ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Α΄ Τεχνικού και Επαγγελματικού Λυκείου

ΦΥΣΙΚΗ

Πύρρου Γ. Παπαδημητρίου

ΦΥΣΙΚΟΥ

Α' ΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ

ΠΥΡΡΟΥ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ
ΦΥΣΙΚΟΥ

ΑΘΗΝΑ
1977

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

'Ο Εὐγένιος Εὐγενίδης, ὁ ἱδρυτής καί χορηγός τοῦ «'Ιδρύματος Εὐγενίδου», πολύ νωρίς πρόβλεψε καί σχημάτισε τήν πεποίθηση ὅτι ἡ ἄρτια κατάρτιση τῶν τεχνικῶν μας, σέ συνδυασμό μέ τήν ἐθνική ἀγωγή, θά ἦταν ἀναγκαῖος καί ἀποφασιστικός παράγοντας τῆς προόδου τοῦ "Εθνους μας.

Τήν πεποίθησή του αὐτή ὁ Εὐγενίδης ἐκδήλωσε μέ τή γενναιόφρονα πράξη εὐεργεσίας, νά κληροδοτήσει σεβαστό ποσό γιά τή σύσταση 'Ιδρύματος πού θά εἶχε σκοπό νά συμβάλλει στήν τεχνική ἐκπαίδευση τῶν νέων τῆς 'Ελλάδας.

"Ετσι τό Φεβρουάριο τοῦ 1956 συστήθηκε τὸ «"Ιδρυμα Εὐγενίδου», τοῦ ὁποίου τήν διοίκηση ἀνέλαβε ἡ ἀδελφή του κυρία Μαριάνθη Σίμου, σύμφωνα μέ τήν ἐπιθυμία τοῦ διαθέτη.

'Από τό 1956 μέχρι σήμερα ἡ συμβολή τοῦ 'Ιδρύματος στήν τεχνική ἐκπαίδευση πραγματοποιεῖται μέ διάφορες δραστηριότητες. "Ομως ἀπ' αὐτές ἡ σημαντικότερη, πού κρίθηκε ἀπό τήν ἀρχή ὡς πρώτης ἀνάγκης, εἶναι ἡ ἔκδοση βιβλίων γιά τούς μαθητές τῶν τεχνικῶν σχολῶν.

Μέχρι σήμερα ἐκδόθηκαν 150 τόμοι βιβλίων, πού ἔχουν διατεθεῖ σέ πολλά ἑκατομμύρια τεύχη, καί καλύπτουν ἀνάγκες τῶν Κατώτερων καί Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ 'Υπ. Παιδείας, τῶν Σχολῶν τοῦ 'Οργανισμοῦ 'Απασχολήσεως 'Εργατικοῦ Δυναμικοῦ (ΟΑΕΔ) καί τῶν Δημοσίων Σχολῶν 'Εμπορικοῦ Ναυτικοῦ.

Μοναδική φροντίδα τοῦ 'Ιδρύματος σ' αὐτή τήν ἐκδοτική του προσπάθεια ἦταν καί εἶναι ἡ ποιότητα τῶν βιβλίων, ἀπό ἄποψη ὄχι μόνον ἐπιστημονική, παιδαγωγική καί γλωσσική, ἀλλά καί ἀπό ἄποψη ἐμφανίσεως, ὥστε τό βιβλίο νά ἀγαπηθεῖ ἀπό τούς νέους.

Γιά τήν ἐπιστημονική καί παιδαγωγική ποιότητα τῶν βιβλίων, τά κείμενα ὑποβάλλονται σέ πολλές ἐπεξεργασίες καί βελτιώνονται πρίν ἀπό κάθε νέα ἔκδοση.

'Ιδιαίτερη σημασία ἀπέδωσε τό "Ιδρυμα ἀπό τήν ἀρχή στήν ποιότητα τῶν βιβλίων ἀπό γλωσσική ἄποψη, γιατί πιστεύει ὅτι καί τά τεχνικά βιβλία, ὅταν εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα ἄρτια καί ὁμοιόμορφη ἀλλά καί κατάλληλη γιά τή στάθμη τῶν μαθητῶν, μποροῦν νά συμβάλλουν στήν γλωσσική διαπαιδαγώγηση τῶν μαθητῶν.

"Ετσι μέ ἀπόφαση πού πάρθηκε ἤδη ἀπό τό 1956 ὅλα τά βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Τεχνίτη, δηλαδή τά βιβλία γιά τίς Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, ὅπως ἀργότερα καί γιά τίς Σχολές τοῦ ΟΑΕΔ, εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα δημοτική μέ βάση τήν γραμματική τοῦ Τριανταφυλλίδη, ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα βιβλία εἶναι γραμμένα στήν ἁπλή καθαρεύουσα. 'Η γλωσσική ἐπεξεργασία τῶν βιβλίων γίνεται ἀπό φιλολόγους τοῦ 'Ιδρύματος καί ἔτσι ἐξασφαλίζεται ἡ ἑνιαία σύνταξη καί ὁρολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Ἡ ποιότητα τοῦ χαρτιοῦ, τό εἶδος τῶν τυπογραφικῶν στοιχείων, τά σωστά σχήματα καί ἡ καλαίσθητη σελιδοποίηση, τό ἐξώφυλλο καί τό μέγεθος τοῦ βιβλίου περιλαμβάνονται καί αὐτά στίς φροντίδες τοῦ Ἱδρύματος.

Τό Ἵδρυμα θεώρησε ὅτι εἶναι ὑποχρέωσή του, σύμφωνα μέ τό πνεῦμα τοῦ ἱδρυτῆ του, νά θέσει στήν διάθεση τοῦ Κράτους ὅλη αὐτή τήν πείρα του τῶν 20 ἐτῶν, ἀναλαμβάνοντας τήν ἔκδοση τῶν βιβλίων καί γιά τίς νέες Τεχνικές καί Ἐπαγγελματικές Σχολές καί τά νέα Τεχνικά καί Ἐπαγγελματικά Λύκεια.

Τά χρονικά περιθώρια γι' αὐτή τήν νέα ἐκδοτική προσπάθεια ἦταν πολύ περιορισμένα καί ἴσως γι' αὐτό, ἰδίως τά πρῶτα βιβλία αὐτῆς τῆς σειρᾶς, νά παρουσιάσουν ἀτέλειες στή συγγραφή ἤ στήν ἐκτύπωση, πού θά διορθωθοῦν στή νέα τους ἔκδοση. Γι' αὐτό τό σκοπό ἐπικαλούμαστε τήν βοήθεια ὅλων ὅσων θά χρησιμοποιήσουν τά βιβλία, ὥστε νά μᾶς γνωστοποιήσουν κάθε παρατήρησή τους γιά νά συμβάλλουν καί αὐτοί στή βελτίωση τῶν βιβλίων.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΕΦ. 2 Μηχανική στερεοῦ σώματος

Παράγρ. Σελ.

ΚΕΦ. 6 Ἐλαστικότητα

ΚΕΦ. 7 Ὑδροστατική

ΚΕΦ. 8 Ἀεροστατική

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ — ΚΥΜΑΤΙΚΗ — ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Παράγρ. Σελ.

ΚΕΦ. 10 Ταλαντώσεις

ΚΕΦ. 11 Κυματική

ΚΕΦ. 12 Ἀκουστική

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ—ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΚΕΦ. 16 Μεταβολή τῆς φυσικῆς καταστάσεως τῶν σωμάτων

ΚΕΦ. 17 Διάδοση θερμότητας

ΚΕΦ. 18 Θερμοδυναμική

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΜΗΔΕΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0·1 ΓΕΝΙΚΑ

α) **Φυσική.** Εἶναι ἡ ἐπιστήμη, πού ἐξετάζει τά φυσικά φαινόμενα.

β) **Φυσικά φαινόμενα.** Κάθε μεταβολή, πού γίνεται στή φύση, ἀποτελεῖ ἕνα φυσικό φαινόμενο. Π.χ. ἡ βροχή, ὁ κεραυνός, ὁ σεισμός, ἡ κίνηση τῶν οὐρανίων σωμάτων κ.λπ. εἶναι φυσικά φαινόμενα.

γ) **Φυσικά μεγέθη.** Φυσικό μέγεθος ὀνομάζουμε κάθε χαρακτηριστικό τῶν φυσικῶν ἀντικειμένων ἤ φαινομένων, πού δὲν παραμένει σταθερό, ἀλλά εἶναι δυνατό νά αὐξηθεῖ ἤ νά ἐλαττωθεῖ καί πού μποροῦμε νά τό μετρήσουμε. Π.χ. ὕψος βουνοῦ, δέντρου, αὐτοκινήτου. Βάρος πέτρας, πορτοκαλιοῦ, παιδιοῦ. Μῆκος ποταμοῦ, σπιτιοῦ, πλοίου. Διάρκεια ἀστραπῆς, πτώσεως σώματος.

δ) **Παρατήρηση.** Ὁ ἄνθρωπος θέλει νά κατανοήσει τά φυσικά φαινόμενα, γιατί εἶναι ἀπό τή φύση του ἐρευνητικός καί γιατί θέλει νά τά χρησιμοποιήσει γιά νά ἱκανοποιήσει πρακτικές του ἀνάγκες.

Παρατηρεῖ τά φυσικά φαινόμενα καί προσπαθεῖ νά τά ἑρμηνεύσει. Παρατηρώντας τήν ἐξέλιξη ἑνός φυσικοῦ φαινομένου ἀναζητᾶ τήν αἰτία πού τό προκάλεσε καί τίς σχέσεις ἀνάμεσα στά φυσικά μεγέθη, πού σχετίζονται μέ τό φαινόμενο.

Γιά νά γίνουν κατανοητά ὅσα διατυπώθηκαν παραπάνω, σχετικά μέ τήν παρατήρηση, θά φέρουμε ἕνα παράδειγμα.

Μιά πέτρα πέφτει ἀπό κάποιο ὕψος. Ἡ πτώση τῆς πέτρας εἶναι ἕνα φυσικό φαινόμενο, γιατί εἶναι μιά ἀλλαγή πού γίνεται στή Φύση. Σ' αὐτή τήν ἀλλαγή ὑπάρχουν φυσικά μεγέθη, πού σχετίζονται μέ τό φαινόμενο. Αὐτά εἶναι:

1) Τό διάστημα πού διανύει ἡ πέτρα καθώς πέφτει.

2) Ὁ χρόνος ἀπό τή στιγμή πού ἀρχίζει ἡ πτώση της μέχρι νά φτάσει στό ἔδαφος.

3) Ἡ ἕλξη τῆς Γῆς πού ἀναγκάζει τήν πέτρα νά κινηθεῖ.

Ποιά λοιπόν εἶναι ἡ **αἰτία,** πού προκάλεσε τό φαινόμενο; Ἡ ἀπάντηση δόθηκε καί εἶναι ἡ **ἕλξη τῆς Γῆς.** Ἡ πέτρα πέφτει, γιατί τήν ἕλκει ἡ Γῆ. Τήν ἕλξη αὐτή τῆς Γῆς τήν ὀνομάζουμε **βάρος.**

Ἡ παρατήρηση δίνει ἀπάντηση καί σ' ἕνα δεύτερο ἐρώτημα: **Πῶς πέφτει ἡ πέτρα;** Ἤ πιό συγκεκριμένα: **Ποιά εἶναι ἡ σχέση ἀνάμεσα στά μεγέθη: διάστημα,** πού διανύει ἡ πέτρα καί **χρόνος,** πού χρειάζεται γιά νά τό διανύσει.

Ὅταν ὁ ἄνθρωπος ἔδωσε ἀπάντηση σ' αὐτό τό δεύτερο ἐρώτημα καί εἶπε ὅτι τά διαστήματα πού διανύει τό κινητό εἶναι ἀνάλογα μέ τά τετράγωνα τῶν ἀντίστοιχων χρόνων, διατύπωσε αὐτόματα ἕνα φυσικό νόμο.

ε) **Φυσικός Νόμος.** Φυσικός Νόμος εἶναι μιά σχέση ἀνάμεσα σέ φυσικά μεγέθη, πού σχετίζονται μέ ἕνα φαινόμενο. Μέ τή γνώση τοῦ φυσικοῦ νόμου εἶναι δυνατή ἡ πρόβλεψη τῆς ἐξελίξεως ἑνός φαινομένου.

στ) **Πείραμα.** Ἡ εὕρεση τοῦ **αἰτίου,** πού προκαλεῖ ἕνα φαινόμενο, καί ἡ διατύπωση ἑνός νόμου εἶναι δύσκολη ὑπόθεση καί χρειάζεται πολλές φορές μακροχρόνια παρατήρηση.

Ἕνα φαινόμενο στή φύση ἔχει συνήθως μικρή διάρκεια. Ἕνα μῆλο πέφτει ἀπό τή μηλιά γρήγορα. Ἐπίσης ἡ ἐπανάληψη ἑνός φαινομένου στή φύση εἶναι συνήθως συμπτωματική καί ὄχι συχνή. Δέν εἶναι π.χ. δυνατόν ἕνας παρατηρητής, πού θέλει νά ἐξετάσει τό φαινόμενο τῆς πτώσεως μιᾶς πέτρας, νά περιμένει πότε θά πέσει ἡ πέτρα, πολύ μάλιστα περισσότερο ὅταν ἐπιθυμεῖ, γιά νά κάνει σωστή παρατήρηση, νά ἔχει συχνή ἐπανάληψη τοῦ φαινομένου.

Γιά νά μπορεῖ λοιπόν νά παρατηρήσει τό φαινόμενο πολλές φορές, σηκώνει τήν πέτρα καί τήν ἀφήνει νά πέσει ὅσες φορές θέλει. Ἡ ἐνέργειά του αὐτή, δηλαδή ἡ δημιουργία καί ἐπανάληψη ἴδιων συνθηκῶν γιά τήν ἐκδήλωση τοῦ φαινομένου τῆς πτώσεως, ὀνομάζεται **πείραμα.**

Ἑπομένως, **πείραμα εἶναι ἡ δημιουργία καί ἐπανάληψη ὅμοιων καί κατάλληλων συνθηκῶν, ἐφόσον τοῦτο εἶναι δυνατό, γιά τήν ἐκδήλωση ἑνός φαινομένου μέ ταυτόχρονη παρατήρηση καί μέτρηση διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν.**

Τό πείραμα γίνεται στό **ἐργαστήριο,** ὅπου ὑπάρχουν τά κατάλληλα ὄργανα καί οἱ προϋποθέσεις γιά τή μέτρηση τῶν φυσικῶν μεγεθῶν καί τήν ἐξεύρεση τῶν **νόμων,** πού διέπουν τό φαινόμενο.

Πρέπει, ὅμως, νά ἀναφέρουμε ὅτι πολλές παρατηρήσεις γιά τή μελέτη ὁρισμένων φυσικῶν φαινομένων (Μετεωρολογικῶν κ.λπ.) γίνονται ἀπ' εὐθείας στή Φύση, χωρίς νά εἶναι ἀπαραίτητη ἡ πραγματοποίηση ἐργαστηριακῶν πειραμάτων.

0·2 ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

α) **Μέτρηση τῶν Φυσικῶν Μεγεθῶν.** Γιά τή διατύπωση τῶν φυσικῶν νόμων χρησιμοποιοῦμε διάφορα φυσικά μεγέθη, ὅπως εἶναι τό μῆκος, ἡ μάζα, ὁ χρόνος, ἡ θερμότητα, ἡ δύναμη, ἡ πίεση κ.λπ., τά ὁποῖα πρέπει νά μποροῦμε νά τά μετροῦμε.

Μέτρηση ἑνός φυσικοῦ μεγέθους λέγεται ἡ σύγκριση αὐτοῦ μέ ἕνα ἄλλο ὅμοιο μέγεθος, τό ὁποῖο παίρνουμε σάν μονάδα. Ὁ λόγος τοῦ μεγέθους πρός τή μονάδα λέγεται **μέτρο** αὐτοῦ.

Ἔτσι γιά νά βρεῖ κανείς τό μέτρο ἑνός φυσικοῦ μεγέθους, πρέπει νά ξέρει ποιά εἶναι ἡ **μονάδα μετρήσεώς του καί πόσες τέτοιες μονάδες χωροῦν στό φυσικό αὐτό μέγεθος.**

Τίς περισσότερες φορές γιά νά μετρήσουμε ἕνα φυσικό μέγεθος χρειαζόμαστε διάφορα εἰδικά ὄργανα, ὅπως ζυγαριά, χρονόμετρο κ.λπ.

β) **Θεμελιώδη καί παράγωγα μεγέθη - Συστήματα μονάδων.** Γιά νά καθορίσουμε ὁποιοδήποτε φυσικό μέγεθος πρέπει νά γνωρίζουμε τή μονάδα μετρήσεώς του. Ἑπομένως γιά κάθε φυσικό μέγεθος εἶναι ἀναγκαῖο νά ὑπάρχει μιά τουλάχιστον μονάδα μετρήσεως. Χρησιμοποιοῦμε συνήθως περισσότερες τῆς μιᾶς μονάδες μετρήσεως γιά τό ἴδιο φυσικό μέγεθος.

Ἄν τίς μονάδες αὐτές τίς καθορίζαμε αὐθαίρετα, τότε θά εἴχαμε μεγάλο ἀριθμό μονάδων. Ἐπιβλήθηκε ἔτσι ἀπό τά πράγματα ἡ συστηματοποίηση τῶν μονάδων καί γιά τό σκοπό αὐτό ὁρίσθηκαν τά **συστήματα μονάδων.**

Οἱ ἀρχές στίς ὁποῖες στηρίζεται ὁ καθορισμός τῶν συστημάτων μονάδων εἶναι οἱ ἑξῆς:

1. Ὁρίζεται περιορισμένος ἀριθμός φυσικῶν μεγεθῶν, τά ὁποῖα ὀνομάζονται θεμελιώδη μεγέθη.

2. Ὅλα τά ὑπόλοιπα φυσικά μεγέθη ὀνομάζονται παράγωγα καί συνδέονται μέ τά θεμελιώδη μεγέθη μέ ἐξισώσεις.

Π.χ. τό μέγεθος ταχύτητα υ συνδέεται μέ τά μεγέθη διάστημα s καί χρόνος t, τά ὁποῖα, ὅπως θά δοῦμε ὁρίζονται σάν θεμελιώδη μεγέθη, μέ τήν ἐξίσωση:

$$\upsilon = \frac{s}{t}$$

3. Ὁρίζονται, γιά κάθε σύστημα μονάδων, οἱ μονάδες τῶν θεμελιωδῶν φυσικῶν μεγεθῶν. Αὐτές ὀνομάζονται θεμελιώδεις μονάδες. Μέ τή βοήθεια ἐξισώσεως, πού συνδέει ἕνα παράγωγο φυσικό μέγεθος μέ τά θεμελιώδη φυσικά μεγέθη, βρίσκουμε τή μονάδα μετρήσεως τοῦ παράγωγου μεγέθους στό κάθε σύστημα.

Π.χ. σέ ἕνα ἀπό τά συστήματα μονάδων πού θά ὁρίσουμε παρακάτω, τά θεμελιώδη μεγέθη μῆκος L καί χρόνος t ἔχουν σάν θεμελιώδεις μονάδες μετρήσεως τό μέτρο m καί τό δευτερόλεπτο s. Ἑπομένως ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ταχύτητας βρίσκεται ἀπό τή σχέση πού συνδέει τήν ταχύτητα μέ τό διάστημα καί τό χρόνο, ἄν ἀντικαταστήσουμε ὅπου $L = 1$ m καί ὅπου $t = 1$ s.

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{1\,m}{1\,s} = 1\,s/m$$

Ἔτσι ἡ μονάδα ταχύτητας στό σύστημα αὐτό εἶναι 1 m/s.

γ) **Θεμελιώδη μεγέθη.** Ἔχουν ὁρισθεῖ δυό ὁμάδες θεμελιωδῶν μεγεθῶν:

1η Ὁμάδα (L, M, T). Σ' αὐτή τήν ὁμάδα τά θεμελιώδη μεγέθη εἶναι τό μῆκος L, ἡ μάζα M καί ὁ χρόνος T.

2η Ὁμάδα (L, F, T). Σ' αὐτή τήν ὁμάδα τά θεμελιώδη μεγέθη εἶναι τό μῆκος L, ἡ δύναμη F καί ὁ χρόνος T.

δ) **Συστήματα μονάδων.** Μέ βάση τά ὅσα εἴπαμε παραπάνω καί ἀφοῦ καθορίσαμε τίς ὁμάδες τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν, θά προχωρήσουμε τώρα στόν προσδιορισμό τῶν συστημάτων μονάδων.

Σήμερα δυό εἶναι τά ἐπικρατέστερα συστήματα μονάδων: τό **Διεθνές Σύστημα** (Système International, International System) ἤ (S.I.) καί τό **Τεχνικό Σύστημα** (Τ.Σ.).

— Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Τό σύστημα αὐτό ἔχει ἐπικρατήσει σήμερα. Οἱ θεμελιώδεις μονάδες τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι οἱ μονάδες τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν τῆς ὁμάδας (L, M, T). Ἔτσι:

1) Σάν μονάδα μήκους χρησιμοποιεῖται τό μέτρο [mètre - συμβολισμός m].

2) Σάν μονάδα μάζας χρησιμοποιεῖται τό χιλιόγραμμο [kilogram - συμβολισμός kg].

3) Σάν μονάδα χρόνου χρησιμοποιεῖται τό δευτερόλεπτο [second - συμβολισμός s].

Τό σύστημα αὐτό παλαιότερα ὀνομαζόταν σύστημα M, K, S, ἀπό τά ἀρχικά τῶν θεμελιωδῶν μονάδων mètre, kilogram καί second. Ὀνομαζόταν ἐπίσης καί σύστημα Giorgi.

Σημείωση 1η: Ἐκτός ἀπό τά θεμελιώδη μεγέθη L, M, T, ὑπάρχουν καί ἄλλα μεγέθη, ὅπως εἶναι ἡ θερμοκρασία θ καί ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος I, τά ὁποῖα δέν εἶναι παράγωγα μεγέθη καί τά ὁποῖα μετροῦμε στό σύστημα αὐτό. Π.χ. ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς θερμοκρασίας εἶναι ὁ βαθμός (συμβολισμός grad) καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἡ μονάδα ampère (συμβολισμός A).

Σημείωση 2η: Παλαιότερα χρησιμοποιήθηκε πολύ τό σύστημα C.G.S., τό ὁποῖο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ὑποπολλαπλάσιο σύστημα τοῦ S.I. Οἱ θεμελιώδεις μονάδες τοῦ συστήματος C.G.S. εἶναι:

1) Τό ἑκατοστόμετρο [centimètre-συμβολισμός cm].

$1\ \mathrm{cm} = {}^{1}/_{100}\ \mathrm{m}$, μονάδα μήκους

2) Τό γραμμάριο [gram - συμβολισμός g].

$1\ \mathrm{g} = {}^{1}/_{1000}\ \mathrm{kg}$, μονάδα μάζας

3) Τό δευτερόλεπτο s, δηλαδή ἡ ἴδια μονάδα χρόνου μέ τό S.I.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι τό C.G.S. ἔχει θεμελιώδεις μονάδες τοῦ μήκους καί τῆς μάζας, ὑποπολλαπλάσιες τῶν μονάδων τοῦ S.I. γιά τά ἴδια φυσικά μεγέθη.

— **Τεχνικό Σύστημα Τ.Σ.** Στό σύστημα αὐτό οἱ θεμελιώδεις μονάδες εἶναι οἱ μονάδες τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν (L, F, T).

Ἔτσι: α) Σά μονάδα μήκους χρησιμοποιεῖται τό μέτρο m. β) Σά μονάδα δυνάμεως χρησιμοποιεῖται τό κιλοπόντ [kilopond - συμβολισμός kp], τό ὁποῖο ὁρίζεται παρακάτω. γ) Σά μονάδα χρόνου χρησιμοποιεῖται τό δευτερόλεπτο s.

ε) **Ὁρισμός θεμελιωδῶν μονάδων.**

— **Τό μέτρο** m. Τό μέτρο εἶναι μονάδα τοῦ φυσικοῦ μεγέθους **μῆκος.**

Ἕνα ὁρισμένο μῆκος ἀποφασίστηκε νά λέγεται μέτρο (mètre, συμβολισμός m) καί χρησιμοποιεῖται σάν μοναδιαῖο μῆκος. Γι' αὐτό φτιάχτηκε ἕνα πρότυπο μέτρο ἀπό ἰριδιοῦχο λευκόχρυσο (γιά νά μήν σκουριάζει) καί τοποθετήθηκε στό Διεθνές Γραφεῖο Μέτρων καί Σταθμῶν, πού βρίσκεται στήν πόλη Sèvres κοντά στό Παρίσι. Τό μέτρο εἶναι κατά προσέγγιση ἴσο μέ τό 1/40.000.000 τοῦ Ἰσημερινοῦ.

Πρότυπο μέτρο.

Σημείωση : Σήμερα τό μέτρο ὁρίζεται σέ ἀπόλυτη συνάρτηση μέ τό μῆκος κύματος μιᾶς καθορισμένης ἀκτινοβολίας τοῦ χημικοῦ στοιχείου Κρυπτόν.

Συγκεκριμένα 1 m εἶναι ἴσο μέ 1.650.763,73 μήκη κύματος κόκκινης γραμμῆς τοῦ φάσματος τοῦ ἀερίου Kr^{86}.

— **Τό χιλιόγραμμο** (kilogram - συμβολισμός kg).

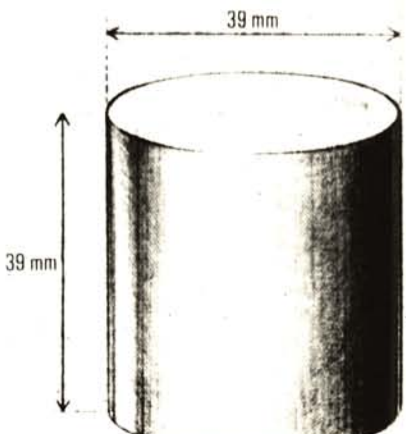
Ὅπως γιά τό μῆκος ἔτσι καί γιά τή μάζα, δηλαδή τήν ποσότητα τῆς ὕλης ἑνός σώματος, ὑπάρχει στό Διεθνὲς Γραφεῖο Μέτρων καί Σταθμῶν ἕνας μεταλλικός κύλινδρος, πού ἔχει ληφθεῖ σάν πρότυπη μονάδα μάζας καί ὀνομάζεται χιλιόγραμμο.

Σημείωση : Τό ὑλικό τοῦ πρότυπου χιλιογράμμου εἶναι ἀπό ἰριδιοῦχο λευκόχρυσο γιά νά μή σκουριάζει.

Τό $^{1}/_{1000}$ αὐτῆς τῆς μονάδας ὀνομάζεται **γραμμάριο.** Ἀρχικά σάν γραμμάριο εἶχε ὁριστεῖ ἡ μάζα 1 κυβικοῦ ἑκατοστοῦ (cm^3) ἀποσταγμένου νεροῦ θερμοκρασίας 4° C.

— **Τό δευτερόλεπτο** (second - συμβολισμός s). Ἡ μέση ἡλιακή ἡμέρα χωρίζεται σέ 24 ὧρες (heure - συμβολισμός h), ἡ κάθε ὥρα σέ 60 πρῶτα λεπτά (minutes - συμβολισμός min) καί τό κάθε πρῶτο λεπτό σέ 60 δεύτερα λεπτά (secondes - συμβολισμός s).

Ἡ μονάδα τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ἴδια καί γιά τά δύο συστήματα μονάδων.



Πρότυπο χιλιόγραμμο.

Σημείωση: Στό σύστημα S.I. τό δευτερόλεπτο ὁρίζεται σέ συνάρτηση μέ τήν περίοδο μιᾶς καθορισμένης ἀκτινοβολίας τοῦ χημικοῦ στοιχείου Καίσιο.

— **Τό κιλοπόντ** (kilopond - συμβολισμός kp). Ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει, βάρος εἶναι ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία ἡ Γῆ ἕλκει ἕνα σῶμα. Τό βάρος σώματος μάζας 1 kg στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί στό γεωγραφικό πλάτος 45°, ὀνομάστηκε κιλοπόντ, kp.

ΠΙΝΑΚΑΣ 0·2·1.
Θεμελιώδεις μονάδες.

α/α	Σύστημα μονάδων	Μεγέθη			
		μῆκος	μάζα	δύναμη	χρόνος
1	S.I.	m	kg	–	s
2	Τ.Σ.	m	–	kp	s
3	C.G.S.	cm	g	–	s

στ) **Παράγωγες μονάδες.** Τά παράγωγα φυσικά μεγέθη, ἔχουν μονάδες πού μποροῦν νά προέρχονται ἀπό τίς θεμελιώδεις μονάδες. Γι' αὐτό αὐτές ὀνομάζονται παράγωγες μονάδες καί κάθε μιά ἀνήκει σέ ἕνα ἀπό τά συστήματα πού ἀναφέραμε παραπάνω.

Ὁ μηχανισμός, μέ τόν ὁποῖο βρίσκουμε μιά παράγωγη μονάδα, εἶναι ὁ ἑξῆς:

— **Ὁρίζουμε τό φυσικό μέγεθος.**

Π.χ. Τί εἶναι μέτρο μέσης ταχύτητας.

Ὁρισμός: Μέτρο μέσης ταχύτητας εἶναι τό πηλίκον τοῦ διαστήματος s, πού διατρέχει ἕνα κινητό σέ χρόνο t, διά τοῦ χρόνου αὐτοῦ:

$$v = \frac{s}{t}$$

— **Ἐπιλέγουμε τό σύστημα.**

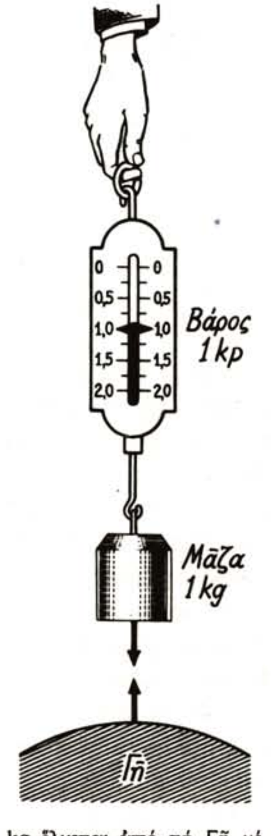
Ἔστω τό S.I.

— **Ἀντικαθιστοῦμε** ὅπου s = 1 m καί ὅπου t = 1 s, ὁπότε:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1\,m}{1\,s} = 1\,m/s$$

Ἔτσι καθορίζουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τῆς ταχύτητας τό 1 m/s πού εἶναι δημιούργημα τῶν θεμελιωδῶν μονάδων m καί s καί πού γι' αὐτό τό λόγο εἶναι **παράγωγη μονάδα.**

ζ) **Πολλαπλάσιες καί ὑποπολλαπλάσιες μονάδες.** Πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε γιά τή μέτρηση ἑνός φυσικοῦ μεγέθους πολλαπλάσια ἤ ὑποπολλαπλάσια τῆς μονάδας μετρήσεως αὐτοῦ, ὥστε τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως νά ἐκφράζεται μέ ἕνα ἀριθμό εὔκολα κατανοητό. Χρησιμοποιοῦνται συνήθως οἱ παρακάτω συμβολισμοί, τῶν ὁποίων γράφουμε καί τήν ἀντίστοιχη προφορά.



Μάζα 1 kg ἕλκεται ἀπό τή Γῆ μέ δύναμη 1 kp.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ

Συμβολισμός	Τιμή	Προφορά
k	10^3	κίλο
M	10^6	μέγκα
G	10^9	γκίγκα

ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ

Συμβολισμός	Τιμή	Προφορά
d	10^{-1}	ντέσι
c	10^{-2}	σάντι
m	10^{-3}	μίλι
μ	10^{-6}	μίκρο
n	10^{-9}	νάνο
p	10^{-12}	πίκο

Ἄν μπροστά ἀπό μιά μονάδα μετρήσεως τοποθετηθεῖ ἕνα ἀπό τά παραπάνω γράμματα, δημιουργεῖται μιά πολλαπλάσια ἤ ὑποπολλαπλάσια μονάδα.

Π.χ. ἡ μονάδα μήκους εἶναι τό m.

Ἡ μονάδα $\mathrm{km} = 10^3\ \mathrm{m} = 1000\ \mathrm{m}$, εἶναι πολλαπλάσια μονάδα τοῦ μέτρου.

Ἡ μονάδα mg (μιλιγκράμ) $= 10^{-3}\ \mathrm{g} = {}^1/_{1000}\ \mathrm{g}$, εἶναι ὑποπολλαπλάσια μονάδα τοῦ g.

η) **Μονάδες μερικῶν φυσικῶν μεγεθῶν.**

— Μονάδες μήκους.

Γιά τή μέτρηση τοῦ μήκους χρησιμοποιοῦνται οἱ παρακάτω πολλαπλάσιες καί ὑποπολλαπλάσιες μονάδες τοῦ μέτρου m.

km $= 10^3$ m = χιλιόμετρο
dm $= 10^{-1}$ m = δεκατόμετρο
cm $= 10^{-2}$ m = ἑκατοστόμετρο
mm $= 10^{-3}$ m = χιλιοστόμετρο
μ $= 10^{-6}$ m = μικρόν
Å $= 10^{-10}$ m = Ἄνγκστρομ (Ångstrom)

Ἐπίσης χρησιμοποιοῦνται καί ἄλλες μονάδες ὅπως:

1 ναυτικό μίλι (διεθνές) = 1853 m
1 ἔτος φωτός $= 9{,}3 \cdot 10^{15}$ m

Πρακτικά τό ἔτος φωτός εἶναι τό διάστημα πού διανύει τό φῶς σέ χρονικό διάστημα ἑνός ἔτους, τρέχοντας μέ ταχύτητα 300 000 km/s.

— **Μονάδες ἐπιφάνειας.**

Ἡ μονάδα ἐπιφάνειας θά εἶναι τετράγωνο πλευρᾶς 1 m, γιά τά συστήματα S.I. καί Τ.Σ.

Ἑπομένως ἡ μονάδα ἐπιφάνειας θά εἶναι:

$$S = L^2 = (1\ m)^2 = 1\ m^2$$

— **Μονάδες ὄγκου.**

Ἡ μονάδα ὄγκου V θά εἶναι κύβος ἀκμῆς 1 m, γιά τά συστήματα S.I. καί Τ.Σ.

Ἑπομένως θά εἶναι:

$$V = L^3 = (1\ m)^3 = 1\ m^3$$

Χρησιμοποιεῖται ἐπίσης καί ἡ μονάδα 1 dm^3, ἡ ὁποία ὀνομάζεται καί **λίτρο** (συμβολισμός *l*).

— **Μονάδες χρόνου.**

Γιά τή μέτρηση τοῦ χρόνου χρησιμοποιοῦνται συνήθως οἱ παρακάτω μονάδες:

1 ὥρα	= 1 h
1 πρῶτο λεπτό	= 1 min
1 δεύτερο λεπτό	= 1 s

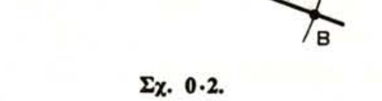
Ἡ σχέση τῶν μονάδων αὐτῶν εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} 1\ h &= 60\ min \\ 1\ min &= 60\ s \end{aligned}\right\}\ 1\ h = 3600\ s$$

— **Γωνία - Μονάδες γωνίας.**

Ὁρίζεται σάν γωνία φ τό πηλίκον τοῦ τόξου s διά τῆς ἀκτίνας r (σχ. 0·2). Δηλαδή:

$$\varphi = \frac{s}{r}$$



Σχ. 0·2.

Μονάδα γωνίας: Ἐάν s = r τότε φ = 1.

Ἡ μονάδα αὐτή ὀνομάζεται **ἀκτίνιο** (συμβολισμός rad). Δηλαδή ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σέ τόξο s πού τό μῆκος του εἶναι ἴσο μέ τήν ἀκτίνα, εἶναι 1 rad.

Ἐάν τό τόξο s γίνει ἴσο μέ τό μῆκος τῆς περιφέρειας, τότε ἡ γωνία φ θά γίνει:

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad = 6{,}28\ rad.$$

Ἄλλη μονάδα μετρήσεως τῆς γωνίας, ὅπως εἶναι γνωστό, εἶναι ἡ **μοίρα.**

Ἐπειδή ἡ γωνία, πού ἀντιστοιχεῖ σέ ὁλόκληρη τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου, ἔχει 360°, συμπεραίνεται ὅτι:

$$1\ rad = \frac{360}{6{,}28} = 57{,}3°.$$

0 · 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ἔστω ὅτι ζητᾶμε τίς διαστάσεις τοῦ φυσικοῦ μεγέθους «ἐμβαδόν». Τό ἐμβαδόν S μιᾶς ἐπιφάνειας εἶναι:

$$\textit{Ἐμβαδόν} = \textit{Μῆκος} \times \textit{Μῆκος}$$

$$S = L \times L = L^2 \qquad (1)$$

Εἶναι δυνατόν τήν ἐξίσωση (1) νά τήν γράψουμε:

$$S = L^2 \cdot M^\circ \cdot T^\circ.$$

Ἑπομένως οἱ διαστάσεις τοῦ ἐμβαδοῦ S εἶναι: (2,0,0).

Συνεπῶς, **διαστάσεις ἑνός φυσικοῦ μεγέθους εἶναι οἱ τρεῖς ἐκθέτες τῶν βασικῶν μεγεθῶν L, M καί T σέ συνάρτηση τῶν ὁποίων ἐκφράζεται τό μέγεθος αὐτό.**

Ἔστω τώρα ὅτι ζητᾶμε τίς διαστάσεις τῆς ταχύτητας: $\textit{Ταχύτητα} = \dfrac{\textit{Διάστημα}}{\textit{Χρόνος}}$.

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{L}{t}$$

καί $\upsilon = L^1 \cdot T^{-1}$ ἤ $\upsilon = L^1 \cdot M^\circ \cdot T^{-1}$.

Ἄρα οἱ διαστάσεις τῆς ταχύτητας εἶναι (1,0, − 1).

Ὅπως ἀναφέραμε παραπάνω, ἡ γωνία εἶναι πηλίκον τοῦ τόξου διά τῆς ἀκτίνας. Ἑπομένως θά ἔχουμε γιά τίς διαστάσεις τῆς γωνίας:

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{L}{L} = L^\circ = L^\circ \cdot M^\circ \cdot T^\circ.$$

Δηλαδή, οἱ διαστάσεις τῆς γωνίας εἶναι (0, 0, 0). Γενικά, ὅλα τά μεγέθη, πού ἔχουν μηδενικές διαστάσεις, ὀνομάζονται **καθαροί ἀριθμοί.**

Χρησιμότητα τῶν διαστάσεων.

Σέ μιά ἐξίσωση πού συνδέει φυσικά μεγέθη **θά πρέπει οἱ διαστάσεις τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως νά εἶναι ἴδιες μέ τίς διαστάσεις τοῦ δεύτερου μέλους.** Τήν ἰδιότητα αὐτή μποροῦμε νά τή χρησιμοποιήσουμε γιά νά ἐλέγξουμε τυχόν σφάλμα, πού θά συμβεῖ στά φυσικά μεγέθη τῆς ἐξισώσεως καί στούς ἐκθέτες τους. Ὅμως, ἡ ταυτότητα τῶν διαστάσεων δέν ἐξασφαλίζει τήν ὀρθότητα τῆς παραστάσεως. Μέ τόν ἔλεγχο τῶν διαστάσεων δέν διαπιστώνονται π.χ. τυχόν παραλείψεις ἤ τροποποιήσεις συντελεστῶν.

Π.χ. οἱ ἐξισώσεις:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2$$

$$E_{\text{κιν}} = m\upsilon^2$$

ἀπό πλευρᾶς διαστάσεων εἶναι καί οἱ δυό ὀρθές, παρ' ὅτι ἡ δεύτερη ἀπ' αὐτές εἶναι λάθος.

0·4 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

α) Πολλές φορές οἱ ἀριθμητικές πράξεις εἶναι πολύπλοκες καί πρέπει νά ἀκολουθεῖται ὁρισμένη μέθοδος κατά τήν πραγματοποίησή τους, γιά νά βρίσκονται σωστά ἀριθμητικά ἀποτελέσματα.

Στήν περίπτωση πού μιά παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό γινόμενα καί πηλίκα, πρέπει νά ἀκολουθεῖται ἡ παρακάτω σειρά ἐνεργειῶν:

1) Μετατροπή ὅλων τῶν παραγόντων σέ δεκαδικούς μέ ἕνα ἀκέραιο ψηφίο.

Π.χ. $0{,}00035 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$

$45\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^{7}$

2) Περικοπή τῶν πολλῶν δεκαδικῶν ψηφίων καί διατήρηση 1 ἕως 2. Ἡ προσέγγιση αὐτή εἶναι παραδεκτή στή Φυσική, γιατί τό μικρό ποσοστό σχετικοῦ σφάλματος στά ἀποτελέσματα εἶναι στίς περισσότερες περιπτώσεις ἀνεκτό στήν πράξη.

Σημείωση: Τό σχετικό σφάλμα ὁρίζεται ὡς:

$$\frac{(\text{ἀκριβής τιμή}) - (\text{προσεγγιστική τιμή})}{(\text{προσεγγιστική τιμή})} \times 100\%$$

Ἡ μαθηματική σχολαστικότητα ἀπαιτεῖ τήν ἀπόλυτη ἀκρίβεια τοῦ ἀποτελέσματος. Ὅμως, στίς πρακτικές ἐφαρμογές, τό πιό σπουδαῖο εἶναι νά βρίσκουμε τό ἀποτέλεσμα μέ σημαντική ἀκρίβεια.

Ἔτσι θά γίνουν οἱ παρακάτω μετατροπές:

$0{,}000\,354\,253\,5 = 3{,}54 \cdot 10^{-4}$

$458\,921\,345 = 4{,}59 \cdot 10^{8}$

3) Ἄν ὑπάρχουν ὡς παράγοντες τετραγωνικές ρίζες, οἱ ὑπόρριζες ποσότητες μετατρέπονται σέ δυνάμεις ἄρτιας τάξεως: Π.χ.

$$\sqrt{45273004} = \sqrt{45 \cdot 10^{6}} = 6{,}7 \cdot 10^{3}$$

$$\sqrt{0{,}0000000538} = \sqrt{5{,}38 \cdot 10^{-8}} = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$$

4) Χωρίζουμε τά σημαντικά ψηφία ἀπό τίς δυνάμεις καί κάνουμε τούς πολλαπλασιασμούς καί τίς διαιρέσεις.

Παραδείγματα :

$$\frac{530004 \cdot 0{,}00045 \cdot \sqrt{7385{,}4}}{\sqrt{0{,}0038} \cdot 4303{,}7} =$$

$$= \frac{5{,}3 \cdot 10^5 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{73{,}9 \cdot 10^2}}{\sqrt{38 \cdot 10^{-4}} \cdot 4{,}3 \cdot 10^3} =$$

$$= \frac{5{,}3 \cdot 4{,}5 \cdot \sqrt{73{,}9} \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} \cdot 10}{\sqrt{38} \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3} =$$

$$= \frac{5{,}3 \cdot 4{,}5 \cdot 8{,}6 \cdot 10^2}{6{,}16 \cdot 4{,}3 \cdot 10} = 7{,}7 \cdot 10 = 77.$$

0 · 5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχει 6 στοιχεῖα, δηλαδή τρεῖς πλευρές καί τρεῖς γωνίες. Τό ἕνα ἀπό τά στοιχεῖα αὐτά εἶναι γνωστό πάντοτε, γιατί εἶναι ἡ ὀρθή γωνία. Γιά τήν κατασκευή τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἀρκεῖ νά δοθοῦν δύο ἀπό τά ἄγνωστα στοιχεῖα, ἕνα ὅμως στοιχεῖο ἀπαραίτητα πρέπει νά εἶναι μιά πλευρά.

Ἄν π.χ. δίνονται οἱ δύο κάθετες πλευρές ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου, μποροῦμε νά τό κατασκευάσουμε καί ἑπομένως μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν ὑποτείνουσα καί τίς δύο ὀξεῖες γωνίες του.

Πῶς ὅμως θά γίνει αὐτός ὁ ὑπολογισμός;

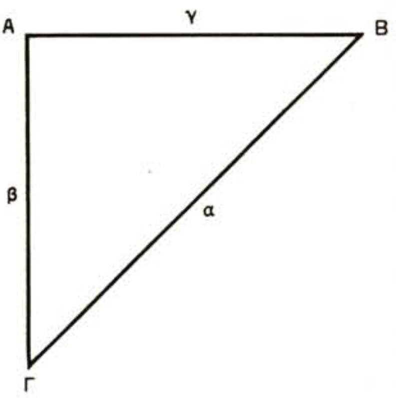
α) Θά ἀπαντήσουμε στό ἐρώτημα αὐτό, ἀφοῦ μιλήσουμε πρίν γιά **τριγωνομετρικούς ἀριθμούς** (σχ. 0 · 5 α).

1) Ὁρίζεται σάν **ἡμίτονο** (συμβολισμός ημ) τῆς γωνίας Β στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τό πηλίκον τῆς ἀπέναντι κάθετης πλευρᾶς β πρός τήν ὑποτείνουσα α:

$$\boxed{\eta\mu\, B = \frac{\beta}{a}} \qquad (1)$$

2) Ὁρίζεται σά **συνημίτονο** (συμβολισμός συν) τῆς γωνίας Β στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τό πηλίκον τῆς προσκείμενης κάθετης πλευρᾶς πρός τήν ὑποτείνουσα α:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\, B = \frac{\gamma}{a}} \qquad (2)$$



Σχ. 0·5 α.

3) Ὁρίζεται σάν **ἐφαπτομένη** τῆς γωνίας Β στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τό πηλίκον τῆς ἀπέναντι κάθετης πλευρᾶς πρός τήν προσκείμενη κάθετη πλευρά γ:

$$\boxed{\varepsilon\varphi\ B = \frac{\beta}{\gamma}} \qquad (3)$$

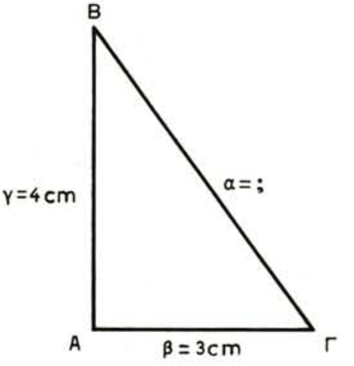
4) Ἄν διαιρέσουμε τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{\eta\mu\ \mathrm{B}}{\sigma\upsilon\nu\ \mathrm{B}} = \frac{\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma} = \varepsilon\varphi\ \mathrm{B}, \quad \text{ἄρα:}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\ B = \frac{\eta\mu\ B}{\sigma\upsilon\nu\ B}} \qquad (4)$$

5) Τό ἡμίτονο, τό συνημίτονο καί ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας ὀνομάζονται **τριγωνομετρικοί ἀριθμοί** καί ὑπάρχουν πίνακες πού μᾶς δίνουν ἀπό τίς γωνίες τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς καί ἀντίστροφα. Οἱ πίνακες αὐτοί λέγονται **τριγωνομετρικοί πίνακες.** Ἕνας σύντομος πίνακας εἶναι ὁ Πίνακας 0 · 5 · 1.

6) **Ἐφαρμογή.** Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο (σχ. 0 · 5 β) ἔχει τίς δυό κάθετες πλευρές του 3 m καί 4 m. Νά ὑπολογιστοῦν ἡ ὑποτείνουσα καί οἱ δύο ὀξεῖες γωνίες.



Σχ. 0·5 β.

Λύση:

(α) Ἀπό τό Πυθαγόρειο θεώρημα ἔχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \rightarrow \alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \rightarrow$$

$$\alpha = \sqrt{4^2 + 3^2}\ \mathrm{m} \rightarrow \alpha = 5\ \mathrm{m}.$$

(β) Ἀπό τούς προηγούμενους ὁρισμούς προκύπτει ὅτι:

$$\eta\mu\ \mathrm{B} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\eta\mu\ \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Ἀπό τόν τριγωνομετρικό Πίνακα 0 · 5 · 1 προκύπτει ὅτι:

ἄν $\eta\mu\ \mathrm{B} = 0{,}602 \rightarrow \mathrm{B} = 37^\circ$
καί ἄν $\eta\mu\ \Gamma = 0{,}809 \rightarrow \Gamma = 54^\circ$

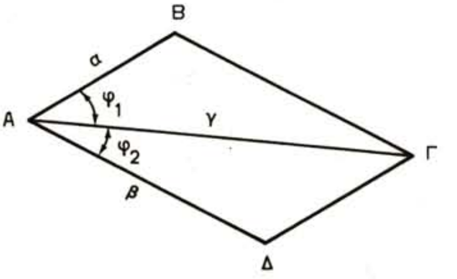
ΠΙΝΑΚΑΣ 0·5·1.
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γωνία (μοῖρες)	ημ	συν	εφ	Γωνία (μοῖρες)	ημ	συν	εφ
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,035
1	0,017	0,999	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,997	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,994	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,140	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,984	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,983	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,782
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,279	62	0,885	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,297	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,325	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,945	0,344	65	0,906	0,423	2,144
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,933	0,384	67	0,920	0,391	2,356
22	0,375	0,928	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,920	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,913	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,907	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	9,454	0,891	0,509	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,853	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,269	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,010
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,521	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,674	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,726	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,992	0,122	8,141
38	0,616	0,788	0,781	84	0,994	0,104	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,932	89	0,999	0,017	57,290
44	0,700	0,713	0,988	90	1,000	0,000	∞
45	0,707	0,707	1,000				

Ἀπάντηση: Ἑπομένως, μέ μεγάλη προσέγγιση, οἱ ζητούμενες γωνίες εἶναι $B = 37°$ καί $\Gamma = 54°$, ἐνῶ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι $\alpha = 5$ m.

β) **Ὑπολογισμός διαγωνίου παραλληλογράμμου.** Στό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 0·5γ) δίνονται οἱ δύο προσκείμενες πλευρές $AB = \alpha$, $A\Delta = \beta$ καί ἡ γωνία $BA\Delta = \varphi$.

Μέ αὐτά τά στοιχεῖα εἶναι δυνατό νά ὑπολογίσουμε: τή διαγώνιο $A\Gamma = \gamma$ καί τίς γωνίες φ_1 καί φ_2, χρησιμοποιώντας τούς παρακάτω τύπους, τούς ὁποίους δέν ἀποδεικνύουμε:



Σχ. 0·5 γ.

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi} \\[4pt] \dfrac{\alpha}{\eta\mu\ \varphi_2} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\ \varphi_1} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\ \varphi}\end{array}} \quad \text{καί}$$

Ἐφαρμογή. Οἱ δύο προσκείμενες πλευρές α καί β ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι $\alpha = 10$ m καί $\beta = 20$ m καί ἡ μεταξύ αὐτῶν γωνία $\varphi = 45°$.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ διαγώνιός του γ καί οἱ γωνίες φ_1 καί φ_2, πού σχηματίζει ἡ διαγώνιος μέ τίς πλευρές α καί β ἀντίστοιχα.

Λύση: $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\ \sigma\upsilon\nu\ 45°} =$

$$= \sqrt{10^2 + 20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\ 45°} \quad \text{ἤ}$$

$$\gamma = 28 \text{ m}$$

Γιά τίς γωνίες ἔχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\ \varphi_2} = \frac{\gamma}{\eta\mu\ \varphi} \Rightarrow \eta\mu\ \varphi_2 = \frac{\alpha\ \eta\mu\ \varphi}{\gamma} =$$

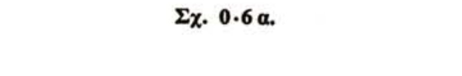
$$= \frac{10 \cdot \eta\mu\ 45}{28} = 0{,}25$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = 14°.$$

Ἐπειδή $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \Rightarrow \varphi_1 = \varphi - \varphi_2 = 45 - 14 = 31°$.

0·6 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

α) **Διάνυσμα.** Ἄν σέ μιά εὐθεία x λάβουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB, τό ὁποῖο θεωροῦμε διανυόμενο ἀπό ἕνα κινητό ἀπό τό A πρός τό B, τό εὐθύγραμμο αὐτό τμῆμα λέγεται **διάνυσμα** καί συμβολίζεται: $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 0·6α).



Σχ. 0·6 α.

Γιά νά καθορίσουμε ἕνα διάνυσμα, πρέπει νά γνωρίζουμε τρία του στοιχεῖα:

1) Τή **διεύθυνση,** δηλαδή τήν εὐθεία x τῆς ὁποίας ἀποτελεῖ τμῆμα. Ἡ διεύθυνση ὀνομάζεται καί **φορέας** τοῦ διανύσματος.

2) Τή **φορά,** δηλαδή ἄν τό κινητό κινεῖται πρός τό δεξιό ἤ τό ἀριστερό μέρος τῆς εὐθείας. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{BA}$ ἔχουν ἀντίθετες φορές. Σέ κάθε φορέα μποροῦμε νά σημειώσουμε τή θετική φορά, ὅπως ἔγινε στό σχῆμα, καί ἔτσι αὐτόματα καθορίζεται καί ἡ φορά τοῦ διανύσματος.

3) Τό **μέτρο,** δηλαδή τό πηλίκον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πρός ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ πού θεωρεῖται σάν μοναδιαῖο καί ἔχει πάντοτε **θετική φορά:**

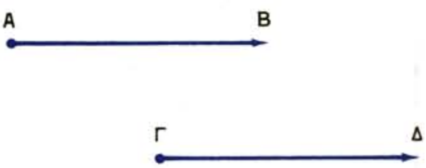
$$(AB) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}}$$

β) **Διανυσματικά καί μονόμετρα μεγέθη.** Στή Φυσική ὑπάρχουν φυσικά μεγέθη, πού γιά νά τά χαρακτηρίσουμε πρέπει νά τά παραστήσουμε μέ διανύσματα. Δέν ἀρκεῖ π.χ. νά πεῖ κανείς ὅτι ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται μέ ταχύτητα 20 m/s. Γιατί σέ ποιά διεύθυνση καί πρός ποιά φορά κινεῖται, εἶναι στοιχεῖα ἀπαραίτητα γιά νά διαμορφωθεῖ σαφής εἰκόνα τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ.

Τό ἴδιο ἰσχύει γιά τό φυσικό μέγεθος **δύναμη.** Μέ τό νά πεῖ κανείς ὅτι μιά δύναμη 20 kp σπρώχνει μιά πόρτα, δέν καθορίζει πολλά πράγματα. Γιατί, ἄν σπρώχνει τήν πόρτα παράλληλα πρός τήν ἐπιφάνειά της, δέν θά κλείσει, ἐνῶ ἄν τή σπρώχνει κάθετα πρός τήν ἐπιφάνειά της, θά κλείσει ἤ θά ἀνοίξει ἀνάλογα μέ τή φορά τῆς δυνάμεως.

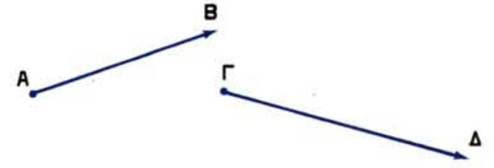
Τά φυσικά αὐτά μεγέθη, τά ὁποῖα γιά νά καθοριστοῦν μέ ἀκρίβεια πρέπει νά παρασταθοῦν μέ διανύσματα, ὀνομάζονται **διανυσματικά μεγέθη.**

Τό φυσικό, ὅμως, μέγεθος χρόνος δέν εἶναι διανυσματικό, γιατί ἀρκεῖ τό μέτρο του γιά νά καθορισθεῖ. Δέν εἶναι π.χ. ἀναγκαῖο νά παραστήσει κανείς τήν ἡλικία ἑνός ἀνθρώπου μέ διάνυσμα. Ἀρκεῖ νά πεῖ ὅτι εἶναι π.χ. 30 ἐτῶν. Ἐπίσης ἡ πυκνότητα δέν εἶναι διανυσματικό μέγεθος, γιατί ἀρκεῖ π.χ. νά ποῦμε ὅτι ὁ ὑδράργυρος ἔχει πυκνότητα 13,6 g/cm³.



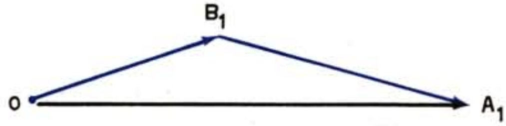
Σχ. 0·6β.

Τά μεγέθη αὐτά, τά ὁποῖα γιά νά χαρακτηρισθοῦν ἀρκεῖ μόνον νά ὁρισθεῖ τό μέτρο τους, ὀνομάζονται **μονόμετρα μεγέθη.**



γ) **Ἴσα διανύσματα.** Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ παράλληλα μεταξύ τους τῆς αὐτῆς φορᾶς καί τοῦ αὐτοῦ μέτρου, λέγονται ἴσα διανύσματα (σχ. 0 · 6 β).

δ) **Πρόσθεση διανυσμάτων.** Δίνονται τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμά τους $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἐνεργοῦμε ὡς ἑξῆς (σχ. 0 · 6 γ):



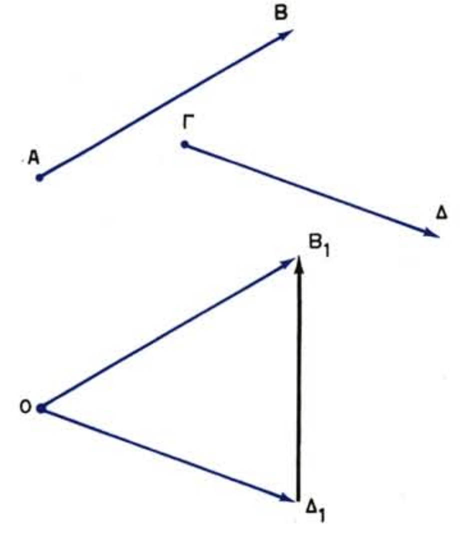
Σχ. 0·6 γ.

Ἀπό σημεῖο O φέρνουμε τό διάνυσμα $\overrightarrow{OB_1}$, ἴσο πρός τό $\overrightarrow{AB}$ καί ἀπό τό B_1 τό διάνυσμα $\overrightarrow{B_1A_1}$ ἴσο πρός τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Τό ἄθροισμα εἶναι:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{OA_1}$$

Δηλαδή γιά νά ἀθροίσει κανείς δύο (ἤ καί περισσότερα) διανύσματα, **ἀρκεῖ νά τά κάνει διαδοχικά.** Δηλαδή, στό τέλος τοῦ πρώτου διανύσματος τοποθετεῖ τήν ἀρχή τοῦ δευτέρου κ.ο.κ. Τότε, τό ἄθροισμα εἶναι τό διάνυσμα, πού ἔχει **ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου διανύσματος** καί **τέλος τό τέλος τοῦ τελευταίου.**

ε) **Ἀφαίρεση διανυσμάτων.** Γιά νά ἀφαιρέσουμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τά τοποθετοῦμε μέ κοινή ἀρχή καί τότε ἡ διαφορά εἶναι τό διάνυσμα πού ἔχει ἀρχή τό **τέλος τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος** καί **τέλος τό τέλος τοῦ μειωτέου διανύσματος** (σχ. 0 · 6 δ):



Σχ. 0·6 δ.

$$\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\text{μειωτέο}} - \underbrace{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}_{\text{ἀφαιρετέο}} = \underbrace{\overrightarrow{OB_1}}_{\text{μειωτέο}} - \underbrace{\overrightarrow{O\Delta_1}}_{\text{ἀφαιρετέο}} = \overrightarrow{\Delta_1B_1}$$

Σχ. 0·6 ε.

στ) **Γινόμενο διανύσματος ἐπί ἀριθμό.** Τό γινόμενο ἑνός διανύσματος ἐπί ἕνα ἀριθμό εἶναι ἕνα διάνυσμα, πού ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τό πρῶτο, τήν ἴδια φορά, ἄν ὁ ἀριθμός εἶναι θετικός, ἤ ἀντίθετη φορά, ἄν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός, καί μέτρο ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος ἐπί τόν ἀριθμό (σχ. 0 · 6 ε).

Σημείωση : $\frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$. Ἑπομένως ἡ διαίρεση διανύσματος μέ ἕναν ἀριθμό μετατρέπεται σέ πολλαπλασιασμό.

0 · 7 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ἔχουμε ἀναφέρει παραπάνω, ὅτι φυσικός νόμος εἶναι μιά σχέση ἀνάμεσα σέ φυσικά μεγέθη καί ὅτι μέ τό νόμο μποροῦμε νά προβλέψουμε τήν ἐξέλιξη ἑνός φαινομένου.

Ἡ σχέση τῶν φυσικῶν μεγεθῶν σέ μερικές περιπτώσεις διατυπώνεται μέ μιά ἐξίσωση. Συνηθέστερα ὅμως, ἐνῶ ὑπάρχει συσχέτιση μεταξύ φυσικῶν μεγεθῶν, δέν ὑπάρχει ἐξίσωση πού τά συνδέει. Ὅπως ὅμως καί ἄν ἔχει τό θέμα, μποροῦμε τή σχέση μεταξύ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν νά τήν παραστήσουμε γραφικά. Οἱ **γραφικές παραστάσεις** μᾶς δίνουν ἐποπτικά τήν ἐξέλιξη ἑνός φαινομένου καί στή Φυσική χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα.

Σέ ἕνα φαινόμενο μπορεῖ νά μεταβάλλονται συγχρόνως περισσότερα ἀπό δύο φυσικά μεγέθη. Ὅμως, οἱ γραφικές παραστάσεις, γιά τίς ὁποῖες θά συζητήσουμε ἐδῶ, θά ἀναφέρονται στή σχέση ἀνάμεσα σέ δυό φυσικά μεγέθη, πού παριστάνονται στό ἐπίπεδο δυό κάθετων ἀξόνων. Ἄς δοῦμε τόν τρόπο πού θά κάνουμε αὐτές τίς γραφικές παραστάσεις.

Θά διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση : Ἡ σχέση μεταξύ δύο φυσικῶν μεγεθῶν x καί y δίνεται ἀπό μιά ἐξίσωση:

τήν $y = 3\,x^2$.

Ἐνεργοῦμε μέ τήν ἑξῆς σειρά:

α) Δίνουμε διάφορες τιμές στό x καί ὑπολογίζουμε μέ τήν ἐξίσωση τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ y. Συμπληρώνουμε μέ τίς τιμές αὐτές τόν Πίνακα 0 · 7 · 1.

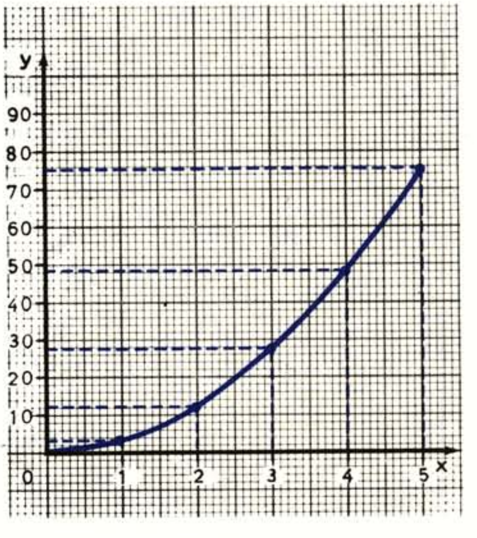
β) Χαράζουμε στούς ἄξονες x καί y ἰσοβάθμιες κλίμακες μέσα στά περιθώρια τῶν τιμῶν x καί y (σχ. 0 · 7 α).

γ) Καθορίζουμε στό διάγραμμα σημεῖα, τά ὁποῖα θά ἔχουν συντεταγμένες τά ζεύγη τῶν τιμῶν τοῦ πίνακα.

δ) Ἑνώνουμε ὅλα τά σημεῖα μέ μιά καμπύλη καί αὐτή εἶναι ἡ ζητούμενη **γραφική παράσταση.**

ΠΙΝΑΚΑΣ 0·7·1.

x	y
0	0
1	3
2	12
3	27
4	48
5	75

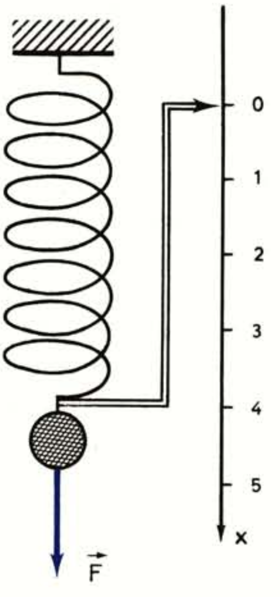


Σχ. 0·7 α.
Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $y = 3x^2$.

2η περίπτωση: Δέν γνωρίζουμε έξίσωση πού νά συνδέει τά φυσικά μεγέθη x καί y.

Τότε τίς τιμές τοῦ Πίνακα 0·7·1 τίς ξέρουμε ἀπό πείραμα. Δηλαδή ὁ πίνακας προκύπτει ἀπό μετρήσεις. Κατά τά ἄλλα ἀκολουθοῦμε τήν ἴδια σειρά ἐνεργειῶν (β, γ, δ), ὅπως στήν πρώτη περίπτωση, γιά νά χαράξουμε τίς γραφικές παραστάσεις.

Ἀξιοσημείωτο πάντως εἶναι τό γεγονός ὅτι συνήθως, μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πειραμάτων, χαράζονται γραφικές παραστάσεις μέ τίς μετρήσεις πού παίρνουμε ἀπό τό πείραμα. Ἔτσι μᾶς δίνεται ἡ δυνατότητα νά διατυπώσουμε, ὅταν εἶναι δυνατό, καί ἐξισώσεις ἀνάμεσα στά φυσικά μεγέθη τοῦ φαινομένου πού ἐξετάζουμε.



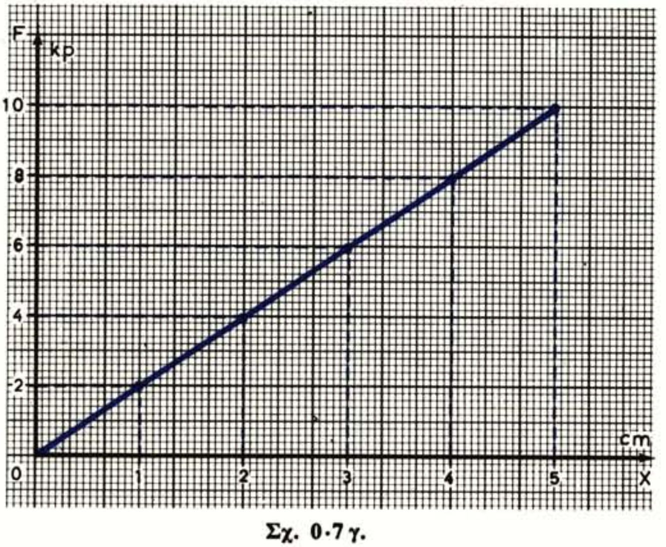
Σχ. 0·7 β.

Παραδείγματα γραφικῶν παραστάσεων.

Ἐπιμήκυνση ἐλατηρίου.

Μέ τό ἐλατήριο τοῦ σχήματος 0·7 β κάνουμε τό ἑξῆς πείραμα: Προσθέτουμε διάφορα βάρη στό ἄγκιστρο, δηλαδή ἀσκοῦμε διάφορες δυνάμεις F καί βρίσκουμε κατά πόσο ἐπιμηκύνεται τό ἐλατήριο, μετρώντας τήν ἐπιμήκυνση x στήν κλίμακα. Ὁ Πίνακας 0·7·2 μᾶς δίνει τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων.

Ἀπό τόν πίνακα αὐτό χαράζουμε τή γραφική παράσταση μεταξύ τῶν μεγεθῶν F καί x (σχ. 0·7 γ).



Σχ. 0·7 γ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 0·7·2.

Ἐπιμήκυνση x cm	Δύναμη F kp
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

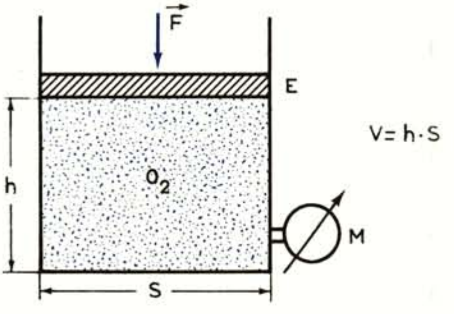
Ἡ γραφική αὐτή παράσταση εἶναι εὐθεία γραμμή καί αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ ἐξίσωση ἀνάμεσα στά μεγέθη ἐπιμήκυνση x καί δύναμη F εἶναι ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι:

$$F = Dx$$

ὅπου: D μιά σταθερά, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τό ἐλατήριο.

Σχέση ὄγκου καί πιέσεως ἑνός ἀερίου.

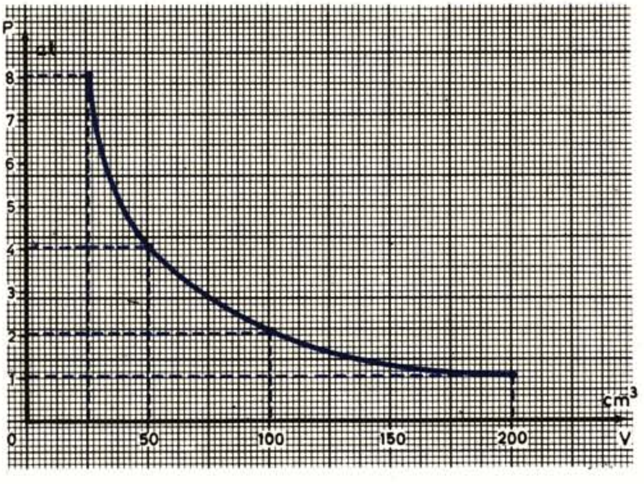
Μέ τή συσκευή τοῦ σχήματος 0·7 δ κάνουμε τό ἑξῆς πείραμα: Μεταβάλλουμε τόν ὄγκο V ἑνός ἀερίου ἐξασκώντας στό ἔμβολο Ε μιά πίεση. Τό μανόμετρο Μ μᾶς μετρᾶ τήν πίεση P πού ἐξασκεῖ τό ἔμβολο στό ἀέριο. Ἔτσι τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων τῆς πιέσεως P καί τοῦ ὄγκου V τά παρουσιάζουμε στόν Πίνακα 0·7·3. Ἡ γραφική παράσταση μεταξύ τῶν μεγεθῶν P καί V δίνεται στό σχῆμα 0·7 ε.



Σχ. 0·7 δ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 0·7·3.

Πίεση P at	Ὄγκος V cm^3
1	200
2	100
4	50
8	25



Σχ. 0·7 ε.
Γραφική παράσταση τοῦ ὄγκου σέ συνάρτηση μέ τήν πίεση τοῦ ἀερίου.

Σημείωση: Μονάδα ὄγκου λάβαμε τό cm^3 καί μονάδα πιέσεως τήν τεχνητή ἀτμόσφαιρα:

$$(1\ \text{at} = 1\ \text{kp/cm}^2).$$

0·8 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ-ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΚΛΑΔΟΙ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

α) **Οἱ φυσικές ἐπιστῆμες** περιλαμβάνουν τό σύνολο τῶν γνώσεων γιά ὁποιοδήποτε ἀντικείμενο ἤ φαινόμενο τῆς φύσεως καί χωρίζονται σέ **εἰδικές φυσικές ἐπιστῆμες** καί σέ **γενικές φυσικές ἐπιστῆμες.**

Οἱ πρῶτες εἶναι ἡ Φυτολογία, Ζωολογία, Ὀρυκτολογία κ.λπ., ἐνῶ οἱ δεύτερες χωρίζονται στή **Φυσική** καί τή **Χημεία.** Ἡ Χημεία ἀσχολεῖται μέ φαινόμενα στά ὁποῖα συμβαίνουν θεμελιακές μεταβολές τῆς συστάσεως τῆς ὕλης.

Π.χ. ἡ ἕνωση τοῦ H_2 καί τοῦ O_2 γιά σχηματισμό H_2O εἶναι ἕνα χημικό φαινόμενο, γιατί τό H_2O δέν ἔχει καμιά σχέση ἀπό πλευρᾶς φυσικῶν ἰδιοτήτων οὔτε μέ τό H_2 οὔτε μέ τό O_2.

Ἡ **Φυσική** ἀσχολεῖται μέ φαινόμενα, πού δέν συνοδεύονται μέ μεταβολή τῆς συστάσεως τῆς ὕλης, ὅπως εἶναι ἡ κίνηση τῶν σωμάτων, ἡ ἀνάκλαση τοῦ φωτός, ἡ ἁπλή διάλυση κ.λπ. Στή Φυσική ἔχει ἐνταχθεῖ καί ἡ **ἀτομική** καί **πυρηνική** Φυσική, πού μελετοῦν μεταβολές τῶν πυρήνων τῶν ἀτόμων οἱ ὁποῖες ἀφοροῦν ριζική ἀλλαγή τῆς φύσεως τοῦ ἀτόμου.

β) **Ἡ ἐξέλιξη τῆς Φυσικῆς Ἐπιστήμης.** Ὁ ἄνθρωπος προσπάθησε νά ἑρμηνεύσει τά φυσικά φαινόμενα γιά νά ἱκανοποιήσει πρακτικές του ἀνάγκες καί ἀπό ἔμφυτη περιέργεια.

Ἀρχικά τά φυσικά φαινόμενα προκαλοῦσαν φόβο στόν ἄνθρωπο καί ἀπέδιδε τήν προέλευσή τους σέ ὑπερφυσικά ὄντα. Ἡ πνευματική στάθμη τοῦ ἀνθρώπου ἐξελίχθηκε στό πέρασμα τῶν αἰώνων. Ἔτσι ἐμφανίστηκαν οἱ ἀρχαῖοι πολιτισμοί. Πολλοί τότε σοφοί προσπάθησαν νά ἑρμηνεύσουν φυσικά φαινόμενα καί διετύπωσαν διάφορες ἀπόψεις, πού ὁρισμένες ἀποδείχθηκαν σωστές.

Στό μεσαίωνα ἡ Φυσική δέν εἶχε καμιά ἐξέλιξη. Κατά τήν Ἀναγέννηση ἄρχισε μιά γρήγορη ἀνοδική πορεία μέ πρωτοπόρο καί κύριο θεμελιωτή τό Νεύτωνα. Ἡ ἐξέλιξη αὐτή συνεχίστηκε καί στόν αἰώνα μας. Μποροῦμε μάλιστα νά ποῦμε ὅτι ὁ 20ός αἰώνας εἶναι αἰώνας τῆς Φυσικῆς. Ἡ διατύπωση τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας ἀπό τόν Ἀϊνστάϊν, ἄλλαξε τή φιλοσοφία τῆς Φυσικῆς σκέψεως καί ἄνοιξε διάπλατους δρόμους γιά καινούργιες κατακτήσεις. Ἔτσι ἐπιτεύχτηκε τεχνητή ἀπελευθέρωση τῆς ἀτομικῆς ἐνέργειας, καί ἄρχισε ἡ κατάκτηση τοῦ διαστήματος. Ὡς συνέπεια αὐτῆς τῆς ἀλματώδους ἀνόδου τῆς Φυσικῆς ἐπιστήμης βρῆκαν ἐφαρμογή πολλές ἀνακαλύψεις της, ὅπως εἶναι τό Ραδιόφωνο, ἡ Τηλεόραση, οἱ Τηλεπικοινωνίες, τά μέσα μεταφορᾶς, τά γεωργικά ἐργαλεῖα κ.λπ. Ἐπίσης στήν προσπάθεια γιά μαζική παραγωγή, ὁ ἄνθρωπος κατασκεύασε καί χρησιμοποίησε πολύ τούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές. Τέλος ἡ μελέτη τῶν ἰδιοτήτων τῆς στερεᾶς καταστάσεως κατέληξε στήν ἐφεύρεση καί παραγωγή τῶν τρανζίστορς καί οἱ ἠλεκτρονικές συσκευές ἔγιναν μικροσκοπικές. Ἡ σημερινή μας ζωή εἶναι ἄμεσα συσχετισμένη μέ τίς προσπάθειες τῶν ἐπιστημόνων γιά νά ἀναπτυχθεῖ ἡ Φυσική.

Οἱ φυσικές γνώσεις **εἶναι ἀπαραίτητο ἐφόδιο** γιά τούς ἀνθρώπους, πού θά ἀσχοληθοῦν μέ τεχνικά θέματα. Οἱ Τεχνολογικές ἐπιστῆμες εἶναι θυγατρικές τῆς Φυσικῆς. Ἡ γνώση τῶν φυσικῶν ἀρχῶν εἶναι ἡ βάση γιά ἕνα τεχνολόγο.

γ) **Ὑπόθεση - Θεωρία.** Ὅπως ἀναφέραμε παραπάνω, ἡ Φυσική στηρίζεται στό πείραμα. Τό πείραμα μᾶς ἐπιβεβαιώνει τά αἴτια τῶν φαινομένων καί μᾶς ὁδηγεῖ στή διατύπωση φυσικῶν νόμων.

Πολλές φορές, ὅμως, δέν βρίσκεται τό αἴτιο πού προκαλεῖ ἕνα φαινόμενο ἤ καί μιά ὁμάδα φαινομένων, πού φαίνεται ὅτι ἔχουν τό ἴδιο αἴτιο. Στή Φυσική ἐπιστήμη, τότε, διατυπώνεται ἕνα σύνολο παραδοχῶν καί μιά σειρά συλλογισμῶν, πού ἀποτελεῖ μιά **ὑπόθεση.** Μέ τήν ὑπόθεση ἐπιχειρεῖται νά ἐξηγηθεῖ τό φαινόμενο ἤ ἡ ὁμάδα τῶν φαινομένων. Ἄν ἡ ὑπόθεση ἐπιβεβαιωθεῖ ἀπό πειραματικά δεδομένα, τότε αὐτή ἀποτελεῖ πλέον θεωρία.

Ἡ Φυσική χρησιμοποιεῖ πολύ τή **θεωρία,** τήν ὁποία παραδέχεται μέχρι τό σημεῖο πού αὐτή μπορεῖ νά δικαιολογεῖ ὁρισμένα φαινόμενα καί **πειραματικά** δεδομένα.

Ὅταν ὅμως δέν δικαιολογεῖται ἔστω καί ἕνα καινούργιο πειραματικό δεδομένο, πού θά ἔπρεπε νά δικαιολογεῖται μέ τήν θεωρία αὐτή, ἡ **θεωρία ἀπορρίπτεται.**

Τότε οἱ ἐπιστήμονες ἀρχίζουν πάλι νά κάνουν ὑποθέσεις καί διατυπώνουν μιά νέα θεωρία, πού νά καλύπτει καί τό συγκεκριμένο πειραματικό δεδομένο, πού δέν ἔχει ἀκόμα ἐξηγηθεῖ. Τό σπουδαῖο σ' ὅλη αὐτή τήν προσπάθεια καί τό σύστημα πού ἐφαρμόζουν οἱ Φυσικοί ἐπιστήμονες εἶναι ὅτι ἡ Φυσική δέν εἶναι δέσμια τῶν θεωριῶν της. Τίς χρησιμοποιεῖ μόνον, ἐφόσον τήν ἐξυπηρετοῦν καί τίς ἀνανεώνει γιά νά ἐξηγήσει καί νέα φαινόμενα.

Τελικά ἡ διατύπωση μιᾶς **νέας θεωρίας** σημαίνει ὅτι μ' αὐτή πρέπει νά ἐξηγηθοῦν καί νέα φαινόμενα.

Ἔτσι προχωρεῖ ἡ ἔρευνα σέ νέους ὁρίζοντες καί ἡ Φυσική σάν ἐπιστήμη προχωρεῖ γοργά στήν ἐξερεύνηση τῆς Φύσεως.

δ) **Κλάδοι τῆς Φυσικῆς.** Μέ σκοπό τήν ταξινόμηση τῆς ὕλης γιά τήν εὐκολότερη διδασκαλίας της, ἡ Φυσική χωρίζεται στούς παρακάτω κλάδους:

α) **Μηχανική.**
β) **Ἀκουστική - Κυματική.**
γ) **Θερμότητα.**
δ) **Ὀπτική.**
ε) **Μαγνητισμός - Ἠλεκτρισμός.**
στ) **Ἀτομική καί Πυρηνική Φυσική.**

Στό βιβλίο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ τούς τρεῖς πρώτους κλάδους τῆς Φυσικῆς.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ἡ μηχανική ἀσχολεῖται μέ τίς δυνάμεις καί τά ἀποτελέσματά τους, πού εἶναι οἱ κινήσεις καί οἱ παραμορφώσεις τῶν σωμάτων.

Χωρίζεται στή **Μηχανική τῶν στερεῶν σωμάτων** καί στή **Μηχανική τῶν ρευστῶν.**

Τή μηχανική τῶν στερεῶν σωμάτων τή χωρίζουμε σέ:

α) **Κινητική,** πού ἐξετάζει τήν κίνηση τῶν σωμάτων.

β) **Στατική,** πού ἐξετάζει τίς δυνάμεις καί τήν ἰσορροπία τους.

γ) **Δυναμική,** πού ἐξετάζει τίς δυνάμεις σέ σχέση μέ τά ἀποτελέσματά τους. Στή μηχανική τῶν στερεῶν, γιά λόγους ἁπλουστεύσεως, εἰσάγουμε τήν ἔννοια τοῦ **ὑλικοῦ σημείου,** δηλαδή ὑλικοῦ σώματος τοῦ ὁποίου τίς διαστάσεις θεωροῦμε μηδενικές.

Ἡ Μηχανική ἐξετάζει συνήθως τά στερεά σώματα ὡς σύνολα ὑλικῶν σημείων, τά ὁποῖα σημεῖα θεωροῦνται ὅτι βρίσκονται σέ σταθερή ἀπόσταση μεταξύ τους.

Ἡ Μηχανική τῶν ρευστῶν χωρίζεται στήν:

— **Ὑδροστατική,**

— **Ἀεροστατική,**

— **Ὑδροδυναμική - Ἀεροδυναμική.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

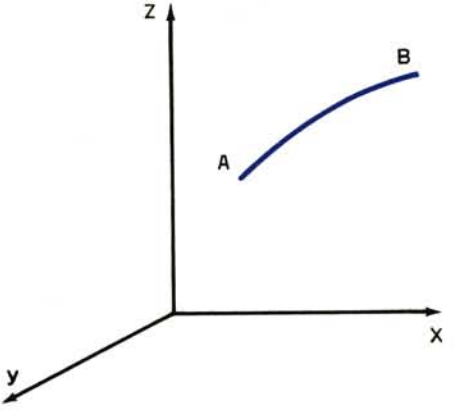
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ἡ μηχανική τῶν στερεῶν, πού θεωρεῖ τά σώματα σάν ὑλικά σημεῖα, ὀνομάζεται **μηχανική ὑλικοῦ σημείου.**

1 · 1 ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

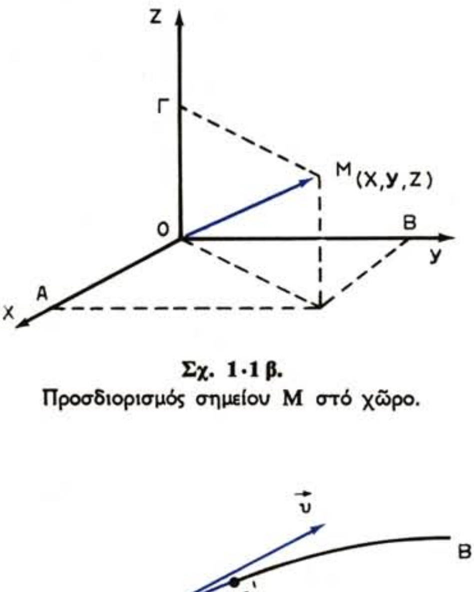
α) **ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ.** Ὑλικό σημεῖο κινεῖται, ὅταν ἀλλάζει θέση στό χῶρο.

Εἶναι, ὅμως, ἀπαραίτητο νά καθορίσουμε τό χῶρο στόν ὁποῖο κινεῖται τό κινητό καί νά τόν θεωρήσουμε ἀμετακίνητο. Γι' αὐτό ἐξετάζουμε τήν κίνηση σέ σχέση μέ ἕνα τρισορθογώνιο σύστημα ἀξόνων x, y, z ὅπως στό σχῆμα 1 · 1 α, τό ὁποῖο δεχόμαστε στερεά καί ἀμετακίνητα συνδεμένο μέ κάποιο ὑλικό σῶμα, πού θεωροῦμε σταθερό· συνήθως τό σῶμα αὐτό εἶναι ἡ Γῆ.



Σχ. 1·1 α.

— **Προσδιορισμός τῆς θέσεως σημείου στό χῶρο** (σχ. 1 · 1 β). Ἄς θεωρήσουμε τίς προβολές τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ σέ κάθε ἄξονα, παράλληλα πρός τό ἐπίπεδο τῶν ἄλλων δύο ἀξόνων. Εἶναι: (ΟΑ) = x, (ΟΒ) = y, (ΟΓ) = z. Οἱ τρεῖς αὐτές προβολές x, y, z προσδιορίζουν τελείως τή θέση τοῦ σημείου Μ στό χῶρο καί λέγονται **συντεταγμένες** τοῦ σημείου Μ.



Σχ. 1·1 β.
Προσδιορισμός σημείου Μ στό χῶρο.

— **Τροχιά.** Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται, τό σύνολο τῶν διαδοχικῶν του θέσεων σχηματίζει μιά γραμμή ΑΒ (σχ. 1 · 1 α). Ἡ γραμμή αὐτή ὀνομάζεται **τροχιά τοῦ ὑλικοῦ σημείου.**

Εἰδική περίπτωση τροχιᾶς εἶναι ἡ **εὐθύγραμμη τροχιά.**

1) **Ταχύτητα.** Ἔστω ὅτι ὑλικό σημεῖο κινεῖται πάνω στήν τροχιά ΑΒ ἀπό τό Α πρός τό Β καί ὅτι μετά ἀπό χρόνο t βρίσκεται στό σημεῖο Γ, πού ἀπέχει ἀπό τό Α ἀπόσταση s, ἡ ὁποία βρίσκεται πάνω στήν τροχιά (σχ. 1 · 1 γ). Μετά ἀπό στοιχειώδη χρόνο Δt, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t + Δt τό σημεῖο θά βρίσκεται στό Γ', πού ἀπέχει ἀπό τό Γ ἀπόσταση Δs καί ἀπό τό Α ἀπόσταση s + Δs. Ὀνομάζουμε **ταχύτητα** ἤ **στιγμιαία ταχύτητα** τοῦ κινητοῦ στό σημεῖο Γ ἕνα διανυσματικό μέγεθος $\overrightarrow{\upsilon}$ πού ἔχει: α) Διεύθυνση τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό ση-

Σχ. 1·1 γ.

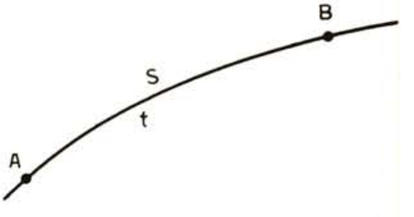
μεῖο Γ. β) Φορά, τή φορά τῆς κινήσεως. γ) Ἀρχή τό σημεῖο Γ. δ) Μέτρο τό πηλίκον $\Delta s/\Delta t$, ὅταν τό Δt θεωρεῖται ἀπειροστό, δηλαδή ὅταν τείνει στό μηδέν. Ἐπειδή στήν περίπτωση αὐτή τό πηλίκον αὐτό παριστάνεται μέ τό σύμβολο ds/dt, ἡ ταχύτητα δίνεται ἀπό τή διανυσματική σχέση:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\vec{ds}}{dt}}$$

Γιά νά γίνει κατανοητή ἡ ἔννοια τῆς στιγμιαίας ταχύτητας, παίρνουμε γιά παράδειγμα τόν χιλιομετρητή (τό κοντέρ) ἑνός αὐτοκινήτου πού κινεῖται. Αὐτός δέν δείχνει πάντα τό ἴδιο. Ἡ ἔνδειξη τοῦ χιλιομετρητῆ ὁρισμένη στιγμή ἀποτελεῖ καί τή στιγμιαία ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου.

Ἡ ταχύτητα μπαίνει ὡς φυσικό μέγεθος μέσα στήν κίνηση, γιατί μ' αὐτή ἀντιλαμβανόμαστε ἄν ἕνα κινητό τρέχει γρήγορα ἤ σιγά. Ὅσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ ταχύτητα, τόσο πιό γρήγορα κινεῖται τό κινητό.

— **Μέση ταχύτητα.** Ἔστω ὅτι κινητό κινούμενο ἀπό σημεῖο A πρός σημεῖο B τῆς τροχιᾶς του διανύει σέ χρόνο t διάστημα s. Ὀνομάζουμε **μέση ταχύτητα** τό πηλίκον τοῦ διαστήματος s διά τοῦ χρόνου t (σχ. 1·1 δ). Δηλαδή:



Σχ. 1·1 δ.

$$\boxed{\bar{\upsilon} = \frac{s}{t}}$$

— **Μονάδες ταχύτητας:**

Σύστημα S.I.

Ἄν στή σχέση $\upsilon = s/t$ βάλουμε $s = 1$ m καί $t = 1$ s τότε:

$$\upsilon = \frac{1\ m}{1\ s} = 1\ m/s$$

Σύστημα Τεχνικό.

Ἡ μονάδα ταχύτητας εἶναι ἐπίσης τό 1 m/s.

Ἄλλες μονάδες ταχύτητας.

α) Στό σύστημα C.G.S. $\upsilon = s/t = 1$ cm/s.

β) Συχνά χρησιμοποιεῖται ἡ μονάδα km/h.

γ) Οἱ ναυτικοί χρησιμοποιοῦν τή μονάδα κόμβος:
1 Κόμβος = 1 Ναυτ. Μίλι/h = 1852 m/h.

Προβλήματα:

1. Αὐτοκίνητο τρέχει μέ ταχύτητα 108 km/h. Ποιά ἡ ταχύτητά του σέ m/s;

Λύση:

$$108\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \cdot \frac{1\ \text{km}}{1\ \text{h}} = 108 \cdot \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 30\ \text{m/s}.$$

2. Δρομέας τρέχει τά 100 m σέ 10 s. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητά του σέ m/s καί σέ km/h.

Λύση:

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{100\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 10\ \text{m/s}$$

$$10\ \text{m/s} = 10\ \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{s}} = 10 \cdot \frac{\frac{1}{1000}\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} = 36\ \text{km/h}.$$

2) **Ὁμαλή κίνηση. Μιά κίνηση λέγεται ὁμαλή, ὅταν τά διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα μέ τούς χρόνους, στούς ὁποίους διανύονται.**

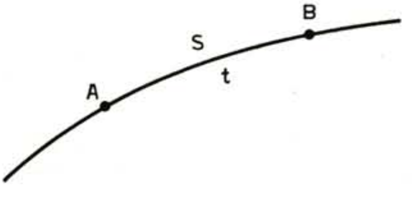
Αὐτό σημαίνει ὅτι: $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{s}{t}$ ὁπότε $\upsilon = \bar{\upsilon}$, δηλαδή ἡ στιγμιαία καί ἡ μέση ταχύτητα ἔχουν τό ἴδιο μέτρο.

Γι' αὐτό δίνουμε καί ἄλλο ὁρισμό τῆς ὁμαλῆς κινήσεως:

Ὁμαλή λέγεται ἡ κίνηση, στήν ὁποία ἡ στιγμιαία ταχύτητα παραμένει σταθερή κατά μέτρο καί ἰσοῦται μέ τή μέση ταχύτητα.

Σημείωση: Μέ τόν ὁρισμό τῆς ὁμαλῆς κινήσεως μποροῦμε νά δώσουμε ἕνα διαφορετικό ὁρισμό τῆς μέσης ταχύτητας.

Δύο κινητά κινοῦνται μεταξύ τῶν δύο σημείων Α καί Β (σχ. 1·1 ε). Αὐτά ξεκινοῦν ταυτόχρονα ἀπό τό Α καί φθάνουν ταυτόχρονα στό Β. Ἄν τό ἕνα κινητό κινεῖται ὁμαλά, ἡ ταχύτητα αὐτοῦ ὀνομάζεται **μέση ταχύτητα** τοῦ ἄλλου κινητοῦ.

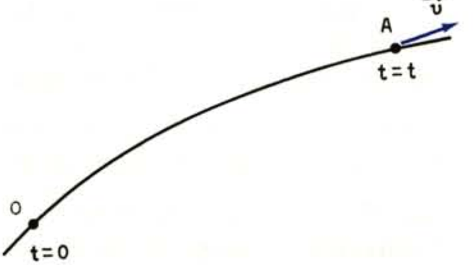


Σχ. 1·1 ε.

Δηλαδή **μέση ταχύτητα κινητοῦ, πού κινεῖται ἀνάμεσα σέ δύο σημεῖα Α καί Β, λέγεται ἡ ταχύτητα ἑνός ἄλλου κινητοῦ, πού κινεῖται ὁμαλά ἀπό τό Α στό Β καί πού ξεκινᾶ καί τερματίζει ταυτόχρονα μέ τό πρῶτο κινητό.**

— **Ἐξίσωση ὁμαλῆς κινήσεως.**

Ἔστω ὅτι κινητό κινεῖται ὁμαλά στό διάστημα ΟΑ (σχ. 1·1 στ). Ἔστω ἐπίσης ὅτι τήν ὥρα πού ἄρχιζε



Σχ. 1·1 στ.

ἡ χρονομέτρηση, τό κινητό περνᾶ ἀπό τό O, ὅτι γιά νά φτάσει στό A χρειάζεται χρόνο t καί ὅτι τό μέτρο τῆς ταχύτητάς του εἶναι υ.

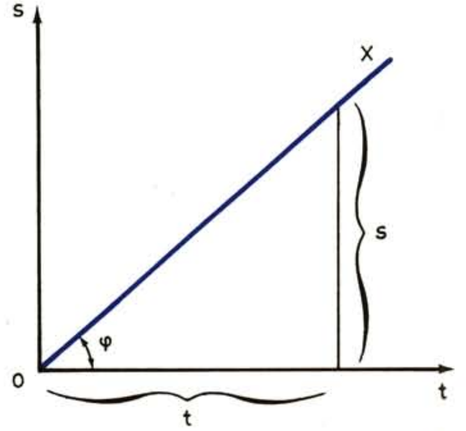
Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁμαλῆς κινήσεως, θά ἔχουμε:

$$\upsilon = \frac{s}{t} \quad \text{ἤ}$$

$$s = \upsilon\, t$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή μᾶς δίνει τή σχέση ἀνάμεσα στό χρόνο καί τό διάστημα, πού διανύθηκε κατά τήν ὁμαλή κίνηση στό χρόνο αὐτό. Ἡ ἐξίσωση αὐτή ὀνομάζεται **ἐξίσωση τῆς ὁμαλῆς κινήσεως.**

Σημείωση: Στήν Κινητική, κάθε ἐξίσωση ἀνάμεσα σέ διάστημα καί σέ χρόνο ὀνομάζεται ἐξίσωση κινήσεως.



Σχ. 1·1ζ.

— **Γραφική παράσταση τῆς ὁμαλῆς κινήσεως.** Ἡ γραφική παράσταση γίνεται στό ἐπίπεδο δύο ἀξόνων, τοῦ χρόνου t καί τοῦ διανυόμενου διαστήματος s (σχ. 1·1ζ).

Ἐπειδή ἡ ἐξίσωση πού συνδέει τά μεγέθη αὐτά, εἶναι ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ, ἡ γραφική παράσταση εἶναι εὐθεία καί συγκεκριμένα ἐδῶ ἡ εὐθεία Ox.

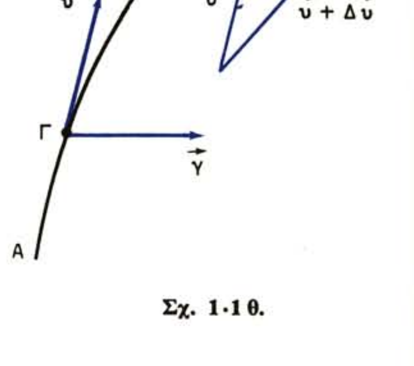
Σχ. 1·1η.

Ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας φ, δηλαδή ἡ κλίση τῆς εὐθείας, ἰσοῦται μέ τήν ἀριθμητική τιμή τῆς ταχύτητας:

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{|s|}{|t|} = |\upsilon|$$

— **Εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση.** Εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ὀνομάζεται ἡ κίνηση κατά τήν ὁποία ἡ ταχύτητα παραμένει σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά. Ἡ κίνηση αὐτή ὀνομάζεται καί **ἰσοταχής κίνηση** (σχ. 1·1η).

3) **Ἐπιτάχυνση.** Ἔστω ὅτι ὑλικό σημεῖο κινεῖται πάνω σέ καμπύλη γραμμή ἀπό τό σημεῖο A πρός τό σημεῖο B καί ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t βρίσκεται στό σημεῖο Γ καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (σχ. 1·1θ). Μετά ἀπό στοιχειώδη χρόνο Δt θά βρίσκεται σέ σημεῖο Γ′ καί θά ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon} + \vec{\Delta\upsilon}$. Ὀνομάζουμε **ἐπιτάχυνση** ἤ **στιγμιαία ἐπιτάχυνση** τοῦ ὑλικοῦ σημείου στό Γ ἕνα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\gamma}$, πού ἔχει τή

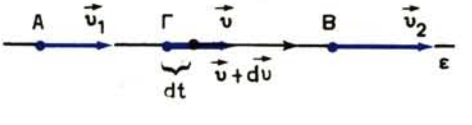


Σχ. 1·1θ.

διεύθυνση καί φορά τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ καί μέτρο τό πηλίκον $\Delta\upsilon/\Delta t$, ὅταν τό Δt τείνει στό μηδέν. Ἐπειδή τότε τό πηλίκον αὐτό παριστάνεται μέ τό σύμβολο $d\upsilon/dt$, ἡ ἐπιτάχυνση δίνεται ἀπό τή διανυσματική σχέση:

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{\overrightarrow{d\upsilon}}{dt}}$$

— **Ἐπιτάχυνση σέ εὐθύγραμμη κίνηση.** Κινητό κινεῖται στήν εὐθεία ε ἀπό τό Α πρός τό Β (σχ. 1·1 ι). Στό σημεῖο Α ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, στό Β ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ καί περνᾶ χρόνος t γιά νά φθάσει ἀπό τό Α στό Β.



Σχ. 1·1 ι.

1) Στό σημεῖο Γ τό κινητό ἔχει μία ταχύτητα μέτρου υ καί ἀφοῦ περάσει ἕνας ἀπειροστός χρόνος dt, τό κινητό ἀποκτᾶ ταχύτητα μέτρου $\upsilon + d\upsilon$. Ἡ μεταβολή τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας εἶναι $d\upsilon$ καί τό πηλίκον $\frac{d\upsilon}{dt}$ εἶναι τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως στό σημεῖο Γ. Ἡ ἐπιτάχυνση αὐτή ἔχει τή διεύθυνση τῆς εὐθείας ε καί φορά ἀπό τό Α πρός τό Β, ἄν ἡ ταχύτητα αὐξάνεται, ἤ ἀπό τό Β πρός τό Α, ἄν ἡ ταχύτητα ἐλαττώνεται.

2) Ὁρίζουμε ὡς μέση ἐπιτάχυνση $\bar{\gamma}$ στό διάστημα ΑΒ, ἕνα διανυσματικό μέγεθος πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς εὐθείας, φορά ἀπό τό Α πρός τό Β ἤ ἀντίστροφα καί μέτρο τό πηλίκον τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητας διά τοῦ χρόνου πού πέρασε:

$$\bar{\gamma} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t}$$

Ὅταν λέμε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση ἑνός κινητοῦ εἶναι 1 m/s^2, ἐννοοῦμε ὅτι σέ χρόνο 1 s ἡ ταχύτητα αὐξάνει κατά 1 m/s.

— **Μονάδες ἐπιταχύνσεως.**
S.I. καί Τ.Σ.

$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t}$. Ἐάν $\upsilon_2 - \upsilon_1 = 1\ m/s$ καί $t = 1\ s$

$$\gamma = \frac{1\ m/s}{s} = 1\ m/s^2.$$

Ἡ μονάδα ἐπιταχύνσεως στό σύστημα C.G.S. εἶναι: 1 cm/s^2.

Σημείωση : Στή μετατροπή $\frac{1\ \mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} = \frac{1\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ἀκολουθήθηκε ἡ σειρά τῶν πράξεων τῆς κλασματικῆς παραστάσεως: $\frac{\alpha/\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta^2}$, δηλαδή θεωροῦμε τίς μονάδες m καί s ὡς ἀριθμούς α καί β.

— **Μετατροπή μονάδων.**

Πρόβλημα :

Νά μετατραπεῖ ἡ ἐπιτάχυνση 1296 $\mathrm{km/h^2}$ σέ $\mathrm{m/s^2}$.

Λύση :

$$1296\ \mathrm{km/h^2} = 1296 \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h^2}} = 1296 \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{(3600\ \mathrm{s})^2} =$$
$$= 0{,}1\ \mathrm{m/s^2}.$$

— **Σημασία τῆς ἐπιταχύνσεως.** Πρίν δοῦμε τή σημασία πού ἔχει τό φυσικό μέγεθος **ἐπιτάχυνση,** καλό εἶναι νά δώσουμε μιά ἔννοια γενική στή Φυσική, τήν ὁποία θά χρησιμοποιοῦμε συχνά:

Πολλές φορές φυσικά μεγέθη μεταβάλλονται μέ τό χρόνο. Μιά δεξαμενή π.χ. γεμίζει ἀπό μιά πηγή, ἄρα μεταβάλλεται ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, πού περιέχει ἡ δεξαμενή.

Ἐκεῖνο ὅμως πού ἐνδιαφέρει στήν περίπτωση τῆς δεξαμενῆς, εἶναι πόσο γρήγορα γεμίζει, δηλαδή, πόσο γρήγορα μεταβάλλεται τό μέγεθος. **Τό πηλίκον τῆς μεταβολῆς ὁποιουδήποτε μεγέθους διά τοῦ χρόνου, πού διαρκεῖ ἡ μεταβολή, λέγεται ρυθμός μεταβολῆς τοῦ μεγέθους** καί συχνότατα χρησιμοποιεῖται ὡς φυσικό μέγεθος μέ ξεχωριστή ὀνομασία κάθε φορά.

Στή συγκεκριμένη περίπτωση, πού μιά βρύση γεμίζει τή δεξαμενή, τό πηλίκον:

$$\frac{\text{Αὔξηση ὄγκου νεροῦ δεξαμενῆς}}{\text{Χρόνος αὐξήσεως ὄγκου}}$$

θά ἔπρεπε νά ὀνομασθεῖ ρυθμός παροχῆς ὄγκου νεροῦ στή δεξαμενή καί τελικά ὀνομάζεται **παροχή νεροῦ.**

Ἄν λοιπόν ἀκολουθήσουμε τήν πιό πάνω σκέψη καί γιά τήν ἐπιτάχυνση, μποροῦμε νά ποῦμε:

$$\text{Ἐπιτάχυνση} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t} = \frac{\text{μεταβολή τῆς ταχύτητας}}{\text{χρόνος}}$$

Ἐπιτάχυνση = ρυθμός μεταβολῆς τῆς ταχύτητας.

— **Ἐπιτάχυνση θετική καί ἀρνητική.** Ἡ τιμή τῆς διαφορᾶς $\upsilon_2 - \upsilon_1$ στή μέση ἐπιτάχυνση καί τῆς $d\upsilon$ στή στιγμιαία ἐπιτάχυνση μπορεῖ νά εἶναι **θετική** ἤ **ἀρνητική.** Ἔτσι ἡ ἐπιτάχυνση (εἴτε μέση, εἴτε στιγμιαία) μπορεῖ νά εἶναι **θετική** ἤ **ἀρνητική.**

Ἡ ἀρνητική ἐπιτάχυνση λέγεται καί **ἐπιβράδυνση.**

4) **Ὁμαλά μεταβαλλομένη εὐθύγραμμη κίνηση.** Μιά εὐθύγραμμη κίνηση ὁρίζεται σάν **ὁμαλά μεταβαλλομένη, ἄν ἡ διεύθυνση, ἡ φορά καί τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως παραμένει σταθερό.**

Ἔστω κινητό, τό ὁποῖο κινεῖται στήν εὐθεία τοῦ σχήματος 1 · 1 ια ἀπό τό Ο πρός τό Α μέ κίνηση ὁμαλά ἐπιταχυνομένη.

Σχ. 1·1 ια.

Ἡ μέση ἐπιτάχυνση εἶναι $\gamma = \dfrac{\upsilon - \upsilon_o}{t}$ καί ἡ στιγμιαία ἐπιτάχυνση σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο Γ εἶναι $\gamma = \dfrac{d\upsilon}{dt}$. Ἐπειδή ὅμως ἡ κίνηση εἶναι ὁμαλά μεταβαλλομένη ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συμπεραίνεται ὅτι: $\overline{\gamma} = \gamma$ ἤ:

$$\frac{\upsilon - \upsilon_o}{t} = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Δηλαδή στήν ὁμαλά μεταβαλλομένη εὐθύγραμμη κίνηση **οἱ μεταβολές τῆς ταχύτητας εἶναι ἀνάλογες πρός τούς ἀντίστοιχους χρόνους.**

Ὅταν ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι θετική ἤ ἀρνητική, ἡ ὁμαλά μεταβαλλομένη κίνηση ὀνομάζεται ἀντίστοιχα **ὁμαλά ἐπιταχυνομένη** ἤ **ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη.**

— **Ἐξίσωση ταχύτητας στήν ὁμαλά ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμη κίνηση.** Ἀπό ὅσα εἴπαμε γιά τήν ὁμαλά ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμη κίνηση, συμπεραίνεται ὅτι:

$$\text{Ἐπιτάχυνση} = \frac{\text{Μεταβολή τῆς ταχύτητας}}{\text{Χρόνος μεταβολῆς}}$$

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_o}{t}$$

Λύνουμε τήν ἐξίσωση αὐτή ὡς πρός υ καί ἔχουμε:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o + \gamma t}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ταχύτητας σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο στήν ὁμαλά μεταβαλλομένη εὐθύγραμμη κίνηση.

Πρόβλημα: Αὐτοκίνητο περνᾶ ἀπό σημεῖο εὐθύγραμμου δρόμου μέ ταχύτητα 36 km/h καί αὐξάνει τήν ταχύτητά του μέ σταθερή ἐπιτάχυνση 10 m/s². Μετά πάροδο χρόνου 5 s πόση θά εἶναι ἡ ταχύτητά του σέ km/h;

Λύση:

Ἀφοῦ ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι σταθερή καί θετική, ἡ κίνηση εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνομένη:

$$\upsilon = \upsilon_o + \gamma t \qquad (1)$$

Δίνονται $\upsilon_o = 36$ km/h, $\gamma = 10$ m/s² καί $t = 5$ s.

Ἐπιλέγουμε σύστημα μονάδων τό S.I.

$$\upsilon_o = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{36\,000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 10\text{ m/s}.$$

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (1):

$$\upsilon = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 5\text{ s} =$$

$$= 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 60\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Μετατροπή:

$$60\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 60\cdot\frac{1\text{ m}}{1\text{ s}} = 60\cdot\frac{\frac{1}{1000}\text{ km}}{\frac{1}{3600}\text{ h}} = 216\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ἑπομένως τό αὐτοκίνητο μετά πάροδο 5 s θά ἀποκτήσει ταχύτητα 216 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5) **Γραφική παράσταση ταχύτητας.** Ἡ τιμή τῆς ἐπιταχύνσεως μπορεῖ νά εἶναι θετική ἤ ἀρνητική στήν ἐξίσωση $\upsilon = \upsilon_o + \gamma t$. Ἄν ὅμως λάβουμε σάν τιμή τῆς γ τήν ἀπόλυτη τιμή, ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$\upsilon = \upsilon_o \pm \gamma t.$$

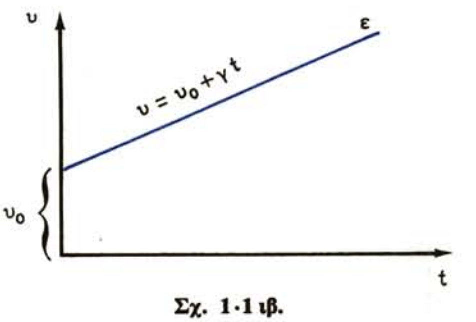
Ἔτσι θά ἔχουμε δύο γραφικές παραστάσεις:

—Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως: $\upsilon = \upsilon_o + \gamma t$.

Ἐπειδή ἡ ἐξίσωση εἶναι πρώτου βαθμοῦ ἡ γραφική παράσταση εἶναι εὐθεία (σχ. 1 · 1 ιβ).

—Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως: $\upsilon = \upsilon_o - \gamma t$.

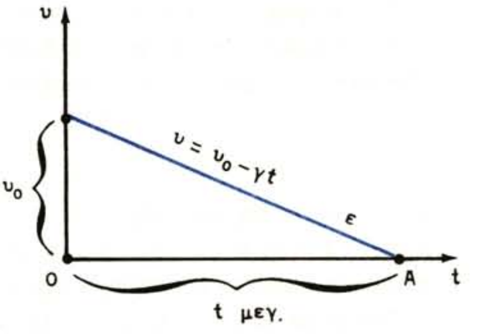
Ἡ γραφική παράσταση εἶναι καί ἐδῶ εὐθεία, γιατί ἡ ἐξίσωση εἶναι πρώτου βαθμοῦ.



Σχ. 1·1 ιβ.

Σ' αὐτή τή γραφική παράσταση, παρατηροῦμε ὅτι ἡ εὐθεία ε τέμνει τόν ἄξονα τοῦ χρόνου σέ κάποιο σημεῖο Α (σχ. 1 · 1 ιγ).

Ἄς ἐξετάσουμε αὐτή τή γραφική παράσταση πιό καλά.



Σχ. 1·1 ιγ.

Τή χρονική στιγμή 0 τό κινητό ἔχει ταχύτητα υ_o. Ἐπειδή ἡ κίνηση εἶναι ἐπιβραδυνομένη, καθώς περνᾶ ὁ χρόνος ἡ ταχύτητα μικραίνει καί τελικά ὅταν περάσει ὁ χρόνος $OA = t_{\mu\epsilon\gamma}$, ἡ ταχύτητα μηδενίζεται, δηλαδή τό κινητό σταματᾶ.

Ὁ χρόνος αὐτός ὀνομάζεται μέγιστος χρόνος, καί συμβολίζεται μέ τό $t_{\mu\epsilon\gamma}$.

Ὑπολογισμός τοῦ $t_{\mu\epsilon\gamma}$.

Στήν ἐξίσωση $\upsilon = \upsilon_o - \gamma t$ (1), ὅταν $\upsilon = 0$ καί $t = t_{\mu\epsilon\gamma}$, αὐτή γίνεται $\upsilon_o - \gamma t_{\mu\epsilon\gamma} = 0$ ἤ

$$\boxed{t_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\upsilon_o}{\gamma}} \qquad (2)$$

Μέ τήν ἐξίσωση (2) εἶναι δυνατό νά ὑπολογίσουμε τό χρόνο πού χρειάζεται γιά νά μηδενιστεῖ ἡ ταχύτητα κινητοῦ, πού κινεῖται μέ ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη κίνηση.

Παράδειγμα: Κινητό κινεῖται σέ εὐθεία μέ ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη κίνηση, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιβράδυνση εἶναι 5 m/s². Ἐάν κάποια στιγμή ἡ ταχύτητα εἶναι 136 km/h, μετά ἀπό πόσο χρόνο θά σταματήσει τό κινητό;

Λύση:

Ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι ὁ μέγιστος χρόνος $t_{\mu\epsilon\gamma}$ καί ἡ ἀρχική ταχύτητα 136 km/h. Ἑπομένως, ἄν στόν τύπο:

$$t_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\upsilon_o}{\gamma}$$

ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές τῶν υ_o καί γ, ὑπολογίζεται ὁ ζητούμενος χρόνος.

Σύστημα S.I.

$$\upsilon_o = 136 \text{ km/h} = 136 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 38 \text{ m/s}.$$

Ἀντικατάσταση: $t_{\mu\epsilon\gamma} = \dfrac{38 \text{ m/s}}{5 \text{ m/s}^2} = 7{,}6 \text{ s}.$

Ἀπάντηση : Τό κινητό θά σταματήσει μετά 7,6 s.

6) **Ἐξίσωση ὁμαλά μεταβαλλομένης κινήσεως.** Ἡ ἐξίσωση τῆς ὁμαλά ἐπιταχυνομένης κινήσεως εἶναι:

$$s = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (1)$$

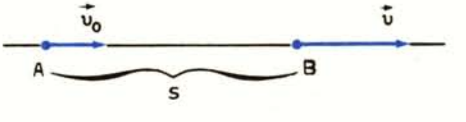
ὅπου: υ_o ἡ ἀρχική ταχύτητα στό A τή χρονική στιγμή $t = 0$, s τό διάστημα πού διανύει τό κινητό σέ χρόνο t καί γ ἡ ἐπιτάχυνση (θετική ἤ ἀρνητική).

Ἄν γ παριστάνει τήν ἀπόλυτη τιμή τῆς ἐπιταχύνσεως, ἡ (1) μετασχηματίζεται στή:

$$s = \upsilon_o t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (2)$$

Ἐφαρμογή. Κινητό κινεῖται σέ εὐθεία μέ ἐπιτάχυνση, τῆς ὁποίας ἡ τιμή εἶναι 5 m/s².

Τή χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στό σημεῖο A (σχ. 1 · 1 ιδ) καί ἔχει ταχύτητα $\upsilon_o = 15$ m/s.



Σχ. 1·1 ιδ.

Νά ὑπολογιστοῦν:

1) Ἡ ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει. 2) Τό διάστημα πού θά διανύσει σέ χρόνο $t = 4$ s.

Λύση :

$$\upsilon = \upsilon_o + \gamma t$$

$$s = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

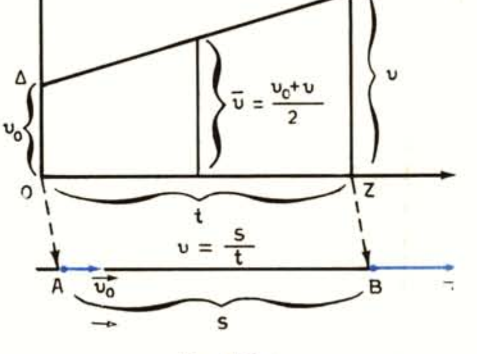
Σύστημα S.I. Ἀντικατάσταση:

$$\upsilon = 15 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ s} = 35 \text{ m/s}$$

$$s = 15 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m/s}^2 \cdot 4^2 \text{ s}^2 = 100 \text{ m}.$$

Ἀπάντηση : Τό κινητό θά ἀποκτήσει ταχύτητα 35 m/s καί θά διανύσει διάστημα 100 m.

7) **Πῶς βρίσκεται ἡ ἐξίσωση : $s = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\gamma t^2$.**



Σχ. 1·1 ιε.
Ἡ μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΟΔΕΖ.

Ἔστω ὅτι κινητό κινεῖται στήν εὐθεία AB (σχ. 1 · 1 ιε) μέ ὁμαλά ἐπιταχυνομένη κίνηση. Τή χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στό σημεῖο A καί ἔχει ταχύτητα υ_o (ἀρχική ταχύτητα). Ἡ γραφική παράσταση τῆς ταχύτητας υ σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο εἶναι ἡ εὐθεία ε.

Σέ χρονική στιγμή t ἡ στιγμιαία ταχύτητα τοῦ κινητοῦ στήν κίνησή του ἔστω ὅτι εἶναι υ. Ἡ μέση ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ἀπό O μέχρι Z εἶναι ἡ διάμεση τοῦ τραπεζίου ΟΔΕΖ, δηλαδή ἡ $\bar{\upsilon}$.

Ἑπομένως:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon + \upsilon_o}{2} \qquad (1)$$

Ἀλλά ὡς μέση ταχύτητα ὁρίσαμε τό πηλίκον $\frac{s}{t}$.

Δηλαδή:

$$\bar{\upsilon} = \frac{s}{t} \qquad (2)$$

Στήν ὁμαλά ἐπιταχυνομένη κίνηση ἔχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_o + \gamma t \qquad (3)$$

Ἑπομένως:

$$s = \bar{\upsilon}\, t = \frac{\upsilon + \upsilon_o}{2}\, t = \frac{\upsilon_o + \gamma t + \upsilon_o}{2}\, t =$$

$$= \upsilon_o t + \frac{1}{2}\gamma t^2. \qquad (4)$$

8) **Γραφικές παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων:**

$$s = \upsilon_o\, t + \frac{1}{2}\gamma\, t^2 \quad \text{καί} \quad s = \upsilon_o\, t - \frac{1}{2}\gamma\, t^2$$

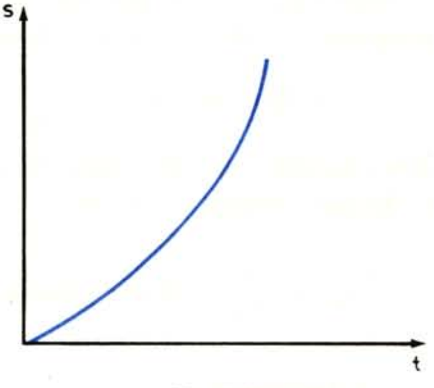
Ἄσκηση: Οἱ μαθητές νά χαράξουν τίς γραφικές παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων $s = \upsilon_o t + 1/2\, \gamma t^2$ καί $s = \upsilon_o t - 1/2\, \gamma t^2$ τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλά μεταβαλλομένης κινήσεως. Γιά τό σκοπό αὐτό νά ἀκολουθήσουν τίς ὁδηγίες τῆς παραγράφου 0 · 7 καί νά χρησιμοποιήσουν τά δεδομένα (σχ. 1 · 1 ιστ καί 1 · 1ιζ):

$$\upsilon_o = 20 \text{ m/s} \quad \text{καί} \quad \gamma = \pm 4 \text{ m/s}^2$$

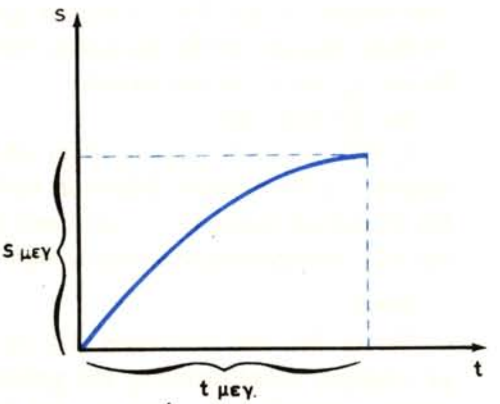
Ἐπίσης νά παραστήσουν γραφικά τήν ταχύτητα καί τήν ἐπιτάχυνση σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.

9) **Σχέση διαστήματος καί ταχύτητας στήν ὁμαλά μεταβαλλομένη κίνηση.** Συχνά ὑπάρχουν προβλήματα ὁμαλά μεταβαλλομένης κινήσεως, στά ὁποῖα δίνεται ἡ ταχύτητα πού ἀποκτήθηκε καί ζητεῖται τό διάστημα πού διανύθηκε ἤ ἀντίστροφα.

Στίς περιπτώσεις αὐτές θά πρέπει νά βροῦμε μιά ἐξίσωση, πού νά συνδέει τό διάστημα καί τήν ταχύτητα. Οἱ σχέσεις αὐτές προκύπτουν ὅταν ἀπαλείψουμε τό χρόνο ἀπό τίς δυό ἐξισώσεις (Πίνακας 1 · 1 · 1).



Σχ. 1·1 ιστ.
Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως:
$s = \upsilon_o\, t + \frac{1}{2}\gamma\, t^2$
[Ἡ καμπύλη εἶναι παραβολή].



Σχ. 1·1 ιζ.
Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως:
$s = \upsilon_o\, t - \frac{1}{2}\gamma\, t^2$
[Ἡ καμπύλη εἶναι παραβολή].

$$\upsilon = \upsilon_o \pm \gamma t \qquad s = \upsilon_o t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ἤτοι:

$$\boxed{s = \frac{\upsilon^2 - \upsilon^2_o}{\pm 2\gamma}} \ (1) \quad \text{καί} \quad \boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon^2_o \pm 2\gamma s}} \ (2)$$

10) **Εὕρεση μέγιστου διαστήματος.** Ἔστω ὅτι κινητό κινεῖται μέ ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη κίνηση μέ ἐπιτάχυνση γ καί μέ ἀρχική ταχύτητα υ_o.

Πόσο διάστημα θά διανύσει τό κινητό μέχρι νά σταματήσει; (Μέγιστο διάστημα, $s_{\mu\varepsilon\gamma}$).

Στήν ἐξίσωση: $s = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon^2_o}{-2\gamma} = \dfrac{\upsilon^2_o - \upsilon^2}{2\gamma}$

ἀντικαθιστοῦμε $\upsilon = 0$, ὁπότε τό s γίνεται $s_{\mu\varepsilon\gamma}$ καί ἡ ἐξίσωση μετατρέπεται στή:

$s_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\upsilon^2_o}{2\gamma}$	*Τύπος μέγιστου διαστήματος*

11) **Ἐφαρμογές.**

1. Κινητό ξεκινᾶ ἀπό τήν ἠρεμία καί κινεῖται εὐθύγραμμα ὡς ἐξῆς: Σέ χρόνο t_1 κάνει ἐπιταχυνομένη κίνηση μέ ἐπιτάχυνση γ_1 σέ εὐθεία τροχιά. Στό τέλος αὐτοῦ τοῦ χρόνου τό κινητό κινεῖται ἰσοταχῶς, μέ τήν ταχύτητα πού ἀπόκτησε, ἐπί χρόνο t_2 καί ἀκολούθως ἀρχίζει ἐπιβραδυνομένη κίνηση μέ ἐπιβράδυνση γ_3 μέχρι νά σταματήσει.

Νά ὑπολογισθεῖ:

1) Ὁ συνολικός χρόνος μέχρι νά σταματήσει τό κινητό. 2) Τό συνολικό διάστημα πού θά διανυθεῖ. 3) Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ταχυτήτων καί τῶν ἐπιταχύνσεων σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.

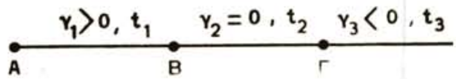
Λύση:

Ἔστω ὅτι στό διάστημα ΑΒ τό κινητό κινεῖται μέ σταθερή ἐπιτάχυνση γ_1 ἐπί χρόνο t_1, στό ΒΓ κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπί χρόνο t_2, στό διάστημα ΓΔ κινεῖται μέ σταθερή ἐπιβράδυνση γ_3 καί σταματᾶ στό Δ (σχ. 1·1 ιη).

— **Ὑπολογισμός χρόνου.** Ὁ συνολικός χρόνος θά ὑπολογισθεῖ ὅταν βρεθεῖ ὁ χρόνος t_3, πού ἀπαιτεῖται

ΠΙΝΑΚΑΣ 1·1·1
Τύποι τῆς ὁμαλά ἐπιταχυνομένης κινήσεως

α/α	Τύπος	Μέγεθος
1	$\upsilon = \upsilon_o \pm \gamma t$	υ = ταχύτητα στό χρόνο t
2	$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2_o \pm 2\gamma s}$	υ_o = ταχύτητα στό χρόνο 0
3	$s = \upsilon_o t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$	
4	$s = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon^2_o}{\pm 2\gamma}$	γ = ἐπιτάχυνση (θετική-ἀρνητική)
5	$t_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\upsilon_o}{\gamma}$	s = διάστημα πού διανύεται σέ χρόνο t
6	$s_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\upsilon^2_o}{\pm 2\gamma}$	



Σχ. 1·1 ιη.

γιά νά διανυθεῖ τό διάστημα ΓΔ, γιατί οἱ ὑπόλοιποι χρόνοι t_1 καί t_2 δίνονται.

— **Ὑπολογισμός χρόνου t_3.**

Ὁ χρόνος t_3 εἶναι ὁ μέγιστος χρόνος γιά τό διάστημα ΓΔ καί ὑπολογίζεται ἀπό τόν τύπο:

$$t_3 = \frac{\upsilon_\Gamma}{\gamma_3} \qquad (1)$$

ὅπου: υ_Γ ἡ ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει τό κινητό στό Γ καί ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ τήν ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει τό κινητό στό **Β**, γιατί ἡ κίνηση ἀπό τό **Β** μέχρι τό **Γ** εἶναι ἰσοταχής. Ἐπειδή ἡ κίνηση στό διάστημα ΑΔ εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνομένη χωρίς ἀρχική ταχύτητα, ἡ ταχύτητα υ_B ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_B = \gamma_1\, t_1 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) ὑπολογίζεται ὁ χρόνος t_3:

$$t_3 = \frac{\gamma_1\, t_1}{\gamma_3} \qquad (3)$$

Ἑπομένως, ὁ συνολικός χρόνος εἶναι:

$$t = t_1 + t_2 + \frac{\gamma_1\, t_1}{\gamma_3}$$

— **Ὑπολογισμός διαστήματος.** Τό συνολικό διάστημα ὑπολογίζεται σάν ἄθροισμα τῶν τριῶν διαστημάτων:

$s_1 = AB$, $s_2 = B\Gamma$ καί $s_3 = \Gamma\Delta$

$$\boxed{s = s_1 + s_2 + s_3} \qquad (4)$$

Στό διάστημα s_1 ἔχουμε ὁμαλά ἐπιταχυνομένη κίνηση χωρίς ἀρχική ταχύτητα, ἑπομένως:

$$s_1 = \frac{1}{2}\gamma_1\, t^2{}_1 \qquad (5)$$

Τό κινητό στό **Β** θ' ἀποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon_B = \gamma_1\, t_1 \qquad (6)$$

Στό διάστημα s_2 ἡ κίνηση εἶναι ἰσοταχής μέ ταχύτητα τήν υ_B. Ἑπομένως:

$$s_2 = \upsilon_B\, t_2 \qquad (7)$$

Ἀπό τίς (6) καί (7) προκύπτει ὅτι:

$$\boxed{s_2 = \gamma_1 \, t_1 \, t_2} \qquad (8)$$

Στό διάστημα s_3 ἡ κίνηση εἶναι ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη μέ ἐπιβράδυνση γ_3. Ἐπειδή τό κινητό θά σταματήσει στό Δ, τό διάστημα s_3 εἶναι μέγιστο διάστημα μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_\Gamma = \upsilon_B$ καί παρέχεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$s_3 = \frac{\upsilon^2{}_\Gamma}{2\,\gamma_3} \qquad (9)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (9) παίρνουμε:

$$s_3 = \frac{\gamma^2{}_1 \, t^2{}_1}{2\,\gamma_3} \qquad (10)$$

Τό συνολικό διάστημα εἶναι:

$$s = \frac{1}{2}\,\gamma_1\, t^2{}_1 + \gamma_1\, t_1\, t_2 + \frac{\gamma^2{}_1\, t^2{}_1}{2\,\gamma_3}.$$

— **Γραφικές παραστάσεις.** Πιό κάτω δίνονται οἱ ζητούμενες γραφικές παραστάσεις.

Γραφική παράσταση μεταβολῆς τῆς ταχύτητας σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο (σχ. 1·1 ιθ).

Γραφική παράσταση ἐπιταχύνσεως σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο (σχ. 1·1 κ).

2. Ἕνα κινητό ἔχει εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιταχυνομένη κίνηση μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Ἡ ἀρχική του ταχύτητα εἶναι $\upsilon_o = 50\ \mathrm{m/s}$; Πόση ταχύτητα θ' ἀποκτήσει, ὅταν διανύσει διάστημα $s = 400\ \mathrm{m}$;

Λύση:

Ὁ ὑπολογισμός τῆς ταχύτητας γίνεται μέ ἁπλή ἀντικατάσταση στή σχέση: $\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_o + 2\,\gamma s}$

Ἔχουμε:

$$\upsilon = \sqrt{50^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 2\cdot 10\cdot 400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot \mathrm{m}} = 102\ \mathrm{m/s}.$$

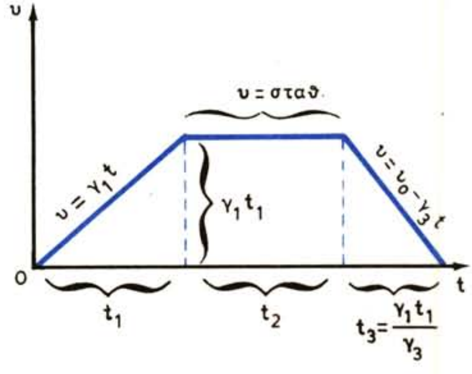
Ἀπάντηση: Θά ἀποκτήσει ταχύτητα 102 m/s.

β) ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ.

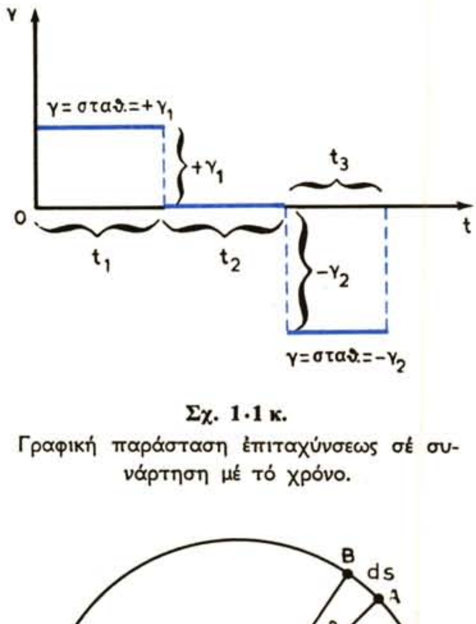
Κυκλική κίνηση ὀνομάζεται ἡ κίνηση κινητοῦ σέ περιφέρεια κύκλου.

1) **Γωνιακή ταχύτητα.**

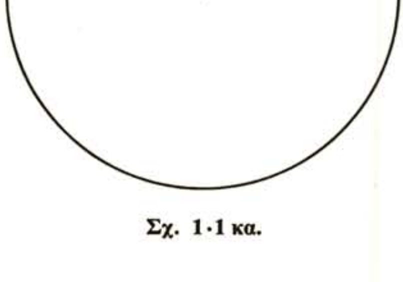
Στό σχῆμα 1·1 κα τό κινητό κινεῖται ἀπό τό ση-



Σχ. 1·1 ιθ.
Γραφική παράσταση τῆς ταχύτητας σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.



Σχ. 1·1 κ.
Γραφική παράσταση ἐπιταχύνσεως σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.



Σχ. 1·1 κα.

μεῖο Α στό Β καί διανύει σέ ἀπειροστό χρόνο dt τόξο ds. Ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία τοῦ τόξου ds εἶναι dφ.

Ὁρίζεται σάν γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ἕνα διανυσματικό μέγεθος πού ἔχει (σχ. 1·1 κβ).

— **Διεύθυνση** κάθετη στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου.

— **Φορά** πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα τοῦ **δεξιόστροφου κοχλία,** ὁ ὁποῖος διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: Τοποθετοῦμε ἕνα δεξιόστροφο κοχλία κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου καί τόν στρέφουμε πρός τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ, πάνω στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ἡ φορά, πρός τήν ὁποία θά προχωρήσει ὁ ἄξονας τοῦ κοχλία, θά εἶναι ἡ φορά τῆς γωνιακῆς ταχύτητας.

— **Μέτρο** τό πηλίκον τῆς γωνίας dφ διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου dt:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

α) **Μονάδα τῆς γωνιακῆς ταχύτητας.** Ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς γωνίας εἶναι τό ἀκτίνιο (rad) καί τοῦ χρόνου τό s. Ἑπομένως, ἡ μονάδα τῆς γωνιακῆς ταχύτητας θά εἶναι:

$$\omega = \frac{1\ rad}{1\ s} = 1\ rad/s$$

Σημείωση : Ἡ μονάδα rad δέν ἀνήκει σέ κανένα σύστημα, γιατί ἡ γωνία εἶναι μέγεθος μέ μηδενικές διαστάσεις. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ μονάδα τῆς γωνιακῆς ταχύτητας μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$1\ \frac{rad}{s} = 1/s = s^{-1}$$

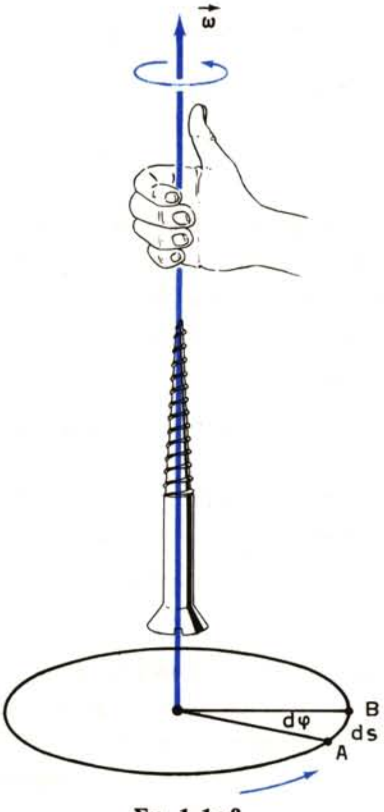
β) **Σχέση γραμμικῆς καί γωνιακῆς ταχύτητας.** Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς γωνίας ἔχουμε:

$$d\varphi = \frac{ds}{r} \quad \text{ἤ} \quad ds = r\,d\varphi \qquad (1)$$

Ἄν διαιρέσουμε τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) μέ τό χρόνο dt θά βροῦμε:

$$\frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\varphi}{dt} \qquad (2)$$

ἀλλά $\frac{ds}{dt}$ ἰσοῦται μέ τή γραμμική ταχύτητα υ καί τό



Σχ. 1·1 κβ.

$\frac{d\varphi}{dt}$ μέ τή γωνιακή ταχύτητα ω.

Ἑπομένως ἡ (2) γίνεται:

$$\boxed{\upsilon = \omega r}$$

Ἐφαρμογή. Κινητό κινεῖται σέ περιφέρεια κύκλου ἀκτίνας $r = 10$ m καί κάποια στιγμή ἔχει γραμμική ταχύτητα 20 m/s. Νά βρεθεῖ ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ἐκείνη τή στιγμή.

Λύση:

$$\upsilon = \omega r \quad \text{ἄρα} \quad \omega = \frac{\upsilon}{r} \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές τοῦ προβλήματος στήν (1) καί ἔχουμε:

$$\omega = \frac{20 \text{ m/s}}{10 \text{ m}} = 2 \text{ s}^{-1} = 2 \text{ rad/s}$$

2) **Ὁμαλή κυκλική κίνηση.**

Μία κυκλική κίνηση λέγεται **ὁμαλή,** ὅταν τό μέτρο τῆς στιγμιαίας γωνιακῆς ταχύτητας εἶναι σταθερό.

Ἀπό τή σχέση $\upsilon = \omega r$ συμπεραίνεται ὅτι καί τό μέτρο τῆς στιγμιαίας γραμμικῆς ταχύτητας εἶναι σταθερό.

α) **Μέση γωνιακή ταχύτητα.** Ὀνομάζουμε μέση γωνιακή ταχύτητα $\overline{\omega}$ τό πηλίκον τῆς γωνίας φ, πού ἀντιστοιχεῖ στό τόξο πού διαγράφει κινητό κινούμενο σέ περιφέρεια κύκλου, διά τοῦ χρόνου t:

$$\overline{\omega} = \frac{\varphi}{t}$$

Στήν περίπτωση τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως ἡ μέση γωνιακή ταχύτητα καί ἡ στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα συμπίπτουν, δηλαδή:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi}{t} = \overline{\omega}$$

Μποροῦμε ἐπομένως νά μετρήσουμε τή γωνία φ πού διαγράφει τό κινητό σέ χρόνο t, νά τή διαιρέσουμε μέ τό χρόνο αὐτό καί νά βροῦμε ἔτσι τή γωνιακή ταχύτητα.

β) **Σημασία τῆς κυκλικῆς κινήσεως.** Σέ μεγάλο πλῆθος πρακτικῶν ἐφαρμογῶν ἡ κυκλική κίνηση παίζει σπουδαῖο ρόλο.

Ἀπό τή ρόδα τοῦ ποδηλάτου ὥς τήν κίνηση τῶν δορυφόρων γύρω ἀπό τή Γῆ, συναντᾶμε συνέχεια κυκλικές κινήσεις, πού ὅλες ἔχουν πρακτική σημασία. Τό σημαντικό στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση εἶναι ὅτι ἡ κίνηση αὐτή εἶναι **περιοδική** καί μάλιστα εἶναι τό πρῶτο περιοδικό φαινόμενο πού παρατήρησε ὁ ἄνθρωπος στήν ἡμερήσια κίνηση τῶν οὐρανίων σωμάτων.

Γενικότερα ἕνα φαινόμενο λέγεται **περιοδικό,** ὅταν **ἐπαναλαμβάνεται** σέ σταθερό χρόνο. Ὁ χρόνος αὐτός ὀνομάζεται **περίοδος.**

γ) **Περίοδος κυκλικῆς κινήσεως** (συμβολισμός **T**). Ὀνομάζεται περίοδος ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως **ὁ χρόνος πού χρειάζεται τό κινητό γιά νά κάνει μιά πλήρη περιστροφή στόν κύκλο.**

Ἡ περίοδος συμβολίζεται μέ τό γράμμα T καί, ὅπως εἶναι φυσικό, οἱ μονάδες μετρήσεώς της εἶναι οἱ μονάδες μετρήσεως τοῦ χρόνου.

δ) **Συχνότητα κυκλικῆς κινήσεως.** Ὀνομάζεται συχνότητα τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως ὁ ἀριθμός τῶν περιστροφῶν στή μονάδα τοῦ χρόνου.

Συμβολίζεται συνήθως μέ τό γράμμα ν καί ἔχει μονάδα μετρήσεως:

$$\nu = \frac{\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma}{\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\alpha\ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon} = \frac{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\iota}{s} = c/s = s^{-1}$$

Ἡ μονάδα αὐτή λέγεται καί **Hz (Hertz)**. Πολλαπλάσιες αὐτῆς εἶναι οἱ μονάδες: kHz, MHz καί GHz.

Ἡ συχνότητα παραμένει σταθερή στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση.

ε) **Σχέση περιόδου καί συχνότητας.** Γιά νά βροῦμε τή σχέση τῶν μεγεθῶν αὐτῶν, θά κάνουμε τόν παρακάτω ἁπλό συλλογισμό:

Σέ χρόνο T ἐκτελεῖται 1 περιστροφή.

Σέ χρόνο 1 s ἐκτελοῦνται ν περιστροφές.

Ἄρα:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

Ἡ περίοδος ἑπομένως καί ἡ συχνότητα εἶναι ἀντίστροφα μεγέθη.

στ) **Σχέση γωνιακῆς ταχύτητας καί περιόδου.** Ἄν στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση θεωρήσουμε ὅτι τό κινητό διαγράφει τόξο 360° ἤ 2π rad, ὁ χρόνος κατά τόν ὁποῖο τό διαγράφει θά εἶναι ἡ περίοδος T.

Ἑπομένως ἡ γωνιακή ταχύτητα ω θά εἶναι:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Ἐπειδή $1/T = \nu$ ἔχουμε:

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

Ἐφαρμογή. Κινητό κινεῖται σέ κυκλική τροχιά ἀκτίνας $r = 50$ m μέ ὁμαλή κίνηση συχνότητας $\nu = 10$ Hz. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γραμμική ταχύτητα.

Λύση:

Ἀπό τούς τύπους: $\upsilon = \omega r$ καί $\omega = 2\pi\nu$ ἔχουμε:

$$\upsilon = 2\pi\nu r$$

Ἀντικαθιστοῦμε:

$$\upsilon = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10\ \text{s}^{-1} \cdot 50\ \text{m} = 3\,140\ \text{m/s}.$$

Ἀπάντηση: Ἡ γραμμική ταχύτητα τοῦ κινητοῦ θά εἶναι 3140 m/s.

3) **Κεντρομόλος ἐπιτάχυνση στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση.**

Θά πρέπει νά θυμηθοῦμε ὅτι, ὅταν ἡ ταχύτητα ἑνός κινητοῦ μεταβάλλεται, τότε ἔχουμε ἐπιτάχυνση. Ἀλλά ἡ ταχύτητα εἶναι διάνυσμα καί μεταβάλλεται ὄχι μόνο ἄν ἀλλάζει τό μέτρο, ἀλλά καί ὅταν ἀλλάζει ἡ διεύθυνση ἤ ἡ φορά της.

Εἰδικά στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ παραμένει σταθερό, δηλαδή:

$$\upsilon_A = \upsilon_B$$

Τό διάνυσμα ὅμως τῆς ταχύτητας μεταβάλλεται δηλαδή:

$$\vec{\upsilon}_A \neq \vec{\upsilon}_B$$

Ἑπομένως στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση **ὑπάρχει ἐπιτάχυνση.**

Ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι ἕνα διάνυσμα $\vec{\gamma_\kappa}$ (σχ. 1·1 κγ), τό ὁποῖο εἶναι κάθετο στήν ταχύτητα $\vec{\upsilon_A}$ στό σημεῖο Α, ἄρα ἔχει διεύθυνση τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου καί ἡ φορά του εἶναι πρός τό **κέντρο τοῦ κύκλου.** Γι' αὐτό ὀνομάζεται **κεντρομόλος ἐπιτάχυνση.** Αὐτή ἔχει μέτρο:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}$$

ὅπου: υ ἡ γραμμική ταχύτητα ($\upsilon = \upsilon_A = \upsilon_B$) καί r ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξη τῶν ἰδιοτήτων τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως. Ἔστω ὅτι ἕνα κινητό κινεῖται ὁμαλά στήν περιφέρεια τοῦ σχήματος 1·1 κγ (α) καί σέ ἀπειροστό χρόνο dt διανύει διάστημα ds = AB.

Στό χρόνο αὐτό ἡ ἀκτίνα r, πού συνδέει τό κέντρο τοῦ κύκλου μέ τήν περιφέρεια, μετακινήθηκε κατά τή γωνία dφ καί τό διάνυσμα τῆς ταχύτητας μεταβλήθηκε ἀπό $\vec{\upsilon_A}$ σέ $\vec{\upsilon_B}$.

Ὑπάρχει ἑπομένως διαφορά ταχυτήτων καί αὐτή εἶναι τό διάνυσμα $\vec{A'B'} = \vec{d\upsilon}$:

$$\vec{d\upsilon} = \vec{\upsilon_B} - \vec{\upsilon_A}$$

Ἀπό τό γενικό ὁρισμό τῆς ἐπιταχύνσεως ἔχουμε:

$$\text{Ἐπιτάχυνση} = \frac{\text{Διαφορά ταχυτήτων}}{\text{Χρόνος πού πέρασε}} \quad \text{ἤ}$$

$$\vec{\gamma_\kappa} = \frac{\vec{d\upsilon}}{dt}$$

Συμπέρασμα: Στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ὑπάρχει ἐπιτάχυνση.

Ἐπειδή ἡ ἐπιτάχυνση αὐτή εἶναι διάνυσμα, πρέπει νά ὑπολογίσουμε τά στοιχεῖα της (δηλαδή τή διεύθυνση, τή φορά καί τό μέτρο).

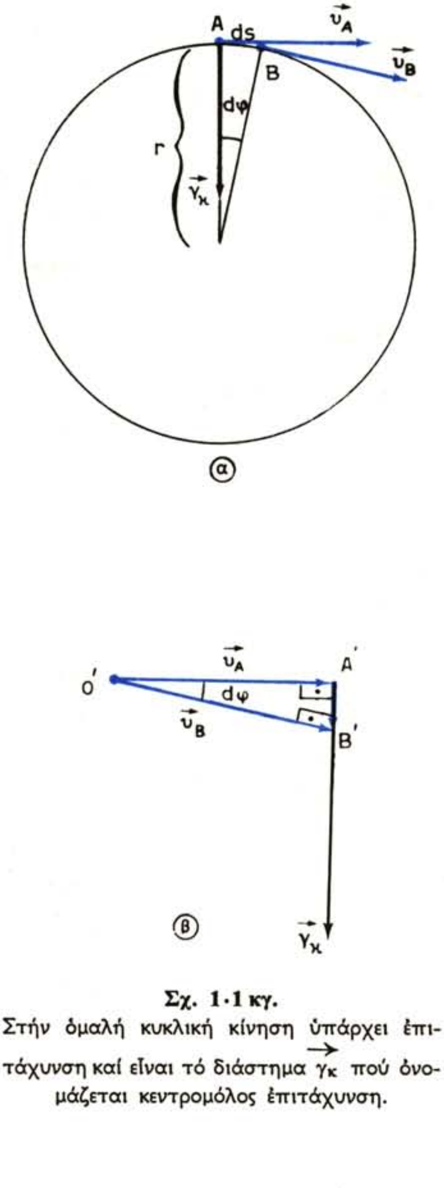
Διεύθυνση: Τό τρίγωνο Ο'Α'Β' τοῦ σχήματος 1·1 κγ (β) εἶναι ἰσοσκελές, γιατί $O'A' = O'B'$.

Ἑπομένως οἱ γωνίες $O'\widehat{A'}B'$ καί $O'\widehat{B'}A'$ εἶναι ἴσες.

Τό ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι 180°.

$$A'\widehat{O'}B' + O'\widehat{A'}B' + O'\widehat{B'}A' = 180°$$

Ἀλλά ἡ $A'\widehat{O'}B' = d\varphi$ καί ἡ γωνία dφ εἶναι πάρα



Σχ. 1·1 κγ.
Στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ὑπάρχει ἐπιτάχυνση καί εἶναι τό διάστημα $\vec{\gamma_\kappa}$ πού ὀνομάζεται κεντρομόλος ἐπιτάχυνση.

πολύ μικρή (ἀμελητέα). Μπορεῖ ἑπομένως νά θεωρηθεῖ ὅτι $A'\widehat{O'}B' = 0$, ὁπότε $O'\widehat{A'}B' + O'\widehat{B'}A' = 180°$.

Ἐπειδή $O'\widehat{A'}B' = O'\widehat{B'}A'$, θά ἔχουμε $O'\widehat{A'}B' = 180°$ ἤ $O'\widehat{A'}B' = 90°$. Ἑπομένως ἡ διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_\kappa$ εἶναι κάθετη πρός τό διάνυσμα τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$.

Φορά: Ἡ φορά τῆς ἐπιταχύνσεως συμπίπτει μέ τή φορά τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ταχυτήτων, δηλαδή μέ τήν $\vec{d\upsilon}$, πού εἶναι ἀπό τήν περιφέρεια πρός τό κέντρο.

Μέτρο: Ἀπό τήν σχέση $\vec{\gamma}_\kappa = \dfrac{\vec{A'B'}}{dt}$ ἔχομε γιά τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως:

$$\gamma_\kappa = \frac{A'B'}{dt} \qquad (1)$$

Στό τρίγωνο $O'A'B'$ ἡ πλευρά $A'B'$ εἶναι ἡ χορδή τοῦ τόξου $\widehat{A'B'}$, τό ὁποῖο κατασκευάζεται μέ κέντρο τό O' καί ἀκτίνα τήν $O'A' = \upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon$. Ὅμως ἡ γωνία $d\varphi$ εἶναι πάρα πολύ μικρή. Ἑπομένως ἡ χορδή $A'B'$ καί τό τόξο $A'B'$ συμπίπτουν.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς γωνίας ἔχουμε:

$$d\varphi = \frac{(A'B')}{(O'A')} \text{ καί } (A'B') = (O'A')\, d\varphi = \upsilon d\varphi \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) ἔχουμε:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon\, d\varphi}{dt} \qquad (3)$$

Ἀλλά $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$ καί $\omega = \dfrac{\upsilon}{r}$, δηλαδή:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon}{r} \qquad (4)$$

Ἀπό τίς (3) καί (4) ἔχουμε:

$$\boxed{\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}} \qquad (5)$$

— **Ἄλλες μορφές στόν τύπο τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως.** Ἔστω ὅτι κινητό κινεῖται ὁμαλά στήν

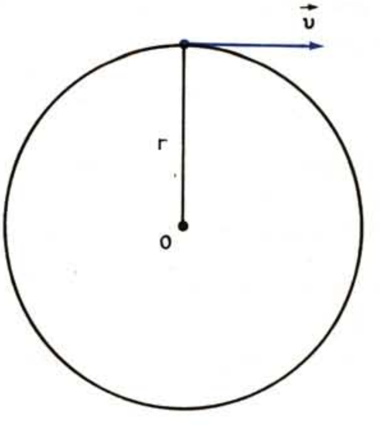
ΠΙΝΑΚΑΣ 1·1·2

Τύποι στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση

α/α	Τύπος	Μέγεθος
1	$\upsilon = \omega r$	υ = γραμμική ταχύτητα
2	$T = \dfrac{1}{\nu}$	ω = γωνιακή ταχύτητα
3	$\omega = 2\pi\nu$	ν = συχνότητα
4	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	T = περίοδος
5	$\upsilon = 2\pi\nu r$	r = ἀκτίνα κύκλου
6	$\upsilon = \dfrac{2\pi}{T} r$	γ_κ = κεντρομόλος ἐπιτάχυνση
7	$\gamma_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{r}$	
8	$\gamma_\kappa = \omega^2 r$	
9	$\gamma_\kappa = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r$	
10	$\gamma_\kappa = 4\pi^2\nu^2 r$	

περιφέρεια κύκλου (Ο, r) τοῦ σχήματος 1 · 1 κδ.

Παριστάνουμε μέ υ τή γραμμική του ταχύτητα, μέ Τ τήν περίοδο μέ ν τή συχνότητα, μέ ω τή γωνιακή του ταχύτητα καί μέ γ_κ τήν κεντρομόλο του ἐπιτάχυνση.



Σχ. 1·1 κδ.

Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση, σύμφωνα μέ ὅσα γνωρίσαμε παραπάνω, εἶναι:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} \qquad (1)$$

Ἀλλά:

$$\upsilon = \omega r \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\gamma_\kappa = \omega^2 r \qquad (3)$$

Ἐπίσης $\omega = 2\pi\,\nu$ καί $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ (4)

Ἀπό τίς (3) καί (4) προκύπτει:

$$\boxed{\gamma_\kappa = 4\,\pi^2\,\nu^2\,r} \qquad (5)$$

$$\boxed{\gamma_\kappa = \frac{4\,\pi^2}{T^2}\,r} \qquad (6)$$

4) Γωνιακή ἐπιτάχυνση.

Ἄν ἡ κυκλική κίνηση δέν εἶναι ὁμαλή, τότε ὑπάρχει μεταβολή τοῦ μέτρου τῆς γωνιακῆς ταχύτητας. **Ὁρίζουμε σάν γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\alpha}$ ἕνα διάνυσμα, πού τό μέτρο του εἶναι τό πηλίκον τῆς μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητας dω, διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου dt :**

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$

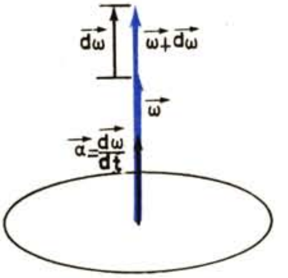
Μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση $\bar{\alpha}$ ὁρίζεται τό πηλίκον τῆς ὁποιασδήποτε μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητας Δω διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου :

$$\boxed{\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

Ἄν ἡ κυκλική κίνηση εἶναι ὁμαλά μεταβαλλομένη, ἡ στιγμιαία καί ἡ μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση συμπίπτουν:

$$\bar{a} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = a$$

Σημείωση: Ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση εἶναι διάνυσμα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως μέ τήν γωνιακή ταχύτητα, ἀλλά ἡ φορά του συμπίπτει μέ τό διάνυσμα τῆς μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\overrightarrow{d\omega}$ (ὅπως φαίνεται στό ἀπέναντι σχῆμα).



α) **Μονάδες γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως.** Ἀπό τόν τύπο $\alpha = \frac{\omega}{t}$ ὑπολογίζουμε τή μονάδα τῆς ἐπιταχύνσεως. Ἀντικαθιστοῦμε $\omega = 1$ rad/s καί $t = 1$ s.

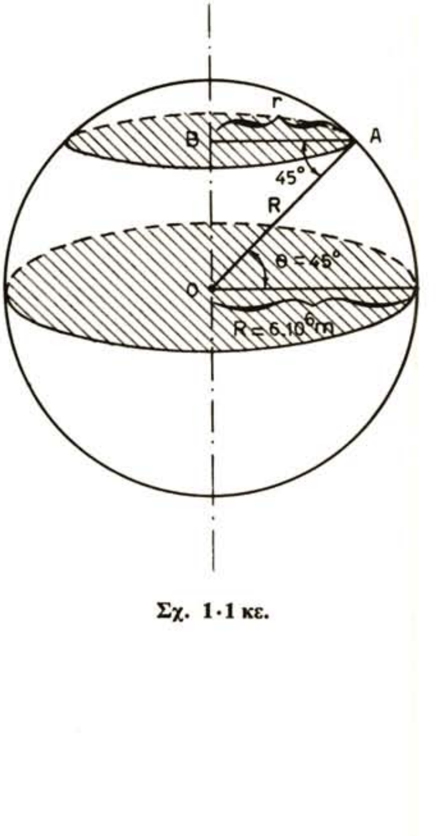
$$a = \frac{1\ rad/s}{1\ s} = 1\ rad/s^2$$

β) **Ἐφαρμογή.**

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γραμμική ταχύτητα καί ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση τῶν κατοίκων τοῦ Παρισιοῦ, πού ὀφείλονται στήν περιστροφική κίνηση τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της. Δίνονται τά ἑξῆς στοιχεῖα:

α) Τό Παρίσι βρίσκεται σέ γεωγραφικό πλάτος 45°.

β) Ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς εἶναι περίπου 6.10^6 m (σχ. 1 · 1 κε).



Σχ. 1·1 κε.

Λύση:

Εἶναι γνωστό, ὅτι ἡ Γῆ κάνει μιά πλήρη περιστροφή σέ χρόνο 24 h. Ἑπομένως, ὁ κάτοικος τοῦ Παρισιοῦ, πού στό σχῆμα βρίσκεται στή θέση A, κάνει ὁμαλή κυκλική κίνηση στόν παράλληλο κύκλο (B, r) μέ περίοδο περιστροφῆς $T = 24$ h.

— **Ὑπολογισμός τῆς γραμμικῆς ταχύτητας.** Ἀπό τόν τύπο $\upsilon_A = \frac{2\pi}{T} r$ (1) ὑπολογίζεται ἡ ταχύτητα, ἄν εἶναι γνωστά τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα.

$$T = 24\ h = 24 \cdot 3600\ s = 86\,400\ s.$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο OBA ἔχουμε:

$$(BA) = (OA)\ \text{συν}\ 45^\circ$$

ἤ $$r = R\ \text{συν}\ 45^\circ = 6 \cdot 10^6\ m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}2.10^6\ m.$$

Μέ ἀντικατάσταση στόν τύπο (1) ὑπολογίζουμε τήν $υ_A$.

$$υ_A = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}2 \cdot 10^6 \text{ m}}{86.400 \text{ s}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}2 \cdot 10^6}{8{,}64 \cdot 10^4} \text{ m/s} \simeq 300 \text{ m/s}.$$

— **Ὑπολογισμός κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως.** Ἀπό τόν τύπο $γ_κ = \frac{υ^2}{r}$ ὑπολογίζεται ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση τοῦ σημείου Α:

$$γ_κ = \frac{300^2 \text{ m/s}^2}{4{,}2 \cdot 10^6 \text{ m}} \simeq 0{,}021 \text{ m/s}^2.$$

5) **Τυχούσα καμπυλόγραμμη κίνηση.**

Ἐάν ἕνα κινητό ἐκτελεῖ τυχούσα καμπυλόγραμμη κίνηση, ἡ στιγμιαία ταχύτητα μεταβάλλεται ὄχι μόνο κατά τή διεύθυνση ἀλλά καί κατά τό μέτρο.

Στό σχῆμα 1·1 κστ ἡ στιγμιαία ταχύτητα στό Β διαφέρει ἀπό τήν ἀντίστοιχη ταχύτητα στό Α τόσο στή διεύθυνση ὅσο καί στό μέτρο. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ στιγμιαία ἐπιτάχυνση $\vec{γ}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα, τό ὁποῖο καί ἐδῶ δίνεται ἀπό τήν σχέση:

$$\vec{γ} = \frac{\vec{υ_B} - \vec{υ_A}}{dt}$$

Αὐτό τό διάνυσμα $\vec{γ}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν τό ἄθροισμα δύο διανυσμάτων, τοῦ $\vec{γ_κ}$ καί τοῦ $\vec{γ_ε}$.

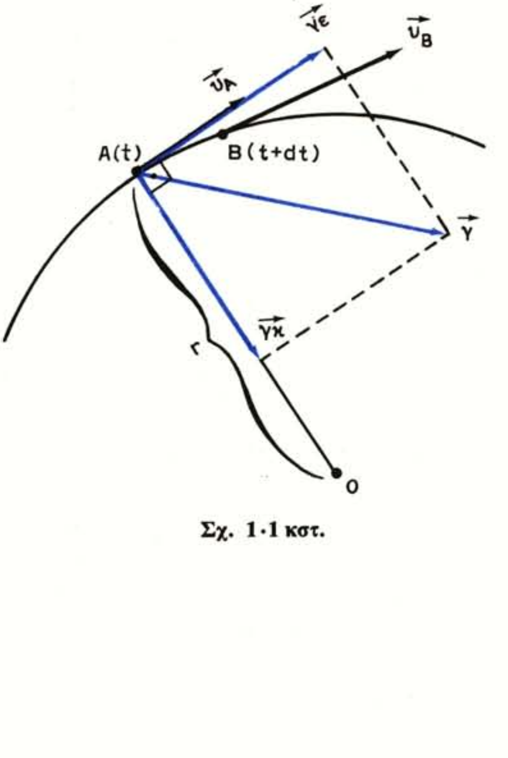
Τό διάνυσμα $\vec{γ_κ}$ εἶναι κάθετο στήν ταχύτητα, ὀνομάζεται **κεντρομόλος ἐπιτάχυνση** καί ἔχει μέτρο:

$$γ_κ = \frac{υ^2{}_A}{r}$$

ὅπου: r εἶναι ἡ **ἀκτίνα καμπυλότητας** σ' αὐτό τό σημεῖο τῆς καμπύλης.

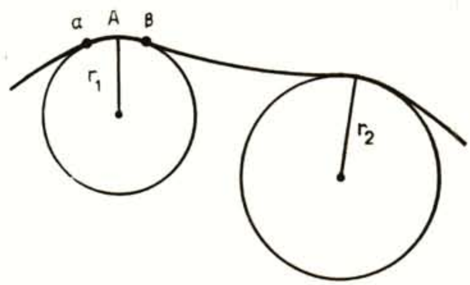
Τό διάνυσμα $\vec{γ_ε}$ συμπίπτει μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς, ὀνομάζεται **ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνση** καί τό μέτρο της ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῆς μεταβολῆς τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας, διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου:

$$γ_ε = \frac{υ_B - υ_A}{dt}$$



Σχ. 1·1 κστ.

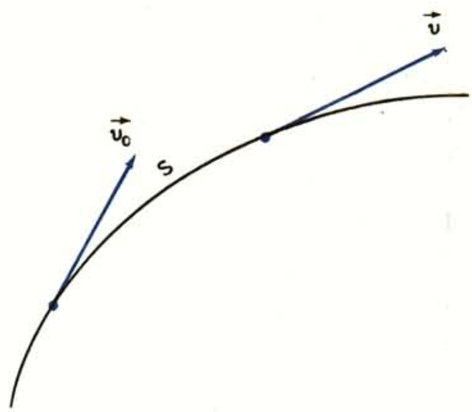
α) **Τί εἶναι ἀκτίνα καμπυλότητας μιᾶς καμπύλης σέ κάποιο σημεῖο της.** Ἔστω τό σημεῖο A τῆς καμπύλης. Παίρνουμε τό στοιχειῶδες τόξο αβ στό σημεῖο A. Θεωροῦμε ὅτι τό τόξο αὐτό εἶναι τόξο ἑνός κύκλου ἀκτίνας r_1. Ἡ ἀκτίνα αὐτή εἶναι ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας στό σημεῖο A τῆς καμπύλης. Σέ ἄλλο σημεῖο B τῆς ἴδιας καμπύλης, ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας ἔχει κάποια ἄλλη τιμή r_2, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα.



Σχ. 1·1 κζ.

Ἄν ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας μιᾶς καμπύλης σέ ὅλα της τά σημεῖα ἔχει σταθερή τιμή, ἡ καμπύλη αὐτή εἶναι κύκλος. Στό σχῆμα 1 · 1 κζ σημειώνονται ἀκτίνες καμπυλότητας r_1 καί r_2 σέ σημεῖα μιᾶς καμπύλης.

β) **Ὁμαλά μεταβαλλομένη καμπυλόγραμμη κίνηση.** Ἄν σέ μιά καμπυλόγραμμη κίνηση ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση ἔχει σταθερό μέτρο, τότε ἡ κίνηση αὐτή ὀνομάζεται ὁμαλά μεταβαλλομένη (ἐπιταχυνομένη ἤ ἐπιβραδυνομένη) καί ἰσχύουν οἱ ἴδιοι τύποι πού χρησιμοποιοῦνται στήν εὐθύγραμμη ὁμαλά μεταβαλλομένη κίνηση (σχ. 1 · 1 κη).



Σχ. 1·1 κη.

Οἱ τύποι αὐτοί εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_o \pm \gamma_\varepsilon t$$

$$s = \upsilon_o t \pm \frac{1}{2} \gamma_\varepsilon t^2$$

ὅπου: γ_ε εἶναι ἡ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνση καί t ὁ χρόνος κινήσεως.

γ) ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

Ἄν ἕνα ὑλικό σημεῖο κάνει περισσότερες ἀπό μιά ταυτόχρονες κινήσεις, λέμε ὅτι κάνει **σύνθετη κίνηση.** Τό βασικό πρόβλημα στήν περίπτωση αὐτή εἶναι ἡ ἐξεύρεση τῆς συνισταμένης κινήσεως, ὅταν γνωρίζουμε τίς μερικές κινήσεις.

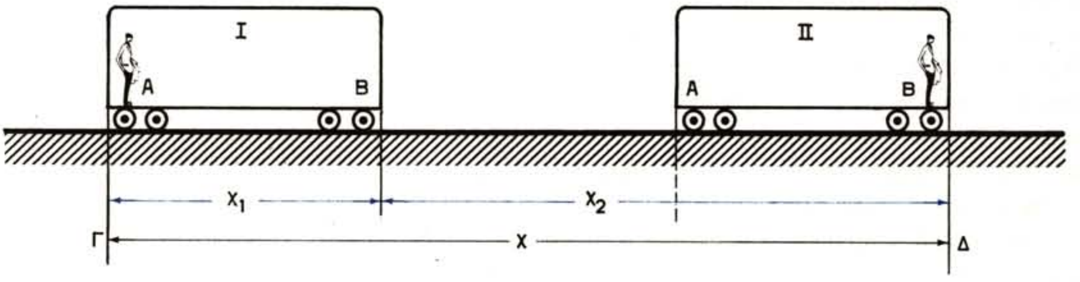
Ἄς δοῦμε ὅμως ἐνδεικτικά τρία παραδείγματα σύνθετων κινήσεων.

