ εὑρίσκονται ὅλαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Αὐτοῦ τοῦ εἴδους αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν μαζὶ ὡς σύστημα καὶ τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, λέγονται *συνεπίπεδοι*. Ἀντιθέτως ὅταν αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας των εὑρίσκωνται εἰς διαφορετικὰ ἐπίπεδα, τότε λέγονται δυνάμεις *εἰς τὸν χῶρον*.

Ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 1·8 α (α), αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας καὶ τῶν τεσσάρων δυνάμεων ὄχι μόνον εἶναι συνεπίπεδοι, ἀλλὰ καὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α. Αὐτοῦ τοῦ εἴδους αἱ συνεπίπεδοι δυνάμεις λέγονται *συντρέχουσαι*.

Εἰς τὸ σχῆμα 1·8 α (β) παρατηροῦμε ὅτι αἱ δυνάμεις P_1, P_2 καὶ P_3 εἶναι συνεπίπεδοι καὶ αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας των εἶναι παράλληλοι. Αὐτοῦ τοῦ εἴδους αἱ δυνάμεις λέγονται *παράλληλοι*. Τέλος ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 1·8 α (γ), αἱ δυνάμεις ἐνεργείας εἶναι δυνατὸν μὲν νὰ εἶναι συνεπίπεδοι, ἀλλὰ νὰ μὴ εἶναι



α) **Συντρέχουσαι δυνάμεις.** β) **Παράλληλοι δυνάμεις.** γ) **Τυχοῦσαι δυνάμεις.**

Σχ. 1·8 α.

οὔτε συντρέχουσαι οὔτε παράλληλοι, ἀλλὰ νὰ ἔχουν διαφόρους κατευθύνσεις. Αὐτοῦ τοῦ εἴδους αἱ συνεπίπεδοι δυνάμεις λέγονται *τυχοῦσαι*.

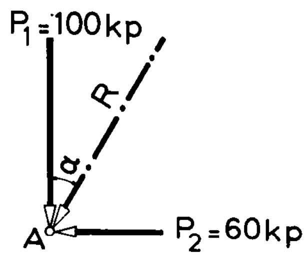
Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ θὰ ἐξετάσωμε μόνον συστήματα συνεπιπέδων δυνάμεων (ὄχι συστήματα εἰς τὸν χῶρον).

1·9 Ἀσκήσεις.

1) Δύο δυνάμεις $P_1 = 100$ kp καὶ $P_2 = 60$ kp ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς Α καὶ τέμνονται κατ' ὀρθὴν γωνίαν (σχ. 1·9 α). Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ συνισταμένη των R. β) Ἡ γωνία α, τὴν ὁποίαν σχημα-

τίζει ἡ R μὲ τὴν δύναμιν P_1.

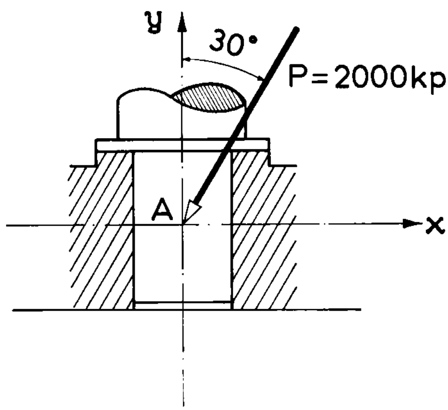
Ἀπάντησις: α) R = 116,7 kp. β) γωνία α = 31°



Σχ. 1·9 α.

2) Τὸ ἕδρανον τοῦ σχήματος 1·9β φορτίζεται μὲ τὴν δύναμιν P = 2 000 kp. Ποῖαι εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς P κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y;

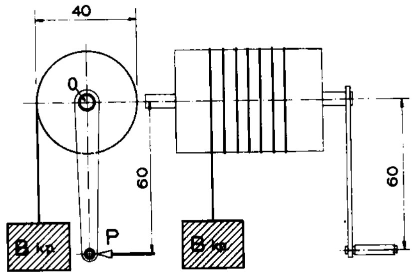
Ἀπάντησις: P_x = 1 000 kp. P_y = 1 732 kp



Σχ. 1·9 β.

3) Ἕνας ἐργάτης στρέφει τὸ βαροῦλκον τοῦ σχήματος 1·9γ μὲ δύναμιν P = 25 kp.

Ζητοῦνται α) Ἡ ροπή, ποὺ ἀσκεῖ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα O. β) Τὸ βάρος B εἰς kp, ποὺ ἠμπορεῖ νὰ σηκώσῃ ὁ ἐργάτης μὲ τὸ βαροῦλκον. γ) Πόση πρέπει νὰ γίνῃ ἡ χειρολαβὴ διὰ νὰ σηκώσῃ μὲ τὴν ἰδίαν δύναμιν βάρος $B = 100$ kp. δ) Τί βάρος ἠμπορεῖ νὰ σηκώσῃ μὲ τὸ βαροῦλκον ὁ ἐργάτης, ἐὰν ἡ χειρολαβὴ ἔχῃ μῆκος ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ βαρούλκου;



Σχ. 1·9 γ.

Λύσις.

α) $M = P\alpha = 25\,kp \cdot 60\,cm = 1\,500\,kp\,cm = 15\,kpm.$

β) $B \cdot 20 = P \cdot \alpha = 1\,500\,kpcm.$ $B = 75\,kp.$

γ) $P \cdot \alpha_1 = 25 \cdot \alpha_1 = 100 \cdot 20.$ $\alpha_1 = 80\,cm.$

δ) $25 \times 20 = B \cdot 20.$ $B = 25\,kp.$

4) Διὰ νὰ χαλαρωθῇ ὁ κοχλίας τοῦ τροχοῦ ἑνὸς αὐτοκινήτου, ἀπαιτεῖται ροπὴ 4,5 kpm. Τὸ μῆκος τοῦ κοχλιοστροφέως (κλειδιοῦ) ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ κοχλίου ὡς τὴν θέσιν ποὺ ἐφαρμόζεται τὸ χέρι εἶναι 30 cm. Ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ ἀσκήσῃ τὸ χέρι μας;

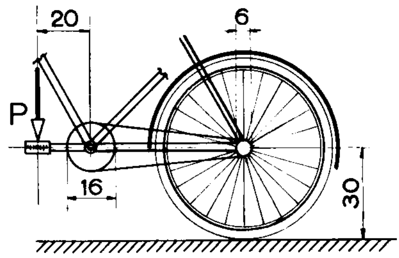
Ἀπάντησις: 15 kp

5) Εἰς τὴν ὁριζοντίαν θέσιν τοῦ πεδίλου (πεντὰλ) ἑνὸς ποδηλάτου ἀσκεῖται δύναμις $P = 20$ kp (σχ. 1·9 δ).

Ζητοῦνται α) Ἡ ροπὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ πεδίλου (πεντάλ). β) Ἡ δύναμις ποὺ μεταβιβάζει ἡ ἅλυσις. γ) Ἡ ροπὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ὀπισθίου τροχοῦ. δ) Ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ὠθεῖ ὁ ὀπίσθιος τροχὸς τὸ ἔδαφος.

Ἀπάντησις: α) 400 kpcm. β) 50 kp. γ) 150 kpcm. δ) 5 kp

6) Ὁ διωστὴρ βενζινομηχανῆς διαβιβάζει, ὅταν εὑρίσκεται εἰς

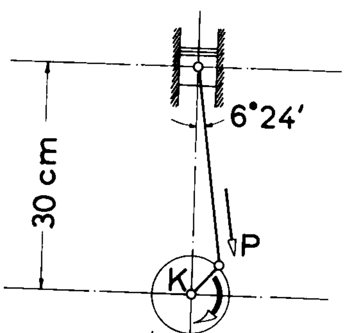


Σχ. 1·9 δ.

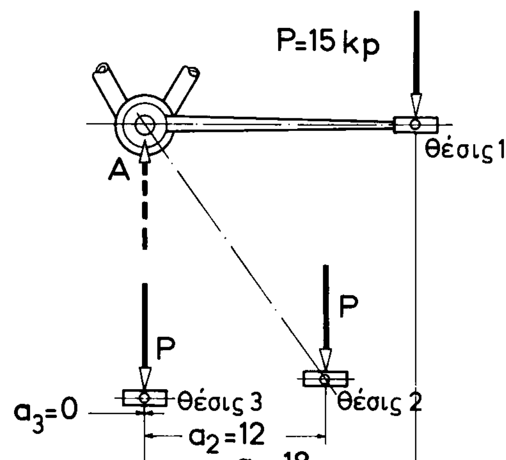
τὴν θέσιν τοῦ σχήματος 1 · 9 ε, δύναμιν P = 1 000 kp.

Ζητοῦνται α) Ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ στροφαλοφόρου. β) Ἡ προκαλουμένη ροπή.

Ἀπάντησις : α) 3,345 cm. β) 3 345 kpcm



Σχ. 1·9 ε.



Σχ. 1·9 ζ.

7) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ροπὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ πεντὰλ ποδηλάτου διὰ τὰς τρεῖς θέσεις τοῦ σχήματος 1 · 9 ζ. Πόση εἶναι κάθε φορὰ ἡ ἀντίδρασις εἰς τὸ σημεῖον A ;

Ἀπάντησις : α) $M_1 = 270$ kpcm. β) $M_2 = 180$ kpcm. γ) $M_3 = 0$ kpcm. δ) Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις A = 15 kp

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

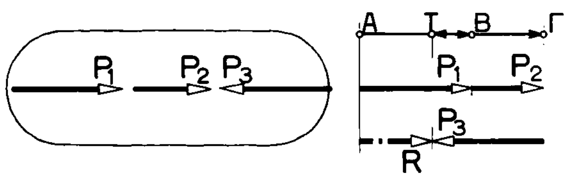
ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΙ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου.

2·1 Δυνάμεις ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Σύνθεσις.

Διὰ νὰ εὕρωμε τὴν συνισταμένην τῶν διδομένων δυνάμεων, τοποθετοῦμε τὴν μίαν δύναμιν κατόπιν τῆς ἄλλης, θέτοντες ὡς ἀρχὴν ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον Α, ἔχοντες πάντοτε ὑπ' ὄψιν τὸ μέγεθος καὶ ἀκολουθοῦντες τὴν φορὰν τῶν δυνάμεων (σχ. 2·1α).



Σχ. 2·1 α.

Ἰδοὺ μερικαὶ παρατηρήσεις σχετικαὶ μὲ τὴν γραφικὴν κατασκευὴν τῆς συνθέσεως αὐτῆς:

— Ἡ *ἀρχὴ κάθε δυνάμεως* πρέπει νὰ συμπίπτη μὲ τὸ τέλος τῆς προηγουμένης της.

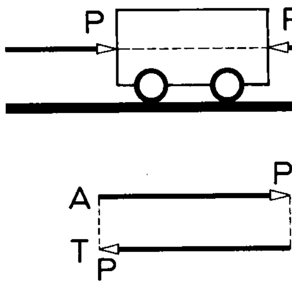
— Τὸ *μέγεθος τῆς συνισταμένης* ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀρχῆς Α τῆς πρώτης δυνάμεως ἀπὸ τὸ τέλος Τ τῆς τελευταίας.

— Ἡ *φορὰ* τῆς συνισταμένης ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Α τῆς πρώτης πρὸς τὸ τέλος Τ τῆς τελευταίας.

— ***Εὐθεῖα ἐνεργείας*** τῆς συνισταμένης εἶναι ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῶν συνιστωσῶν.

Συνθήκη ἰσορροπίας ἐπιτυγχάνεται, ὅταν ἡ συνισταμένη

$R=0$, δηλαδὴ ὅταν τὸ τέλος T τῆς τελευταίας δυνάμεως συμπίπτη μὲ τὴν ἀρχὴν A τῆς πρώτης (σχ. 2 · 1 β).

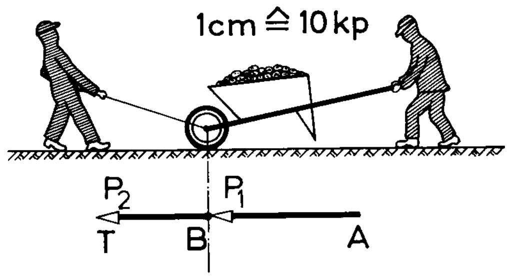


Σχ. 2·1 β.

Παράδειγμα.

Μία χειράμαξα ὠθεῖται ἀπὸ ἕνα ἐργάτην μὲ δύναμιν $P_1 = 20$ kp καὶ ἕλκεται ἀπὸ ἕνα ἄλλον μὲ δύναμιν $P_2 = 15$ kp (σχ. 2 · 1 γ).

Ποία δύναμις ἀσκεῖται ἐπάνω εἰς τὴν χειράμαξαν;



Σχ. 2·1 γ.

Λύσις.

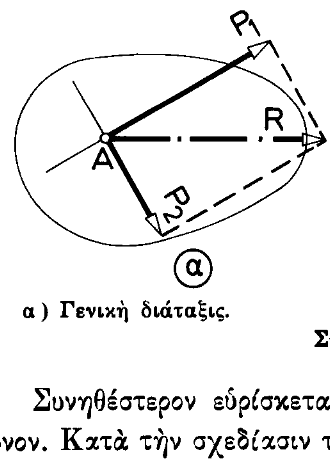
Αἱ δύο δυνάμεις ἀσκοῦνται εἰς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ δάπεδον καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, δηλαδὴ τὴν διεύθυνσιν κινήσεως τῆς χειραμάξης. Τοποθετοῦμε τὴν μίαν δύναμιν κατόπιν τῆς ἄλλης ὑπὸ κλίμακα π.χ. 1 cm ≙ 10 kp.

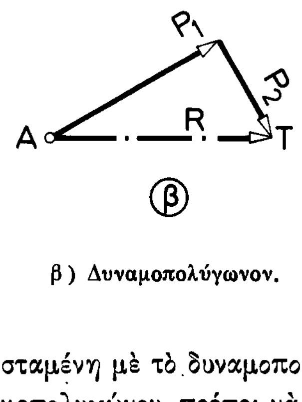
Τὸ μῆκος ΑΤ ἰσοῦται μὲ 3,5 cm, ἄρα τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης εἶναι 35 kp. Ἡ φορά της εἶναι ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Τ καὶ ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας της διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δάπεδον.

2·2 Δύο συντρέχουσαι δυνάμεις.

Σύνθεσις.

Εἰς τὴν παράγραφον 1·3 ἐμάθαμε ὅτι ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων, ποὺ ἐφαρμόζονται εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον Α, ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς δυνάμεις. Ἡ συνισταμένη αὐτὴ τῶν δυνάμεων διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α [σχ. 2·2α(α)].





α) Γενικὴ διάταξις. β) Δυναμοπολύγωνον.

Σχ. 2·2 α.

Συνηθέστερον εὑρίσκεται ἡ συνισταμένη μὲ τὸ δυναμοπολύγωνον. Κατὰ τὴν σχεδίασιν τοῦ δυναμοπολυγώνου πρέπει νὰ δίδωμε μεγάλην προσοχὴν εἰς τὴν τοποθέτησιν τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων. Πρέπει δηλαδὴ νὰ προσέχωμε, ὥστε τὸ πέρας τῆς μιᾶς συνιστώσης (βέλος) νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἄλλης.

Ἡ συνισταμένη R εἶναι ἡ γραμμὴ ποὺ συνδέει τὴν ἀρχὴν Α τῆς πρώτης δυνάμεως μὲ τὸ τέλος Τ τῆς τελευταίας καὶ διευθύνεται ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Τ [σχ. 2·2α(β)]. Ἡ φορά της εἶναι ἑπομένως ἀντίθετος ἀπὸ τὴν φορὰν τῶν συνιστωσῶν.

Διὰ νὰ κάνωμε τὴν γραφικὴν σύνθεσιν δύο συντρεχουσῶν δυνάμεων, χρειαζόμεθα γενικῶς δύο σχήματα:

Πρῶτον, τὴν γενικὴν διάταξιν εἰς τὴν ὁποίαν ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα μηκῶν, π.χ. $1\,\text{cm} \triangleq 100\,\text{cm}$, ἐμφανίζονται αἱ διαστάσεις τοῦ σώματος, αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας καὶ αἱ φοραὶ τῶν δυνάμεων.

Δεύτερον, τὸ δυναμοπολύγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα δυνάμεων, π.χ. $1\,\text{cm} \triangleq 200\,\text{kp}$, ἐμφανίζονται αἱ δυνάμεις κατὰ μέγεθος καὶ φοράν.

Ἀπὸ τὰ τρία στοιχεῖα τῆς συνισταμένης τὰ δύο, δηλαδὴ τὸ *μέγεθος* καὶ ἡ *φορά*, δίδονται ἀπὸ τὸ δυναμοπολύγωνον, ἐνῶ τὸ τρίτον, *ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας* (δηλαδὴ ἡ θέσις της), ἀπὸ τὴν γενικὴν διάταξιν, ἐπειδὴ ἡ συνισταμένη πρέπει νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῶν συνιστωσῶν.

Παράδειγμα.

Δίδονται αἱ δυνάμεις $P_1 = 30\,\text{kp}$ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐνεργείας ε_1 καὶ $P_2 = 40\,\text{kp}$ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐνεργείας ε_2 (σχ. 2·2β).

Ζητεῖται ἡ συνισταμένη κατὰ μέγεθος, εὐθεῖαν ἐνεργείας καὶ φοράν.

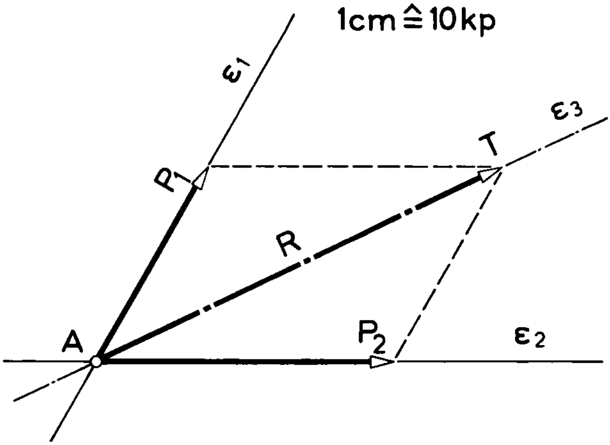
Λύσις.

Εὑρίσκομε μὲ τὴν γραφικὴν μέθοδον καὶ συμφώνως πρὸς ὅσα εἴπαμε προηγουμένως τὴν συνισταμένην R. Μετροῦμε τὸ μέγεθός της μὲ τὴν δοθεῖσαν κλίμακα τῶν δυνάμεων καὶ εὑρίσκομε 6 cm, δηλαδὴ 60 kp. Εὐθεῖα ἐνεργείας εἶναι ἡ ε_3 καὶ ἔχει φορὰ ἀπὸ Α πρὸς Τ.

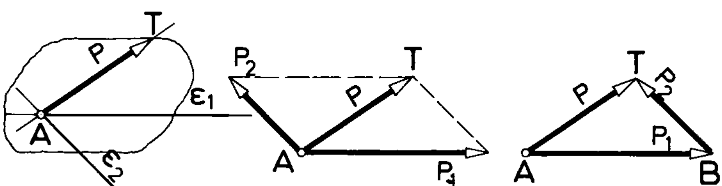
Ἀνάλυσις.

Ἡ ἀνάλυσις ἀποτελεῖ τὴν ἀντίστροφον διαδικασίαν τῆς συνθέσεως (παρ. 1·3). Ἀνάλυσιν κάνομε διότι συχνὰ ὑπολογίζομε τὰ ἀποτελέσματα μιᾶς δυνάμεως εὐκολώτερον, ὅταν τὴν ἀναλύσωμε εἰς δύο δυνάμεις.

Ἔστω ὅτι δίδεται μία δύναμις P καὶ δύο εὐθεῖαι ἐνεργείας ε_1 καὶ ε_2 [σχ. 2·2γ(α)].



Σχ. 2·2 β.



α) Πρόβλημα. β) Λύσις μὲ παραλληλό-γραμμον. γ) Λύσις μὲ δυναμο-πολύγωνον.

Σχ. 2·2 γ.

Ζητοῦνται αἱ συνιστῶσαι τῆς P κατὰ τὰς ε_1 καὶ ε_2.

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις, πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ ὑφίστανται αἱ ἑξῆς προϋποθέσεις:

1) Αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας τῶν συνιστωσῶν νὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐνεργείας τῆς δοθείσης δυνάμεως (συνισταμένης).

2) Αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας τῆς δυνάμεως P καὶ τῶν συνιστωσῶν της νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διὰ νὰ εὕρωμε τὰς συνιστώσας, φέρομε ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς δυνάμεως παραλλήλους πρὸς ε_1 καὶ ε_2. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔχομε τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων καὶ ἀπὸ αὐτὸ τὸ *μέγεθος* καὶ τὴν *φορὰν* τῶν συνιστωσῶν. Ἡ δύναμις P, ποὺ ἀναλύεται, πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου [σχ. 2·2γ(β)].

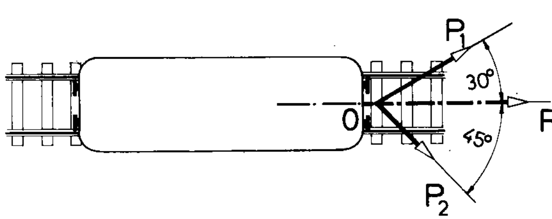
Συνηθέστερον ἀπὸ τὸ ἄκρον A τῆς δυνάμεως P φέρομε μίαν παράλληλον πρὸς τὴν μίαν εὐθεῖαν ἐνεργείας ε_1 καὶ ἀπὸ τὸ τέλος T μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν ἐνεργείας ε_2.

Σχηματίζεται τὸ τρίγωνον δυνάμεων (δυναμοπολύγωνον) ABT [σχ. 2·2γ(γ)]. Αἱ συνιστῶσαι εἶναι ἡ AB καὶ ἡ BT.

Ὅταν τὸ δυναμοπολύγωνον δεικνύῃ ἀνάλυσιν ἢ σύνθεσιν, ἡ φορὰ τῶν βελῶν τῶν συνιστωσῶν εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς συνισταμένης.

Παράδειγμα.

Διὰ νὰ μετακινηθῇ ἕνα σιδηροδρομικὸν ὄχημα ἀπαιτεῖται δύναμις R = 200 kp, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμε νὰ ἀσκήσωμε μὲ δύο συρματόσχοινα P_1 καὶ P_2 (σχ. 2·2δ).

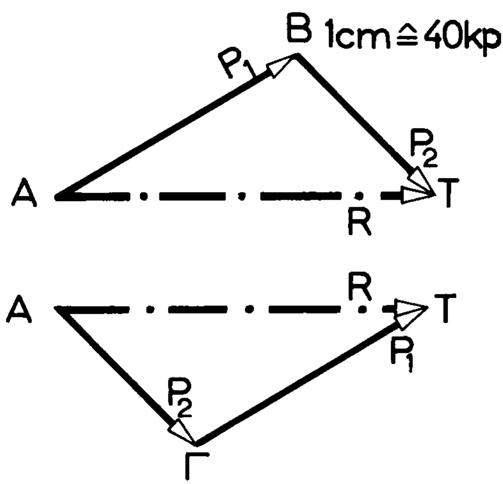


Σχ. 2·2δ.

Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ δυνάμεις P_1 καὶ P_2;

Λύσις.

Τὸ πρόβλημα ἐπιβάλλει νὰ ἀναλύσωμε τὴν συνισταμένην $R = 200\,\text{kp}$ κατὰ τὰς εὐθείας ἐνεργείας τῆς P_1 καὶ P_2. Πρὸς τοῦτο σχεδιάζομε ὑπὸ κλίμακα, π.χ. $1\,\text{cm} \triangleq 40\,\text{kp}$, εἰς χωριστὸν σχέδιον (σχ. 2·2 ε) τὴν R παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐνεργείας της. Ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρον Α φέρομε παράλληλον πρὸς τὴν P_1 καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον Τ πρὸς τὴν P_2, ὁπότε λαμβάνομε τὸ δυναμοπολύγωνον ΑΒΤ ἢ ἐὰν ἀρχίσωμε μὲ τὴν P_2 τὸ ΑΓΤ.



Σχ. 2·2 ε.

Ἡ σειρά, κατὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνομε τὰς δυνάμεις, δὲν ἔχει καμμίαν σημασίαν διὰ τὸ ἀποτέλεσμα.

Ἡ φορὰ τῶν συνιστωσῶν P_1 καὶ P_2 πρέπει νὰ εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν φορὰν τῆς συνισταμένης R.

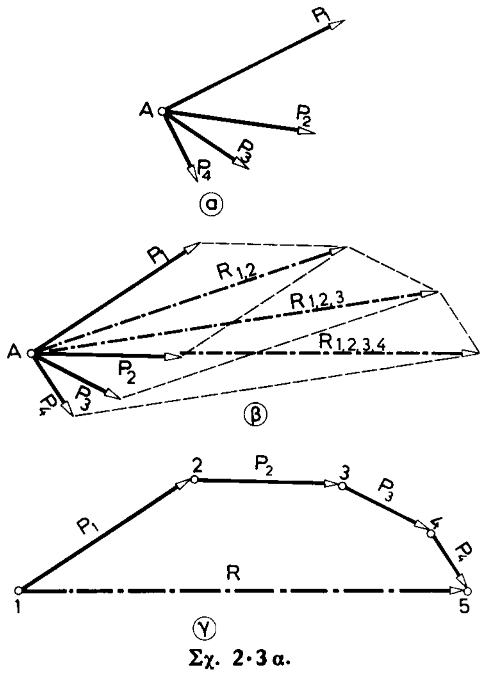
Ἐὰν μετρήσωμε εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον τὸ μῆκος τῆς P_1, εὑρίσκομε ὅτι εἶναι 3,7 cm, ἄρα τὸ μέγεθός της εἶναι $P_1 = 3{,}7 \times 40 = 148\,\text{kp}$.

Ἀντιστοίχως τῆς P_2 εἶναι 2,6 cm, ἄρα τὸ μέγεθός της εἶναι $P_2 = 2{,}6 \times 40 = 104$ kp.

2·3 Πολλαὶ συντρέχουσαι δυνάμεις.

Σύνθεσις.

Ὅταν ἐπὶ ἑνὸς σώματος δροῦν περισσότεραι ἀπὸ δύο δυνάμεις, π.χ. αἱ P_1, P_2, P_3, P_4 [σχ. 2·3 α(α)], μὲ κοινὸν σημεῖον



Σχ. 2·3 α.

ἐφαρμογῆς Α, ἡ συνισταμένη των R θὰ διέρχεται ἀπαραιτήτως διὰ τοῦ σημείου Α. Τὸ μέγεθος καὶ τὴν φοράν της τὰ εὑρίσκομε μὲ δύο πάλιν τρόπους:

α) Ἐὰν κατασκευάσωμε διαδοχικῶς τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων καὶ β) μὲ τὸ δυναμοπολύγωνον.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, συνθέτομε κατ' ἀρχὴν τὰς δυνάμεις P_1 καὶ P_2 πρὸς τὴν συνισταμένην $R_{1,2}$ [σχ. 2·3 α (β)], κατόπιν τὴν συνισταμένην αὐτὴν μὲ τὴν P_3 πρὸς τὴν $R_{1,2,3}$ καὶ τελικῶς αὐτὴν μὲ τὴν P_4 πρὸς τὴν $R_{1,2,3,4}$.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἐκλέγομε ἕνα τυχὸν σημεῖον 1 καὶ σχεδιάζομε τὰς δυνάμεις μὲ τὸ δοθὲν μέγεθός των. Τὰς σχεδιάζομε δὲ παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας των μὲ φορὰν συμπίπτουσαν πρὸς τὴν δοθεῖσαν [σχ. 2·3 α(γ)].

Ἡ ἀρχὴ κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς δυνάμεις συμπίπτει μὲ τὸ τέλος τῆς προηγουμένης της. Δὲν ἔχει δὲ σημασίαν τὸ ποία εἶναι ἡ σειρὰ μὲ τὴν ὁποίαν σχεδιάζομε τὰς δυνάμεις.

Τὴν συνισταμένην ἀποτελεῖ ἡ εὐθεῖα ποὺ κλείει τὸ δυναμοπολύγωνον, δηλαδὴ ἡ εὐθεῖα ποὺ συνδέει τὴν ἀρχὴν 1 τῆς πρώτης δυνάμεως μὲ τὸ πέρας 5 τῆς τελευταίας.

Τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς 1 5, τὸ ὁποῖον βεβαίως μετρεῖται μὲ τὴν κλίμακα τῶν δυνάμεων.

Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς συνισταμένης εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν 1 5 καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α.

Ἡ φορὰ τῆς συνισταμένης ὁρίζεται ἀπὸ τὴν φορὰν τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον καί, ὅπως εἴδαμε, αὐτὴ εἶναι ἀντίθετος ἀπὸ τὴν φορὰν τῶν συνιστωσῶν.

Παράδειγμα 1.

Ἐπάνω εἰς τὴν σταθερὰν στήριξιν (ἄρθρωσιν) [σχ. 2·3 β (α)] μιᾶς γεφύρας δροῦν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις, ποὺ βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα:

$P_1 = 1\,000$ kp. $P_2 = 400$ kp. $P_3 = 600$ kp καὶ $P_4 = 800$ kp.

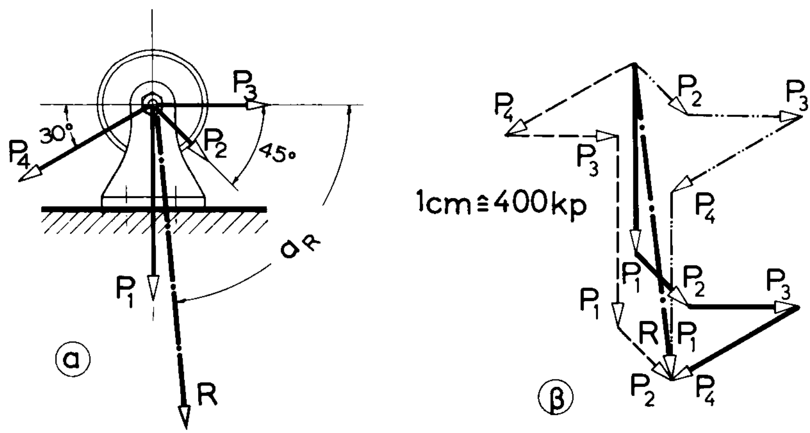
Ζητεῖται ἡ συνισταμένη.

Λύσις.

Θὰ κατασκευάσωμε τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν δυνάμεων. Ὅπως ἀποδεικνύεται καὶ ἀπὸ τὸ σχῆμα 2·3 β (β), ἡ σειρὰ σχεδιάσεως τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον δὲν ἐπηρεάζει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα. Ἀπὸ τὸ δυναμοπολύγωνον προκύπτει ὅτι τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης εἶναι 4,25 cm, ἄρα τὸ μέγεθός της:

$$\mathrm{R} = 4{,}25 \times 400 = 1\,700\ \mathrm{kp}.$$

Ἡ γωνία α_R ἰσοῦται κατόπιν μετρήσεως μὲ $83^0\ 30'$.



Σχ. 2·3 β.

Ἀνάλυσις.

Ὅπως ἐλέχθη καὶ εἰς τὴν παράγραφον 1 · 3, ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς περισσοτέρας ἀπὸ δύο συνιστώσας, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιον σημεῖον ἐφαρμογῆς Α, εἶναι πρόβλημα ἀόριστον.

Ἰσορροπία.

Ἐὰν εἰς ἕνα σῶμα δροῦν δύο δυνάμεις P_1 καὶ P_2 ἡ ἐπίδρασίς των ἠμπορεῖ νὰ ἐξισορροπηθῇ μόνον ἀπὸ μίαν δύναμιν P_3, ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν συνισταμένην των.

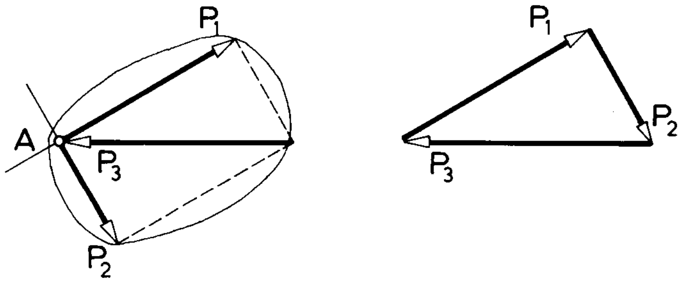
Αἱ τρεῖς δυνάμεις ἰσορροποῦν (σχ. 2 · 3 γ).

Εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν τριῶν δυνάμεων τὸ πέρας τῆς τελευταίας δυνάμεως συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς πρώτης, διότι ἡ P_3 εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν P_1 καὶ P_2. Τὸ δυναμοπολύγωνον αὐτὸ καλεῖται *κλειστόν*. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ἡ φορὰ ὅλων τῶν δυνάμεων τοῦ δυναμοπολυγώνου εἶναι ἡ ἰδία, δηλαδὴ ὅλαι αἱ δυνάμεις ἔχουν τὴν ἰδίαν κατεύθυνσιν ἢ ἀκολουθοῦν *ὁδὸν μονῆς κατευθύνσεως*.

Ὥστε ἠμπορεῖ νὰ διατυπωθῆ ὁ ἑξῆς κανών:

Τρεῖς δυνάμεις, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον, εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν, ὅταν τὸ δυναμοπολύγωνόν των εἶναι κλειστόν.

Ὅλαι αἱ δυνάμεις εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον ἔχουν τὴν ἰδίαν κατεύθυνσιν.



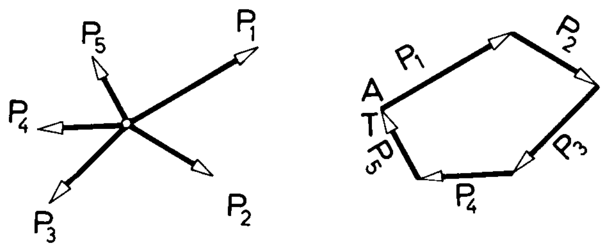
Σχ. 2·3γ.

Ὁ κανὼν αὐτὸς εὑρίσκει μεγάλην ἐφαρμογὴν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς στατικῆς.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ ὅταν εἰς ἕνα σῶμα δρᾶ οἱονδήποτε πλῆθος δυνάμεων. Αἱ δυνάμεις αὐταί, ὅπως εἴπαμε, θὰ ἰσορροποῦν, ὅταν ἡ συνισταμένη των εἶναι μηδέν.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον (σχ. 2·3δ) ἡ ἀρχὴ τῆς πρώτης δυνάμεως Α καὶ τὸ πέρας τῆς τελευταίας Τ συμπίπτουν, ἄρα τὸ δυναμοπολύγωνον εἶναι κλειστόν. Εἰς τοῦτο ὅλαι αἱ δυνάμεις εἶναι μονῆς κατευθύνσεως. Συνεπῶς ἠμποροῦμε νὰ γενικεύσωμε τὸν κανόνα, ποὺ διετυπώσαμε ἀνωτέρω σχετικῶς μὲ τὴν ἰσορροπίαν τῶν τριῶν δυνάμεων, καὶ νὰ εἰποῦμε ὅτι:

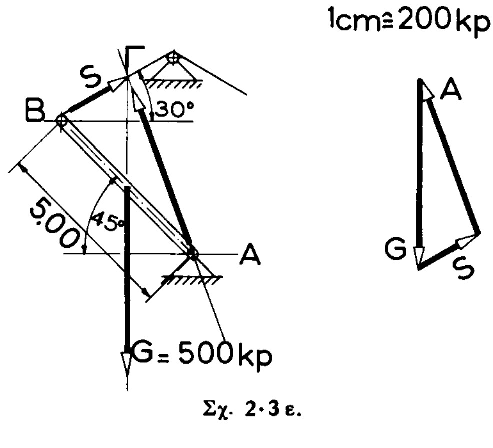
Αἱ δυνάμεις, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον, εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν, ὅταν τὸ δυναμοπολύγωνόν των εἶναι κλειστόν.



Σχ. 2·3 δ.

Παράδειγμα 2.

Εἰς τὴν πρύμνην ἑνὸς πορθμείου ὑπάρχει ἕνα περιστρεφόμενον δάπεδον διὰ τὴν εἴσοδον τῶν αὐτοκινήτων. Τὸ δάπεδον αὐτό, ὅταν ταξειδεύῃ τὸ πορθμεῖον, τηρεῖται εἰς τὴν θέσιν ποὺ δεικνύει τὸ σχῆμα 2·3 ε. Τὸ βάρος του ἀνέρχεται εἰς 500 kp.



Σχ. 2·3 ε.

Ζητοῦνται αἱ δυνάμεις ποὺ ἀναπτύσσονται εἰς τὴν ἄρθρωσιν Α καὶ εἰς τὸ συρματόσχοινον ΒΓ.

Λύσις.

Αἱ δυνάμεις ποὺ δροῦν εἰς τὸ εἰς ἰσορροπίαν εὑρισκόμενον δάπεδον εἶναι τρεῖς:

1) Τὸ *ἴδιον βάρος τοῦ δαπέδου G*. Τῆς δυνάμεως αὐτῆς γνωρίζομε ὅλα τὰ χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα.

2) Ἡ *δύναμις τοῦ συρματοσχοίνου S*. Ἀπὸ αὐτὴν τὴν δύναμιν γνωρίζομε τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας της, ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τοῦ συρματοσχοίνου.

3) Ἡ *ἀντίδρασις τῆς ἀρθρώσεως A*, τῆς ὁποίας γνωρίζομε μόνον τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς.

Γνωρίζομε ὅμως ὅτι:

Διὰ νὰ ἰσορροποῦν τρεῖς δυνάμεις πρέπει νὰ διέρχωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τὸ δυναμοπολύγωνόν των νὰ εἶναι κλειστόν.

Προεκτείνομε τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς δυνάμεως G μέχρις ὅτου αὐτὴ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν τοῦ συρματοσχοίνου εἰς τὸ σημεῖον Γ. Διὰ νὰ ἰσορροποῦν αἱ τρεῖς δυνάμεις πρέπει ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς A νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Γ, ἄρα μᾶς εἶναι πλέον καὶ αὐτὴ γνωστή. Τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον, ποὺ ἠμποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε (σχ. 2·3ε), ὅταν γνωρίζωμε μίαν δύναμιν καὶ τὰς εὐθείας ἐνεργείας δύο ἄλλων, μᾶς παρέχει τὰς δυνάμεις A καὶ S ποὺ ζητοῦμε. Ἀπὸ τὴν μέτρησιν προκύπτει ὅτι τὸ μῆκος τῆς A ἰσοῦται μὲ 2,19 cm. Ἄρα τὸ μέγεθός της ἰσοῦται μὲ $2{,}19 \times 200 = 438$ kp, ἀντιστοίχως τὸ μῆκος τῆς S ἰσοῦται μὲ 0,90 cm καὶ τὸ μέγεθός της $0{,}90 \times 200 = 180$ kp.

Ἡ ἀνάλυσις τῆς A εἰς μίαν κατακόρυφον καὶ μίαν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν δίδει:

$$A_V = 408 \text{ kp} \quad \text{καὶ} \quad A_H = 158 \text{ kp}.$$

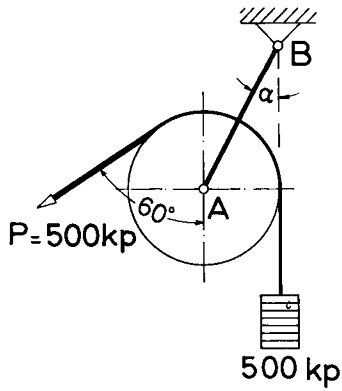
2·4 Ἀσκήσεις.

1) Δίδεται μία τροχαλία ἀνηρτημένη μὲ ἕνα συρματόσχοινον ἀπὸ τὸ σημεῖον B.

Τὴν τροχαλίαν περιβάλλει μία ἅλυσις, ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὸ ἕνα ἄκρον της φορτίον 500 kp, ἐνῶ τὸ ἄλλο ἕλκεται ὑπὸ γωνίαν 60° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον (σχ. 2·4 α).

Ζητεῖται α) Μὲ ποίαν γωνίαν α ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον θὰ σταθῇ τὸ συρματόσχοινον καὶ β) ποίαν δύναμιν θὰ ἀναλάβῃ;

Ἀπάντησις: α) 30°. β) 866 kp



Σχ. 2·4 α.

2) Εἰς τὴν κορυφὴν τερματικοῦ ἱστοῦ (κολώνας) γραμμῆς ὑψηλῆς τάσεως ἐνεργεῖ ἀπὸ τὰ καλώδια μία ὁριζοντία δύναμις $P_1 = 2\,000$ kp καὶ ἀπὸ τὸν ἐπίτονον μία δύναμις $P_2 = 2\,991$ kp ὑπὸ γωνίαν $\alpha = 48^0$ (σχ. 2·4 β).

Ζητεῖται α) Ἡ συνισταμένη R καὶ β) ἡ γωνία β, ποὺ σχηματίζει μὲ τὴ P_1.

Ἀπάντησις: α) $R = 2\,222$ kp. β) $= 90^0$

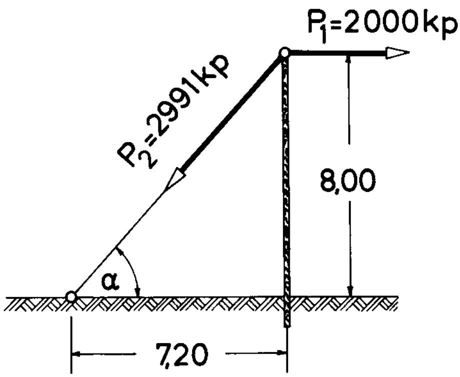
3) Ἕνα κιβώτιον περιέχει ἕνα τόρνον, ποὺ ἔχει βάρος 4 000 kp. Κατὰ τὴν ἐκφόρτωσίν του ἀναρτᾶται μὲ ἕνα συρματόσχοινον ἀπὸ τὸ ἄγκιστρον γερανοῦ (σχ. 2·4 γ).

Ζητοῦνται αἱ δυνάμεις, ποὺ ἀναπτύσσονται εἰς τὰ δύο τμήματα τοῦ συρματοσχοίνου.

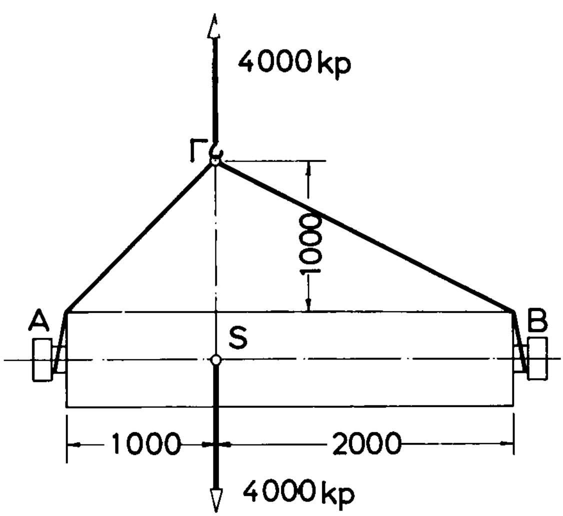
Ἀπάντησις: ΑΓ = 3 790 kp καὶ ΒΓ = 2 980 kp

4) Ὁ ἠλεκτροφόρος ἀγωγὸς τῶν τρόλλεϋ ἀναρτᾶται ἀνὰ 50 m

ἀπὸ ἐγκάρσια συρματόσχοινα, εἰς τὰ ὁποῖα, δι᾽ ἀπόστασιν τῶν ἱστῶν 15 m, δίδεται βέλος 1,0 m. Τὸ βάρος τοῦ ἀγωγοῦ ἀνέρχεται εἰς 0,60 kp



Σχ. 2·4 β.

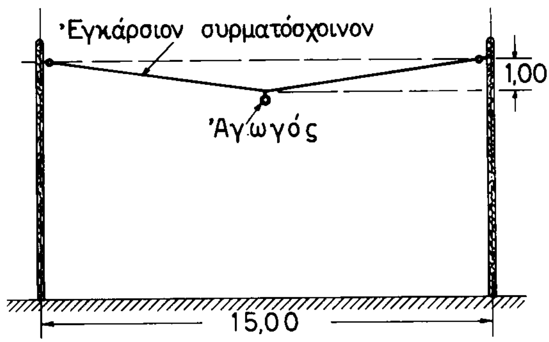


Σχ. 2·4 γ.

ἀνὰ τρέχον μέτρον. Παραλείπεται τὸ ἴδιον βάρος τοῦ ἐγκαρσίου συρματοσχοίνου (σχ. 2·4 δ).

Ζητοῦνται α) Ἡ κατακόρυφος φόρτισις εἰς τὸ σημεῖον ἀναρτήσεως. β) Αἱ δυνάμεις ποὺ ἀναλαμβάνει τὸ συρματόσχοινον.

Ἀπάντησις: α) 30 kp. β) 113,5 kp



Σχ. 2·4 δ.

5) Ἀπὸ τὰ 8 τηλεφωνικὰ σύρματα ἑνὸς ξυλίνου ἱστοῦ, τὰ 5 διακλαδίζονται ὑπὸ γωνίαν 45^0 πρὸς μίαν διεύθυνσιν καὶ τὰ 3 ὑπὸ γωνίαν 60^0 πρὸς ἄλλην (σχ. 2·4 ε). Κάθε σύρμα ἔχει ἔντασιν 45 kp.

Ζητοῦνται α) Ἡ ὁριζοντία συνισταμένη τῶν δυνάμεων ποὺ δροῦν εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ στύλου καὶ β) ἡ γωνία α, μὲ τὴν ὁποία πρέπει νὰ ἀγκυρωθῇ ὁ ὁριζόντιος ἐπίτονος (δηλαδὴ τὸ συρματόσχοινον διὰ τοῦ ὁποίου συγκρατεῖται ὁ ἱστὸς) εἰς γειτονικὴν οἰκίαν, οὕτως ὥστε νὰ μὴ καταπονῆται ὁ ἱστός.

Ἀπάντησις: α) $R = 140$ kp. β) $\alpha = 17^0\ 30'$

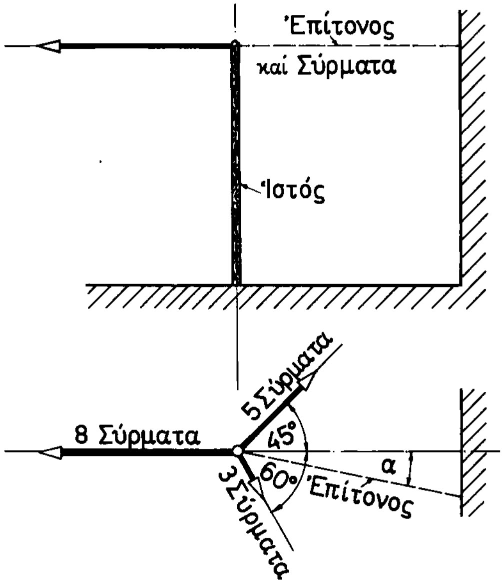
6) Εἰς τὸν στύλον ξυλίνης γεφύρας δροῦν αἱ δυνάμεις τοῦ σχήματος 2·4 ζ.

Ζητεῖται ἡ συνισταμένη.

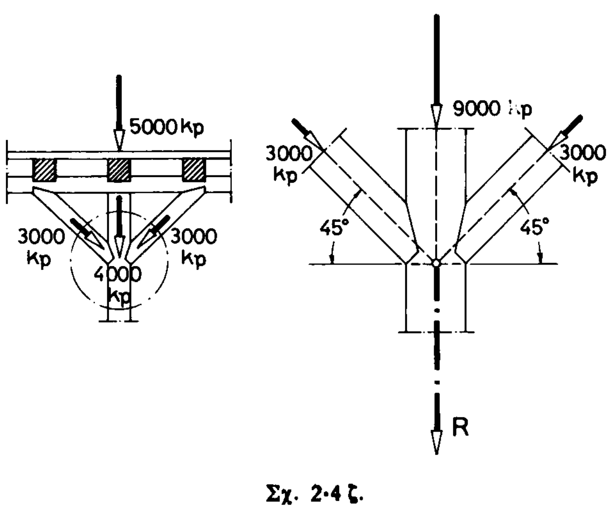
Ἀπάντησις: $R = 13\,240$ kp

7) Μία θύρα, ποὺ ἔχει βάρος 100 kp, στηρίζεται μὲ στροφεῖς εἰς τὰς θέσεις Α καὶ Β (σχ. 2·4 η). Ὁ στροφεὺς Β ὑποβαστάζει ὅλον τὸ κατακόρυφον φορτίον, ἐνῶ ὁ στροφεὺς Α, ἐπειδὴ ἔχει περιθώριον ἀπὸ τὸ κάτω μέρος τῆς στηρίξεως, ἀναλαμβάνει μόνον ὁριζόντιον φορτίον.

Ζητοῦνται α) Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς ἀντιδράσεως Α καὶ τὸ μέγεθός της. β) Ἡ ἀντίδρασις B. γ) Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα B_H καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα B_V τῆς ἀντιδράσεως B.

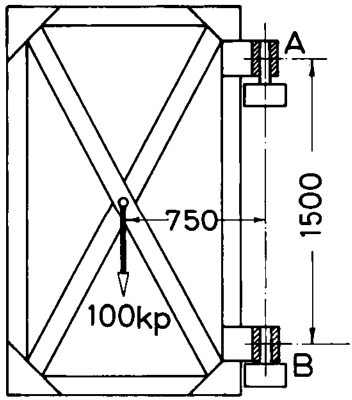


Σχ. 2·4 ε.



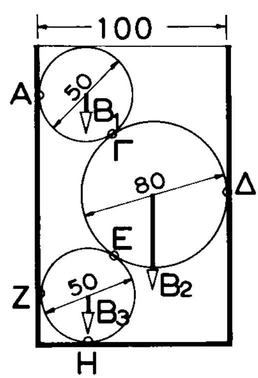
Σχ. 2·4 ζ.

Ἀπάντησις : α) Ὁριζοντία $A = 50\,kp$. β) $B = 112\,kp$. γ) $B_H = 50\,kp$, $B_V = 100\,kp$



Σχ. 2·4 η.

8) Μέσα εἰς ἕνα ἐπίμηκες κιβώτιον εὑρίσκονται τρία κυλινδρικὰ σώματα (σχ. 2·4θ). Τὸ βάρος των εἶναι ἀντιστοίχως $B_1 = 10\,kp$, $B_2 = 25\,kp$ καὶ $B_3 = 10\,kp$.



Σχ. 2·4 θ.

Ζητοῦνται αἱ δυνάμεις, μὲ τὰς ὁποίας α) Τὰ σώματα πιέζονται μεταξύ των εἰς τὰς θέσεις Γ καὶ Ε. β) Πιέζουν τὰς πλευρὰς τοῦ κιβωτίου εἰς τὰς θέσεις Α, Δ καὶ Ζ καὶ γ) πιέζουν τὸν πυθμένα τοῦ κιβωτίου εἰς τὴν θέσιν Η.

Ἀπάντησις: α) Γ = 11,9 kp. Ε = 41,6 kp. β) Α = 6,4 kp. Δ = 28,9 kp. Ζ = 22,5 kp. γ) Η = 45 kp

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

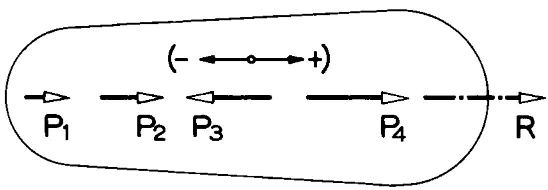
ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΙ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς μεθόδου τῶν προβολῶν (ἀναλυτική).

3·1 Δυνάμεις ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Σύνθεσις.

Διὰ νὰ γίνη ἡ σύνθεσις δυνάμεων, ποὺ εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν, πρέπει νὰ γνωρίζωμε τὴν φοράν των. Διότι ἠμπορεῖ δύο δυνάμεις νὰ ἐνεργοῦν εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν, ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 3 · 1 α, ἀλλὰ ἡ μία νὰ εἶναι ἀντίθετος πρὸς



Σχ. 3·1 α.

τὴν ἄλλην. Αἱ δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν κατὰ τὴν ἰδίαν φοράν, χαρακτηρίζονται ὡς *θετικαὶ* (π.χ. $+10\,\mathrm{kp}$), ἐνῶ αἱ ἄλλαι, ποὺ ἐνεργοῦν κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, ὡς *ἀρνητικαὶ* (π.χ. $-20\,\mathrm{kp}$).

Τὴν συνισταμένην αὐτῶν τῶν δυνάμεων λαμβάνομε, ὅταν ἀθροίσωμε κατὰ τὸν ἀλγεβρικὸν τρόπον (μὲ τὰ πρόσημα $+$ καὶ $-$) ὅλας τὰς δυνάμεις, δηλαδὴ $R = \Sigma P$. Εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, ὡς γνωστόν, διὰ νὰ προσθέσωμε μεγέθη πρέπει νὰ λάβωμε ὑπ' ὄψιν μας ἐὰν τὰ πρόσημα εἶναι θετικὰ ἢ ἀρνητικά.

Ἐὰν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀθροίσεως αὐτῆς εἶναι θετικὸν (+), ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης συμπίπτει μὲ τὴν θετικὴν διεύθυνσιν τῶν δυνάμεων, ἐὰν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικὸν (—), τότε ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης συμπίπτει μὲ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν.

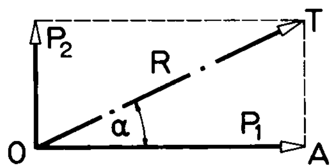
Συνθήκη ἰσορροπίας.

Διὰ νὰ ἰσορροπήσουν αἱ δυνάμεις, ποὺ εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν, θὰ πρέπει ἡ συνισταμένη των νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Δηλαδὴ θὰ πρέπει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι μηδὲν ($\Sigma P = 0$) (σχ. 2 · 1 β). Τότε μόνον αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦν.

3 · 2 Δύο συντρέχουσαι δυνάμεις.

Σύνθεσις.

Ἂς λάβωμε ὡς παράδειγμα δύο δυνάμεις P_1 καὶ P_2, ποὺ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 90^0 (σχ. 3 · 2 α). Ἡ σύνθεσίς των



Σχ. 3 · 2 α.

εἶναι ἁπλουστάτη, διότι, ὅπως εἴπαμε εἰς προηγούμενα κεφάλαια, διὰ νὰ τὰς συνθέσωμε, εὑρίσκομε τὴν συνισταμένην των, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς δυνάμεις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον OAT εἶναι ὀρθογώνιον ἔχομε κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα:

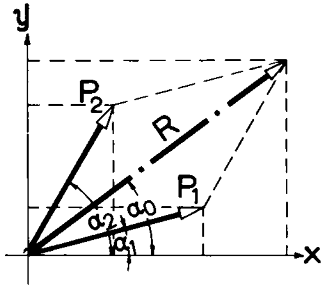
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

$$\text{καὶ}\ \text{συν}\alpha = \frac{P_1}{R},\quad \text{ημ}\alpha = \frac{P_2}{R}.$$

Ἡ ἀνάλυσις ἐπίσης τῆς δυνάμεως R εἰς δύο συνιστώσας καθέτους μεταξύ των εἶναι ἁπλουστάτη, διότι:

$$P_1 = R \,\text{συν}\alpha \quad \text{καὶ} \quad P_2 = R \,\text{ημ}\alpha.$$

Ἂς ἴδοῦμε ὅμως τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο δυνάμεις P_1 καὶ P_2 δὲν σχηματίζουν μεταξύ των ὀρθὴν γωνίαν (σχ. 3 · 2 β), ἀλλὰ εἴτε ὀξεῖαν εἴτε ἀμβλεῖαν γωνίαν. Τότε διὰ τὴν σύνθεσιν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:



Σχ. 3 · 2 β.

α) Ἀναλύομε κάθε μίαν ἀπὸ τὰς δυνάμεις P_1 καὶ P_2 εἰς δύο καθέτους μεταξύ των συνιστώσας κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y ἑνὸς ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. (Αἱ συνιστῶσαι μιᾶς δυνάμεως κατὰ τοὺς ἄξονας ἑνὸς συστήματος συντεταγμένων καλοῦνται καὶ προβολαί της).

$$P_{1x} = P_1 \,\text{συν}\alpha_1, \qquad P_{1y} = P_1 \,\text{ημ}\alpha_1$$
$$P_{2x} = P_2 \,\text{συν}\alpha_2, \qquad P_{2y} = P_2 \,\text{ημ}\alpha_2.$$

β) Αἱ συνιστῶσαι μὲ τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν ἐνεργείας συντίθενται ἀλγεβρικῶς, δηλαδὴ αἱ συνιστῶσαι κατὰ τὸν ἄξονα x εἰς τὴν συνισταμένην R_x καὶ αἱ συνιστῶσαι κατὰ τὸν ἄξονα y εἰς τὴν συνισταμένην R_y. Ἡ R_x καὶ ἡ R_y εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

$$\Sigma x = R_x = P_{1x} + P_{2x} = P_1 \,\text{συν}\alpha_1 + P_2 \,\text{συν}\alpha_2 \quad \text{καὶ}$$
$$\Sigma y = R_y = P_{1y} + P_{2y} = P_1 \,\text{ημ}\alpha_1 + P_2 \,\text{ημ}\alpha_2 .$$

γ) Αἱ συνισταμέναι R_x καὶ R_y ἀποτελοῦν τὰς συνιστώσας τῆς τελικῆς συνισταμένης R πρὸς τὴν ὁποίαν συντίθενται, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως.

Ἄρα ἡ τελικὴ συνισταμένη $R = \sqrt{R^2_x + R^2_y}$ καὶ συν$\alpha_0 = \frac{R_x}{R}$ καὶ ημ$\alpha_0 = \frac{R_y}{R}$.

Ἔτσι προκύπτει ὅτι αἱ προβολαὶ τῆς συνισταμένης εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἀθροίσματα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν.

Οἱ εὑρεθέντες τύποι ἰσχύουν ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν αἱ γωνίαι α_1 καὶ α_2 εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι, ἀρκεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν γωνιῶν μεγαλυτέρων τῶν 90^0 νὰ δοθῇ προσοχὴ εἰς τὸ πρόσημον τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου κατὰ τὸν Πίνακα 1.

Παράδειγμα συνθέσεως δύο συντρεχουσῶν δυνάμεων.

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης τῶν δύο δυνάμεων τοῦ σχήματος 3·2γ [α].

Λύσεις.

α) *Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ σχήματος μὲ ὀξείας μόνον γωνίας* [σχ. 3·2γ (β)].

Διαπιστοῦται ἀπὸ τὸ σχῆμα ὅτι ἡ P_{2x} ἔχει ἀντίθετον διεύθυνσιν τῆς P_{1x}, ἄρα:

$\Sigma x = R_x = 200 \cdot$ συν $20^0 - 150 \cdot$ συν $60^0 = 200 \times 0{,}940 - 150 \times 0{,}500 = 113$ kp ἢ $R_x = 113$ kp μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὰ δεξιά.

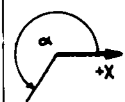
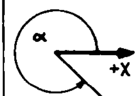
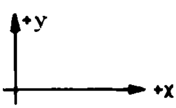
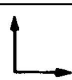
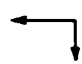
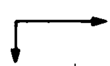
$\Sigma y = R_y = 200 \cdot$ ημ $20^0 - 150 \cdot$ ημ $60^0 = 200 \times 0{,}342 - 150 \times 0{,}866 = -61{,}5$ kp ἢ $R_y = 61{,}5$ kp μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὰ κάτω.

Ἐκ τούτων προκύπτει $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{113^2 + 61{,}5^2} = 128{,}6$ kp καὶ συν$\alpha_0 = \frac{R_x}{R} = \frac{113}{128{,}6} = 0{,}878$ καὶ $\alpha_0 = 28{,}5^0$.

Ἡ R ἔχει διεύθυνσιν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κάτω καὶ σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα x γωνίαν $28{,}5^0$ [σχ. 3·2γ (γ)].

ΠΙΝΑΞ 1

Κανόνες διὰ τὰ πρόσημα τῆς συνθέσεως συνεπιπέδων συντρεχουσῶν δυνάμεων.

Γωνία α (μεταξὺ θετικοῦ ἡμιάξονος x καὶ δυνάμεως)	0 — 90° 	90°—180° 	180° — 270° 	270° — 360° 
Γωνία ὑπολογισμοῦ τῶν τριγωνομετρικῶν μεγεθῶν	α	180° — α	α — 180°	360° — α
Τεταρτοκύκλιον μοναδιαίου κύκλου	I	II	III	IV
Πρόσημον τῶν τριγωνομετρικῶν μεγεθῶν ημα	+	+	—	—
συνα	+	—	—	+
εφα	+	—	+	—
Διευθύνσεις τῶν συνιστωσῶν τῆς δυνάμεως 	 x + y +	 x — y +	 x — y —	 x + y —
Πρόσημον τῶν συνιστωσῶν τῆς δυνάμεως ἢ τῆς συνισταμένης P_y ἢ R_y	+	+	—	—
P_x ἢ R_x	+	—	—	+
Θέσις τῆς συνισταμένης (τεταρτοκύκλιον) $εφα_0 = \frac{R_y}{R_x}$	$\frac{+}{+} = +$ (I)	$\frac{+}{-} = -$ (II)	$\frac{-}{-} = +$ (III)	$\frac{-}{+} = -$ (IV)

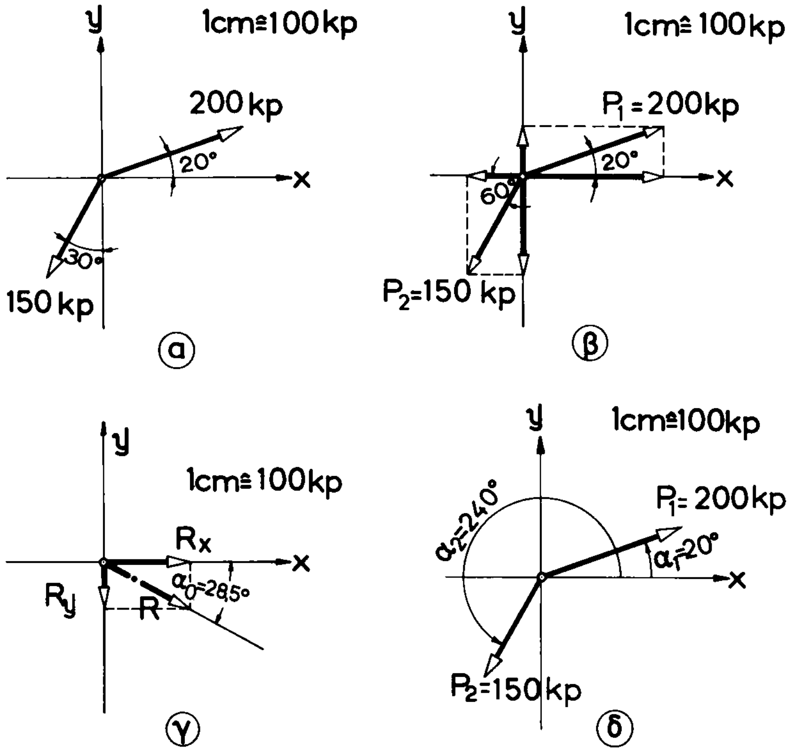
β) Μὲ ὀξείας καὶ ἀμβλείας γωνίας [σχ. 3 · 2 γ (δ)].

Ὅλαι αἱ γωνίαι μετροῦνται ἀπὸ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα x.

Συμφώνως πρὸς τὰς δοθείσας σχέσεις ἔχομε:

$$\Sigma x = R_x = P_1 \text{ συν}\alpha_1 + P_2 \text{ συν}\alpha_2 = 200 \cdot \text{συν } 20^0 + 150 \cdot \text{συν } 240^0 =$$
$$200 \times 0{,}940 + 150 \times (-0{,}500) = +113 \text{ kp.}$$

$$\Sigma y = R_y = P_1 \text{ ημ}\alpha_1 + P_2 \text{ ημ}\alpha_2 = 200 \cdot \text{ημ } 20^0 + 150 \cdot \text{ημ } 240^0 =$$
$$200 \times 0{,}342 + 150 \times (-0{,}866) = -61{,}5 \text{ kp.}$$



Σχ. 3·2γ.

ὁπότε $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{113^2 + 61{,}5^2} = 128{,}6$ kp.

$$\text{ημ}\alpha_0 = \frac{R_y}{R} = -\frac{61{,}5}{128{,}6} = -0{,}477 \text{ ἄρα } \alpha_0 = 208{,}5^0 \text{ ἢ } 331{,}5^0$$

$$\text{συν}\alpha_0 = \frac{R_x}{R} = \frac{113}{128,6} = 0,878 \quad \text{ἄρα } \alpha_0 = 28,5^0 \quad \text{ἢ} \quad 331,5^0.$$

Ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἐκείνη ποὺ συμπίπτει καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ διὰ τὸ συνημίτονον καὶ ἐν προκειμένῳ ἡ:

$$\alpha_0 = 331,5^0 \qquad (360 - 28,5^0).$$

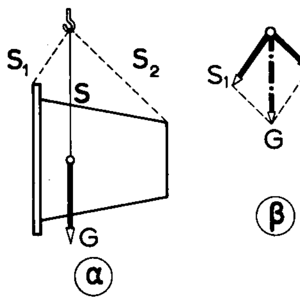
Ὅπως βλέπομε ὁ ὑπολογισμὸς μὲ τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις εἶναι ὀλίγον περίπλοκος. Διὰ τοῦτο εἶναι προτιμότερον νὰ γίνεται σχέδιον τῶν δυνάμεων καὶ νὰ ἐργαζώμεθα μόνον μὲ ὀξείας γωνίας.

Ἀνάλυσις.

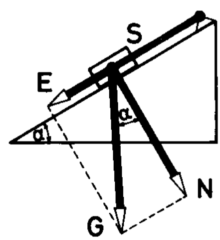
Ὅπως συνθέτομε δύο δυνάμεις εἰς μίαν συνισταμένην, ἠμποροῦμε ἐπίσης, ὅπως εἴδαμε, καὶ νὰ ἀναλύσωμε μίαν δύναμιν εἰς δύο συνιστώσας. Οἱ λόγοι διὰ τοὺς ὁποίους γίνεται ἡ ἀνάλυσις εἶναι συνήθως οἱ ἑξῆς:

α) Θέλομε νὰ ἀντικαταστήσωμε μίαν δύναμιν μὲ δύο νέας κατὰ τρόπον, ὥστε αἱ δύο μαζὶ νὰ παρέχουν τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα, ὅπως ἡ ἀρχικὴ δύναμις. Παράδειγμα: Ἕνα σῶμα ἠμπορεῖ νὰ ἀναρτηθῇ μὲ ἕνα συρματόσχοινον S, ποὺ ἀναλαμβάνει ὅλο τὸ βάρος G τοῦ σώματος [σχ. 3·2δ(α)]. Διὰ νὰ μὴ ἐμφανίζῃ ὅμως ἀστάθειαν τὰ ἀναρτοῦμε ἀπὸ τὰ ἄκρα του μὲ δύο συρματόσχοινα. Μὲ τὴν ἀνάλυσιν τῆς δυνάμεως G εἰς τὰς δύο συνιστώσας της S_1 καὶ S_2 εὑρίσκομε τὰς δυνάμεις ποὺ ἀναλαμβάνουν τὰ δύο συρματόσχοινα [σχ. 3·2δ(β)].

