ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ Β΄

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

1.— *Μαθηματικὰ* Α', Β'

2.— *Φυσικὴ*

3.— *Χημεία*

4.— *Μηχανικὴ*

5.— *Μηχανουργικὴ Τεχνολογία* Α', Β'

6.— *Ἠλεκτρολογία* Α', Β', Γ'

7.— *Ραδιοτεχνία* Α', Β'

8.— *Εἰσαγωγὴ στὴν Τεχνικὴ τῆς Τηλεφωνίας*

9.— *Κινητήριοι Μηχαναὶ* Α', Β'

10.— *Στοιχεῖα Μηχανῶν*

11.— *Ὑλικὰ*

12.— *Γενικὴ Δομικὴ*

13.— *Οἰκοδομικὴ*

14.— *Ὑδραυλικὰ Ἔργα*

15.— *Συγκοινωνιακὰ Ἔργα*

16.— *Τοπογραφία*

17.— *Οἰκοδομικαὶ Σχεδιάσεις*

18.— *Σχεδιάσεις Τεχνικῶν Ἔργων*

19.— *Ὀργάνωσις — Διοίκησις Ἔργων*

20.— *Τεχνικὸν Σχέδιον*

'Ο Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «'Ιδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισεν τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν 'Ιδρύματος ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς 'Ελλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ "Ιδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. 'Από τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ "Ιδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς. 'Εκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Τὸ ὅλον ἔργον ἤρχισε μὲ τὴν ὑποστήριξιν τοῦ 'Υπουργείου Βιομηχανίας, τότε ἁρμοδίου διὰ τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν, καὶ συνεχίζεται ἤδη μὲ τὴν ἔγκρισιν καὶ τὴν συνεργασίαν τοῦ 'Υπουργείου 'Εθνικῆς Παιδείας, βάσει τοῦ Νομοθετικοῦ Διατάγματος 3970/1959.

Αἱ ἐκδόσεις τοῦ 'Ιδρύματος διηρέθησαν εἰς δύο βασικὰς σειρὰς αἱ ὁποῖαι φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς τίτλους:

«Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνίτη» καὶ «Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ».

Καὶ ἡ μὲν πρώτη περιλαμβάνει τὰ βιβλία τῶν Σχολῶν Τεχνι-

τῶν ἡ δὲ δευτέρα τὰ βιβλία τοῦ ἑπομένου κύκλου τῆς Τεχνικῆς Ἐκπαιδεύσεως. Ἀμφότεραι αἱ σειραὶ θὰ ἐμπλουτισθοῦν καὶ μὲ βιβλία εὐρυτέρου τεχνικοῦ ἐνδιαφέροντος χρήσιμα κατὰ τὴν ἄσκησιν τοῦ ἐπαγγέλματος.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος κατέβαλον κάθε προσπάθειαν ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῆ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμὴ τῶν βιβλίων ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς πλέον ἀπόρους μαθητάς.

Οὕτω προσφέρονται εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν τῶν καθηγητῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῆς τεχνικῆς μας παιδείας αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ

Β Ι Β Λ Ι Ο Θ Η Κ Η   Τ Ο Υ   Τ Ε Χ Ν Ι Κ Ο Υ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Γ. ΑΦΕΝΔΡΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΣΧΟΛΗΣ
ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ

1 9 6 9

Α'. ΕΚΔΟΣΙΣ

Πρώτη ἐκτύπωσις (1967) ἀντίτυπα 1 — 5 000
Δευτέρα ἐκτύπωσις (1969) ἀντίτυπα 5 001 — 10 000

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ παρὼν δεύτερος καὶ τελευταῖος τόμος τῶν « Μαθηματικῶν » περιέχει τὰς ὑπολοίπους μαθηματικὰς γνώσεις, αἱ ὁποῖαι, συμφώνως πρὸς τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα, πρέπει νὰ διδαχθοῦν εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν.

Ἀναφέρονται εἰς τὴν Στερεομετρίαν, τὴν Ἄλγεβραν, τὴν Τριγωνομετρίαν καὶ τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν.

Τὸ μέρος τοῦ βιβλίου, ποὺ περιλαμβάνει τὴν Στερεομετρίαν, εἶναι διδακτικῶς ἀνεξάρτητον καὶ δύναται νὰ διδάσκεται παραλλήλως πρὸς τὸ ὑπόλοιπον. Ἀπαρτίζεται ἀπὸ τρία κεφάλαια. Τὸ πρῶτον ἀναφέρεται εἰς εὐθείας καὶ ἐπίπεδα ἐντὸς τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων. Διὰ τοὺς λόγους, ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὸν πρόλογον τοῦ πρώτου τόμου, πολλαὶ ἀπὸ τὰς προτάσεις αὐτὰς παρέχονται ἀναπόδεικτοι, εἶναι ὅμως διατυπωμέναι κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε μὲ τὴν βοήθειαν καὶ τοῦ σχήματος εὐκόλως νὰ κατανοοῦνται.

Τὸ δεύτερον κεφάλαιον περιλαμβάνει τὴν μέτρησιν τῶν πολυέδρων καὶ τὸ τρίτον τὴν μέτρησιν τῶν ἐκ περιστροφῆς στερεῶν. Διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῶν ἀποδείξεων πολλῶν προτάσεων τοῦ δευτέρου κεφαλαίου εἰσάγεται ἡ ἀρχὴ τοῦ Cavalieri, διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον εἰσάγονται τὰ θεωρήματα τοῦ Πάππου.

Ἡ διάταξις τῆς ὑπολοίπου ὕλης ἔγινε κατὰ τρόπον, ὥστε καὶ ἡ ἐννοιολογικὴ συνέχεια τῶν ἀναπτυσσομένων ἑνοτήτων νὰ διατηρῆται καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἀνάγκαι τῶν μαθητῶν διὰ τὰ παραλλήλως διδασκόμενα τεχνικὰ μαθήματα νὰ ἱκανοποιοῦνται κατὰ τὸ δυνατὸν ἐγκαίρως.

Προτάσσονται αἱ ἑνότητες τῶν διανυσμάτων καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ νὰ καταστήσουν ἁπλουστέραν καὶ περισσότερον κατανοητὴν τὴν θεωρίαν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ νὰ δώσουν εἰς τοὺς μαθητὰς τὰς τριγωνομετρικὰς γνώσεις, ποὺ εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὰ μαθήματα τῆς Ἠλεκτρολογίας, τῆς Φυσικῆς κ.ἄ.

Αἱ ἑνότητες, ποὺ ἀκολουθοῦν, περιλαμβάνουν τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων δευτέρου καὶ μεγαλυτέρου βαθμοῦ, τὴν ἐπίλυσιν παντὸς τριγώνου, τὴν ἐπίλυσιν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων, τὴν μελέτην τῶν συναρτήσεων καὶ τὰς προόδους. Κατεβλήθη κάθε προσπάθεια, ὥστε ἑκάστη ἑνότης νὰ συνοδεύεται μὲ πολλὰ παραδείγματα καὶ ἐφαρμογάς.

Ἀκολουθεῖ ἡ θεωρία τῶν λογαρίθμων καὶ τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος. Ἡ τελευταία δὲν ἀναφέρεται εἰς ὡρισμένον τύπον κανόνος καὶ εἶναι διατυπωμένη οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελῇ διδακτικὴν ἑνότητα κατανοητὴν ἀπὸ κάθε γνώστην τῆς ἐννοίας τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

Ἡ ἔννοια τοῦ νομογραφήματος διὰ πρώτην φορὰν εἰσάγεται αὐτοτελῶς εἰς σχολικὸν βιβλίον μέσης ἐκπαιδεύσεως. Τὸ πλῆθος τῶν παραδειγμάτων, μὲ τὰ ὁποῖα εἰσάγεται, νομίζομεν ὅτι θὰ τὴν καταστήσουν κατανοητὴν καὶ ἀφομοιώσιμον.

Ὁ παρὼν τόμος παρέχει εἰς τοὺς διδάσκοντας τὴν εὐχέρειαν νὰ προχωρήσουν, ἐφ' ὅσον τὸ ἐπιτρέπῃ ἡ στάθμη τῶν μαθητῶν, καὶ εἰς θέματα πέραν τῆς διδακτέας ὕλης. Τὰ θέματα αὐτὰ ἔχουν ἐκτυπωθῆ εἰς τὸ βιβλίον μὲ μικρότερα τυπογραφικὰ στοιχεῖα.

Καὶ διὰ τοῦ μετὰ χεῖρας τόμου προσεπαθήσαμεν νὰ παρουσιάσωμεν ἕνα βιβλίον χρήσιμον καὶ κατὰ τὸ δυνατὸν ἐπιστημονικῶς ἄρτιον. Αἱ παρατηρήσεις τῶν κ.κ. συναδέλφων, αἱ ὁποῖαι θὰ προέρχωνται ἐκ τῆς πείρας των κατὰ τὴν διδασκαλίαν, θὰ εἶναι πολύτιμοι διὰ τὴν περαιτέρω βελτίωσιν τοῦ περιεχομένου τοῦ βιβλίου.

Ἐπιθυμῶ καὶ πάλιν νὰ ἐκφράσω τὰς εὐχαριστίας μου εἰς τὴν Ἐπιτροπὴν Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου διὰ τὴν πολύτιμον συμπαράστασίν της εἰς τὴν συγγραφὴν καὶ τοῦ τόμου αὐτοῦ, καθὼς καὶ εἰς τὸν σεβαστὸν καθηγητὴν κ. Ν. Κριτικόν, διὰ τὰς σοφὰς συμβουλάς του.

Ὁ Συγγραφεὺς

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 10

Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα εἰς τὸν χῶρον

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11

Πολύεδρα

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13

Δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις - Ἐπίλυσις παντὸς τριγώνου

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 14

Συναρτήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15

Στερεὰ ἐκ περιστροφῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16

Πρόοδοι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 17

Λογάριθμοι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 18

Λογαριθμικὸς κανὼν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 19

Στοιχεῖα ἀναλυτικῆς γεωμετρίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 20

Ἁπλᾶ μονογραφήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 10

ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

10·1 Γενικά.

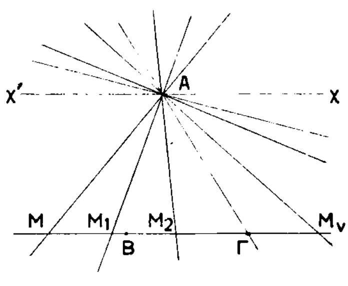
Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν τὰ σημεῖα, τὰς εὐθείας, τὰ ἐπίπεδα καὶ τὰ ἐπίπεδα σχήματα μέσα εἰς τὸν χῶρον (τῶν τριῶν διαστάσεων).

10·2 Καθορισμὸς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸν χῶρον.

Ι. Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὸν Α΄ Τόμον (Κεφ. 5, παράγρ. 5·2) *ἀπὸ δύο διακεκριμένα σημεῖα διέρχεται μία εὐθεῖα καὶ μία μόνον.*

Καὶ εἰς τὸν χῶρον *ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ὁρίζεται ἀπὸ δύο σημεῖα, ποὺ δὲν συμπίπτουν.* Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα εἶναι ἕνα ἀπέραντον σχῆμα, τὴν παριστάνομεν, ὅταν τὴν σχεδιάζωμεν, μόνον μὲ ἕνα τμῆμα της, τὸ ὁποῖον συνήθως σημειώνομεν μὲ τὰ γράμματα δ,ε,ζ...

ΙΙ. Ἂς θεωρήσωμεν τρία διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ (σχ. 10·2α), τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

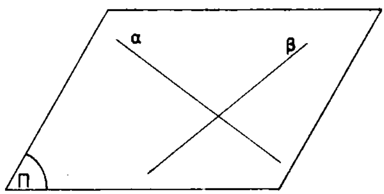


Σχ. 10·2α.

Δύο ἀπὸ αὐτά, π.χ. τὰ Β καὶ Γ, ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν, τὴν ΒΓ. Ἔστω τώρα ὅτι ἕνα κινητὸν σημεῖον Μ διατρέχει τὴν ΒΓ. Ἡ εὐθεῖα ΑΜ διαγράφει τότε μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα Α, Β, Γ, περιέχει δὲ καὶ τὴν παράλληλον χ΄Αχ πρὸς τὴν ΒΓ. Δεχόμεθα ὅτι μία μόνον τοιαύτη ἐπιφάνεια ὑπάρχει. Ἀπὸ τὴν παραδοχὴν αὐτὴν προκύπτει εὐκόλως ὅτι ἕνα ἐπίπεδον ὁρίζεται εἰς τὸν χῶρον μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς ἀκολούθους τρόπους:

α) *Μὲ τρία σημεῖα, ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν.*

β) *Μὲ μίαν εὐθεῖαν καὶ ἕνα σημεῖον, ποὺ δὲν ἀνήκει εἰς αὐτήν.*



Σχ. 10·2 β.

γ) *Μὲ δύο τεμνομένας εὐθείας* (σχ. 10·2 β).

δ) *Μὲ δύο παραλλήλους εὐθείας, ποὺ δὲν συμπίπτουν.*

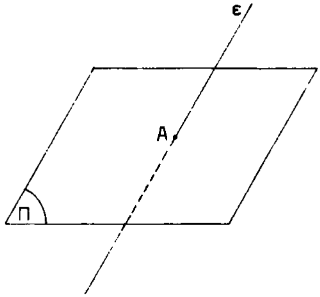
Ἐπειδὴ καὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἕνα ἀπέραντον σχῆμα, εἰς τὰς σχεδιάσεις μας τὸ ἀπεικονίζομεν μὲ ἕνα μέρος του, τὸ ὁποῖον συνήθως παριστάνομεν μὲ ἕνα παραλληλόγραμμον (σχ. 10·2 β) καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ κεφαλαῖα γράμματα Π, Ρ,...

Κάθε ἐπίπεδον χωρίζει τὸν χῶρον εἰς δύο μέρη ἑκατέρωθέν του, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἡμίχωροι.*

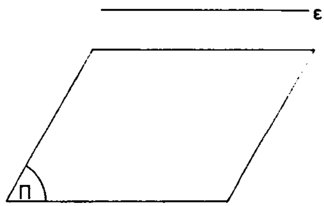
10·3 Σχετικὴ θέσις μιᾶς εὐθείας ε καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π εἰς τὸν χῶρον.

Ι. *Ἡ εὐθεῖα ε καὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον,* δηλαδὴ ἡ ε διαπερνᾶ τὸ Π (σχ. 10·3 α). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον. Τὸ κοινὸν σημεῖον λέγεται *ἴχνος* τῆς εὐθείας ε εἰς τὸ ἐπίπεδον Π. Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἕνα σημεῖον Α εἶναι ἡ τομὴ μιᾶς εὐθείας ε καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π, γράφομεν συμβολικῶς $ε \cap Π = Α$.

II. *Ἡ εὐθεῖα ε δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐπίπεδον Π* (σχ. 10·3β). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ε εἶναι *παράλληλος* πρὸς τὸ Π.

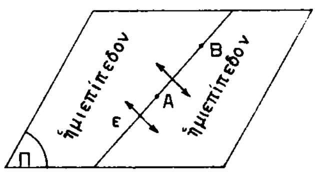


Σχ. 10·3α.
ε ∩ Π = A.



Σχ. 10·3β.

III. *Ἡ εὐθεῖα ε καὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἔχουν δύο τουλάχιστον κοινὰ σημεῖα* (σχ. 10·3γ). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καὶ ὅλα



Σχ. 10·3γ.
A ∈ Π, B ∈ Π ⇒ AB ∈ Π.

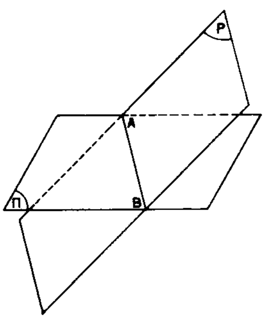
τὰ σημεῖα τῆς ε εἶναι καὶ σημεῖα τοῦ Π. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ ε *εἶναι εὐθεῖα τοῦ Π* ἢ *ἀνήκει εἰς τὸ Π* καὶ γράφομεν συμβολικῶς: ε ∈ Π. Μία εὐθεῖα ε ἑνὸς ἐπιπέδου χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα ἐκτείνονται ἀπεριορίστως ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας καὶ λέγονται *ἡμιεπίπεδα* (σχ. 10·3γ).

Σημείωσις. Καὶ εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ε παράλληλον τοῦ Π ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν.

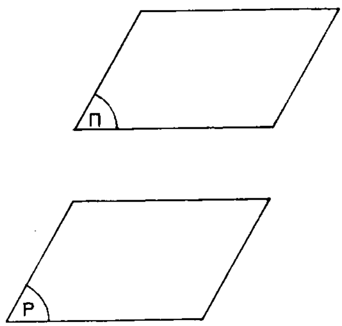
10·4 Σχετικὴ θέσις δύο ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

I. *Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχουν τρία τουλάχιστον κοινὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν συμπίπτουν καὶ δὲν ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ Π καὶ Ρ θὰ ἔχουν ὅλα των τὰ σημεῖα κοινὰ καὶ θὰ συμπίπτουν (παράγρ. 10·2).

II. *Τὰ Π καὶ Ρ ἔχουν κοινὰ τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας καὶ μόνον αὐτὰ* (σχ. 10·4 α). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα *τέμνονται* καὶ ἡ κοινὴ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι *ἡ τομή των*. Γράφομεν τότε συμβολικῶς $\Pi \cap P = AB$.



Σχ. 10·4 α.
$\Pi \cap P = AB$.

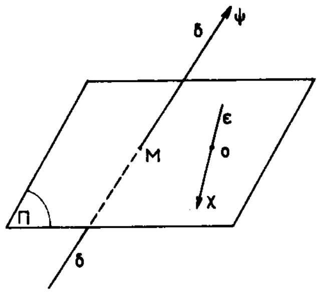


Σχ. 10·4 β.
$\Pi // P$.

III. *Τὰ Π καὶ Ρ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον* (σχ. 10·4 β). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ δύο ἐπίπεδα λέγονται *παράλληλα*.

10·5 Σχετικὴ θέσις δύο εὐθειῶν ε καὶ δ εἰς τὸν χῶρον.

I. *Αἱ εὐθεῖαι ε καὶ δ δὲν ἀνήκουν εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.* Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ ε π.χ. εὑρίσκεται εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ ἡ δ τέμνη τὸ Π εἰς ἕνα σημεῖον **Μ**, ποὺ δὲν ἀνήκει εἰς τὴν ε (σχ. 10·5). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ λέγονται *ἀσύμβατοι* (ἢ μὴ συνεπίπεδοι). Δύο ἡμιευθεῖαι, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς εἶναι ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, θὰ ὀνομάζωνται καὶ αὐταὶ *ἀσύμβατοι ἡμιευθεῖαι*. Π.χ. αἱ Οχ καὶ Μψ τοῦ σχήματος 10·5.



Σχ. 10·5.

ΙΙ. *Αἱ ε καὶ δ ἀνήκουν εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι συνεπίπεδοι. Τὰς σχετικάς των θέσεις ἐμελετήσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 5·3 τοῦ Α΄ Τόμου.

10·6 Ἀσκήσεις.

1) Πόσας εὐθείας προσδιορίζουν 4 διαφορετικὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀνὰ τρία δὲν ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν;

2) Τέσσαρα σημεῖα δὲν ἀνήκουν εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ ἀνὰ τρία δὲν ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Πόσα ἐπίπεδα προσδιορίζουν;

3) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο χωρὶς νὰ διέρχωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, εὑρίσκονται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

4) Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $ε_1$, $ε_2$, καὶ τὰ σημεῖα $Α_1$, $Β_1$ ἐπὶ τῆς $ε_1$ καὶ $Α_2$, $Β_2$ ἐπὶ τῆς $ε_2$. Νὰ δείξετε ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$ εἶναι ἀσύμβατοι.

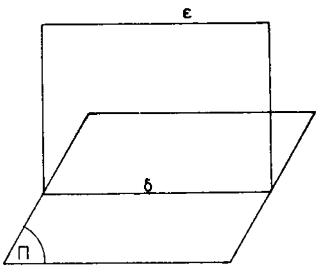
10·7 Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα παράλληλα.

Ἀποδεικνύονται αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις:

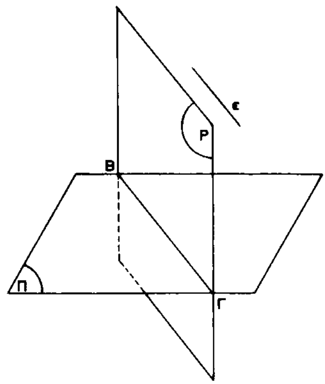
Ι. Μία εὐθεῖα ε παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν δ ἑνὸς *ἐπιπέδου Π ἢ ἀνήκει εἰς τὸ Π ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό.*

ΙΙ. Ἂν μία εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, τότε κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ε καὶ τέμνει τὸ Π, τὸ τέμνει κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ε (σχ. 10·7α).

ΙΙΙ. Ἂν μία εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α τοῦ Π φέρωμεν παράλληλον δ πρὸς τὴν ε, τότε ἡ δ θὰ εὑρίσκεται μέσα εἰς τὸ Π.



Σχ. 10·7 α.
$\varepsilon // \Pi \Rightarrow \varepsilon // \delta$
$\varepsilon // \delta \Rightarrow \varepsilon // \Pi$.



Σχ. 10·7 β.
$\varepsilon // \Pi,\ \varepsilon // P \Rightarrow \varepsilon // P \cap \Pi = B\Gamma$.

IV. Ἂν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν τομήν των (σχ. 10·7β).

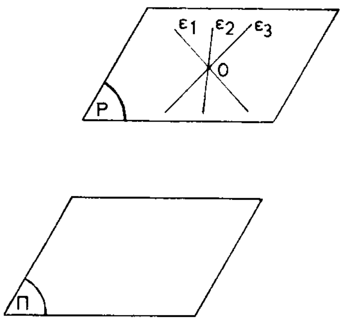
V. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι (εἰς τὸν χῶρον).

VI. Ἀπὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς ἑνὸς ἐπιπέδου Π, διέρχεται ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ Π. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ περιέχει τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Ο καὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ Π (σχ. 10·7γ).

VII. Δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα.

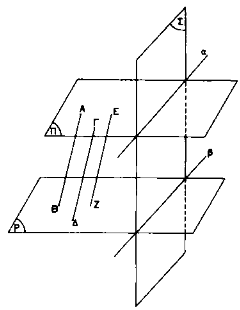
VIII. Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι (σχ. 10·7δ).

IX. Παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἴσα (σχ. 10·7δ).



Σχ. 10·7 γ.

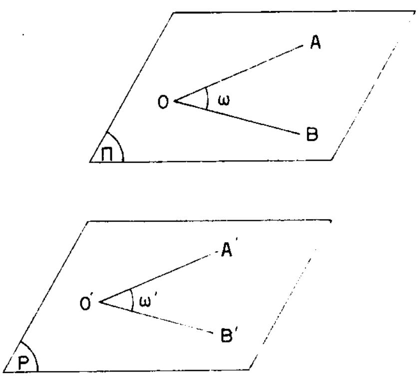
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in P,\ P//\Pi \Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 //\Pi.$



Σχ. 10·7 δ.

$\Pi//P,\ \Pi \cap \Sigma = \alpha,\ P \cap \Sigma = \beta \Rightarrow \alpha//\beta$

$\Pi//P \begin{cases} A, \Gamma, E \in \Pi.\ B, \Delta, Z \in P. \\ AB//\Gamma\Delta//EZ \Rightarrow AB = \Gamma\Delta = EZ. \end{cases}$



Σχ. 10·7 ε.

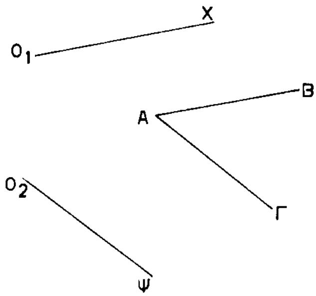
$$\left.\begin{matrix} OA//O'A' \\ OB//O'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle\,(OA, OB) = \sphericalangle\,(O'A', O'B') \Rightarrow \Pi//P.$$

X. Εἰς τὸν χῶρον, ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, εἶναι ἴσαι (σχ. 10·7 ε) *καὶ τὰ ἐπιπεδά των εἶναι παράλληλα.*

XI. Διὰ νὰ εἶναι δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρέπει καὶ ἀρκεῖ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας τοῦ ἄλλου (σχ. 10·7 ε).

10·8 Γωνία δύο ἀσυμβάτων ἡμιευθειῶν.

Καλοῦμεν γωνίαν δύο ἀσυμβάτων ἡμιευθειῶν τὴν γωνίαν, ποὺ σχηματίζεται, ἂν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου φέρωμεν τὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους ἡμιευθείας πρὸς τὰς δύο ἀσυμβάτους (σχ. 10·8).



Σχ. 10·8.

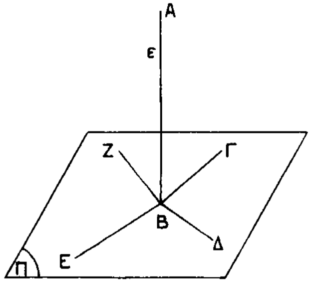
$$\left.\begin{array}{l} AB//O_1\chi \\ A\Gamma//O_1\psi \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BA\Gamma} = \sphericalangle\,(O_1\chi,\ O_2\psi).$$

Ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὴν πρότασιν αὐτὴν τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῶν δύο ἡμιευθειῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου.

Ἂν ἡ γωνία τῶν δύο ἀσυμβάτων ἡμιευθειῶν εἶναι ὀρθή, τότε αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, ποὺ εἶναι φορεῖς τῶν δύο ἡμιευθειῶν, λέγονται *ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι*. Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον τῆς καθετότητος $\perp$

10·9 Εὐθεῖα κάθετος καὶ πλαγία πρὸς ἐπίπεδον.

Μία εὐθεῖα ΑΒ τέμνουσα ἕνα ἐπίπεδον Π λέγεται *κάθετος* πρὸς αὐτό, ὅταν εἶναι κάθετος εἰς κάθε εὐθεῖαν τοῦ Π, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ ἴχνος της (σχ. 10·9 α). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται *κάθετον* πρὸς τὴν εὐθεῖαν.



Σχ. 10·9 α.
$AB \perp B\Gamma$, $B\Delta$, BE, BZ... $\Rightarrow$ $AB \perp \Pi$.

Μία εὐθεῖα, ἐὰν τέμνῃ ἕνα ἐπίπεδον καὶ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς αὐτό, λέγεται *πλαγία*.

Πρότασις.

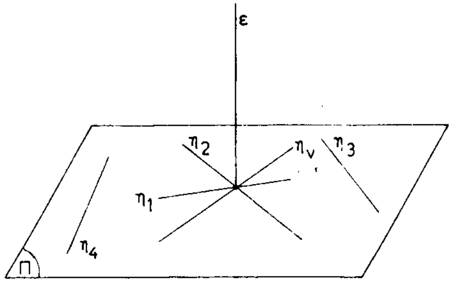
Ἐὰν μία εὐθεῖα ε τέμνῃ ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ εἶναι κάθετος πρὸς δύο εὐθείας του, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴχνος της καὶ δὲν συμπίπτουν, τότε θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς κάθε εὐθεῖαν τοῦ Π, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς ε.

Ἀπὸ τὴν πρότασιν αὐτὴν προκύπτει εὐκόλως ὅτι:

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος πρὸς δύο μὴ συμπιπτούσας εὐθείας τοῦ Π, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴχνος της, ἢ νὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο μὴ παραλλήλους εὐθείας τοῦ Π (σχ. 10·9 β).

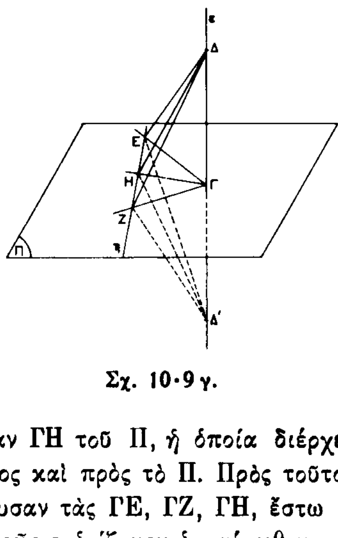
Ἀπόδειξις τῆς προτάσεως.

Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα ε τέμνει τὸ Π εἰς τὸ Γ (σχ. 10·9 γ) καὶ εἰγαι κάθετος πρὸς τὰς εὐθείας ΓΕ καὶ ΓΖ τοῦ Π, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Γ καὶ δὲν συμπίπτουν. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ε εἶναι κάθετος



Σχ. 10·9 β.

$\varepsilon \perp \eta_1,\ \varepsilon \perp \eta_2 \Rightarrow \varepsilon \perp \Pi,\ \varepsilon \perp \eta_3,\ \varepsilon \perp \eta_4 \Rightarrow \varepsilon \perp \Pi.$



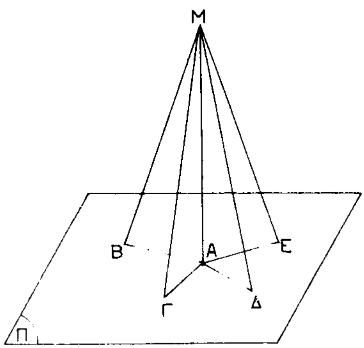
Σχ. 10·9 γ.

καὶ πρὸς κάθε εὐθεῖαν ΓΗ τοῦ Π, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Γ, καὶ ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ Π. Πρὸς τοῦτο φέρομεν μίαν εὐθεῖαν η τοῦ Π τέμνουσαν τὰς ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως. Ἐπὶ τῆς ε ὁρίζομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Γ δύο ἴσα τμήματα ΓΔ = ΓΔ′ καὶ φέρομεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΔΗ, ΔΖ, Δ′Ε, Δ′Η, Δ′Ζ. Ἐπειδὴ αἱ ΓΕ καὶ ΓΖ εἶναι μεσοκάθετοι τοῦ τμήματος ΔΔ′, θὰ εἶναι ΔΕ = Δ′Ε καὶ ΔΖ = Δ′Ζ. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς προκύπτει ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΔΖ καὶ ΕΔ′Ζ ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Ἂν λοιπὸν στρέψωμεν τὸ ἡμιεπίπεδον τοῦ τριγώνου ΕΔ′Ζ γύρω ἀπὸ τὴν ΕΖ, ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ἡμιεπίπεδον τοῦ τριγώνου ΕΔΖ, τὸ τρίγωνον ΕΔ'Ζ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ἴσον του ΕΔΖ καὶ τὸ Δ' μὲ τὸ Δ, τὸ Η θὰ μείνῃ ἀκίνητον, ἐνῷ τὸ τμῆμα Δ'Η θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ΔΗ, ἤτοι $ΔΗ = Δ'Η$. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΔΗΔ' εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ διάμεσος ΗΓ τῆς βάσεώς του Δ'Δ θὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτήν, ἤτοι $ΗΓ \perp ε$ ἢ $ε \perp ΗΓ$.

10 · 10 Εὐθεῖαι πλάγιαι καὶ κάθετοι πρὸς ἐπίπεδον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον Π μίαν μόνον κάθετον, τὴν ΜΑ, καὶ ἀπειραρίθμους πλαγίας, τὰς ΜΒ, ΜΓ, ΜΔ... (σχ. 10 · 10). Τὸ τμῆμα



Σχ. 10·10.
$ΜΑ \perp Π \Rightarrow ΜΑ < ΜΒ, ΜΓ..., ΑΒ = ΑΕ \Rightarrow ΜΒ = ΜΕ, ΑΒ > ΑΔ \Rightarrow ΜΒ > ΜΔ.$

ΜΑ τῆς καθέτου, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ Μ καὶ τὸ ἴχνος της Α, τὸ ὀνομάζομεν *κάθετον τμῆμα*, τὰ δὲ ὁμοίως ὁριζόμενα τμήματα ΜΒ, ΜΓ ... τῶν πλαγίων, *πλάγια τμήματα*.

Διὰ τὸ κάθετον τμῆμα καὶ τὰ πλάγια, ποὺ φέρονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον πρὸς ἕνα ἐπίπεδον, ἔχομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις:

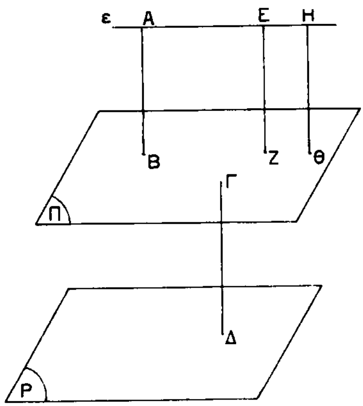
I. Τὸ κάθετον τμῆμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ κάθε πλάγιον τμῆμα, λέγεται δὲ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

II. Δύο πλάγια τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ ἴχνη ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς καθέτου, εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.

III. Μεταξὺ δύο ἀνίσων τμημάτων μικρότερον εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου τὸ ἴχνος ἀπέχει ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς καθέτου, καὶ ἀντιστρόφως.

10·11 Ἀπόστασις παραλλήλων εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων.

I. Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον, αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων της ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἴσαι μεταξύ των (σχ. 10·11).



Σχ. 10·11.

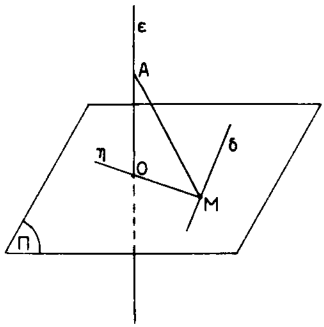
Ὁρισμός : Ἀπόστασις μιᾶς εὐθείας ε ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον Π, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλος, καλεῖται ἡ ἀπόστασις ΑΒ ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου Α τῆς ε ἀπὸ τὸ Π.

II. Ὅταν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, τότε αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ Π ἀπὸ τὸ Ρ καὶ τῶν σημείων τοῦ Ρ ἀπὸ τὸ Π εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ὁρισμός : Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ καλεῖται ἡ ἀπόστασις ΓΔ ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

10·12 Θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων.

I. Ἂν μία εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ ἀπὸ τὸ ἴχνος της Ο φέρωμεν τὴν ΟΜ κάθετον πρὸς μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν δ τοῦ Π, τότε καὶ ἡ εὐθεῖα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ Μ καὶ ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖον Α τῆς ε, εἶναι κάθετος πρὸς τὴν δ (σχ. 10·12).



Σχ. 10·12.

Διότι ἡ δ ὡς κάθετος πρὸς τὴν ΟΜ καὶ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ε εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΟΜ, ποὺ ὁρίζουν, συνεπῶς δὲ καὶ πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ΑΜ (παράγρ. 10·9).

II. Ἂν μία εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π εἰς τὸ Ο καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον της Α φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΜ πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν δ τοῦ Π, τότε καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΜ θά εἶναι κάθετος πρὸς τὴν δ.

Διότι ἡ δ ὡς κάθετος πρὸς τὴν ΑΜ καὶ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ε θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΟΜ, ποὺ ὁρίζουν, συνεπῶς δὲ καὶ πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ΟΜ.

III. Ἂν μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π χαράξωμεν δύο καθέτους εὐθείας δ καὶ η καὶ ἀπὸ τὴν τομήν των Μ φέρωμεν μίαν *ἄλλην ΜΑ κάθετον πρὸς τὴν δ καὶ πλαγίαν πρὸς τὴν η, τότε ἡ κάθετος, ποὺ ἄγεται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ΜΑ πρὸς τὴν η, θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ Π.*

Διότι ἡ δ ὡς κάθετος πρὸς τὰς η καὶ ΜΑ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΟΜΑ καὶ ὡς ἐκ τούτου ὀρθογώνιος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΟ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Συνεπῶς ἡ ΑΟ ὡς κάθετος πρὸς τὴν η καὶ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν δ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ Π.

10 · 13 Ἀσκήσεις.

1) Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2. Πῶς θὰ φέρωμεν ἀπὸ τὴν ε_1 ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ε_2;

2) Δίδονται δύο εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2 καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Πῶς θὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ Ο ἕνα ἐπίπεδον, πρὸς τὸ ὁποῖον αἱ ε_1 καὶ ε_2 νὰ εἶναι παράλληλοι;

3) Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε_1, ε_2, ε_3. Πῶς θὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον Π_1 ἀπὸ τὴν ε_1 καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π_2 ἀπὸ τὴν ε_2 ἔτσι, ὥστε ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε_3;

4) Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2. Πῶς θὰ φέρωμεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ὁποῖα νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς ε_1 καὶ ε_2;

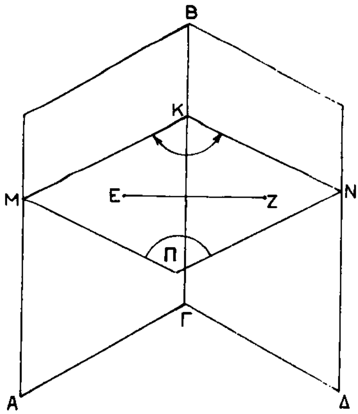
5) Ἡ ἀπόστασις ΑΒ ἑνὸς σημείου Α ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι 12 cm. Μὲ κέντρον τὸ ἴχνος Β τῆς καθέτου πρὸς τὸ Π γράφομεν περιφέρειαν (Β, 5 cm). Εἰς ἕνα σημεῖον Γ αὐτῆς φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ. Ἐὰν $(\Gamma\Delta) = 3\sqrt{3}$, νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος ΑΔ.

6) Εἰς τὴν τομὴν χψ δύο ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ὁρίζομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐκτὸς τῆς τομῆς δύο ἄλλα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

10 · 14 Δίεδροι γωνίαι.

Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ διαιροῦν (χωρίζουν) τὸν χῶρον εἰς 4 μέρη. Τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη λέγεται *δίεδρος γωνία*. Ὥστε *δίεδρος γωνία λέγεται ἕνα μέρος τοῦ χώρου*, τὸ ὁ-

ποῖον περιορίζεται ἀπὸ δύο ἡμιεπίπεδα, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (σχ. 10·14). Ἡ κοινὴ αὐτὴ εὐθεῖα λέγεται *ἀκμὴ* τῆς διέδρου γωνίας καὶ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα *ἕδραι* αὐτῆς. Μία δίεδρος γωνία λέγεται *κυρτή*, ὅταν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ, ποὺ συνδέει δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Ε καὶ Ζ τῆς γωνίας, εὑρίσκεται ὁλόκληρον μέσα εἰς τὴν γωνίαν.



Σχ. 10·14.

Εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν τοῦ σχήματος 10·14 ἀκμὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ καὶ ἕδραι τὰ ἡμιεπίπεδα ΒΓΑ καὶ ΔΓΒ. Τὴν δίεδρον αὐτὴν γωνίαν θὰ τὴν σημειώνωμεν συμβολικῶς: $\widehat{\text{ΒΓ}}$ ἢ Α($\widehat{\text{ΓΒ}}$)Δ.

Ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Κ τῆς ἀκμῆς ΒΓ φέρωμεν τὰς καθέτους ΜΚ καὶ ΝΚ πρὸς τὴν ἀκμὴν ΒΓ, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἀντιστοίχως μέσα εἰς τὰς ἕδρας ΑΒΓ καὶ ΔΓΒ, σχηματίζεται ἡ ἐπίπεδος γωνία ΜΚΝ. Ἡ γωνία $\widehat{\text{ΜΚΝ}}$ ἔχει τὸ αὐτὸ μέγεθος ἀπὸ ὁποιοδήποτε σημεῖον Κ τῆς ἀκμῆς καὶ ἂν φέρωμεν τὰς καθέτους, δυνάμεθα δὲ νὰ τὴν θεωρήσωμεν καὶ ὡς τομὴν τῆς διέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου Π καθέτου πρὸς τὴν ἀκμήν της, διότι αἱ ΚΜ καὶ ΚΝ ὡς τεμνόμεναι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου $\perp$ πρὸς τὴν ΒΓ.

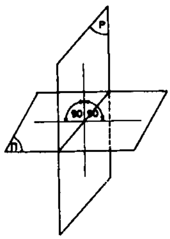
Τὴν γωνίαν αὐτὴν καλοῦμεν *ἀντίστοιχον ἐπίπεδον* τῆς διέδρου γωνίας. Εὔκολα διαπιστώνομεν ὅτι *δύο ἴσαι δίεδροι γωνίαι ἔχουν ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους* καὶ ἀντιστρόφως ὅτι *δύο δίεδροι, ὅταν ἔχουν ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους, εἶναι ἴσαι*. Συνεπῶς *ὁ λόγος δύο διέδρων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν των*. Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν συμπεραίνομεν ὅτι, ἂν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν διέδρων γωνιῶν λάβωμεν τὴν δίεδρον γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος εἶναι μονὰς μετρήσεως τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τότε κάθε δίεδρος γωνία ἔχει μέτρον, εἰς ὁμωνύμους μονάδας, τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας. Ἔτσι ὀνομάζομεν ὀρθήν, μοῖραν, ἀκτίνιον, βαθμὸν ἀντιστοίχως τὴν δίεδρον γωνίαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον μίαν ὀρθήν, 1^0, 1 rad, 1^g.

Αἱ δίεδροι γωνίαι μετροῦνται μὲ μίαν ὁποιαδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονάδων.

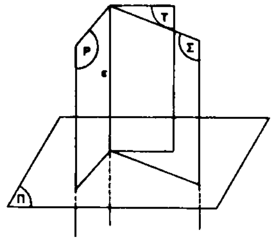
Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται *ἐφεξῆς, κατακορυφήν, συμπληρωματικαί, παραπληρωματικαί*, ἐὰν ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους των ἐφεξῆς, κατὰ κορυφήν, συμπληρωματικάς, παραπληρωματικάς. Γενικῶς δὲ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τὰς προτάσεις τῶν παραγράφων 5·7, 5·9, 5·14 κλπ. τοῦ Α΄ Τόμου, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς ἐπιπέδους γωνίας, ἀντιστοιχοῦν παρόμοιαι προτάσεις καὶ διὰ τὰς διέδρους. Π.χ. εἰς τὴν πρότασιν τῆς παραγράφου 5·9 (β) τοῦ Α΄ Τόμου: « Ὅταν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, ἔχουν τὰς μὴ κοινάς των πλευρὰς ἐπάνω εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν », ἀντιστοιχεῖ ἡ πρότασις: *Ὅταν δύο ἐφεξῆς δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί, ἔχουν τὰς μὴ κοινάς των ἕδρας ἐπάνω εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον*.

10·15 Κάθετα ἐπίπεδα.

Δύο ἐπίπεδα λέγονται *κάθετα*, ὅταν τέμνωνται καὶ σχηματίζουν 4 διέδρους γωνίας ἴσας, δηλαδὴ 4 ὀρθὰς (σχ. 10·15α). Διὰ τὰ κάθετα ἐπίπεδα ἔχομεν τὰς ἀκολούθους προτάσεις:



Σχ. 10·15 α.



Σχ. 10·15 β.
$\varepsilon \perp \Pi \Rightarrow P, \Sigma, T \perp \Pi.$

I. Ἂν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, τότε κάθε ἐπίπεδον, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν ε, εἶναι κάθετον πρὸς τὸ Π (σχ. 10·15β). Π.χ. αἱ διάφοροι θέσεις τοῦ φύλλου μιᾶς θύρας εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου, ἐπειδὴ ὁ ἄξων στηρίξεως τῆς θύρας εἶναι κάθετος πρὸς τὸ πάτωμα.

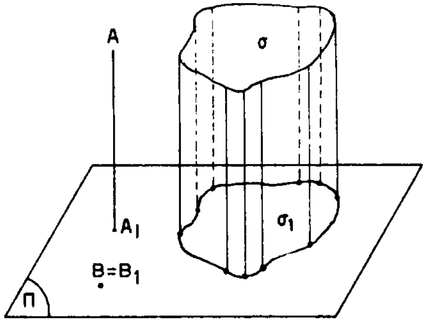
II. Ἂν δύο ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι κάθετα καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτά, ἔστω τοῦ P, φέρωμεν κάθετον εὐθεῖαν πρὸς τὸ ἄλλο Π, τότε ἡ κάθετος αὐτὴ θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ P (σχ. 10·15β). Π.χ. ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖον ἑνὸς τοίχου κρεμάσωμεν. μὲ μίαν κλωστὴν ἕνα μικρὸν βάρος, ἡ κλωστὴ θὰ ἐφαρμόζῃ ἐπάνω εἰς τὸν τοῖχον, διότι ὁ τοῖχος καὶ ἡ κλωστὴ εἶναι κάθετα πρὸς τὸ δάπεδον.

III. Ἂν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα P καὶ Σ εἶναι κάθετα πρὸς ἕνα τρίτον ἐπίπεδον Π, τότε καὶ ἡ τομὴ ε τῶν P καὶ Σ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ Π (σχ. 10·15β).

ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΕΠΑΝΩ ΕΙΣ ΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

10·16 Ὀρθὴ προβολὴ ἑνὸς σχήματος.

Ὀρθὴ προβολὴ ἑνὸς σημείου Α ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π λέγεται τὸ ἴχνος A_1 τῆς καθέτου ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (σχ. 10·16). Ἡ κάθετος AA_1 λέγεται *προβάλλουσα*, τὸ δὲ ἐπίπεδον Π *προβολικὸν ἐπίπεδον*. Ἂν τὸ σημεῖον, ἔστω τὸ Β, ἀνήκῃ εἰς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, τότε προβολή του εἶναι τὸ ἴδιον τὸ σημεῖον Β.



Σχ. 10·16.

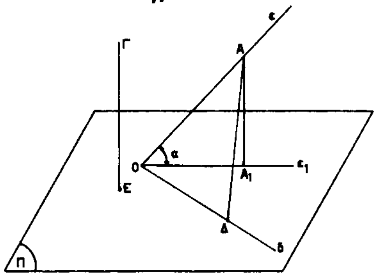
Προβολὴ ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχήματος (σ) ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι τὸ σύνολον σ_1 τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ σ ἐπάνω εἰς τὸ Π (σχ. 10·16). Ἐὰν τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Π εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος σ, τότε ἡ ὀρθὴ προβολὴ σ_1 τοῦ σ ἐπάνω εἰς τὸ Π εἶναι ἴση μὲ τὸ σ.

10·17 Προβολὴ εὐθείας.

Ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας ε ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι μία εὐθεῖα ε_1 (σχ. 10·17), ἐκτὸς ἂν ἡ ε εἶναι κάθετος πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, ὁπότε προβολή της εἶναι τὸ ἴχνος της. Π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 10·17 προβολὴ τῆς ΓΕ εἶναι τὸ σημεῖον Ε.

Ἔστω τώρα ε μία εὐθεῖα πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, Ο τὸ τὸ ἴχνος της καὶ ε_1 ἡ προβολή της. Ἡ ὀξεῖα γωνία $\alpha = AOA_1$, ποὺ σχηματίζει ἡ ε μὲ τὴν προβολήν της ε_1, λέγεται *γωνία τῆς εὐθείας ε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π ἢ γωνία κλίσεως τῆς ε πρὸς τὸ Π.*

Ἡ γωνία κλίσεως α τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ Π εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς γωνίας τῆς ε μὲ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου Π, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο.



Σχ. 10·17.

Πραγματικῶς ἂν ἀπὸ τὸ Ο φέρωμεν μέσα εἰς τὸ Π μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν δ καὶ ὁρίσωμεν ἐπάνω της τμῆμα $ΟΔ = ΟΑ_1$, ἀπὸ τὰ τρίγωνα $ΑΟΑ_1$ καὶ ΑΟΔ, ποὺ ἔχουν $ΟΑ_1 = ΟΔ$, ΟΑ κοινὴν καὶ $ΑΔ > ΑΑ_1$, διαπιστώνομεν ὅτι $\widehat{ΑΟΑ_1} < \widehat{ΑΟΔ}$.

Ὅταν ἡ ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π, ἡ γωνία, ποὺ σχηματίζει μὲ τὸ Π, εἶναι μηδενικὴ (0^0) καί, ὅταν ἡ ε εἶναι κάθετος πρὸς τὸ Π, ἡ γωνία της μὲ τὸ Π εἶναι ὀρθὴ (90^0).

Κλίσιν τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καλοῦμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας κλίσεως α.

$$\text{Κλίσις τῆς ε πρὸς τὸ Π} = \frac{ΑΑ_1}{ΟΑ_1} = εφα.$$

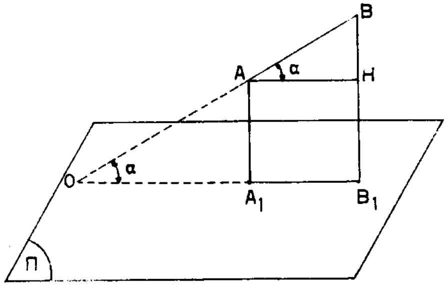
Ἡ κλίσις αὐτὴ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς < 1, ὅταν $α < 45^0$, ἴσος μὲ τὴν μονάδα, ὅταν $α = 45^0$ καὶ > 1, ὅταν $α > 45^0$.

10·18 Ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος.

Ὀρθὴ προβολὴ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π (σχ. 10·18) εἶναι τὸ τμῆμα $Α_1Β_1$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἄκρα τὰς προβολὰς $Α_1$ καὶ $Β_1$ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ τμήματος ἐπάνω εἰς τὸ Π.

Ἂν ἀπὸ τὸ Α φέρωμεν τὴν παράλληλον ΑΗ πρὸς τὴν A_1B_1, θὰ σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΗΒ. Ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΗ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τριγώνου θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν προβολὴν A_1B_1, διότι τὸ τετράπλευρον AA_1B_1H εἶναι ὀρθογώνιον. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$A_1B_1 = AH = AB \cdot \text{συν}\alpha.$$



Σχ. 10·18.

Ὥστε *τὸ μῆκος τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τμήματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας κλίσεως τῆς εὐθείας τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἐπίπεδον.*

Ὅταν τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τότε θὰ ἔχωμεν:

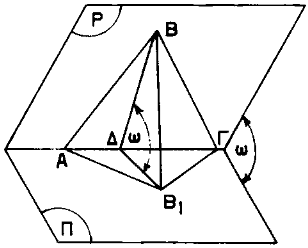
$$A_1B_1 = AB \cdot \text{συν}\, 0^0 = AB \cdot 1 = AB.$$

10·19 Ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος.

Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς $AB_1\Gamma$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον Π (σχ. 10·19), μὲ τὸ ὁποῖον τὸ ἐπίπεδον Ρ τοῦ τριγώνου σχηματίζει τὴν ὀξεῖαν δίεδρον γωνίαν $B(\widehat{A\Gamma})B_1 = \omega$. Ἂν $B_1\Delta$ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ $AB_1\Gamma$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ΑΓ, θὰ εἶναι:

$$(AB_1\Gamma) = \frac{(A\Gamma)\cdot(B_1\Delta)}{2}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως $BB_1 \perp \Pi$ καὶ $B_1\Delta \perp A\Gamma$, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων θὰ εἶναι καὶ $B\Delta \perp A\Gamma$, συνεπῶς:



Σχ. 10·19.

1) Τὸ ΒΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ΑΓ.

2) Ἡ $\widehat{B\Delta B_1}$ εἶναι ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς ὀξείας διέδρου γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων, ἤτοι $\widehat{B\Delta B_1} = \omega$.

3) $B_1\Delta = (B\Delta)\cdot$ συνω.

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$(AB_1\Gamma) = \frac{(A\Gamma)(B_1\Delta)}{2} = \frac{(A\Gamma)(B\Delta)\,\text{συνω}}{2} = (AB\Gamma)\cdot\text{συνω}.$$

Γενικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὀξείας διέδρου γωνίας τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος μὲ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον.

10·20 Ἐμβαδὸν ἐλλείψεως.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν τὸ ἐπίπεδον μιᾶς περιφερείας σχηματίζῃ μὲ ἕνα ἐπίπεδον Π γωνίαν ω ($0^0 < \omega < 90^0$), τότε ἡ προβολὴ τῆς περιφερείας ἐπάνω εἰς τὸ Π εἶναι μία ἔλλειψις. Π.χ. ἡ περιφέρεια ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος 10·20 ἔχει προβολὴν ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον Π τὴν ἔλλειψιν $A_1\Gamma_1B_1\Delta_1$. Ὁ μεγάλος ἄξων $A_1B_1 = 2\alpha$ (Α΄ Τόμος, παράγρ. 6·10) τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται μὲ $2R$ καὶ ὁ μικρὸς ἄξων $\Gamma_1\Delta_1 = 2\beta$ ἰσοῦται μὲ $2R\cdot$συνω.

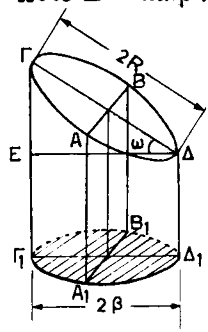
Ἔχομεν λοιπόν:

$$\text{συν}\,\omega = \frac{2\beta}{2R} = \frac{\beta}{R} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἐὰν τώρα ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τῆς παραγράφου 10·19, εὑρίσκομεν διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ ἐσωτερικοῦ μιᾶς ἐλλείψεως μὲ ἄξονας 2α καὶ 2β τὸν τύπον:

$$E_1 = \pi R^2\cdot \text{συν}\,\omega = \pi R^2\cdot\frac{\beta}{R} = \pi R\cdot\beta = \pi\alpha(\beta).$$

$$\text{Ὥστε } E = \pi\alpha\,\beta\,.$$



Σχ. 10·20.

10·21 Ἀσκήσεις.

1) Δίδεται ἕνα ἐπίπεδον Π, ἕνα σημεῖον Ο καὶ μία εὐθεῖα ε. Πῶς θὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὸ Ο, νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ε καὶ κάθετον πρὸς τὸ Π;

2) Δίδεται ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ μία εὐθεῖα ε. Πῶς θὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὴν ε καὶ νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ Π;

3) Ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν κάθετον πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π διέρχονται ὅσα ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὸ Π θέλομεν. Ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν πλαγίαν πρὸς τὸ Π πόσα κάθετα ἐπίπεδα πρὸς τὸ Π διέρχονται;

4) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι αἱ προβολαὶ ἴσων καὶ παραλλήλων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπάνω εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι τμήματα ἴσα καὶ παράλληλα.

5) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι διάμεσοι τῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου ἐπάνω εἰς τὸ Π.

6) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι, ὅταν ἡ μία τουλάχιστον πλευρὰ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, τότε ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπάνω εἰς τὸ Π εἶναι ἐπίσης ὀρθὴ γωνία.

7) Ἡ προβολὴ $A_1 B_1$ ἑνὸς τμήματος ΑΒ μιᾶς εὐθείας ε ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π ἔχει μῆκος 12 cm. Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ εἶναι 18 cm, νὰ ὑπολογίσετε τὴν κλίσιν καὶ τὴν γωνίαν κλίσεως τῆς ε πρὸς τὸ Π.

8) Μία εὐθεῖα ε ἔχει κλίσιν πρὸς ἕνα ἐπίπεδον 0,75. Νὰ ὑπολογίσετε: α) Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ἑνὸς τμήματος τῆς ε μήκους 30 cm καὶ β) τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τῆς ε, ποὺ ἔχει προβολὴν μήκους 30 cm.

9) Ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει διαστάσεις 12 cm καὶ 18 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς τοῦ ὀρθογωνίου ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π, μὲ τὸ ὁποῖον τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου σχηματίζει γωνίαν 60^0.

10) Ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει προβολὴν ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν ΑΒ, τὸ τετράγωνον $AB\Gamma_1\Delta_1$. Ἂν $(AB) = 10$ cm καὶ $(B\Gamma) = 15$ cm, νὰ ὑπολογίσετε τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας, ποὺ σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου μὲ τὸ Π.

11) Ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ ($\widehat{A} = 90^0$) ἔχει $(AB) = 15$ cm καὶ $(A\Gamma) = 12$ cm. Ἐὰν ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π καὶ ἡ κλίσις τῆς ΑΒ πρὸς τὸ Π εἶναι 1,25, νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου ἐπάνω εἰς τὸ Π, καθὼς καὶ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς ΒΓ ἐπάνω εἰς τὸ Π.

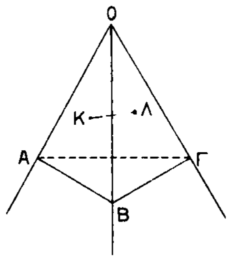
12) Τὸ ἐπίπεδον μιᾶς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα 30 cm σχηματίζει γωνίαν 60^0 μὲ ἕνα ἐπίπεδον Π. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως, ποὺ εἶναι προβολὴ τῆς περιφερείας ἐπάνω εἰς τὸ Π, καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἐλλείψεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

11·1 Στερεαὶ γωνίαι.

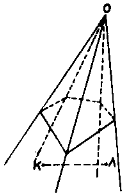
Ἔστω ΑΒΓ τὸ περίγραμμα ἑνὸς τριγώνου καὶ Ο ἕνα σημεῖον τοῦ χώρου ἔξω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου (σχ 11·1α). Φέρομεν τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Σχηματίζονται αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΑ. Τὸ μέρος τοῦ χώρου, ποὺ περικλείουν αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐπίπεδοι γωνίαι καὶ περιέχει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, λέγεται *κυρτὴ τρίεδρος στερεὰ γωνία*. Τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ χώρου, ποὺ δὲν περιέχει τὸ τρίγωνον, εἶναι μία *μὴ κυρτὴ τρίεδρος στερεὰ γωνία*. Τὸ σημεῖον Ο λέγεται *κορυφή*, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΑ λέγονται *ἕδραι* καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ *ἀκμαὶ* τῆς στερεᾶς γωνίας.



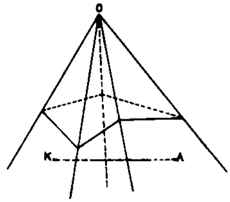
Σχ. 11·1 α.
Κυρτὴ τρίεδρος στερεὰ γωνία.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπὸ ἕνα τετράπλευρον, πεντάγωνον κλπ. ἠμποροῦμε νὰ σχηματίσωμεν μίαν *τετράεδρον*, *πεντάεδρον* κλπ. στερεὰν γωνίαν.

Μία στερεὰ γωνία θὰ λέγεται *κυρτή*, ὅταν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, ποὺ συνδέει δύο οἱαδήποτε σημεῖα της, εὑρίσκεται ὁλόκληρον μέσα εἰς τὴν γωνίαν (σχ. 11·1β), ἄλλως λέγεται *μὴ* *κυρτή* (σχ. 11·1γ). Είς τὸ ἑξῆς, ὅταν ἀναφερώμεθα ἁπλῶς εἰς στερεὰς γωνίας, θὰ ἐννοοῦμεν κυρτὰς στερεὰς γωνίας.



Σχ. 11·1 β.
Κυρτὴ πεντάεδρος στερεὰ γωνία.

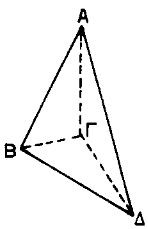


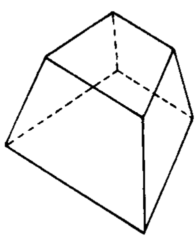
Σχ. 11·1 γ.
Μὴ κυρτὴ πεντάεδρος στερεὰ γωνία.

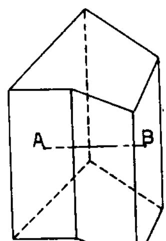
Μία τρίεδρος στερεὰ·γωνία λέγεται *κανονική*, ὅταν καὶ αἱ τρεῖς ἕδραι της εἶναι ἴσαι, *τρισορθογώνιος* δέ, ὅταν εἶναι ὀρθαί.

11·2 Πολύεδρα.

Ἕνα στερεὸν (σῶμα) λέγεται *πολύεδρον*, ὅταν περιορίζεται μόνον ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας (σχ. 11·2). Αἱ ἐπίπεδοι αὐταὶ







Σχ. 11·2.

Τετράεδρον. Κυρτὸν πολύεδρον. Μὴ κυρτὸν πολύεδρον.

ἐπιφάνειαι εἶναι πολύγωνα καὶ λέγονται *ἕδραι* τοῦ πολυέδρου. Αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν λέγονται *ἀκμαὶ* ἢ *πλευραὶ* τοῦ πολυέδρου καὶ αἱ κορυφαί των *κορυφαὶ* αὐτοῦ.

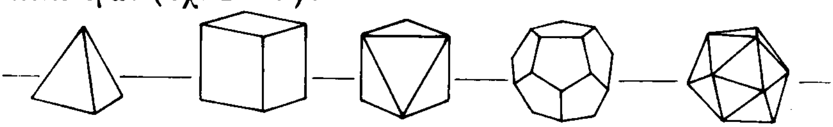
Κυρτὸν λέγεται ἕνα πολύεδρον, ὅταν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, ποὺ συνδέει δύο οἱαδήποτε σημεῖα του, εὑρίσκεται ὁλόκληρον μέσα εἰς τὸ πολύεδρον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν κάθε ἕδρα του προεκτεινομένη ἀφήνει τὸ στερεὸν εἰς τὸν αὐτὸν ἡμίχωρον ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας αὐτῆς.

῞Ενα πολύεδρον λέγεται *τετράεδρον*, *πεντάεδρον*, ..., *ν/δρον* ὅταν ἔχῃ τέσσαρας, πέντε, ..., ν ἕδρας.

῎Ογκος ἑνὸς πολυέδρου λέγεται τὸ γεωμετρικὸν μέγεθος τοῦ χώρου, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ πολύεδρον, καθὼς καὶ τὸ μέτρον τοῦ χώρου αὐτοῦ.

11·3 Κανονικὰ πολύεδρα.

Κανονικὸν λέγεται ἕνα πολύεδρον, ὅταν ὅλαι αἱ ἕδρα του εἶναι ἴσα κανονικὰ πολύγωνα καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι του ἴσαι. ᾿Αποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχουν τὰ ἑξῆς πέντε μόνον εἴδη κανονικῶν πολυέδρων (σχ. 11·3):



Σχ. 11·3.

α) Τὸ κανονικὸν τετράεδρον, μὲ ἕδρας ἰσόπλευρα τρίγωνα.

β) Τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον (κύβος), μὲ ἕδρας τετράγωνα.

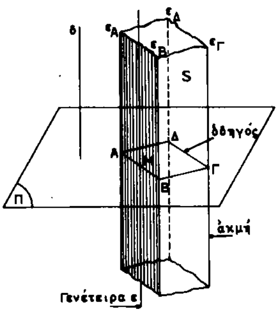
γ) Τὸ κανονικὸν ὀκτάεδρον, μὲ ἕδρας ἰσόπλευρα τρίγωνα.

δ) Τὸ κανονικὸν δωδεκάεδρον, μὲ ἕδρας κανονικὰ πεντάγωνα.

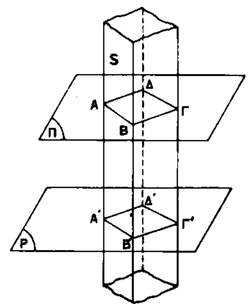
ε) Τὸ κανονικὸν εἰκοσάεδρον, μὲ ἕδρας ἰσόπλευρα τρίγωνα.

11·4 Πρισματικὴ ἐπιφάνεια.

῎Εστω ΑΒΓΔ τὸ περίγραμμα ἑνὸς (ἐπιπέδου) τετραπλεύρου καὶ δ μία εὐθεῖα τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον Π τοῦ τετραπλεύρου (σχ. 11·4α). ᾿Απὸ ἕνα σημεῖον Μ τοῦ περιγράμματος φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ε παράλληλον πρὸς τὴν δ. Μετακινοῦμεν κατόπιν τὴν ε κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ παραμένῃ παράλληλος πρὸς τὴν δ καὶ συγχρόνως νὰ ἔχῃ ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ περίγραμμα ΑΒΓΔ. Ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν ε κατὰ τὴν μετακίνησίν της, λέγεται *πρισματικὴ ἐπιφάνεια*. Αἱ θέσεις ε_A, ε_B, ε_Γ, ε_Δ τῆς ε, ὅταν αὐτὴ διέρχεται διαδοχικῶς ἀπὸ τὰς κορυφάς, Α, Β, Γ, Δ τοῦ τετραπλεύρου, λέγονται *ἀκμαὶ* τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 11·4 α.



Σχ. 11·4 β.

Τὰ 4 ἀπέραντα (κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ε) ἐπίπεδα τμήματα (ἐπίπεδοι ταινίαι), ποὺ συγκροτοῦν τὴν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν καὶ ὁρίζονται ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν ἀκμῶν (ε_A, ε_B), (ε_B, ε_Γ), (ε_Γ, ε_Δ), (ε_Δ, ε_A), καλοῦνται *ἕδραι* τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.

Ἡ ε λέγεται *γενέτειρα* τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ ΑΒΓΔ *ὁδηγὸς γραμμή*.

Ὅπως ἀπὸ ἕνα τετράπλευρον παράγεται μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια μὲ 4 ἀκμὰς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπὸ ἕνα τρίγωνον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον κλπ. παράγεται μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια μὲ 3, 5, 6 κλπ. ἀκμάς.

Ἔστω S μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια καὶ Π ἕνα ἐπίπεδον, ποὺ τέμνει τὰς ἀκμάς της (σχ. 11·4β). Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ Π τέμνει καὶ τὰς ἕδρας τῆς S, τὸ δὲ σύνολον τῶν κοινῶν των σημείων εἶναι τὸ περίγραμμα τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Τὸ περίγραμμα αὐτό, κατ' ἐπέκτασιν δὲ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, λέγεται *τομὴ* τῆς S καὶ τοῦ Π.

Αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας μὲ παράλληλα ἐπίπεδα (παράλληλοι τομαὶ) εἶναι ἴσαι.

Π.χ. αἱ τομαὶ ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος 11·4β μὲ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι ἴσαι. Διότι θὰ εἶναι ΑΒ//Α΄Β΄, ΒΓ//Β΄Γ΄, ΓΔ//Γ΄Δ΄, ΔΑ//Δ΄Α΄ ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ μὲ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν· συνεπῶς:

$$\widehat{Α} = \widehat{Α'}, \quad \widehat{Β} = \widehat{Β'}, \quad \widehat{Γ} = \widehat{Γ'}, \quad \widehat{Δ} = \widehat{Δ'}$$

(ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους) καὶ

$$ΑΒ = Α'Β', \; ΒΓ = Β'Γ', \; ΓΔ = Γ'Δ', \; ΔΑ = Δ'Α'$$

(ἐπειδὴ εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΒ΄ Α, ΒΓΓ΄Β΄, κλπ.).

Ὅταν τὸ ἐπίπεδον μιᾶς τομῆς εἶναι κάθετον πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, τότε ἡ τομὴ λέγεται *κάθετος*.

Ὅλαι αἱ κάθετοι τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι παράλληλοι τομαί.

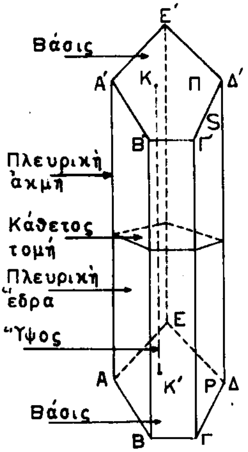
11·5 Πρῖσμα.

Πρῖσμα λέγεται τὸ πολύεδρον, ποὺ περικλείεται ἀπὸ μίαν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν καὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, ποὺ τέμνουν τὰς ἀκμάς των. Π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 11·5 ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια S καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ὁρίζουν τὸ πρῖσμα ΑΔ΄.

Βάσεις τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο παράλληλοι τομαί, ΑΒΓΔΕ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄, ποὺ εἶναι, φυσικά, πολύγωνα ἴσα. Τὰ τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄, ΕΕ΄ τῶν ἀκμῶν τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιέχονται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων (σχ. 11·5), λέγονται *πλευρικαὶ ἀκμαὶ* ἢ *πλευραὶ* τοῦ πρίσματος.

Τὰ 5 παραλληλόγραμμα ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β,... λέγονται *πλευ-*

ρικαὶ ἕδραι καὶ ἀποτελοῦν τὴν *πλευρικὴν* (παράπλευρον) ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος.



Σχ. 11·5.

Ὕψος ἑνὸς πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόστασις ΚΚ′ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δύο βάσεων.

Κάθετος τομὴ πρίσματος λέγεται ἡ κάθετος τομὴ τῆς πρισματικῆς του ἐπιφανείας.

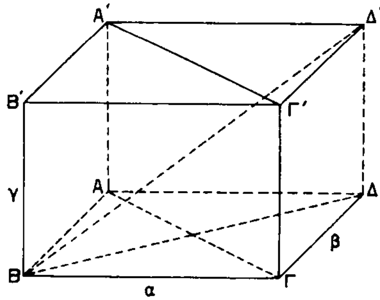
Ἕνα πρῖσμα λέγεται *ὀρθόν*, ὅταν αἱ πλευρικαί του ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων, ἄλλως λέγεται *πλάγιον*. Εἰς τὸ ὀρθὸν πρῖσμα τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς πλευρικὰς ἀκμάς του, κάθε δὲ πλευρικὴ ἕδρα του εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα λέγεται *κανονικόν*, ὅταν αἱ βάσεις του εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

11·6 Παραλληλεπίπεδα.

Ὀνομάζομεν *παραλληλεπίπεδα* τὰ πρίσματα, ποὺ ἔχουν βάσεις παραλληλόγραμμα. Ἑνὸς παραλληλεπιπέδου καὶ αἱ 6 ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπίπεδα τῶν ὁποίων ἀνὰ δύο εἶναι παράλληλα.

Δύο ἕδραι, ποὺ ἀνήκουν εἰς παράλληλα ἐπίπεδα, λέγονται *ἀπέναντι ἕδραι* καὶ εἶναι ἴσαι. Π.χ. αἱ ἕδραι ΔΓΓ′Δ′ καὶ ΑΒΒ′Α (σχ. 11·6).

Δύο παράλληλοι ἀκμαί, ὅπως αἱ ΑΑ′ καὶ ΓΓ′, ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν, ὁρίζουν ἕνα *διαγώνιον ἐπίπεδον*. Δύο



Σχ. 11·6.

κορυφαί, ὅπως αἱ Β καὶ Δ′, ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν, ὁρίζουν μίαν *διαγώνιον*, τὴν ΒΔ′. Κάθε παραλληλεπίπεδον ἔχει 6 διαγώνια ἐπίπεδα καὶ 4 διαγωνίους.

Τὸ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευρικαὶ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια, λέγεται *ὀρθόν*. Τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, ποὺ ἔχει καὶ βάσεις ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, καλεῖται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*. Τέλος τὸ ὀρθογώνιον, ποὺ ἔχει ὅλας του τὰς ἕδρας τετράγωνα, λέγεται *κύβος*.

Τὰ μήκη τριῶν ἀκμῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ποὺ δὲν εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι, λέγονται *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογωνίου καὶ παριστάνονται συνήθως μὲ τὰ γράμματα α,β,γ, (μῆκος, πλάτος, ὕψος) (σχ. 11·6).

Εἰς τὸν κύβον αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς διαγωνίους ἀπὸ τὰς διαστάσεις του. Π.χ. ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν ΒΔ′ (σχ. 11·6).

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Δ′ΒΔ εἶναι: $(\Delta'\mathrm{B})^2 = (\Delta\Delta')^2 + (\mathrm{B}\Delta)^2$. Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΓΒ: $(\mathrm{B}\Delta)^2 = (\mathrm{B}\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2$.

Ἑπομένως $(\Delta'\mathrm{B})^2 = (\Delta'\Delta)^2 + (\mathrm{B}\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ καὶ $(\Delta'\mathrm{B}) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Ἡ αὐτὴ σχέσις, ὅπως εἶναι φανερόν, ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ὑπολοίπους τρεῖς διαγωνίους, δηλαδὴ τὰς ΔΒ′, ΓΑ′, ΑΓ′.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι *αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.*

Διὰ τὴν διαγώνιον Δ ἑνὸς κύβου ἀκμῆς α θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{3\alpha^2} = \alpha\sqrt{3}.$$

Ἤτοι παντὸς κύβου ἡ διαγώνιος $\Delta = \alpha\sqrt{3}$.

11·7 Ἰδιότητες τῶν πρισμάτων.

Διὰ τὰ πρίσματα ἀποδεικνύονται αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες:

I. Κάθε τομὴ πρίσματος παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν του εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν.

II. Δύο ὀρθὰ πρίσματα μὲ ἴσα ὕψη καὶ ἰσεμβαδικὰς βάσεις ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.

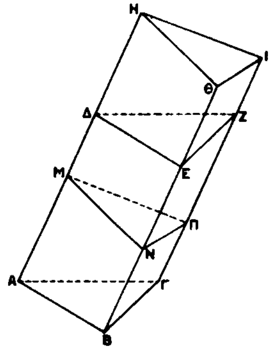
III. Δύο ὀρθὰ πρίσματα μέ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα.

IV. Ὁ λόγος $\frac{V}{V'}$ *τῶν ὄγκων δύο πρισμάτων Α καὶ Α′, ποὺ ἔχουν ἴσας ἢ ἰσεμβαδικὰς βάσεις καὶ ὕψη ἀντιστοίχως υ καὶ υ′, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον* $\frac{\upsilon}{\upsilon'}$ *τῶν ὑψῶν:*

$$\frac{V}{V'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}.$$

V. Κάθε πλάγιον πρῖσμα ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον (εἶναι ἰσό-

ογκον) μὲ ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα, ποὺ ἔχει ὕψος μὲν μίαν πλευρικὴν ἀκμὴν τοῦ πλαγίου, βάσιν δὲ μίαν κάθετον τομήν του.



Σχ. 11·7.

Π.χ. τὸ πλάγιον πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχήματος 11·7 ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ τὸ ὀρθὸν ΜΝΠΗΘΙ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΜΝΠ καὶ ΗΘΙ κάθετοι τομαὶ καὶ ΜΗ = ΑΔ. Διότι θὰ εἶναι ΑΜ = ΔΗ, ΒΝ = ΕΘ, ΓΠ = ΖΙ καὶ συνεπῶς τὰ στερεὰ ΜΝΠΑΒΓ καὶ ΗΘΙΔΕΖ, ὅταν τεθοῦν τὸ ἕνα μέσα εἰς τὸ ἄλλο κατὰ τρόπον, ὥστε τὸ ΜΝΠ νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὸ ΗΘΙ, θὰ ταυτισθοῦν, ἀφοῦ ἡ ΜΑ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΗΔ, ἡ ΝΒ μὲ τὴν ΘΕ καὶ ἡ ΙΙΓ μὲ τὴν ΙΖ.

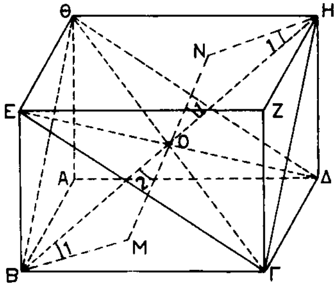
Ὥστε τὰ δύο πρίσματα ΑΒΓΔΕΖ καὶ ΜΝΠΗΘΙ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴσα στερεὰ ΑΒΓΜΝΠ καὶ ΔΕΖΗΘΙ καὶ ἀπὸ τὸ κοινὸν στερεὸν ΜΝΠΔΕΖ. Συνεπῶς οἱ ὄγκοι των θὰ εἶναι ἴσοι.

11·8 Ἰδιότητες τῶν παραλληλεπιπέδων.

Διὰ τὰ παραλληλεπίπεδα ἐκτὸς ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἔχομεν καὶ τὰς ἀκολούθους:

Ι. Αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον τὰς διχοτομεῖ καὶ εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλεπιπέδου (σχ. 11·8 α).

Διότι ἀνὰ δύο διχοτομοῦνται ὡς διαγώνιοι τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα εἶναι τομαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου μὲ τὰ διαγώνια ἐπίπεδά του καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχουν κοινὸν τὸ μέσον των Ο. Π.χ. ἡ ΕΔ ὡς διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου ΘΕΓΔ διχοτομεῖται μὲ τὴν ΘΓ καὶ αὐτὴ ὡς διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου ΘΒΓΗ μὲ τὴν ΒΗ κλπ. Ἕνα δὲ τυχὸν



Σχ. 11·8 α.

τμῆμα ΜΝ, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ περατοῦται εἰς δύο ἀπέναντι ἕδρας (εἰς τό σχῆμα εἰς τὰς ἕδρας ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ), διχοτομεῖται ἀπὸ τὸ Ο, διότι τὰ τρίγωνα ΒΟΜ καὶ ΗΟΝ εἶναι ἴσα ($ΟΗ = ΟΒ$, $\widehat{Ο_1} = \widehat{Ο_2}$, $\widehat{Η_1} = \widehat{Β_1}$). Ἑπομένως τὰ Μ καὶ Ν εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο.

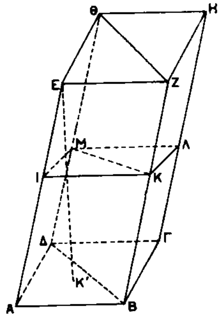
ΙΙ. Κάθε διαγώνιον ἐπίπεδον χωρίζει τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ἴσα ἢ ἰσοδύναμα (ἰσόογκα) τριγωνικὰ πρίσματα (σχ. 11·8β).

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α) *Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν.* Τότε κάθε διαγώνιον ἐπίπεδον χωρίζει τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ὀρθὰ πρίσματα μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, τὰ ὁποῖα ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἴσα (παράγρ. 11·7).

β) *Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι πλάγιον* (σχ. 11·8β).

Τὸ διαγώνιον ἐπίπεδον ΔΒΖΘ χωρίζει τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς τὰ δύο πλάγια τριγωνικὰ πρίσματα, ΑΒΔΖ καὶ ΔΒΓΖ. Μία κάθετος τομὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου, π.χ. ἡ ΙΚΛΜ, εἶναι παραλληλόγραμμον, ποὺ χωρίζεται ἀπὸ τὸ διαγώνιον ἐπίπεδον ΔΒΖΘ εἰς τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΙΚΜ καὶ ΜΚΛ. Τὸ τρίγωνον ΙΚΜ εἶναι κάθετος τομὴ τοῦ πρίσματος (ΑΒΔΖ)· ἑπομένως τὸ πρῖσμα αὐτὸ θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα (Α), ποὺ ἔχει βάσιν τὸ ΙΚΜ καὶ ὕψος τὸ ΒΖ. Ὁμοίως τὸ πρῖσμα ΔΒΓΖ ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα (Β),



Σχ. 11·8β.

ποὺ ἔχει κάθετον τομὴν τὸ ΜΚΛ καὶ ὕψος τὸ ΒΖ. Τὰ ὀρθὰ ὅμως πρίσματα (Α) καὶ (Β) ἔχουν ἴσους ὄγκους, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη· ἐπομένως καὶ τὰ πρίσματα ΑΒΔΖ καὶ ΔΒΓΖ ἔχουν ἴσους ὄγκους.

11·9 Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῶν πρισμάτων.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους μιᾶς πλευρικῆς ἀκμῆς του ἐπὶ τὴν περίμετρον μιᾶς καθέτου τομῆς του. Διότι αἱ πλευραὶ μιᾶς καθέτου τομῆς τοῦ πρίσματος εἶναι ἀντιστοίχως ὕψη τῶν παραλληλογράμμων, ποὺ ἀποτελοῦν τὰς πλευρικὰς ἕδρας τοῦ πρίσματος, ὅταν ὡς βάσεις αὐτῶν ληφθοῦν αἱ πλευρικαὶ ἀκμαὶ (σχ. 11·9α).

Διὰ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα, ἐπειδὴ ἡ βάσις εἶναι κάθετος τομή του, ἔχομεν ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρικὴν ἀκμήν του (ὕψος).*

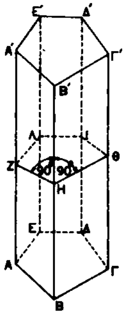
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος ἰσοῦται φυσικὰ *μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας του καὶ τοῦ διπλασίου ἐμβαδοῦ μιᾶς βάσεώς του.*

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 11·9β) μὲ διαστάσεις α, β, γ, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

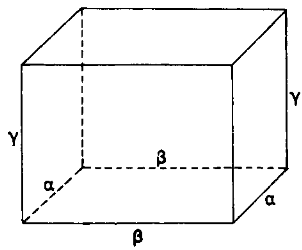
$$E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha),$$

εἰς δὲ τὸν κύβον ἀκμῆς α ἀπὸ τὸν τύπον:

$$E = 6\alpha^2.$$



Σχ. 11·9α.



Σχ. 11·9β.

11·10 Μονάδες μετρήσεως τοῦ ὄγκου.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τοὺς ὄγκους τῶν στερεῶν ἤ, ὅπως συνήθως λέγομεν, διὰ νὰ τὰ κυβίσωμεν, χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα τὸν κύβον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα μήκους. Αἱ συνηθέστεραι μονάδες εἶναι τὸ *κυβικὸν μέτρον* (m^3), ἡ *κυβικὴ παλάμη* (dm^3), τὸ *κυβικὸν ἑκατοστόμετρον* (cm^3) καὶ τὸ *κυβικὸν χιλιοστόμετρον* (mm^3). Μεταξὺ τῶν μονάδων αὐτῶν ὑφίστανται αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

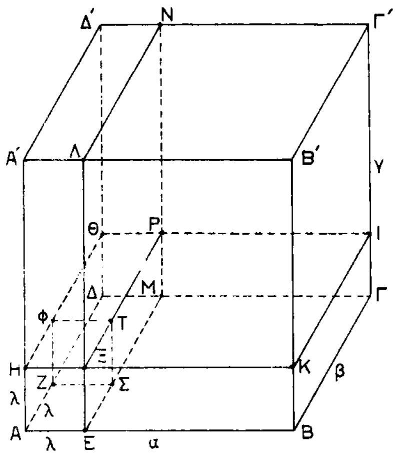
$$1m^3 = 10^3\,dm^3 = 10^6\,cm^3 = 10^9\,mm^3$$
$$1dm^3 = 10^{-3}\,m^3 = 10^3\,cm^3 = 10^6\,mm^3$$
$$1cm^3 = 10^{-6}\,m^3 = 10^{-3}\,dm^3 = 10^3\,mm^3,$$
$$1mm^3 = 10^{-9}\,m^3 = 10^{-6}\,dm^3 = 10^{-3}\,cm^3.$$

11·11 Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ὁ ὄγκος V παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του (α, β, γ), ἄρα *καὶ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ B τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του $υ$.*

$$V = α \cdot β \cdot γ = (α \cdot β) \cdot γ = B \cdot υ.$$

Πράγματι ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ μετρήσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΓ′ (σχ. 11 · 11), ποὺ ἔχει διαστάσεις $AB = α$, $BΓ = β$, $ΓΓ' = γ$.



Σχ. 11·11.

Εἰς τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου γωνίας Α ὁρίζομεν τὰ τμήματα $AE = AZ = AH = λ$, ὅπου $λ$ μία μονὰς μήκους. Ἀπὸ τὸ Η φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΗΚΙΘ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ. Σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔΙ, ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τὸ ΑΒΓΔΓ′. Συμφώνως πρὸς τὴν παράγραφον 11 · 7 (IV) θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{(ΑΒΓΔΓ')}{(ΑΒΓΔΙ)} = \frac{(ΑΑ')}{(ΑΗ)} = \frac{γ}{λ}. \qquad (1)$$

Κατόπιν φέρομεν ἀπὸ τὸ Ε τὸ ἐπίπεδον ΕΜΝΛ παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΑΔΔ′Α. Σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΕΜΔΡ. Ἐὰν εἰς τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔΙ καὶ ΑΕΜΔΡ λάβωμεν ὡς βάσεις τὴν κοινὴν ἕδραν ΑΔΘΗ, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{(ΑΒΓΔΙ)}{(ΑΕΜΔΡ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΑΕ)} = \frac{α}{λ}. \qquad (2)$$

Τέλος ἀπὸ τὸ Ζ φέρομεν ἐπίπεδον ΖΣΤΦ παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΑΕΞΗ. Σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΕΣΖΤ, τὸ ὁποῖον εἶναι κύβος μὲ πλευρὰν τὴν μονάδα μήκους καὶ ἑπομένως μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων $(\mathrm{ΑΕΣΖΤ})=1$. Ἐὰν εἰς τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΕΜΔΡ καὶ ΑΕΣΖΤ λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν κοινὴν ἕδραν ΑΕΞΗ, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{(\mathrm{ΑΕΜΔΡ})}{(\mathrm{ΑΕΣΖΤ})}=\frac{(\mathrm{ΑΔ})}{(\mathrm{ΑΖ})}=\frac{\beta}{\lambda}. \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζομεν τώρα κατὰ τὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) καὶ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις εὑρίσκομεν:

$$\frac{(\mathrm{ΑΒΓΔΓ'})}{(\mathrm{ΑΕΣΖΤ})}=\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{\lambda^3} \text{ ἤ,}$$

ἐπειδὴ $\lambda=1$ καὶ $(\mathrm{ΑΕΣΖΤ})=1$,

$$(\mathrm{ΑΒΓΔΓ'})=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma.$$

Προϋποτίθεται φυσικὰ ὅτι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν μετρηθῆ μὲ τὴν ἰδίαν μονάδα μήκους, ὅτι μονὰς ὄγκου εἶναι ὁ κύβος μὲ ἀκμὴν ἴσην πρὸς τὴν χρησιμοποιουμένην μονάδα μήκους καὶ μονὰς ἐπιφανείας τὸ τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους.

11·12 Ὄγκος ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου.

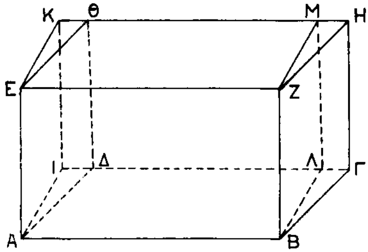
Ὁ ὄγκος V τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ Β τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του υ. Ἤτοι:

$$\mathrm{V}=\mathrm{B}\cdot\upsilon.$$

Ἔστω τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον (ΑΒΓΔΗ), ποὺ ἔχει βάσιν τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 11·12). Αἱ πλευρικαὶ ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Φέρομεν κάθετα ἐπίπεδα πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀντιστοίχως τὰ ΑΙΚΕ καὶ ΒΛΜΖ, καὶ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΛΙΕΖΜΚ. Τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ καὶ τὸ ὀρθόν, ποὺ μᾶς ἐδόθη, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἰσεμβαδικὰς βάσεις [(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΛΙ)], ἄρα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.

"Ωστε: ὄγκος (ΑΒΓΔΗ) = (ΑΒΛΙΜ) =

(ΑΒΛΙ) ΑΕ = (ΑΒΓΔ) (ΑΕ).



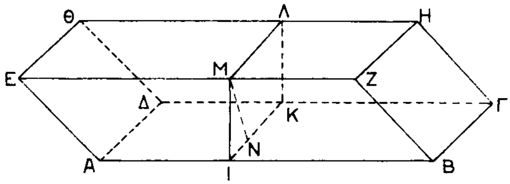
Σχ. 11·12.

11·13 Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ὁ ὄγκος V τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ B τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του υ. Ἤτοι:

$$V = B \cdot \upsilon.$$

Ἔστω τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΗ (σχ. 11·13). Φέρομεν μίαν κάθετον τομήν του, τὴν ΙΚΛΜ, καὶ τὴν ΜΝ κάθετον πρὸς τὴν ΙΚ. Ἡ ΜΝ τότε θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, δηλαδὴ θὰ εἶναι ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀντίστοιχον μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ.



Σχ. 11·13.

Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΗ ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, ποὺ ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομήν του ΙΚΛΜ καὶ ὕψος τὴν ἀκμήν του ΑΒ [παράγρ. 11·7 (V)].

Ὥστε :

$$(ΑΒΓΔΗ) = (ΙΚΛΜ)(ΑΒ) = (ΙΚ)(ΜΝ)(ΑΒ) = (ΑΒ)(ΙΚ)(ΜΝ)$$
$$= (ΑΒΓΔ)(ΜΝ) \; [\text{ἐπειδὴ } (ΑΒ)(ΙΚ) = (ΑΒΓΔ)].$$

11·14 Ἀρχὴ τοῦ Cavalieri.

Ὁ τύπος, ποὺ μᾶς παρέχει τὸν ὄγκον τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, προκύπτει καὶ ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον πρότασιν, ποὺ διετύπωσεν καὶ ἀπέδειξεν ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς Cavalieri (17ος αἰών).

Ἀρχὴ τοῦ Cavalieri: Ἐὰν δύο στερεὰ στηρίζωνται ἐπάνω εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π καὶ αἱ τομαί των μὲ κάθε ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ Π εἶναι ἴσαι ἢ ἰσεμβαδικαὶ (ἰσοδύναμοι), τότε τὰ δύο στερεὰ ἔχουν ἴσους ὄγκους.

Ἐὰν λοιπὸν ἔχωμεν ἕνα πλάγιον παραλληλεπίπεδον καὶ θεωρήσωμεν τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ πλάγιον, τότε αἱ τομαὶ τῶν δύο παραλληλεπιπέδων, ποὺ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν κοινήν των βάσιν, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτήν, ἑπομένως δὲ καὶ μεταξύ των, ἀλλὰ τότε συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ Cavalieri τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον, ποὺ εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς κοινῆς των βάσεως ἐπὶ τὸ κοινὸν ὕψος των.

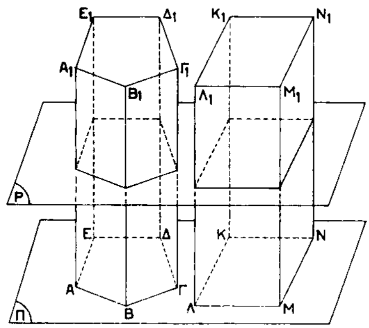
11·15 Ὄγκος τοῦ πρίσματος.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον V ἑνὸς πρίσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν Β τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του υ. Ἤτοι :

$$V = B \cdot υ.$$

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος $ΑΒΓΔΕΕ_1$ (σχ. 11·15).

Κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ βάσιν τὸ ὀρθογώνιον ΚΛΜΝ ἰσεμβαδικὸν πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος MM_1 ἴσον μὲ τὸ ὕψος EE_1 τοῦ πρίσματος. Στηρίζομεν τὰ δύο στερεὰ μὲ τὰς βάσεις των ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π. Αἱ τομαὶ τῶν δύο στερεῶν μὲ οἱονδήποτε ἐπίπεδον Ρ παράλληλον πρὸς τὸ Π θὰ εἶναι πάντοτε μεταξύ των ἰσεμβαδικαί, διότι θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως μὲ τὰς ἰσεμβαδικὰς βάσεις των. Ἑπομένως τὰ δύο στερεὰ θὰ ἔχουν (ἀρχὴ τοῦ Cavalieri) ἴσους ὄγκους $(ΑΒΓΔΕE_1) = (ΚΛΜΝN_1) = (ΚΛΜΝ)(NN_1) = (ΑΒΓΔΕ)(EE_1)$.



Σχ. 11·15.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου τοῦ πλαγίου πρίσματος ἔχομεν καὶ τὸν ἀκόλουθον κανόνα, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν παράγραφον 11·7 (V). *Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς πλαγίου πρίσματος πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν πλευρικὴν ἀκμήν του.*

11·16 Ὑπολογισμὸς τοῦ βάρους ἑνὸς σώματος.

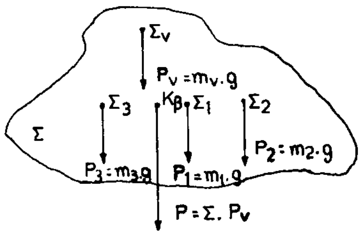
Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος ἢ ὑλικοῦ, ποὺ μᾶς εἶναι γνωστὸς ὁ ὄγκος του, εἶναι ἀρκετὸν νὰ γνωρίζωμεν τὸ εἰδικόν του βάρος, δηλαδὴ τὸ βάρος τῆς μονάδος ὄγκου ἀπὸ τὸ σῶμα ἢ τὸ ὑλικὸν αὐτό, μὲ τὴν ὁποίαν ἔχομεν μετρήσει τὸ σῶμα.

Τὸ γινόμενον τοῦ ὄγκου τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικόν του βάρος μᾶς παρέχει τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἐννοεῖται ὅτι τὸ βάρος αὐτὸ θὰ ἐκφράζεται εἰς τὰς αὐτὰς μονάδας βάρους, μὲ τὰς ὁποίας ἐκφράζεται καὶ τὸ βάρος τῆς μονάδος ὄγκου.

Συνήθως τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος ἐκφράζεται εἴτε εἰς ***γραμμάρια βάρους (pond) ἀνὰ κυβικὸν ἑκατοστόμετρον*** (gr^*/cm^3 ἢ p/cm^3), εἴτε εἰς ***χιλιόγραμμα βάρους (kilopond) ἀνὰ κυβικὸν δεκατόμετρον*** (κυβικὴν παλάμην) (kg^*/dm^3 ἢ kp/dm^3), εἴτε εἰς ***τόννους ἀνὰ κυβικὸν μέτρον***.

11·17 Κέντρον βάρους.

Κάθε στερεὸν σῶμα Σ δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ἕνα σύνολον ὑλικῶν σημείων Σ_1, Σ_2, Σ_3... (σχ. 11·17). Κάθε ἕνα ἀπὸ



Σχ. 11 · 17.

τὰ ὑλικὰ αὐτὰ σημεῖα Σ_ν ἕλκεται ἀπὸ τὴν γῆν μὲ μίαν δύναμιν $P_\nu = m_\nu \cdot g$ (ὅπου m_ν ἡ μᾶζα τοῦ Σ_ν καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος). Ἔτσι εἰς τὸ σῶμα ἐνεργεῖ ἕνα σύστημα παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων P_1, P_2, P_ν,...Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων αὐτῶν εἶναι τὸ βάρος P τοῦ σώματος καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της εἶναι τὸ κέντρον βάρους (K_β) τοῦ σώματος.

Ἡ θέσις τοῦ K_β ἑνὸς σώματος εἶναι ἀνεξάρτητος μὲν ἀπὸ τὸν τρόπον στηρίξεως τοῦ σώματος, ἐξαρτᾶται ὅμως ἀπὸ τὸ σχῆμα τοῦ σώματος καὶ τὸν τρόπον κατανομῆς τῆς ὕλης μέσα εἰς τὴν μᾶζαν του.

Ὅταν τὸ σῶμα εἶναι *ὁμογενές*, δηλαδὴ ὅταν ἡ ὕλη του εἶναι ὁμοιομόρφως κατανεμημένη εἰς ὅλα τὰ μέρη τοῦ σώματος, ἡ θέσις τοῦ K_β ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ σχῆμα τοῦ σώματος.

Ἡ Μηχανικὴ μᾶς διδάσκει πῶς νὰ προσδιορίζωμεν τὸ K_β ἑνὸς σώματος εἴτε πειραματικῶς εἴτε μὲ ὑπολογισμούς. Διὰ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα, ὅταν τὰ θεωρήσωμεν ὡς ὑλικὰ ὁμογενῆ σώματα, δηλαδὴ ὅτι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὑλικὰ σημεῖα ὁμοιομόρφως κατανεμημένα, ἀποδεικνύονται αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις:

α) *Τὸ K_β εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος.*

β) *Τὸ K_β ἐπιπέδου σχήματος* (γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας), *ποὺ ἔχει κέντρον συμμετρίας, εἶναι τὸ κέντρον συμμετρίας.* Π.χ. τὸ K_β τῆς περιμέτρου καὶ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του, τὸ K_β ἑνὸς κύκλου καὶ τῆς περιφερείας του εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κλπ.

γ) *Τὸ K_β ἐπιπέδου σχήματος* (γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας), *ποὺ ἔχει ἄξονα συμμετρίας, εἶναι σημεῖον τοῦ ἄξονος.*

δ) *Τὸ K_β ἑνὸς τόξου περιφερείας κύκλου* (K, R), *ποὺ ἔχει μῆκος S καὶ μῆκος ἀντιστοίχου χορδῆς l, κεῖται ἐπάνω εἰς τὴν ἀκτῖνα, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου:*

$$K K_\beta = \delta = \frac{R \cdot l}{S}.$$

Διὰ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἐπειδὴ $S = \pi R$ καὶ $l = 2R$, ἔχομεν:

$$\delta = \frac{R \cdot 2R}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

Διὰ τὸ τεταρτημόριον, ἐπειδὴ $S = \frac{\pi R}{2}$ καὶ $l = R\sqrt{2}$ (πλευρὰ τετραγώνου), ἔχομεν:

$$\delta = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot R}{\pi}.$$

ε) *Τὸ K_β τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τριγώνου καθὼς καὶ τῆς περιμέτρου του εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων του.*

ζ) *Τὸ K_β κυκλικοῦ τομέως κύκλου* (K, R), *ποὺ ἔχει μῆκος τόξου S καὶ μῆκος χορδῆς l, εἶναι σημεῖον τῆς ἀκτῖνος, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου του καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ K:*

$$\delta = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \cdot l}{S}.$$

Διὰ τὸ ἡμικύκλιον ἔχομεν:

$$\delta = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Διὰ τὸ τεταρτοκύκλιον ἔχομεν:

$$\delta = \frac{4}{3} R \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

η) *Τὸ K_β ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του.*

θ) *Τὸ K_β τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, ποὺ ἑνώνει τὰ K_β τῶν βάσεών του.*

ι) *Τὸ K_β τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἄξονός του κλπ.*

11·18 'Εφαρμογαί.

1) Ἕνα βυτιοφόρον αὐτοκίνητον ἔχει χωρητικότητα 1500 ἀμερικανικῶν γαλονίων καὶ εἶναι γεμᾶτον μὲ βενζίνην. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τῆς βενζίνης (εἰδικὸν βάρος βενζίνης 0,720 kp/dm^3).

Λύσις. Τὸ ἀμερικανικὸν γαλόνι ἰσοδυναμεῖ μὲ ὄγκον 3,785 dm^3, ἐπομένως τὸ βάρος ἑνὸς γαλονίου ἀπὸ τὴν βενζίνην αὐτὴν θὰ εἶναι $3{,}785 \times 0{,}720 = 2{,}725\,2$ κιλὰ (kp) καὶ τὸ βάρος τῆς βενζίνης τοῦ βυτίου θὰ εἶναι:

$$1\,500 \times 2{,}725\,2 \simeq 4\,087{,}8 \text{ κιλὰ (kp)}.$$

2) Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα δοχεῖον ἀπὸ λευκοσί-

δηρον, τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ 180 κιλὰ ἐλαίου καὶ νὰ ἔχῃ διαστάσεις ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5,3,2. Μὲ τί διαστάσεις θὰ τὸ κατασκευάσωμεν (εἰδικὸν βάρος ἐλαίου 0,9);

Λύσις. Ἂν α dm, β dm, γ dm εἶναι αἱ ζητούμεναι διαστάσεις, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{2} = \lambda,$$

ἀπὸ τὰς ὁποίας προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι:

$$\alpha = 5\lambda \text{ dm}, \ \beta = 3\lambda \text{ dm}, \ \gamma = 2\lambda \text{ dm}.$$

Ὁ ὄγκος V συνεπῶς τοῦ δοχείου θὰ εἶναι $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 5\lambda \cdot 3\lambda \cdot 2\lambda = 30\lambda^3 \text{ dm}^3$.

Τὸ βάρος ἑνὸς σώματος, ὅπως γνωρίζομεν, τὸ εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικόν του βάρος. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν:

$$B = 30\lambda^3 \cdot 09 = 27\lambda^3 \text{ κιλὰ (kp)}.$$

Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$27\lambda^3 = 180$ καὶ εὑρίσκομεν:

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{20}{3}} \simeq 1{,}88. \quad \text{Ἑπομένως:}$$

$$\alpha = 5 \times 1{,}88 = 9{,}4 \text{ dm} = 94 \text{ cm}.$$

$$\beta = 3 \times 1{,}88 = 5{,}64 \text{ dm} = 56{,}4 \text{ cm}.$$

$$\gamma = 2 \times 1{,}88 = 3{,}76 \text{ dm} = 37{,}6 \text{ cm}.$$

11·19 Ἀσκήσεις.

1) Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 12 cm καὶ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 4 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς καὶ τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας.

2) Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 10 cm. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ὑποτείνουσαν τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρικήν του ἐπιφάνειαν.

3) Ἕνα πλάγιον πρῖσμα ἔχει κάθετον τομὴν κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 12 cm καὶ πλευρικὴν ἀκμὴν 30 cm. Ἡ γωνία, ποὺ σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον τῆς καθέτου τομῆς μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, εἶναι 30^0. Νὰ ὑπολογίσετε: α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς του ἐπιφανείας. β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του. γ) Τὸ ὕψος του.

4) Πόσον στοιχίζει ἡ κατασκευὴ ἑνὸς ὀρθογωνίου δοχείου (τεπόζιτου) μὲ διαστάσεις 1,80 m × 1,40 m × 2 m, ὅταν ἡ μὲν τιμὴ τῶν φύλλων τῆς λαμαρίνας εἶναι 300 δρχ. τὸ 1 m^2, τὰ δὲ λοιπὰ ἔξοδα κατασκευῆς 125 δρχ. ἀνὰ 1 m^3 χωρητικότητος;

5) Μία ξυλίνη δοκὸς ἔχει μῆκος 5 m, πλάτος 25 cm καὶ πάχος 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος της (εἰδ. βάρος τοῦ ξύλου 0,804).

6) Ἕνα πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει βάσεις ρόμβους μὲ διαγωνίους 12 cm καὶ 16 cm. Ἑκάστη πλευρική του ἀκμὴ εἶναι 20 cm καὶ ἡ γωνία κλίσεώς της πρὸς τὴν βάσιν εἶναι 60^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον του.

7) Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τῶν πρισμάτων τῶν ἀσκήσεων 1, 2, 3.

8) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρον ράβδου ἐξ ἀλουμινίου (εἰδ. βάρ. 2,7) μὲ διατομήν: α) Ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 3 cm. β) Τετράγωνον πλευρᾶς 3 cm. γ) Κανονικὸν πεντάγωνον πλευρᾶς 2 cm. δ) Κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 2 cm. ε) Κανονικὸν ὀκτάγωνον πλευρᾶς 2 cm. ζ) Κανονικὸν δεκάγωνον πλευρᾶς 2 cm. η) Κανονικὸν δωδεκάγωνον πλευρᾶς 2 cm. (Ὑπόδειξις: Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν βάσεων νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ τριγωνομετρικαὶ σχέσεις τοῦ Α΄ Τόμου, παράγρ. 9·12).

9) Ἕνα δοχεῖον (τεπόζιτο) βενζίνης σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει διαστάσεις 1,20 m × 0,80 m × 0,60 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν χωρητικότητά του εἰς ἀμερικανικὰ γαλόνια καὶ τὸ βάρος τῆς βενζίνης εἰς κιλά, ποὺ χωρεῖ εἰς αὐτὸ [παράγρ. 11·18(1)].

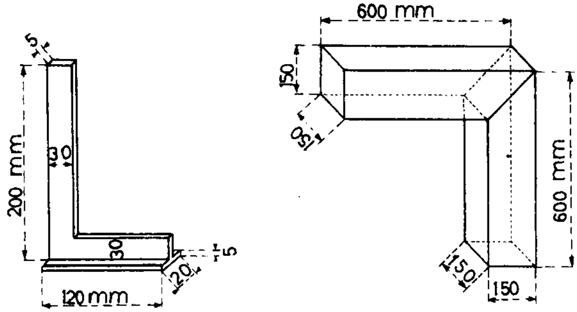
10) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῶν ἐξαρτημάτων τοῦ σχήματος 11·19α.

11) Νὰ κυβίσετε (νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον) τοὺς τοίχους τῆς ἀποθήκης τοῦ σχήματος 11·19β.

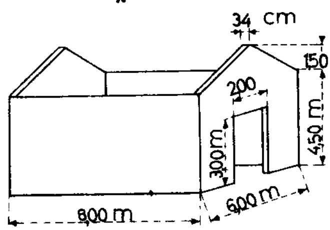
12) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρον τῶν σιδηρῶν δοκῶν, τῶν ὁποίων αἱ διατομαὶ δίδονται εἰς τὸ σχῆμα 11·19γ.

13) Ἀπὸ μίαν σιδηρᾶν ράβδον μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 32

mm θέλομεν νὰ ἀποκόψωμεν ἕνα τεμάχιον βάρους 10 κιλῶν. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τεμαχίου;



Σχ. 11·19 α.



Σχ. 11·19 β.

14) Τί ὕψος πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς μίαν δεξαμενὴν μὲ βάσιν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον διαστάσεων 6,5 καὶ 3,8 m, διὰ νὰ χωρῇ 75 m^3 ὕδωρ;

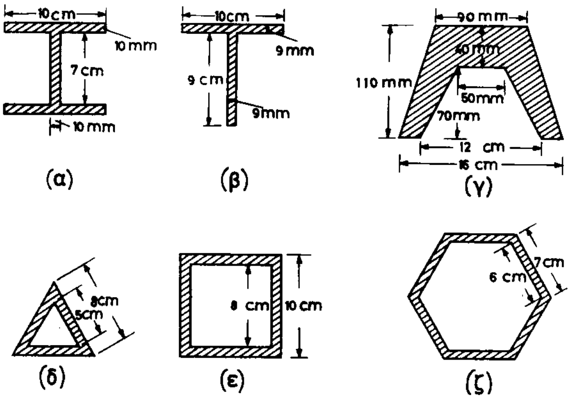
15) Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς (ἀνοικτοῦ) δοχείου μὲ σχῆμα κύβου ἐχρησιμοποιήθησαν 3,375 m^2 λαμαρίνας. Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἰς dm^3;

16) Ἕνα σιδηροῦν τεμάχιον μήκους 12 cm, ἔχει σχῆμα πρίσματος μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 6 cm. Τορνεύομεν τὸ τεμάχιον, ὥστε ἡ βάσις του νὰ καταστῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 11·19δ. Πόσον βάρος ἔχασε τὸ σιδηροῦν τεμάχιον (εἰδικὸν βάρος μετάλλου 7,8);

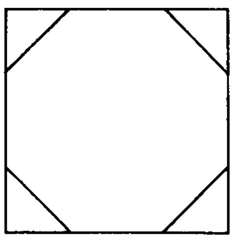
17) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς διαγωνίους: α) Ἑνὸς κύβου μὲ πλευρὰν 12 cm. β) Ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 6 cm × 8 cm × 24 cm.

18) Ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὁλικὴν ἐπιφάνειαν

468 cm² καὶ διαστάσεις ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον του.



Σχ. 11·19γ.



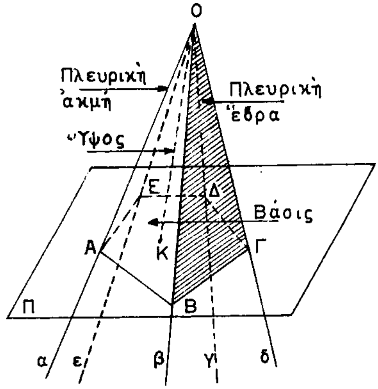
Σχ. 11·19δ.

19) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 117 cm². Τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου τῆς βάσεως εἶναι διπλάσιον τοῦ πλάτους του καὶ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων διαστάσεων. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον του.

20) Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 12 cm. Τέμνομεν τὸ πρῖσμα μὲ ἕνα ἐπίπεδον, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ τῆς βάσεως καὶ σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν γωνίαν 60°. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς διχοτομῇ τὰς πλευρικὰς ἀκμάς, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ, νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος.

11·20 Πυραμίδες.

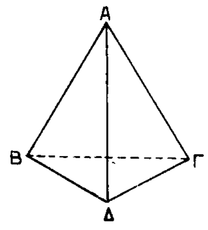
Ἔστω Οαβγδε μία στερεὰ γωνία (σχ. 11·20 α). Ἄς φέρω-



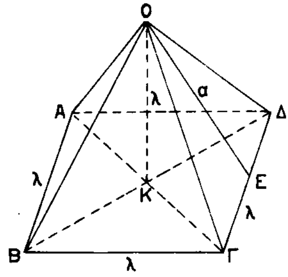
Σχ. 11·20 α.

μεν ἕνα ἐπίπεδον Π κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ τέμνῃ ὅλας τὰς ἀκμάς της, χωρὶς ὅμως νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφήν της Ο. Αἱ τομαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ... τῶν ἑδρῶν τῆς Ο μὲ τὸ Π προσδιορίζουν ἐπάνω μὲν εἰς τὸ Π ἕνα πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ, ποὺ εἶναι ἡ τομὴ τῆς στερεᾶς γωνίας μὲ τὸ Π, ἐπάνω δὲ εἰς τὰς ἕδρας τῆς γωνίας ἀντιστοίχως τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ..., ποὺ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο. Τὸ πολύεδρον ΟΑΒΓΔΕ, ποὺ περιορίζεται ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ τὴν τομὴν ΑΒΓΔΕ, λέγεται *πυραμίς*. Ἡ τομὴ ΑΒΓΔΕ λέγεται *βάσις* τῆς πυραμίδος, τὸ Ο *κορυφή*, τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ... *πλευρικαὶ ἕδραι* καὶ ἡ ἀπόστασις ΟΚ τῆς κορυφῆς Ο ἀπὸ τὴν βάσιν *ὕψος* τῆς πυραμίδος. Μία πυραμὶς λέγεται *τριγωνική*, *τετραγωνική*, *πενταγωνική*..., ὅταν ἡ βάσις της εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον....Μία τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται καὶ *τετράεδρον*. Ὡς βάσιν ἑνὸς τετραέδρου ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν οἱανδήποτε ἕδραν του. Τὸ τετράεδρον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, λέγεται *κανονικὸν τετράεδρον* (σχ. 11·20 β).

Μία πυραμὶς λέγεται *κανονική*, ὅταν ἡ βάσις της εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ τὸ ὕψος της διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ

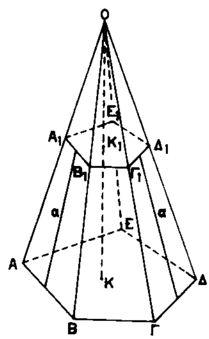


Σχ. 11·20β.



Σχ. 11·20γ.

πολυγώνου (σχ. 11·20γ). Εἰς μίαν κανονικὴν πυραμίδα ὅλαι



Σχ. 11·20δ.

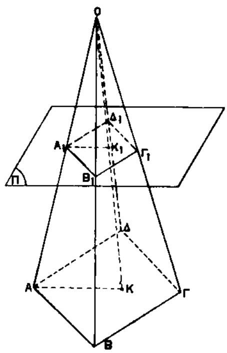
αἱ πλευρικαὶ ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ πλευρικαὶ ἕδραι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Τὸ κοινὸν μῆκος α τῶν ὑψῶν, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν αὐτῶν τριγώνων, λέγεται *ἀπόθημα* ἢ *πλευρικὸν ὕψος* τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

Κόλουρος πυραμὶς λέγεται τὸ μέρος μιᾶς πυραμίδος, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεώς της καὶ μιᾶς τομῆς της, μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν (παράλληλος τομή). Τὸ πολύεδρον $ΑΒΓΔΕΑ_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ τοῦ σχήματος 11·20δ εἶναι μία κόλουρος πυραμίς. Αἱ παράλληλοι ἕδραι $Α_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ καὶ ΑΒΓΔΕ εἶναι αἱ ***βάσεις***, ἡ δὲ ἀπόστασις $ΚΚ_1$ τῶν δύο βάσεων εἶναι τὸ *ὕψος* τῆς κολούρου πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμὶς λέγεται κανονική, ὅταν ἡ πυραμίς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀπεκόπη, εἶναι *κανονική*. Αἱ βάσεις της τότε εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, αἱ δὲ πλευρικαὶ ἕδραι της *ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια*. Τὸ κοινὸν μῆκος α τῶν ὑψῶν τῶν τραπεζίων αὐτῶν λέγεται *ἀπόθημα* ἢ *πλευρικὸν ὕψος* τῆς κολούρου πυραμίδος.

11·21 Ἰδιότητες τῆς πυραμίδος.

I. Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ (σχ. 11·21α) καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, ποὺ τέμνει τὰς ἀκμὰς ΟΑ,



Σχ. 11·21 α.

ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ καὶ τὸ ὕψος ΟΚ τῆς πυραμίδος ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$, $Δ_1$, $Κ_1$. Ἐπειδὴ εἶναι $Α_1Β_1//ΑΒ$, $Β_1Γ_1//ΒΓ$, $Γ_1Δ_1//ΓΔ$, $Δ_1Α_1//ΔΑ$ [παράγρ. 10·7(VIII)], θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

α) $\widehat{Α_1}=\widehat{Α}$, $\widehat{Β_1}=\widehat{Β}$, $\widehat{Γ_1}=\widehat{Γ}$, $\widehat{Δ_1}=\widehat{Δ}$ [παράγρ. 10·7(X)].

β) τρ. $Α_1ΟΒ_1 \sim$ τρ. ΑΟΒ, τρ. $Β_1ΟΓ_1 \sim$ τρ. ΒΟΓ, τρ. $Γ_1ΟΔ_1 \sim$

τρ. ΓΟΔ, τρ. $Δ_1ΟΑ_1 \sim$ τρ. ΔΟΑ, τρ. $Α_1Κ_1Ο \sim$ τρ. ΑΚΟ (παράγρ. 8·37, Α΄ Τόμος) καὶ συνεπῶς:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}=\cdots=\frac{OA_1}{OA}=\frac{OK_1}{OK}=\lambda.$$

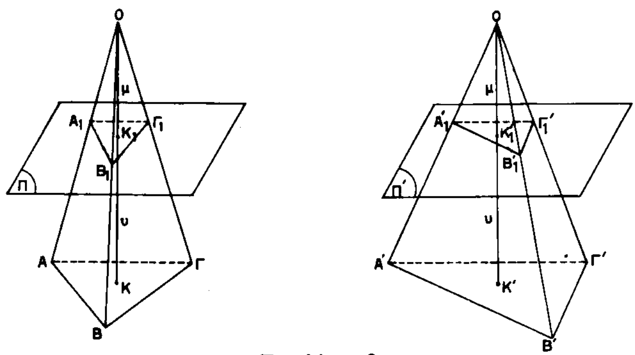
γ) Ἡ τομὴ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ καὶ ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι πολύγωνα ὅμοια μὲ λόγον ὁμοιότητος $\lambda=\frac{OA_1}{OA}=\frac{OK_1}{OK}$, διότι ἀπὸ τὰς προηγουμένας σχέσεις προκύπτει ὅτι ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς ἀναλόγους.

δ) *Ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου* $\left(\frac{OK_1}{OK}\right)$ *τῶν ἀντιστοίχων ἀποστάσεων τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος:*

$$\frac{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}{(AB\Gamma\Delta)}=\left(\frac{OK_1}{OK}\right)^2.$$

ΙΙ. Αἱ βάσεις μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι πολύγωνα ὅμοια.

ΙΙΙ. Ἂν εἰς δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδας ΟΑΒΓ, Ο΄Α΄Β΄Γ΄



Σχ. 11·21 β.