— Ἕνας ἄνθρωπος κινεῖται μέσα σέ ἕνα τραῖνο πού τρέχει. Ἡ κίνηση τοῦ ἀνθρώπου εἶναι σύνθετη καί εἶναι ἀποτέλεσμα τῶν δύο μερικῶν κινήσεων, δηλαδή τῆς δικῆς του καί τοῦ τραίνου.

— Τό ἔμβολο μιᾶς μηχανῆς κινεῖται, ἐνῶ τό αὐτοκίνητο τρέχει. Ἡ κίνηση τοῦ ἐμβόλου εἶναι σύνθετη.

— Κάθετα πρός τή ροή τοῦ ποταμοῦ κινεῖται μιά βάρκα. Ἡ κίνηση τῆς βάρκας εἶναι σύνθετη.

1) **Σύνθεση εὐθύγραμμων κινήσεων τῆς ἴδιας φο-**



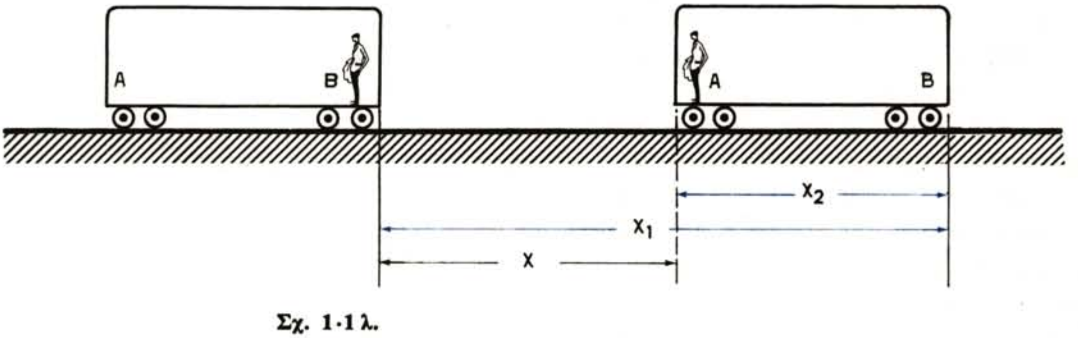
Σχ. 1·1 κθ.

ρᾶς. Ἔστω ὅτι τό βαγόνι τοῦ τραίνου (σχ. 1 · 1 κθ) μετακινεῖται μεταξύ τῶν δύο θέσεων I καί II καί ὁ ἄνθρωπος ἀπό τή θέση A μετακινεῖται στή θέση B, καθώς τό τραῖνο τρέχει. Ἡ σύνθετη κίνηση τοῦ ἀνθρώπου εἶναι ἡ κίνηση στό εὐθύγραμμο διάστημα ΓΔ, τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ἄθροισμα τῶν διαστημάτων x_1 καί x_2:

$$x = x_1 + x_2$$

ὅπου: x_1 καί x_2 εἶναι τά ἀντίστοιχα διαστήματα πού διάνυσαν ἀνεξάρτητα ὁ ἄνθρωπος καί τό τραῖνο.

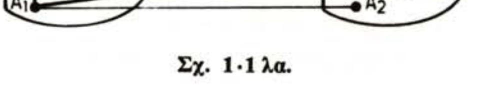
2) **Σύνθεση κινήσεων ἀντίθετης φορᾶς.** Ἄν ἡ κίνηση τοῦ ἀνθρώπου ἦταν ἀπό τό B πρός τό A, δηλαδή ἀντίθετη μέ τήν κίνηση τοῦ βαγονιοῦ, τότε τό διάστημα πού διανύεται στή σύνθετη κίνηση θά εἶναι ἡ διαφορά τῶν μερικῶν διαστημάτων, πού διατρέχουν τό βαγόνι καί ὁ ἄνθρωπος (σχ. 1 · 1 λ).



Σχ. 1·1 λ.

3) **Σύνθεση κάθετων κινήσεων.** Ἔστω ὅτι μιά βάρκα Σ παρασύρεται ἀπό τό ρεῦμα ἑνός ποταμοῦ πρός τή διεύθυνση A_1 A_2 (σχ. 1 · 1 λα).

Πάνω στή βάρκα βρίσκεται ἕνας ἄνθρωπος, ὁ ὁποῖος βαδίζει κατά τή διεύθυνση A_1 B_1, πού εἶναι κάθετη πρός τήν A_1 A_2.



Σχ. 1·1 λα.

Ἔστω ὅτι σέ χρόνο t ἡ βάρκα θά διατρέξει τό διάστημα $A_1 A_2$ καί ὁ ἄνθρωπος κάνοντας μόνο τή δική του κίνηση στόν ἴδιο χρόνο θά μετακινηθεῖ ἀπό τή θέση A_1 στή B_1. Ὅταν οἱ κινήσεις γίνουν ταυτόχρονα, ἡ τελική θέση τοῦ ἀνθρώπου θά εἶναι ἡ τέταρτη κορυφή B_2 τοῦ παραλληλογράμμου, τό ὁποῖο ὁρίζεται ἀπό τήν ἀρχική θέση τοῦ ἀνθρώπου A_1 καί τά τέρματα A_2 καί B_1 τῶν δύο κινήσεων.

Ἄν οἱ δυό ἀνεξάρτητες κινήσεις εἶναι ἰσοταχεῖς, τότε καί ἡ συνισταμένη κίνηση $A_1 B_2$ θά εἶναι ἰσοταχής. Ἄν ὅμως ἡ μία τουλάχιστον κίνηση δέν εἶναι ἰσοταχής, ἡ τροχιά $A_1 B_2$ θά εἶναι καμπυλόγραμμη.

4) **Ἀρχή τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων.** Στό τελευταῖο παράδειγμα διαπιστώνουμε ὅτι ἡ μετακίνηση τοῦ ἀνθρώπου ἀπό τό A_1 στό B_2 μπορεῖ νά γίνει μέ τρεῖς τρόπους.

α) Νά μετακινηθεῖ ἡ βάρκα ἀπό τό A_1 στό A_2 καί στή συνέχεια ὁ ἄνθρωπος ἀπό τό A_2 στό B_2.

β) Νά μετακινηθεῖ πρῶτα ὁ ἄνθρωπος ἀπό τό A_1 στό B_1 καί στή συνέχεια ἡ βάρκα ἀπό τό B_1 στό B_2.

γ) Νά γίνουν ταυτόχρονα καί οἱ δυό κινήσεις, ὁπότε θά ἔχουμε τή μετακίνηση $A_1 B_2$ κατευθείαν.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνεται ὅτι ὑπάρχει τό ἴδιο ἀποτέλεσμα ἔστω καί ἄν οἱ δυό κινήσεις γίνονται ταυτόχρονα ἤ διαδοχικά μέ ὁποιαδήποτε σειρά.

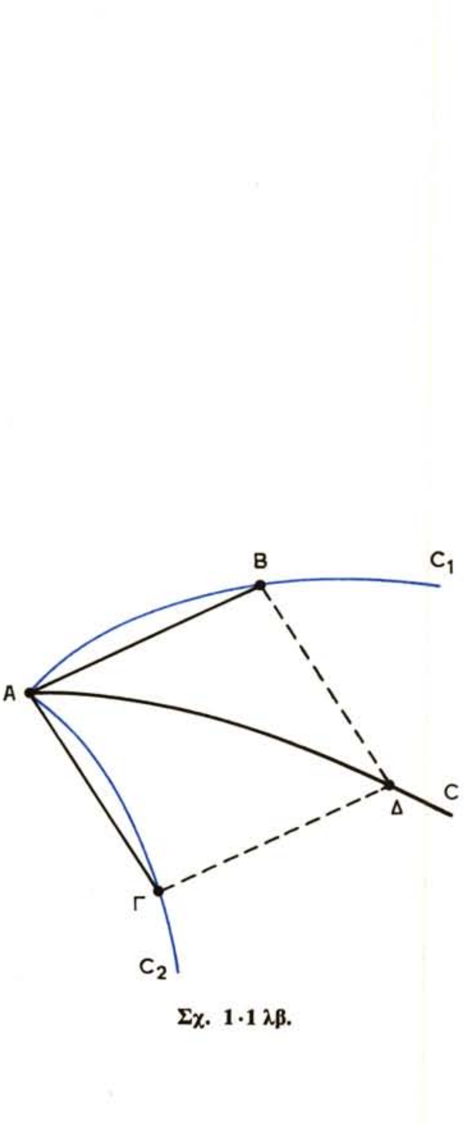
Ἡ ἀρχή αὐτή ὀνομάζεται ἀρχή τῆς **ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων**, γιατί, ὅπως εἴδαμε, ἔστω καί ἄν ἡ κίνηση εἶναι σύνθετη, οἱ ἁπλές κινήσεις πού τή συνθέτουν διατηροῦν τήν ἀνεξαρτησία τους καί δέν ἐπηρεάζουν ἡ μιά τήν ἄλλη.

—**Πῶς βρίσκεται ἡ τροχιά κινητοῦ πού κάνει ταυτόχρονα δύο κινήσεις.** Κινητό Α (σχ. 1 · 1 λβ) κάνει ταυτόχρονα δυό κινήσεις σέ δυό τροχιές C_2 καί C_1. Τά διάφορα σημεῖα τῆς τροχιᾶς C στή σύνθετη κίνηση τοῦ κινητοῦ βρίσκονται ὡς ἑξῆς:

Τό κινητό σέ χρόνο t μετακινεῖται ἀπό τό Α στό Β κάνοντας τήν μιά κίνηση στήν τροχιά C_1.

Τό ἴδιο κινητό στόν ἴδιο χρόνο t μετακινεῖται ἀπό τό Α στό Γ κάνοντας τήν ἄλλη κίνηση στήν τροχιά C_2.

Ὅταν τό κινητό κάνει ταυτόχρονα καί τίς δυό κινήσεις, στόν ἴδιο χρόνο t θά βρίσκεται **στήν τέταρτη κορυφή Δ τοῦ παραλληλογράμμου, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα Α, Β καί Γ.**



Σχ. 1·1 λβ.

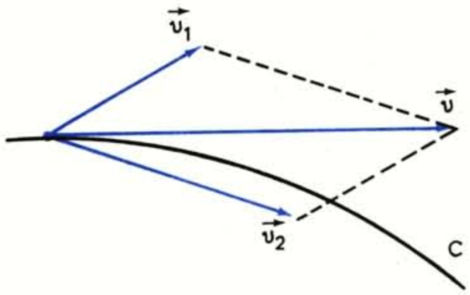
Ἔτσι μπορεῖ κανείς νά σημειώσει πολλά σημεῖα

Δ, πού ὁρίζουν μιά καμπύλη πού εἶναι ἡ τροχιά C τῆς σύνθετης κινήσεως.

—Πῶς βρίσκεται ἡ ταχύτητα κινητοῦ, πού κάνει ταυτόχρονα δύο κινήσεις μέ ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$.

Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ στή συνισταμένη κίνηση C εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου πού σχηματίζεται ἀπό τίς ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ τῶν δυό μερικῶν κινήσεων (σχ. 1 · 1 λγ).

Ἡ συνισταμένη ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εἶναι πάντοτε ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς C, πού διαγράφει τό κινητό.



Σχ. 1·1 λγ.

—Ἐφαρμογές.

1. Ἀεροπλάνο κινεῖται ὁριζόντια μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 500$ km/h καί ἄνεμος φυσᾶ ὁριζόντια καί κάθετα πρός τό ἀεροπλάνο μέ ταχύτητα $\upsilon_2 = 150$ km/h. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου στήν σύνθετη κίνηση (μέτρο, διεύθυνση).

Λύση :

Ἡ ταχύτητα υ τοῦ ἀεροπλάνου (σχ. 1 · 1 λδ) στή συνισταμένη κίνησή του θά ἔχει μέτρο:

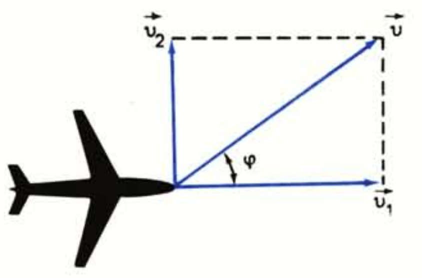
$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_1 + \upsilon^2{}_2} = \sqrt{500^2 + 150^2} = 522 \text{ km/h} = 145 \text{ m/s}.$$

Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας θά βρεθεῖ, ἄν ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία φ. Ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{150 \text{ km/h}}{500 \text{ km/h}} = 0{,}3.$$

Ἀπό τόν τριγωνομετρικό πίνακα βρίσκουμε τήν τιμή τῆς γωνίας φ:

$$\varphi \simeq 17^\circ.$$

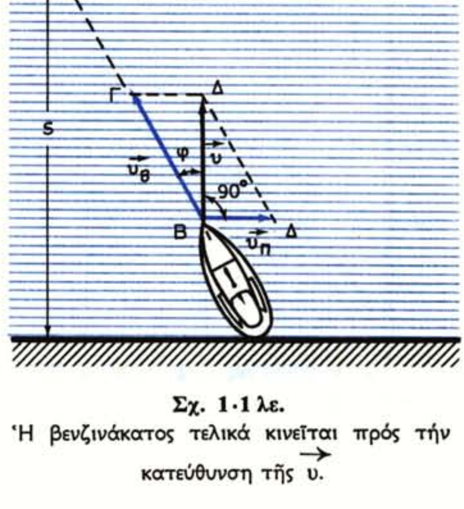


Σχ. 1·1 λδ.

2. Ὁ ὁδηγός μιᾶς βενζινακάτου θέλει νά διασχίσει ἕνα ποτάμι κάθετα. Τά νερά τοῦ ποταμοῦ τρέχουν μέ ταχύτητα $\upsilon_\pi = 18$ km/h. Ἡ ταχύτητα τῆς βενζινακάτου εἶναι $\upsilon_B = 36$ km/h. Ποιά γωνία πρέπει νά σχηματίζει ἡ ταχύτητα τῆς βενζινακάτου υ_B μέ τήν ταχύτητα τοῦ ποταμοῦ, ὥστε νά μπορέσει ἡ βενζινάκατος νά διασχίσει κάθετα τό ποτάμι καί πόσο χρόνο θά χρειαστεῖ γι' αὐτό ἄν τό πλάτος τοῦ ποταμοῦ εἶναι s = 90 m.

Λύση :

Ἡ βενζινάκατος θά ἀκολουθήσει τή διεύθυνση τῆς συνισταμένης ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ (σχ. 1 · 1 λε).



Σχ. 1·1 λε.
Ἡ βενζινάκατος τελικά κινεῖται πρός τήν κατεύθυνση τῆς $\vec{\upsilon}$.

— Γιά τήν ἀπάντηση στό πρῶτο ἐρώτημα ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τή γωνία φ.

Ἀπό τό τρίγωνο (ΒΓΔ) ἔχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\upsilon_\pi}{\upsilon_B} = \frac{18\ km/h}{36\ km/h} = \frac{1}{2}$$

Ἄρα $\varphi = 30°$.

Ἑπομένως ἡ γωνία πού πρέπει νά σχηματίζουν οἱ ταχύτητες τῆς βενζινακάτου καί τοῦ ποταμοῦ πρέπει νά εἶναι: $\varphi + 90° = 120°$.

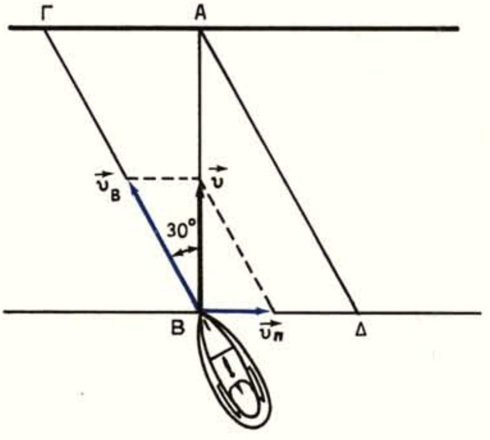
— Γιά νά ἀπαντήσουμε στό δεύτερο ἐρώτημα πρέπει νά βασιστοῦμε στό γεγονός ὅτι οἱ δυό ἀνεξάρτητες κινήσεις τοῦ ποταμοῦ ΒΔ καί τῆς βενζινακάτου ΒΓ εἶναι ἰσοταχεῖς. Ἑπομένως καί ἡ συνισταμένη κίνηση τῆς βενζινακάτου θά εἶναι εὐθύγραμμη ἰσοταχής μέ ταχύτητα τή $\vec{\upsilon}$ καί τροχιά τή ΒΑ (σχ. 1·1 λστ).

Ἡ ταχύτητα υ ὑπολογίζεται ἀπό τόν τύπο:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_B^2 - \upsilon_\pi^2} = \sqrt{36^2 - 18^2} = $$
$$= 31{,}1\ km/h = \simeq 8{,}65\ m/s$$

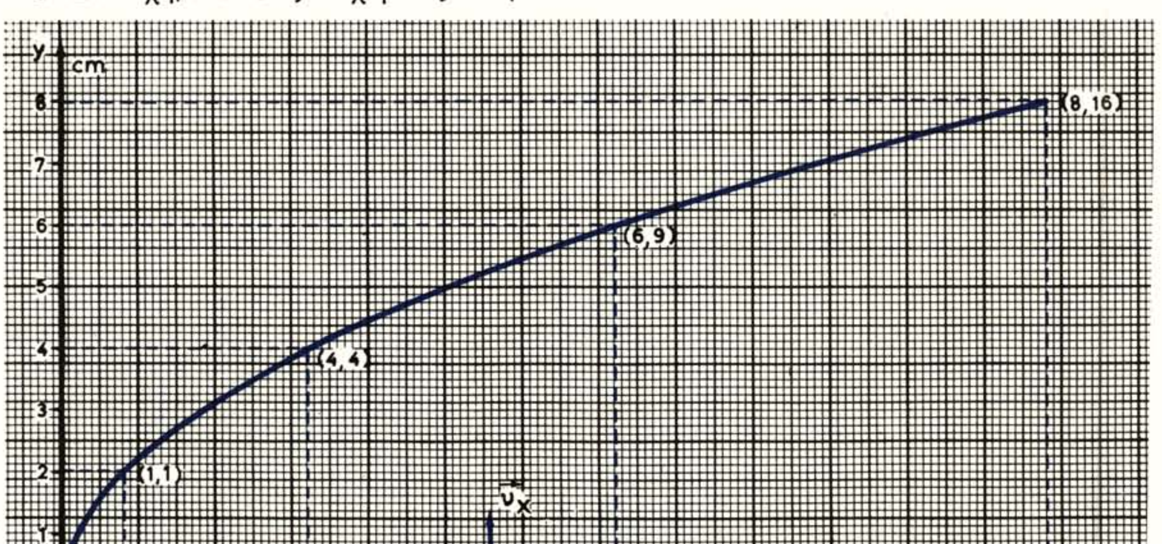
Ὁ ζητούμενος χρόνος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$t = \frac{AB}{\upsilon} = \frac{s}{\upsilon} = \frac{90\ m}{8{,}65\ m/s} = 10{,}4\ s.$$



Σχ. 1·1 λστ.

3. Στό σχῆμα 1·1 λζ ὁ χάρακας ΑΒ μετακινεῖται



Σχ. 1·1 λζ.

μέ ταχύτητα $\upsilon_x = 2$ cm/s παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῶν y, ἐνῶ ἡ μύτη μολυβιοῦ κινεῖται ἀπό τό A πρός τό B μέ κίνηση ὁμαλά ἐπιταχυνομένη καί ἐπιτάχυνση $\gamma = 2$ cm/s^2, ἐνῶ βρίσκεται συνεχῶς σέ ἐπαφή μέ τό χάρακα.

Νά βρεθεῖ ἡ γραμμή πού θά χαράξει ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ στό ἐπίπεδο τῶν ἀξόνων x καί y.

Λύση :

Ἡ περίπτωση τῆς ἀσκήσεως εἶναι μιά περίπτωση συνθέσεως δυό κινήσεων κάθετων, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία (στόν ἄξονα x) εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνομένη, ἐνῶ ἡ ἄλλη (στόν ἄξονα y) εἶναι εὐθύγραμμη ὁμαλή. Γιά τό λόγο αὐτό χρησιμοποιοῦμε τόν Πίνακα 1 · 1 · 3, ὁ ὁποῖος ὑπολογίζεται ἀπό τούς τύπους:

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \text{καί} \quad y = \upsilon_x t$$

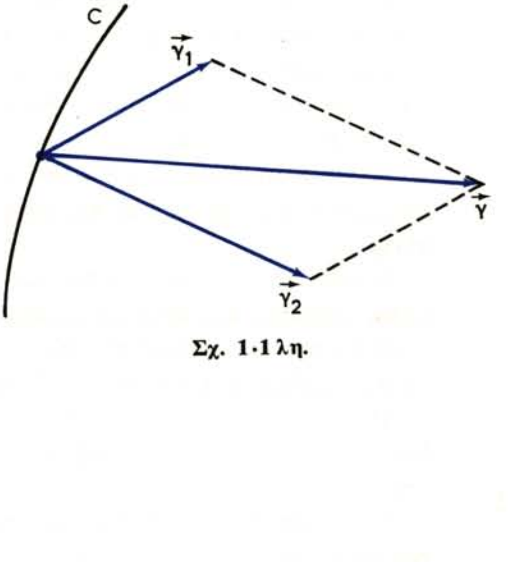
ΠΙΝΑΚΑΣ 1·1·3

Χρόνος sec	x cm	y cm
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6
4	16	8

Ἀπό τά ζεύγη τιμῶν x καί ψ καθορίζουμε τήν τροχιά τῆς μύτης τοῦ μολυβιοῦ στή συνισταμένη κίνηση.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τροχιά τῆς σύνθετης κινήσεως δέν εἶναι εὐθεία. Αὐτό, γιατί ἡ μιά ἀπό τίς δυό κινήσεις δέν εἶναι ἰσοταχής.

—Πῶς βρίσκεται ἡ ἐπιτάχυνση κινητοῦ πού κάνει ταυτόχρονα δύο κινήσεις μέ ἐπιταχύνσεις γ_1 καί γ_2. Κι ἐδῶ ἰσχύει ὅ,τι εἴπαμε γιά τήν ταχύτητα. Δηλαδή ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ στή συνισταμένη κίνηση πάνω στήν τροχιά C εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου πού σχηματίζεται ἀπό τίς ἐπιταχύνσεις $\vec{\gamma_1}$ καί $\vec{\gamma_2}$ τῶν δύο μερικῶν κινήσεων (σχ. 1 · 1 λη).



Σχ. 1·1 λη.

1 · 2 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ ΣΩΜΑΤΩΝ

Τά σώματα ὅταν ἀφήνονται ἐλεύθερα, πέφτουν στή Γῆ. Ἡ πτώση αὐτή τοῦ σώματος ὀφείλεται στήν ἕλξη πού ἀσκεῖ ἡ Γῆ σ' αὐτό καί πού ὀνομάζεται **βάρος τοῦ σώματος.**

Μέ τό βάρος καί γενικά τήν ἕλξη τῆς Γῆς θά ἀσχοληθοῦμε ἀργότερα.

Ἐδῶ θά μελετήσουμε τόν τρόπο πού πέφτουν τά σώματα, δηλαδή θά ἐξετάσουμε τό εἶδος τῆς κινήσεως πού κάνουν τά σώματα πέφτοντας.

Ὁ Νεύτωνας ἦταν ἐκεῖνος πού μελέτησε τό φαινόμενο καί μάλιστα γι' αὐτό τό λόγο χρησιμοποίησε ἕνα εἰδικό σωλήνα πού λέγεται **σωλήνας τοῦ Νεύτωνα** (σχ. 1 · 2 α).

Ὁ σωλήνας αὐτός εἶναι γυάλινος μακρύς — περίπου 2 μέτρα — καί ἔχει στή μιά του ἄκρη μιά στρόφιγγα.

Μέσα στό σωλήνα τοποθέτησε διάφορα σώματα π.χ. ἕνα φτερό καί μιά μπίλλια.

Χωρίς νά ἀφαιρέσει τόν ἀέρα, ἀνέστρεψε ἀπότομα τό σωλήνα καί παρατήρησε ὅτι πιό γρήγορα κινήθηκε καί ἔπεσε ἡ μπίλλια καί ἀκολούθησε ἡ πτώση τοῦ φτεροῦ μέ σημαντική μάλιστα καθυστέρηση.

Στή συνέχεια ἀφαίρεσε τόν ἀέρα πού ὑπῆρχε μέσα στό σωλήνα καί ἐπανέλαβε τό πείραμα. Παρατήρησε τότε ὅτι τά δυό σώματα ἔκαναν τήν ἴδια ἀκριβῶς κίνηση (ἔπεφταν παράλληλα). Ἀπό αὐτό ἔβγαλε ὁ Νεύτωνας τό συμπέρασμα ὅτι: **τά σώματα πέφτοντας στό κενό κάνουν τήν ἴδια ἀκριβῶς κίνηση** ἀνεξάρτητα ἄν ἡ μάζα τους εἶναι μεγάλη ἤ μικρή καί ἄν εἶναι φτιαγμένα ἀπό διαφορετικά ὑλικά. Ἡ κίνηση αὐτή τῶν σωμάτων στό κενό ὀνομάζεται **ἐλεύθερη πτώση.**

Σημείωση: Στόν ἀέρα ἡ πτώση διαφέρει στά διάφορα σώματα, γιατί ἡ κίνησή τους ἐπηρεάζεται ἀπό τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα.

Ἡ ἐλεύθερη πτώση, ὅπως φαίνεται ἀπό διάφορα πειράματα, εἶναι κίνηση **εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιταχυνομένη.**

Ἐπειδή ὅλα τά σώματα στό κενό πέφτουν παράλληλα, σημαίνει ὅτι ὅλα τά σώματα ἔχουν τήν **ἴδια ἐπιτάχυνση.** Ἡ ἐπιτάχυνση αὐτή ὀνομάζεται **ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας** καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα **g.**

Ἡ εἰκόνα τοῦ σχήματος 1 · 2 β μᾶς παρουσιάζει ἕνα πείραμα, πού μᾶς ἐπιβεβαιώνει ὅσα ἀναφέρουμε παραπάνω.

Χρησιμοποιοῦμε στό πείραμα **στροβοσκοπική φωτογράφιση** καί φωτογραφίζουμε τήν πτώση δύο σφαιρῶν διαφορετικῶν μαζῶν. Στή φωτογράφιση αὐτοῦ τοῦ τύπου, τό διάφραγμα τοῦ φακοῦ τῆς μηχανῆς ἀνοίγει κάθε 1/30 s, ἐνῶ ταυτόχρονα ἀνάβει στιγμιαία ἕνα φῶς. Ἔτσι παίρνει φωτογραφίες - στιγμιότυπα κάθε 1/30 s.

Ἀπό τήν ἐξέταση τῆς φωτογραφίας βγαίνουν τά ἑξῆς συμπεράσματα:

— Οἱ δυό σφαῖρες κινοῦνται παράλληλα, δηλαδή κάνουν τήν ἴδια ἀκριβῶς κίνηση.

Σχ. 1·2 α.

— Τά διαστήματα πού διανύουν εἶναι ἀνάλογα πρός τά τετράγωνα τῶν χρόνων.

Συγκεκριμένα, σέ χρόνο $t_1 = \frac{6}{30}$ s διανύουν διάστημα $h_1 = 20$ cm καί σέ χρόνο $t_2 = 2t_1 = 2 \cdot \frac{6}{30}$ s $= \frac{12}{30}$ s διάστημα $h_2 = 80$ cm, δηλαδή $h_2 = 4 \cdot 20$ cm $= 4 \cdot h_1 = 2^2 \cdot h_1$ (διπλάσιος χρόνος, τετραπλάσιο διάστημα).

Σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση αὐτή μποροῦμε νά συνδέσουμε τό διάστημα h, πού διανύουν οἱ σφαῖρες, καί τό χρόνο t, κατά τόν ὁποῖο τό διανύουν, μέ τήν ἐξίσωση:

$$h = \sigma\tau\alpha\theta.\ t^2$$

ἤ

$$h = \frac{1}{2} g\, t^2$$

Ἡ ἐξίσωση ὅμως αὐτή εἶναι ἐξίσωση ὁμαλά ἐπιταχυνομένης κινήσεως καί τό g εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς κινήσεώς τους.

Ἄν λύσουμε τήν ἐξίσωση αὐτή ὡς πρός g καί βάλουμε τίς τιμές τοῦ πειράματος στόν τύπο, θά ἔχουμε:

$$g = \frac{2\,h}{t^2} = \frac{2 \cdot 20\,\mathrm{cm}}{\left(\frac{6}{30}\,\mathrm{s}\right)^2} = 100\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ἡ ἀκριβής τιμή τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί σέ γεωγραφικό πλάτος 45° εἶναι:

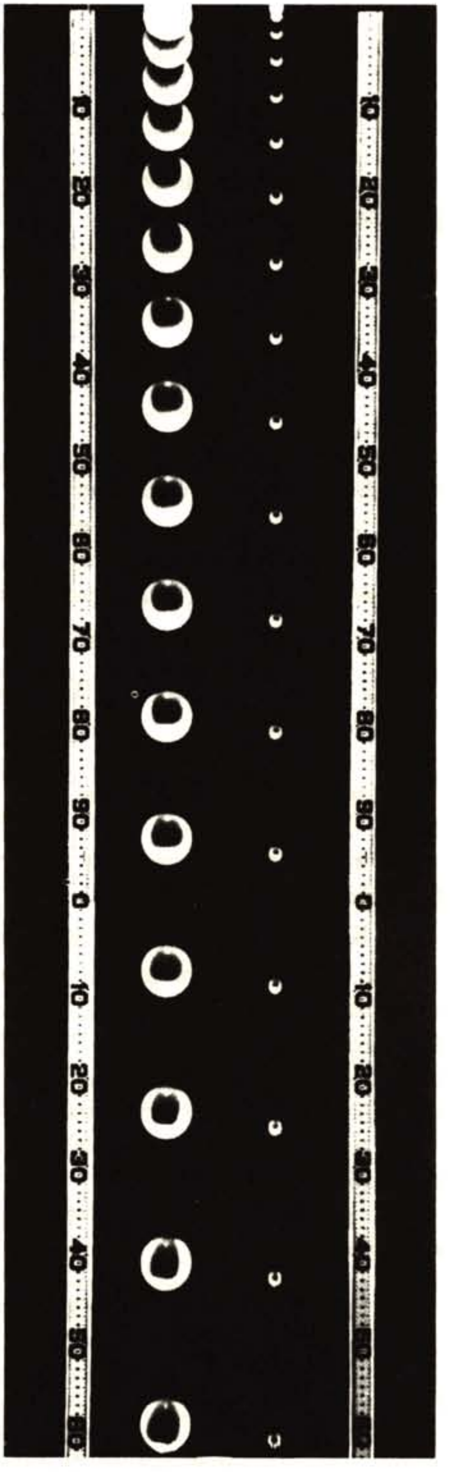
$$\boxed{g = 9{,}8066\ m/s^2}$$

Ἡ τιμή αὐτή στρογγυλεμένη γίνεται $g = 9{,}81$ m/s².

1) **Ἐξισώσεις κινήσεως στήν ἐλεύθερη πτώση.**

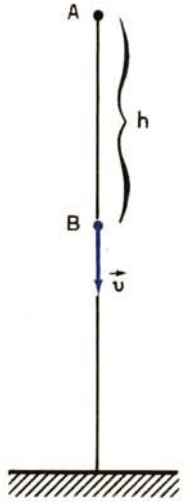
Παρατήρηση: Σέ ὅλα τά ἑπόμενα προβλήματα ρίψεων δέν λαμβάνεται ὑπόψη ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα.

—**Ἐλεύθερη πτώση.** Ἄν ἀφήσουμε ἕνα σῶμα νά πέσει ἐλεύθερα ἀπό τό σημεῖο Α (σχ. 1 · 2 γ) χωρίς ἀρχική ταχύτητα, τότε τό σῶμα αὐτό θά κάνει ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση. Τό διάστημα h καί ἡ ταχύτητα υ θά δίνονται ἀπό τίς σχέσεις:



Σχ. 1·2 β.

$$\boxed{\begin{array}{l} \upsilon = g\,t \\ h = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{array}} \qquad (1)$$



Σχ. 1·2 γ.

Ἐπιλύοντας τίς ἐξισώσεις αὐτές ὡς πρός τό χρόνο, βρίσκουμε τίς:

$$\boxed{\begin{array}{l} \upsilon = \sqrt{2\,g\,h} \\ h = \dfrac{\upsilon^2}{2\,g} \end{array}} \qquad (2)$$

Ἐφαρμογή : Σῶμα ἀφήνεται ἐλεύθερο στό κενό ἀπό ὕψος $h = 20$ m. Νά ὑπολογιστοῦν:

— Ἡ ταχύτητά του ὅταν φτάσει στό ἔδαφος.

— Ὁ χρόνος πού χρειάζεται νά φτάσει στό ἔδαφος.

Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g νά ληφθεῖ 10 m/s^2:

Ἀπό τόν τύπο: $\upsilon = \sqrt{2\,g\,h}$ βρίσκουμε:

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot 10\ \text{m/s}^2 \cdot 20\ \text{m}} = \sqrt{400\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 20\ \text{m/s}.$$

Ἀπό τόν τύπο:

$$\upsilon = g\,t \Longrightarrow t = \frac{\upsilon}{g} = \frac{20\ \text{m/s}}{10\ \text{m/s}^2} = 2\ \text{s}.$$

Ἀπάντηση : Θά ἀποκτήσει ταχύτητα 20 m/s καί θά φθάσει στό ἔδαφος σέ 2 s.

2) **Κατακόρυφη βολή πρός τά πάνω.**

Ἄν ἕνα σῶμα ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα υ_o, ἡ κίνηση αὐτή ὀνομάζεται βολή πρός τά πάνω (σχ. 1 · 2 δ). Ἡ κίνηση αὐτή εἶναι ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη μέ ἐπιβράδυνση ἴση κατ' ἀπόλυτη τιμή μέ τήν ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

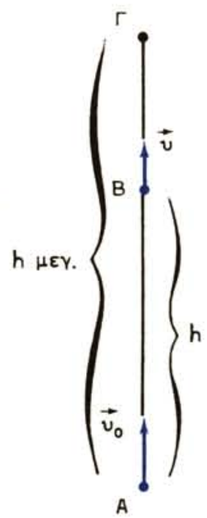
Οἱ τύποι πού χρησιμοποιοῦνται εἶναι τῆς ὁμαλά ἐπιβραδυνομένης κινήσεως.

Ἔτσι ἡ ταχύτητα υ σέ κάποιο σημεῖο **Β** θά δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o - g\,t}$$

Τό διάστημα h θά δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{h = \upsilon_o\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2}$$



Σχ. 1·2 δ.

Τό διάστημα h ὡς συνάρτηση τῆς ταχύτητας δίνεται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\boxed{h = \frac{\upsilon^2{}_o - \upsilon^2}{2\,g}} \quad \text{καί} \quad \boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_o - 2\,g\,h}}$$

Ἐπειδή ἡ κίνηση εἶναι ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη, τό κινητό σέ κάποια θέση, ἔστω Γ, θά σταματήσει, καί τό ὕψος πού θά φθάσει θά εἶναι τό μέγιστο ὕψος h, τό ὁποῖο, ἀπό ὅσα εἴπαμε στήν ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη κίνηση, δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{h_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon^2{}_o}{2g}}$$

3) **Διερεύνηση τῆς κατακόρυφης βολῆς πρός τά πάνω.** Μέ σκοπό τή διερεύνηση τῆς κινήσεως αὐτῆς θά ἀποδείξουμε τίς παρακάτω προτάσεις:

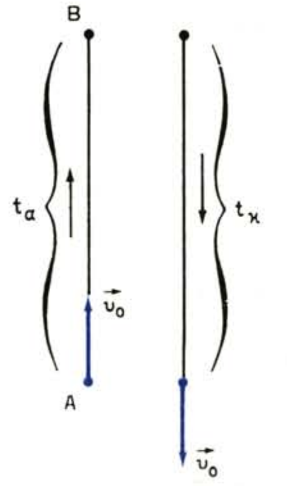
1η Πρόταση.

Ὁ χρόνος ἀνόδου κινητοῦ στό ψηλότερο σημεῖο εἶναι ἴσος μέ τό χρόνο καθόδου, ἀπό τό σημεῖο αὐτό στό ἔδαφος.

Ἀπόδειξη (σχ. 1 · 2 ε):

Ὁ χρόνος ἀνόδου t_α εἶναι ὁ μέγιστος χρόνος $t_{\mu\varepsilon\gamma}$ καί δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$t_\alpha = \frac{\upsilon_o}{g} \qquad (1)$$



Σχ. 1·2 ε.
Ὁ χρόνος ἀνόδου t_α εἶναι ἴσος μέ τό χρόνο καθόδου t_κ.

Ὁ χρόνος καθόδου t_κ εἶναι ἴσος μέ τό χρόνο σέ μιά ἐπιταχυνομένη κίνηση ἀπό τό **Β** στό **Α** μέ ἐπιτάχυνση g καί μέ μηδενική ἀρχική ταχύτητα. Ἑπομένως:

$$h_{AB} = \frac{1}{2}\,g\,t^2_\kappa \Rightarrow t_\kappa = \sqrt{\frac{2\,h_{AB}}{g}} \qquad (2)$$

Ἀλλά τό h_{AB} εἶναι τό μέγιστο ὕψος καί δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$h_{AB} = \frac{\upsilon^2{}_o}{2g} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) ἔχουμε:

$$t_\kappa = \sqrt{\frac{2\,\upsilon^2{}_o}{2g^2}} = \frac{\upsilon_o}{g} \qquad (4)$$

Ἐπειδή τά δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καί

(4) εἶναι ἴσα, συμπεραίνεται ὅτι:

$$\boxed{t_\alpha = t_\kappa}$$

δηλαδή : χρόνος ἀνόδου = χρόνος καθόδου.

2η Πρόταση.

Σῶμα κινεῖται κατακόρυφα πρός τά πάνω, φτάνει στό μέγιστο ὕψος καί ξαναπέφτει (σχ. 1 · 2 στ). Στό ἴδιο **ὕψος ἔχει τήν ἴδια ταχύτητα στήν ἄνοδο (υ_α) καί στήν κάθοδο (υ_κ).**

'Απόδειξη :

'Η ταχύτητα υ_α δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\upsilon_\alpha = \sqrt{\upsilon^2_o - 2g\,h} \qquad (1)$$

'Η ταχύτητα υ_κ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\upsilon_\kappa = \sqrt{2g\,(h_{\mu\epsilon\gamma} - h)} \qquad (2)$$

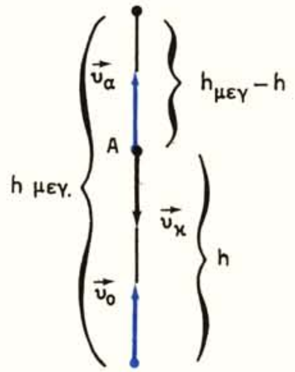
Αλλά: $$h_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\upsilon^2_o}{2g} \qquad (3)$$

'Από τίς (2) καί (3) προκύπτει:

$$\sqrt{2g\left(\frac{\upsilon^2_o}{2g} - h\right)} = \sqrt{\upsilon^2_o - 2g\,h} \qquad (4)$$

Οἱ ἐξισώσεις (1) καί (4) ἔχουν ἴδια τά δεύτερα μέλη.

Ἄρα: $$\boxed{\upsilon_\kappa = \upsilon_\alpha}$$

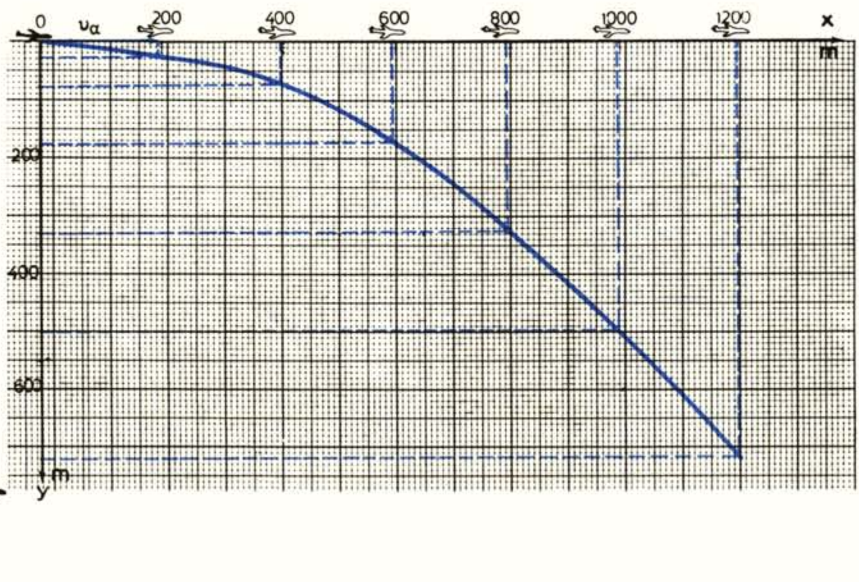


Σχ. 1·2 στ.

'Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$ ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\kappa$

4) 'Οριζόντια βολή.

Ἄν ἕνα ἀεροπλάνο, πού κινεῖται ὁριζόντια μέ σταθερή ταχύτητα υ_α, ἀφήσει ἕνα βλῆμα (σχ. 1 · 2 ζ), ἡ



Σχ. 1·2 ζ.

Σέ κάθε χρονική στιγμή τό ἀεροπλάνο καί τό βλῆμα βρίσκονται στήν ἴδια κατακόρυφη γραμμή.

κίνηση τοῦ βλήματος θά εἶναι **σύνθεση** δυό ἁπλῶν κινήσεων. Ἡ μιά ἁπλή κίνηση εἶναι **ἰσοταχής μέ ταχύτητα τήν ταχύτητα πού ἔχει τό ἀεροπλάνο στήν ὁριζόντια κίνηση.**

Τό διάστημα x πού θά διανύσει τό κινητό δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$x = \upsilon_o\, t \qquad (1)$$

Ἡ ἄλλη ἁπλή κίνηση εἶναι κατακόρυφη πρός τά κάτω **ὁμαλά ἐπιταχυνομένη μέ ἐπιτάχυνση g καί χωρίς ἀρχική ταχύτητα.**

Τό διάστημα y πού θά διανύσει δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$y = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad (2)$$

Ἀπό τούς τύπους (1) καί (2) μποροῦμε κάθε χρονική στιγμή t νά βρίσκουμε τά x καί y καί μέ τή **μέθοδο τοῦ παραλληλογράμμου** νά ὁρίσουμε τή θέση τοῦ κινητοῦ στή σύνθετη κίνηση. Ἄν πάρουμε ἀριθμητικές τιμές $\upsilon_\alpha = 360$ km/h $= 100$ m/s καί $g = 10$ m/s^2 ἀπό τούς τύπους (1) καί (2) βρίσκουμε τίς τιμές τοῦ Πίνακα 1·2·1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1·2·1

t_s	x_m	y_m
0	0	0
2	200	20
4	400	80
6	600	180
8	800	320
10	1000	500
12	1200	720

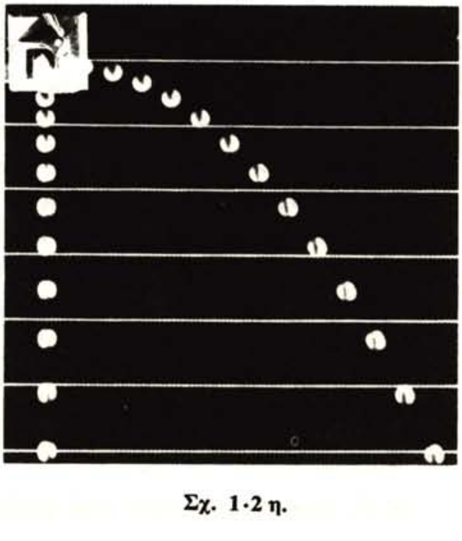
Μέ τίς τιμές αὐτές χαράζουμε τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 1·2ζ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τροχιά τοῦ βλήματος.

Γενικά ἡ πτώση αὐτοῦ τοῦ βλήματος ὀνομάζεται **ὁριζόντια βολή.**

Σπουδαία παρατήρηση εἶναι ὅτι τό ἀεροπλάνο, τό ὁποῖο συνεχίζει νά κινεῖται ὁριζόντια, βρίσκεται στήν ἴδια κατακόρυφη γραμμή μέ τό βλῆμα σέ κάθε χρονική στιγμή, μέχρις ὅτου τό βλῆμα φθάσει στό ἔδαφος.

Ἐπίσης ἄν τήν ἴδια στιγμή πού ἀφέθηκε τό βλῆμα ἀφηνόταν καί μιά σφαίρα χωρίς ἀρχική ταχύτητα, ἀπό τήν ἀρχική θέση 0, αὐτή θά βρισκόταν σέ κάθε χρονική στιγμή στήν **ἴδια ὁριζόντια** εὐθεία γραμμή μέ τό βλῆμα.

Αὐτό τό τελευταῖο φαίνεται καί στή φωτογραφία τοῦ σχήματος 1·2η, πού πάρθηκε μέ στροβοσκοπική φωτογραφική μέθοδο καί πού παριστάνει τήν πτώση πού κάνουν δυό μπάλες, ἡ μιά χωρίς ἀρχική ταχύτητα καί ἡ ἄλλη μέ ὁριζόντια ἀρχική ταχύτητα.



Σχ. 1·2η.

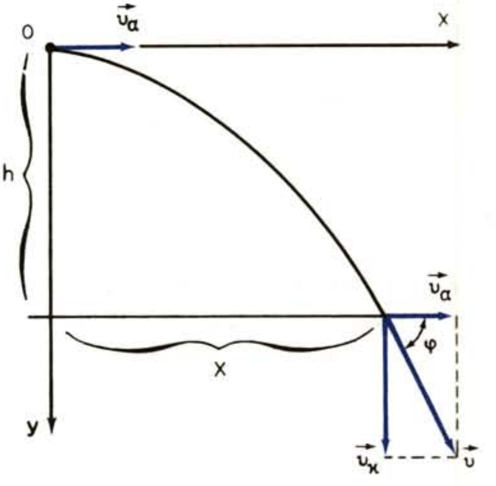
Ἐφαρμογή.

Ἀεροπλάνο βρίσκεται σέ ὕψος h = 500 m ἀπό τό ἔδαφος καί τρέχει ὁριζόντια μέ ταχύτητα $\upsilon_\alpha = 540$ km/h.

Κάποια στιγμή ἀφήνεται ἀπό τό ἀεροπλάνο ἕνα βλῆμα (σχ. 1·2 θ).

Νά ὑπολογιστοῦν: 1) Ἡ ὁριζόντια ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο πού ἀφέθηκε τό βλῆμα μέχρι τό σημεῖο πού συναντᾶ τό ἔδαφος. 2) Ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος, ὅταν συναντήσει τό ἔδαφος (μέτρο - διεύθυνση).

Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας νά ληφθεῖ 10 m/s².



Σχ. 1·2 θ.

Λύση:

Εἶναι πρόβλημα ὁριζόντιας βολῆς καί ἑπομένως θά χρησιμοποιηθοῦν οἱ τύποι:

$$x = \upsilon_\alpha t$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

— Γιά νά ἀπαντήσουμε στό πρῶτο ἐρώτημα, ἀπαλείφουμε τό χρόνο t ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί βρίσκουμε τίς σχέσεις:

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\upsilon^2_\alpha} \quad (2) \quad \text{ἤ} \quad x = \upsilon_\alpha \sqrt{\frac{2y}{g}} \quad (3)$$

Ἄν στήν (3) ἀντικαταστήσουμε ὅπου $y = h$, ὑπολογίζουμε τήν ὁριζόντια ἀπόσταση πού ζητᾶμε:

$$x = \upsilon_\alpha \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Σύστημα S.I. $\upsilon_\alpha = 540$ km/h $= 150$ m/s. $h = 500$ m. $g = 10$ m/s².

Ἀντικατάσταση: $x = 150 \sqrt{\frac{2 \times 500}{10}} = 1500$ m.

— Γιά τήν ἀπάντηση στό δεύτερο ἐρώτημα, δηλαδή ποιά θά εἶναι ἡ ταχύτητα, κάνουμε τούς παρακάτω συλλογισμούς:

Σέ κάθε σημεῖο τῆς τροχιᾶς τῆς σύνθετης κινήσεως ξέρουμε, ὅτι ἡ ταχύτητα εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου, πού σχηματίζεται ἀπό τίς ταχύτητες τῶν δυό μερικῶν κινήσεων.

Ἑπομένως ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου πού σχηματίζεται ἀπό τήν $\vec{\upsilon}_\alpha$ καί τήν $\vec{\upsilon}_\kappa$.

Ἡ $\vec{\upsilon}_\alpha$ εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος στήν ὁριζόντια κίνηση. Αὐτή παραμένει σταθερή, γιατί ἡ ὁριζόντια κίνηση εἶναι ἰσοταχής.

Ἡ $\vec{\upsilon_\kappa}$ εἶναι ἡ ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει τό βλῆμα στήν ἐλεύθερη πτώση.

Ἐπομένως ἡ υ_κ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\upsilon_\kappa = \sqrt{2g\,h} = \sqrt{2 \cdot 10\ m/s^2 \cdot 500\ m} = 100\ m/s.$$

Ἀπό τό Πυθαγόρειο θεώρημα, παίρνουμε:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_\alpha^2 + \upsilon_\kappa^2} = \sqrt{150^2\ m^2/s^2 + 100^2\ m^2/s^2} =$$
$$= 180\ m/s.$$

Ἀπάντηση: Τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ βλήματος ὅταν συναντᾶ τό ἔδαφος **εἶναι** 180 m/s.

Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας βρίσκεται ἄν ὑπολογίσουμε τή γωνία φ:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_\kappa}{\upsilon_\alpha} = \frac{100}{150} = 0{,}66$$

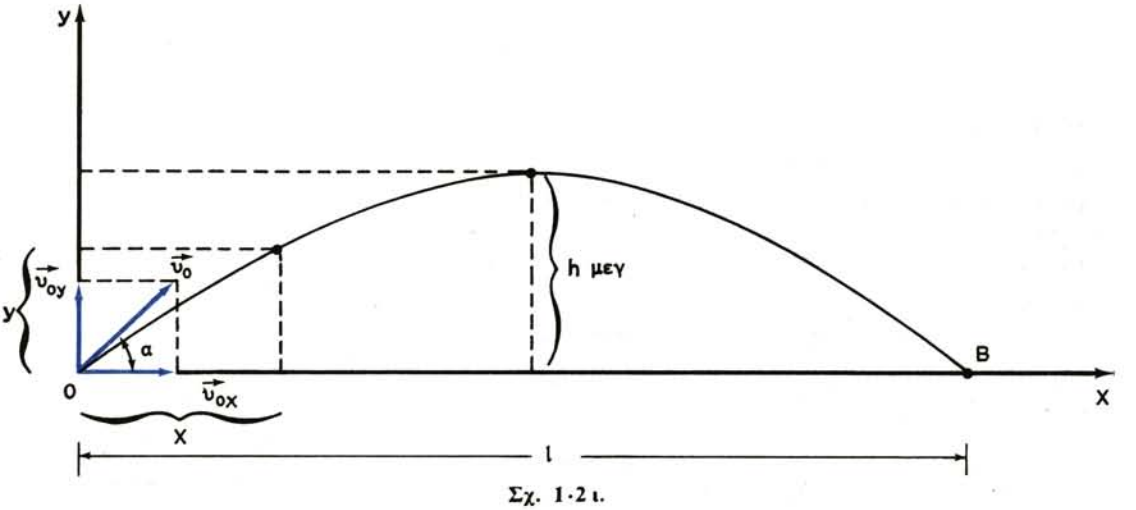
$$\text{ἄρα} \quad \varphi \simeq 34°.$$

5) **Πλάγια βολή.**

Ἄν ἕνα σῶμα ἐκτοξευτεῖ πλάγια μέ γωνία α ὡς πρός τή Γῆ, τότε ἡ κίνηση τοῦ σώματος ὀνομάζεται **πλάγια βολή.** (Ἡ γωνία α ὀνομάζεται γωνία βολῆς).

Ἡ κίνηση αὐτή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σύνθετη κίνηση δυό ἄλλων κινήσεων (σχ. 1·2ι).

Ἡ πρώτη κίνηση εἶναι ἰσοταχής καί γίνεται στόν ἄξονα x μέ ταχύτητα:



Σχ. 1·2ι.

$$υ_{ox} = υ_o \; συνα \qquad (1)$$

Ἡ ἄλλη κίνηση εἶναι ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη καί γίνεται στόν ἄξονα y μέ ἀρχική ταχύτητα:

$$υ_{oy} = υ_o \; ημα \qquad (2)$$

καί ἐπιβράδυνση g (κατακόρυφη βολή πρός τά πάνω). Σέ χρόνο t λόγω τῆς πρώτης κινήσεως, τό σῶμα θά διανύσει διάστημα x πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση: $x = υ_{ox} t$. Αὐτή μαζί μέ τήν (1) δίνει:

$$x = υ_o \; συνα \; t \qquad (3)$$

Στόν ἴδιο χρόνο τό σῶμα κάνοντας τή δεύτερη κίνηση θά διανύσει διάστημα y, πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση: $y = υ_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$. Ἀπό αὐτή καί τή (2) παίρνουμε:

$$y = υ_o \, t \, ημα - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

Ἔχοντας τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) μποροῦμε σέ κάθε χρονική στιγμή t νά ὑπολογίζουμε τά ζεύγη τῶν τιμῶν x καί y, **δηλαδή τίς συντεταγμένες τῆς θέσεως τοῦ σώματος στή σύνθετη κίνηση.**

Μέ τόν τρόπο αὐτό χαράζεται ἡ τροχιά τοῦ σώματος στήν πλάγια βολή, πού φαίνεται στό σχῆμα 1 · 2 ι.

α) **Ἐξίσωση τροχιᾶς.** Ἄν ἀπό τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) ἀπαλείψουμε τό χρόνο, θά ἔχουμε:

$$\boxed{y = εφα \; x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{υ_o^2 \; συν^2 α}} \qquad (5)$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἐξίσωση τῆς τροχιᾶς τοῦ σώματος στήν πλάγια βολή.

β) **Βεληνεκές.** Ὀνομάζεται βεληνεκές ἡ ἀπόσταση ΟΒ.

Στίς δυό αὐτές θέσεις Ο καί Β ἡ τιμή τοῦ y (τεταγμένη) εἶναι 0.

Ἄν ἑπομένως στήν ἐξίσωση (5) βάλουμε $y = 0$, ἡ μιά ἀπό τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ x θά εἶναι τό ζητούμενο βεληνεκές:

$$εφα \; x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{υ^2_o \; συν^2 α} = 0 \qquad ἤ$$

$$\left[x \;\; \varepsilon\varphi\alpha - \frac{1}{2}\, g\, \frac{x}{\upsilon^2_o \;\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\right] = 0$$

Ἡ παράσταση μηδενίζεται γιά $x = 0$ καί γιά:

$$\varepsilon\varphi\alpha - \frac{1}{2}\, g\, \frac{x}{\upsilon^2_o \;\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{2\;\eta\mu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\alpha\;\upsilon^2_o}{g}.$$

Ἀπό τήν Τριγωνομετρία ἔχουμε ὅτι:

$$2\eta\mu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu\; 2\alpha.$$

Ἑπομένως: $$\boxed{x = \frac{\upsilon^2_o\, \eta\mu 2\alpha}{g} = l} \qquad (6)$$

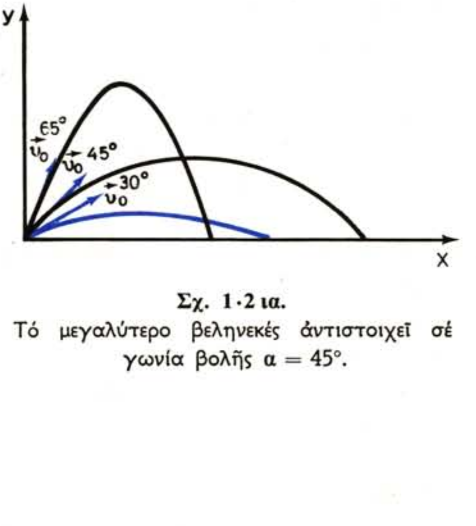
Ὁ τύπος (6) μᾶς δίνει τό βεληνεκές l, γιά τήν περίπτωση πλάγιας βολῆς σύμφωνα μέ τό σχῆμα 1 · 2 ι.

γ) **Διερεύνηση.** Ἄν μεταβάλλουμε τή γωνία α κατά τή βολή, τό ημ2α μεταβάλλεται καί παίρνει τήν πιό μεγάλη τιμή, τή μονάδα, ὅταν:

$$2\alpha = 90^\circ \quad \text{ἤ} \quad \alpha = 45^\circ.$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν μέ ἕνα τηλεβόλο ρίχνουμε βλήματα μέ διάφορες κλίσεις ὡς πρός τό ἔδαφος, αὐτά θά διανύσουν διαφορετικά μήκη (διαφορετικά βεληνεκή). Τό πιό μεγάλο ὅμως βεληνεκές θά ἀντιστοιχεῖ σέ βολή μέ γωνία κλίσεως 45°.

Στό σχῆμα 1 · 2 ια φαίνεται πῶς, ἀλλάζοντας τήν κλίση, μεταβάλλεται τό βεληνεκές.



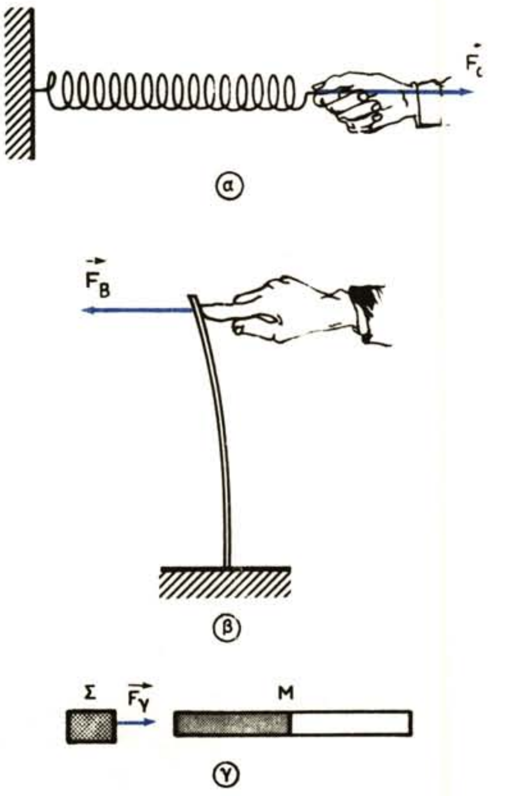
Σχ. 1·2 ια.
Τό μεγαλύτερο βεληνεκές ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία βολῆς α = 45°.

δ) **Χρόνος πτήσεως.** Αὐτός εἶναι ὁ χρόνος πού τό σῶμα στήν πλάγια βολή θά βρίσκεται στόν ἀέρα. Γιά νά ὑπολογίσουμε τό χρόνο πτήσεως σκεφτόμαστε ὅτι αὐτός εἶναι ὁ χρόνος πού περνᾶ ἀπό τή στιγμή πού τό σῶμα ἐκτοξεύεται μέχρι τή στιγμή πού συναντᾶ τό ἔδαφος. Στίς δυό αὐτές στιγμές τό y εἶναι μηδέν. Ἄν ἑπομένως στήν ἐξίσωση (4) βάλουμε ὅπου $y = 0$, ὑπολογίζουμε τό t καί αὐτός εἶναι ὁ χρόνος πτήσεως:

$$\upsilon_o\, t\; \eta\mu\alpha - \frac{1}{2}\, g t^2 = 0 \quad \text{ἤ} \quad t\left(\upsilon_o\; \eta\mu\alpha - \frac{1}{2}\, g\, t\right) = 0$$

$$ἤ \quad \upsilon_o\, \eta\mu\alpha - \frac{1}{2}\, g t = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{t = t_{\pi\tau\eta\sigma} = \frac{2\upsilon_o\, \eta\mu\alpha}{g}} \qquad (7)$$



Σχ. 1·3 α.

1 · 3 ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ἡ Στατική γενικά ἐξετάζει τίς δυνάμεις καί τήν ἰσορροπία τους. Ὅταν μιλᾶμε γιά στατική τοῦ ὑλικοῦ σημείου, ἐννοοῦμε τήν εἰδική περίπτωση πού οἱ δυνάμεις ἐνεργοῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο.

α) **Δύναμη.**

Τό σχῆμα 1 · 3 α (α, β, γ) δείχνει συνηθισμένα φαινόμενα τῆς καθημερινῆς μας ζωῆς. Ἕνα ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται ὅταν τό τραβήξουμε [σχ. 1 · 3 α (α)]. Ἕνα ἔλασμα μέ μιάν ὤθηση τοῦ χεριοῦ μας παραμορφώνεται [σχ. 1 · 3 α (β)]. Ἕνα μικρό κομμάτι ἀπό μαλακό σίδηρο Σ μέ τή βοήθεια ἑνός μαγνήτη Μ μετακινεῖται (ἐπιταχύνεται) [σχ. 1 · 3 α (γ)].

Τό αἴτιο πού προκαλεῖ αὐτά τά ἀποτελέσματα στά παραδείγματά μας, εἶναι ἕνα φυσικό μέγεθος πού τό ὀνομάζουμε **δύναμη.**

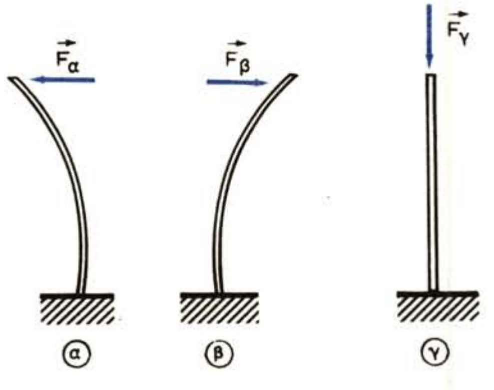
Ἑπομένως, **δύναμη εἶναι τό φυσικό μέγεθος πού προκαλεῖ παραμόρφωση τῶν σωμάτων ἤ τά ἐπιταχύνει.**

— **Ἡ δύναμη εἶναι ἕνα διανυσματικό μέγεθος.** Αὐτό μποροῦμε νά τό διαπιστώσουμε, ἄν μέ τό δάκτυλό μας πιέσουμε ἐξίσου ἕνα ἔλασμα, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 1 · 3 β.

Οἱ τρεῖς παραμορφώσεις διαφέρουν. Δηλαδή, ἀλλάζοντας διεύθυνση καί φορά, ἔχουμε διαφορετικά ἀποτελέσματα καί ἑπομένως **δέν ἀρκεῖ μόνο τό μέτρο** γιά νά χαρακτηρήσουμε μιά δύναμη. Πρέπει ἀπαραίτητα νά τῆς καθορίσουμε τή διεύθυνση καί τή φορά.

— **Μέτρηση δυνάμεων.** Τά ὄργανα τά ὁποῖα χρησιμοποιοῦμε γιά νά μετροῦμε τίς δυνάμεις ὀνομάζονται **δυναμόμετρα.**

Ἡ λειτουργία τῶν δυναμομέτρων βασίζεται στό νόμο τοῦ Hook, ὁ ὁποῖος λέει ὅτι οἱ ἐπιμηκύνσεις τῶν ἐλατηρίων τῶν δυναμομέτρων εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ἐξασκούμενες δυνάμεις, ἀρκεῖ μόνο οἱ δυνάμεις νά εἶναι μικρότερες ἀπό μιάν ὁρισμένη τιμή, πού εἶναι χαρακτηριστική τοῦ ἐλατηρίου.



Σχ. 1·3 β.
Τά ἀποτελέσματα τῶν δυνάμεων εἶναι διαφορετικά ἄν ἀλλάξει ἡ διεύθυνση ἤ ἡ φορά τους.

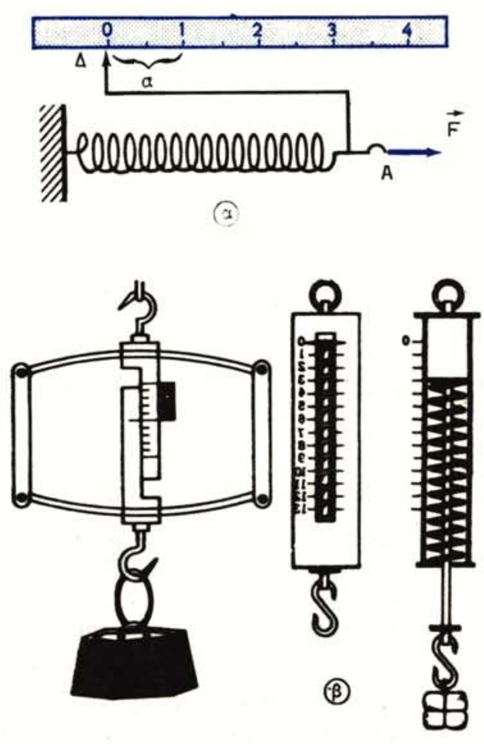
Ἔτσι ἡ δύναμη $\vec{F}$ ὅταν ἐξασκηθεῖ στό ἐλατήριο τοῦ σχήματος [1 · 3 γ (α)], προκαλεῖ μετατόπιση x τέτοια, ὥστε:

$$\frac{F}{x} = D$$

ὅπου: D = σταθερά τοῦ ἐλατηρίου.

Ἄν π.χ. ἐξασκηθεῖ δύναμη $\vec{F} = 1$ kp, τό ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται καί ὁ δείκτης του Δ μετακινεῖται κατά τό μῆκος α. Ἄν ἡ δύναμη γίνει 2 kp, ἡ μετατόπιση τοῦ δείκτη γίνεται 2α.

Ἔτσι μποροῦμε νά φτιάξουμε μπροστά στό Δ μιά κλίμακα βαθμολογημένη σέ μονάδες δυνάμεως. Στό σχῆμα 1 · 3 γ (β) φαίνονται εἰκόνες ἀπό διάφορους τύπους δυναμομέτρων.



Σχ. 1·3 γ.

β) **Σύνθεση δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ ὑλικό σημεῖο.**

Ὅταν λέμε ὅτι συνθέτουμε δυνάμεις πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα σημεῖο, ἐννοοῦμε **ὅτι τίς ἀντικαθιστοῦμε μέ μιά δύναμη πού προκαλεῖ τό ἴδιο ἀποτέλεσμα.** Ἡ δύναμη αὐτή ὀνομάζεται **συνισταμένη,** ἐνῶ οἱ δυνάμεις πού τή συνθέτουν ὀνομάζονται **συνιστῶσες.**

Ἰσορροπία δυνάμεων: Δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο, **ἰσορροποῦν, ὅταν ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν.**

Ὅπως θά ἀποδείξουμε στή δυναμική τοῦ ὑλικοῦ σημείου, **ὅταν οἱ δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν σέ ὑλικό σημεῖο, ἰσορροποῦν, τότε ἰσορροπεῖ καί τό ὑλικό σημεῖο.**

Ὑλικό σημεῖο ἰσορροπεῖ, ὅταν δέν ἐπιταχύνεται (δηλαδή ὅταν ἀκινητεῖ ἤ κινεῖται ἰσοταχῶς).

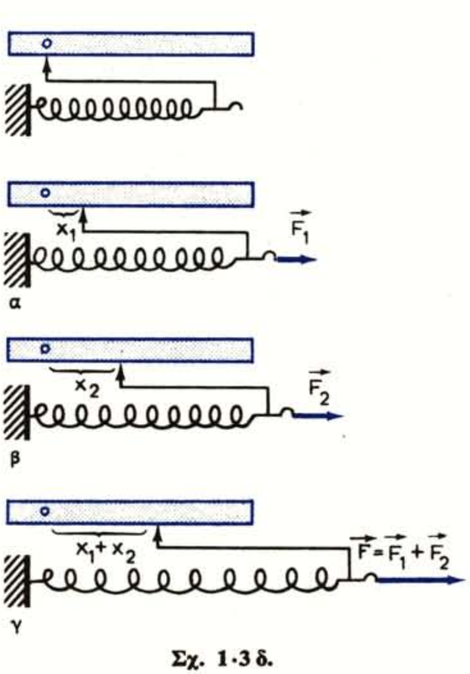
1) **Σύνθεση δύο δυνάμεων πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά.** Στό σχῆμα 1 · 3 δ (α) ἡ δύναμη $\vec{F_1}$ προκαλεῖ μετατόπιση x_1 καί ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F_1 = D\,x_1 \qquad (1)$$

Στό σχῆμα 1 · 3 δ (β) ἡ δύναμη $\vec{F_2}$ προκαλεῖ ἐπιμήκυνση x_2 καί ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F_2 = D\,x_2 \qquad (2)$$

Τέλος μιά δύναμη $\vec{F}$ ἐκλέγεται τέτοια, ὥστε νά προκαλεῖ ἐπιμήκυνση $x_1 + x_2$ [σχ. 1 · 3 δ (γ)] καί ἰσχύει ἡ σχέση:



Σχ. 1·3 δ.

$$F = D\,(x_1 + x_2) \qquad (3)$$

Ἄν προσθέσουμε τίς (1) καί (2) κατά μέλη θά ἔχουμε:

$$F_1 + F_2 = D\,(x_1 + x_2) \qquad (4)$$

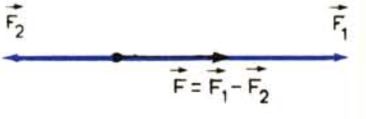
Στίς ἐξισώσεις (3) καί (4) τά δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα. Ἑπομένως:

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \qquad (5)$$

Ἀπό ὅσα εἴπαμε, συμπεραίνεται ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$ προκαλεῖ τό ἴδιο ἀποτέλεσμα πού προκαλοῦν οἱ $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ μαζί καί ἐπομένως εἶναι ἡ συνισταμένη τους.

Συμπέρασμα: Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$, πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια φορά καί διεύθυνση, εἶναι δύναμη **πού ἔχει φορά καί διεύθυνση τήν ἴδια μέ τίς δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ καί μέτρο τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δυνάμεων.**

2) **Σύνθεση δύο δυνάμεων πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί ἀντίθετη φορά.** Μέ ἀνάλογους συλλογισμούς, ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, προκύπτει τό ἀκόλουθο συμπέρασμα (σχ. 1·3ε):



Σχ. 1·3 ε.

Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση ἀλλά ἀντίθετη φορά, εἶναι μιά δύναμη $\vec{F}$ ἡ ὁποία ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τίς δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$, φορά τή φορά τῆς μεγαλύτερης δυνάμεως $\vec{F_1}$ καί μέτρο τή διαφορά τῶν δύο μέτρων:

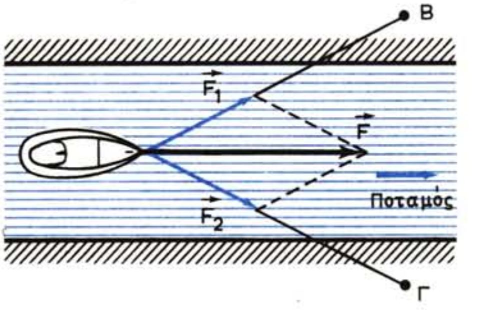
$$\vec{F} = \vec{F_1} - \vec{F_2}$$

Ἄν δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ ἔχουν τό ἴδιο μέτρο καί ἀντίθετη φορά, ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν.

Δηλαδή: **Δύο δυνάμεις τῆς ἴδιας διευθύνσεως, τοῦ ἴδιου μέτρου, ἀλλά ἀντίθετης φορᾶς, ἰσορροποῦν.**

3) **Σύνθεση δύο δυνάμεων πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο καί σχηματίζουν γωνία.** Γιά νά μετακινήσουμε μιά βάρκα Σ κατά τή διεύθυνση τοῦ ποταμιοῦ, δένουμε δυό σχοινιά στό σημεῖο Α καί μέ τή βοήθειά

τους ἐξασκοῦμε ἀπό τίς δυό ὄχθες τοῦ ποταμοῦ δυό δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$, πού σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία (σχ. 1·3 στ). Ἡ βάρκα κινεῖται τότε πρός τή διεύθυνση τῆς συνισταμένης $\vec{F}$ τῶν δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί F_2.



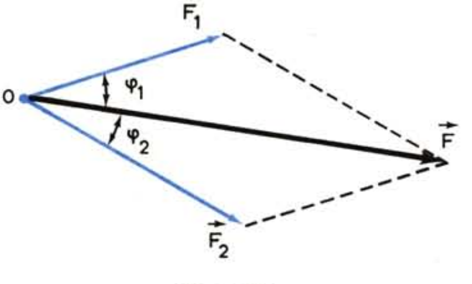
Σχ. 1·3 στ.

α) **Νόμος τοῦ παραλληλογράμμου. Ἡ συνισταμένη δυό δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο καί σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου πού σχηματίζεται ἀπό τίς δυό αὐτές δυνάμεις.**

Στό σχῆμα 1·3ζ, ἡ $\vec{F}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$. Οἱ $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ εἶναι οἱ συνιστῶσες δυνάμεις τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.

β) **Ὑπολογισμός τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἀπό τίς συνιστῶσες δυνάμεις (σύνθεση) καί ἀντίστροφα (ἀνάλυση).**

Στό σχῆμα 1·3ζ ἔχουν σημειωθεῖ οἱ τρεῖς δυνάμεις $\vec{F}$, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ καί οἱ γωνίες τους φ_1 καί φ_2. Τά πέντε αὐτά μεγέθη συνδέονται μέ τίς ἑξῆς ἐξισώσεις:



Σχ. 1·3ζ.

$$F = \sqrt{F^2{}_1 + F^2{}_2 + 2F_1\,F_2\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad (1)$$

$$\frac{F_1}{\eta\mu\varphi_2} = \frac{F_2}{\eta\mu\varphi_1} = \frac{F}{\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad (2)$$

Ἐπειδή αὐτές ἀποτελοῦν τρεῖς ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις, ἄν γνωρίζουμε τά τρία ἀπό τά πέντε μεγέθη F, F_1, F_2, φ_1 καί φ_2, μποροῦμε νά βρίσκουμε τά ἄλλα δυό καί ἔτσι νά λύνουμε τά προβλήματα συνθέσεως καί ἀναλύσεως δυνάμεων, πού ἐνεργοῦν σέ ὑλικό σημεῖο καί σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία.

Ἐφαρμογές.

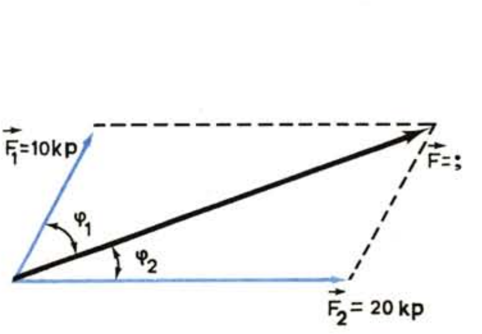
1. Δυό δυνάμεις $\vec{F_1} = 10$ kp καί $\vec{F_2} = 20$ kp ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο καί σχηματίζουν γωνία 60°. Νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη τους (μέτρο, διεύθυνση) (σχ. 1·3η).

Λύση:

Μέτρο: Ἀπό τόν τύπο:

$$F = \sqrt{F^2{}_1 + F^2{}_2 + 2\,F_1\,F_2\,\sigma\upsilon\nu\,(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

ὑπολογίζουμε τό μέτρο τῆς συνισταμένης.



Σχ. 1·3η.

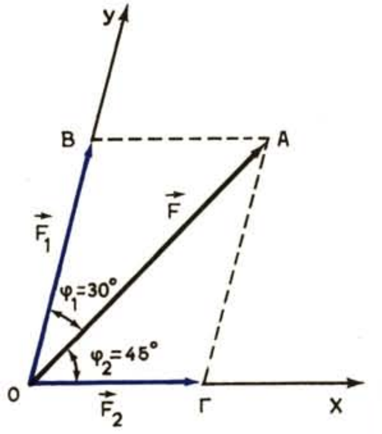
$$F = \sqrt{10^2 + 20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot συν\, 60^\circ} = 26{,}4 \text{ kp}.$$

Διεύθυνση: Ἀπό τήν ἐξίσωση $\dfrac{F_1}{ημφ_2} = \dfrac{F}{ημ(φ_1 + φ_2)}$

προσδιορίζουμε τή γωνία $φ_2$ ἄρα καί τή διεύθυνση τῆς F σχετικά μέ τήν F_2:

$$ημφ_2 = \frac{F_1\, ημ(φ_1 + φ_2)}{F} = \frac{10 \text{ kp } ημ\, 60^\circ}{26{,}4 \text{ kp}} = 0{,}33$$

$$\text{ἄρα:} \quad φ_2 = 19^\circ.$$



Σχ. 1·3 θ.

2. Νά ἀναλυθεῖ ἡ δύναμη $\vec{F} = 40$ kp σέ δυό δυνάμεις πού νά σχηματίζουν μέ τή F γωνίες $φ_1 = 30^\circ$ καί $φ_2 = 45^\circ$.

Λύση:

Ἀπό τό σημεῖο Α φέρνουμε παράλληλες πρός τίς διευθύνσεις Ox καί Oy. Ἔτσι σχηματίζεται τό παραλληλόγραμμο ΟΒΑΓ. Οἱ ζητούμενες δυνάμεις εἶναι οἱ $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ (σχ. 1 · 3 θ).

Ὑπολογισμός τῶν $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$.

Ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\frac{F_1}{ημφ_2} = \frac{F_2}{ημφ_1} = \frac{F}{ημ(φ_1 + φ_2)} \quad \text{ἔχουμε :}$$

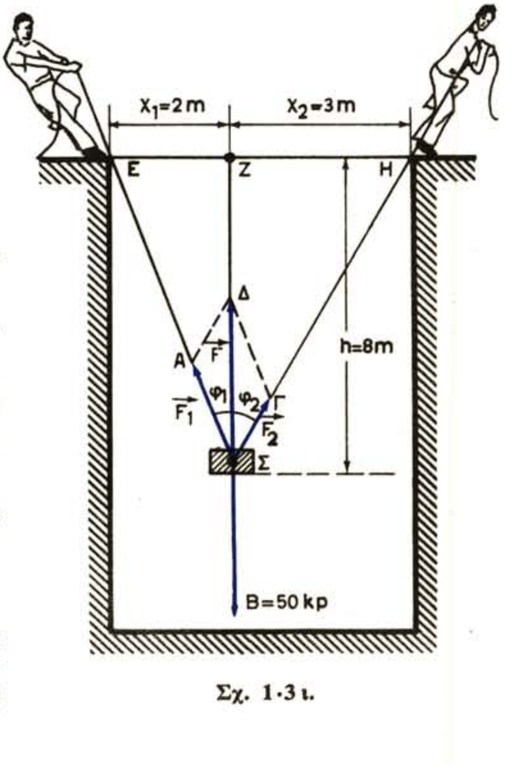
$$F_1 = \frac{F\, ημ\, φ_2}{ημ(φ_1 + φ_2)} = \frac{40 \text{ kp} \cdot ημ\, 45^\circ}{ημ\, 75^\circ} = 29 \text{ kp}$$

$$F_2 = \frac{F\, ημ\, φ_1}{ημ(φ_1 + φ_2)} = \frac{40 \text{ kp} \cdot ημ\, 30^\circ}{ημ\, 75^\circ} = 20{,}7 \text{ kp}.$$

Ἀπάντηση: Ἡ δύναμη F ἀναλύεται σέ δυό συνιστῶσες δυνάμεις: $F_1 = 29$ kp καί $F_2 = 20{,}7$ kp.

3. Δυό ἄνθρωποι προσπαθοῦν μέ τή βοήθεια δυό σχοινιῶν νά ἀνεβάσουν ἕνα σῶμα βάρους $B = 50$ kp, πού βρίσκεται στό βάθος ἑνός πηγαδιοῦ. Ἡ σχετική θέση τοῦ σώματος καθορίζεται μέ τά μήκη $x_1 = 2$ m, $x_2 = 3$m καί $h = 8$ m, πού φαίνονται στό σχῆμα 1 · 3 ι.

Νά ὑπολογιστοῦν οἱ δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ τίς ὁποῖες ἐξασκοῦν οἱ ἄνθρωποι.



Σχ. 1·3 ι.

Λύση:

Γιά νά ἀνέβει τό σῶμα Σ πρέπει νά ἰσορροπήσουμε τό βάρος $\vec{B}$. Γιά τό λόγο αὐτό οἱ δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$

θά πρέπει νά ἔχουν τουλάχιστον τέτοια τιμή, ὥστε ἡ συνισταμένη τους νά εἶναι ἴση κατά μέτρο μέ τό βάρος $\vec{B}$, νά ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ αὐτό καί ἀντίθετη φορά.

Παίρνουμε ἑπομένως τήν δύναμη $\vec{F}$ ἀντίθετη κατά φορά τοῦ **B** ἀλλά τοῦ ἴδιου μέτρου μέ αὐτό. Στή συνέχεια τήν ἀναλύουμε στίς δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ κατασκευάζοντας τό παραλληλόγραμμο ΣΑΔΓ.

Ὑπολογισμός τῶν F_1 καί F_2.

Στό παραλληλόγραμμο ΣΑΔΓ εἶναι γνωστή ἡ $F = B = 50\,kp$.

Ἐπίσης ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΖΕ καί ΣΖΗ, βρίσκουμε τά ἡμίτονα τῶν γωνιῶν φ_1 καί φ_2 καί αὐτές τίς ἴδιες τίς γωνίες:

$$\eta\mu\,\varphi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1{}^2 + h^2}} = \frac{2\,m}{\sqrt{2^2+8^2}} = 0{,}24$$

$$\text{καί} \quad \varphi_1 = 14^\circ$$

$$\eta\mu\,\varphi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x^2{}_2 + h^2}} = \frac{3\,m}{\sqrt{3^2+8^2}} = 0{,}35$$

$$\text{καί} \quad \varphi_2 = 21^\circ.$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\frac{F_1}{\eta\mu\,\varphi_2} = \frac{F_2}{\eta\mu\,\varphi_1} = \frac{F}{\eta\mu\,(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \text{ἔχουμε:}$$

$$F_1 = \frac{F}{\eta\mu\,(\varphi_1+\varphi_2)} \cdot \eta\mu\,\varphi_2 = \frac{50\ kp}{\eta\mu\ 35^\circ} \cdot 0{,}35 \simeq 30{,}8\ kp.$$

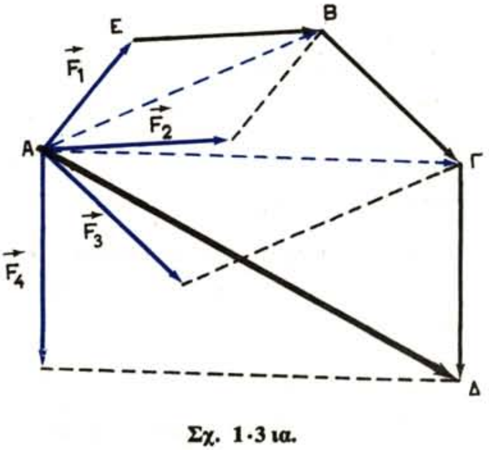
$$F_2 = \frac{F}{\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2)} \cdot \eta\mu\,\varphi_1 = \frac{50\ kp}{\eta\mu\ 35^\circ} \cdot 0{,}24 \simeq 21{,}17\ kp.$$

Ἀπάντηση: Οἱ δυνάμεις πού ἐξασκοῦνται γιά νά σηκωθεῖ τό βάρος **B** εἶναι 30,8 kp καί 21,17 kp.

4) **Συνισταμένη περισσοτέρων ἀπό δυό δυνάμεων, πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο.** Ἔστω οἱ δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ καί $\vec{F_4}$, οἱ ὁποῖες ἐνεργοῦν στό σημεῖο Α (σχ. 1·3ια).

Ἡ συνισταμένη τους βρίσκεται μέ τό νόμο τοῦ παραλληλογράμμου, ὅταν αὐτός ἐφαρμοστεῖ διαδοχικά.

Ἔτσι ἡ συνισταμένη τῶν $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ εἶναι ἡ διαγώ-



Σχ. 1·3ια.

νιος $\overrightarrow{AB}$. Ἡ συνισταμένη τῆς $\overrightarrow{AB}$ καί τῆς $\overrightarrow{F_3}$ εἶναι ἡ δύναμη $\overrightarrow{A\Gamma}$. Τελικά ἡ συνισταμένη τῆς $\overrightarrow{A\Gamma}$ καί τῆς $\overrightarrow{F_4}$ εἶναι ἡ $\overrightarrow{A\Delta}$.

Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα, ἡ τελική συνισταμένη $\overrightarrow{A\Delta}$ τῶν δυνάμεων $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ καί $\overrightarrow{F_4}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων τῶν δυνάμεων.

Δηλαδή, γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη πολλῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σ' ἕνα σημεῖο, κάνουμε τίς δυνάμεις διαδοχικά διανύσματα καί βρίσκουμε τό (γεωμετρικό) ἄθροισμά τους.

Ἡ γραμμή ΑΕΒΓΔ ὀνομάζεται **δυναμοπολύγωνο.** Ἄν τό Δ συμπίπτει μέ τό Α, τό δυναμοπολύγωνο εἶναι **κλειστό** καί ἡ συνισταμένη $\overrightarrow{A\Delta}$ εἶναι μηδέν.

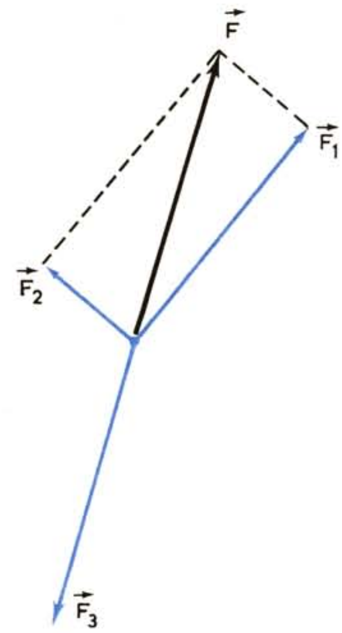
5) **Ἰσορροπία τριῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα σημεῖο.** Στήν τρίτη ἐφαρμογή (σχ. 1 · 3 ι), τό βάρος $\overrightarrow{B}$ εἶναι ἴσο στό μέτρο καί ἀντίθετο στή φορά μέ τή συνισταμένη $\overrightarrow{F}$ τῶν δυνάμεων $\overrightarrow{F_1}$ καί $\overrightarrow{F_2}$. Δηλαδή, οἱ δυνάμεις $\overrightarrow{F}$ καί $\overrightarrow{B}$ ἰσορροποῦν (σχ. 1 · 3 ι). Φυσικό εἶναι ἑπομένως, ἀφοῦ ἡ $\overrightarrow{F}$ ἀναλύεται στίς $\overrightarrow{F_1}$ καί $\overrightarrow{F_2}$, νά ἰσορροποῦν καί οἱ δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ καί $\overrightarrow{B}$.

Συμπέρασμα: Τρεῖς δυνάμεις πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα σημεῖο ἰσορροποῦν, ὅταν ἡ μία ἀπ' αὐτές (ὁποιαδήποτε) εἶναι ἴση στό μέτρο καί ἀντίθετη στή φορά μέ τή συνισταμένη τῶν ἄλλων δυό.

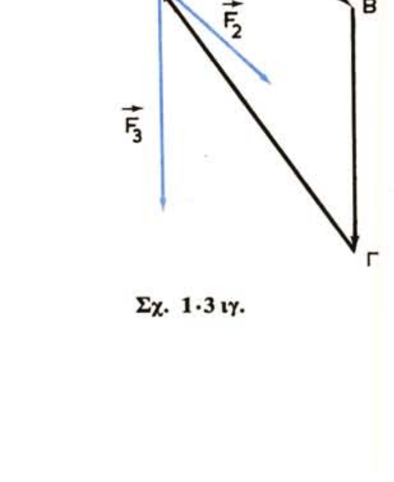
Στό σχῆμα 1 · 3 ιβ οἱ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ καί $\overrightarrow{F_3}$ ἰσορροποῦν, γιατί $\overrightarrow{F_3} = -\overrightarrow{F}$.

6) **Ἰσορροπία πολλῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα σημεῖο.** Ἄν πολλές δυνάμεις ἐνεργοῦν σέ ἕνα σημεῖο, αὐτές θά ἰσορροποῦν ὅταν ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν. Αὐτό συμβαίνει ὅταν τό δυναμοπολύγωνο πού σχηματίζουν εἶναι κλειστό.

Στό σχῆμα 1 · 3 ιγ οἱ δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ καί $\overrightarrow{F_4}$ ἰσορροποῦν, γιατί τό δυναμοπολύγωνο ΑΕΒΓΑ εἶναι **κλειστό.**



Σχ. 1·3 ιβ.



Σχ. 1·3 ιγ.

1 · 4 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ἡ δυναμική τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐξετάζει τίς δυνά-

μεις, πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο σέ σχέση μέ τά ἀποτελέσματα πού προκαλοῦν σ' αὐτό.

Ὁ Νεύτωνας, πού εἶναι ὁ θεμελιωτής τῆς δυναμικῆς, διατύπωσε τρία ἀξιώματα, δηλαδή τρεῖς **προτάσεις**, πού δεχόμαστε σάν ἀληθινές, χωρίς νά ὑπάρχει ἀνάγκη νά τίς ἀποδείξουμε, ἐπειδή συμφωνοῦν ἀπόλυτα μέ τήν πεῖρα μας.

α) **Ἀξιώματα τῆς Δυναμικῆς.**

1) **Πρῶτο Ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα ἤ Ἀξίωμα τῆς Ἀδράνειας. Ἕνα σῶμα παραμένει σέ ἀκινησία ἤ κινεῖται ἰσοταχῶς, ὅταν δέν ἐνεργεῖ καμιά ἐξωτερική δύναμη ἐπάνω του.**

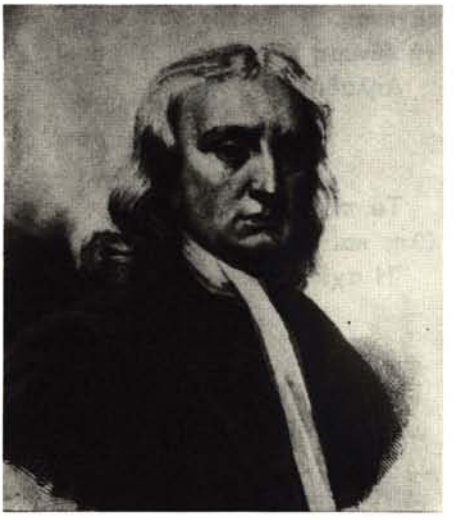
Πραγματικά, ἀπό τήν πεῖρα γνωρίζουμε ὅτι τά ἄψυχα ἀντικείμενα δέν μετακινοῦνται μόνα τους. Μιά πέτρα ἀλλάζει θέση, ὅταν κάποια δύναμη ἐξασκηθεῖ πάνω της. Ἀπό πρώτη ὄψη τό πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα δέν φαίνεται νά ἰσχύει στήν περίπτωση τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως πάνω στή Γῆ, γιατί ξέρουμε ὅτι γιά νά κινηθεῖ π.χ. ἕνα αὐτοκίνητο μέ σταθερή ταχύτητα, πρέπει νά ἐργάζεται ἡ μηχανή του, ἡ ὁποία ἔτσι ἐξασκεῖ δύναμη σ' αὐτό.

Ὅμως στή Γῆ ὅταν ἕνα σῶμα κινεῖται, βρίσκεται κάτω ἀπό τήν ἐπίδραση δυνάμεων, πού ἀσκοῦν ἄλλα σώματα πάνω του, οἱ ὁποῖες ὀνομάζονται **τριβές**. Ἐπίσης τά σώματα ἕλκονται ἀπό τή Γῆ. Ἔτσι δέν μποροῦμε νά ἀποδείξουμε πειραματικά τό πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα στήν περίπτωση τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἀφοῦ βρισκόμαστε σέ χῶρο πού ἐξασκοῦνται δυνάμεις ἀπό τό περιβάλλον.

Ἄν, ὅμως, ἕνα σῶμα βρίσκεται στό διάστημα μόνο του, μακρυά ἀπό κάθε οὐράνιο σῶμα καί κινεῖται μέ κάποια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, τό σῶμα αὐτό θά συνεχίζει νά κινεῖται αἰώνια, χωρίς ποτέ νά ἀλλάζει ἡ κινητική του κατάσταση, ἐφόσον δέν συναντήσει κάποια δύναμη πού θά τό σταματήσει ἤ θά τοῦ ἀλλάξει τήν πορεία.

Ἔτσι ἕνα διαστημόπλοιο ἄν βρεθεῖ χωρίς καύσιμα ἔξω ἀπό τίς ἑλκτικές δυνάμεις τῶν οὐράνιων σωμάτων, θά κινεῖται αἰώνια μέ τήν ταχύτητα πού εἶχε ὅταν βρέθηκε σ' αὐτό τό περιβάλλον.

2) **Δεύτερο Ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα. Ὅταν μιά δύναμη ἐξασκηθεῖ σέ ἕνα σῶμα, προκαλεῖ σ' αὐτό ἐπι-**



Ἰσαάκ Νεύτων (1642 - 1727). Μαθηματικός καί Φυσικός.

τάχυνση. Ἡ ἐπιτάχυνση αὐτή γ εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη F.

Δηλαδή:

$$\frac{F}{\gamma} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (1)$$

Τό πηλίκον αὐτό αὐξάνει μέ τήν ποσότητα τῆς ὕλης καί ὀνομάζεται μάζα m τοῦ σώματος.

Ἡ σχέση ἑπομένως (1) μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$\frac{F}{\gamma} = m \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{F = m\gamma} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση (2) ὀνομάζεται **θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς Δυναμικῆς** καί εἶναι μιά πολύ σπουδαία σχέση, τήν ὁποία χρησιμοποιοῦμε συχνά. Ἀπό τή διερεύνηση τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς δυναμικῆς προκύπτουν τά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

— Ὅπου ὑπάρχει ἐπιτάχυνση, ὑπάρχει καί δύναμη.

Ἡ ἐξίσωση $F = m\gamma$ γράφεται διανυσματικά ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}}$$

Ἐπειδή ἡ μάζα εἶναι μονόμετρο μέγεθος, τό διάνυσμα τῆς δυνάμεως **ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τό διάνυσμα τῆς ἐπιταχύνσεως πού προκαλεῖ.**

— Ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ μάζα ἑνός σώματος, τόσο μικρότερη εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση πού προκαλεῖ σ' αὐτό μιά ὁρισμένη δύναμη.

Δηλαδή, δύσκολα ἐπιταχύνονται τά σώματα μεγάλης μάζας.

— Ἄν σ' ἕνα σῶμα ἡ συνισταμένη δύναμη εἶναι μηδέν, τότε ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ σώματος εἶναι μηδέν. Ἀλλά ἐπιτάχυνση μηδέν, σημαίνει ὅτι ἡ κίνηση εἶναι ἰσοταχής ἤ ὅτι τό σῶμα ἀκινητεῖ. Δηλαδή:

$$\vec{F} = 0 \quad \text{ἄρα} \quad \vec{\gamma} = 0 \quad \text{καί} \quad \vec{\upsilon} = \text{σταθερό}$$

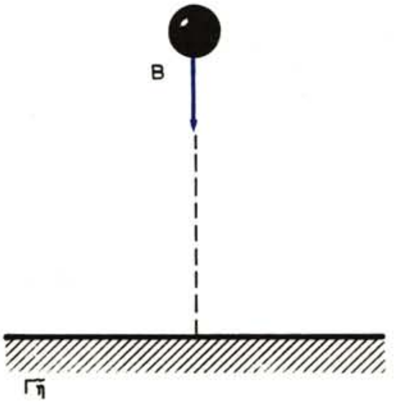
Τό συμπέρασμα ὅμως αὐτό εἶναι τό **πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα.**

— Βάρος καί ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας. Ἔχουμε ἤδη ἀναφέρει γιά τήν ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων καί εἴδαμε ὅτι ἡ κίνηση τῶν σωμάτων καθώς πέφτουν κατακόρυφα εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνομένη μέ ἐπιτάχυνση τήν ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g (σχ. 1·4α).

Γιά νά ἔχουμε ὅμως ὁποιαδήποτε ἐπιτάχυνση, σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς, πρέπει νά ὑπάρχει δύναμη. Ἡ δύναμη αὐτή στή συγκεκριμένη περίπτωση εἶναι τό βάρος τοῦ σώματος, πού ὅπως ἔχουμε πεῖ, ὀφείλεται στήν ἕλξη τῆς Γῆς.

Ἡ ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς ἐδῶ γράφεται:

$$\text{Βάρος} = \text{μάζα} \times \text{ἐπιτάχυνση βαρύτητας}$$
$$\vec{B} = m \quad \vec{g}$$



Σχ. 1·4 α.

Περισσότερες λεπτομέρειες γιά τό βάρος καί τήν ἕλξη τῆς Γῆς θά συναντήσουμε σέ ἑπόμενα Κεφάλαια.

3) **Τρίτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα. Ἄν ἕνα σῶμα ἐξασκεῖ μιά δύναμη σέ ἄλλο σῶμα, τότε καί τό δεύτερο σῶμα ἀντιδρᾶ ἐξασκώντας στό πρῶτο μιά δύναμη ἴση κατά μέτρο καί ἀντίθετη κατά φορά.**

Σχ. 1·4 β.
Στή δράση $\vec{F}$ ὑπάρχει ἡ ἀντίδραση $\vec{F'}$.

Ἔτσι, ἄν τό σῶμα A ἐξασκεῖ δύναμη $\vec{F}$ στό σῶμα B, τό σῶμα B ἀντιδρᾶ μέ δύναμη $\vec{F'}$ ἴση καί ἀντίθετη τῆς $\vec{F}$ (σχ. 1·4β):

$$F = -F'$$

Τό ἀξίωμα αὐτό ὀνομάζεται καί **ἀξίωμα δράσεως καί ἀντιδράσεως,** γιατί ἡ μία δύναμη $\vec{F}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς δράση (actio) καί ἡ δεύτερη $\vec{F'}$ σάν ἀντίδραση (reactio).

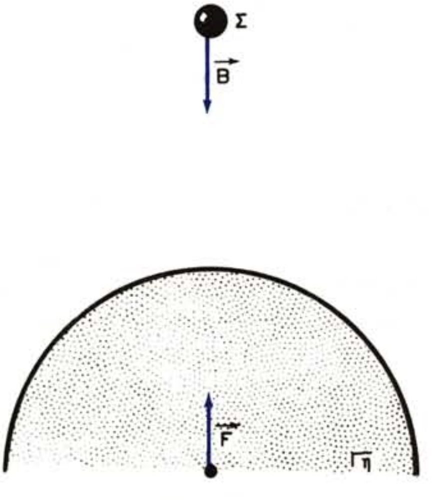
Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ **δυνάμεις ἐμφανίζονται «κατά ζεύγη».**

Ἄν ἑπομένως κάπου ἐξασκεῖται μιά δύναμη, πρέπει κάπου ἀλλοῦ νά ὑπάρχει ἡ ἀντίδραση.

Ἐξετάζουμε παρακάτω μερικές περιπτώσεις γιά νά κατανοήσουμε καλύτερα τό τρίτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα.

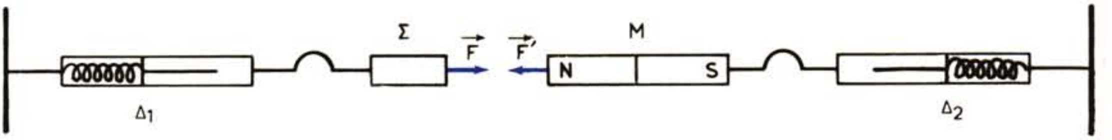
1. Ἕλξη τῆς Γῆς στά ὑλικά σώματα. Στό σχῆμα 1·4γ ἡ Γῆ ἕλκει τό σῶμα Σ μέ δύναμη $\vec{B}$ (βάρος σώματος).

Ὅμως τό σῶμα ἀντιδρᾶ καί ἕλκει τή Γῆ μέ δύναμη $\vec{F}$ ἴση κατά μέτρο καί ἀντίθετη κατά φορά.



Σχ. 1·4 γ.
Ἡ Γῆ ἕλκει τά σώματα πού βρίσκονται γύρω της, ἀλλά καί τά σώματα ἕλκουν τή Γῆ μέ δύναμη ἴση καί ἀντίθετη.

2. Ἕνας μαγνήτης M ἕλκει ἕνα κομμάτι σίδερο Σ μέ δύναμη $\vec{F}$. Τό σῶμα Σ ἀντιδρᾶ ἐξασκώντας στό



Σχ. 1·4 δ.
Οἱ δυνάμεις ἐμφανίζονται κατά ζεύγη.

μαγνήτη Μ δύναμη $\vec{F'}$ ἴση καί ἀντίθετη (σχ. 1 · 4 δ).

Τό ὅτι ἐξασκοῦνται οἱ δυό αὐτές δυνάμεις καί ὅτι ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, τό διαπιστώνουμε ἀπό τίς ἐνδείξεις τῶν δυναμομέτρων $Δ_1$ καί $Δ_2$.

3. Ἕνα σῶμα Σ βρίσκεται πάνω στή Γῆ. Ἄς ἐξετάσουμε ὅλες τίς δυνάμεις, πού ἐξασκοῦνται στό σῶμα καί στή Γῆ (σχ. 1 · 4 ε).

Οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι οἱ ἑξῆς τέσσερις:

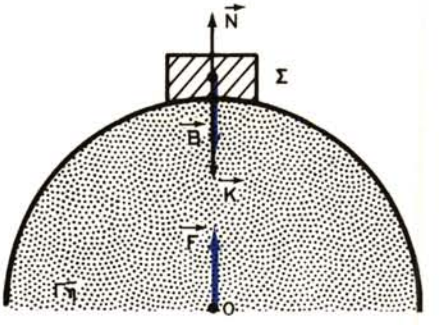
— Τό **βάρος $\vec{B}$** τοῦ σώματος Σ, πού εἶναι ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία ἕλκει ἡ Γῆ τό σῶμα.

— Ἡ **δύναμη $\vec{F}$**, πού, εἶναι ἡ δύναμη ἀντιδράσεως στό βάρος **B** καί τήν ὁποία ἐξασκεῖ τό σῶμα Σ στή Γῆ.

— Ἡ **δύναμη $\vec{N}$**, πού ἐξασκεῖται «ἐξ ἐπαφῆς» στό σῶμα ἀπό τό δάπεδο καί ὀφείλεται στήν ἐλαστική παραμόρφωση πού παθαίνει τό δάπεδο.

Ἡ δύναμη αὐτή ὀνομάζεται **«ἀντίδραση δαπέδου»**.

— Ἡ **δύναμη $\vec{K}$**, πού εἶναι ἡ δύναμη ἀντιδράσεως στήν $\vec{N}$ καί τήν ὁποία ἐξασκεῖ τό σῶμα Σ στό δάπεδο «ἐξ ἐπαφῆς». Ἡ $\vec{K}$ εἶναι ἴση μέ τή $\vec{N}$ καί ἀντίθετη κατά φορά.



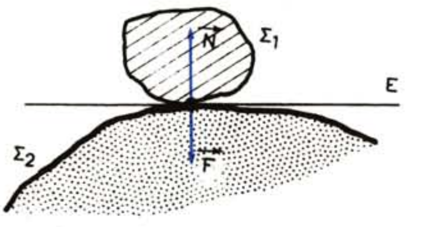
Σχ. 1·4 ε.

Στό προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ὅτι σέ κάθε δράση ὑπάρχει ἀντίδραση. Στό παράδειγμά μας ὡς δυνάμεις δράσεως μπορεῖ νά θεωρηθοῦν οἱ $\vec{B}$ καί $\vec{N}$ καί ἀντιδράσεως οἱ $\vec{F}$ καί $\vec{K}$, ἀντίστοιχα.

Παρατήρηση: Στό πρῶτο παράδειγμα οἱ δυνάμεις δράσεως καί ἀντιδράσεως ἦταν δυό, τό βάρος **B** καί ἡ δύναμη F. Οἱ δυό αὐτές δυνάμεις ἔχουν τό ἴδιο μέτρο καί ἀντίθετη φορά, ἀλλά δροῦν σέ δυό διαφορετικά σώματα καί ἐπιταχύνουν καθένα ἀπ' αὐτά τά σώματα. Ἔτσι τό βάρος $\vec{B}$ ἐπιταχύνει πρός τά κάτω τό σῶμα Σ (ἐπιτάχυνση βαρύτητας g), ἀλλά καί ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἐπιταχύνει τή Γῆ πρός τά πάνω. Ὅμως, ἡ μάζα τῆς Γῆς εἶναι πολύ μεγάλη καί ἡ ἐπιτάχυνση αὐτή ἔχει τόσο μικρή τιμή, ὥστε νά μή γίνεται αἰσθητή.

Στό τρίτο παράδειγμα δέν ἐπιταχύνεται οὔτε ἡ Γῆ οὔτε τό σῶμα Σ, γιατί τό σῶμα Σ ἰσορροπεῖται ἀπό τίς δυνάμεις $\vec{N}$ καί $\vec{B}$ καί ἡ Γῆ ἀπό τίς δυνάμεις $\vec{K}$ καί $\vec{F}$.

Σημείωση: Ὅταν δυό σώματα βρίσκονται σέ ἐπαφή καί τό ἕνα ὠθεῖ τό ἄλλο, τά σώματα αὐτά παραμορφώνονται ἐλαστικά καί τότε ἀναπτύσσονται δυνάμεις στό σημεῖο ἐπαφῆς. Στό σχῆμα 1·4 στ, τό σῶμα Σ_2 ἐξασκεῖ στό σῶμα Σ_1 τή δύναμη $\vec{N}$ καί τό Σ_1 στό Σ_2 τή δύναμη $\vec{F}$. Οἱ δυνάμεις αὐτές μπορεῖ νά προέρχονται ἀπό **δυό αἰτίες.** Τή μία αἰτία ἀναφέραμε ἤδη καί εἶναι ἡ παραμόρφωση τῶν σωμάτων. Ἡ ἄλλη αἰτία εἶναι οἱ **δυνάμεις τριβῆς.** Οἱ δυνάμεις αὐτές, πού θά ἐξετάσουμε ἀργότερα, ὀφείλονται στήν ἐπαφή δυό σωμάτων, ὅταν τό ἕνα ἀπ' αὐτά ὀλισθαίνει ἤ τείνει νά ὀλισθήσει πάνω στό ἄλλο.



Σχ. 1·4 στ.

Ἄν δέν ὑπάρχουν δυνάμεις τριβῆς, τότε ἡ δύναμη $\vec{N}$ καί ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι κάθετες στήν κοινή ἐφαπτομένη ἐπιφάνεια Ε.

β) **Ἀδράνεια.**

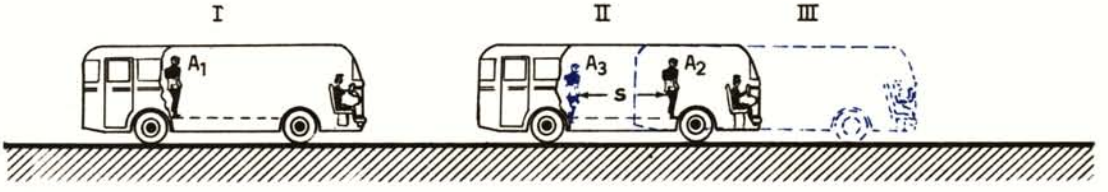
Σύμφωνα μέ ὅσα προκύπτουν ἀπό τά τρία ἀξιώματα τοῦ Νεύτωνα, ἡ ὕλη ἔχει τήν ἰδιότητα νά παρουσιάζει **ἀντίσταση** σέ κάθε μεταβολή τῆς κινητικῆς της καταστάσεως.

Ἡ ἰδιότητα αὐτή τῆς ὕλης νά ἀντιδρᾶ σέ κάθε μεταβολή τῆς κινητικῆς της καταστάσεως ὀνομάζεται **ἀδράνεια** τῆς ὕλης. Τά σώματα ἐμφανίζουν τόσο πιό μεγάλη ἀδράνεια, ὅσο πιό μεγάλη μάζα ἔχουν. Ἔτσι **τό μέτρο τῆς μάζας μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ταυτόχρονα καί μέτρο τῆς ἀδράνειας τῆς ὕλης.**

Ἀποτελέσματα ἀδράνειας. Τά ἀποτελέσματα τῆς ἀδράνειας γίνονται πολύ αἰσθητά, ὅταν ὑπάρχουν μεγάλες ἐπιταχύνσεις. Παρακάτω ἀναφέρουμε καί ἐξηγοῦμε μερικά φαινόμενα πού ὀφείλονται στήν ἀδράνεια τῆς ὕλης.

1. Ὅταν ἕνα ὄχημα κινεῖται καί σταματήσει ἀπότομα, τότε οἱ ὄρθιοι ἐπιβάτες του **μετακινοῦνται** πρός τά ἐμπρός. Ἀντίστροφα, ὅταν τό ὄχημα εἶναι ἀκίνητο

καί ξεκινήσει ἀπότομα, οἱ ὄρθιοι ἐπιβάτες κινοῦνται πρός τά πίσω.



Σχ. 1·4 ζ.

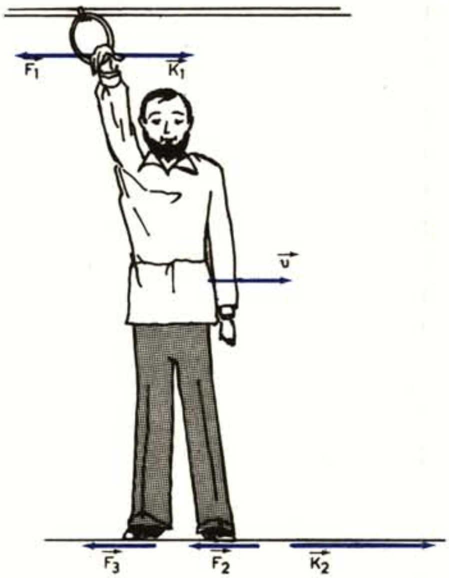
Ἐξήγηση τοῦ φαινομένου. Τό ὄχημα μέ τόν ἐπιβάτη A_1 βρίσκεται κάποια χρονική στιγμή στή θέση I καί κινεῖται ἰσοταχῶς μέ ὁρισμένη ταχύτητα. Μετά ἀπό χρόνο t, σύμφωνα μέ τήν ταχύτητα πού ἔχει, θά ἔπρεπε τό ὄχημα νά βρίσκεται στή θέση III. Ὅμως, στό μεταξύ ὁ ὁδηγός φρενάρει, ὁπότε στό χρόνο t τό ὄχημα φθάνει στή θέση II ἀντί τῆς III (σχ. 1 · 4 ζ).

Ὁ ἐπιβάτης A_1 ὁ ὁποῖος βρίσκεται στό ὄχημα, δέν κρατιέται ἀπό τά στηρίγματά του καί ἔτσι μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἔχει κάποια ἀνεξαρτησία ἀπ' αὐτό. Στή θέση I κινεῖται παράλληλα μέ τό ὄχημα (ἔχουν τήν ἴδια ταχύτητα). Τό ὄχημα ἐνδιάμεσα ἐλάττωσε τήν ταχύτητα μέ τό φρενάρισμα τοῦ ὁδηγοῦ. Ὁ ἐπιβάτης ὅμως, ἐξαιτίας τῆς ἀδράνειας, συνεχίζει τήν κίνησή του καί ἔτσι στό χρόνο t βρίσκεται στή θέση A_2, δηλαδή **μέσα στό ὄχημα μετακινήθηκε ἀπό τή θέση A_3 στή θέση A_2.**

Ἄν θελήσει ὁ ἄνθρωπος νά παραμείνει ἀκίνητος στή θέση του μέσα στό ὄχημα, πρέπει νά στηρίζεται σ' αὐτό (σχ. 1 · 4 η). Ἔτσι, ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ ὀχήματος ἐλαττωθεῖ, ἐκεῖνος (σάν ὕλη) σπρώχνει τό στήριγμα μέ τό χέρι καί τό δάπεδο μέ τά πόδια (ἀντιδρᾶ στή μεταβολή) καί δέχεται ἀπό αὐτά (στήριγμα καί δάπεδο), τήν ἀναγκαία δύναμη γιά νά ἐπιβραδυνθεῖ ἡ κίνησή του (2ο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα).

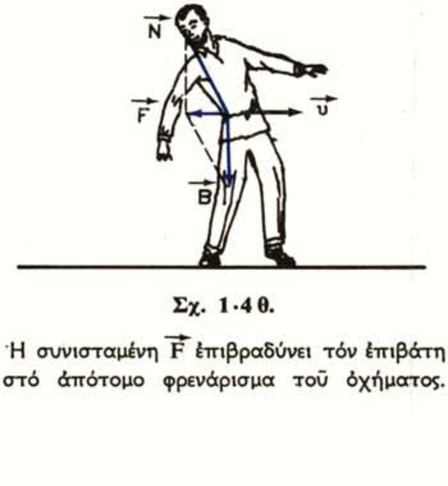
Στό σχῆμα 1 · 4 η οἱ δυνάμεις $\vec{K}_1$ καί $\vec{K}_2$ ἐξασκοῦνται ἀπό τόν ἐπιβάτη στό ὄχημα καί οἱ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ἀπό τό ὄχημα στόν ἐπιβάτη ὡς δυνάμεις ἀντιδράσεως. Οἱ τελευταῖες ἐπιβραδύνουν τήν κίνηση τοῦ ἐπιβάτη.

Ἄλλος τρόπος, μέ τόν ὁποῖο ὁ ἐπιβάτης μπορεῖ νά ἀποφύγει τή μετακίνησή του μέσα στό ὄχημα, εἶναι νά δώσει κλίση στό σῶμα του, ὅπως στό σχῆμα 1 · 4 θ.



Σχ. 1·4 η.

Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$ ἐπιβραδύνουν τόν ἐπιβάτη, ὅταν καί τό ὄχημα ἐπιβραδύνεται.



Σχ. 1·4 θ.

Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἐπιβραδύνει τόν ἐπιβάτη στό ἀπότομο φρενάρισμα τοῦ ὀχήματος.

Μέ τόν τρόπο αὐτό ἡ συνισταμένη τοῦ βάρους $\vec{B}$ καί τῆς ἀντιδράσεως τοῦ δαπέδου $\vec{N}$, δηλαδή ἡ δύναμη $\vec{F}$, ἐπιβραδύνει τήν κίνηση τοῦ ἐπιβάτη.

Ἡ ἐξήγηση τοῦ ἀντίστροφου φαινομένου στό ξεκίνημα τοῦ ὀχήματος εἶναι ἀνάλογη μέ αὐτή πού δόθηκε παραπάνω.

— Τά καταστροφικά ἀποτελέσματα τῶν συγκρούσεων ὀφείλονται στήν ἀδράνεια τῶν σωμάτων. Στίς συγκρούσεις ἀναπτύσσονται πολύ μεγάλες δυνάμεις, ἀναγκαῖες γιά τήν ἐπιβράδυνση μεγάλων μαζῶν. Οἱ δυνάμεις αὐτές προκαλοῦν τίς καταστροφές.

— Στηριζόμενοι στήν «ἀδράνεια» μποροῦμε νά στερεώσουμε καλά μιά λίμα στήν ξύλινη χειρολαβή της (σχ. 1·4ι). Χτυπᾶμε τήν ξύλινη χειρολαβή στό δάπεδο. Ἔτσι, ἐνῶ ἡ χειρολαβή σταματᾶ, ὅταν ἔρθει σέ ἐπαφή μέ τό δάπεδο, τό μεταλλικό μέρος τῆς λίμας συνεχίζει τήν κίνησή του λόγω τῆς ἀδράνειας καί προχωρεῖ μέσα στό ξύλο.

Σχ. 1·4ι.

γ) **Μονάδες δυνάμεως καί μάζας.** Χρησιμοποιώντας τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς μποροῦμε νά ὁρίσουμε μονάδες δυνάμεως καί μάζας στά χρησιμοποιούμενα συστήματα.

— Μονάδες δυνάμεως.

Σύστημα S.I.

$$F = m\,\gamma$$

Ἄν $\gamma = 1\ \mathrm{m/s^2}$ καί $m = 1\ \mathrm{kg}$, τότε:

$$F = 1\ \mathrm{kg}\cdot 1\ \mathrm{m/s} = 1\ \mathrm{kg\ m/s}.$$

Ἡ μονάδα αὐτή λέγεται καί **Νιοῦτον** (N).

Δηλαδή: **1 N εἶναι ἡ δύναμη, πού ὅταν ἐπιδράσει σέ μάζα 1 kg, προκαλεῖ ἐπιτάχυνση 1 m/s².**

— Τεχνικό Σύστημα.

Ἡ μονάδα δυνάμεως στό σύστημα αὐτό εἶναι θεμελιώδης μονάδα, ὅπως εἴπαμε στήν παράγραφο 0·2δ (β) καί εἶναι τό 1 κιλοπόντ (kp).

— Σύστημα C.G.S.

Στή σχέση $F = m\,\gamma$ θέτουμε $\gamma = 1\ \mathrm{cm/s^2}$ καί $m = 1\ \mathrm{g}$, ὁπότε:

$$F = 1\ \mathrm{g}\cdot 1\ \mathrm{cm/s} = 1\ \mathrm{g\ cm/s}.$$

Ἡ μονάδα αὐτή ὀνομάζεται **δύνη** (dyn).

Δηλαδή: 1 dyn εἶναι ἡ δύναμη, πού, ὅταν δράσει

σέ μάζα 1 g, προκαλεῖ ἐπιτάχυνση 1 cm/s².

Σημείωση: Ἐκτός ἀπό τή μονάδα kp ἔχουμε καί τήν ὑποπολλαπλάσια μονάδα p (πόντ):

$$1\ \mathrm{p} = 10^{-3}\ \mathrm{kp}.$$

— Σχέση μονάδων δυνάμεως.

— Σχέση μονάδων N καί kp.

Πρόβλημα. Σῶμα μάζας 1 kg ἐπιταχύνεται, ὅπως εἶναι γνωστό στήν ἐλεύθερη πτώση του, μέ ἐπιτάχυνση $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Νά ὑπολογισθεῖ τό βάρος του.

Λύση:

Σύστημα S.I.

Ξέρουμε ὅτι: $B = m\,g$.

Ἔχουμε $B = 1\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 9{,}81\ \mathrm{N}$.

Στόν ὁρισμό ὅμως τῆς μονάδας kp εἴχαμε πεῖ ὅτι 1 kp εἶναι τό βάρος σώματος μάζας 1 kg.

Ἑπομένως: $\boxed{1\ kp = 9{,}81\ N}$

— Σχέση μονάδων N καί dyn.

$$1\ \mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}.$$

(Ἡ σχέση νά ἀποδειχθεῖ ἀπό τούς μαθητές).

— Μονάδες μάζας.

Στό σύστημα S.I. ἡ μονάδα μάζας εἶναι θεμελιώδης καί, ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει, εἶναι τό 1 kg.

Στό Τεχνικό Σύστημα ἡ μονάδα μάζας ὁρίζεται ἀπό τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς:

$$F = m\,\gamma \quad \text{ἤ} \quad m = \frac{F}{\gamma}$$

Ἄν $F = 1\ \mathrm{kp}$ καί $\gamma = 1\ \mathrm{m/s^2}$, τότε:

$$\boxed{m = \frac{1\ kp}{1\ m/s^2} = 1\ T.M.\ \text{μάζας}}$$

Ὥστε: **1 Τ.Μ. μάζας, εἶναι ἡ μάζα ἐκείνη στήν ὁποία, ὅταν ἐνεργήσει δύναμη 1 kp, προκαλεῖται ἐπιτάχυνση 1 m/s².**

— Σχέση μονάδων μάζας.

Πρόβλημα. Ἕνα σῶμα ἕλκεται ἀπό τή Γῆ μέ δύναμη (βάρος) 1 kp. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ μάζα του.

Λύση:

Λύνουμε τήν ἐξίσωση $B = m\,g$ ὡς πρός m:

$$m = \frac{B}{g}$$

Ἐπειδή τό σῶμα κάνει ἐλεύθερη πτώση, ἡ ἐπιτάχυνσή του εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας: $g = 9{,}81\ m/s^2$ καί στό Τεχνικό Σύστημα ἔχουμε:

$$m = \frac{1\ kp}{9{,}81\ m/s^2} = \frac{1\ \text{Τ.Μ. μάζας}}{9{,}81}.$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι μάζα 1 kg ἕλκεται ἀπό τή Γῆ μέ δύναμη (βάρος) 1 kp. Ἑπομένως 1 kg εἶναι ἴσο πρός $\frac{1}{9{,}81}$ Τ.Μ. μάζας, γιατί καί οἱ δύο αὐτές μάζες ἕλκονται ἀπό τή Γῆ μέ τήν ἴδια δύναμη, δηλαδή μέ 1 kp:

$$1\ kg = \frac{1}{9{,}81}\ \text{Τ.Μ. μάζας} \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\mathit{1\ Τ.Μ.\ μάζας = 9{,}81\ kg}}$$

δ) **Ἐφαρμογές τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς δυναμικῆς.**

Προβλήματα.

1. Κινητό μάζας 400 g κινεῖται μέ κίνηση ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη, ἐνῶ ἡ ἀρχική του ταχύτητα εἶναι $\upsilon_o = 20$ m/s. Αὐτό σταματᾶ, ὅταν διανύσει διάστημα 40 m.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη πού ἐπιβραδύνει τήν κίνησή του.

Λύση:

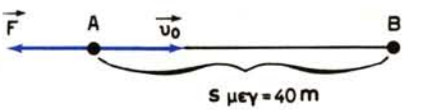
Σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς:

$$F = m\,\gamma \qquad (1)$$

γιά νά ὑπολογισθεῖ ἡ F, πρέπει νά προηγηθεῖ ὁ ὑπολογισμός τῆς ἐπιβραδύνσεως γ.

Ἀπό τό σχῆμα 1·4 ια φαίνεται ὅτι τό διάστημα AB εἶναι τό $s_{μεγ}$, τό ὁποῖο δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$s_{μεγ} = \frac{\upsilon^2_o}{2\gamma} \qquad (2)$$



Σχ. 1·4 ια.

Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει:

$$F = m \frac{\upsilon^2_o}{2s_{\mu\varepsilon\gamma}} \qquad (3)$$

Σύστημα S.I.

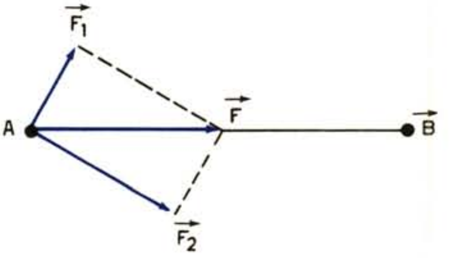
$$m = 400\ g = \frac{400}{1000}\ kg = 0{,}4\ kg$$

Ἀντικατάσταση:

$$F = 0{,}4\ kg \cdot \left(\frac{20\ m/s}{2 \cdot 40\ m}\right)^2 = 2\ N$$

Ἀπάντηση: Ἡ δύναμη πού ἐπιβραδύνει τήν κίνησή του εἶναι 2 N.

2. Σέ ἀκίνητο ὑλικό σημεῖο μάζας 10 kg, ἐνεργοῦν δυό κάθετες δυνάμεις $F_1 = 30$ kp καί $F_2 = 40$ kp, σταθερές κατά μέτρο καί διεύθυνση. Νά βρεθεῖ τό εἶδος τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί τό διάστημα πού θά διανύσει σέ χρόνο t = 4 s (σχ. 1 · 4 ιβ).



Σχ. 1·4 ιβ.

— Τό εἶδος τῆς κινήσεως.

Ἐπειδή οἱ δυό δυνάμεις ἔχουν σταθερά μέτρα καί διευθύνσεις, ἕπεται ὅτι θά ἔχουν καί σταθερή συνισταμένη (κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά).

Ὅταν ὅμως σταθερή δύναμη ἐνεργεῖ σέ ὑλικό σημεῖο, σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς, προκαλεῖται σταθερή ἐπιτάχυνση. Ἡ ἀρχική ταχύτητα εἶναι μηδέν, ἑπομένως ἡ κίνηση θά εἶναι εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιταχυνομένη, μέ διεύθυνση τή διεύθυνση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.

— Ὑπολογισμός τοῦ διαστήματος.

Τό διάστημα s δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (1)$$

ἐνῶ ἡ ἐπιτάχυνση γ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$F = m\gamma \quad ἤ \quad \gamma = \frac{F}{m} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$\boxed{s = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} t^2} \qquad (3)$$

Ὑπολογισμός F. Ἡ συνισταμένη δίνεται ἀπό τή:

$$F = \sqrt{F^2_1 + F^2_2} \quad \text{ἤ}$$

$$F = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ kp}.$$

Σύστημα S.I.

$$F = 50 \text{ kp} = 50 \cdot 9{,}81 \text{ N} = 490 \text{ N}$$

$$m = 10 \text{ kg} \quad \text{καί} \quad t = 4 \text{ s}.$$

Ἀντικατάσταση :

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{490}{10} \cdot 16 = 392 \text{ m}.$$

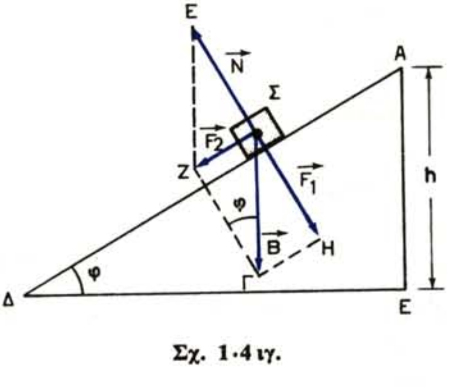
3. Σῶμα Σ βρίσκεται σέ ἕνα ἐπίπεδο, πού παρουσιάζει κλίση ὡς πρός τό ἔδαφος (κεκλιμένο ἐπίπεδο). Ἀνάμεσα στό σῶμα καί στό ἐπίπεδο δέν ὑπάρχει τριβή. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει τό σῶμα στό κατώτερο σημεῖο Δ, ἄν ἀφεθεῖ ἐλεύθερο ἀπό τό σημεῖο Α χωρίς ἀρχική ταχύτητα.

Δίνονται: $h = 20$ m, $g = 10$ m/s².

Λύση:

Στό σῶμα Σ ἐξασκοῦνται δυό δυνάμεις: Τό βάρος τοῦ σώματος $\vec{B}$ καί ἡ ἀντίδραση $\vec{N}$, ἡ ὁποία, ἐπειδή δέν ὑπάρχει τριβή, εἶναι κάθετη στήν κοινή ἐπιφάνεια ἐπαφῆς ΑΔ (σχ. 1 · 4 ιγ).

Ἀναλύουμε τό βάρος Β σέ δυό συνιστῶσες δυνάμεις, τή $\vec{F_1}$ καί τή $\vec{F_2}$. Ἡ δύναμη $\vec{F_1}$ εἶναι ἴση καί ἀντίθετη πρός τή $\vec{N}$ (ἰσορροπεῖ τή $\vec{N}$), γιατί πρός τή διεύθυνση ΕΗ δέν μετακινεῖται τό σῶμα. Ἑπομένως ἡ μόνη δύναμη πού παραμένει εἶναι ἡ $\vec{F_2}$, ἡ ὁποία ἐπιταχύνει τό σῶμα Σ πρός τή διεύθυνση ΑΔ.



Σχ. 1·4 ιγ.

Ἀπό τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς προκύπτει:

$$F_2 = m\,\gamma \qquad (1)$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΖΣΓ ἔχουμε:

$$F_2 = B\ \eta\mu\varphi = m\,g\ \eta\mu\varphi \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$m\,\gamma = m\,g\ \eta\mu\varphi \Longrightarrow \boxed{\gamma = g\ \eta\mu\varphi} \qquad (3)$$

Τό σῶμα Σ, ἑπομένως, θά κινεῖται μέ ὁμαλά ἐπιταχυνομένη κίνηση καί ἐπιτάχυνση $\gamma = g$ ημφ.

Ὑπολογισμός τῆς ταχύτητας.

Θά χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο:

$$\upsilon = \sqrt{2\gamma\, s} \qquad (4)$$

Ἔχουμε: $\upsilon = \upsilon_\Delta$, $\gamma = g$ ημφ καί $s = \dfrac{h}{\text{ημφ}}$ (τρίγωνο ΑΔΕ).

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (4) γίνεται:

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{2g\ \text{ημφ}\ \frac{h}{\text{ημφ}}} \quad \text{ἤ}$$

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{2g\, h} \qquad (5)$$

Ἀπό τόν τύπο (5) συμπεραίνεται ὅτι ἡ ταχύτητα πού ἀποκτᾶ τό κινητό κατά τήν κίνησή του πάνω στό **κεκλιμένο ἐπίπεδο** ἀπό τό Α στό Δ εἶναι ἴση μέ τήν ταχύτητα πού θά ἀποκτοῦσε, ἄν ἔκανε ἐλεύθερη πτώση ἀπό ὕψος ἴσο μέ τήν ὑψομετρική διαφορά τῶν σημείων Α καί Δ.

— **Ἀντικατάσταση ἀριθμητικῶν τιμῶν.**

Σύστημα S.I.

$g = 10\ m/s^2$, $h = 20\ m$, $\upsilon_\Delta = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} = 20\ m/s$.

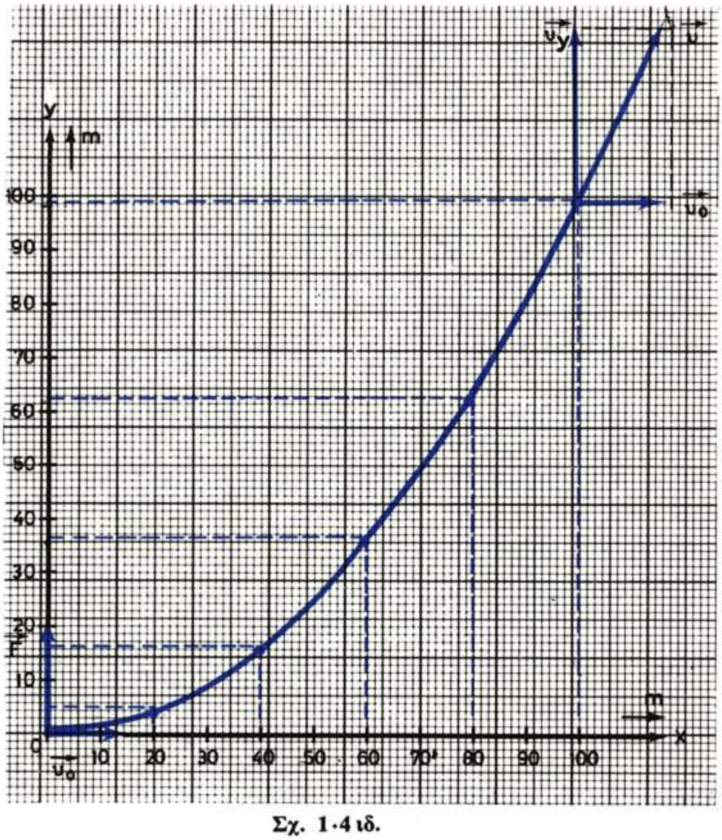
Ἀπάντηση: Στό σημεῖο Δ τό σῶμα θά ἀποκτήσει ταχύτητα 20 m/s.

4. Ὑλικό σημεῖο μάζας $m = 50$ kg κινεῖται ἰσοταχῶς μέ ταχύτητα $\upsilon_o = 20$ m/s. Δύναμη $F = 40$ kp ἐνεργεῖ στό ὑλικό σημεῖο μέ διεύθυνση κάθετη πρός τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας υ_o. Νά βρεθεῖ τό εἶδος τῆς κινήσεως πού θά κάνει τό κινητό καί τό μέτρο τῆς ταχύτητας πού θά ἀποκτήσει μετά ἀπό χρόνο $t = 5$ s.

Λύση:

Ἡ κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου θά βρεθεῖ ἀπό τή σύνθεση κινήσεων σέ δυό κάθετους ἄξονες.

Στόν ἄξονα Ox, πού συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon_o}$ τοῦ κινητοῦ, ἡ κίνηση εἶναι ἰσοταχής, γιατί δέν ὑπάρχει δύναμη πού νά τό ἐπιταχύνει πρός τή διεύθυνση αὐτή. Ἡ κίνηση στόν ἄξονα Oy εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνομένη χωρίς ἀρχική ταχύτητα καί μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = \dfrac{F}{m}$.



Σχ. 1·4ιδ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1·4·1

t (s)	$x = \upsilon_0 t$ (m)	$y = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$ (m)
0	0	0
1	20	3,9
2	40	15,7
3	60	35,3
4	80	62,7
5	100	98,4

Μετά ἀπό χρόνο t, ἡ μετάθεση x τοῦ κινητοῦ κατά τόν ἄξονα Ox εἶναι:

$$x = \upsilon_0 t.$$

Στό ἴδιο χρονικό διάστημα, ἡ μετάθεση y κατά τόν ἄξονα Oy εἶναι:

$$y = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

Ἡ τροχιά τῆς συνισταμένης κινήσεως βρίσκεται, ἄν λάβουμε τά ζεύγη τῶν τιμῶν x καί y.

Στόν Πίνακα 1·4·1 ὑπολογίσθηκαν τά ζεύγη τῶν τιμῶν x καί y καί μέ βάση αὐτά τά ζεύγη χαράχθηκε στό σχῆμα 1·4ιδ ἡ τροχιά τοῦ κινητοῦ.

Δεδομένα στό **Σύστημα S.I.:**

F = 40 kp = 40 · 9,81 N = 392 N.

m = 50 kg καί υ_0 = 20 m/s.

Ὑπολογισμός τῆς τελικῆς ταχύτητας.

Τό μέτρο τῆς τελικῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ μετά ἀπό χρόνο $t = 5\,s$ βρίσκεται, ἄν ὑπολογιστεῖ ἡ υ_y, γιατί:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2_o + \upsilon^2_y}$$

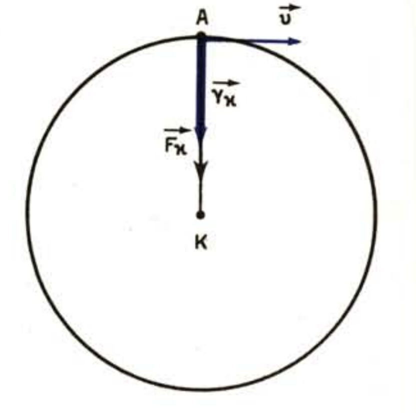
καί ἡ $\upsilon_o = 20$ m/s (σταθερή).

Ἡ $\upsilon_y = \gamma\, t = \dfrac{F}{m}\, t = \dfrac{392\ N}{50\ kg} \cdot 5\ s = 392$ m/s.

Ἐπομένως $\upsilon = \sqrt{20^2 + 34{,}2^2} \simeq 44$ m/s.

Σημείωση: Τό προηγούμενο πρόβλημα εἶναι ὅμοιο μέ τό πρόβλημα τῆς ὁριζόντιας βολῆς [παράγρ. 1 · 2 (5)]. Κι ἐκεῖ ἡ μιά κίνηση στόν ἄξονα τῶν y (κατακόρυφο ἄξονα) εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνομένη, γιατί τό βάρος ὡς σταθερή δύναμη προκαλεῖ σταθερή ἐπιτάχυνση· ἡ ἄλλη κίνηση στόν ἄξονα τῶν x (ὁριζόντια κίνηση) εἶναι κι ἐκεῖ ἰσοταχής, γιατί **δέν ὑπάρχει καμιά δύναμη στήν ὁριζόντια διεύθυνση, πού νά ἐπιταχύνει τό σῶμα.**

ε) **Κεντρομόλος καί φυγόκεντρος δύναμη.** Στήν παράγραφο 1 · 1 (β, 3) εἴδαμε ὅτι στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ὑπάρχει κεντρομόλος ἐπιτάχυνση.



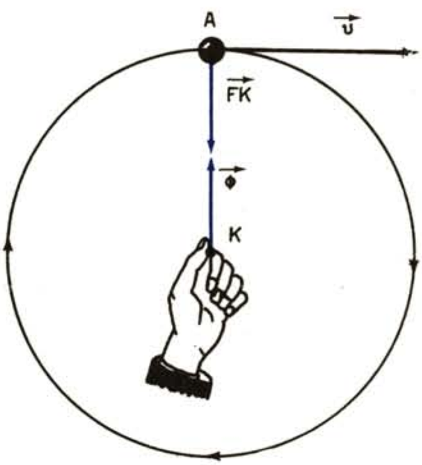
Σχ. 1·4 ιε.
Ἡ κεντρομόλος δύναμη $\vec{F_\kappa}$ ἔχει ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τήν κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma_\kappa}$.

Ἐπομένως πρέπει νά ὑπάρχει καί δύναμη τῆς ἴδιας διευθύνσεως καί φορᾶς μέ τήν ἐπιτάχυνση. Ἡ δύναμη αὐτή ὀνομάζεται **κεντρομόλος δύναμη.** Στό σχῆμα 1 · 4 ιε εἶναι ἡ $\vec{F_\kappa}$ πού ἔχει διεύθυνση τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, φορά ἀπό τήν περιφέρεια πρός τό κέντρο καί μέτρο:

$$F_\kappa = m\,\gamma_\kappa = m\,\frac{\upsilon^2}{r}$$

Συμπέρασμα: Γιά νά πραγματοποιήσει ἕνα σῶμα ὁμαλή κυκλική κίνηση, πρέπει νά ἐξασκηθεῖ σ' αὐτό κεντρομόλος δύναμη.

1) **Φυγόκεντρος δύναμη.** Ἔστω ὅτι μιά σφαίρα μεταλλική βρίσκεται στό σημεῖο A καί τήν ἀναγκάζουμε σέ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, κρατώντας την μέ τό χέρι μας ἀπό τό κέντρο K μέ ἕνα σχοινί AK (σχ. 1 · 4 ιστ).

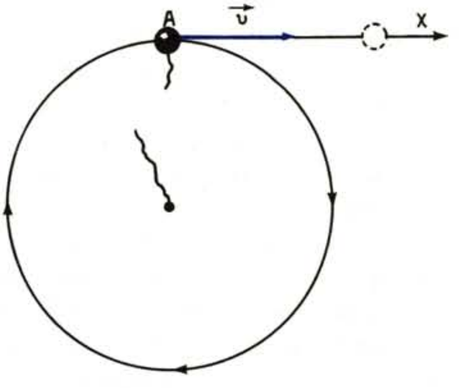


Σχ. 1·4 ιστ.
Ἡ φυγόκεντρος δύναμη εἶναι δύναμη ἀντιδράσεως.

Τήν **ἀναγκαία** κεντρομόλο δύναμη $\vec{F_\kappa}$ ἐξασκεῖ τό χέρι μας στό σῶμα A μέ τή βοήθεια τοῦ σχοινιοῦ. Τό σῶμα A ἀντιδρᾶ καί ἐξασκεῖ στό χέρι μας τή δύναμη Φ, πού ἔχει φορά ἀντίθετη τῆς κεντρομόλου. Ἡ δύναμη αὐτή ὀνομάζεται **φυγόκεντρος δύναμη.** Εἶναι ἑπομένως ἡ φυγόκεντρος δύναμη, δύναμη ἀντιδράσεως.

Ἐπειδή μάλιστα ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ τήν κεντρομόλο, ὑπολογίζεται ἀπό τούς ἴδιους τύπους πού χρησιμοποιοῦνται γιά τόν προσδιορισμό τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.

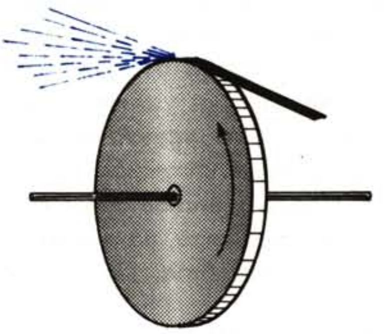
Ἄν τό σχοινί πού συνδέει τό σῶμα μέ τό κέντρο τοῦ κύκλου κοπεῖ (σχ. 1·4 ιζ), τότε ἡ κεντρομόλος δύναμη μηδενίζεται καί τό σῶμα παύει νά κινεῖται κυκλικά. Σύμφωνα μέ τό πρῶτο Ἀξίωμα τῆς Ἀδράνειας, ἐφόσον καμιά δύναμη δέν ἐνεργεῖ πάνω στό σῶμα, πρέπει αὐτό νά κινεῖται εὐθύγραμμα. Πράγματι τό σῶμα κινεῖται πρός τή διεύθυνση Αx ἰσοταχῶς.



Σχ. 1·4 ιζ.

Τό σχῆμα 1·4 ιη δείχνει ἕναν τροχό πού πετᾶ σπινθῆρες. Φαίνεται ὅτι οἱ σπινθῆρες τοῦ σμυριδοτροχοῦ κατά τό τρόχισμα ἐργαλείων, ἀκολουθοῦν τροχιά ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τοῦ τροχοῦ.

Στήν πραγματικότητα οἱ σπινθῆρες εἶναι μικρά διάπυρα κομμάτια ἀπό ρινίσματα σιδήρου. Ἐπειδή αὐτά δέν ἕλκονται ἀπό κάποια κεντρομόλο δύναμη, τινάζονται πρός τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας πού ἀπόκτησαν καί ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ τροχοῦ.


Σχ. 1·4 ιη.

Γενικά, ἄν ἕνα κινητό εἶναι ὑποχρεωμένο νά κινεῖται σέ μιά κυκλική τροχιά καί δέν ὑπάρχει κεντρομόλος δύναμη νά τό συγκρατήσει ἤ ἡ κεντρομόλος δύναμη εἶναι ἀνεπαρκής, τότε τό σῶμα **ἐκτρέπεται ἀπό τήν τροχιά του** ἀκολουθώντας τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

2) **Νόμοι κεντρομόλου δυνάμεως.** Εἴδαμε ὅτι τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$F_\kappa = m\,\frac{\upsilon^2}{r} \qquad (1)$$

Ἐπίσης γνωρίζουμε ὅτι:

$$\upsilon = \omega\, r, \qquad \upsilon = \frac{2\pi}{T}\, r, \qquad \upsilon = 2\pi\,\nu\, r \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τίς σχέσεις (1) καί (2) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} F_\kappa &= m\,\omega^2\, r \\ F_\kappa &= m\,\frac{4\,\pi^2}{T^2}\, r \\ F_\kappa &= m\, 4\pi^2\, \nu^2\, r \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

Μέ τίς ἐξισώσεις αὐτές μπορεῖ κανείς νά διατυπώσει τούς νόμους τῆς κεντρομόλου δυνάμεως, οἱ ὁποῖοι ταυτόχρονα θά εἶναι καί νόμοι τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ἀφοῦ, ὅπως εἴπαμε, ἡ κεντρομόλος καί ἡ φυγόκεντρος ἔχουν τό ἴδιο μέτρο.

1ος Νόμος. Ἡ κεντρομόλος δύναμη εἶναι ἀνάλογη πρός τή μάζα.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν δύο κινητά περιφέρονται μέ τήν ἴδια γραμμική ἤ γωνιακή ταχύτητα σέ κύκλο τῆς ἴδιας ἀκτίνας, ἀλλά ἡ μάζα τοῦ πρώτου εἶναι διπλάσια, τριπλάσια κ.λπ. ἀπό τή μάζα τοῦ δεύτερου, τότε στό πρῶτο σῶμα ἐξασκεῖται ἀντίστοιχα διπλάσια, τριπλάσια κ.λπ. κεντρομόλος δύναμη, ἀπό ἐκείνη πού ἐξασκεῖται στό δεύτερο.

2ος Νόμος. Ἡ κεντρομόλος δύναμη εἶναι ἀνάλογη πρός τό τετράγωνο τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ἤ τῆς γραμμικῆς ταχύτητας.

Δηλαδή ξέρουμε ὅτι γιά νά περιστρέψουμε σῶμα ὁρισμένης μάζας μέ γωνιακή ταχύτητα ω ἤ γραμμική ταχύτητα υ σέ τροχιά ὁρισμένης ἀκτίνας, πρέπει νά ἐξασκήσουμε κεντρομόλο δύναμη F_κ. Ὅμως γιά νά διπλασιάσομε, τριπλασιάσομε κ.λπ. τή γωνιακή ἤ τή γραμμική ταχύτητα, θά πρέπει νά ἐξασκήσουμε ἀντίστοιχα τετραπλάσια, ἐννιαπλάσια κ.λπ. κεντρομόλο δύναμη.

3ος Νόμος. Ἡ κεντρομόλος δύναμη εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἀκτίνα, ἄν ἕνα σῶμα περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα· εἶναι ὅμως ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρός τήν ἀκτίνα, ἄν τό σῶμα περιστρέφεται μέ σταθερή γραμμική ταχύτητα.

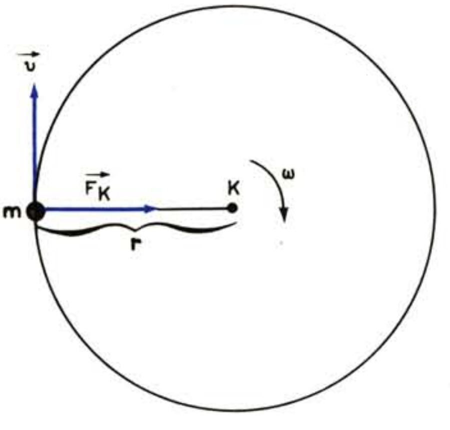
Ὁ νόμος αὐτός μπορεῖ νά γίνει κατανοητός ἀπό τούς τύπους:

$$F_\kappa = m\,\omega^2\,r \quad \text{καί} \quad F_\kappa = \frac{m\,\upsilon^2}{r}$$

Ἀπό τόν πρῶτο τύπο συμπεραίνεται ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμη F_κ εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἀκτίνα r γιά m καί ω σταθερά.

Ἀπό τό δεύτερο τύπο συμπεραίνεται ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμη F_κ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρός τήν ἀκτίνα r γιά τήν ἴδια m καί υ.

Ἄν ἑπομένως περιστρέψουμε ἕνα σῶμα σέ τροχιές ἀκτίνων r καί $2r$ μέ τήν ἴδια **γωνιακή ταχύτητα,** πρέπει νά ἐξασκήσουμε στήν πρώτη περίπτωση δύναμη F_κ καί στή δεύτερη, δύναμη $2F_\kappa$. Ἄν ὅμως ἕνα σῶμα περιστρέφεται σέ τροχιές ἀκτίνων r καί 2r μέ τήν ἴδια **γραμμική ταχύτητα,** πρέπει νά ἐξασκήσουμε στήν πρώτη περίπτωση δύναμη F_κ καί στή δεύτερη, δύναμη $\frac{F_\kappa}{2}$.



Σχ. 1·4ιθ.

Προβλήματα :

1. Ἡ μέγιστη τάση στήν ὁποία ἀντέχει ἕνα σχοινί εἶναι 25 kp.

Μέ ἕνα τέτοιο σχοινί περιστρέφουμε κυκλικά, σέ ἀκτίνα r = 40 cm, σῶμα μάζας 800 g. Ποιά ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ σώματος, πάνω ἀπό τήν ὁποία τό σχοινί θά κοπεῖ (σχ. 1 · 4 ιθ).

Λύση :

Ξέρουμε ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμη F_κ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$F_\kappa = m\,\omega^2\,r$$

Τήν κεντρομόλο δύναμη F_κ ἐξασκεῖ τό σημεῖο K μέ τό σχοινί καί ἡ τάση τοῦ σχοινιοῦ εἶναι ἴδια μέ τήν κεντρομόλο δύναμη.

Θά ὑπολογίσουμε γιά ποιά γωνιακή ταχύτητα ἡ κεντρομόλος δύναμη γίνεται 25 kp.

Σύστημα μονάδων S.I.

$F_\kappa = 25 \text{ kp} \simeq 245 \text{ N}$

$m = 800 \text{ g} = 0{,}8 \text{ kg}$

$r = 40 \text{ cm} = 0{,}4 \text{ m}.$

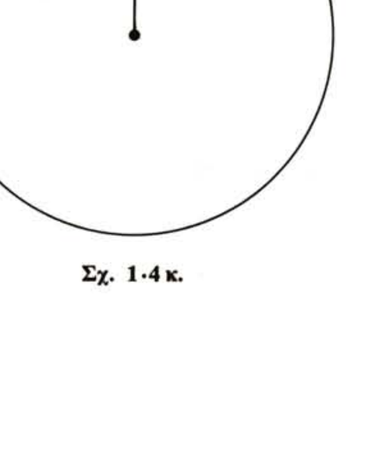
Ἀπό τόν τύπο $F_\kappa = m\,\omega^2\,r$ προκύπτει ὅτι:

$$\omega = \sqrt{\frac{F_\kappa}{mr}} \quad \text{καί ἀντικαθιστώντας:}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{245}{0{,}8 \cdot 04}} = 27{,}6 \text{ rad/s}.$$

Ἀπάντηση : Ἄν ἡ γωνιακή ταχύτητα γίνει πιό μεγάλη ἀπό 27,6 rad/s, τότε τό σχοινί θά κοπεῖ.

2. Ἕνα δοχεῖο μέ νερό περιστρέφεται σέ κατακόρυφη τροχιά (σχ. 1 · 4 κ). Ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη γραμμική ταχύτητα, ὥστε τό νερό νά μή χύνεται καί στό πιό ψηλό σημεῖο τῆς τροχιᾶς A ;



Σχ. 1·4κ.

Λύση :

Ἀφοῦ ἡ μάζα τοῦ νεροῦ περιστρέφεται, γιά νά διατηρήσει τήν κυκλική αὐτή κίνηση, χρειάζεται κεντρομόλο δύναμη.

Στήν κατακόρυφη θέση, ἐξασκοῦνται δυό δυνάμεις στή μάζα τοῦ νεροῦ. Ἡ μία εἶναι τό βάρος του $\vec{B}$ καί ἡ ἄλλη εἶναι ἡ δύναμη $\vec{N}$, πού ἐξασκεῖ ὁ πυθμένας τοῦ δοχείου στό νερό καθώς βρίσκεται σέ ἐπαφή μ' αὐτό.

Ἡ συνισταμένη αὐτῶν τῶν δυνάμεων εἶναι ἡ $\vec{B} + \vec{N}$ καί αὐτή εἶναι ἡ **κεντρομόλος δύναμη.** Ἀπό τούς τύπους τῆς κεντρομόλου δυνάμεως ἔχουμε:

$$B + N = \frac{m\,\upsilon^2}{r}$$

Ἄν μεταβάλουμε τήν ταχύτητα υ τοῦ δοχείου, θά μεταβληθεῖ μόνο ἡ τιμή τῆς N, γιατί τά ὑπόλοιπα μεγέθη στήν ἐξίσωση εἶναι σταθερά. Ἐλαττώνοντας λοιπόν τήν υ, ἐλαττώνεται καί ἡ N. Γιά κάποια τιμή τῆς υ, τήν $\upsilon_{\varepsilon\lambda}$, τό N θά γίνει μηδέν.

Αὐτή εἶναι καί ἡ ζητούμενη ἐλάχιστη τιμή τῆς ταχύτητας γιά νά μή χυθεῖ τό νερό.

$$B + O = \frac{m\,\upsilon^2_{\varepsilon\lambda}}{r} \Longrightarrow \upsilon_{\varepsilon\lambda} = \sqrt{\frac{B\,r}{m}}$$

ἐπειδή $B = m\,g$, ἔχουμε: $\upsilon_{\varepsilon\lambda} = \sqrt{g\,r}$

Μέ τήν ταχύτητα αὐτή στή θέση A, τό βάρος B εἶναι ἡ **ἀναγκαία κεντρομόλος δύναμη,** ἡ ὁποία θά διατηρήσει τό νερό στήν κυκλική τροχιά.

Ἄν ἡ ταχύτητα γίνει πιό μικρή, τό νερό θά χυθεῖ.

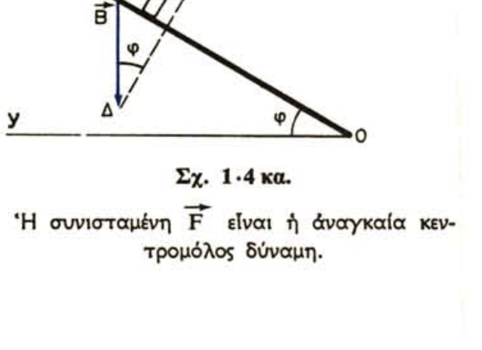
3) **Ἐφαρμογές τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.**

— **Κλίση σέ αὐτοκινητόδρομους.** Οἱ αὐτοκινητόδρομοι στίς στροφές παρουσιάζουν κλίση, γιά νά ἀποφεύγεται ἡ ἐκτροπή τῶν ὀχημάτων ἀπό τήν πορεία τους.

Τό αὐτοκίνητο στό σχῆμα 1·4 κα διαγράφει κυκλική τροχιά ἀκτίνας r μέ κάποια ταχύτητα. Γιά νά διατηρηθεῖ στήν κυκλική τροχιά ἔχει ἀνάγκη κεντρομόλου δυνάμεως.

Ἡ ἀντίδραση $\vec{N}$ τοῦ ὁδοστρώματος πάνω στό αὐτοκίνητο δέν εἶναι **κατακόρυφη ἀλλά πλάγια,** ἐπειδή τό ὁδόστρωμα ἔχει κλίση φ.

Ἔτσι ἡ συνισταμένη τῆς $\vec{N}$ καί τοῦ βάρους $\vec{B}$ τοῦ ὀχήματος δέν εἶναι μηδέν, ἀλλά ἡ $\vec{F}$, **ἡ ὁποία**



Σχ. 1·4 κα.

Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ εἶναι ἡ ἀναγκαία κεντρομόλος δύναμη.

ἀκριβῶς ἀποτελεῖ τήν κεντρομόλο δύναμη, πού κρατᾶ τό αὐτοκίνητο στήν κυκλική τροχιά.

Γιά τήν κατανόηση αὐτῆς τῆς ἐφαρμογῆς θά λύσουμε ἕνα πρόβλημα.

Πρόβλημα. Σέ νεοκατασκευαζόμενο ἐθνικό δρόμο, μιά καμπύλη του εἶναι τμῆμα περιφέρειας κύκλου, ἀκτίνας $r = 200$ m.

Στό σημεῖο αὐτό τοῦ δρόμου θά ἐπιτρέπεται μέγιστη ταχύτητα $\upsilon = 110$ km/h. Ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ κλίση τοῦ δρόμου, ὥστε νά ἀποφεύγονται οἱ ἐκτροπές;

Λύση:

Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε πρίν, ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι κεντρομόλος καί ἑπομένως:

$$F = \frac{m\,\upsilon^2}{r} \qquad (1)$$

Ἀπό τό τρίγωνο ΑΓΔ (σχ. 1 · 4 κα) ἔχουμε:

$$F = B\,\text{εφ}\varphi = m\,g\,\text{εφ}\varphi \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει ὅτι:

$$m\,g\,\text{εφ}\varphi = \frac{m\,\upsilon^2}{r} \quad \text{ἤ} \quad \text{εφ}\varphi = \frac{\upsilon^2}{g\,r}$$

Σύστημα μονάδων S.I.

$\upsilon = 110$ km/h $\simeq 30$ m/s, $g \simeq 10$ m/s^2, $r = 200$ m.

Ἀντικατάσταση:

$$\text{εφ}\varphi = \frac{30^2}{10 \cdot 200} = 0{,}45 \quad \text{καί} \quad \varphi = 24^\circ.$$

Ἀπάντηση: Τό ὁδόστρωμα τοῦ δρόμου πρέπει νά παρουσιάζει κλίση 24°.

Σημείωση: Γιά τούς λόγους πού ἀναφέραμε παραπάνω, ἕνας ποδηλάτης, ὅταν τρέχει στίς στροφές, κλίνει τό σῶμα του πρός τό ἔδαφος καί μάλιστα πρός τή διεύθυνση τοῦ κέντρου τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς. Ἐπίσης γιά τούς ἴδιους λόγους στίς στροφές καί οἱ γραμμές τοῦ τραίνου ἐμφανίζουν κλίση ὡς πρός τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

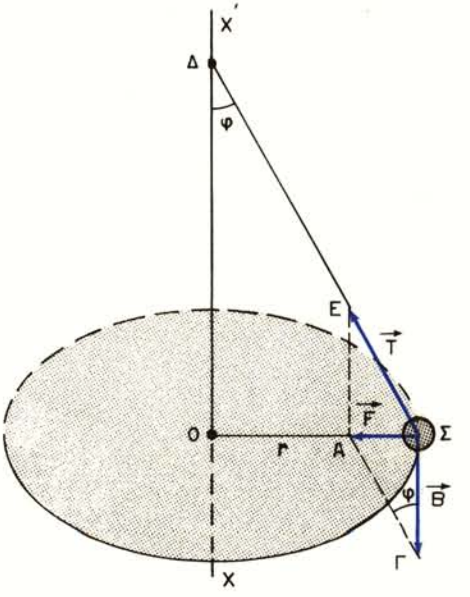
— Περιστρεφόμενη αἰώρα — Ρυθμιστής Watt. Στήν ἄκρη σχοινιοῦ, δένουμε μιά σφαίρα Σ καί περιστρέφουμε τό σχοινί μέ τή σφαίρα γύρω ἀπό τόν ἄξονα xx′ (σχ. 1 · 4 κβ).

Ἡ διάταξη αὐτή ὀνομάζεται περιστρεφόμενη αἰώρα. Κατά τήν αὔξηση τῆς γωνιακῆς ταχύτητας, παρατηροῦμε ὅτι ἡ σφαίρα συνεχῶς ἀπομακρύνεται ἀπό τόν ἄξονα xx' καί ἡ γωνία φ συνεχῶς μεγαλώνει.

Πρόβλημα. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία φ, ἄν ἡ αἰώρα περιστρέφεται μέ γωνιακή ταχύτητα ω.

Λύση:

Ἡ σφαίρα Σ κινεῖται ὁμαλά στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου (O, r). Ἡ ἀναγκαία κεντρομόλος δύναμη γιά τήν περιστροφή αὐτή, εἶναι ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τοῦ βάρους $\vec{B}$ καί τῆς δυνάμεως $\vec{T}$, πού ἐξασκεῖ τό σχοινί στή σφαίρα Σ.



Σχ. 1·4 κβ.
Περιστρεφόμενη αἰώρα.

Ἀφοῦ ἡ $\vec{F}$ εἶναι κεντρομόλος, θά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F = m\,\omega^2\,r \qquad (1)$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΣ ἔχουμε:

$$F = B\,\varepsilon\varphi\varphi = m\,g\,\varepsilon\varphi\varphi \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$m\,g\,\varepsilon\varphi\varphi = m\,\omega^2\,r \qquad (3)$$

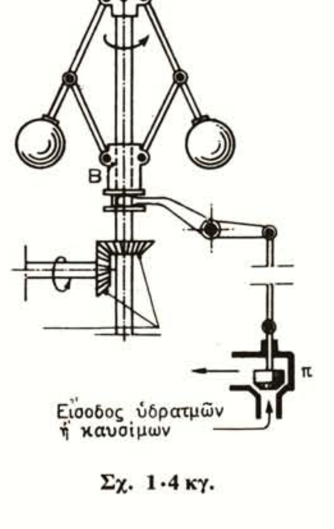
Λύνοντας τήν (3) ὡς πρός εφφ βρίσκομε:

$$\boxed{\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega^2\,r}{g}} \qquad (4)$$

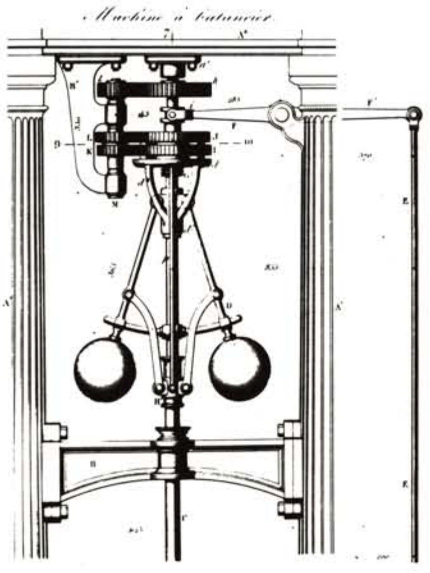
Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως (4). Ἄν ἡ γωνιακή ταχύτητα μεγαλώνει, ἡ εφφ μεγαλώνει καί ἑπομένως μεγαλώνει καί ἡ γωνία φ. Τό σχοινί, ὅμως, ποτέ δέν θά γίνει ὁριζόντιο, γιατί τότε $\varphi = 90°$ καί $\varepsilon\varphi\, 90° = \infty$ ὁπότε, ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς θά πρέπει νά γίνει ἄπειρη.

—**Ρυθμιστής Watt.** Στά ὅσα εἴπαμε γιά τήν αἰώρα στηρίζεται ἡ λειτουργία τοῦ ρυθμιστῆ τοῦ Watt.

Ὁ ρυθμιστής τοῦ Watt χρησιμοποιεῖται στίς ἀτμομηχανές καί σέ ἄλλες μηχανές (βενζινομηχανές, Diesel κ.λπ.), γιά νά ρυθμίζει τήν ποσότητα τῶν ἀτμῶν ἤ τῆς καύσιμης ὕλης πού τίς τροφοδοτοῦν, ἔτσι, ὥστε ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τους νά παραμένει σταθερή. Ἀποτελεῖται ἀπό δυό σφαῖρες, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 1·4κγ, οἱ ὁποῖες εἶναι κατάλληλα συνδεμένες μέ τόν ἄξονα ΑΒ ἔτσι, ὥστε ὅταν περιστρέφεται ὁ ἄξονας, νά μποροῦν νά ἀπομα-



Σχ. 1·4 κγ.

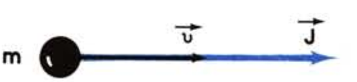


κρύνονται ἀπ' αὐτόν. Ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ ρυθμιστῆ εἶναι ἀνάλογη πρός τή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῶν μηχανῶν, γιατί μεταφέρεται ἀπ' αὐτές. Ἔτσι, ἄν αὐξηθεῖ ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῶν μηχανῶν, αὐξάνεται καί ἡ ταχύτητα τοῦ ἄξονα ΑΒ. Ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς αὐξήσεως εἶναι ἡ ἀπομάκρυνση τῶν δυό σφαιρῶν καί ἡ ἀνύψωση τοῦ δακτύλιου Β. Μέ τή βοήθεια μοχλῶν, πού συνδέονται μέ τό δακτύλιο, κλείνει ἡ βαλβίδα π περισσότερο καί ἐλαττώνει τή ροή τῶν ὑδρατμῶν ἤ τοῦ καυσίμου. Ἔτσι ἐμποδίζει τή συνεχή αὔξηση τῆς γωνιακῆς ταχύτητας περιστροφῆς τῶν κινητήρων, διατηρώντας την τελικά στήν ἐπιθυμητή τιμή.

δ) Ὑπάρχουν ἀκόμη πολλές ἄλλες ἐφαρμογές τῆς κεντρομόλου καί φυγοκέντρου δυνάμεως, ὅπως π.χ. ὁ διαχωρισμός τοῦ βούτυρου ἀπό τήν τυρίνη στό γάλα μέ φυγοκέντριση, ἡ δικαιολόγηση τῆς πλατύνσεως τῆς Γῆς στόν ἰσημερινό, ἡ περιφορά τῶν πλανητῶν γύρω ἀπό τόν ἥλιο, ἡ περιφορά τῶν τεχνητῶν δορυφόρων γύρω ἀπό τή Γῆ, ἡ περιφορά τῶν ἠλεκτρονίων γύρω ἀπό τόν πυρήνα κ.λπ.