β) Μᾶς δίδεται μία δύναμις P μὲ δεδομένην διεύθυνσιν καὶ θέλομε νὰ εὕρωμε ποῖον τμῆμα της ἐνεργεῖ κατὰ μίαν ἄλλην διεύθυνσιν, ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν θὰ πρέπει ἡ P νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας P_x καὶ P_y, ὥστε ἡ P_x νὰ ἐνεργῇ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ποὺ θέλομε, ἡ δὲ P_y νὰ εἶναι κάθετος εἰς αὐτήν, ὥστε νὰ μὴ ἔχῃ ἐπίδρασιν. Παράδειγμα: Μὲ ποίαν δύναμιν πιέζει τὸ σῶμα βάρους G, ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω εἰς ἕνα κεκλιμένον ἐπίπεδον, τὸ δάπεδόν του (σχ. 3 · 2 ε); Ἀναλύομε τὴν δύναμιν G εἰς δύο συνιστώσας, τὴν N κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ τὴν E παράλληλον πρὸς αὐτό. Ἡ N εἶναι ἡ ζητουμένη δύναμις.



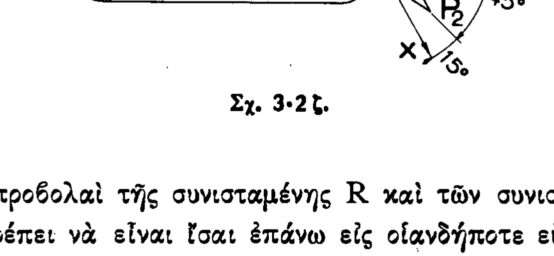
.Σχ. 3·2 δ.



Σχ. 3·2 ε.

Παράδειγμα ἀναλύσεως δύο συντρεχουσῶν δυνάμεων.

Τὸ παράδειγμα 3 τῆς παραγράφου 2 · 2 νὰ λυθῇ ἀναλυτικῶς (σχ. 3 · 2 ζ).



Σχ. 3·2 ζ.

Λύσις.

Αἱ προβολαὶ τῆς συνισταμένης R καὶ τῶν συνιστωσῶν P_1 καὶ P_2 πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι ἐπάνω εἰς οἱανδήποτε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου. Διὰ νὰ φθάσωμε ταχέως εἰς τὸ ἀποτέλεσμα, ἐκλέγομε πρῶτον τὸν ἄξονα Oy, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπάνω εἰς τὴν συνιστῶσαν P_2, ὁπότε ἡ προβολὴ τῆς P_2 ἐπάνω εἰς τὸν Oy εἶναι μηδέν.

Ἑπομένως, συμφώνως πρὸς ὅσα ἐλέχθησαν ἀνωτέρω:

$$P_1 \text{συν}\, 15^0 = R\, \text{συν} 45,^0\; P_1 = R\, \frac{\text{συν}\; 45^0}{\text{συν}\; 15^0} = 200\, \frac{0,707}{0,966} =$$

146,3 kp.

Ἐν συνεχείᾳ ἐκλέγομε τὸν ἄξονα Ox, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπάνω εἰς τὴν συνιστῶσαν P_1, ἑπομένως ἡ προβολὴ τῆς P_1 ἐπάνω εἰς τὸν Ox εἶναι μηδέν.

Αἱ προβολαὶ τῆς συνισταμένης καὶ τῶν συνιστωσῶν ἐπάνω εἰς τὸν Ox μᾶς δίδουν:

$$P_2\, \text{συν}\; 15^0 = R\; \text{συν}\; 60^0,\; P_2 = R\, \frac{\text{συν}\, 60^0}{\text{συν}\, 15^0} = 200\, \frac{0,500}{0,966} = 103,5\,\text{kp.}$$

3·3 Πολλαὶ συντρέχουσαι δυνάμεις.

Ἀφοῦ ἐξητάσαμε τὴν σύνθεσιν καὶ ἀνάλυσιν δύο συντρεχουσῶν δυνάμεων, ἄς ἴδοῦμε τώρα πῶς γίνεται ἡ σύνθεσις καὶ ἡ ἀνάλυσις πολλῶν συντρεχουσῶν δυνάμεων.

Σύνθεσις.

Ἔστω ὅτι ἔχομε πολλὰς δυνάμεις, ποὺ ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς A (a, b). Τὸ μέγεθός των P καὶ ἡ διεύθυνσίς των α εἶναι γνωστὰ (σχ. 3·3α).

Ζητεῖται ἡ συνισταμένη των.

Διὰ νὰ εὕρωμε τὴν συνισταμένην, ἀναλύομε κάθε μίαν ἀπὸ τὰς δυνάμεις ποὺ μᾶς δίδονται εἰς τὰς συνιστώσας των κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y ἑνὸς ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων xOy.

$$P_{1x} = P_1\, \text{συν}\, \alpha_1 \qquad P_{1y} = P_1\, \eta\mu\alpha_1$$

$$P_{2x} = P_2\, \text{συν}\, \alpha_2 \qquad P_{2y} = P_2\, \eta\mu\alpha_2$$

$$P_{3x} = P_3\, \text{συν}\, \alpha_3 \qquad P_{3y} = P_3\, \eta\mu\alpha_3$$

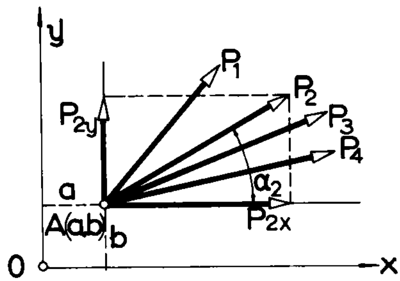
$$P_{4x} = P_4\, \text{συν}\, \alpha_4 \qquad P_{4y} = P_4\, \eta\mu\alpha_4.$$

Ὅλαι αἱ συνιστῶσαι κατὰ τὸν ἄξονα x συντίθενται εἰς τὴν δύναμιν:

$\Sigma x = R_x = \Sigma P \text{ συνα} = P_1 \text{ συνα}_1 + P_2 \text{ συνα}_2 + P_3 \text{ συνα}_3 + P_4 \text{ συνα}_4.$

Κατὰ τὸν ἄξονα y ἀντιστοίχως:

$\Sigma y = R_y = \Sigma P \text{ ημα} = P_1 \text{ ημα}_1 + P_2 \text{ ημα}_2 + P_3 \text{ ημα}_3 + P_4 \text{ ημα}_4.$



Σχ. 3·3 α.

Αἱ δυνάμεις R_x καὶ R_y συντίθενται εἰς τὴν τελικὴν συνισταμένην ἡ ὁποία ἔχει:

Μέγεθος: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

Εὐθεῖαν ἐνεργείας καὶ φοράν: $\text{ημα}_0 = \frac{R_y}{R}$, $\text{συνα}_0 = \frac{R_x}{R}$.

Σημεῖον ἐφαρμογῆς: Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς A ὅλων τῶν δυνάμεων.

Παράδειγμα.

Ἐπάνω εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς ἱστοῦ μιᾶς ἠλεκτρικῆς γραμμῆς δροῦν ὁριζοντίως λόγω τῶν καλωδίων αἱ δυνάμεις τοῦ σχήματος 3 · 3 β.

Ζητεῖται ἡ συνισταμένη των.

Λύσις.

$\Sigma x = R_x = 100 \text{ συν } 20^0 - 300 \text{ συν } 50^0 - 200 \text{ συν } 60^0 = 100 \times 0{,}940 - 300 \times 0{,}643 - 200 \times 0{,}500 = -198{,}9$ kp, δηλαδὴ μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὰ ἀριστερά.

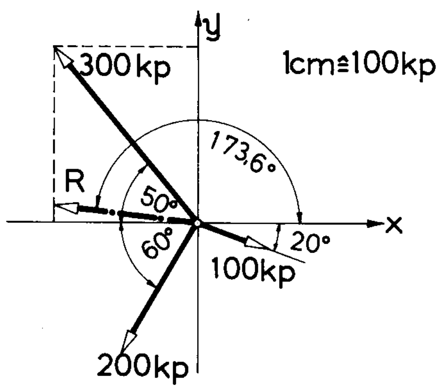
$$\Sigma y = R_y = -100\,\eta\mu\,20^0 + 300\,\eta\mu\,50^0 - 200\,\eta\mu\,60^0 = -100 \times 0{,}342 + 300 \times 0{,}766 - 200 \times 0{,}866 = +22{,}4 \text{ kp},$$

δηλαδὴ μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὰ ἄνω.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{198{,}9^2 + 22{,}4^2} = 200{,}1 \text{ kp}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha_0 = \frac{-198{,}9}{200{,}1} = -0{,}994, \quad \ddot{\alpha}\rho\alpha\ \alpha_0 = 173{,}6^0 \quad \mathring{\eta} \quad 186{,}4^0$$

$$\eta\mu\alpha_0 = \frac{22{,}4}{200{,}1} = 0{,}111 \text{ ὁπότε } \alpha_0 = 6{,}4^0 \quad \mathring{\eta} \quad 173{,}6^0.$$



Σχ. 3·3 β.

Ἑπομένως ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ συνισταμένη μὲ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα τῶν x, εἶναι $173{,}6^0$.

Συνθήκη ἰσορροπίας.

Πολλαὶ συντρέχουσαι δυνάμεις ἰσορροποῦν, ὅταν ἡ συνισταμένη των ἰσοῦται μὲ μηδὲν ($R = 0$).

Ἀλλὰ εἴδομεν ὅτι $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν τὸ R ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν, ὅταν καὶ *μόνον* ὅταν συγχρόνως καὶ τὸ Σx καὶ τὸ Σy ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν.

Ἐπομένως πολλαὶ συντρέχουσαι δυνάμεις ἰσορροποῦν, ἐὰν πληροῦται ἡ σχέσις:

$$R = 0 \quad \text{ἢ} \quad \begin{aligned} \Sigma x &= 0 \\ \Sigma y &= 0. \end{aligned}$$

Ἐὰν εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ σχήματος 3 · 3 β εἴχαμε καὶ τέταρτον καλώδιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ ἱστοῦ δύναμιν ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπολογισθεῖσαν συνισταμένην R, τότε αἱ τέσσαρες δυνάμεις θὰ εὑρίσκοντο εἰς ἰσορροπίαν, διότι:

$$R = 0 \text{ ἢ } \Sigma x = 0 \text{ καὶ } \Sigma y = 0.$$

Τοῦτο θὰ ἐσήμαινε ὅτι ὁ ἱστὸς δὲν ὑφίσταται καταπόνησιν.

Παράδειγμα.

Τρία φορτία B_1, B_2 καὶ B_3 ἀναρτῶνται ἀπὸ ἕνα συρματόσχοινον, τὸ ὁποῖον περιβάλλει δύο τροχαλίας (σχ. 3 · 3 γ).

Γνωρίζομε τὸ βάρος τῶν δύο φορτίων $B_1 = 34$ kp, $B_3 = 30$ kp καὶ ὅτι τὰ τρία φορτία εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν, ὅταν ἡ γωνία $\beta = 30^0$.

Ζητοῦνται Ἡ γωνία α καὶ τὸ βάρος B_2.

Λύσις.

Διὰ νὰ μένῃ ὁ κόμβος O ἀκίνητος, σημαίνει ὅτι αἱ τρεῖς δυνάμεις B_1, B_2 καὶ B_3, ποὺ διέρχονται ἀπὸ αὐτόν, εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν.

Εἴδαμε ὅμως ὅτι πολλαὶ συντρέχουσαι δυνάμεις ἰσορροποῦν ὅταν:

$$\Sigma x = 0 \qquad \Sigma y = 0.$$

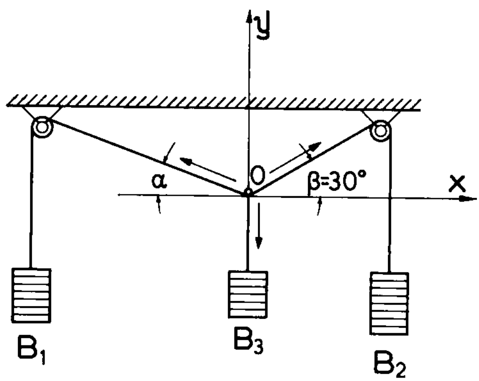
Λαμβάνομε ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων μὲ ἀρχὴν τὸ O καὶ μὲ τὸν ἄξονα Ox ὁριζόντιον. Ἐφαρμόζομε τὰς ἐξισώσεις ἰσορροπίας:

$$\Sigma x = 0 \qquad B_2 \,\sigma\upsilon\nu\, 30^0 - B_1 \,\sigma\upsilon\nu\alpha = 0. \qquad (1)$$

$$\Sigma y = 0 \qquad B_2 \,\eta\mu\, 30^0 + B_1 \,\eta\mu\alpha - B_3 = 0. \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εὕρωμε τὴν γωνίαν α, πολλαπλασιάζομε τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ $-\eta\mu\, 30^0$ καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ $\sigma\upsilon\nu\, 30^0$ καὶ προσθέτομε κατὰ μέλη:

$$B_1 \,(\eta\mu\, 30^0 \,\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\, 30^0 \,\eta\mu\alpha) = B_3 \,\sigma\upsilon\nu\, 30^0.$$



Σχ. 3·3 γ.

Ἡ ἐντὸς παρενθέσεως παράστασις ἰσοῦται μὲ $\eta\mu\,(\alpha + 30)$,

$$\text{ἄρα } \eta\mu\,(\alpha + 30) = \frac{B_3}{B_1}\,\sigma\upsilon\nu\, 30^0 = \frac{30}{34} \times 866 = 0{,}764$$

καὶ ἑπομένως $\alpha + 30^0 = 50^0$ καὶ $\alpha = 20^0$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομε:

$$B_2 = B_1 \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\, 30^0} = 34 \frac{\sigma\upsilon\nu\, 20^0}{\sigma\upsilon\nu\, 30^0} = 34 \frac{0{,}940}{0{,}866} = 36{,}9\,\text{kp}.$$

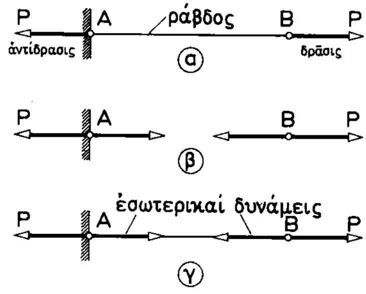
3·4 Συνθῆκαι ἰσορροπίας συστήματος δύο ῥάβδων.

Ἐφελκυόμεναι καὶ θλιβόμεναι ῥάβδοι.

Ἡ ῥάβδος εἶναι τὸ ἁπλούστερον στοιχεῖον κατασκευῆς διὰ τὴν ἀνάληψιν δυνάμεως καὶ μετάδοσίν της εἰς τὴν στήριξιν. Αἱ ῥάβδοι συνδέονται μεταξύ των πάντοτε δι' ἀρθρώσεων καὶ σχηματίζουν φορεῖς, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται *δικτυώματα*. Αἱ θέσεις ὅπου συνδέονται δύο ἢ περισσότεροι ράβδοι καλοῦνται *κόμβοι*.

Ἡ ράβδος ἠμπορεῖ νὰ ἀναλάβῃ δύναμιν μόνον κατὰ τὸν ἄξονά της. Ἡ δύναμις αὐτὴ εἴτε ἐφελκύει τὴν ράβδον (*ἐφελκυομένη ράβδος*), εἴτε τὴν θλίβει (*θλιβομένη ράβδος*).

Ἔστω ὅτι ἡ ράβδος ΑΒ [σχ. 3 · 4 α (α)] στηρίζεται μὲ ἄρθρωσιν εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἕλκεται εἰς τὴν θέσιν Β ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν δύναμιν Ρ.



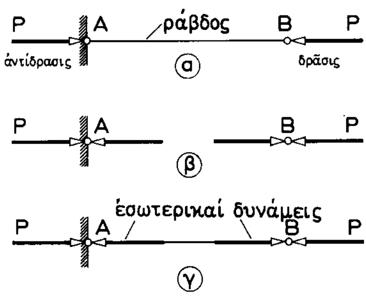
Σχ. 3·4 α.

Διὰ νὰ παραμείνῃ ὁ κόμβος Β εἰς ἰσορροπίαν, πρέπει ἡ ράβδος ΑΒ νὰ ἀσκῇ ἐπάνω του δύναμιν ἴσην μὲ τὴν Ρ καὶ ἀντίθετόν της [σχ. 3 · 4 α (β)]. Ἡ δύναμις Ρ φθάνει μέσω τῆς ράβδου ΑΒ εἰς τὸ Α. Διὰ νὰ μείνῃ ἡ στήριξις Α ἀκίνητος, πρέπει νὰ ἀναπτυχθῇ ἀντίδρασις ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς Ρ [σχ. 3 · 4 α (β)]. Καὶ ἡ ἀντίδρασις ἀποτελεῖ ἐξωτερικὴν δύναμιν. Διὰ νὰ φθάσῃ ὅμως ἡ δύναμις Ρ ἀπὸ τὸ Β εἰς τὸ Α διέρχεται διὰ μέσου τῆς ράβδου ΑΒ, τὴν ὁποίαν καταπονεῖ εἰς ἐφελκυσμόν.

Διὰ νὰ τὸ κατανοήσωμε τοῦτο καλύτερον, ἂς φαντασθοῦμε ὅτι μὲ τὸ ἀριστερόν μας χέρι κρατούμεθα ἀπὸ τὸ Α, ἐνῶ μᾶς ἕλκουν ἀπὸ τὸ ἄλλο μὲ δύναμιν Ρ. Διὰ νὰ φθάσῃ ἡ δύναμις Ρ ἀπὸ τὸ δεξί μας χέρι (κόμβος Β) εἰς τὸ ἀριστερὸν (κόμβος Α) πρέπει νὰ περάσῃ μέσα ἀπὸ τὸ σῶμα μας (ράβδος ΑΒ). Οἱ πλάτες μας τείνουν νὰ ἀνοίξουν. Τὸ σῶμα μας καταπονεῖται εἰς ἐφελκυσμόν.

Τὸ σχῆμα 3·4α(α) εἶναι ἀπολύτως ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σχῆμα 3·4α(β). Ἁπλῶς εἰς τὸ δεύτερον ἀντὶ νὰ τεθῇ ἡ ράβδος AB ἐσχεδιάσθησαν αἱ δυνάμεις, ποὺ ἀσκεῖ ἡ ράβδος ἐπάνω εἰς τοὺς κόμβους A καὶ B. Αἱ δυνάμεις αὐταὶ καλοῦνται *ἐσωτερικαί*. Συνήθως ἀντὶ τῆς σχεδιάσεως τοῦ σχήματος 3·4α(β) προτιμᾶται ἡ σχεδίασις τοῦ σχήματος 3·4α(γ), ὅπου, ἐκτὸς ἀπὸ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις καὶ τὰς δύο ἐσωτερικάς, ποὺ ἀναπτύσσονται εἰς κάθε ράβδον, δεικνύεται καὶ ἡ ράβδος. Εἰς τὴν ἐφελκυομένην ράβδον αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἔχουν φορὰν ἀπὸ τὸν κόμβον πρὸς τὸ μέσον τῆς ράβδου.

Ἐὰν ἡ δύναμις P θλίβῃ ἀντὶ νὰ ἕλκῃ τὴν ράβδον AB, τότε αἱ δυνάμεις, ποὺ ἀσκεῖ ἡ ράβδος ἐπάνω εἰς τοὺς κόμβους A καὶ B, διευθύνονται πρὸς τοὺς κόμβους (σχ. 3·4β). Ἡ ράβδος καταπονεῖται εἰς θλῖψιν. Εἰς μίαν ράβδον, ποὺ ὑφίσταται θλῖψιν, αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἔχουν φορὰν ἀπὸ τὸ μέσον της πρὸς τὸν κόμβον.



Σχ. 3·4 β.

Συμβολισμοί.

Διὰ τὰ ἑπόμενα εἰσάγονται οἱ ἀκόλουθοι συμβολισμοί:
Διὰ τοὺς κόμβους: οἱ λατινικοὶ ἀριθμοὶ I, II, III,....
Διὰ τὰς ράβδους: οἱ ἀραβικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3,....

Διὰ τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις τῶν ράβδων: τὸ λατινικὸν γράμμα S μὲ δείκτην τὸν ἀριθμὸν τῆς ράβδου.

Διὰ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις καὶ τὰς ἀντιδράσεις κεφαλαῖα λατινικὰ γράμματα.

Παράδειγμα.

Εἰς τὸν κόμβον I τῶν ράβδων 1 καὶ 2 δρᾶ ἡ δύναμις P = 3 000 kp (σχ. 3 · 4 γ).

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνιστῶσαι τῆς δυνάμεως P κατὰ τοὺς ἄξονας τῶν ράβδων 1 καὶ 2. Ποίας δυνάμεις πρέπει νὰ ἀσκήσουν αἱ ράβδοι 1 καὶ 2 ἐπὶ τοῦ κόμβου I διὰ νὰ μένῃ εἰς ἰσορροπίαν;

Λύσις.

α) *Ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως P.*

Γραφική.

Ἡ δύναμις P σχεδιάζεται ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα. Ἀπὸ τὴν ἀρχήν της A′ ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν ράβδον 1 καὶ ἀπὸ τὸ πέρας της B′ παράλληλος πρὸς τὴν ράβδον 2. Αἱ δύο παράλληλοι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον I′. Αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι τῆς P εἶναι αἱ:

$$A'I' = P_1 = 3\,300\,\text{kp} \quad \text{καὶ} \quad B'I' = P_2 = 4\,650\,\text{kp}.$$

Ἀναλυτική.

Τὸ δυναμοπολύγωνον A′B′I′ καὶ τὸ τρίγωνον τῶν ράβδων ABI εἶναι ὅμοια. Ἑπομένως ἔχομε:

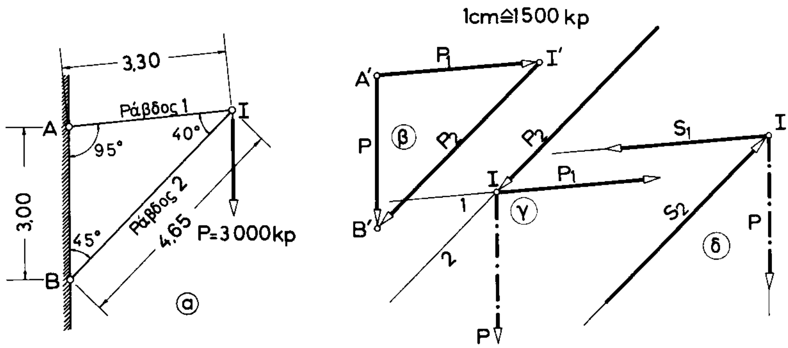
$$\frac{P_1}{P} = \frac{3,30}{3,0}, \text{ ἐκ τῆς ὁποίας } P_1 = 1,10\,P = 3\,300\,\text{kp}.$$

$$\frac{P_2}{P} = \frac{4,65}{3,0}, \text{ ἐκ τῆς ὁποίας } P_2 = 1,55\,P = 4\,650\,\text{kp}.$$

Ὑπελογίσθησαν κατὰ τὸν ἁπλοῦν αὐτὸν τρόπον ἀναλυτικῶς τὰ μεγέθη τῶν συνιστωσῶν. Ὁ ἀναλυτικὸς ὑπολογισμὸς τῆς φορᾶς των ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα ἀναλύσεως τῆς παραγράφου 3·2. Γίνεται ὅμως πολὺ ἁπλούστερον καὶ ταχύτερον μὲ τὸ σκαρίφημα τοῦ δυναμοπολυγώνου [σχ. 3·4γ (β)].

β) Δυνάμεις τῶν ῥάβδων ἐπάνω εἰς τοὺς κόμβους.

Αἱ ὑπολογισθεῖσαι συνιστῶσαι εἶναι αἱ δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν λόγῳ τῆς P ἀπὸ τὸν κόμβον εἰς τὰς ῥάβδους [σχ. 3·4γ (γ)]. Διὰ νὰ μείνῃ ὁ κόμβος I εἰς ἰσορροπίαν, θὰ πρέπει αἱ ῥάβδοι νὰ ἀσκήσουν ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις [σχ. 3·4γ (δ)]



Σχ. 3·4 γ.

ἐπάνω εἰς τοὺς κόμβους, δηλαδὴ τὰς δυνάμεις $S_1 = P_1$ καὶ $S_2 = P_2$. Ἀπὸ τὸ σχῆμα φαίνεται ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ δύναμις S_1 ἔχει φορὰν ἀπὸ τὸν κόμβον πρὸς τὸ μέσον, ἄρα ἡ ῥάβδος 1 εἶναι ἐφελκυομένη, ἐνῷ ἡ S_2 ἔχει φορὰν πρὸς τὸν κόμβον I, ἄρα ἡ ῥάβδος 2 εἶναι θλιβομένη.

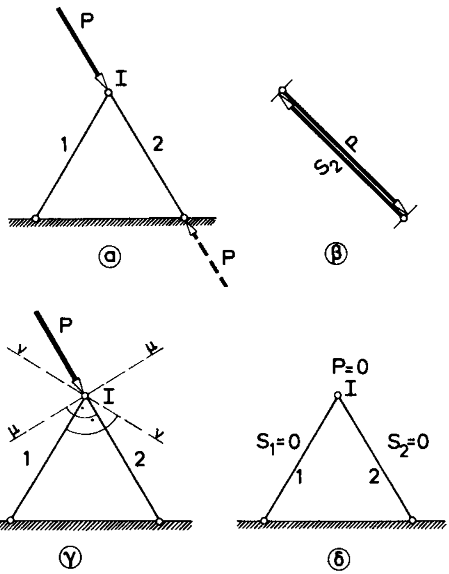
Εἰδικαὶ περιπτώσεις.

Ἕνα σύστημα ἀπὸ δύο ῥάβδους φορτίζεται εἰς τὸν κόμβον I μὲ δύναμιν P. Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς P συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῆς ῥάβδου 2 (σχ. 3·4δ).

Ζητοῦνται αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ῥάβδων 1 καὶ 2.

Λύσις.

Ἠμποροῦμε νὰ δώσωμε εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν δύο λύσεις, μίαν γραφικὴν καὶ μίαν ἀναλυτικήν.



Σχ. 3·4 δ.

α) Γραφική.

Τὸ δυναμοπολύγωνον περιορίζεται εἰς μίαν γραμμὴν [σχ. 3 · 4δ (β)] $P = S_2$. Ἐπειδὴ ἐξετάζεται ἡ ἰσορροπία τοῦ κόμβου I, ἡ S_2 ἔχει ἀντίθετον διεύθυνσιν τῆς P.

Ἡ ῥάβδος 2 θλίβεται. Ἂν καὶ ἡ ῥάβδος 1 δὲν ἀναλαμβάνει δύναμιν, ἐν τούτοις χρειάζεται διὰ τὴν διατήρησιν τῆς μορφῆς τῆς κατασκευῆς.

β) Ἀναλυτικὴ [σχ. 3 · 4δ (γ)].

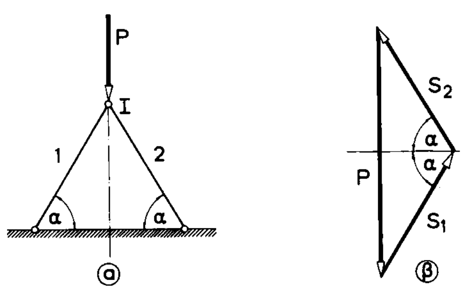
Ὁ κόμβος I ἰσορροπεῖ. Ἄρα, ἐπάνω εἰς οἱανδήποτε εὐθεῖαν ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸν κόμβον I, αἱ συνιστῶσαι τῆς δυνάμεως P καὶ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν μμ, ποὺ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς 2, αἱ συνιστῶσαι τῆς P καὶ τῆς S_2 εἶναι μηδέν. Ἄρα $S_1 = 0$. Ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν νν, ποὺ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς I, ἡ συνιστῶσα τῆς S_1 εἶναι μηδέν, ἐνῶ αἱ συνιστῶσαι τῆς P καὶ τῆς S_2 εἶναι ἴσαι. Ἄρα $S_2 = P$.

Ἐὰν ἡ P ἦτο μηδέν, τότε καὶ ἡ $S_2 = 0$ [σχ. 3·4δ'(δ)].

Ἐὰν τὸ σύστημα τῶν δύο ράβδων σχηματίζῃ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ φορτίζεται μὲ τὴν δύναμιν P κατὰ τὸν ἄξονα συμμετρίας του, ἀποδεικνύεται εὐκόλως, π.χ. ἀπὸ τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον (σχ. 3·4ε), ὅτι:

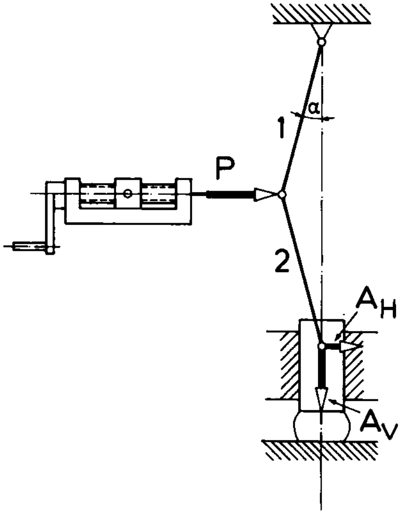
$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2\,\eta\mu\alpha}.$$

Διὰ μικρὰς γωνίας α, τὸ ημα γίνεται πολὺ μικρὸν καὶ τὸ $S_1 = S_2$ πολὺ μεγάλον. Πρακτικὴν ἐφαρμογὴν αὐτοῦ ἔχομε εἰς



Σχ. 3·4 ε.

τὸ πιεστήριον διὰ χιαστῶν μοχλῶν (σχ. 3·4ζ), ὅπου μὲ μικρὰν δύναμιν P προκαλοῦνται μεγάλαι δυνάμεις εἰς τὸ ἔμβολον τοῦ πιεστηρίου.



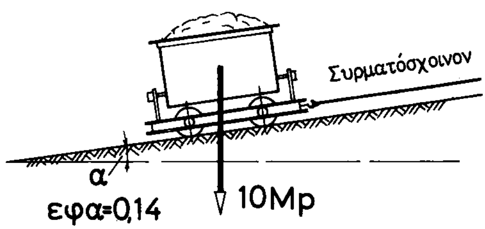
Σχ. 3·4 ζ.

3·5 Ἀσκήσεις.

Α) Αἱ ἀσκήσεις 1 ἕως 8 τῆς παραγράφου 2·4 νὰ λυθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῶν προβολῶν (ἀναλυτικῶς)

Β) Αἱ κατωτέρω ἀσκήσεις νὰ λυθοῦν γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς.

1) Ἕνα ὄχημα συνολικοῦ βάρους 10 Mp σταθμεύει εἰς μίαν ὁδὸν



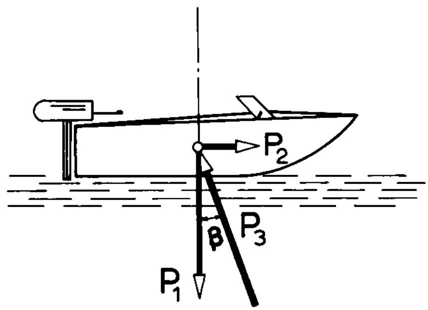
Σχ. 3·5 α.

ποὺ ἔχει κλίσιν 14% (σχ. 3·5 α). Ποῖαι εἶναι αἱ συνιστῶσαι τοῦ βάρους του καθέτως καὶ παραλλήλως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ὁδοῦ;

Ἀπάντησις: N = 9 900 kp. E = 1 390 kp

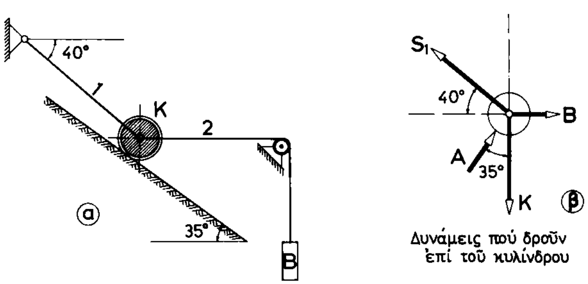
2) Εἰς ἕνα ταχὺ σκάφος (κρὶς - κρὰφτ) δροῦν τὸ ἴδιον βάρος του $P_1 = 500$ kp, ἡ ὤθησις τῆς ἕλικος $P_2 = 200$ kp ὁριζοντίως πρὸς τὰ ἐμπρὸς καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος $P_3 = 550$ kp πρὸς τὰ ἄνω καὶ ὀπίσω ὑπὸ γωνίαν $\beta = 20^0$ ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον (σχ. 3·5β). Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ συνισταμένη R καὶ β) ἡ γωνία α, ποὺ σχηματίζει μὲ τὴν ὁριζοντίαν.

Ἀπάντησις: α) $R = 20{,}8$ kp. β) $\alpha = 55^0$



Σχ. 3·5 β.

3) Κύλινδρος Κ βάρους 100 kp συγκρατεῖται διὰ τοῦ σχοινίου 1 ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ συγκρατεῖ διὰ τοῦ σχοινίου 2 βάρος $B = 50$ kp (σχ. 3·5γ).

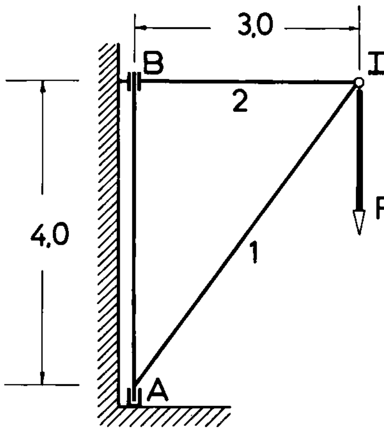


Σχ. 3·5 γ.

Ζητεῖται ἡ δύναμις ποὺ ἀσκεῖται εἰς τὸ σχοινίον 1 καὶ ἡ ἀντίδρασις Α τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Ἀπάντησις: $S_1 = 98{,}7$ kp. $A = 44{,}6$ kp

4) Ὁ περιστρεφόμενος γερανὸς τοῦ σχήματος 3·5δ ἔχει ἀνυψωτικὴν ἱκανότητα $P = 5000$ kp.



Σχ. 3·5δ.

Ζητοῦνται α) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις, ποὺ ἀναπτύσσονται εἰς τὰς ράβδους 1 καὶ 2. β) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὴν θέσιν Α ἡ δύναμις τῆς ράβδου 1 εἰς μίαν κατακόρυφον συνιστῶσαν A_v καὶ μίαν ὁριζοντίαν A_H.

Ἀπάντησις: α) $S_1 = -6\,250$ kp (θλῖψις), $S_2 = +3\,750$ kp (ἐφελκυσμός), β) $A_v = 5\,000$ kp πρὸς τὰ κάτω $A_H = 3\,750$ kp πρὸς τὰ ἀριστερὰ

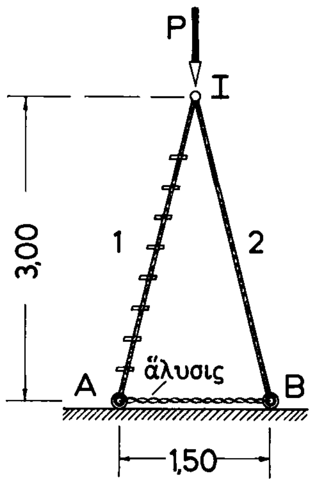
5) Ἡ πτυσσομένη κλῖμαξ τοῦ σχήματος 3·5ε φορτίζεται εἰς τὴν κορυφήν της μὲ κατακόρυφον φορτίον $P = 90$ kp.

Ζητοῦνται α) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 1 καὶ 2. β) Ἡ ἐφελκυστικὴ δύναμις ποὺ ἀναλαμβάνει ἡ ἅλυσις.

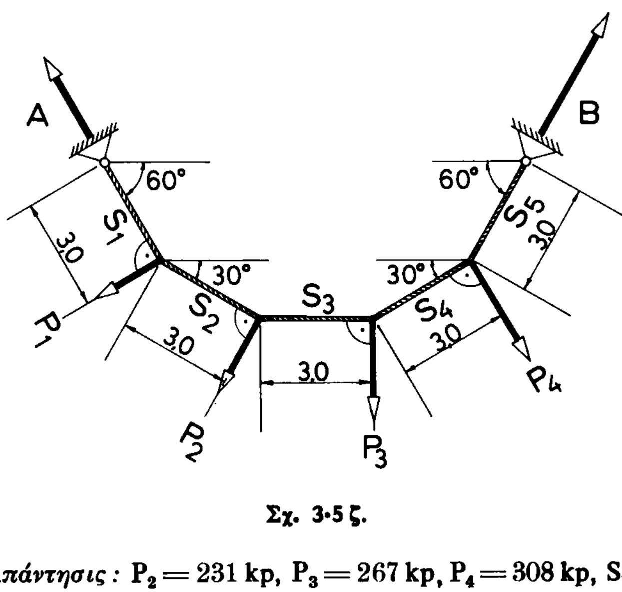
Ἀπάντησις: α) $S_1 = S_2 = -46{,}5$ kp (θλῖψις), β) 11,3 kp

6) Ἐπάνω εἰς ἕνα σχοινί, ἀνηρτημένον ἀπὸ τὰ ἄκρα του Α καὶ Β, δροῦν αἱ δυνάμεις P_1, P_2, P_3 καὶ P_4 (σχ. 3·5ζ), τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας καὶ ἡ φορά. Ἐπίσης εἶναι γνωστὸν τὸ μέγεθος τῆς $P_1 = 200$ kp καὶ ἡ μορφὴ τοῦ σχοινίου ἀπὸ τὴν φόρτισιν τῶν τεσσάρων δυνάμεων.

Ζητοῦνται τὰ μεγέθη τῶν P_2, P_3 καὶ P_4 καὶ αἱ τάσεις τοῦ σχοινίου S_1, S_2, S_3, S_4 καὶ S_5.



Σχ. 3·5 ε.

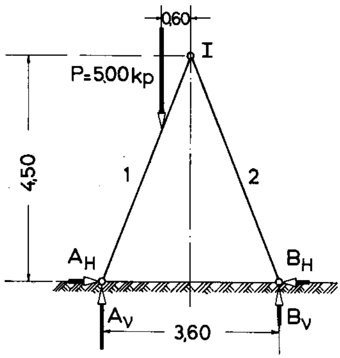


Σχ. 3·5 ζ.

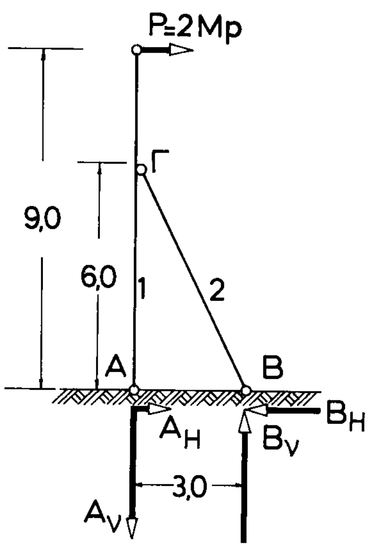
Ἀπάντησις : $P_2 = 231$ kp, $P_3 = 267$ kp, $P_4 = 308$ kp, $S_1 =$ ...

346 kp, $S_2 = 400$ kp, $S_3 = 462$ kp, $S_4 = 534$ kp, $S_5 = B = 616$ kp

7) Τὸ ἰκρίωμα τοῦ σχήματος 3 · 5 η φορτίζεται μὲ κατακόρυφον



Σχ. 3·5 η.



Σχ. 3·5 θ.

φορτίον P = 500 kp εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν 0,60 m ἀπὸ τὴν κορυφὴν I.

Ζητοῦνται α) αἱ ἀντιδράσεις A_v καὶ A_H, B_v καὶ B_H, καὶ β) ἡ ἐσωτερικὴ δύναμις τῆς ράβδου 2.

Ἀπάντησις: α) $A_v = 333$ kp. $A_H = 67$ kp. $B_v = 167$ kp. $B_H =$ 67 kp. β) $S_2 = -180$ kp (θλῖψις)

8) Ὁ κατακόρυφος ἱστὸς τοῦ σχήματος 3·5 θ φορτίζεται εἰς τὴν κορυφὴν μὲ φορτίον $P = 2$ Mp καὶ κρατεῖται εἰς τὴν θέσιν του μὲ τὴν ἀντηρίδα ΒΓ.

Ζητοῦνται α) αἱ ἀντιδράσεις A_v καὶ A_H, B_v καὶ B_H. β) Ἡ ἐσωτερικὴ δύναμις τῆς ράβδου 2.

Ἀπάντησις: α) $A_v = 6$ Mp. $A_H = 1$ Mp (ἀπαιτεῖται ἀγκύρωσις τῆς στηρίξεως Α). $B_v = 6$ Mp. $B_H = 3$ Mp. β) $S_2 = -6{,}71$ Mp (θλῖψις)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΙ ΤΥΧΟΥΣΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου.

4·1 Σύνθεσις καὶ ἰσορροπία.

Τὴν γραφικὴν σύνθεσιν πολλῶν συνεπιπέδων δυνάμεων ἠμποροῦμε νὰ κάνωμε μὲ τὴν μέθοδον τοῦ *σχοινοπολυγώνου*.

Πρὸς τοῦτο σχεδιάζομε πρῶτα τὴν γενικὴν διάταξιν τῶν δυνάμεων [σχ. 4·1α(α)]. Ἐν συνεχείᾳ ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα τῶν δυνάμεων σχεδιάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον 0_0, 1_0, 2_0, 3_0 [σχ. 4·1α(β)]. Ἡ συνδετήριος γραμμὴ μεταξὺ τῆς ἀρχῆς τῆς πρώτης δυνάμεως 0_0 καὶ τοῦ τέλους τῆς τελευταίας 3_0 εἶναι ἡ συνισταμένη R. Ἀπὸ τὸ δυναμοπολύγωνον λαμβάνομε ἑπομένως τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν τῆς συνισταμένης. Ἐὰν ὅλαι αἱ δυνάμεις εἶχον τὸ ἴδιον σημεῖον ἐφαρμογῆς, τὸ πρόβλημα θὰ εἶχε λυθῆ, ὅπως ἠμποροῦμε εὔκολα νὰ ἴδοῦμε, διότι αὐτὸ τὸ σημεῖον θὰ ἦτο καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης. Ὅταν ὅμως αἱ δυνάμεις εἶναι *τυχοῦσαι*, τότε πρέπει νὰ εὕρωμε καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ἐπάνω εἰς τὸ σῶμα.

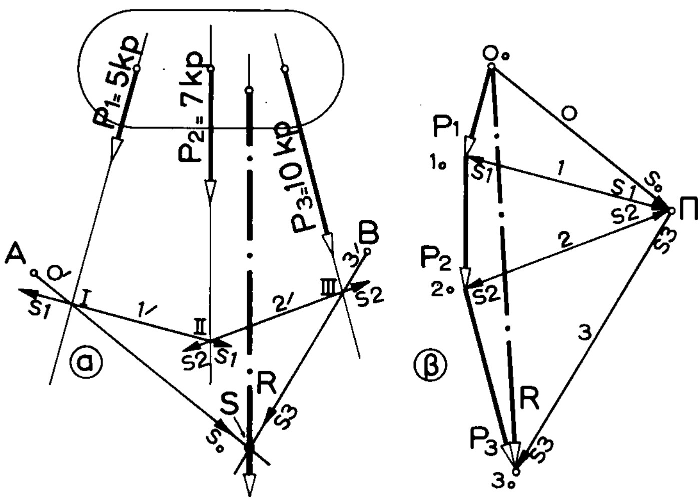
Διὰ νὰ εὕρωμε τὸ σημεῖον αὐτὸ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομε ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον Π [σχ. 4·1α(β)] ἐκτὸς τοῦ δυναμοπολυγώνου. Τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται *πόλος*. Τὸν πόλον αὐτὸν συνδέομε μὲ τὰς *ἀκμὰς* τοῦ δυναμοπολυγώνου διὰ τῶν γραμμῶν 0, 1, 2, 3. Αἱ γραμμαὶ αὐταὶ καλοῦνται ***πολικαὶ ἀκτῖνες***.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ σχοινοπολυγώνου λαμβάνεται ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον Ι τῆς εὐθείας ἐνεργείας τῆς δυνάμεως P_1 [σχ. 4·1α(α)]. Ἀπὸ αὐτὸ φέρομε εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς πολικὰς ἀκτῖνας 0 καὶ 1 τὰς 0′ καὶ 1′.

Ἡ εὐθεῖα 1′ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς δυνάμεως P_2 εἰς τὸ σημεῖον II.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον II φέρομε τὴν εὐθεῖαν 2′ παράλληλον πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα 2, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς δυνάμεως P_3 εἰς τὸ III. Τέλος ἀπὸ τὸ σημεῖον III φέρομε τὴν εὐθεῖαν 3′ παράλληλον πρὸς τὴν πολικὴν εὐθεῖαν 3.

Τὸ σημεῖον τομῆς S τῶν δύο ἀκραίων εὐθειῶν τοῦ σχοινοπολυγώνου 0′ καὶ 3′ δίδει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης.



α) Γενικὴ διάταξις τῶν δυνάμεων. β) Δυναμοπολύγωνον.

Σχ. 4·1 α.

Ἀπόδειξις.

Εἰς τὸ σχῆμα 4·1 α (α) κάθε δύναμις ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας καὶ μάλιστα κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε ὅλαι αἱ συνιστῶσαι νὰ συναντῶνται εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον, δηλαδὴ εἰς τὸν πόλον Π. Συνεπῶς ἠμποροῦμε νὰ ἐκλέξωμε τὸ Π ἐντελῶς τυχαίως.

Ἡ δύναμις P_1 ἀναλύεται εἰς τὰς συνιστώσας S_0 καὶ — S_1.

Ἡ δύναμις P_2 ἀναλύεται εἰς τὰς συνιστώσας S_1 καὶ — S_2.

Ἡ δύναμις P_3 ἀναλύεται εἰς τὰς συνιστώσας S_2 καὶ $-S_3$.

Αἱ συνιστῶσαι S_1 καὶ $-S_1$, S_2 καὶ $-S_2$ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίρροποι. Ἐπομένως ἡ μία ἐξουδετερώνει τὴν ἄλλην. Ἀπομένουν αἱ S_0 καὶ S_3, ποὺ δὲν εἶναι παρὰ αἱ συνιστῶσαι τῆς συνισταμένης R.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμεθα εἰς τὸ σχῆμα 4 · 1 α (α).

Ἀναλύομε τὴν δύναμιν:

P_1 πάλιν εἰς τὴν S_0 καὶ $-S_1$

P_2 πάλιν εἰς τὴν S_1 καὶ $-S_2$

P_3 πάλιν εἰς τὴν S_2 καὶ $-S_3$.

Τὴν ἀνάλυσιν αὐτὴν κάνομε κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας τῶν S_1 καὶ $-S_1$ τῶν S_2 καὶ $-S_2$ νὰ συμπίπτουν. Τὸ σημεῖον I, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἡ ἀνάλυσις, τὸ ἐκλέγομε ἐντελῶς τυχαίως.

Αἱ δυνάμεις ὅμως S_1 καὶ $-S_1$, ὡς ἐπίσης καὶ S_2 καὶ $-S_2$, ἐξουδετερώνουν ἡ μία τὴν ἄλλην καὶ ἀπομένουν αἱ συνιστῶσαι S_0 καὶ S_3.

Αὐταὶ ὅμως εἶναι πάλιν αἱ συνιστῶσαι τῆς συνισταμένης R καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον τομῆς των πρέπει νὰ εἶναι σημεῖον τῆς συνισταμένης (ἴδε παρ. 2 · 2, Ἀνάλυσις).

Στοιχεῖα ὀρθῆς κατασκευῆς τοῦ σχοινοπολυγώνου.

1) Κάθε πλευρὰ τοῦ σχοινοπολυγώνου, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν πολικὴν ἀκτῖνα, εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο δυνάμεων, εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὁποίων καταλήγει ἡ πολικὴ ἀκτὶς εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον.

2) Εἰς κάθε ἀκμὴν I, II, III (σχ. 4 · 1 α) τοῦ σχοινοπολυγώνου ἀντιστοιχεῖ ἕνα τρίγωνον εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δυνάμεις ποὺ συναντῶνται εἰς τὴν ἀκμήν. Π.χ. εἰς τὴν ἀκμὴν II ἀντιστοιχεῖ τὸ τρίγωνον P_2 S_1 S_2.

Τρόπος ἐργασίας διὰ τὴν Γραφικὴν Σύνθεσιν.

1) Σχεδιάζομε τὸ σῶμα μὲ τὰς δυνάμεις ποὺ δροῦν ἐπάνω του.

2) Κατασκευάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον καὶ εὑρίσκομε τὴν συνισταμένην R.

3) Ἐκλέγομε ἐν συνεχείᾳ τυχὸν σημεῖον Π ὡς πόλον καὶ σχεδιάζομε τὰς πολικὰς ἀκτῖνας.

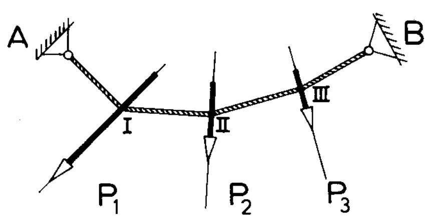
4) Σχεδιάζομε τὸ σχοινοπολύγωνον μὲ ἀρχὴν τυχὸν σημεῖον Ι.

5) Προεκτείνομε τὴν πρώτην καὶ τὴν τελευταίαν πλευρὰν τοῦ σχοινοπολυγώνου μέχρις ὅτου τμηθοῦν.

6) Τὸ σημεῖον τομῆς S δίδει τὴν θέσιν τῆς συνισταμένης R εἰς τὸ σῶμα. Τὸ μέγεθος καὶ ἡ φορά της δίδονται ἀπὸ τὸ δυναμοπολύγωνον.

Σημείωσις: Τὸ πολύγωνον Α, Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, Β τοῦ σχήματος 4·1 β ὀνομάζεται σχοινοπολύγωνον, ἐπειδὴ ἔχει τὴν μορφὴν ἀβαροῦς σχοινίου, τὸ ὁποῖον, ἐὰν στερεωθῇ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ φορτισθῇ μὲ τὰς δυνάμεις P_1, P_2, P_3, θὰ λάβῃ τὴν μορφὴν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ.

Ὅταν σχεδιάζωμε τὸ δυναμοπολύγωνον καὶ τὸ σχοινοπολύγωνον εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψουν τρεῖς περιπτώσεις. Μὲ παραδείγματα θὰ ἐξετάζωμε κατωτέρω τὴν κάθε μίαν περίπτωσιν χωριστά.



Σχ. 4·1 β.

Πρώτη περίπτωσις.

Εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομε *δυναμοπολύγωνον ἀνοικτὸν καὶ σχοινοπολύγωνον ἀνοικτόν.*

Ἀποτέλεσμα: Μία συνισταμένη.

Παράδειγμα.

Ἡ περίπτωσις ποὺ ἐξετάσαμε εἰς τὸ σχῆμα 4·1 α.

Δευτέρα περίπτωσις.

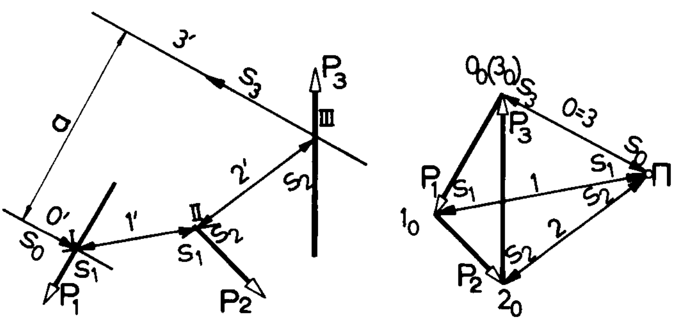
Εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομε :

δυναμοπολύγωνον κλειστόν, σχοινοπολύγωνον ἀνοικτόν.

Ἀποτέλεσμα : Ζεῦγος δυνάμεων.

Παράδειγμα.

Δίδονται αἱ δυνάμεις P_1, P_2, P_3 κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε τὸ δυναμοπολύγωνον ποὺ σχηματίζουν νὰ εἶναι κλειστὸν (σχ. 4 · 1 γ).



Σχ. 4·1 γ.

Ζητεῖται τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεώς των.

Λύσις.

Κατασκευάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον $0_0\ 1_0\ 2_0\ 3_0$ ἀπὸ τὰς δυνάμεις P_1, P_2, P_3. Τὸ δυναμοπολύγωνον εἶναι κλειστόν, ἄρα ἡ συνισταμένη εἶναι μηδέν.

Ἐκλέγομε τὸ τυχὸν σημεῖον Π ὡς πόλον καὶ φέρομε τὰς πολικὰς ἀκτῖνας 0, 1, 2, 3, ὅπου ἡ 3 συμπίπτει μὲ τὴν 0.

Μὲ ἀρχὴν τὸ τυχὸν σημεῖον I τῆς δυνάμεως P_1 σχεδιάζομε τὸ σχοινοπολύγωνον.

Ἡ 0′ τοῦ σχοινοπολυγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν 0 τοῦ δυναμοπολυγώνου.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον I φέρομε τὴν 1′ παράλληλον πρὸς τὴν 1, μέχρις ὅτου τμήση τὴν P_2 εἰς τὸ σημεῖον II.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον II φέρομε τὴν 2′ παράλληλον πρὸς τὴν 2, μέχρις ὅτου τμήση τὴν P_3 εἰς τὸ σημεῖον III.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον III τέλος φέρομε τὴν παράλληλον πρὸς τὴν 3.

Ἡ πρώτη καὶ ἡ τελευταία πλευρὰ τοῦ σχοινοπολυγώνου εἶναι παράλληλοι, ἄρα δὲν ὑπάρχει σημεῖον τομῆς.

Ὅπως ἀπεδείξαμε εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν,

ἡ P_1 ἀναλύεται εἰς τὰς συνιστώσας S_0 καὶ $-S_1$
ἡ P_2 » » » » S_1 καὶ $-S_2$
ἡ P_3 » » » » S_2 καὶ $-S_3$.

Εἰς τὸ σχοινοπολύγωνον αἱ δυνάμεις S_1 καὶ $-S_1$, ὡς καὶ αἱ S_2 καὶ $-S_2$ ἐξουδετερώνουν ἡ μία τὴν ἄλλην, ὁπότε ἀπομένουν αἱ S_0 καὶ S_3, αἱ ὁποῖαι, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ δυναμοπολύγωνον, εἶναι παράλληλοι, ἴσαι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς. Συνεπῶς σχηματίζουν ἕνα ζεῦγος, τοῦ ὁποίου ἡ ροπὴ ἰσοῦται μὲ $M = -S_0 \cdot \alpha$. Τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως $S_0 = S_3$ εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ δυναμοπολύγωνον, εἶναι δηλαδὴ ἡ πλευρὰ $0 = 3$. Μοχλοβραχίων α εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἀκραίων πλευρῶν 0′ καὶ 3′ τοῦ σχοινοπολυγώνου. Εἰς τὸ μέγεθος τῆς ροπῆς M θέτομε πλὴν (—), διότι εἰς τὸ παράδειγμα τὸ ζεῦγος προέκυψε ἀριστερόστροφον.

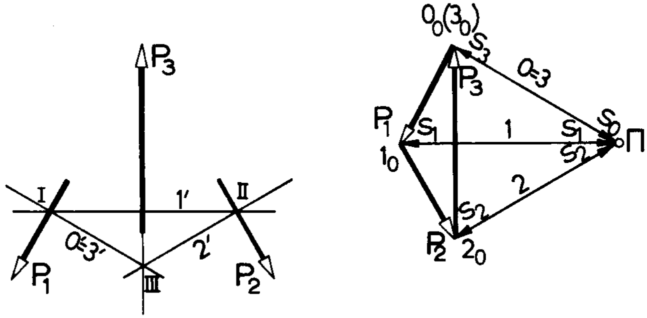
Τρίτη Περίπτωσις.

Εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομε *δυναμοπολύγωνον κλειστόν, σχοινοπολύγωνον κλειστόν.*

Ἀποτέλεσμα : Ἰσορροπία.

Παράδειγμα.

Ἐὰν εἰς τὸ παράδειγμα τῆς προηγουμένης περιπτώσεως μετακινήσωμε τὴν δύναμιν P_3 πρὸς τὰ ἀριστερά οὕτως ὥστε ἡ εὐθεῖα 3′ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν 0′, τότε καὶ αἱ δυνάμεις S_0 καὶ S_3 ἐξουδετερώνουν ἡ μία τὴν ἄλλην (σχ. 4·1 δ). Ἑπομένως ἐπὶ τοῦ



Σχ. 4·1 δ.

σώματος δὲν δρᾶ καμμία δύναμις καὶ καμμία ροπή, ἄρα ὑπάρχει *ἰσορροπία*.

Μὲ τὸ κλειστὸν λοιπὸν δυναμοπολύγωνον μηδενίζονται αἱ δυνάμεις, ἐνῶ μὲ τὸ κλειστὸν σχοινοπολύγωνον μηδενίζονται αἱ ροπαί.

Εἰδικὴν περίπτωσιν τῶν τυχουσῶν δυνάμεων ἀποτελεῖ τὸ νὰ εἶναι ὅλαι αἱ δυνάμεις παράλληλοι μεταξύ των.

Διὰ τὴν σύνθεσιν ἑπομένως τῶν *παραλλήλων δυνάμεων* ἰσχύουν ὅσα εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ εἴπαμε. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἐμφανίζεται συνηθέστατα εἰς τὴν πρᾶξιν, θὰ ἐξετάσωμε εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα τρεῖς περιπτώσεις συνθέσεως παραλλήλων δυνάμεων.

Παράδειγμα 1.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος, ἡ θέσις καὶ ἡ φορὰ τῆς συνισταμένης τῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων $P_1 = 10\,\text{kp}$ καὶ $P_2 = 30\,\text{kp}$ (σχ. 4·1 ε).

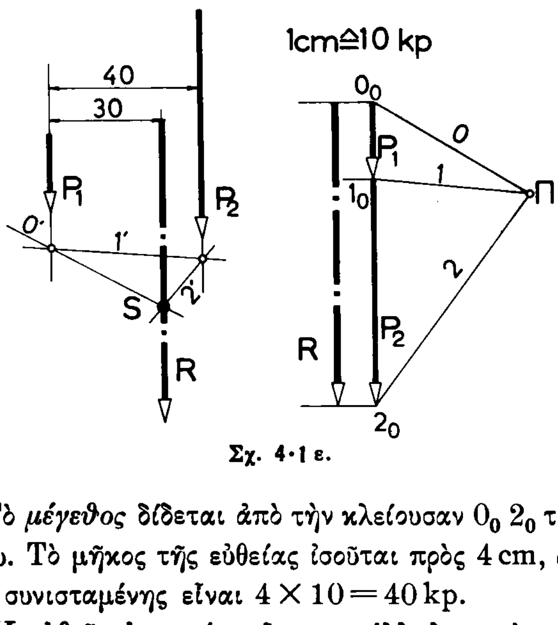
Λύσις.

Μὲ τὰς δυνάμεις P_1 καὶ P_2 κατασκευάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον $0_0\ 1_0\ 2_0$.

Ἐκλέγομε τυχαίως τὸν πόλον Π καὶ φέρομε τὰς πολικὰς ἀκτῖνας 0, 1 καὶ 2.

Κατασκευάζομε κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ σχοινοπολύγωνον 0′, 1,′ 2′. Ἡ πρώτη καὶ ἡ τελευταία πλευρά του τέμνονται εἰς τὸ S.

Ἔχομε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς συνισταμένης R.



Σχ. 4·1 ε.

α) Τὸ *μέγεθος* δίδεται ἀπὸ τὴν κλείουσαν $0_0\ 2_0$ τοῦ δυναμοπολυγώνου. Τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ἰσοῦται πρὸς 4 cm, ἄρα τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης εἶναι $4 \times 10 = 40$ kp.

β) *Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας* εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $0_0\ 2_0$ τοῦ δυναμοπολυγώνου καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ S.

γ) *Ἡ φορὰ* δίδεται ἀπὸ τὸ δυναμοπολύγωνον. Ἡ συνισταμένη διευθύνεται ἀπὸ τὸ πρῶτον σημεῖον 0_0 πρὸς τὸ τελευταῖον 2_0.

Συμπέρασμα.

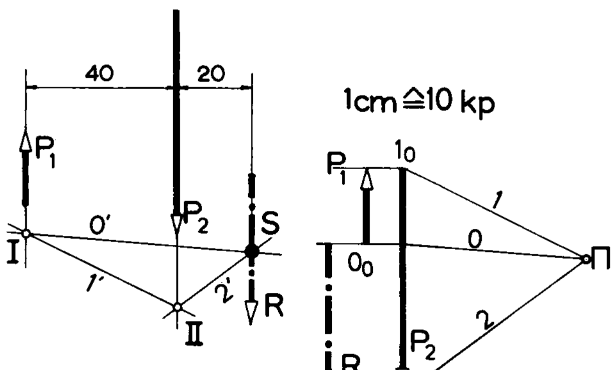
Ἡ συνισταμένη δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμά των, εὑρίσκεται δὲ μεταξὺ τῶν δύο δυνάμεων καὶ πλησιέστερον πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Παράδειγμα 2.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος, ἡ θέσις καὶ ἡ φορὰ τῆς συνισταμένης τῶν παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων $P_1 = 10\,\text{kp}$ καὶ $P_2 = 30\,\text{kp}$ (σχ. 4 · 1 ζ).

Λύσις.

Μὲ τὰς δυνάμεις P_1 καὶ P_2 κατασκευάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον $0_0\ 1_0\ 2_0$.



Σχ. 4·1 ζ.

Ἀπὸ τυχαίως ἐκλεγόμενον πόλον Π φέρομε τὰς πολικὰς ἀκτῖνας 0, 1 καὶ 2 καὶ κατασκευάζομε τὸ σχοινοπολύγωνον 0′ 1′ 2′.

Γνωρίζομε τώρα τὴν συνισταμένην R διότι:

α) Τὸ *μέγεθος της* δίδεται ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας $0_0\ 2_0$ τοῦ δυναμοπολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 2 cm, ἄρα τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης εἶναι $2 \times 10 = 20\,\text{kp}$.

β) Ἡ *εὐθεῖα ἐνεργείας της* εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $0_0\,2_0$ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς S τῶν ἀκραίων πλευρῶν 0΄ καὶ 2΄ τοῦ σχοινοπολυγώνου.

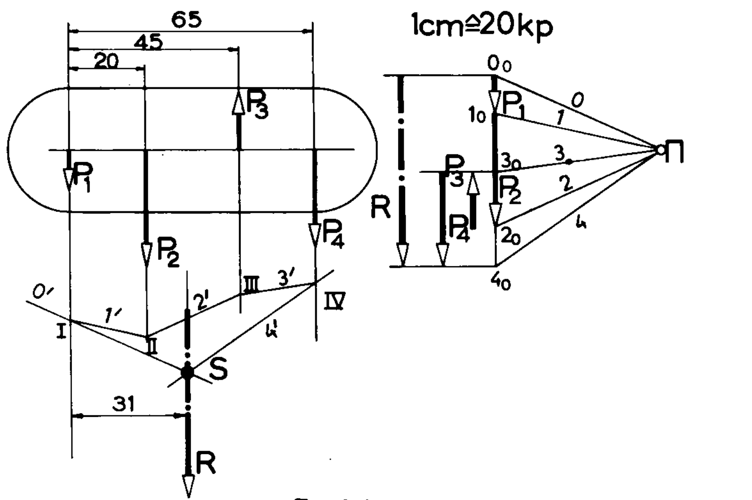
γ) Ἡ *φορά της* καθορίζεται μὲ διεύθυνσιν ἀπὸ τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ δυναμοπολυγώνου 0_0 πρὸς τὸ τελευταῖον 2_0.

Συμπέρασμα.

Ἡ συνισταμένη δύο παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων ἔχει μέγεθος ἴσον μὲ τὴν διαφοράν των, εὑρίσκεται ἐκτὸς τῶν δύο δυνάμεων πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς μεγαλυτέρας καὶ ἔχει τὴν ἰδίαν φορὰν μὲ αὐτήν.

Παράδειγμα 3.

Τῶν παραλλήλων δυνάμεων $P_1 = 10$ kp, $P_2 = 30$ kp, $P_3 = 15$ kp καὶ $P_4 = 25$ kp τοῦ σχήματος 4·1η νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη κατὰ μέγεθος, θέσιν καὶ φοράν.



Σχ. 4·1 η.

Λύσις.

Κατασκευάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, τὸ δυναμοπολύγωνον ἀποτελεῖ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν $0_0\ 4_0$.

Ἐκλέγομε τὸν πόλον Π, φέρομε τὰς πολικὰς ἀκτῖνας 0, 1, 2, 3, 4 καὶ κατασκευάζομε τὸ σχοινοπολύγωνον 0′, 1′, 2′, 3′ καὶ 4′.

Εὑρίσκομε τὴν συνισταμένη R.

α) *Τὸ μέγεθός της* μᾶς δίδεται ἀπὸ τὴν κλείουσαν $0_0\ 4_0$ τοῦ δυναμοπολυγώνου, δηλαδὴ τὴν εὐθεῖαν ποὺ ἑνώνει τὴν ἀρχὴν τῆς πρώτης καὶ τὸ πέρας τῆς τελευταίας δυνάμεως τοῦ δυναμοπολυγώνου. Τὸ μῆκος τῆς εὐθείας εἶναι 2,5 cm, ἄρα τὸ *μέγεθός της* εἶναι 50 kp.

β) *Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας της* εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $0_0\,4_0$, δηλαδὴ παράλληλος πρὸς τὰς δυνάμεις P_1, P_2 καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς S τῶν ἀκραίων πλευρῶν τοῦ σχοινοπολυγώνου 0′ καὶ 4′.

γ) *Ἡ φορά της* καθορίζεται ἀπὸ τὸ πρῶτον σημεῖον 0_0 τοῦ δυναμοπολυγώνου πρὸς τὸ τελευταῖον 4_0.

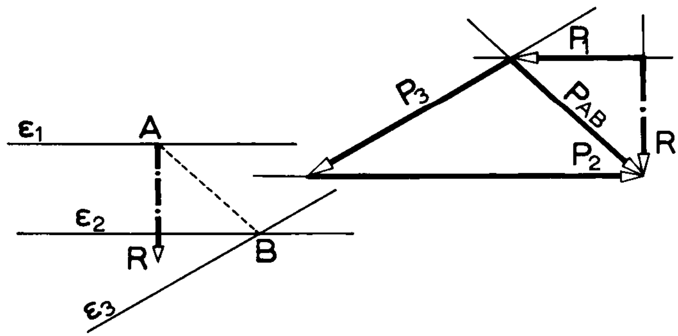
4 · 2 'Ανάλυσις.