(σχ. 11·21 β) *δύο ἀντίστοιχοι τομαὶ* $A\,B_1\Gamma_1$, $A_1'B_1'\Gamma_1'$ *εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις τῶν πυρααίδων των καὶ ἰσαπέχουν* *ἀπὸ τὰς κορυφάς των, τότε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχων βάσεων:*

$$\frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(AB\Gamma)} = \frac{(A_1'B_1'\Gamma_1')}{(A'B'\Gamma')}.$$

Διότι, ἂν μ εἶναι τὸ μῆκος τῶν ἴσων ἀποστάσεων τῶν τομῶν ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς καὶ υ τὸ μῆκος τῶν ἴσων ὑψῶν τῶν πυραμίδων, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(AB\Gamma)} = \frac{\mu^2}{\upsilon^2} = \frac{(A_1'B_1'\Gamma_1')}{(A'B'\Gamma')}.$$

IV. Εἰς δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδας μὲ ἴσας ἢ ἰσεμβαδικὰς βάσεις δύο ἀντίστοιχοι τομαί, ποὺ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν πυραμίδων των, εἶναι ἰσεμβαδικαί.

11·22 Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας μιᾶς πυραμίδος ἰσοῦται γενικῶς μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν της (παρβλ. σχ. 11·20 γ). Εἰς τὴν κανονικὴν ὅμως πυραμίδα αἱ πλευρικαὶ ἕδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει βάσιν ἴσην μὲ μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς λ τῆς βάσεως, ὕψος τὸ ἀπόθημα α τῆς πυραμίδος καὶ ἐμβαδόν: $E = \frac{\lambda \cdot \alpha}{2}$.

Ἂν λοιπὸν ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἔχῃ ν πλευράς, τότε τὸ ἐμβαδὸν E_π τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας της θὰ εἶναι: $E_\pi = \nu \cdot \frac{\lambda \cdot \alpha}{2} = \frac{\nu \cdot \lambda}{2} \cdot \alpha =$ *ἡμιπερίμετρος τ τῆς βάσεως × ἀπόθημα*:

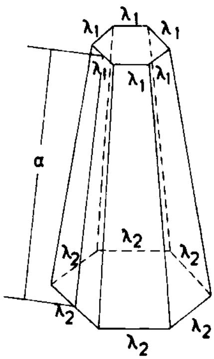
$$E_\pi = \tau \cdot \alpha.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς της ἐπιφανείας $E_{o\lambda}$ θὰ εἶναι φυσικὰ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας της καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ Β τῆς βάσεώς της:

$$E_{ολ} = E_π + B.$$

11·23 Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κανονικῆς κολούρου πυραμίδος.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος ἰσοῦται γενικῶς μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν πλευρι-



Σχ. 11·23.

κῶν ἑδρῶν της (σχ. 11·23). Εἰς τὴν κανονικὴν ὅμως κόλουρον πυραμίδα αἱ πλευρικαὶ ἕδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια, κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει βάσεις ἀντιστοίχως ἴσας μὲ τὰς πλευρὰς $λ_1$ καὶ $λ_2$ τῶν βάσεων B_1 καὶ B_2 τῆς κολούρου πυραμίδος, ὕψος τὸ ἀπόθημά της α καὶ ἐμβαδόν:

$$E = \frac{(λ_1 + λ_2)α}{2}.$$

Ἂν συνεπῶς κάθε μία ἀπὸ τὰς βάσεις της ἔχῃ ν πλευράς, τότε τὸ ἐμβαδὸν $E_π$ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας της θὰ εἶναι:

$$E_π = ν\frac{(λ_1 + λ_2)}{2}\cdot α = \frac{νλ_1 + νλ_2}{2}\cdot α = \left(\frac{νλ_1}{2} + \frac{νλ_2}{2}\right)\cdot α =$$ *ἄθροισμα τῶν ἡμιπεριμέτρων* $τ_1 + τ_2$ *τῶν δύο βάσεων* × *ἀπόθημα.*

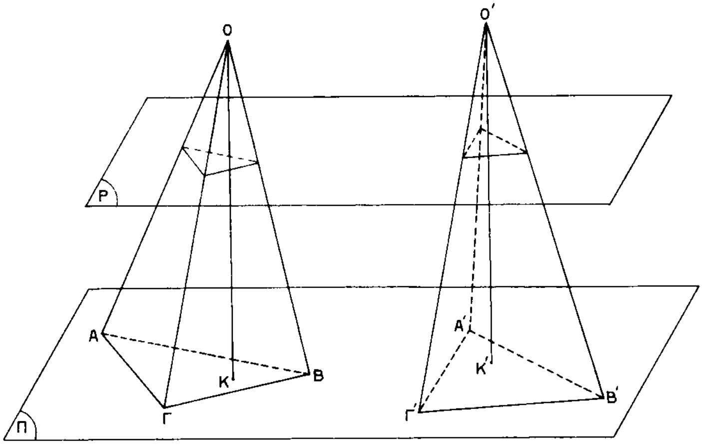
$$E_π = (τ_1 + τ_2)\cdot α.$$

Τὸ ἐμβαδὸν $E_{ολ}$ τῆς ὁλικῆς της ἐπιφανείας θὰ εἶναι φυσικὰ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ τοῦ ἀθροίσματος $B_1 + B_2$ τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο βάσεων:

$$E_{ολ} = E_{π} + B_1 + B_2.$$

11·24 Τριγωνικαὶ πυραμίδες μὲ ἴσα ὕψη καὶ ἴσας ἢ ἰσεμβαδικὰς βάσεις.

Ἂς συγκρίνωμεν τοὺς ὄγκους τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων ΟΑΒΓ καὶ Ο'Α'Β'Γ', ποὺ ἔχουν ἴσα ὕψη ΟΚ = Ο'Κ' καὶ ἰσεμβαδικὰς βάσεις (ΑΒΓ) = (Α'Β'Γ'). Στηρίζομεν αὐτὰς μὲ τὰς βάσεις των ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον Π (σχ. 11·24).



Σχ. 11·24.

Ἀφοῦ αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ἰσοϋψεῖς καὶ ἔχουν ἴσας ἢ ἰσεμβαδικὰς βάσεις, αἱ ἀντίστοιχοι τομαὶ αὐτῶν μὲ οἱονδήποτε ἐπίπεδον Ρ, παράλληλον πρὸς τὸ Π, θὰ εἶναι ἰσεμβαδικαί, διότι θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις των καὶ θὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς κορυφάς των (παράγρ. 11·21), συμφώνως δὲ πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ Cavalieri αἱ δύο πυραμίδες θὰ ἔχουν ἴσους ὄγκους:

$$(ΟΑΒΓ) = (Ο'Α'Β'Γ').$$

Ὥστε δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες μὲ ἴσα ὕψη καὶ ἴσας ἢ ἰσεμβαδικὰς βάσεις ἔχουν ἴσους ὄγκους.

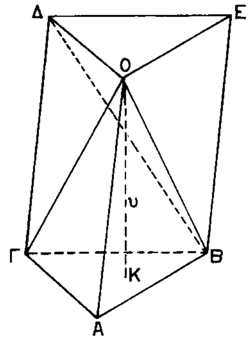
11·25 Ὄγκος τῆς πυραμίδος.

I. *Τριγωνικῆς πυραμίδος.*

Ὁ ὄγκος V μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ B τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος της υ:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot \upsilon = \frac{B \cdot \upsilon}{3}.$$

Πράγματι ἔστω ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ, ποὺ ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὕψος τὸ ΟΚ = υ. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ φέρομεν ἀντιστοίχως τὰ τμήματα ΒΕ καὶ ΓΔ ἴσα, παράλληλα καὶ ὁμόρροπα μὲ τὴν πλευρὰν ΑΟ. Σχηματίζεται τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΟΕ, ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΟΚ μὲ τὴν πυραμίδα ΟΑΒΓ (σχ. 11·25α).



Σχ. 11·25 α.

Τὰ ἐπίπεδα ΓΟΒ καὶ ΔΟΒ χωρίζουν τὸ πρῖσμα εἰς τὰς τρεῖς τριγωνικὰς πυραμίδας ΟΑΒΓ, ΟΒΔΓ καὶ ΒΟΕΔ. Αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓ καὶ ΒΟΕΔ ἔχουν βάσεις ἀντιστοίχως τὰς ἴσας βάσεις ΑΒΓ καὶ ΔΟΕ τοῦ πρίσματος καὶ ὕψη ἴσα μὲ τὸ ὕψος $OK = υ$ τοῦ πρίσματος, θὰ ἔχουν συνεπῶς καὶ ἴσους ὄγκους (παράγρ. 11 · 24): Ὥστε:

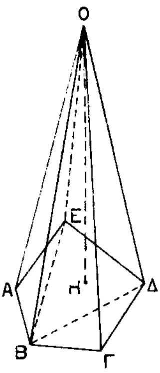
$$(OAB\Gamma) = (BOE\Delta).$$

Καὶ αἱ πυραμίδες ὅμως ΟΒΓΔ καὶ ΒΟΕΔ ἔχουν ἴσους ὄγκους, διότι, ἂν λάβωμεν ὡς βάσεις των ἀντιστοίχως τὰ ἴσα τρίγωνα ΓΒΔ καὶ ΔΒΕ, θὰ ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΓΒΕΔ. Ὥστε:

$$(OAB\Gamma) = (BOE\Delta) = (OB\Gamma\Delta).$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος (ΟΑΒΓ) εἶναι ἴσος μὲ τὸ 1/3 τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΟΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ αὐτὴν κοινὴν βάσιν καὶ κοινὸν ὕψος.

$$(OAB\Gamma) = \frac{1}{3}\,(AB\Gamma\Delta OE) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)\,(OK) = \frac{1}{3}\,B \cdot υ.$$



Σχ. 11·25 β.

II. *Οἱασδήποτε πυραμίδος.*

Ὁ ὄγκος V οἱασδήποτε πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ B τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της υ:

$$V = \frac{1}{3}\,(B \cdot υ) = \frac{B \cdot υ}{3}$$

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ΟΑΒΔΕ (σχ. 11 · 25 β). Τὰ διαγώνια ἐπίπεδα ΟΒΕ καὶ ΟΒΔ χωρίζουν τὴν πυραμίδα εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΟΒΓΔ, ΟΒΔΕ, ΟΒΕΑ, ποὺ ἔχουν κοινὸν ὕψος ΟΗ. Ἂν εἰς τὰς τριγωνικὰς αὐτὰς πυραμίδας ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην σχέσιν, θὰ ἔχωμεν:

$$(\mathrm{ΟΑΒΓΔΕ}) = \frac{1}{3}(\mathrm{ΒΓΔ})\cdot(\mathrm{ΟΗ}) + \frac{1}{3}(\mathrm{ΒΔΕ})\,(\mathrm{ΟΗ}) +$$

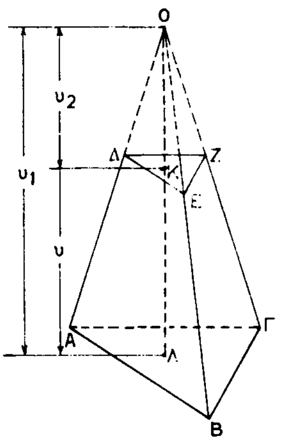
$$\frac{1}{3}(\mathrm{ΒΕΑ})\cdot(\mathrm{ΟΗ}) = \frac{1}{3}[(\mathrm{ΒΓΔ}) + (\mathrm{ΒΔΕ}) + (\mathrm{ΒΕΑ})](\mathrm{ΟΗ}) =$$

$$\frac{1}{3}(\mathrm{ΑΒΓΔΕ})\cdot(\mathrm{ΟΗ}).$$

11·26 Ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ὁ ὄγκος V μιᾶς κολούρου πυραμίδος μὲ ἐμβαδὰ βάσεων B_1 B_2 καὶ ὕψος υ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$V = \frac{1}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right)υ.$$



Σχ. 11·26.

Ἔστω ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 11 · 26), ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΟΑΒΓ. Ἂς παραστήσωμεν μὲ B_1 καὶ B_2 τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών της ΑΒΓ, ΔΕΖ, μὲ υ τὸ ὕψος της, μὲ V_1 καὶ $υ_1$ τὸν ὄγκον καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ καὶ μὲ V_2 καὶ $υ_2$ τὸν ὄγκον καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΟΔΕΖ. Θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\,\upsilon_1\,B_1 - \frac{1}{3}\,\upsilon_2\,B_2. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι παράλληλος τομὴ τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν (παράγρ. 11 · 21) τὴν σχέσιν: $\dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2}$,

ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

$$\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \text{ καὶ } \frac{\upsilon_1}{\sqrt{B_1}} = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}},$$

ἀπὸ αὐτὰς δὲ αἱ σχέσεις:

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon \cdot \sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}, \quad \upsilon_2 = \frac{\upsilon \cdot \sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}. \qquad (2)$$

Τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς τῶν υ_1, υ_2 εἰσάγομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{B_1\sqrt{B_1} - B_2\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{B_1})^3 - (\sqrt{B_2})^3}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} \cdot \upsilon =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2})\left[(\sqrt{B_1})^2 + \sqrt{B_1}\sqrt{B_2} + (\sqrt{B_2})^2\right]}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} \cdot \upsilon =$$

$$\frac{1}{3}\,(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2) \cdot \upsilon. \qquad (3)$$

11 · 27 Κολοβὰ πρίσματα.

Μία τομὴ ἑνὸς πρίσματος μὴ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν, τέμνουσα ὅμως ὅλας τὰς ἀκμάς του, π.χ. ἡ ΔΕΖ τοῦ $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ (σχ. 11 · 27 α), χωρίζει τὸ πρῖσμα εἰς δύο πολύεδρα, τὰ ΑΒΓΔΕΖ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$ΔΕΖ. Τὰ πολύεδρα αὐτὰ λέγονται *κολοβὰ πρίσματα*.

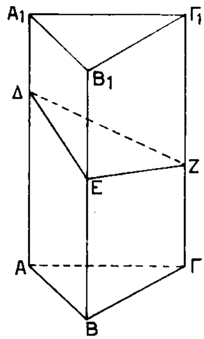
Γενικῶς *κολοβὸν πρῖσμα λέγεται τὸ πολύεδρον, ποὺ περιορίζεται ἀπὸ μίαν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν καὶ δύο τομάς της, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον.*

Αἱ δύο τομαὶ λέγονται *βάσεις* τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Ἂν ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο βάσεις εἶναι κάθετος τομή, τότε τὸ κολοβὸν πρῖσμα λέγεται *ὀρθόν*.

Ἀποδεικνύεται ὅτι *ὁ ὄγκος κάθε τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρί-*

σματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσιν μὲν μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς κορυφὰς τῆς ἄλλης βάσεως.

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν προκύπτουν οἱ ἀκόλουθοι δύο τύποι, ποὺ παρέχουν τὸν ὄγκον V ἑνὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.



Σχ. 11·27 α.

α) *Διὰ τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα:*

$$V = \frac{1}{3} B\,(l_1 + l_2 + l_3), \qquad (1)$$

ὅπου B τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ l_1, l_2, l_3 αἱ πλευραί του.

β) *Διὰ τὸ πλάγιον τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα* (σχ. 11·27β).

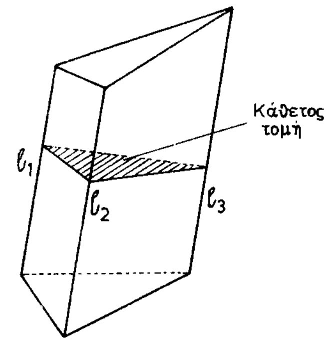
$$V = \frac{1}{3} B_\kappa\,(l_1 + l_2 + l_3), \qquad (2)$$

ὅπου B_κ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς καθέτου τομῆς τῆς πρισματικῆς του ἐπιφανείας καὶ l_1, l_2, l_3 αἱ πλευραί του.

Διὰ τὸ ὄγκον πολυγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος γενικῶς δὲν ὑπάρχει τύπος. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον του, τὸ χωρίζομεν εἰς τριγωνικὰ κολοβὰ πρίσματα, ὑπολογίζομεν τοὺς ὄγκους τῶν πρισμάτων αὐτῶν μὲ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) καὶ κατόπιν τοὺς προσθέτομεν.

Τὸ ἄθροισμά των μᾶς δίδει τὸν ὄγκον τοῦ πολυγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος.

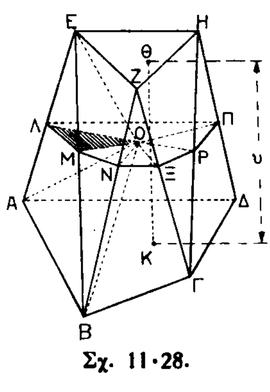
Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θὰ παραθέσωμεν τύπους, ποὺ παρέχουν τὸν ὄγκον εἰδικῶν κολοβῶν πρισμάτων, τὰ ὁποῖα συναντῶμεν εἰς τὰς τεχνικὰς ἐφαρμογάς.



Σχ. 11·27 β.

11·28 Πρισματοειδῆ πολύεδρα.

Πρισματοειδὲς λέγεται τὸ κυρτὸν πολύεδρον, ποὺ ἔχει δύο μὲν ἕδρας παραλλήλους, τὰς βάσεις του, τὰς ἄλλας δὲ τρίγωνα ἢ



Σχ. 11·28.

τραπέζια (σχ. 11·28), τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι καὶ κορυφαὶ τῶν δύο βάσεων.

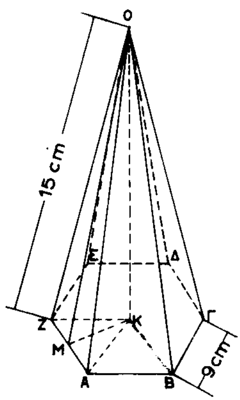
Τὸν ὄγκον V τοῦ πρισματοειδοῦς μᾶς δίδει ὁ ἀκόλουθος τύπος :

$$V = \frac{1}{6} \cdot υ\,(B_1 + B_2 + 4B_μ),$$

ὅπου υ (ὕψος) ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων βάσεων, B_1 καὶ B_2 τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών του καὶ $B_μ$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας του τομῆς ΛΜΝΞΡΠ, δηλαδὴ τῆς τομῆς του μὲ ἐπίπεδον, ποὺ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς δύο βάσεις.

11·29 Ἐφαρμογαί.

I. *Εἰς τὴν κανονικὴν ἑξαγωνικὴν πυραμίδα τοῦ σχήματος 11·29 α κάθε μία ἀπὸ τὰς πλευρικὰς ἀκμὰς ἔχει μῆκος 15 cm καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως 9 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν $E_π$ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος V τῆς πυραμίδος αὐτῆς.*



Σχ. 11·29 α.

Λύσις. α) Τὸ ἐμβαδὸν $E_π$ κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου τ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἀπόθημα α τῆς πυραμίδος (παράγρ. 11·22). Ἔχομεν :

$$\tau = \frac{6 \times 9}{2} = 27.$$

Τὸ ἀπόθημα $\alpha = \mathrm{OM}$ θὰ τὸ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OMA, εἰς τὸ ὁποῖον:

$$(\mathrm{OA}) = 15\,\mathrm{cm} \text{ καὶ } (\mathrm{MA}) = \frac{(\mathrm{AB})}{2} = 4{,}5\,\mathrm{cm}.$$

$$\mathrm{OM} = \sqrt{(\mathrm{OA})^2 - (\mathrm{AM})^2} = \sqrt{15^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{225 - 20{,}25} =$$

$\sqrt{204{,}75} \simeq 14{,}3\,\mathrm{cm}$. Ὥστε $\alpha = 14{,}3\,\mathrm{cm}$ καὶ $\mathrm{E}_\pi = 27 \times 14{,}3 =$ $= 386{,}1\,\mathrm{cm}^2$.

$$\text{Ἄρα } \mathrm{E}_\pi = 386{,}1\,\mathrm{cm}^2.$$

β) Τὸν ὄγκον V τῆς πυραμίδος δίδει ὁ τύπος: $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{B} \cdot \upsilon}{3}$.

$\mathrm{B} = (\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ}) = 6\ (\mathrm{AKB}) = 6 \cdot \frac{(\mathrm{AB})^2 \sqrt{3}}{4}$ [Α′ Τόμος, παράγρ. 8 · 21 (γ)].

$$\text{ἢ } \mathrm{B} = \frac{6 \times 9^2 \sqrt{3}}{4} = 121{,}5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2.$$

Τὸ ὕψος (OK) τὸ ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OKA:

$$(\mathrm{OK}) = \sqrt{(\mathrm{OA})^2 - (\mathrm{KA})^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,\mathrm{cm}.$$

$$\text{Ὥστε } \mathrm{V} = \frac{121{,}5\ \sqrt{3} \cdot 12}{3} = 486\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3.$$

II. *Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος V κανονικοῦ τετραέδρου συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α.*

Λύσις. Ἔστω τὸ κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ ($\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma A} = \mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma\Delta} = \alpha$) (σχ. 11 · 29β).

Λαμβάνομεν ὡς βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Θὰ ἔχωμεν:

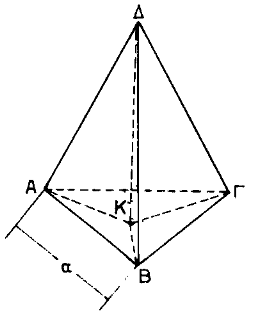
$$\mathrm{B} = (\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

Φέρομεν τὸ ὕψος ΔΚ. Ἐπειδὴ $\mathrm{\Delta A} = \mathrm{\Delta B} = \mathrm{\Delta\Gamma}$, θὰ εἶναι [παράγρ. 10 · 10 (II)] καὶ $\mathrm{KA} = \mathrm{KB} = \mathrm{K\Gamma} = \mathrm{R} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ (Α′ Τόμος, παράγρ. 8 · 41).

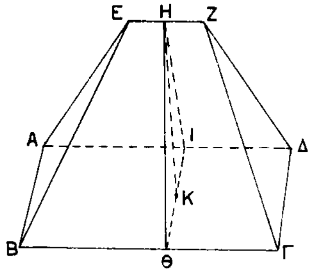
Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΔ ἔχομεν:

$$\upsilon = \Delta K = \sqrt{(\Delta A)^2 - (KA)^2} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3}} = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{3}} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ὥστε } V = \frac{1}{3} B\upsilon = \frac{1}{3}\,\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}.$$



Σχ. 11·29 β.



Σχ. 11·29 γ.

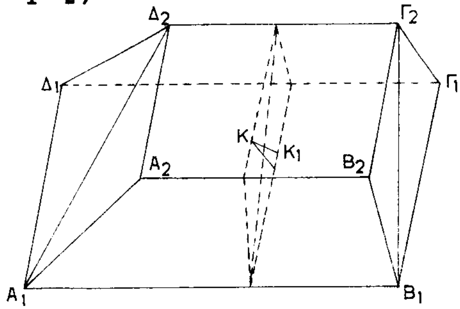
III. *Τὸ στερεὸν (σφὴν) τοῦ σχήματος 11·29γ εἶναι ἕνα κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΓΔΖ. Ἡ πλευρική του ἀκμὴ ΕΖ = γ, ἡ πλευρική του ἕδρα ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις (ΑΒ) = (ΓΔ) = β, (ΒΓ) = (ΑΔ) = α καὶ τὸ ὕψος ΗΚ τῆς καθέτου τομῆς ΗΘΙ ἔχει μῆκος υ. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ συναρτήσει τῶν διαστάσεων, ποὺ μᾶς δίδονται.*

Λύσις. Ὁ ὄγκος V τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται (παράγρ. 11·27) μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρικῶν ἀκμῶν του· συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$V = \frac{1}{3}(\mathrm{I\Theta H})(\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{EZ}) = \frac{1}{3}\,\frac{(\Theta \mathrm{I})(\mathrm{HK})}{2}(\alpha + \alpha + \gamma)$$

$$\text{ἢ } V = \frac{\beta\cdot\upsilon\cdot(2\alpha+\gamma)}{6}.$$

IV. *Τὸ στερεὸν (σωρὸς ἀπὸ χαλίκια)* (σχ. 11·29δ) *δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα τετραγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα μὲ* *βάσεις τὰ τετράπλευρα $A_1A_2\Delta_2\Delta_1$ καὶ $B_1B_2\Gamma_2\Gamma_1$. Αἱ πλευρικαὶ ἕδραι $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ εἶναι ὀρθογώνια μὴ ὅμοια, μὲ παραλλήλους ὅμως ἀντιστοίχως πλευράς: $A_1B_1//A_2B_2$, $B_1\Gamma_1//B_2\Gamma_2$,... Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ συναρτήσει τῶν διαστάσεων $(A_1B_1)=a_1$, $(B_1\Gamma_1)=\beta_1$, $(A_2B_2)=a_2$, $(B_2\Gamma_2)=\beta_2$ τῶν δύο ὀρθογωνίων αὐτῶν ἑδρῶν του καὶ τῆς ἀποστάσεως $(K_1K_2)=\upsilon$ αὐτῶν.*



Σχ. 11·29 δ.

Λύσις. Ἂν φέρωμεν τὸ διαγώνιον ἐπίπεδον $A_1B_1\Gamma_2\Delta_2$, τότε τὸ στερεὸν χωρίζεται εἰς δύο κολοβὰ τριγωνικὰ πρίσματα τῆς προηγουμένης ἐφαρμογῆς, διὰ τοὺς ὄγκους V_1 καὶ V_2, τῶν ὁποίων θὰ ἔχωμεν:

$$V_1=\frac{\upsilon}{6}\,\beta_1\,(2\alpha_1+\alpha_2) \text{ καὶ } V_2=\frac{\upsilon}{6}\,\beta_2\,(2\alpha_2+\alpha_1).$$

Ἑπομένως:

$$V=V_1+V_2=\frac{\upsilon}{6}\left[\beta_1\,(2\alpha_1+\alpha_2)+\beta_2\,(2\alpha_2+\alpha_1)\right]$$

$$\text{ἢ } V=\frac{\upsilon}{6}\,(2\beta_1\alpha_1+2\beta_2\alpha_2+\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1).$$

11·30 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς κανονικοῦ τετραέδρου πλευρᾶς α μὲ ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ μέσον ἑνὸς ἀπὸ τὰ ὕψη του.

2) Τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμ-

μον μὲ διαστάσεις 12 cm καὶ 15 cm καὶ ὕψος 24 cm. Πόσον πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, ὥστε ἡ τομή του μὲ τὴν πυραμίδα νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 20 cm^2;

3) Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει πλευρὰν βάσεως 24 cm καὶ ὕψος 16 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς της ἐπιφανείας.

4) Κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει πλευρὰν βάσεως 12 cm καὶ πλευρικὴν ἀκμὴν 20 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρικήν της ἐπιφάνειαν.

5) Αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων κανονικῆς τριγωνικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἀντιστοίχως 12 cm καὶ 8 cm, τὸ ἀπόθημά της εἶναι 15 cm. Νὰ ὑπολογίσετε: α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς της ἐπιφανείας καὶ β) τὸ ἀπόθημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος, ποὺ σχηματίζεται, ἂν προεκτείνωμεν τὰς πλευρικάς της ἀκμάς.

6) Αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων κανονικῆς ἑξαγωνικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἀντιστοίχως 12 cm καὶ 22 cm. Κάθε μία ἀπὸ τὰς πλευρικάς της ἀκμὰς ἔχει μῆκος 13 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς της ἐπιφανείας.

7) Μία κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ ἔχει πλευρὰν βάσεως 20 cm καὶ ἀπόθημα $ΟΘ = 24$ cm. Νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ ἀποθήματος ΟΘ οὕτως, ὥστε, ἂν ἀπὸ τὸ Μ φέρωμεν παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὴν βάσιν, τὰ δύο στερεά, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ πυραμίς, νὰ ἔχουν ἰσεμβαδικὰς πλευρικὰς ἐπιφανείας.

8) Τριγωνικῆς πυραμίδος μία στερεὰ γωνία εἶναι τρισορθογώνιος μὲ ἀκμὰς 9 cm, 12 cm, 16 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον της καὶ τὴν ὁλικήν της ἐπιφάνειαν.

9) Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τῶν πυραμίδων τῶν ἀσκήσεων 2, 3, 4.

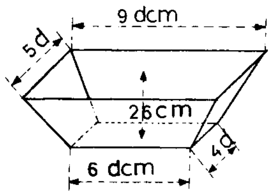
10) Τὸ σχῆμα ἑνὸς σιδηροῦ τεμαχίου εἶναι τετράεδρον πλευρᾶς 12 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος του (εἰδ. βάρος σιδ. 7,4).

11) Μία πυραμὶς ἀπὸ ξύλον (εἰδ. βάρους 0,84) ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 12 cm καὶ ζυγίζει 1008kp. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος της.

12) Μία κανονικὴ κόλουρος ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσεις ἑξάγωνα μὲ πλευρὰς ἀντιστοίχως 32 cm καὶ 15 cm. Τὸ ὕψος της εἶναι 24 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον της.

13) Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ὄγκους τῶν κολούρων πυραμίδων τῶν ἀσκήσεων 5 καὶ 6.

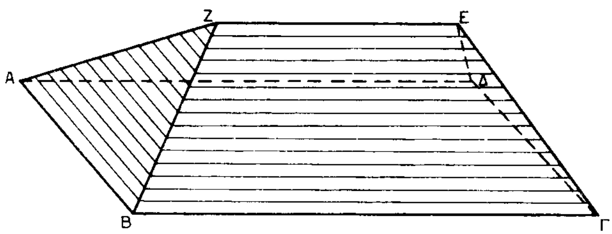
14) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν χωρητικότητα εἰς dm^3 τῆς σκάφης τοῦ σχήματος 11 · 30 α.



Σχ. 11·30 α.

15) Μία κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕΖ ἔχει πλευρὰν βάσεως 20 cm καὶ πλευρικὴν ἀκμὴν 25 cm. Ἐπὶ τῆς ΟΑ ὁρίζομεν τμῆμα ΟΜ = 10 cm καὶ ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν. Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ὄγκους τῶν δύο στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ πυραμίς.

16) Ἡ στέγη τοῦ σχήματος 11 · 30 β ἔχει βάσιν ΑΒΓΔ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ διαστάσεις ΑΒ = 5 m καὶ ΒΓ = 9 m. Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Ζ ἀπὸ τὴν βάσιν εἶναι 3 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τῆς στέγης. Ὑπόδειξις: Θὰ τὴν θεωρήσετε ὡς κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ πλευρικὰς ἀκμὰς τὰς ΒΓ, ΖΕ, ΑΔ.



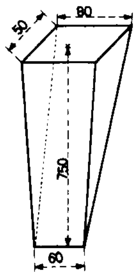
Σχ. 11·30 β.

17) Ἕνα τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα ἔχει πλευρικὰς ἀκμὰς 12 cm, 18 cm, 20 cm καὶ κάθετον τομὴν ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ πλευρὰς 10 cm, 10 cm, 12 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον του.

18) Ὁ σφὴν τοῦ σχήματος 11 · 30 γ εἶναι ξύλινος. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος του (εἰδ. βάρος ξύλου 0,82). Αἱ διαστάσεις δίδονται εἰς mm.

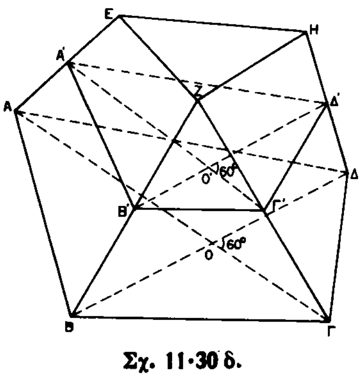
19) Ἕνας σωρὸς ἀπὸ σκῦρα (χαλίκια) ἔχει τὴν μορφὴν κολοβοῦ

τετραγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κάτω ὁριζοντία βάσις εἶναι ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις 4 m καὶ 2,5 m, ἡ δὲ ἄνω ὁριζοντία βάσις ὀρ-

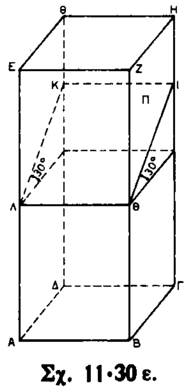


Σχ. 11·30 γ.

θογώνιον μὲ διαστάσεις 3 m καὶ 1,80 m. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων εἶναι 50 cm. Νὰ κυβίσετε τὸν σωρόν.



Σχ. 11·30 δ.



Σχ. 11·30 ε.

20) Εἰς τὸ πρισματοειδὲς τοῦ σχήματος 11 · 30 δ ἡ τετράπλευρος βάσις ΑΔΓΔ ἔχει διαγωνίους (ΒΔ) = 24 cm, (ΑΓ) = 40 cm καὶ ∢ (ΑΒ, ΒΔ) = 60°. Ἡ μέση τομὴ Α'Β'Γ'Δ' ἔχει διαγωνίους (Β'Δ') = 20 cm, Α'Δ' = 30 cm καὶ ∢ (Α'Γ', Β'Δ') = 60°. Ἡ τριγωνικὴ βάσις της ἔχει ∢ (ΕΖ, ΖΗ) = 90°, ΕΖ = 9 cm, ΖΗ = 12 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον της. (Ἐμβαδὸν τετραπλεύρου $= \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta\mu\omega$, ὅπου δ_1, δ_2 αἱ διαγώνιοι του καὶ ω ἡ γωνία του).

21) Τὸ πρῖσμα τοῦ σχήματος 11 · 30 ε εἶναι ὀρθὸν πρῖσμα ὕψους

60 cm μὲ βάσεις τετράγωνα πλευρᾶς 20 cm. Τὸ ἐπίπεδον Π τέμνει τὰς πλευρικὰς ἀκμὰς ΑΕ, ΒΖ εἰς τὸ μέσον των καὶ σχηματίζει μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως γωνίαν 30^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τῶν δύο κολοβῶν πρισμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ πρῖσμα.

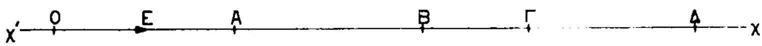
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 12

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

12·1 Ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ὁρισμοί.

Εἰς τὸν Α΄ Τόμον (παράγρ. 1·7, 1·8) ἐδώσαμεν τὰς πρώτας γενικὰς ἐννοίας περὶ τῶν διανυσμάτων. Τώρα θὰ τὰς ἐπαναλάβωμεν ἀναλυτικώτερον καὶ θὰ μελετήσωμεν τὰ διανύσματα μέσα εἰς τὸ ἐπίπεδον.



Σχ. 12·1.

Ἕνα ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ (σχ. 12·1), ὅταν τὸ θεωρήσωμεν διανυόμενον κατὰ μίαν ὡρισμένην φοράν, π.χ. ἀπὸ τὸ ἄκρον Α πρὸς τὸ ἄκρον Β, λέγεται *ἐφαρμοστὸν διάνυσμα* καὶ γράφεται $\overrightarrow{AB}$. Τὸ σημεῖον Α λέγεται *ἀρχὴ* καὶ τὸ Β *πέρας* τοῦ διανύσματος. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ τμῆμα ΑΒ, ὅταν διανύεται κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, παράγεται τὸ *ἀντίθετον διάνυσμα* $\overrightarrow{BA}$. Τὸ μέτρον τοῦ τμήματος ΑΒ λέγεται *μῆκος* ἢ *μέτρον* τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἢ τοῦ $\overrightarrow{BA}$, παριστάνεται δὲ συμβολικῶς $|\overrightarrow{AB}|$.

Ὥστε: $$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$

Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα ταυτίζονται, λέγεται *μηδενικὸν διάνυσμα*.

Ἡ εὐθεῖα χ΄χ, τῆς ὁποίας μέρος εἶναι τὸ τμῆμα ΑΒ, λέγεται *φορεὺς* ἢ *στήριγμα* τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ φορέως χ΄χ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἔχωμεν ἐκλέξει τὴν θετικὴν φορὰν καθὼς καὶ μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν, τότε ἡ χ΄χ λέγεται *ἄξων*, τὸ δὲ διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$, ποὺ ἔχει μῆκος τὴν μονάδα καὶ φορὰν θετικήν, λέγεται *διανυσματικὴ μονὰς* ἢ *βασικὸν διάνυσμα*. Ὁ σχετικὸς ἀριθμός, ποὺ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ μῆκος $|\overrightarrow{AB}|$ τοῦ διανύσματος καὶ πρόσημον τὸ + μέν, ἂν τὸ διάνυσμα ἔχῃ θετικὴν φοράν, τὸ — δέ, ἂν ἔχῃ ἀρνητικὴν φοράν, λέγεται *σχετικὸν μέτρον* ἢ *τετμημένη* τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ γράφεται συμβολικῶς $\overline{AB}$ ἢ $(\overrightarrow{AB})$.

Δύο μὴ μηδενικὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ποὺ ἔχουν φορεῖς δύο παραλλήλους ἢ συμπιπτούσας (παραλλήλους μὲ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν) εὐθείας, λέγονται *παράλληλα* ἢ *συγγραμμικὰ* καὶ εἶναι *ὁμόρροπα* μέν, ἂν ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, *ἀντίρροπα* δέ, ἂν ἔχουν ἀντιθέτους φοράς. Ὅλα τὰ διανύσματα, ποὺ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ μὴ μηδενικὸν διάνυσμα, λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν *διεύθυνσιν*.

Μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον δύο ἢ περισσότερα ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ποὺ δίδονται μὲ μίαν ὡρισμένην σειράν, λέγονται *διαδοχικά*, ὅταν τὸ πέρας τοῦ α^{ου} συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ β^{ου}, τὸ πέρας τοῦ β^{ου} μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ γ^{ου} κ.ο.κ. Π.χ. τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τοῦ σχήματος 12·1 μὲ αὐτὴν τὴν σειρὰν εἶναι διαδοχικά. Δύο μὴ μηδενικὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται *ἴσα* $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta})$, ὅταν ἔχουν:

α) *Τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν*, $AB // \Gamma\Delta$.

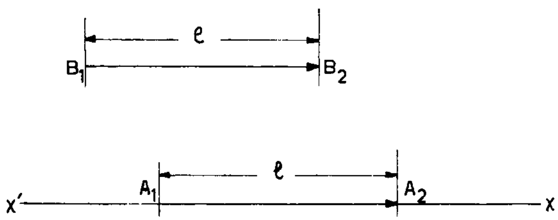
β) *Τὴν αὐτὴν φοράν*.

γ) *Τὸ αὐτὸ μῆκος*.

Τὰ μηδενικὰ διανύσματα εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἴσα μεταξύ των ἀνὰ δύο.

12·2 Ἐλεύθερα διανύσματα.

Ἔστω ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2}$ μὲ μῆκος $|\overrightarrow{A_1A_2}| = l \neq 0$ (σχ. 12·2). Κάθε ἄλλο διάνυσμα $\overrightarrow{B_1B_2}$ τοῦ ἐπιπέδου ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{A_1A_2}$ θὰ ἔχῃ τὰ ἴδια τρία ἀνωτέρω στοιχεῖα μὲ τὸ $\overrightarrow{A_1A_2}$, δηλαδὴ μῆκος τὸ l, διεύθυνσιν τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας $x'x$ καὶ φορὰν τὴν φορὰν τοῦ $\overrightarrow{A_1A_2}$. Λέγομεν ὅτι τὸ $\overrightarrow{A_1A_2}$ μαζὶ μὲ τὰ ἴσα πρὸς αὐτὸ ἐφαρμοστὰ διανύσματα ὁρίζουν ἢ ἀντιπροσωπεύουν ἕνα *ἐλεύθερον διάνυσμα*, ποὺ τὸ συμβολίζομεν μὲ ἕνα μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, ἐπάνω εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἕνα βέλος, ($\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$,...).



Σχ. 12·2.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν μᾶς δώσουν ἕνα μῆκος l, μίαν διεύθυνσιν $x'x$ καὶ μίαν φορὰν ἐπὶ τῆς $x'x$ ὡς στοιχεῖα ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\alpha}$, τότε τὸ $\vec{\alpha}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ ἕνα οἱονδήποτε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, ποὺ ἔχει μῆκος l, διεύθυνσιν τὴν $x'x$ καὶ φορὰν τὴν δοθεῖσαν.

Τὸ σύνολον τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων ὁρίζει τὸ *μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα*, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ $\vec{0}$. Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ $\vec{\alpha}$ ὁρίζεται ἢ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, θὰ γράφωμεν:

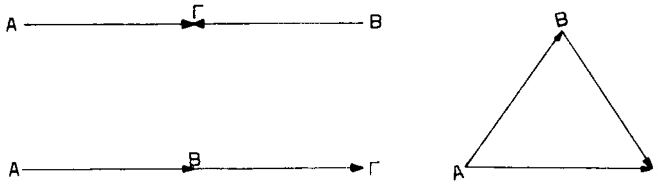
$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ἢ} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}.$$

Δύο ἐλεύθερα διανύσματα θὰ εἶναι *ἴσα, ἀντίθετα, συγγραμμικά*, ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπὸ δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἀντιστοίχως *ἴσα, ἀντίθετα, συγγραμμικά.*

12·3 Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις διανυσμάτων.

α) *Ἄθροισμα δύο διανυσμάτων.*

Ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$ *δύο διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων* $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ λέγεται τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν Α τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας Γ τοῦ δευτέρου ἐφαρμοστοῦ διανύσματος (σχ. 12·3 α). *Ἄθροισμα* $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ *δύο ἐλευθέ-*

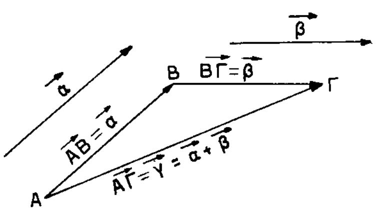


Σχ. 12·3 α.

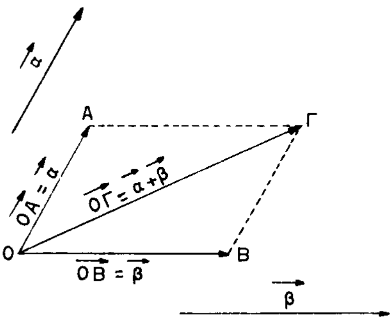
ρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ εἶναι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\gamma}$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν ἀντιστοίχως τὰ $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$. Π.χ. ἂν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ εἶναι δύο ἐλεύθερα διανύσματα, τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν ἕνα σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 12·3 β) καὶ κατασκευάζομεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, ἀκολούθως μὲ ἀρχὴν τὸ Β κατασκευάζομεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$ ὁρίζει τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\gamma}$, ποὺ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$:

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

Συνήθως τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ δύο μὴ συγγραμικῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ εὑρίσκεται μὲ τὸν ἀκόλουθον τρόπον,



Σχ. 12·3 β.



Σχ. 12·3 γ.

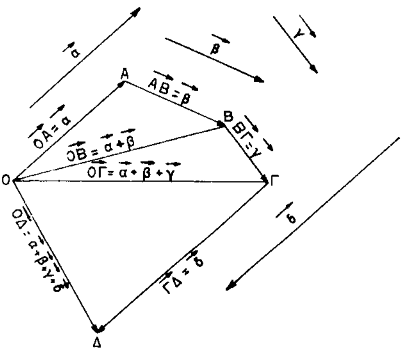
ποὺ λέγεται *κανὼν παραλληλογράμμου*. Μὲ κοινὴν ἀρχὴν ἕνα σημεῖον O (σχ. 12 · 3 γ) χαράσσομεν δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΟΒΓΑ. Ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα, τὸ διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$ ὁρίζει τὸ $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$.

β) *Ἄθροισμα τριῶν ἢ περισσοτέρων διανυσμάτων.*

Ἄθροισμα τριῶν ἢ περισσοτέρων διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$,... ὀνομάζομεν τὸ διάνυσμα, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ α καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου διανύ-

σματος. Εἰς τὸ σχῆμα 12·3 δ ἔχομεν: $\overrightarrow{ОА}+\overrightarrow{АВ}+\overrightarrow{ВΓ}+\overrightarrow{ΓΔ}=\overrightarrow{ΟΔ}$.



Σχ. 12·3 δ.

Ἔστω τώρα ὅτι μᾶς δίδονται τὰ ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον. Ὀνομάζομεν *ἄθροισμα τῶν* $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}$ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα, ποὺ προκύπτει, ἂν εἰς τὸ $\vec{\alpha}$ προσθέσωμεν τὸ $\vec{\beta}$, εἰς τὸ ἄθροισμά των $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ τὸ $\vec{\gamma}$ καὶ εἰς τὸ νέον ἄθροισμα $[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}]$ τὸ $\vec{\delta}$:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}=[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}]+\vec{\delta}.$$

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ λαμβάνομεν, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 12·3 δ, $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{ΑΒ}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{ΒΓ}=\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{ΓΔ}=\vec{\delta}$ καὶ εὑρίσκομεν:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΟΒ}.$$

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΒΓ}=\overrightarrow{ΟΓ}$$

$$[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}]+\vec{\delta}=\overrightarrow{ΟΓ}+\overrightarrow{ΓΔ}=\overrightarrow{ΟΔ}.$$

Ἄρα:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}=\vec{O\Delta}.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι *ἕνα ἄθροισμα ἐλευθέρων διανυσμάτων* $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\ldots$ *εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν σειρὰν (διάταξιν) τῶν προσθετέων. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς ἕνα ἄθροισμα διανυσμάτων δυνάμεθα νὰ ἀντικαθιστῶμεν δύο ἢ περισσοτέρους προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἤτοι:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})+\vec{\delta}.$$

γ) *Ἀφαίρεσις διανυσμάτων.*

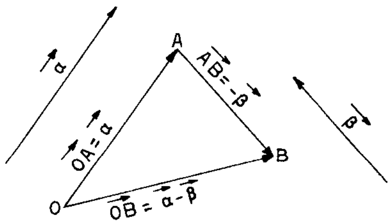
Ὅταν μᾶς δοθοῦν δύο ἐλεύθερα διανύσματα: ἕνα πρῶτον $\vec{\alpha}$ (μειωτέον διάνυμα) καὶ ἕνα δεύτερον $\vec{\beta}$ (ἀφαιρετέον διάνυσμα), καλοῦμεν *διαφορὰν* $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ ἕνα τρίτον ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{x}$, διὰ τὸ ὁποῖον θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$. Τὸ ζητούμενον διάνυσμα $\vec{x}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ μειωτέου διανύσματος $\vec{\alpha}$ μὲ τὸ ἀντίθετον $-\vec{\beta}$ τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος $\vec{\beta}$, διότι $\vec{\beta}+[\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})]=\vec{\beta}+(-\vec{\beta})+\vec{\alpha}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$. Ἔχομεν λοιπόν:

$$\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta}).$$

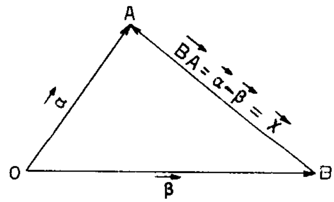
Ὥστε *διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα διάνυσμα* $\vec{\beta}$ *ἀπὸ ἕνα ἄλλο* $\vec{\alpha}$ *προσθέτομεν εἰς τὸ* $\vec{\alpha}$ *τὸ* $-\vec{\beta}$.

Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἀντιπροσωπευτικὸν διάνυσμα τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ (σχ. 12·3ε).

Κατασκευάζομεν πρῶτον τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ καὶ κατόπιν τὸ $\vec{AB}$, ἀντιπροσωπευτικὸν τοῦ $-\vec{\beta}$. Τὸ $\vec{OB}$ εἶναι ἀντιπροσωπευτικὸν τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$, δηλαδὴ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.



Σχ. 12·3ε.



Σχ. 12·3ζ.

Διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς (σχ. 12·3ζ): Μὲ κοινὴν ἀρχὴν ἕνα σημεῖον Ο κατασκευάζομεν τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{OB}=\vec{\beta}$.

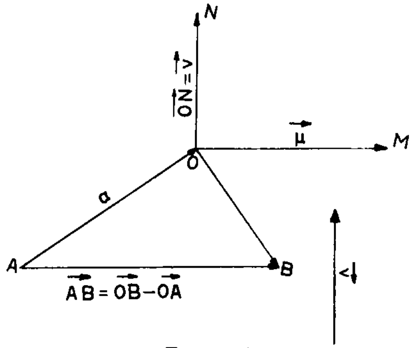
Τὸ διάνυσμα $\vec{BA}$ ἀντιπροσωπεύει τὴν διαφορὰν $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, διότι $\vec{OB}+\vec{BA}=\vec{OA}$ καὶ ἂν $\vec{BA}=\vec{x}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}.$$

12·4 Διανυσματικὴ ἀκτίς.

Ἄς λάβωμεν μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον ἕνα σταθερὸν σημεῖον Ο (σχ. 12·4). Εἰς κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὡρισμένον ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OM}$ μὲ ἀρχὴν τὸ Ο καὶ πέρας τὸ Μ. Τὸ διάνυσμα $\vec{OM}$ καλεῖται *διανυσματικὴ ἀκτὶς τοῦ Μ ὡς πρὸς ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ο.*

Μία διανυσματικὴ ἀκτὶς ἀντιπροσωπεύει ἕνα ὡρισμένον ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\mu}$ καὶ ἀντιστρόφως, κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\nu}$ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ μίαν ὡρισμένην διανυσματικὴν ἀκτῖνα $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον N τοῦ ἐπιπέδου. Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι μέσω τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων, ὡς πρὸς ἀρχὴν ἕνα σημεῖον O, *εἰς κάθε ἐλεύθε-*



Σχ. 12·4.

ρον διάνυσμα ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ πέρας τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος, ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸ διάνυσμα, καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα, αὐτὸ ποὺ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα τοῦ σημείου.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος ἕνα τυχὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διαφορὰ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ πέρατος καὶ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τῆς ἀρχῆς του. Π.χ. διὰ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ τοῦ σχήματος 12 · 4 ἔχομεν:

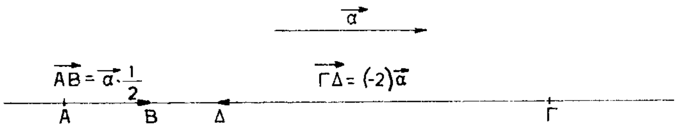
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - (-\overrightarrow{\mathrm{AO}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}.$$

12 · 5 Γινόμενον διανύσματος ἐπὶ ἀριθμόν.

I. *Ὁρισμὸς* (σχ. 12 · 5).

Γινόμενον $\lambda \cdot \overrightarrow{\alpha}$ ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$ ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν

$\lambda \neq 0$ καλοῦμεν τὸ διάνυσμα, ποὺ ἔχει: α) Μῆκος $|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|$, δηλαδὴ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ $\vec{\alpha}$ ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ λ. β) Τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὸ $\vec{\alpha}$ καὶ φορὰν τὴν αὐτὴν μὲν μὲ τὸ $\vec{\alpha}$, ὅταν $\lambda > 0$, τὴν ἀντίθετον δέ, ὅταν $\lambda < 0$. Ὅταν $\lambda = 0$ ἢ $\vec{\alpha} = 0$, θὰ ἔχωμεν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$. (Ἐνίοτε ἀντὶ $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ γράφομεν $\vec{\alpha} \cdot \lambda$).



Σχ. 12·5.

ΙΙ. *Ἰδιότητες.*

Διὰ τὸ γινόμενον διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχομεν τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας:

1) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{\alpha}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{\alpha} = \lambda_2 (\lambda_1 \cdot \vec{\alpha})$.

2) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{\alpha} = \lambda_1 \vec{\alpha} + \lambda_2 \cdot \vec{\alpha}$.

3) $\lambda (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) = \lambda \cdot \vec{\alpha}_1 + \lambda \cdot \vec{\alpha}_2$.

4) Γινόμενα ὅπως τὰ $(-1)\vec{\alpha}$, $\left(-\frac{3}{2}\right)\vec{\alpha}$, $(-5)\vec{\alpha}$ γράφονται συντόμως $-\vec{\alpha}$, $-\frac{3}{2}\vec{\alpha}$, $-5 \cdot \vec{\alpha}$.

ΙΙΙ. *Λόγος δύο παραλλήλων διανυσμάτων.*

Τὴν σχέσιν $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$ μεταξὺ δύο παραλλήλων διανυσμάτων $\vec{\beta}$ καὶ $\vec{\alpha}$ συμφωνοῦμεν νὰ τὴν γράφωμεν, ὅταν $\vec{\alpha} \neq 0$, καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\vec{\beta} \,/\, \vec{\alpha} = \lambda.$$

Τὸν ἀριθμὸν λ καλοῦμεν λόγον τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}$ πρὸς τὸ συγγραμμικόν του $\vec{\alpha}$. Ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον $\frac{\overline{\beta}}{\alpha}$ τῶν σχετικῶν μέτρων τῶν δύο διανυσμάτων, ὅταν θεωρήσωμεν αὐτὰ ὡς παράλληλα πρὸς ἕνα ἄξονα μὲ διεύθυνσιν τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\vec{\alpha}$ $(\neq 0)$.

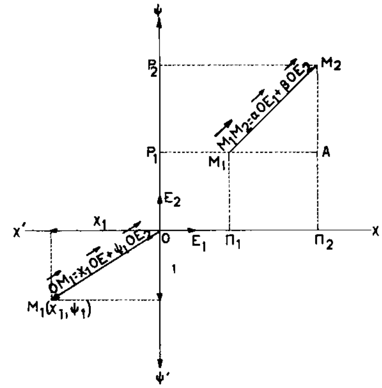
12·6 Συντεταγμέναι ἐφαρμοστοῦ διανύσματος.

Ἔστω χΟψ ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (σχ. 12·6) μὲ ἰσομήκη τὰ βασικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OE_1}$ καὶ $\overrightarrow{OE_2}$ τῶν ἀξόνων καὶ $\overrightarrow{M_1M_2}$ ἕνα διάνυσμα εἰς τὸ ἐπίπεδον χΟψ. Φέρομεν τὰς καθέτους $M_1\Pi_2$, $M_2\Pi_2$ πρὸς τὸν χ΄χ καὶ M_1P_1, M_2P_2 πρὸς τὸν ψ΄ψ. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Pi_1\Pi_2}$ εἶναι ἡ *προβολὴ* τοῦ $\overrightarrow{M_1M_2}$ ἐπάνω εἰς τὸν $x'x$ καὶ τὸ σχετικὸν μέτρον του $\overline{\Pi_1\Pi_2} = \dfrac{\overrightarrow{\Pi_1\Pi_2}}{\overrightarrow{OE_2}} = \alpha$ λέγεται *τετμημένη* τοῦ $\overrightarrow{M_1M_2}$. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{P_1P_2}$ εἶναι ἡ *προβολὴ* τοῦ $\overrightarrow{M_1M_2}$ ἐπάνω εἰς τὸν ψ΄ψ καὶ τὸ σχετικὸν μέτρον του $\overline{P_1P_2} = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{OE_2}} = \beta$ λέγεται *τεταγμένη* τοῦ $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Ἡ τετμημένη α καὶ ἡ τεταγμένη β ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα *συντεταγμέναι* τοῦ $\overrightarrow{M_1M_2}$ καὶ γράφονται ὡς διατεταγμένον ζεῦγος (α, β) μὲ πρῶτον ἀριθμὸν τὴν τετμημένην α καὶ δεύτερον τὴν τεταγμένην β. Ἂν Α εἶναι ἡ τομὴ τῶν καθέτων $M_2\Pi_2$ καὶ M_1P_1, ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχῆμα 12·6, θὰ εἶναι:

$$\overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{\Pi_1\Pi_2}, \quad \overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\text{καὶ } \alpha = \frac{M_1A}{OE_1}, \quad \beta = \frac{AM_2}{OE_2}.$$



Σχ. 12·6.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς προκύπτει ὅτι:

$$\overrightarrow{M_1A} = \alpha \cdot \overrightarrow{OE_1}, \quad \overrightarrow{AM_2} = \beta \cdot \overrightarrow{OE_2}. \qquad (1)$$

Τὴν ἐν γένει τεθλασμένην γραμμὴν M_1AM_2 καλοῦμεν *διάγραμμα τῶν συντεταγμένων* καὶ τὸ τρίγωνον M_1AM_2 *τρίγωνον τῶν συντεταγμένων* τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{M_1A}$ καὶ $\overrightarrow{AM_2}$ εἶναι διαδοχικὰ καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἔχωμεν $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_2}$. Ἡ σχέσις αὐτὴ μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν σχέσεων (1) γίνεται:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{OE_1} + \beta \cdot \overrightarrow{OE_2}. \qquad (2)$$

Ἕνα μηδενικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta\Delta}$ ἔχει συντεταγμένας (0,0).

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον M_1AM_2 τῶν συντεταγμένων προκύπτει ὅτι τὸ μῆκος $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = |\overrightarrow{M_2M_1}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cdot$$

Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς $\overrightarrow{OM_1}$ ἑνὸς σημείου $M_1(\chi_1, \psi_1)$ ἔχει συντεταγμένας $\alpha = \chi_1$, $\beta = \psi_1$. Ἑπομένως ἡ σχέσις (2) διὰ τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα ἑνὸς σημείου (χ_1, ψ_1) γίνεται:

$$\overrightarrow{OM_1} = \chi_1 . \overrightarrow{OE_1} + \psi_1 . \overrightarrow{OE_2}. \qquad (3)$$

Ἂν δύο διανύσματα εἶναι ἴσα τότε ἔχουν ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα τῶν συντεταγμένων των καὶ ἑπομένως ἔχουν ἴσας ὁμωνύμους συντεταγμένας. Ἀντιστρόφως, *ἂν δύο διανύσματα ἔχουν ἴσας ὁμωνύμους συντεταγμένας εἶναι ἴσα.*

12·7 Συντεταγμέναι ἐλευθέρου διανύσματος.

Συντεταγμένας (α, β) ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\overrightarrow{\delta}$ καλοῦμεν τὰς συντεταγμένας (α, β) ἑνὸς ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$, ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸ $\overrightarrow{\delta}$. Συμβολικῶς θὰ γράφωμεν:

$$\overrightarrow{\delta}\,(\alpha, \beta).$$

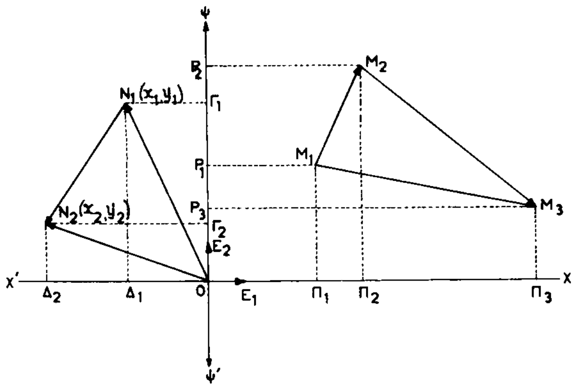
Τὸ $\overrightarrow{0}$ φυσικὰ ἔχει συντεταγμένας $(0, 0)$.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν διὰ τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα προκύπτει ὅτι εἰς κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$ ἀντιστοιχεῖ ὡς πρὸς ἕνα σύστημα ἀξόνων $\chi O \psi$ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν: τὸ διατεταγμένον ζεῦγος τῶν συντεταγμένων του (α, β). Ἀντιστρόφως εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν (α, β) ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$ μὲ συντεταγμένας (α, β), τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *εἰκόνα τοῦ ζεύγους* (α, β). Ὡς ἀντιπροσωπευτικὸν διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{\delta}$ λαμβάνομεν συνήθως τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα τοῦ σημείου, ποὺ ἔχει συντεταγμένας (α, β). Προφανῶς τὸ μῆκος $|\vec{\delta}|$ τοῦ $\vec{\delta}$ παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$|\vec{\delta}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

12·8 Ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῶν πράξεων εἰς τὰ διανύσματα.

I. Εἰς τὸ σχῆμα 12·8 ἔχομεν δύο διαδοχικὰ διανύσματα



Σχ. 12·8.

$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\overrightarrow{M_1M_3}$. Αἱ ἀντίστοιχοι τετμημέναι αὐτῶν εἶναι $\overline{\Pi_1\Pi_2}$, $\overline{\Pi_2\Pi_3}$, $\overline{\Pi_1\Pi_3}$ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τεταγμέναι των $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_1P_3}$.

Ἀπὸ τὴν παράγραφον ὅμως 2·7 τοῦ Α΄ Τόμου ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν, ποὺ εἶναι γνωστὴ καὶ ὡς θεώρημα τοῦ Chasle: *τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον ἑνὸς διανυσματικοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν μέτρων τῶν προσθετέων διανυσμάτων*. Ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν αὐτὴν εἰς τὰ $\overrightarrow{\Pi_1\Pi_3}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ καὶ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\overline{\Pi_1\Pi_3} = \overline{\Pi_1\Pi_2} + \overline{\Pi_2\Pi_3} \quad \text{καὶ} \quad \overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἐλεύθερα διανύσματα, δηλαδή:

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἀθροίσματος $\vec{\delta_1} + \vec{\delta_2}$ δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\delta_1}\,(\alpha_1, \beta_1)$ καὶ $\vec{\delta_2}$, (α_2, β_2) εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν $\vec{\delta_1}$ καὶ $\vec{\delta_2}$, δηλαδὴ εἶναι $(\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_1 + \beta_2)$.

II. Ἔστω τώρα ὅτι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα N_1N_2 μᾶς δίδεται μὲ τὰς συντεταγμένας τῶν ἄκρων του $N_1\,(\chi_1, \psi_1)$, $N_2\,(\chi_2, \psi_2)$. Ἐπειδὴ $\vec{ON_1} + \vec{N_1N_2} = \vec{ON_2}$, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{r} \chi_1 + \text{τετμ. τοῦ } \vec{N_1N_2} = \chi_2 \\ \psi_1 + \text{τεταγμ. τοῦ } \vec{N_1N_2} = \psi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{τετμ. τοῦ } \vec{N_1N_2} = \chi_2 - \chi_1 \\ \text{τεταγμ. τοῦ } \vec{N_1N_2} = \psi_2 - \psi_1. \end{array}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν χ, ψ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου M τοῦ N_1N_2, θὰ ἔχωμεν:

$$\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2},\ \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}.$$

III. Ἔστω τώρα $\vec{\delta_1}\,(\alpha_1, \beta_1)$, $\vec{\delta_2}\,(\alpha_2, \beta_2)$ δύο παράλληλα διανύσματα. Ἂν $\dfrac{\vec{\delta_1}}{\vec{\delta_2}} = \lambda$, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \lambda$, καθὼς καὶ τὸ ἀντίστροφον. Δηλαδὴ ἂν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \lambda$, τότε τὰ διανύσματα $\vec{\delta_1}\,(\alpha_1, \beta_1)$, $\vec{\delta_2}\,(\alpha_2, \beta_2)$ εἶναι παράλληλα καί:

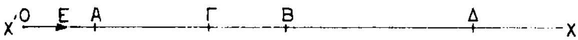
$$\frac{\vec{\delta_1}}{\vec{\delta_2}} = \lambda.$$

Ὥστε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι δύο διανύσματα $\vec{\delta_1}\,(\alpha_1, \beta_1)$, $\vec{\delta_2}\,(\alpha_2, \beta_2)$ παράλληλα, εἶναι:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad ἢ \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0.$$

12·9 Ἀσκήσεις.

1) Εἰς τὸ σχῆμα 12·9α νὰ ἐκφράσετε μὲ ἕνα διάνυσμα τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

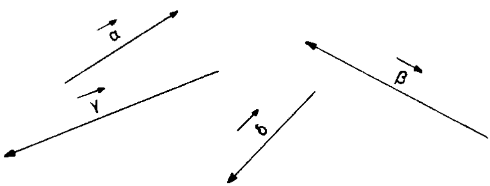


Σχ. 12·9 α.

$$\alpha)\ \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}. \quad \beta)\ \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{BA}.$$

$$\gamma)\ \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}. \quad \delta)\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}.$$

2) Εἰς τὸ σχῆμα 12·9β δίδονται τὰ ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$,



Σχ. 12·9 β.

$\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$. Νὰ σχεδιάσετε ἀντιπροσωπευτικὰ διανύσματα τῶν ἀκολούθων ἀθροισμάτων:

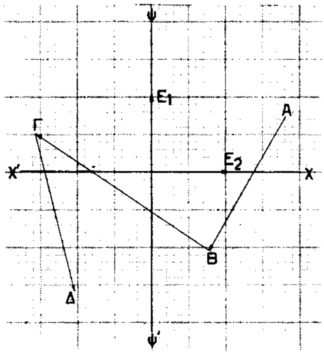
$$\alpha)\ \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}. \quad \beta)\ \vec{\alpha} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}. \quad \gamma)\ \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\delta}.$$

$$\delta)\ \vec{\alpha} - \vec{\beta}. \quad \varepsilon)\ \vec{\gamma} - \vec{\beta}. \quad \zeta)\ \vec{\alpha} + \vec{\gamma} - \vec{\beta}. \quad \eta)\ (\vec{\gamma} + \vec{\beta} - \vec{\alpha}) - \vec{\delta}.$$

3) Νὰ σχεδιάσετε ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καὶ κατόπιν τὰ $2\vec{\alpha}$, $-3\vec{\alpha}$, $\dfrac{2\vec{\alpha}}{3}$, $-0{,}5\,\vec{\alpha}$.

4) Εἰς τὸ σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων τοῦ σχήματος 12·9γ τὰ

βασικὰ διανύσματα τῶν ἀξόνων ἔχουν μῆκος 1 cm, δηλαδὴ $|\overrightarrow{OE_1}| = |\overrightarrow{OE_2}| = 1$ cm.



Σχ. 12·9 γ.

Νὰ προσδιορίσετε :

α) Τὰς συντεταγμένας τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

β) Τὰς συντεταγμένας τῶν διανυσμάτων, ποὺ ἐκφράζουν τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα :

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$. β) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{B\Delta}$. γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A}$.

δ) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}$. ε) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AB}$. ζ) $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}$.

κατὰ δύο τρόπους :

Ἀναλυτικῶς, δηλαδὴ ἀπὸ τὰς διδομένας εἰς τὸ σχῆμα συντεταγμένας τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ καὶ *διὰ γραφικῆς κατασκευῆς* τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων. Νὰ συγκρίνετε τὰ δύο ἀποτελέσματα.

5) Νὰ ἐκφράσετε ἀναλυτικῶς τὰς διανυσματικὰς ἀκτῖνας, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοῦ σχήματος 12·9 γ.

6) Εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων μὲ ἰσομήκη τὰ βασικὰ διανύσματα νὰ κατασκευάσετε ἀντιπροσωπευτικὰ διανύσματα τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἀκόλουθα ζεύγη :

$$(3,\ 2),\ (-4, -2),\ (5, -1),\ (-3,\ 4).$$

7) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων μὲ βασικὰ διανύσματα μήκους 1 cm καὶ νὰ προσδιορίσετε τὰ σημεῖα :

$$M_1\,(2,\,0),\ M_2\,(0,\,3),\ M_3\,(4,\,3),\ M_4\,(-2,-3).$$

Κατόπιν νὰ ὑπολογίσετε ἀναλυτικῶς τὰς συντεταγμένας τῶν διανυσμάτων:

$$\overrightarrow{M_1M_3},\ \overrightarrow{M_2M_1},\ \overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_4M_2},\ \overrightarrow{M_3N_1},\ \overrightarrow{M_4N_3},$$

ὅπου N_1, N_3 ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$.

8) Εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων μὲ βασικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ μήκους 1 cm νὰ σχεδιάσετε τὰ διανύσματα:

$$\alpha = 3\cdot\overrightarrow{OE_1} - 2\cdot\overrightarrow{OE_2},\ \vec{\beta} = -4\cdot\overrightarrow{OE_1} + 2\cdot\overrightarrow{OE_2},$$

$$\vec{\gamma} = 7\cdot\overrightarrow{OE_1} - 4\cdot\overrightarrow{OE_2},\ \vec{\delta} = 3\cdot\overrightarrow{OE_2},\ \vec{\varepsilon} = -2\cdot\overrightarrow{OE_1}.$$

9) Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ καὶ Ο ἕνα τυχὸν σημεῖον, νὰ δείξετε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}}{2}.$$

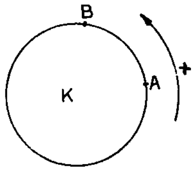
10) Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τυχὸν σημεῖον Μ. Νὰ δείξετε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

12 · 10 Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου.

Ἔστω τυχοῦσα περιφέρεια Κ καὶ δύο σημεῖα της Α, Β (σχ. 12 · 10). Ἐπεκτείνοντες τὴν ἔννοιαν τοῦ τόξου τῆς Γεωμετρίας (Α΄ Τόμος, παράγρ. 5 · 4) ὀνομάζομεν *τριγωνομετρικὸν* ἢ *γενικευμένον τόξον* καὶ γράφομεν συμβολικῶς $\widehat{AB}$ κάθε δρόμον ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ, ὁ ὁποῖος ἀρχίζει ἀπὸ τὸ Α (ἀρχὴ τοῦ τόξου) καὶ τελειώνει εἰς τὸ Β (πέρας τοῦ τόξου).

Ἐπειδὴ ἡ κίνησις ἐπὶ τῆς περιφερείας δύναται νὰ γίνῃ εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους-τόξου (σχ. 12 · 10), εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετον, ὁρίζομεν *θετικὴν φορὰν κινήσεως* τὴν φορὰν τοῦ βέλους, δηλαδὴ τὴν ἀντίθετον πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν ὡρολογίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὄψις συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος. Φυσικὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ὁρίζομεν ὡς *ἀρνητικήν*.



Σχ. 12·10.

Κάθε περιφέρεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορὰ κινήσεως καλεῖται *προσανατολισμένη περιφέρεια*.

Ἕνα τόξον μιᾶς προσανατολισμένης περιφερείας λέγεται *θετικὸν* μέν, ἂν διανύεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, *ἀρνητικὸν* δέ, ἂν διανύεται κατὰ τὴν ἀρνητικήν.

Σχετικὸν μέτρον ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ἢ καὶ ἁπλῶς *μέτρον* καλοῦμεν τὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ποὺ προκύπτει, ἂν μετρήσωμεν τὸ $\overset{\frown}{AB}$ μὲ μίαν μονάδα καὶ θέσωμεν πρὸ τοῦ ἐξαγομένου τὸ $+$ μέν, ἂν τὸ τόξον εἶναι θετικόν, τὸ $-$ δέ, ἂν εἶναι ἀρνητικὸν (συνήθως τὸ $+$ παραλείπεται).

Ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν τόξων λαμβάνομεν μίαν ἀπὸ τὰς μονάδας, ποὺ ὡρίσαμεν εἰς τὸν Α΄ Τόμον (παράγρ. 9·4) διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γεωμετρικῶν τόξων, ἤτοι: τὴν *μοῖραν* (1^0), τὸ *ἀκτίνιον* (1 rad), τὸν *βαθμόν* (1^g). Ὑπενθυμίζομεν δὲ ὅτι μία περιφέρεια ἔχει ἀπόλυτον μέτρον 360^0, 2π rad, 400^g καὶ ὅτι 1 rad $\simeq 57{,}3^0$.

Δύο τόξα μιᾶς προσανατολισμένης περιφερείας λέγονται *ἴσα*, ὅταν μετρούμενα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἔχουν τὸ αὐτὸ σχετικὸν μέτρον.

12·11 Τριγωνομετρικὰ τόξα μὲ τὰ ἴδια ὁμώνυμα ἄκρα.

Ἐπάνω εἰς μίαν προσανατολισμένην περιφέρειαν K ἂς λάβωμεν δύο σημεῖα A, B (σχ. 12·10) καὶ ἂς θεωρήσωμεν ἕνα κινητὸν M, ποὺ ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ A καὶ κινούμενον κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας φθάνει διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ B ($\neq$ A). Ἔστω θ^0 τὸ μέτρον τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, ποὺ διέτρεξε τὸ M. Ἐὰν τὸ M συνεχίσῃ τὴν κίνησίν του, θὰ συναντήσῃ τὸ B διὰ δευτέραν φοράν, ἀφοῦ διατρέξῃ τόξον μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ προηγούμενον κατὰ μίαν περιφέρειαν (360^0), ἤτοι θὰ ἔχῃ διατρέξει τόξον $\theta^0 + 360^0$. Ὅταν τὸ M συνεχίζον τὴν κίνησίν του συναντήσῃ τὸ B διὰ 3ην, 4ην, $(\lambda + 1)$ φοράν, θὰ ἔχῃ διανύσει ἀντιστοίχως τόξον:

$$\theta^0 + 2 \times 360^0,\ \theta^0 + 3 \times 360^0, \ldots,\ \theta^0 + \lambda \times 360^0.$$

(ὅπου λ θετικὸς ἀκέραιος).

Ἂν τὸ M ἀναχωρήσῃ ἀπὸ τὸ A καὶ κινηθῇ ἐπὶ τῆς K κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ συναντήσῃ διὰ πρώτην φορὰν τὸ B, ἀφοῦ διανύσῃ τόξον μὲ μέτρον $-(360^0 - \theta^0) = \theta^0 - 360^0$.

Ἂν τὸ M συνεχίσῃ τὴν κίνησίν του κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ συναντήσῃ τὸ B διὰ 2αν, 3ην,...ρ φοράν, ὅταν θὰ ἔχῃ διανύσει τόξον μὲ μέτρον:

$$\theta^0 - 2 \times 360^0,\ \theta^0 - 3 \times 360^0, \ldots,\ \theta^0 - \rho \times 360^0$$

(ρ θετικὸς ἀκέραιος).

Ὥστε ἐπὶ τῆς περιφερείας ὑπάρχουν ἀπειράριθμα τριγωνομετρικὰ τόξα μὲ ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ B. Τὰ μέτρα τῶν τόξων αὐτῶν θὰ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\theta^0,\quad \theta^0 \pm 360^0,\quad \theta^0 \pm 2 \times 360^0, \ldots$$

Δύνανται λοιπὸν τὰ μέτρα τῶν τόξων αὐτῶν νὰ συμπεριληφθοῦν εἰς τὴν ἔκφρασιν:

$$\theta^0 + \kappa \cdot 360^0$$

(ὅπου κ τυχὼν σχετικὸς ἀκέραιος).

Ὥστε τὸ μέτρον x ἑνὸς τυχόντος τόξου, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ B ($\neq$ B), εἶναι τῆς μορφῆς:

$$x = \theta^0 + \kappa \cdot 360^0, \qquad (1)$$

ὅπου κ ἀκέραιος καὶ θ^0 τὸ μικρότερον θετικὸν μέτρον ἀπὸ τὰ x.

Ἂν τὸ Α συμπίπτη μὲ τὸ Β, τότε $\theta^0 = 0$ καὶ τὸ μέτρον τοῦ τόξου θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$x = \kappa \cdot 360^0.$$

Ἂν ὡς μονάδα λάβωμεν τὸ ἀκτίνιον, τότε ὁ τύπος (1) γράφεται :

$$x = (\tau + 2\kappa\pi) \text{ rad}, \qquad (2)$$

ὅπου κ ἀκέραιος καὶ τ τὸ μικρότερον θετικὸν μέτρον ἀπὸ τὰ x εἰς rad.

12 · 12 Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας.

Ἐπεκτείνοντες τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 5 · 5 τοῦ Α΄ Τόμου, καλοῦμεν *γενικευμένην γωνίαν μιᾶς ἡμιευθείας* $O\chi_1$ (ἀρχικῆς) πρὸς μίαν ἄλλην $O\chi_2$ (τελικὴν) καὶ γράφομεν $\sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2)$ κάθε ἐπιφάνειαν, ποὺ διαγράφει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $O\chi_1$, $O\chi_2$ ἡ ἡμιευθεῖα $O\chi$, ὅταν μὲ ἀφετηρίαν τὴν $O\chi_1$ *(ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας)* στρέφεται γύρω ἀπὸ τὸ Ο, κατὰ μίαν ὡρισμένην φορὰν στροφῆς (σχ. 12 · 12 α) ἕως τὴν θέσιν $O\chi_2$ *(τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας)*.

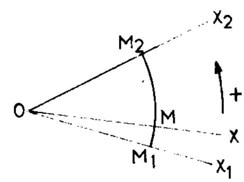
Ἐὰν ἡ στροφὴ τῆς $O\chi$ γίνεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ὅπως τὴν ὡρίσαμεν εἰς τὸ τόξον, ἡ γωνία θεωρεῖται *θετική*, ἄλλως θεωρεῖται *ἀρνητική*.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς γωνίας προκύπτει ὅτι, ὅταν ἡ $O\chi$ ἀναχωρήση ἀπὸ τὴν θέσιν $O\chi_1$ καὶ στραφῆ γύρω ἀπὸ τὸ Ο, δύναται νὰ λάβη τὴν θέσιν $O\chi_2$, εἴτε ὅταν φθάση εἰς αὐτὴν διὰ πρώτην φοράν, εἴτε ὅταν ἐκτελέση μίαν, δύο ἢ περισσοτέρας πλήρεις περιστροφάς. Ὑπάρχουν λοιπὸν ἀπειράριθμοι γωνίαι μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν $O\chi_1$ καὶ τελικὴν τὴν $O\chi_2$. Ἐὰν ἐπὶ τῆς $O\chi$ ὁρίσωμεν ἕνα σημεῖον Μ (σχ. 12 · 12 α), ὥστε $OM = l$ (σταθερὸν μῆκος), τότε κατὰ τὴν στροφὴν τῆς χ τὸ Μ θὰ γράφη τόξον περιφερείας μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν $l = OM$. Τὸ μέτρον τοῦ τόξου M_1M_2, ποὺ ἔγραψε τὸ M, ὁρίζομεν καὶ ὡς μέτρον τῆς γωνίας $\sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2)$, καὶ τὸ γράφομεν συμβολικῶς $\sphericalangle(O\chi_1 \cdot O\chi_2)$.

Ἐὰν λοιπὸν σκεφθῶμεν ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον διὰ τὰ τόξα, τότε τὸ μέτρον τῆς τυχούσης γωνίας $\sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2)$ θὰ ἐκφράζεται μὲ τὸν τύπον:

$$\sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2) = x = \theta^0 + \kappa \cdot 360^0 \text{ ἢ}$$

$$\sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2) = x = (\tau + 2\kappa\pi) \text{ rad},$$



Σχ. 12·12 α.

ὅπου κ ἀκέραιος καὶ θ^0 ἢ τ τὸ μέτρον τῆς μικροτέρας θετικῆς γωνίας $\sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2)$ ἀντιστοίχως εἰς μοίρας ἢ ἀκτίνια.

Ἐὰν ἡ $O\chi_2$ συμπίπτῃ μὲ τὴν $O\chi_1$, τότε $\theta^0 = 0$ καὶ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ἐκφράζεται ἀπὸ τὸν τύπον:

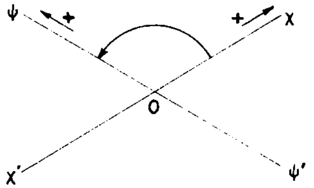
$$\sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2) = \kappa \cdot 360^0 \text{ ἢ } \sphericalangle(O\chi_1, O\chi_2) = 2\kappa\pi \text{ rad}.$$

Εἰς τὸ ἑξῆς ἀντὶ τῶν ἐκφράσεων «τὸ μέτρον x ἑνὸς τόξου» ἢ «τὸ μέτρον x μιᾶς γωνίας» θὰ λέγωμεν «τὸ τόξον x» ἢ «ἡ γωνία x».

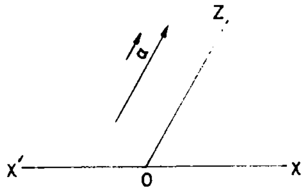
Γωνία δύο ἀξόνων καὶ δύο διανυσμάτων.

Ἔστω $\chi'O\chi$ καὶ $\psi'O\psi$ δύο ἄξονες μὲ θετικὰς φορὰς τὰς $O\chi$ καὶ $O\psi$ (σχ. 12·12β). Ἡ γωνία $\sphericalangle(O\chi, O\psi)$ καλεῖται *γωνία τοῦ ἄξονος* $\chi'\chi$ (ἀρχικοῦ) πρὸς τὸν ἄξονα $\psi'\psi$ (τελικὸν) καὶ γράφεται $\sphericalangle(\chi'\chi, \psi'\psi)$.

Ἂν τώρα $\vec{\alpha}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα καὶ $\chi'\chi$ ἕνας ἄξων καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο τοῦ $\chi'\chi$ φέρωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΖ, παράλληλον καὶ ὁ-

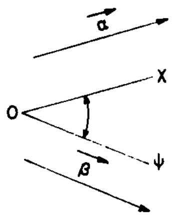


Σχ. 12·12 β.



Σχ. 12·12 γ.

μόρροπον πρὸς τὸ $\vec{\alpha}$, θὰ καλοῦμεν *γωνίαν τοῦ ἄξονος* $\chi'\chi$ *καὶ τοῦ διανύσματος* $\vec{\alpha}$ $\sphericalangle(\chi'\chi, \vec{\alpha})$ τὴν γωνίαν $\sphericalangle(O\chi, OZ)$ (σχ. 12·12 γ).



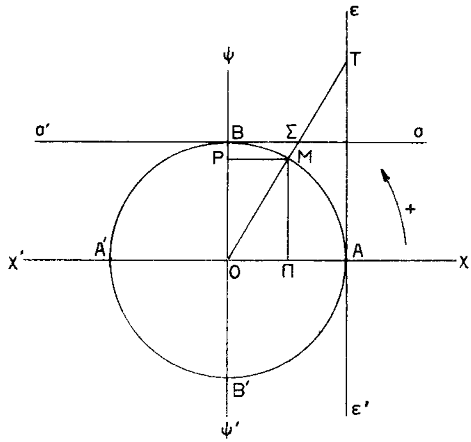
Σχ. 12·12 δ.

Ἐπίσης ἂν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ εἶναι δύο διανύσματα $\neq \vec{0}$ καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου των φέρωμεν τὰς Οχ, Οψ // καὶ ὁμορρόπους ἀντιστοίχως πρὸς τὰ $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$, θὰ καλοῦμεν γωνίαν τοῦ $\vec{\alpha}$ (ἀρχικοῦ) πρὸς τὸ $\vec{\beta}$ (τελικὸν) $\sphericalangle(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ τὴν $\sphericalangle(O\chi, O\psi)$ (σχ. 12·12 δ).

12·13 Κυκλικαὶ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις.

Ἔστω κύκλος Ο (σχ. 12·13), τοῦ ὁποίου τὴν ἀκτῖνα λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους, ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων χΟψ μὲ βασικὰ διανύσματα ἐπὶ τῶν ἀξόνων ἀντιστοίχως τὰ

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, θετικὴ φορὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ἡ φορὰ τοῦ βέλους - τόξου τοῦ σχήματος, ἀρχὴ τῶν τόξων ἐπὶ τῆς περιφερείας O τὸ A καὶ ε'ε, σ'σ, αἱ ἐφαπτόμεναι ἀντιστοίχως εἰς τὰ A καὶ B.



Σχ. 12 · 13.

Καλοῦμεν τὸν κύκλον O *τριγωνομετρικὸν κύκλον*, τὸν χ'χ *ἄξονα συνημιτόνων*, τὸν ψ'ψ *ἄξονα τῶν ἡμιτόνων*, τὸν ε'ε *ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων*, τὸν σ'σ *ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων*.

Ἔστω τώρα ἕνα τόξον $\widehat{AM}$ μὲ μέτρον x καὶ ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον γωνία τὴν $\sphericalangle(OM, OA)$. T καὶ Σ ἔστωσαν τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα OM τέμνει ἀντιστοίχως τὰς ε'ε καὶ σ'σ.

Καλοῦμεν *ἡμίτονον* τοῦ τόξου x ἢ τῆς γωνίας x τὴν τεταγμένην $\overline{\Pi M} = \overline{OP}$ τοῦ M καὶ γράφομεν συμβολικῶς:

$$\eta\mu x = \sin x = \overline{\Pi M}.$$

Καλοῦμεν *συνημίτονον* τοῦ τόξου x ἢ τῆς γωνίας x τὴν τετμημένην $\overline{O\Pi}$ τοῦ M καὶ γράφομεν συμβολικῶς:

$$\sigma\upsilon\nu x = \cos x = \overline{O\Pi}.$$

Καλοῦμεν *ἐφαπτομένην* τοῦ τόξου x ἢ τῆς γωνίας x τὴν τεταγμένην $\overline{AT}$ τοῦ T καὶ γράφομεν συμβολικῶς

$$\varepsilon\varphi x = \tan g x = \overline{AT}.$$

Καλοῦμεν *συνεφαπτομένην* τοῦ τόξου x ἢ τῆς γωνίας x τὴν τετμημένην $\overline{B\Sigma}$ τοῦ Σ καὶ γράφομεν συμβολικῶς $\sigma\varphi x = \cot x = \overline{B\Sigma}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ ὡς ἄνω ἀριθμοὶ $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi x$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ μέτρου x τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ ἢ τῆς γωνίας $(\widehat{OA, OM})$ καὶ λέγονται *τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις* ἢ *καὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ* τοῦ τόξου x ἢ τῆς γωνίας x. Ἐὰν μία γενικευμένη γωνία μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν OA καὶ τελικὴν τὴν OM ἔχῃ μέτρον $0^0 < x < 90^0$, τότε, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν της ἀριθμῶν ταυτίζονται μὲ τὰς τιμὰς τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς ὀξείας γωνίας $\widehat{AOM}$, τῶν ὁποίων τοὺς ὁρισμοὺς ἐδώσαμεν εἰς τὸν Α΄ Τόμον.

Ἕνα τόξον καὶ μία γωνία μὲ τὸ ἴδιον μέτρον x ἔχουν τοὺς ἰδίους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi x$. Διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἑξῆς θὰ μελετῶμεν τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις τῶν τόξων καὶ ὅ,τι συμπεραίνομεν δι' αὐτὰς θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὰς ὁμωνύμους τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις τῶν γωνιῶν.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων προκύπτει ὅτι ἡ τιμὴ κάθε μιᾶς ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ τόξα, ποὺ ἔχουν ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ M. Ἐὰν συνεπῶς θ^0 ἢ τ rad εἶναι ἀντιστοίχως εἰς μοίρας ἢ ἀκτίνια τὸ μέτρον τοῦ μικροτέρου μὴ ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$, ἐπειδὴ τὸ μέτρον x κάθε τόξου $\overset{\frown}{AM}$ παρέχεται ἀντιστοίχως εἰς μοίρας ἢ ἀκτίνια ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$x = \theta^0 + \kappa \cdot 360^0, \quad x = \tau + 2\kappa\pi, \text{ θὰ ἔχωμεν:}$$

$$\eta\mu x = \eta\mu\ (\theta^0 + K \cdot 360^0) = \eta\mu\theta^0 = \eta\mu\ (\tau + 2K\pi) = \eta\mu\tau.$$
$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\ (\theta^0 + K \cdot 360^0) = \sigma\upsilon\nu\theta^0 = \sigma\upsilon\nu(\tau + 2K\pi) = \sigma\upsilon\nu\tau.$$
$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\ (\theta^0 + K \cdot 360^0) = \varepsilon\varphi\theta^0 = \varepsilon\varphi\ (\tau + 2K\pi) = \varepsilon\varphi\tau.$$
$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\ (\theta^0 + K \cdot 360^0) = \sigma\varphi\theta^0 = \sigma\varphi\ (\tau + 2K\pi) = \sigma\varphi\tau.$$

Ἂν συνεπῶς ἡ τιμὴ μιᾶς ἀπὸ τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις, ἔστω τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου x, εἶναι $\eta\mu x = \lambda$, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνεται ἢ ἐλαττώνεται κατὰ 2π, 4π, $6\pi \ldots$, τότε τὸ ἡμίτονον λαμβάνει κάθε φορὰν τὴν τιμὴν λ.

Π.χ. ἐπειδὴ $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, θὰ εἶναι ἐπίσης: $\eta\mu(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\ (4\pi + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ κλπ. Διὰ τοῦτο αἱ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις λέγονται *περιοδικαὶ συναρτήσεις*. Γενικῶς δὲ μιὰ συνάρτησις $y = \sigma\ (x)$ λέγεται περιοδικὴ μὲ περίοδον τὸν ἀριθμὸν P, ὅταν διὰ κάθε εἰδικὴν τιμὴν x_0 τῆς x εἶναι $\sigma\ (x_0) = \sigma(x_0 + P) = \sigma(x_0 + 2\,P) = \cdots = \sigma(x_0 + \kappa P)$, ὅπου κ ἀκέραιος. Αἱ συναρτήσεις $y = \eta\mu x$ καὶ $y = \sigma\upsilon\nu x$ ἔχουν περίοδον $P = 2\pi$.

12·14 Μεταβολαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.

Τώρα θὰ μελετήσωμεν ἐποπτικῶς βάσει τοῦ σχήματος 12·14α τὰς μεταβολὰς τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Ἐπειδὴ δέ, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ὅλα τὰ τόξα, ποὺ διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν περιφερειῶν, ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, θὰ μελετήσωμεν τὰς μεταβολὰς τῶν τιμῶν κάθε μιᾶς τριγωνομετρικῆς συναρτήσεως, ὅταν τὸ τόξον x μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 (ἢ ἀπὸ 0 rad ἕως 2π rad).

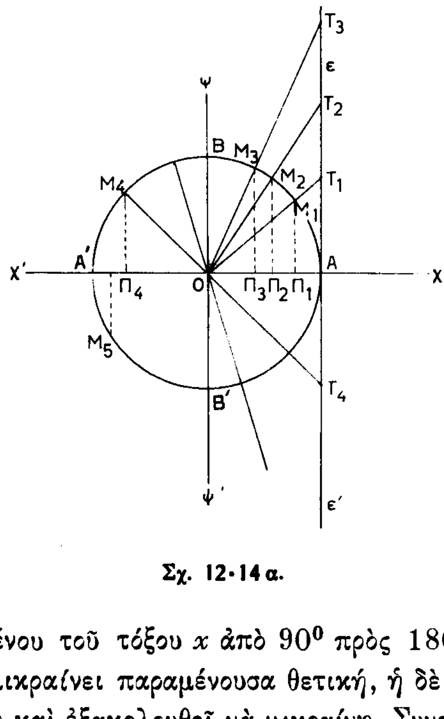
α) *Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου.*

Διὰ $x = 0$ τὸ M ταυτίζεται μὲ τὸ A, ποὺ ἔχει τεταγμένην 0 καὶ τετμημένην 1. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\eta\mu x = 0 \qquad \sigma\upsilon\nu x = 1.$$

Αὐξανομένου τοῦ τόξου x πρὸς τὰς 90^0 ἢ $\frac{\pi}{2}$ rad ἡ μὲν τεταγμένη του μεγαλώνει, ἡ δὲ τετμημένη του μικραίνει καὶ συνεπῶς τὸ μὲν ημx μεγαλώνει, τὸ δὲ συνx μικραίνει. Διὰ $x = 90^0$ τὸ Μ ταυτίζεται μὲ τὸ Β, ποὺ ἔχει τεταγμένην 1 καὶ τετμημένην 0. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\etaμ 90^0 = \etaμ \frac{\pi}{2} = 1, \quad συν 90^0 = συν \frac{\pi}{2} = 0.$$



Σχ. 12·14 α.

Αὐξανομένου τοῦ τόξου x ἀπὸ 90^0 πρὸς 180^0 ἡ μὲν τεταγμένη τοῦ Μ μικραίνει παραμένουσα θετική, ἡ δὲ τετμημένη γίνεται ἀρνητικὴ καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ μικραίνη. Συνεπῶς, ὅταν τὸ x αὐξάνη ἀπὸ 90^0 πρὸς 180^0, τὸ μὲν ημx μικραίνει ἀπὸ 1 πρὸς 0, τὸ δὲ συνx ἀπὸ 0 πρὸς -1.

Διὰ $x = 180^0$ τὸ Μ συμπίπτει μὲ τὸ Α΄, ποὺ ἔχει τεταγμένην 0 καὶ τετμημένην -1, διὰ τοῦτο ἔχομεν:

$$\etaμ 180^0 = \etaμ\pi = 0, \quad συν 180^0 = συν\pi = -1.$$

Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ 180^0 πρὸς 270^0, ὅπως διαπιστώνομεν ἀπὸ τὸ σχῆμα, τὸ μὲν ημx μικραίνει ἀπὸ 0 πρὸς -1, τὸ δὲ συνx μεγαλώνει ἀπὸ -1 πρὸς 0. Διὰ $x=270^0$ τὸ Μ συμπίπτει μὲ τὸ Β′, ποὺ ἔχει τεταγμένην -1 καὶ τετμημένην 0. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\eta\mu 270^0 = \eta\mu\,\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sigma\upsilon\nu 270^0 = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ 270^0 πρὸς 360^0, τὸ ημx αὐξάνει ἀπὸ -1 πρὸς 0 τὸ δὲ συνx ἀπὸ 0 πρὸς 1. Διὰ $x=360^0$ ἔχομεν πάλιν:

$$\eta\mu 360^0 = \eta\mu 2\pi = \eta\mu(360^0 + 0^0) = \eta\mu(2\pi + 0^0) = \eta\mu 0^0 = 0$$
$$\sigma\upsilon\nu 360^0 = \sigma\upsilon\nu 2\pi = \sigma\upsilon\nu 0^0 = 1.$$

Ὁ Πίναξ Ι μᾶς δίδει μίαν εἰκόνα τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν τοῦ ημx καὶ συνx, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0. Τὸ ↘ σημαίνει μικραίνει καὶ τὸ ↗ μεγαλώνει.

ΠΙΝΑΞ Ι

Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου.

x εἰς rad	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
x εἰς μοίρας	0°	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
ημ x	0	↗	+1	↘	0	↘	-1	↗	0
συν x	+1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	+1

β) *Μεταβολὴ ἐφαπτομένης.*

Διὰ $x=0$ τὸ Τ ταυτίζεται μὲ τὸ Α, ποὺ ἔχει τεταγμένην 0. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν: εφ$0^0=0$. Αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ 0 πρὸς 90^0 ἡ $\overline{\mathrm{AT}}=$ εφx μεγαλώνει καὶ διέρχεται ἀπὸ κάθε θετικὴν τιμὴν (σχ. 12·14α). Ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὰς 90^0, δηλαδὴ τὸ Μ πλησιάζῃ πρὸς τὸ Β, τότε ἡ ΟΜΤ τείνει νὰ καταστῇ παράλληλος πρὸς τὴν ε΄ε καὶ ἡ $\overline{AT}$ = εφx δύναται νὰ ὑπερβῇ κάθε δοθέντα θετικὸν ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μεγάλον, ἀρκεῖ τὸ Μ νὰ πλησιάζῃ ἐπαρκῶς πρὸς τὸ Β. Τοῦτο τὸ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὰς 90^0, ἡ εφx τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$). Διὰ $x = 90^0$ ἡ ΟΜ γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν ε΄ε καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν ἔχει μαζί της κοινὸν σημεῖον. Συνεπῶς διὰ $x = 90^0$ ἡ εφx δὲν ὁρίζεται. Διὰ $90^0 < x < 180^0$ τὸ Μ κινεῖται ἐπάνω εἰς τὸ 2ον τεταρτημόριον, ἀπὸ Β πρὸς Α΄ καὶ ἡ ΟΜ συναντᾷ τὴν ε΄ε εἰς σημεῖα, ποὺ ἔχουν ἀρνητικὴν τεταγμένην. Συνεπῶς διὰ $90^0 < x < 180^0$ ἡ εφx εἶναι ἀρνητική, ὅταν δὲ τὸ x αὐξάνῃ, τότε ἡ εφx σχετικῶς μεγαλώνει (ἀπολύτως μικραίνει). Μόλις τὸ Μ ὑπερβαίνῃ τὸ Β, δηλαδὴ μόλις τὸ x ὑπερβαίνῃ τὴν τιμὴν $x = 90^0$ ἡ εφx δύναται νὰ λάβῃ ἀρνητικὰς τιμὰς ἀπολύτως, ὅσον θέλομεν μεγάλας, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ Μ ἀρκετὰ πλησίον τοῦ Β. Τοῦτο τὸ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὰς 90^0 ἀπὸ μεγαλυτέρας τιμὰς (ἐλαττούμενον), τότε ἡ εφx τείνει πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον ($-\infty$). Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὰ ἀνωτέρω γράφομεν εφ $90^0 = \pm\infty$, ὅπου τὰ πρόσημα $\pm$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς περιπτώσεις, ποὺ τὸ Μ πλησιάζει τὸ Β ἀπὸ μικροτέρας ἢ μεγαλυτέρας τιμάς.

Διὰ $x = 180^0$ τὸ Μ ταυτίζεται μὲ τὸ Α΄. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

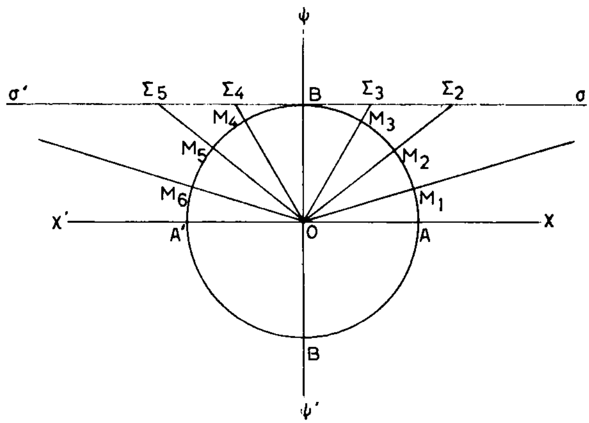
$$\text{εφ}\, 180^0 = \text{εφ}\pi = 0.$$

Ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς ἀπὸ $x = 180^0$ μέχρι $x = 360^0$, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα, ἡ εφx διέρχεται ἀπὸ τὰς αὐτὰς τιμάς, ποὺ διῆλθεν, ὅταν τὸ x ἐλάμβανε τὰς τιμὰς ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0. Ἔτσι ἔχομεν εφ 190^0 = εφ10^0, εφ200^0 = εφ20^0...

Διὰ $x = 270^0$ ἔχομεν εφ$270^0 = \pm\infty$. Ὁ Πίναξ 2 μᾶς δίδει μίαν εἰκόνα τῆς μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῆς εφx, ὅταν τὸ x λαμβάνη τὰς τιμὰς ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

γ) *Μεταβολὴ τῆς συνεφαπτομένης.*

Διὰ τὴν συνεφαπτομένην διαπιστώνομεν ἀπὸ τὸ σχῆμα 12·14β ὅτι διὰ $x=0$ δὲν ὁρίζεται. Ὅταν τὸ x τείνη εἰς τὸ 0



Σχ. 12·14 β.

ἀπὸ μεγαλυτέρας (θετικὰς) τιμάς, ἡ σφx τείνει πρὸς τὸ $+\infty$, ἐνῶ, ὅταν τὸ x τείνη πρὸς τὸ 0 ἀπὸ μικροτέρας (ἀρνητικὰς) τιμάς, ἡ σφx τείνει πρὸς τὸ $-\infty$. Γράφομεν λοιπὸν καὶ διὰ τὴν σφ0^0 κατὰ σύμβασιν σφ$0^0 \pm = \infty$. Αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ 0^0 πρὸς 180^0 ἡ σφx συνεχῶς μικραίνει, λαμβάνουσα ὡς τιμὰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ $+\infty$ ἕως $-\infty$.

Διὰ $x = 90^0$ ἔχομεν σφ $90^0 = 0$.

Διὰ $x = 180^0$ ἔχομεν σφ $180^0 = \pm\infty$.

Ὁ Πίναξ 2 μᾶς παρέχει τὴν εἰκόνα τῆς μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y =$ σφx, ὅταν τὸ x λαμβάνη τὰς τιμὰς ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

ΠΙΝΑΞ 2

Μεταβολὴ ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης.

x εἰς rad	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
x εἰς μοίρας	0°	$\nearrow$	90°	$\nearrow$	180°	$\nearrow$	270°	$\nearrow$	360°
εφ x	0	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0
σφ x	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$

δ) *Πρόσημον τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.*

Ἀναλόγως πρὸς τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον καταλήγει ἕνα τόξον μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τὸ πρόσημον τῶν ημ*x*, συν*x*, εφ*x*, σφ*x* παρέχεται ἀπὸ τὸν Πίνακα 3.

ΠΙΝΑΞ 3

Πρόσημον τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων

Τεταρτη-μόριον	ημ*x*	συν*x*	εφ*x*	σφ*x*
1ον	+	+	+	+
2ον	+	−	−	−
3ον	−	−	+	+
4ον	−	+	−	−

12·15 Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου x.

I. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΜ τοῦ σχήματος 12·13 ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\overline{\text{ΟΠ}}^2 + \overline{\text{ΠΜ}}^2 = \overline{\text{ΟΜ}}^2,$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν, ἂν θέσωμεν $\overline{\text{ΠΜ}} = \eta\mu x$, $\overline{\text{ΟΠ}} = \sigma\upsilon\nu x$, $\overline{\text{ΟΜ}} = 1$, προκύπτει ἡ σχέσις:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1. \qquad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x καὶ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ημx, ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ συνx, καὶ ἀντιστρόφως.

II. Ὅταν τὸ Μ δὲν συμπίπτῃ μὲ τὸ Β ἢ τὸ Β′, δηλαδὴ ὅταν $x \neq 90^0 + \kappa \cdot 180^0$, ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΑΤ προκύπτει ἡ σχέσις:

$$\frac{(\overrightarrow{\text{ΑΤ}})}{(\overrightarrow{\text{ΠΜ}})} = \frac{(\overrightarrow{\text{ΟΑ}})}{(\overrightarrow{\text{ΟΠ}})} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}. \quad \text{Ἄρα:}$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}. \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (2) ἰσχύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ $x \neq 90^0 + \kappa \cdot 180^0$ καὶ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίζωμεν τὴν εφx, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ημx καὶ συνx.

III. Ὅταν τὸ Μ δὲν συμπίπτῃ μὲ τὸ Α ἢ τὸ Α′, δηλαδὴ ὅταν $x \neq \kappa \cdot 180^0$ (σχ. 12·13), τότε ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΒΣ καὶ ΟΑΤ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{(\overrightarrow{\text{ΒΣ}})}{(\overrightarrow{\text{ΟΑ}})} = \frac{(\overrightarrow{\text{ΟΒ}})}{(\overrightarrow{\text{ΑΤ}})} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sigma\varphi x}{1} = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma\varphi x \cdot \varepsilon\varphi x = 1 \quad (\text{διὰ } x \neq \kappa \cdot 180^0). \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν σφx ἀπὸ τὴν εφx καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ σχέσεις (1), (2), (3) εἶναι αἱ *βασικαὶ σχέσεις* μεταξὺ τῶν τεσσάρων βασικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου, κάθε δὲ ἄλλη σχέσις μεταξύ των, ποὺ θὰ συναντήσωμεν, προκύπτει ἀπὸ αὐτάς.

IV. Ἔκφρασις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου συναρτήσει τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτούς.

α) *Συναρτήσει τοῦ ἡμιτόνου.*

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1), (2), (3) ἔχομεν:

$$\text{συν}^2 x = 1 - \text{ημ}^2 x. \qquad (4)$$

$$\text{συν} x = \pm\sqrt{1 - \text{ημ}^2 x} \qquad (5)$$

$$\text{εφ} x = \frac{\text{ημ} x}{\pm\sqrt{1 - \text{ημ}^2 x}}. \qquad (6)$$

$$\text{σφ} x = \frac{\pm\sqrt{1 - \text{ημ}^2 x}}{\text{ημ} x}. \qquad (7)$$

Ἀπὸ τὰ πρόσημα $\pm$ θὰ ἐκλέγωμεν τὸ $+$ ἢ τὸ $-$ ἀναλόγως τοῦ τεταρτημορίου, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον. Ὁ Πίναξ 3 μᾶς δίδει τὸ πρόσημον τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰ τέσσαρα τεταρτημόρια.

β) *Συναρτήσει τοῦ συνημιτόνου.*

$$\text{ημ}^2 x = 1 - \text{συν}^2 x. \qquad (8)$$

$$\text{ημ} x = \pm\sqrt{1 - \text{συν}^2 x}. \qquad (9)$$

$$\text{εφ} x = \frac{\pm\sqrt{1 - \text{συν}^2 x}}{\text{συν} x}. \qquad (10)$$

$$\text{σφ} x = \frac{\text{συν} x}{\pm\sqrt{1 - \text{συν}^2 x}}. \qquad (11)$$

γ) *Συναρτήσει τῆς ἐφαπτομένης.*

Εἰς τὴν σχέσιν $\text{εφ}^2 x = \dfrac{\text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x}$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν (2), θέτομεν $ημ^2x = 1 - συν^2x$ καὶ ἐπιλύομεν ὡς πρὸς συνx.

$$εφ^2x = \frac{1 - συν^2x}{συν^2x} \Rightarrow συν^2x \cdot εφ^2x = 1 - συν^2x \Rightarrow$$

$$συν^2x \cdot εφ^2x + συν^2x = 1 \Rightarrow συν^2x \ (1 + εφ^2x) = 1 \Rightarrow$$

$$συν^2x = \frac{1}{1 + εφ^2x} \text{ ἢ}$$

$$συνx = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + εφ^2x}}. \qquad (12)$$

Εἰς τὴν σχέσιν $ημx = εφx \cdot συνx$, ποὺ προκύπτει ἐπίσης ἀπὸ τὴν (2), θέτομεν $συνx = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + εφ^2x}}$ καὶ ἔχομεν:

$$ημx = + \frac{εφx}{\sqrt{1 + εφ^2x}}. \qquad (13)$$

Ἀπὸ τὴν (3) ἔχομεν:

$$σφx = \frac{1}{εφx}. \qquad (14)$$

Οἱ τύποι (12), (13) καὶ (14) μᾶς παρέχουν τὰς τιμὰς τῶν ημx, συνx, σφx, ὅταν μᾶς εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς εφx (διὰ $x \neq \frac{\pi}{2} + κ\pi$)

δ) *Συναρτήσει τῆς συνεφαπτομένης.*

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εὑρίσκομεν:

$$ημx = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + σφ^2x}}. \qquad (15)$$

$$συνx = \pm \frac{σφx}{\sqrt{1 + σφ^2x}}. \qquad (16)$$

$$εφx = \frac{1}{σφx}. \qquad (17)$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ μᾶς παρέχουν τὰς τιμὰς τῶν ημx, συνx, εφx, ὅταν εἶναι ἡ γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς σφx (διὰ $x \neq κ\pi$).

12·16 Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες.

Παραστάσεις ὅπως αἱ:

$$3\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega, \quad \varepsilon\varphi x - 3\eta\mu y, \quad \frac{2\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu\omega}{\varepsilon\varphi\theta},$$

ποὺ περιέχουν τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις ἑνὸς ἢ περισσοτέρων τόξων, λέγονται *τριγωνομετρικαί*.

Δύο τριγωνομετρικαὶ παραστάσεις λέγονται *ἰσοδύναμοι*, ὅταν ἡ μία προκύπτῃ ἀπὸ τὸν μετασχηματισμὸν τῆς ἄλλης μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ὁρισμῶν τῶν πράξεων καὶ τῶν ἰδιοτήτων των, καθὼς καὶ τῶν γνωστῶν μας τριγωνομετρικῶν σχέσεων. Πχ. αἱ παραστάσεις:

$$1 + \varepsilon\varphi^2 x \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι:

$$1 + \varepsilon\varphi^2 x = 1 + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἰσοδυνάμων τριγωνομετρικῶν παραστάσεων προκύπτει ὅτι δύο ἰσοδύναμοι τριγωνομετρικαὶ παραστάσεις λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς διὰ τὰ αὐτὰ συστήματα τιμῶν τῶν τόξων των.

Ἐννοεῖται ὅτι, ὅταν ἔχωμεν κλασματικὰς παραστάσεις, πρέπει νὰ ἀποκλείωμεν τὰς τιμὰς τῶν τόξων, ποὺ μηδενίζουν τοὺς παρονομαστάς.

Ἐπίσης, ὅταν αἱ παραστάσεις περιέχουν ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην, πρέπει νὰ ἀποκλείωμεν τὰς τιμὰς τῶν τόξων, διὰ τὰς ὁποίας αἱ τριγωνομετρικαὶ αὗται συναρτήσεις δὲν ἔχουν τιμήν. Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι δύο τριγωνομετρικαὶ παραστάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, τὰς συνδέομεν μὲ τὸ σημεῖον $=$ τῆς ἰσότητος καὶ τότε ἔχομεν μίαν *τριγωνομετρικὴν ταυτότητα*.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν μιᾶς τριγωνομετρικῆς ταυτότητος, ἀναχωροῦμεν συνήθως ἀπὸ τὴν παράστασιν τοῦ ἑνὸς μέλους καὶ μετασχηματίζοντες καταλλήλως αὐτὴν καταλήγομεν εἰς τὴν παράστασιν τοῦ ἄλλου μέλους.

12·17 Παραδείγματα.

1) *Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:*

$$\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}.$$

Ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}.$$

Ἐπειδὴ $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, ἕπεται ὅτι:

$$\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{1}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}.$$

2) *Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:*

$$\varepsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \varepsilon\varphi^2 x \cdot \eta\mu^2 x.$$

Ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$\frac{\eta\mu^2 x\,(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \eta\mu^2 x =$$

$$\varepsilon\varphi^2 x \cdot \eta\mu^2 x.$$

3) *Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:*

$$3\,\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x^2 = \frac{3 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}.$$

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος περιέχει μόνον τὴν $\varepsilon\varphi x$, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος ἐκφράζομεν τὰ $\eta\mu x$ καὶ $\sigma\upsilon\nu x$ συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi x$ μὲ τοὺς τύπους (12), (13).

$$3\,\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 3 \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} - \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{3 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$$

4) *Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:*

$$\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta.$$

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος δὲν περιέχει συνα, συνβ, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος ἐκφράζομεν τὰ συνα, συνβ συναρτήσει τῶν ημα, ημβ (τύπος 4). Θὰ εἶναι $\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha\ (1 - \eta\mu^2\beta) - (1 - \eta\mu^2\alpha)\ (\eta\mu^2\beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.

12·18 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἐκφράσετε εἰς μοίρας τὰ τόξα:

$$\frac{5\pi}{12} \text{ rad}, \frac{\pi}{4} \text{ rad}, 3\pi \text{ rad}, 2 \text{ rad}, 1{,}8 \text{ rad}, \frac{\pi}{8} \text{ rad}.$$

2) Νὰ ἐκφράσετε εἰς rad τὰ τόξα:

$$48^0, 56^0, 100^0, 15^0\,40', 22^0\,30', 718^0, 200^0.$$

3) Νὰ γράψετε τὸν γενικὸν τύπον, ποὺ μᾶς παρέχει εἰς μοίρας καὶ rad ὅλα τὰ τόξα, ποὺ ἔχουν μικρότερον θετικὸν μέτρον: 30^0, 45^0, 72^0, 148^0, 200^0, 219^0, 1,3 rad, $\frac{\pi}{8}$ rad, 2 rad, $\frac{\pi}{4}$ rad.

4) Νὰ ἐργασθῆτε ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν διὰ τὰ τόξα:

$$-30^0, -15^0, -48^0, -196^0, -90^0, -270^0,$$

$$-\frac{\pi}{2} \text{ rad}, -3{,}4 \text{ rad}, -\frac{\pi}{3} \text{ rad}, -\pi \text{ rad}.$$

5) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν r καὶ κ ὁ τύπος $x = (r + \kappa\pi)$ rad μᾶς ἐκφράζει τὰ τόξα:

$$-50^0, 48^0, 250^0, -100^0, -67^0, -270^0:$$

6) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν θ^0 καὶ κ ὁ τύπος $x = \theta^0 + \kappa \cdot 360^0$ μᾶς ἐκφράζει τὰ τόξα:

$$\pm\frac{\pi}{8} \text{ rad}, \pm\frac{4\pi}{5} \text{ rad}, \pm 3 \text{ rad}, \pm 2\frac{1}{3} \text{ rad}, +\frac{\pi}{10} \text{ rad};$$

7) Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, ὅταν:

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ καὶ τὸ x λήγῃ εἰς τὸ α τεταρτημόριον

β) $\eta\mu x = 0{,}6$ » » » » » » β »

γ) $\eta\mu x = -0{,}8$ » » » » » » γ »

δ) $\sigma\upsilon\nu x = -0{,}8$ » » » » » » β » ε) $εφx = \frac{3}{4}$ καὶ τὸ x λήγῃ εἰς τὸ γ τεταρτημόριον.

ζ) $συνx = \frac{5}{13}$ » » » » » » δ »

η) $σφx = 2$ » » » » » » α »

θ) $εφx = -1$ » » » » » » β »

ι) $εφx = 1$ » » » » » » γ »

κ) $συνx = -\frac{8}{17}$ » » » » » » γ »

λ) $ημx = \frac{\sqrt{7}}{3}$ » » » » » » β »

μ) $εφx = \sqrt{5}$ » » » » » » α »

8) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν ἀκολούθων τριγωνομετρικῶν παραστάσεων:

α) $2ημx\,συνx$, ὅταν $εφx = \frac{3}{4}$ καὶ $180^0 < x < 270^0$.

β) $ημx\ συνω + συνx\ ημω$, ὅταν $εφx = 1$, $σφω = -1$ καὶ $0^0 < x < 90^0$, $270^0 < ω < 360^0$.

γ) $\frac{εφτ_1 + εφτ_2}{1 - εφτ_1 εφτ_2}$, ὅταν $ημτ_1 = \frac{\sqrt{18}}{5}$, $συντ_2 = \frac{\sqrt{7}}{3}$ καὶ $\frac{\pi}{2} < τ_1 < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < τ_2 < 2\pi$.

9) Νὰ ἀποδείξετε τὰς ἀκολούθους ταυτότητας:

α) $συν^4x - ημ^4x = 2\ συν^2x - 1$.

β) $συν^2ω - συν^4ω = συν^2ω\ ημ^2ω = ημ^2ω - ημ^4ω$.

γ) $\frac{εφA - εφB}{σφB - σφA} = \frac{εφB}{σφA}$.

δ) $σφ^2θ - συν^2θ = σφ^2θ \cdot συν^2θ$.

ε) $συν^2x - ημ^2ψ = συν^2ψ - ημ^2x$.

ζ) $συν^2α\ συν^2β - ημ^2α\ ημ^2β = συν^2α - ημ^2β$.

η) $συν^4θ + ημ^4θ = 1 - 2\ ημ^2θ\ συν^2θ$.

θ) $3\ συν^2α + 5\ ημ^2α = \frac{3 + 5\ εφ^2α}{1 + εφ^2α}$.

ι) $εφ^2x - 1 = (εφ^2x + 1)(1 - 2\ συν^2x)$.

κ) $\sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta = (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)(1 - \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)$.

λ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \varepsilon\varphi\omega} + \dfrac{\eta\mu\omega}{1 - \sigma\varphi\omega} = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega$.

μ) $\dfrac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} + \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \dfrac{2}{\eta\mu\omega}$.

ν) $\dfrac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \dfrac{\varepsilon\varphi\theta}{\sigma\varphi\theta} = \dfrac{\eta\mu^2\theta\,(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$.

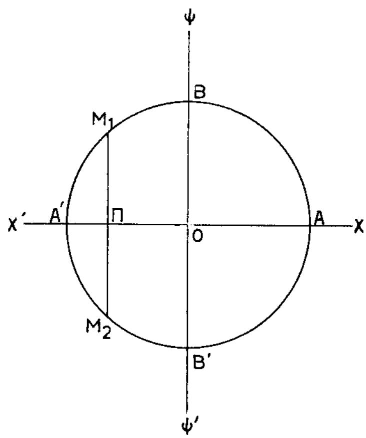
12·19 Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀντιθέτων τόξων, παραπληρωματικῶν κλπ.