στ) **Ὁρμή ὑλικοῦ σημείου.**

Ὁρίζεται σάν ὁρμή κινούμενου ὑλικοῦ σημείου τό διάνυσμα, τό ὁποῖο ἔχει τή φορά καί τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας τοῦ σημείου αὐτοῦ καί μέτρο τό γινόμενο τῆς μάζας τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐπί τήν ταχύτητά του (σχ. 1·4κδ).



Σχ. 1·4κδ.

$$\boxed{\vec{J} = m\vec{\upsilon}}$$

Μονάδες τῆς ὁρμῆς:

Σύστημα S.I.

$$J = m\,\upsilon = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m/s} = 1\ \text{kg m/s}.$$

Τεχνικό σύστημα.

$$J = m\,\upsilon = 1\ \text{T.M.M.}\ 1\ \text{m/s} = 1\ \text{T.M. ὁρμῆς}.$$

1) **Ἄλλη διατύπωση τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς δυναμικῆς.** Ἔστω ὅτι σέ δυό σημεῖα Α καί Β τῆς τροχιᾶς κινητοῦ, οἱ ταχύτητες σάν διανύσματα εἶναι $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ καί οἱ ὁρμές $\vec{J}_1$ καί $\vec{J}_2$ ἀντίστοιχα (σχῆμα 1·4κε). Ἔστω ἐπίσης ὅτι ὁ χρόνος τῆς μετακινήσεως ἀπό τό σημεῖο Α στό Β, εἶναι dt.

Σχ. 1·4κε.

Ἡ διαφορά $\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = d\vec{\upsilon}$ καί τό πηλίκον $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ εἶναι τό διάνυσμα τῆς ἐπιταχύνσεως:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{dt} \qquad (1)$$

Σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς ἔχουμε:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει ὅτι:

$$\vec{F} = m\,\frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{dt} = \frac{m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1}{dt} = \frac{\vec{J}_2 - \vec{J}_1}{dt} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{J}}{dt}} \qquad (3)$$

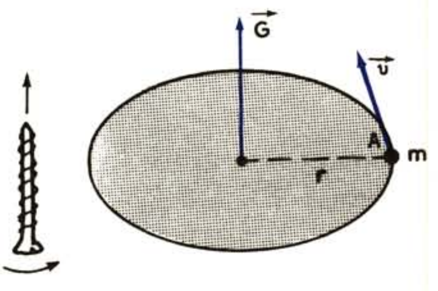
Εἶναι ἑπομένως δυνατό νά ποῦμε ὅτι δύναμη πού δρᾶ σέ ἕνα σῶμα μεταβάλλει τήν ὁρμή του καί εἶναι ἴση μέ τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς. [Βλέπε σημασία ἐπιταχύνσεως, παράγραφο 1 · 2 α (2)].

Διερευνώντας τήν ἐξίσωση (1) θά ἔχουμε:

Ἄν $\vec{F} = 0$, τότε $d\vec{J} = 0$ ἤ $\vec{J}_1 - \vec{J}_2 = 0$ ἤ $\vec{J}_1 = \vec{J}_2 =$ σταθερό.

Δηλαδή, ἄν ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων πού ἐπιδροῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο εἶναι μηδέν, τότε τό ὑλικό σημεῖο **ἔχει σταθερή ὁρμή.**

2) **Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου.** Ἄν ὑλικό σημεῖο μάζας m, κινεῖται σέ περιφέρεια κύκλου, ἀκτίνας r, τότε ὁρίζουμε σάν **στροφορμή τοῦ ὑλικοῦ σημείου** τό διάνυσμα G, τό ὁποῖο ἔχει (σχ. 1 · 4 κστ):



Σχ. 1·4 κστ.

α) Διεύθυνση κάθετη στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου.

β) Φορά, τή φορά πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία [παράγρ. 1 · 1 β (1)].

γ) Μέτρο τό γινόμενο τῆς ὁρμῆς ($J = m\,\upsilon$) ἐπί τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου:

$$G = J\,r = m\,\upsilon\,r$$

ζ) **Μεταβολή τῆς μάζας μέ τήν ταχύτητα.** Σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς, ἄν μιά σταθερή δύναμη ἐξασκηθεῖ σ' ἕνα σῶμα, αὐτό ἐπιταχύνεται. Ἡ ταχύτητά του ἑπομένως θά πρέπει συνεχῶς νά μεγαλώνει καί νά τείνει πρός τό ἄπειρο.

Ὁ Ἀϊνστάϊν (Einstein) μέ τή διατύπωση τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας εἶπε, μεταξύ τῶν ἄλλων, ὅτι ὅσο αὐξάνει ἡ ταχύτητα, αὐξάνει καί ἡ μάζα τοῦ σώματος.

Ὁ τύπος ὁ ὁποῖος μᾶς δίνει τή μεταβολή τῆς μάζας μέ τήν ταχύτητα, εἶναι:

$$\boxed{m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}}$$

ὅπου: m εἶναι ἡ μάζα πού ἔχει τό σῶμα τρέχοντας μέ τήν ταχύτητα υ, m_o ἡ μάζα τοῦ ἴδιου σώματος, ὅταν εἶναι ἀκίνητο καί c ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός ($c = 300\,000$ km/s).

Ἑπομένως, ἄν μιά δύναμη σταθερή ἐπιταχύνει ἕνα σῶμα, αὐξάνει τήν ταχύτητά του, ἡ αὔξηση ὅμως τῆς ταχύτητας ἔχει συνέπεια καί τήν αὔξηση τῆς μάζας τοῦ σώματος. Ἀπό τήν ἐξίσωση ὅμως $F = m\,\gamma$, αὔξηση τῆς μάζας μέ σταθερή δύναμη, σημαίνει ἐλάττωση τῆς ἐπιταχύνσεως.

Ὅσο πλησιάζει ἑπομένως ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος υ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός c, τόσο μεγαλώνει ἡ μάζα καί τόσο **δυσκολότερα ἐπιταχύνεται τό σῶμα.** Ὅταν ἡ ταχύτητα υ γίνει ἴση μέ τήν c, ἡ μάζα γίνεται ἄπειρη. Συνεπῶς δέν εἶναι δυνατό τό σῶμα νά ἀποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φωτός.

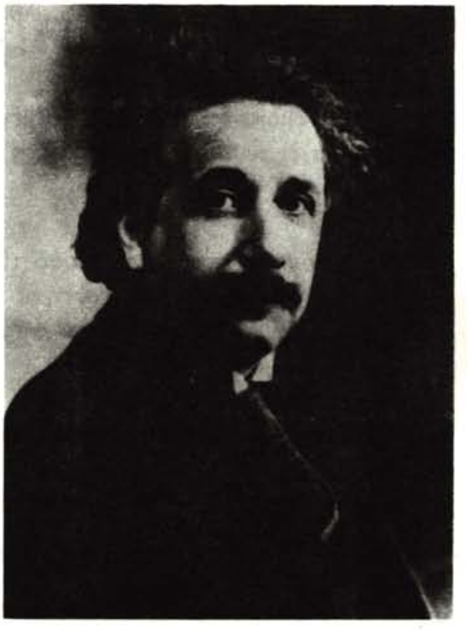
Ἔτσι σύμφωνα μέ τήν θεωρία τῆς σχετικότητας τοῦ Einstein, ὑπάρχει ὁριακή ταχύτητα γιά τά ὑλικά σώματα, ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός.

Πρακτικά, τήν ταχύτητα τοῦ φωτός δέν τή φτάνει κανένα ὑλικό σῶμα (μόνο μπορεῖ νά τήν πλησιάσει), ὁσοδήποτε μεγάλη κι ἄν εἶναι ἡ δύναμη πού θά ἐξασκηθεῖ σ' αὐτό καί γιά ὁσοδήποτε χρόνο κι ἄν δρᾶ αὐτή.

Ἕνα συνηθισμένο ἐρώτημα εἶναι τό ἑξῆς:

Στίς ταχύτητες κοντά στή ταχύτητα τοῦ φωτός, ἡ μάζα αὐξάνει. Αὐτό σημαίνει ὅτι αὐξάνει ἡ ὕλη τοῦ σώματος;

Ἡ ἀπάντηση εἶναι ὅτι ἡ ὕλη δέν αὐξάνει. Αὐξάνει μόνο **ἡ ἀδράνεια τοῦ σώματος.** Δηλαδή ἕνα ἠλεκτρό-



Ἀλβέρτος Ἀινστάιν. Διάσημος Γερμανο-Ἰσραηλίτης Φυσικός, Μαθηματικός καί Ἀστρονόμος. Ἐτιμήθη μέ τό βραβεῖο Νόμπελ τῆς Φυσικῆς τό 1921.

νιο πού κινεῖται μέ ταχύτητα πολύ κοντά στήν ταχύτητα τοῦ φωτός, ἀντιδρᾶ στήν αὔξηση τῆς ταχύτητας σάν νά εἶχε μάζα π.χ. 1 kg.

Ἐπειδή, ὅμως, ὅπως εἴδαμε, τό μέτρο τῆς ἀδράνειας εἶναι ἡ μάζα, ἔχουμε αὔξηση τῆς μάζας καί ὄχι τῆς ὕλης. Ἁπλούστερα, αὐξάνει τό πηλίκο $\frac{F}{\gamma}$, τό ὁποῖο ορίσαμε σάν μάζα m καί ὄχι τό ποσό τῆς ὕλης.

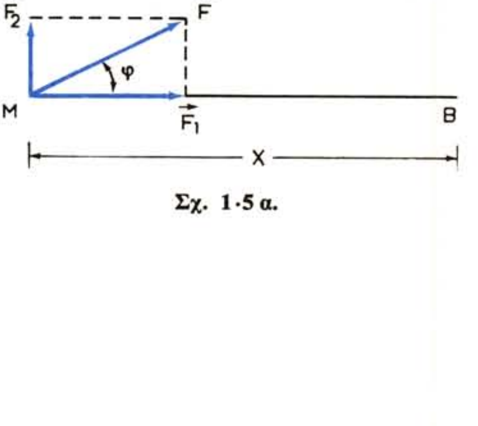
Ταχύτητες κοντά στήν ταχύτητα τοῦ φωτός ἔχουν τά ἠλεκτρόνια πού προέρχονται ἀπό διασπάσεις πυρήνων σέ ραδιενεργά σώματα. Οἱ ταχύτητες αὐτές εἶναι περίπου 290 000 km/s.

Σημείωση: Οἱ ταχύτητες στό μακρόκοσμο (**μικρόκοσμος** εἶναι ὁ κόσμος τῶν ἀτόμων, τῶν μορίων, τῶν ἠλεκτρονίων κ.λπ.) εἶναι πολύ μικρότερες ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἑπομένως τό πηλίκο $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ εἶναι τόσο μικρό, ὥστε μπορεῖ νά διαγραφεῖ ἀπό τήν ἐξίσωση τοῦ Einstein. Δηλαδή σ' αὐτές τίς ταχύτητες μπορεῖ νά θεωροῦμε ὅτι ἡ μάζα παραμένει σταθερή:

$$\boxed{m = m_o}$$

1 · 5 ΕΡΓΟ – ΙΣΧΥΣ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

α) Ἔργο.



Σχ. 1·5 α.

— Δύναμη $\vec{F}$ ἐνεργεῖ σέ ὑλικό σημεῖο Μ καί τό μετατοπίζει κατά τό διάστημα ΜΒ = x (σχ. 1 · 5 α). Ἡ δύναμη σχηματίζει μέ τή διεύθυνση μετατοπίσεως γωνία φ.

Ὁρίζουμε σάν ἔργο Α τό γινόμενο τῆς δυνάμεως F ἐπί τήν εὐθύγραμμη μετατόπιση x καί ἐπί τό συνφ:

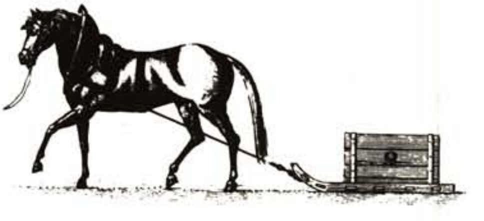
$$A = F\,x\,\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$$

— Ἄν ἀναλύσουμε τή δύναμη $\vec{F}$ στίς δύο συνιστῶσες $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$, τότε $F_1 = F$ συνφ.

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$A = F_1\,x$$

Συνεπῶς μποροῦμε νά ποῦμε **ὅτι ἔργο δυνάμεως F εἶναι τό γινόμενο τῆς εὐθύγραμμης μετατοπίσεως ὑλικοῦ σημείου, τήν ὁποία προκαλεῖ ἡ δύναμη αὐτή, ἐπί τήν προβολή τῆς δυνάμεως στή διεύθυνση τῆς μετατοπίσεως x.**

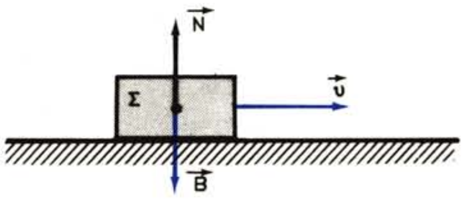


3) Τό ἔργο τῆς προβολῆς τῆς δυνάμεως, πού εἶναι κάθετη πρός τή διεύθυνση τῆς μετατοπίσεως, δηλαδή τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}_2$, θά εἶναι:

$$A_2 = F_2 \text{ x συν } 90° = 0$$

Συμπέρασμα αὐτοῦ εἶναι ὅτι οἱ κάθετες πρός τίς μετατοπίσεις δυνάμεις, δέν παράγουν ἔργο.

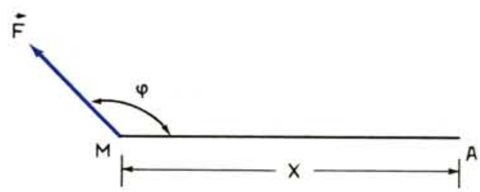
Ἔστω π.χ. ὅτι τό σῶμα Σ κινεῖται σέ ὁριζόντια ἐπιφάνεια ἰσοταχῶς καί χωρίς τριβή. Πάνω στό σῶμα ἐνεργοῦν τό βάρος τοῦ σώματος $\vec{B}$ καί ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου. Οἱ δυνάμεις αὐτές, ἐπειδή εἶναι κάθετες στή μετατόπιση, δέν παράγουν ἔργο (σχ. 1·5 β).



Σχ. 1·5 β.

Σημείωση: Ἡ κεντρομόλος δύναμη στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση εἶναι πάντοτε κάθετη στήν τροχιά. Ἑπομένως τό ἔργο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως εἶναι μηδέν.

1) **Παραγόμενο καί καταναλισκόμενο ἔργο.** Ἄν ἡ γωνία φ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ὀρθή, τό συνφ εἶναι ἀρνητικό καί τό ἔργο Α εἶναι ἀρνητικό (σχ. 1·5 γ).



Σχ. 1·5 γ.

Τό θετικό ἔργο τό ὀνομάζομε **παραγόμενο ἔργο** δυνάμεως καί τό ἀρνητικό **καταναλισκόμενο ἔργο** δυνάμεως.

2) **Ἔργο παραγόμενο ἀπό τό βάρος τοῦ σώματος.** Ἔστω ὅτι μέ τή βοήθεια νήματος, τραβοῦμε ἕνα σῶμα Σ πρός τά πάνω (σχ. 1·5 δ). Στό σῶμα ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: Τό βάρος $\vec{B}$ καί ἡ δύναμη $\vec{F}$ τοῦ νήματος. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ παράγει ἔργο:

$$A = F\,h$$

ἐνῶ τό βάρος $\vec{B}$ καταναλίσκει ἔργο:

$$A' = B\,h$$

Ἄν τό σῶμα Σ ἀφεθεῖ ἐλεύθερο νά πέσει ἀπό ὕψος h, τότε τό βάρος $\vec{B}$ ἐπιταχύνει τό σῶμα πρός τά κάτω, καί παράγει ἔργο (σχ. 1·5 ε):

$$A = B\,h$$

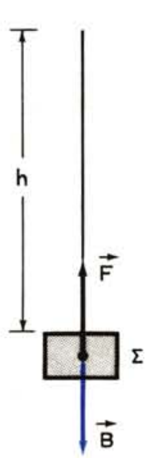
πού εἶναι ἴσο μέ τό ἔργο πού καταναλώθηκε στήν πρός τά πάνω κίνηση τοῦ σώματος.

3) **Μονάδες ἔργου.**

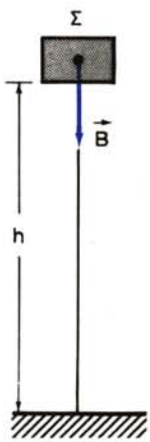
— **Σύστημα S.I.**

Στή σχέση: $A = F\,x$ θέτουμε: $F = 1$ N, $x = 1$ m ὁπότε:

$$A = 1\,N \cdot 1\,m = 1\,joule$$



Σχ. 1·5 δ.



Σχ. 1·5 ε.

Εἶναι ἑπομένως: **1 joule τό ἔργο πού παράγεται ἀπό δύναμη 1 N, ἡ ὁποία μετατοπίζει σῶμα πρός τή διεύθυνσή της κατά 1 m.**

— Τεχνικό Σύστημα.

Στή σχέση: A = F x θέτουμε F = 1 kp, x = 1 m, ὁπότε:

$$A = 1\ kp \cdot 1\ m = 1\ kpm$$

Ἑπομένως: **1 kpm εἶναι τό ἔργο πού παράγεται ἀπό δύναμη 1 kp, ἡ ὁποία μετατοπίζει σῶμα κατά τή διεύθυνσή της κατά 1 m.**

— Σύστημα C.G.S.

Στή σχέση: A = F x

θέτουμε: F = 1 dyn, x = 1 cm, ὁπότε:

$$A = 1\ dyn \cdot 1\ cm = 1\ erg\ \ (1\ \text{ἔργιο})$$

Ἑπομένως: **1 erg εἶναι τό ἔργο πού παράγεται ἀπό δύναμη 1 dyn, ἡ ὁποία μετατοπίζει σῶμα κατά τή διεύθυνσή της κατά 1 cm.**

Σχέση μονάδων.

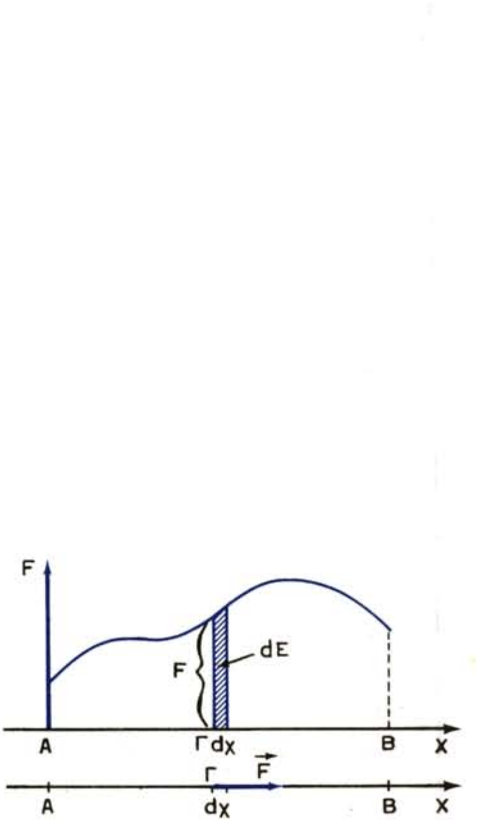
Σχέση kpm καί joule:

1 kpm = 1 kp · 1 m = 9,81 N · 1 m = 9,81 joule:

$$\boxed{1\ kpm = 9{,}81\ joule} \qquad (1)$$

4) Ἔργο πού παράγεται ἀπό μή σταθερή δύναμη.

Εἶναι δυνατό τό μέτρο τῆς δυνάμεως F, πού ἐνεργεῖ κατά τή διεύθυνση τῆς μετατοπίσεως x, νά μή παραμένει σταθερό ἀλλά νά μεταβάλλεται, ὅπως π.χ. δείχνει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 1 · 5 στ. Τότε τό ἔργο ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:



Σχ. 1·5 στ.

Θεωροῦμε ὅτι σέ κάποια θέση Γ ἡ δύναμη εἶναι F καί πρακτικά δέ μεταβάλλει τιμή γιά τή μετατόπιση dx.

Τό ἔργο σ' αὐτή τή μικρή μετατόπιση εἶναι:

$$dA = F\,dx$$

Ἀλλά τό γινόμενο F dx παριστάνει τό ἐμβαδόν dE τοῦ γραμμοσκιασμένου τμήματος τῆς καμπύλης F = f(x).

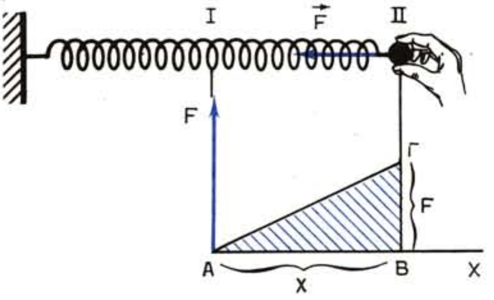
Γιά νά λογαριάσουμε τό ἔργο ἀπό τό A ὥς τό B, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε τά ἐπί μέρους ἔργα dA:

$$A_{ολ} = \Sigma\, dA = \Sigma\, F\,dx = \Sigma\, dE = E_{ολ}$$

ὅπου: $E_{ολ}$ τό ὁλικό ἐμβαδόν πού περικλείεται ἀπό τήν καμπύλη καί τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ.

Ἐφαρμογή. Ἕνα ἐλατήριο ἔχει τεντωθεῖ καί βρίσκεται στή θέση ΙΙ. Ἄν τό ἀφήσουμε ἐλεύθερο, ἡ δύναμη ἐπαναφορᾶς τοῦ ἐλατηρίου $\vec{F}$ τό κινεῖ πρός τή θέση Ι καί παράγει ἔργο.

Νά ὑπολογισθεῖ τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ τοῦ ἐλατηρίου κατά τή μετακίνηση ἀνάμεσα στά σημεῖα ΙΙ καί Ι (σχ. 1·5ζ).



Σχ. 1·5ζ.

Ἡ δύναμη ἐπαναφορᾶς $\vec{F}$ παράγει ἔργο.

Λύση:

Ἡ δύναμη $\vec{F}$ μεταβάλλεται σέ συνάρτηση μέ τήν ἀπομάκρυνση x, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 1·5ζ. Σύμφωνα μ' αὐτά πού εἴπαμε παραπάνω, τό ἔργο θά εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ:

$$A = \text{Ἐμβαδόν ΑΒΓ} = \frac{(\text{ΒΓ})\,(\text{ΑΒ})}{2} = \frac{Fx}{2} \qquad (1)$$

Ἡ δύναμη ὅμως $\vec{F}$ εἶναι δύναμη ἐλατηρίου καί, ὅπως ἔχομε ἀναφέρει, εἶναι ἀνάλογη τῆς ἀπομακρύνσεως:

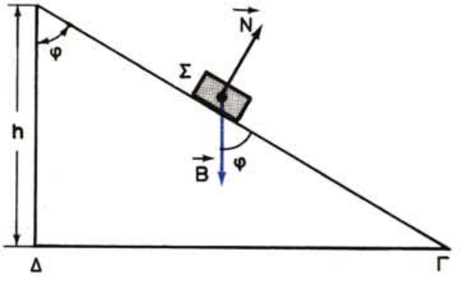
$$F = Dx \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\,Dx^2} \qquad (3)$$

5) **Ἔργο σέ κεκλιμένο ἐπίπεδο.**

Στό σῶμα Σ, πού ὀλισθαίνει χωρίς τριβή στό ἐπίπεδο ΑΓ, ἐνεργοῦν τό βάρος $\vec{B}$ καί ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου $\vec{N}$ (σχ. 1·5η).



Σχ. 1·5η.

Ἡ δύναμη $\vec{N}$ δέν παράγει ἔργο, γιατί εἶναι κάθετη στή μετατόπιση ΑΓ. Μόνο τό βάρος παράγει ἔργο, τό ὁποῖο εἶναι:

$$A_{ΑΓ} = B\,(ΑΓ)\,\text{συνφ} \qquad (1)$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ προκύπτει:

$$h = (ΑΓ)\,\text{συνφ} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) συνάγεται ὅτι:

$$A_{ΑΓ} = B\,h \qquad (3)$$

Τό ἔργο ὅμως αὐτό εἶναι ἴσο μέ τό ἔργο τοῦ βάρους $\vec{B}$, ὅταν μετακινηθεῖ κατακόρυφα ἀπό τό Α στό Δ.

Σημείωση: Οἱ λόγοι γιά τούς ὁποίους στή Φυσική καθορίζονται τά διάφορα φυσικά μεγέθη, εἶναι πρακτικοί. Δηλαδή τά φυσικά αὐτά μεγέθη μᾶς ἐξυπηρετοῦν στήν κατανόηση καί τήν ἑρμηνεία φυσικῶν φαινομένων.

Ἔτσι θέλοντας νά παρουσιάσουμε τήν ἐργασία ὡς φυσικό μέγεθος ὁρίσαμε τό ἔργο.

Ἕνας ἐργάτης πού καταβάλλει προσπάθεια, ἐξασκεῖ δύναμη καί μετακινεῖ φορτίο (μετατόπιση), **παράγει ἔργο.**

Μπορεῖ τώρα μιά μηχανή νά παράγει ἔργο καί μάλιστα νά ἀντικαταστήσει μιά ὁμάδα ἐργατῶν. Ἄρα τό ἔργο παράγεται καί ἀπό μηχανές.

Γενικεύεται ἑπομένως ἡ ἔννοια καί συμφωνεῖται **διεθνῶς** ἕνας ὁρισμός «Ἔργο εἶναι τό γινόμενο κ.λπ.».

β) **Ἰσχύς.**

Γνωρίζομε ὅτι ἕνας ἐκσκαφέας (μπουλτόζα) κάνει τό ἴδιο ἔργο ἑνός ἐργάτη σέ πολύ μικρότερο χρόνο. Ἰδιαίτερα μᾶς ἐνδιαφέρει ὁ ρυθμός μέ τόν ὁποῖο μιά μηχανή **παράγει** ἤ καί **καταναλίσκει** ἀκόμα τό ἔργο.

Τό πηλίκον τοῦ παραγόμενου ἤ καταναλισκόμενου ἔργου διά τοῦ χρόνου, στόν ὁποῖο παράγεται ἤ καταναλίσκεται, ὀνομάζεται ἰσχύς:

$$\boxed{N = \frac{A}{t}}$$

Μονάδες ἰσχύος.

— Σύστημα S.I.

Στή σχέση $N = \frac{A}{t}$ ἀντικαθιστοῦμε $A = 1$ joule, $t = 1$ s καί ὑπολογίζουμε:

$$N = \frac{1\ joule}{1\ s} = 1\ W$$

1 W (1 Watt) εἶναι ἡ ἰσχύς μηχανῆς πού σέ χρόνο 1 s παράγει ἔργο 1 joule. Πολλαπλάσια μονάδα εἶναι τό kW καί τό MW.

— Τεχνικό Σύστημα Μονάδων.

Στή σχέση $N = \frac{A}{t}$ ἀντικαθιστοῦμε $A = 1$ kpm, $t = 1$ s καί ἔχουμε:

$$N = \frac{1\ kpm}{1\ s} = 1\ kpm/s$$

— Ἐπί πλέον χρησιμοποιοῦνται καί οἱ ἀκόλουθες μονάδες ἰσχύος:

α) **Ἵππος** ἤ **ἀτμόϊππος** (συμβολισμός CV ἤ PS).

$$1\ CV = 75\ kpm/s = 75 \cdot 9{,}81\ joule/s = 736\ W$$

β) **Βρεταννικός ἵππος** (συμβολισμός HP).

$$1\ HP = 76\ kpm/s = 76 \cdot 9{,}81\ joule/s = 746\ W$$

Σημείωση: Ὁ συμβολισμός CV προέρχεται ἀπό τό Γαλλικό Cheval Vapeur. Ὁ συμβολισμός PS ἀπό τό Γερμανικό Pferdestärke. Ὁ συμβολισμός HP ἀπό τό Ἀγγλικό Horse Power.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΙΣΧΥΩΝ

Μηχανή	Σέ HP	Ἰσχύς σέ W
Ἄνδρας	0,15	112 W
Κινητήρας ἠλεκτρικοῦ ἀνεμιστήρα	0,2	150 W
Ἵππος συνήθης	0,7	522 W
Κινητήρας μικροῦ αὐτοκινήτου	25	1,8 kW
Κινητήρας μεγάλου φορτηγοῦ αὐτοκινήτου	100	75 kW
Ἀτμομηχανή σιδηροδρόμου	1.000	750 kW
Μηχανές μεγάλου ὑπερωκεανείου	24.000	18 MW
Ἐργοστάσιο ἠλεκτροπαραγωγῆς Πτολεμαΐδας	440.000	320 MW

— **Ἄλλες μονάδες ἔργου.**

Στήν ἐξίσωση $A = N\,t$ ἄν ἀντικαταστήσουμε ὅπου $N = 1\ W$ καί ὅπου $t = 1\ h$ προκύπτει:

$$A = 1\ W \cdot 1\ h = 1\ Wh$$

Ἡ μονάδα Wh εἶναι μονάδα ἔργου καί ἰσοῦται μέ τό ἔργο πού παράγει μιά μηχανή, πού ἔχει ἰσχύ 1 W σέ χρόνο μιᾶς ὥρας.

Ἐπίσης ὑπάρχει ἡ μονάδα 1 kWh.

$$1\ kWh = 1000\ Wh.$$

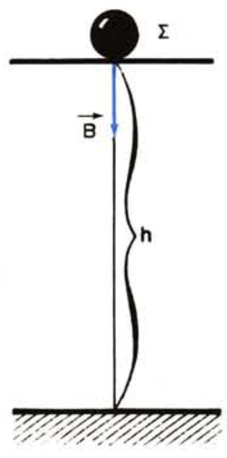
$$1\ kWh = 1000\ Wh = 1000\ W \cdot 3600\ s = 3\ 600\ 000\ joule.$$

γ) **Ἐνέργεια.**

Ἕνα σῶμα ἔχει ἐνέργεια, ὅταν μπορεῖ ὑπό κατάλληλες συνθῆκες νά παράγει ἔργο.

Ἡ ἐνέργεια αὐτή μετριέται μέ τό ἔργο πού παράγεται.

1) **Δυναμική ἐνέργεια.** Τό σῶμα Σ (σχ. 1·5θ) βρί-



Σχ. 1·5θ.

σκεται σέ ὕψος h ἀπό τό ἔδαφος καί τό κρατᾶμε μέ ἕνα ὑποστήριγμα. Ἄν τραβήξουμε τό ὑποστήριγμα, τό σῶμα θά πέσει καί θά παραχθεῖ ἔργο.

Ἑπομένως τό σῶμα Σ ἔχει ἐνέργεια, **ἡ ὁποία ὀφείλεται στή θέση πού κατέχει.** Ἡ ἐνέργειά του αὐτή ὀνομάζεται **δυναμική ἐνέργεια** (συμβολισμός E_{Δ}).

Ἡ δυναμική ἐνέργεια στήν περίπτωση αὐτή εἶναι:

$$E_{\delta\upsilon\nu} = B\,h$$

γιατί B h εἶναι τό ἔργο πού θά παραχθεῖ ἄν ἀφήσουμε τό σῶμα νά πέσει.

Στήν περίπτωση τῆς ἐφαρμογῆς στήν παράγραφο 1 · 5 (4) τό ἐλατήριο στή θέση II ἔχει δυναμική ἐνέργεια, ἐξαιτίας τῆς καταστάσεως στήν ὁποία βρίσκεται.

Ἡ δυναμική του ἐνέργεια εἶναι:

$$E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2}\,Dx^2$$

γιατί, ὅπως ἀποδείξαμε στήν ἐφαρμογή, τό $1/2\ Dx^2$ εἶναι τό ἔργο πού θά παραχθεῖ στή μετακίνηση ἀπό τή θέση II στή θέση I.

Ἡ ἐνέργεια, ἑπομένως, **πού ἔχει κάθε σῶμα, λόγω τῆς θέσεώς του ἤ λόγω τῆς καταστάσεως στήν ὁποία βρίσκεται, λέγεται δυναμική ἐνέργεια.**

2) **Κινητική ἐνέργεια.** Μιά μπάλα κινεῖται, κτυπᾶ μιά ἀνοικτή πόρτα καί τήν κλείνει. Ἄρα ἡ μπάλα αὐτή παράγει ἔργο. Ἀφοῦ ὅμως ἔχει τή δυνατότητα νά παράγει ἔργο, κλείνει μέσα της ἐνέργεια. Ἡ ἐνέργεια αὐτή ἡ ὁποία ὀφείλεται στήν **κινητική κατάσταση** τῶν σωμάτων, ὀνομάζεται **κινητική ἐνέργεια** (συμβολισμός $E_{\kappa\iota\nu}$).

Ἄν ἕνα σῶμα ἔχει ταχύτητα υ καί μάζα m, τότε, ἡ κινητική του ἐνέργεια δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2}$$

Ἀναφέραμε ὅτι ἡ ἐνέργεια μετριέται μέ τό ἔργο πού παράγεται, ὅταν ὑπάρξουν οἱ κατάλληλες συνθῆκες. **Μπορεῖ ὅμως γενικά νά ποῦμε, ὅτι ἡ ἐνέργεια ἀποκτᾶται, ὅταν παραχθεῖ ἔργο ἀπό κάποια δύναμη.**

Τό ἔργο αὐτό δέν πηγαίνει χαμένο, ἀλλά μετατρέπεται σέ κάποια μορφή ἐνέργειας. Μποροῦμε μάλιστα νά μετρήσουμε τήν ἐνέργεια ἀπό **τό ἔργο πού παράγεται.**

Μ' αὐτή τή σκέψη θά λύσουμε ἕνα πρόβλημα, τό ὁποῖο θά μᾶς ἀποδείξει ὅτι ἡ κινητική ἐνέργεια δίνεται ἀπό τόν τύπο $E_{κιν} = \frac{1}{2} m υ^2$.

Πρόβλημα. Σέ ἀκίνητο ὑλικό σημεῖο ἐξασκεῖται σταθερή δύναμη F καί μετατοπίζει τό σημεῖο κατά τή διεύθυνσή της σέ μῆκος s. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἔργο πού παράγει ἡ δύναμη καί νά ἐκφρασθεῖ αὐτό σέ συνάρτηση τῆς μάζας καί τῆς ταχύτητας τοῦ σημείου (σχ. 1·5ι).

Σχ. 1·5ι.

Τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ κατά τή μετακίνηση τῆς μάζας m στό τμῆμα AB, μετατρέπεται σέ κινητική ἐνέργεια στό B.

$$F s = \frac{1}{2} m υ^2.$$

Λύση:

Τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι:

$$A = F s \qquad (1)$$

Ἐνῶ ἀπό τήν θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς Δυναμικῆς γνωρίζομε ὅτι:

$$F = m γ \qquad (2)$$

Ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι σταθερή, ἄρα ἡ κίνηση εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη. Ἑπομένως:

$$s = \frac{υ^2}{2γ} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (1), (2) καί (3) ἔχουμε:

$$A = m γ \frac{υ^2}{2γ} \Rightarrow A = \frac{1}{2} m υ^2$$

Τό ἔργο, ἑπομένως, **κατά τή μετακίνηση ἀπό τό A στό B εἶναι $\frac{1}{2}$ m $υ^2$ καί ἐναποθηκεύτηκε μέσα στό σῶμα σάν κινητική ἐνέργεια.**

Ἑπομένως τό σῶμα ἀπόκτησε κινητική ἐνέργεια:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m υ^2.$$

3) **Μηχανική ἐνέργεια.**

Οἱ δύο μορφές ἐνέργειας, πού ἀναφέραμε, δηλαδή ἡ δυναμική καί ἡ κινητική ἐνέργεια, ἀποτελοῦν τή **μηχανική ἐνέργεια.**

Ὅπως θά δοῦμε καί σέ ἑπόμενα Κεφάλαια, ὑπάρχουν πολλές μορφές ἐνέργειας στή φύση ὅπως, ἡ θερμική, ἡ ἠλεκτρική, ἡ ἀτομική ἐνέργεια καί ἄλλες.

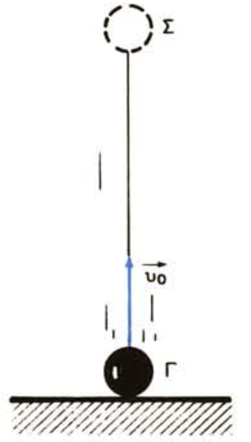
4) **Θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας.**

Ἄν βρισκόμαστε σέ ἕνα κόσμο πού δέν ὑπάρχουν τριβές καί οἱ κρούσεις τῶν σωμάτων εἶναι τελείως ἐλαστικές, δηλαδή δέ μετατρέπεται μηχανική ἐνέργεια σέ θερμότητα, τότε οἱ δύο μορφές μηχανικῆς ἐνέργειας θά ἐναλλάσσονται. Ἔτσι ἄν μιά σφαίρα Σ ἔπεφτε σ' ἕνα δάπεδο, θά εἴχαμε μετατροπή τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας στή θέση Σ, σέ κινητική στή θέση Γ, κρούση, ἀλλαγή τῆς διευθύνσεως τῆς ταχύτητας κατά 180° κι ἐπαναφορά τῆς σφαίρας στή θέση Σ, δηλαδή μετατροπή τῆς κινητικῆς σέ δυναμική ἐνέργεια καί ἀντίστροφα (σχ. 1·5 ια). Ἡ σφαίρα συνέχεια θά ἀνεβοκατέβαινε ἀνάμεσα στά σημεῖα Σ καί Γ, χωρίς ποτέ νά σταματήσει.

Ἡ πραγματικότητα ὅμως εἶναι ὅτι μετά ἀπό μερικά ἀναπηδήματα ἡ σφαίρα θά **μείνει στό ἔδαφος,** γιατί χάνει τήν ἐνέργειά της, ἡ ὁποία μετατρέπεται σέ ἄλλη μορφή ἐνέργειας, τή **θερμότητα.**

Στόν ἰδανικό ὅμως κόσμο πού μόνο οἱ δύο μορφές μηχανικῆς ἐνέργειας ὑπάρχουν, μποροῦμε νά διατυπώσουμε τό θεώρημα:

Τό ἄθροισμα δυναμικῆς καί κινητικῆς ἐνέργειας παραμένει σταθερό.



Σχ. 1·5 ια.
Ἡ κινητική ἐνέργεια στό Γ μετατρέπεται σέ δυναμική ἐνέργεια στό Σ.

Ἐφαρμογές.

1. Σῶμα βρίσκεται σέ ὕψος h ἀπό τό ἔδαφος. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα πού θ' ἀποκτήσει στή θέση Γ καί στή θέση Ε, μέ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας (σχ. 1·5 ιβ).

Λύση :

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας ἔχομε:

— Ταχύτητα στό Γ.

Δυναμ. ἐνέργεια στό Α + κινητ. ἐνέργεια στό Α = δυναμική ἐνέργεια στό Γ + κινητ. ἐνέργεια στό Γ.

$$\text{ἤ} \quad E_{δυν,\,A} + E_{κιν,\,A} = E_{δυν,\,Γ} + E_{κιν,\,Γ}$$

$$\text{ἤ} \quad B\,h + 0 = B\,(h - h_Γ) + \frac{1}{2}\,m\,υ^2_Γ$$

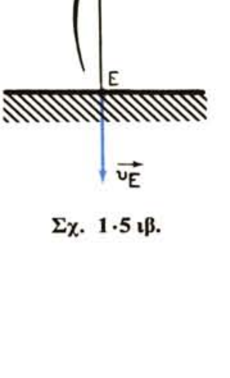
$$\text{ἤ} \quad m\,g\,h = m\,g\,(h - h_Γ) + \frac{1}{2}\,m\,υ^2_Γ.$$

Λύνοντας τήν ἐξίσωση ὡς πρός $υ_Γ$ θά ἔχουμε:

$$υ_Γ = \sqrt{2g\,h_Γ}$$

— Ταχύτητα στό Ε.

Μέ ἀνάλογη σκέψη ἔχουμε:



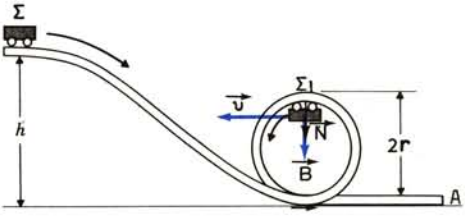
Σχ. 1·5 ιβ.

$$E_{\delta\upsilon\nu,\ A} + E_{\kappa\iota\nu,\ A} = E_{\delta\upsilon\nu,\ E} + E_{\kappa\iota\nu,\ E}$$

$$B\,h + 0 = 0 + \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2_E$$

$$\text{ἤ} \quad m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2_E \implies \upsilon_E = \sqrt{2g\,h}$$

2. Στό σχῆμα 1·5 ιγ ἕνα ἔλασμα ἀναδιπλώνεται ἔτσι, ὥστε νά σχηματίσει ἕνα κατακόρυφο κύκλο. Ἕνα σῶμα Σ ὀλισθαίνει κατά μῆκος τοῦ ἐλάσματος χωρίς τριβή, καί ἀναγκάζεται νά κάνει μιά περιφορά στήν περιφέρεια τοῦ κατακόρυφου κύκλου, μέχρις ὅτου σταματήσει στό σημεῖο Α.



Σχ. 1·5 ιγ.

Ἡ τροχιά αὐτή ὀνομάζεται τροχιά **ἀνακυκλώσεως** καί τό πρόβλημα πού θέτουμε εἶναι:

Ἀπό ποιό ἐλάχιστο ὕψος πρέπει ν' ἀφεθεῖ τό σῶμα, ὥστε νά πραγματοποιήσει τήν ἀνακύκλωση, χωρίς νά φύγει ἀπό τήν τροχιά;

Λύση:

Τό σῶμα κάποια στιγμή θά βρεθεῖ στή θέση Σ_1 καί θά κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ἐπειδή ἐκτελεῖ κυκλική κίνηση ἐξασκεῖται σ' αὐτό κεντρομόλος δύναμη.

Ἡ κεντρομόλος δύναμη ἐδῶ εἶναι ἡ συνισταμένη τοῦ βάρους $\vec{B}$ καί τῆς δυνάμεως $\vec{N}$ πού ἐξασκεῖ τό ἔλασμα στό σῶμα καί δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$B + N = \frac{m\,\upsilon^2}{r} \qquad (1)$$

Ἄν ἡ ταχύτητα υ μικραίνει, μικραίνει τό N, πού εἶναι τό μόνο μετά ἀπό τήν υ μεταβλητό μέγεθος στήν ἐξίσωση (1) καί γιά κάποια ταχύτητα υ, τήν $\upsilon_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$, θά εἶναι $N = 0$ καί:

$$B = \frac{m\,\upsilon^2_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}}{r} \qquad (2)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2) καί ἐπειδή $B = m\,g$, ἔχουμε:

$$\upsilon_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \sqrt{g\,r} \qquad (3)$$

Ἄν ἡ ταχύτητα στό σημεῖο Σ_1, εἶναι μικρότερη ἀπό τήν $\upsilon_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$, τό σῶμα πέφτει.

Ἀπό ποιό τώρα σημεῖο πρέπει νά ἀφήσουμε τό σῶμα, ὥστε νά ἔχει στή θέση Σ_1 τήν ἐλάχιστη ταχύτητα;

Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας στά σημεῖα Σ καί Σ_1 καί ἔχουμε:

$$E_{\delta\upsilon\nu,\,\Sigma} + E_{\kappa\iota\nu,\,\Sigma} = E_{\delta\upsilon\nu,\,\Sigma_1} + E_{\kappa\iota\nu,\,\Sigma_1}$$

$$B\, h_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} + 0 = B\, 2r + \frac{1}{2}\, m\, \upsilon^2_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$$

$$\text{ἤ} \qquad g\, h_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = g\, 2r + \frac{1}{2}\, \upsilon^2_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} \qquad (4)$$

ἀπό τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) ἔχομε:

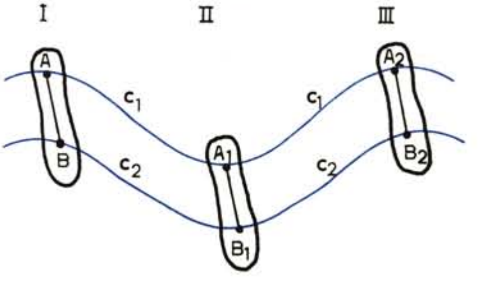
$$h_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{5\,r}{2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Μέχρι τώρα ἀσχοληθήκαμε μέ τή Μηχανική τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Στό Κεφάλαιο αὐτό τῆς Μηχανικῆς τοῦ στερεοῦ σώματος, θά ἐξετάζεται τό σῶμα ὄχι πιά σάν ὑλικό σημεῖο ἀλλά σάν **σύνολο ὑλικῶν σημείων,** τά ὁποῖα διατηροῦν σταθερές ἀποστάσεις μεταξύ τους. Τά στερεά σώματα ἔχουν τίς ἰδιότητες αὐτές, γιατί τά ἄτομα ἤ τά μόρια, πού ἀποτελοῦν τά δομικά τους στοιχεῖα, μπορεῖ νά θεωρηθοῦν ὑλικά σημεῖα, τά ὁποῖα διατηροῦν σταθερές ἀποστάσεις μεταξύ τους.



Σχ. 2·1 α.

2 · 1 ΕΙΔΗ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

α) **Μεταφορική κίνηση στερεοῦ σώματος.**

Ἕνα σῶμα κάνει μεταφορική κίνηση, ὅταν κατά τή μετακίνησή του, ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο τμῆμα του AB παραμένει παράλληλο πρός τήν ἀρχική του θέση.

Στό σχῆμα 2 · 1 α τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB εἶναι παράλληλο πρός τό $A_1 B_1$ καί πρός τό $A_2 B_2$, στίς τρεῖς διαδοχικές θέσεις τοῦ σώματος I, II καί III.

Σημείωση : Οἱ καμπύλες c_1 καί c_2 εἶναι οἱ τροχιές τῶν σημείων A καί B.

1) **Στιγμιαία ταχύτητα τῶν σημείων στή μεταφορική κίνηση.** Κατά τή μεταφορική κίνηση θ' ἀποδείξουμε ὅτι ὅλα τά σημεῖα **ἔχουν τήν ἴδια στιγμιαία ταχύτητα.**

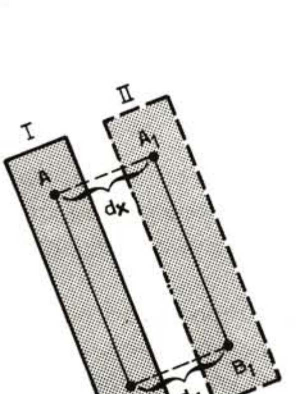
Ἀπόδειξη : Σέ πολύ μικρό χρόνο dt σῶμα μετακινεῖται ἀπό τή θέση I στή θέση II (σχ. 2 · 1 β). Στό χρόνο αὐτό τά σημεῖα A καί B διαγράφουν τά μήκη AA_1 καί BB_1 τά ὁποῖα μποροῦν νά θεωρηθοῦν χωρίς λάθη σάν εὐθύγραμμα τμήματα, γιατί εἶναι πολύ μικρά.

Ἐπειδή ἡ AB εἶναι παράλληλη καί ἴση μέ τήν A_1B_1, τό τετράπλευρο AA_1B_1B εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἄρα: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$

Ἀλλά $\dfrac{\overrightarrow{AA_1}}{dt} = \overrightarrow{\upsilon_A}$ καί $\dfrac{\overrightarrow{BB_1}}{dt} = \overrightarrow{\upsilon_B}$

Ἄρα: $\overrightarrow{\upsilon_A} = \overrightarrow{\upsilon_B}$.

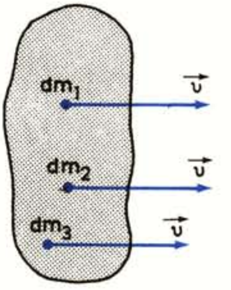


Σχ. 2·1 β.

Αὐτά ἰσχύουν γιά κάθε σημεῖο τοῦ σώματος, δηλαδή ὅλα τά σημεῖα ἔχουν τήν ἴδια ταχύτητα (κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά).

Μποροῦμε συμπερασματικά νά ποῦμε ὅτι, ἕνα σῶμα κάνει μεταφορική κίνηση, ὅταν οἱ στιγμιαῖες ταχύτητες ὅλων τῶν σημείων τοῦ σώματος εἶναι ἴσες.

Σημείωση: Κατά τή μεταφορική κίνηση ἡ κοινή στιγμιαία ταχύτητα μπορεῖ νά ἀλλάζει ἀπό στιγμή σέ στιγμή, ἀρκεῖ ὅμως τήν κάθε στιγμή νά εἶναι ἡ ἴδια γιά ὅλα τά σημεῖα.



Σχ. 2·1 γ.

2) **Κινητική ἐνέργεια στή μεταφορική κίνηση.** Προηγουμένως εἴπαμε ὅτι στή μεταφορική κίνηση ἡ ταχύτητα ὅλων τῶν σημείων εἶναι ἴδια (σχ. 2 · 1 γ).

Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος, τό χωρίζουμε σέ στοιχειώδεις μάζες dm_1, dm_2, $dm_3 \ldots$

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια θά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν πού ἔχει κάθε στοιχειώδης μάζα.

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, dm_1\, \upsilon^2 + \frac{1}{2}\, dm_2\, \upsilon^2 + \frac{1}{2}\, dm_3\, \upsilon^2 + \cdots$$

Ἐπειδή ἡ ταχύτητα υ εἶναι ἡ ἴδια, θά ἔχουμε:

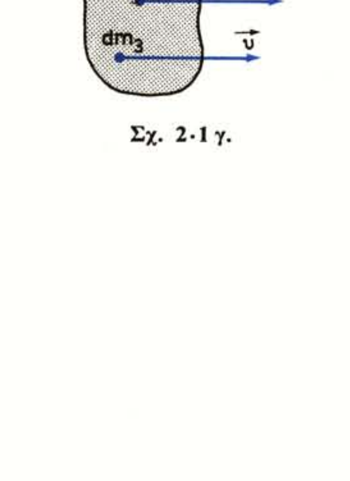
$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, \upsilon^2 \,(dm_1 + dm_2 + dm_3 + \cdots) = \frac{1}{2}\, \upsilon^2\, \Sigma dm$$

Τό Σdm = ὁλική μάζα σώματος = m.
Ἑπομένως:

$$\boxed{E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, m\, \upsilon^2}$$

Συμπέρασμα: Ὁ ἴδιος τύπος πού μᾶς δίνει τήν κινητική ἐνέργεια ὑλικοῦ σημείου, μᾶς δίνει καί τήν κινητική ἐνέργεια στή μεταφορική κίνηση στερεοῦ σώματος.

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι, ὅταν ἕνα σῶμα κάνει μεταφορική κίνηση, μπορεῖ νά ἐξετασθεῖ σάν ὑλικό σημεῖο καί μάλιστα σάν ὅλη ἡ μάζα του νά ἦταν συγκεντρωμένη στό κέντρο βάρους.



Σχ. 2·1 δ.

β) **Περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα.**

Ἕνα στερεό σῶμα μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ἕνα σταθερό ἄξονα (σχ. 2 · 1 δ). Τότε τό κάθε του σημεῖο θά γράφει κυκλική τροχιά, τῆς ὁποίας τό ἐπίπεδο εἶναι κάθετο στόν ἄξονα περιστροφῆς.

Ἄν καλέσουμε ω τή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ σώματος καί r τήν ἀπόσταση τυχαίου σημείου Σ ἀπό τόν ἄξονα, τότε ἡ γραμμική ταχύτητα τοῦ σημείου Σ δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\upsilon = \omega r$$

Ἑπομένως: **τά διάφορα σημεῖα τοῦ σώματος, ὅταν αὐτό περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ἔχουν τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα ἀλλά διαφορετική γραμμική ταχύτητα.**

1) **Κινητική ἐνέργεια σώματος, τό ὁποῖο περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα.** Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν ὁλική κινητική ἐνέργεια κατά τήν περιστροφική κίνηση στερεοῦ σώματος, χωρίζουμε τό σῶμα σέ στοιχειώδεις μάζες dm_1, dm_2, dm_3 . . . (σχ. 2 · 1 ε), βρίσκουμε τήν κινητική ἐνέργεια καθεμιᾶς στοιχειώδους μάζας καί τίς ἀθροίζουμε.

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια εἶναι τό ἄθροισμά τους:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, dm_1\, \upsilon^2{}_1 + \frac{1}{2}\, dm_2\, \upsilon^2{}_2 + \frac{1}{2}\, dm_3\, \upsilon^2{}_3 + \ldots$$

$$\text{ἀλλά} \quad \upsilon_1 = \omega\, r_1$$
$$\upsilon_2 = \omega\, r_2$$
$$\upsilon_3 = \omega\, r_3$$

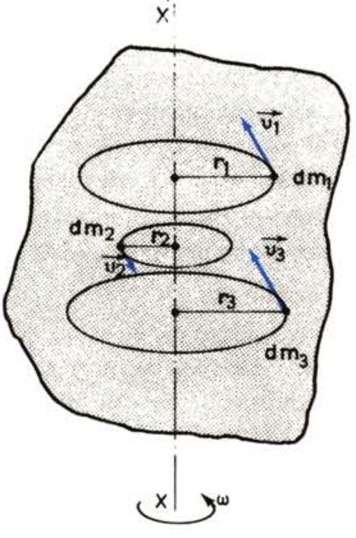
Ἑπομένως:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, dm_1,\, \omega^2\, r^2{}_1 + \frac{1}{2}\, dm_2\, \omega^2\, r^2{}_2 + $$
$$+ \frac{1}{2}\, dm_3\, \omega^2\, r^2{}_3 \ldots$$

$$\text{ἤ} \quad E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, \omega^2 (dm_1\, r^2{}_1 + dm_2\, r^2{}_2 + dm_3\, r^2{}_3 + \ldots)$$

καί σέ συντομία:

$$\boxed{E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, \omega^2\, \Sigma\, dm\, r^2} \qquad (1)$$



Σχ. 2·1 ε.

2) **Ροπή ἀδρανείας.** Ὁρίζουμε σά **ροπή ἀδρανείας θ** σώματος πού περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα τήν παράσταση $\Sigma dm\, r^2$.

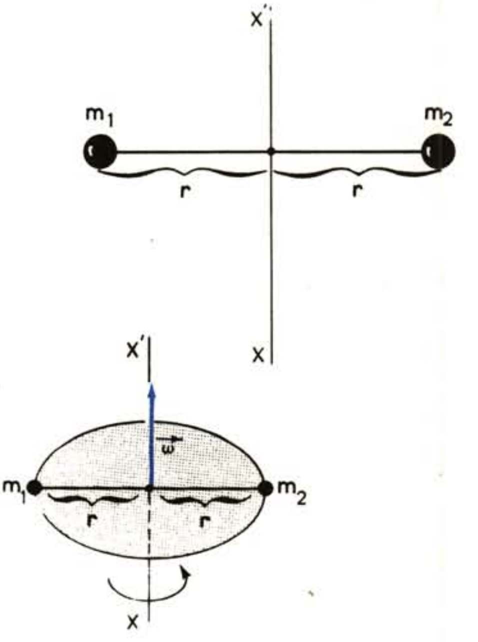
Δηλαδή **ἡ ροπή ἀδρανείας Θ εἶναι τό ἄθροισμα τοῦ γινομένου τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν dm ἐπί τό τετράγω-**

νο τῆς ἀποστάσεώς τους r ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

Μετά ἀπό αὐτά πού εἴπαμε γιά τή ροπή ἀδρανείας ἡ ἐξίσωση (1) μετατρέπεται στή:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2 \qquad (2)$$

Σημείωση: Ὁ τύπος (2) μᾶς θυμίζει τόν τύπο $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2$. Ἡ διαφορά ἐδῶ εἶναι ὅτι ἀντί γιά γραμμική ταχύτητα ἔχουμε γωνιακή καί ἀντί γιά μάζα, **ροπή ἀδρανείας.** Μπορεῖ ἑπομένως κανείς νά κάνει μιά **ἀντιστοίχιση** στά διάφορα μεγέθη στήν κυκλική καί στή μεταφορική κίνηση. Αὐτή τήν ἀντιστοίχιση θά τήν κάνουμε ἀργότερα. **Πρός τό παρόν ἀντιστοιχίζουμε τήν ταχύτητα τῆς μεταφορικῆς κινήσεως μέ τή γωνιακή ταχύτητα τῆς κυκλικῆς, καί τή μάζα τῆς μεταφορικῆς μέ τή ροπή ἀδρανείας τῆς κυκλικῆς.**



Σχ. 2·1 στ.

Ἐφαρμογές.

1. Δυό μάζες $m_1 = m_2 = 40$ kg περιστρέφονται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 5$ rad/s, γύρω ἀπό τόν ἄξονα xx'. Ἄν $r = 10$ m, νά ὑπολογισθεῖ ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος (σχ. 2·1 στ).

Λύση:

Ἡ κινητική ἐνέργεια στήν περιστροφική κίνηση δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2$$

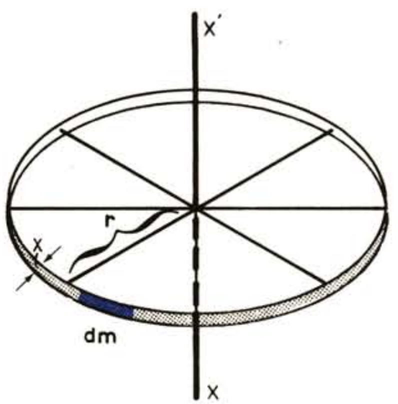
Ὑπολογισμός Θ. Ἡ ροπή ἀδρανείας Θ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\Theta = \Sigma dm\, r^2 = m_1\, r^2 + m_2\, r^2 = (m_1 + m_2)\, r^2 =$$
$$= 2 \cdot 40\ \text{kg} \cdot 10^2\ \text{m}^2 = 8 \cdot 10^3\ \text{kg.m}^2.$$

Ἄρα: $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 8.10^3 \cdot 5^2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (\text{s}^{-1})^2 =$
$= 10^5$ joule.

Ἀπάντηση: Ἡ κινητική ἐνέργεια τῶν μαζῶν εἶναι 10^5 joule.

2. Ἔστω στεφάνη μάζας $m = 100$ kg καί ἀκτίνας $r = 2$ m, ἡ ὁποία περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα xx' (σχ. 2·1 ζ).



Σχ. 2·1 ζ.

Ἄν δεχτοῦμε ὅτι τό πάχος x τῆς στεφάνης εἶναι ἀμελητέο καί ὅτι ἡ συχνότητα περιστροφῆς της εἶναι $\nu = 60\ s^{-1}$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ κινητική ἐνέργεια τῆς στεφάνης.

Λύση :

Ἡ κινητική ἐνέργεια περιστρεφόμενου σώματος δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\ \Theta\ \omega^2$$

Ὑπολογισμός τῆς Θ. Γιά νά ὑπολογίσουμε τή ροπή ἀδρανείας Θ, χωρίζουμε τή στεφάνη σέ στοιχειώδεις μάζες dm. Ἐπειδή τό πάχος x τῆς στεφάνης θεωρεῖται μηδενικό, οἱ στοιχειώδεις μάζες dm ἔχουν ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς τήν ἴδια ἀπόσταση r.

Εἶναι: $$\Theta = \Sigma dm\ r^2 \qquad (1)$$

Ἐπειδή τό r εἶναι σταθερό, στό ἄθροισμα βγαίνει κοινός παράγοντας. Ἑπομένως ἡ (1) γίνεται:

$$\Theta = r^2\ \Sigma dm \qquad (2)$$

Τό $\Sigma dm = M$ = ὁλική μάζα στεφάνης.

Ἑπομένως: $\Theta = r^2\ m = 2^2\ m^2 \cdot 100\ kg = 400\ kg\ m^2$.

Συνεπῶς: $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\ \Theta\ \omega^2 = \frac{1}{2}\ \Theta\ 4\pi^2\ \nu^2$

Ἀντικατάσταση :

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} \cdot 400\ kg \cdot m^2 \cdot 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 60^2\ s^2 =$$
$$= 2{,}82 \cdot 10^7\ \text{joule}.$$

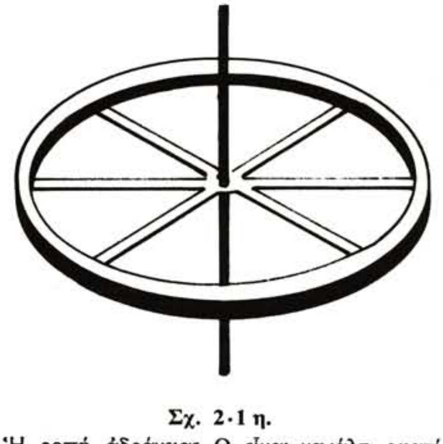
Ἀπάντηση : Ἡ κινητική ἐνέργεια τῆς στεφάνης εἶναι: $E_{\kappa\iota\nu} = 2{,}82 \cdot 10^7$ joule.

Παρατήρηση. Ἡ ροπή ἀδρανείας εἶναι μέγεθος πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή μάζα ἑνός σώματος, ἀλλά κυρίως ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατανομή της γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

Αὐτό συμπεραίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\Theta = \Sigma dm\ r^2.$$

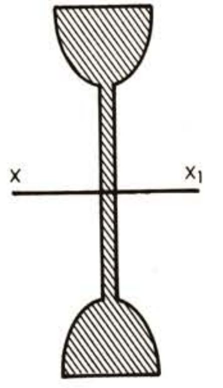
Ἐπειδή στόν τύπο αὐτό ἡ ἀπόσταση r ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς ὑψώνεται στό τετράγωνο, ἔχουμε μεγάλη αὔξηση τῆς ροπῆς ἀδρανείας, ὅταν ἡ μάζα κατανέμεται μακρύτερα ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἔτσι ἡ στεφάνη τοῦ σχήματος 2 · 1 η ἔχει μεγάλη ροπή



Σχ. 2·1 η.
Ἡ ροπή ἀδράνειας Θ εἶναι μεγάλη, γιατί ἡ μάζα εἶναι κατανεμημένη μακρυά ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

ἀδρανείας, γιατί ἡ μάζα κατανέμεται σέ δακτύλιο μακρυά ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

Στίς διάφορες μηχανές πού παράγουν ἔργο, συναντᾶμε τούς **σφόνδυλους** (σχ. 2·1 θ). Ὁ σφόνδυλος εἶναι μιά στεφάνη ἤ ἕνας μεταλλικός δίσκος στόν ὁποῖο ἡ μάζα εἶναι πιό πολύ συγκεντρωμένη στήν περιφέρεια, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 2·1 θ. Γιά τή σημασία καί τή χρήση τῶν σφονδύλων θά μιλήσουμε σέ ἑπόμενα Κεφάλαια.



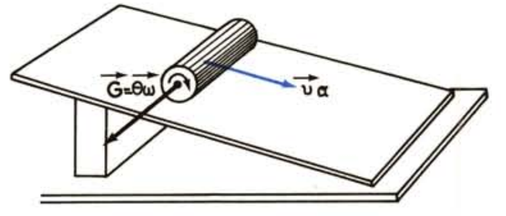
Σχ. 2·1 θ.
Τομή σφονδύλου.

γ) **Τυχαία κίνηση - Κινητική ἐνέργεια.**

Ἄν ἐξετάσουμε τήν κίνηση τοῦ κυλίνδρου Κ τοῦ σχήματος 2·1 ι, πού κυλᾶ στό κεκλιμένο ἐπίπεδο, θά δοῦμε ὅτι ὁ κύλινδρος κάνει μιά σύνθετη κίνηση, πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο κινήσεις. Ἡ μία εἶναι ἡ μεταφορική, πού κάνει ὁ ἄξονάς του καί ἡ ἄλλη εἶναι ἡ περιστροφική γύρω ἀπό τόν ἄξονά του.

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια στήν περίπτωση αὐτή εἶναι τό ἄθροισμα τῶν δύο κινητικῶν ἐνεργειῶν στή μεταφορική καί στήν περιστροφική κίνηση:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m\, \upsilon^2_\alpha + \frac{1}{2} \Theta\, \omega^2$$



Σχ. 2·1 ι.

ὅπου: m εἶναι ἡ μάζα κυλίνδρου, υ_α ἡ ταχύτητα τοῦ ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, Θ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ κυλίνδρου ὡς πρός τόν ἄξονά του καί ω ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ κυλίνδρου γύρω ἀπό τόν ἄξονά του. Κάθε τυχαία κίνηση σώματος μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ ἄθροισμα μιᾶς μεταφορικῆς καί μιᾶς περιστροφικῆς κινήσεως. Ἔτσι μιά μπάλα ποδοσφαίρου κάνει ταυτόχρονα καί μεταφορική καί περιστροφική κίνηση. Ἐκτελεῖ στήν πράξη μιά σύνθετη κίνηση καί ἡ ὁλική κινητική της ἐνέργεια ὑπολογίζεται ἀνάλογα μέ τήν περίπτωση τοῦ κυλίνδρου.

2·2 ΣΤΑΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ἐδῶ θά ἐξετάσουμε τίς δυνάμεις πού ἐξασκοῦνται σέ ἕνα στερεό σῶμα καί τήν ἰσορροπία τους.

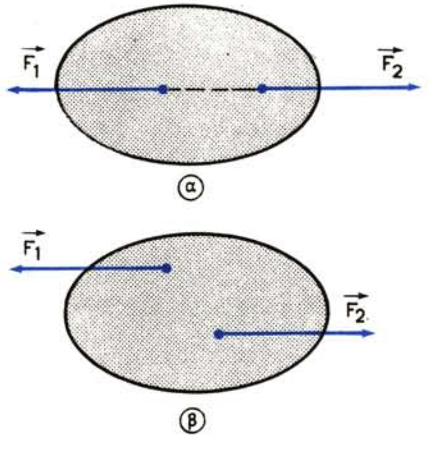
α) **Ἰσορροπία σώματος.**

Ἕνα σῶμα ἰσορροπεῖ, ὅταν ἀκινητεῖ ἤ περιστρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ὁρισμένο ἄξονα μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ἤ κάνει μεταφορική ἰσοταχή κίνηση, ἤ κάνει συνδυασμό τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων.

1) **Ἰσορροπία σώματος, στό ὁποῖο δροῦν δύο δυνά-**

μεις. Ἄν δύο δυνάμεις δροῦν σ' ἕνα σῶμα, αὐτό ἰσορροπεῖ, **ὅταν οἱ δύο δυνάμεις ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, ἀντίθετη φορά καί τό ἴδιο μέτρο.**

Τό σῶμα στό σχῆμα 2 · 2 α (β) δέν ἰσορροπεῖ, γιατί μπορεῖ τά μέτρα τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ νά εἶναι ἴσα καί ἡ φορά τους ἀντίθετη, ὅμως οἱ φορεῖς εἶναι παράλληλοι καί ὄχι ὁ ἴδιος.



Σχ. 2·2 α.

2) **Ἡ δύναμη εἶναι διάνυσμα πού ὀλισθαίνει.** Στό σῶμα Σ τοῦ σχήματος 2 · 2 β δρᾶ ἡ δύναμη $\vec{F}$.

Σέ ἕνα σημεῖο Μ παίρνουμε δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί F_2 τέτοιες ὥστε: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_1 = \vec{F}$. Οἱ δύο αὐτές δυνάμεις δέν προκαλοῦν κανένα πρόσθετο ἀποτέλεσμα, γιατί **ἰσορροποῦν.** Εἶναι δηλαδή **σάν νά μήν ὑπάρχουν.**

Μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε:

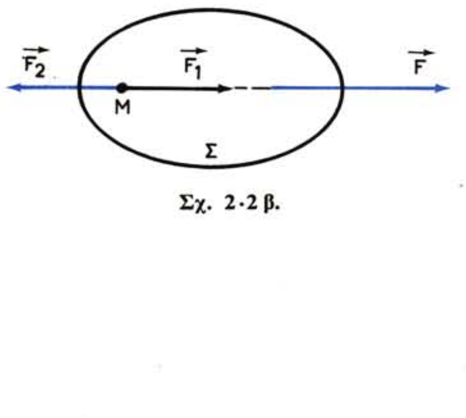
$$\vec{F} = \vec{F} + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \qquad (1)$$

ὅπου: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

Ἀλλά καί οἱ δυνάμεις $\vec{F}$ καί $\vec{F}_2$ ἰσορροποῦν τό σῶμα. Μποροῦμε λοιπόν νά συνεχίσουμε τήν ἐξίσωση (1):

$$\vec{F} = \vec{F} + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{F} + \vec{F}_1) + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 \text{ γιατί:}$$

$$\vec{F} + \vec{F}_2 = 0. \qquad (2)$$



Σχ. 2·2 β.

Ἀπό τή σχέση (2) συμπεραίνουμε ὅτι μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τή δύναμη $\vec{F}$ μέ τήν $\vec{F}_1$, ἡ ὁποία εἶναι **τῆς ἴδιας φορᾶς καί διευθύνσεως μέ τήν F καί τοῦ ἴδιου μέτρου,** ἔχει ὅμως διαφορετικό σημεῖο ἀρχῆς ἀπό τήν F. (Τό σημεῖο τῆς ἀρχῆς τοῦ διανύσματος μιᾶς δυνάμεως ὀνομάζεται καί **σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως).**

Ἀπό ὅσα εἴπαμε προκύπτει ὅτι, **τή δύναμη μποροῦμε νά τή μεταφέρουμε στό φορέα της, χωρίς νά μεταβάλλουμε τό ἀποτέλεσμα πού προκαλεῖ τό σῶμα. Δέν μποροῦμε ὅμως νά τή μεταθέσουμε παράλληλα.**

Εἶναι ἑπομένως ἡ δύναμη **ὀλισθαῖνον διάνυσμα.**

β) **Ροπή δυνάμεως.**

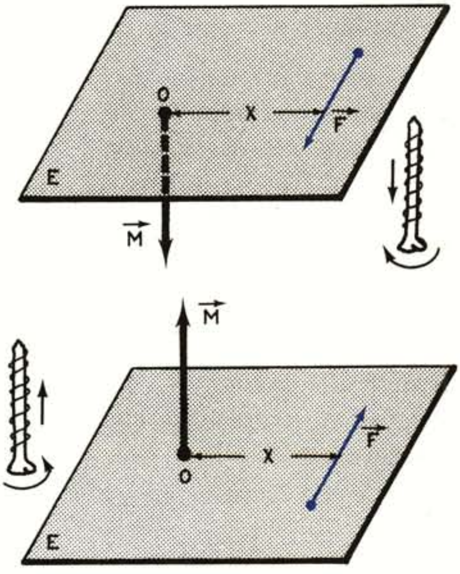
1) **Ροπή δυνάμεως ὡς πρός σημεῖο.** Ὀνομάζουμε ροπή Μ δυνάμεως F ὡς πρός σημεῖο Ο τό διάνυσμα τό ὁποῖο ἔχει:

— **Διεύθυνση:** Κάθετη στό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τή δύναμη $\vec{F}$ καί τό σημεῖο Ο.

— **Φορά:** Αὐτή πού καθορίζεται ἀπό **τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία** (σχ. 2 · 2 γ).

— **Μέτρο:** Τό γινόμενο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ἐπί τήν ἀπόσταση τοῦ σημείου Ο ἀπό τήν δύναμη $\vec{F}$.

$$M = F\,x$$



Σχ. 2·2 γ.

2) **Ροπή δυνάμεως ὡς πρός ἄξονα.** Ἔστω δύναμη $\vec{F}$ καί ἄξονας xx'. Ἀπό τήν ἀρχή Ο τοῦ διανύσματος τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ σχηματίζομε τό ἐπίπεδο Π κάθετο στόν ἄξονα xx'. Ἀπό τό σημεῖο Ο γράφουμε τήν ΟΒ παράλληλη πρός τή xx' (σχ. 2·2 δ).

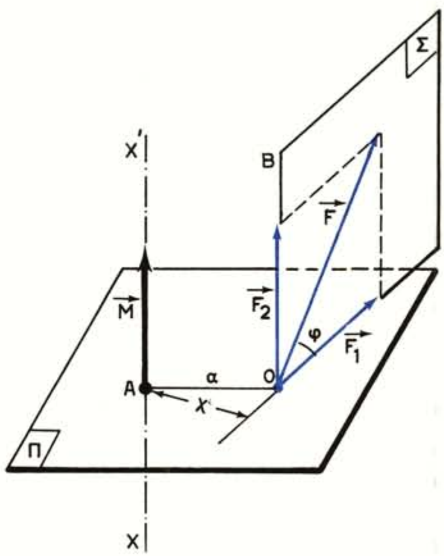
Τό ἐπίπεδο Σ εἶναι παράλληλο πρός τόν ἄξονα xx' περιέχει τή δύναμη $\vec{F}$ καί εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο Π. Ἀναλύουμε τή δύναμη $\vec{F}$ στίς συνιστῶσες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

Ὀνομάζομε **ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα xx'** τή ροπή τῆς συνιστώσας $\vec{F}_1$ (κάθετη προβολή τῆς $\vec{F}$ στό ἐπίπεδο Π) ὡς πρός τό σημεῖο Α (τομή ἐπιπέδου Π καί ἄξονα xx').

Ἑπομένως ροπή τῆς $\vec{F}$ ὡς πρός xx' εἶναι τό διάνυσμα $\vec{M}$ τοῦ ὁποίου τό μέτρο εἶναι:

$$M = F_1\,x = Fx\,\text{συνφ}$$

ὅπου: φ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό ἐπίπεδο Π.

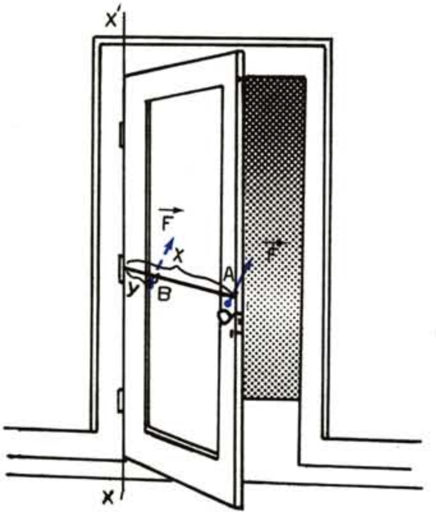


Σχ. 2·2 δ.

3) **Φυσική σημασία τῆς ροπῆς.** Ἡ ροπή εἶναι ἕνα φυσικό μέγεθος, πού ἔχει σχέση μέ τήν περιστροφή τῶν σωμάτων γύρω ἀπό πραγματικούς ἤ μή πραγματικούς ἄξονες.

Ἔτσι ἐξασκώντας τήν ἴδια δύναμη στά σημεῖα Α καί Β τῆς πόρτας (σχ. 2 · 2 ε), διαπιστώνουμε ὅτι στήν πρώτη περίπτωση αὐτή κλείνει εὔκολα, ἐνῶ στή δεύτερη δύσκολα.

Ἑπομένως γιά τό κλείσιμο ἤ τό ἄνοιγμα τῆς πόρτας δέν ἔχει σημασία μόνο ἡ δύναμη, ἀλλά καί ἡ ἀπόσταση τῆς δυνάμεως ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ὅσο μάλιστα πιό μεγάλη εἶναι ἡ ἀπόσταση αὐτή π.χ. x⟩y, τόσο μέ πιό μεγάλη εὐκολία κλείνει (ἤ ἀνοίγει) ἡ πόρτα. Γι' αὐτό, τό μέγεθος **ροπή** ἔχει μέτρο **τό γινόμενο τῆς δυνάμεως ἐπί τήν ἀπόσταση.** Συμμετέχουν δηλαδή στή διαμόρφωση τοῦ μεγέθους αὐτοῦ (τῆς ροπῆς), ἡ δύναμη καί ἡ ἀπόσταση.



Σχ. 2·2 ε.

γ) **Μονάδες ροπῆς.**

Σύστημα Μονάδων S.I.

'Από τή σχέση M = F x ἔχουμε:

$$M = 1\ N \cdot 1\ m = 1\ Nm$$

Τεχνικό σύστημα.

$$M = F x$$

$$M = 1\ kp \cdot 1\ m = 1\ kpm.$$

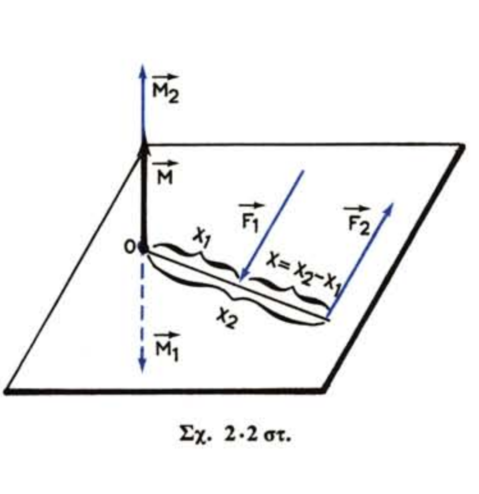
ε) **Ζεῦγος δυνάμεων. 'Ονομάζουμε ζεῦγος δυνάμεων δυό παράλληλες δυνάμεις, μέ ἀντίθετη φορά καί μέ τό ἴδιο μέτρο** (σχ. 2·2 στ).

Ὅπως ἀναφέραμε στήν παράγραφο 2·2 (α), δύο δυνάμεις ἴσες στό μέτρο, παράλληλες καί ἀντίθετης φορᾶς, **δέν** ἰσορροποῦν ἕνα σῶμα.

Ροπή τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων. 'Ονομάζουμε ροπή ζεύγους δυνάμεων τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυό δυνάμεων ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο.

Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ροπή εἶναι σταθερή, ὁποιοδήποτε σημεῖο κι ἄν διαλέξουμε καί ὅτι **ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς μιᾶς ἀπό τίς δύο ἴσες δυνάμεις ἐπί τήν ἀπόσταση μεταξύ τους.**

'Απόδειξη. Στό σχῆμα 2·2 στ ἔχουμε τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$. Στό ἐπίπεδο τῶν δύο παραλλήλων δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ παίρνουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο O. Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε γιά νά βροῦμε τή ροπή τοῦ ζεύγους, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε τίς ροπές τῶν δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ ὡς πρός τό τυχαῖο σημεῖο O.



Σχ. 2·2 στ.

Ροπή ζεύγους = Ροπή $\vec{F_1}$ ὡς πρός O + ροπή $\vec{F_2}$ ὡς πρός O.

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F_1}$ ὡς πρός τό O εἶναι τό διάνυσμα $\vec{M_1}$, τό ὁποῖο θά ἔχει μέτρο:

$$M_1 = F_1 x_1$$

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F_2}$ ὡς πρός τό O εἶναι τό διάνυσμα $\vec{M}_2$, τό ὁποῖο θά ἔχει μέτρο:

$$M_2 = F_2\, x_2$$

Τά διανύσματα τῶν ροπῶν $\vec{M}_1$ καί $\vec{M}_2$ ἔχουν τόν ἴδιο φορέα καί ἀντίθετη φορά.

Ἡ συνισταμένη ροπή ὅπως φαίνεται στό σχῆμα, εἶναι τό διάνυσμα $\vec{M}$ καί θά ἔχει μέτρο:

$$M = M_2 - M_1 = F_2\, x_2 - F_1\, x_1 \qquad (1)$$

Ἐπειδή $F_2 = F_1 = F$ καί $x_2 - x_1 = x$ ἔχουμε:

$$M = F\, x$$

Τό x εἶναι σταθερό ὁποιοδήποτε σημεῖο O κι ἄν διαλέξουμε καί ἑπομένως **ἡ ροπή τοῦ ζεύγους εἶναι σταθερό μέγεθος.**

Εἶναι ἑπομένως **ροπή ζεύγους τό διάνυσμα, πού ἔχει:**

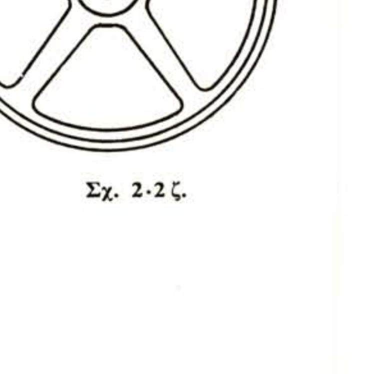
1) **Διεύθυνση κάθετη στό ἐπίπεδο τῶν παραλλήλων δυνάμεων.**

2) **Φορά πού καθορίζεται ἀπό τή φορά τῶν δυνάμεων τοῦ ζεύγους μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία.**

3) **Μέτρο τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς μιᾶς ἀπό τίς δυό δυνάμεις ἐπί τήν ἀπόσταση μεταξύ τους.**

δ) **Θεώρημα ροπῶν.**

Ὁ τροχός τοῦ σχήματος 2 · 2 ζ στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα O κάθετο στό ἐπίπεδό του. Στό σημεῖο A ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἀντίθετης φορᾶς πού ἔχουν συνισταμένη τήν $\vec{F}$:



Σχ. 2·2ζ.

$$F = F_1 - F_2 \qquad (1)$$

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ὡς πρός τό O ἔχει μέτρο:

$$M_1 = F_1\, r \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_2$ ὡς πρός τό O ἔχει μέτρο:

$$M_2 = -\,F_2\, r \qquad (3)$$

Τό ἄθροισμα τῶν δύο ροπῶν εἶναι:

$$M_1 + M_2 = r\,(F_1 - F_2) \qquad (4)$$

Ἀπό τήν (1) καί τήν (4) ἔχουμε:

$$M_1 + M_2 = r\, F \qquad (5)$$

Ἡ ροπή τῆς συνισταμένης F εἶναι:

$$M = r\,F \qquad (6)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (5) καί (6) προκύπτει:

$$M = M_1 + M_2 \qquad (7)$$

Ἡ σχέση (7) γενικεύεται καί διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: **Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων πού βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο, εἶναι ἴσο μέ τή ροπή τῆς συνισταμένης δυνάμεως ὡς πρός τό σημεῖο αὐτό.**

Ἄν οἱ δυνάμεις δέν βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί ἔχουν συνισταμένη, ἰσχύει ὁ ἑξῆς ὁρισμός:

Τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν πολλῶν δυνάμεων, πού δροῦν σέ ἕνα σῶμα ὡς πρός σημεῖο, εἶναι ἴσο μέ τή ροπή τῆς συνισταμένης δυνάμεως ὡς πρός τό σημεῖο αὐτό.

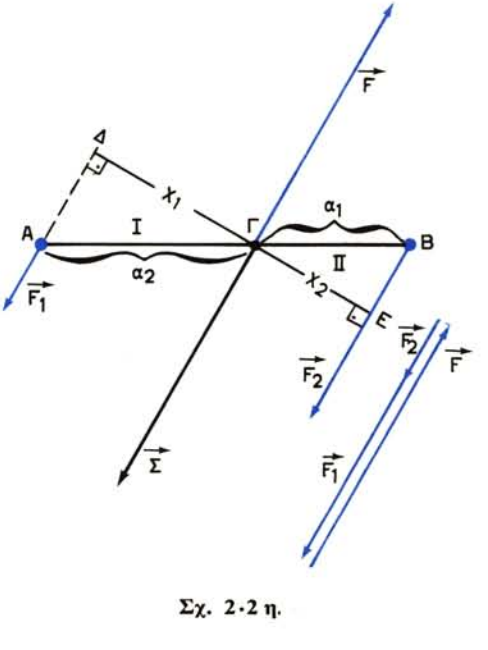
ε) **Συνθήκη ἰσορροπίας ὁμοεπίπεδων δυνάμεων, πού ἐξασκοῦνται σ' ἕνα σῶμα.**

Ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν πολλές ὁμοεπίπεδες δυνάμεις ἐνεργοῦν σέ ἕνα σῶμα. Γιά νά ἰσορροπεῖ αὐτό, θά πρέπει: **Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο νά εἶναι μηδέν καί τό δυναμοπολύγωνο τῶν δυνάμεων νά εἶναι κλειστό.**

—Συνθήκη ἰσορροπίας δυνάμεων πού ἐξασκοῦνται σέ ἕνα στερεό σῶμα. Ἡ προηγούμενη πρόταση γενικεύεται, ὅταν οἱ δυνάμεις δέν εἶναι ὁμοεπίπεδες καί διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: **Γιά νά ἰσορροπεῖ ἕνα σῶμα, στό ὁποῖο ἐξασκοῦνται πολλές δυνάμεις, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ σώματος νά εἶναι μηδέν καί τό δυναμοπολύγωνο τῶν δυνάμεων νά εἶναι κλειστό.**

στ) **Ἰσορροπία παραλλήλων δυνάμεων.**

1) **Συνισταμένη δύο παραλλήλων καί ὁμορρόπων δυνάμεων.** Δύο δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$ καί $\overrightarrow{F_2}$ παράλληλες καί τῆς ἴδιας φορᾶς, ἐνεργοῦν σέ δύο σημεῖα A καί B ἑνός στερεοῦ σώματος (σχ. 2·2η). Νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη τους.

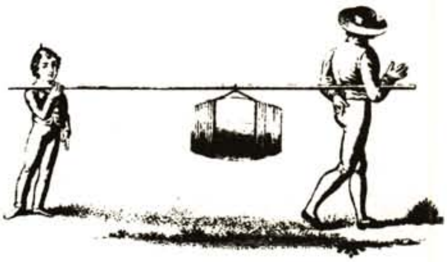


Σχ. 2·2 η.

Λύση:

Ἔστω ὅτι ἡ δύναμη $\overleftarrow{F}$, ἰσορροπεῖ τίς δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$ καί $\overrightarrow{F_2}$.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, **ὅταν βροῦμε τήν $\overrightarrow{F}$** (σημεῖο ἐφαρμογῆς πάνω στήν AB, διεύθυνση, φορά καί μέτρο),



τότε μποροῦμε νά βροῦμε καί τή συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ ὡς ἴση καί ἀντίθετη τῆς $\vec{F}$.

Οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας ὁμοεπίπεδων δυνάμεων, ἑπομένως καί τῶν παραλλήλων εἶναι:

α) **Τό δυναμοπολύγωνο τῶν δυνάμεων νά εἶναι κλειστό.** Γιά νά εἶναι ὅμως κλειστό τό δυναμοπολύγωνο, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 2·2 η, πρέπει ἡ $\vec{F}$ νά ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί ἀντίθετη φορά μέ τίς $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Ἐπίσης τό μέτρο τῆς $\vec{F}$ πρέπει νά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν δύο μέτρων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

$$F = F_1 + F_2$$

β) **Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο νά εἶναι μηδέν.** Παίρνουμε ὡς σημεῖο τό Γ καί ἐκφράζουμε τήν παραπάνω συνθήκη ἰσορροπίας.

Ροπή $\vec{F}_1$ ὡς πρός Γ + Ροπή $\vec{F}_2$ ὡς πρός Γ + Ροπή $\vec{F}$ ὡς πρός Γ = 0.

$$F_1 x_1 - F_2 x_2 + 0 = 0$$

ἤ
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{x_2}{x_1} \qquad (1)$$

Ἐπειδή τά τρίγωνα ΓΑΔ καί ΓΒΕ εἶναι ὅμοια, θά ἰσχύει:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (2)$$

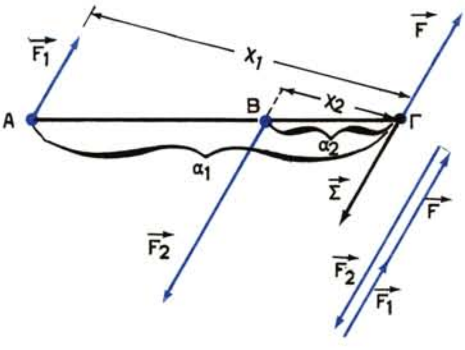
Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει ὅτι:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (3)$$

Ἑπομένως τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς $\vec{F}$ χωρίζει τήν ἀπόσταση ΑΒ σέ δύο μέρη α_1 καί α_2, τά ὁποῖα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τά μέτρα τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

Ἀφοῦ προσδιορίστηκε ἡ $\vec{F}$, πού ἰσορροπεῖ τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ἡ ἀντίθετή της $\vec{\Sigma}$ θά εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

Ὥστε: **Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων παράλληλων**



Σχ. 2·2 θ.

καί ὁμορρόπων, εἶναι δύναμη παράλληλη πρός αὐτές καί τῆς ἴδιας φορᾶς. Τό μέτρο τῆς συνισταμένης εἶναι ἴσο πρός τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δύο δυνάμεων. Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως εἶναι ἕνα σημεῖο, τό ὁποῖο χωρίζει τήν ἀπόσταση ἀνάμεσα στά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν ἄλλων δύο δυνάμεων σέ μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τά μέτρα τῶν δύο δυνάμεων.

2) **Συνισταμένη δύο παράλληλων καί ἀντίρροπων δυνάμεων.** Ἔστω (σχ. 2 · 2 θ) ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἰσορροπεῖ τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Πρέπει τότε:

α) **Τό δυναμοπολύγωνο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}$ νά εἶναι κλειστό.** Ἑπομένως ἡ δύναμη $\vec{F}$ πρέπει νά εἶναι παράλληλη πρός τίς $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ καί νά ἔχει τή φορά τῆς μικρότερης δυνάμεως $\vec{F}_1$.

β) **Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο νά εἶναι μηδέν.** Ἑπομένως ἄν διαλέξουμε τό σημεῖο Γ, θά ἔχουμε: Ροπή $\vec{F}_2$ ὡς πρός Γ + Ροπή $\vec{F}_1$ ὡς πρός Γ + Ροπή $\vec{F}$ ὡς πρός Γ = 0.

$$F_2\,x_2 - F_1\,x_1 + 0 = 0$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

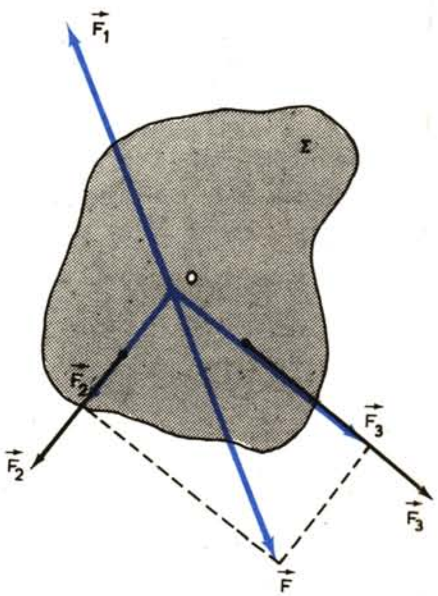
καί ἐπειδή $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{a_1}{a_2}$

Ἀφοῦ ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἰσορροπεῖ τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ἡ ἀντίθετη πρός αὐτή δύναμη $\vec{F}$, δηλαδή ἡ **δύναμη $\vec{\Sigma}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.**

Συμπέρασμα: Ἡ συνισταμένη δυό δυνάμεων παράλληλων καί ἀντίρροπων εἶναι δύναμη παράλληλη πρός αὐτές, μέ φορά τή φορά τῆς μεγαλύτερης δυνάμεως, μέ μέτρο τή διαφορά τῶν μέτρων τῶν δυνάμεων καί σημεῖο ἐφαρμογῆς, πού βρίσκεται στήν προέκταση τῆς εὐθείας πού συνδέει τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων. Οἱ ἀποστάσεις τῆς συνισταμένης αὐτῆς ἀπό τίς δύο δυνάμεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρός τά μέτρα τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

ζ) **Ἰσορροπία τριῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα στερεό σῶμα.** Ἔστω τρεῖς δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ οἱ ὁποῖες ἐνεργοῦν στό σῶμα Σ.

Γνωρίζομε ὅτι οἱ δυνάμεις εἶναι ὀλισθαίνοντα διανύσματα (σχ. 2 · 2 ι). Ἑπομένως μετακινοῦμε τά διανύσματα τῶν δυνάμεων $\overrightarrow{F_2}$ καί $\overrightarrow{F_3}$, ὥστε νά ἔχουν κοινή ἀρχή τό σημεῖο Ο. Ἀντικαθιστοῦμε τίς $\overrightarrow{F_2}$ καί $\overrightarrow{F_3}$ μέ τή συνισταμένη τους $\overrightarrow{F}$ καί ἔτσι παραμένουν οἱ δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$ καί $\overrightarrow{F}$.



Σχ. 2·2 ι.

Γιά νά ἰσορροπεῖ ὅμως ἕνα σῶμα, ὅταν πάνω του ἐνεργοῦν δυό δυνάμεις, πρέπει αὐτές νά ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, ἀντίθετη φορά καί τό ἴδιο μέτρο.

Ἑπομένως ὁ φορέας τῆς $\overrightarrow{F_1}$ πρέπει νά περνᾶ ἀπό τό Ο καί ἡ $\overrightarrow{F_1}$, νά εἶναι ἴση καί ἀντίθετη τῆς $\overrightarrow{F}$.

Ὥστε γιά νά **ἰσορροπεῖ** ἕνα σῶμα, ὅταν πάνω του ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις, πρέπει:

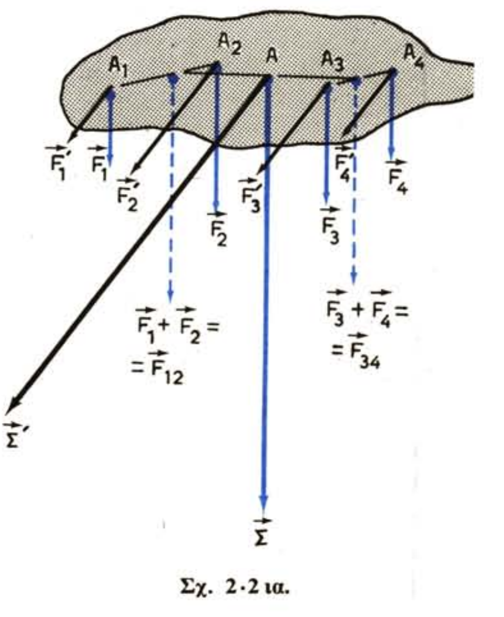
1) **Οἱ προεκτάσεις τῶν φορέων τῶν τριῶν δυνάμεων νά περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.**

2) **Τό δυναμοπολύγωνο νά εἶναι κλειστό ἤ ἡ μία ἀπό τίς δυνάμεις νά εἶναι ἴση καί ἀντίθετη πρός τή συνισταμένη τῶν ἄλλων δύο δυνάμεων.**

η) **Συνισταμένη πολλῶν παραλλήλων δυνάμεων.** Γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη πολλῶν παραλλήλων δυνάμεων συνθέτουμε ἀνά δύο τίς δυνάμεις καί συνεχίζουμε μέχρι νά βροῦμε τήν τελική συνισταμένη. Στό σχῆμα 2 · 2 ια βρίσκουμε πρῶτα τή συνισταμένη τῶν $\overrightarrow{F_1}$ καί $\overrightarrow{F_2}$, τήν $\overrightarrow{F_{12}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ καί τῶν $\overrightarrow{F_3}$ καί $\overrightarrow{F_4}$ τήν $\overrightarrow{F_{34}} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$ καί τέλος τή συνισταμένη τῶν $\overrightarrow{F_{12}}$ καί $\overrightarrow{F_{34}}$, ἡ ὁποία εἶναι καί ἡ ὁλική συνισταμένη:

$$\overrightarrow{\Sigma} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}.$$

Ἄν τίς δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ καί $\overrightarrow{F_4}$ τίς στρέψουμε κατά γωνία α, τότε ἔχουμε τίς δυνάμεις στίς θέσεις $\overrightarrow{F'_1}$, $\overrightarrow{F'_2}$, $\overrightarrow{F'_3}$, $\overrightarrow{F'_4}$ καί ἡ ὁλική συνισταμένη τους $\overrightarrow{\Sigma'}$ στρέφεται ἐπίσης κατά γωνία α, πού περνᾶ ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Α, ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι ἡ γωνία α.



Σχ. 2·2 ια.

Ἀπό ὅσα εἴπαμε, διατυπώνεται τό **θεώρημα τοῦ**

Κάντ τῶν παραλλήλων δυνάμεων, πού λέει ὅτι:

Ἄν στρέψουμε παράλληλες δυνάμεις κατά ὁποιαδήποτε γωνία, διατηρώντας τις πάντοτε παράλληλες, ἡ συνισταμένη τους στρέφεται ἐπίσης κατά τήν ἴδια γωνία. Ὅλες ὅμως οἱ διευθύνσεις τῶν συνισταμένων περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό ὁποῖο λέγεται καί κέντρο τῶν παραλλήλων δυνάμεων.

θ) **Κέντρο βάρους σώματος.** Ἄν χωρίσουμε τή μάζα ἑνός σώματος σέ στοιχειώδεις μάζες dm_1, dm_2,...dm_3, σέ κάθε μιά ἀπό αὐτές θά ἐξασκεῖται τό ἀντίστοιχο βάρος $\vec{dB_1}$, $\vec{dB_2}$...$\vec{dB\nu}$ (σχ. 2·2 ιβ). Ὅλα αὐτά τά στοιχειώδη βάρη, εἶναι δυνάμεις παράλληλες καί ἔχουν συνισταμένη τή δύναμη $\vec{B}$, ἡ ὁποία θά εἶναι τό ὁλικό βάρος τοῦ σώματος.

Ἡ ὁλική συνισταμένη, ἔχει μέτρο τό ἄθροισμα τῶν βαρῶν $\vec{dB_1}$ $\vec{dB_2}$...$\vec{dB\nu}$, γιατί οἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλες καί τῆς ἴδιας φορᾶς:

$$B = dB_1 + dB_2 + \ldots dB$$

$$\mathrm{B} = \Sigma \mathrm{dB}$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό σῶμα τοῦ σχήματος 2·2 ιγ σέ δυό θέσεις α καί β.

Στή θέση α τό βάρος $\vec{B}$ (συνισταμένη τῶν παραλλήλων δυνάμεων $\vec{dB_1}$, $\vec{dB_2}$...$\vec{dB\nu}$) ἔχει διεύθυνση xx'.

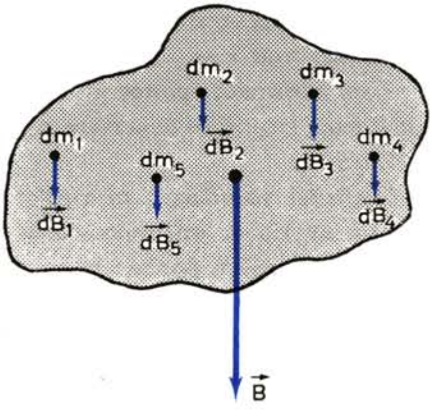
Στρέφοντας τό σῶμα στή θέση β στρέφονται καί οἱ διευθύνσεις τῶν στοιχειωδῶν βαρῶν κατά γωνία φ, ἀπό τήν ἀρχική διεύθυνση xx'. Στή νέα θέση β τό βάρος $\vec{B}$ εἶναι πάλι ἡ συνισταμένη τῶν $\vec{dB_1}$, $\vec{dB_2}$... $\vec{dB\nu}$ καί συναντᾶ τήν προηγούμενη διεύθυνση τοῦ βάρους xx' στό κέντρο τῶν παραλλήλων δυνάμεων Κ, τό ὁποῖο ὀνομάζεται **κέντρο βάρους τοῦ σώματος.**

— **Εὕρεση κέντρου βάρους διαφόρων σωμάτων.** Τό κέντρο βάρους Κ μιᾶς ὁμοιογενοῦς εὐθύγραμμης ράβδου ΑΒ εἶναι τό μέσο της (σχ. 2·2 ιδ).

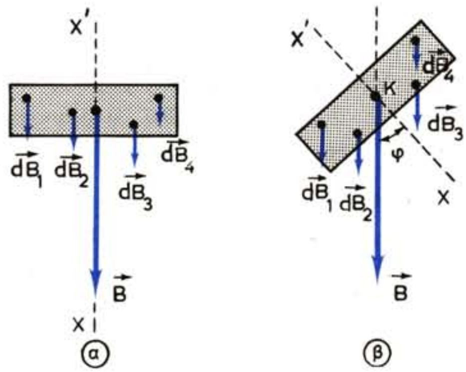
Τό κέντρο βάρους ἑνός τριγώνου, σταθεροῦ πάχους καί ὁμοιογενοῦς, εἶναι τό **σημεῖο τομῆς τῶν διαμέσων** (σχ. 2·2 ιε).

Τό κέντρο βάρους ὁμοιογενῶν σωμάτων μέ κανονικά γεωμετρικά σχήματα εἶναι τό **κέντρο συμμετρίας.**

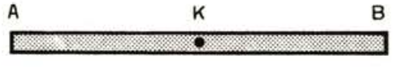
Π.χ. τό κέντρο βάρους σφαίρας εἶναι τό κέντρο της.



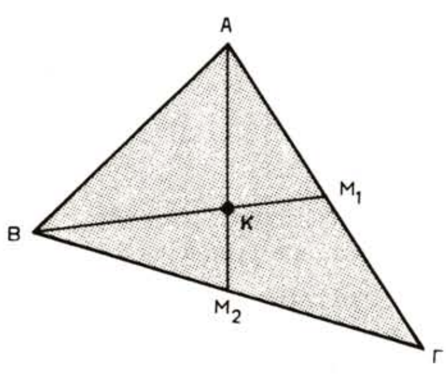
Σχ. 2·2 ιβ.



Σχ. 2·2 ιγ.



Σχ. 2·2 ιδ.



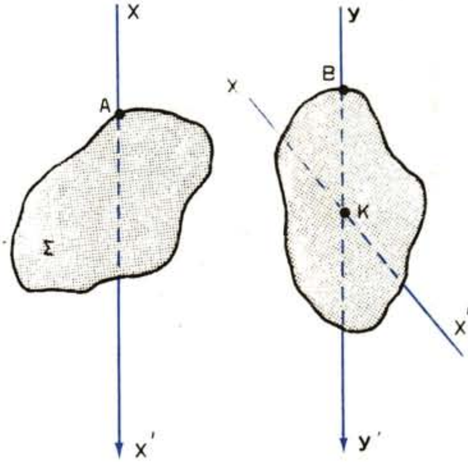
Σχ. 2·2 ιε.

Τό κέντρο βάρους κύβου εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του κ.λπ.

Ἕνας πρακτικός τρόπος γιά νά βρίσκουμε τό κέντρο βάρους ἐπιπέδων σωμάτων σημειώνεται στό σχῆμα 2 · 2 ιστ.

Ἐξαρτᾶμε τό σῶμα Σ μέ τή βοήθεια ἑνός σχοινιοῦ ἀπό τό σημεῖο Α καί σημειώνουμε τή διεύθυνση τῆς κατακόρυφης μέ τή βοήθεια τοῦ νήματος τῆς στάθμης (διεύθυνση xx').

Ἐπαναλαμβάνουμε τό ἴδιο ἐξαρτώντας τό σῶμα ἀπό τό σημεῖο Β. Ἡ κατακόρυφη τώρα παίρνει τή διεύθυνση yy'. Ἡ τομή τῶν δυό διευθύνσεων xx' καί yy' εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος.



Σχ. 2·2 ιστ.

— **Ἐφαρμογές.**

1. Δύο δυνάμεις $F_1 = 5$ kp καί $F_2 = 10$ kp ἐνεργοῦν στά σημεῖα Α καί Β μιᾶς ράβδου πού δέν ἔχει βάρος (σχ. 2 · 2 ιζ). Νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη αὐτῶν, ἄν $AB = 0{,}60$ m.

Λύση :

Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ εἶναι παράλληλη πρός τίς $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ καί ἔχει φορά τήν ἴδια μέ τίς δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ καί μέτρο:

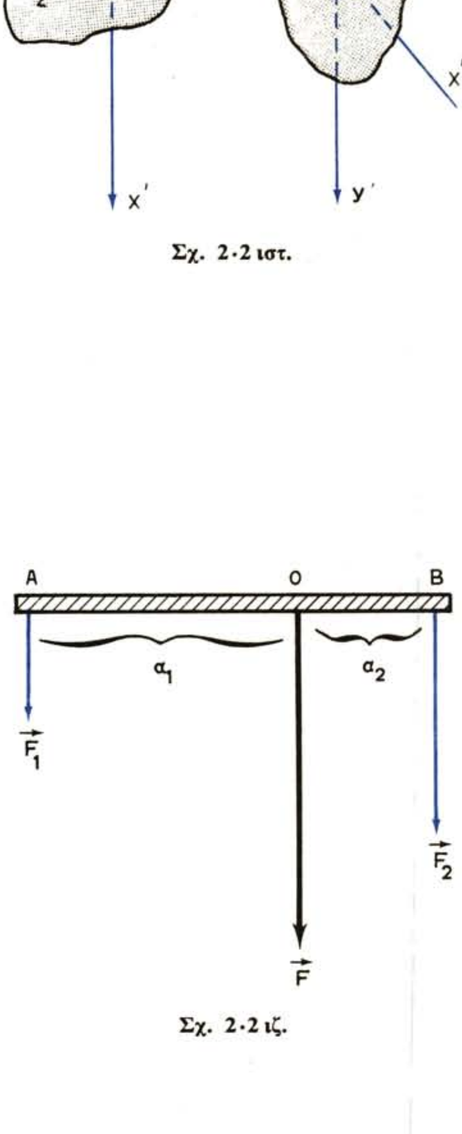
$$F = F_1 + F_2 = 5 + 10 = 15 \text{ kp}.$$

Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι τό Ο, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{F_1}{F_1 + F_2} \qquad (1)$$

Στήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε: $\alpha_1 + \alpha_2 = 60$ cm, $F_1 = 5$ kp καί $F_1 + F_2 = 15$ kp, ἑπομένως:

$$\frac{\alpha_2}{0{,}60} = \frac{5}{15} \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}20 \text{ m}.$$



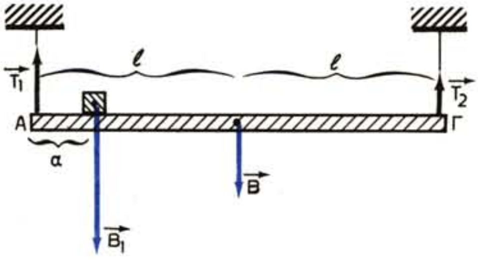
Σχ. 2·2 ιζ.

Δηλαδή μέ τήν εὕρεση τῆς ἀποστάσεως α_2 καθορίσαμε τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης.

2. Μιά ράβδος ΑΓ ἔχει μῆκος $2l = 1$ m, εἶναι ὁμοιογενής καί ἔχει βάρος $B = 10$ kp.

Ἐξαρτᾶμε τή ράβδο ἀπό τά σημεῖα Α καί Γ μέ τή βοήθεια δυό νημάτων, τά ὁποῖα εἶναι κατακόρυφα.

Τέλος, προσθέτουμε τό βάρος $B_1 = 40$ kp σέ ἀπόσταση $\alpha = 10$ cm ἀπό τό ἄκρο Α (σχ. 2 · 2 ιη). Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τάσεις T_1 καί T_2 τῶν δυό νημάτων.



Σχ. 2·2 ιη.

Λύση :

Τό σῶμα ΑΓ ἰσορροπεῖ καί ἑπομένως θά ἐκφράσουμε τίς συνθῆκες ἰσορροπίας ὁμοεπιπέδων δυνάμεων. Μιά συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι:

Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο εἶναι μηδέν.

Θεωροῦμε τίς ροπές ὡς πρός τό σημεῖο Α:

Ροπή $\vec{B_1}$ ὡς πρός Α + Ροπή $\vec{B}$ ὡς πρός Α + Ροπή $\vec{T_2}$ ὡς πρός Α + ροπή $\vec{T_1}$ ὡς πρός Α = 0.

$$B_1\,\alpha + B\,l - T_2\,2\,l + 0 = 0.$$

Λύνουμε ὡς πρός T_2:

$$T_2 = \frac{B_1\,\alpha + B\,l}{2\,l} \qquad (1)$$

Ἀντικατάσταση :

$$T_2 = \frac{40 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}5}{1} = 9 \text{ kp.}$$

Ἐπαναλαμβάνουμε τό ἴδιο γιά τό σημεῖο Γ. Ροπή $\vec{B_1}$ ὡς πρός Γ + Ροπή $\vec{B}$ ὡς πρός Γ + Ροπή $\vec{T_1}$ ὡς πρός Γ + Ροπή $\vec{T_2}$ ὡς πρός Γ = 0.

$$-B_1\,(2\,l - \alpha) - B\,l + T_1\,2\,l + 0 = 0$$

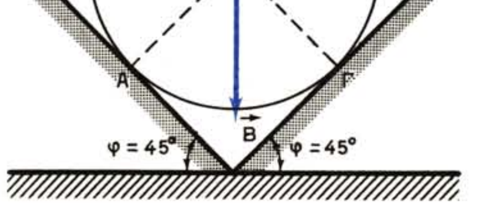
Λύνουμε τήν ἐξίσωση ὡς πρός T_1:

$$T_1 = \frac{B\,l + B_1\,(2\,l - \alpha)}{2\,l}$$

Ἀντικατάσταση :

$$T_1 = \frac{10 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 0{,}9}{1} = 41 \text{ kp.}$$

3. Σφαίρα Σ ἔχει βάρος $B = 20$ kp καί τοποθετεῖται στή γωνία δυό ἐπιπέδων E_1 καί E_2 μέ κλίση ὡς πρός τό ἔδαφος 45° (σχ. 2 · 2 ιθ). Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἀντιδράσεις τῶν ἐπιπέδων.



Σχ. 2·2 ιθ.

Λύση:

Οἱ ἀντιδράσεις τῶν ἐπιπέδων εἶναι κάθετες στήν ἐπιφάνεια ἐπαφῆς τους μέ τή σφαίρα, δηλαδή κάθετες στά ἐπίπεδα καί περνοῦν ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας. Τό κέντρο τῆς σφαίρας εἶναι ταυτόχρονα καί τό κέντρο βάρους (ἡ σφαίρα εἶναι ὁμοιογενής).

Ἐπειδή ἡ σφαίρα ἰσορροπεῖ, οἱ τρεῖς δυνάμεις πού ἐνεργοῦν σ' αὐτήν πρέπει:

1) Νά περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Αὐτό πράγματι συμβαίνει.

2) Ἡ μιά ἀπό αὐτές νά εἶναι ἴση κατά μέτρο καί ἀντίθετη κατά φορά μέ τή συνισταμένη τῶν ἄλλων δυό. Ἄν ἑπομένως πάρουμε τή $\vec{B}'$ ἴση καί ἀντίθετη τῆς $\vec{B}$, αὐτή (ἡ $\vec{B}'$) πρέπει νά εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυό ἀντιδράσεων $\vec{K}_1$ καί $\vec{K}_2$.

Ὑπολογισμός τῶν K_1 καί K_2:

Ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\frac{K_1}{\eta\mu\,\varphi_1} = \frac{B'}{\eta\mu\,(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{K_2}{\eta\mu\,\varphi_2}$$

προκύπτει:

$$K_1 = \frac{B'\,\eta\mu\,\varphi_1}{\eta\mu\,(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\text{καί} \quad K_2 = \frac{B'\,\eta\mu\,\varphi_2}{\eta\mu\,(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Ἀντικατάσταση:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= 45^\circ \\ \varphi_2 &= 45^\circ \\ B' &= B = 20\,\text{kp} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \eta\mu\,\varphi_1 &= \eta\mu\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\,\varphi_2 &= \eta\mu\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\,(\varphi_1 + \varphi_2) &= \eta\mu\,90^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\text{καί} \quad K_1 = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = 14\,\text{kp}$$

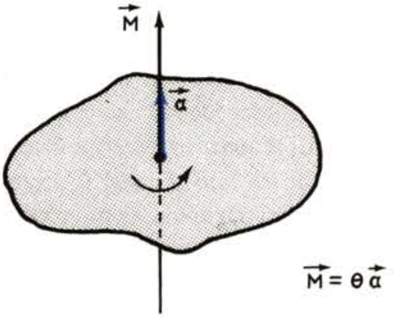
$$\text{καί} \quad K_2 = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = 14\,\text{kp}.$$

2 · 3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

α) Θεμελιώδης νόμος τῆς περιστροφικῆς κινήσεως. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σῶμα, τό ὁποῖο στρέφεται γύρω ἀπό ἕνα ἄξονα (σχ. 2 · 3 α). Στό σῶμα αὐτό ἐξασκοῦνται δυνάμεις. Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ροπή τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς καί $\vec{M}$ ἡ συνισταμένη τους.

Ἡ συνισταμένη αὐτή ροπή προκαλεῖ στό σῶμα περιστροφική κίνηση ὁμαλά ἐπιταχυνομένη μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\alpha}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογη πρός τή ροπή $\vec{M}$.

Ὁ συντελεστής ἀναλογίας εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας Θ τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς.



Σχ. 2·3 α.
$\vec{M} = \Theta\,\vec{\alpha}$. Ἡ ροπή εἶναι διάνυσμα τῆς αὐτῆς φορᾶς καί διευθύνσεως μέ τή γωνιακή ἐπιτάχυνση.

$\vec{M} = \Theta\,\vec{\alpha}$	*Θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς Δυναμικῆς στήν περιστροφική κίνηση*

Ὥστε: **Ἡ συνισταμένη ροπή δυνάμεων, οἱ ὁποῖες ἐνεργοῦν σέ σῶμα πού μπορεῖ νά περιστραφεῖ γύρω ἀπό ἄξονα, προκαλεῖ γωνιακή ἐπιτάχυνση, ἀνάλογη πρός τή συνισταμένη ροπή.**

Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως.

1) Ἄν $\vec{M} = 0$, ἀπό τήν ἐξίσωση $\vec{M} = \Theta\,\vec{\alpha}$, προκύπτει ὅτι καί $\vec{\alpha} = 0$ ἤ $\vec{\omega} =$ σταθερό.

Δηλαδή, ἄν ἡ συνισταμένη ροπή τῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ σῶμα εἶναι μηδέν, τότε αὐτό σταματᾶ νά ἐπιταχύνεται κυκλικά ($\vec{\alpha} = 0$), δηλαδή κινεῖται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ($\vec{\omega} =$ σταθερό). Στήν περίπτωση πού ἕνα σῶμα στρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω ἀπό ἕνα σταθερό ἄξονα, ἰσορροπεῖ. Δηλαδή, **στή περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα, τό σῶμα ἰσορροπεῖ ὅταν ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν ὡς πρός αὐτό τόν ἄξονα εἶναι μηδέν.**

2) Σφόνδυλος εἶναι συνήθως ἕνας δίσκος μεγάλου βάρους, πού στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα ὁ ὁποῖος περνᾶ ἀπό τό κέντρο του (σχ. 2 · 1 ι).

Ἡ περισσότερη μάζα εἶναι κατανεμημένη κοντά στήν περιφέρεια, δηλαδή σέ μεγάλη ἀπόσταση ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Γι' αὐτό **οἱ σφόνδυλοι παρουσιάζουν μεγάλη ροπή ἀδρανείας.**

Αὐτοί τοποθετοῦνται στόν ἄξονα περιστροφῆς τῶν μηχανῶν (ἀτμομηχανῶν, βενζινοκινητήρων, ὑδροστροβίλων κλπ.) καί σκοπός τους εἶναι **νά διατηροῦν σταθερή τή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῶν μηχανῶν.** Γιά τήν ἀκρίβεια, **παρεμποδίζουν τίς αἰσθητές μεταβολές τῆς γωνιακῆς ταχύτητας τῶν ἀξόνων τῶν μηχανῶν.** Ἡ λειτουργία τους στηρίζεται στήν ἐξίσωση $M = \Theta\, \alpha$, σύμφωνα μέ τήν ὁποία γιά κάποια τιμή τῆς ροπῆς M πού ἐξασκεῖ ἡ μηχανή στό σφόνδυλο, ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση εἶναι τόσο μικρότερη, ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας Θ.

Ἐπειδή ὁ σφόνδυλος ἔχει μεγάλη ροπή ἀδρανείας, οἱ γωνιακές ἐπιταχύνσεις του εἶναι μικρές.

Ἔτσι ἐξασφαλίζεται σημαντική σταθερότητα στή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ σφονδύλου, σέ περίπτωση πού ἡ συνισταμένη ροπή τῆς μηχανῆς τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων δέν εἶναι σταθερή, ἀλλά παρουσιάζει, ὅπως συνήθως συμβαίνει, σημαντικές μεταβολές.

β) **Στροφορμή στερεοῦ σώματος.** Ἔστω στερεό σῶμα πού στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα xx'. Χωρίζουμε τό σῶμα σέ στοιχειώδεις μάζες dm (σχ. 2·3 β). Ὀνομάζομε **στροφορμή** G τοῦ **στερεοῦ** αὐτοῦ **σώματος τό ἄθροισμα τῶν στροφορμῶν τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς του:**

$$\vec{G} = \Sigma d\vec{G} \qquad (1)$$

Ἡ στοιχειώδης στροφορμή dG τῶν μικρῶν μαζῶν dm δίνεται ἀπό τόν τύπο [παράγρ. 1 · 4 στ (2)]:

$$dG = dm\, \upsilon\, r \qquad (2)$$

ὅπου : υ εἶναι ἡ γραμμική ταχύτητα τῆς μάζας dm καί r ἡ ἀκτίνα τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τῆς μάζας dm, ὅταν ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση.

Ἐπειδή $\upsilon = \omega\, r$, ὅπου ω εἶναι ἡ γωνιακή ταχύτητα στήν κυκλική κίνηση, ἡ ἐξίσωση (2), γίνεται:

$$dG = \omega\, dm\, r^2 \qquad (3)$$

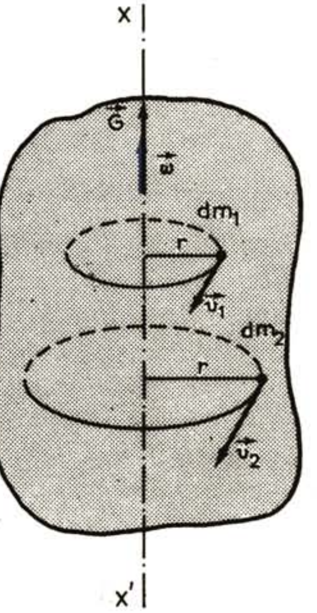
Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (3) προκύπτει:

$$G = \Sigma \omega\, dm\, r^2 \qquad (4)$$

Στό ἄθροισμα ἡ γωνιακή ταχύτητα εἶναι κοινός παράγοντας, γιατί εἶναι σταθερή γιά ὅλες τίς μάζες.

Ἑπομένως: $$G = \omega\, \Sigma dm\, r^2 \qquad (5)$$

Ὅμως, $\Sigma dm\, r^2$ = Ροπή ἀδρανείας = Θ. Ἑπομένως



Σχ. 2·3 β.
Ἡ στροφορμή τοῦ σώματος εἶναι διάνυσμα τῆς ἴδιας φορᾶς καί διευθύνσεως μέ τή γωνιακή ταχύτητα.

ἡ ἐξίσωση (5) γίνεται:

$$\vec{G} = \vec{\omega}\,\Theta \qquad (6)$$

Μποροῦμε ἑπομένως νά ποῦμε ὅτι, **στροφορμή σώματος, τό ὁποῖο στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, εἶναι τό γινόμενο τῆς ροπῆς ἀδρανείας τοῦ σώματος, ἐπί τή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς του.**

Ἡ στροφορμή εἶναι διάνυσμα ἀφοῦ εἶναι ἄθροισμα τῶν στροφορμῶν τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν, οἱ ὁποῖες, ὅπως ξέρουμε, εἶναι διανύσματα. Ἔχει διεύθυνση τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ σώματος καί ἡ φορά του καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία.

γ) **Ἄλλη διατύπωση τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς δυναμικῆς στήν περιστροφική κίνηση.**

Ἡ ἐξίσωση:

$$\mathrm{M} = \Theta\,\alpha \qquad (1)$$

ὅπως εἴπαμε, εἶναι ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς στήν περιστροφική κίνηση. Ἐπίσης ξέρουμε ὅτι ἡ στροφορμή σώματος πού στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα, δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\mathrm{G} = \omega\,\Theta \qquad (2)$$

Ἄν ἕνα σῶμα στρέφεται γύρω ἀπό ἕνα ἄξονα μέ ἐπιταχυνόμενη κίνηση, θά μεταβάλλεται ἡ στροφορμή του, γιατί ἀλλάζει ἡ τιμή τῆς γωνιακῆς ταχύτητας.

Ἡ μεταβολή dG σέ χρόνο dt θά εἶναι:

$$\mathrm{dG} = \Theta\,\mathrm{d}\omega \qquad (3)$$

Διαιρώντας τήν ἐξίσωση (3) μέ τό χρόνο dt βρίσκουμε:

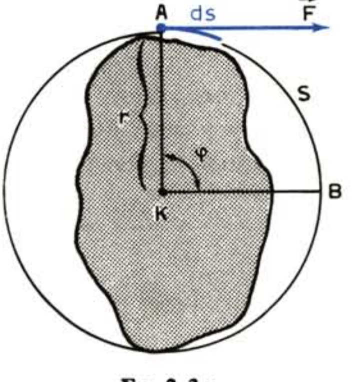
$$\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dt}} = \Theta\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} = \Theta\,\alpha \qquad (4)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (4) προκύπτει:

$$\boxed{M = \frac{dG}{dt}} \qquad (5)$$

Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση αὐτή, **ἡ ροπή δυνάμεων προκαλεῖ μεταβολή τῆς στροφορμῆς περιστρεφόμενου σώματος καί ἰσοῦται μέ τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς.**

δ) **Ἔργο ροπῆς.** Στό σχῆμα 2 · 3 γ δύναμη $\vec{F}$ στρέφει ἕνα σῶμα γύρω ἀπό τόν ἄξονα Κ. Τό σημεῖο ἐφαρ-



Σχ. 2·3 γ.
Ὁ ἄξονας Κ εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος.

μογῆς τῆς δυνάμεως διαγράφει περιφέρεια κύκλου (K, r).

Ἂν ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἐφάπτεται σ' αὐτόν τόν κύκλο καί ἔχει σταθερό μέτρο, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό ἔργο της ὅταν γραφεῖ ἕνα τόξο s.

Χωρίζουμε τήν περιφέρεια σέ στοιχειώδη τόξα ds. Τό ἔργο σέ μιά στοιχειώδη μετακίνηση ds θά εἶναι: dA = F ds. Τό ὁλικό ἔργο θά εἶναι $A = \Sigma dA = \Sigma F ds$.

Ἐπειδή ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει σταθερό μέτρο, εἶναι κοινός παράγοντας στό ἄθροισμα καί συνεπῶς $A = F\Sigma ds$.

Ἀλλά Σds = μῆκος τόξου = s = φ r

ἑπομένως $$A = \varphi F r \qquad (1)$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ ροπή M τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα K εἶναι M = F r, ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$\boxed{A = M\varphi} \qquad (2)$$

Ἑπομένως, **ροπή $\vec{M}$ πού στρέφει σῶμα κατά γωνία φ, παράγει ἔργο πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση (2).**

ε) **Ἰσχύς ροπῆς.** Πολλές φορές ἐξασκοῦμε ροπές σέ περιστρεφόμενα σώματα, γιά νά διατηρήσουμε σταθερή τή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τους. **Οἱ ροπές αὐτές ἐξουδετερώνουν τότε τίς παθητικές ἀντιστάσεις** (τριβές κυρίως), οἱ ὁποῖες στήν περιστροφική κίνηση, εἶναι ροπές ἀντίθετες πρός τήν κίνηση καί οἱ ὁποῖες μετά ὁρισμένο χρόνο θά ἀκινητοῦσαν τό σῶμα.

Ἔστω λοιπόν ὅτι δύναμη $\vec{F}$ ἐξασκεῖ ροπή $\vec{M}$ στό σῶμα τοῦ σχήματος 2·3 δ καί αὐτό περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

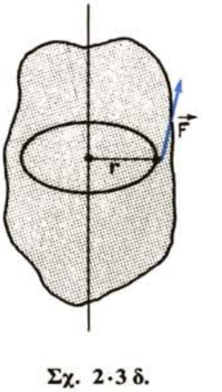
Πόση εἶναι ἡ παραγόμενη ἰσχύς ἀπό τή ροπή $\vec{M}$;

Διαιροῦμε τή σχέση A = M φ (A = ἔργο, M = ροπή καί φ = γωνία) διά τοῦ χρόνου t, πού πέρασε γιά νά διαγραφεῖ ἡ γωνία φ:

$$\frac{A}{t} = M\,\frac{\varphi}{t} \qquad (1)$$

Ἀλλά $\frac{A}{t}$ = ἰσχύς = N καί $\frac{\varphi}{t}$ = γωνιακή ταχύτητα = ω. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$\boxed{N = M\omega} \qquad (2)$$



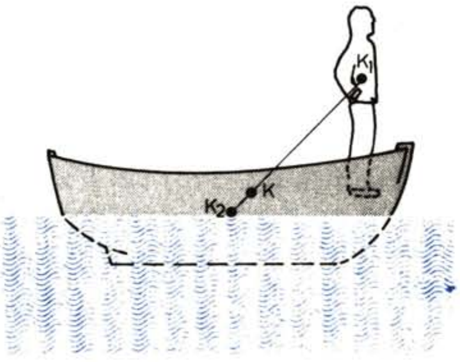
Σχ. 2·3 δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ἄν δύο ἤ περισσότερα σώματα ἐξετάζονται σάν ἕνα σύνολο, τότε πρόκειται γιά ἕνα **σύστημα σωμάτων** καί ἡ μελέτη τῶν δυνάμεων καί τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων αὐτῶν ἀποτελεῖ τό ἀντικείμενο τῆς μηχανικῆς τῶν συστημάτων. Συστήματα σωμάτων ἔχουμε πάρα πολλά. Σάν παράδειγμα ἀναφέρουμε τήν περίπτωση ἑνός ἀνθρώπου πού κινεῖται μέσα σέ μιά βάρκα, ἐλεύθερη μέσα στή θάλασσα (σχ. 3 · α). Ὁ ἄνθρωπος εἶναι τό ἕνα σῶμα καί ἡ βάρκα τό ἄλλο.

Ἀναφέρουμε καί ἄλλα συστήματα: Ὁ ἥλιος καί οἱ πλανῆτες, τό ἀεροπλάνο καί οἱ ἐπιβάτες του, δυό σφαῖρες πού συνδέονται μέ ἕνα ἐλατήριο κ.ἄ.

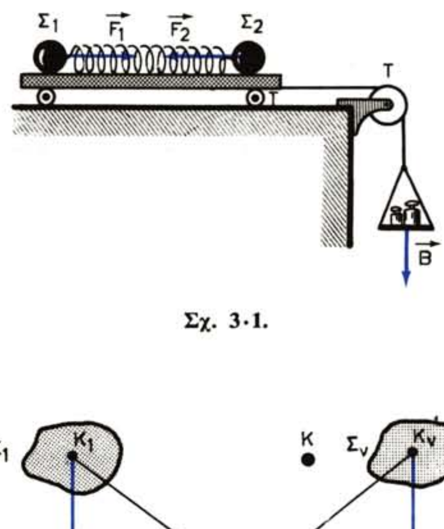


Σχ. 3 α.

3 · 1 ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 βρίσκονται πάνω σὲ ὄχημα καί συνδέονται μέ ἕνα ἐλατήριο (σχ. 3 · 1).

Ἄν τό ἐλατήριο εἶναι τεντωμένο, οἱ σφαῖρες ἕλκονται μεταξύ τους μέ δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ ἴσες κατά μέτρο καί ἀντίθετες κατά φορά (δυνάμεις δράσεως καί ἀντιδράσεως). Οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι **ἐσωτερικές δυνάμεις** γιά τό σύστημα τῶν σωμάτων σφαῖρες - ὄχημα. Ἀντίθετα ἡ δύναμη $\vec{B}$ πού ἐξασκεῖται στό σύστημα μέ τή βοήθεια τῆς τροχαλίας Τ, εἶναι **ἐξωτερική δύναμη.**



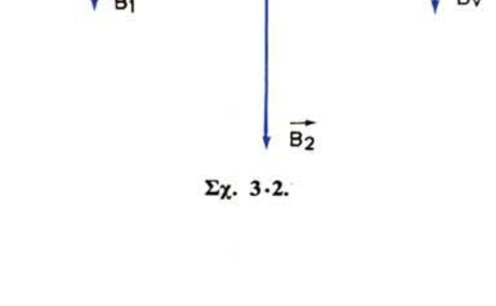
Σχ. 3·1.

Ἑπομένως, **ἐσωτερικές δυνάμεις εἶναι αὐτές πού ἐξασκοῦνται μεταξύ τῶν σωμάτων πού συμμετέχουν στό σύστημα, ἐνῶ ἐξωτερικές εἶναι οἱ δυνάμεις πού ἐξασκοῦνται στό σύστημα, ἀλλά προέρχονται ἀπό σώματα πού βρίσκονται ἔξω ἀπ' αὐτό.**

3 · 2 ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στό σχῆμα 3 · α τό κέντρο βάρους τοῦ ἀνθρώπου εἶναι τό K_1 καί τῆς βάρκας τό K_2. Τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος εἶναι τό Κ.

Ἔστω ὅτι σώματα Σ_1, $\Sigma_2 \ldots \Sigma \nu$ ἀποτελοῦν σύστημα σωμάτων καί ὅτι τά ἀντίστοιχα κέντρα βάρους τους εἶναι τά K_1, $K_2 \ldots K\nu$ (σχ. 3 · 2). Τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος καθορίζεται, ἄν βροῦμε τό

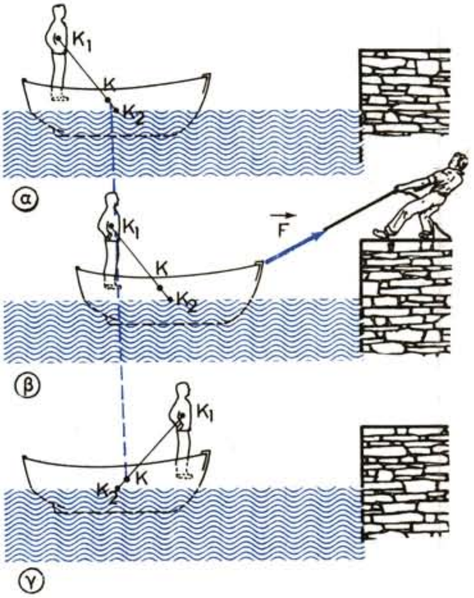


Σχ. 3·2.

σημεῖο ἐφαρμογῆς K τῆς συνισταμένης τῶν βαρῶν $\vec{B}_1, \vec{B}_2 \ldots \vec{B}_\nu$.

3 . 3 ΚΙΝΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Στό σχῆμα 3 . 3 (α) ὁ ἄνθρωπος καί ἡ βάρκα παραμένουν ἀκίνητοι. Κάθε προσπάθεια τοῦ ἀνθρώπου νά κινήσει τή βάρκα, ἐξασκώντας ὁποιαδήποτε ἐσωτερική δύναμη, εἶναι μάταιη.



Σχ. 3.3.

Στό σχῆμα 3 . 3 (β) μιά ἐξωτερική δύναμη $\vec{F}$ ἐξασκεῖται στή βάρκα ἀπό τήν ἀποβάθρα μέ τή βοήθεια ἑνός σχοινιοῦ. Τό κέντρο βάρους K τῆς βάρκας ἐπιταχύνεται.

Στό σχῆμα 3 . 3 (γ) ὁ ἄνθρωπος μετακινεῖται μέσα στή βάρκα, ἀλλάζοντας ἔτσι θέση στό κέντρο βάρους του K_1. Παρατηροῦμε τότε ὅτι τό κέντρο βάρους τῆς βάρκας K_2 μετακινεῖται πρός τήν ἀντίθετη κατεύθυνση. Ὅμως τό κέντρο βάρους K τοῦ συστήματος παραμένει σέ σταθερή θέση.

Γιά νά ἐξηγήσουμε τίς παραπάνω παρατηρήσεις πρέπει νά σκεφτοῦμε πώς τό κέντρο βάρους K δέν ἐπιταχύνεται οὔτε στήν περίπτωση α οὔτε στήν περίπτωση γ, γιατί καί στίς δυό αὐτές περιπτώσεις ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν. Ἀντίθετα στήν περίπτωση β ἔχουμε ἐπιτάχυνση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος. Ἰσχύει ἐδῶ ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς Δυναμικῆς:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

ὅπου: $\vec{F}$ εἶναι ἡ ἐξωτερική δύναμη, $\vec{\gamma}$ ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος καί m ἡ ὁλική μάζα του.

Μποροῦμε ἑπομένως γιά ἕνα σύστημα σωμάτων νά διατυπώσουμε τήν πρόταση (Θεώρημα κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους):

Ἄν ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, πού ἐξασκοῦνται σέ ἕνα σύστημα, εἶναι μηδέν, τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος ἰσορροπεῖ (ἀκινητεῖ ἤ κινεῖται ἰσοταχῶς).

Ἰδιαίτερα σημειώνουμε ἐδῶ τήν περίπτωση τοῦ σχήματος 3 . 3 (γ), πού ἐνῶ μετακινήθηκαν τά κέντρα βάρους τοῦ ἀνθρώπου καί τῆς βάρκας, τό κέντρο βά-

-ρους τοῦ συστήματος διατηρήθηκε σταθερό, γιατί καμιά ἐξωτερική δύναμη δέν ἐξασκήθηκε στό σύστημα. Δηλαδή, σέ ἕνα σύστημα σωμάτων **ἀπομονωμένο** μποροῦμε νά παρατηρήσουμε κινήσεις ἰσοταχεῖς ἤ καί ἐπιτάχυνση τῶν σωμάτων πού συνθέτουν τό σύστημα, ὅμως τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος ἰσορροπεῖ.

Σημείωση: Τό σύστημα σωμάτων, στό ὁποῖο ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν, ὀνομάζεται **ἀποκλεισμένο** ἤ **ἀπομονωμένο σύστημα.**

3·4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἄν ἕνα σύστημα σωμάτων εἶναι ἀπομονωμένο, ἡ ὁρμή τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος παραμένει σταθερή.

Αὐτό δικαιολογεῖται ἀπό τό γεγονός ὅτι γιά τό κέντρο βάρους ἰσχύει:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{j}}{dt}$$

ὅπου: $d\vec{j}$ εἶναι ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς τοῦ κέντρου βάρους καί $\vec{F}$ ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων πού ἐξασκοῦνται στό σύστημα.

Ἀφοῦ τό σύστημα εἶναι ἀπομονωμένο, θά ἔχουμε:

$$\vec{F} = 0 \quad \textit{καί} \quad d\vec{j} = 0 \quad \textit{ἤ} \quad \vec{j} = \textit{σταθερό}.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν ἔχουμε ἕνα σύστημα σωμάτων Σ_1, $\Sigma_2 \cdots \Sigma_\nu$, τά ὁποῖα ἔχουν ὁρμές:

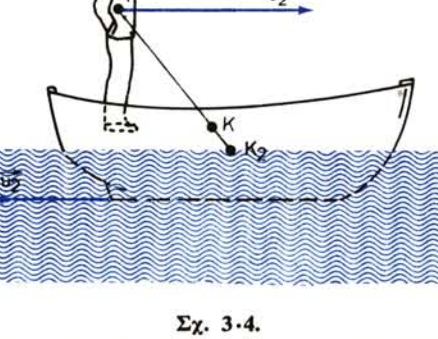
$$\vec{j_1} = m_1 \vec{\upsilon_1}, \vec{j_2} = m_2 \vec{\upsilon_2} \cdots \vec{j_\nu} = m_\nu \vec{\upsilon_\nu} \quad \text{καί:}$$

$\vec{j} = (m_1 + m_2 + \cdots m_\nu)\ \upsilon$ εἶναι ἡ ὁρμή τοῦ κέντρου βάρους, τότε ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\vec{j} = \vec{j_1} + \vec{j_2} + \cdots \vec{j_\nu}$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ὅτι δυό σώματα, π.χ. ἡ βάρκα καί ὁ ἄνθρωπος, πού ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα σωμάτων, ἀκινητοῦν (σχ. 3·4).

Τό κέντρο βάρους τους Κ ἐπίσης ἀκινητεῖ. Ἄν ὅμως ὁ ἄνθρωπος ἀρχίσει νά μετακινεῖται, ἔστω ἰσοταχῶς μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon_1}$, τότε θά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ βάρκα ἀρχίζει νά μετακινεῖται πρός τήν ἀντίθετη φορά, μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon_2}$.



Σχ. 3·4.
Τό κέντρο βάρους Κ παραμένει ἀκίνητο στό χῶρο, ὅποιες κινήσεις κι ἄν κάνει ὁ ἐπιβάτης μέσα στή βάρκα.

Γιά νά δικαιολογήσουμε τό φαινόμενο αὐτό, πρέπει νά σκεφτοῦμε ὅτι τό σύστημα ἄνθρωπος - βάρκα εἶναι ἕνα **ἀπομονωμένο σύστημα** καί ἑπομένως ἡ ὁρμή τοῦ κέντρου βάρους παραμένει σταθερή. Ἐπειδή τό κέντρο βάρους ἦταν ἀκίνητο στήν ἀρχή, θά παραμείνει ἀκίνητο καί ὅταν ὁ ἄνθρωπος ἀρχίζει νά μετατοπίζεται. Ἐπίσης θυμίζουμε τήν πρόταση πού ἀναφέραμε παραπάνω, ὅτι δηλαδή ἡ ὁρμή τοῦ κέντρου βάρους εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τῶν σωμάτων, πού ἀποτελοῦν τό σύστημα. Ἐδῶ τό σύστημά μας τό ἀποτελοῦν ὁ ἄνθρωπος καί ἡ βάρκα. Ἑπομένως:

Ἀρχική ὁρμή κέντρου βάρους συστήματος = τελική ὁρμή Κ.Β. συστήματος ἤ

ἀρχική ὁρμή ἀνθρώπου + ἀρχική ὁρμή βάρκας = τελική ὁρμή ἀνθρώπου + τελική ὁρμή βάρκας

ἤ $$0 + 0 = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}$$

Ἄν γνωρίζουμε τήν ταχύτητα τοῦ ἀνθρώπου, ὑπολογίζουμε τήν ταχύτητα τῆς βάρκας:

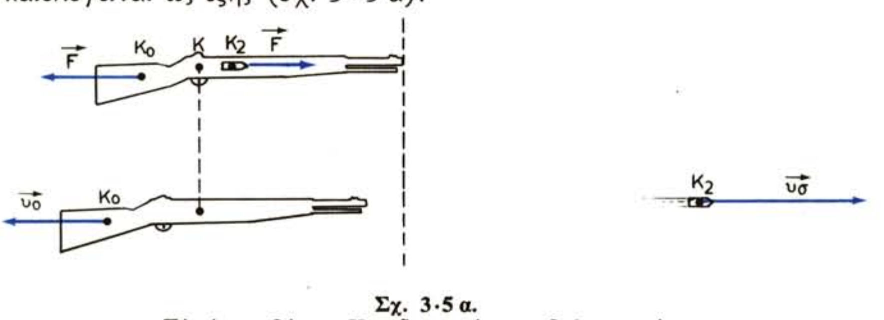
$$\boxed{\vec{v_2} = -\frac{m_1}{m^2}\vec{v_1}}$$

Τό σημεῖο (–) προκύπτει, γιατί οἱ δύο ταχύτητες ἔχουν ἀντίθετη φορά.

3 · 5 ΑΝΑΚΡΟΥΣΗ

Ὅσα εἴπαμε παραπάνω δικαιολογοῦν τό φαινόμενο τῆς ἀνακρούσεως τῶν ὅπλων.

Εἶναι σέ ὅλους μας γνωστό ὅτι, ὅταν πυροβολοῦμε, τό ὅπλο μᾶς σπρώχνει πρός τά πίσω. Ἐπίσης τό πυροβόλο ὀπισθοχωρεῖ, ὅταν ἐκτοξεύεται ἡ ὀβίδα. Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **ἀνάκρουση** καί δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς (σχ. 3 · 5 α):



Σχ. 3·5 α.
Τό κέντρο βάρους **K** τοῦ συστήματος ὅπλο - σφαίρα παραμένει ἀκίνητο στό χῶρο.

Ἡ σφαίρα καί τό ὅπλο ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα σωμάτων.

Ἀρχικά σφαίρα καί ὅπλο ἀκινητοῦν. Ὅταν ὅμως γίνεται πυροδότηση, ἡ πίεση τῶν ἀερίων τῆς ἐκρηκτικῆς ὕλης πού βρίσκεται στό φυσίγγι, ἐξασκεῖ **ἐσωτερικές** δυνάμεις στή σφαίρα, ἀλλά καί στό ὅπλο. Ἀποτέλεσμα τῶν δυνάμεων αὐτῶν εἶναι ἡ σφαίρα νά ἐπιταχύνεται πρός τά ἐμπρός καί τελικά νά ἀποκτᾶ ταχύτητα $\vec{\upsilon_\sigma}$, ἐνῶ τό ὅπλο ἐπιταχύνεται (ἄν δέν ἔχει στήριγμα) πρός τά πίσω καί ἀποκτᾶ ταχύτητα $\vec{\upsilon_o}$. Ἐπειδή ὅμως στό ὅπλο ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν (ἀπομονωμένο σύστημα) γιά τήν ὁρμή, ἰσχύει:

Ὁρμή σφαίρας + ὁρμή ὅπλου = ὁρμή σφαίρας + ὁρμή ὅπλου

(Πρίν ἀπό τήν πυροδότηση) (Μετά τήν πυροδότηση)

$$0 + 0 = m_\sigma \vec{\upsilon_\sigma} + m_o \vec{\upsilon_o} \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\vec{\upsilon_o} = -\frac{m_\sigma \vec{\upsilon_\sigma}}{m_o}}$$

—**Ἀριθμητική ἐφαρμογή.** Ἄν τό ὅπλο ἔχει μάζα $m_o = 5$ kg, ἡ σφαίρα $m_\sigma = 0,1$ kg καί ἀποκτᾶ ταχύτητα 1200 m/s, μέ ποιά ταχύτητα τινάζεται πρός τά πίσω τό ὅπλο κατά τήν πυροδότηση;

Λύση:

Στόν τύπο $\upsilon_o = -\frac{m_\sigma}{m} \cdot \upsilon_\sigma$ ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές ὁπότε:

$$\upsilon_o = -\frac{0,1 \text{ kg}}{5 \text{ kg}} \cdot 1200 \text{ m/s} = -24 \text{ m/s}.$$

Ἀπάντηση: Τό ὅπλο θά ἀποκτήσει ταχύτητα 24 m/s.

— **Κίνηση πυραύλων.** Ὅταν ὁ Ἰούλιος Βέρν σέ μυθιστόρημά του ὁραματίστηκε τό ταξίδι ἀνθρώπων στό φεγγάρι, εἶχε νά λύσει ἕνα τεχνικό πρόβλημα. Πῶς θά ἦταν δυνατό νά προωθήσει τό διαστημόπλοιό του μέσα στό κενό. Ἡ μόνη λύση ἦταν νά τό στείλει ἐκτοξεύοντάς το μέ κανόνι.

Ἡ σκέψη, ὅτι γιά τήν ἐπιτάχυνση τῶν σωμάτων χρειάζεται ἐξωτερική δύναμη καί ὅτι τή δύναμη αὐτή τήν ἐξασκεῖ κάποιο ἄλλο σῶμα, ὁδηγοῦσε σέ ἀδιέξοδο, στήν περίπτωση τῆς κινήσεως στό κενό πού δέν ὑπάρχει ὕλη.

Οἱ πύραυλοι ἔλυσαν τό πρόβλημα αὐτό.

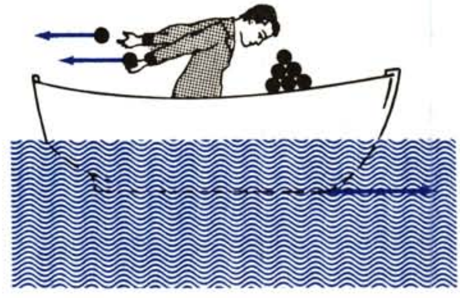
Ἡ λειτουργία τους στηρίζεται στό θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς σέ ἕνα ἀπομονωμένο σύστημα σωμάτων.

Γιά τήν κατανόηση τοῦ τρόπου λειτουργίας τῶν πυραύλων ἄς σκεφτοῦμε τό ἑξῆς πείραμα: Πάνω σέ μιά βάρκα (σχ. 3·5 β) βρίσκεται ἕνας ἄνθρωπος καί ἔχει μπροστά του πολλές βαρειές σφαῖρες. Τό σύστημα βάρκα - ἄνθρωπος - σφαῖρες εἶναι ἀκίνητο. Ἄν ὁ ἄνθρωπος ἀρχίσει νά πετᾶ τίς σφαῖρες πρός τά πίσω, ὁ ἴδιος καί ἡ βάρκα ἐπιταχύνονται πρός τά ἐμπρός.

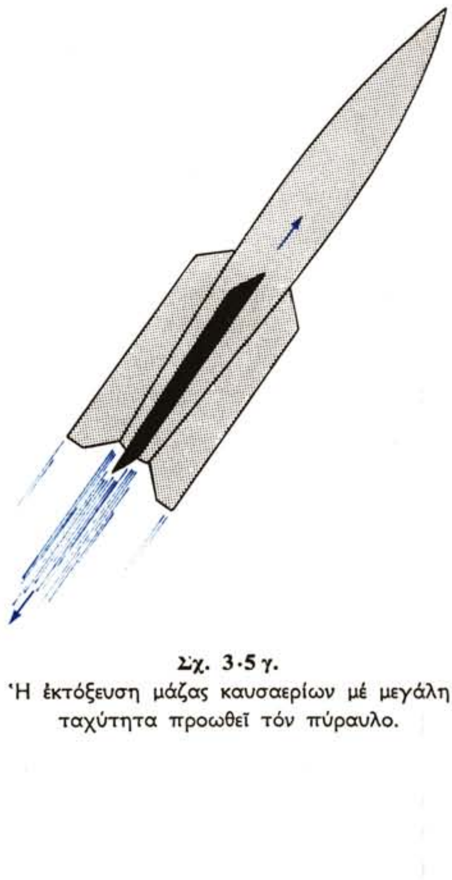
Ἔτσι καί οἱ πύραυλοι προωθοῦνται πρός μιά κατεύθυνση ἐκτινάσσοντας μέ μεγάλη ταχύτητα ἀέρια πρός τήν ἀντίθετη κατεύθυνση (σχ. 3·5 γ).

Τά ἀέρια αὐτά προέρχονται ἀπό τήν καύση κατάλληλης καύσιμης ὕλης, ὅπως π.χ. ὑγροῦ ὑδρογόνου. Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι, ἐπειδή οἱ πύραυλοι προορίζονται νά κινοῦνται σέ χώρους, πού δέν ὑπάρχει ἀτμόσφαιρα, τό ὀξυγόνο εἶναι ἀπαραίτητο νά συνυπάρχει μέ τήν καύσιμη ὕλη.

Στήν ἴδια ἀρχή στηρίζεται καί ἡ προώθηση τῶν ἀεριωθουμένων ἀεροπλάνων. Ἡ μόνη διαφορά εἶναι ὅτι τό ὀξυγόνο παραλαμβάνεται ἀπό τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα καί δέν ὑπάρχει μέσα στούς κινητῆρες τῶν ἀεριωθουμένων ἀεροπλάνων.



Σχ. 3·5 β.
Ὁ ἄνθρωπος πετᾶ τίς σφαῖρες πρός τά πίσω καί ἔτσι ὁ ἴδιος καί ἡ βάρκα ἐπιταχύνεται πρός τά μπρός.



Σχ. 3·5 γ.
Ἡ ἐκτόξευση μάζας καυσαερίων μέ μεγάλη ταχύτητα προωθεῖ τόν πύραυλο.

3·6 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ – ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

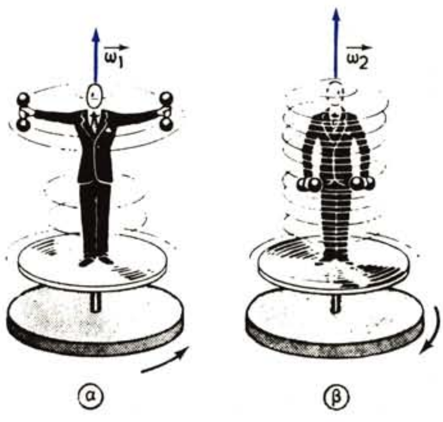
Τά σχήματα 3·6 α καί 3·6 β δείχνουν δύο πειράματα, ὅπου ἕνας ἄνθρωπος βρίσκεται πάνω σ'ἕνα δίσκο, καί ἔτσι μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ἕνα κατακόρυφο ἄξονα μέ μειωμένες τριβές.

Ἄς ἐξετάσουμε τό πρῶτο πείραμα:

Περιστρέφουμε τό δίσκο καί ἔτσι ἀναγκάζουμε τόν ἄνθρωπο στό σχῆμα 3·6 β α (α) νά περιστρέφεται μέκάποια μικρή γωνιακή ταχύτητα, ἔστω $\vec{\omega_1}$. Ὅπως φαίνεται ἀπό τό σχῆμα, ὁ ἄνθρωπος κρατᾶ δυό ἀλτῆρες καί ἔχει τά χέρια του τεντωμένα.

Ἐπειδή ἡ μάζα τῶν ἀλτήρων εἶναι σημαντική καί ἐπειδή μέ τεντωμένα τά χέρια ἔχουμε μεγάλες ἀποστάσεις τῶν μαζῶν ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ ἀνθρώπου, ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ συστήματος ἄνθρωπος-ἀλτῆρες εἶναι μεγάλη.

Στή συνέχεια ὁ ἄνθρωπος [σχ. 3 · 6 α (β)] πλησιάζει τίς μάζες τῶν ἀλτήρων πρός τό σῶμα του. Παρατηροῦμε, τότε, ὅτι ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς αὐξάνει σημαντικά.



Σχ. 3·6 α.

Ἡ ἐξήγηση τοῦ πειράματος εἶναι ἡ ἑξῆς: Ὁ ἄνθρωπος περιστρέφεται στό σχῆμα 3 · 6 α (α) μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega_1}$, γιατί δέν ὑπάρχει **ἐξωτερική ροπή** στό σύστημα ἄνθρωπος - ἀλτῆρες.

Ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$M = \frac{dG}{dt}$$

καί ἐπειδή $M = 0$, συνεπάγεται ὅτι $dG = 0$ καί $G = \omega_1 \Theta =$ σταθερό.

Δηλαδή, **ἡ στροφορμή τοῦ συστήματος παραμένει σταθερή, ὅταν ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, πού ἐνεργοῦν στό σύστημα, εἶναι μηδέν.** Αὐτή ἡ πρόταση εἶναι **τό θεώρημα τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς** γιά ἕνα σῶμα ἤ γιά ἕνα σύστημα σωμάτων, πού περιστρέφεται γύρω ἀπό ἕνα ἄξονα.

Σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα ἡ **στροφορμή** $\vec{G_1} = \Theta_1 \vec{\omega_1}$ στή θέση (α) (σχ. 3 · 6 β) καί ἡ **στροφορμή** $\vec{G_2} = \Theta_2 \vec{\omega_2}$ στή θέση (β) (σχ. 3 · 6 β) εἶναι **ἴσες.**

Ἀπό αὐτό προκύπτει ὅτι:

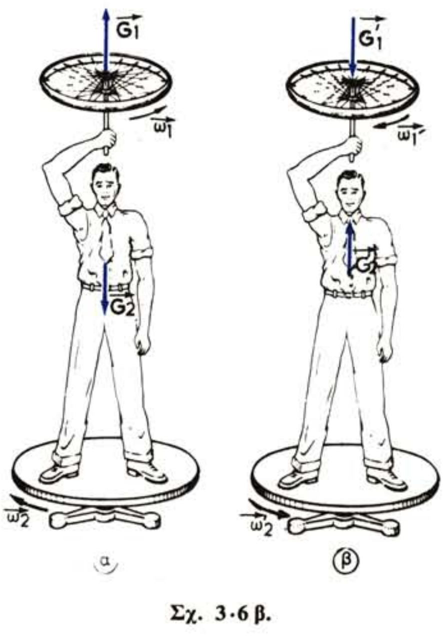
$$\Theta_1 \vec{\omega_1} = \Theta_2 \vec{\omega_2}$$

ἤ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$$

Δηλαδή, **οἱ γωνιακές ταχύτητες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρός τίς ροπές ἀδρανείας.**

Στό σχῆμα 3 · 6 α (α) ἡ ροπή ἀδρανείας εἶναι μεγάλη ἐνῶ στό σχῆμα 3 · 6 α (β) εἶναι μικρή. Ἑπομένως ἡ γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega_2}$ θά εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega_1}$. Ἔτσι ἐξηγεῖται πλήρως τό πείραμα τοῦ σχήματος 3 · 6 α.



Σχ. 3·6 β.

Στό σχῆμα 3 · 6 β ὁ ἄνθρωπος εἶναι τοποθετημένος πάλι στόν ἴδιο δίσκο, ὅπως καί στό προηγούμενο πείραμα, κρατᾶ ὅμως στό ἕνα του χέρι κατακόρυφα ἕναν ἄξονα, γύρω ἀπό τόν ὁποῖο μπορεῖ νά περιστραφεῖ μιά ρόδα ποδηλάτου. Στήν ἀρχή τό ὅλο σύστημα ἀκινητεῖ. Ἄν στρέψει ὁ ἄνθρωπος τή ρόδα τοῦ ποδηλάτου μέ κάποια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega_1}$ τότε τό σύστημα ἄνθρωπος - ρόδα - δίσκος, στρέφεται πρός τήν ἀντίθετη κατεύθυνση μέ γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega_2}$.

Αὐξάνοντας τή γωνιακή ταχύτητα ω_1 αὐξάνει καί ἡ $\vec{\omega_2}$. Ἄν σταματήσει ὁ ἄνθρωπος τόν τροχό, σταματᾶ καί ὁ ἴδιος νά περιστρέφεται.

Ἡ ἐξήγηση τοῦ φαινομένου αὐτοῦ στηρίζεται ἀκριβῶς στό θεώρημα διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς.

Συγκεκριμένα, τό σύστημα ἄνθρωπος - δίσκος - ρόδα εἶναι ἀπομονωμένο ἀπό ἐξωτερικές ροπές. Ἑπομένως ἡ στροφορμή του παραμένει σταθερή.

Ἀρχική στροφορμή = Τελική στροφορμή.

Ἀρχικά τό σύστημα ἦταν ἀκίνητο, ἑπομένως ἡ στροφορμή τοῦ συνόλου ἦταν **μηδέν**. Ὅταν ὁ ἄνθρωπος ἄρχισε νά στρέφει τή ρόδα, αὐτή ἀπόκτησε μιά στροφορμή $\vec{G_1} = \Theta_1 \vec{\omega_1}$, ὅπου Θ_1 ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς ρόδας ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς της. Ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς περιστροφῆς τῆς ρόδας ἦταν νά στραφεῖ τό σύστημα ὁλόκληρο γύρω ἀπό τό δίσκο πρός τήν ἀντίθετη κατεύθυνση καί νά ἀποκτήσει στροφορμή $\vec{G_2} = \Theta_2 \vec{\omega_2}$, ὅπου Θ_2 ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ συστήματος ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ δίσκου.

Ἡ τελική ἑπομένως στροφορμή τοῦ συστήματος θά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν δυό στροφορμῶν, ἤτοι:

$$0 = \vec{G_1} + \vec{G_2} \Rightarrow \vec{G_1} = -\vec{G_2}$$

$$\text{ἤ} \quad 0 = \Theta_1 \vec{\omega_1} + \Theta_2 \vec{\omega_2} \qquad (1)$$

Λύνοντας τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός ω_2 βρίσκομε:

$$\boxed{\vec{\omega_2} = -\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\vec{\omega_1}} \qquad (2)$$

Τό σημεῖο (—) σημαίνει ὅτι οἱ γωνιακές ταχύτητες

ΠΙΝΑΚΑΣ 3·6·1
ΜΕΓΕΘΗ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Μεταφορική κίνηση		Περιστροφική κίνηση	
Μέγεθος	Συμβ.	Μέγεθ.	Συμβ.
Μῆκος	s	Γωνία	φ
Ταχύτητα	υ	Γωνιακή ταχύτητα	ω
Ἐπιτάχυνση	γ	Γωνιακή ἐπιτάχυνση	α
Μάζα	m	Ροπή ἀδρανείας	Θ
Ὁρμή	J	Στροφορμή	G
Δύναμη	F	Ροπή	M

Μεταφορική κίνηση		Περιστροφική κίνηση
	$s = \varphi R$	
	$\upsilon = \omega R$	
$\upsilon = \frac{ds}{dt}$		$\omega = \frac{df}{dt}$
$\gamma = \frac{d\upsilon}{dt}$		$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
$F = m\gamma$		$M = \Theta\alpha$
$F = \frac{dj}{dt}$		$M = \frac{dG}{dt}$
$J = m\upsilon$		$G = \Theta\omega$
$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m \upsilon^2$		$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$
$A = FS$		$A = M\varphi$
$N = F\upsilon$		$N = M\omega$

εἶναι ἀντίθετα διανύσματα καί ἑπομένως ἔχουν ἀντίθετη φορά. Τό ἴδιο ἄλλωστε συμβαίνει καί μέ τίς στροφορμές $\vec{G_1}$ καί $\vec{G_2}$ πού ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 3·6 β ἔχουν ἀντίθετη φορά.

Ἐπίσης ἀπό τήν ἐξίσωση (2) συνάγεται ὅτι, ὅταν αὐξηθεῖ ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῆς ρόδας ω_1 ἤ μηδενισθεῖ, αὐξάνεται ἤ μηδενίζεται ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ συστήματος, $\vec{\omega_2}$.

3·7 ΚΡΟΥΣΗ

Γενικά. Ἄν δυό κινούμενα σώματα συναντηθοῦν, ἐξασκοῦν ἀμοιβαῖα δυνάμεις, οἱ ὁποῖες ἔχουν σάν ἀποτέλεσμα νά μεταβληθοῦν οἱ ταχύτητές τους.

Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **κρούση.**

Γιά τήν κατανόηση τῆς κρούσεως θά δώσουμε μερικούς ὁρισμούς:

1) **Γραμμή κρούσεως** ὀνομάζουμε τήν εὐθεία, ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στήν κοινή ἐφαπτομένη ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων, πού ἔρχονται σέ ἐπαφή κατά τήν κρούση.

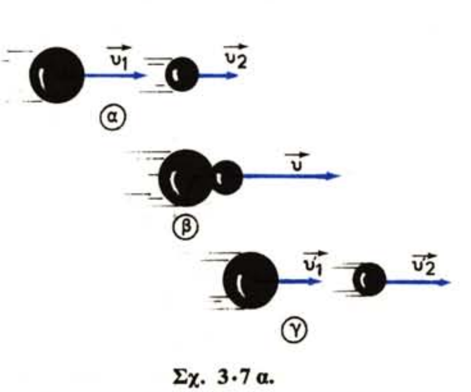
2) Μιά κρούση λέγεται **εὐθεία,** ὅταν οἱ ταχύτητες πρίν ἀπό αὐτήν εἶναι παράλληλες πρός τή γραμμή κρούσεως. Ἄν δέν εἶναι παράλληλες, λέγεται **πλάγια κρούση.**

3) Μιά κρούση λέγεται **κεντρική,** ὅταν ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά κέντρα βάρους τῶν σωμάτων, συμπίπτει μέ τή γραμμή κρούσεως.

Στό βιβλίο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν **εὐθεία κεντρική κρούση.**

α) **Κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν.** Ἔστω δύο σφαῖρες, οἱ ὁποῖες κινοῦνται μέ ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ (σχ. 3·7 α). Στή θέση β οἱ δύο σφαῖρες συγκρούονται κεντρικά, παραμορφώνονται καί ἀποκτοῦν κοινή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Ἄν ἡ παραμόρφωση τῶν σωμάτων πού εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς κρούσεως παραμείνει, τότε ἡ κρούση αὐτή ὀνομάζεται **πλαστική.** Στήν περίπτωση αὐτή, μέρος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῶν σωμάτων μετατρέπεται σέ θερμότητα, ἐνῶ καί τά δύο σώματα θά κινοῦνται μέ τήν ἴδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ἄν ὅμως ἡ παραμόρφωση εἶναι προσωρινή, τότε ἀναπτύσσονται ἐλα-



Σχ. 3·7 α.
α) Πρίν ἀπό τήν κρούση. β) Κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως. γ) Μετά τήν κρούση.

στικές τάσεις, οἱ σφαῖρες ἐπιταχύνονται καί ἀποκτοῦν τελικά ταχύτητες υ'_1 καί υ'_2 διαφορετικές ἀπό τίς ἀρχικές ταχύτητες υ_1 καί υ_2. Λέμε τότε ὅτι ἡ κρούση δέν εἶναι πλαστική, καί διακρίνουμε τώρα δύο ὑποπεριπτώσεις:

— Κρούση, πού σέ ὅλη τή διάρκειά της δέν ἔχουμε ἀπώλεια κινητικῆς ἐνεργείας. Αὐτή ὀνομάζεται **ἐλαστική κρούση.**

— Κρούση, πού στή διάρκειά της ἔχουμε ἀπώλεια ποσοστοῦ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, ἀλλά ὁπωσδήποτε διαχωρίζονται οἱ σφαῖρες μετά ἀπό αὐτήν. Αὐτή ὀνομάζεται **ἡμιελαστική κρούση.**

β) **Ἐλαστική κρούση.** Ἔστω δυό σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 [σχ. 3 · 7 α (α)], οἱ ὁποῖες ἔχουν ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$.

Μετά τήν κεντρική ἐλαστική κρούση θά ἀποκτήσουν ταχύτητες $\vec{\upsilon'_1}$ καί $\vec{\upsilon'_2}$ [σχ. 3 · 7 α (γ)].

Ἄν m_1 καί m_2 εἶναι οἱ μάζες τους καί εἶναι γνωστές οἱ ἀρχικές τους ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε τίς ταχύτητες $\vec{\upsilon'_1}$ καί $\vec{\upsilon'_2}$ μέ τούς ἑξῆς συλλογισμούς:

1) **Διατήρηση ἐνέργειας.** Ἀφοῦ ἡ κρούση εἶναι ἐλαστική, θά ἰσχύει:

Κινητική ἐνέργεια πρίν ἀπό τήν κρούση = Κινητική ἐνέργεια μετά ἀπό τήν κρούση.

$$\frac{1}{2} m_1 \upsilon^2{}_1 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2{}_2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon'^2{}_1 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon'^2{}_2 \quad (1)$$

2) **Διατήρηση τῆς ὁρμῆς.** Οἱ δυό σφαῖρες ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα σωμάτων ἀπομονωμένων ἀπό ἐξωτερικές δυνάμεις, ἑπομένως:

Ὁρμή πρίν ἀπό τήν κρούση = Ὁρμή μετά τήν κρούση

$$m_1 \vec{\upsilon_1} + m_2 \vec{\upsilon_2} = m_1 \vec{\upsilon'_1} + m_2 \vec{\upsilon'_2} \quad (2)$$

Οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon'_1}$ καί $\vec{\upsilon'_2}$ σάν διανύσματα, ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση μέ τίς υ_1 καί υ_2, γιατί ἡ κρούση εἶναι κεντρική καί εὐθεία. Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ ἐλαστικὲς δυνάμεις κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως συμπίπτουν κατά διεύθυνση μέ τά διανύσματα τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ καί ἑπομένως ἐπιδροῦν μόνο στό μέτρο καί στή φορά τῶν ταχυτήτων, ὄχι ὅμως καί στή διεύθυνσή τους.