Μία δύναμις R ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς συνιστώσας κατὰ τὰς εὐθείας ἐνεργείας ε_1, ε_2 καὶ ε_3. Δὲν θὰ πρέπει ὅμως αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας τῆς R καὶ τῶν 3 συνιστωσῶν νὰ τέμνωνται περισσότεραι ἀπὸ δύο εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμε τὸ πρόβλημα, ὥστε νὰ καταλήξωμε εἰς τὴν ἀνάλυσιν μιᾶς δυνάμεως εἰς δύο συνιστώσας, ἡ λύσις τοῦ ὁποίου μᾶς εἶναι γνωστή.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομε τὸ σημεῖον Α, ὅπου τέμνεται ἡ μία εὐθεῖα ἐνεργείας, ἄς εἴποῦμε ἡ ε_1, μὲ τὴν δύναμιν R. Εὑρίσκομε ἐπίσης καὶ τὸ σημεῖον Β, ὅπου τέμνονται αἱ δύο ἄλλαι εὐθεῖαι ἐνεργείας (σχ. 4 · 2 α).

Ἐν συνεχείᾳ φέρομε τὴν βοηθητικὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἀναλύομε κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν δύναμιν R κατὰ τὰς διευθύνσεις ε_1 καὶ ΑΒ, κατασκευάζοντες ἕνα δυναμοπολύγωνον. Εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον ἡ φορὰ τῶν συνιστωσῶν πρέπει νὰ εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς συνισταμένης. Ἡ P_1 εἶναι ἡ τελικὴ συνιστῶσα κατὰ τὴν ε_1.



Σχ. 4·2 α.

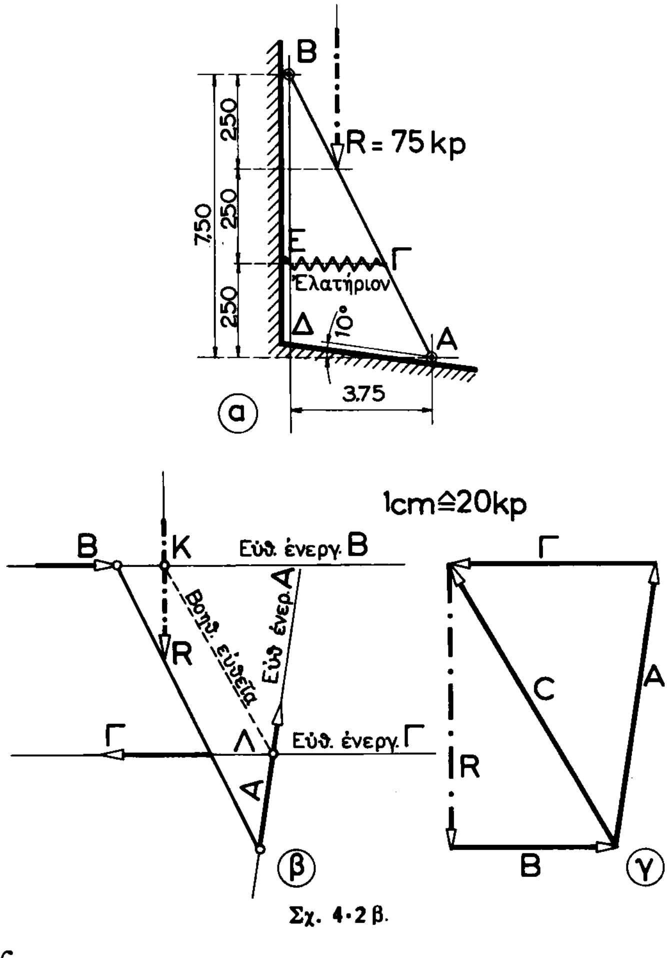
Ἀναλύομε κατόπιν τὴν P_{AB} κατὰ τὰς διευθύνσεις ε_2 καὶ ε_3 κατασκευάζοντες ἐπίσης δυναμοπολύγωνον. Προκύπτουν ἔτσι καὶ αἱ συνιστῶσαι P_2 καὶ P_3.

Κατὰ τὸν ἴδιον βασικῶς τρόπον λύεται τὸ πρόβλημα, ὅταν δίδεται ἡ δύναμις R καὶ ζητῆται νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς δυνάμεις P_1, P_2, P_3 κατὰ τὰς εὐθείας ἐνεργείας ε_1, ε_2, ε_3 ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε αἱ τέσσαρες δυνάμεις νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἰσορροπίαν. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμε ὅτι, ὅταν ὑπάρχῃ ἰσορροπία, τὸ δυναμοπολύγωνον εἶναι κλειστόν, δηλαδὴ ὅλα τὰ βέλη τῶν δυνάμεων ἀκολουθοῦν τὴν αὐτὴν φοράν, δηλαδὴ τὸ πέρας τῆς μιᾶς δυνάμεως ἀποτελεῖ ἀρχὴν τῆς ἑπομένης κ.ο.κ.

Παράδειγμα.

Δίδεται ἡ κλῖμαξ τοῦ σχήματος 4·2 β(α), ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον ἄκρον της διὰ τροχῶν. Ὑπὸ τὸ βάρος ἑνὸς ἀνθρώπου R = 75 kp, ἡ κλῖμαξ θὰ μετεκινεῖτο, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε τὸ ἐλατήριον ΓΕ, τὸ ὁποῖον στηρίζεται εἰς τὸ σημεῖον Ε εἰς τὸν τοῖχον.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀντιδράσεις τῶν σημείων στηρίξεων Α καὶ Β καὶ ἡ δύναμις τοῦ ἐλατηρίου ΓΕ.



Σχ. 4·2 β.

Λύσις.

Γνωστὰ εἶναι τὸ μέγεθος, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας καὶ ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως R, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς ἀντιδράσεως Α, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κυλίσεως ΑΔ, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς ἀντιδράσεως Β, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΔ, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς δυνάμεως τοῦ ἐλατηρίου Γ.

Ὥστε τὸ πρόβλημα περιορίζεται πλέον εἰς τὸ νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς δυνάμεις Α, Β καὶ Γ, τῶν ὁποίων γνωρίζομε μόνον τὰς εὐθείας ἐνεργείας. Αἱ δυνάμεις πρέπει νὰ ἔχουν μέγεθος καὶ φορὰν τέτοιαν, ὥστε νὰ ἰσορροποῦν μὲ τὴν R.

Εἰς τὸ σχῆμα 4·2β(β) λαμβάνομε τὴν κλίμακα μὲ τὰς δυνάμεις ποὺ δροῦν ἐπάνω της.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀγνώστων δυνάμεων Α, Β, Γ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1) Προεκτείνομε τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς δυνάμεως R, μέχρις ὅτου τμήση μίαν ἀπὸ τὰς δοθείσας εὐθείας ἐνεργείας, ἔστω τῆς δυνάμεως Β, εἰς τὸ σημεῖον Κ. Προεκτείνομε κατόπιν τὰς δύο ἄλλας εὐθείας ἐνεργείας τῶν δυνάμεων Α καὶ Γ, μέχρις ὅτου τμηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον Λ. Ἑνώνομε τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ, ὁπότε προκύπτει ἡ βοηθητικὴ εὐθεῖα ΚΛ.

2) Κατασκευάζομε τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον ἀπὸ τὴν δύναμιν R καὶ τὰς δύο δυνάμεις, ποὺ ἔχουν εὐθείας ἐνεργείας τὴν Β καὶ τὴν βοηθητικὴν ΚΛ [σχ. 4·2β(γ)]. Τὸ δυναμοπολύγωνον εἶναι κλειστόν, δηλαδὴ ὅλαι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι τὸ ἀπαρτίζουν, ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν περιστροφῆς, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς δυνάμεις ἰσορροποῦν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρέθη τὸ μέγεθος τῆς ἀντιδράσεως Β καὶ τῆς βοηθητικῆς δυνάμεως C.

3) Ἀναλύομε τὴν δύναμιν C εἰς τὰς συνιστώσας, ποὺ ἔχουν εὐθείας ἐνεργείας τὰς Α καὶ Γ. Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀναλύσεως, ἡ φορὰ περιστροφῆς τῶν συνιστωσῶν Α καὶ Γ εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς συνισταμένης C. Προκύπτει ἔτσι:

$$A = 76{,}0\,\text{kp},\ B = 44{,}1\,\text{kp},\ \Gamma = 57{,}3\,\text{kp}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΙ ΤΥΧΟΥΣΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεσις, Ἀνάλυσις καὶ Ἰσορροπία διὰ τῆς μεθόδου τῶν προβολῶν (ἀναλυτική).

5·1 Σύνθεσις καὶ ἰσορροπία.

Δίδονται αἱ συνεπίπεδοι δυνάμεις $P_1, P_2, P_3 \ldots P_\nu$. Διὰ κάθε μίαν εἶναι γνωστὸν τὸ μέγεθός της P, τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της A μὲ συντεταγμένας x καὶ y, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας καὶ ἡ φορά της, ποὺ δίδονται μὲ τὴν γωνία α.

Ζητεῖται ἡ συνισταμένη των.

Διὰ νὰ τὴν εὕρωμε μεταθέτομε κάθε δύναμιν εἰς τὴν ἀρχὴν 0 ἑνὸς τυχαίου συστήματος συντεταγμένων, π.χ. τὴν P_2, ὁπότε προκύπτει μία δύναμις P_2 εἰς τὸ 0 καὶ μία ροπή:

$$M_2 = P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha_2 \cdot y_2 - P_2 \cdot \eta\mu\alpha_2 \cdot x_2.$$

Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον λαμβάνομε ἕνα σύστημα δυνάμεων P_1, P_2, $P_3 \ldots P_\nu$ μὲ κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς 0 καὶ ἕνα σύστημα ζευγῶν δυνάμεων μὲ ροπὴν $M_1, M_2, M_3 \ldots M_\nu$.

Εἰς τὸ σχῆμα 5·1 α ἐσχεδιάσθη ἡ μετάθεσις μόνον τῆς P_2.

Τὸ πῶς εὑρίσκομε τὴν συνισταμένην πολλῶν συντρεχουσῶν δυνάμεων τὸ γνωρίζομε ἀπὸ τὴν παράγραφον 3·3, ὅπου εἴπαμε ὅτι ὅλαι αἱ συνιστῶσαι κατὰ τὸν ἄξονα x συντίθενται εἰς τὴν δύναμιν:

$$\Sigma x = R_x = \Sigma P \sigma\upsilon\nu\alpha = P_1\, \sigma\upsilon\nu\alpha_1 + P_2\, \sigma\upsilon\nu\alpha_2 + P_3 \sigma\upsilon\nu\alpha_3 + \ldots + P_\nu\, \sigma\upsilon\nu\alpha_\nu.$$

Κατὰ τὸν ἄξονα y ἀντιστοίχως:

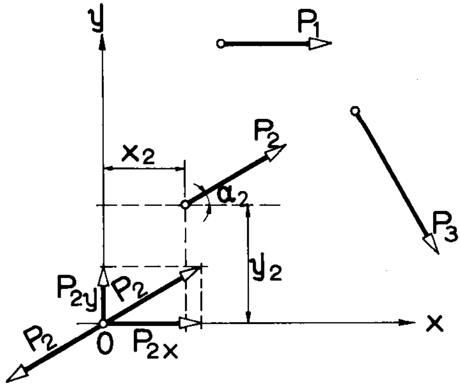
$$\Sigma y = R_y = \Sigma P \eta\mu\alpha = P_1\, \eta\mu\alpha_1 + P_2\, \eta\mu\alpha_2 + P_3\, \eta\mu\alpha_3 + \ldots + P_\nu\, \eta\mu\alpha_\nu\, .$$

Αἱ δυνάμεις R_x καὶ R_y συντίθενται εἰς τὴν τελικὴν συνισταμένην R, ἡ ὁποία ἔχει:

Μέγεθος: $R = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$

Φοράν: $\eta\mu\alpha_0 = \frac{\Sigma y}{R}$, $\sigma\upsilon\nu\alpha_0 = \frac{\Sigma x}{R}$, $\varepsilon\varphi\alpha_0 = \frac{\Sigma y}{\Sigma x}$

Σημεῖον ἐφαρμογῆς: τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων 0.



Σχ. 5·1 α.

Ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως P_2 ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων 0 ἰσοῦται μέ:

$$M_2 = P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha_2 \cdot y_2 - P_2 \cdot \eta\mu\alpha_2 \cdot x_2 = P_{2x} \cdot y_2 - P_{2y} \cdot x_2.$$

Ἀντιστοίχως:

$$M_1 = P_{1x} \cdot y_1 - P_{1y} \cdot x_1 \text{ κ.ο.κ}$$

Ἡ συνισταμένη τοῦ συστήματος τῶν ροπῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους ροπῶν, δηλαδή:

$$\Sigma M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots + M_\nu .$$

Ἑπομένως κατὰ τὸν ἀναλυτικὸν τρόπον συνθέσεως πολλῶν συνεπιπέδων δυνάμεων προκύπτει μία συνισταμένη R δρῶσα εἰς τὴν ἀρχὴν 0 ἑνὸς οἱουδήποτε συστήματος συντεταγμένων μὲ γωνίαν α_0 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα x καὶ ἕνα ζεῦγος δυνάμεων μὲ ροπὴν M.

Κατὰ τὴν σύνθεσιν αὐτὴν ἠμποροῦν νὰ ἐμφανισθοῦν τέσσαρες περιπτώσεις:

1) $R>0$, $M\neq 0$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ γενικὴ περίπτωσις καὶ σημαίνει ὅτι ἡ συνισταμένη δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων O.

2) $R>0$, $M=0$, δηλαδὴ ἡ συνισταμένη διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων O.

3) $R=0$, $M\neq 0$, δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει συνισταμένη δύναμις, ἀλλὰ μόνον ἕνα ζεῦγος δυνάμεων.

4) $R=0$, $M=0$, δηλαδὴ αἱ δοθεῖσαι συνεπίπεδοι δυνάμεις ἔχουν συνισταμένην ἴσην μὲ μηδὲν καὶ στατικὴν ροπὴν ὡς πρὸς ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον μηδενικήν· ἑπομένως τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου δροῦν ἰσορροπεῖ.

Γνωρίζομε ὅμως ὅτι $R=\sqrt{(\Sigma x)^2+(\Sigma y)^2}$.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν τὸ R ἰσοῦται τότε καὶ μόνον μὲ τὸ μηδέν, ὅταν συγχρόνως $\Sigma x=0$ καὶ $\Sigma y=0$.

Ἑπομένως, πολλαὶ συνεπίπεδοι δυνάμεις ἰσορροποῦν ὅταν:

α) $\Sigma x=0$ (Σx = ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν ὅλων τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα x).

β) $\Sigma y=0$ (Σy = ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν ὅλων τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y).

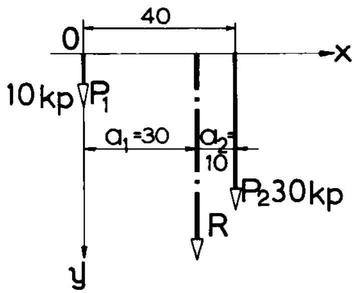
γ) $\Sigma M=0$ (ΣM = ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν στατικῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τυχὸν σημεῖον O).

Αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐξισώσεις καλοῦνται *συνθῆκαι ἰσορροπίας* εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ ἠμποροῦν νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς:

Πολλαὶ συνεπίπεδοι δυνάμεις ἰσορροποῦν, ὅταν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν ὅλων τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας x καὶ y ἰσοῦται μὲ τὸ μηδὲν καὶ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν στατικῶν ροπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τυχὸν σημεῖον O ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν.

Παράδειγμα 1.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος, ἡ θέσις καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης τῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων $P_1 = 10$ kp καὶ $P_2 = 30$ kp (σχ. 5·1 β).



Σχ. 5·1 β.

Λύσις.

Λαμβάνομε ἕνα τυχὸν σύστημα συντεταγμένων, τὸ xOy.

Πρὸς περιορισμὸν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων δεχόμεθα ὅτι ὁ ἄξων y τοῦ συστήματος συμπίπτει μὲ τὴν δύναμιν P_1.

Ὑπολογίζομε τώρα τὰς συνιστώσας κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y.

$\Sigma x = P_1 \cdot \text{συν}\ 90^0 + P_2 \cdot \text{συν}\ 90^0 = 10 \times 0 + 30 \times 0 = 0.$

$\Sigma y = P_1 \cdot \text{ημ}\ 90^0 + P_2 \cdot \text{ημ}\ 90^0 = 10 \times 1 + 30 \times 1 = 40\,\text{kp}.$

$\Sigma x = 0$ σημαίνει ὅτι ἡ συνισταμένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x, ἄρα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

Ὑπολογίζομε τώρα τὰς στατικὰς ροπὰς ὡς πρὸς O:

$$\Sigma M = M_1 + M_2 = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot 40 = 10 \times 0 + 30 \times 40 = 1\,200\,\text{kpcm}.$$

Συμπέρασμα.

Πρῶτον: Αἱ δύο δυνάμεις P_1 καὶ P_2: α) εἴτε ἠμποροῦν νὰ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ μίαν συνισταμένην $R = 40$ kp (ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ O, συμπίπτει καὶ ἔχει τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν μὲ τὸν ἄξονα τῆς $+y$) καὶ ἀπὸ ἕνα ζεῦγος δυνάμεων δεξιόστροφον μὲ ροπὴν $M = +1\,200$ kpcm, β) εἴτε ἠμποροῦν νὰ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ μόνην τὴν δύναμιν R, ἡ ὁποία ὅμως δὲν διέρχεται πλέον ἀπὸ τὸ 0, ἀλλὰ ἀπὸ σημεῖον ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὸ 0 ἀπόστασιν $\alpha = \frac{M}{R} = \frac{1\,200}{40} = +30\,\text{cm}$, δηλαδὴ δεξιὰ τοῦ 0.

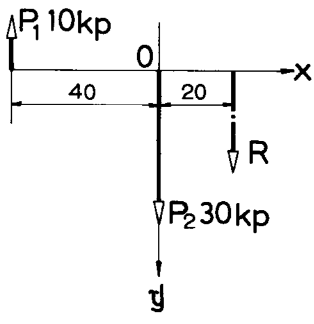
Δεύτερον: Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων χωρίζει τὴν μεταξύ των ἀπόστασιν εἰς λόγον ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ μέγεθος τῶν δυνάμεων, δηλαδή:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Ἐὰν $P_1 = P_2$ τότε καὶ $\alpha_1 = \alpha_2$, δηλαδὴ ἡ συνισταμένη διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν δυνάμεων.

Παράδειγμα 2.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος, ἡ θέσις καὶ ἡ φορὰ τῆς συνισταμένης τῶν παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων $P_1 = -10\,\text{kp}$ καὶ $P_2 = 30\,\text{kp}$ (σχ. 5 · 1 γ).



Σχ. 5·1 γ.

Λύσις.

Λαμβάνομε τυχὸν σύστημα συντεταγμένων, ἔστω ἕνα ὅπου ὁ ἄξων τῶν y νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν δύναμιν P_2.

Ὑπολογίζομε τώρα τὰς συνιστώσας κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y:

$\Sigma x = P_1 \cdot \text{συν}\ 90^0 + P_2 \cdot \text{συν}\ 90^0 = 10 \times 0 + 30 \times 0 = 0.$

$\Sigma y = P_1 \cdot \eta\mu 90^0 + P_2 \cdot \eta\mu 90^0 = -10 \times 1 + 30 \times 1 = +20\,\text{kp}$.
$\Sigma x = 0$ σημαίνει ὅτι ἡ συνισταμένη P εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

Ὑπολογίζομε τώρα τὰς συνιστώσας τῶν ροπῶν ὡς πρὸς 0:

$\Sigma M = M_1 + M_2 = P_1 \cdot 40 + P_2 \cdot 0 = 10 \times 40 + 30 \times 0 =$ 400 kpcm.

Συμπέρασμα.

Αἱ δυνάμεις P_1 καὶ P_2 α) εἴτε ἠμποροῦν νὰ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ μίαν συνισταμένην $R = 20\,\text{kp}$ (ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ 0, ἔχει εὐθεῖαν ἐνεργείας συμπίπτουσαν μὲ τὸν ἄξονα τῶν y καὶ διεύθυνσιν τῶν +y) καὶ ἀπὸ ἕνα δεξιόστροφον ζεῦγος δυνάμεων μὲ ροπὴν $M = +400\,\text{kpm}$, β) εἴτε ἠμποροῦν νὰ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ μόνην τὴν δύναμιν $R = 20\,\text{kp}$, ἡ ὁποία δὲν διέρχεται πλέον ἀπὸ τὸ 0, ἀλλὰ εἰς ἀπόστασιν:

$$\alpha = \frac{M}{R} = \frac{+400}{20} = +20\,\text{cm} \text{ δηλαδὴ δεξιὰ τοῦ 0.}$$

Παράδειγμα 3.

Νὰ εὑρεθῇ ἀναλυτικῶς τὸ μέγεθος, ἡ θέσις καὶ ἡ φορὰ τῆς συνισταμένης τῶν παραλλήλων δυνάμεων $P_1 = 10\,\text{kp}$, $P_2 = 30\text{kp}$, $P_3 = -15\,\text{kp}$ καὶ $P_4 = 25\,\text{kp}$ (σχ. 5·1δ).

Λύσις.

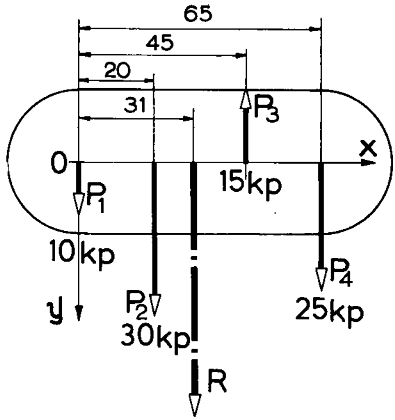
Λαμβάνομε ἕνα οἱονδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Συνήθως φροντίζομε ὁ ἕνας ἄξων νὰ συμπίπτῃ μὲ μίαν δύναμιν. Ἔτσι ὀλιγοστεύομε τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις.

Ἔστω ὅτι συμπίπτει μὲ τὴν P_1.

Πρέπει τώρα νὰ ὑπολογίσωμε τὰς συνιστώσας τῶν δυνάμεων κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y.

$\Sigma x = P_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 90^0 + P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 90^0 - P_3 \cdot \sigma\upsilon\nu 90^0 + P_4 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 90^0 = 0$.

$$\Sigma y = P_1 \cdot \eta\mu 90^0 + P_2 \cdot \eta\mu 90^0 - P_3 \cdot \eta\mu\, 90^0 + P_4 \cdot \eta\mu\, 90^0 =$$
$$10 \times 1 + 30 \times 1 - 15 \times 1 + 25 \times 1 = 50\,\text{kp}.$$



Σχ. 5·1 δ.

Ἐπειδὴ $\Sigma x = 0$, συμπεραίνομε ὅτι ἡ συνισταμένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y.

Ὑπολογισμὸς τῶν στατικῶν ροπῶν ὡς πρὸς 0:

$$\Sigma M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot 20 - P_3 \cdot 45 + P_4 \cdot 65$$
$$= 10 \times 0 + 30 \times 20 - 15 \times 45 + 25 \times 65 = +1\,550\,\text{kpcm}.$$

Συμπέρασμα:

Αἱ τέσσαρες δυνάμεις P_1, P_2, P_3 καὶ P_4 ἠμποροῦν νὰ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ μίαν δύναμιν $R = 50\,\text{kp}$ (ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ 0, συμπίπτει καὶ ἔχει τὸ ἴδιον βέλος μὲ τὸν ἄξονα τῶν y) καὶ ἀπὸ ἕνα ζεῦγος δυνάμεων δεξιόστροφον μὲ ροπὴν $M = +1\,550\,\text{kpcm}$. Ἐὰν θέλωμε ἠμποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσωμε τὸ R καὶ M μὲ μίαν μόνον δύναμιν R, ἡ ὁποία ὅμως δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ 0, ἀλλὰ ἀπὸ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς $\alpha = \frac{M}{R} = \frac{+1\,550\,\text{kpcm}}{50\,\text{kp}} = +31\,\text{cm}$, δηλαδὴ δεξιὰ τοῦ 0.

5·2 Ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς τρεῖς συνιστώσας.

Δίδεται ἡ δύναμις R καὶ ἔστω ε ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας της. Δίδονται ἐπίσης αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας ε_1, ε_2, ε_3 ἐπὶ τῶν ὁποίων δροῦν αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι P_1, P_2, καὶ P_3 ἀντιστοίχως (σχ. 5·2 α).

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις τῆς P εἰς τρεῖς συνιστώσας ἀπαιτεῖται ὅπως αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας ε, ε_1, ε_2 καὶ ε_3 διέρχωνται *μόνον ἀνὰ δύο* ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον.

Διὰ νὰ εὕρωμε τὰς ἀγνώστους συνιστώσας ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Προεκτείνομε τὰς εὐθείας ἐνεργείας ε_1, ε_2, ε_3, μέχρις ὅτου τμηθοῦν ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομε τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων Α, Β, Γ, ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς R, δηλαδὴ ἀντιστοίχως τὰς b_A, b_B καὶ b_Γ [σχ. 5·2 α(α)].

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὰς συνιστώσας χρησιμοποιοῦμε τὴν πρότασιν τῶν ροπῶν κατὰ τὴν ὁποίαν « ἡ στατικὴ ροπὴ τῆς συνισταμένης ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν » (παράγρ. 1·4).

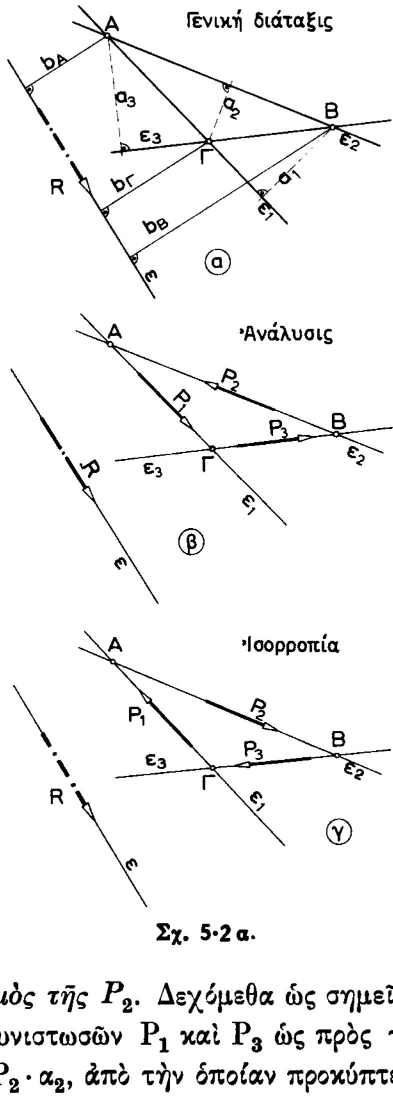
Ἐὰν ἐπιτύχωμε νὰ ἐκλέγωμε κάθε φορὰν τέτοιο σημεῖον, ὥστε ἡ ροπὴ δύο συνιστωσῶν ὡς πρὸς αὐτὸ νὰ εἶναι μηδέν, τότε ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης ὡς πρὸς τὸ σημεῖον αὐτό, ποὺ μᾶς εἶναι ἀπολύτως γνωστή, θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ροπὴν μιᾶς μόνον συνιστώσης. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ὑπολογίζομε εὐκόλως, ὅπως θὰ ἰδοῦμε ἀμέσως, τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν τῆς συνιστώσης.

Ὑπολογισμὸς τῆς P_1. Δεχόμεθα ὡς σημεῖον στροφῆς τὸ Β. Ἡ ροπὴ τῶν μέχρι στιγμῆς ἀγνώστων μας P_2 καὶ P_3 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Β εἶναι μηδέν, διότι διέρχονται διὰ τοῦ Β. Ροπὴν ὡς πρὸς τὸ Β ἀναπτύσσει μόνον ἡ P_1.

Ἄρα $R \cdot b_B = P_1 \cdot \alpha_1$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει:

$$P_1 = R \, \frac{b_B}{\alpha_1}.$$

Ἡ φορὰ περιστροφῆς τῆς P_1 ὡς πρὸς τὸ B πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν φορὰν περιστροφῆς τῆς R ὡς πρὸς τὸ B [σχ. 5 · 2 α (β)].



Σχ. 5·2 α.

Ὑπολογισμὸς τῆς P_2. Δεχόμεθα ὡς σημεῖον στροφῆς τὸ Γ. Ἡ ροπὴ τῶν συνιστωσῶν P_1 καὶ P_3 ὡς πρὸς τὸ Γ εἶναι μηδέν. Ἄρα $R \cdot b_Γ = P_2 \cdot α_2$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει:

$$P_2 = R\,\frac{b_\Gamma}{\alpha_2}.$$

Ἡ φορὰ περιστροφῆς τῆς P_2 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Γ πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν φορὰν περιστροφῆς τῆς R ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ.

Ὑπολογισμὸς τῆς P_3.

Σημεῖον στροφῆς τὸ Α. $R \cdot b_A = P_3 \cdot \alpha_3$.

$$P_3 = R\,\frac{b_A}{\alpha_3}.$$

Ἡ φορὰ περιστροφῆς τῆς P_3 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α συμπίπτει μὲ τὴν φορὰν περιστροφῆς τῆς R ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον λύεται τὸ πρόβλημα, ἐὰν ζητῆται ἡ ἰσορροπία τῶν δυνάμεων R, P_1, P_2 καὶ P_3.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν ἡ φορὰ περιστροφῆς τῆς δυνάμεως P_1 ὡς πρὸς Β πρέπει νὰ εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς περιστροφῆς τῆς R ὡς πρὸς Β κ.ο.κ. [σχ. 5 · 2 α(γ)].

Παράδειγμα 1.

Δίδεται ἡ κλῖμαξ τοῦ σχήματος 5 · 2 β, ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὸ ἀνώτερον καὶ τὸ κατώτερον ἄκρον της διὰ τροχῶν.

Ὑπὸ τὸ βάρος ἑνὸς ἀνθρώπου 75 kp ἡ κλῖμαξ θὰ μετεκινεῖτο, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε τὸ συρματόσχοινον ΓΔ.

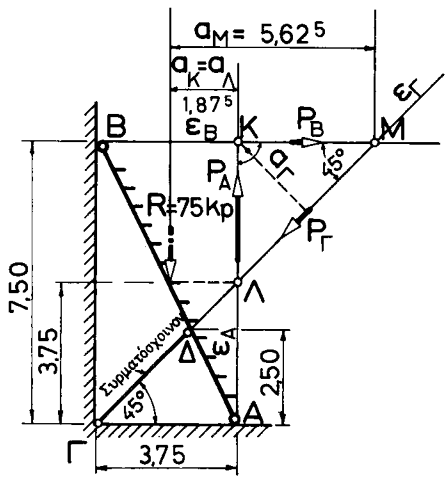
Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀντιδράσεις τῶν στηρίξεων Α καὶ Β, ὡς καὶ ἡ δύναμις τοῦ συρματοσχοίνου Γ.

Λύσις.

Γνωστὰ εἶναι τὸ μέγεθος, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας καὶ ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως R, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας ε_A τῆς ἀντιδράσεως Α, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κυλίσεως ΑΓ, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας ε_B τῆς ἀντιδράσεως Β, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κυλίσεως ΒΓ, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας ε_Γ τῆς ἀντιδράσεως τοῦ συρματοσχοίνου, ἡ ὁποία μόνον κατὰ τὴν ΓΔ ἠμπορεῖ νὰ ἀσκηθῇ.

Προεκτείνομε τὰς εὐθείας ἐνεργείας ε_A, ε_B, καὶ ε_Γ καὶ σχηματίζομε τὸ τρίγωνον ΚΛΜ.

Ἡ σειρὰ ὑπολογισμοῦ τῶν ἀντιδράσεων P_A, P_B καὶ P_Γ εἶναι ἡ ἑξῆς:



Σχ. 5·2 β.

Ὑπολογισμὸς τῆς P_B.

Λαμβάνομε ροπὰς ὡς πρὸς Λ.

$$R \cdot \alpha_K = P_B \,.\, (K\Lambda), \quad \text{ἄρα} \quad P_B = R \times \frac{\alpha_K}{(K\Lambda)} = 75 \times \frac{1,875}{3,75} = 37,5\,\text{kp}.$$

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἰσορροπίας δυνάμεων, ἡ φορὰ περιστροφῆς τῆς P_B περὶ τὸ σημεῖον Λ πρέπει νὰ εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς περιστροφῆς τῆς R περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ὑπολογισμὸς τῆς P_A.

Λαμβάνομε ροπὰς ὡς πρὸς Μ.

$$\mathrm{R} \cdot \alpha_M = \mathrm{P_A} \cdot (\mathrm{KM}) \text{ ἄρα } \mathrm{P_A} = \mathrm{R}\frac{\alpha_M}{(\mathrm{KM})} = 75 \times \frac{5{,}625}{3{,}75} = 112{,}5 \text{ kp.}$$

Ἡ φορὰ περιστροφῆς τῆς P_A ὡς πρὸς M εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς περιστροφῆς τῆς R ὡς πρὸς M, διότι πρόκειται περὶ ἰσορροπίας.

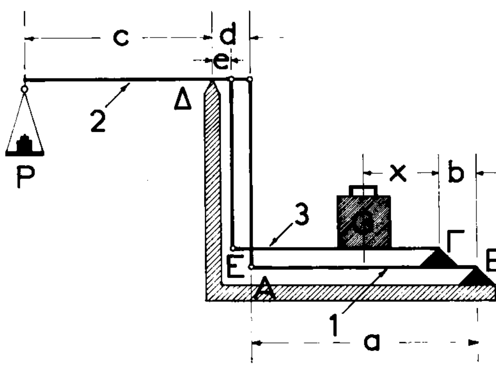
Ὑπολογισμὸς τῆς P_Γ.

Λαμβάνομε ροπὰς ὡς πρὸς K.

$$\mathrm{R} \cdot \alpha_K = \mathrm{P_\Gamma} \cdot \alpha_\Gamma \text{, ἄρα } \mathrm{P_\Gamma} = \mathrm{R}\frac{\alpha_K}{\alpha_\Gamma} = 75 \times \frac{1{,}875}{0{,}707 \times 3{,}75} = 53 \text{ kp.}$$

Παράδειγμα 2.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τοῦ βάρους G καὶ τῶν σταθμῶν P τῆς πλάστιγγος τοῦ σχήματος 5·2γ. Διὰ ποίαν σχέσιν ἀποστάσεων ἔχομε τὴν περίπτωσιν δεκαδικοῦ ζυγοῦ; (Ὁ ζυγὸς λέγεται δεκαδικός, ὅταν τὰ σταθμὰ ποὺ τοποθετοῦμε εἶναι τὸ 1/10 τοῦ βάρους ποὺ θέλομε νὰ ζυγίσωμε, δηλαδὴ $P = \frac{1}{10}\,G$).



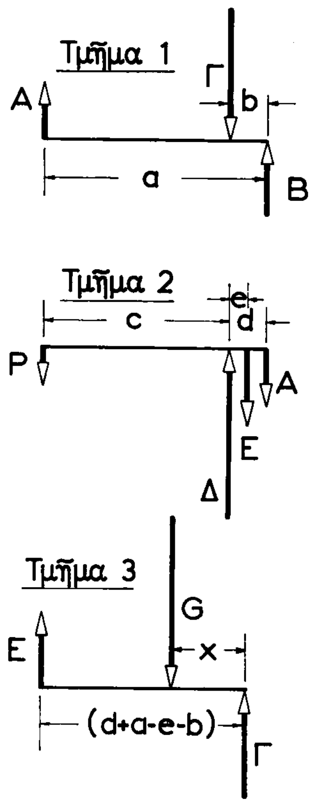
Σχ. 5·2γ.

Λύσις.

Ἐξετάζεται ἡ ἰσορροπία τοῦ κάθε τμήματος χωριστὰ (σχ. 5.2δ).

Τμῆμα 1.

$$\Sigma y = A + B - \Gamma = 0 \qquad (\alpha)$$
$$\Sigma M_B = A \cdot \alpha - \Gamma \cdot b = 0. \qquad (\beta)$$



Σχ. 5·2 δ.

Τμῆμα 2.

$$\Sigma y = \Delta - A - E - P = 0 \qquad (\gamma)$$
$$\Sigma M_\Delta = E\,e + A\,d - P\,c = 0. \qquad (\delta)$$

Τμῆμα 3.

$$\Sigma y = E + \Gamma - G = 0 \qquad (\varepsilon)$$
$$\Sigma M_\Gamma = E\,(d + \alpha - e - b) - G\,x = 0. \qquad (\zeta)$$

Δεδομένου ὅτι ὅλαι αἱ ἀποστάσεις a, b, c, d καὶ e εἶναι γνωσταί, αἱ 6 πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις (α ἕως ζ) εἶναι ἀρκεταὶ διὰ νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἄγνωστοι δυνάμεις Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ Ρ. Ἐδῶ ὅμως ἐνδιαφέρει μόνον πόσον εἶναι τὸ Ρ (τὰ σταθμά). Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (δ) προκύπτει:

$$P = \frac{A \cdot d + E \cdot e}{c} \cdot \tag{1}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (β) προκύπτει $A = \Gamma \frac{b}{a}$. Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ Α θέτομε εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1), ἡ ὁποία λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$P = E\frac{e}{c} + \Gamma\frac{bd}{ac} \cdot \tag{2}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (ζ) προκύπτει $E = G \frac{x}{a + d - b - e}$ καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (ε) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν (ζ) ἡ:

$$\Gamma = G + E = G\left[1 + \frac{x}{a + d - b - e}\right].$$

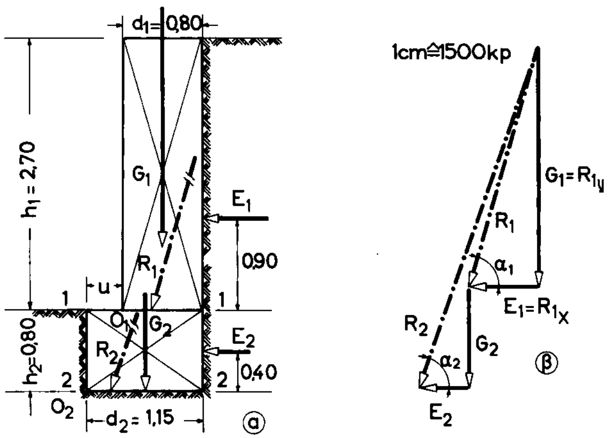
Ἐὰν αἱ δύο τελευταῖαι αὐταὶ τιμαὶ τεθοῦν εἰς τὴν (2), προκύπτει τὸ Ρ ὡς συνάρτησις τῶν γνωστῶν a, b, c, d, e καὶ G ἀλλὰ καὶ τοῦ x, τὸ ὁποῖον θὰ πρέπει νὰ ἀποφεύγεται, διότι μόνον ἂν τὸ Ρ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x δὲν θὰ μᾶς ἐνδιαφέρῃ ποῦ θὰ τοποθετηθῇ τὸ φορτίον ἐπάνω εἰς τὴν πλάστιγγα. Διὰ νὰ ἀποφύγωμε λοιπὸν τὸ x θέτομε πάντοτε $\frac{b}{a} = \frac{e}{d}$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (2) μετασχηματίζεται εἰς $P = E\frac{e}{c} + \Gamma\frac{e}{c} = \frac{e}{c}(E + \Gamma)$ καὶ ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν ἐξίσωσιν (ε) γίνεται:

$$P = \frac{e}{c}\, G \cdot \tag{3}$$

Ὁ ζυγὸς καθίσταται δεκαδικὸς ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) $\frac{e}{c} = 0{,}1$, ὁπότε $P = 0{,}1\ G$.

Παράδειγμα 3.

Ἐπὶ τοῦ τοίχου ἀντιστηρίξεως γαιῶν τοῦ σχήματος 5·2ε ἐνεργοῦν ἀνὰ μέτρον μήκους αἱ ὠθήσεις $E_1 = 1\,400$ kp, $E_2 = 900$ kp καὶ τὸ ἴδιον του βάρος G_1 καὶ G_2.



Σχ. 5·2ε.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων εἰς τὴν στάθμην 1-1 τῆς ἄνω ἐπιφανείας τοῦ θεμελίου καὶ εἰς τὴν στάθμην 2-2 τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐδάφους θεμελιώσεως.

Λύσις.

Δεχόμεθα ὅτι ὁ τοῖχος καὶ τὸ θεμέλιον θὰ κατασκευασθοῦν ἐκ λιθοδομῆς μὲ εἰδικὸν βάρος $\gamma = 2{,}2$ Mp/m³. Διὰ μῆκος τοίχου 1,0 m προκύπτει ὅτι:

$$G_1 = 0{,}80 \times 2{,}70 \times 2\,200 \simeq 4\,750 \text{ kp καὶ}$$

$$G_2 = 1{,}15 \times 0{,}80 \times 2\,200 \simeq 2\,020 \text{ kp.}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς συνισταμένης θὰ ἐφαρμόσωμε τὰς δύο γνωστάς μας μεθόδους.

α) *Ἀναλυτικὴ μέθοδος.*

Ἀπὸ ὅ,τι ἐμάθαμε εἰς τὴν παράγραφον 5 · 1, ἡ συνισταμένη εἰς τὴν στάθμην 1 — 1 εἶναι:

$$R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2} = \sqrt{E_1^2 + G_1^2} = \sqrt{1\,400^2 + 4\,750^2} = 4\,950 \text{ kp}.$$

$$\varepsilon\varphi\alpha_1 = \frac{G_1}{E_1} = \frac{4\,750}{1\,400} = 3{,}39 \text{ καὶ } \alpha_1 = 73^0\ 36'.$$

Καθορίζομε τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς R_1, ἐὰν λάβωμε τὰς ροπὰς ὡς πρὸς τυχὸν σημεῖον τῆς στάθμης 1 - 1. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομε τὰς ροπὰς ὡς πρὸς τὸ 0_1. Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε τοὺς ὑπολογισμούς μας ἀναλύομε τὴν συνισταμένην R_1, εἰς τὴν στάθμην 1 — 1, εἰς μίαν κατακόρυφον συνιστῶσαν R_{1y} καὶ μίαν ὁριζοντίαν R_{1x} καὶ ἔστω x_1 ἡ ἀπόστασις τῆς R_{1y} ἀπὸ τὸ 0_1.

Δεδομένου ὅτι ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης ὡς πρὸς τυχὸν σημεῖον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν (παράγρ. 1 · 4) λαμβάνομε:

$$R_{1y} \cdot x_1 + R_{1x} \cdot 0 = G_1 \frac{d_1}{2} - E_1 \frac{h_1}{3}, \text{ ἐκ τῆς ὁποίας:}$$

$$x_1 = \frac{G_1 \frac{d_1}{2} - E_1 \frac{h_1}{3}}{R_{1y}} = \frac{4\,750 \times 0{,}40 - 1\,400 \times 0{,}90}{4\,750} =$$

$$0{,}135 = \frac{d_1}{6}.$$

Παρατήρησις.

Οἱ κανονισμοὶ κατασκευῆς λιθοδομῶν ἐπιβάλλουν νὰ ἔχωμε τὴν ἀπόστασιν x_1 μεγαλυτέραν ἢ τουλάχιστον ἴσην μὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ πάχους τοῦ τοίχου.

Ἀντιστοίχως εἰς τὴν στάθμην 2 — 2 προκύπτει:

$$R_2 = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 + (G_1 + G_2)^2} =$$

$$\sqrt{(1\,400 + 900)^2 + (4\,750 + 2\,020)^2} = 7\,150 \text{ kp}.$$

$$\varepsilon\varphi\alpha_2 = \frac{G_1 + G_2}{E_1 + E_2} = \frac{6\,770}{2\,300} = 2{,}943, \ \alpha_2 = 71^0\,15'.$$

Ροπαὶ ὡς πρὸς O_2:

$$x_2 = \frac{G_1\left(\frac{d_1}{2} + u\right) + G_2\frac{d_2}{2} - E_1\left(\frac{h_1}{3} + h_2\right) - E_2\frac{h_2}{2}}{G_1 + G_2} =$$

$$\frac{4\,750 \times 0{,}75 + 2\,020 \times 0{,}575 - 1\,400 \times 1{,}70 - 900 \times 0{,}40}{6\,770} =$$

$$0{,}293\,\text{m} > \frac{d_2}{6} = 0{,}192\,\text{m}.$$

β) *Γραφικὴ μέθοδος.*

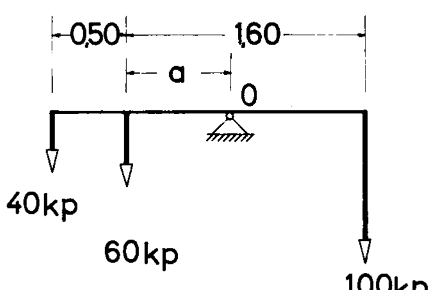
Μὲ κλίμακα 1 cm $\widehat{=}$ 1 500 kp κατασκευάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον ἐκ τῶν δυνάμεων E_1, G_1 διὰ νὰ εὕρωμε τὴν συνισταμένην R_1 εἰς τὴν στάθμην 1 - 1 καὶ κατόπιν τὸ δυναμοπολύγωνον G_1, E_1, G_2, E_2, διὰ νὰ εὕρωμε τὴν συνισταμένην R_2 εἰς τὴν στάθμην 2 - 2 [σχ. 5 · 2 ε (β)].

Διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης χρησιμοποιοῦμε τὸ σχοινοπολύγωνον.

5 · 3 Ἀσκήσεις.

Αἱ ἑπόμεναι ἀσκήσεις νὰ λυθοῦν ἀναλυτικῶς καὶ γραφικῶς:

1) Εἰς μίαν σιδηρᾶν ῥάβδον, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ περιστραφῇ



Σχ. 5·3 α.

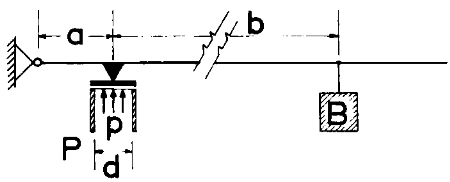
γύρω ἀπὸ τὸ 0, ἐνεργοῦν αἱ τρεῖς δυνάμεις τοῦ σχήματος 5 · 3 α. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν α ἀπὸ τὴν μεσαίαν δύναμιν πρέπει νὰ τεθῇ ἡ στήριξις 0 διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ ράβδος;

Ἀπάντησις: $\alpha = 0{,}70$ m

2) Ἡ ἀσφαλιστικὴ δικλεὶς τοῦ σχήματος 5·3β ἀνοίγει, ὅταν ἡ ὑπερπίεσις τοῦ ἀτμοῦ, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς αὐλὸν διαμέτρου $d = 20$ mm, ὑπερβῇ τὴν τιμὴν p.

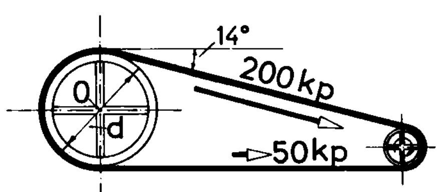
Ἐὰν ἡ ἀπόστασις α εἶναι 120 mm καὶ τὸ βάρος B εἶναι 12 kp, εἰς ποίαν ἀπόστασιν b πρέπει νὰ μετακινήσωμε τὸ βάρος τοῦτο, ὥστε ἡ δικλεὶς νὰ ἀνοίγῃ μόλις ἡ ὑπερπίεσις p ὑπερβῇ τὰ 20 kp/cm²;

Ἀπάντησις: $b = 508$ mm



Σχ. 5·3β.

3) Μία τροχαλία διαμέτρου $d = 600$ mm περιστρέφεται δι᾽ ἑνὸς ἱμάντος. Τὸ ἄνω τμῆμα τοῦ ἱμάντος μεταφέρει δύναμιν 200 kp καὶ ἔχει κλίσιν 14° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν, ἐνῶ τὸ κάτω τμῆμα εἶναι ὁριζόντιον καὶ ἕλκεται μὲ δύναμιν 50 kp (σχ. 5·3γ).



Σχ. 5·3γ.

Νὰ ὑπολογισθοῦν:

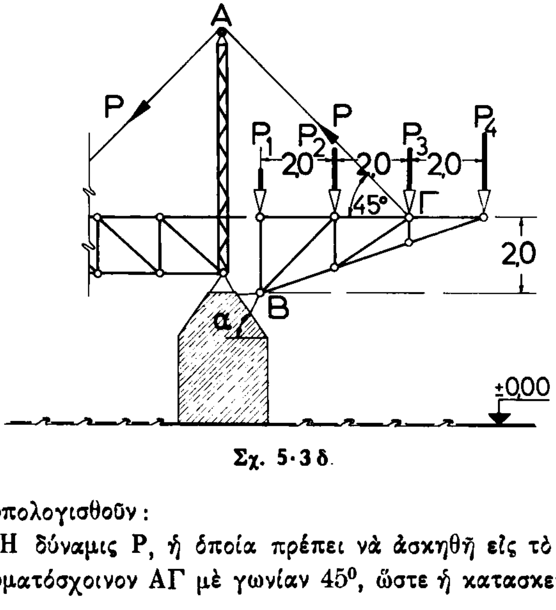
α) Ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων τοῦ ἱμάντος, δηλαδὴ τὸ μέγεθός της, ἡ γωνία της α ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ἡ ἀπόστασίς της x_0 ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς τῆς τροχαλίας.

β) Ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ 0 καθὼς καὶ ἡ ροπὴ τῶν δύο δυνάμεων τοῦ ἱμάντος ὡς πρὸς τὸ O. Ποία ἡ διαφορά των;

Ἀπάντησις: α) $R = 248{,}7$ kp. $\alpha = 11^0\ 12'$. $x_0 = 180$ mm.

β) $M_0 = 4\,500$ kpcm. Οὐδεμία

4) Τὸ ἄκρον μεταφορικῆς ταινίας κατασκευάζεται ἀρθρωτὸν περὶ τὸ B, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναβιβάζεται καὶ καταβιβάζεται διὰ τὴν εὐχερεστέραν φόρτωσιν μικρῶν πλοίων (σχ. 5·3 δ). Ἀπὸ τὸν σκελετὸν τῆς ταινίας διαβιβάζονται εἰς τὴν κατασκευὴν τὰ φορτία $P_1 = 400$ kp, $P_2 = P_3 = 800$ kp καὶ $P_4 = 1\,000$ kp.



Σχ. 5·3 δ.

Νὰ ὑπολογισθοῦν:

α) Ἡ δύναμις P, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἀσκηθῇ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἀπὸ τὸ συρματόσχοινον ΑΓ μὲ γωνίαν 45^0, ὥστε ἡ κατασκευὴ νὰ ἰσορροπῇ.

β) Ἡ δύναμις ποὺ διαβιβάζεται εἰς τὴν ἄρθρωσιν B.

γ) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία α, ὥστε ἡ B νὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ὑποστήριγμά της;

Ἐκ τῶν δύο λύσεων περιγράφομε κατωτέρω πρὸς διευκόλυνσιν τὴν γραφικήν:

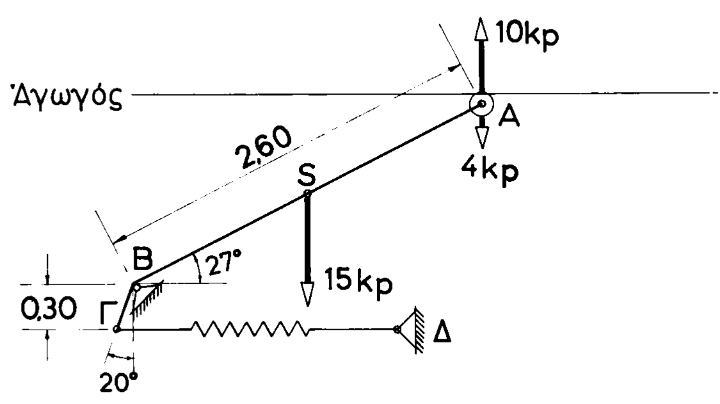
Μὲ τὸ δυναμοπολύγωνον εὑρίσκεται τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης $R = 3\,000$ kp τῶν δυνάμεων P_1, P_2, P_3 καὶ P_4 καὶ μὲ τὸ σχοινοπολύγωνον ἡ θέσις της. Ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς δυνάμεως P εἶναι ἡ ΑΓ.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας ἐνεργείας τῆς P καὶ τῆς R πρέπει νὰ διέρχεται καὶ ἡ ἀντίδρασις B. Τὸ δυναμοπολύγωνον R, P καὶ B πρέπει νὰ εἶναι κλειστόν. Ἀπὸ αὐτὸ προκύπτει $P = 2\,550$ kp, $B = 2\,160$ kp ($B_v = 1\,200$ kp, $B_H = 1\,800$ kp) καὶ $\alpha = 56^0\ 20'$.

5) Ἡ κεραία ἑνὸς τρόλλεϋ ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ σχήματος 5·3ε. Ἡ μικρὴ τροχαλία A, διὰ νὰ μὴ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν ἀγωγόν, πιέζεται ἐπάνω εἰς αὐτὸν μὲ δύναμιν 10 kp καὶ κατὰ τὴν κύλισίν της παραλαμβάνει ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν. Ἡ πίεσις ἐπιτυγχάνεται μὲ τὸ ἐλατήριον ΓΔ, ποὺ τοποθετεῖται εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς περὶ τὸ B περιστρεπτῆς κεραίας. Τὸ ἴδιον βάρος τῆς κεραίας εἶναι 15 kp καὶ δρᾷ εἰς τὸ μέσον S τοῦ μήκους AB, ἐνῷ τὸ βάρος τῆς τροχαλίας εἶναι 4 kp.

Ζητεῖται ἡ δύναμις ποὺ πρέπει νὰ ἀσκῇ τὸ ἐλατήριον εἰς τὸ Γ.

Ἀπάντησις: Γ = 176,7 kp



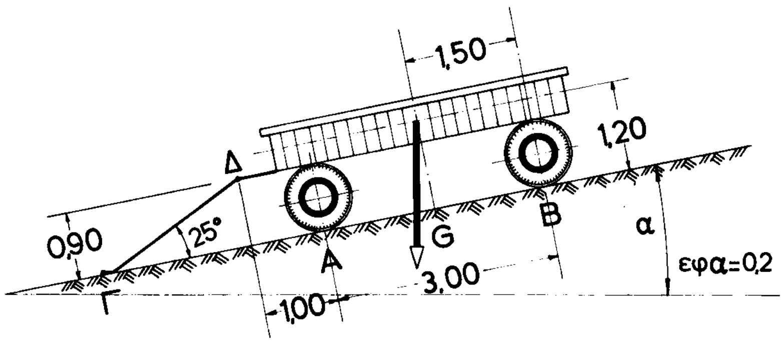
Σχ. 5·3ε.

6) Ἡ γεωργικὴ «πλατφόρμα» τοῦ σχήματος 5·3ζ μὲ συνολικὸν φορτίον, ἀπόβαρον καὶ ὠφέλιμον, $G = 5\,000$ kp σταθμεύει ἐπὶ ἀγροτικοῦ δρόμου μὲ κλίσιν 20 % καὶ συγκρατεῖται εἰς τὴν θέσιν της διὰ τῆς ῥάβδου ΓΔ.

Ζητοῦνται α) Ἡ φόρτισις τῶν τροχῶν A καὶ B καὶ β) ἡ ἐσωτερικὴ δύναμις ποὺ ἀναπτύσσεται εἰς τὴν ῥάβδον ΓΔ.

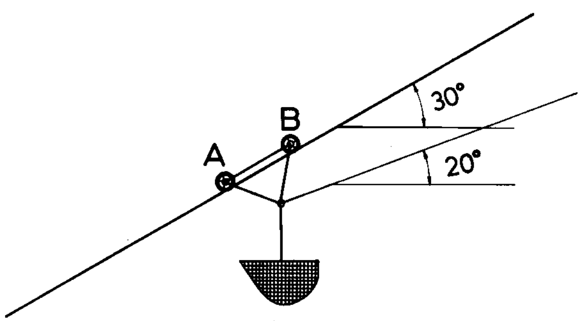
Ἀπάντησις: α) $A = 1\,941$ kp. $B = 2\,505$ kp. β) ΓΔ = — 1 081 kp. (θλῖψις)

7) Ἡ ἐναέριος μεταφορὰ ἑνὸς μεταλλεύματος πραγματοποιεῖται μὲ βαγόνια, κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει συνολικὸν βάρος, ἴδιον καὶ τοῦ



Σχ. 5·3 ζ.

μεταλλεύματος ποὺ περιέχει 2 Mp. Τὸ βαγόνι κυλίεται διὰ τῶν τροχῶν A καὶ B ἐπὶ χονδροῦ καλωδίου καὶ ἕλκεται διὰ λεπτοῦ καλωδίου πρὸς τὸ τέρμα (σχ. 5·3 η).



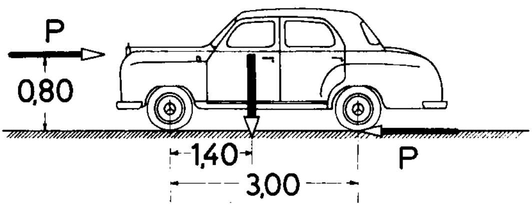
Σχ. 5·3 η.

Ζητοῦνται α) Ἡ ἀπαιτουμένη διὰ κάθε βαγόνι ἑλκτικὴ δύναμις τοῦ λεπτοῦ καλωδίου. β) Αἱ φορτίσεις τῶν τροχῶν A καὶ B.

Ἀπάντησις: α) S = 1 015 kp. β) A = B = 954 kp

8) Ἕνα ἐπιβατικὸν αὐτοκίνητον ζυγίζει μετὰ τῶν ἐπιβατῶν του 1 500 kp. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἀξόνων του (μεταξόνιον) εἶναι

3,0 m ἡ δὲ συνισταμένη τοῦ βάρους του εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1,40 m ἀπὸ τὸν ἐμπρόσθιον ἄξονα (σχ. 5·3θ). Ὅταν ἀναπτύσσῃ ταχύτητα 120 km/h, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος ἀνέρχεται εἰς P = 150 kp, ποὺ ὑπερνικᾶται ἀπὸ τὴν δύναμιν προωθήσεως, μὲ τὴν ὁποίαν οἱ ὀπίσθιοι κινητήριοι τροχοὶ ὠθοῦν τὸ ὁδόστρωμα.



Σχ. 5·3θ.

Ζητοῦνται α) Ἡ φόρτισις A τοῦ ἐμπροσθίου ἄξονος καὶ B τοῦ ὀπισθίου ἄξονος, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον σταθμεύῃ εἰς ὁριζόντιον δρόμον. β) Αἱ φορτίσεις A καὶ B, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον τρέχῃ μὲ σταθερὰν ταχύτητα 120 km/h.

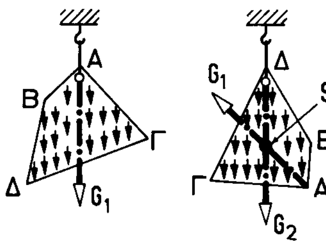
Ἀπάντησις: α) A = 800 kp. B = 700 kp. β) A = 760 kp. B = 740 kp

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

ΚΕΝΤΡΟΝ ΒΑΡΟΥΣ - ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

6·1 Γενικά.

Ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμε ὅτι τὰ σώματα ἀπαρτίζονται ἀπὸ πολλὰ μικρὰ τεμάχια ὕλης. Εἰς κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ τεμάχια αὐτὰ δρᾶ μία δύναμις, $P = m \cdot g$, δηλαδὴ τὸ βάρος των μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς (σχ. 6·1 α).



Σχ. 6·1 α.

Ἑπομένως τὰ βάρη ὅλων τῶν τμημάτων ἑνὸς σώματος ἀποτελοῦν παραλλήλους δυνάμεις μὲ γνωστὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς. Ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν παραλλήλων αὐτῶν δυνάμεων ὀνομάζεται *βάρος τοῦ σώματος*.

Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῆς ὀνομάζεται *κέντρον βάρους τοῦ σώματος*.

Ἐὰν στρέψωμε τὸ σῶμα, αἱ δυνάμεις θὰ παραμείνουν παράλληλοι μεταξύ των καὶ θὰ ἔχουν συνισταμένην, ποὺ θὰ ἔχῃ τὸ ἴδιον μέγεθος καὶ τὸ ἴδιον σημεῖον ἐφαρμογῆς S ὅπως καὶ προηγουμένως (σχ. 6·1 α).

Ἄρα *κέντρον βάρους* S *σώματος* εἶναι ἐκεῖνο τὸ σημεῖον του, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τῆς βαρύτητος δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ σώματος.

Ἀντιστοίχως ἔχομε καὶ κέντρον βάρους γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομε *κεντροειδές*. Μία ἐπιφάνεια ὅμως ἢ μία γραμμὴ δὲν ἔχουν μᾶζαν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι δὲν ἔχουν βάρος καὶ ἑπομένως καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς του ὡς κέντρον βάρους. Διὰ νὰ κατανοήσωμε τὴν ἔννοιαν τοῦ κεντροειδοῦς, ἂς δεχθοῦμε μίαν ἐπιφάνειαν F, καλυμμένην ὁμοιομόρφως μὲ τὸ ἴδιον ὁμοιογενὲς ὑλικόν, π.χ. ἕνα ἔλασμα. Τὴν χωρίζομε εἰς ἐπὶ μέρους ἐπιφανείας μὲ ἐμβαδὸν f_1, f_2 καὶ f_3 (σχ. 6 · 3 α) καὶ ὑπολογίζομε τὰ βάρη τῶν διαφόρων τμημάτων της:

$$g_1 = f_1 \cdot \delta \cdot \gamma$$
$$g_2 = f_2 \cdot \delta \cdot \gamma$$
$$g_3 = f_3 \cdot \delta \cdot \gamma.$$

Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων g_1, g_2 καὶ g_3 διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἐλάσματος.

Ἐπειδὴ ὑπεθέσαμε ὅτι τὸ πάχος δ καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος γ τοῦ ὑλικοῦ εἶναι τὰ ἴδια εἰς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν, ἠμποροῦμε νὰ τὰ παραλείψωμε καί, ἀντὶ νὰ ὑπολογίζωμε μὲ τὰ βάρη, νὰ λάβωμε μόνον τὰ ἐμβαδὰ f_1, f_2 καὶ f_3.

Συμπέρασμα.

Διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ κεντροειδὲς μιᾶς ἐπιφανείας λαμβάνονται τὰ ἐμβαδὰ τῶν τμημάτων της ὡς δυνάμεις καὶ διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ κεντροειδὲς μιᾶς γραμμῆς τὰ μήκη τῶν τμημάτων της.

Κεντροβαρικὸς ἄξων ὀνομάζεται κάθε εὐθεῖα ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους. Ἡ εὐθεῖα συμμετρίας, π.χ. ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου ἢ ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου, ἀποτελεῖ κεντροβαρικὸν ἄξονα. Τὸ κέντρον βάρους ἠμποροῦμε νὰ τὸ ἀνεύρωμε ὡς σημεῖον τομῆς δύο κεντροβαρικῶν ἀξόνων εἴτε θεωρητικῶς, ἐὰν ἐφαρμόσωμε τοὺς κανόνας τῆς στατικῆς, εἴτε πρακτικῶς μὲ ἕνα πείραμα.

Ὁ θεωρητικὸς τρόπος ἀναπτύσσεται εἰς τὴν παράγραφον 6 · 3.

Ὁ πρακτικὸς τρόπος ἐφαρμόζεται διὰ τῆς διπλῆς ἀναρτήσεως τοῦ σώματος. Ἐὰν ἔχωμε π.χ. ἕνα ἰσοπαχὲς ἔλασμα, τὸ ΑΒΓΔ, τὸ ἀναρτοῦμε μὲ ἕνα σύρμα διαδοχικῶς ἀπὸ δύο ἀκμάς του, π.χ. τὰς Α καὶ Δ καὶ τὸ ἀφήνομε κάθε φορὰν νὰ ἠρεμήσῃ (σχ. 6·1α). Εἰς τὸ σῶμα ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις, τὸ βάρος του καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ σύρματος, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν.

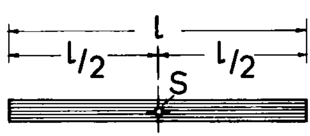
Ἄρα αἱ δυνάμεις αὐταὶ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ὁ ἄξων τοῦ σύρματος συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς δυνάμεως βαρύτητος, δηλαδὴ αἱ εὐθεῖαι G_1 καὶ G_2 ἀποτελοῦν κεντροβαρικοὺς ἄξονας τοῦ σώματος. Τὸ σημεῖον τομῆς των S ἀποτελεῖ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν S καὶ εἰς τὸ μέσον τοῦ πάχους τοῦ ἐλάσματος.

Εἰς τὰ ἑπόμενα κεφάλαια εὑρίσκομε μὲ γνωστοὺς τύπους τὴν θέσιν τοῦ κεντροειδοῦς ἁπλῶν γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν καὶ προσδιορίζομε τὸ κεντροειδὲς τῶν συνθέτων ἐπιφανειῶν καὶ τὸ κέντρον βάρους τῶν σωμάτων.

6·2 Κεντροειδὲς ἁπλῶν γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν.

α) *Εὐθείας γραμμῆς.*

Σώματα, τῶν ὁποίων αἱ δύο διαστάσεις εἶναι πολὺ μικραί, ἂν συγκριθοῦν πρὸς τὴν τρίτην, ὅπως εἶναι π.χ. μία σιδηρᾶ ρά-



Σχ. 6·2α.

βδος, καὶ ἔχουν τὴν ἰδίαν συμμετρικὴν διατομὴν εἰς ὅλον τὸ μῆκος των, θεωροῦνται ὡς *ἁπλαῖ γραμμαί*. Τὸ κεντροειδές των εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους των (σχ. 6·2α).

β) *Κυκλικοῦ τόξου* (σχ. 6·2β).

Ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους:

$$y_0 = \frac{r \cdot l}{b}$$

$$\text{ὅπου } r = \text{ἀκτίς, } b = 2r\frac{\alpha^0}{57{,}3^0}$$

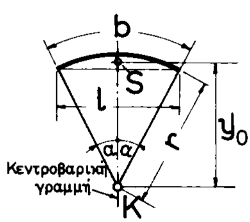
$$l = 2r\,\eta\mu\alpha.$$

Εἰδικαὶ περιπτώσεις:

$$\text{Ἡμιπεριφέρεια } y_0 = \frac{2r}{\pi} = 0{,}636\,6\,r.$$

$$\text{Τεταρτοπεριφέρεια } y_0 = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}900\,3\,r.$$

$$\text{Ἑκτοπεριφέρεια } y_0 = \frac{3r}{\pi} = 0{,}954\,9\,r.$$



Σχ. 6·2β.

γ) *Κύκλου καὶ κυκλικῆς περιφερείας.*

Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

δ) *Παραλληλογράμμου* (ἐπιφανείας καὶ περιμέτρου).

Τὸ κέντρον βάρους τοῦ παραλληλογράμμου εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων (σχ. 6·2γ).

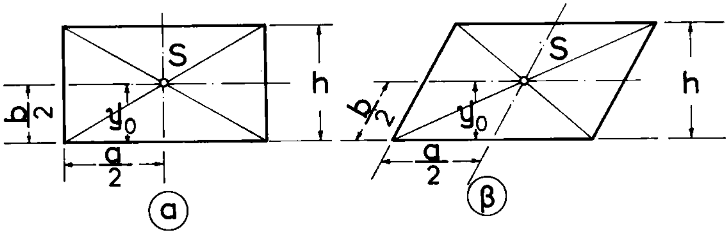
Ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους $y_0 = \frac{h}{2}$.

Τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ διὰ τὸ ὀρθογώνιον, τὸν ρόμβον καὶ τὸ τετράγωνον.

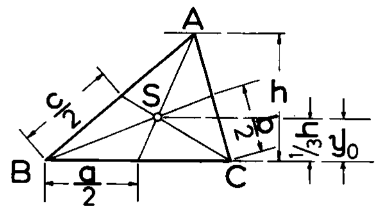
ε) *Τριγώνου* (ἐπιφανείας).

Τὸ κέντρον βάρους εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων (σχ. 6 · 2δ).

$$y_0 = \frac{h}{3}$$



Σχ. 6·2γ.



Σχ. 6·2δ.

στ) *Τραπεζίου* (ἐπιφανείας).

Διὰ νὰ εὕρωμε τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπεζίου γραφικῶς, ἐπεκτείνομε τὴν πλευρὰν α κατὰ b καὶ τὴν πλευρὰν b κατὰ α καὶ χαράσσομε τὴν γραμμὴν AB.

Ἐν συνεχείᾳ ἑνώνομε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν α καὶ b.

Τὸ σημεῖον τομῆς S εἶναι τὸ κέντρον βάρους (σχ. 6 · 2ε).

Ἀναλυτικῶς ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

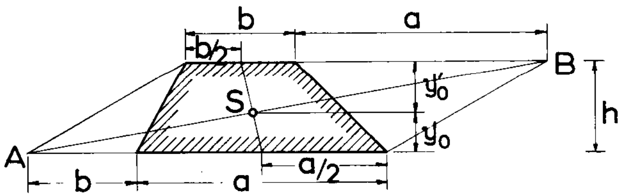
$$y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{\alpha + 2b}{\alpha + b}, \qquad y_0' = \frac{h}{3}\,\frac{2\alpha + b}{\alpha + b}.$$

ζ) *Κυκλικοῦ τομέως* (ἐπιφανείας).

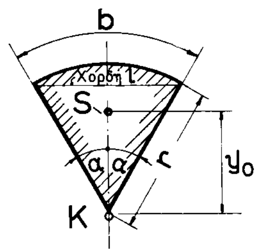
Ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους (σχ. 6 · 2 ζ).

$$y_0 = \frac{2}{3}\,\frac{r \cdot l}{b}, \qquad b = 2\,r\,\frac{\alpha^0}{57{,}3^0}$$

ὅπου: r = ἀκτίς, $l = 2\,r\,\eta\mu\alpha$.



Σχ. 6·2ε.



Σχ. 6·2ζ.

Εἰδικαὶ περιπτώσεις:

$$\text{Ἡμικύκλιον } y_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi} = 0{,}424\,4\ r.$$

$$\text{Τεταρτοκύκλιον } y_0 = \frac{4\,r\sqrt{2}}{3\,\pi} = 0{,}600\,2\,r.$$

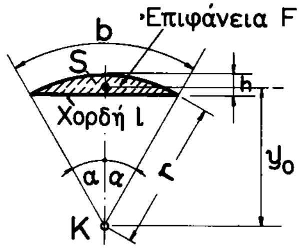
$$\text{Ἑκτοκύκλιον } y_0 = \frac{2\,r}{\pi} = 0{,}636\,6\,r.$$

η) *Κυκλικοῦ τμήματος*.

Ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους (σχ. 6 · 2 η).

$$y_0 = \frac{l^3}{12\,F}, \quad \text{ὅπου } F = \text{ἐπιφάνεια} = \frac{r(b-l)+l\,h}{2},$$

$$h = 2\,r\,\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ } l = 2\,r\eta\mu\alpha.$$



Σχ. 6·2 η.

6·3 Κεντροειδὲς συνθέτων ἐπιφανειῶν.

Ὅπως διεπιστώσαμε εἰς τὴν παράγραφον 6·1, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ κεντροειδὲς μιᾶς ἐπιφανείας θεωροῦνται τὰ ἐμβαδὰ τῶν τμημάτων της ὡς δυνάμεις παράλληλοι μεταξύ των.

Τὸ κεντροειδὲς τῶν συνθέτων ἐπιφανειῶν καθορίζομε συνήθως ὡς τὸ σημεῖον, ὅπου τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς συνισταμένης αὐτῆς, ὅπως ἐμάθαμε εἰς τὰ κεφάλαια 4 καὶ 5, χρησιμοποιοῦμε δύο μεθόδους:

α) Τὴν *γραφικὴν μέθοδον*, κατὰ τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμε τὸ σχοινοπολύγωνον.

β) Τὴν *ἀναλυτικήν*, κατὰ τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμε τὴν πρότασιν τῶν ροπῶν.

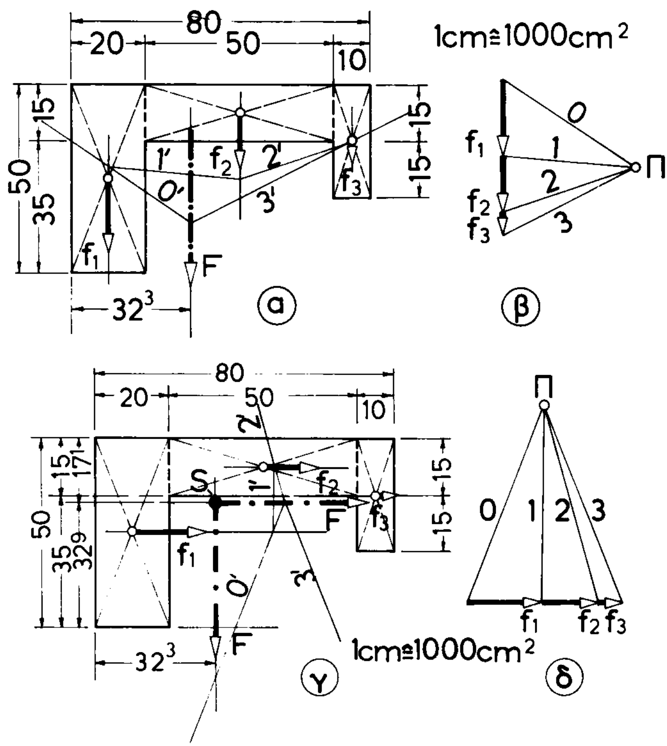
Θὰ ἐξετάσωμε τώρα αὐτὰς τὰς δύο μεθόδους.

1. *Γραφικὴ μέθοδος προσδιορισμοῦ κέντρου βάρους.*

Χωρίζομε τὴν διδομένην ἐπιφάνειαν F τοῦ σχήματος 6·3α εἰς ἐπὶ μέρους ἐπιφανείας, π.χ. εἰς ὀρθογώνια, μὲ ἐμβαδὸν f_1, f_2, f_3, μὲ γνωστὸν κέντρον βάρους.

Μὲ βάσιν τὰ δεδομένα τοῦ σχήματος ὑπολογίζομε τὰ ἐμβαδὰ f_1, f_2 καὶ f_3 καὶ εὑρίσκομε:

$$f_1 = 50 \times 20 = 1\,000\ \mathrm{cm}^2$$
$$f_2 = 50 \times 15 = \ \ 750\ \mathrm{cm}^2$$
$$f_3 = 10 \times 30 = \ \ 300\ \mathrm{cm}^2.$$



Σχ. 6 · 3 α.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀντὶ νὰ ὁμιλοῦμε περὶ στατικῆς ῥοπῆς δυνάμεων, ὁμιλοῦμε περὶ *στατικῆς ῥοπῆς ἐπιφανειῶν*. Θεωροῦμε δηλαδὴ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰ βάρη ἑνὸς στερεοῦ, ποὺ ἔχει διατομὴν τὴν ἐπιφάνειαν.

Σχεδιάζομε τὰ ἐμβαδὰ f_1, f_2, f_3 ὡς δυνάμεις εἰς τὰ κέντρα βάρους τῶν τμημάτων κατὰ μίαν οἱανδήποτε ἀλλὰ τὴν ἰδίαν πάντοτε διεύθυνσιν μὲ τὴν ἰδίαν κλίμακα δυνάμεων, π.χ. $1\,\mathrm{cm} \triangleq 1\,000\,\mathrm{cm}^2$.

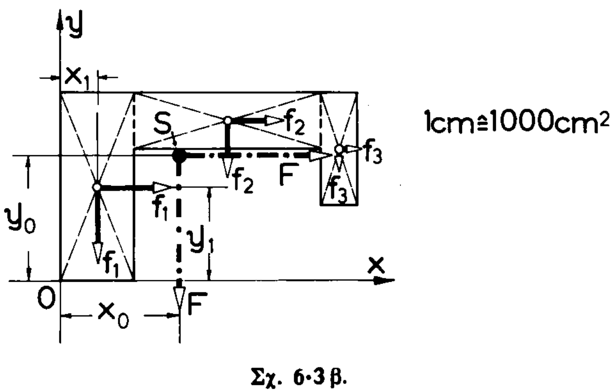
Προσδιορίζομε τὴν συνισταμένην τῶν δυνάμεων (τῶν ἐμβαδῶν) f_1, f_2, f_3 μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ δυναμοπολυγώνου καὶ σχοινοπολυγώνου [σχ. 6·3α(β)]. Σχεδιάζομε ἐκ νέου τὰς δυνάμεις f_1, f_2, f_3 μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ μέγεθος, κατὰ μίαν ὅμως ἄλλην διεύθυνσιν [σχ. 6·3α(γ)]. Προσδιορίζομε τὴν συνισταμένη τῶν δυνάμεων διὰ τῆς κατασκευῆς νέου δυναμοπολυγώνου καὶ σχοινοπολυγώνου [σχ. 6·3α(δ)].

Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο συνισταμένων εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον βάρους S.

2. *Ἀναλυτικὴ μέθοδος προσδιορισμοῦ κέντρου βάρους.*

Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν ροπῶν (παράγρ. 1·4) «ἡ στατικὴ ροπὴ τῆς συνισταμένης ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον».

Λαμβάνομε δύο τυχόντας ἄξονας συντεταγμένων Ox καὶ Oy



Σχ. 6·3β.

(σχ. 6·3β) καὶ ὑπολογίζομε ὡς πρὸς κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς τὰς στατικὰς ροπὰς τῶν δυνάμεων.

Θὰ ἔχωμε:

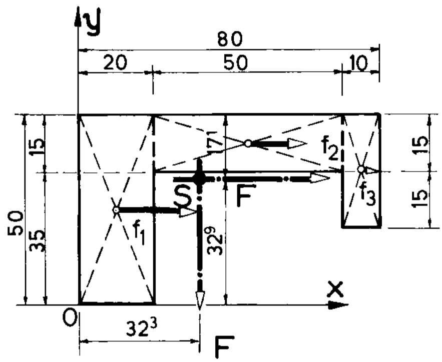
$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = F x_0 \text{ καὶ}$$
$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = F y_0.$$

Ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους εἶναι:

$$x_0 = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3}{F} = \frac{\Sigma f x}{F}$$

$$y_0 = \frac{f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3}{F} = \frac{\Sigma f y}{F}.$$

Ἐὰν συμπτωματικῶς ὁ ἄξων x διήρχετο διὰ τοῦ κέντρου βάρους, ἐὰν ἦτο δηλαδὴ κεντροβαρικὸς ἄξων, τότε $x_0 = 0$, ἄρα $f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0$. Καὶ ἀντιστοίχως ἐὰν ὁ ἄξων y ἦτο κεντροβαρικὴ γραμμή, τότε $y_0 = 0$ καὶ ἑπομένως, $f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0$. Διὰ τὸ ἀριθμητικὸν παράδειγμα τοῦ σχήματος 6 · 3 γ καταρτίζομε τὸν ἀκόλουθον πίνακα:



Σχ. 6·3 γ.

α/α	f cm²	x cm	y cm	fx cm³	fy cm³
1	1 000	10	25	10 000	25 000
2	750	45	42,5	33 750	31 875
3	300	75	35	22 500	10 500
	F = 2 050			66 250	67 375

Αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων εἶναι:

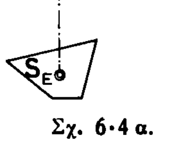
$$x_0 = \frac{\Sigma f x}{F} = \frac{66\,250}{2\,050} = 32{,}3\,\text{cm},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma f y}{F} = \frac{67\,375}{2\,050} = 32{,}9\,\text{cm}.$$

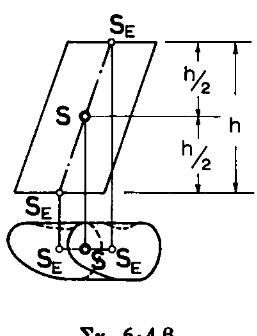
6·4 Κέντρον βάρους σωμάτων.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ἀσχολούμεθα κυρίως μὲ πρισματικὰ ἢ κυλινδρικὰ σώματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐξετάζομε συνήθως τμήματα μήκους 1,00 m ἢ ὕψους 1,00 m. Ἡ εὕρεσις τοῦ κέντρου βάρους μᾶς εἶναι ἀπαραίτητος διὰ νὰ ἐλέγξωμε τὴν εὐστάθειαν καὶ τὴν ἀντοχήν των (π.χ. εἰς τοίχους ἀντιστηρίξεως γαιῶν, βάθρα γεφυρῶν κλπ).

Εἰς τὰ πρισματικὰ ἢ κυλινδρικὰ σώματα εἶναι ἀρκετὸν νὰ εὕρωμε τὸ κέντρον βάρους S_E τῆς διατομῆς των. Τὸ κέντρον βάρους S τοῦ σώματος εὑρίσκεται τότε εἰς τὸ μέσον τῆς γραμμῆς, ποὺ συνδέει τὰ κέντρα βάρους S_E τῶν δύο ἀκραίων ἐπιφανειῶν (σχ. 6·4α καὶ 6·4β).

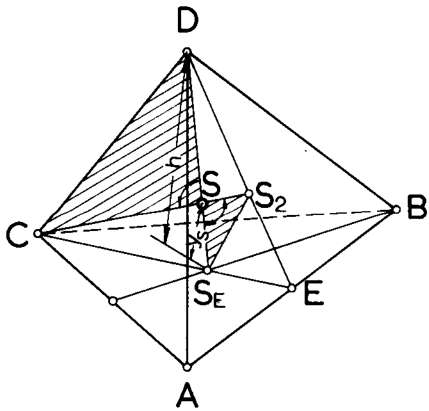


Σχ. 6·4 α.



Σχ. 6·4 β.

Τὸ κέντρον βάρους S τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ κώνου, ὀρθοῦ ἢ λοξοῦ, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον βάρους S_E τῆς βάσεως. Ἐὰν ὡς ἀρχὴν μετρήσεως θεωρήσωμε τὴν κορυφήν, τὸ κέντρον βάρους S εὑρίσκεται εἰς τὰ 3/4 τῆς γραμμῆς.



Σχ. 6·4 γ.

6·5 Κανόνες τῶν Πάππου καὶ Guldin *.

Οἱ Πάππος καὶ Guldin, συνέταξαν δύο κανόνας, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμε διὰ νὰ ὑπολογίζωμε τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον σωμάτων ἐκ περιστροφῆς. Διὰ νὰ τοὺς χρησιμοποιήσωμε ὅμως χρειάζεται νὰ γνωρίζωμε τὴν θέσιν τοῦ κέντρου βάρους γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομε κατὰ τὰς μεθόδους ποὺ ἀνεπτύχθησαν εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια.

Οἱ κανόνες αὐτοὶ εἶναι:

Πρῶτος Κανών. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μανδύου ἑνὸς σώματος ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς γενετείρας γραμμῆς ἐπὶ τὸν δρόμον τὸν ὁποῖον διατρέχει τὸ κέντρον βάρους τῆς γενετείρας κατὰ τὴν περιστροφήν.

$F = \varphi x_0 \Gamma$ διὰ μερικὴν περιστροφὴν

$F = 2\pi x_0 \Gamma$ δι' ὁλικὴν περιστροφήν.

Π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ὅλων τῶν πλευρικῶν ξύλων ἑνὸς βαρελιοῦ (χω-

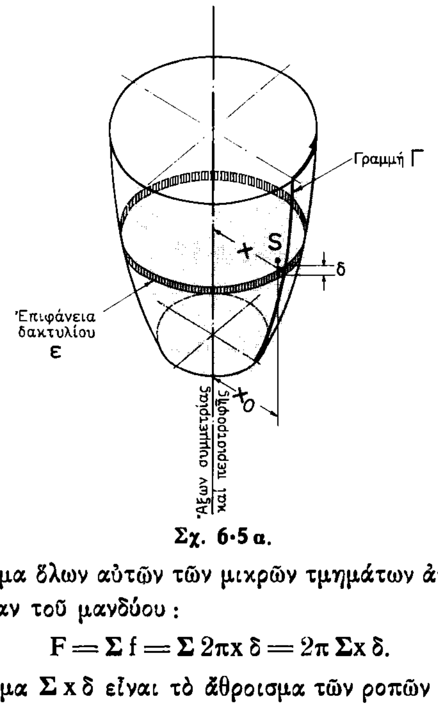
---

* Πάππος, Ἕλλην Μαθηματικός, 3ος π.Χ. αἰών.
Guldin, Ἑλβετὸς Μαθηματικός, 1577 - 1643.

ρὶς τὸν πυθμένα) εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος Γ ἑνὸς ξύλου ἐπὶ 2π φορὲς τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ξύλου αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ βαρελιοῦ.

Ἀπόδειξις τοῦ πρώτου κανόνος. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μανδύου σωμάτων ἐκ περιστροφῆς δημιουργεῖται διὰ τῆς περιστροφῆς μιᾶς γραμμῆς (εὐθείας ἢ καμπύλης) μήκους Γ, ποὺ καλεῖται γενέτειρα, περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ σώματος (σχ. 6·5α). Τὸ πάρα πολὺ μικρὸν τμῆμα δ τῆς γραμμῆς Γ δημιουργεῖ κατὰ τὴν περιστροφὴν ἕνα δακτύλιον μὲ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας:

$$f = 2\pi x \delta.$$



Σχ. 6·5 α.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν μικρῶν τμημάτων ἀποτελεῖ τὴν συνολικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μανδύου:

$$F = \Sigma f = \Sigma\, 2\pi x\, \delta = 2\pi\, \Sigma x\, \delta.$$

Τὸ ἄθροισμα $\Sigma x \delta$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν μικρῶν τμημάτων δ τῆς γραμμῆς Γ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς.

Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν ροπῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν ἰσοῦται μὲ τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης, ἄρα, ἐὰν x_0 εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῆς γενετείρας Γ ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, προκύπτει ὅτι:

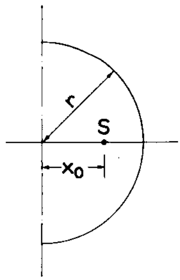
$$\Gamma \cdot x_0 = \Sigma x\,\delta,$$

καὶ ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν λαμβάνεται :

$$F = 2\pi\, x_0\, \Gamma.$$

Διὰ νὰ τὸ κατανοήσωμε καλύτερον θὰ λύσωμε τὴν ἑξῆς ἄσκησιν :

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν F τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν δημιουργεῖ ἡ περιστροφὴ τῆς ἡμιπεριφερείας περὶ τὴν διάμετρόν της (σχ. 6·5β).



Σχ. 6·5 β.

Λύσις.

Γνωρίζομε ὅτι τὸ κέντρον βάρους τῆς ἡμιπεριφερείας εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $x_0 = \frac{2r}{\pi}$ ἀπὸ τὴν διάμετρον [ἴδε παράγρ. 6·2(β)].

Κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα Πάππου - Guldin τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας εἶναι :

$F = 2\pi\, x_0\, \Gamma = 2\pi \frac{2\,r}{\pi} \pi\, r = 4\pi r^2$, ὅπως τὸ γνωρίζομε ἀπὸ τὴν στερεομετρίαν.

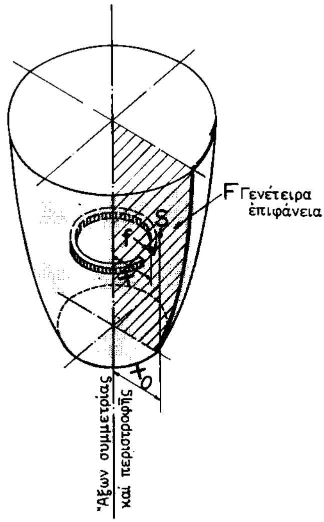
Δεύτερος Κανών. Ὁ ὄγκος σώματος ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία διὰ τῆς περιστροφῆς της δημιουργεῖ τὸ σῶμα, ἐπὶ τὸν δρόμον τὸν ὁποῖον διατρέχει τὸ κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς κατὰ τὴν περιστροφήν. Ἤτοι :

$V = \varphi\, x_0\, F$ διὰ μερικὴν περιστροφὴν

$V = 2\pi\, x_0\, F$ δι' ὁλικὴν περιστροφήν.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ περιεχόμενον τοῦ βαρελίου, π.χ. τὸν ὄγκον τοῦ οἴνου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν F τῆς ἐπιφανείας ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ βαρελίου καὶ ἕνα πλευρικὸν ξύλον, ἐπὶ 2π φορὰς τὴν ἀπόστασιν x_0 τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας F ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ βαρελιοῦ.

Ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου κανόνος. Ὁ ὄγκος σωμάτων ἐκ περιστροφῆς δημιουργεῖται διὰ τῆς περιστροφῆς μιᾶς ἐπιφανείας περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ σώματος (σχ. 6·5γ).



Σχ. 6·5γ.

Κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς ἐπιφανείας τὸ πάρα πολὺ μικρόν της τμῆμα f δημιουργεῖ ἕνα δακτύλιον μὲ ὄγκον:

$$\upsilon = 2\pi x f.$$

Τὸ ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν μικρῶν ὄγκων εἶναι ὁ συνολικὸς ὄγκος τοῦ σώματος:

$$V = \Sigma\upsilon = \Sigma\, 2\pi x f = 2\pi \Sigma x f.$$

Τὸ ἄθροισμα $\Sigma x f$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας ὅλων τῶν τμημάτων τῆς ἐπιφανείας F [ἴδε παράγρ. 6·3(2)] καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ροπὴν ὅλης τῆς ἐπιφανείας F ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

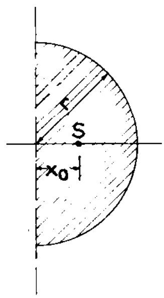
Ἄρα $F x_0 = \Sigma x f$, τὸ ὁποῖον, ἐὰν τεθῇ εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν, προκύπτει ὅτι:

$$V = 2\pi x_0 F.$$

Διὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε καλύτερα τὸν δεύτερον κανόνα θὰ λύσωμε τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Δίδεται ἡμικύκλιον ἀκτῖνος r.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος V τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν δημιουργεῖ τὸ ἡμικύκλιον, ὅταν περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρόν του (σχ. 6 · 5 δ).



Σχ. 6·5 δ.

Λύσις.

Εἴδαμε ὅτι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἡμικυκλίου εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $x_0 = \frac{4r}{3\pi}$ ἀπὸ τὴν διάμετρόν του [ἴδε παράγρ. 6 · 2 (ζ)].

Κατὰ τὸν δεύτερον κανόνα τῶν Πάππου - Guldin ἔχομε:

$$V = 2\pi x_0 \cdot F = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

ποὺ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ὅπως τὸν γνωρίζομε ἀπὸ τὴν στερεομετρίαν.

Παράδειγμα 1.

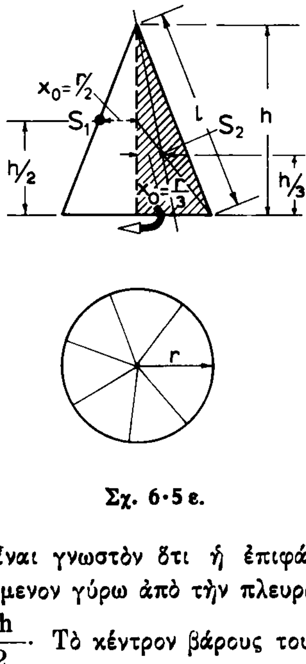
Μὲ τοὺς δύο κανόνας Πάππου - Guldin νὰ ὑπολογισθῇ:

α) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μανδύου καὶ β) ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κώνου μὲ βάσιν κυκλικήν, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος h καὶ μῆκος πλευρᾶς l (σχ. 6 · 5 ε).

Λύσις.

α) Συμφώνως πρὸς τὸν πρῶτον κανόνα Πάππου - Guldin ἔχομε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μανδύου $F = 2\pi x_0 \Gamma$. Γνωρίζομε ὅτι τὸ κέντρον βάρους S_1 εὐθείας γραμμῆς μήκους l εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους της [ἴδε παράγρ. 6·2(α)]. Ἑπομένως ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς $x_0 = \frac{r}{2}$· Τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς Γ ἰσοῦται μὲ l. Ἄρα ἔχομε: $F = 2\pi \frac{r}{2} l = \pi r l$.

β) Ἀπὸ τὸν δεύτερον κανόνα τῶν Πάππου - Guldin γνωρίζομε



Σχ. 6·5 ε.

ὅτι: $V = 2\pi x_0 F$. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου F, τὸ ὁποῖον περιστρεφόμενον γύρω ἀπὸ τὴν πλευράν του δημιουργεῖ τὸν κῶνον, ἰσοῦται μὲ $\frac{r\,h}{2}$· Τὸ κέντρον βάρους του S_2 εὑρίσκεται εἰς τὰ 2/3 τοῦ μήκους τῆς διαμέσου του μετρούμενον ἀπὸ τὴν κορυφὴν καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς ἀπόστασιν $x_0 = \frac{r}{3}$·

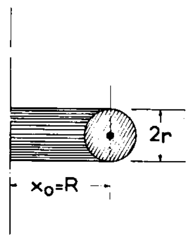
Ἄρα ὁ ζητούμενος ὄγκος ἰσοῦται μέ:

$$V = 2\pi \frac{r}{3} \frac{r\,h}{2} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Καὶ τὰ δύο αὐτὰ ἀποτελέσματα εὔκολα τὰ ἐπαληθεύομε ἀπὸ τὴν γεωμετρίαν.

Παράδειγμα 2.

Δίδεται ὁ κυκλικὸς δακτύλιος τοῦ σχήματος. 6 · 5 ζ. Ζητοῦνται α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του καὶ β) ὁ ὄγκος του.



Σχ. 6·5 ζ.

Λύσις.

α) Συμφώνως πρὸς τὸν πρῶτον κανόνα τῶν Πάππου - Guldin:

$$F = 2\pi x_0 \Gamma = 2\pi R\, 2\pi r = 4\pi^2 r R.$$

β) Συμφώνως πρὸς τὸν δεύτερον κανόνα:

$$V = 2\pi x_0 F = 2\pi R\, \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R.$$

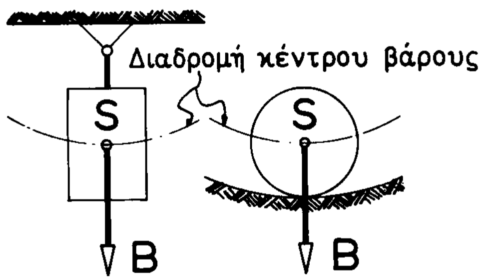
6 · 6 Εἴδη ἰσορροπίας - Εὐστάθεια.

Ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς σώματος ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον ἢ τὴν ἐπιφάνειαν στηρίξεώς του καθορίζει τὸ εἶδος τῆς ἰσορροπίας του.

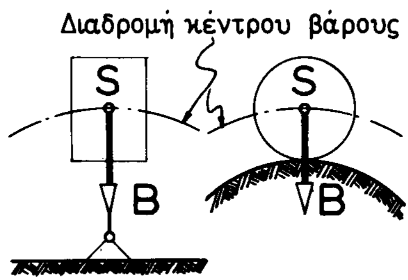
Διακρίνομε τρία εἴδη ἰσορροπίας: α) Τὴν *εὐσταθῆ*. β) Τὴν *ἀσταθῆ* καὶ γ) τὴν *ἀδιάφορον*.

Εὐσταθὴς ἰσορροπία ὑπάρχει, ὅταν διὰ μικρὰν ἀλλαγὴν τῆς θέσεως τοῦ σώματος τὸ κέντρον βάρους του ὑψοῦται, ὁπότε προκαλεῖται μία ροπὴ ἐπαναφορᾶς, ἡ ὁποία ἐπαναφέρει τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν (σχ. 6 · 6 α). Ἑπομένως εἰς τὴν κατάστασιν ἠρεμίας τοῦ σώματος τὸ κέντρον βάρους του εὑρίσκεται εἰς τὴν χαμηλοτέραν του θέσιν.

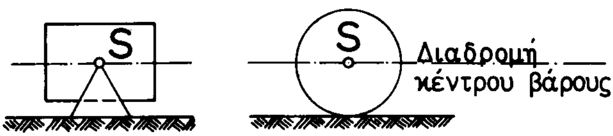
Ἡ ἀσταθὴς ἰσορροπία ὑπάρχει, ὅταν διὰ μικρὰν ἀλλαγὴν τῆς θέσεως τοῦ σώματος τὸ κέντρον βάρους του χαμηλώνη, ὁπότε προκαλεῖται μία ροπὴ ἐκτροπῆς, ἡ ὁποία ἀπομακρύνει τὸ σῶμα ἀπὸ τὴν ἀρχικήν του θέσιν (σχ. 6·6β).



Σχ. 6·6 α.



Σχ. 6·6 β.

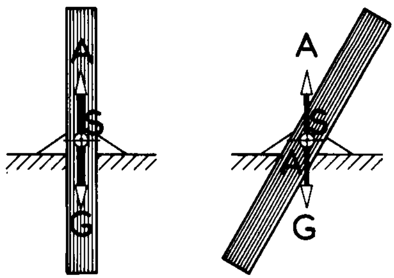


Σχ. 6·6 γ.

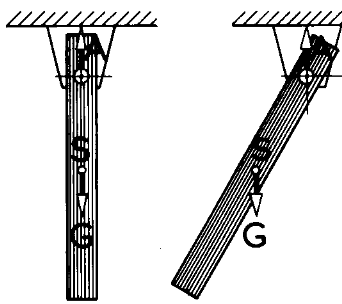
Ἡ *ἀδιάφορος ἰσορροπία* ὑπάρχει, ὅταν διὰ μικρὰν ἀλλαγὴν τῆς θέσεως τοῦ σώματος τὸ κέντρον βάρους του οὔτε ὑψοῦται οὔτε χαμηλώνει καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν προκαλεῖται οὔτε ροπὴ ἐπαναφορᾶς οὔτε ροπὴ ἐκτροπῆς (σχ. 6·6γ).

Τὰ τρία εἴδη ἰσορροπίας ἐμφανίζονται ἐναργέστερα εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς χαλυβδίνης λάμας.

Ἐὰν τὴν στηρίξωμε εἰς τὸ μέσον της καὶ τὴν τοποθετήσωμε κατακορύφως, θὰ ἰσορροπῇ. Καὶ ἐὰν ὅμως τὴν περιστρέψωμε καὶ τὴν ἀφήσωμε εἰς οἱανδήποτε θέσιν, πάλιν θὰ ἰσορροπῇ. Ἡ ἰσορροπία ἐδῶ εἶναι ἀδιάφορος (σχ. 6 · 6 δ).



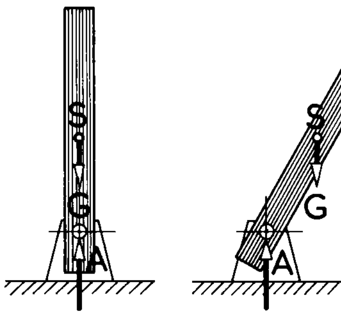
Σχ. 6·6 δ.



Σχ. 6·6 ε.

Ἐὰν τὴν κρεμάσωμε ἀπὸ τὸ ἄνω ἄκρον της καὶ τὴν ἀφήσωμε κατακόρυφον, θὰ μείνῃ ἀκίνητος. Ἐὰν τὴν στρέψωμε, θὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν κατακόρυφον ἀρχικήν της θέσιν. Ἡ ἰσορροπία ἐδῶ εἶναι εὐσταθὴς (σχ. 6 · 6 ε).

Ἐὰν τὴν στηρίξωμε ἀπὸ τὸ κατώτερον ἄκρον της καὶ τὴν ἀφήσωμε κατακόρυφον, ἰσορροπεῖ, ἐὰν ὅμως τὴν στρέψωμε, θὰ πέση εἰς τὸ δάπεδον. Ἡ ἰσορροπία ἐδῶ εἶναι ἀσταθὴς (σχ. 6 · 6 ζ).



Σχ. 6·6 ζ.

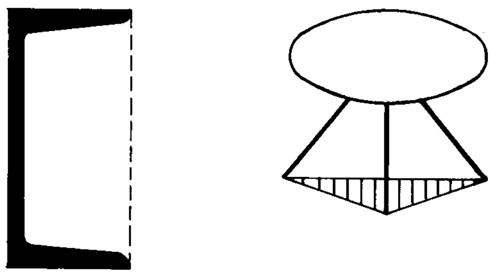
Ἀπὸ ὅλας μας τὰς κατασκευὰς ἀπαιτοῦμε εὐσταθῆ ἰσορροπίαν.

Εὐστάθεια.

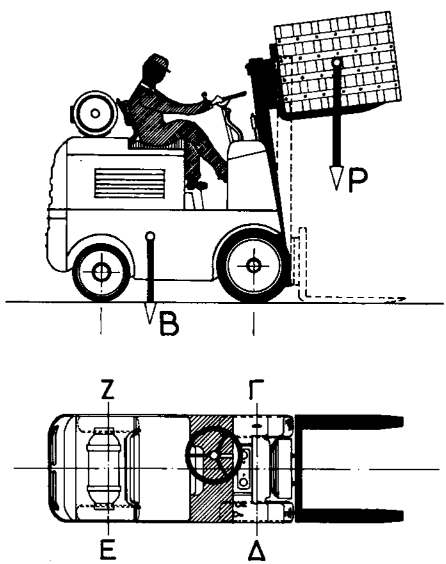
Ἐπιφάνεια στηρίξεως μιᾶς κατασκευῆς ὀνομάζεται ἡ ἐπιφάνεια ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ σημεῖα στηρίξεώς της. Π.χ. ἐπιφάνεια στηρίξεως ἑνὸς τρίποδος εἶναι τὸ τρίγωνον ποὺ σχηματίζουν τὰ τρία σκέλη του, ἐνῶ ἐπιφάνεια στηρίξεως ἑνὸς ἐλάσματος κεκαμμένου εἰς σχῆμα ἀγκύλης [εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον (σχ. 6 · 6 η).

Στενὴν σχέσιν μὲ τὴν ἐπιφάνειαν στηρίξεως ἑνὸς σώματος ἔχει ἡ εὐστάθεια τοῦ σώματος τούτου, διότι ὅταν ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων, ποὺ ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ σώματος, εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας στηρίξεώς του, τὸ σῶμα ἀνατρέπεται, δηλαδὴ χάνει τὴν εὐστάθειάν του.

Ἂς ἐξετάσωμε τὴν περίπτωσιν ἑνὸς περονοφόρου ὀχήματος (σχ. 6 · 6 θ), μὲ τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ ἀνυψώσωμε ἕνα κιβώτιον βάρους P, καὶ θέλομε νὰ γνωρίζωμε ἐὰν θὰ ἀνατραπῇ ἢ ὄχι. Ἡ ἀπάντησις ἠμπορεῖ νὰ δοθῇ μόνον ὅταν καθορίσωμε τὴν συνισταμένην ὅλων τῶν φορτίων ποὺ ἐπιβάλλονται ἐπάνω εἰς τὸ ὄχημα, δηλαδὴ τοῦ βάρους του B καὶ τοῦ φορτίου P. Ἀπὸ τὴν θέσιν της ἐξαρτᾶται, ἐὰν τὸ ὄχημα θὰ ἀνατραπῇ ἢ ὄχι. Ἐὰν ἡ συνισταμένη



Σχ. 6·6 η.

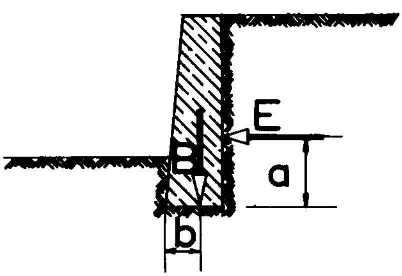


Σχ. 6·6 θ.

εὑρίσκεται μέσα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν στηρίξεως ΓΔΕΖ, τότε δὲν ὑπάρχει κίνδυνος ἀνατροπῆς. Τὸ ὄχημα εἶναι εὐσταθές. Ἐὰν ἡ συνισταμένη πίπτῃ ἀκριβῶς εἰς τὴν ἐξωτερικὴν γραμμὴν τῆς ἐπιφχνείας στηρίξεως, εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ἐξετάζομε εἰς τὴν γραμμὴν ΓΔ, τότε ὑπάρχει ἀσταθὴς ἰσορροπία. Μόλις ἡ συνισταμένη ἐξέλθη τῆς ἐπιφανείας στηρίξεως τὸ ὄχημα θὰ ἀνατραπῆ. Ὥστε ἠμποροῦμε νὰ διατυπώσωμε τὸν ἀκόλουθον κανόνα:

Ἕνα σῶμα (ὄχημα, μηχανή, τοῖχος κλπ.) εἶναι εὐσταθές, ὅταν ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν φορτίων, ποὺ δροῦν ἐπάνω του, εὑρίσκεται μέσα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν στηρίξεως. Τὸν ἴδιον ὁρισμὸν ἠμποροῦμε νὰ τὸν ἐκφράσωμε καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἕνα σῶμα εἶναι εὐσταθές, δηλαδὴ δὲν ἀνατρέπεται, ἐφ' ὅσον ἡ ροπὴ ὡς πρὸς μίαν πλευρὰν στηρίξεως ὅλων τῶν δυνάμεων ποὺ τείνουν νὰ τὸ ἀνατρέψουν, εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ροπὴν τῶν δυνάμεων ποὺ τείνουν νὰ τὸ ἐπαναφέρουν εἰς τὴν θέσιν του. Ἡ ροπὴ $M_A = E \cdot \alpha$ ὀνομάζεται ροπὴ ***ἀνατροπῆς***. Ἡ ροπὴ $M_E = B \cdot b$ ὀνομάζεται ***ροπὴ ἐπαναφορᾶς*** (σχ. 6 · 6 ι).



Σχ. 6·6 ι.

Ὅταν $M_E > M_A$, τὸ σῶμα εἶναι εὐσταθές.

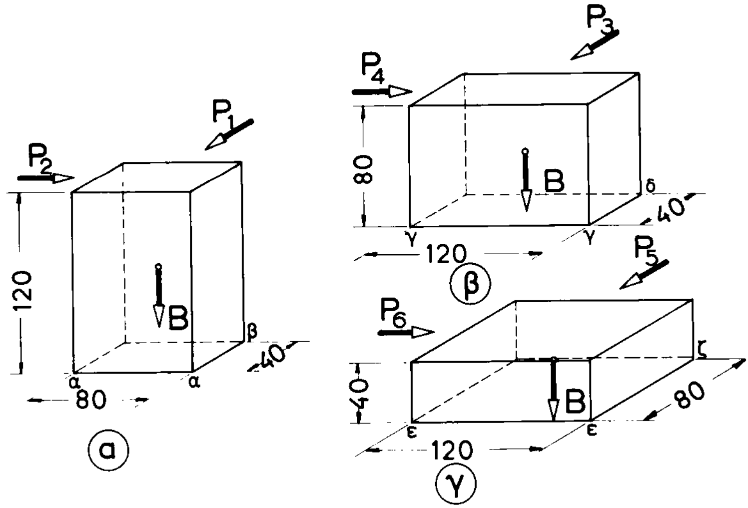
Ὅταν $M_E < M_A$, τὸ σῶμα ἀνατρέπεται.

Ὁ λόγος $\nu = \frac{M_E}{M_A}$ καθορίζει τὴν ἀσφάλειαν ποὺ ὑπάρχει ἔναντι κινδύνου ἀνατροπῆς καὶ πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Συνήθως οἱ κανονισμοὶ ἀπαιτοῦν:

$$\nu \geqslant 1,5.$$

Παράδειγμα.

Ἕνα τεμάχιον ξύλου δρυὸς διαστάσεων $40 \times 80 \times 120$ cm ἔχει βάρος 350 kp (σχ. 6·6 κ).



Σχ. 6·6 κ.

Ποία ὁριζοντία δύναμις P ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνατροπὴν τοῦ ξύλου, ἐὰν αὐτὴ ἐνεργῇ εἰς τὴν ὑψηλοτέραν πλευρὰν τοῦ ξύλου καὶ τοῦτο στηρίζεται:

α) Ἐπὶ τῆς μικροτέρας ἐπιφανείας του (40×80).

β) Ἐπὶ τῆς μέσης (40×120) καὶ

γ) ἐπὶ τῆς μεγάλης (80×120);

Λύσις.

Τὸ κέντρον βάρους B εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Διὰ νὰ ἀνατραπῇ τὸ ξύλον πρέπει ἡ ροπὴ M_A τῆς δυνάμεως P ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ροπῆς ἐπαναφορᾶς M_E τοῦ βάρους B ὡς πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς περιπτώσεις α, β καὶ γ, ἡ περιστροφὴ τοῦ σώματος ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ περὶ δύο ἄξονας, αἱ δυνάμεις ποὺ τὴν προκαλοῦν θὰ εἶναι ἐν γένει διαφορετικαί.

Περίπτωσις α [σχ. 6 · 6 κ (α)].

1) $P_1 \cdot 120 > B \cdot 20 \qquad P_1 > \frac{20}{120} \times 350 = 58{,}3\,\text{kp}.$

2) $P_2 \cdot 120 > B \cdot 40 \qquad P_2 > \frac{40}{120} \times 350 = 116{,}6\,\text{kp}.$

Περίπτωσις β [σχ. 6 · 6 κ (β)].

3) $P_3 \cdot 80 > B \cdot 20 \qquad P_3 > \frac{20}{80} \times 350 = 87{,}5\,\text{kp}.$

4) $P_4 \cdot 80 > B \cdot 60 \qquad P_4 > \frac{60}{80} \times 350 = 262{,}5\,\text{kp}.$

Περίπτωσις γ [σχ. 6 · 6 κ (γ)].

5) $P_5 \cdot 40 > B \cdot 40 \qquad P_5 > B = 350\,\text{kp}.$

6) $P_6 \cdot 40 > B \cdot 60 \qquad P_6 > \frac{60}{40} \cdot B = 525\,\text{kp}.$

6 · 7 'Ασκήσεις.

1) Δίδεται τὸ γωνιακὸν ἔλασμα τοῦ σχήματος 6 · 7 α. Νὰ ὑπολογισθῇ γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς ἡ ἀπόστασις e τοῦ κέντρου βάρους του.

'Απάντησις: $e = 4{,}26\,\text{cm}$

Σημ. Οἱ πίνακες διὰ τὰ γωνιακὰ ἐλάσματα δίδουν $e = 4{,}21\,\text{cm}$. Ἡ μικρὴ διαφορὰ ὀφείλεται εἰς τὰς καμπύλας τῶν ἐσωτερικῶν ἀκμῶν, ποὺ ἐμφανίζει τὸ τυποποιημένον γωνιακὸν ἔλασμα (DIN 1028).

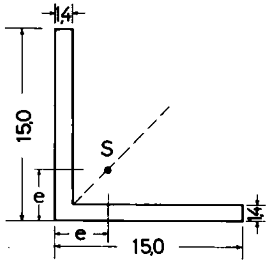
2) Δίδεται ἡ δοκὸς τοῦ σχήματος 6 · 7 β ἐκ σκυροδέματος. Νὰ ὑπολογισθῇ γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς ἡ ἀπόστασις y_0 τοῦ κέντρου βάρους της.

'Απάντησις: $y_0 = 34{,}8\,\text{cm}$

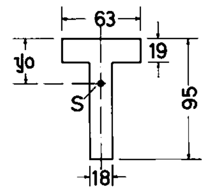
3) Ἡ βάσις διατρητικοῦ μηχανήματος ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ σχήματος 6 · 7 γ.

Νὰ ὑπολογισθῇ γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς ἡ ἀπόστασις y_0 τοῦ κέντρου βάρους.

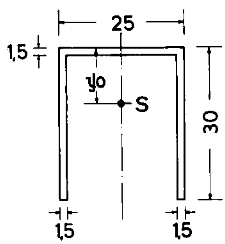
Ἀπάντησις: $y_0 = 11{,}2\ \mathrm{cm}$



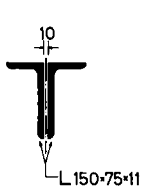
Σχ. 6·7 α.



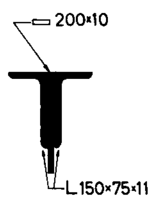
Σχ. 6·7 β.



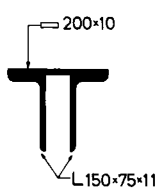
Σχ. 6·7 γ.



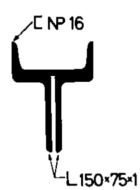
Σχ. 6·7 δ.



Σχ. 6·7 ε.



Σχ. 6·7 ζ.



Σχ. 6·7 η.

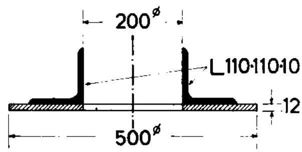
4) Αἱ ἑπόμεναι μορφαὶ ράβδων: α) τοῦ σχήματος 6 · 7 δ, β) τοῦ σχήματος 6 · 7 ε, γ) τοῦ σχήματος 6 · 7 ζ καὶ δ) τοῦ σχήματος 6 · 7 η συντίθενται ἀπὸ ἐλάσματα ἁπλᾶ (λαμαρῖνες), γωνιακὰ καὶ μορφῆς **[** (κατὰ τὰ DIN 1026 καὶ 1029).

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις y_0 τοῦ κέντρου βάρους των ἀπὸ τὴν ἄνω ἀκμὴν τῆς συνθέτου διατομῆς.

Ἀπάντησις: α) $y_0 = 5{,}37$ cm. β) $y_0 = 6{,}75$ cm. γ) $y_0 = 4{,}62$ cm. δ) $y_0 = 9{,}44$ cm

Αἱ ἑπόμεναι ἀσκήσεις 5, 6 καὶ 7 ἀναφέρονται εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῶν κανόνων Πάππου - Guldin:

5) Δίδεται ὁ δακτύλιος τοῦ σχήματος 6 · 7 θ.

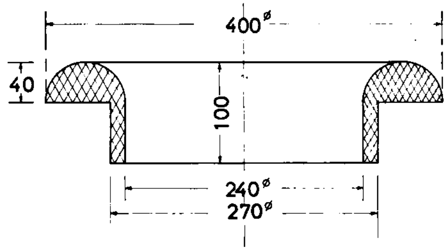


Σχ. 6·7 θ.

Ζητοῦνται α) ἡ ἐπιφάνεια F, ἡ ὁποία διὰ τῆς περιστροφῆς της δημιουργεῖ τὸν δακτύλιον. β) Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους της ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ γ) ὁ ὄγκος τοῦ δακτυλίου.

Ἀπάντησις: α) $F = 39{,}2\ \text{cm}^2$. β) 15,1 cm. γ) $3\,717{,}2\ \text{cm}^3$

6) Δίδεται ὁ δακτύλιος στεγανότητος τοῦ σχήματος 6 · 7 ι ἐξ ἐλαστικοῦ μὲ εἰδικὸν βάρος $\gamma = 1{,}3\ \text{Mp/m}^3$.



Σχ. 6·7 ι.

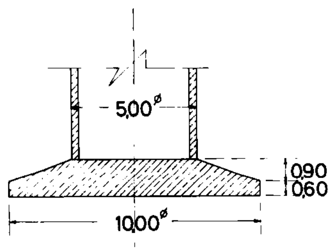
Ζητεῖται α) Ὁ ὄγκος V τοῦ δακτυλίου καὶ β) τὸ βάρος του G.

Ἀπάντησις: α) $V = 3\,245\ \text{cm}^3$. β) $G = 4\,218{,}5$ p

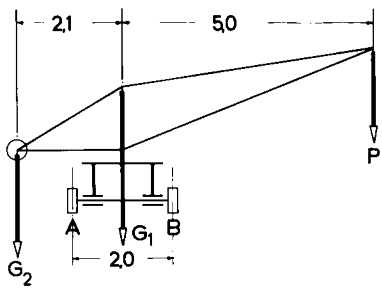
7) Τὸ θεμέλιον καπνοδόχου ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ σχήματος 6·7 κ. Ζητεῖται α) Πόσα κυβικὰ μέτρα σκυροδέματος ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν κατασκευήν του καὶ β) πόσα τετραγωνικὰ μέτρα τσιμεντοκονίας ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐπίστρωσιν τῆς κεκλιμένης ἐπιφανείας.

Ἀπάντησις: α) $88{,}30\ \text{m}^3$. β) $62{,}65\ \text{m}^2$

8) Ὁ κινητὸς γερανὸς τοῦ σχήματος 6·7λ ἔχει ἴδιον βάρος $G_1 =$ 6 000 kp καὶ ἀντίβαρον $G_2 = 4\,000$ kp μὲ ἀπόστασιν 2,1 m ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς.



Σχ. 6·7 κ.



Σχ. 6·7 λ.

Ἡ μεγίστη ἀνυψωτική του ἱκανότης εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς ἰσοῦται μὲ $P = 3\,500$ kp.

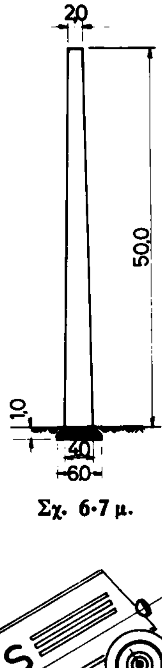
Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς ἀσφαλείας ἐξ ἀνατροπῆς καὶ ἡ φόρτισις τῶν τροχῶν A καὶ B: α) διὰ φορτισμένον καὶ β) δι' ἀφόρτιστον γερανόν.

Ἀπάντησις: α) $\nu_1 = 1{,}31$. $A_1 = 2\,200$ kp. $B_1 = 11\,300$ kp. β) $\nu_2 = 1{,}36$. $A_2 = 9\,200$ kp. $B_2 = 800$ kp

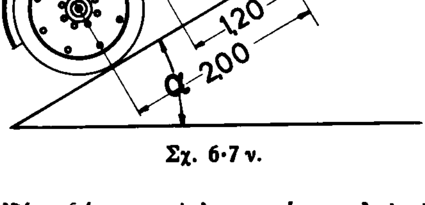
9) Μία καπνοδόχος κωλουροκωνικῆς μορφῆς ἔχει ὕψος 50 m καὶ ἴδιον βάρος 300 Mp. Ἡ διάμετρος τῆς κορυφῆς εἶναι 2 m καὶ τῆς βάσεως 4 m (σχ. 6·7μ).

Ἡ συνισταμένη τῆς πιέσεως τοῦ ἀνέμου ἰσοῦται μὲ 15 Mp καὶ δρᾷ εἰς τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπεζίου τοῦ σχήματος.

Ζητοῦνται α) Τὸ ὕψος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τραπεζίου ἐπάνω ἀπὸ τὴν στάθμην ἐδάφους. β) Ἡ ροπὴ ἀνατροπῆς λόγω τῆς πιέσεως ἀνέμου ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους. γ) Ἡ ἀπόστασις τῆς



Σχ. 6·7 μ.



Σχ. 6·7 ν.

συνισταμένης ἐξ ἰδίου βάρους καὶ ἀνεμοπιέσεως ἀπὸ τὸν ἄξονα τῆς καπνοδόχου εἰς τὴν στάθμην ἐδάφους. δ) Ἐὰν τὸ πάχος τοῦ θεμελίου εἶναι 1 m, ἡ διάμετρός του 6 m καὶ τὸ βάρος του 50 Mp, ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς ἀσφαλείας ἔναντι κινδύνου ἀνατροπῆς;

Ἀπάντησις: α) 22,22 m. β) 333,3 Mpm. γ) 1,11 m. δ) 3,01

10) Ἕνας ἑλκυστὴρ βάρους 1 500 kp ἀνέρχεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει κλίσιν ἴσην πρὸς εφα (σχ. 6.7 ν).

Ζητοῦνται α) Ἕως ποίαν γωνίαν α τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου δὲν θὰ ἀνατραπῇ ὁ ἑλκυστὴρ πρὸς τὰ ὀπίσω; β) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία α, ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἀσφαλείας ἔναντι κινδύνου ἀνατροπῆς εἶναι 1,5; γ) Ποία ἡ ἐπιρροὴ τοῦ ἰδίου βάρους τοῦ ἑλκυστῆρος ἐπὶ τῆς γωνίας α;

Ἀπάντησις: α) $\alpha = 45^0$. β) $\alpha = 33^0\ 40'$. γ) Οὐδεμία.

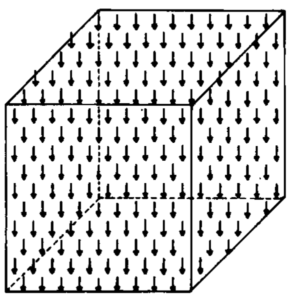
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

ΑΠΛΑΙ ΔΟΚΟΙ

7·1 Γενικά.

Ὅλαι αἱ κατασκευαί μας π.χ. μηχαναί, ὀχήματα, οἰκοδομήματα, γέφυραι κλπ., ἀναλαμβάνουν κατὰ τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ σκοποῦ διὰ τὸν ὁποῖον ἐδημιουργήθησαν φορτία — ἐξωτερικὰς δυνάμεις — διαφόρων μορφῶν καὶ ἐπὶ πλέον τὸ ἴδιόν των βάρος.

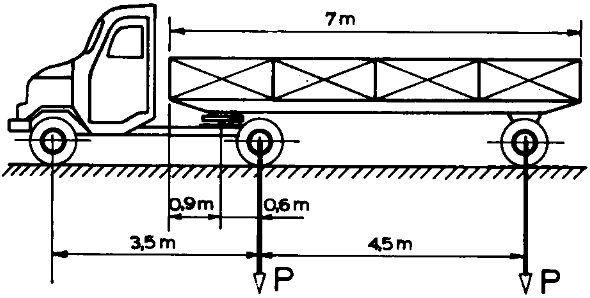
Τὰ φορτία αὐτὰ ἠμποροῦν νὰ ἐμφανισθοῦν μὲ τὰς ἀκολούθους τέσσαρας μορφάς:



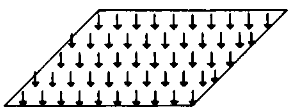
Σχ. 7·1 α.

α) *Φορτία διανεμημένα εἰς τὸν χῶρον* (σχ. 7·1 α) μὲ μέγεθος kp/m^3 ἢ Mp/m^3. Τὰ φορτία αὐτὰ παρίστανται μὲ τὸ γράμμα γ. Π.χ. οἱ ὀγκόλιθοι ἀπὸ σκυρόδεμα (σχ. 7·1 β) ἀποτελοῦν φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον εἰς τὸν χῶρον μὲ $\gamma = 2{,}2$ Mp/m^3.

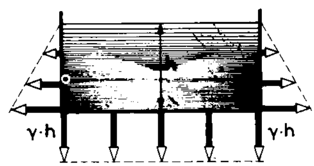
β) *Φορτία ἐπιφανειακῶς διανεμημένα* (σχ. 7·1 γ) μὲ μέγεθος kp/m^2 ἢ Mp/m^2. Τὰ φορτία αὐτὰ παρίστανται μὲ τὰ λατινικὰ γράμματα g, p ἢ q. Τὸ φορτίον ἀνέμου εἶναι ὁμοιομόρφως διανεμημένον ἐπιφανειακὸν φορτίον. Ἡ πίεσις τοῦ ὕδατος μιᾶς δεξαμενῆς εἶναι ὁμοιομόρφως διανεμημένον φορτίον διὰ τὸν πυθμένα καὶ τριγωνικῶς διανεμημένον διὰ τὰ τοιχώματα (σχ. 7·1δ).



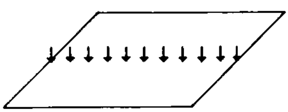
Σχ. 7·1 β.



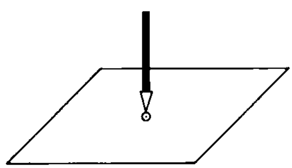
Σχ. 7·1 γ.



Σχ. 7·1 δ.



Σχ. 7·1 ε.

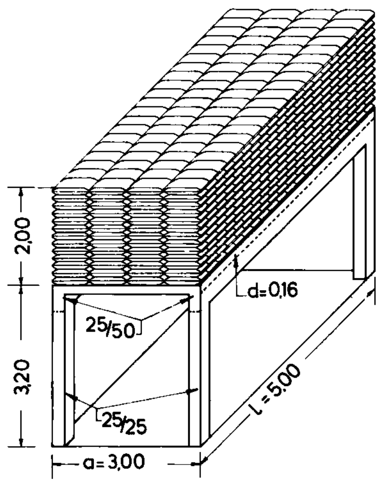


Σχ. 7·1 ζ.

γ) *Φορτία γραμμικῶς διανεμημένα* (σχ. 7·1ε) μὲ μέγεθος kp/m ἢ Mp/m. Παρίστανται ἐπίσης μὲ τὰ γράμματα g, p ἢ q. Π.χ. τὸ φορτίον ἑνὸς τοίχου ἐκ πλινθοδομῆς ἐπάνω εἰς τὴν πλάκα τῆς οἰκοδομῆς, τὸ ἴδιον βάρος μιᾶς σιδηροτροχιᾶς, ἑνὸς ἄξονος μηχανῆς κλπ.

δ) *Φορτία συγκεντρωμένα* (σχ. 7·1ζ)., μὲ μέγεθος kp ἢ Mp. Παρίστανται μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα G ἢ P. Π.χ. τὸ φορτίον ἑνὸς τροχοῦ αὐτοκινήτου (σχ. 7 · 1 β) ἢ τῶν τροχῶν ὁδοστρωτῆρος (σχ. 7 · 8 β).

Ἡ διάκρισις μεταξὺ τῶν τεσσάρων αὐτῶν μορφῶν φορτίων ἠμπορεῖ νὰ γίνη εὐκόλως εἰς τὸ ἁπλοῦν δάπεδον τοῦ σχήματος 7 · 1 η, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχουν στοιβαχθῆ ὁμοιομόρφως σάκκοι τσιμέντου εἰς ὕψος 2 m. Οἱ σάκκοι φορτίζουν ἀμέσως τὴν πλάκα. Τὸ φορτίον ἀπὸ τὴν πλάκα διαβιβάζεται εἰς τὰς δοκούς, ἀπὸ τὰς δοκοὺς εἰς τὰ ὑποστυλώματα καὶ ἀπὸ τὰ ὑποστυλώματα τελικὰ εἰς τὸ ἔδαφος.



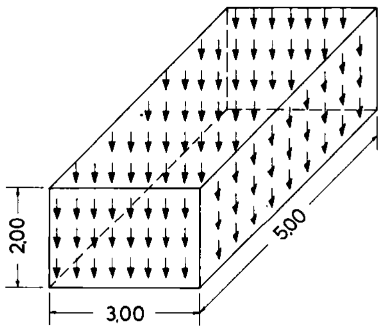
Σχ. 7 · 1 η.

Οἱ στοιβαγμένοι σάκκοι τσιμέντου ἀποτελοῦν ὁμοιόμορφον φορτίον εἰς τὸν χῶρον μὲ $\gamma = 1{,}2$ Mp/m^3, ὅσον εἶναι κατὰ μέσον ὅρον τὸ φαινόμενον εἰδικὸν βάρος τοῦ τσιμέντου (σχ. 7 · 1 θ).

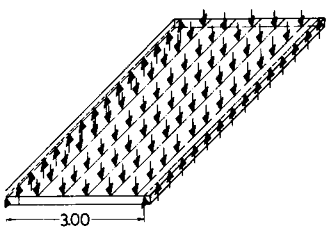
Αἱ δυνάμεις ποὺ δροῦν εἰς κάθε τετραγωνικὸν μέτρον τῆς πλακὸς εἶναι τὸ βάρος τοῦ τσιμέντου. Ἤτοι:

$$p = 1{,}2 \times 2 = 2{,}4 \text{ Mp/m}^2.$$

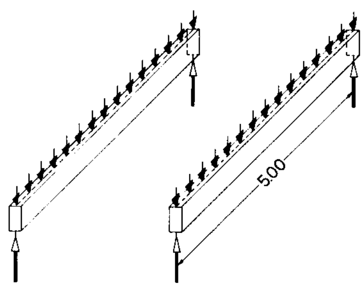
Ἂν τὸ ἴδιον βάρος τῆς πλακὸς εἶναι $g = 0{,}4$Mp/m^2, τὸ συνολικὸν ἐπιφανειακόν της φορτίον ἀνέρχεται εἰς q = 2,8 Mp/m² (σχ. 7 · 1 ι).



Σχ. 7 · 1 ϑ.



Σχ. 7·1 ι.



Σχ. 7·1 κ.

Ἡ φόρτισις διαβιβάζεται ἀπὸ τὴν πλάκα εἰς τὴν δοκὸν ὡς ὁμοιόμορφον γραμμικὸν φορτίον μὲ τιμὴν 2,8 × 1,5 = 4,2 Mp/m. Εἰς τὴν τιμὴν αὐτὴν πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ τὸ ἴδιον βάρος τῆς δοκοῦ, ποὺ εἶναι ἐπίσης γραμμικὸν φορτίον, ἔστω 0,2 Mp/m. Ἔτσι τὸ φορτίον, ποὺ δρᾶ συνολικῶς, εἶναι: q = 4,2 + 0,2 = 4,4 Mp/m (σχ. 7 · 1 κ).

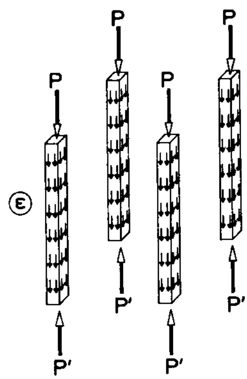
Ἀπὸ τὴν δοκὸν ἡ φόρτισις μεταβιβάζεται (σχ. 7 · 1 λ) εἰς τοὺς στύλους ὡς φορτίον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ δεχθοῦμε ὡς συγκεντρωμένον μὲ τιμὴν P = 4,4 × 2,5 = 11 Mp. Ἡ φόρτισις P′

εἰς τὸν πόδα τοῦ στύλου θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς P, διότι θὰ περιλαμβάνῃ καὶ τὸ ἴδιον βάρος αὐτοῦ.

Ἡ στατικὴ εἰς τὴν πρακτικήν της ἐφαρμογὴν ἀσχολεῖται μὲ παντὸς εἴδους κατασκευὰς π.χ. μηχανάς, ὀχήματα, στύλους, δοκούς, τοιχώματα, πατώματα, θόλους κ.λπ.

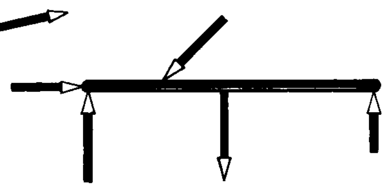
Ὅλαι αὐταὶ αἱ πολύμορφοι κατασκευαὶ ἠμποροῦν νὰ ἀναλυθοῦν μὲ κάποιαν ἐξιδανίκευσιν βεβαίως εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἑξῆς πέντε βασικὰς μορφάς, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν εἰς τὴν στατικήν των λειτουργίαν καὶ ἀπαιτοῦν ἐκ τοῦ λόγου τούτου ἰδιαιτέρας μεθόδους ὑπολογισμοῦ:

1. *Ράβδος* (σχ. 7 · 1 μ).
2. *Δοκὸς* (7 · 1 ν).



Σχ. 7·1 λ.

Σχ. 7·1 μ.

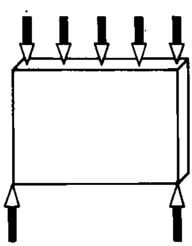


Σχ. 7·1 ν.

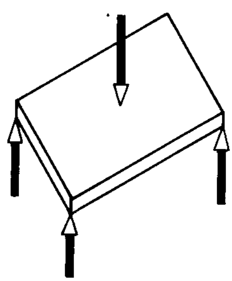
3. *Δίσκος* (7 · 1 ξ).
4. *Πλὰξ* (σχ. 7 · 1 ο).
5. *Κέλυφος* (σχ. 7 · 1 π).

Αἱ ράβδοι καὶ αἱ δοκαὶ ἔχουν πολὺ μεγάλο μῆκος ἐν σχέσει πρὸς τὰς λοιπὰς διαστάσεις των (ὕψος καὶ πλάτος).

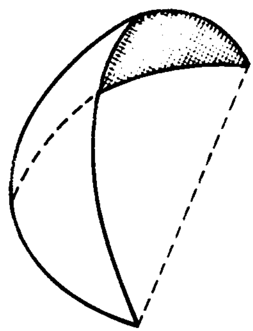
Ἡ διαφορὰ τῶν ράβδων καὶ τῶν δοκῶν ὡς φορέων εἶναι ὅτι ἡ ράβδος ἀναλαμβάνει δυνάμεις μόνον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονός της (παράγρ. 3 · 5), ἐνῶ ἡ δοκὸς ἀναλαμβάνει καὶ δυνάμεις καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονά της. Οἱ δίσκοι καὶ αἱ πλάκες ἔχουν τὴν μίαν διάστασιν, τὸ πάχος, πολὺ μικρὰν ἔναντι τῶν δύο ἄλλων.



Σχ. 7·1 ξ.



Σχ. 7·1 ο.



Σχ. 7·1 π.

Οἱ δίσκοι ἀναλαμβάνουν δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν μέσα εἰς τὸ ἐπίπεδόν των, ἐνῶ αἱ πλάκες ἀναλαμβάνουν δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδόν των. Τὸ κέλυφος ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἁπλῆν ἢ διπλῆν καμπυλότητα (π.χ. κυλινδρικὸν ἢ σφαιρικόν). Τὸ πάχος του εἶναι ἐπίσης πολὺ μικρὸν ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς δύο ἄλλας διαστάσεις.

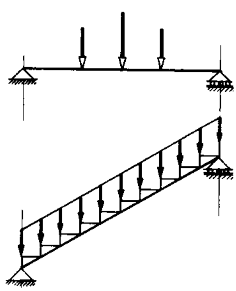
Ἀπὸ τὰς πέντε μορφὰς θὰ μᾶς ἀπασχολήσουν μόνον αἱ δύο πρῶται.

7 · 2 Ἡ δοκὸς ὡς στατικὸν στοιχεῖον.

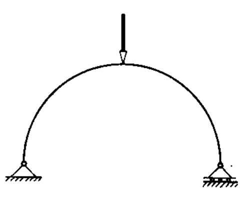
Εἰς ὅλους εἶναι γνωστὴ ἡ ὁριζοντία δοκὸς τῶν ποδοσφαιρικῶν τερμάτων. Ὅταν κτυπᾷ ἡ μπάλλα ἐπάνω της ἢ ὅταν φέρῃ τὸ βάρος τοῦ τερματοφύλακος ἀσκεῖται δύναμις, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κατὰ μῆκος ἄξονά της καὶ ἡ δοκὸς κάμπτεται.