I. *Τόξα ἀντίθετα* (σχ. 12·19 α).

Δύο τόξα $\widehat{AM}_1$, $\widehat{AM}_2$ λέγονται ἀντίθετα, ὅταν τὰ μέτρα των x_1 καὶ x_2 συνδέωνται μὲ τὴν σχέσιν:

$$x_1 + x_2 = 0,$$

δηλαδὴ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2 εἶναι ἀντίθετοι. Π.χ. τὰ τόξα 312^0, -312^0 εἶναι ἀντίθετα.



Σχ. 12·19 α.

Ἀντίθετα εἶναι ἐπίσης τὰ τόξα: $\dfrac{\pi}{3} + 4\pi$, καὶ $\dfrac{5\pi}{3} - 6\pi$, διότι

$$\left(\frac{\pi}{3}+4\pi\right)+\left(\frac{5\pi}{3}-6\pi\right)=\frac{\pi}{3}+4\pi+\frac{5\pi}{3}-6\pi=$$
$$6\pi-6\pi=0.$$

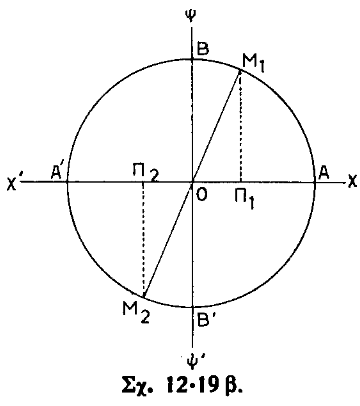
Ἐπειδὴ αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν μέτρων τῶν ἀντιθέτων τόξων $\widehat{AM}_1$, $\widehat{AM}_2$ εἶναι ἴσαι, συμπεραίνομεν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχήματος 12·19 α, ὅτι τὰ γεωμετρικὰ τόξα $\widehat{ABM}_1$, $\widehat{AB'M}_2$ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πέρατα αὐτῶν M_1, M_2 εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων. Θὰ ἔχουν συνεπῶς τὰ M_1, M_2 τὴν αὐτὴν τετμημένην $\overline{O\Pi}$ καὶ ἀντιθέτους τεταγμένας $\overline{\Pi M_1}=-\overline{\Pi M_2}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ πέρατος ἑνὸς τόξου εἶναι ἀντιστοίχως τὸ συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ (παράγρ. 12·13), θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\text{συν}\,(-x)=\text{συν}x,\quad \text{ημ}\,(-x)=-\text{ημ}x,\quad \text{εφ}\,(-x)=-\text{εφ}x,$$
$$\text{σφ}(-x)=-\text{σφ}x.$$

Ὥστε *δύο ἀντίθετα τόξα ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.*

II. *Τόξα διαφέροντα κατὰ μίαν ἡμιπεριφέρειαν.*

Τὰ τριγωνομετρικὰ τόξα $\widehat{AM}_1$, $\widehat{AM}_2$ τοῦ σχήματος 12·19 β



Σχ. 12·19 β.

ἔχουν τὰ πέρατα M_1, M_2 συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον O, διαφέρουν συνεπῶς κατὰ μίαν ἡμιπεριφέρειαν. Ἂν θ^0 εἶναι τὸ μέτρον τοῦ $\widehat{AM_1}$, τότε $(\widehat{AM_2}) = 180^0 + \theta^0$. Ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχῆμα τὰ M_1, M_2 ἔχουν ἀντιθέτους συντεταγμένας:

$$\overline{O\Pi_1} = -\overline{O\Pi_2},\quad \overline{\Pi_1 M_1} = -\overline{\Pi_2 M_2}.$$

Συμφώνως λοιπὸν μὲ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ημ}\,(180^0 + \theta^0) = -\,\text{ημ}\theta^0,\quad \text{συν}\,(180^0 + \theta^0) = -\,\text{συν}\theta^0$$
$$\text{εφ}\,(180^0 + \theta^0) = \text{εφ}\theta^0,\quad \text{σφ}\,(180^0 + \theta^0) = \text{σφ}\theta^0. \quad (1)$$

Ἂν τὰ μέτρα των ἐκφράζωνται εἰς rad, αἱ σχέσεις (1) γράφονται:

$$\text{ημ}\,(\pi + \tau) = -\,\text{ημ}\tau,\quad \text{συν}\,(\pi + \tau) = -\,\text{συν}\tau,$$
$$\text{εφ}\,(\pi + \tau) = \text{εφ}\tau,\quad \text{σφ}\,(\pi + \tau) = \text{σφ}\tau. \quad (2)$$

Τὰ μέτρα δύο γενικευμένων τόξων $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_2}$ θὰ διαφέρουν κατὰ περιττὸν ἀριθμὸν ἡμιπεριφερειῶν, ἤτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $(\widehat{AM_1}) = 2K\pi + \tau$, $(\widehat{AM_2}) = (2K' + 1)\pi + \tau$, ὅπου K, K′ ἀκέραιοι.

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\text{ημ}\,[(2K + 1)\pi + \tau] = -\,\text{ημ}\,(2K'\pi + \tau) = -\,\text{ημ}\tau.$$
$$\text{συν}\,[(2K + 1)\pi + \tau] = -\,\text{συν}\,(2K\pi + \tau) = -\,\text{συν}\tau.$$
$$\text{εφ}\,[(2K + 1)\pi + \tau] = \text{εφ}\,(2K'\pi + \tau) = \text{εφ}\tau.$$
$$\text{σφ}\,[(2K + 1)\pi + \tau] = \text{σφ}\,(2K'\pi + \tau) = \text{σφ}\tau. \quad (3)$$

Ὥστε *δύο τόξα, ποὺ διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν ἡμιπεριφερειῶν, ἔχουν τὰς ἰδίας ἐφαπτομένας καὶ συνεφαπτομένας, ἀντίθετα δὲ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα.*

Παραδείγματα:

α) $\text{ημ}\,\dfrac{22\pi}{3} = \text{ημ}\,\left(7\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

β) $\text{εφ}\,(930^0) = \text{εφ}\,(5 \times 180^0 + 30^0) = \text{εφ}30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

γ) $\text{συν}\,\left(-\dfrac{19\pi}{4}\right) = \text{συν}\left(-5\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\,\text{συν}\,\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

III. *Τόξα παραπληρωματικά.*

Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ἡμιπεριφέρειαν.

Ἂν συνεπῶς θ^0 εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου $\widehat{AM_1}$ (σχ. 12·19γ), τὸ μέτρον τοῦ παραπληρωματικοῦ του $\widehat{AM_1}$ θὰ εἶναι $180^0 - \theta^0$.

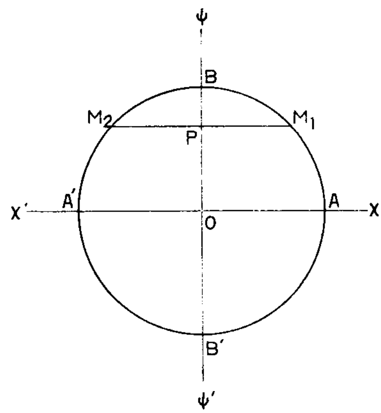
Ἀλλὰ $180^0 - \theta^0 = 180^0 + (-\theta^0)$, συνεπῶς, ἂν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους (1), θὰ ἔχωμεν:

$$\eta\mu\,(180^0 - \theta^0) = \eta\mu\,[180^0 + (-\theta^0)] = -\eta\mu\,(-\theta^0) = -(-\eta\mu\theta^0)$$

$$\text{ἢ}\quad \eta\mu\,(180^0 - \theta^0) = \eta\mu\theta^0.$$

$$\sigma\upsilon\nu\,(180^0 - \theta^0) = \sigma\upsilon\nu\,[180^0 + (-\theta^0)] = -\sigma\upsilon\nu\,(-\theta^0) = -\sigma\upsilon\nu\theta^0$$

$$\varepsilon\varphi\,(180^0 - \theta^0) = -\varepsilon\varphi\theta^0, \qquad \sigma\varphi\,(180^0 - \theta^0) = -\sigma\varphi\theta^0. \qquad (4)$$



Σχ. 12·19 γ.

Ὥστε *δύο τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.*

Ἂν τὰ μέτρα τῶν δύο τόξων ἐκφράζωνται εἰς rad, αἱ προηγούμεναι σχέσεις γίνονται:

$$\eta\mu\,(\pi - \tau) = \eta\mu\tau, \qquad \sigma\upsilon\nu\,(\pi - \tau) = -\sigma\upsilon\nu\tau,$$

$$\varepsilon\varphi\,(\pi - \tau) = -\varepsilon\varphi\tau, \qquad \sigma\varphi\,(\pi - \tau) = -\sigma\varphi\tau. \qquad (5)$$

Τὰ μέτρα δύο γενικευμένων τόξων μὲ πέρατα ἀντιστοίχως Μ καὶ Μ′ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$(\overset{\frown}{AM}) = 2\kappa\pi + \tau, \ (\overset{\frown}{AM'}) = 2\kappa\pi + (\pi - \tau) = (2\kappa' + 1)\pi - \tau.$$

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\eta\mu\,[(2\kappa+1)\,\pi - \tau] = \eta\mu\,(2\kappa'\pi + \tau) = \eta\mu\tau.$$

$$\sigma\upsilon\nu\,[(2\kappa+1)\,\pi - \tau] = -\,\sigma\upsilon\nu\,(2\kappa'\pi + \tau) = -\,\sigma\upsilon\nu\tau.$$

$$\varepsilon\varphi\,[(2\kappa+1)\,\pi - \tau] = -\,\varepsilon\varphi\tau, \ \sigma\varphi\,[(2\kappa+1)\,\pi - \tau] = -\,\sigma\varphi\tau.$$

π.χ.

$$\eta\mu\,\frac{19\pi}{4} = \eta\mu\,(5\pi - \frac{\pi}{4}) = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{19\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\,(5\pi - \frac{\pi}{4}) = -\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4} = -\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\varepsilon\varphi\,\frac{19\pi}{4} = \varepsilon\varphi\,(5\pi - \frac{\pi}{4}) = -\,\varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{4} = -1.$$

$$\sigma\varphi\,\frac{19\pi}{4} = \sigma\varphi\,(5\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sigma\varphi\,\frac{\pi}{4} = -1.$$

IV. *Τόξα συμπληρωματικά.*

Δύο τόξα λέγονται συμπληρωματικά, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα 90^0 ἢ $\frac{\pi}{2}$ rad.

Ἔστω ὅτι τὰ τόξα $\overset{\frown}{AM_1}$ καὶ $\overset{\frown}{AM_2}$ τοῦ σχήματος 12·19δ εἶναι συμπληρωματικά. Ἂν $(\overset{\frown}{AM_1}) = \theta^0$, τότε $(\overset{\frown}{AM_2}) = 90^0 - \theta^0$.

Ἐπειδὴ δὲ $\overset{\frown}{AM_2} + \overset{\frown}{M_2B} = 90^0$, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ τόξα $\overset{\frown}{AM_1}$ καὶ $\overset{\frown}{M_2B}$ εἶναι ἴσα, καθὼς καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι $A\widehat{O}M_1$, $M_2\widehat{O}B$. Θὰ εἶναι συνεπῶς ἴσα καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $O\Pi_1M_1$ καὶ OP_2M_2. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν προκύπτει ὅτι:

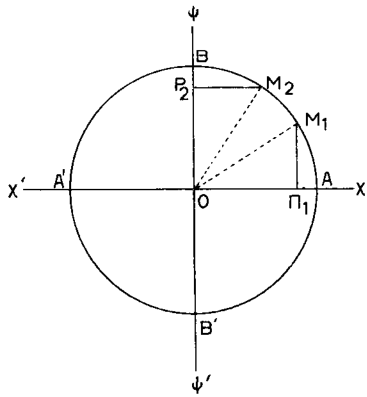
$$\overline{\Pi_1M_1} = \overline{P_2M_2}, \ \overline{O\Pi_1} = \overline{OP_2}.$$

Εἶναι ὅμως $\overline{\Pi_1 M_1} = \eta\mu\theta^0$, $\overline{P_2 M_2} = \sigma\upsilon\nu\,(\widehat{AM_2}) = \sigma\upsilon\nu\,(90^0 - \theta^0)$

$$\overline{O\Pi_1} = \sigma\upsilon\nu\theta^0,\ \overline{OP_2} = \eta\mu\,(\widehat{AM_2}) = \eta\mu\,(90^0 - \theta^0).$$

Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\eta\mu\,(90^0 - \theta^0) = \sigma\upsilon\nu\theta^0, \qquad \sigma\upsilon\nu\,(90^0 - \theta^0) = \eta\mu\theta^0,$$
$$\varepsilon\varphi\,(90^0 - \theta^0) = \sigma\varphi\theta^0, \qquad \sigma\varphi\,(90^0 - \theta^0) = \varepsilon\varphi\theta^0. \qquad (6)$$



Σχ. 12·19 δ.

Ἂν τὰ μέτρα δύο συμπληρωματικῶν τόξων ἐκφράζωνται εἰς ἀκτίνια, αἱ σχέσεις 6 γίνονται:

$$\eta\mu\,(\frac{\pi}{2} - \tau) = \sigma\upsilon\nu\tau, \qquad \sigma\upsilon\nu\,(\frac{\pi}{2} - \tau) = \eta\mu\tau,$$

$$\varepsilon\varphi\,(\frac{\pi}{2} - \tau) = \sigma\varphi\tau, \qquad \sigma\varphi\,(\frac{\pi}{2} - \tau) = \varepsilon\varphi\tau. \qquad (7)$$

V. *Δύο τόξα μὲ ἄθροισμα 360⁰.*

Ἔστω ὅτι τὰ τόξα $\widehat{AM_1}$ καὶ $\widehat{AM_2}$ τοῦ σχήματος 12·19 ε ἔχουν ἄθροισμα 360^0. Ἂν $(\widehat{AM_1}) = \theta^0$, τότε $(\widehat{AM_2}) = 360^0 - \theta^0$, ἐπειδὴ δὲ $360^0 - \theta^0 = 360^0 + (-\theta^0)$ θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\eta\mu\,(360^0 - \theta^0) = \eta\mu\,[(360^0 + (-\theta^0)] = \eta\mu\,(-\theta^0) = -\eta\mu\theta^0.$$

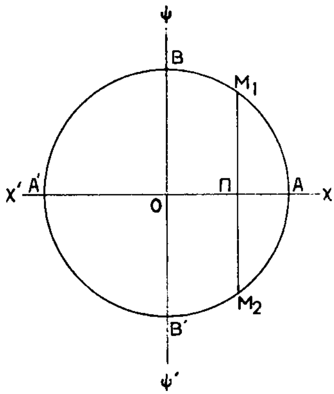
$$\text{συν}\,(360^0-\theta^0)=\text{συν}\,[360^0+(-\theta^0)]=\text{συν}\,(-\theta^0)=+\,\text{συν}\theta^0.$$
$$\text{εφ}\,(360^0-\theta^0)=\text{εφ}\,[360^0+(-\theta^0)]=\text{εφ}\,(-\theta^0)=-\,\text{εφ}\theta^0.$$
$$\text{σφ}\,(360^0-\theta^0)=\text{σφ}\,[360^0+(-\theta^0)]=\text{σφ}\,(-\theta^0)=-\,\text{σφ}\theta^0.$$

Ὥστε:

$$\text{ημ}\,(360^0-\theta^0)=-\,\text{ημ}\theta^0,\quad \text{συν}\,(360^0-\theta^0)=\text{συν}\theta^0.$$
$$\text{εφ}\,(360^0-\theta^0)=-\,\text{εφ}\theta^0,\quad \text{σφ}\,(360^0-\theta^0)=-\,\text{σφ}\theta^0. \qquad (8)$$

Ἤ, ἂν τὰ μέτρα των ἐκφράζωνται εἰς ἀκτίνια:

$$\text{ημ}\,(2\pi-\tau)=-\,\text{ημ}\tau,\quad \text{συν}\,(2\pi-\tau)=\text{συν}\tau,$$
$$\text{εφ}\,(2\pi-\tau)=-\,\text{εφ}\tau,\quad \text{σφ}\,(2\pi-\tau)=-\,\text{σφ}\tau.$$



Σχ. 12·19 ε.

VI. *Δύο τόξα μὲ ἄθροισμα 270⁰.*

Ἔστω ὅτι τὰ τόξα $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_2}$ τοῦ σχήματος 12·19 ζ ἔχουν ἄθροισμα 270^0. Ἂν $(\widehat{AM_1})=\theta^0 \Rightarrow (\widehat{AM_2})=(270^0-\theta^0)=180^0+(90^0-\theta^0)$.

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ημ}\,(270^0-\theta^0)=\text{ημ}\,[180^0+(90^0-\theta^0)]=-\,\text{ημ}\,(90^0-\theta^0)=-\,\text{συν}\theta^0.$$
$$\text{συν}\,(270^0-\theta^0)=\text{συν}\,[180^0+(90^0-\theta^0)]=-\,\text{συν}\,(90^0-\theta^0)=-\,\text{ημ}\theta^0.$$

Ὥστε:

$$\text{ημ}\,(270^0-\theta^0)=-\,\text{συν}\theta^0,\quad \text{συν}\,(270^0-\theta^0)=-\,\text{ημ}\theta^0.$$

$$\text{εφ}\,(270^0 - \theta^0) = \text{σφ}\theta, \quad \text{σφ}\,(270^0 - \theta^0) = \text{εφ}\theta^0. \tag{9}$$

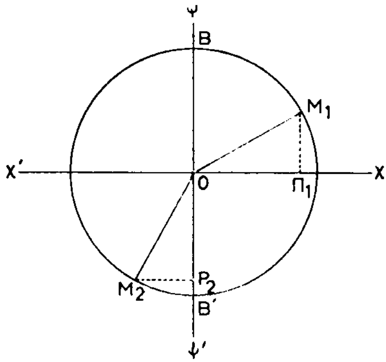
VII. *Δύο τόξα, ποὺ διαφέρουν κατὰ 90⁰.*

Θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\text{ημ}\,(90^0 + \theta^0) = \text{ημ}\,[90^0 - (-\theta^0)] = \text{συν}\,(-\theta^0) = \text{συν}\theta^0.$$

$$\text{συν}\,(90^0 + \theta^0) = \text{συν}\,[90^0 - (-\theta^0)] = \text{ημ}\,(-\theta^0) = -\,\text{ημ}\theta^0,$$

$$\text{εφ}\,(90^0 + \theta^0) = -\,\text{σφ}\theta^0, \quad \text{σφ}\,(90^0 + \theta^0) = -\,\text{εφ}\theta^0. \tag{10}$$



Σχ. 12·19 ζ.

12·20 Ἀναγωγὴ ἑνὸς τόξου εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον.

Ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων γίνεται ἀπὸ πίνακας, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν θετικῶν καὶ μικροτέρων τοῦ τεταρτημορίου τόξων, δηλαδὴ τῶν τόξων x, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $0^0 < x < 90^0$. Οἱ σχετικοὶ πίνακες εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου παρέχουν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων αὐτῶν μὲ προσέγγισιν 0,001.

Διὰ κάθε ἄλλο τόξον χρησιμοποιοῦμεν τὰς σχέσεις τῆς προηγουμένης παραγράφου καὶ ἀνάγομεν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν του εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς θετικοῦ τόξου x μικροτέρου τοῦ τεταρτημορίου.

Π.χ. διὰ τὸ τόξον 310^0. Ἐπειδὴ $310^0 = 360^0 - 50^0$, θὰ ἔχωμεν:

$$ημ\,310^0 = ημ\,(360^0 - 50^0) = -ημ\,50^0,\ συν\,310^0 = συν 50^0,\ εφ 310^0 = -εφ\,50^0,\ σφ\,310^0 = -σφ\,50^0.$$

Ἤτοι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν του ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 50^0. Γενικῶς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

I. *Διὰ* $90^0 < x < 180^0$. Εὑρίσκομεν τὸ $180^0 - x$ καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὰς σχέσεις (4)(παράγρ. 12·19). Π.χ. διὰ $x = 150^0$ θὰ ἔχωμεν:

$$180^0 - 150^0 = 30^0 \ καὶ\ 150^0 = 180^0 - 30^0.$$

$$ημ\,150^0 = ημ\,(180^0 - 30^0) = ημ\,30^0 = \frac{1}{2}.$$

$$συν 150^0 = συν\,(180^0 - 30^0) = -συν\,30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$εφ\,150^0 = εφ\,(180^0 - 30^0) = -εφ\,30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$σφ\,150^0 = σφ\,(180^0 - 30^0) = -σφ\,30^0 = -\sqrt{3}.$$

II. *Διὰ* $180^0 < x < 270^0$. Εὑρίσκομεν τὸ τόξον $x - 180^0$ καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὰς σχέσεις (1) (παράγρ. 12·19). Π.χ. διὰ $x = 225^0$, θὰ ἔχωμεν:

$$225^0 - 180^0 = 45^0 \ καὶ\ 225^0 = 180^0 + 45^0,$$

$$ημ\,225^0 = ημ\,(180^0 + 45^0) = -ημ\,45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$συν\,225^0 = -συν\,45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ εφ\,225^0 = εφ\,45^0 = 1.$$

$$σφ\,(225^0) = σφ\,45^0 = 1.$$

III. *Διὰ* $270^0 < x < 360^0$. Εὑρίσκομεν τὸ τόξον $360^0 - x$ καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὰς σχέσεις (8) (παράγρ. 12·19). Π.χ. διὰ $x = 300^0$ θὰ ἔχωμεν:

$$360^0 - 300^0 = 60^0 \ καὶ\ 300^0 = 360^0 - 60^0.$$

$$ημ300^0 = ημ(360^0 - 60^0) = -ημ60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$συν300^0 = συν(360^0 - 60^0) = συν\,60^0 = \frac{1}{2}.$$

$$εφ300^0 = εφ(360^0 - 60^0) = -εφ\,60^0 = -\sqrt{3}.$$

$$σφ\,300^0 = σφ(360^0 - 60^0) = -σφ\,60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

IV. *Διὰ* $x > 2\pi$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ τόξον τὰς ἀκεραίας περιφερείας, ποὺ περιέχει. Οἱ τριγωνομετρικοί του ἀριθμοὶ ὡς γνωστὸν δὲν μεταβάλλονται. Κατὰ τὰ λοιπὰ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις. Π.χ. διὰ $x = \frac{28\pi}{3}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{28\pi}{3} = 9\pi + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \pi + \frac{\pi}{3} = 4 \times 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}.$$

Ἤτοι τὰ τόξα $\frac{28\pi}{3}$ καὶ $\pi + \frac{\pi}{3}$ διαφέρουν κατὰ 4 περιφερείας καὶ οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί των θὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμάς:

$$ημ\frac{28\pi}{3} = ημ\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -ημ\,\frac{\pi}{3} = -ημ\,60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$συν\,\frac{28\pi}{3} = συν\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -συν\,\frac{\pi}{3} = -συν\,60^0 = -\frac{1}{2}\text{κλπ.}$$

12·21 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων:

$-30^0, -45^0, -60^0, -48^0, -\frac{\pi}{8}$ rad, $\frac{\pi}{18}$ rad. (Νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ οἱ σχετικοὶ πίνακες εἰς τὸ τέλος τοῦ τόμου).

2) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων:

$$100^0,\ 120^0,\ 125^0\ 10',\ \frac{2\pi}{3}\text{ rad},\ \frac{3\pi}{4}\text{ rad},$$

$\frac{7\pi}{8}$ rad, -120^0, -150^0, $-\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{3\pi}{5}$, $-\frac{5\pi}{6}$.

3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α) $3\eta\mu(-60^0)\cdot\sigma\upsilon\nu\,120^0+2\,\sigma\upsilon\nu(-60^0)\cdot\eta\mu\,120^0$.

β) $\varepsilon\varphi\,135^0\cdot\sigma\varphi(-150^0)+\varepsilon\varphi(-120^0)\cdot\sigma\varphi\,135^0$.

γ) $\varepsilon\varphi(-30^0)+\varepsilon\varphi(-60^0)+\varepsilon\varphi(-120^0)-\varepsilon\varphi(-150^0)$.

δ) $\eta\mu\,\frac{2\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{5\pi}{6}\,\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}+\varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}\cdot\sigma\varphi\,\frac{5\pi}{6}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2}$.

ε) $\eta\mu(\pi-x)\cdot\eta\mu(-x)+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\,\eta\mu(-x)$.

4) Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων:

α) 210^0, 240^0, 250^0, -235^0, -190^0, -210^0.

β) $(\pi-\frac{\pi}{3})$ rad, $\frac{5\pi}{3}$ rad, $\frac{9\pi}{3}$ rad, $-\frac{4\pi}{3}$ rad, $-\frac{5\pi}{3}$ rad.

γ) 300^0, 330^0, 315^0, 290^0, -330^0, -200^0.

δ) 750^0, -390^0, 480^0, 720^0, -540^0.

ε) $\frac{12\pi}{5}$ rad, $\frac{-12\pi}{7}$ rad, $\frac{40\pi}{3}$ rad, $-\frac{20\pi}{3}$ rad, $\frac{\pi}{8}$ rad.

5) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων:

α) $3x\eta\mu x-4\eta\mu 3x$, διὰ $x=\frac{25\pi}{6}$.

β) $R\cdot\eta\mu\omega t$, διὰ $R=6$, $\omega=\frac{2\pi}{10}$, $t=3$.

γ) $R\eta\mu(\omega t+\varphi)$, διὰ $R=14$, $\omega=43$ rad, $\varphi=\frac{\pi}{6}$ rad, $t=2$.

6) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων:

α) $\eta\mu\,300^0\cdot\sigma\upsilon\nu\,480^0+\sigma\upsilon\nu(-330^0)\cdot\eta\mu(-1\,080^0)$.

β) $\eta\mu(\frac{\pi}{6}-2\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3}+7\pi)-\varepsilon\varphi^2(\frac{5\pi}{3}-6\pi)$.

γ) $\eta\mu\,210^0\cdot\eta\mu\,225^0\cdot\eta\mu\,240^0-\sigma\upsilon\nu\,210^0\cdot\sigma\upsilon\nu\,225^0\cdot\sigma\upsilon\nu\,240^0$.

7) Νὰ δείξετε ὅτι ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες διὰ κάθε τιμὴν τοῦ ω:

α) $\eta\mu(90^0+\omega)\cdot\eta\mu\,\omega+\sigma\upsilon\nu(90^0+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=0$.

β) $\sigma\varphi(90^0+\omega)\cdot\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi(90^0-\omega)\cdot\varepsilon\varphi\omega=0$.

γ) $\eta\mu(90^0+\omega)+\eta\mu(270^0+\omega)-\eta\mu(180^0+\omega)+$
$\sigma\upsilon\nu(270^0-\omega)=0$.

δ) $\eta\mu(270^0-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(360^0-\omega)+$

$\sigma\upsilon\nu\,(90^0+\omega)\cdot\eta\mu\,(180^0-\omega)=-1.$

ε) $\dfrac{\eta\mu\,(180^0+\omega)\cdot\epsilon\varphi\,(270^0+\omega)}{\eta\mu\,(90^0+\omega)\cdot\epsilon\varphi\,(360^0-\omega)}=\sigma\varphi\omega.$

8) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι:

α) $\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\pi}{3}\cdot\eta\mu\,\dfrac{13\pi}{6}=\dfrac{1}{4}.$

β) $\eta\mu\,\dfrac{2\pi}{3}\cdot\ \sigma\upsilon\nu\,\dfrac{11\pi}{6}+\eta\mu\,\dfrac{9\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{5}{4}.$

γ) $\eta\mu\,(\alpha-\beta)=-\eta\mu\,(\beta-\alpha).$

δ) $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\,(\beta-\alpha).$

9) Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου, νὰ ἀποδείξετε ὅτι:

α) $\eta\mu\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\eta\mu\Gamma,\ \sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-\sigma\upsilon\nu\Gamma,$

$\epsilon\varphi\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-\epsilon\varphi\Gamma,\ \sigma\varphi\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-\sigma\varphi\Gamma.$

β) $\eta\mu\left(\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2},\quad \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)=\eta\mu\,\dfrac{\Gamma}{2},$

$\epsilon\varphi\left(\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)=\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2},\quad \sigma\varphi\left(\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)=\epsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}.$

12·22 Ἁπλαῖ τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

Ὅπως εἴδαμεν (παράγρ. 12·17), ἡ ἰσότης $1+\epsilon\varphi x^2=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ εἶναι μία ταυτότης, δηλαδὴ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Ἡ ἰσότης ὅμως $3\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu 2x+1$, ἐνῶ ἀληθεύει διὰ $x=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}$, $x=2\pi+\dfrac{\pi}{6}$, $x=2\pi+\dfrac{5\pi}{6}$, κλπ., δὲν ἀληθεύει διὰ $x=\pi$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ κλπ., Λέγομεν λοιπὸν τότε ὅτι ἡ ἰσότης $3\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\,2x+1$ εἶναι μία *ἐξίσωσις*.

Γενικῶς *τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν θὰ καλοῦμεν κάθε ἰσότητα, τῆς ὁποίας ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἢ καὶ τὰ δύο μέλη περιέχουν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀγνώστων τό-*

ξων x, y ... ἢ συναρτήσεων αὐτῶν, καὶ ἡ ἰσότης αὐτὴ δὲν ἀληθεύει διὰ κάθε σύστημα τιμῶν τῶν ἀγνώστων.

Αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου ἢ τὰ συστήματα τιμῶν τῶν ἀγνώστων τόξων, ποὺ ἀληθεύουν μίαν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν, λέγονται *λύσεις*, ἡ δὲ εὕρεσις αὐτῶν *ἐπίλυσις* τῆς ἐξισώσεως.

Παραθέτομεν κατωτέρω τὴν ἐπίλυσιν ὡρισμένων τύπων ἁπλῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Τύπος Α.

Αἱ ἐξισώσεις $ημx = α$, $συνx = α$, $εφx = α$, $σφx = α$ μὲ $-1 \leqslant α \leqslant 1$.

I. *Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $ημx = α$ μὲ $-1 \leqslant α \leqslant 1$.* (1)

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος $ψ'ψ$ τῶν ἡμιτόνων (σχ. 12·19γ) λαμβάνομεν διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{OP} = α$, καὶ φέρομεν τὴν $M_1PM_2 \perp ψ'ψ$. Τὰ τόξα μὲ ἡμίτονον ἴσον πρὸς α, ποὺ διὰ λόγους συντομίας τὰ γράφομεν *τοξημα*, εἶναι τὰ $(\widehat{AM_1})$, $(\widehat{AM_2})$. Ἂν τὸ μικρότερον θετικὸν $(\widehat{AM_1})$ εἶναι τ rad, τότε διὰ τὰ τριγωνομετρικὰ τόξα $(\widehat{AM_1})$, $(\widehat{AM_2})$ θὰ ἔχωμεν [παράγραφος 12·19 (3)]

$(\widehat{AM_1}) = 2κπ + τ$, $(\widehat{AM_2}) = 2κπ + (π - τ) = (2κ + 1)π - τ$.

Συνεπῶς αἱ λύσεις τῆς (1) παρέχονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$x = 2κπ + τ \qquad x = (2κ + 1)π - τ \qquad (2)$$

ὅπου κ σχετικὸς ἀκέραιος.

Τὴν τιμὴν τοῦ τ εὑρίσκομεν ἀπὸ τοὺς πίνακας τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. (Ἐὰν τὸ ημx εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα, ποὺ ἀκολουθεῖ).

Παραδείγματα :

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Εὑρίσκομεν τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον τ, ὥστε νὰ εἶναι:

$$ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad ἄρα\ τ = 60^0 \quad ἢ\ τ = \frac{\pi}{3}.$$

Συνεπῶς αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ παρέχονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$x = 2κ\pi + \frac{\pi}{3}, \quad x = (2κ + 1)\pi - \frac{\pi}{3} = 2κ\pi + \frac{2\pi}{3}$$

ἢ εἰς μοίρας $x = κ \cdot 360^0 + 60^0$, $x = κ \cdot 360^0 + 180^0 - 60^0 =$
$κ \cdot 360^0 + 120^0$.

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $ημx = -\frac{1}{2}$.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον τ′, ὥστε νὰ εἶναι:

$$ημτ' = \frac{1}{2}, \quad ἄρα\ τ' = 30^0.$$

Συνεπῶς τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον τ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$ημτ = -\frac{1}{2}, \quad εἶναι\ τ = 180^0 + τ = 180^0 + 30^0 = 210^0$$

ἢ $τ = \frac{7\pi}{6}$ rad. Ἄρα αἱ λύσεις τῆς $ημx = -\frac{1}{2}$ παρέχονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$x = 2κ\pi + \frac{7\pi}{6} = (2κ + 1)\pi + \frac{\pi}{6}.$$

$$x = (2κ + 1)\pi - \frac{7\pi}{6} = 2κ\pi - \frac{\pi}{6}.$$

II. *Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως* $συνx = α$ *μὲ* $-1 \leqslant α \leqslant 1$. (3)

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος χ′χ τῶν συνημιτόνων (σχ. 12·19ε) λαμβάνομεν $\overrightarrow{ΟΠ}$, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{ΟΠ} = α$, καὶ φέρομεν τὴν $Μ_1ΠΜ_2$ $\perp$ χ′χ, τέμνουσαν τὴν Ο εἰς τὰ $Μ_1$, $Μ_2$. Τὰ τόξα μὲ συνημίτονα ἴσα πρὸς α, *τοξσυνα*, εἶναι τὰ $(ΑΜ_1)$, $(ΑΜ_2)$.

Ἐὰν διὰ τὸ μικρότερον θετικὸν $\widehat{AM_1}$ ἔχωμεν $(\widehat{AM_1}) = \tau$, τότε διὰ τὰ τριγωνομετρικὰ τόξα $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_2}$ θὰ ἔχωμεν:

$$(\widehat{AM_1}) = 2\kappa\pi + \tau, \quad (\widehat{AM_2}) = 2\kappa\pi - \tau.$$

Συνεπῶς αἱ λύσεις τῆς συν$x = \alpha$ παρέχονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$x = 2\kappa\pi \pm \alpha. \qquad (4)$$

Παραδείγματα:

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις συν$x = 0{,}525$.*

Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον τ, διὰ τὸ ὁποῖον συν$x = 0{,}597$, εἶναι:

$$\tau \simeq 53^0\ 20' \text{ ἢ } \tau \simeq \frac{8\pi}{27}.$$

Συνεπῶς αἱ λύσεις τῆς συν$x = 0{,}525$ παρέχονται κατὰ προσέγγισιν ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{8\pi}{27} \text{ ἢ } x = \kappa \cdot 360^0 \pm 53^0\ 20'.$$

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις συν$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον τ΄, διὰ τὸ ὁποῖον συν$\tau' = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ εἶναι $\tau' = 30^0$, ἄρα τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον τ, ποὺ ἔχει:

$$\text{συν}\tau = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ εἶναι } \tau = 180^0 - 30^0 = 150^0 \text{ ἢ } \tau = \frac{5\pi}{6}.$$

Συνεπῶς αἱ λύσεις τῆς συν$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ παρέχονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

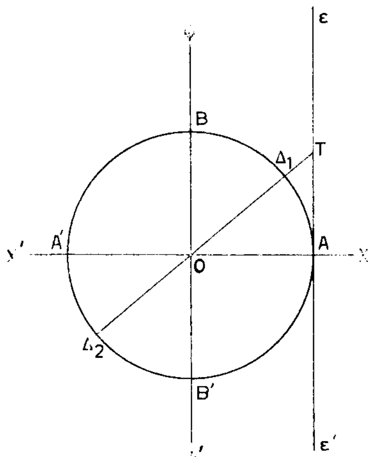
$$x = \kappa \cdot 360^0 \pm 150^0 \text{ ἢ } x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}.$$

III. ***Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως εφ$x = \alpha$,***

$$\text{διὰ } -\infty \leqslant x \leqslant +\infty. \qquad (5)$$

Ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων (σχ. 12·22) λαμβάνομεν $\overrightarrow{AT}$, ὥστε $\overline{AT} = \alpha$, καὶ φέρομεν τὴν ΟΤ, ποὺ τέμνει τὴν Ο εἰς τὰ Δ_1, Δ_2. Τὰ τόξα μὲ ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς α, *τοξεφα*, εἶναι τὰ $(\widehat{A\Delta_1})$, $(\widehat{A\Delta_2})$. Ἐὰν διὰ τὸ μικρότερον θετικὸν $\widehat{A\Delta_1}$ ἔχωμεν $(\widehat{A\Delta_1}) = \tau$ rad, τότε θὰ εἶναι $(\widehat{A\Delta_1}) = 2\kappa\pi + \tau$, $(\widehat{A\Delta_2}) = 2\kappa\pi + (\pi + \tau) = (2\kappa + 1)\pi + \tau$, ποὺ ἀμφότερα περιέχονται εἰς τὸν τύπον $\kappa\pi + \tau$ μὲ κ σχετικὸν ἀκέραιον. Συνεπῶς αἱ λύσεις τῆς $\varepsilon\varphi x = \alpha$ παρέχονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$x = \kappa\pi + \tau. \qquad (6)$$



Σχ. 12·22.

IV. *Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως σφx = α,*

$$\text{μὲ } -\infty < x < +\infty. \qquad (7)$$

Ἐὰν σκεφθῶμεν ὅπως εἰς τὴν $\varepsilon\varphi x = \alpha$, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ λύσεις τῆς $\sigma\varphi x = \alpha$ παρέχονται ἐπίσης ἀπὸ τὸν τύπον (6):

$$x = \kappa\pi + \tau, \qquad (8)$$

ὅπου τ τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\sigma\varphi\tau = \alpha$.

Σημείωσις. Ἐὰν εἰς τὰς (5), (7) εἶναι $\alpha < 0$, ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ δεύτερα παραδείγματα τῶν (1) καὶ (2).

Τύπος Β.

Ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς ημx, συνx, εφx, σφx.

Αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ τοῦ τύπου ἀνήκουν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους μορφάς:

$$\begin{aligned} \alpha\eta\mu^2 x + \beta\ \eta\mu x + \gamma &= 0 \\ \alpha\sigma\upsilon\nu^2 x + \beta\ \sigma\upsilon\nu x + \gamma &= 0 \\ \alpha\varepsilon\varphi^2 x + \beta\ \varepsilon\varphi x + \gamma &= 0 \\ \alpha\sigma\varphi^2 x + \beta\ \sigma\varphi x + \gamma &= 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ ἐπιλύονται μὲ τὸν τύπον:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

ἐπιλύσεως τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἄγνωστον τὸ ημx, εἴτε τὸ συνx κλπ., ἔχουν δὲ λύσιν, ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ (Α΄ Τόμος). Εἰς τὰς δύο πρώτας, διὰ νὰ γίνῃ δεκτὴ μία λύσις ρ, πρέπει νὰ πληροῖ τὴν σχέσιν $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως φθάνομεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τοῦ α΄ τύπου. Π.χ. ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν $2\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 2 = 0$ εὑρίσκομεν $\eta\mu x = 2$ καὶ $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. Ἀπορρίπτομεν τὴν $\eta\mu x = 2$ καὶ ἀπὸ τὴν $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ λαμβάνομεν $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ καὶ $x = (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{6}$ (κ ἀκέραιος), ποὺ εἶναι αἱ λύσεις τῆς δοθείσης.

Μία ἐξίσωσις, ποὺ δὲν φαίνεται ἐξ ἀρχῆς νὰ ἀνήκῃ εἰς τοὺς τύπους, ποὺ ἐξητάσαμεν, ἐνδέχεται νὰ ἀνάγεται εἰς ἕνα ἀπὸ αὐτούς, ἐὰν τὴν μετασχηματίσωμεν καταλλήλως, ἐφαρμόζοντες τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἐξισώσεων (ἀπαλοιφὴ παρονομαστῶν κλπ.) καὶ τὰς γνωστὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου.

Παραδείγματα:

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\varepsilon\varphi x = \dfrac{3}{2\eta\mu x}$.

Θὰ ἔχωμεν $\varepsilon\varphi x = \dfrac{3}{2\eta\mu x} \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{3}{2\eta\mu x}$.

Ὑποθέτομεν $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \neq 0$ καὶ ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς.

Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$2\ \eta\mu^2 x = 3\,\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 2\ (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) - 3\,\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\ \sigma\upsilon\nu^2 x + 3\ \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0.$$

Ἐπιλύομεν τὴν τελευταίαν ὡς πρὸς συνx καὶ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu x = -2$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$. Ἡ $\sigma\upsilon\nu x = -2$ ἀπορρίπτεται. Ἀπὸ τὴν $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ λαμβάνομεν τοὺς τύπους $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$, ποὺ μᾶς παρέχουν τὰς λύσεις τῆς δοθείσης.

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \sigma\upsilon\nu x$.

Θὰ ἔχωμεν $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)\ (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) = \sigma\upsilon\nu x \ \text{ἤ}$$
$$\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu x \ (\text{ἐπειδὴ } \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1) \ \text{ἤ}$$
$$1 - \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \ \text{ἤ}\ 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0.$$

Ἡ τελευταία ἔχει λύσεις τάς:

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2},\ \sigma\upsilon\nu x = -1.$$

Ἡ $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ μᾶς δίδει $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$, καὶ ἡ $\sigma\upsilon\nu x = -1$ μᾶς δίδει $x = 2\kappa\pi \pm \pi = (2\kappa + 1)\,\pi$.

12·23 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἐπιλύσετε τὰς ἐξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, β) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

γ) $2\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{3}$, δ) $\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi x = 3$, ε) $\sigma\varphi x = \pm 1$,

ζ) $\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\varphi x} = 1$, η) $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0$, θ) $\eta\mu^2 x = 2\,\eta\mu x$,

ι) $\eta\mu x = 0{,}751$, κ) $\varepsilon\varphi x = 0{,}411$.

2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ -360^0 καὶ $+360^0$ λύσεις τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

α) $2\eta\mu x = 1$, β) $2\sigma\upsilon\nu x = -1$, γ) $\varepsilon\varphi^3 x = 3\varepsilon\varphi x$,
δ) $\sigma\varphi^2 x + \sigma\varphi x = 0$, ε) $\eta\mu x = 0{,}966$, ζ) $\sigma\upsilon\nu x = 0{,}385$,
η) $\varepsilon\varphi x = 1{,}732$.

3) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $3\eta\mu^2 x - 5\,\eta\mu x + 2 = 0$, β) $7\,\sigma\upsilon\nu^2 x - 8\,\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$,
γ) $4\eta\mu^2 x = 3\eta\mu x$, δ) $\varepsilon\varphi^2 x + 2\varepsilon\varphi x - 1 = 0$,
ε) $7\sigma\varphi^2 x - 6\sigma\varphi x - 1 = 0$.

4) Ὁμοίως αἱ ἐξισώσεις:

α) $3\,\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x - 3 = 0$, β) $2\eta\mu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$,

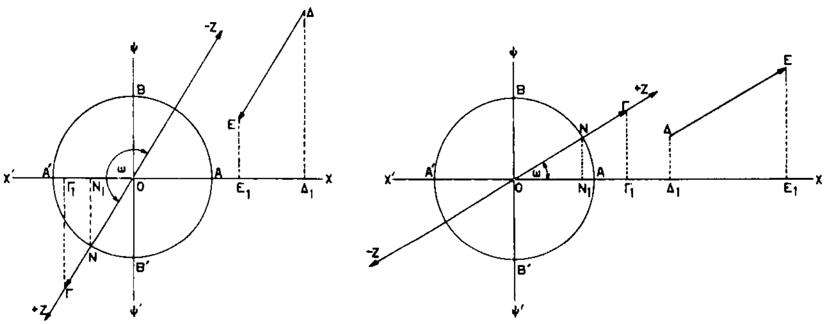
γ) $3\varepsilon\varphi x - 2\sigma\varphi x = 1$, δ) $8 - 3\varepsilon\varphi x - \frac{8}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = 0$.

12·24 Προβολὴ διανύσματος ἐπάνω εἰς ἄξονα.

Πρόβλημα. Δίδεται ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ καὶ ἡ προβολή του $\overrightarrow{\Delta_1 E_1}$ ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος χ΄χ (σχ. 12·24). *Νὰ εὑρεθῇ τὸ σχετικὸν μέτρον $\overline{\Delta_1 E_2}$ τῆς προβολῆς $\overrightarrow{\Delta_1 E_1}$.*

Λύσις. Θεωροῦμεν τριγωνομετρικὸν κύκλον μὲ κέντρον ἕνα σημεῖον O τοῦ ἄξονος χ΄χ, ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ βασικὸν διάνυσμα τοῦ χ΄χ καὶ ἄξονα τῶν συνημιτόνων τὸν χ΄χ. Φέρομεν τὸν ἡμιάξονα Oz παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τοῦ $\overrightarrow{\Delta E}$ καὶ μὲ βασικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$ ἰσόμηκες μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

Ἐπὶ τοῦ ΟΖ ὁρίζομεν διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{\Delta E}$. Θὰ εἶναι:



Σχ. 12·24.

$$\overline{O\Gamma} = \overline{\Delta E} = |\overrightarrow{\Delta E}|, \ \overrightarrow{O\Gamma_1} = \overrightarrow{\Delta_1 E_1}, \ \overline{O\Gamma_1} = \overline{\Delta_1 E_1}.$$

$$\text{Ἔστω } \sphericalangle\, (O\chi, \overrightarrow{\Delta E}) = \sphericalangle\, (O\chi\ Oz) = \omega.$$

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ON_1N καὶ $O\Gamma_1\Gamma$ θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\overline{O\Gamma_1}}{\overline{ON_1}} = \frac{\overline{O\Gamma}}{\overline{ON}} \ \text{ἢ} \ \frac{\overline{O\Gamma_1}}{\text{συνω}} = \frac{\overline{O\Gamma}}{1} \ \text{ἢ} \ \overline{O\Gamma_1} = \overline{O\Gamma} \cdot \text{συνω ἢ}$$

$$\overline{\Delta_1 E_1} = |\overline{\Delta E}| \ \text{συνω}. \qquad (1)$$

Δηλαδὴ τὸ σχετικὸν μέτρον τῆς προβολῆς διανύσματος ἐπάνω εἰς ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀπολύτου μήκους τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὸν ἄξονα καὶ τὸ διάνυσμα.

Σημείωσις. Εἰς τὸ σχῆμα 12 · 24 ἔχομεν δύο περιπτώσεις:

$$\omega = \sphericalangle\, (O\chi, \overrightarrow{\Delta E}) < 180^0, \ \omega = \sphericalangle\, (O\chi, \overrightarrow{\Delta E}) > 180^0.$$

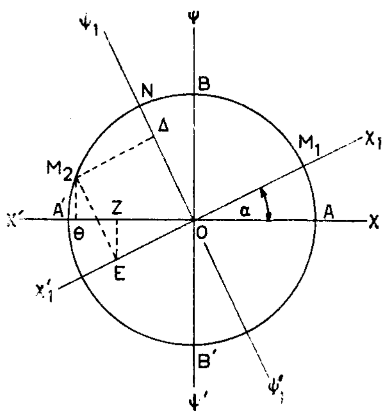
12·25 Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων.

Πρόβλημα. Δίδονται αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀρι-

θμῶν τῶν τόξων α, β καὶ ζητοῦνται αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$.

I. *συν* $(\alpha \pm \beta)$.

Ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο (σχ. 12·25) λαμβάνομεν τόξον $\widehat{AM_1}$ μὲ μέτρον α καὶ τόξον $\widehat{M_1M_2}$ μὲ



Σχ. 12·25.

μέτρον β. Θὰ εἶναι $(\widehat{AM_2}) = (\alpha+\beta)$ καὶ συν$(\alpha+\beta) = \overline{O\Theta}$.

Θεωροῦμεν δεύτερον σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων $\chi_1 O \psi_1$, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων $\chi_1'\chi_1$ διέρχεται ἀπὸ τὸ M_1. Βασικὰ διανύσματα ἐπὶ τῶν ἀξόνων $O\chi_1$, $O\psi_1$ ὁρίζομεν ἀντιστοίχως τὰ OM_1 καὶ ON ἰσομήκη πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

Ἡ τετμημένη $\overline{OE}$ καὶ ἡ τεταγμένη $\overline{O\Delta} = \overline{EM_2}$ τοῦ M_2, ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi_1 O \psi_1$ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου $(\widehat{M_1M_2}) = \beta$. Ὥστε $\overline{OE} =$ συνβ, $\overline{EM_2} =$ ημβ.

Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα εἶναι:

$$\text{συν}(\alpha+\beta) = \overline{O\Theta} = \overline{OZ} + \overline{Z\Theta}, \qquad (1)$$

ὅπου $\overrightarrow{OZ}$ καὶ $\overrightarrow{Z\Theta}$ αἱ προβολαὶ ἀντιστοίχως τῶν $\overrightarrow{OE}$ καὶ $\overrightarrow{EM_2}$ ἐπὶ τοῦ $\chi'\chi$.

Συμφώνως ὅμως πρὸς τὴν σχέσιν (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου:

$$\overline{OZ} = |\overrightarrow{OE}|\,\text{συν}\,(\widehat{O\chi'_1, O\chi}) = -\overline{OE}\,\text{συν}\,(180^0 + \alpha) = -\,\text{συν}\beta\,(-\,\text{συν}\alpha)$$

$$= \text{συν}\beta\,\text{συν}\alpha, \;(\text{εἶναι } |\overrightarrow{OE}| = -\overline{OE} \text{ ἐπειδὴ } \overline{OE} < 0),$$

$$\overline{Z\Theta} = |\overrightarrow{EM_2}| \cdot \text{συν}\,(\widehat{O\chi, EM_2}) = \overline{EM_2} \cdot \text{συν}\,(\widehat{O\chi, O\psi_1}) =$$

$$\text{ημ}\beta\,\text{συν}\,(90^0 + \alpha) = \text{ημ}\beta\,(-\,\text{ημ}\alpha) = -\,\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\alpha.$$

Εἰσάγομεν τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς τῶν $\overline{OZ}$, $\overline{Z\Theta}$ εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν:

$$\text{συν}\,(\alpha + \beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta. \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν (2) θέσωμεν ὅπου β τὸ $-\beta$, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{συν}\,[\alpha + (-\beta)] = \text{συν}\,(\alpha - \beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\,(-\beta) - \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\,(-\beta)$$

$$\text{ἢ } \text{συν}\,(\alpha - \beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta. \qquad (3)$$

II. $\eta\mu\ (\alpha \pm \beta)$.

Εἶναι διαδοχικῶς:

$$\text{ημ}\,(\alpha + \beta) = \text{συν}\,[90^0 - (\alpha + \beta)] = \text{συν}\,[(90^0 - \alpha) - \beta] =$$

$$\text{συν}\,(90^0 - \alpha) \cdot \text{συν}\beta + \text{ημ}\,(90^0 - \alpha)\;\text{ημ}\beta = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta.$$

Ὥστε:

$$\text{ημ}\,(\alpha + \beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta. \qquad (4)$$

Ἐὰν εἰς τὴν (4) θέσωμεν ὅπου β τὸ $(-\beta)$, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ημ}\,[\alpha + (-\beta)] = \text{ημ}\,(\alpha - \beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\,(-\beta) + \text{συν}\alpha\,\text{ημ}\,(-\beta)$$

$$\text{ἢ } \text{ημ}\,(\alpha - \beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta. \qquad (5)$$

III. $\varepsilon\varphi(\alpha \pm \beta)$.

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν (4) μὲ τὴν (2) ὑποθέτοντες $\text{συν}(\alpha + \beta) \neq 0$, δηλαδὴ $\alpha + \beta \neq \text{K}\pi + \frac{\pi}{2}$.

Εὑρίσκομεν :

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}.$$

Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν ὑποθέτομεν συνασυνβ $\neq 0$, δηλαδὴ α, β $\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ καὶ διαιροῦμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τοῦ 2ου μέλους διὰ συνασυνβ. Προκύπτει :

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}.$$

Ὥστε :

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}. \qquad (6)$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν ὅπου β τὸ —β, θὰ προκύψῃ :

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}. \qquad (7)$$

IV. *σφ (α ± β).*

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν (2) μὲ τὴν (4), ὑποθέτοντες ὅτι ημ(α + β) $\neq 0$ ἢ α + β $\neq (2\kappa+1)\pi$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}.$$

Ἀπὸ αὐτὴν δὲ διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος τοῦ 2ου μέλους μὲ τὸ ημαημβ $\neq 0$, προκύπτει :

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}. \qquad (8)$$

Ἐὰν εἰς τὴν (8) θέσωμεν ὅπου β τὸ —β, προκύπτει :

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}. \qquad (9)$$

12·26 Ἐφαρμογαί.

I. *Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 15°.*

Εἶναι $15^0 = 45^0 - 30^0$. Συμφώνως πρὸς τοὺς τύπους (2) καὶ (4) τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ ἔχωμεν:

$$\text{συν}15^0 = \text{συν}(45^0 - 30^0) = \text{συν}45^0 \cdot \text{συν}30^0 + \text{ημ}45^0 \cdot \text{ημ}30^0 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{ημ}15^0 = \text{ημ}(45^0 - 30^0) = \text{ημ}45^0 \cdot \text{συν}30^0 - \text{συν}45^0 \cdot \text{ημ}\,30^0 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{εφ}15^0 = \frac{\text{ημ}15^0}{\text{συν}15^0} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{6 - 2} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{σφ}15^0 = \frac{\text{συν}15^0}{\text{ημ}15^0} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

II. *Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν $A + B + \Gamma = 180^0$, ὑφίσταται ἡ σχέσις $\text{συν}^2 A + \text{συν}^2 B + \text{συν}^2 \Gamma + 2\text{συν}A\text{συν}B\text{συν}\Gamma = 1$.*

Ἐπειδὴ $A + B = 180^0 - \Gamma \Rightarrow \text{συν}(A+B) = -\text{συν}\Gamma \Leftrightarrow \text{συν}A\text{συν}B - \text{ημ}A\text{ημ}B = -\text{συν}\Gamma \Leftrightarrow \text{ημ}A\text{ημ}B = \text{συν}A\text{συν}B + \text{συν}\Gamma$.

Ὑψώνομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς τὰς σχέσεις:

$$\text{ημ}^2 A\text{ημ}^2 B = \text{συν}^2 A\text{συν}^2 B + 2\text{συν}A\text{συν}B\text{συν}\Gamma + \text{συν}^2\Gamma.$$

$$(1 - \text{συν}^2 A)(1 - \text{συν}^2 B) = \text{συν}^2 A\text{συν}^2 B + \text{συν}^2\Gamma + 2\text{συν}A\text{συν}B\text{συν}\Gamma.$$

$$1 - \text{συν}^2 A - \text{συν}^2 B + \text{συν}^2 A\text{συν}^2 B = \text{συν}^2 A\text{συν}^2 B + \text{συν}^2\Gamma +$$

$2\text{συν}A\text{συν}B\text{συν}\Gamma$ καὶ $\text{συν}^2 A + \text{συν}^2 B + \text{συν}^2\Gamma + 2\text{συν}A\text{συν}B\text{συν}\Gamma = 1$.

III. *Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $\text{ημ}x + \text{ημ}(120^0 + x) + \text{ημ}(240^0 + x)$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x.*

Ἔχομεν $\text{ημ}(120^0 + x) = \text{ημ}120^0\,\text{συν}x + \text{συν}120^0\,\text{ημ}x =$
$\text{ημ}(180^0 - 60^0)\text{συν}x + \text{συν}(180^0 - 60^0)\text{ημ}x = \text{ημ}60^0\text{συν}x - \text{συν}60^0\text{ημ}x =$
$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{συν}x - \frac{1}{2}\,\text{ημ}x.$

$$\eta\mu(240^0+x)=\eta\mu(180^0+60^0)\,\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu(180^0+60^0)\eta\mu x=$$

$$-\eta\mu 60^0\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 60^0\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}\,\eta\mu x.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\eta\mu x+\eta\mu(120^0+x)+\eta\mu(240^0+x)=\eta\mu x+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma\upsilon\nu x-$$

$$\frac{1}{2}\,\eta\mu x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}\,\eta\mu x=\eta\mu x-\eta\mu x=0.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ δοθεῖσα παράστασις μηδενίζεται διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἤτοι εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.

12·27 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 75^0 $(75^0=45^0+30^0)$.

2) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν $\eta\mu(\alpha-\beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$, $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)$, $\sigma\varphi(\alpha+\beta)$, ὅταν $\eta\mu\alpha=\frac{5}{15}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{3}{5}$ καὶ $90^0<\alpha<180^0$, $270^0<\beta<360^0$.

3) Νὰ δείξετε ὅτι:

α) $\eta\mu(x+60^0)+\eta\mu(x-60^0)=\eta\mu x$.

β) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x$

γ) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{4\,\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi^2 x}$.

4) Νὰ δείξετε ὅτι αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x:

α) $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu(120^0+x)+\sigma\upsilon\nu(240^0+x)$.

β) $\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$.

γ) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+x)-\eta\mu(\alpha-x)}{\sigma\upsilon\nu(\beta-x)-\sigma\upsilon\nu(\beta+x)}$.

δ) $\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

5) Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ταυτότητες:

α) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta$.

β) $\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$.

γ) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$.

6) Ἂν $\alpha+\beta=\gamma$, νὰ ἀποδείξετε ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma=\eta\mu^2\gamma.$$

7) Ἂν $A+B+\Gamma=180^0$, νὰ ἀποδείξετε ὅτι:

α) $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma$.

β) $\sigma\varphi A\cdot\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\cdot\sigma\varphi A=1$.

8) Ἂν $x+y=\dfrac{\pi}{4}$, νὰ δείξετε ὅτι: $(1+\varepsilon\varphi x)(1+\varepsilon\varphi y)=2$.

12·28 Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ διπλασίου τόξου.

I. *Ἔκφρασις τοῦ ημ2α συναρτήσει τῶν ημα, συνα.*

Χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον (4) (παράγρ. 12·25) καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\eta\mu2\alpha=\eta\mu(\alpha+\alpha)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha.$$

Ὥστε:

$$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha. \qquad (1)$$

II. *Ἔκφρασις τοῦ συν2α συναρτήσει τῶν ημα, συνα.*

Βάσει τοῦ τύπου (2) (παράγρ. 12·25) ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha.$$

Ὥστε:

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτόν, ἂν θέσωμεν $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\eta\mu^2\alpha$ ἢ $\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$, προκύπτουν οἱ ἀκόλουθοι:

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha. \qquad (3)$$

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1. \qquad (4)$$

III. *Ἔκφρασις τῶν ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α συναρτήσει τῆς εφα.*

Ἀπὸ τοὺς (1) καὶ (2) ἔχομεν διαδοχικῶς, ὑποθέτοντες:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\neq0 \ \text{ἢ}\ \alpha\neq K\pi+\frac{\pi}{2}:$$

$$ημ2α = \frac{2ημασυνα}{1} = \frac{2ημασυνα}{ημ^2α + συν^2α} =$$

$$\frac{\dfrac{2ημασυνα}{συν^2α}}{\dfrac{ημ^2α}{συν^2α} + \dfrac{συν^2α}{συν^2α}} = \frac{2εφα}{1 + εφ^2α}.$$

$$συν2α = \frac{συν^2α - ημ^2α}{συν^2α + ημ^2α} = \frac{\dfrac{συν^2α}{συν^2α} - \dfrac{ημ^2α}{συν^2α}}{\dfrac{συν^2α}{συν^2α} + \dfrac{ημ^2α}{συν^2α}} =$$

$$\frac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}.$$

Ὥστε:

$$ημ2α = \frac{2εφα}{1 + εφ^2α}. \qquad (5)$$

$$συν2α = \frac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}. \qquad (6)$$

Ἂν τώρα διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὴν (5) μὲ τὴν (6) καὶ τὴν (6) μὲ τὴν (7), εὑρίσκομεν:

$$εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}. \qquad (7)$$

$$σφ2α = \frac{1 - εφ^2α}{2εφα}. \qquad (8)$$

12·29 Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τριπλασίου τόξου.

Συνδυάζοντες καταλλήλως τοὺς τύπους τῶν παραγράφων 12·25 καὶ 12·28, εὑρίσκομεν:

$$ημ(2α + α) = ημ2ασυνα + συν2αημα = 2ημασυνασυνα + (1 - 2ημ^2α)ημα$$
$$= 2ημα(1 - ημ^2α) + ημα - 2ημ^3α = 2ημα - 2ημ^3α + ημα - 2ημ^3α$$
$$= 3ημα - 4ημ^3α.$$

Ὥστε:

$$ημ3α = 3ημα - 4ημ^3α. \qquad (1)$$

Ἐπίσης:

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha. \qquad (2)$$

$$\varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha}. \qquad (3)$$

$$\sigma\varphi 3\alpha = \frac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha - 1}. \qquad (4)$$

12·30 Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ἡμίσεος τόξου.

Εἰς τὸν τύπον $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$, ἐὰν θέσωμεν $\alpha = \frac{\omega}{2}$, $2\alpha = \omega$ καὶ ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς $\eta\mu\frac{\omega}{2}$, εὑρίσκομεν διαδοχικῶς:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\omega}{2} \Rightarrow 2\eta\mu^2\frac{\omega}{2} = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow.$$

$$\eta\mu^2\frac{\omega}{2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{2} \Rightarrow \eta\mu\frac{\omega}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{2}}.$$

Ὥστε:

$$\eta\mu\frac{\omega}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{2}}. \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸν τύπον $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2} - 1 \Rightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{2}}.$$

Ὥστε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{2}}. \qquad (2)$$

Ὑποθέτοντες τώρα:

$$1 + \sigma\upsilon\nu\omega,\ 1 - \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \ \text{ἢ}\ \omega \neq \kappa\pi,$$

διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) και εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}}. \qquad (3)$$

$$\sigma\varphi\frac{\omega}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega}}. \qquad (4)$$

12·31 Χρήσιμοι μετασχηματισμοὶ ἀθροισμάτων εἰς γινόμενα.

Ἐὰν τὰς ταυτότητας:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$
$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

προσθέσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)$ μὲ τὸ Α καὶ τὴν διαφορὰν $(\alpha-\beta)$ μὲ τὸ Β καὶ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\alpha+\beta=A$$
$$\alpha-\beta=B$$

ὡς πρὸς α, β, λαμβάνομεν:

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\ \beta=\frac{A-B}{2}.$$

Τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς τῶν α καὶ β εἰσάγομεν εἰς τὴν (1) καὶ λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}, \qquad (2)$$

ποὺ μετασχηματίζει τὸ ἄθροισμα $\eta\mu A+\eta\mu B$ εἰς γινόμενον. Κατὰ παρόμοιον τρόπον προκύπτουν οἱ ἀκόλουθοι τύποι μετασχηματισμοῦ ἀθροισμάτων εἰς γινόμενα:

$$\eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}. \qquad (3)$$

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}. \qquad (4)$$

$$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{B-A}{2}. \qquad (5)$$

$$\varepsilon\varphi A\pm\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu(A\pm B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}. \qquad (6)$$

12·32 Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν $\eta\mu x = \frac{1}{3}$ καὶ $0 < x < \frac{\pi}{2}$, νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ $2x$ καὶ $3x$.

2) Ἐὰν $\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$ καὶ $270^0 < \theta < 180^0$ νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ 2θ, 3θ, 4θ.

3) Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4} = \frac{1}{4}$, νὰ ὑπολογίσετε τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{4}$ καὶ τὸ $\sigma\upsilon\nu x$.

4) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ $\eta\mu 22^0\, 30'$, $\sigma\upsilon\nu 22^0\, 30'$, $\varepsilon\varphi 22^0\, 30'$ ($\sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $22^0\, 30' = \frac{45^0}{2}$).

5) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων $\frac{\pi}{12}$ καὶ $\frac{\pi}{24}$ ($\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

6) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι:

α) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 1 + \eta\mu 2\alpha$.

β) $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$.

γ) $\varepsilon\varphi(45^0 + \alpha) - \varepsilon\varphi(45^0 - \alpha) = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$.

δ) $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$.

ε) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

ζ) $\frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi 2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi 2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

η) $\varepsilon\varphi\left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x}}$.

7) Νὰ ἐπιλύσετε τὰς ἐξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\eta\mu x = 2$.

β) $\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x + 2\eta\mu^2 x = 0$.

γ) $\eta\mu 2x + \eta\mu x = 0$.

δ) $\eta\mu 2x = \varepsilon\varphi x$.

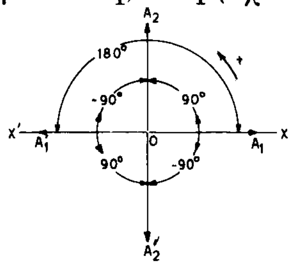
ε) $\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 0$. (Νὰ διαιρέσετε τὰ δύο μέλη των διὰ συν$^2 x$ ($x \neq K\pi$) καὶ νὰ ἐπιλύσετε τὴν ἐξίσωσιν, ποὺ προκύπτει, ὡς πρὸς εφx).

8) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: ημxσυνx + ημx — συνx — 1 = 0. (Νὰ μετασχηματίσετε τὸ α΄ μέλος εἰς γινόμενον παραγόντων).

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

12·33 Στροφὴ ἑνὸς διανύσματος. Φανταστικοὶ ἀριθμοί.

Μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον καὶ ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος χ΄χ λαμβάνομεν τὰ ἀντίθετα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA'_1}$ (σχ. 12·33).



$j\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$, $j\overrightarrow{OA_2} = j(j\overrightarrow{OA_1}) = j^2\overrightarrow{OA_1} = -1\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA'_1}$

$j\overrightarrow{OA'_1} = \overrightarrow{OA'_2} = -j\overrightarrow{OA_1}$

Σχ. 12·33.

Θὰ εἶναι [παράγρ. 13·5(I)]:

$$(-1)\,\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA'_1}. \qquad (1)$$

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA_1'}$ ὅμως προκύπτει ἀπὸ τὴν στροφὴν τοῦ $\overrightarrow{OA_1}$ περὶ τὴν ἀρχήν του O κατὰ 180^0. Ὥστε:

Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ (— 1) σημαίνει στροφὴν τοῦ διανύσματος περὶ τὴν ἀρχήν του κατὰ 180^0.

Ἂς ὁρίσωμεν τώρα ὡς θετικὴν φορὰν στροφῆς τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου τὴν φορὰν τοῦ βέλους, ποὺ σημειώνεται εἰς τὸ σχῆμα, καὶ ἂς ἀναζητήσωμεν ἕνα πολλαπλασιαστὴν διανύσματος, ὁ ὁποῖος νὰ ἀκολουθῇ τοὺς νόμους τοῦ πολλαπλασιασμοῦ [παράγρ. 13·5(II)] καὶ τῶν δυνάμεων καὶ νὰ δηλώνῃ στροφὴν τοῦ διανύσματος περὶ τὴν ἀρχήν του κατὰ 90^0. Ἂν παραστήσωμεν τὸν παράγοντα αὐτὸν μὲ j, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\overrightarrow{OA_2} = j \cdot \overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{OA'_1} = j \cdot \overrightarrow{OA_2} = j\,(j\,\overrightarrow{OA_1}) = (jj) \cdot \overrightarrow{OA_1} = j^2 \cdot \overrightarrow{OA_1}.$$

Ὥστε:

$$j^2 \cdot \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA'_1}. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ ἰσότης:

$$j^2 \cdot \overrightarrow{OA_1} = (-1) \cdot \overrightarrow{OA_1}.$$

καὶ ἀπὸ αὐτὴν ὅτι πρέπει ὁ πολλαπλασιαστὴς j νὰ ἱκανοποιῇ τὴν σχέσιν:

$$j^2 = -1.$$

Ἀλλὰ πραγματικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται μὲ -1, δὲν ὑπάρχει.

Εἰσάγομεν λοιπὸν ὡς νέον ἀριθμὸν τὸ σύμβολον j, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν *φανταστικὴν μονάδα*, καὶ ὁρίζομεν:

I. *Τὸ γινόμενον $j \cdot j = j^2$ εἶναι ὁ -1.*

II. *Κάθε σύμβολον βj, ὅπου β πραγματικὸς ἀριθμός, παριστάνει ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν φανταστικὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ β συντελεστήν του.*

III. *Τὸ j καὶ οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ βj ἀκολουθοῦν τοὺς νόμους τῶν πράξεων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.* Π.χ.

$$j + j = 2j,\ 2j + j = 3j \text{ κ.ο.κ.}$$

$$j^2 \cdot j = j^3 = -j,\ j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1)(-1) = 1 \text{ κ.ο.κ}$$

$$(2j + 3j) \cdot 5j = 10j^2 + 15j^2 = 10(-1) + 15(-1) = -25.$$

$$j : j = 1,\ (3j + 2j) : 7j = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}.$$

IV. *Πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ j σημαίνει στροφὴν τοῦ διανύσματος γύρω ἀπὸ τὴν ἀρχήν του κατὰ 90^0.*

V. *Πολλαπλασιασμὸς τοῦ $\overrightarrow{OA}$ ἐπὶ βj σημαίνει πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\overrightarrow{OA}$ ἐπὶ β καὶ στροφὴν τοῦ προκύπτοντος διανύσματος γύρω ἀπὸ τὴν ἀρχήν του κατὰ 90^0.*

12·34 Μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἔστω χOψ ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων μὲ βασικὰ διανύσματα τῶν Oχ, Oψ ἀντιστοίχως τὰ $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ ἰσομήκη πρὸς τὴν μονάδα μήκους:

$$|\overrightarrow{OE_1}| = |\overrightarrow{OE_2}| = 1.$$

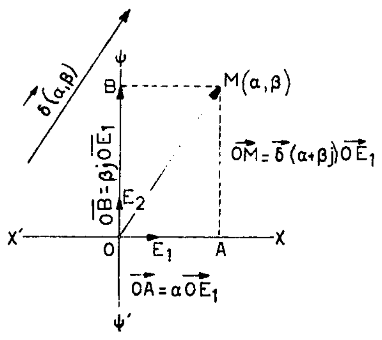
Ἐπειδὴ $\sphericalangle E_1OE_2 = 90^0$, θὰ εἶναι $\overrightarrow{OE_2} = j \cdot \overrightarrow{OE_1}$.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα μέσα εἰς τὸ ἐπίπεδον χOψ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$ (α, β) καὶ ἂς φέρωμεν τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα $\overrightarrow{OM}$ (α, β), ποὺ τὸ ἀντιπροσωπεύει. Θὰ ἔχωμεν, μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἰσχύουν οἱ νόμοι τῶν πράξεων μὲ διανύσματα (παράγρ. 12·8):

$$\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{OM} = \alpha\, \overrightarrow{OE_1} + \beta\, \overrightarrow{OE_2} = \alpha\, \overrightarrow{OE_1} + \beta\, (j \cdot \overrightarrow{OE_1}) =$$

$$\alpha\, \overrightarrow{OE_1} + \beta\, j\, \overrightarrow{OE_1} = (\alpha + \beta j)\, \overrightarrow{OE_1}.$$

$$\text{Ὥστε } \overrightarrow{\delta} = (\alpha + \beta j)\, \overrightarrow{OE_1}.$$



Σχ. 12·34.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν προκύπτει ὅτι κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$ (α, β) δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γινόμενον τῆς διανυσματικῆς μονάδος $\overrightarrow{OE_1}$ τοῦ χ΄χ ἐπὶ ἕνα πολλαπλασιαστὴν $\alpha + \beta j$.

Τὸν πολλαπλασιαστὴν αὐτὸν $\alpha + \beta j$ (α, β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ) εἰσάγομεν ὡς νέον ἀριθμὸν καὶ τὸν καλοῦμεν *μιγαδικὸν ἀριθμόν*, ὁρίζομεν δὲ τὰ ἀκόλουθα:

I. *Κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς* $\alpha + \beta j$ *ἐκφράζει ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, ἐλεύθερον διάνυσμα τὸ* $\vec{\delta}(\alpha, \beta)$ *μὲ τετμημένην* α *καὶ τεταγμένην* β. Εἰδικῶς:

α) Ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\alpha + 0j = \alpha$ ἐκφράζει τὸ παράλληλον πρὸς τὸν $\chi'\chi$ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}(\alpha, 0)$ μὲ τετμημένην α. Διὰ τοῦτο ταυτίζεται μὲ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α.

β) Ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $0 + \beta j = \beta j$ ἐκφράζει τὸ παράλληλον πρὸς τὸν $\psi'\psi$ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}(0, \beta)$, ποὺ ἔχει τεταγμένην β. Διὰ τοῦτο ταυτίζεται μὲ τὸν φανταστικὸν ἀριθμὸν βj.

γ) Ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $0 + 0j$ ἐκφράζει τὸ ἐλεύθερον μηδενικὸν διάνυσμα $\vec{0}$, διὰ τοῦτο ταυτίζεται μὲ τὸ 0.

II. *Ἀντιστρόφως, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα* $\vec{\delta}(\alpha, \beta)$ *παριστάνει τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν* $z = \alpha + \beta j$. Εἰδικῶς:

α) Τὸ διάνυσμα $\vec{\delta}(\alpha, 0) \parallel \chi'\chi$ παριστάνει τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α.

β) Τὸ διάνυσμα $\vec{\delta}(0, \beta) \parallel \psi'\psi$ παριστάνει τὸν φανταστικὸν ἀριθμὸν βj.

γ) Τὸ ἐλεύθερον μηδενικὸν διάνυσμα $\vec{\delta}$ παριστάνει τὸ 0 (μηδέν).

III. *Δύο μιγαδικοὶ* $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 j$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 j$ *εἶναι ἴσοι, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἐκφράζουν ἴσα διανύσματα*, δηλαδὴ ὅταν $\alpha_1 = \alpha_2$ καὶ $\beta_1 = \beta_2$ (παράγρ. 12 · 6).

Ἤτοι:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2).$$

Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα, ποὺ ἔχουν φορέα τὸν $\chi'\chi$, παριστάνουν πραγματικοὺς ἀριθμούς, ὁ $\chi'\chi$ λέγεται *πραγματικὸς ἄξων*. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ὁ ἄξων $\psi'\psi$ λέγεται *φανταστικὸς ἄξων*.

Εἰς ἕνα μιγαδικὸν ἀριθμὸν $z = \alpha + \beta j$ ὁ ἀριθμὸς α λέγεται *πραγματικὸν μέρος*, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς β λέγεται *φανταστικὸν μέρος*. Ὁ θετικὸς ἢ μηδενικὸς ἀριθμὸς $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ποὺ ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος (α, β), λέγεται *μέτρον (module)* ἢ *ἀπόλυτος τιμὴ* τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta j$ καὶ γράφεται:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προκύπτει ὅτι τὸ σύστημα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι εὐρύτερον ἀπὸ τὰ συστήματα τῶν πραγματικῶν καὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

Οἱ πραγματικοὶ καὶ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ παρουσιάζονται ὡς μερικὴ περίπτωσις τῶν μιγαδικῶν, οἱ μὲν πραγματικοί, ὅταν $\beta = 0$, οἱ δὲ φανταστικοί, ὅταν $\alpha = 0$.

12·35 Τριγωνομετρικὴ μορφὴ ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω $z = \alpha + \beta j$ ἕνας μιγαδικὸς καὶ $\vec{\delta}(\alpha, \beta) = \overrightarrow{OM}$ τὸ διάνυσμα, ποὺ τὸν παριστάνει. Τὸ μῆκος $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ τοῦ $\overrightarrow{OM}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μέτρον $|z|$ τοῦ z. Διὰ τὰς προβολὰς α καὶ β ἔχομεν (παράγρ. 12·24):

$$\alpha = \rho \sigma \upsilon \nu \varphi, \quad \beta = \rho \eta \mu \varphi, \qquad (1)$$

ὅπου $\varphi \sphericalangle (O\chi, \overrightarrow{OM})$ (σχ. 12·35).

Ἡ φ λέγεται *ὄρισμα* ἢ *πολικὴ γωνία* τοῦ z, γράφεται δὲ συμβολικῶς $\arg z$ καὶ ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$.

Προφανῶς κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἄπειρα ὁρίσματα φ, ποὺ δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\arg z = \varphi = 2\kappa\pi + \theta,$$

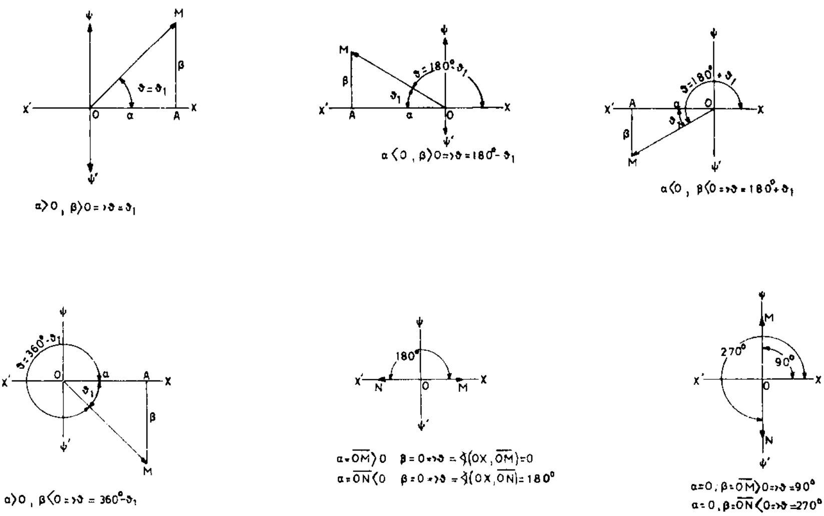
ὅπου θ ἡ μικροτέρα μὴ ἀρνητικὴ $\sphericalangle (O\chi, \overrightarrow{OM})$. Συνήθως εἰς τὰς ἐφαρμογὰς λαμβάνομεν:

$\varphi = \theta$, ὅταν $\theta < \dfrac{3\pi}{2}$, καὶ $\varphi = -(2\pi - \theta) = \theta - 2\pi$, ὅταν $\theta \geqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν θ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1) Διὰ τὸ $\alpha \neq 0$.

εὑρίσκομεν πρῶτα τὴν ὀξεῖαν γωνίαν θ_1, ποὺ ἔχει $\varepsilon\varphi\theta_1 = \dfrac{|\beta|}{|\alpha|}$.



Σχ. 12·35.

Κατόπιν ἀπὸ τὸ σχῆμα 12 · 35 συμπεραίνομεν τὰ ἀκόλουθα:

Διὰ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ εἶναι $\theta = \theta_1$.

Διὰ $\alpha < 0$, $\beta > 0$ » $\theta = 180 - \theta_1$.

Διὰ $\alpha < 0$, $\beta < 0$ » $\theta = 180 + \theta_1$

Διὰ $\alpha > 0$, $\beta < 0$ » $\theta = 360 - \theta_1$.

2) Διὰ $\beta = 0$, ἂν μὲν $\alpha > 0$, τότε $\theta = 0^0$, ἂν δὲ $\alpha < 0$, τότε $\theta = 180^0$.

3) Διὰ $\alpha = 0$, ἂν μὲν $\beta > 0$, τότε $\theta = 90^0$, ἂν δὲ $\beta < 0$, τότε $\theta = 270^0$.

Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἐκφράσεις (1) τῶν α καὶ β δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν $z = \alpha + \beta j$ τὴν ἀκόλουθον μορφήν, ποὺ λέγεται *τριγωνομετρική*:

$$z = \rho\, \text{συν}\varphi + j\, \rho\, \text{ημ}\varphi = \rho\,(\text{συν}\varphi + j\, \text{ημ}\varphi). \qquad (2)$$

Ἡ μορφὴ $z = \alpha + \beta j$ ἑνὸς μιγαδικοῦ z λέγεται *καρτεσιανή*.

Οἱ μιγαδικοὶ $z_1 = \alpha + \beta j$, $z_2 = \alpha - \beta j$, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον ρ καὶ ἀντίθετα ὀρίσματα, δηλαδή:

$$\varphi_1 = \theta, \quad \varphi_2 = -\theta,$$

λέγονται *συζυγεῖς* καὶ ἡ τριγωνομετρική των μορφὴ εἶναι:

$$z_1 = \rho(\text{συν}\varphi + j\, \text{ημ}\varphi), \; z_2 = \rho[\text{συν}(-\varphi) + j\, \text{ημ}(-\varphi)] =$$
$$\rho\,(\text{συν}\varphi - j\, \text{ημ}\varphi). \; (\text{σχ. } 12 \cdot 37\,\beta).$$

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τριγωνομετρικὴ μορφὴ τῶν μιγαδικῶν*:

$$2 + 2\sqrt{3}\, j, \; 5, \; -7j, \; 6 - 11j.$$

Διὰ τὸν $2 + 2\sqrt{3}\, j$. ἔχομεν:

$$\alpha = 2, \; \beta = 2\sqrt{3}, \; \rho = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\text{εφ}\theta_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = 60, \; \alpha > 0, \; \beta > 0 \Rightarrow \; \theta = 60^0$$

ἄρα:

$$2 + 2\sqrt{3}\, j = 4\,(\text{συν}\, 60^0 + j\, \text{ημ}\, 60^0).$$

Διὰ τὸν $5 = 5 + 0j$ ἔχομεν:

$$P = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5, \; \beta = 0, \; \alpha > 0 \Rightarrow \theta = 0$$

ἄρα:

$$5 = 5\,(\text{συν}\, 0^0 + j\text{ημ}\, 0^0).$$

Διὰ τὸν $-7j = 0 - 7j$ εἶναι:

$$P = \sqrt{0 + (7)^2} = 7, \; \alpha = 0, \; \beta < 0 \Rightarrow \theta = 270^0,$$
$$\text{ἄρα} -7 = 7\,(\text{σον}\, 270^0 + j\, \text{ημ}\, 270^0) =$$
$$7\,[\text{συν}\,(-90) + j\, \text{ημ}\,(-90)] = 7\,(\text{συν}\, 90^0 - j\, \text{ημ}\, 90^0).$$

Διὰ τὸ $6 - 11j$ ἔχομεν:

$$\alpha = 6,\ \beta = -11,\ \rho = \sqrt{6^2 + 11^2} = \sqrt{36 + 121} = \sqrt{157}.$$

$$\varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{11}{6} \simeq 1{,}833.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν:

$$\theta_1 \simeq 61^0\,24'.$$

Ἐπειδὴ δέ: $\alpha > 0, \beta < 0 \Rightarrow \theta = 360^0 - 61^0\,24' = 298^0\,36'$, ἄρα:

$$6 - 11j = \sqrt{157}\ (\sigma\upsilon\nu\, 298^0\ 36' + j\eta\mu\, 298^0\ 36').$$

2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ καρτεσιανὴ μορφὴ τοῦ μιγαδικοῦ:

$$Z = 2\,(\sigma\upsilon\nu\, 50^0 + j\eta\mu\, 50^0).$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\, 50^0 \simeq 0{,}643$ καὶ $\eta\mu\, 50^0 \simeq 0{,}766$, ἄρα:

$$Z \simeq 2\,(0{,}643 + j\ 0{,}766) = 1{,}286 + 1{,}532\,j.$$

12·36 Πράξεις μὲ μιγαδικοὺς ἀριθμούς.

Τὰς πράξεις μὲ μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰς παριστάνομεν μὲ τὰ αὐτὰ σύμβολα, ποὺ χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὰς ἀντιστοίχους πράξεις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὰς ὁρίζομεν κατὰ τρόπον, ὥστε οἱ νέοι ἀριθμοὶ νὰ ἀκολουθοῦν τοὺς θεμελιώδεις νόμους τῶν πράξεων τῶν πραγματικῶν.

Δηλαδή: α) Τοὺς νόμους τῆς *ἀντιμεταθέσεως* καὶ τοῦ *προσεταιρισμοῦ* διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν:

$$A + B = B + A,\ A \cdot B = B \cdot A,\ A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma,$$
$$A\,(B \cdot \Gamma) = (A \cdot B)\,\Gamma.$$

β) Τὸν *ἐπιμεριστικὸν νόμον*, ποὺ συνδέει τὴν πρόσθεσιν μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν:

$$A\,(B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma,$$

καθὼς καὶ τὰς ἄλλας ἰδιότητας τῶν πράξεων, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τοὺς νόμους αὐτούς.

1) *Πρόσθεσις.* Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων μιγαδικῶν ὁρίζεται, ὅπως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων διανυσμάτων (παράγρ. 12·3 καὶ 12·8), ἤτοι:

$$(\alpha_1+\beta_1 j)+(\alpha_2+\beta_2 j)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)j. \qquad (1)$$

$$(\alpha_1+\beta_1 j)+(\alpha_2+\beta_2 j)+(\alpha_3+\beta_3 j)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+ j(\beta_1+\beta_2+\beta_3). \qquad (2)$$

Προφανῶς τηροῦνται οἱ νόμοι τῆς προσθέσεως.

2) *Ἀφαίρεσις.* Καὶ ἡ διαφορὰ δύο μιγαδικῶν ὁρίζεται, ὅπως ἡ διαφορὰ δύο διανυσμάτων (παράγρ. 12·3), ἤτοι:

$$(\alpha_1+\beta_1 j)-(\alpha_2+\beta_2 j)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)j. \qquad (3)$$

3) *Πολλαπλασιασμός.* Γινόμενον τῶν μιγαδικῶν:

$$z_1=\alpha_1+\beta_1 j,\ z_2=(\alpha_2+\beta_2 j)$$

ὁρίζεται ὁ μιγαδικός:

$$z_1\cdot z_2=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)j. \qquad (4)$$

Ἡ σχέσις (4) προκύπτει, ἂν θεωρήσωμεν τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς z_1, z_2 ὡς ἀθροίσματα ἀντιστοίχως τῶν α_1 καὶ $\beta_1 j$ καὶ τῶν α_2 καὶ $\beta_2 j$ καὶ εἰς τὸ γινόμενόν των ἐφαρμόσωμεν τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον, ἀντικαταστήσωμεν δὲ εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸ j^2 μὲ -1.

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ θὰ ἔχωμεν:

$$(\alpha_1+\beta_1 j)(\alpha_2+\beta_2 j)=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\alpha_2 j+\alpha_1\beta_2 j+\beta_1\beta_2 j^2= \alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2+(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2)j.$$

Τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta j)(\alpha-\beta j)$ δύο συζυγῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\alpha^2+\beta^2$.

Τὸ γινόμενον πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται, ὅπως εἰς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Π.χ.:

Τὸ γινόμενον $z_1.\ z_2.\ z_3.\ z_4$ ὁρίζεται ἴσον μὲ $[(z_1z_2)\,z_3]\,z_4$.

Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ αἱ δυνάμεις τῶν μιγαδικῶν. Π.χ.:

$$(\alpha+\beta j)^3=(\alpha+\beta j)(\alpha+\beta j)(\alpha+\beta j)=\alpha^3-3\alpha\beta^2+j(3\alpha^2\beta-\beta^3).$$

4) *Διαίρεσις.* Πηλίκον $\dfrac{\alpha_1+\beta_1 j}{\alpha_2+\beta_2 j}$ τοῦ μιγαδικοῦ $z_1=$

$\alpha_1 + \beta_1 j$ διὰ τοῦ μιγαδικοῦ $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 j \neq 0 + 0j$ ὁρίζεται ὁ μιγαδικός:

$$z = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\, j, \qquad (5)$$

διὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$z \cdot z_2 = z_1.$$

Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ὡς ἑξῆς: Θέτομεν $z = x + yj$, ὁπότε ἀπὸ τὸν ὁρισμόν του θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$(x + yj)(\alpha_2 + \beta_2 j) = \alpha_1 + \beta_1 j \;\; \text{ἢ} \;\; \alpha_2 x - \beta_2 y + (\beta_2 x + \alpha_2 y)j = \alpha_1 + \beta_1 j.$$

Διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ τελευταία σχέσις πρέπει [παράγρ. 12·34 (III)]:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 x - \beta_2 y &= \alpha_1 \\ \beta_2 x + \alpha_2 y &= \beta_1 \end{aligned}\right\}$$

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ μᾶς δίδει τιμὰς τῶν x καὶ y:

$$x = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}, \quad y = \frac{\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

12·37 Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προκύπτει ὅτι αἱ ἔννοιαι διάνυσμα καὶ μιγαδικὸς ἀριθμὸς *ταυτίζονται ὡς πρὸς τὴν ἰσότητα*, τὴν *πρόσθεσιν* καὶ τὴν *ἀφαίρεσιν*. Τώρα θὰ ἐξετάσωμεν τί πράξεις συνεπάγονται ὁ πολλαπλασιασμὸς ἢ ἡ διαίρεσις δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα τοὺς παριστάνουν. Εἰς τοῦτο θὰ μᾶς βοηθήσῃ ἡ τριγωνομετρική των μορφή.

1) *Γινόμενον.*

Ἔστω $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + j\,\text{ημ}\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + j\,\text{ημ}\theta_2)$ δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Θὰ ἔχωμεν $z_1 z_2 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + j\,\text{ημ}\theta_1)\cdot\rho_2(\text{συν}\theta_2 + j\,\text{ημ}\theta_2)$ ἢ

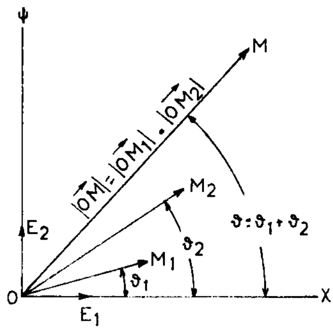
$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\,[(\text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2 - \text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2) + (\text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2 + \text{ημ}\theta_1\text{συν}\theta_2)j]$$

$$\text{ἢ} \;\; z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) + j\,\text{ημ}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Ὥστε τὸ γινόμενον δύο μιγαδικῶν ἔχει μέτρον μὲν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων των, ὅρισμα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων των.

Ἐὰν $\vec{\delta}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\vec{\delta}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ εἶναι τὰ ἀντίστοιχα πρὸς τοὺς z_1, z_2 διανύσματα, τότε τὸ διάνυσμα $\vec{\delta} = \overrightarrow{OM}$, ποὺ παριστάνει τὸ γινόμενον $z_1 . z_2$, θὰ ἔχῃ μέτρον μὲν $|\vec{\delta}| = |\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2| = \rho_1\rho_2$, πολικὴν δὲ γωνίαν τὴν γωνίαν $\theta_1 + \theta_2$.

Συνεπῶς *πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς μιγαδικοῦ $z_1 = \varrho_1\ (\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + j\eta\mu_1)$ ἐπὶ ἄλλον $z_1 = \varrho_2\ (\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 + j\ \eta\mu\vartheta_2)$ σημαίνει στροφὴν τοῦ διανύσματος δ_1, ποὺ παριστάνει τὸν z_1, κατὰ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν πολικὴν γωνίαν ϑ_2 τοῦ z_2 καὶ πολλαπλασιασμὸν τοῦ διανύσματος, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν στροφήν, ἐπὶ τὸ μέτρον ϱ_2 τοῦ z_2* (σχ. 12·37α).



Σχ. 12·37 α.

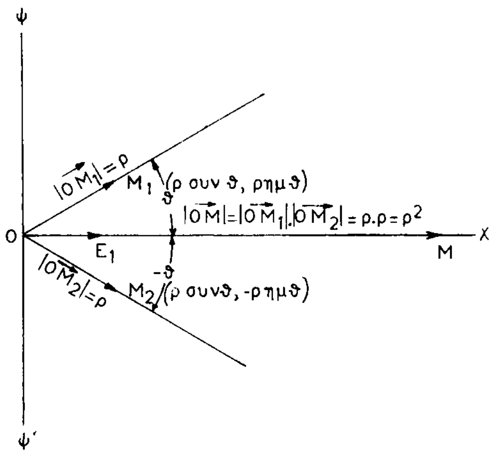
Ἂν οἱ δύο μιγαδικοὶ εἶναι οἱ συζυγεῖς $z_2 = \rho\ (\sigma\upsilon\nu\theta + j\eta\mu\theta)$, $z_2 = \rho\ [\sigma\upsilon\nu\ (-\theta) + j\eta\mu\ (-\theta)]$, τότε τὸ γινόμενόν των $z_1 z_2$ ἐκφράζεται ἀπὸ τὸ διάνυσμα, ποὺ προκύπτει, ἂν τὸ δ_1, ποὺ παριστάνει τὸν z_1, στραφῇ κατὰ τὴν πολικὴν γωνίαν $-\theta$ τοῦ z_2 καὶ τὸ μέτρον του ρ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ μέτρον ρ τοῦ z_2. Τότε ὅμως τὸ

z_1 καθίσταται // πρὸς τὸν χ΄χ καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ γινόμενον $z_1 z_2$ παριστάνει τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν $\rho \cdot \rho = \rho^2$ (σχ. 12·37 β).

Ἂν οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου εἶναι περισσότεροι:

π.χ. οἱ $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + j\eta\mu\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + j\eta\mu\theta_2)$,

$$z_3 = \rho_3\,(\text{συν}\theta_3 + j\eta\mu\theta_3).$$



Σχ. 12·37 β.

θὰ ἔχωμεν:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \rho_1 \cdot \rho_2[\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) + j\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)] \cdot$$
$$\rho_3(\text{συν}\theta_3 + j\eta\mu\theta_3) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3\,[\text{συν}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) +$$
$$j\eta\mu\,(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)].$$

Καὶ γενικῶς:

$$z_1 \cdot z_2 \ldots z_\nu = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \ldots \rho_\nu[\,\text{συν}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) +$$
$$j\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 \ldots + \theta_\nu)].$$

Ἂν δὲ $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = \rho(\text{συν}\theta + j\eta\mu\theta)$,

θὰ ἔχωμεν:

$$[\rho(\text{συν}\theta + \eta\mu\theta)]^\nu = \rho^\nu\,[\,\text{συν}(\nu\theta) + \eta\mu(\nu\theta)\,]\ (\nu = \text{φυσικὸς ἀριθμός}).$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = 0$ καθὼς καὶ διὰ $\nu =$ ἀρνητικὸς ἀκέραιος. Ὥστε θὰ ἔχωμεν:

$$[\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + j\,\eta\mu\theta)]^{\kappa} = \rho^{\kappa}\,[\sigma\upsilon\nu\,(\kappa\theta) + j\,\eta\mu\,(\kappa\theta)]. \qquad (1)$$

(διὰ κ = σχετικὸς ἀκέραιος).

Ὁ τύπος (1) λέγεται τύπος τοῦ Moivre καὶ ἔχει πολλὰς ἐφαρμογὰς εἰς τὰ μαθηματικά.

2) *Πηλίκον.*

Διὰ τὸ πηλίκον $z_1 : z_2 = \dfrac{\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + j\eta\mu\theta_1)}{\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + j\eta\mu\theta_2)}$,

θὰ ἔχωμεν (παράγρ. 12·36):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\rho_2\,(\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 + \eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2)}{\rho_2^2} + \frac{\rho_1\rho_2(\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 - \sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2)\,j}{\rho_2^2}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\sigma\upsilon\nu(\theta_1 - \theta_2) + j\,\eta\mu(\theta_1 - \theta_2)].$$

Ὥστε *διαίρεσις τοῦ μιγαδικοῦ* $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + j\eta\mu\theta_2)$ διὰ τοῦ $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + j\eta\mu\theta_2)$ σημαίνει στροφὴν τοῦ δ_1, ποὺ παριστάνει ὁ z_1, κατὰ γωνίαν $-\theta_2$ καὶ πολλαπλασιασμὸν τοῦ διανύσματος, ποὺ θὰ προκύψῃ, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{1}{|z_2|}$.

12·38 Νυοστὴ ρίζα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, διὰ $\nu \geqslant 2$.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου τοῦ Moivre ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς $(\rho\sigma\upsilon\nu\theta + j\eta\mu\theta)$ ἔχει ν μιγαδικὰς νυοστὰς ρίζας, διαφορετικὰς μεταξύ των, ποὺ παρέχονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu} + j\,\eta\mu\,\frac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu}\right),$$

ἂν εἰς αὐτὸν θέσωμεν διαδοχικῶς $\kappa = 1$, $\kappa = 2, \ldots$ $\kappa = \nu - 1$.

Ἐφαρμογαί.

1) *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τέταρται ρίζαι τῆς μονάδος 1.*

Λύσις. Ἐπειδὴ $1 = 1(\sigma\upsilon\nu 0 + j\eta\mu 0)$, αἱ ρίζαι τῆς 1 παρέχονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\sqrt[4]{1}\left(\text{συν}\ \frac{2\kappa\pi+0}{4}+j\,\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi+0)}{4}\right)$$

διὰ $\kappa=0$, $\kappa=1$, $\kappa=2$, $\kappa=3$.

εἶναι δὲ αἱ ἀκόλουθοι:

α) $1(\text{συν}0+j\,\text{ημ}0)=1$ (διὰ $\kappa=0$).

β) $1\left(\text{συν}\frac{\pi}{2}+j\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right)=0+j\ 1=j$(διὰ $\kappa=1$).

γ) $1(\text{συν}\,\pi+j\text{ημ}\,\pi)=1(-1+j\cdot 0)=-1$ (διὰ $\kappa=2$).

δ) $1(\text{συν}\frac{3\pi}{2}+j\,\text{ημ}\frac{3\pi}{2}=0+j(-1)=-j$ (διὰ $\kappa=3$).

2) *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τοῦ — 1 καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.*

Λύσις. Ἐπειδὴ $-1=1(\text{συν}\,\pi+j\text{ημ}\pi)$, αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τοῦ -1 παρέχονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\sqrt{1}\left(\text{συν}\ \frac{2\kappa\pi+\pi}{2}+j\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi+\pi}{2}\right)\ \text{διὰ}\ \kappa=0,\ \kappa=1,$$

εἶναι δὲ αἱ ἀκόλουθοι:

α) $1(\text{συν}\frac{\pi}{2}+j\text{ημ}\frac{\pi}{2})=0+j\cdot 1=j$ (διὰ $\kappa=0$).

β) $1(\text{συν}\frac{3\pi}{2}+j\text{ημ}\frac{3\pi}{2})=0+j(-1)=-j$ (διὰ $\kappa=1$).

Ἐπειδὴ κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς $-\alpha$ ($|\alpha|=\alpha$) εἶναι γινόμενον τῆς ἀπολύτου τιμῆς του ἐπὶ (-1), $-\alpha=\alpha\ (-1)$, ἡ τριγωνομετρική του μορφὴ θὰ εἶναι:

$$-\alpha=\alpha(-1)=\alpha(\text{συν}\pi+j\text{ημ}\pi)$$

καὶ αἱ τετραγωνικαί του ῥίζαι θὰ παρέχωνται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\sqrt{\alpha}\left(\text{συν}\,\frac{2\kappa\pi+\pi}{2}+j\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi+\pi}{2}\right),$$

διὰ $\kappa=0$, $\kappa=1$. Ἡ παρένθεσις ὅμως διὰ $\kappa=0$, $\kappa=1$ μᾶς δίδει τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τοῦ -1, δηλαδὴ $\pm j$. Ὥστε αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τοῦ $-\alpha$ εἶναι $\pm j\sqrt{\alpha}$.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ὅτι *αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὰ γινόμενα τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἀπολύτου τιμῆς του ἐπὶ* $\pm j$. Ἔτσι $\sqrt{-16} = \pm 4j$, $\sqrt{-10} = \pm j\sqrt{10}$ κλπ.

3) *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρίται ρίζαι τοῦ* j.

Λύσις. Ἐπειδὴ $j = 1(\text{συν}\,\frac{\pi}{2} + j\text{ημ}\,\frac{\pi}{2})$, αἱ τρίται ρίζαι τοῦ j παρέχονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\sqrt[3]{1}\left(\text{συν}\,\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + j\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)$$

ὁ ὁποῖος διὰ $\kappa = 0$, $\kappa = 1$, $\kappa = 2$ μᾶς δίδει ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμούς:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j, \quad -j,$$

ποὺ εἶναι αἱ τρίται ρίζαι τοῦ j.

12·39 Μιγαδικὴ παράστασις τῶν διανυσματικῶν μεγεθῶν.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προκύπτει ὅτι κάθε διανυσματικὸν μέγεθος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μὲ μιγαδικὸν ἀριθμόν. Οὕτω:

I. Μίαν δύναμιν μὲ ὀρθογωνίους συνιστώσας F_x, F_ψ δυνάμεθα νὰ τὴν γράφωμεν $F = F_x + jF_\psi$. Ἐπίσης μίαν ταχύτητα εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων μὲ προβολὰς ἐπὶ τῶν Οχ, Οψ, τὰς Vχ, Vψ τὴν γράφομεν:

$$V = V\chi + j\,V\psi \text{ κλπ.}$$

II. Ἡ σύνθετος ἀντίστασις z εἰς ἕνα κύκλωμα RLC ὁρίζεται ὡς ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός:

$$z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}),$$

ὅπου R ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις καὶ $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ ἡ ἀντίστασις, ποὺ ὀφείλεται εἰς τὴν αὐτεπαγωγὴν L καὶ τὴν χωρητικότητα C. Τὸ μέτρον τῆς συνθέτου ἀντιστάσεως εἶναι:

$$|z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

III. Ἐπίσης καὶ ἡ ἔντασις I καθὼς καὶ ἡ τάσις E εἰς ἕνα ἐναλλασσόμενον ρεῦμα εἶναι διανυσματικὰ μεγέθη καὶ δυνάμεθα νὰ τὰ ἐκφράσωμεν μὲ μιγαδικοὺς ἀριθμούς. Ἀποδεικνύεται δὲ εἰς τὴν Ἠλεκτροτεχνίαν ὅτι ὁ νόμος τοῦ Ohm διὰ τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχει τὴν ἰδίαν μορφήν, ὅπως εἰς τὸ συνεχές, ὅταν τὰ I, E, Z ἐκφράζωνται μὲ μιγαδικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι:

$$I = \frac{E}{Z}.$$

Συνεπῶς ἡ εὕρεσις τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ I, E, Z, ὅταν τὰ ἄλλα δύο εἶναι γνωστά, ἀνάγεται εἰς μίαν διαίρεσιν ἢ ἕνα πολλαπλασιασμὸν δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

12·40 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέτρα καὶ τὰ ὁρίσματα τῶν ἀριθμῶν:
$5+12j$, $7-2j$, -5, $-3j$, $4j$, 2, $7-7j$, $4+4\sqrt{3}j$.

2) Νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ τριγωνομετρικὴν μορφὴν οἱ ἀριθμοί:
2, -5, $3j$, $-2j$, $5-5j$, $2\sqrt{3}-2j$, $4+3j$, $-2+5j$, $-8-8j$, $4-5j$.

3) Νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ καρτεσιανὴν μορφὴν οἱ μιγαδικοί:
$5(\text{συν}\,120^0 + j\text{ημ}\,120^0)$, $\sqrt{3}(\text{συν}\,225^0 + j\text{ημ}\,225^0)$.
$51(\text{συν}\,300^0 + j\text{ημ}\,300^0)$, $\sqrt{2}(\text{συν}\,45^0 - j\text{ημ}\,45^0)$.

4) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:
α) $(5+3j)+(7-2j)+(5-j)$.
β) $5(\text{συν}\,30^0 + j\text{ημ}\,30^0) + 2(\text{συν}\,210^0 + j\text{ημ}\,210^0)$.
γ) $(7+3j)-(2+3j)$.
δ) $3+j-(3-j)$.
ε) $5+j-[(3-2j)-(7-4j)]$.

5) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:
α) $(5+\sqrt{3}j)(5-\sqrt{3}j)$.
β) $(2+3j)(2+5j)$.

γ) $(7-2j)(-3+j)$.
δ) $(5+3j)^2$.
ε) $(3j)(5+2j)(7-3j)(7+3j)(5j+2)$.
ζ) $(5+j)(5-j)(1+5j)(1-5j)$.
η) $(5+3j):(2-j)$.
θ) $(7+2j):(2-3j)$.
ι) $5:(3-j)$.
κ) $24:(4-2\sqrt{2}j)$.
λ) $(5+3j)^2$.

6) Ὁμοίως:
α) $8(\text{συν}\,30^0+j\eta\mu 30^0)\cdot 2(\text{συν}40^0+j\eta\mu\,40^0).(\text{συν}\,20^0+j\eta\mu\,20^0)$.
β) $2(\text{συν}\,75^0+j\eta\mu\,75^0)\cdot 3(\text{συν}\,40^0+j\eta\mu\,40^0)$.
γ) $24(\text{συν}\,150^0+j\eta\mu\,150^0):6(\text{συν}\,25^0+j\eta\mu\,25^0)$.
δ) $\sqrt{3}\,(\text{συν}\,75^0+j\eta\mu\,75^0):2(\text{συν}\,45^0+j\eta\mu\,45^0)$.
ε) $[5^0\,(\text{συν}\,10^0+j\eta\mu\,10)]^3$.

7) Νὰ σχεδιάσετε ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ νὰ κατασκευάσετε τὰ διανύσματα, ποὺ παριστάνουν τοὺς μιγαδικοὺς $z_1=2+2\sqrt{3}j$, $z_2=3-3j$, κατόπιν δὲ τὰ διανύσματα, ποὺ παριστάνουν τοὺς $z_1\cdot z_2$, $z_1:z_2$, $z_2:z_1$, z_2^2, z_1^3.

8) Νὰ ἐκτελέσετε τὴν αὐτὴν ἐργασίαν διὰ τοὺς μιγαδικούς:

$$z_1=5\sqrt{3}-5j,\ z_2=2j,\ z_3=-1+j,\ z_1\cdot z_2\cdot z_3,\ z_2:z_1,\ z_1:z_2$$
$$z_3:z_1,\ z_3:z_2.$$

9) Νὰ εὑρεθοῦν:
α) Αἱ πέμπται ρίζαι τοῦ -32.
β) Αἱ ἕκται ρίζαι τοῦ $1+j\sqrt{3}$.
γ) Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τοῦ $-25+25j$.
δ) Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν $-25, -36, -40, -50$.
ε) Αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῶν $1, -1, 8, -8, 10, -10$.
ζ) Αἱ τέταρται ρίζαι τοῦ -2 καὶ αἱ πέμπται ρίζαι τοῦ 32.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΠΑΝΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

13·1 Ἐπίλυσις τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Ὅπως εἴδαμεν εἰς τὸν Α΄ Τόμον (παράγρ. 7·21), ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον εἶναι ἡ:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \tag{1}$$

ὅπου α, β, γ, πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ παράμετροι μὲ $\alpha\neq 0$. Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν (1), μετεσχηματίσαμεν αὐτὴν εἰς τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0. \tag{2}$$

Ἀπεδείξαμεν δὲ ὅτι, ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma\geqslant 0$, ἡ (2), συνεπῶς δὲ καὶ ἡ (1), ἔχει δύο λύσεις ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \tag{3}$$

Ὅταν ὅμως $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ἡ (1) δὲν ἔχει λύσιν πραγματικὸν ἀριθμόν. Πράγματι τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι ἄθροισμα τοῦ μὴ ἀρνητικοῦ $\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ καὶ τοῦ $-\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$, ποὺ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Συνεπῶς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) ὡς ἄθροισμα ἑνὸς μὴ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἑνὸς θετικοῦ εἶναι θετικός. Ὥστε ἡ (2), ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, δὲν μηδενίζεται μὲ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x καὶ συνεπῶς δὲν ἔχει λύσιν. Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν ὅμως τῶν μιγαδικῶν καὶ τὸν ὁρισμὸν τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν (παράγρ. 12·38) ἡ ἀρνητικὴ ποσότης $\beta^2-4\alpha\gamma$ ἔχει δύο τετραγωνικὰς ρίζας, τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς $\pm\, j\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\gamma)}$ καὶ ἑπομένως ἡ (2) δύναται νὰ γραφῇ:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{j\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2\alpha}\right)^2=0,$$

καὶ ἔχει λύσεις τοὺς συζυγεῖς μιγαδικοὺς ἀριθμούς:

$$x=\frac{-\beta\pm j\sqrt{-(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2\alpha}.$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ ἔχει πάντοτε λύσεις εἰς τὸ σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον (3):

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Αἱ λύσεις αὐταὶ εἶναι:

1) Δύο ἄνισοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

2) Δύο ἴσοι πραγματικοὶ (μία διπλῆ λύσις), ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$.

3) Δύο φανταστικοὶ (συζυγεῖς μιγαδικοί), ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-8x+25=0$.*

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὰ α, β, γ μὲ τὰς τιμὰς τῆς $x^2-8x+25=0$ καὶ ἔχομεν:

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-100}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{8\pm 6j}{2}=4\pm 3j.$$

Αἱ λύσεις λοιπὸν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι οἱ συζυγεῖς μιγαδικοί:

$$x_1=4+3j,\quad x_2=4-3j.$$

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^2+3x+15=0$.*

Ἐργαζόμενοι ὅπως προηγουμένως εὑρίσκομεν:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{-111}}{4}=\frac{-3\pm j\sqrt{111}}{4}.$$

Αἱ λύσεις συνεπῶς τῆς $2x^2+3x+15=0$ εἶναι οἱ συζυγεῖς μιγαδικοί:

$$x_1=-\frac{3}{4}+\mathrm{j}\,\frac{\sqrt{111}}{4},\quad x_2=-\frac{3}{4}-\mathrm{j}\,\frac{\sqrt{111}}{4}.$$

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2+12=0$.*

Ἐπειδὴ $\beta=0$, θὰ ἔχωμεν:

$$x=\frac{\pm\sqrt{-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}=\pm\sqrt{-\frac{12}{3}}=$$

$$\pm\sqrt{-4}=\pm 2\mathrm{j}.$$

Ὥστε:

$$x_1=2\mathrm{j},\quad x_2=-2\mathrm{j}.$$

13·2 Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

Κάθε ἐξίσωσις τετάρτου βαθμοῦ, ἡ ὁποία δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν:

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0 \qquad (1)$$

μὲ $\alpha\neq 0$ λέγεται *διτετράγωνος ἐξίσωσις.*

Ἡ ἐπίλυσις μιᾶς διτετραγώνου ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν μιᾶς δευτεροβαθμίου, δι' ἀλλαγῆς τοῦ ἀγνώστου ὡς ἑξῆς: Εἰς τὴν (1) θέτομεν ὅπου $x^2=y$. Ἔτσι προκύπτει ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν. Θὰ λάβωμεν ὡς λύσεις δύο τιμὰς τοῦ y, τὰς y_1 καὶ y_2.

Αἱ τιμαὶ τοῦ x, ποὺ ἀληθεύουν τὰς ἐξισώσεις $x^2=y_1$, $x^2=y_2$, δηλαδὴ αἱ:

$$x=\pm\sqrt{y_1},\quad x=\pm\sqrt{y_2},$$

εἶναι αἱ λύσεις τῆς (1).

Παραδείγματα:

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^4-13x^2+4=0$.*

Θέτομεν $x^2=y$.

Προκύπτει ἡ $3y^2-13y+4=0$, ποὺ ἔχει λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

$$y_1=4 \quad \text{καὶ} \quad y_2=\frac{1}{3}.$$

Ἐπιλύομεν τὰς ἐξισώσεις: $x^2=4$, $\quad x^2=\frac{1}{3}$ καὶ εὑρίσκομεν:

$$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2, \quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ὥστε λύσεις τῆς δοθείσης εἶναι αἱ τιμαί:

$$x_1=+2,\ x_2=-2,\ x_3=\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_4=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $x^4-5x^2+9=0$.

Τὴν ἐπιλύομεν ὅπως τὴν προηγουμένην καὶ εὑρίσκομεν:

$$x_1=\sqrt{\frac{5}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{11}}{2}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{5}{2}+\mathrm{j}\frac{11}{2}}$$

$$x_3=\sqrt{\frac{5}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{11}}{2}},\quad x_4=-\sqrt{\frac{5}{2}-\mathrm{j}\frac{11}{2}}.$$

13·3 Διάφοροι ἄλλαι ἐξισώσεις βαθμοῦ >2.

Παραθέτομεν τώρα μερικὰ παραδείγματα ἐξισώσεων βαθμοῦ >2, ποὺ ἐπιλύονται μὲ τὴν βοήθειαν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ.

Σημείωσις: Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἀκεραίων ἐξισώσεων τοῦ x πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας καὶ τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

Μία ἀκεραία τιμὴ τοῦ x, π.χ. ἡ $x=a$, διὰ νὰ μηδενίζῃ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x τῆς μορφῆς:

$$A_\mu x^\mu + A_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

πρέπει, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ ἀρκῇ, ὁ ἀκέραιος a νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν σταθερὸν ὅρον A_0 τοῦ πολυωνύμου.

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $(2x^2-x)^2-3(2x^2-x)-4=0.$

Θέτομεν $2x^2-x=\omega$. Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\omega^2-3\omega-4=0$, ποὺ ἔχει λύσεις $\omega_1=-1, \omega_2=4$.

Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς:

$$2x^2-x=-1,\ 2x^2-x=4.$$

Ἡ πρώτη ἔχει λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

$$x_1=\frac{1}{4}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{7}}{4},\quad x_1=\frac{1}{4}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{7}}{4}$$

καὶ ἡ δευτέρα τοὺς ἀριθμούς.

$$x_1=\frac{1+\sqrt{33}}{4},\quad x_1=\frac{1-\sqrt{33}}{4}.$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἔχει τὰς ἀκολούθους λύσεις:

$$x_1=\frac{1}{4}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{7}}{4}, x_2=\frac{1}{4}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{7}}{4}, x_3=\frac{1+\sqrt{33}}{4},\ x_4=\frac{1-\sqrt{33}}{4}.$$

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $x^3-6x^2+x-6=0.$

Μετασχηματίζομεν τὸ πρῶτον μέλος της εἰς γινόμενον παραγόντων.

$$x^3-6x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x^2(x-6)+(x-6)=0 \text{ ἢ }$$
$$(x-6)(x^2+1)=0.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις χωρίζεται εἰς τὰς ἐξισώσεις (Α΄ Τόμος, παράγρ. $4\cdot 9$):

$$x-6=0,\ x^2+1=0.$$

καὶ ἑπομένως ἔχει λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

$$x_1=6,\quad x_2=+\mathrm{j},\quad x_3=-\mathrm{j}.$$

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $2x^3-5x^2+4=0.$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τὰς τιμὰς $\pm 1, \pm 2, \pm 4$, ποὺ διαιροῦν ἀκριβῶς τὸν σταθερὸν ὅρον 4 τοῦ πολυωνύμου $2x^3-5x^2+4$, ἡ τιμὴ $x=2$ τὸ μηδενίζει. Ἑπομένως (Α' Τόμος, παράγρ. 3·28) τὸ πολυώνυμον $2x^3-5x^2+4$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x-2$ καὶ δίδει πηλίκον τὸ $2x^2-x-2$.

Συνεπῶς $2x^3-5x^2+4=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2-x-2)=0$.

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις χωρίζεται εἰς τὰς $x-2=0$ καὶ $2x^2-x-2=0$.

Ἡ $2x^2-x-2=0$ ἔχει λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

$$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad \text{καὶ} \quad x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

Ἄρα λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι οἱ ἀριθμοί:

$$x_1=2, \quad x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \quad x_3=\frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

4ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $x^4-5x^3+9x^2-15x+18=0$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τὰς τιμὰς $1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \pm 9 \pm 18$, ποὺ διαιροῦν τὸν σταθερὸν ὅρον 18 τοῦ πολυωνύμου $x^4-5x^3+9x^2-15x+18$, αἱ τιμαὶ $x=2$ καὶ $x=3$ τὸ μηδενίζουν· συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι τὸ πολυώνυμον διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $(x-2)$ καὶ τοῦ $(x-3)$, ἄρα καὶ διὰ τοῦ γινομένου των $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$.

Εἶναι δέ:

$$(x^4-5x^3+9x^2-15x+18):(x^2-5x+6)=x^2+3.$$

Συνεπῶς ἔχομεν:

$$x^4-5x^3+9x^2-15x+18=0 \Leftrightarrow (x^2-5x+6)(x^2+3)=0.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις χωρίζεται εἰς τάς:

$$x^2+3=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-5x+6=0,$$

ποὺ ἔχουν λύσεις ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς $x=\pm j\sqrt{3}$ καὶ $x=2$, $x=3$.