Γιά τόν παραπάνω λόγο μποροῦμε νά γράψουμε τήν ἐξίσωση (2) σάν ἀλγεβρική καί ὄχι διανυσματική ἐξίσωση:

$$m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = m_1 \upsilon'_1 + m_2 \upsilon'_2 \qquad (3)$$

Οἱ ἐξισώσεις (1) καί (3) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα μέ ἄγνωστους τά υ'_1 καί υ'_2.

Λύνοντας τό σύστημα προσδιορίζουμε τίς δύο ταχύτητες μετά τήν κρούση.

— **Εἰδικές περιπτώσεις.**

1) **Δυό σφαῖρες ἔχουν ἴσες μάζες ($m_1 = m_2 = m$) καί ταχύτητες υ_1 καί υ_2. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ταχύτητες μετά τήν ἐλαστική κρούση τους.** Οἱ ἐξισώσεις (1) καί (3) μετατρέπονται στίς:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ \upsilon'^2_1 + \upsilon'^2_2 = \upsilon^2_1 + \upsilon^2_2 \\ &\beta)\ \upsilon'_1 + \upsilon'_2 = \upsilon_1 + \upsilon_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

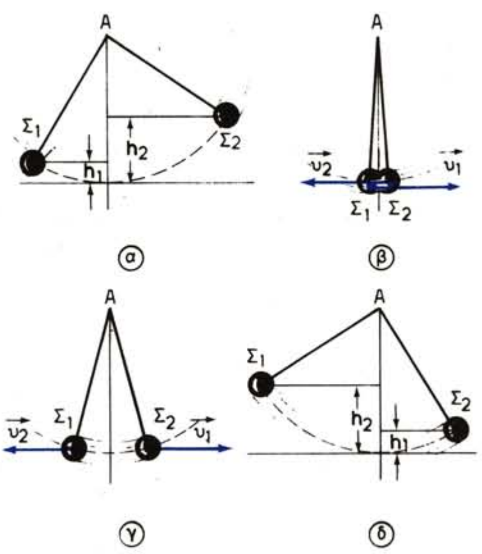
Ἡ λύση τοῦ συστήματος δίνει:

$$\overrightarrow{\upsilon'_1} = \overrightarrow{\upsilon_2} \quad \text{καί} \quad \overrightarrow{\upsilon'_2} = \overrightarrow{\upsilon_1}$$

Δηλαδή, μετά τήν κρούση ἡ πρώτη σφαίρα ἀποκτᾶ τήν ταχύτητα πού εἶχε ἡ δεύτερη σφαίρα πρίν ἀπό τήν κρούση καί ἡ δεύτερη ἀποκτᾶ τήν ταχύτητα πού εἶχε ἡ πρώτη.

Τό ἀποτέλεσμα τοῦ παραπάνω συλλογισμοῦ φαίνεται στό ἑπόμενο πείραμα.

Στό σχῆμα 3 · 7 β δύο ἀτσάλινες σφαῖρες συνδέονται μέ νῆμα ἀπό ἕνα ἀκλόνητο σημεῖο Α. Ὅταν ἀφεθοῦν ἐλεύθερες, συγκρούονται ἐλαστικά [σχ. 3 · 7 β (β)]. Λίγο πρίν ἀπό τήν κρούση ἡ σφαίρα Σ_1 εἶχε ταχύτητα υ_1 μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα υ_2 τῆς σφαίρας Σ_2 καί αὐτό, γιατί ἡ σφαίρα Σ_1 ἀφέθηκε ἀπό χαμηλότερο σημεῖο ἐλεύθερη ἀπό ὅ,τι ἡ σφαίρα Σ_2. Ἡ κρούση τῶν σφαιρῶν ἦταν ἐλαστική καί κεντρική. Μετά τήν κρούση οἱ δύο σφαῖρες ἄλλαξαν μεταξύ τους τίς ταχύτητες. Ἡ σφαίρα Σ_1 πῆρε τήν ταχύτητα $\overrightarrow{\upsilon_2}$ καί ἡ Σ_2 τήν ταχύτητα $\overrightarrow{\upsilon_1}$ [σχ. 3 · 7 β (γ)]. Τό ὅτι ἔγινε ἡ ἐναλλαγή τῶν ταχυτήτων, μπορεῖ νά πιστοποιηθεῖ ἀπό τίς ἀνυψώσεις τῶν δύο σφαιρῶν. Δηλαδή διαπιστώνουμε στό σχῆμα 3 · 7 β (δ), ὅτι ἡ σφαίρα Σ_1 ἀνυψώθηκε

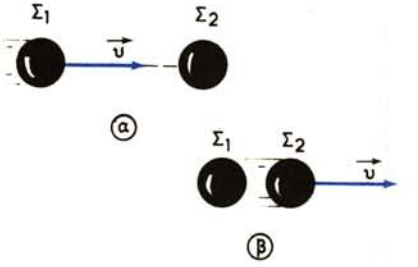


Σχ. 3·7 β.

στό ὕψος πού βρισκόταν ἡ σφαίρα Σ_2 πρίν ἀπό τήν κρούση καί ἡ σφαίρα Σ_2 ἀνυψώθηκε στό ὕψος πού βρισκόταν ἡ σφαίρα Σ_1 πρίν ἀπό τήν κρούση [σχ. 3 · 7 β (α)].

— Δυό σφαῖρες ἔχουν τίς ἴδιες μάζες καί ἡ μία ἀκινητεῖ. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ταχύτητες μετά τήν ἐλαστική κρούση τους.

Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι οὐσιαστικά ἴδιο μέ τό προηγούμενο. Ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος Σ_1 εἶναι $\vec{\upsilon}$ καί τοῦ Σ_2 εἶναι μηδέν. Μετά τήν κρούση οἱ ταχύτητες ἐναλλάσσονται, ὁπότε ἡ Σ_2 ἀποκτᾶ τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί ἡ Σ_1 ἀκινητεῖ (σχ. 3 · 7γ).



Σχ. 3·7 γ.
α) Πρίν ἀπό τήν κρούση. β) Μετά τήν κρούση.

Γιά τήν ἐπιβεβαίωση αὐτῶν πού εἴπαμε, κάνουμε τό παρακάτω πείραμα (σχ. 3 · 7 δ):

Οἱ δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 ἔχουν ἴσες μάζες καί εἶναι ἀτσάλινες. Στό σχῆμα 3 · 7 δ (α) ἀφήνουμε ἐλεύθερη τή σφαίρα Σ_1, ἐνῶ ἡ Σ_2 ἀκινητεῖ.

Ἡ Σ_1, καθώς κατέρχεται, ἐπιταχύνεται ἀπό τό βάρος της **B** καί κάποια στιγμή συγκρούεται μέ τή σφαίρα Σ_2.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς συγκρούσεως εἶναι ἡ Σ_1 νά ἀκινητήσει καί ἡ Σ_2 νά ἀποκτήσει τήν ταχύτητα τῆς Σ_1. Ἔτσι ἡ Σ_2, μέ τήν ταχύτητα πού ἀπόκτησε, ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει καί φθάνει στό ὕψος πού βρισκόταν ἡ Σ_1 [σχ. 3 · 7 δ (β)]. Στή συνέχεια ἡ σφαίρα Σ_2 κατέρχεται πάλι πρός τήν ἀκίνητη τώρα σφαίρα Σ_1, συγκρούεται μ' αὐτήν καί τήν ἐκτοπίζει, ἐνῶ ἡ Σ_2 ἀκινητεῖ [σχ. 3 · 7 δ (γ)].

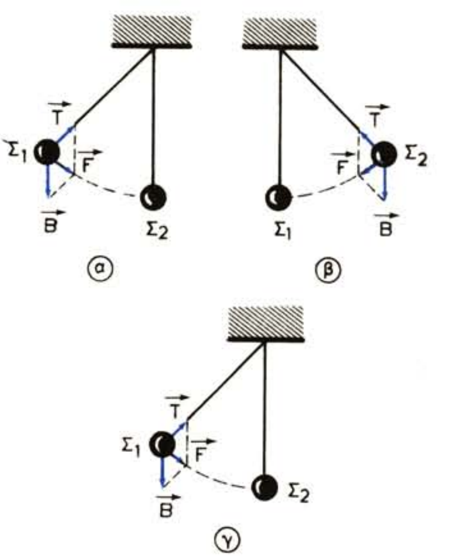
Τό φαινόμενο αὐτό ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές.

Πειραματικά τά παραπάνω ἐπιβεβαιώνονται καί μέ τό ἀκόλουθο πείραμα:

Πολλές ὅμοιες ἀτσάλινες σφαῖρες $\Sigma_1 \cdots \Sigma_6$ ἀκινητοῦν (σχ. 3 · 7 ε). Μιά ὅμοια σφαίρα Σ κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί συγκρούεται μέ αὐτές προκαλώντας κεντρική κρούση. Μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα Σ ἀκινητεῖ, ἐνῶ κινεῖται τώρα ἡ Σ_6 μέ ταχύτητα υ (ὅση εἶχε ἡ Σ).

γ) **Πλαστική κρούση.** Ἔστω ὅτι ἔχουμε δύο σφαῖρες, πού οἱ μάζες τους εἶναι m_1 καί m_2 καί οἱ ταχύτητες πρίν ἀπό τήν κρούση $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$.

Μετά τήν πλαστική κρούση οἱ σφαῖρες θά γίνουν



Σχ. 3·7 δ.
Μετά τήν κρούση κινεῖται ἡ σφαίρα πού πρίν ἀπό τήν κρούση ἦταν ἀκίνητη.

ἕνα σῶμα καί θά ἀποκτήσουν κοινή ταχύτητα $\vec{υ}$ (σχ. 3 · 7 στ). Ποιά εἶναι αὐτή ἡ ταχύτητα;

Στήν πλαστική κρούση τό θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας δέν μποροῦμε νά τό ἐφαρμόσουμε, ἀφοῦ ἕνα μέρος τῆς ἐνέργειας μετατρέπεται σέ θερμότητα.

Μποροῦμε ὅμως νά ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς:

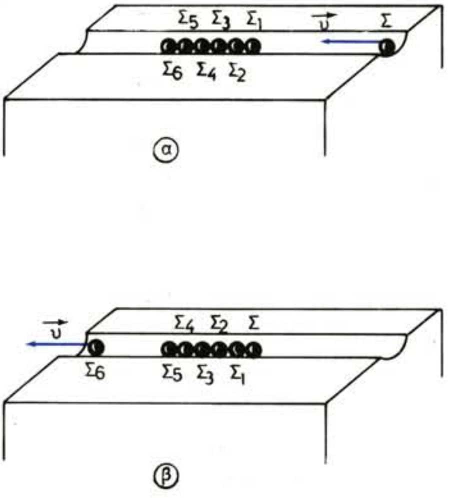
Ὁρμή πρίν ἀπό τήν κρούση = Ὁρμή μετά τήν κρούση

$$m_1 υ_1 + m_2 υ_2 = (m_1 + m_2)\, υ$$

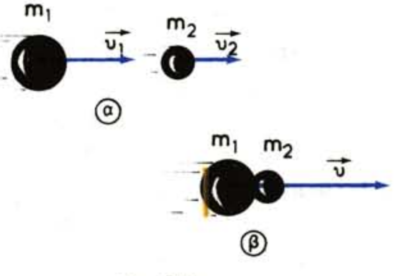
ἤ

$$υ = \frac{m_1 υ_1 + m_2 υ_2}{m_1 + m_2}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή λύνει τό πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς κοινῆς ταχύτητας τῶν δύο σωμάτων μετά τήν πλαστική κρούση.



Σχ. 3·7 ε.
Ἡ σφαίρα Σ μετά τήν κρούση μέ τίς ἀκίνητες σφαῖρες $Σ_1 \ldots Σ_6$ μεταδίδει τήν ταχύτητά της στήν τελευταία σφαίρα $Σ_6$, ἐνῶ ἡ ἴδια σταματᾶ.



Σχ. 3·7 στ.
α) Πρίν ἀπό τήν κρούση. β) Μετά τήν κρούση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΒΑΡΥΤΗΤΑ — ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ

4 · 1 ΠΕΔΙΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ἂν κοντά σέ ἕνα μαγνήτη τοποθετήσουμε ἕνα κομμάτι μαλακό σίδερο, διαπιστώνουμε ὅτι αὐτό **ἕλκεται** ἀπό τό μαγνήτη. Ἐπίσης στά σώματα, πού βρίσκονται γύρω ἀπό τή Γῆ, ἐξασκεῖται δύναμη, πού ὀνομάζεται **βάρος** τῶν σωμάτων.

Στίς δύο αὐτές περιπτώσεις ὁ χῶρος γύρω ἀπό τό μαγνήτη καί γύρω ἀπό τή Γῆ ἔχει τήν ἰδιότητα νά ἐξασκεῖ μιά δύναμη σέ κατάλληλο κάθε φορά **ὑπόθεμα** (μαλακό σίδερο, μάζα).

Πεδίο δυνάμεων ὀνομάζεται ὁ χῶρος ἐκεῖνος, πού ἄν τοποθετήσουμε σέ κάθε του σημεῖο κατάλληλο ὑπόθεμα, ἐξασκεῖται σ' αὐτό δύναμη.

4 · 2 ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ – ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ

Ἕνα ἀπό τά πεδία δυνάμεων εἶναι τό **πεδίο βαρύτητας.** Αὐτό δημιουργεῖται γύρω ἀπό τή Γῆ καί ἡ δύναμη ἐξασκεῖται πάνω στήν ὕλη. Δηλαδή, **τό ὑπόθεμα τοῦ πεδίου βαρύτητας εἶναι ἡ ὕλη.**

Ἡ αἰτία, πού δημιουργεῖ τό πεδίο βαρύτητας, ὀνομάζεται βαρύτητα.

Ποιά ὅμως εἶναι ἡ φύση της;

Ὁ Νεύτων ἔδωσε τήν ἐξήγηση μέ τό νόμο τῆς **παγκόσμιας ἕλξεως.**

Εἶπε δηλαδή ὅτι **οἱ μάζες ἕλκονται ἀμοιβαία.**

Σχ. 4·2 α.
Οἱ μάζες ἕλκονται ἀμοιβαία.

Τό μέτρο τῆς δυνάμεως μέ τήν ὁποία μία μάζα m_1 ἕλκει ἄλλη μάζα m_2 (σχ. 4 · 2 α), **εἶναι ἀνάλογο μέ τό γινόμενο τῶν μαζῶν καί ἀντιστρόφως ἀνάλογο πρός τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεώς τους.**

Ἡ παραπάνω πρόταση ἀποτελεῖ τό **νόμο τῆς παγκόσμιας** ἕλξεως καί ὁ τύπος πού παρέχει τό μέτρο τῆς δυνάμεως ἕλξεως δύο μαζῶν εἶναι:

$F = k\,\dfrac{m_1\,m_2}{r_2}$	*Νόμος παγκοσμίου ἕλξεως*	*(1)*

Ἡ σταθερά k ὀνομάζεται **σταθερά παγκόσμιας** ἕλξεως καί ἔχει τιμή:

$$k = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$$

Σημείωση: Οἱ μάζες θεωροῦνται ὅτι εἶναι ὑλικά σημεῖα. Ἔτσι ἡ ἀπόσταση τῶν μαζῶν εἶναι ἀπόσταση ὑλικῶν σημείων. Ἂν ὅμως τά σώματα ἔχουν σχετικά μεγάλες διαστάσεις, τότε σάν ἀπόσταση λαμβάνεται ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο σωμάτων.

α) **Μεταβολή τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας (g).** Ἡ Γῆ ἔχει μάζα. Ἕλκει ἑπομένως τίς μάζες τῶν σωμάτων, πού βρίσκονται γύρω της, μέ δύναμη πού λέγεται **βάρος** Β (σχ. 4 · 2 β).

Ἐπειδή τό βάρος εἶναι δύναμη πού ἀσκεῖται μεταξύ μαζῶν παρέχεται ἀπό τόν τύπο (1) τοῦ νόμου τῆς παγκόσμιας ἕλξεως:

$$B = k\,\frac{m\,M}{(R+h)^2} \qquad (2)$$

Ἂν ἡ μάζα m βρίσκεται κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, τό ὕψος h εἶναι πολύ μικρό συγκριτικά μέ τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς καί μπορεῖ νά παραλειφθεῖ.

Ἑπομένως ἡ σχέση (2) γίνεται:

$$B = k\,\frac{m\,M}{R^2} \qquad (3)$$

Εἶναι ἐπίσης γνωστό ἀπό τά προηγούμενα ὅτι:

$$B = m\,g \qquad (4)$$

ὅπου: g ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) συνάγεται ὅτι:

$$g = k\,\frac{M}{R^2} \qquad (5)$$

Ἔτσι διαπιστώνεται ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g ἐξαρτᾶται ἀπό σταθερά μεγέθη καί γι' αὐτό τό λόγο θά πρέπει νά εἶναι σταθερή.

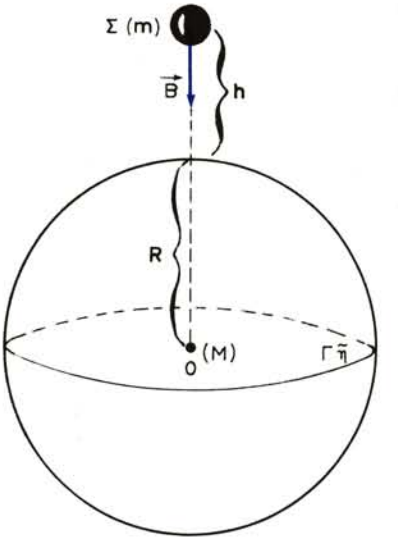
Πράγματι γιά μιά μικρή περιοχή πάνω στή Γῆ καί γιά μικρές σχετικά ὑψομετρικές διαφορές, ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι **πρακτικά σταθερή.** Μεταβάλλεται ὅμως γιά διάφορους λόγους· ἐμεῖς ἐδῶ θά ἀναφέρουμε μόνο δύο:

— **Μεταβολή μέ τό γεωγραφικό πλάτος.**

— **Μεταβολή μέ τό ὕψος ἀπό τό ἔδαφος.**

β) **Ἐξήγηση τῶν μεταβολῶν.**

— **Μεταβολή τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας μέ τό γεωγραφικό πλάτος.**



Σχ. 4·2 β.

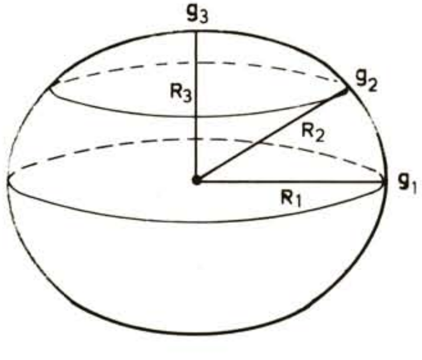
Ἡ Γῆ δέν εἶναι σφαίρα (σχ. 4·2γ). Τό σχῆμα της λέγεται «ἐλλειψοειδές ἐκ περιστροφῆς». Εἶναι μία σφαίρα «πεπλατυσμένη».

Στή σχέση:

$$g = K \frac{M}{R^2}$$

ἡ R εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ σώματος ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς. Ἄν ἑπομένως βρισκόμαστε στόν Ἰσημερινό, ἡ R εἶναι πιό μεγάλη ἀπό ὅ,τι στούς πόλους. Ἔτσι θά ἔχουμε: $R_1 > R_2 > R_3$ ἤτοι: $g_1 < g_2 < g_3$.

Ἑπομένως, **ὅσο αὐξάνει τό γεωγραφικό πλάτος, τόσο μεγαλώνει ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.**



Σχ. 4·2γ.
Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας μεταβάλλεται μέ τό Γεωγραφικό Πλάτος, γιατί ἡ Γῆ εἶναι «πεπλατυσμένη».

Συγκεκριμένα μετρήθηκε ἡ ἐπιτάχυνση σέ διάφορα γεωγραφικά πλάτη καί βρέθηκε:

— Ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας στόν Ἰσημερινό $g_1 = 9{,}78$ m/s².

— Ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας σέ γεωγραφικό πλάτος (M = 45°) $g_2 = 9{,}81$ m/s².

— Ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας στούς πόλους $g_3 = 9{,}83$ m/s².

— **Μεταβολή τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας μέ τό ὕψος ἀπό τό ἔδαφος.** Ἡ ἐπιτάχυνση g δίνεται στήν πραγματικότητα ἀπό τόν τύπο (σχ. 4·2β):

$$g = K \frac{M}{(R + h)^2}$$

ὅπου: h τό ὕψος τοῦ σώματος ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς.

Ὅσο ἀπομακρυνόμαστε ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, τόσο μικραίνει ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

Ἔτσι π.χ. ἄν στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $g = 9{,}81$ m/s², σέ ὕψος 100 km γίνεται $g' \simeq 9{,}45$ m/s².

γ) **Διεύθυνση βάρους.** Ἡ διεύθυνση τοῦ βάρους ὀνομάζεται **κατακόρυφη** καί εἶναι δυνατό νά τή βροῦμε πειραματικά μέ τό **νῆμα τῆς στάθμης** (σχ. 4·2δ), δηλαδή ἕνα σχοινί μέ μιά μάζα κρεμασμένη στήν ἄκρη του.

Σχ. 4·2δ.

Ἄν κρατήσουμε τό νῆμα ἀπό ἕνα ἀκλόνητο σημεῖο Α, τότε ἡ διεύθυνση πού παίρνει ὀνομάζεται **κατακόρυφη.**

δ) **Πυκνότητα καί εἰδικό βάρος σωμάτων.**

Ὁρισμοί :

1) **Πυκνότητα ρ ἑνός σώματος λέγεται τό πηλίκον τῆς μάζας m διά τοῦ ὄγκου του V.**

Δηλαδή :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

— **Μονάδες πυκνότητας :**

Σύστημα S.I.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1\ kg}{1\ m^3} = 1\ kg/m^3$$

Σύστημα C.G.S.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1\ g}{1\ cm^3} = 1\ g/cm^3$$

2) **Εἰδικό βάρος ε ἑνός σώματος λέγεται τό πηλίκον τοῦ βάρους τοῦ σώματος B διά τοῦ ὄγκου του V.**

Δηλαδή :

$$\varepsilon = \frac{B}{V}$$

— **Μονάδες εἰδικοῦ βάρους.**

Σύστημα S.I.

$$\varepsilon = \frac{1\ N}{1\ m^3} = \frac{N}{m^3}$$

Τεχνικό Σύστημα.

$$\varepsilon = \frac{1\ kp}{1\ m^3} = 1\ kp/m^3$$

Σύστημα C.G.S.

$$\varepsilon = \frac{1\ dyn}{1\ cm^3} = 1\ dyn/cm^3$$

Σημείωση : Οἱ ὁρισμοί τῆς πυκνότητας καί τοῦ εἰδικοῦ βάρους ὅπως δόθηκαν, ἰσχύουν γιά τά **ὁμοιογενή** σώματα, δηλαδή τά σώματα πού ἔχουν **ὁμοιόμορφα κατανεμημένη τήν ὕλη τους σέ ὅλο τόν ὄγκο τοῦ σώματος.**

Σέ ἀντίθετη περίπτωση τά ὁρισθέντα μεγέθη εἶναι ἡ **μέση πυκνότητα** καί τό **μέσο εἰδικό βάρος.**

— **Σχέση εἰδικοῦ βάρους καί πυκνότητας.**

Εἶναι γνωστή ἡ σχέση:

$$B = g\,m \qquad (1)$$

Ἔστω ὅτι V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος, πού ἔχει βάρος B καί μάζα m. Ἄν διαιρέσουμε τά δύο μέλη τῆς σχέσεως (1) μέ τόν ὄγκο V θά ἔχουμε:

$$\frac{B}{V} = g\,\frac{m}{V}$$

ἤ

$$\varepsilon = g\,\rho \qquad (1)$$

ὅπου: ε τό εἰδικό βάρος σώματος καί ρ ἡ πυκνότητα τοῦ σώματος.

Ἐφαρμογή.

Ἡ πυκνότητα τοῦ νεροῦ εἶναι $\rho = 1\ g/cm^3$. Νά ὑπολογισθεῖ τό εἰδικό βάρος σέ dyn/cm^3 καί p/cm^3.

Λύση:

Ἀπό τή σχέση (1) ἔχουμε:

$$\varepsilon = g\,\rho = 981\ cm/s \cdot 1\ g/cm^3 = 981\ dyn/cm^3.$$

Γνωρίζουμε ἐπίσης ὅτι 1 p = 981 dyn.

Ἑπομένως $\varepsilon = 981\ dyn/cm^3 \simeq 1\ p/cm^3$.

Συμπέρασμα: Ἡ πυκνότητα ἑνός σώματος σέ g/cm^3 καί τό εἰδικό βάρος τοῦ ἴδιου σώματος σέ p/cm^3 εἶναι ἀριθμητικῶς ἴσα.

Π.χ. ἡ πυκνότητα τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\rho = 13{,}6\ g/cm^3$. Τότε τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑδραργύρου θά εἶναι $\varepsilon = 13{,}6\ p/cm^3$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4·2·1

ΕΙΔΙΚΑ ΒΑΡΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

(σέ p/cm^3)

Ὄσμιο	22,5	Νερό	1,00	Σέ θερμοκρασία 20° C καί πίεση 1 ἀτμόσφαιρας	
Λευκόχρυσος	21,5	Πάγος	0,92		
Χρυσός.....	19,3	Πετρέλαιο ...	0,90		
Ὑδράργυρος	13,6	Οἰνόπνευμα..	0,79		
Μόλυβδος...	11,3	Ξύλο ἐλάτης		CO_2	0,0020
Ἄργυρος ...	10,5	χλωρό.....	0,8-1,2	Ὀξυγόνο.	0,0014
Χαλκός	8,9	Ξύλο ἐλάτης		Ἀέρας ...	0,0013
Ὀρείχαλκος .	8,6	ξηρό	0,4-0,7	Φωταέριο.	0,0006
Σίδηρος	7,8	Φελλός	0,24	Ὑδρογόνο	0,000089
Ἀργίλιο ...	2,7	Ξύλο Basla	0,12		

ε) **Ζύγιση τῆς γῆς.** Ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$g = K \frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

μποροῦμε νά βροῦμε τή μάζα τῆς Γῆς μετρώντας τήν ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας, τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς καί τήν τιμή τῆς σταθερᾶς τῆς παγκόσμιας ἕλξεως K. Μποροῦμε δηλαδή νά «ζυγίσουμε τή Γῆ».

Τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς τή βρίσκουμε εὔκολα μέ γεωδαιτικές μετρήσεις, τήν ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἐπίσης εὔκολα μετρώντας τήν περίοδο αἰωρήσεως ἑνός ἐκκρεμοῦς. Τέλος, ἡ σταθερά τῆς παγκόσμιας ἕλξεως K βρέθηκε μέ τή μέθοδο τοῦ ζυγοῦ Gavendish. Ὁ ζυγός αὐτός εἶναι μιά συσκευή ἐγκαταστημένη σέ χῶρο ἑνός ἐργαστηρίου. Ἡ σημασία τοῦ πειράματος αὐτοῦ ἦταν μεγάλη, γιατί μέ τή μέτρηση τῆς σταθερᾶς K ὑπολογίσθηκε ὄχι μόνο ἡ μάζα τῆς Γῆς ἀλλά καί τοῦ Ἥλιου καί τῶν πλανητῶν.

— **Ἀριθμητική ἐφαρμογή.**

Ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς εἶναι περίπου 6 370 000 m. Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g = 9,81 m/s². Νά ὑπολογισθεῖ ἡ μάζα τῆς Γῆς.

Λύση :

Λύνουμε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός M:

$$M = \frac{g\,R^2}{K}$$

Ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές:

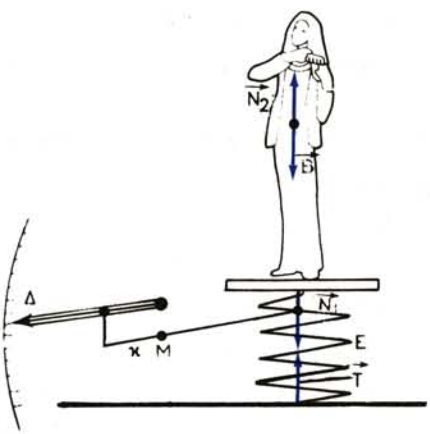
$$M = \frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (6\,370\,000)^2\ \mathrm{m^2}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}} \simeq 60{,}5 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}.$$

στ) **Μέτρηση τοῦ βάρους τῶν σωμάτων.** Τό βάρος ἑνός σώματος μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ τή βοήθεια ἑνός δυναμομέτρου.

Στό σχῆμα 4·2 ε φαίνεται ἕνα δυναμόμετρο. Ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα μεταλλικό δίσκο, στόν ὁποῖο τοποθετοῦνται τά ἀντικείμενα πού θά ζυγισθοῦν. Ὁ δίσκος στηρίζεται πάνω σέ ἕνα ἔλασμα E μεταλλικό καί ἐλαστικό. Σύστημα μοχλῶν M μετακινεῖ τό δείκτη Δ μπροστά σέ μιά βαθμολογημένη κλίμακα.

Πῶς ὅμως γίνεται ἡ μέτρηση τοῦ βάρους;

Ἔστω ὅτι πρόκειται νά ζυγίσουμε ἕναν ἄνθρωπο. Ἄς ἐξετάσουμε ὅλες τίς δυνάμεις, πού δροῦν σ' αὐτόν (σχ. 4·2 ε) καί στό δυναμόμετρο.



Σχ. 4·2 ε.
Τό δυναμόμετρο δείχνει τό μέτρο τῆς ἀντιδράσεως $\vec{N_2}$.

Στόν ἄνθρωπο ἐνεργεῖ τό βάρος του $\vec{B}$ καί ἡ ἀντίδραση $\vec{N_2}$ τοῦ δίσκου τοῦ δυναμομέτρου.

Στό δυναμόμετρο ἐξασκεῖται ἡ δύναμη $\vec{N_1}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ δύναμη ἀντιδράσεως τοῦ ἀνθρώπου στό δυναμόμετρο καί ἰσοῦται μέ τή $\vec{N_2}$. Δηλαδή οἱ δυνάμεις $\vec{N_2}$ καί $\vec{N_1}$ εἶναι τό ζεῦγος **δράση** (δυναμομέτρου πρός τόν ἄνθρωπο) — **ἀντίδραση** (ἀνθρώπου πρός τό δυναμόμετρο). Τέλος ὑπάρχει καί ἡ δύναμη $\vec{T}$, τήν ὁποία ἐξασκεῖ τό δάπεδο στό δυναμόμετρο.

Ἀπό ὅλες αὐτές τίς δυνάμεις ὁ δείκτης στήν κλίμακα μᾶς σημειώνει τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{N_1}$.

Ἄν ὅμως ὁ ἄνθρωπος καί τό δυναμόμετρο ἰσορροποῦν (κινοῦνται ἰσοταχῶς ἤ ἀκινητοῦν), τότε τά μέτρα ὅλων τῶν δυνάμεων, πού προαναφέραμε, εἶναι τά ἴδια.

Δηλαδή:

$$N_1 = N_2 = B = T$$

Στήν κατάσταση ἰσορροπίας ἑπομένως, ἐπειδή ἡ μετρουμένη δύναμη N_1 εἶναι ἴση μέ τό B, ἡ ἔνδειξη τοῦ δυναμομέτρου εἶναι τό βάρος τοῦ σώματος.

Τί θά συμβεῖ ὅμως ἄν ἡ ζύγιση γίνεται σέ ἕναν ἀνελκυστήρα (ἀσανσέρ), ὁ ὁποῖος τή στιγμή τῆς ζυγίσεως ἐπιταχύνεται πρός τά κάτω μέ ἐπιτάχυνση $\gamma < g$ (σχ. 4 · 2 στ);

Στήν περίπτωση αὐτή μαζί μέ τόν ἀνελκυστήρα, ἐπιταχύνεται καί ὁ ἄνθρωπος μέ τήν ἴδια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$.

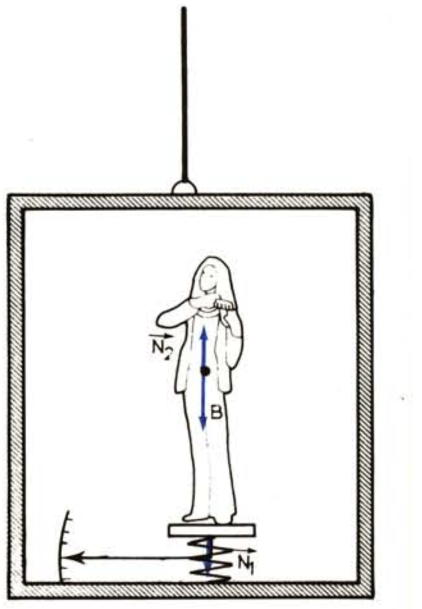
Γιά νά ἐπιταχυνθεῖ ὅμως ἡ μάζα τοῦ ἀνθρώπου, πρέπει **νά ὑπάρχει ἐπιταχύνουσα δύναμη**. Ἡ δύναμη αὐτή εἶναι ἡ $B - N_2$.

Δηλαδή:

$$\vec{B} - \vec{N_2} = m\vec{\gamma}$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ $N_2 < B$ καί ἐπειδή $N_1 = N_2$ ἔπεται ὅτι $N_1 < B$.

Ὅπως εἴπαμε στά προηγούμενα, τό δυναμόμετρο μετρᾶ τή δύναμη N_1, ἡ ὁποία στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι μικρότερη ἀπό τό βάρος. Δηλαδή ἡ ζύγιση δέν θά μᾶς δώσει τό ἀληθινό βάρος. Ὅταν μάλιστα ἡ ἐπιτάχυνση γίνει g, τότε τό δυναμόμετρο



Σχ. 4·2 στ.

θά δείχνει μηδέν (Δηλαδή σάν νά μήν ἔχει βάρος τό σῶμα).

— **Αἴσθηση τοῦ βάρους. Ὁ ἄνθρωπος ἀντιλαμβάνεται τό βάρος του κυρίως ἀπό τήν ἀντίδραση τοῦ δαπέδου, πάνω στό ὁποῖο στηρίζεται.**

Δηλαδή στά σχήματα 4·2ε καί 4·2στ **ἡ δύναμη N_2 δίνει τήν αἴσθηση τοῦ βάρους.**

Ἐπειδή ὅμως ἡ $N_2 = N_1$, ἡ **αἴσθηση τοῦ βάρους** εἶναι ἀνάλογη πρός τήν **ἔνδειξη τοῦ δυναμομέτρου.** Ἔτσι, ἄν ὁ ἀνελκυστήρας ἐπιταχύνεται πρός τά κάτω μέ ἐπιτάχυνση g, τό δυναμόμετρο θά δείχνει μηδέν καί ὁ ἄνθρωπος θά **νοιώθει πώς ἔχασε τό βάρος του,** γιατί στήν οὐσία **ἔχασε τό ἔδαφος κάτω ἀπό τά πόδια του**, ἐπειδή μηδενίσθηκε ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου πού τόν στήριζε.

Ἀνάλογα συμβαίνει καί μέ τούς ἐπιβάτες τῶν τεχνητῶν δορυφόρων. Ἡ ἕλξη τῆς Γῆς εἶναι ἀναγκαία στούς ἐπιβάτες γιά νά δώσει τήν κεντρομόλο ἐπιτάχυνση στήν κυκλική κίνησή τους γύρω ἀπό τή Γῆ. Ἔτσι καί ἐκεῖ δέν ὑπάρχει ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου N_2 καί οἱ ἐπιβάτες τῶν δορυφόρων αἰωροῦνται (ἔχουν χάσει τήν αἴσθηση τοῦ βάρους τους) (σχ. 4·2ζ).

Σχ. 4·2ζ.

ζ) **Τεχνητοί δορυφόροι.** Οἱ τεχνητοί δορυφόροι (σχ. 4·2η) κινοῦνται γύρω ἀπό τή Γῆ διαγράφοντας **κλειστή τροχιά**. Ἡ τροχιά τους στίς περισσότερες περιπτώσεις εἶναι **ἔλλειψη.**

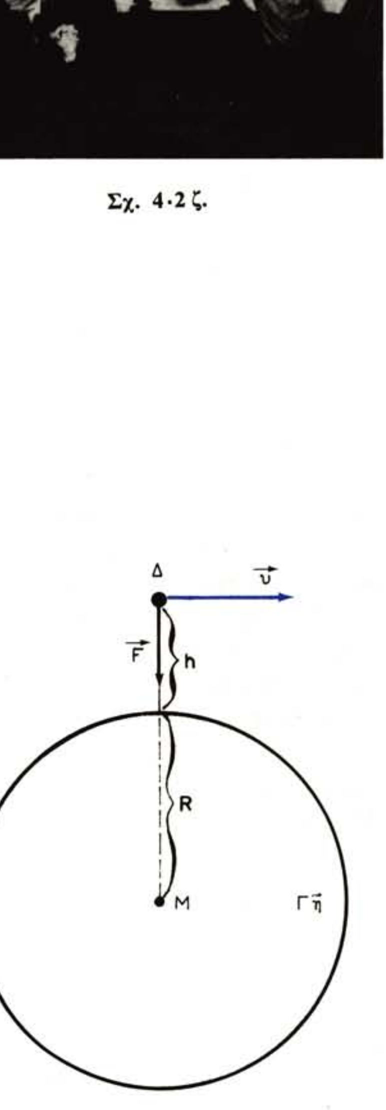
Ἐμεῖς θά δεχθοῦμε ὅτι ἡ τροχιά τοῦ τεχνητοῦ δορυφόρου εἶναι **περιφέρεια κύκλου,** τήν ὁποία διαγράφει μέ ὁμαλή κίνηση. Γιά νά μπορεῖ ὅμως ὁ δορυφόρος νά κάνει ὁμαλή κυκλική κίνηση, πρέπει σ' αὐτόν νά ἐξασκεῖται **κεντρομόλος δύναμη.** Ἡ δύναμη αὐτή ὑπάρχει καί εἶναι ἡ δύναμη **τῆς παγκόσμιας ἕλξεως.**

Γράφουμε ἑπομένως:

Δύναμη παγκόσμιας ἕλξεως = Κεντρομόλος δύναμη

$$k \frac{M\,m}{(R+h)^2} = m \frac{\upsilon^2}{(R+h)} \qquad (1)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) μπορεῖ κανένας νά ὑπολογίσει τήν ἀναγκαία ταχύτητα, πού πρέπει νά ἔχει ἕνας τεχνητός δορυφόρος γιά νά μπορεῖ νά κινεῖται σέ ὁμαλή κυκλική κίνηση γύρω ἀπό τή Γῆ, πετώντας σέ ὕψος h ἀπό τό ἔδαφος:



Σχ. 4·2η.

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k\,M}{R+h}} \qquad (2)$$

η) **Κίνηση πλανητῶν γύρω ἀπό τόν Ἥλιο.** Τήν ἴδια κίνηση πού κάνει ἕνας τεχνητός δορυφόρος γύρω ἀπό τή Γῆ, κάνουν οἱ φυσικοί δορυφόροι γύρω ἀπό τούς πλανῆτες καί οἱ πλανῆτες γύρω ἀπό τόν Ἥλιο.

Ἔτσι ὁ Νεύτωνας ἔδωσε μιά πλήρη ἐξήγηση τῆς ἁρμονίας τοῦ σύμπαντος μέ τό νόμο τῆς παγκόσμιας ἕλξεως.

θ) **Εἴδη τροχιῶν ὑλικοῦ σώματος πού ἕλκεται ἀπό τή Γῆ** (σχ. 4·2θ).

1) Ἄν $\upsilon = 0$, ἡ τροχιά εἶναι εὐθύγραμμη (Ἐλεύθερη πτώση). Στό σχῆμα εἶναι ἡ τροχιά I.

2) Μέ μικρή σχετικά ταχύτητα ἡ τροχιά εἶναι ἡ II καί εἶναι **ἐλλειπτική.**

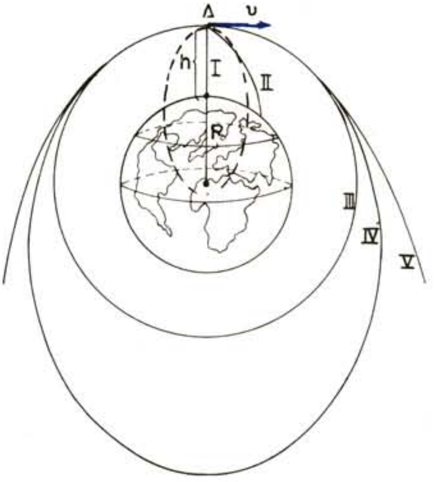
3) Μέ ταχύτητα πού καθορίστηκε ἀπό τήν ἐξίσωση:

$\upsilon = \sqrt{\dfrac{k\,M}{R+h}}$ [παράγρ. 4·2 (ζ)] ἡ τροχιά εἶναι ἡ III, δηλαδή περιφέρεια κύκλου πού γράφεται μέ κέντρο τή Γῆ καί ἀκτίνα τήν $R+h$.

4) Μέ πιό μεγάλη ταχύτητα ἡ τροχιά γίνεται ἔλλειψη, πού ὅσο αὐξάνει ἡ ταχύτητα, τόσο γίνεται πιό ἐπιμήκης (καμπύλη IV).

5) Τέλος, ὅταν ἡ ταχύτητα ξεπεράσει μιά ὁρισμένη τιμή, διαγράφει μιά ἀνοικτή τροχιά, τήν V. Ἡ τροχιά αὐτή εἶναι **ὑπερβολή** καί **τό σῶμα ἀπομακρύνεται ἀπό τή Γῆ πρός τό διάστημα.**

Ἡ ἐλάχιστη αὐτή ἀναγκαία ταχύτητα γιά νά ἀπομακρυνθεῖ τό σῶμα ἀπό τή Γῆ, ὀνομάζεται **ταχύτητα διαφυγῆς** καί εἶναι 11,2 km/s.



Σχ. 4·2θ.
Ἡ ἀπόσταση $R+h$ καί ἡ ταχύτητα υ καθορίζουν τό εἶδος τῆς τροχιᾶς ὑλικοῦ σώματος πού ἕλκεται ἀπό τή Γῆ.

Πρόβλημα. Πόσο θά ζυγίζει ἄνθρωπος μάζας 70 kg στόν πλανήτη Δία, πού ἡ μάζα του εἶναι 317 φορές μεγαλύτερη ἀπό τή μάζα τῆς Γῆς καί ἡ ἀκτίνα του 11,3 φορές μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς;

Λύση:

Ἄν ὀνομάσουμε B_2 τό βάρος τοῦ ἀνθρώπου στό Δία καί B_1 τό βάρος του στή Γῆ, θά ἔχομε:

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= k\,\frac{M_2\,m}{R^2{}_2} \\ B_1 &= k\,\frac{M_1\,m}{R^2{}_1} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ὅπου: m ἡ μάζα τοῦ ἀνθρώπου, M_2 ἡ μάζα τοῦ Δία, M_1 ἡ μάζα τῆς Γῆς, R_2 ἡ ἀκτίνα τοῦ Δία καί R_1 ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς.

Διαιροῦμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (1) καί ἔχουμε:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{M_2 R^2{}_1}{M_1 R^2{}_2} = \frac{M_2}{M_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \qquad (2)$$

Λύνουμε τήν ἐξίσωση (2) ὡς πρός B_2:

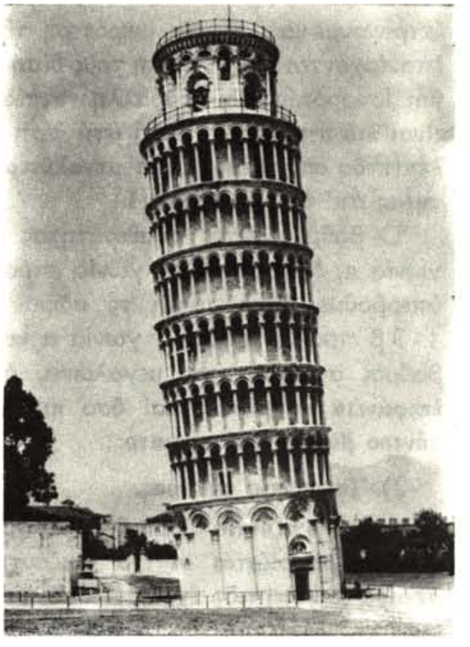
$$B_2 = \frac{M_2}{M_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 B_1 \qquad (3)$$

Εἶναι γνωστό ὅτι $\frac{M_2}{M_1} = 317$, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{11,3}$ καί $B_1 = 70\,kp$ (ἀφοῦ ἡ μάζα τοῦ ἀνθρώπου εἶναι 70 kg).

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (3) τά δεδομένα καί ἔχουμε:

$$B_2 = 317 \cdot \frac{1}{(11,3)^2} \cdot 70\,kp = 175\,kp.$$

Ἀπάντηση: Ὁ ἄνθρωπος μάζας 70 kg, θά ζυγίζει στή Γῆ 70 kp καί στό Δία 175 kp.



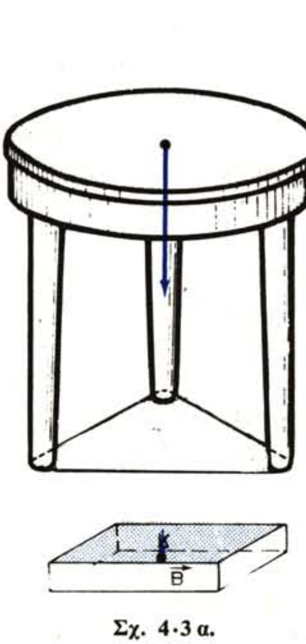
4·3 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Θά ἐξετάσουμε δυό περιπτώσεις ἰσορροπίας τῶν στερεῶν σωμάτων. Ἡ πρώτη εἶναι ἡ ἰσορροπία σωμάτων πού στηρίζονται στό ἔδαφος καί ἡ δεύτερη ἡ ἰσορροπία σωμάτων πού ἐξαρτῶνται ἀπό ἕναν ἄξονα.

α) Ἰσορροπία σωμάτων πού στηρίζονται στό ἔδαφος. Τό σῶμα καί τό ἔδαφος ἔχουν κοινή μιά ἐπιφάνεια ἤ ἔχουν τουλάχιστο τρία κοινά σημεῖα. Τό τραπέζι τοῦ σχήματος 4·3 α στηρίζεται σέ τρία πόδια, ἐνῶ τό παραλληλεπίπεδο σέ ὁλόκληρη τήν ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια, πού σημειώνεται μέ μπλέ χρῶμα στήν κάθε μιά περίπτωση, ὀνομάζεται **βάση στηρίξεως.** Ἡ κατακόρυφη πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος, περνᾶ καί ἀπό τή βάση στηρίξεως καί στίς δυό περιπτώσεις. Στίς περιπτώσεις αὐτές ἡ ἰσορροπία εἶναι εὐσταθής.

Ἄν ἑπομένως **τά στερεά σώματα ἔχουν βάση στηρίξεως καί ἡ κατακόρυφη πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος περνᾶ καί ἀπό τή βάση στηρίξεως, ἡ ἰσορροπία εἶναι εὐσταθής.**

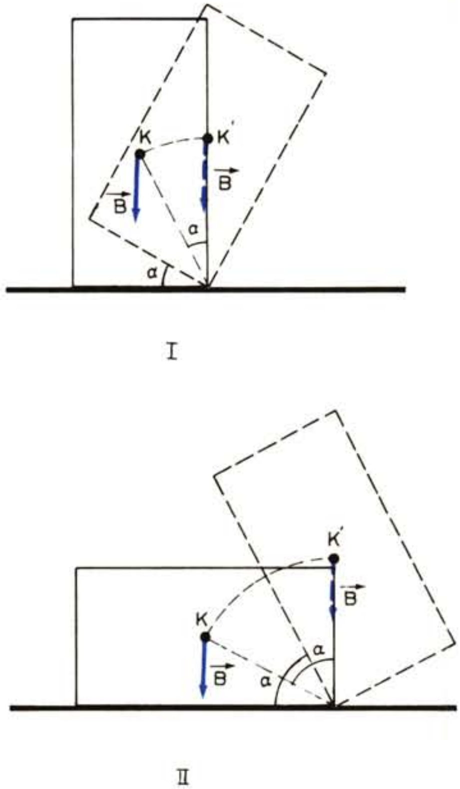
1) **Βαθμός σταθερότητας.** Τά παραλληλεπίπεδα τοῦ σχήματος 4·3 β ἔχουν εὐσταθή ἰσορροπία. Ὅταν τά



Σχ. 4·3 α.

ἐκτρέψουμε κατά γωνία μικρότερη τῆς γωνίας α, τότε ἐπανέρχονται στήν ἀρχική τους θέση. Ὅμως ἡ εὐσταθής ἰσορροπία τοῦ παραλληλεπιπέδου στή θέση II εἶναι **πιό σταθερή** ἀπ' ὅ,τι στή θέση I ἤ τό παραλληλεπίπεδο στή θέση II ἔχει **μεγαλύτερο βαθμό σταθερότητας** ἀπ' ὅ,τι στή θέση I.

Ὁ βαθμός αὐτός σταθερότητας μεγαλώνει μέ τή γωνία α, δηλαδή μέ τή γωνία στροφῆς πού, ἄν τήν ὑπερβοῦμε, ἀνατρέπεται τό σῶμα. Ἀπό τό σχῆμα 4·3 β προκύπτει ὅτι ἡ γωνία α καί συνεπῶς καί ὁ βαθμός σταθερότητας μεγαλώνει, ὅσο μεγαλώνει ἡ **ἐπιφάνεια στηρίξεως** καί ὅσο **πιό χαμηλά εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος.**

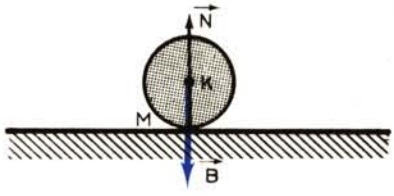


Σχ. 4·3 β.

2) **Ἰσορροπία σφαίρας.**

— **Σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.** Ἄν μιά σφαίρα (σχ. 4·3 γ) στηρίζεται σέ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο, τότε σφαίρα καί ἐπίπεδο ἔχουν ἕνα καί μόνο σημεῖο στηρίξεως, τό Μ. Ὁποιαδήποτε ὅμως κι ἄν εἶναι ἡ θέση τῆς σφαίρας, ἡ κατακόρυφη θά περνᾶ ἀπό τό σημεῖο στηρίξεως Μ καί ἡ ἀντίδραση Ν θά ἰσορροπεῖ τή σφαίρα.

Τό εἶδος αὐτό τῆς ἰσορροπίας τῆς σφαίρας ὀνομάζεται **ἀδιάφορη ἰσορροπία.**



Σχ. 4·3 γ.

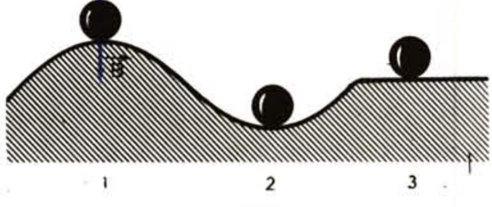
— **Σέ τυχούσα ἐπιφάνεια.** Μιά σφαίρα τοποθετεῖται σέ διαφορετικές θέσεις πάνω στήν ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος 4·3 δ. Στίς θέσεις (1), (2) καί (3) διακρίνουμε τρία εἴδη ἰσορροπίας τῆς σφαίρας.

Στή θέση (1) ἡ σφαίρα βρίσκεται σέ συνθῆκες **ἀσταθοῦς ἰσορροπίας,** γιατί ἰσορροπεῖ μέν στή θέση αὐτή, μιά ὅμως μικρή μετακίνησή της θά τήν φέρει στή θέση 2.

Στή θέση (2) ἡ σφαίρα βρίσκεται σέ συνθῆκες **εὐσταθοῦς ἰσορροπίας,** γιατί ἄν μετακινηθεῖ δεξιά ἤ ἀριστερά ἀπό τή θέση της, θά ἐπανέλθει πάλι σ' αὐτή.

Τέλος στή θέση (3) ἡ σφαίρα βρίσκεται σὲ συνθήκες **ἀδιάφορης ἰσορροπίας,** ὅπως εἴπαμε πιό πάνω.

Ἐνδιαφέρουσα σημείωση: Ἡ δυναμική ἐνέργεια τῆς σφαίρας στή θέση (1) εἶναι μεγαλύτερη ἀπό ἐκείνη στή θέση (2).



Σχ. 4·3 δ.

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι **ἄν μιά εὐκίνητη σφαίρα μετακινεῖται σέ μιά ἐπιφάνεια ἀνισοϋψή, θά ἰσορροπήσει τελικά στό σημεῖο, πού ἡ δυναμική ἐνέρ-**

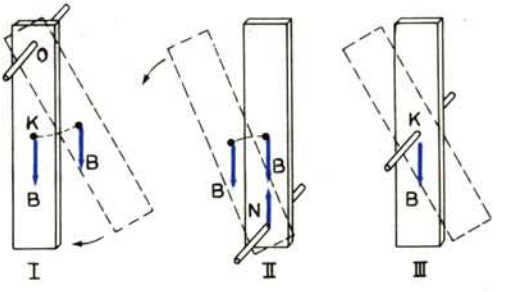
για θά εἶναι ἡ πιό μικρή, δηλαδή στό πιό χαμηλό σημεῖο.

β) **Ἰσορροπία στερεῶν σωμάτων πού στηρίζονται σέ ὁριζόντιο ἄξονα.** Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

— **Εὐσταθής ἰσορροπία** (θέση I, σχ. 4 · 3 ε). Ἄν στραφεῖ τό σῶμα σέ νέα θέση, τό βάρος του **B** δημιουργεῖ ροπή, ἡ ὁποία τείνει νά τό ἐπαναφέρει στήν ἀρχική θέση. Ἡ **ἰσορροπία** αὐτή εἶναι **εὐσταθής.** Γιά νά ἐξασφαλίσουμε εὐσταθή ἰσορροπία πρέπει πάντοτε νά ἔχουμε τόν ἄξονα ἐξαρτήσεως πάνω ἀπό τό κέντρο βάρους.

— **Ἀσταθής ἰσορροπία** (θέση II, σχ. 4 · 3 ε). Τό σῶμα στήν ἀρχική θέση ἰσορροπεῖ, γιατί τό βάρος **B** καί ἡ ἀντίδραση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, τό ἴδιο μέτρο καί ἀντίθετη φορά. Ὅταν ὅμως τό σῶμα στραφεῖ, τό βάρος **B** δημιουργεῖ ροπή ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς καί τό σῶμα **ἀνατρέπεται.** Ἡ **ἰσορροπία** τότε αὐτή εἶναι **ἀσταθής** καί συμβαίνει πάντοτε, ὅταν τό κέντρο βάρους εἶναι πάνω ἀπό τόν ἄξονα ἐξαρτήσεως.

— **Ἀδιάφορη ἰσορροπία** (θέση III, σχ. 4 · 3 ε). Ὁπουδήποτε καί ἄν τοποθετήσουμε τό σῶμα **ἰσορροπεῖ.** Ἡ **ἰσορροπία** αὐτή ὀνομάζεται **ἀδιάφορη.** Γιά νά ἐπιτύχουμε ἀδιάφορη ἰσορροπία, πρέπει πάντοτε ὁ ἄξονας ἐξαρτήσεως νά περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος.



Σχ. 4·3 ε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Τ Ρ Ι Β Η

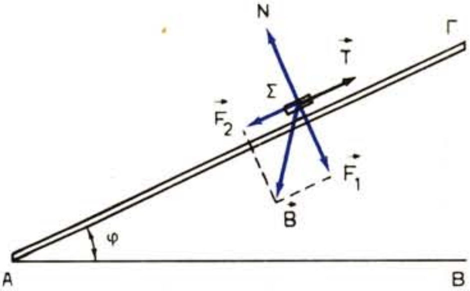
῞Οταν δύο σώματα βρίσκονται σέ ἐπαφή καί τό ἕνα κινεῖται σχετικά μέ τό ἄλλο, ἐξασκοῦνται ἀμοιβαῖα δυνάμεις, οἱ ὁποῖες ἀντιτίθενται στήν κίνηση.

Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **τριβή** καί οἱ δυνάμεις πού ἐξασκοῦνται ὀνομάζονται **δυνάμεις τριβῆς.**

῾Η τριβή διακρίνεται σέ **τριβή ὀλισθήσεως** καί **τριβή κυλίσεως.**

5·1 ΤΡΙΒΗ ΟΛΙΣΘΗΣΕΩΣ

Σέ μιά ξύλινη σανίδα ΑΓ, πού παρουσιάζει κλίση ὡς πρός τό ἔδαφος, τοποθετοῦμε ἕνα νόμισμα Σ. Ἄν ἡ γωνία φ εἶναι σχετικά μικρή, τό νόμισμα ἀκινητεῖ (σχ. 5 · 1 α).

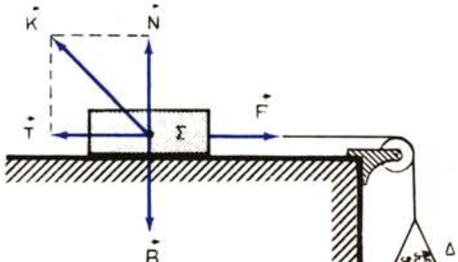


Σχ. 5·1 α.

Ἀπ' ὅσα γνωρίζουμε μέχρι τώρα, στό σῶμα (νόμισμα) ἐνεργοῦν δυό δυνάμεις, τό βάρος του Β καί ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου Ν, **κάθετη** στό ἐπίπεδο ΑΓ.

῾Η $\vec{B}$ ἀναλύεται στίς $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. ῾Η $\vec{F}_1$ ἰσορροπεῖ τή δύναμη $\vec{N}$ καί ἡ F_2 θά ἔπρεπε νά ἐπιταχύνει τό σῶμα πρός τό σημεῖο Α. Ἀφοῦ ὅμως στό πείραμα τό σῶμα δέν ἐπιταχύνεται, σημαίνει ὅτι ὑπάρχει ἴση καί ἀντίθετη δύναμη πρός τήν $\vec{F}_2$, πού τήν ἰσορροπεῖ. ῾Η δύναμη αὐτή $\vec{T}$ εἶναι ἡ **τριβή ὀλισθήσεως.**

Γιά νά μελετήσουμε καλά αὐτή τή δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως, κάνουμε τό πείραμα πού φαίνεται στό σχῆμα 5 · 1 β.



Σχ. 5·1 β.

῞Ενα σῶμα Σ εἶναι τοποθετημένο πάνω σ' ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Μέ τή βοήθεια μιᾶς τροχαλίας καί ἑνός σχοινιοῦ ἐξασκοῦμε δύναμη $\vec{F}$ στό σῶμα, τοποθετώντας βάρη στό δίσκο Δ. Προσθέτοντας διάφορα βάρη στό δίσκο Δ, δηλαδή μεταβάλλοντας τήν τιμή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

῞Οταν ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι μικρή, τό σῶμα ἰσορροπεῖ. Μεγαλώνουμε τήν $\vec{F}$ καί συνεχίζει τό σῶμα νά ἰσορροπεῖ. Συνεχίζουμε νά μεγαλώνουμε τήν $\vec{F}$, ὁπότε μετά ἀπό κάποια ὁριακή τιμή της, τό σῶμα ἀρχίζει νά ἐπιταχύνεται. Αὐτό ἑρμηνεύεται ὡς ἑξῆς:

1) Ἄν $\vec{F} = 0$, τότε ἡ ἀντίδραση τοῦ ὁριζόντιου δαπέδου πάνω στό σῶμα εἶναι ἡ δύναμη $\vec{N}$ κάθετη πρός τό δάπεδο, ἀντίθετης φορᾶς καί τοῦ ἴδιου μέτρου μέ τή $\vec{B}$.

2) Ἄν ἡ $\vec{F}$ ἔχει μικρή σχετικά τιμή, τότε ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου εἶναι ἡ πλάγια δύναμη $\vec{K}$, ἡ ὁποία ἀναλύεται στή $\vec{N}$ καί τήν $\vec{T}$.

Ἡ $\vec{N}$ ἰσορροπεῖται ἀπό τό βάρος $\vec{B}$ καί ἡ $\vec{T}$ ἀπό τή δύναμη $\vec{F}$.

Μεγαλώνοντας τή δύναμη $\vec{F}$, μεγαλώνει ἀντίστοιχα καί ἡ τιμή τῆς $\vec{T}$, γιατί μεταβάλλεται ἡ κλίση καί τό μέτρο τῆς $\vec{K}$, ἐνῶ ἡ συνιστώσα $\vec{N}$ παραμένει πάντα σταθερή.

3) Ἀπό κάποια τιμή τῆς $\vec{F}$ καί πάνω, ἡ $\vec{K}$ παραμένει σταθερή καί ἡ προβολή της T παίρνει μιά ὁριακή τιμή.

Ἡ δύναμη $\vec{T}$ ὀνομάζεται τριβή ὀλισθήσεως καί, ὅπως εἴπαμε, ἔχει μεταβλητή τιμή, μέχρι μιᾶς μεγίστης τιμῆς.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μεγίστη αὐτή τιμή τῆς τριβῆς εἶναι ἀνάλογη πρός τήν κάθετη συνιστώσα $\vec{N}$ τῆς ἀντιδράσεως $\vec{K}$. Ἑπομένως γιά σώματα πού ὀλισθαίνουν πάνω σέ μιά ἐπιφάνεια ἰσχύει ἡ σχέση:

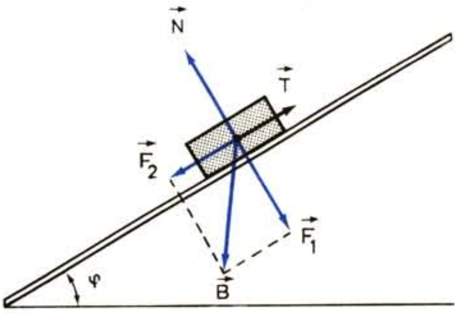
$$\boxed{T = \eta N}$$

Ὁ συντελεστής η ὀνομάζεται **συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως** καί ἐξαρτᾶται ἀπό τά ὑλικά τῶν σωμάτων καί τήν κατάσταση τῆς ἐπιφάνειας τριβῆς.

Σημείωση: 1) Γενικά ἡ τριβή ὀφείλεται κυρίως σέ ἀνωμαλίες, πού ὑπάρχουν πάντοτε στίς ἐπιφάνειες ἐπαφῆς τῶν δύο σωμάτων. Γι' αὐτό οἱ λεῖες καί στιλπνές ἐπιφάνειες ἐμφανίζουν πολύ μειωμένο συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως. 2) Ἐπειδή $\eta = \dfrac{T}{N}$, ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι καθαρός ἀριθμός σάν πηλίκο δύο δυνάμεων.

Ἐφαρμογές.

1. Στό κεκλιμένο ἐπίπεδο τοῦ σχήματος 5 · 1 γ τοποθετοῦμε ἕνα σῶμα. Μεγαλώνουμε τή γωνία κλίσεως φ καί διαπιστώνουμε ὅτι τό σῶμα ἀρχίζει νά κινεῖται, ὅταν $\varphi = 30°$.



Σχ. 5·1 γ.

Νά ὑπολογισθεῖ ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως.

Λύση :

Τό σῶμα θά ἀρχίσει νά κινεῖται, ὅταν ἡ F_2 γίνει ἐλάχιστα μεγαλύτερη ἀπό τήν Τ.

Ἐμεῖς θά δεχθοῦμε ὅτι:

$$\vec{F}_2 = \vec{T} \qquad (1)$$

Τό μέτρο τῆς F_2 ὅμως δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$F_2 = B\ \eta\mu\varphi \qquad (2)$$

Ἐπίσης
$$T = \eta\ N \qquad (3)$$

ὅπου η ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως.

Τέλος τό μέτρο τῆς N δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$N = F_2 = B\ \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (4)$$

Ἀπό τίς (4) καί (3) προκύπτει:

$$T = \eta\ B\ \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (5)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (5), (2) καί (1) προκύπτει:

$$B\ \eta\mu\varphi = \eta\ B\ \sigma\upsilon\nu\varphi$$

καί
$$\varepsilon\varphi\varphi = \eta \qquad (6)$$

Ἐπειδή $\varphi = 30° \Rightarrow \eta = \varepsilon\varphi\ 30° \simeq 0{,}58$.

Ἀπάντηση : Ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι 0,58.

Σημείωση : Ἀπό τήν προηγούμενη ἐφαρμογή συμπεραίνεται ὅτι εἶναι δυνατό μέ τή βοήθεια τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου νά προσδιορίζουμε πειραματικά τό συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως τῶν σωμάτων.

2. Σῶμα ὀλισθαίνει σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως ἀνάμεσα στό σῶμα καί στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο εἶναι $\eta = 0{,}2$. Ἄν κάποια στιγμή τό σῶμα ἔχει ταχύτητα $\upsilon_o = 30$ m/s, νά ὑπολογισθεῖ:

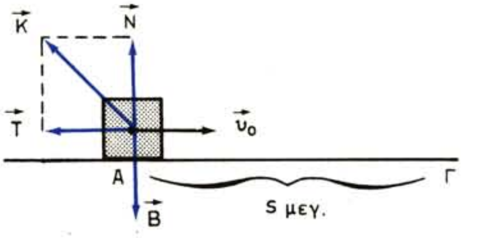
α) Μετά ἀπό πόσο χρόνο θά σταματήσει τό σῶμα καί πόσο διάστημα θά διανύσει μέχρι νά σταματήσει.

β) Πόση εἶναι ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας. Ἡ μάζα τοῦ σώματος εἶναι 2 kg.

Λύση :

α) **Ὑπολογισμός μεγίστου διαστήματος $s_{μεγ}$ καί μεγίστου χρόνου $t_{μεγ}$.**

Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5 · 1 δ ἡ συνιστῶσα $\vec{N}$ ἰσορροπεῖ τό βάρος $\vec{B}$:



Σχ. 5·1 δ.

$$B = N$$

Ἡ συνιστῶσα $\vec{T}$ εἶναι ἡ τιμή τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως καί εἶναι ἀκριβῶς ἐκείνη πού ἐπιβραδύνει τό σῶμα.

Ὁ χρόνος μέχρι τό κινητό νά σταματήσει $t_{μεγ}$ καί τό ἀντίστοιχο διάστημα πού θά διανύσει $s_{μεγ}$ δίνονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$t_{μεγ} = \frac{\upsilon_o}{\gamma} \qquad (1)$$

καί

$$s_{μεγ} = \frac{\upsilon_o{}^2}{2\gamma} \qquad (2)$$

ὅπου: γ ἡ ἐπιβράδυνση πού προκαλεῖ ἡ τριβή T στό σῶμα.

Ἡ γ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\gamma = \frac{T}{m} \qquad (3)$$

Ἐπίσης

$$T = \eta N \qquad (4)$$

ὅπου: η ὁ συντελεστής τριβῆς.

Οἱ ἐξισώσεις (3) καί (4) μετασχηματίζονται στίς:

$$\gamma = \frac{\eta N}{m} \qquad (5)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (5) προκύπτει:

$$t_{μεγ} = \frac{\upsilon_o\, m}{\eta N} \qquad (6)$$

καί ἀπό τίς ἐξισώσεις (2) καί (5) προκύπτει:

$$s_{μεγ} = \frac{\upsilon^2{}_o\, m}{2\, \eta N} \qquad (7)$$

Ἔλεγχος διαστάσεων.

Μέ σκοπό νά δοῦμε, ἄν ἀπό πλευρᾶς διαστάσεων, εἶναι ὀρθές οἱ ἐξισώσεις (6) καί (7), κάνουμε τόν ἀκόλουθο ἔλεγχο:

$[s_{\mu\epsilon\gamma}] = [L]$
$[t_{\mu\epsilon\gamma}] = [T]$
$[\upsilon_o] = [L]\cdot[T^{-1}]$
$[m] = [M]$
$[\eta] =$ ἀδιάστατο μέγεθος
$[N] =$ δύναμη $= [M]\cdot[L][T^{-2}]$

Ἑπομένως:

$$\left|\frac{\upsilon_o m}{\eta N}\right| = \frac{[L]\cdot[T^{-1}][M]}{[M][L][T^{-2}]} = [T] = \left|t_{\mu\epsilon\gamma}\right|$$

καί
$$\left|\frac{\upsilon^2_o m}{2\eta N}\right| = \frac{[L]^2[T^{-2}][M]}{[M][L][T^{-2}]} = [L] = \left|s_{\mu\epsilon\gamma}\right|$$

Ἀπό τόν ἔλεγχο λοιπόν, προκύπτει ὅτι οἱ ἐξισώσεις, ἀπό πλευρᾶς διαστάσεων, εἶναι ὀρθές.

Σύστημα S.I.

$$\upsilon_o = 30\ \text{m/s},\quad m = 2\ \text{kg},\quad \eta = 0{,}2$$
$$N = B = m\,g = 2\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 19{,}62\ \text{N}.$$

Ἀντικατάσταση.

$$t_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{30\cdot 2}{0{,}2\cdot 19{,}62} \simeq 15{,}3\ \text{s}$$

$$s_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{30^2\cdot 2}{2\cdot 0{,}2\cdot 19{,}62} \simeq 229\ \text{m}.$$

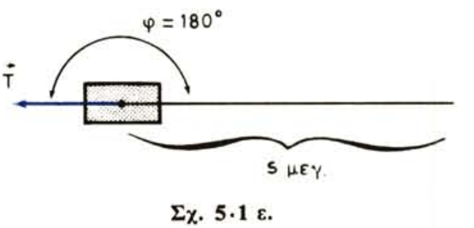
Ἀπάντηση: Ὥστε θά σταματήσει μετά ἀπό χρόνο 15,3 s καί θά διανύσει μέχρι τότε διάστημα 229 m.

β) **Ὑπολογισμός τῆς ἀπώλειας ἐνεργείας.**

Ἡ ἐνέργεια πού χάθηκε εἶναι ἀκριβῶς ἡ κινητική ἐνέργεια, πού εἶχε ἀρχικά τό σῶμα. Αὐτό, γιατί ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος τελικά μηδενίσθηκε. Ἡ ἀπώλεια ἑπομένως ἐνεργείας θά εἶναι:

$$A = \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2_o$$

Τήν ἴδια τιμή βρίσκουμε, ἄν ὑπολογίσουμε τό ἔργο τῆς τριβῆς, τό ὁποῖο εἶναι **καταναλισκόμενο ἔργο,** ἐπειδή ἡ τριβή $\vec{T}$ καί ἡ μετατόπιση τοῦ σώματος σχηματίζουν γωνία 180° (σχ. 5 · 1 ε).



Σχ. 5·1 ε.

Ἀπόδειξη : $A_{τριβ} = T\, s_{μεγ}$ συν $180° = -T\, s_{μεγ}$
ὅπου: $A_{τριβ}$ = ἔργο τριβῆς.

Ἀλλά $$T = η N \qquad (4)$$

καί $$s_{μεγ} = \frac{υ^2_o\, m}{2\, ηN} \qquad (7)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις αὐτές προκύπτει:

$$A_{τριβ} = -\,η\, N\, \frac{υ^2_o m}{2\, ηN} = -\,\frac{1}{2}\, m\, υ^2_o$$

Σύστημα S. I.

$$m = 2 \text{ kg},\ υ_o = 30 \text{ m/s}.$$

Ἀντικατάσταση : $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30^2 = 900$ joule.

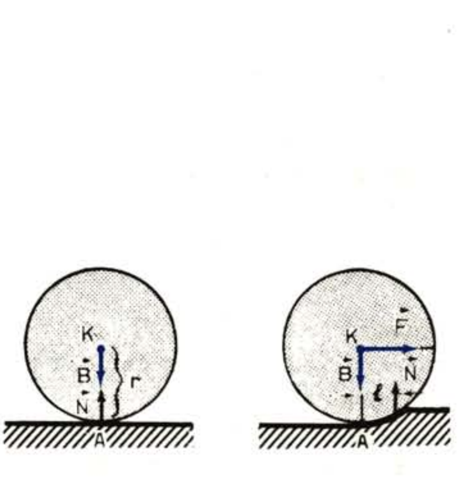
Σημείωση: Ἡ ἐνέργεια πού χάνεται ἀπό τίς δυνάμεις τριβῆς μετατρέπεται σέ **θερμότητα.**

5 · 2 ΤΡΙΒΗ ΚΥΛΙΣΕΩΣ

Ὁ κύλινδρος τοῦ σχήματος 5 · 2 α (α) ἰσορροπεῖ· Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου $\vec{N}$ καί τό βάρος $\vec{B}$ εἶναι δυνάμεις πού ἔχουν κοινό φορέα, ἀντίθετη φορά καί τό ἴδιο μέτρο, καί γι' αὐτό ὁ κύλινδρος ἰσορροπεῖ.

Στή θέση β, ἡ δύναμη $\vec{F}$ τείνει νά μετακινήσει τόν κύλινδρο πρός τά δεξιά. Συγκεκριμένα, ἡ δύναμη αὐτή $\vec{F}$ ἐξασκεῖ ροπή ὡς πρός τό σημεῖο στηρίξεως Α τοῦ κυλίνδρου καί ἡ ροπή αὐτή τείνει νά στρέψει τόν κύλινδρο γύρω ἀπό τό Α (κύλιση κυλίνδρων). Προκαλεῖ ὅμως ἔτσι μιά παραμόρφωση τοῦ δαπέδου καί μετατόπιση τῆς ἀντιδράσεως $\vec{N}$ δεξιότερα ἀπό τήν ἀρχική θέση. Δημιουργεῖται ἔτσι ἕνα ζεῦγος δυνάμεως $\vec{N}$, $\vec{B}$, τοῦ ὁποίου ἡ ροπή ἀντιτίθεται στήν κύλιση τοῦ κυλίνδρου, δηλαδή ἀντιτίθεται στή ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό σημεῖο Α. Ὅσο μεγαλώνει ἡ δύναμη $\vec{F}$, μεγαλώνει ἡ ροπή της $F\,r$ καί παράλληλα μεγαλώνει ἡ ἀπόσταση l. Ἔτσι ἔχουμε ἰσορροπία ροπῶν:

$$F\,r = N\,l = B\,l \qquad (1)$$



(α) (β)

Σχ. 5·2 α.

Γιά κάποια ὅμως τιμή τῆς $\vec{F} = \vec{F_o}$ τό l παίρνει τήν πιό μεγάλη τιμή. Γιά τιμή τοῦ $\vec{F} > \vec{F_o}$ ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ἐξουδετερώνει τή ροπή τῆς $\vec{N}$.

Ἡ μεγαλύτερη τιμή, πού μπορεῖ νά πάρει ἡ ἀπόσταση l ($l_{\mu\epsilon\gamma}$) ὀνομάζεται **συντελεστής τριβῆς κυλίσεως** καί ἰσχύει:

$$F_o\, r = N\, l_{\mu\epsilon\gamma} \qquad (2)$$

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι, ὅταν τά σώματα κυλοῦν, ὑπάρχει ροπή πού τείνει νά ἐξουδετερώσει τήν κύλιση αὐτή. Ὑπάρχει ἑπομένως **τριβή κυλίσεως.**

Τήν ἐξίσωση (2) μποροῦμε νά τή μετατρέψουμε στή μορφή:

$$\boxed{F_o = \frac{l_{\mu\epsilon\gamma}}{r}\, N} \qquad (3)$$

Ἄν στόν ἄξονα ἑνός κυλίνδρου πού κυλίεται ἐξασκήσουμε δύναμη $\vec{F}$ ἴση καί ἀντίθετη μέ τήν $\vec{F_o}$, ὁ κύλινδρος, ἰσορροπεῖ, δηλαδή ὁ ἄξονάς του κινεῖται ἰσοταχῶς.

— Μέ τόν τύπο (3) **μποροῦμε νά παραστήσουμε τήν τριβή κυλίσεως σάν τριβή ὀλισθήσεως.** Ἔτσι:

Γιά τήν **ὀλίσθηση** ἰσχύει ὁ τύπος: $T = \eta N$

Γιά τήν **κύλιση** ἰσχύει ὁ τύπος: $F_o = \dfrac{l_{\mu\epsilon\gamma}}{r} N.$

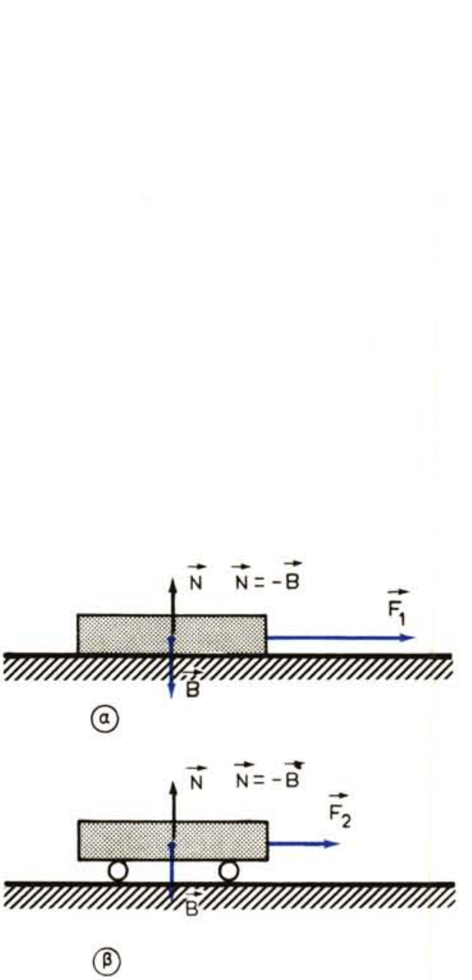
Θεωρώντας τήν F_o ἀντίστοιχη τῆς T καί τό $\dfrac{l_{\mu\epsilon\gamma}}{r}$ ἀντίστοιχο τοῦ η, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι **ἡ τριβή κυλίσεως ἀντιμετωπίζεται σάν τριβή ὀλισθήσεως.**

Π.χ. Ἔστω δύο σώματα μέ τό ἴδιο βάρος (σχ. 5·2 β). Τό ἕνα ὀλισθαίνει στό δάπεδο, ἐνῶ τό ἄλλο κυλᾶ (ἔχει τροχούς). Καί τά δύο κινοῦνται ἰσοταχῶς, γιατί ἐξασκοῦνται οἱ δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$, οἱ ὁποῖες ἰσορροποῦν, ἡ πρώτη τήν **τριβή ὀλισθήσεως** καί ἡ δεύτερη τήν **τριβή κυλίσεως.**

Ἰσχύουν ἑπομένως οἱ σχέσεις:

Στήν περίπτωση ὀλισθήσεως: $F_1 = \eta N$

Στήν περίπτωση κυλίσεως: $F_2 = \dfrac{l_{\mu\epsilon\gamma}}{r} N$



Σχ. 5·2 β.
Ἡ τριβή ὀλισθήσεως εἶναι πολύ μεγαλύτερη ἀπό τήν τριβή κυλίσεως.

Ἐπειδή τό πηλίκον $\frac{l_{\mu\epsilon\gamma}}{r}$ εἶναι πάντοτε πολύ μικρότερο ἀπό τό η, ἕπεται ὅτι ἡ $F_2 < F_1$.

Δηλαδή, **ἡ τριβή κυλίσεως ἐξουδετερώνεται εὔκολα** καί γι' αὐτό βρῆκαν τόσο μεγάλη ἐφαρμογή οἱ τροχοί.

Σημείωση. Ἀποδεικνύεται πειραματικά ὅτι ἡ τριβή ὀλισθήσεως εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ταχύτητα, ἐνῶ ἡ τριβή κυλίσεως μεγαλώνει μέ τήν ταχύτητα τοῦ σώματος πού κυλίεται.

α) **Τί συμβαίνει μέ τήν κίνηση ἑνός ὀχήματος.** Ἔστω ὅτι ἕνα αὐτοκίνητο ἀκινητεῖ. Μέ τή λειτουργία τῆς μηχανῆς ἐξασκοῦμε προωθητική δύναμη στίς ρόδες του, ἡ ὁποία ἀπό τή μιά μεριά ἐξουδετερώνει τήν τριβή κυλίσεως $\left(\frac{l_{\mu\epsilon\gamma}}{r} N\right)$ καί ἀπό τήν ἄλλη τήν ἐπιταχύνει. Ὅμως ἡ τριβή κυλίσεως μεγαλώνει μέ τήν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου. Ὅταν ἡ δύναμη προωθήσεως γίνει ἴση μέ τήν τριβή κυλίσεως $\left(\frac{l_{\mu\epsilon\gamma}}{r} N\right)$, τότε τό αὐτοκίνητο κινεῖται σέ ὁριζόντιο δρόμο ἰσοταχῶς. Ἄν μηδενίσουμε τή δύναμη προωθήσεως, τό αὐτοκίνητο ἀφοῦ διανύσει ἕνα διάστημα, θά σταματήσει. Ἄν ὅμως πατήσουμε τό φρένο, οἱ τροχοί τοῦ αὐτοκινήτου δέν περιστρέφονται, τά λάστιχά του ὀλισθαίνουν στό ὁδόστρωμα· οἱ τριβές ὀλισθήσεως ἀνάμεσα στά λάστιχα καί στό ὁδόστρωμα εἶναι πολύ μεγάλες (μεγάλος συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως) καί τό αὐτοκίνητο σταματᾶ πολύ γρήγορα (φρενάρει).

β) **Καταναλισκόμενη ἰσχύς ἀπό αὐτοκίνητο πού κινεῖται ἰσοταχῶς.** Ὅπως ἀναφέραμε, ὅταν ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται ἰσοταχῶς, ἡ μηχανή του παρέχει ἰσχύ γιά νά ἐξουδετερώσει τήν ἀπώλεια ἰσχύος, πού ὀφείλεται στήν τριβή κυλίσεως.

Ὀνομάζουμε N τήν ἰσχύ τῆς μηχανῆς, T τήν τριβή κυλίσεως καί υ τήν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου.

Τό ἔργο A πού καταναλίσκεται ἀπό τήν τριβή, θά εἶναι:

$$A = T x \qquad (1)$$

ὅπου: x ἡ ἀπόσταση κατά τήν ὁποία μετακινεῖται τό αὐτοκίνητο σέ χρόνο t.

Ἂν διαιρέσουμε τήν ἐξίσωση (1) μέ τό χρόνο t πού πέρασε, θά ἔχουμε:

$$\frac{A}{t} = T\,\frac{x}{t} \qquad (2)$$

Ἀλλά $\frac{A}{t} = N =$ ἰσχύς τῆς μηχανῆς,

$\frac{x}{t} = \upsilon =$ ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου.

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (2) γίνεται:

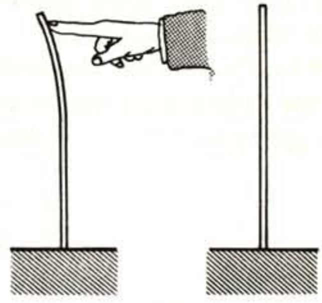
$$\boxed{N = T\,\upsilon}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

6 · 1 ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΩΜΑΤΑ – ΠΛΑΣΤΙΚΑ ΣΩΜΑΤΑ

1) Ἄν σπρώξουμε ἕνα χαλύβδινο ἔλασμα (σχ. 6 · 1 α) μέ τό δάχτυλο τοῦ χεριοῦ μας, παρατηροῦμε ὅτι τό ἔλασμα παραμορφώνεται. Ἄν σταματήσουμε νά τό σπρώχνουμε, τό ἔλασμα ἐπανέρχεται στήν ἀρχική του θέση.



Σχ. 6·1 α.
Τό ἔλασμα ἐπανέρχεται στήν ἀρχική του θέση, ἄν σταματήσουμε νά τό σπρώχνουμε.

2) Ἄν πάρουμε μιά σφαίρα ἀπό πλαστελίνη καί τή συμπιέσουμε μέ τό δάχτυλό μας (σχ. 6 · 1 β), αὐτή παραμορφώνεται καί ἡ παραμόρφωση παραμένει καί ἀφοῦ σταματήσουμε νά τή συμπιέζουμε.

Ἀπό τά παραπάνω πειράματα, προκύπτει ὅτι τά σώματα παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά στίς παραμορφώσεις.

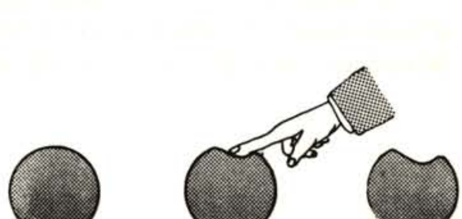
Τά σώματα, ὅπως τό ἔλασμα στό πρῶτο πείραμα, πού ὅταν πάψουν νά ὑπάρχουν οἱ δυνάμεις πού προκαλοῦν παραμόρφωση, ἐπανέρχονται στό ἀρχικό τους σχῆμα, ὀνομάζονται **ἐλαστικά σώματα.** Τά σώματα, ὅπως ἡ σφαίρα τοῦ δεύτερου πειράματος, τά ὁποῖα διατηροῦν τήν παραμόρφωση καί μετά τήν ἀπομάκρυνση τῆς δυνάμεως πού τήν προκάλεσε, ὀνομάζονται **πλαστικά σώματα.**

6 · 2 ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΧΟΥΚ (HOOKE)

Ὁ νόμος τοῦ Χούκ ἀφορᾶ τά ἐλαστικά σώματα καί διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Οἱ παραμορφώσεις στά ἐλαστικά σώματα εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ἐξασκούμενες δυνάμεις ἤ ροπές.

Ἔτσι στό σχῆμα 6 · 2 α, παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἐπιμηκύνσεις στό ἐλατήριο (α) καί στό ἔλασμα (β) ἤ ἡ γωνία στροφῆς φ τοῦ ἀλτήρα ΑΒ, εἶναι ἀνάλογες πρός τίς δυνάμεις ἤ τίς ροπές, ἀντίστοιχα, πού τίς προκαλοῦν.



Σχ. 6·1 β.
Ἡ παραμόρφωση πού προκάλεσε τό δάκτυλο, παραμένει καί ἀφοῦ σταματήσουμε νά τό συμπιέζουμε.

Ἰσχύει λοιπόν:

$$F = Dx$$

$$M = \overset{*}{D}\varphi$$

ὅπου: D ἡ κατευθύνουσα δύναμη τοῦ ἐλατηρίου ἤ τοῦ ἐλάσματος καί D* ἡ κατευθύνουσα ροπή τοῦ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου

α) **Ὁ Νόμος τοῦ Χούκ στόν ἑλκυσμό.** Στό σχῆμα 6 · 2 β ἕνα σύρμα χαλύβδινο στερεώνεται στή μιά του ἄκρη. Στήν ἄλλη ἄκρη ἐξασκεῖται μιά δύναμη $\vec{F}$, ἡ ὁποία τό ἐπιμηκύνει κατά x.

Ἡ ἐπιμήκυνση ἑνός σύρματος ὀνομάζεται **ἑλκυσμός.** Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἐπιμηκύνσεως x στόν ἑλκυσμό, χρησιμοποιοῦμε τόν τύπο:

$$x = \frac{1}{E}\,\frac{F}{S}\,l$$

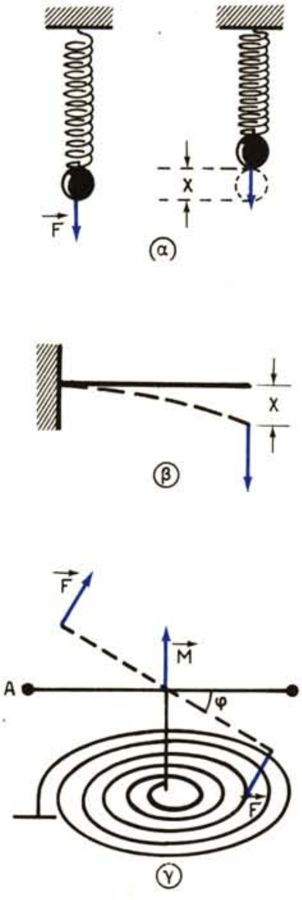
ὅπου: **D ἡ κατευθύνουσα δύναμη σύρματος,** F ἡ δύναμη πού προκαλεῖ τόν ἑλκυσμό, l τό μῆκος τοῦ σύρματος, S τό ἐμβαδόν τῆς διατομῆς τοῦ σύρματος καί E ὁ συντελεστής πού ὀνομάζεται **μέτρο ἐλαστικότητας** ἤ **μέτρο τοῦ Γιούγκ** καί χαρακτηρίζει τό ὑλικό.

Γιά τό χάλυβα τό μέτρο ἐλαστικότητας εἶναι $2 \cdot 10^6$ kp/cm^2.

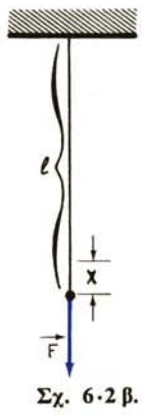
Σημείωση: Τά ὑγρά καί τά ἀέρια εἶναι ἐλαστικά, γιατί ὅταν αὐξήσουμε τήν ἀσκούμενη σ' αὐτά πίεση, ὁ ὄγκος τους μικραίνει καί ὅταν τά ἐπαναφέρουμε στίς προηγούμενες συνθῆκες πιέσεως, ὁ ὄγκος τους ἐπανέρχεται στήν ἀρχική του τιμή.

β) **Ὅριο ἐλαστικότητας — Ὅριο θραύσεως.** Ὁ νόμος τοῦ Χούκ ἰσχύει γιά ὁρισμένα ὅρια παραμορφώσεων. Ἄν ὑπερβοῦμε αὐτά τά ὅρια, τότε, μετά τήν παραμόρφωση, τά σώματα δέν ἐπανέρχονται στήν ἀρχική τους θέση. Τό ὅριο αὐτό παραμορφώσεως ὀνομάζεται **ὅριο ἐλαστικότητας.**

Ἄν ἐπιμείνουμε στήν παραμόρφωση τῶν ἐλαστικῶν σωμάτων, κάποτε θραύονται. Τό ἀνώτατο αὐτό ὅριο παραμορφώσεως ὀνομάζεται **ὅριο θραύσεως.**



Σχ. 6·2 α.



Σχ. 6·2 β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

7 · 1 ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ἡ ὕλη ἐμφανίζεται σέ τρεῖς καταστάσεις, τή στερεή, τήν ὑγρή καί τήν ἀέρια.

Στή στερεή κατάσταση, κάθε σῶμα ἔχει ὁρισμένο σχῆμα καί σταθερό ὄγκο.

Στήν ὑγρή κατάσταση, κάθε σῶμα ἔχει σταθερό ὄγκο, δέν ἔχει ὅμως ὁρισμένο σχῆμα, ἀλλά παίρνει τό σχῆμα τοῦ δοχείου στό ὁποῖο τοποθετεῖται.

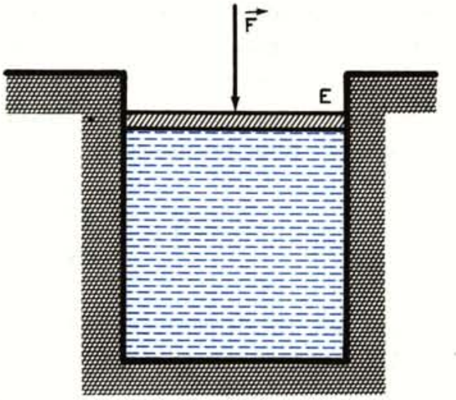
Στήν ἀέρια κατάσταση, κάθε σῶμα οὔτε ὁρισμένο σχῆμα ἔχει, οὔτε σταθερό ὄγκο, ἀλλά τείνει συνέχεια νά καταλάβει μεγαλύτερο ὄγκο.

Τά ὑγρά καί τά ἀέρια λέγονται καί **ρευστά,** γιατί τό σχῆμα τους ἀλλάζει εὔκολα.

Σ' αὐτό τό Κεφάλαιο θά μᾶς ἀπασχολήσουν τά ὑγρά.

Θά κάνομε πρῶτα ἕνα πείραμα:

Μέσα σ' ἕνα δοχεῖο (σχ. 7 · 1), πού ἔχει τοιχώματα πολύ στερεά, ρίχνουμε νερό καί τό κλείνουμε μέ ἕνα ἔμβολο Ε. Ἄν ἐξασκήσουμε δύναμη $\vec{F}$ στό ἔμβολο, θά παρατηρήσουμε ὅτι δέν μποροῦμε νά ἐλαττώσουμε τόν ὄγκο τοῦ νεροῦ, ἄν ἡ δύναμη δέν εἶναι ὑπερβολικά μεγάλη. Τό ἴδιο παρατηροῦμε ἄν ἀντικαταστήσουμε τό νερό μέ ἄλλο ὑγρό. Γι' αὐτό λέμε ὅτι τά ὑγρά εἶναι **ἀσυμπίεστα.**



Σχ. 7·1.

Στήν πραγματικότητα τά ὑγρά δέν εἶναι ἐντελῶς ἀσυμπίεστα. Τά ὑγρά πού δέν συμπιέζονται οὔτε στό ἐλάχιστο, ὀνομάζονται **ἰδανικά ὑγρά** καί σάν ἰδανικά θά θεωροῦμε τά πραγματικά ὑγρά κατά τή θεωρητική ἐξέταση τῶν φαινομένων τῆς Ὑδροστατικῆς.

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι τά ὑγρά εἶναι: α) **Ἀσυμπίεστα.** β) **Ρευστά.**

7 · 2 ΠΙΕΣΗ

Στό σχῆμα 7 · 1 ἡ δύναμη F ἐνεργεῖ πάνω στό ἔμβολο καί μεταβιβάζεται στό ὑγρό.

Ὅταν στεκόμαστε ὄρθιοι, τό βάρος μας μεταβιβάζεται στά πέλματα, τά ὁποῖα ὠθοῦν τό δάπεδο [σχ. 7 · 2 α (α)].

Ὅταν χτυποῦμε ἕνα καρφί, τότε αὐτό μεταφέρει μιά δύναμη στό ἀντικείμενο πού πρόκειται νά καρφωθεῖ [σχ. 7 · 2 α (β)].

Σ' ὅλες αὐτές τίς περιπτώσεις λέμε ὅτι **τό ἕνα σῶμα ἐξασκεῖ πίεση πάνω στό ἄλλο.**

Ὅμως τό ἀποτέλεσμα αὐτῶν τῶν δυνάμεων συνήθως δέν ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τή δύναμη, ἀλλά καί ἀπό τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, στήν ὁποία ἐνεργεῖ ἡ δύναμη. Ἔτσι βυθίζεται στό χιόνι ὅποιος φορᾶ παπούτσια (μικρό ἐμβαδόν ἐπιφάνειας), δέν βυθίζεται ὅμως ἄν φορᾶ χιονοπέδιλα (μεγάλο ἐμβαδόν ἐπιφάνειας).

Ἡ ἐξήγηση εἶναι ὅτι, ἐνῶ τό βάρος, ἑπομένως καί ἡ δύναμη πού μεταφέρεται ἀπό τά πόδια στό χιόνι, εἶναι ἡ ἴδια καί στίς δυό περιπτώσεις, ἀλλάζει κάθε φορά τό ἐμβαδόν τῆς κοινῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἀνθρώπου καί τοῦ χιονιοῦ.

Γιά τήν ἐξήγηση φαινομένων σάν τό παραπάνω εἰσάγεται ἕνα ἄλλο φυσικό μέγεθος, τό ὁποῖο ὀνομάζεται **πίεση.**

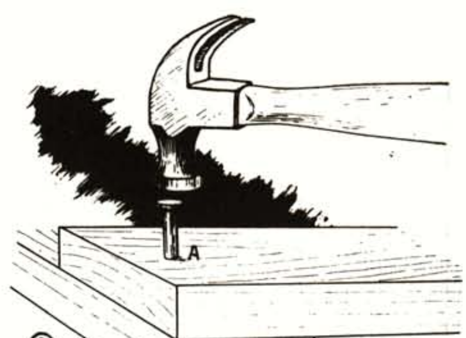
Ὀνομάζομε **πίεση P σέ ἕνα σημεῖο μιᾶς ἐπιφάνειας τό πηλίκον τῆς δυνάμεως ΔF, πού ἀσκεῖται κάθετα σέ στοιχειώδη ἐπιφάνεια ΔS** (ἡ ὁποία περιλαμβάνει τό σημεῖο) **διά τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς στοιχειώδους ἐπιφάνειας, ὅταν τό ἐμβαδόν αὐτό τείνει στό μηδέν.** Στήν περίπτωση αὐτή, δηλαδή ὅταν τό ΔS τείνει στό μηδέν, τό πηλίκον ΔF/ΔS παριστάνεται μέ τό σύμβολο dF/dS. Θά εἶναι ἑπομένως:

$$\boxed{P = \frac{dF}{dS}}$$

Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν πίεση, πού ἀσκεῖται σ' ὁλόκληρη τήν ἐπιφάνεια S, πάνω στήν ὁποία ἐπιδρᾶ κάθετα δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 7 · 2 β), ὑποθέτουμε, συνήθως, ὅτι ἡ δύναμη κατανέμεται ὁμοιόμορφα σ' ὅλη τήν ἐπιφάνεια ὁπότε ἡ πίεση βρίσκεται ἄν διαιρέσουμε τήν F διά τῆς S, δηλαδή:

$$\boxed{P = \frac{F}{S}}$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή προκύπτει ὅτι, ὅσο πιό μικρή εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἐπαφῆς, τόσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ



Σχ. 7·2 α.
α) Ὁ ἄνθρωπος ἐξασκεῖ πίεση στό δάπεδο.
β) Τό καρφί ἀσκεῖ μεγάλη πίεση στό δάπεδο γιατί ἔχει μικρό ἐμβαδό ἐπιφανείας στό Α.

πίεση πού ἐξασκεῖται. Ἡ μεγάλη πίεση λοιπόν εἶναι ἡ αἰτία πού ὁ ἄνθρωπος, ὅταν φορᾶ παπούτσια, βυθίζεται στό χιόνι.

— **Μονάδες πιέσεως.**

Σύστημα S.I.

$$P = \frac{F}{S} = 1\ \frac{N}{m^2}$$

Τεχνικό σύστημα.

$$P = \frac{F}{S} = 1\ \frac{kp}{m^2}$$

— **Ἄλλες μονάδες πιέσεως:**

α) **Σύστημα C.G.S.**

$$P = \frac{F}{S}\ 1\ dyn/cm^2$$

β) $1\ at = 1$ *τεχνική ἀτμόσφαιρα* $= 1\ \frac{kp}{cm^2}$

γ) $1\ Atm = 1$ *φυσική ἀτμόσφαιρα* $= 1{,}0336\ at$

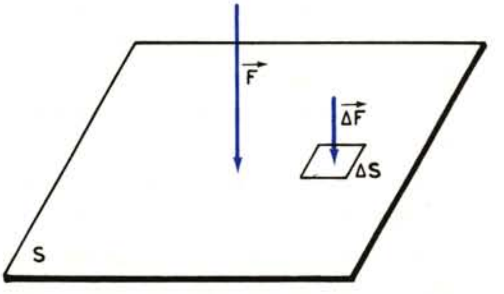
[Ὁ ὁρισμός τῆς φυσικῆς ἀτμόσφαιρας γίνεται στήν παράγραφο 8 · 2 (β)].

δ) *1 torr ἤ 1 mmHg. Ἡ μονάδα αὐτή ἰσοῦται μέ τήν πίεση πού ἀσκεῖ στήλη ὑδραργύρου ὕψους 1 mm.*

ε) $1\ Bar = 10^{5N}/m^2$ *καί* $1m\ Bar = {}^1/1000\ Bar$.

Μεταξύ τῶν μονάδων at, bar ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$1\ at = 0{,}981\ bar$ ἤ $1\ bar = 1{,}019\ at$.



Σχ. 7·2 β.

Ἐφαρμογή.

Τό πέλμα ἑνός ἀνθρώπου βάρους 80 kp ἔχει ἐπιφάνεια 40 cm^2. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ στό δάπεδο, ὅταν ὁ ἄνθρωπος στηρίζεται μέ τό ἕνα πόδι.

Λύση :

Σύμφωνα μέ τόν τύπο $P = \frac{F}{S}$ ἔχουμε :

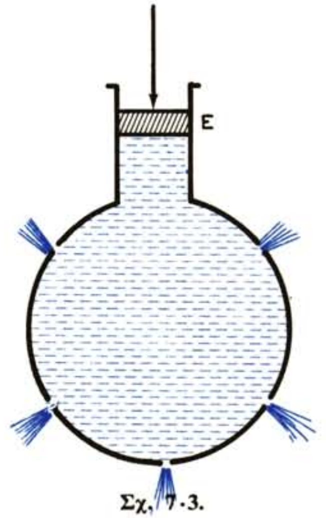
$$P = \frac{F}{S} = \frac{80\ kp}{40\ cm^2} = 2\ kp/cm^2 = 2\ at.$$

Ἑπομένως στό δάπεδο ἐξασκεῖται πίεση 2 at.

Φυσικό εἶναι, ὅταν ὁ ἄνθρωπος στηρίζεται μέ τά δύο πόδια, ἡ πίεση νά γίνει 1 at ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι τό ἐμβαδόν τῶν δύο πελμάτων θά εἶναι τό ἴδιο.

7 · 3 ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΟΥ ΕΞΑΣΚΟΥΝ ΤΑ ΥΓΡΑ

Ἄν ἕνα δοχεῖο μέ τρύπες (σχ. 7 · 3) τό γεμίσουμε μέ ὑγρό, καί ἐξασκήσουμε πίεση μέ τό ἔμβολο Ε, θά διαπιστώσουμε ὅτι τό ὑγρό ἐκτινάσσεται ἀπό τίς τρύπες τοῦ δοχείου πάντοτε **κάθετα** πρός τήν ἐπιφάνειά του.



Σχ. 7·3.
Τό νερό ἐκτινάσσεται κάθετα πρός τά τοιχώματα τοῦ δοχείου.

Γενικά γιά τά ὑγρά ἰσχύει ἡ θεμελιώδης ἀρχή τῆς Ὑδροστατικῆς, ἡ ὁποία λέει ὅτι:

Οἱ δυνάμεις, πού ἐξασκοῦν τά ὑγρά πάνω στίς ἐπιφάνειες, εἶναι πάντοτε κάθετες σ' αὐτές.

7 · 4 ΕΙΔΗ ΠΙΕΣΕΩΝ ΠΟΥ ΕΞΑΣΚΟΥΝ ΤΑ ΥΓΡΑ

Ὑδροστατική πίεση.

Στό σχῆμα 7 · 4 α ἕνα δοχεῖο ἔχει ὑγρό, τό ὁποῖο ἰσορροπεῖ. Ἕνα ἔμβολο Ε ἐξασκεῖ πίεση στό ὑγρό $\left(P = \dfrac{F}{S}\right)$. Τό μανόμετρο Μ (ἕνα ὄργανο πού μετρᾶ τήν πίεση) μᾶς δείχνει τήν πίεση, πού ἐξασκεῖται στό σημεῖο $\vec{A}$. Ἄν μηδενίσουμε τή δύναμη $\vec{F}$ καί θεωρήσουμε τό ἔμβολο χωρίς βάρος, τότε τό μανόμετρο μᾶς δείχνει κάποια ἔνδειξη, ἑπομένως κάποια πίεση. Ἡ πίεση αὐτή **ὀφείλεται μόνο στό βάρος τοῦ ὑγροῦ** καί ὀνομάζεται **ὑδροστατική πίεση.**

Ἄν ἡ $\vec{F}$ λάβει κάποια τιμή, τότε ἡ ἔνδειξη τοῦ μανομέτρου Μ μεγαλώνει. Αὐτό γίνεται, γιατί προστίθεται στήν ὑδροστατική πίεση στό σημεῖο Α καί ἡ πίεση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, ἡ ὁποία μεταβιβάζεται ἀναλλοίωτη μέσω τοῦ ὑγροῦ σ' ὅλα τά σημεῖα του (ἀρχή τοῦ Pascal, παράγρ. 7 · 7).

Ἄν θεωρήσουμε ὅτι πάνω ἀπό τό ἔμβολο Ε ὑπάρχει ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας, τότε ἡ ἔνδειξη τοῦ μανομέτρου εἶναι πιό μεγάλη ἀπό τήν ὑδροστατική πίεση, γιατί σ' αὐτή (τήν ὑδροστατική πίεση), προστίθεται ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση, δηλαδή ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ ἡ ἀτμόσφαιρα στήν ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνεται ὅτι: **ἄν τοποθετήσουμε μιάν ἐπιφάνεια μέσα σέ ὑγρό πού ἰσορροπεῖ, τότε κάθε σημεῖο της δέχεται δυό εἰδῶν πιέσεις. Ἡ μιά εἶναι ἡ ἐξωτερική πίεση, πού ἐπικρατεῖ πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καί ἡ ὁποία μεταβι-**

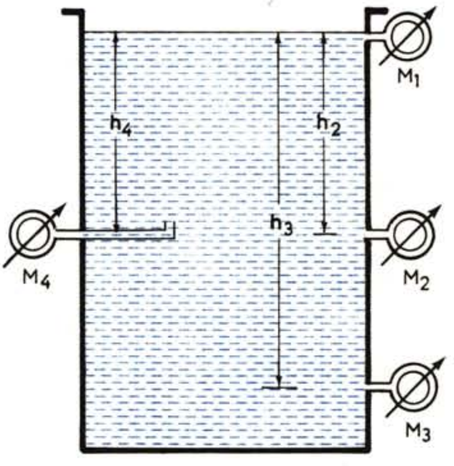
Σχ. 7·4 α.
Ἡ συνολική πίεση στό Α εἶναι ἄθροισμα τῆς Ὑδροστατικῆς πιέσεως καί τῆς πιέσεως πού προκαλεῖ ἡ δύναμη $\vec{F}$.

βάζεται ἀναλλοίωτη μέσω τοῦ ὑγροῦ σέ ὅλα τά σημεῖα του, καί ἡ ἄλλη εἶναι ἡ ὑδροστατική πίεση, ἡ ὁποία ὀφείλεται στό βάρος τοῦ ὑγροῦ.

α) **Θεμελιώδης νόμος τῆς Ὑδροστατικῆς.** Ὅπως ἀναφέραμε, ἡ πίεση ἡ ὁποία ὀφείλεται στό βάρος ἑνός ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ, ὀνομάζεται **ὑδροστατική πίεση.**

Διαπιστώνεται πειραματικά ὅτι, ὅσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ, τόσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ ὑδροστατική πίεση, πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό σ' αὐτό τό σημεῖο.

Ἔτσι στά μανόμετρα M_1, M_2, M_3 καί M_4 (σχ. 7·4β) ἔχουμε διάφορες ἐνδείξεις.



Σχ. 7·4β.
Ἡ ὑδροστατική πίεση μεγαλώνει μέ τό βάθος.

Τό μανόμετρο M_1 δείχνει τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Τά ἄλλα μανόμετρα δείχνουν τό ἄθροισμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, ἡ ὁποία γιά ὅλα τά μανόμετρα εἶναι ἴδια, καί τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως. Ἀπό τίς ἐνδείξεις τῶν μανομέτρων βγάζουμε τά ἑξῆς συμπεράσματα:

— Τά μανόμετρα M_4 καί M_2 δείχνουν τήν ἴδια ἔνδειξη καί ἑπομένως **στό ἴδιο βάθος ἐξασκεῖται ἡ ἴδια ὑδροστατική πίεση.**

— Τό μανόμετρο M_3 δείχνει μεγαλύτερη πίεση ἀπό τό M_2 καί ἑπομένως **ἡ ὑδροστατική πίεση μεγαλώνει μέ τό βάθος.**

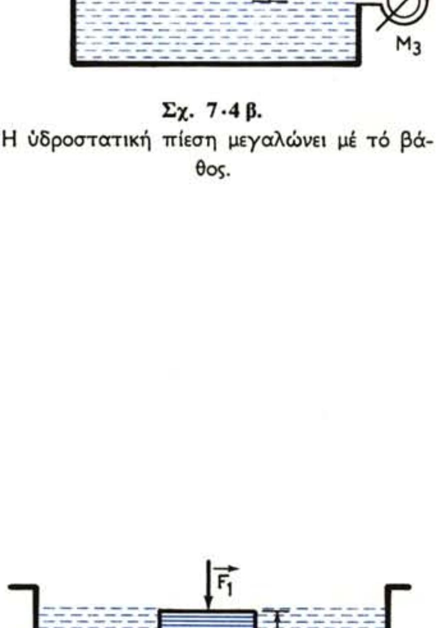
Θά ἀποδείξουμε παρακάτω ὅτι ἡ ὑδροστατική πίεση δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{P = \varepsilon h}$$

ὅπου: P εἶναι ἡ ὑδροστατική πίεση σέ κάποιο σημεῖο ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ, ε τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑγροῦ καί h ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ.

Ἀπόδειξη τοῦ τύπου: Στό δοχεῖο τοῦ σχήματος 7·4γ ὑπάρχει ὑγρό. Φανταζόμαστε μιά κυλινδρική στήλη ὑγροῦ, πού ἔχει διατομή ἐμβαδοῦ S καί ὕψος h.

Ἡ στήλη αὐτή ἰσορροπεῖ. Ἑπομένως οἱ δυνάμεις κατά τόν κατακόρυφο ἄξονα θά ἔχουν συνισταμένη μηδέν. Οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι: 1) Τό βάρος τῆς στήλης $\vec{B}$. 2) Ἡ δύναμη $\vec{F_2}$, ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ τό γινόμενο $P_2 \cdot S$, ὅπου P_2 ἡ πίεση πού μεταφέρεται ἀπό τό ὑγρό στήν ἐπιφάνεια S. Ἡ πίεση αὐτή εἶναι τό ἄθροι-



Σχ. 7·4γ.

σμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως P_1 καί τῆς ὑδροστατικῆς P:

$$P_2 = P_1 + P \qquad (1)$$

3) Ἡ δύναμη F_1 πού ὀφείλεται στήν ἀτμοσφαιρική πίεση καί ἡ ὁποία εἶναι:

$$\vec{F}_1 = P_1 S$$

Ἑπομένως:

$$B + F_1 = F_2 \qquad (2)$$

Ἀλλά Βάρος = εἰδικό βάρος × ὄγκο

$$B = \varepsilon V$$

Ἐπίσης ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι: $V = S h$

$$\text{ἄρα} \quad B = \varepsilon S h \qquad (3)$$

Τά μέτρα τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ δίνονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= S P_1 \\ F_2 &= S P_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές τῶν B, F_1 καί F_2 τῶν ἐξισώσεων (3) καί (4) στήν ἐξίσωση (2) καί ἔχουμε:

$$\varepsilon S h + S P_1 = S P_2$$

$$P_2 = \varepsilon h + P_1 \qquad (5)$$

Ἐπειδή $P_2 = P + P_1$ προκύπτει:

$$P + P_1 = \varepsilon h + P_1$$

$$\text{ἤ} \quad P = \varepsilon h \qquad (6)$$

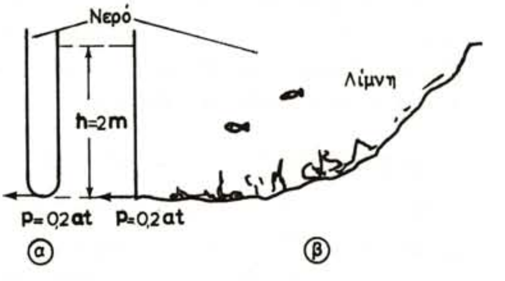
Ἀπό τήν ἐξίσωση (6) προκύπτει ὅτι **ἡ ὑδροστατική πίεση P ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ ἐπί τήν κατακόρυφη ἀπόσταση τοῦ σημείου, στό ὁποῖο αὐτή ἐξασκεῖται, ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ.**

Αὐτή ἡ πρόταση ἀποτελεῖ τόν **Θεμελιώδη Νόμο τῆς Ὑδροστατικῆς.**

Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως: $P = \varepsilon h$.

Ὅπως προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση $P = \varepsilon h$, ἡ ὑδροστατική πίεση ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό εἶδος τοῦ ὑγροῦ καί μάλιστα μόνο ἀπό τό εἰδικό βάρος του καί ἀπό τό βάθος, στό ὁποῖο ἐξασκεῖται. Δέν ἐξαρτᾶται καθόλου ἀπό τή μάζα τοῦ ὑγροῦ.

Ἔτσι τό νερό π.χ. σέ βάθος 2 m ἐξασκεῖ πίεση 0,2 kp/cm² εἴτε ἡ μάζα του εἶναι ἕνα kg τοποθετημένο σέ ἕνα μακρόστενο κυλινδρικό δοχεῖο, εἴτε εἶναι τό νερό μιᾶς ὁλόκληρης λίμνης (σχ. 7 · 4 δ).



Σχ. 7·4 δ.
Ἡ πίεση πού ἀσκεῖ τό ὑγρό τοῦ μακρόστενου σωλήνα (α) εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν πίεση τοῦ νεροῦ τῆς λίμνης στό ἴδιο βέβαια βάθος.

Ἐφαρμογή. Ἕνας δύτης βρίσκεται σέ βάθος 30 m κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας. Ἄν ἡ πυκνότητα τοῦ θαλασσινοῦ νεροῦ εἶναι $\rho = 1010\ kg/m^3$ καί ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι 1 at, νά ὑπολογισθεῖ ἡ πίεση πού δέχεται ὁ δύτης.

Λύση :

Ἡ πίεση πού δέχεται ὁ δύτης δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$P = \varepsilon\, h + P_{\varepsilon\xi}$$

ὅπου: $P_{\varepsilon\xi}$ εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση στήν περίπτωσή μας. Ἀλλά ε ἐδῶ εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ θαλασσινοῦ νεροῦ. Ἐπειδή ἡ πυκνότητα τοῦ θαλασσινοῦ νεροῦ εἶναι 1010 kg/m³, τό εἰδικό βάρος του θά εἶναι 1010 kp/m³ (Πίνακας 4 . 2 . 1). Ἐπίσης, h = 30 m καί $P_{\varepsilon\xi} = 1$ at = 1 kp/cm².

Ἀντικατάσταση :

$P = 1010\ kp/m^3 \cdot 30\ m + 1\ kp/cm^2 = 30\,300\ kp/m^2 +$ $+ 1\ kp/cm^2 = (3{,}03 + 1)\ kp/cm^2 = 4{,}03\ at = 3{,}96\ bar.$

β) **Θεμελιώδες θεώρημα τῆς Ὑδροστατικῆς.** Θά ἀποδείξουμε ὅτι **ἡ διαφορά πιέσεως ΔP σέ σημεῖα πού βρίσκονται σέ ἕνα ὑγρό καί παρουσιάζουν ὑψομετρική διαφορά h, δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :**

$$\Delta P = \varepsilon\, h$$

ὅπου: ε τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑγροῦ.

Ἀπόδειξη : Ἡ πίεση στό σημεῖο A εἶναι P_A καί ἰσοῦται μέ $P_A = \varepsilon\, h_1 + P_{\varepsilon\xi}$. Ἡ πίεση στό σημεῖο B εἶναι P_B καί ἰσοῦται μέ $P_B = \varepsilon\, h_2 + P_{\varepsilon\xi}$ (σχ. 7 · 4 ε).

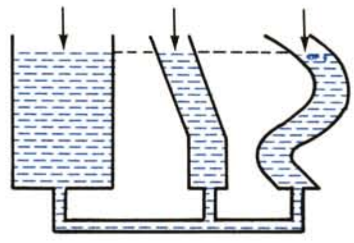
Ἡ **διαφορά πιέσεων :** $\Delta P = P_B - P_A = \varepsilon\, h_2 - \varepsilon\, h_1 =$ $= \varepsilon\,(h_2 - h_1) = \varepsilon\, h.$

Ἄν ΔP = 0, συνάγεται ὅτι h = 0. Δηλαδή τό σύνολο τῶν σημείων, τά ὁποῖα ἔχουν τήν ἴδια πίεση, **βρίσκεται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο** καί ἀντίστροφα, **δηλαδή στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέσα σέ ἕνα ὑγρό πού ἰσορροπεῖ ἐξασκεῖται ἡ ἴδια πίεση.**

Σχ. 7·4 ε.
Ἡ διαφορά πιέσεως $P_B - P_A = \varepsilon\, h$.

γ) **Ἐλεύθερη ἐπιφάνεια ὑγροῦ.** Ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια ὑγροῦ εἶναι ὁριζόντια. Αὐτό δικαιολογεῖται ἀπό τό γεγονός, ὅτι ἡ πίεση στήν ἐπιφάνεια ὑγροῦ πού ἠρεμεῖ εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση, δηλαδή σταθερή.

Ἀφοῦ λοιπόν ὅλα τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἔχουν τήν ἴδια πίεση, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, οἱ ὑψομετρικές διαφορές ὅλων τῶν σημείων τῆς ἐπιφάνειας, θά εἶναι μηδέν. Μέ ἄλλα λόγια: **τά σημεῖα τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ εἶναι στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο.**



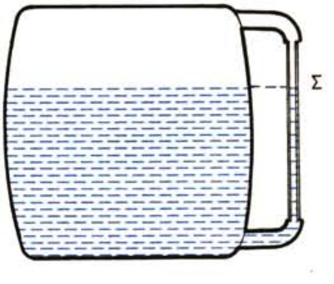
Σχ. 7·5 α.
Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα.

7·5 ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΟΥΝΤΑ ΔΟΧΕΙΑ

Στό σχῆμα 7·5 α τά διάφορα δοχεῖα συγκοινωνοῦν μεταξύ τους. Τό ὑγρό πού περιέχουν ἰσορροπεῖ. Διαπιστώνουμε ὅτι, **ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ βρίσκεται στό ἴδιο ὕψος σέ ὅλα τά δοχεῖα.**

Ἡ ἰδιότητα αὐτή ὀνομάζεται **ἀρχή τῶν συγκοινωνούντων δοχείων.**

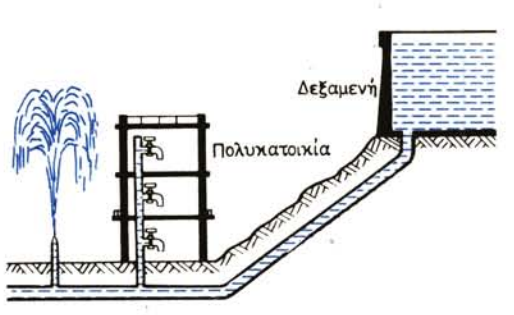
Ἡ ἐξήγηση εἶναι ἁπλή: Ἀφοῦ οἱ ἐλεύθερες ἐπιφάνειες τοῦ ὑγροῦ δέχονται τήν ἴδια ἐξωτερική πίεση, δηλαδή τήν ἀτμοσφαιρική πίεση, θά βρίσκονται ὅλες στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο.



Σχ. 7·5 β.
Ὑδροδείκτης.

— **Ἐφαρμογή τῶν συγκοινωνούντων δοχείων:**

1) **Ὑδροδείκτης.** Ὁ ὑδροδείκτης (σχ. 7·5 β) εἶναι ἕνας γυάλινος σωλήνας, πού συγκοινωνεῖ μ' ἕνα δοχεῖο, τό ὁποῖο χρησιμοποιεῖται σάν ἀποθήκη ὑγροῦ. Π.χ. τά ντεπόζιτα πετρελαίου, πού βρίσκονται κοντά στούς καυστῆρες τοῦ καλοριφέρ, ἔχουν ὑδροδεῖκτες. Τό ὑγρό βρίσκεται στό ἴδιο ὕψος στό γυάλινο σωλήνα καί στό ντεπόζιτο. Μποροῦμε ἑπομένως νά γνωρίζουμε τή στάθμη τοῦ ὑγροῦ στό ντεπόζιτο ἀπό τή στάθμη τοῦ ὑγροῦ μέσα στό διαφανή γυάλινο σωλήνα.



Σχ. 7·5 γ.

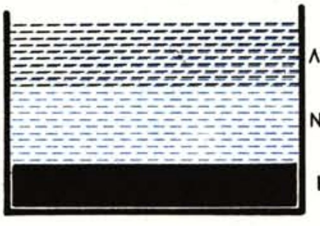
2) **Ὕδρευση.** Τά ὑδραγωγεῖα (σχ. 7·5 γ) εἶναι ἀποθῆκες νεροῦ καί συνήθως τοποθετοῦνται σέ ἀρκετό ὕψος, σημαντικά μεγαλύτερο ἀπό τά πιό ψηλά διαμερίσματα μιᾶς πόλεως. Ἑπομένως, ἡ δεξαμενή μπορεῖ νά ὑδρεύσει ὅλα τά σημεῖα τῆς πόλεως, γιατί τό νερό τείνει σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῶν συγκοινωνούντων δοχείων, νά φθάσει στό ἴδιο ὕψος μέ ἐκεῖνο τῆς δεξαμενῆς.

Σχ. 7·5 δ.
Ἀρτεσιανό φρέαρ.

3) **Ἀρτεσιανά φρέατα.** Στά ὑδροφόρα στρώματα (σχ. 7·5 δ) πολλές φορές ὑπάρχουν ποσότητες νεροῦ, οἱ ὁποῖες παρουσιάζουν σημαντικές ὑψομετρικές διαφορές. Ἄν, ἑπομένως, γίνει διάνοιξη σέ χαμηλό σημεῖο, τό νερό θ' ἀνέβει μέσα ἀπό τήν ὀπή καί μάλιστα θά ἐκτοξευθεῖ σέ ὕψος, δημιουργώντας ἔτσι πίδακα. Αὐτό εἶναι τό **ἀρτεσιανό φρέαρ.**

— **Ἰσορροπία ὑγρῶν πού δέν ἀναμιγνύονται.**

Τά τρία ὑγρά, ὑδράργυρος Hg, νερό καί λάδι δέν ἀναμιγνύονται (σχ. 7 · 5 ε). Ὅταν ἰσορροποῦν διατάσσονται ἔτσι, ὥστε τό βαρύτερο νά βρίσκεται χαμηλότερα.



Σχ. 7·5 ε.

— **Ἡ διαχωριστική ἐπιφάνεια τῶν ὑγρῶν εἶναι ὁριζόντιο ἐπίπεδο.**

Αὐτό ἀποδεικνύεται μέ τόν ἑξῆς συλλογισμό: Ἔστω τά σημεῖα Α καί Β, πού βρίσκονται στό ὑγρό Ι (σχ. 7 · 5 στ) καί τά Δ καί Γ πού βρίσκονται στό ὑγρό ΙΙ.

Οἱ πιέσεις στά διάφορα σημεῖα συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$P_A = P_B \quad \text{καί} \quad P_\Delta = P_\Gamma \qquad (1)$$

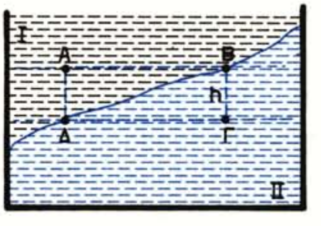
Ἡ διαφορά πιέσεων:

$$P_\Delta - P_A = \varepsilon_1 h \quad \text{καί} \quad \text{ἤ} \quad P_\Gamma - P_B = \varepsilon_2 h \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, h = 0$$

ὁπότε, ἤ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ἤ $h = 0$.



Σχ. 7·5 στ.
Ἡ διαχωριστική ἐπιφάνεια τῶν ὑγρῶν εἶναι ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

Ἐπειδή ὅμως τά ὑγρά ἔχουν διαφορετικό εἰδικό βάρος, πρέπει τό ὕψος h νά εἶναι μηδέν, δηλαδή τά σημεῖα Δ καί Β νά βρίσκονται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

Ἐφαρμογές:

1. Ὁ χῶρος x (σχ. 7 · 5 ζ) περιέχει ἀέριο καί συνδέεται μέ τό ἕνα σκέλος σωλήνα, πού ἔχει σχῆμα U. Τό ἄλλο σκέλος τοῦ σωλήνα εἶναι ἀνοικτό.

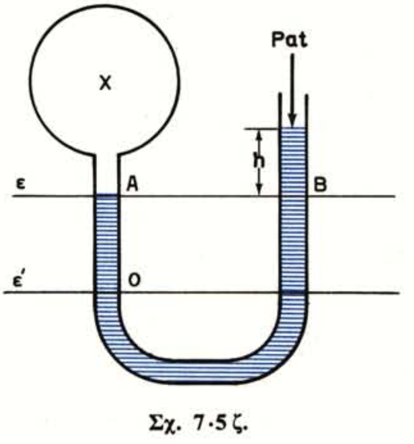
Ὁ σωλήνας περιέχει οἰνόπνευμα εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon = 0{,}79$ p/cm³. Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι 760 mm Hg. Ἡ διαφορά στάθμης στά δύο σκέλη τοῦ σωλήνα εἶναι h = 20 cm.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πίεση τοῦ ἀερίου στό χῶρο x.

Λύση:

Τό ὑγρό δέν βρίσκεται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο στά δύο σκέλη τοῦ σωλήνα, γιατί ἡ ἐξωτερική πίεση στίς ἐλεύθερες ἐπιφάνειες τοῦ ὑγροῦ εἶναι διαφορετική.

Τό πρόβλημα θά λυθεῖ μέ τήν ἀρχή ὅτι σέ ὅλα τό σημεῖα μιᾶς ὁριζόντιας ἐπιφάνειας, πού βρίσκεται στό ἴδιο ὑγρό, **ἐξασκεῖται ἡ ἴδια πίεση**. Μποροῦμε, ἐπομένως, νά ἐξισώσουμε τίς πιέσεις στά δυό σκέλη τοῦ σωλήνα σέ ὁποιοδήποτε ὁριζόντιο ἐπίπεδο ε', ε, κ.λπ.



Σχ. 7·5 ζ.

Στήν περίπτωσή μας ἐπιλέγουμε τό ἐπίπεδο ε.

Γράφουμε ἔτσι τήν ἐξίσωση:

Πίεση στό σημεῖο A = Πίεση στό σημεῖο B

$$P_x = P_{at} + \varepsilon\, h$$

Ὅπου: P_x ἡ πίεση τοῦ ἀερίου στό χῶρο x καί P_{at} ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση.

Δίνονται :

— Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση σέ mm Hg.

Ἑπομένως σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση:

$$P = \varepsilon\, h$$

μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τή δοθεῖσα ἀτμοσφαιρική πίεση, γιατί $\varepsilon = \varepsilon_{Hg} = 13\,600$ kp/m³, h = 760 mm = = 0,76 m ἄρα $P = P_{at} = \varepsilon_{Hg}\, h = 13\,600$ kp/m³ · 0,76 m = 10 336 kp/m².

— ε = εἰδικό βάρος οἰνοπνεύματος = 790 kp/m³.

— h = 0,20 m.

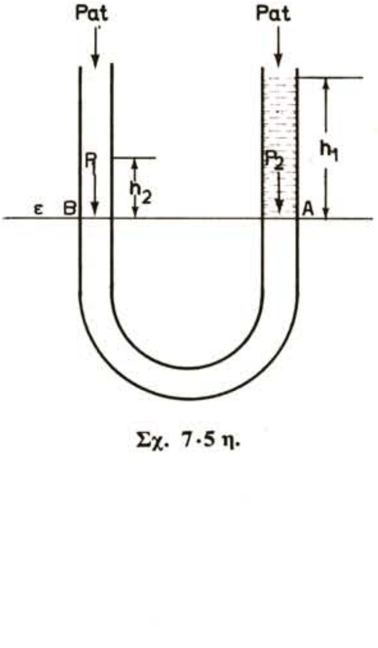
Ἀντικατάσταση :

P_x = 10 336 kp/m² + 790 kp/m³ · 0,20 m = 10 494 kp/m² = 1,0494 kp/cm² = 1,0490 at = 1,029 bar.

Ἀπάντηση : Ἡ πίεση στό χῶρο x εἶναι 1,0936 at = 1,029 bar.

2. Σέ σωλήνα σχήματος U, πού εἶναι ἀνοικτός κι ἀπό τά δυό σκέλη (σχ. 7 · 5 η) τοποθετοῦμε διαδοχικά λάδι εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}91$ p/cm³ καί νερό εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_2 = 1$ p/cm³.

Νά βρεθεῖ ποιό λόγο ἔχουν τά ὕψη h_1 καί h_2 στίς δυό στῆλες λαδιοῦ καί νεροῦ, μετρούμενα ἀπό τήν κοινή διαχωριστική ἐπιφάνεια τῶν ὑγρῶν.



Σχ. 7·5 η.

Λύση :

Ἡ κοινή διαχωριστική ἐπιφάνεια ε (σχ. 7 · 5 η) προεκτεινομένη συναντᾶ τά δύο σκέλη τοῦ σωλήνα στίς θέσεις A καί B.

Οἱ πιέσεις στά σημεῖα B καί A θά εἶναι ἴσες:

$$P_2 = P_1$$

γιατί, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, βρίσκονται στό ἴδιο ὑγρό (ἐδῶ στό νερό) καί στήν ἴδια ὁριζόντια ἐπιφάνεια (στή διαχωριστική ἐπιφάνεια).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ἀλλά } P_1 = P_{at} + \varepsilon_1\, h_1 \\ \text{καί } P_2 = P_{at} + \varepsilon_2\, h_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_{at} + \varepsilon_1\, h_1 = P_{at} + \varepsilon_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 h_1 = \varepsilon_2 h_2 \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Ἀπάντηση: Οἱ στῆλες τῶν ὑγρῶν ἔχουν ὕψη πάνω ἀπό τή διαχωριστική ἐπιφάνεια, τά ὁποῖα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τά εἰδικά βάρη τῶν ὑγρῶν.

7·6 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΟΥ ΟΦΕΙΛΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ

α) Στόν πυθμένα τῶν δοχείων.

1) Κυλινδρικό δοχεῖο (σχ. 7·6 α) μέ ἐμβαδόν βάσεως S τό γεμίζουμε μέ ὑγρό εἰδικοῦ βάρους ε, μέχρι τό ὕψος h. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα του.

Ὅπως γνωρίζουμε, στόν πυθμένα ἐξασκοῦνται δύο πιέσεις: Ἡ P_1, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική καί ἡ P_2, ἡ ὁποία εἶναι :

$$P_2 = P_1 + \varepsilon h$$

Ἡ διαφορά πιέσεως $P = P_2 - P_1 = \varepsilon h$ εἶναι τελικά ἡ συνισταμένη πίεση στόν πυθμένα.

Ἑπομένως ἡ δύναμη F πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα, θά εἶναι:

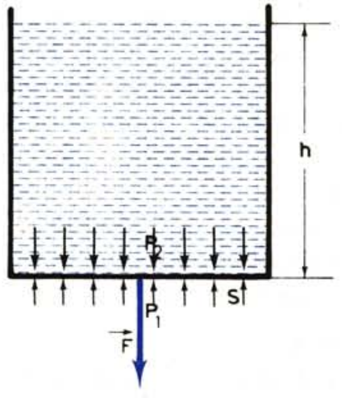
$$F = P S = \varepsilon h S$$

Ἐπειδή $h S = V$ = ὄγκος δοχείου, θά ἔχουμε:

$$F = \varepsilon V = B$$

ὅπου : B εἶναι τό βάρος τοῦ ὑγροῦ.

Δηλαδή, **ἡ δύναμη, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται στόν πυθμένα τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου, ἰσοῦται μέ τό βάρος τοῦ ὑγροῦ.**



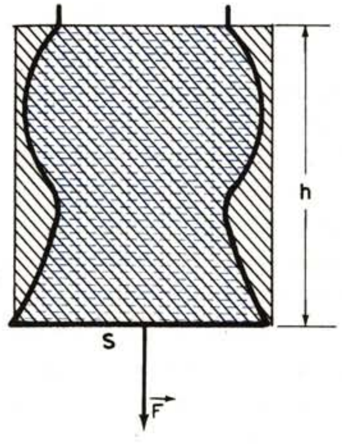
Σχ. 7·6 α.

Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα, εἶναι ἴση μέ τό βάρος τοῦ ὑγροῦ στό κυλινδρικό δοχεῖο.

2) Ἄν πάρουμε ἕνα δοχεῖο τυχαίου σχήματος (σχ. 7·6 β) μέ πυθμένα ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἐμβαδοῦ S, τότε πάλι ἡ δύναμη F θά εἶναι :

$$F = \varepsilon h S$$

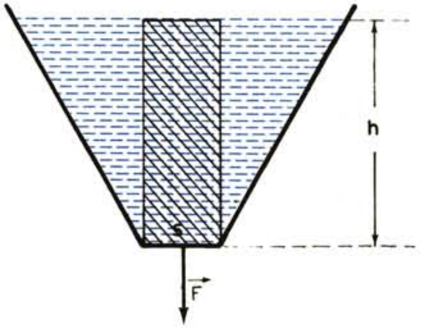
Ἀλλά h.S δέν εἶναι στήν περίπτωση αὐτή ὁ **ὄγκος τοῦ ὑγροῦ** ἀλλά ὁ **ὄγκος κυλίνδρου** πού ἔχει βάση ἐμβαδοῦ S καί ὕψος τό h. Ἑπομένως, ἡ δύναμη F εἶναι πιό μεγάλη ἀπό τό βάρος τοῦ ὑγροῦ πού περιέχεται στό δοχεῖο.



Σχ. 7·6 β.

Ἡ δύναμη F πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα, εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό βάρος τοῦ ὑγροῦ στό δοχεῖο αὐτό.

Στό σχῆμα 7·6 γ, ἡ δύναμη $\vec{F}$ πού ἐξασκεῖται ἀπό τό ὑγρό στόν πυθμένα τοῦ δοχείου, εἶναι μικρότερη ἀπό τό συνολικό βάρος τοῦ ὑγροῦ στό δοχεῖο καί ἰσοῦται πάλι μέ τό βάρος τοῦ κυλίνδρου, πού γραμμοσκιάζεται.



Σχ. 7·6 γ.
Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα εἶναι μικρότερη ἀπό τό βάρος τοῦ ὑγροῦ στό δοχεῖο αὐτό.

Ἐφαρμογή. Ἕνα βαρέλι ἔχει ἐμβαδόν βάσεως 0,5 m^2. Τό ὕψος τοῦ βαρελιοῦ εἶναι $h_1 = 1$ m. Γεμίζουμε τελείως τό βαρέλι μέ νερό. Ζητεῖται νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη, πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα S (σχ. 7 · 6 δ).

Στή συνέχεια προσθέτουμε ἕνα σωλήνα διατομῆς $S_1 = 5$ cm^2 $= 0{,}0005$ m^2, τόν ὁποῖο γεμίζουμε μέ νερό μέχρι ὕψους $h_2 = 3$ m. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ νέα δύναμη πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα. Ἐπίσης νά συγκριθεῖ ἡ διαφορά τῶν δύο δυνάμεων μέ τό βάρος τοῦ νεροῦ πού προσθέσαμε στό σωλήνα.

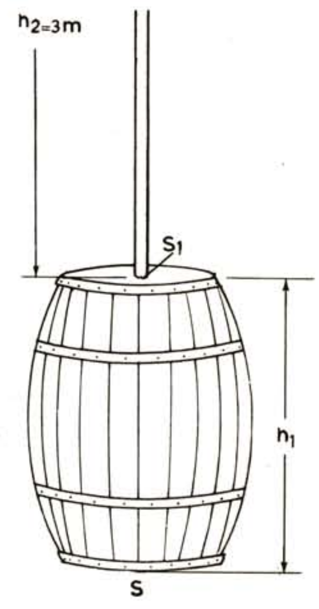
Λύση :

1) Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα στήν πρώτη περίπτωση θά εἶναι:

$$F_1 = P_1\, S = \varepsilon\, h_1 S = 1000\ \text{kp/m}^3 \cdot 1\,\text{m} \cdot 0{,}5\,\text{m}^2 = 500\ \text{kp}.$$

2) Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα, ἀφοῦ, προσθέσουμε τό σωλήνα Σ καί τόν γεμίσουμε μέ νερό θά εἶναι :

$$F_2 = P_2\, S = \varepsilon\,(h_1 + h_2)\, S = 1000\ \text{kp/m}^3 \cdot 4\ \text{m} \cdot 0{,}5\,\text{m}^2 = 2000\ \text{kp}.$$



Σχ. 7·6 δ.

Ἡ αὔξηση τῆς δυνάμεως, πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα εἶναι $F_2 - F_1 = 1\,500$ kp. Νά γιατί εἶναι δυνατό μέ τό λίγο νερό πού μποροῦμε νά βάλουμε στό σωλήνα, νά κάνουμε νά σπάσει τό βαρέλι καί νά χυθεῖ τό νερό.

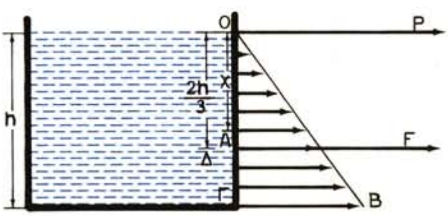
3) Τό βάρος τοῦ νεροῦ, πού προσθέσαμε στό σωλήνα, θά εἶναι $B = S_1\, h_2\, \varepsilon = 0{,}0005\ \text{m}^2 \cdot 3\ \text{m} \times 1000\ \text{kp/m}^3 = 1{,}5$ kp.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι προσθέτοντας βάρος 1,5 kp στό σωλήνα, αὐξάνουμε τή δύναμη πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα τοῦ βαρελιοῦ κατά 1500 kp !

β) **Δυνάμεις στά πλευρικά τοιχώματα τῶν δοχείων.** Ἡ πίεση σέ τυχόν σημεῖο Α τοῦ τοιχώματος τοῦ δοχείου τοῦ σχήματος 7 · 6ε δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$P = \varepsilon\, x$$

ὅπου : ε εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑγροῦ.



Σχ. 7·6 ε.

Ἡ ἐξίσωση πού συνδέει τά P καί x εἶναι πρώτου βαθμοῦ καί ἡ γραφική παράσταση $P = f(x)$ εἶναι ἡ εὐθεία OB.

Στό τοίχωμα ΟΓ μπορεῖ νά δεχθοῦμε ὅτι ἐξασκεῖται μιά μέση πίεση $\overline{P}$, ἡ ὁποία θά ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἀκραίων πιέσεων στό σημεῖο Ο, πού εἶναι μηδέν, καί στό σημεῖο Γ, πού εἶναι ε h:

$$P = \frac{0 + \varepsilon h}{2} = \varepsilon \frac{h}{2}.$$

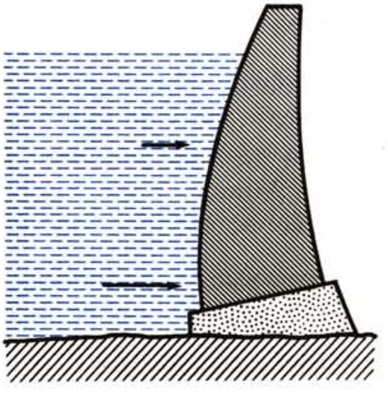
Ἡ συνισταμένη τῶν πλευρικῶν δυνάμεων, πού ἐξασκεῖται στήν ἐπιφάνεια ΟΓ, ἄν τό ἐμβαδό της εἶναι S, ἔχει μέτρο:

$$F = S\,\overline{P} = S\,\varepsilon\,\frac{h}{2}$$

Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς αὐτῆς τῆς δυνάμεως εἶναι τό Δ καί ἀποδεικνύεται ὅτι ἀπέχει ἀπό τό Ο ἀπόσταση:

$$\boxed{O\Delta = \frac{2}{3}\,h}$$

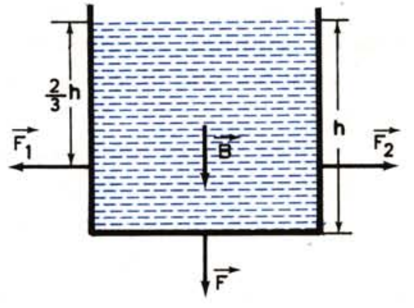
γ) **Κατασκευή φραγμάτων.** Στό σχῆμα 7·6 στ δείχνεται ὁ τρόπος κατασκευῆς τῶν φραγμάτων γιά τή συγκράτηση τοῦ νεροῦ στίς τεχνητές λίμνες. Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα, τό πάχος τοῦ φράγματος μεγαλώνει μέ τό βάθος, γιατί μεγαλώνει ἀντίστοιχα καί ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ τό νερό στά τοιχώματα.



Σχ. 7·6 στ.
Φράγμα.

δ) **Σύγκριση τοῦ βάρους ὑγροῦ καί τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στόν πυθμένα.**

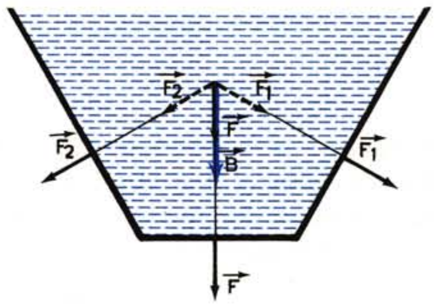
— Ἄν τό δοχεῖο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλόγραμμου (σχ. 7·6 ζ), οἱ δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ πού ἐξασκοῦνται στά πλευρικά τοιχώματα εἶναι ἴσες κατά μέτρο, ἔχουν ἀντίθετη φορά καί τόν ἴδιο φορέα. Ἔτσι ἀλληλοεξουδετερώνονται.



Σχ. 7·6 ζ.

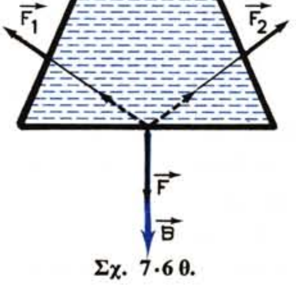
Ἡ δύναμη, πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα, ἰσοῦται μέ τό βάρος τοῦ ὑγροῦ $\vec{B}$.

— Στό δοχεῖο τοῦ σχήματος 7·6 η, ἡ δύναμη στόν πυθμένα $\vec{F}$ εἶναι μικρότερη ἀπό τό βάρος $\vec{B}$. Ὅμως ἡ συνισταμένη τῶν πλευρικῶν δυνάμεων $\vec{F_1}, \vec{F_2}\ldots$ καί τῆς $\vec{F}$ δίνουν συνισταμένη πού εἶναι ἴση μέ τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ ὑγροῦ.



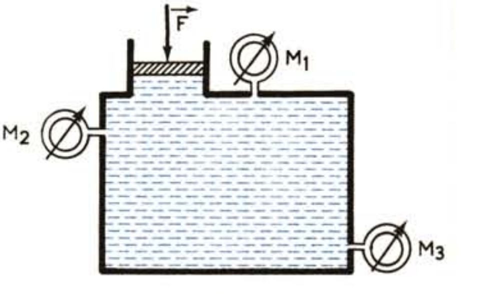
Σχ. 7·6 η.

— Στό δοχεῖο τοῦ σχήματος 7·6 θ ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι πιό μεγάλη ἀπό τό βάρος τοῦ ὑγροῦ. Οἱ πλευρικές δυνάμεις ὅμως $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ καί ἡ δύναμη $\vec{F}$ στόν πυθμένα, δίνουν συνισταμένη πάλι ἴση μέ τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ ὑγροῦ.



Σχ. 7·6 θ.

7·7 ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΑΣΚΑΛ (PASCAL)



Σχ. 7·7 α.

Στό σχῆμα 7·7 α παρουσιάζεται σέ ὁριζόντια τομή ἕνα δοχεῖο πού εἶναι γεμάτο μέ ὑγρό.

Ἐπειδή τά τρία μανόμετρα βρίσκονται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο, τυχόν διαφορά στήν ἔνδειξη τῆς πιέσεως δέν θά ὀφείλεται στήν ὑδροστατική πίεση.

Παρατηροῦμε ὅτι ἄν πιέσουμε μέ δύναμη $\vec{F}$ τό ἔμβολο, ὅλα τά μανόμετρα θά δείξουν τήν ἴδια πίεση.

Ἄν αὐξήσουμε τή δύναμη $\vec{F}$, ἐξασκώντας μιά πρόσθετη πίεση P στό ὑγρό, αὐξάνει ἡ ἔνδειξη καί τῶν τριῶν μανομέτρων κατά τήν πίεση P.

Ἀπό αὐτό συνάγεται ὅτι **ἄν ἕνα ὑγρό βρίσκεται σέ ἰσορροπία, μεταφέρει τήν πίεση πού ἐξασκεῖται σέ κάποιο σημεῖο του πρός ὅλες τίς κατευθύνσεις καί μέ τήν ἴδια τιμή.**

Αὐτή εἶναι ἡ **ἀρχή τοῦ Pascal** καί βρίσκει πολλές ἐφαρμογές. Ἀναφέρουμε μερικές.

α) **Ὑδραυλικά πιεστήρια.** Τό ὑδραυλικό πιεστήριο (σχ. 7·7 β) ἀποτελεῖται ἀπό δύο κυλινδρικά δοχεῖα, τά ὁποῖα συγκοινωνοῦν. Ἕνα ὑγρό περιέχεται στό χῶρο πού περιορίζεται ἀπό τά δύο ἔμβολα E_1 καί E_2. Ἄν στό ἔμβολο E_1 ἐξασκήσουμε δύναμη F_1, ἡ πίεση:

$$P = \frac{F_1}{S_1} \qquad (1)$$

μεταφέρεται μέσω τοῦ ὑγροῦ πρός ὅλες τίς κατευθύνσεις, σύμφωνα μέ τήν Ἀρχή τοῦ Πασκάλ, ἑπομένως καί στό ἔμβολο E_2. Τό ὑγρό ὅμως πιέζοντας τό ἔμβολο E_2 ἐξασκεῖ σ' αὐτό δύναμη:

$$F_2 = P\,S_2 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$$

Ὁ λόγος ἑπομένως τῶν δυνάμεων στά ἔμβολα ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἐμβόλων.

Ἐπειδή τό ἐμβαδό S_2 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ S_1, ἡ δύναμη F_2 εἶναι πολλαπλάσια τῆς F_1. Ἔτσι μέ μικρή δύναμη F_1 κατορθώνουμε νά ἐξασκήσουμε μεγάλη δύναμη F_2 καί νά συμπιέσουμε τήν ὕλη Σ (π.χ. νά συμπιέσουμε ἕνα δέμα ἀπό βαμβάκι).

Σχ. 7·7 β.
Ὑδραυλικό πιεστήριο.

Ἀριθμητικό παράδειγμα: Ἄν $S_1 = 10\ cm^2$, $S_2 = 4000\ cm^2$ καί $F_1 = 40\ kp$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη F_2.

Λύση:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1}\ F_1 = \frac{4000\ cm^2}{10\ cm^2} \cdot 40\ kp = 16\,000\ kp.$$

Σημείωση: Ἄν ἡ δύναμη F_1 μετακινήσει τό ἔμβολο E_1 σέ μῆκος x_1, τότε τό ἔμβολο E_2 θά μετακινηθεῖ κατά x_2.

Οἱ δύο ὄγκοι $S_1\ x_1$ καί $S_2\ x_2$ εἶναι ἴσοι:

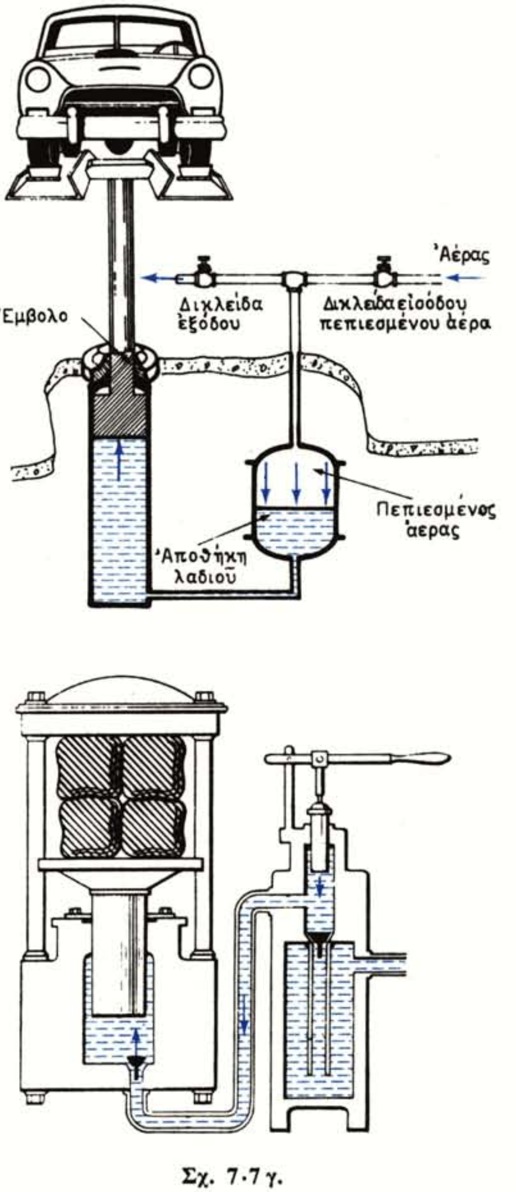
$$S_1\ x_1 = S_2\ x_2 \quad ἤ \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Δηλαδή, **μπορεῖ νά κερδίζουμε σέ δύναμη μέ τά ὑδραυλικά πιεστήρια, χάνουμε ὅμως σέ διαδρομή ἐμβόλου.**

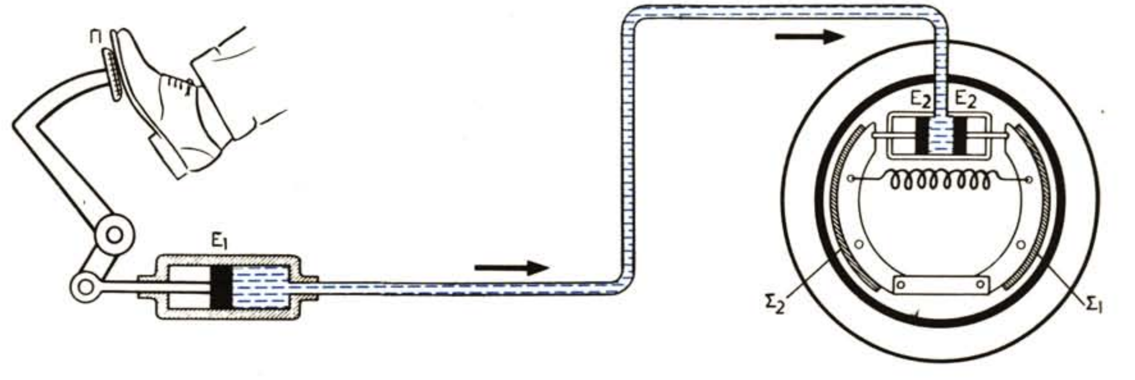
Ἔτσι τό ἔμβολο E_2 μπορεῖ νά κάνει ἐλάχιστη διαδρομή, ἄν μετακινηθεῖ μιά φορά τό ἔμβολο E_1. Μέ τή βοήθεια ὅμως τῶν βαλβίδων $β_1$ καί $β_2$ εἶναι δυνατό νά ἐπαναλάβουμε τή συμπίεση τοῦ ἐμβόλου E_1 (σχ. 7·7β). Συγκεκριμένα πιέζοντας τό ἔμβολο E_1 ἀνοίγει ἡ βαλβίδα $β_2$, προχωρεῖ τό ὑγρό πρός τό ἔμβολο E_1, ἐνῶ ἡ βαλβίδα $β_1$ κλείνει. Ἀνεβάζοντας τό ἔμβολο μέ τή βοήθεια τοῦ μοχλοῦ Μ πρός τά πάνω, ἀναρροφᾶται τό ὑγρό, ἀνοίγει ἡ βαλβίδα $β_1$, κλείνει ἡ $β_2$ καί ἔτσι μπαίνει ὑγρό στόν ἀριστερό κύλινδρο. Στή συνέχεια συμπιέζουμε πάλι τό ἔμβολο E_1 καί ὁ κύκλος ἐπαναλαμβάνεται ὅπως καί πρίν.

Στή θέση τοῦ δίσκου Δ μποροῦμε νά τοποθετήσουμε αὐτοκίνητα ἤ ἄλλα βαρειά ἀντικείμενα, πού ἔτσι τά ἀνυψώνουμε (σχ. 7·7γ). Τέτοιου εἴδους ὑδραυλικά πιεστήρια χρησιμοποιοῦνται πολύ.

β) **Ὑδραυλικά φρένα.** Τό πόδι τοῦ ὁδηγοῦ πατᾶ τό «πεντάλ» Π καί μέ σύστημα μοχλῶν ἡ πίεση μεταφέρεται ἀπό τό ἔμβολο E_1 στά ἔμβολα E_2 (σχ. 7·7δ). Ἔτσι ἀνοίγουν οἱ σιαγόνες (φερμουΐτ) $Σ_1$ καί $Σ_2$, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦνται ἀπό ὑλικό μέ μεγάλο συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως, ἀλλά καί μεγάλης ἀντοχῆς. Μέ τό ἄνοιγμα αὐτό φρενάρει ὁ τροχός στήν περιστροφική του κίνηση, γιατί ἔρχονται σέ ἐπαφή οἱ σιαγόνες μέ τό τύμπανο τοῦ τροχοῦ.



Σχ. 7·7 γ.
Διάφορα ὑδραυλικά πιεστήρια γιά συμπίεση βιβλίων (βιβλιοδεσία) καί ἀνύψωση αὐτοκινήτων.

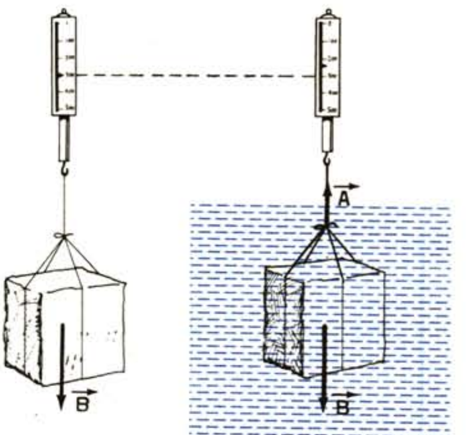


Σχ. 7·7 δ.
Ὑδραυλικά φρένα.

7·8 ΑΝΩΣΗ – ΑΡΧΗ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Πείραμα: Ἐξαρτᾶμε ἀπό ἕνα δυναμόμετρο ἕνα βαρύ μεταλλικό σῶμα (πλωτήρα) καί μετροῦμε τό βάρος του (σχ. 7·8 α). Στή συνέχεια τοποθετοῦμε τό ἴδιο σῶμα σέ ἕνα δοχεῖο μέ νερό καί τό βυθίζουμε ὁλόκληρο μέσα στό νερό. Διαπιστώνουμε τότε ὅτι τό δυναμόμετρο μᾶς δείχνει μικρότερο βάρος.

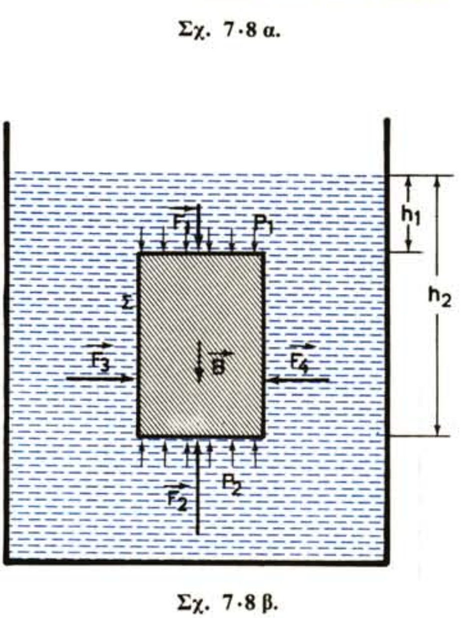
Τί συνέβη λοιπόν καί ἐλαττώθηκε τό βάρος τοῦ σώματος; Ἡ ἀπάντηση εἶναι ὅτι τό νερό ἐξάσκησε στό σῶμα μιά δύναμη ἀντίθετη τοῦ βάρους.



Σχ. 7·8 α.

Γενικά, σέ ὅλα τά σώματα πού τοποθετοῦνται μέσα σέ ὑγρά, ἐξασκεῖται μιά τέτοια δύναμη, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ κατακόρυφα πρός τά ἐπάνω καί ἡ ὁποία ὀνομάζεται **ἄνωση.** Ἄς δοῦμε τίς δυνάμεις πού ἐξασκοῦνται σ' ἕνα σῶμα, ἄν βυθισθεῖ σ' ἕνα ὑγρό.

Ἔστω ὅτι τό σῶμα Σ (σχ. 7·8 β) ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου καί εἶναι βυθισμένο σέ ἕνα ὑγρό εἰδικοῦ βάρους ε. Στό σῶμα ἐξασκοῦνται ἀπό τό ὑγρό οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, οἱ ὁποῖες ὀφείλονται στήν ὑδροστατική πίεση καί κάθε μιά ἀπ' αὐτές εἶναι ἡ συνισταμένη δύναμη σέ κάθε ἕδρα τοῦ σώματος. Ἐπειδή στίς πλευρικές ἕδρες ἡ ὑδροστατική πίεση κατανέμεται ὁμοιόμορφα, οἱ δυνάμεις $\vec{F}_3$ καί $\vec{F}_4$ εἶναι ἴσες καί ἀντίθετες, ἐπομένως μᾶς δίνουν συνισταμένη μηδέν. Οἱ δυνάμεις ὅμως $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_1$ εἶναι ἄνισες. Ἡ συνισταμένη τους εἶναι ἡ **ἄνωση** καί ἔχει μέτρο $A = F_2 - F_1$. **Ἡ ἄνωση,** ἐπομένως, **εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων πού ἐξασκοῦνται σέ ἕνα σῶμα βυθισμένο σέ ὑγρό καί πού ὀφείλονται στήν ὑδροστατική πίεση.**



Σχ. 7·8 β.

α) **Ὑπολογισμός τῆς ἀνώσεως.** Γιά ἕνα σῶμα, πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἡ ἄνωση, ὅπως εἴπαμε, δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$A = F_2 - F_1 \qquad (1)$$

Οἱ δυνάμεις F_1 καί F_2 ὀφείλονται στίς ὑδροστατικές πιέσεις $P_2 = \varepsilon\, h_2$ καί $P_1 = \varepsilon\, h_1$, θά ἔχουμε ἑπομένως:

$$\left.\begin{aligned} &F_2 = P_2\, S = \varepsilon\, h_2\, S \\ \text{καί}\quad &F_1 = P_1\, S = \varepsilon\, h_1\, S \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ὅπου: S τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας τῆς βάσεως τοῦ σώματος. Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) ἔχουμε:

$$A = \varepsilon\, h_2\, S - \varepsilon\, h_1\, S = \varepsilon\, S\, (h_2 - h_1) \qquad (3)$$

Ἀλλά $S\,(h_2 - h_1)$ = ὄγκος σώματος
καί $\varepsilon\, S\, (h_2 - h_1)$ = (εἰδικό βάρος ὑγροῦ) × (ὄγκος σώματος) = βάρος ὑγροῦ ὄγκου ἴσου πρός τό σῶμα.

Μέ ἄλλα λόγια ἡ **ἄνωση εἶναι ἴση μέ τό βάρος τοῦ ὑγροῦ, πού ἐκτοπίζει τό σῶμα.** Αὐτό ἀποτελεῖ τήν **Ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδη,** ἡ ὁποία διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Σέ κάθε σῶμα, πού βρίσκεται μέσα σέ ἕνα ὑγρό, ἐξασκεῖται ἄνωση ἴση μέ τό βάρος τοῦ ὑγροῦ πού ἐκτοπίζει τό σῶμα.

β) **Ἄλλος τρόπος ἀποδείξεως τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδη.** Σέ ἕνα δοχεῖο (σχ. 7 · 8 γ) ὑπάρχει ὑγρό, πού ἰσορροπεῖ. Φανταζόμαστε στό σχῆμα ἕναν ὄγκο τοῦ ὑγροῦ, τόν ὁποῖο καί γραμμοσκιάσαμε. Ὅπως ὅλο τό ὑγρό, ἔτσι κι αὐτό, δηλαδή τό γραμμοσκιασμένο του τμῆμα ἰσορροπεῖ.

Σχ. 7·8 γ.

Ἄς ἐξετάσουμε τίς συνθῆκες ἰσορροπίας του. Σ' αὐτό ἐξασκοῦνται οἱ ἑξῆς δυνάμεις:

1) Τό βάρος του $\vec{B}$. 2) Οἱ πλευρικές δυνάμεις, οἱ ὁποῖες ὀφείλονται στήν ὑδροστατική πίεση καί ἔχουν συνισταμένη τή δύναμη $\vec{A}$. Ἡ δύναμη αὐτή, σύμφωνα μέ αὐτά πού εἴπαμε, εἶναι ἡ ἄνωση, πού ἐξασκεῖ τό ὑπόλοιπο ὑγρό στή γραμμοσκιασμένη μάζα του.

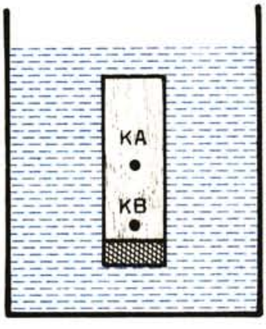
Γιά νά ἰσορροπεῖ τό ὑγρό, ἡ ἄνωση αὐτή $\vec{A}$ πρέπει νά ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ τό βάρος B τοῦ ὑγροῦ.

Ἡ ἄνωση, ἑπομένως, **πού ἐξασκεῖται στή γραμμοσκιασμένη μάζα τοῦ ὑγροῦ, ἰσοῦται μέ τό βάρος αὐτῆς τῆς μάζας.**

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν γραμμοσκιασμένη μάζα τοῦ ὑγροῦ μέ ἕνα σῶμα τοῦ ἴδιου σχήματος, οἱ πλευρικές δυνάμεις πού ἐξασκεῖ τό γύρω ὑγρό δέν ἀλλάζουν, **γιατί δέν ἄλλαξε τίποτα στό χῶρο πού περιβάλλει τό σῶμα.**

Ἑπομένως, ἡ ἄνωση θά παραμείνει ἡ ἴδια μέ ἐκείνη πού ἐξασκοῦσε τό ὑγρό στό γραμμοσκιασμένο τμῆμα. Θά εἶναι δηλαδή **ἴση μέ τό βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ γραμμοσκιασμένου ὄγκου,** τό ὁποῖο ἐκτοπίζει τό σῶμα.

γ) **Κέντρο Ἀνώσεως - Κέντρο βάρους.** Ὀνομάζουμε **κέντρο ἀνώσεως ἑνός σώματος βυθισμένου σ' ἕνα ὑγρό, τό κέντρο βάρους τοῦ ὑγροῦ πού ἐκτοπίζει τό σῶμα.**



Σχ. 7·8 δ.

Τό κέντρο ἀνώσεως σέ ἕνα σῶμα, δέν συμπίπτει πάντοτε μέ τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος. Γιά νά γίνει αὐτό κατανοητό, ἄς φαντασθοῦμε ἕνα στερεό σῶμα ἀπό ξύλο πού στή βάση του ἔχει μάζα μολυβιοῦ. Ἄν τό βυθίσουμε σ' ἕνα ὑγρό, θά δοῦμε ὅτι τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος (ξύλο - μολύβι) εἶναι χαμηλά, στή θέση Κ.Β. (σχ. 7 · 8 δ), ἐνῶ τό κέντρο ἀνώσεως εἶναι στή θέση Κ.Α., γιατί σ' αὐτή τή θέση βρισκόταν τό κέντρο βάρους τοῦ ὑγροῦ πού ἐκτοπίσθηκε.