Ἑπομένως δοκὸν καλοῦμεν ἕνα σῶμα, τὸ ὁποῖον διὰ δυνάμεων κυρίως καθέτων ἐπὶ τὸν κατὰ μῆκος ἄξονά των, καταπονεῖται εἰς κάμψιν.

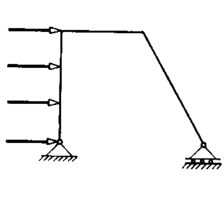
Ὁ ἄξων τῆς δοκοῦ, δηλαδὴ ἡ γραμμὴ ποὺ συνδέει τὰ κέντρα βάρους τῶν διατομῶν της, ἠμπορεῖ νὰ εἶναι εὐθύγραμμος, ὁριζόντιος ἢ κεκλιμένος (σχ. 7 · 2 α), καμπυλόγραμμος (τόξον) (σχ. 7 · 2 β) ἢ πολυγωνικὸς (πλαίσιον) (σχ. 7 · 2 γ).



Σχ. 7·2 α.



Σχ. 7·2 β.



Σχ. 7·2 γ.

7·3 Τρόπος στηρίξεως τῆς δοκοῦ.

Ἡ δοκὸς ὡς σύνολον δὲν ἐπιτρέπεται νὰ μετακινῆται εἰς τὸ ἐπίπεδόν της. Θὰ πρέπη νὰ ἑδράζεται εἰς σταθερὰ σημεῖα, τὰς στηρίξεις της, τὰ ὁποῖα νὰ τὴν κρατοῦν ἀμετάθετον. Ἕνα σῶμα εἰς τὸ ἐπίπεδον ἠμπορεῖ νὰ μετακινηθῇ κατὰ δύο διευθύνσεις, εἰς τὰς δοκοὺς λαμβάνεται συνήθως ἡ ὁριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος καὶ νὰ στραφῇ (σχ. 7·3 α).

Ἔχει, ὅπως λέγομεν, *τρεῖς βαθμοὺς ἐλευθερίας κινήσεως.*

Αἱ στηρίξεις θὰ πρέπη νὰ μορφωθοῦν κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ δεσμεύουν ὅλαι μαζὶ τουλάχιστον τοὺς τρεῖς βαθμοὺς ἐλευθερίας.

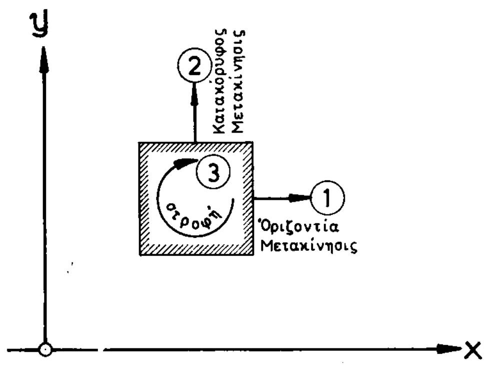
Ἑπομένως ἡ δοκός, ὁ φορεὺς ἐν γένει, δὲν πρέπει.:

α) Νὰ μετακινῆται κατακορύφως.

β) Νὰ μετατίθεται ὁριζοντίως.

γ) Νὰ στρέφεται.

Ἡ διαμόρφωσις τῶν στηρίξεων εἶναι διάφορος ἀναλόγως



Σχ. 7·3 α.

πρὸς τὰς δεσμεύσεις ἐλευθερίας κινήσεως ποὺ ἐπιβάλλουν.

Αἱ ἀντιδράσεις εἰς τὰς θέσεις στηρίξεως τοῦ φορέως εἶναι κατ' ἀρχὴν ἄγνωστοι, δηλαδὴ δὲν γνωρίζομεν τὸ μέγεθος, τὴν φορὰν καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς. Κάθε εἶδος στηρίξεως ὅμως ἔχει ὡρισμένα ἀπὸ τὰ τρία καθοριστικὰ στοιχεῖα τῆς δυνάμεως γνωστὰ καὶ ὡρισμένα ἄγνωστα.

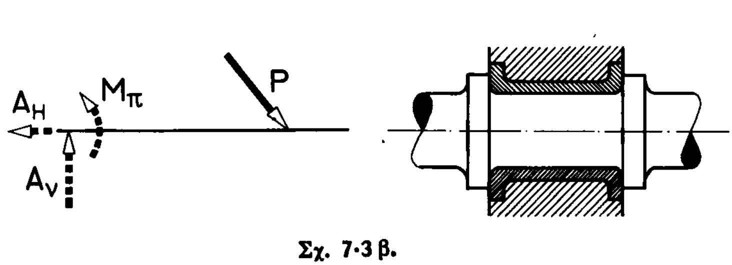
Διακρίνομε τρία εἴδη στηρίξεως.

1. *Πάκτωσις* (σχ. 7·3β).

Ἀπὸ τὴν πρᾶξιν γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἁπλούστερος τρόπος διὰ νὰ στηρίξωμε μίαν δοκὸν εἶναι νὰ ἐνσωματώσωμεν τὸ ἕνα ἄκρον της μέσα εἰς ἕνα τοῖχον.

Μία τέτοια στήριξις ἐμφανίζει τρεῖς δεσμεύσεις, δηλαδὴ δὲν ἐπιτρέπει οὔτε στροφήν, οὔτε μετακίνησιν, οὔτε ἀποχωρισμὸν τῆς δοκοῦ. Τὸν τρόπον αὐτὸν στηρίξεως τὸν ὀνομάζομε *πάκτωσιν*.

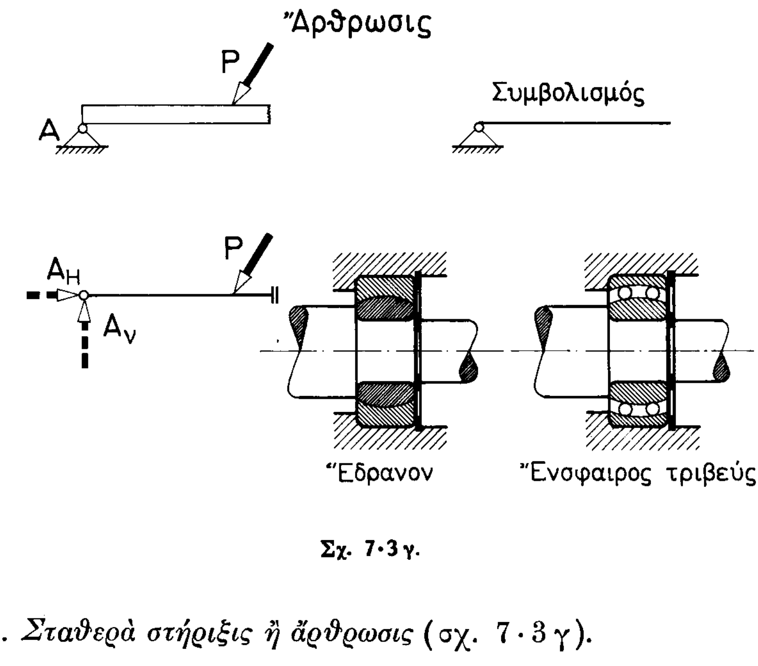
Ἄγνωστα στοιχεῖα τῆς ἀντιδράσεως εἶναι τρία, δηλαδὴ τὸ μέγεθος, ἡ φορὰ καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς. Ἐὰν ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς θεωρήσωμεν τὴν θέσιν πακτώσεως, ἐμφανίζονται τρεῖς



Σχ. 7·3 β.

ἄγνωστοι ἀντιδράσεις στηρίξεως, δηλαδὴ αἱ δυνάμεις A_V, A_H καὶ ἡ ροπὴ πακτώσεως M_π.

Παρομοία μὲ τὴν πάκτωσιν τῆς δοκοῦ εἰς τὸν τοῖχον εἶναι καὶ ἡ στήριξις τοῦ ἄξονος μιᾶς μηχανῆς κατὰ τὸ σχῆμα 7·3 β. Εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα ἐμφανίζεται καὶ ὁ συμβολισμὸς τῆς πακτώσεως.



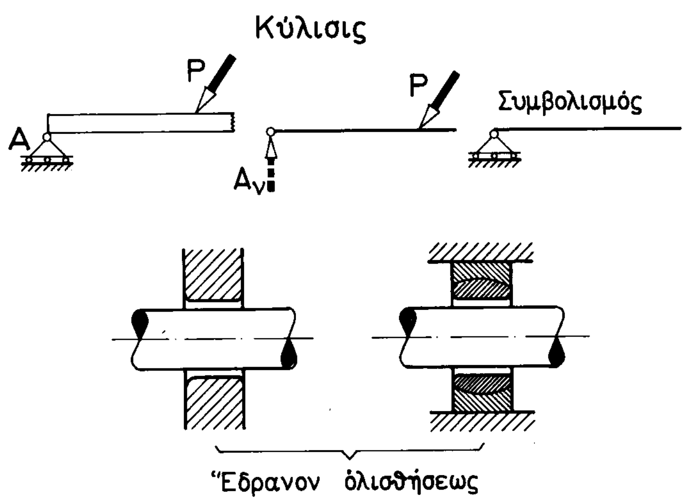
Σχ. 7·3 γ.

2. *Σταθερὰ στήριξις ἢ ἄρθρωσις* (σχ. 7·3 γ).

Ἐὰν καταργήσωμεν τὴν πρώτην δέσμευσιν τῆς πακτωμένης δοκοῦ, λαμβάνομεν μίαν δοκόν, ποὺ συνδέεται εἰς τὴν θέσιν στηρίξεώς της μὲ ἕνα εἶδος σταθεροῦ συνδέσμου, π.χ. μὲ ἕνα βλῆτρον. Ἡ διάταξις αὐτὴ δὲν ἐπιτρέπει οὔτε τὴν μετακίνησιν, οὔτε τὸν ἀποχωρισμὸν τῆς δοκοῦ, ἐπιτρέπει ὅμως τὴν στροφὴν περὶ τὸ σημεῖον στηρίξεώς της. Δεσμεύει ἑπομένως δύο βαθμοὺς ἐλευθερίας, τὴν ὁριζοντίαν καὶ τὴν κατακόρυφον μετακίνησιν.

Ἀπὸ τὰ στοιχεῖα, ποὺ προσδιορίζουν τὴν ἀντίδρασιν μιᾶς ἀρθρώσεως, αὐτὸ ποὺ γνωρίζομεν ἐξ ἀρχῆς εἶναι μόνον ὅτι ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Μᾶς εἶναι δὲ ἄγνωστα δύο στοιχεῖα: τὸ μέγεθος καὶ ἡ γωνία τῆς εὐθείας ἐνεργείας ἢ ἀντὶ αὐτῶν ἡ κατακόρυφος καὶ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα A_V καὶ A_H.

Ὥστε εἰς κάθε ἄρθρωσιν παρουσιάζονται δύο ἄγνωστοι. Συνήθεις διατάξεις ἀρθρώσεων εἰς τὰς μηχανολογικὰς κατασκευὰς εἶναι τὸ ταλαντευόμενον ἕδρανον καὶ ὁ ταλαντευόμενος ἔνσφαιρος τριβεύς.

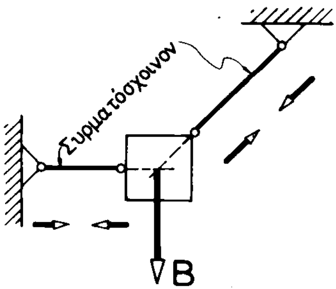


Σχ. 7·3 δ.

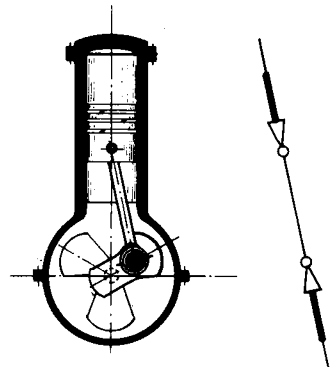
3. *Κινητὴ στήριξις ἢ κύλισις* (σχ. 7·3 δ).

Ἐὰν καταργηθῇ καὶ ἡ δευτέρα δέσμευσις τῆς πακτώσεως, δηλαδὴ ἡ μὴ δυνατότης μετακινήσεως, τότε ἡ στήριξις ποὺ προκύπτει ἐπιτρέπει ὄχι μόνον τὴν στροφὴν τῆς δοκοῦ, ἀλλὰ καὶ τὴν μετακίνησίν της.

Αὐτὸ θὰ ἠμπορούσαμε νὰ τὸ ἐπιτύχωμεν, ἐὰν εἰς τὴν θέσιν στηρίξεως ἐτοποθετούσαμε χαλυβδίνους κυλινδρίσκους μεταξὺ τῆς δοκοῦ καὶ τοῦ σώματος, ἐπάνω εἰς τὸ ὁποῖον στηρίζεται. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἄλλωστε συμβολίζεται ἡ κύλισις. Δεσμεύεται



Σχ. 7·3 ε.



Σχ. 7·3 ζ.

συνεπῶς μόνον ἡ δυνατότης ἀποχωρισμοῦ τῆς δοκοῦ, καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κυλίσεως.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμε τὴν ἀντίδρασιν κυλίσεως, γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων δύο στοιχεῖα σχετικὰ μὲ τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας της, δηλαδὴ γνωρίζομεν ὅτι αὐτὴ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ὅτι εἶναι κάθετος ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον στηρίξεως. Ἐὰν ἡ ἀντίδρασις δὲν ἦτο κάθετος, θὰ προέκυπτε συνιστῶσα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπιπέδου στηρίξεως, ἡ ὁποία καὶ θὰ ἐπέφερε τὴν μετακίνησιν τοῦ σώματος. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἔχομε δεχθῆ ὅτι ἡ δοκὸς ἰσορροπεῖ.

Ἑπομένως τὸ μόνον στοιχεῖον τῆς ἀντιδράσεως, ποὺ εἶναι ἄγνωστον, εἶναι τὸ μέγεθός της.

Ὥστε εἰς τὴν κύλισιν ἔχομε μίαν ἄγνωστον ἀντίδρασιν.

Συρματόσχοινα (σχ. 7 · 3 ε), ἁλύσεις καὶ ράβδοι (σχ. 7 · 3 ζ) ἠμποροῦν νὰ ἀσκήσουν ἀντίδρασιν μόνον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονός των καὶ ἑπομένως ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῆς κυλίσεως.

Εἰς τὰς μηχανολογικὰς κατασκευὰς συνήθως χρησιμοποιοῦνται ἁπλᾶ ἔδρανα ὀλισθήσεως.

7·4 Στατικῶς ὡρισμένοι καὶ στατικῶς ἀόριστοι φορεῖς.

Κάθε δοκός, κάθε φορεὺς γενικώτερον, στηρίζεται εἰς ὡρισμένα σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα μεταβιβάζει τὰ φορτία ποὺ ἀναλαμβάνει. Αἱ στηρίξεις πρέπει νὰ τοῦ ἐξασφαλίζουν εὐσταθῆ ἰσορροπίαν. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτοῦνται διὰ μίαν δοκόν, ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, τουλάχιστον τρεῖς δεσμεύσεις ἐλευθερίας κινήσεως. Θὰ ἦτο δυνατὸν ὅμως νὰ ὑπάρχουν περισσότεραι τῶν ἀπολύτως ἀπαραιτήτων δεσμεύσεων.

Εἰς τὴν Στατικὴν γίνεται σαφὴς διάκρισις μεταξὺ τῶν φορέων μὲ τὸν ἀκριβῶς ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν δεσμεύσεων καὶ ἐκείνων μὲ τὰς περισσοτέρας, διότι ὑφίσταται βασικὴ διαφορά, εἰς τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπολογίζονται αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως.

Ἄς λάβωμε τὴν περίπτωσιν ἑνὸς ἁπλοῦ φορέως, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν καὶ μόνην δοκόν. Ἡ δοκὸς φορτίζεται ἀπὸ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις καὶ τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως. Καὶ τὰς μὲν ἐξωτερικὰς δυνάμεις τὰς γνωρίζομε, διότι εἶναι τὰ φορτία, τὰ ὁποῖα ἀσκοῦνται ἐπ' αὐτῆς ἐκ τῶν ἔξω. Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως ὅμως δὲν μᾶς εἶναι γνωσταὶ καὶ πρέπει νὰ τὰς ὑπολογίσωμε. Διὰ τὸν ὑπολογισμόν των ἔχομε τὰς τρεῖς ἐξισώσεις ἰσορροπίας εἰς τὸ ἐπίπεδον (ἴδε παράγρ. 5 · 1) $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma M = 0$.

Μὲ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἐξισώσεις ἠμποροῦν νὰ ὑπολογισθοῦν τρία ἄγνωστα μεγέθη ἀντιδράσεων. Ὅταν ἑπομένως ὑπάρχῃ ὁ ἀπαραίτητος ἀριθμὸς τῶν τριῶν δεσμεύσεων, εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθοῦν αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως διὰ τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἰσορροπίας.

Ὁ φορεύς, ποὺ στηρίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, καλεῖται *ἰσοστατικὸς ἢ στατικῶς ὡρισμένος*, ποὺ σημαίνει, ὅτι στηρίζεται κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε νὰ ὑπολογίζωνται αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως μὲ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις ἰσορροπίας.

Αἱ εὐθύγραμμοι ἰσοστατικαὶ δοκοί, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν ἰδιαιτέρως εἶναι τριῶν τύπων

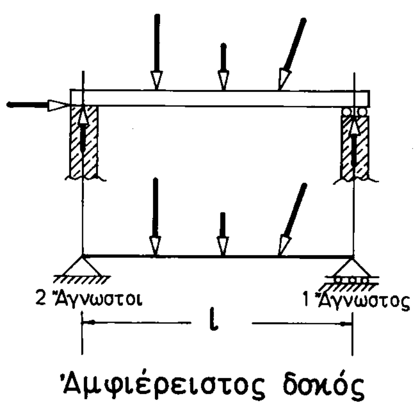
1. *Ἁπλῆ ἀμφιέρειστος.*

Ἡ δοκὸς αὐτὴ ἔχει μίαν σταθερὰν καὶ μίαν κινητὴν στήριξιν, ἄρα τρεῖς ἀγνώστους ἀντιδράσεις καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοστατική.

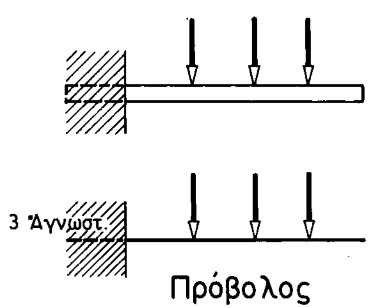
Ἄνοιγμα l τῆς δοκοῦ καλοῦμε τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ μέσον τῆς μιᾶς στηρίξεως, ἕως τὸ μέσον τῆς ἄλλης (σχ. 7·4 α).

2. *Πρόβολος πακτωμένος.*

Ἔχει τὸ ἕνα ἄκρον πακτωμένον καὶ τὸ ἄλλο ἐλεύθερον (σχ. 7·4 β). Εἶναι ἰσοστατικός, διότι αἱ ἄγνωστοι ἀντιδράσεις εἶναι τρεῖς.



Σχ. 7·4 α.



Σχ. 7·4 β.

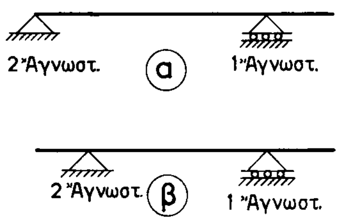
3. *Προέχουσαι δοκοί.*

Εἶναι ἀμφιέρειστοι δοκοί, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται μονοπροέχουσαι μέν, ἐὰν προέχῃ ὑπὸ μορφὴν προβόλου τὸ ἕνα ἄκρον των [σχ. 7·4γ(α)], ἀμφιπροέχουσαι δέ, ἐὰν προέχουν τὰ δύο ἄκρα [σχ. 7·4γ(β)].

Ὁ ἁπλοῦς φορεύς, ὁ ὁποῖος ἑδράζεται ἐπὶ στηρίξεων, ποὺ ἀναπτύσσουν περισσοτέρας τῶν τριῶν ἀγνώστων ἀντιδράσεων στηρίξεως, χαρακτηρίζεται ὡς *στατικῶς ἀόριστος*.

Ἀναλόγως πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν πέραν τῶν τριῶν ὑπεραρίθμων ἀγνώστων διακρίνομε διαφόρους βαθμοὺς στατικῆς ἀοριστίας.

Ἐὰν ἕνα πρόβολον, πού, ὅπως εἴδομεν εἶναι ἰσοστατικός, τὸν



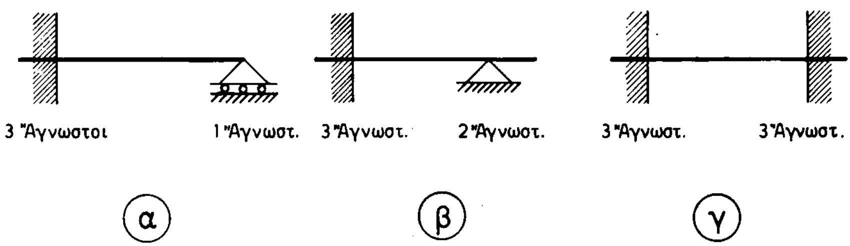
Προέχουσαι δοκοί

Σχ. 7·4γ.

στηρίξωμεν μὲ μίαν κύλισιν εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον του [σχ. 7·4δ(α)], θὰ τὸν μεταβάλλωμεν εἰς ὑπερστατικὸν φορέα μὲ βαθμὸν στατικῆς ἀοριστίας 1, διότι θὰ ἔχῃ $3+1-3=1$ ἄγνωστον ὑπεράριθμον ἀντίδρασιν. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμε τὴν κύλισιν μὲ ἄρθρωσιν [σχ. 7·4δ (β)], θὰ προκύψῃ φορεὺς μὲ $3+2-3=2$ ἀγνώστους ὑπεραρίθμους ἀντιδράσεις, δηλαδὴ μὲ βαθμὸν στατικῆς ἀοριστίας 2 καὶ ἐὰν ἔχωμε καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα πάκτωσιν [σχ. 7·4δ (γ)], ὁ βαθμὸς στατικῆς ἀοριστίας εἶναι $6-3=3$. Φυσικὰ καὶ εἰς τοὺς ὑπερστατικοὺς φορεῖς ἠμποροῦν νὰ ὑπολογισθοῦν ἀκριβῶς αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν ἡ τιμή των ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐλαστικὴν συμπεριφορὰν τῆς δοκοῦ. Ἐπὶ τῇ βάσει νόμων παραμορφώσεως καθορίζονται πρόσθετοι ἐξισώσεις, καλούμεναι ἐξισώσεις ἐλαστικότητος, μὲ τὰς ὁποίας ὑπολογίζονται αἱ ὑπεράριθμοι ἀντιδράσεις.

Ὥστε, ἐὰν α εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων ἀντιδράσεων στηρίξεως, ἔχομεν διά:

$\alpha = 3$ στατικῶς ὡρισμένην δοκόν.
$\alpha > 3$ στατικῶς ἀόριστον δοκόν.
$\alpha < 3$ ἀσταθῆ δοκόν, ἄρα ἄχρηστον.



Σχ. 7·4δ.

Παράδειγμα.

Ἡ συνεχὴς δοκὸς τοῦ σχήματος 7·4ε(α) εἶναι μία δοκὸς μὲ 5 ἀγνώστους ἀντιδράσεις στηρίξεως ἑπομένως μὲ βαθμὸν στατικῆς ἀοριστίας $5 - 3 = 2$.

Ἐὰν ὁ φορεὺς ἀποτελῆται ἀπὸ περισσοτέρας δοκοὺς δ π.χ., εἰς τὸ σχῆμα 7·4ε(β) ἀπὸ 3, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μεταξύ των μὲ ἀρθρώσεις, τότε ἡ ἀνωτέρω σχέσις μετατρέπεται ὡς ἑξῆς.

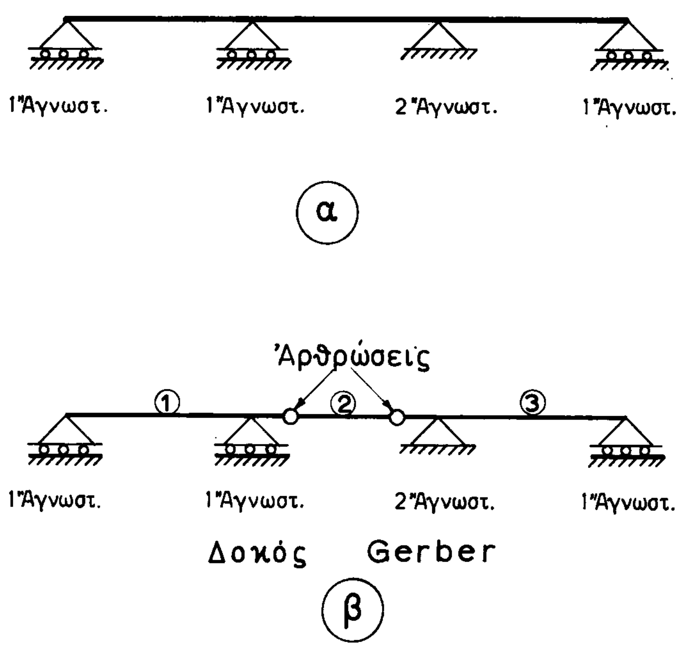
$3\delta = \alpha + \varkappa$ στατικῶς ὡρισμένος φορεύς.
$3\delta < \alpha + \varkappa$ στατικῶς ἀόριστος φορεύς.
$3\delta > \alpha + \varkappa$ κινητὸς φορεύς.

3 δ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν διατιθεμένων ἐξισώσεων ἰσορροπίας, ἀφοῦ εἰς κάθε δοκὸν ἀντιστοιχοῦν 3, α πάριστᾶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων ἀντιδράσεων στηρίξεως καὶ κ εἶναι αἱ ἄγνωστοι δυνάμεις τῶν ἀρθρώσεων, ποὺ συνδέουν τὰς τρεῖς δοκούς.

Διὰ κάθε ἄρθρωσιν, ποὺ συνδέει δύο δοκούς, τὸ $\varkappa = 2$.

Ἂς ἐλέγξωμεν εἰς ποίαν κατηγορίαν ἀνήκει ὁ φορεὺς τοῦ σχήματος 7·4 ε (β).

Ἔχομε $\delta = 3$, $\alpha = 5$ καὶ $\varkappa = 2 \times 2 = 4$, ὁπότε: $3\delta = 3 \times 3 = \alpha + \varkappa = 5 + 4$, ἑπομένως ὁ φορεὺς εἶναι στατικῶς ὡρισμένος.



Σχ. 7·4 ε.

Ὥστε ἠμποροῦμε νὰ εἴπωμεν, ὅτι μὲ τὴν προσθήκην μιᾶς ἀρθρώσεως εἰς ἕνα φορέα, μειοῦται ὁ βαθμὸς τῆς στατικῆς ἀοριστίας του κατὰ 1. Τοῦτο διότι διὰ τὴν νέαν δοκὸν θὰ ἔχωμε τρεῖς ἐξισώσεις ἰσορροπίας, ἐνῶ μὲ τὴν ἄρθρωσιν προσετέθησαν δύο μόνον ἄγνωστοι.

7·5 Φορτία δοκῶν.

Ἡ φόρτισις μιᾶς δοκοῦ ἔχει συνήθως μίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους μορφὰς ἢ συνδυασμὸν τῶν μορφῶν αὐτῶν.

α) *Συγκεντρωμένα φορτία* [σχ. 7·5α(α)]. Εἶναι συνήθως τὰ φορτία, τὰ ὁποῖα, ὅπως εἴδαμε, προέρχονται ἀπὸ τροχοὺς αὐτοκινήτων, σιδηροδρομικῶν ὀχημάτων καὶ μηχανημάτων ἢ φορτία, τὰ ὁποῖα διαβιβάζονται ἀπὸ ἄλλας δοκοὺς ἢ στύλους, ποὺ στηρίζονται ἐπὶ τῆς ἐξεταζομένης δοκοῦ.

β) *Ὁμοιομόρφως διανεμημένον φορτίον*. Ὅταν τὸ φορτίον εἶναι διανεμημένον ὁμοιομόρφως εἰς ὅλον τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ, καλεῖται ***καθολικὸν*** [σχ. 7·5α(β)]· ὅταν εἶναι ἐπὶ ἑνὸς μόνον μέρους τῆς δοκοῦ καλεῖται ***μερικὸν*** [σχ. 7·5α(γ)].

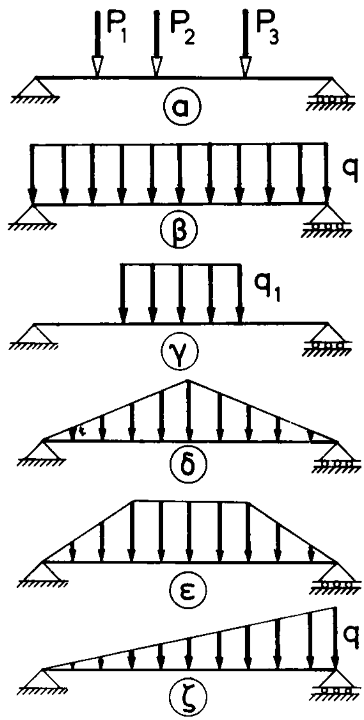
Καθολικὸν ὁμοιόμορφον φορτίον εἶναι π.χ. τὸ ἴδιον βάρος τῆς δοκοῦ. Καθολικὸν ἢ μερικὸν ὁμοιόμορφον φορτίον προκαλεῖ τὸ βάρος ἐπικαλύψεως, τὰ κινητὰ ἢ τὰ ὠφέλιμα φορτία, τὰ τοιχώματα κλπ.

γ) *Τριγωνικὸν* [σχ. 7·5α(δ)] *καὶ τραπεζοειδῶς διανεμημένον φορτίον* [σχ. 7·5α(ε)].

Εἶναι τὰ φορτία, τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται ἐπάνω εἰς δοκούς, αἱ ὁποῖαι στηρίζουν πλάκας ἑδραζομένας καὶ εἰς τὰς τέσσαρας πλευράς των, εἰς δοκοὺς ὑπερθύρων (πρέκια), ἀετωμάτων κλπ.

δ) Τὸ *ἀσύμμετρον τριγωνικὸν φορτίον* [σχ. 7·5α(ζ)].

Προκαλεῖται ἀπὸ τὴν πίεσιν, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ π.χ. οἱονδήποτε ὑγρὸν ἐπάνω εἰς τὰ τοιχώματα τῶν δεξαμενῶν ἢ ἀπὸ τὴν ὤθησιν τῶν χωμάτων ἐπάνω εἰς τοὺς τοίχους ἀντιστηρίξεως.



Σχ. 7·5 α.

7·6 Ἐσωτερικαὶ δυνάμεις καὶ ῥοπαί.

Αἱ φορτίσεις καὶ αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως, ποὺ συγκροτοῦν ἕνα σύστημα δυνάμεων εἰς ἰσορροπίαν, ἀποτελοῦν τὰς *ἐξωτερικὰς δυνάμεις* τῆς δοκοῦ. Μᾶς τίθεται τώρα τὸ ἐρώτημα: πῶς μεταβιβάζονται αἱ φορτίσεις διὰ μέσου τῆς δοκοῦ πρὸς τὰς στηρίξεις; Τί ἀναπτύσσεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς δοκοῦ καὶ εἰς κάθε της θέσιν;

Διὰ νὰ ἀπαντήσωμε εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτό, φανταζόμεθα ὅτι ἡ δοκὸς ἔχει κοπῆ εἰς τὴν θέσιν ποὺ θέλομε νὰ ἐξετάσωμε.

Ἡ δοκὸς ὅμως ὡς σύνολον εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, ἄρα εἰς ἰσορροπίαν εὑρίσκεται καὶ κάθε τμῆμα της ποὺ ἐκόπη. Ἑπομένως εἰς τὰς δύο ἐπιφανείας τῆς τομῆς πρέπει νὰ ἀναπτυχθοῦν δυνάμεις καὶ ροπαὶ τέτοιου μεγέθους καὶ διευθύνσεως, ὥστε τὰ δύο τμήματα νὰ παραμείνουν εἰς ἰσορροπίαν. Ἡ συνισταμένη τῶν διανεμημένων εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τομῆς δυνάμεων ὀνομάζεται *ἐσωτερικὴ δύναμις* καὶ ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν *ἐσωτερικὴ ροπή*.

Ἡ ἀπάντησις ἑπομένως εἰς τὸ ἐρώτημα εἶναι ὅτι ἡ μεταβίβασις τῆς φορτίσεως τῆς δοκοῦ πρὸς τὰς στηρίξεις γίνεται μὲ τὴν ἀνάπτυξιν εἰς κάθε διατομὴν τῆς δοκοῦ δυνάμεων καὶ ροπῶν, αἱ ὁποῖαι διὰ τὸν λόγον αὐτὸν καλοῦνται *ἐσωτερικαὶ* (σχ. 7 · 6 α).

Ὥστε μὲ τὰς ὑποθετικὰς τομὰς τῆς δοκοῦ ἐπετύχαμε νὰ μάθωμε τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων, ποὺ μᾶς εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν ἀντοχὴν τῆς δοκοῦ. Δὲν ἐμάθαμε ὅμως πῶς διανέμονται αἱ δυνάμεις εἰς τὴν τομήν.

Εἰς τὸ σχῆμα 7 · 6 α παρουσιάζεται μία δοκός, ἡ ὁποία φορτίζεται ἀπὸ τὰς ἑξῆς ἐξωτερικὰς δυνάμεις:

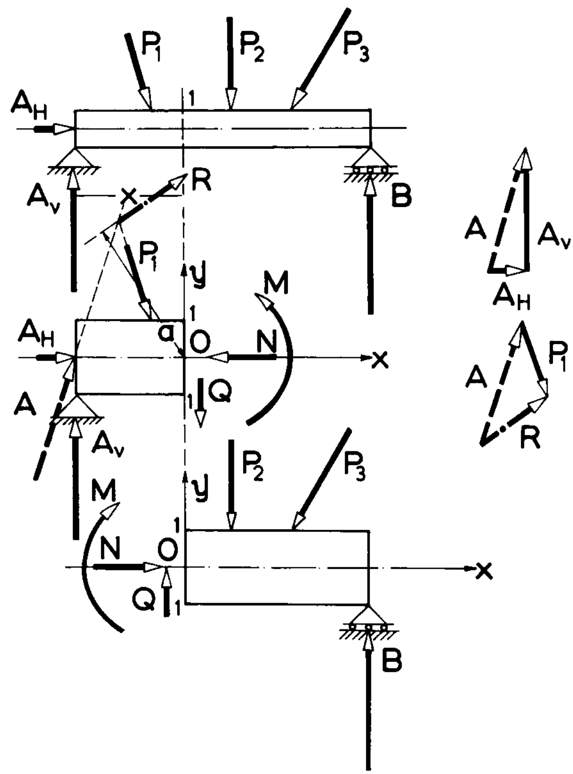
α) Τὰ φορτία P_1, P_2 καὶ P_3 καὶ

β) Τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως A καὶ B.

Εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τὴν ἀριστερὰν στήριξιν φανταζόμεθα μίαν τομήν τῆς δοκοῦ, τὴν 1 — 1, καὶ ζητοῦμε νὰ ὑπολογίσωμε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ροπήν.

Ἐξετάζομε τὸ τμῆμα τῆς δοκοῦ ἀριστερὰ τῆς τομῆς 1 — 1. Ἐπ' αὐτοῦ δροῦν αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις A καὶ P_1. Δυνάμεθα δι' ἁπλούστευσιν νὰ λάβωμε τὴν συνισταμένην των R.

Μᾶς ἐνδιαφέρει νὰ μάθωμε πῶς καταπονεῖται ἀπὸ τὴν δύναμιν R ἡ διατομὴ 1 — 1. Διὰ νὰ ἰσορροπηθῇ αὐτὴ ἡ δύναμις πρέπει τὸ δεξιὸν τμῆμα τῆς δοκοῦ νὰ ἀσκήσῃ εἰς τὸ ἀριστερόν, λόγῳ τῆς ἀντοχῆς τοῦ ὑλικοῦ τῆς δοκοῦ, μίαν δύναμιν R ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς R καὶ μίαν ροπὴν M ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς $R \cdot \alpha$.



Σχ. 7·6α.

Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις, ποὺ θὰ ἀναπτυχθοῦν εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς τομῆς, θὰ ἔχουν τὸ ἴδιον μέγεθος, ἀλλ' ἀντίθετον διεύθυνσιν. Τοῦτο συμβαίνει διότι πρέπει νὰ ἰσορροποῦν μεταξύ των, ἐπειδὴ ἡ μία ἀντιπροσωπεύει τὸ ἕνα τμῆμα τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καὶ ἡ ἄλλη τὸ ὑπόλοιπον. Αὐταὶ ὅμως, ὅπως εἴπαμε εἰς τὴν ἀρχήν, ἰσορροποῦν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἴτε τὸ ἀριστερὸν τμῆμα τῆς τομῆς τῆς δοκοῦ ἐξετάσωμε, εἴτε τὸ δεξιόν, θὰ προκύψουν αἱ ἴδιαι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις εἰς τὴν τομήν.

Διὰ νὰ ἁπλουστεύσωμε τὸν ὑπολογισμὸν ἀναλύομε τὴν δύναμιν R τῆς τομῆς εἰς δύο συνιστώσας τὴν $R_x = N$, ἡ ὁποία δρᾷ κατὰ τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ, καὶ τὴν $R_y = Q$, ἡ ὁποία δρᾷ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ.

Δεδομένου ὅτι εἰς κάθε τμῆμα τῆς δοκοῦ τὸ σύστημα ἐξωτερικῶν καὶ ἐσωτερικῶν δυνάμεων ἰσορροπεῖ, διὰ νὰ καθορίσωμε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμε τὰς τρεῖς ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας:

$$\Sigma x = 0, \ \Sigma y = 0, \ \Sigma M = 0,$$

ὅπου:

$\Sigma x = 0$ σημαίνει ὅτι εἰς τὴν διατομὴν ἀναπτύσσεται μία δύναμις N ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς R_x. Ἡ N καλεῖται *ὀρθὴ δύναμις*.

$\Sigma y = 0$ σημαίνει ὅτι εἰς τὴν διατομὴν ἀναπτύσσεται μία δύναμις Q ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς R_y. Ἡ Q καλεῖται *τέμνουσα δύναμις*.

$\Sigma M = 0$ δηλοῖ ὅτι εἰς τὴν διατομὴν ἀναπτύσσεται μία ροπὴ M ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς $R \cdot \alpha$. Ἡ M καλεῖται *ροπὴ κάμψεως*, ἐπειδή, ὅπως θὰ μάθωμε εἰς τὸ βιβλίον «Ἀντοχὴ τῶν Ὑλικῶν», προκαλεῖ τὴν κάμψιν τῆς ἐλαστικῆς δοκοῦ.

Ὥστε ἐσωτερικαὶ δυνάμεις εἶναι:

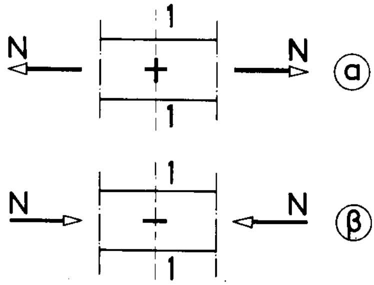
Ἡ ὀρθὴ δύναμις N, ἡ τέμνουσα δύναμις Q καὶ ἡ ροπὴ κάμψεως M.

Τὰ ἀνωτέρω ἠμποροῦμε νὰ συνοψίσωμε καὶ νὰ συμπληρώσωμε ὡς ἑξῆς:

1) *Ἡ ὀρθὴ δύναμις N* μιᾶς διατομῆς τῆς δοκοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ, ἀριστερὰ (ἢ δεξιὰ) τῆς ἐξεταζομένης διατομῆς, ἐνεργουσῶν δυνάμεων.

Τὸ πρόσημον θεωρεῖται θετικὸν (+), ὅταν ἡ ὀρθὴ δύναμις ἐφελκύῃ τὴν διατομὴν [σχ. 7·6β (α)] καὶ ἀρνητικὸν (—), ὅταν τὴν θλίβῃ [σχ. 7·6β (β)].

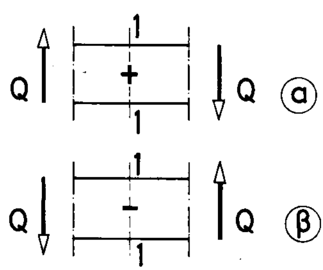
2) *Ἡ τέμνουσα δύναμις* Q μιᾶς διατομῆς τῆς δοκοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ, ἀριστερὰ (ἢ δεξιὰ) τῆς ἐξεταζομένης διατομῆς, ἐνεργουσῶν δυνάμεων.



Σχ. 7·6β.

Τὸ πρόσημον θεωρεῖται θετικὸν (+), ὅταν ἡ τέμνουσα δύναμις εἰς τὸ ἀριστερὸν τμῆμα τῆς τομῆς διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω ἢ εἰς τὸ δεξιὸν τμῆμα τῆς τομῆς πρὸς τὰ ἄνω [σχ. 7·6 γ (α)]. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ἡ τέμνουσα δύναμις Q εἶναι ἀρνητικὴ (—) [σχ. 7·6 γ(β)].

3) *Ἡ ῥοπὴ κάμψεως M μιᾶς διατομῆς* ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν ἀριστερὰ (ἢ δεξιὰ) τῆς ἐξεταζομένης διατομῆς δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους της.

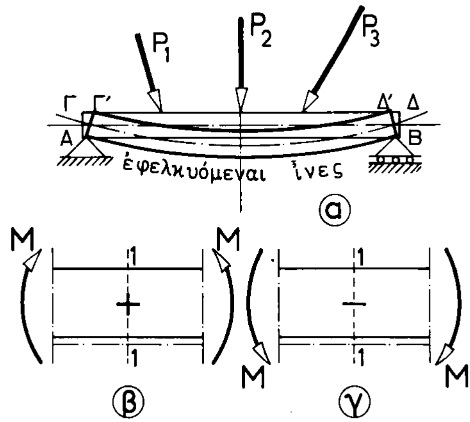


Σχ. 7·6γ.

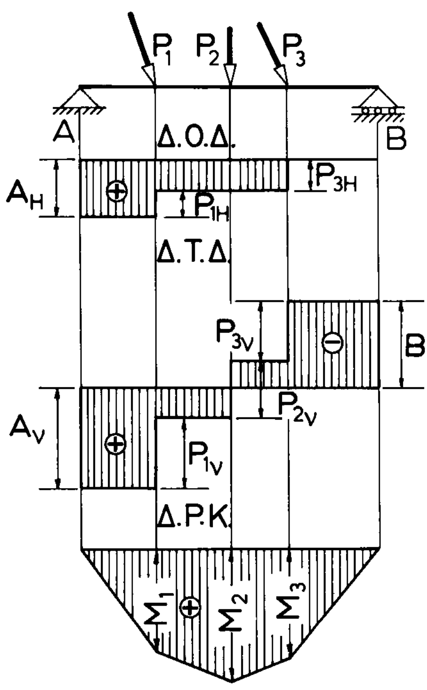
Τὸ πρόσημον θεωρεῖται θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ὡς κάτωθι:

Λόγω τῶν δυνάμεων P_1, P_2, P_3, ἡ δοκὸς θὰ καμφθῇ καὶ ἀπὸ τὴν θέσιν ΑΒΓΔ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν ΑΒΓ′Δ′ [σχ. 7·6δ(α)].

Ἂν ὑποθέσωμε ὅτι ἡ δοκὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἶνας, αἱ ὁποῖαι


P1
P2
P3
Γ Γ′
Δ′ Δ
Α
Β
ἐφελκυόμεναι ἶνες
α
M
M
1
+
1
M
1
−
1
M
β
γ

Σχ. 7 · 6 δ.


P1 P2 P3
A
B
Δ.Ο.Δ.
A_H
P3H
P1H
Δ.Τ.Δ.
P3V
B
A_V
P2V
P1V
Δ.Ρ.Κ.
M1
M2
M3

Σχ. 7 · 6 ε.

εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονά της, τότε εἰς τὴν νέαν θέσιν τῆς δοκοῦ αἱ κάτω ἶνες θὰ ἔχουν ἐπιμηκυνθῆ καὶ αἱ ἄνω θὰ ἔχουν βραχυνθῆ.

Ὅταν ἡ ροπὴ κάμψεως ἀναγκάζῃ τὰς κάτω ἶνας τῆς δοκοῦ νὰ ἐπιμηκυνθοῦν, τότε λέγομε ὅτι ἡ ροπὴ αὐτὴ ἐφελκύει τὰς κάτω ἶνας, καὶ καλεῖται θετικὴ (+)[σχ. 7·6δ(β)]. Ἀντιθέτως ὅταν τὰς θλίβῃ, ἡ ροπὴ καλεῖται ἀρνητικὴ (—) [σχ. 7·6δ(γ)].

Εἰς κάθε σημεῖον τῆς δοκοῦ ὑπολογίζομε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις, δηλαδὴ τὰ μεγέθη τῶν ὀρθῶν δυνάμεων, τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων καθὼς καὶ τῶν ροπῶν κάμψεως.

Μὲ κατάλληλον κλίμακα σχεδιάζομε τὰ μεγέθη αὐτὰ ὡς εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ. Ὅταν συνδέσωμε τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, λαμβάνομε *τὸ διάγραμμα ὀρθῶν δυναμεων* (Δ.Ο.Δ), *τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων* (Δ.Τ.Δ.) καὶ *τὸ διάγραμμα ροπῶν κάμψεως* (Δ.Ρ.Κ.) (σχ. 7·6ε).

Τὰ διαγράμματα αὐτὰ μᾶς δίδουν μίαν παραστατικὴν εἰκόνα τῆς πορείας τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων κατὰ μῆκος τῆς δοκοῦ.

7·7 Ἀναλυτικὸς καὶ γραφικὸς ὑπολογισμὸς ἀντιδράσεων, ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ ροπῶν.

Εἰς τὴν πρᾶξιν μᾶς δίδεται τὸ ἄνοιγμα καὶ τὰ φορτία τῆς δοκοῦ καὶ μᾶς ζητεῖται νὰ καθορίσωμε τὰς διαστάσεις τῆς διατομῆς της, ὥστε ἡ δοκὸς μὲ τὸ δεδομένον φορτίον νὰ μὴ καταστραφῇ, οὔτε νὰ παραμορφωθῇ ὑπερβολικά.

Διὰ νὰ τὸ ἐπιτύχωμε ὅμως αὐτό, πρέπει νὰ γνωρίζωμε ὅλας τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις ποὺ φορτίζουν τὴν δοκόν, εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκουν καὶ αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως Α καὶ Β.

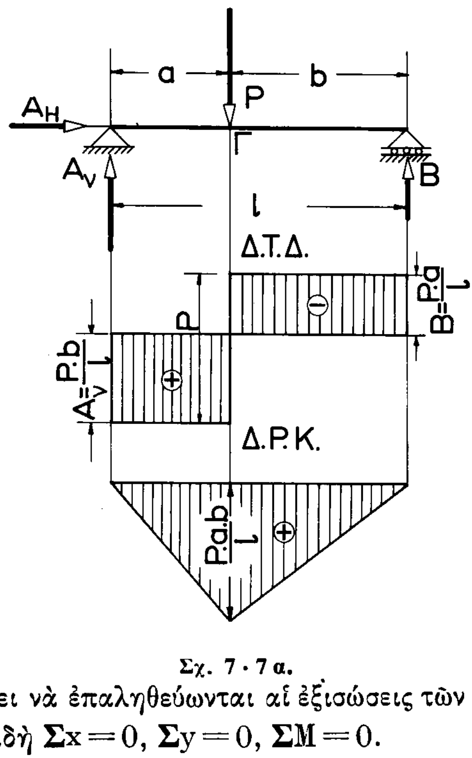
Λόγω τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἀναπτύσσονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς δοκοῦ, ὅπως εἴδαμε, αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις καὶ ροπαὶ καὶ εἶναι πολὺ σημαντικὸν νὰ γνωρίζωμε τὰ μεγέθη των, διότι μὲ βάσιν αὐτὰς ὑπολογίζομε τὰς διαστάσεις τῆς διατομῆς (σχ. 7·6ε).

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ ροπῶν γίνεται καὶ ἐδῶ κατὰ δύο τρόπους, τὸν ἀναλυτικὸν καὶ τὸν γραφικόν.

1) *Ἀναλυτικὸς ὑπολογισμός.*

Θεωροῦμε ὅτι ἐπάνω εἰς τὴν δοκὸν ἐνεργοῦν ὅλαι αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, δηλαδὴ τὰ φορτία καὶ αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. Διὰ τὴν εὐκολίαν τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀναλύομε ὅλας τὰς δυνάμεις εἰς ὁριζοντίους καὶ κατακορύφους συνιστώσας.

Τὰ φορτία μᾶς εἶναι γνωστά, αἱ ἀντιδράσεις ἄγνωστοι. Ὅλαι ὅμως αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις πρέπει νὰ ἰσορροποῦν. Διὰ νὰ ἰσορ-



Σχ. 7·7α.

ροποῦν πρέπει νὰ ἐπαληθεύωνται αἱ ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας, δηλαδὴ $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma M = 0$.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προκύπτουν τρεῖς ἐξισώσεις, μὲ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμε τὰς τρεῖς ἀγνώστους ἀντιδράσεις στηρίξεως.

Ἂς ἐξετάσωμε ἕνα ἁπλοῦν παράδειγμα, δηλαδὴ μίαν ἀμφιέρειστον δοκὸν μὲ ἕνα συγκεντρωμένον φορτίον εἰς κάποιαν θέσιν της (σχ. 7·7α).

Ἡ ἄρθρωσις Α μᾶς δίδει δύο ἀγνώστους ἀντιδράσεις, τὴν A_v καὶ A_H.

Ἡ κύλισις Β μᾶς δίδει μόνον τὴν κατακόρυφον ἀντίδρασιν Β.

Αἱ φοραὶ τῶν δυνάμεων A_v, A_H καὶ Β λαμβάνονται τυχαίως. Ἐὰν μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν προκύψη ὅτι αἱ δυνάμεις εἶναι θετικαὶ σημαίνει ὅτι ἐπελέξαμε τὸ βέλος ὀρθῶς, ἐὰν προκύψουν ὅμως μία ἢ περισσότεραι ἀρνητικαὶ δυνάμεις, τότε πρέπει νὰ ἀλλάξωμε τὴν φορὰν τοῦ βέλους δι' αὐτάς.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμε τὰς συνθήκας ἰσορροπίας, ἔχομε:

$$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$$
$$\Sigma y = 0 \qquad A_v + B - P = 0$$
$$\Sigma M_A = 0 \qquad B\,l - P\alpha = 0.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν προκύπτει ὅτι:

$$B = P\frac{\alpha}{l}.$$

Εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἀντικαθιστοῦμε τὸ Β μὲ τὴν τιμήν του καὶ λαμβάνομε $A_v = P\,\frac{b}{l}$, πρᾶγμα ποὺ προκύπτει ἀμέσως, ἐὰν λάβωμε ροπὰς ὡς πρὸς Β.

$\Sigma M_B = 0$ ἤτοι $A_v\,l - P\,b = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας

$$A_v = P\,\frac{b}{l}.$$

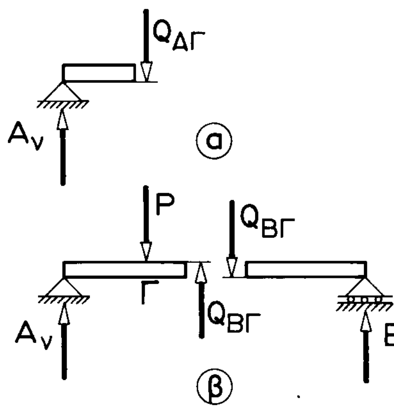
α) Διάγραμμα ὀρθῶν δυνάμεων:

Ἐπειδὴ $A_H = 0$, ἡ ὀρθὴ δύναμις εἰς οἱανδήποτε θέσιν τῆς δοκοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν.

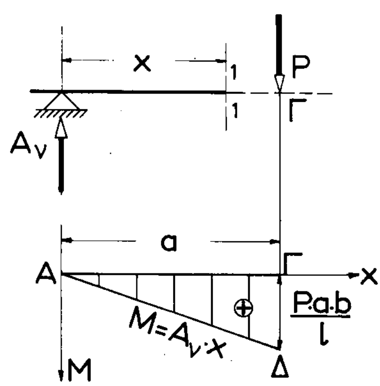
β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Εἰς τὸ τμῆμα ΑΓ ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $Q_{A\Gamma} = + A_v = P \dfrac{b}{l}$.

Τὸ πρόσημον τῆς τεμνούσης εἶναι θετικὸν (+), διότι δεξιὰ τῆς ἐξεταζομένης διατομῆς διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω [σχ. 7·7β(α)].



Σχ. 7·7β.



Σχ. 7·7γ.

Εἰς τὸ τμῆμα ΒΓ εἶναι σταθερὰ $Q_{B\Gamma} = +A_v - P = -B$.

Τὸ πρόσημον τῆς τεμνούσης εἶναι ἀρνητικὸν (—), διότι δεξιὰ τῆς ἐξεταζομένης διατομῆς διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω ἢ ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω [σχ. 7·7β(β)].

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως. Τμῆμα ΑΓ (σχ. 7·7γ):

Εἰς τὴν διατομὴν 1 — 1 καὶ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ Α ἡ ροπὴ κάμψεως εἶναι $M = A_v \cdot x$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παρέχει τὴν ροπὴν ὡς συνάρτησιν τῆς ἀποστάσεως x. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι πρωτοβάθμιος, σημαίνει ὅτι εἰς τὸ τμῆμα ΑΓ ἡ ροπὴ κάμψεως ἀκολουθεῖ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

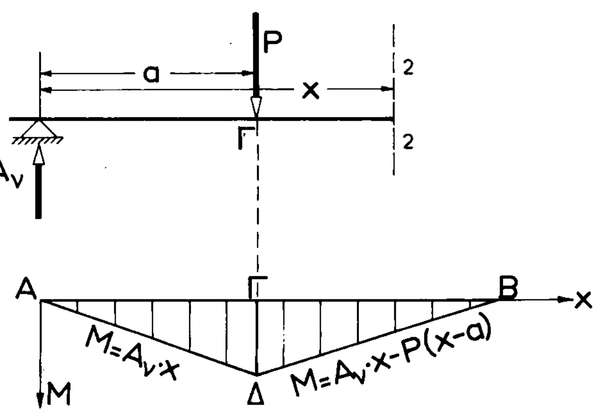
Διὰ νὰ σχεδιάσωμε τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, πρέπει νὰ καθορίσωμε δύο σημεῖα της. Ὁ καθορισμὸς γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἐκλέγομε μίαν κλίμακα ροπῶν, π.χ. 1 cm $\triangleq$ 100 kpcm.

Διὰ $x = 0$ $\qquad M = 0$.

Διὰ $x = \alpha$ $\qquad M = A_v \cdot \alpha = \dfrac{P\alpha b}{l}$.

Λαμβάνομε τὸ τμῆμα ΓΔ μὲ τὴν δοθεῖσαν κλίμακα ἴσον μὲ $\dfrac{P\alpha b}{l}$ καὶ φέρομε τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Αἱ κάθετοι ἀπὸ τὰ σημεῖα



Σχ. 7·7δ.

τῆς εὐθείας ΑΔ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ δεικνύουν τὰς ροπὰς κάμψεως εἰς ὅλας τὰς διατομὰς τοῦ τμήματος ΑΓ τῆς δοκοῦ.

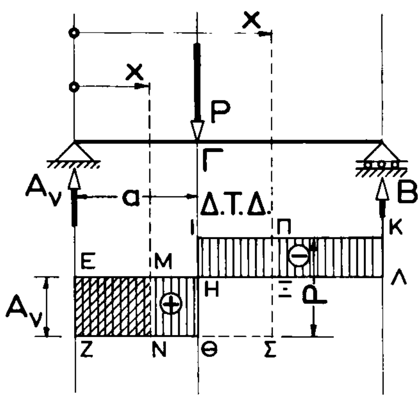
Τμῆμα ΓΒ (σχ. 7·7δ).

Εἰς τὴν διατομὴν 2 — 2 καὶ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ Α ἡ ροπὴ κάμψεως εἶναι $M = A_v \cdot x - P(x - \alpha)$. Καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾶ εὐθεῖαν γραμμήν.

Διὰ νὰ τὴν χαράξωμε καθορίζομε δύο σημεῖα της. Διὰ $x = \alpha$, ἔχομε $M = A_v \cdot \alpha = \frac{Pab}{l}$, δηλαδὴ καταλήγομε καὶ πάλιν εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον ἔχομε ἤδη καθορίσει. Διὰ $x = l$, δηλαδὴ διὰ τὸ σημεῖον Β τὸ $M = 0$, ἄρα ἔχομε ὡς δεύτερον σημεῖον τὸ Β.

Σχέσις μεταξὺ τεμνούσης δυνάμεως καὶ ροπῆς κάμψεως.

Ἐμάθαμε ὅτι διὰ τὸ τμῆμα ΑΓ ἡ ροπὴ κάμψεως $M = A_v \cdot x$, ποὺ σημαίνει ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφ. ΕΖΜΝ = ἐπιφ. διαγρ. τεμνουσῶν δυνάμεων ἀριστερὰ τῆς διατομῆς x (σχ. 7·7ε).



Σχ. 7·7ε.

Διὰ τὸ τμῆμα ΓΒ ἡ ροπὴ κάμψεως $M = A_v \cdot x - P(x - \alpha)$

= ἐπιφ. ΕΖΣΞ — ἐπιφ. ΙΘΣΠ = ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπιφ. διαγρ. τεμνουσῶν δυνάμεων ἀριστερὰ τῆς διατομῆς.

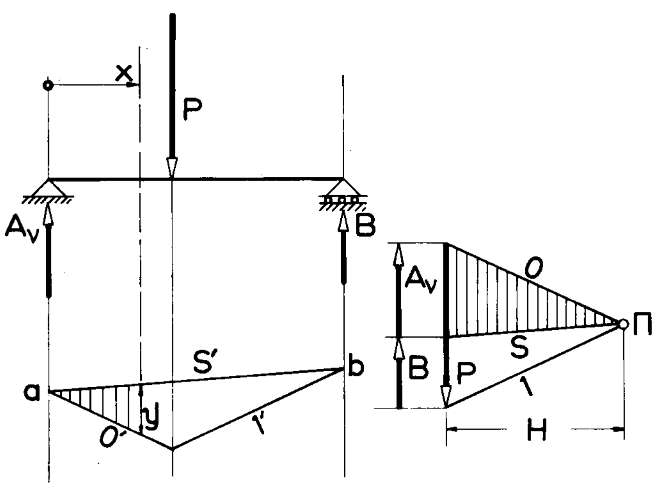
Ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ διατυπώσωμε τοὺς ἑξῆς κανόνας:

α) *Ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς οἱανδήποτε διατομὴν τῆς δοκοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων ἀριστερὰ τῆς διατομῆς.*

β) *Ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως προκύπτει εἰς τὴν διατομήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ τέμνουσα $Q = 0$, διότι διὰ τὴν διατομὴν αὐτὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀριστερά της διαγράμματος τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων εἶναι μέγιστον.* Τὴν ροπὴν αὐτὴν χαρακτηρίζομε ὡς maxM.

2) ***Γραφικὸς ὑπολογισμός.***

Ὁ γραφικὸς ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων καὶ ροπῶν κάμψεως γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν δυναμοπολυγώνου καὶ σχοινοπολυγώνου ὡς ἑξῆς (σχ. 7·7ζ):



Σχ. 7·7ζ.

α) Σχεδιάζομε τὴν δοκὸν ὑπὸ κλίμακα π.χ. 1 : ν.

β) Κατασκευάζομε ἐν συνεχείᾳ τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν φορτίων ὑπὸ κλίμακα, π.χ. 1 cm $\triangleq$ μ kp.

γ) Ἐκλέγομε τὸν πόλον Π οὕτως, ὥστε ὅταν μετρήσωμε τὴν ἀπόστασιν Η μὲ τὴν κλίμακα τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι στρογγυλὸς ἀριθμός, καὶ κατασκευάζομε τὸ σχοινοπολύγωνον.

δ) Προεκτείνομε τὰς ἐξωτερικὰς πλευρὰς τοῦ σχοινοπολυγώνου 0′ καὶ 1′ μέχρις ὅτου τμήσουν τὰς εὐθείας ἐνεργείας τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως εἰς τὰ σημεῖα *a* καὶ b. Ἑνώνομε τὰ σημεῖα *a* καὶ b καὶ λαμβάνομε τὴν κλείουσαν S′.

ε) Διὰ τοῦ πόλου Π φέρομε τὴν πολικὴν ἀκτῖνα S παράλληλον πρὸς τὴν κλείουσαν S′. Ἡ πολικὴ αὐτὴ ἀκτὶς καθορίζει ἐπὶ τοῦ δυναμοπολυγώνου τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως A_v καὶ B. Ἡ A_v εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν πολικῶν ἀκτίνων 0 καὶ S, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ 0′ καὶ S′ τέμνονται ἐπὶ τῆς A_v. Ἡ B εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν πολικῶν ἀκτίνων S καὶ 1, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ S′ καὶ 1′ τέμνονται ἐπὶ τῆς B.

Ἀπόδειξις. Αἱ δυνάμεις ποὺ δροῦν ἐπὶ τῆς δοκοῦ εἶναι αἱ A_v, B καὶ P.

Τὸ δυναμοπολύγωνόν των καὶ τὸ σχοινοπολύγωνόν των εἶναι κλειστά, ἄρα ἰσορροποῦν (παράγρ. 4 · 1).

στ) Ἡ ὑπὸ τῶν πλευρῶν 0′, 1′ καὶ S′ περικλειομένη ἐπιφάνεια ἀποτελεῖ τὸ διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψεως. Διὰ μίαν διατομὴν εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ A ἡ ροπὴ κάμψεως εἶναι: $M = y \cdot H$, ὅπου τὸ H μετρεῖται μὲ τὴν κλίμακα τῶν δυνάμεων 1 cm $\triangleq$ μkp καὶ τὸ y μὲ τὴν κλίμακα σχεδιάσεως τῆς δοκοῦ 1 : ν.

Ἂς σημειωθῇ ὅτι τὸ y μετρεῖται πάντοτε καθέτως ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὰ διεγραμμισμένα ὅμοια τρίγωνα ἔχομε:

$\frac{A_v}{H} = \frac{y}{x}$, ἐκ τῆς ὁποίας $A_v \cdot x = y \cdot H$.

Γνωρίζομε ὅμως (παράγρ. 7·7) ὅτι ἡ ῥοπὴ κάμψεως εἰς διατομὴν ποὺ ἀπέχει x ἀπὸ τὸ A εἶναι:

$$M = A_v \cdot x, \text{ ἄρα}$$
$$M = y \cdot H.$$

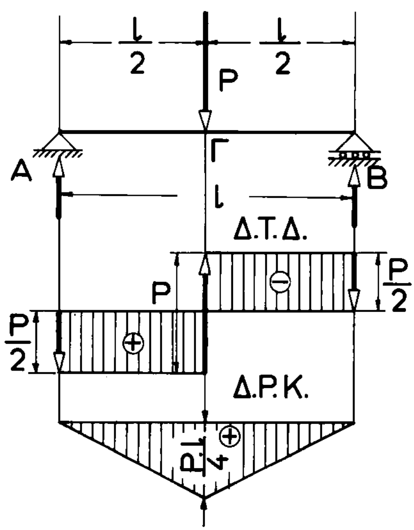
Ἐπειδὴ τὸ H εἶναι σταθερόν, ἡ μεγίστη ῥοπὴ ἐμφανίζεται εἰς τὴν θέσιν ὅπου τὸ y εἶναι μέγιστον. Ἄρα:

$$\max M = H \cdot \max y.$$

7·8 Ἁπλῆ ἀμφιέρειστος δοκός.

Διὰ τὰς διαφόρους μορφὰς κατακορύφων φορτίων ὁριζοντίας ἀμφιερείστου δοκοῦ θὰ ὑπολογίσωμε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως καὶ τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις, ποὺ ἐδῶ εἶναι αἱ τέμνουσαι δυνάμεις καὶ αἱ ῥοπαὶ κάμψεως. Ἐπειδὴ ἡ δοκὸς λαμβάνεται ὁριζοντία καὶ τὰ φορτία κατακόρυφα, δὲν ἐμφανίζονται ὀρθαὶ δυνάμεις.

1. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ συγκεντρωμένον φορτίον εἰς τὸ μέσον της* (σχ. 7·8 α).



Σχ. 7·8 α.

Ἡ φόρτισις αὐτὴ ἀποτελεῖ εἰδικὴν περίπτωσιν ἐκείνης ποὺ ἐξετάσαμε εἰς τὴν παράγραφον 7·7, ὅπου εἴχαμε μίαν ἀμφιέρειστον δοκὸν μὲ ἕνα συγκεντρωμένον φορτίον εἰς τυχοῦσαν θέσιν της, ὅπου $\alpha = b = \frac{l}{2}$.

Ἔχομε ἑπομένως:

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A_v = B = \frac{P}{2}.$$

β) Τέμνουσαι δυνάμεις:

$$Q_{A\Gamma} = +\frac{P}{2} \qquad Q_{B\Gamma} = -\frac{P}{2}.$$

γ) Ροπαὶ κάμψεως:

$$\max M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P\,l}{4}.$$

2. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ δύο συγκεντρωμένα φορτία εἰς τυχοῦσαν θέσιν* (σχ. 7·8 β).

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως καὶ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων γίνεται ὡς ἑξῆς:

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$$

$$\Sigma y = 0 \qquad A_v + B - P_1 - P_2 = 0$$

$\Sigma M_B = 0 \qquad A_v \cdot l - P_1 b_1 - P_2 b_2 = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει:

$$A_v = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2}{l}.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμε τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν καὶ ἐκτελέσωμε τὰς πράξεις, εὑρίσκομε:

$$B = \frac{P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2}{l}.$$

Τὴν ἀντίδρασιν B ἠμποροῦμε νὰ ὑπολογίσωμε καὶ ἀπ' εὐθείας, ἐὰν λάβωμε $\Sigma M_A = 0$, ὁπότε:

$$\mathrm{B}\,l - \mathrm{P}_1\alpha_1 - \mathrm{P}_2\alpha_2 = 0 \text{ καὶ } \mathrm{B} = \frac{\mathrm{P}_1\alpha_1 + \mathrm{P}_2\alpha_2}{l}.$$

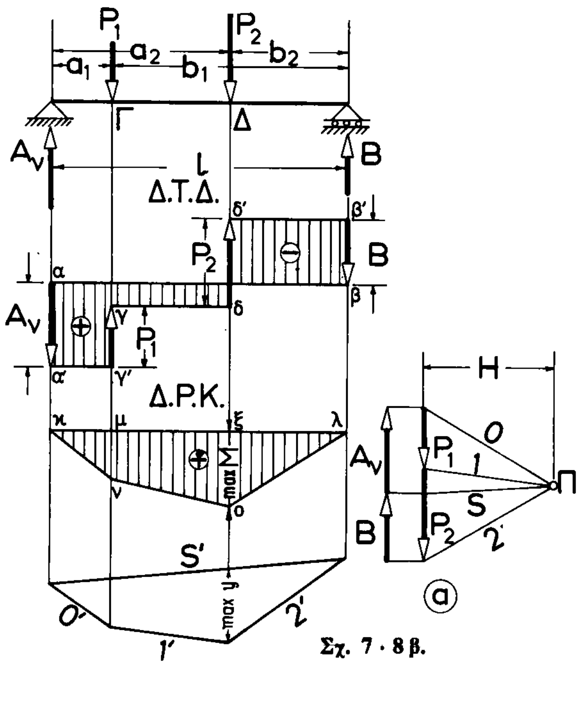
Γραφικῶς εὑρίσκομε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως μὲ τὴν βοήθειαν δυναμοπολυγώνου καὶ σχοινοπολυγώνου [σχ. 7·8 β(α)].