Ἑπομένως λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι οἱ ἀριθμοί:

$$x_1=j\sqrt{3}, \; x_2=-j\sqrt{3}, \; x_3=2, \; x_4=3.$$

5ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $x^3+7=0$.

Βάσει γνωστῆς ταυτότητος (Α΄ Τόμος, παράγρ. 3·30) εἶναι:

$$x^3+7=0 \Leftrightarrow x^3+(\sqrt[3]{7})^3=0 \Leftrightarrow (x+\sqrt[3]{7})(x^2-x\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{7^2})=0.$$

Ἔχομεν λοιπὸν $x+\sqrt[3]{7}=0$ καὶ $x^2-x\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{7^2}=0$.

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

$$x=\frac{\sqrt[3]{7}\pm\sqrt{\sqrt[3]{7^2}-4\sqrt[3]{7^2}}}{2}=\frac{\sqrt[3]{7}\pm\sqrt{-3\sqrt[3]{7^2}}}{2}=$$

$$\frac{\sqrt[3]{7}\pm j\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{7^2}}{2}=\frac{\sqrt[3]{7}\pm j\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{7}}{2}=\frac{\sqrt[3]{7}\,(1\pm j\sqrt{3})}{2}.$$

Ἑπομένως ἡ $x^3+7=0$ ἔχει λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

$$x_1=-\sqrt[3]{7},\quad x_2=\sqrt[3]{7}\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right),\quad x_3=\sqrt[3]{7}\left(\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right).$$

Παρατήρησις.

Ἡ $x^3+7=0$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^3=-7$, ποὺ ἔχει ὡς λύσεις τὰς τρίτας ρίζας τοῦ -7, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ὅπως εἰς τὴν παράγραφον 12 · 38.

Γενικῶς δέ, ὅταν μᾶς δοθῇ μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς: $\alpha x^\mu+\beta=0$ μὲ $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, *(διώνυμος ἐξίσωσις)*, δυνάμεθα πάντοτε νὰ τὴν ἐπιλύσωμεν, ὑπολογίζοντες τὰς μυοστὰς ρίζας τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{-\beta}{\alpha}$ (παράγρ. 12 · 38).

13 · 4 Ἄρρητοι ἐξισώσεις (ἐξισώσεις μὲ ριζικά).

Καλοῦμεν *ἄρρητον* ἐξίσωσιν κάθε ἐξίσωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωστος εὑρίσκεται κάτω ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα ριζικά. Π.χ. ἄρρητοι εἶναι αἱ ἐξισώσεις:

$$\sqrt{x}=5-x,\quad \sqrt{x+1}+8=\sqrt{2x}.$$

Προκειμένου περὶ ἐπιλύσεως ἀρρήτων ἐξισώσεων περιοριζόμεθα εἰς ἐκείνας, ποὺ ἔχουν λύσεις πραγματικοὺς ἀριθμούς.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν μίαν ἄρρητον ἐξίσωσιν, πρέπει νὰ τὴν ἀντικαταστήσωμεν μὲ μίαν ρητήν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἐξαλείψωμεν τὰ ριζικὰ ὑψώνοντες καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς καταλλήλους δυνάμεις.

Ἂς ἐξετάσωμεν λοιπὸν ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως $A=B$ καὶ τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως, ποὺ προκύπτει ἀπὸ αὐτήν, ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς μίαν δύναμιν, ἔστω εἰς τὸ τετράγωνον. Θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις:

$$A^2=B^2 \Leftrightarrow A^2-B^2=0 \Rightarrow (A-B)\cdot(A+B)=0.$$

Ἡ τελευταία, ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι γινόμενον παραγόντων καὶ τὸ δεύτερον μηδὲν (Α' Τόμος, παράγρ. 4·9), ἔχει λύσεις τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

$$A-B=0 \text{ καὶ } A+B=0.$$

Ἡ $A-B=0$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἀρχικὴν $A=B$. Ἡ $A+B=0$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A=-B$, ποὺ διαφέρει ἀπὸ τὴν $A=B$ κατὰ τὸ πρόσημον τοῦ δευτέρου μέλους της καὶ λέγεται *συζυγής της*. Ὥστε ἡ $A^2=B^2$ δὲν περιέχει μόνον τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἀλλὰ καὶ τῆς συζυγοῦς της. Ἀποδεικνύεται ἡ ἀκόλουθος πρότασις:

Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $A=B$ εἰς μίαν δύναμιν ν, ἡ ἐξίσωσις $A^\nu=B^\nu$, ποὺ προκύπτει, περιέχει ὅλας τὰς ρίζας τῆς δοθείσης, ἀλλὰ δὲν εἶναι γενικῶς καὶ ἰσοδύναμος πρὸς αὐτήν.

Ὥστε διὰ νὰ δεχθῶμεν μίαν λύσιν $x=x_0$ τῆς $A^\nu=B^\nu$ ὡς λύσιν τῆς $A=B$, πρέπει νὰ ἐλέγξωμεν ἂν ἡ $A=B$ ἀληθεύῃ διὰ $x=x_0$.

Τὰ παραδείγματα, ποὺ δίδομεν κατωτέρω, θὰ μᾶς δείξουν τρόπους ἐπιλύσεως μερικῶν κατηγοριῶν ἀρρήτων ἐξισώσεων:

1) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\sqrt{3x+4}=8-x$.

Ἐπίλυσις. Ὑψώνομεν καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν:

$$(\sqrt{3x+4})^2 = (8-x)^2 \Leftrightarrow 3x+4 = 64-16x+x^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2-19x+60=0.$$

Λύσεις τῆς τελευταίας εἶναι αἱ τιμαὶ $x_1 = 15$, $x_2 = 4$.

Δοκιμάζομεν ἂν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύῃ διὰ $x = 15$. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου μέλους της διὰ $x = 15$ εἶναι $\sqrt{3 \times 15+4} = \sqrt{49} = 7$ καὶ τοῦ δευτέρου μέλους της $8-15 = -7$. Βλέπομεν ὅτι δὲν ἀληθεύει. Ἄρα ἡ $x = 15$ δὲν γίνεται δεκτή.

Διὰ $x=4$ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου μέλους εἶναι $\sqrt{3 \times 4+4} = \sqrt{16} = 4$ καὶ τοῦ δευτέρου $8-4=4$. Ἄρα ἡ τιμὴ $x=4$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καὶ γίνεται δεκτὴ ὡς λύσις της.

2) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\sqrt{x^2+7}+2x = 7+3x$.

Ἐπίλυσις. Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικόν, δηλαδὴ ἀφήνομεν μόνον τὸ ριζικὸν εἰς τὸ ἕνα μέλος συγκεντρώνοντες τοὺς ἄλλους ὅρους εἰς τὸ ἄλλο μέλος καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως προηγουμένως: $\sqrt{x^2+7}+2x = 7+3x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+7} = 7+3x-2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+7} = 7+x$. Ὑψώνομεν καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον: $(\sqrt{x^2+7})^2 = (7+x)^2 \Leftrightarrow x^2+7 = x^2+14x+49 \Leftrightarrow 14x+42 = 0 \Leftrightarrow x = -3$. Ἡ τιμὴ $x = -3$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν καὶ γίνεται δεκτὴ ὡς λύσις της.

3) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1} = 2$.

Ἐπίλυσις. Ἀπομονώνομεν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ριζικὰ καὶ ὑψώνομεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως, ποὺ θὰ προκύψῃ, εἰς τὸ τετράγωνον.

$$\sqrt{x+11} = 2-\sqrt{x-1}.$$
$$(\sqrt{x+11})^2 = (2-\sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow x+11 = 4-4\sqrt{x-1}+x-1 \Leftrightarrow$$
$$4\sqrt{x-1} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -2.$$

Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν, ποὺ προκύπτει:

$$(\sqrt{x-1})^2=(-2)^2 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5.$$

Δοκιμάζομεν ἂν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύῃ διὰ $x=5$. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου μέλους της $\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}$ διὰ $x=5$ εἶναι $6\neq 2$. Ἑπομένως ἡ τιμὴ $x=5$ δὲν ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}=2$ δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

4) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\sqrt[3]{x^2+2}=3$.

Ἐπίλυσις. Ὑψώνομεν καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς τὸν κύβον καὶ ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν, ποὺ προκύπτει.

$$(\sqrt[3]{x^2+2})^3=3^3 \Leftrightarrow x^2+2=27 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5.$$

Αἱ τιμαὶ $x=5$, $x=-5$ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν καὶ γίνονται δεκταὶ ὡς λύσεις της.

13·5 Ἄθροισμα καὶ γινόμενον τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

I. *Ἄθροισμα* Σ *τῶν λύσεων*. Αἱ λύσεις τῆς:
$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) εἶναι:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Τὰς προσθέτομεν κατὰ μέλη:

$$x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἄρα:

$$\Sigma=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (2)$$

Π.χ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν x^2-5x+6 εἶναι $\Sigma=-\frac{-5}{1}=5$ καὶ εἰς τὴν $2x^2+3x+1=0$ εἶναι $\Sigma=-\frac{3}{2}$.

II. *Γινόμενον Γ τῶν λύσεων.* Πολλαπλασιάζομεν τὰς ρίζας τῆς (1).

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}{2\alpha} \cdot \frac{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}{2\alpha} =$$

$$\frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἄρα:

$$\Gamma = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}. \tag{3}$$

Π.χ. εἰς τὴν $x^2 - 5x + 6 = 0$ εἶναι $x_1 \cdot x_2 = 6$ καὶ εἰς τὴν

$$2x^2 + 3x + 1 = 0,\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}.$$

III. *Ἐφαρμογαί.*

1) *Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ λύσεις δύο δοθέντας ἀριθμοὺς ρ_1, ρ_2.*

Ἡ ἐξίσωσις, ποὺ ζητοῦμεν, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha} = \rho_1 + \rho_2$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha} = \rho_1 \cdot \rho_2$ ἢ $\beta = -\alpha(\rho_1 + \rho_2)$ καὶ $\gamma = \alpha \cdot \rho_1 \cdot \rho_2$.

Ἀντικαθιστῶμεν λοιπὸν εἰς τὴν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ τὰ β καὶ γ μὲ τὰς τιμὰς αὐτὰς καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\alpha x^2 - \alpha(\rho_1 + \rho_2)x + \alpha\rho_1\rho_2 = 0,$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος:

$$x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1\rho_2 = 0. \tag{4}$$

Παράδειγμα.

Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

$$\rho_1 = (5 + \sqrt{3}),\ \rho_2 = (5 - \sqrt{3}).$$

Θὰ εἶναι:

$\rho_1+\rho_2=5+\sqrt{3}+5-\sqrt{3}=10$, $\rho_1\rho_2=(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})=$ $25-3=22$. Ὥστε ἡ (3) γίνεται: $x^2-10x+22=0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ἡ ζητουμένη.

2) *Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενόν των. Π.χ. νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ περίμετρον 28 m καὶ ἐμβαδὸν 45 m².*

Ἐπίλυσις. Ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2 τὰς διαστάσεις ὀρθογωνίου εἰς m, θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} 2\rho_1+2\rho_2&=28\\ \rho_1\rho_2&=45\end{aligned}\right\}\ \text{ἢ}\ \begin{aligned}\rho_1+\rho_2&=14\\ \rho_1\rho_2&=45.\end{aligned}$$

Ὥστε οἱ δύο ἀριθμοὶ ρ_1, ρ_2 εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2-14x+45=0.$$

Ἔχομεν λοιπόν:

$$x=\frac{14\pm\sqrt{196-180}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{14\pm 4}{2}$$

$$\rho_1=9,\quad \rho_2=5.$$

Αἱ διαστάσεις λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 9 m καὶ 5 m.

3) *Διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου λ αἱ λύσεις x_1, x_2 τῆς $3x_2-4x+\lambda=0$ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x_1=3x_2$;*

Ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$x_1=3x_2. \qquad (1)$$

$$x_1+x_2=\frac{4}{3}. \qquad (2)$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{\lambda}{3}. \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) προσδιορίζομεν τὰς τιμὰς τῶν x_1, x_2 καὶ τὰς εἰσάγομεν εἰς τὴν (3), κατόπιν δὲ προσδιορίζομεν τὸ λ.

$$3x_2+x_2=\frac{4}{3}\Rightarrow 4x_2=\frac{4}{3}\Rightarrow x_2=\frac{1}{3}.$$

$$x_1 = 3x_2, \quad x_1 = 3 . \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 1.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda}{3}, \; x_1 = 1, \; x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = 1.$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ λ εἶναι $\lambda = 1$.

13·6 Συστήματα ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, βαθμοῦ ὡς πρὸς αὐτοὺς > 1.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ἕνα τοιοῦτον σύστημα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόζωμεν γενικὰς ἢ εἰδικὰς μεθόδους ὁμοίας μὲ αὐτάς, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων α΄ βαθμοῦ. Κατωτέρω παραθέτομεν 4 παραδείγματα.

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:*

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = \;\; 5 \\ xy = \; -12 \end{array}\right\}$$

Ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως. Πρὸς τοῦτο ἐπιλύομεν τὴν πρωτοβάθμιον $2x + y = 5$ ὡς πρὸς y καὶ εἰσάγομεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ y, ποὺ εὑρίσκομεν, εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ xy = -12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = (5 - 2x) \\ xy = \quad -12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = (5 - 2x) \\ x(5 - 2x) = -12 \end{array}\right\}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις $x(5-2x) = -12 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$ μᾶς δίδει λύσεις τὰς τιμὰς $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Διὰ τὴν $x = 4$ ἡ $y = 5 - 2x$ δίδει $y = 5 - 2 \times 4 = -3$, ἐνῶ διὰ τὴν $x = -\frac{3}{2}$ δίδει $y = 5 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 8$.

Ὥστε τὸ σύστημα ἔχει τὰς λύσεις:

$$(x=4,\ y=-3),\ (x=-\frac{3}{2},\ y=8).$$

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῆ τὸ σύστημα :*

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 - 3y^2 &= 15 \\ x^2 + 2y^2 &= 11 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Θέτομεν $x^2=\alpha$, $y^2=\beta$· προκύπτει τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha - 3\beta &= 15 \\ \alpha + 2\beta &= 11 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

τὸ ὁποῖον ἐπιλύομεν.

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha - 3\beta &= 15 \\ \alpha + 2\beta &= 11 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2\alpha - 3\beta &= 15 \\ \alpha &= 11 - 2\beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2(11-2\beta)-3\beta &= 15 \\ \alpha &= 11 - 2\beta \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \beta &= 1 \\ \alpha &= 11 - 2\beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \beta &= 1 \\ \alpha &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Ἐπειδὴ $x^2=\alpha$, $y^2=\beta$, θὰ ἔχωμεν:

$$x^2=9,\ \text{ἢ}\ x=\pm 3\ \text{καὶ}\ y^2=1\ \text{ἢ}\ y=\pm 1.$$

Ἔχομεν λοιπὸν τὰς ἑξῆς 4 λύσεις τοῦ συστήματος (1):

$$(x=3,\ y=1),\ (x=3,\ y=-1),\ (x=-3,\ y=1),$$
$$(x=-3,\ y=-1).$$

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῆ τὸ σύστημα :*

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 26 \\ xy &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Θὰ ἔχωμεν διαδοχικά:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 26 \\ xy &= 5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 26 \\ 2xy &= 10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy &= 26 + 10 \\ x^2 + y^2 - 2xy &= 26 - 10 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{ἢ}\ \left.\begin{aligned} (x+y)^2 &= 36 \\ (x-y)^2 &= 16 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= \pm 6 \\ x-y &= \pm 4 \end{aligned}\right\}$$

Ἀπὸ τὸ τελευταῖον σύστημα προκύπτουν τὰ ἀκόλουθα τέσσαρα συστήματα, τῶν ὁποίων αἱ λύσεις εἶναι προφανῶς καὶ αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=4 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} x+y=-6 \\ x-y=4 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=-4 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} x+y=-6 \\ x-y=-4 \end{array}\right\}$$
$$(\alpha) \qquad\qquad (\beta) \qquad\qquad (\gamma) \qquad\qquad (\delta)$$

Τὸ α δίδει τὴν λύσιν ($x=5$, $y=1$), τὸ β τὴν ($x=-1$, $y=-5$), τὸ γ τὴν ($x=1$, $y=5$) καὶ τὸ δ τὴν ($x=-5$, $y=-1$).

4ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:*

$$\left.\begin{array}{l} x^3-y^3=98 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$$

Ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις γράφεται:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=98.$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $x-y=2$, προκύπτει ἡ $2(x^2+xy+y^2)=98$.

Ὥστε:

$$\left.\begin{array}{l} x^3-y^3=98 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=49 \\ x=y+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} (y+2)^2+(y+2)y+9^2=49 \\ x=y+2 \end{array}\right\}$$

Ἐπιλύομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ τελευταίου συστήματος:

$$(y+2)^2+(y+2)y+y^2=49 \Rightarrow y^2+4y+4+y^2+2y+$$
$$y^2-49=0 \Rightarrow 3y^2+6y-45=0 \Rightarrow y_1=3,\ y_2=-5.$$

Εἰσάγομεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ y εἰς τὴν $x=y+2$ καὶ ἔχομεν $x_1=5$, $x_2=-3$.

Ὥστε τὸ σύστημα ἔχει δύο λύσεις, τάς:

$$(x=5,\ y=3),\quad (x=-3,\ y=-5).$$

13·7 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $x^2-4x+5=0$. β) $2x^2-3x+6=0$.

γ) $x^2+4x+13=0$. δ) $9x^2-12x+5=0$.

ε) $(x-2)(x+3)+10=0$. ζ) $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{1}{x+1}=2$.

η) $(x+1)^2+(2x-1)^2=0$.

θ) $(2x+1)(3x+2)+(x-1)^2=1$.

ι) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}=\frac{7}{10}$. κ) $4x(x-3)+9=0$.

λ) $(x-2)^2-(2x+1)(3x-2)=0$.

μ) $\frac{(2x-3)}{x-2}+\frac{3x-1}{x+1}=4$.

2) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$.

β) $\beta^2x^2-2\alpha\beta x+\alpha^2+\gamma^2=0$.

γ) $x^2+2x+1+\delta^2=0$.

δ) $(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)=(x+1)(x+3)$.

ε) $\frac{1}{x}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x+3}$.

3) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $x^4-10x^2+1=0$. β) $x^4+5x^2-36=0$.

γ) $25x^4+9x^2-16=0$. δ) $(x^2-1)^2+(x^2-2)^2=0$.

ε) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{19x}{12}=0$.

ζ) $\frac{x^2-1}{2x^2+3}=\frac{2x^2-3}{x^2+1}=0$.

η) $\frac{1}{2x^2+1}-\frac{1}{2x^2-1}=3$.

4) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $x^3-5x^2-3x+15=0$. β) $x^4-2x^3+8x-16=0$.

γ) $x^3-2x^2-x-6=0$.

δ) $x^4-6x^3+6x^2+5x+12=0$.

ε) $(x^2-4x)^2-5(x^2-4x)+4=0$.

ζ) $(x^3+1)^2-11(x^3+1)+10=0$.

η) $x^3-5x^2+5x-1=0$. θ) $x^4-3x^3+x-3=0$.

ι) $8x^3+27=0$. κ) $x^4+16=0$.

5) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $\sqrt{x-2}=3$. β) $3-\sqrt{2x-3}=x$.

γ) $\sqrt{3x}+4=5-x$. δ) $x+3\sqrt{x}=10$.

ε) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x}=9.$ ζ) $\sqrt{x-2}=2-x\cdot$

η) $\sqrt{8x-4}-2\sqrt{x-1}=1.$ θ) $\sqrt[3]{2x^2+14}=8.$

ι) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x}.$ κ) $\sqrt[4]{3x^2+4}=x.$

6) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν λύσεων εἰς τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις, χωρὶς νὰ τὰς ἐπιλύσετε:

α) $2x^2-5x+6=0.$ β) $x^2-7x+3=0.$

γ) $4x^2-8x+12=0.$ δ) $(x-2)(3x-1)=2.$

ε) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2x-3}=4.$

7) Νὰ σχηματίσετε μίαν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ λύσεις τοὺς ἀριθμούς:

α) $2, -3$ β) $4, -1$

γ) $5, -3$ δ) $\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$

ε) $5+\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3}.$ ζ) $\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1.$

η) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}.$ θ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-1.$

ι) $5+\mathrm{j},\ 5-\mathrm{j}.$ κ) $3+\mathrm{j}\sqrt{2},\ 3-\mathrm{j}\sqrt{2}.$

8) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων δίδεται τὸ ἄθροισμα $\mathbf{\Sigma}$ καὶ τὸ γινόμενον $\mathbf{\Gamma}$ ὡς ἀκολούθως:

α) $\mathbf{\Sigma}=5,\ \mathbf{\Gamma}=-6,$ β) $\mathbf{\Sigma}=\dfrac{5}{6},\ \mathbf{\Gamma}=\dfrac{1}{6}.$

γ) $\mathbf{\Sigma}=10, \mathbf{\Gamma}=23.$ δ) $\mathbf{\Sigma}=3,\ \mathbf{\Gamma}=-5.$ ε) $\mathbf{\Sigma}=6,\ \mathbf{\Gamma}=37.$

9) Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-3x+\lambda=0$ νὰ προσδιορισθῇ ἡ παράμετρος λ κατὰ τρόπον, ὥστε:

α) $x_1=x_2.$ β) $x_1=2x_2.$

γ) $x_1=\dfrac{1}{x_2}.$ δ) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1.$

10) Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-\mu x-2=0$ νὰ προσδιορισθῇ ἡ παράμετρος μ, ὥστε:

α) $x_1=-x_2,$ β) $x_1=x_2+1$

11) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $\left.\begin{aligned}3x+y&=7\\ xy&=2\end{aligned}\right\}$ β) $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=10\\ xy&=4\end{aligned}\right\}$ γ) $\left.\begin{aligned}x^2+\ y^2&=8\\ 3x^2-2y&=5\end{aligned}\right\}$

δ) $\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{3}+\frac{2x+y}{x-3}&=6 \\ x/y&=2 \end{aligned}\right\}$ ε) $\left.\begin{aligned} 27x^3-y^3&=7 \\ 3x-y&=1 \end{aligned}\right\}$

ζ) $\left.\begin{aligned} x^4-y^4&=5 \\ x^2+y^2&=5 \end{aligned}\right\}$ η) $\left.\begin{aligned} 2x^2-3xy&=20 \\ x-2y&=1 \end{aligned}\right\}$ θ) $\left.\begin{aligned} x^2-xy&=4 \\ y^2-xy&=-3 \end{aligned}\right\}$

ι) $\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}&=\frac{3}{4} \\ R_1+R_2&=6 \end{aligned}\right\}$ κ) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{3}&=\frac{y+2}{5} \\ x^2+y^2&=13 \end{aligned}\right\}$

λ) $\left.\begin{aligned} 4x^2+9y^2&=13 \\ xy&=1 \end{aligned}\right\}$ μ) $\left.\begin{aligned} x^2+9y^2&=13 \\ xy&=2 \end{aligned}\right\}$

ν) $\left.\begin{aligned} xy(x+2y)&=15 \\ x^2y^2&=9 \end{aligned}\right\}$

13·8 Προβλήματα.

Εἰς τὸν Α' Τόμον παρεθέσαμεν μερικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἐπελύοντο μὲ ἐξισώσεις βου βαθμοῦ. Παραθέτομεν ἐδῶ μερικὰ ἀκόμη.

1) *Δύο αὐτοκίνητα Α καὶ Β ἀναχωροῦν συγχρόνως διὰ νὰ ἐκτελέσουν μίαν διαδρομὴν 270 km. Τὸ Α ἔχει μέσην ταχύτητα 12 km/h μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν τοῦ Β καὶ φθάνει εἰς τὸ τέρμα τῆς διαδρομῆς 45 min πρὸ τοῦ Β. Ποία ἡ μέση ταχύτης ἑκάστου αὐτοκινήτου;*

Ἔστω $x>0$ ἡ ταχύτης εἰς km/h τοῦ Β. Ἡ ταχύτης τοῦ Α θὰ εἶναι $x+12$. Οἱ χρόνοι διαδρομῆς θὰ εἶναι $\frac{270}{x}$ εἰς h διὰ τὸ Β καὶ $\frac{270}{x+12}$ εἰς h διὰ τὸ Α. Ἐπειδὴ δὲ διαφέρουν κατὰ 45 min ἢ 3/4 h, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{270}{x}-\frac{270}{x+12}=\frac{3}{4},$$

ἡ ὁποία εἶναι μία ἐξίσωσις ὡς πρὸς x μὲ τὴν συνθήκην $x>0$.

Τὴν ἐπιλύομεν:

$$\frac{270}{x}-\frac{270}{x+12}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{90}{x}-\frac{90}{x+12}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

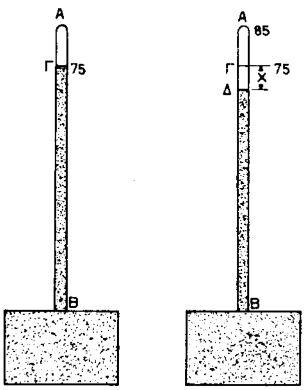
$$360x+4\,320-360x=x^2+12x \Leftrightarrow x^2+12x-4320=0.$$

$$x = \frac{-12 \pm 132}{2} \quad \text{ἢ} \quad x_1 = 60, \; x_2 = -72.$$

Ἡ λύσις $x = -72$ ἀπορρίπτεται, διότι δὲν ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην $x > 0$.

Ἡ λύσις $x = 60$ γίνεται δεκτὴ καὶ μᾶς δίδει ταχύτητα τοῦ μὲν B = 60 km/h, τοῦ δὲ A = 72 km/h.

2) *Εἰς βαρομετρικὸν σωλῆνα AB μήκους 85 cm καὶ διατομῆς 1 cm² ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 75 cm* (σχ. 13·8). *Πόσον θὰ γίνῃ τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, ὅταν εἰσαχθῇ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ποσότης ἀερίου, ἡ ὁποία ὑπὸ μίαν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν (= 75 cmHg) ἔχει ὄγκον 1 cm³;*



Σχ. 13·8.

Ἔστω (ΓΔ) = x ἡ πτῶσις τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἰς cm. Ἡ ποσότης τοῦ ἀέρος, ποὺ ὑπὸ πίεσιν P_1 μιᾶς ἀτμοσφαίρας = 75 cmHg καταλαμβάνει ὄγκον $V_1 = 1\ \text{cm}^3$, θὰ καταλάβῃ μέσα εἰς τὸν σωλῆνα ὄγκον $V_2 = (10 + x)\,1 = (10 + x)\ \text{cm}^3$. Δηλαδὴ τὸν ὄγκον τοῦ κενοῦ ΑΓ = 10 cm καὶ τοῦ μέρους ΓΔ = x cm τοῦ σωλῆνος, κατὰ τὸ ὁποῖον κατῆλθεν ὁ ὑδράργυρος. Ἡ πίεσις P_2 τοῦ ἀέρος μέσα εἰς τὸν σωλῆνα εἶναι ἴση μὲ ὑδραργυρικὴν στήλην ὕψους x cm καὶ διατομῆς 1 cm², ἤτοι $P_2 = x$ cmHg.

Ἡ Φυσικὴ μᾶς διδάσκει (Νόμος Boyle-Mariotte) ὅτι ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἡ πίεσις μιᾶς ὡρισμένης ποσότητος ἀερίου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ὄγκου της, ἤτοι, ἂν μία ὡρισμένη ποσότης ἀερίου ὑπὸ πίεσιν P_1 ἔχῃ ὄγκον V_1 καὶ ὑπὸ πίεσιν P_2 ἔχῃ ὄγκον V_2, μεταξὺ τῶν P_1, V_1, P_2, V_2 θὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{V_2}{V_1} \quad \text{ἢ} \quad P_1V_1=P_2V_2.$$

Εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν ἀντικαθιστῶμεν τὰ P_1, P_2, V_1, V_2 μὲ τὰς τιμάς, ποὺ μᾶς δίδει τὸ πρόβλημα, ἢ τὰς ἐκφράσεις των συναρτήσει τοῦ x καὶ ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x διὰ $0<x<75$:

$$1\times 75=x(x+10)\Leftrightarrow x^2+10x-75=0.$$

Ἐπιλύοντες τὴν $x^2+10x-75=0$ εὑρίσκομεν $x_1=5$, $x_2=-15$.

Ἡ λύσις $x=-15$ ἀπορρίπτεται, διότι εἶναι <0. Ἡ λύσις $x=5$ γίνεται δεκτὴ καὶ μᾶς δίδει ὕψος τῆς στήλης $=75-5=70$ cm.

3) *Ἀπὸ τὸ στόμιον ἑνὸς φρέατος ἀφήνομεν νὰ πέσῃ ἐλευθέρως μία πέτρα. Μετὰ 4 sec ἀκούεται τὸ κτύπημα τῆς πέτρας εἰς τὸν πυθμένα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος πτώσεώς της καὶ τὸ βάθος τοῦ φρέατος.* ($g=9{,}8$ cm/sec^2, ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα $=340$ m/sec. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν ὑπολογίζεται).

Ἔστω s τὸ βάθος τοῦ φρέατος, t_1 ὁ χρόνος πτώσεως καὶ t_2 ὁ χρόνος μεταδόσεως τοῦ ἤχου εἰς sec (t_1, t_2 ἀριθμοὶ θετικοὶ <4). Ὅπως εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὴν Φυσικήν, ὁ μὲν νόμος μεταδόσεως τοῦ ἤχου ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $s=v\cdot t$, ὁ δὲ νόμος τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων ἀπὸ τὴν σχέσιν: $s=\frac{1}{2}gt^2$.

Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$t_1+t_2=4,\ s=\frac{1}{2}9{,}8t_1^2=4{,}9t_1^2 \text{ καὶ } s=340t_2.$$

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἕπεται ὅτι $4{,}9t_1^2=340t_2$.

Ἐπιλύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$\left.\begin{aligned} 4{,}9t_1^2 &= 340\,t_2 \\ t_1+t_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς: $t_2=4-t_1$

$$4{,}9t_1^2-340(4-t_1)=0,\quad 4{,}9t_1^2+340t_1-1\,360=0$$

$$t_1\simeq\frac{-340\pm 377{,}2}{9{,}8}.$$

Ἡ λύσις $t_1 = \dfrac{-340-377,2}{9,8}$ ὡς ἀρνητικὴ δὲν γίνεται δεκτή.

Ἡ λύσις $t_1 = \dfrac{-340+377,2}{9,8} = \dfrac{37,2}{9,0} \simeq 3,79$, εἶναι > 0 καὶ < 4, γίνεται δεκτή.

Ὥστε $t_1 = 3,79$ sec καὶ $s = \dfrac{1}{2} g t_1^2 = \dfrac{1}{2} 9,8 \times 3,7 g^2 \simeq 70$m.

Δηλαδὴ τὸ βάθος τοῦ πηγαδιοῦ εἶναι 70 m κατὰ προσέγγισιν καὶ ὁ χρόνος πτώσεως τοῦ λίθου 3,79 sec.

4) *Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 40 cm² καὶ ἡ περίμετρος 40 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί του.*

Ἔστω x καὶ y αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου. Ἡ ὑποτείνουσά του θὰ εἶναι $\sqrt{x^2+y^2}$ cm. Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x+y+\sqrt{x^2+y^2} &= 40 \\ xy &= 40 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y, ποὺ θὰ προκύψουν ἀπὸ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος, διὰ νὰ γίνουν δεκταὶ ὡς κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου, πρέπει νὰ εἶναι θετικαὶ καὶ μικρότεραι τῆς ἡμιπεριμέτρου 20. Ἐπιλύομεν λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2).

Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος τῆς ἐξισώσεως:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 40 - (x+y). \qquad (3)$$

Αἱ λύσεις τῆς (3) εἶναι (παράγρ. 13·4) λύσεις καὶ τῆς:

$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = [40-(x+y)]^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1\,600 - 80(x+y) + x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow 80(x+y) = 1\,600 + 2xy \Leftrightarrow 40(x+y) = 800+xy.$

Ἑπομένως καὶ αἱ λύσεις τοῦ συστήματος τῶν (1) καὶ (2) εἶναι λύσεις καὶ τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} 40(x+y) &= 800+xy \\ xy &= 80 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 40(x+y) &= 800+80 \\ xy &= 80 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 22 \\ xy &= 80 \end{aligned}\right\}$$

Ἐπιλύομεν τὸ τελευταῖον σύστημα καὶ εὑρίσκομεν τὰς λύσεις:

$$(x = 11 + \sqrt{41},\ y = 11 - \sqrt{41})$$
$$(x = 11 - \sqrt{41},\ y = 11 + \sqrt{41}),$$

αἱ ὁποῖαι καὶ τὸ σύστημα ἐπαληθεύουν καὶ τὸν περιορισμὸν ἱκανοποιοῦν. Γίνονται συνεπῶς δεκταί.

Ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶναι $11 + \sqrt{41} \simeq 17,4$ cm, ἡ ἄλλη εἶναι $11 - \sqrt{41} \simeq 4,6$ cm καὶ ἡ ὑποτείνουσα $= 18$ cm.

13·9 Ἀσκήσεις.

1) Εἰς μίαν τάξιν ἐμοίρασαν ἐξ ἴσου εἰς ὅλους τοὺς παρόντας μαθητὰς μίαν φορὰν 66 τετράδια, μίαν ἄλλην φορὰν 125 τετράδια καὶ μίαν τρίτην 216 τετράδια. Τὴν πρώτην φορὰν ἦσαν ἀπόντες 5 μαθηταί, τὴν δευτέραν ἦσαν ἀπόντες 2 καὶ τὴν τρίτην ἦσαν παρόντες ὅλοι. Πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως, ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς μαθητάς, ποὺ ἦσαν παρόντες καὶ εἰς τὰς 3 διανομάς, ἔλαβε κατὰ τὴν τρίτην διανομὴν ὅσα καὶ εἰς τὰς δύο ἄλλας μαζί;

2) Ἕνας ὡρισμένος ἀριθμὸς κτιστῶν ἐπρόκειτο νὰ κτίσῃ μίαν τοιχοποιίαν 432 m^3. Ἐπειδὴ ὅμως 4 ἐργάται δὲν προσῆλθον εἰς τὴν ἐργασίαν, κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς προσελθόντας ἔκτισε 9 m^3 περισσότερον. Ποῖος ἦτο ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, ποὺ εἰργάσθησαν;

3) Εἰς 18 μαθητὰς τῆς Α΄ καὶ τῆς Β΄ τάξεως ἐμοίρασαν χρηματικὰ βοηθήματα, ἔδωσαν δὲ 480 δρχ. εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς Α΄ τάξεως καὶ 300 δρχ. εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς Β΄ τάξεως. Ἐὰν ὁ κάθε μαθητὴς τῆς Β΄ τάξεως ἔλαβε 20 δρχ. περισσοτέρας ἀπὸ κάθε μαθητὴν τῆς Α΄ τάξεως, νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν κάθε τάξεως, ποὺ ἔλαβε βοήθημα.

4) Ἕνα ἀεροπλάνον ἐκτελεῖ μίαν διαδρομὴν ΑΒ μετ᾿ ἐπιστροφῆς (χωρὶς διακοπήν). Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου ἔχει φορὰν ἀπὸ Α πρὸς Β, ἡ μετάβασίς του ἦτο συντομωτέρα τῆς ἐπιστροφῆς κατὰ 12 min. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ταχύτητα τοῦ ἀνέμου, ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι: α) Ἡ ἀπόστασις ΑΒ = 756 km. β) Ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου, χωρὶς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἀέρος εἶναι 585 km/h καὶ γ) ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου προστίθεται εἰς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου, ὅταν εἶναι ὁμόρροπός της, καὶ ἀφαιρεῖται, ὅταν εἶναι ἀντίρροπός της.

5) Μία ἀντλία γεμίζει ἕνα τεπόζιτο 144 m^3 εἰς ὡρισμένον χρόνον. Ἐὰν ἡ παροχὴ τῆς ἀντλίας κατὰ λεπτὸν ἦτο 120 dm^3 μεγαλυτέ-

ρα, τὸ τεπόζιτο θὰ ἐγέμιζε 12 min ἐνωρίτερον. Ποία ἡ παροχὴ τῆς ἀντλίας κατὰ λεπτόν;

6) Μία σφαῖρα ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 78{,}4$ m/sec. Ἐὰν δὲν λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψιν τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος, νὰ εὑρεθῇ.

α) Ἂν ἡ σφαῖρα δύναται νὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 2 000 m.

β) Πότε ἡ ταχύτης υ τῆς σφαίρας θὰ μηδενισθῇ.

γ) Ποῖον τὸ μεγαλύτερον ὕψος, ποὺ θὰ φθάσῃ τὸ κινητόν.

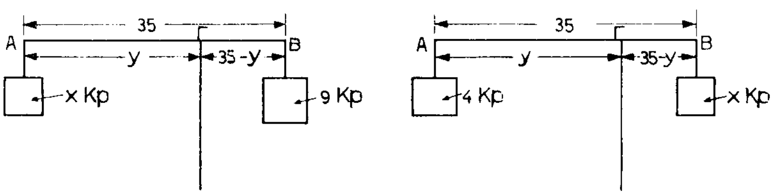
δ) Πόσος χρόνος t θὰ παρέλθῃ, διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ ἡ σφαῖρα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

$$\left(s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad \upsilon = \upsilon_0 - g t, \quad g = 9{,}8 \text{ m/sec}^2 \right).$$

7) Ἀπὸ ἕνα ἐξώστην πολυκατοικίας ὕψους 36 m ἐκσφενδονίζεται κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω λίθος μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_o = 15$ m/sec. Μετὰ πόσον χρόνον καὶ μὲ ποίαν ταχύτητα φθάνει ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος;

$$\left(\upsilon = \upsilon_o + g t, \quad s = \upsilon_o t + \frac{g t^2}{2}, \quad g = 9{,}8 \text{ m/sec}^2 \right).$$

8) Ἀντιαεροπορικὸν βλῆμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 850 m/sec. 6 sec μετὰ τὴν βολήν του ἀκούεται ἡ ἔκρηξίς του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐξερράγη. Ταχύτης ἤχου 340 m/sec.



Σχ. 13·9 α.

9) Ἡ ράβδος AB τοῦ σχήματος 13 · 9 α ἔχει μῆκος 35 cm καὶ στρέφεται γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖον της Γ. Ἐὰν ἐξαρτήσωμεν ἀπὸ τὸ ἄκρον της A ἕνα βάρος x kp καὶ ἀπὸ τὸ ἄκρον της B ἕνα ἄλλο βάρος 9 kp ἡ ράβδος ἰσορροπεῖ. Ἐὰν ὅμως ἐξαρτήσωμεν τὸ βάρος x kp ἀπὸ τὸ ἄκρον B, τότε, διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ἡ ράβδος, πρέπει ἀπὸ τὸ A νὰ ἐξαρτήσωμεν βάρος 4 kp. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος x καὶ τὸ μῆκος ΑΓ.

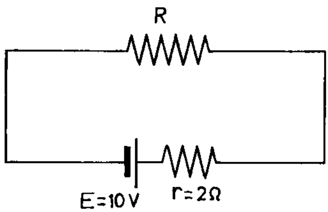
(Συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα 13 · 9 α θὰ ἔχωμεν (ΑΓ) · x = (ΓΒ) · 9 καὶ (ΑΓ) · 4 = ΓΒ · x. Ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} xy &= (35 - y) \cdot 9 \\ 4y &= (35 - y)\, x \end{aligned}\right\} \Bigg)$$

10) Εἰς βαρομετρικὸν σωλῆνα διατομῆς $2\,\mathrm{cm}^2$ καὶ μήκους 84 cm, τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι 75 cm. Πόσον θὰ γίνῃ τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, ἐὰν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἰσαχθῇ ποσότης ἀέρος, ἡ ὁποία ὑπὸ μίαν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν (75 cmHg) ἔχει ὄγκον $6{,}6\,\mathrm{cm}^3$.

11) Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν δύο ἀντιστάσεις, ὥστε, ὅταν συνδέωνται ἐν σειρᾷ, νὰ παρουσιάζουν ἀντίστασιν 6 Ω καί, ὅταν συνδέωνται παραλλήλως, νὰ παρουσιάζουν ἀντίστασιν $\frac{3}{4}$ Ω. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἀντιστάσεων.

12) Τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 13 · 9 β τροφοδοτεῖται ἀπὸ πηγὴν



Σχ. 13·9 β.

μὲ E = 10 V καὶ r = 2 Ω. Νὰ εὑρεθῇ μὲ ποίαν ἀντίστασιν R πρέπει νὰ συνδεθῇ, ὥστε νὰ καταναλίσκεται ἰσχὺς P = 3 W.

$$\left(\mathrm{P} = \mathrm{R}\,\mathrm{I}^2, \quad \mathrm{I} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R} + \mathrm{r}} \right).$$

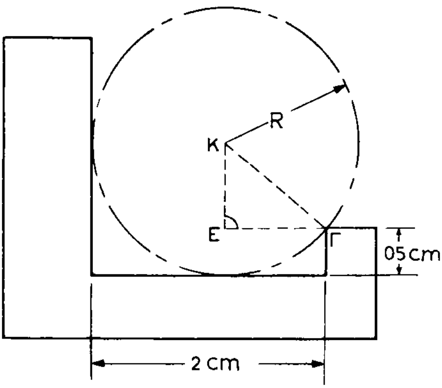
13) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $60\,\mathrm{cm}^2$. Τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεώς του καὶ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ὕψους εἶναι 22 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὰς πλευράς του.

14) Ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει περίμετρον 65 m καὶ ἐμβαδὸν $250\,\mathrm{m}^2$. Νὰ ὑπολογίσετε τὰς διαστάσεις του.

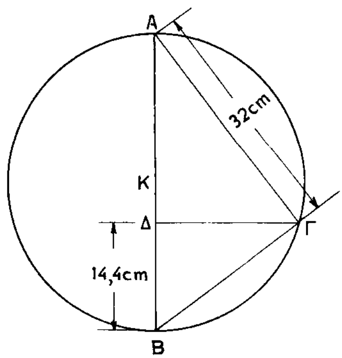
15) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 15 cm νὰ ὑπολογίσετε τὸ βέλος τόξου μὲ ἀντίστοιχον χορδὴν 18 cm.

16) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα R τῶν κύκλων τῶν σχημάτων 13·9γ καὶ 13·9δ.

17) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 5 cm εἶναι ἐγγεγραμμένον ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἐὰν τὸ ἄθροισμα

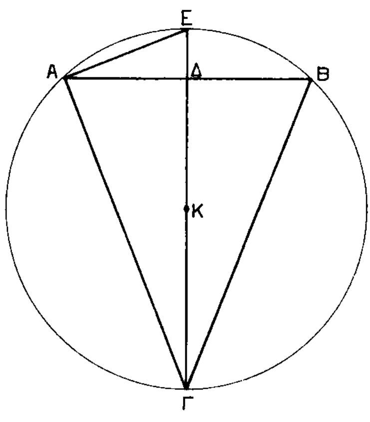


Σχ. 13·9γ.



Σχ. 13·9δ.

τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ὕψους εἶναι 8 cm (σχ. 13·9ε).



Σχ. 13·9ε.

(Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΓ ἔχομεν: $(ΑΔ)^2 = (ΔΓ)\cdot(ΔΕ)$. Ἂν λοιπὸν $ΑΒ = 2x$, $ΔΓ = y$, προκύπτει πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= y\,(10-y) \\ x+2y &= 8 \end{aligned}\right\} \qquad \text{διὰ} \quad \left.\begin{aligned} 0<x<5 \\ 0<y<8 \end{aligned}\right).$$

18) Ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 168 cm² καὶ ἡ διαγώνιος του 25 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὰς διαστάσεις του.

19) Εἰς ἕνα κύκλον μὲ διάμετρον 26 cm εἶναι ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ἐμβαδὸν 120 cm². Νὰ ὑπολογίσετε τὰς καθέτους πλευράς του.

20) Ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι $18(5+\sqrt{3})$ cm² καὶ τὸ ὕψος του 5 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

21) Κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσεις τετράγωνα, ὁ ὄγκος εἶναι 98 cm³, τὸ ὕψος 6 cm καὶ ἡ πλευρὰ τῆς μιᾶς βάσεως 3 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρὰν τῆς ἄλλης βάσεως.

13·10 Διαστήματα ἀριθμῶν.

Ἔστω α καὶ β δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha<\beta$. Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ α, συγχρόνως δὲ καὶ μικρότεροι τοῦ β, καλεῖται *ἀνοικτὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β*. Διὰ νὰ δηλώσωμεν δὲ ὅτι μία μεταβλητὴ x λαμβάνει ὡς τιμὴν οἱονδήποτε ἀριθμὸν τοῦ διαστήματος, γράφομεν:

$$\alpha < x < \beta. \tag{1}$$

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται *ἄκρα* τοῦ διαστήματος καὶ ἡ διαφορὰ $\beta-\alpha$ *πλάτος* του.

Ἐὰν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προηγουμένου συστήματος περιλάβωμεν καὶ τὰ ἄκρα του α καὶ β, τότε τὸ διάστημα λέγεται *κλειστὸν* ἀπὸ α ἕως β καί, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι μία μεταβλητὴ x λαμβάνει ὡς τιμὴν οἱονδήποτε ἀριθμὸν τοῦ διαστήματος αὐτοῦ, γράφομεν:

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta. \tag{2}$$

Ἀναφέρομεν καὶ τὰ διαστήματα

(ἀνοικτὸν πρὸς τὰ ἄνω) $\alpha \leqslant x < \beta$. (3)

(ἀνοικτὸν πρὸς τὰ κάτω) $\alpha < x \leqslant \beta$. (4)

Καὶ τὰ τέσσαρα διαστήματα τῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἀνεφέραμεν, εἶναι *περιωρισμένα* μὲ πλάτος τὴν διαφορὰν $\beta - \alpha$.

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλοῦμεν *ἀπεριόριστον διάστημα* ἀπὸ μεῖον ἄπειρον $(-\infty)$ ἕως σὺν ἄπειρον $(+\infty)$ καί, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι μία μεταβλητὴ x λαμβάνει ὡς τιμὴν οἱονδήποτε πραγματικὸν ἀριθμόν, γράφομεν:

$$-\infty < x < +\infty . \qquad (5)$$

Τέλος ἀναφέρομεν τὰ ἀπεριόριστα διαστήματα:

$$\alpha < x < +\infty. \qquad (6)$$

$$\alpha \leqslant x < +\infty. \qquad (7)$$

$$\alpha > x > -\infty. \qquad (8)$$

$$\alpha \geqslant x > -\infty. \qquad (9)$$

13·11 Ἀριθμητικὴ ἀκολουθία.

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διατεταγμένον κατὰ σειρὰν αὐξάνοντος μεγέθους:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots \nu,\ \nu+1, \ldots$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν κάθε ἀριθμὸν ν τοῦ συνόλου μὲ ἕνα ἀριθμὸν α_ν, συμφώνως πρὸς ἕνα νόμον:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3 & \ldots & \nu & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & \alpha_\nu & \end{array}$$

προκύπτει μία διαδοχὴ ἀριθμῶν:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \qquad (1)$$

ποὺ λέγεται *ἀπέραντος ἀριθμητικὴ ἀκολουθία* καὶ συντόμως *ἀκολουθία*.

Π.χ. Ἄν ἀντικαταστήσωμεν κάθε ἀριθμὸν ν μὲ τὸν ἑαυτόν του, θὰ προκύψῃ ἡ ἀκολουθία (1), ποὺ λέγεται ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν κάθε ν μὲ τὸ τετράγωνόν του, προκύπτει ἡ ἀκολουθία:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16, \ldots, (\nu-1)^2,\ \nu^2,\ (\nu+1)^2, \ldots$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς περιττοὺς ἀκεραίους τῆς (1) μὲ τὸ 0 καὶ τοὺς ἀρτίους ἀκεραίους μὲ τὸ ἥμισύ των, προκύπτει ἡ ἀκολουθία:

$$0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3, \ldots$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν κάθε ν τῆς (1) μὲ τὴν τιμὴν $\sigma(\nu)$ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x) = \dfrac{x^2-9}{3}$ διὰ $x = \nu$, προκύπτει ἡ ἀκολουθία:

$$-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{7}{3}, \ldots, \frac{(\nu-1)^2-9}{3}, \frac{\nu^2-9}{3}, \ldots$$

Ὅπως λοιπὸν βλέπομεν, ἡ ἀκολουθία ἀριθμῶν δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ διαδοχὴ τῶν τιμῶν:

$$\sigma(1),\ \sigma(2),\ \sigma(3),\ \sigma(4), \ldots, \sigma(\nu), \ldots$$

τὰς ὁποίας λαμβάνει μία συνάρτησις σ, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνῃ τὰς τιμάς:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, \nu,\ \nu+1, \cdots$$

Εἰς κάθε ἀκολουθίαν ὑπάρχει ἕνα πρῶτον, ἕνα δεύτερον, ἕνα τρίτον, κ.ο.κ. στοιχεῖον.

Ἐὰν εἰς μίαν ἀκολουθίαν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ σταματήσωμεν εἰς ἕνα ὡρισμένον στοιχεῖον α_ρ (π.χ. τὸ εἰκοστόν), τότε προκύπτει μία *πεπερασμένη ἀκολουθία* (εἰς τὸ παράδειγμα εἰκοσαμελὴς ἀκολουθία), ποὺ συμβολίζεται μὲ τὴν γραφήν:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho \text{ (εἰς τὸ παράδειγμα } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{20}).$$

Τὰ στοιχεῖα, ποὺ ἀποτελοῦν μίαν ἀκολουθίαν, λέγονται *μέλη* ἢ *ὅροι* τῆς ἀκολουθίας.

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν λέγεται *αὔξουσα* μέν, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ οἱουδήποτε ὅρου της ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του εἶναι θετικὸς ἀριθμός:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu > 0,$$

φθίνουσα δέ, ὅταν ἡ διαφορὰ οἱουδήποτε ὅρου της ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \ldots$ εἶναι αὔξουσα, διότι $\frac{\nu+1}{2} - \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2} > 0$, ἐνῶ ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{\nu^2}, \frac{1}{(\nu+1)^2}, \ldots$ εἶναι φθίνουσα, διότι:

$$\frac{1}{(\nu+1)^2} - \frac{1}{\nu^2} = \frac{\nu^2 - (\nu+1)^2}{\nu^2 \cdot (\nu+1)^2} =$$

$$\frac{(\nu+\nu+1)\ (\nu-\nu-1)}{\nu^2\ (\nu+1)^2} = \frac{-1\ (2\nu+1)}{\nu^2\ (\nu+1)^2} < 0.$$

Ὅριον ἀκολουθίας.

Ι. *Ὅριον μηδέν.* Ἔστω ἡ ἀκολουθία:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}, \ldots, x_\nu = \frac{1}{\nu}, \ldots \qquad (2)$$

Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι φθίνουσα, κανένας ὅμως ὅρος της δὲν εἶναι μηδὲν ἢ ἀρνητικός. Ὅσον ὅμως ὁ ν αὐξάνει, οἱ ὅροι της γίνονται ὁλονὲν μικρότεροι καὶ πλησιάζουν πρὸς τὸ μηδέν. Ὅταν δὲ μᾶς δοθῇ οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς ε ὁσονδήποτε μικρός, εὐκόλως φαίνεται ὅτι εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας, ποὺ αὐτὸς καὶ οἱ ἑπόμενοί του ὅροι εἶναι μικρότεροι τοῦ ε. Λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία (2) τείνει *πρὸς τὸ μηδὲν* ἢ ἔχει *ὅριον τὸ μηδέν.*

Καὶ εἰς τὴν ἀκολουθίαν:

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = -\frac{1}{27}, \ldots, x_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}\right)^\nu, \ldots \qquad (3)$$

βλέπομεν ὅτι ὅσον μεγαλώνει ὁ ν, τόσον οἱ ὅροι του πλησιάζουν πρὸς τὸ μηδὲν (καὶ ἀπὸ ἀρνητικὰς καὶ ἀπὸ θετικὰς τιμάς).

Καὶ διὰ τὴν ἀκολουθίαν (3) λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι μία ἀπέραντος ἀκολουθία x_ν ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (ἢ τείνει πρὸς τὸ μηδέν), ὅταν, δοθέντος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ε (ὁσονδήποτε μικροῦ θέλομεν), εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας, ποὺ αὐτὸς καὶ οἱ ἑπόμενοί του εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τοῦ ε. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$\text{Ορ}x_\nu = 0 \text{ ἢ συντόμως } x_\nu \to 0 \ (\nu \to \infty).$$

II. *Ὅριον πεπερασμένον.* Εἰς τὴν ἀκολουθίαν:

$$x_1 = 2 + 1 = 3,\ x_2 = 2 + \frac{1}{2},$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{3}, \ldots, x_\nu = 2 + \frac{1}{\nu}, \ldots, \qquad (4)$$

ὅσον τὸ ν μεγαλώνει, τόσον οἱ ὅροι της μικραίνουν καὶ πλησιάζουν ὁλονὲν πρὸς τὸν 2, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ γίνωνται ἴσοι πρὸς αὐτόν. Βλέπομεν δὲ ὅτι, ἐὰν ἀπὸ κάθε ὅρον τῆς (4) ἀφαιρέσωμεν τὸν 2, προκύπτει ἡ ἀκολουθία:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$, ποὺ ἔχει ὅριον τὸν μηδέν.

Λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία (4) ἔχει ὅριον τὸν 2·

Γενικῶς μία ἀπέραντος ἀκολουθία (x_ν) λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον ἕνα ἀριθμὸν α, ἐὰν ἡ ἀκολουθία $(x_1 - \alpha), (x_2 - \alpha), (x_3 - \alpha), \ldots, (x_\nu - \alpha), \ldots$ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν. Τοῦτο γράφεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\text{Ορ}x_\nu = \alpha \text{ ἢ συντόμως } x_\nu \to \alpha \ (\nu \to \infty).$$

III. *Ὅριον τὸ ἄπειρον, $\nu \to \infty$:* Εἰς τὴν ἀκολουθίαν:

$$1,\ 4,\ 27,\ 256, \ldots,\ \nu^\nu,\ (\nu+1)^{\nu+1}, \ldots, \qquad (5)$$

οἱ ὅροι αὐξανομένου τοῦ ν συνεχῶς μεγαλώνουν καὶ εὐκόλως φαίνεται ὅτι, ὅταν μᾶς δοθῇ ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς Μ ὁσονδήποτε μεγάλος, εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας, ποὺ αὐτὸς καὶ οἱ ἑπόμενοί του εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ Μ.

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ἡ (5) ἔχει ὅριον τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$). Γενικῶς *μία ἀκολουθία $x_1, x_2\ x_3, \ldots\ x_\nu, \ldots$, λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον* (ἢ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον) ὅταν, δοθέντος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ Μ ὁσονδήποτε μεγάλου, εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας, ποὺ αὐτὸς καὶ οἱ ἑπόμενοί του, εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ Μ. Τοῦτο γράφεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\text{Ορ}x_\nu = +\infty \text{ ἢ συντόμως } x_\nu \to +\infty \ (\nu \to \infty).$$

Ἐὰν οἱ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν $|x_2|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_\nu| \ldots$ σχηματίζουν ἀκολουθίαν, ποὺ ἔχει ὅριον τὸ $+\infty$, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ὅριον τῆς ἀκολουθίας $x_3, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$ εἶναι τὸ μεῖον ἄπειρον καὶ θὰ γράφωμεν:

$$\text{Ορ}x_\nu = -\infty \text{ ἢ συντόμως } x_\nu \to -\infty \ (\nu \to \infty).$$

13·12 Δευτεροβάθμιον τριώνυμον τοῦ x.

I. *Ὁρισμοί.* Κάθε πολυώνυμον 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha \neq 0) \qquad (1)$$

καὶ τὸ καλοῦμεν συντόμως *τριώνυμον τοῦ x.*

Οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, εἶναι ὡρισμένοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἐνῶ τὸ x εἶναι μεταβλητὴ μὲ πεδίον μεταβολῆς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Προφανῶς εἰς κάθε εἰδικὴν τιμὴν x_1 τῆς x (Α΄ Τόμος, παράγρ. 4·14) ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ τριωνύμου, ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\alpha {x_1}^2 + \beta x_1 + \gamma$.

Τὸ τριώνυμον (1) λοιπὸν εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x, τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ ἕνα γράμμα, ὅπως ψ, φ, σ, f, κλπ.

Τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν τιμὴν λ τῆς x, τὴν συμβολίζομεν μὲ $\psi(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$,....

Ρίζαι τοῦ τριωνύμου λέγονται αἱ τιμαὶ τοῦ x, πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί, ποὺ τὸ μηδενίζουν. Συνήθως τὰς παριστάνομεν μὲ ρ_1, ρ_2. Π.χ. διὰ τὸ τριώνυμον $f = x^2 - 12x + 35$ εἶναι $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 7$, διότι:

$$f(5) = 5^2 - 12 \times 5 + 35 = 0,$$
$$f(7) = 7^2 - 12 \times 7 + 35 = 0.$$

Διὰ τὸ τριώνυμον $f=2x^2+8$, εἶναι $\rho_1=2j$, $\rho_2=-2j$, διότι:

$$f(2j)=2(2j)^2+8=-8+8=0,$$
$$f(-2j)=2(-2j)^2+8=-8+8=0\cdot$$

Αἱ ρίζαι ἑνὸς τριωνύμου $\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1$. εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἀντιστοίχου ἐξισώσεως $\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma=0$ καὶ εὑρίσκονται ἀπὸ τὴν ἐπίλυσίν της. Ὅσα ἐμάθαμεν εἰς τὰς παραγράφους 13·1 καὶ 13·5 διὰ τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου. Ἔτσι ἔχομεν καὶ εἰς τὸ τριώνυμον τὰς σχέσεις:

$$-\frac{\beta}{\alpha}=(\rho_1+\rho_2)\Leftrightarrow\beta=-\alpha(\rho_1+\rho_2),\ \frac{\gamma}{\alpha}=\rho_1\rho_2\Leftrightarrow\gamma=\alpha\rho_1\rho_2. \quad (2)$$

II. *Μορφαὶ τοῦ τριωνύμου.* Αἱ σχέσεις (2) μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ δώσωμεν εἰς τὸ τριώνυμον τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$f=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha x^2-\alpha(\rho_1+\rho_2)x+\alpha\rho_1\rho_2=$$
$$\alpha(x^2-\rho_1 x-\rho_2 x+\rho_1\rho_2)=\alpha[x(x-\rho_1)-\rho_2(x-\rho_1)]$$
$$\text{ἢ}\quad f=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2). \quad (3)$$

Ὅταν αἱ ρίζαι εἶναι ἴσαι, $\rho_1=\rho_2$ (δηλαδὴ $\beta^2-4\alpha\gamma=0$), ἡ (3) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$f=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)^2. \quad (4)$$

Ὅταν αἱ ρίζαι εἶναι συζυγεῖς μιγαδικαί:

$$\rho_1=\varkappa+\lambda j,\quad \rho_2=\varkappa-\lambda j,$$

(δηλαδὴ ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$), τότε ἡ (3) λαμβάνει τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$f=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)=\alpha[x-(\varkappa+\lambda j)]\cdot[x-(\varkappa-\lambda j)]=$$
$$\alpha[(x-\varkappa)-\lambda j]\cdot[(x-\varkappa)+\lambda j]=\alpha[(x-\varkappa)^2-(\lambda j)^2]\ \text{ἢ}$$
$$f=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[(x-\varkappa)^2+\lambda^2], \quad (5)$$

ὅπου $\varkappa$ καὶ λ πραγματικοί ἀριθμοί.

Ἐφαρμογαί.

1) *Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τὸ τριώνυμον* $f=2x^2-5x+3$. Εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τοῦ $f(x)$, ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν

$2x^2-5x+3=0$. Εὑρίσκομεν $\rho_1=\frac{3}{2}$, $\rho_2=1$. Δίδομεν εἰς τὸ $f(x)$ τὴν μορφὴν (2):

$$f=2x^2-5x+3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=(2x-3)(x-1).$$

2) *Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα* $\frac{5x^2-9x-2}{x^2-x-2}$, *ὅπου* x^2-x-2 *ὑποτίθεται* $\neq 0$.

Ἀναλύομεν κάθε ὅρον τοῦ κλάσματος εἰς γινόμενον. Διὰ τὸν ἀριθμητὴν $\rho_1=2$, $\rho_2=-\frac{1}{5}$ καὶ $5x^2-9x-2=5(x-2)\left(x+\frac{1}{5}\right)$ $=(x-2)(5x+1)$.

Διὰ τὸν παρονομαστὴν $\rho_1=2$, $\rho_2=1$ καὶ $x^2-x-2=$ $(x-2)(x+1)$.

Ὥστε:

$$\frac{5x^2-9x-2}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(5x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{5x+1}{x+1} \text{ διὰ } x\neq 2, -1.$$

13·13 Πρόσημον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Αἱ μορφαὶ (3), (4), (5) τοῦ τριωνύμου τῆς προηγουμένης παράγραφου μᾶς βοηθοῦν νὰ διακρίνωμεν τὸ πρόσημον τῆς τιμῆς του $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διὰ μίαν τυχοῦσαν εἰδικὴν τιμὴν τῆς x. Ἔχομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

I. *Ὅταν* $\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τοῦ τριωνύμου εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι συζυγεῖς μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Ἔστω

$$\rho_1=\varkappa+\lambda j,\ \rho_2=\varkappa-\lambda j\ (\alpha\neq 0).$$

Τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν (5) (παράγρ. 13·12):

$$f=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[(x-\varkappa)^2+\lambda^2\right].$$

Διὰ $-\infty<x<+\infty$ τὸ $(x-\varkappa)^2$ εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν, καὶ τὸ λ^2 εἶναι πάντοτε θετικόν, ὡς τετράγωνον πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\neq 0$. Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα $(x-\varkappa)^2+\lambda^2$ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ $\alpha[(x-\varkappa^2)+\lambda^2)]$ ὁμόσημον τοῦ α. ὡς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.

Ἄρα, ὅταν $\beta-4\alpha\gamma<0$, ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου εἶναι ὁμόσημος τοῦ α.

II. *Ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$.* Τότε αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τοῦ τριωνύμου εἶναι ἴσαι: $\rho_1=\rho_2$. Τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν (4)

$$f=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)^2.$$

Διὰ $-\infty<x<\infty$ τὸ $(x-\rho_1)^2$ εἶναι θετικὸν ἢ μηδὲν καὶ τὸ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)^2$ ὁμόσημον τοῦ α ἢ μηδέν.

Ἄρα ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ διὰ $-\infty<x<+\infty$, ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου εἶναι ὁμόσημος τοῦ α ἢ μηδέν.

III. *Ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.* Τότε αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικοὶ καὶ ἄνισοι ἀριθμοί, ἔστω δὲ $\rho_1<\rho_2$.

Τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$f=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

Οἱ ἀριθμοὶ ρ_1, ρ_2 χωρίζουν τὸ διάστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι πεδίον μεταβολῆς τῆς x, εἰς τὰ διαστήματα:

$$-\infty<x<\rho_1,\ \rho_1<x<\rho_2,\ \rho_2<x<+\infty.$$

1) *Διὰ* $-\infty<x<\varrho_1$.

Αἱ διαφοραὶ $(x-\rho_1)$,$(x-\rho_2)$ εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ τὸ γινόμενόν των $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ θετικόν. Ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ὡς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν, εἶναι ὁμόσημος τοῦ α.

2) *Διὰ* $\varrho_1<x<\varrho_2$.

Ἡ διαφορὰ $(x-\rho_1)$ εἶναι θετική, ἡ $(x-\rho_2)$ ἀρνητικὴ καὶ τὸ γινόμενόν των $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ἀρνητικόν. Συνεπῶς ἡ τιμὴ τοῦ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, ὡς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ἀρνητικόν, θὰ εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α.

3) *Διὰ* $\varrho_2<x<+\infty$.

Αἱ διαφοραὶ $(x-\rho_1)$, $(x-\rho_2)$ εἶναι θετικαὶ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, ὡς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ θετικοὺς ἀριθμούς, θὰ εἶναι ὁμόσημος τοῦ α.

4) *Διὰ* $x=\varrho_1$, $x=\rho_2$.

Τὸ τριώνυμον μηδενίζεται. Ὥστε, ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, τότε:

α) *Διὰ* $-\infty<x<\varrho_1$ *καὶ* $\varrho_2<x<+\infty$ *ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου εἶναι ὁμόσημος τοῦ α.*

β) *Διὰ* $\varrho_1<x<\varrho_2$ *ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α.*

γ) *Διὰ* $x=\varrho_1$, $x=\varrho_2$ *τὸ τριώνυμον μηδενίζεται.*

Τὰ προηγούμενα συνοψίζονται εἰς τὸν ἀκόλουθον κανόνα:

Ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου $f=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ *διὰ* $-\infty<x<+\infty$ *εἶναι ὁμόσημος τοῦ α ἢ μηδὲν εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἐκτὸς ἀπὸ τὴν περίπτωσιν, ποὺ* $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, *ὁπότε διὰ* $\varrho_1<x<\varrho_2$ *εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α.*

Παράδειγμα.

Τὸ τριώνυμον $2x^2-15x-\infty$ ἔχει $\beta^2-4\alpha\gamma=225+64>0$, $\rho_1=-\frac{1}{2}$, $\rho_2=8$ καὶ $\alpha=2>0$. Συνεπῶς διὰ $-\alpha<x<-\frac{1}{2}$, καὶ $8<x<+\infty$ λαμβάνει θετικὰς τιμὰς (ὁμοσήμους τοῦ $\alpha>0$).

Διὰ $-\frac{1}{2}<x<8$ λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμὰς (ἑτεροσήμους τοῦ α).

Τὸ τριώνυμον $-5x^2+2x-20$ ἔχει $\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4(-5)(-20)=-396<0$. Συνεπῶς διὰ $-\infty<x<+\infty$, δηλαδὴ διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμὰς (ὁμοσήμους τοῦ $\alpha=-5$).

13·14 Ἀνισώσεις (ἀνισότητες) 2ου βαθμοῦ.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς τελευταίας προτάσεως τῆς προηγουμένης παραγράφου δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν (μέσα εἰς τὸ πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) κάθε ἀνίσωσιν (ἀνισότητα) τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \text{ ἢ } <0 \qquad \alpha\neq 0,$$

ποὺ λέγεται *ἀνίσωσις δευτέρου βαθμοῦ* μὲ ἄγνωστον τὸν x.

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις* $x^2-x-30>0$.

Ἡ ἐπίλυσις τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τοῦ x, ποὺ δίδουν εἰς τὸ τριώνυμον x^2-x-30 θετικὰς τιμάς, ἤτοι ὁμοσήμους τοῦ α (ἐπειδὴ $\alpha=1=$ θετικός).

Εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν $x^2-x-30=0$. Εἶναι $\rho_1=-5$, $\rho_2=6$. Συνεπῶς αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τοῦ x εἶναι αἱ μικρότεραι τῆς μικροτέρας ρίζης -5 καὶ αἱ μεγαλύτεραι τῆς μεγαλυτέρας 6. Ὥστε ἡ ἀνίσωσις ἀληθεύει διά: $-\infty<x<-5$ καὶ $6<x<+\infty$.

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις* $-3x^2+7x-10>0$.

Ζητοῦμεν τὰς τιμὰς τοῦ x, ποὺ καθιστοῦν τὸ τριώνυμον $-3x^2+7x-10$ θετικόν, ἤτοι ἑτερόσημον τοῦ $\alpha=-3$. Ἐπειδὴ $\beta^2-4\alpha\gamma=7^2-4(-3)(-10)=-71<0$, τὸ τριώνυμον $-3x^2+7x-10$ ἔχει λύσεις συζυγεῖς μιγαδικὰς καὶ ὡς ἐκ τούτου διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x λαμβάνει τιμὰς ὁμοσήμους τοῦ $\alpha=-3$, δηλαδὴ ἀρνητικάς. Ἄρα εἰς τὸ πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ $-3x^2+7x-10>0$ δὲν ἔχει λύσεις, λέγομεν δὲ τότε ὅτι εἶναι *ἀδύνατος*.

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις* $\dfrac{2x-1}{x-3}>3$.

Φέρομεν τὴν ἀνίσωσιν εἰς τὴν κανονικήν της μορφήν. Πρὸς τοῦτο μεταφέρομεν τὸ 3 εἰς τὸ α΄ μέλος καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις:

$$\frac{2x-1}{x-3}-3>0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-3x+9}{x-3}>0 \Leftrightarrow \frac{-x+8}{x-3}>0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x-8}{x-3}<0.$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x, ποὺ καθιστοῦν ἀρνητικὸν τὸ κλάσμα $\frac{x-8}{x-3}$, καθιστοῦν ἀρνητικὸν καὶ τὸ γινόμενον $(x-8)(x-3)$, συμπεραίνομεν ὅτι $\frac{x-8}{x-3}<0 \Leftrightarrow (x-8)(x-3)<0.$

Ἡ τελευταία ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $3<x<8$. Ἑπομένως καὶ ἡ ἰσοδύναμός της $\frac{2x-1}{x-3}>3$ ἀληθεύει διὰ $3<x<8$.

13·15 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ: α) ὁ 15ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας: $0, -3, -6, \ldots, (\nu-\nu^2), \ldots$, β) Ὁ 9ος τῆς ἀκολουθίας: $2,\ \sqrt{2}+1,\ \sqrt{3}+1,\ 3,\ \sqrt{\nu}+1, \ldots$, καὶ γ) Ὁ 20στὸς τῆς ἀκολουθίας: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{\nu^2+1}, \ldots$

2) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ ἀκόλουθα τριώνυμα:
$$x^2-7x+12,\quad 3x^2-36x+36,\quad 4x^2+5x-3.$$

3) Εἰς τὰ ἀκόλουθα τριώνυμα νὰ δώσετε τὴν μορφὴν (5) τῆς παραγράφου 13·8:
$$x^2+8x+25,\quad x^2+4x+13,\quad 2x^2+2x+5.$$

4) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:
$$\alpha)\ \frac{x^2-5x+6}{7x^2-5x-18}.\quad \beta)\ \frac{5x-15}{x^2-9}.\quad \gamma)\ \frac{2x^2+3x-5}{x^2-7x+6}.$$

5) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{\nu+2}{\nu}, \ldots$ καὶ $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu+1}, \ldots$ εἶναι ἡ μονάς.

6) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἀνισώσεις:

α) $2x^2-5x+2>0.$ β) $3x^2-7x-6<0.$

γ) $x^2-4x+5>0.$ δ) $x^2+4x+5<0.$

ε) $\dfrac{x-3}{x-2}>0.$ ζ) $2x^2+x<0.$

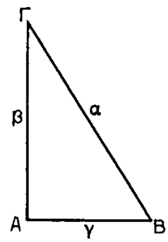
η) $\dfrac{3x-1}{2x+3}>0.$ θ) $\dfrac{5x-1}{x+3}<0.$

ι) $\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}>x+1.$ κ) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}<x-4.$

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΠΑΝΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

13·16 Γνωσταὶ σχέσεις εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ θὰ παριστάνωμεν τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας του μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της, τὸ μέτρον μιᾶς πλευρᾶς του μὲ τὸ μικρὸν γράμμα τῆς ἀπέναντι ἀπὸ τὴν πλευρὰν κορυφῆς, τὸ ἐμβαδόν του μὲ τὸ Ε καὶ τὴν ἡμιπερίμετρον μὲ τὸ τ.



Σχ. 13·16.

Αἱ πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου λέγονται ***κύρια στοιχεῖα*** αὐτοῦ.

Εἰς τὸν Α′ Τόμον (παράγρ. 9·13 ἕως 9·16) ἀπεδείξαμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 13·16):

$$\beta=\alpha\eta\mu\mathrm{B}=\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma,\quad \gamma=\alpha\eta\mu\Gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} \qquad (1)$$

$$\alpha=\frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}. \qquad (2)$$

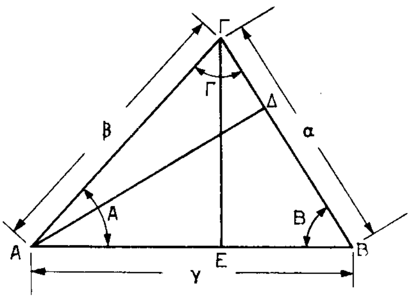
$$\beta=\gamma\varepsilon\varphi\mathrm{B}=\gamma\sigma\varphi\Gamma,\ \gamma=\beta\varepsilon\varphi\Gamma=\beta\sigma\varphi\mathrm{B}. \qquad (3)$$

Εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον θὰ ἀναζητήσωμεν σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου.

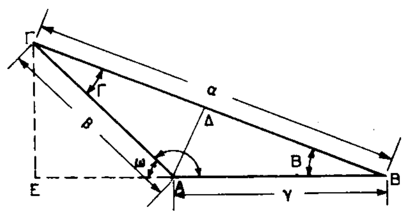
13 · 17 Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου.

I. *Σχέσις τῶν ἡμιτόνων.*

Ἔστω τὸ ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 13 · 17 α). Φέρομεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΓΕ. Ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου, εἰς μὲν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΔΒ



Σχ. 13·17 α.



Σχ. 13·17 β.

διὰ τὴν πλευρὰν ΑΔ, εἰς δὲ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΓΕΒ διὰ τὴν πλευρὰν ΓΕ. Προκύπτουν ἀντιστοίχως αἱ σχέσεις:

$$(\mathrm{A\Delta}) = \beta\eta\mu\Gamma,\ (\mathrm{A\Delta}) = \gamma\eta\mu\mathrm{B},\ (\Gamma\mathrm{E}) = \beta\eta\mu\mathrm{A},\ (\Gamma\mathrm{E}) = \alpha\eta\mu\mathrm{B}.$$

Ἀπὸ αὐτὰς ἕπονται αἱ σχέσεις:

$$\beta\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu\mathrm{B} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}.$$

$$\beta\eta\mu\mathrm{A} = \alpha\eta\mu\mathrm{B} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}.$$

Ἀπὸ αὐτὰς δέ:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}. \qquad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Πράγματι, ἂν τὸ ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς τὴν Α (σχ. 13 · 17 β), ὅπως καὶ μὲ τὸ ὀξυγώνιον, θὰ ἔχωμεν:

$(\mathrm{A\Delta}) = \beta\eta\mu\Gamma$, $(\mathrm{A\Delta}) = \gamma\eta\mu\mathrm{B}$, $(\Gamma\mathrm{E}) = \alpha\eta\mu\mathrm{B}$, $(\Gamma\mathrm{E}) = \beta\eta\mu\omega =$ $\beta\eta\mu(180^0 - \mathrm{A}) = \beta\eta\mu\mathrm{A}$ [ἐπειδὴ $\eta\mu(180^0 - \mathrm{A}) = \eta\mu\mathrm{A}$].

Ἀπὸ τὰς σχέσεις ὅμως αὐτὰς προκύπτει πάλιν ἡ (1).

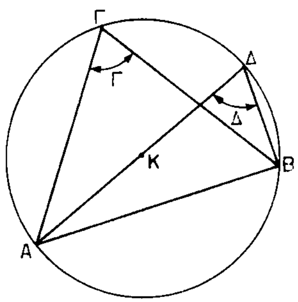
Ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ($\mathrm{A} = 90^0$) ἀληθεύει ἡ σχέσις (1). Διότι ἡ σχέσις $\alpha = \dfrac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ τῆς προηγουμένης παραγράφου εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1), ἀφοῦ $\alpha = \dfrac{\alpha}{1} = \dfrac{\alpha}{\eta\mu 90^0}$ $= \dfrac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}$.

Ἔστω τώρα R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὴν ΒΔ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ (σχ. 13·17γ) εἶναι:

$(\mathrm{AB}) = (\mathrm{A\Delta})\eta\mu\Delta$ ἢ $\gamma = 2\,\mathrm{R}\eta\mu\Delta$, καὶ ἐπειδὴ $\Delta = \Gamma$, ὡς ἐγγεγραμμέναι, ποὺ βαίνουν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΒ, $\gamma = 2\mathrm{R}\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$ $\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2\,\mathrm{R}$.

Ἔτσι ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2\mathrm{R}. \qquad (2)$$



Σχ. 13·17 γ.

Ὥστε *εἰς ἕνα τρίγωνον αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν, ὁ δὲ λόγος μιᾶς πλευρᾶς πρὸς τὸ* *ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας εἶναι ἴσος μὲ τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*

II. *Σχέσεις τῶν συνημιτόνων.*

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον καὶ ΓΕ τὸ ὕψος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ΑΒ. Ἡ γωνία Α δύναται νὰ εἶναι ὀξεῖα, ἀμβλεῖα ἢ ὀρθή.

1) $A < 90^0$ (σχ. 13·17α).

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν I τῆς παραγράφου 8·17 τοῦ Α΄ Τόμου εἶναι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma(\mathrm{AE}).$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΓ ἔχομεν:

$$(\mathrm{AE}) = \beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}.$$

Συνεπῶς ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}.$$

2) $A > 90^0$ (σχ. 13·17β).

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν II τῆς παραγράφου 8·17 τοῦ Α΄ Τόμου εἶναι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma(\mathrm{AE}).$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΕΑ ἔχομεν:

$$(\mathrm{AE}) = \beta\sigma\upsilon\nu\omega = \beta\sigma\upsilon\nu(180^0 - \mathrm{A}) = -\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$$

$$[\text{ἐπειδὴ } \sigma\upsilon\nu(180^0 - \mathrm{A}) = -\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}].$$

Συνεπῶς ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma(-\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{A})$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}.$$

3) $A = 90^0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ΓΕ συμπίπτει μὲ τὴν πλευρὰν ΓΑ καὶ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα ἔχομεν:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$$

$$(\text{ἐπειδὴ } \mathrm{A} = 90^0 \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu 90^0 = 0).$$

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς λοιπὸν περιπτώσεις ἔχομεν:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

Προφανῶς ἔχομεν καὶ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$, καθὼς καὶ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Ὥστε εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma, \end{aligned} \qquad (3)$$

καθὼς καὶ τὰς ἀκολούθους:

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu A &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu B &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu\Gamma &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}. \end{aligned} \qquad (4)$$

III. *Ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου.*

Εἰς τὴν παράγραφον 9 · 13 (2) τοῦ Α΄ Τόμου ἀπεδείξαμεν ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν $A \leqslant 90^0$, ἔχομεν:

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}.$$

Ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ ἡμιτόνου τῆς ἀμβλείας γωνίας μᾶς ἐπιτρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον αὐτὸν καὶ διὰ $A > 90^0$.

Ἂς ἀναφερθῶμεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ σχήματος 13 · 17 β, ποὺ ἔχει $A > 90^0$. Φέρομεν τὸ ὕψος ΓΕ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Θὰ εἶναι:

$$E = \frac{\gamma(\Gamma E)}{2}.$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ὅμως τρίγωνον ΓΕΑ εἶναι $(\Gamma E) = \beta\eta\mu\omega = \beta\eta\mu(180^0 - A) = \beta\eta\mu A$. Ἑπομένως καὶ διὰ $A > 90^0$:

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}.$$

Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}. \qquad (5)$$

Προφανῶς ἰσχύουν καὶ οἱ τύποι:

$$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}, \quad E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2}.$$

13·18 Ἐπίλυσις οἱουδήποτε τριγώνου.

Γενικῶς ἕνα τρίγωνον εἶναι ὡρισμένον, ὅταν εἶναι γνωστὰ τρία στοιχεῖα του, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα τουλάχιστον εἶναι πλευρά. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ὑπολοίπων στοιχείων λέγεται *ἐπίλυσις* τοῦ τριγώνου.

Εἰς τὸν Α΄ Τόμον καὶ εἰς τὰς παραγράφους 9·12 ἕως 9·16 ἐμάθαμεν νὰ ἐπιλύωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν σχέσεων τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ μελετήσωμεν τώρα μερικὰς περιπτώσεις ἐπιλύσεως οἱουδήποτε τριγώνου.

1η Περίπτωσις. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα κύρια στοιχεῖα τριγώνου, τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι. Διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν τὸ πρόβλημα πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν νὰ εἶναι $< 180^0$.

Παράδειγμα.

Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\alpha = 15 \text{ cm}, \; B = 28^0\,30', \; \Gamma = 67^0\,10'.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα στοιχεῖα του, ἤτοι ἡ Α, ἡ β, ἡ γ καὶ τὸ Ε.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α:

$$A = 180^0 - (B + \Gamma) = 180^0 - (28^0\,30' + 67^0\,10') = 84^0\,20'.$$

Ὑπολογισμὸς τῶν β καὶ γ:

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ ἔχομεν:

$$\beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A},\quad \gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακας εὑρίσκομεν:

$$\eta\mu B=\eta\mu\ 28^0\,30'=0,477.$$
$$\eta\mu\Gamma=\eta\mu\ 67^0\,10'=0,922.$$
$$\eta\mu A=\eta\mu\ 84^0\,20'=0,995.$$

Ὥστε

$$\beta=\frac{15\times 0,477}{0,995}\simeq 7,2\ \text{cm},\ \gamma=\frac{15\times 0,922}{0,995}\simeq 13,9\ \text{cm}.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ E:

$$E=\frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}=\frac{15\times 7,2\times 0,922}{2}=49,788\,0\ \text{cm}^2.$$

2α Περίπτωσις. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα κύρια στοιχεῖα τριγώνου, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ περιεχομένη των γωνία.

Παράδειγμα.

Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha=18$ cm, $\beta=24$ cm, $\Gamma=108^0\,20'$. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ γ, ἡ Α, ἡ Β καὶ τὸ Ε.

Ὑπολογισμὸς τῆς γ:

Χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\gamma^2=18^2+24^2-2\times 18\times 24\times \sigma\upsilon\nu 108^0\,20'.$$
$$\sigma\upsilon\nu 108^0\,20'=-\sigma\upsilon\nu(180^0-108^0\,20')=-\sigma\upsilon\nu 71^0\,40'=-0,315.$$
$$\text{Ἄρα } \gamma^2=324+576-864(-0,315)=900+272,16$$
$$\text{ἢ } \gamma^2=1\,172,16\ \Rightarrow\ \gamma=\sqrt{1\,172,16}\simeq 34,2.$$

Ὥστε $\gamma \simeq 34{,}2$ cm.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α:

Ἐπειδὴ $\Gamma > 90^0$ πρέπει $\mathrm{A}, \mathrm{B} < 90^0$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\dfrac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}} = \dfrac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ἔχομεν:

$$\eta\mu \mathrm{A} = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\gamma} = \frac{18\eta\mu 108^0\,20'}{34{,}2}.$$

Ἐπειδὴ $\eta\mu 108^0\,20' = \eta\mu\,(180^0 - 108^0\,20') = \eta\mu 71^0\,40'$ $= 0{,}949$, θὰ εἶναι: $\eta\mu \mathrm{A} = \dfrac{18 \times 0{,}949}{34{,}2} = 0{,}499.$

Ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $\mathrm{A} \simeq 29^0 5\dot{7}'$. Ἡ τιμὴ αὐτὴ τῆς Α ἐπειδὴ εἶναι $< 90^0$, γίνεται δεκτὴ ὡς λύσις τοῦ προβλήματος.

Ὑπολογισμὸς τῆς Β:

$$\mathrm{B} = 180^0 - (\mathrm{A} + \Gamma) = 180^0 - (138^0\,17') = 41^0\,43'.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε:

$$\mathrm{E} = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{18 \times 24 \times \eta\mu 108^0\,20'}{2} = 216 \times 0{,}949,$$

ἄρα $\mathrm{E} = 204{,}98$ cm^2.

3η Περίπτωσις. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ὅταν εἶναι γνωσταὶ δύο πλευραί του καὶ ἡ γωνία, ποὺ κεῖται ἀπέναντι μιᾶς ἀπὸ τὰς πλευράς.

Παραδείγματα:

1ον) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 18$ cm, $\beta = 22$ cm, $\mathrm{A} = 38^0\,10'$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ Β, Γ, γ.

Ὑπολογισμὸς τῶν Β καὶ Γ:

Χρησιμοποιοῦμεν τὴν σχέσιν $\dfrac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}} = \dfrac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} \Leftrightarrow \eta\mu \mathrm{B} =$

$\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu B = \frac{22 \cdot \eta\mu 38^0 10'}{18} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{22 \times 0{,}618}{18} \Leftrightarrow \eta\mu B = 0{,}755.$$

Τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ἐπιλύομεν διὰ $B < (180^0 - 30^0 10')$ ἢ $B < 141^0 50'$. Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $\eta\mu 49^0 \simeq 0{,}755$. Ἄρα $B = 49^0$ καὶ $B = 180^0 - 49^0 = 131^0$.

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῆς B ἱκανοποιοῦν τὸν περιορισμὸν $B < 141^0 50'$, γίνονται δεκταὶ ὡς μέτρα τῆς γωνίας B.

Διὰ $B = 49^0$ ἔχομεν $\Gamma = 180^0 - (49^0 + 38^0 10') = 92^0 50'$.

Διὰ $B = 131^0$ ἔχομεν $\Gamma = 180^0 - (131^0 + 38^0 10') = 10^0 50'$.

Ὥστε ἡ B δύναται νὰ ἔχῃ δύο τιμὰς μίαν $< 90^0$ καὶ μίαν $> 90^0$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γ:

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ἔχομεν $\gamma = \frac{\alpha \cdot \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$.

Διὰ $\Gamma = 92^0 50'$.

$$\gamma = \frac{18 \cdot \eta\mu 92^0 50'}{\eta\mu 38^0 10'} = \frac{18 \cdot \eta\mu(180^0 - 92^0 50')}{\eta\mu 38^0 10'} = \frac{18 \cdot \eta\mu 87^0 10'}{\eta\mu 38^0 10'}$$

$$\text{ἢ } \gamma = \frac{18 \times 0{,}999}{0{,}618} \simeq 29{,}1 \text{ cm}.$$

Διὰ $\Gamma = 10^0 50'$.

$$\gamma = \frac{18^0 \cdot \eta\mu 10^0 50'}{0{,}618} = \frac{18 \times 0{,}188}{0{,}618} \simeq 5{,}47 \text{ cm}.$$

Ὥστε τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις:

α) $B = 49^0$, $\Gamma = 92^0 50'$, $\gamma = 29{,}1$ cm.

β) $B = 131^0$, $\Gamma = 10^0 50'$, $\gamma = 5{,}47$ cm.

2ον) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 20$, $\beta = 30$, $A = 75^0$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι B καὶ Γ.

Χρησιμοποιοῦμεν τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu B = \frac{30 \cdot \eta\mu 75^0}{20} = \frac{30 \times 0{,}966}{20} = 1{,}249.$$

Ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu B = 1{,}249$ δὲν ἔχει λύσιν, διότι διὰ κάθε τιμὴν τοῦ Β εἶναι $\eta\mu B < 1$. Συνεπῶς τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

4η Περίπτωσις. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου, ὅταν δίδωνται αἱ πλευραί του.

Παράδειγμα:

Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΓΒ δίδονται $\alpha = 15$ cm, $\beta = 20$ cm, $\gamma = 30$ cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ Α, Β, Γ.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους τῶν συνημιτόνων.

Διὰ τὴν Α ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{20^2 + 30^2 - 15^2}{2 \times 20 \times 30} = \frac{1\,075}{1\,200} \simeq 0{,}896.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu 26^0\ 20' = 0{,}896$.

Ἄρα $A \simeq 26^0\ 20'$.

Διὰ τὴν Β ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{15^2 + 30^2 - 20^2}{2 \times 15 \times 30} \simeq 0{,}806.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu 36^0 20' = 0{,}806$.

Ἄρα $B \simeq 36^0 20'$.

Διὰ τὴν Γ ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{15^2 + 20^2 - 30^2}{2 \times 15 \times 20} \simeq -0{,}454.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu 63^0 = 0{,}454$.

Ἄρα $\sigma\upsilon\nu(180^0 - 63^0) = \sigma\upsilon\nu 117^0 = -0{,}454$ καὶ $\Gamma \simeq 117^0$.

Ἐπαλήθευσις:

$$A + B + \Gamma = 26^0\ 20' + 36^0\ 26' + 117^0 = 179^0\ 46' \simeq 180.$$

13 · 19 Ἐφαρμογαί.

I. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α* (σχ. 13 · 19 α).

Ἐπίλυσις. Ἔστω x ἡ ζητουμένη πλευρά.

Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΘΒΖ ἔχομεν:

$$(\Theta B) = (\Theta Z)\,\text{ημ}45^0 = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ἄρα καὶ } (AH) = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ὅμως $AH + H\Theta + \Theta B = AB$, συνεπῶς καί:

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + x + x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \text{ ἢ } 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + x = \alpha \text{ ἢ } x\sqrt{2} + x = \alpha.$$

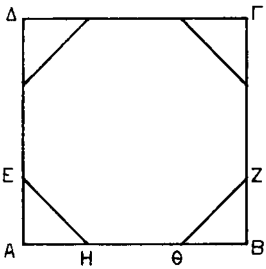
Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς x:

$$x(\sqrt{2}+1) = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}+1} = \frac{\alpha(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} =$$

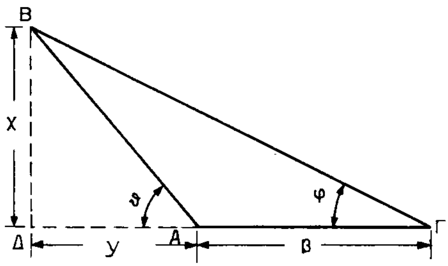
$$\frac{\alpha(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-1} = \alpha(\sqrt{2}-1).$$

Ὥστε $x = \alpha(\sqrt{2}-1)$ ἢ $x = 0{,}4142\,\alpha$.

II. *Εἰς τὸ σχῆμα 13 · 19 β νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη x καὶ y ἀπὸ τὸ μῆκος β καὶ τὰς γωνίας ϑ καὶ φ.*



Σχ. 13·19 α.



Σχ. 13·19 β.

Ἐπίλυσις. Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΒΔΑ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$x = (\beta + y)\,\text{εφ}\varphi, \quad x = y\,\text{εφ}\theta.$$

Ἐπιλύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς x, y.

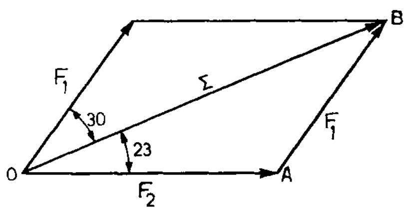
Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$y\varepsilon\varphi\theta = (\beta + y)\,\varepsilon\varphi\varphi \Leftrightarrow y\varepsilon\varphi\theta - y\varepsilon\varphi\varphi = \beta\varepsilon\varphi\varphi \Leftrightarrow$$

$$y(\varepsilon\varphi\theta - \varepsilon\varphi\varphi) = \beta\varepsilon\varphi\varphi \text{ καὶ διὰ } \varepsilon\varphi\theta \neq \varepsilon\varphi\varphi$$

$$y = \frac{\beta\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\theta - \varepsilon\varphi\varphi} \text{ καὶ } x = \frac{\beta\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\theta}{\varepsilon\varphi\theta - \varepsilon\varphi\varphi}.$$

III. *Μία δύναμις $\Sigma = 18\,kp$, ἔχει ἀναλυθῆ εἰς δύο συνιστώσας F_1, F_2 κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ αὐτὰς γωνίας ἀντιστοίχως 30^0 καὶ 23^0. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ F_1, F_2* (σχ. 13 · 19 γ).



Σχ. 13·19 γ.

Ἐπίλυσις. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{F_1}{\eta\mu 23^0} = \frac{F_2}{\eta\mu 30^0} = \frac{\Sigma}{\eta\mu[180^0 - (23^0 + 30^0)]} = \frac{18}{\eta\mu 53^0}.$$

Ἀπὸ αὐτὰς δὲ τάς:

$$F_1 = \frac{18 \cdot \eta\mu 23^0}{\eta\mu 53^0} = \frac{18 \times 0{,}391}{0{,}799} \simeq 8{,}775 \text{ kp.}$$

$$F_2 = \frac{18 \cdot \eta\mu 30^0}{\eta\mu 53^0} = \frac{18 \times 0{,}5}{0{,}799} = \frac{9}{0{,}799} \simeq 11{,}25 \text{ kp.}$$

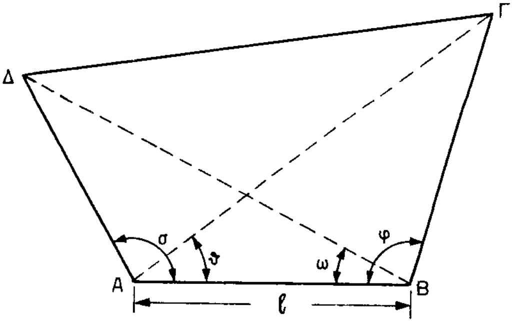
IV. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΓΔ εἰς τὸ σχῆμα 13 · 19 δ. συναρτήσει τῶν l, σ, ϑ, ω, φ.*

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ διὰ $l = 150$ m, $\sigma = 132^0$, $\theta = 42^0$, $\omega = 30^0$, $\varphi = 110^0$.

Ἐπίλυσις. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΔΑΒ ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{(\mathrm{A}\Delta)}{\eta\mu\omega}=\frac{l}{\eta\mu[180^0-(\sigma+\omega)]}=\frac{l}{\eta\mu(\sigma+\omega)} \quad \text{καὶ}$$

$$(\mathrm{A}\Delta)=\frac{l\cdot\eta\mu\omega}{\eta\mu(\sigma+\omega)}$$



Σχ. 13·19δ.

καὶ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ τὰς σχέσεις:

$$\frac{(\mathrm{A}\Gamma)}{\eta\mu\varphi}=\frac{l}{\eta\mu[180^0-(\varphi+\theta)]}=\frac{l}{\eta\mu(\varphi+\theta)} \quad \text{καὶ}$$

$$(\mathrm{A}\Gamma)=\frac{l\cdot\eta\mu\varphi}{\eta\mu(\varphi+\theta)}$$

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον τώρα ΔΑΓ ὑπολογίζομεν τὴν (ΔΓ):

$$(\Delta\Gamma)^2=(\mathrm{A}\Delta)^2+(\mathrm{A}\Gamma)^2-2(\mathrm{A}\Delta)(\mathrm{A}\Gamma)\sigma\upsilon\nu(\sigma-\theta).$$

Διὰ $l=150\,\mathrm{m}$, $\sigma=132^0$, $\theta=42^0$, $\omega=30^0$, $\varphi=210^0$

ἔχομεν:

$$(\mathrm{A}\Delta)=\frac{150\cdot\eta\mu30^0}{\eta\mu162^0}=\frac{150\times0{,}5}{\eta\mu18^0}=\frac{75}{0{,}309}\simeq 242{,}7.$$

$$(\mathrm{A}\Gamma)=\frac{150\cdot\eta\mu110^0}{\eta\mu152^0}=\frac{150\cdot\eta\mu70^0}{\eta\mu28^0}=\frac{150\times0{,}940}{0{,}469}\simeq 300\,\mathrm{m}.$$

$(\Delta\Gamma)^2=242{,}7^2+300^2$ (ἐπειδὴ $\sigma-\theta=90^0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu90^0=0$), ἢ

$$\Delta\Gamma=\sqrt{148\,903}\simeq 386\,\mathrm{m}.$$

13·20 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

α) $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$, $\beta = \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu A$, $\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A$.

β) $\alpha(\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) + \beta(\eta\mu\Gamma - \eta\mu A) + \gamma(\eta\mu A - \eta\mu B) = 0$.

γ) $\dfrac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = \dfrac{\varepsilon\varphi A}{\varepsilon\varphi B}$.

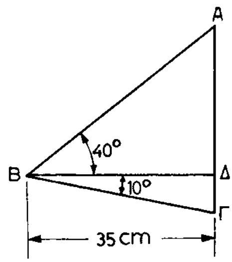
2) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι, ἐὰν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἱκανοποιοῦν μίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους σχέσεις, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές:

α) $\eta\mu A = 2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$. β) $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$. γ) $\beta\sigma\upsilon\nu A = \alpha\sigma\upsilon\nu B$.

3) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς διαγωνίους τοῦ ρόμβου, ποὺ ἔχει πλευρὰν 12 cm καὶ μίαν γωνίαν 52°.

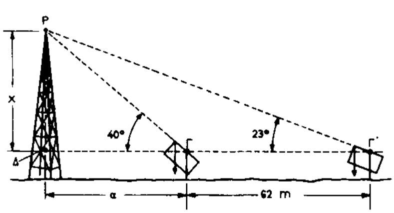
4) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς γωνίας καὶ τὰς διαγωνίους ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ποὺ ἔχει βάσεις ἀντιστοίχως 18 cm καὶ 12 cm καὶ ἴσας πλευρὰς μήκους 20 cm.

5) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος ΑΓ εἰς τὸ σχῆμα 13 · 20 α.

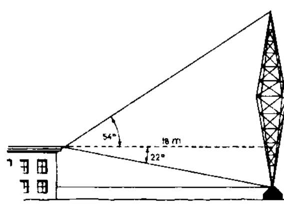


Σχ. 13·20 α.

6) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ ὕψη τῶν πύργων εἰς τὰ σχήματα 13 · 20 β, 13 · 20 γ, 13 · 20 δ.



Σχ. 13·20 β.

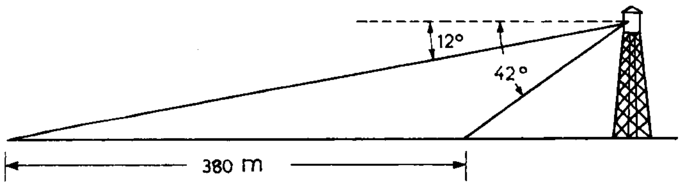


Σχ. 13·20 γ.

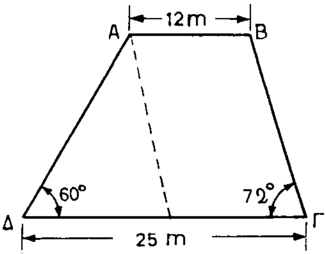
7) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς καὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου τοῦ σχήματος 13 · 20 ε.

8) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀπόστασιν ΓΔ εἰς τὸ σχῆμα 13 · 20 ζ.

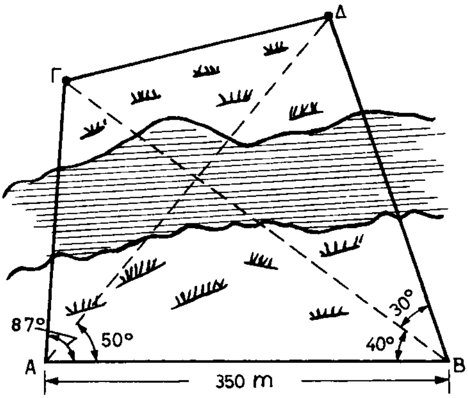
9) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς ἀποστάσεις ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὸ σχῆμα 13 · 20 η.



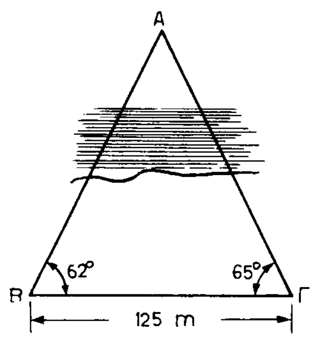
Σχ. 13·20 δ.



Σχ. 13·20 ε.



Σχ. 13·20 ζ.



Σχ. 13·20 η.

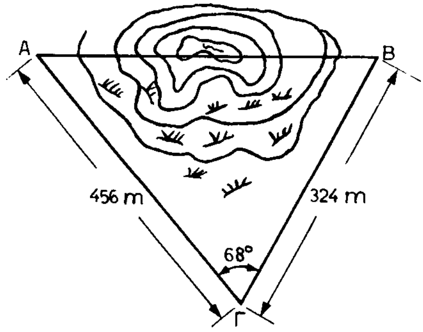
10) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς γωνίας Α καὶ Β εἰς τὸ σχῆμα 13 · 20 θ.

11) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι: $\alpha = 34$ cm, $\beta = 20$ cm, $\gamma = 16$ cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν του.

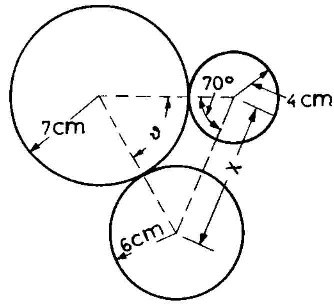
12) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ δίδονται:

α) $\beta = 32$ cm, $A = 28^0$, $B = 72^0$ καὶ ζητοῦνται τὰ γ, α, Ε.

β) $\alpha = 12$ cm, $\beta = 30$ cm, $\Gamma = 56^0$ καὶ ζητοῦνται τὰ γ, Ε.



Σχ. 13·20 θ.

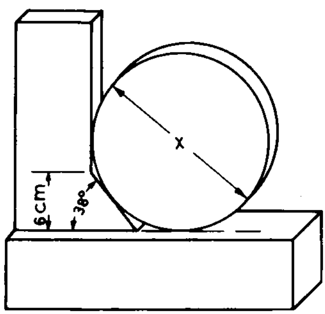


Σχ. 13·20 ι.

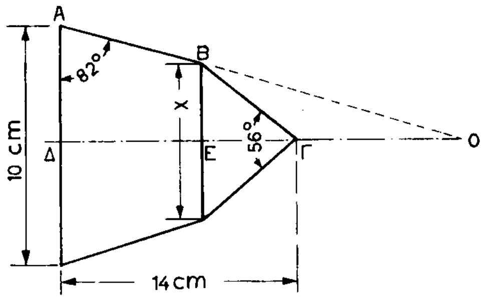
γ) $\alpha = 13$ cm, $\beta = 12$ cm, $A = 48^0$ καὶ ζητοῦνται τὰ Γ,Β,γ.

δ) $E = 156$ cm^2, $\alpha = 18$cm, $\beta = 32$ cm καὶ ζητοῦνται τὰ Α,Β,γ.

ε) $\beta = 13$ cm, $\gamma = 13$cm, $\Gamma = 48^0$ καὶ ζητοῦνται τὰ Β,Γ,α



Σχ. 13·20 κ.



Σχ. 13·20 λ.

13) Εἰς τὸ σχῆμα 13 · 20 ι νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀπόστασιν x, καὶ τὴν γωνίαν θ, εἰς τὸ σχῆμα 13 · 20 κ τὴν διάμετρον x, εἰς τὸ σχῆμα 13 · 20 λ τὴν ἀπόστασιν x.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 14

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

14·1 Συναρτήσεις. Ὁρισμοί.

Εἰς τὸ Α΄ Τόμον (παράγρ. 4·14 ἕως 4·16) ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς *σταθερᾶς*, τῆς *μεταβλητῆς* καὶ τοῦ *πεδίου μεταβολῆς* της, καθὼς καὶ τῆς *συναρτήσεως* μιᾶς μεταβλητῆς. Ἐμάθαμεν ἐπίσης τί εἶναι καὶ πῶς κατασκευάζεται εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ἡ *γραφικὴ παράστασις* ἤ, ὅπως ἄλλως λέγομεν, τὸ *διάγραμμα* ἢ *γραφικὸν* μιᾶς συναρτήσεως. Ἐμελετήσαμεν τὴν συνάρτησιν $\alpha x + \beta$ καὶ εἴδαμεν ὅτι ἡ γραφική της παράστασις εἶναι μία εὐθεῖα. Τώρα θὰ μελετήσωμεν ὡρισμένας ἄλλας συναρτήσεις. Προηγουμένως ὅμως θὰ δώσωμεν μερικοὺς χρησίμους ὁρισμούς.

I. Ἂν ψ εἶναι μία συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, τότε τὸ πεδίον μεταβολῆς τῆς x λέγεται *πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως* ψ καὶ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ ψ, ὅταν ἡ x λαμβάνῃ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, λέγεται *πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως* ψ.

II. *Αὔξουσα καὶ φθίνουσα συνάρτησις.*

Ἀπὸ τὴν Φυσικὴν γνωρίζομεν ὅτι τὸ μῆκος μιᾶς σιδηρᾶς ράβδου εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας της, ὅταν δὲ αὐξάνῃ ἡ θερμοκρασία της, αὐξάνει καὶ τὸ μῆκος της καὶ ἀντιστρόφως. Λέγομεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας της. Ἀπὸ τὴν Φυσικὴν ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς ἀερίου μὲ σταθερὰν θερμοκρασίαν εἶναι συνάρτησις τῆς πιέσεως, ποὺ ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀερίου, κατὰ δὲ τὸν νόμον τοῦ Boyle-Mariotte αὐξανομένης τῆς πιέσεως ἐλαττοῦται ὁ ὄγκος του καὶ ἀντιστρόφως. Λέγομεν ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς ἀερίου μὲ σταθερὰν θερμοκρασίαν εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τῆς πιέσεώς του.

Γενικῶς ἔστω f μία συνάρτησις τῆς x, $(\alpha,\ \beta)$ ἕνα διάστημα ἀπὸ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της καὶ x_1, x_2 δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ διαστήματος. Ἡ f λέγεται *αὔξουσα* συνάρτησις τοῦ x εἰς τὸ διάστημα $(\alpha,\ \beta)$, ἂν διὰ $x_1 < x_2$ εἶναι καὶ $f(x_1) < f(x_2)$, ἤτοι ἂν ἡ διαφορὰ $x_1 - x_2$ εἶναι ὁμόσημος μὲ τὴν διαφορὰν $f(x_1) - f(x_2)$.

Ἡ f λέγεται *φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα* $(\alpha,\ \beta)$, ἂν διὰ $x_1 < x_2$ εἶναι $f(x_1) > f(x_2)$, ἤτοι ἡ διαφορὰ $x_1 - x_2$ εἶναι ἑτερόσημος τῆς διαφορᾶς $f(x_1) - f(x_2)$.

Παραδείγματα.

1ον) Ἡ συνάρτησις $f = 3x + 2$ εἶναι αὔξουσα καὶ ἡ $\varphi = -5x + 1$ φθίνουσα συνάρτησις τοῦ x_1 διὰ $-\infty < x < +\infty$, διότι διὰ δύο τυχόντας ἀριθμοὺς x_1, x_2 τοῦ διαστήματος ἔχομεν διὰ μὲν τὴν f:

$$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 + 2) - (3x_2 + 2) = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2),$$

ἤτοι ὁμόσημος τῆς $x_1 - x_2$, διὰ δὲ τὴν φ:

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (-5x_1 + 1) - (-5x_2 + 1) = -5x_1 + 5x_2 = -5(x_1 - x_2),$$

ἤτοι ἑτερόσημος τῆς $x_1 - x_2$.

2ον) Ὅπως εἴδαμεν (παράγρ. 12·14), ἡ $\psi = \eta\mu x$ εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ καὶ φθίνουσα εἰς τὸ $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$, ἐνῷ ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma\upsilon\nu x$ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $0 \leqslant x < \pi$ καὶ αὔξουσα εἰς τὸ $\pi \leqslant x < 2\pi$.

14·2 Μελέτη καὶ γραφικὴ παράστασις μιᾶς συναρτήσεως.

Μελέτη τῆς μεταβολῆς μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν διαστημάτων ἀπὸ τὸ πεδίον μεταβολῆς της, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα, καθὼς καὶ τῆς μεγαλυτέρας *(μέγιστον)* ἢ μικροτέρας *(ἐλάχιστον)* τιμῆς, ποὺ λαμβάνει μία συνάρτησις εἰς ἕνα διάστημα.

Αὐτὸ μᾶς διευκολύνει καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ *γραφικοῦ* (διαγράμματος) τῆς συναρτήσεως. Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν κατὰ προσέγγισιν τὸ γραφικὸν μιᾶς συναρτήσεως καταρτίζομεν ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως. Κατόπιν εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων χΟψ παριστάνομεν τὴν μεταβλητὴν μὲ τὸν ἕνα ἄξονα, συχνότερα μὲ τὸν χ΄χ, τὴν συνάρτησιν μὲ τὸν ἄλλον ἄξονα καὶ ἀντιστοιχίζομεν μὲ κάποιον τρόπον τὰς τιμάς των εἰς τὰ σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων ἀξόνων ἀναγράφοντες αὐτὰς καταλλήλως.

Κάθε σημεῖον ἑκάστου ἄξονος μαζὶ μὲ τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῆς συναρτήσεως, ποὺ παριστάνει, λέγεται *ἀριθμόσημον*. Ἐννοεῖται ὅτι ἕνα ἀριθμόσημον τοῦ χ΄χ δὲν ἔχει πάντοτε τὸν ἴδιον ἀριθμὸν μὲ τὴν τετμημένην του, ὅπως καὶ ἕνα ἀριθμόσημον τοῦ ψ΄ψ μὲ τὴν τεταγμένην του. Οἱ δύο ἄξονες βαθμολογημένοι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λέγονται *κλίμακες* ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς, ποὺ παριστάνουν. Συχνότερα εἰς τὰ γραφικὰ χρησιμοποιοῦμεν τὴν *μετρικὴν* κλίμακα. Εἰς τὴν μετρικὴν κλίμακα τὰ τμήματα, ποὺ ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ὅλα τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμοσήμων μὲ τὴν ἰδίαν διαφοράν, εἶναι ἴσα, π.χ. τὸ τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ ἀριθμόσημα 3 καὶ 5, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τμῆμα, ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ ἀριθμόσημα 6 καὶ 8, 7 καὶ 9, 30 καὶ 32 κλπ., διότι $5-3=8-6=2=9-7=$ $=32-30$.

Τὸ κοινὸν μῆκος τῶν τμημάτων αὐτῶν, ὅταν ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ 1, λέγεται *βαθμὶς* τῆς κλίμακος. Π.χ. ἐὰν ὁ χ΄χ ἔχῃ βασικὸν μέτρον διάνυσμα μήκους 1 cm καὶ ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὰ σημεῖα του τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ τιμὴ $x=5$ νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ σημεῖον, ποὺ ἔχει τετμημένην 1, ἡ $x=10$ εἰς τὸ σημεῖον μὲ τετμημένην 2, ἡ $x=15$ εἰς τὸ σημεῖον μὲ τετμημένην 3, κ.ο.κ., τότε ἔχομεν μίαν μετρικὴν κλίμακα διὰ τὴν μεταβλητὴν x μὲ βαθμίδα $\frac{1}{5}$ τοῦ βασικοῦ μέτρου $= 2\,\mathrm{mm}$. Εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ τῶν ἀξόνων σημειώνομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν, ποὺ ἔχομεν προσδιορίσει, καὶ μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς καμπυλογράμμου σχεδιάζομεν κατὰ προσέγγισιν τὸ γραφικὸν τῆς συναρτήσεως.

Αἱ συναρτήσεις καὶ τὰ γραφικά των χρησιμοποιοῦνται πολὺ εἰς τὴν τεχνικήν.

Ἡ ἀλληλεξάρτησις μεταξὺ δύο μεταβλητῶν μεγεθῶν εἰς ἕνα φυσικὸν φαινόμενον γεννᾶ μίαν *συναρτησιακὴν σχέσιν* μεταξὺ τῶν μεγεθῶν αὐτῶν, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸν νόμον τοῦ φαινομένου. Τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως αὐτῆς μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἔχωμεν μίαν ἄμεσον εἰκόνα τοῦ φαινομένου αὐτοῦ καὶ νὰ ἐκτελῶμεν πρακτικοὺς ὑπολογισμούς.

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

14·3 Συναρτήσεις τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2$.

α) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = x^2$ μὲ πεδίον δρισμοῦ τὸ διάστημα $-\infty < x < \infty$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2$ μὲ $\alpha = 1$.

Ἂν $x_1 < x_2 < 0$, τότε $x^2{}_1 > x^2{}_2$. Ἂν $x_1 > x_2 > 0$, τότε $x^2{}_1 > x^2{}_2$.

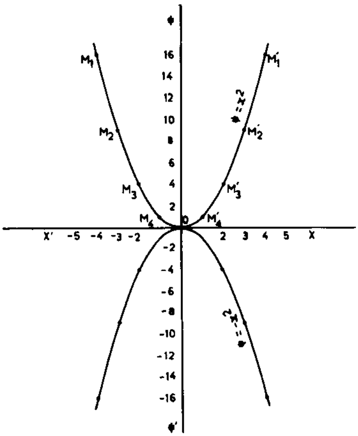
Ὥστε (παράγρ. 14·1) *ἡ συνάρτησις* $\psi = x^2$ *εἰς μὲν τὸ διάστημα* $-\infty < x < 0$ *εἶναι φθίνουσα, εἰς δὲ τὸ διάστημα* $0 < x < \infty$ *εἶναι αὔξουσα*. Διὰ $x = 0$ λαμβάνει τὴν μικροτέραν της τιμὴν $\psi = 0$.

Ἂς κατασκευάσωμεν τώρα τὸ γραφικόν της. Πρὸς τοῦτο:

1ον) Καταρτίζομεν ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς x καὶ τῆς $\psi = x^2$, δίδοντες εἰς τὴν x μίαν αὔξουσαν ἀκολουθίαν τιμῶν:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\psi = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

2ον) Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων χΟψ (σχ. 14·3), εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν παραστήσει τὴν μεταβλητὴν x μὲ τὸν χ΄χ χρησιμοποιοῦντες κλίμακα βαθμίδος 1 καὶ τὴν συνάρτησιν ψ μὲ τὸν ψ΄ψ χρησιμοποιοῦντες κλίμακα βαθμίδος $^1/_2$, κατασκευάζομεν τὰ σημεῖα $M_1\,(-4,\,16)$, $M_2\,(-3,\,9)$, $M_3\,(-2,\,4)$, $M_4\,(-1,\,1)$, $O\,(0,\,0)$, $M_4'\,(1,\,1,)$, $M'_3\,(2,\,4)$, $M_2'\,(3,9)$, $M_1'\,(4,\,16)$, ποὺ ἔχουν συντεταγμένας τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν (χ, ψ) τοῦ πίνακος.



Σχ. 14·3.

Κατόπιν μὲ μίαν κατὰ τὸ δυνατὸν ὁμαλὴν γραμμὴν ἑνώνομεν διαδοχικῶς τὸ M_1 μὲ τὸ M_2, τὸ M_2 μὲ τὸ M_3, τὸ M_3 μὲ τὸ M_4, τὸ M_4 μὲ O, τὸ O μὲ τὸ M_4' κ.ο.κ.

Προκύπτει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·3, πού, ὅπως θὰ δείξωμεν ἀργότερον, εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἕνα τμῆμα μιᾶς παραβολῆς (Τόμος Α΄, παράγρ. 6·11).

Σημείωσις : Ἡ διαδοχὴ τῶν σημείων κατὰ τὴν σχεδίασιν ἑνὸς διαγράμματος καθορίζεται κατὰ τρόπον, ὥστε αἱ τετμημέναι τῶν σημείων νὰ ἀποτελοῦν μίαν αὔξουσαν ἀκολουθίαν ἢ μίαν φθίνουσαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα φαίνεται ὅτι ἡ παραβολὴ ἔχει κορυφὴν τὸ O καὶ ἄξονα συμμετρίας τὸν ψ΄ψ. Μὲ τὸν ἄξονα χ΄χ ἔχει ἕνα κοινὸν σημεῖον, τὸ 0, ἤ, ὅπως λέγομεν, ἡ καμπύλη *ἐφάπτεται* τοῦ χ΄χ΄ εἰς τὸ 0. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἡ παραβολὴ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον χ΄ψχ.

β) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = -x^2$, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα $-\infty < x < +\infty$. Εἶναι καὶ αὐτὴ τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2$ μὲ $\alpha = -1$. Προφανῶς αἱ δύο συναρτήσεις $\psi = x^2$ καὶ $\psi = -x^2$, διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῆς x, λαμβάνουν ἀντιθέτους ἀντιστοίχως τιμάς. Συνεπῶς ἡ $\psi = -x^2$ διὰ $x \neq 0$ λαμβάνει μόνον ἀρνητικὰς τιμὰς καὶ εἶναι εἰς μὲν τὸ διάστημα $-\infty < x < 0$ αὔξουσα, εἰς δὲ τὸ διάστημα $0 < x < +\infty$ φθίνουσα.

Διὰ $x = 0$ ἡ ψ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμήν της $\psi = 0$. Ἡ γραφική της παράστασις (σχ. 14·3) εἶναι παραβολὴ συμμετρικὴ τῆς $\psi = x^2$ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὸν χ΄χ. Συνεπῶς ἡ παραβολὴ $\psi = -x^2$ ἔχει κορυφὴν τὸ Ο, ἄξονα τὸν Οψ΄, ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος χ΄χ εἰς τὸ Ο καὶ κεῖται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον χψ΄χ΄.

γ) Ἄς θεωρήσωμεν γενικῶς τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x^2$ μὲ $\alpha \neq 0$ καὶ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα $-\infty < x < +\infty$.

Ἡ τιμή της διὰ μίαν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ α τῆς τιμῆς τῆς $\psi = x^2$ διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x. Συμπεραίνομεν λοιπὸν τὸν ἀκόλουθον Πίνακα 4 μεταβολῆς τῆς $\psi = \alpha x^2$.

ΠΙΝΑΞ 4

Μεταβολὴ τῆς $\psi = \alpha x^2$.

x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$\psi = \alpha x^2$ μέ $\alpha > 0$	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$
$\psi = \alpha x^2$ μέ $\alpha < 0$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$

Ἡ γραφική της παράστασις εἶναι παραβολή, ποὺ ἔχει κορυφὴν τὸ O, ἄξονα τὸν $\psi'\psi$ καὶ ἐφάπτεται τοῦ $\chi'\chi$ εἰς τὸ O. Ἡ παραβολὴ αὐτή, ἂν μὲν $\alpha > 0$, εὑρίσκεται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\chi'\psi\chi$, ἂν δὲ $\alpha < 0$, εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\chi\psi'\chi'$.

14·4 Συναρτήσεις τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2 + \gamma$.

α) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = x^2 + 4$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα $-\infty < x < +\infty$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2 + \gamma$ μὲ $\alpha = 1$ καὶ $\gamma = 4$. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ μίαν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x ἡ τιμὴ τῆς $\psi = x^2 + 4$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ 4 καὶ τῆς τιμῆς τῆς $\psi = x^2$ διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x. Συνεπῶς ἡ $\psi = x^2 + 4$ μεταβάλλεται ὅπως ἡ $\psi = x^2$ μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμή της εἶναι ἡ $\psi = 0 + 4 = 4$.

Τὸ διάγραμμά της εἶναι παραβολή, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν παραβολὴν $\psi = x^2$, ἂν ἀντικαταστήσωμεν κάθε σημεῖον της μὲ ἄλλο, ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν τετμημένην καὶ τεταγμένην ηὐξημένην κατὰ 4.

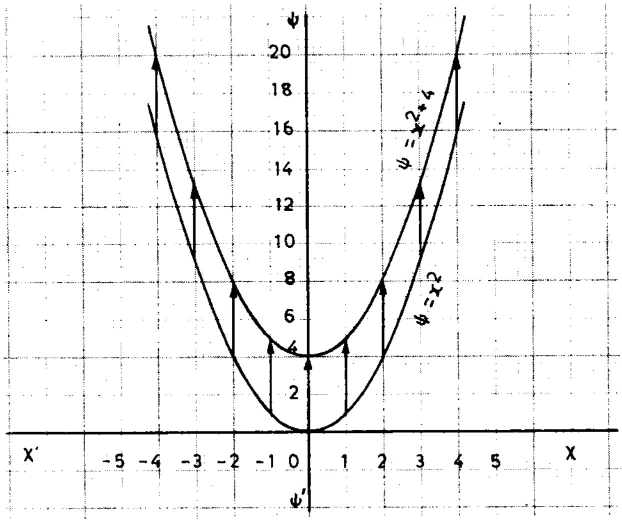
Εἰς τὸ σχῆμα 14·4α φαίνεται πῶς μὲ μίαν *παράλληλον πρὸς τὸν ψ′ψ μετατόπισιν* μεταβαίνομεν ἀπὸ τὴν παραβολὴν $\psi = x^2$ εἰς τὴν $\psi = x^2 + 4$. Ἀπὸ τὸ σχῆμα φαίνεται ὅτι ἡ παραβολὴ $\psi = x^2 + 4$ δὲν ἔχει κοινὰ σημεῖα μὲ τὸν ἄξονα $\chi'\chi$.

Αὐτὸ δυνάμεθα νὰ τὸ διαπιστώσωμεν καὶ χωρὶς νὰ κατασκευάσωμεν τὴν παραβολήν. Διότι διὰ $\psi = 0$ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $x^2 + 4 = 0$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει λύσιν πραγματικὸν ἀριθμόν, καὶ συνεπῶς εἰς τὴν τιμὴν $\psi = 0$ τῆς συναρτήσεως δὲν ἀντιστοιχεῖ τιμὴ τῆς x ἀπὸ τὸ πεδίον μεταβολῆς της.

β) Ἂς θεωρήσωμεν τώρα γενικῶς τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x^2 + \gamma$ μὲ $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ καὶ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $-\infty < x < +\infty$. Ἡ τιμή της διὰ μίαν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x εἶναι ἄθροισμα τοῦ γ καὶ τῆς τιμῆς τῆς $\psi = \alpha x^2$ διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x.

Ὁ Πίναξ 5 μᾶς δίδει τὴν μεταβολήν της.

Ἡ γραφική της παράστασις εἶναι παραβολὴ μὲ ἄξονα τὸν ψ'ψ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον (0, γ).



Σχ. 14·4 α.

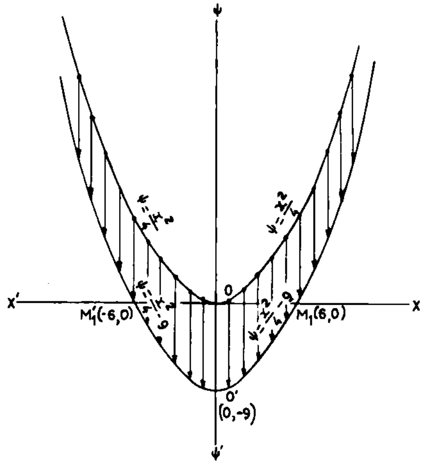
ΠΙΝΑΞ 5

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x^2 + \gamma$.

χ	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$\psi = \alpha x^2 + \gamma$ με $\alpha > 0$	$+\infty \searrow \gamma \nearrow +\infty$
$\psi = \alpha x^2 + \gamma$ με $\alpha < 0$	$-\infty \nearrow \gamma \searrow -\infty$

Ἂν $-\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, ἡ παραβολὴ τέμνει τὸν ἄξονα χ'χ εἰς τὰ σημεῖα $\left(\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}},\ 0\right), \left(-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}},\ 0\right)$.

Εἰς τὸ σχῆμα 14·4β παρέχεται τὸ γραφικὸν τῆς $\psi = \dfrac{x^2}{4} - 9$. Αὐτὸ τέμνει τὴν $\chi'\chi$ εἰς τὰ σημεῖα $M_1(6,0)$, $M'_1(-6,0)$.



Σχ. 14·4 β.

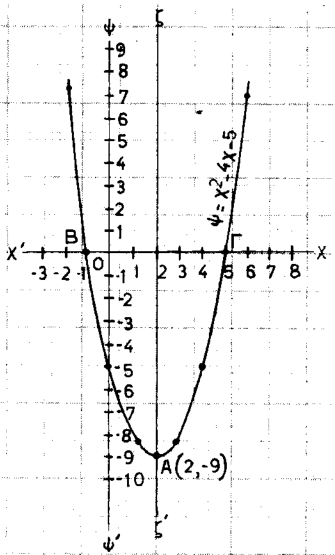
14·5 Συναρτήσεις τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

α) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = x^2 - 4x - 5$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ $-\infty < x < +\infty$. Ἡ $\psi = x^2 - 4x - 5$ γράφεται καὶ μὲ τὴν μορφὴν $\psi = (x-2)^2 - 9$. Φαίνεται δὲ ἀμέσως ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x < 2$ καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $2 < x < +\infty$.

Διὰ $x = 2$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμήν της (ἐλάχιστον) $\psi = (2-2)^2 - 9 = -9$. Κατασκευάζομεν τὸ διάγραμμά της. Πρὸς τοῦτο καταρτίζομεν ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν δίδοντες εἰς τὸν x τὰς τιμὰς μιᾶς αὐξούσης ἀκολουθίας ἀριθμῶν καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ διαγράμματος τῆς $\psi = x^2$ εἰς τὴν περίπτωσιν α (παράγρ. 14·3).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\psi = x^2 - 4x - 5$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

Προκύπτει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·5, ἡ ὁποία, ὅπως θὰ ἀποδείξωμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον, εἶναι καὶ αὐτὴ κατὰ προσέγγισιν παραβολή. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Α $(2, -9)$ καὶ ἄξονα τὴν $\zeta'\text{Α}\zeta // \psi'\psi$.



Σχ. 14·5.

Ἡ παραβολὴ αὐτὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸν ἄξονα $\chi'\chi$, τὰ Β $(-1{,}0)$ καὶ Γ $(5{,}0)$. Αἱ τετμημέναι -1 καὶ 5 τῶν κοινῶν σημείων Α καὶ Γ εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς x, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τιμὴν $\psi = 0$ τῆς συναρτήσεως, δηλαδὴ εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 4x - 5 = 0$.

β) Ἄς θεωρήσωμεν τώρα γενικῶς τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ $\alpha \neq 0$ καὶ πεδίον μεταβολῆς τὸ $-\infty < x < +\infty$.

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ δύναται (παράγρ. 13·1) νὰ λάβη τὴν μορφήν:

$$\psi = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right]$$

Ἀπὸ τὴν μορφήν της αὐτὴν εὐκόλως προκύπτει ὅτι διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $\psi = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$, ἡ ὁποία εἶναι ἐλάχιστον, ἂν $\alpha > 0$, καὶ μέγιστον, ἂν $\alpha < 0$. Ὁ Πίναξ 6 μᾶς δίδει τὴν μεταβολήν της.

ΠΙΝΑΞ 6

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

x	$-\infty \nearrow -\frac{\beta}{2\alpha} \nearrow +\infty$
$\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ $\alpha > 0$	$+\infty \searrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \nearrow +\infty$
$\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ $\alpha < 0$	$-\infty \nearrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \searrow -\infty$

Τὸ διάγραμμά της εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων εἶναι, ὅπως θὰ δείξωμεν, παραβολὴ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right)$ καὶ ἄξονα εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $\psi'\psi$, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφήν της.

Ἡ παραβολὴ αὐτὴ ἔχει κοινὰ σημεῖα μὲ τὸν ἄξονα $\chi'\chi$, ὅταν εἰς τὴν τιμὴν $\psi = 0$ τῆς συναρτήσεως ὑπάρχῃ ἀντίστοιχος πραγματικὴ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x, ἤτοι ἂν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχῃ λύσεις πραγματικοὺς ἀριθμούς. Συμπεραίνομεν λοιπὸν τὰ ἀκόλουθα: Ὅταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, ἡ παραβολὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸν $\chi'\chi$, ὅταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, ἡ παραβολὴ ἔχει ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν $\chi'\chi$ καὶ ὅταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, δὲν ἔχει κανένα κοινὸν σημεῖον.

14·6 Γραφικὴ ἐπίλυσις μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

1ος τρόπος.

Ἔστω $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, μία δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις. Κατασκευάζομεν τὴν παραβολὴν $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἂν ἡ παραβολὴ ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸν $\chi'\chi$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ ἀνίσους λύσεις, τὰς τετμημένας τῶν κοινῶν των σημείων. Ἂν ἡ παραβολὴ ἐφάπτεται τοῦ $\chi'\chi$, τότε ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν διπλῆν λύσιν, τὴν τετμημένην τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Τέλος ἂν ἡ παραβολὴ δὲν ἔχῃ κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ $\chi'\chi$, τότε ἡ ἐξίσωσις ἔχει μιγαδικὰς λύσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν προσδιορίζονται γραφικῶς.

2ος τρόπος.

Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^2-x-9=0$.

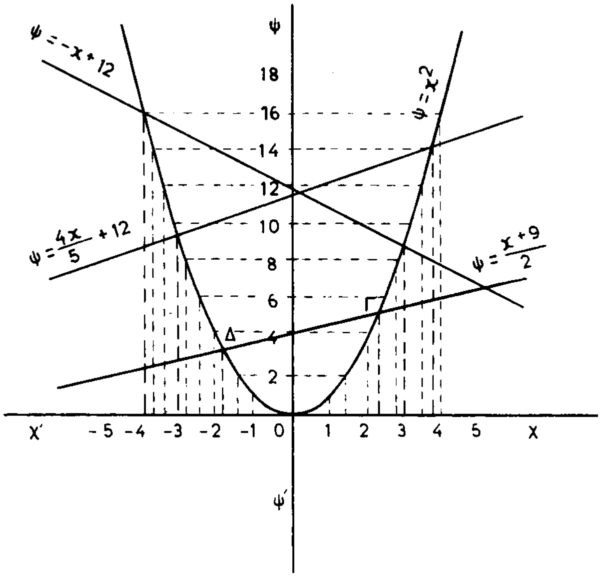
Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $2x^2=x+9 \Leftrightarrow x^2=\frac{x+9}{2}$. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $x^2=\frac{x+9}{2}$, εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἰς τὰς κοινὰς λύσεις (x, y) τῶν ἐξισώσεων $\psi=x^2$ καὶ $\psi=\frac{x+9}{2}$.

Διὰ νὰ τὰς προσδιορίσωμεν κατασκευάζομεν τὰ διαγράμματα τῶν συναρτήσεων $\psi=x^2$ καὶ $\psi=\frac{x+9}{2}$, δηλαδὴ τὴν παραβολὴν $\psi=x^2$ καὶ τὴν εὐθεῖαν $\psi=\frac{x+9}{2}$ (σχ. 14·6).

Αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν των σημείων ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $x^2=\frac{x+9}{2}$ καὶ συνεπῶς εἶναι λύσεις τῆς $2x^2-x-9=0$.

Εἰς τὸ σχῆμα βλέπομεν ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα εἶναι τὰ Γ καὶ Δ, ποὺ ἔχουν κατὰ προσέγγισιν τετμημένας ἀντιστοίχως 2,3 καὶ

$-1{,}8$. Αἱ τιμαὶ $x=2{,}3$, $x=-1{,}8$ εἶναι αἱ κατὰ προσέγγισιν λύσεις τῆς ἐξισώσεως $2x^2-x-9=0$.



Σχ. 14·6.

Ἀπὸ τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἕπεται ὁ ἀκόλουθος τρόπος γραφικῆς ἐπιλύσεως τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$. Κατασκευάζομεν τὴν παραβολὴν $\psi=x^2$ καὶ τὴν εὐθεῖαν $\psi=-\dfrac{\beta x+\gamma}{\alpha}$. Ἂν αἱ δύο γραμμαὶ ἔχουν κοινὰ σημεῖα, αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν των σημείων εἶναι αἱ λύσεις τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Ἂν αἱ δύο γραμμαὶ δὲν τέμνωνται, τότε αἱ λύσεις τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δὲν εἶναι πραγματικαί. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἔχει τὸ πλεονέκτημα ὅτι μὲ τὴν σχεδίασιν μιᾶς μόνον παραβολῆς $\psi=x^2$ καὶ καταλλήλων ἑκάστοτε εὐθειῶν δυνάμεθα νὰ ἐπιλύωμεν πολλὰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις.

Εἰς τὸ σχῆμα 14·6 βλέπομεν τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

$$2x^2 - x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{x+9}{2} \quad (x_1 \simeq 2{,}3,\ x_2 \simeq -1{,}8).$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -x + 12 \ (x_1 = 3,\ x_2 = -4).$$

$$5x^2 - 4x - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4x}{5} + 12 \ (x_1 \simeq 3{,}8\ x_2 \simeq -3{,}1).$$

14 · 7 Ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\kappa}{x}$ $(\kappa \neq 0)$.

I. Ἔστω ἡ συνάρτησισις $\psi = \frac{18}{x}$. Διὰ $x = 0$ ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει τιμήν. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ $\psi = \frac{18}{x}$ δὲν εἶναι *ὡρισμένη* διὰ $x = 0$. Ἄς παρακολουθήσωμεν τὴν μεταβολήν της διὰ $0 < x < +\infty$. Δίδομεν εἰς τὴν x τὰς τιμὰς μιᾶς αὐξούσης ἢ μιᾶς φθινούσης ἀκολουθίας τιμῶν ἀπὸ τὸ διάστημα $0 < x < +\infty$, ὅπως εἰς τὸν Πίνακα 7, ποὺ ἀκολουθεῖ, καὶ παρακολουθοῦμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς $\psi = \frac{18}{x}$.

Π Ι Ν Α Ξ 7

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{18}{x}$.

x	↗	0,0001	↗	0,01	↗	1	↗	100	↗	10000	↗	+∞
ψ	↘	180000	↘	1800	↘	18	↘	0,18	↘	0,0018	↘	0

Βλέπομεν ὅτι:

1ον) Ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{18}{x}$ εἰς τὸ διάστημα $0 < x < \infty$ εἶναι φθίνουσα, διότι οἱαδήποτε αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ x συνεπάγεται ἐλάττωσιν τῆς ψ.

2ον) Ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς x τείνῃ πρὸς τὸ ∞, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ψ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ θετικὰς τιμάς, ἐνῶ, ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς x

τείνη πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ θετικὰς τιμάς, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ψ τείνει πρὸς τὸ ∞. Τὸ ἴδιον συμβαίνει, ὅταν ἡ x λαμβάνη τὰς τιμὰς οἱασδήποτε ἄλλης αὐξούσης ἢ φθινούσης ἀκολουθίας θετικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ἔχει ὅριον τὸ $+\infty$ ἢ τὸ μηδέν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x τείνη πρὸς τὸ $+\infty$, ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{18}{x}$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ θετικὰς τιμὰς καί, ὅταν ἡ x τείνη πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ θετικὰς τιμάς, ἡ ψ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$\text{Διὰ } x \to +0 \qquad \text{ἡ } \psi \to +\infty.$$
$$\text{Διὰ } x \to +\infty \qquad \text{ἡ } \psi \to +0.$$

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν μεταβολὴν τῆς $\psi = \frac{18}{x}$ διὰ $-\infty < x < 0$.

Π Ι Ν Α Ξ 8

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{18}{x}$.

x	−10000	↗	−100	↗	−1	↗	−0,01	↗	−0,0001	↗	−0
ψ	−0,0008	↘	−0,18	↘	−18	↘	−1800	↘	−180000	↘	−∞

Βλέπομεν ὅτι:

1ον) Καὶ εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x < 0$ ἡ $\psi = \frac{18}{x}$ εἶναι φθίνουσα, λαμβάνουσα ἀρνητικὰς τιμάς.

2ον) Ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς x τείνη πρὸς τὸ $-\infty$, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ψ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμάς, ἐνῶ, ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς x τείνη πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμάς, ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς ψ τείνει πρὸς τὸ $-\infty$.

Τὸ ἴδιον συμβαίνει, ὅταν ἡ x λαμβάνη τὰς τιμὰς οἱασδήποτε ἄλλης αὐξούσης ἢ φθινούσης ἀκολουθίας ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x τείνη πρὸς τὸ μεῖον ἄπειρον $(-\infty)$, ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{18}{x}$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς καί, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x τείνη πρὸς τὸ μηδὲν ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμάς, ἡ ψ τείνει πρὸς τὸ μεῖον ἄπειρον $(-\infty)$. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$\text{Διὰ } x \to -0 \qquad \text{ἡ } \psi \to -\infty$$
$$\text{Διὰ } x \to -\infty \qquad \text{ἡ } \psi \to -0.$$

Ἄς κατασκευάσωμεν τώρα τὸ διάγραμμα τῆς $\psi = \frac{18}{x}$ (Πίναξ 9). Ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον διὰ τὴν $\psi = x^2$.

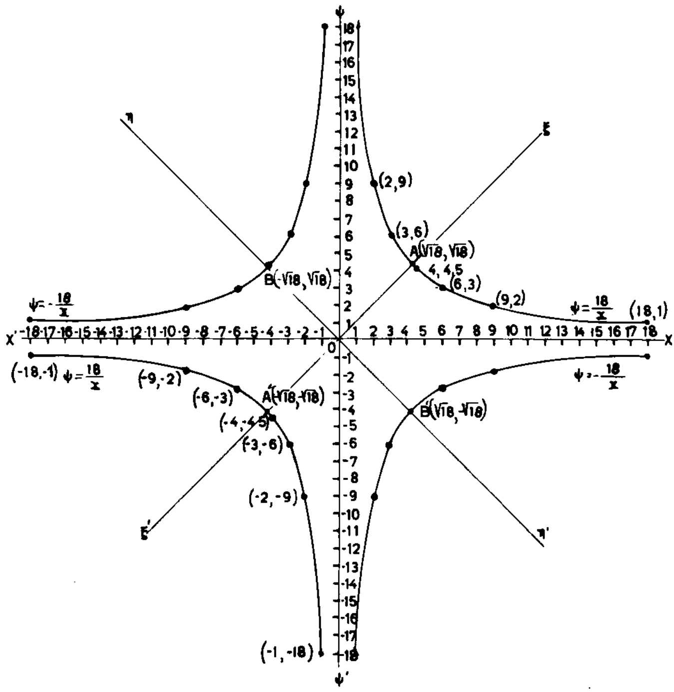
ΠΙΝΑΞ 9

Ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς $\psi = \frac{18}{x}$.

x								
$\psi = \frac{18}{2}$	∓ 18	∓ 9	∓ 6	$\mp 4{,}5$	∓ 4	∓ 3	∓ 2	∓ 1
	∓ 1	∓ 2	∓ 3	∓ 4	∓ 5	∓ 6	∓ 7	∓ 8

Προκύπτει τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 14 • 7. Ἀπὸ τὸ σχῆμα φαίνεται ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ξεχωριστοὺς κλάδους συμμετρικοὺς ὡς πρὸς τὸ 0. Ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας τὴν διχοτόμον ξ΄ξ τῆς ∢ χΟψ, ἡ ὁποία καὶ διαπερνᾷ τοὺς δύο κλάδους της, καὶ τὴν διχοτόμον η΄η τῆς ψΟχ΄.

Οἱ ἄξονες χ΄χ καὶ ψ΄ψ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον μὲ τοὺς δύο κλάδους, πλὴν ὅμως οἱ βραχίονες τῶν κλάδων πλησιάζουν συνεχῶς πρὸς τοὺς ἄξονας, ὅσον τὰ σημεῖα των ἀπομακρύνονται ἀπὸ τὸ Ο. Εἰς ἄλλο κεφάλαιον θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ διάγραμμα τῆς $\psi = \frac{18}{x}$ εἶναι ὑπερβολὴ (Α΄ Τόμος, παράγρ. 6 · 12) μὲ κέντρον τὸ O, πρωτεύοντα ἄξονα τὴν ξ΄ξ, δευτερεύοντα τὴν η΄η καὶ κορυφὰς τὰ σημεῖα $A(\sqrt{18}, \sqrt{18})$, $A'(-\sqrt{18}, -\sqrt{18})$. Οἱ ἄξονες χ΄χ καὶ ψ΄ψ εἶναι οἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς.



Σχ. 14·7.

II. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = -\dfrac{18}{x}$. Ἐάν σκεφθῶμεν, ὅπως καὶ διὰ τὴν $\psi = \dfrac{18}{x}$, εὐκόλως συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

α) Διὰ $x = 0$ ἡ $\psi = -\dfrac{18}{x}$ δὲν ἔχει τιμήν.

β) Ὅταν ἡ x λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τὸ διάστημα $0 < x < \infty$, ἡ $\psi = -\dfrac{18}{x}$ λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμάς, εἶναι δὲ αὔξουσα. Ὅταν $x \to +\infty$, τότε $\psi \to -0$, ἐνῶ, ὅταν $x \to +0$, τότε $\psi \to -\infty$.

γ) Ὅταν ἡ χ μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x < 0$, ἡ ψ λαμβάνει θετικὰς τιμὰς καὶ εἶναι αὔξουσα. Ὅταν δὲ $x \to -\infty$, τότε $\psi \to 0$, ἐνῶ, ὅταν $x \to -0$, τότε $\psi \to +\infty$. Τὸ διάγραμμά της δίδεται εἰς τὸ σχῆμα 14·7, εἶναι δὲ καὶ αὐτό, ὅπως θὰ δείξωμεν, ὑπερβολή, τῆς ὁποίας οἱ δύο κλάδοι κεῖνται μέσα εἰς τὰς γωνίας $\psi'0\chi$ καὶ $\psi 0 \chi'$. Πρωτεύων ἄξων της εἶναι ὁ $\eta'\eta$ καὶ δευτερεύων ὁ $\xi'\xi$. Ἔχει ἀσυμπτώτους τὰς $\chi'\chi$ καὶ $\psi'\psi$, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα $B(-\sqrt{18}, \sqrt{18})$, $B'(\sqrt{18}, -\sqrt{18})$.

III. Ἔστω τώρα γενικῶς ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\kappa}{x}$ (κ σταθερά $\neq 0$) μὲ πεδίον μεταβολῆς τὰ διαστήματα $-\infty > x > 0$, $0 < x < +\infty$. Διὰ $x = 0$ δὲν εἶναι ὡρισμένη.

Ὅταν ἡ x λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τὸ πεδίον μεταβολῆς της, ἡ $\psi = \frac{\kappa}{x}$ εἶναι φθίνουσα μέν, ὅταν $\kappa > 0$, αὔξουσα δέ, ὅταν $\kappa < 0$.

Τὸ διάγραμμά της εἶναι ὑπερβολὴ μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$ καὶ $\psi'\psi$. Ἡ ὑπερβολὴ $\psi = \frac{\kappa}{x}$, ὅταν $\kappa > 0$ κεῖται μέσα εἰς τὰς $\sphericalangle\, \chi 0 \psi$, $\psi 0 \chi'$, καὶ ἔχει πρωτεύοντα μὲν ἄξονα τὴν διχοτόμον $\xi'\xi$ τῆς $\psi 0 \chi$, δευτερεύοντα δὲ τὴν διχοτόμον $\eta'\eta$ τῆς $\psi 0 \chi'$. Κορυφαί της εἶναι τὰ σημεῖα $(\sqrt{\kappa}, \sqrt{\kappa})$, $(-\sqrt{\kappa}, -\sqrt{\kappa})$.

Ἡ ὑπερβολὴ $\psi = \frac{\kappa}{x}$, ὅταν $\kappa < 0$ κεῖται μέσα εἰς τὰς $\sphericalangle$ $\psi 0 \chi'$ $\psi' 0 \chi$, ἔχει πρωτεύοντα ἄξονα τὴν διχοτόμον $\eta'\eta$ καὶ δευτερεύοντα τὴν διχοτόμον $\xi'\xi$. Κορυφαί της εἶναι τὰ σημεῖα $(\sqrt{|\kappa|}, -\sqrt{|\kappa|})$ $(-\sqrt{|\kappa|}, \sqrt{|\kappa|})$.

14·8 Συναρτήσεις τῆς μορφῆς $\psi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

α) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{3x+2}{2x-3}$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὰ διαστήματα $-\infty < x < \frac{3}{2}$ καὶ $\frac{3}{2} > x > +\infty$.

Διὰ $x=\frac{3}{2}$ δὲν εἶναι ὡρισμένη.

Διὰ νὰ μελετήσωμεν τὴν συνάρτησιν αὐτήν, τὴν μετασχηματίζομεν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν $3x+2$ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ $2x-3$. Προκύπτει πηλίκον 1,5 καὶ ὑπόλοιπον 6,5. Ἐφαρμόζομεν τὴν σχέσιν: Διαιρετέος = Διαιρέτης × Πηλίκον + Ὑπόλοιπον καὶ ἔχομεν: $3x+2=1{,}5(2x-3)+6{,}5$. Τῆς ἰσότητος αὐτῆς διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη διὰ $2x-3\neq 0$.

Προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{3x+2}{2x-3}=1{,}5+\frac{6{,}5}{2x-3}$.

Ὥστε $\psi=1{,}5+\frac{6{,}5}{2x-3}$.

Δίδομεν εἰς τὴν x τιμὰς μιᾶς αὐξούσης ἢ φθινούσης ἀκολουθίας τιμῶν ἀπὸ τὸ πεδίον μεταβολῆς της καὶ παρακολουθοῦμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν συναρτήσεων $2x-3$, $\frac{6{,}5}{2x-3}$, $\psi=1{,}5+\frac{6{,}5}{2x-3}$.

Προκύπτει ὁ Πίναξ 10 τῶν μεταβολῶν των.

ΠΙΝΑΞ 10

Μεταβολαὶ συναρτήσεων τῆς μορφῆς $\psi=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$.

x	$-\infty \nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow +\infty$
$2x-3$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$
$\frac{6,5}{2x-3}$	$0 \searrow -\infty$	Δέν ἔχουν τιμήν	$+\infty \searrow 0$
$\psi=1,5+\frac{6,5}{2x-3}$	$1,5 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 1,5$

Δηλαδὴ ἡ $\psi=1{,}5+\frac{6{,}5}{2x-3}$ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις.

Διὰ $x=\frac{3}{2}$ ἡ ψ δὲν ἔχει τιμήν. Ὅταν ὅμως $x\rightarrow\frac{3}{2}$ ἀπὸ μικροτέρας τιμάς, ἡ $\psi\rightarrow-\infty$, ἐνῶ, ὅταν $x\rightarrow\frac{3}{2}$ ἀπὸ μεγαλυτέρας τιμάς, ἡ $\psi\rightarrow+\infty$.

Ἂς κατασκευάσωμεν τὸ γραφικόν της. Σκόπιμον εἶναι μεταξὺ τῶν σημείων, ποὺ προσδιορίζομεν κατὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς γραφικοῦ, νὰ περιλαμβάνωμεν, ἂν ὑπάρχουν, καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ γραφικοῦ μὲ τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$, $\psi'\psi$, δηλαδὴ τὰ σημεῖα, ποὺ ἔχουν ἀφ' ἑνὸς $x=0$ καὶ ἀφ' ἑτέρου $\psi=0$.

Διὰ τὴν παροῦσαν συνάρτησιν ἔχομεν διὰ $x=0$,

$$\psi=\frac{3\times0+2}{2\times0-3}=-\frac{2}{3} \text{ καὶ διὰ } \psi=0,\ \frac{3x+2}{2x-3}=0 \text{ ἢ } 3x+2=0$$

$$\text{ἢ } x=-\frac{2}{3}.$$

ΠΙΝΑΞ 11

Πίναξ ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς $\psi=\frac{3x+2}{2x-3}$.

x	-5	-2	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{3}$	3	4	6	8
$\psi=\frac{3x+2}{2x-3}$	1	$\frac{4}{7}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{4}$	-5	$5{,}4$	$\frac{11}{3}$	$2{,}8$	$\frac{20}{9}$	2

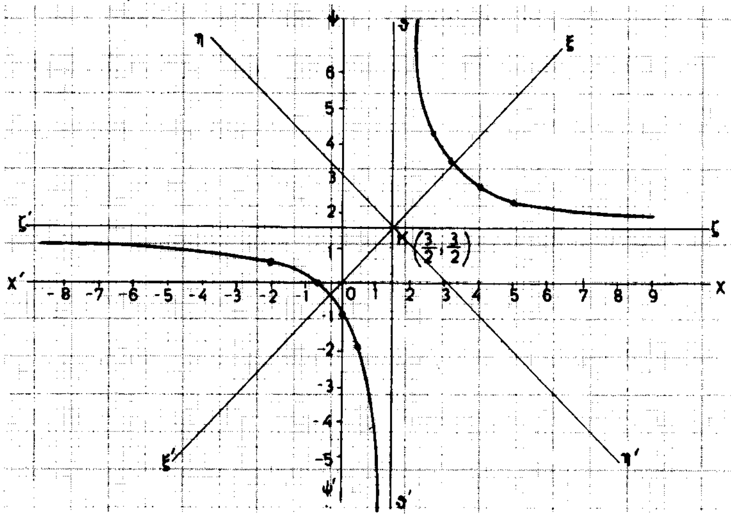
Προκύπτει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·8 α, πού, ὅπως θὰ ἀποδείξωμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον, εἶναι ὑπερβολή. Ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα, ἡ ὑπερβολὴ αὐτὴ ἔχει ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας $\zeta'\zeta//\chi'\chi$ καὶ $\theta'\theta//\psi'\psi$, ποὺ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον $\kappa\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Πρωτεύων ἄξων εἶναι ἡ διχοτόμος $\xi'\xi$ τῶν $\sphericalangle\zeta\kappa\theta$ καὶ δευτερεύων ἡ διχοτόμος $\eta'\eta$ τῆς $\sphericalangle\theta\kappa\zeta'$.

β) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{4x+2}{x+5}$, μὲ πεδίον μεταβολῆς $-\infty<x<-5,\ -5<x<\infty$.

Μετασχηματίζεται, ὅπως ἡ προηγουμένη, εἰς τὴν:

$$\psi = 4 - \frac{18}{x+5}.$$



Σχ. 14·8 α.

Καταρτίζομεν τὸν Πίνακα 12 μεταβολῆς της:

ΠΙΝΑΞ 12

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = 4 - \dfrac{18}{x+5}$

x	$-\infty$	↗		-5		↗	∞
$x+5$	$-\infty$	↗		0		↗	∞
$\dfrac{-18}{x+5}$	0	↗	$+\infty$	Δὲν ἔχουν τιμήν	$-\infty$	↗	0
$\psi = 4 - \dfrac{18}{x+5}$	4	↗	$+\infty$	Δὲν ἔχουν τιμήν	$-\infty$	↗	4

Δηλαδὴ ἡ $\psi = \dfrac{4x+2}{x+5}$ διὰ $x = -5$ δὲν εἶναι ὡρισμένη, ἀλλὰ διὰ $x \to -5$ ἀπὸ μικροτέρας τιμάς, $\psi \to +\infty$ καὶ διὰ $x \to -5$ ἀπὸ μεγαλυτέρας τιμάς, $\psi \to -\infty$.

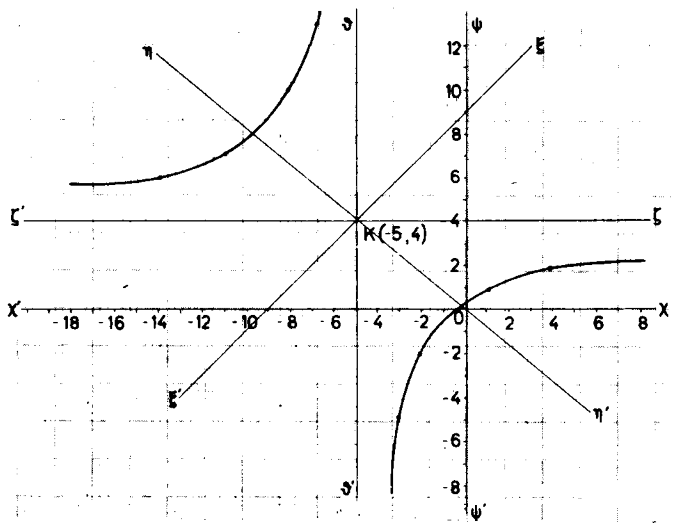
Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ διαγράμματός της ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὰς προηγουμένας συναρτήσεις.

ΠΙΝΑΞ 13

Ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς $\psi = \dfrac{4x+2}{x+5}$.

x	-14	-11	-8	-7	-4	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	4
$\psi = \dfrac{4x+2}{x+5}$	6	7	10	13	-14	-5	-2	0	$\frac{2}{5}$	1	2

Προκύπτει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·8 β, ποὺ εἶναι καὶ



Σχ. 14·8 β.

αὐτὴ μία ὑπερβολή. Ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα, ἔχει ἀσυμπτώτους τὰς $\zeta'\zeta \,//\, \chi'\chi$ καὶ $\theta'\theta \,//\, \psi'\psi$, ποὺ τέμνονται εἰς τὸ Κ $(-5,$

4). Πρωτεύων ἄξων τῆς ὑπερβολῆς εἶναι ἡ διχοτόμος η'η τῆς $\sphericalangle$ θκζ' καὶ δευτερεύων ἡ διχοτόμος ξ'ξ τῆς $\sphericalangle$ ζκθ.

γ) Γενικῶς διὰ νὰ μελετήσωμεν μίαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς $\psi=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ μὲ α, β, γ, δ σταθεράς, $\gamma\neq 0$ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}\neq\frac{\beta}{\delta}$, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἐκφράζομεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ ὡς ἄθροισμα μιᾶς σταθερᾶς (τοῦ πηλίκου) καὶ ἑνὸς κλάσματος τῆς μορφῆς $\frac{\kappa}{\gamma x+\delta}$ ($\kappa=$ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως).

Κατόπιν ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα α καὶ β.

14·9 Διαγράμματα μερικῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.

I. $\psi=\eta\mu x$.

Τὴν μεταβολὴν τῆς $\psi=\eta\mu x$ ἐμελετήσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 12·14. Τώρα θὰ κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμά της (σχ. 14·9 α).

ΠΙΝΑΞ 14

Ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς $\psi=\eta\mu x$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	2π
$\psi=\eta\mu x$	0	0,7	1	0,7	0	—0,7	—1	—0,7	0

Α. Διὰ $0\leqslant x<2\pi$.

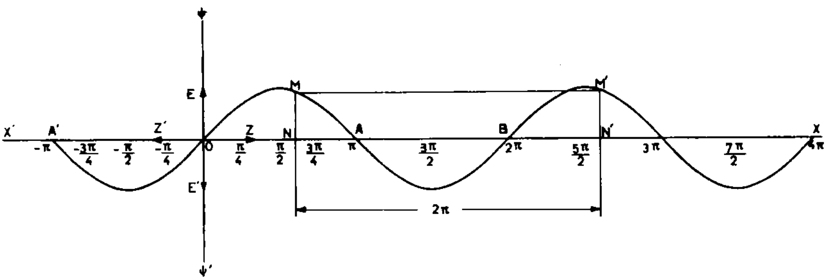
Προκύπτει ἡ καμπύλη ΟΑΒ, ποὺ παριστάνει τὴν συνάρτησιν εἰς τὸ διάστημα μιᾶς περιόδου.

Β. *Διὰ* $2\pi<x<4\pi$.

Ἐπειδὴ ἡ $\psi=\eta\mu x$ εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδον τὸ 2π, εἰς τὸ διάστημα $2\pi\leqslant x<4\pi$ ἡ ημx λαμβάνει ἐκ νέου τὰ ἴδιας τιμάς, ἤτοι :

Εἰς κάθε σημεῖον Μ τῆς ΟΑΒ μὲ τετμημένην $\overline{ON}=x_0$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον Μ′ τοῦ διαγράμματος μὲ τετμημένην ΟΝ′ $= x_0 + 2\pi$ καὶ τὴν αὐτὴν τεταγμένην $\psi_0 = \overline{NM} = \eta\mu(x_0 + 2\pi) = \eta\mu x_0$.

Συνεπῶς $\overrightarrow{MM'} // \chi'\chi$ καὶ $\overline{MM'} = \overline{NN'} = 2\pi$. Ἡ καμπύλη λοιπόν, ποὺ παριστάνει τὴν $\psi = \eta\mu x$ διὰ $2\pi \leqslant x < 4\pi$, προκύπτει μὲ μίαν μετατόπισιν τῆς καμπύλης ΟΑΒ παραλλήλως πρὸς τὸν χ′χ κατὰ ἕνα μῆκος ΟΒ $= 2\pi$ μονάδες (σχ. 14 · 9 α).



Σχ. 14·9 α.

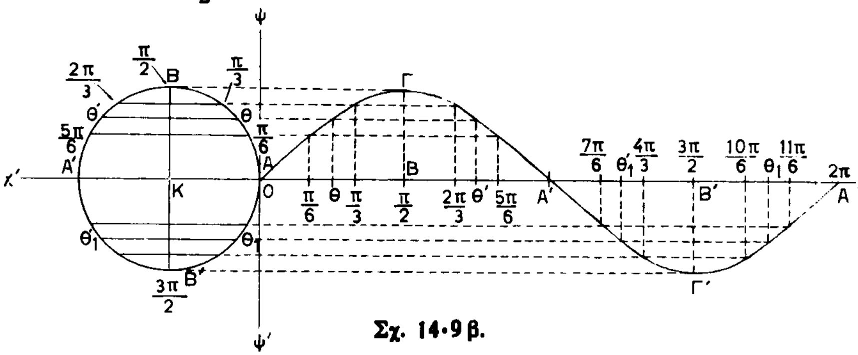
Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον προκύπτει ἡ καμπύλη, ποὺ παριστάνει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως διὰ $4\pi < x < 6\pi$, κ.ο.κ. Ἐὰν ἡ μετατόπισις τῆς ΟΑΒ γίνῃ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, προκύπτει τὸ διάγραμμα ΟΑ′Β′ τῆς $\psi = \eta\mu x$ διὰ $-2\pi < x < 0$ κ.ο.κ. Ἡ ἀπέραντος καμπύλη, ποὺ παράγεται κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον, λέγεται *ἡμιτονοειδὴς καμπύλη*, εἶναι δὲ τὸ διάγραμμα τῆς $\psi = \eta\mu x$ διὰ $-\infty < x < +\infty$.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ διαγράμματος τῆς $\psi = \eta\mu x$ γίνεται καὶ γεωμετρικῶς. Εἰς τὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν αἱ τιμαὶ τοῦ ημx ὑπολογίζονται γραφικῶς μὲ τὴν βοήθειαν τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἀκτῖνος ἴσου μήκους μὲ τὸ βασικὸν διάνυσμα τοῦ ἄξονος χ′χ.

Εἰς τὸ σχῆμα 14 · 9 β εἶναι προφανὴς ἡ μέθοδος, ποὺ ἀκολουθοῦμεν.

II. $\psi = \eta\mu(x + \varphi)$ (φ = σταθερά).

Όταν ἡ μεταβλητὴ x αὐξάνη ἀρχίζοντας ἀπὸ μίαν τιμήν, ἔστω τὴν $x = 0$, ἡ μὲν συνάρτησις $\psi = \eta\mu x$ μεταβάλλεται ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν τιμὴν $\psi = \eta\mu 0 = 0$, ἡ δὲ $\psi = \eta\mu(x + \varphi)$ μεταβάλλεται ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν τιμὴν $\psi = \eta\mu(0 + \varphi) = \eta\mu\varphi$. Διὰ $x = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ἡ $\psi = \eta\mu(\varphi + x)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $\psi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \varphi\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$, ἤτοι ἔχει ἕνα μέγιστον.



Σχ. 14·9 β.

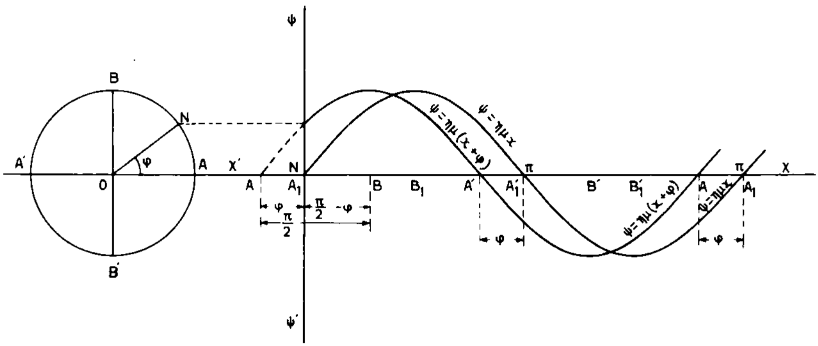
Ἡ $\psi = \eta\mu x$ θὰ λάβη τὴν τιμὴν $\psi = 1$, ὅταν ἡ τιμὴ $\frac{\pi}{2} - \varphi$ αὐξηθῆ (προχωρήση) κατὰ φ. Γενικῶς ἡ $\eta\mu x$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $\eta\mu(x_0 + \varphi)$ διὰ τυχοῦσαν τιμὴν x_0 τῆς x, ὅταν τὸ x_0 αὐξηθῆ κατὰ φ. Αὐτὸ τὸ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ $\psi = \eta\mu(x + \varphi)$ προηγεῖται κατὰ φ τῆς $\psi = \eta\mu x$ ἢ ὅτι ἡ $\psi = \eta\mu(x + \varphi)$ ἔχει *διαφορὰν φάσεως* φ ἀπὸ τὴν $\psi = \eta\mu x$.

Τὸ διάγραμμα τῆς $\psi = \eta\mu(x + \varphi)$ εἶναι ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη τοῦ σχήματος 14·9 γ, ποὺ τέμνει τὸν ἄξονα $x'x$ εἰς τὰ σημεῖα $\pi - \varphi$, $2\pi - \varphi$... Εἶναι ἡ ἰδία καμπύλη μὲ τὴν $\psi = \eta\mu x$, ἀλλὰ εἰς διαφορετικὴν θέσιν ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας.

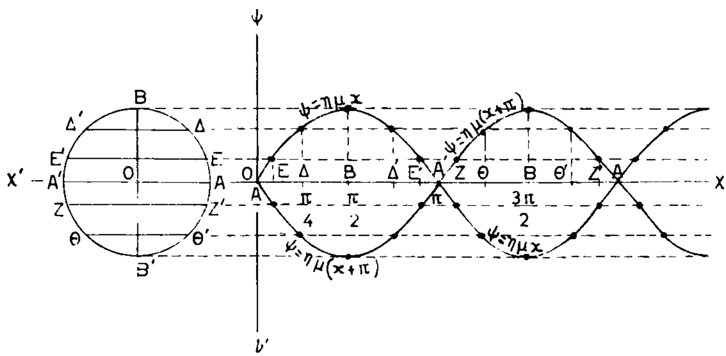
Ἡ $\psi = \eta\mu(x + \pi)$ (σχ. 14·9 δ) προηγεῖται τῆς $\psi = \eta\mu x$ κατὰ π. Τότε λέγομεν ὅτι αἱ δύο καμπύλαι εὑρίσκονται εἰς ἀντίθεσιν.

III. $\psi = \sigma\upsilon\nu x$.

Ἡ συνάρτησις $\psi = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ προηγεῖται τῆς $\psi = \eta\mu x$ κα-



Σχ. 14·9 γ.



Σχ. 14·9 δ.

τὰ $\frac{\pi}{2}$, ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu x$, τὸ διάγραμμα (σχ. 14·9 ε) τῆς $\psi = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ εἶναι καὶ διάγραμμα τῆς $\psi = \sigma\upsilon\nu x$.

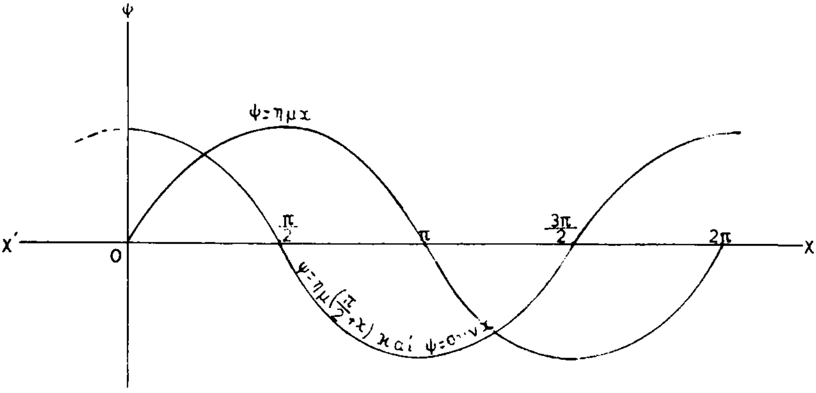
Ὥστε ἡ καμπύλη $\psi = \sigma\upsilon\nu x$ εἶναι ἡ ἴδια μὲν καμπύλη μὲ τὴν $\psi = \eta\mu x$, ἀλλὰ προηγεῖται αὐτῆς (ἔχει διαφορὰν φάσεως) $\frac{\pi}{2}$.

IV. $\psi = \alpha\eta\mu x$, $\psi = \beta\sigma\upsilon\nu x$.

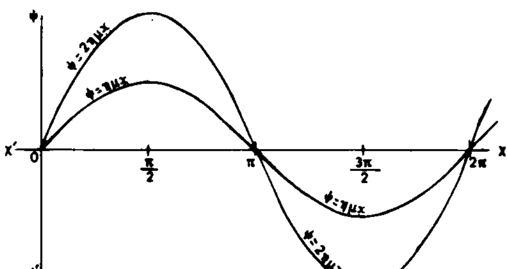
Ἐφαρμογαί.

1) $\psi = 2\eta\mu x$.

Εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ $\eta\mu x$, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2 μᾶς δίδει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς $\psi = 2\eta\mu x$.



Σχ. 14·9 ε.



Σχ. 14·9 ζ.

Διὰ $x = 2\text{K}\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (Κ ἀκέραιος) ἔχει ἕνα μέγιστον $\psi = 2$ καὶ διὰ $x = 2\text{K}\pi - \dfrac{\pi}{2}$ (Κ ἀκέραιος) ἕνα ἐλάχιστον $\psi = -2$.

Ὁ Πίναξ 15 μᾶς παρέχει τὴν μεταβολὴν τῆς $\psi = 2\eta\mu x$ διὰ

$0 < x < +\infty$ κατὰ μίαν περίοδον 2π, ἡ δὲ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·9ζ τὸ διάγραμμά της.

ΠΙΝΑΞ 15

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = 2\eta\mu x$.

x	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
ημ x	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
2ημ x	0	↗	2	↘	0	↘	−2	↗	0

2) $\psi = -\frac{3}{4}\,\sigma\upsilon\nu x.$

Εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ συνx, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $-3/4$ μᾶς δίδει τὸ ψ. Ὁ Πίναξ 16 μᾶς

ΠΙΝΑΞ 16

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{3}{4}$ συνx.

x	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
συν x	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
$-\frac{3}{4}$ συν x	$-\frac{3}{4}$	↗	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3}{4}$

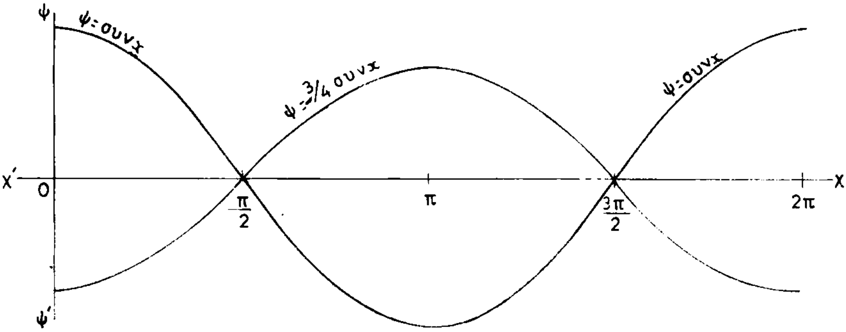
παρέχει τὴν μεταβολήν της κατὰ μίαν περίοδον καὶ ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·9η τὸ διάγραμμμά της.

V. $\psi = \eta\mu\alpha x.$

Ἐφαρμογή.

$\psi = \eta\mu 3x.$

Ὅταν τὸ x λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος ἀπὸ 0 ἕως $2\pi/3$, ἡ συνάρτησις $3x$ λαμβάνει ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος ἀπὸ 0 ἕως 2π, ὥστε περίοδος τῆς $\psi = \eta\mu 3x$ εἶναι ὁ $2\pi/3$.



Σχ. 14·9 η.

Ὁ Πίναξ 17 μᾶς παρέχει τὴν μεταβολήν της διὰ $0 < x < \frac{2\pi}{3}$

ΠΙΝΑΞ 17

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \eta\mu 3x$.

x	0	↗	$\frac{\pi}{6}$	↗	$\frac{\pi}{3}$	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{2\pi}{3}$
3 x	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
ημ 3 x	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

καὶ ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·9 θ τὸ διάγραμμά της.

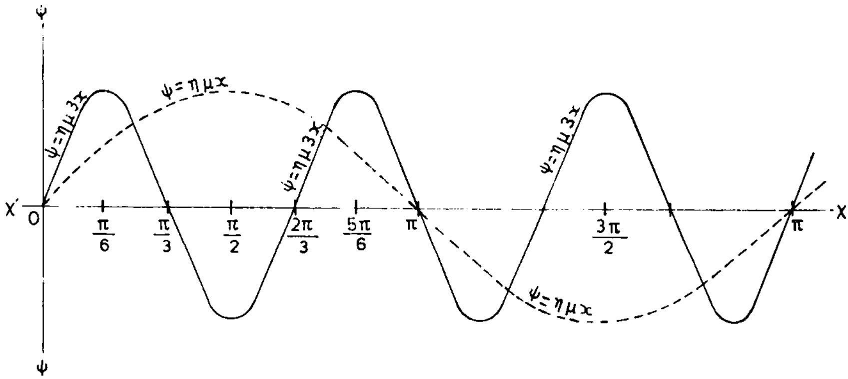
VI. $\psi = \eta\mu(\alpha x + \beta)$.

Ἐφαρμογή.

$$\psi = 2\,\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Ὅταν τὸ x διέλθῃ ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος $0 < x < \pi$, ἡ συνάρτησις $2x$ διέρχεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος ἀπὸ 0 ἕως 2π.

Ὥστε περίοδος τῆς $\psi = 4\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ εἶναι ὁ π.



Σχ. 14·9 θ.

Ὁ Πίναξ 18 μᾶς παρέχει τὴν μεταβολήν της κατὰ μίαν πε-

ΠΙΝΑΞ 18

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y = 4\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

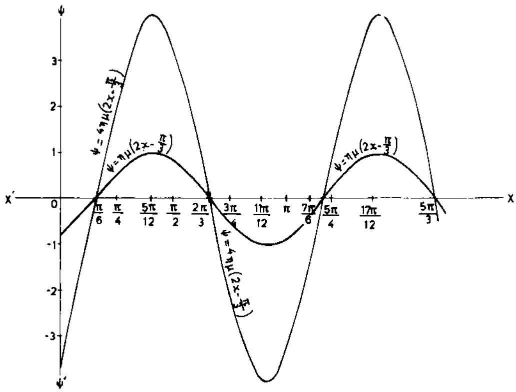
x	$0 \nearrow \frac{\pi}{6} \nearrow \frac{\pi}{4} \nearrow \frac{5\pi}{12} \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \frac{2\pi}{3} \nearrow \frac{3\pi}{4} \nearrow \frac{11\pi}{12} \nearrow \pi$
$2x$	$0 \nearrow \frac{\pi}{3} \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \frac{5\pi}{6} \nearrow \pi \nearrow \frac{4\pi}{3} \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow \frac{11\pi}{6} \nearrow 2\pi$
$2x - \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} \nearrow 0 \nearrow \frac{\pi}{6} \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \frac{2\pi}{3} \nearrow \pi \nearrow \frac{7\pi}{6} \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow \frac{5\pi}{3}$
$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow 0 \nearrow \frac{1}{2} \nearrow 1 \searrow \frac{\sqrt{3}}{2} \searrow 0 \searrow -\frac{1}{2} \searrow -1 \nearrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$4\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	$-2\sqrt{3} \nearrow 0 \nearrow 2 \nearrow 4 \searrow 2\sqrt{3} \searrow 0 \searrow -2 \searrow -4 \nearrow -2\sqrt{3}$

ρίοδον καὶ ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·9 ι τὸ διάγραμμά της.

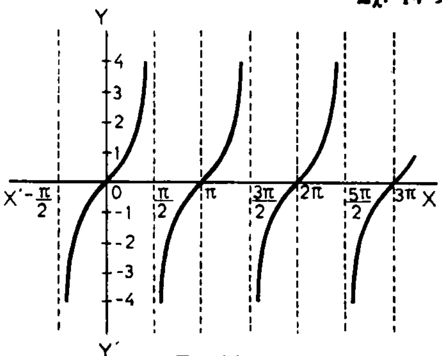
VII. $\psi = \varepsilon\varphi x$, $\psi = \sigma\varphi x$.

Τὴν μεταβολὴν τῶν δύο αὐτῶν συναρτήσεων ἐμελετήσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 12·14.

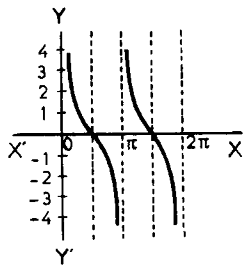
Ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·9κ μᾶς παρέχει τὸ διάγραμμα τῆς $ψ = εφx$ καὶ τοῦ σχήματος 14·9λ τὸ διάγραμμα τῆς $ψ = σφx$.



Σχ. 14·9ι.



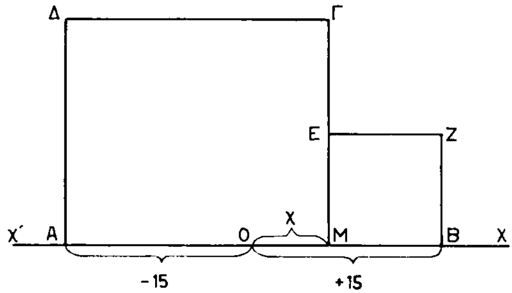
Σχ. 14·9κ.



Σχ. 14·9λ.

14·10 Ἐφαρμογαί.

I. *Πρόβλημα: Ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος τῶν τετμημένων $χ'Οχ$ μὲ βασικὸν διάνυσμα μήκους 1 cm ὁρίζομεν τὸ σημεῖον A μὲ τετμημένην $OA = -15$ cm, τὸ σημεῖον B μὲ τετμημένην $OB = +15$ cm καὶ τὸ σημεῖον M μὲ τετμημένην $OM = x$ cm. Μὲ πλευρὰς τὰ τμήματα AM καὶ MB κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα $AMΓΔ$ καὶ $MBZE$* (σχ. 14·10α). *Τὸ ἄθροισμα y τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τετραγώνων, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται, εἶναι μία* *συνάρτησις τοῦ x. Ζητεῖται: 1ον) Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ y συναρτήσει τοῦ x καὶ 2ον) νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις τοῦ y, ποὺ προκύπτει, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ -15 ἕως $+15$, καὶ νὰ σχεδιασθῇ τὸ γραφικὸν τῆς μεταβολῆς της.*



Σχ. 14·10 α.

Ἐπίλυσις:

1ον) $\left.\begin{array}{l} AM = 15 + x \Rightarrow (AM\Gamma\Delta) = (15 + x)^2 = 225 + 30x + x^2 \\ MB = (15 - x) \Rightarrow (MBEZ) = (15 - x)^2 = 225 - 30x + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\psi = (AM\Gamma\Delta) + (MBEZ) = (15 + x)^2 + (15 - x)^2 = 450 + 2x^2.$

Ὥστε $\psi = 2x^2 + 450.$

2ον) Ἡ συνάρτησις $\psi = 2x^2 + 450$ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2 + \gamma$ μὲ $\alpha > 0$ (παράγρ. 14·4). Ὁ Πίναξ, 19, μᾶς δίδει τὴν μεταβολήν της διὰ $-15 \leqslant x \leqslant +15$.

ΠΙΝΑΞ 19

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = 2x^2 + 450$.

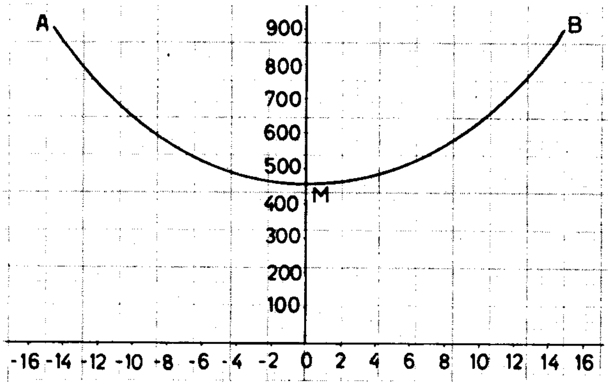
x	−15	↗	0	↗	15
ψ	900	↘	450 (ἐλάχ.)	↗	900

Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν τὸ γραφικόν της, παριστάνομεν εἰς ἕνα σύστημα ἀξόνων χΟψ τὴν μεταβλητὴν ψ μὲ τὸν ἄξονα Οψ καὶ ἀντιστοιχίζομεν τὰς τιμὰς $\psi = 100, 200, 300, \ldots \mathrm{cm}^2$ εἰς τὰ σημεῖα τοῦ Οψ, ποὺ ἔχουν τεταγμένας 1, 2, 3,...

Τὴν μεταβλητὴν x παριστάνομεν μὲ τὸν ἄξονα Οχ καὶ ἀντιστοιχίζομεν τὰς τιμὰς $x = 1, 2, 3, \ldots \mathrm{cm}$ εἰς τὰ σημεῖα, ποὺ ἔχουν τετμημένην 1, 2, 3,... Προσδιορίζομεν κατόπιν εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ τὰ σημεῖα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ πίνακος, ποὺ ἀκολουθεῖ.

x	± 15	± 14	± 12	± 10	± 6	± 4	± 2	± 0
y	900	848	738	650	522	482	458	450

Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς καμπυλογράμμου σχεδιάζομεν τὴν καμπύλην. Προκύπτει τὸ τμῆμα ΑΜΒ τῆς παραβολῆς τοῦ σχήματος 14·10β.



Σχ. 14·10β.

II. *Πρόβλημα: Κίνησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.*

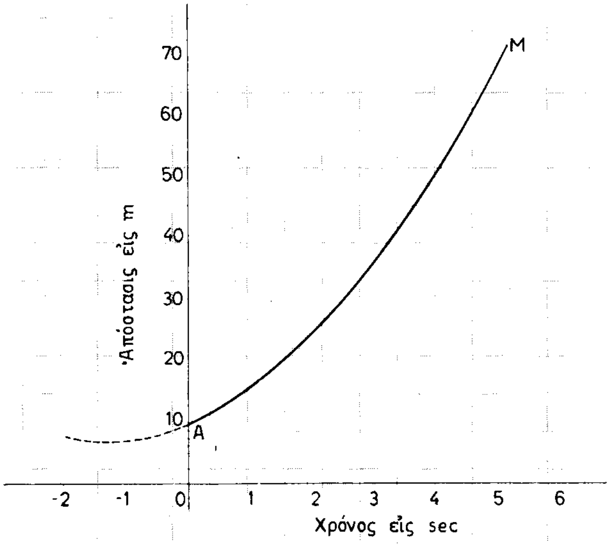
Ὅπως εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὴν Μηχανικήν, ὁ τύπος, ποὺ δίδει τὴν ἀπόστασιν s ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Ο ἑνὸς κινητοῦ Μ κινουμένου μὲ ὁμαλῶς μεταβαλλομένην ταχύτητα, εἶναι:

$$s = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

ὅπου s_0 εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ O καὶ υ_0 ἡ ταχύτης τοῦ M κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=0$, γ ἡ ἐπιτάχυνσίς του καὶ t ἡ χρονικὴ διάρκεια τῆς κινήσεώς του.

Ὅταν τὸ $\gamma=$ σταθερὸν καὶ τὸ t μεταβάλλεται, τότε τὸ s εἶναι μία συνάρτησις τοῦ t. Ζητεῖται νὰ μελετηθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ s διὰ $0 < t < \infty$ καὶ νὰ σχεδιασθῇ τὸ γραφικόν της.

Ἐπίλυσις. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:



Σχ. 14·10 γ.

Α. Ὅταν $\gamma > 0$. Τότε ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη.

Παράδειγμα. Διὰ $\upsilon_0 = 4$ m/sec, $\gamma = 3$ m/sec², $s_0 = 10$ m.

Προκύπτει ἡ συνάρτησις $\psi = 1{,}5t^2 + 4t + 10$, ποὺ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ $\alpha > 0$ (παράγρ. 14·5).

Διὰ $0 < t < \infty$ εἶναι αὔξουσα καὶ διὰ $t=0$ τὸ s λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμήν του $s = 10$ m.

Εἰς ἕνα σύστημα ὀρθαξόνων χOψ παριστάνομεν τὴν μεταβλητὴν t μὲ τὸν Oχ ἀντιστοιχίζοντες τὰς τιμὰς $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sec εἰς τὰ σημεῖα του, ποὺ ἔχουν τετμημένην 0, 1, 2, 3,... Τὴν μεταβλητὴν s παριστάνομεν μὲ τὸν ἄξονα Oψ ἀντιστοιχίζοντες τὰς τιμὰς s = 0, 10, 20, 30,...m εἰς τὰ σημεῖα του, ποὺ ἔχουν τεταγμένην 0, 1, 2, 3,... Κατόπιν μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς πίνακος ἀντιστοίχων τιμῶν κατασκευάζομεν τὸ γραφικόν της. Προκύπτει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14·10γ, ποὺ εἶναι ἕνα μέρος παραβολῆς.

B. Ὅταν $\gamma < 0$. Ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη.

Παράδειγμα. Διὰ $\upsilon_0 = 15$ m/sec, $\gamma = -3$ m/sec^2, $s_0 = 4$ m προκύπτει ἡ συνάρτησις $s = -1{,}5t^2 + 15t + 4$, ποὺ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ $\alpha < 0$ (παράγρ. 14·5).

Ὁ πίναξ, ποὺ ἀκολουθεῖ, μᾶς δίδει τὴν μεταβολὴν τοῦ s διὰ $0 < t < \infty$ καὶ ἡ καμπύλη ΒΓΝ τοῦ σχήματος 14·10δ, τὸ γραφικὸν τῆς μεταβολῆς της, ποὺ εἶναι ἕνα μέρος παραβολῆς.

x	0	↗	5	↗	∞
ψ	4	↗	41,5 (μέγιστ.)	↘	$-\infty$

III. *Προβλήματα.*

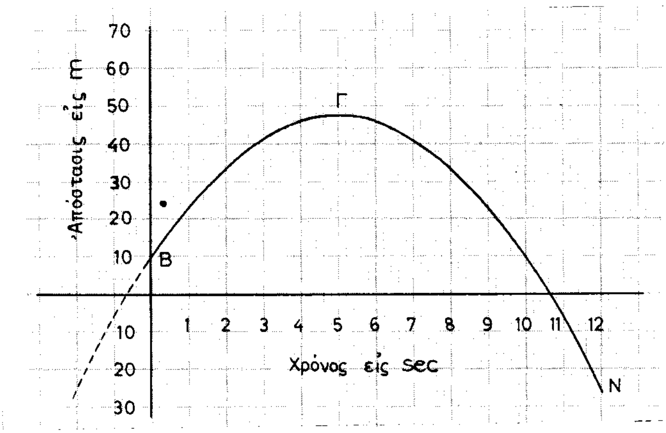
1) *Μία μᾶζα ἀερίου ὑπὸ πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας καταλαμβάνει ὄγκον 1 000 cm^3. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου, ὅταν ὁ ὄγκος του μεταβάλλεται ἀπὸ 30 ἕως 2 200 cm^3, ἐνῷ ἡ θερμοκρασία του παραμένει σταθερά.*

Ἐπίλυσις. Ἀπὸ τὴν Φυσικὴν γνωρίζομεν ὅτι *ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν τὸ γινόμενον τῆς πιέσεως P ἐπὶ τὸν ὄγκον V μιᾶς ὡρισμένης μάζης ἀερίου εἶναι σταθερὸν* (Νόμος Boyle-Mariotte):

$$P \cdot V = K. \qquad (1)$$

Διὰ $P = 1$ καὶ $V = 1\,000$, ποὺ μᾶς δίδει τὸ πρόβλημα, ἔχομεν:

$$P = 1 \times 1\,000 = K \text{ ἢ } K = 1\,000.$$



Σχ. 14·10 δ.

Ἡ σχέσις λοιπὸν (1) διὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος γίνεται:

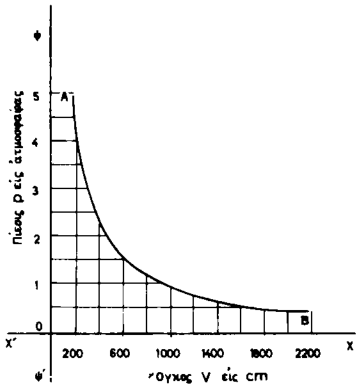
$$P \cdot V = 1\,000 \text{ ἢ } P = \frac{1\,000}{V},$$

ἤτοι εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = \frac{K}{x}$ (παράγρ. 14·7).

Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν τὸ γραφικόν της διὰ $200 \leqslant V \leqslant 2\,000$ παριστάνομεν (σχ. 14·10ε) τὸν ὄγκον μὲ τὸν ἄξονα $O\chi$, ἀντιστοιχίζοντες τὰς τιμὰς $V = 200, 400, 600, \ldots \mathrm{cm}^3$ εἰς τὰ σημεῖα τοῦ $O\chi$, ποὺ ἔχουν τετμημένην $1, 2, 3, \ldots$, καὶ τὴν πίεσιν μὲ τὸν $O\psi$, ἀντιστοιχίζοντες τὰς τιμὰς $P = 1, 2, 3, \ldots$ εἰς τὰ σημεῖα, ποὺ ἔχουν τεταγμένας $2, 4, 6, \ldots$ Μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τοῦ πίνακος ἀντιστοίχων τιμῶν, ποὺ ἀκολουθεῖ, κατασκευάζομεν τὸ γραφικόν της:

V	200	400	500	600	800	1000	1250	1500	2000	2200
P	5	2,5	2	12/3	1,25	1	4/5	3/4	1/2	5/11

Προκύπτει τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς ὑπερβολῆς τοῦ σχήματος 14·10ε.



Σχ. 14·10 ε.

2) *Ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις δύο καταναλωτῶν ἐν παραλλήλῳ εἶναι 12 Ω. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἑνὸς καταναλωτοῦ εἶναι x Ω καὶ τοῦ ἄλλου y Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις y συναρτήσει τῆς x καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς y, ὅταν ἡ x μεταβάλλεται ἀπὸ 15 ἕως 60 Ω.*

Ἐπίλυσις. Αἱ ἀντιστάσεις $x\,\Omega$, $y\,\Omega$, $12\,\Omega$ συνδέονται μὲ τὴν γνωστὴν ἀπὸ τὴν Ἠλεκτροτεχνίαν σχέσιν:

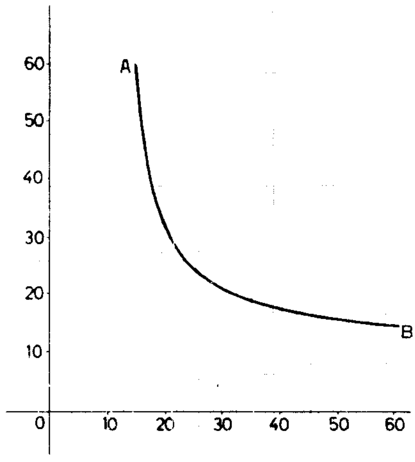
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{12}-\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y}=\frac{x-12}{12x}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν διὰ $x \neq 12$ ἔχομεν:

$$y=\frac{12x}{x-12}. \qquad (1)$$

Ὅταν ἡ x μεταβάλλεται, ἡ (1) εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x τῆς μορφῆς $\psi=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, τὴν ὁποίαν ἐμελετήσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 14·8. Τὸ γραφικὸν τῆς μεταβολῆς τῆς y διὰ $15 < x < 60$ εἶναι τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς ὑπερβολῆς τοῦ σχήματος 14·10ζ, ποὺ ἐσχεδιάσθη μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀκολούθου πίνακος ἀντιστοίχων τιμῶν:

x	15	18	20	24	30	36	40	60
y	60	36	30	24	20	18	16	15



Σχ. 14·10ζ.

14·11 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ σχεδιάσετε τὰ διαγράμματα (γραφικὰ) τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $\psi = \pm 2x^2$. β) $\psi = \frac{x^2}{3}\cdot$ γ) $\psi = \pm 0{,}4x^2$. δ) $\psi = x^2 \pm 4$.

ε) $\psi = 0{,}4x^2 \pm 1$. ζ) $\psi = \frac{1 \pm x^2}{5}\cdot$ η) $\psi = x^2 - 7x \pm 12$.

θ) $\psi = -x^2 + 7x - 12$. ι) $\psi) = \pm \frac{1}{2}(x^2 + x - 6)$.

2) Νὰ ἐπιλύσετε γραφικῶς τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

α) $x^2-5x-7=0$. β) $x^2-12x+20=0$. γ) $x^2+2x+5=0$.

δ) $2x^2+13x+6=0$. ε) $x^2-5x+6=0$. ζ) $2x^2-x-1=0$.

η) $x^2+x-1=0$. θ) $3x^2-7x-18=0$. ι) $4x^2+9x+5=0$.

3) Νὰ σχεδιάσετε τὰ διαγράμματα τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

α) $\psi=\frac{12}{x}$. β) $\psi=\frac{4}{3x}$. γ) $\psi=\frac{6}{x}$.

δ) $\psi=\frac{7}{x-3}$. ε) $\psi=\frac{-12}{x+3}$. ζ) $\psi=\frac{-18}{2x-3}$.

η) $\psi=\frac{3x}{4x-10}$. θ) $\psi=\frac{2x-1}{x-3}$. ι) $\psi=\frac{-3x+1}{2x+5}$.

4) Ὁμοίως τῶν συναρτήσεων:

α) $\psi=\eta\mu 2x$. β) $\psi=\eta\mu\frac{5x}{3}$. γ) $\psi=\sigma\upsilon\nu 2x$.

δ) $\psi=\frac{5}{6}\,\sigma\upsilon\nu x$. ε) $\psi=\frac{3}{2}\,\eta\mu x$. ζ) $\psi=2\sigma\upsilon\nu 2x$.

η) $\psi=\eta\mu x(x+\frac{\pi}{4})$. θ) $\psi=\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$. ι) $\psi=3\sigma\varphi\frac{x}{3}$.

κ) $\psi=\eta\mu(2x+\pi)$. λ) $\psi=\eta\mu(x-\frac{2\pi}{3})$.

5) Εἰς ἕνα κύκλον K μὲ ἀκτῖνα $R=12$ cm χαράσσομεν μίαν διάμετρον AB καὶ ἐπ' αὐτῆς ὁρίζομεν τμῆμα $AM=x$. Μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα AM καὶ MB γράφομεν δύο περιφερείας. Ζητεῖται:

α) Νὰ ἐκφράσετε τὸ ἄθροισμα ψ τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων συναρτήσει τοῦ x καὶ νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ ψ, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 24 cm.

β) Ἂν E εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου K, νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς διαφορᾶς $\Delta=E-\psi$ διὰ $0\leqslant x\leqslant 24$.

6) Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος, ποὺ ἔχει ὕψος 12 cm, ὅταν ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς του μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 20 cm.

7) Ἕνα τετράγωνον ἔχει πλευρὰν 12 cm καὶ ἕνα ὀρθογώνιον ἰσεμβαδικὸν πρὸς τὸ τετράγωνον ἔχει διαστάσεις x καὶ y. Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ y, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 8 ἕως 20 cm.

8) Ἡ πλευρικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἰσεμβαδικὴ πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν κύβου πλευρᾶς 7 cm. Τὸ ἀπόθημα τῆς πυραμίδος εἶναι y cm, ἡ πλευρὰ τῆς μιᾶς βάσεως 12 cm καὶ τῆς ἄλλης x cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ y συναρτήσει τοῦ

x καὶ νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ y, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 9 ἕως 30 cm.

9) Ἀπὸ τὴν Ἠλεκτροτεχνίαν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἔντασις I εἰς A (ἀμπὲρ) τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ποὺ διέρχεται διὰ μέσου καταναλωτοῦ, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $I = \frac{U}{R}$, ὅπου U ἡ ἐφηρμοσμένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ καταναλωτοῦ τάσις εἰς V (βὸλτ) καὶ R ἡ ἀντίστασίς του εἰς Ω (Ὦμ). Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ I διὰ $U = 220$ V καὶ $2\ \Omega < R < 50\ \Omega$.

10) Ἕνας καταναλωτὴς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἀντιστάσεως $R_1 = 20\ \Omega$ τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα τάσεως $U = 220$ V. Συνδέομεν τὸν καταναλωτὴν ἐν σειρᾷ μὲ μίαν ἀντίστασιν $R = x\ \Omega$. Ἡ ἔντασις I εἰς A τοῦ ρεύματος διὰ μέσου τοῦ καταναλωτοῦ παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον $I = \frac{U}{R_1 + R}$. Νὰ σχεδιάσετε τὸ γραφικὸν τῆς μεταβολῆς τοῦ I, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 5 ἕως 40 Ω.

11) Ἡ σχέσις $N = U \cdot I$ συνδέει τὴν ἰσχὺν N εἰς W (βάττ), ποὺ καταναλίσκεται εἰς ἕνα τμῆμα κυκλώματος, τὴν τάσιν U εἰς V (βόλτ), ποὺ ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος, καὶ τὴν ἔντασιν I εἰς ἀμπὲρ τοῦ ρεύματος, ποὺ κυκλοφορεῖ εἰς αὐτό. Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, ποὺ διέρχεται διὰ μέσου ἑνὸς λαμπτῆρος 500 W, ὅταν ἡ U μεταβάλλεται ἀπὸ 150 ἕως 250 V.

12) Ἡ ἀντίστασις R εἰς Ω ἑνὸς σύρματος παρέχεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $R = \frac{\varrho \cdot l}{s}$, ὅπου ρ εἰς Ω ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου ἀνὰ mm^2/m, l τὸ μῆκος τοῦ σύρματος καὶ s ἡ διατομή του. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τοῦ R εἰς ἕνα χάλκινον ἀγωγὸν μήκους $l = 100$ m, ὅταν ἡ διατομή του μεταβάλλεται ἀπὸ 0,1 mm^2 ἕως 2 mm^2. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι $\varrho = 0{,}017\,5\ \Omega\, mm^2/m$.

13) Ἡ δύναμις F, μὲ τὴν ὁποίαν ἰσορροποῦμεν ἕνα σῶμα βάρους P τοποθετημένον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ὅταν ἔχῃ διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$F = P\eta\mu\alpha,$$

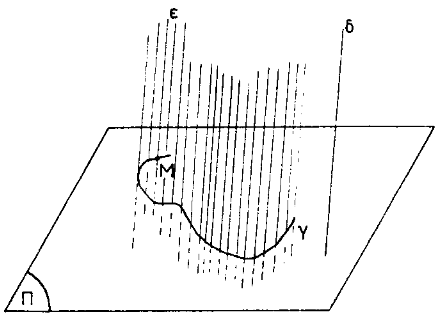
ὅπου α ἡ γωνία τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου μὲ τὸ ὁριζόντιον. Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς F, ὅταν $P = 10$ kp καὶ ἡ α μεταβάλλεται ἀπὸ 5^0 ἕως 45^0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15

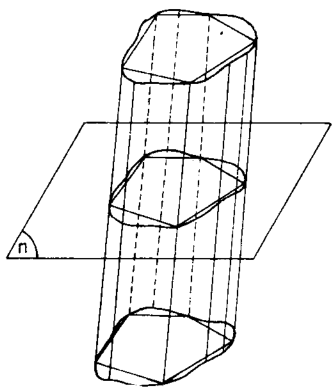
ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

15·1 Κυλινδρική ἐπιφάνεια. Κύλινδρος.

Ἔστω μία ἐπίπεδος γραμμή γ καί μία εὐθεῖα δ, πού τέμνει τό ἐπίπεδον τῆς γ (σχ. 15·1 α).



Σχ. 15·1 α.
Κυλινδρική ἐπιφάνεια.

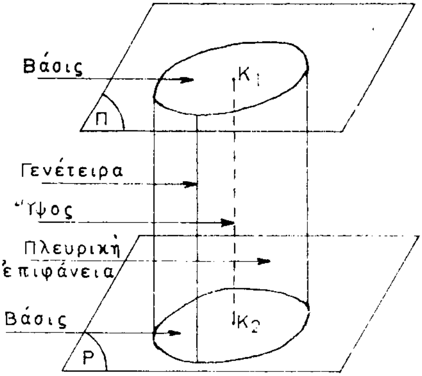


Σχ. 15·1 β.

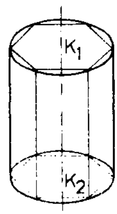
Ἀπό ἕνα σημεῖον Μ τῆς γ φέρομεν τήν εὐθεῖαν ε//δ καί τήν μετακινοῦμεν κατά τρόπον, ὥστε νά παραμένη παράλληλος πρός τήν δ καί συγχρόνως νά συναντᾶ τήν γ. Ἡ ἐπιφάνεια, πού παράγεται ἀπό τήν ε κατά τήν μετακίνησίν της, λέγεται *κυλινδρική ἐπιφάνεια*, ἡ ε *γενέτειρα* καί ἡ γ *ὁδηγός γραμμή* τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Ἄν ἡ ὁδηγός γραμμή εἶναι κλειστή, τότε καί ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια λέγεται *κλειστή*.

Μία πρισματική ἐπιφάνεια λέγεται *ἐγγεγραμμένη* εἰς μίαν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ὅταν αἱ πλευρικαί της ἀκμαὶ εἶναι γενέτειραι τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (σχ. 15 · 1 β).

Κύλινδρος λέγεται τὸ στερεόν, ποὺ περιορίζεται ἀπὸ μίαν κλειστὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἀπὸ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, ποὺ τέμνουν τὰς γενετείρας της (σχ. 15 · 1γ). Αἱ δύο παράλ-



Σχ. 15·1 γ.



Σχ. 15·1 δ.

ληλοι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι, ποὺ περιορίζουν τὸν κύλινδρον, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ λέγονται *βάσεις* του.

Τὸ μέρος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων, λέγεται *πλευρικὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα μιᾶς γενετείρας της *πλευρὰ ἢ γενέτειρα* αὐτοῦ.

Ἐπίπεδος τομὴ ἑνὸς κυλίνδρου λέγεται τὸ σύνολον τῶν κοινῶν του σημείων μὲ ἕνα ἐπίπεδον.

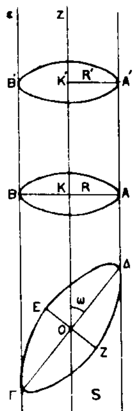
Αἱ τομαὶ ἑνὸς κυλίνδρου μὲ παράλληλα ἐπίπεδα, ποὺ τέμνουν ὅλας τὰς γενετείρας του, εἶναι σχήματα ἴσα.

Ἕνας κύλινδρος λέγεται *ὀρθός*, ὅταν αἱ γενέτειραί του εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις του.

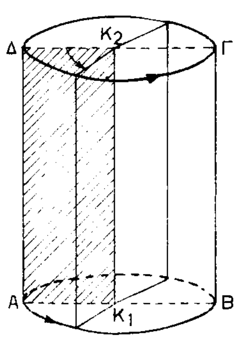
Ἕνα πρῖσμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς ἕνα κύλιδρον, ὅταν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι ἐγγεγραμμέναι ἀντιστοίχως εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Φυσικὰ τότε καὶ ἡ πλευρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν πλευρικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου (σχ. 15·1δ).

15·2 Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.

Ἔστω μία κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια S, ποὺ ἔχει ὁδηγὸν γραμμὴν τὴν περιφέρειαν (K, R) καὶ γενέτειραν κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδόν της (σχ. 15·2α). Ἡ τομὴ αὐτῆς μὲ ἕνα ἐπίπεδον K′ κάθετον πρὸς τὰς



Σχ. 15·2α.



Σχ. 15·2β.

γενετείρας της εἶναι περιφέρεια κύκλου ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ὁδηγὸν περιφέρειαν. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν καθέτων της τομῶν εἶναι μία εὐθεῖα z παράλληλος πρὸς τὰς γενετείρας της καὶ ἰσαπέχουσα ἀπὸ αὐτάς. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια S παράγεται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν ε παράλληλον πρὸς τὴν z, ὅταν ἡ ε στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν z κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ παραμένη παράλληλος καὶ εἰς σταθερὰν ἀπόστασιν R ἀπὸ τὴν z. Ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια S, ὅπως καὶ κάθε ἄλλη ἐπιφάνεια, ποὺ παράγεται κατὰ τὴν περι-

στροφὴν μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς δ γύρω ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν z τοῦ ἐπιπέδου της, ποὺ δὲν διαχωρίζει τὴν δ, κατὰ τρόπον, ὥστε κάθε σημεῖον της νὰ διατηρῇ σταθερὰν τὴν ἀπόστασίν του ἀπὸ τὴν z, λέγεται *ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς* καὶ ἡ z *ἄξων* της (σχ. 15·2α).
Ἡ τομὴ ΓΔΕΖ μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς μὲ ἐπίπεδον πλάγιον πρὸς τὸν ἄξονά της ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἔλλειψις μὲ μικρὸν ἄξονα $ΕΖ = 2R$ καὶ μεγάλον ἄξονα $ΓΔ = \frac{2R}{ημω}$, ὅπου ω ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς.

Κάθε ὀρθὸς κύλινδρος, ὅπως ὁ ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος 15·2β, *ποὺ περικλείεται ἀπὸ μίαν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς, λέγεται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.*

Αἱ βάσεις τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι κύκλοι ἴσοι, τὸ δὲ τμῆμα K_1K_2, ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα των, εἶναι $\perp$ πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων καὶ συνεπῶς ἴσον μὲ τὸ ὕψος καθὼς καὶ μὲ κάθε γενέτειραν τοῦ κυλίνδρου (σχ. 15·2β).

Κάθε τομὴ τοῦ κυλίνδρου μὲ ἐπίπεδον, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα K_1K_2, εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὅπως τὸ ΑΒΓΔ, μὲ διαστάσεις τὴν διάμετρον ΑΒ τῆς βάσεως καὶ τὴν γενέτειραν ΒΓ τῆς πλευρικῆς του ἐπιφανείας.

Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ΑΒΓΔ παράγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον $ΑK_1K_2Δ$, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν K_1K_2, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Διὰ τοῦτο ὁ κύλινδρος, ὅπως καὶ κάθε ἄλλο στερεόν, ποὺ παράγεται ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα διὰ περιστροφῆς γύρω ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου του, ἡ ὁποία δὲν διαχωρίζει τὸ σχῆμα, λέγεται *στερεὸν ἐκ περιστροφῆς*.

15·3 Μέτρησις τῶν κυλίνδρων.

Ι. *Ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.*

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον K_1K_2

(σχ. 15·1δ) ἕνα κανονικὸν πρῖσμα, ἔστω ἑξαγωνικόν, καὶ ἄς αὐξήσωμεν διαδοχικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρικῶν του ἑδρῶν (π.χ. διπλασιάζοντες αὐτὸν κάθε φοράν). Θὰ προκύψη μία σειρὰ ἀπὸ κανονικὰ πρίσματα ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν κύλινδρον, τὰ ὁποῖα θὰ προσεγγίζουν ὁλονὲν καὶ περισσότερον αὐτόν.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ταυτίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου ἑνὸς κανονικοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρικῶν του ἑδρῶν αὐξάνεται ἀπεριορίστως.*

Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ νὰ δεχθῶμεν τοὺς ἀκολούθους τύπους, ποὺ ἀντιστοιχοῦν μὲ τοὺς τύπους τῶν παραγράφων 11·9 καὶ 11·15, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰ πρίσματα.

α) Τὸ ἐμβαδὸν E_π τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας $2\pi R$ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος υ τοῦ κυλίνδρου:

$$E_\pi = 2\pi R \cdot \upsilon.$$

β) Τὸ ἐμβαδὸν $E_{o\lambda}$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ $E_\pi = 2\pi R\upsilon$ καὶ τοῦ διπλασίου ἐμβαδοῦ $2\pi R^2$ τῆς βάσεως B:

$$E_{o\lambda} = E_\pi + 2B = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 = 2\pi R(\upsilon + R).$$

γ) Ὁ ὄγκος V τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ πR^2 τῆς βάσεως του B ἐπὶ τὸ ὕψος του υ:

$$V = B \cdot \upsilon = \pi R^2 \cdot \upsilon.$$

II. *Ὄγκος παντὸς κυλίνδρου.*

Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ εἰς οἱονδήποτε κύλινδρον μὲ ἐμβαδὸν βάσεως B καὶ ὕψος υ ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον τύπον:

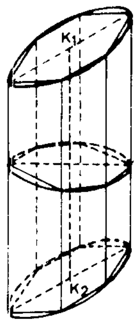
$$V = B \cdot \upsilon.$$

Ἤτοι: *Ὁ ὄγκος V παντὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ B τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του υ:*

$$V = B \cdot \upsilon.$$

III. ***Πλαγίου κυλίνδρου, ποὺ περικλείεται ἀπὸ κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς.***

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου ἑνὸς ἐγγεγραμμένου πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρικῶν του ἑδρῶν αὐξάνεται ἀπεριορίστως (σχ. 15·3). Καὶ διὰ τὸν κύλινδρον λοιπὸν



Σχ. 15·3.

αὐτὸν θὰ ἔχωμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις ἀντιστοίχους μὲ τὰς σχέσεις τῶν παραγράφων 11·9 καὶ 11·15, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰ πλάγια πρίσματα.

Εἰς ἕνα πλάγιον κύλινδρον, ποὺ περικλείεται ἀπὸ κυλινδρικὴν ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, τὸ μὲν ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μιᾶς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὴν γενέτειραν, ὁ δὲ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὴν γενέτειραν.

Σημείωσις: Εἰς τὸ ἑξῆς, ὅταν θὰ ἀναφέρωμεν τὴν λέξιν κύλινδρος, χωρὶς ἄλλον χαρακτηρισμόν, θὰ ἐννοοῦμεν τὸν ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον.

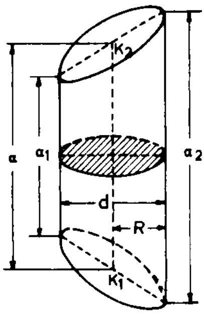
15·4 Κολοβὸς κυκλικὸς κύλινδρος.

Κολοβὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι τὸ στερεόν, ποὺ περιορίζεται ἀπὸ μίαν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς καὶ ἀπὸ δύο μὴ παράλληλα ἐπίπεδα, ποὺ τέμνουν τὰς γενετείρας της (σχ. 15·4). Αἱ δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι λέγονται *βάσεις* καὶ τὸ τμῆμα K_1K_2 τοῦ ἄξονος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων, λέγεται *ἄξων* τοῦ κολοβοῦ κυλίνδρου.

Ὁ ὄγκος V καὶ ἡ πλευρικὴ ἐπιφάνεια E_π τοῦ κολοβοῦ κυλίνδρου παρέχονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$V = \pi R^2 \alpha \quad \text{ἢ} \quad V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

$$E_\pi = 2\pi R \cdot \alpha \cdot \text{ἢ} \quad E_\pi = \pi d \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right),$$



Σχ. 15·4.

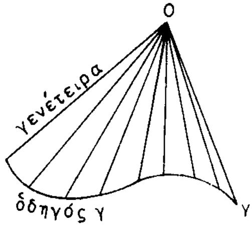
ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτὶς καὶ d ἡ διάμετρος μιᾶς καθέτου τομῆς του, α τὸ μῆκος τοῦ ἄξονός του, α_1 καὶ α_2 ἡ μεγαλυτέρα καὶ μικροτέρα γενέτειρά του (σχ. 15·4).

15·5 Κωνικὴ ἐπιφάνεια. Κῶνος.

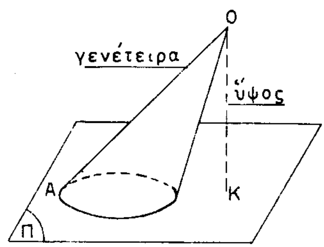
Ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ παράγεται ἀπὸ μίαν ἡμιευθεῖαν ε *(γενέτειραν)* κινουμένην κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σημεῖον Ο *(κορυφὴν)* καὶ νὰ συναντᾷ μίαν σταθερὰν καμπύλην γραμμὴν γ *(ὁδηγόν)*, λέγεται *κωνικὴ ἐπιφάνεια* (σχ. 15·5α).

Κῶνος λέγεται τὸ στερεόν, ποὺ περιορίζεται ἀπὸ μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ ὁδηγὸν κλειστὴν ἁπλῆν γραμμὴν καὶ ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον, ποὺ τέμνει ὅλας τὰς γενετείρας της, χωρὶς νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφήν της (σχ. 15·5β).

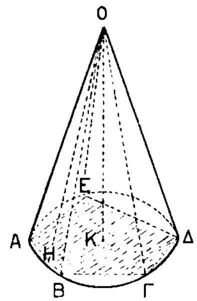
Ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου λέγεται *πλευρικὴ* (παράπλευρος) *ἐπιφάνεια*, ἡ δὲ ἐπίπεδος λέγεται *βάσις* τοῦ κώνου. Ἡ ἀπόστασις ΟΚ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὴν βάσιν λέγεται *ὕψος* τοῦ κώνου, τὸ δὲ τμῆμα ΟΑ τῆς γενετείρας τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἐπιπέδου τομῆς, λέγεται



Σχ. 15·5α.



Σχ. 15·5β.



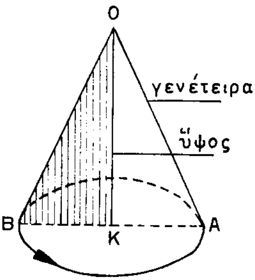
Σχ. 15·5γ.

γενέτειρα ἢ *πλευρὰ* τοῦ κώνου. Μία πυραμὶς εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κῶνον, ὅταν ἡ μὲν κορυφή της συμπίπτῃ μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, ἡ δὲ βάσις της εἶναι ἐγγεγραμμενη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου (σχ. 15·5γ).

15·6 Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος.

Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος λέγεται ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι κύκλος καὶ ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν πρὸς τὴν βάσιν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ τὰ ἴχνη ὅλων τῶν γενετειρῶν τοῦ κώνου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς καθέτου, συμπεραίνομεν ὅτι ὅλαι αἱ γενέτειραί του εἶναι ἴσαι.

Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος παράγεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΚΒ ($K = 90^0$), ὅταν αὐτὸ ἐκτελῇ μίαν περιστροφὴν γύρω ἀπὸ μίαν κάθετον πλευράν του ΟΚ (σχ. 15·6). Συνεπῶς καὶ ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος εἶναι ἕνα στερεὸν ἐκ περιστροφῆς.



Σχ. 15·6.

Εἰς τὸ ἑξῆς, ὅταν ἀναφέρωμεν τὴν λέξιν κῶνος, χωρὶς ἄλλον χαρακτηρισμόν, θὰ ἐννοοῦμεν τὸν ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον.

Μέτρησις τοῦ κώνου.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον ΟΚ (σχ. 15·5γ) μίαν κανονικὴν πυραμίδα, ἔστω ἑξαγωνικήν, καὶ ἂς αὐξήσωμεν διαδοχικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρικῶν της ἑδρῶν (π.χ. διπλασιάζοντες αὐτόν). Θὰ προκύψῃ μία σειρὰ ἀπὸ κανονικὰς πυραμίδας ἐγγεγραμμένας εἰς τὸν κῶνον, αἱ ὁποῖαι θὰ προσεγγίζουν ὁλονὲν περισσότερον πρὸς αὐτόν. Διὰ τοῦτο δεχόμεθα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ταυτίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρικῶν της ἑδρῶν αὐξάνεται ἀπεριορίστως. Ἡ σχέσις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ νὰ δεχθῶμεν διὰ τὸν κῶνον τοὺς ἀκολούθους τύπους ἀντιστοίχους μὲ τοὺς τύπους τῶν παραγράφων 11·22 καὶ 11·25, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς πυραμίδας:

I. *Τὸ ἐμβαδὸν E_π τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριφερείας πR τῆς βάσεως (K, R) ἐπὶ τὴν γενέτειράν του λ:*

$$E_\pi = \pi \cdot R \cdot \lambda.$$

II. *Τὸ ἐμβαδὸν $E_{ολ}$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ E_π τῆς πλευρικῆς του ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ πR^2 τῆς βάσεώς του:*

$$E_{ολ} = \pi R\lambda + \pi R^2 = \pi R(\lambda + R).$$

III. *Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του πR^2 ἐπὶ τὸ ὕψος του υ:*

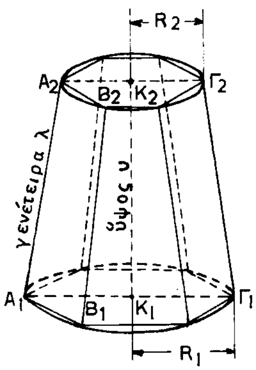
$$V = \frac{\pi R^2 \cdot \upsilon}{3}.$$

15·7 Κόλουρος κῶνος.

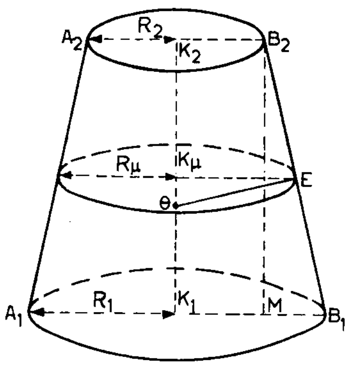
Κόλουρος κῶνος λέγεται τὸ τμῆμα τοῦ κώνου, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεώς του καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν τομῆς του (σχ. 15·7 α). Ἡ βάσις B_1 (K_1, R_1) τοῦ κώνου καὶ ἡ κάθετος τομή του B_2 (K_2, R_2) λέγονται *βάσεις*, ἡ ἀπόστασις K_1K_2 αὐτῶν *ὕψος* καὶ τὸ τμῆμα $A_1A_2 = \Gamma_1\Gamma_2 = \ldots = \lambda$ τῆς γενετείρας τοῦ κώνου, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων, λέγεται *γενέτειρα* ἢ *πλευρά* του. *Κωνικότης* ἑνὸς κολούρου κώνου λέγεται ὁ λόγος $\frac{D_1 - D_2}{\upsilon}$ τῆς διαφορᾶς $D_1 - D_2$ τῶν διαμέτρων τῶν δύο βάσεων πρὸς τὸ ὕψος του υ. Ὁ κόλουρος κῶνος (K_1K_2) παράγεται καὶ κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου $K_1K_2\Gamma_2\Gamma_1$ γύρω ἀπὸ τὴν κάθετον πλευρὰν K_1K_2, συνεπῶς καὶ ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι ἕνα στερεὸν ἐκ περιστροφῆς.

Μέτρησις τοῦ κολούρου κώνου.

Ἡ πλευρικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου ταυτίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ πλευρικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι ἐγγεγραμμέναι ἀντιστοίχως εἰς τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρικῶν της ἑδρῶν αὐξάνεται ἀπεριορίστως (σχ. 15 · 7 α). Δεχόμεθα λοιπὸν καὶ διὰ τὸν κόλουρον κῶνον, μὲ βάσεις $B_1\,(K_1,R_1)$, $B_2(K_2,R_2)$, πλευρὰν $A_1A_2=\lambda$ καὶ ὕψος $K_1K_2=\upsilon$, τοὺς ἀκολούθους τύπους, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀντίστοιχοι μὲ τοὺς τύπους τῶν παραγράφων 11 · 23 καὶ 11 · 26, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν κόλουρον πυραμίδα.



Σχ. 15·7 α.



Σχ. 15·7 β.

α) Τὰ ἐμβαδὰ E_π καὶ $E_{o\lambda}$ τῆς πλευρικῆς καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου παρέχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τοὺς τύπους :

$$E_\pi=\pi\,(R_1+R_2)\lambda \qquad (1)$$

$$E_{o\lambda}=E_\pi+B_1+B_2=\pi\,[\,(R_1+R_2)\lambda+R_1^2+R_2^2\,]. \qquad (2)$$

β) Ὁ ὄγκος V τοῦ κολούρου κώνου παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$V=\frac{\upsilon}{3}\,(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)\ \text{ἢ}\ V=\frac{\pi\cdot\upsilon}{3}\,(R_1^2+\sqrt{R_1R_2}+R_2^2). \quad (3)$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου ἔχομεν καὶ τὰς ἀκολούθους δύο σχέσεις (σχ. 15·7β):

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς R_μ τῆς μέσης τομῆς του (K_μ, R_μ), δηλαδὴ τῆς τομῆς, ποὺ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς δύο βάσεις καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ αὐτάς, εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου $K_1K_2A_2A_1$, θὰ ἔχωμεν:

$$R_\mu = \frac{R_1 + R_2}{2} \Rightarrow R_1 + R_2 = 2R\mu$$

καὶ ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$E_\pi = 2 \cdot \pi \cdot R_\mu \cdot \lambda \qquad (4)$$

ἤτοι *τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς μέσης τομῆς του ἐπὶ τὴν πλευράν του λ.*

Ἐξ ἄλλου, ἂν ΕΘ εἶναι ἡ κάθετος πρὸς τὴν B_1B_2 εἰς τὸ μέσον της Ε καὶ $B_2M \perp A_1B_1$, θὰ ἔχωμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα $\Theta K_\mu E$ καὶ B_1MB_2 (σχ. 15·7β):

$$\frac{K_\mu E}{MB_2} = \frac{E\Theta}{B_2B_1} \Rightarrow \frac{R_\mu}{\upsilon} = \frac{(E\Theta)}{\lambda} \Rightarrow R_\mu \cdot \lambda = \upsilon \cdot (E\Theta).$$

Τότε δὲ ὁ τύπος (4) γράφεται: $E_\pi = 2 \cdot \pi \cdot \upsilon \cdot (E\Theta)$.

15·8 Μέτρησις τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν (θεωρήματα τοῦ Πάππου).

Αἱ σχέσεις τῶν προηγουμένων παραγράφων, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς ὡρισμένας ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας καὶ στερεά, εἶναι μερικαὶ περιπτώσεις τῶν ἀκολούθων προτάσεων, ποὺ διετύπωσεν καὶ ἀπέδειξεν ὁ μέγας Ἕλλην μαθηματικὸς Πάππος (4ος αἰὼν μ.Χ.):

I. *Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας* (παράγρ. 15·2) *εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους l τῆς γραμμῆς, ποὺ παράγει τὴν ἐπιφάνειαν, ἐπὶ τὸ μῆκος γ τῆς περιφερείας, ποὺ γράφει τὸ κέντρον βάρους τῆς γραμμῆς αὐτῆς.*

II. *Ὁ ὄγκος ἑνὸς στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς* (παράγρ. 15·2) *εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος, ποὺ παράγει τὸ στερεόν, ἐπὶ τὸ μῆκος γ τῆς περιφερείας, ποὺ γράφει τὸ κέντρον βάρους τοῦ σχήματος αὐτοῦ.*

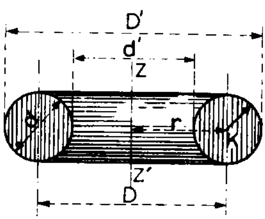
15·9 Ἐφαρμογαί.

I. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν S τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος V μιᾶς σπείρας (κουλούρας).*

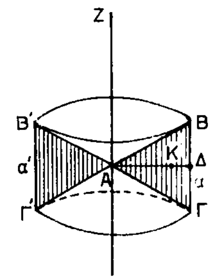
Σπεῖρα λέγεται τὸ στερεόν, ποὺ παράγεται κατὰ τὴν περιστροφὴν ἑνὸς κύκλου (K, $R = d/2$) γύρω ἀπὸ ἕνα ἄξονα $z'z$ τοῦ ἐπιπέδου του, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἡ ἀπόστασις τοῦ K εἶναι r (σχ. 15·9α).

Τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ κύκλου (K,R), ποὺ παράγει τὴν σπεῖραν, εἶναι $E = \pi R^2$, ἐνῶ τὸ μῆκος l τῆς περιφερείας, ποὺ παράγει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σπείρας, εἶναι $l = 2\pi R$.

Τὸ κέντρον βάρους τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιφερείας εἶναι τὸ κέντρον των K (παράγρ. 11·17) καὶ τὸ μῆκος S τῆς περιφερείας, ποὺ γράφει κατὰ τὴν περιστροφήν του, εἶναι $S = 2 \cdot \pi \cdot r$.



Σχ. 15·9 α.



Σχ. 15·9 β.

Ἐφαρμόζοντες τὰ θεωρήματα τοῦ Πάππου, θὰ ἔχωμεν:

Ἐμβαδὸν ἐπιφ. $S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr = \pi^2 (D'^2 - d'^2)$.

Ὄγκος σπείρας $V = \pi R^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 R^2 r = \dfrac{\pi^2 (D'^2 - d'^2)(D' + d')}{4}$, ὅπου d′ καὶ D′ ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς σπείρας (σχ. 15·9α).

II. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια S καὶ ὁ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγεται κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, πλευρᾶς α, γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΖ//ΒΓ* (σχ. 15·9 β).

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ποὺ παράγει τὸ στερεόν, εἶναι $\mathrm{E}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, ἐνῶ τὸ μῆκος l τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ, ποὺ παράγει τὴν ἐπιφάνειάν του, εἶναι $l=3\alpha$.

Τὸ κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου καὶ τῆς περιμέτρου του εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς Κ τῶν διαμέσων του, τοῦ ὁποίου, ὡς γνωστόν, ἡ ἀπόστασις ἀπὸ κάθε κορυφὴν τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὰ 2/3 τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου: $\mathrm{AK}=\frac{2}{3}(\mathrm{A\Delta})$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον αἱ διάμεσοι ταυτίζονται μὲ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη, θὰ ἔχωμεν:

$$\mathrm{A\Delta}=\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{AK}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Ἡ ΑΔ ὅμως ὡς κάθετος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς ΑΖ // ΒΓ. Ἑπομένως ἡ ΑΚ ἐκφράζει καὶ τὴν ἀπόστασιν r τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ μῆκος γ τῆς περιφερείας, ποὺ γράφει τὸ Κ κατὰ τὴν περιστροφήν του, θὰ εἶναι $\gamma=2\cdot\pi\cdot r=2\pi\cdot\mathrm{AK}=2\pi\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.

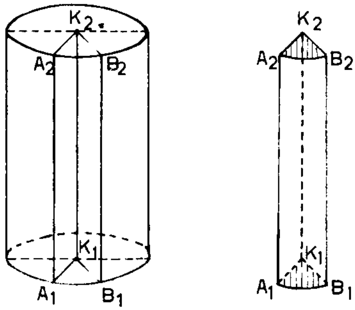
Ἐφαρμόζοντες τὰ θεωρήματα τοῦ Πάππου ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ἐπιφάνεια } S=3\alpha\cdot 2\pi\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}=2\pi\alpha^2\sqrt{3}. \\ &\text{Ὄγκος στερεοῦ } V=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi\alpha^3}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Σημείωσις: Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν, ἂν ὑπολογίσωμεν τὴν μὲν ἐπιφάνειαν S ὡς ἄθροισμα τῶν πλευρικῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων ΒΑΒ′, ΓΑΓ′ καὶ τοῦ κυλίνδρου ΓΓ′Β′Β, τὸν δὲ ὄγκον V ὡς διαφορὰν τοῦ κυλίνδρου ΓΓ′Β′Β ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κώνων.

III. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος V καὶ ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια Ε ἑνὸς κυλινδρικοῦ ὄνυχος.*

Κυλινδρικὸς ὄνυξ (σχ. 15·9 γ) λέγεται τὸ μέρος ἑνὸς κυλίνδρου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιεπιπέδων, ποὺ ἀρχίζουν



Σχ. 15·9 γ.

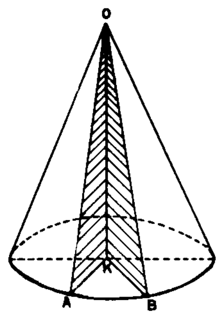
ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Τὸ στερεὸν $K_1A_1B_1$ $K_2A_2B_2$ τοῦ σχήματος 15·9 γ εἶναι ἕνας κυλινδρικὸς ὄνυξ. Οἱ ἴσοι κυκλικοὶ τομεῖς $A_1K_1B_1$, $A_2K_2B_2$ εἶναι αἱ *βάσεις* του, ὁ ἄξων K_1K_2 τὸ *ὕψος* του, καὶ τὸ μέρος $A_1B_1B_2A_2$ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἡ ***κυλινδρική του ἐπιφάνεια***. Ἡ δίεδρος γωνία τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, ποὺ περιέχουν τὸν κυλινδρικὸν ὄνυχα, καλεῖται *γωνία* του. Ὁ ὄγκος V τοῦ ὄνυχος καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_μ τῆς πλευρικῆς του ἐπιφανείας μεταβάλλονται ἀναλόγως πρὸς τὴν γωνίαν τοῦ ὄνυχος, συνεπῶς δὲ καὶ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδόν της $\sphericalangle A_1K_1B_1$. Διὰ τοῦτο ἔχομεν τὰς ἀκολούθους ἐκφράσεις τῶν V καὶ Ε ἑνὸς κυλινδρικοῦ ὄνυχος συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς βάσεώς του, τοῦ ὕψους του υ καὶ τοῦ μέτρου μ^0 τῆς $\sphericalangle A_1K_1B_1$.

$$E_\pi = \frac{2\pi R \cdot \upsilon \cdot \mu^0}{360}, \quad V = \frac{\pi R^2 \cdot \upsilon \cdot \mu^0}{360},$$

καθὼς καὶ τάς: $E_\pi = l \cdot \upsilon$, $V = B \cdot \upsilon$,
ὅπου l καὶ B εἶναι ἀντιστοίχως τὸ μῆκος τοῦ τόξου καὶ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἀπὸ τὰς βάσεις του.

IV. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κωνικοῦ ὄνυχος.*

Κωνικὸς ὄνυξ εἶναι τὸ μέρος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιεπιπέδων, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου. Τὸ στερεὸν ΑΚΟΒ τοῦ σχήματος 15·9 δ εἶναι ἕνας κωνικὸς ὄνυξ.



Σχ. 15·9 δ.

Ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΚΒ εἶναι ἡ *βάσις* του, τὸ Ο ἡ *κορυφή* του, τὸ τμῆμα ΟΚ τὸ *ὕψος* του, τὸ ΟΑ ἡ *γενέτειρά* του καὶ τὸ τμῆμα ΑΟΒ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἡ ***κωνική του ἐπιφάνεια.***

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κωνικοῦ ὄνυχος καὶ ὁ ὄγκος του V μεταβάλλονται ἀναλόγως τῆς διέδρου γωνίας τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, συνεπῶς δὲ καὶ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδόν της $\sphericalangle$ ΑΚΒ. Διὰ τοῦτο ἔχομεν τὰς ἀκολούθους ἐκφράσεις τῶν Ε καὶ V ἑνὸς κωνικοῦ ὄνυχος συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς βάσεως, τοῦ ὕψους υ, τῆς γενετείρας λ καὶ τοῦ μέτρου μ^0 τῆς $\sphericalangle$ AKB:

$$E = \frac{\pi R\lambda \cdot \mu^0}{360} \qquad V = \frac{\pi R^2 \cdot \upsilon}{3} \cdot \frac{\mu^0}{360},$$

καθὼς καὶ τάς: $E = \frac{1}{2} l \cdot \lambda$, $V = \frac{1}{3}\ S \cdot \upsilon$,

ὅπου l τὸ μῆκος τοῦ τόξου AB καὶ S τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως τῆς βάσεως.

15·10 Ἀσκήσεις.

A. *Κυλίνδρου.*

1) Μία κυλινδρικὴ κολώνα ἔχει ὕψος 4,2 m· ἡ περιφέρεια μιᾶς διατομῆς της ἔχει μῆκος 1m. Νὰ τὴν κυβίσετε.

2) Θέλομεν νὰ χρωματίσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς κυλινδρικῆς καπνοδόχου ὕψους 15 m. Ἡ διάμετρος μιᾶς τομῆς της εἶναι 1 m. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ χρωματισμὸς πρὸς 34 δρχ./m^2;

3) Ἕνας ἐλαιοχρωματιστὴς ἀνέλαβε νὰ χρωματίσῃ 120 σιδηρᾶ κυλινδρικὰ βαρέλια πρὸς 12 δρχ./m^2. Τὸ κάθε βαρέλι ἔχει διάμετρον 64 cm καὶ ὕψος 90 cm. Πόσον θὰ πληρωθῇ;

4) Πόσα m^2 φύλλων λαμαρίνας θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου χωρητικότητος 12 m^3; Τὸ ὕψος τοῦ δοχείου θέλομεν νὰ εἶναι 3m.

5) Χάλκινον σύρμα μήκους 400 m ἔχει διάμετρον 3 mm.. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀξίαν του πρὸς 54 δρχ. τὸ κιλὸν (εἰδ. βάρος χαλκοῦ 8, 7).

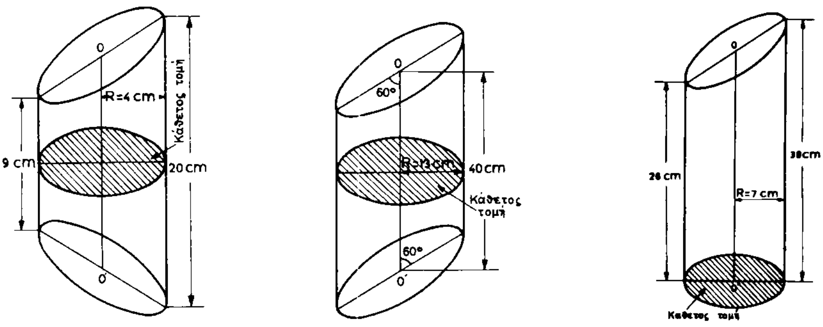
6) Τὸ βυτίον ἑνὸς βυτιοφόρου αὐτοκινήτου ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ ἐλλειπτικοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἔλλειψις μιᾶς βάσεώς του ἔχει ἄξονας $2\alpha = 1{,}50$ m καὶ $2\beta = 0{,}90$ m. Τὸ μῆκος τοῦ βυτίου εἶναι 4,5 m. Νὰ ὑπολογίσετε πόσα ἀμερικανικὰ γαλόνια βενζίνης χωρεῖ τὸ βυτίον.

7) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου γωνίαν 30^0. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶναι 4,8 cm.

8) Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ὄγκους καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν κολοβῶν κυκλικῶν κυλίνδρων τοῦ σχήματος 15·10α.

9) Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν κυλινδρικὰ δοχεῖα ἀπὸ λευκο-

σίδηρον (τενεκὲ) χωρητικότητος 1 dm^3 καὶ ὕψους 1 dm. Πόσα m^2 φύλλων λευκοσιδήρου θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν κατασκευὴν 500 ἐξ αὐτῶν τῶν δοχείων;

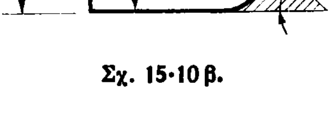


Σχ. 15·10 α.

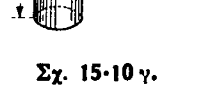
10) Ἕνα κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει ὁλικὴν ἐπιφάνειαν 602,88 cm^2 καὶ ὕψος 10 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του.

11) Τὸ σχῆμα 15 · 10 β παριστάνει τὴν διατομὴν ἑνὸς σιδηροῦ τεμαχίου μὲ διαστάσεις εἰς mm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος του, ἂν τὸ πάχος του εἶναι 30 mm καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑλικοῦ 7,8.