Σημείωση. Τό κέντρο βάρους καί τό κέντρο ἀνώσεως συμπίπτουν, ἄν τό σῶμα πού βυθίζεται στό ὑγρό εἶναι ὁμοιογενές.

δ) **Ἰσορροπία στερεῶν σωμάτων πού βυθίζονται σέ ὑγρά.**

Ἄν ἕνα στερεό σῶμα (σχ. 7 · 8 ε) βυθισθεῖ σέ ἕνα ὑγρό, θά ἐξασκηθοῦν σ' αὐτό δύο δυνάμεις:

Τό βάρος του Β καί ἡ ἄνωση Α.

Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων θά εἶναι ἡ διαφορά τους, δηλαδή:

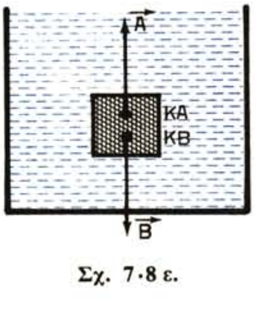
$$F = B - A \qquad (1)$$

Ἐπειδή:

$$B = \varepsilon_\sigma V \quad \text{καί} \quad A = \varepsilon_\upsilon V,$$

ὅπου: V ὁ ὄγκος τοῦ σώματος, ε_σ τό εἰδικό βάρος του καί ε_υ τό εἰδικό βάρος ὑγροῦ, ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$F = (\varepsilon_\sigma - \varepsilon_\upsilon)\, V \qquad (2)$$



Σχ. 7·8 ε.

Διακρίνουμε τώρα τρεῖς περιπτώσεις.

1) **Ἄν τό βάρος εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τήν ἄνωση (F > 0) ἤ ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ σώματος εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑγροῦ, τότε τό σῶμα βυθίζεται.**

2) **Ἄν τό βάρος εἶναι ἴσο πρός τήν ἄνωση (F = 0) ἤ ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἴσο μέ τό εἰδικό βάρος τοῦ σώματος, αὐτό ἰσορροπεῖ σέ ὁποιαδήποτε θέση μέσα στό ὑγρό** (αἰωρεῖται μέσα στό ὑγρό).

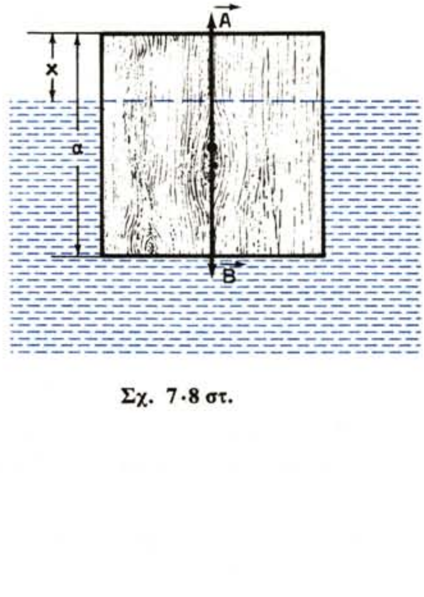
3) **Ἄν ἡ ἄνωση εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό βάρος (F 〈 0), ἤ ἄν τό ὑγρό ἔχει μεγαλύτερο εἰδικό βάρος ἀπό τό στερεό, τό σῶμα κινεῖται πρός τά ἐπάνω καί θά ἰσορροπήσει, ὅταν ἕνα μέρος τοῦ στερεοῦ σώματος βγεῖ ἔξω ἀπό τό ὑγρό.** Λέμε τότε ὅτι τό σῶμα **ἐπιπλέει.**

Αὐτό συμβαίνει, γιατί ὅσο τό σῶμα βγαίνει ἔξω ἀπό τό ὑγρό, τόσο μικρότερο ὄγκο ὑγροῦ ἐκτοπίζει καί τόσο μικρότερη γίνεται ἡ ἄνωση. Ἔτσι, σέ κάποια θέση θά γίνει ἡ ἄνωση ἴση μέ τό βάρος. Σ' αὐτή τή θέση τό σῶμα θά **ἰσορροπήσει.**

Ἐφαρμογές:

1. Ξύλο ἔχει σχῆμα κύβου ἀκμῆς $\alpha = 0{,}20$ cm.

Τό εἰδικό βάρος τοῦ ξύλου εἶναι $\varepsilon_\xi = 700$ kg/m³. Ἄν ὁ ξύλινος αὐτός κύβος βυθισθεῖ σέ λάδι εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_\lambda = 900$ kg/m³, πόσο τμῆμα τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου θά βρίσκεται ἔξω ἀπό τό λάδι (σχ. 7 · 8 στ).



Σχ. 7·8 στ.

Λύση:

Ἀφοῦ ὁ κύβος ἰσορροπεῖ, ἡ ἄνωση καί τό βάρος τοῦ ξύλου θά ἔχουν τό ἴδιο μέτρο:

$$A = B \qquad (1)$$

Ἡ ἄνωση A = Βάρος ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ = εἰδικό βάρος ὑγροῦ × ὄγκον ἐκτοπιζόμενου ὑγροῦ

$$A = \varepsilon_\lambda\, V_{\varepsilon\kappa\tau} = \varepsilon_\upsilon\, \alpha\, (\alpha - x) \qquad (2)$$

Τό βάρος τοῦ σώματος = **B** = εἰδικό βάρος σώματος × ὄγκος σώματος:

$$B = \varepsilon_\xi\, \alpha^3 \qquad (3)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1), (2) καί (3) προκύπτει:

$$\varepsilon_\lambda\, \alpha^2\, (\alpha - x) = \varepsilon_\xi\, \alpha^3$$

καί λύνοντας ὡς πρός x ἔχουμε:

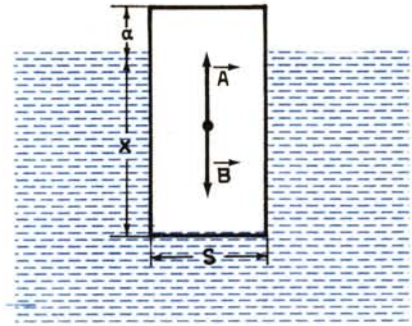
$$x = \frac{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\xi}{\varepsilon_\lambda}\, \alpha$$

Ἀντικατάσταση:

$$x = \frac{(900 - 700)\ \text{kp/cm}^3}{900\ \text{kp/cm}^3}\ 0{,}20\ \text{m} \simeq 0{,}045\ \text{m}$$

$$\simeq 4{,}5\ \text{cm}.$$

2. Ἡ πυκνότητα τοῦ πάγου εἶναι 920 kg/cm³ καί ἡ πυκνότητα τοῦ θαλασσινοῦ νεροῦ στή θερμοκρασία τῶν 0° C εἶναι 1010 kg/m³. Ἕνα παγόβουνο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλόγραμμου καί τό ὕψος τοῦ πάγου, πού βρίσκεται πάνω ἀπό τό νερό, εἶναι $\alpha = 100$ m (σχ. 7 · 8 ζ). Πόσο εἶναι τό τμῆμα τοῦ πάγου μέσα στό νερό;



Σχ. 7·8 ζ.

Λύση :

Τό παγόβουνο ἐπιπλέει καί ἰσορροπεῖ.
Ἑπομένως ἰσχύει:

$$B = A \qquad (1)$$

Ἄν ὀνομάσουμε S τό ἐμβαδόν διατομῆς τῆς βάσεως τοῦ πάγου, θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} B &= \varepsilon_{\pi\alpha\gamma}\, S\,(a + x) \\ \text{καί}\quad A &= \varepsilon_{\nu\varepsilon\rho}\, S\, x \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) ἔχουμε:

$$\varepsilon_{\pi\alpha\gamma}\, S\,(\alpha + x) = \varepsilon_{\nu\varepsilon\rho}\, S\, x$$

καί λύνοντας ὡς πρός x:

$$x = \frac{\varepsilon_{\pi\alpha\gamma}\, a}{\varepsilon_{\nu\varepsilon\rho} - \varepsilon_{\pi\alpha\gamma}}$$

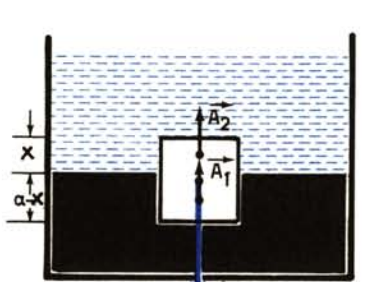
Ἀντικατάσταση :

$$x = \frac{920\ \text{kg/m}^3 \cdot 100\ \text{m}}{(1010 - 920)\ \text{kg/m}^3} = 1020\ \text{m}.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι **τά παγόβουνα βρίσκονται σέ μεγάλα βάθη μέσα στή θάλασσα.**

3. Κύβος ἀπό σίδηρο ἔχει ἀκμή $\alpha = 10$ cm καί εἰδικό βάρος $\varepsilon_\sigma = 7800$ kp/m³. Τόν τοποθετοῦμε μέσα σέ δοχεῖο πού περιέχει ὑδράργυρο ($\varepsilon_{Hg} = 13\,600$ kp/m³) καί νερό ($\varepsilon_\nu = 1000$ kp/m³) (σχ. 7 · 8 η).

Νά βρεθεῖ σέ ποιά θέση ἰσορροπεῖ ὁ κύβος.



Σχ. 7·8 η.

Λύση :

Ἐπειδή τό εἰδικό βάρος τοῦ κύβου εἶναι μεταξύ τῆς τιμῆς τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ Hg καί τοῦ νεροῦ, θά ἰσορροπεῖ σέ θέση τέτοια, ὥστε ἕνα μέρος του νά εἶναι βυθισμένο στόν ὑδράργυρο καί τό ἄλλο στό νερό. Ἔστω x τό ὕψος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου, πού βρίσκεται μέσα στό νερό.

Στόν κύβο ἐξασκοῦνται οἱ ἑξῆς δυνάμεις:

— Τό βάρος **B** τοῦ κύβου, πού δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$B = \varepsilon_\sigma a^3$$

— Ἡ ἄνωση A_1 μέσα στόν Hg, πού δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$A_1 = \varepsilon_{Hg} a^2 (a - x)$$

— Ἡ ἄνωση A_2 μέσα στό νερό πού δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$A_2 = \varepsilon_\nu a^2 x$$

Ἐπειδή ὁ κύβος ἰσορροπεῖ, θά ἰσχύει:

$$A_1 + A_2 = B$$

ἤ $$\varepsilon_{Hg} a^2 (a - x) + \varepsilon_\nu a^2 x = \varepsilon_\sigma a^3$$

Λύνοντας τήν ἐξίσωση ὡς πρός x ἔχουμε:

$$x = a \frac{(\varepsilon_{Hg} - \varepsilon_\sigma)}{(\varepsilon_{Hg} - \varepsilon_\nu)}.$$

Ἀντικατάσταση:

$$x = 0{,}1\ \text{m} \cdot \frac{(13\,600 - 7800)\ \text{kp/m}^3}{(13\,600 - 1000)\ \text{kp/m}^3} = 0{,}046\ \text{m} \simeq 4{,}6\ \text{cm}.$$

Ἀπάντηση: Τό μέρος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου, πού θά βρίσκεται μέσα στό νερό, θά εἶναι 4,6 cm καί ἐπομένως μέσα στόν ὑδράργυρο θά βρίσκεται τό ὑπόλοιπο, δηλαδή 5,4 cm.

7·9 ΠΛΕΥΣΗ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΑΥΤΗΣ

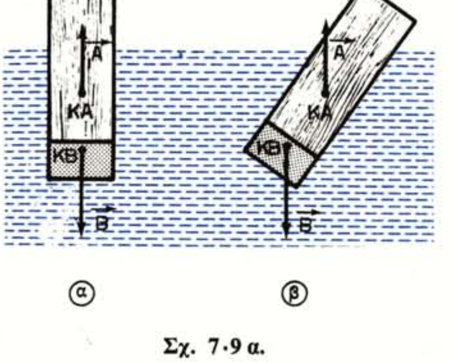
Ὅταν ἕνα σῶμα ἰσορροπεῖ σ' ἕνα ὑγρό καί ἕνα τμῆμα του βρίσκεται ἔξω ἀπό τό ὑγρό, τότε λέμε ὅτι τό σῶμα **πλέει** ἤ **ἐπιπλέει.**

Τά πλωτά μέσα ἐπιπλέουν, γιατί εἶναι ἐσωτερικά κοῖλα. Ἔτσι ἡ μέση πυκνότητά τους εἶναι μικρότερη ἀπό τήν πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ, στό ὁποῖο βρίσκονται.

Ὅταν ἕνα σῶμα ἐπιπλέει, ἡ ἄνωση εἶναι ἴση καί ἀντίθετη μέ τό βάρος τοῦ σώματος. Ἑπομένως τό σῶμα ἰσορροπεῖ. Ὅταν ὅμως μετακινήσουμε τό σῶμα (π.χ. τό κλυδωνίσουμε), τότε ἀπό τό ἀποτέλεσμα πού θά προκληθεῖ, θά διακρίνουμε τό εἶδος τῆς πλεύσεως.

Τά εἴδη πλεύσεως εἶναι τά ἑξῆς:

α) **Πλεύση εὐσταθής.** Ἔστω ὅτι ἔχουμε τό σῶμα

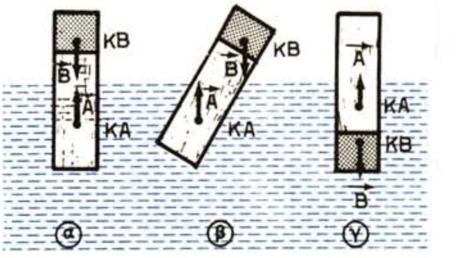


Σχ. 7·9 α.
Εὐσταθής πλεύση.

τοῦ σχήματος 7·9α, τό ὁποῖο εἶναι ἕνα ξύλο πού στή βάση του ἔχει προστεθεῖ ἕνα κομμάτι μολύβι. Στή θέση α ἰσορροπεῖ. Τό στρέφουμε στή θέση β. Διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ἄνωση καί τό βάρος δημιουργοῦν μιά ροπή, ἡ ὁποία τείνει νά ἐπαναφέρει τό σῶμα στήν ἀρχική θέση ἰσορροπίας. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε **εὐσταθή πλεύση.**

Ἡ πλεύση, εἶναι πάντα εὐσταθής, **ὅταν τό κέντρο ἀνώσεως εἶναι πιό ψηλά ἀπό τό κέντρο βάρους.**

β) **Πλεύση ἀσταθής.** Στό σχῆμα 7·9β τό σῶμα (ξύλο-μολύβι) τοποθετήθηκε μέ τό μολύβι ἔξω ἀπό τό ὑγρό. Στή θέση α ἰσορροπεῖ, γιατί ἡ ἄνωση καί τό βάρος ἔχουν τόν ἴδιο φορέα. Ἄν ὅμως τό σῶμα ἐκτραπεῖ (θέση β), ἡ ἄνωση καί τό βάρος δημιουργοῦν ροπή καί ἀλλάζουν τή θέση τοῦ σώματος, μετακινώντας το στή θέση γ. Ἡ θέση α εἶναι θέση **ἀσταθοῦς ἰσορροπίας** καί ἡ πλεύση εἶναι **ἀσταθής.** Ἀπό τήν παρατήρηση βλέπουμε ὅτι **τό κέντρο βάρους εἶναι πιό ψηλά ἀπό τό κέντρο ἀνώσεως.**



Σχ. 7·9β.
Ἀσταθής ἰσορροπία.

Μποροῦμε ὅμως νά γενικεύσουμε τό συμπέρασμα λέγοντας ὅτι, **ὅταν τό κέντρο βάρους εἶναι πιό ὑψηλά ἀπό τό κέντρο ἀνώσεως, ἔχουμε ἀσταθή πλεύση;**

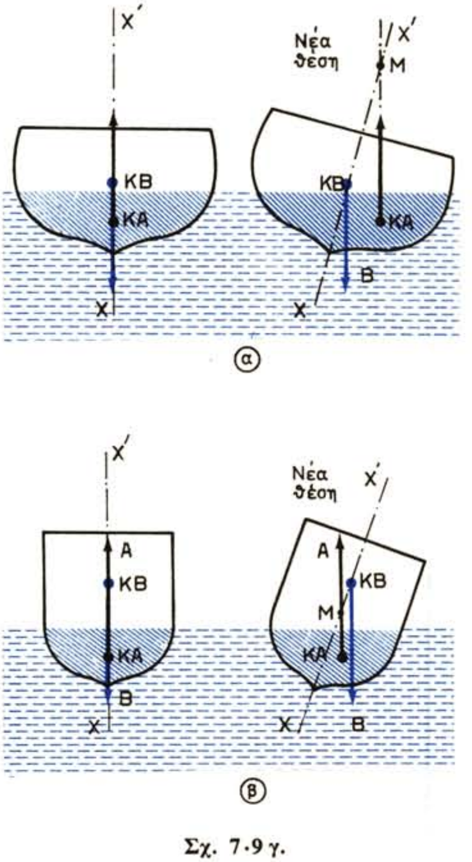
Ἡ ἀπάντηση εἶναι ἀρνητική, γιατί ἐκεῖνο πού καθορίζει τό εἶδος τῆς πλεύσεως, δηλαδή ἄν θά εἶναι εὐσταθής ἤ ἀσταθής, εἶναι ἡ θέση τοῦ **μετάκεντρου.**

γ) **Ὁρισμός μετάκεντρου — Συνθῆκες ἰσορροπίας.** Ὅταν ἕνα σῶμα ἐπιπλέει, ὑπάρχει κοινός φορέας xx', στόν ὁποῖο βρίσκεται τό βάρος τοῦ σώματος B καί ἡ ἄνωση A (σχ. 7·9γ). Δεχόμαστε ὅτι αὐτός ὁ φορέας καθορίζει μιά διεύθυνση xx' σ' αὐτό τό σῶμα. Ὅταν τό σῶμα στραφεῖ σέ νέα θέση, στρέφεται καί ἡ διεύθυνση xx'. Ἡ τομή M τῆς διευθύνσεως xx' μέ τή διεύθυνση τῆς ἀνώσεως στή νέα θέση ὀνομάζεται **μετάκεντρο.**

Ἡ πλεύση εἶναι εὐσταθής, ὅταν τό μετάκεντρο εἶναι πάνω ἀπό τό κέντρο βάρους [περίπτωση τοῦ σχήματος 7·9γ(α)].

Ἄν τό μετάκεντρο εἶναι κάτω ἀπό τό κέντρο βάρους, ἡ πλεύση εἶναι ἀσταθής [περίπτωση τοῦ σχήματος 7·9γ(β)].

Στό σχῆμα 7·9γ(β) στή θέση β φαίνεται ὅτι τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων $\vec{A}$, $\vec{B}$, ἀνατρέπει τό πλωτό (ἀσταθής πλεύση), ἐνῶ στήν περίπτωση α τοῦ σχή-



Σχ. 7·9γ.
α) Εὐσταθής ἰσορροπία. β) Ἀσταθής ἰσορροπία.

ματος 7 · 9 γ ἐπαναφέρει τό πλωτό μέσο στήν ἀρχική του θέση (εὐσταθής πλεύση).

7 · 10 ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ

α) **Τῶν στερεῶν.** Γιά νά βροῦμε τήν πυκνότητα ἑνός στερεοῦ, τό ζυγίζουμε πρῶτα καί ἔστω **B** τό βάρος του. Κατόπιν τό βυθίζουμε ὁλόκληρο σ' ἕνα ὑγρό γνωστῆς πυκνότητας ρ, πού νά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν πυκνότητα τοῦ στερεοῦ καί ζυγίζουμε πάλι τό στερεό, ἐνῶ εἶναι βυθισμένο μέσα στό ὑγρό. Ἔστω $\mathbf{B_1}$ τό νέο του βάρος. Θά ἰσχύει:

$$B = \varepsilon V = \rho g V \qquad (1)$$

Ἐπίσης:

Ἄνωση $= B - B_1 =$
$=$ *εἰδικό βάρος ὑγροῦ* $\times$ *ὄγκο σώματος*

ἤ $$B - B_1 = \varepsilon_{υγρ} V = \rho_{υγρ} g V \qquad (2)$$

Διαιροῦμε τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) κατά μέλη:

$$\frac{\rho g V}{\rho_{υγρ} g V} = \frac{B}{B - B_1}$$

Λύνουμε ὡς πρός ρ:

$$\rho = \frac{B}{B - B_1} \rho_{υγ}$$

Ἄν ἐπομένως, **εἶναι γνωστή ἡ πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ $\rho_{υγρ}$ ὑπολογίζουμε μέ αὐτό τόν τύπο τήν πυκνότητα τοῦ στερεοῦ σώματος.**

β) **Τῶν ὑγρῶν.** Ζυγίζουμε χωριστά ἕνα πλωτήρα βυθίζοντάς τον σέ δυό ὑγρά α καί β. Ζυγίζουμε ἐπίσης τόν ἴδιο πλωτήρα στόν ἀέρα (σχ. 7 · 10 α).

Ἄν **B** τό βάρος τοῦ πλωτήρα στόν ἀέρα, $\mathbf{B_1}$ τό βάρος τοῦ πλωτήρα στό ὑγρό α καί $\mathbf{B_2}$ τό βάρος τοῦ πλωτήρα στό ὑγρό β, θά ἔχουμε:

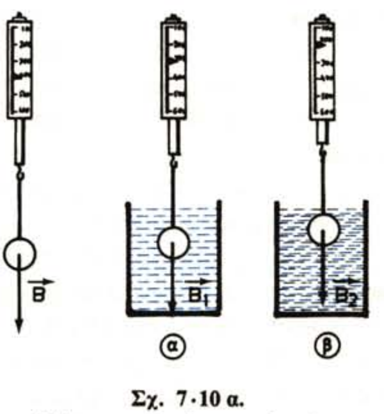
$B - B_1 =$ *Ἄνωση στό ὑγρό α* $=$
(εἰδικό βάρος ὑγροῦ α) $\times$ *ὄγκο πλωτήρα*

ἤ $$B - B_1 = \varepsilon_1 V = \rho_1 g V \qquad (1)$$

ὅπου: ρ_1 ἡ πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ α καί g ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

Ἐπίσης:

$B - B_2 =$ *Ἄνωση στό ὑγρό β* $=$
εἰδικό βάρος ὑγροῦ β $\times$ *ὄγκο πλωτήρα*



Σχ. 7·10 α.
Μέτρηση πυκνότητας ὑγρῶν.

$$\text{ἤ} \quad B - B_2 = \varepsilon_2 V = \rho_2 g V \qquad (2)$$

Διαιροῦμε τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) κατά μέλη:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{B - B_1}{B - B_2}.$$

Λύνουμε τήν ἐξίσωση ὡς πρός ρ_1 καί ἔχουμε:

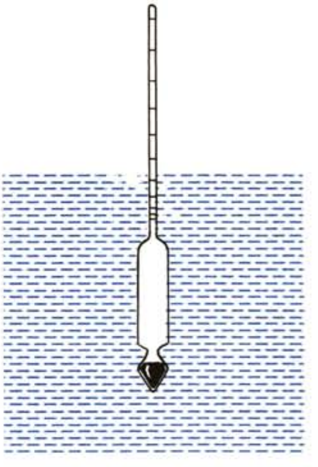
$$\rho_1 = \frac{B - B_1}{B - B_2}\,\rho_2$$

Ἑπομένως ἄν εἶναι γνωστή ἡ πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ β, τότε μέ τίς τρεῖς ζυγίσεις βρίσκουμε τήν πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ α.

γ) **Πυκνόμετρα — Ἀραιόμετρα.**

1) **Τά πυκνόμετρα** εἶναι ὄργανα, μέ τά ὁποῖα μποροῦμε νά μετρήσουμε ἀμέσως τήν πυκνότητα ἑνός ὑγροῦ.

Ἀποτελοῦνται ἀπό ἕνα γυάλινο σωλήνα, ὁ ὁποῖος στό ἕνα ἄκρο του εὐρύνεται καί φέρει βάρος (π.χ. μολύβι) πού λέγεται **ἕρμα** (σχ. 7 · 10 β).



Σχ. 7·10 β.

Λόγω τοῦ ἕρματος, τό κέντρο βάρους τοῦ πυκνομέτρου μετατοπίζεται χαμηλά καί ἔτσι, ἄν τό τοποθετήσουμε σέ ἕνα ὑγρό, θά βυθισθεῖ ὥς ἕνα σημεῖο καί θά ἰσορροπήσει (Βάρος = Ἄνωση).

Ἡ πλεύση του θά εἶναι εὐσταθής, γιατί τό κέντρο βάρους εἶναι χαμηλά.

Ὁ σωλήνας εἶναι βαθμολογημένος καί ἡ ἔνδειξη τῆς κλίμακας στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἡ τιμή τῆς πυκνότητας.

2) **Τά ἀραιόμετρα,** ἀπό πλευρᾶς κατασκευῆς εἶναι ὅμοια μέ τά πυκνόμετρα, ἀλλά εἶναι βαθμολογημένα σέ κλίμακες, πού μᾶς δίνουν περιεκτικότητες ὑγρῶν. Οἱ κλίμακες αὐτές μπορεῖ νά εἶναι καί αὐθαίρετες. Ἔτσι ὑπάρχει ἡ αὐθαίρετη κλίμακα Baumé, στήν ὁποία ἔχουμε πυκνούς βαθμούς Baumé καί ἀραιούς βαθμούς Baumé.

Στόν Πίνακα 7 · 10 · 1 φαίνεται ἡ ἀντιστοιχία βαθμῶν Baumé καί πυκνότητας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7·10·1
Ἀντιστοιχία βαθμῶν Baumé καί πυκνότητας

Πυκνοί βαθμοί Baumé	Πυκνότητα (g/cm^3)	Ἀραιοί βαθμοί Baumé	Πυκνότητα (g/cm^3)
0	1, 00	10	1,000
20	1,160	30	0,875
40	1,381	50	0,778
60	1,706	70	0,700
70	1,933	90	0,636

Στά ἀραιόμετρα ἐντάσσονται καί τά **οἰνοπνευματόμετρα,** μέ τά ὁποῖα μετροῦν ἀμέσως τούς βαθμούς τοῦ οἰνοπνεύματος, δηλαδή τόν ὄγκο τοῦ οἰνοπνεύματος σέ 100 cm^3 μίγματος (π.χ. 30° εἶναι 30 cm^3 οἰνοπνεύματος σέ 100 cm^3 μίγματος).

Ἡ σκέψη εἶναι ἡ ἑξῆς: Τό οἰνόπνευμα ἔχει πυκνότητα 0,79 g/cm^3. Εἶναι ἐπομένως μικρότερη ἀπό τήν πυκνότητα τοῦ νεροῦ (1 g/cm^3). Ἕνα μίγμα οἰνοπνεύματος καί νεροῦ θά ἔχει τόσο πιό μεγάλη πυκνότητα, ὅσο πιό μικρή περιεκτικότητα οἰνοπνεύματος ἔχει. Τό οἰνοπνευματόμετρο, ἐπομένως, θά βυθίζεται τόσο πιό λίγο σέ διάλυμα οἰνοπνεύματος καί νεροῦ, ὅσο πιό μικρή εἶναι ἡ περιεκτικότητα τοῦ διαλύματος σέ οἰνόπνευμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

8 · 1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Τά σώματα στήν άέρια κατάσταση έχουν τά έξής βασικά χαρακτηριστικά:

1) Τά μόριά τους έχουν μέση άπόσταση μεταξύ τους πολύ μεγαλύτερη άπ' ὅ,τι τά μόρια στά στερεά καί στά ύγρά.

2) Τά μόριά τους κινοῦνται συνεχῶς καί κατά τήν κίνησή τους συγκρούονται μέ ἄλλα μόρια ἤ μέ τά τοιχώματα τοῦ δοχείου μέσα στά όποῖα βρίσκονται.

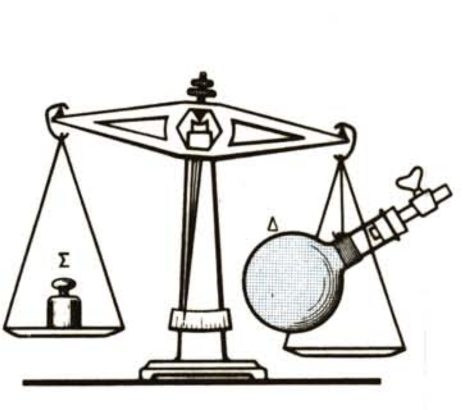
3) Δέν έχουν σταθερό ὄγκο καί ὁρισμένο σχῆμα.

4) Οἱ δυνάμεις συνοχῆς μεταξύ τῶν μορίων εἶναι πολύ μικρές. Ἔτσι τά μόρια τῶν άερίων τείνουν συνεχῶς νά άπομακρύνονται μεταξύ τους καί έπομένως τείνουν νά καταλάβουν ὅσο τό δυνατό μεγαλύτερο ὄγκο.

Σημείωση: Δυνάμεις συνοχῆς όνομάζουμε τίς έλκτικές δυνάμεις, οἱ όποῖες έξασκοῦνται μεταξύ τῶν δομικῶν στοιχείων τῆς ὕλης. Τά δομικά στοιχεῖα τῆς ὕλης μπορεῖ νά εἶναι ἄτομα ἤ μόρια. Π.χ. τά δομικά στοιχεῖα σ' ἕνα κομμάτι σίδερο εἶναι ἄτομα τοῦ στοιχείου σιδήρου. Ἐπίσης ἕνα κομμάτι χλωριούχου νατρίου NaCl ἔχει δομικά στοιχεῖα ἰόντα Cl^- καί Na^+. Τά δομικά στοιχεῖα τοῦ πάγου εἶναι μόρια H_2O. Οἱ δυνάμεις συνοχῆς στή στερεά κατάσταση εἶναι μεγάλες, στήν ύγρά κατάσταση εἶναι μικρότερες καί στήν άέρια κατάσταση γίνονται έλάχιστες.

5) Ἄν σ' ἕνα δοχεῖο, πού ὑπάρχει ἕνα άέριο Α, προσθέσουμε ἕνα άέριο Β, τά δύο άέρια άναμιγνύονται καί δημιουργοῦν ὁμοιογενή μίγματα.

α) **Τά άέρια ἔχουν βάρος.** Λογικά, άφοῦ τά άέρια άποτελοῦνται άπό ὕλη, θά ἔχουν βάρος. Πειραματικά άποδεικνύεται αὐτό, μέ τό πείραμα τοῦ σχήματος 8 · 1 α.



Σχ. 8·1 α.
Τά άέρια ἔχουν βάρος.

Στόν ἕνα δίσκο μιᾶς εὐαίσθητης ζυγαριᾶς τοποθετοῦμε ἕνα δοχεῖο Δ **άερόκενο** (δηλ. κενό άπό άέρα).

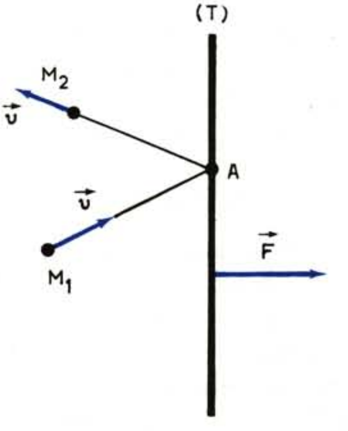
Ἰσορροποῦμε στή συνέχεια τή ζυγαριά μέ τά σταθμά Σ. Μετά στρέφουμε τή στρόφιγγα τοῦ δοχείου, ὥστε ν' άφήσουμε νά μπεῖ σ' αὐτό ὁ άτμοσφαιρικός άέρας. Θά παρατηρήσουμε τότε ὅτι ἡ ζυγαριά κλίνει πρός τό δίσκο, στόν ὁποῖο ὑπάρχει τό δοχεῖο, γιατί προσθέσαμε στό βάρος του, τό βάρος τοῦ ἀέρα.

Συμπεραίνομε λοιπόν ὅτι τά ἀέρια ἔχουν βάρος.

β) **Πιέσεις τῶν ἀερίων.** Τά ἀέρια ἐξασκοῦν δύο εἰδῶν πιέσεις:

— Τό πρῶτος εἶδος ὀφείλεται **στήν κίνηση τῶν μορίων** τῶν ἀερίων καί δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Τά μόρια ἑνός ἀερίου συμπεριφέρονται σάν ἐλαστικές σφαῖρες, οἱ ὁποῖες καθώς κινοῦνται συγκρούονται μέ τά τοιχώματα T τοῦ δοχείου, μέσα στό ὁποῖο βρίσκεται. Ἡ κρούση αὐτή εἶναι **ἐλαστική κρούση** καί ἀποτέλεσμά της εἶναι ἡ ἐξάσκηση δυνάμεως στά τοιχώματα καί ἡ ἀλλαγή τῆς διευθύνσεως τῆς ταχύτητας (σχ. 8 · 1 β).



Σχ. 8·1 β.

Ἄν ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων αὐτῶν στό τοίχωμα T εἶναι ἡ δύναμη F καί S εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας T, τό πηλίκον $\frac{F}{S}$ εἶναι ἡ πίεση πού ἀσκεῖ τό ἀέριο στό τοίχωμα, δηλαδή:

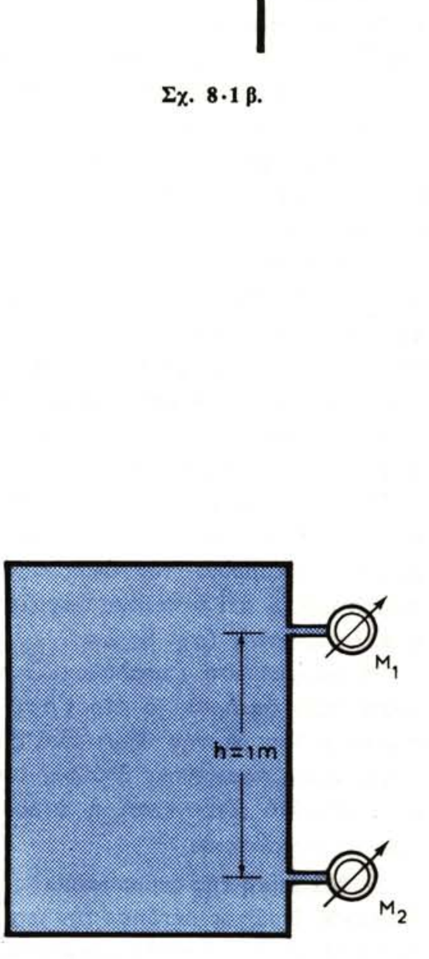
$$P = \frac{F}{S}$$

Σημείωση : Ἡ κίνηση τῶν μορίων ἑνός ἀερίου ὀνομάζεται καί **θερμική κίνηση,** ὅπως θά περιγράψουμε στό Κεφάλαιο τῆς Θερμότητας.

— Τό δεύτερο εἶδος πιέσεως ὀφείλεται **στό βάρος τοῦ ἀερίου** καί ὑπολογίζεται ὅπως ἡ ὑδροστατική πίεση ἀπό τόν τύπο:

$$P = \varepsilon\, h$$

Ἐπειδή ὅμως τό εἰδικό βάρος τῶν ἀερίων εἶναι πολύ μικρό (π.χ. εἰδικό βάρος τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα σέ θερμοκρασία 20° C καί πίεση 1 Atm εἶναι 1,3 kp/m^3), ἡ πίεση αὐτή γιά μικρά σχετικά ὕψη ἀερίων στηλῶν εἶναι πολύ μικρή. Ἔτσι στό δοχεῖο τοῦ σχήματος 8 · 1 γ τά δύο μανόμετρα M_1 καί M_2 δείχνουν σχεδόν τήν ἴδια ἔνδειξη, γιατί οἱ διαφορές πιέσεως, πού ὀφείλονται στό βάρος τοῦ ἀερίου, εἶναι πολύ μικρές καί δέν εἶναι δυνατόν οὔτε νά τίς διαβάσουμε στήν κλίμακα τοῦ μανομέτρου.



Σχ. 8·1 γ.

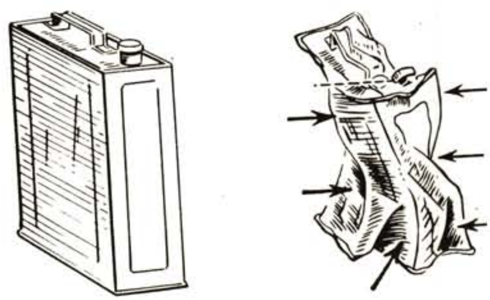
Ἄν π.χ. στό δοχεῖο ὑπάρχει ἀέρας, ὁ ὁποῖος ἔχει εἰδικό βάρος $\varepsilon = 1{,}3\ kp/m^3$, ἡ διαφορά ἐνδείξεων στήν πίεση τῶν δύο μανομέτρων M_1 καί M_2 θά εἶναι:

$$\Delta P = \varepsilon\, h' = 3\ kp/m^3 \times 1\ m = 1{,}3\ kp/m^2 =$$
$$= 0{,}00013\ kp/cm^2 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\ at.$$

'Επειδή ἡ πίεση τοῦ ἀέρα μέσα στό δοχεῖο, ἡ ὁποία ὀφείλεται στή θερμική κίνηση τῶν μορίων, εἶναι 1 Atm = 1,0336 at ἡ διαφορά πιέσεων, πού δείχνουν τά μανόμετρα M_1 καί M_2 εἶναι ἀμελητέα.

8 · 2 ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΗ ΠΙΕΣΗ

'Η ἀτμόσφαιρα εἶναι μιά ἀέρια μάζα, πού περιβάλλει τή Γῆ καί τήν ἀκολουθεῖ στήν περιστροφική της κίνηση γύρω ἀπό τόν ἄξονά της καί τήν περιφορά της γύρω ἀπό τόν Ἥλιο. 'Η ἕλξη τῆς Γῆς συγκρατεῖ αὐτή τήν ἀέρια μάζα γύρω της. Ἄν δέν ἦταν ἡ ἕλξη τῆς Γῆς, τά ἀέρια συστατικά τῆς ἀτμόσφαιρας, μέ τήν τάση πού ἔχουν νά ἐκτείνονται σέ μεγαλύτερο χῶρο, θά εἶχαν σκορπισθεῖ στό διάστημα.



Σχ. 8·2 α.
Ἄν ἀφαιρεθεῖ ὁ ἀέρας ἀπό τό δοχεῖο, αὐτό τσαλακώνεται ἀπό τήν ἐξωτερική ἀτμοσφαιρική πίεση.

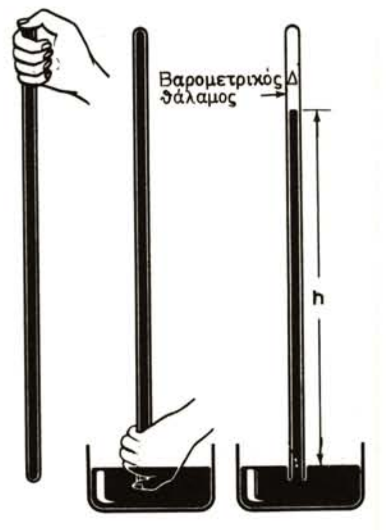
'Η ἀτμόσφαιρα εἶναι ἕνα μίγμα πολλῶν ἀερίων, ἀπ' τά ὁποῖα τά κυριότερα εἶναι τό ἄζωτο N_2 καί τό ὀξυγόνο O_2.

'Η πυκνότητα τῆς ἀτμόσφαιρας καθώς ἀνεβαίνουνε, συνεχῶς ἐλαττώνεται. Τό πάχος ὅμως τῆς ἀτμόσφαιρας εἶναι μεγάλο καί ἔτσι ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ αὐτή, λόγω τοῦ βάρους της, εἶναι σημαντική. Αὐτή ἡ πίεση ὀνομάζεται **ἀτμοσφαιρική πίεση.**

Μέ τό παρακάτω πείραμα διαπιστώνουμε ὅτι ὑπάρχει ἀτμοσφαιρική πίεση:

Παίρνουμε δοχεῖο ἀπό λευκοσίδερο (τενεκέ), πού ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπίπεδου καί μέ μία ἀεραντλία ἀφαιροῦμε τόν ἀέρα ἀπό τό δοχεῖο, ὁπότε παρατηροῦμε ὅτι ὁ τενεκές ἀρχίζει νά συρρικνώνεται (τσαλακώνεται) (σχ. 8 · 2 α).

'Η συρρίκνωση (τσαλάκωμα) τοῦ τενεκέ, γίνεται γιατί πρίν ἀφαιρεθεῖ ὁ ἀέρας ἀπό τό δοχεῖο, ἡ πίεσή του ἦταν ἴση μέ τήν ἐξωτερική ἀτμοσφαιρική πίεση. Ὅταν ὅμως ἀφαιρέθηκε ὁ ἀέρας τοῦ δοχείου, ἡ πίεση μέσα σ' αὐτό μίκρυνε καί ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση ἀπ' ἔξω τό συρρίκνωσε.



Σχ. 8·2 β.
Πείραμα Torricelli.

α) **Μέτρηση τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως — Πείραμα Torricelli.** Πρῶτος μέτρησε τήν ἀτμοσφαιρική πίεση ὁ Torricelli κάνοντας τό ὁμώνυμο πείραμά του, τό ὁποῖο γίνεται ὡς ἑξῆς (σχ. 8 · 2 β):

Γεμίζομε τελείως ἕνα γυάλινο σωλήνα μήκους 1 m, κλειστό στό ἕνα του ἄκρο, μέ ὑδράργυρο. Κλείνουμε μέ τό μεγάλο μας δάκτυλο τό ἀνοικτό ἄκρο τοῦ σωλήνα, τόν ἀναστρέφουμε καί τόν βυθίζουμε μέσα σ' ἕνα δοχεῖο μέ ὑδράργυρο. 'Αφαιροῦμε στή συνέχεια τό δάκτυλό μας, ὁπότε παρατηροῦμε ὅτι ὁ ὑδράργυρος κατεβαίνει μέσα στό σωλήνα καί σταματᾶ σέ κάποια θέση.

Θά ἀποδείξουμε στή συνέχεια ὅτι ἡ πίεση πού ἀσκεῖ αὐτή ἡ στήλη h τοῦ ὑδραργύρου εἶναι ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση.

'Η πίεση στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο xx' καί στό ἴδιο ὑγρό (τόν ὑδράργυρο) μέσα στό σωλήνα A καί ἔξω ἀπ' αὐτόν **B** εἶναι ἴδια (σχ. 8 · 2 γ). Δηλαδή:

$$P_A = P_B \qquad (1)$$

'Ο χῶρος Δ ὀνομάζεται **βαρομετρικός χῶρος** καί εἶναι σχεδόν κενός. 'Ο τρόπος μέ τόν ὁποῖο ἔγινε τό πείραμα, δέν ἐπέτρεψε νά μπεῖ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας σ' αὐτόν. Τό μόνο ἀέριο πού ὑπάρχει στό βαρομετρικό χῶρο εἶναι ἀτμοί ὑδραργύρου, οἱ ὁποῖοι στή συνηθισμένη θερμοκρασία (20° ὥς 30° C) ἐξασκοῦν ἐλάχιστη πίεση, τόση ὥστε τελικά ὁ χῶρος αὐτός νά μπορεῖ νά θεωρηθεῖ **ἀερόκενος.** Τό κενό τοῦ χώρου αὐτοῦ ὀνομάζεται **βαρομετρικό κενό.**

'Επομένως ἡ πίεση P_A εἶναι μόνο ἡ ὑδροστατική πίεση τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου, ὕψους h:

$$P_A = \varepsilon\, h \qquad (2)$$

ὅπου: ε εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑδραργύρου.

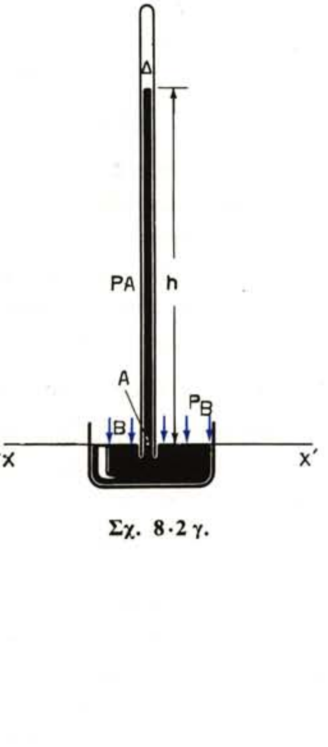
Στό **B** ἐξασκεῖται μόνο ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση P_{at}:

$$P_B = P_{at} \qquad (3)$$

'Από τίς ἐξισώσεις (1), (2) καί (3) προκύπτει:

$$P_{at} = \varepsilon\, h$$

Ἄν ἐπομένως μετρήσουμε τό ὕψος h τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. 'Επειδή, ὅμως, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω, ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση δέν παραμένει σταθερή, δέν βρίσκουμε ἐντελῶς σταθερή τιμή γιά τό ὕψος h. 'Από μετρήσεις πού ἔγιναν στό ὑψόμετρο τῆς θάλασσας, βρέθηκε ὅτι τό ὕψος τῆς στήλης κυμαίνεται γύρω στά 76 cm.



Σχ. 8·2 γ.

Θεωροῦμε τήν πίεση, πού ἀσκεῖ στήλη ὑδραργύρου 76 cm, σέ θερμοκρασία 0° C, σάν κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση. Τήν πίεση αὐτή, ὅπως ἀναφέραμε στήν 'Υδροστατική, χρησιμοποιοῦμε σά μονάδα μετρήσεως τῆς πιέσεως, μέ τήν ὀνομασία **φυσική ἀτμόσφαιρα Atm.**

β) **Ὑπολογισμός τῆς κανονικῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως.**

1) Στόν τύπο:

$$P = \varepsilon\, h$$

ἀντικαθιστοῦμε $h = 0{,}76$ cm καί $\varepsilon = 13\,600$ kp/m³, πού εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑδραργύρου στή θερμοκρασία 0° C. Ἔχουμε:

$$P = 13\,600\ \mathrm{kp/m^3} \cdot 0{,}76\ \mathrm{m} = 10\,336\ \mathrm{kp/m^2} = $$
$$= 1{,}0336\ \mathrm{kp/cm^2}.$$

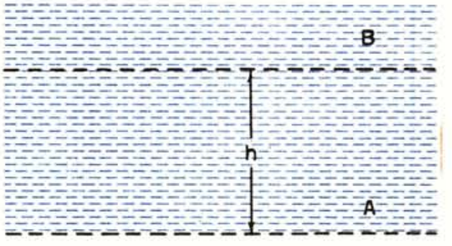
Ἐπειδή, ὅπως εἴπαμε, ἡ κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση συμβολίζεται 1 Atm, συμπεραίνουμε ὅτι:

$$1\ Atm = 1{,}0336\ kp/cm^2 = 1{,}0336\ at$$

2) Ἄλλη μονάδα μετρήσεως τῆς πιέσεως εἶναι τό mmHg, πού, ὅπως εἴπαμε, εἶναι ἡ πίεση τήν ὁποία ἀσκεῖ στήλη ὑδραργύρου ὕψους 1 mm.

Ἐπειδή ἡ κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι ἡ πίεση πού ἀσκεῖ στήλη ὑδραργύρου ὕψους 76 cm ἤ 760 mm, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι:

Κονονική ἀτμοσφαιρική πίεση = 760 mmHg



Σχ. 8·2 δ.

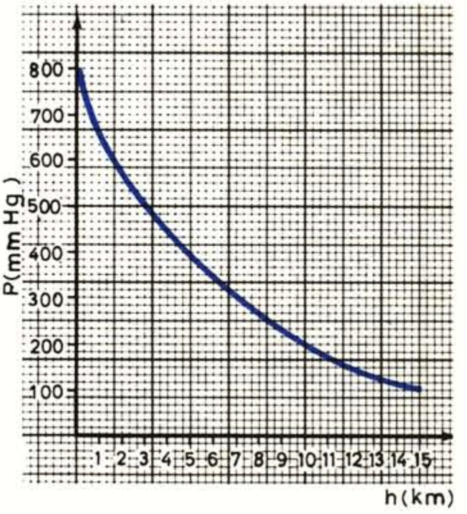
γ) **Μεταβολές τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως.** Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση δέν παραμένει σταθερή, ἀλλά μεταβάλλεται μέ τό ὑψόμετρο. Ὅσο πιό ψηλά ἀνεβαίνουμε στήν ἀτμόσφαιρα, τόσο πιό μικρή εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση. Ὁ λόγος εἶναι ὅτι, ὅταν ἀνεβοῦμε σέ ὕψος h μέσα στήν ἀτμόσφαιρα, ἡ πίεση ἐλαττώνεται κατά τό ποσό τῆς πιέσεως πού ἀσκεῖ ἡ στήλη τοῦ ἀέρα κάτω ἀπό τό ὕψος αὐτό (σχ. 8·2 δ). Θά ἀποδείξουμε ὅτι, ἄν ἀνεβοῦμε κοντά στή θάλασσα κατά ὕψος $h = 10{,}5$ m, ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση ἐλαττώνεται κατά 1 torr = 1 mmHg.

Ἀπόδειξη : Κοντά στή θάλασσα τό εἰδικό βάρος τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα εἶναι 1,293 kp/m³.

Ἡ πίεση πού ἀσκεῖ στήλη ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα ὕψους 10,5 m εἶναι:

$$P = \varepsilon\, h = 1{,}293\ \mathrm{kp/m^3} \cdot 10{,}50\ \mathrm{m} \simeq$$
$$\simeq 13{,}6\ \mathrm{kp/m^2} = 1\ \mathrm{torr},\ \text{γιατί πίεση } 1\ \mathrm{torr} =$$
$$= 1\ \mathrm{mmHg} = 13\,600\ \mathrm{kp/m^3} \cdot 0{,}001\ \mathrm{m} = 13{,}6\ \mathrm{kp/m^2}.$$

Ἡ ἐλάττωση αὐτή τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως κατά



Σχ. 8·2 ε.
Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση μικραίνει μέ τό ὕψος.

1 torr σέ ὑψομετρική διαφορά 10,5 m ἰσχύει γιά ὑψόμετρα μικρά. Ἡ μεταβολή τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως μέ τό ὕψος δίνεται ἀπό τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 8·2ε.

Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση μεταβάλλεται καί στόν ἴδιο τόπο κατά τή διάρκεια τοῦ 24ώρου. Οἱ μεταβολές αὐτές σχετίζονται μέ τίς καιρικές μεταβολές καί δίνουν πολύτιμες πληροφορίες γιά τήν πρόγνωση τοῦ καιροῦ.

8·3 ΟΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ (ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΛΛΩΝ ΠΙΕΣΕΩΝ)

α) **Βαρόμετρα.** Βαρόμετρα εἶναι τά ὄργανα μέ τά ὁποῖα μποροῦμε νά μετροῦμε τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Τά διακρίνουμε σέ **ὑδραργυρικά** καί σέ **μεταλλικά** βαρόμετρα.

1) **Ὑδραργυρικά βαρόμετρα.** Ἡ λειτουργία τους βασίζεται στήν ἀρχή τοῦ πειράματος τοῦ Τορρικέλλι. Ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα «κεκαμμένο» γυάλινο σωλήνα, ὁ ὁποῖος στό ἕνα του σκέλος ἔχει μιά μικρή λεκάνη (σχ. 8·3α). Στό ὑπόλοιπο τμῆμα ὁ σωλήνας ἔχει πολύ μικρό ἐμβαδόν διατομῆς. Ὁ ὑδράργυρος ἰσορροπεῖ μέσα στό σωλήνα καί ὁ χῶρος Δ εἶναι βαρομετρικός χῶρος.

Σχ. 8·3α.
Ὑδραργυρικό βαρόμετρο.

Ἡ ἔνδειξη h τῆς κλίμακας K μεταξύ τῶν δύο ἐλεύθερων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδράργυρου μᾶς δείχνει τήν ἀτμοσφαιρική πίεση σέ mmHg. Ἄν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση μεταβληθεῖ, τότε ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδράργυρου στό ἀριστερό σκέλος κατεβαίνει ἤ ἀνεβαίνει. Ἡ μεταβολή αὐτή τοῦ ὕψους, ἐπιδρᾶ ἀνεπαίσθητα στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου στή λεκάνη, κι αὐτό γιατί ἡ διατομή τῆς λεκάνης εἶναι πολύ μεγαλύτερη ἀπό τή διατομή τοῦ ὑπόλοιπου σωλήνα. Μποροῦμε ἑπομένως νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ ὁριζόντια ἐπιφάνεια xx' εἶναι στό ἴδιο πάντα ὁριζόντιο ἐπίπεδο, τό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ στήν ἔνδειξη μηδέν τῆς κλίμακας K τοῦ βαρομέτρου.

Σχ. 8·3β.
Μεταλλικό βαρόμετρο.

2) **Μεταλλικά βαρόμετρα.** Ἕνας ἀπό τούς τύπους τῶν μεταλλικῶν βαρομέτρων φαίνεται στό σχῆμα 8·3β. Σέ ἕνα ἀερόκενο δοχεῖο, ὑπάρχει ἐσωτερικά ἕνα διπλό ἔλασμα E, τό ὁποῖο ἰσορροπεῖ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση, πού ἐξασκεῖται στήν εὔκαμπτη μεταλλική καί ἐλαστική ἐπιφάνεια M.

Οἱ μεταβολές τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως ἔχουν σάν ἀποτέλεσμα νά μετακινεῖται τό σημεῖο A κατά τή διεύθυνση xx' καί μέ σύστημα μοχλῶν νά μετακινεῖται ὁ δείκτης Δ μπρός στήν κλίμακα, ἡ ὁποία βαθμολογεῖται συνήθως σέ mmHg.

Τά μεταλλικά βαρόμετρα πλεονεκτοῦν ἀπό τά ὑδραργυρικά, γιατί μεταφέρονται εὔκολα, ἀλλά μειονεκτοῦν γιατί τά ὑδραργυρικά ἔχουν μεγαλύτερη ἀκρίβεια στίς ἐνδείξεις.

Σημείωση: Εἴχαμε πεῖ στήν παράγραφο 8·2 ὅτι σέ κάθε ὑψόμετρο ἀντιστοιχεῖ μιά ἀτμοσφαιρική πίεση. Βαθμολογώντας ἔτσι τήν κλίμακα ἑνός μεταλλικοῦ βαρομέτρου σέ διάφορα ὕψη, μποροῦμε νά μετρήσουμε ἀπευθείας μέ τό ὄργανο αὐτό, τό ὑψόμετρο πού βρισκόμαστε. Τέτοιου εἴδους μετρήσεις εἶναι μόνο ἐνδεικτικές καί ὄχι ἀκρίβειας γιατί, ὅπως εἴπαμε, ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση δέν παραμένει σταθερή σ' ἕνα τόπο.

β) **Μανόμετρα.** Τά μανόμετρα εἶναι ὄργανα, μέ τά ὁποῖα μετροῦμε πιέσεις ὑγρῶν ἤ ἀερίων. Αὐτά διακρίνονται σέ ὑδραργυρικά καί σέ μεταλλικά.

1) **Ὑδραργυρικά μανόμετρα.** Τά διακρίνουμε σέ ἀνοικτά καί κλειστά μανόμετρα.

— **Ἀνοικτά ὑδραργυρικά μανόμετρα.** Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 8·3γ ἕνας «κεκαμμένος» γυάλινος σωλήνας μέ ὑδράργυρο εἶναι ἀνοικτός καί ἀπό τά δύο σκέλη. Ἡ πίεση στό χῶρο x, πού θέλουμε νά μετρήσουμε, μεταβιβάζεται στό A καί εἶναι ἴση μέ τήν πίεση στό σημεῖο B:

$$P_X = P_A = P_B$$

Ἡ πίεση P_B ἰσοῦται μέ τήν πίεση τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης h καί τήν ἀτμοσφαιρική πίεση P_{at}.

Ἑπομένως:

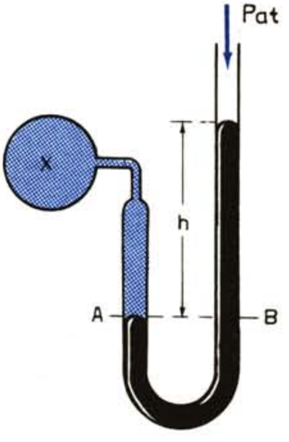
$$P_X = \varepsilon h + P_{at}$$

Μετρώντας τή διαφορά στάθμης τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης h καί γνωρίζοντας τήν ἀτμοσφαιρική πίεση, ὑπολογίζουμε τήν πίεση στό χῶρο x.

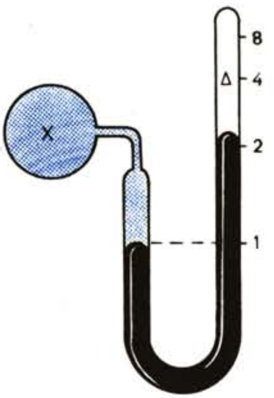
— **Κλειστά ὑδραργυρικά μανόμετρα.** Ἕνα τέτοιο μανόμετρο ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα «κεκαμμένο» γυάλινο σωλήνα, κλειστό στό ἕνα σκέλος (σχ. 8·3δ). Στό χῶρο τοῦ κλειστοῦ σκέλους Δ ὑπάρχει ἀέριο ἤ ἀέρας.

Ἡ πίεση στό χῶρο x εἶναι:

$$P_X = P_\Delta + \varepsilon h$$



Σχ. 8·3γ.
Ἀνοικτό ὑδραργυρικό μανόμετρο.

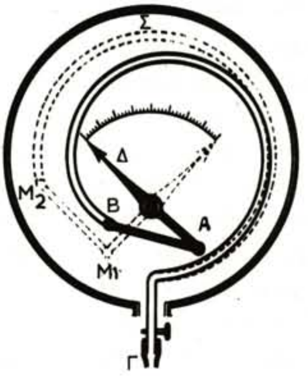


Σχ. 8·3δ.
Κλειστό ὑδραργυρικό μανόμετρο.

Ὅσο ἀνεβαίνει ὁ Hg στό δεξιό σκέλος, τόσο συμπιέζεται τό ἀέριο στό χῶρο Δ. Δηλαδή ἡ πίεση $P_Δ$ μεγαλώνει.

Πάνω στό γυαλί τοῦ δεξιοῦ σωλήνα ὑπάρχει βαθμολογημένη κλίμακα. Ἡ κλίμακα αὐτή εἶναι ἀνισοδιάστατη. Ἔτσι οἱ ὑποδιαιρέσεις της μικραίνουν πρός τά πάνω. Τήν πίεση διαβάζουμε στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδράργυρου στό δεξιό σκέλος.

2) **Μεταλλικά μανόμετρα.** Ἕνα τέτοιο μανόμετρο ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα εὔκαμπτο καί μεταλλικό σωλήνα Σ, ὁ ὁποῖος ἔχει διατομή ἐλλειπτική (σχ. 8 · 3 ε).



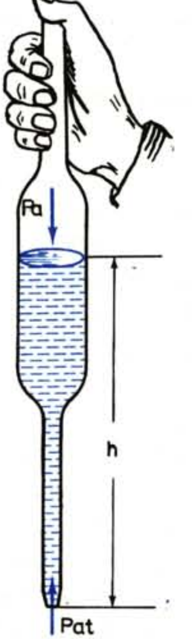
Σχ. 8·3 ε.
Μεταλλικό μανόμετρο.

Ἄν συνδέσουμε τό σημεῖο Γ μέ χῶρο, στόν ὁποῖο ὑπάρχει πίεση μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική, ἡ ὑπερπίεση αὐτή τείνει νά μεταβάλλει τή διατομή τοῦ σωλήνα ἀπό ἐλλειπτική σέ κυκλική, μέ ἀποτέλεσμα ὁ σωλήνας Σ νά τείνει νά γίνει εὐθύς. Ἔτσι τό ἐλεύθερο ἄκρο τοῦ σωλήνα Σ μετακινεῖται ἀπό τή θέση M_1 στή θέση M_2 καί ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου Δ μετακινεῖται μπρός στή βαθμολογημένη κλίμακα.

γ) **Σιφώνι.** Τό σιφώνι εἶναι σωλήνας γυάλινος πού, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 8 · 3 στ παρουσιάζει διεύρυνση στό μέσο. Χρησιμοποιεῖται κυρίως στά ἐργαστήρια Χημείας γιά νά μεταφέρονται ποσότητες διαλυμάτων ἤ χημικῶν ἑνώσεων ἀπό δοχεῖο σέ δοχεῖο. Λειτουργεῖ ὡς ἑξῆς:

Βυθίζομε τό ἕνα ἀνοικτό ἄκρο τοῦ σιφωνιοῦ σέ ἕνα δοχεῖο μέ ὑγρό, πού πρόκειται νά μεταφέρουμε. Ἀπό τό ἄλλο ἀνοικτό ἄκρο ἀναρροφοῦμε μέ τό στόμα τόν ἀέρα τοῦ σωλήνα καί τό ὑγρό ἀνέρχεται σ' αὐτόν, στό ὕψος πού θέλουμε. Κλείνουμε τότε, μέ τό δάκτυλο τοῦ χεριοῦ μας, τό πάνω ἄκρο καί βγάζουμε τό σιφώνι ἔξω ἀπό τό ὑγρό. Μέσα στό σιφώνι τότε παραμένει μιά ποσότητα ὑγροῦ, γιατί ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση P_{at} ἰσορροπεῖ τή μειωμένη πίεση τοῦ ἀέρα μέσα στό σιφώνι P_a καί τήν πίεση τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ ὕψους h:

$$P_{at} = P_a + \varepsilon h$$



Σχ. 8·3 στ.
Σιφώνι.

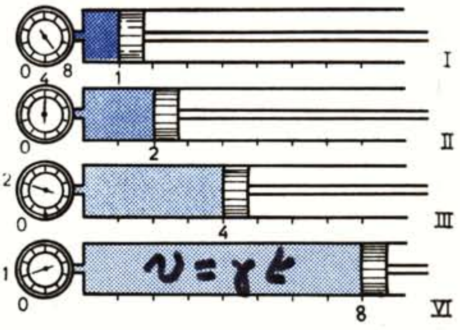
Ἔπειτα μεταφέρουμε τό σιφώνι μέ τό περιεχόμενο στό ἄλλο δοχεῖο, ἔχοντας πάντα κλειστό μέ τό δάκτυλό μας τό πάνω ἀνοικτό ἄκρο τοῦ σωλήνα.

Στή συνέχεια ἀφαιροῦμε τό δάκτυλο καί μέσα στό χῶρο τοῦ σιφωνιοῦ ἡ πίεση P_a γίνεται πάλι ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική. Ἡ στήλη τότε τοῦ ὑγροῦ παύει νά ἰσορροπεῖται καί τό ὑγρό χύνεται στό δεύτερο δοχεῖο.

8 · 4 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ ΛΟΓΩ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΕΩΣ

Νόμος Boyle - Mariotte.

Πείραμα : Σ' ἕνα μακρόστενο σωλήνα τοποθετοῦμε ἕνα ἔμβολο καί ἕνα μανόμετρο (σχ. 8 · 4 α). Μιά ποσότητα ἀερίου εἶναι ἐγκλωβισμένη ἀνάμεσα στό σωλήνα καί τό ἔμβολο. Στή θέση I τό ἀέριο ἔχει ὄγκο V = 1 *l*t καί ἐξασκεῖ πίεση P = 8 at. Μετακινοῦμε τό ἔμβολο σιγά-σιγά (ὥστε νά μήν ἔχουμε μεταβολή τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀερίου κατά τή μετακίνηση) στίς διαδοχικές θέσεις II, III καί IV. Οἱ ὄγκοι τοῦ ἀερίου στίς ἀντίστοιχες θέσεις εἶναι 2 *l*t, 4 *l*t καί 8 *l*t. Διαπιστώνουμε τότε, ὅτι τό μανόμετρο δείχνει πιέσεις ἀντίστοιχα 4 at, 2 at καί 1 at.



Σχ. 8·4 α.

Στόν Πίνακα τῶν μετρήσεων φαίνονται οἱ τιμές τῶν ὄγκων καί τῶν πιέσεων στήν κάθε θέση καί ἀπό αὐτές τίς τιμές προκύπτει ὅτι, **τό γινόμενο τῆς πιέσεως ἐπί τόν ὄγκο παραμένει σταθερό.**

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Θέση	I	II	III	IV
Ὄγκος *l*t	1	2	4	8
Πίεση at	8	4	2	1
Ὄγκος × Πίεση *l*t · at	8	8	8	8

Ἔτσι διατυπώνεται ἡ παρακάτω πρόταση, ἡ ὁποία ὀνομάζεται καί **Νόμος Boyle - Mariotte.**

Τό γινόμενο τῆς πιέσεως ἐπί τόν ὄγκο ἑνός ἀερίου, πού ἡ θερμοκρασία του δέν μεταβάλλεται, εἶναι σταθερό :

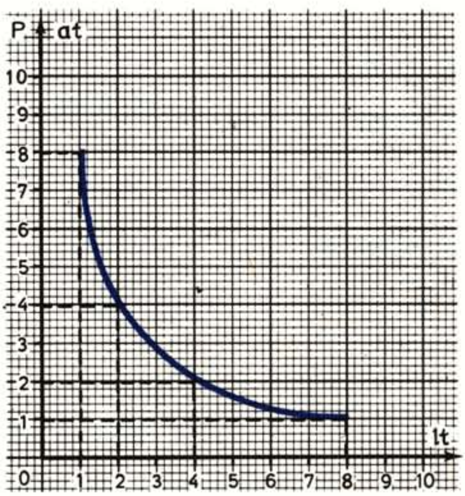
$$P\,V = σταθ.$$

Ἡ γραφική παράσταση αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως φαίνεται στό σχῆμα 8 · 4 β.

Ἡ καμπύλη ὀνομάζεται **ἰσόθερμη καμπύλη,** γιατί κατά τή διάρκεια τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως καί τοῦ ὄγκου, διατηρήσαμε σταθερή τή θερμοκρασία τοῦ ἀερίου.

Σημείωση : Ὁ νόμος τοῦ Boyle - Mariotte δέν ἰσχύει ἀκριβῶς. Ἔχουμε δηλαδή ἀποκλίσεις, πού εἶναι πιό αἰσθητές στίς περιπτώσεις πού τά ἀέρια βρίσκονται κοντά σέ συνθῆκες ὑγροποιήσεως. Τά ἀέρια ἐκεῖνα, πού θά μποροῦσαν νά ἀκολουθήσουν ἀκριβῶς τό νόμο αὐτό, ὀνομάζονται **ἰδανικά ἀέρια.**

Ἐφαρμογή. (Βαθμολόγηση κλειστοῦ ὑδραργυρικοῦ μανομέτρου). Ὅταν τό κλειστό μανόμετρο τοῦ σχήματος 8 · 4 γ δείχνει τήν ἀτμοσφαιρική πίεση P_{at} = 1 Atm, τότε ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδράργυρου εἶναι στό ἴδιο ὕψος καί στά δύο σκέλη. Τό ὕψος h τοῦ ἀερίου στόν κλειστό χῶρο εἶναι 10 cm.



Σχ. 8·4 β.
Γραφική παράσταση τοῦ Νόμου τῶν Boyle - Mariotte.

Συνδέουμε τό μανόμετρο μέ τόν χῶρο y. Τότε ὁ ὑδράργυρος κατεβαίνει στό ἀριστερό σκέλος καί ἀντίστοιχα ἀνεβαίνει στό δεξιό κατά τό ἴδιο ὕψος.

Ἄν δίνεται τό ὕψος $\omega = 4$ cm, νά ὑπολογισθεῖ ἡ πίεση P_y.

Λύση :

Στή θέση (β) ἡ πίεση P_y θά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα δυό πιέσεων: 1) Τῆς πιέσεως P_2, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἀπό τό ἀέριο στόν κλειστό χῶρο τοῦ μανομέτρου καί 2) τῆς πιέσεως πού δημιουργεῖται ἀπό τή διαφορά στάθμης α τοῦ ὑδράργυρου στά δυό σκέλη τοῦ σωλήνα καί ἡ ὁποία θά εἶναι $\varepsilon_{Hg}\,\alpha$.

Ἔχουμε: $\alpha = 2\,(h - \omega)$

Ἑπομένως: $P_y = P_2 + 2\,(h - \omega)\,\varepsilon_{Hg}$ (1)

Στή θέση (α) τό ἀέριο τοῦ μανομέτρου ἔχει ὄγκο $V_1 = S\,h$ καί πίεση $P_1 = 1$ Atm.

Στή θέση (β) τό ἀέριο ἔχει ὄγκο $V_2 = S\,\omega$ καί πίεση P_2. Στίς δύο αὐτές θέσεις τό ἀέριο ἔχει τήν ἴδια θερμοκρασία. Ἑπομένως ἰσχύει ὁ νόμος Boyle - Mariotte:

$$P_2\,V_2 = P_1\,V_1$$

$$\text{ἤ} \quad P_2\,S\,\omega = P_{at}\,S\,h \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_2 = \frac{P_{at}\,h}{\omega} \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν τιμή τῆς P_2 ἀπό τήν ἐξίσωση (2) στήν (1) καί ἔχουμε:

$$P_y = \frac{P_{at}\,h}{\omega} + 2\,(h - \omega)\,\varepsilon_{Hg} \qquad (3)$$

Ἀριθμητική ἐφαρμογή. Τά ἀριθμητικά δεδομένα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως εἶναι:

$P_{at} = 1$ Atm $= 1{,}0336$ kp/cm² $= 1033{,}6$ kp/m²

$h = 10$ cm $= 0{,}1$ m

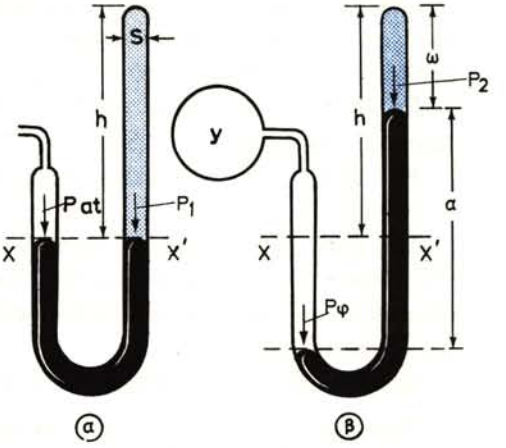
$\varepsilon_{Hg} = 13{,}6$ P/cm³ $= 13\,600$ kp/m³

$\omega = 4$ cm $= 0{,}04$ m.

Ἀντικατάσταση :

$$P_x = \frac{10336 \cdot 0{,}1}{0{,}04}\ \text{kp/m}^2 + 2\,(0{,}1 - 0{,}04) \cdot 13\,600\ \text{kp/m}^2$$

$$= 2{,}743\ \text{kp/cm}^2 = 2{,}743\ \text{at} = 2{,}68\ \text{bar}.$$



Σχ. 8·4γ.

Σημείωση: Μέ τήν ἐξίσωση (3) γίνεται ἡ βαθμολόγηση ἑνός κλειστοῦ μανομέτρου, γιατί δίνονται διάφορες τιμές στό P_y ὑπολογίζοντας τήν τιμή τοῦ ω.

8 · 5 ΑΝΩΣΗ – ΑΕΡΟΣΤΑΤΑ

Ἡ ἀρχή τοῦ 'Αρχιμήδη ἰσχύει καί γιά τήν περίπτωση τῶν ἀερίων. Δηλαδή, ἕνα σῶμα πού βρίσκεται μέσα σέ ἕνα ἀέριο δέχεται ἄνωση, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ τό βάρος τοῦ ἀερίου πού ἐκτοπίζει.

Πειραματικά μποροῦμε νά τό ἀποδείξουμε μέ τό πείραμα τοῦ σχήματος 8 · 5 α.

Μιά κοίλη ἐλαφριά σφαίρα ἰσορροπεῖται στή θέση α τοῦ ζυγοῦ.

Στή θέση β ἡ ἰσορροπία καταστρέφεται, γιατί μέ τή βοήθεια ἀεραντλίας ἀφαιρέσαμε τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα ἀπό τόν κώδωνα καί μηδενίσαμε ἔτσι μιά ἀπό τίς δυνάμεις, τήν ἄνωση Α.

Ἔτσι ἀποδείχθηκε ἡ ὕπαρξη τῆς ἀνώσεως.

'Εφαρμογή τῆς ἀνώσεως στά ἀερόστατα. Τό ἀερόστατο εἶναι ἕνας ἀεροθάλαμος πού τόν γεμίζομε μέ ἐλαφρό ἀέριο, συνήθως ἥλιο He, ἐπειδή αὐτό παρουσιάζει ἀδράνεια στίς χημικές ἀντιδράσεις (κυρίως γιατί δέν ἀναφλέγεται) (σχ. 8 · 5 β).

'Επειδή ὁ ὄγκος τοῦ ἀεροθάλαμου εἶναι μεγάλος, ἡ ἄνωση εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό συνολικό βάρος τοῦ ἀερόστατου (βάρος ἀερίου, ἀεροθάλαμου, σχοινιῶν, καλαθιοῦ, ἐπιβατῶν κ.λπ.) Ἡ δύναμη:

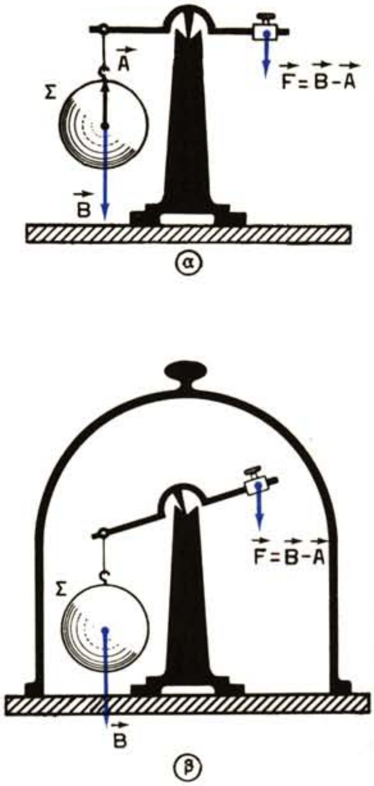
$$F = A - B$$

ὀνομάζεται **ἀνυψωτική δύναμη** τοῦ ἀερόστατου.

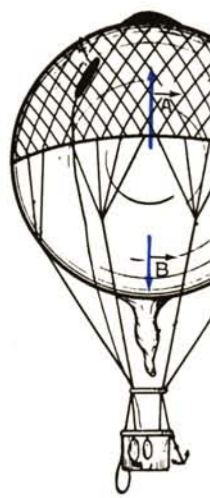
8 · 6 ΥΔΡΑΝΤΛΙΕΣ

'Ονομάζουμε ὑδραντλίες τίς συσκευές, μέ τίς ὁποῖες μποροῦμε νά ἀνυψώσουμε νερό (ἤ καί ἄλλα ὑγρά) σέ διάφορα ὕψη. Τίς διακρίνουμε σέ **ἀναρροφητικές, καταθλιπτικές** καί **φυγοκεντρικές** ὑδραντλίες.

α) 'Αναρροφητική ἀντλία. Στό σχῆμα 8 · 6 α παριστάνεται μιά ἀναρροφητική ἀντλία. 'Αποτελεῖται ἀπό ἕνα κύλινδρο Κ, ὁ ὁποῖος συνδέεται μέ ἕνα μακρύ σωλήνα Σ. Ἕνα ἔμβολο Ε μπορεῖ νά κινεῖται παλινδρομικά μέσα στόν κύλινδρο. Οἱ δύο βαλβίδες α καί β ἀνοίγουν μόνο πρός τά ἐπάνω.



Σχ. 8·5 α.



Σχ. 8·5 β.
'Αερόστατο.

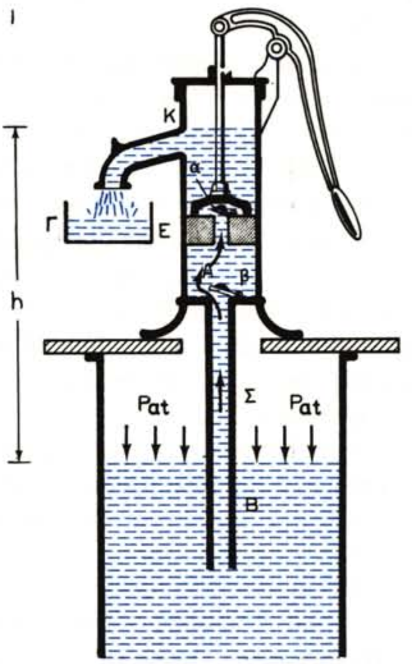
Λειτουργία.

1η φάση (ἀναρρόφηση). Μέ τή μετακίνηση τοῦ ἐμβόλου πρός τά ἐπάνω δημιουργεῖται ὑποπίεση στό χῶρο Α. Ἡ βαλβίδα α κλείνει ἀπό τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα, πού προσπαθεῖ νά μπεῖ στό χῶρο Α. Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση P_{at} ὠθεῖ τό νερό μέσα στό σωλήνα Σ καί μέσω τῆς βαλβίδας β στό χῶρο Α τῆς ἀντλίας.

2η φάση (συμπίεση). Πιέζουμε τό ἔμβολο Ε πρός τά κάτω καί ἡ βαλβίδα α ἀνοίγει ἐπιτρέποντας στό νερό νά περάσει πάνω ἀπό αὐτό. Ἡ βαλβίδα β κλείνει ἀφοῦ πιέζεται πρός τά κάτω, καί ἔτσι τό νερό τοῦ χώρου Α δέν ἐπιστρέφει στό σωλήνα Σ.

Ὅταν μετακινήσουμε πάλι τό ἔμβολο πρός τά ἐπάνω (φάση 1η - ἀναρρόφηση), νέα ποσότητα νεροῦ ἀνεβαίνει στό χῶρο Α, ἐνῶ τό νερό, πού βρίσκεται πάνω ἀπό τό ἔμβολο, χύνεται στό δοχεῖο Γ.

Ἐπαναλαμβάνοντας τίς φάσεις 1 καί 2 μεταφέρουμε νερό στό δοχεῖο Γ ἀπό τό χῶρο Β.



Σχ. 8·6 α.
Ἀναρροφητική ἀντλία.

Παρατήρηση: Ὅπως εἴδαμε, τό νερό στό σωλήνα Σ καί στό χῶρο Α ἀνεβαίνει πιεζόμενο ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Ὅμως ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση μπορεῖ νά ἰσορροπήσει στήλη νεροῦ ὕψους περίπου 10 m πού ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση:

$$P_{at} = \varepsilon_v \, h$$

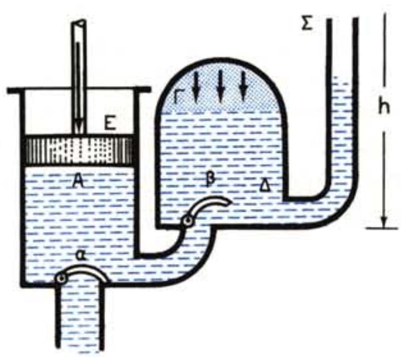
$$\text{ἤ} \quad h = \frac{P_{at}}{\varepsilon_v}$$

Ἐπειδή: $P_{at} = 1 \text{Atm} = 1{,}033 \cdot 6 \text{ kp/cm}^2 = 10\,336 \text{ kp/m}^2$

καί $\varepsilon_v = 1000 \text{ kp/m}^3 = 1 \text{ p/cm}^3$ ἔχουμε:

$$h = \frac{1033{,}6 \text{ kp/m}^2}{1000 \text{ kp/m}^3} = 10{,}336 \text{ m}.$$

Θεωρητικά δέν εἶναι δυνατόν νά ἀνεβάσουμε νερό σέ ὕψος μεγαλύτερο ἀπό 10 m μέ μιά ἀναρροφητική ἀντλία. Στήν πράξη ὅμως τό ὕψος αὐτό δέν μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό 8 m. Ὁ λόγος εἶναι ὅτι δέν εἶναι δυνατό μέ τό ἔμβολο Ε νά δημιουργήσουμε συνθῆκες ἀπόλυτου κενοῦ.



Σχ. 8·6 β.
Καταθλιπτική ἀντλία.

β) **Καταθλιπτική ὑδραντλία.** Τό σχῆμα 8 · 6 β παριστάνει μιά καταθλιπτική ὑδραντλία. Ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα κύλινδρο, μέσα στόν ὁποῖο κινεῖται τό ἔμβολο Ε. Δύο βαλβίδες α καί β καθορίζουν τή ροή τοῦ νεροῦ. 'Ο χῶρος Γ περιέχει ἀτμοσφαιρικό ἀέρα. Κι αὐτή ἡ ἀντλία λειτουργεῖ σέ δυό φάσεις.

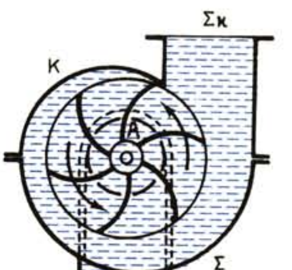
1η φάση (ἀναρρόφηση). Μετακινοῦμε τό ἔμβολο Ε πρός τά ἐπάνω. Τό νερό ἀπό τήν βαλβίδα α ἀνεβαίνει, πιεζόμενο ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση, στό χῶρο Α. 'Η βαλβίδα β κλείνει καί δέν ἐπιτρέπει νά ἐπιστρέψει στό χῶρο Α, τό νερό πού ὑπάρχει στό χῶρο Δ.

2η φάση (συμπίεση). Μετακινοῦμε τό ἔμβολο Ε πρός τά κάτω. 'Η βαλβίδα α κλείνει, ἀφοῦ συμπιέζεται πρός τά κάτω, ἐνῶ ἡ βαλβίδα β ἀνοίγει καί τό ὑγρό μπαίνει στό χῶρο Δ καί ἀπό κεῖ στό σωλήνα Σ. Στό χῶρο Γ ἐγκλωβίζεται καί συμπιέζεται μιά ποσότητα ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα.

"Οταν ἐπανέλθουμε στήν πρώτη φάση τῆς ἀναρροφήσεως, ἡ βαλβίδα β κλείνει, ἀλλά ὁ πιεσμένος ἀέρας στό χῶρο Γ σπρώχνει τό νερό στό σωλήνα Σ καί ἔτσι ἡ ροή τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα πρός τά ἐπάνω δέν γίνεται μόνο στή φάση τῆς συμπιέσεως, ἀλλά συνεχίζεται καί στή φάση τῆς ἀναρροφήσεως.

Παρατήρηση : Τό ὕψος, στό ὁποῖο μπορεῖ νά ἀνέβει τό νερό μέ τήν καταθλιπτική ἀντλία, ἐξαρτᾶται ἀπό τήν πίεση πού θά πρέπει νά ἐξασκήσουμε στό νερό μέ τό ἔμβολο Ε. "Ετσι, ἄν ἐξασκήσουμε πίεση 10 at, τό ὕψος στό ὁποῖο μποροῦμε νά ἀνεβάσουμε τό νερό θά εἶναι περίπου 100 m.

γ) **Φυγοκεντρική ἀντλία.** 'Αποτελεῖται ἀπό κύλινδρο Κ, μέσα στόν ὁποῖο περιστρέφεται μέ ταχύτητα (μέ ἕνα ἠλεκτροκινητήρα) ὁ ἄξονας Α, πού φέρει πολλά πτερύγια. Τό ὑγρό ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση καί ἐξασκεῖ πίεση στά τοιχώματα τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀντλίας. "Ετσι, στό κέντρο τοῦ κυλίνδρου δημιουργεῖται ὑποπίεση, πού προκαλεῖ ἀναρρόφηση ὑγροῦ ἀπό τό σωλήνα ἀναρροφήσεως $Σ_α$, ἐνῶ στήν περιφέρεια δημιουργεῖται ὑπερπίεση, μέ ἀποτέλεσμα νά ὠθεῖται τό ὑγρό πρός τό σωλήνα καταθλίψεως $Σ_κ$ καί νά τρέχει ἀπ' αὐτόν (σχ. 8 · 6 γ).



Σχ. 8·6 γ.
Φυγοκεντρική ἀντλία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ - ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

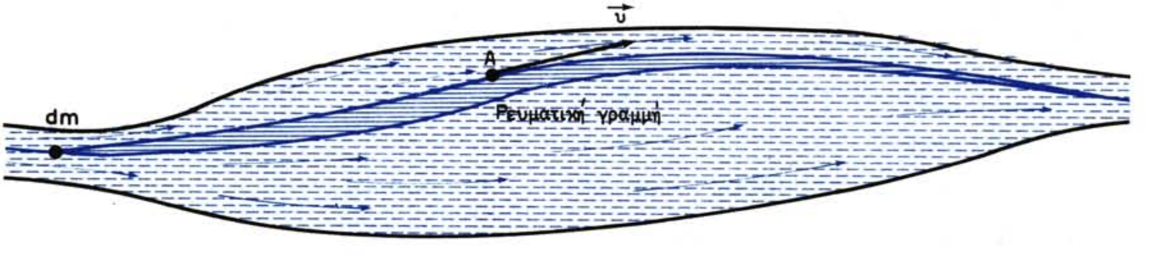
Στήν Ὑδροστατική καί τήν Ἀεροστατική ἐξετάσαμε τά ρευστά σέ κατάσταση ἰσορροπίας.

Σ' αὐτό τό κεφάλαιο ἐξετάζονται φαινόμενα σέ κινούμενα ρευστά.

9 · 1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΡΟΗΣ

Πεδίο ροῆς, καλεῖται ὁ χῶρος, μέσα στόν ὁποῖο κινεῖται ἕνα ρευστό. Ὅπως εἶναι φυσικό, ἀφοῦ τό ρευστό κινεῖται σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου αὐτοῦ, θά ὑπάρχει μιά ταχύτητα· ἑπομένως τό φυσικό μέγεθος **ταχύτητα** ἔχει τιμή σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου καί γι' αὐτό τό λόγο ὁ χῶρος αὐτός εἶναι πεδίο.

α) **Ρευματική γραμμή.** Ἄς φαντασθοῦμε στοιχειώδη μάζα dm τοῦ ὑγροῦ πού κινεῖται. Ἡ τροχιά αὐτή τῆς μάζας ὀνομάζεται **ρευματική γραμμή** (σχ. 9 · 1α).



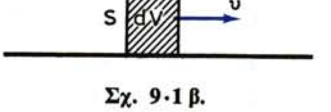
Σχ. 9·1 α.

Στρωτή ροή. Ἄν σέ κάθε σημεῖο ἑνός πεδίου ροῆς ἡ ταχύτητα εἶναι σταθερό διάνυσμα, σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο, τότε ἡ ροή εἶναι στρωτή.

Στή στρωτή ροή οἱ γραμμές ροῆς ἔχουν σταθερή θέση καί σχῆμα μέσα στό πεδίο ροῆς.

β) Παροχή. Ἔστω ἕνας σωλήνας Σ, πού ἔχει ἐμβαδόν διατομῆς S (σχ. 9 · 1 β). Ὁρίζουμε ὡς παροχή ρευστοῦ Π τό πηλίκον ὑγροῦ ὄγκου dV, τό ὁποῖο περνᾶ ἀπό τήν ἐπιφάνεια S σέ χρόνο dt, διά τοῦ χρόνου αὐτοῦ:

$$\Pi \doteq \frac{dV}{dt}$$



Σχ. 9·1 β.

Ἐπειδή, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα, ὁ ὄγκος $dV = Sdx$, ἡ παροχή Π δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\Pi = \frac{Sdx}{dt} = S\upsilon$$

ὅπου: υ εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ:

$$\boxed{\Pi = S\upsilon}$$

Μονάδες παροχῆς:

S · I $V = 1\ m^3$ $t = 1\ s$ $\Pi = 1\ m^3/s$

Ἄλλες μονάδες:

C · G · S $V = 1\ cm^3$ $t = 1\ s$ $\Pi = 1\ cm^3/s$

Ἐφαρμογή. Σ' ἕνα ὑδροσωλήνα διατομῆς $S = 10\ cm^2$ τό νερό κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 10\ m/s$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ παροχή τοῦ νεροῦ.

Λύση:

Στή σχέση $\Pi = S\upsilon$ θά ἀντικαταστήσουμε τά δεδομένα.

Σύστημα S. I.

$$\upsilon = 10\ m/s$$
$$S = 10\ cm^2 = 10 \cdot 10^{-4}\ m^2$$

Ἀντικατάσταση:

$$\Pi = 10 \cdot 10^{-4}\ m^2/s \cdot 10\ m/s = 0{,}01\ m^3/s.$$

Μετατροπή τῆς παροχῆς σέ μονάδες m^3/h.

$$0{,}01\ m^3/s = 10^{-2}\ \frac{m^3}{\frac{1}{3600}\ h} = 36\ m^3/h.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΟΧΩΝ

Μικρή βρύση	0,2 m^3/h
Φωταέριο λύχνου	0,2 m^3/h
Ποταμός Ἀλιάκμονας	60 m^3/s
Καταρράκτης τοῦ Νιαγάρα	8000 m^3/s

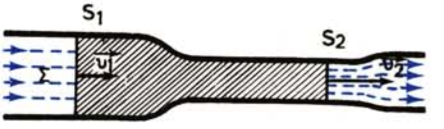
9 · 2 ΝΟΜΟΙ ΣΤΡΩΤΗΣ ΡΟΗΣ

Οἱ νόμοι αὐτοί εἶναι δυό, **ὁ νόμος τῆς συνεχείας** καί **ὁ νόμος τοῦ Bernoulli.**

α) **Νόμος συνεχείας.** Σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς συνεχείας, **ἡ παροχή ρευστοῦ πού ρέει μέσα σέ ἕνα σωλήνα, εἶναι ἡ ἴδια σέ κάθε διατομή τοῦ σωλήνα.**

Ἔτσι, ἄν φαντασθοῦμε ἕνα σωλήνα Σ (σχ. 9 · 2 α) μέ μεταβλητή διατομή, μέσα ἀπό τόν ὁποῖο περνᾶ ἕνα ρευστό, ἡ παροχή $Π_1$ καί $Π_2$ στίς διατομές S_1 καί S_2 εἶναι ἡ ἴδια.

$$Π_1 = Π_2 \qquad (1)$$



Σχ. 9·2 α.

Ἀλλά οἱ παροχές $Π_1$ καί $Π_2$ δίνονται ἀπό τούς τύπους:

$$Π_1 = S_1\, υ_1 \text{ καί } Π_2 = S_2\, υ_2 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$S_1\, υ_1 = S_2\, υ_2 \text{ ἤ } \frac{υ_1}{υ_2} = \frac{S_2}{S_1} \qquad (3)$$

Ἑπομένως, **ἄν ἕνα ρευστό κινεῖται σέ ἕνα σωλήνα καί ἔχει σέ δύο σημεῖα του ταχύτητες $υ_1$ καί $υ_2$ οἱ ταχύτητες αὐτές εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρός τίς διατομές τοῦ σωλήνα S_1 καί S_2 στά σημεῖα αὐτά.**

Ἔτσι δικαιολογεῖται, γιατί ἐκεῖ πού στενεύουν τά ποτάμια, τό νερό ρέει πιό γρήγορα.

β) **Νόμος Bernoulli** (σχ. 9 · 2 β). Ἄν ὀνομάσουμε P τήν πίεση σ' ἕνα σημεῖο τοῦ ρευστοῦ, πού κινεῖται μέσα σέ ἕνα σωλήνα, υ τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ ὑγροῦ στό ἴδιο σημεῖο, ρ καί ε τήν πυκνότητα καί τό εἰδικό βάρος τοῦ ρευστοῦ καί h τήν κατακόρυφη ἀπόσταση τοῦ θεωρούμενου σημείου τοῦ σωλήνα ἀπό κάποια ὁριζόντια ἐπιφάνεια xx', ὁ νόμος τοῦ Bernoulli διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Σχ. 9·2 β.

Σέ κάθε σημεῖο ἑνός σωλήνα, μέσα στόν ὁποῖο ρέει ἕνα ρευστό, ἡ ἀλγεβρική παράσταση:

$$P + \frac{ρ\, υ^2}{2} + ε\, h$$

παραμένει σταθερή.

Ἀπόδειξη: Ἔστω ὅτι τό ρευστό στό σωλήνα (σχ. 9 · 2 β) ὠθεῖται στίς δύο διατομές S_1 καί S_2 μέ πιέσεις P_1 καί P_2 καί ρέει πρός τή φορά τῶν ταχυτήτων $\vec{υ_1}$ καί $\vec{υ_2}$.

Ἡ πίεση P_1 εἶναι ἀποτέλεσμα μιᾶς δυνάμεως $\vec{F_1}$, πού ἀσκεῖται στήν ἐπιφάνεια S_1.

Ἡ δύναμη $\vec{F_1}$ παράγει ἔργο:

$$A_1 = F_1\,x = P_1\,S_1\,x = P_1\,V_1$$

Ἡ πίεση P_2 εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως $\vec{F_2}$, ἡ ὁποία στή μετακίνηση y τοῦ ὑγροῦ καταναλίσκει ἔργο:

$$A_2 = F_2\,y = P_2\,S_2\,y = P_2\,V_2$$

Ἔχουμε ἑπομένως παραγωγή ἔργου: $A_1 - A_2 = P_1 V_1 - P_2 V_2$. Οἱ ὄγκοι, ὅμως, V_1 καί V_2 εἶναι ἴσοι γιατί, σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς συνεχείας, οἱ παροχές στίς διατομές S_1 καί S_2 εἶναι ἴσες καί σέ ἴσους χρόνους περνοῦν ἀπό τίς δυό διατομές ἴσοι ὄγκοι ὑγροῦ. Ἑπομένως: $A = V\,(P_1 - P_2)$.

Ἐπειδή στή στρωτή ροή δέν ὑπάρχουν τριβές καί ἀπώλειες, θά ἰσχύει τό **θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας,** τό ὁποῖο, στήν περίπτωση αὐτή, διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$E_{\kappa\iota\nu},\,I + E_{\delta\upsilon\nu},\,I + \pi\alpha\rho\alpha\chi\theta\acute{\varepsilon}\nu\ \check{\varepsilon}\rho\gamma o = E_{\kappa\iota\nu},\,II + E_{\delta\upsilon\nu}\,II$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2{}_1 + B\,h_1 + (P_1 - P_2)\,V =$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2{}_2 + B\,h_2 \qquad (1)$$

ὅπου: B καί m εἶναι τό βάρος καί ἡ μάζα ὑγροῦ ὄγκου V. Ἐπειδή $B = \varepsilon\,V$ καί $m = \rho\,V$ ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}\,\rho\,V\,\upsilon^2{}_1 + \varepsilon\,V\,h_1 + P_1\,V =$$

$$= \frac{1}{2}\,\rho\,V\,\upsilon^2{}_2 + \varepsilon\,V\,h_2 + P_2\,V$$

ἤ

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\rho\,\upsilon^2{}_1 + \varepsilon\,h_1 + P_1 =\\ &= \frac{1}{2}\,\rho\,\upsilon^2{}_2 + \varepsilon\,h_2 + P_2\end{aligned}} \qquad (2)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2) συνάγεται ὅτι, ἡ παράσταση $P + \frac{\rho}{2}\,\upsilon^2 + \varepsilon\,h$ εἶναι ἡ ἴδια γιά τά τυχαῖα σημεῖα I καί II, πού σημαίνει ὅτι θά εἶναι ἡ ἴδια γιά κάθε σημεῖο τοῦ ὑγροῦ.

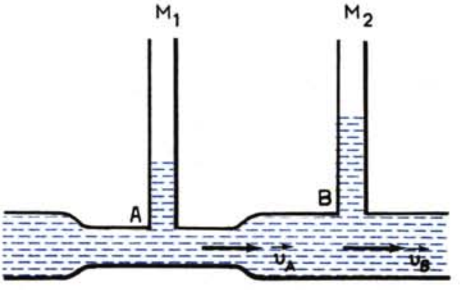
Σημείωση: Στήν παράσταση $P + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2 + \varepsilon\, h$ ὀνομάζουμε τήν P **στατική πίεση** καί τή μετροῦμε σέ κάθε σημεῖο τοποθετώντας στό ρευστό ἕνα μανόμετρο. Ὀνομάζουμε τήν παράσταση $\frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2$ **δυναμική πίεση** καί τήν $\varepsilon\, h$ **ὑψομετρική πίεση.**

γ) **Διερεύνηση τοῦ Νόμου τοῦ Bernoulli.** Ὅπως εἴπαμε τό πολυώνυμο:

$$P + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2 + \varepsilon\, h$$

παραμένει σταθερό σέ μιά στρωτή ροή.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, **ἄν ἔχουμε ροή στό ἴδιο ὑψόμετρο h καί αὐξηθεῖ ἡ ταχύτητα ροῆς υ, θά ἐλαττωθεῖ ἡ στατική πίεση P.** Αὐτό μποροῦμε νά τό ἀποδείξουμε μέ τό πείραμα τοῦ σχήματος 9 · 2 γ. Ἡ ταχύτητα υ_A εἶναι μεγαλύτερη τῆς υ_B, γιατί στό Α ὁ σωλήνας ἔχει μικρότερη διατομή ἀπό ὅ,τι στό Β.



Σχ. 9·2 γ.

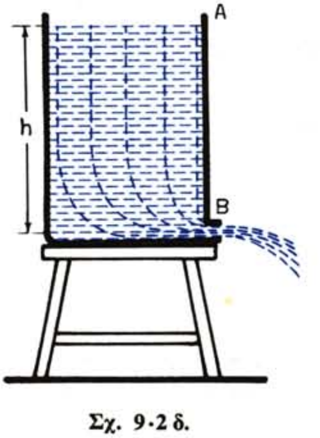
Ἐπίσης τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται στό ἴδιο ὕψος. Ἔστω $h = 0$. Θά εἶναι λοιπόν:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_A = P_B + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_B$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή, ἐπειδή $\upsilon_A > \upsilon_B$ προκύπτει ὅτι $P_A < P_B$. Πραγματικά οἱ στατικές πιέσεις, πού μετροῦνται ἀπό τά μανόμετρα M_1 καί M_2 μᾶς τό ἐπιβεβαιώνουν.

δ) Ἐφαρμογές τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli.

1) **Θεώρημα Torricelli.** Μέ τό θεώρημα αὐτό καθορίζεται ἡ ταχύτητα ἐκροῆς τοῦ ἰδανικοῦ ὑγροῦ, ἀπό μιά ὀπή τοῦ δοχείου στό ὁποῖο βρίσκεται (σχ. 9 · 2 δ).



Σχ. 9·2 δ.

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα αὐτό, ἡ ταχύτητα ἐκροῆς δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\upsilon = \sqrt{2\,g\,h}$$

ὅπου: h εἶναι ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση τῆς ὀπῆς ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καί g ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

Σημείωση: Τό ἰδανικό ὑγρό εἶναι: 1) **Ἀσυμπίεστο.** 2) **Δέν ἔχει ἐσωτερικές τριβές.** 3) **Δέν παρουσιάζει συνάφεια μέ τά τοιχώματα πού ἔρχεται σέ ἐπαφή.**

Ἀπόδειξη τοῦ τύπου: Ἐφ' ὅσον στό δοχεῖο ἔχουμε ροή ὑγροῦ, ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Bernoulli.

Τό πολυώνυμο τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli γιά τό σημεῖο Α εἶναι:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_A + \varepsilon\, h$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ στή θέση Α εἶναι μεγάλη, ἡ ταχύτητα υ_A εἶναι πολύ μικρή καί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἴση μέ μηδέν. Ἑπομένως τό πολυώνυμο γιά τό σημεῖο Α γίνεται:

$$P_A + \varepsilon\, h \qquad (1)$$

Γράφουμε ἐπίσης τό πολυώνυμο τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli γιά τό σημεῖο Β:

$$P_B + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_B + \varepsilon\, 0$$

$$\text{ἤ} \qquad P_B + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_B \qquad (2)$$

Ἐξισώνουμε τά πολυώνυμα (1) καί (2)

$$P_B + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_B = P_A + \varepsilon\, h \qquad (3)$$

Ἐπειδή ὅμως τό ὑγρό στήν ὀπή Β καί στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια Α βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα, οἱ στατικές πιέσεις P_A καί P_B εἶναι ἴσες μέ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση καί συνεπῶς ἴσες μεταξύ τους:

$$P_A = P_B = P_{at}$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (3) γίνεται:

$$\frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_B = \varepsilon\, h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2_B = \rho\, g\, h \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_B = \sqrt{2g\, h}}$$

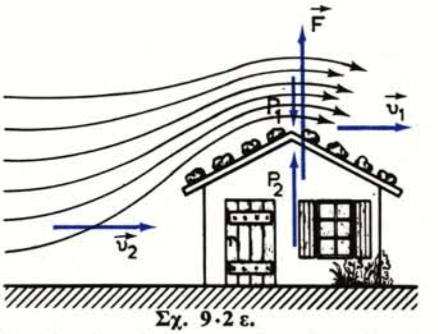
Ἀπό τό θεώρημα τοῦ Torricelli προκύπτει ὅτι, ἕνα ὑγρό ἔχει ταχύτητα ἐκροῆς ἀπό μιά ὀπή, ὅση θά ἀποκτοῦσε, ἄν ἔκανε ἐλεύθερη πτώση ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ μέχρι τήν ὀπή.

2) **Ἁρπαγή στέγης ἀπό δυνατό ἄνεμο.** Πολλές φορές, στέγες μέ ἐλαφριά κατασκευή, ὅταν φυσοῦν ἰσχυροί ἄνεμοι, ἐκτινάσσονται κατακόρυφα πρός τά πάνω καί τελικά παρασύρονται ἀπό αὐτούς. Ἡ **ἁρπαγή** στέγης

ἀπό τόν ἄνεμο ἐξηγεῖται μέ τό Νόμο τοῦ Bernoulli. Ὅπως δείχνει τό σχῆμα 9·2 ε, τό σπίτι ἀναγκάζει τίς γραμμές ροῆς νά συγκεντρώνονται πάνω ἀπό τή στέγη. Ἔτσι ἡ ταχύτητα υ_1 τοῦ ἀνέμου πάνω ἀπό τό σπίτι γίνεται μεγαλύτερη ἀπό τήν ταχύτητα υ_2 τοῦ ἀνέμου στόν ὑπόλοιπο χῶρο (Νόμος τῆς συνεχείας).

Γι' αὐτό ἡ πίεση P_1 κατεβαίνει σημαντικά κάτω ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική.

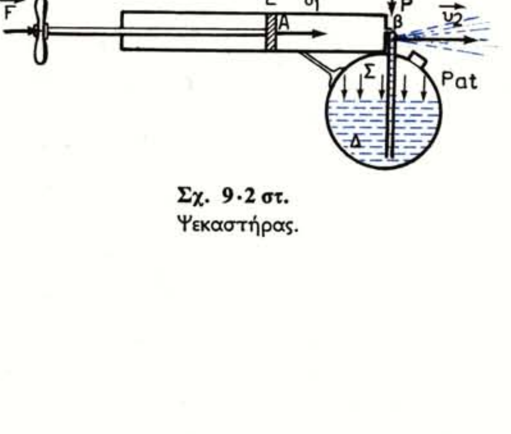
Στό ἐσωτερικό τοῦ σπιτιοῦ, ἡ ταχύτητα τοῦ ἀνέμου εἶναι μηδέν, ἑπομένως ἐκεῖ ἐπικρατεῖ ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση P_2. Ἡ P_2 εἶναι μεγαλύτερη τῆς P_1 καί ἡ διαφορά πιέσεως $P_2 - P_1$ ἐπί τό ἐμβαδόν τῆς στέγης S μᾶς δίνει τή δύναμη $\vec{F}$, ἡ ὁποία ἄν γίνει μεγαλύτερη ἀπό τό βάρος τῆς στέγης, τήν ἐκτινάσσει πρός τά πάνω.



Σχ. 9·2 ε.
Ἡ στέγη ἐκτινάσσεται πρός τή διεύθυνση τῆς δυνάμεως F.

3) **Ψεκαστήρας** (σχ. 9·2 στ). Ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα κύλινδρο, ὁ ὁποῖος στό σημεῖο β στενεύει. Ἕνα ἔμβολο Ε μετακινούμενο πρός τά δεξιά, δημιουργεῖ ρεῦμα ἀέρα.

Ἡ ταχύτητα υ_2 τοῦ ἀέρα στή θέση β γίνεται πολλαπλάσια τῆς ταχύτητας υ_1 τοῦ ἀέρα στή θέση Α (Νόμος τῆς συνεχείας). Ἔτσι ἡ στατική πίεση P στό ἀνοικτό ἄκρο τοῦ σωλήνα Σ γίνεται σημαντικά μικρότερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Μέσα ὅμως στό δοχεῖο Δ δέν ὑπάρχει καμιά ροή. Ἑπομένως ἡ πίεση πάνω ἀπό τό ὑγρό τοῦ δοχείου εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση. Ἡ διαφορά τῶν πιέσεων $P_{at} - P$ ἀναγκάζει τό ὑγρό νά ἀνέβει ἀπό τό σωλήνα Σ στό χῶρο β. Ἀπό κεῖ παρασύρεται ἀπό τόν ἀέρα πού κινεῖται στή θέση αὐτή μέ μεγάλη ταχύτητα, μετατρέπεται σέ μικρά σταγονίδια καί ἐκτινάσσεται στόν ἐλεύθερο χῶρο (ψέκασμα).

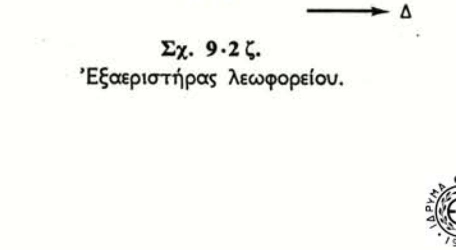


Σχ. 9·2 στ.
Ψεκαστήρας.

4) **Ἐξαερισμός λεωφορείων.** Οἱ ἐξαεριστῆρες αὐτοί τοποθετοῦνται στήν ὀροφή τῶν λεωφορείων.

Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 9·2 ζ, ἀποτελοῦνται ἀπό σωλήνα ὁ ὁποῖος στενεύει πρός τό μέσο του Γ.

Ἄν τό ὄχημα κινεῖται πρός τή φορά τοῦ βέλους Δ, ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας, ἀποκτᾶ ταχύτητα σχετικά μέ τό ὄχημα. Περνώντας ὁ ἀέρας μέσα ἀπό τό στένωμα Γ, σύμφωνα μέ τό Νόμο τῆς συνεχείας, ἀποκτᾶ πιό μεγάλη ταχύτητα. Ἔτσι στό σημεῖο Γ ἡ πίεση μειώ-

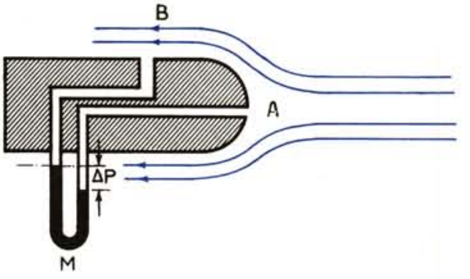


Σχ. 9·2 ζ.
Ἐξαεριστήρας λεωφορείου.

νεται σημαντικά κάτω ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική, ἐνῶ μέσα στό ὄχημα εἶναι ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική. Ἔχουμε, ἑπομένως, ροή τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα ἀπό τό ἐσωτερικό τοῦ ὀχήματος πρός τά ἔξω, δηλαδή ἐξαερισμό τοῦ ὀχήματος.

5) **Μέτρηση ταχύτητας τοῦ ἀεροπλάνου — Σωλήνας Prandtl.** Μέ τή συσκευή, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **σωλήνας Prandtl,** μποροῦμε νά μετρήσουμε τήν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου. Ἡ λειτουργία τῆς συσκευῆς αὐτῆς στηρίζεται στό Νόμο τοῦ Bernoulli. Στό σχῆμα 9·2 η φαίνεται παραστατικά μιά τομή τῆς συσκευῆς.

Ἕνας γυάλινος σωλήνας M σέ σχῆμα U φέρει ὑδράργυρο καί τά δυό του ἄκρα ἐπικοινωνοῦν μέ τά σημεῖα B καί A τοῦ σωλήνα τοῦ Prandtl.



Σχ. 9·2 η.
Σωλήνας Prandtl.

Ὁ σωλήνας Prandtl τοποθετεῖται ἔξω ἀπό τό ἀεροπλάνο, τό ὁποῖο, ἐπειδή τρέχει μέσα στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα, δημιουργεῖ ροή τοῦ ἀέρα σχετικά μέ τό σωλήνα. Στό σημεῖο A, τό ὁποῖο λέγεται καί **σημεῖο ἀνακοπῆς,** ἡ ταχύτητα τοῦ ἀέρα εἶναι μηδέν, ἐνῶ στό B ἡ ταχύτητά του εἶναι ἴση μέ τήν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου υ.

Ἐφαρμόζουμε τό νόμο τοῦ Bernoulli στά σημεῖα A, B (καί τά δύο βρίσκονται στό ἴδιο ὑψόμετρο, ἑπομένως ἔχουν τήν ἴδια ὑψομετρική πίεση ε h):

$$P_B + \frac{1}{2}\,\rho\,\upsilon^2 = P_A$$

$$\text{ἤ} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2\,(P_A - P_B)}{\rho}}$$

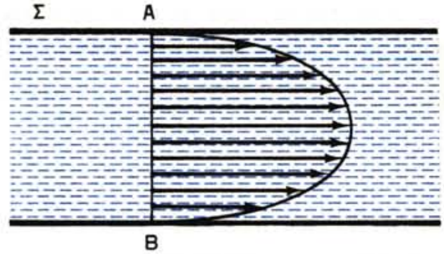
Τή διαφορά τῶν πιέσεων μετροῦμε στό σωλήνα μέ τόν ὑδράργυρο. Ἄν εἶναι γνωστή ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα στό ὑψόμετρο πού πετᾶ τό ἀεροπλάνο, εἶναι δυνατός ὁ προσδιορισμός τῆς ταχύτητας τοῦ ἀεροπλάνου.

9·3 ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ — ΙΞΩΔΕΣ

Στήν τριβή ὀλισθήσεως εἴχαμε πεῖ ὅτι, ὅταν δυό ἐπιφάνειες ὀλισθαίνουν ἡ μιά πάνω στήν ἄλλη, ἐξασκοῦνται μεταξύ τους δυνάμεις ἀντιτιθέμενες στήν κίνηση. Τίς δυνάμεις αὐτές τίς ὀνομάσαμε **δυνάμεις τριβῆς ὀλισθήσεως**.

Ἀνάλογες δυνάμεις τριβῆς ἐξασκοῦνται καί μεταξύ στρωμάτων **τοῦ ἴδιου ὑγροῦ,** ὅταν ὑπάρχει διαφορά ταχυτήτων στά στρώματα αὐτά, ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὀνομάζεται **ἐσωτερική τριβή** ἤ **ἰξῶδες**.

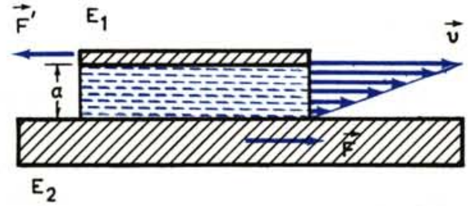
Ἄς θεωρήσουμε ὅτι ἕνα ὑγρό κινεῖται σέ σωλήνα Σ (σχ. 9 · 3 α). Τό διάγραμμα τοῦ σχήματος μᾶς παρουσιάζει τίς διάφορες ταχύτητες τῶν στρωμάτων τοῦ ρευστοῦ μέσα στό σωλήνα.



Σχ. 9·3 α.

Στά σημεῖα Α καί Β ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ εἶναι μηδέν, ἐπειδή οἱ δυνάμεις συνάφειας μεταξύ τοῦ ρευστοῦ καί τοῦ σωλήνα μηδενίζουν τίς ταχύτητες (οἱ δυνάμεις συνοχῆς εἶναι δυνάμεις ἑλκτικές ἀνάμεσα στά μόρια ὑγροῦ καί στά μόρια στερεοῦ, μέ τά ὁποῖα τό ὑγρό ἔρχεται σέ ἐπαφή. Οἱ δυνάμεις αὐτές ποικίλλουν ἀνάλογα μέ τό εἶδος τοῦ ὑγροῦ καί τοῦ στερεοῦ σώματος).

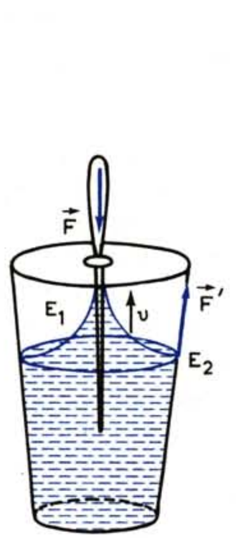
Οἱ διαφορετικές λοιπόν ταχύτητες τῶν στρωμάτων τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα, δημιουργοῦν δυνάμεις ἐσωτερικῆς τριβῆς μεταξύ τῶν στρωμάτων αὐτῶν, οἱ ὁποῖες τείνουν νά ἐξισώσουν τίς ταχύτητες στά διάφορα στρώματα τοῦ ὑγροῦ.



Σχ. 9·3 β.

Μέ σκοπό νά διατυπώσουμε κάποια σχέση, πού νά μᾶς δίνει τήν ἐσωτερική τριβή ὡς συνάρτηση διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν, θεωροῦμε τό ἑξῆς πείραμα: Δύο μεταλλικές πλάκες E_1 καί E_2 ἔχουν μεταξύ τους ἕνα ὑγρό π.χ. μέλι (σχ. 9 · 3 β). Ἡ πλάκα E_2 παραμένει ἀκίνητη, ἐνῶ ἡ πλάκα E_1 κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Τά μόρια τοῦ ὑγροῦ, πού εἶναι σέ ἐπαφή μέ τήν πλάκα E_1 μετακινοῦνται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ πρός τά δεξιά, ἐνῶ τά μόρια τοῦ ὑγροῦ, πού εἶναι σέ ἐπαφή μέ τήν πλάκα E_2, εἶναι ἀκίνητα. Ἔτσι τά διάφορα ὁριζόντια στρώματα τοῦ ὑγροῦ ἔχουν διαφορετικές ταχύτητες, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα, μέ ἀποτέλεσμα νά ἀναπτύσσονται στό ὑγρό δυνάμεις ἐσωτερικῆς τριβῆς, οἱ ὁποῖες, λόγω τῶν δυνάμεων συναφείας ὑγροῦ καί πλακῶν, μεταβιβάζονται στίς δυό πλάκες. Οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι οἱ : $\vec{F}$ καί $\vec{F'}$, ὅπου $\vec{F} = \vec{F'}$.

Στήν πράξη τό πείραμα αὐτό μποροῦμε νά τό κάνουμε, βουτώντας ἕνα μαχαίρι μέσα στό μέλι, πού ὑπάρχει σέ ἕνα ποτήρι (σχ. 9 · 3 γ), καί τραβώντας το πρός τά ἐπάνω.



Σχ. 9·3 γ.

Ἡ λάμα τοῦ μαχαιριοῦ ἀντιπροσωπεύει τήν ἐπιφάνεια E_1, τό ποτήρι τήν ἐπιφάνεια E_2, τό μέλι εἶναι τό ὑγρό καί ἡ ἐσωτερική τριβή εἶναι ἡ δύναμη πού καταβάλλουμε γιά νά βγάλουμε τό μαχαίρι ἀπό τό μέλι.

Ἀπό τό πείραμα αὐτό προκύπτει ὅτι ἡ ἐσωτερική τριβή F δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$\boxed{F = \eta\, S\, \frac{v}{a}}$$

ὅπου: S εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας τῆς πλάκας E_1, υ ἡ ταχύτητα μετακινήσεως τῆς πλάκας E_1, α ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα στίς πλάκες E_1 καί E_2 καί η **ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς** ἤ **συντελεστής ἰξώδους.**

Ἀναφέρουμε ἐδῶ σάν παράδειγμα ὅτι ὁ συντελεστής ἰξώδους στούς 20° C τοῦ νεροῦ εἶναι 0,01 dyn/cm^2 καί τῆς γλυκερίνης 15 dyn/cm^2.

Παρατηρήσεις :

1) Στίς μηχανές ὑπάρχουν περιπτώσεις, πού μεταλλικές ἐπιφάνειες τρίβονται. Γιά παράδειγμα ἀναφέρουμε τά κουζινέτα τῶν μηχανῶν, πού ἔχουν τριβόμενες μεταλλικές ἐπιφάνειες.

Ἡ τριβή ὀλισθήσεως ἔχει μεγάλες τιμές, ὁσοδήποτε καλά κι ἄν ἔχουν λειανθεῖ οἱ ἐπιφάνειες. Ἄν ὅμως ἀνάμεσα στίς ἐπιφάνειες αὐτές παρεμβάλλουμε ὀρυκτέλαιο, τότε μετατρέπουμε τήν τριβή ὀλισθήσεως σέ ἐσωτερική τριβή. Ἐπειδή ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ὀρυκτέλαιου εἶναι πολύ μικρός καί γενικά ἡ ἐσωτερική τριβή εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τήν τριβή ὀλισθήσεως, ἔχουμε κέρδος, γιατί δέν ὑπάρχουν ἀπώλειες ἐνεργείας στίς μηχανές, ἀλλά καί γιατί τά ὑγρά μεταφέρουν τή θερμότητα πού παράγεται, σέ χῶρο πού ψύχεται.

2) Στό μεγάλο δοχεῖο Δ (σχ. 9 · 3 δ) τοποθετοῦμε ὑγρό καί τό διατηροῦμε σέ σταθερό ὕψος. Στόν ὁριζόντιο σωλήνα Σ, ὁ ὁποῖος ἔχει σταθερή διάμετρο, ἡ ροή εἶναι σταθερή καί ἑπομένως οἱ ταχύτητες ροῆς στά σημεῖα Α, Β καί Γ εἶναι ἴσες. Θά ἔπρεπε λοιπόν, σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Bernoulli, στούς σωλῆνες M_1, M_2 καί M_3 τό ὕψος τοῦ ὑγροῦ νά εἶναι παντοῦ τό ἴδιο. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι τό ὑγρό δέν βρίσκεται στό ἴδιο ὕψος καί αὐτό ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ὑπάρχει ἐσωτερική τριβή στό ὑγρό. Γιά νά ἐξουδετερωθεῖ αὐτή ἡ τριβή καί νά κινεῖται τό ὑγρό ἰσοταχῶς, πρέπει μεταξύ τῶν σημείων Α, Β καί Γ νά ὑπάρχουν διαφορές πιέσεως.

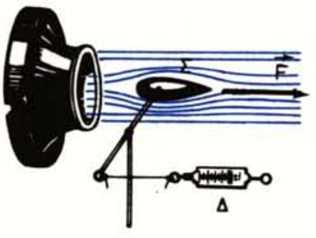
Σχ. 9·3 δ.
Ὁ νόμος τοῦ Bernoulli ἰσχύει ὅταν τά ὑγρά δέν εἶναι ἰδανικά.

Ἀποτέλεσμα τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς εἶναι καί τό γεγονός ὅτι ἡ ταχύτητα στό σημεῖο Γ δέν εἶναι πιά $\upsilon = \sqrt{2gh}$, ὅπως καθορίζει τό θεώρημα τοῦ Torricelli, ἀλλά μικρότερη.

9·4 ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΣΩΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΚΙΝΟΥΝΤΑΙ ΜΕΣΑ ΣΕ ΡΕΥΣΤΑ

Γνωρίζουμε ἀπό ἐμπειρία, ὅτι σώματα πού κινοῦνται μέσα στόν ἀέρα, συναντοῦν ἀντίσταση. Τήν ἀντίσταση αὐτή ἀντιλαμβανόμαστε ὅταν τρέχουμε μέ ποδήλατο ἤ ἄν βγάλουμε τό χέρι μας ἔξω ἀπό ἕνα αὐτοκίνητο πού τρέχει.

Ἕνας τρόπος, μέ τόν ὁποῖο μποροῦμε νά μετρήσουμε αὐτή τήν ἀντίσταση, εἶναι ἡ διάταξη τοῦ σχήματος 9 · 4 α.



Σχ. 9·4 α.

Ἕνα σῶμα Σ τοποθετεῖται σέ ρεῦμα ἀέρα. Ἡ δύναμη F πού ἀσκεῖ τό ρεῦμα τοῦ ἀέρα στό σῶμα εἶναι ἡ ἀντίσταση. Τήν ἰσορροποῦμε μέ τό δυναμόμετρο Δ, τό ὁποῖο μᾶς μετρᾶ τήν ἀντίσταση αὐτή. Ἀπό τίς μετρήσεις προκύπτει ὅτι ἡ ἀντίσταση πού ἐξασκοῦν τά ρευστά σώματα, πού κινοῦνται μέσα σ' αὐτά εἶναι:

1ο. Ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητας τοῦ ρευστοῦ.

2ο. Ἀνάλογη τῆς πυκνότητας τοῦ ρευστοῦ.

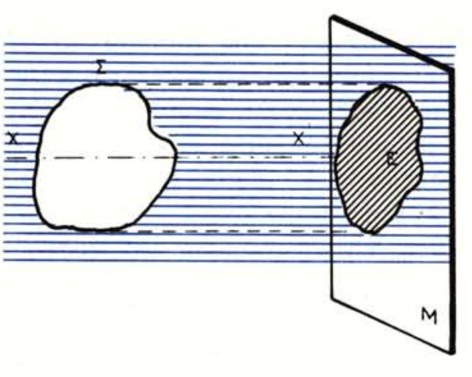
3ο. Ἀνάλογη τοῦ ἐμβαδοῦ διατομῆς τῆς μετωπικῆς ἐπιφάνειας τοῦ σώματος.

4ο. Ἐξαρτᾶται ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος.

Μέ βάση τά ὅσα εἴπαμε παραπάνω, γράφουμε τόν τύπο, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἀντιστάσεως:

$$\boxed{F = C\,S\,\frac{\rho}{2}\,\upsilon^2}$$

ὅπου: ρ εἶναι ἡ πυκνότητα τοῦ ρευστοῦ, υ ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ, S τό ἐμβαδόν μετωπικῆς ἐπιφάνειας, F ἡ ἀντίσταση καί C ὁ συντελεστής ἀντιστάσεως.



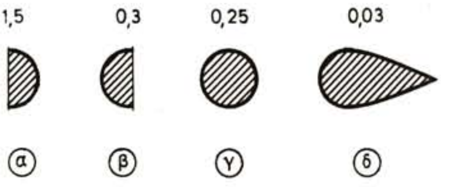
Σχ. 9·4 β.

Μετωπική ἐπιφάνεια. Ἄν ἕνα σῶμα Σ κινεῖται μέσα σέ ἕνα ρευστό πρός τή διεύθυνση xx' (σχ. 9 · 4 β), ἡ προβολή αὐτοῦ σέ ἐπίπεδο Μ κάθετο στή διεύθυνση xx', εἶναι τό ἐπίπεδο σχῆμα Ε. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτή Ε εἶναι ἡ **μετωπική ἐπιφάνεια** τοῦ σώματος Σ κατά τή διεύθυνση xx'.

Συντελεστής ἀντιστάσεως. Ὁ συντελεστής ἀντιστάσεως C ἐξαρτᾶται ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος καί παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές, ὅταν μεταβάλλεται τό σχῆμα.

Στό σχῆμα 9 · 4 γ φαίνονται οἱ τιμές τῶν συντελεστῶν ἀντιστάσεως γιά τά διάφορα σχήματα.

Διαπιστώνουμε ἔτσι ὅτι ὑπάρχουν μεγάλες διαφορές στίς τιμές τῶν συντελεστῶν ἀντιστάσεως, μέ πολύ μικρή τιμή γιά τό σῶμα τοῦ σχήματος 9 · 4 γ (δ). Τό σχῆμα αὐτό ὀνομάζεται **ἀεροδυναμικό σχῆμα** καί δίνεται στά ὀχήματα καί στά ἀεροπλάνα.



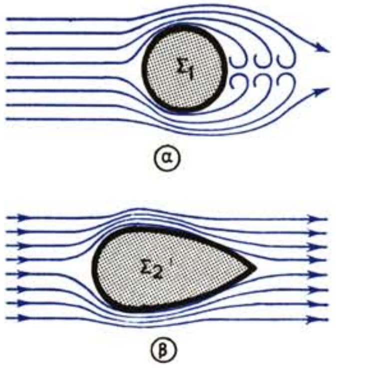
Σχ. 9·4 γ.

Μιά ἐξήγηση πού δίνεται γιά τή σημαντική μείωση τοῦ συντελεστῆ ἀντιστάσεως στά σώματα πού ἔχουν ἀεροδυναμικό σχῆμα, εἶναι ἡ ἑξῆς:

Στό σχῆμα 9 · 4 δ (α) παρουσιάζεται ἡ ροή γύρω ἀπό μιά σφαίρα, πού κινεῖται μέ ταχύτητα μέσα σ' ἕνα ρευστό.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ γραμμές ροῆς δημιουργοῦν στροβίλους στό πίσω μέρος τῆς σφαίρας καί ἡ ροή παύει νά εἶναι στρωτή (γίνεται **ροή στροβιλώδης**).

Στό σχῆμα 9 · 4 δ (β), τό σῶμα Σ_2 μέ τό ἀεροδυναμικό σχῆμα ἐμποδίζει τό σχηματισμό τῶν στροβίλων καί ἡ ροή διατηρεῖται στρωτή.

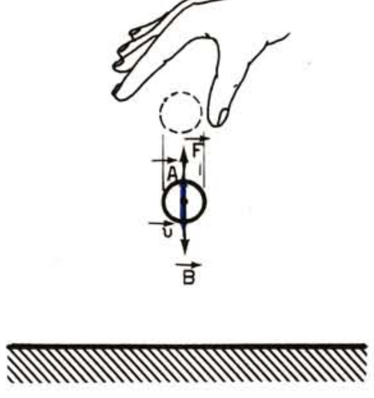


Σχ. 9·4 δ.
Στά σώματα μέ ἀεροδυναμικά σχήματα δέν δημιουργοῦνται στρόβιλοι.

Ἡ δημιουργία στροβίλων ἰσοδυναμεῖ μέ παραγωγή κινητικῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία τελικά μετατρέπεται σέ **θερμότητα.** Ἡ ἐνέργεια αὐτή δημιουργεῖται ἀπό κάποια δύναμη, πού ἐξασκεῖ τό σῶμα στό ρευστό. Ἡ ἀντίδραση τοῦ ρευστοῦ σ' αὐτή τή δύναμη εἶναι ἡ ἀντίσταση πού συναντᾶ τό σῶμα στό ρευστό. Ἑπομένως, ὅσο πιό πολλοί στρόβιλοι δημιουργοῦνται, τόσο πιό μεγάλη ἀπώλεια ἐνεργείας ἔχουμε καί τόσο πιό μεγάλη ἀντίσταση παρουσιάζει τό σῶμα. Στό σχῆμα 9 · 4 δ (β) δέν ἔχουμε στροβίλους, κι αὐτό ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τό σῶμα νά συναντᾶ μικρή ἀντίσταση στήν κίνησή του μέσα στό ρευστό.

— **Πτώση σωμάτων μέσα στόν ἀέρα.** Ἔστω ὅτι μιά σφαίρα (σχ. 9 · 4 ε) ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει ἀπό πολύ μεγάλο ὕψος στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα. Κάποια χρονική στιγμή σ' αὐτήν θά ἐξασκοῦνται οἱ ἑξῆς δυνάμεις:

Τό βάρος της **Β**, ἡ ἄνωση **Α** καί ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα $\vec{F}$.



Σχ. 9·4 ε.

Ἄν ἡ σφαίρα ἔχει μεγάλη πυκνότητα, εἶναι π.χ. μεταλλική, ἡ ἄνωση στόν ἀέρα εἶναι πολύ μικρή σχετικά μέ τό βάρος B καί μπορεῖ νά μήν ὑπολογίζεται.

Ἡ ἀντίσταση ὅμως $\vec{F}$ μεγαλώνει μέ τήν ταχύτητα καί μάλιστα δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$F = C\,S\,\frac{\rho}{2}\,\upsilon^2$$

Γιά κάποια τιμή τῆς ταχύτητας $\upsilon = \upsilon_{op}$, ἡ F γίνεται ἴση καί ἀντίθετη μέ τό βάρος B. Ἀπό ἐκείνη τή στιγμή ἡ σφαίρα θά κινεῖται ἰσοταχῶς μέ τήν ταχύτητα υ_{op}, τήν ὁποία ὀνομάζουμε **ὁριακή ταχύτητα.**

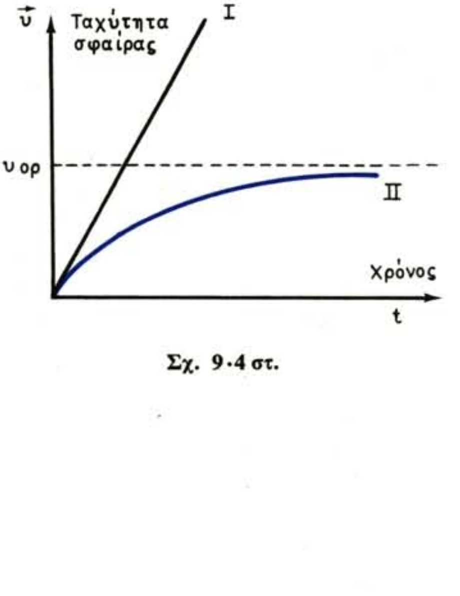
Ὑπολογισμός τῆς ὁριακῆς ταχύτητας. Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε, προκύπτει ὅτι:

$$B = F = C\,S\,\frac{\rho}{2}\,\upsilon^2_{op}$$

Ἑπομένως:

$$\upsilon_{op} = \sqrt{\frac{2\,B}{C\,S\,\rho}}$$

Στό διάγραμμα τοῦ σχήματος 9·4 στ ἡ εὐθεία I μᾶς παριστάνει τόν τρόπο πού μεταβάλλεται ἡ ταχύτητα σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο στό κενό, ἐνῶ ἡ καμπύλη II παριστάνει τήν πραγματική μεταβολή τῆς ταχύτητας μέσα στόν ἀέρα.



Σχ. 9·4 στ.

Ἐφαρμογή. Μεταλλική σφαίρα ἔχει ἀκτίνα $r = 10$ cm καί εἰδικό βάρος $\varepsilon_\sigma = 7800$ kp/m^3. Ἡ μέση πυκνότητα τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα εἶναι $\rho = 1$ kg/m^3. Ἄν ὁ συντελεστής ἀντιστάσεως τῆς σφαίρας εἶναι $C = 0{,}25$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ὁριακή ταχύτητα, πού θά ἀποκτήσει αὐτή πέφτοντας κατακόρυφα στήν ἀτμόσφαιρα.

Λύση:

Ἀπό τόν τύπο:

$$\upsilon_{op} = \sqrt{\frac{2B}{C\,S\,\rho}}$$

ἔχουμε: $$B = \varepsilon_\sigma\,V = \varepsilon_\sigma\,\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

ὅπου: r ἡ ἀκτίνα σφαίρας.

Ἐπίσης: $S = \pi\,r^2$

Ἑπομένως: $$\upsilon_{op} = \sqrt{\frac{2\,\varepsilon_\sigma\,\frac{4}{3}\,\pi\,r^3}{C\,\pi\,r^2\,\rho}}$$

καί $$\upsilon_{o\rho} = \sqrt{\frac{8\ \varepsilon_\sigma\ r}{3\ C\ \rho}}$$

Σύστημα Μονάδων :

Χρησιμοποιοῦμε τό σύστημα S. I.

$r = 0{,}1\ \text{m},\ \varepsilon_\sigma = 7800\ \text{kp/m}^3 = 7800 \cdot 9{,}81\ \text{N/m}^3 =$

$$7800 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\ \text{s}^2},\ \rho = 1\ \text{kg/m}^3.$$

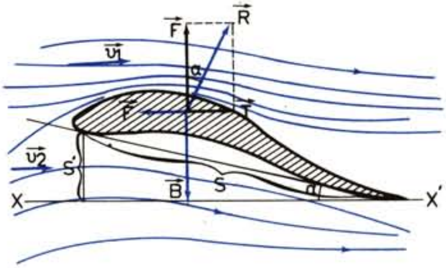
Ἀντικατάσταση :

$$\upsilon_{o\rho} = \sqrt{\frac{8 \cdot 7800 \cdot 9{,}81 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2\ \text{s}^2} \cdot 0{,}1\text{m}}{3 \cdot 0{,}25 \cdot 1\ \text{kg/m}^3}} = 286\ \text{m/s}.$$

Ἀπάντηση : Ἡ ὁριακή ταχύτητα τῆς σφαίρας κατά τήν πτώση της στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα εἶναι 286 m/s.

9 · 5 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΩΣΗ

Μέ τή δυναμική ἄνωση ἐξηγεῖται ἡ πτήση τῶν ἀεροπλάνων. Στό σχῆμα 9 · 5 α σημειώνεται ἡ τομή μιᾶς πτέρυγας ἀεροπλάνου. Ὁ ἄξονας τῆς πτέρυγας, ὅταν τό ἀεροπλάνο βρίσκεται σέ ὁριζόντια πτήση, σχηματίζει ὡς πρός τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο xx' γωνία α, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **γωνία προσβολῆς.** Ἡ κατασκευή τῆς πτέρυγας εἶναι τέτοια ὥστε, ὅταν τό ἀεροπλάνο κινεῖται μέσα σέ ρεῦμα ἀέρα, νά ἔχουμε ταχύτερη ροή στό πάνω μέρος τῆς πτέρυγας ἀπ' ὅ,τι στό κάτω ($\upsilon_1 > \upsilon_2$). Ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς διαφορᾶς ταχύτητας ροῆς εἶναι, σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Bernoulli, ἡ δημιουργία μιᾶς κατακόρυφης πρός τά ἐπάνω δυνάμεως, τῆς $\vec{F}$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **δυναμική ἄνωση.** Ἡ δυναμική ἄνωση εἶναι ἡ συνιστώσα τῆς ἀντιστάσεως R, πού παρουσιάζει ἡ πτέρυγα στήν κίνησή της μέσα στόν ἀέρα.



Σχ. 9·5 α.
Δυνάμεις πού ἀσκοῦνται στήν πτέρυγα ἀεροπλάνου.

Ἡ ἀντίσταση αὐτή R, ἡ ὁποία ὀνομάζεται καί **ἀεροδύναμη,** δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$R = C\ S'\ \frac{\rho}{2}\ \upsilon^2 = C\ S\ \frac{\rho}{2}\ \upsilon^2\ \eta\mu\alpha$$

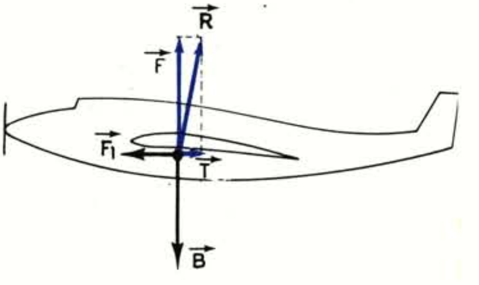
ὅπου: ρ ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα, υ ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου, S τό ἐμβαδό τῆς πτέρυγας καί α ἡ γωνία προσβολῆς.

Ἐκτός ἀπό τή δύναμη $\vec{R}$ ἐξασκοῦνται ἀκόμη καί τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ ἀεροπλάνου καί ἡ προωστική δύναμη $\vec{F}_1$, τῆς μηχανῆς τοῦ ἀεροπλάνου (σχ. 9·5β).

Ἀναλύουμε τήν ἀεροδύναμη $\vec{R}$ σέ δυό συνιστῶσες, τή δυναμική ἄνωση $\vec{F}$ καί τήν $\vec{T}$. Τό ἀεροπλάνο κινεῖται ἰσοταχῶς καί ὁριζοντίως, ὅταν:

$$F_1 = T = R\,\eta\mu a = \frac{1}{2}\,C\,S\,\rho v^2 \eta\mu^2 a$$

$$\text{καί}\quad B = F = R\,\sigma\upsilon\nu a = \frac{1}{2}\,C\,S\,\rho\,v^2\;\eta\mu a\;\sigma\upsilon\nu a.$$



Σχ. 9·5 β.
Τό ἀεροπλάνο κινεῖται ἰσοταχῶς ἄν $F_1 = -T$ καί $B = -F$.

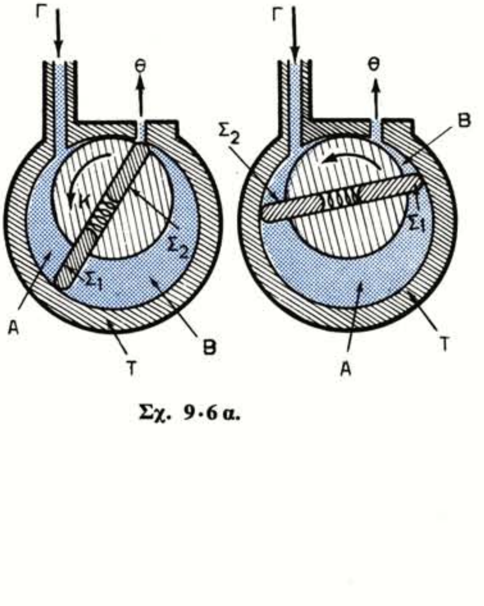
Ἡ ταχύτητα, ἑπομένως, τοῦ ἀεροπλάνου καί ἡ γωνία προσβολῆς ρυθμίζουν τήν ἄνοδο ἤ κάθοδο τοῦ ἀεροπλάνου στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα. Ἡ ταχύτητα κινήσεως τοῦ ἀεροπλάνου ρυθμίζεται ἀπό τήν ἰσχύ λειτουργίας τῆς μηχανῆς του, πού κανονίζεται ἀπό τήν ποσότητα τῶν καυσίμων πού δίνει στή μηχανή ὁ πιλότος.

Ἡ γωνία προσβολῆς ἐπίσης μπορεῖ νά ρυθμισθεῖ μέ μεταβολή τοῦ σχήματος τῶν πτερύγων, τό ὁποῖο ἀλλάζει, γιατί οἱ πτέρυγες ἔχουν κινητά μέρη.

9·6 ΑΝΤΛΙΕΣ ΚΕΝΟΥ

Μέ τίς ἀντλίες κενοῦ μποροῦμε νά δημιουργήσουμε κενό σέ χώρους, ἀφαιρώντας τά ἀέρια πού ὑπάρχουν σ' αὐτούς. Θά περιγράψουμε ἐδῶ δυό ἀντλίες κενοῦ: τήν **περιστροφική ἀντλία** καί τήν **ἀντλία μέ φλέβα νεροῦ.**

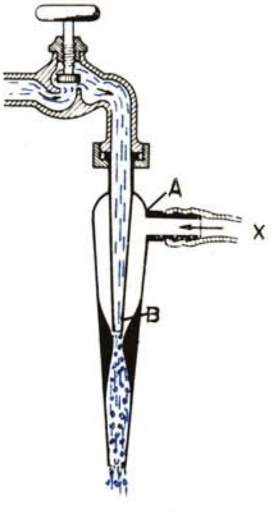
α) **Περιστροφική ἀντλία** (σχ. 9·6α). Στό ἐσωτερικό ἑνός τυμπάνου Τ περιστρέφεται ἕνας κύλινδρος Κ. Ὁ κύλινδρος ἔχει ἄξονα περιστροφῆς, ὁ ὁποῖος δέν συμπίπτει μέ τόν ἄξονα τοῦ τυμπάνου. Δυό σύρτες Σ_1 καί Σ_2 ὠθοῦνται μέ ἐλατήριο, ὥστε νά βρίσκονται πάντοτε σέ ἐπαφή μέ τό τύμπανο. Ἔτσι οἱ χῶροι Α καί Β δέν ἐπικοινωνοῦν. Ὁ κύλινδρος Κ περιστρέφεται καί οἱ σύρτες Σ_1 καί Σ_2 μετατοπίζουν τά ἀέρια στούς χώρους Α καί Β. Στό σχῆμα I τό ἀέριο ἀπό τό χῶρο B_1 ὠθεῖται πρός τήν ἔξοδο Θ, ἐνῶ τό ἀέριο, πού ἦρθε ἀπό τό σωλήνα Γ, μπῆκε στό χῶρο Α. Στό σχῆμα II τό ἀέριο τοῦ χώρου Α ὠθεῖται ἀπό τό σύρτη Σ_2 πρός τήν ἔξοδο Θ. Ἔτσι ἔχουμε συνεχή παραλαβή ἀερίου ἀπό τό σωλήνα Γ, ὁ ὁποῖος συν-



Σχ. 9·6 α.

δέεται μέ τό χῶρο, στόν ὁποῖο θέλουμε νά δημιουργήσουμε κενό, πρός τήν ἔξοδο Θ. Ὁ κύλινδρος περιστρέφεται μ' ἕναν βενζινοκινητήρα ἤ ἠλεκτρικό κινητήρα.

β) **Ἀντλία μέ φλέβα νεροῦ.** Στό ἄκρο μιᾶς βρύσης νεροῦ (σχ. 9 · 6 β) συνδέουμε ἕνα σωλήνα Σ, ὁ ὁποῖος καταλήγει σέ ἀκροφύσιο. Τό νερό ἐκεῖ τρέχει μέ μεγάλη ταχύτητα, σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς συνεχείας. Σκοπός μας εἶναι νά ἀφαιρέσουμε ἀέριο ἀπό τό χῶρο x. Αὐτός συνδέεται μέ ἕναν ἄλλο σωλήνα Α, πού περιβάλλει τόν πρῶτο σωλήνα Σ. Ἡ μεγάλη ταχύτητα τοῦ νεροῦ στό χῶρο Β, δημιουργεῖ, σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Bernoulli, ὑποπίεση. Ἔτσι τό ἀέριο μετακινεῖται ἀπό τό χῶρο x στό σωλήνα Α καί ἀπό κεῖ παρασύρεται μέ τό νερό πρός τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα μέ μορφή φυσαλίδων.



Σχ. 9·6 β.
Ἀντλία μέ φλέβα νεροῦ.

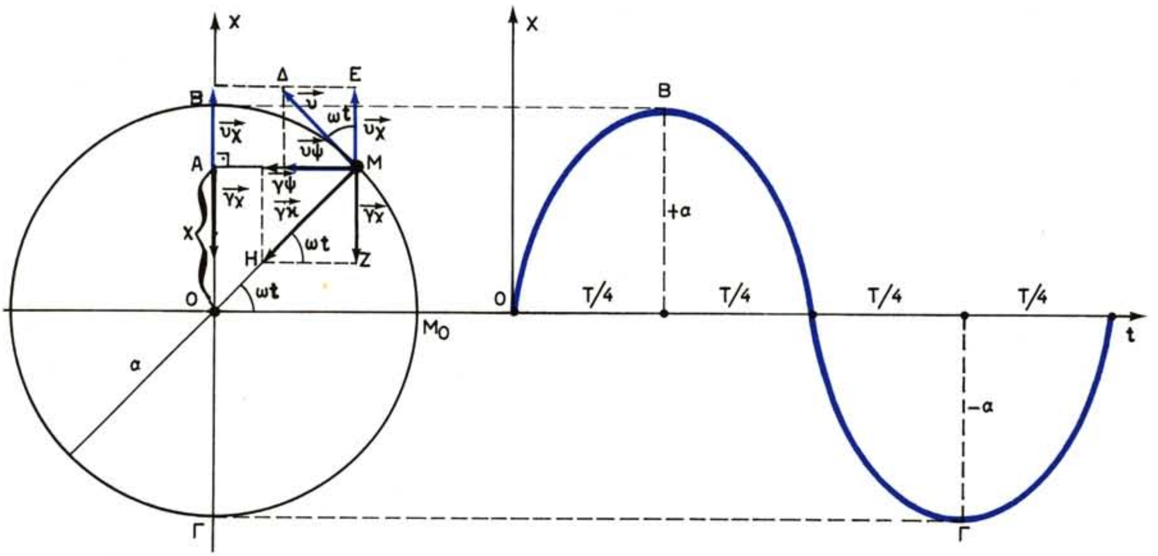
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ – ΚΥΜΑΤΙΚΗ – ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

10 · 1 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ἔστω ὅτι σημεῖο Μ ἐκτελεῖ ὁμαλή κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου (Ο, ΟΜ) (σχ. 10 · 1 α). Τό μέτρο τῆς



Σχ. 10·1 α.

ταχύτητας υ εἶναι σταθερό. Ἐπίσης ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση γ_κ ἔχει σταθερό μέτρο καί ἴσο πρός:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{a} = \omega^2 a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = (2\pi\nu)^2 a$$

ὅπου: ω εἶναι ἡ γωνιακή ταχύτητα, ν ἡ συχνότητα, Τ ἡ περίοδος τῆς κυκλικῆς κινήσεως καί α ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Ἡ προβολή Α τοῦ σημείου Μ στόν ἄξονα x, πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου, κινεῖται πάνω σ' αὐτόν, καθώς τό Μ περιστρέφεται. Ἡ κίνηση αὐτή τοῦ σημείου Α ὀνομάζεται **ἁρμονική ταλάντωση.**

Γιά νά κατανοήσουμε τό εἶδος τῆς κινήσεως τοῦ σημείου Α, θά βροῦμε τήν ἐξίσωση τῆς κινήσεως. Ἔστω ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t τό σημεῖο Α βρίσκεται σέ άπόσταση x άπό τό Ο. 'Από τό τρίγωνο ΟΑΜ ἔχουμε:

$$x = \alpha\ \eta\mu\ \omega t \qquad (1)$$

ὅπου: ωt εἶναι ἡ γωνία πού διέγραψε ἡ ἀκτίνα ΟΜ ἀπό τήν ἀρχική της θέση M_o. Ἡ ἐξίσωση (1) συνδέει τό διάστημα x, πού διανύει τό κινητό Α, μέ τό χρόνο t καί ἑπομένως εἶναι ἡ ἐξίσωση κινήσεως τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Γενικά, **ὅταν ἡ ἐξίσωση κινήσεως εἶναι ἡμιτονοειδής ἤ συνημιτονοειδής σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο, ἡ κίνηση εἶναι ἁρμονική ταλάντωση.**

Στήν ἐξίσωση (1): x εἶναι ἡ στιγμιαία ἀπομάκρυνση, α τό πλάτος ἤ μέγιστη ἀπομάκρυνση, ω ἡ κυκλική συχνότητα καί ωt ἡ φάση τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Ἄλλες μορφές στήν ἐξίσωση τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Ἐπειδή: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ ἡ ἐξίσωση $x = \alpha\ \eta\mu\ \omega\, t$ μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\ \eta\mu\ \frac{2\pi}{T} \\ \text{ἤ}\quad x &= \alpha\ \eta\mu\ 2\pi\nu t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση τῆς ἁπλῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως μπορεῖ νά ἔχει τή μορφή:

$$x = \alpha\ \eta\mu\ (\omega t + \varphi)$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή ἰσχύει, ὅταν κατά τή χρονική στιγμή $t = 0$ ἡ ἀπομάκρυνση x ἔχει κάποια τιμή. Τότε ἡ φάση εἶναι $\omega t + \varphi$.

α) **Γραφική παράσταση τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.** Στόν Πίνακα 10 · 1 · 1 ἀναγράφονται διάφορες τιμές τοῦ χρόνου καί οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς ἀπομακρύνσεως x πού ὑπολογίσθηκαν ἀπό τήν ἐξίσωση (1). Τά ζεύγη τῶν τιμῶν (x, t) χρησιμοποιήσαμε γιά νά χαράξουμε τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 10 · 1 α, ἡ ὁποία εἶναι ἡ **γραφική παράσταση τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.**

Χαρακτηριστικό τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως εἶναι ἡ περιοδική της ἐπανάληψη. Ἔτσι τό κινητό (σχ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 10·1·1

Χρόνος t	$\frac{2\pi}{T}t$	ημ $\frac{2\pi}{T}t$	Ἀπομάκρυνση $x = \alpha +$ ημ $\frac{2\pi}{T}t$
0	0	0	0
T/4	$\frac{\pi}{2} = 90°$	ημ 90° = 1	α
T/2	π = 180°	ημ 180° = 0	0
3 T/4	$\frac{3\pi}{4} = 270°$	ημ 270° = —1	— α
4 T/4 = T	2 π = 360°	ημ 360° = 0	0

10 · 1 α) ἀπό τό σημεῖο π.χ. Β μετακινεῖται πρός τό σημεῖο Γ καί ἀπό τό Γ ἐπανέρχεται στό Β. Περνᾶ ἔτσι χρόνος ἴσος πρός μιά περίοδο Τ καί στό χρόνο αὐτό τό κινητό λέμε ὅτι **κάνει μιά πλήρη ταλάντωση.** Στή συνέχεια καί στήν ἑπόμενη χρονική περίοδο διάρκειας ἴσης πρός τήν περίοδο Τ, τό κινητό κάνει τήν ἴδια ἀκριβῶς κίνηση, δηλαδή ἀπό τό Β μετακινεῖται πρός τό Γ καί ἀπό τό Γ πάλι γυρίζει πίσω στό Β.

β) **Ταχύτητα τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.** Στήν κίνηση αὐτή ἡ στιγμιαία ταχύτητα υ_x εἶναι ἡ προβολή στόν ἄξονα τῆς γραμμικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως τοῦ σημείου Μ.

Ἀπό τό τρίγωνο ΜΔΕ (σχ. 10 · 1 α) προκύπτει:

$$\upsilon_x = \upsilon \; \sigma\upsilon\nu \; \omega t$$

καί ἐπειδή $\upsilon = \omega \alpha$ ἔχουμε:

$$\upsilon_x = \alpha \, \omega \; \sigma\upsilon\nu \; \omega t \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωση (3) μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$\upsilon_x = \alpha \, \omega \; \eta\mu \; (\omega t + 90°) \qquad (4)$$

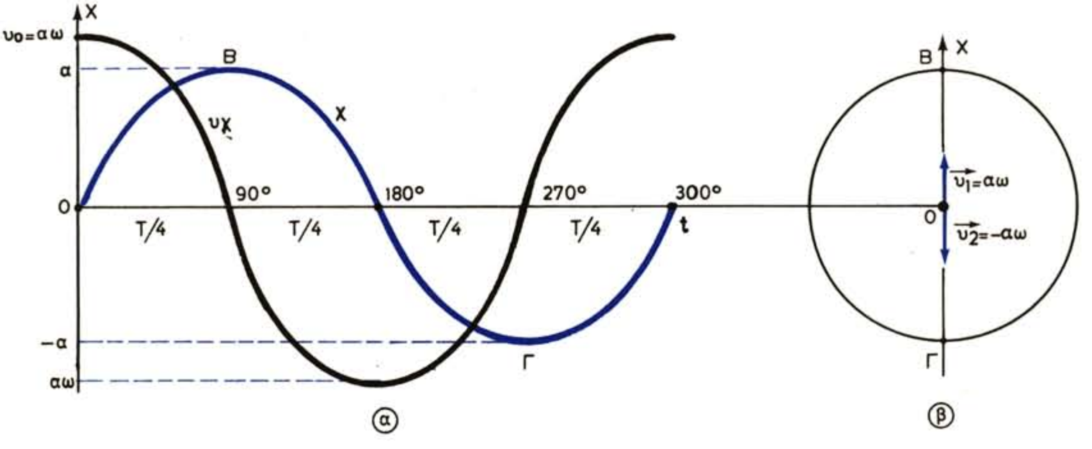
Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ταχύτητα στήν ἁρμονική ταλάντωση εἶναι ἡμιτονοειδής συνάρτηση τοῦ χρόνου. Μεταβάλλεται ἑπομένως περιοδικά καί ἔχει τήν ἴδια κυκλική συχνότητα ω μέ τήν ἁρμονική ταλάντωση. Δέν ἔχει ὅμως τήν ἴδια φάση, οὔτε τό ἴδιο πλάτος. Ἡ φάση τῆς ταχύτητας εἶναι $\omega t + 90°$, ἐνῶ τῆς ἀντίστοιχης ἁρμονικῆς ταλαντώσεως εἶναι ωt.

Παρουσιάζουν ἑπομένως οἱ δύο αὐτές ταλαντώσεις διαφορά φάσεως $\varphi = \omega t + 90 - \omega t$ ἤ $\varphi = 90°$. Τό πλάτος τῆς ταχύτητας εἶναι αω.

Τό σχῆμα 10 · 1 β(α) παριστάνει στό ἐπίπεδο τῶν ἴδιων ἀξόνων τίς γραφικές παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων: $x = \alpha$ ημ ωt καί $\upsilon_x = \alpha\, \omega$ ημ $(\omega t + 90°)$.

Ἔτσι συγκρίνουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν δύο ἡμιτονοειδῶν συναρτήσεων τῆς ἴδιας περιόδου μέ διαφορά φάσεως 90°. Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν ἡ ἀπομάκρυνση x ἔχει τιμή μηδέν (σημεῖο Ο), ἡ ταχύτητα παίρνει τή μέγιστη ἀπόλυτη τιμή (πλάτος ταχύτητας $\upsilon = \alpha\, \omega$) καί ὅταν ἡ ἀπομάκρυνση πάρει τή μέγιστη ἀπόλυτη τιμή (σημεῖα Β καί Γ), τότε ἡ ταχύτητα υ_x μηδενίζεται.

Μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος 10 · 1 β(β) μποροῦμε νά διατυπώσουμε τά παραπάνω ὡς ἑξῆς:



Σχ. 10·1 β.

Στήν ἁρμονική ταλάντωση τό κινητό ξεκινᾶ ἀπό τό Ο μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = \alpha\, \omega$, πού εἶναι ἡ πιό μεγάλη ταχύτητα πού μπορεῖ νά ἀποκτήσει στήν κίνηση αὐτή. Καθώς προχωρεῖ πρός τό Β, ἡ ταχύτητα μικραίνει καί στό Β μηδενίζεται. Στή συνέχεια τό κινητό ἀλλάζει φορά. Κινεῖται ἀπό τό Β πρός τό Ο μεγαλώνοντας συνέχεια τήν ταχύτητά του, ὅσο πλησιάζει στό Ο. Μόλις φθάσει στό Ο ἡ ταχύτητα γίνεται πάλι ἡ μέγιστη $\upsilon_2 = \alpha\, \omega$, ἀλλά μέ φορά τώρα ἀντίθετη τῆς υ_1.

Τό κινητό ξεπερνᾶ τό Ο καί προχωρεῖ πρός τό Γ, ἡ ταχύτητά του συνέχεια μικραίνει καί μηδενίζεται στό Γ. Κατόπιν τό κινητό κινεῖται πάλι πρός τό Ο αὐξάνοντας τήν ταχύτητά του, στό Ο ἀποκτᾶ πάλι τήν πιό μεγάλη ταχύτητα $\upsilon_1 = \alpha\,\omega$ καί τό φαινόμενο ἐπαναλαμβάνεται.

γ) **Ἐπιτάχυνση τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.** Ὅπως εἴδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο, ἡ ταχύτητα δέν παραμένει σταθερή. **Ὑπάρχει** ἑπομένως **ἐπιτάχυνση.**

Σέ κάθε τιμή τῆς ἀπομακρύνσεως x ἔχουμε καί μιά τιμή τῆς ἐπιταχύνσεως γ_x **ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ τήν προβολή τοῦ διανύσματος τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως γ_κ στόν ἄξονα τῶν x** (σχ. 10 · 1 α).

Ἀπό τό τρίγωνο ΜΖΗ ἔχουμε:

$$\gamma_x = \gamma_\kappa\ \eta\mu\ \omega t$$

Ἐπειδή ἡ γ_κ εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση, τό μέτρο της δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\gamma_\kappa = \omega^2\,\alpha$$

Ἑπομένως:

$$\gamma_x = \omega^2\,\alpha\ \eta\mu\ \omega t$$

καί ἐπειδή $x = \alpha\ \eta\mu\ \omega t$ ἔχουμε:

$$\gamma_x = \omega^2\,x \qquad (5)$$

Ἄν τά x καί γ_κ θεωρηθοῦν σάν διανύσματα, τότε αὐτά εἶναι ἀντίθετα καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (5) πρέπει νά γραφεῖ:

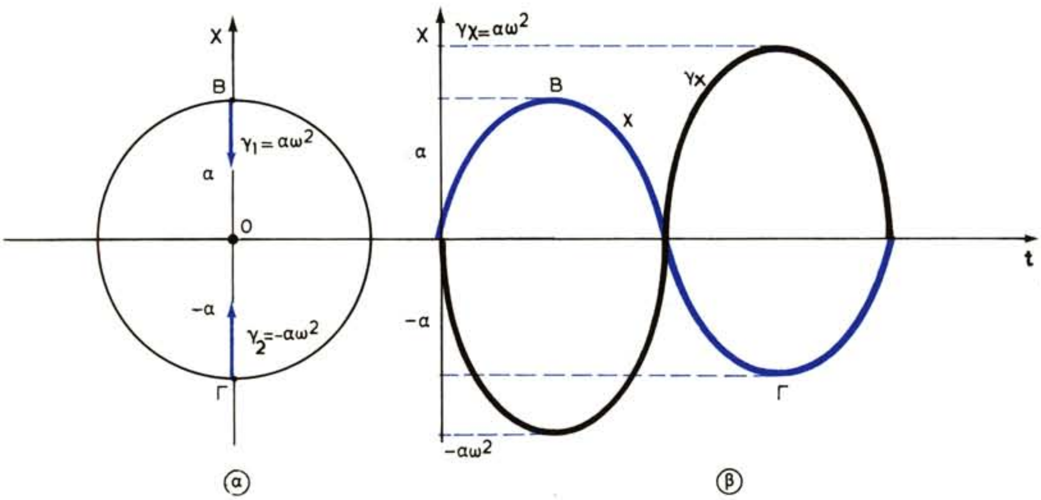
$$\gamma_x = -\,\omega^2\,x \ \ \text{ἤ}\ \ \gamma_x = -\omega^2\,\alpha\ \eta\mu\ \omega t \qquad (6)$$

Ἡ ἐξίσωση (6) μᾶς πληροφορεῖ ὅτι καί ἡ ἐπιτάχυνση γ_x εἶναι ἡμιτονοειδής συνάρτηση τοῦ χρόνου. Ἐπίσης μᾶς πληροφορεῖ ὅτι, ὅταν μεγαλώνει ἡ ἀπομάκρυνση x, μεγαλώνει καί ἡ ἐπιτάχυνση σέ ἀπόλυτη τιμή.

Ἔτσι στό σχῆμα 10 · 1 γ(α) ὅπου $x = 0$, ἡ ἐπιτάχυνση γ_x εἶναι μηδέν. Στή θέση Β $(x = \alpha)$ ἡ ἐπιτάχυνση ἔχει τή μέγιστη ἀπόλυτη τιμή $\omega^2\,\alpha$, ἀλλά φορά ἀντίθετη τῆς x $(\gamma_1 = \omega^2\,\alpha)$ καί στή θέση Γ τή μέγιστη τιμή $\gamma_2 = \alpha\,\omega^2$ καί φορά ἀντίθετη ἐπίσης τῆς x.

Οἱ γραφικές παραστάσεις τῆς ἀπομακρύνσεως καί τῆς ἐπιταχύνσεως σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο φαίνονται στό σχῆμα 10 · 1 γ (β).

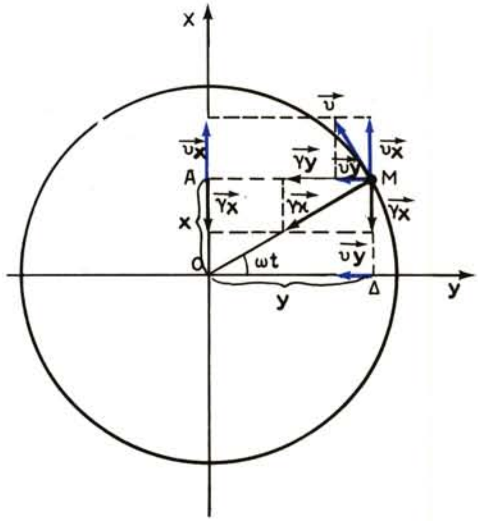
Σημείωση: Ἡ ὁμαλή κυκλική κίνηση τοῦ σημείου Μ εἶναι **συνισταμένη τῶν κινήσεων** προβολῶν τῶν Α καί Δ (σχ. 10 · 1 δ) τοῦ σημείου Μ στούς ἄξονες x καί y ἀντίστοιχα.



Σχ. 10·1 γ.

Οἱ ἐξισώσεις τῶν δυό αὐτῶν κινήσεων εἶναι $x = \alpha\,\eta\mu\,\omega t$ καί $y = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t$ δηλαδή, οἱ κινήσεις αὐτές εἶναι ἁπλές ἁρμονικές ταλαντώσεις.

Ἑπομένως, ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εἶναι συνισταμένη τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_x$ καί $\vec{\upsilon}_y$, ἐνῶ ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$ εἶναι συνισταμένη τῶν ἐπιταχύνσεων $\vec{\gamma}_x$ καί $\vec{\gamma}_y$ στίς συνιστῶσες κινήσεις στούς ἄξονες x καί y. Ἄν, ἑπομένως, ἀναλύσουμε τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί τήν ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$ στούς δυό ἄξονες, βρίσκουμε τίς ταχύτητες καί τίς ἐπιταχύνσεις στίς δυό συνιστῶσες κινήσεις.



Σχ. 10·1 δ.

Μέ τόν τρόπο αὐτό, δικαιολογεῖται ἡ μεθοδολογία πού ἀκολουθήθηκε σχετικά μέ τόν ὑπολογισμό τῶν ταχυτήτων καί ἐπιταχύνσεων στίς ἁπλές ἁρμονικές ταλαντώσεις.

δ) **Δυνάμεις πού προκαλοῦν τίς ἁρμονικές ταλαντώσεις.** Ἡ ἁρμονική ταλάντωση εἶναι μιά κίνηση, στήν ὁποία ὑπάρχει ἐπιτάχυνση. Ἡ ἐπιτάχυνση αὐτή δέν εἶναι σταθερή, γιατί, ὅπως εἴδαμε, ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀπομάκρυνση καί συνδέεται μαζί της μέ τή σχέση:

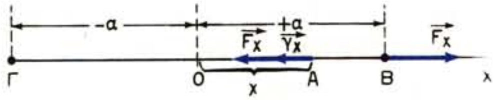
$$\gamma_x = \omega^2 x$$

Ἀφοῦ, ὅμως, ὑπάρχει ἐπιτάχυνση, ὑπάρχει καί δύναμη, σύμφωνα μέ τό δεύτερο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα.

Ἡ δύναμη αὐτή $\vec{F}_x$ (σχ. 10 · 1 ε) δίνεται ἀπό τή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς.

$F_x = m\,\gamma_x$ καί ἐπειδή $\gamma_x = -\,\omega^2\,x$ προκύπτει

$$\vec{F_x} = -\,m\,\omega^2\,\vec{x}$$



Σχ. 10·1 ε.

Τό μέτρο τῆς F_x εἶναι:

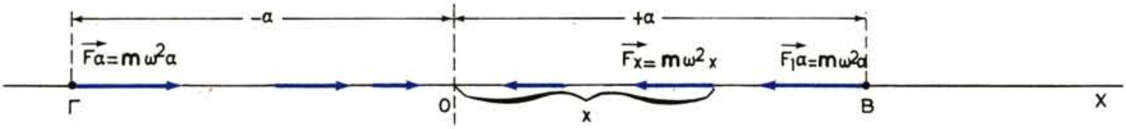
$$F_x = -\,m\,\omega^2\,x \qquad (7)$$

Ἡ μάζα m καί ἡ κυκλική συχνότητα ω εἶναι σταθερά μεγέθη.