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων (σχ. 7·8 β):

Διὰ νὰ σχεδιάσωμε τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων, φέρομε τὴν εὐθεῖαν αβ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ καὶ μὲ τὴν ἰδίαν κλίμακα μηκῶν. Ἐκλέγομε μίαν κλίμακα δυνάμεων, π.χ. 1 cm $\triangleq$ μkp. Εἰς ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἀριστερὰ τῆς διατομῆς Α ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι μηδέν. Εἰς ἐλαχίστην ἀπόστασιν δεξιὰ ἰσοῦται μὲ $+\mathrm{A_v}$. Φέρομε τὴν κάθετον:

$$\alpha\alpha' = +\frac{\mathrm{P}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{P}_2\mathrm{b}_2}{l}.$$

Εἰς ὅλας τὰς διατομὰς μεταξὺ Α καὶ Γ ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $+\mathrm{A_v}$. Ἑπομένως φέρομε τὴν α′γ′ ὁρι-



Σχ. 7 · 8 β.

ζοντίαν. Εἰς ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἀριστερὰ τῆς διατομῆς Γ ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται μὲ $+A_v$, εἰς ἐλαχίστην ἀπόστασιν δεξιὰ μὲ $+A_v-P_1$. Φέρομε συνεπῶς τὴν $\gamma\gamma'=P_1$ καὶ μὲ ἀντίθετον πρὸς αὐτὴν διεύθυνσιν.

Εἰς ὅλας τὰς διατομὰς μεταξὺ Γ καὶ Δ ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $+A_v-P_1$. Ἑπομένως φέρομε τὴν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν γδ.

Εἰς ἐλαχίστην ἀπόστασιν δεξιὰ τῆς διατομῆς Δ ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται μὲ $+A_v-P_1-P_2$. Φέρομε συνεπῶς τὴν δδ΄ ἴσην μὲ P_2 καὶ μὲ ἀντίθετον διεύθυνσιν. Εἰς τὰς διατομὰς μεταξὺ Δ καὶ B ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $+A_v-P_1-P_2$. Ἄρα φέρομε τὴν δ΄β΄ ὁριζοντίως. Εἰς τὴν διατομὴν B ἡ τέμνουσα δύναμις μεταβάλλεται κατὰ τὴν ἀντίδρασιν στηρίξεως B, ἑπομένως γίνεται ἴση μὲ $+A_v-P_1-P_2+B$, ὅπερ ἰσοῦται μὲ μηδὲν (ἴδε $\Sigma y=0$).

Ἄρα, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου β΄ φέρωμε τὴν ἀντίδρασιν B, τὸ πέρας της πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον β τῆς ὁριζοντίας αβ. Ἡ σύμπτωσις αὐτὴ μᾶς πείθει ὅτι ὀρθῶς ἐχαράχθη τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

Εἰς τὴν παράγραφον 7·7 εἴδαμε ὅτι διὰ τὰ τμήματα τῆς δοκοῦ μεταξὺ δυνάμεων, τὸ διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψεως ἀκολουθεῖ εὐθεῖαν γραμμήν. Ἀρκεῖ ἑπομένως διὰ τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματος ροπῶν κάμψεως νὰ ὑπολογίσωμε τὰς ροπὰς κάμψεως διὰ τὰς διατομὰς A, B, Γ καὶ Δ, εἰς τὰς ὁποίας δροῦν αἱ δυνάμεις. Ἐκλέγομε πρὸς τοῦτο μίαν κλίμακα ροπῶν, π.χ. $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 100\,\text{kpm}$.

Εἰς τὴν διατομὴν A καὶ B ἔχομε $M_A=M_B=0$.

Εἰς τὴν διατομὴν Γ ἔχομε $M_\Gamma=+A_v\cdot\alpha_1$ θετικήν, διότι ἐφελκύει τὰς κάτω ἶνας. Φέρομε τὴν κάθετον μν ἴσην μὲ $A_v\cdot\alpha_1$ καὶ ὑπὸ τὴν ἐκλεγεῖσαν κλίμακα ροπῶν.

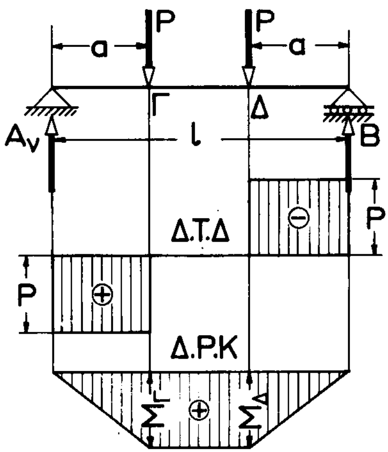
Εἰς τὴν διατομὴν Δ ἔχομε $M_{\Delta} = + B \cdot b_2$ θετικήν, διότι ἐφελκύει τὰς κάτω ἶνας. Φέρομε τὴν κάθετον ξο ἴσην μὲ $B \cdot b_2$.

Ἑνώνομε τὰ σημεῖα κ ν ο λ μὲ εὐθείας γραμμάς, ὁπότε προκύπτει τὸ διάγραμμα ροπῶν κάμψεως.

Ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως, maxM, προκύπτει, καθὼς εἴδαμε (παράγρ. 7·7), εἰς τὴν διατομήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ $Q = 0$.

$$\max M = M_{\Delta} = + B \cdot b_2.$$

Διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν *δύο ἴσων φορτίων, ποὺ εἶναι τοποθετημένα συμμετρικῶς* ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ, θὰ ἔχωμε (σχ. 7·8γ):



Σχ. 7·8γ.

α΄) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A_V = B = P.$$

β΄) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_{A\Gamma} = + A_V = + P$$

$$Q_{\Gamma\Delta} = + A_V - P = 0$$

$$Q_{\Delta B} = + A_V - P - P = - P.$$

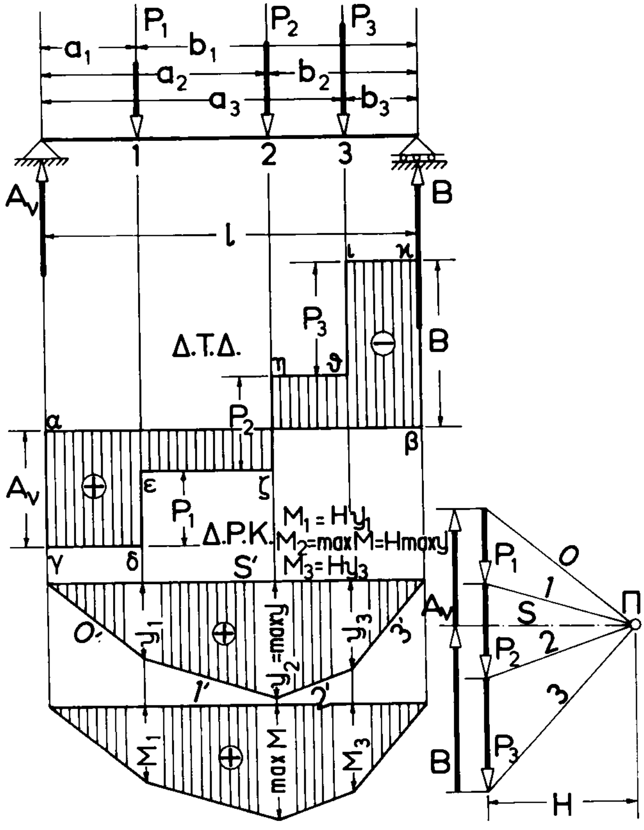
γ΄) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

Εἰς τὸ τμῆμα ΓΔ ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι μηδέν. Ἄρα ἡ ροπὴ κάμψεως μένει σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὴν μεγίστην ροπήν:

$$\max M = M_\Gamma = M_\Delta = + A_V \cdot \alpha = + P\alpha.$$

3. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ πολλὰ συγκεντρωμένα φορτία* (σχ. 7·8 δ).

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως καὶ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων γίνεται ὡς ἑξῆς:



Σχ. 7 · 8 δ.

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 = A_v\, l - P_1 b_1 - P_2 b_2 - P_3 b_3$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνεται:

$$A_v = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3}{l}$$

$$\Sigma M_A = 0 = B\, l - P_3 \alpha_3 - P_2 \alpha_2 - P_1 \alpha_1$$

ἤτοι $B = \dfrac{P_3\alpha_3 + P_2\alpha_2 + P_1\alpha_1}{l}$.

Πάντοτε ἐλέγχομε ἂν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν κατακορύφων φορτίων ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν.

$$\Sigma y = 0 = A_v + B - P_1 - P_2 - P_3.$$

Γραφικῶς αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως εὑρίσκονται μὲ τὴν βοήθειαν δυναμοπολυγώνου καὶ σχοινοπολυγώνου, ὅπως παρουσιάζεται εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_{A1} = + A_v \qquad Q_{12} = + A_v - P_1$$

$$Q_{23} = A_v - P_1 - P_2 \qquad Q_{3B} = A_v - P_1 - P_2 - P_3 = -B.$$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

Ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως, ὅπως εἴδαμε, ἀναπτύσσεται εἰς τὴν θέσιν ὅπου μηδενίζονται αἱ τέμνουσαι δυνάμεις. Διὰ τὰ μεγέθη δυνάμεων, ποὺ ἐκλέξαμε εἰς τὸ παράδειγμά μας, τοῦτο συμβαίνει κάτω ἀπὸ τὴν δύναμιν P_2. Αἱ ῥοπαὶ κάμψεως κάτω ἀπὸ τὰ τρία συγκεντρωμένα φορτία εἶναι αἱ ἑξῆς:

$$M_1 = A_v\, \alpha_1$$

$$M_2 = \max M = A_v \cdot \alpha_2 - P_1\,(\alpha_2 - \alpha_1) \;\; (\text{ἐξ ἀριστερῶν})$$

$$M_2 = \max M = B \cdot b_2 - P_3\,(b_2 - b_3) \;\; (\text{ἐκ δεξιῶν})$$

$$M_3 = B \cdot b_3\,.$$

Ὅταν συγκρίνωμε τὸ Δ.Τ.Δ. πρὸς τὸ Δ.Ρ.Κ. βλέπομε ὅτι ἡ ροπὴ $M_1 = A_v \cdot \alpha_1$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Δ.Τ.Δ. εἰς τὴν περιοχὴν Α1. Ἐὰν προχωρήσωμε πρὸς τὸ σημεῖον 2, βλέπομε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Δ.Τ.Δ τῆς περιοχῆς Α2 θὰ εἶναι:

$$A_v \cdot \alpha_1 + (A_v - P_1)(\alpha_2 - \alpha_1) = A_v \cdot \alpha_1 + A_v \cdot \alpha_2 - A_v \cdot \alpha_1 - P_1(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$= A_v \cdot \alpha_2 - P_1(\alpha_2 - \alpha_1)$, δηλαδὴ ἴσον μὲ τὴν ροπὴν κάμψεως M_2.

Ἡ ἰδία ροπὴ πρέπει νὰ προκύψη, ἐὰν ὑπολογίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς B_2 τοῦ Δ.Τ.Δ. Πράγματι τοῦτο εὑρίσκεται ἴσον μέ:

$$-B \cdot b_3 - (B - P_3)(b_2 - b_3) = -B \cdot b_2 + P_3(b_2 - b_3)$$

καὶ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία τιμὴ διὰ τὴν M_2, ποὺ εὑρέθη ἀνωτέρω ἀλλὰ μὲ ἀντίθετον πρόσημον. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν κανόνα ποὺ ἐθέσαμε διὰ τὸ πρόσημον τῆς τεμνούσης δυνάμεως. Ἐνῶ δηλαδὴ μία πρὸς τὰ ἄνω διευθυνομένη δύναμις δεξιὰ τῆς ἐξεταζομένης τομῆς προκαλεῖ θετικὴν ροπὴν κάμψεως, δίδει ἀρνητικὴν τέμνουσαν δύναμιν. Ἑπομένως ἠμπορεῖ νὰ διατυπωθῇ ὁ ἑξῆς κανών:

Ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς μίαν οἱανδήποτε θέσιν ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Δ.Τ.Δ. ἀπὸ τῆς στηρίξεως ἕως τὴν θεωρουμένην θέσιν.

Ὅταν ἀρχίζωμε ἀπὸ τὴν δεξιὰν στήριξιν, πρέπει νὰ ἀλλάσσωμε τὸ πρόσημον.

Ἡ μεγίστη ροπὴ εἰς τὸ παράδειγμά μας ἐμφανίζεται εἰς τὴν θέσιν 2 καὶ βεβαίως λαμβάνεται ἡ ἰδία τιμή, εἴτε ἐξ ἀριστερῶν, εἴτε ἐκ δεξιῶν τὴν ὑπολογίσωμε. Προκύπτει ἑπομένως ἡ διατύπωσις ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τοῦ ἀρνητικοῦ καὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ Δ.Τ.Δ. εἶναι ἴσα.

Μὲ βάσιν τὰ ὅσα ἐλέχθησαν μέχρι τώρα δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμε τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα:

1. Ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως ἐμφανίζεται εἰς τὸ σημεῖον, ὅπου μηδενίζεται ἡ τέμνουσα δύναμις.

2. Ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς μίαν θέσιν ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Δ.Τ.Δ. ἀπὸ τῆς στηρίξεως ἕως τὴν θεωρουμένην θέσιν.

3. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ Δ.Τ.Δ. ἰσοῦται μὲ τὸ

ἐμβαδὸν τοῦ ἀρνητικοῦ.

Εἰδικῶς διὰ τὴν φόρτισιν δοκοῦ μὲ συγκεντρωμένα μόνον φορτία προκύπτουν καὶ τὰ ἑξῆς:

—Ἡ τέμνουσα δύναμις εἰς τὰ τμήματα τῆς δοκοῦ μεταξὺ φορτίων εἶναι σταθερά, κάτω ὅμως ἀπὸ τὰ συγκεντρωμένα φορτία μεταβάλλεται ἀποτόμως. Τὸ Δ.Τ.Δ. ἀποτελεῖται ἑπομένως ἀπὸ ὀρθογώνια.

—Τὸ Δ.Ρ.Κ. ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας γραμμάς, ποὺ τέμνονται μεταξύ των ὑπὸ τὰ συγκεντρωμένα φορτία.

Εἴδαμε καὶ εἰς τὰς τρεῖς προηγουμένας περιπτώσεις κατακορύφων φορτίων ἐπάνω εἰς τὴν ὁριζοντίαν δοκὸν ὅτι ἔχομε πάντοτε $A_H = 0$. Δι' αὐτὸ εἰς τὰς ἑπομένας περιπτώσεις θέτομε, δι' ἁπλούστευσιν: $A_v = A$.

4. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ γενικὸν ὁμοιομόρφως διανεμημένον φορτίον* (σχ. 7·8ε).

Τὸ φορτίον, ποὺ εἶναι ὁμοιομόρφως διανεμημένον, συμβολίζεται μὲ τὰ γράμματα g, p ἢ q καὶ ὁρίζεται ὡς βάρος ἀνὰ μέτρον μήκους. Αἱ συνήθεις διαστάσεις του εἶναι kp/m ἢ Mp/m.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως καὶ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ ῥοπῶν γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις φορτίσεως.

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

Ἡ συνολικὴ φόρτισις τῆς δοκοῦ $P = p\,l$.

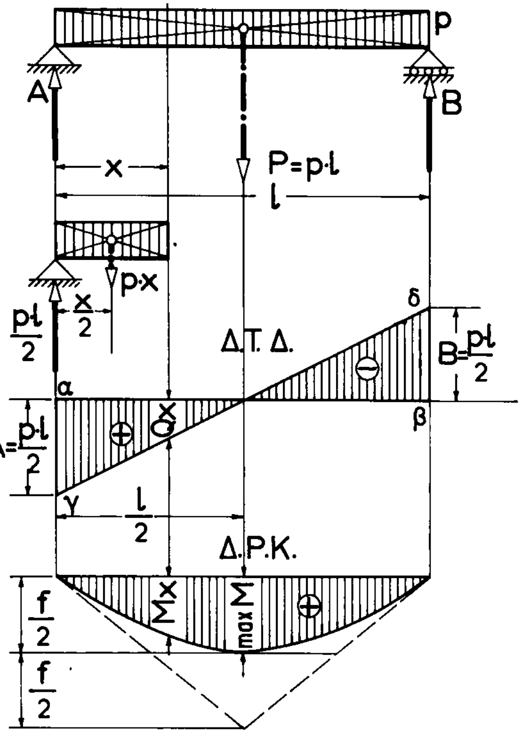
Λόγω τῆς συμμετρικῆς διατάξεως τῆς φορτίσεως ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ αἱ ἀντιδράσεις εἶναι ἴσαι. Ἄρα:

$$A = B = \frac{P}{2} = \frac{p\,l}{2}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Εἰς τὴν στήριξιν A, $Q_A = +A = \frac{p\,l}{2}$.

Εἰς τὴν στήριξιν B, $Q_B = -B = -\frac{p\,l}{2}$.



Σχ. 7·8 ε.

Εἰς μίαν διατομὴν εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ A εἶναι:

$$Q_x = A - p\,x = \frac{p\,l}{2} - px = p\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾶ εὐθεῖαν. Ἡ χάραξις τῆς εὐθείας αὐτῆς εἶναι ἁπλουστάτη. Λαμβάνομε εἰς τὸ ἄκρον A τῆς δοκοῦ τὸ τμῆμα $\alpha\gamma = + \frac{p\,l}{2}$ ὑπὸ μίαν κλίμακα δυνάμεων $1\,\mathrm{cm} \triangleq \mu\,\mathrm{kp}$ καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τὸ τμῆμα $\beta\delta = - \frac{p\,l}{2}$ μὲ τὴν ἰδίαν κλίμακα δυνάμεων καὶ συνδέομε μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον γ μὲ τὸ δ.

Ἡ τέμνουσα δύναμις μηδενίζεται διὰ $x = \frac{l}{2}$, ὅπου ὅπως εἴδαμε εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα, πρέπει νὰ ἀναπτύσσεται ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

Θὰ ὑπολογίσωμε τὴν ροπὴν κάμψεως εἰς μίαν διατομὴν εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ A. Αἱ δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν εἰς τὰ ἀριστερὰ τῆς διατομῆς αὐτῆς εἶναι:

1) Ἡ ἀντίδρασις στηρίξεως A μὲ μοχλοβραχίονα x καὶ

2) ἡ φόρτισις, ποὺ εἶναι διανεμημένη ὁμοιομόρφως ἐπάνω εἰς τὸ μῆκος x. Ἂς σημειωθῇ ὅτι αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀπείρως πολλὰ φορτία, ποὺ τὸ κάθε ἕνα ἔχει διαφορετικὸν μοχλοβραχίονα. Ὡς γνωστὸν (παράγρ. 1·4), τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον ἰσοῦται μὲ τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ἀπείρως πολλῶν αὐτῶν παραλλήλων φορτίων ἰσοῦται μὲ $p \cdot x$ καὶ ἐνεργεῖ εἰς τὸ κέντρον βάρους τῆς φορτίσεως, δηλαδὴ εἰς τὰ $\frac{x}{2}$.

Ἑπομένως ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς τὴν διατομὴν x εἶναι:

$$M_x = A \cdot x - p\,x\,\frac{x}{2} = A \cdot x - p\,\frac{x^2}{2} = p\frac{l}{2}\,x - p\,\frac{x^2}{2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή, ποὺ προκύπτει, παριστᾶ μίαν παραβολήν, τῆς ὁποίας ὁ τρόπος κατασκευῆς δίδεται κατωτέρω.

Ἡ μεγίστη ροπὴ ἀναπτύσσεται εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, ὅπου:

$$\max M = p\,\frac{l}{2}\,\frac{l}{2} - p\frac{l^2}{8} = \frac{pl^2}{8}.$$

Διὰ μίαν δοκὸν μὲ φόρτισιν ὁμοιομόρφως διανεμημένην ἐπάνω εἰς ὅλον τὸ μῆκος της ἐξάγονται τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα ἐκ τῶν ὅσων ἐλέχθησαν:

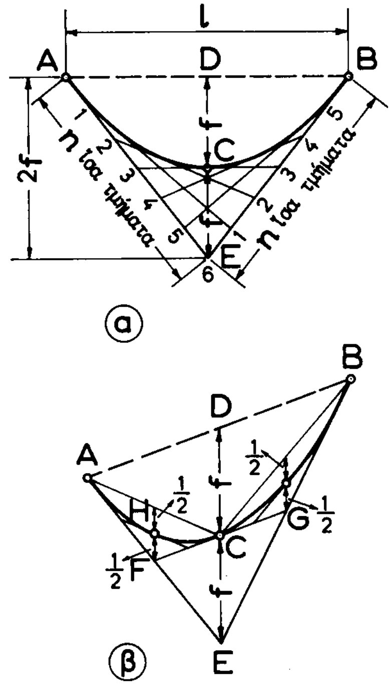
—Ἡ τέμνουσα δύναμις μεταβάλλεται συνεχῶς κατὰ μίαν κεκλιμένην εὐθεῖαν γραμμήν. Τὸ Δ.Τ.Δ. ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα τρίγωνα.

—Τὸ Δ.Ρ.Κ. ἀποτελεῖ παραβολήν.

Ἐπειδὴ ἡ σχεδίασις παραβολῆς, τῆς ὁποίας εἶναι γνωστὴ ἡ χορδή, ὁ ἄξων καὶ ἡ κορυφή, εἶναι συχνοτάτη εἰς τὴν Στατικήν, διὰ τοῦτο ἀπαραίτητον εἶναι νὰ μάθωμε τὸν τρόπον τῆς κατασκευῆς της.

Κατασκευὴ παραβολῆς.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμε μίαν παραβολὴν πρέπει νὰ ἔχωμε ὡρισμένα δεδομένα. Καὶ αὐτὰ εἶναι ἡ χορδὴ AB, ὁ ἄξων CD καὶ ἡ κορυφὴ τῆς παραβολῆς C. Τὴν παραβολὴν ἠμποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν περιβαλλουσῶν ἐφαπτομένων, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 7·8ζ(α). Δηλαδὴ θέτομε CD = CE. Φέρομε τὰς εὐθείας AE καὶ



Σχ. 7·8ζ.

BE, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς καμπύλης. Ἡ παράλληλος (3 — 3) διὰ τοῦ C πρὸς τὴν AB ἀποτελεῖ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφήν.

Διὰ νὰ εὕρωμε καὶ ἄλλας ἐφαπτομένας διαιροῦμε τὰς εὐθείας AE καὶ BE εἰς n ἴσα τμήματα, εἰς τὸ σχῆμα n = 6, καὶ ἑνώνομε τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως κατὰ τὸν τρόπον ποὺ βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα.

Προκύπτει κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μία ὁμὰς ἀπὸ ἐφαπτομένας, ποὺ περιβάλλουν τὴν παραβολήν, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων ἡ κατασκευὴ τῆς παραβολῆς γίνεται πλέον ἐξαιρετικῶς εὐχερής.

Ἡ ἰδία κατασκευὴ ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ ὅταν τὰ σημεῖα A καὶ B δὲν κεῖνται ἐπάνω εἰς τὴν ἰδίαν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς [σχ. 7·8 ζ (β)]

Διὰ νὰ προβοῦμε ὅμως εἰς τὴν χάραξιν εἶναι προτιμότερον εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ μᾶς ἀπασχολεῖ νὰ εὕρωμε ὡρισμένα σημεῖα τῆς παραβολῆς.

Πρὸς τοῦτο χαράσσομε τὴν χορδὴν AC, ὁπότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον AFC.

Τὸ μέσον H τῆς ἐκ τοῦ F διαμέσου τοῦ τριγώνου AFC ἀποτελεῖ σημεῖον τῆς παραβολῆς μὲ ἐφαπτομένην παράλληλον πρὸς τὴν AC.

Τὴν ἰδίαν μέθοδον ἠμποροῦμε ἤδη νὰ ἐφαρμόσωμε διὰ τὴν χορδὴν AH κ.ο.κ.

5. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ μερικὸν φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ φορτίον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀρχίζῃ ἢ ἀπὸ μίαν ἐκ τῶν δύο στηρίξεων ἢ ἀπὸ ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον της (τυχοῦσα φόρτισις). Θὰ ἐξετάσωμε τώρα καὶ τὰς δύο αὐτὰς περιπτώσεις.

α) *Ἡ φόρτισις ἀρχίζει ἀπὸ μίαν ἐκ τῶν δύο στηρίξεων* (σχ. 7·8 η).

α΄) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 \qquad A + B - p\alpha = 0$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad p.\, \alpha \cdot \frac{\alpha}{2} - B\, l = 0 \ \text{ἄρα}$$

$$B = \frac{p\, \alpha^2}{2\, l}.$$

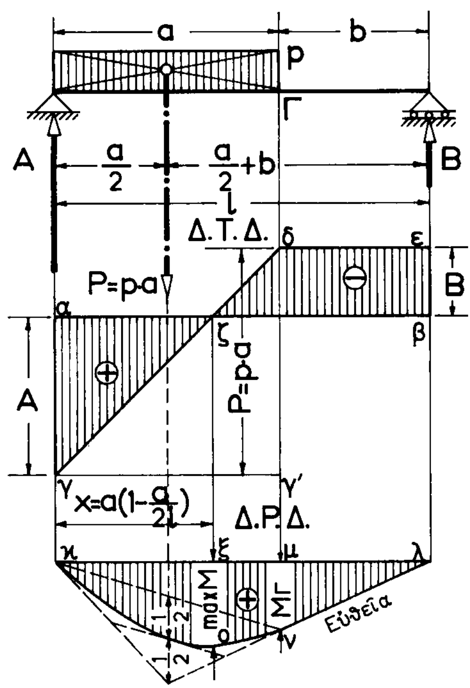
Ἂν ἀντικαταστήσωμε τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, λαμβάνομε:

$$A = p\alpha - \frac{p\, \alpha^2}{2\, l}.$$

β′) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

αγ = A. Βοηθητικὴ ὁριζοντία εὐθεῖα γγ′ μέχρι τοῦ τέλους τῆς ὁμοιομόρφου φορτίσεως γ′δ = P = pα.

Συνδέομε τὸ σημεῖον γ μὲ τὸ δ καὶ λαμβάνομε τὸ Δ.Τ.Δ.



Σχ. 7·8 η.

κάτω ἀπὸ τὴν ὁμοιόμορφον φόρτισιν.

δε = ὁριζοντία, εβ = Β.

γ′) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$M_A = 0, \qquad M_\Gamma = B \cdot b = \mu\nu.$$

Ἡ maxM ἐμφανίζεται εἰς τὴν θέσιν, ὅπου μηδενίζεται ἡ τέμνουσα δύναμις.

Ἡ τέμνουσα δύναμις εἰς τὸ διάστημα ΑΓ δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $Q_x = A - px$ ποὺ μηδενίζεται, ὅταν:

$$x = \frac{A}{p} = \frac{p\alpha - \dfrac{p\alpha^2}{2l}}{p} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2l}\right), \text{ ὁπότε}$$

$$\max M = A \cdot \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2l}\right) - \frac{p}{2} \cdot \alpha^2\left(1 - \frac{\alpha}{2l}\right)^2 = \xi o.$$

Εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα καταλήγομε, ἐὰν λάβωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου αγζ τοῦ διαγράμματος τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων. Τότε θὰ ἔχωμε:

$$\max M = \frac{A \cdot x}{2} = \frac{A\dfrac{A}{p}}{2} = \frac{A^2}{2p}.$$

Τὰ σημεῖα κ ο ν τὰ συνδέομε μὲ παραβολήν, ὅπως παρουσιάζεται εἰς τὸ σχῆμα.

$$M_B = 0.$$

Τὰ σημεῖα ν καὶ λ τὰ συνδέομε μὲ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον ν.

β) *Τυχοῦσα φόρτισις* (σχ. 7·8 θ).

α′) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$$

$$\Sigma y = 0 \qquad A + B - pc = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad A \cdot l - pc\left(b + \frac{c}{2}\right) = 0,$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν

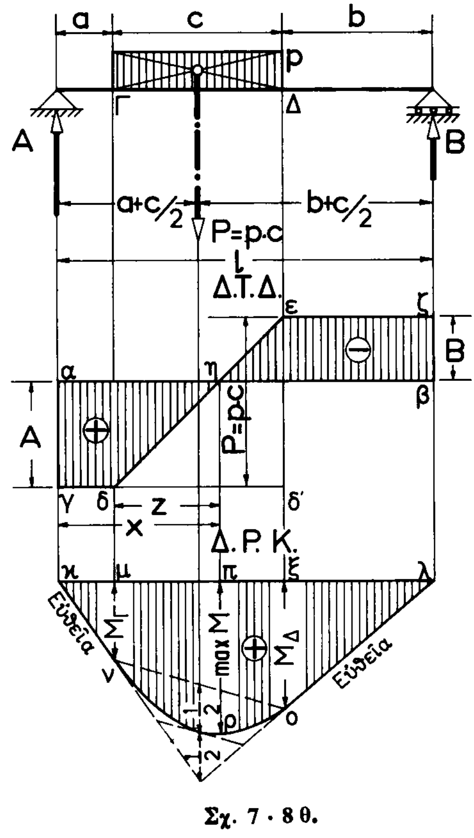
$$A = \frac{pc\left(b + \frac{c}{2}\right)}{l}.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμε τὴν τιμὴν τοῦ A εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, λαμβάνομε:

$$B = \frac{pc\left(\alpha + \frac{c}{2}\right)}{l}.$$

β΄) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$\alpha\gamma = A$$



Σχ. 7·8θ.

$\gamma\delta$ = ὁριζοντία, $Q_{A\Gamma} = +A$.

Βοηθητικὴ ὁριζοντία εὐθεῖα δδ΄ μέχρι τοῦ τέλους τῆς ὁμοιομόρφου φορτίσεως.

$$\delta'\varepsilon = P = pc.$$

δε = κεκλιμένη εὐθεῖα σχηματίζει τὸ Δ.Τ.Δ. κάτω ἀπὸ τὴν ὁμοιόμορφον φόρτισιν.

$$\varepsilon\zeta = \text{ὁριζοντία}.$$

$$\zeta\beta = B \qquad Q_{B\Delta} = -B.$$

γ΄) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_A = 0$. $M_\Gamma = A\,\alpha = \mu\nu$. Συνδέομε τὸ κ μὲ τὸ ν μὲ εὐθεῖαν. Ἡ μεγίστη ροπὴ ἐμφανίζεται κάτω ἀπὸ τὸ ὁμοιόμορφον φορτίον καὶ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς στηρίξεως. Ἡ θέσις x καθορίζεται ἀπὸ τὸν μηδενισμὸν τῆς τεμνούσης δυνάμεως:

$$Q_x = A - p\,z = 0, \text{ ἄρα } z = \frac{A}{p} \text{ καὶ } x = \alpha + z. \text{ Ἐπομένως:}$$

$$\max M = A\,x - \frac{pz^2}{2} = \pi\rho.$$

$$M_\Delta = B\,b = \xi o.$$

Τὰ σημεῖα ν ρ ο συνδέονται διὰ παραβολῆς. $M_B = 0$. Τὰ σημεῖα λ καὶ ο τὰ συνδέομε μὲ εὐθεῖαν. Αἱ εὐθεῖαι κ ν καὶ λ ο εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς παραβολῆς.

6. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ ἀσύμμετρον τριγωνικὸν φορτίον* (σχ. 7·8ι).

Ἡ συνολικὴ φόρτισις ποὺ δρᾷ ἐπὶ τῆς δοκοῦ ἰσοῦται μέ:

$$P = p\frac{l}{2}.$$

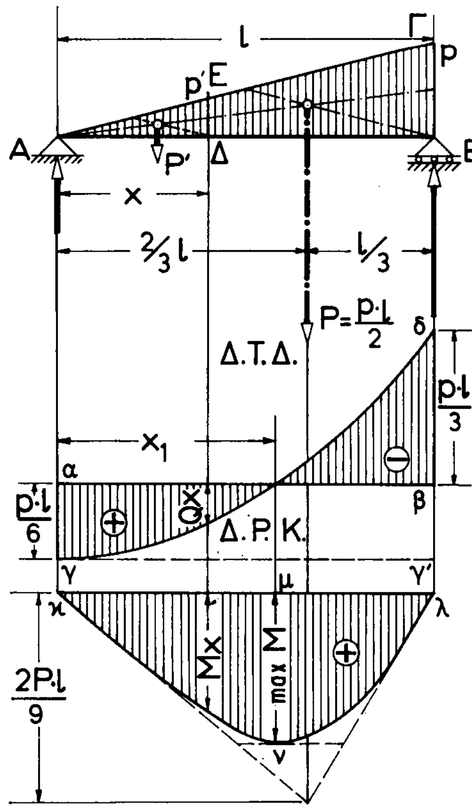
Ἡ συνολικὴ φόρτισις ἐπὶ τοῦ τμήματος x τῆς δοκοῦ ἰσοῦται μέ:

$$P' = \frac{p'x}{2}.$$

Τὰ P καὶ P′ ἐνεργοῦν εἰς τὸ κέντρον βάρους τῶν ἀντιστοίχων τριγώνων, δηλαδὴ εἰς τὰ $\frac{2}{3}\,l$ ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ x ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου.

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω σχέσεις λαμβάνομε:

$$\frac{P'}{P} = \frac{p'x}{pl}.$$



Σχ. 7 · 8 ι.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ προκύπτει ὅτι:

$$\frac{p'}{p} = \frac{x}{l}.$$

Ὅταν θέσωμε αὐτὴν τὴν σχέσιν εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν, ἔχομε:

$$\frac{P'}{P} = \frac{x^2}{l^2}.$$

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 \qquad A + B - P = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad P \frac{2}{3} l - B\, l = 0$, ἐκ τοῦ ὁποίου $B = \frac{2}{3} P$,

ὁπότε ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως προκύπτει:

$$A = \frac{1}{3} P.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Εἰς τὴν διατομὴν εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς κορυφῆς A ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται μέ:

$$Q = A - P' = \frac{1}{3} P - \frac{x^2}{l^2} P = P\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾷ παραβολήν. Ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται μὲ μηδέν, ὅταν τό:

$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} = 0$ ἢ ὅταν τὸ $x = x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577\, l.$

Διὰ τὴν χάραξιν τοῦ Δ.Τ.Δ. ἐκκινοῦμε ἀπὸ τὴν ὁριζοντίαν αβ. Θέτομε $\alpha\gamma = A = \frac{1}{3} P = \frac{pl}{6}$.

Ἡ βοηθητικὴ εὐθεῖα γγ′ = ὁριζοντία, ἡ γ′δ = P, ὁπότε $\beta\delta = B = \frac{2}{3} P = \frac{pl}{3}$.

Ἑνώνομε τὰ σημεῖα γ καὶ δ μὲ παραβολήν.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$M_B = 0.$$

Ἡ ροπὴ εἰς τυχοῦσαν διατομὴν x ἰσοῦται μέ:

$M = A \cdot x - P' \frac{x}{3} = A \cdot x - \frac{Px^3}{3\,l^2}$. Ἡ ἐξίσωσις παριστᾶ κυβικὴν παραβολήν.

Ἡ μεγίστη ροπὴ ἐμφανίζεται διὰ $Q = 0$, δηλαδὴ διὰ $x_1 = 0{,}577\,l$, ἄρα:

$$\max M = A \cdot 0{,}577\,l - \frac{P\,(0{,}577\,l)^3}{3\,l^2} = 0,\,128\,Pl = \mu\nu.$$

Εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ ἡ ροπὴ εἶναι:

$$M = A \cdot 0{,}500\,l - \frac{P\,(0{,}500\,l)^3}{3\,l^2} = 0{,}125\,P\,l,$$

ὁπότε διαπιστοῦται ὅτι ὀλίγον διαφέρει ἀπὸ τὴν maxM. Ἑνώνομε τὰ σημεῖα κ ν λ μὲ κυβικὴν παραβολήν.

Δεδομένου ὅτι ἡ κατασκευὴ τῆς κυβικῆς παραβολῆς εἶναι ὀλίγον περίπλοκος δὲν προβαίνομε εἰς τὴν ἀκριβῆ χάραξίν της.

Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς σχεδιάσεώς της δίδονται εἰς τὸ σχῆμα μερικαὶ βοηθητικαὶ ἐφαπτόμεναι.

7. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ συμμετρικὸν τριγωνικὸν φορτίον* (σχ. 7.8 κ).

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 \qquad A + B - \frac{p\,l}{2} = 0.$

Λόγῳ συμμετρίας: $A = B = \frac{p\,l}{4}$.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Εἰς μίαν διατομὴν εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς κορυφῆς A καὶ μέχρι τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ, ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται μέ:

$$Q = \frac{p\,l}{4} - p\frac{x}{l/2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{p}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{2x^2}{l}\right).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾷ παραβολήν.

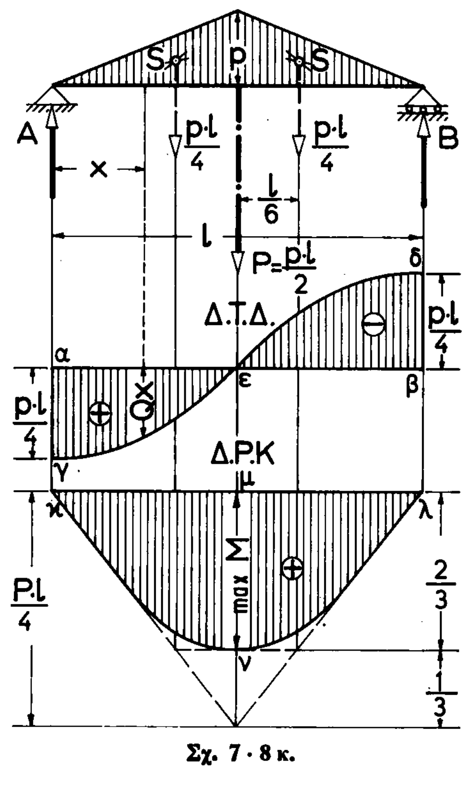
Ἡ τέμνουσα δύναμις καθίσταται μηδενικὴ διὰ $x = \frac{l}{2}$.

Διὰ τὴν χάραξιν τοῦ Δ.Τ.Δ. λαμβάνομε αβ = ὁριζοντία, αγ $= \beta\delta = \frac{pl}{4}$.

Ἑνώνομε τὸ σημεῖον γ μὲ τὸ ε καὶ τὸ ε μὲ τὸ δ μὲ παραβολήν.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_A = 0$. Ἡ μεγίστη ροπὴ ἐμφανίζεται διὰ $Q = 0$, ἑπομένως εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ:



Σχ. 7·8 κ.

$$\max M = \frac{p\,l}{4}\cdot\frac{l}{2} - \frac{p\,l}{4}\cdot\frac{l}{6} = \frac{p\,l^2}{12} = \frac{P\,l}{6} = \mu\nu.$$

Ἑνώνομε τὰ σημεῖα κ ν λ μὲ κυβικὴν παραβολήν.

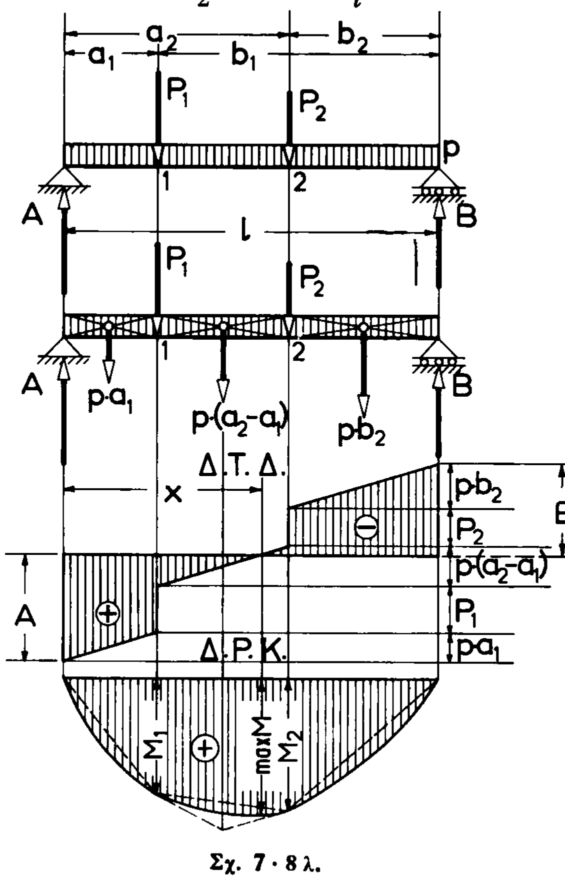
8. *Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ μικτὴν φόρτισιν* (σχ. 7·8λ).

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad A_H = 0$

$\Sigma M_B = 0 = Al - \dfrac{p\,l^2}{2} - P_1 b_1 - P_2 b_2$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει:

$$A = \frac{p\,l}{2} + \frac{P_1\,b_1 + P_2\,b_2}{l}.$$



Σχ. 7·8λ.

$\Sigma M_A = 0 = Bl - \frac{p\,l^2}{2} - P_1\alpha_1 - P_2\alpha_2$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνεται:

$$B = \frac{p\,l}{2} + \frac{P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2}{l}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Εἴδαμε ὅτι κάτω ἀπὸ τὰ συγκεντρωμένα φορτία ἡ τέμνουσα δύναμις μεταβάλλεται ἀποτόμως [παράγρ. 7 · 8(3)].

Εἶναι ἑπομένως ἀνάγκη νὰ ὑπολογίσωμε τὰς τεμνούσας δυνάμεις ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τῶν συγκεντρωμένων φορτίων, ὁπότε λαμβάνομε:

$$Q_A = +A$$
$$Q_1^{\alpha\rho} = A - p\,\alpha_1$$
$$Q_1^{\delta} = A - p\alpha_1 - P_1$$
$$Q_2^{\alpha\rho} = A - p\,\alpha_1 - P_1 - p(\alpha_2 - \alpha_1) = A - P_1 - p\,\alpha_2$$
$$Q_2^{\delta} = A - P_1 - p\alpha_2 - P_2$$
$$Q_B = -B.$$

Διὰ τὰ ἐκλεγέντα μεγέθη φορτίων εἰς τὸ σχῆμα ὁ μηδενισμὸς τῆς τεμνούσης δυνάμεως προκύπτει μεταξὺ τῶν διατομῶν 1 καὶ 2.

Ἡ ἀκριβὴς θέσις λαμβάνεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$Q_x = 0 = A - P_1 - px$, ἐκ τῆς ὁποίας $x = \frac{A - P_1}{p}$.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

Διὰ τὴν σχεδίασιν τοῦ Δ.Ρ.Κ. ὑπολογίζονται αἱ ροπαὶ κάμψεως κάτω ἀπὸ τὰ συγκεντρωμένα φορτία καὶ ἡ μεγίστη ροπή, ἡ ὁποία ὡς γνωστὸν ἐμφανίζεται κάτω ἀπὸ τὸ σημεῖον μηδενισμοῦ τῆς τεμνούσης δυνάμεως.

$$M_1 = A\cdot\alpha_1 - \frac{p\,\alpha_1^2}{2} \qquad M_2 = B\cdot b - \frac{p\,b_2^2}{2}$$

$$\max M = A\cdot x - P_1\,(x - \alpha_1) - \frac{p\,x^2}{2}.$$

Παράδειγμα 1.

Ἕνα μαδέρι φορτίζεται ἀπὸ δύο παραλλήλους δυνάμεις $P_1 = 150$ kp καὶ $P_2 = 100$ kp εἰς τὰς θέσεις τοῦ σχήματος 7·8 μ. (Κλῖμαξ μηκῶν 1 : 50, κλῖμαξ δυνάμεων 1 cm $\triangleq$ 100 kp)

Ζητοῦνται α) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ διαγράμματος τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων. γ) Ἡ σχεδίασις τοῦ διαγράμματος τῶν ῥοπῶν κάμψεως καὶ δ) ὁ καθορισμὸς τῆς μεγίστης ῥοπῆς κάμψεως.

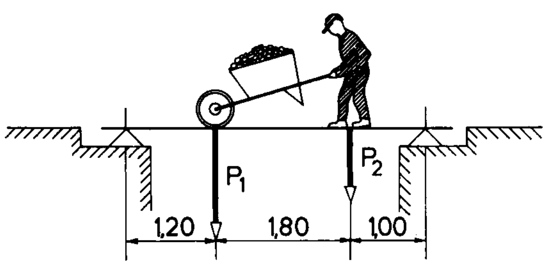
Λύσις.

α) *Ἀντιδράσεις στηρίξεως.*

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 = A + B - 150 - 100$

$\Sigma M_B = 0 = A \cdot 4{,}00 - 150 \times 2{,}80 - 100 \times 1{,}0$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔχομε $A = 130$ kp, ὁπότε ἀπὸ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν προκύπτει ὅτι $B = 120$ kp.



Σχ. 7·8 μ.

β) *Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων* (σχ. 7·8 ν).

Λαμβάνομε τὴν εὐθεῖαν αβ ὁριζοντίαν. Ἐκλέγομε κλίμακα δυνάμεων 1 cm $\triangleq$ 100 kp.

Εἰς τὴν διατομὴν Α ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται μὲ τὴν ἀντίδρασιν $A = 130$ kp.

Λαμβάνομε $\alpha\gamma = A = 130\,kp$ μὲ τὴν ληφθεῖσαν κλίμακα δυνάμεων. Εἰς τὰς διατομὰς μεταξὺ Α καὶ Γ ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ παντοῦ ἴση μὲ Α. Ἑπομένως φέρομε τὴν γραμμὴν γδ ὁριζοντίαν.

Εἰς τὴν διατομὴν Γ ἡ τέμνουσα δύναμις μειοῦται κατὰ $P_1 = 150\,kp$, δεδομένου ὅτι ἀριστερὰ τῆς διατομῆς Γ ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται μὲ Α, ἐνῶ ἡ δεξιὰ ἰσοῦται μὲ $A - P_1$. Λαμβάνομε $\delta\varepsilon = P_1 = 150\,kp$ κατὰ διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς P_1.

Εἰς τὰς διατομὰς Γ ἕως Δ ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $A - P_1 = 130 - 150 = -20\,kp$. Φέρομε τὴν εὐθεῖαν εζ ὁριζοντίαν.

Εἰς τὴν διατομὴν Δ ἡ τέμνουσα δύναμις μεταβάλλεται κατὰ $P_2 = 100\,kp$. Σχεδιάζομε $\zeta\eta = P_2 = 100\,kp$.

Εἰς τὰς διατομὰς μεταξὺ Δ καὶ Β ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $A + P_1 - P_2 = 130 - 150 - 100 = -120$ kp. Φέρομε τὴν εὐθεῖαν ηθ ὁριζοντίαν.

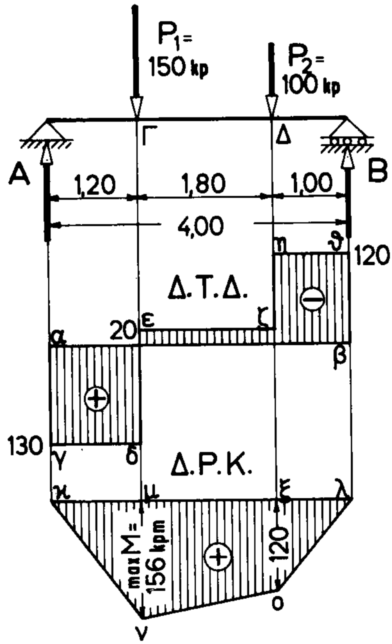
Εἰς τὴν διατομὴν Β ἡ τέμνουσα δύναμις αὐξάνεται κατὰ Β. Λαμβάνομε τὴν $\theta\beta = B = 120\,kp$. Τὸ ἄκρον τῆς δυνάμεως Β πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον β τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς αβ, δεδομένου ὅτι πρέπει νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη $\Sigma y = 0$.

γ) *Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως* (σχ. 7·8ν).

Εἰς τὴν παράγραφον 7·8 (3) ἐδείχθη ὅτι εἰς τὰ τμήματα τῆς δοκοῦ μεταξὺ τῶν συγκεντρωμένων δυνάμεων τὸ Δ:Ρ.Κ. ἀκολουθεῖ εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἑπομένως διὰ τὴν χάραξιν τοῦ Δ.Ρ.Κ. ἀπαιτεῖται νὰ γνωρίζωμε τὰς ροπὰς κάμψεως εἰς τὰς διατομὰς Α, Β, Γ καὶ Δ, δεδομένου ὅτι εἰς αὐτὰς δροῦν δυνάμεις.

Λαμβάνομε τὴν εὐθεῖαν κλ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ (ὁριζοντίαν).



Σχ. 7·8 ν.

Ἐκλέγομε κλίμακα ροπῶν 1 cm $\triangleq$ 100 kpm.

Εἰς τὴν διατομὴν Α εἶναι $M_A = 0$.

Εἰς τὴν διατομὴν Γ εἶναι $M_\Gamma = A \cdot 1{,}20 = 130 \times 1{,}20 =$ 156 kpm.

Μὲ τὴν δοθεῖσαν κλίμακα λαμβάνεται $\mu\nu = M_\Gamma = 156$ kpm.

Εἰς τὴν διατομὴν Δ εἶναι $M_\Delta = A \cdot 3{,}00 - P_1 \cdot 1{,}80 = 130 \times 3{,}0 - 150 \times 1{,}80 = 120$ kpm.

Λαμβάνομε $\xi o = M_\Delta = 120$ kpm.

Εἰς τὴν διατομὴν Β εἶναι $M_B = 0$.

Ἑνώνομε τὰ σημεῖα κ ν ο λ μὲ εὐθείας καὶ ἔχομε τὸ ζητούμενον Δ.Ρ.Κ.

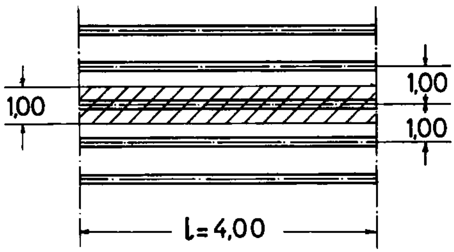
δ) *Καθορισμὸς τῆς max M.*

Ἡ μεγίστη ροπὴ προκύπτει [παράγρ. 7 · 7· (1)] εἰς τὴν διατομήν, ὅπου μηδενίζεται ἢ ἀλλάσσει πρόσημον ἡ τέμνουσα δύναμις, δηλαδὴ εἰς τὴν διατομὴν Γ καὶ ἰσοῦται μὲ $M_Γ = 156$ kpm.

Παράδειγμα 2.

Τὸ δάπεδον μιᾶς ἀποθήκης βαστάζεται ὑπὸ ξυλίνων δοκῶν ἀνοίγματος 4,0 m ποὺ ἀπέχουν μεταξύ των 1,0 m (σχ. 7 · 8 ξ).

Ἐπὶ τοῦ δαπέδου στοιβάζονται σάκκοι τσιμέντου εἰς ὕψος 0,8 m. Τὸ σύνολον τῆς φορτίσεως μαζὶ μὲ τὸ ἴδιον βάρος τοῦ δαπέδου ἀνέρχεται εἰς 1 000 kp/m².



Σχ. 7 · 8 ξ.

Διὰ μίαν ξυλίνην δοκὸν ζητοῦνται α) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

Λύσις.

α) *Ἀντιδράσεις στηρίξεως.*

$$A = B = \frac{p\,l}{2} = \frac{1\,000 \times 4}{2} = 2\,000 \text{ kp}.$$

β) *Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων* (σχ. 7 · 8 ο).

Λαμβάνομε τὴν εὐθεῖαν αβ ὁριζοντίαν.

Ἐκλέγομε κλίμακα δυνάμεων: 1 cm $\hat{=}$ 2 000 kp.

$Q_A = + A = + 2\,000\,\text{kp} = \alpha\gamma.$

$Q_B = - B = - 2\,000\,\text{kp} = \beta\delta.$

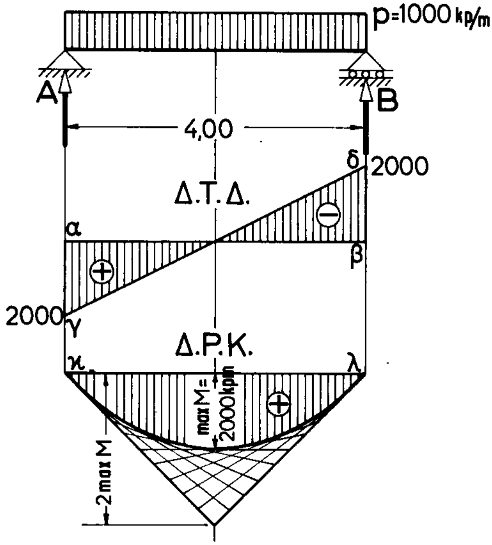
Ἑνώνομε μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον γ μὲ τὸ δ.

γ) *Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως* (σχ. 7 · 8 ο).

Λαμβάνομε τὴν κλ ὁριζοντίαν καὶ ἐκλέγομε κλίμακα ροπῶν 1 cm $\widehat{=}$ 2 000 kpm.

$$\max M = \frac{p\,l^2}{8} = \frac{1\,000 \times 4^2}{8} = 2\,000\,\text{kpm}.$$

Χαράσσομε τὸ Δ.Ρ.Κ. κατὰ τὰ γνωστὰ ἀπὸ τὴν παράγραφον 7 · 8 (4).



Σχ. 7 · 8 ο.

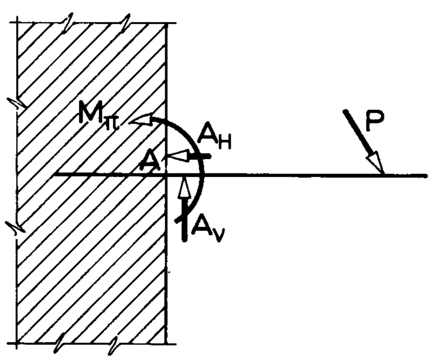
7 · 9 Πρόβολος.

Ὅπως εἴδαμε εἰς τὴν παράγραφον 7 · 3, ἡ πάκτωσις δὲν ἐπιτρέπει οὔτε μετακίνησιν, οὔτε στροφήν.

Ὅταν ἔχωμε τὴν γενικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπιβάλλομε ἕνα κεκλιμένον φορτίον ἐπάνω εἰς τὸν πρόβολον (σχ. 7·9α), τότε προκύπτουν αἱ ἑξῆς ἀντιδράσεις πακτώσεως:

1. Κατακόρυφος δύναμις A_v εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἀκμήν.
2. Ὁριζοντία δύναμις A_H εἰς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ καὶ
3. Ροπὴ πακτώσεως M_π.

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ὑπολογίσωμε διὰ διαφόρους περιπτώσεις φορτίσεως τοῦ προβόλου τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως καὶ τὰ διαγράμματα τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ ροπῶν.



Σχ. 7·9α.

1. *Πρόβολος μὲ συγκεντρωμένον φορτίον εἰς τὸ ἄκρον* (σχ. 7·9β).

Ἀποτελεῖ τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν φορτίσεως καὶ ἐμφανίζεται πολὺ συχνὰ εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Ἐπειδὴ ὁ πρόβολος φορτίζεται μόνον μὲ κατακόρυφον φορτίον, δὲν ἐμφανίζεται ὁριζοντία ἀντίδρασις καὶ ἑπομένως οὔτε ὀρθαὶ δυνάμεις.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως, τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων καὶ τῶν ροπῶν κάμψεως εἶναι, ὅπως ἐξηγεῖται ἀμέσως κατωτέρω, ἐξαιρετικὰ ἁπλοῦς:

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 \qquad A_v - P = 0,$ ἄρα $A_v = P$

$\Sigma M_A = 0 = M_\pi + P\,l,$ ἄρα

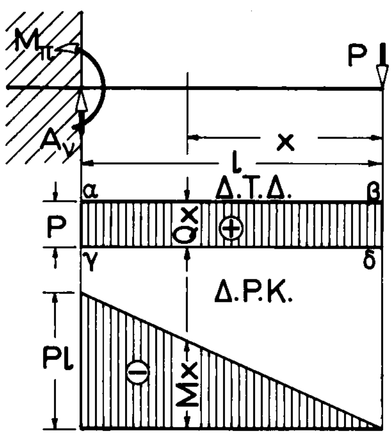
$M_\pi = -P \cdot l.$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Ἐὰν λάβωμε μίαν οἱανδήποτε τομὴν τῆς δοκοῦ, ἡ ὁποία νὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ ἄκρου θὰ ἔχωμεν:

$$Q_x = +P.$$

Ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι θετική, ἐπειδὴ δεξιὰ τῆς ἐξεταζομένης διατομῆς διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω [παρ. 7 · 6 (2)].



Σχ. 7 · 9 β.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

Εἰς μίαν διατομὴν x ἡ ροπὴ κάμψεως ἰσοῦται μέ:

$$M_x = -P \cdot x.$$

Ἡ ροπὴ κάμψεως εἶναι ἀρνητική, ἐπειδὴ αἱ κάτω ἶνες τῆς δοκοῦ θλίβονται. Ἡ ἀριθμητικῶς μεγίστη ροπὴ προκύπτει εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως, ὅπου $M_\pi = -P \cdot l = \min M$.

Ἐπομένως τὸ Δ.Τ.Δ. εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ τὸ Δ.Ρ.Κ. τρίγωνον.

2. *Πρόβολος μὲ πολλὰ συγκεντρωμένα φορτία* (σχ. 7·9γ).

Ἡ ἐξέτασις τοῦ τύπου αὐτοῦ φορτίσεως γίνεται μὲ τὴν ἰδίαν μέθοδον τῆς προηγουμένης περιπτώσεως, ἀρκεῖ νὰ φαντασθοῦμε ὅτι κάθε κατακόρυφον φορτίον ἐνεργεῖ χωριστὰ εἰς τὸν πρόβολον.

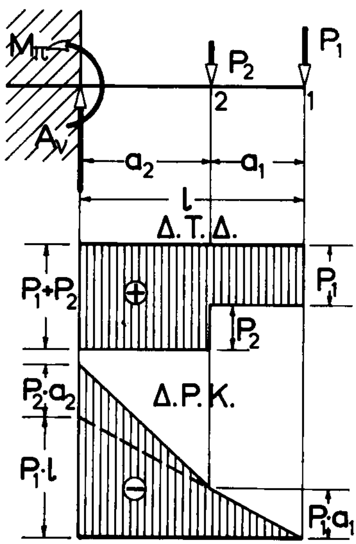
α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 \qquad A_v = P_1 + P_2$

$\Sigma M_A = 0 = M_\pi + P_1 \cdot l + P_2 \cdot a_2.$

$M_\pi = - P_1 \cdot l - P_2 \cdot a_2.$



Σχ. 7·9γ.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$Q_{12} = + P_1$

$Q_{2A} = + P_1 + P_2.$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_2 = - P_1 \cdot \alpha_1.$

Ἡ ροπὴ εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως ἰσοῦται μέ:

$M\pi = - P_1 \cdot l - P_2 \cdot \alpha_2 = \min M.$

3. *Πρόβολος μὲ ὁμοιομόρφως διανεμημένην φόρτισιν*(σχ.7 . 9 δ).

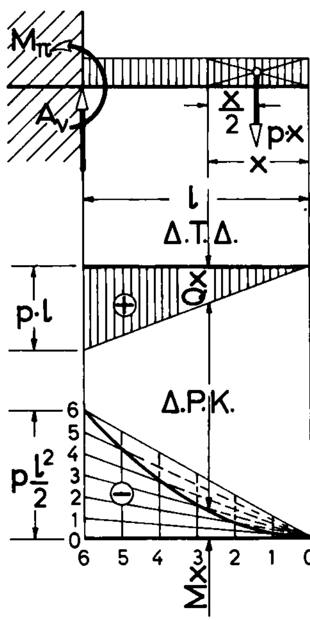
α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 = A_V - pl \qquad A_V = pl$

$\Sigma M_A = 0 = M\pi + pl \dfrac{l}{2}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνεται

$M\pi = - p \dfrac{l^2}{2}.$



Σχ. 7 . 9 δ.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$Q_x = + px.$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾶ εὐθεῖαν.

$Q_A = + pl.$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

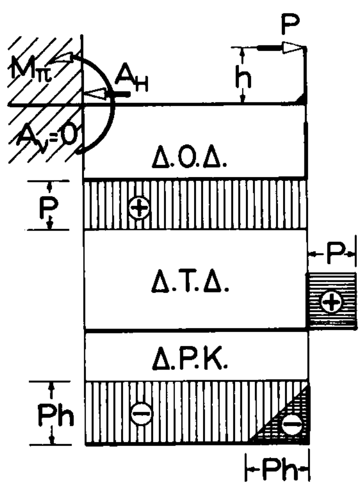
$$M_x = -px\frac{x}{2} = -p\frac{x^2}{2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾶ παραβολήν. Ἡ ροπὴ πακτώσεως, ὅπως ὑπελογίσαμε, εἶναι:

$$M_\pi = -p\frac{l^2}{2} = \min M.$$

4. *Πρόβολος μὲ ὁριζοντίαν ἔκκεντρον φόρτισιν* (σχ. 7·9ε).

Συχνὴ περίπτωσις φορτίσεως προβόλου εἶναι μὲ μίαν ὁριζοντίαν δύναμιν P, ἡ ὁποία ἐπιβάλλεται ἐπάνω εἰς στηθαῖα, ὀρθοστά-



Σχ. 7·9ε.

τας κλπ., τὰ ὁποῖα συνδέονται στερεῶς μὲ τὸν πρόβολον. Εἰς τὸν κυρίως πρόβολον μεταβιβάζονται εἰς τὴν θέσιν συνδέσεως ροπῆς κάμψεως. Ἡ ἐξέτασις τῆς περιπτώσεως αὐτῆς μᾶς δίδει τὰ ἑξῆς ἀποτελέσματα:

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = P$

$\Sigma y = 0 \qquad A_v = 0$

$\Sigma M_A = 0 = M_\pi + Ph$ ἄρα $M_\pi = -Ph$.

β) Διάγραμμα ὀρθῶν δυνάμεων:

$N = +P$, ἐπειδὴ ἡ P προκαλεῖ ἐφελκυσμὸν τῆς δοκοῦ [ἴδε παράγρ. 7·6(1)].

γ) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$Q = 0$ εἰς ὅλας τὰς διατομὰς τοῦ προβόλου.

Εἰς τὸ στηθαῖον $Q = +P$.

δ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M = -Ph$ σταθερὰ εἰς ὅλον τὸ μῆκος τοῦ προβόλου.

Εἰς τὸ στηθαῖον, ποὺ εἶναι οὐσιαστικὰ πρόβολος τοποθετημένος εἰς τὸ ἄκρον προβόλου, ἡ ροπὴ αὐξάνει γραμμικῶς ἀπὸ τὸ μηδὲν εἰς τὸ ἄνω ἄκρον ἕως $-Ph$ εἰς τὸ κάτω.

5. *Πρόβολος μὲ μικτὸν φορτίον* (σχ. 7·9ζ).

Ζητοῦμε νὰ εὕρωμε τὰς ἀγνώστους ἀντιδράσεις στηρίξεως, ἐσωτερικὰς δυνάμεις καὶ ροπὰς τοῦ προβόλου.

Ὁ ἁπλούστερος τρόπος εἶναι νὰ φαντασθοῦμε ὅτι κάθε φορὰν μόνον ἕνας τύπος φορτίου, π.χ. μόνον τὸ p ἢ μόνον τὸ P_1, φορτίζει τὸν πρόβολον. Διὰ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ φορτία αὐτὰ ἐμάθαμε προηγουμένως νὰ ὑπολογίζωμε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως, τὰς ὀρθὰς καὶ τεμνούσας δυνάμεις καὶ τὰς ροπὰς κάμψεως. Ἄς εἴπωμε π.χ. ὅτι M_π εἶναι ἡ ροπὴ πακτώσεως λόγω τοῦ p καὶ $M_{\pi 1}$ λόγω τοῦ P_1. Ἐὰν τώρα προσθέσωμε ἀλγεβρικῶς τὰ μεγέθη, ποὺ ὑπολογίσαμε ὅταν κάθε φορτίον ἐφόρτιζε μόνον του τὸν πρόβολον, λαμβάνομε τὸ ζητούμενον μέγεθος τῶν ἀγνώστων. Π.χ. ἡ τελικὴ ροπὴ πακτώσεως ἰσοῦται μὲ $M_\pi + M_{\pi 1}$. Ἡ ἀρχὴ αὐτή, ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας, ὅπως λέγεται, ἰσχύει ὄχι μόνον διὰ τὸν πρόβολον, ἀλλὰ καὶ δι' ὅλας τὰς δοκούς.

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma x = 0 \qquad\qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 = A_V - P_1 - p\alpha_2.$

$A_V = P_1 + p \cdot \alpha_2.$

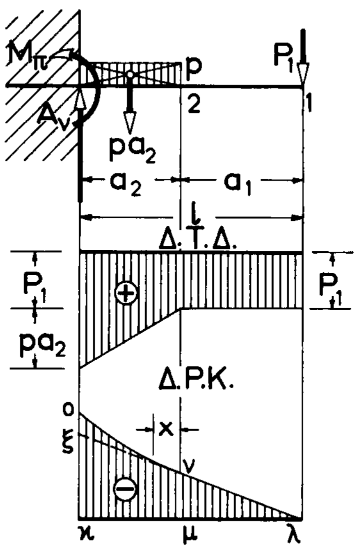
$\Sigma M_A = 0 = M_\pi + P_1 \cdot l + p \cdot \alpha_2 \dfrac{\alpha_2}{2}.$

$M_\pi = - P_1 \cdot l - p \dfrac{\alpha_2^2}{2}.$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$Q_{12} = P_1$

$Q_A = + P_1 + p\alpha_2.$



Σχ. 7·9 ζ.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_1 = 0$

$M_2 = - P_1 \cdot \alpha_1 = \mu\nu.$

Τὸ διάγραμμα εἶναι εὐθύγραμμον· συνδέομε τὰ σημεῖα λ καὶ ν μὲ εὐθεῖαν.

Μεταξὺ τῶν διατομῶν 2 καὶ Α ἡ ροπὴ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$M_x = -P_1(\alpha_1 + x) - p \cdot x \frac{x}{2} = -P_1(\alpha_1 + x) - p \frac{x^2}{2}.$$

Συνεπῶς τὸ διάγραμμα εἶναι παραβολικόν.