12) Τὸ σχῆμα 15 · 10 γ παριστάνει μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ποὺ σχη-



Σχ. 15·10 β.



Σχ. 15·10 γ.

ματίζεται ἀπὸ δύο σωλῆνας μὲ τὴν αὐτὴν διάμετρον. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γωνίας καὶ τὸ βάρος της. Τὸ πάχος τοῦ τοιχώματος τοῦ σωλῆνος εἶναι 2 mm καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μετάλλου 7,6. Αἱ διαστάσεις δίδονται εἰς mm.

Β. Κώνου.

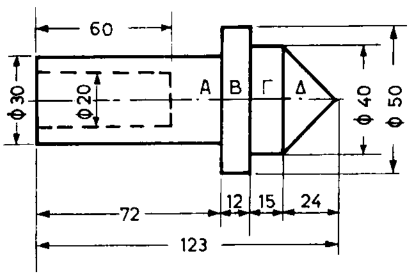
13) Ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 12 cm καὶ ὕψος 10 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ὁλικήν του ἐπιφάνειαν.

14) Εἰς ἕνα ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον ἡ γενέτειρα εἶναι 39 cm καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως 30π cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τοῦ κώνου.

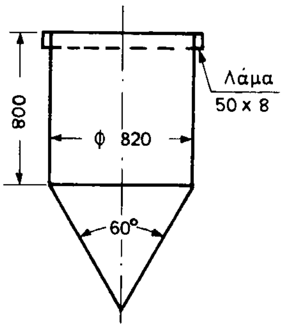
15) Ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχει διάμετρον βάσεως 36 cm καὶ γωνίαν κορυφῆς 60^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

16) Ἀπὸ ἕνα ὀρειχάλκινον κύλινδρον, ποὺ ἔχει διάμετρον βάσεως 8 cm καὶ ὕψος 12 cm θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν μὲ τὸν τόρνον ἕνα κῶνον μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Πόσα γραμμάρια μετάλλου θὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸν κύλινδρον (εἰδ. βάρος τοῦ μετάλλου 8,7).

17) Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ παριστάνεται μὲ τὰς διαστάσεις του εἰς τὸ σχῆμα 15·10δ. (Τὰ μέρη Α, Β, Γ, εἶναι κυλινδρικά, ἐνῶ τὸ μέρος Δ εἶναι κωνικόν. Τὸ μέρος Α εἶναι κοῖλον μὲ ἐσωτερικὴν διάμετρον 20 cm καὶ μῆκος 60 cm. Τὸ σύμβολον ⌀ παριστάνει τὴν διάμετρον).



Σχ. 15·10δ.



Σχ. 15·10ε.

18) Τὸ τεπόζιτον τοῦ σχήματος 15·10ε εἶναι κατεσκευασμένον ἀπὸ λαμαρίναν πάχους 3 mm. Αἱ διαστάσεις εἰς mm δίδονται ὑπὸ τοῦ σχήματος. Ἡ στεφάνη εἰς τὸ ἄνω χεῖλος τοῦ τεποζίτου εἶναι κατεσκευασμένη ἀπὸ λάμαν τῶν 50 × 8 mm. Ζητεῖται τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ τεποζίτου εἰς κιλά. (Δὲν θὰ ὑπολογίσετε τὰς συνδέσεις. Εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑλικοῦ 7,8).

19) Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κωνικὴν σκηνήν, ἡ ὁποία

νὰ ἔχῃ διάμετρον βάσεως 6 m καὶ ὕψος 4 m. Πόσα m^2 ὕφασμα θὰ χρειασθοῦν, ἂν τὰ περιττὰ ἀποκόμματα καὶ αἱ διπλώσεις εἰς τὰς ραφὰς ὑπολογισθοῦν εἰς 1,5 m^2;

20) Ἕνας κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 45 cm καὶ ὕψος 80 cm. Τέμνομεν τὸν κῶνον μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν καὶ εἰς ἀπόστασιν 16 cm ἀπὸ τὴν κορυφήν του. Νὰ συγκρίνετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀποκοπτομένου κώνου πρὸς τὸν ἀρχικόν.

21) Ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει καθέτους πλευρὰς 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγεται, ὅταν τὸ τρίγωνον στραφῇ γύρω: α) Ἀπὸ τὴν μίαν κάθετον πλευράν. β) Ἀπὸ τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν. γ) Ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν.

22) Ἕνας ὀρθὸς κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὁλικὴν ἐπιφάνειαν 90π cm^2 καὶ ὕψος 12 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του.

Γ. *Κολούρου κώνου.*

23) Εἰς ἕνα κόλουρον κῶνον ἡ διάμετρος τῆς μιᾶς βάσεως εἶναι 18 cm καὶ τῆς ἄλλης 8 cm· τὸ ὕψος εἶναι 12 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου.

24) Εἰς ἕνα κόλουρον κῶνον ἡ περιφέρεια μιᾶς βάσεως εἶναι 36π cm καὶ τῆς ἄλλης 20π cm· τὸ ὕψος δὲ εἶναι 30 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ὁλικήν του ἐπιφάνειαν.

25) Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων κολούρου κώνου εἶναι 12 cm καὶ 7 cm ἡ δὲ κωνικότης 2/11. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον του.

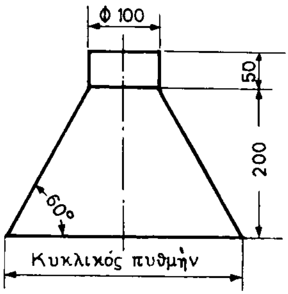
26) Ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ (Α = Δ = 1 ὀρθὴ) ἔχει (ΑΒ) = 19 cm, (ΒΓ) = 17 cm καὶ (ΔΓ) = 11 cm. Τὸ τραπέζιον στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν ΑΔ. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ποὺ γράφει ἡ ΒΓ, καθὼς καὶ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγεται κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ τραπεζίου.

27) Ἀπὸ ἕνα ὀρειχάλκινον κύλινδρον μὲ διάμετρον 12 cm καὶ μῆκος 15 cm θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν μὲ τόρνον ἕνα ἰσόμηκες κολουροκωνικὸν ἐξάρτημα μὲ μίαν βάσιν τὴν διατομὴν τοῦ κυλίνδρου καὶ κωνικότητα 2/9. Πόσα γραμμάρια μετάλλου θὰ ἀφαιρεθοῦν (εἰδ. βάρος 8,8).

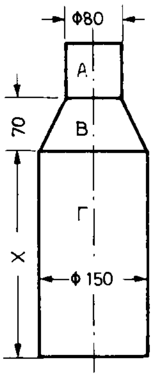
28) Ἕνας κοῖλος στῦλος (κολώνα) μεταφορᾶς ρεύματος ἀπὸ ὠ-

πλισμένον σκυρόδεμα (μπετὸν ἀρμὲ) ἔχει μῆκος 15 m καὶ σχῆμα κολουροκωνικόν. Ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς μὲν κάτω βάσεως εἶναι ἀντιστοίχως 50 cm καὶ 20 cm, τῆς δὲ ἄνω βάσεως 30 cm καὶ 10 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος της (εἰδ. βάρος ὑλικοῦ 2,6).

29) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοχείου, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 15·10ζ. Ἐπίσης νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καθὼς καὶ τὴν διάμετρον ἑνὸς κυλίνδρου, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιον ὕψος καὶ τὴν ἰδίαν ἐπιφάνειαν μὲ τὸ δοχεῖον (αἱ διαστάσεις δίδονται εἰς mm).



Σχ. 15·10ζ.



Σχ. 15·10η.

30) Τὸ σχῆμα 15·10η παριστάνει ἕνα δοχεῖον. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος, ποὺ πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸ κάτω μέρος του, ποὺ σημειώνεται μὲ τὸ γράμμα Γ, ἂν θέλωμεν τὸ δοχεῖον νὰ χωρῇ 6 κιλὰ ὕδατος, ὅταν εἶναι γεμᾶτον ἕως τὴν ἄνω στάθμην τοῦ μέρους Β.

Δ. *Γενικά.*

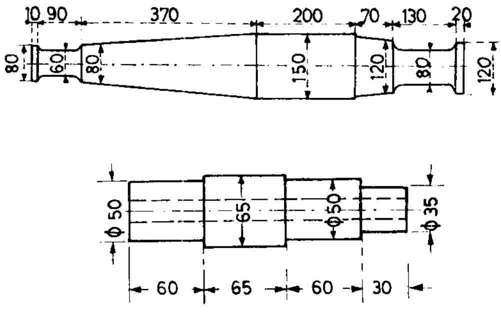
31) Εἰς τὸ σχῆμα 15·10θ παριστάνονται δύο ἄξονες, τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις δίδονται εἰς mm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος των (εἰδ. βάρος μετάλλου 7,8).

32) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ = 26 cm καὶ ΒΓ = 24 cm στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν βάσιν του ΒΓ. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

33) Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΒ = 16 cm

καὶ ΑΓ = 12 cm στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

34) Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰν 18 cm. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὸ προεκτείνομεν πέραν τοῦ Α κατὰ μῆκος ΑΔ′ = ΑΔ. Εἰς τὸ Δ′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ στρέφομεν τὸ τρίγωνον γύρω ἀπὸ τὴν παράλληλον αὐτήν. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραγομένου στερεοῦ.



Σχ. 15·10θ.

35) Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μὲ (ΑΒ) = 12 cm καὶ ΒΓ = 15 cm στρέφεται γύρω ἀπὸ εὐθεῖαν χψ//ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὴν 20 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τοῦ παραγομένου στερεοῦ:

α) Ὅταν ἡ ΑΔ εὑρίσκεται μεταξὺ χψ καὶ ΒΓ καὶ β) ὅταν ἡ ΒΓ εὑρίσκεται μεταξὺ ΑΔ καὶ χψ.

36) Ρόμβος ΑΒΓΔ μὲ διαγωνίους ΑΓ = 18 cm καὶ ΒΔ = 24 cm στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν χψ// ΒΔ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὴν 20 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

37) Τετράγωνον μὲ πλευρὰν α στρέφεται γύρω ἀπὸ εὐθεῖαν χψ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διαγώνιον, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτήν. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

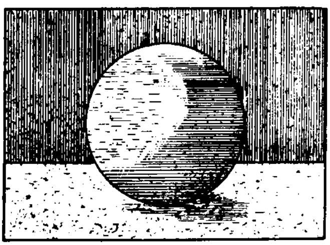
38) Ἕνας ἀεροθάλαμος (σαμπρέλα) τροχοῦ αὐτοκινήτου, πλήρης ἀέρος ἔχει ἐξωτερικὴν διάμετρον 64 cm καὶ ἐσωτερικὴν 52 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τοῦ ἀεροθαλάμου.

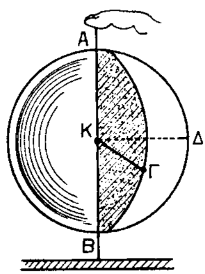
39) Ἕνας κυκλικὸς δακτύλιος ἔχει ἐξωτερικὴν διάμετρον 12 cm καὶ ἐσωτερικὴν 10 cm. Ὁ δακτύλιος αὐτὸς στρέφεται γύρω ἀπὸ εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου του, ἀπέχουσαν ἀπὸ τὸ κέντρον 30 cm. Νὰ ὑπολογίσετε: α) Τὸν ὄγκον τῶν τοιχωμάτων τῆς σπείρας, ποὺ παράγεται. β) Τὴν χωρητικότητα τῆς σπείρας. γ) Τὴν ἐσωτερικὴν καὶ ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῆς σπείρας.

40) Μία ἔλλειψις μὲ μεγάλο ἄξονα 18 cm καὶ μικρὸν 12 cm στρέφεται γύρω ἀπὸ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν μεγάλον ἄξονά της καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ αὐτήν. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τῆς παραγομένης σπείρας.

15·11 Ἡ σφαῖρα.

Σφαῖρα καλεῖται τὸ στερεόν, ποὺ παράγεται ἀπὸ ἕνα ἡμικύκλιον, ὅταν περιστραφῇ γύρω ἀπὸ τὴν διάμετρόν του. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ποὺ λέγεται συνήθως καὶ αὐτὴ σφαῖρα, παράγεται ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τοῦ ἡμικυκλίου. Π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 15·11 μὲ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου ΑΔΒ παράγεται ἡ σφαῖρα Κ. Τὸ κέντρον Κ καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ ἡμικυκλίου λέγονται ἀντιστοίχως *κέντρον καὶ ἀκτὶς* τῆς σφαίρας.





Σχ. 15·11.

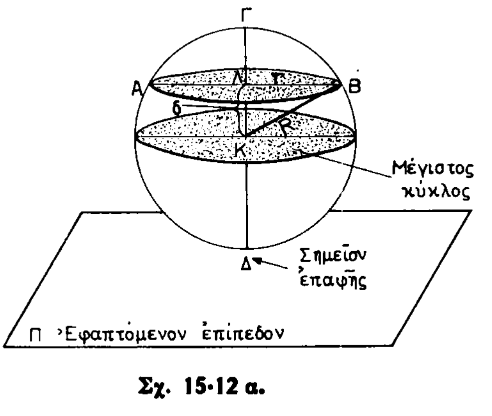
Ἀπὸ τὸν τρόπον, ποὺ παράγεται ἡ σφαῖρα καὶ ἡ ἐπιφάνειά της, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον Κ: α) κάθε σημείου Γ τῆς ἐπιφανείας της εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα R, β) κάθε σημείου τοῦ ἐσωτερικοῦ της εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν R καὶ γ) κάθε σημείου ἔξω ἀπὸ τὴν σφαῖραν εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν R.

Ἤτοι *ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι τὸ σύνολον (ὁ γεωμετρικὸς τόπος) τῶν σημείων τοῦ χώρου, ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σήμεῖον Κ (κέντρον τῆς σφαίρας) ἀπόστασιν ἴσην μὲ ἕνα ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα R (ἀκτῖνα τῆς σφαίρας).*

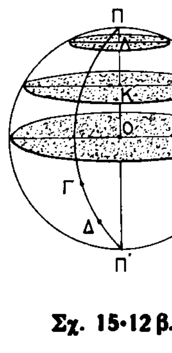
15·12 Τομαὶ τῆς σφαίρας.

Κάθε ἐπίπεδον Π, ποὺ ἔχει ἀπὸ τὸ Κ ἀπόστασιν δ μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος, $\delta < R$, τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα κύκλον ἀκτῖνος r. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΛΒ (σχ. 15·12 α) ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$r = \sqrt{R^2 - \delta^2}.$$



Σχ. 15·12 α.



Σχ. 15·12 β.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν προκύπτει ὅτι *ὅλοι οἱ κύκλοι μιᾶς σφαίρας, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσοι.*

Ἂν $\delta = 0$, τὸ Π διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ λέγεται *διαμετρικὸν ἐπίπεδον*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τομὴ τοῦ Π μὲ τὴν σφαῖραν ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς R καὶ λέγεται *μέγιστος κύκλος*. Κάθε μέγιστος κύκλος χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται *ἡμισφαίρια*. Δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται κατὰ διάμετρον καὶ συνεπῶς διχοτομοῦνται.

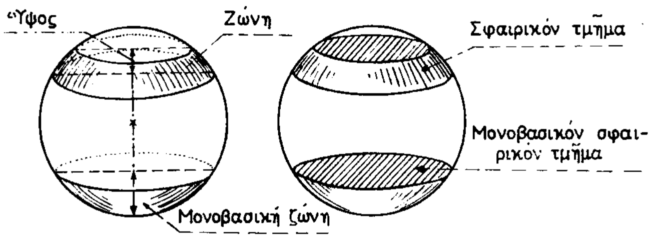
Ἂν $\delta = R$ θὰ εἶναι $r = 0$ καὶ τὸ Π ἔχει ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν, τὸ Δ· τότε τὸ Π λέγεται *ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον* καὶ τὸ Δ εἶναι τὸ *σημεῖον ἐπαφῆς* (σχ. 15 · 12 α).

Ἂν $\delta > R$, τότε τὸ Π καὶ ἡ σφαῖρα δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

Ἄξων ἑνὸς κύκλου Κ μιᾶς σφαίρας Ο λέγεται ἡ διάμετρος Π′Π τῆς σφαίρας, ποὺ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Τὰ ἄκρα Π′ καὶ Π τῆς διαμέτρου λέγονται *πόλοι* τοῦ κύκλου. Οἱ κύκλοι μιᾶς σφαίρας, ποὺ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἄξονα, λέγονται *παράλληλοι κύκλοι*. Ἀπὸ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ μιᾶς σφαίρας διέρχεται ἕνας μόνον μέγιστος κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας τόξον ΓΔ λέγεται *σφαιρικὴ ἀπόστασις* τῶν δύο σημείων (σχ. 15 · 12 β).

15 · 13 Ἄλλοι ὁρισμοί.

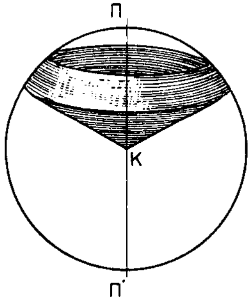
Σφαιρικὴ ζώνη λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, ποὺ περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ***σφαιρικὸν δὲ τμῆμα*** τὸ ἀντίστοιχον μέρος τῆς σφαίρας. Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι, κατὰ τοὺς ὁποίους τέμνεται ἡ σφαῖρα ἀπὸ τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, λέγονται *βάσεις τῆς ζώνης καὶ τοῦ τμήματος*, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο ἐπιπέδων *ὕψος* αὐτῶν. Ἂν τὸ ἕνα ἐπίπεδον



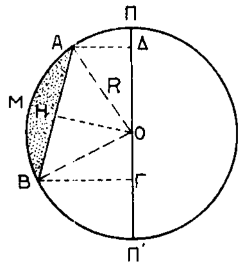
Σχ. 15·13 α.

ἐφάπτεται μὲ τὴν σφαῖραν, τότε ἡ ζώνη καὶ τὸ τμῆμα λέγονται *μονοβασικὰ* (σχ. 15 · 13 α).

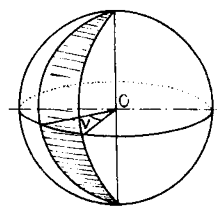
Σφαιρικὸς τομεὺς λέγεται τὸ στερεόν, ποὺ παράγεται κατὰ τὴν περιστροφὴν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως γύρω ἀπὸ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου του, ἡ ὁποία δὲν τὸν διαχωρίζει. Ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως, λέγεται *βάσις* τοῦ σφαιρικοῦ τομέως Ο (σχ. 15 · 13 β).



Σχ. 15·13 β.



Σχ. 15·13 γ.



Σχ. 15·13 δ.

Σφαιρικὸς δακτύλιος λέγεται τὸ στερεόν, ποὺ παράγεται ἀπὸ ἕνα κυκλικὸν τμῆμα ἑνὸς μεγίστου κύκλου, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπὸ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία δὲν τὸ διαπερνᾷ (σχ. 15 · 13 γ).

Τὸ μέρος μιᾶς σφαίρας, ποὺ περιέχεται μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κοινὴν διάμετρον, λέγεται *σφαιρικὸς ὄνυξ*· τὸ δὲ ἀντίστοιχον μέρος τῆς ἐπιφανείας της *σφαιρικὴ ἄτρακτος* (σχ. 15 · 13 δ). Ἡ γωνία ν τῶν δύο ἡμικυκλίων λέγεται *γωνία* τοῦ ὄνυχος καὶ τῆς ἀτράκτου.

15 · 14 Μέτρησις τῆς σφαίρας.

Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι, ὅπως εἴδαμεν, στερεὸν καὶ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς. Δυνάμεθα συνεπῶς διὰ τὴν μέτρησίν των νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ θεωρήματα τοῦ Πάππου, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰ ἐκ περιστροφῆς στερεὰ (παράγρ. 15 · 8). Θὰ ἔχωμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

I. *Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται μὲ* *τὸ γινόμενον τοῦ μήκους πR τῆς ἡμιπεριφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ἐπί τὸ μῆκος γ τῆς περιφερείας, ποὺ γράφει τὸ κέντρον βάρους K_β τῆς ἡμιπεριφερείας.* Γνωρίζομεν ὅμως (παράγρ. 11·17) ὅτι τὸ K_β μιᾶς ἡμιπεριφερείας κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἡμιπεριφερείας της καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον: $\rho = \dfrac{2R}{\pi}$.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$\gamma = 2\pi \cdot \rho = 2\pi \cdot \dfrac{2R}{\pi} = 4R$ καὶ $E = \pi R \cdot \gamma = \pi R \cdot 4R$. Ὥστε:

$$E = 4\pi R^2. \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου της.

II. *Ὁ ὄγκος V μιᾶς σφαίρας (O,R) εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ $\dfrac{\pi R^2}{2}$ τοῦ ἡμικυκλίου ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ἐπὶ τὸ μῆκος γ τῆς περιφερείας, ποὺ γράφει τὸ κέντρον K_β τοῦ ἡμικυκλίου.* Γνωρίζομεν ὅμως (παράγρ. 11·17) ὅτι τὸ K_β τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου ἀκτῖνος πρὸς τὴν διάμετρόν του καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτήν: $\rho = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{R}{\pi}$.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\gamma = 2\pi\rho = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} = \frac{8R}{3}$$

καὶ $V = \dfrac{\pi R^2}{2} \cdot \gamma = \dfrac{\pi R^2}{2} \cdot \dfrac{8R}{3} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Ὥστε:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R \text{ ἢ } V = \frac{1}{3} E \cdot R. \qquad (3)$$

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα της.

15·15 Μέτρησις τῆς σφαιρικῆς ζώνης, τοῦ σφαιρικοῦ τομέως κλπ.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν θεωρημάτων τοῦ Πάππου ἀποδεικνύονται αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

I. *Τὸ ἐμβαδὸν E μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους $2\pi R$ τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος υ τῆς ζώνης:*

$$E = 2\pi R \cdot \upsilon.$$

II. *Ὁ ὄγκος V ἑνὸς σφαιρικοῦ τομέως εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ $2\pi R \cdot \upsilon$ τῆς βάσεώς του (σφαιρικῆς ζώνης) ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος του:*

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \upsilon.$$

III. *Ὁ ὄγκος V ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ἐμβαδοῦ $\pi \cdot l^2$ τοῦ κύκλου, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν $AB = l$ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, ἐπὶ τὸ ὕψος $\Gamma\Delta = \upsilon$ τῆς ἀντιστοίχου σφαιρικῆς ζώνης* (σχ. 15·13γ).

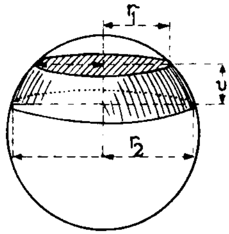
$$V_\delta = \frac{1}{6}\pi\, l^2 \cdot \upsilon.$$

IV. *Διὰ τὸν ὄγκον V_μ ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις ἔχουν ἀκτῖνας ἀντιστοίχως r_1 καὶ r_2* (σχ. 15·15) *καὶ ὕψος υ, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν:*

$$V_\mu = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\upsilon\,(r_1^2 + r_2^2),$$

$$\text{ἢ } V_\mu = \frac{1}{6}\pi\upsilon\,(\upsilon^2 + 3r_1^2 + 3\,r_2^2).$$

Ὅταν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι μονοβασικόν, τότε $r_2 = 0$, καὶ ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται:



Σχ. 15·15.

$$V_\mu = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\upsilon\, r_1^2 \quad \text{ἢ} \quad V_\mu = \frac{\pi\upsilon}{6}(\upsilon^2 + 3r_1^2).$$

V. *Διὰ τὸ ἐμβαδὸν E_α μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου μὲ γωνίαν* ν^0 (σχ. 15 · 13 δ) *ἔχομεν τὴν ἔκφρασιν:*

$$E_\alpha = \frac{4\pi R^2 \nu^0}{360} \quad \text{ἢ} \quad E_\alpha = \frac{\pi R^2 \nu^0}{90}.$$

VI. *Διὰ τὸν ὄγκον ν^0 ἑνὸς σφαιρικοῦ ὄνυχος μὲ γωνίαν ν^0 ἔχομεν τὴν ἔκφρασιν:*

$$\nu^0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\nu^0}{360} \quad \text{ἢ} \quad \nu^0 = \frac{\pi R^3 \nu^0}{270}.$$

15·16 Ἀσκήσεις.

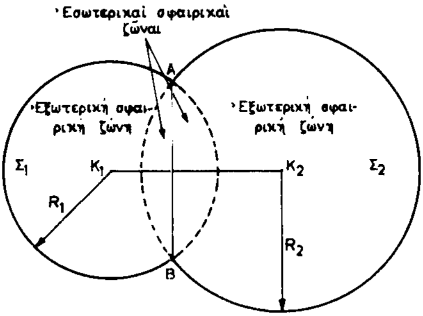
1) Ἔχομεν μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος 25 cm. Ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον της πρέπει νὰ ἔχῃ ἕνα ἐπίπεδον διὰ νὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα κύκλον μὲ ἐμβαδὸν 706,50 cm^2;

2) Μία σφαῖρα μὲ διάμετρον 36 cm τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος ἀπὸ τὸ κέντρον της 10 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς.

3) Τὰ κέντρα K_1, K_2 δύο σφαιρῶν Σ_1, Σ_2 μὲ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως $R_1 = 18$ cm καὶ $R_2 = 24$ cm ἀπέχουν 30 cm (σχ. 15 · 16 α). Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς AB τῶν δύο σφαιρῶν.

4) Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα 12 cm.

5) Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα α m. Νὰ ὑπολογίσετε: α) Τὴν ἀκτῖνα σφαίρας, ποὺ ἔχει τετραπλασίαν ἐπιφάνειαν. β) Τὴν ἀκτῖνα σφαίρας, ποὺ ἔχει ὀκταπλάσιον ὄγκον.



Σχ. 15·16 α.

6) Μία ξυλίνη σφαῖρα ζυγίζει 650 γραμμάρια. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα της (εἰδικὸν βάρος ξύλου 0,75)

7) Μία σφαῖρα ἔχει ἐπιφάνειαν $84\,\pi$ cm^2. Νὰ ὑπολογίσετε: α) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου της. β) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου της, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 3 cm.

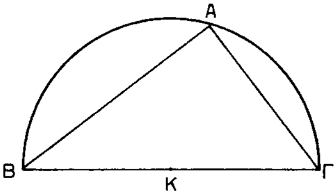
8) Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ὄγκους τῶν μονοβασικῶν σφαιρικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν σφαιρῶν τῶν ἀσκήσεων 1 καὶ 2, καθὼς καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ σφαιρικὰ τμήματα.

9) Εἰς τὴν ἄσκησιν 3 ἡ τομὴ τῶν δύο σφαιρῶν χωρίζει ἑκάστην σφαῖραν εἰς δύο μονοβασικὰς ζώνας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἄλλης σφαίρας καὶ ἡ ἄλλη ἐκτός. Ἂν καλέσωμεν τὴν πρώτην ἐσωτερικὴν καὶ τὴν δευτέραν ἐξωτερικὴν (σχ. 15·16 α), νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ περικλείεται: α) Ἀπὸ τὰς ἐξωτερικὰς σφαιρικὰς ζώνας. β) Ἀπὸ τὰς ἐσωτερικὰς σφαιρικὰς ζώνας.

10) Μία χαλυβδίνη σφαῖρα διαμέτρου 10 cm κόπτεται μὲ μίαν φρέζαν κατὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα καὶ κατὰ τρόπον, ὥστε τὸ κέντρον τῆς σφαίρας νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὰ ἀντιστοίχως 15 mm καὶ 30 mm. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ

βάρη τῶν τριῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ σφαῖρα (εἰδ. βάρος μετάλλου 7,2).

11) Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 30 cm. Διαιροῦμεν μίαν διάμετρόν της εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ εἰς τὰ διαιρετικὰ σημεῖα φέρομεν ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὴν διάμετρον. Χωρίζεται ἡ μὲν σφαιρικὴ ἐπιφάνεια εἰς 5 σφαιρικὰς ζώνας ἡ δὲ σφαῖρα εἰς 5 σφαιρικὰ τμήματα. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστης σφαιρικῆς ζώνης καὶ τὸν ὄγκον ἑκάστου σφαιρικοῦ τμήματος.



Σχ. 15·16 β.

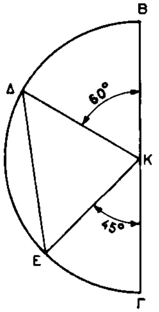
12) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ σχήματος 15 · 16 β ἔχει καθέτους πλευρὰς ΑΒ = 6 cm καὶ ΑΓ = 8 cm. Θεωροῦμεν ὅτι τὸ ἡμικύκλιον τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν διάμετρόν του ΒΓ. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τῶν σφαιρικῶν δακτυλίων, οἱ ὁποῖοι παράγονται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῶν κυκλικῶν τμημάτων, ποὺ ἔχουν χορδὰς ἀντιστοίχως τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

13) Μία σφαῖρα ἔχει διάμετρον 48 cm. Τέμνομεν τὴν σφαῖραν μὲ δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ κέντρον της ἀντιστοίχως 8 cm καὶ 12 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ποὺ περιέχονται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις: α) Ὅταν τὸ κέντρον εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων. β) Ὅταν τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐκτὸς αὐτῶν.

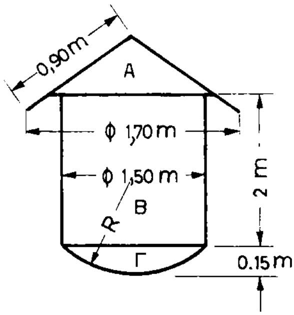
14) Τὸ ἡμικύκλιον τοῦ σχήματος 15 · 16 γ ἔχει ἀκτῖνα 20 cm καὶ στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν διάμετρόν του ΒΓ. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφήν: α) τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΔΚΒ, β) τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΔΚΕ, γ) τοῦ τριγώνου ΔΚΕ.

15) Εἰς μίαν σφαῖραν μὲ διάμετρον 30 cm νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου 48^0 καὶ τὸν ὄγκον ἑνὸς σφαιρικοῦ ὄνυχος 36^0.

16) Τὸ σχῆμα 15 · 16δ παριστάνει ἕνα τεπόζιτον, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία μέρη. Τὸ Α, ποὺ εἶναι κωνικόν, τὸ Β, ποὺ εἶναι κυλινδρικόν, καὶ τὸν πυθμένα του Γ, ποὺ εἶναι μονοβασικὸν σφαιρικὸν τμῆμα.

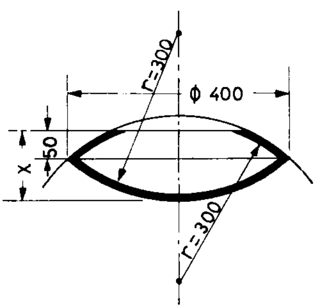


Σχ. 15·16γ.

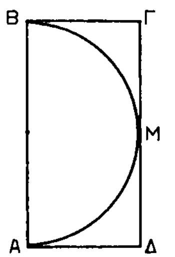


Σχ. 15·16δ.

Νὰ ὑπολογίσετε τὴν χωρητικότητα τοῦ τεποζίτου καὶ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τῆς λαμαρίνας, ποὺ ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν κατασκευήν του.



Σχ. 15·16ε.



Σχ. 15·16ζ.

17) Τὸ σχῆμα 15 · 16ε παριστάνει ἕνα δοχεῖον ἀπὸ λαμαρίνα τῶν 0,5 mm ἀνοικτὸν πρὸς τὰ ἄνω. Νὰ ὑπολογίσετε α) τὴν ἐξωτερικήν του ἐπιφάνειαν, β) τὸν ὄγκον του καὶ γ) τὸ ὁλικόν του ὕψος. (Αἱ διαστάσεις δίδονται εἰς mm).

18) Μία κοίλη ἰσοπαχὴς ὑαλίνη σφαῖρα ἔχει ἐσωτερικὴν διάμετρον 12 cm καὶ ἐσωτερικὴν 8 cm. Νὰ εὕρετε ἂν αὐτὴ βυθίζεται ὁλόκληρος εἰς τὸ καθαρὸν ὕδωρ (εἰδικὸν βάρος ὑάλου 2,6).

19) Εἰς τὸ σχῆμα 15·16ζ τὸ ἡμικύκλιον ΑΜΒ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Στρέφομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ γύρω ἀπὸ τὴν ΑΒ. Παράγεται ἕνας κύλινδρος καὶ μία σφαῖρα. Νὰ συγκρίνετε: α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν πλευρικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. β) Τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου.

20) Ξυλίνη σφαῖρα ἀκτῖνος 12 cm ρίπτεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ βυθίζεται κατὰ τὰ 3/4 τῆς ἐπιφανείας της. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16

ΠΡΟΟΔΟΙ

16·1 Ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Ἕνα κινητὸν κινεῖται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 25\,\mathrm{cm/sec}$ καὶ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 7\,\mathrm{cm/sec^2}$. Ἂς καταρτίσωμεν ἕνα πίνακα, ποὺ νὰ μᾶς δίδῃ τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου, 2ου, 3ου... δευτερολέπτου ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεώς του. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν γνωστόν μας καὶ ἀπὸ τὴν Φυσικὴν τύπον $\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t$:

t εἰς δευτερόλεπτα	1	2	3	4...	ν	$(\nu+1)$...
υ εἰς μέτρα	32	39	46	53 ...	$25+7\nu$	$25+7(\nu+1)$...

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διαδοχικαὶ ταχύτητες 32, 39, 46, 53... $25+7\nu$, $25+7(\nu+1)$,.., ἀποτελοῦν μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων εἶναι 7:

$$39 - 32 = 46 - 39 = 25 + 7(\nu+1) - (25 + 7\nu) = 7.$$

Ἀκολουθίαι μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα λέγονται *ἀριθμητικαὶ πρόοδοι*.

Ὁρισμός.

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$, λέγεται ἀριθμητικὴ πρόοδος, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ ἑνὸς οἱουδήποτε ὅρου της $\alpha_{\nu+1}$ ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του α_ν, εἶναι πάντοτε ὁ ἴδιος ἀριθμός. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται *διαφορὰ* τῆς προόδου καὶ συμβολίζεται συνήθως μὲ τὸ γράμμα δ ἢ ω.

Ὅταν ἡ διαφορὰ δ εἶναι > 0, ἡ πρόοδος λέγεται *αὔξουσα*, ὅταν $\delta < 0$, λέγεται *φθίνουσα*.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ἕπεται ὅτι *κάθε ὅρος τῆς προόδου εἶναι ἄθροισμα τοῦ προηγουμένου του ὅρου μὲ τὴν διαφορὰν δ:*

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \delta.$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν εἶναι γνωστὸς ὁ πρῶτος ὅρος α_1 μιᾶς προόδου καὶ ἡ διαφορά της δ, ἡ πρόοδος εἶναι ὡρισμένη. Ἔχομεν τότε:

1ος ὅρος	2ος ὅρος	3ος ὅρος	4ος ὅρος	5ος ὅρος ...
α_1	$\alpha_1+\delta$	$\alpha_1+2\delta$	$\alpha_1+3\delta$	$\alpha_1+4\delta$ ...

καὶ ὁ νυοστὸς ὅρος α_ν τῆς προόδου αὐτῆς θὰ εἶναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\delta. \qquad (1)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς διὰ τὸν α_ν εἶναι μία ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν α_ν, α_1, ν καὶ δ.

Ἑπομένως, ἐὰν μᾶς δοθοῦν αἱ τιμαὶ τριῶν ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς αὐτάς, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς τετάρτης μεταβλητῆς ἐπιλυοντες μίαν ἐξίσωσιν α΄ βαθμοῦ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐνῶ διὰ τὰς μεταβλητὰς δ, α_ν, α_1, γίνονται δεκταὶ οἱαιδήποτε τιμαί, διὰ τὴν μεταβλητὴν ν γίνονται δεκταὶ μόνον θετικαὶ ἀκέραιαι τιμαί.

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ 25ος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 168, 161, 154,...*

Ἔχομεν $\alpha_1 = 168$, $\delta = 161 - 168 = -7$, $\nu = 25$ καί, βάσει τοῦ τύπου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\delta$, $\alpha_{25} = 168 + (25 - 1)(-7) = 168 + 24(-7) = 168 - 168 = 0$. Ὥστε ὁ 25ος ὅρος τῆς προόδου αὐτῆς εἶναι τὸ μηδέν.

2ον) *Ἀριθμητικῆς προόδου 7ος ὅρος εἶναι ὁ 12 καὶ 20ος ὁ 51. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.*

Διὰ $\alpha_7 = 12$ καὶ $\alpha_{20} = 51$ ὁ τύπος $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\delta$ μᾶς δίδει ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις:

$$12 = \alpha_1 + 6\delta$$
$$51 = \alpha_1 + 19\delta,$$

αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τοὺς α_1, δ.

Ἐπιλύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν $\alpha_1 = -6$ καὶ $\delta = 3$. Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι $-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots$

3ον) *Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὁ ἀριθμὸς 520 εἶναι ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 7, 15, 23, ... καὶ ἂν εἶναι, νὰ εὑρεθῇ ἡ σειρά του ν.*

Χρησιμοποιοῦμεν πάλιν τὸν τύπον $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\delta$. Θέτομεν $\alpha_1 = 7$, $\delta = 15 - 7 = 8$, $\alpha_\nu = 520$. Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις: $520 = 7 + (\nu - 1)\cdot 8$, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν μὲ τὸν περιορισμὸν $\nu =$ θετικὸς ἀκέραιος.

$$520 = 7 + (\nu - 1)\cdot 8 \Leftrightarrow 520 = 7 + 8\nu - 8 \Leftrightarrow 521 = 8\nu \Leftrightarrow$$
$$\nu = \frac{521}{8}.$$

Ἡ τιμὴ $\nu = \dfrac{521}{8}$ δὲν γίνεται δεκτὴ ὡς λύσις τοῦ προβλήματος, διότι δὲν ἱκανοποιεῖ τὸν περιορισμὸν $\nu =$ θετικὸς ἀκέραιος.

Ἄρα ὁ 520 δὲν εἶναι ὅρος τῆς προόδου 7, 15, 23, ...

16·2 Ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἂς ζητήσωμεν τὸ ἄθροισμα S_{20} τῶν 20 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 7, 12, 17, ...

Θὰ ἔχωμεν:

$$S_{20} = 7 + 12 + 17 + \ldots + 92 + 97 + 102.$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τιμῆς τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ δύναται βεβαίως νὰ γίνῃ δι' ἀπ' εὐθείας προσθέσεως τῶν ὅρων του.

Ἐπειδὴ ὅμως ἀπαιτεῖ πολλὴν ἐργασίαν, προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἕνα συντομώτερον τρόπον.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$7 + 102 = 12 + 97 = 17 + 92 = 22 + 87 = \ldots = 109.$$

Ἤτοι δύο προσθετέοι ἀπέχοντες ἐξ ἴσου ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὅρους ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν, τὸν ἀριθμὸν 109. Γράφομεν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα S_{20} κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους:

$$S_{20} = 7 + 12 + 17 + \dots + 92 + 97 + 102.$$
$$S_{20} = 102 + 97 + 92 + \dots + 17 + 12 + 7$$

καὶ προσθέτομεν τὰς δύο αὐτὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ὡς ἀκολούθως:

$$S_{20} + S_{20} = (102 + 7) + (97 + 12) + (92 + 17) + \dots + (92 + 17) + (97 + 12) + (102 + 7) = 109 + 109 + \dots + 109 = 20 \times 109.$$

Ἑπομένως: $2S_{20} = 20 \times 109$ καὶ $S_{20} = \dfrac{20 \times 109}{2} = 1\,090.$

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς κάθε ἀριθμητικὴν πρόοδον $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \dots, \alpha_\nu$ μὲ διαφορὰν δ. Πράγματι ἔστω:

$$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$$

τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου.

Ἐπειδὴ εἶναι: $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta,\ \alpha_3 = \alpha_2 + \delta, \dots$ καὶ

$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu - \delta,\ \alpha_{\nu-2} = \alpha_{\nu-1} - \delta,\ \alpha_{\nu-3} = \alpha_{\nu-2} - \delta,$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = (\alpha_1 + \delta) + (\alpha_\nu - \delta) = \alpha_1 + \alpha_\nu$$
$$\alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = (\alpha_2 + \delta) + (\alpha_{\nu-1} - \delta) = \alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \alpha_1 + \alpha_\nu \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἑπομένως:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ S_\nu &= \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha \\ \hline 2S_\nu &= (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_1 + \alpha_\nu) + \dots + (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_1 + \alpha_\nu) \end{aligned}$$

ἢ $2S_\nu = \nu(\alpha_1 + \alpha_\nu)$.

Ὥστε:

$$S_\nu = \frac{\nu(\alpha_1 + \alpha_\nu)}{2}. \qquad (1)$$

Παράδειγμα.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ἀπὸ 2 ἕως 100. Οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ $\alpha_1 = 2$ καὶ $\delta = 2$.

Ὁ 100 εἶναι ὁ 50ος ὅρος. Ἑπομένως συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $S_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}$, ἔχομεν:

$$S_{50} = \frac{(2+100)\cdot 50}{2} = 102 \times 25 = 2\,550.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\delta$, εἰς τὸν τύπον (1) προκύπτει ὁ ἀκόλουθος τύπος τοῦ ἀθροίσματος.

$$S_\nu = \frac{\nu\cdot[\alpha_1 + \alpha_1 + (\nu-1)]\cdot\delta}{2} = \frac{2\alpha_1\nu + \nu(\nu-1)\cdot\delta}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$S_\nu = \alpha_1\nu + \frac{\nu(\nu-1)\cdot\delta}{2}, \qquad (2)$$

ποὺ μᾶς παρέχει τὸ S_ν συναρτήσει τῶν α_1, ν, δ.

Π.χ. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 25 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 100, $92\frac{1}{2}$, 85, . . .,*

Ἔχομεν $\alpha_1 = 100$, $\nu = 25$, $\delta = 92\frac{1}{2} - 100 = -7\frac{1}{2} = -15/2$.

Εἰσάγομεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὸν τύπον (2) καὶ ἔχομεν:

$$S_{25} = 100 \times 25 + \frac{25 \times 24\left(-\frac{15}{2}\right)}{2} = 2\,500 + 25 \times 12\left(-\frac{15}{2}\right)$$
$$= 2\,500 - 2\,250 = 250.$$

16·3 Παρεμβολὴ ὅρων εἰς τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Πρόβλημα 1ον. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 35 νὰ παρεμβληθοῦν 6 κατὰ σειρὰν ἀριθμοί, ὥστε μαζὶ μὲ τοὺς 7 καὶ 35 νὰ ἀποτελοῦν τοὺς 8 πρώτους ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἐπίλυσις. Ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν διαφορὰν δ τῆς ζητουμένης προόδου. Εἰς τὴν πρόοδον αὐτὴν τὸ 7 θὰ εἶναι ὁ α_1 καὶ τὸ 35 ὁ α_8. Συμφώνως λοιπὸν τὸν τύπον $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\delta$, θὰ ἔχωμεν:

$$35 = 7 + (8-1)\cdot\delta \Leftrightarrow 35 = 7 + 7\delta \Leftrightarrow \delta = \frac{35-7}{7} = 4.$$

Ἡ ζητουμένη ἀριθμητικὴ πρόοδος θὰ εἶναι:

$$7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27,\ 31,\ 35,...$$

Πρόβλημα 2ον. Δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β. Νὰ εὑρεθοῦν μ ἀριθμοί, πού, ὅταν παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν α καὶ β, νὰ σχηματίζουν μαζὶ μὲ τοὺς α καὶ β τοὺς μ+2 διαδοχικοὺς ὅρους μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἐπίλυσις Χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\delta$.

Ἔχομεν $\alpha_\nu = \beta$, $\alpha_1 = \alpha$, $\nu = \mu + 2$ καὶ ζητοῦμεν τὸ δ.

$$\beta = \alpha + (\mu + 2 - 1)\cdot\delta \Leftrightarrow \beta = \alpha + (\mu + 1)\cdot\delta \Leftrightarrow \delta = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}.$$

Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν μ ἀριθμοὶ εἶναι:

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1},\ \alpha + 2\cdot\frac{\beta - \alpha}{\mu + 1},...,\ \alpha + \mu.\ \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}.$$

16·4 Ἀσκήσεις.

1) Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι:

α) $7,\ 6\frac{1}{3},\ 5\frac{2}{3},\ 5,...$ β) $12,\ 6,\ 1\frac{1}{2}...$

γ) $3\frac{1}{5},\ 4,\ 4\frac{4}{5},\ 5\frac{3}{5},...$ δ) $8,\ 16,\ 32,\ 64,...$

ε) $2,\ \frac{4 - \sqrt{2}}{2},\ 2 - \sqrt{2},\ \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2},...$

Νὰ διακρίνετε ποῖαι ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἀριθμητικαὶ πρόοδοι καὶ ποία ἡ διαφορὰ εἰς ἑκάστην ἀπὸ τὰς προόδους αὐτάς.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 11ος ὅρος τῆς προόδου:

$$5,\ \frac{15 + \sqrt{3}}{3},\ \frac{15 + 2\sqrt{3}}{3},\ 5 + \sqrt{3}..$$

3) 12ος ὅρος μιᾶς προόδου εἶναι ὁ 40 καὶ πρῶτος ὁ 7. Ποία ἡ διαφορὰ τῆς προόδου;

4) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ τιμαὶ τῶν συναρτήσεων $4 - \lambda$, $5 - \frac{3\lambda}{2}$, $3 + \frac{2}{\lambda}$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου;

5) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x αἱ τιμαὶ τῶν τριῶν συναρτήσεων $\sigma =$

$2x-3$, $\varphi=3-5x$, $\omega=6+x$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ὅταν ληφθοῦν μὲ τὴν σειράν: α) σ, φ, ω, β) φ, ω, σ καὶ γ) σ, ω, φ.

6) Εἰς ἕνα τετράγωνον οἱ ἀριθμοί, ποὺ μετροῦν τὴν πλευράν, τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ.

7) Οἱ ἀριθμοί, ποὺ μετροῦν τὴν πλευράν, τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρὰν τοῦ κύβου αὐτοῦ.

8) 12ος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ὁ 40 καὶ πρῶτος ὁ 7. Ποία ἡ διαφορὰ τῆς προόδου;

9) Δίδεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $7,\ 6\frac{1}{4},\ 5\frac{1}{2},\ 4\frac{3}{4},\ \ldots$

Νὰ ἐξετάσετε ἂν κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $1, -5, -15$ εἶναι ὅρος τῆς προόδου αὐτῆς καὶ ἂν εἶναι ποίαν σειρὰν ἔχει;

10) Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον 7ος ὅρος εἶναι ὁ 1 000 καὶ 23ος ὁ -128. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 1ος ὅρος καὶ ἡ διαφορὰ τῆς προόδου.

11) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος, εἰς τὴν ὁποίαν 9ος ὅρος εἶναι ὁ $15-3\sqrt{3}$ καὶ ὁ 20ος ὁ $26-\frac{19\sqrt{3}}{2}$.

12) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα: α) Τῶν 60 πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν. β) Τῶν 28 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ 7. γ) Τῶν πολλαπλασίων τοῦ 13, ποὺ περιέχονται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ 500. δ) Τῶν πολλαπλασίων τοῦ 15, ποὺ εἶναι μικρότερα τοῦ 1 000.

13) Ποίας ἀριθμητικῆς προόδου μὲ διαφορὰν $\delta=7$ τὸ ἄθροισμα τῶν 12 πρώτων ὅρων της εἶναι τὸ 0;

14) Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον εἶναι $\alpha=11$ καὶ $\Sigma_{17}=867$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

15) Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον εἶναι $\alpha_{12}=0$ καὶ $\alpha_{20}=72$. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ Σ_{35}.

16) Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 33 νὰ παρεμβληθοῦν 7 ἀριθμοί, ὥστε μαζὶ μὲ τοὺς 15 καὶ 33 νὰ ἀποτελοῦν 9 ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου.

17) Τὸν πρῶτον μῆνα τῆς λειτουργίας μιᾶς ἐπιχειρήσεως τὰ ἔξοδά της ἦσαν 295 000 καὶ τὰ ἔσοδα 75 000. Κάθε μῆνα τὰ ἔξοδα ἐλατ-

τώνονται κατὰ 4000 καὶ τὰ ἔσοδα αὐξάνονται κατὰ 7 000. Ποῖον μῆνα ἀπὸ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως τὰ ἔσοδα θὰ εἶναι ἴσα μὲ τὰ ἔξοδα;

18) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὰ μέτρα των εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ ἡ μικροτέρα ἀπὸ αὐτὰς εἶναι 30^0.

19) Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ ἔχουν ἄθροισμα 30 καὶ γινόμενον 910. Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ἀριθμούς. (Ἂν παραστήσωμεν τὸ μεσαῖον μὲ x καὶ τὴν διαφορὰν δ μὲ ω, οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $x-\omega$, x, $x+\omega$, καὶ αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν x καὶ ω θὰ εἶναι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r} x-\omega+x+x+\omega=30 \\ (x-\omega)\cdot x(x+\omega)=910 \end{array}\right\}$$

20) Τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ ἔχουν ἄθροισμα μὲν 2, γινόμενον δὲ 40. Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ἀριθμούς.

Ἐπίλυσις. Παριστάνομεν τὴν διαφορὰν δ τῆς προόδου μὲ $2y$ καὶ τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς μὲ τὰς ἐκφράσεις $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3\nu$.

Αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν x καὶ y εἶναι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+x-y+x+y+x+3y=\ 2 \\ (x-3y)(x-y)(x+y)(x+3x)=40. \end{array}\right\}$$

Ἐπιλύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν δύο λύσεις, τάς:

$$\left(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{2}\right) \text{ καὶ } \left(x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{3}{2}\right).$$

Ἀπὸ τὴν πρώτην λύσιν προκύπτουν οἱ ἀριθμοί: $(-4, -1, 2, 5)$ καὶ ἀπὸ τὴν δευτέραν οἱ: $(4, 1, -2, -5)$.

21) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα:

$$\sum_1^\nu \nu^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(\nu-1)^2+\nu^2$$

τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν·

Ἐπίλυσις. Χρησιμοποιοῦμεν τὴν σχέσιν:

$$(\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1,$$

εἰς τὴν ὁποίαν θέτομεν διαδοχικῶς $\nu=0$, $\nu=1$, $\nu=2, \ldots$, $\nu=\nu$.

Θὰ ἔχωμεν:
$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ (1+1)^3 &= 1^3+3\times 1^2+3\times 1+1 \\ (2+1)^3 &= 2^3+3\times 2^2+3\times 2+1 \\ (3+1)^3 &= 3^3+3\times 3^2+3\times 3+1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ (\nu+1)^3 &= \nu^3+3\times \nu^2+3\times \nu+1. \end{aligned}$$

Προσθέτομεν τώρα κατὰ μέλη τὰς $\nu+1$ αὐτὰς ἰσότητας:
$$1^3+(1+1)^3+(2+1)^3+\dots+(\nu+1)^3$$
$$=\sum_1^\nu \nu^3+3\sum_1^\nu \nu^2+3\sum_1^\nu \nu+(\nu+1)\cdot 1$$

ἢ $$\sum_1^\nu\cdot \nu^3+(\nu+1)^3=\sum_1^\nu \nu^3+3\cdot\left(\sum_1^\nu \nu^2\right)+3\left(\sum_1^\nu \nu\right)+(\nu+1).$$

Ἡ τελευταία ἰσότης ἁπλοποιουμένη γίνεται:
$$(\nu+1)^3=3\cdot\sum_1^\nu \nu^2+3\,\frac{\nu(\nu+1)}{2}+(\nu+1).$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν:
$$3\sum_1^\nu \nu^2=(\nu+1)^3-\frac{3\nu(\nu+1)}{2}-(\nu+1)=$$
$$(\nu+1)\cdot\left[(\nu+1)^2-\frac{3\nu}{2}-1\right] \quad ἢ$$
$$3\sum_1^\nu \nu^2 t=\frac{(\nu+1)\nu(2\nu+1)}{2} \quad ἢ \quad \sum_1^\nu \nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

22) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα:
$$\sum_1^\nu \nu^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3$$
$$\sum_1^\nu \nu^4 = 1^4+2^4+3^4+\dots+\nu^4.$$

[Χρησιμοποιοῦμεν ἀντιστοίχως τὰς ταυτότητας:
$$(\nu+1)^4=\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$$
$$(\nu+1)^5=\nu^5+5\nu^4+10\nu^3+10\nu^2+5\nu+1$$
καὶ ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

Θὰ προκύψῃ:
$$\sum_1^\nu \nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2,$$

$$\sum_{1}^{\nu} \nu^4 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{30}(3\nu^2+3\nu-1)].$$

16·5 Γεωμετρικαὶ πρόοδοι.

I. Ἂς γράψωμεν κατὰ σειρὰν αὐξάνοντος μεγέθους τὰς ἀκεραίας θετικὰς δυνάμεις τοῦ 5:

$$5^1,\ 5^2,\ 5^3, \ldots,\ 5^{\nu-1},\ 5^\nu,\ 5^{\nu+1}, \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀποτελοῦν ἀκολουθίαν μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ὁ λόγος $\gamma_\nu : \gamma_{\nu-1}$ οἱουδήποτε ὅρου της πρὸς τὸν προηγούμενόν του εἶναι πάντοτε ὁ ἀριθμὸς 5. Ἀκολουθίαι μὲ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν λέγονται *γεωμετρικαὶ πρόοδοι.*

Ὁρισμός. Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu, \ldots$ (μὲ $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \neq 0$) *λέγεται γεωμετρικὴ πρόοδος, ὅταν ὁ λόγος* $\gamma_\nu : \gamma_{\nu-1}$ *δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων της ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.*

Τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, ποὺ εἶναι $\neq 0$ (ἐπειδὴ $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \neq 0$), καλοῦμεν *λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου* καὶ τὸν παριστάνομεν συνήθως μὲ λ.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἕπεται ὅτι κάθε ὅρος της γ_ν προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ προηγουμένου του $\gamma_{\nu-1}$ ἐπὶ τὸν λόγον λ:

$$\gamma_\nu = \gamma_{\nu-1} \cdot \lambda.$$

Συνεπῶς ἐὰν $|\lambda| > 1$, τότε οἱ ὅροι τῆς προόδου βαίνουν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται *ἀπολύτως αὔξουσα.* Ἐὰν τουναντίον $|\lambda| < 1$, τότε οἱ ὅροι τῆς προόδου βαίνουν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐλαττούμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται *ἀπολύτως φθίνουσα.*

II. *Σχέσεις μεταξὺ τῶν* $\gamma_1, \gamma_\nu, \lambda, \nu$.

Ὅπως εἴδαμεν εἰς κάθε γεωμετρικὴν πρόοδον εἶναι:

$$\gamma_2 = \gamma_1 \cdot \lambda,\ \gamma_3 = \gamma_2 \cdot \lambda = \gamma_1 \cdot \lambda^2,\ \gamma_4 = \gamma_3 \cdot \lambda = \gamma_1 \cdot \lambda^3, \ldots$$

Συνεπῶς θὰ εἶναι καί:

$$\gamma_\nu = \gamma_1 \cdot \lambda^{\nu-1}. \qquad (1)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι μία ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν γ_ν, γ_1, λ, ν, ἡ ὁποία, ὅταν μᾶς δοθοῦν αἱ τιμαὶ τριῶν ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς αὐτάς, μᾶς προσδιορίζει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς τετάρτης μεταβλητῆς ὡς ἀκολούθως:

1. Μᾶς δίδονται αἱ τιμαὶ τῶν γ_ν ($\neq 0$), λ ($\neq 0$), ν (φυσικὸς ἀριθμὸς) καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ γ_1. Ἐπιλύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς γ_1. Προκύπτει ἡ λύσις $\gamma_1 = \frac{\gamma_\nu}{\lambda^{\nu-1}}$, ἡ ὁποία εἶναι πάντοτε δεκτή.

2. Μᾶς δίδονται αἱ τιμαὶ τῶν γ_ν ($\neq 0$), γ_1 ($\neq 0$), ν (φυσικὸς ἀριθμὸς) καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ λ. Ἀπὸ τὴν (1) προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις:

$$\lambda^{\nu-1} = \frac{\gamma_\nu}{\gamma}. \qquad (2)$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις: α) Ὅταν $\frac{\gamma_\nu}{\gamma_1} > 0$, δηλαδὴ γ_ν, γ_1 ὁμόσημοι, τότε, ἂν μὲν ($\nu-1$) ἄρτιος, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς λύσεις, τὰς τιμὰς $\lambda = \pm\sqrt[\nu-1]{\frac{\gamma_\nu}{\gamma_1}}$, ἂν ὅμως ($\nu - 1$) εἶναι περιττός, ἔχει μίαν πραγματικὴν λύσιν, τὴν $\lambda = \sqrt[\nu-1]{\frac{\gamma_\nu}{\gamma_1}}$. β) Ὅταν $\frac{\gamma_\nu}{\gamma_1} < 0$, δηλαδὴ γ_ν, γ_1 ἑτερόσημοι, τότε, ἂν μὲν ($\nu - 1$) περιττός, ἡ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν τὴν $\lambda = \sqrt[\nu-1]{\frac{\gamma_\nu}{\nu_1}}$. Ἂν ὅμως ($\nu - 1$) ἄρτιος, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν πραγματικὸν ἀριθμόν. Αὐτὸ συμβαίνει, ὅταν οἱ γ_ν, γ_1 δὲν εἶναι ἀντιστοίχως νυοστὸς καὶ πρῶτος ὅρος μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου.

3. Μᾶς δίδονται αἱ τιμαὶ τῶν γ_ν, γ_1, λ, ($\neq 0$) καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ν, ποὺ πρέπει νὰ εἶναι φυσικὸς ἀριθμός.

Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) $\lambda^{\nu-1} = \frac{\gamma_\nu}{\gamma_1}$ μὲ ἄγνωστον τὸν ν.

Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν ν = φυσικὸς ἀριθμός, πρέπει, καὶ ἀρκεῖ, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\gamma_\nu}{\gamma_1}$ νὰ εἶναι δύναμις τοῦ λ, μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον $\geqslant 0$. Ἂν λοιπὸν εἶναι $\frac{\gamma_\nu}{\gamma_1} = \lambda^\kappa$, ὅπου κ ἀκέραιος $\geqslant 0$, τότε θὰ ἔχωμεν $\lambda^\kappa = \lambda^{\nu-1}$ ἢ $\kappa = \nu - 1$ ἢ $\nu = \kappa + 1$. Ἂν ὁ $\frac{\gamma_\nu}{\gamma_1}$ δὲν εἶναι δύναμις τοῦ λ μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον $\geqslant 0$, τότε ἡ ἐξίσωσις (2) δὲν ἔχει λύσιν φυσικὸν ἀριθμόν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς γ_ν δὲν δύναται νὰ εἶναι ὅρος γεωμετρικῆς προόδου μὲ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γ_1 καὶ λ.

Σημείωσις. Ἡ ἐξίσωσις $\lambda^{\nu-1} = \frac{\gamma_\nu}{\gamma_1}$, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωστος ἐμφανίζεται εἰς τὸν ἐκθέτην ἑνὸς ὅρου της, λέγεται *ἐκθετικὴ ἐξίσωσις*.

Παραδείγματα.

1ον) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον $\gamma_1 = 2$ καὶ $\gamma_{10} = 162\sqrt{3}$. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λόγος λ τῆς προόδου.

Ἐπίλυσις. Εἰσάγομεν τὰς τιμὰς $\gamma_1 = 2$, $\gamma_{10} = 162\sqrt{3}$, $\nu = 10$ εἰς τὸν τύπον $\lambda^{\nu-1} = \frac{\gamma_\nu}{\gamma_1}$. Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\lambda^{10-1} = \frac{162\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \lambda^9 = 81\sqrt{3},$$

ἡ ὁποία ἔχει ὡς λύσιν τὴν τιμήν:

$$\lambda = \sqrt[9]{81\sqrt{3}} = \sqrt[9]{3^4 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt[9]{(\sqrt{3})^8 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$\sqrt[9]{(\sqrt{3})^9} = \sqrt{3}.$$

Ὥστε λόγος τῆς δοθείσης προόδου εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{3}$.

2ον) Εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον 5, $5\sqrt[3]{2}$, $5\sqrt[3]{4}$, 10, $10\sqrt[3]{2}$, ... ποίαν σειρὰν ν ἔχει ὁ ὅρος 160;

Ἐπίλυσις. Προσδιορίζομεν πρῶτον τὸν λ: $\lambda = 5\sqrt[3]{2} : 5 = \sqrt[3]{2}$.

Εἰσάγομεν κατόπιν τὰς τιμὰς $\alpha_1 = 5$, $\lambda = \sqrt[3]{2}$, $\alpha_\nu = 160$, εἰς τὸν τύπον $\gamma_\nu = \gamma_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$. Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$160 = 5(\sqrt[3]{2})^{\nu-1} \Leftrightarrow 32 = (\sqrt[3]{2})^{\nu-1}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 32 ἐκφράζεται ὡς δύναμις τοῦ $\sqrt[3]{2}$, ἡ $32 = 2^6 = [(\sqrt[3]{2})^3]^6 = (\sqrt[3]{2})^{18}$.

Εἰσάγομεν τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν τοῦ 32 εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν. Θὰ ἔχωμεν:

$$32 = (\sqrt[3]{2})^{\nu-1} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2})^{18} = (\sqrt[3]{2})^{\nu-1}.$$

Ἀπὸ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν προκύπτει ὅτι $18 = \nu - 1$ ἢ $\nu = 19$.
Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 160 εἶναι ὁ 19ος ὅρος τῆς δοθείσης προόδου.

16·6 Παρεμβολὴ ὅρων εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Πρόβλημα. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 48. Νὰ εὑρεθοῦν ἑπτὰ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν 3 καὶ 48, νὰ ἀποτελοῦν μαζὶ μὲ αὐτοὺς ἐννέα διαδοχικοὺς ὅρους μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

Ἐπίλυσις. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ λ τῆς προόδου, ποὺ ἔχει $\gamma_1 = 3$, $\gamma_9 = 48$.

Εἰς τὸν τύπον $\lambda^{\nu-1} = \dfrac{\gamma_\nu}{\gamma_1}$ εἰσάγομεν τὰς τιμὰς $\gamma_\nu = 48$, $\gamma_1 = 3$, $\nu = 9$.

Προκύπτει ἔτσι ἡ ἐξίσωσις $\lambda^8 = 16$, ποὺ ἔχει 2 πραγματικὰς λύσεις, τοὺς ἀριθμοὺς $\pm\sqrt[8]{16} = \pm\sqrt[8]{2^4} = \pm\sqrt{2}$.

Διὰ $\lambda = +\sqrt{2}$ λαμβάνομεν τὴν ἑπτάδα τῶν ἀριθμῶν $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$, 12, $12\sqrt{2}$, 24, $24\sqrt{2}$.

Διὰ $\lambda = -\sqrt{2}$ τὴν ἑπτάδα τῶν ἀριθμῶν $-3\sqrt{2}$, 6, $-6\sqrt{2}$, 12, $-12\sqrt{2}$, 24, $-24\sqrt{2}$.

Καὶ αἱ δύο ἑπτάδες γίνονται δεκταὶ ὡς λύσεις τοῦ προβλήματος.

16·7 Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

I. *Ἄθροισμα S_ν τῶν ν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον $\lambda \neq 1$.*

Ἔστωσαν $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\nu$ οἱ διδόμενοι διαδοχικοὶ ὅροι. Ἔχομεν:

$$S_\nu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{\nu-1} + \gamma_\nu . \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ λ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1)

$$\lambda S_\nu = \gamma_1 \cdot \lambda + \gamma_2 \cdot \lambda + \gamma_3 \cdot \lambda + \cdots + \gamma_{\nu-1} \cdot \lambda + \gamma_\nu \cdot \lambda.$$

Ἡ ἰσότης αὐτή, ἐπειδὴ $\gamma_1 \cdot \lambda = \gamma_2, \gamma_2 \cdot \lambda = \gamma_3, \ldots, \gamma_{\nu-1} \cdot \lambda = \gamma_\nu$, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\lambda S_\nu = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_\nu + \gamma_\nu \cdot \lambda. \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τὴν (2).

$$\lambda S_\nu - S_\nu = \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_\nu + \gamma_\nu \cdot \lambda - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_\nu$$

ἢ $\lambda S_\nu - S_\nu = \gamma_\nu \cdot \lambda - \gamma_1$ ἢ $S_\nu (\lambda - 1) = \gamma_\nu \cdot \lambda - \gamma_1$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα προκύπτει ὁ τύπος:

$$S_\nu = \frac{\gamma_\nu \cdot \lambda - \gamma_1}{\lambda - 1}. \qquad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν ἀντικαταστήσωμεν τὸν γ_ν μὲ τὴν ἔκφρασίν του $\gamma_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, θὰ ἔχωμεν:

$$S_\nu = \frac{\gamma_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \cdot \lambda - \gamma_1}{\lambda - 1} = \frac{\gamma_1 \cdot \lambda^\nu - \gamma_1}{\lambda - 1} \text{ ἢ } S_\nu = \frac{\gamma_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}. \qquad (4)$$

Ἐφαρμογή.

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων θετικῶν δυνάμεων τοῦ 2.

Αἱ δέκα πρῶται θετικαὶ δυνάμεις τοῦ 2 εἶναι οἱ δέκα πρῶτοι ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου $2, 2^2, 2^3, \ldots$. Ἔχομεν λοιπὸν $\gamma_1 = 2, \lambda = 2, \gamma_{10} = 2^{10}$ καὶ ἀπὸ τὸν τύπον (3) $S_{10} = \frac{2^{10} \cdot 2 - 2}{2 - 1} = \frac{2^{11} - 2}{1} = 2\,054.$

Παρατήρησις. Διὰ $\lambda = 1$ οἱ διαδοχικοὶ ὅροι γίνονται ἴσοι:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_4$$

καὶ τὸ ἄθροισμά των S εἶναι: $S = \nu \cdot \gamma$.

ΙΙ. *Ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ὅταν ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.*

Ὁ τύπος (4) $S_\nu = \dfrac{\gamma_1(\lambda_\nu - 1)}{\lambda - 1}$ μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$S_\nu = \frac{\gamma_1 \cdot \lambda^\nu}{\lambda - 1} - \frac{\gamma_1}{\lambda - 1} = \frac{\gamma_1 \cdot \lambda^\nu}{\lambda - 1} + \frac{\gamma_1}{1 - \lambda}$$

$$\text{ἢ } S_\nu = \frac{\gamma_1}{1 - \lambda} + \frac{\gamma_1 \cdot \lambda^\nu}{\lambda - 1}.$$

Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν προκύπτει ὅτι: $S_\nu - \dfrac{\gamma_1}{1 - \lambda} = \dfrac{\gamma_1 \cdot \lambda^\nu}{\lambda - 1}.$

Ὅταν ὅμως τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, τὸ κλάσμα $\dfrac{\gamma_1 \cdot \lambda^\nu}{\lambda - 1}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, τὸ ὅριον τῆς διαφορᾶς $S_\nu - \dfrac{\gamma_1}{1 - \lambda}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Ἄρα (παράγρ. 13·11):

$$\text{διὰ } \nu \to \infty, \text{ ὅριον } S_\nu = \frac{\gamma_1}{1 - \lambda}.$$

Ὁρισμός. *Καλοῦμεν ἄθροισμα μιᾶς ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν $S = \dfrac{\gamma_1}{1-\lambda}$, ὅπου $|\lambda| < 1$ ὁ λόγος τῆς προόδου.*

Ἐφαρμογαί.

1) *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα S τῆς γεωμετρικῆς προόδου* $1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{8}{27}, \ldots$

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον:

$S = \dfrac{\gamma_1}{1-\lambda}$. Ἔχομεν $\gamma_1 = 1$, $\lambda = \left(\dfrac{-2}{3} : 1\right) = -\dfrac{2}{3}$ καὶ

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}.$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{5}$.

2) *Νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος ὁ περιοδικὸς δεκαδικὸς ἀριθμὸς $A=0{,}315\ 315\ 315\ldots$*

Ὁ δεκαδικὸς αὐτὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$A=0{,}315+0{,}000\,315+0{,}000\,000\,315+\ldots \quad \text{ἢ}$$

$$A=0{,}315+0{,}315\times 0{,}001+315\times 0{,}001^2+\ldots$$

Ἑπομένως εἶναι τὸ ἄθροισμα φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου μὲ $\gamma_1=0{,}315$ καὶ $\lambda=0{,}001$.

Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς ἀπὸ τὸν τύπον $S=\frac{\gamma_1}{1-\lambda}$:

$$A=S=\frac{0{,}315}{1-0{,}001}=\frac{0{,}315}{0{,}999}=\frac{315}{999}=\frac{35}{111}.$$

Ὥστε: $0{,}315\ 315\ 315\ldots=\frac{35}{111}$.

16·8 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ α) Ὁ γ_8 τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \ldots$ β) Ὁ γ_7 τῆς $135, -45, 15, \ldots$ γ) Ὁ γ_9 τῆς $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \ldots$ δ) Ὁ γ_7 τῆς $\sqrt{3}+2,\ 1,\ 2-\sqrt{3}, \ldots$

2) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ $\gamma_6=1\,215$ καὶ ὁ $\gamma_7=3\,645$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λ καὶ ὁ γ_1.

3) Νὰ ἐξετάσετε ἂν κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{16}, \frac{1}{20}$, καὶ $\frac{1}{32}$ εἶναι ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου: $\sqrt{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}, \ldots$, καί, ἂν εἶναι, ποίαν σειρὰν ἔχει εἰς τὴν γεωμετρικὴν αὐτὴν πρόοδον.

4) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ $\gamma_1=4$ καὶ ὁ $\gamma_6=12\,500$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου.

5) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ $\gamma_2 = 6$ καὶ ὁ $\gamma_9 = 384$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ_1 καὶ ὁ λ.

6) Νὰ εὑρεθοῦν 5 ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν -3 καὶ -192, νὰ ἀποτελοῦν, μαζὶ μὲ τοὺς -3 καὶ -192, 7 διαδοχικοὺς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου.

7) Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 3 νὰ παρεμβληθοῦν 4 γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι, ὥστε μαζὶ μὲ τοὺς 1 καὶ 3 νὰ ἀποτελοῦν 6 διαδοχικοὺς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου.

8) Νὰ δείξετε ὅτι, ἐὰν μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου παρεμβάλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων ὅρων, ἡ προκύπτουσα ἀκολουθία εἶναι πάλιν γεωμετρικὴ πρόοδος.

9) Νὰ δείξετε ὅτι, ἂν α, β, γ εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, τότε αἱ α, β, γ θὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

10) Νὰ δείξετε ὅτι, ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{\nu-2}, \gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, τότε θὰ ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις $\gamma_1 \cdot \gamma_\nu = \gamma_2 \cdot \gamma_{\nu-1} = \gamma_3 \cdot \gamma_{\nu-2} = \ldots$

11) Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, νὰ δείξετε ὅτι ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν:

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2.$$

12) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

α) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{12}$.

β) $(-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + \ldots + (-3)^8$.

γ) $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{5}{128}$.

13) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα ἑκάστης ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἀπολύτως φθινούσας γεωμετρικὰς προόδους:

α) $8, 4, 2, \ldots$, β) $3, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \ldots$, γ) $-3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

14) Νὰ ἐκφρασθοῦν ὑπὸ μορφὴν κλάσματος ἢ μικτοῦ οἱ ἀκόλουθοι δεκαδικοὶ περιοδικοὶ ἀριθμοί: 0,36 36 36..., 0,122 1 122 1 122 1... 27,27 27 27..., 3,18 18 18..., 462,777....

15) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα μὲ ἀπείρους ὅρους:

α) $\frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^3} \cdots$

β) $x+y+\frac{y^2}{x}+\frac{y^3}{x^2}+\ldots$ (διὰ $x>y$).

γ) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}+\ldots$

16) Μία ἀριθμητικὴ πρόοδος $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ καὶ μία γεωμετρικὴ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ ἔχουν: $\alpha_1=\gamma_1$, $\alpha_2=\gamma_2$, $\alpha_4-\alpha_2=10$, $\gamma_4-\gamma_2=30$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο πρόοδοι.

17) Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ x_1, x_2, x_3, x_4, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι: α) Οἱ x_1, x_2, x_3 εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. β) Οἱ x_1, x_3, x_4 εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου. γ) Ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x_1+x_3=10$, $x_4-x_1=14$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 17

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

17·1 Δυνάμεις μὲ ἀσύμμετρον ἐκθέτην.

Εἰς τὸν Τόμον Α΄ (παράγρ. 7·15) ὡρίσαμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου α^{μ} διὰ $\alpha > 0$ καὶ μ ἀκέραιον ἢ κλάσμα. Τώρα θὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου α^{μ} διὰ $\alpha > 0$ καὶ μ ἀσύμμετρον.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}414\,21,\ldots, \qquad (1)$$

ποὺ ἔχει ὅρους τὰς κατ᾽ἔλλειψιν διαδοχικὰς προσεγγιστικὰς τιμὰς τοῦ ἀσυμμέτρου $\sqrt{2}$ (Α΄ Τόμος, παράγρ. 7·17). Ὅριον τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι ὁ $\sqrt{2} = 1{,}414\,21\ldots$

Ἂς θεωρήσωμεν καὶ τὴν ἀκολουθίαν:

$$5^{1},\ 5^{1{,}4},\ 5^{1{,}41},\ 5^{1{,}414},\ 5^{1{,}4142},\ 4^{1{,}414\,21},\ldots, \qquad (2)$$

ποὺ προκύπτει, ὅταν λάβωμεν ὡς ἐκθέτας τοῦ 5 τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας (1). Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῆς (1) τείνουν πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (2) τείνουν πρὸς ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν. Τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καλοῦμεν *δύναμιν* τοῦ 5 μὲ ἐκθέτην $\sqrt{2}$ καὶ γράφομεν συμβολικῶς: $5^{\sqrt{2}}$.

Γενικῶς: Ἂν $\alpha > 0$ καὶ $\mu = x_0, x_1x_2x_3\ldots x_\nu\ldots$ ἕνας ἀσύμμετρος ἀριθμὸς μὲ ἀκέραιον μέρος x_0 καὶ διαδοχικὰ δεκαδικὰ ψηφία $x_1, x_2, x_3,\ldots$, τότε ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha^{x_0},\ \alpha^{x_0,x_1},\ \alpha^{x_0,x_1x_2},\ldots,\ \alpha^{x_0,\,x_1x_2\ldots x_\nu},\ldots \qquad (3)$$

ἔχει ὅριον ἕνα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν μυοστὴν δύναμιν τοῦ α καὶ γράφομεν συμβολικῶς α^{μ}. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (3) εἶναι προσεγγιστικαὶ τιμαὶ τοῦ α^{μ}. Εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀντικαθιστῶμεν τὸν α^{μ} μὲ τὴν προσεγγιστικὴν τιμήν, ἡ ὁποία ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν προσέγγισιν, ποὺ ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἔχωμεν.

17·2 Λογάριθμοι.

Ἔστω β ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς $\neq 1$, α ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ $\beta^\alpha = A$.

Τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α καλοῦμεν *λογάριθμον* τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν τὸν β καὶ τὸν γράφομεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς: $\alpha = \lambda o\gamma_\beta A$. Π.χ. $2 = \lambda o\gamma_3 9$, διότι $3^2 = 9$, $\lambda o\gamma_2 32 = 5$, διότι $2^5 = 32$, $\lambda o\gamma_{10} 1\,000 = 3$, διότι $10^3 = 1000$, $\lambda o\gamma_{27} 3 = 0{,}333\ldots$, διότι $27^{0{,}333\ldots} = 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$, $\lambda o\gamma_{16} 2 = 0{,}25$, διότι $16^{0{,}25} = 16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$, $\lambda o\gamma_{10} 0{,}000\,1 = -4$, διότι $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}000\,1$ κλπ.

Ὁρισμός. Λογάριθμος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν τὸν θετικὸν β καλεῖται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ β, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ Α.

$$\beta^{\lambda o\gamma \alpha} = A.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν προκύπτει ὅτι ὡς πρὸς οἱανδήποτε βάσιν $\beta > 0$ θὰ ἔχωμεν:

$$\lambda o\gamma_\beta 1 = 0 \text{ καὶ } \lambda o\gamma_\beta \beta = 1, \text{ διότι } \beta^0 = 1 \text{ καὶ } \beta^1 = \beta.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν μᾶς δοθοῦν οἱ ἀριθμοὶ β καὶ Α, ὑπάρχει πάντοτε ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, ἐκθέτης x, σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος, ὁ ὁποῖος ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν:

$$\beta^x = A.$$

Ἑπομένως κάθε θετικὸς ἀριθμὸς Α ἔχει λογάριθμον ὡς πρὸς βάσιν οἱονδήποτε θετικὸν $\beta \neq 1$.

Λογαρίθμους τῶν μὴ θετικῶν ἀριθμῶν δὲν ὁρίζομεν. Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους, θὰ θεωροῦνται θετικοί.

Κατὰ τοὺς ὑπολογισμούς, ὅταν ὁ λογάριθμος x εἶναι ἀσύμμετρος, θὰ τὸν ἀντικαθιστῶμεν μὲ καταλλήλους προσεγγιστικὰς τιμάς, πού μᾶς δίδουν εἰδικοὶ πίνακες λογαρίθμων. Οἱ πίνακες αὐτοὶ περιέχουν τὰς προσεγγιστικὰς τιμὰς τῶν λογαρίθμων, συνήθως εἴτε ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10 (*κοινοὶ λογάριθμοι*), εἴτε ὡς πρὸς βάσιν τὸν (ἀσύμμετρον) ἀριθμὸν e = 2, 718 281 8 . . . (*φυσικοὶ λογάριθμοι*).

17·3 Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

I. *Ὅταν οἱ λογάριθμοι λ καὶ λ′ δύο ἀριθμῶν Α καὶ Α′ ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν β εἶναι ἴσοι, τότε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.*

Πράγματι $\lambda = \lambda' \Rightarrow \beta^{\lambda} = \beta'^{\lambda} \Rightarrow A = A'$.

II. *Ὅταν ἡ βάσις β τῶν λογαρίθμων εἶναι > 1, τότε οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουν θετικοὺς λογαρίθμους, ἐνῶ οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους.*

Διότι ἂν $\beta > 1$, τότε εἶναι

$$\beta^{\lambda} > 1 \quad \text{διὰ} \quad \lambda > 0$$
$$\beta^{\lambda} = 1 \quad \text{διὰ} \quad \lambda = 0$$
$$\beta^{\lambda} < 1 \quad \text{διὰ} \quad \lambda < 0.$$

III. *Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων.*

Διότι ἂν A_1, A_2, A_3 εἶναι τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ λ_1, λ_2, λ_3 ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν β, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας:

$$A_1 = \beta^{\lambda_1},\ A_2 = \beta^{\lambda_2},\ A_3 = \beta^{\lambda_3},\ A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \beta^{\lambda_1} \cdot \beta^{\lambda_2} \cdot \beta^{\lambda_3} =$$
$$\beta^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \text{ ἢ } A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \beta^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα ἕπεται ὅτι:

$$\lambda o\gamma_{\beta}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda o\gamma_{\beta} A_1 + \lambda o\gamma_{\beta} A_2 + \lambda o\gamma_{\beta} A_3.$$

IV. *Ὁ λογάριθμος ἑνὸς κλάσματος ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ μεῖον τὸν λογάριθμον τοῦ παρονομαστοῦ.*

Διότι ἂν A_1, A_2 εἶναι δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ λ_1, λ_2 ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν β, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$A_1 = \beta^{\lambda_1},\ A_2 = \beta^{\lambda_2}.$$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{\beta^{\lambda_1}}{\beta^{\lambda_2}} \text{ ἢ } \frac{A_1}{A_2}=\beta^{\lambda_1-\lambda_2}.$$

'Από τὴν τελευταίαν ἰσότητα ἕπεται ὅτι:

$$\lambda o\gamma_\beta\left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\lambda_1-\lambda_2=\lambda o\gamma_\beta A_1-\lambda o\gamma_\beta A_2.$$

V. *Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως θετικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως.*

Διότι ἂν $\lambda o\gamma A=\lambda$ καὶ A^μ μία δύναμις τοῦ A, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$A=\beta^\lambda,\quad A^\mu=(\beta^\lambda)^\mu,\quad A^\mu=\beta^{\mu\cdot\lambda}$$

$$\lambda o\gamma_\beta A^\mu=\mu\cdot\lambda=\mu\cdot\lambda o\gamma_\beta A.$$

VI. *Ὁ λογάριθμος τῆς νυοστῆς ρίζης ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δείκτου.*

Διότι $\sqrt[\nu]{A}=A^{1/\nu}$ καὶ $\lambda o\gamma_\beta A^{1/\nu}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma_\beta A=\frac{\lambda o\gamma_\beta A}{\nu}$.

17·4 'Ασκήσεις.

1) Ποῖοι οἱ $\lambda o\gamma_2 4$, $\lambda o\gamma_2 8$, $\lambda o\gamma_2 16$, $\lambda o\gamma_2 0{,}5$, $\lambda o\gamma_2 0{,}25$;

2) Ποῖοι ἀριθμοὶ ἔχουν λογάριθμον, ὡς πρὸς βάσιν τὸν 4, τοὺς ἀριθμούς: ± 1, ± 2, $\pm 0{,}5$, $\pm\frac{1}{2}$;

3) Ποῖοι οἱ κοινοὶ λογάριθμοι (ὡς πρὸς βάσιν 10) τῶν ἀριθμῶν: 100, 1 000, 1, 0,1, 0,01, $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{100}$;

4) 'Ως πρὸς βάσιν 10 εἶναι: $\lambda o\gamma 2=0{,}301\,03$ καὶ $\lambda o\gamma 3=0{,}477\,12$.

'Εφαρμόζοντες τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων νὰ ὑπολογίσετε τοὺς λογαρίθμους ὡς πρὸς βάσιν 10 τῶν ἀριθμῶν:

α) 2, 4, 8, 16, 5, 20, 25, 40, 50.

β) 0,2, 0,02, 0,4, 0,5, 0,8, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{8}$.

γ) 3, 9, 27, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{9}$, $\sqrt[4]{27}$.

δ) 6, 12, 18, 0,6, 1,2, 0,12.

5) Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα νὰ ὁρίσετε βασικὸν διάνυσμα διὰ τὸν ἄξονα τῶν χ μὲ ἀπόλυτον μέτρον 2 cm καὶ διὰ τὸν ἄξονα τῶν ψ μὲ ἀπόλυτον μέτρον 10 cm. Κατόπιν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐξαγομένων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ κατασκευάσετε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\psi = \lambda o\gamma_{10}\, \chi$ διὰ $0{,}1 < \chi < 10$.

17·5 Δεκαδικοὶ λογάριθμοι.

Εἰς τὰς παραγράφους, ποὺ ἀκολουθοῦν, θὰ μελετήσωμεν τὸν τρόπον γραφῆς καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10, πού, ὅπως εἴπαμεν, λέγονται *κοινοὶ* ἢ *δεκαδικοὶ λογάριθμοι*. Θὰ μάθωμεν ἐπίσης πῶς θὰ ὑπολογίζωμεν αὐτοὺς μὲ τὴν βοήθειαν εἰδικῶν πινάκων. Εἰς τὸ ἑξῆς, λέγοντες « λογάριθμος τοῦ x », χωρὶς νὰ ἀναφέρωμεν τὴν βάσιν, καὶ γράφοντες ἁπλῶς λογx, χωρὶς τὴν ἔνδειξιν τῆς βάσεως, θὰ ἐννοοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ x ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10.

I. *Χαρακτηριστικὸν δεκαδικοῦ λογαρίθμου.*

Ἔστω :

α) $\lambda o\gamma x \simeq 3{,}456\,27$.

Ἔχομεν $3 \leqslant \lambda o\gamma x < 4$.

Ὁ 3 καλεῖται *χαρακτηριστικὸν* ἢ *ἀκέραιον μέρος* τοῦ λογx.

β) $\lambda o\gamma x \simeq 0{,}813\,47$.

Ἔχομεν $0 \leqslant \lambda o\gamma x < 1$.

Τὸ 0 καλεῖται χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογx.

γ) $\lambda o\gamma x \simeq -4{,}627\,38$.

Ἔχομεν $-5 \leqslant \lambda o\gamma x < -4$.

Ὁ -5 καλεῖται χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογx.

δ) $\lambda o\gamma x \simeq -0{,}234\,56$.

Ἔχομεν $-1 \leqslant \lambda o\gamma x < 0$.

Ὁ -1 καλεῖται χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογx.

Γενικῶς *καλοῦμεν χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος ἑνὸς λογαρίθμου τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ λογαρίθμου.*

II. *Δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου.*

Ἔστω:

α) $\lambda o \gamma x \simeq 6{,}839\,52$.

Χαρακτηριστικὸν τοῦ $\lambda o \gamma x$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 6. Ἡ διαφορὰ $6{,}839\,52 - 6 = 0{,}839\,52$ λέγεται *δεκαδικὸν μέρος* τοῦ $\lambda o \gamma x$.

β) $\lambda o \gamma x \simeq -3{,}412\,13$.

Χαρακτηριστικὸν τοῦ $\lambda o \gamma x$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς -4. Ἡ διαφορὰ $-3{,}412\,13 - (-4) = 4 - 3{,}412\,13 = 0{,}587\,87$ λέγεται *δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογx.*

γ) $\lambda o \gamma\, x \simeq 0{,}713\,45$.

Χαρακτηριστικὸν τοῦ $\lambda o \gamma x$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς -1. Ἡ διαφορὰ $-0{,}713\,45 - (-1) = 1 - 0{,}713\,45 = 0{,}286\,55$ καλεῖται *δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογx.*

Γενικῶς *καλοῦμεν δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου τὸν ἀριθμόν, ποὺ προκύπτει, ἂν ἀπὸ τὸν λογάριθμον ἀφαιρέσωμεν τὸ χαρακτηριστικόν του.*

III. *Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.*

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ χαρακτηριστικοῦ καὶ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἑνὸς λογαρίθμου συμπεραίνομεν ὅτι:

1ον) Τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν εἶναι ποτὲ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

2ον) Κάθε λογάριθμος εἶναι ἴσος μὲ τὸ (ἀλγεβρικὸν) ἄθροισμα τοῦ χαρακτηριστικοῦ καὶ δεκαδικοῦ του μέρους.

Ἔτσι ὁ λογάριθμος, ποὺ ἔχει χαρακτηριστικὸν 5 καὶ δεκαδικὸν μέρος $0{,}257\,34$, ἰσοῦται μὲ $5 + 0{,}257\,34$ καὶ ὁ λογάριθμος, ποὺ ἔχει χαρακτηριστικὸν μηδὲν καὶ δεκαδικὸν $0{,}131\,64$, ἰσοῦται μὲ $0 + 0{,}131\,64 = 0{,}131\,64$.

Ὁ λογάριθμος, ποὺ ἔχει χαρακτηριστικὸν μέρος -2 καὶ δεκαδικὸν 0,731 54, ἰσοῦται μὲ $-2+0{,}731\,54$ καὶ συμφωνοῦμεν νὰ γράφεται $\overline{2}{,}731\,54$.

Ὁ λογάριθμος, ποὺ ἔχει χαρακτηριστικὸν -1 καὶ δεκαδικὸν 0,763 45, ἰσοῦται μὲ $-1+0{,}763\,45$ καὶ συμφωνοῦμεν νὰ γράφεται $\overline{1}{,}763\,45$. Ἀντιστρόφως γράφοντες $\overline{2}{,}632\,51$ ἐννοοῦμεν τὸν λογάριθμον, ποὺ ἔχει χαρακτηριστικὸν -2 καὶ δεκαδικὸν μέρος 0,632 51, δηλαδὴ τὸν ἀριθμὸν $-2+0{,}632\,51=-1{,}367\,49$.

17·6 Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων μᾶς εἶναι χρήσιμοι αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις.

I. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10^ρ, ὅπου ρ ἀκέραιος, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται· εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ προστίθεται ὁ ἀκέραιος ρ. Διότι $λογ(\alpha\cdot 10^\rho)=λογ\,\alpha+λογ\,10^\rho=λογ\,\alpha+\rho$.*

Π.χ. ἂν εἶναι $λογx=2{,}356\,43$, θὰ ἔχωμεν:

$λογ(10^4\cdot x)=λογ\,10^4+λογx=4+2{,}356\,43=6{,}356\,43$ καὶ

$λογ(10^{-5}\cdot x)=λογ\,10^{-5}+λογ\,x=-5+2{,}356\,43=$

$$-5+2+0{,}356\,43=-3+0{,}356\,43=\overline{3}{,}356\,43.$$

Ἐπίσης ἂν εἶναι $λογ\,y=\overline{2}{,}372\,14$, θὰ ἔχωμεν:

$$λογ(10y)=1+\overline{2}{,}372\,14=\overline{1}{,}372\,14.$$

$$λογ(10\,000\cdot y)=λογ(10^4\cdot y)=4+\overline{2}{,}372\,14=2{,}372\,14.$$

$$λογ(0{,}01\cdot y)=λογ(10^{-2}\cdot y)=-2+\overline{2}{,}372\,14=\overline{4}{,}372\,14.$$

II. *Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 1.* Πράγματι ἂς θεωρήσωμεν ἕνα ἀριθμὸν >1, π.χ. τὸν 342,56. Ὁ 342,56 περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 1 000, ποὺ ἔχουν λογαρίθμους ἀντιστοίχως 2 καὶ 3. Συνεπῶς $2 < \text{λογ}\ 342,56 < 3$. Ὥστε τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 2, δηλαδὴ μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ μεῖον ἕνα. Π.χ. ὁ λογ 5 ἔχει χαρακτηριστικὸν 0 καὶ ὁ λογ 71,613 ἔχει χαρακτηριστικὸν 1.

III. *Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ θετικοῦ* < 1 *γραμμένου μὲ δεκαδικὴν μορφὴν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς καὶ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ δηλώνει τὴν τάξιν τοῦ πρώτου ὄχι μηδενικοῦ δεκαδικοῦ ψηφίου.*

Ἂς θεωρήσωμεν ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν < 1, π.χ. τὸν 0,007 34. Ἐπειδὴ $0,001 < 0,007\,34 < 0,01$, λογ $0,01 = -2$ καὶ λογ $0,001 = -3$, θὰ ἔχωμεν:

$$-3 < \text{λογ}\ 0,007\,34 < -2.$$

Ὥστε τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ 0,007 34 εἶναι ὁ -3.

Ὁ 3 ὅμως μᾶς δηλοῖ τὴν τάξιν, ποὺ ἔχει μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τὸ πρῶτον μὴ μηδενικὸν δεκαδικὸν ψηφίον 7. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ ἔχωμεν χαρακτηριστικὸν τοῦ 0,17 τὸ -1, τοῦ 0,000 81 τὸ -4 κλπ.

17·7 Λογαριθμικοὶ πίνακες. Χρῆσις αὐτῶν.

I. *Λογαριθμικοὶ πίνακες.*

Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ ὑπολογίζεται μὲ τὴν βοήθειαν εἰδικῶν πινάκων, ποὺ λέγονται *λογαριθμικοὶ πίνακες*. Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουν κατὰ προσέγγισιν τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν μὲ 5 ἢ 7 δεκαδικὰ ψηφία. Διὰ τοὺς ὑπολογισμούς, ποὺ δὲν μᾶς χρειάζεται τόσον μεγάλη προσέγγισις, χρησιμοποιοῦμεν πίνακας μὲ 4 δεκαδικὰ ψηφία. Ἕνα πίνακα τοῦ εἴδους αὐτοῦ παραθέτομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου.

II. *Χρῆσις τοῦ πίνακος.*

A. *Ὑπολογισμὸς τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.*

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ 74.*

Ἔχει χαρακτηριστικὸν 1. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ δεκαδικοῦ του μέρους ἐργαζόμεθα μὲ τοὺς πίνακας ὡς ἀκολούθως:

Εἰς τὴν πρώτην στήλην μὲ ἐπικεφαλίδα τὸ γράμμα N εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 74. Εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ 74, καὶ τῆς στήλης, ποὺ ἔχει ἐπικεφαλίδα τὸ 0 (μηδέν), εἶναι ὁ ἀριθμὸς 8 692. Ὁ 8 692 εἶναι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ74 κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

Ὥστε: $\lambda o\gamma 74 = 1{,}869\,2$.

Ἔστω τώρα ὅτι ζητοῦμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν:

$$0{,}074,\ 0{,}74,\ 7{,}4,\ 740, \ldots$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι γινόμενα τοῦ 74 ἐπὶ δύναμιν τοῦ 10 μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην:

$$0{,}074 = 74\times10^{-3},\ 0{,}74 = 74\times10^{-2},\ 7{,}4 = 74\times10^{-1},\ 740 = 74\times10^{1}, \ldots$$

συμπεραίνομεν ὅτι οἱ λογάριθμοί των ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος μὲ τὸν λογ74. Ὥστε:

$$\lambda o\gamma 0{,}074 = \overline{2},869\,2,\quad \lambda o\gamma 0{,}74 = \overline{1},869\,2,\quad \lambda o\gamma 7{,}40 = 0{,}869\,2 \ldots$$

2ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ8,57.*

Ἔχει χαρακτηριστικὸν 0 καὶ τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος μὲ τὸν λογ 857, διότι $8{,}57 = 857 \times 10^{-2}$. Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ 857 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 9 330, ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ 85 τῆς στήλης N, μὲ τὴν στήλην, ποὺ ἔχει ἐπικεφαλίδα τὸ 7.

Ὥστε $\lambda o\gamma\ 8{,}57 = 0{,}933\,0$.

3ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ 7 234,56.*

Ἔχει χαρακτηριστικὸν 3. Τὸ δεκαδικόν του μέρος, ἔστω *x*, εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τοῦ λογ723,456 καὶ περιέχεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογ723, λογ724, ποὺ εἶναι ἀντιστοίχως 8 591 καὶ 8 597.

Ὥστε: $8591 < x < 8597$.

Δεχόμεθα ὅτι αἱ αὐξήσεις ἑνὸς τριψηφίου ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ ποσότητα ἀπολύτως $\leqslant 1$ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους αὐξήσεις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, ὁπότε δυνάμεθα νὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ εἰς αὔξησιν τοῦ 723 κατὰ 1 ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου κατὰ $\Delta = 8\,597 - 8\,591 = 6$, εἰς αὔξησιν τοῦ 723 κατὰ $\varepsilon = 0{,}456$ θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου κατὰ $\delta = \Delta \cdot \varepsilon = 6 \times 0{,}456 \simeq 3$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $x = 8\,591 + 3 = 8\,594$ καὶ λογ$7234{,}56 = 3{,}859\,4$. Αἱ πράξεις δύνανται νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Ἀριθμὸς	*Δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ*
724	8 597
723,456	$x = 8\,591 + \delta$
723	8 591

$\varepsilon = 723{,}456 - 723 = 0{,}456 \qquad \Delta = 8\,597 - 8\,591 = 6$

$$\delta = \varepsilon \cdot \Delta = 0{,}456 \times 6 = 2{,}736 \simeq 3 \Rightarrow x \simeq 8\,591 + 3 = 8\,594$$

$$\text{λογ}\, 7\,234{,}56 \simeq 3{,}859\,4.$$

4ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ 0,865 74.*

Ἔχει χαρακτηριστικὸν $\overline{1}$ καὶ τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος x μὲ τὸν 865,74.

Ὑπολογισμὸς τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογ 865,74.

Ἀριθμὸς	*Δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ.*
866	9 375
865,74	$x = 9\,370 + \delta$
865	9 370

$\varepsilon = 0{,}74 \qquad \Delta = 5$

$$\delta = \varepsilon \cdot \Delta. = 0{,}74 \times 5 \simeq 4 \Rightarrow x \simeq 9\,370 + 4 = 9\,374$$

$$\text{λογ}\, 0{,}865\,74 \simeq \overline{1}{,}937\,4.$$

Β. *Εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸν λογάριθμόν του.*

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ὅταν* $\lambda o\gamma x = 3{,}752\,8$.

Ἀναζητοῦμεν τὸ 7 528 εἰς τὰς στήλας τῶν πινάκων, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ 56 τῆς στήλης N καὶ τῆς στήλης μὲ τὴν ἐπικεφαλίδα 6. Ὁ ἀριθμὸς 566 καθὼς καὶ τὰ δεκαδικὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ ἔχουν λογαρίθμους μὲ δεκαδικὸν μέρος τὸ 7 528. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x, ἐπειδὴ ἔχει χαρακτηριστικὸν 3, πρέπει νὰ ἔχῃ 4 ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιόν του μέρος.

Ἄρα $x = 5\,660$.

2ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ὅταν* $\lambda o\gamma x = 1{,}345\,6$.

Ὁ 3 456 δὲν ὑπάρχει εἰς τὰς στήλας, ποὺ περιέχουν τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Περιέχεται μεταξὺ τῶν 3 444 καὶ 3 464, εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 221 καὶ 222. Σκεπτόμεθα τώρα ὡς ἑξῆς: Ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ 221 αὐξάνεται κατὰ $\Delta = 3\,464 - 3\,444 = 20$, τότε ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς 221 αὐξάνεται κατὰ 1 καὶ γίνεται 222· ἑπομένως, ὅταν ὁ λογ 221 αὐξηθῇ κατὰ $\delta = 3\,456 - 3\,444 = 12$, ὁ 221 θὰ αὐξηθῇ κατὰ ποσότητα $\varepsilon = \frac{12}{20} = 0{,}6$ τῆς μονάδος καὶ θὰ γίνῃ 221,6. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 221,6 καθὼς καὶ τὰ δεκαδικὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ ἔχουν δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου των τὸ 3 456. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x, ἐπειδὴ ἔχει χαρακτηριστικὸν 1, πρέπει νὰ ἔχῃ 2 ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος του.

Ἄρα $x = 22{,}16$.

Αἱ πράξεις δύνανται νὰ διαταχθοῦν ὡς ἑξῆς:

Ἀριθμός	*Δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ.*
222	3 464
221 + ε	3 456
221	3 444

$$\varepsilon = \delta/\Delta = 12/20 = 0{,}6 \qquad \Delta = 20, \quad \delta = 12$$
$$x = 22{,}16.$$

17·8 Παρατηρήσεις.

Κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ λογαρίθμους παρουσιάζονται συνήθως πράξεις (προσθέσεις, ἀφαιρέσεις, πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις) μὲ ἀριθμούς, ποὺ εἶναι γραμμένοι ὑπὸ μορφὴν *ἡμιαρνητικῶν ἀριθμῶν*, δηλαδὴ μὲ ἀκέραιον μέρος ἀρνητικὸν καὶ δεκαδικὸν μέρος θετικόν. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, θεωροῦντες τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἀθροίσματα δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα ποὺ ἀκολουθοῦν.

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις*·

α) $\overline{3},534\,5 + \overline{2},789\,4 + 0,834\,2$. β) $\overline{2},345\,6 - \overline{3},789\,0$.

γ) $\overline{2},345\,6 - \overline{2},763\,2$. δ) $\overline{2},345\,6 - \overline{3},651\,2$.

Τοὺς διατάσσομεν ὅπως τοὺς δεκαδικοὺς καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ τὴν συμφωνίαν μας τὸ δεκαδικὸν μέρος κάθε λογαρίθμου εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

α)	β)	γ)	δ)
$\overline{3},534\,5$			
$(+)\,\overline{2},789\,4$	$2,345\,6$	$\overline{2},345\,6$	$\overline{2},345\,6$
$0,834\,2$	$(-)\,\overline{3},789\,0$	$(-)\,\overline{2},763\,2$	$(-)\,3,651\,2$
$\overline{3},158\,1$	$4,556\,6$	$\overline{1},582\,4$	$\overline{6},694\,4$

$$[\,2,345\,6 - \overline{3},789\,0 = 2,345\,6 - (-3 + 0,789\,0) =$$
$$2,345\,6 + 3 - 0,789\,0 = 4,556\,6\,].$$

2ον) *Νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς* $\overline{3},753\,4 \times 5$.

$\overline{3},753\,4 \times 5 = \overline{12},767\,0$. $[(-3+0,753\,4)\times 5 =$

$-15+3,767\,0 = -12+0,767\,0 = \overline{12},767\,0]$.

3ον) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις :*

α) $\overline{6},756\,9 : 3$. β) $\overline{6},327\,2 : 4$.

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις ὡς ἑξῆς :

α) $\overline{6},756\,9 : 3 = \dfrac{-6+0,756\,9}{3} = -2+0,252\,3 = \overline{2},252\,3$.

β) $\overline{6},327\,2 : 4 = \dfrac{-6+0,327\,2}{4} = \dfrac{-6-2+2+0,327\,2}{4}$

$= \dfrac{-8+2,327\,2}{4} = 2+0,581\,8 = \overline{2},581\,8$.

17·9 Ἐφαρμογὴ τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς.

I. *Ὑπολογισμὸς ἑνὸς γινομένου.* Π.χ. $A = 3,42 \times 0,613 \times 3\,280$. Ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς γινομένου :

$$\text{λογ}\,A = \text{λογ}\,3,42 + \text{λογ}\,0,613 + \text{λογ}\,3\,280.$$
$$\text{λογ}\,A = 0,534\,0 + \overline{1},787\,5 + 3,515\,9.$$
$$\text{λογ}\,A = 3,837\,4 \Rightarrow A \simeq 6\,876,6.$$

II. *Ὑπολογισμὸς ἑνὸς πηλίκου.* Π.χ. $A = \dfrac{74,56}{0,613}$. Ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς πηλίκου :

$$\text{λογ}\,A = \text{λογ}\,74,56 - \text{λογ}\,0,613 = 1,872\,5 - \overline{1},787\,5.$$
$$\text{λογ}\,A = 2,085\,0 \Rightarrow A = 121,6.$$

III. *Ὑπολογισμὸς δυνάμεως.* Π.χ. $A = 2,34^{12}$. Ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα τοῦ λογαρίθμου μιᾶς δυνάμεως :

$$\text{λογ}\,A = \text{λογ}\,2,34^{12} = 12\,\text{λογ}\,2,34 = 12 \times 0,369\,2.$$
$$\text{λογ}\,A = 4,430\,4 \Rightarrow A \simeq 26\,937,5.$$

IV. *Ὑπολογισμὸς ρίζης.* Π.χ. $A = \sqrt[5]{51,8}$. Ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα τοῦ λογαρίθμου μιᾶς ρίζης:

$$\text{λογ}\, A = \text{λογ}\, \sqrt[5]{51,8} = \frac{1}{5}\,\text{λογ}\, 51,8 = \frac{1,7143}{5}.$$

$$\text{λογ}\, A \simeq 0,3429 \Rightarrow A \simeq 2,202.$$

V. *Διάφοροι ἄλλοι ὑπολογισμοί.*

α) Ὁ τύπος $Q_c = \dfrac{0,24 \cdot U \cdot I \cdot t}{1000}$ *μᾶς δίδει εἰς kcal τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, ποὺ ἀναπτύσσει μία θερμάστρα, ὅταν λειτουργῇ t sec καὶ ὑπὸ τάσιν U ἀπορροφᾷ ρεῦμα ἐντάσεως I ἀμπέρ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ* Q_c *διὰ* $U = 220\ V$, $I = 9\ A$ *εἰς* $t = 3h = 10\,800$ *sec.*

Λύσις. $Q_c = \dfrac{0,24 \times 220 \times 9 \times 10\,800}{1\,000}.$

$$\text{λογ}\, Q_c = \text{λογ}\, 0,24 + \text{λογ}\, 220 + \text{λογ}\, 9 + \text{λογ}\, 10\,800 - \text{λογ}\, 1\,000.$$

$$\text{λογ}\, Q_c = \bar{1},3802 + 2,3424 + 0,9542 + 4,0334 - 3,0000.$$

$$\text{λογ}\, Q_c = 3,7102 \Rightarrow Q_c \simeq 5\,131 \text{ kcal}.$$

β) Τὸ βάρος σιδηρᾶς δοκοῦ μήκους l cm μὲ διατομὴν κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς a cm παρέχεται εἰς γραμμάρια ἀπὸ τὸν τύπον $P = \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} \cdot l \cdot 7,87$. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ P διὰ μίαν τοιαύτην δοκὸν μὲ* $l = 4,5\ m = 450\ cm$ *καὶ* $a = 4\ cm$.

Λύσις. $P = \dfrac{6 \times 4^2 \times \sqrt{3}}{4} \times 450 \times 7,87 =$

$24 \times \sqrt{3} \times 450 \times 7,87.$

$$\text{λογ}\, P = \text{λογ}\, 24 + \frac{1}{2}\,\text{λογ}\, 3 + \text{λογ}\, 450 + \text{λογ}\, 7,87.$$

$$\text{λογ}\, P = 1,3802 + 0,2386 + 2,6532 + 0,8960.$$

$$\text{λογ}\, P = 5,1680 \Rightarrow P = 147\,233 \text{ gr} = 147,233 \text{ kg}.$$

γ) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς $A = \dfrac{\sqrt[3]{48} \times 3,14^3}{0,82^4 \times \sqrt[3]{0,784}}.$

Λύσις. $\text{λογ}\, A = \text{λογ}\, (\sqrt[3]{48} \times 3,14^3) - \text{λογ}\, (0,82^4 \times \sqrt[3]{0,784})$

$$\lambda o\gamma\, A = \left(\frac{\lambda o\gamma\, 48}{3} + 3 \cdot \lambda o\gamma\, 3{,}14 \right) - \left(4 \cdot \lambda o\gamma\, 0{,}82 + \frac{\lambda o\gamma\, 0{,}784}{3} \right)$$

$$\lambda o\gamma\, A = \left(\frac{1{,}681\,2}{3} + 3 \times 0{,}496\,9 \right) - \left(4 \times \bar{1}{,}913\,8 + \frac{\bar{1}{,}894\,3}{3} \right)$$

$$\lambda o\gamma\, A = (0{,}560\,4 + 1{,}490\,7) - (\bar{1}{,}655\,2 + \bar{1}{,}964\,8).$$

$$\lambda o\gamma\, A = 2{,}051\,1 - \bar{1}{,}620\,0 = 2{,}430\,1 \Rightarrow A \simeq 269{,}2.$$

VI. *Λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.*

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν πίνακες, οἱ ὁποῖοι μὲ ὁδηγίας διὰ τὸν τρόπον χρησιμοποιήσεώς των, περιέχονται εἰς εἰδικὰ βιβλία ὑπὸ τὴν ἐπωνυμίαν *Λογαριθμικοὶ πίνακες*. Εἰς τὰ βιβλία αὐτὰ περιέχονται καὶ πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν μὲ προσεγγίσεις μεγαλυτέρας τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ.

17 · 10 Ἀσκήσεις.

1) Ποῖον τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν:

α) 7, 31, 72 643, 1,7, 30 000, 176,318.

β) 0,3, 0,072, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{41}$, $\frac{7}{200}$.

2) Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν:

α) 51, 518, 342, 723, 0,712, 8,92, 5 000, 918 000, 0,006 34, 8,01.

β) 56,34, 768,1, 6 794, 3,256, 0,196 6, 2,134, 10,78, 6,345.

γ) 347,23, 6,234 7, 6 263,25.

3) Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἔχουν λογαρίθμους:

α) 2,342 4, 1,238 0, 5,678 9, 1,946 5,

0,768 3, $\bar{1}{,}345\,6$, $\bar{2}{,}196\,6$, $\bar{3}{,}623\,4$.

β) 7,602 1, 5,234 7, $\bar{6}{,}200\,0$, 3,120 0,

0,082 3, 0,983 5, $\bar{2}{,}763\,4$, 1,990 0.

4) Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων:

α) 763×183, $612 \times 3{,}15 \times 0{,}24$, $34 \times 68 \times 72 \times 1{,}2$.

β) $\dfrac{712}{318}$, $\dfrac{0,613}{2,82}$, $\dfrac{19,36}{44,4}$, $\dfrac{134\times 721}{16,2}$, $\dfrac{2,5\times 3,6\times 7,2}{0,34\times 10^3}$.

γ) $(3,25)^5$, 2^{15}, $0,728^3$, $(6,56)^2$.

δ) $5,2\times 0,2^3\times 3,14$, $\dfrac{7^2\times 3}{4}$, $\dfrac{4}{3}\,\pi\times 08^3$.

ε) $\sqrt[3]{7,5}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{6271}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{81}$.

ζ) $\sqrt{5\times 2,3\times 6,8}$, $\sqrt[3]{\dfrac{3\times 512}{\pi}}$, $\sqrt{\dfrac{3\times 0,6^2}{1,78}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{2\times 3,14\times 51}}{7,5^2}$.

η) $\dfrac{5,2^4\cdot\sqrt{0,081}}{3,4\cdot\sqrt{2}}$, $\dfrac{6\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{8}}{7\cdot\sqrt[4]{1682}}$, $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{0,5^2}$.

17·11 Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

I. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ ἐπιλύωμεν ἐκθετικὰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\alpha^{\mu x+\varkappa}=\beta, \qquad (1)$$

ὅπου α,β θετικός, $\mu\neq 0$, $\varkappa$ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ x ὁ ἄγνωστος. Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν (1) ἐξισώνομεν τοὺς λογαρίθμους $(\mu x+\varkappa)$ λογ α καὶ λογ β τῶν δύο μελῶν της ἤ, ὅπως λέγομεν, *λογαριθμίζομεν* τὴν ἐξίσωσιν. Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$(\mu x+\varkappa)\,\text{λογ}\,\alpha=\text{λογ}\,\beta \Leftrightarrow \mu x+\varkappa=\frac{\text{λογ}\,\beta}{\text{λογ}\,\alpha}\Leftrightarrow \mu x=\frac{\text{λογ}\,\beta}{\text{λογ}\,\alpha}-\varkappa\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\text{λογ}\,\beta}{\text{λογ}\,\alpha}-\varkappa\right).$$

Π.χ. α) *Διὰ τὴν ἐξίσωσιν* $2^x=5$, θὰ ἔχωμεν:

$$2^x=5\Rightarrow x\,\text{λογ}2=\text{λογ}5\Rightarrow x=\frac{\text{λογ}5}{\text{λογ}2}\Rightarrow x=\frac{0,6990}{0,3010}\Rightarrow x=2,322.$$

β) *Διὰ τὴν ἐξίσωσιν* $7^{5x-2}=12$, θὰ ἔχωμεν:

$$(5x-2)\,\text{λογ}7=\text{λογ}12\Rightarrow 5x=2+\frac{\text{λογ}12}{\text{λογ}7}\Rightarrow$$

$$5x\simeq 2+\frac{1,0792}{0,8451}\Rightarrow 5x\simeq 3,277\Rightarrow x\simeq\frac{3,277}{5}=x\simeq 0,6554.$$

II. *Ἂν ὁ β εἰς τὴν (1) δύναται νὰ τραπῇ εἰς δύναμιν* *τοῦ α μὲ ἐκθέτην ῥητόν, τότε ἡ (1) ἐπιλύεται καὶ χωρὶς λογαρίθμους.*

Π.χ. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $6^{x+5}=216$. Ἐπειδὴ $216=6^3$, ἡ δοθεῖσα γράφεται $6^{x+5}=6^3$, εἶναι δὲ ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x+5=3$, ποὺ ἔχει λύσιν τὴν $x=-2$.

ΙΙΙ. *Εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται καὶ ἡ ἐπίλυσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς* $A\cdot\alpha^{2x}+B\alpha^x+\Gamma=0$. *Ὅπου A, B, Γ ἀριθμοὶ καὶ* $\alpha>0$.

Πρὸς τοῦτο ἀλλάσσομεν τὸν ἄγνωστον θέτοντες $\alpha^x=\omega$. Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A\omega^2+B\omega+\Gamma=0$, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν διὰ $\omega>0$.

Π.χ. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $9^x-7\times 3^x-18=0$, (2).

Ἔχομεν $9^x-7\times 3^x-18=0 \Leftrightarrow (3^2)^x-7\times 3^x-18=0$, $(3^x)^2-7\times 3^x-18=0$. Εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέτομεν $3^x=\omega$. Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\omega^2-7\omega-18=0$, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν διὰ $\omega>0$.

Εὑρίσκομεν λύσεις τὰς τιμὰς $\omega=9$, $\omega=-4$. Ἡ τιμὴ $\omega=-4$ ἀπορρίπτεται, διότι δὲν ἱκανοποιεῖ τὸν περιορισμὸν $\omega>0$.

Ἡ $\omega=9$ εἶναι δεκτὴ καὶ μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν $3^x=9 \Leftrightarrow 3^x=3^2$, ποὺ ἔχει λύσιν τὴν $x=2$. Ἡ τιμὴ $x=2$ εἶναι λύσις καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (2).

17·12 Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις.

Ἐξισώσεις ὡς αἱ: $\lambda o\gamma(x^2+1)-\lambda o\gamma(2x-3)=1$, $\lambda o\gamma(5x)=3$, $\lambda o\gamma(x+2y)=\lambda o\gamma x-3$, ποὺ περιέχουν λογάριθμον τοῦ ἀγνώστου ἢ συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου, λέγονται *λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις*. Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν μίαν λογαριθμικὴν ἐξίσωσιν, τὴν μετασχηματίζομεν εἰς ἄλλην ἁπλουστέραν ἰσοδύναμον, ἐφαρμόζοντες καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων τῆς παραγράφου 17·3.

Παραθέτομεν μερικὰ παραδείγματα ἐπιλύσεως τοιούτων ἐξισώσεων:

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\lambda o\gamma \frac{2x}{7} = 1{,}8$.

Ἀπὸ τὰς ἰδιότητας προκύπτει:

$$\lambda o\gamma\left(\frac{2x}{7}\right) = 1{,}8 \Leftrightarrow \lambda o\gamma\,(2x) - \lambda o\gamma\, 7 = 1{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\lambda o\gamma\, 2 + \lambda o\gamma\, x - \lambda o\gamma\, 7 = 1{,}8 \Leftrightarrow \lambda o\gamma\, x = 1{,}8 + \lambda o\gamma\, 7 - \lambda o\gamma\, 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda o\gamma\, x = 1{,}8 + \lambda o\gamma \frac{7}{2} \Leftrightarrow \lambda o\gamma\, x = 1{,}8 + \lambda o\gamma\, 3{,}5.$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων εὑρίσκομεν:

$\lambda o\gamma\, 3{,}5 = 0{,}544\,1$, ὁπότε $\lambda o\gamma\, x = 2{,}344\,1$ καὶ $x \simeq 221$.