Ἄν γράψουμε $m\,\omega^2 = D$, ἡ ἐξίσωση (7) γίνεται:

$$\vec{F_x} = -\,m\,\omega^2\,\vec{x} = -\,\vec{Dx} \qquad (8)$$

Συμπέρασμα: Ὑλικό σημεῖο κάνει ἁπλή ἁρμονική ταλάντωση, ὅταν ἐξασκεῖται σ' αὐτό δύναμη, ἀνάλογη καί πρός τήν ἀπομάκρυνση τοῦ σημείου ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του καί ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τήν ἀπομάκρυνση αὐτή.



Σχ. 10·1 στ.

Στό σχῆμα 10 · 1 στ παριστάνονται οἱ δυνάμεις πού ἐξασκοῦνται σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἐκτελεῖ ἁπλή ἁρμονική ταλάντωση στόν ἄξονα x.

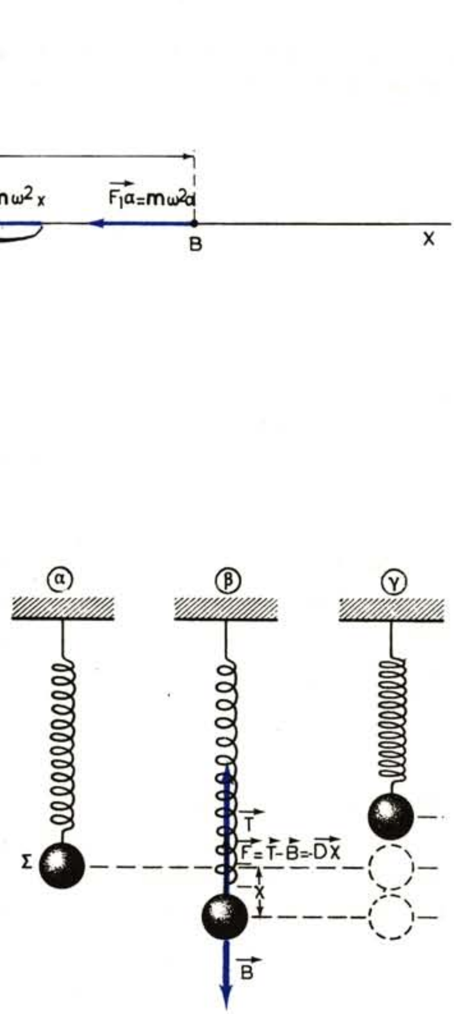
Στίς θέσεις B καί Γ ἡ δύναμη παίρνει τήν πιό μεγάλη ἀπόλυτη τιμή $|F_x| = m\,\omega^2\,\alpha$.

ε) **Κίνηση ὑλικοῦ σημείου πού συνδέεται μέ ἐλατήριο.** Στήν ἄκρη ἑνός κατακόρυφου ἐλατήριου συνδέουμε ἕνα σῶμα Σ μάζας m [σχ. 10 · 1 ζ(α)]. Τραβοῦμε τό σῶμα πρός τά κάτω τεντώνοντας τό ἐλατήριο καί τό ἀφήνουμε ἐλεύθερο. Κάποια χρονική στιγμή τό σῶμα θά ἀπέχει ἀπό τήν ἀρχική του θέση O ἀπόσταση x [σχ. 10 · 1 ζ (β)]. Στό σῶμα ἐξασκοῦνται δυό δυνάμεις: Τό βάρος του $\vec{B}$ καί ἡ δύναμη τοῦ ἐλατήριου $\vec{T}$.

Ἡ διαφορά $\vec{T} - \vec{B}$ εἶναι ἡ δύναμη $\vec{F}$, ἡ ὁποία δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\vec{F} = -\,\vec{Dx}$$

Τήν σχέση αὐτή τήν ἔχουμε ἀναφέρει καί σέ προηγούμενα κεφάλαια καί τόν παράγοντα D τόν ὀνομάσαμε **κατευθύνουσα δύναμη τοῦ ἐλατήριου.** Ὁ D εἶ-



Σχ. 10·1 ζ.
Ἡ μάζα πού συνδέεται μέ τό ἐλατήριο κάνει ἁπλή ἁρμονική ταλάντωση.

ναι μιά σταθερά πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό **εἶδος τοῦ ἐλατηρίου καί τό χαρακτηρίζει.**

Διαπιστώνομε, ἑπομένως, ἀπό τήν ἐξίσωση (9) **ὅτι ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ τό ἐλατήριο σέ μιά μάζα εἶναι ἀνάλογη καί ἀντίθετης φορᾶς πρός τήν ἀπομάκρυνση x καί ἑπομένως ἡ κίνηση τοῦ σώματος Σ πρέπει νά εἶναι ἁρμονική ταλάντωση.**

Πραγματικά, ἡ κίνηση σωμάτων, πού συνδέονται μέ ἐλατήρια, εἶναι **ἁρμονική ταλάντωση,** ἡ ὁποία δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$x = a\ \eta\mu\ \omega t$$

'Υπολογισμός τῆς κυκλικῆς συχνότητας ω καί τῆς περιόδου Τ. 'Από τήν ἐξίσωση (8) ἔχουμε ὅτι:

$$m\omega^2 = D$$

'Επομένως:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}} \qquad (10)$$

καί ἐπειδή:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} \qquad (11)$$

'Από τίς ἐξισώσεις (10) καί (11) ὑπολογίζεται ἡ κυκλική συχνότητα καί ἡ περίοδος στήν ἁπλή ἁρμονική ταλάντωση πού κάνει ἕνα σῶμα, πού συνδέεται μέ ἐλατήριο, γιατί ἡ κατευθύνουσα δύναμη τοῦ ἐλατήριου καί ἡ μάζα τοῦ σώματος εἶναι γνωστές.

στ) **'Ενέργεια στήν ἁρμονική ταλάντωση.** Εἴδαμε ὅτι ἡ ἐνέργεια ἑνός τεντωμένου ἐλατήριου, δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

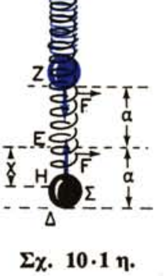
$$A = \frac{1}{2} D x^2$$

ὅπου: x ἡ ἀπομάκρυνση.

"Αν ἀπομακρύνουμε τό σῶμα Σ (σχ. 10 · 1 η), πού συνδέεται μέ τό ἐλατήριο, ἀπό τή θέση ἰσορροπίας Ε στή θέση Δ, θά ἔχει σ' αὐτή τή θέση δυναμική ἐνέργεια:

$$A_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} D\alpha^2$$

"Αν ἀφήσουμε τό σῶμα ἐλεύθερο, θά κινηθεῖ ἀπό τό Δ πρός τό Ε. Κατά τήν κίνηση αὐτή ἡ ταχύτητα αὐ-



• Σχ. 10·1 η.

ξάνει καί ἡ δυναμική ἐνέργεια μετατρέπεται σέ κινητική. Στή θέση Ε ἡ δυναμική ἐνέργεια μηδενίζεται καί μετατρέπεται ὁλόκληρη σέ κινητική: $\frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2_{\mu\varepsilon\gamma}$. Στή θέση αὐτή ἡ ταχύτητα ἔχει τή μέγιστη δυνατή τιμή. Στή συνέχεια, τό κινητό φθάνει στή θέση Ζ, ὅπου ἡ ταχύτητά του μηδενίζεται. Ἐκεῖ πάλι ἡ δυναμική του ἐνέργεια γίνεται ἴση μέ τή δυναμική ἐνέργεια πού εἶχε στό σημεῖο Δ, καί ἡ κινητική ἐνέργεια μηδενίζεται.

Μποροῦμε, ἐπομένως, νά γράψουμε γιά τά σημεῖα Δ, Ε, Ζ καί γιά τυχόν σημεῖο Η τήν παρακάτω ἐξίσωση, ἡ ὁποία στηρίζεται στήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας:

$$E_{\delta\upsilon\nu}\,\Delta = E_{\delta\upsilon\nu}\,H + E_{\kappa\iota\nu}\,H = = E_{\kappa\iota\nu}\,E = E_{\delta\upsilon\nu}\,Z.$$

$$\frac{1}{2}\,D\,a^2 = \frac{1}{2}\,D\,x^2 + \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{1}{2}\,D\,a^2 \qquad (12)$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν ἐξίσωση (12) τό D μέ τήν παράσταση $m\,\omega^2$, γίνεται:

$$\frac{1}{2} m\,\omega^2\,a^2 = \frac{1}{2} m\,\omega^2\,x^2 + \frac{1}{2}\,m\,\upsilon^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m\,\upsilon^2_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{1}{2} m\,\omega^2\,a^2$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή μᾶς παρουσιάζει τόν τρόπο ἐναλλαγῆς τῆς κινητικῆς καί δυναμικῆς ἐνέργειας σέ μιά ἁρμονική ταλάντωση.

ζ) **Φθίνουσα ταλάντωση.** Ἄν κατά τήν ταλάντωση τοῦ σώματος Σ (σχ. 10 · 1 η) ἔχουμε ἀπώλειες ἐνέργειας, ἡ δυναμική ἐνέργεια στά ἀκραῖα σημεῖα Δ καί Ζ $\left[\,E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} D\,\alpha^2\,\right]$ συνέχεια θά μικραίνει. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως α θά μικραίνει ἀντίστοιχα.

Λέμε, τότε, ὅτι ἡ ταλάντωση εἶναι **φθίνουσα·** τό σχῆμα 10 · 1 θ μᾶς δίνει τή μορφή μιᾶς τέτοιας φθίνουσας ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Διαπιστώνουμε ὅτι στή φθίνουσα ταλάντωση τό πλάτος συνέχεια μειώνεται.

Σχ. 10·1 θ.
Φθίνουσα ταλάντωση.

— **Ἐφαρμογές.**

1. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἐκτελεῖ ἁρμονική ταλάντωση πού ἔχει ἐξίσωση $x = \alpha$ ημ $\frac{2\pi}{T}t$. Τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι $\alpha = 10\,cm$ καί ἡ περίοδός της εἶναι $T = 2\,ms'$. Νά ὑπολογισθοῦν:

α) Ἡ φάση τῆς ταλαντώσεως μετά ἀπό χρόνο $t = 10\,ms'$.

β) Ἡ ἀπομάκρυνση x, ἡ ταχύτητα υ_x καί ἡ ἐπιτάχυνση γ_x τή στιγμή αὐτή.

Λύση:

α) Ἡ φάση τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως εἶναι ἡ παράσταση: $\frac{2\pi}{T}\,t$.

Ἔχουμε: $\frac{2\pi}{T}\,t = \frac{2\pi}{2\,ms} \cdot 10\,ms = 10\,\pi =$

$= 10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$.

β) Ἡ ἀπομάκρυνση εἶναι $x = \alpha$ ημ $1800^\circ =$
$= \alpha$ ημ $5 \cdot 360^\circ = 0$.

Ἡ ταχύτητα εἶναι $\upsilon = \alpha\,\omega$ συν $\omega t =$

$$= \alpha\,\frac{2\pi}{T} \cdot \text{συν}\,\frac{2\pi}{T}\,t = \alpha\,\frac{2\pi}{T}\,\text{συν}\,5 \cdot 360 =$$

$$= \frac{2\,\pi\,\alpha}{T} = \frac{6{,}28 \cdot 10\ cm}{2 \cdot 10^{-3}\ s} = 3{,}14 \cdot 10^4\ cm/s =$$

314 m/s.

Ἡ ἐπιτάχυνση δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\gamma_x = \omega^2\,x = -\frac{4\,\pi^2}{T^2}\,x.$$

Ἐπειδή ὅμως $x = 0 \Rightarrow \gamma = 0$.

2. Σῶμα μάζας $m = 2\,kg$ κρέμεται στό ἄκρο κατακόρυφου ἐλατήριου πού ἔχει κατευθύνουσα δύναμη $D = 5\,kp/cm$.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ περίοδος τῆς ἁπλῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως καὶ ἡ μέγιστη ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει τό σῶμα, ἄν τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι $\alpha = 10\,cm$.

Λύση:

Ἀφοῦ ἡ μάζα ἐξαρτᾶται ἀπό ἐλατήριο, θά ἐκτελέσει ἁρμονική ταλάντωση.

α) Ἡ **περίοδος** δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Σύστημα S. I.

$$D = 5 \ \text{kp/cm} = \frac{5 \cdot 9{,}81 \ \text{N}}{\frac{1}{100} \ \text{m}} \simeq 4900 \ \text{N/m}.$$

Ἀντικατάσταση :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{2 \ \text{kg m}}{4900 \ \text{N}}} \simeq 0{,}13 \ \text{s}.$$

β) Ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ ἐλατήριου $E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} D \alpha^2$ μετατρέπεται σέ κινητική: $\frac{1}{2} m \upsilon^2_{\mu\varepsilon\gamma}$.

Ἐπομένως: $\frac{1}{2} m \upsilon^2_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{1}{2} D \alpha^2$

καί $\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\frac{D a^2}{m}}$

Σύστημα S. I.

$D = 4900$ N/m $\quad m = 2$ kg, $\quad \alpha = 0{,}1$ m.

Ἀντικατάσταση :

$$\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\frac{4900 \cdot 0{,}1^2}{2}} \simeq 4{,}95 \ \text{m/s}.$$

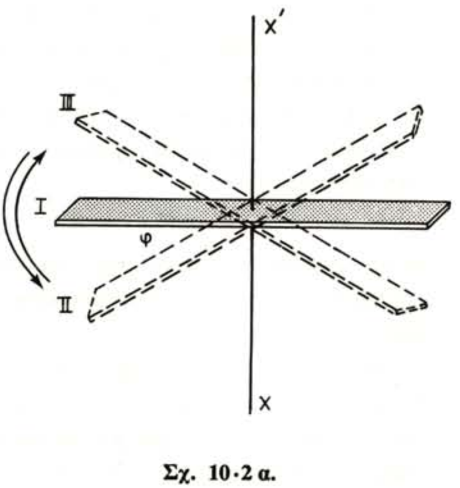
10 · 2 ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ἁρμονική στροφική ταλάντωση κάνει ἕνα σῶμα, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα xx′ (σχ. 10 · 2 α) καί ἡ γωνία στροφῆς φ μεταβάλλεται ἡμιτονοειδῶς σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο. Δηλαδή:

$$\varphi = \varphi_o \ \eta\mu \ \frac{2\pi}{T} \ t \qquad (1)$$

Ἀφοῦ ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἡμιτονοειδής συνάρτηση, τό φαινόμενο εἶναι περιοδικό, μέ περίοδο τήν T. Στό σχῆμα 10 · 2 α τό σῶμα θά μετακινεῖται ἀνάμεσα στίς θέσεις I, II καί III κάνοντας ταλάντωση γύρω ἀπό τή μεσαία θέση I.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ γωνιακή ταχύτητα στήν κίνηση αὐτή δέν εἶναι σταθερή καί ἰσοῦται μέ:



Σχ. 10·2 α.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,\varphi_o\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{2\pi}{T}\,t \qquad (2)$$

καί ἡ στιγμιαία γωνιακή ἐπιτάχυνση:

$$a = -\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,\varphi_o\ \eta\mu\,\frac{2\pi}{T}\,t \qquad (3)$$

Ἀπό τή σύγκριση τῶν ἐξισώσεων (1) καί (3) προκύπτει:

$$a = -\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,\varphi \qquad (4)$$

Ἀφοῦ στή στροφική ταλάντωση ὑπάρχει γωνιακή ἐπιτάχυνση α, θά ὑπάρχει καί ροπή Μ, ἡ ὁποία ἐπιταχύνει τό σῶμα στή στροφική αὐτή κίνηση.

Ἡ ροπή εἶναι:

$$\vec{M} = \Theta\,\vec{a} \qquad (5)$$

ὅπου: θ εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος.

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (4) καί (5) προκύπτει:

$$M = -\,\frac{4\,\pi^2}{T^2}\,\Theta\,\varphi = -\,K\,\varphi \qquad (6)$$

ὅπου: $K = \dfrac{4\pi^2}{T^2}\,\Theta.$

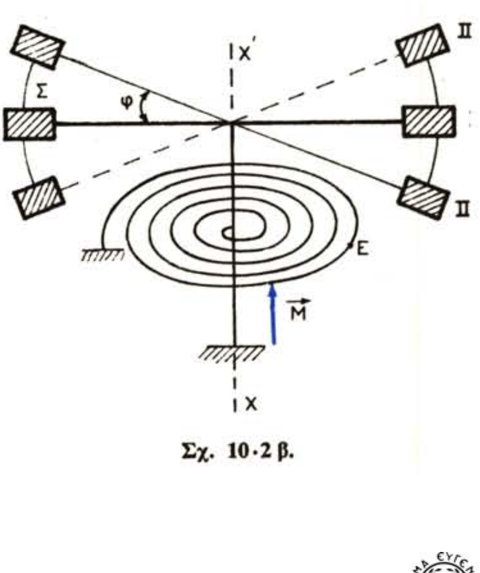
Ἄν, ἑπομένως, **ἕνα σῶμα περιστρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα καί ἐξασκεῖται σ' αὐτό ροπή, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογη πρός τή γωνία στροφῆς φ καί τείνει συνέχεια νά μειώσει τή γωνία αὐτή, τότε τό σῶμα κάνει ἁρμονική στροφική ταλάντωση.**

Στό σχῆμα 10 · 2 β βλέπουμε ἕνα σῶμα Σ, τό ὁποῖο μπορεῖ νά στραφεῖ γύρω ἀπό τόν ἄξονα xx'. Ἄν τό σῶμα μετακινηθεῖ ἀπό τή θέση Ι στή θέση ΙΙ, τό ἐλατήριο Ε συσπειρώνεται καί ἐξασκεῖ ροπή Μ, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογη πρός τή γωνία στροφῆς καί δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$M = -\,K\,\varphi \qquad (7)$$

ὅπου: φ εἶναι ἡ γωνία στροφῆς καί Κ συντελεστής, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται **κατευθύνουσα ροπή τοῦ ἐλατηρίου.**

Ἄν συγκρίνουμε τίς ἐξισώσεις (6) καί (7), βρίσκουμε ὅτι εἶναι ταυτόσημες. Αὐτό σημαίνει ὅτι **τό σῶμα Σ** τοῦ σχήματος 10 · 2 β **μπορεῖ νά κάνει ἁρμονική στροφική ταλάντωση**. Μέ ἄλλα λόγια **ἕνα σπειροειδές**



Σχ. 10·2 β.

ἐλατήριο μπορεῖ νά δημιουργήσει συνθῆκες ἁρμονικῆς στροφικῆς ταλαντώσεως.

Αὐτή ἀκριβῶς ἡ ἰδιότητα βρίσκει ἄμεση ἐφαρμογή στά ρολόγια τοῦ χεριοῦ, στά ὁποῖα ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο προκαλεῖ ἁρμονική στροφική ταλάντωση καί ἡ **σταθερή περίοδος αὐτῆς τῆς ταλαντώσεως** ἀποτελεῖ τή βάση λειτουργίας τοῦ ρολογιοῦ γιά τήν ἀκριβή μέτρηση τοῦ χρόνου.

Ὑπολογισμός τῆς περιόδου. Ἔστω ὅτι εἶναι γνωστή ἡ ροπή ἀδράνειας Θ τοῦ σώματος Σ (σχ. 10 · 2β) καί ἡ κατευθύνουσα ροπή τοῦ ἐλατηρίου **K**.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (6) θά ἔχουμε:

$$K = \frac{4\pi^2}{T^2}\Theta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{K}}} \qquad (8)$$

Μποροῦμε, ἑπομένως, νά ὑπολογίσουμε τήν περίοδο τῆς στροφικῆς ταλαντώσεως, πού προκαλεῖ σ' ἕνα περιστρεφόμενο σῶμα ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο, ὅταν εἶναι γνωστή ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ σώματος καί ἡ κατευθύνουσα ροπή τοῦ ἐλατηρίου.

10 · 3 ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

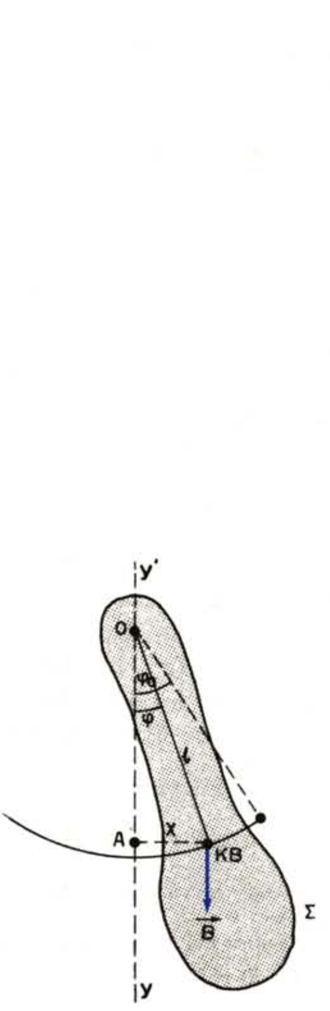
Κάθε σῶμα, ὅπως τό σῶμα Σ τοῦ σχήματος 10 · 3, πού μπορεῖ νά στρέφεται στό πεδίο βαρύτητας γύρω ἀπό ἕναν ὁριζόντιο ἄξονα Ο, πού δέν περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος, εἶναι ἕνα φυσικό ἐκκρεμές. Ὅταν ἀπομακρύνουμε τό φυσικό αὐτό ἐκκρεμές ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του καί τό ἀφήσουμε ἐλεύθερο, τότε, τό βάρος του **B** δημιουργεῖ ροπή ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς Ο.

Ἡ ροπή αὐτή τό ἀναγκάζει νά κάνει μιάν αἰώρηση (ταλάντωση), μέ μέση θέση τήν κατακόρυφη yy'. Θά ἀποδείξουμε ὅτι, ἄν ἡ γωνία φ εἶναι πολύ μικρή, ἡ αἰώρηση εἶναι ἁρμονική στροφική ταλάντωση.

Ἀπόδειξη: Ἡ ροπή τοῦ βάρους $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ ὡς πρός τόν ἄξονα Ο ἰσοῦται:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{B}\,\mathrm{x} = -\mathrm{m\,g\,x} \qquad (9)$$

ὅπου: m ἡ μάζα σώματος καί g ἡ ἐπιτάχυνση βαρύτητας. Τό σημεῖο (—) δείχνει ἐδῶ ὅτι ἡ ροπή τείνει νά ἐλαττώσει τό x.



Σχ. 10·3.
Φυσικό ἐκκρεμές.

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΟ (ΚΒ) ἔχουμε:

$$x = l\,\eta\mu\,\varphi \qquad (10)$$

Ἄν δεχθοῦμε ὅτι ἡ μέγιστη τιμή τῆς γωνίας φ εἶναι σχετικά μικρή (2° ὥς 3°), τότε μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τό ημ φ μέ τή γωνία φ σέ ἀκτίνια.

Ἔτσι ἡ ἐξίσωση (10) γίνεται:

$$x = l\,\varphi \qquad (11)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (9) καί (11) ἔχουμε:

$$M = -\,m\,g\,l\,\varphi = -\,K\,\varphi \qquad (12)$$

ὅπου: $K = m\,g\,l$.

Ἀφοῦ, ἐπομένως, ἡ ροπή εἶναι ἀνάλογη καί ἀντίθετης φορᾶς πρός τή γωνία στροφῆς, ἡ αἰώρηση τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς, γιά μικρά πλάτη, εἶναι ἁρμονική στροφική ταλάντωση.

Περίοδος αἰωρήσεως. Ἀπό τήν ἐξίσωση (8) ἔχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Ἀλλά ἐδῶ εἶναι $K = m\,g\,l$.

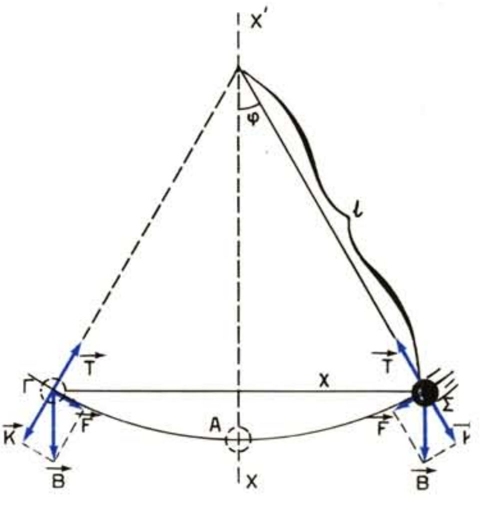
Ἑπομένως: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{m\,g\,l}} \qquad (13)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (13) ὑπολογίζουμε τήν περίοδο αἰωρήσεως ἑνός φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς.

10 · 4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

Ἔστω ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο Σ συνδέεται στήν ἄκρη νήματος, τό ὁποῖο δέν ἔχει βάρος καί δέν ἐπιμηκύνεται, ἐνῶ τό ἄλλο ἄκρο τοῦ νήματος στηρίζεται σὲ ἀκίνητο σημεῖο (σχ. 10 · 4 α). Τό σύστημα αὐτό εἶναι ἕνα μαθηματικό ἐκκρεμές. Ἀπομακρύνουμε τό ὑλικό σημεῖο Σ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας xx' στή θέση x'Σ. Στό σημεῖο ἐνεργοῦν δυό δυνάμεις, τό βάρος του $\vec{B}$ καί ἡ τάση τοῦ νήματος $\vec{T}$.

Ἀναλύουμε τό βάρος Β σέ δυό δυνάμεις $\vec{K}$ καί $\vec{F}$. Ἡ $\vec{K}$ ἰσορροπεῖ τήν $\vec{T}$ καί ἡ $\vec{F}$ ἐπιταχύνει τό σημεῖο πρός τή θέση Α. Ὅταν τό σημεῖο φθάσει στή θέση αὐτή, ἀποκτᾶ τήν πιό μεγάλη ταχύτητα, ἐνῶ ἡ δύναμη $\vec{F}$ μηδενίζεται. Μέ τήν ταχύτητα πού ἀπέκτησε



Σχ. 10·4 α.
Μαθηματικό ἐκκρεμές.

στή θέση Α, τό σημεῖο συνεχίζει νά κινεῖται πρός τή θέση Γ, ἐνῶ τώρα ἡ δύναμη $\vec{F}$ τό ἐπιβραδύνει. Στή θέση Γ τό σημεῖο σταματᾶ καί ἡ δύναμη $\vec{F}$ τό ἐπιταχύνει πρός τό σημεῖο Α. Στή συνέχεια ἀπό τό Α ἐπανέρχεται τό σῶμα στή θέση Σ καί ἐπαναλαμβάνεται ἡ ἴδια παλινδρομική κίνηση ἀπό τό Σ πρός τό Γ καί ἀπό τό Γ πρός τό Σ.

Ἑπομένως καί τό μαθηματικό ἐκκρεμές κάνει μιά ταλάντωση.

Τή μέγιστη τιμή φ, πού μπορεῖ νά πάρει ἡ γωνία φ, τήν ὀνομάζουμε **πλάτος ταλαντώσεως.**

Τό μῆκος τοῦ νήματος l τό ὀνομάζουμε **μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς** καί τό κατακόρυφο ἐπίπεδο στό ὁποῖο κινεῖται τό νῆμα κατά τήν ταλάντωση τό ὀνομάζουμε **ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς.**

Αἰώρηση μέ μικρό πλάτος. Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἄν τό μαθηματικό ἐκκρεμές κάνει αἰώρηση μέ μικρό πλάτος ($\varphi = 2^\circ$ ὥς 3°), ἡ αἰώρηση αὐτή εἶναι **ἁρμονική ταλάντωση,** καί μετά θά ὑπολογίσουμε τήν περίοδο τῆς ταλαντώσεως αὐτῆς.

Ἀπόδειξη: Ἀπομακρύνουμε τό ἐκκρεμές ἀπό τή θέση ἰσορροπίας ΟΔ στή θέση ΟΑ καί τό ἀφήνουμε ἐλεύθερο (σχ. 10 · 4 β). Ἡ γωνία φ εἶναι πολύ μικρή. Ἡ δύναμη F, πού προκαλεῖ τήν ἐπιτάχυνση ὑπολογίζεται ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΖΑΗ:

$$F = B\ \eta\mu\varphi$$

Ἀφοῦ ἡ φ εἶναι πολύ μικρή, θά ἰσχύει ημφ = φ. Ἑπομένως:

$$F = B\,\varphi = m\,g\,\varphi \qquad (14)$$

Ἐπειδή ἡ δύναμη F τείνει νά μειώσει τή γωνία φ, μποροῦμε νά γράψουμε:

$$F = -\,m\,g\,\varphi \qquad (15)$$

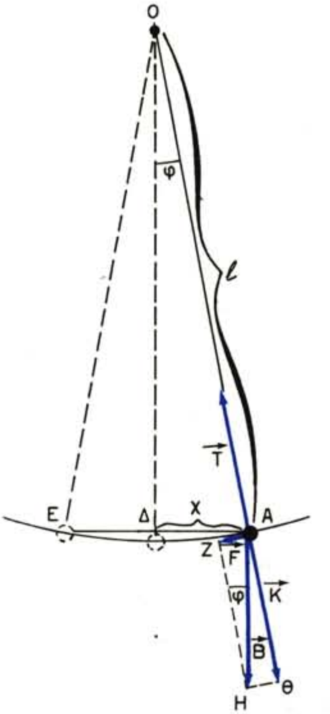
Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΔΑ ἔχουμε $x = l\ \eta\mu\ \varphi$

ἤ $\quad x = l\,\varphi \quad$ καί $\quad \varphi = \dfrac{x}{l} \qquad (16)$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (15) καί (16) ἔχουμε:

$$F = -\,\frac{m\,g}{l}\,x = -\,D x \qquad (17)$$

ὅπου: $\quad D = \dfrac{m\,g}{l}.$



Σχ. 10·4 β.

Κατά τήν ἐπιτάχυνσή του, τό ὑλικό σημεῖο τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς θά μετακινηθεῖ ἀπό τή θέση Α στή θέση Δ πάνω στό τόξο ΑΔ, τό ὁποῖο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι συμπίπτει μέ τή χορδή x, ἀφοῦ ἡ γωνία φ εἶναι πολύ μικρή.

Ἐπίσης ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι συμπίπτει μέ τήν διεύθυνση τῆς x. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (17) ἡ δύναμη εἶναι **ἀνάλογη πρός τή μετατόπιση καί ἔχει ἀντίθετη φορά.** Συνεπῶς ἡ κίνηση τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι **ἁρμονική ταλάντωση.**

Ἀφοῦ ἡ κίνηση εἶναι ἁρμονική ταλάντωση, ἡ περίοδος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Ἀλλά $$D = \frac{m\,g}{l}$$

Ἑπομένως : $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad (18)$$

Ὁ τύπος (18) μᾶς δίνει τήν περίοδο αἰωρήσεως τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς.

α) **Νόμοι αἰωρήσεως τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς.** Οἱ νόμοι τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι τέσσερις, ἀπό τούς ὁποίους οἱ δύο προκύπτουν ἀπό τήν ἐξίσωση (18).

1ος Νόμος: Ἡ περίοδος ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνάλογη πρός τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ μήκους του.

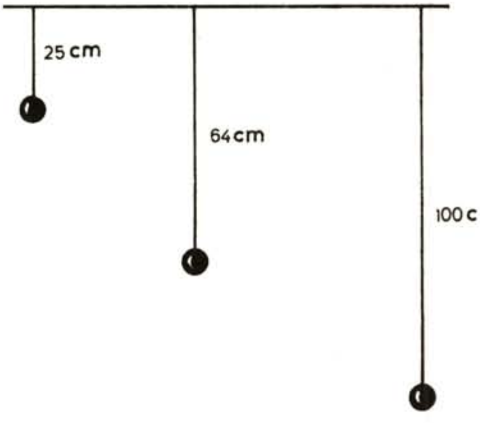
2ος Νόμος: Ἡ περίοδος ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀντίστροφα ἀνάλογη πρός τήν τετραγωνική ρίζα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας. Ἔτσι ἄν βρίσκεται τό ἴδιο ἐκκρεμές σέ δυό χώρους, πού ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι g καί 4g, τότε ἡ περίοδος θά εἶναι T καί T/2 ἀντίστοιχα.

3ος Νόμος: Τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς παραμένει σταθερό στό χῶρο.

4ος Νόμος: Γιά μικρά πλάτη αἰωρήσεως ἡ περίοδος αἰωρήσεως εἶναι ἀνεξάρτητη τοῦ πλάτους καί τῆς μάζας τοῦ ἐκκρεμοῦς.

— Πειραματική ἀπόδειξη τοῦ πρώτου νόμου.

Σέ τρία ἐκκρεμή (σχ. 10 · 4 γ) μέ μήκη $l_1 = 25$ cm,



Σχ. 10·4 γ.

$l_2 = 64$ cm καί $l_3 = 100$ cm, μετροῦμε τίς περιόδους τους, πού εἶναι: $T_1 = 1$ s, $T_2 = 1{,}6$ s καί $T_3 = 2$ s.

Ἀντικαθιστώντας στίς τρεῖς σχέσεις:

$$\frac{T_1}{\sqrt{l_1}},\quad \frac{T_2}{\sqrt{l_2}} \text{ καί } \frac{T_3}{\sqrt{l_3}}, \qquad \text{ἔχομε:}$$

$$\frac{T_1}{\sqrt{l_1}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{T_2}{\sqrt{l_2}} = \frac{1{,}6}{\sqrt{64}} = \frac{1{,}6}{8} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{T_3}{\sqrt{l_3}} = \frac{2}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Ἄρα οἱ περίοδοι εἶναι ἀνάλογες πρός τίς τετραγωνικές ρίζες τῶν μηκῶν.

β) **Μεταβολή τῆς ἐνέργειας τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς.** Εἴδαμε ὅτι σέ κάθε ταλάντωση ἔχουμε ἐναλλαγή δυναμικῆς καί κινητικῆς ἐνέργειας. Τό ἴδιο συμβαίνει καί στό μαθηματικό ἐκκρεμές.

Ἔτσι στή θέση Α (σχ. 10·4 δ) τό σῶμα ἔχει δυναμική ἐνέργεια, σχετικά μέ τό ἐπίπεδο yy':

$$E_{\delta\upsilon\nu}(A) = m\,g\,h$$

Ἐπειδή $h = l - \beta = l - l \,\text{συν}\, \varphi_o = l\,(1 - \text{συν}\, \varphi_o)$,

ἔχουμε:

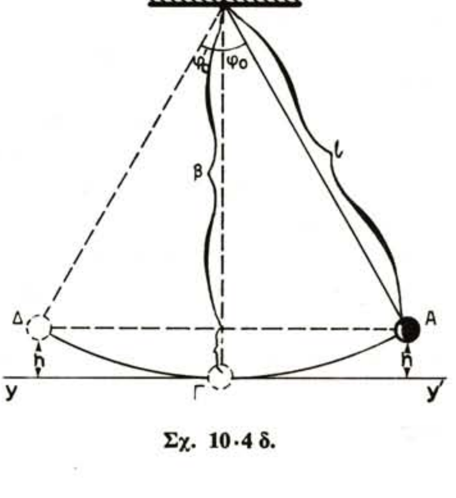
$$E_{\delta\upsilon\nu}(A) = m\,g\,l\,(1 - \text{συν}\,\varphi_o).$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτή μετατρέπεται στή θέση Γ σέ κινητική ἐνέργεια καί στή συνέχεια στή θέση Δ πάλι σέ δυναμική ἐνέργεια ἴση μέ αὐτή πού εἶχε τό σῶμα στή θέση Α. Ἔτσι τό Δ θά βρίσκεται στό ἴδιο ὕψος h ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο yy', καί θά εἶναι $\varphi'_o = \varphi_o$. Στήν πραγματικότητα, ὅμως, κατά τήν αἰώρηση αὐτή ἔχουμε ἀπώλειες ἐνέργειας. Ἔτσι τό Δ βρίσκεται πιό χαμηλά ἀπό τό Α καί ἡ γωνία φ'_o θά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν φ_o. Δηλαδή ἡ ταλάντωση θά εἶναι φθίνουσα.

Ἐφαρμογή. Πόσο πρέπει νά εἶναι τό μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς ἑνός ρολογιοῦ τοίχου, ὥστε μιά ἁπλή αἰώρηση νά γίνεται σέ χρόνο 1 s. Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας νά ληφθεῖ 10 m/s.

Λύση:

Ἁπλή αἰώρηση ὀνομάζεται ἡ κίνηση τοῦ ἐκκρεμοῦς μεταξύ τῶν ἀκραίων θέσεων Δ καί Α (σχ. 10·4 δ).



Σχ. 10·4 δ.

Ἐνῶ **πλήρης αἰώρηση** λέγεται ἡ κίνηση ἀπό τή μιά ἀκραία θέση στήν ἄλλη καί ἡ ἐπαναφορά του στήν ἀρχική.

Περίοδος ἑνός ἐκκρεμοῦς ὀνομάζεται ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως. Ἑπομένως, ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς τῆς ἀσκήσεως εἶναι διπλάσια ἀπό τό χρόνο μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως. Δηλαδή, $T = 2$ s.

Ἀπό τόν τύπο : $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$ βρίσκουμε :

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{2^2 \cdot s^2 \cdot 10 \ m\,s^{-2}}{4 \cdot 3{,}14^2} \simeq 1 \ m.$$

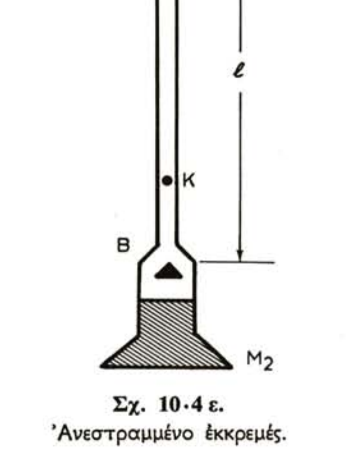
Ἀπάντηση : Τό ἐκκρεμές πρέπει νά ἔχει μῆκος 1 m.

γ) **Μέτρηση τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας. Ἀντιστρεπτό ἐκκρεμές.** Ἀπό τόν τύπο τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας, ἄν μετρήσουμε τήν περίοδο T ἑνός μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς καί τό μῆκος του l. Εἶναι ἑπομένως ἁπλός ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας. Ὅμως, ἕνα μαθηματικό ἐκκρεμές εἶναι θεωρητικό κατασκεύασμα καί, ἑπομένως, δέν θά τό ἔχουμε γιά νά κάνουμε πειράματα. Βέβαια, ἄν σέ ἕνα ἐλαφρό νῆμα τοποθετήσουμε μιά βαρειά σφαίρα μικρῶν διαστάσεων, τότε μπορεῖ νά ποῦμε ὅτι πλησιάζουμε σημαντικά ἕνα μαθηματικό ἐκκρεμές. Οἱ μετρήσεις ὅμως τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας πρέπει νά γίνονται μέ μεγάλη ἀκρίβεια. Ἡ λύση τοῦ προβλήματος γίνεται μέ τό **ἀντιστρεπτό ἐκκρεμές,** τό ὁποῖο εἶναι ἕνα φυσικό ἐκκρεμές, πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς μαθηματικό ἐκκρεμές. Ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα σῶμα, ὅπως αὐτό πού δείχνει τό σχῆμα 10 · 4 ε, μέ δύο πρίσματα στίς θέσεις A καί B.

Μετροῦμε τήν περίοδο τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐξαρτώντας το πότε στήν ἀκμή τοῦ A πρίσματος, πότε στήν ἀκμή τοῦ B. Ἄν βρίσκουμε διαφορετικές τιμές τῆς περιόδου, μετακινοῦμε τή μάζα M_2 πρός τό B ἤ ἀντίστροφα καί μετροῦμε πάλι τίς δυό περιόδους. Ὅταν, μετά ἀπό πολλά πειράματα, βροῦμε τήν ἴδια περίοδο καί στίς δυό ἐξαρτήσεις, **ἡ κοινή αὐτή περίοδος**



Σχ. 10·4 ε.
Ἀνεστραμμένο ἐκκρεμές.

T εἶναι ἴση μέ τήν περίοδο μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς, τό ὁποῖο ἔχει μῆκος τήν ἀπόσταση *l* τῶν δύο ἀκμῶν.

Μποροῦμε μέ τό ἀντιστρεπτό αὐτό ἐκκρεμές νά ὑπολογίσουμε τήν τιμή τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας μέ μεγάλη ἀκρίβεια, γιατί εἶναι σάν νά ἔχουμε ἕνα μαθηματικό ἐκκρεμές, πού τό μῆκος του *l* πού, ὅπως εἴπαμε, εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόσταση τῶν ἀκμῶν τῶν δύο πρισμάτων, μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ ἀκρίβεια. Δέν μένει, ἐπομένως, παρά νά μετρήσουμε τήν περίοδο αἰωρήσεως μέ ὅσο τό δυνατό μεγάλη ἀκρίβεια. Αὐτό τό πετυχαίνουμε μετρώντας τό χρόνο πολλῶν αἰωρήσεων ἑνός ἐκκρεμοῦς καί διαιρώντας αὐτόν μέ τό πλῆθος τῶν αἰωρήσεων. Ἔτσι τό τυχαῖο σφάλμα ἐλαττώνεται στό ἐλάχιστο καί γίνεται τόσο πιό μικρό, ὅσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν αἰωρήσεων.

10 · 5 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ – ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

1) **Ἐλεύθερη ταλάντωση.** Στή βάση ἑνός ἐλατηρίου (σχ. 10 · 5 α) κρεμᾶμε ἕνα σῶμα (π.χ. μιά σφαίρα). Φέρνουμε τό σῶμα ἀπό τή θέση O στή θέση M_1 καί στή συνέχεια τό ἀφήνουμε ἐλεύθερο [σχ. 10 · 5 α (α)]. Τό σῶμα, τότε, ἐκτελεῖ ἁρμονική ταλάντωση καί μετακινεῖται ἀπό τό M_1 πρός τό M_2 καί ἀντίστροφα. Ἡ ταλάντωση θά εἶναι φθίνουσα, γιατί πάντοτε ἔχουμε ἀπώλειες ἐνέργειας καί μετά ἀπό ἕνα ἀριθμό ταλαντώσεων, τό σῶμα θά σταματήσει. Ἡ ταλάντωση αὐτή ὀνομάζεται **ἐλεύθερη ταλάντωση.** Ἡ περίοδός της καθορίζεται ἀπό τόν τύπο :

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

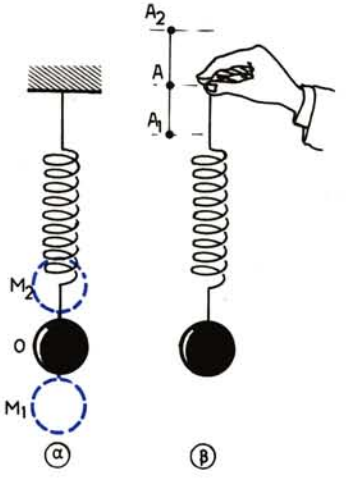
καί ὀνομάζεται **ἰδιοπερίοδος.**

Ἡ ἀντίστοιχη συχνότητα τῆς ἐλεύθερης ταλαντώσεως δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

καί ὀνομάζεται **ἰδιοσυχνότητα.**

β) **Ἐξαναγκασμένη ταλάντωση.** Στήν περίπτωση β τοῦ σχήματος 10 · 5 α μετακινοῦμε τό σημεῖο στηρίξεώς A παλινδρομικά μεταξύ τῶν σημείων A_1 καί A_2, τό ἐλατήριο τότε μεταφέρει στό σῶμα μιά παλινδρομική κίνηση, πού ἐπιβάλλεται ἀπό **ἐξωτερικό περιοδικό αἴ-**



Σχ. 10·5 α.

τιο. Λέμε, τότε, ὅτι τό σῶμα ἐκτελεῖ **ἐξαναγκασμένη ταλάντωση.**

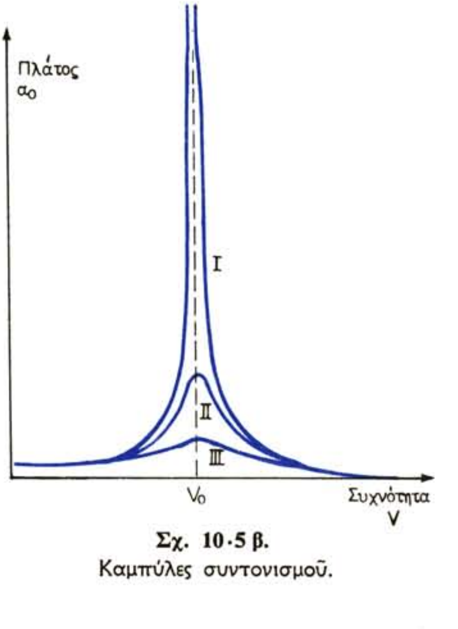
Ἄν μεταβάλουμε τή συχνότητα τοῦ ἐξωτερικοῦ αἰτίου καί μετρήσουμε τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ σώματος, θά δοῦμε ὅτι ὅσο ἡ συχνότητα τοῦ ἐξωτερικοῦ αἰτίου πλησιάζει πρός τήν ἰδιοσυχνότητα τῆς ἐλεύθερης ταλαντώσεως τοῦ σώματος, τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως μεγαλώνει καί φθάνει τήν πιό μεγάλη τιμή, ὅταν οἱ συχνότητες (συχνότητα ἐξωτερικοῦ αἰτίου καί ἰδιοσυχνότητα) συμπέσουν. Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **συντονισμός** καί διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Στήν ἐξαναγκασμένη ταλάντωση, ὅταν ἡ συχνότητα τοῦ ἐξωτερικοῦ αἰτίου συμπίπτει μέ τήν ἰδιοσυχνότητα τῆς ἐλεύθερης ταλαντώσεως τοῦ σώματος, τότε τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως γίνεται μέγιστο.

Οἱ καμπύλες τοῦ σχήματος 10 · 5 β παριστάνουν τή μεταβολή τοῦ πλάτους στήν ἐξαναγκασμένη ταλάντωση σέ συνάρτηση μέ τή συχνότητα τοῦ ἐξωτερικοῦ περιοδικοῦ αἰτίου.

Στήν καμπύλη I δέν ὑπάρχουν τριβές καί τό **πλάτος τῆς ταλαντώσεως στό συντονισμό γίνεται ἄπειρο.**

Στίς ἄλλες δυό καμπύλες II καί III τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως στό συντονισμό γίνεται τόσο πιό μικρό, ὅσο πιό μεγάλες τριβές ὑπάρχουν στό ταλαντούμενο σύστημα.



Σχ. 10·5 β.
Καμπύλες συντονισμοῦ.

— Ἐφαρμογές τοῦ συντονισμοῦ.

Στή ζωή συναντοῦμε πολλά φαινόμενα, τά ὁποῖα δικαιολογοῦνται μέ τό φαινόμενο τοῦ συντονισμοῦ. Στά εἰδικά κεφάλαια θά ἀναφέρουμε ἀρκετές ἐφαρμογές τοῦ φαινομένου τοῦ συντονισμοῦ. Ἐδῶ ἀναφέρουμε μόνο τρία παραδείγματα:

1. Οἱ χειρολαβές στά ὀχήματα (λεωφορεῖα, τρόλλεϋ κ.λπ.) μποροῦν νά θεωρηθοῦν φυσικά ἐκκρεμή καί γι' αὐτό, ὅταν ἐκτραποῦν ἀπ' τή θέση ἰσορροπίας τους, κάνουν ταλαντώσεις. Ὅταν ἕνα ὄχημα κινεῖται, διαπιστώνουμε ὅτι ἀπό τό σύνολο τῶν χειρολαβῶν, πού εἶναι ἐλεύθερες, ὁρισμένες αἰωροῦνται μέ πλάτος πολύ μεγαλύτερο ἀπό τίς ἄλλες. Αὐτό συμβαίνει, γιατί οἱ δονήσεις τοῦ ὀχήματος κατά τήν κίνηση ἔχουν συχνότητα, ἡ ὁποία μπορεῖ νά συμπίπτει μέ τήν ἰδιοσυχνότητα ταλαντώσεως ὁρισμένων χειρολαβῶν. Τό πλάτος τότε τῶν αἰωρήσεων αὐτῶν τῶν χειρολαβῶν

γίνεται μέγιστο, ἐνῶ οἱ αἰωρήσεις τῶν ἄλλων ἔχουν μικρό πλάτος.

2. Συχνά, ὅταν περνᾶ ἕνα ἀεροπλάνο, ὁ ἦχος του προκαλεῖ δονήσεις σέ ὁρισμένα τζάμια τοῦ σπιτιοῦ μας, τά ὁποῖα τρίζουν. Αὐτό ὀφείλεται στό ὅτι κάποια ἀπό τίς συχνότητες τοῦ ἤχου, πού παράγουν οἱ μηχανές τοῦ ἀεροπλάνου, εἶναι ἴδια μέ τή συχνότητα, πού ἔχουν στήν ἐλεύθερη ταλάντωση τά τζάμια τοῦ σπιτιοῦ πού δονοῦνται. Τό πλάτος, τότε ταλαντώσεως σ' αὐτά τά τζάμια γίνεται μέγιστο.

3. Ἀξιοποίηση τοῦ φαινομένου τοῦ συντονισμοῦ γίνεται στήν ἐπιλογή ἑνός ραδιοφωνικοῦ προγράμματος. Μέ τό γύρισμα πού κάνουμε στό κουμπί ἐπιλογῆς τοῦ Α ἤ Β σταθμοῦ, ἐφαρμόζουμε τήν ἀρχή πού διέπει τό φαινόμενο τοῦ συντονισμοῦ γιά νά ἀκούσουμε τόν ἐπιθυμητό σταθμό.

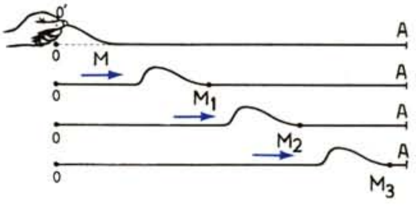
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

Κ Υ Μ Α Τ Ι Κ Η

11 · 1 ΔΙΑΔΟΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ

Πειράματα :

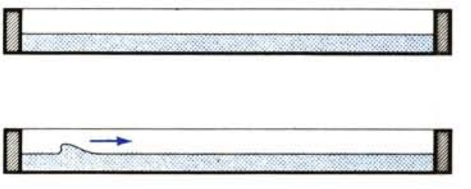
1. Ἕνα ἐλαστικό κορδόνι (σχ. 11 · 1 α) εἶναι τεντωμένο καί στηριγμένο στά δυό ἄκρα του Ο καί Α. Μέ τό χέρι μας ἀνυψώνουμε τό ἕνα ἄκρο τοῦ ἐλαστικοῦ κορδονιοῦ καί τό ἀφήνουμε μετά ἐλεύθερο. Παρατηροῦμε τότε ὅτι ἡ διαταραχή αὐτή μεταφέρεται κατά μῆκος τοῦ κορδονιοῦ μέ σταθερή ταχύτητα. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι τά ὑλικά σημεῖα τοῦ ἐλαστικοῦ κορδονιοῦ κινοῦνται κάθετα πρός αὐτό.



Σχ. 11·1 α.

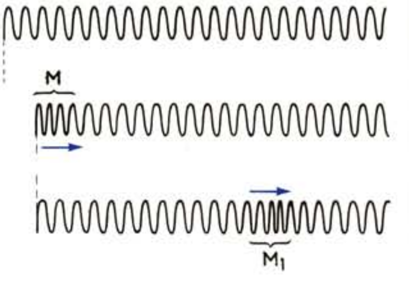
2. Σέ ἕνα γυάλινο σωλήνα (σχ. 11 · 1 β) μήκους περίπου 1 ὥς 2 m καί διαμέτρου 3 ὥς 4 cm τοποθετοῦμε ἕνα χρωματιστό ὑγρό.

Τό ὑγρό ἰσορροπεῖ καί ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνειά του εἶναι ὁριζόντια. Ἄν προκαλέσουμε μιά διαταραχή στό ἕνα ἄκρο τοῦ ὑγροῦ, παρατηροῦμε ὅτι ἡ διαταραχή αὐτή μεταφέρεται ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο κατά μῆκος τοῦ ὑγροῦ μέ σταθερή ταχύτητα.



Σχ. 11·1 β.

3. Συμπιέζουμε ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο (σχ. 11 · 1 γ) κι ἔτσι οἱ πρῶτες του σπεῖρες πλησιάζουν ἡ μιά κοντά στήν ἄλλη καί δημιουργοῦν ἕνα πύκνωμα. Τό πύκνωμα αὐτό τελικά μετακινεῖται πρός τή φορά πού δείχνει τό βέλος. Στήν περίπτωση αὐτή τά ὑλικά σημεῖα τοῦ ἐλατηρίου κινοῦνται διαδοχικά, μεταφέροντας τήν κίνηση τό ἕνα σημεῖο στό ἑπόμενο σημεῖο.



Σχ. 11·1 γ.

Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι ἡ κίνηση τῶν ὑλικῶν σημείων γίνεται πρός τή διεύθυνση τοῦ βέλους, δηλαδή **πρός τή διεύθυνση κατά τήν ὁποία μεταδίδεται ἡ διαταραχή,** ἐνῶ στό πείραμα 1 εἴχαμε δεῖ ὅτι ἡ κίνηση τῶν σημείων ἦταν **κάθετη πρός τή διεύθυνση, κατά τήν ὁποία μεταφέρεται ἡ διαταραχή.**

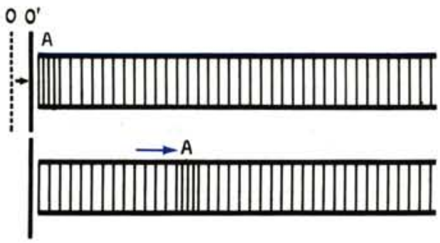
4. Σέ ἕνα ἀνοικτό σωλήνα ὑπάρχει ἀέρας (σχ. 11 · 1 δ). Μετακινοῦμε ἕνα χαρτόνι ἀπό τή θέση Ο στή θέση Ο′. Ἔτσι στό ἀνοικτό ἄκρο τοῦ σωλήνα καί στό ἐσωτερικό μέρος του, ὁ ἀέρας συμπιέζεται μέ ἀποτέλεσμα νά δημιουργηθεῖ ἕνα τοπικό πύκνωμα. Αὐτό τό πύκνωμα δέν παραμένει ἀκίνητο, ἀλλά μετακινεῖ-

ται πρός τή διεύθυνση τοῦ βέλους, μέ κάποια σταθερή ταχύτητα. Στήν περίπτωση αὐτή τά ὑλικά σημεῖα τοῦ ἀέρα κινοῦνται διαδοχικά. Ἡ κίνηση αὐτή μεταφέρεται ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο. Κι ἐδῶ παρατηροῦμε, ὅπως στό πείραμα 3, ὅτι τά σημεῖα κινοῦνται πρός τήν ἴδια διεύθυνση πού μετακινεῖται ἡ διαταραχή (τό πύκνωμα).

Ἀπό τά προηγούμενα πειράματα συνάγεται ὅτι μιά διαταραχή, πού προκαλεῖται στά ἐλαστικά σώματα, μεταδίδεται ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο μέ κάποια ταχύτητα.

Μιά διαταραχή πού διαδίδεται σ' ἕνα ἐλαστικό μέσο ὀνομάζεται κύμα καί ἡ ταχύτητα μεταδόσεως αὐτῆς, ταχύτητα τοῦ κύματος.

Ἐπισημαίνουμε ὅτι τό κύμα δέν μεταφέρει ὕλη, μεταφέρει μόνο ἐνέργεια.



Σχ. 11·1 δ.

11 · 2 ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΑ

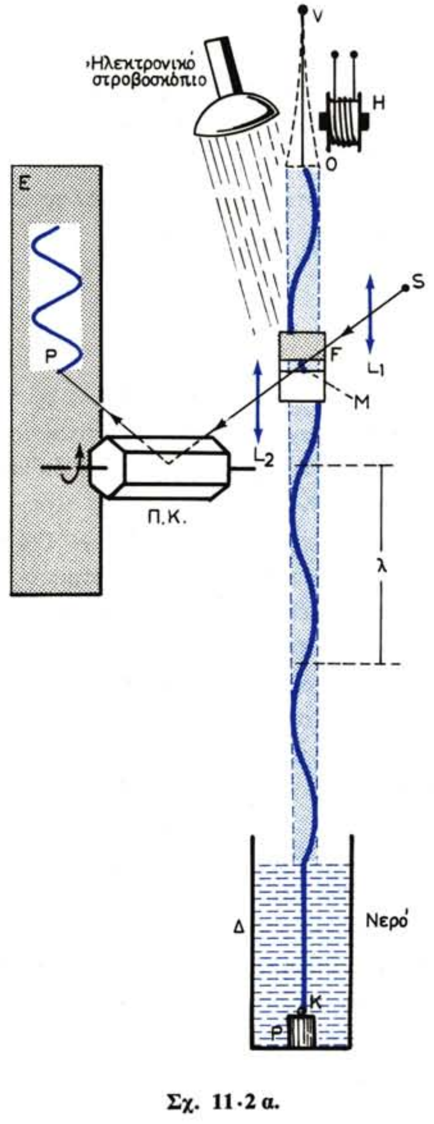
Στό πείραμα 1 τά ὑλικά σημεῖα κινοῦνται κάθετα πρός τή διεύθυνση πού μεταδίδεται τό κύμα. Τά κύματα αὐτά λέγονται **ἐγκάρσια.** Ἀντίθετα, στά πειράματα 3 καί 4 τά ὑλικά σημεῖα μετακινοῦνται παράλληλα πρός τή διεύθυνση μεταδόσεως τοῦ κύματος. Τά κύματα αὐτά λέγονται **διαμήκη.**

Ἑπομένως, **ἐγκάρσια εἶναι τά κύματα, ὅταν ἡ κίνηση τῶν ὑλικῶν σημείων τῶν ἐλαστικῶν μέσων εἶναι κάθετη πρός τή διεύθυνση μεταδόσεως τοῦ κύματος.**

Ἐνῶ διαμήκη λέγονται τά κύματα, ὅταν ἡ κίνηση τῶν ὑλικῶν σημείων τῶν ἐλαστικῶν σωμάτων εἶναι παράλληλη πρός τή διεύθυνση μεταδόσεως τοῦ κύματος.

α) **Περιοδικό κύμα.** Ἄν ἀντί μιᾶς ὠθήσεως προκαλέσουμε μιά συνεχή παλινδρομική κίνηση σέ ἐλαστικό μέσο τῶν πειραμάτων πού ἀναφέραμε, τότε μεταφέρεται ἀντίστοιχη παλινδρομική κίνηση καί ἔτσι δημιουργεῖται ἕνα **περιοδικό κύμα.** Παρακάτω θά περιγράψουμε τό μηχανισμό μεταδόσεως ἑνός περιοδικοῦ κύματος σ' ἕνα ἐλαστικό μέσο καί μάλιστα θά δεχθοῦμε ὅτι ἡ ταλάντωση πού προκαλοῦμε στό μέσο εἶναι **ἁρμονική.**

β) **Δημιουργία καί μετάδοση ἐγκάρσιων ἁρμονικῶν κυμάτων.** Ἔστω ὅτι κάνουμε τό πείραμα, πού εἰκονίζεται στό σχῆμα 11 · 2 α. Ἕνα τεντωμένο ἐλαστικό κορδόνι συνδέεται στή μιά του ἄκρη μέ ἕνα ἔλασμα



Σχ. 11·2 α.

V. Στήν ἄλλη του ἄκρη συνδέεται στό σημεῖο Κ μέ ἕνα βαρύ σῶμα Ρ.

Ἔτσι κρατοῦμε αὐτό τό κορδόνι τεντωμένο. (Τό δοχεῖο Δ γεμίζει μέ νερό, τό ὁποῖο προκαλεῖ ἀπόσβεση στίς ταλαντώσεις καί δέν ἔχουμε ἀνακλώμενα κύματα).

Ὁ ἠλεκτρομαγνήτης Η τροφοδοτεῖται μέ κατάλληλο ρεῦμα, ὥστε νά συντηρεῖ ἁρμονικές ταλαντώσεις τοῦ ἐλάσματος.

Τό σημεῖο Ο τοῦ ἐλαστικοῦ κορδονιοῦ ταλαντώνεται καί ἡ ταλάντωση αὐτή μεταδίδεται κατά μῆκος τοῦ κορδονιοῦ. Παράγεται ἔτσι ἕνα **ἁρμονικό κύμα.** Στό σχῆμα 11 · 2 β φαίνονται οἱ διάφορες φάσεις ἐξελίξεως τοῦ κύματος.

Οἱ διαδοχικές εἰκόνες ἀντιπροσωπεύουν στιγμιότυπα ἐξελίξεως τοῦ φαινομένου στίς χρονικές στιγμές 0, Τ/4, Τ/2, 3/4 Τ καί 2 Τ.

Ἔστω ὅτι τό σημεῖο Ο ταλαντώνεται μέ ἁρμονική ταλάντωση τῆς μορφῆς:

$$y = a\ \eta\mu\ \frac{2\pi t}{T}$$

τότε:

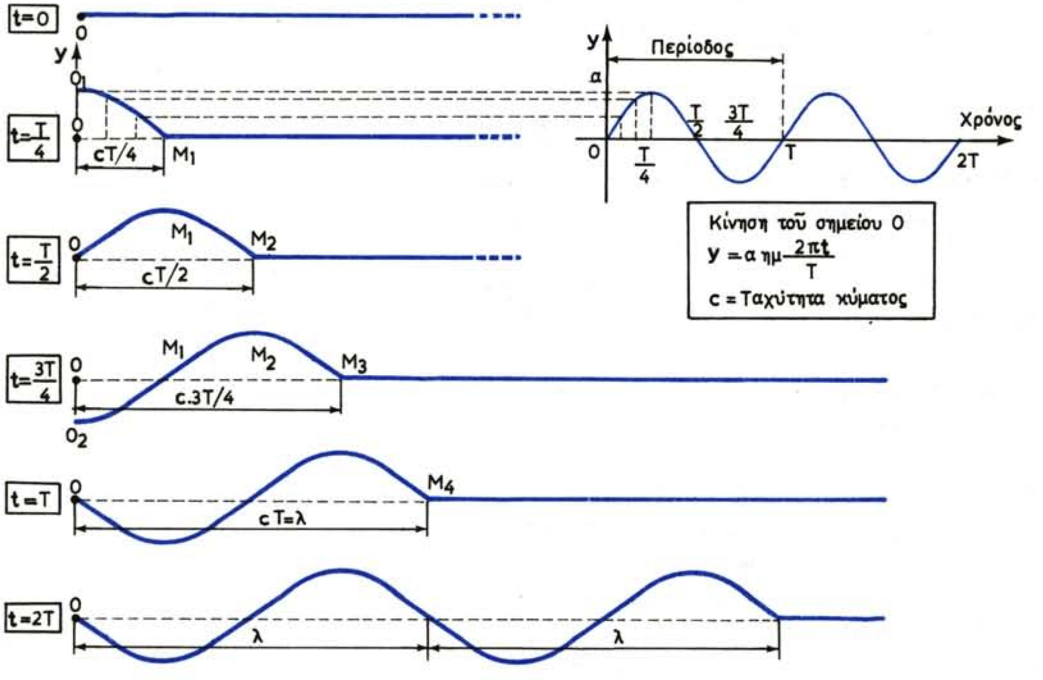
— Στή χρονική στιγμή t = 0, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στήν ἀρχή τῆς ταλαντώσεως τοῦ σημείου Ο, ὅλα τά σημεῖα τοῦ κορδονιοῦ εἶναι ἀκίνητα καί τό κορδόνι εἶναι εὐθύ.

— Στή χρονική στιγμή t = Τ/4 (ὅπου: Τ ἡ περίοδος ταλαντώσεως τοῦ ἐλάσματος V, ἄρα καί τοῦ Ο), τό σημεῖο Ο μετακινήθηκε στή θέση O_1 (O–O_1 = = πλάτος ταλαντώσεως τοῦ Ο).

Ἡ διαταραχή, ὅμως, ἄρχισε νά μεταδίδεται ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο στό ἐλαστικό κορδόνι καί μέσα σέ χρόνο Τ/4, ἡ ἀρχή τῆς διαταραχῆς φθάνει στό M_1. Τά ἐνδιάμεσα σημεῖα ἀπό τό Ο μέχρι τό M_1 ἀπομακρύνθηκαν ἀπό τή θέση ἰσορροπίας γρηγορότερα ἀπ' ὅ,τι τό σημεῖο M_1. Ἡ ἀπομάκρυνση αὐτή εἶναι μεγαλύτερη, ὅσο τά σημεῖα βρίσκονται κοντύτερα στό Ο.

Ἔτσι τά σημεῖα ἀπό τό Ο ὥς τό M_1 βρίσκονται τή χρονική στιγμή Τ/4 σέ μιά καμπύλη $O_1 M_1$, πού ἀποτελεῖ τμῆμα μιᾶς ἡμιτονικῆς καμπύλης.

— Στή χρονική στιγμή t = Τ/2, τό σημεῖο Ο ἐπανέρχεται στή θέση ἠρεμίας, τό κύμα φθάνει στό σημεῖο M_2 καί τά ἐνδιάμεσα σημεῖα διατάσσονται σέ μιά ἡμιτονική καμπύλη. Τό σημεῖο M_1 τή στιγμή αὐτή (T/2) ἔχει τή μέγιστη ἀπομάκρυνση.



Σχ. 11·2 β.

Ἄν συνεχίσουμε ἔτσι, βλέπουμε τήν ἐξέλιξη τοῦ φαινομένου στίς χρονικές στιγμές $t = 3/4\,T$, $t = T$ καί $t = 2\,T$. Ἄν τώρα ἐξετάσουμε ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κορδονιοῦ, θά δοῦμε ὅτι ταλαντώνεται ἁρμονικά. Ἔτσι βλέπουμε π.χ. ὅτι τό σημεῖο M_1 στή χρονική στιγμή $t = T/4$ ἔχει ἀπομάκρυνση $y = 0$, στή χρονική στιγμή $t = T/2$ ἔχει ἀπομάκρυνση $y = \alpha$, στή χρονική στιγμή $t = 3/4\,T$ ἔχει ἀπομάκρυνση $y = 0$, καί στή χρονική στιγμή $t = T$ ἔχει ἀπομάκρυνση $y = -\alpha$.

Ὅλα, ἑπομένως, τά σημεῖα ταλαντώνονται, ἀλλά ἡ ταλάντωσή τους δέν ἀρχίζει τήν ἴδια στιγμή, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἔχουμε **διαφορά φάσεως στίς ταλαντώσεις.** Συγκεκριμένα, οἱ ἐξισώσεις κινήσεως σέ διάφορα σημεῖα τοῦ κορδονιοῦ, κάποια χρονική στιγμή t εἶναι οἱ ἑξῆς:

Σημεῖο O, $y = \alpha\ \eta\mu\ \dfrac{2\pi}{T}t$

Σημεῖο M_1, $y = \alpha\ \eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{T}\ t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Σημεῖο } M_2 \quad y = \alpha \,\eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} t - 2\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Σημεῖο } M_3 \quad y = \alpha \,\eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} t - 3\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Σημεῖο } M_4 \quad y = \alpha \,\eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} t - 4\frac{\pi}{2} \right)$$

Σημείωση: Ἡ φάση τῆς ταλαντώσεως ἔχει σχέση μέ τήν **ἡλικία τῆς ταλαντώσεως.** Ὅσο πιό μικρή εἶναι ἡ φάση, τόσο πιό μικρό χρόνο ταλαντώθηκε τό σημεῖο, συγκριτικά βέβαια μέ τήν ταλάντωση κάποιου ἄλλου σημείου, πού ἔχει φάση ταλαντώσεως πιό μεγάλη.

Ἀπό ὅσα εἴπαμε, προκύπτει ὅτι ἕνα ἁρμονικό κύμα ἐμφανίζει δυό γνωρίσματα:

— Τήν ἴδια χρονική στιγμή ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐλαστικοῦ μέσου δέν ἔχουν τήν ἴδια ἀπομάκρυνση. Ἡ ἀπομάκρυνση y τοῦ κάθε σημείου εἶναι ἡμιτονοειδής συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως x.

— Ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐλαστικοῦ μέσου ταλαντώνονται ἀλλά μέ διαφορετικές φάσεις.

Ἑπομένως, μπορεῖ νά πεῖ κανείς ὅτι **περιοδικό κύμα εἶναι μιά τοπική καί χρονική περιοδική μεταβολή κάποιου φυσικοῦ μεγέθους.'**

Στήν περίπτωσή μας τὸ μέγεθος αὐτό εἶναι ἡ ἀπομάκρυνση τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ ἐλαστικοῦ κορδονιοῦ.

Πειραματική ἀπόδειξη.

1) **Κάθε σημεῖο, πού βρίσκεται μέσα σέ περιοδικό κύμα ταλαντώνεται.** Στό σχῆμα 11 · 2 α ἡ φωτεινή πηγή S μέ τή βοήθεια τοῦ φακοῦ L_1 φωτίζει τό ἐλαστικό κορδόνι σέ κάποιο σημεῖο F. Μέ τή βοήθεια τοῦ φακοῦ L_2 σχηματίζεται τό εἴδωλο P τοῦ σημείου F τῆς χορδῆς στήν ἐπιφάνεια E, ἀφοῦ πρῶτα ἀνακλασθοῦν οἱ ἀκτίνες στό πολυγωνικό κάτοπτρο (Π.Κ.). Ὅταν τό κύμα στό κορδόνι ΟΚ ἔχει ἀναπτυχθεῖ, τό σημεῖο F ταλαντώνεται. Ἔτσι ταλαντώνεται καί τό εἴδωλό του P. Ἐπειδή τό πολυγωνικό κάτοπτρο (Π.Κ.) περιστρέφεται, ἡ ταλάντωση τοῦ P ἀναπτύσσεται στό ἐπίπεδο E. Ἡ καμπύλη αὐτή εἶναι γραφική παράσταση τῆς ταλαντώσεως τοῦ εἰδώλου P σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.

Ὅπως τό F ἔτσι καί **κάθε σημεῖο τοῦ ἐλαστικοῦ**

κορδονιοῦ ταλαντώνεται, ὅπως μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ ἄν ἐπαναλάβουμε τό πείραμα γιά ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κορδονιοῦ.

2) **Ἡ ἀπομάκρυνση κάθε σημείου τοῦ μέσου μεταδόσεως τοῦ κύματος γιά τήν ἴδια χρονική στιγμή εἶναι περιοδική συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως ἀπό τήν πηγή.** Μέ τή βοήθεια τοῦ ἠλεκτρονικοῦ στροβοσκοπίου (σχ. 11 · 2 α) φωτίζουμε περιοδικά τό κορδόνι. Ἡ χρονική διάρκεια φωτισμοῦ εἶναι ἐλάχιστη καί ἡ περίοδος ἐπαναλήψεώς του ἴση μέ τήν περίοδο ταλαντώσεως. Θά παρατηρήσουμε τότε ὅτι τό κορδόνι βρίσκεται **στήν ἴδια πάντοτε φάση** τῆς ἐξελίξεως τοῦ κύματος. Ἄν π.χ. τό σημεῖο Ο τή στιγμή τοῦ φωτισμοῦ εἶχε ἀπομάκρυνση $y = (+\alpha)$, μετά μιά περίοδο, πού θά φωτισθεῖ πάλι, θά ἔχει τήν ἴδια ἀπομάκρυνση $y = (c + \alpha)$ καί θά τό δοῦμε στήν ἴδια θέση. Μέ τόν τρόπο αὐτό κατορθώνουμε νά ἔχουμε ἕνα στιγμιότυπο τῶν ἀπομακρύνσεων **ὅλων τῶν σημείων** τοῦ ἐλαστικοῦ κορδονιοῦ. Θά παρατηρήσουμε τότε ὅτι αὐτή **ἡ ἀπομάκρυνση εἶναι περιοδική (ἡμιτονοειδής στήν περίπτωσή μας) συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως** x **τοῦ σημείου, πού παρατηροῦμε, ἀπό τήν ἀρχή διαδόσεως τοῦ κύματος.**

3) **Μῆκος κύματος.** Ὀνομάζουμε **μῆκος κύματος** λ **τήν ἀπόσταση, πού διανύει τό κύμα σέ χρόνο μιᾶς περιόδου.**

Ἄν ἑπομένως ὀνομάσουμε c τήν ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ κύματος καί T τήν περίοδό του, θά ἔχουμε:

$$c = \frac{\textit{Διάστημα}}{\textit{Χρόνος}} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{ἤ} \qquad c = \frac{\lambda}{T} \qquad (1)$$

Ἐπειδή $\frac{1}{T} = \nu$, ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$c = \lambda\,\nu \qquad (2)$$

Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 11 · 2 β ἡ ἀπόσταση OM_4 εἶναι τό μῆκος κύματος λ, γιατί τό κύμα γιά νά μεταδοθεῖ ἀπό τό Ο στό M_4 χρειάσθηκε χρόνο μιᾶς περιόδου.

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τά σημεῖα Ο καί M_4 ἔχουν διαφορά φάσεως $4\,\frac{\pi}{2} = 360°$.

Γι' αὐτό μποροῦμε νά δώσουμε καί ἄλλο ὁρισμό στό μῆκος κύματος:

Μῆκος κύματος καλεῖται ἡ ἀπόσταση δυό σημείων, κατά τή διεύθυνση μεταδόσεως τοῦ κύματος, τά ὁποῖα παρουσιάζουν διαφορά φάσεως στήν ταλάντωσή τους 360°.

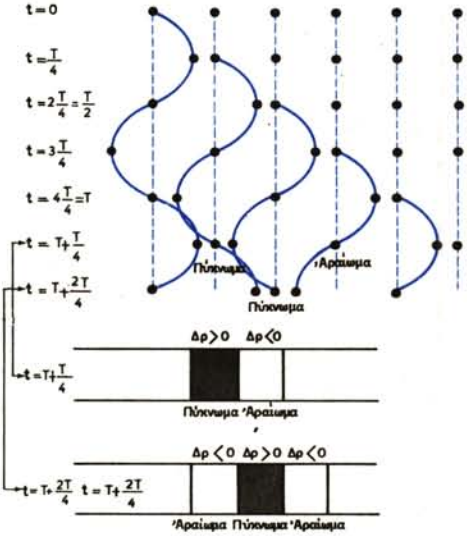
4) **Μετάδοση διαμήκων κυμάτων.** Στό σχῆμα 11 · 2 γ παρουσιάζονται διάφορα στιγμιότυπα τῆς θέσεως τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ ἀέρα «ὅπου μεταδίδεται ἕνα κύμα».

Παρατηροῦμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα εἶναι νά δημιουργοῦνται περιοδικά πυκνώματα καί ἀραιώματα.

Δηλαδή, ἐδῶ ἔχουμε μεταβολή τοῦ Δd ὅπου Δd = = μεταβολή τῆς πυκνότητας d τοῦ ἐλαστικοῦ μέσου σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο καί τόν τόπο.

Δηλαδή τό **μεταβαλλόμενο μέγεθος στήν περίπτωσή μας εἶναι τό Δd** Ἄν τό ἐλαστικό μέσο εἶναι ἀέριο, ἡ μεταβολή τῆς πυκνότητας προκαλεῖ καί μεταβολή τῆς πιέσεως.

Ἑπομένως **κατά τή μετάδοση τῶν διαμήκων ἐλαστικῶν κυμάτων, ἡ ταλάντωση τῶν ὑλικῶν σημείων ἔχει σάν ἀποτέλεσμα τή μεταβολή τῆς πυκνότητας τοῦ μέσου, ἄν εἶναι στερεό ἤ τή μεταβολή καί τῆς πυκνότητας καί τῆς πιέσεως, ἄν τό ἐλαστικό μέσο εἶναι ἀέριο.**



Σχ. 11·2 γ.

γ) **Ἐξίσωση κύματος.** Ἕνα κύμα δημιουργεῖται στή θέση Π (σχ. 11 · 2δ) καί μεταδίδεται ἐπί τῆς εὐθείας x. Τό αἴτιο πού προκαλεῖ τήν ταλάντωση τό ὀνομάζομε **πηγή κυμάτων.**

Στή χρονική στιγμή t τό κύμα πέρασε ἀπό τή θέση Α. Ζητᾶμε νά ὑπολογίσουμε τήν ἀπομάκρυνση y τοῦ σημείου Α. Ἡ ἐξίσωση πού συνδέει τήν ἀπομάκρυνση y σέ συνάρτηση μέ τόν χρόνο t, πού πέρασε καί τήν ἀπόσταση x τοῦ σημείου Α ἀπό τήν πηγή, ὀνομάζεται **ἐξίσωση τοῦ κύματος.**

Σχ. 11·2 δ.

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι:

$y = \alpha \; \eta\mu \; 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda} \right)$	*Ἐξίσωση κύματος*

ὅπου: α τό πλάτος ταλαντώσεως τοῦ Α, Τ ἡ περίοδος ταλαντώσεως καί λ τό μῆκος κύματος.

Ἀπόδειξη τῆς ἐξισώσεως τοῦ κύματος. Γιά νά ἀποδείξουμε τήν ἐξίσωση κάνουμε τόν ἑξῆς συλλογισμό:

Τά σημεῖα Π καί Α ταλαντώνονται. Ἐνῶ ὅμως τό

Π ταλαντώθηκε ἐπί χρόνο t, τό Α ταλαντώθηκε σέ λιγότερο χρόνο. Ὁ λιγότερος αὐτός χρόνος t_1 εἶναι ὁ χρόνος πού χρειάσθηκε τό κύμα νά μεταδοθεῖ ἀπό τό Π στό σημεῖο Α καί ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση:

$$t_1 = \frac{x}{c}$$

ὅπου: c ἡ ταχύτητα κύματος.

Ἄν, ἐπομένως, ἡ ἐξίσωση ταλαντώσεως τοῦ Π εἶναι $y = \alpha\ \eta\mu\ \dfrac{2\pi t}{T}$, ἡ ἐξίσωση ταλαντώσεως τοῦ Α θά εἶναι:

$$y = a\ \eta\mu\ \frac{2\pi}{T}\ (t - t_1)$$

ἤ $$y = a\ \eta\mu\ \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

ἤ $$y = a\ \eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

Ἐπειδή, ὅμως, $\lambda = c\,T$ θά εἶναι:

$$y = a\ \eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

δ) **Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως τοῦ κύματος.**

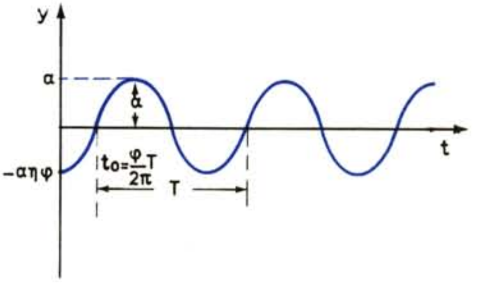
1. Ἡ παράσταση $2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$ εἶναι ἡ φάση τῆς ταλαντώσεως. Ἑπομένως ἡ φάση τῆς ταλαντώσεως τοῦ κάθε σημείου τοῦ ἐλαστικοῦ μέσο, στό ὁποῖο μεταδίδεται τό κύμα, δέν εἶναι ἡ ἴδια. Γιά τήν ἴδια χρονική στιγμή ὅσο πιό μεγάλο εἶναι τό x, δηλαδή ὅσο πιό μακριά βρίσκεται ἕνα σημεῖο ἀπό τήν πηγή, τόσο πιό μικρή εἶναι ἡ φάση τῆς ταλαντώσεως.

2) Ἄν τό x ἔχει ὁρισμένη τιμή, τότε τό $\dfrac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{K}$ **= σταθερό** καί ἡ ἐξίσωση τοῦ κύματος γιά τό σημεῖο, πού ἀπέχει τή συγκεκριμένη αὐτή ἀπόσταση ἀπό τήν πηγή, θά εἶναι:

$$y = a\ \eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - K\right) = a\ \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\ t - 2\pi K\right) =$$

$$= a\ \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\ t - \varphi\right)$$

Τό σημεῖο, ἑπομένως, αὐτό ταλαντώνεται μέ ἁρμονική ταλάντωση σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἐξίσωση. Ἡ ταλάντωση τοῦ σημείου παριστάνεται στό σχῆμα 11 · 2 ε.

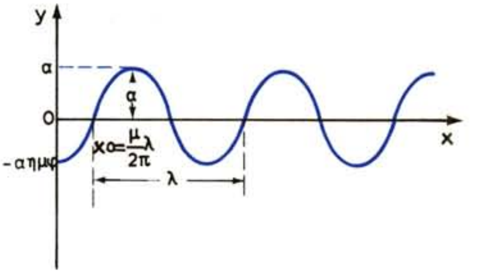


Σχ. 11 · 2 ε.

3. Γιά ὁρισμένη τιμή t τοῦ χρόνου, ἡ παράσταση $\frac{2\pi}{T}$ t γίνεται $\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}}$ **t = μ = σταθερό** καί ἡ ἐξίσωση τοῦ κύματος γίνεται:

$$y = \alpha\, \eta\mu\, \mu - \frac{2\pi x}{\lambda} = -\alpha\, \eta\mu \; \frac{2\pi x}{\lambda} - \mu$$

Ἡ ἀπομάκρυνση ἑπομένως y τῶν διαφόρων σημείων εἶναι ἡμιτονοειδής συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως x καί ἡ γραφική της παράσταση φαίνεται στό σχῆμα 11 · 2 στ.



Σχ. 11 · 2 στ.

Ἐφαρμογές.

1. Ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται σέ μέσο στό ὁποῖο μεταδίδεται κύμα, ἀπέχει ἀπό τήν πηγή **Π** ἀπόσταση x = 100 m. Ἡ συχνότητα τῆς πηγῆς εἶναι ν = 200 Hz καί ἡ ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ κύματος c = 15 m/s.

Νά ὑπολογισθοῦν. α) Τό μῆκος κύματος. β) Ἡ φάση ταλαντώσεως τοῦ σημείου μετά ἀπό χρόνο t = 20 s ἀπό τή στιγμή πού ἀρχίζει νά ταλαντώνεται ἡ πηγή καί ἡ ἀπομάκρυνση y, ἄν τό πλάτος α = 2 cm. γ) Ἡ ἀπόσταση τοῦ πιό κοντινοῦ σημείου **Β** πού παρουσιάζει μέ τό Α διαφορά φάσεως 30°.

Λύση :

α) Τό μῆκος κύματος λ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

ὅπου: c ἡ ταχύτητα κύματος = 15 m/s, ν ἡ συχνότητα ταλαντώσεως = 200 Hz

Ἀντικαθιστοῦμε :

$$\lambda = \frac{15 \text{ m/s}}{200 \text{ s}^{-1}} = 7{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

β) Ἡ φάση φ τῆς ταλαντώσεως τοῦ σημείου Α δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\varphi = 2\pi \;\; \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}$$

Ἀντικαθιστοῦμε :

$$t = 20\ \text{s}, \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{200\ \text{s}^{-1}} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

$$x = 100\ \text{m} \quad \text{καὶ} \quad \lambda = 7{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

Ἑπομένως: $\varphi = 2\pi\left(\frac{20\ \text{s}}{5 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} - \frac{100\ \text{m}}{7{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}\right) =$

$$2\pi(4 \cdot 10^3 - 1{,}310^3) = 2\pi(2700) = 5400\pi =$$
$$= 5400 \cdot 180° = 972\,000°.$$

Ἐπειδή $\varphi = 2700 \cdot 2\pi$ = ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 360°, τό ημφ = 0 καί ἡ ἀπομάκρυνση $x = \alpha$ ημ $\varphi = 0$.

γ) Τήν ἴδια χρονική στιγμή t ἡ φάση τοῦ σημείου **A** εἶναι φ_A καί τοῦ **B** φ_B, ἀλλά:

$$\varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right)$$

$$\text{καί} \quad \varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$$

Ἡ διαφορά φάσεως:

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) =$$
$$= 2\pi\left(\frac{x_A - x_B}{\lambda}\right)$$

Στήν ἄσκηση ἡ διαφορά φάσεως $\varphi_B - \varphi_\Delta = 30° = \frac{\pi}{6}$.

Ἑπομένως: $\frac{\pi}{6} = 2\pi\left(\frac{x_A - x_B}{\lambda}\right)$.

Λύνουμε τήν ἐξίσωση ὡς πρός τή ζητούμενη διαφορά $x_B - x_A$ καί ἔχουμε:

$$x_B - x_A = \frac{\lambda}{12} = \frac{7{,}5\ \text{cm}}{12} \simeq 0{,}63\ \text{cm}.$$

Ἀπάντηση : 1) Τό μῆκος κύματος εἶναι $\lambda = 7{,}5$ cm. 2) Ἡ φάση τῆς ταλαντώσεως τοῦ σημείου, στή χρονική στιγμή t = 20 s εἶναι 972 000° καί ἡ ἀπομάκρυνση 0. 3) Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο σημείων **A** καί **B**, τά ὁποῖα παρουσιάζουν διαφορά φάσεως 30°, εἶναι 0,63 cm.

11·3 ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΜΕΣΑ

Ἡ ταχύτητα, μέ τήν ὁποία μεταδίδεται ἕνα κύμα σέ ἕνα ἐλαστικό μέσο, ἐξαρτᾶται ἀπό διάφορους παράγοντες καί ἐξετάζεται σέ κάθε περίπτωση χωριστά.

α) **Ταχύτητα μεταδόσεως διαμήκους κύματος σέ ἕνα στερεό σῶμα.** Αὐτή βρίσκεται ἀπό τόν τύπο:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ὅπου: E τό μέτρο ἐλαστικότητας καί ρ ἡ πυκνότητα τοῦ στερεοῦ σώματος.

Ἐφαρμογή. Τό μέτρο ἐλαστικότητας τοῦ χάλυβα εἶναι $E = 2 \cdot 10^6\ kp/cm^2$ καί ἡ πυκνότητά του $\rho = 7{,}8\ g/cm^3$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ κύματος στό χάλυβα.

Λύση:

Σύστημα S.I.

$$E = 2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}81\ N/10^{-4}\ m^2 = 19\ 62 \cdot 10^{10}\ N/m^2$$

$$\rho = 7{,}8\ \frac{g}{cm^3} = 7{,}8 \cdot \frac{10^{-3}\ kg}{10^{-6}\ m^3} = 7{,}8 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}.$$

Ἀντικατάσταση:

$$c = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 10^{10}}{7{,}8 \cdot 10^3}}\ m/s = 5 \cdot 10^3\ m/s = 5000\ m/s.$$

β) **Ταχύτητα μεταδόσεως ἐγκάρσιου κύματος κατά μῆκος μιᾶς χορδῆς.**

Κρατοῦμε μιά χορδή τεντωμένη ἀνάμεσα σέ δυό σημεῖα A καί B (σχ. 11·3) ἐξασκώντας πάνω της μιά δύναμη F. Ἀνυψώνουμε καί μετά ἀφήνουμε τή μιά ἄκρη τῆς χορδῆς καί ἔτσι ἕνα ἐγκάρσιο κύμα μεταδίδεται κατά μῆκος της.

Σχ. 11·3.

Ἡ ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ κύματος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ὅπου: c ἡ ταχύτητα κύματος, F ἡ τείνουσα δύναμη, μ ἡ γραμμική πυκνότητα τῆς χορδῆς =

$$= \frac{\text{μάζα}}{\text{μῆκος χορδῆς}} = \frac{m}{l}.$$

Ἐφαρμογή. Χορδή ἔχει μῆκος $l = 10$ m, πυκνότητα $\rho = 4$ g/cm^3 καί ἐμβαδόν διατομῆς $S = 2$ mm^2. Ἄν διατηροῦμε τή χορδή τεντωμένη μέ δύναμη $F = 40$ kp, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα τοῦ ἐγκάρσιου κύματος πού δημιουργεῖται στή χορδή.

Λύση:

Στόν τύπο:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (1)$$

εἶναι γνωστή ἡ δύναμη F.

Ἄν ὑπολογίσουμε τή γραμμική πυκνότητα μ, ὑπολογίζουμε καί τήν ταχύτητα τοῦ κύματος c.

$$\text{Ἀλλά } \mu = \frac{m}{l} = \frac{\rho V}{l} \qquad (2)$$

ὅπου: m ἡ μάζα τῆς χορδῆς καί V ὁ ὄγκος χορδῆς.
Ἐπειδή: *Ὄγκος χορδῆς = μῆκος × ἐμβαδόν διατομῆς*

$$V = l\,S$$

ἡ ἐξίσωση (2) γίνεται:

$$\mu = \frac{\rho\, l\, S}{l} = \rho\, S \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν τιμή τῆς μ ἀπό τήν (3) στήν (1) καί ἔχουμε:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho\, S}}$$

Σύστημα S.I.

$$F = 40 \text{ kp} = 40 \cdot 9{,}81 \text{ N} \simeq 392 \text{ N}$$

$$\rho = 4 \text{ g/cm}^3 = 4 \cdot \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$S = 2 \text{ mm}^2 = 2 \cdot (10^{-3}\text{m})^2 \simeq 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Ἀντικατάσταση:

$$c = \sqrt{\frac{392}{4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} \text{ m/s} \doteq 220 \text{ m/s}.$$

γ) **Ταχύτητα μεταδόσεως κύματος στά ἀέρια.** Τά κύματα στά ἀέρια εἶναι διαμήκη. Ὁ τύπος πού μᾶς δίνει τήν ταχύτητα τοῦ κύματος, εἶναι:

$$c = \sqrt{\frac{P\,\gamma}{\rho}}$$

ὅπου: P ἡ πίεση τοῦ ἀερίου, ρ ἡ πυκνότητα τοῦ ἀερίου καί $\gamma = C_p/C_v$ (ὅπου: C_p καί C_v εἶναι εἰδικές θερμότητες τοῦ ἀερίου ὑπό σταθερή πίεση καί σταθερό ὄγκο, ἀντίστοιχα).

Ἐφαρμογή. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα κύματος στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα, ὅταν αὐτός βρίσκεται ὑπό πίεση $P = 1$ Atm καί ἔχει πυκνότητα $\rho = 0{,}0013\ g/cm^3$. Ὁ λόγος $\gamma = C_p/C_v = 1{,}4$.

Λύση :

Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο:

$$c = \sqrt{\frac{P\gamma}{\rho}}$$

Σύστημα S. I.

$$P = 1\ \text{Atm} = 1{,}033\ \text{kp/cm}^2 = \frac{1{,}033 \cdot 9{,}81\ \text{N}}{10^{-4}\ \text{m}^2} =$$

$$= 1{,}013 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\gamma = 1{,}4$$

$$\rho = 0{,}0013\ \text{g/cm}^3 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \frac{10^{-3}\ \text{kg}}{10^{-6}\ \text{m}^3} =$$

$$= 1{,}3\ \text{kg/m}^3.$$

Ἀντικατάσταση :

$$c = \sqrt{\frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 1{,}4}{1{,}3}}\ \text{m/s} = 336\ \text{m/s}.$$

δ) **Μεταβολή τῆς ταχύτητας μεταδόσεως διαμήκους (ἐλαστικοῦ) κύματος σέ ἀέριο ἐξαιτίας τῆς θερμοκρασίας.** Ἄν ὀνομάσουμε c_o τήν ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ κύματος σέ ἀέριο σέ θερμοκρασίας $0°$ C καί c τήν ταχύτητά του σέ θερμοκρασία θ, ἰσχύει ὁ τύπος:

$$c = c_o \sqrt{1 + a\,\theta}$$

ὅπου: $\alpha = 1/273\ \text{grad}^{-1}$.

Ἐφαρμογή. Ἡ ταχύτητα ἐλαστικοῦ κύματος στόν ἀέρα στούς $0°$ C εἶναι $c_o = 336$ m/s. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα τοῦ κύματος στή θερμοκρασία $\theta = 40°$ C.

Λύση :

Στόν τύπο: $c = c_o \sqrt{1 + \alpha\,\theta}$ ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα:

$$c = 336 \text{ m/s} \sqrt{1 + \frac{1}{273} \text{ grad}^{-1} \cdot 40 \text{ grad}} \simeq 359 \text{ m/s}.$$

11 · 4 ΚΥΚΛΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ—ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Πείραμα. Γεμίζουμε μιά πλατιά λεκάνη μέ χρωματιστό νερό. Στό κέντρο της φέρνουμε σέ ἐπαφή μέ τήν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ τήν ἀκίδα Ο [σχ. 11 · 4 α (α)], ἡ ὁποία εἶναι στερεά συνδεμένη στήν ἄκρη ἑνός διαπασῶν.

Ἀναγκάζουμε τό διαπασῶν σέ ταλάντωση μέ τή βοήθεια ἑνός ἠλεκτρομαγνήτη Η. Οἱ περιοδικές διαταραχές, πού προκαλοῦνται στό σημεῖο Ο στήν ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ, διαβιβάζονται μέσω τοῦ ὑγροῦ, πρὸς ὅλες τίς διευθύνσεις τῆς ἐπιφάνειάς του. Ἔτσι δημιουργοῦνται γύρω ἀπό τό κέντρο ἐξάρσεις καί κοιλώματα σέ σχῆμα δακτυλίων, πού συνεχῶς ἀπομακρύνονται ἀπό τό σημεῖο Ο. **Τό κύμα** τότε **μεταδίδεται κυκλικά πρός ὅλες τίς κατευθύνσεις στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια.**

Στό σχῆμα 11 · 4 α (β) φαίνεται στιγμιότυπο τοῦ κύματος αὐτοῦ σέ κάποια χρονική στιγμή t.

Ἔστω ἕνα σημεῖο Α τοῦ νεροῦ, πού ἀπέχει ἀπό τό Ο ὁρισμένη ἀπόσταση r. Ἡ ἀνύψωση του y, δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$y = a\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{2}\right) \quad (\textit{'Εξίσωση κύματος})$$

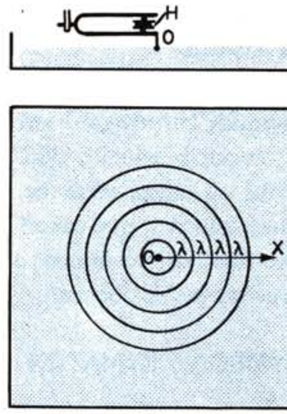
Μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα τήν r γράφουμε περιφέρεια κύκλου. Ὅλα τά σημεῖα αὐτῆς τῆς περιφέρειας ἔχουν τό ἴδιο $x = r$ καί, ἑπομένως, τήν ἴδια φάση κατά τήν ἴδια ἀπομάκρυνση y ἀπό τή θέση ἠρεμίας τους. Ἄν π.χ. τό r ἔχει τέτοια τιμή, ὥστε νά εἶναι:

$$\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} = \frac{1}{4}, \text{ τότε } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{ δηλαδή } 90°.$$

Ἀλλά ημ 90° = 1 καί y = α. Ὅλα τά σημεῖα τῆς περιφέρειας Ο, r θά ἔχουν τή μέγιστη ἀπομάκρυνση (μεγίστη ἀνύψωση τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ).

Ἡ περιφέρεια τότε **αὐτή ὀνομάζεται ἰσοφασική περιφέρεια.**

— **Σφαιρικά κύματα.** Ἄν ἡ ταλάντωση μιᾶς πηγῆς γίνεται στό κέντρο μιᾶς ἐλαστικῆς μάζας, τότε τό κύμα μεταδίδεται πρός ὅλες τίς διευθύνσεις μέσα στή μάζα. Τά σημεῖα, πού ἔχουν τήν ἴδια φάση, ἀπέχουν ἐξίσου



ⓐ

ⓑ

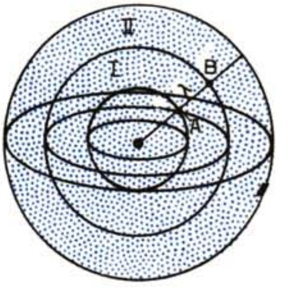
Σχ. 11·4 α.

ἀπό τήν πηγή καί ἑπομένως ἀποτελοῦν ἐπιφάνειες σφαίρας. Ἔχουμε ἔτσι **σφαιρικές ἰσοφασικές ἐπιφάνειες,** ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 11 · 4 β.

Τά κύματα αὐτά, **τά ὁποῖα μεταδίδονται στό χῶρο καί ἔχουν σφαιρικές ἰσοφασικές ἐπιφάνειες, ὀνομάζονται σφαιρικά κύματα.**

Ἄν κατά τή διεύθυνση τῆς ἀκτίνας συναντήσουμε δύο ἰσοφασικές ἐπιφάνειες I καί II, οἱ ὁποῖες νά παρουσιάζουν διαφορά φάσεως 360°, ἡ ἀπόσταση AB θά εἶναι ἴση μέ τό μῆκος κύματος.

Σφαιρικά κύματα, πού μεταδίδονται στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα, εἶναι καί τά ἀκουστικά κύματα, τά ὁποῖα θά ἐξετάσουμε στήν Ἀκουστική.

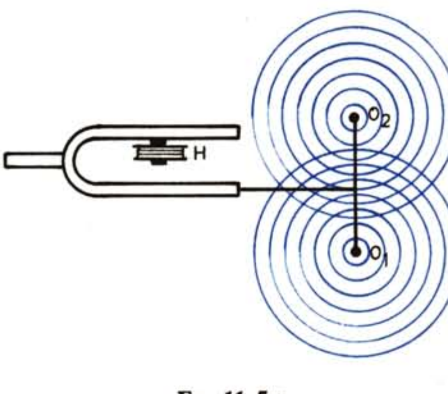


Σχ. 11·4 β.

11 · 5 ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Πείραμα. Στήν ἐπιφάνεια ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ τοποθετοῦμε δυό ἀκίδες O_1 καί O_2 (σχ. 11 · 5 α), οἱ ὁποῖες συνδέονται μέ τό ἕνα σκέλος ἑνός διαπασῶν πού προκαλεῖ συνεχή ταλάντωση.

Ἀπό τά σημεῖα O_1 καί O_2 ξεκινοῦν δύο κύματα, τά ὁποῖα στά σημεῖα συναντήσεώς τους προκαλοῦν κάποια διατάραξη, πού εἶναι τό **ἀποτέλεσμα συνθέσεως δύο ταλαντώσεων.**

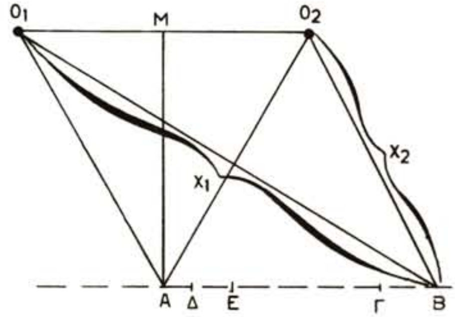


Σχ. 11·5 α.

Τό φαινόμενο τῆς συνθέσεως ταλαντώσεων οἱ ὁποῖες ὀφείλονται σέ δύο ἤ περισσότερα κύματα ὀνομάζεται συμβολή κυμάτων.

— **Συμβολή κυμάτων τῆς ἴδιας συχνότητας.** Ἔστω δύο πηγές O_1 καί O_2 (σχ. 11 · 5 β) τῆς ἴδιας συχνότητας, οἱ ὁποῖες παράγουν δυό κύματα μέ τό ἴδιο πλάτος. Δεχόμαστε ἀκόμη ὅτι οἱ δυό αὐτές πηγές ἔχουν τήν ἴδια φάση. Στό σημεῖο B φθάνουν τά κύματα πού ξεκινοῦν ἀπό τίς πηγές O_1 καί O_2. Τό κύμα τῆς πηγῆς O_1 προκαλεῖ ἀπομάκρυνση:

$y_1 = \alpha \; \text{ημ} \; 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x_1}{\lambda} \right)$. Τό κύμα τῆς πηγῆς O_2 προκαλεῖ ἀπομάκρυνση $y_2 = \alpha \; \text{ημ} \; 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x_2}{\lambda} \right)$.



Σχ. 11·5 β.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως τῶν ταλαντώσεων πού προκαλοῦνται στό B ἀπό τά δυό κύματα **εἶναι τό ἄθροισμα:** $y_1 + y_2$.

$$y = y_1 + y_2 =$$

$$\alpha\, \eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + \alpha\, \eta\mu \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) =$$

$$\alpha \left[\eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + \eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \right]$$

Εἶναι γνωστό ἀπό τήν Τριγωνομετρία ὅτι:

$$\eta\mu\, A + \eta\mu\, B = 2\, \sigma\upsilon\nu\, \frac{A-B}{2}\, \eta\mu\, \frac{A+B}{2}.$$

Ἄν: $A = \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}$ καί $B = \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}$,

τότε: $\eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + \eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) =$

$$= 2\, \sigma\upsilon\nu\, \frac{2\pi}{2} \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{x_2}{\lambda} \right) \cdot$$

$$\eta\mu\, \frac{2\pi}{2} \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} + \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) =$$

$$= 2\, \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\, \frac{x_2 - x_1}{2\lambda}\, \eta\mu\, 2\pi \left[\frac{2t}{2T} - \frac{x_2 + x_1}{2\lambda} \right]$$

Ἑπομένως:

$$y = \underbrace{\boxed{2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\, \frac{x_2 - x_1}{2\lambda}}}_{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma}\ \eta\mu\, 2\pi\, \underbrace{\boxed{\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}}}_{\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta} \quad (1)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή προκύπτει ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως τῶν δύο κυμάτων εἶναι ταλάντωση, πού ἔχει φάση $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right)$ καί πλάτος $\left(2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\, \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right)$. Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι τό πλάτος δέν εἶναι σταθερό.

Ἐξετάζουμε μερικές περιπτώσεις.

1. Τό σημεῖο Α (σχ. 11·5β) βρίσκεται στή μεσοκάθετο τῆς $O_1 O_2$, ἐπομένως οἱ δρόμοι $O_1A = x_1$ καί $O_2A = x_2$ εἶναι ἴσοι, δηλαδή ἡ διαφορά $x_2 - x_1 = 0$.

Ἑπομένως τό πλάτος στήν ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\, \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} = 2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\, 0 = 2\alpha.$$

Ἑπομένως τό σημεῖο Α ταλαντώνεται **μέ πλάτος ταλαντώσεως διπλάσιο ἀπό τό πλάτος πού προκαλεῖ τό ἕνα κύμα. Δηλαδή ἔχουμε ἐνίσχυση στήν ταλάντωση τοῦ σημείου Α.**

2. Ἄς δεχθοῦμε τώρα ὅτι τό σημεῖο Β εἶναι τέτοιο, ὥστε $O_2 B - O_1 B = x_2 - x_1 = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$, δηλαδή περιττό πολλαπλάσιο τοῦ $\dfrac{\lambda}{2}$.

Τό πλάτος 2α συν $2\pi\dfrac{x_2 - x_1}{2\lambda}$, γίνεται:

$$2\alpha \text{ συν } 2\pi \frac{(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}}{2\lambda} = 2\alpha \text{ συν}(2k+1)\frac{\pi}{2} =$$
$$= 2\alpha\, 0 = 0.$$

Συμπέρασμα. Σέ κάθε σημεῖο, πού ἡ διαφορά ἀποστάσεων ἀπό τίς πηγές O_1 καί O_2 εἶναι περιττό πολλαπλάσιο τοῦ $\lambda/2$, τό ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς τῶν κυμάτων εἶναι ἡ ἐξαφάνιση τῆς ταλαντώσεως.

Ἔτσι, ἐνῶ στό σημεῖο Α ἡ ταλάντωση ἐνισχύεται, στό σημεῖο Δ, πού ἡ διαφορά τῶν δρόμων $O_2\Delta - O_1\Delta = \dfrac{\lambda}{2}$, **ἡ ταλάντωση ἐξαφανίζεται.**

3. Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τό σημεῖο Γ, πού ἔχει ἐπιλεγεῖ σέ τέτοια θέση, ὥστε: $O_2\Gamma - O_1\Gamma = x_2 - x_1 = \kappa\lambda$, δηλαδή ἡ διαφορά δρόμων νά εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ μήκους κύματος.

Τό πλάτος τότε τῆς ταλαντώσεως τοῦ σημείου Γ θά εἶναι:

$$2\alpha \text{ συν } 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} = 2\alpha \text{ συν } 2\pi\frac{\kappa\lambda}{2\lambda} =$$
$$= 2\alpha \text{ συν } \kappa\pi = 2\alpha\ 1 = 2\alpha.$$

Σημείωση: Ἐάν κ εἶναι ἄρτιος, ἰσχύει τό πρόσημο (+), ἐάν κ εἶναι περιττός, ἰσχύει τό πρόσημο (−). Στό σημεῖο Γ καί σέ κάθε σημεῖο, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση, $x_2 - x_1 = \kappa\lambda$. θά ἔχουμε **ἐνίσχυση** τῆς **ταλαντώσεως.** Τό ἴδιο συμβαίνει στό σημεῖο Α ἀλλά καί στό σημεῖο Ε γιά τό ὁποῖο ἰσχύει $O_2 E - O_1 E = \lambda$.

Ἀπό ὅσα εἴπαμε, διαπιστώνουμε ὅτι **τό ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς δυό κυμάτων, πού παράγονται ἀπό δυό πηγές τῆς ἴδιας συχνότητας, εἶναι νά ἐμφανίζονται**

περιοχές μέ ἐνίσχυση τῆς ταλαντώσεως καί περιοχές μέ ἐξαφάνιση ἤ μείωση τῆς ταλαντώσεως.

Οἱ γεωμετρικοί τόποι τῶν σημείων, πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη:

$$\boxed{x_2 - x_1 = (2\kappa + 1)\,\frac{\lambda}{2}}$$

εἶναι στό ἐπίπεδο μιά ὁμάδα καμπυλῶν καί στό χῶρο μιά ὁμάδα ἐπιφανειῶν. Σ' ὅλα αὐτά τά σημεῖα ἔχουμε ἐξαφάνιση ἤ μείωση τῆς ταλαντώσεως. Οἱ γεωμετρικοί αὐτοί τόποι ἀποτελοῦν τούς **κροσσούς συμβολῆς ἐλάχιστου πλάτους** (σχ. 11 · 5 γ).

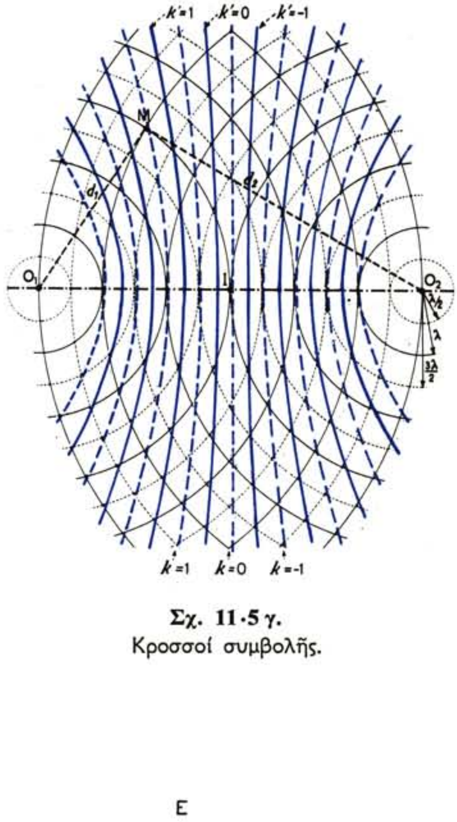
Οἱ γεωμετρικοί τόποι τῶν σημείων πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη:

$$x_2 - x_1 = \kappa\,\lambda$$

εἶναι στό ἐπίπεδο μιά ὁμάδα καμπυλῶν καί στό χῶρο μιά ὁμάδα ἐπιφανειῶν. Στούς γεωμετρικούς αὐτούς τόπους τά σημεῖα ταλαντώνονται μέ πλάτος ταλαντώσεως 2α. Αὐτοί οἱ τόποι ἀποτελοῦν τούς **κροσσούς συμβολῆς μέγιστου πλάτους** (σχ. 11 · 5 γ).

Οἱ καμπύλες μέ διακεκομμένο χρῶμα (σχ. 11 · 5 γ) εἶναι οἱ κροσσοί μέγιστου πλάτους.

Οἱ καμπύλες μέ συνεχές χρῶμα εἶναι οἱ κροσσοί ἐλάχιστου πλάτους.



Σχ. 11·5 γ.
Κροσσοί συμβολῆς.

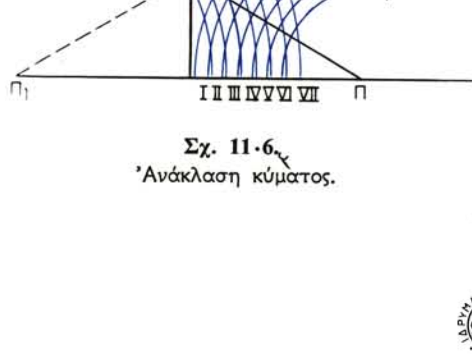
11 · 6 ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

Ὅταν ἕνα ἐλαστικό κύμα προσπέσει σέ μιά ἀκλόνητη ἐπιφάνεια, ἀλλάζει πορεία.

Ἔστω π.χ. ὅτι ἡ πηγή Π (σχ. 11 · 6) παράγει ταλαντώσεις στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα. Οἱ σφαιρικές ἐπιφάνειες (1), (2) . . . (7) εἶναι ἰσοφασικές ἐπιφάνειες πού ἀνά δυό διαδοχικές παρουσιάζουν διαφορά φάσεως 360°.

Ἡ κάθετος σ' αὐτές τίς ἐπιφάνειες ΠΑ **εἶναι ἡ διεύθυνση κατά τήν ὁποία μεταδίδεται τό κύμα.**

Ὅταν ὅμως τό κύμα συναντήσει τήν ἀκλόνητη ἐπιφάνεια Ε, οἱ ἰσοφασικές του ἐπιφάνειες γίνονται οἱ I, II, . . . VII καί ἡ κάθετη σ' αὐτές εἶναι ἡ ΑΒ. **Ἔτσι, τό κύμα ἀλλάζει διεύθυνση καί ἐνῶ ἀρχικά ὅδευε πρός ΠΑ, τώρα ὁδεύει πρός τή διεύθυνση ΑΒ.**



Σχ. 11·6.
Ἀνάκλαση κύματος.

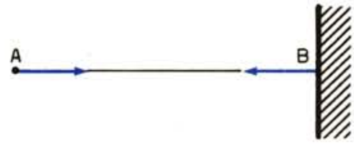
Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **ἀνάκλαση τοῦ κύματος.** Οἱ ἰσοφασικές ἐπιφάνειες I, II, . . . VII ἀφοροῦν τό κύμα, πού ἀνακλάσθηκε, καί μοιάζουν σάν νά προέρχονται ἀπό τό σημεῖο Π_1, τό ὁποῖο ὀνομάζεται **εἴδωλο τῆς πηγῆς Π.**

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνεται ὅτι κατά τήν **ἀνάκλαση τό κῦμα ἀλλάζει πορεία μέσα στό ἴδιο ἐλαστικό μέσο.**

Ἡ ἐπιφάνεια, πάνω στήν ὁποία γίνεται ἡ ἀνάκλαση, ὀνομάζεται **ἀνακλαστική ἐπιφάνεια.**

11 · 7 ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

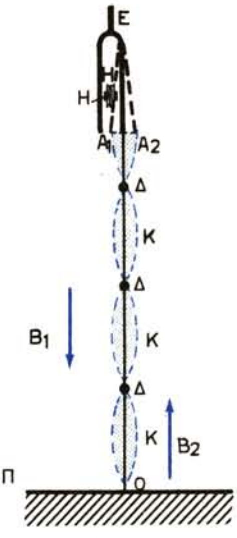
Ἔστω ὅτι ἡ πηγή στό σημεῖο Α (σχ. 11 · 7 α) παράγει συνεχῶς κύμα, πού ὁδεύει πρός τήν ἐπιφάνεια Β. Ἀπό τό Β ἀνακλᾶται καί ἐπιστρέφει κατά τήν κατεύθυνση ΒΑ. Τά δύο κύματα (τό ἕνα πού πηγαίνει καί τό ἄλλο πού ἐπιστρέφει) συναντιοῦνται (συμβάλλουν) καί τό ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς τους εἶναι τό **στάσιμο κῦμα.**



Σχ. 11·7 α.

Πειραματικά μποροῦμε νά δημιουργήσουμε ἕνα στάσιμο κύμα, κάνοντας τό πείραμα τοῦ σχήματος 11 · 7 β.

Ἕνα ἔλασμα Ε διεγείρεται σέ ταλάντωση ἀπό τόν ἠλεκτρομαγνήτη Η. Ἕνα ἐλαστικό κορδόνι τεντωμένο συνδέεται στή μιά του ἄκρη μέ τό ἔλασμα καί στήν ἄλλη σέ ἕνα ἀκλόνητο σημεῖο Ο. Ἡ μετακίνηση τοῦ ἐλάσματος ἀνάμεσα στά σημεῖα A_1 καί A_2 προκαλεῖ στό ἐλαστικό κορδόνι ἕνα κύμα, τό ὁποῖο μεταδίδεται κατά τή φορά πού ἔχει τό βέλος B_1 καί φθάνει μέχρι τό ἀκλόνητο ἐπίπεδο Π. Ἀπό τό σημεῖο αὐτό τό κύμα ἀνακλᾶται κατά τή φορά πού δείχνει τό βέλος B_2. Τά δύο κύματα συναντιοῦνται καί τό ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς εἶναι τό στάσιμο κύμα, πού ἔχει τή μορφή πού φαίνεται στό σχῆμα. Χαρακτηριστικό τοῦ στάσιμου κύματος εἶναι ὅτι σέ μερικά σημεῖα Δ, τά ὁποῖα ὀνομάζουμε **δεσμούς,** δέν γίνεται καμιά ταλάντωση.

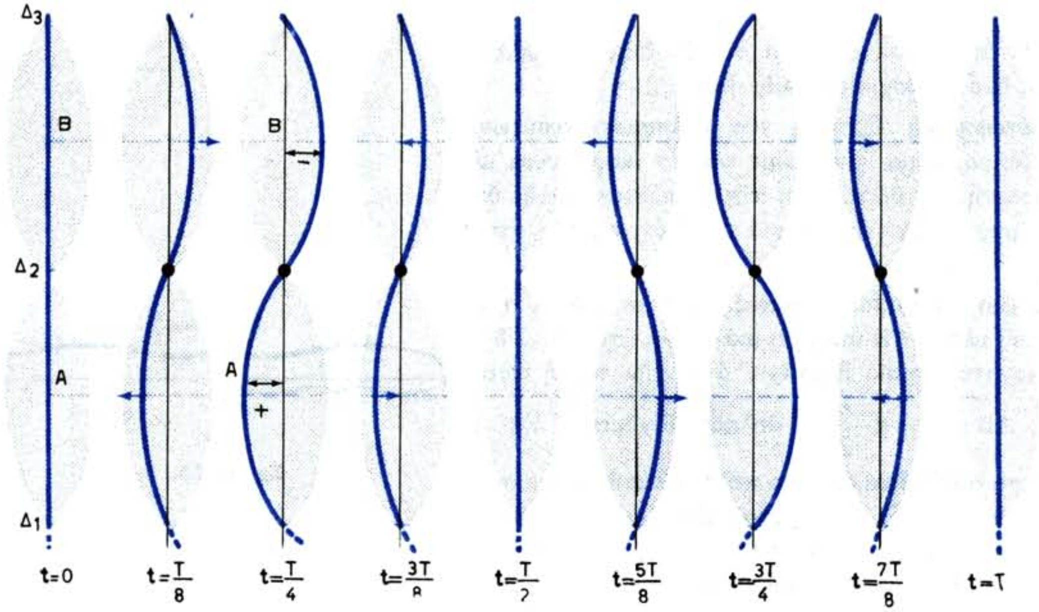


Σχ. 11·7 β.
Πειραματική διάταξη γιά παραγωγή στάσιμων κυμάτων.

Τό σχῆμα 11 · 7 γ παριστάνει τά στιγμιότυπα κάποιου στάσιμου κύματος στίς χρονικές στιγμές: $t = 0$, $t = T/8$, $t = T/4$, $t = 3/8\,T$, $t = T/2$, $t = 5/8\,T$, $t = 3/4\,T$, $t = 7/8\,T$ καί $t = T$.

Ἀπό τά στιγμιότυπα αὐτά ἐξάγονται τά ἑξῆς συμπεράσματα, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν καί τά κύρια χαρακτηριστικά τοῦ στάσιμου κύματος.

1) Ὅλα τά σημεῖα ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικούς δεσμούς ταλαντώνονται μέ τήν **ἴδια φάση,** γιατί τήν



Σχ. 11·7 γ.

ἴδια στιγμή ἀποκτοῦν τή μέγιστη ἀπομάκρυνσή τους.

2) Τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ κάθε σημείου δέν εἶναι τό ἴδιο.

Τό πιό μεγάλο πλάτος ἔχει τό σημεῖο πού βρίσκεται στή μέση τῆς ἀποστάσεως δυό διαδοχικῶν δεσμῶν. Τό σημεῖο αὐτό ἀποτελεῖ τήν **«κοιλιά»** τοῦ στάσιμου κύματος.

3) Δυό σημεῖα, πού τό πρῶτο A βρίσκεται ἀνάμεσα στούς δεσμούς Δ_1 καί Δ_2 καί τό ἄλλο **B** ἀνάμεσα στούς δεσμούς Δ_2 καί Δ_3 ταλαντώνονται μέ διαφορά φάσεως 180°, γιατί τή χρονική στιγμή π.χ. $t = T/4$ τό A παίρνει τή μέγιστη θετική τιμή καί τό **B** τή μέγιστη ἀρνητική τιμή (σχ. 11·7 γ).

4) Τό **στάσιμο κύμα** διαφέρει βασικά ἀπό τό συνηθισμένο κύμα, γιατί δέν μετατοπίζονται οἱ φάσεις ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο, ἀφοῦ ὅλα τά σημεῖα ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικούς δεσμούς ἔχουν τήν ἴδια φάση, ἐνῶ στό συνηθισμένο κύμα οἱ φάσεις μετατοπίζονται.

Αὐτό μέ ἄλλο τρόπο διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

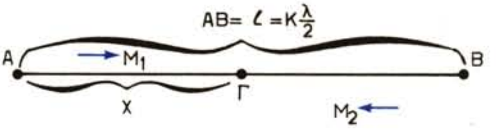
Στό συνηθισμένο κύμα τό μέγιστο τῆς ταλαντώσεως μετατοπίζεται συνεχῶς ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο, γι' αὐτό τό κύμα αὐτό ὀνομάζεται **ὁδεῦον κύμα.**

Ἀντίθετα στό στάσιμο κύμα, τό μέγιστο τῆς ταλαντώσεως δέν μετατοπίζεται, ἀφοῦ ὅλα τά σημεῖα ἀποκτοῦν ταυτόχρονα τή μέγιστη ἀπομάκρυνσή τους (θετική ἤ ἀρνητική).

5) Ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα σέ δύο διαδοχικούς δεσμούς ἤ δυό διαδοχικές κοιλιές εἶναι λ/2.

α) **Θεωρητική ἐξέταση τῶν στάσιμων κυμάτων.** Τό στάσιμο κύμα μποροῦμε νά τό ἐκφράσουμε μέ μιά ἐξίσωση. Ἡ διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς θά μᾶς ἑρμηνεύσει, ὅσα εἴπαμε γιά τίς ἰδιότητες τῶν στάσιμων κυμάτων.

Ἐξίσωση στάσιμου κύματος. Στό σημεῖο Α τοῦ ἐλαστικοῦ μέσου ΑΒ ὑπάρχει μιά πηγή (σχ. 11 · 7 δ), τό ἀκλόνητο σημεῖο Β ἀπέχει ἀπό τήν πηγή ἀπόσταση: $AB = l = \kappa \dfrac{\lambda}{2}$, δηλαδή δεχόμαστε ὅτι ἡ ἀπόσταση αὐτή εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ μισοῦ μήκους κύματος. Τό κύμα μεταδίδεται κατά τή διεύθυνση πού δείχνει τό βέλος M_1, καί μετά ἀπό ἀνάκλαση στήν ἐπιφάνεια Β ἐπιστρέφει κατά τή διεύθυνση τοῦ βέλους M_2. Στό σημεῖο Γ γίνεται ἡ συμβολή τῶν δυό κυμάτων, τά ὁποῖα συναντιοῦνται.



Σχ. 11·7 δ.

Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν ἀπομάκρυνση τῆς ταλαντώσεως τοῦ σημείου Γ, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε τίς ἀπομακρύνσεις y_1 καί y_2 τῶν δύο κυμάτων πού συναντιοῦνται στό Γ:

$$y = y_1 + y_2 \qquad (1)$$

Οἱ ἀπομακρύνσεις αὐτές y_1 καί y_2 ὑπολογίζονται ἀπό τούς τύπους:

$$y_1 = \alpha\ \eta\mu\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

$$y_2 = \alpha\ \eta\mu\ 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{l + (l - x)}{\lambda}\right] \qquad (3)$$

Σημείωση: Τό κύμα, πού ἔρχεται ἀπό τήν πηγή Α πρός τό Β, διανύει μῆκος x, ἐνῶ τό κύμα πού ἀνακλᾶται στήν ἐπιφάνεια καί ἐπιστρέφει στό Γ διανύει μῆκος $l + (l - x)$.

Ἡ ἐξίσωση (3) γίνεται:

$$y_2 = \alpha\ \eta\mu\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2\,l}{\lambda} + \frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= \alpha\ \eta\mu\ 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{2 \cdot \dfrac{\kappa\lambda}{2}}{\lambda}\right) =$$

$$= \alpha\ \eta\mu\ 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \kappa\right) =$$

$$= \alpha\ \eta\mu \left[\ 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)-2\pi\kappa\ \right] \quad \text{καί}$$

$$y_2 = \alpha\ \eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) \qquad (4)$$

'Από τίς ἐξισώσεις (1), (2) καί (4) προκύπτει:

$$y = \alpha\left[\eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (5)$$

Ἔχουμε ὅτι:

$$\eta\mu\,A+\eta\mu\,B = 2\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}\ \eta\mu\,\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)}{2}\cdot$$

$$\cdot\,\eta\mu\,\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}{2}$$

Συνεπῶς:

$$y = \underbrace{2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{2\pi x}{\lambda}}_{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma}\ \eta\mu\,\underbrace{\frac{2\pi t}{T}}_{\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta} \qquad \text{Ἐξίσωση στάσιμου κύματος}$$

β) **Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως** (σχῆμα 11·7ε). 'Από τήν ἐξίσωση τοῦ **στάσιμου κύματος** συνάγεται ὅτι τό κύμα αὐτό εἶναι μιά περιοδική ταλάντωση ὅλων τῶν σημείων του μέ φάση $\frac{2\pi t}{T}$, πού ἐξαρτᾶται **μόνο ἀπό τό χρόνο,** καί πλάτος $2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$, πού δέν εἶναι σταθερό καί **μεταβάλλεται μέ τήν ἀπόσταση x τοῦ σημείου ἀπό τήν πηγή.**

Σχ. 11·7 ε.

Στό σημεῖο Α εἶναι $x = 0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \sigma\upsilon\nu\,0 = 1$. Τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως τότε εἶναι μέγιστο, δηλαδή ἴσο πρός 2α.

Ἑπομένως, τό σημεῖο Α εἶναι κοιλιά τοῦ στάσιμου κύματος (σχ. 11·7ε).

Ἄλλα σημεῖα, στά ὁποῖα ἐμφανίζεται κοιλιὰ στήν ταλάντωση, εἶναι ἐκεῖνα γιά τά ὁποῖα ἰσχύει:

$$2\alpha \;\text{συν}\; \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 2\alpha \;\text{ἢ}\; \text{συν}\; \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{2\pi x}{\lambda} = \kappa\pi \quad \text{καί} \quad x = \kappa \frac{\lambda}{2}.$$

Θά ἔχουμε ἑπομένως κοιλιές στά σημεῖα Α, Β, Γ κλπ., πού ἀπέχουν ἀπό τήν ἀρχή τοῦ στάσιμου κύματος ἀποστάσεις:

$$x = 0,\; x = \frac{\lambda}{2},\; x = 2\,\frac{\lambda}{2} \;\text{κ.λπ.}$$

Παρατηροῦμε ἔτσι ἕνα βασικό **χαρακτηριστικό τοῦ στάσιμου κύματος:** Δηλαδή **ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικές «κοιλιές» εἶναι τό μισό τοῦ μήκους κύματος $\lambda/2$.**

Θά ἐξετάσουμε τώρα ποῦ βρίσκονται οἱ δεσμοί στό στάσιμο κύμα.

Στούς δεσμούς ἡ ταλάντωση εἶναι μηδενική, γιατί ἐκεῖ μηδενίζεται τό πλάτος της.

Ἄν ἑπομένως μηδενίσουμε τό πλάτος στήν ἐξίσωση τοῦ στάσιμου κύματος, θά βροῦμε τή θέση τῶν δεσμῶν:

$$2\alpha \;\text{συν}\; \frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \;\text{ὅπου}\; 2\alpha \neq 0$$

$$\text{συν}\; \frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2\kappa + 1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$\text{καί}\; x = (2\kappa + 1)\,\frac{\lambda}{4}.$$

Γιά $\kappa = 0$, $x = x_1 = \dfrac{\lambda}{4}$ καί ὁ πρῶτος δεσμός εἶναι ὁ M_1.

Γιά $\kappa = 1$, $x - x_2 = 3\,\dfrac{\lambda}{4}$ καί ὁ δεύτερος δεσμός εἶναι ὁ M_2.

Συνεχίζοντας ἔτσι μποροῦμε νά βροῦμε τή θέση ὅλων τῶν δεσμῶν. Ἡ ἀπόσταση $M_2 M_1$ τῶν δυό διαδοχικῶν δεσμῶν, θά εἶναι:

$$M_2 M_1 = x_2 - x_1 = \frac{3\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}.$$

Παρατηροῦμε ἑπομένως ὅτι, **ὅπως δυό διαδοχικές κοιλιές, ἔτσι καί δυό διαδοχικοί δεσμοί ἀπέχουν μεταξύ τους ἀπόσταση ἴση μέ τό μισό τοῦ μήκους κύματος $\lambda/2$.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ

Α Κ Ο Υ Σ Τ Ι Κ Η

12 · 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

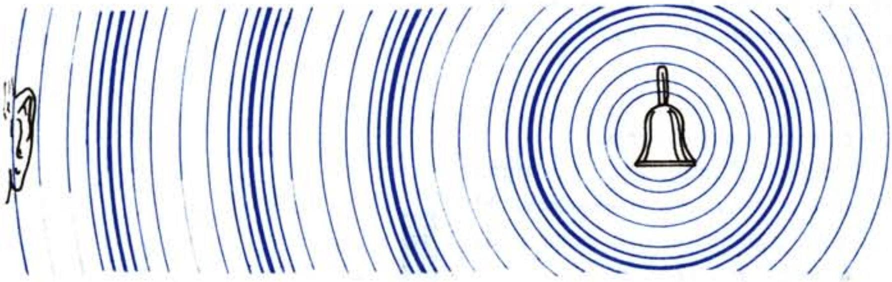
Τό κεφάλαιο τῆς Φυσικῆς, πού ἀσχολεῖται μέ τόν ἦχο, ὀνομάζεται **Ἀκουστική.**

Ἦχος εἶναι ἡ αἰτία, πού διεγείρει τό ὄργανο τῆς ἀκοῆς καί προκαλεῖ τό ἀντίστοιχο αἴσθημα.

Ὁ ἦχος παράγεται ἀπό τίς **ἠχητικές πηγές,** οἱ ὁποῖες, ἀφοῦ διεγερθοῦν, ταλαντώνονται καί ἡ ταλάντωσή τους μεταδίδεται στά γύρω ἐλαστικά μέσα. Ἔτσι δημιουργεῖται ἕνα ἐλαστικό κύμα, πού τό ὀνομάζουμε **ἠχητικό κύμα.**

Τό ἠχητικό κύμα φθάνει μέχρι τό αὐτί τοῦ ἀκροατῆ, τό ἐρεθίζει καί ἔτσι παράγεται τό αἴσθημα τοῦ ἤχου.

Τά ἠχητικά κύματα μεταφέρονται μέ τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα ὡς σφαιρικά κύματα.



Σχ. 12·1 α.
Ἠχητικά κύματα.

Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 12 · 1 α τά ἠχητικά κύματα ἐμφανίζονται μέ τή μορφή σφαιρικῶν πυκνωμάτων καί ἀραιωμάτων τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα, τά ὁποῖα μετακινοῦνται μέ ταχύτητα 336 m/s, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι 1Atm καί ἡ θερμοκρασία 0° C.

Σημείωση: Στά σημεῖα πού ἔχουμε πυκνώματα, ἡ πίεση γίνεται μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική, ἐνῶ στά σημεῖα πού ἔχουμε ἀραιώματα, ἡ πίεση γίνεται μικρότερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική.

Ἄν ὀνομάσουμε ΔP τή διαφορά τῆς πιέσεως ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική, ἡ ἐξίσωση τοῦ κύματος θά εἶναι:

$$\Delta P = \Delta P_0 \, \eta\mu \, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

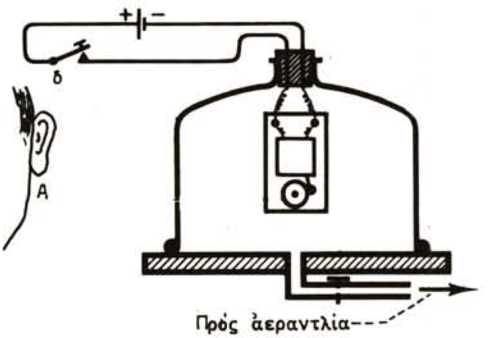
Τά ἠχητικά κύματα μποροῦν νά μεταδοθοῦν στά ὑγρά καί στά στερεά. Ἡ ταχύτητα τοῦ ἠχητικοῦ κύματος εἶναι πιό μεγάλη στά ὑγρά ἀπ' ὅ,τι στόν ἀέρα κι ἀκόμα πιό μεγάλη στά στερεά σώματα.

Ἔτσι π.χ. στό νερό ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου εἶναι 1500 m/s καί στό χάλυβα 5000 m/s.

Ἡ ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ ἠχητικοῦ κύματος στά διάφορα ἐλαστικά μέσα ὑπολογίζεται μέ τούς τύπους τῶν παραγράφων 11 · 3 (α), (β), (γ).

Ὁ ἦχος γιά νά διαδοθεῖ ἔχει ἀνάγκη ἐλαστικοῦ μέσου. Αὐτό μποροῦμε νά τό ἀποδείξουμε μέ τό ἀκόλουθο πείραμα:

Πείραμα. Στό ἐσωτερικό μιᾶς ἀεραντλίας (σχ. 12 · 1 β) τοποθετοῦμε ἕνα ἠλεκτρικό κουδούνι. Μέ διακόπτη δ μποροῦμε νά διεγείρουμε τό κουδούνι καί νά δημιουργήσουμε ἔτσι ἕνα ἠχητικό κύμα. Ὁ ἀκροατής στή θέση Α ἀκούει τόν ἦχο, μόνο ὅσο ὑπάρχει ἀέρας μέσα στήν ἀεραντλία. Ὅταν ὁ ἀέρας τῆς ἀεραντλίας ἀρχίζει νά ἐλαττώνεται, ὁ ἦχος ἐξασθενεῖ καί τελικά δέν ἀκούγεται. **Τό αἴτιο εἶναι ὅτι δέν ὑπάρχει ἐλαστικό μέσο, ἀφοῦ ἀφαιρέσαμε τόν ἀέρα.**



Σχ. 12·1 β.
Ὁ ἦχος δέν διαδίδεται στό κενό.

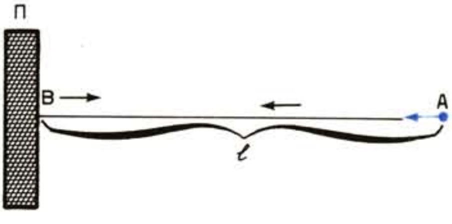
12 · 2 ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΤΟΥ ΗΧΟΥ

Ὅπως εἴδαμε, ὁ ἦχος εἶναι κύμα ἐλαστικό.

Ἄν ἑπομένως κατά τή μετάδοσή του, συναντήσει ἕνα στερεό καί ἀμετακίνητο τοίχωμα, **ἀνακλᾶται.** Ἡ ἀνάκλαση αὐτή τοῦ ἤχου δημιουργεῖ δυό φαινόμενα, τήν **ἠχώ** καί τήν **ἀντήχηση** (σχ. 12 · 2).

α) **Ἠχώ.** Ἄν ἕνας παρατηρητής σταθεῖ μπροστά σέ ἕνα τοῖχο, σέ ἀπόσταση μεγαλύτερη ἀπό 17 m, καί φωνάξει μιά συλλαβή, ἀκούει ξανά τή συλλαβή.

Ἄν ἡ ἀπόσταση γίνει μικρότερη ἀπό 17m, ἀκούει μιά φορά μόνο τή συλλαβή, ἀλλά πιό δυνατά.



Σχ. 12·2.

Ἐξήγηση τοῦ φαινομένου. Πρέπει πρῶτα νά αναφέρουμε ὅτι ὁ ἄνθρωπος δέν εἶναι δυνατό νά διακρίνει δυό ἤχους, οἱ ὁποῖοι φθάνουν στό αὐτί του μέ χρονική διαφορά μικρότερη ἀπό $\frac{1}{10}$ s. Αὐτό συμβαίνει, γιατί μία **ἠχητική ἐντύπωση** διαρκεῖ $\frac{1}{10}$ s μετά ἀπό τή στιγμή πού θά πάψει νά ὑπάρχει ὁ ἦχος. Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **μετείκασμα.**

Στό πείραμά μας ὁ παρατηρητής ἀκούει τόν ἦχο τῆς συλλαβῆς κατευθείαν, ὅταν ἐκφωνήθηκε, καί τόν ἦχο τῆς ἴδιας συλλαβῆς μετά τήν ἀνάκλαση στόν τοῖχο μέ κάποια χρονική διαφορά. Ἡ διαφορά αὐτή εἶναι:

$$t = \frac{2\,l}{c}$$

ὅπου: l ἡ ἀπόσταση τοῦ παρατηρητῆ ἀπό τόν τοῖχο καί c ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου.

Ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα εἶναι 340 m/s σέ συνηθισμένες συνθῆκες πιέσεως καί θερμοκρασίας.

Ἄν $l > 17$ m, τότε θά εἶναι $t > \frac{34 \text{ m}}{340 \text{ m/s}}$ καί $t > 1/10$ s.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν ἡ ἀπόσταση παρατηρητῆ - τοίχου εἶναι πιό μεγάλη ἀπό 17 m, οἱ δυό ἦχοι τῆς συλλαβῆς φθάνουν σέ χρόνο πιό μεγάλο ἀπό τό 1/10 s καί ἑπομένως εἶναι δυνατόν νά τούς διακρίνουμε. Ἔτσι ἔχουμε ἐπανάληψη τῆς συλλαβῆς, δηλαδή **ἠχώ.**

β) **Ἀντήχηση.** Ἄν ἡ ἀπόσταση l εἶναι μικρότερη ἀπό 17 m, τότε ὁ χρόνος t γίνεται μικρότερος ἀπό 1/10 s. Ἔτσι δέν μποροῦμε νά διακρίνουμε τούς δυό ἤχους καί ἁπλῶς ἀκούγεται ἡ συλλαβή ἐντονότερη. Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **ἀντήχηση.** Σέ κλειστούς χώρους, ὅπως σέ ἐκκλησίες ἤ θέατρα, ἄν οἱ τοῖχοι εἶναι ἐπίπεδοι καί σταθεροί, προκαλοῦν ἀνακλάσεις καί ἐπειδή οἱ σχετικές ἀποστάσεις εἶναι μικρές (<17 m) ἔχουμε ἀντήχηση πού ἐπαναλαμβάνεται μέ τίς διαδοχικές ἀνακλάσεις καί προκαλεῖ ἔντονο ἦχο.

Πολλές φορές σ' αὐτούς τούς χώρους καί κυρίως στούς τοίχους τους, τοποθετοῦν κατάλληλους ἐπενδύτες (κουρτίνες, βελούδα κ.λπ), ὥστε νά μή γίνονται ἀνακλάσεις καί ἔτσι νά μή δημιουργεῖται ἰσχυρή ἀντήχηση.

Ἡ ἀκουστική τῶν κλειστῶν χώρων ἀποτελεῖ ἕνα πολύ ἐνδιαφέρον κεφάλαιο τῆς Ἐπιστήμης καί τῆς Τεχνικῆς καί ἔχουν γίνει σ' αὐτό τόν τομέα πολλές μελέτες.

γ) **Ἐφαρμογές.**

1. Παρατηρητής ἀκούει μιά ἔκρηξη, πού ἔγινε στό ἔδαφος ἔχοντας τό αὐτί του στή Γῆ καί στή συνέχεια ἀκούει τόν ἦχο τῆς ἴδιας ἐκρήξεως ἀπό τήν ἀτμόσφαιρα, μέ διαφορά χρόνου $\Delta t = 2{,}6$ s. Νά ὑπολογι-

σθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου ἐκρήξεως ἀπό τόν παρατηρητή (ταχύτητα τοῦ κύματος στή Γῆ 2000 m/s καί στόν ἀέρα 340 m/s).

Λύση :

Ἔστω x ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῆς πηγῆς καί τοῦ παρατηρητῆ, t_1 καί t_2 οἱ ἀπαιτούμενοι χρόνοι γιά νά φθάσει τό κύμα στόν ἀκροατή ἀπό τή Γῆ καί ἀπό τόν ἀέρα ἀντίστοιχα, c_1 καί c_2 οἱ ταχύτητες τοῦ κύματος στή Γῆ καί τόν ἀέρα. Θά ἔχουμε τίς ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{x}{c_1} \\ t_2 &= \frac{x}{c_2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = x \quad \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}$$

καί $$x = \frac{\Delta t}{\dfrac{1}{c_2} - \dfrac{1}{c_1}}$$

Ἀντικατάσταση :

$$x = \frac{2{,}6\,\mathrm{s \cdot m \cdot s^{-1}}}{\dfrac{1}{340} - \dfrac{1}{2000}} \simeq 900\ \mathrm{m}.$$

Ἀπάντηση : Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τοῦ σημείου ἐκρήξεως καί τοῦ παρατηρητῆ εἶναι 900 m.

2. Στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα δημιουργεῖται ἕνα στάσιμο κύμα. Ἡ πηγή πού παράγει τό στάσιμο κύμα ἔχει συχνότητα $\nu = 800$ Hz. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικούς δεσμούς καί νά βρεθεῖ ἡ μεταβολή τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως τή χρονική στιγμή $t = 2$ ms σέ σημεῖο πού ἀπέχει ἀπό τήν πηγή ἀπόσταση 4 m, ὅταν τό πλάτος τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως εἶναι $\alpha = 4$ torr καί ἡ ταχύτητα τοῦ ἦχου στόν ἀέρα εἶναι $c = 340$ m/s.

Λύση :

α) Ἡ ἀπόσταση μεταξύ δυό διαδοχικῶν δεσμῶν εἶναι $l = \dfrac{\lambda}{2}$. Ἄν, ἐπομένως, ὑπολογίσουμε τό μῆκος κύματος, δίνουμε ἀπάντηση στό πρῶτο ἐρώτημα.

Τό μῆκος κύματος δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

καί $$\lambda = \frac{340\ \text{m/s}}{800\ \text{s}^{-1}} = 0{,}425\ \text{m}.$$

Ἑπομένως: $l = 21{,}25$ cm.

β) Ἡ ἐξίσωση τοῦ στάσιμου κύματος εἶναι:

$$y = 2\,\alpha\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{2\pi x}{\lambda}\ \eta\mu\ \frac{2\pi t}{T}$$

Ἀπό αὐτήν ὑπολογίζουμε τήν τιμή τοῦ y.

Δίνονται: $\alpha = 4$ torr, $t = 2$ ms, $T = \dfrac{1}{\nu} =$

$= \dfrac{1}{800}$ Hz $= 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ s, $\lambda = 0{,}2175$ m

καί $x = 4$ m.

Ἀντικατάσταση:

$$y = 2\ (4\ \text{torr})\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{2\pi \cdot 4\ \text{m}}{0{,}2125\ \text{m}}\ \eta\mu\ \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}\text{s}}{1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} =$$

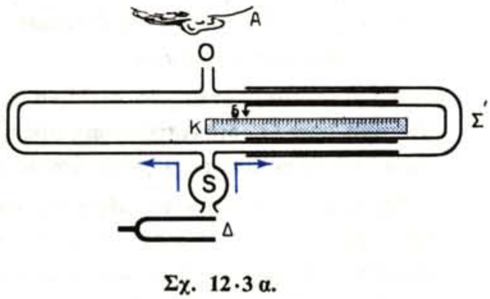
$= 2\ (4\ \text{torr})\ \sigma\upsilon\nu\ (18{,}8 \cdot 2\pi)\ \eta\mu\ (2\pi \cdot 1{,}6) =$
$= (8\ \text{torr})\ \sigma\upsilon\nu\ (0{,}8 \cdot 2\pi) \cdot \eta\mu\ (0{,}6 \cdot 2\pi) =$
$= (8\ \text{torr})\ \sigma\upsilon\nu\ 2880\ \eta\mu\ 216^{\circ} =$
$= (8\ \text{torr}) \cdot (+\,0{,}309) \cdot (-\,0{,}588) \simeq -\,1{,}5$ torr.

Ἀπάντηση: Βρισκόμαστε σέ περιοχή ἀραιώματος καί ἡ πίεση ἐκεῖ τή στιγμή $t = 2$ ms εἶναι μικρότερη τῆς ἀτμοσφαιρικῆς κατά $-\,1{,}5$ torr.

12 · 3 ΣΥΜΒΟΛΗ ΗΧΩΝ

Ὁ ἦχος εἶναι κύμα. Ἐμφανίζονται, ἑπομένως, καί σ' αὐτόν φαινόμενα συμβολῆς. Θά ἐξετάσουμε ἐδῶ δυό περιπτώσεις συμβολῆς τοῦ ἤχου: α) Συμβολή δύο ἤχων τῆς ἴδιας συχνότητας καί β) συμβολή ἤχων διαφορετικῆς συχνότητας.

α) **Συμβολή ἤχων τῆς ἴδιας συχνότητας.** Θά περιγράψουμε συσκευή, μέ τήν ὁποία μποροῦμε νά πετύχουμε συμβολή δύο ἤχων τῆς ἴδιας συχνότητας. Ἡ συσκευή αὐτή ὀνομάζεται **σωλήνας τοῦ Koenig** καί ἀπεικονίζεται στό σχῆμα 12 · 3 α.



Σχ. 12·3 α.
Σωλήνας Koenig.

Περιγραφή. Ἀποτελεῖται ἀπό δυό σωλῆνες σέ σχῆμα U, τούς Σ καί Σ'. Ὁ Σ εἶναι σταθερός ἐνῶ ὁ Σ' μπορεῖ νά μετακινεῖται. Ἔτσι ὁ δρόμος ΣΣΟ εἶναι σταθερός, ἐνῶ ὁ δρόμος ΣΣ'Ο εἶναι μεταβλητός. Ἕνας δείκτης δ κινεῖται μπρός σέ μιά κλίμακα Κ, ἡ ὁποία μπορεῖ νά βαθμολογηθεῖ κατάλληλα ὥστε, ὅταν δείχνει 0, νά σημαίνει ὅτι οἱ δυό δρόμοι ΣΣΟ καί ΣΣ'Ο εἶναι ἴσοι, ἐνῶ ὅταν δείχνει ἄλλη τιμή, οἱ δρόμοι νά διαφέρουν κατά τήν τιμή αὐτή.

Λειτουργία. Τό διαπασῶν Δ παράγει ἕναν ἦχο ὁρισμένης συχνότητας. Ὁ ἦχος στό S διακλαδίζεται, ὅπως δείχνουν τά βέλη, στά δυό σκέλη τῆς συσκευῆς. Ἔτσι δημιουργοῦνται δυό ἦχοι τῆς ἴδιας συχνότητας, πού ἀκολουθοῦν διαφορετικούς δρόμους. Οἱ ἦχοι αὐτοί συναντιοῦνται στό σημεῖο Ο καί τά ἀποτελέσματα τῆς συναντήσεως ἀκούγονται ἀπό τόν παρατηρητή Α. Ἄν ὀνομάσουμε ΣΣΟ $= l_o$ καί ΣΣ'Ο $= l$, ἡ διαφορά τῶν δρόμων $l - l_o$ θά μᾶς καθορίσει τά ἀποτελέσματα τῆς συμβολῆς. Σύμφωνα μέ αὐτά πού γράψαμε στήν παράγραφο 11 · 5, θά ἔχουμε μέγιστο ἦχο στό Ο, ὅταν ἰσχύει ἡ σχέση:

$$l - l_o = \kappa\,\lambda \qquad (1)$$

ἐνῶ θά ἔχουμε ἐξαφάνιση τοῦ ἦχου ὅταν:

$$l - l_o = (2\,\kappa + 1)\,\frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

Ἄς ἐξετάσουμε μερικές περιπτώσεις.

1) Ἄν οἱ δυό σωλῆνες ἔχουν τό ἴδιο μῆκος, ἡ διαφορά δρόμων εἶναι μηδέν καί ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει λύση κ = 0. Ὁ ἦχος τότε στό Ο γίνεται μέγιστος (κροσσοί μεγίστου).

2) Ἄν ἐπιμηκύνουμε τό σωλήνα Σ', ὥστε ἡ διαφορά δρόμων νά εἶναι $l - l_o = \frac{\lambda}{2}$, ἡ ἐξίσωση (2) ἔχει λύση κ = 0. Ἑπομένως τό ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς εἶναι ἐξαφάνιση τοῦ ἦχου.

Ἔτσι **μετακινώντας τό σωλήνα Σ'** καί ἀκούγοντας τόν ἦχο στό Ο, **διαπιστώνουμε αὐξομειώσεις στήν ἔνταση τοῦ ἦχου καί σέ μερικές θέσεις ἐξαφάνισή του.**

Μέτρηση τοῦ μήκους κύματος καί τῆς ταχύτητας τοῦ ἦχου. Μέ τό σωλήνα τοῦ Koenig μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τό μῆκος κύματος τοῦ ἦχου στό ἀέριο πού θά ἔχομε μέσα στό σωλήνα, μέ τόν ἑξῆς τρόπο:

Φέρνουμε τό σωλήνα Σ' σέ τέτοια θέση, ὥστε οἱ δρόμοι l καί l_o νά εἶναι ἴσοι. Διεγείρουμε τό διαπασῶν σέ ταλάντωση καί ἀκοῦμε τόν ἦχο στό Ο. Μετακινοῦμε τό σωλήνα Σ' καί παρακολουθοῦμε τή μείωση τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου. Ὅταν ὁ ἦχος ἐξαφανισθεῖ, θά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$x_1 = l_1 - l_o = \frac{\lambda}{2}$$

Διαβάζουμε στήν κλίμακα Κ τήν τιμή τῆς x_1.

Συνεχίζουμε τή μετακίνηση τοῦ σωλήνα Σ', ὁ ἦχος ἀρχίζει νά ἀκούγεται πάλι καί ὅσο ἀπομακρύνουμε τό σωλήνα Σ', μεγαλώνει ἡ ἔντασή του, μέχρις ὅτου, φθάσει σέ μιά μέγιστη τιμή. Στή συνέχεια ἀρχίζει πάλι νά ἐλαττώνεται, ὥσπου σέ μιά νέα θέση ὁ ἦχος ἐξαφανίζεται. Στή νέα αὐτή θέση ἡ διαφορά δρόμων θά εἶναι:

$$x_2 = l_2 - l_o = (2 \cdot 1 + 1)\frac{\lambda}{2} = 3\frac{\lambda}{2}$$

Διαβάζουμε τήν τιμή τῆς νέας αὐτῆς θέσεως x_2 πάλι στήν κλίμακα Κ. Ἡ διαφορά τῶν δυό ἐνδείξεων τῆς κλίμακας θά εἶναι:

$$x_2 - x_1 = 3\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

Δηλαδή ἡ διαφορά $x_2 - x_1$ εἶναι ἴση μέ τό μῆκος κύματος.

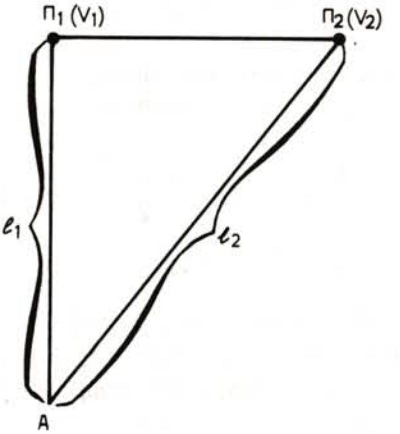
Ἀπό τή σχέση $c = \lambda\nu$ μποροῦμε νά προσδιορίσουμε καί τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου στόν ἀέρα, πού βρίσκεται στό σωλήνα Koenig, ἀρκεῖ νά γνωρίζουμε τή συχνότητα τοῦ διαπασῶν, πού συνήθως ἀναγράφεται πάνω σ' αὐτό.

β) **Συμβολή ἤχων διαφορετικῆς συχνότητας. Διακροτήματα.** Ἔστω ὅτι δυό πηγές (σχ. 12·3β) μέ συχνότητες ν_1 καί ν_2 παράγουν ἤχους. Θά ἐξετάσουμε τά ἀποτελέσματα τῆς συμβολῆς τῶν δυό ἤχων σ' ἕνα σημεῖο Α. Γιά νά κάνουμε τό πρόβλημα ἁπλούστερο, δεχόμαστε ὅτι τό Α ἀπέχει ἀπό τίς πηγές Π_1 καί Π_2 ἀποστάσεις l_1 καί l_2 γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\frac{l_1}{\lambda_1} = \frac{l_2}{\lambda_2} = \sigma$$

ὅπου: λ_1 καί λ_2 τά μήκη κύματος τῶν δυό κυμάτων.

Ἡ ἀπομάκρυνση y τῆς ταλαντώσεως τοῦ σημείου Α εἶναι τό ἄθροισμα $y_1 + y_2$ τῶν ἀπομακρύνσεων τῶν



Σχ. 12·3β.

ταλαντώσεων, πού προκαλεῖ στό σημεῖο A τό κάθε κύμα.

Εἶναι ἑπομένως:

$$y_1 = a\, \eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{l_1}{\lambda_1} \right)$$

καί $$y_2 = a\, \eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{l_2}{\lambda_2} \right)$$

"Αρα $$y = y_1 + y_2 =$$

$$= \alpha \left[\eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{l_1}{\lambda_1} \right) + \eta\mu\, 2\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{l_2}{\lambda_2} \right) \right] =$$

$$= 2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\, \frac{2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{l_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T_2} + \frac{l_2}{\lambda_2} \right)}{2} \cdot$$

$$\cdot\, \eta\mu \frac{2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{t}{T_2} - \frac{l_2}{\lambda_2} \right)}{2} =$$

$$= 2\,\alpha\, \sigma\upsilon\nu\, 2\,\pi\, t\, \frac{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}{2} \cdot$$

$$\cdot\, \eta\mu \left[2\,\pi\, t\, \frac{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)}{2} - 2\,\pi\,\sigma \right]$$

"Αν ἀντικαταστήσουμε τό $\frac{1}{T_1} = \nu_1$ καί $\frac{1}{T_2} = \nu_2$,

ὅπου: ν_1 καί ν_2 εἶναι οἱ συχνότητες τῶν πηγῶν Π_1 καί Π_2 καί $-2\,\pi\,\sigma =$ σταθερή γωνία $= \varphi$. Θά ἔχουμε:

$$\boxed{y = \underbrace{\boxed{2\, a\, \sigma\upsilon\nu\, 2\,\pi\, \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}}}_{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma}\, t\ \eta\mu\ \underbrace{\boxed{2\,\pi\, \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\, t + \varphi}}_{\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta}}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή ὀνομάζεται ἐξίσωση **διακροτημάτων** καί ἡ διερεύνησή της μᾶς δίνει τά ἑξῆς:

Τό ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς δυό ἤχων διαφορετικῆς συχνότητας εἶναι:

— **Μιά ταλάντωση ἁρμονική μέ συχνότητα τό ἡμιάθροισμα τῶν συχνοτήτων τῶν δυό κυμάτων:** $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$.

— **Τό πλάτος αὐτῆς τῆς ταλαντώσεως δέν παραμένει σταθερό, ἀλλά μεταβάλλεται ἁρμονικά μέ τό χρόνο καί ἔχει συχνότητα τή διαφορά τῶν δύο συχνοτήτων** $(\nu_1 - \nu_2)$. Ἡ πιό μεγάλη τιμή πού παίρνει τό **πλάτος εἶναι 2α.**

Ἡ ταλάντωση αὐτή ὀνομάζεται **διακρότημα**· ἡ μορφή τοῦ διακροτήματος φαίνεται στό σχῆμα 12 · 3 γ.

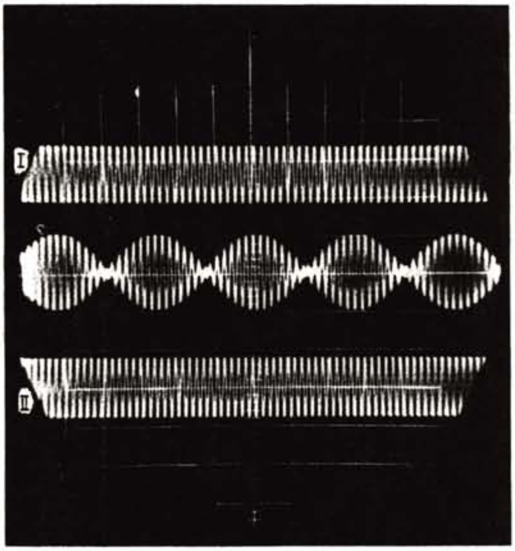
Σημείωση: Ὀνομάζουμε **περίοδο διακροτήματος** τό χρόνο ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικούς μηδενισμούς στό πλάτος τῆς ταλαντώσεως. Ἀπό τήν ἐξίσωση τοῦ διακροτήματος, τό πλάτος $2\,\alpha$ συν $2\,\pi\,\dfrac{\nu_1 - \nu_2}{2}\,t$ μηδενίζεται ὅταν:

$$2\pi\,\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\,t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ καί } 2\pi\,\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\,t_2 = \frac{3\,\pi}{2}.$$

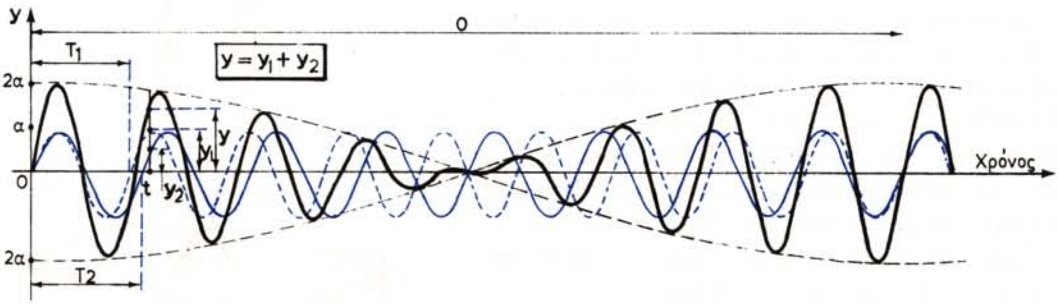
Λύνοντας τίς ἐξισώσεις ὡς πρός t_1 καί t_2 καί βρίσκοντας τίς διαφορές $t_2 - t_1$ ὑπολογίζουμε, ὅτι ἡ περίοδος τοῦ διακροτήματος $T_\delta = t_2 - t_1 = \dfrac{1}{\nu_1 - \nu_2}$.

— Ἕνα διακρότημα μποροῦμε νά τό ἀντιληφθοῦμε, ὅταν ἡ συχνότητα αὐτοῦ $\nu_\delta = \nu_1 - \nu_2$ εἶναι πολύ μικρή ἤ ἡ περίοδος τοῦ διακροτήματος T_δ εἶναι σχετικά μεγάλη.

Ἄν π.χ. δυό ἦχοι συμβάλλουν καί ἔχουν συχνότητες $\nu_1 = 802$ Hz καί $\nu_2 = 800$ Hz, θά δημιουργήσουν διακρότημα μέ συχνότητα $\nu_\delta = \nu_1 - \nu_2 = 2$ Hz



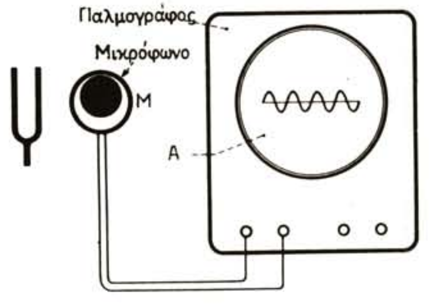
Μορφή διακροτήματος ὅπως ἐμφανίζεται σ' ἕνα παλμογράφο καί πού προκύπτει ἀπό συμβολή δύο ταλαντώσεων I καί II, πού παρουσιάζουν μικρή διαφορά συχνότητας.



Σχ. 12·3 γ.

καί περίοδο $T_\delta = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ s. Αὐτό σημαίνει ὅτι θά ἔχουμε αὐξομείωση τῆς ἠχητικῆς ἐντάσεως σέ χρόνο 0,5 s. **Ὁ χρόνος αὐτός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό 1/10 s καί ἑπομένως μποροῦμε νά ἀντιληφθοῦμε τό διακρότημα.** Ἄν, ἀντίθετα, ἡ περίοδος τοῦ διακροτήματος ἦταν πιό μικρή ἀπό 1/10 s, δέν θά μπορούσαμε νά τό ἀντιληφθοῦμε λόγω τοῦ μετεικάσματος.

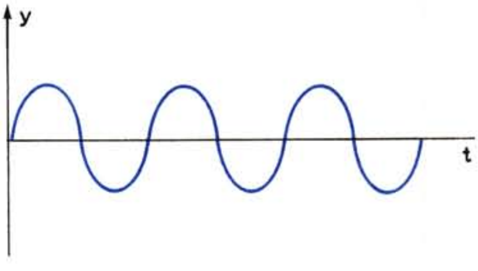
Παράδειγμα διακροτημάτων. Ὁ ἦχος σέ δικινητήρια ἀεροπλάνα παρουσιάζει πολλές φορές αὐξομειώσεις στήν ἔνταση. Αὐτό ὀφείλεται στούς δυό κινητῆρες τοῦ ἀεροπλάνου πού προκαλοῦν βόμβο πολύ κοντινῶν συχνοτήτων. Ἡ αὐξομείωση τῆς ἐντάσεως εἶναι ἀποτέλεσμα διακροτήματος.



Σχ. 12·4 α.
Παλμογράφος.

12 · 4 ΕΙΔΗ ΗΧΩΝ

Ἡ μελέτη ἑνός ἤχου γίνεται μέ ἀνάλυση στό χρόνο τῶν παλμικῶν ταλαντώσεων μιᾶς ἠχητικῆς πηγῆς, οἱ ὁποῖες μεταφέρονται ὡς κύμα στά ἐλαστικά μέσα. Ἡ ἀνάλυση αὐτή εἶναι δυνατό νά γίνει μέ τή σημερινή τεχνολογία. Χρησιμοποιοῦνται κυρίως ἠλεκτρονικοί τρόποι. Κατάλληλο ὄργανο γι' αὐτό τό σκοπό εἶναι ὁ **παλμογράφος**, ὁ ὁποῖος διαθέτει μιά ὀθόνη Α, σάν τήν ὀθόνη τῆς τηλεοράσεως (σχ. 12 · 4 α). Πάνω στήν ὀθόνη αὐτή μποροῦμε νά ἀναλύσουμε τή μορφή μιᾶς ταλαντώσεως, πού προκαλεῖ ἕνα κύμα σέ ἕνα μικρόφωνο Μ, σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.



Σχ. 12·4 β.

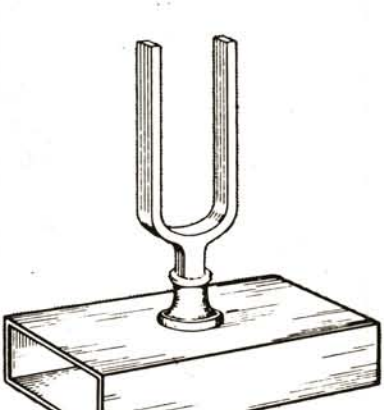
Ἔτσι, ἐξετάζοντας διάφορους ἤχους, διαπιστώνουμε ὅτι ὑπάρχουν κατ' ἀρχήν δυό εἴδη ἤχων, οἱ **ἁπλοί** καί οἱ **σύνθετοι**.

α) **Ἁπλός ἦχος** εἶναι ἐκεῖνος, πού προκαλεῖ ταλάντωση ἁρμονική καί ἡ καμπύλη πού δημιουργεῖται στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου εἶναι ἡ γνωστή ἡμιτονοειδής καμπύλη, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 12 · 4 β.

Ὁ ἁπλός ἦχος ὀνομάζεται καί **τόνος.**

Τέτοιος ἦχος παράγεται ἀπό τό διαπασῶν. Τό διαπασῶν εἶναι κατασκευασμένο ἀπό μιά χαλύβδινη ράβδο, πού ἔχει καμφθεῖ σέ σχῆμα U (σχ. 12 · 4 γ).

Ὁ ἦχος παράγεται στό διαπασῶν, ὅταν τό διεγείρουμε σέ ταλάντωση μέ ἕνα κτύπημα.

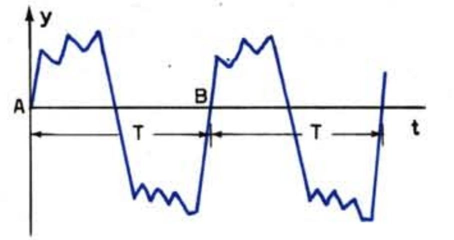


Σχ. 12·4 γ.
Διαπασῶν.

β) **Σύνθετος ἦχος.** Ὁ ἦχος πού παράγεται ἀπό ἕνα μουσικό ὄργανο ἤ ἀπό τή φωνή τοῦ ἀνθρώπου εἶναι **σύνθετος.** Ἀναλύοντας τόν ἦχο αὐτό στήν ὀθόνη ἑνός παλμογράφου, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ καμπύλη πού ἀπεικονίζει, δέν εἶναι ἡμιτονοειδής, εἶναι ὅμως περιοδική (σχ. 12 · 4 δ). Ἔτσι ἡ καμπύλη στό χρόνο ΑΒ = Τ εἶναι ἀπόλυτα ὅμοια μέ τήν ἀντίστοιχη στό χρόνο ΒΓ = Τ.

Ὁ ἦχος αὐτός, δηλαδή **ὁ περιοδικός, ἀλλά ὄχι ἁρμονικός ἦχος, ὀνομάζεται σύνθετος ἦχος ἤ φθόγγος.**

γ) **Ἀνάλυση κατά Fourier.** Ὁ Fourier ἀπέδειξε ὅτι **κάθε περιοδική ταλάντωση,** ὅπως αὐτή πού παράγει ὁ σύνθετος ἦχος, **μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ σειρά ἀπό ἁρμονικές ταλαντώσεις.**



Σχ. 12·4 δ.
Ἀνάλυση σύνθετου ἤχου.