Ἡ ροπὴ πακτώσεως εἶναι:

$$M_\pi = -P_1 \cdot l - p\alpha_2 \cdot \frac{\alpha_2}{2} = -P_1 \cdot l - p \frac{\alpha_2^2}{2} = \min M = \nu o$$

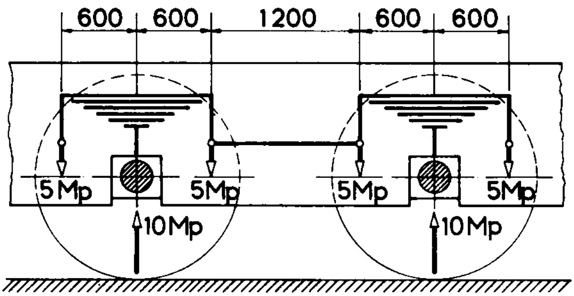
καὶ συνδέομε τὰ σημεῖα ν καὶ ο μὲ παραβολήν.

Παράδειγμα 1.

Μία τετραξονικὴ ἠλεκτράμαξα ζυγίζει 80 Mp.

Τὸ φορτίον τῶν 10 Mp, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς κάθε τροχόν, μεταφέρεται εἰς αὐτὸν μέσω ἑνὸς ἐλατηρίου ἀποτελουμένου ἀπὸ ἐπικείμενα ἐλάσματα (σοῦστα) (σχ. 7 · 9 η).

Τοῦ ἐλατηρίου αὐτοῦ ζητεῖται α) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.



Σχ. 7 · 9 η.

Λύσις.

α) *Ἀντιδράσεις στηρίξεως* (σχ. 7·9 θ).

$\Sigma x = 0$ $\qquad A_H = 0$

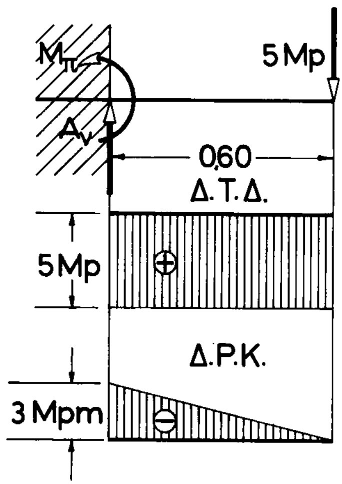
$\Sigma y = 0$ $\qquad A_V = 5\,\mathrm{Mp}$

$\Sigma M_A = 0 = M_\pi + 5 \times 0{,}6.$

$M_\pi = -3\,\mathrm{Mpm}.$

β) *Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων.*

$Q_x = +5\,\mathrm{Mp}.$



Σχ. 7·9 θ.

γ) *Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως.*

$M_A = -5 \times 0{,}6 = -3\,\mathrm{Mpm}$, διότι ἐφελκύει τὰς ἄνω ἶνας τῆς δοκοῦ (σχ. 7·9 θ).

Παράδειγμα 2.

Τὸ φορτίον ἐξώστου μιᾶς ἀγροικίας, ποὺ ἐξέχει κατὰ 2,0 m ἀπὸ τὴν πρόσοψίν της, φέρουν αἱ ξύλινοι δοκοὶ τοῦ πατώματος, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 1,0 m (σχ. 7·9 ι κάτοψις καὶ 7·9 κ τομή).

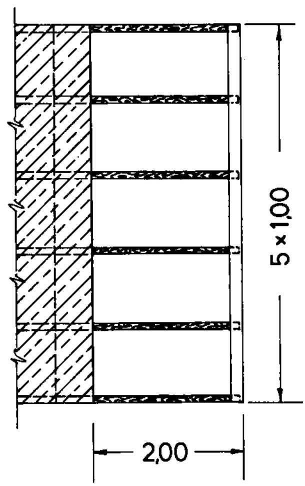
Συνολικὴ ὁμοιομόρφως κατανεμημένη φόρτισις τοῦ πατώματος ἐξ ἰδίου βάρους καὶ ὠφελίμου φορτίου 500 kp/m². Πέραν τούτου εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἐξώστου ὑπάρχει στηθαῖον μὲ ἴδιον βάρος 250 kp/m.

Διὰ μίαν ἀπὸ τὰς ἐνδιαμέσους δοκοὺς ζητοῦνται α) Ἡ φόρτισίς της. β) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. γ) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ καὶ δ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

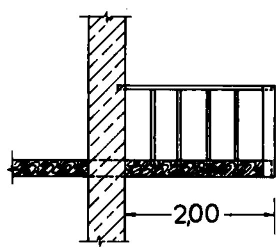
Λύσις.

α) Φόρτισις τῆς δοκοῦ.

Ἡ φόρτισις μιᾶς μεσαίας δοκοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ὁμοιο-



Σχ.7 · 9ι.



Σχ.7 · 9κ.

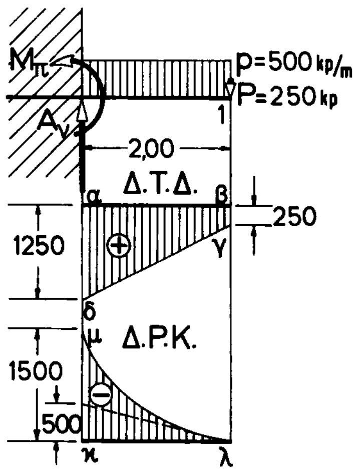
μόρφως κατανεμημένον φορτίον 500 kp/m² · 1,0 m = 500 kp/m καὶ τὸ εἰς τὸ ἄκρον συγκεντρωμένον φορτίον 250 kp/m · 1 m = 250 kp (σχ. 7 · 9 λ).

β) *Ἀντιδράσεις στηρίξεως.*

$\Sigma x = 0 \qquad\qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 = A_v - 250 - 500 \times 2 \qquad A_v = 1\,250$ kp.

$\Sigma M_A = 0 = M_\pi + 250 \times 2 + 500 \times \frac{2{,}0^2}{2}, \quad M_\pi = -1\,500$ kpm.



Σχ. 7 · 9 λ.

γ) *Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων.*

$Q_1 = +250$ kp = βγ.

$Q_x = +250 + 500\,x.$

$Q_A = +250 + 500 \times 2{,}0 = +1\,250$ kp = αδ.

Ἑνώνομε τὸ σημεῖον γ μὲ τὸ δ μὲ εὐθεῖαν.

δ) *Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως.*

$M_x = -250x - 500\frac{x^2}{2}$

$$M_A = -250 \times 2{,}0 - 500 \times \frac{2{,}0^2}{2} = -1\,500\,\text{kpm} = \chi\mu.$$

Ἑνώνομε τὸ λ καὶ τὸ μ μὲ παραβολήν.

7·10 Προέχουσαι δοκοὶ (Ἀμφιέρειστοι δοκοὶ μὲ προβόλους).

Εἰς τὴν παράγραφον 7·4 εἴχομε εἰπῆ ὅτι αἱ εὐθύγραμμοι ἁπλαῖ δοκοὶ εἶναι τριῶν (3) τύπων, ἕνας ἀπὸ τοὺς ὁποίους εἶναι αἱ προέχουσαι δοκοί, ποὺ διακρίνονται εἰς μονοπροεχούσας καὶ ἀμφιπροεχούσας.

Μονοπροέχουσα καλεῖται ἡ ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ ἕνα πρόβολον, ἐνῶ *ἀμφιπροέχουσα* μὲ δύο προβόλους.

Ἡ φόρτισις, ποὺ ἐπιβάλλεται εἰς τὸ ἄνοιγμα, δὲν προκαλεῖ ἐσωτερικὰς δυνάμεις καὶ ροπὰς εἰς τὸν πρόβολον, ἐνῶ ἀντιθέτως, ἡ φόρτισις τοῦ προβόλου προκαλεῖ εἰς τὸ ἄνοιγμα l. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις καὶ ροπὰς τῶν προεχουσῶν δοκῶν, εἶναι ἁπλούστερον νὰ ὑπολογίσωμε χωριστὰ τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις καὶ ροπὰς διὰ τὴν φόρτισιν τοῦ προβόλου καὶ χωριστὰ διὰ τὴν φόρτισιν τοῦ ἀνοίγματος. Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις καὶ ροπαὶ διὰ τὸ σύνολον τῆς φορτίσεως λαμβάνονται διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς ἀθροίσεως τῶν τιμῶν, ποὺ προέκυψαν ἀπὸ τὰς ἐπὶ μέρους φορτίσεις.

Α. *Μονοπροέχουσα μὲ συγκεντρωμένα φορτία.*

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως καὶ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ ροπῶν τῆς μονοπροεχούσης δοκοῦ, δηλαδὴ τῆς δοκοῦ ἐπὶ δύο στηρίξεων μὲ ἕνα πρόβολον, διεξάγεται μὲ τοὺς ἰδίους κανόνας, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἁπλῆν δοκόν. Βεβαίως ἐμφανίζονται μερικαὶ ἰδιομορφίαι, τὰς ὁποίας ὅμως, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ἠμποροῦμε νὰ ἀντιμετωπίσωμε εὐχερῶς μὲ τὰς μέχρι τοῦδε γνώσεις μας.

Ἡ σειρὰ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ διὰ φόρτισιν μὲ συγκεντρωμένα φορτία παρουσιάζεται εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ σχήματος 7·10 α.

1. *Φόρτισις μόνον εἰς τὸ ἄνοιγμα* [σχ. 7·10 α(β)].

Ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἀμφιερείστου δοκοῦ προκύπτουν:

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

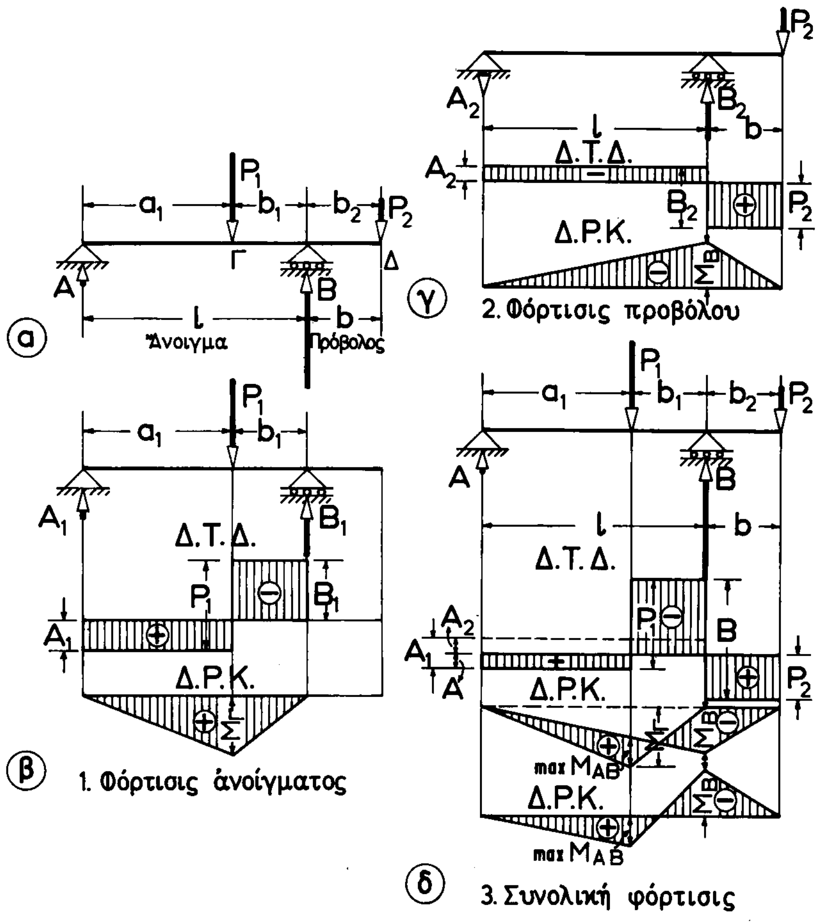
$$A_1 = \frac{P_1 \cdot b_1}{l}. \qquad B_1 = \frac{P_1 \cdot \alpha_1}{l}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_{A\Gamma} = + A_1 = + \frac{P_1 \cdot b_1}{l}.$$

$$Q_{\Gamma B} = - B = - \frac{P_1 \cdot \alpha_1}{l}.$$

$$Q_{B\Delta} = 0.$$



Σχ. 7 · 10 α.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_A = 0 \qquad M_B = 0$

$$M_\Gamma = \frac{P_1 \cdot \alpha_1 \cdot b_1}{l}.$$

2) *Φόρτισις μόνον εἰς τὸν πρόβολον* [σχ.7 · 10 α(γ)].

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

Δεχόμεθα ὅτι αἱ ἀντιδράσεις A_2 καὶ B_2 εἶναι θετικαί.

$\Sigma x = 0 \qquad A_H = 0$

$\Sigma y = 0 \qquad A_2 + B_2 = P_2$

$\Sigma M_B = 0 = A_2 \cdot l + P_2 \cdot b$ ὁπότε.

$$A_2 = -\frac{P_2 \cdot b}{l} \text{ καὶ}$$

$$B_2 = P_2 + \frac{P_2 \cdot b}{l} = P_2\left(\frac{l+b}{l}\right).$$

Ἑπομένως ἡ ἀντίδρασις A_2, τὴν ὁποίαν εἴχομεν ὑποθέσει θετικήν, εἶναι ἀρνητική. Ἄρα δὲν πρέπει νὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω, ἀλλὰ πρὸς τὰ κάτω.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_{B\Delta} = +P_2, \qquad Q_{AB} = A_2 = -\frac{P_2 \cdot b}{l}.$$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_A = M_\Delta = 0 \qquad M_B = A_2 l = -P_2 b.$

3. *Συνολικὴ φόρτισις* [σχ.7 · 10 α(δ)].

Ἀθροίζοντες τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη, ποὺ προέκυψαν ἀπὸ τὴν φόρτισιν τοῦ ἀνοίγματος καὶ τοῦ προβόλου, λαμβάνομε τὰ τελικῶς ζητούμενα μεγέθη, δηλαδή:

α) Ἀντιδ

$$A = A_1 + A_2 = \frac{P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b}{l} \text{ καὶ}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{P_1 \cdot \alpha_1 + P_2(l+b)}{l}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Παρουσιάζονται δύο διατομαί, εἰς τὰς ὁποίας μηδενίζονται αἱ τέμνουσαι δυνάμεις, μία εἰς τὸ ἄνοιγμα καὶ μία εἰς τὴν στήριξιν. Εἰς τὴν πρώτην προκύπτει ἡ μεγίστη θετικὴ ροπή, εἰς τὴν δευτέραν ἡ ἐλαχίστη ἀρνητική, ποὺ σημαίνει ὅτι ἀπολύτως εἶναι καὶ αὐτὴ μεγίστη.

γ) *Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως.*

$$\max M_{AB} = + A \cdot \alpha_1 = \frac{(P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b)}{l}\,\alpha_1.$$

$$\min M_B = - P_2 \cdot b.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τελικὴ μεγίστη ροπὴ ἀνοίγματος $\max M_{AB}$ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν M_Γ, ποὺ προέκυψε διὰ φόρτισιν μόνον τοῦ ἀνοίγματος.

Β. Μονοπροέχουσα μὲ ὁμοιομόρφως διανεμημένον φορτίον.

Ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ παρουσιάζεται εἰς τὸ σχῆμα 7 · 10β.

1. *Φόρτισις μόνον εἰς τὸ ἄνοιγμα* [σχ.7 · 10 б (б)].

Ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν ἀμφιερείστου δοκοῦ, ἔχομε:

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A_1 = B_1 = \frac{p\,l}{2}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Εἰς τὴν στήριξιν Α. $Q_A = + A_1 = + \frac{p\,l}{2}.$

Εἰς τὴν στήριξιν Β. $Q_B = - B_1 = - \frac{p\,l}{2}.$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$\max M = M_\Gamma = \frac{p\,l^2}{8} \text{ εἰς τὸ μέσον.}$$

2. *Φόρτισις μόνον εἰς τὸν πρόβολον* [σχ. 7 · 10 б (γ)].

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

Δεχόμεθα ὅτι αἱ ἀντιδράσεις A_2 καὶ B_2 εἶναι θετικαί.

$\Sigma x = 0$ $A_H = 0$

$\Sigma y = 0 = A_2 + B_2 = pb$

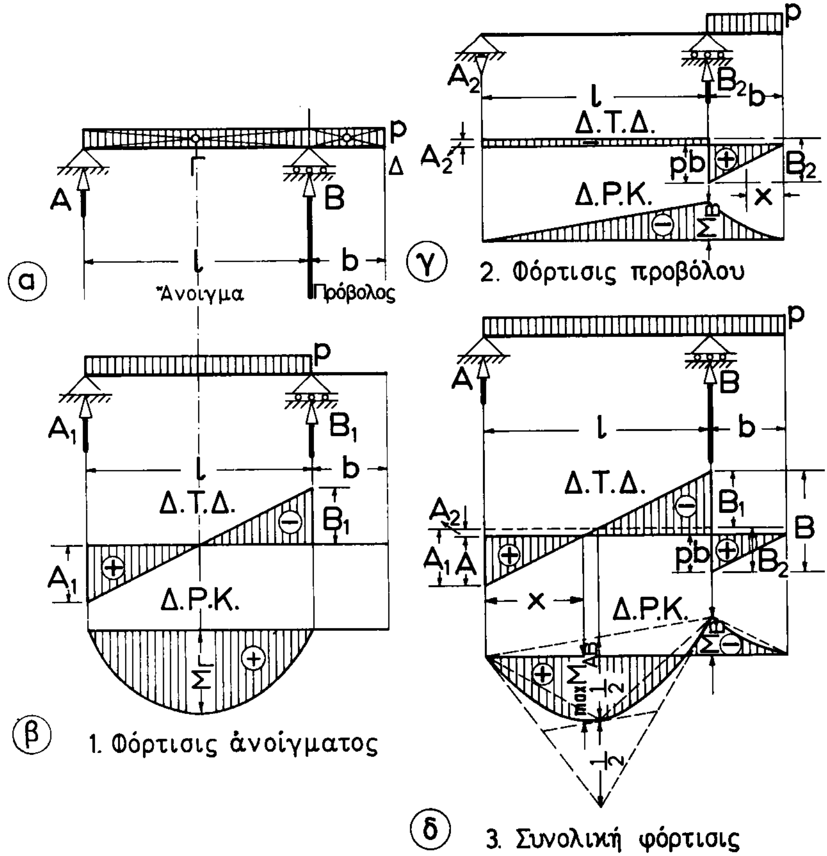
$\Sigma M_B = 0 = A_2 \cdot l + p \cdot b \cdot \frac{b}{2}$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομε:

$$A_2 = -\frac{p\,b^2}{2\,l}.$$

Ἄρα εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ A_2 εἶναι ἀρνητική.

Ἀπὸ τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων ἰσορροπίας προκύπτει :

$$B_2 = \frac{pb\left(l + \frac{b}{2}\right)}{l}.$$



Σχ. 7 · 10 β.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_{AB} = A_2 = -\frac{pb^2}{2l}$$

$$Q_{\Delta B} = +px.$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\xi} = +pb$$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$M_A = M_\Delta = 0.$$

$$M_B = -p\frac{b^2}{2}.$$

3. *Συνολικὴ φόρτισις* [σχ. 7 · 10.6 (δ)].

Ἀθροίζοντες ἀλγεβρικῶς τὰ στατικὰ μεγέθη, ποὺ προέκυψαν ἀπὸ τὴν φόρτισιν τοῦ ἀνοίγματος, μὲ τὰ ἀντίστοιχα ἀπὸ τὴν φόρτισιν τοῦ προβόλου λαμβάνομε τὰ τελικὰ μεγέθη.

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{pl}{2} - \frac{pb^2}{2l}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{pl}{2} + \frac{pb\left(l + \frac{b}{2}\right)}{l}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Τὸ διάγραμμα ἐμφανίζει δύο σημεῖα μηδενισμοῦ τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων, ἕνα εἰς τὸ ἄνοιγμα καὶ ἕνα εἰς τὴν στήριξιν, ὅπου ἐμφανίζονται ἀντιστοίχως ἡ μεγίστη θετικὴ καὶ ἡ ἐλαχίστη (ἀπολύτως μεγίστη) ἀρνητικὴ ροπὴ (παράγρ. 7 · 7).

Ὁ μηδενισμὸς τῆς τεμνούσης δυνάμεως εἰς τὸ ἄνοιγμα συμβαίνει εἰς ἀπόστασιν $x = \frac{A}{p}$.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$\max M_{AB} = \frac{A \cdot x}{2} = \frac{A^2}{2p}, \quad \min M_B = -\frac{pb^2}{2}.$$

Γ. Μονοπροέχουσα μὲ μικτὴν φόρτισιν.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὰ στατικὰ μεγέθη τῆς δοκοῦ ἐφαρμόζομε ἀκριβῶς τὴν ἰδίαν μέθοδον, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμε εἰς τὰς δύο προηγουμένας περιπτώσεις φορτίσεως.

Χωρίζομε τὸ φορτίον τοῦ ἀνοίγματος ἀπὸ τὸ φορτίον τοῦ προβόλου καὶ ὑπολογίζομε ἐν συνεχεία διὰ κάθε μίαν περίπτωσιν χωριστὰ τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως καὶ τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις καὶ ροπάς. Διὰ νὰ εὕρωμε τὰ τελικὰ ἀποτελέσματα πρέπει νὰ προσθέσωμε ἀλγεβρικῶς τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως καὶ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ ροπῶν.

Δ. Δυσμενεῖς φορτίσεις.

Εἰς τὴν ἀμφιέρειστον δοκὸν αἱ μέγισται ἀντιδράσεις στηρίξεως καὶ αἱ μέγισται ροπαὶ κάμψεως προκύπτουν, ὅταν ἡ δοκὸς φορτίζεται μὲ ὅλα τὰ φορτία ποὺ πρόκειται νὰ ἀναλάβῃ, τόσον τὰ μόνιμα (g) ὅσον καὶ τὰ κινητὰ (p), δηλαδὴ διὰ *καθολικὴν φόρτισιν*. Εἰς τὴν μονοπροέχουσαν δοκόν, ἐπειδὴ ἡ φόρτισις τοῦ προβόλου μειώνει τὴν ἀντίδρασιν τῆς ἀκραίας στηρίξεως καὶ τὴν ροπὴν κάμψεως τοῦ ἀνοίγματος, αἱ μέγισται τιμαὶ δὲν λαμβάνονται διὰ καθολικὴν πάντοτε φόρτισιν, ἀλλὰ καὶ διὰ *μερικὴν* φόρτισιν.

Καὶ τὸ μὲν μόνιμον φορτίον δὲν μεταβάλλεται· συνεπῶς δι' αὐτὸ ἰσχύει ὁπωσδήποτε φόρτισις ὁλοκλήρου τῆς δοκοῦ.

Ἀναλόγως ὅμως τῆς θέσεως ποὺ ἔχει τὸ κινητὸν φορτίον ἐπάνω εἰς τὴν δοκόν, ἠμποροῦν νὰ προκύψουν αἱ ἀκόλουθοι *περιπτώσεις φορτίσεως:*

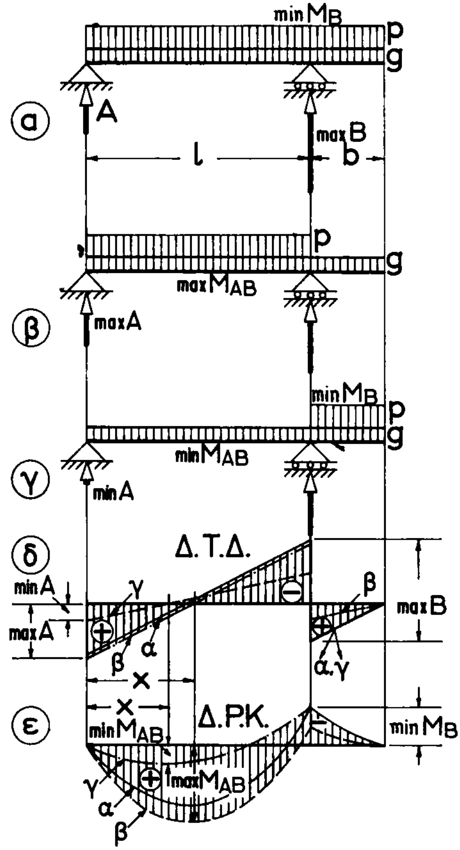
α) *Καθολικὴ φόρτισις* [σχ.7 · 10γ(α)] προκαλεῖ τὴν μεγίστην ἀντίδρασιν τῆς ἐσωτερικῆς στηρίξεως (max B) καὶ τὴν ἐλαχίστην (ἀπολύτως μεγίστην) ἀρνητικὴν ροπὴν (min M_B).

β) *Κινητὸν φορτίον μόνον εἰς τὸ ἄνοιγμα* [7 ·10 γ (β)] προκαλεῖ τὴν μεγίστην ἀντίδρασιν τῆς ἀκραίας στηρίξεως (max A) καὶ τὴν μεγίστην ροπὴν ἀνοίγματος (max M_{AB}).

γ) *Κινητὸν φορτίον μόνον εἰς τὸν πρόβολον* [σχ. 7· 10γ(γ)] προκαλεῖ τὴν ἐλαχίστην ροπὴν εἰς τὸ ἄνοιγμα καὶ τὴν ἐλαχίστην ἀντίδρασιν τῆς ἀκραίας στηρίξεως (min A). Ἐὰν αὐτὴ προκύπτῃ ἀρνητική, πρέπει νὰ ἀγκυρώνεται ἡ δοκὸς εἰς τὴν στήριξιν.

Τὰ σχήματα δ καὶ ε τοῦ 7 · 10 γ, εἰς τὰ ὁποῖα ἐσχεδιάσθησαν ἀπὸ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίας τὰ Δ.Τ.Δ. καὶ Δ.Ρ.Κ. τῶν τριῶν περιπτώσεων φορτίσεως, μᾶς δίδουν τὰς δυσμενεῖς τιμὰς τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων καὶ τῶν ροπῶν κάμψεως.

Τὰς τρεῖς αὐτὰς περιπτώσεις τῶν δυσμενῶν φορτίσεων θὰ τὰς ἀντιληφθῶμεν καλύτερα εἰς τὰ ἀμέσως ἑπόμενα δύο παραδείγματα:



Σχ. 7 · 10 γ.

Παράδειγμα 1.

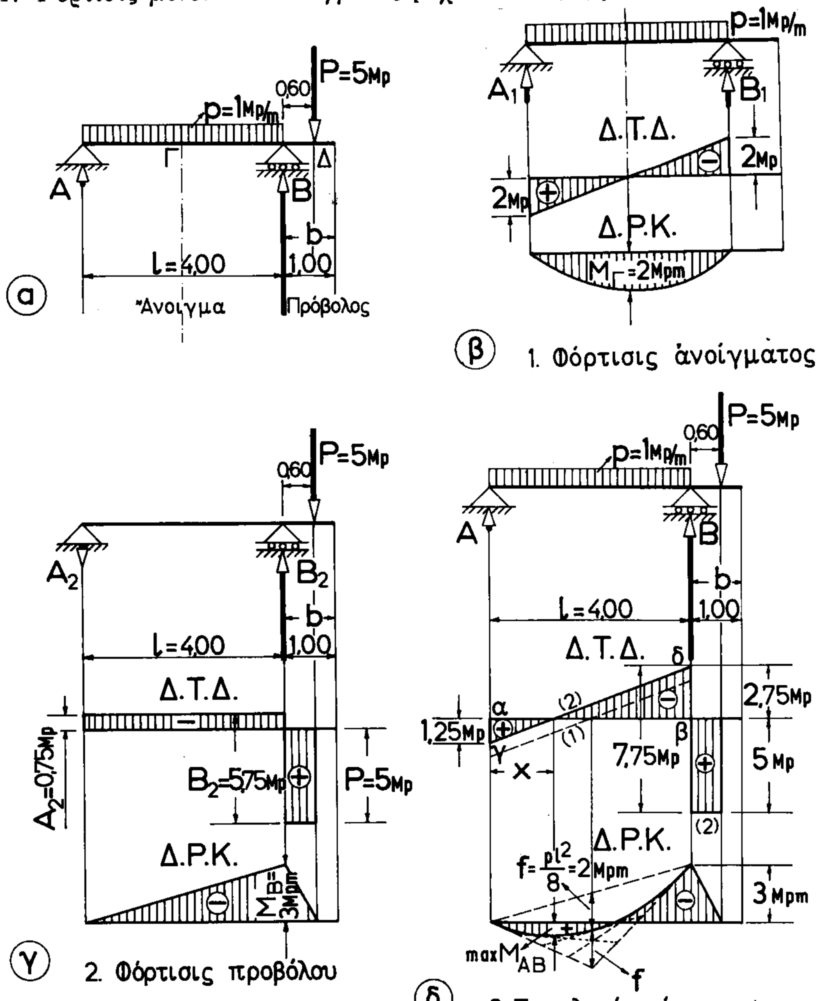
Ἡ δοκὸς τοῦ σχήματος 7 ·10δ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἄνοιγμα τῶν 4,0 m καὶ ἕνα πρόβολον 1,0 m.

Ἐφ' ὅλου τοῦ ἀνοίγματος ἐνεργεῖ ὁμοιομόρφως διανεμημένον φορτίον p = 1 Mp/m καὶ συγχρόνως εἰς τὸν πρόβολον συγκεντρωμένον φορτίον P = 5 Mp εἰς ἀπόστασιν 0,6 m ἀπὸ τῆς στηρίξεως.

Ζητοῦνται α) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. γ) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ. δ) Ὁ καθορισμὸς τῆς μεγίστης ροπῆς κάμψεως.

Λύσις.

1. *Φόρτισις μόνον τοῦ ἀνοίγματος* [σχ. 7 · 10 δ (β)].



Σχ. 7 · 10 δ.

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἔχει ἐξετασθῇ εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα τῆς ἀμφιερείστου δοκοῦ (σχ. 7 • 8 ο).

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$A_1 = B_1 = 2\,\text{Mp}.$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$Q_A = +A = +2\,\text{Mp}.$

$Q_B = -B = -2\,\text{Mp}.$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_\Gamma = 2\,\text{Mpm}.$

2. *Φόρτισις μόνον τοῦ προβόλου* [σχ. 7· 10 δ (γ)].

[Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἔχει ἐξετασθῇ εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τοῦ προβόλου (σχ. 7 · 9 θ)].

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$\Sigma y = 0 \qquad A_2 + B_2 = 5\,\text{Mp}$

$\Sigma M_B = 0 = A_2 \cdot 4 + 5 \times 0{,}6,$ ἐκ τῆς ὁποίας

$A_2 = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75\,\text{Mp}$ καὶ

$B_2 = +5{,}75\,\text{Mp}.$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$Q_{AB} = -A_2 = -0{,}75\,\text{Mp}$

$Q_{B\Delta} = +5{,}00\,\text{Mp}.$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$M_B = -5 \times 0{,}6 = -3\,\text{Mpm}$

$M_A = 0.$

3. *Συνολικὴ φόρτισις* [σχ. 7 · 10 δ (δ)].

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$A = A_1 + A_2 = 2 - 0{,}75 = 1{,}25\,\text{Mp}$

$B = B_1 + B_2 = 2 + 5{,}75 = 7{,}75\,\text{Mp}.$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$Q_A = A = +1{,}25\,\mathrm{Mp} = \alpha\gamma$, $Q_B^{\alpha\rho} = -2 - 0{,}75 = -2{,}75\,\mathrm{Mp} = \beta\delta$.
Συνδέομε τὸ γ καὶ δ μὲ εὐθεῖαν γραμμήν.

Θέσις μηδενισμοῦ τῆς τεμνούσης $x = \dfrac{A}{p} = \dfrac{1{,}25}{1{,}00} = 1{,}25\,\mathrm{m}$.

$Q_{B\Delta} = +5{,}00\,\mathrm{Mp}$.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$\max M_{AB} = \frac{A^2}{2p} = \frac{1{,}25^2}{2{,}1} = 0{,}78\,\mathrm{Mpm}$$

$$\min M_B = -5 \times 0{,}6 = -3\,\mathrm{Mpm}$$

Ὁ τρόπος σχεδιάσεως τοῦ Δ.Ρ.Κ. παρουσιάζεται εἰς τὸ σχῆμα 7 · 10 δ(δ).

Παράδειγμα 2.

Τὸ δάπεδον τοῦ ἐργοστασίου τοῦ σχήματος 7 · 10 ε θὰ κατασκευασθῇ ἀπὸ σιδηροπαγὲς σκυρόδεμα. Τὸ κινητὸν φορτίον εἶναι $p = 500\,\mathrm{kp/m^2}$.

Τὸ πάχος τῆς πλακὸς ἔστω 15 cm μὲ ἴδιον βάρος $g = 360\,\mathrm{kp/m^2}$. Ζητοῦνται α) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. γ) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ. δ) Ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως εἰς τὸ ἄνοιγμα καὶ τὴν στήριξιν.

Λύσις.

Ὅταν πρόκειται διὰ τοιχώματα ἢ πλάκας ἀντὶ νὰ ἐξετάζωμε ὁλόκληρον τὸ μῆκος των, εἰς τὸ παράδειγμά μας τὰ 10,0 m, λαμβάνομε διὰ λόγους ἁπλότητος μίαν ἀντιπροσωπευτικὴν λωρίδα πλάτους 1,0 m (σχ. 7 · 10 ε), εὑρίσκομε τὰ φορτία τὰ ὁποῖα δροῦν ἐπάνω της καὶ ὑπολογίζομε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως καὶ τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις καὶ ροπὰς ποὺ ἀναπτύσσονται εἰς αὐτήν.

Τὸ θεωρητικὰ σημεῖα στηρίξεως τῆς πλακὸς λαμβάνονται εἰς τὸ μέσον τῶν τοιχωμάτων.

1. *Φόρτισις μόνον εἰς τὸ ἄνοιγμα* (σχ. 7 · 10ζ).

1.1. *Ἐξ ἰδίου βάρους.*

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

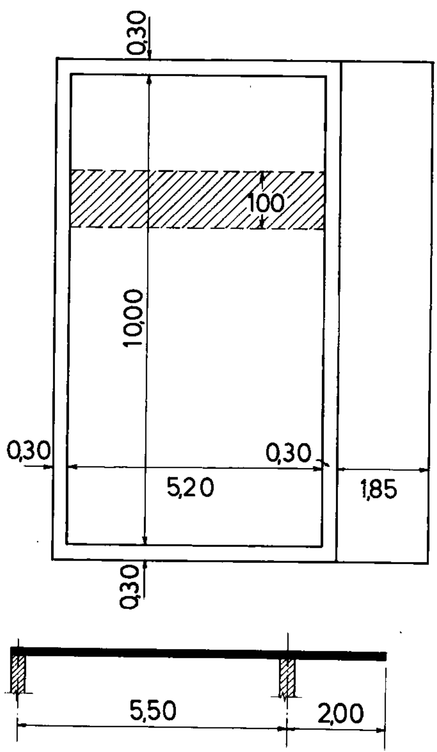
$$A_1 = B_1 = \frac{gl}{2} = \frac{360 \times 5{,}50}{2} = 990\ \mathrm{kp}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_A = A_1 = +\ 990\ \mathrm{kp},\quad Q_{B1}^{\alpha\rho} = -\,B_1 = -\,990\ \mathrm{kp}.$$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$M_\Gamma = \frac{gl^2}{8} = 360\ \frac{5{,}50^2}{8} = 1\,361\ \mathrm{kpm}.$$



Σχ. 7 · 10ε.

1.2. *Ἐκ κινητοῦ φορτίου.*

Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους ἀντικαταστήσωμε τὸ g διὰ τοῦ p, εὑρίσκομε τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς διὰ τὸ κινητὸν φορτίον.

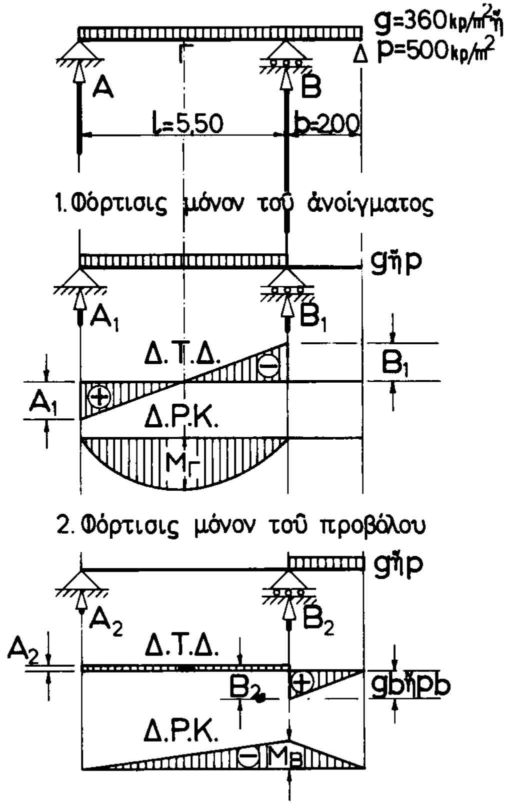
α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A'_1 = B'_1 = \frac{pl}{2} = 500\,\frac{5{,}50}{2} = 1\,375\,\text{kp}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q'_A = A'_1 = +1\,375\,\text{kp}.$$

$$Q'_B = -B'_1 = 1\,375\,\text{kp}.$$



Σχ. 7 · 10 ζ.

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$M'_\Gamma = \frac{pl^2}{8} = 500\,\frac{5{,}50^2}{8} = 1\,891\ \text{kpm}.$$

2. *Φόρτισις μόνον τοῦ προβόλου* (σχ. 7 · 10 ζ).

2 · 1. *Ἐξ ἰδίου βάρους:*

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A_2 + B_2 = g{\cdot}b = 360 \times 2 = 720\ \text{kp}.$$

$$\Sigma M_B = A_2 \cdot 5{,}50 + 360 \times 2 \times \frac{2}{2} = 0,\ \text{ἐκ τῆς ὁποίας}$$

$$A_2 = -\,131\ \text{kp},\ \text{ὁπότε}\ B_2 = 851\ \text{kp}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_{AB} = A_2 = -\,131\ \text{kp}$$

$$Q_{\Delta B} = g.x,\quad Q_{B2}^{\delta\varepsilon\xi} = 360 \times 2 = 720\ \text{kp}.$$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$M_B = -\,\frac{g\,b^2}{2} = -\,360\,\frac{2^2}{2} = -\,720\ \text{kpm}.$$

$$M_\Delta = 0.$$

2 · 2. *Ἐκ κινητοῦ φορτίου:*

Θέτομε καὶ πάλιν ὅπου g τὸ p.

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A'_2 + B'_2 = pb = 500 \times 2 = 1\,000\ \text{kp}.$$

$$\Sigma M_B = A'_2 \cdot 5{,}50 + 500 \times 2 \times \frac{2}{2} = 0.$$

$$A'_2 = -\,182\ \text{kg},\ \text{ἑπομένως}\ B'_2 = 1\,182\ \text{kp}.$$

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

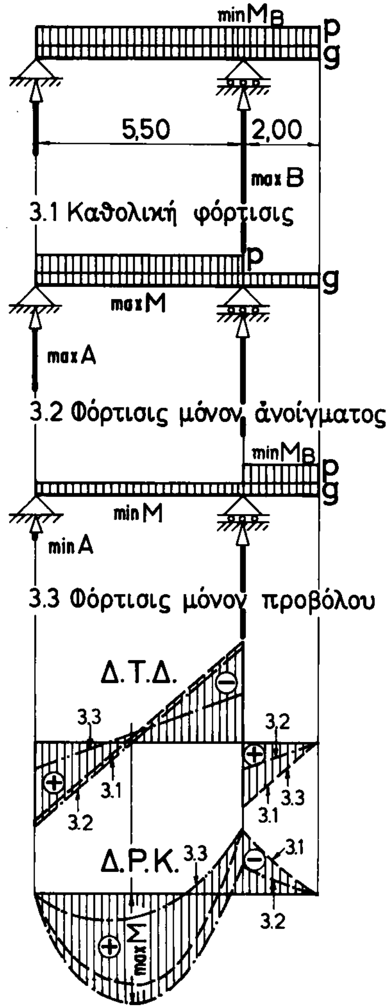
$$Q'_{AB} = A_2 = -\,182\ \text{kp}.$$

$$Q'_{\Delta B} = px \qquad Q'^{\delta\varepsilon\xi}_{B2} = 1\,000\ \text{kp}.$$

3. *Δυσμενεῖς φορτίσεις.*

3 · 1. *Καθολικὴ φόρτισις* (σχ. 7 · 10 η):

Αὐτὴ παρέχει τὴν μεγίστην ἀντίδρασιν στηρίξεως B (max B) καὶ τὴν ἐλαχίστην (ἀπολύτως μεγίστην) ροπὴν στηρίξεως M_B (min M_B).



Σχ. 7 · 10 η.

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A = A_1 + A'_1 + A_2 + A'_2 = 990 + 1\,375 - 131 - 182 = 2\,052 \text{ kp.}$$

$$\max B = B_1 + B'_1 + B_2 + B'_2 = 990 + 1\,375 + 851 + 1\,182 = 4\,398 \text{ kp.}$$

Ἔλεγχος: $A + B = (g + p)(l + b)$. Πράγματι: $6\,450 = 6\,450$.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_A = A = +2\,052 \text{ kp.}$$

$$Q_B^{\alpha\rho} = Q_{B1}^{\alpha\rho} + Q'^{\alpha\rho}_{B1} + Q_{AB} + Q'_{AB} = -990 - 1\,375 - 131 - 182 = -2\,678 \text{ kp.}$$

$$Q_B^{\delta\varepsilon\xi} = Q_{B_1} + Q_{B_2} = +720 + 1\,000 = +1\,720 \text{ kp.}$$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$\min M_B = M_B + M'_B = -720 - 1\,000 = -1\,720 \text{ kpm.}$$

$$M_{AB} = \frac{A^2}{2(g+p)} = \frac{2\,052^2}{2 \times 860} = 2\,448 \text{ kpm.}$$

3·2. *Φόρτισις μόνον εἰς τὸ ἄνοιγμα:*

Προκαλεῖ τὴν μεγίστην ἀντίδρασιν στηρίξεως A (maxA) καὶ τὴν μεγίστην ροπὴν ἀνοίγματος ($\max M_{AB}$).

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$\max A = A_1 + A'_1 + A_2 = 990 + 1\,375 - 131 = 2\,234 \text{ kp.}$$

$$B = B_1 + B'_1 + B_2 = 990 + 1\,375 + 851 = 3\,216 \text{ kp.}$$

Ἔλεγχος: $A + B = g\,(l + b) + pl$.

Πράγματι: $5\,450 = 5\,450$.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_A = A = 2\,234 \text{ kp.}$$

$$Q_B^{\alpha\rho} = Q_{B_1}^{\alpha\rho} + Q'^{\alpha\rho}_B + Q_{AB} = -990 - 1\,375 - 131 = -2\,496 \text{ kp.}$$

$$Q_B^{\delta\varepsilon\xi} = Q_{B_1} = 720 \text{ kp.}$$

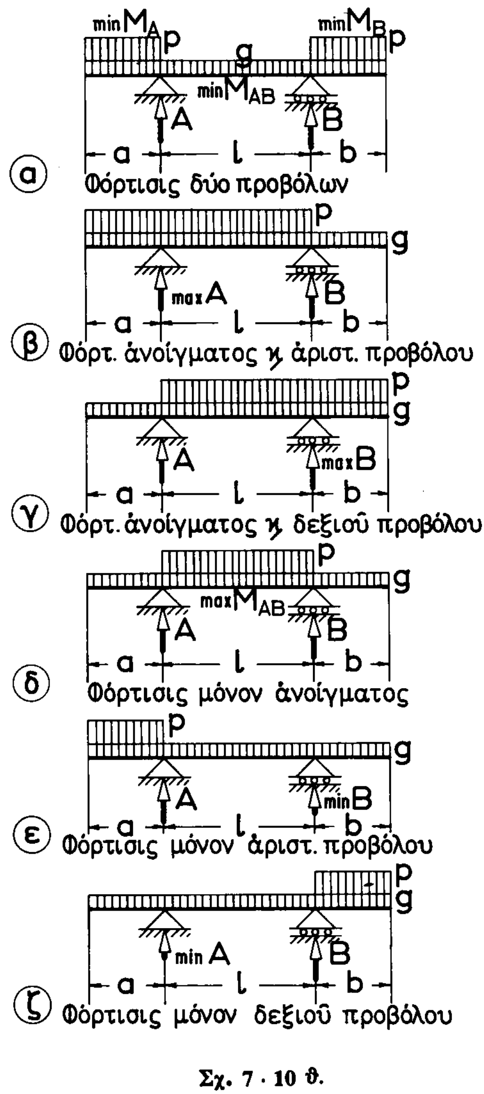
γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$M_B = -720 \text{ kpm.}$$

$$\max M_{AB} = \frac{A^2}{2(g+p)} = \frac{2\,234^2}{2 \times 860} = 2\,901 \text{ kpm.}$$

3 · 3. *Φόρτισις μόνον προβόλου:*

Προκαλεῖ τὴν ἐλαχίστην ἀντίδρασιν στηρίξεως A (minA) καὶ τὴν ἐλαχίστην ροπὴν ἀνοίγματος ($\mathrm{min}M_{AB}$).



Σχ. 7 · 10 ϑ.

α) Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$\min A = A_1 + A_2 + A'_2 = 990 - 131 - 182 = 677 \text{ kp}.$$

$$B = B_1 + B_2 + B'_2 = 3\,023 \text{ kp}.$$

Ἔλεγχος: $A + B = g\,(l + b) + pb$. Πράγματι: $3\,700 = 3\,700$.

β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$Q_A = A = 677 \text{ kp}.$$

$$Q_B^{\alpha\rho} = Q_{B_1}^{\alpha\rho} + Q_{AB} + Q'_{AB} = 1\,303 \text{ kp}.$$

$$Q_B^{\delta\varepsilon\xi} = Q_{B_2} + Q'_{B_2} = 1\,720 \text{ kp}.$$

γ) Διάγραμμα ροπῶν κάμψεως:

$$\min M_B = M_B + M'_B = -720 - 1\,000 = -1\,720 \text{ kpm}.$$

$$\min M = \frac{A^2}{2g} = \frac{677^2}{2 \times 360} = 636 \text{ kpm}.$$

Ε. Ἀμφιπροέχουσα δοκός.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως, τὰς τεμνούσας δυνάμεις καὶ τὰς ροπὰς κάμψεως εἰς μίαν ἀμφιέρειστον δοκὸν μὲ δύο προβόλους, πού, καθὼς εἴπαμε, λέγεται ἀμφιπροέχουσα δοκός, χρησιμοποιοῦμε τὰς ἰδίας μεθόδους ποὺ ἐμάθαμε ἤδη νὰ χρησιμοποιοῦμε διὰ τὴν μονοπροέχουσαν δοκόν.

Αἱ μέγισται καὶ ἐλάχισται τιμαὶ τούτων δὲν προκύπτουν διὰ *καθολικὴν φόρτισιν*, ἀλλὰ διὰ *μερικὴν φόρτισιν* τῆς δοκοῦ ὑπὸ τῶν κινητῶν φορτίων. Ἐπειδὴ ὅμως ὑπάρχουν δύο πρόβολοι, αἱ δυναταὶ περιπτώσεις φορτίσεως εἶναι ἕξ, ἐνῶ εἰς τὴν ἁπλῆν προέχουσαν ἦσαν μόνον τρεῖς.

Εἰς τὰ σχήματα α ἕως ζ τοῦ 7 · 10 θ. παρουσιάζονται αἱ δυναταὶ περιπτώσεις φορτίσεως καὶ αἱ μέγισται ἢ ἐλάχισται τιμαὶ ποὺ παρέχουν:

Φόρτισις α.

Μόνιμον φορτίον g. Κινητὸν φορτίον p ἐπὶ τῶν δύο προβόλων. Προκύπτει ἡ $\min M_A$, ἡ $\min M_B$ καὶ ἡ $\min M_{AB}$.

Φόρτισις β.

Μόνιμον φορτίον g. Κινητὸν φορτίον p ἐπὶ τοῦ ἀνοίγματος καὶ

τοῦ ἀριστεροῦ προβόλου.
Προκύπτει ἡ max A.

Φόρτισις γ.

Μόνιμον φορτίον g. Κινητὸν φορτίον p ἐπὶ τοῦ ἀνοίγματος καὶ τοῦ δεξιοῦ προβόλου.

Προκύπτει ἡ max B.

Φόρτισις δ.

Μόνιμον φορτίον g. Κινητὸν φορτίον p μόνον ἐπὶ τοῦ ἀνοίγματος·
Προκύπτει ἡ maxM_{AB}.

Φόρτισις ε.

Μόνιμον φορτίον g. Κινητὸν φορτίον p μόνον ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ προβόλου.
Προκύπτει ἡ minM_A καὶ ἡ minB·

Φόρτισις ζ.

Μόνιμον φορτίον g. Κινητὸν φορτίον p μόνον ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ προβόλου.
Προκύπτει ἡ minM_B καὶ ἡ minA.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἐποπτεία τῶν τιμῶν τῶν στατικῶν μεγεθῶν διὰ τὰς διαφόρους περιπτώσεις φορτίσεως, τὰς κατατάσσομε εἰς πίνακα.

Εἰς κάθε περίπτωσιν φορτίσεως ἐμφανίζεται ὁπωσδήποτε τὸ σύνολον τοῦ μονίμου φορτίου.

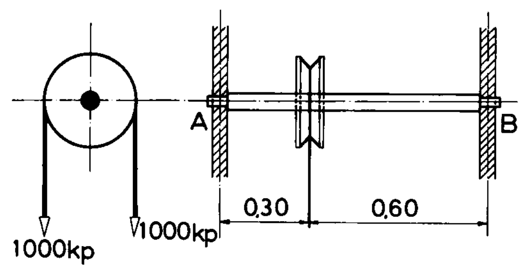
Εἶναι ἑπομένως σκόπιμον πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐργασίας, νὰ ὑπολογίσωμε τὰ στατικὰ μεγέθη διὰ τὸ σύνολον τοῦ μονίμου φορτίου καὶ αὐτὰ νὰ ἀναγράψωμε εἰς τὸν πίνακα. Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομε τὰ στατικὰ μεγέθη διὰ φόρτισιν μόνον τοῦ ἀριστεροῦ προβόλου, μόνον τοῦ δεξιοῦ προβόλου καὶ μόνον τοῦ ἀνοίγματος.

Κατόπιν καταρτίζομε τὰς περιπτώσεις φορτίσεως οὕτως, ὥστε τὰ κινητὰ φορτία νὰ μᾶς παρέχουν κάθε φορὰν μίαν δυσμενῆ τιμήν. Τυχὸν εὐνοϊκὴ ἐπίδρασις τῶν κινητῶν φορτίων δὲν πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

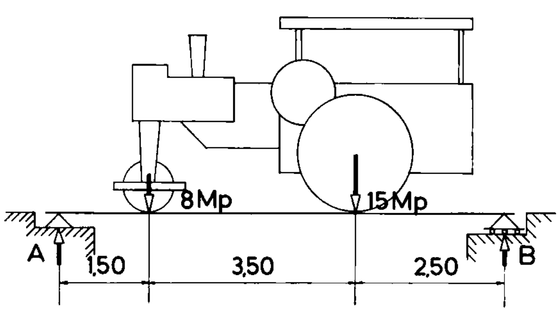
7 · 11 Ἀσκήσεις.

1. Μὲ τὸ συρματόσχοινον ἑνὸς βαρούλκου ἀνυψοῦται βάρος 1 000kp. Τὸ συρματόσχοινον περιβάλλει κατὰ 180^0 τροχαλίαν, ἡ ὁποία στρέφεται ἐλευθέρως περὶ τὸν ἄξονα ΑΒ (σχ. 7 · 11 α). Διὰ τὸν ἄξονα αὐτὸν ζητοῦνται α) Τὸ συγκεντρωμένον φορτίον, τὸ ὁποῖον διαβιβάζει ἡ τροχαλία. β) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. γ) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. δ) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

2. Ὁδοστρωτὴρ διέρχεται ἀπὸ μίαν γέφυραν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο χαλυβδίνας δοκούς. Ἔστω ὅτι ὁ ὁδοστρωτὴρ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ σχήματος 7 · 11 β καὶ φορτίζει διὰ τοῦ ἰδίου βάρους του κάθε δοκὸν μὲ φορτίον 15 Mp καὶ 8 Mp.



Σχ. 7 · 11 α.



Σχ. 7 · 11 β.

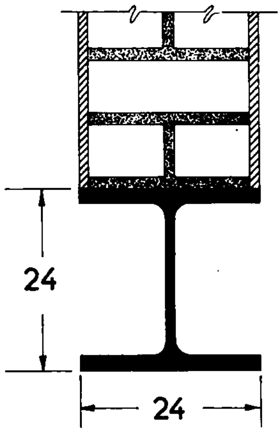
Ζητοῦνται διὰ τὴν δοκὸν α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

3. Χαλυβδίνη δοκὸς Ι Ρ 24 (πλάτους καὶ ὕψους 24 cm) ἀνοίγμα-

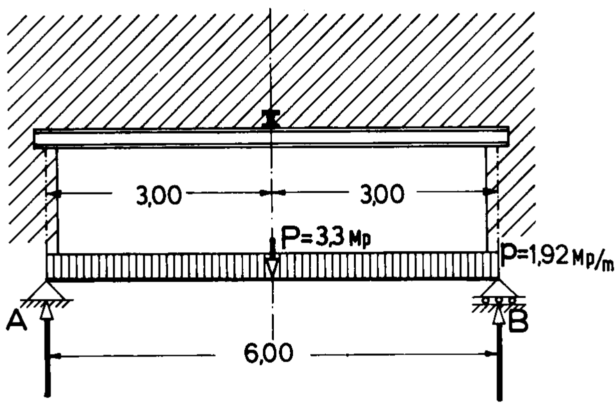
τος 7,5 m χρησιμοποιουμένη ὡς ἀνώφλιον βιτρίνας βαστάζει τοῖχον ἐκ πλινθοδομῆς πάχους 24 cm καὶ ὕψους 5 m (σχ. 7·11 γ). Ἴδιον βάρος τοίχου 1 600 kp/m².

Ζητοῦνται α) Τὸ φορτίον τῆς δοκοῦ ἀνὰ τρέχον μέτρον της. (Τὸ ἴδιον βάρος της ἠμπορεῖ νὰ μὴ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν). β) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. γ) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καί δ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

4. Ἡ χαλυβδίνη δοκὸς τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως βαστάζει μὲ ἄνοιγμα 6,0 m τὴν ἰδίαν πλινθοδομήν. Ἐπὶ πλέον εἰς τὸ μέσον της



Σχ. 7·11 γ.



Σχ. 7·11 δ.

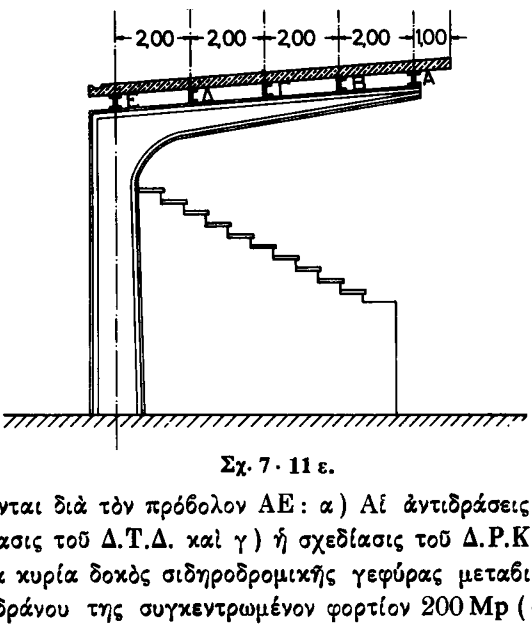
στηρίζεται μία δοκὸς τοῦ δαπέδου μὲ ἀντίδρασιν 3,3 Mp (σχ.7 · 11 δ).

Ζητοῦνται α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

5. Διὰ τὴν κάλυψιν τῆς ἐξέδρας ἑνὸς γηπέδου χρησιμοποιοῦνται χαλύβδινα πλαίσια, ποὺ τοποθετοῦνται ἀνὰ 10 m.

Ἐπάνω εἰς τὰ πλαίσια αὐτὰ στηρίζονται αἱ τεγίδες (τραβέρσαι) Α,Β,Γ,Δ καὶ Ε καὶ ἐπάνω εἰς τὰς τεγίδας προκατεσκευασμέναι πλάκες ἀπὸ ὡπλισμένον σκυρόδεμα (σχ. 7 · 11 ε).

Τὸ συνολικὸν ὁμοιόμορφον φορτίον τῆς στέγης εἶναι 200 kp/m^2, ὁπότε κάθε τεγὶς μεταβιβάζει εἰς τὸ πλαίσιον συγκεντρωμένον φορτίον $200 \times 2,0 \times 10 = 4\,000$ kp.



Σχ. 7 · 11 ε.

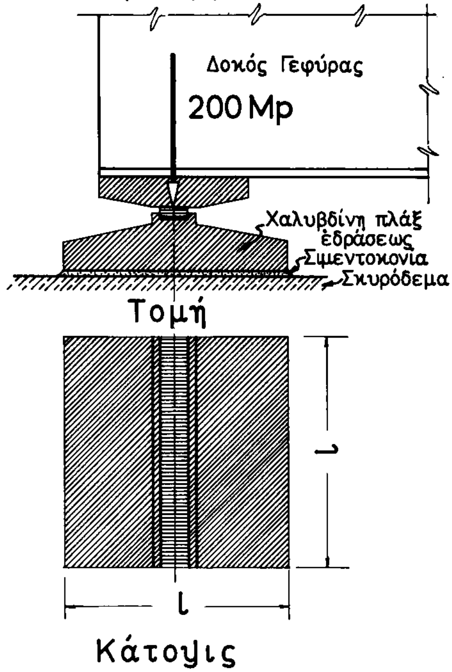
Ζητοῦνται διὰ τὸν πρόβολον ΑΕ: α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

6. Μία κυρία δοκὸς σιδηροδρομικῆς γεφύρας μεταβιβάζει εἰς τὸ μέσον τοῦ ἑδράνου της συγκεντρωμένον φορτίον 200 Mp (σχ. 7 · 11 ζ). Τὸ ἕδρανον σκοπὸν ἔχει νὰ διαβιβάσῃ διὰ τῆς πλακὸς ἑδράσεως τὸ συγκεντρωμένον φορτίον ἐπάνω εἰς τὸ ὑποκείμενον σκυρόδεμα ὡς ὁμοιομόρφως διανεμημένον φορτίον.

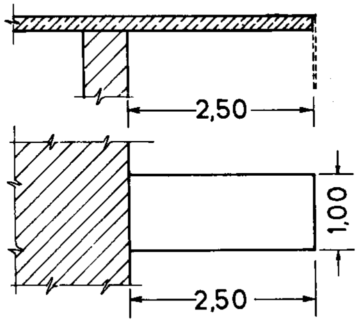
Ζητοῦνται α) Ἡ διάστασις l τῆς τετραγωνικῆς πλακὸς ἑδράσεως οὕτως, ὥστε ἡ πίεσις ἐπάνω εἰς τὸ σκυρόδεμα νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὰ 50 kp/cm^2. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

7. Εἰς τὸ ἄκρον προβόλου ἀπὸ ὡπλισμένον σκυρόδεμα διαστάσεων 2,50 × 1,00 m (σχ. 7 · 11 η) ἀναρτᾶται διαφημιστικὴ ἐπιγραφὴ συνολικοῦ βάρους 400 kp.

Τὸ ἴδιον βάρος καὶ το ὠφέλιμον φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένα ἐπάνω εἰς τὸν ἐξώστην ἀνέρχονται συνολικῶς εἰς 2 000 kp.



Σχ. 7 · 11 ζ.

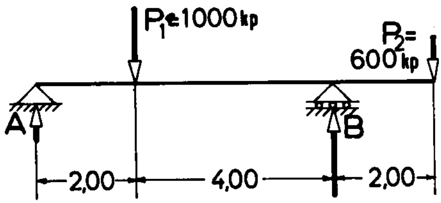


Σχ. 7 · 11 η.

Ζητοῦνται α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. β) Ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) ἡ σχεδίασις τοῦ Δ.Ρ.Κ.

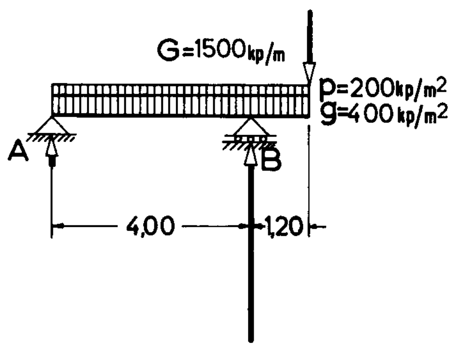
8. Εἰς τὸν φορέα τοῦ σχήματος 7 · 11 θ δροῦν συγχρόνως τὰ φορτία $P_1 = 1\,000$ kp καὶ $P_2 = 600$ kp.

Ζητοῦνται α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως. β) Τὸ Δ.Τ.Δ. καὶ γ) τὸ Δ.Ρ.Κ.



Σχ. 7 · 11 θ.

9. Ἡ ἀπὸ ὡπλισμένον σκυρόδεμα πλὰξ τοῦ δαπέδου μιᾶς πολυκατοικίας ἔχει ἄνοιγμα 4,0 m καὶ πρόβολον 1,2 m (σχ. 7 · 11 ι). Διὰ



Σχ. 7 · 11 ι.

τοῦ προβόλου σχηματίζεται ἡ ἐξοχὴ τῆς οἰκοδομῆς (ἔρκερ). Τὸ ὁμοιόμορφον φορτίον τῆς πλακὸς ἐκ τοῦ ἰδίου βάρους καὶ τῆς ἐπικαλύψεώς της ἀνέρχεται εἰς $g = 400$ kp/m², τὸ κινητὸν εἰς $p = 200$ kp/m². Τὸ βάρος τοῦ τοίχου τῆς ἀνωδομῆς, τὸ ὁποῖον δρᾷ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ προβόλου, ἀνέρχεται εἰς $G = 1\,500$ kp/m.

Ζητοῦνται α) Τὰ maxA, minA, maxB, $\max M_{AB}$, $\min M_B$. β) Τὰ Δ.Τ.Δ. καὶ τὰ Δ.Ρ.Κ. δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις φορτίσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

8 · 1 Ὁρισμοί.

Τὰ *δικτυώματα* εἶναι συστήματα ράβδων (παράγρ. 3 · 4), αἱ ὁποῖαι συνδέονται μεταξύ των μὲ *ἀρθρώσεις*. Ἡ θέσις εἰς τὴν ὁποίαν συνδέονται δύο ἢ περισσότεραι ράβδοι τοῦ δικτυώματος λέγεται *κόμβος* [σχ. 8 · 1α (β, γ)]. Τὸ δικτύωμα εἶναι, ὅπως καὶ ἡ δοκός, μία κατασκευὴ ποὺ ἔχει σκοπὸν νὰ ἀναλάβη φορτία.

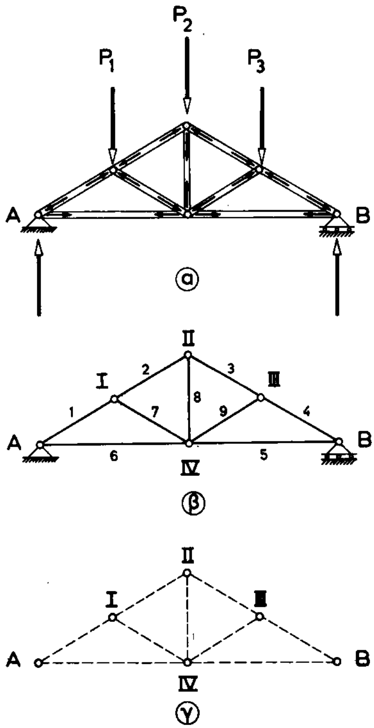
Αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἀναλαμβάνει τὸ δικτύωμα, καὶ εἰς τὰς ὁποίας περιλαμβάνονται τὰ φορτία καὶ αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως, ἀποτελοῦνται πάντοτε ἀπὸ συγκεντρωμένα φορτία, ποὺ δροῦν μόνον ἐπάνω εἰς τοὺς κόμβους.

Διὰ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων P προκαλοῦνται εἰς κάθε μίαν ράβδον τοῦ δικτυώματος *δύο ἐσωτερικαὶ δυνάμεις*, ποὺ εἶναι πάντοτε ἴσαι καὶ ἀντίθετοι μεταξύ των καὶ εἶναι αἱ δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἡ ράβδος ἀσκεῖ ἐπάνω εἰς τοὺς δύο κόμβους μὲ τοὺς ὁποίους συνδέεται [σχ. 8 · 1α (α)]. Διὰ νὰ μείνουν οἱ κόμβοι εἰς ἰσορροπίαν ἀσκοῦν προφανῶς ἐπάνω εἰς τὰς ράβδους δυνάμεις ἴσας καὶ ἀντιθέτους.

Ἡ ράβδος *ἐφελκύεται*, ὅταν αἱ ἐσωτερικαί της δυνάμεις διευθύνωνται ἀπὸ τὰ ἄκρα πρὸς τὸ μέσον της (ράβδοι 5, 6, 8) καὶ *θλίβεται*, ὅταν διευθύνωνται ἀπὸ τὸ μέσον πρὸς τὰ ἄκρα της (ράβδοι 1, 2, 3, 4, 7, 9).

Ἐπίπεδον δικτύωμα καλεῖται τὸ δικτύωμα, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ράβδοι καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις εὑρίσκονται μέσα εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως γίνεται ἀκριβῶς ὅπως καὶ εἰς τὰς δοκοὺς (παράγρ. 7 · 7). Ἑπομένως τὸ μόνον ποὺ μένει νὰ ἐξετάσωμε μέσα εἰς τὸ πλαίσιον τῆς Στατικῆς, εἶναι ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον κάνομε τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων. Αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ πραγματευθοῦμε εἰς τὰ ἑπόμενα. Προηγουμένως ὅμως πρέπει νὰ μάθωμε τί εἶναι καὶ πῶς κατασκευάζεται ἕνα δικτύωμα, ὥστε νὰ εἶναι εὐσταθές.



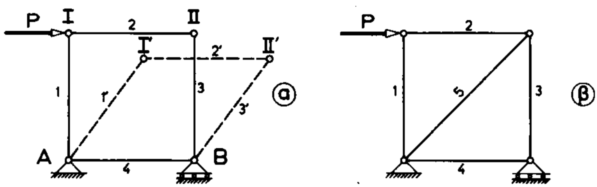
Σχ. 8·1 α.

8·2 Εὐσταθῆ δικτυώματα.

1. *Ὁρισμός.*

Ὅταν οἱ κόμβοι ἑνὸς δικτυώματος δὲν ἠμποροῦν νὰ μετακινηθοῦν ὁ ἕνας σχετικὰ πρὸς τὸν ἄλλον ἢ πρὸς τὰς στηρίξεις, τότε τὸ δικτύωμα αὐτὸ λέγεται *εὐσταθές*.

Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν τὸ δικτύωμα εἶναι *ἀσταθές*. Τὸ ἀσταθὲς δικτύωμα λόγῳ τῆς ἰδιότητός του αὐτῆς δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς φορεύς, ὅπως βλέπομε εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ σχήματος 8·2 α (α), ὅπου οἱ κόμβοι I, II τοῦ δικτυώματος ἠμποροῦν νὰ μετακινηθοῦν εἰς τὰς θέσεις I΄, II΄΄, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ μῆκος τῶν ράβδων. Διὰ νὰ γίνῃ εὐσταθὲς πρέπει νὰ προστεθῇ ἡ διαγώνιος ράβδος 5 [σχ. 8 · 2 α (β)].