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\lambda o\gamma\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν:

$$\lambda o\gamma\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda o\gamma\, 3 - \lambda o\gamma\, x = 0{,}5 \Rightarrow \lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, 3 - 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\lambda o\gamma\, x = 0{,}477\,1 - 0{,}5 \Rightarrow \lambda o\gamma\, x = \overline{1}{,}977\,1 \Rightarrow x \simeq 0{,}\,948\,6.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἐπιλύεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ $\frac{1}{2} = \lambda o\gamma\, 10^{1/2} = \lambda o\gamma \sqrt{10}$, ἔχομεν: $\lambda o\gamma \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\lambda o\gamma \frac{3}{x} = \lambda o\gamma \sqrt{10} \Rightarrow \frac{3}{x} = \sqrt{10} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$x \simeq \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow x \simeq \frac{3 \times 3{,}162}{10} = 0{,}948\,6.$$

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:*

$$\frac{\lambda o\gamma x + 2}{\lambda o\gamma x - 1} + \frac{\lambda o\gamma x}{\lambda o\gamma x + 1} = \frac{14}{3}.$$

Θέτομεν $\lambda o\gamma\, x = \omega$ καὶ ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν, ποὺ προκύπτει διὰ $\omega \neq \pm 1$.

$$\frac{\omega + 2}{\omega - 1} + \frac{\omega}{\omega + 1} = \frac{14}{3} \Rightarrow 4\omega^2 - 3\omega - 10 = 0.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις ἔχει λύσεις τὰς τιμὰς $\omega=2$ καὶ $\omega=-\frac{5}{4}$, ποὺ εἶναι δεκταί, διότι ἱκανοποιοῦν τὸν περιορισμὸν νὰ εἶναι $\neq \pm 1$. Ἡ τιμὴ $\omega=2$ μᾶς δίδει $\lambda o\gamma\, x=2$ ἢ $x=100$. Ἡ τιμὴ $\omega=\frac{-5}{4}$ μᾶς δίδει $\lambda o\gamma\, x=\frac{-5}{4}=-1{,}25$ ἢ $\lambda o\gamma\, x=-2+2-1{,}25$ ἢ $\lambda o\gamma\, x=\overline{2}{,}75$.

Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $x \simeq 0{,}056\,23$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσεις τὰς τιμὰς $x=100$ καὶ $x \simeq 0{,}056\,23$.

4ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:*

$$\lambda o\gamma(3x-5)+\lambda o\gamma(7x+4)=2.$$

Ἐπειδὴ $2=\lambda o\gamma\, 100$, ἡ δοθεῖσα γράφεται: $\lambda o\gamma(3x-5)+\lambda o\gamma(7x+4)=\lambda o\gamma\, 100 \Rightarrow \lambda o\gamma\,[(3x-5)\cdot(7x+4)]=\lambda o\gamma\, 100 \Rightarrow (3x-5)(7x+4)=100 \Rightarrow 21x^2-23x-120=0$.

Ἐπιλύομεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, ποὺ καθιστοῦν θετικὰ τὰ διώνυμα $3x-5$ καὶ $7x+4$, ἤτοι διὰ $x>\frac{5}{3}$. Εὑρίσκομεν λύσεις τὰς τιμὰς $x=3$ καὶ $x=-\frac{80}{42}$.

Ἀπορρίπτομεν τὴν $x=-\frac{80}{42}$, διότι εἶναι $<\frac{5}{3}$, καὶ δεχόμεθα τὴν $x=3$, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸν περιορισμὸν $x>\frac{5}{3}$.

5ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:*

$$\left.\begin{aligned} \lambda o\gamma\, x+\lambda o\gamma\, y&=1\\ x+y&=7 \end{aligned}\right\} \text{ διὰ } x>0,\ y>0. \qquad (1)$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\lambda o\gamma\, x+\lambda o\gamma\, y=1 \Leftrightarrow \lambda o\gamma\,(xy)=\lambda o\gamma\, 10 \Leftrightarrow xy=10.$$

Τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ

$$\left.\begin{aligned} xy&=10\\ x+y&=\ 7 \end{aligned}\right\} \text{ διὰ } x>0,\ y>0.$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει λύσεις τάς:

$$(x=2,\ y=5),\ (x=5,\ y=2),$$

ποὺ γίνονται δεκταί, διότι ἱκανοποιοῦν τὸν περιορισμόν:

$$x > 0,\ y > 0.$$

17·13 Ἀσκήσεις.

1. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $3^{y+2} = 10$. β) $1{,}2^{2-x} = 4$.

γ) $2^{-x} = 5$. δ) $7^{\frac{5}{x}} = 2$.

ε) $0{,}1^{x-2} = 3$. ζ) $7{,}2 = 3^{5x-2}$.

η) $5^{\frac{2x-1}{x}} = 3$. θ) $2^{3x^2-5x-1} = 2$.

ι) $8^{x-2} = 3^x$. κ) $5^{x^2-5x+6} = 1$.

λ) $(2^{2x-3})^x = 4$. μ) $(\sqrt{3})^x = \sqrt{6}$.

ν) $\sqrt{5^{x-2}} = 8$. ξ) $\sqrt[x]{2^{x-1}} = 3$.

2) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $2^x = 128$. β) $7^{5-x} = 49$.

γ) $3^{x+2} = 243$. δ) $2^{\frac{3}{x}} = 64$.

ε) $8^x = 128$. ζ) $9^{x+2} = 27^{x-1}$.

η) $5^{x^2-3x} = 625$. θ) $4^{x^2-3x+1} = 8$.

ι) $\sqrt[x]{2^{x+2}} = 4$.

3) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0$. β) $2 \times 9^x - 19 \times 3^x + 9 = 0$.

γ) $2^x - 7\sqrt{2^x} - 8 = 0$. δ) $12 \times 3^{2x-3} - 5 \times 3^{x+1} + 99 = 0$.

ε) $2^x + 16 \times 2^{-x} - 10 = 0$.

4) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $\lambda o\gamma\left(\frac{x}{3}\right) = 3$ β) $\lambda o\gamma\left(\frac{5}{x}\right) = 2$.

γ) $\lambda o\gamma\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$. δ) $\lambda o\gamma\left(\frac{5x}{2}\right) = 0{,}4$.

ε) $\lambda o\gamma\left(\frac{x-1}{3}\right) = 0{,}2$. ζ) $\lambda o\gamma\, x^2 - \lambda o\gamma\, 3 = \lambda o\gamma\, 25$.

η) $\frac{\lambda o\gamma\, x+3}{2\,\lambda o\gamma\, x-1}=\lambda o\gamma\, x-1.$ θ) $\frac{\lambda o\gamma x-1}{3+\lambda o\gamma x}=\frac{1}{\lambda o\gamma x}.$

ι) $\lambda o\gamma\,(x-1)+\lambda o\gamma\,(2x-3)=0.$ κ) $\lambda o\gamma\,(x-3)=2\,\lambda o\gamma 2.$

λ) $\lambda o\gamma\,(x+2)+\lambda o\gamma\,(3x-1)=2\,\lambda o\gamma\,(x-1).$

μ) $\lambda o\gamma\sqrt{2x-1}+\lambda o\gamma\sqrt{3x-2}=\lambda o\gamma\, x.$

5) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $\left.\begin{array}{r}\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=\lambda o\gamma 40\\ 2x-3y=1\end{array}\right\}$ β) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=29\\ \lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=1\end{array}\right\}$

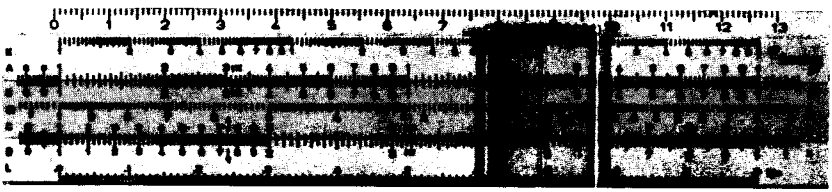
γ) $\left.\begin{array}{r}\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=1{,}5\\ \lambda o\gamma x-\lambda o\gamma y=0{,}5\end{array}\right\}$ δ) $\left.\begin{array}{r}\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=2\\ 2x-3y=1\end{array}\right\}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 18

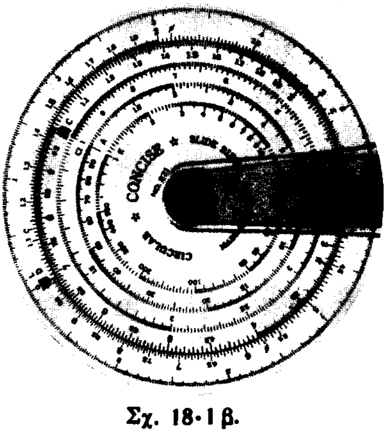
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΣ ΚΑΝΩΝ

18·1 Λογαριθμικὸς κανὼν καὶ λογαριθμικὴ κλῖμαξ.

I. *Ὁ λογαριθμικὸς κανών.* Ἕνα πολὺ χρήσιμον ὑπολογιστικὸν ὄργανον, τοῦ ὁποίου ἡ λειτουργία στηρίζεται εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων, εἶναι ὁ λογαριθμικὸς κανὼν (σχ. 18·1 α, β), ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει ἐξαγόμενα πράξεων μὲ ἱκανοποιητικήν, ἰδίως διὰ τοὺς συνήθεις ὑπολογισμούς, προσέγγισιν. Ἀποτελεῖται ἀπὸ *λογαριθμικὰς κλίμακας.*



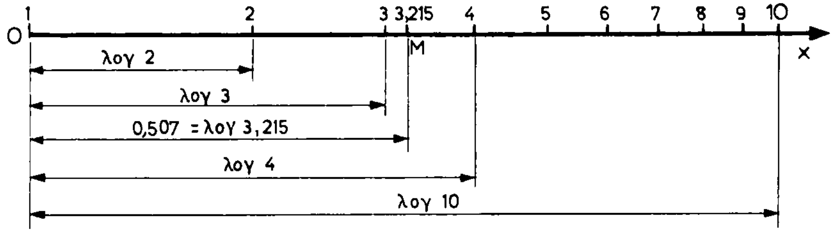
Σχ. 18·1 α.



Σχ. 18·1 β.

II. *Λογαριθμικὴ κλῖμαξ.* Χαράσσομεν μίαν ἡμιευθεῖαν $0x$

(σχ. 18·1 γ) καὶ ἐκλέγομεν μίαν μονάδα, διὰ νὰ μετρῶμεν τὰ

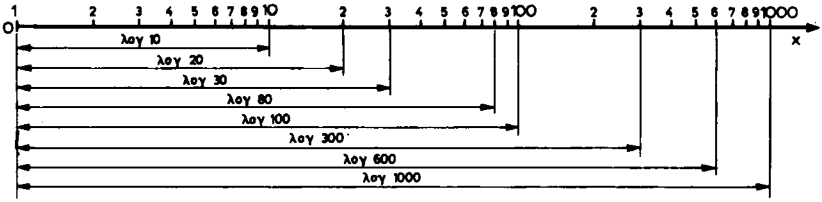


Σχ. 18·1 γ.

μήκη τῶν τμημάτων τῆς ἡμιευθείας. Τὴν μονάδα αὐτὴν καλοῦμεν *βασικὸν μέτρον* (Module).

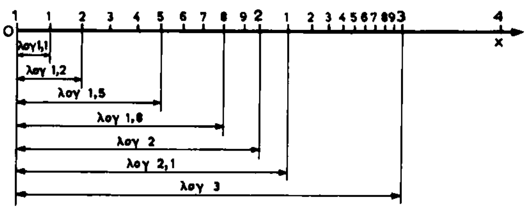
Εἰς τὸ σχῆμα 18·1 γ βασικὸν μέτρον $=100$ mm. Ἐπάνω εἰς τὴν 0χ λαμβάνομεν τμήματα μὲ κοινὴν ἀρχὴν τὸ 0 καὶ μήκη ἀντιστοίχως τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10. Τὸ τέλος κάθε τμήματος τὸ σημειώνομεν μὲ μίαν χαραγὴν καὶ μὲ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν. Ἔτσι εἰς τὸ 0 χαράσσομεν χαραγὴν καὶ τὴν σημειώνομεν μὲ 1, διότι λογ$1=0$. Εἰς ἀπόστασιν 100 mm $=$ 1 βασικὸν μέτρον ἀπὸ τὸ 0, χαράσσομεν χαραγὴν καὶ τὴν σημειώνομεν μὲ 10, διότι λογ $10=1$. Εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ 0 30,1 mm $=0{,}301$ τοῦ βασικοῦ μέτρου, χαράσσομεν χαραγὴν καὶ τὴν σημειώνομεν μὲ 2, διότι λογ$2=0{,}301\,03\simeq0{,}301$. Εἰς ἀπόστασιν 47,7 mm ἀπὸ τὸ 0, σημειώνομεν τὸν ἀριθμὸν 3, διότι λογ$0{,}3=0{,}477\,12\simeq0{,}477$ κ.ο.κ.

Ἡ βαθμολόγησις τῆς ἡμιευθείας 0χ δύναται νὰ συνεχισθῇ μὲ ὅμοιον τρόπον καὶ διὰ τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ 10 ἀριθμούς. Ἔτσι (σχ. 18·1 δ) ἐὰν δεξιὰ καὶ διαδοχικῶς ἀπὸ τὸ πρῶτον βασικὸν μέτρον λάβωμεν δεύτερον βασικὸν μέτρον, βαθμολογημένον ὅπως τὸ πρῶτον, ἡ χαραγὴ τοῦ δεξιοῦ ἄκρου του θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸν ἀριθμὸν 100, διότι λογ $100=2$, ἡ χαραγή του μὲ τὴν ἔνδειξιν 2 εἰς τὸν 20, διότι λογ $20=$ λογ$(10\times2)=$ λογ $10+$ λογ $2=1+$ λογ 2, ἡ χαραγή του μὲ τὴν ἔνδειξιν 3 εἰς τὸν 30 κ.ο.κ. Ἂν τώρα δεξιὰ καὶ διαδοχικῶς ἀπὸ τὸ δεύτερον βασικὸν μέτρον λάβωμεν (σχ. 18·1 δ) τρίτον βασικὸν μέτρον, βαθμολογημένον ὅπως τὸ α, τότε τὸ δεξιόν του ἄκρον θὰ ἀντι-



Σχ. 18·1 δ.

στοιχῇ εἰς τὸν 1 000, διότι λογ 1000 = 3, ἡ χαραγή του μὲ τὴν ἔνδειξίν 2 εἰς τὸ 200, διότι λογ 200 = λογ (2 × 100) = 2 + λογ 2, ἡ χαραγή του μὲ τὴν ἔνδειξιν 3 εἰς τὸ 300 κ.ο.κ. Ἡ ἡμιευθεῖα 0χ βαθμολογημένη κατὰ τὸν ἀνομοιόμορφον αὐτὸν τρόπον βάσει τῶν τιμῶν τοῦ λογ*x* λέγεται *λογαριθμικὴ κλῖμαξ*, κάθε δὲ χαραγὴ μὲ τὴν ἔνδειξίν της λέγεται *ἀριθμόσημον* (παράγρ. 14 · 2).



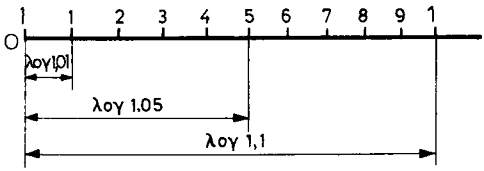
Σχ. 18·1 ε.

Ἐννοεῖται ὅτι εἰς κάθε σημεῖον τῆς κλίμακος ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἀριθμόσημον. Π.χ. εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς κλίμακος (σχ. 18 · 1 γ), ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὸ 0 ἀπόστασιν 0Μ = 50,7 mm = 0,507 dm, ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀριθμόσημον 3,215, διότι λογ 3,215 ≃ 0,507. Εἰς τὴν πρᾶξιν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ σημειώνωμεν ὅλα τὰ ἀριθμόσημα. Συνήθως σημειώνονται τὰ ἀκόλουθα:

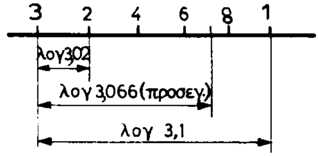
Τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 1 ἕως 10.

Τῶν ἀκεραίων πολλαπλασίων τοῦ 10 (20, 30,..., 100) διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 10 ἕως 100, τῶν ἀκεραίων πολλαπλασίων τοῦ 100 (100, 200,..., 1 000) διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 100 ἕως 1 000 κ.ο.κ.

Τὸ διάστημα μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμοσήμων ἀναλόγως τοῦ μήκους του ὑποδιαιρεῖται μὲ χαραγὰς εἰς 200, 50, 10, 5, 2 τμήματα. Εἰς τὰ σχήματα 18·1 γ, δ, ε, ζ, η, φαίνεται πῶς θὰ γίνεται ἡ ἀνάγνωσις τῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 18·1 ζ.



Σχ. 18·1 η.

18·2 Περιγραφὴ καὶ λειτουργία τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος.

I. Ὁ λογαριθμικὸς κανὼν (σχ. 18·1 α) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κανόνα ἐφωδιασμένον μὲ δύο λογαριθμικὰς κλίμακας, τὴν *ἄνω*, ποὺ σημειώνεται μὲ τὸ γράμμα A, καὶ τὴν *κάτω*, ποὺ σημειώνεται μὲ τὸ γράμμα D.

Ἡ κλῖμαξ A ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 βασικὰ μέτρα μήκους συνήθως 12,5 mm· τὰ ἀριθμόσημά της εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 ἕως 100.

Ἡ D ἔχει βασικὸν μέτρον διπλασίου μήκους καὶ τὰ ἀριθμόσημά της εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 ἕως 10.

Μεταξὺ τῶν δύο κλιμάκων καὶ παραλλήλως πρὸς αὐτὰς ὁ κανὼν ἔχει αὔλακα, μέσα εἰς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ κινῆται ἕνα στέλεχος, ὁ *σύρτης*. Ὁ σύρτης ἔχει τρεῖς λογαριθμικὰς κλίμακας, τὴν B εἰς τὴν ἄνω πλευράν του, τὴν C εἰς τὴν κάτω καὶ τὴν C1 εἰς τὸ μέσον.

Ἡ κλῖμαξ B τοῦ σύρτου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν κλίμακα A τοῦ κανόνος καὶ εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ αὐτήν, ἐνῶ ἡ C εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν D καὶ εὑρίσκεται ἐπίσης ἀπέναντι ἀπὸ αὐτήν. Ἡ κλῖμαξ C1 ἢ R λέγεται *ἀντίστροφος* τῆς C καὶ εἶναι βαθμολογημένη ὅπως καὶ ἡ C, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν. Ἔτσι τὸ 1 τῆς C1 εὑρίσκεται ἀπέναντι εἰς τὸ 10 τῆς C καὶ τὸ 10 τῆς C1 ἀπέναντι ἀπὸ τὸ 1 τῆς C. Ὁ σύρτης μὲ κατάλληλον κίνησιν δύναται νὰ λάβη θέσιν, ὥστε οἱ χαραγὲς τῶν ἀριθμοσήμων τῶν κλιμάκων A καὶ B καὶ τῶν ἀριθμοσήμων τῶν κλιμάκων C καὶ D, ποὺ παριστάνουν ἴσους ἀριθμούς, νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου εὐθείας πρὸς τὰς κλίμακας. Τὸ ἄκρον ἑκάστης κλίμακος τοῦ σύρτου, ποὺ συμπίπτει μὲ τὸ ἀριθμόσημον 1, λέγεται *ἀριστερὸν ἄκρον* τῆς κλίμακος, ἐνῶ τὸ ἄλλο ἄκρον της λέγεται *δεξιὸν ἄκρον*.

Ἕνας διαφανὴς *δρομεὺς* μὲ δείκτην κάθετον πρὸς τὰς κλίμακας δύναται νὰ κινῆται κατὰ μῆκος τῶν κλιμάκων τοῦ κανόνος.

Ἐπειδὴ τὸ βασικὸν μέτρον τῆς κλίμακος A εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τῆς D, ὅταν μετρήσωμεν ἕνα τμῆμα l τῆς D μὲ τὴν μονάδα τῆς A, θὰ προκύψη ἀριθμὸς διπλάσιος ἀπὸ αὐτόν, ποὺ προκύπτει, ὅταν τὸ ἴδιον τμῆμα l μετρηθῆ μὲ τὴν μονάδα τῆς D. Συνεπῶς ἂν ἕνα ἀριθμόσημον x τῆς A καὶ ἕνα y τῆς D εὑρίσκωνται κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως, δηλαδὴ αἱ ἀποστάσεις τῶν x καὶ y ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ ἄκρα τῶν κλιμάκων εἶναι ἴσαι, τότε τὰ μήκη $\log x$ καὶ $\log y$ τῶν ἴσων αὐτῶν ἀποστάσεων θὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν: $\log x = 2 \log y$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν προκύπτει ὅτι:

$$\log x = \log y^2 \text{ ἢ } x = y^2.$$

Ἐκτὸς ἀπὸ αὐτὰς τὰς βασικὰς κλίμακας A, B, C1, C, D, ὁ λογαριθμικὸς κανὼν φέρει συνήθως καὶ ἕκτην κλίμακα τὴν K μὲ βασικὸν μέτρον τὸ τρίτον τοῦ βασικοῦ μέτρου τῆς D, ἤτοι $\frac{250}{3} = 83\,\text{mm}$. Ἡ κλῖμαξ K ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία βασικὰ μέτρα (σχ. 18·1γ) καὶ τὰ ἀριθμόσημά της παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 1 000.

Ἐπειδὴ τὸ βασικὸν μέτρον τῆς K εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τῆς D, ὅταν ἕνα ἀριθμόσημον x τῆς D καὶ ἕνα y τῆς K εὑρίσκωνται κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως, δηλαδὴ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ ἄκρα τῶν κλιμάκων των, τότε οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y θὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $\lambda o\gamma\, x = 3\lambda o\gamma\, y$ ἢ $\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma y^3$ ἢ $x = y^3$.

Σημείωσις. Ἐκτὸς τοῦ τύπου, ποὺ περιεγράψαμεν, κυκλοφοροῦν καὶ ἄλλων τύπων λογαριθμικοὶ κανόνες. Εἰς τὸ σχῆμα 18·1β βλέπομεν ἕνα κυκλικὸν λογαριθμικὸν κανόνα. Εἰς αὐτὸν αἱ κλίμακες ἀναπτύσσονται ἐπὶ τόξων περιφερείας. Ἡ βαθμολόγησις καὶ ἡ χρῆσις του εἶναι περίπου ἡ αὐτὴ μὲ τοὺς κανόνας, ποὺ περιεγράψαμεν.

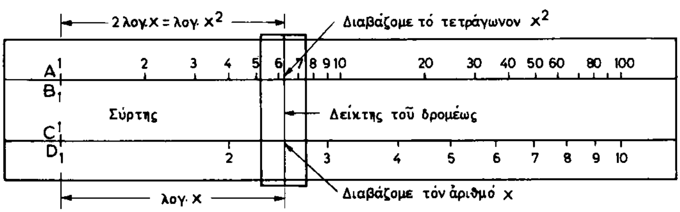
ΧΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ

18·3 Τετράγωνον καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα.

I. *Ὑπολογισμὸς τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἀριθμοῦ x.*

α. *Ὅταν $1 < x < 10$.*

Μετακινοῦμεν τὸν δρομέα, ὥστε ὁ δείκτης του νὰ εὑρεθῇ ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον x τῆς κλίμακος D (σχ. 18·3α). Εἰς τὴν κλίμακα A κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην εὑρίσκεται τὸ x^2.



Σχ. 18·3α.

Π.χ. εὑρίσκομεν: $2{,}5^2 = 6{,}25$ (σχ. 18·3α).

β. *Ὅταν $0 < x < 1$ ἢ $x > 10$.*

Ἐκφράζομεν τὸν x ὡς γινόμενον καταλλήλου δυνάμεως τοῦ

10 ἐπὶ ἀριθμὸν περιεχόμενον εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 1 ἕως 10.

$x = 10^{\lambda} \cdot \alpha$ (μὲ $1 < \alpha < 10$ καὶ $\lambda =$ ἀκέραιον).

Κατόπιν ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα, ποὺ ἀκολουθοῦν:

1ον) *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $0,27^2$.*

$$0,27 = \frac{1}{10} \times 2,7 = 10^{-1} \times 2,7 \text{ καὶ}$$

$$0,27^2 = 10^{-2} \times (2,7)^2.$$

Ἀπὸ τὸν κανόνα εὑρίσκομεν $(2,7)^2 \simeq 7,3$,

$$\text{ἄρα } 0,27^2 = 10^{-2} \times 7,3 = \frac{7,3}{100} = 0,073.$$

2ον) *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ 345^2.*

$345 = 3,45 \times 100 = 3,45 \times 10^2$ καὶ $345^2 = 3,45^2 \times 10^4$.

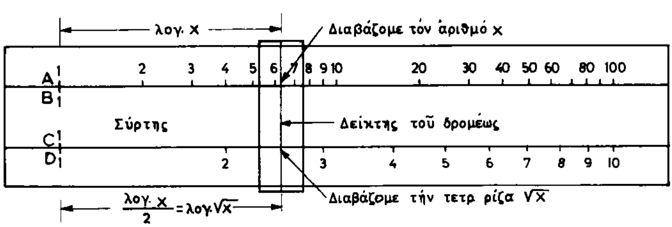
Ἀπὸ τὸν κανόνα εὑρίσκομεν $3,45^2 \simeq 11,9$,

ἄρα $345^2 \simeq 11,9 \times 10^4 = 11,9 \times 10\,000 = 119\,000$.

II. *Ὑπολογισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ x.*

α. *Ὅταν $1 \leqslant x \leqslant 100$.*

Μετακινοῦμεν τὸν δρομέα, ὥστε ὁ δείκτης του νὰ εὑρεθῇ ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον x τῆς κλίμακος A. Εἰς τὴν κλίμακα D βλέπομεν κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ σύρτου τὴν $\sqrt{x}$ (σχ. 18 · 3 β).



Σχ. 18·3 β.

Π.χ. εὑρίσκομεν: $\sqrt{6,25} \simeq 2,5$, $\sqrt{42,5} = 6,52$ (σχ. 18 · 3 β).

β. *Διὰ $x > 100$ ἢ $x < 1$.*

Ἐκφράζομεν τὸν x ὡς γινόμενον καταλλήλου δυνάμεως τοῦ

100 ἐπὶ ἀριθμὸν περιεχόμενον εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 1 ἕως 100 $x = 100^{\lambda} \cdot \alpha$ (μὲ $1 < \alpha < 100$ καὶ λ ἀκέραιον).

Κατόπιν ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα, ποὺ ἀκολουθοῦν.

1ον) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ* $\sqrt{425\,000}$.

$$425\,000 = 42{,}5 \times 100^2,\ \sqrt{425\,000} = \sqrt{42{,}5 \times 100^2} = \sqrt{42{,}5} \times 100 = 6{,}52 \times 100 = 652.$$

2ον) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ* $\sqrt{0{,}425}$.

$$0{,}425 = \frac{42{,}5}{100} = 42{,}5 \times 100^{-1} = 42{,}5 \times 10^{-2} \text{ καὶ } \sqrt{42{,}5 \times 10^{-2}} =$$

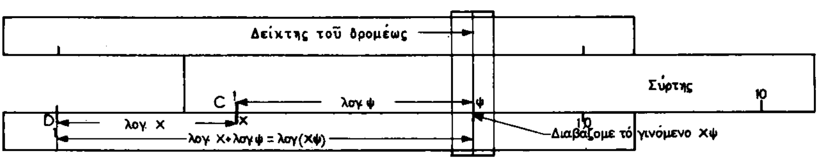
$$= \sqrt{42{,}5} \times \sqrt{10^{-2}} = 6{,}52 \times 10^{-1} = 6{,}52 \times \frac{1}{10} = 0{,}652.$$

3ον) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ* $\sqrt{42\,500}$.

$$\sqrt{42\,500} = \sqrt{4{,}25 \times 100^2} = \sqrt{4{,}25} \times \sqrt{100^2} = 2{,}06 \times 100 = 206.$$

18·4 Πολλαπλασιασμός.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ γινομένου $x\psi$ δύο θετικῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ χρησιμοποιοῦμεν τὰς κάτω κλίμακας C καὶ D τοῦ σύρτου καὶ τοῦ κανόνος (σχ. 18·4 α).



Σχ. 18·4 α.

α. *Ὅταν* $1 \leqslant x,\ \psi \leqslant 10$.

Μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς κλίμακος C νὰ εὑρεθῇ ἀπέναντι ἀπὸ τὸν x τῆς κλίμακος D. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1η. *Τὸ* ψ *τῆς* C *εἶναι μέσα εἰς τὸν κανόνα* (σχ. 18·4 α).

Τότε θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ ψ τῆς C.

Ὁ ἀριθμὸς z τῆς D, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως, εἶναι τὸ γινόμενον $x\psi$.

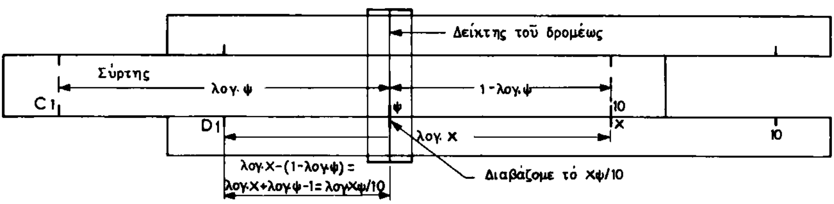
Διότι $\text{λογ}\, x + \text{λογ}\, \psi = \text{λογ}\, z$ ἢ $\text{λογ}\,(x\psi) = \text{λογ}\, z$ ἢ $x\psi = z$.

Π.χ. διὰ $x = 1{,}52$, $\psi = 1{,}83$ εὑρίσκομεν $x\psi \simeq 2{,}79$.

2α. *Ἂν τὸ ψ τῆς C εὑρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸν κανόνα* (σχ. 18·4β).

Τότε μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C νὰ εὑρεθῇ ἀπέναντι ἀπὸ τὸ x τῆς D. Θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ ψ τῆς C. Ὁ ἀριθμὸς z τῆς D, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως, εἶναι τὸ δέκατον τοῦ γινομένου $x\psi$.

Δηλαδὴ $\dfrac{x\psi}{10} = z$ καὶ $x\psi = 10 \cdot z$.



Σχ. 18·4 β.

Πράγματι $\text{λογ}\, z = \text{λογ}\, x - (\text{λογ}\, 10 - \text{λογ}\, \psi) =$

$$\text{λογ}\, x + \text{λογ}\, \psi - \text{λογ}\, 10 = \text{λογ} \frac{x\psi}{10} \text{ ἢ } z = \frac{x\psi}{10}.$$

Π.χ. Διὰ $x = 7{,}2$, $\psi = 5{,}7$ διαβάζομεν κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως εἰς τὴν D 4,105, ἄρα $x\psi = 4{,}105 \times 10 = 41{,}05$.

β. *Ἐὰν ὁ ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν ἀριθμῶν x καὶ ψ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος ἀπὸ 1 ἕως 10.*

Ἐκφράζομεν ἕκαστον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ὡς γινόμενον καταλλήλου ἀκεραίας δυνάμεως τοῦ 10 ἐπὶ ἀριθμὸν περιεχόμενον εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 1 ἕως 10, καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα, ποὺ ἀκολουθοῦν:

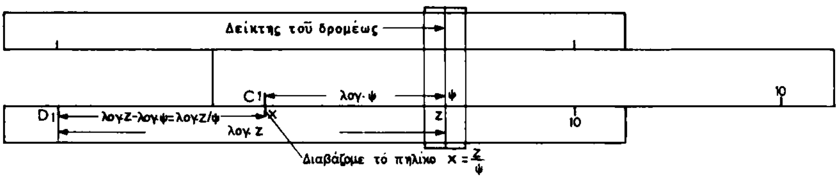
1ον) $19{,}2 \times 25 = (1{,}92 \times 10) \cdot (2{,}5 \times 10) = (1{,}92 \times 2{,}5) \times 100 =$
$4{,}8 \times 100 = 480.$

2ον) $0{,}072 \times 234 = \frac{7{,}2}{100} \times 2{,}34 \times 100 = 7{,}2 \times 2{,}34 \times \frac{100}{100} =$
$7{,}2 \times 2{,}34 \simeq 1{,}685 \times 10 = 16{,}85.$

3ον) $0{,}235 \times 0{,}014 = \frac{2{,}35}{10} \times \frac{1{,}4}{100} = \frac{3{,}29}{1\,000} = 0{,}003\,29 \simeq 0{,}003\,3.$

18·5 Διαίρεσις.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ πηλίκον z/ψ τοῦ z διὰ τοῦ $\psi \neq 0$, χρησιμοποιοῦμεν πάλιν τὰς κλίμακας C καὶ D (σχ. 18·5 α).



Σχ. 18·5 α.

α. Ὅταν $1 < z, \psi < 10$.

1) Μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ ψ τῆς C νὰ εὑρεθῇ ἀπέναντι ἀπὸ τὸ z τῆς D. Ὁ ἀριθμὸς x τῆς D, ποὺ εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C, εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{z}{\psi}$.

Πράγματι, $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, z - \lambda o\gamma\, \psi$ ἢ $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma \left(\frac{z}{\psi}\right)$ ἢ $x = \frac{z}{\psi}$.

Π. χ. Διὰ $z = 2{,}7$, $\psi = 1{,}5$ εὑρίσκομεν $z : \psi = 1{,}8$.

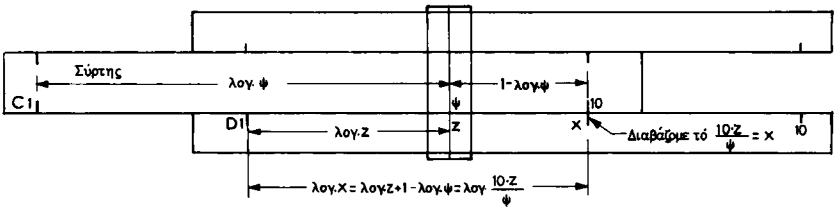
2) Ἐὰν τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τοῦ σύρτου εὑρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸν κανόνα (ὅταν $\psi > z$), τότε ὁ ἀριθμὸς x τοῦ ἀριθμοσήμου τῆς D, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τοῦ σύρτου, εἶναι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ πηλίκου $\frac{z}{\psi}$, ἤτοι $x = 10 \cdot \frac{z}{\psi}$ ἢ $\frac{z}{\psi} = \frac{x}{10}$ (σχ. 18·5 β). Διότι $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma z + \lambda o\gamma\, 10 - \lambda o\gamma\, \psi =$

$$λογ\,(10 \cdot z) - λογ\,ψ \text{ ἢ } λογ x = λογ\frac{10 \cdot z}{ψ} \text{ ἢ } x = 10 \cdot \frac{z}{ψ} \text{ ἢ } \frac{z}{ψ} = \frac{x}{10}.$$

Π.χ. διὰ $z = 4{,}6$ καὶ $ψ = 7{,}3$ εὑρίσκομεν:

$$4{,}6 : 7{,}3 = 6{,}3 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}63.$$

β. Οἱ z καὶ ψ ἢ ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10. Τότε ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν διὰ τὴν ἰδίαν περίπτωσιν.



Σχ. 18·5 β.

Παραδείγματα:

$48{:}1{,}8 = (10 \times 4{,}8) : 1{,}8 = 10 \times (4{,}8 : 1{,}8) = 10 \times 2{,}665 = 25{,}65.$

$134 : 0{,}061 = (100 \times 1{,}34) : \frac{6{,}1}{100} = 100 \times 100 \times (1{,}34 : 6{,}1) \simeq$
$10\,000 \times 0{,}22 = 2\,200.$

$$0{,}048 : 0{,}025 = \frac{4{,}8}{100} : \frac{2{,}5}{100} = 4.8 : 2{,}5 \simeq 1{,}92.$$

18·6 Παρατήρησις.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου ἢ τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν δυνάμεθα μὲ μικροτέραν ὅμως ἀκρίβειαν νὰ χρησιμοποιήσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰς κλίμακας A καὶ B, ὁπότε τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν ὑπολογίζεται ἀμέσως, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν ἢ καὶ οἱ δύο ἀνήκουν εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 10 ἕως 100.

Π.χ. εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι $4,35 \times 16 \simeq 70$ καὶ $28:21 = 1,33$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως, ποὺ χρησιμοποιοῦμεν τὸ δεξιὸν ἄκρον τοῦ σύρτου, κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μὲν γινομένου θὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 100, τοῦ δὲ πηλίκου θὰ διαιροῦμεν διὰ 100.

Π.χ. $61 \times 32 = 19,55 \times 100 = 1\,955$.

$$41:65 = 63:100 = 0,63.$$

18·7 Κύβος καὶ κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ x.

Α. *Κύβος*. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς κλίμακας D καὶ K

α. *Ὅταν* $1 < x < 10$.

Θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ x τῆς D. Εὑρίσκομεν εἰς τὴν K, κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην, τὸν x^3.

Π.χ. εὑρίσκομεν:

$$4,22^3 \simeq 75,2 \text{ (σχ. 18·9α σελὶς 337)}.$$

β. *Ὅταν* $x > 10$ *ἢ* $x < 1$.

Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα, ποὺ ἀκολουθοῦν:

1ον) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ* 125^3.

$$125 = 1,25 \times 10^2 \text{ καὶ } 125^3 = 1,25^3 \times (10^2)^3 \simeq 1,953 \times 10^6 = 1,953 \times 1\,000\,000 = 1\,953\,000.$$

2ον) *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ* $0,23^3$.

$$0,23 = 2,3 \times 10^{-1} \text{ καὶ } 0,23^3 = 2,3^3 \times (10^{-1})^3 = 12,2 \times 10^{-3} = 0,012\,2.$$

Β. *Κυβικὴ ρίζα*.

α. *Ὅταν* $1 < x < 1\,000$.

Θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸν x τῆς K. Εὑρίσκομεν εἰς τὴν D, κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην, τὴν $\sqrt[3]{x}$.

Π.χ. εὑρίσκομεν:

$$\sqrt[3]{18} \simeq 2,62, \quad \sqrt[3]{850} \simeq 9,45.$$

β. *Ὅταν* $x > 1\,000$ *ἢ* $x < 1$.

Ἐκφράζομεν τὸν x ὡς γινόμενον καταλλήλου δυνάμεως τοῦ

1 000 ἐπὶ ἀριθμὸν α περιεχόμενον εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 1 ἕως 1 000 καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα, ποὺ ἀκολουθοῦν.

1ον) *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ* $\sqrt[3]{0,84}$.

$$0,84=\frac{840}{1\,000} \text{ καὶ } \sqrt[3]{0,84}=\sqrt[3]{\frac{840}{1\,000}}=\frac{\sqrt{840}}{10}\simeq \frac{9,43}{10}=0,943.$$

2ον) *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ* $\sqrt[3]{5\,634}$.

$$5\,634=5,634\times 1\,000 \text{ καὶ } \sqrt[3]{5\,634}=\sqrt[3]{5,634}\times\sqrt[3]{1\,000}= \sqrt[3]{5,634}\times 10\simeq 1,78\times 10=17,8.$$

3ον) *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ* $\sqrt[3]{76\,345}$.

$$\sqrt[3]{76\,345}=\sqrt[3]{76,345}\times\sqrt[3]{1\,000}=\sqrt[3]{76,345}\times 10\simeq 4,25\times 10=42,5.$$

18·8 Χρῆσις τῆς κλίμακος C1 (R).

Ἡ κλῖμαξ C1, ποὺ εἰς μερικοὺς κανόνας συμβολίζεται καὶ μὲ τὸ R, μᾶς διευκολύνει εἰς πολλοὺς ὑπολογισμούς. Παραθέτομεν μερικούς.

1. *Εὑρίσκομεν τὸν ἀντίστροφον 1/α ἑνὸς ἀριθμοῦ α.*

Θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ α τῆς C. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς C1, ποὺ εὑρίσκεται κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην διαιρούμενον διὰ 10 μᾶς δίδει τὸ 1/α. Π.χ. $1/6 \simeq 1,67 : 10 = 0,167$.

Σημείωσις : Ἐπαναλαμβάνομεν ὅτι ἡ ἀνάγνωσις τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν C1 γίνεται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

2. *Εὑρίσκομεν τὸν ἀντίστροφον* $1/\alpha^2$ *τοῦ τετραγώνου τοῦ α.*

Τοποθετοῦμεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ α τῆς C1. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς κλίμακος B, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην, διαιρούμενον διὰ 100 μᾶς δίδει τὸ $1/\alpha^2$. Π.χ. $\frac{1}{2{,}36^2} = 18:100 = 0{,}18$ (σχ. 18·9α σελὶς 337).

3. *Εὑρίσκομεν τὸν ἀντίστροφον* $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ *τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ α.*

Τοποθετοῦμεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ α τῆς κλίμακος B. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς C1, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην, διαιρούμενον διὰ 10 μᾶς δίδει τὸ $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Π.χ. $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 7{,}07:10 = 0{,}707$.

4. *Ὑπολογίζομεν τὰ γινόμενα* $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma, \ldots$

A. *Τὸ* $\alpha \cdot \beta$. Θέτομεν τὸ α τῆς D καὶ τὸ β τῆς C1 κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C, μᾶς δίδει τὸ $\alpha \cdot \beta$.

Ἐὰν τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C εἶναι ἐκτὸς τοῦ κανόνος, τότε τὸ $\alpha \cdot \beta$ δίδεται ἀπὸ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ ἀριθμοσήμου τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C. Π.χ. διὰ τὸ $5{,}4 \times 1{,}75$ θέτομεν τὸ 5,4 τῆς D καὶ τὸ 1,75 τῆς C1 ὑπὸ τὸν δείκτην.

Βλέπομεν εἰς τὴν D, ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C, τὸν ἀριθμὸν 9,45. Ἄρα $5{,}4 \times 1{,}75 = 9{,}45$.

Διὰ τὸ γινόμενον $3{,}25 \times 8{,}4$ τοποθετοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὅπως προηγουμένως. Ἐπειδὴ τώρα τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κανόνος, τὸ γινόμενον $3{,}25 \times 8{,}4$ ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 2,73 τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C. Ἤτοι:

$$3{,}25 \times 8{,}4 = 2{,}73 \times 10 = 27{,}3.$$

B. *Τὸ* $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$. Θέτομεν τὸ α τῆς D καὶ τὸ β τῆς C1 κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως. Εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν τρεῖς περιπτώσεις.

α) *Τὸ γ τῆς C εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κανόνος.* Τότε τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ γ τῆς C, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 10 μᾶς δίδει τὸ α·β·γ.

β) *Τὸ γ τῆς C εὑρίσκεται ἐκτὸς καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ κανόνος.* Τότε θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C καὶ μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ γ τῆς C1 νὰ εὑρεθῇ κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 100 μᾶς δίδει τὸ α·β·γ.

γ) *Τὸ γ τῆς C εὑρίσκεται ἐκτὸς καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ κανόνος.* Τότε θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C καὶ μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ γ τῆς C1 νὰ εὑρεθῇ κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C, μᾶς δίδει τὸ α·β·γ.

Παραδείγματα.

1ον) Διὰ τὸ γινόμενον $5{,}4 \times 1{,}25 \times 3{,}2$. Θέτομεν τὸ 5,4 τῆς D, καὶ 1,25 τῆς C1 ὑπὸ τὸν δείκτην. Τὸ 3,2 τῆς C εἶναι ἐντὸς τοῦ κανόνος καὶ ἔχει ἀπέναντι εἰς τὴν D τὸ 2,16.

Ἄρα $5{,}4 \times 1{,}25 \times 3{,}2 \simeq 2{,}16 \times 10 = 21{,}6$.

2ον) Διὰ τὸ γινόμενον $7{,}3 \times 9{,}2 \times 4{,}5$ θέτομεν πάλιν τὸ 7,3 τῆς D καὶ τὸ 9,2 τῆς C1 ὑπὸ τὸν δείκτην. Τὸ 4,5 τῆς C εὑρίσκεται ἐκτὸς καὶ δεξιὰ τοῦ κανόνος. Θέτομεν λοιπὸν τὸν δείκτην ἐπάνω ἀπὸ τὸ 1 τῆς C καὶ μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ 4,5 τῆς C1 νὰ εὑρεθῇ κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην. Ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C εἰς τὴν D βλέπομεν τὸν ἀριθμὸν 3,02.

Ἄρα $7{,}3 \times 9{,}2 \times 45 \simeq 3{,}02 \times 100 = 302$.

3ον) Διὰ τὸ γινόμενον $3{,}2 \times 1{,}25 \times 2{,}25$ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν καὶ εὑρίσκομεν εἰς τὴν D ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C τὸν ἀριθμὸν 9.

Ἄρα $3{,}2 \times 1{,}25 \times 2{,}25 = 9$.

Γ. *Διὰ τὸ* $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$, $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \varepsilon, \ldots$, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot \delta$, κλπ.

5. *Ὑπολογίζομεν τὸ* $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$.

Θέτομεν τὸ α τῆς D καὶ τὸ β τῆς C1 κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως. Εἶναι δυνατὸν πάλιν νὰ παρουσιασθοῦν τρεῖς περιπτώσεις:

α) *Τὸ γ τῆς C1 εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κανόνος.* Τότε τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ γ τῆς C1, εἶναι τὸ ζητούμενον $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$.

β) *Τὸ γ τῆς C1 εὑρίσκεται ἐκτὸς καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ κανόνος.* Τότε θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C καὶ μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ γ τῆς C νὰ εὑρεθῇ κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς C, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 10 μᾶς δίδει τὸ $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$.

γ) *Τὸ γ τῆς C1 εὑρίσκεται ἐκτὸς καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ κανόνος.* Τότε θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C καὶ μετακινοῦμεν τὸ σύρτην, ὥστε τὸ γ τῆς C νὰ εὑρεθῇ κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C, διαιρούμενον διὰ 10 μᾶς δίδει τὸ $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$.

Παραδείγματα.

1ον) Διὰ τὸ $\frac{1,4 \times 2,75}{7,25}$. Θέτομεν τὸ 1,4 τῆς D καὶ τὸ 2,75 τῆς C1 ὑπὸ τὸν δείκτην. Ἐπειδὴ τὸ 7,25 τῆς C1 εὑρίσκεται ἐκτὸς καὶ ἀριστερὰ τοῦ κανόνος, θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C καὶ μετακινοῦμεν τὸν σύρτην, ὥστε τὸ

7,25 τῆς C νὰ τεθῇ ὑπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως. Ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς C βλέπομεν εἰς τὴν D τὸν ἀριθμὸν 5,31.

$$\text{Ἄρα } \frac{1{,}4 \times 2{,}75}{7{,}25} \simeq 5{,}31 : 10 = 0{,}531.$$

2ον) Διὰ τὸ πηλίκον $\frac{5 \times 7}{6}$· Θέτομεν πάλιν τὸ 5 τῆς D καὶ τὸ 7 τῆς C1 ὑπὸ τὸν δείκτην τοῦ δρομέως. Τὸ 6 τῆς C1 εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κανόνος. Ἀπέναντι ἀπὸ τὸ 6 τῆς C1 διαβάζομεν εἰς τὴν D τὸν ἀριθμὸν 5,83.

$$\text{Ἄρα } \frac{5 \times 7}{6} \simeq 5{,}83.$$

6. *Μὲ καταλλήλους συνδυασμοὺς ὑπολογίζομεν καὶ τὰ πηλίκα* $\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{\delta}, \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot \delta}, \ldots$

Ἡ αἰτιολόγησις τῶν ἀνωτέρω πράξεων γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν Ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων, ὅπως ἔγινε διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν μὲ τὰς κλίμακας C καὶ D.

18·9 Ὑπολογισμὸς τῶν Τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Διὰ νὰ ὑπολογίζωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μιᾶς γωνίας ἢ ἑνὸς τόξου x^0, χρησιμοποιοῦμεν τὴν κλίμακα D καὶ τρεῖς νέας κλίμακας, τὰς S, T, S/T (σχ. 18·9 α, 18·9 β). Ἡ κλῖμαξ S λέγεται *κλῖμαξ τῶν ἡμιτόνων* καὶ εἶναι βαθμολογημένη κατὰ τρόπον, ὥστε, ἐὰν τεθῇ ἀπέναντι ἀπὸ τὴν D, ὥστε τὰ ἄκρα των νὰ συμπίπτουν, τότε τὸ ἀριθμόσημον ἑνὸς τυχόντος σημείου της νὰ ἐκφράζῃ εἰς μοίρας τὸ μέτρον τῆς γωνίας, ποὺ ἔχει ἡμίτονον τὸ 1/10 τοῦ ἀπέναντι ἀριθμοσήμου τῆς D. Οὕτω τὸ ἀριθμόσημον τοῦ ἀριστεροῦ ἄκρου της εἶναι $5^0 45'$ ἢ $5{,}75^0$, διότι εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον 1 τῆς D καὶ $\eta\mu 5^0 45' = \eta\mu 5{,}75^0 \simeq 0{,}1 = 1 \times \frac{1}{10}$.

Τὸ ἀριθμόσημον τοῦ δεξιοῦ ἄκρου της εἶναι 90^0, διότι εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ 10 τῆς D καὶ ημ$90^0 = 1 = 10 \times \frac{1}{10}$.

Τὸ ἀριθμόσημόν της, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὸ 5 τῆς D, εἶναι 30^0, ἐπειδὴ ημ$30^0 = 0,5 = 5 \times \frac{1}{10}$ κλπ.

Ἡ κλῖμαξ T λέγεται *κλῖμαξ τῶν ἐφαπτομένων* καὶ εἶναι, βαθμολογημένη κατὰ τρόπον, ὥστε, ἐὰν τεθῆ ἀπέναντι ἀπὸ τὴν D, ὅπως ἡ S προηγουμένως, τὸ ἀριθμόσημον ἑνὸς τυχόντος σημείου της νὰ δίδῃ εἰς μοίρας τὸ μέτρον τῆς γωνίας, ποὺ ἔχει ἐφαπτομένην τὸ 1/10 τοῦ ἀριθμοσήμου τοῦ ἀπέναντι σημείου τῆς D.

Οὕτω τὸ ἀριθμόσημον τοῦ ἀριστεροῦ ἄκρου της εἶναι $5^0 45'$ ἢ $5,75^0$, ἐπειδὴ εφ$5^0 45'$ = εφ$5,75^0 \simeq 0,1 = 1 \times \frac{1}{10}$, καὶ τοῦ δεξιοῦ ἄκρου της 45^0, ἐπειδὴ εφ$45^0 = 1 = 10 \times \frac{1}{10}$.

Ἡ κλῖμαξ S/T (σχ. 18·9β) εἶναι βαθμολογημένη κατὰ τρόπον, ὥστε, ἐὰν τεθῆ ὅπως αἱ δύο προηγούμεναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν D, τὸ ἀριθμόσημον ἑνὸς τυχόντος σημείου της νὰ δίδῃ εἰς μοίρας τὸ μέτρον τῆς γωνίας, ποὺ ἔχει ἡμίτονον τὸ 1/100 τοῦ ἀπέναντι ἀριθμοσήμου τῆς D.

Οὕτω τὸ ἀριθμόσημον τοῦ ἀριστεροῦ ἄκρου της εἶναι 35′ ἢ $0,58^0$, ἐπειδὴ ημ35′ = ημ$0,58^0 = 0,01 = 1 \times \frac{1}{100}$ καὶ τοῦ δεξιοῦ ἄκρου της $5^0 45'$ ἢ $5,75^0$, ἐπειδὴ ημ$5^0 45' = 5,75^0 = 0,1 = 10 \times \frac{1}{100}$.

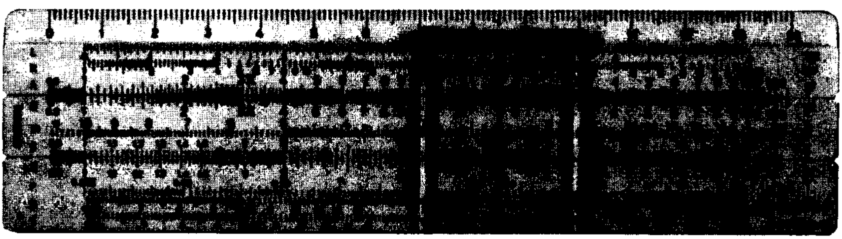
Ἐπειδὴ διὰ $35' < x < 5^0 45'$ εἶναι εφ$x \simeq$ ημx, ἡ S/T λέγεται καὶ *κλῖμαξ ἡμιτόνων ἐφαπτομένων*.

Τὰ ὑποπολλαπλάσια τῆς μοίρας εἰς ἄλλους κανόνας σημειώνονται μὲ πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ καὶ εἰς ἄλλους εἰς δέκατα καὶ ἑκατοστὰ τῆς μοίρας. Ὅλοι δὲ οἱ κατασκευασταὶ κανόνων δὲν τοποθετοῦν τὰς κλίμακας S, S/T, T εἰς τὰς αὐτὰς θέσεις ἐπὶ τοῦ κανόνος. Ἄλλοι τὰς ἔχουν τοποθετήσει ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ὄψεως τοῦ σύρτου καὶ ἄλλοι ἐπὶ τῆς προσόψεως τοῦ κανόνος. Διὰ νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ κλίμακες S, S/T, T, πρέπει γενικῶς νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς προσόψεως κατὰ τρόπον, ὥστε αἱ ἀρχαὶ αὐτῶν νὰ εὑρίσκωνται εὐθυγραμμισμέναι μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς D (σχ. 18 · 9 α). Εἰς ὅσους τὰς ἔχουν εἰς τὴν ὀπισθίαν ὄψιν τοῦ σύρτου, περιστρέφομεν τὸν σύρτην καὶ τὸν τοποθετοῦμεν καταλλήλως (σχ. 18 · 9 β).

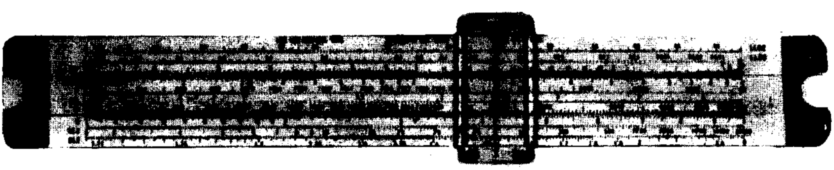
Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὡς ἀκολούθως:

1. *Τοῦ* $\eta\mu x^0$.

α) *Διὰ* $5{,}75^0 < x < 90^0$. Τοποθετοῦμεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον x^0 τῆς S. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην, διαιρούμενον διὰ 10 μᾶς δίδει τὸ $\eta\mu x^0$. Εἰς τὸ σχῆμα 18 · 9 α διὰ $x = 25^0$ εὑρίσκομεν $\eta\mu 25^0 = 4{,}23 : 10 = 0{,}423$.



Σχ. 18·9 α.



Σχ. 18·9 β.

β) *Διὰ* $0{,}58^0 < \alpha < 5{,}75^0$. Τοποθετοῦμεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ x^0 τῆς S/T. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην, διαιρούμενον διὰ 100 μᾶς δίδει τὸ ημx^0. Εἰς τὸ σχῆμα 18·9 β διὰ $x=2{,}42^0$ εὑρίσκομεν ημ$2{,}42^0$ $=4{,}2:100=0{,}042$.

2. *Τῆς εφx^0.*

α) *Διὰ $5{,}75^0<x<45^0$.* Τοποθετοῦμεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ x^0 τῆς T. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς D, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν δείκτην, διαιρούμενον διὰ 10 μᾶς δίδει τὴν εφx^0. Εἰς τὸ σχῆμα 18·9 α διὰ $x=22{,}9^0$ εὑρίσκομεν εφ$22{,}9^0$ $=4{,}23:10=0{,}423$.

β) *Διὰ $0{,}58^0<x<5{,}75^0$* ὑπολογίζομεν τὸ ημx^0, διότι διὰ $x<5{,}75^0$ ημx=εφx. Εἰς τὸ σχῆμα 18·9 α διὰ $x=2^0 26'$ εὑρίσκομεν εφ$2^0 26'$=εφ$2{,}42^0$=ημ$2{,}42^0=0{,}042$.

γ) *Διὰ $45<x<90^0$.* Ἀπὸ τὴν τριγωνομετρίαν ἔχομεν τὴν σχέσιν $\text{εφ}x=\frac{1}{\text{σφ}x}=\frac{1}{\text{εφ}(90^0-x)}$. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν λοιπὸν τῆς εφx εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν εφ(90^0-x) καὶ κατόπιν ἀπὸ τὴν κλίμακα C1 τὸν ἀντίστροφόν της ἀριθμὸν $\frac{1}{\text{εφ}(90^0-\omega)}$.

Π.χ. Διὰ $x=60^0$. Ἀπὸ τὴν κλίμακα T εὑρίσκομεν εφ(90^0-60^0)=εφ$30^0=0{,}57$ καὶ ἀπὸ τὴν κλίμακα C1 τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{0{,}57}$ $=1{,}725$, ἄρα εφ$60^0=1{,}725$.

3. *Τοῦ συνx.*

Ἐπειδὴ συνx=ημ(90^0-x), ἀντὶ τοῦ συνx ὑπολογίζομεν τὸ ημ(90^0-x).

4. *Τῆς σφx.*

Ἐπειδὴ σφx=εφ(90^0-x), ἀντὶ τῆς σφx ὑπολογίζομεν τὴν εφ(90^0-x).

Σημειώσεις:

I. Πολλοὶ λογαριθμικοὶ κανόνες εἰς τὰς κλίμακας S, T, S/T παραπλεύρως ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον x^0 τοῦ μέτρου τῆς γωνίας ἀναγράφουν καὶ τὸ ἀριθμόσημον $90^0 - x^0$ τοῦ μέτρου τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας, ὥστε ἡ ἀνάγνωσις τοῦ συνx καὶ τῆς σφx νὰ εἶναι ἄμεσος. Φυσικὰ ἡ ἀνάγνωσις τῶν νέων ἀριθμοσήμων γίνεται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

II. Μερικοὶ λογαριθμικοὶ κανόνες ἐξ αὐτῶν, ποὺ ἔχουν τὰς κλίμακας S, T, S/T εἰς τὴν ὀπισθίαν ὄψιν τοῦ σύρτου, ἔχουν ἐπίσης εἰς τὸ ὀπίσθιον μέρος τοῦ κυρίως κανόνος μίαν γλυφήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναγράφονται αἱ ἐνδείξεις S, T, S/T μὲ ἀντιστοίχους χαραγάς. Εἰς τοὺς κανόνας αὐτοὺς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, χωρὶς νὰ ἀναστρέφωμεν τὸν σύρτην. Π.χ. διὰ τὸ ημx^0($x > 5,75^0$) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Σύρομεν τὸν σύρτην, ὥστε ἡ χαραγὴ τοῦ ἀριθμοσήμου x^0 τῆς κλίμακος S νὰ ἔλθῃ ἀπέναντι ἀπὸ τὴν χαραγὴν S τῆς γλυφῆς. Κατόπιν περιστρέφομεν τὸν κανόνα. Τὸ ἀριθμόσημον τῆς κλίμακος C, ποὺ βλέπομεν ἀπέναντι ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς D, διαιρούμενον διὰ 10 μᾶς δίδει τὸ ημx^0. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν εφx^0($5,75^0 < x$). Διὰ $x < 5,75^0$ χρησιμοποιοῦμεν τὴν κλίμακα S/T καὶ ἐργαζόμεθα ὁμοίως, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι διαιροῦμεν τὸ ἀριθμόσημον τῆς κλίμακος C διὰ 100.

III. Μερικοὶ κανόνες δὲν ἔχουν τὴν κλίμακα S/T, ἄλλοι δὲ τὴν συγχωνεύουν μὲ τὴν κλίμακα S. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἡ κλῖμαξ S περιέχει τὰ ἀριθμόσημα τῶν γωνιῶν ἀπὸ 35′ ἢ $0,58^0$ ἕως 90^0. Τὸ ἀριθμόσημον $5,75^0$ εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον 10 τῆς κλίμακος A. Ἡ ἀνάγνωσις τοῦ ημx^0 εἰς τοὺς κανόνας αὐτοὺς γίνεται ἐπὶ τῆς κλίμακος A ὅπως προηγουμένως, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ ἀριθμόσημον τῆς A θὰ διαιρῆται διὰ 100.

18·10 Διάφοροι ἄλλαι κλίμακες.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰς κλίμακας, ποὺ ἀνεφέραμεν, πολλοὶ λογαριθμικοὶ κανόνες ἔχουν καὶ ἄλλας κλίμακας, ὅπως τὴν L, τὴν πυθαγόρειον μὲ τὴν ἔνδειξιν $\sqrt{1-x^2}$, τὰς DF, CF, καθὼς καὶ τὰς LL_1, LL_2, LL_3 μὲ τὰς ἀντιστρόφους των.

Μὲ τὴν κλίμακα L ὑπολογίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ κοινοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ α. Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὸν δείκτην τοῦ δρομέως ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον α τῆς D καὶ διαβάζομεν εἰς τὴν κλίμακα L κάτω ἀπὸ τὸ δείκτην τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογα.

Ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον εἶναι βαθμολογημένη ἡ κλῖμαξ, εἶναι προφανής.

Ἡ κλῖμαξ $\sqrt{1-x^2}$, ποὺ λέγεται καὶ κλῖμαξ τῶν συνημιτόνων, μᾶς δίδει τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\sqrt{1-x^2}$, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x. Χρησιμοποιεῖται ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν κλίμακα D ἢ τὴν S διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ συνθ, ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ ημθ.

Αἱ κλίμακες DF, CF ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν $\pi = 3{,}14$, καὶ μᾶς δίδουν τὸ γινόμενον $\pi \cdot \alpha$ τοῦ π ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν α τῆς κλίμακος D ἢ τῆς C ἀντιστοίχως. Π.χ. διὰ $\alpha = 2{,}4$ διαβάζομεν εἰς τὴν κλίμακα DF ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἀριθμόσημον 2,4 τῆς D τὸ ἀριθμόσημον 7,6, ἄρα $2{,}4 \cdot \pi \simeq 7{,}6$.

Αἱ κλίμακες LL_1, LL_2, LL_3 καὶ αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι χαραγμέναι μὲ βάσιν τοὺς φυσικοὺς λογαρίθμους (παράγρ. 17·2).

Τὰς χρησιμοποιοῦμεν σὺν τοῖς ἄλλοις διὰ τὸν ὑπολογισμὸν οἱασδήποτε δυνάμεως ἢ ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ α.

Ἡ σπουδὴ τῶν κλιμάκων αὐτῶν ἐκφεύγει τῆς ὕλης καὶ τῶν σκοπῶν τοῦ παρόντος βιβλίου.

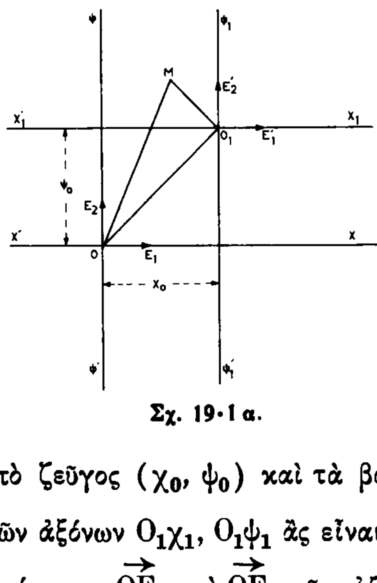
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 19

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

19·1 Ἀλλαγὴ τοῦ συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων.

I. *Μὲ μεταφοράν.*

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων $\chi O \psi$ ἂς λάβωμεν ἕνα νέον σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων $\chi_1 O_1 \psi_1$ (σχ. 19·1 α). Ἔστω δὲ συντεταγμέναι τοῦ O_1 (ὡς πρὸς τὸ



Σχ. 19·1 α.

σύστημα $\chi O \psi$) τὸ ζεῦγος (χ_0, ψ_0) καὶ τὰ βασικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OE'_1}$ καὶ $\overrightarrow{OE'_2}$ τῶν ἀξόνων $O_1\chi_1$, $O_1\psi_1$ ἂς εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ βασικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OE_1}$ καὶ $\overrightarrow{OE_2}$ τῶν ἀξόνων $O\chi$ καὶ $O\psi$. Ἐπειδὴ $\overrightarrow{OE'_1} = \overrightarrow{OE_1}$ καὶ $\overrightarrow{OE'_2} = \overrightarrow{OE_2}$, οἱ νέοι ἄξονες $O_1\chi_1$, $O_1\psi_1$ εἶναι παράλληλοι καὶ προσανατολισμένοι ὁμορρόπως μὲ τοὺς $O\chi$ καὶ $O\psi$. Ἔστω τώρα M ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μὲ συντεταγμένας (χ, ψ) ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi O \psi$ καὶ (χ_1, ψ_1) ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi_1 O \psi_1$. Ἂς ἀναζητήσωμεν σχέσιν συνδέουσαν τὰς (χ, ψ) μὲ τὰς (χ_1, ψ_1).

Ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}. \qquad (1)$$

Συμφώνως ὅμως πρὸς τὸν τύπον (3) τῆς παραγράφου 12·6 εἶναι:

$$\overrightarrow{OM} = \chi \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi \cdot \overrightarrow{OE_2}, \ \overrightarrow{OO_1} = \chi_0 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi_0 \cdot \overrightarrow{OE_2} \text{ καὶ}$$

$$\overrightarrow{O_1M} = \chi_1 \cdot \overrightarrow{OE'_1} + \psi_1 \cdot \overrightarrow{OE'_2} = \chi_1 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi_1 \cdot \overrightarrow{OE_2},$$

$$\text{ἐπειδὴ } \overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{OE'_1} \text{ καὶ } \overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{OE'_2}.$$

Εἰσάγομεν τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς τῶν $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{O_1M}$ εἰς τὴν (1). Θὰ ἔχωμεν:

$$\chi \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi \cdot \overrightarrow{OE_2} = (\chi_0 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi_0 \cdot \overrightarrow{OE_2}) + (\chi_1 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi_1 \cdot \overrightarrow{OE_2})$$

$$\text{ἢ } \chi \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi \cdot \overrightarrow{OE_2} = \chi_0 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi_0 \cdot \overrightarrow{OE_2} + \chi_1 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi_1 \cdot \overrightarrow{OE_2}$$

$$\text{ἢ } \chi \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi \cdot \overrightarrow{OE_2} = (\chi_0 + \chi_1) \overrightarrow{OE_1} + (\psi_0 + \psi_1) \cdot \overrightarrow{OE_2}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν προκύπτει ὅτι:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1, \quad \psi = \psi_0 + \psi_1 \qquad (1\alpha)$$

$$\text{καὶ } \chi_1 = \chi - \chi_0, \quad \psi_1 = \psi - \psi_0. \qquad (1\beta)$$

II. *Μὲ στροφήν.*

Ἔστω $\chi O \psi$ ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων. Τὸ στρέφομεν μέσα εἰς τὸ ἐπίπεδόν του καὶ γύρω ἀπὸ τὴν ἀρχήν του O κατὰ γωνίαν, φ (σχ. 19·1β). Προκύπτει τὸ σύστημα $\chi_1 O \psi_1$ μὲ τὰ βασικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OE'_1}$, $\overrightarrow{OE'_2}$ τῶν ἀξόνων $O\chi_1$, $O\psi'_1$ ἰσομήκη μὲ τὰ $\overrightarrow{OE_1}$ καὶ $\overrightarrow{OE_2}$ τῶν $O\chi$ καὶ $O\psi$. Ἂς ἐκφράσωμεν τὰ $\overrightarrow{OE_1'}$ καὶ $\overrightarrow{OE'_2}$ μὲ τὰς συντεταγμένας των ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi O \psi$ (παράγρ. 12·6).

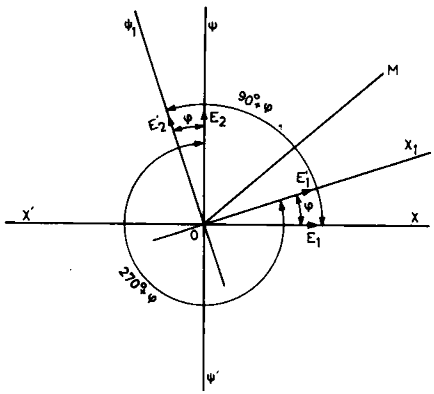
α) Τὸ $\overrightarrow{OE_1}$.

Ἐπειδὴ $|\overrightarrow{OE'_1}|=1$, $\sphericalangle(O\chi, \overrightarrow{OE'_1})=\varphi$, $\sphericalangle(O\psi, \overrightarrow{OE'_1})=270^0+\varphi$, ἔχομεν (παράγρ. 12·24).

Τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{OE'_1}=\alpha_1=|\overrightarrow{OE'_1}|$ συνφ $=1\cdot$συνφ $=$ συνφ,

τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{OE'_1}=\beta_1=|\overrightarrow{OE'_1}|\cdot$ συν$(270^0+\varphi)=1\cdot$ ημφ $=$ ημφ

καὶ $\overrightarrow{OE'_1}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{OE_1}+\beta_1\cdot\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{OE_1}\cdot$ συνφ $+\overrightarrow{OE_2}\cdot$ ημφ.



Σχ. 19·1 β.

β) Τὸ $\overrightarrow{OE'_2}$.

Ἐπειδὴ $|\overrightarrow{OE'_2}|=1$, $\sphericalangle(O\chi, \overrightarrow{OE'_2})=\varphi+90^0$, $\sphericalangle(O\psi, \overrightarrow{OE'_2})=\varphi$, ἔχομεν:

Τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{OE'_2}=\alpha_2=|\overrightarrow{OE'_2}|\cdot$ συν$(\varphi+90^0)=1(-$ημφ$)=$ $-$ημφ, τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{OE'_2}=\beta_2=|\overrightarrow{OE'_2}|$ συνφ $=1\cdot$ συνφ $=$ συνφ, καὶ $\overrightarrow{OE'_2}=\alpha_2\cdot\overrightarrow{OE_1}+\beta_2\cdot\overrightarrow{OE_2}=-\overrightarrow{OE_1}\cdot$ ημφ $+\overrightarrow{OE_2}\cdot$ συνφ.

Ἔστω τώρα Μ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μὲ συντεταγμένας (χ, ψ) ὡς πρὸς $\chi O\psi$ καὶ (χ_1, ψ_1) ὡς πρὸς $\chi_1 O\psi_1$. Ἂς ἀναζητήσωμεν σχέσιν συνδέουσαν τὰς (χ, ψ) καὶ (χ_1, ψ_1).

Εἶναι: $\overrightarrow{OM}=\chi\cdot\overrightarrow{OE_1}+\psi\cdot\overrightarrow{OE_2}$ καὶ $\overrightarrow{OM}=\chi_1\cdot\overrightarrow{OE'_1}+\psi_1\cdot\overrightarrow{OE'_2}$.

Ἑπομένως καὶ $\chi\cdot\overrightarrow{OE_1}+\psi\cdot\overrightarrow{OE_2}=\chi_1\cdot\overrightarrow{OE'_1}+\psi_1\cdot\overrightarrow{OE'_2}$.

Εἰς τὰς ἰσότητας αὐτὰς εἰσάγομεν τὰς εὑρεθείσας ἐκφράσεις τῶν $\overrightarrow{OE'_1}$, $\overrightarrow{OE'_2}$ καὶ ἔχομεν:

$$\chi \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi \cdot \overrightarrow{OE_2} = \chi_1(\overrightarrow{OE_1}\sigma\upsilon\nu\varphi + \overrightarrow{OE_2}\eta\mu\varphi) + \psi_1(-\overrightarrow{OE_1}\eta\mu\varphi + \overrightarrow{OE_2}\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

$$= \chi_1\sigma\upsilon\nu\varphi\overrightarrow{OE_1} + \chi_1\eta\mu\varphi\overrightarrow{OE_2} - \psi\eta\mu\varphi\overrightarrow{OE_1} + \psi\sigma\upsilon\nu\varphi\,\overrightarrow{OE_2} \text{ ἢ}$$

$$\chi \cdot \overrightarrow{OE_1} + \psi \cdot \overrightarrow{OE_2} = (\chi_1\sigma\upsilon\nu\varphi - \psi_1\eta\mu\varphi)\overrightarrow{OE_1} + (\chi_1\eta\mu\varphi + \psi_1\sigma\upsilon\nu\varphi)\overrightarrow{OE_2}.$$

Διὰ νὰ ἰσχύῃ ὅμως ἡ τελευταία ἰσότης πρέπει:

$$\chi = \chi_1\sigma\upsilon\nu\varphi - \psi_1\eta\mu\varphi \text{ καὶ } \psi = \chi_1\eta\mu\varphi + \psi_1\sigma\upsilon\nu\varphi. \qquad (2)$$

Διὰ $\varphi = 45^0$.

Ἐπειδὴ εἶναι $\eta\mu 45^0 = \sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 - \psi_1),\ \psi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 + \psi_1). \qquad (3)$$

Διὰ $\varphi = -45^0$.

Ἐπειδὴ εἶναι $\eta\mu(-45^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(-45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 + \psi_1),\ \psi = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\chi_1 + \psi_1). \qquad (4)$$

19·2 Παράστασις τῆς εὐθείας μὲ μίαν ἐξίσωσιν.

Ἔστω M_1 (χ_1, ψ_1), M_2 (χ_2, ψ_2) δύο σημεῖα τῆς εὐθείας ε τοῦ ἐπιπέδου $\chi O \psi$ (σχ. 19·2).

Διὰ νὰ ἀνήκῃ ἕνα σημεῖον M (χ,ψ) τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὴν ε πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{M_2M}$ καὶ $\overrightarrow{M_1M_2}$ νὰ εἶναι παράλληλα, ἄρα αἱ συντεταγμέναι των (παράγρ. 12·8) νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν:

$$(\chi - \chi_2)(\psi_1 - \psi_2) = (\psi - \psi_2)(\chi_1 - \chi_2) \qquad (1)$$

ἢ διὰ $(\chi_1 - \chi_2)(\psi_1 - \psi_2) \neq 0$ τὴν σχέσιν:

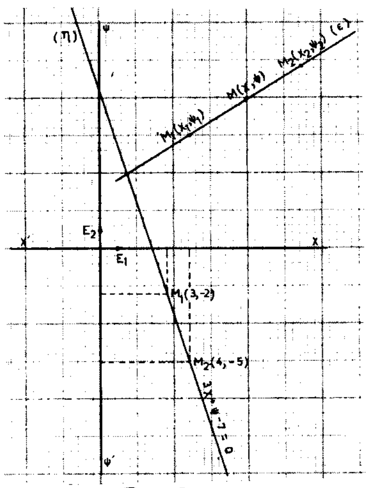
$$\frac{\chi - \chi_2}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\psi - \psi_2}{\psi_1 - \psi_2}. \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1), ἀφοῦ τακτοποιηθῇ ὡς πρὸς χ, ψ, λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$(\psi_1-\psi_2)\chi-(\chi_1-\chi_2)\psi+\chi_1\psi_2-\chi_2\psi_1=0,$$

ἤ, ἄν θέσωμεν $\psi_1-\psi_2=\mathrm{A}$, $\chi_1-\chi_2=\mathrm{B}$, $\chi_1\psi_2-\chi_2\psi_1=\Gamma$, τὴν μορφήν:

$$\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0 \qquad (3)$$



Σχ. 19·2.

μὲ $|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0$, δηλαδὴ ἕνα ἀπὸ τὰ Α καὶ $\mathrm{B}\neq 0$.

Ὥστε αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας ἱκανοποιοῦν μίαν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ,ψ.

Ἀντιστρόφως κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0$ μὲ $|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0$ παριστάνει μίαν εὐθεῖαν.

Πράγματι ἔστω ὅτι μᾶς ἐδόθη μία ἐξίσωσις α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x,y, π.χ. ἡ

$$\mathrm{A}_1\chi+\mathrm{B}_1\psi+\Gamma_1=0 \qquad (4)$$

μὲ $\mathrm{A}_1+\mathrm{B}_1\neq 0$.

Ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὸν Α΄ Τόμον, μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς αὐτῆς ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις, δηλαδὴ τὴν ἀληθεύουν ἀπειράριθμα ζεύγη τιμῶν (χ_0, ψ_0). Ἐπειδὴ δὲ εἰς κάθε ζεῦγος (χ, ψ) ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, συμπεραίνομεν ὅτι ἀπειράριθμα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀληθεύουν τὴν (4). Ἂς ἀναζητήσωμεν ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά. Πρὸς τοῦτο, ἂν $A \neq 0$, δίδομεν εἰς τὸ ψ μίαν αὐθαίρετον τιμὴν ψ_0 καὶ ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν $A_1\chi + B_1\psi_0 + \Gamma_1 = 0$, ποὺ προκύπτει, ὡς πρὸς χ. Εὑρίσκομεν:

$$\chi_0 = -\frac{B_1\psi_0 + \Gamma_1}{A_1}.$$

Τὸ σημεῖον M_0 (χ_0, ψ_0) ἀληθεύει τὴν (4). Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὴν σχέσιν $A_1\chi_0 + B_1\psi_0 + \Gamma_1 = 0$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει ὅτι $\Gamma_1 = -(A_1\chi_0 + B_1\psi_0)$. Εἰσάγομεν τώρα τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ Γ_1 εἰς τὴν (4) καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν:

$$A_1\chi + B_1\psi - (A_1\chi_0 + B_1\psi_0) = 0 \text{ ἢ } A_1(\chi - \chi_0) + B_1(\psi - \psi_0) = 0.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις λέγει ὅτι κάθε σημεῖον, ποὺ τὴν ἀληθεύει, ὁρίζει μὲ τὸ M_0 (χ_0, ψ_0) ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}$ παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $(B_1, -A_1)$.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι κάθε σημεῖον, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $A_1\chi + B_1\psi + \Gamma$, ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν ε_1, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ M_0 καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $(B_1, -A_1)$.

Ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖον, π.χ. τὸ N, (ξ, η) τῆς ε_1, ἀληθεύει τὴν (4). Διότι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M_0N}$ $(\xi - \chi_0, \eta - \psi_0)$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ N καὶ M_0, εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $(B_1, -A_1)$ καὶ ἑπομένως ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν:

$$-A_1(\xi - \chi_0) = B_1(\varkappa - \psi_0) \Leftrightarrow A_1(\xi - \chi_0) + B_1(\eta - \psi_0) \Leftrightarrow$$
$$A_1\xi + B_1\eta - A_1\chi_0 - B_1\psi_0 \Leftrightarrow A_1\xi + B_1\eta + \Gamma_1 = 0,$$

ἐπειδὴ $\Gamma_1 = -A_1\chi_0 - B_1\psi_0$.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν: *εἰς ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων αἱ εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου του παριστάνονται μὲ πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις* $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$.

Καὶ ἀντιστρόφως *κάθε ἐξίσωσις* $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ *παρι-*

στάνει μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $(B, -A)$.

Παραδείγματα.

1ον) Ἡ εὐθεῖα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1(3, -2)$, καὶ $M_2(4, -5)$ (σχ. 19·2), ἔχει ἐξίσωσιν $(\chi-4)(-2+5)=(\psi+5)(3-4)$ ἢ $3\chi+\psi-7=0$.

2ον) Ἡ εὐθεῖα, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ $P(1, 1)$ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $\delta(4, -2)$, ἔχει ἐξίσωσιν:

$$\frac{\chi-1}{4}=\frac{\psi-1}{-2} \quad ἢ \quad \chi+2\psi-3=0.$$

3ον) Ἡ ἐξίσωσις $3\chi+2\psi-7=0$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα:

$$M_1\left(\chi=1,\ \psi=\frac{7-3\times 1}{2}=2\right)$$

$$M_2\left(\chi=5,\ \psi=\frac{7-3\times 5}{2}=-4\right).$$

4ον) Ἡ ἐξίσωσις $7\chi-3\psi+10=0$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M\left(\psi=8, \chi=\frac{3\times 8-10}{7}=2\right)$ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $(-3, -7)$.

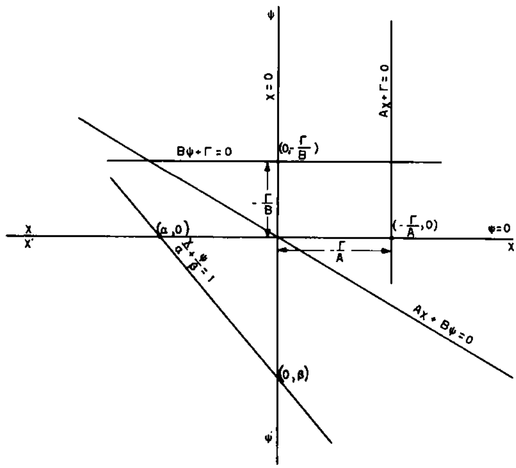
19·3 Εἰδικαὶ περιπτώσεις.

I. Ἂν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $\psi'\psi$, τότε θὰ εἶναι καὶ τὸ διάνυσμα $(B, -A)$ παράλληλον πρὸς τὸν $\psi'\psi$. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως τὸ $(B, -A) // \psi'\psi$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ τετμημένη του $B=0$. Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλος πρὸς τὸν $\psi'\psi$ ἔχει ἐξίσωσιν:

$$A\chi+\Gamma=0 \quad ἢ \quad \chi=-\frac{\Gamma}{A}$$

$$ἢ \ \chi=\alpha \ (\text{ὡρισμένος ἀριθμός}) \ (\text{σχ. } 19{\cdot}3). \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi = \alpha$ παριστάνει εὐθεῖαν $// \psi'\psi$, ποὺ τέμνει τὸν $\chi'\chi$ εἰς τὸ σημεῖον $(\alpha, 0)$, διότι θὰ εἶναι $//$ πρὸς τὸ διάνυσμα $(0, -1) // 0\psi$.



Σχ. 19·3.

Διὰ $\alpha = 0$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν·

$$\chi = 0,$$

ποὺ παριστάνει τὸν ἄξονα $\psi'\psi$.

Ὁμοίως μία εὐθεῖα $//$ πρὸς τὸν $\chi'\chi$ ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$\mathrm{B}\chi + \Gamma = 0 \text{ ἢ } \chi = -\frac{\Gamma}{\mathrm{B}} \text{ ἢ } \chi = \beta \text{ (ὡρισμένος ἀριθμός)} \qquad (2)$$

καὶ ἀντιστρόφως κάθε ἐξίσωσις $\psi = \beta$ παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν 0χ, ποὺ τέμνει τὸν $\psi'\psi$ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \beta)$.

Διὰ $\beta = 0$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\psi = 0,$$

ποὺ παριστάνει τὸν ἄξονα τῶν $\chi'\chi$.

II. Ἡ ἐξίσωσις $\mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma = 0$ μιᾶς εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν $0\ (0,0)$ τῶν συντεταγμένων ἔχει $\Gamma = 0$, διότι $\mathrm{A} \cdot 0 + \mathrm{B} \cdot 0 + \Gamma = 0$ ἢ $\Gamma = 0$.

Ἀντιστρόφως, ἂν μία ἐξίσωσις $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ ἔχῃ $\Gamma = 0$, τότε ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνει, περνᾶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O, διότι αἱ συντεταγμέναι $(0,0)$ τοῦ O τὴν ἐπαληθεύουν.

III. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποῖα δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O $(0,0)$ καὶ τέμνει τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα $(\alpha,0)$, $(0,\beta)$, ἔχει ἐξίσωσιν:

$$\frac{\chi-0}{0-\alpha} = \frac{\psi-\beta}{\beta-0} \Leftrightarrow \frac{\chi}{-\alpha} = \frac{\psi}{\beta} - \frac{\beta}{\beta} \text{ ἢ } \frac{\chi}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1. \qquad (3)$$

Ἀντιστρόφως κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1$ μὲ $\alpha\beta \neq 0$ παριστάνει εὐθεῖαν, ποὺ τέμνει τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα $(\alpha,0)$, $(0,\beta)$, διότι διὰ $\psi = 0$ ἔχομεν $\chi = \alpha$ καὶ διὰ $\chi = 0$, $\psi = \beta$ (σχ. 19·3).

Ὁ ἀριθμὸς α τῆς (3) λέγεται *ἀρχικὴ τετμημένη* καὶ ὁ ἀριθμὸς β *ἀρχικὴ τεταγμένη* τῆς εὐθείας.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ μὲ $A \cdot B \cdot \Gamma \neq 0$ εἶναι:
$\alpha = -\frac{\Gamma}{A}$ καὶ $\beta = -\frac{\Gamma}{B}$.

Παραδείγματα.

1ον) Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $(2,0)$, $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$, εἶναι:

$$\frac{\chi}{2} + \frac{\psi}{\frac{-3}{4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} - \frac{4\psi}{3} = 1 \Leftrightarrow 3\chi - 8\psi = 6.$$

2ον) Ἡ εὐθεῖα $2\chi + 3\psi = 2 \Leftrightarrow \frac{\chi}{1} + \frac{\psi}{\frac{2}{3}} = 1$ τέμνει τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα $(1,0)$, $\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

IV. Ἕνα διάνυσμα $\vec{\delta}\,(\alpha,\beta)$ διὰ νὰ εἶναι // πρὸς μίαν εὐθεῖαν

$A\chi + B\psi = \Gamma$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι // πρὸς τὸ διάνυσμα $(B, -A)$, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι // ἡ εὐθεῖα. Ἤτοι αἱ συντεταγμέναι του νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν [παράγρ. 12·8 (III)]:

$$-A\alpha = B\beta \Leftrightarrow A\alpha + B\beta = 0. \qquad (4)$$

Π.χ. τὸ διάνυσμα $(10,6)$ εἶναι // πρὸς τὴν $3\chi - 5\psi = 2$, διότι $3 \times 10 + (-5) \times 6 = 0$.

V. Ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον $M_0(\chi_0, \psi_0)$ καὶ εἶναι // πρὸς τὸ μὴ μηδενικὸν διάνυσμα $\vec{\delta}\,(\alpha, \beta)$, εἶναι:

$$(\chi - \chi_0) \cdot \beta = \alpha \cdot (\psi - \psi_0), \qquad (5)$$

διότι τὸ διάνυσμα $(\chi - \chi_0, \psi - \psi_0)$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον $M\,(\chi, \psi)$ τῆς εὐθείας καὶ ἀπὸ τὸ $M_0\,(\chi_0, \psi_0)$, εἶναι // πρὸς τὸ $\vec{\delta}$.

Ἐὰν $\alpha \cdot \beta \neq 0$, τότε ἡ (5) γράφεται:

$$\frac{\chi - \chi_0}{\alpha} = \frac{\psi - \psi_0}{\beta}. \qquad (6)$$

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $(3, -4)$ καὶ εἶναι // πρὸς τὸ διάνυσμα $(4,7)$, εἶναι:

$$\frac{\chi - 3}{4} = \frac{\psi + 4}{7}$$

καὶ τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $(2, -3)$ καὶ εἶναι // πρὸς τὸ διάνυσμα $(3,0)$, εἶναι:

$$(\chi - 2) \cdot 0 = (\psi + 3) \cdot 3 \Leftrightarrow (\psi + 3) = 0 \Leftrightarrow \psi = -3.$$

19·4 Συντελεστὴς διευθύνσεως διανύσματος καὶ εὐθείας.

Συντελεστὴς διευθύνσεως ἑνὸς διανύσματος $\vec{\delta}\,(\alpha, \beta) \neq \vec{(0)}$ *λέγεται τὸ πηλίκον* $\frac{\beta}{\alpha}$ *τῆς τεταγμένης του* β *πρὸς τὴν τετμημένην του* α.

Ὅταν $\alpha = 0$, τότε συντελεστὴς διευθύνσεως εἶναι τὸ σύμβολον

∞. Συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ $\overrightarrow{O}$ δὲν ὁρίζεται. *Ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὴν παράγραφον 13·8 (III) δύο διανύσματα, διὰ νὰ εἶναι παράλληλα πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ἴσους συντελεστὰς διευθύνσεως.*

Συντελεστὴς διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας ε λέγεται ὁ κοινὸς συντελεστὴς διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων, ποὺ εἶναι // ε. Ἑπομένως ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως λ τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1(\chi_1, \psi_1)$, $M_2(\chi_2, \psi_2)$, εἶναι ὁ λόγος $\lambda = \dfrac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$ (διὰ $\chi_2 = \chi_1$ καὶ $\psi_2 \neq \psi_1$ ὁ λόγος αὐτὸς σημαίνει ∞).

Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς εὐθείας $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ εἶναι $\lambda = -\dfrac{A}{B}$ καὶ τῆς εὐθείας $\psi = \lambda\chi + \beta$ ὁ ἀριθμὸς λ.

Ἐὰν τὰ βασικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ τῶν δύο ἀξόνων εἶναι ἰσομήκη $|\overrightarrow{OE_1}| = |\overrightarrow{OE_2}|$, τότε τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τοῦ διανύσματος ἢ τῆς εὐθείας τὸν καλοῦμεν καὶ *κλίσιν* τοῦ διανύσματος ἢ τῆς εὐθείας. Ἡ κλίσις $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{\delta}$ (α, β) ἰσοῦται τώρα μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς πολικῆς γωνίας τοῦ $\overrightarrow{\delta}$ (παράγραφος 12·35).

Ἡ κλίσις μιᾶς εὐθεῖας ε ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς $\sphericalangle(O\chi, OA)$, ποὺ ἔχει ἀρχικὴν πλευρὰν τὸν ἡμιάξονα $O\chi$ καὶ τελικὴν τὴν ἡμιευθεῖαν OA // ε. Ὡς φορὰν τῆς OA λαμβάνομεν τὴν φορὰν ἐπάνω εἰς τὴν ε, ποὺ προχωρεῖ ἀπὸ μικροτέρας τετμημένας πρὸς ἀλγεβρικῶς μεγαλυτέρας.

Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουν τὸν ἴδιον συντελεστὴν διευθύνσεως καὶ ἀντιστρόφως, δύο εὐθεῖαι μὲ ἴσους συντελεστὰς διευθύνσεως εἶναι παράλληλοι.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ποὺ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως λ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M_0(\chi_0, \psi_0)$, εἶναι:

$$\psi - \psi_0 = \lambda(\chi - \chi_0), \qquad (1)$$

καὶ ἡ εξίσωσις τῆς εὐθείας, ποὺ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως λ καὶ τέμνει τὸν ἄξονα Οψ εἰς τὸ σημεῖον (Ο, β), εἶναι:

$$\psi = \lambda\chi + \beta. \qquad (2)$$

Παραδείγματα.

1ον) Συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\vec{\delta}(3, -7)$ εἶναι $\lambda = -\frac{7}{3}$ καὶ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$, μὲ $M_1(3, 2)$, $M_2(7, 5)$ εἶναι: $\lambda = \frac{5-2}{7-3} = \frac{3}{4}$.

2ον) Συντελεστὴς διευθύνσεως λ τῆς εὐθείας $3\chi + 2\psi + 5 = 0$ εἶναι $\lambda = -\frac{3}{2}$ καὶ τῆς εὐθείας $\frac{\chi}{3} - \frac{\psi}{2} = 1$ εἶναι $\lambda = \frac{2}{3}$.

3ον) Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ποὺ εἶναι // πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\sphericalangle \psi O \chi'$ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον (0, 3), εἶναι:

$$\psi = -\chi + 3,$$

διότι ἡ γωνία τοῦ ἡμιάξονος Οχ καὶ τῆς διχοτόμου εἶναι 135^0 καὶ εφ $135^0 = -1$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον (−2, 4) καὶ εἶναι // πρὸς τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΕ, ἡ ὁποία σχηματίζει γωνίαν 30^0 μὲ τὸν ἡμιάξονα Οχ, εἶναι:

$$\psi - 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\chi + 2),$$

διότι εφ $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

19·5 Σχεδίασις μιᾶς εὐθείας, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἐξίσωσις.

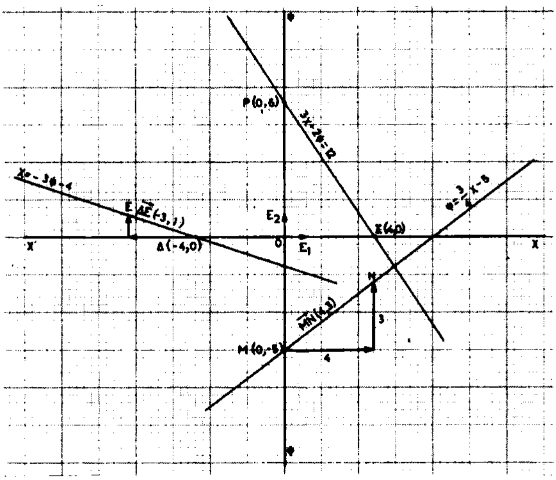
Ι. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ τῆς εὐθείας. Ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τὰς συντεταγμένας δύο διαφορετικῶν σημείων $M_1(\chi_1, \psi_1)$, $M_2(\chi_2, \psi_2)$ τῆς εὐθείας, σχεδιάζομεν τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν M_1M_2. Προτιμώτερον εἶναι νὰ ἐκλέγωμεν τὰ σημεῖα $\left(-\frac{\Gamma}{\mathrm{A}}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}\right)$, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα τέμνει τοὺς δύο ἄξονας.

II. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\psi = \lambda\chi + \beta$ μιᾶς εὐθείας. Διὰ νὰ τὴν σχεδιάσωμεν, προσδιορίζομεν ἐπάνω εἰς τὸν $\psi'\psi$ τὸ σημεῖον B $(0, \beta)$, ποὺ ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν. Κατόπιν σχεδιάζομεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ μὲ συντεταγμένας $(1, \lambda)$ ἢ ἀναλόγους πρὸς αὐτάς. Ἡ εὐθεῖα BN εἶναι ἡ ζητουμένη.

Παραδείγματα (σχ. 19·5).

1ον) *Νὰ σχεδιασθῇ ἡ εὐθεῖα $3\chi + 2\psi = 12$.*

Διὰ $\psi = 0$ ἔχομεν $\chi = 4$ καὶ διὰ $\chi = 0$, $\psi = 6$. Προσδιορίζο-



Σχ. 19·5.

μεν τὰ σημεῖα $\Sigma(4, 0)$, $\mathrm{P}(0, 6)$. Ἡ εὐθεῖα ΣP εἶναι ἡ ζητουμένη.

2ον) *Νὰ σχεδιασθῇ ἡ εὐθεῖα $\psi = \frac{3\chi}{4} - 5$.*

Προσδιορίζομεν ἐπάνω εἰς τὸν $\psi'\psi$ τὸ σημεῖον M $(0, -5)$.

Κατόπιν κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{MN}(4,3) \parallel \overrightarrow{\delta}\left(1, \frac{3}{4}\right)$. Ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι ἡ ζητουμένη.

3ον) *Νὰ σχεδιασθῇ ἡ εὐθεῖα* $\chi = -3\psi - 4 \Leftrightarrow \psi = \frac{-1}{3}\chi - 4$.

Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον $\Delta(-4,0)$ καὶ κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}(-3,1)$, ποὺ ἔχει συντελεστὴν $\lambda = -\frac{1}{3}$. Ἡ ΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη.

19·6 Σχετικὴ θέσις δύο εὐθειῶν.

Δύο εὐθεῖαι $A_1\chi + B_1\psi + \Gamma_1 = 0$ καὶ $A_2\chi + B_2\psi + \Gamma_2 = 0$:

1) Τέμνονται, ὅταν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεών των ἔχῃ μίαν μόνον λύσιν, ἤτοι ὅταν:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο εὐθειῶν.

2) Εἶναι παράλληλοι, ὅταν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεών των δὲν ἔχῃ λύσιν, ἤτοι ὅταν:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}.$$

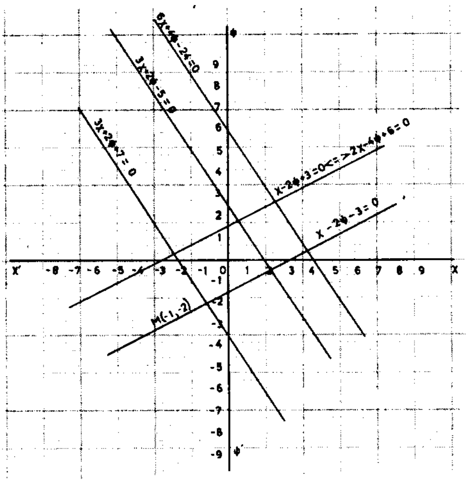
3) Συμπίπτουν, ὅταν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεών των εἶναι ἀόριστον, δηλαδὴ αἱ δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, ἤτοι ὅταν:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}.$$

Παραδείγματα (σχ. 19·6).

1ον) Αἱ εὐθεῖαι $3\chi + 2\psi + 7 = 0$, $\chi - 2\psi - 3 = 0$ τέμνονται, διότι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεών των ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν $(\chi = -1,\ \psi = -2)$. Τὸ ζεῦγος $(-1, -2)$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ των σημείου Μ.

2ον) Αἱ εὐθεῖαι $3\chi+2\psi-5=0$, $6\chi+4\psi-24=0$ εἶναι παράλληλοι, διότι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεών των δὲν ἔχει λύσιν, ἀφοῦ: $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}\neq\frac{-5}{-24}$.



Σχ. 19·6.

3ον) Αἱ εὐθεῖαι $\chi-2\psi+3=0$, $2\chi-4\psi+6=0$ συμπίπτουν, διότι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεών των εἶναι ἀόριστον, ἀφοῦ $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}$.

19·7 'Ασκήσεις.

1) Νὰ γράψετε τακτοποιημένας τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν AM_1, AM_2, AM_3, M_1M_2, M_2M_3, ὅπου $A(3,3)$, $M_1(-2,4)$, $M_2(0,7)$, $M_3(7,0)$.

2) Νὰ γράψετε τακτοποιημένην τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται:

Α) Ἀπὸ τὸ Μ $(3,2)$ καὶ εἶναι παράλληλος α) πρὸς τὸ διάνυσμα $(2,2)$, β) πρὸς τὸ διάνυσμα $(5,0)$, γ) πρὸς τὸ διάνυσμα $(0,-3)$.

Β) Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ν $(0,6)$ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα α) $(-3,4)$ β) $(0,2)$, γ) $(-3,0)$.

Γ) Ἀπὸ τὰ σημεῖα Π $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, Ρ$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

3) Νὰ γράψετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται: α) Ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ(0,5), Ε(5,0). β) Ἀπὸ τὰ σημεῖα 0 (0,0), Η(3,—3). γ) Ἀπὸ τὸ σημεῖον Θ(3,—4) καὶ εἶναι//πρὸς τὴν εὐθεῖαν $3\chi - 2\psi = 1$.

4) Ποία ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας $2\chi + 3\psi + 6 = 0$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi'O'\psi'$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ μίαν μεταφορὰν τοῦ $\chi O\psi$ εἰς τὸ σημεῖον $O'(3,2)$ καὶ ποία ἡ ἐξίσωσίς της ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi_1 O\psi_1$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν στροφὴν τοῦ $\chi O\psi$ κατὰ γωνίαν 45^0. (Θὰ χρησιμοποιήσετε τοὺς τύπους 1 καὶ 3 τῆς παραγράφου 19·1)

5) Νὰ ἐξετάσετε ἂν αἱ εὐθεῖαι $7\chi + 3\psi - 11 = 0$, $2\chi - 7\psi + 8 = 0$ τέμνωνται. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τέμνονται, νὰ προσδιορίσετε τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς καὶ γραφικῶς κατὰ προσέγγισιν καὶ ἀλγεβρικῶς, δηλαδὴ ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων.

6) Νὰ γράψετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ρ $(2, \sqrt{2})$ καὶ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, ὅπου Α (3,7), Β (3,—7).

7) Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μὲ Α(3,5), Β(5,2), Γ(—1,—1). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ τῶν τριῶν διαμέσων του. Νὰ δείξετε ὅτι αἱ διάμεσοί του διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

8) Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του, τῆς ΑΒ ἡ $7\chi + \psi + 23 = 0$, τῆς ΑΓ ἡ $3\chi - 7\psi - 5 = 0$ καὶ τῆς ΒΓ ἡ $\chi + 2\psi - 6 = 0$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του.

9) Ποία ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας $\psi = 3$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi_1 O\psi_1$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν στροφὴν τοῦ $\chi O\psi$ κατὰ 30^0.

19·8 Μετρικαὶ σχέσεις.

I. *Ἀπόστασις δύο σημείων.*

Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὴν παράγραφον 12·6, τὸ μῆκος $|\vec{\delta}|$ ἑνὸς διανύσματος $\vec{\delta}(\alpha, \beta)$ παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$|\vec{\delta}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \qquad (1)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει προφανῶς καὶ ὅταν $\vec{\delta} // O\chi$ ἢ $O\psi$.

Ἡ ἀπόστασις M_1M_2 δύο σημείων $M_1(\chi_1, \psi_1)$, $M_2(\chi_2, \psi_2)$ ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}(\chi_2 - \chi_1, \psi_2 - \psi_1)$. Ἔχομεν λοιπόν:

$$M_1M_2 = \sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}. \qquad (2)$$

II. *Γωνία δύο μὴ μηδενικῶν διανυσμάτων.*

Ἔστω $\vec{\delta}_1(\alpha_1, \beta_1)$, $\vec{\delta}_2(\alpha_2, \beta_2)$ δύο μὴ συγγραμμικὰ ἐλεύθερα διανύσματα καὶ $\overrightarrow{OA_1}(\alpha_1, \beta_1)$, $\overrightarrow{OA_2}(\alpha_2, \beta_2)$ τὰ ἀντιπροσωπευτικά των ἐφαρμοστὰ διανύσματα. Καλοῦμεν στοιχειώδη γωνίαν τῶν δύο διανυσμάτων καὶ τὴν παριστάνομεν συμβολικῶς $(\widehat{\delta_1, \delta_2})$ τὴν γωνίαν $A_1\widehat{O}A_2$ τοῦ τριγώνου A_1OA_2. Ἐὰν τὰ δ_1, δ_2 εἶναι συγγραμμικὰ καὶ ὁμόρροπα, τότε $(\widehat{\delta_1, \delta_2})=0^0$. Τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτῆς δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\text{συν}(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}. \qquad (3)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς προκύπτει ἀπὸ τὴν ἐφαρμογὴν ἑνὸς ἀπὸ τοὺς τύπους (4) τῆς παραγράφου 13·17 εἰς τὸ τρίγωνον A_1OA_2 διὰ τὴν γωνίαν O. Θέτομεν:

$$OA_1 = \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2},\ OA_2 = \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$
$$A_1A_2 = \sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}.$$

III. *Ἐμβαδὸν τριγώνου.*

Τὸ ἐμβαδὸν $(M_1M_2M_3)$ ἑνὸς τριγώνου $M_1M_2M_3$, ὅπου $M_1(\chi_1, \psi_1)$, $M_2(\chi_2, \psi_2)$, $M_3(\chi_3, \psi_3)$ παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$(M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}\left|\chi_1\psi_2-\chi_2\psi_1+\chi_2\psi_3-\chi_3\psi_2+\chi_3\psi_1-\chi_1\psi_3\right|. \qquad (4)$$

Μονὰς ἐπιφανείας ἐννοεῖται ὅτι εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἔχει πλευρὰν ἴσου μήκους μὲ τὰ βασικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$.

IV. *Γωνία δύο εὐθειῶν.*

Ἔστω $\psi_1=\lambda_1\chi+\beta_1$ καὶ $\psi_2=\lambda_2\chi+\beta_2$ αἱ ἐξισώσεις δύο τεμνομένων εὐθειῶν ε_1, ε_2 τοῦ ἐπιπέδου $\chi O\psi$. Καλοῦμεν γωνίαν τῶν δύο εὐθειῶν ε_1, ε_2 καὶ παριστάνομεν τὸ μέτρον της μὲ $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = (\widehat{\varepsilon_2, \varepsilon_1})$ τὴν ὀξεῖαν ἢ ὀρθὴν γωνίαν των. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$ παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2} \right|, \qquad (5)$$

ὅπου λ_1, λ_2 οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν ε_1, ε_2. Διὰ τὰς περιπτώσεις, ποὺ ὁ (5) δὲν δίδει ἀριθμόν, π.χ. διὰ $\lambda_2 = \infty$, συμφωνοῦμεν τὰ ἑξῆς:

Διὰ $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \infty$ νὰ εἶναι $\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \frac{1}{\lambda_1}$.

» $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$ » » $\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \infty$.

» $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 \neq 0$ » » $\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \frac{1}{\lambda_2}$.

» $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$ » » $\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \infty$.

» $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = \infty$ » » $\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = 0$.

» $1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ » » $\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \infty$.

V. *Καθετότης δύο εὐθειῶν.*

Ἡ συνθήκη καθετότητος δύο εὐθειῶν $\psi_1 = \lambda_1\chi + \beta_1$, $\psi_2 = \lambda_2\chi + \beta_2$ εἶναι:

$$1 + \lambda_1\lambda_2 = 0, \qquad (6)$$

ὅπου λ_1, λ_2 οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν.

VI. *Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν.*

Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου $M(\chi_0, \psi_0)$ ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν ε μὲ ἐξίσωσιν $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$, δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$KM = \left| \frac{A\chi_0 + B\psi_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (7)$$

19·9 Ἐφαρμογαί.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς ὀρθογωνίου συστήματος ἀξόνων $\chi O\psi$ μὲ βασικὰ διανύσματα μήκους 1 cm δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ μὲ Α (3, 2), Β (−2, 1), Γ (0,4).

Νὰ εὑρεθοῦν: α) Τὸ ἐμβαδὸν (ΑΒΓ) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. β) Τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α. γ) Τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ.

Ἐπίλυσις. α) Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ:

Χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον (4) (παράγρ. 17·8)

$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\left|\chi_1\psi_2 - \chi_2\psi_1 + \chi_2\psi_3 - \chi_3\psi_2 + \chi_3\psi_1 - \chi_1\psi_3\right|$ · Θέτομεν $\chi_1 = 3$, $\psi = 2$, $\chi_2 = -2$, $\psi_2 = 1$, $\chi_3 = 0$, $\psi_3 = 4$ καὶ εὑρίσκομεν:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\left|3 + 4 - 8 - 12\right| = \frac{1}{2}\left|-13\right| = \frac{13}{2} = 6{,}5\,\text{cm}^2.$$

β) Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Α:

Θὰ τὴν ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὸ συνημίτονόν της. Χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον (3) (παράγρ. 17·8):

$$\text{συν}\,(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}.$$

Εἶναι: $\vec{\delta}_1 = \overrightarrow{\text{ΑΒ}}(\alpha_1 = -2 - 3 = -5,\ \beta_1 = 1 - 2 = -1)$

$\vec{\delta}_2 = \overrightarrow{\text{ΑΓ}}(\alpha_2 = 0 - 3 = -3,\ \beta_2 = 4 - 2 = 2)$

$$\text{καὶ συν}\,(\widehat{\overrightarrow{\text{ΑΒ}}, \overrightarrow{\text{ΑΓ}}}) = \frac{(-5)(-3) + (-1)\cdot 2}{\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 2^2}}.$$

$$= \frac{13}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2}\ \ 13} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ἐπειδὴ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}45^0$, συμπεραίνομεν ὅτι:

$$\text{Α} = (\widehat{\overrightarrow{\text{ΑΒ}}, \overrightarrow{\text{ΑΓ}}}) = 45^0.$$

γ) Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τοῦ ὕψους ΑΔ:

1) Διὰ τὸ μέτρον (ΑΓ) τῆς ΑΓ θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον (2) (παράγρ. 17·8). $(\text{Μ}_1\text{Μ}_2) = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$·

Εἶναι $(M_1M_2)=(A\Gamma)$, $\chi_2=0$, $\chi_1=3$, $\psi_2=4$, $\psi_1=2$ καὶ $A\Gamma=\sqrt{(-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

2) Διὰ τὸ ὕψος ΑΔ, ἐπειδὴ ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τὴν ΒΓ, θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον (7):

$$(KM)=\left|\frac{A\chi_0+B\psi_0+\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Εἶναι ΚΜ τὸ ΑΔ, (χ_0, ψ_0) αἱ συντεταγμέναι $(3,2)$ τοῦ Α καὶ Α, Β, Γ οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας ΒΓ. Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ΒΓ. Θὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ τὴν μορφήν:

$$(\psi_1-\psi_2)(\chi-\chi_2)=(\chi_1-\chi_2)(\psi-\psi_2),$$

(χ_1, ψ_1) εἶναι αἱ συντεταγμέναι $(-2, 1)$ τοῦ Β καὶ (χ_2, ψ_2) αἱ συντεταγμέναι $(0, 4)$ τοῦ Γ. Ὥστε ἐξίσωσις τῆς ΒΓ εἶναι ἡ:

$$(1-4)(\chi)=(-2)(\psi-4)\Leftrightarrow$$
$$-3\chi=-2\psi+8\Leftrightarrow 3\chi-2\psi+8=0.$$

$$\text{Ἄρα } (A\Delta)=\left|\frac{3\times 3-2\times 2+8}{9+4}\right|=\left|\frac{13}{\sqrt{13}}\right|=\sqrt{13}.$$

Ἐπειδὴ $(A\Gamma)=(A\Delta)=\sqrt{13}$, δηλαδὴ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τὴν ΒΓ, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ. Ἐπειδὴ δὲ $A=45^0$, εἶναι καὶ $B=45^0$.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΑ εἶναι καὶ ἰσοσκελές.

19·10 Ἀσκήσεις.

Σημείωσις. Αἱ ἀσκήσεις, ποὺ ἀκολουθοῦν, ἀναφέρονται εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων μὲ βασικὰ διανύσματα μήκους 1 cm.

1) Δίδονται τὰ σημεῖα $M_1(2, 3)$, $M_2(-3,-4)$, $M_3(7, 2)$, $M_4(-6, 4)$. Νὰ ὑπολογίσετε:

α) Τὰς ἀποστάσεις M_1M_2, M_3M_4, M_2M_4, M_1M_4.

β) Τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν $M_1\widehat{M_2}M_3$, $M_2\widehat{M_3}M_4$, $M_2\widehat{M_3}M_1$.

γ) Τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_4$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν:

$$3\chi - 2\psi + 3 = 0, \quad \psi = 2\chi - 5.$$

3) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $3\chi - 4\psi + 5 = 0$ τῆς εὐθείας ε.

α) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων Δ(7, 2), Ε(1, 5), Ζ(—7, —2) ἀπὸ τὴν ε.

β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ Δ καθέτως πρὸς τὴν ε.

4) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι Α(3,2), Β(7, —1), Γ(5,4). Νὰ ὑπολογίσετε: α) Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του. β) Τὸ ἐμβαδόν του. γ) Τὰς γωνίας του.

5) Αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$4\chi - 3\psi - 1 = 0 \text{ τῆς ΑΒ}, \quad 2\chi - 7\psi + 5 = 0 \text{ τῆς ΒΓ},$$
$$\chi + 3\psi - 14 = 0 \text{ τῆς ΓΑ}.$$

Νὰ ὑπολογίσετε:

α) Τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν του.

β) Τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας ΑΔ.

γ) Τὴν ἐξίσωσιν τῆς διαμέσου ΑΜ.

δ) Τὴν γωνίαν ΜΑΔ.

6) Αἱ πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἔχουν τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

$$\text{ἡ ΑΒ τὴν } \psi = 3\chi + 2, \text{ ἡ ΒΓ τὴν } \psi = -2\chi + 1,$$
$$\text{ἡ ΓΔ τὴν } \psi = 3\chi + 6, \text{ ἡ ΑΔ τὴν } \psi = -2\chi + 5.$$

Ζητεῖται:

α) Νὰ σχεδιάσετε τὸ παραλληλόγραμμον.

β) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν του.

γ) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδόν του ἀπὸ τὰς συντεταγμένας του.

δ) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς γωνίας του.

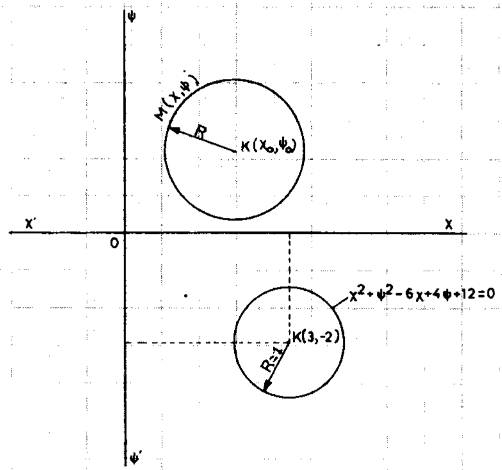
ε) Νὰ εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν διαγωνίων του καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς των.

ΓΡΑΜΜΑΙ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

19·11 Κύκλος.

Εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν λέγοντες κύκλον ἐννοοῦμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, δηλαδὴ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ κέντρον του. Διὰ κάθε σημεῖον Μ (χ, ψ) τοῦ κύκλου $[K(\chi_0, \psi_0), R]$ (σχ. 19·11) ἔχομεν τὴν σχέσιν $\sqrt{(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2}=R$ ἤ

$$(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=R^2. \qquad (1)$$



Σχ. 19·11.

Ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖον M_1 (χ_1, ψ_1) τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ ἐπαληθεύει τὴν (1) ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον $[K(\chi_0, \psi_0), R]$. Διότι ἡ σχέσις $(\chi_1-\chi_0)^2+(\psi_1-\psi_0)=R^2$ συνεπάγεται τὴν σχέσιν $\sqrt{(\chi_1-\chi_0)^2+(\psi_1-\psi_0)^2}=R$, ἡ ὁποία μᾶς λέγει ὅτι $(M_1K)=R$. Ἡ (1) λοιπὸν εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου $[K(\chi_0, \psi_0), R]$.

Ἂν Κ εἶναι τὸ Ο (0,0), τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$\chi^2+\psi^2=R^2. \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) μετασχηματίζεται εὐκόλως εἰς τήν:

$$\chi^2+\psi^2-2\chi_0\chi-2\psi_0\chi+\chi_0^2+\psi_0^2-R^2=0,$$

ποὺ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\chi^2+\psi^2+2\Delta\chi+2E\psi+Z=0. \qquad (3)$$

Ἀντιστρόφως δὲ κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (3) μετασχηματίζεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$[\chi-(-\Delta)]^2+[\psi-(-\mathrm{E})]^2=\Delta^2+\mathrm{E}^2-\mathrm{Z}. \qquad (4)$$

Αὐτή, ἂν $\Delta^2+\mathrm{E}^2-\mathrm{Z}>0$, παριστάνει κύκλον μὲ κέντρον τὸ $(-\Delta, -\mathrm{E})$ καὶ ἀκτῖνα $\mathrm{R}=\sqrt{\Delta^2+\mathrm{E}^2-\mathrm{Z}}$.

Ἂν $\Delta^2+\mathrm{E}^2-\mathrm{Z}=0$, ἡ (4) ἀληθεύει μόνον ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ $(-\Delta, -\mathrm{E})$ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι παριστάνει κύκλον μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὸ 0.

Ἂν $\Delta^2+\mathrm{E}^2-\mathrm{Z}<0$, τότε δὲν ὑπάρχει ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, ποὺ νὰ τὴν ἀληθεύῃ, καὶ ἑπομένως δὲν παριστάνει γεωμετρικὸν τόπον σημείων.

Τὰ κοινὰ σημεῖα ἑνὸς κύκλου $\chi^2+\psi^2+2\Delta\chi+2\mathrm{E}\psi+\mathrm{Z}=0$ καὶ μιᾶς εὐθείας $\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0$ ἔχουν συντεταγμένας τὰς λύσεις τοῦ συστήματος τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων. Ἐπίσης τὰ κοινὰ σημεῖα δύο κύκλων ἔχουν συντεταγμένας τὰς λύσεις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεών των.

Παράδειγμα (σχ. 19·11):

Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\psi^2-6\chi+4\psi+12=0 \Leftrightarrow (\chi-3)^2+(\psi+2)^2=9+4-12 \Leftrightarrow (\chi-3)^2+(\psi+2)^2=1$ παριστάνει τὸν κύκλον $[\mathrm{K}(3, -2), \mathrm{R}=1]$, ἐνῶ ἡ $\chi^2+\psi^2-8\chi-10\psi+41 \Leftrightarrow (\chi-4)^2+(\psi-5)^2=0$ παριστάνει τὸν κύκλον $[\mathrm{K}(4,5), \mathrm{R}=0]$.