Ἄν ὀνομάσουμε ν_o τή συχνότητα τῆς περιοδικῆς μή ἁρμονικῆς ταλαντώσεως, τότε οἱ ἁρμονικές ταλαντώσεις, στίς ὁποῖες ἀναλύεται αὐτή, ἔχουν **συχνότητες ν_o, $2\nu_o$, $3\nu_o$ . . . καί πλάτη διαφορετικά μεταξύ τους.**

Στό σχῆμα 12 · 4 ε ἡ περιοδική ταλάντωση IV ἔχει συχνότητα ν_o καί μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ στίς ἁρμονικές ταλαντώσεις I, II καί III, οἱ ὁποῖες ἔχουν συχνότητες ν_o, ν_1 καί ν_2, ὅπου $\nu_1 = 2\nu_o$ καί $\nu_2 = 3\nu_o$ καί πλάτη α_o, α_1 καί α_2 διάφορα μεταξύ τους.

Ἡ ταλάντωση I ὀνομάζεται πρώτη ἁρμονική, ἡ II δεύτερη ἁρμονική καί III τρίτη ἁρμονική.

Μποροῦμε ἑπομένως νά διατυπώσουμε τήν παρακάτω πρόταση:

Κάθε σύνθετος ἦχος μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ πλῆθος ἁρμονικῶν ἤχων, ἀπό τούς ὁποίους ὁ πρῶτος ὀνομάζεται πρῶτος ἁρμονικός καί ἔχει συχνότητα ν_o, δηλαδή τή συχνότητα τοῦ σύνθετου ἤχου, καί οἱ ἄλλοι ὀνομάζονται ἁρμονικοί ἦχοι ἀνώτερης τάξεως (δεύτερος ἁρμονικός, τρίτος ἁρμονικός κ.λπ.).

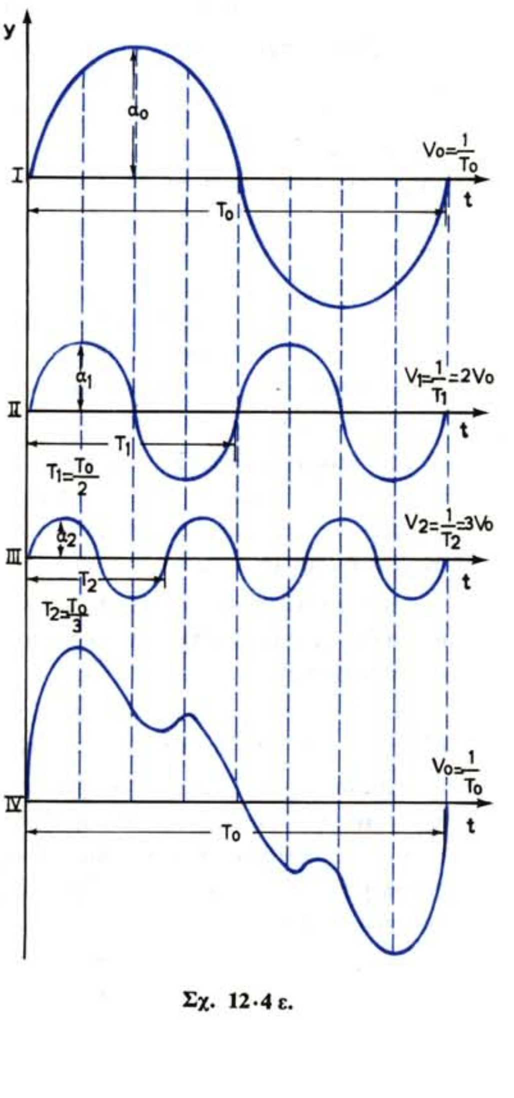
Τά πλάτη τῶν ἁρμονικῶν ἤχων διαφέρουν μεταξύ τους.

δ) **Θόρυβος — Κρότος.** Ἐκτός ἀπό τούς τόνους καί τούς φθόγγους ὑπάρχουν καί δυό ἄλλα εἴδη ἤχων, ὁ θόρυβος καί ὁ κρότος.

Θόρυβος εἶναι ὁ ἦχος, ὁ ὁποῖος παράγεται ἀπό κινούμενα ὀχήματα, ἀπό τίς ὁμιλίες μιᾶς μεγάλης ὁμάδας ἀνθρώπων.

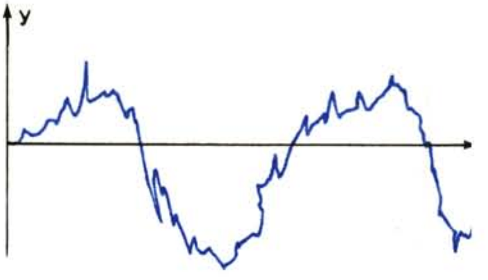
Ἄν παρατηρήσουμε στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου (σχ. 12 · 4 στ) τήν ταλάντωση τοῦ θορύβου, θά δοῦμε ὅτι **δέν εἶναι περιοδική.**

Κρότος. Ὁ ἦχος μιᾶς ἐκρήξεως εἶναι κρότος. Στήν ὀθόνη τοῦ παλμογράφου ὁ κρότος παρουσιάζεται ὡς ὤθηση μικρῆς διάρκειας (σχ. 12 · 4 ζ).



Σχ. 12·4 ε.

'Από ὅλους τούς ἦχους πού ἀναφέραμε, ἐκεῖνος πού προκαλεῖ εὐχάριστο συναίσθημα εἶναι ὁ φθόγγος, ἐνῶ ὁ θόρυβος καί ὁ κρότος εἶναι ἦχοι πού ἐνοχλοῦν τόν ἄνθρωπο καί ἀποτελοῦν μεγάλο πρόβλημα στίς μεγαλοπόλεις.



Σχ. 12·4 στ.
'Ανάλυση θορύβου.

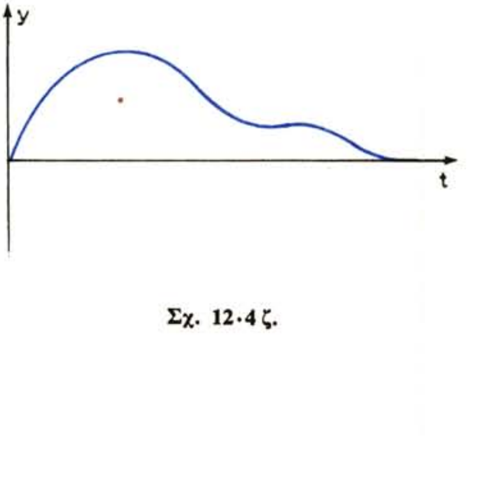
12 · 5 ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΗΧΩΝ

α) **Ὑποκειμενικά καί ἀντικειμενικά γνωρίσματα τῶν ἤχων.** Θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό διαχωρισμό τῶν ἤχων σύμφωνα μέ τό αἴσθημα πού προκαλοῦν στόν ἄνθρωπο, καί θά ἀντιστοιχίσουμε τά ὑποκειμενικά γνωρίσματα τοῦ αἰσθήματος μέ ἀντικειμενικά γνωρίσματα.

Τά ὑποκειμενικά γνωρίσματα τοῦ αἰσθήματος εἶναι:

Τό **ὕψος,** ἡ **ἀκουστότητα** καί ἡ **χροιά.**

1) **Ὕψος ἤχου.** Ἄν ὁ ἄνθρωπος ἀκούσει τούς ἤχους δύο διαπασῶν διαφορετικῶν συχνοτήτων, θά τούς ξεχωρίσει. Θά πεῖ μάλιστα ὅτι ὁ ἕνας ἦχος εἶναι ὀξύτερος ἀπό τόν ἄλλο. Ὅσο πιό ὀξύς εἶναι ὁ ἦχος, τόσο πιό μεγάλο εἶναι τό ὕψος του. Τό ὕψος εἶναι ὑποκειμενικό γνώρισμα τοῦ ἤχου. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τό διαπασῶν πού παράγει ἦχο μεγαλύτερης συχνότητας, παράγει τόν ὀξύτερο ἦχο. Ἐπομένως, στό ὑποκειμενικό γνώρισμα τοῦ ἤχου, **τό ὕψος,** ἀντιστοιχεῖ τό ἀντικειμενικό γνώρισμά του, ἡ **συχνότητα.** Ἔτσι, ὅσο πιό μεγάλο εἶναι τό ὕψος ἑνός ἤχου, τόσο πιό μεγάλη συχνότητα ἔχει.



Σχ. 12·4 ζ.

2) **'Ακουστότητα.** Συχνά ἐντείνομε τήν προσοχή μας γιά νά ἀκούσουμε ἕναν ἦχο, πού ἔρχεται ἀπό μακρυά, ἤ, ἀντίθετα σκεπάζομε τά αὐτιά μας, ὅταν ἀκοῦμε ἤχους ἰσχυρούς.

Τό ὑποκειμενικό γνώρισμα, μέ τό ὁποῖο διακρίνουμε τούς ἤχους σέ ἰσχυρούς καί ἀσθενεῖς, ὀνομάζεται ἀκουστότητα.

Ἡ ἀκουστότητα ἔχει σάν ἀντίστοιχο ἀντικειμενικό γνώρισμα τήν **ἔνταση τοῦ ἤχου.**

Ἔνταση ἤχου J (ἤ ὁποιουδήποτε κύματος) εἶναι τό πηλίκον τῆς ἠχητικῆς κυματικῆς ἐνέργειας A, πού περνᾶ ἀπό μιά ἐπιφάνεια S, σέ ὁρισμένο χρόνο κατά τή μετάδοση τοῦ ἤχου, διά τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφάνειας καί τοῦ χρόνου t:

$$J = \frac{A}{S\,t}$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἔνταση τοῦ κύματος εἶναι ἀνάλογη πρός τό τετράγωνο τοῦ πλάτους α τῆς ταλαντώσεως.

Ἑπομένως, ὅσο πιό μεγάλο εἶναι τό πλάτος ΔP, τῆς μεταβολῆς τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως πού προκαλεῖ ὁ ἦχος, τόσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ ἔνταση καί ἡ ἀκουστότητά του.

3) **Χροιά.** Ὁ ἄνθρωπος μπορεῖ νά διακρίνει τήν προέλευση δυό ἤχων, πού ἔχουν τήν ἴδια ἀκουστότητα καί τό ἴδιο ὕψος, προέρχονται ὅμως ἀπό διαφορετικές ἠχητικές πηγές. Μπορεῖ νά πεῖ ὅτι ὁ **Α** ἦχος προέρχεται ἀπό χορδή μαντολίνου καί ὁ **Β** ἀπό χορδή βιολιοῦ ἤ τουλάχιστο νά πεῖ ὅτι οἱ δυό αὐτοί ἦχοι προέρχονται ἀπό διαφορετικά ὄργανα.

Τό ὑποκειμενικό γνώρισμα πού μᾶς κάνει νά διαχωρίζουμε τήν προέλευση δυό ἤχων τῆς ἴδιας ἀκουστότητας καί τοῦ ἴδιου ὕψους ὀνομάζεται χροιά.

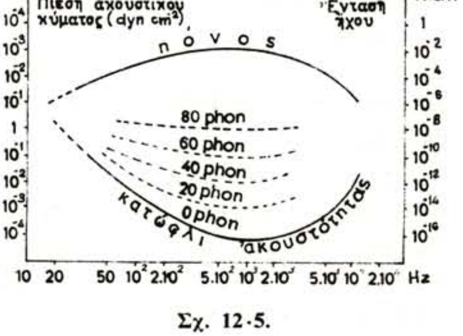
Ἄν ἐξετάσουμε τούς δυό ἤχους, πού προαναφέραμε, θά δοῦμε ὅτι εἶναι σύνθετοι ἦχοι (φθόγγοι), οἱ ὁποῖοι ἀναλύονται κατά Fourier. Θά διαπιστώσουμε μάλιστα ὅτι οἱ δύο αὐτοί ἦχοι δέν ἔχουν οὔτε τό ἴδιο πλῆθος ἁρμονικῶν οὔτε τό ἴδιο πλάτος.

Τό πλῆθος τῶν ἁρμονικῶν καί τό πλάτος τοῦ κάθε ἁρμονικοῦ, στούς ὁποίους ἀναλύεται ἕνας σύνθετος ἦχος, ἀποτελοῦν τό ἀντικειμενικό γνώρισμα τῆς χροιᾶς τοῦ ἤχου.

β) **Ὅρια ἀκουστικῶν ἤχων.** Ἕνας ἦχος γιά νά ἀκούγεται ἀπό τόν ἄνθρωπο πρέπει νά βρίσκεται μέσα σέ ὁρισμένα ὅρια συχνότητας καί ἐντάσεως.

1) **Ὅρια συχνότητας.** Γιά ἕνα νέο καί φυσιολογικό ἄνθρωπο ἡ ζώνη συχνοτήτων, πού μπορεῖ νά ἀκούσει, εἶναι ἀπό 20 Hz ὥς 20 000 Hz. Βέβαια τά ὅρια αὐτά ἀλλάζουν ἀπό ἄνθρωπο σέ ἄνθρωπο καί γιά τόν ἴδιο ἄνθρωπο μεταβάλλονται μέ τήν ἡλικία. Ἦχοι, πού ἔχουν συχνότητα πιό μικρή ἀπό τά 20 Hz, ὀνομάζονται **ὑπόηχοι·** ἦχοι πού ἔχουν συχνότητα πιό μεγάλη ἀπό τά 20 000 Hz, ὀνομάζονται **ὑπέρηχοι.**

2) **Ὅρια ἐντάσεως.** Ὁ ἄνθρωπος δέν ἀκούει τούς ἤχους ὅλων τῶν ἐντάσεων. Ὑπάρχει ἕνα **κατώτερο ὅριο** ἐντάσεως, τό ὁποῖο ὀνομάζεται **κατώφλιο ἀκουστότητας,** κάτω ἀπό τό ὁποῖο δέν ἀκούγεται ὁ ἦχος. Τό κατώφλιο αὐτό ἀκουστότητας, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 12 · 5, ἐξαρτᾶται ἀπό τή συχνότητα. Ἔτσι



Σχ. 12·5.

στά 1000 Hz εἶναι 10^{-15} W/cm^2, ἐνῶ στά 50 Hz εἶναι 10^{-12} W/cm^2.

Ὑπάρχει ἐπίσης καί ἕνα **ἀνώτατο ὅριο** ἐντάσεως, πού ἄν ὁ ἦχος τό ὑπερβεῖ, τότε, ἀντί τοῦ ἤχου, δημιουργεῖται ἕνα αἴσθημα πόνου. Τό ὅριο αὐτό λέγεται **ὅριο πόνου.** Αὐτό φαίνεται ἐπίσης στό σχῆμα 12 · 5 καί δέν εἶναι ἴδιο γιά ὅλες τίς συχνότητες.

Σημείωση : Ἡ μονάδα phon εἶναι μονάδα μετρήσεως τῆς ἀκουστότητας τοῦ ἤχου. Μέ τή μονάδα αὐτή μετροῦμε τό αἴσθημα τῆς ἀκουστότητας καί ὄχι μέ τήν ἔνταση τοῦ ἤχου. Ἔτσι ἦχοι μέ τήν ἴδια ἔνταση ἀλλά μέ διαφορετική συχνότητα δέν ἔχουν τήν ἴδια ἀκουστότητα.

12 · 6 ΥΠΕΡΗΧΟΙ

Ὅπως ἔχουμε πεῖ, ὅταν ὁ ἦχος ἔχει συχνότητα πάνω ἀπό 20 000 Hz, δέν ἀκούγεται ἀπό τόν ἄνθρωπο καί ὀνομάζεται **ὑπέρηχος.**

Οἱ ὑπέρηχοι παράγονται μέ διάφορους τρόπους. Ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ ἠλεκτρικός. Ἐφαρμόζοντας ἐναλλασσόμενη τάση συχνότητας πάνω ἀπό 20 000 Hz σέ κρύσταλλο χαλαζία, προκαλοῦμε ἐξαναγκασμένη μηχανική ταλάντωση στό χαλαζία, λόγω ἑνός φαινομένου, πού ὀνομάζεται **πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.** Ἄν ἡ ἰδιοσυχνότητα τοῦ χαλαζία εἶναι ἴση μέ τή συχνότητα τῆς ἐναλλασσόμενης τάσεως, ὁ χαλαζίας ταλαντώνεται μέ σημαντικό πλάτος (συντονισμός). Ἡ ταλάντωση αὐτή δημιουργεῖ στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα ὑπέρηχους, γιατί ἡ συχνότητα εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 20 000 Hz.

Οἱ ὑπέρηχοι χαμηλῶν σχετικά συχνοτήτων εἶναι ἀκουστοί ἀπό τά ζῶα. Τά σκυλιά π.χ. ἀκοῦν ὑπέρηχους, γι' αὐτό μποροῦμε νά τά καλοῦμε μέ σφυρίχτρες ὑπέρηχων, χωρίς αὐτό νά γίνεται ἀντιληπτό ἀπό τούς ἀνθρώπους.

Οἱ ὑπέρηχοι βρίσκουν πολλές ἐφαρμογές στίς **βυθομετρήσεις τῶν θαλασσῶν,** στήν **ἐξακρίβωση ρωγμῶν μετάλλων κ.λπ.**

Μιά ἐπίσης ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή, εἶναι τά εἰδικά **πλυντήρια ὑπέρηχων,** μέ τά ὁποῖα μποροῦμε νά καθαρίσουμε τίς ἐξωτερικές ἐπιφάνειες μετάλλων προκαλώντας γρήγορη ἀνάμιξη τῶν ὑγρῶν πού χρησιμοποιοῦνται γιά τόν καθαρισμό.

Γνωστή εἶναι ἐπίσης ἡ ἱκανότητα τῆς νυχτερίδας νά πετᾶ μέ μεγάλες ταχύτητες στό σκοτάδι ἀνάμεσα σέ ἐμπόδια, χωρίς νά συγκρούεται μέ αὐτά. Αὐτό τό κατορθώνει χρησιμοποιώντας ὑπέρηχους, πού ἐκπέμπει. Οἱ ὑπέρηχοι ἐπιστρέφοντας, μετά ἀπό τήν ἀνάκλαση στά ἐμπόδια, δίνουν στή νυχτερίδα τήν ἀναγκαία πληροφορία τῆς ἀποστάσεώς της ἀπό τό ἐμπόδιο καί ἔτσι ἀποφεύγει τή σύγκρουση.

12 · 7 ΗΧΗΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

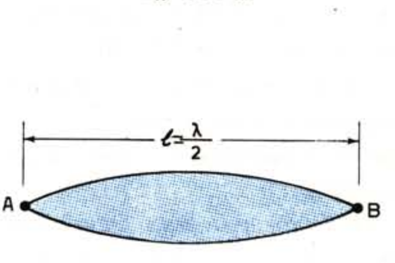
Πηγές, πού παράγουν ἤχους, εἶναι πολλές. Ἀναφέραμε κιόλας τό διαπασῶν. Θά ἐξετάσουμε ἀκόμα καί δυό ἄλλες: τή **χορδή** καί τούς **ἠχητικούς σωλῆνες.**

α) **Χορδή.** Χορδές κατασκευάζονται ἀπό μέταλλο ἤ ἀπό κατάλληλα κατεργασμένα ἔντερα· ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου, ἡ διατομή τους ἔχει πολύ μικρό ἐμβαδόν καί τό μῆκος τους εἶναι μεγάλο. Χρησιμοποιοῦνται στά ἔγχορδα μουσικά ὄργανα (μαντολίνο, βιολί κ.λπ).

Γιά νά ἔχει τή δυνατότητα μιά χορδή νά παράγει κάποιο ἦχο, πρέπει νά τήν στηρίξουμε σέ δυό σταθερά σημεῖα Α καί Β (σχ. 12 · 7 α) καί νά τήν τεντώσουμε μέ μιά δύναμη F. Ἡ δύναμη αὐτή ἐξασκεῖται μέ τή βοήθεια εἰδικῶν «κλειδιῶν».

Σχ. 12·7 α.

Ἄν μέ τό χέρι μας ἤ μέ δοξάρι διεγείρουμε τή χορδή σέ ταλάντωση (σχ. 12 · 7 β), δημιουργεῖται ἕνα ἐγκάρσιο στάσιμο κύμα μέ δεσμούς κινήσεως στά σταθερά σημεῖα Α καί Β.



Σχ. 12·7 β.

Ἡ συχνότητα τοῦ ἤχου, πού παράγεται ἀπό τή χορδή, δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\nu_o = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

ὅπου: l τό μῆκος τῆς χορδῆς, $\mu = \dfrac{m}{l}$ ἡ γραμμική πυκνότητα τῆς χορδῆς καί F ἡ δύναμη πού τεντώνει τή χορδή.

Ἀπόδειξη τοῦ τύπου. Τό μῆκος τῆς χορδῆς εἶναι:

$$l = \frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

ὅπου: λ τό μῆκος κύματος μέσα στή χορδή. Ἄν ὀνομάσουμε c τήν ταχύτητα τοῦ κύματος μέσα στή χορδή καί ν_o τή συχνότητα πού παράγει ἡ χορδή, τότε θά ἔχουμε:

$$\nu_o = \frac{c}{\lambda} \qquad (2)$$

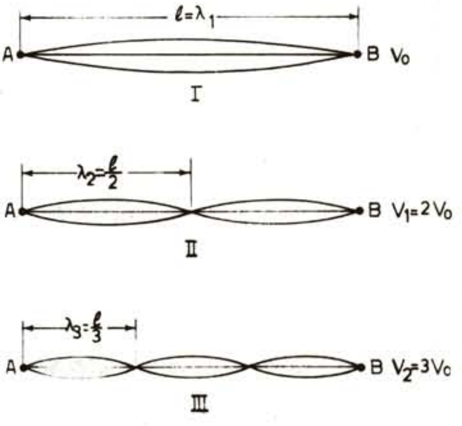
'Από τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) ἔχουμε:

$$\nu_o = \frac{c}{2l} \qquad (3)$$

Εἴδαμε ὅτι: $$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (4)$$

'Από τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) ἔχουμε:

$$\nu_o = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$



Σχ. 12·7 γ.
Στάσιμα κύματα χορδῶν.

Σημείωση: 'Η χορδή μπορεῖ νά δημιουργήσει καί στάσιμα κύματα, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 12 · 7 γ.

Στήν πραγματικότητα ὁ ἦχος, πού παράγει μιά χορδή, εἶναι σύνθετος καί ἔχει θεμελιώδη συχνότητα τή ν_o καί τίς ἁρμονικές $2\nu_o$, $3\nu_o$ κ.λπ.

'Επίσης ἡ μορφή τοῦ στάσιμου κύματος τῆς χορδῆς εἶναι μιά σύνθετη κίνηση, πού εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ταλαντώσεων I, II, III κλπ. τοῦ σχήματος 12 · 7 γ.

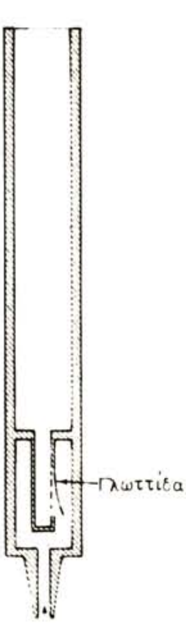
β) **'Ηχητικοί σωλῆνες. Μιά στήλη ἀέρα σέ ἕναν περιορισμένο χῶρο, μπορεῖ νά ταλαντωθεῖ· οἱ σωλῆνες πού διαμορφώνουν τό χῶρο αὐτό, ὀνομάζονται ἠχητικοί σωλῆνες.**

Οἱ ὄγκοι τοῦ ἀέρα διεγείρονται σέ ταλάντωση μέ τή βοήθεια μεταλλικοῦ ἐλάσματος (γλωττίδα), τό ὁποῖο ταλαντώνεται μέ ρεῦμα ἀέρα πού κινεῖται κατά τή διεύθυνση τοῦ βέλους (σχ. 12 · 7 δ).

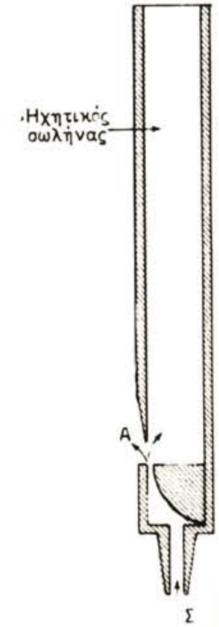
Ἄλλος τρόπος γιά νά διεγερθεῖ σέ ταλάντωση ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρα εἶναι ἡ δημιουργία στενῶν ρευμάτων ἀέρα, πού δημιουργοῦμε ὅταν φυσᾶμε στό στόμιο Σ. Ἕνα τέτοιο στένωμα εἶναι τό A καί φαίνεται στό σχῆμα 12 · 7 ε. 'Η δίνη τοῦ ἀέρα πού δημιουργεῖται στό A προκαλεῖ ταλάντωση τοῦ ὄγκου τοῦ ἠχητικοῦ σωλήνα.

Τούς ἠχητικούς σωλῆνες τούς διακρίνουμε σέ ἀνοικτούς καί σέ κλειστούς.

1) **'Ανοικτοί ἠχητικοί σωλῆνες.** Σέ ἕνα ἀνοικτό ἠχητικό σωλήνα ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρα μπορεῖ νά δημιουργήσει ἕνα στάσιμο κύμα μέ δεσμούς στό A καί B (σχ. 12 · 7 στ). 'Εκεῖ ὑπάρχουν οἱ δεσμοί μεταβολῆς τῆς



Σχ. 12·7 δ.



Σχ. 12·7 ε.

πιέσεως, γιατί ἡ πίεση παραμένει σταθερή. Ὁ λόγος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ὁ σωλήνας εἶναι **ἀνοικτός** καί ἀπό τά δύο ἄκρα. Ἔρχεται, ἑπομένως, σέ ἄμεση ἐπαφή μέ τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα καί διατηρεῖ τήν πίεση σταθερή καί ἴση πρός τήν ἀτμοσφαιρική πίεση.

Ἡ συχνότητα τοῦ ἤχου, πού παράγεται ἀπό τόν ἀνοικτό ἠχητικό σωλήνα, δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\nu = n\,\frac{c}{2\,L}}$$

ὅπου: c ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου στόν ἀέρα, L τό μῆκος τοῦ σωλήνα καί n ἀκέραιος ἀριθμός. Ἄν $n = 1$, ἔχουμε τό θεμελιώδη ἦχο (πρῶτο ἁρμονικό). Ἄν $n = 2, 3, \ldots \nu$ θά ἔχουμε τό δεύτερο ἁρμονικό, τρίτο ἁρμονικό... (νιοστό) ἁρμονικό ἦχο.

Ἀπόδειξη τύπου. Εἶναι γνωστός ὁ τύπος:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad (1)$$

Στό σχῆμα 12·7 στ (I) τό στάσιμο κύμα ἔχει μῆκος κύματος:

$$\lambda = 2\,L \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$\nu_o = \frac{c}{2\,L}$$

Ἀπό τό σχῆμα 12·7 στ (I) προκύπτει ὅτι:

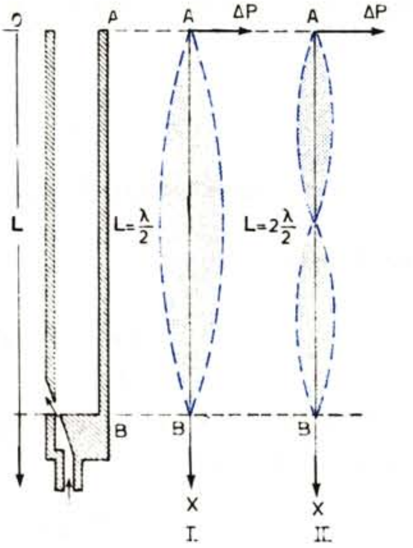
$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{L} = 2\,\frac{c}{2\,L}$$

Γενικεύοντας τήν ἐξίσωση ἔχομε:

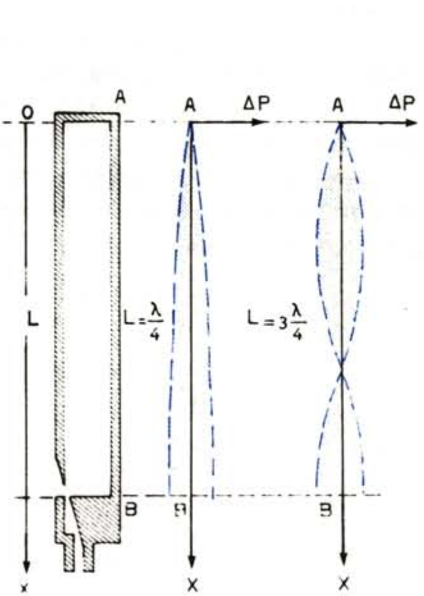
$$\nu_n = n\,\frac{c}{2\,L}$$

ὅπου: ν_n εἶναι ἡ συχνότητα τῆς n ἁρμονικῆς.

2) **Κλειστοί ἠχητικοί σωλῆνες.** Ὁ κλειστός ἠχητικός αὐτός σωλήνας (σχ. 12·7 ζ) εἶναι κλειστός στή μιά του ἄκρη A. Ἐκεῖ ἐμφανίζεται «κοιλιά» στή μεταβολή τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως ΔP. Ἔτσι μποροῦν νά δημιουργηθοῦν στάσιμα κύματα, ὅπως τό (I) καί τό (II). Ἐπειδή $\nu_o = \dfrac{c}{\lambda}$, στό στάσιμο κύμα (I) θά ἔχουμε



Σχ. 12·7 στ.
Στάσιμα κύματα σέ ἀνοικτούς ἠχητικούς σωλῆνες.



Σχ. 12·7 ζ.
Στάσιμα κύματα σέ κλειστούς ἠχητικούς σωλῆνες.

$\lambda = 4\,L$ καί, ἐπομένως, ἡ συχνότητα τοῦ θεμελιώδους ἤχου, πού θά παράγει ὁ κλειστός ἠχητικός σωλήνας, θά εἶναι:

$$\nu_o = \frac{c}{4\,L}$$

Στό στάσιμο κύμα (II) θά ἔχουμε $\lambda_1 = \dfrac{4\,L}{3}$

καί ἐπομένως:

$$\nu_1 = \frac{c}{\dfrac{4\,L}{3}} = 3\,\frac{c}{4\,L}$$

Γενικά θά ἔχομε ὅτι ἡ ν_n στήν ἁρμονική ταλάντωση θά ἔχει συχνότητα:

$$\nu_n = n\,\frac{c}{4\,L}$$

ὅπου: $n = 1, 3, 5 \ldots (2\,\kappa + 1)$.

Ὁ τύπος αὐτός μπορεῖ νά προσδιορίσει τή συχνότητα τῶν ἁρμονικῶν σ' ἕνα κλειστό ἠχητικό σωλήνα.

Παρατήρηση: Ἀπό τά παραπάνω προκύπτουν τά ἑξῆς:

— Οἱ κλειστοί ἠχητικοί σωλῆνες δημιουργοῦν ἁρμονικές συχνότητες μόνο **περιττῆς** τάξεως.

— Ἄν δύο ἠχητικοί σωλῆνες παράγουν ἤχους τῆς ἴδιας θεμελιώδους συχνότητας καί ὁ ἕνας εἶναι κλειστός μέ μῆκος L_K, ἐνῶ ὁ ἄλλος εἶναι ἀνοικτός μέ μῆκος L_A, τότε τό μῆκος τοῦ ἀνοικτοῦ θά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό μῆκος τοῦ κλειστοῦ:

$$L_A = 2\,L_K$$

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ

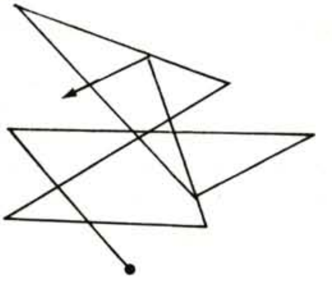
ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

13 · 1 ΘΕΡΜΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ - ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Τά δομικά στοιχεῖα κάθε σώματος (μόρια, ἄτομα), σέ ὁποιαδήποτε κατάσταση καί ἄν βρίσκεται αὐτό, κινοῦνται συνεχῶς. Τό εἶδος ὅμως τῆς κινήσεως αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατάσταση τοῦ σώματος.

Στερεά. Τά δομικά στοιχεῖα τῶν στερεῶν εἶναι κανονικά κατανεμημένα στό χῶρο καί ἔχουν ὁρισμένες θέσεις, γύρω ἀπό τίς ὁποῖες κινοῦνται παλινδρομικά σάν νά παρεμβάλλονται ἀνάμεσά τους ἐλατήρια. Κάθε ἕνα ἀπ' αὐτά τά δομικά στοιχεῖα, τά ὁποῖα μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὑλικά σημεῖα, ἔχει μιά ὁλική ἐνέργεια πού εἶναι τό ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καί τῆς κινητικῆς του ἐνέργειας.

Ὑγρά. Ἡ κίνηση τῶν δομικῶν στοιχείων εἶναι ἄτακτη καί ὀνομάζεται **κίνηση Brown** (σχ. 13 · 1).



Σχ. 13·1.
Κίνηση Brown.

Στήν κίνησή τους αὐτή, τά δομικά στοιχεῖα ἔχουν κινητική ἐνέργεια, ἡ ὁποία γιά κάθε στοιχεῖο αὐξάνεται ἤ μειώνεται μετά ἀπό κάθε κρούση του μέ ἄλλο δομικό στοιχεῖο.

Ἀέρια. Τά δομικά στοιχεῖα τῶν ἀερίων ἐπίσης κινοῦνται καί συγκρούονται μεταξύ τους, ἀλλά οἱ σχετικές ἀποστάσεις τους εἶναι πιό μεγάλες ἀπό τίς ἀποστάσεις τῶν δομικῶν στοιχείων τῶν ὑγρῶν.

Τήν κίνηση αὐτή τῶν δομικῶν στοιχείων καί στίς τρεῖς καταστάσεις τῆς ὕλης τήν ὀνομάζουμε **θερμική κίνηση.**

Ἄν ἀθροίσουμε τίς κινητικές καί δυναμικές ἐνέργειες τῶν δομικῶν στοιχείων ἑνός σώματος, θά βροῦμε μιά ὁλική ἐνέργεια, τήν ὁποία ὀνομάζουμε **ἐσωτερική ἐνέργεια τοῦ σώματος.**

13 · 2 ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ - ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Θερμοκρασία. Ἄν βάλουμε τά χέρια μας στό νερό, πού βρίσκεται σέ δυό δοχεῖα, μποροῦμε νά ξεχωρίσομμε ποιοῦ δοχείου τό νερό εἶναι πιό ζεστό. Γενικά μέ τήν ἀφή μας ἀναγνωρίζομε ὅτι ἄλλα σώματα εἶναι **θερμά** καί ἄλλα **ψυχρά.**

Μέ ὑποκειμενικά κριτήρια, ἐπομένως, ὁ ἄνθρωπος μπορεῖ νά χαρακτηρίσει τή **θερμική κατάσταση** πού βρίσκονται τά σώματα, καί νά τά διακρίνει σέ θερμά καί ψυχρά.

Ἡ θερμική κατάσταση ἑνός σώματος μπορεῖ νά μεταβάλλεται συνέχεια ἀπό τό θερμό στό ψυχρό καί ἀντίστροφα. Γιά νά παρακολουθοῦμε τίς μεταβολές τῆς θερμικῆς καταστάσεως τῶν σωμάτων, ὁρίζομε ἕνα φυσικό μέγεθος, τό ὁποῖον ὀνομάζομε **θερμοκρασία.**

Ἡ θερμοκρασία ἑνός σώματος ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐσωτερική ἐνέργειά του καί μάλιστα, ὅπως ἀποδεικνύεται, εἶναι ἀνάλογη μέ τή μέση ἐνέργεια τῶν δομικῶν στοιχείων τοῦ σώματος στή θερμική τους κίνηση.

Θερμότητα. Ὅταν δύο σώματα ἔχουν διαφορετική θερμοκρασία καί ἔρθουν σέ ἐπαφή, ἐλαττώνεται ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμότερου σώματος καί αὐξάνει ἡ θερμοκρασία τοῦ ψυχρότερου, μέχρι καί τά δυό σώματα νά ἀποκτήσουν τήν ἴδια θερμοκρασία. Αὐτό ὀφείλεται στό ὅτι μεταφέρεται **ἐνέργεια κάποιας μορφῆς** ἀπό τό σῶμα μέ τήν ὑψηλότερη θερμοκρασία στό σῶμα μέ τή χαμηλότερη. Τήν ἐνέργεια αὐτή τήν ὀνομάζομε **θερμότητα.**

13 · 3 ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΑ

Ἐκτιμώντας ὑποκειμενικά τή θερμοκρασία ἑνός σώματος μέ τή βοήθεια τῆς ἁφῆς, δέν μποροῦμε νά τή μετρήσομε. Γιά τή μέτρησή της χρησιμοποιοῦμε εἰδικά ὄργανα, τά **θερμόμετρα.**

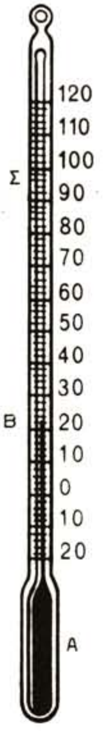
Ἡ ἀρχή στήν ὁποία βασίζεται ἡ λειτουργία τῶν θερμομέτρων, εἶναι ὅτι αὔξηση ἤ ἐλάττωση τῆς θερμοκρασίας ἑνός σώματος προκαλεῖ, κατά κανόνα, αὔξηση ἤ ἐλάττωση τοῦ ὄγκου του (διαστολή ἤ συστολή ἀντίστοιχα).

Ἡ αὔξηση ἤ μείωση τῆς θερμοκρασίας, αὐξάνει ἤ μειώνει τό ὕψος στήλης ὑδραργύρου σ' ἕνα λεπτό γυάλινο σωλήνα. Ἔτσι μποροῦμε νά διαβάσομε τή θερμοκρασία τοῦ σώματος μπροστά σέ μιά βαθμολογημένη κλίμακα, πού μποροῦμε νά τοποθετήσομε δίπλα στό γυάλινο σωλήνα.

— **Ὑδραργυρικό θερμόμετρο.**

Περιγραφή. Ἄς ἐξετάσουμε λεπτομερέστερα ἕνα ὑδραργυρικό θερμόμετρο.

Ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα γυάλινο βαθμολογημένο σω-



Σχ. 13·3 α.
Ὑδραργυρικό θερμόμετρο

λήνα Σ (σχ. 13 · 3 α) ἐσωτερικά κοῖλο μέ πολύ μικρή διάμετρο. Ὁ σωλήνας στή βάση Α εὐρύνεται καί δέχεται σημαντική ποσότητα ὑδραργύρου, Hg. Ὁ σωλήνας πάνω ἀπό τόν ὑδράργυρο εἶναι ἀερόκενος.

Λειτουργία. Τό θερμόμετρο ἀποκτᾶ τή θερμοκρασία τοῦ σώματος, μέ τό ὁποῖο βρίσκεται σέ ἐπαφή τό δοχεῖο Α. Ἄν ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος αὐξηθεῖ, ὁ ὑδράργυρος τοῦ θερμομέτρου διαστέλλεται, μέ ἀποτέλεσμα νά ἀνεβεῖ ἡ ἐλεύθερη στάθμη Β τοῦ ὑδραργύρου. Ἡ ἔνδειξη τῆς βαθμολογημένης κλίμακας στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου, μᾶς δείχνει τή θερμοκρασία τοῦ σώματος.

— **Βαθμολόγηση θερμομέτρου.** Ἡ βαθμολόγηση ἑνός θερμομέτρου γίνεται μέ τόν παρακάτω ἁπλό τρόπο:

1) Τοποθετοῦμε τό θερμόμετρο σέ ἕνα δοχεῖο ἀπό πάγο, ὁ ὁποῖος ἀρχίζει νά λειώνει [σχ. 13 · 3 β (α)]. Ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου κατεβαίνει μέσα στό σωλήνα καί σέ κάποια θέση σταματᾶ.

Στή θέση αὐτή γράφομε μηδέν καί τήν ὀνομάζομε μηδέν βαθμοί Κελσίου (συμβολισμός = 0° C).

Στή συνέχεια, τοποθετοῦμε τό θερμόμετρο στούς ἀτμούς νεροῦ πού βράζει [σχ. 13 · 3 β (β)] ἐλεύθερα στήν ἀτμόσφαιρα μέ ἀτμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg.

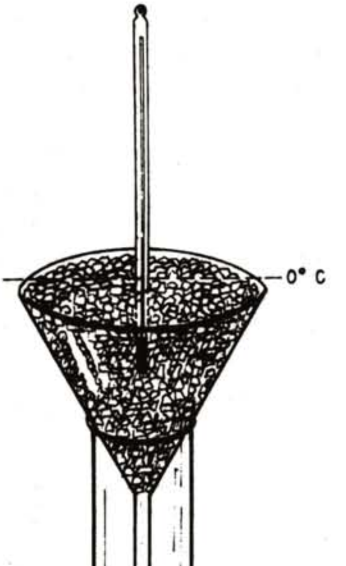
Τότε ὁ ὑδράργυρος μέσα στό θερμόμετρο ἀνεβαίνει καί σταθεροποιεῖται σέ νέα θέση. Στή θέση αὐτή σημειώνουμε 100° C.

Ὑποδιαιροῦμε τό τμῆμα ἀπό 0 μέχρι 100 σέ 100 ἴσες ὑποδιαιρέσεις καί κάθε μιά ἀπ' αὐτές εἶναι ἕνας βαθμός (συμβολισμός °C ἤ grad) τῆς κλίμακας αὐτῆς, τήν ὁποία ὀνομάζομε ἑκατονταβάθμια κλίμακα Κελσίου.

Κάθε θερμοκρασία πιό μικρή ἀπό 0° C, θά εἶναι ἀρνητική. Π.χ. λέμε ὅτι ὁ ὑδράργυρος στερεοποιεῖται στούς −39° C.

Ὁ βαθμός (grad) χρησιμοποιεῖται σάν μονάδα μετρήσεως τῆς θερμοκρασίας στό διεθνές σύστημα (S.I.). Ὅπως θά δοῦμε παρακάτω ἕνας βαθμός τῆς κλίμακας Κελσίου εἶναι ἴσος μέ ἕνα βαθμό τῆς ἀπόλυτης κλίμακας Κέλβιν καί γιαυτό ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς θερμοκρασίας στό S.I. παριστάνεται καί μέ τό σύμβολο 1° K.

— **Θερμομετρικές κλίμακες.** Εἶναι γνωστές τέσσερες κλίμακες θερμομέτρων: τοῦ Κελσίου (Celsius), τοῦ Φάρενάϊτ (Fahrenheit), τοῦ Ρεωμύρου (Réaumer) καί τοῦ Κέλβιν (Kelvin).



Σχ. 13·3 β.
α) Ἡ θερμοκρασία πού λειώνει ὁ πάγος ἀντιστοιχεῖ σέ 0° C.

Τήν κλίμακα Κελσίου τήν ἔχομε ἤδη περιγράψει. Θά περιγράψομε ἀμέσως παρακάτω τίς δυό κλίμακες Φάρενάϊτ καί Ρεωμύρου. Τήν κλίμακα Κέλβιν θά τήν περιγράψουμε ἀργότερα.

α) **Κλίμακα Φάρενάϊτ.** Στήν κλίμακα αὐτή ἡ θερμοκρασία τῶν ὑδρατμῶν τοῦ νεροῦ, πού βράζει ὑπό πίεση 760 mm Hg, ἀντιστοιχεῖ στήν ἔνδειξη 212 καί ἡ θερμοκρασία τοῦ πάγου, πού λειώνει, ἀντιστοιχεῖ στήν ἔνδειξη 32.

β) **Κλίμακα Ρεωμύρου.** Στήν κλίμακα αὐτή ἡ θερμοκρασία τῶν ὑδρατμῶν τοῦ νεροῦ, πού βράζει ὑπό πίεση 760 mm Hg, ἀντιστοιχεῖ στήν ἔνδειξη 80, καί ἡ θερμοκρασία τοῦ πάγου, πού λειώνει, ἀντιστοιχεῖ στήν ἔνδειξη 0.

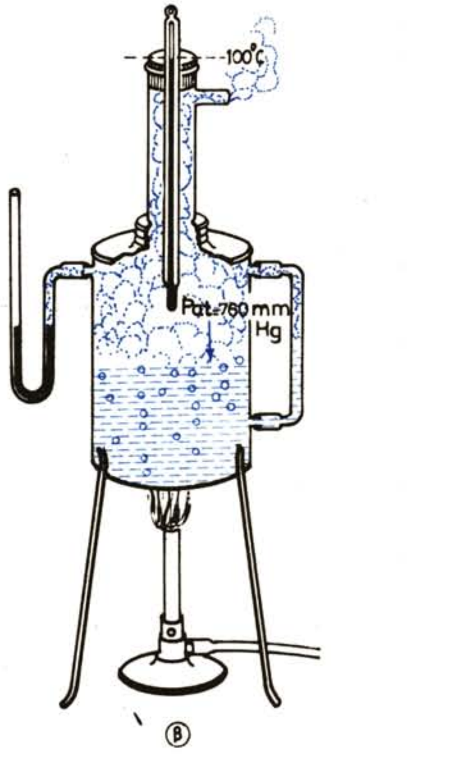
— **Ἀντιστοίχιση θερμομετρικῶν κλιμάκων.** Στό σχῆμα 13 · 3 γ παριστάνεται ἕνα θερμόμετρο Θ καί οἱ τρεῖς κλίμακες: (I) Κελσίου, (II) Φάρενάϊτ καί (III) Ρεωμύρου.

Ἔστω ὅτι Μ εἶναι τό σημεῖο, στό ὁποῖο θά φθάσει ὁ ὑδράργυρος στό θερμόμετρο. Αὐτό θά ἀντιστοιχεῖ σέ βαθμούς C τῆς κλίμακας Κελσίου, σέ βαθμούς F τῆς κλίμακας Φάρενάϊτ καί σέ βαθμούς R τῆς κλίμακας Ρεωμύρου.

Ἐπειδή οἱ εὐθεῖες ΑΓ, $Α_1 Γ_1$ καί $Α_2$, $Γ_2$ εἶναι παράλληλες ἔχομε :

$$\frac{Α Α_1}{Α Α_2} = \frac{Β Β_1}{Β Β_2} = \frac{Γ Γ_1}{Γ Γ_2} \text{ ἤ } \frac{C}{100} = \frac{F-32}{212-32} = \frac{R}{80} \text{ ἤ}$$

$$\boxed{\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180} = \frac{R}{80}}$$



Σχ. 13·3 β.
β) Ἡ θερμοκρασία πού βράζει τό νερό ἀντιστοιχεῖ στούς 100° C.

Αὐτές τίς σχέσεις χρησιμοποιοῦμε γιά νά βρίσκομε τή θερμοκρασία σέ ὁρισμένη κλίμακα, ὅταν τήν ξέρομε σέ ἄλλη.

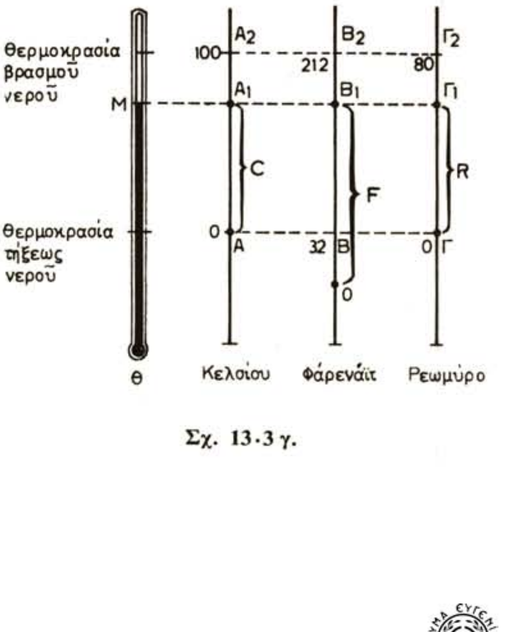
Ἐφαρμογή. Ἕνας ἀσθενής ἔχει θερμοκρασία 39°C. Νά ὑπολογισθεῖ αὐτή στήν κλίμακα Φάρενάϊτ καί στήν κλίμακα Ρεωμύρου.

Λύση :

Ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180}, \text{ λύνοντας ὡς πρός F, ἔχομε :}$$

$$F = 1{,}8\, C + 32 = 1{,}8 \cdot 39 + 32 = 102{,}2°\, F.$$



Σχ. 13·3 γ.

Ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\frac{C}{100} = \frac{R}{80}$$, λύνοντας ὡς πρός R, ἔχομε:

$$R = 0{,}8\,C = 0{,}8 \cdot 39 = 31{,}2^\circ\,R.$$

Ἀπάντηση: Στήν κλίμακα Φάρενάϊτ ὁ ἀσθενής θά ἔχει 102,2° F καί στήν κλίμακα Ρεωμύρου 31,2° R θερμοκρασία.

— **Διάφοροι τύποι θερμομέτρων.**

Ἐπειδή οἱ περιοχές τῶν μετρουμένων θερμοκρασιῶν εἶναι διαφορετικές καί ἡ ἀκρίβεια, πού εἶναι ἐπιθυμητή κάθε φορά γιά τή μέτρηση κάποιας θερμοκρασίας, ποικίλλει, ὁδηγήθηκαν στήν κατασκευή θερμομέτρων διαφόρων τύπων.

Π.χ. τό ἰατρικό θερμόμετρο μετρᾶ τή θερμοκρασία ἀνθρώπου, πού κυμαίνεται ἀπό 35°C ὥς 42°C. Ἔτσι, τό θερμόμετρο αὐτό φτιάχτηκε γιά νά καλύπτει αὐτή τήν περιοχή. Ἐπειδή, ὅμως, ἡ περιοχή αὐτή εἶναι μικρή, ἡ ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως εἶναι μεγάλη, γιατί μποροῦμε νά ἀναπτύξομε σέ μικρότερες ὑποδιαιρέσεις καθένα βαθμό. Ἀπό τό ἄλλο μέρος, κανένα ὑδραργυρικό θερμόμετρο δέν μπορεῖ νά μετρήσει θερμοκρασίες μικρότερες ἀπό ὁρισμένη τιμή, γιατί ὁ ὑδράργυρος στούς −38,9°C στερεοποιεῖται.

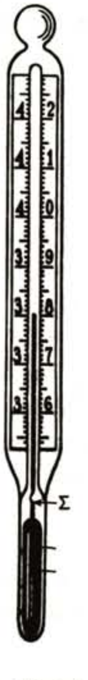
Οἱ πιό γνωστοί τύποι χρησιμοποιουμένων θερμομέτρων εἶναι οἱ ἑξῆς:

1) **Ὑδραργυρικά θερμόμετρα.** Τά ὑδραργυρικά θερμόμετρα χρησιμοποιοῦνται γιά περιοχές ἀπό −38,9°C ὥς + 300°C (ὁ ὑδράργυρος βράζει στούς 356,7 °C).

— Τό **ἰατρικό θερμόμετρο** εἶναι ὑδραργυρικό, ἔχει ὅμως κατασκευασθεῖ, ὥστε νά δείχνει πάντα τήν πιό μεγάλη θερμοκρασία (θερμόμετρα μεγίστου) (σχ. 13 · 3 δ).

Στόν ὑδραργυρικό σωλήνα τοῦ ἰατρικοῦ θερμομέτρου ὑπάρχει ἕνα στένωμα Σ. Ὅταν ὁ ὑδράργυρος θερμαίνεται, μεγαλώνει ὁ ὄγκος του καί οἱ ἐξασκούμενες μεγάλες πιέσεις ἀναγκάζουν τόν ὑδράργυρο νά περάσει μέσα ἀπό τό στένωμα καί νά φτάσει στό ὕψος τῆς κλίμακας, πού ἀντιστοιχεῖ στή θερμοκρασία τοῦ ἀνθρώπινου σώματος, τήν ὥρα τῆς θερμομετρήσεως.

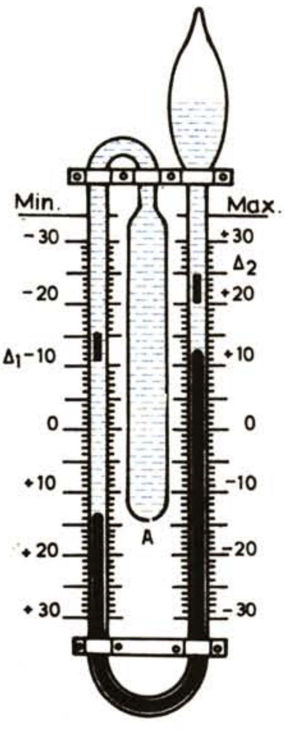
Ὅταν ὁ ὑδράργυρος ψυχθεῖ, τότε, διακόπτεται ἡ συνέχειά του στό στένωμα, μέ ἀποτέλεσμα νά παρα-



Σχ. 13·3 δ.
Ἰατρικό θερμόμετρο.

μένει ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου πάνω ἀπό τό στένωμα καί νά μᾶς δείχνει πάντοτε τήν πιό μεγάλη ἔνδειξη, δηλαδή τή θερμοκρασία τοῦ ἀνθρώπινου σώματος. Ἄν ἐπιθυμοῦμε νά κάνομε καί νέα θερμομέτρηση, πρέπει νά «τινάξομε» τό θερμόμετρο, δηλαδή νά τοῦ δημιουργήσομε ἱκανές ἐπιταχύνσεις κινώντας το ἀπότομα μέ τό χέρι μας, ὁπότε λόγω ἀδράνειας, ὁ ὑδράργυρος θά κατεβεῖ μέσα στό σωλήνα.

— **Θερμόμετρα μεγίστου καί ἐλαχίστου.** Μέ τά θερμόμετρα αὐτά μποροῦμε νά μετρήσομε τήν πιό μεγάλη καί τήν πιό μικρή θερμοκρασία τῆς ἡμέρας (σχ. 13 · 3 ε).



Σχ. 13·3 ε.
Θερμόμετρο μεγίστου καί ἐλαχίστου.

2) **Οἰνοπνευματικά θερμόμετρα.** Χρησιμοποιοῦνται ἀντί τῶν ὑδραργυρικῶν γιά νά μετροῦν θερμοκρασίες ἀπό -35° μέχρι $-100C^{\circ}$.

3) **Θερμοηλεκτρικά θερμόμετρα.** Ἀποτελοῦνται ἀπό δύο διαφορετικά μέταλλα, τά ὁποῖα ἔχουν συγκολληθεῖ, καί ἕνα γαλβανόμετρο, μέ τό ὁποῖο μπορεῖ νά μετρηθοῦν ἀσθενή ρεύματα (σχ. 13 . 3 στ).

Ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος, πού δείχνει τό γαλβανόμετρο, ἐξαρτᾶται ἀπό τή διαφορά θερμοκρασίας στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν τό Α ἔχει σταθερή θερμοκρασία (π.χ. βρίσκεται σέ πάγο πού λειώνει), βρίσκομε τή θερμοκρασία τοῦ Β **διαβάζοντας στό γαλβανόμετρο κατευθείαν τή θερμοκρασία,** γιατί ἡ κλίμακα τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι βαθμολογημένη σέ θερμομετρικούς βαθμούς.

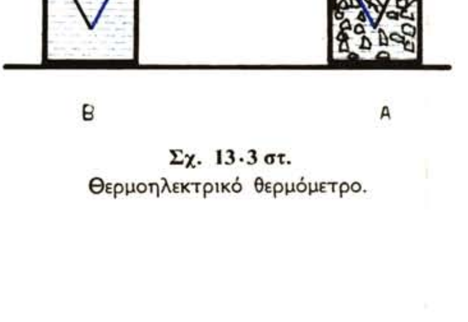
Μέ τά θερμόμετρα αὐτά μποροῦμε νά μετρήσομε πολύ ὑψηλές ἤ πολύ χαμηλές θερμοκρασίες.

4) **Διμεταλλικά θερμόμετρα.** Αὐτά ἀποτελοῦνται ἀπό δυό ράβδους, πού ἔχουν διαφορετικό γραμμικό συντελεστή διαστολῆς καί συγκολλοῦνται μεταξύ τους.

Μέ τήν αὔξηση τῆς θερμοκρασίας, ἡ διαφορετική γραμμική διαστολή προκαλεῖ ἐκτροπή ἑνός δείκτη μπροστά σέ μιά βαθμολογημένη κλίμακα.

Τά θερμόμετρα αὐτά εἶναι μικρῆς ἀκριβείας καί χρησιμοποιοῦνται γιά νά μετροῦν τή θερμοκρασία μηχανῶν αὐτοκινήτων, στούς θερμοσίφωνες κ.λπ.

5) Τέλος ἀναφέρουμε ὅτι ὑπάρχουν καί ἄλλοι τύποι θερμομέτρων ὅπως π.χ. **θερμόμετρα μέ ἠλεκτρική ἀντίσταση, ὀπτικά πυρόμετρα** κ.λπ.



Σχ. 13·3 στ.
Θερμοηλεκτρικό θερμόμετρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΔΙΑΣΤΟΛΗ

14·1 ΓΕΝΙΚΑ

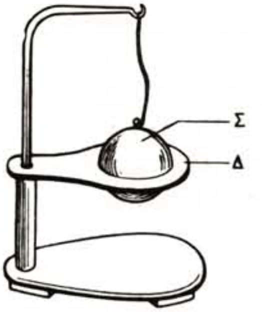
Ἀπό διάφορα πειράματα διαπιστώνεται ὅτι ἡ μεταβολή τῆς θερμοκρασίας ἑνός σώματος συνοδεύεται καί μέ μεταβολή τῶν διαστάσεών του.

Συγκεκριμένα, μέ τήν αὔξηση τῆς θερμοκρασίας ἔχομε, κατά κανόνα, αὔξηση τῶν διαστάσεων καί ἀντίθετα.

Τό φαινόμενο τῆς αὐξήσεως τῶν διαστάσεων ὀνομάζεται **διαστολή** καί τό ἀντίθετο φαινόμενο τῆς μειώσεως τῶν διαστάσεων ὀνομάζεται **συστολή τῶν σωμάτων.**

14·2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ

Πείραμα. Μιά μεταλλική σφαίρα Σ (σχ. 14·2 α) ἔχει διάμετρο ἐλάχιστα μικρότερη ἀπό τή διάμετρο τοῦ δακτυλιδιοῦ Δ. Ἔτσι ἡ σφαίρα περνᾶ ἀπό τό δακτυλίδι.

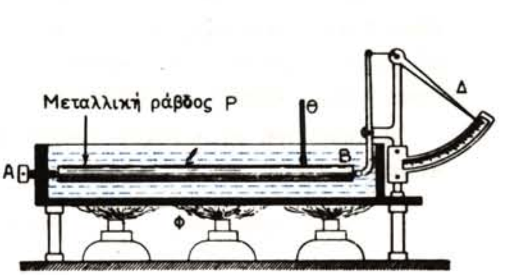


Σχ. 14·2 α.

Ἄν θερμάνομε τή σφαίρα καί προσπαθήσομε πάλι νά τήν περάσομε ἀπό τό δακτυλίδι, θά διαπιστώσομε ὅτι δέν περνᾶ πιά. Αὐτό συμβαίνει, γιατί μέ τήν αὔξηση τῆς θερμοκρασίας αὐξήθηκε ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας καί ἔγινε πιό μεγάλη ἀπό τή διάμετρο τοῦ δακτυλιδιοῦ.

Ὅταν ἀφήσομε τή σφαίρα νά ψυχθεῖ στήν ἀρχική της θερμοκρασία, ἡ σφαίρα θά περνᾶ πάλι ἀπό τό δακτυλίδι. Ἡ μεταβολή μιᾶς διαστάσεως ἑνός σώματος, ὅπως ἐδῶ ἡ μεταβολή τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, πού προκαλεῖται ἀπό μεταβολή τῆς θερμοκρασίας, ὀνομάζεται **γραμμική διαστολή.**

Γιά νά βροῦμε τόν τρόπο, πού μεταβάλλεται τό μῆκος ἑνός σώματος μέ τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας, χρησιμοποιοῦμε τήν ἀκόλουθη συσκευή (σχ. 14·2 β).



Σχ. 14·2 β.
Συσκευή γιά νά μελετήσουμε τό φαινόμενο τῆς γραμμικῆς διαστολῆς.

Μιά μεταλλική ράβδος Ρ εἶναι στερεωμένη στό ἕνα της ἄκρο Α. Τό ἄλλο της ἄκρο Β εἶναι ἐλεύθερο.

Ἡ μεταβολή τῆς θερμοκρασίας στή ράβδο, προκαλεῖ μεταβολή τοῦ μήκους της, μέ συνέπεια τή μετακίνηση τοῦ δείκτη Δ μπροστά σέ μιά κλίμακα. Ἡ κλίμακα εἶναι βαθμολογημένη ἔτσι, ὥστε νά μᾶς δείχνει σέ κάθε θέση τοῦ δείκτη τή μεταβολή τοῦ μήκους τῆς ράβδου ἀπό τήν ἀρχική τιμή μήκους, τήν ὁποία ἔχει σέ ὁρισμένη θερμοκρασία, π. χ. 0°C. Ἡ μεταλλική ράβδος εἶναι βυθισμένη μέσα σέ ἕνα ὑγρό, ὥστε νά ἔχουν ὅλα τά σημεῖα της τήν ἴδια θερμοκρασία, τήν ὁποία μετροῦμε μέ τό θερμόμετρο Θ. Τό ὑγρό τό θερμαίνομε μέ φλόγες φωταερίου Φ.

Ἀπό τίς μετρήσεις προκύπτει ὅτι, ἡ ἐπιμήκυνση τῆς ράβδου Δl εἶναι ἀνάλογη πρός τό ἀρχικό μῆκος τῆς ράβδου l καί πρός τήν αὔξηση τῆς θερμοκρασίας $\Delta\theta$. Ὁ φυσικός αὐτός νόμος ἐκφράζεται μέ τόν τύπο :

$$\boxed{\Delta l = a\, l\, \Delta\theta} \qquad (1)$$

ὅπου : α εἶναι ὁ συντελεστής πού χαρακτηρίζει τό ὑλικό, γιατί ἄν ἀλλάξομε τό ὑλικό τῆς ράβδου, στήν πειραματική διάταξη πού περιγράψαμε, καί διατηρήσομε τό ἴδιο μῆκος l καί τήν ἴδια μεταβολή τῆς θερμοκρασίας $\Delta\theta$, θά παρατηρήσομε ὅτι ἡ μεταβολή τοῦ μήκους Δl δέν εἶναι ἡ ἴδια.

Ὁ συντελεστής αὐτός α ὀνομάζεται **συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς.**

Ἄν λύσομε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός α, θά ἔχομε:

$$\boxed{a = \frac{\Delta l}{l\, \Delta\theta}}$$

Γιά $l = 1\,\text{m}$ καί $\Delta\theta = 1$ grad εἶναι :

$$\alpha = \frac{\Delta\, l}{1\ \text{m} \cdot 1\ \text{grad}}.$$

Μποροῦμε, ἑπομένως, νά ποῦμε ὅτι, **ὁ γραμμικός συντελεστής διαστολῆς ὑλικοῦ εἶναι ἴσος ἀριθμητικά μέ τήν ἐπιμήκυνση μιᾶς ράβδου, πού ἔχει μῆκος 1 m, ὅταν ἡ θερμοκρασία της αὐξηθεῖ κατά 1 grad.**

Μονάδα τοῦ συντελεστῆ γραμμικῆς διαστολῆς στό σύστημα S.I.

Στή σχέση: $\alpha = \dfrac{\Delta l}{l\, \Delta\theta}$ ἀντικαθιστοῦμε:

$\Delta l = 1$ m, $l = 1$ m καί $\Delta\theta = 1$ grad, ὁπότε γίνεται,

$$a = \frac{1\ m}{1\ m\ grad} = grad^{-1}$$

Ὥστε grad^{-1} εἶναι ἡ μονάδα τοῦ συντελεστῆ αὐτοῦ στό S.I.

Στόν Πίνακα 14 · 2 · 1 γράφονται οἱ τιμές τοῦ συντελεστῆ γραμμικῆς διαστολῆς ὁρισμένων ὑλικῶν.

— **Σχέση μήκους καί θερμοκρασίας.**

Ἔστω ὅτι μιά μεταλλική ράβδος ἔχει μῆκος l_o στούς 0°C καί l στούς θ°C

Τότε τά Δl καί $\Delta\theta$ τῆς ἐξισώσεως (1) θά εἶναι:

$$\Delta l = l - l_o \quad \text{καί τό} \quad \Delta\theta = \theta - 0 = \theta.$$

Ἑπομένως, ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$l - l_o = \alpha\, l_o\, \theta \qquad \text{ἤ}$$

$$\boxed{l = l_o\,(1 + \alpha\,\theta)} \qquad (2)$$

Μποροῦμε γενικότερα νά γράψομε τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{l_2 = l_1\,(1 + \alpha\,\Delta\theta)} \qquad (3)$$

ὅπου: l_2 καί l_1 τά μήκη σέ δυό θερμοκρασίες θ_2 καί θ_1 καί $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Ἔτσι μποροῦμε νά βροῦμε τό μῆκος τῆς ράβδου στή θερμοκρασία θ_2, ὅταν γνωρίζομε τό μῆκος της σέ ἄλλη θερμοκρασία θ_1.

Ἐφαρμογές.

1. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ αὔξηση τοῦ μήκους μιᾶς ράβδου ἀπό χαλκό, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξηθεῖ ἀπό 0°C σέ $\theta = 50$°C καί ὅταν ἡ ράβδος στούς 0°C ἔχει μῆκος $l = 5$ m.

Λύση:

Στήν ἐξίσωση $\Delta l = \alpha\, l\, \Delta\theta$ ἀντικαθιστοῦμε: $l = 5$ m, $\theta = 50$ grad καί $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, πού εἶναι ὁ γραμμικός συντελεστής διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ (Πίνακας 14 · 2 · 1).

Ἔχομε:

$$\Delta l = 16 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 50 \text{ m} = 0{,}004 \text{ m ἤ } \Delta l = 4 \text{ mm}.$$

2. Ἕνα χάλκινο μέτρο ἔχει βαθμολογηθεῖ στούς μηδέν βαθμούς. Ἄν μετρήσομε μιά ἀπόσταση στήν θερμοκρασία τῶν 30° καί τή βροῦμε 0,43 m, ποιά εἶναι ἡ πραγματική ἀπόσταση;

Λύση:

Τό μῆκος πού διαβάζομε στό χάλκινο μέτρο κατά τή μέτρηση τῆς ἀποστάσεως εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος

ΠΙΝΑΚΑΣ 14 · 2 · 1.

Γραμμικοί συντελεστές διαφόρων ὑλικῶν

Ὑλικό	Γραμ. συντ. διασ. grad^{-1}
Ψευδάργυρος	$36 \cdot 10^{-6}$
Μόλυβδος	$29 \cdot 10^{-6}$
Ἀργίλιο	$23 \cdot 10^{-6}$
Ἄργυρος	$19 \cdot 10^{-6}$
Ὀρείχαλκος	$19 \cdot 10^{-6}$
Χαλκός	$16 \cdot 10^{-6}$
Σίδηρος	$12 \cdot 10^{-6}$
Μπετόν	$12 \cdot 10^{-6}$
Χάλυβας	$11 \cdot 10^{-6}$
Λευκόχρυσος	$9 \cdot 10^{-6}$
Γυαλί	$9 \cdot 10^{-6}$
Πορσελάνη	$4 \cdot 10^{-6}$
Κράμα Invar	$0{,}9 \cdot 10^{-6}$
Χαλαζίας	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$

τοῦ τμήματος αὐτοῦ τοῦ μέτρου στή θερμοκρασία τῶν 0°C, δηλαδή τό $l_o = 0{,}43$ m. Τό πραγματικό μῆκος τῆς ἀποστάσεως εἶναι ἴσο μέ l, δηλαδή ἴσο μέ τό ἀντίστοιχο μῆκος τοῦ μέτρου στούς 30°C. Ἀλλά $l = l_o(1 + \alpha\,\theta) = 0{,}43(1 + 16 \cdot 10^{-6} \cdot 30)$ m ἤ $l = 0{,}4302064$ m.

— **Ἐφαρμογές τῆς γραμμικῆς διαστολῆς.**

Τό φαινόμενο τῆς γραμμικῆς διαστολῆς βρίσκει πολλές ἐφαρμογές.

1) **Ἀναπτυσσόμενες δυνάμεις λόγω διαστολῆς.** Ἄν διατηρήσομε τή μεταλλική ράβδο P ἀνάμεσα σέ δυό ἀκλόνητα στηρίγματα A καί B καί αὐξήσομε τή θερμοκρασία, ἡ ράβδος ἐξασκεῖ δυνάμεις στά στηρίγματα καί δέχεται ἀπό αὐτά δυνάμεις, οἱ ὁποῖες ἔχουν μεγάλες τιμές (σχ. 14 · 2 γ). Οἱ δυνάμεις αὐτές δίνονται ἀπό τόν τύπο:

$$F = \frac{\Delta l\, E\, S}{l}$$

πού χρησιμοποιοῦμε στό κεφάλαιο τῆς Ἐλαστικότητας [παράγρ. 6 · 2 (α)].

Ἐδῶ τό Δl θά εἶναι ἡ αὔξηση πού θά ἔπαιρνε τό μῆκος l τῆς ράβδου P, ἄν ἦταν ἐλεύθερο καί ἡ θερμοκρασία μεγάλωνε κατά $\Delta\theta$ βαθμούς.

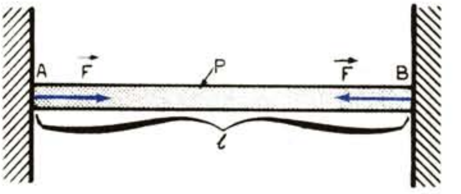
Ἀποτέλεσμα αὐτῶν τῶν ἰσχυρῶν δυνάμεων εἶναι συνήθως ἡ παραμόρφωση τῆς ράβδου P.

Ἔτσι, γιά νά ἀποφύγομε τίς παραμορφώσεις τῶν σιδηροτροχιῶν, πάνω στίς ὁποῖες κινοῦνται τά τραῖνα, δέν τίς κατασκευάζομε συνεχεῖς, ἀλλά τίς χωρίζομε σέ τμήματα μέ ἐνδιάμεσα κενά A (σχ. 14 · 2 δ).

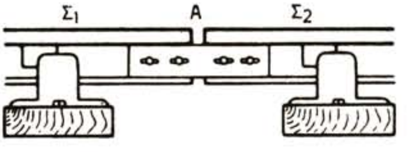
Ἔτσι στίς πιό ὑψηλές θερμοκρασίες τοῦ καλοκαιριοῦ, ἡ ἐπιμήκυνση κάθε τμήματος εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἐνδιάμεσο κενό καί ἡ σιδηροτροχιά δέν παραμορφώνεται.

Ἐπίσης οἱ σιδερένιες γέφυρες δέν στερεώνονται καί στά δυό ἄκρα τους, ἀλλά στό ἕνα ἄκρο τους κινοῦνται ἐλεύθερα πάνω σέ τροχούς, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 14 · 2 ε.

2) **Διμεταλλικά ἐλάσματα.** Ὁ γραμμικός συντελεστής διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἀντίστοιχο συντελεστή τοῦ σιδήρου. Ἄν, ἑπομένως, δυό ράβδοι ἀπό χαλκό καί σίδερο εἶναι συγκολλημένες καί σέ ὁρισμένη θερμοκρασία ἔχουν τό ἴδιο μῆκος, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξηθεῖ, τότε, τό μῆκος τοῦ χαλ-



Σχ. 14·2 γ.
Ὅταν ἡ ράβδος AB θερμανθεῖ ἀνάμεσα σέ δυό ἀμετακίνητα στηρίγματα, ἀναπτύσσονται δυνάμεις πολύ μεγάλες, οἱ ὁποῖες τελικά παραμορφώνουν τή ράβδο.

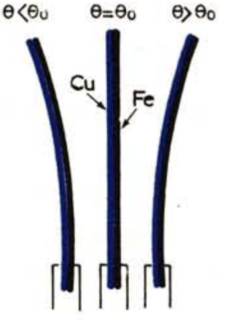


Σχ. 14·2 δ.
Ἡ σιδηροτροχιά δέν εἶναι συνεχής. Ἕνα ἐνδιάμεσο κενό A ἐξουδετερώνει τά δυσάρεστα ἀποτελέσματα τῆς διαστολῆς.

Σχ. 14·2 ε.
Τό ἕνα ἄκρο τῆς γέφυρας κινεῖται πάνω σέ τροχούς.

κοῦ γίνεται μεγαλύτερο ἀπό τό ἀντίστοιχο μῆκος τοῦ σίδερου μέ ἀποτέλεσμα νά καμπυλωθεῖ ἡ ράβδος πρός τό μέρος τοῦ σίδερου (σχ. 14 · 2 στ).

Τό ἀντίστροφο θά συμβεῖ, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἐλαττωθεῖ. Οἱ μεταβολές αὐτές τοῦ σχήματος τῆς ράβδου εἶναι ἀνάλογες μέ τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας. Γι' αὐτό οἱ διμεταλλικές διατάξεις μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν σάν θερμόμετρα (μεταλλικά θερμόμετρα). Βρίσκουν ἐπίσης ἐφαρμογές στίς αὐτόματες ἠλεκτρικές ἀσφάλειες κλπ.



Σχ. 14·2 στ.
Διμεταλλικό ἔλασμα.

14 · 3 ΚΥΒΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ

Ἄν ἕνας μεταλλικός κύβος θερμανθεῖ ἤ ψυχθεῖ, μεταβάλλονται καί οἱ τρεῖς διαστάσεις του. Ἔτσι μεταβάλλεται ὁ ὄγκος του.

Ἄν ΔV ὀνομάσομε τή μεταβολή τοῦ ὄγκου (αὔξηση ἤ ἐλάττωση) ἑνός σώματος, V_o τόν ὄγκο του στή θερμοκρασία $0°C$ καί $\Delta\theta$ τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας, τότε ἡ μεταβολή ΔV εἶναι ἀνάλογη πρός τόν ἀρχικό ὄγκο V_o καί πρός τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας.

Ὁ παρακάτω τύπος ἐκφράζει αὐτό τό νόμο:

$$\Delta V = \gamma\, V_o\, \Delta\theta \qquad (1)$$

Ὁ συντελεστής γ χαρακτηρίζει τό ὑλικό, γιατί ἄν ἀλλάξομε τό ὑλικό καί διατηρήσομε τόν ἴδιο ἀρχικό ὄγκο καί τήν ἴδια μεταβολή τῆς θερμοκρασίας, ἡ μεταβολή τοῦ ὄγκου ποικίλλει ἀπό ὑλικό σέ ὑλικό. Ἑπομένως, ὁ συντελεστής γ δίνει διαφορετική τιμή στό ΔV, ὅταν ἀλλάζει τό ὑλικό.

Ὁ γ ὀνομάζεται **συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς.**

Ἄν λύσομε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός γ, θά ἔχουμε:

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V\, \Delta\theta}$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε $V = 1\ m^3$ καί $\Delta\theta = 1$ grad, προκύπτει:

$$\gamma = \frac{\Delta\ V}{1\ m^3 \cdot 1\ grad}$$

Μποροῦμε, ἑπομένως, νά ποῦμε ὅτι **ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τήν αὔξηση πού ὑφίσταται ὄγκος 1 m³ τοῦ σώματος, ὅταν ἡ θερμοκρασία του αὐξηθεῖ κατά 1 grad.**

— Μονάδα τοῦ συντελεστῆ κυβικῆς διαστολῆς.

Στή σχέση $\gamma = \dfrac{\Delta V}{V\,\Delta\theta}$ ἀντικαθιστοῦμε:

$V = 1\ m^3$, $\Delta\theta = 1$ grad καί $\Delta V = 1\ m^3$ καί παίρνουμε:

$$\gamma = \frac{1\ m^3}{1\ m^3 \cdot grad} = 1\ grad^{-1}$$

Ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑλικό τοῦ σώματος καί ἀποτελεῖ χαρακτηριστική σταθερά του.

Π.χ. ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ εἶναι $\gamma_{Cu} = 48 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$.

— Σχέση ὄγκου καί θερμοκρασίας. Ἔστω ὅτι σῶμα ἔχει ὄγκο V_1 στή θερμοκρασία θ°C καί V_2 στή θερμοκρασία θ_2. Τότε, ἡ ἐξίσωση $\Delta V = \gamma\, V\, \Delta\theta$ γράφεται:

$$V_2 - V_1 = V_1\, \gamma\, \Delta\theta \qquad ἤ$$

$$\boxed{V_2 = V_1\, (1 + \gamma\, \Delta\theta)} \qquad (1)$$

Ἄν ὁ ὄγκος $V_1 = V_o =$ ὄγκος στή θερμοκρασία 0°C καί $V_2 = V$ στή θερμοκρασία θ, ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$\boxed{V = V_o\, (1 + \gamma\, \Delta\theta)} \qquad (2)$$

14 · 4 ΣΧΕΣΗ ΚΥΒΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

Ἄν ἔχομε ἕνα κύβο, πού ἔχει ὄγκο V_o καί ἀκμή μήκους l_o στή θερμοκρασία 0°C, θά ἰσχύει γι' αὐτόν ἡ ἐξίσωση:

$$V_o = l_o^3 \qquad (1)$$

Ἄν αὐξήσουμε τή θερμοκρασία τοῦ κύβου στούς θ°C, ὁ ὄγκος του θά γίνει V, ἡ ἀκμή του l καί θά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$V = l^3 \qquad (2)$$

Ἀπό ὅσα προαναφέραμε προκύπτει ὅτι:

$$V = V_o\,(1 + \gamma\,\theta) \quad ἤ \quad l^3 = l_o^3\,(1 + \gamma\,\theta)$$

καί ὅτι: $l = l_o\,(1 + \alpha\,\theta)$

Ἑπομένως:

$$l_o^3\,(1 + \gamma\,\theta) = l_o^3\,(1 + \alpha\,\theta)^3$$

$$ἤ \quad 1 + \gamma\,\theta = 1 + 3\,\alpha\,\theta + 3\,\alpha^2\,\theta^2 + \alpha^3\,\theta^3$$

$$ἤ \quad \gamma\,\theta = 3\,\alpha\,\theta + 3\,\alpha^2\,\theta^2 + \alpha^3\,\theta^3.$$

Ἐπειδή ὁ συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι πολύ μικρός, οἱ προσθετέοι $3\alpha^2\theta^2$ καί $\alpha^3\theta^3$, γίνονται ἀμελητέοι συγκριτικά μέ τόν $3\alpha\theta$ καί γι' αὐτό παραλείπονται.

Ἑπομένως: $\gamma\theta = 3\alpha\theta$

καί $$\boxed{\gamma = 3\alpha} \qquad (6)$$

Διαπιστώνομε, δηλαδή, ὅτι ὁ **συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς ὑλικοῦ ἰσοῦται μέ τό τριπλάσιο τοῦ συντελεστῆ γραμμικῆς διαστολῆς αὐτοῦ.**

14 · 5 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ

Ἡ πυκνότητα σώματος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (7)$$

Ἄν μεταβάλλομε τή θερμοκρασία τοῦ σώματος αὐτοῦ, ἡ μάζα του δέ μεταβάλλεται, ἐνῶ ὁ ὄγκος του μεταβάλλεται. Ἑπομένως, μεταβάλλεται καί ἡ πυκνότητα τοῦ σώματος.

Ἐπειδή : $V = V_o(1 + \gamma\theta)$, ἡ ἐξίσωση (7) γίνεται:

$$\rho = \frac{m}{V_o(1 + \gamma\theta)}$$

Ἀλλά $\dfrac{m}{V_o} = \rho_o =$ πυκνότητα στούς 0 °C.

Ἑπομένως:

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_o}{1 + \gamma\theta}} \qquad (8)$$

Μέ τήν ἐξίσωση (8) μποροῦμε νά ὑπολογίσομε τήν πυκνότητα ἑνός σώματος σέ ὁποιαδήποτε θερμοκρασία, ἄν αὐτή εἶναι γνωστή στή θερμοκρασία τῶν 0°C.

14 · 6 ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

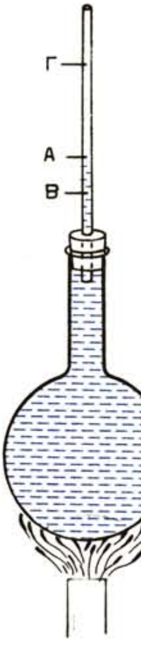
Ὅπως τά στερεά σώματα, ἔτσι καί τά ὑγρά διαστέλλονται καί συστέλλονται.

Πείραμα. Μέσα σέ ἕνα δοχεῖο γυάλινο (σχ. 14 · 6 α), πού φέρει ένα μακρόστενο στόμιο, τοποθετοῦμε χρωματιστό ὑγρό (π.χ. χρωματισμένο οἰνόπνευμα).

Τό ὑγρό ἔχει τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια στή θέση Α. Ἄν θερμάνομε τό γυάλινο δοχεῖο, θά παρατηρήσομε στήν ἀρχή ὅτι τό ὑγρό στό σωλήνα ὑποχωρεῖ ἀπό τή θέση Α στή θέση Β καί στή συνέχεια ἀνεβαίνει στή θέση Γ.

Ἐξηγοῦμε τό φαινόμενο ὡς ἑξῆς:

Ἀρχικά θερμαίνεται τό δοχεῖο καί διαστέλλεται. Ἔτσι, ἐπειδή μεγαλώνει ὁ ὄγκος του, μεγαλώνει καί ἡ χωρητικότητά του. Γι' αὐτό ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ κατεβαίνει. Στή συνέχεια θερμαίνεται τό ὑγρό καί διαστέλλεται. Ἐπειδή ἡ αὔξηση τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ εἶναι πιό μεγάλη ἀπό ἐκείνη τοῦ δοχείου, ἡ στάθμη τοῦ οἰνοπνεύματος στό πείραμά μας ἀνέρχεται στό σημεῖο Γ.



Σχ. 14·6 α.
Πειραματική διάταξη γιά τή μελέτη τῆς διαστολῆς τῶν ὑγρῶν.

α) **Σχετικός καί ἀπόλυτος συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς ὑγροῦ.** Ἄν ΔV_1 ὀνομάσουμε τήν αὔξηση τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ, ὅπως τή μετροῦμε κατά τή μετακίνηση τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ ἀπό τό Α στό Γ, καί ΔV_δ ὀνομάσομε τήν αὔξηση τοῦ ὄγκου τοῦ δοχείου, συμπεραίνομε ὅτι ἡ πραγματική αὔξηση τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ ΔV θά εἶναι:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_\delta \qquad (1)$$

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \Delta V &= \gamma\, V_o\, \theta \\ \Delta V_1 &= \gamma_\sigma\, V_o\, \theta \\ \Delta V_\delta &= \gamma_\delta\, V_o\, \theta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ὅπου: V_o ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ στούς $0°C$, γ ὁ ἀπόλυτος συντελεστής διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ, γ_σ ὁ σχετικός συντελεστής διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ καί γ_δ ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ δοχείου.

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$\gamma\, V_o\, \theta = \gamma_\sigma\, V_o\, \theta + \gamma_\delta\, V_o\, \theta$$

ἤ $$\boxed{\gamma = \gamma_o + \gamma_\delta}$$

Ἑπομένως, ὁ ἀπόλυτος συντελεστής διαστολῆς ὑγροῦ μπορεῖ νά ὑπολογισθεῖ, ἄν εἶναι γνωστός ὁ σχετικός συντελεστής διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ καί ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ δοχείου, μέσα στό ὁποῖο βρίσκεται τό ὑγρό.

Ἀπό τόν Πίνακα 14 · 6 · 1 φαίνεται ὅτι ὁ ἀπόλυτος συντελεστής διαστολῆς ὑγροῦ εἶναι πιό μεγάλος ἀπό τούς κυβικούς συντελεστές διαστολῆς πολλῶν στερεῶν σωμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 14 · 6 · 1.

Ἀπόλυτοι συντελεστές διαστολῆς ὑγρῶν

Ὑδραργύρου	$18 \cdot 10^{-5}$	grad^{-1}
Πετρελαίου	$96 \cdot 10^{-5}$	grad^{-1}
Ἀλκοόλης	$110 \cdot 10^{-5}$	grad^{-1}

— **Μεταβολή τῆς πυκνότητας τῶν ὑγρῶν μέ τή θερμοκρασία.**

Ὁ τύπος: $\rho = \dfrac{\rho_0}{1 + \gamma\,\theta}$ ἰσχύει καί γιά τά ὑγρά. Τό γ εἶναι ὁ ἀπόλυτος συντελεστής διαστολῆς τῶν ὑγρῶν.

Ἐφαρμογή. Ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος εἶναι 30° C. Ἕνα βαρόμετρο ὑδραργύρου δείχνει πίεση 760 mm Hg. Ποιά εἶναι ἡ πραγματική ἀτμοσφαιρική πίεση;

Λύση:

Ἀφοῦ τό ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι 760 mm, ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ εἶναι:

$$P = \varepsilon\, h = \rho\, g\, h$$

ὅπου: ρ πυκνότητα τοῦ ὑδραργύρου στή θερμοκρασία θ.

Ἐπειδή, ὅμως, $\rho = \dfrac{\rho_0}{1 + \gamma\,\theta}$ θά ἔχουμε:

$$P = \frac{\rho_0\, g\, h}{1 + \gamma\,\theta}$$

Ἄν ἀντικαταστήσομε τίς τιμές βρίσκομε:

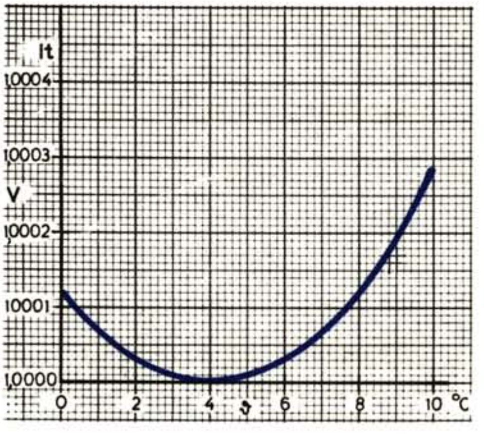
$$P = \frac{13\,600\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}76\ \mathrm{m}}{1 + 18 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{grad^{-1}} \cdot 30\ \mathrm{grad}} =$$

$$= \frac{13\,600\ \mathrm{kp/m^3} \cdot 0{,}76\ \mathrm{m}}{1{,}0054} = 10\,280\ \mathrm{kp/m^2} \quad \text{ἤ}$$

$$\text{ἤ} \quad P = 1{,}028\ \mathrm{kp/cm^2}.$$

— **Ἀνώμαλη διαστολή τοῦ νεροῦ.** Τό νερό δέν ἀκολουθεῖ τούς νόμους διαστολῆς καί συστολῆς τῶν ὑγρῶν, ὅπως τούς περιγράψαμε.

Ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 14 · 6 β μᾶς δίνει μιά εἰκόνα τῆς ἀνωμαλίας πού ἐμφανίζει ἡ διαστολή τοῦ νεροῦ.



Σχ. 14·6 β.
Τό νερό στούς 4°C ἔχει τόν πιό μικρό ὄγκο.

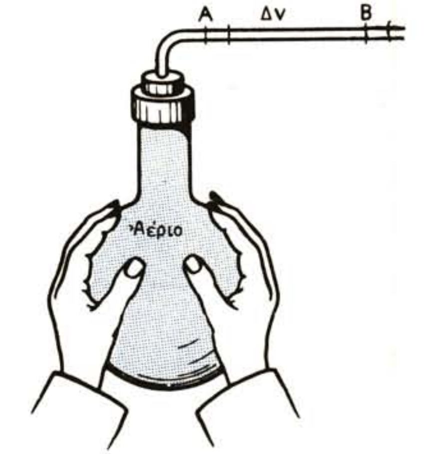
Ἔτσι διαπιστώνεται, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ μικραίνει καθώς θερμαίνεται ἀπό 0° C ὥς 4° C καί στή συνέχεια μεγαλώνει, ὅταν ἡ θερμοκρασία συνεχίζει νά αὐξάνεται. Τό νερό ἑπομένως ἔχει τήν πιό μεγάλη πυκνότητα στούς 4°C.

14 · 7 ΝΟΜΟΙ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

α) **Μεταβολή τοῦ ὄγκου ἀερίου ὑπό σταθερή πίεση (Νόμος Gay - Lussac).**

Πείραμα. Στό δοχεῖο τοῦ σχήματος 14 · 7 α ὑπάρχει ἀέριο. Μιά χρωματιστή σταγόνα νεροῦ βρίσκεται στή θέση Α καί διαχωρίζει τό ἀέριο ἀπό τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα.

Ἄν μέ τό χέρι μας ζεστό πιάσομε τό δοχεῖο, ἡ σταγόνα μετακινεῖται ἀπό τή θέση Α στή θέση Β. Αὐτό σημαίνει ὅτι, ὅταν τό ἀέριο θερμάνθηκε, ὁ ὄγκος του αὐξήθηκε, ἐνῶ ἡ πίεσή του παρέμεινε σταθερή (ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση, ὅταν τό πείραμα γίνεται στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα).



Σχ. 14·7 α.
Τό χέρι θερμαίνει τό ἀέριο τοῦ δοχείου καί μετατοπίζει τή χρωματιστή σταγόνα ἀπό τή θέση Α στήν Β.

Ἔχουμε, ἑπομένως, ἐδῶ μεταβολή τοῦ ὄγκου τοῦ ἀερίου ὑπό σταθερή πίεση. Ἡ μεταβολή αὐτή ὀνομάζεται **ἰσοβαρής μεταβολή.**

Ἡ μεταβολή αὐτή ΔV δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$\Delta V = a\, V_0\, \theta \qquad (1)$$

ὅπου: V_0 εἶναι ὁ ὄγκος στούς 0°C, θ ἡ θερμοκρασία, στήν ὁποία θερμαίνουμε τό ἀέριο, καί **α** ὁ **συντελεστής θερμικῆς μεταβολῆς τοῦ ὄγκου ὑπό σταθερή πίεση.**

Ὁ συντελεστής αὐτός ἔχει σταθερή τιμή γιά ὅλα τά ἀέρια καί ἴση μέ:

$$a = \frac{1}{273}\ grad^{-1}.$$

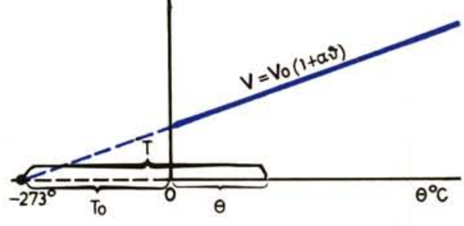
Σημείωση : Ἡ ἀκριβής τιμή τοῦ συντελεστῆ α εἶναι:

$$\alpha = \frac{1}{273{,}16}\ \mathrm{grad}^{-1}$$

Ἄν $\Delta V = V - V_0$, ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$V = V_0\,(1 + a\,\theta) \qquad (2)$$

Ἡ γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 14 · 7 β δείχνει τή μεταβολή τοῦ ὄγκου σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία.



Σχ. 14·7 β.
Στό ἀπόλυτο μηδέν ὁ ὄγκος ἑνός τέλειου ἀερίου μηδενίζεται, ἄν ἡ πίεση παραμένει σταθερή.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2) προκύπτει ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου ὑπό σταθερή πίεση μηδενίζεται, ὅταν ἡ θερμοκρασία γίνει −273°C.

— Ἀπόλυτη θερμοκρασία — Κλίμακα Kelvin (Κέλβιν). Ἡ θερμομετρική κλίμακα, πού ἔχει τήν ἔνδειξη 0 στή θερμοκρασία $-273°C$, καί πού κάθε βαθμός της εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό Κελσίου, ὀνομάζεται **κλίμακα Κέλβιν**.

Ἡ θερμοκρασία T ἑνός σώματος στήν κλίμακα αὐτή συνδέεται μέ τή θερμοκρασία του θ στήν κλίμακα Κελσίου μέ τή σχέση:

$$T = \theta + 273.$$

Ἡ θερμοκρασία T στήν κλίμακα Κέλβιν ὀνομάζεται **ἀπόλυτη θερμοκρασία.** Οἱ βαθμοί τῆς κλίμακας αὐτῆς γράφονται °K.

Ἄν π.χ. ἡ θερμοκρασία σώματος εἶναι 50° C, ἡ ἀπόλυτη θερμοκρασία τοῦ σώματος, θά εἶναι:

$$T = \theta + 273 = 50 + 273 = 323°\ K.$$

Τό μηδέν τῆς κλίμακας αὐτῆς λέγεται **ἀπόλυτο μηδέν,** γιατί εἶναι ἡ χαμηλότερη θερμοκρασία, πού θεωρητικά μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ. Στήν πράξη ἡ πιό χαμηλή θερμοκρασία, πού πέτυχαν μέχρι σήμερα στά Ἐργαστήρια, εἶναι 0,0044° K.

— Ἀλλαγή μορφῆς τῆς ἐξισώσεως : $V = V_o\ (1 + \alpha\,\theta)$

Ἄν στήν ἐξίσωση $V = V_o\ (1 + \alpha\,\theta)$ βάλουμε ὅπου: $\alpha = \dfrac{1}{273}$ θά ἔχομε:

$$V = V_o\left(1 + \frac{\theta}{273}\right) = V_o\left(\frac{273 + \theta}{273}\right) \quad (1)$$

Ἡ παράσταση $273 + \theta$ εἶναι ἡ ἀπόλυτη θερμοκρασία T καί ἡ ἀπόλυτη θερμοκρασία τῶν 0° C εἶναι τό $T_o = 273°$ K. Ἑπομένως, ἡ ἐξίσωση (1) γίνεται:

$$V = V_o\,\frac{T}{T_o} \qquad ἤ$$

$\dfrac{V}{T} = \dfrac{V_o}{T_o} = σταθ.$	*Νόμος Gay - Lussac*	(2)

Ἡ ἐξίσωση (2) ἐκφράζει τό νόμο τοῦ Gay - Lussac σύμφωνα μέ τόν ὁποῖο, **ὅταν ἡ πίεση εἶναι σταθερή. τό πηλίκον τοῦ ὄγκου ἰδανικοῦ ἀερίου διά τῆς ἀπόλυτης θερμοκρασίας εἶναι σταθερό.**

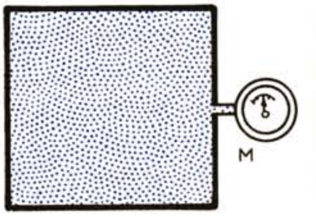
Σημείωση : Ἰδανικά καλοῦνται τά ἀέρια πού ἀκολουθοῦν ἀκριβῶς τό νόμο τοῦ Gay - Lussac.

Στήν πραγματικότητα ὅλα τά ἀέρια δέν ἀκολουθοῦν τό νόμο αὐτόν ἀκριβῶς, ἀλλά κατά μεγάλη προσέγγιση.

Ἐμεῖς θά χρησιμοποιοῦμε τούς νόμους τῶν ἀερίων, θεωρώντας τα σάν ἰδανικά.

β) **Μεταβολή τῆς πιέσεως ὑπό σταθερό ὄγκο - Νόμος Charles (Τσάρλς).**

Πείραμα: Θεωροῦμε δοχεῖο μέ σταθερά τοιχώματα (σχ. 14 · 7 γ). Ἕνα μανόμετρο Μ δείχνει τήν πίεση τοῦ ἀερίου σέ κάποια θερμοκρασία. Ἄν αὐξήσομε τή θερμοκρασία, μεγαλώνει ἡ ἔνδειξη τοῦ μανομέτρου. Ἀφοῦ τό δοχεῖο ἔχει σταθερά τοιχώματα, ὁ ὄγκος του δέν μεταβλήθηκε κατά τήν αὔξηση τῆς θερμοκρασίας.



Σχ. 14·7 γ.
Ἄν αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία στό ἀέριο τοῦ δοχείου, θά αὐξηθεῖ ἡ πίεση.

Ἑπομένως, ἔχομε ἐδῶ μεταβολή τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου, ἡ ὁποία ὀφείλεται στή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας.

Ἡ μεταβολή αὐτή ὀνομάζεται **ἰσόχωρη μεταβολή.**

Ἄν εἶναι $\Delta P = P - P_o$ ἡ μεταβολή τῆς πιέσεως, ἰσχύει γιά τήν ἰσόχωρη μεταβολή, ἡ ἐξίσωση:

$$\mathbf{P - P_o = \alpha\, P_o \cdot \theta} \qquad (1)$$

ὅπου: P_o εἶναι ἡ πίεση τοῦ ἀερίου στούς 0° C, P ἡ πίεση τοῦ ἀερίου στή θερμοκρασία θ καί α ὁ **συντελεστής θερμικῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως ὑπό σταθερό ὄγκο.**

Ὁ συντελεστής αὐτός α γιά τά ἰδανικά ἀέρια ἔχει τιμή ἴση μέ τήν τιμή τοῦ συντελεστῆ θερμικῆς μεταβολῆς τοῦ ὄγκου ὑπό σταθερή πίεση, δηλαδή:

$$\alpha = \frac{1}{273}\ \mathrm{grad}^{-1}.$$

Ἄλλη μορφή τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$P = P_o\,(1 + \alpha\,\theta)$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τό $\alpha = \dfrac{1}{273}$, θά γίνει:

$$P = P_o\left(1 + \frac{\theta}{273}\right) = P_o\left(\frac{(273 + \theta)}{273}\right) = \frac{P_o\,T}{T_o} \quad \text{ἤ}$$

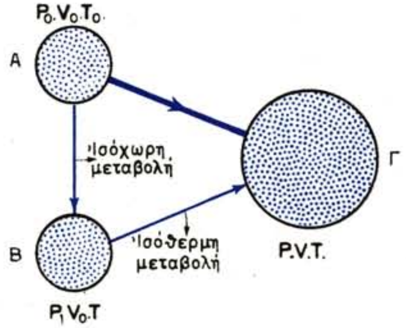
$\dfrac{P}{T} = \dfrac{P_o}{T_o} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$	*Νόμος Charles*	(2)

Ἡ ἐξίσωση (2) ἐκφράζει τό νόμο τοῦ Charles, ὁ ὁποῖος διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Ὑπό σταθερό ὄγκο, τό πηλίκον τῆς πιέσεως ἑνός ἰδανικοῦ ἀερίου διά τῆς ἀπόλυτης θερμοκρασίας του εἶναι σταθερό.

γ) **Μεταβολή πιέσεως, ὄγκου καί θερμοκρασίας — Νόμος Boyle - Mariotte, Gay - Lussac.** Ἔστω ὅτι ἕνα ἰδανικό ἀέριο ἔχει στούς 0°C πίεση P_o, ὄγκο V_o καί ἀπόλυτη θερμοκρασία T_o.

Μεταβάλλομε τήν πίεση, τόν ὄγκο καί τή θερμοκρασία τοῦ ἀερίου στίς τιμές P, V καί T, ἀντίστοιχα. Ἡ μεταβολή αὐτή μπορεῖ νά γίνει μέ δυό τρόπους, οἱ ὁποῖοι ἀπεικονίζονται στό σχῆμα 14 · 7 δ.



Σχ. 14·7 δ.

Μέ τόν πρῶτο τρόπο ἔχουμε κατευθείαν μετάβαση ἀπό τήν κατάσταση A (P_o, V_o, T_o) στήν τελική κατάσταση Γ (P, V, T).

Μέ τό δεύτερο τρόπο κάνουμε στήν ἀρχή μιά ἰσόχωρη μεταβολή τοῦ ἀερίου ἀπό τήν κατάσταση A στήν ἀντίστοιχη B καί ὕστερα ἰσόθερμη μεταβολή αὐτοῦ ἀπό τήν κατάσταση B στήν ἀντίστοιχη Γ.

Στήν ἰσόχωρη μεταβολή ἀπό A πρός B ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Charles:

$$\frac{P_1}{T} = \frac{P_o}{T_o} \quad ἤ \quad P_1 = \frac{P_o}{T_o} T \qquad (1)$$

Στήν ἰσόθερμη μεταβολή ἀπό B πρός Γ ἰσχύει ὁ νόμος Boyle - Mariotte (παράγρ. 8 · 4).

$$P_1 V_o = P V \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$\frac{P_o V_o T}{T_o} = P V \quad ἤ$$

$\frac{P V}{T} = \frac{P_o V_o}{T_o} = σταθ.$	*Νόμος Boyle - Mariotte — Gay-Lussac*	(3)

Ἡ ἐξίσωση (3) ἐκφράζει τό νόμο τῶν Boyle-Mariotte, Gay - Lussac, ὁ ὁποῖος διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Σέ ἕνα ἰδανικό ἀέριο, τό γινόμενο τῆς πιέσεως ἐπί τόν ὄγκο διά τῆς ἀπόλυτης θερμοκρασίας εἶναι σταθερό.

δ) **Ὁ Νόμος τοῦ Ντάλτον (Dalton).** Ὁ νόμος αὐτός διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν ἀναμείξομε δυό ἤ περισσότερα ἀέρια, τά ὁποῖα δέν ἀντιδροῦν χημικά μεταξύ τους, ἡ ὁλική πίεση πού ἐξασκοῦν, εἶναι τό ἄθροισμα τῶν μερικῶν πιέσεων κάθε ἀέριου.

Μερική πίεση εἶναι ἡ πίεση, πού θά ἀσκοῦσε τό κάθε ἀέριο ἄν μόνο του καταλάμβανε τόν ὄγκο τοῦ μείγματος τῶν ἀερίων μέ τήν ἴδια θερμοκρασία τοῦ μείγματος.

Ἔτσι μέ τό Νόμο τοῦ Dalton θά ἐξετάζομε τό κάθε ἀέριο σάν ἀνεξάρτητο ἀπό τά ἄλλα ἀέρια, πού θά συνυπάρχουν τυχόν στόν ἴδιο χῶρο.

Ἐφαρμογή. Ἔστω δύο ἀέρια Α καί Β, τά ὁποῖα, ὅταν ἀναμειγνύονται, δέν ἀντιδροῦν χημικά.

Τό ἀέριο Α κατέχει ὄγκο $V_1 = 2\ m^3$, ἔχει πίεση $P_1 = 0{,}4$ At καί θερμοκρασία $\theta_1 = 40°\ C$.

Τό ἀέριο Β κατέχει ὄγκο $V_2 = 0{,}7\ m^3$, ἔχει πίεση $P_2 = 6$ At καί θερμοκρασία $\theta_2 = 10°\ C$.

Ἀναμιγνύομε τά δυό ἀέρια στό χῶρο γ ὄγκου $V = 3\ m^3$ καί τό ἀέριο μεῖγμα ψύχεται στούς $0°\ C$.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τελική πίεση τοῦ μείγματος.

Λύση:

Ἐξετάζομε κάθε ἀέριο χωριστά:

Ἀρχίζομε μέ τό ἀέριο Α καί τό μεταφέρομε ἀπό τίς συνθῆκες (α) (σχ. 14 · 7 ε) στίς συνθῆκες (γ).

Ἔστω P_α ἡ πίεση πού ἀποκτᾶ τό ἀέριο Α στό χῶρο (γ).

Ἐφαρμόζομε τό Νόμο Boyle - Mariotte, Gay Lussac:

$$\frac{P_\alpha V}{T} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \quad \text{ἤ}$$

$$P_\alpha = \frac{P_1 V_1 T}{V T_1} \qquad (1)$$

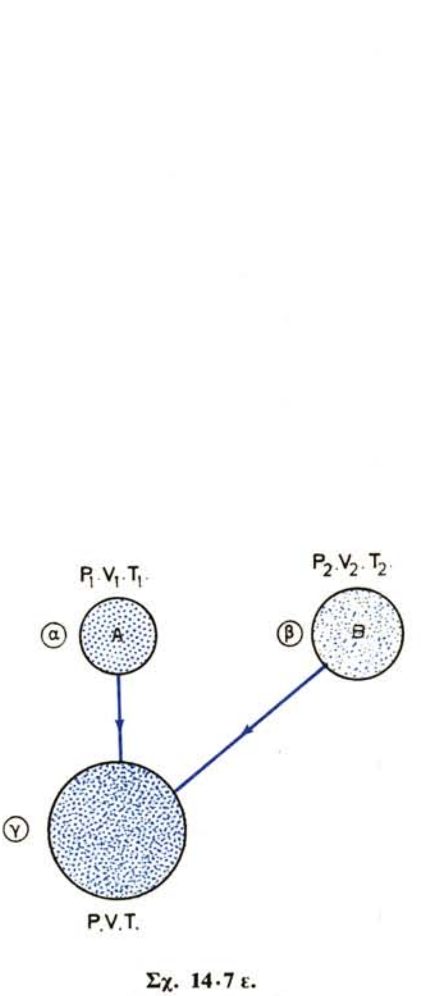
Ἔστω ὅτι ἡ πίεση τοῦ ἀερίου Β στό χῶρο (γ) εἶναι P_β.

Ἐφαρμόζομε τό νόμο τῶν Boyle - Mariotte, Gay - Lussac:

$$\frac{P_\beta V}{T} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{ἤ}$$

$$P_\beta = \frac{P_2 V_2 T}{V T_2} \qquad (2)$$

Στό χῶρο (γ) ἔχομε δυό ἀέρια πού ἐξασκοῦν μερι-



Σχ. 14·7 ε.
Ἐφαρμογή στό νόμο τοῦ Dalton.

κές πιέσεις P_α καί P_β. Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Dalton (Ντάλτον), γιά τό χῶρο (γ) θά εἶναι:

Ὁλική πίεση = μερική πίεση ἀερίου A + μερική πίεση ἀερίου B

$$P = P_\alpha + P_\beta$$

ἤ

$$P = \frac{P_1 V_1 T}{V T_1} + \frac{P_2 V_2 T}{V T_2}$$

Ἀντικατάσταση:

$$P = \frac{0,4\ \text{At} \cdot 2\text{m}^3 \cdot 273^\circ \text{K}}{3\text{m}^3 \cdot (273 + 40)^\circ \text{K}} +$$

$$+ \frac{6\ \text{At} \cdot 0,7\text{m}^3 \cdot 273^\circ \text{K}}{3\text{m}^3 \cdot (273 + 40)^\circ \text{K}} = 1,58\ \text{Atm}.$$

Ἀπάντηση: Ἡ ὁλική πίεση θά εἶναι 1,58 Atm.

ε) **Κινητική θεωρία τῆς θερμότητας.** Σύμφωνα μέ τήν κινητική θεωρία τῆς θερμότητας, μποροῦμε νά ἐξηγήσομε ὅλους τούς νόμους τῶν τελείων ἀερίων, παραδεχόμενοι ὅτι τά μόρια τῶν ἀερίων βρίσκονται σέ συνεχή κίνηση.

1) **Ὑπόθεση Ἀβογκάντρο (Avogadro). Ἄν δυό ἀέρια βρίσκονται κάτω ἀπό τίς ἴδιες συνθῆκες πιέσεως καί θερμοκρασίας καί ἔχουν ἴσους ὄγκους, θά ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμό μορίων.** Ἔτσι, ἐπειδή κάθε γραμμομόριο (Mol) ἔχει τόν ἴδιο ἀριθμό μορίων [τόν ἀριθμό $N = 6,025 \cdot 10^{23}$ μόρια/Mol], ὁποιοδήποτε γραμμομόριο ἀερίου, σέ ἴδιες συνθῆκες πιέσεως καί θερμοκρασίας ἔχει τόν ἴδιο ὄγκο (γραμμομοριακός ὄγκος).

Ὁ ὄγκος αὐτός σέ κανονικές συνθῆκες (0° C καί 760 mm Hg) εἶναι 22,4 Atm.

2) **Μέση κινητική ἐνέργεια μορίων ἑνός ἀερίου.** Ὅπως ἔχομε ἀναφέρει καί πρίν, τά μόρια τῶν ἀερίων κινοῦνται μέ διάφορες ταχύτητες.

Ἡ μέση κινητική ἐνέργεια τῶν μορίων $\bar{E}_{\kappa\iota\nu}$ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\bar{E}_{\kappa\iota\nu} = \frac{3}{2}\,\text{k}\,\text{T}}$$

ὅπου: T ἡ ἀπόλυτη θερμοκρασία καί k παγκόσμια σταθερά, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **σταθερά τοῦ Μπόλτζμαν** (Boltzmann) καί ἰσοῦται μέ $1,38 \cdot 10^{-23}$ joule/grad.

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή συνάγεται ὅτι **ἡ θερμοκρασία (ἀπόλυτη) εἶναι ἀνάλογη μέ τήν μέση κινητική ἐνέργεια τῶν μορίων κάθε ἀερίου.**

3) **Αἴτιο τῆς πιέσεως ἑνός ἀερίου.** Κατά τήν κίνησή τους τά μόρια τῶν ἀερίων συγκρούονται μέ τά τοιχώματα τῶν δοχείων στά ὁποῖα περιέχονται. Ἡ κρούση αὐτή εἶναι **ἐλαστική.**

Ἀποτέλεσμα τῆς συγκρούσεως εἶναι ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς τῶν μορίων τοῦ ἀερίου.

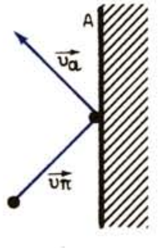
Δηλαδή : $\overrightarrow{\Delta J} = m\,\overrightarrow{\Delta \upsilon}$

Ἑπομένως, κάθε μόριο ἐξασκεῖ μιά δύναμη στό τοίχωμα:

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta J}}{\Delta t} = \frac{m\,\overrightarrow{\Delta \upsilon}}{\Delta t} = \frac{m(\vec{\upsilon}_\alpha - \vec{\upsilon}_\pi)}{\Delta t}$$

Ἄν ὑπολογίσομε τή συνισταμένη τῶν δυνάμεων, πού ἐξασκοῦνται στό τοίχωμα Α (σχ. 14 · 7 στ) καί τή διαιρέσομε μέ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, ὑπολογίζομε τήν πίεση P τοῦ ἀερίου.

Μέ ἀνάλογους συλλογισμούς μποροῦμε νά ἐξηγήσομε πλήρως τούς νόμους τῶν τελείων ἀερίων.



Σχ. 14·7 στ.

στ) **Ὁρισμοί.**

Ἀτομικό βάρος στοιχείου ὀνομάζεται τό πηλίκον τῆς μάζας τοῦ ἀτόμου τοῦ στοιχείου πρός τό 1/12 τῆς μάζας τοῦ ἀτόμου τοῦ ἄνθρακα.

Μοριακό βάρος στοιχείου ἤ ἑνώσεως λέγεται τό πηλίκον τῆς μάζας τοῦ μορίου πρός τό 1/12 τῆς μάζας τοῦ ἀτόμου τοῦ ἄνθρακα.

Γραμμοάτομο στοιχείου (συμβολισμός **grat**) λέγεται μάζα τόσων γραμμαρίων τοῦ στοιχείου, ὅσο εἶναι τό ἀτομικό του βάρος.

Γραμμομόριο σώματος (συμβολισμός **Mol**) λέγεται μάζα τοῦ σώματος τόσων γραμμαρίων ὅσο εἶναι τό μοριακό του βάρος.

Γραμμομοριακός ὄγκος ἀερίου λέγεται ὁ ὄγκος, τόν ὁποῖο κατέχει τό γραμμομόριο ἑνός ἀερίου σώματος. Ὁ ὄγκος αὐτός, ὅπως εἴπαμε [παράγρ. 14 · 7 (1)] εἶναι σταθερός καί **ἴσος πρός 22,4 *lt*** σέ κανονικές συνθῆκες πιέσεως καί θερμοκρασίας, δηλαδή σέ πίεση $P_o = 760$ mm Hg καί θερμοκρασία $\theta = 0°C$.

Σταθερά τοῦ Loschmidt (Λόσμιτ) (συμβολισμός **N**) εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μορίων σέ κάθε γραμμομόριο (Mol), πού ὅπως εἴπαμε [παράγρ. 14 · 7 (1)], εἶναι:

$$N = 6{,}025 \cdot 10^{23} \text{ Μόρια/Mol.}$$

ζ) **Καταστατική ἐξίσωση τῶν τελείων ἀερίων.** Ἔστω ὅτι η γραμμομόρια ἑνός τελείου ἀερίου βρίσκονται σέ κανονικές συνθῆκες. Βρίσκονται δηλαδή, ὑπό πίεση $P_o = 1$ Atm καί θερμοκρασία $\theta = 0°$ C.

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου V_o, πού ἀποτελεῖται ἀπό αὐτά τά γραμμομόρια, θά εἶναι:

$$V_o = \eta \, V_{Mol} \qquad (1)$$

ὅπου: V_{Mol} ὁ μοριακός ὄγκος σέ κανονικές συνθῆκες $= 22{,}4$ *lt*.

Ἄν μεταβάλλομε τήν πίεση, τόν ὄγκο καί τή θερμοκρασία τοῦ ἀερίου στίς τιμές P, V καί T, μποροῦμε νά ἐφαρμόσομε τό νόμο Boyle - Mariotte, Gay Lussac καί νά γράψομε τήν ἐξίσωση:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P_o\,V_o}{T_o}$$

Ἀπό αὐτή καί ἀπό τήν (1) προκύπτει:

$$\frac{P\,V}{T} = \eta\,\frac{P_o\,V_{Mol}}{T_o}. \qquad (2)$$

Στήν ἐξίσωση (2) τό πηλίκον $\dfrac{P_o\,V_{Mol}}{T_o}$ εἶναι σταθερό καί γι' αὐτό τό ἀντικαθιστοῦμε μέ τή σταθερά R.

Τότε ἡ ἐξίσωση (2) γίνεται:

$$\frac{P\,V}{T} = \eta\,R \qquad \text{ἤ}$$

$P\,V = \eta\,R\,T$	*Καταστατική ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων*

Ἡ σταθερά R ὀνομάζεται **παγκόσμια σταθερά τῶν ἀερίων.**

— **Ὑπολογισμός τῆς σταθερᾶς R.**

Ἐπειδή $R = \dfrac{P_o\,V_{Mol}}{T_o}$ καί $P_o = 1$ At, $V_{Mol} = 22{,}4$ *lt*. Καί $T_o = 273$ grad, θά ἔχουμε:

$$R = \frac{1 \text{ Atm} \cdot 22{,}4 \, lt}{273 \text{ grad}} = 0{,}0821 \, \frac{lt\,\text{Atm}}{\text{grad}} \qquad \text{ἤ}$$

$$\boxed{R = 0{,}0821 \ \frac{lt\ Atm}{grad}}$$

Ἐφαρμογές.

1. Μάζα 5 g ὀξυγόνου βρίσκεται ὑπό πίεση P = = 450 torr καί θερμοκρασία 47° C. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος τῆς μάζας αὐτῆς τοῦ ὀξυγόνου.

Λύση:

Χρησιμοποιοῦμε τήν καταστατική ἐξίσωση τῶν ἀερίων:

$$P\,V = \eta\,R\,T \qquad \text{ἤ} \qquad V = \frac{\eta\,R\,T}{P}.$$

Δίνονται: $P = 450 \text{ torr} = \frac{450}{760} \text{ Atm} = 0{,}6 \text{ Atm}.$

Ἐπειδή τό γραμμομόριο τοῦ ὀξυγόνου εἶναι $m_{Mol} =$ $= 32$ g, ὁ ἀριθμός τῶν γραμμομορίων η, πού περιέχεται σέ μάζα ὀξυγόνου $m_{O_2} = 5$ g, εἶναι:

$$\eta = \frac{m_{O_2}}{m_{Mol}} = \frac{5\text{ g}}{32\text{ g}} = 0{,}156$$

Ἐπίσης $\qquad R = 0{,}0821 \ \frac{lt\,\text{Atm}}{\text{grad}}$

καί $\qquad T = 273 + \theta = 273 + 47 = 320$ grad.

Ἀντικατάσταση:

$$V = \frac{0{,}156 \cdot 0{,}0821 \ \frac{\text{lt Atm}}{\text{grad}} \cdot 320 \text{ grad}}{0{,}6 \ \ \text{Atm}} = 6{,}82\ lt$$

Ἀπάντηση: Ὁ ὄγκος τοῦ ὀξυγόνου θά εἶναι 6,82 *lt*.

2. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ἀριθμός τῶν μορίων ἀερίου, τό ὁποῖο βρίσκεται σέ συνθῆκες πιέσεως καί θερμοκρασίας $P = 5$ Atm καί $\theta = 100°$ C καί ἔχει ὄγκο $V = 3$ m^3.

Λύση:

Στήν καταστατική ἐξίσωση τῶν ἀερίων:

$P\,V = \eta\,R\,T$ λύνουμε ὡς πρός η:

$$\eta = \frac{P\,V}{R\,T}$$

Ἐπειδή $P = 5$ Atm, $V = 3$ m$^3 = 3000$ *lt*, $R = 0{,}0821$

$\frac{lt\,Atm}{grad}$ καί $T = 0 + 273 = 100 + 273 = 373°\,K$,

ὑπολογίζομε τό η:

$$\eta = \frac{5\,Atm \cdot 3000\,lt}{0{,}081\,\frac{lt\,Atm}{grad} \cdot 373\,grad} = 496.$$

Ὁ ἀριθμός ἑπομένως τῶν γραμμομορίων (Mol) πού ὑπάρχουν σ' αὐτό τό ἀέριο εἶναι 496.

Ἐπειδή σέ κάθε γραμμομόριο ὑπάρχουν $N = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ μόρια, τό σύνολο τῶν μορίων, πού ὑπάρχουν στό ἀέριο αὐτό, θά εἶναι $496 \cdot 6{,}025 \cdot 10^{23} \simeq 3 \cdot 10^{27}$ μόρια.

η) **Μεταβολή τῆς πυκνότητας ἀερίου μέ τήν πίεση καί τή θερμοκρασία.** Ἔστω ὅτι μιά μάζα m ἀερίου κατέχει ὄγκο V ὑπό πίεση P καί ἀπόλυτη θερμοκρασία T. Ἡ πυκνότητα τοῦ ἀερίου θά εἶναι:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1}$$

Τό ἴδιο ἀέριο θά ἔχει ὄγκο V_o, ὅταν οἱ συνθῆκες πιέσεως καί θερμοκρασίας εἶναι κανονικές (P_o καί T_o), ἡ δέ πυκνότητα τοῦ ρ_o θά εἶναι:

$$\rho_o = \frac{m}{V_o} \tag{2}$$

Ἀπό τό νόμο τῶν Boyle - Mariotte, Gay - Lussac θά ἔχομε:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P_o\,V_o}{T_o}.$$

$$V = \frac{P_o}{P}\,\frac{T}{T_o}\,V_o \tag{3}$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (3) προκύπτει ὅτι:

$$\rho = \frac{m\,P\,T_o}{V_o\,P_o\,T}$$

καί ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τή (2) γίνεται:

$$\boxed{\rho = \rho_o\,\frac{P\,T_o}{P_o\,T}}$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή προκύπτει ὅτι ἡ πυκνότητα τῶν ἀερίων μεταβάλλεται, ὅταν μεταβάλλονται ἡ πίεση καί ἡ θερμοκρασία.

Ἐφαρμογή. Σέ κανονικές συνθῆκες, ἡ πυκνότητα τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα εἶναι: $\rho = 1{,}29\ kg/m^3$.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα σέ πίεση $P = 5$ Atm καί θερμοκρασία $27°$ C.

Λύση :

Ἡ πυκνότητα ρ βρίσκεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\rho = \rho_o \frac{P\,T_o}{P_o\,T}$$

Ἀντικαθιστοῦμε:

$$\rho = 1{,}29 \frac{kg}{m^3},\ P = 5\ Atm,\ P_o = 1\ Atm,$$

$$T_o = 273°K,$$

$$T = 273 + \theta = 273 + 27 = 300°K \quad \text{καί}$$

ἔχουμε:

$$\rho = 1{,}29\ \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{5\ Atm \cdot 273\ K}{1\ Atm \cdot 300°K} = 5{,}87\ \frac{kg}{m^3}.$$

Ἀπάντηση : Ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα σέ πίεση 5 Atm καί θερμοκρασία $27°$ C θά εἶναι $5{,}87\ kg/m^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑ

Ἡ Θερμιδομετρία ἀσχολεῖται βασικά μέ τήν μέτρηση τῆς θερμότητας.

Θερμότητα εἶναι, ὅπως ἀναφέραμε καί στήν παράγραφο 13.2, μιά μορφή ἐνέργειας. Ἑπομένως, μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τή μέτρησή της οἱ μονάδες ἔργου (Joule, erg, kpm, kWh κ.λπ.).

Ἐξυπηρετεῖ, ὅμως, νά καθορίσουμε μιά νέα μονάδα γιά τή θερμότητα, τήν ὁποία ὀνομάζουμε **θερμίδα** (calorie).

Θερμίδα (cal) εἶναι τό ποσόν τῆς θερμότητας πού χρειάζεται νά δοθεῖ σέ 1 g νεροῦ ἀποσταγμένου γιά νά ἀνέβει ἡ θερμοκρασία του ἀπό 14,5° C στούς 15,5° C (δηλαδή κατά 1 grad).

Πολλαπλάσια μονάδα τῆς θερμίδας εἶναι ἡ χιλιοθερμίδα (kcal).

15.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ἄν σ' ἕνα σῶμα προσφέρουμε ἕνα ποσό θερμότητας Q αὐξάνει ἡ θερμοκρασία του θ κατά Δθ βαθμούς.

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Θερμιδομετρίας λέει ὅτι **τό ποσό τῆς θερμότητας πού πρέπει νά προστεθεῖ ἤ νά ἀφαιρεθεῖ ἀπό ἕνα σῶμα γιά νά αὐξηθεῖ ἤ νά ἐλαττωθεῖ ἡ θερμοκρασία του κατά Δθ βαθμούς, εἶναι ἀνάλογο πρός τή μάζα τοῦ σώματος m καί ἀνάλογο πρός τήν αὔξηση ἤ ἐλάττωση τῆς θερμοκρασίας, ἀντίστοιχα.**

Ὁ νόμος αὐτός ἀποδίδεται μέ τήν ἐξίσωση:

$Q = c\, m\, \Delta\theta$	*Θεμελιώδης Νόμος τῆς Θερμιδομετρίας*	(1)

Ὁ συντελεστής c ὀνομάζεται **εἰδική θερμότητα** καί εἶναι μιά σταθερά, ἡ ὁποία **ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑλικό τοῦ σώματος.**

Ἄν λύσουμε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός c, προκύπτει:

$$c = \frac{Q}{m\, \Delta\theta}$$

Ἄν m = 1 g καί Δθ = 1 grad, τότε:

$$c = \frac{Q}{1\ g \cdot 1\ grad}.$$

Συνεπῶς, **ἡ εἰδική θερμότητα σώματος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μέ τό ποσό τῆς θερμότητας πού χρειάζεται νά δοθεῖ σέ 1 g τοῦ σώματος γιά νά αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία του κατά 1 grad.**

— Μονάδα εἰδικῆς θερμότητας.

Ἄν Q = 1 cal, m = 1 g καί Δθ = 1 grad

θά ἔχουμε: $$c = \frac{Q}{m\,\Delta\theta} = \frac{1\ cal}{1\ g \cdot 1\ grad}.$$

Ἑπομένως, μιά μονάδα εἰδικῆς θερμότητας εἶναι ἡ $\frac{1\ cal}{g \cdot grad}$.

Μπορεῖ ἐπίσης νά χρησιμοποιηθεῖ ἡ μονάδα $\frac{1\ kcal}{kg \cdot grad}$.

Στό σύστημα S. I. ἡ μονάδα εἰδικῆς θερμότητας εἶναι: Joule/kg · grad.

Στόν Πίνακα 15 · 1 · 1 ἀναγράφονται οἱ εἰδικές θερμότητες μερικῶν σωμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 15 · 1 · 1.

Εἰδικές θερμότητες στερεῶν καί ὑγρῶν σωμάτων

Σῶμα	Εἰδική θερμότ. $\frac{kcal}{kg \cdot grad}$	Σῶμα	Εἰδική θερμότ. $\frac{kcal}{kg \cdot grad}$
Μόλυβδος	0,031	Ὀρείχαλ.	0,093
Λευκόχρ.	0,032	Σίδηρος	0,110
Ὑδράργ.	0,033	Πάγος	0,5
Ἄργυρος	0,055	Νερό	1
Χαλκός	0,091	Οἰνόπν.	0,58
Ἀργίλιο	0,214	Γυαλί	0,19

15 . 2 ΘΕΡΜΟΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΩΜΑΤΟΣ (K)

Ὀνομάζομε θερμοχωρητικότητα σώματος K τό γινόμενο τῆς μάζας τοῦ σώματος m ἐπί τήν εἰδική θερμότητά του c. Δηλαδή:

$$K = m\,c$$

Ἄν στή θεμελιώδη ἐξίσωση τῆς θερμιδομετρίας Q = m c Δθ ἀντικαταστήσουμε m c = K, θά ἔχουμε:

$$Q = K\,\Delta\theta \quad \text{ἤ} \quad K = \frac{Q}{\Delta\theta}.$$

Ἔστω ὅτι σέ ἕνα σῶμα προσθέτουμε ποσό θερμότητας Q τόσο, ὥστε νά αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία του κατά Δθ = 1 grad.

Τότε: $$K = \frac{Q}{1\ grad}.$$

Ἑπομένως, ἡ θερμοχωρητικότητα σώματος ἰσοῦται ἀριθμητικά, μέ τό ποσό τῆς θερμότητας πού χρειάζεται ἕνα σῶμα γιά νά αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία του κατά 1 grad.

Ἔτσι, ὅσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ θερμοχωρητικότητα τοῦ σώματος, τόσο πιό πολλή θερμότητα χρειάζεται γιά νά αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία του κατά ἕνα βαθμό. Μέ ἄλλα λόγια **ὅσο μεγαλώνει ἡ θερμοχωρητικότητα τοῦ σώματος, τόσο πιό δύσκολα θερμαίνεται.**

Χαρακτηριστικό εἶναι τό γεγονός ὅτι τό νερό ἔχει πολύ μεγαλύτερη εἰδική θερμότητα ἀπό πολλά ἄλλα σώματα καί γι' αὐτό ἡ θερμοχωρητικότητα τῶν θαλασσῶν εἶναι μεγάλη. Ἔτσι ἐξηγεῖται τό γεγονός ὅτι δυσκολότερα θερμαίνεται καί δυσκολότερα ψύχεται ἡ θάλασσα σχετικά μέ τήν ξηρά.

Σημείωση : Ἄν, ἀντί γιά ἕνα σῶμα, ἔχουμε πολλά σώματα, πού ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα, ἡ ὁλική θερμοχωρητικότητα K εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν θερμοχωρητικοτήτων τῶν σωμάτων τοῦ συστήματος:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 \ldots$$

15 · 3 ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΑ

Τά θερμιδόμετρα εἶναι συσκευές, μέ τίς ὁποῖες μετροῦμε ποσά θερμότητας καί εἰδικές θερμότητες σωμάτων.

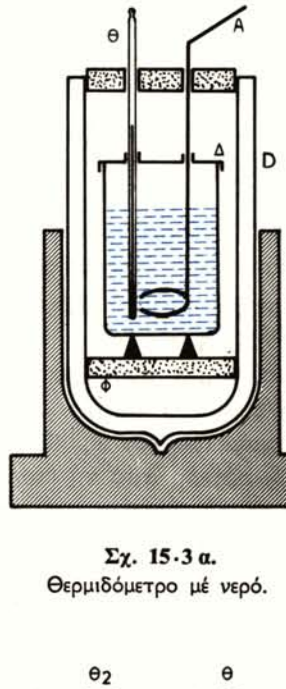
Περιγραφή. Τό θερμιδόμετρο ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα δοχεῖο Δ (σχ. 15 · 3 α), πού τοποθετεῖται μέσα σέ ἕνα ἄλλο δοχεῖο D μέ γυάλινα διπλά τοιχώματα ἐπαργυρωμένα καί ἐσωτερικά κενά. Τό δοχεῖο Δ στηρίζεται σέ φελλό Φ καί τό ἐξωτερικό δοχεῖο D σκεπάζεται ἐπίσης μέ φελλό Φ.

Μέ τόν τρόπο αὐτό διασφαλίζεται ἡ **θερμική μόνωση τοῦ δοχείου Δ.**

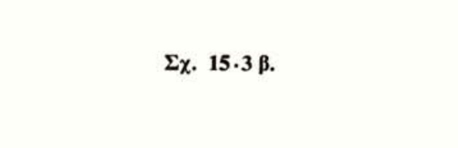
Σημείωση : Ἕνα σῶμα μονώνεται θερμικά, ὅταν δέν εἶναι δυνατό νά πάρει ἀπό τό γύρω χῶρο, ἀλλά οὔτε καί νά δώσει σ' αὐτόν, θερμότητα.

Στό δοχεῖο Δ τοποθετοῦμε μιά ποσότητα νεροῦ ἀποσταγμένου. Ἕνα θερμόμετρο Θ μᾶς δείχνει τή θερμοκρασία θ, ἐνῶ μέ τόν **ἀναδευτήρα** A ἀναδεύουμε τό νερό, ὥστε νά πετύχουμε τήν ἴδια θερμοκρασία σ' ὅλη τή μάζα του.

α) **Μέτρηση εἰδικῆς θερμότητας μέ τή μέθοδο τῶν μειγμάτων.** Ἔστω ὅτι δυό σώματα Σ_1 καί Σ_2 (σχ. 15 · 3 β) εἶναι θερμικά μονωμένα ἀπό τό γύρω χῶρο καί ὅτι μποροῦν νά ἀνταλλάξουν ποσά θερμότητας. Ἄν ἡ θερμοκρασία Θ_1 τοῦ σώματος Σ_1 εἶναι πιό μεγάλη



Σχ. 15·3 α.
Θερμιδόμετρο μέ νερό.



Σχ. 15·3 β.

ἀπό τή θερμοκρασία θ_2 τοῦ σώματος Σ_2, τότε, ἕνα ποσό θερμότητας Q μεταφέρεται ἀπό τό σῶμα Σ_1 στό σῶμα Σ_2, μέ ἀποτέλεσμα τό σῶμα Σ_1 νά ψυχθεῖ καί τό σῶμα Σ_2 νά θερμανθεῖ. Τελικά, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 15 · 3 β (β), καί τά δυό σώματα θά ἀποκτήσουν τήν ἴδια θερμοκρασία θ, ἡ ὁποία βρίσκεται ἀνάμεσα στίς θερμοκρασίες θ_1 καί θ_2.

Γιά τήν περίπτωσή μας ἰσχύει ὅτι : **τό ποσό τῆς θερμότητας πού ἔχασε τό σῶμα Σ_1, εἶναι ἴσο μέ τό ποσό τῆς θερμότητας πού πῆρε τό σῶμα Σ_2.**

Ἄν m_1, c_1 εἶναι ἡ μάζα καί ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ σώματος Σ_1, καί m_2, c_2 ἡ μάζα καί ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ σώματος Σ_2, θά ἔχουμε:

Ποσό θερμότητας πού ἔχασε τόσ ὦμα:

$$\Sigma_1 = m_1 c_1 (\theta_1 - \theta)$$

καί ποσό θερμότητας πού πῆρε τό σῶμα:

$$\Sigma_2 = m_2 c_2 \ (\theta - \theta_2).$$

Ἀλλά τά δυό αὐτά ποσά πρέπει νά εἶναι ἴσα.

Ἑπομένως:

$$\boxed{m_1 c_1 (\theta_1 - \theta) = m_2 c_2 (\theta - \theta_2)} \qquad (1)$$

Ἡ μέθοδος τῶν μειγμάτων στηρίζεται στήν ἐξίσωση αὐτή. Ἔστω ὅτι θέλουμε νά μετρήσουμε τήν εἰδική θερμότητα τοῦ χαλκοῦ Cu μέ ἕνα θερμιδόμετρο θερμοχωρητικότητας K.

Παίρνουμε μιά μάζα χαλκοῦ m_{Cu} καί τή θερμαίνουμε σέ θερμοκρασία θ_1.

Τό θερμόμετρο τοῦ θερμιδομέτρου δείχνει θερμοκρασία θ_2, μικρότερη ἀπό τή θερμοκρασία θ_1.

Βάζουμε τό κομμάτι τοῦ χαλκοῦ μέσα στό νερό τοῦ θερμιδομέτρου. Μέ τόν ἀναδευτήρα ἐξισώνουμε τή θερμοκρασία τοῦ μείγματος: νερό θερμιδομέτρου - χαλκός.

Ἔστω ὅτι θ εἶναι ἡ τελική θερμοκρασία τοῦ μείγματος. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1), θά ἔχουμε:

$$m_u \, c_{Cu} \, (\theta_1 - \theta) = K \, (\theta - \theta_2).$$

Ἑπομένως, ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ χαλκοῦ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$c_{Cu} = \frac{K \, (\theta - \Theta_2)}{m_{Cu} \, (\Theta_1 - \Theta)} \qquad (2)$$

β) **Εὕρεση τῆς θερμοχωρητικότητας θερμιδομέτρου.**

Ἐφαρμογές.

1. Ἕνα θερμιδόμετρο δείχνει θερμοκρασία $\theta_1 = 20°$ C. Θερμαίνουμε νερό μάζας $m = 50\,g$ στή θερμοκρασία $\theta_2 = 80°$ C καί τό ρίχνουμε μέσα στό θερμιδόμετρο.

Τότε, ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου γίνεται $\theta = 25°$ C.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ θερμοχωρητικότητα τοῦ θερμιδομέτρου.

Λύση:

Ἔστω K ἡ ζητούμενη θερμοχωρητικότητα τοῦ θερμιδομέτρου.

Τό ποσό τῆς θερμότητας, πού πῆρε τό θερμιδόμετρο ἀπό τά 50 g θερμοῦ νεροῦ, εἶναι:

$$K\,(\theta - \theta_1) \qquad (1)$$

ἐνῶ τό ποσό τῆς θερμότητας πού ἔδωσαν τά 50 g νεροῦ 80° C στό θερμιδόμετρο εἶναι:

$$m\,c_{H_2O}\,(\theta_2 - \theta) \qquad (2)$$

Ἐξισώνουμε τίς (1) καί (2) καί ἔχουμε:

$$K\,(\theta - \theta_1) = m\,c_{H_2O}\,(\theta_2 - \theta)$$

ἤ $$K = \frac{m\,c_{H_2O}\,(\theta_2 - \theta)}{\theta - \theta_1}.$$

Ἀντικατάσταση:

$$K = \frac{50\,g \cdot 1\,\frac{cal}{g \cdot grad} \cdot (80 - 25)\ grad)}{5\ grad} = 550\ cal/grad.$$

Σημείωση. Μέ τήν παραπάνω μέθοδο βρίσκουμε τή θερμοχωρητικότητα τοῦ θερμιδομέτρου, ὅση ἦταν πρίν ρίξουμε τά 50 g νεροῦ. Δέν εἶναι ὅμως εὔκολο νά ἀπομακρύνουμε τά 50 g νεροῦ ἀπό τό θερμιδόμετρο μετά τή μέτρηση τῆς θερμοχωρητικότητάς του. Γι' αὐτό ἀφήνουμε μέσα τό νερό καί λέμε ὅτι ἡ θερμοχωρητικότητα τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι αὐτή πού εἶχε (550 cal/grad) σύν τή θερμοχωρητικότητα τῶν 50 g νεροῦ, ἡ ὁποία εἶναι:

$$K_{νερ} = m\,c = 50\,g \cdot 1\ cal/g \cdot grad = 50\ cal/grad.$$

Ἔτσι τό θερμιδόμετρο, μετά τή μέτρηση, θά ἔχει χωρητικότητα: $550 + 50 = 600$ cal/grad.

2. Σέ θερμιδόμετρο θερμοχωρητικότητας $K = 600$ cal/grad καί ἀρχικῆς θερμοκρασίας $\theta_2 = 20°$ C τοποθετοῦμε σῶμα μάζας $m = 100$ g καί θερμοκρασίας $\Theta_1 = 100°$ C. Μετά τήν ἐξίσωση τῶν θερμοκρασιῶν, τό μεῖγμα ἀποκτᾶ θερμοκρασία $\theta = 22°$ C.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ σώματος.

Λύση :

Σύμφωνα μέ τόν τύπο (2) τῆς παραγράφου 15 · 3(α)

ἔχουμε : $$c_x = \frac{K\,(\Theta - \Theta_2)}{m\,(\Theta_1 - \Theta)}.$$

Ἀντικατάσταση :

$$c_x = \frac{600\,\frac{\text{cal}}{\text{grad}} \cdot (22-20)\,\text{grad}}{100\,\text{g} \cdot (100-22)\,\text{grad}} = 0{,}154\,\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}.$$

15 · 4 ΑΤΟΜΙΚΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ – ΝΟΜΟΣ DULONG ΚΑΙ PETIT

Τό γινόμενο τοῦ γραμμοατόμου (grat) ἑνός στοιχείου ἐπί τήν εἰδική θερμότητά του, ὀνομάζεται **ἀτομική θερμότητα.**

$$\boxed{K_A = A\,c}$$

ὅπου: K_A ἡ ἀτομική θερμότητα τοῦ στοιχείου, σέ cal/grad, A τό γραμμοάτομο τοῦ στοιχείου σέ grat, καί c ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ στοιχείου, σέ cal / g · grad.

Ὁ νόμος Dulong καί Petit λέει ὅτι, στή συνήθη θερμοκρασία ἡ ἀτομική θερμότητα εἶναι σταθερή καί ἔχει τιμή περίπου ἴση μέ 6 cal/grad.

Στόν Πίνακα 15 · 4 · 1 ἀναγράφονται γιά παράδειγμα οἱ ἀτομικές θερμότητες ὁρισμένων στοιχείων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 15 · 4 · 1.

Ἀτομικές θερμότητες στοιχείων

Στοιχεῖο	Γραμμοάτομο g	Εἰδική θερμότ. cal/g · grad	Ἀτομική θερμότ. cal/grad
Pt	195	0,032	6,24
Cu	63,5	0,093	5,9
Fe	56	0,110	6,16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

16 · 1 ΤΗΞΗ - ΠΗΞΗ

Ἡ μετάβαση ἑνός σώματος ἀπό τή στερεή στήν ὑγρή κατάσταση ὀνομάζεται **τήξη,** ἐνῶ τό ἀντίστροφό της ὀνομάζεται **πήξη.**

α) **Πείραμα.** Σ' ἕνα δοκιμαστικό γυάλινο σωλήνα Δ (σχ. 16 · 1 α) τοποθετοῦμε κρυσταλλική ναφθαλίνη καί παρακολουθοῦμε τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας της μέ τό θερμόμετρο θ. Τοποθετοῦμε τό σωλήνα σέ ζεστό νερό θερμοκρασίας 100° C καί σημειώνουμε τίς ἐνδείξεις t τοῦ χρονομέτρου X καί τοῦ θερμομέτρου θ.

Ἔτσι σχηματίζουμε τή γραφική παράσταση τοῦ σχήματος 16 · 1 β, μέ τή βοήθεια τῆς ὁποίας παρακολουθοῦμε τήν ἐξέλιξη τοῦ φαινομένου.

Στό τμῆμα ΑΒ τῆς καμπύλης, ἡ θερμοκρασία αὐξάνει μέ τό χρόνο. Πράγματι, τό ζεστό νερό δίνει στήν κρυσταλλική ναφθαλίνη θερμότητα, ἡ ὁποία τῆς ἀνεβάζει τή θερμοκρασία, σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς Θερμιδομετρίας:

$$Q = m\,c\,\Delta\theta$$

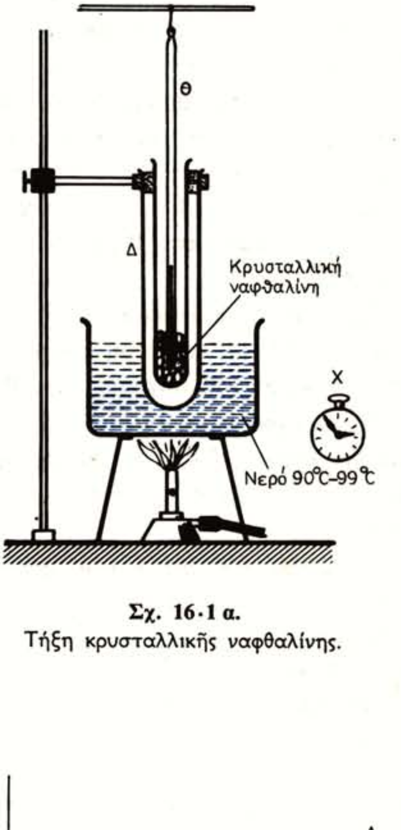
Στό τμῆμα ΒΓ ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερή στούς 80°C, παρ' ὅτι τό ζεστό νερό συνεχίζει νά δίνει θερμότητα στή ναφθαλίνη.

Δηλαδή ἐδῶ δέν ἀκολουθεῖται ὁ νόμος τῆς Θερμιδομετρίας.

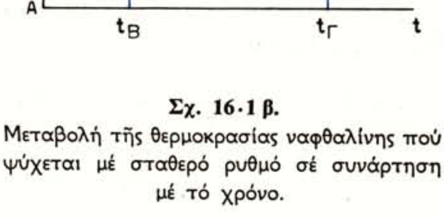
Ἡ παρατήρηση, ὅμως, δείχνει ὅτι ἡ ναφθαλίνη ἐκείνη τή στιγμή ἀρχίζει **νά λειώνει (τήκεται).** Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι σέ ὅλο τό χρονικό διάστημα ἀπό t_B ὥς t_Γ συνυπάρχει ἡ στερεή καί ἡ ὑγρή φάση τῆς ναφθαλίνης.

Μόνο μετά τή χρονική στιγμή t_Γ, ὅταν ἔχει λειώσει ὅλη ἡ κρυσταλλική ναφθαλίνη, ἡ θερμοκρασία τῆς ὑγρῆς ναφθαλίνης ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει (τμῆμα ΓΔ).

Ἄν τώρα ψύξουμε τό δοχεῖο μέ τό νερό, ἡ ὑγρή ναφθαλίνη θά ἀρχίσει νά ἀποβάλλει θερμότητα στό περιβάλλον (ψύχεται). Ἔτσι ἡ θερμοκρασία ἀκολουθεῖ τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 16 · 1 γ. Στήν ἀρχή, στό τμῆμα ΔΓ, ἡ ὑγρή ναφθαλίνη ψύχεται. Μόλις φθάσει

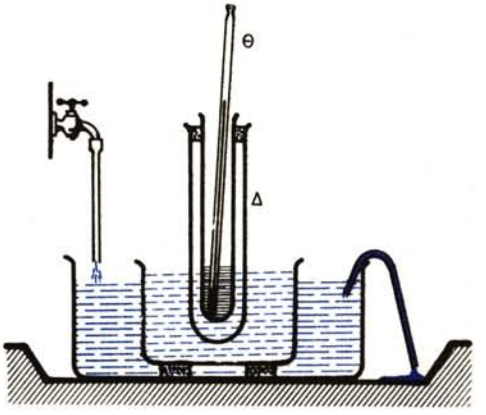


Σχ. 16·1 α.
Τήξη κρυσταλλικῆς ναφθαλίνης.



Σχ. 16·1 β.
Μεταβολή τῆς θερμοκρασίας ναφθαλίνης πού ψύχεται μέ σταθερό ρυθμό σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.

στούς 80° C, ἐμφανίζονται οἱ πρῶτοι κρύσταλλοι ναφθαλίνης (στερεοποιεῖται). Ἀρχίζει ἑπομένως **τό φαινόμενο τῆς πήξεως,** τό ὁποῖο διαρκεῖ ὅλο τό χρονικό διάστημα ἀπό $t_Γ$ ὥς t_B. Στό διάστημα αὐτό **ἀποβάλλει ἡ ναφθαλίνη θερμότητα στό περιβάλλον, χωρίς νά ἐλαττώνεται ἡ θερμοκρασία** καί συνυπάρχει ἡ ὑγρή καί στερεή φάση. Τέλος, ὅταν ὅλη ἡ ὑγρή ναφθαλίνη γίνει κρυσταλλική (σημεῖο B), ἡ θερμοκρασία ἀρχίζει νά ἐλαττώνεται.

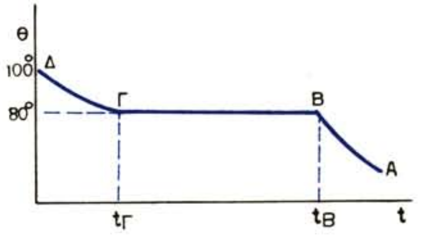


Μέ βάση τίς παρατηρήσεις αὐτές μποροῦμε νά διατυπώσουμε τούς νόμους, οἱ ὁποῖοι ἀφοροῦν τήν τήξη καί πήξη τῶν σωμάτων.

1) **Ὅταν ἕνα καθαρό στερεό σῶμα βρίσκεται κάτω ἀπό τήν ἴδια ἐξωτερική πίεση, τήκεται σέ ὁρισμένη θερμοκρασία.** Ἡ θερμοκρασία αὐτή ἐξαρτᾶται ἀπό τό σῶμα, καί γιαυτό εἶναι μιά σταθερά, πού τό χαρακτηρίζει καί ὀνομάζεται **θερμοκρασία τήξεως** ἤ **σημεῖο τήξεως.**

2) **Σ' ὅλο τό διάστημα, πού γίνεται ἡ τήξη καί συνυπάρχει ἡ στερεή καί ὑγρή φάση, ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερή καί ἴση πρός τή θερμοκρασία τήξεως.**

3) **Τό ὑγρό σῶμα στερεοποιεῖται στήν ἴδια θερμοκρασία πού ὑγροποιεῖται, δηλαδή τό σημεῖο τήξεως εἶναι τό ἴδιο μέ τό σημεῖο πήξεως, ὅταν ἡ ἐξωτερική πίεση εἶναι ἡ ἴδια.**



Σχ. 16·1 γ.
Μεταβολή τῆς θερμοκρασίας τῆς ναφθαλίνης πού ψύχεται μέ σταθερό ρυθμό σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.

β) **Λανθάνουσα θερμότητα τήξεως.** Ὅπως εἴδαμε στό προηγούμενο πείραμα, σ' ὅλη τή διάρκεια τῆς τήξεως ἡ θερμοκρασία δέν αὐξάνει, μολονότι προσφέρουμε θερμότητα στό σῶμα. Ἡ θερμότητα αὐτή, πού προσφέρουμε, χρειάζεται γιά νά ἀλλάξει ἡ κατάσταση τοῦ σώματος.

Τό ποσό τῆς θερμότητας πού χρειάζεται γιά νά λειώσουν m γραμμάρια ἀπό τό σῶμα, εἶναι ἀνάλογο πρός τή μάζα του m. Δηλαδή:

$$\boxed{Q = \lambda m} \qquad (1)$$

Ὁ συντελεστής λ ὀνομάζεται εἰδική ἤ **λανθάνουσα θερμότητα τήξεως** καί ἐξαρτᾶται ἀπό τό σῶμα.

Ἐπειδή: $\lambda = \dfrac{Q}{m}$, ἄν $m = 1$ kg, τότε:

$$\lambda = \frac{Q}{1\ \text{kg}}$$

Ἐπομένως, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι, **ἡ λανθάνουσα θερμότητα τήξεως ἑνός σώματος ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό ποσό τῆς θερμότητας πού χρειάζεται νά δοθεῖ σέ 1 kg αὐτοῦ γιά νά λειώσει.**

Ἡ λανθάνουσα θερμότητα μετριέται συνήθως σέ: kcal/kg ἤ cal/g καί στό σύστημα S.I. σέ Joule/kg.

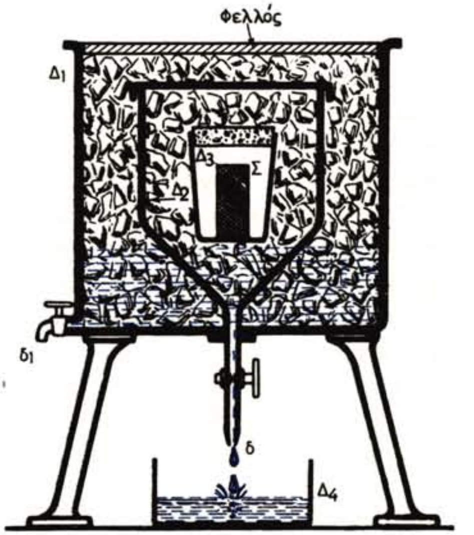
Π.χ. ἡ λανθάνουσα θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου εἶναι 80 kcal/kg.

Σημείωση. Τό ποσό τῆς θερμότητας, πού παίρνει ἕνα στερεό γιά νά ὑγροποιηθεῖ, ἀποδίδεται ὁλόκληρο στό περιβάλλον, ὅταν τό σῶμα στερεοποιεῖται.

γ) **Θερμιδόμετρο Laplace - Lavoisier.** Μέ τό θερμιδόμετρο αὐτό μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τίς εἰδικές θερμότητες τῶν σωμάτων, χρησιμοποιώντας τό φαινόμενο τῆς τήξεως τοῦ πάγου.

Περιγραφή. Ἀποτελεῖται ἀπό τρία δοχεῖα Δ_1, Δ_2 καί Δ_3 (σχ. 16 · 1 δ). Ἀνάμεσα στά δοχεῖα Δ_1 καί Δ_2 ὑπάρχει πάγος, ὁ ὁποῖος λειώνει. Τό νερό χύνεται ἀπό τό σωλήνα δ_1. Στό χῶρο ἀνάμεσα στά δοχεῖα Δ_3 καί Δ_2 τοποθετεῖται ἐπίσης πάγος, ὁ ὁποῖος βρίσκεται σέ θερμοκρασία 0°C, ἀφοῦ περιβάλλεται ἀπό πάγο πού λειώνει. Τό δοχεῖο Δ_2 εἶναι θερμικά μονωμένο ἀπό τόν ἐξωτερικό χῶρο, ἐπειδή περιβάλλεται ἀπό τόν πάγο τοῦ δοχείου Δ_1 καί στό πάνω μέρος ὑπάρχει φελλός.

Στό δοχεῖο Δ_3 τοποθετοῦμε τό σῶμα, τοῦ ὁποίου θέλουμε νά μετρήσουμε τήν εἰδική θερμότητα.



Σχ. 16·1 δ.
Θερμιδόμετρο Laplace - Lavoisier.

Μέτρηση. Ἔστω m_Σ ἡ μάζα τοῦ σώματος πού θέλομε νά μετρήσουμε τήν εἰδική του θερμότητα c_x. Θερμαίνουμε τό σῶμα σέ θερμοκρασία $\theta > 0$ καί τό τοποθετοῦμε στό δοχεῖο Δ_3. Τό σῶμα ψύχεται στή θερμοκρασία 0° C καί λειώνει ὁ πάγος στό δοχεῖο Δ_2. Μετροῦμε τή μάζα m τοῦ πάγου πού ἔλειωσε, ζυγίζοντας τό νερό τοῦ λειωμένου πάγου, πού ρέει στό δοχεῖο Δ_4.

Ὑπολογισμός τῆς εἰδικῆς θερμότητας σώματος. Τό ποσό τῆς θερμότητας, πού δίνει στόν πάγο τοῦ δοχείου Δ_2 τό σῶμα Σ, καθώς ψύχεται ἀπό τούς θ στούς 0° C, εἶναι:

$$Q = m_\Sigma \, c_\Sigma \, \theta.$$

Τό ποσό πού πῆρε ὁ πάγος εἶναι:

$$Q = m \, \lambda$$

ὅπου: λ ἡ εἰδική θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου. Τά ποσά Q_1 καί Q_2 εἶναι ἴσα. Ἑπομένως:

$$m_\Sigma c_\Sigma \theta = m \lambda \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{c_\Sigma = \frac{m\lambda}{m_\Sigma \theta}}$$

Ἄν π.χ. εἶναι $m_\Sigma = 200$ g, $\theta = 20$ grad, $m = 10$ g, ἐπειδή $\lambda = 80$ cal/g, θά ἔχουμε:

$$c_\Sigma = \frac{10\text{g} \cdot 80 \text{ cal/g}}{200 \text{ g} \cdot 20 \text{ grad}} = 0{,}2 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}.$$

Ἐφαρμογή. Ἀναμειγνύονται 100 g νεροῦ θερμοκρασίας 40° C καί ὁρισμένη μάζα πάγου θερμοκρασίας 0° C. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τελική κατάσταση τοῦ μείγματος, ὅταν ἡ μάζα τοῦ πάγου εἶναι: α) 60 g καί β) 30 g.

Λύση:

Ὅταν ἔχουμε νά λύσουμε τέτοια προβλήματα μέ μείγματα πάγου καί νεροῦ, πρέπει πρῶτα νά ἐξετάσομε, μήπως τό ποσό θερμότητας πού ἀποβάλλει τό νερό, ὅταν ψύχεται, δέν ἐπαρκεῖ γιά νά λειώσει ὅλη τήν ποσότητα τοῦ πάγου.

Ἄν συμβαίνει αὐτό, τό ἀποτέλεσμα θά εἶναι στό τέλος (ὅταν γίνει ἡ ἐξίσωση τῶν θερμοκρασιῶν) νά ἔχομε θερμοκρασία 0° C καί μεῖγμα νεροῦ καί πάγου.

Ἀκολουθοῦμε τή μεθοδολογία πού περιγράψαμε καί ἔχομε:

1) Τό ἀποβαλλόμενο ποσό θερμότητας κατά τήν ἐλάττωση τῆς θερμοκρασίας $m_{H_20} = 100$ g ἀπό $\theta = 40°$ στούς 0° C θά εἶναι:

$$m_{H_20}\ C_{H_20}\ \theta = 100 \text{ g} \cdot 1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}} \cdot 40 \text{ grad} =$$

$$= 4000 \text{ cal}.$$

2) Ἄν x εἶναι ἡ μάζα τοῦ πάγου πού λειώνει μέ τή θερμότητα $Q = 4000$ cal, θά ἔχουμε:

$$Q = x\lambda$$

ὅπου: λ εἶναι ἡ εἰδική θερμότητα τήξεως πάγου $= 80$ cal/g.

Ἑπομένως: $x = \dfrac{Q}{\lambda} = \dfrac{4000 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g}} = 50$ g.

Διαπιστώνεται ἔτσι ὅτι στήν πρώτη περίπτωση δέ λειώνει ὅλος ὁ πάγος, ἄρα ἡ τελική θερμοκρασία τοῦ μείγματος, θά εἶναι 0°C καί θά ὑπάρχουν στό μείγμα πάγος $60 - 50 = 10$ g καί νερό $50 + 100 =$ $= 150$ g.

Ὅταν ἡ μάζα τοῦ πάγου εἶναι μικρότερη ἀπό 50 g, π.χ. 30 g, ὅπως στή δεύτερη περίπτωση, τό πρόβλημα λύνεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω y ἡ τελική θερμοκρασία τοῦ μείγματος. Αὐτή ἡ θερμοκρασία θά εἶναι μεγαλύτερη ἀπό μηδέν βαθμούς.

Τό ποσό τῆς θερμότητας, πού δίνει ἡ μάζα $m_{H_2O} =$ 100 g, ὅταν ἡ θερμοκρασία του ἐλαττώνεται ἀπό $\theta =$ 40° C στούς y βαθμούς, εἶναι:

$$Q_1 = m_{H_2O}\, c_{H_2O}\, (\theta - y)$$

Τό ποσό τῆς θερμότητας πού παίρνει ὁ πάγος γιά νά λειώσει εἶναι:

$$Q_2 = m_{\pi\alpha\gamma}\, \lambda$$

ἐνῶ τό ποσό τῆς θερμότητας, τό ὁποῖο παίρνει τό νερό πού προῆλθε ἀπό τό λειώσιμο τοῦ πάγου, γιά νά αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία του ἀπό 0° C στούς y βαθμούς, εἶναι:

$$Q_3 = m_{\pi\alpha\gamma}\, c_{H_2O}\, y$$

Ἐπειδή: $Q_1 = Q_2 + Q_3$, θά ἔχουμε:

$$m_{H_2O}\, c_{H_2O}\, (\theta - y) = m_{\pi\alpha\gamma}\, \lambda + m_{\pi\alpha\gamma}\, c_{H_2O}\, y$$

Λύνουμε ὡς πρός y καί ἔχουμε:

$$y = \frac{m_{H_2O}\, c_{H_2O}\, \theta - m_{\pi\alpha\gamma}\, \lambda}{(m_{H_2O} + m_{\pi\alpha\gamma})\, c_{H_2O}} .$$

Ἀντικατάσταση :

$$y = \frac{100\ \text{g} \cdot 1\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}\ 40\ \text{grad} - 30\ \text{g} \cdot 80\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g}}}{(100 + 30)\ \text{g} \cdot 1 \cdot \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}} =$$

$$= 12{,}3°\ \text{C}.$$

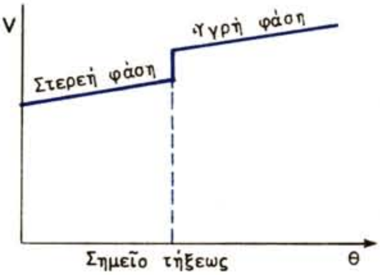
Ἀπάντηση: Στήν τελική κατάσταση τό μεῖγμα θά γίνει νερό θερμοκρασίας 12,3° C.

δ) **Μεταβολή τοῦ ὄγκου κατά τήν τήξη καί πήξη.** Κατά τήν πήξη τῶν ὑγρῶν ὁ ὄγκος μικραίνει. Ἔτσι ἡ στερεή φάση ἔχει πιό μεγάλη πυκνότητα ἀπό τήν ὑγρή, μέ ἀποτέλεσμα οἱ στερεοί κρύσταλλοι πού δημιουργοῦνται, νά κατεβαίνουν στόν πυθμένα τοῦ δοχείου.

Ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 16 · 1 ε μᾶς δείχνει τήν μεταβολή τοῦ ὄγκου σώματος μέ τή θερμοκρασία.

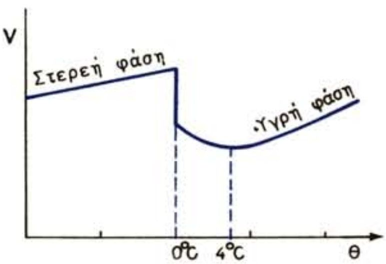
Ἐξαίρεση ἀποτελεῖ τό νερό. Ἔτσι, ὅταν τό νερό γίνει πάγος, ὁ ὄγκος του γίνεται μεγαλύτερος ἀπό τόν ὄγκο τοῦ νεροῦ καί ἑπομένως ἡ πυκνότητά του πιό μικρή. Ἀποτέλεσμα αὐτοῦ εἶναι ὅτι ὁ πάγος πάντοτε ἐπιπλέει στό νερό θερμοκρασίας 0° C.

Ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 16 · 1 στ μᾶς δίνει μιά εἰκόνα τοῦ τρόπου πού μεταβάλλεται ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία.



Σχ. 16·1 ε.
Μεταβολή τοῦ ὄγκου σώματος, στίς δύο φάσεις (στερεή, ὑγρή) σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία.

Σημείωση : Στήν ἀνώμαλη διαστολή τοῦ νεροῦ καί στό γεγονός ὅτι κατ' ἐξαίρεση ὁ πάγος εἶναι λιγότερο πυκνός ἀπό τό νερό ὀφείλεται ἡ ζωή στόν πλανήτη μας. Τό νερό εἶναι πιό πυκνό στούς 4° C. Ἄν ἑπομένως μιά μάζα νεροῦ στή θάλασσα ἀποκτήσει θερμοκρασία 4°C, γίνεται πιό πυκνή ἀπό τό ὑπόλοιπο νερό διαφορετικῆς θερμοκρασίας, πού τήν περιβάλλει, καί τότε ἡ μάζα αὐτή βυθίζεται ὅσο πιό χαμηλά μπορεῖ. Ἔτσι σιγά-σιγά τό νερό στό βυθό τῆς θάλασσας ἀποκτᾶ θερμοκρασία 4° C. Τό νερό στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας μπορεῖ νά θερμανθεῖ πάνω ἀπό 4° C ἤ νά ψυχθεῖ κάτω ἀπό 4° C ἤ καί νά γίνει πάγος, ὁ ὁποῖος, ὅπως εἴπαμε, ἐπιπλέει στό νερό 0° C. Ὁ βυθός ὅμως θά ἔχει πάντοτε σταθερή θερμοκρασία 4° C, στήν ὁποία ἀναπτύχθηκαν οἱ πρῶτοι ζωϊκοί ὀργανισμοί καί ἄρχισε ἡ ζωή στόν πλανήτη μας.



Σχ. 16·1 στ.
Μεταβολή τοῦ ὄγκου τοῦ νεροῦ στίς δύο φάσεις (στερεή, ὑγρή) σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία.

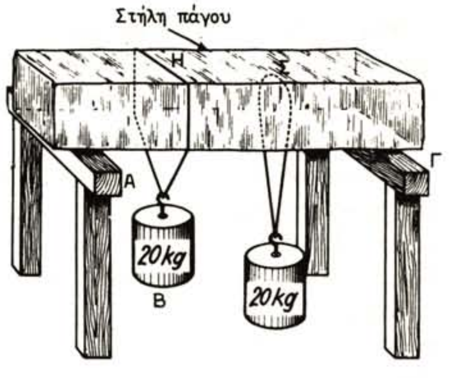
Ἄν τό νερό ἀκολουθοῦσε τούς κανονικούς νόμους, θά ἔπρεπε ὁ πάγος 0°C νά ἦταν πιό πυκνός ἀπό τό νερό ὁποιασδήποτε θερμοκρασίας, καί ἔτσι θά βυθιζόταν, ὁπότε ὁ πυθμένας τῆς θάλασσας θά ἦταν μιά ἔκταση μέ αἰώνιους πάγους. Μέ τέτοιες συνθῆκες, ἡ ἀνάπτυξη ζωῆς, ὅπως αὐτή πού ὑπάρχει στόν πλανήτη μας, θά ἦταν μᾶλλον ἀδύνατη.

ε) **Μεταβολή τοῦ σημείου τήξεως μέ τήν ἐξωτερική πίεση.** Ἡ ἐξωτερική πίεση μεταβάλλει τό σημεῖο τήξεως, ἀλλά ἡ μεταβολή αὐτή εἶναι πολύ μικρή. Ἔτσι ἄν π.χ. ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση ἀπό 1 Atm γίνει 2 Atm, τό σημεῖο τήξεως τοῦ πάγου μεταβάλλεται ἀπό 0° C στούς − 0,0074° C.

Γενικά, ὅταν αὐξηθεῖ ἡ πίεση, τό σημεῖο τήξεως γίνεται μεγαλύτερο, ἄν ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ εἶναι μικρότερος ἀπό τόν ὄγκο τοῦ ὑγροῦ. Στόν πάγο ὅμως, πού ὁ ὄγκος του εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ὄγκο τοῦ νεροῦ, ἀπό τό ὁποῖο προῆλθε, τό σημεῖο τήξεως γίνεται μικρότερο.

Πειραματικά, αὐτό μποροῦμε νά τό ἀποδείξουμε ὡς ἑξῆς:

Παίρνομε μιά κολώνα πάγου καί τή στηρίζομε σέ δυό ὑποστηρίγματα Α καί Γ (σχ. 16 · 1 ζ). Συνδέομε στίς δυό ἄκρες λεπτοῦ σύρματος μεγάλο βάρος Β.



Σχ. 16·1 ζ.
Τό σύρμα πού κρατᾶ τό βάρος Β, περνᾶ τόν πάγο χωρίς νά κοπεῖ ἡ κολόνα.