Δικτύωμα ἀσταθές Δικτύωμα εὐσταθές

Σχ. 8·2 α.

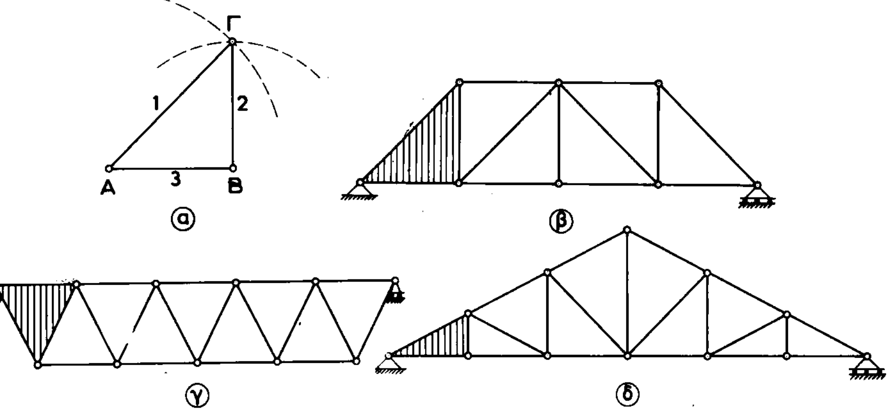
2. *Κανόνες κατασκευῆς εὐσταθῶν δικτυωμάτων.*

Ὑπάρχουν δύο κανόνες, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ τηροῦμε προκειμένου νὰ κατασκευάσωμε ἕνα δικτύωμα εὐσταθές. Μὲ αὐτοὺς θὰ ἀσχοληθοῦμε ἀμέσως :

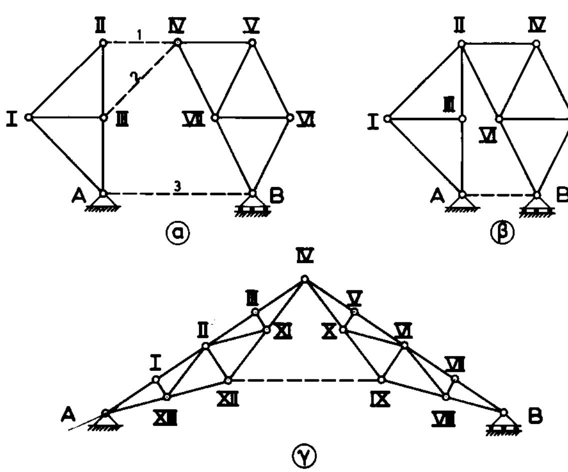
Πρῶτος κανών : Διὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕνα εὐσταθές δικτύωμα ἐκκινοῦμε ἀπὸ ἕνα τρίγωνον ράβδων καὶ δημιουργοῦμε κάθε νέον κόμβον μὲ δύο ράβδους, ποὺ δὲν εὑρίσκονται εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν [σχ. 8 · 2 β (β, γ, δ)].

Τὸ ἁπλούστερον εὐσταθὲς δικτύωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ράβδους καὶ τρεῖς κόμβους, εἶναι δηλαδὴ τὸ τριγωνικὸν [σχ. 8 • 2 β (α)]. Εἶναι δὲ εὐσταθές, διότι κανεὶς κόμβος του δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετακινηθῇ σχετικὰ πρὸς τοὺς ἄλλους. Ἂν π.χ. ἐζητεῖτο νὰ μετακινηθῇ ὁ κόμβος Γ, δὲν θὰ ἦτο δυνατόν, καὶ τοῦτο διότι ἡ ράβδος 1 τὸν ἀναγκάζει νὰ μετακινηθῇ κατὰ μῆκος τοῦ τόξου, ποὺ γράφεται μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΓ καὶ ἡ ράβδος

2 κατὰ μῆκος τοῦ τόξου, ποὺ γράφεται μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ. Τὰ δύο ὅμως αὐτὰ τόξα ἔχουν μοναδικὸν κοινὸν σημεῖον τὸ Γ, ἄρα ὁ κόμβος Γ εἶναι ἀμετάθετος.



Σχ. 8·2β.



Σχ. 8·2γ.

Δεύτερος κανών: *Ἕνα εὐσταθὲς δικτύωμα ἠμπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἀπὸ δύο δικτυώματα, ποὺ ἐμορφώθησαν κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα.*

Ἡ σύνδεσις γίνεται εἴτε μὲ τρεῖς ράβδους, ποὺ συνδέουν τρεῖς κόμβους τοῦ ἑνὸς δικτυώματος μὲ τρεῖς τοῦ ἄλλου [σχ. 8·2γ (α)], μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ τρεῖς ράβδοι δὲν τέμνονται εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον, εἴτε μὲ ἕνα κόμβον καὶ μίαν ράβδον, ποὺ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸν κόμβον αὐτὸν [σχ. 8·2γ (β, γ)].

8·3 Ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων.

Ὁ ὑπολογισμὸς ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ διαφόρους τρόπους. Ἐὰν ἐνδιαφερώμεθα δι' ὅλας τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις, καλύτερον εἶναι νὰ χρησιμοποιήσωμε τὴν γραφικὴν μέθοδον τῶν ἐναλλακτῶν διαγραμμάτων, ποὺ λέγεται καὶ μέθοδος Cremona. Ἐὰν ζητῆται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων ὡρισμένων μόνον ράβδων, εἶναι προτιμωτέρα ἡ μέθοδος τῶν τομῶν, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους: εἴτε γραφικῶς εἴτε ἀναλυτικῶς.

Θὰ ἐξετάσωμε ἐν συντομίᾳ τὰς μεθόδους αὐτάς:

1. Μέθοδος ἐναλλακτῶν διαγραμμάτων (Cremona).

Ἡ ἰσορροπία ἑνὸς κόμβου ἀπαιτεῖ, ὅπως ὅλαι αἱ δυνάμεις ποὺ ἀσκοῦνται ἐπάνω του, ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαί, ἔχουν συνισταμένην μηδέν. Διὰ νὰ συμβαίνῃ αὐτὸ πρέπει τὸ δυναμοπολύγωνόν των νὰ εἶναι κλειστὸν (παράγρ. 2·3).

Θὰ ἦτο ἑπομένως δυνατὸν διὰ κάθε κόμβον νὰ σχεδιασθῇ ἕνα κλειστὸν δυναμοπολύγωνον. Θὰ εἴμεθα, ἔτσι, ὑποχρεωμένοι νὰ σχεδιάσωμε τόσα χωριστὰ δυναμοπολύγωνα, ὅσοι εἶναι οἱ κόμβοι.

Θὰ ἐφαρμόσωμε τὴν μέθοδον αὐτὴν εἰς ἕνα παράδειγμα:

Δίδεται τὸ δικτύωμα τοῦ σχήματος 8·3α φορτιζόμενον μὲ τὴν δύναμιν $P = 1\,000$ kp.

Ζητοῦνται αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων.

Λύσις.

α) Σχεδιάζομε τὸ δικτύωμα μὲ κατάλληλον κλίμακα.

Ἀριθμοῦμε τοὺς κόμβους, τὰς ράβδους καὶ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις.

Κόμβοι: A, I, B, II.

Ράβδοι: 1, 2, 3, 4, 5.

Ἐξωτερικαὶ δυνάμεις P, A, B. (Αἱ A καὶ B εἶναι ἀκόμη ἄγνωστοι).

β) Εὑρίσκομε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως A καὶ B. Ἐὰν ἐφαρμόσωμε τὰς συνθήκας ἰσορροπίας δι' ὅλον τὸ δικτύωμα, ὡς ἕνα φορέα, ἀκριβῶς ὅπως καὶ εἰς τὰς δοκούς, προκύπτει $A = B = \frac{P}{2} =$ 500 kp.

γ) Ὑπολογίζομε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις τῶν ράβδων ἀπὸ τὰ κλειστὰ δυναμοπολύγωνα κάθε κόμβου. Διὰ νὰ προκύπτουν ἐπαρκῶς ἀκριβῆ ἀποτελέσματα ἐκλέγομε κατάλληλον κλίμακα δυνάμεων.

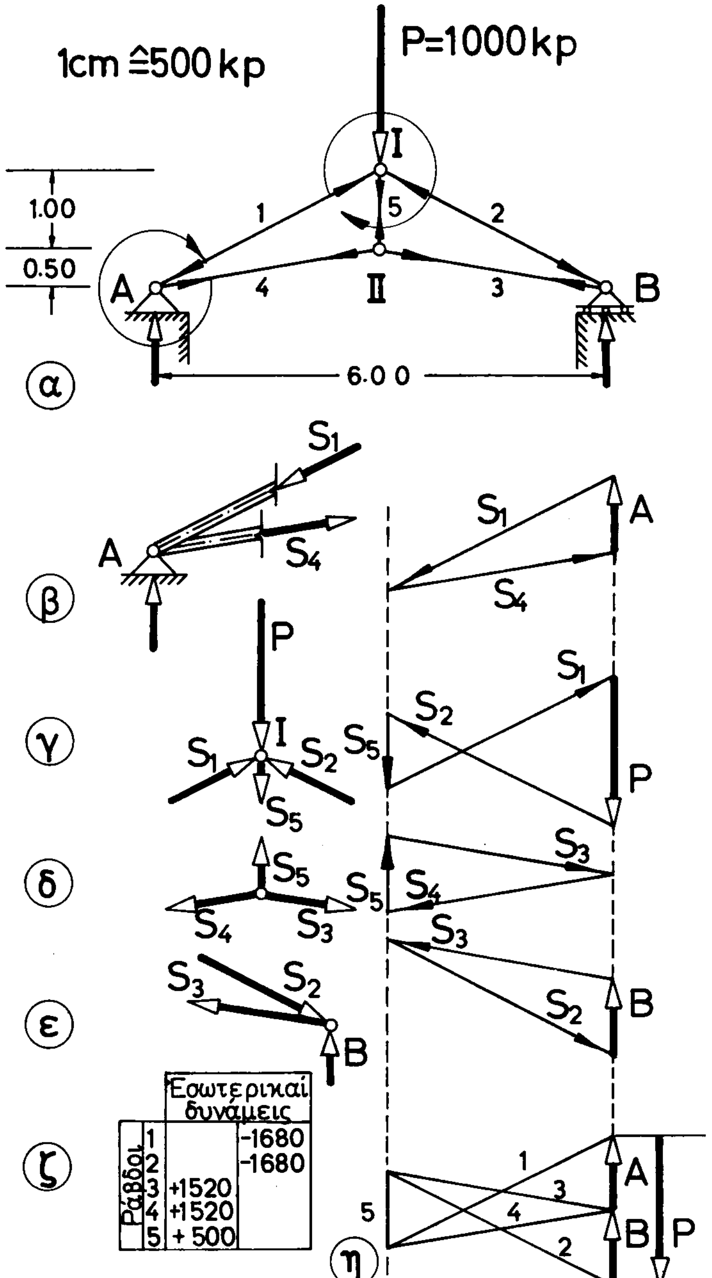
Ἐκκινοῦμε πάντοτε ἀπὸ ἕνα κόμβον μὲ δύο μόνον ράβδους.

Κόμβος A.

Γνωστὴ εἶναι ἡ A.

Ζητοῦνται αἱ S_1 καὶ S_4, αἱ ὁποῖαι ἰσορροποῦν μὲ τὴν A.

Κατασκευάζομε ἑπομένως τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον ἀπὸ τὰς δυνάμεις A, S_1, S_4, [σχ. 8·3 α (β)], ἀπὸ τὸ ὁποῖον καὶ εὑρίσκομε τὰ μεγέθη τῶν ἀγνώστων S_1, καὶ S_4 Ἡ διεύθυνσις τῶν S_1 καὶ S_4 προκύπτει ἀπὸ τὴν ἑνιαίαν φορὰν (μονόδρομος) τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον, ποὺ καθορίζεται ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς γνωστῆς δυνάμεως A. Ἡ διεύθυνσις τῆς S_1 καὶ S_4 παρουσιάζεται εἰς τὰς ράβδους τοῦ δικτυώματος μὲ ἕνα βέλος πλησίον τοῦ κόμβου ποὺ ἐξητάσαμε. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῶν ράβδων 1 καὶ 4 σχεδιάζεται τὸ ἀντίθετον βέλος. Αὐτὸ μᾶς δίδει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐσωτερικῆς δυνάμεως τῆς ράβδου, ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὸν ἄλλον κόμβον.



		Εσωτερικαί δυνάμεις	
Ράβδοι	1		-1680
	2		-1680
	3	+1520	
	4	+1520	
	5	+ 500	

Σχ. 8·3 α.

Κόμβος Ι.

Γνωσταὶ εἶναι αἱ S_1 καὶ P.

Ζητοῦνται αἱ S_2 καὶ S_5.

Κατασκευάζομε τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον ἀπὸ τὰς δυνάμεις S_1, P, S_2, S_5 [σχ. 8·3 α(γ)]. Ἡ διεύθυνσις τῶν S_2 καὶ S_5 δίδεται ἀπὸ τὴν ἑνιαίαν φορὰν τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῶν γνωστῶν δυνάμεων S_1 καὶ P. Ἡ διεύθυνσις τῆς S_2 καὶ S_5 εἰς τὸν κόμβον Ι καὶ ἡ ἀντίθετος διεύθυνσίς των εἰς τὸ ἄλλον ἄκρον των παρουσιάζεται εἰς τὰς ἀντιστοίχους ῥάβδους τοῦ δικτυώματος μὲ ἕνα βέλος.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ εἰς τὸν κόμβον ΙΙ, ὅπου γνωσταὶ εἶναι αἱ δυνάμεις S_4 καὶ S_5 καὶ ζητεῖται ἡ S_3 [σχ. 8·3 α(δ)].

Μὲ τὰ τρία κλειστὰ δυναμοπολύγωνα τῶν κόμβων Α, Ι καὶ ΙΙ ὑπελογίσαμε ὅλας τὰς ἀγνώστους ἐσωτερικὰς δυνάμεις τῶν ῥάβδων, δηλαδὴ τὰς S_1, S_2, S_3, S_4 καὶ S_5. Τὴν ἰσορροπίαν τῶν δυνάμεων εἰς τὸν κόμβον Β [σχ. 8·3 α(ε)] ἐξετάζομε μόνον διὰ νὰ κάνωμε ἔλεγχον.

δ) Μὲ βάσιν τὴν ἐκλεγεῖσαν κλίμακα δυνάμεων μετροῦμε ἀπὸ τὰ δυναμοπολύγωνα τὰ μεγέθη τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ τὰ ἀναγράφομε εἰς ἕνα πίνακα [σχ. 8·3 α(ζ)]. Ὅταν τὰ βέλη μιᾶς ῥάβδου κατευθύνωνται πρὸς τὸν κόμβον, ἡ ῥάβδος αὐτὴ καταπονεῖται εἰς θλῖψιν. Ἑπομένως χαρακτηρίζομε τὴν ἐσωτερικὴν δύναμιν ὡς ἀρνητικήν. Ὅταν τὰ βέλη ἀπομακρύνωνται ἀπὸ τὸν κόμβον καταπονεῖται εἰς ἐφελκυσμὸν καὶ ἡ ἐσωτερικὴ δύναμις χαρακτηρίζεται ὡς θετική.

Μὲ τὴν μέθοδον Cremona ἐπιτυγχάνομε νὰ συγκεντρώσωμε ὅλα αὐτὰ τὰ χωριστὰ δυναμοπολύγωνα εἰς ἕνα, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μειώνομε τὴν σχεδιαστικὴν ἐργασίαν.

Θὰ ἐφαρμόσωμε τὴν μέθοδον αὐτὴν εἰς τὸ ἴδιον παράδειγμα ποὺ ἐφηρμόσαμε τὴν μέθοδον χωριστῶν δυναμοπολυγώνων.

Λύσις [σχ. 8·3α (η)].

α) καὶ β) Ὅπως καὶ προηγουμένως.

γ) Καθορίζομε κατάλληλον κλίμακα δυνάμεων καὶ σχεδιάζομε τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, δηλαδὴ τῶν δυνάμεων Α, Ρ καὶ Β. Ἡ σχεδίασις τῶν δυνάμεων γίνεται μὲ τὴν σειράν, μὲ τὴν ὁποίαν τὰς συναντοῦμε, ὅταν διατρέχωμε τὸ δικτύωμα κατὰ μίαν διεύθυνσιν, ποὺ ὁρίζομε ἐξ ἀρχῆς, π.χ. κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Ἡ σειρὰ αὐτὴ δὲν πρέπει νὰ ἀλλάξῃ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ ὑπολογισμοῦ.

δ) Ἀρχίζομε τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων ἀπὸ ἕνα κόμβον, εἰς τὸν ὁποῖον συντρέχουν δύο μόνον ράβδοι, π.χ. τὸν κόμβον Α. Σχεδιάζομε τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον ἀκριβῶς ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν χωριστῶν δυναμοπολυγώνων.

Συνεχίζομε μὲ τὴν σχεδίασιν τοῦ δυναμοπολυγώνου ἐκείνου τοῦ κόμβου, εἰς τὸν ὁποιον ἀπομένουν τὸ πολὺ δύο ἄγνωστοι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ράβδων, π.χ. μὲ τὸν κόμβον Ι.

Ἐδῶ πρέπει νὰ προσέξωμε τὰ ἑξῆς: Αἱ δυνάμεις εἰς κάθε κόμβον διαιροῦνται εἰς δύο κατηγορίας, τὰς γνωστὰς π.χ. S_1 καὶ Ρ [σχ. 8·3α (η)] καὶ τὰς ἀγνώστους, ποὺ ἠμπορεῖ νὰ εἶναι τὸ πολὺ δύο, π.χ. αἱ S_2 καὶ S_5. Διατρέχομε κάθε κόμβον κατὰ τὴν διεύθυνσιν ποὺ ὡρίσαμε, π.χ. κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, καὶ ἀρχίζομε πάντοτε μὲ τὰς γνωστὰς δυνάμεις. Εἰς τὴν περίπτωσίν μας, πρώτη γνωστὴ δύναμις ποὺ συναντοῦμε εἶναι ἡ S_1 καὶ δευτέρα ἡ Ρ, τὰς ὁποίας ἔχομε σχεδιάσει εἰς τὸ πρῶτον δυναμοπολύγωνον καὶ ***δὲν τὰς ἐπανασχεδιάζομε.***

Ἀπὸ τὸ τέλος τῆς Ρ φέρομε παράλληλον πρὸς τὴν ράβδον 2 καὶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς S_1 πρὸς τὴν ράβδον 5. Ἐσχεδιάσαμε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἕνα κλειστὸν δυναμοπολύγωνον μὲ τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν δυνάμεων S_1, P, S_2, S_5. ἀπολύτως ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα 8. 3 α (γ) τῶν χωριστῶν δυναμοπολυγώνων. Ἡ διεύθυνσις τῶν ἀγνώστων δυνάμεων S_2 καὶ S_5 ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἑνιαίαν φορὰν τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον, ὅπως εἴδαμε καὶ προηγουμένως, καὶ παρουσιάζεται εἰς τὰς ράβδους τοῦ δικτυώματος μὲ ἕνα βέλος πλησίον τοῦ κόμβου ποὺ ἐξητάσαμε.

Ἀπὸ τὰ δυναμοπολύγωνα ποὺ προέκυψαν καὶ μὲ βάσιν τὴν ἐκλεγεῖσαν κλίμακα δυνάμεων εὑρίσκομε τὰ μεγέθη τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων.

ε) Ὁ τρόπος καταπονήσεως τῆς ράβδου, ἐφελκυσμὸς ἢ θλῖψις, προκύπτει ἀπὸ τὴν φορὰν τῶν βελῶν. Ὅπως ὡρίσθη εἰς τὴν ἀρχήν, ὅταν ἡ ἐσωτερικὴ δύναμις διευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον, ἡ ράβδος θλίβεται καὶ τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως λαμβάνεται ἀρνητικόν, ὅταν ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν κόμβον ἐφελκύεται καὶ τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως χαρακτηρίζεται θετικόν.

Ὅταν ἀπὸ τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον ἑνὸς κόμβου προκύψῃ ὅτι μία ἐσωτερικὴ δύναμις διευθύνεται π.χ. πρὸς αὐτόν, τοῦτο σημαίνει ὅτι καὶ εἰς τὸν ἄλλον κόμβον, μὲ τὸν ὁποῖον ἡ ράβδος αὐτὴ συνδέεται, ἡ ἐσωτερική της δύναμις θὰ διευθύνεται πάλιν πρὸς τὸν κόμβον.

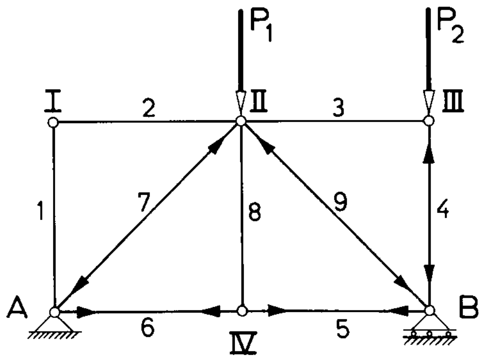
Παρατήρησις.

Ὑπάρχουν κόμβοι ὅπου εἶναι δυνατόν, χωρὶς νὰ ἔχωμε σχεδιάσει τὰ δυναμοπολύγωνα, νὰ καθορίσωμε τὰς ράβδους, εἰς τὰς ὁποίας δὲν ἀναπτύσσονται ἐσωτερικαὶ δυνάμεις καὶ νὰ μειώσωμε ἑπομένως τὴν ἐργασίαν μας. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις (σχ. 8 · 3 β):

1. Ὅταν εἰς ἕνα κόμβον συνδέωνται δύο μόνον ράβδοι καὶ ὁ

κόμβος εἶναι ἀφόρτιστος. Εἰς τὰς δύο ράβδους δὲν ἀναπτύσσονται ἐσωτερικαὶ δυνάμεις (κόμβος I, ράβδοι 1 καὶ 2).

2. Ὅταν εἰς τὸν κόμβον συνδέωνται δύο μόνον ράβδοι καὶ ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως τοῦ κόμβου συμπίπτῃ μὲ τὸν ἄξονα τῆς μιᾶς ράβδου. Εἰς τὴν ἄλλην δὲν ἀναπτύσσεται ἐσωτερικὴ δύναμις (κόμβος III, ράβδος 3).



Σχ. 8·3 β.

3. Ὅταν εἰς ἕνα κόμβον συνδέωνται τρεῖς ράβδοι, ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ δύο κεῖνται ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας. Ἐὰν ὁ κόμβος εἶναι ἀφόρτιστος εἰς τὴν τρίτην ράβδον δὲν ἀναπτύσσεται ἐσωτερικὴ δύναμις (κόμβος IV, ράβδος 8).

Παράδειγμα 1.

Δίδεται τὸ δικτύωμα τοῦ σχήματος 8·3γ φορτιζόμενον μὲ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις $P_1 = P_2 = P_3 = 2\,000$ kp.

Ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων κατὰ τὴν μέθοδον Cremona.

Λύσις.

α) Ἀριθμοῦμε τοὺς κόμβους, τὰς ράβδους καὶ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις:

Κόμβοι: A, I, II, III, B, IV, V, VI.

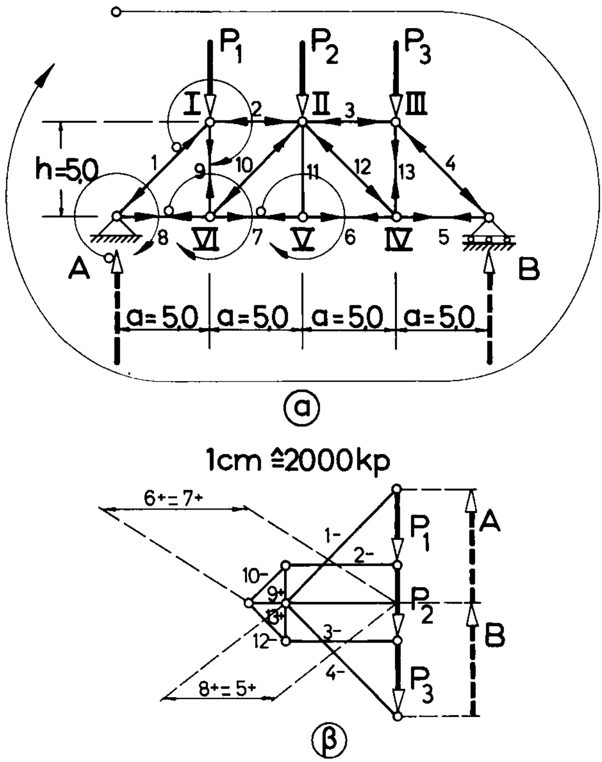
Ῥάβδοι: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Ἐξωτερικαὶ δυνάμεις: P_1, P_2, P_3, B, A.

β) Ὑπολογίζομε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$A + B = P_1 + P_2 + P_3 = 6\,000$ kp. Λόγω συμμετρίας:

$A = B = 3\,000$ kp.



Σχ. 8·3γ.

γ) Εἰς τὴν ῥάβδον 11 εἶναι βέβαιον ὅτι δὲν ἀναπτύσσεται ἐσωτερικὴ δύναμις (περίπτωσις 3 τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως).

δ) Σχεδιάζομε μὲ κλίμακα $1\,\text{cm} \triangleq 2\,000$ kp τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων κατὰ τὴν σειρὰν P_1, P_2, P_3, B, A (βλέπε τὴν περιμετρικὴν γραμμήν).

ε) Ὑπολογίζομε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις:

Κόμβος Α.

Γνωστὴ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις Α.

Ἄγνωστοι εἶναι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις S_1 καὶ S_8.

Εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον αἱ δυνάμεις σχεδιάζονται κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου μὲ πρώτην τὴν γνωστὴν δύναμιν (βλέπε τὸν κύκλον γύρω ἀπὸ τὸν κόμβον Α, ποὺ δείχνει τὴν σειρὰν σχεδιάσεως τῶν δυνάμεων), δηλαδὴ Α, S_1, S_8.

Φέρομε τὴν παράλληλον ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς Α πρὸς τὴν ράβδον 8 καὶ ἀπὸ τὸ πέρας τῆς Α πρὸς τὴν ράβδον 1 [σχ. 8·3 γ(β)].

Ἡ διεύθυνσις τῶν S_1 καὶ S_8 καθορίζεται ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως Α εἰς τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον ὅπου, ὅπως εἴπαμε, αἱ δυνάμεις ἀκολουθοῦν ὁδὸν μονῆς κατευθύνσεως, ἄρα ἡ S_1 διευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον Α, ἑπομένως εἶναι θλιπτική, ἐνῶ ἡ S_8 ἀπομακρύνεται, συνεπῶς εἶναι ἐφελκυστική. Τὰ βέλη ποὺ δείχνουν αὐτὰς τὰς διευθύνσεις σχεδιάζονται ἐπάνω εἰς τὰς ἀντιστοίχους ράβδους. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῶν ράβδων 1 καὶ 8 σχεδιάζεται τὸ ἀντίθετον βέλος.

Κόμβος Ι.

Γνωσταὶ εἶναι ἡ S_1 καὶ ἡ P_1.

Ἄγνωστοι εἶναι ἡ S_2 καὶ ἡ S_9.

Ἡ σειρὰ σχεδιάσεως τῶν δυνάμεων ἔχει ὁρισθῆ κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ἡ δὲ ἀρχὴ γίνεται ἀπὸ τὴν πρώτην γνωστὴν δύναμιν, δηλαδὴ S_1, P_1, S_2, S_9.

Ἡ σχεδίασις τοῦ δυναμοπολυγώνου ἀρχίζει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς S_1 καὶ συνεχίζεται μὲ τὴν P_1.

Ἀπὸ τὸ πέρας τῆς P_1 φέρομε παράλληλον πρὸς τὴν ράβδον 2 καὶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς S_1 πρὸς τὴν ράβδον 9 [σχ. 8·3γ (β)].

Ἡ διεύθυνσις τῶν S_2 καὶ S_9 ὁρίζεται ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῶν γνωστῶν δυνάμεων τοῦ δυναμοπολυγώνου S_1 καὶ P_1, ἤτοι ἡ S_2 διευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον I, ἄρα εἶναι θλιπτική, ἐνῶ ἡ S_9 ἀπομακρύνεται, ἄρα εἶναι ἐφελκυστική. Τὰ σχετικὰ βέλη σχεδιάζονται εἰς τὰς ράβδους 2 καὶ 9 εἰς τὴν θέσιν ἑνώσεώς των μὲ τὸν κόμβον I. Εἰς τὸ ἀπέναντι ἄκρον τῶν ράβδων τίθενται τὰ ἀντίθετα βέλη.

Κόμβος VI.

Γνωσταὶ εἶναι ἡ S_8 καὶ ἡ S_9.

Ἄγνωστοι εἶναι ἡ S_{10} καὶ ἡ S_7.

Ἡ πρώτη γνωστὴ δύναμις εἶναι ἡ S_8, ὁπότε ἡ σειρὰ σχεδιάσεως τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον, κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, εἶναι S_8, S_9, S_{10}, S_7, ὅπως δείχνει ὁ κύκλος γύρω ἀπὸ τὸν κόμβον.

Ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς S_8 φέρομε παράλληλον πρὸς τὴν ράβδον 7 καὶ ἀπὸ τὸ πέρας τῆς S_9 πρὸς τὴν ράβδον 10 [σχ. 8·3γ (β)].

Ἡ διεύθυνσις τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων S_{10} καὶ S_7 προκύπτει ἀπὸ τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχουν τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν μὲ τὰς γνωστὰς δυνάμεις S_8 καὶ S_9 καὶ τὴν σχεδιάζομε μὲ βέλος εἰς τὰς ράβδους 10 καὶ 7 τοῦ δικτυώματος πλησίον τοῦ κόμβου VI. Εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τῶν ράβδων τίθεται τὸ ἀντίθετον βέλος.

Ὑπόλοιποι κόμβοι.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξετάζομε καὶ τὰς ὑπολοίπους ράβδους μὲ τέτοιαν σειράν, ὥστε εἰς κάθε κόμβον ποὺ ἐξετάζομε νὰ ὑπάρχουν μόνον δύο ἄγνωστοι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ράβδων.

Ἡ σειρὰ αὐτὴ τῶν κόμβων εἶναι:

II, III καὶ IV ἢ B.

Ἀπὸ τὰ δυναμοπολύγωνα [σχ. 8·3γ(β)] προκύπτει τὸ μέγεθος τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸν Πίνακα 2.

ΠΙΝΑΞ 2

Ἐσωτερικαί δυνάμεις ράβδων εἰς kp					
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις	Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	-4250	8	+3000	—
2	—	-3000	9	+1000	—
3	—	-3000	10	—	-1420
4	—	-4250	11	—	—
5	+3000	—	12	—	-1420
6	+4000	—	13	+1000	—
7	+4000	—			

Παράδειγμα 2.

Εἰς τὸ δικτύωμα τοῦ σχήματος 8·3δ νὰ ὑπολογισθοῦν ὅλαι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων κατὰ τὴν μέθοδον Cremona. Ἐξωτερικαὶ δυνάμεις $P_1 = P_3 = 1\,000$ kp, $P_2 = 2\,000$ kp.

Λύσις.

α) Ἀριθμοῦμε τοὺς κόμβους, τὰς ράβδους καὶ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις.

β) Ὑπολογίζομε τὰς ἀντιδράσεις στηρίξεως:

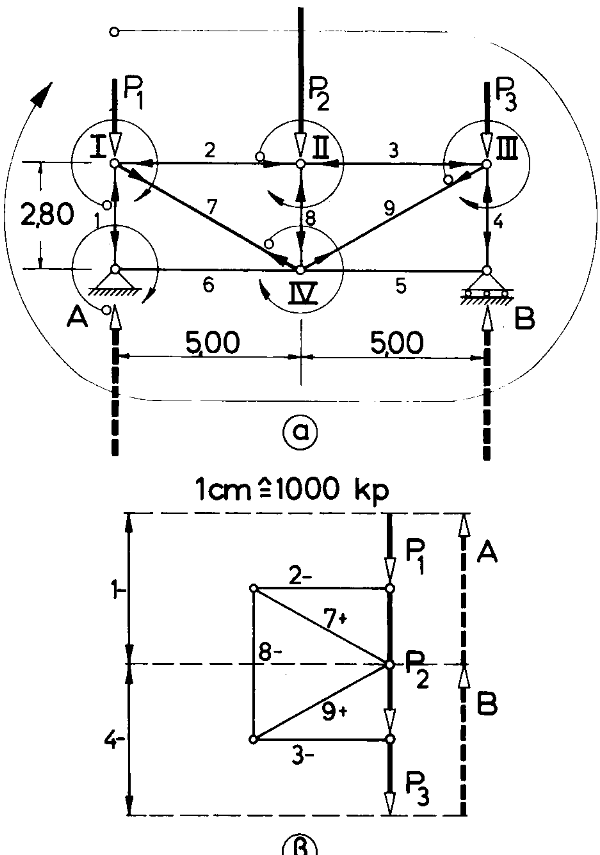
$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 = 4\,000 \text{ kp}.$$

Λόγω συμμετρίας: $A = B = 2\,000$ kp.

γ) Εἶναι βέβαιον ὅτι εἰς τὰς ράβδους 5, 6 δὲν ἀναπτύσσονται ἐσωτερικαὶ δυνάμεις (περίπτωσις 2 τῆς παρατηρήσεως εἰς τὸ τέλος τῆς παραγράφου 8 • 3). Αὐτὸ θὰ τὸ ἀποδείξωμε ἀκόμη μίαν φορὰν ἀπὸ τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὸν κόμβον A.

δ) Σχεδιάζομε μὲ κλίμακα 1 cm $\hat{=}$ 1 000 kp τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων κατὰ τὴν σειρὰν P_1, P_2, P_3, B, A (βλέπε τὴν γραμμὴν πορείας γύρω ἀπὸ τὸ δικτύωμα).

ε) Ὑπολογίζομε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις:



Σχ. 8·3 δ.

Κόμβος A.

Γνωστὴ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις A.

Ἄγνωστοι εἶναι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις S_1 καὶ S_6.

Ἡ σειρὰ σχεδιάσεως τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον καθορίζεται κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου A, S_1, S_6 (βλέπε τὸν κύκλον πορείας γύρω ἀπὸ τὸν κόμβον A).

Σχεδιάζομε τὸ δυναμοπολύγωνον χαράσσοντες ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς A παράλληλον πρὸς τὴν ράβδον 6 καὶ ἀπὸ τὸ πέρας της παράλληλον πρὸς τὴν ράβδον 1. Ἡ A καὶ ἡ S_1, συμπίπτουν εἰς μίαν εὐθεῖαν καὶ εἶναι ἴσαι, ἄρα ἡ $S_6=0$. Τὴν διεύθυνσιν τῆς S_1 εὑρίσκομε ἀπὸ τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον καὶ τὴν ἀναγράφομε μὲ βέλος εἰς τὴν ἀντίστοιχον ράβδον τοῦ δικτυώματος. Ἀφοῦ ἡ A διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω, ἡ S_1 πρέπει νὰ διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω, πρὸς τὸν κόμβον, ἄρα εἶναι θλιπτική. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ράβδου 1 σχεδιάζομε τὴν ἐσωτερικὴν δύναμιν μὲ ἀντίθετον βέλος.

Κόμβος I.

Γνωσταὶ εἶναι ἡ S_1 καὶ ἡ P_1.

Ἄγνωστοι εἶναι S_2 καὶ ἡ S_7.

Ἡ σειρὰ σχεδιάσεως τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον ὁρίζεται κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου (βλέπε τὸν κύκλον πορείας περὶ τὸν κόμβον I).

Τὴν σχεδίασιν τοῦ δυναμοπολυγώνου ἀρχίζομε μὲ τὴν δύναμιν S_1 καὶ τὴν συνεχίζομε μὲ τὴν P_1. Ἀπὸ τὸ πέρας τῆς P_1 φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ράβδον 2 καὶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς S_1 παράλληλον πρὸς τὴν ράβδον 7. Ἡ διεύθυνσις τῆς S_2 καὶ τῆς S_7 προκύπτει ἀπὸ τὸ κλειστὸν δυναμοπολύγωνον, ὅπου ὅλαι αἱ δυνάμεις, γνωσταὶ καὶ ἄγνωστοι, ἀκολουθοῦν τὴν ἰδίαν ὁδὸν μονῆς κατευθύνσεως καὶ τὰ βέλη ποὺ τὴν δείχνουν σχεδιάζονται ἀντιστοίχως εἰς τὰς ράβδους 2 καὶ 7. Ἄρα ἡ S_2, ποὺ διευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον I, εἶναι θλιπτική, ἡ δὲ S_7, ποὺ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν κόμβον, εἶναι ἐφελκυστική. Εἰς τὰ ἀπέναντι ἄκρα τῶν ράβδων 2 καὶ 7 αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις σχεδιάζονται μὲ ἀντίθετον βέλος.

Ὑπόλοιποι ράβδοι.

Ἡ σειρὰ κατὰ τὴν ὁποίαν ἐξετάζομε τοὺς ὑπολοίπους κόμβους εἶναι: II, III καὶ IV ἢ B. Ἀπὸ τὰ δυναμοπολύγωνα ποὺ προκύπτουν [σχ. 8·3δ(β)] λαμβάνεται τὸ μέγεθος τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων καὶ καταρτίζεται ὁ Πίναξ 3.

ΠΙΝΑΞ 3

Ἐσωτερικαί δυνάμεις ράβδων εἰς kp		
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	- 2000
2	—	- 1785
3	—	- 1785
4	—	- 2000
5	—	—
6	—	—
7	+ 2045	—
8	—	- 2000
9	+ 2045	—

Παράδειγμα 3.

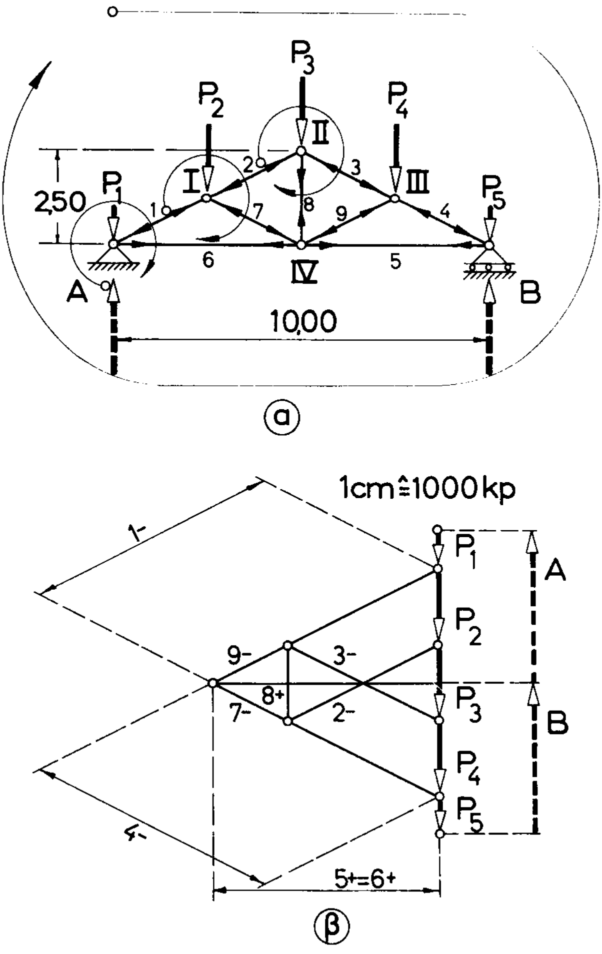
Δίδεται τὸ δικτύωμα στέγης τοῦ σχήματος 8·3ε, τὸ ὁποῖον φορτίζεται μὲ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις (φορτίον τεγίδων).

$$P_1 = P_5 = 500\,\text{kp},\ P_2 = P_3 = P_4 = 1\,000\,\text{kp}.$$

Ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων κατὰ τὴν μέθοδον Cremona.

Λύσις.

Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα. Αἱ προκύπτουσαι ἀπὸ τὰ κλειστὰ δυναμοπολύγωνα [σχ. 8·3ε(β)] ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων δίδονται εἰς τὸν Πίνακα 4.



Σχ. 8·3ε.

2. *Μέθοδος τῶν τομῶν.*

Ἡ μέθοδος αὐτὴ ὀνομάζεται μέθοδος τῶν τομῶν, διότι διὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις τῶν ράβδων κάνομε μίαν τομὴν διὰ τοῦ δικτυώματος τέτοιαν, ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ τέμνωμε τὰς ράβδους, τῶν ὁποίων ζητοῦνται αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ χωρίζωμε τελείως τὸ τμῆμα, ποὺ κόπτεται ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον δικτύωμα (σχ. 8·3ζ).

ΠΙΝΑΞ 4

Ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ράβδων εἰς kp		
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	-3350
2	—	-2240
3	—	-2240
4	—	-3350
5	+3000	—
6	+3000	—
7	—	-1120
8	+1000	—
9	—	-1120

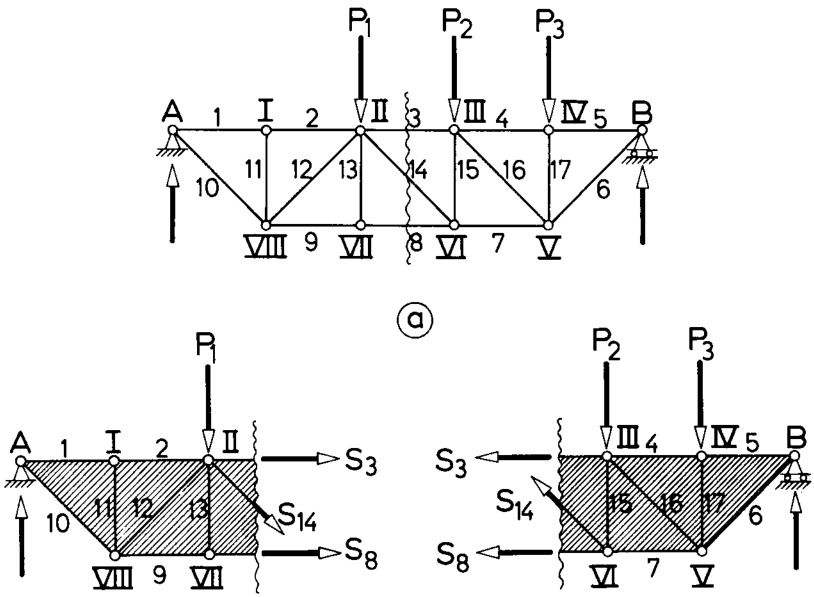
Ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἑνὸς τμήματος ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο ἠμπορεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ ἀπὸ τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις τῶν ράβδων, τὰς ὁποίας συναντᾷ ἡ τομὴ [σχ. 8·3ζ(β, γ)]. Τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων εἶναι ἄγνωστα, ἡ εὐθεῖα ὅμως ἐνεργείας εἶναι ὁ ἄξων τῆς ράβδου καὶ εἶναι γνωστή.

Χάριν εὐκολίας τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐξετάζομε ἐκεῖνο ἀπὸ τὰ δύο τμήματα τοῦ δικτυώματος, εἰς τὸ ὁποῖον δροῦν ὀλιγώτεραι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις. Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὑπολογισθῇ πρὶν γίνῃ ἡ τομή, θεωροῦνται ἐπίσης ὡς ἐξωτερικαὶ δυνάμεις.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀγνώστων δυνάμεων τῶν ράβδων διαθέτομε δύο μεθόδους, τὴν ἀναλυτικὴν καὶ τὴν γραφικήν.

Ἀναλυτικὴ μέθοδος.

Δεχόμεθα κατ' ἀρχὴν ὅτι ὅλαι αἱ ἄγνωστοι δυνάμεις τῶν ράβδων εἶναι ἐφελκυστικαί. Ἐὰν μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν προκύψουν θετικαί, τοῦτο σημαίνει ὅτι αὐτὸ ποὺ παρεδέχθημεν εἶναι ὀρθόν. Ἐὰν προκύψουν ἀρνητικαί, σημαίνει ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις εἶναι θλιπτικαί.



Σχ. 8·3ζ.

Ἐφ' ὅσον ὁλόκληρον τὸ δικτύωμα ἰσορροπῇ, θὰ πρέπει νὰ ἰσορροπῇ καὶ κάθε τμῆμα του. Ἄρα ὁ ἀναλυτικὸς ὑπολογισμὸς τῶν ζητουμένων ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν ράβδων ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ποὺ γίνεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῶν δοκῶν (παράγρ. 7·7), δηλαδὴ μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν τριῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας:

1) $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma M = 0$,

αἱ ὁποῖαι ἠμπορεῖ νὰ εἶναι προσφορώτερον νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς τὰς ἑξῆς.

2) $\Sigma M_I = 0$ $\Sigma M_{II} = 0$ $\Sigma M_{III} = 0$

ὅπου τὰ τρία σημεῖα ἀναφορᾶς I, II καὶ III δὲν πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐπάνω εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν, ἢ

3) $\Sigma x = 0$ ἢ $\Sigma y = 0$ $\Sigma M_I = 0$ $\Sigma M_{II} = 0$.

Ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας εἶναι τρεῖς, μὲ κάθε τομὴν ἠμποροῦν νὰ ὑπολογισθοῦν μόνον τρεῖς ἄγνωστοι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ῥάβδων.

Γραφικὴ μέθοδος.

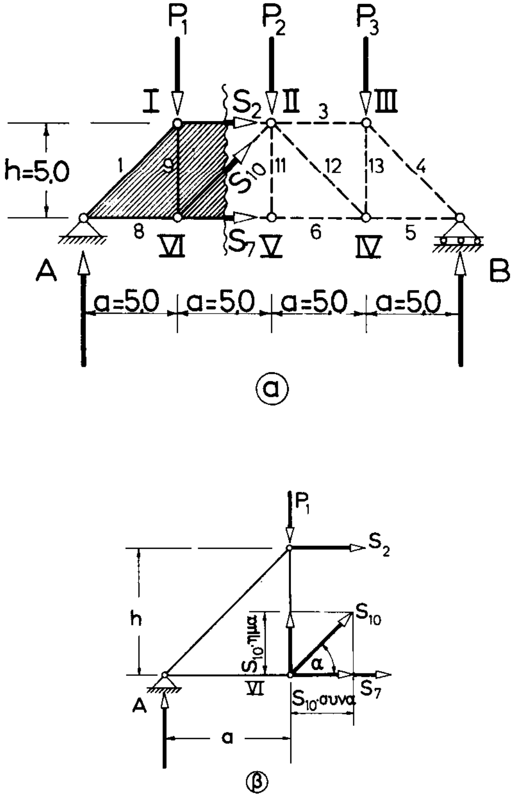
Εὑρίσκομε μὲ δυναμοπολύγωνον καὶ σχοινοπολύγωνον (Κεφ. 4) τὴν συνισταμένην R ὅλων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἀριστερὰ ἢ δεξιὰ τῆς τομῆς. Αἱ τρεῖς ἄγνωστοι δυνάμεις τῶν ῥάβδων, π.χ. αἱ S_2, S_{10} καὶ S_7 (σχ. 8·3η) καὶ ἡ συνισταμένη R τῶν δυνάμεων A καὶ P_1, πρέπει νὰ ἰσορροποῦν, ἄρα νὰ σχηματίζουν κλειστὸν δυναμοπολύγωνον.

Ἀπαιτεῖται ἑπομένως νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ἰσορροπίας μιᾶς δυνάμεως R, τῆς ὁποίας εἶναι γνωστὰ τὸ μέγεθος, ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας καὶ ἡ φορὰ μὲ τρεῖς δυνάμεις ῥάβδων, τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ μόνον ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας, ποὺ συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῶν ῥάβδων καὶ δὲν διέρχονται διὰ τοῦ ἰδίου σημείου. Εἰς τὸ παράδειγμα τῆς παραγράφου 4·2 ἔχομε λύσει τὸ πρόβλημα αὐτό.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπαιτεῖ πολὺν χρόνον καὶ σπανίως χρησιμοποιεῖται, δεδομένου ὅτι εἰς τὴν πρᾶξιν ἀπαιτεῖται συνήθως νὰ γνωρίζωμε ὅλας τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις τῶν ῥάβδων, αἱ ὁποῖαι ὑπολογίζονται, εἴτε γραφικῶς κατὰ τὴν μέθοδον Cremona, εἴτε ἀναλυτικῶς κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τομῶν.

Παράδειγμα 1.

Εἰς τὸ δικτύωμα τοῦ πρώτου παραδείγματος τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου νὰ ὑπολογισθοῦν ἀναλυτικῶς αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 2, 7 καὶ 10 (σχ. 8·3 η).



Σχ. 8·3 η.

Λύσις.

α) Ἀρίθμησις κόμβων, ράβδων καὶ ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

β) Ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως A = B = 3 000 kp.

γ) Τομὴ διὰ τῶν ράβδων 2, 10 καὶ 7.

δ) Ἐξετάζομε μόνον τὸ ἀριστερὸν τμῆμα τοῦ δικτυώματος.

Εἰς τὴν θέσιν τῶν ῥάβδων 2, 10 καὶ 7 εἰσάγομε τὰς ἐσωτερικάς των δυνάμεις S_2, S_{10} καὶ S_7, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθενται κατ' ἀρχὴν ἐφελκυστικαὶ [σχ. 8·3 η (β)].

ε) Εἰς τὸ ἀριστερὸν τμῆμα δροῦν αἱ ἑξῆς δυνάμεις: γνωσταὶ αἱ A καὶ P_1, ἄγνωστοι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις S_2, S_{10} καὶ S_7, τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ ὑπολογισμός.

Ὑπολογισμὸς τῆς S_7.

Λαμβάνομε τὰς ῥοπὰς ὡς πρὸς τὸν κόμβον II, σημεῖον τομῆς τῶν ῥάβδων 2 καὶ 10.

$\Sigma M_{II} = 0 = A \cdot 10 - P_1 \cdot 5 - S_7 \cdot 5.$

Θέτοντες ὅπου A καὶ P τὰς ἀριθμητικάς των τιμὰς ἔχομε:

$5 \cdot S_7 = 3\,000 \times 10 - 2\,000 \times 5 = 20\,000,$

ἄρα $S_7 = +4\,000\,\text{kp}$ (ἐφελκυσμός).

Ὑπολογισμὸς τῆς S_2.

Λαμβάνομε τὰς ῥοπὰς ὡς πρὸς τὸν κόμβον VI, σημεῖον τομῆς τῶν ῥάβδων 7 καὶ 10.

$\Sigma M_{VI} = 0 = A \cdot 5{,}0 + S_2 \cdot 5{,}0,$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει:

$S_2 = -A = -3\,000\,\text{kp}$ (θλῖψις).

Ὑπολογισμὸς τῆς S_{10}.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ῥάβδων 2 καὶ 7 δὲν εἶναι δυνατός, ἐπειδὴ αὐταὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἑπομένως δὲν τέμνονται. Συνεπῶς ἡ τρίτη συνθήκη ἰσορροπίας θὰ ληφθῇ εἴτε ἡ $\Sigma x = 0$ εἴτε ἡ $\Sigma y = 0$.

$\Sigma y = 0$: A καὶ P_1 κατακόρυφοι

S_2 καὶ S_7 ὁριζόντιοι.

Ἡ S_{10} ἀναλύεται εἰς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν S_{10} συνα καὶ τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν S_{10} ημα.

Ἄθροισμα ὅλων τῶν κατακορύφων δυνάμεων = 0.

$$A - P_1 + S_{10}\,\eta\mu\alpha = 0, \text{ ἐκ τῆς ὁποίας}$$

$$S_{10} = \frac{P_1 - A}{\eta\mu\alpha} = \frac{-1\,000}{0{,}707} = -1\,420\,\text{kp (θλῖψις)},$$

ὅπου $\eta\mu\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{\alpha^2 + h^2}}$.

Παράδειγμα 2.

Εἰς τὸ δικτύωμα τοῦ τρίτου παραδείγματος τῆς προηγουμένης παραγράφου νὰ ὑπολογισθοῦν ἀναλυτικῶς αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 2, 7 καὶ 6 (σχ. 8·3θ).

Λύσις.

α) Ἀρίθμησις κόμβων, ράβδων καὶ ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

β) Ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως $A = B = 2\,000$ kp.

γ) Τομὴ διὰ τῶν ράβδων 2, 7 καὶ 6.

δ) Ἐξέτασις τοῦ ἀριστεροῦ μόνον τμήματος τοῦ δικτυώματος.

Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν θέσιν τῶν ράβδων τῶν ἐσωτερικῶν των δυνάμεων S_2, S_7 καὶ S_6, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθενται ἐφελκυστικαὶ (σχ. 8·3θ).

ε) Εἰς τὸ ἀποκοπὲν τμῆμα δροῦν αἱ γνωσταὶ δυνάμεις A, P_1 καὶ P_2 καὶ αἱ ἄγνωστοι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων S_2, S_7 καὶ S_6, τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ ὑπολογισμός.

Ὑπολογισμὸς τῆς S_2.

Ροπαὶ ὡς πρὸς τὸν κόμβον IV, σημεῖον τομῆς τῶν ράβδων 7 καὶ 6.

$\Sigma M_{IV} = 0 = A \cdot 5 - P_1 \cdot 5 - P_2 \cdot 2{,}5 + S_2 \cdot r_2$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει :

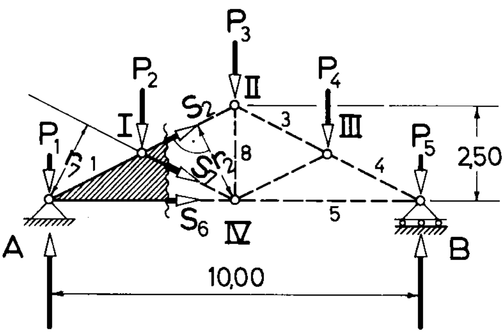
$$S_2 = \frac{-5\,000}{r_2} = \frac{-5\,000}{2{,}23} = -2\,240\,\mathrm{kp}\ (\text{θλῖψις}).$$

Ὑπολογισμὸς τῆς S_7.

Ῥοπαὶ ὡς πρὸς τὸν κόμβον Α, σημεῖον τομῆς τῶν ράβδων 2 καὶ 6.

$$\Sigma M_A = 0 = P_2 \cdot 2{,}5 + S_7 \cdot r_7.$$

$$S_7 = \frac{-2\,500}{r_7} = \frac{-2\,500}{2{,}23} = -1\,120\,\mathrm{kp}\ (\text{θλῖψις}).$$



Σχ. 8·3θ.

Ὑπολογισμὸς τῆς S_6.

Ῥοπαὶ ὡς πρὸς τὸν κόμβον I, σημεῖον τομῆς τῶν ράβδων 2 καὶ 7.

$$\Sigma M_I = 0 = A \cdot 2{,}5 - P_1 \cdot 2{,}50 - S_6 \cdot 1{,}25.$$

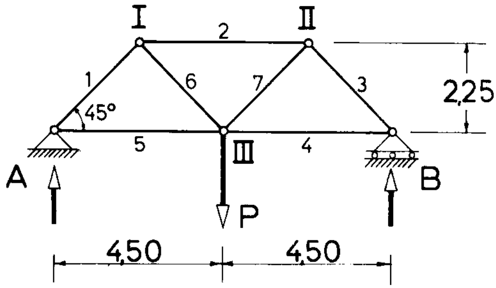
$$S_6 = \frac{3\,750}{1{,}25} = +3\,000\,\mathrm{kp}\ (\text{ἐφελκυσμός}).$$

8 · 4 Ἀσκήσεις.

1) Οἱ δύο κύριοι φορεῖς γεφύρας κατασκευάζονται ὡς δικτυώματα τῆς μορφῆς τοῦ σχήματος 8 · 4 α. Κάθε φορεὺς ἀναλαμβάνει φορτίον $P = 30$ Mp.

Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως Α καὶ Β. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ράβδων γραφικά. γ) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 2, 7 καὶ 4 ἀναλυτικά.

Ἀπάντησις: α) Α = Β = 15 Mp. β) Ἐσωτερικαὶ δυνάμεις εἰς τὸν Πίνακα 5·



Σχ. 8·4 α.

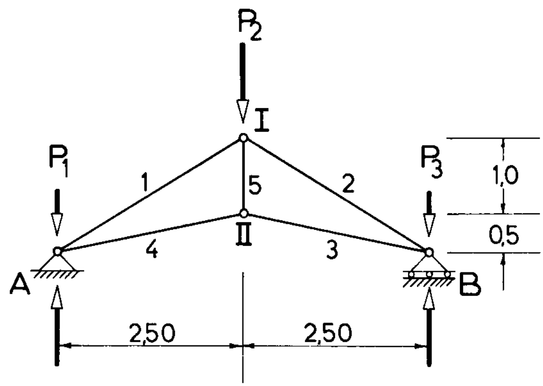
ΠΙΝΑΞ 5

Ἐσωτερικαί δυνάμεις ράβδων εἰς Mp		
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	- 21,21
2	—	- 30,00
3	—	- 21,21
4	+ 15,00	—
5	+ 15,00	—
6	+ 21,21	—
7	+ 21,21	—

2) Τὸ ζευκτὸν στέγης τοῦ σχήματος 8 · 4 β ἀναλαμβάνει τὰ φορτία $P_1 = P_3 = 500$ kp καὶ $P_2 = 1\,000$ kp.

Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως Α καὶ Β. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ράβδων γραφικά. γ) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 1, 3 καὶ 5 ἀναλυτικὰ (μέθοδος τομῶν).

Ἀπάντησις: α) Α = Β = 1000 kp. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων ἀναγράφονται εἰς τὸν Πίνακα 6·



Σχ. 8·4 β.

ΠΙΝΑΞ 6

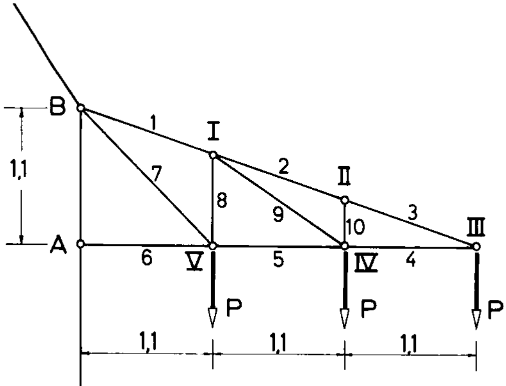
Ἐσωτερικαί δυνάμεις ράβδων εἰς kp		
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	-1460
2	—	-1460
3	+ 1280	—
4	+ 1280	—
5	+ 500	—

3) Οἱ βραχίονες τῶν χαλυβδίνων ἱστῶν τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἀποτελοῦν δικτύωμα τῆς μορφῆς τοῦ σχήματος 8·4γ.

Τὸ συνολικὸν φορτίον P, ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὸν ἐναέριον ἀγωγὸν καὶ τὸν μονωτῆρα ἀνέρχεται εἰς 600 kp.

Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ράβδων γραφικά. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 1, 7 καὶ 6 ἀναλυτικά.

Ἀπάντησις: Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ράβδων δίδονται εἰς τὸν Πίνακα 7.



Σχ. 8·4 γ.

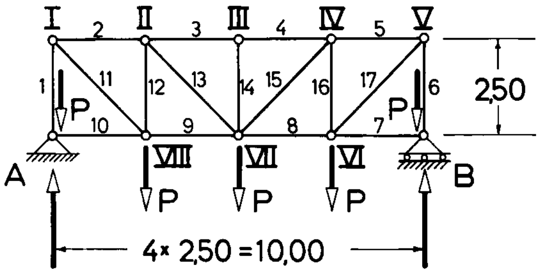
ΠΙΝΑΞ 7

Ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ῥάβδων εἰς kp		
Ῥάβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	+ 2850	—
2	+ 1900	—
3	+ 1900	—
4	—	- 1800
5	—	- 2700
6	—	- 3600
7	+ 1270	—
8	—	- 300
9	+ 1080	—
10	—	—

4) Ὁ δικτυωτὸς φορεὺς γεφύρας τοῦ σχήματος 8·4δ φορτίζεται μὲ P = 3 Mp εἰς ὅλους τοὺς κάτω κόμβους.

Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως A καὶ B. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ῥάβδων γραφικά. γ) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ῥάβδων 2, 12 καὶ 9 ἀναλυτικά.

Ἀπάντησις: α) A = B = 7,5 Mp. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἀναγράφονται εἰς τὸν Πίνακα 8.



Σχ. 8·4 δ.

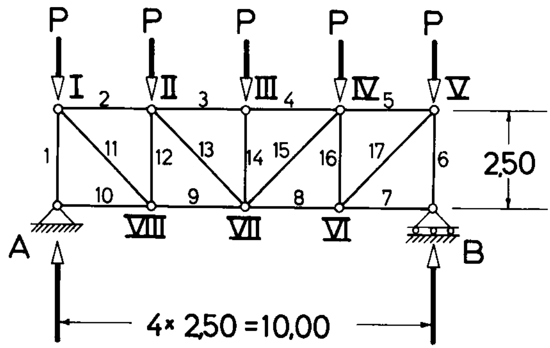
Π Ι Ν Α Ξ 8

Ἐσωτερικαί δυνάμεις ράβδων εἰς Mp					
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις	Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	——	- 4,50	10	——	——
2	——	- 4,50	11	+ 6,36	——
3	——	- 6,00	12	——	- 1,50
4	——	- 6,00	13	+ 2,12	——
5	——	- 4,50	14	——	——
6	——	- 4,50	15	+ 2,12	——
7	——	——	16	——	- 1,50
8	+ 4,50	——	17	+ 6,36	——
9	+ 4,50	——			

5) Ὁ ἴδιος δικτυωτὸς φορεὺς γεφύρας τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως φορτίζεται μὲ $P = 3{,}0$ Mp εἰς ὅλους τοὺς ἄνω κόμβους (σχ. 8 · 4 ε).

Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως A καὶ B. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ράβδων γραφικά. γ) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 4, 15 καὶ 8 ἀναλυτικά.

Ἀπάντησις: α) $A = B = 7{,}5$ Mp. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις δίδονται εἰς τὸν Πίνακα 9.



Σχ. 8·4 ε.

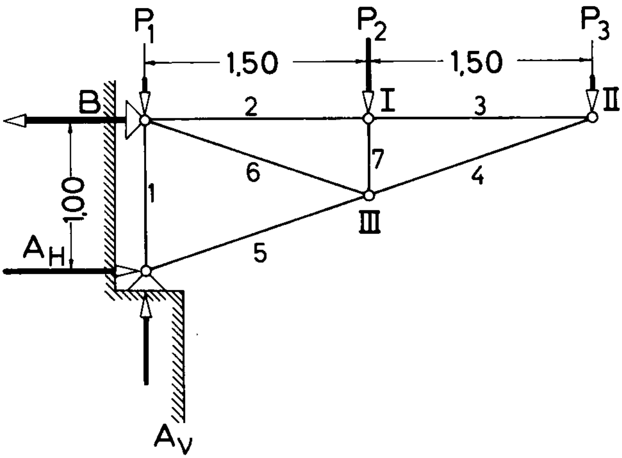
ΠΙΝΑΞ 9

Ἐσωτερικαί δυνάμεις ράβδων εἰς Mp					
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις	Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	- 7,50	10	—	—
2	—	- 4,50	11	+ 6,36	—
3	—	- 6,00	12	—	- 4,50
4	—	- 6,00	13	+ 2,12	—
5	—	- 4,50	14	—	- 3,00
6	—	- 7,50	15	+ 2,12	—
7	—	—	16	—	- 4,50
8	+ 4,50	—	17	+ 6,36	—
9	+ 4,50	—			

6) Ἕνας ἐξώστης βαστάζεται ἀπὸ δύο δικτυωτοὺς φορεῖς (σχ. 8·4 ζ). Κάθε δικτύωμα φορτίζεται μὲ $P_1 = P_3 = 600$ kp καὶ $P_2 = 1\,200$ kp.

Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως Α καὶ Β. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ράβδων γραφικὰ καὶ γ) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 2, 5 καὶ 6 ἀναλυτικά.

Ἀπάντησις: α) $A_V = 2\,400$ kp. $A_H = B = 3\,600$ kp. β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις δίδονται εἰς τὸν Πίνακα 10.



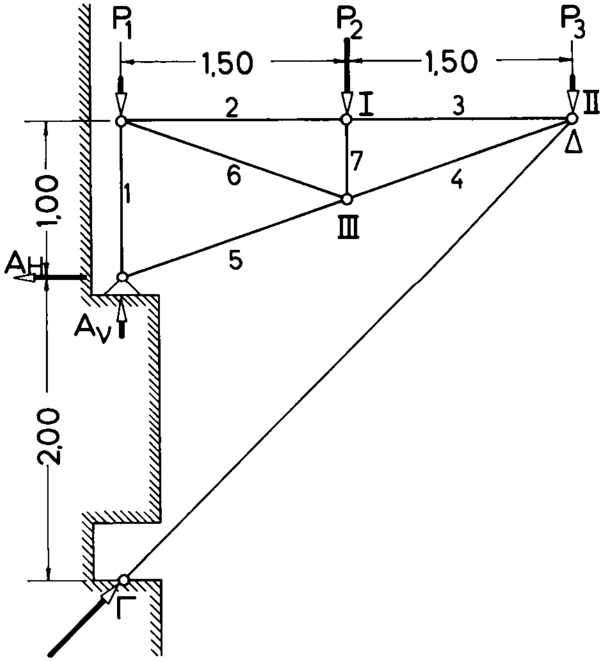
Σχ. 8·4 ζ.

Π Ι Ν Α Ξ 10

Ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ράβδων εἰς kp		
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	-1200
2	+ 1800	—
3	+ 1800	—
4	—	-1900
5	—	-3800
6	+ 1900	—
7	—	-1200

7) Ὁ ἴδιος ἐξώστης τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἐνισχύεται μὲ τὴν ἀντηρίδα ΓΔ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ στήριξις Β δὲν χρειάζεται καὶ καταργεῖται. Τὰ ἐξωτερικὰ φορτία παραμένουν τὰ ἴδια (σχ. 8 · 4η).

Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως Α καὶ Γ. β) Αἱ



Σχ. 8·4 η.

ΠΙΝΑΞ 11

Ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ράβδων εἰς kp		
Ράβδος	Ἐφελκυσμός	Θλῖψις
1	—	-1200
2	—	-1800
3	—	-1800
4	+ 3800	—
5	+ 1900	—
6	+ 1900	—
7	—	-1200

ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὅλων τῶν ράβδων γραφικά. γ) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τῶν ράβδων 2, 5 καὶ 6 ἀναλυτικά.

'Απάντησις: α) $A_V = 600$ kp. $A_H = 1\,800$ kp. $\Gamma_V = 1\,800$ kp. $\Gamma_H = 1\,800$ kp. $\Gamma = 2\,545$ kp.

β) Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἀναγράφονται εἰς τὸν Πίνακα 11.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

(Οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται εἰς σελίδας)

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ "ΑΣΠΙΩΤΗ - ΕΛΚΑ" Α. Ε.