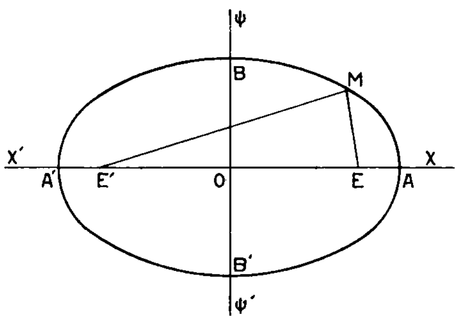
19·12 Ἔλλειψις.

Ἀπὸ τὸν Α΄ Τόμον (παράγρ. 6·10) γνωρίζομεν διὰ τὴν ἔλλειψιν τὰ ἑξῆς:

Ἔλλειψις εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ ἑνὸς ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα Ε΄ καὶ Ε τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα $\mathrm{ME}'+\mathrm{ME}=2\alpha>\mathrm{E}'\mathrm{E}$. Τὰ Ε΄ καὶ Ε λέγονται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως, ἡ δὲ ἀπόστασις $\mathrm{E}'\mathrm{E}=2\gamma$ *ἑστιακὴ ἀπόστασις*. Τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος Ε΄Ε εἶναι κέντρον συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως καὶ λέγεται *κέντρον* αὐτῆς. Ἡ ἔλλειψις ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὸν $\chi'\chi$

ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἑστίας Ε΄, Ε, ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν ἔλλειψιν εἰς τὰ σημεῖα Α΄, Α καὶ τὸν ψ΄ψ κάθετον πρὸς τὴν Ε΄Ε εἰς τὸ Ο, ποὺ τέμνει τὴν ἔλλειψιν εἰς τὰ σημεῖα Β΄ καὶ Β. Τὸ τμῆμα Α΄Α $= 2\alpha$ λέγεται *μέγας ἄξων* καὶ τὸ τμῆμα Β΄Β $= 2\beta$ *μικρὸς ἄξων τῆς ἐλλείψεως*. Μεταξὺ τῶν α, β, γ ὑφίσταται ἡ σχέσις $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα τῶν ἀξόνων συμμετρίας της εἶναι:

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1. \qquad (1)$$



Σχ. 19·12.

Ἀπόδειξις: Αἱ ἀποστάσεις οἱουδήποτε σημείου Μ(χ, ψ) (σχ. 19·12) τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὰς ἑστίας Ε΄$(-\gamma, 0)$, Ε$(\gamma, 0)$ εἶναι:

$$(\text{Ε΄Μ}) = \sqrt{(\chi+\gamma)^2+\psi^2},\ (\text{ΕΜ}) = \sqrt{(\chi-\gamma)^2+\psi^2}. \qquad (2)$$

Ἑπομένως διὰ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$(\text{Ε΄Μ})^2 - (\text{ΕΜ})^2 = (\chi+\gamma)^2 + \psi^2 - [(\chi-\gamma)^2+\psi^2] = 4\gamma\chi$$

$$\text{ἢ } [(\text{Ε΄Μ}) - (\text{ΕΜ})]\cdot[(\text{Ε΄Μ}) + (\text{ΕΜ})] = 4\gamma\chi. \qquad (3)$$

Διὰ νὰ ἀνήκῃ ὅμως ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὴν ἔλλειψιν, πρέπει, καὶ ἀρκεῖ, νὰ ἔχωμεν:

$$(\text{Ε΄Μ}) + (\text{ΕΜ}) = 2\alpha. \qquad (4)$$

Συνεπῶς διὰ τὰ σημεῖα Μ τῆς ἐλλείψεως ἡ (3) γίνεται:

$$2\alpha[(\text{Ε΄Μ}) - (\text{ΕΜ})] = 4\gamma\chi \text{ ἢ}$$

$$(\text{Ε΄Μ}) - (\text{ΕΜ}) = \frac{2\gamma\chi}{\alpha}. \qquad (5)$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) ἐπιλυόμεναι ὡς πρὸς (E'M) καὶ (EM) μᾶς δίδουν τὰς ἀκολούθους ἐκφράσεις των συναρτήσει τῶν α, γ, χ:

$$(E'M)=\alpha+\frac{\gamma\chi}{\alpha},\quad (EM)=\alpha-\frac{\gamma\chi}{\alpha}. \qquad (6)$$

Εἰσάγομεν τώρα τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς τῶν (E'M) καὶ (EM) εἰς τὰς (2). Προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha+\frac{\gamma\chi}{\alpha}=\sqrt{(\chi+\gamma)^2+\psi^2},\quad \alpha-\frac{\gamma\chi}{\alpha}=\sqrt{(\chi-\gamma)^2+\psi^2}$$

$$\text{ἢ}\ \left(\alpha+\frac{\gamma\chi}{\alpha}\right)^2=(\chi+\gamma)^2+\psi^2,\quad \left(\alpha-\frac{\gamma\chi}{\alpha}\right)^2=(\chi-\gamma)^2+\psi^2$$

$$\text{ἢ}\ \alpha^2+2\gamma\chi+\frac{\gamma^2\chi^2}{\alpha^2}=\chi^2+2\gamma\chi+\gamma^2+\psi^2,$$

$$\alpha^2-2\gamma\chi+\frac{\gamma^2\chi^2}{\alpha^2}=\chi^2-2\gamma\chi+\gamma^2+\psi^2.$$

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\alpha^2+\frac{\gamma^2\chi^2}{\alpha^2}=\chi^2+\psi^2+\gamma^2, \qquad (7)$$

ἡ ὁποία μετασχηματίζεται εἰς τήν:

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}\chi^2+\psi^2=\alpha^2-\gamma^2\ \text{ἢ}\ \frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\alpha^2-\gamma^2}=1. \qquad (8)$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν θέσωμεν $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις (1), τὴν ὁποίαν ἱκανοποιεῖ κάθε σημεῖον τῆς ἐλλείψεως.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἕνα σημεῖον $M_0(\chi_0,\psi_0)$ ἱκανοποιῇ τὴν (1), ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν. Διότι θὰ ἱκανοποιῇ καὶ τὰς ἰσοδυνάμους πρὸς αὐτὴν (7) καὶ (8), ἤτοι θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha^2+\frac{\gamma^2\chi_0^2}{\alpha^2}=\chi_0^2+\gamma^2+\psi_0^2.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν μὲ καταλλήλους μετασχηματισμοὺς προκύπτουν αἱ σχέσεις:

$$\left(\alpha+\frac{\gamma}{\alpha}\chi_0\right)^2=(\chi_0+\gamma)^2+\psi^2,\quad \left(\alpha-\frac{\gamma}{\alpha}\chi_0\right)^2=(\chi_0-\gamma)^2+\psi_0^2$$

ἢ μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης:

$$\alpha + \frac{\gamma}{\alpha}\chi_0 = \sqrt{(\chi_0+\gamma)^2+\psi_0^2}, \quad \alpha - \frac{\gamma}{\alpha}\chi_0 = \sqrt{(\chi_0-\gamma)^2+\psi_0^2}$$

$$\text{ἢ } \alpha + \frac{\gamma}{\alpha}\chi_0 = E'M_0, \qquad \alpha - \frac{\gamma}{\alpha}\chi_0 = EM_0.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$E'M_0 + EM_0 = 2\alpha,$$

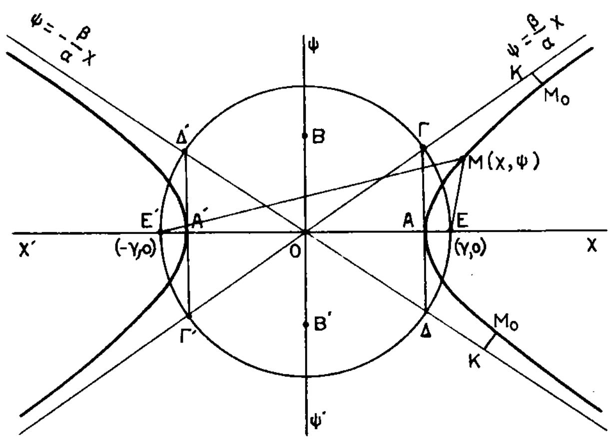
ἡ ὁποία μᾶς λέγει ὅτι τὸ M_0 (χ_0, ψ_0) ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Ἡ κατασκευὴ τῆς ἐλλείψεως $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ γίνεται μὲ τοὺς ἰδίους τρόπους, ποὺ ἐμάθαμεν εἰς τὸν Α΄ Τόμον.

19·13 Ὑπερβολή.

Διὰ τὴν ὑπερβολὴν γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς ἀπὸ τὸν Α΄ Τόμον (παράγρ. 6·12).

Ὑπερβολὴ λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ ἑνὸς ἐπιπέδου, ποὺ ἔχουν σταθερὰν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν διαφορὰν



Σχ. 19·13.

ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Ε΄ καὶ Ε τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 19·13):

$$0 < |EM - E'M| = 2\alpha < E'E.$$

Τὰ σημεῖα Ε΄ καὶ Ε λέγονται *ἑστίαι* τῆς ὑπερβολῆς, ἡ δὲ ἀπόστασις $E'E = 2\gamma > 2\alpha$ *ἑστιακὴ ἀπόστασις* αὐτῆς. Ἡ ὑπερβολὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ξεχωριστοὺς ἀπεράντους κλάδους, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 19·13. Τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος Ε΄Ε λέγεται *κέντρον* τῆς ὑπερβολῆς καὶ εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτῆς. Ἡ ὑπερβολὴ ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὸν $\chi'\chi$, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἑστίας Ε,΄Ε καὶ τὸν $\psi'\psi \perp E'E$ εἰς τὸ Ο. Ὁ $\chi'\chi$ ἔχει μὲ τὴν ὑπερβολὴν δύο κοινὰ σημεῖα, τὰ Α καὶ Α΄, ποὺ λέγονται *κορυφαὶ* τῆς ὑπερβολῆς· τὸ τμῆμα Α΄Α λέγεται *κύριος* ἢ *πρωτεύων* ἢ *διατέμνων ἄξων* τῆς ὑπερβολῆς. Ὁ ἄξων $\psi'\psi$ δὲν ἔχει κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν ὑπερβολήν. Ἐὰν ἐπάνω εἰς τὸν $\psi'\psi$ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ὁρίσωμεν τμήματα $(OB') = (OB) = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = \beta$, τότε τὸ τμῆμα Β΄Β λέγεται *δευτερεύων ἄξων* τῆς ὑπερβολῆς.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς εἰς τὸ σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων $\chi O \psi$, ποὺ ὁρίζουν οἱ ἄξονες συμμετρίας αὐτῆς, εἶναι

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1. \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις.

Αἱ ἀποστάσεις ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Μ (χ, ψ) τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὰς ἑστίας Ε΄ $(-\gamma, 0)$ καὶ Ε $(\gamma, 0)$ εἶναι:

$$(E'M) = \sqrt{(\chi+\gamma)^2 + \psi^2}, \ (EM) = \sqrt{(\chi-\gamma)^2 + \psi^2}, \qquad (2)$$

ἑπομένως δὲ διὰ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$(E'M)^2 - (EM)^2 = (\chi+\gamma)^2 + \psi^2 - [(\chi-\gamma)^2 + \psi^2] = 4\gamma\chi \text{ ἢ}$$

$$[(E'M) - (EM)][(E'M) + (EM)] = 4\gamma\chi. \qquad (3)$$

Ἀπὸ τοὺς δύο κλάδους τῆς ὑπερβολῆς θὰ λέγωμεν *δεξιὸν κλάδον* ἐκεῖνον, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα ἔχουν θετικὰς τετμημένας, *ἀριστερὸν* δὲ τὸν συμμετρικόν του ὡς πρὸς Ο (ποὺ ἔχει ἀρνητικὰς τετμημένας).

Διὰ κάθε σημεῖον Μ(χ, ψ) τοῦ δεξιοῦ κλάδου εἶναι:

$$(E'M) - (EM) = 2\alpha \qquad (4)$$

καὶ διὰ κάθε σημεῖον Μ(χ, ψ) τοῦ ἀριστεροῦ κλάδου εἶναι:

$$(E'M) - (EM) = -2\alpha. \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (3), (4), (5), ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν ἔλλειψιν, εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους ἐκφράσεις τῶν (Ε′Μ) καὶ (ΕΜ) συναρτήσει τῶν α, γ, χ διὰ τὰ σημεῖα Μ, ποὺ ἀνήκουν εἰς τὴν ὑπερβολήν:

Ὅταν τὸ Μ ἀνήκῃ εἰς τὸν δεξιὸν κλάδον τῆς ὑπερβολῆς ($\chi > 0$)
$$\left\{\begin{aligned} (\mathrm{E'M}) &= \frac{\gamma\chi}{\alpha} + \alpha \\ (\mathrm{EM}) &= \frac{\gamma\chi}{\alpha} - \alpha. \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

Ὅταν τὸ Μ ἀνήκῃ εἰς τὸν ἀριστερὸν κλάδον τῆς ὑπερβολῆς ($\chi < 0$)
$$\left\{\begin{aligned} (\mathrm{E'M}) &= -\frac{\gamma\chi}{\alpha} - \alpha \\ (\mathrm{EM}) &= -\frac{\gamma\chi}{\alpha} + \alpha \end{aligned}\right\}$$

Εἰσάγοντες τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς τῶν (Ε′Μ), (ΕΜ) εἰς τὰς σχέσεις (2) εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις:
$$\left(\frac{\gamma\chi}{\alpha} + \alpha\right)^2 = (\chi + \gamma)^2 + \psi^2, \quad \left(\frac{\gamma\chi}{\alpha} - \alpha\right)^2 = (\chi - \gamma)^2 + \psi^2,$$
ἀπὸ τὰς ὁποίας προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:
$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\gamma^2 - \alpha^2} = 1 \text{ ἤ, ἐπειδὴ } \gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2, \quad \frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1,$$
τὴν ὁποίαν ἀληθεύει κάθε σημεῖον $\mathrm{M}(\chi, \psi)$ τῆς ὑπερβολῆς.

Ἀποδεικνύεται ἀναλόγως πρὸς τὴν ἔλλειψιν ὅτι κάθε σημεῖον $\mathrm{M}_0(\chi_0, \psi_0)$ τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν (1), ἀνήκει εἰς τὴν ὑπερβολήν. Ὥστε ἡ ὑπερβολὴ ἔχει τὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἡ ὑπερβολή, ποὺ ἔχει κύριον ἄξονα τὸν Β′Β καὶ δευτερεύοντα τὸν Α′Α, λέγεται *συζυγὴς* τῆς ὑπερβολῆς $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$. Αἱ ἑστίαι της εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς τὸν ψ′ψ εἰς ἀπόστασιν $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ἀπὸ τὸ Ο. Ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὴν (6):
$$\frac{\psi^2}{\beta^2} - \frac{\chi^2}{\alpha^2} = 1 \text{ ἢ } \frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = -1.$$

Διὰ $\alpha = \beta$ ἡ ὑπερβολὴ λέγεται *ἰσόπλευρος* ἢ *ἰσοσκελής*. Ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι:
$$\chi^2 - \psi^2 = \alpha^2,$$

ἡ δὲ τῆς *συζυγοῦς* της εἶναι:

$$\chi^2 - \psi^2 = -\alpha^2.$$

19·14 Ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς.

Ἂς θεωρήσωμεν τὰς εὐθείας Γ'Γ καὶ Δ'Δ, ποὺ ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ σημεῖα $\Gamma'(-\alpha, -\beta)$, $\Gamma(\alpha, \beta)$ καὶ $\Delta'(-\alpha, \beta)$, $\Delta(\alpha, -\beta)$ (σχ. 19·13). Τὰς εὐθείας αὐτὰς εἰς τὸν Α' Τόμον ἐκαλέσαμεν ἀσυμπτώτους τῆς ὑπερβολῆς. Ἡ ἐξίσωσις τῆς Γ'Γ εἶναι ἡ $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\chi$ καὶ τῆς Δ'Δ ἡ $\psi = -\frac{\beta}{\alpha}\chi$.

Αἱ κορυφαὶ $A(-\alpha, 0)$ καὶ $A(\alpha, 0)$ τῆς ὑπερβολῆς χωρίζουν κάθε κλάδον της εἰς δύο συμμετρικοὺς πρὸς τὸν ἄξονα $\chi'\chi$ βραχίονας, οἱ ὁποῖοι ἐκτείνονται ἀπεριορίστως ἑκατέρωθεν τοῦ $\chi'\chi$. Ἔτσι εἰς κάθε ὑπερβολὴν ἔχομεν 4 βραχίονας:

Τὸν $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$, διὰ $\chi \geqslant \alpha$, ποὺ ἐκτείνεται μέσα εἰς τὴν $\widehat{\chi O \psi}$.

Τὸν $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$, διὰ $\chi \leqslant -\alpha$, ποὺ ἐκτείνεται μέσα εἰς τὴν $\widehat{\psi O \chi'}$.

Τὸν $\psi = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$, διὰ $\chi \leqslant -\alpha$, ποὺ ἐκτείνεται μέσα εἰς τὴν $\widehat{\chi' O \psi'}$.

Τὸν $\psi = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$, διὰ $\chi \geqslant \alpha$, ποὺ ἐκτείνεται μέσα εἰς τὴν $\widehat{\psi' O \chi}$.

Ἡ ἀπόστασις KM_0 ἑνὸς σημείου $M_0\left(\chi_0, \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi_0^2 - \alpha^2}\right)$ τοῦ κλάδου $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$, διὰ $\chi > \alpha$, ἀπὸ τὴν ἀσύμπτωτον $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\chi$ $\Leftrightarrow \beta\chi - \alpha\psi = 0$ εἶναι [παράγρ. 17·8(IV)]:

$$(\mathrm{KM}_0)=\left|\frac{\beta\chi_0-\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\alpha}\sqrt{\chi_0^2-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2=\gamma^2}}\right|=\frac{\beta}{\gamma}\left|\chi_0-\sqrt{\chi_0^2-\alpha^2}\right|,$$

γίνεται δὲ ὅσον θέλομεν μικρά, ἀρκεῖ τὸ M_0 νὰ εὑρίσκεται εἰς ἀρκετὰ μεγάλην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ Ο. Διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα $\psi=\frac{\beta}{\alpha}\chi$ λέγεται *ἀσύμπτωτος* τοῦ βραχίονος $\psi=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}$ διὰ $\chi\geqslant\alpha$.

Ἐπειδὴ ὁ βραχίων $\psi=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}$, διὰ $\chi\leqslant-\alpha$, εἶναι συμμετρικὸς τοῦ προηγουμένου ὡς πρὸς Ο, ἡ εὐθεῖα $\psi=\frac{\beta}{\alpha}\chi$ εἶναι ἀσύμπτωτος καὶ τοῦ βραχίονος αὐτοῦ.

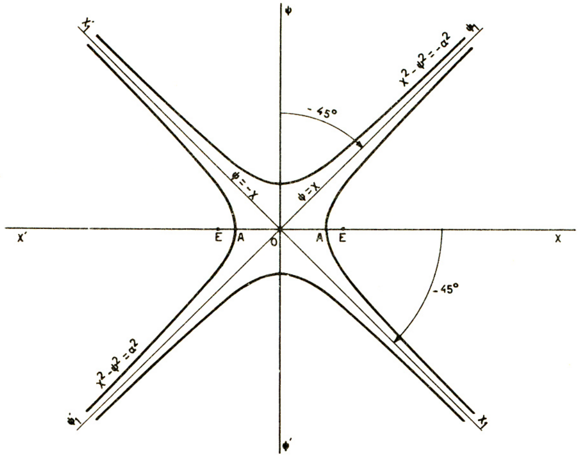
Διὰ λόγους συμμετρίας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $\chi'\chi$ ἡ εὐθεῖα $\psi=-\frac{\beta}{\alpha}\chi$ εἶναι ἀσύμπτωτος τῶν δύο ἄλλων βραχιόνων τῆς ὑπερβολῆς.

19·15 Ἐξίσωσις τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους της.

Ἔστω $\chi^2-\psi^2=\alpha^2$ (σχ. 19·15α) μία ἰσοσκελὴς ὑπερβολή. Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων της $\psi'_1\psi_1$, $\chi'_1\chi_1$ εἶναι ἀντιστοίχως $\psi=\chi$, $\psi=-\chi$ (ἐπειδὴ $\alpha=\beta$), ἤτοι ταυτίζονται μὲ τὰς ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\chi\widehat{O}\psi$, $\chi\widehat{O}\psi'$.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι εἶναι κάθετοι. Δύνανται συνεπῶς αὐται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς ἄξονες ὀρθογωνίων συντεταγμένων. Θεωροῦμεν λοιπὸν τὸ νέον σύστημα ἀξόνων $\chi_1O\psi_1$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν στροφὴν τοῦ $\chi O\psi$ κατὰ -45^0. Μὲ τοὺς τύπους $\chi=(\chi_1+\psi_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\psi=(-\chi_1+\psi_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων μὲ στροφὴν κατὰ -45^0 (παράγρ. 17·1), ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - \psi^2 = \alpha^2$ μετασχηματίζεται ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα $\chi_1 O \psi_1$ εἰς τήν:

$$(\chi_1 + \psi_1)^2 \cdot \frac{2}{4} - (-\chi_1 + \psi_1)^2 \frac{2}{4} = \alpha^2.$$



Σχ. 19·15 α.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων λαμβάνει τὴν μορφὴν $4\chi_1\psi_1 = 2\alpha^2$ ἤ, ἐπειδὴ εἰς τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν εἶναι $2\alpha^2 = \gamma^2$, τὴν $4\chi_1\psi_1 = \gamma_2$

$$\chi_1\psi_1 = \frac{\gamma^2}{4}. \qquad (1\alpha)$$

Κατ' ἀναλογίαν ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - \psi^2 = -\alpha^2$ τῆς συζυγοῦς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους της γίνεται:

$$\chi_1\psi_1 = -\frac{\gamma^2}{4}. \qquad (1\beta)$$

Τὰς (1α), (1β) γράφομεν ὡς μίαν ἐξίσωσιν (1) θέτοντες:

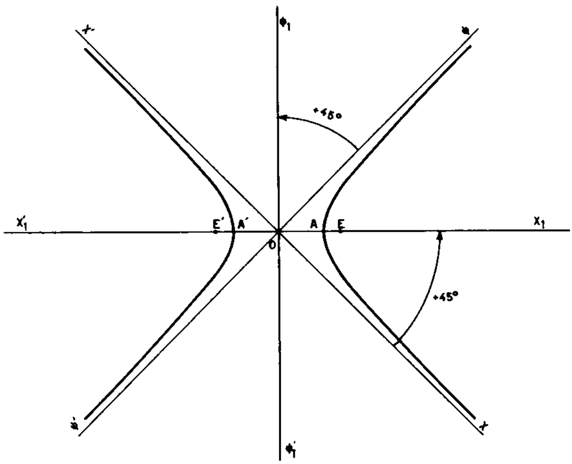
$$\chi_1 = \chi,\ \psi_1 = \psi,\ \pm\frac{\gamma^2}{4} = \kappa.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις μιᾶς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους της εἶναι:

$$\chi\psi = \kappa \ (\kappa \neq 0). \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως ἔστω $\chi\psi = \kappa$ μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (1) ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα $\chi O\psi$ (σχ. 19·15β). Ἡ $\chi\psi = \kappa$ μετασχηματίζεται ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi_1 O\psi_1$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν στροφὴν τοῦ $\chi O\psi$ κατὰ 45^0, μὲ τοὺς τύπους $\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 - \psi_1)$, $\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 + \psi_1)$ εἰς τήν: $\frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 - \psi_1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_1 + \psi_1) = \kappa$ ἢ $\chi_1^2 - \psi_1^2 = 2\kappa$ ἢ $\chi_1^2 - \psi_1^2 = \pm\sqrt{2|\kappa|}$ ($+$ διὰ $\kappa > 0$, $-$ διὰ $\kappa < 0$). (2)

Ἡ (2) παριστάνει ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν μὲ πρωτεύοντα ἄξονα τὸν $O\chi_1$ διὰ $\kappa > 0$, καὶ τὸν $O\psi_1$ διὰ $\kappa < 0$. Αἱ δύο αὐταὶ ὑπερβολαὶ εἶναι συζυγεῖς καὶ ἔχουν ἀσυμπτώτους τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\chi_1 O\psi_1$, $\chi_1 O\psi'_1$



Σχ. 19·15 β.

ἤτοι τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$, $\psi'\psi$. Ὥστε εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου συστήματος ἀξόνων $\chi O\psi$ ἡ ἐξίσωσις $\chi\psi = \kappa$ ($\kappa \neq 0$) παριστάνει ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$, $\psi'\psi$.

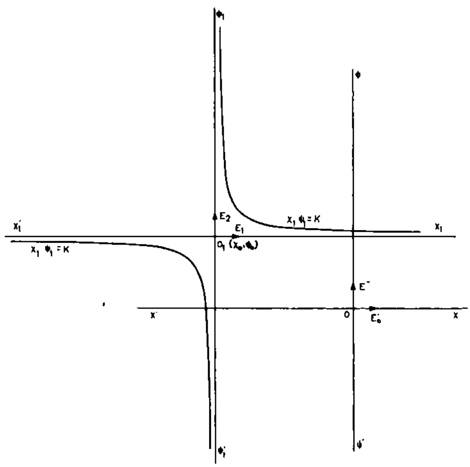
Ἡ ὑπερβολὴ αὐτὴ ἔχει πρωτεύοντα ἄξονα $2\alpha = 2\sqrt{2|\kappa|}$ καὶ ἐκτείνεται, ἂν μὲν $\kappa > 0$, εἰς τὰς γωνίας $\chi O\psi$ καὶ τὴν κατὰ κορυφήν της, ἂν δὲ $\kappa < 0$, εἰς τὰς γωνίας $\psi O\chi'$ καὶ τὴν κατὰ κορυφήν της.

19·16. Ἐξίσωσις τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας παραλλήλους πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους της.

Μέσα εἰς τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $\chi_1\psi_1=\kappa$ μὲ $\kappa\neq 0$, ἂς θεωρήσωμεν ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων $\chi O\psi$ μὲ ἄξονας // καὶ προσανατολισμένους ὁμορρόπως πρὸς τοὺς ὁμωνύμους ἄξονας τοῦ συστήματος $\chi_1 O_1 \psi_1$ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς (σχ. 19·16). Ἔστω ἀκόμη (χ_0, ψ_0) αἱ συντεταγμέναι τοῦ O_1 ὡς πρὸς τὸ $\chi O\psi$. Τὰ βασικὰ διανύσματα καὶ ἐπὶ τῶν τεσσάρων ἀξόνων εἶναι ἰσομήκη.

Ζητοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς $\chi_1\psi_1=\kappa$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi O\psi$. Ἀπὸ τοὺς τύπους $\chi=\chi_1+\chi_0$, $\psi=\psi_1+\psi_0$ τῆς ἀλλαγῆς ἀξόνων μὲ μεταφορὰν (παράγρ. 17·1) ἔχομεν:

$$\chi_1=\chi-\chi_0, \quad \psi_1=\psi-\psi_0.$$



Σχ. 19·16.

Μὲ τοὺς τύπους αὐτοὺς ἡ $\chi_1\psi_1=\kappa$ μετασχηματίζεται ὡς πρὸς τὸ $\chi O\psi$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\chi-\chi_0)(\psi-\psi_0)=\kappa \quad \text{ἢ}$$

$$\psi=\frac{\psi_0\chi+\kappa-\psi_0\chi_0}{\chi-\chi_0}. \qquad (1)$$

Ἡ (1), ἂν θέσωμεν $\psi_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\chi_0 = \frac{-\delta}{\gamma}$, $\kappa - \chi_0\psi_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\psi = \frac{\alpha\chi + \beta}{\gamma\chi + \delta}, \tag{2}$$

ὅπου $\gamma \neq 0$ καὶ $\beta\gamma - \alpha\delta = \kappa\gamma^2 \neq 0$.

Ὥστε κάθε ἰσοσκελὴς ὑπερβολή, ὡς πρὸς ἄξονας // πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους της ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (2).

Ἀντιστρόφως κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (2), π.χ. ἡ

$$\psi = \frac{\alpha_1\chi + \beta_1}{\gamma_1\chi + \delta_1} \tag{3}$$

μὲ $\gamma_1 \neq 0$ καὶ $\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\delta_1 \neq 0$, εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων $\chi O \psi$ παριστάνει ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν.

Ἀπόδειξις:

Ἡ (3) διὰ $\gamma_1 \neq 0$ μετασχηματίζεται ὡς ἀκολούθως:

$$\psi = \frac{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\chi + \frac{\beta_1}{\gamma_1}}{\chi + \frac{\delta_1}{\gamma_1}} \quad \text{ἢ διὰ} \ \left(\chi \neq \frac{\delta_1}{\gamma_1}\right)$$

$$\psi\left(\chi + \frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\chi + \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_1\delta_1}{\gamma_1^2} - \frac{\alpha_1\delta_1}{\gamma_1^2} \quad \text{ἢ}$$

$$\psi\left(\chi + \frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\left(\chi + \frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) + \frac{\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\delta_1}{\gamma_1^2} \quad \text{ἢ}$$

$$\left(\chi + \frac{\delta_1}{\gamma_1}\right)\left(\psi - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right) = \frac{\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\delta_1}{\gamma_1^2}. \tag{4}$$

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου θεωροῦμεν τὸ σύστημα $\chi_1 O_1 \psi_1$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν παράλληλον μεταφορὰν τοῦ $\chi O \psi$, ὥστε ἡ ἀρχὴ τοῦ O νὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν $O_1\left(-\frac{\delta_1}{\gamma_1}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)$.

Μὲ τοὺς τύπους $\chi = \chi_1 - \frac{\delta_1}{\alpha_1}$, $\psi = \psi_1 + \frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ ἡ (4) μετασχηματίζεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\left(\chi_1-\frac{\delta_1}{\alpha_1}+\frac{\delta_1}{\alpha_1}\right)\left(\psi_1+\frac{\alpha_1}{\gamma_1}-\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)=\frac{\beta_1\gamma_1-\alpha_1\delta_1}{\gamma_1^2}$$

$$\text{ἢ } \chi_1\psi_1=\frac{\beta_1\gamma_1-\alpha_1\delta_1}{\gamma_1^2}. \qquad (5)$$

Ἡ (5) ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\beta_1\gamma_1-\alpha_1\delta_1\neq 0$, παριστάνει ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας $O_1\chi_1 // O\chi$, $O_1\psi_1 // O\psi$.

Ὥστε μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\psi=\frac{\alpha\chi+\beta}{\gamma\chi+\delta}$ μὲ γ καὶ $(\beta\gamma-\alpha\delta)\neq 0$ παριστάνει εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς συστήματος ἀξόνων $\chi O\psi$, ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ καὶ ἀσυμπτώτους // πρὸς τοὺς ἄξονας $O\chi$, $O\psi$. Ἡ ἰσοσκελὴς αὐτὴ ὑπερβολὴ ἔχει:

ἑστιακὴν ἀπόστασιν $2\gamma=\frac{2}{\gamma}\sqrt{|\beta\gamma-\alpha\delta|}$ καὶ ἡμιάξονα $\alpha=\frac{1}{\gamma}\sqrt{2|\beta\gamma-\alpha\delta|}$

Παράδειγμα.

Ἡ ἐξίσωσις $\psi=\frac{3\chi-4}{\chi-6}$ εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς ὀρθογωνίου συστήματος ἀξόνων $\chi O\psi$ παριστάνει ὑπερβολήν, διότι $\gamma=1\neq 0$, $\beta\gamma-\alpha\delta=-4+18=14\neq 0$. Ἡ ὑπερβολὴ $\psi=\frac{3\chi-4}{\chi-6}$ ἔχει ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας $\chi=6$, $\psi=3$, κέντρον τὸ σημεῖον $(6,3)$, πρωτεύοντα ἄξονα $A'A=2\alpha=2\sqrt{2\times 14}=4\sqrt{7}$ καὶ ἑστιακὴν ἀπόστασιν $E'E=2\gamma=4\sqrt{14}$.

Παρατήρησις: Αἱ συναρτήσεις, αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰς δευτεροβαθμίους ὡς πρὸς (χ, ψ) ἐξισώσεις $\psi=\frac{K}{\chi}$ καὶ $\psi=\frac{\alpha\chi+\beta}{\gamma\chi+\delta}$, ἀνεφέρθησαν εἰς τὰς παραγράφους 14·7 καὶ 14·8. Τώρα ἀπεδείξαμεν αὐτό, ποὺ τότε εἴχαμεν δεχθῆ, δηλαδὴ ὅτι αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συναρτήσεων αὐτῶν εἶναι ὑπερβολαί.

19·17 Παραβολή.

Διὰ τὴν παραβολὴν γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς ἀπὸ τὸν Α΄ Τόμον:

Παραβολή λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M ἑνὸς ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον E καὶ μίαν ὡρισμένην εὐθεῖαν δ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία λέγεται *διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς* (σχ. 19 · 17 α). Τὸ E λέγεται *ἑστία* τῆς παραβολῆς καὶ ὑποτίθεται ὅτι δὲν εἶναι σημεῖον τῆς διευθετούσης. Ἡ κάθετος ΕΔ ἀπὸ E πρὸς τὴν δ λέγεται *ἄξων* τῆς παραβολῆς καὶ εἶναι ἄξων συμμετρίας. Τὸ μέσον O τοῦ τμήματος ΔΕ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς καὶ λέγεται *κορυφή* της.

I. Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σύστημα χOψ, ποὺ ἔχει ἄξονα Oχ τὸν ἄξονα OE τῆς παραβολῆς μὲ θετικὴν φορὰν τὴν $\overrightarrow{OE}$ καὶ ἄξονα Oψ τὴν κάθετον πρὸς τὴν OE εἰς τὸ O μὲ θετικὴν φοράν, ὥστε $\sphericalangle(\overrightarrow{O\chi}\ \overrightarrow{O\psi}) = 90^0$, εἶναι:

$$\psi^2 = 2p\chi, \qquad (1)$$

ὅπου $p > 0$ ἡ ἀπόστασις ΕΔ τῆς ἑστίας ἀπὸ τὴν διευθετοῦσαν.

Ἀπόδειξις (σχ. 19 · 17 α).

Ἡ ἑστία E ἔχει συντεταγμένας $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ καὶ ἡ διευθετοῦσα τὴν ἐξίσωσιν $x = -\frac{p}{2}$ ἢ $2\chi + p = 0$. Διὰ νὰ ἀνήκῃ ἕνα σημεῖον $M(\chi, \psi)$ εἰς τὴν παραβολήν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$ME = M\Gamma \qquad (M\Gamma \perp \delta).$$

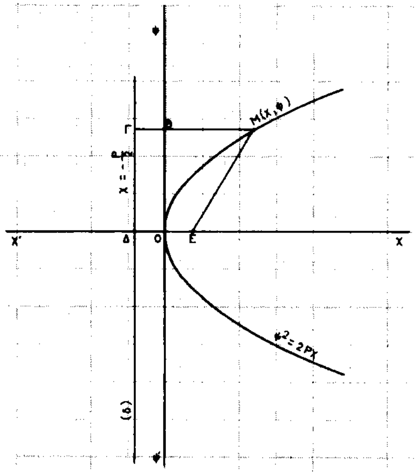
Εἶναι ὅμως: $ME = \sqrt{\left(\chi - \frac{p}{2}\right)^2 + (\psi - 0)^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + \psi^2}$ καὶ $M\Gamma = M\Theta + \Theta\Gamma = \chi + \frac{p}{2}$.

Ὥστε κάθε σημεῖον $M(\chi, \psi)$ τῆς παραβολῆς ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν:

$$\chi^2 - p\chi + \frac{p^2}{4} + \psi^2 = \left(\chi + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 - p\chi + \frac{p^2}{4} + \psi^2 = \chi^2 + p\chi + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow \psi^2 = 2p\chi.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον, δηλαδὴ ὅτι κάθε σημεῖον N (χ^0, ψ^0), ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $\psi^2 = 2p\chi$, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ E καὶ τὴν δ καὶ ἑπομένως ἀνήκει εἰς τὴν παραβολήν. Ἄρα ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι ἡ (1).

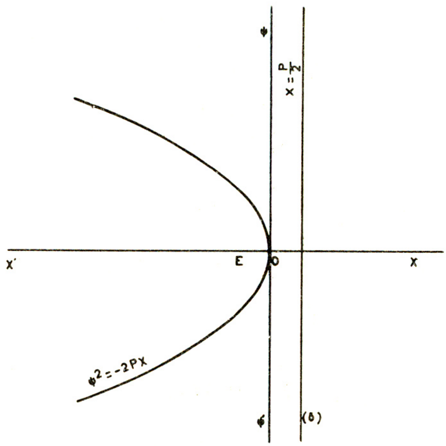


Σχ. 19·17 α.

Ἐπιλύοντες τὴν (1) ὡς πρὸς ψ εὑρίσκομεν $\psi = \pm\sqrt{2p\chi}$. Ἐπειδὴ τὸ p, ποὺ καλεῖται *παράμετρος* τῆς παραβολῆς, τὸ ἐλάβομεν θετικόν, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ ψ ἀντίστοιχον τιμὴν πραγματικὸν ἀριθμόν, πρέπει νὰ εἶναι $\chi > 0$. Εἰς κάθε λοιπὸν τιμὴν $\chi_0 > 0$ τοῦ χ ἀντιστοιχοῦν δύο τιμαὶ τοῦ ψ, αἱ $\psi = \pm\sqrt{2p\chi_0}$, ἄρα καὶ δύο σημεῖα, τὰ $M_0(\chi_0, \sqrt{2p\chi_0})$ καὶ $M'_0(\chi_0 - \sqrt{2p\chi_0})$ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν Οχ. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι διὰ $\chi > 0$ ἡ παραβολὴ ἔχει δύο βραχίονας, τὸν $\psi = \sqrt{2p\chi}$ καὶ τὸν $\psi = -\sqrt{2p\chi}$, οἱ ὁποῖοι εἶναι συμμετρικοὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Οχ καὶ ἐκτείνονται ἀπεριορίστως κατὰ τὴν θετικήν του φοράν.

II. Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ὡς πρὸς τὸ σύστημα χ'Οψ', ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀλλαγὴν τῆς θετικῆς φορᾶς τῶν ἀξόνων τοῦ χΟψ, εἶναι $\psi^2 = -2p\chi$. (2)

Διότι κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου μὲ συντεταγμένας (χ, ψ) ὡς πρὸς τὸ $\chi O \psi$ ἔχει ὡς πρὸς τὸ $\chi' O \psi'$ συντεταγμένας $(\chi' = -\chi, \psi' = -\psi)$. Ἐπειδὴ δὲ $p > 0$, διὰ νὰ ἔχωμεν πραγματικὰς τιμὰς τοῦ ψ, πρέπει νὰ εἶναι $\chi < 0$. Ἑπομένως οἱ δύο βραχίονες τῆς παραβολῆς ἐκτείνονται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπεριορίστως κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος $O\chi$ (σχ. 19 · 17 β).



Σχ. 19·17 β.

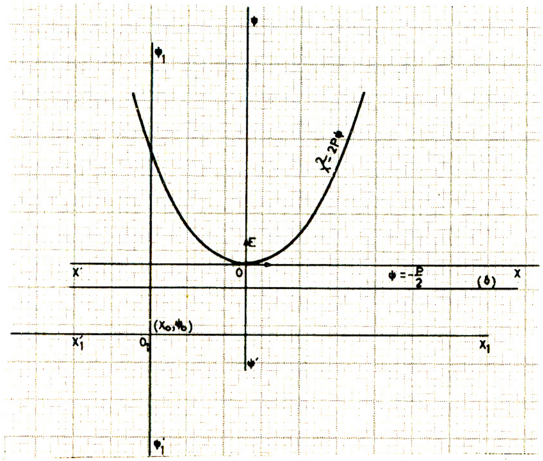
III. Ἐὰν ὁ ἄξων OE τῆς παραβολῆς ληφθῇ ὡς ἄξων $O\psi$ (σχ. 19 · 17 γ) μὲ θετικὴν φορὰν τὴν OE, τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς διευθετούσης δ εἶναι $\psi = -\frac{p}{2}$ καὶ τῆς παραβολῆς:

$$x^2 = 2p\psi \Leftrightarrow \psi = \frac{x^2}{2p}. \qquad (3)$$

IV. Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $\chi^2 = 2p\psi$ (σχ. 19 · 17 γ) ὡς πρὸς ἕνα σύστημα ἀξόνων $\chi_1 O_1 \psi_1$ τοῦ ἐπιπέδου της, μὲ ἄξονας $O_1\chi_1$, $O_1\psi_1$ παραλλήλους, ὁμορρόπους καὶ μὲ ἰσομήκη βασικὰ διανύσματα πρὸς τοὺς ἄξονας $O\chi$, $O\psi$ τοῦ παλαιοῦ συστήματος $\chi O \psi$, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ ἐξίσωσις $\psi^2 = 2p\chi$, εἶναι:

$$\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma. \qquad (4)$$

Πράγματι ἂς εἶναι χ_0, ψ_0 αἱ συντεταγμέναι τοῦ O_1 ὡς πρὸς $\chi O\psi$.



Σχ. 19·17 γ.

Μετασχηματίζομεν τὴν $\chi^2 = 2p\psi$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα $\chi_1 O_1 \psi_1$ μὲ τοὺς τύπους $\chi = \chi_0 + \chi_1$, $\psi = \psi_0 + \psi_1$ τῆς ἀλλαγῆς ἀξόνων μὲ μεταφοράν.

Θὰ ἔχωμεν:

$$(\chi_0 + \chi_1)^2 = 2p(\psi_0 + \psi_1) \Leftrightarrow \chi_0^2 + 2\chi_0\chi_1 + \chi_1^2 = 2p\psi_0 + 2p\psi_1 \Leftrightarrow$$

$$\chi_1^2 + 2\chi_0\chi_1 + \chi_0^2 - 2p\psi_0 = 2p\psi_1 \Leftrightarrow$$

$$\psi_1 = \frac{\chi_1^2}{2p} + \frac{\chi_0\chi_1}{p} + \frac{\chi_0^2 - 2p\psi_0}{2p}. \qquad (5)$$

Ἡ (5) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σύστημα $\chi_1 O_1 \psi_1$ καί, ἂν θέσωμεν $\chi_1 = \chi$, $\psi_1 = \psi$, $\frac{1}{2p} = \alpha$, $\frac{\chi_0}{p} = \beta$, $\frac{\chi_0^2 - 2p\psi_0}{2p} = \gamma$ γράφεται, $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.

Ἀντιστρόφως, κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (4) μὲ $\alpha \neq 0$ εἰς ἕνα σύστημα ἀξόνων $\chi O\psi$ παριστάνει παραβολὴν μὲ ἄξονα παράλληλον τοῦ $O\psi$.

Πράγματι εἶναι $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma \Leftrightarrow \frac{\psi}{\alpha} = \chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$

$$\frac{\psi}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} = \chi^2 + 2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\chi \Leftrightarrow \frac{\psi}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} =$$

$$\chi^2 + 2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\chi + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\psi}{\alpha} + \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\left(\psi + \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right). \qquad (6)$$

Μετασχηματίζομεν τώρα τὴν (6), ἐκφράζοντες αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα $\chi_1O_1\psi_1$, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν παράλληλον μεταφορὰν τοῦ $\chi O\psi$, ὥστε ἡ ἀρχή του O νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν $O_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$.

Χρησιμοποιοῦμεν τοὺς τύπους $\chi = \chi_1 - \frac{\beta}{2\alpha}$, $\psi = \psi_1 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

Προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\psi_1 = \alpha\chi_1{}^2$, ἡ ὁποία παριστάνει παραβολὴν μὲ ἄξονα τὸν $O_1\psi_1 \,//\, O\psi$, κορυφὴν τὸ σημεῖον $O_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$ καὶ $p = \frac{1}{2\alpha}$. Διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς εἶναι ἡ εὐθεῖα $\psi = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} - \frac{1}{4\alpha}$ καὶ ἑστία τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} + \frac{1}{4\alpha}\right)$.

Ἐφαρμογαί.

1) Εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων $\chi O\psi$ μία παραβολὴ ἔχει ἑστίαν τὸ E (3,5) καὶ διευθετοῦσαν τὴν εὐθεῖαν $\psi = 3$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσίς της.

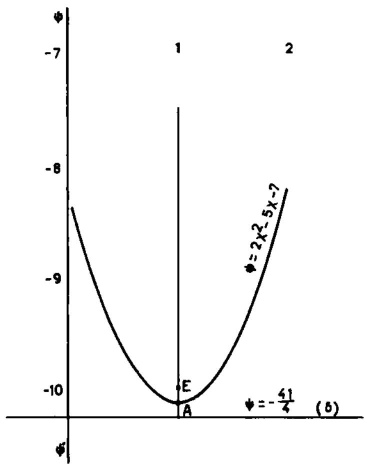
Ἐξισώνομεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων $(M\Gamma) = \psi - 3$, $(ME) = \sqrt{(\chi - 3)^2 + (\psi - 5)^2}$ ἑνὸς σημείου M (χ, ψ) τῆς παραβολῆς ἀπὸ τὴν διευθετοῦσαν $\psi = 3$ καὶ τὴν ἑστίαν E (3, 5). Θὰ ἔχωμεν:

$$(\psi - 3)^2 = (\chi - 3)^3 + (\psi - 5)^2 \Leftrightarrow \psi^2 - 6\psi + 9 = \chi^2 - 6\chi + 19 + \psi^2$$
$$- 10\psi + 25 \Leftrightarrow 4\psi = \chi^2 - 6\chi + 25 \text{ ἢ } \psi = \frac{\chi^2 - 6\chi + 25}{4}.$$

2) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ παραβολὴ $\psi = 2\chi^2 - 5\chi - 7$ (σχ. 19·17δ). Ἔχομεν $-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{5}{4}$, $\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{81}{8}$, ἡ ζητουμένη παραβολὴ ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Α $\left(\frac{5}{4}, -\frac{81}{8}\right)$, παράμετρον $p = \frac{1}{4}$, διευθετοῦσαν τὴν $\psi = -\frac{1}{8} - \frac{81}{8}$ ἢ $\psi = -\frac{41}{4}$ καὶ ἑστίαν τὸ σημεῖον Ε $\left(\frac{5}{4}, -\frac{40}{4} = -10\right)$.

Τὴν κατασκευάζομεν μὲ τὸν τρόπον, ποὺ ἐμάθαμεν εἰς τὸν Α΄ Τόμον.

Παρατήρησις: Αἱ συναρτήσεις, ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὰς δευτεροβαθμίους ὡς πρὸς (χ, ψ) ἐξισώσεις $\psi = \alpha\chi^2$, $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, ἀνεφέρθησαν εἰς τὰς παραγράφους (14·3, 14·4, 14·5). Τώρα ἀπεδείξαμεν



Σχ. 19·17 δ.

αὐτό, ποὺ τότε εἴχομεν δεχθῇ, δηλαδὴ ὅτι αἱ γραφικαί των παραστάσεις εἶναι παραβολαί.

19·18 Ἀσκήσεις.

Σημείωσις : Αἱ ἀσκήσεις, ποὺ ἀκολουθοῦν, ἀναφέρονται εἰς συστήματα ὀρθογωνίων ἀξόνων μὲ βασικὰ διανύσματα μήκους 1 cm.

1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν κύκλων :

$$[K_1\ (5{,}2),\ R_1 = \sqrt{6}\ ],\ [\ K_2(3, -4),\ R_2 = \frac{2}{3}\ ],$$

$$[\ K_3\ (-4, -5),\ R_3 = 4\ ].$$

2) Ποῖα τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων :

$$\chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 8\psi - 5 = 0,\ \chi^2 + \psi^2 + 3\chi - 7\psi - 1 = 0,$$

$$\chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 40 = 0,\ \chi^2 + \psi^2 - 10\chi - 24\psi = 0\ ;$$

3) Δίδεται τρίγωνον $M_1M_2M_3$ μὲ $M_1(-1, 3)$, $M_2(7, 2)$, $M_3(3, 7)$
Νὰ εὑρεθοῦν : α) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου. β) Ἡ ἀκτίς του. γ) Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου του.

(Εἰσάγοντες διαδοχικῶς τὰς συντεταγμένας κάθε κορυφῆς εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2 + \psi^2 + 2\Delta\chi + 2E\psi + 2 = 0$ θὰ λάβωμεν τρεῖς ἐξισώσεις μὲ ἀγνώστους τὰ Δ, E, Z. Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ἐξισώσεων εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν Δ, E, Z).

4) Τὰ αὐτὰ μὲ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν διὰ τὸ τρίγωνον ΖΗΘ μὲ $Z(-2, 0)$, $H(0, 6)$, $\Theta(2, 3)$.

5) Νὰ προσδιορίσετε τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου $\chi^2 + \psi^2 = 25$ καὶ τῆς εὐθείας $\psi = -x + 5$.

Νὰ προσδιορίσετε τὰς συντεταγμένας τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ κοινὰ σημεῖα.

6) Νὰ προσδιορίσετε τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου :

$\chi^2 + \psi^2 + 2\psi - 6\psi - 4 = 0$ καὶ τοῦ ἄξονος $\chi'\chi$ καθὼς καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου $\chi^2 + \psi^2 - 8\chi - 6\chi + 9 = 0$ καὶ τοῦ ἄξονος $\psi\ \psi$.

7) Νὰ προσδιορίσετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων :

$$(\chi - 3)^2 + \psi^2 = 25,\ (\chi - 5)^2 + \psi^2 = 9.$$

8) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν κύκλων :

$$\chi^2 + \psi^2 = 6,\ (\chi - 3)^2 + (\psi - 3)^2 = 18,$$

καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων των κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

9) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως :

$$9\chi^2 + 4\psi^2 = 36 \text{ καὶ τῆς εὐθείας } \psi = 3\chi.$$

10) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως $\frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi^2}{5} = 1$ καὶ τοῦ κύκλου $\chi^2 + \psi^2 = 9$.

11) Εἰς τὴν ὑπερβολὴν $\chi\psi = 36$ νὰ ὑπολογίσετε τὰς ἀποστάσεις $A'A = 2\alpha$ τῶν κορυφῶν καὶ $E'E = 2\gamma$ τῶν ἑστιῶν. Ἐπίσης τὰς συντεταγμένας τῶν A, A′, E, E′ ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα τῶν ἀσυμπτώτων της.

12) Νὰ εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν, ποὺ ἔχουν ἀντιστοίχως $\alpha = 3$ καὶ $\alpha = -2$ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους της.

13) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου καθὼς καὶ τὰ μήκη 2α, 2γ τῆς ὑπερβολῆς, ποὺ παριστάνει ἡ $\psi = \frac{2\chi - 3}{\chi + 6}$ ὡς πρὸς ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα $\chi O \psi$ τοῦ ἐπιπέδου της.

14) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς παραβολῆς $\psi = 3\chi^2 - 5\chi - 9$ καὶ τῆς εὐθείας $\psi = \chi$.

15) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς παραβολῆς $\psi = 2\chi^2$ καὶ τῆς εὐθείας $\psi = 6\chi - 9$.

16) Νὰ προσδιορίσετε ὡς πρὸς ἕνα σύστημα ἀξόνων $\chi O \psi$ τὰς συντεταγμένας τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς, ποὺ παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $\psi = 2\chi^2 - 7\chi$, καὶ τῆς παραβολῆς, ποὺ παριστάνει ἡ ἐξίσωσις:

$$\psi = \frac{5\chi^2 - 4\chi + 3}{12}.$$

17) Νὰ ἐκφράσετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς $\chi\psi = 4$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα ἀξόνων $\chi_1 O_1 \psi_1$ παραλλήλων πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους της μὲ $O_1(7,0)$ ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους της.

18) Εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς ὀρθογωνίου συστήματος ἀξόνων νὰ σχεδιάσετε τὰς ἀκολούθους γραμμάς:

α) $\chi^2 + \psi^2 - 5\chi - 3\psi = 0{,}5$. β) $\chi^2 + 4\psi^2 = 4$.

γ) $\chi\psi = 8$. δ) $\psi = \frac{3\chi - 6}{4\chi}$.

ε) $\psi = \frac{3\chi}{4\chi - 1}$. ζ) $\psi = \frac{1}{\chi - 1}$.

η) $\psi = \frac{\chi^2}{16}$. θ) $\psi = \frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{6}$.

ι) $\psi^2 = 4\chi^2 + 4$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 20

ΑΠΛΑ ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

20·1 Ὑπολογισμὸς τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων.

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν διαφόρων τεχνικῶν προβλημάτων, ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων ὁδηγεῖ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς μιᾶς ἢ περισσοτέρων συναρτήσεων (τύπων) διὰ δεδομένας τιμὰς τῶν μεταβλητῶν των (τῶν γραμμάτων). Ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς δυνατὸν νὰ εἶναι ἁπλοῦς ἢ πολύπλοκος. Καὶ διὰ τοὺς ἁπλουστέρους ὅμως ὑπολογισμοὺς δαπανᾶται πολύτιμος χρόνος καὶ ἀπαιτεῖται ἔντονος προσοχὴ πρὸς ἀποφυγὴν σφαλμάτων. Ἄλλωστε αὐτοί, ποὺ ἀσχολοῦνται μὲ τὰς σχέσεις αὐτάς, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν πάντοτε τὴν μαθηματικὴν κατάρτισιν καὶ ἐμπειρίαν, ποὺ χρειάζεται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν πολυπλόκων ὑπολογισμῶν.

Διὰ νὰ ἀποφευχθοῦν αἱ δυσκολίαι αὐταί, χρησιμοποιοῦνται διὰ τὸν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων, ποὺ συναντῶνται συχνότερον εἰς μίαν εἰδικότητα, ἕτοιμοι πίνακες ἢ εἰδικαὶ γραφικαὶ μέθοδοι.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

20·2 Ἀριθμητικοὶ πίνακες

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς, ὅπως τῶν $\psi = \lambda o\gamma \chi$, $\psi = \chi^2$, $\psi = \chi^3$, $\psi = \sqrt{\chi}$, $\psi = \frac{1}{\chi}$ κλπ, χρησιμοποιοῦμεν ἀριθμητικοὺς πίνακας, ποὺ μᾶς δίδουν κατὰ προσέγγισιν τὰς τιμὰς τῶν συναρτήσεων αὐτῶν. Οἱ Πίνακες τῶν λογαρίθμων καθὼς καὶ οἱ Πίνακες, ποὺ δίδονται εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου, εἶναι τοῦ εἴδους αὐτοῦ.

Γενικῶς οἱ Πίνακες αὐτοὶ δίδουν τὰς τιμὰς τῶν συναρτήσεων, ὅταν ἡ μεταβλητὴ λαμβάνῃ τὰς τιμὰς ἀριθμητικῆς προόδου, συνήθως τῆς 1, 2, 3,...

Ὅταν μία τιμὴ α τῆς μεταβλητῆς δὲν εὑρίσκεται μέσα εἰς τὸν πίνακα, ἀλλὰ περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τιμῶν ἀπὸ αὐτάς, ποὺ περιέχει ὁ πίναξ, τότε ὑπολογίζομεν προσεγγιστικῶς τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως, στηριζόμενοι εἰς τὴν παραδοχὴν ὅτι διὰ μικρὰς αὐξήσεις τῆς μεταβλητῆς αἱ ἀντίστοιχοι αὐξήσεις τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀνάλογοι πρὸς αὐτάς. Τὴν μέθοδον αὐτὴν ἐχρησιμοποιήσαμεν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῆς $\psi = \text{λογ}\chi$ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ, ποὺ δὲν περιέχονται εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς Πίνακας.

Ὅταν ἡ τιμὴ μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι μικροτέρα τῆς μικροτέρας ἢ μεγαλυτέρα τῆς μεγαλυτέρας ἀπὸ τὰς τιμάς, ποὺ περιέχονται εἰς τοὺς Πίνακας, τότε χρησιμοποιοῦντες τὰς ἰδιότητας τῶν 4 πράξεων, τῶν δυνάμεων, τῶν ῥιζῶν καὶ τῶν λογαρίθμων ἀνάγομεν τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως εἰς ἄλλους ὑπολογισμούς, οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ ἐκτελεσθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων. Π.χ.

διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{7\,324,5}$ ἔχομεν:

$$\sqrt{7\,324,5} = \sqrt{73,245 \times 100} \simeq 10\sqrt{73,25}\,.$$

Εἶναι ὅμως $\sqrt{73} < \sqrt{73,25} < \sqrt{74}$ καὶ ἀπὸ τοὺς σχετικοὺς πίνακας ἔχομεν: $\sqrt{73} = 8,544$ καὶ $\sqrt{74} = 8,602$.

Ἄρα $8,544 < \sqrt{73,25} < 8,602$.

Ἀφοῦ λοιπὸν εἰς αὔξησιν 1 τοῦ ἀριθμοῦ ἀντιστοιχῇ αὔξησις τῆς ῥίζης κατὰ 0,058, εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 0,25 θὰ ἔχωμεν αὔξησιν τῆς ῥίζης $0,25 \times 0,058 \simeq 0,015$.

Ἄρα $\sqrt{73,25} = 8,544 + 0,015 \simeq 8,56$,

καὶ $\sqrt{7\,324,5} = 10 \times 8,56 = 85,6$.

20·3 Γραφικαὶ μέθοδοι.

Ἔστωσαν Z καὶ T δύο μεταβληταὶ συνδεόμεναι μὲ τὴν σχέσιν $Z = \sigma(T)$.

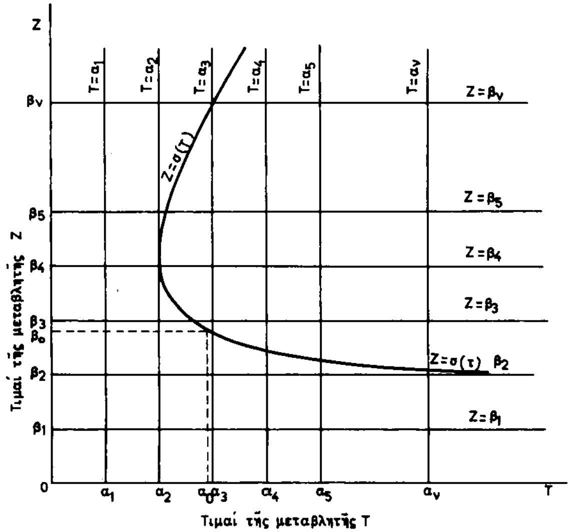
Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μεταβλητῆς, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένην τιμὴν τῆς ἄλλης, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ γραφικὸν τῆς σχέσεως $Z = \sigma(T)$ εἰς ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων χΟψ. Πρὸς τοῦτο μὲ καταλλήλους κλίμακας συχνότερον μετρικάς, ἀντιστοιχίζομεν τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν εἰς τὰ σημεῖα τῶν ἀξόνων, ἔστω τῆς T εἰς τὰ σημεῖα τοῦ Οχ καὶ τῆς Z εἰς τοῦ Οψ (σχ. 20·3).

Ἀντιστοιχίζομεν ἐπίσης τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς T εἰς τὰς καθέτους πρὸς τὸν Οχ εὐθείας κατὰ τρόπον, ὥστε εἰς **μίαν** τιμὴν τῆς T, π.χ. τὴν α, νὰ ἀντιστοιχῇ ἡ κάθετος πρὸς τὸν Οχ εἰς τὸ σημεῖον του, ποὺ ἔχει ἀριθμόσημον α. Τὴν τιμὴν α καλοῦμεν ἐπίσης ἀριθμόσημον τῆς καθέτου αὐτῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν συμφωνοῦμεν νὰ παριστάνωμεν μὲ τὸ ἀριθμόσημον αὐτό. Ὁμοίως ἀντιστοιχίζομεν τὰς τιμὰς τῆς Z εἰς τὰς καθέτους πρὸς τὸν Οψ εὐθείας. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν παριστάνομεν τὴν μεταβλητὴν T μὲ τὴν *οἰκογένειαν* τῶν καθέτων πρὸς τὸν Οχ εὐθειῶν καὶ τὴν Z μὲ τὴν *οἰκογένειαν* τῶν καθέτων πρὸς τὸν Οψ εὐθειῶν.

Εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ τῶν ἀξόνων σχεδιάζομεν τὸ γραφικὸν τῆς σχέσεως $Z=\sigma(T)$ μὲ τὰς μεθόδους, ποὺ ἔχομεν μάθει (σχ. 20·3).

Ἡ τιμὴ μιᾶς μεταβλητῆς, π.χ. τῆς Z, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν α_0 τῆς T, εἶναι τὸ ἀριθμόσημον β_0 τῆς εὐθείας $Z = \beta_0$, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν τομὴν τῆς εὐθείας $T = \alpha_0$ μὲ τὸ γραφικὸν τῆς σχέσεως. Ἐὰν ἡ $T = \alpha_0$ καὶ τὸ γραφικὸν ἔχουν δύο ἢ περισσότερα κοινὰ σημεῖα, τότε εἰς τὴν τιμὴν $T = \alpha_0$ τῆς T ἀντιστοιχοῦν δύο ἢ περισσότεραι τιμαὶ τῆς Z, ἐὰν δὲ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, συμπεραίνομεν ὅτι διὰ $T = \alpha_0$ ἡ Z δὲν ἔχει ἀντίστοιχον τιμήν. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι $T = \alpha_0$, $Z = \beta_0$ δὲν εἶναι χαραγμέναι, τὰς παρεμβάλλομεν ὀπτικῶς κατὰ προσέγγισιν.

Σημείωσις: Αἱ περισσότεραι ἀπὸ τὰς γραφικὰς μεθόδους ὑπολογισμοῦ, ποὺ ἀκολουθοῦν, στηρίζονται εἰς τὴν παράστασιν μιᾶς μεταβλητῆς μὲ μίαν οἰκογένειαν γραμμῶν (εὐθειῶν ἢ καμπύλων), κατὰ μῆκος ἑκάστης τῶν ὁποίων ἡ μεταβλητὴ διατηρεῖ σταθερὰν τιμήν, ἴσην μὲ τὸ ἀριθμόσημον τῆς γραμμῆς.



Σχ. 20·3.

20·4 Ἐφαρμογαί.

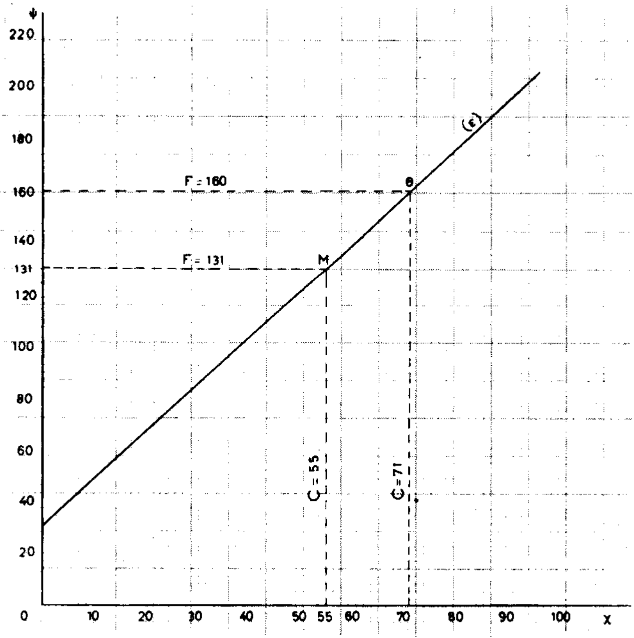
I. Ἂν παραστήσωμεν μὲ τὸ γράμμα F τὰς θερμοκρασίας εἰς βαθμοὺς Φαρενάιτ καὶ μὲ τὸ γράμμα C τὰς θερμοκρασίας εἰς βαθμοὺς Κελσίου, νὰ κατασκευασθῇ ἕνα γραφικόν, τὸ ὁποῖον νὰ μᾶς δίδῃ εἰς βαθμοὺς C μίαν θερμοκρασίαν μετρημένην εἰς βαθμοὺς F καὶ ἀντιστρόφως.

Μεταξὺ τῶν F καὶ C ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$F - 32 = 1{,}8C.$$

Κατασκευή.

Χαράσσομεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων χΟψ (σχ. 20·4 α) μὲ βασικὰ διανύσματα ἐπὶ τῶν ἀξόνων μήκους 1 cm. Παριστάνο-



Σχ. 20·4 α.

μεν τὴν C μὲ τὸν Οχ καὶ τὴν F μὲ τὸν Οψ. Διὰ τὴν C χρησιμοποιοῦμεν μετρικὴν κλίμακα βαθμίδος 0,1 cm καὶ διὰ τὴν F μετρικὴν κλίμακα βαθμίδος 0,2 cm. Χαράσσομεν τὰς εὐθείας $C = 10, 20, 30, \ldots$ καὶ $F = 20, 40, 60, \ldots$

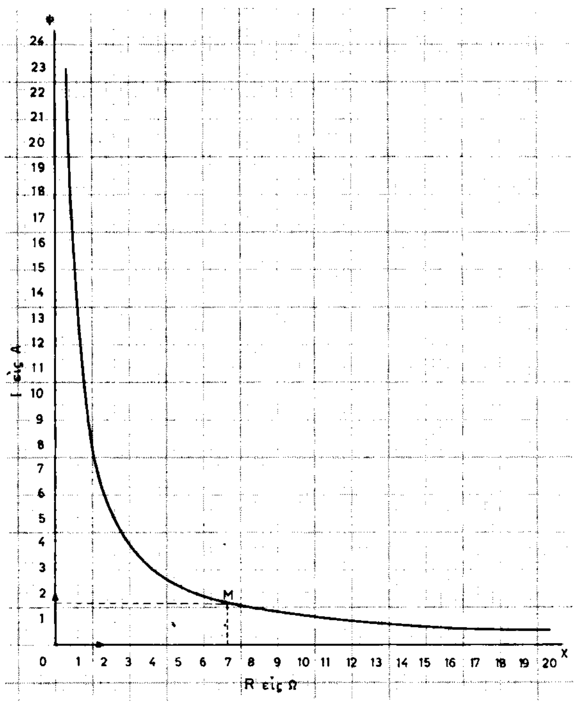
Εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ τὸ γραφικὸν τῆς $F - 32 = 1{,}8\ C$ εἶναι ἡ εὐθεῖα ε.

Χρῆσις τοῦ γραφικοῦ. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν π.χ. τῆς θερμοκρασίας 160^0 F εἰς C εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Θ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ $F = 160$ τέμνει τὸ γραφικόν. Τὸ Θ περιέχεται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $C = 70^0$ καὶ $C = 80^0$. Μὲ ἐκτίμησιν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ὑπολογίζομεν περίπου 71^0C. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ θερμοκρασία 55^0 C εἰς βαθμοὺς Φαρενάιτ εἶναι περίπου 131 F.

II. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἠλεκτροτεχνίαν ὅτι ἡ ἔντασις I, εἰς ἀμπέρ, τοῦ ρεύματος διὰ μέσου καταναλωτοῦ, παρέχεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $I = \frac{U}{R}$, ὅπου U, εἰς Volt, ἡ ἐφηρμοσμένη τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ καταναλωτοῦ καὶ R, εἰς Ὤμ, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ.

Ἂς ἀναζητήσωμεν γραφικὴν μέθοδον παρέχουσαν τιμὰς τῆς I διὰ $U = 12$ V καὶ $0{,}5\ \Omega < R < 20\ \Omega$.

1η μέθοδος (σχ. 20·4β). Χαράσσομεν ὀρθογώνιον σύ-



Σχ. 20·4 β.

στημα ἀξόνων χΟψ μὲ βασικὰ διανύσματα μήκους 1 cm καὶ παριστάνομεν τὴν R μὲ τὸν Οχ καὶ μὲ τὴν οἰκογένειαν τῶν καθέτων πρὸς αὐτὸν εὐθειῶν καὶ τὴν I μὲ τὸν Οψ καὶ τὴν οἰκογένειαν τῶν καθέτων πρὸς αὐτὸν εὐθειῶν. Διὰ νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν εἰς τὰ σημεῖα τῶν ἀξόνων καὶ τὰς καθέτους πρὸς αὐτοὺς εὐθείας, χρησιμοποιοῦμεν μετρικὰς κλίμακας μὲ κοινὴν βαθμίδα 0,5 cm. Εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ σχεδιάζομεν τὸ γραφικὸν τῆς $I = \frac{12}{R}$ διὰ $0,5\ \Omega < R < 20\ \Omega$. Εἶναι ἕνα τμῆμα τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν $\sphericalangle\, \chi O \psi$ κλάδου της ὑπερβολῆς μὲ ἐξίσωσιν εἰς συντεταγμένας $\chi\psi = 12$.

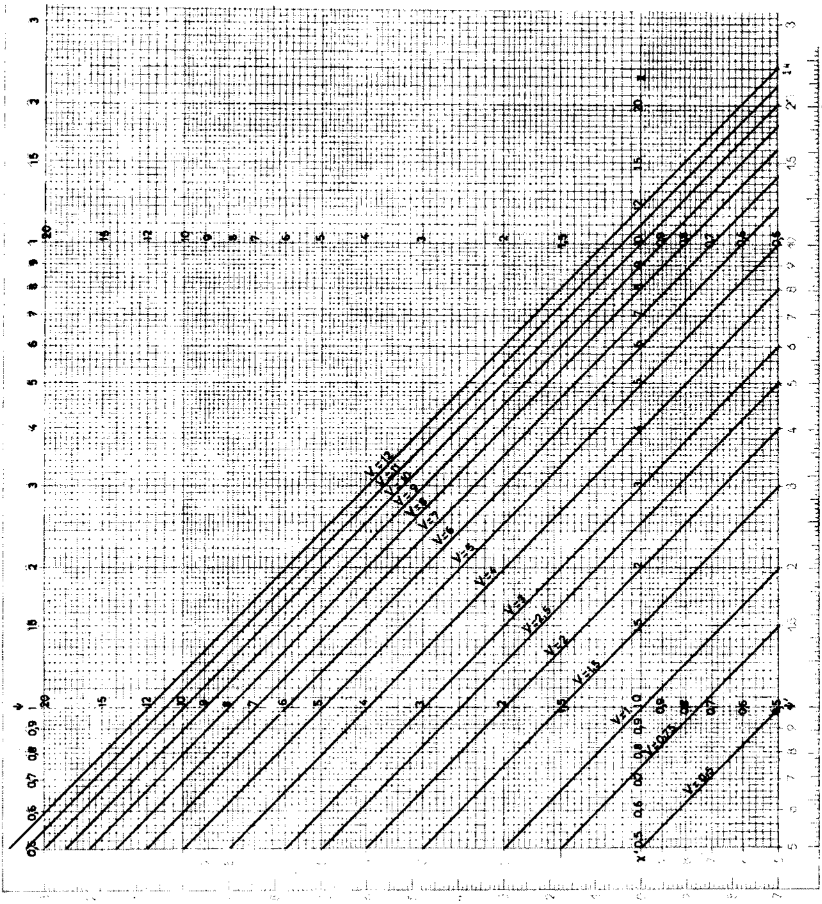
Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς I, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν τιμὴν τῆς R, π.χ. τὴν $R = 7$, σημειώνομεν τὴν τομὴν M τῆς $R = 7$ μὲ τὸ γραφικόν. Εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ὅτι ἀπὸ τὸ M διέρχεται ἡ εὐθεῖα $I = 1,7$ A. Ὥστε $I \simeq 1,7$ A.

Ἡ μέθοδος αὐτή, ἰδίως διὰ $9 < R < 20\ \Omega$ καὶ $0,5\ \Omega < R < 2$, οὔτε εὐχερὴς εἶναι, οὔτε προσεγγιστικὰς τιμὰς ἐπαρκοῦς ἀκριβείας μᾶς δίδει, ὅταν μάλιστα ἡ βαθμὶς τῆς κλίμακος εἶναι μικρὰ ὅπως εἰς τὸ σχῆμα.

2ος *μέθοδος* (σχ. 20·4γ). Ἡ προηγουμένη μέθοδος γίνεται ἁπλουστέρα καὶ δίδει ἀκριβεστέρας τιμὰς τῆς I, ἐὰν ἀναμορφώσωμεν τὸ καμπυλόγραμμον γραφικὸν τῆς σχέσεως $I = \frac{12}{R}$ εἰς εὐθύγραμμον. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν διὰ τὴν παράστασιν τῶν τιμῶν τῶν R καὶ I ἐπὶ τῶν ἀξόνων χρησιμοποιήσωμεν λογαριθμικὰς κλίμακας (παράγρ. 18·1).

Χρησιμοποιοῦμεν λοιπὸν βασικὰ διανύσματα μεγάλου σχετικῶς μήκους, εἰς τὸ σχῆμα εἶναι μήκους 5 cm, καὶ ἀντιστοιχίζομεν τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν εἰς τὰ σημεῖα τῶν ἀξόνων ὡς ἑξῆς: Εἰς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν R_0 τῆς R θὰ ἀντιστοιχῇ τὸ σημεῖον τοῦ Οχ, ποὺ ἔχει τετμημένην $\chi_0 = \lambda o\gamma\, R_0$, καὶ εἰς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν I_0 τῆς I τὸ σημεῖον τοῦ Οψ μὲ τεταγμένην $\psi_0 = \lambda o\gamma\, I_0$.

Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν αἱ τιμαὶ $R = 1\ \Omega$, $I = 1$ A παριστάνονται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν 0 τῶν ἀξόνων, διότι λογ $1=0$. Ἡ τιμὴ $R=10\ \Omega$ παριστάνεται μὲ τὸ σημεῖον $(1{,}0)$, διότι λογ $10=1$,



Σχ. 20·4 γ.

ἡ τιμὴ $I=0{,}6$ A μὲ τὸ σημεῖον $(0, -0{,}22=-1,\ 1\ \text{cm})$, διότι λογ $0{,}6 \simeq \overline{1}{,}78=-1+0{,}78=-0{,}22$ κλπ.

Ἀφοῦ ἀριθμοσημάνωμεν ἔτσι τοὺς ἄξονας καὶ τὰς καθέτους πρὸς αὐτοὺς εὐθείας, ἀναζητοῦμεν τὸ γραφικὸν τῆς σχέσεως $I=\dfrac{12}{R}$

εἰς τὸ σύστημα, ποὺ προκύπτει. Ἡ σχέσις $I = \frac{12}{R}$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν ἰσοδύναμον σχέσιν:

$$\lambda o\gamma\, R + \lambda o\gamma\, I = \lambda o\gamma\, 12,$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν, ἂν θέσωμεν $\lambda o\gamma\, R = \chi$, $\lambda o\gamma\, I = \psi$ καὶ $\lambda o\gamma\, 12 \simeq 1{,}3$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\chi + \psi = 1{,}3,$$

ἡ ὁποία εἰς ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων παριστάνει εὐθεῖαν. Τὴν κατασκευάζομεν. Αὐτὴ διέρχεται ἀπὸ τὰ ἀριθμόσημα 12 Ω τοῦ $O\chi$ καὶ 12 A τοῦ $O\psi$. Κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας αὐτῆς ἡ τιμὴ τῆς τάσεως U παραμένει σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 12 V, διότι αἱ τιμαὶ (R_0, I_0) τῶν R καὶ I, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς οἱονδήποτε σημεῖον της, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $\lambda o\gamma\, I + \lambda o\gamma\, R = \lambda o\gamma\, 12$ ἢ $I \cdot R = 12$, δηλαδὴ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τιμὴν $U = 12$ V. Τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν σημειώνομεν μὲ τὸ ἀριθμόσημον 12 V.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς I, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένην τιμὴν τῆς R, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὴν 1ην μέθοδον. Ἔτσι διὰ $R = 2{,}1$ εἶναι $I \simeq 5{,}75$ καὶ διὰ $R = 0{,}7$, εἶναι $I = 17{,}1$.

20·5 Σχέσεις μεταξὺ τριῶν μεταβλητῶν.

Ἔστω τώρα ὅτι εἰς τὴν σχέσιν $z_1 = \sigma(z_2, z_3)$ μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν z_1, z_2, z_3 ζητεῖται κατὰ προσέγγισιν ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μεταβλητῆς, π.χ. τῆς z_1, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ζεῦγος δεδομένων τιμῶν (α_2, α_3) τῶν z_2, z_3. Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἐπιλυθῇ καὶ μὲ καταλλήλους πίνακας «διπλῆς εἰσόδου». Παραθέτομεν δύο αὐτοῦ τοῦ εἴδους.

Ὁ πρῶτος εἶναι ἕνας πυθαγόρειος πίναξ, ποὺ μᾶς δίδει τὴν τιμὴν τοῦ γινομένου $z_1 = z_2 \cdot z_3$ δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν z_2, z_3. Π.χ. διὰ $z_2 = 4$, $z_3 = 5$ διαβάζομεν εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς 4 καὶ τῆς στήλης 5 τὸν ἀριθμὸν 20. Ὁ δεύτερος πίναξ μᾶς δίδει τὰς τιμὰς τῆς ταχύτητος κοπῆς υ μιᾶς φρέζας εἰς m/min, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὸν τύπον $\upsilon = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{1\,000}$, διὰ τὰς συχνότερον χρησιμοποιουμένας τιμὰς τῆς διαμέτρου D εἰς mm καὶ τοῦ ἀριθμοῦ n τῶν στροφῶν (στρ/min).

$z_2 \rightarrow$ / $z_1 \downarrow$				
1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

D → / n ↓	40	80	120	160
35	4,4	8,8	13,2	17,6
50	6,3	12,6	18,8	25,1
70	8,8	17,6	26,4	35,2
98	12,3	24,6	36,9	49,2

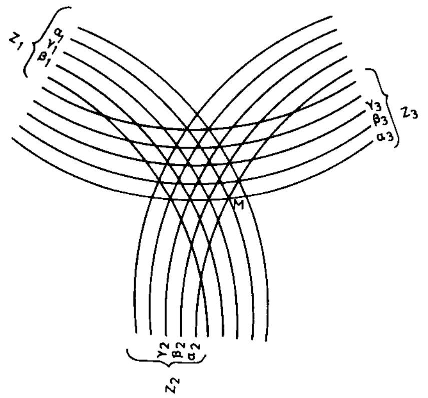
Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἐπιλύεται καὶ μὲ εἰδικὰς γραφικὰς μεθόδους, ποὺ λέγονται *νομογραφήματα*. Διακρίνομεν τὰ *πλεγματικὰ νομογραφήματα* καὶ τὰ *γραμμικὰ νομογραφήματα*.

20·6 Πλεγματικὰ νομογραφήματα τριῶν μεταβλητῶν.

Εἰς τὰ πλεγματικὰ νομογραφήματα τριῶν μεταβλητῶν z_1, z_2, z_3, ποὺ συνδέονται μὲ μίαν σχέσιν $\sigma(z_1, z_2, z_3) = 0$, κάθε μία ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς παριστάνεται ἀπὸ μίαν οἰκογένειαν γραμμῶν (εὐθειῶν ἢ καμπυλῶν) (σχ. 20·6). Ἑκάστη γραμμὴ μιᾶς οἰκογενείας σημειώνεται μὲ ἕνα ἀριθμόσημον, ποὺ δηλώνει τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει. Π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 20·6 ἡ γραμμὴ τῆς οἰκογενείας (z_1) μὲ τὸ ἀριθμόσημον α_1 παριστάνει τὴν τιμὴν $z_1 = \alpha_1$.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μεταβλητῆς π.χ. τῆς z_1, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ζεῦγος δεδομένων τιμῶν (α_2, α_3) τῶν

z_2, z_3 εὑρίσκομεν τὸ κοινὸν σημεῖον Μ τῶν γραμμῶν $z_2 = \alpha_2$, $z_3 = \alpha_3$. Τὸ ἀριθμόσημον α_1, τῆς γραμμῆς $z_1 = \alpha_1$, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ, εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς z_1.



Σχ. 20·6.

Εἰς τὰ πλεγματικὰ νομογραφήματα αἱ καμπύλαι ἑκάστης μεταβλητῆς διὰ τὰ διαστήματα τῶν τιμῶν της, ποὺ χρησιμοποιοῦνται συχνότερα εἰς τὴν πρᾶξιν, χαράσσονται ἀρκετὰ πυκνά, ὥστε τὴν καμπύλην μιᾶς τιμῆς, ποὺ δὲν εἶναι χαραγμένη, νὰ δυνάμεθα νὰ τὴν παρεμβάλλωμεν ὀπτικῶς μεταξὺ δύο χαραγμένων γραμμῶν μὲ τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν προσέγγισιν.

20·7 Ἐφαρμογαί.

I. Εἰς τὴν II περίπτωσιν τῶν ἐφαρμογῶν τῆς παραγράφου 20·4 ἡ τάσις U ἦτο σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 12V. Ἂν τώρα ἡ U εἶναι μεταβλητή, τότε ἔχομεν μίαν σχέσιν μεταξὺ τριῶν μεταβλητῶν, τήν:

$$U = I \cdot R.$$

Νὰ κατασκευασθῇ τὸ νομογράφημα τῆς ἀνωτέρω σχέσεως.

Κατασκευή.

Κατασκευάζομεν ἕνα νομογράφημα τῆς σχέσεως αὐτῆς συμπληρώνοντες τὸ γραφικὸν τῆς 2ας μεθόδου τῆς παραγράφου 20·4 ὡς ἑξῆς: Σχεδιάζομεν τὰς εὐθείας U = 11, 10, 9,..., 1, 0,9,..., 0,5V, δηλαδὴ τὰς εὐθείας ποὺ ἔχουν ἐξισώσεις:

$$x + y = \text{λογ}U \quad \text{διὰ} \quad U = 11,\ 10,\ldots,\ 0{,}5\,V.$$

Ἔτσι ἔχομεν τὸ νομογράφημα τοῦ σχήματος 20·4 γ, ποὺ μᾶς δίδει, π.χ. διὰ $I = 3{,}5A$ καὶ $R = 3{,}25\,\Omega$, τὴν τιμὴν $U \simeq 11{,}5$, διὰ $U = 8V$ καὶ $R = 2{,}5\,\Omega$, τὴν τιμὴν $I \simeq 3{,}55A$ κλπ.

II. *Νὰ κατασκευασθῇ τὸ νομογράφημα τῆς σχέσεως:*

$$\upsilon = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{1000},$$

ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παράγραφον 20 · 5.

Κατασκευή.

Χαράσσομεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων χΟψ μὲ βασικὰ διανύσματα μήκους 1 cm καὶ παριστάνομεν τὴν διάμετρον D μὲ τὸν Οχ καὶ μὲ τὴν οἰκογένειαν τῶν πρὸς αὐτὸν καθέτων εὐθειῶν, τὴν δὲ ταχύτητα υ μὲ τὸν ἄξονα Οψ καὶ μὲ τὴν οἰκογένειαν τῶν καθέτων πρὸς αὐτὸν εὐθειῶν. Καὶ διὰ τὰς δύο μεταβλητὰς χρησιμοποιοῦμεν μετρικὰς κλίμακας μὲ βαθμίδας 1/2 mm διὰ τὴν D καὶ 1 mm διὰ τὴν υ.

Τὰ ἀριθμόσημα τοῦ ἄξονος Οχ θὰ παριστάνουν εἰς mm τὰς τιμὰς τῆς διαμέτρου D καὶ τοῦ ἄξονος Οψ τὰς τιμὰς τῆς υ εἰς m/min.

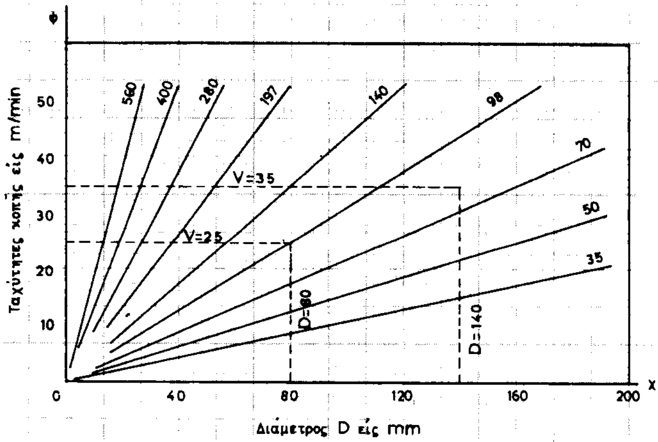
Δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν n τὰς συχνότερον χρησιμοποιουμένας τιμάς της, 35, 50..., καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους ἐκφράσεις τῆς υ συναρτήσει τῆς D. Π.χ. διὰ n = 35 στρ/min ἔχομεν:

$$\upsilon = \frac{3{,}14 \cdot D \cdot 35}{1\,000} = 0{,}109\,9\ D \simeq 0{,}11\ D.$$

Κατασκευάζομεν σχετικὸν πίνακα τιμῶν (σχ. 20 · 7 α):

n	35	50	70	98	140	197	280	400	560
υ	0,11D	0,16D	0,22D	0,31D	0,44D	0,62D	0,88D	1,26D	1,76D

Σχεδιάζομεν εἰς τὸ σχέδιόν μας τὰ γραφικὰ τῶν σχέσεων $\upsilon = 0{,}11\ \mathrm{D}$, $\upsilon = 0{,}16\ \mathrm{D}$, $\upsilon = 0{,}22\ \mathrm{D}$,..., ποὺ εἶναι εὐθεῖαι, καὶ



Σχ. 20·7 α.

τὰς βαθμολογοῦμεν γράφοντες εἰς κάθε μίαν ἀπὸ αὐτὰς ὡς ἀριθμόσημον τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς n εἰς στρ/min. Ἔτσι εἰς τὴν $\upsilon = 0{,}11\ \mathrm{D}$ γράφομεν $\mathrm{n} = 35$, εἰς τὴν $\upsilon = 0{,}16\ \mathrm{D}$ τὴν $\mathrm{n} = 50$ κλπ.

Προκύπτει τὸ νομογράφημα τῆς σχέσεως $\upsilon = \dfrac{\pi \cdot \mathrm{D} \cdot \mathrm{n}}{1\,000}$, ποὺ λέγεται *νομογράφημα τῆς φρέζας.*

Χρῆσις τοῦ νομογραφήματος: Διὰ $\upsilon = 25$ καὶ $\mathrm{D} = 80$ διαβάζομεν εἰς τὴν εὐθεῖαν n, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν $\upsilon = 25$, $\mathrm{D} = 80$, τὸ ἀριθμόσημον 98. Ὥστε διὰ $\upsilon = 25$ m/min καὶ $\mathrm{D} = 80$mm εἶναι $\mathrm{n} = 98$ στρ/min.

Διὰ $\mathrm{D} = 140$ καὶ $\upsilon = 35$ ὑπολογίζομεν κατὰ προσέγγισιν ὀπτικῶς ὅτι ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν ἀντιστοίχων εὐθειῶν διέρχεται ἡ $\mathrm{n} = 78$. Ὥστε διὰ $\upsilon = 35$ m/min καὶ $\mathrm{D} = 140$mm εἶναι $\mathrm{n} = 78$ στρ/min.

III. *Αἱ πλευραὶ α, β, γ κάθε ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν τὴν α συνδέονται μεταξύ των μὲ τὴν σχέσιν :*

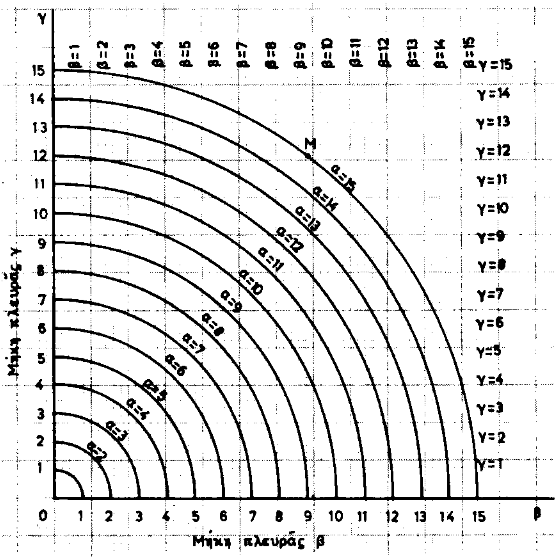
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \qquad (1)$$

ποὺ μᾶς παρέχεται ἀπὸ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα.

Νὰ κατασκευασθῇ τὸ νομογράφημα τῆς σχέσεως (1).

Κατασκευή.

Χρησιμοποιοῦμεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων μὲ ἰσομήκη βασικὰ διανύσματα (σχ. 20·7β) καὶ παριστάνομεν τὴν μὲν β μὲ τὸν Οχ καὶ μὲ τὴν οἰκογένειαν τῶν καθέτων πρὸς αὐτὸν εὐθειῶν, τὴν δὲ γ μὲ τὸν Οψ καὶ τὴν οἰκογένειαν τῶν καθέτων πρὸς αὐτὸν εὐθειῶν. Βαθμολογοῦμεν τοὺς ἄξονας μὲ μετρικὰς κλίμακας, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα. Διὰ τὴν παράστασιν τῆς ὑποτεινούσης α σκεπτόμε-



Σχ. 20·7 β.

θα ὡς ἑξῆς: Ἂν α_0 εἶναι μία τιμὴ τῆς α, τότε ἕνα οἱονδήποτε ζεῦγος τιμῶν (β_0, γ_0) τῶν β καὶ γ, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha_0{}^2$, θὰ ἱκανοποιῇ καὶ τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + y^2 = \alpha^2{}_0$, ἡ ὁποία εἰς τὸ σύστημα χΟψ παριστάνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (Ο,

α^0). Ἑπομένως τὸ ζεῦγος (β_0, γ_0) παριστάνεται μὲ ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ $\beta_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, τὸ σημεῖον αὐτὸ εὑρίσκεται μέσα εἰς $\widehat{\chi O \psi}$, δηλαδὴ εἰς τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, ποὺ περιέχουν οἱ θετικοὶ ἡμιάξονες $O\chi$, $O\psi$. Ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον M (χ_0, ψ_0) τοῦ τεταρτημορίου ἔχει συντεταγμένας $\chi_0 > 0$, $\psi_0 > 0$, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha_0^2$. Παριστάνομεν λοιπὸν τὴν α μὲ τὴν οἰκογένειαν τῶν τεταρτημορίων, τὰ ὁποῖα ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀνήκουν εἰς τοὺς ὁμοκέντρους κύκλους μὲ κέντρον τὸ Ο, ἀφ' ἑτέρου δὲ εὑρίσκονται μέσα εἰς τὴν $\sphericalangle \chi O \psi$.

Χαράσσομεν τὰ τόξα αὐτὰ καὶ τὰ βαθμολογοῦμεν μὲ τὰ ἀριθμόσημα, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα. Ἔχομεν ἔτσι τὸ νομογράφημα τῆς σχέσεως $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$.

Χρῆσις τοῦ νομογραφήματος: Διὰ $\beta = 9$, $\gamma = 12$ διαβάζομεν εἰς τὸ τόξον, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν τομὴν M τῶν εὐθειῶν $\beta = 9$, $\gamma = 12$, τὸ ἀριθμόσημον 15. Ὥστε διὰ $\beta = 9$, $\gamma = 12$ εἶναι $\alpha = 15$.

Διὰ $\alpha = 12$, $\beta = 8$ ὑπολογίζομεν κατὰ προσέγγισιν ὅτι ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν $\alpha = 12$ καὶ $\beta = 8$ διέρχεται ἡ $\gamma = 8{,}9$. Ὥστε διὰ $\alpha = 12$, $\beta = 8$ εἶναι $\gamma = 8{,}9$.

IV. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα καταλήγομεν εἰς τὰ ἀκόλουθα:

Ὅταν μᾶς δοθῇ μία ἀναλυτικὴ σχέσις $\sigma(z_1, z_2, z_3) = 0$ μεταξὺ τριῶν μεταβλητῶν z_1, z_2, z_3 δυνάμεθα μὲ τὴν βοήθειαν τῆς σχέσεως αὐτῆς νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα πλεγματικὸν νομογράφημα, τὸ ὁποῖον νὰ μᾶς δίδῃ κατὰ προσέγγισιν τὴν τιμὴν μιᾶς ἀπὸ τὰς μεταβλητάς, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ζεῦγος δεδομένων τιμῶν τῶν δύο ἄλλων μεταβλητῶν.

Τὰ νομογραφήματα ὅμως αὐτὰ παρουσιάζουν ὡρισμένα μειονεκτήματα, ἤτοι:

Ἡ χρῆσις των ἀπαιτεῖ μεγάλην προσοχὴν εἰς τὴν παρακολούθησιν τῶν γραμμῶν, μέχρις ὅτου συναντήσωμεν τὸ ἀριθμόσημόν των (ἰδίως ὅταν εἶναι πυκνοχαραγμέναι).

Ἡ παρεμβολὴ ὀπτικῶς μιᾶς γραμμῆς, μὴ χαραγμένης, τῆς ὁποίας ὅμως μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ ἀριθμόσημον, εἶναι δύσκολος, ἰδίως ὅταν εἶναι καμπύλη.

Ἐπίσης ἡ κατασκευή των παρουσιάζει δυσχερείας, διότι ἀπαιτεῖ τὴν σχεδίασιν μεγάλου ἀριθμοῦ γραμμῶν.

Πολὺ ἁπλούστερα ἀπὸ τὰ πλεγματικὰ εἶναι τὰ λεγόμενα *γραμμικὰ* νομογραφήματα.

20·8 Γραμμικὰ νομογραφήματα.

Ἔστω πάλιν σ $(z_1, z_2, z_3) = 0$ μία σχέσις μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν z_1, z_2, z_3.

Εἰς τὰ γραμμικὰ νομογραφήματα αἱ τιμαὶ α_1, β_1, γ_1,... ἑκάστης μεταβλητῆς z_1 ἀντὶ νὰ παριστάνωνται μὲ τὰς γραμμὰς μιᾶς οἰκογενείας παριστάνονται μὲ τὰ ἀριθμόσημα τῶν σημείων μιᾶς γραμμῆς (εὐθείας ἢ καμπύλης), ἡ ὁποία καλεῖται *φορεύς* των. Οἱ φορεῖς, αἱ θέσεις των μέσα εἰς τὸ νομογράφημα καὶ αἱ βαθμολογήσεις των ἐκλέγονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ ἀριθμόσημα μιᾶς τριάδος τιμῶν $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ τῶν z_1, z_2, z_3, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν $\sigma(z_1, z_2, z_3) = 0$, νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς.

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας τῶν γραμμικῶν νομογραφημάτων δὲν περιλαμβάνεται εἰς τοὺς σκοποὺς τοῦ παρόντος βιβλίου. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὴν παράθεσιν δύο γραμμικῶν νομογραφημάτων, καὶ εἰς τὴν ἐξήγησιν τῆς κατασκευῆς των.

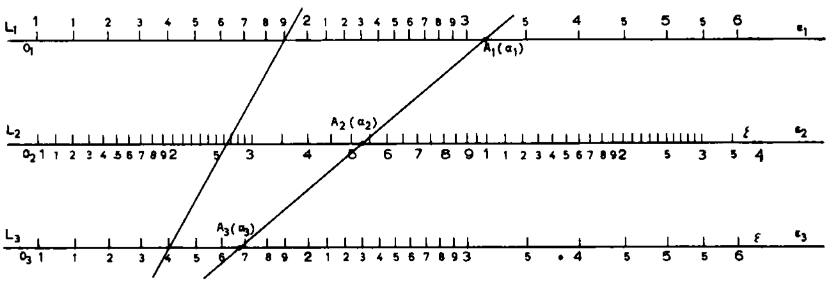
1ον. *Νομογράφημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Ἔστω L_1, L_2, L_3 τρεῖς λογαριθμικαὶ κλίμακες, ε_1, ε_2, ε_3 οἱ φορεῖς αὐτῶν καὶ O_1, O_2, O_3 αἱ ἀρχαὶ τῶν τριῶν κλιμάκων. Διὰ τὰς L_1, L_3 ἐκλέγομεν κοινὸν βασικὸν μέτρον, ἔστω τὸ $l_1 = 200\,\text{mm}$, καὶ διὰ τὴν L_2 τὸ $l_2 = \frac{l_1}{2} = 100\ \text{mm}$. Τοποθετοῦμεν κατόπιν τὰς εὐθείας ε_1, ε_3 συμμετρικῶς καὶ παραλλήλως ὡς πρὸς τὴν ε_2, κατὰ τρόπον, ὥστε αἱ ἀρχαὶ O_1, O_2, O_3 τῶν κλιμάκων νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ μιᾶς καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν εὐθειῶν (σχ. 20·8 α).

Ἔστω τώρα ὅτι τὰ σημεῖα A_1 τῆς L_1, A_2 τῆς L_2, A_3 τῆς L_3 εἶναι εὐθυγραμμισμένα. Ἄς εἶναι δὲ α_1, α_2, α_3 τὰ ἀντίστοιχα ἀριθμόσημα τῶν A_1, A_2, A_3. Σχηματίζεται τὸ τραπέζιον $O_1A_1A_3O_3$ μὲ διάμεσον τὴν OA_2, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$O_2A_2 = \frac{O_1A_1 + O_3A_3}{2},$$

(Διάμεσος τοῦ τραπεζίου = ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων).



Σχ. 20·8 α.
Νομογράφημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Ἐπειδὴ τὸ βασικὸν μέτρον l_2 τῆς L_2 εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ βασικοῦ l_1 τῶν L_1, L_3, συμπεραίνομεν (παράγρ. 18·2) ὅτι τὸ μῆκος (O_2A_2) μετρούμενον μὲ μονάδα τὸ l_2 δίδει μέτρον $(O_2A_2) =$ λογ α_2 διπλάσιον ἀπὸ τὸ μέτρον $\frac{\text{λογ}\alpha_1 + \text{λογ}\alpha_3}{2}$ τοῦ ἴσου μήκους $\frac{(O_1A_1) + (O_3A_3)}{2}$ ὡς πρὸς μονάδα τὸ l_1. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς τὴν σχέσιν:

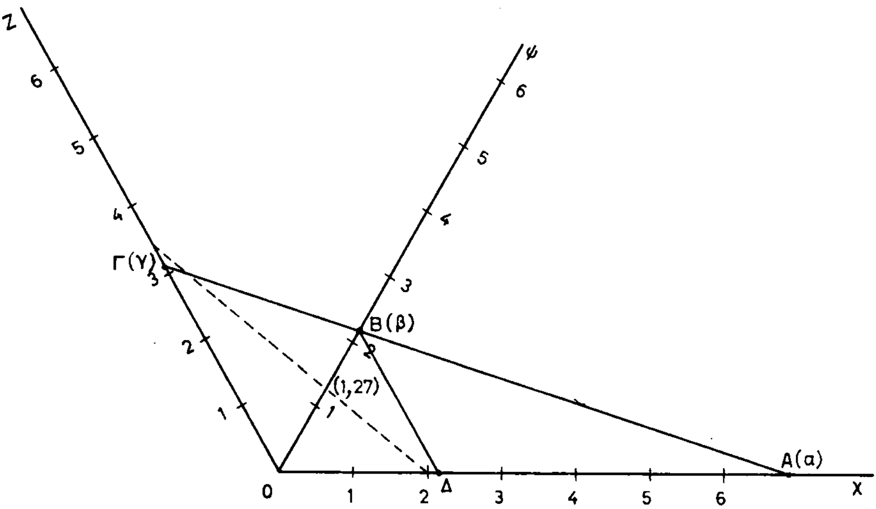
$$\text{λογ}\alpha_2 = \frac{2(\text{λογ}\alpha_1 + \text{λογ}\alpha_3)}{2} \quad \text{ἢ} \quad \text{λογ}\alpha_2 = \text{λογ}\alpha_1 + \text{λογ}\alpha_3 \quad \text{ἢ}$$

$$\text{λογ}\alpha_2 = \text{λογ}(\alpha_1\alpha_3).$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν ἕπεται ὅτι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \alpha_3,$$

δηλαδὴ τὸ ἀριθμόσημον α_2 τοῦ A_2 μᾶς δίδει τὸ γινόμενον $\alpha_1 \cdot \alpha_3$ τῶν ἀριθμοσήμων α_1, α_3 τῶν σημείων A_1 καὶ A_3 τῶν κλιμάκων L_1, L_3, μὲ τὰ ὁποῖα εὑρίσκεται εὐθυγραμμισμένον.



Σχ. 20·8 β.

Χρῆσις (σχ. 20·8 α). Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον 1,9 × 1,4. Ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὰ ἀριθμόσημα 1,9 τῆς L_1 καὶ 1,4 τῆς L_3, τέμνει τὴν L_2 εἰς τὸ ἀριθμόσημον περίπου 2,65. Ἄρα 19 × 1,4 ≃ 2,65.

2ον *Γραμμικὸν νομογράφημα τῆς σχέσεως:*

$$\frac{1}{\chi} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\psi}.$$

Ἀπὸ ἕνα σημεῖον O φέρομεν τὰς ἡμιευθείας Oχ, Oψ, Oz, ὥστε ∢ (Oχ, Oψ) = 60^0 καὶ ∢ (Oψ, Oz) = 60^0.

Παριστάνομεν τὰς μεταβλητὰς χ,ψ,z ἀντιστοίχως μὲ τὰς ἡμιευθείας Οχ, Οψ, Οz καὶ τὰς βαθμολογοῦμεν μὲ μετρικὰς κλίμακας βαθμίδος 1 cm, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 20·8 β.

Ἔστω τώρα ὅτι τὰ σημεῖα Α τοῦ Οχ, Β τοῦ Οψ καὶ Γ τοῦ Οz εἶναι εὐθυγραμμισμένα. Ἄς εἶναι δὲ α, β, γ, τὰ ἀντίστοιχα ἀριθμόσημα τῶν Α, Β, Γ.

Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΖ τέμνουσαν τὴν Οχ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Σχηματίζεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΟΔΒ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΟΒ = ΟΔ = ΔΒ. Ἀπὸ τὰ ὅμοια ὅμως τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΟΑΓ ἔχομεν:

$$\frac{(\Delta A)}{(OA)}=\frac{(\Delta B)}{(O\Gamma)} \ \text{ἢ} \ \frac{(OA)-(O\Delta)}{(OA)}=\frac{(OB)}{(O\Gamma)}$$

ἤ, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ μήκη μὲ τὰ μέτρα των,

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma} \ \text{ἢ} \ 1-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma} \ \text{ἢ} \ \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}.$$

Μὲ τὸ νομογράφημα αὐτὸ ὑπολογίζομεν τὴν τιμὴν μιᾶς ἀπὸ τὰς τρεῖς μεταβλητάς, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ζεῦγος δεδομένων τιμῶν τῶν δύο ἄλλων μεταβλητῶν.

Τὸ νομογράφημα χρησιμοποιεῖται εἰς τοὺς γενικοὺς τύπους:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \ (\text{Ἠλεκτρισμὸς})$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{F} \ (\text{Ὀπτική}).$$

Ἐφαρμογή.

Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς Ω ἡ τιμὴ τῆς R, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς τιμὰς $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3{,}45\Omega$.

Παριστάνομεν τὴν R_1 μὲ τὸν Οχ, τὴν R μὲ τὸν Οψ καὶ τὴν R_2 μὲ τὸν Οz. Ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὰ ἀριθμόσημα 2 τῆς χ καὶ 3,4 τῆς z, τέμνει τὸν Οψ περίπου εἰς τὸ ἀριθμόσημον 1, 27, ἄρα $R = 1{,}27\Omega$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ἡμίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,847
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,894	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0 935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0 972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	0,569	0,571	79	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	0,609	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	0,638	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα όξειών γωνιών.

Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0,957	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,278
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0,869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0,759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

'Εφαπτόμεναι ὀξειῶν γωνιῶν

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0,344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0,499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171,9	343,8

Συνεφαπτόμεναι όξειών γωνιών

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	∞	343,8	171,9	114,6	85,94	68,75	45	1,000	0,994	0,988	0,983	0,977	0,971
1	57,29	49,10	42,96	38,19	34,37	31,24	46	0,966	0,960	0,955	0,949	0,943	0,938
2	28,64	26,43	24,54	22,90	21,47	20,21	47	0,933	0,927	0,922	0,916	0,911	0,906
3	19,08	18,07	17,17	16,35	15,60	14,92	48	0,900	0,895	0,890	0,885	0,880	0,874
4	14,30	13,73	13,20	12,71	12,25	11,83	49	0,869	0,864	0,859	0,854	0,849	0,844
5	11,43	11,06	10,71	10,39	10,08	9,788	50	0,839	0,834	0,829	0,824	0,819	0,815
6	9,514	9,255	9,010	8,777	8,556	8,345	51	0,810	0,805	0,800	0,795	0,791	0,786
7	8,144	7,953	7,770	7,596	7,429	7,269	52	0,781	0,777	0,772	0,767	0,763	0,758
8	7,115	6,968	6,827	6,691	6,561	6,435	53	0,754	0,749	0,744	0,740	0,735	0,731
9	6,314	6,197	6,084	5,976	5,871	5,769	54	0,727	0,722	0,718	0,713	0,709	0,705
10	5,671	5,576	5,485	5,396	5,309	5,226	55	0,700	0,696	0,692	0,687	0,683	0,679
11	5,145	5,066	4,989	4,915	4,843	4,773	56	0,675	0,670	0,666	0,662	0,658	0,654
12	4,705	4,638	4,574	4,511	4,449	4,390	57	0,649	0,645	0,641	0,637	0,633	0,629
13	4,331	4,275	4,219	4,165	4,113	4,061	58	0,625	0,621	0,617	0,613	0,609	0,605
14	4,011	3,962	3,914	3,867	3,821	3,776	59	0,601	0,597	0,593	0,589	0,585	0,581
15	3,732	3,689	3,647	3,606	3,566	3,526	60	0,577	0,573	0,570	0,566	0,562	0,558
16	3,487	3,450	3,412	3,376	3,340	3,305	61	0,554	0,551	0,547	0,543	0,539	0,535
17	3,271	3,237	3,204	3,172	3,140	3,108	62	0,532	0,528	0,524	0,521	0,517	0,513
18	3,078	3,047	3,018	2,989	2,960	2,932	63	0,510	0,506	0,502	0,499	0,495	0,491
19	2,904	2,877	2,850	2,824	2,798	2,773	64	0,488	0,484	0,481	0,477	0,473	0,470
20	2,747	2,723	2,699	2,675	2,651	2,628	65	0,466	0,463	0,459	0,456	0,452	0,449
21	2,605	2,583	2,560	2,539	2,517	2,496	66	0,445	0,442	0,438	0,435	0,431	0,428
22	2,475	2,455	2,434	2,414	2,394	2,375	67	0,424	0,421	0,418	0,414	0,411	0,407
23	2,356	2,337	2,318	2,300	2,282	2,264	68	0,404	0,401	0,397	0,394	0,391	0,387
24	2,246	2,229	2,211	2,194	2,177	2,161	69	0,384	0,381	0,377	0,374	0,371	0,367
25	2,145	2,128	2,112	2,097	2,081	2,066	70	0,364	0,361	0,357	0,354	0,351	0,348
26	2,050	2,035	2,020	2,006	1,991	1,977	71	0,344	0,341	0,338	0,335	0,331	0,328
27	1,963	1,949	1,935	1,921	1,907	1,894	72	0,325	0,322	0,318	0,315	0,312	0,309
28	1,881	1,868	1,855	1,842	1,829	1,816	73	0,306	0,303	0,299	0,296	0,293	0,290
29	1,804	1,792	1,780	1,767	1,756	1,744	74	0,287	0,284	0,280	0,277	0,274	0,271
30	1,732	1,720	1,709	1,698	1,686	1,675	75	0,268	0,265	0,262	0,259	0,256	0,252
31	1,664	1,653	1,643	1,632	1,621	1,611	76	0,249	0,246	0,243	0,240	0,237	0,234
32	1,600	1,590	1,580	1,570	1,560	1,550	77	0,231	0,228	0,225	0,222	0,219	0,216
33	1,540	1,530	1,520	1,511	1,501	1,492	78	0,213	0,210	0,206	0,203	0,200	0,197
34	1,483	1,473	1,464	1,455	1,446	1,437	79	0,194	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179
35	1,428	1,419	1,411	1,402	1,393	1,385	80	0,176	0,173	0,170	0,167	0,164	0,161
36	1,376	1,368	1,360	1,351	1,343	1,335	81	0,158	0,155	0,152	0,149	0,146	0,144
37	1,327	1,319	1,311	1,303	1,295	1,288	82	0,141	0,138	0,135	0,132	0,129	0,126
38	1,280	1,272	1,265	1,257	1,250	1,242	83	0,123	0,120	0,117	0,114	0,111	0,108
39	1,235	1,228	1,220	1,213	1,206	1,199	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	1,192	1,185	1,178	1,171	1,164	1,157	85	0,087	0,085	0,082	0,079	0,076	0,073
41	1,150	1,144	1,137	1,130	1,124	1,117	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	1,111	1,104	1,098	1,091	1,085	1,079	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	1,072	1,066	1,060	1,054	1,048	1,042	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	1,036	1,030	1,024	1,018	1,012	1,006	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

Τετράγωνα, τετραγωνικαὶ ρίζαι. Κύβοι, κυβικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
					50	2500	125000	7,0711	3,6840
1	1	1	1,0000	1,0000	51	2601	132651	7,1414	3,7084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	2704	140608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	2809	148877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	2916	157464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	3025	166375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	3136	175616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	3249	185193	7,5498	3,8485
8	64	512	2,8284	2,0000	58	3364	195112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	3481	205379	7,6811	3,8930
10	100	1000	3,1623	2,1544	**60**	3600	216000	7,7460	3,9149
11	121	1331	3,3166	2,2240	61	3721	226981	7,8102	3,9365
12	144	1728	3,4641	2,2894	62	3844	238328	7,8740	3,9579
13	169	2197	3,6056	2,3513	63	3969	250047	7,9373	3,9791
14	196	2744	3,7417	2,4101	64	4096	262144	8,0000	4,0000
15	225	3375	3,8730	2,4662	65	4225	274625	8,0623	4,0207
16	256	4096	4,0000	2,5198	66	4356	287496	8,1240	4,0412
17	289	4913	4,1231	2,5713	67	4489	300763	8,1854	4,0615
18	324	5832	4,2426	2,6207	68	4624	314432	8,2462	4,0817
19	361	6859	4,3589	2,6684	69	4761	328509	8,3066	4,1016
20	400	8000	4,4721	2,7144	**70**	4900	343000	8,3666	4,1213
21	441	9261	4,5826	2,7589	71	5041	357911	8,4261	4,1408
22	484	10648	4,6904	2,8020	72	5184	373248	8,4853	4,1602
23	529	12167	4,7958	2,8439	73	5329	389017	8,5440	4,1793
24	576	13824	4,8990	2,8845	74	5476	405224	8,6023	4,1983
25	625	15625	5,0000	2,9240	75	5625	421875	8,6603	4,2172
26	676	17576	5,0990	2,9625	76	5776	438976	8,7178	4,2358
27	729	19683	5,1962	3,0000	77	5929	456533	8,7750	4,2543
28	784	21952	5,2915	3,0366	78	6084	474552	8,8318	4,2727
29	841	24389	5,3852	3,0723	79	6241	493039	8,8882	4,2908
30	900	27000	5,4772	3,1072	**80**	6400	512000	8,9443	4,3089
31	961	29791	5,5678	3,1414	81	6561	531441	9,0000	4,3267
32	1024	32768	5,6569	3,1748	82	6724	551368	9,0554	4,3445
33	1089	35937	5,7446	3,2075	83	6889	571787	9,1104	4,3621
34	1156	39304	5,8310	3,2396	84	7056	592704	9,1652	4,3795
35	1225	42875	5,9161	3,2711	85	7225	614125	9,2195	4,3968
36	1296	46656	6,0000	3,3019	86	7396	636056	9,2736	4,4140
37	1369	50653	6,0828	3,3322	87	7569	658503	9,3274	4,4310
38	1444	54872	6,1644	3,3620	88	7744	681472	9,3808	4,4480
39	1521	59319	6,2450	3,3912	89	7921	704969	9,4340	4,4647
40	1600	64000	6,3246	3,4200	**90**	8100	729000	9,4868	4,4814
41	1681	68921	6,4031	3,4482	91	8281	753571	9,5394	4,4979
42	1764	74088	6,4807	3,4760	92	8464	778688	9,5917	4,5144
43	1849	79507	6,5574	3,5034	93	8649	804357	9,6437	4,5307
44	1936	85184	6,6332	3,5303	94	8836	830584	9,6954	4,5468
45	2025	91125	6,7082	3,5569	95	9025	857375	9,7468	4,5629
46	2116	97336	6,7823	3,5830	96	9216	884736	9,7980	4,5789
47	2209	103823	6,8557	3,6088	97	9409	912673	9,8489	4,5947
48	2304	110592	6,9282	3,6342	98	9604	941192	9,8995	4,6104
49	2401	117649	7,0000	3,6593	99	9801	970299	9,9499	4,6261
50	2500	125000	7,0711	3,6840	**100**	10000	1000000	10,0000	4,6416

Τετράγωνα, τετραγωνικαὶ ρίζαι. Κύβοι, κυβικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 100 ἕως 200.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	**150**	22500	3375000	12,2474	5,3133
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	151	22801	3442951	12,2882	5,3251
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	152	23104	3511808	12,3288	5,3368
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	153	23409	3581577	12,3693	5,3485
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	154	23716	3652264	12,4097	5,3601
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	155	24025	3723875	12,4499	5,3717
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	156	24336	3796416	12,4900	5,3832
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	157	24649	3869893	12,5300	5,3947
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	158	24964	3944312	12,5698	5,4061
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	159	25281	4019679	12,6095	5,4175
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	**160**	25600	4096000	12,6491	5,4288
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	161	25921	4173281	12,6886	5,4401
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	162	26244	4251528	12,7279	5,4514
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	163	26569	4330747	12,7671	5,4626
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	164	26896	4410944	12,8062	5,4737
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	165	27225	4492125	12,8452	5,4848
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	166	27556	4574296	12,8841	5,4959
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	167	27889	4657463	12,9228	5,5069
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	168	28224	4741632	12,9615	5,5178
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	169	28561	4826809	13,0000	5,5288
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	**170**	28900	4913000	13,0384	5,5397
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	171	29241	5000211	13,0767	5,5505
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	172	29584	5088448	13,1149	5,5613
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	173	29929	5177717	13,1529	5,5721
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	174	30276	5268024	13,1909	5,5828
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	175	30625	5359375	13,2288	5,5934
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	176	30976	5451776	13,2665	5,6041
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	177	31329	5545233	13,3041	5,6147
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	178	31684	5639752	13,3417	5,6252
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	179	32041	5735339	13,3791	5,6357
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	**180**	32400	5832000	13,4164	5,6462
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	181	32761	5929741	13,4536	5,6567
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	182	33124	6028568	13,4907	5.6671
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	183	33489	6128487	13,5277	5,6774
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	184	33856	6229504	13,5647	5,6877
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	185	34225	6331625	13,6015	5,6980
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	186	34596	6434856	13,6382	5,7083
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	187	34969	6539203	13,6748	5,7185
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	188	35344	6644672	13,7113	5,7287
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	189	35721	6751269	13,7477	5,7388
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	**190**	36100	6859000	13,7840	5,7489
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	191	36481	6967871	13,8203	5,7590
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	192	36864	7077888	13,8564	5,7690
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	193	37249	7189057	13,8924	5,7790
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	194	37636	7301384	13,9284	5,7890
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	195	38025	7414875	13,9642	5,7989
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	196	38416	7529536	14,0000	5,8088
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	197	38809	7645373	14,0357	5,8186
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	198	39204	7762392	14,0712	5,8285
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	199	39601	7880599	14,1067	5,8383
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	**200**	40000	8000000	14,1421	5,8480

Λογαριθμικοὶ πίνακες τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 100 ἕως 1109 μὲ τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

Λογαριθμικοὶ πίνακες τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 100 ἕως 1109 μὲ τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ "ΑΣΠΙΩΤΗ - ΕΛΚΑ" Α. Ε.