Τοποθετοῦμε τό σύρμα καί τό βάρος, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα. Τό σύρμα ἐξασκεῖ στή θέση Η τῆς κολώνας τοῦ πάγου πίεση καί ὁ πάγος λειώνει, γιατί τό σημεῖο τήξεως στήν πίεση τοῦ σύρματος εἶναι πιό χαμηλό ἀπό τή θερμοκρασία 0° C, στήν ὁποία βρίσκεται ὁ πάγος. Μέ τό λειώσιμο τοῦ πάγου, τό σύρμα προχωρεῖ μέσα στόν πάγο, ὅπως φαίνεται στό σημεῖο Σ. Τότε τό νερό, πού παρέμεινε πάνω ἀπό τό σύρμα καί πού προέρχεται ἀπό τό λειωμένο πάγο, ξαναγίνεται πάγος, γιατί τώρα ἔπαψε τό σύρμα νά ἐξασκεῖ πίεση.

Τό τελικό ἀποτέλεσμα θά εἶναι, ὅτι μετά ὁρισμένο χρόνο τό σύρμα θά ἔχει περάσει ὁλόκληρη τήν κολώνα τοῦ πάγου, ἡ ὁποία ὅμως δέν θά κοπεῖ.

στ) **Σημεῖο πήξεως διαλυμάτων.** Ἄν σέ ἕνα ὑγρό διαλύσομε κάποια ἄλλη οὐσία, τότε τό σημεῖο πήξεως ἐλαττώνεται.

Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **κρυοσκοπία** καί ἡ ἐλάττωση αὐτή εἶναι τόσο πιό μεγάλη, ὅσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ περιεκτικότητα τοῦ διαλύματος, δηλαδή ἡ μάζα τῆς διαλυόμενης οὐσίας ἀνά 100 g τοῦ διαλύματος. Ἡ μείωση τοῦ σημείου πήξεως μπορεῖ νά εἶναι σημαντική. Ἕνα πυκνό διάλυμα, π.χ. μαγειρικό ἁλάτι, NCl, μέσα σέ νερό στερεοποιεῖται στούς − 20° C. Ἔτσι μποροῦμε μέ τό σύστημα αὐτό νά κάνουμε ψυκτικά μείγματα.

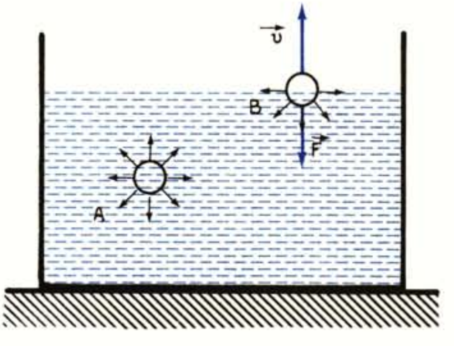
ζ) **Ὑπέρτηξη.** Ἄν ἕνα ὑγρό βρίσκεται σέ θερμοκρασία κάτω ἀπό τό σημεῖο τήξεως, χωρίς νά ἔχει στερεοποιηθεῖ, τότε λέμε ὅτι βρίσκεται σέ κατάσταση **ὑπερτήξεως.** Μιά τέτοια κατάσταση εἶναι ἀσταθής, γιατί ἐλάχιστη μετακίνηση τοῦ ὑγροῦ ἤ προσθήκη ξένης οὐσίας μέσα σ' αὐτό τό μετατρέπει σέ στερεό.

16 · 2 ΕΞΑΕΡΩΣΗ

Ἐξαέρωση λέγεται ἡ μετάβαση ἑνός σώματος ἀπό τήν ὑγρή στήν ἀέρια κατάσταση. Τό ἀέριο πού παράγεται κατά τήν ἐξαέρωση ὀνομάζεται ἀτμός.

Ἔστω ὅτι ἐξετάζουμε τά μόρια κάποιου ὑγροῦ.

Στό σχῆμα 16 · 2 α τό μόριο Α, πού βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ ὑγροῦ, ἕλκεται ἀπό τά γειτονικά του μόρια. Ἐπειδή οἱ δυνάμεις αὐτές ἐξασκοῦνται ἀπό ὅλες τίς διευθύνσεις, ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν. Γι' αὐτό τό μόριο Α κινεῖται ἰσοταχῶς καί ὅταν κάποτε συγκρουσθεῖ μέ ἄλλο μόριο, μεταβάλλει τήν ταχύτητά του.



Σχ. 16·2 α.
Ἄν ἡ ταχύτητα υ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό μιά ὁριακή τιμή, τό μόριο Β μεταβαίνει ἀπό τήν ὑγρή φάση στήν ἀέρια (ἐξαέρωση).

Στή θέση Β οἱ ἑλκτικές δυνάμεις ἀπό τά γειτονικά μόρια δημιουργοῦν συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$.

Ἄν ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ μορίου εἶναι μικρή, αὐτό ἐπανέρχεται στό ἐσωτερικό τοῦ ὑγροῦ. Ἄν ὅμως ἡ ταχύτητα εἶναι μεγαλύτερη ἀπό μιά ὁρισμένη **ὁριακή τιμή,** τότε τό μόριο μπορεῖ νά φύγει στόν ἐλεύθερο χῶρο καί νά γίνει μόριο τῆς ἀέριας φάσεως. Ἔτσι γίνεται ἡ ἐξαέρωση τοῦ ὑγροῦ. Ὅσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μορίων, πού ἔχουν ταχύτητα πάνω ἀπό τήν ὁριακή τιμή, τόσο πιό γρήγορα γίνεται ἡ ἐξαέρωση.

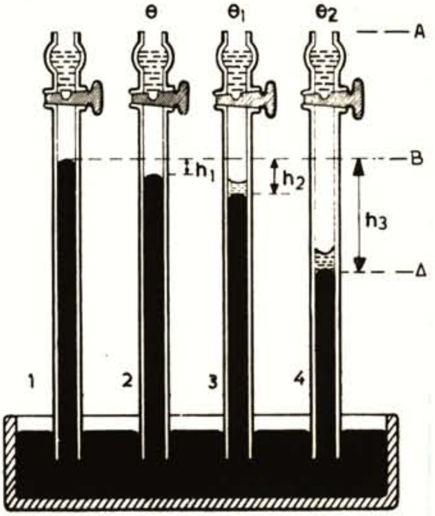
α) **Ἐξαέρωση στό κενό.** Στό κενό τοῦ Torricelli εἰσάγουμε μικρή ποσότητα αἰθέρα [σχ. 16 · 2β (1)]. Ὁ αἰθέρας ἐξαερώνεται γρήγορα καί οἱ ἀτμοί του ἐξασκοῦν πίεση, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ: $\varepsilon\, h_1$ [σχ. 16 · 2 β (2)] ὅπου h_1 εἶναι ἡ μείωση τοῦ ὕψους τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης. Ἡ θερμοκρασία τοῦ χώρου εἶναι θ_1.

Ἄν εἰσαχθεῖ νέα ποσότητα αἰθέρα, συνεχίζεται ἡ ἐξάτμιση καί κατέρχεται ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου. Κάποτε, ὅμως, σταματᾶ ἡ ἐξάτμιση τοῦ αἰθέρα καί τότε στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου ὑπάρχει ἕνα στρῶμα αἰθέρα [σχ. 16 · 2 β (3)].

Ἄν συνεχίσομε νά προσθέτομε νέα ποσότητα αἰθέρα, δέν γίνεται πιά ἄλλη ἐξαέρωση.

Ὁ χῶρος αὐτός στό κενό τοῦ Torricelli ἔγινε τώρα **κορεσμένος ἀπό ἀτμούς** αἰθέρα. Οἱ ἀτμοί αὐτοί ἐξασκοῦν πίεση : $\varepsilon_{Hg}\, h_2$.

Ἡ πίεση πού ἀσκοῦν οἱ κορεσμένοι ἀτμοί ὀνομάζεται **τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν.**



Σχ. 16·2 β.

Ἔτσι στή θερμοκρασία $\theta_1 = 20°C$, ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τοῦ αἰθέρα εἶναι 44 cm Hg.

Ἄν αὐξήσομε τήν θερμοκρασία ἀπό θ_1 στούς θ_2 βαθμούς, θά παρατηρήσομε ὅτι ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου κατεβαίνει τώρα πιό χαμηλά. Οἱ ἀτμοί τοῦ αἰθέρα καί ἐδῶ θά εἶναι κορεσμένοι, ἄν ὑπάρχει ἀκόμα αἰθέρας στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου.

Ἡ τάση τῶν ἀτμῶν στή νέα θερμοκρασία θ_2 θά εἶναι $\varepsilon_{Hg} h_3$, πιό μεγάλη ἀπ' ὅ,τι ἦταν στή θερμοκρασία θ_1. Ἑπομένως, **ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τῶν ὑγρῶν μεγαλώνει μέ τή θερμοκρασία.**

Ἄν ἐπαναλάβομε τό πείραμα, ἀλλά μέ οἰνόπνευμα ἀντί γιά αἰθέρα, θά δοῦμε ὅτι ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τοῦ οἰνοπνεύματος στή θερμοκρασία τῶν 20° C θά εἶναι 4 cm Hg, ἐνῶ γιά τόν αἰθέρα, ὅπως εἴπαμε πιό πάνω, στήν θερμοκρασία τῶν 20°C ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν εἶναι 44 cm Hg.

Ἀπ' αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι **ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν στήν ἴδια θερμοκρασία ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑγρό.**

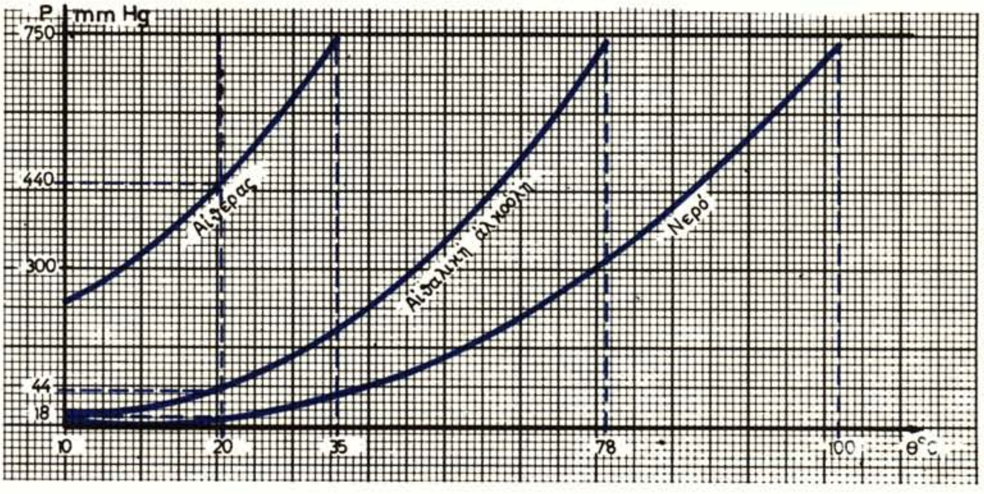
Ἄν κατεβάσουμε τό σωλήνα [σχ. 16 · 2 β (4)] μέσα στή λεκάνη, π.χ. ἀπό τή θέση A στή **B**, διαπιστώνομε ὅτι ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου παραμένει στήν ἴδια θέση Δ. Αὐτό σημαίνει ὅτι **ἡ πίεση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν δέν μεταβλήθηκε.** Ὅμως, μέ τήν μετακίνηση αὐτή, ὁ ὄγκος ἐλαττώθηκε καί ἀντί νά αὐξηθεῖ ἡ πίεση, σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Boyle - Mariotte, διαπιστώνομε ὅτι μεγαλώνει ἡ ποσότητα τοῦ ὑγροῦ αἰθέρα, πού βρίσκεται πάνω ἀπό τόν ὑδράργυρο, δηλαδή ὑγροποιεῖται μάζα ἀπό τόν κορεσμένο ἀτμό τοῦ αἰθέρα.

Τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι **οἱ κορεσμένοι ἀτμοί δέν ἀκολουθοῦν τό νόμο Boyle - Mariotte.**

— **Καμπύλες τάσεως κορεσμένων ἀτμῶν.** Ἡ ὁμάδα τῶν καμπυλῶν τοῦ σχήματος 16 · 2 γ μᾶς δίνει τάσεις κορεσμένων ἀτμῶν, σέ διάφορες θερμοκρασίες γιά τρία ὑγρά: τόν αἰθέρα, τό οἰνόπνευμα καί τό νερό.

Ἀπό τίς καμπύλες αὐτές προκύπτει ὅτι ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν αὐξάνει σημαντικά μέ τήν αὔξηση τῆς θερμοκρασίας (**ἐκθετική** μεταβολή).

Τήν ἀπότομη αὐτή μεταβολή τῆς πιέσεως τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τήν παρατηροῦμε καί στό σχῆμα 16 · 2 δ, πού παριστάνει τή μεταβολή τῆς τάσεως τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν (ἀτμῶν νεροῦ) σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία.



Σχ. 16·2 γ.
Καμπύλη τάσεως κορεσμένων ἀτμῶν σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία γιά τά ὑγρά αἰθέρας, αἰθυλική ἀλκοόλη, νερό.

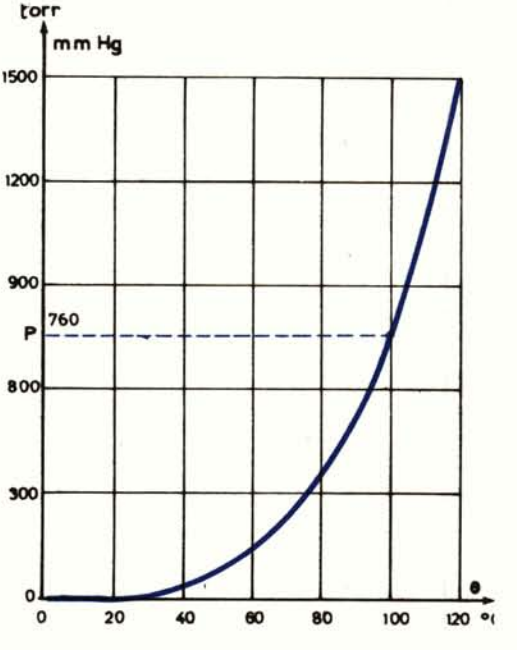
β) **Ἐξήγηση τοῦ φαινομένου τῆς ἐξαερώσεως σέ κλειστό χῶρο.** Ἔστω ὅτι σέ ἕνα κλειστό δοχεῖο (σχ. 16 · 2 ε) ὑπάρχει ὑγρό στό χῶρο (I) καί οἱ ἀτμοί του στό χῶρο (II).

Θά ἐξηγήσομε τό φαινόμενο τοῦ κορεσμοῦ τοῦ χώρου (II) μέ τή βοήθεια τῶν καμπυλῶν τοῦ σχήματος 16 · 2 στ.

Στήν θερμοκρασία θ_1 ὁ **ρυθμός** ἐξαερώσεως, δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν μορίων πού ἐξαερώνονται στή μονάδα τοῦ χρόνου, παραμένει σταθερός καί παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία C_1.

Ἔτσι, ἐνῶ στήν ἀρχή τοῦ πειράματος (χρόνος μηδέν), ὁ χῶρος (II) ἦταν κενός, ἀρχίζει μετά νά γεμίζει ἀπό ἀτμούς. Μέρος τῶν μορίων τῶν ἀτμῶν ἐπιστρέφει ἀπό τό χῶρο (II) στήν ὑγρή φάση (ὑγροποιεῖται). Ὁ ἀριθμός τῶν μορίων,πού ἐπιστρέφει στό ὑγρό στή μονάδα τοῦ χρόνου, ὀνομάζεται **ρυθμός ὑγροποιήσεως** καί παριστάνεται μέ τήν καμπύλη C_2. Διαπιστώνομε ὅτι ὁ ρυθμός ὑγροποιήσεως αὐξάνει μέ τό χρόνο. Αὐτό συμβαίνει, γιατί αὐξάνει μέ τό χρόνο ἡ πυκνότητα τῶν ἀτμῶν στό χῶρο (II).

Τή χρονική στιγμή t_A ὁ **ρυθμός ἐξαερώσεως** καί ὁ **ρυθμός ὑγροποιήσεως ἐξισώνονται** καί τότε ὁ ἀριθμός



Σχ. 16·2 δ.
Τάση κορεσμένων ὑδρατμῶν σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία.

τῶν μορίων τοῦ ἀτμοῦ στό χῶρο (II) **παραμένει σταθερός,** γιατί στόν ἴδιο χρόνο, ὅσα μόρια βγαίνουν ἀπό τήν ὑγρή φάση (I), ἄλλα τόσα ἐπιστρέφουν σ' αὐτή **(δυναμική ἰσορροπία).** Ἡ πυκνότητα, τότε, τῶν ἀτμῶν παραμένει σταθερή, δηλαδή ἔχομε κορεσμένους ἀτμούς.

Ἡ καμπύλη C_3 παριστάνει τή μεταβολή τῆς πιέσεως, τήν ὁποία ἐξασκοῦν οἱ ἀτμοί. Ἡ πίεση αὐτή αὐξάνει κατά τό χρονικό διάστημα ἀπό θ ὥς t_A, δηλαδή κατά τό χρόνο πού αὐξάνει ἡ πυκνότητα τῶν ἀτμῶν στό χῶρο (II). Ἀπό τή χρονική στιγμή ὅμως t_A καί πέρα ἡ πίεση παραμένει σταθερή καί ἴση πρός τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν (P_K) γιά τή θερμοκρασία θ_1.

Ἄν ἡ θερμοκρασία γίνει $\theta_2 > \theta_1$, τότε ὁ ρυθμός ἐξαερώσεως γίνεται μεγαλύτερος ἀπό τό ρυθμό στή θερμοκρασία θ_1. Ἔτσι ὁ κορεσμός τώρα γίνεται στό σημεῖο B καί ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν P'_K γίνεται μεγαλύτερη ἀπό τή P_K.

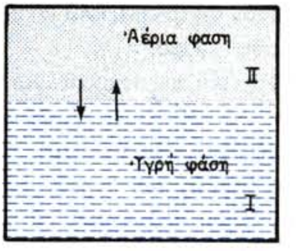
Μέ τόν τρόπο αὐτό ἐξηγεῖται ἡ αὔξηση τῆς τάσεως τῶν κορεσμένων ἀτμῶν μέ τή θερμοκρασία.

γ) **Ἐξαέρωση σέ χῶρο πού ὑπάρχει ἄλλο ἀέριο.** Ἔστω ὅτι στό δοχεῖο Δ ὑπάρχει ἀτμοσφαιρικός ἀέρας (σχ. 16·2 ζ). Ἡ θερμοκρασία εἶναι 20°C. Τό μανόμετρο M δείχνει τήν πίεση τοῦ ἀέρα στό δοχεῖο. Στό σωλήνα A βάζομε αἰθέρα, τόν ὁποῖο μέ τή βοήθεια τῆς στρόφιγγας εἰσάγομε στό δοχεῖο.

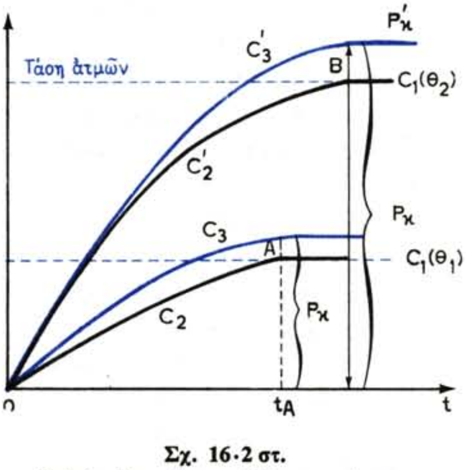
Αὐτός μετά ἀπό λίγο ἐξαερώνεται, καί ἡ ἔνδειξη τοῦ μανομέτρου μεγαλώνει.

Ἄν συνεχίσομε νά ρίχνομε αἰθέρα, σέ κάποια στιγμή θά σταματήσει ἡ ἐξαέρωση. Τότε, στή βάση τοῦ δοχείου παραμένει μιά ποσότητα ὑγροῦ αἰθέρα καί ἡ ἔνδειξη τοῦ μανομέτρου παραμένει σταθερή. Στήν κατάσταση αὐτή βρισκόμαστε σέ συνθῆκες κορεσμοῦ καί ἡ μεταβολή τῆς πιέσεως, πού βρίσκεται ἀπό τίς ἐνδείξεις τοῦ μανομέτρου, εἶναι ἴση μέ τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τοῦ αἰθέρα στούς 20°C, δηλαδή 44 cm Hg.

Ἀπό τό πείραμα αὐτό βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι, ἡ ὕπαρξη ἄλλων ἀερίων πάνω ἀπό τό ὑγρό πού ἐξαερώνεται δέν ἐμποδίζει τή δημιουργία συνθηκῶν κορεσμοῦ καί δέν μεταβάλλει τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν. Ἡ μόνη διαφορά ἀνάμεσα στήν ἐξαέρωση στό κενό καί στήν ἐξαέρωση σέ χῶρο ὅπου ὑπάρχει ἄλλο



Σχ. 16·2 ε.



Σχ. 16·2 στ.
Ρυθμός ἐξαερώσεως ἤ ὑγροποιήσεως.

Σχ. 16·2 ζ.
Ἐξαέρωση τοῦ αἰθέρα σέ χῶρο πού ὑπάρχει ἀτμοσφαιρικός ἀέρας.

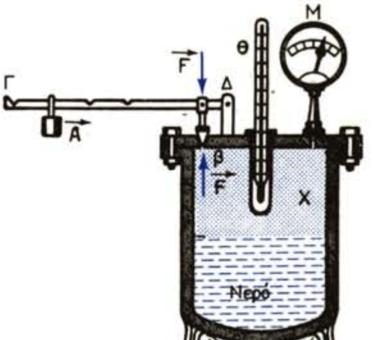
ἀέριο, εἶναι ὅτι στήν πρώτη περίπτωση ἡ ἐξαέρωση εἶναι σχεδόν ἀκαριαία, ἐνῶ στή δεύτερη γίνεται μέ σχετικά βραδύ ρυθμό.

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε παραπάνω προκύπτει ὅτι **ἀναγκαία συνθήκη γιά νά γίνει ἐξαέρωση εἶναι ὁ χῶρος πάνω ἀπό τό ἐξαερούμενο ὑγρό νά μήν εἶναι κορεσμένος ἀπό τούς ἀτμούς τοῦ ὑγροῦ. Δηλαδή ἡ πίεση πού ἐξασκοῦν οἱ ἀτμοί τοῦ ὑγροῦ νά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν γιά τή θερμοκρασία τοῦ χώρου.**

Ἑπομένως, ἄν ἐπιθυμοῦμε νά ἔχομε γρήγορη ἐξαέρωση, θά πρέπει νά ἀπομακρύνομε τούς ἀτμούς πάνω ἀπό τό χῶρο τῶν ὑγρῶν. Αὐτό γίνεται φυσικά, ἄν ὁ χῶρος αὐτός εἶναι ἐλεύθερος ἤ ἄν ἀναρροφήσομε τούς ἀτμούς μέ ἀντλία.

Σέ κλειστό χῶρο πρακτικά ἡ ἐξαέρωση εἶναι ἐλάχιστη καί διαρκεῖ μέχρι νά κορεσθεῖ ὁ κλειστός χῶρος ἀπό ἀτμούς.

Κλασικό παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ χύτρα τοῦ Papin. Ἡ χύτρα αὐτή (σχ. 16 · 2 η) ἀποτελεῖται ἀπό χαλύβδινα τοιχώματα, ἀνθεκτικά στίς μεγάλες πιέσεις. Τό κάλυμμά της κλείνει ἀεροστεγῶς.



Σχ. 16 · 2 η.
Χύτρα τοῦ Papin

Τό μανόμετρο Μ καί τό θερμόμετρο Θ μᾶς δείχνουν τήν πίεση καί τή θερμοκρασία τῶν ἀτμῶν. Στό χῶρο x ὑπάρχουν μόνο ὑδρατμοί (ἀτμοί νεροῦ). Ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀέρας ἀπομακρύνεται ἀπό τήν ἀρχή.

Τό βάρος $\vec{A}$ μέ τή βοήθεια τοῦ μοχλοῦ ΓΔ ἐξασκεῖ δύναμη $\vec{F}$ στή βαλβίδα β.

Ἔστω ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ νεροῦ εἶναι 80° C. Στή θερμοκρασία αὐτή οἱ κορεσμένοι ὑδρατμοί στόν κλειστό χῶρο x ἐξασκοῦν πίεση περίπου 300 torr.

Ἄν αὐξήσομε τή θερμοκρασία στούς 100° C, γίνεται ἐξαέρωση τοῦ νεροῦ καί ὁ χῶρος x πάλι γίνεται κορεσμένος. Ἡ νέα τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν στούς 100° C γίνεται 760 mm Hg (1 Atm). Ἄν αὐξήσομε τή θερμοκρασία στούς 120° C θά ἔχομε νέα ἐξαέρωση, νέο κορεσμό καί νέα τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν, ἴση μέ 2 Atm. Ἔτσι αὐξάνοντας τή θερμοκρασία τοῦ νεροῦ, θά αὐξάνει συνεχῶς ἡ πίεση τῶν ὑδρατμῶν. Ἐπειδή ὅμως ὑπάρχει ἡ βαλβίδα β, ὅταν ἡ πίεση τῶν ὑδρατμῶν γίνει τόση, ὥστε ἡ δύναμη $\vec{F'}$, πού ἐξασκεῖται στή βαλβίδα β, νά γίνει πιό μεγάλη ἀπ' τή δύναμη

$\vec{F}$, ἀνοίγει ἡ βαλβίδα, φεύγουν ὑδρατμοί, ἐλαττωνεται ἐσωτερικά ἡ πίεση καί γίνεται νέα ἐξαέρωση τοῦ νεροῦ γιά ἀναπλήρωση τοῦ κενοῦ τῶν ὑδρατμῶν. Ἔτσι μποροῦμε νά ἔχομε ὑδρατμούς μέ πίεση μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική καί νερό θερμοκρασίας μεγαλύτερης ἀπό 100° C.

Οἱ χύτρες πιέσεως γιά γρήγορο μαγείρεμα εἶναι στήν οὐσία χύτρες Papin. Τό μαγείρεμα γίνεται γρήγορα, γιατί βράζομε τά φαγητά σέ θερμοκρασία πιό μεγάλη ἀπό 100°C (110° ὥς 120° C), ἐνῶ μέ τίς συνηθισμένες χύτρες τά φαγητά βράζουν στούς 100° C.

16 · 3 ΤΡΟΠΟΙ ΕΞΑΕΡΩΣΕΩΣ ΥΓΡΩΝ

Ἡ ἐξαέρωση τῶν ὑγρῶν γίνεται μέ δυό τρόπους: Ὁ πρῶτος εἶναι ἡ ἐξάτμιση καί ὁ δεύτερος ὁ βρασμός.

α) **Θερμότητα ἐξαερώσεως.** Ἄν στήν παλάμη τοῦ χεριοῦ μας ρίξομε αἰθέρα ἤ οἰνόπνευμα, παρατηροῦμε ὅτι τά ὑγρά αὐτά ἐξαερώνονται μετά ἀπό λίγο χρόνο, ἐνῶ συγχρόνως αἰσθανόμαστε ψύξη. Αὐτό ὀφείλεται στήν ἀπορρόφηση θερμότητας τοῦ ὑγροῦ ἀπό τήν παλάμη τοῦ χεριοῦ μας. Ἡ θερμότητα αὐτή εἶναι ἀναγκαία γιά τήν ἐξαέρωση τοῦ ὑγροῦ.

Ἑπομένως, γιά νά μεταβεῖ ἕνα ὑγρό ἀπό τήν ὑγρή στήν ἀέρια φάση, πρέπει νά ἀπορροφήσει θερμότητα. Ἡ θερμότητα αὐτή Q εἶναι ἀνάλογη πρός τή μάζα m τοῦ ὑγροῦ πού ἐξαερώθηκε. Δηλαδή:

$$Q = L\,m$$

ὅπου: L εἶναι σταθερός συντελεστής πού χαρακτηρίζει τό ὑγρό καί ὀνομάζεται **εἰδική** ἤ **λανθάνουσα θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὑγροῦ.**

Ἡ σχέση $L = \dfrac{Q}{m}$ γιά $m = 1$ kg, γίνεται $L = \dfrac{Q}{1\,\text{kg}}$

Συνεπῶς, ἡ εἰδική θερμότητα ἐξαερώσεως ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό ποσό τῆς θερμότητας πού χρειάζεται 1 kg ὑγροῦ γιά νά ἐξαερωθεῖ στήν κανονική θερμοκρασία βρασμοῦ.

Σάν παράδειγμα ἀναφέρομε τήν εἰδική θερμότητα τοῦ νεροῦ, ἡ ὁποία στούς 100° C εἶναι:

$$L_{\nu\varepsilon\rho} = 539 \text{ kcal/kg}.$$

Σημείωση: Πειράματα ἀπέδειξαν ὅτι ἡ θερμότητα ἐξαερώσεως τῶν ὑγρῶν ἐξαρτᾶται καί ἀπό τή θερμοκρασία. Ἡ κανονική θερμοκρασία βρασμοῦ (ὑπό κανονική πίεση 1 Atm) λαμβάνεται ὡς θερμοκρασία ἀναφορᾶς γιά τόν ὑπολογισμό τῆς θερμότητας ἐξαερώσεως τῶν ὑγρῶν.

β) **Ψύξη κατά τήν ἐξαέρωση.** Ἐπειδή κατά τήν ἐξαέρωση ἔχομε ἀπορρόφηση θερμότητας, τό σῶμα, ἀπό τό ὁποῖο ἀπορροφᾶται ἡ θερμότητα αὐτή, ψύχεται καί μάλιστα τόσο πιό πολύ, ὅσο πιό γρήγορα γίνεται ἡ ἐξαέρωση

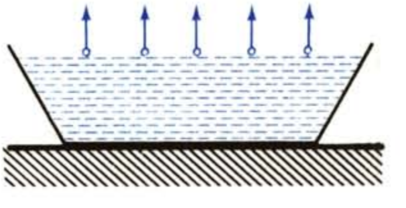
Τό φαινόμενο αὐτό βρίσκει ἐφαρμογή στήν τοπική ἀναισθησία ἑνός μέρους τοῦ σώματος μέ ψύξη, ἡ ὁποία δημιουργεῖται μέ πολύ γρήγορη ἐξαέρωση πτητικῶν ὑγρῶν, π.χ. χλωριούχου αἰθυλίου.

Σημείωση: Ἕνα ὑγρό λέγεται **πτητικό,** ὅταν στή συνηθισμένη θερμοκρασία ἔχει σημαντική τάση κορεσμένων ἀτμῶν καί φυσικά μεταξύ δύο ὑγρῶν πιό πτητικό εἶναι ἐκεῖνο, πού ἔχει μεγαλύτερη τάση κορεσμένων ἀτμῶν.

γ) **Ἐξάτμιση.** Γνωρίζομε ὅτι, ὅταν ἀφήσομε νερό σέ μιά ἀνοικτή λεκάνη, σιγά-σιγά θά ἐξαερωθεῖ. Ἡ ἐξαέρωση αὐτή γίνεται βραδύτατα καί μόνο ἀπό τήν ἐξωτερική ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ (σχ. 16 · 3 α).

Ἡ βραδεία αὐτή ἐξαέρωση ὀνομάζεται **ἐξάτμιση.**

Ὀνομάζεται ρυθμός ἐξατμίσεως τό πηλίκον τῆς μάζας τοῦ ὑγροῦ πού ἐξατμίζεται, διά τοῦ χρόνου πού ἀπαιτήθηκε γιά νά γίνει ἡ ἐξάτμιση.



Σχ. 16·3 α.
Ἡ ἐξαέρωση τοῦ ὑγροῦ ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια ὀνομάζεται ἐξάτμιση.

Ὁ ρυθμός ἐξατμίσεως ἐξαρτᾶται ἀπό διάφορους παράγοντες, οἱ ὁποῖοι συνδέονται μέ τήν ἐξίσωση:

$$c = K\,\frac{S\,(P_K - P_\alpha)}{P}$$

ὅπου: c ὁ ρυθμός ἐξατμίσεως, S τό ἐμβαδόν τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ, P ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση, $P_\kappa - P_\alpha$ ἡ διαφορά τάσεως κορεσμένων ἀτμῶν (P_K) καί πιέσεως ἀτμῶν στόν περιβάλλοντα χῶρο (P_α) καί K συντελεστής, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑγρό.

Στόν τύπο δέν φαίνεται ἄμεσα, ἄν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ παίζει ρόλο στήν ἐξάτμιση. Ὅμως, ὅσο πιό μεγάλη εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ, τόσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ P_K καί, ἑπομένως, τόσο πιό μεγάλη ἡ ταχύτητα ἐξαερώσεως.

δ) **Βρασμός.** Ὅταν ἡ ἐξαέρωση γίνεται ἀπό ὅλη τή μάζα τοῦ ὑγροῦ, τότε ἔχομε τό φαινόμενο τοῦ **βρασμοῦ.**

Ἑπομένως, γιά νά γίνει βρασμός, πρέπει στό ἐσωτερικό τοῦ ὑγροῦ νά δημιουργηθοῦν φυσαλίδες ἀτμῶν.

Ἔστω ὅτι ἔχουμε ἕνα δοχεῖο Δ (σχ. 16 · 3 β), μέσα στό ὁποῖο ὑπάρχει καθαρό νερό.

Ἄς δεχθοῦμε ὅτι στό σημεῖο Α δημιουργεῖται μιά φυσαλίδα ἀτμοῦ. Ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ ὁ ἀτμός, πού εἶναι μέσα στή φυσαλίδα, θά εἶναι ἴση μέ τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν στή θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ.

Ἔστω π.χ. ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ νεροῦ εἶναι 80° C. Ἀπό τήν καμπύλη τοῦ σχήματος 16 . 2 δ προκύπτει ὅτι ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν στούς 80° C εἶναι 320 torr. Ὅμως ἡ φυσαλίδα στό σημεῖο Α δέχεται πίεση 760 mm Hg (τήν ἀτμοσφαιρική) καί ἐπιπλέον τήν πίεση τῆς στήλης νεροῦ 0,1 m, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σέ 7,3 torr περίπου. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι ἡ φυσαλίδα νά συμπιεσθεῖ καί ὁ ὑδρατμός νά ὑγροποιηθεῖ.

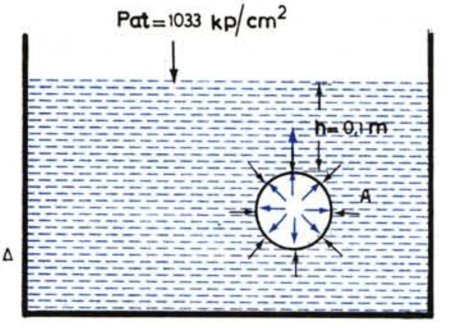
Ἄν ὅμως ἡ θερμοκρασία τοῦ νεροῦ εἶναι λίγο πιό πάνω ἀπό 100° C, π.χ. 101° C, ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν γίνεται πιό μεγάλη ἀπό: $760 + 7{,}3 = 767{,}3$ torr καί ἐπομένως ἡ φυσαλίδα μεγαλώνει καί παράλληλα κινεῖται πρός τά πάνω, γιατί ὠθεῖται ἀπό τήν ἄνωση. Μόλις φθάσει στήν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ, σπάει καί οἱ ὑδρατμοί διαχέονται. Ἔτσι ὁ βρσμός ἀρχίζει.

— **Πρῶτος νόμος τοῦ βρασμοῦ.** Ἀπό τούς προηγούμενους συλλογισμούς συμπεραίνεται ὅτι **ὁ βρασμός γίνεται σέ τέτοια θερμοκρασία, ὥστε ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν γιά τή θερμοκρασία αὐτή νά εἶναι ἴση ἤ μεγαλύτερη ἀπό τήν ἐξωτερική πίεση.**

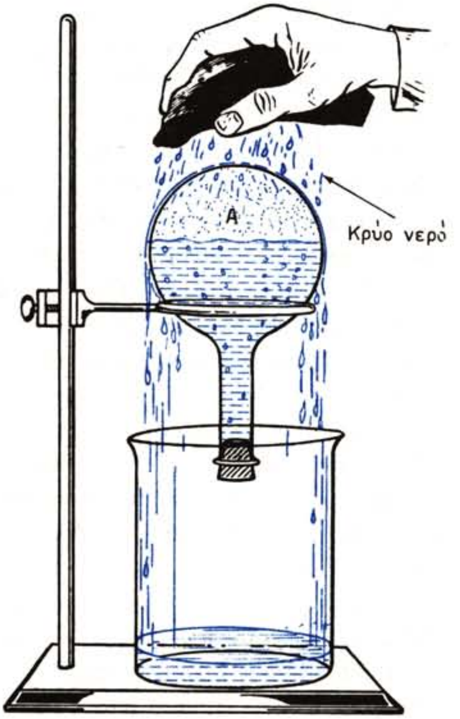
Τό συμπέρασμα αὐτό ἀποτελεῖ τόν **πρῶτο νόμο τοῦ βρασμοῦ.**

Ἔτσι μποροῦμε νά βράσομε π.χ. τό νερό καί στούς 80°C, ἀρκεῖ νά μειώσουμε τήν πίεση πού ἀσκεῖται πάνω ἀπό τό νερό. Αὐτό ἐπιβεβαιώνεται ἀπό τό ἑξῆς πείραμα:

Πείραμα: Σ' ἕνα δοχεῖο γυάλινο (σχ. 16 · 3 γ), τοποθετοῦμε ζεστό νερό (π.χ. 90° C), τό πωματίζουμε



Σχ. 16·3 β.
Γιά νά γίνει βρασμός πρέπει ἡ πίεση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν μέσα στή φυσαλίδα νά εἶναι ἐλάχιστα πιό μεγάλη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση (P_{at}) καί τήν πίεση τῆς στήλης h = 0,1m.



Σχ. 16·3 γ.

καί τό ἀναστρέφουμε, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα. Ὁ χῶρος Α εἶναι κορεσμένος μέ ὑδρατμούς. Ἡ ἐξαέρωση ἔχει σταματήσει. Στή συνέχεια, μέ κρύο νερό ψύχομε τά τοιχώματα τοῦ δοχείου καί διαπιστώνομε ὅτι τό νερό μέσα στό δοχεῖο ἀρχίζει νά βράζει.

Τό φαινόμενο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

Οἱ ὑδρατμοί, πού ὑπάρχουν στό χῶρο Α, ὑγροποιοῦνται. Ἡ πίεση, πού ἀσκοῦν, γίνεται μικρότερη ἀπό τήν τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν στή θερμοκρασία 90° C καί ἑπομένως ἀρχίζει ὁ βρασμός.

Ἄλλο παράδειγμα εἶναι ὁ βρασμός σέ μικρότερη θερμοκρασία στά βουνά. Ὅπως εἶναι γνωστό, σέ μεγάλα ὑψόμετρα ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση μικραίνει. Π.χ. στήν κορυφή τοῦ Ὀλύμπου ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι περίπου 500 torr. Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν στούς 90° C εἶναι ἐπίσης 500 torr. Ἔτσι στήν κορυφή τοῦ Ὀλύμπου τό νερό θά βράζει περίπου στούς 90°C.

— **Δεύτερος νόμος τοῦ βρασμοῦ.** Θερμαίνοντας συνεχῶς μιά μάζα νεροῦ, παρατηροῦμε ὅτι ὅταν ἀρχίσει ὁ βρασμός, ἡ θερμοκρασία τοῦ νεροῦ δέν μεταβάλλεται ὅπως δείχνει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 16 · 3 δ. Στήν ἀρχή, ἡ θερμοκρασία αὐξάνει καί τελικά στούς 100° C (ἄν ἡ ἐξωτερική πίεση εἶναι 1 Atm) παραμένει σταθερή.

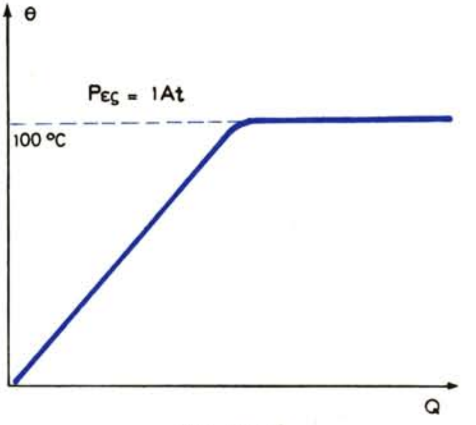
Στούς 100° C ἀρχίζει ὁ βρασμός. **Ἡ θερμοκρασία αὐτή παραμένει σταθερή σέ ὅλη τή διάρκεια τοῦ βρασμοῦ, μέχρι νά ἐξαερωθεῖ ὅλη ἡ ποσότητα τοῦ ὑγροῦ καί ὀνομάζεται θερμοκρασία ζέσεως ἤ σημεῖο ζέσεως.**
Αὐτός εἶναι ὁ **δεύτερος νόμος τοῦ βρασμοῦ.**

Τό ποσό τῆς θερμότητας, πού δίνομε κατά τό βρασμό στό ὑγρό, χρειάζεται γιά τήν ἀλλαγή τῆς καταστάσεως τοῦ ὑγροῦ (ἐξαέρωση).

Ἐπισημαίνουμε ἐδῶ ὅτι, ἀπό τήν ὁμάδα τῶν καμπυλῶν τοῦ σχήματος 16 · 2 γ, ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τοῦ αἰθέρα, τοῦ οἰνοπνεύματος καί τοῦ νεροῦ εἶναι 760 mm Hg (1 Atm) σέ θερμοκρασίες 35° C, 78° C καί 100° C ἀντίστοιχα.

Γι' αὐτό καί τά σημεῖα ζέσεως τῶν ὑγρῶν σέ πίεση 760 mm Hg ἔχουν τίς ἴδιες τιμές, δηλαδή ὑπό πίεση 1 Atm ὁ αἰθέρας βράζει στούς 35° C, τό οἰνόπνευμα στούς 78° C καί τό νερό στούς 100° C.

ε) **Σημεῖο ζέσεως διαλυμάτων (ζεσεοσκοπία).** Ἄν στά ὑγρά διαλύσομε ἄλλες οὐσίες, π.χ. στό νερό δια-



Σχ. 16·3 δ.
Μεταβολή τῆς θερμοκρασίας μάζας καθαροῦ νεροῦ σέ συνάρτηση μέ τό ποσό θερμότητας πού τοῦ προσφέρουμε.

λύσομε ἀλάτι ἤ ζάχαρη, τότε τό σημεῖο ζέσεως ὑπό πίεση 1 Atm αὐξάνει. Ἡ ἀνύψωση αὐτή τοῦ σημείου ζέσεως εἶναι ἀνάλογη πρός τήν περιεκτικότητα τοῦ διαλύματος. Τό φαινόμενο ὀνομάζεται **ζεσεοσκοπία.**

16 · 4 ΥΓΡΟΠΟΙΗΣΗ

Ἡ μετατροπή ἑνός ἀερίου σέ ὑγρό, ὀνομάζεται **ὑγροποίηση** καί εἶναι φαινόμενο ἀντίστροφο τῆς ἐξαερώσεως.

Γιά νά ὑγροποιηθεῖ ἕνα ἀέριο, πρέπει νά βρεθεῖ σέ συνθῆκες κορεσμοῦ.

Ὑπάρχουν τρεῖς τρόποι ὑγροποιήσεως τῶν ἀερίων:

Ὑγροποίηση μέ ψύξη, ὑγροποίηση μέ συμπίεση καί συνδυασμός τῶν δύο (ψύξη καί συμπίεση).

α) **Ὑγροποίηση μέ ψύξη.** Ἄν ψύξομε τούς ἀτμούς ἑνός χώρου, σέ τέτοια θερμοκρασία, ὥστε ἡ πίεση πού θά ἀσκοῦν νά γίνει μεγαλύτερη ἀπό τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν γιά τή θερμοκρασία αὐτή, τότε οἱ ἀτμοί ὑγροποιοῦνται.

Ἔτσι λειτουργοῦν οἱ ἀποστακτῆρες.

1) **Ἀποστακτῆρες** εἶναι συσκευές μέ τίς ὁποῖες κάνομε ἀπόσταξη, δηλαδή ἐξαερώνομε τό ὑγρό καί στή συνέχεια ὑγροποιοῦμε τόν ἀτμό.

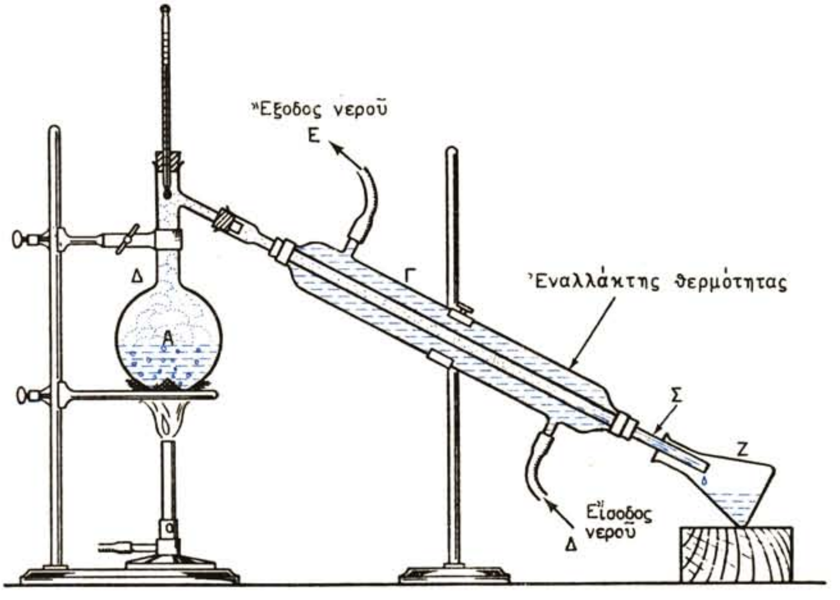
Ἔτσι παίρνομε ἕνα ὑγρό ἀπαλλαγμένο ἀπό ἄλλες οὐσίες, πού ἦταν διαλυμένες στό ὑγρό πρίν ἀπό τήν ἀπόσταξη.

Ὁ ἀποστακτήρας ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα δοχεῖο Δ καί ἕνα σωλήνα Σ, ὁ ὁποῖος περιβάλλεται ἐξωτερικά ἀπό δεύτερο σωλήνα Γ (σχ. 16 · 4 α). Τό ὑγρό Α στό δοχεῖο Δ βράζει καί οἱ ἀτμοί ὁδεύουν πρός τό σωλήνα Σ. Στόν ἐξωτερικό σωλήνα Γ κυκλοφορεῖ κρύο νερό ἀπό τή διεύθυνση Δ πρός τήν Ε καί ἔτσι ψύχεται ὁ σωλήνας Σ. Οἱ ἀτμοί στό σωλήνα Σ ὑγροποιοῦνται καί τό ὑγρό χύνεται στό δοχεῖο Ζ.

Σημείωση: Τό σύστημα τῶν δυό σωλήνων Σ καί Γ μέ τό νερό πού κυκλοφορεῖ στό Γ ὀνομάζεται **ἐναλλάκτης θερμότητας.**

2) **Κλασματική ἀπόσταξη.** Ἔστω ὅτι τό ὑγρό Α εἶναι μεῖγμα δύο ὑγρῶν, π.χ. οἰνοπνεύματος καί νεροῦ σέ ἀναλογία 80% νερό καί 20% οἰνόπνευμα.

Ἐπειδή τό οἰνόπνευμα βράζει στούς 79° C καί τό νερό στούς 100° C, στήν ἀέρια φάση θά ὑπάρχουν ἀτμοί οἰνοπνεύματος σέ ποσοστό μεγαλύτερο ἀπ' ὅ,τι στό διάλυμα. Π.χ. στήν ἀέρια φάση θά ἔχομε 70% οἰνόπνευμα καί 30% νερό. Ἔτσι κατά τήν ὑγροποίηση, τό μεῖγμα τοῦ οἰνοπνεύματος καί τοῦ νεροῦ θά ἔχει τήν ἴδια ἀναλογία, ὅπως στήν ἀέρια φάση.



Σχ. 16·4 α.
Ἐργαστηριακός ἀποστακτήρας.

Ἡ ἀπόσταξη αὐτή **γιά τό διαχωρισμό δύο ὑγρῶν διαφορετικοῦ σημείου ζέσεως ὀνομάζεται κλασματική ἀπόσταξη.**

Μποροῦμε νά ἐπαναλάβομε τήν ἀπόσταξη τοῦ πρώτου ἀποσταγμένου μείγματος οἰνοπνεύματος-νεροῦ καί ἔτσι νά αὐξήσουμε τήν περιεκτικότητα τοῦ μείγματος σέ οἰνόπνευμα.

Ἐν τούτοις, δέν εἶναι δυνατό νά πάρουμε τελείως καθαρό οἰνόπνευμα μέ τίς ἐπανειλημμένες κλασματικές ἀποστάξεις. Αὐτό ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι, σέ κάποια ἀναλογία οἰνοπνεύματος καί νεροῦ ἡ ὑγρή καί ἡ ἀέρια φάση ἔχουν τήν ἴδια ἀναλογία καί τό μεῖγμα βράζει σάν ὁμοιογενές ὑγρό σέ θερμοκρασία ἀνάμεσα στά σημεῖα ζέσεως τῶν δυό ὑγρῶν.

Τό μεῖγμα αὐτό ὀνομάζεται **ἀζεοτροπικό μεῖγμα.**

Ἔτσι π.χ. μεῖγμα οἰνοπνεύματος καί νεροῦ σέ ἀναλογία 95% καί 5% ἀντίστοιχα, ἀποτελεῖ ἀζεοτροπικό μεῖγμα.

β) **Ὑγροποίηση μέ συμπίεση. Πείραμα.** Σ' ἕνα σωλήνα Σ (σχ. 16·4 β), πού φέρει ἕνα ἔμβολο Ε, τοποθετοῦμε διοξείδιο τοῦ ἄνθρακος CO_2.

Τό μανόμετρο Μ μᾶς δείχνει τήν πίεση τοῦ ἀερίου.

Μετακινοῦμε τό ἔμβολο Ε σιγά καί διατηροῦμε τή θερμοκρασία τοῦ ἀερίου σταθερή, π.χ. 20° C.

Ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 16·4 γ ἀπεικονίζει τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων.

Στό τμῆμα ΑΒ ἀκολουθεῖται ὁ νόμος τοῦ Boyle - Mariotte, γιατί τό CO_2 εἶναι ἀέριο.

Στό τμῆμα ΒΓ ἡ πίεση παραμένει σταθερή. Αὐτό συμβαίνει, γιατί φθάσαμε σέ συνθῆκες κορεσμοῦ τοῦ ἀερίου CO_2. Ἐνῶ δηλαδή, μικραίνομε τόν ὄγκο, τό ἀέριο ὑγροποιεῖται καί ἡ πίεσή του παραμένει σταθερή καί ἴση μέ τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν CO_2 γιά τή θερμοκρασία πού γίνεται τό πείραμα. Τέλος, στό τμῆμα ΓΔ ἡ πίεση μεγαλώνει ἀπότομα. Ὁ λόγος εἶναι ὅτι ὅλο τό CO_2 ἔγινε ὑγρό **καί τά ὑγρά συμπιέζονται δύσκολα.**

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνεται ὅτι τό CO_2, τό ὁποῖο στή συνήθη θερμοκρασία εἶναι ἀέριο, μποροῦμε νά τό διατηρήσουμε ὑγρό μέσα σέ χαλύβδινα κλειστά δοχεῖα (σχ. 16·4 δ). Μέσα σ' αὐτά ἡ ἀέρια φάση τοῦ CO_2 ἐξασκεῖ τήν ἀναγκαία πίεση στό ὑγρό, καί ἔτσι θά διατηρεῖται στήν ὑγρή κατάσταση.

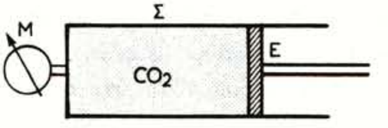
γ) **Ὑγροποίηση μέ ψύξη καί συμπίεση.** Ἄν προσπαθήσομε νά ὑγροποιήσομε ὀξυγόνο μέ συμπίεση, δέν θά τό κατορθώσομε ποτέ στή θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος. Αὐτό συμβαίνει, γιατί, γιά νά ὑγροποιηθοῦν τά ἀέρια, δέν πρέπει νά ἔχουν θερμοκρασία πάνω ἀπό μιά ὁρισμένη τιμή, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **κρίσιμη θερμοκρασία.** Ἑπομένως, πρῶτα ψύχομε τό ἀέριο σέ θερμοκρασία κάτω ἀπό τήν κρίσιμη καί μετά μέ συμπίεση μποροῦμε νά τό ὑγροποιήσομε.

Γιά τήν ὑγροποίηση τῶν ἀερίων, πού δύσκολα ὑγροποιοῦνται, γιατί ἡ κρίσιμη θερμοκρασία τους εἶναι πολύ χαμηλή, χρησιμοποιοῦνται εἰδικές ψυκτικές μηχανές, ὅπως ἡ μηχανή Linde.

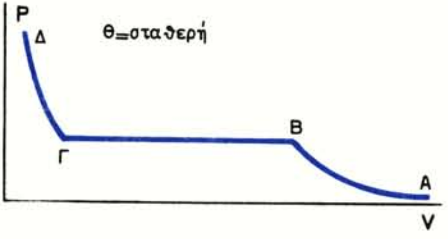
16·5 ΕΞΑΧΝΩΣΗ

Μερικά σώματα μεταβαίνουν κατευθεῖαν ἀπό τή στερεή στήν ἀέρια φάση, χωρίς νά περάσουν πρῶτα ἀπό τήν ὑγρή. Τό φαινόμενο αὐτό ὀνομάζεται **ἐξάχνωση** καί μπορεῖ πειραματικά νά διαπιστωθεῖ ὡς ἑξῆς:

Πείραμα. Στή βάση ἑνός δοκιμαστικοῦ σωλήνα



Σχ. 16·4 β.
Τό διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα ὑγροποιεῖται καί στή συνήθη θερμοκρασία ἄν συμπιεσθεῖ ἀνάλογα.



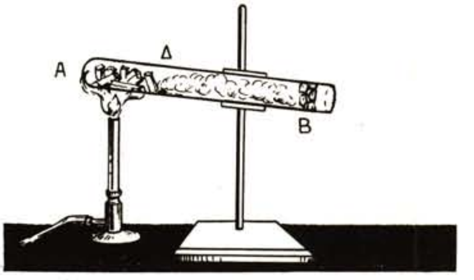
Σχ. 16·4 γ.
Μεταβολή τῆς πιέσεως τοῦ CO_2 σέ συνάρτηση τοῦ ὄγκου του.

Σχ. 16·4 δ.
Φιάλη μέ ὑγρό CO_2.

(σχ. 16·5) τοποθετοῦμε κρυστάλλους ἰωδίου, τούς ὁποίους θερμαίνουμε μέ φλόγα.

Διαπιστώνομε τότε ὅτι ὁ δοκιμαστικός σωλήνας παίρνει χρῶμα ἰῶδες, δηλαδή τό χρῶμα τῶν ἀτμῶν τοῦ ἰωδίου. Οἱ ἀτμοί αὐτοί συμπυκνώνονται στήν περιοχή **Β** σέ κρυστάλλους ἰωδίου.

Τό ἰώδιο δηλαδή γίνεται ἀέριο κατευθείαν ἀπό στερεό καί ἀντίστροφα.



Σχ. 16·5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΔΙΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

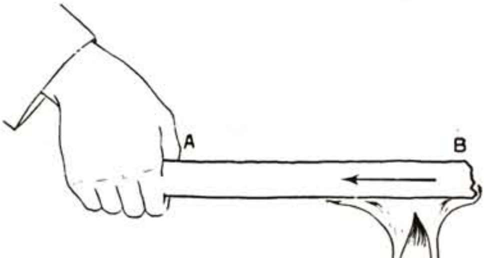
Ἄν δύο σημεῖα **A** καί **B** ἔχουν διαφορά θερμοκρασίας, τότε πραγματοποιεῖται ροή θερμότητας ἀπό τό σημεῖο τῆς ὑψηλότερης θερμοκρασίας πρός τό ἄλλο. Ἡ πραγματοποίηση αὐτῆς τῆς ροῆς θερμότητας ὀνομάζεται **διάδοση τῆς θερμότητας.**

Ἡ διάδοση τῆς θερμότητας μπορεῖ νά γίνει μέ τρεῖς τρόπους: **Δι' ἀγωγῆς, διά μεταφορᾶς** καί **δι' ἀκτινοβολίας.**

17·1 ΔΙΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙ' ΑΓΩΓΗΣ

Ἄν κρατήσομε μέ τό χέρι μιά χάλκινη ράβδο ἀπό τήν ἄκρη **A** (σχ. 17·1 α) καί τοποθετήσομε τήν ἄλλη ἄκρη **B** σέ μιά φλόγα, θά διαπιστώσομε, μετά ἀπό λίγο, ὅτι ἡ ράβδος θερμαίνεται καί στό σημεῖο **A**.

Αὐτό σημαίνει ὅτι ἔγινε μεταφορά τῆς θερμότητας ἀπό τό **B** πρός τό **A** μέσα ἀπό τή ράβδο.



Σχ. 17·1 α.

Ὁ τρόπος αὐτός, κατά τόν ὁποῖο μεταφέρεται θερμότητα ἀπό μόριο σέ μόριο στά στερεά σώματα χωρίς μετακίνηση ὕλης, ὀνομάζεται μεταφορά θερμότητας δι' ἀγωγῆς καί τό φαινόμενο ὀνομάζεται θερμική ἀγωγιμότητα.

Κατά τή μεταφορά θερμότητας δι' ἀγωγῆς, δέν ἔχομε μεταφορά ὕλης. Μόνο θερμική ἐνέργεια μεταφέρεται. Συγκεκριμένα τά μόρια τῆς ράβδου πού βρίσκονται κοντά στό σημεῖο τῆς ὑψηλότερης θερμοκρασίας, ταλαντώνονται μέ μεγαλύτερο πλάτος ἀπό τά λοιπά μόρια τῆς ράβδου καί ἡ ταλάντωση αὐτή μεταφέρεται ἀπό μόριο σέ μόριο πρός τό σημεῖο τῆς πιό χαμηλῆς θερμοκρασίας.

— **Νόμος τῆς θερμικῆς ἀγωγιμότητας.** Τό ποσό τῆς θερμότητας πού θά μεταφερθεῖ ἀπό τό ἕνα ἄκρο μιᾶς ράβδου στό ἄλλο σέ χρόνο t δίνεται ἀπό τόν τύπο: (σχ. 17·1 β):

Σχ. 17·1 β.
Διάδοση θερμότητας σέ μεταλλική ράβδο.

$Q = K \dfrac{T_A - T_B}{l} S t$	*Νόμος θερμικῆς ἀγωγιμότητας*

ὅπου: T_A καί T_B εἶναι οἱ ἀπόλυτες θερμοκρασίες τῶν δυό ἄκρων τῆς ράβδου, l τό μῆκος τῆς ράβδου, S τό ἐμβαδόν τῆς διατομῆς τῆς ράβδου, t ὁ χρόνος καί K ἕνας συντελεστής, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται **συντελεστής θερμικῆς ἀγωγιμότητας** καί ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑλικό τῆς ράβδου.

Στόν Πίνακα 17 · 1 · 1 σημειώνομε τιμές τοῦ συντελεστῆ θερμικῆς ἀγωγιμότητας K ὁρισμένων ὑλικῶν.

Τά σώματα, πού ἔχουν μεγάλο σχετικά συντελεστή θερμικῆς ἀγωγιμότητας, ὀνομάζονται **καλοί ἀγωγοί τῆς θερμότητας.**

Ἔτσι, τά πρῶτα σώματα τοῦ πίνακα ἀπό τόν ἄργυρο μέχρι τό χάλυβα εἶναι καλοί ἀγωγοί τῆς θερμότητας. Διαπιστώνομε ὅτι τά σώματα αὐτά εἶναι ὅλα μέταλλα· μποροῦμε μάλιστα νά ποῦμε ὅτι, **ὅλα τά μέταλλα εἶναι καλοί ἀγωγοί τῆς θερμότητας.**

Ὅλα τά ὑπόλοιπα σώματα τοῦ πίνακα εἶναι **κακοί ἀγωγοί τῆς θερμότητας** καί μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά **θερμική μόνωση.**

Ἀπό τόν Πίνακα 17 · 1 · 1 προκύπτει ἐπίσης ὅτι μεταφορά τῆς θερμότητας δι' ἀγωγῆς μπορεῖ νά γίνει καί στίς τρεῖς καταστάσεις (στερεή, ὑγρή καί ἀέρια).

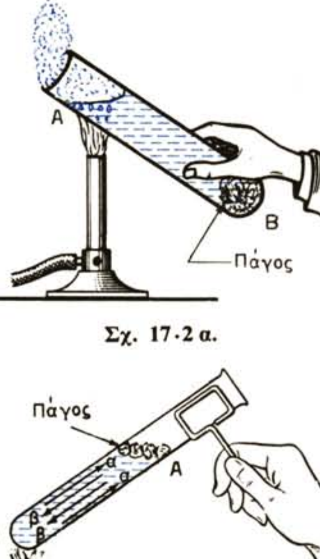
ΠΙΝΑΚΑΣ 17 · 1 · 1

Συντελεστές θερμικῆς ἀγωγιμότητας διαφόρων σωμάτων

Ὑλικό	Συντελεστής θερμικῆς ἀγωγιμότητας σέ cal $cm^{-1} \cdot s^{-1} \cdot grad^{-1}$
Ἄργυρος	1
Χαλκός	0,93
Ἀργίλιο	0,48
Σίδηρος	0,16
Χάλυβας	0,10
Γυαλί	0,002
Ἀμίαντος	0,0004
Φελλός	0,0001
Νερό	0,0014
Ὑδρογόνο	0,00044

17 · 2 ΔΙΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

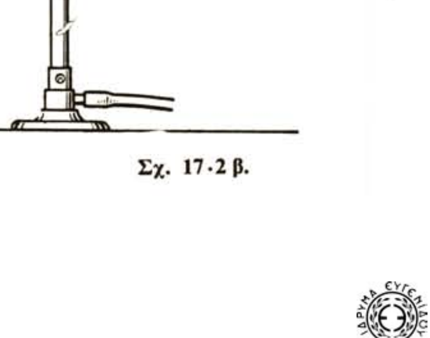
Πείραμα. Σ' ἕνα δοκιμαστικό σωλήνα (σχ. 17 · 2 α) ρίχνομε νερό καί κρατᾶμε βυθισμένο στόν πυθμένα τοῦ σωλήνα ἕνα κομμάτι πάγο. Ἄν θερμάνομε τό σωλήνα κοντά στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ, πολύ σύντομα θά δοῦμε ὅτι τό νερό θά βράζει, ἀλλά ὁ πάγος δέν θά λειώνει.



Σχ. 17·2 α.

Αὐτό συμβαίνει, γιατί τό νερό εἶναι κακός ἀγωγός τῆς θερμότητας, ἐπειδή ἔχει πολύ μικρό συντελεστή θερμικῆς ἀγωγιμότητας καί, ἐπομένως, δι' ἀγωγῆς δέν μεταφέρεται ἄξια λόγου θερμότητα στόν πάγο γιά νά λειώσει.

Ἄν ὅμως ἀφήσομε τόν πάγο νά ἐπιπλεύσει καί θερμάνομε τή βάση τοῦ σωλήνα (σχ. 17 · 2 β), τότε διαπιστώνομε ὅτι ὁ πάγος λειώνει καί μετά τό νερό θερμαίνεται ὁλόκληρο μέχρι τούς 100° C, ὁπότε ἀρχίζει ὁ βρασμός. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ φλόγα θέρμανε τό νερό στή βάση του **B** καί ἔτσι στό σημεῖο ἐκεῖνο τό νερό ἔγινε ἀραιότερο. Τό ἀραιό αὐτό νερό ἀνέβηκε πρός τά πάνω, ὅπως δείχνουν τά βέλη α τοῦ σχήματος, ἐνῶ τό ψυχρό νερό, πού βρίσκεται κοντά στόν πάγο, κινεῖται πρός τόν πυθμένα, ὅπως δείχνουν



Σχ. 17·2 β.

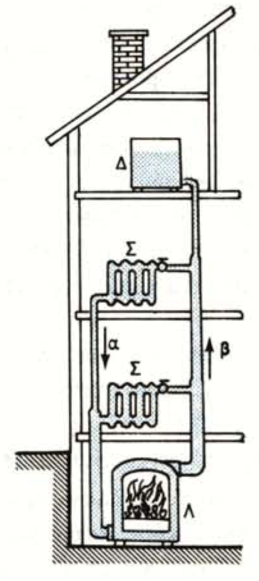
τά βέλη β τοῦ σχήματος. Αὐτή ἡ μετακίνηση ὕλης συνοδεύεται καί μέ μεταφορά θερμότητας. Δηλαδή τά μόρια πού ἀνεβαίνουν πρός τήν κατεύθυνση α μεταφέρουν **μαζί τους θερμική ἐνέργεια** ἀπό τό θερμαινόμενο πυθμένα Β. Ἡ μεταφερόμενη θερμότητα λειώνει τόν πάγο καί ἀνεβάζει στή συνέχεια τή θερμοκρασία τοῦ νεροῦ μέχρι τοῦ σημείου ζέσεως.

Ὁ τρόπος αὐτός, κατά τόν ὁποῖο μεταφέρεται θερμότητα μέ μετακίνηση ὕλης, ὀνομάζεται διάδοση θερμότητας διά μεταφορᾶς καί ἐμφανίζεται μόνο στά ρευστά (ὑγρά καί ἀέρια).

Παρακάτω ἀναφέρομε ὁρισμένες ἐφαρμογές τῆς μεταδόσεως τῆς θερμότητας διά μεταφορᾶς.

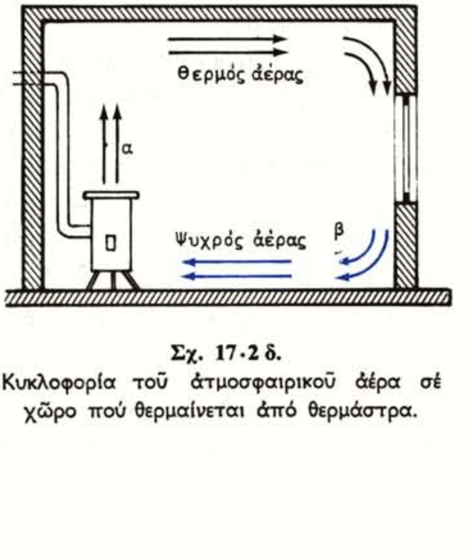
α) **Ἐγκαταστάσεις κεντρικῆς θερμάνσεως (καλοριφέρ).** Τό νερό θερμαίνεται στό λέβητα Λ (σχ. 17 · 2 γ) καί ἀνεβαίνει στούς σωλῆνες β.

Ἀπό τά σώματα Σ ἀποβάλλεται θερμότητα στούς χώρους τῶν δωματίων, τά ὁποῖα ἔτσι θερμαίνονται, ἐνῶ τό νερό ψύχεται καί ἐπιστρέφει ἀπό τούς σωλῆνες α. Ἐπειδή ἡ κίνηση στό κλειστό αὐτό κύκλωμα εἶναι βραδύτατη ὅταν γίνεται μέ τό φυσικό τρόπο, χρησιμοποιεῖται πάντοτε ὁ **κυκλοφορητής**. Αὐτός εἶναι μιά μικρή φυγοκεντρική ἀντλία, ἡ ὁποία προκαλεῖ αὔξηση τῆς ταχύτητας ροῆς τοῦ νεροῦ μέσα στούς σωλῆνες. Μέ τή βοήθεια τοῦ κυκλοφορητῆ μποροῦμε νά μεταφέρομε ταχύτατα σημαντικό ποσό θερμότητας, γιά νά θερμαίνομε τούς χώρους.



Σχ. 17·2. γ.
Ἐγκατάσταση κεντρικῆς θερμάνσεως.

β) **Θερμάστρες.** Οἱ θερμάστρες (ἠλεκτρικές, πετρελαίου ἤ ξύλων) πρέπει νά τοποθετοῦνται χαμηλά στά δωμάτια. Ἔτσι μπορεῖ νά γίνει καλή κυκλοφορία τοῦ ἀέρα μέσα στό χῶρο καί καλή θέρμανση διά μεταφορᾶς. Στό σχῆμα 17 · 2 δ φαίνεται πῶς κυκλοφορεῖ ὁ ἀέρας μέσα σέ ἕνα δωμάτιο, στό ὁποῖο ὑπάρχει μιά θερμάστρα.



Σχ. 17·2 δ.
Κυκλοφορία τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα σέ χῶρο πού θερμαίνεται ἀπό θερμάστρα.

17 · 3 ΔΙΑΔΟΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙ' ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

Εἶναι γνωστό ὅτι ὁ ἥλιος θερμαίνει τή Γῆ, χωρίς νά ὑπάρχει ὑλικό μέσο ἀνάμεσα σ' αὐτά τά δυό οὐράνια σώματα. Ἡ διάδοση αὐτή τῆς θερμότητας δέν μπορεῖ νά γίνεται οὔτε δι' ἀγωγῆς οὔτε διά μεταφορᾶς, γιατί καί οἱ δυό αὐτοί τρόποι διαδόσεως τῆς θερμότητας, γίνονται μέ τή βοήθεια τῆς ὕλης.

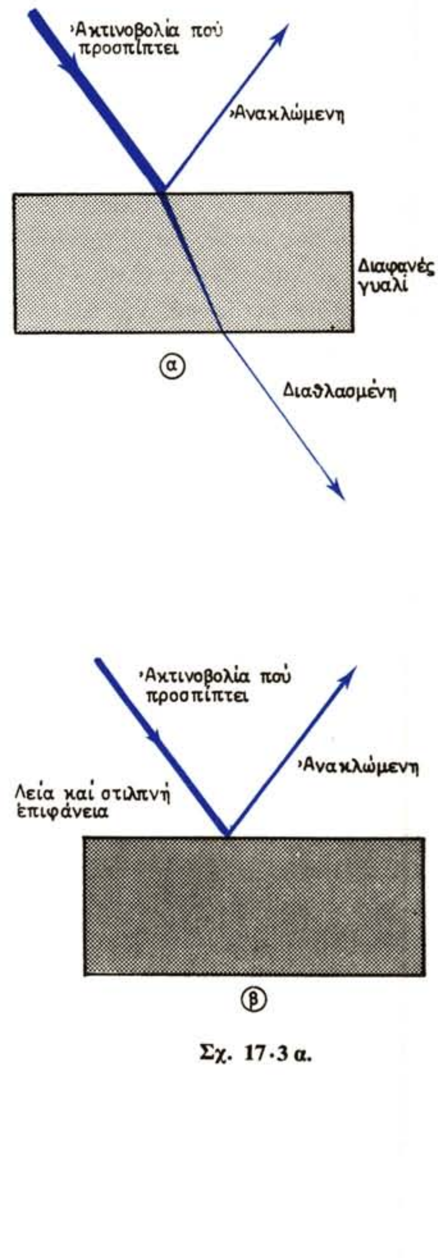
Ἑπομένως, ὁ τρόπος διαδόσεως τῆς θερμότητας ἀπό τόν ἥλιο στή Γῆ, δηλαδή μέσα ἀπό τόν κενό χῶρο, εἶναι διαφορετικός καί ὀνομάζεται **διάδοση τῆς θερμότητας δι' ἀκτινοβολίας.**

Τά θερμά σώματα ἀκτινοβολοῦν ἕνα εἶδος κυμάτων, τά ὁποῖα ὀνομάζονται **ἠλεκτρομαγνητικά κύματα.** Στήν κατηγορία αὐτῶν τῶν κυμάτων ἐντάσσονται καί τά κύματα τῆς τηλεοράσεως, τοῦ ραδιοφώνου καί τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων. Ἡ διάδοση θερμότητας, ἑπομένως, στήν περίπτωση αὐτή **γίνεται μέ ἠλεκτρομαγνητικά κύματα.**

Γιά νά κατανοήσομε τό μηχανισμό, μέ τόν ὁποῖο διαδίδεται ἡ θερμότητα δι' ἀκτινοβολίας, πρέπει νά μάθομε τί ἰδιότητες ἔχει ἕνα «μέλαν» σῶμα καί νά γνωρίσομε τό **νόμο Stefan - Boltzmann.**

α) **Ὁρισμός. «Μέλαν» σῶμα ὀνομάζεται κάθε σῶμα πού ἀπορροφᾶ κάθε ἀκτινοβολία πού πέφτει πάνω του.**

Ἕνα μαῦρο πανί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ «μέλαν» σῶμα 'Αντίθετα, ἕνα γυάλινο ἀντικείμενο δέν εἶναι «μέλαν» σῶμα, γιατί μέρος τῆς ἀκτινοβολίας, πού πέφτει πάνω του, παθαίνει ἀνάκλαση καί διάθλαση καί ἀπομακρύνεται ἀπ' αὐτό [σχ. 17 · 3 α (α)]. 'Επίσης σώματα μέ λεῖες καί στιλπνές ἐπιφάνειες ἀνακλοῦν τό μεγαλύτερο ποσοστό τῆς ἀκτινοβολίας πού πέφτει πάνω τους [σχ. 17 · 3 α (β)].



Σχ. 17·3 α.

β) **Νόμος Stefan - Boltzmann.**

Ὁ νόμος αὐτός διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἰσχύς N τῆς ἀκτινοβολίας τοῦ «μέλανος» σώματος εἶναι ἀνάλογη πρός τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας S καί ἀνάλογη πρός τήν τέταρτη δύναμη τῆς ἀπόλυτης θερμοκρασίας τοῦ σώματος. Δηλαδή:

$$N = \sigma\, S\, T^4$$

ὅπου: σ συντελεστής πού ἔχει τιμή $5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,grad}}$

καί N ἡ ἰσχύς ἀκτινοβολίας πού ὁρίζεται σάν πηλίκον τοῦ ποσοῦ θερμότητας Q, πού ἀκτινοβολεῖ ἕνα σῶμα, διά τοῦ χρόνου κατά τόν ὁποῖο γίνεται ἡ ἀκτινοβολία:

$$N = \frac{Q}{t}$$

Ἡ ἀκτινοβολία τῶν ἄλλων σωμάτων, πού δέν εἶναι «μέλανα σώματα», δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$N = a\, \sigma\, S\, T^4$$

ὅπου: α εἶναι ἀριθμός μικρότερος ἀπό τή μονάδα.

Ὁ α ἔχει τιμή ἴση μέ τό πηλίκον τῆς ἀκτινοβολίας Q_1 πού ἀπορροφᾶ τό σῶμα διά τῆς ἀκτινοβολίας Q_2 πού πέφτει πάνω σ' αὐτό:

$$a = \frac{Q_1}{Q_2}$$

γ) **Μηχανισμός διαδόσεως τῆς θερμότητας μέ ἀκτινοβολία.** Ἔστω δύο «μέλανα σώματα» Α καί Β (σχ. 17 · 3 β), τά ὁποῖα ἔχουν τίς ἴδιες ἐπιφάνειες. Ἀφοῦ τά σώματα ἔχουν θερμοκρασίες μεγαλύτερες ἀπό τό ἀπόλυτο μηδέν, θά ἀκτινοβολοῦν, σύμφωνα μέ τό νόμο Stefan - Boltzmann. Ἔστω ἀκόμα ὅτι κατευθύνουμε αὐτές τίς ἀκτινοβολίες ἀπό τό Α σῶμα στό Β καί ἀντίστροφα.

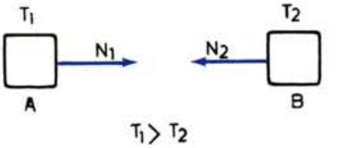
Τότε, τό σῶμα Α ἀκτινοβολεῖ ἰσχύ:

$$N_1 = \sigma\, S\, T^4{}_1$$

ἐνῶ τό σῶμα Β ἀκτινοβολεῖ ἰσχύ:

$$N_2 = \sigma\, S\, T^4{}_2$$

Ἡ διαφορά $N_1 - N_2 = \sigma\, S\, (T^4{}_1 - T^4{}_2)$ εἶναι **θετική** καί ἔτσι τό σῶμα Β θερμαίνεται, ἐνῶ τό σῶμα Α ψύχεται.



Σχ. 17·3 β.

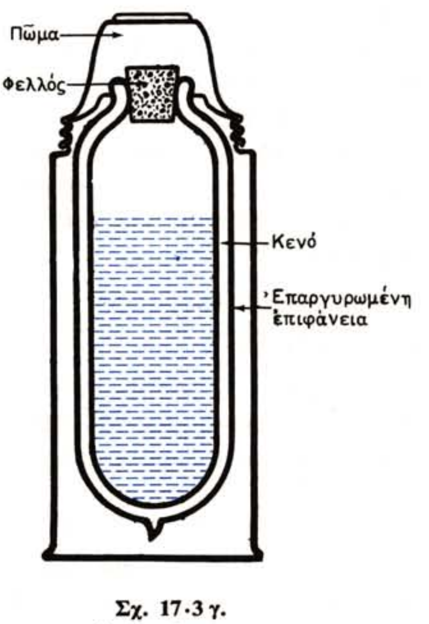
Ἐφαρμογή: Ἡ Γῆ τήν ἡμέρα παίρνει ἀπό τόν ἥλιο θερμότητα, γιατί ἔχει θερμοκρασία μικρότερη ἀπ' αὐτόν. Τό βράδυ, ὅμως, ἡ Γῆ ἀκτινοβολεῖ στό ἀχανές ψυχρό διάστημα θερμοκρασία καί ψύχεται. Αὐτή ἡ ψύξη εἶναι πιό ἔντονη, ὅταν ἔχομε καθαρή ἀτμόσφαιρα, γιατί τότε ἡ θερμική ἀκτινοβολία τῆς Γῆς δέν ἐμποδίζεται ἀπό σύννεφα ἤ ὑδρατμούς τῆς ἀτμόσφαιρας.

δ) **Δοχεῖα Ντιούαρ (Diewar, θερμός).** Εἶναι δοχεῖα μέ θερμική μόνωση, κι ἔτσι μποροῦμε νά διατηρήσομε σ' αὐτά ὑγρά σέ χαμηλή θερμοκρασία (νερό, ἀναψυκτικά κ.λπ.) ἤ ὑγρά θερμά (ζεστό γάλα, ζεστή σούπα κ.λπ.) (σχ. 17 · 3 γ). Οἱ ἀρχές στίς ὁποῖες βασίζεται ἡ λειτουργία τους εἶναι:

α) Οἱ λεῖες καί στιλπνές ἐπιφάνειες ἀνακλοῦν τή θερμότητα, πού διαδίδεται μέ ἀκτινοβολία κι ἔτσι τή διώχνουν.

β) Τό κενό εἶναι κακός ἀγωγός τῆς θερμότητας.

Τά δοχεῖα Dewar ἱκανοποιοῦν τίς πιό πάνω ἀρχές, γιατί ἀποτελοῦνται ἀπό γυάλινα δοχεῖα μέ διπλά τοιχώματα, ἀνάμεσα στά ὁποῖα ὑπάρχει κενό καί τό γυαλί ἐξωτερικά εἶναι ἐπαργυρωμένο. Μέ τήν κατασκευή αὐτή πετυχαίνομε ἱκανή θερμική μόνωση.



Σχ. 17·3 γ.
Δοχεῖο Dewar.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΟΟ

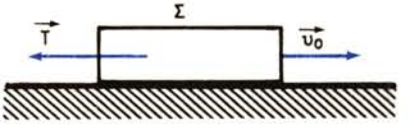
ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Ἡ Θερμοδυναμική ἐξετάζει τή θερμότητα σάν μιά μορφή ἐνέργειας καί τή συσχετίζει μέ τίς ἄλλες μορφές τῆς ἐνέργειας.

18·1 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΕ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Ὑπάρχουν πολλά φαινόμενα καί ἔχομε ἀρκετές ἐμπειρίες, πού μᾶς ἐπιβεβαιώνουν ὅτι εἶναι πολύ εὔκολο μηχανική ἐνέργεια νά μετατραπεῖ σέ θερμότητα.

Γιά νά ζεστάνομε τά χέρια μας τό χειμώνα, τά τρίβομε. Τά λάστιχα τῶν αὐτοκινήτων θερμαίνονται, ὅταν τό αὐτοκίνητο τρέχει. Τό μαχαίρι, ὅταν τρίβεται στό σμυριδοτροχό θερμαίνεται.



Σχ. 18·1.
Οἱ δυνάμεις τριβῆς μετατρέπουν τό μηχανικό ἔργο σέ θερμότητα.

Γενικά, οἱ δυνάμεις τριβῆς προκαλοῦν μετατροπή τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας σέ θερμότητα. Ἔτσι ἕνα σῶμα Σ (σχ. 18·1), πού ὀλισθαίνει σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, σταματᾶ μετά ἀπό κάποιο χρόνο, ἐξαιτίας τῆς τριβῆς πού ἐξασκεῖται. Στήν περίπτωση αὐτή, ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος, ὅταν σταματήσει, μηδενίζεται. Αὐτή ὅμως δέ χάθηκε ἀλλά μετατράπηκε σέ θερμότητα, ἡ ὁποία θερμαίνει τό σῶμα.

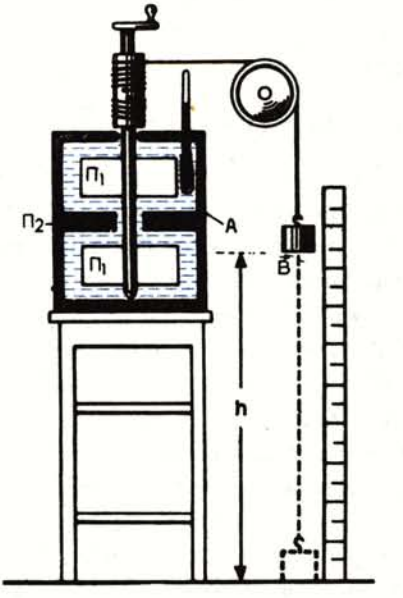
Γενικά, ὅλες αὐτές οἱ δυνάμεις, ὅπως ἡ τριβή ὀλισθήσεως, ἡ τριβή κυλίσεως, ἡ ἐσωτερική τριβή στά ὑγρά καί ἡ ἀντίσταση τοῦ ρευστοῦ, ἀποτελοῦν τίς λεγόμενες **παθητικές ἀντιστάσεις.** Αὐτές εἶναι οἱ **δυνάμεις πού ἀντιτίθενται στήν κίνηση καί συντελοῦν στή μετατροπή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῶν σωμάτων σέ θερμότητα.**

18·2 ΣΧΕΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Σύμφωνα μέ τά ὅσα εἴπαμε πιό πάνω, ἄν ὀνομάσομε A τή μηχανική ἐνέργεια πού χάθηκε καί Q τό ποσό τῆς θερμότητας πού δημιουργήθηκε, τότε θά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$A = Q$$

Ἔτσι, ὅταν χάνεται ἐνέργεια π.χ. 20 joule, παράγεται θερμότητα 20 joule. Ἄν θελήσομε νά βροῦμε τή θερμότητα αὐτή σέ cal, πρέπει νά προσδιορίσομε τή σχέση τῶν μονάδων joule καί cal. Αὐτό γίνεται μέ τή συσκευή τοῦ Joule, ἡ ὁποία εἰκονίζεται στό σχῆμα 18 · 2. Ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα θερμιδόμετρο A, πού ἐσωτερικά φέρει σταθερά πτερύγια Π_2 καί κινητά Π_1. Ἀνάμεσα στά πτερύγια ὑπάρχει νερό. Τά κινητά πτερύγια Π_1 περιστρέφονται μέ τή βοήθεια τοῦ βάρους B. Τό σῶμα B κινεῖται σιγά σιγά πρός τά κάτω, γιατί στήν κίνησή του ἀντιτίθεται ἡ ροπή πού ἐξασκεῖ τό περιδινούμενο νερό στά κινητά πτερύγια.



Σχ. 18·2.
Θερμιδόμετρο Joule.

Τό ἔργο πού παράγει τό βάρος B, καθώς πέφτει ἀπό τό ὕψος h, εἶναι:

$$A = B\,h.$$

Τό ἔργο αὐτό δέν μετατρέπεται σέ κινητική ἐνέργεια, ἀλλά σέ θερμότητα μέσα στό θερμιδόμετρο. Ἀπό τήν αὔξηση τῆς θερμοκρασίας $\Delta\theta$ στό θερμιδόμετρο καί ἀπό τή θερμοχωρητικότητά του K, βρίσκομε τό ποσόν τῆς θερμότητας πού παράγεται καί τό ὁποῖο δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$Q = K\,\Delta\theta$$

Ἔτσι βρέθηκε ὅτι, ἄν χαθεῖ μηχανική ἐνέργεια 4,19 joule, παράγεται θερμότητα ἴση πρός 1 cal.

Μποροῦμε ἑπομένως νά γράψομε:

$$1\ cal = 4{,}19\ joule$$

Σημείωση: Παλαιότερα χρησιμοποιοῦσαν τό «μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας» (J) καί τό «ἠλεκτρικό ἰσοδύναμο θερμότητας» (α) πού ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

1) Μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας J εἶναι ὁ λόγος:

$$J = \frac{A}{Q}$$

ὅπου: A τό καταναλισκόμενο ἔργο καί Q ἡ παραγόμενη θερμότητα.

Εἶναι J = 4,19 joule/cal.

2) Ἠλεκτρικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας α εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδύναμου:

$$a = \frac{Q}{A} = \frac{1}{J} = \frac{1}{4{,}19}\ joule/cal = 0{,}24\ \frac{cal}{joule}$$

Ἀπό τά παραπάνω φαίνεται ὅτι, τό μηχανικό καί ἠλεκτρικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας εἶναι συντελεστές μιᾶς ἐξισώσεως, πού συνδέει τήν ἐνέργεια A, πού καταναλώνεται, καί τήν ἀντίστοιχη θερμότητα Q πού παράγεται, καί ἔχουν σκοπό νά συσχετίσουν τίς μονάδες μετρήσεως τῶν δύο αὐτῶν μεγεθῶν, ὅταν δέν ἀνήκουν στό ἴδιο σύστημα μονάδων.

18 · 3 ΠΡΩΤΟ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ

Ὅπως εἴδαμε στά προηγούμενα, ἡ μηχανική ἐνέργεια μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ θερμότητα. Ὅπως θά δοῦμε πιό κάτω, καί ἡ θερμότητα μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ μηχανική ἐνέργεια.

Ἐκτός ὅμως ἀπό τή μηχανική ἐνέργεια καί τή θερμότητα ὑπάρχουν κι ἄλλες μορφές ἐνέργειας, ὅπως εἶναι ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια, ἡ χημική, ἡ πυρηνική ἐνέργεια κ.λπ. Καί γι' αὐτές τίς ἐνέργειες ἰσχύουν ὅσα εἴπαμε προηγουμένως. Ἔτσι, μηχανική ἐνέργεια μπορεῖ νά γίνει ἠλεκτρική καί ἀντίστροφα, ἠλεκτρική ἐνέργεια μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ θερμότητα κ.ο.κ. Στίς ἀλλαγές αὐτές ἰσχύει ὅτι: **Ὅταν χαθεῖ μιά μορφή ἐνέργειας παράγεται ἴση ποσότητα ἄλλης ἐνέργειας.** Αὐτό εἶναι τό **πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα.** Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα αὐτό **δέν μποροῦμε νά δημιουργήσομε ἐνέργεια ἀπό τό μηδέν,** γιατί ἐνέργεια δημιουργεῖται μόνο ἀπό μετατροπή ἄλλης ἐνέργειας.

Ἔτσι δέν μποροῦμε νά φτιάξομε **τό ἀεικίνητο τοῦ πρώτου εἴδους,** δηλαδή μιά μηχανή πού νά παράγει ἐνέργεια ἀπό τό μηδέν.

Σημείωση: Ἐπισημαίνομε ἐδῶ ὅτι οἱ μηχανές γενικά εἶναι συσκευές, οἱ ὁποῖες μετατρέπουν μορφές ἐνέργειας (δέν δημιουργοῦν ἐνέργεια). Γιά τό λόγο αὐτό κάθε μηχανή ἔχει συντελεστή ἀποδόσεως η, ὁ ὁποῖος εἶναι τό πηλίκον τῆς ἐνέργειας πού ἀποδίδει ἡ μηχανή σέ ὁρισμένο χρόνο t ($A_{εξ}$), διά τῆς ἐνέργειας πού τῆς προσφέρεται ($A_{εισ}$) στόν ἴδιο χρόνο (σχ. 18 · 3):

Σχ. 18·3.

$$\eta = \frac{A_{εξ}}{A_{εισ}} \qquad (1)$$

Ἡ ἐνέργεια ἐξόδου εἶναι συνήθως μικρότερη ἀπό τήν ἐνέργεια εἰσόδου. Ὅμως, σύμφωνα μέ τό πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα, δέν χάνεται ἐνέργεια.

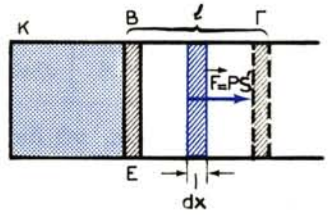
Ἑπομένως θά ἰσχύει:

$$A_{εισ} = A_{εξ} + Q$$

ὅπου: Q εἶναι ποσό θερμότητας πού παράγεται ἤ ἄλλη ἐνέργεια διαφορετική ἀπό ἐκείνη πού θέλομε νά μᾶς δώσει ἡ μηχανή.

18 · 4 ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Ἔστω ὅτι ἕνα ἀέριο βρίσκεται στόν κύλινδρο Κ καί τό ἔμβολο Ε μετακινεῖται ἀπό τή θέση Β στή θέση Γ (σχ. 18 · 4 α).



Σχ. 18·4 α.

Στίς δυό θέσεις Β καί Γ οἱ συνθῆκες τοῦ ἀερίου εἶναι ἀντίστοιχα P_1, V_1, T_1 καί P_2, V_2, T_2, ὅπου P ἡ πίεση, V ὁ ὄγκος καί T ἡ ἀπόλυτη θερμοκρασία.

Ἡ μεταβολή ἀπό τή θέση Β στή θέση Γ ἀκολουθεῖ τήν καμπύλη (Ι) τοῦ διαγράμματος (β) (σχ. 18 · 4 β).

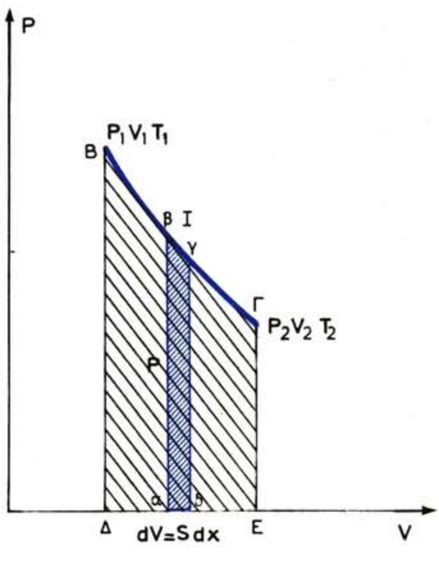
Κατά τή μετακίνηση τοῦ ἐμβόλου ἀπό τή θέση Β στήν Γ παράγεται ἔργο, τό ὁποῖο ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ δύναμη:

$$F = P S$$

(ὅπου: P ἡ πίεση ἀερίου καί S τό ἐμβαδόν τῆς διατομῆς τοῦ ἐμβόλου), μετακινεῖ τό ἔμβολο κατά dx καί παράγει στοιχειῶδες ἔργο: $dA = F\,dx = P\,S\,dx = P\,dV$.

Τό γινόμενο P dV εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδόν τῆς διαγραμμισμένης λωρίδας (αβγδ) στό σχῆμα 18 · 4 β.



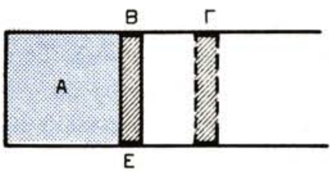
Σχ. 18·4 β.
Ἔργο παραγόμενο κατά τήν ἐκτόνωση ἀερίου.

Γιά νά ὑπολογίσομε τό ὁλικό ἔργο Α κατά τή μετακίνηση ἀπό τή θέση Β στή θέση Γ, ἀρκεῖ νά ἀθροίσομε τά στοιχειώδη ἐμβαδά τά πλευρικά πρός τή λωρίδα (αβγδ), στήν περιοχή ἀπό Δ ὥς Ε τοῦ διαγράμματος. Δηλαδή, τό ἔργο Α εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδόν ὁλόκληρης τῆς διαγραμμισμένης περιοχῆς (ΔΒΓΕ).

Σημειώνομε ἐδῶ ὅτι, ἄν γίνει ἡ μετακίνηση τοῦ ἐμβόλου ἀπό τή θέση Γ στή θέση Β, πρέπει νά ἐξασκηθεῖ ἐξωτερική δύναμη, δηλαδή θά καταναλωθεῖ μηχανική ἐνέργεια ἴση μέ τό ἐμβαδόν τῆς διαγραμμισμένης περιοχῆς (ΔΒΓΕ) στό διάγραμμα τοῦ σχήματος 18 · 4 β.

18 · 5 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΑΕΡΙΑ

Στό χῶρο Α ἑνός κυλίνδρου (σχ. 18 · 5) βρίσκεται ἕνα ἀέριο. Τό ἔμβολο Ε κινεῖται χωρίς τριβές καί ἰσορροπεῖ, γιατί ἡ πίεση τοῦ ἀερίου στό χῶρο Α εἶναι ἴση μέ τήν ἐξωτερική πίεση. Ἄν προσφέρουμε ἕνα ποσό θερμότητας στό ἀέριο, θά αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία του, δηλαδή θά αὐξηθεῖ ἡ ἐσωτερική του ἐνέργεια ἀπό U_1 σέ U_2. Ταυτόχρονα θά αὐξηθεῖ καί ὁ ὄγκος του,



Σχ. 18·5.

μέ ἀποτέλεσμα νά μετακινηθεῖ τό ἔμβολο ἀπό τή θέση Β στή θέση Γ, δηλαδή θά παραχθεῖ καί ἔργο Α.

Σύμφωνα μέ τό πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα ἐνέργεια δέ χάνεται.

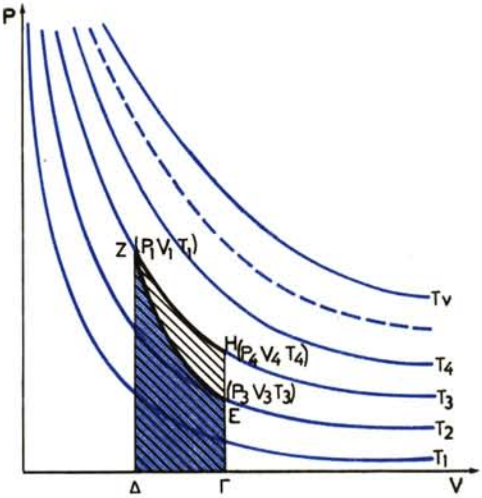
Ἑπομένως:

$Q = (U_2 - U_1) + A$	*Πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα*

Μποροῦμε ἑπομένως, νά διατυπώσομε ὡς ἑξῆς τό ἀξίωμα αὐτό:

Ἄν σ' ἕνα ἀέριο προσδώσομε ἕνα ποσό θερμότητας, ἕνα μέρος τῆς θερμότητας θά αὐξήσει τήν ἐσωτερική ἐνέργεια καί τό ὑπόλοιπο θά μετατραπεῖ σέ μηχανικό ἔργο. Ἑπομένως, διαπιστώνομε ὅτι μπορεῖ ἕνα τμῆμα θερμότητας νά μετατραπεῖ σέ μηχανικό ἔργο.

Σημείωση: Ἄν δέν αὐξηθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου, δέν παράγεται ἔργο. Δηλαδή δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά παράγεται ἔργο, ὅταν ἕνα ἀέριο θερμαίνεται.



Σχ. 18·6 α.
Ἰσόθερμες καμπύλες (Μεταβολή πιέσεως σέ συνάρτηση μέ τόν ὄγκο ἀερίου, ὑπό σταθερή θερμοκρασία - Νόμος Boyle - Mariotte.

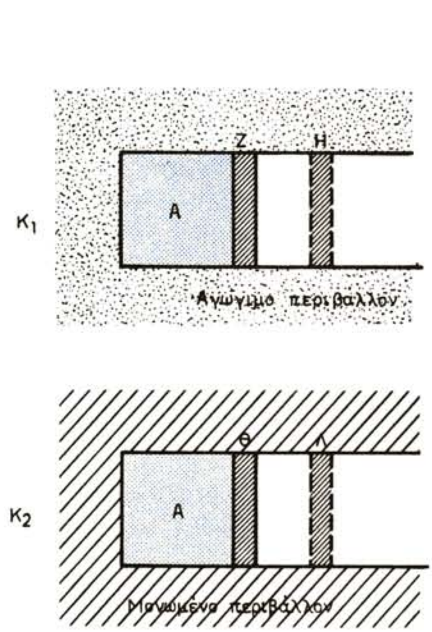
18·6 ΙΣΟΘΕΡΜΕΣ ΚΑΙ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Ἀπό τήν καταστατική ἐξίσωση τῶν τελείων ἀερίων $PV = nRT$ μποροῦμε γιά κάθε τιμή τῆς θερμοκρασίας T νά χαράξομε μιά καμπύλη στούς ἄξονες P καί V (σχ. 18·6 α).

Οἱ καμπύλες αὐτές ἀποτελοῦν μία ὁμάδα καμπυλῶν, πού ὀνομάζονται **ἰσόθερμες καμπύλες** γιατί, ὅπως εἴπαμε, ἡ κάθε μία ἀπ' αὐτές παριστάνει τή μεταβολή πιέσεως καί ὄγκου ἑνός ἀερίου σέ σταθερή θερμοκρασία.

Ἔστω τώρα ὅτι ἔχομε δύο κυλίνδρους K_1 καί K_2 (σχ. 18·6 β), μέσα στούς ὁποίους βρίσκεται τό ἴδιο ἀέριο σέ ἴσες ποσότητες καί σέ ἴδιες συνθῆκες πιέσεως P_1, ὄγκου V_1 καί θερμοκρασίας T_3. Στό διάγραμμα τῶν ἰσόθερμων καμπυλῶν (β), αὐτές οἱ συνθῆκες ἀντιστοιχοῦν στό σημεῖο Ζ (σχ. 18·6 α). Μέ τή βοήθεια αὐτῶν τῶν δύο σχημάτων θά ἐξετάσομε δύο εἴδη μεταβολῶν στά ἀέρια, τήν ἰσόθερμη καί τήν ἀδιαβατική μεταβολή.

α) **Ἰσόθερμη μεταβολή.** Τό ἀέριο στόν κύλινδρο K_1 περιβάλλεται ἀπό ἀγώγιμο χῶρο καί ἔτσι μπορεῖ νά ἀποβάλλει τυχόν περίσσευμα θερμότητας ἤ νά συμπληρώσει τυχόν ἔλλειμμα θερμότητας, ὥστε τελικά ἡ θερμοκρασία του νά παραμείνει σταθερή. **Οἱ μεταβολές πού γίνονται στό ἀέριο, στό χῶρο αὐτό, ὀνομάζονται ἰσόθερ-**



Σχ. 18·6 β.

μες μεταβολές. Πιό κάτω θά παρακολουθήσομε τέτοιες μεταβολές.

Ἄν δεχτοῦμε ὅτι στή θέση Ζ τοῦ ἐμβόλου, τό ἀέριο ἔχει μεγαλύτερη πίεση ἀπό τό περιβάλλον, τότε τό ἔμβολο θά κινηθεῖ πολύ ἀργά ἀπό τό Ζ στό Η. Σ' ὅλη ὅμως αὐτή τή μεταβολή, ἡ θερμοκρασία θά παραμείνει σταθερή καί ἴση πρός T_3. Ἔχομε λοιπόν αὔξηση τοῦ ὄγκου καί ἐλάττωση τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου μέ σταθερή θερμοκρασία, δηλαδή ἔχουμε **ἰσόθερμη ἐκτόνωση στό ἀέριο**. Ἡ μεταβολή αὐτή στό διάγραμμα τῶν καμπυλῶν παριστάνεται πάνω στήν ἰσόθερμη T_3 καί εἶναι ἡ ΖΗ (σχ. 18 · 6 α). Στήν ἰσόθερμη αὐτή ἐκτόνωση παράγεται ἔργο ἴσο πρός τό ἐμβαδόν ΔΖΗΓ.

Ἐπειδή κατά τή μεταβολή αὐτή ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου δέν ἄλλαξε, δέν ἄλλαξε καί ἡ ἐσωτερική ἐνέργεια τοῦ ἀερίου, δηλαδή $U_Z = U_H$ ἤ $U_Z - U_H = 0$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση $Q = (U_H - U_Z) + A$ γίνεται $Q = A$. **Δηλαδή τό ἔργο πού παράγεται κατά τήν ἰσόθερμη μεταβολή εἶναι ἀποτέλεσμα μετατροπῆς τῆς θερμότητας σέ ἔργο.** Τό ἀέριο πῆρε τήν ἀναγκαία αὐτή θερμότητα ἀπό τόν περιβάλλοντα χῶρο, γιατί, ὅπως εἴπαμε, ὁ κύλινδρος K_1 ἔχει καλή θερμική ἀγωγιμότητα μέ τό περιβάλλον καί ἡ μετακίνηση τοῦ ἐμβόλου Μ γίνεται πολύ ἀργά.

Ἄν τώρα συμπιέσομε πολύ ἀργά τό ἔμβολο τοῦ κυλίνδρου K_1 ἀπό τή θέση Η στή θέση Ζ, τότε καταναλώνεται ἔργο ἴσο μέ τό ἐμβαδόν ΖΗΓΔ (διάγραμμα τῶν ἰσόθερμων καμπυλῶν, σχ. 18 · 6 α). Τό ἔργο αὐτό δέν μεγαλώνει τήν ἐσωτερική ἐνέργεια τοῦ ἀερίου, γιατί δέν τοῦ μεταβάλλει τή θερμοκρασία. Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση:

$$Q = (U_H - U_Z) + A$$

τό ἔργο Α, πού καταναλώθηκε, μετατρέπεται σέ θερμότητα Q ἡ ὁποία ὅμως ἀποβάλλεται στό ἀγώγιμο περιβάλλον πού βρίσκεται γύρω ἀπό τόν κύλινδρο K_1.

β) **Ἀδιαβατική μεταβολή.** Στό χῶρο πού περιβάλλει τόν κύλινδρο K_2 ἐπικρατοῦν διαφορετικές συνθῆκες, ἀπό ἐκεῖνες τοῦ κυλίνδρου K_1. Ὁ χῶρος Α τοῦ ἀερίου εἶναι τελείως μονωμένος ἀπό τό περιβάλλον. Ἄν, γιά ὁποιοδήποτε λόγο, παραχθεῖ θερμότητα στό ἀέριο, θά παραμείνει ἐκεῖ καί, ἀντίστροφα, ἄν χρειαστεῖ τό ἀέριο γιά ὁποιοδήποτε λόγο, θερμότητα, θά τήν πάρει ἀπό τήν ἐσωτερική του ἐνέργεια. **Οἱ μεταβολές**

πού θά γίνουν στό άέριο στό χώρο αύτό όνομάζονται άδιαβατικές μεταβολές. Θά παρακολουθήσομε τώρα τίς μεταβολές αύτές.

Έστω ότι τό έμβολο τοῦ κυλίνδρου K_2 βρίσκεται στή θέση Ζ, τό άέριο βρίσκεται στίς συνθῆκες P_1, V_1 καί T_3 πού άντιστοιχοῦν στό σημεῖο Ζ τοῦ διαγράμματος τῶν ἰσόθερμων καμπυλῶν. Ἐπειδή ἐκεῖ τό ἀέριο ἀσκεῖ πίεση μεγαλύτερη ἀπό τό περιβάλλον, τό ἔμβολο μετακινεῖται ἀπό τή θέση Ζ στή θέση Ε. Στή μετακίνηση αὐτή ἔχομε παραγωγή ἔργου Α.

Στήν ἐξίσωση:

$$Q = (U_E - U_Z) + A$$

τό $Q = 0$, γιατί τό ἀέριο στόν κύλινδρο Κ εἶναι θερμικά μονωμένο.

Ἑπομένως, θά ἔχομε παραγωγή ἔργου Α σέ βάρος τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας:

$$A = -(U_E - U_Z) = U_Z - U_E > 0$$

Δηλαδή ἡ ἐνέργεια U_E μετά τήν αὔξηση τοῦ ὄγκου ἔγινε μικρότερη ἀπό τήν U_Z πρίν ἀπό τήν αὔξηση τοῦ ὄγκου. Ἔχομε μέ ἄλλα λόγια, μείωση τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας τοῦ ἀερίου, πού σημαίνει ἐλάττωση τῆς θερμοκρασίας (ψύξη) τοῦ ἀερίου. Ἔτσι, ἀπό τή θερμοκρασία T_3 πηγαίνομε στή θερμοκρασία T_2 ($T_2 < T_3$) καί οἱ νέες συνθῆκες τοῦ ἀερίου τώρα εἶναι P_2, V_3, T_2, πού ἀντιστοιχοῦν στή θέση Ε στίς ἰσόθερμες καμπύλες.

Στό διάγραμμα τῶν ἰσόθερμων, ἡ μεταβολή αὐτή ἀντιστοιχεῖ στήν καμπύλη ΖΕ καί ὀνομάζεται **ἀδιαβατική ἐκτόνωση.** Σημειώνουμε ὅτι καί σ' αὐτή τήν περίπτωση τό ἔργο πού παράγεται εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδόν ΖΕΓΔ στό διάγραμμα τῶν ἰσόθερμων.

Ἄν τώρα κινηθοῦμε ἀντίστροφα, δηλαδή συμπιέσομε τό ἀέριο τοῦ κυλίνδρου K_2 μετακινώντας τό ἔμβολο ἀπό τή θέση Ε στή θέση Ζ, καταναλώνομε ἔργο, τό ὁποῖο σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση:

$$Q = (U_Z - U_E) + A$$

μεγαλώνει τήν ἐσωτερική ἐνέργεια τοῦ ἀερίου (γιατί $Q = 0$), δηλαδή θερμαίνει τό ἀέριο.

Ἡ μεταβολή αὐτή στό διάγραμμα τῶν ἰσόθερμων παριστάνεται μέ τήν καμπύλη ΕΖ καί τό ἔργο πού καταναλώθηκε εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδόν τοῦ σχήματος ΖΕΓΔ.

Σημείωση: Μποροῦμε σέ ἕνα ἀέριο νά ἐπιτύχομε ἰσόθερμη μεταβολή ἄν μεταβάλλουμε τόν ὄγκο του σιγά-σιγά, ὁπότε δίνεται ἀρκετός χρόνος νά ἀποβληθεῖ ἤ νά ἀπορροφηθεῖ ἀπό τό περιβάλλον θερμότητα (βραδεία συμπίεση ἤ ἐκτόνωση).

Ἐπίσης μποροῦμε νά ἐπιτύχομε ἀδιαβατική μεταβολή προκαλώντας μιά γρήγορη συμπίεση ἤ μιά γρήγορη ἐκτόνωση σέ ἕνα ἀέριο, ὁπότε ὁ μικρός χρόνος δέν ἐπαρκεῖ, ὥστε τό ἀέριο νά ἀποβάλλει στό περιβάλλον τά περισσεύματα θερμότητας ἤ νά λάβει ἀπό τό περιβάλλον τήν ἀναγκαία θερμότητα.

Ἐφαρμογή αὐτῆς τῆς ἀδιαβατικῆς ἐκτονώσεως ἔχομε στήν ὑγροποίηση τῶν ἀερίων, πού δύσκολα ὑγροποιοῦνται. Τά ἀέρια αὐτά τά τοποθετοῦμε σέ κλειστούς χώρους μέ χαμηλή σχετικά θερμοκρασία καί ὑψηλή πίεση. Στή συνέχεια κάνομε ταχεία ἐκτόνωση, μέ ἀποτέλεσμα νά ἐλαττωθεῖ ἡ θερμοκρασία τους κάτω ἀπό τά σημεῖα ζέσεως καί ἑπομένως νά ὑγροποιηθοῦν.

Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίζεται ἡ μηχανή Linde (Λίντε) μέ τήν ὁποία ὑγροποιοῦμε τόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα.

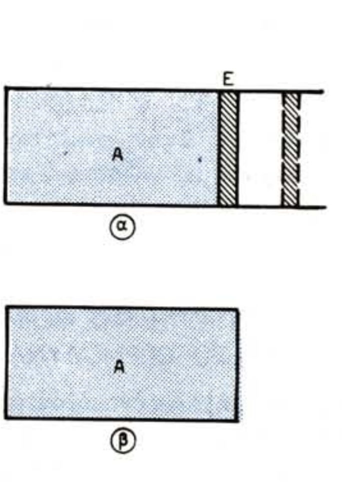
Σημείωση: Τό θερμοδυναμικό ἀξίωμα ἀναφέρεται σέ ἐνέργειες, ἐνῶ ἐμεῖς στή σχέση:

$$Q = (U_2 - U_1) + A$$

ἀναφερόμαστε σέ ἔργο Α. Πρέπει ὅμως νά γνωρίζομε ὅτι, ἄν κάπου παράγεται ἔργο, τελικά αὐτό μετατρέπεται σέ κάποια ἐνέργεια κινητική ἤ δυναμική. Ἔτσι, ὅταν π.χ. στήν ἰσόθερμη μεταβολή λέμε ὅτι παράχθηκε ἔργο Α ἀπό θερμότητα Q, εἶναι ὀρθό, γιατί τό ἔργο Α παράγει ἐνέργεια. Δηλαδή θά μποροῦσε νά διατυπωθεῖ ὅτι **ἡ ἐνέργεια πού παράγεται** ἀπό τό ἔργο Α, προῆλθε ἀπό τήν ἀπώλεια τῆς θερμότητας Q.

18 · 7 ΕΙΔΙΚΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Ἔστω ὅτι ἔχομε τήν ἴδια μάζα ἀερίου σέ δυό διαφορετικά δοχεῖα (σχ. 18 · 7). Τό δοχεῖο (α) ἔχει ἕνα ἔμβολο Ε, τό ὁποῖο μπορεῖ νά μετακινεῖται, ὅταν ὑπάρχει διαφορά πιέσεως πρός τήν πλευρά τῆς μικρότερης πιέσεως. Ἔτσι ἡ πίεση στό χῶρο Α τοῦ δοχείου (α) παραμένει σταθερή καί ἴση μέ τήν ἐξωτερική πίεση. Τό δοχεῖο (β) ἔχει σταθερές διαστάσεις. Ἄν τώρα θερμάνομε τά δυό ἀέρια, στό δοχεῖο (α) θά ἔχομε αὔξηση τοῦ ὄγκου μέ σταθερή πίεση (ἰσοβαρής



Σχ. 18·7.

μεταβολή) ἐνῶ στό δεύτερο δοχεῖο θά ἔχομε αὔξηση τῆς πιέσεως μέ σταθερό ὄγκο (ἰσόχωρη μεταβολή).

Διαπιστώνεται ὅμως ὅτι, γιά νά αὐξήσομε τή θερμοκρασία κατά Δθ βαθμούς στήν ἰσοβαρή μεταβολή (δοχεῖο α), χρειαζόμαστε μεγαλύτερο ποσό θερμότητας ἀπ' ὅ,τι, στήν ἰσόχωρη μεταβολή (δοχεῖο β), κι αὐτό γιατί τό ποσό τῆς θερμότητας, πού δίνομε στήν ἰσοβαρή μεταβολή, **δέν ξοδεύεται ὅλο γιά νά θερμάνει τό ἀέριο. Ἕνα μέρος τῆς θερμότητας χρειάζεται γιά νά παραχθεῖ τό ἔργο κατά τή μετακίνηση τοῦ ἐμβόλου ἀπό τή θέση Ε στήν ἀντίστοιχη Ε΄.**

Ἔτσι: α) Γιά τήν περίπτωση τοῦ ἀερίου τοῦ δοχείου (α) ἰσχύει:

$$Q_1 = c_p\, m\, \Delta\theta$$

ὅπου: c_p ἡ **εἰδική θερμότητα ὑπό σταθερή πίεση.**

β) Γιά τήν περίπτωση τοῦ ἀερίου στό δοχεῖο (β):

$$Q_2 = c_\upsilon\, m\, \Delta\theta$$

ὅπου: c_υ ἡ **εἰδική θερμότητα ὑπό σταθερό ὄγκο.**

Ἐπειδή, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε, $Q_1 > Q_2$, θά εἶναι $c_p > c_\upsilon$.

Συμπέρασμα: Τά ἀέρια ἔχουν δύο εἰδικές θερμότητες. Τήν εἰδική θερμότητα ὑπό σταθερή πίεση c_p καί τήν εἰδική θερμότητα ὑπό σταθερό ὄγκο c_υ. Ἡ c_p εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν c_υ καί ὁ λόγος $c_p/c_\upsilon = \gamma$ **εἶναι σταθερός γιά τά ἀέρια μέ ἴδιο ἀριθμό ἀτόμων στό μόριό τους.** Ἔτσι στά μονατομικά ἔχει τιμή 5/3, στά διατομικά 7/5 καί στά τριατομικά 4/3.

Σημείωση 1. Ὁ λόγος αὐτός γ χρησιμοποιήθηκε στόν ὑπολογισμό τῆς ταχύτητας μεταδόσεως τοῦ κύματος στά ἀέρια [παράγρ. 11 · 3 (γ)].

Σημείωση 2. Στήν περίπτωση τῆς ἀδιαβατικῆς συμπιέσεως καί ἐκτονώσεως ὁ νόμος τῶν Boyle - Mariotte διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

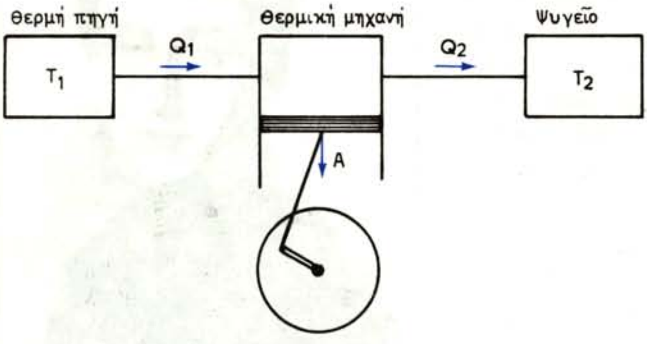
$$P\, V^\gamma = \sigma\tau\alpha\theta.$$

18 · 8 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΕΡΓΟ — ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ

Θερμικές μηχανές ὀνομάζονται οἱ μηχανές, πού μετατρέπουν τή θερμική ἐνέργεια σέ μηχανική (σχ. 18 · 8).

Γιά νά λειτουργήσουν οἱ θερμικές μηχανές, πρέπει νά ὑπάρχουν: 1) μιά θερμή πηγή μέ θερμοκρασία T_1

καί 2) ἕνα ψυγεῖο μέ θερμοκρασία $T_2 < T_1$. **Οἱ θερμικές μηχανές παίρνουν ἕνα ποσό θερμότητας ἀπό τή θερμή πηγή, παράγουν ἔργο A καί ἀποδίδουν στό ψυγεῖο, πού ἔχει θερμοκρασία $T_2 < T_1$ ἕνα ποσό θερμότητας Q_2.**



Σχ. 18·8.

Σύμφωνα μέ τό πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα θά ἔχομε:

$$Q_1 = Q_2 + A$$

Ὁ συντελεστής ἀποδόσεως αὐτῆς τῆς μηχανῆς ὀνομάζεται **βιομηχανικός συντελεστής ἀποδόσεως η** καί εἶναι ἴσος:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Ἔστω ὅτι διαθέτουμε διαφόρων τύπων θερμικές μηχανές, πού ἐργάζονται μεταξύ θερμικῆς πηγῆς καί ψυγείου μέ ἴδιες σταθερές ἀπόλυτες θερμοκρασίες. Θά διαπιστώσουμε ὅτι οἱ μηχανές θά ἔχουν διαφορετικούς βιομηχανικούς συντελεστές ἀποδόσεως.

Ὅμως, ὁ βιομηχανικός συντελεστής ἀποδόσεώς τους δέν μπορεῖ νά ὑπερβεῖ τό συντελεστή ἀποδόσεως μιᾶς θεωρητικῆς θερμικῆς μηχανῆς, πού ὀνομάζεται μηχανή τοῦ Καρνώ (Carnot). Ὁ συντελεστής ἀποδόσεως αὐτῆς ὀνομάζεται **θερμοδυναμικός συντελεστής ἀποδόσεως** τῆς μηχανῆς Carnot καί δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$	*Θερμοδυναμικός συντελεστής ἀποδόσεως Carnot*

Τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι, **εἶναι ἀδύνατο νά κατασκευάσουμε μιά θερμική μηχανή πού νά παίρνει θερμότητα καί νά τήν μετατρέπει ὁλόκληρη σέ μηχανική**

ἐνέργεια. Αὐτό ἀποτελεῖ τό δεύτερο θερμοδυναμικό ἀξίωμα.

Εἶναι δηλαδή ἀδύνατο νά κατασκευάσουμε τό **ἀεικίνητο τοῦ δευτέρου εἴδους,** πού θά ἦταν μιά μηχανή, ἡ ὁποία θά μποροῦσε νά μετατρέψει τά τεράστια ἀποθέματα θερμότητας τῶν θαλασσῶν σέ μηχανική ἐνέργεια. Γιά νά μετατρέψομε θερμότητα σέ ἔργο **πρέπει** πρῶτα ἀπ' ὅλα **νά ἔχομε διαφορά θερμοκρασίας** καί τότε πάλι δέν μετατρέπεται σέ μηχανική ἐνέργεια ὅλο τό ποσό τῆς θερμότητας, πού παίρνουμε ἀπό τή θερμή πηγή.

Ἐφαρμογή : Θερμή πηγή καί ψυγεῖο ἔχουν θερμοκρασίες $T_1 = 473$ K° καί $T_2 = 303°$ K. Ποιός ὁ μέγιστος συντελεστής ἀποδόσεως τῆς θερμικῆς αὐτῆς μηχανῆς;

Λύση :

Μέγιστος συντελεστής ἀποδόσεως εἶναι ὁ θερμοδυναμικός συντελεστής ἀποδόσεως, ἑπομένως στή σχέση:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$ ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές καί παίρνουμε

$$\eta = \frac{473 - 303}{173} = 0{,}36 = 36\,\%.$$

Sadi Carnot (1796 - 1832). Γάλλος Μηχανικός - Φυσικός.

18 · 9 ΜΗΧΑΝΗ CARNOT ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ CARNOT

Ἡ μηχανή Carnot λειτουργεῖ μέ ἕνα ἀέριο πού ξεκινᾶ μέ ὁρισμένες συνθῆκες πιέσεως, ὄγκου καί θερμοκρασίας καί οἱ ὁποῖες μεταβάλλονται, ἀλλά τελικά ἐπανέρχονται στίς ἀρχικές τους συνθῆκες.

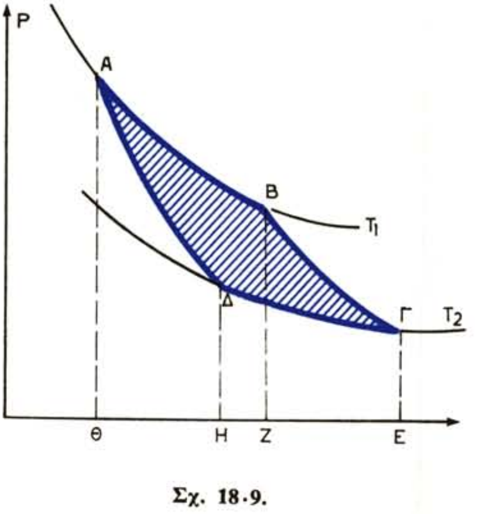
Ἡ σειρά αὐτή τῶν μεταβολῶν τοῦ ἀερίου καί ἡ ἐπάνοδός του στίς ἴδιες ἀρχικές συνθῆκες ἀποτελεῖ ἕνα κύκλο. Σύμφωνα μέ τόν «κύκλο» τοῦ Carnot ἕνα ἀέριο (σχ. 18 · 9):

1) Ἐκτονώνεται ἰσόθερμα στήν ἰσόθερμη καμπύλη θερμοκρασίας T_1 (Τμῆμα ΑΒ).

2) Συνεχίζει τήν ἐκτόνωσή του ἀδιαβατικά (τμῆμα ΒΓ).

3) Συμπιέζεται ἰσόθερμα στήν ἰσόθερμη καμπύλη θερμοκρασίας T_1 (τμῆμα ΓΔ).

4) Συνεχίζει τή συμπίεση ἀδιαβατικά (τμῆμα ΔΑ) καί τελικά ἐπανέρχεται στό σημεῖο Α ἀπό τό ὁποῖο ξεκίνησε (συμπληρώνει τόν κύκλο).



Σχ. 18·9.

Στίς δυό πρῶτες μεταβολές ΑΒ καί ΒΓ παράγεται ἔργο ἴσο πρός τό ἐμβαδόν ΘΑΒΓΕ καί στίς δύο τελευταῖες ΓΔ καί ΔΑ καταναλώνεται ἔργο ἴσο πρός τό ἐμβαδόν ΘΑΔΓΕ.

Ἡ διαφορά αὐτῶν τῶν δύο ἐμβαδῶν (γραμμοσκιασμένο τμῆμα) παριστάνει τό μηχανικό ἔργο πού παράγεται στή μηχανή τοῦ Carnot.

Σ' αὐτή τήν ἰδανική μηχανή, πού πρέπει νά προβλέπονται ἰδανικές ἰσόθερμες καί ἀδιαβατικές μεταβολές καί παντελής ἔλλειψη τριβῆς, ὁ συντελεστής ἀποδόσεως ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχει **τή μέγιστη τιμή συντελεστῆ ἀποδόσεως θερμικῆς μηχανῆς.** Δηλαδή τό συντελεστή ἀποδόσεως:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

πού, ὅπως εἴπαμε, ὀνομάζεται **θερμοδυναμικός συντελεστής ἀποδόσεως.**

18 · 10 ΑΡΧΗ ΥΠΟΒΑΘΜΙΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Σύμφωνα μέ τό δεύτερο θερμοδυναμικό ἀξίωμα, ἡ θερμότητα δέν εἶναι εὔκολο νά μετατραπεῖ σέ ἔργο. Ἀντίθετα, ὅλες οἱ ἄλλες μορφές ἐνέργειας εὔκολα μετατρέπονται σέ θερμότητα. Μποροῦμε ἑπομένως νά ποῦμε ὅτι ἡ θερμότητα εἶναι κακῆς ποιότητας ἐνέργεια, ὅταν αὐτή εἶναι ἀποκλεισμένη σέ χῶρο σταθερῆς θερμοκρασίας.

Ἀπό τό ἄλλο μέρος, ἄν μεταξύ δύο σωμάτων ὑπάρχει διαφορά θερμοκρασίας, ἔχουμε ροή θερμότητας ἀπό τό σῶμα ὑψηλότερης θερμοκρασίας πρός τό σῶμα μικρότερης θερμοκρασίας καί τελικά βαδίζουμε στήν ἐξίσωση τῶν θερμοκρασιῶν:

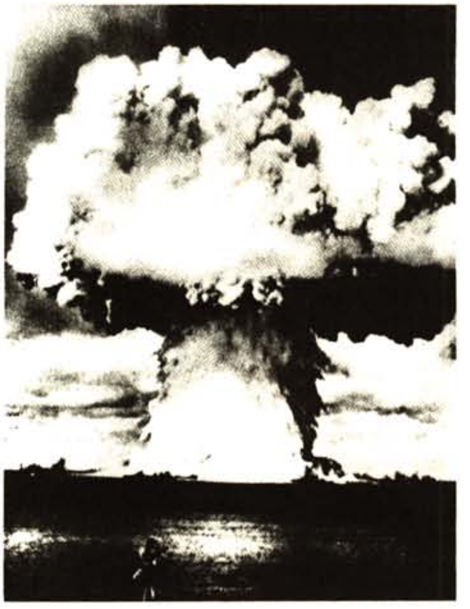
Συνεπῶς **ὅλες οἱ ἐνέργειες στή φύση μετατρέπονται σέ θερμότητα, ἐνῶ οἱ θερμοκρασίες τείνουν νά ἐξισωθοῦν**

Θά ἔλθει ἑπομένως καιρός, πού θά εἶναι ἀδύνατη ἡ παραγωγή ἄλλης μορφῆς ἐνέργειας ἀπό τά ἀποθέματα τῆς θερμότητας σ' ἕνα κλειστό σύστημα, ὅπως μπορεῖ νά θεωρηθεῖ τό Σύμπαν καί ἔτσι θά ἐπέλθει ὁ **θερμικός θάνατος.** Ἡ πρόταση αὐτή ἀποτελεῖ τήν ἀρχή τῆς **ὑποβαθμίσεως τῆς ἐνέργειας.**

Τήν πρόταση αὐτή διατύπωσε ὁ Boltzmann. Ἡ ἀπαισιόδοξη αὐτή ἄποψη γιά τή ζωή τοῦ κόσμου μας, πού μπορεῖ ὅπως εἴπαμε νά θεωρηθεῖ κλειστό σύστημα, δέν ἰσχύει ὄχι μόνο γιατί τό Σύμπαν εἶναι πολύ μεγάλο γιά νά θεωρηθεῖ κλειστό, ἀλλά κυρίως γιατί ἀποδείχτηκε ὅτι ὑπάρχουν τεράστια ἀποθέματα ὠφέλιμης ἐνέργειας στή φύση. Ἡ ἐνέργεια αὐτή εἶναι ἡ **ἀτομική ἐνέργεια.**

Ἀκόμα διαπιστώθηκε ὅτι ἡ θερμοκρασία τῶν ἀστέρων εἶναι σταθερή, ἐπειδή ἐκεῖ γίνονται πυρηνικές ἀντιδράσεις. Ἔτσι ὁ ἥλιος διατήρησε ὑψηλή τή θερμοκρασία του ἐπί μεγάλο χρονικό διάστημα, ἐνῶ ἔπρεπε νά εἶναι σήμερα ἕνα ψυχρό ἄστρο, καί θά τή διατηρήσει γιά μεγάλο ἀκόμα διάστημα, ἐπειδή εἶναι ἕνα πυρηνικό ἐργαστήριο πού **μετατρέπει μάζα σέ ἐνέργεια.**

Ὁ αἰώνας τοῦ ἀτόμου ἄρχισε αἰσιόδοξα καί ἡ ἀνθρωπότητα μπορεῖ νά ἀτενίζει σ' ἕνα μακροχρόνιο καί ἐλπιδοφόρο μέλλον.



Ἡ ἀτομική ἐνέργεια μᾶς ἐγγυᾶται ὅτι δέν θά ἐπέλθει ὁ θερμικός θάνατος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α) ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

I) Ἐπιταχυνομένη κίνηση (κίνηση ὑλικοῦ σημείου)

1) Σῶμα ξεκινᾶ ἀπό τήν ἠρεμία καί κινεῖται σέ εὐθεία μέ ὁμαλά ἐπιταχυνομένη κίνηση καί μέ ἐπιτάχυνση 8 m/s^2. Νά ὑπολογισθεῖ : α) Ἡ ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει μετά ἀπό χρόνο 5 s, β) τό διάστημα πού θά διανύσει στό χρόνο αὐτό καί γ) ἡ μέση ταχύτητα $\overline{υ}$ στό χρονικό διάστημα τῶν 5 s.

2) Ἡ ταχύτητα κινητοῦ πού κινεῖται πάνω σέ εὐθεία μεγαλώνει ὁμαλά ἀπό 15 mil/h στά 60 mil/h σέ χρόνο 20 s. Νά προσδιορισθοῦν: α) ἡ μέση ταχύτητα $\overline{υ}$ σέ m/s, β) ἡ ἐπιτάχυνση σέ m/s^2, καί γ) τό διάστημα s πού διανύεται στό χρόνο αὐτό.

3) Ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται σέ εὐθεία μέ ταχύτητα 5 m/s. Ἄν ἀρχίσει νά ἐπιταχύνεται μέ ἐπιτάχυνση 1 m/s^2 νά ὑπολογισθεῖ: α) τό διάστημα πού θά διανύσει σέ χρόνο 6 s. β) Ἄν τό αὐτοκίνητο ἐπιβραδύνεται μέ ἐπιβράδυνση 1 m/s^2 μετά ἀπό πόσο χρόνο θά σταματήσει καί τί διάστημα θά διανύσει.

4) Κινητό ξεκινᾶ ἀπό ἠρεμία καί κινεῖται σέ εὐθεία τροχιά μέ κίνηση ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη. Ἄν μεταξύ δεύτερου καί τρίτου δευτερολέπτου διανύσει διάστημα $s = 10$ m, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ καί τό διάστημα πού θά διανύσει αὐτό σέ χρόνο 3 s ἀπό τό ἀρχικό ξεκίνημα.

5) Αὐτοκίνητο κινεῖται εὐθύγραμμα μέ ταχύτητα 72 km/h. Ὁ ὁδηγός βλέπει μπρός του ἕνα ἐμπόδιο καί μετά δύο δευτερόλεπτα πατᾶ φρένο. Ἔτσι σταματᾶ σέ ἀπόσταση 80 m ἀπό τό σημεῖο ὅπου ἀντιλήφθηκε τόν κίνδυνο. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ποιά εἶναι ἡ ἐπιβράδυνση τοῦ αὐτοκινήτου. β) Πόσος χρόνος πέρασε ἀπό τή στιγμή πού ὁ ὁδηγός ἀντιλήφθηκε τόν κίνδυνο μέχρις ὅτου σταμάτησε. γ) Νά παρασταθεῖ γραφικά ἡ ταχύτητα καί ἡ ἐπιτάχυνση σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο.

II) Ἐλεύθερη πτώση

6) Πέτρα πέφτει κατακόρυφα στό κενό καί ἔχει ταχύτητα σέ ὕψος 20 m ἀπό τό ἔδαφος 12 m/s. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἀπό ποιό ὕψος ἀφέθηκε ἡ πέτρα ἐλεύθερη νά πέσει. β) Πόσο χρόνο θά χρειασθεῖ γιά νά διανύσει τό ὕψος τῶν 20 m. γ) Ποιά ταχύτητα θά ἀποκτήσει ὅταν φτάσει στό ἔδαφος. Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας νά ληφθεῖ 10 m/s^2.

7) Σῶμα ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα 40 m/s καί ἄλλο σῶμα ἀφήνεται τήν ἴδια στιγμή νά πέσει ἀπό ὕψος 50 m. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ θέση τοῦ ὁριζόντιου ἐπιπέδου, ἀπό τό ὁποῖο θά περάσουν ταυτόχρονα τά δυό σώματα καί μετά ἀπό πόσο χρόνο θά γίνει αὐτό. β) Οἱ ταχύτητες πού θά ἔχουν τά δυό σώματα.

Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας νά ληφθεῖ 10 m/s^2.

8) Ἕνα σῶμα ἐκτοξεύεται ἀπό τό ἔδαφος κατακόρυφα πρός τά ἐπάνω μέ ἀρχική ταχύτητα 50 m/s. Νά ὑπολογισθεῖ: α) Τό ὕψος στό ὁποῖο μπορεῖ νά φτάσει. β) Ὁ συνολικός χρόνος πού θά ἀπαιτηθεῖ γιά νά ἐπανέλθει στή Γῆ. γ) Νά παρασταθεῖ γραφικά ἡ ταχύτητα σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο, στό χρονικό διάστημα ἀπό τήν ἀρχική ἐκτόξευση μέχρι τήν ἐπιστροφή τοῦ σώματος στό ἔδαφος.

9) Βλῆμα πυροβόλου ἐκτοξεύεται μέ γωνία 30° ὡς πρός τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί μέ ἀρχική ταχύτητα 500 m/s. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Σέ πόσο χρόνο θά ξαναπέσει τό βλῆμα στό ἔδαφος. β) Πόσο εἶναι τό βεληνεκές. γ) Ποιά γωνία θά σχηματίζει ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο τή στιγμή πού θά συναντήσει τό ἔδαφος καί δ) ποιό εἶναι τό βεληνεκές ἄν ἡ γωνία βολῆς γίνει 45° (g = 10 m/s).

10) Ἀπό τήν κορυφή πύργου πού ἀπέχει ἀπό τό ἔδαφος κατακόρυφη ἀπόσταση h = 170 m ἐκτοξεύεται σῶμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_o$ = 40 m/s καί κλίση 30° πρός τά ἄνω σχετικά μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τήν κορυφή τοῦ πύργου. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ὁριζόντια ἀπόσταση τοῦ πύργου ἀπό τό σημεῖο στό ὁποῖο τό σῶμα θά συναντήσει τό ἔδαφος. β) Ἡ ταχύτητα πού θά ἔχει τό σῶμα τή στιγμή τῆς συναντήσεώς του μέ τό ἔδαφος. γ) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς τροχιᾶς.

III) Κυκλική κίνηση

11) Αὐτοκίνητο ἔχει ρόδες μέ διάμετρο 1,2 m. Ἄν κινεῖται ἰσοταχῶς μέ ταχύτητα 72 km/h νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνιακή ταχύτητα καί ἡ συχνότητα τῆς περιστροφῆς κάθε ρόδας.

12) Ρόδα ποδηλάτου ἔχει ἀκτίνα 0,4 m καί περιστρέφεται μέ συχνότητα 5 Hz. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ γραμμική ταχύτητα σημείου τῆς περιφέρειας τῆς ρόδας καί β) ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση τοῦ ἴδιου σημείου.

13) Δύο δίσκοι μέ ἀκτίνες r_1 = 0,1 m ὁ Α καί r_2 = 0,15 m ὁ Β (σχ. 1) ἔχουν περιφερειακά αὐλάκια. Ἕνα πέτσινο κορδόνι **Κ** περνᾶ ἀπό τά αὐλάκια καί μεταφέρει τήν περιστροφική κίνηση ἀπό τόν ἕνα δίσκο στόν ἄλλο.

Ἄν ὁ δίσκος περιστρέφεται μέ γωνιακή ταχύτητα 2 rad/s νά ὑπολογισθοῦν: α) Οἱ γραμμικές ταχύτητες τῶν δύο δίσκων, καί β) ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ δίσκου Β.

Σχῆμα 1.

IV) Δυναμική ὑλικοῦ σημείου

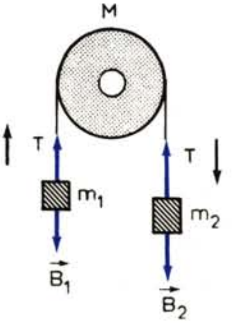
14) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἐπιτάχυνση πού προκαλεῖ δύναμη 6 N, ὅταν ἐνεργεῖ σέ μάζα 2 kg.

15) Δύναμη σταθερή ἐνεργεῖ σέ σῶμα μάζας 5 kg καί ἔχει διεύθυνση τήν ἴδια μέ τήν ταχύτητα τοῦ σώματος ἀλλά φορά ἀντίθετη. Ἔτσι ἡ ταχύτητα ἐλαττώνεται ἀπό 7 m/s σέ 3 m/s σέ χρόνο 2 s. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ δύναμη καί β) ὁ χρόνος μέχρις ὅτου ἡ ταχύτητα τῆς μάζας μηδενισθεῖ.

16) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἀπό τό δάπεδο ἀνελκυστήρα σέ σῶμα μάζας 40 kg, ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας: α) Κινεῖται ἰσοταχῶς ἤ ἰσορροπεῖ, β) Ὅταν κινεῖται πρός τά

κάτω μέ ἐπιτάχυνση 2 m/s καί γ) ὅταν κινεῖται πρός τά πάνω μέ ἐπιτάχυνση 1 m/s.

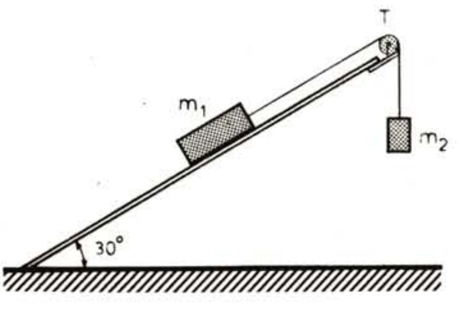
17) Ἕνα κορδόνι περνᾶ ἀπό τήν τροχαλία M. Στίς δυό ἄκρες τοῦ κορδονιοῦ συνδέονται δυό μάζες $m_1 = 7$ kg καί $m_2 = 9$ kg (σχῆμα 2). Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἐπιτάχυνση γ τῶν μαζῶν, β) ἡ τάση T τοῦ κορδονιοῦ.



Σχῆμα 2.

18) Μιά αὐτοκινητάμαξα ἀποτελεῖται ἀπό τρία βαγόνια πού τό καθένα ἔχει μάζα 15 ton. Ἡ μηχανή πού ὑπάρχει στό πρῶτο βαγόνι προωθεῖ τήν αὐτοκινητάμαξα μέ δύναμη 5000 kp. Τά βαγόνια κινοῦνται χωρίς τριβή. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς αὐτοκινητάμαξας, β) οἱ τάσεις πού ἀναπτύσσονται μεταξύ τῶν συνδέσμων ἀνάμεσα στό πρῶτο καί στό δεύτερο καί ἀνάμεσα στό δεύτερο καί στό τρίτο βαγόνι.

19) Στό κεκλιμένο ἐπίπεδο τοῦ σχήματος 3 οἱ δυό μάζες m_1 καί m_2 εἶναι $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 2$ kg. Οἱ μάζες συνδέονται μέ ἕνα κορδόνι πού περνᾶ ἀπό τήν τροχαλία T. Τριβή δέν ὑπάρχει. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἐπιτάχυνση τῶν μαζῶν, β) ἡ τάση τοῦ κορδονιοῦ.



Σχῆμα 3.

V) Παγκόσμια ἕλξη

20) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ μάζα τῆς Γῆς ἄν τή θεωρήσουμε σφαίρα μέ ἀκτίνα $R = 6{,}37.10^6$ m.

Δίνονται: $g = 9{,}81$ m/s, K = σταθερά παγκόσμιας ἕλξεως = $= 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$.

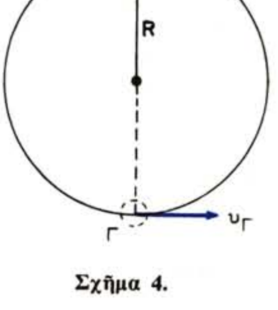
21) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας σέ ὕψος $h = 2000$ m πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς.

Νά ληφθεῖ ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m καί ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς = 9,81 m/s.

VI) Κεντρομόλος - Φυγόκεντρος δύναμη

22) Στήν ἄκρη σχοινιοῦ συνδέομε ἕνα σῶμα μάζας 0,5 kg καί τό περιστρέφομε ὁριζόντια σέ περιφέρεια ἀκτίνας 1,2 m μέ συχνότητα 3 c/s. Νά προσδιορισθοῦν: α) Ἡ γραμμική ταχύτητα σέ m/s. β) Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση. γ) Ἡ κεντρομόλος δύναμη καί δ) τί θά συμβεῖ ἄν κοπεῖ τό σχοινί;

23) Σῶμα μάζας 0,5 kg συνδέεται στὴν ἄκρη σχοινιοῦ καί περιστρέφεται σέ κατακόρυφο ἐπίπεδο σέ περιφέρεια ἀκτίνας $R = 2$ m (σχ. 4): α) Ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ταχύτητα $υ_{ελαχ}$ μέ τήν ὁποία μπορεῖ τό σῶμα νά διατηρηθεῖ στήν κυκλική τροχιά, ὅταν βρίσκεται στήν κορυφή τῆς τροχιᾶς του A. β) Ποιά ταχύτητα θά ἀποκτήσει τό σῶμα ὅταν φτάσει στό σημεῖο Γ ἄν στό A ἔχει τήν ἐλάχιστη ταχύτητα. γ) Ποιά θά εἶναι ἡ τάση τοῦ νήματος ὅταν τό σῶμα βρεθεῖ στή θέση Γ μέ τήν ταχύτητα πού βρήκαμε στήν προηγούμενη ἐρώτηση.



Σχῆμα 4.

Σημείωση: Νά λυθεῖ ἡ ἄσκηση μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας.

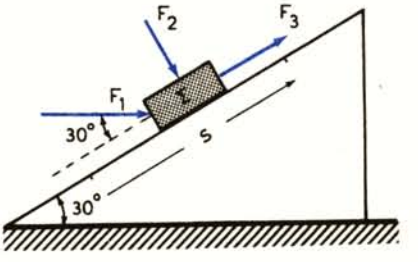
VII) Ἔργο - Ἰσχύς - Ἐνέργεια

24) Σηκώνομε ἕνα σῶμα μάζας 6 kg σέ ὕψος 2 m σέ 3 s. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Τό ἔργο πού παράγεται καί β) ἡ ἰσχύς σέ HP.

25) Σταθερή δύναμη $\vec{F}$ ἐπιταχύνει μάζα 0,2 kg. Ἔτσι σέ

χρόνο $t = 5\,s$ διανύεται εὐθύγραμμο διάστημα $s = 100\,m$. Νά ὑπολογισθεῖ τό μέτρο τῆς δυνάμεως καί τό ἔργο πού παράγεται (ἡ ἀρχική ταχύτητα τῆς μάζας εἶναι μηδέν).

26) Τό σῶμα Σ βρίσκεται πάνω σέ κεκλιμένο ἐπίπεδο καί κινεῖται πρός τά πάνω μέ τή βοήθεια τῶν δυνάμεων $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_3}$ (σχῆμα 5). Νά ὑπολογισθεῖ τό ἔργο καθεμιᾶς ἀπό τίς τρεῖς δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ καί $\vec{F_3}$ ἄν $F_1 = 15\,kp$ καί $F_3 = 10\,kp$, ὅταν τό σῶμα μετακινηθεῖ σέ διάστημα $s = 0{,}2\,m$ κατά μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.



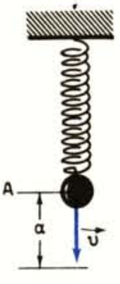
Σχῆμα 5.

27) Μέσα στά ὅρια ἐλαστικότητας ἕνα ἐλατήριο γιά νά ἐπιμηκυνθεῖ κατά 15 cm πρέπει νά ἐξασκηθεῖ σ' αὐτό δύναμη $F = 2\,kp$. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἔργο πού θά παραχθεῖ γιά νά ἐπιμηκυνθεῖ τό ἐλατήριο κατά 10 cm.

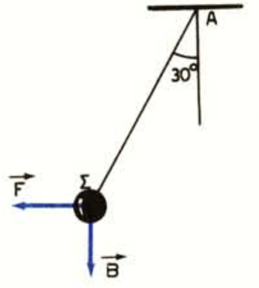
28) Ἕνα σῶμα μάζας 5 kg πέφτει ἐλεύθερα ἀπό ὕψος 3 m. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ κινητική του ἐνέργεια ὅταν θά φθάσει στή Γῆ καί νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ἴση μέ τή δυναμική ἐνέργεια πρίν ἀπό τήν πτώση.

29) Ἕνας ἠλεκτροκινητήρας ἔχει συντελεστή ἀποδόσεως 90% καί ἀνεβάζει μέ τή βοήθεια τροχαλίας μάζα 200 kg μέ σταθερή ταχύτητα. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα αὐτή ἄν ἡ προσφερόμενη ἰσχύς στόν κινητήρα εἶναι 6 HP;

30) Μέ τή βοήθεια συστήματος τροχαλιῶν σηκώνομε βάρος 150 kp σέ ὕψος 4 m καί σέ χρόνο $t = 30\,s$. Ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τοῦ συστήματος εἶναι 75%. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ μέση ἰσχύς τήν ὁποία πρέπει νά δώσουμε στό σύστημα τῶν τροχαλιῶν.

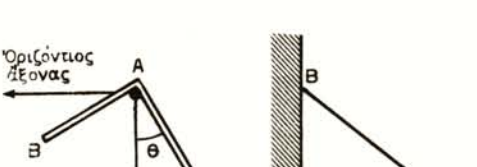


Σχῆμα 6.



Σχῆμα 7.

31) Μάζα 2 kg εἶναι τοποθετημένη στή βάση ἑνός ἐλατηρίου καί ταλαντώνεται γύρω ἀπό τή θέση Α. Μόλις φτάσει στό σημεῖο Α ἀποκτᾶ ταχύτητα $\upsilon = 2\,m/s$. Νά ὑπολογισθεῖ μέ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἡ μέγιστη ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου α. Ἐπίσης νά ὑπολογισθεῖ μέ τό ἴδιο θεώρημα ἡ ταχύτητα, ὅταν ἡ μάζα ἀπέχει ἀπό τό Α ἀπόσταση α/2. Δίνεται $D =$ Κατευθύνουσα δύναμη ἐλατηρίου $= 200\,kp/m$ (σχῆμα 6).



Σχῆμα 8.

VIII) Ἰσορροπία δυνάμεων

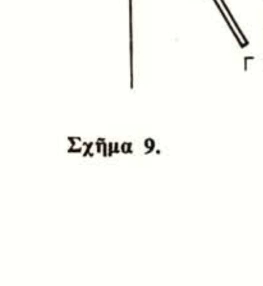
32) Σῶμα Σ μάζας $m = 5\,kg$ εἶναι δεμένο στήν ἄκρη σχοινιοῦ ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 7. Νά σχεδιασθοῦν καί νά ὑπολογισθοῦν οἱ δυνάμεις πού ἀσκοῦνται στό σῶμα, ὥστε αὐτό νά ἰσορροπεῖ.

33) Ἐάν $F_1 = 2\,kp$, $F_2 = 3\,kp$ καί $F_3 = 1\,kp$ (σχῆμα 8), νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων αὐτῶν καί οἱ ἀντιδράσεις N_1 καί N_2 τῶν ὑποστηριγμάτων Α καί Β.

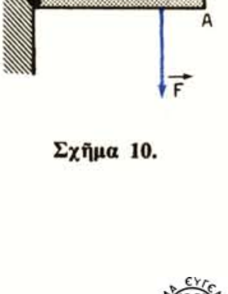
34) Μιά σιδηρογωνιά ΒΑΓ στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ὁριζόντιο ἄξονα (σχῆμα 9). Τό σκέλος ΑΓ ἔχει διπλάσιο μῆκος ἀπό τό ΑΒ, ἀλλά ἔχουν καί τά δυό τήν ἴδια διατομή καί τήν ἴδια πυκνότητα. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία Θ.

35) Ἡ ράβδος ΟΑ (σχῆμα 10) δέν ἔχει βάρος, μπορεῖ νά στραφεῖ γύρω ἀπό τό Ο καί διατηρεῖται σέ ὁριζόντια θέση μέ τό σύρμα ΑΒ. Δύναμη $F = 10\,kp$ ἀσκεῖται σέ ἀπόσταση

$$(O\Gamma) = \frac{2}{3}\,(OA) = \frac{12 \cdot 2}{3}\ cm = 8\,cm.$$



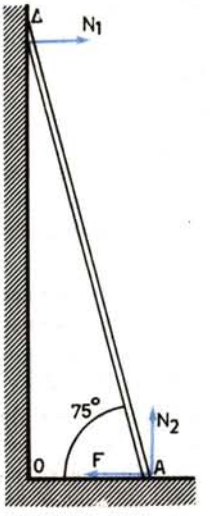
Σχῆμα 9.



Σχῆμα 10.

Νά βρεθοῦν οἱ δυνάμεις πού ἀσκοῦνται στά σημεῖα Ο καί Α κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά.

36) Ἡ σκάλα ΑΔ ἔχει βάρος $B = 20$ kp. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη $\vec{F}$ πού τήν ἰσορροπεῖ. Ἐπίσης νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀντιδράσεις N_1 καί N_2 τοῦ τοίχου καί τοῦ δαπέδου ἀντιστοίχως (τριβή δέν ὑπάρχει) (σχῆμα 11).



Σχῆμα 11.

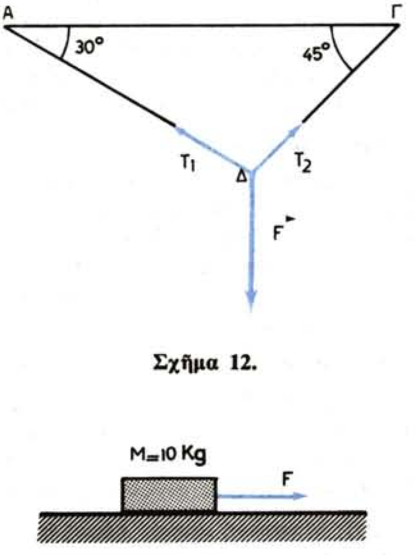
37) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τάσεις T_1 καί T_2 λαστιχένιου κορδονιοῦ τό ὁποῖο τεντώνεται μέ δύναμη $F = 5$ N καί σχηματίζει τίς γωνίες πού σημειώνονται στό σχῆμα 12.

IX) Τριβή

38) Σῶμα μάζας 10 kg ὀλισθαίνει σέ ὁριζόντια ἐπιφάνεια. Ὁ συντελεστής τριβῆς σώματος - ἐπιφάνειας εἶναι $\eta = 0{,}2$. Κάποια στιγμή τό σῶμα ἔχει ταχύτητα ὁριζόντια 20 m/s. Μετά ἀπό πόσο χρόνο θά σταματήσει, πόσο διάστημα θά διανύσει καί πόση ἐνέργεια θά δαπανήσει.

39) Γιά νά κινεῖται ἰσοταχῶς τό σῶμα τῆς ἀσκήσεως 38, μέ ταχύτητα 20 m/s, ἀπαιτεῖται δύναμη τήν ὁποία ἀσκεῖ ἄνθρωπος. Πόση ἰσχύ καταναλίσκει ὁ ἄνθρωπος;

40) Σῶμα ὀλισθαίνει σέ κεκλιμένο ἐπίπεδο μέ γωνία κλίσεως 30° καί διανύει διάστημα $s = 5$ m σέ χρόνο $t = 2$ s ἀπό τό ἀρχικό του ξεκίνημα. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ συντελεστής τριβῆς. Ἡ ἐπιτάχυνση βαρύτητας νά θεωρηθεῖ ἴση μέ 10 m/s.

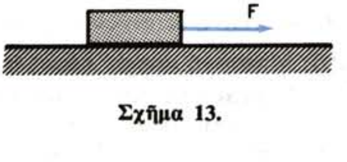


Σχῆμα 12.

41) Σῶμα μάζας 10 kg ὀλισθαίνει σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχῆμα 13). Ὁ συντελεστής τριβῆς σώματος - ἐπιπέδου εἶναι $\eta = 0{,}2$. Δύναμη $F = 5$ kp ἐπιταχύνει τό σῶμα ξεκινώντας το ἀπό τήν ἠρεμία.

Ἄν ἡ δύναμη $\vec{F}$ δράσει ἐπί χρόνο $t = 3$ s καί μετά σταματήσει, νά ὑπολογισθεῖ: α) Πόσο διάστημα θά διατρέξει τό κινητό. β) Πόσος χρόνος θά περάσει συνολικά. γ) Πόση ἐνέργεια μετατρέπεται σέ θερμότητα.

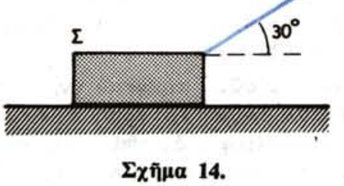
42) Ἕνα κεκλιμένο ἐπίπεδο ἔχει γωνία κλίσεως μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο 30°. Σῶμα μάζας 2 kp κινεῖται στό κεκλιμένο ἐπίπεδο πρός τά πάνω. Ὁ συντελεστής τριβῆς σώματος - κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι 0,4. Ἄν κάποια στιγμή ἡ πρός τά πάνω ταχύτητά του εἶναι 10 m/s, νά ὑπολογισθοῦν: α) Οἱ δυνάμεις πού ἀσκοῦνται στό σῶμα. β) Ἡ ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει τό σῶμα, ὅταν ξαναγυρίσει στό σημεῖο στό ὁποῖο εἶχε ταχύτητα 10m/s. γ) Πόσος χρόνος θά ἀπαιτηθεῖ συνολικά ($g = 10$ m/s). δ) Πόση εἶναι ἡ ἀπώλεια ἐνέργειας.



Σχῆμα 13.

43) Πόση μάζα μπορεῖ νά σύρει μιά μηχανή ἰσχύος 40 HP σέ ὁριζόντιο δρόμο μέ σταθερή ταχύτητα 40 km/h, ἐάν ὁ συντελεστής τριβῆς ἀνάμεσα στό σῶμα καί στό ἐπίπεδο εἶναι 0,15.

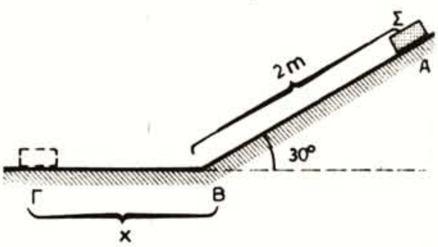
44) Δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία 30° ὡς πρός τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἐπιταχύνει σῶμα Σ μάζας 4 kg πρός τήν ὁριζόντια διεύθυνση (σχῆμα 14). Ἄν ὁ συντελεστής τριβῆς ἀνάμεσα στό σῶμα καί στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο εἶναι 0,2, νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη F ὥστε τό σῶμα νά κινεῖται ὁριζόντια καί ἰσοταχῶς.



Σχῆμα 14.

45) Ἄν ὁ συντελεστής τριβῆς τοῦ σώματος Σ καί τῆς ἐπι-

φάνειας ΑΒΓ εἶναι 0,2, νά ὑπολογισθεῖ τό x (σχῆμα 15), ὅταν τό σῶμα στή θέση Α ἔχει ταχύτητα μηδέν καί ἀφοῦ διανύσει τό διάστημα ΑΒΓ σταματήσει στή θέση Γ.



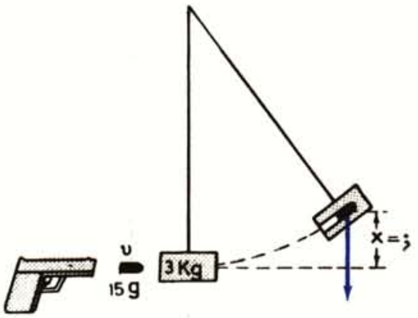
Σχῆμα 15.

X) Κρούση

46) Μιά σφαίρα ὅπλου, μάζας 8 g κτυπᾶ ὁριζόντια σέ ἕνα ξύλο, μάζας 9 kg, τό ὁποῖο εἶναι ἀκίνητο. Μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα σφηνώνεται στό ξύλο καί ἔτσι ἀποκτοῦν καί τά δυό μαζύ ταχύτητα 40 cm/s. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα τῆς σφαίρας πρίν ἀπό τήν κρούση.

47) Δύο μή ἐλαστικές σφαῖρες μάζας 20 g ἡ μία καί 8 g ἡ ἄλλη, κινοῦνται πρός ἀντίθετες κατευθύνσεις καί μέ ταχύτητες 30 cm/s ἡ πρώτη καί 50 cm/s ἡ δεύτερη. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τελική ταχύτητα ὅταν οἱ δυό σφαίρες μετά τήν κρούση γίνουν ἕνα σῶμα.

48) Μέ ἕνα πιστόλι πυροβολοῦμε μιά ξύλινη μάζα 3 kg πού ἐξαρτᾶται μέ τή βοήθεια νήματος ἀπό μιά ὀροφή (σχῆμα 16). Ἡ σφαίρα ἔχει μάζα 15 g καί κινεῖται μέ ταχύτητα 250 m/s. Ἄν μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα σφηνωθεῖ στό ξύλο, σέ ποιό ὕψος x θά ἀνέβει τό ξύλο μαζί μέ τή σφαίρα;

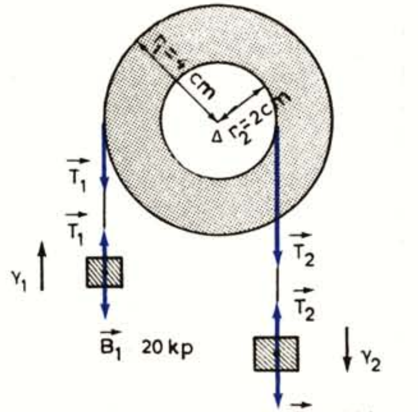


Σχῆμα 16.

49) Σφαίρα 0,2 kg κινεῖται μέ ταχύτητα 4 m/s καί συγκρούεται κεντρικά μέ ἄλλη σφαίρα 0,4 kg, ἡ ὁποία κινεῖται σέ ἀντίθετη κατεύθυνση καί μέ ταχύτητα 8 m/s. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ταχύτητες μετά τήν κρούση στίς ἑξῆς περιπτώσεις: α) Ἄν ἡ κρούση εἶναι τελείως ἐλαστική. β) Ἄν μετά τήν κρούση ἔχουμε ἀπώλεια ἐνέργειας 10%. γ) Ἄν ἡ κρούση εἶναι τελείως πλαστική.

XI) Κρούση - Τριβή

50) Ἕνα βαγόνι τραίνου ἔχει μάζα 20 ton καί τή στιγμή πού ἔχει ταχύτητα 12 km/h συγκρούεται μέ ἕνα ἄλλο ἀκίνητο βαγόνι μάζας 12 ton. Μετά τή σύγκρουση τά δυό βαγόνια κινοῦνται σάν ἕνα στή σιδηροτροχιά. Νά ὑπολογισθεῖ πόσο διάστημα θά διανύσουν μέχρις ὅτου σταματήσουν, ἄν ἡ τριβή κυλίσεως εἶναι 5% τοῦ βάρους τῶν βαγονιῶν.



Σχῆμα 17.

XII) Μεταβολή μάζας μέ τήν ταχύτητα

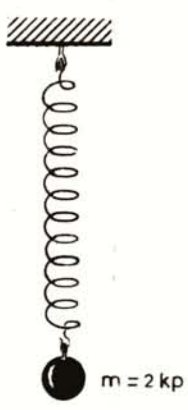
51) Ἠλεκτρόνιο ἔχει μάζα ὅταν ἠρεμεῖ $m_0 = 9{,}107 \cdot 10^{-28}$ g. Τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεως, ἠλεκτρονίου ἀπό ραδιενεργό πυρήνα ἡ ταχύτητά του εἶναι 0,99 c, ὅπου c ἡ ταχύτητα φωτός. Πόση εἶναι ἡ μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου στήν ταχύτητα αὐτή;

XIII) Μηχανική στερεοῦ σώματος

52) Ἕνας δακτύλιος μικροῦ πάχους ἔχει μάζα 6 kg καί ἀκτίνα 40 cm καί περιστρέφεται μέ γωνιακή ταχύτητα 2 rad/s γύρω ἀπό ἄξονα πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο του. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος.

53) Ἕνας σφόνδυλος ἔχει ροπή ἀδρανείας $\Theta = 400$ kgm². Πόση ροπή πρέπει νά ἐξασκήσει μιά μηχανή στό σφόνδυλο, ὥστε σέ χρόνο 6 s ἡ συχνότητα περιστροφῆς του νά αὐξηθεῖ ἀπό 120 c/min σέ 420 c/min.

54) Ἕνα σῶμα στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα μέ συχνότητα 420 c/min καί ἔχει ροπή ἀδρανείας $\Theta = 100$ kgm². Ἄν στόν ἄξονα περιστροφῆς ἀσκηθεῖ ροπή, πού ὀφείλεται στίς διάφορες τριβές ὀλισθήσεως τοῦ ἄξονα, ἴση μέ 8 N · m, νά ὑπολογισθεῖ



Σχῆμα 18.

μετά ἀπό πόσο χρόνο θά σταματήσει νά περιστρέφεται ὁ σφόνδυλος.

Σημείωση: Γιά τήν ὁμαλά ἐπιταχυνομένη καί ἐπιβραδυνομένη κυκλική κίνηση ἰσχύουν οἱ ἀνάλογοι τύποι πού ἰσχύουν γιά τήν ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη καί ὁμαλά ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμη κίνηση. Μέ τή βοήθεια τοῦ Πίνακα 3 · 6 · 1 οἱ μαθητές νά διατυπώσουν τίς ἐξισώσεις πού τούς χρειάζονται γιά τή λύση τῆς ἀσκήσεως.

55) Μιά τροχαλία, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 17 ἔχει ροπή ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς Δ ἴση μέ 10 kgm^2. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α πού θά ἀποκτήσει ἡ τροχαλία.

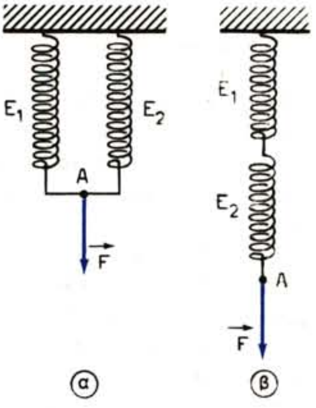
Σημείωση: Στήν κυκλική κίνηση ἡ γραμμική ἐπιτάχυνση $\gamma_\varepsilon = r\,\alpha$ ὅπου: r ἡ ἀκτίνα κυκλικῆς τροχιᾶς καί α ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση.

XIV) Ἐλαστικότητα

56) Ἀπό ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο μέ κατευθύνουσα δύναμη $D = 0{,}2$ kp/cm πού εἶναι κρεμασμένο ἀπό τήν ὀροφή θαλάμου ἀνελκυστήρα, κρεμᾶμε σφαίρα μάζας $M = 2$ kp. Νά ὑπολογισθεῖ πρός ποιά κατεύθυνση καί κατά πόσο μῆκος θά μετακινηθεῖ ἡ σφαίρα μέσα στόν ἀνελκυστήρα ἄν: α) Ἡ σφαίρα ἐπιταχύνεται πρός τά ἐπάνω μέ ἐπιτάχυνση $\gamma_1 = 2$ m/s². β) Ἐπιταχύνεται πρός τά κάτω μέ ἐπιτάχυνση $\gamma_2 = 1$ m/s². γ) Κινεῖται ἰσοταχῶς (σχῆμα 18).

57) Ἔχουμε δύο σπειροειδή ἐλατήρια μέ κατευθύνουσες δυνάμεις $D_1 = 20$ kp/cm καί $D_2 = 30$ kp/cm.

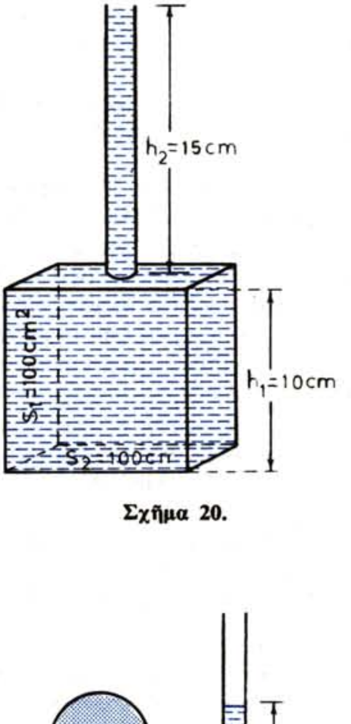
Ἄν συνδεθοῦν ὅπως φαίνεται στίς δύο περιπτώσεις τοῦ σχήματος 19 νά ὑπολογισθεῖ ἡ μετατόπιση τοῦ σημείου Α στήν κάθε περίπτωση, ὅταν ἀσκηθεῖ δύναμη $F = 10$ kp.



Σχῆμα 19.

β) ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

58) Στό δοχεῖο τοῦ σχήματος 20 ὑπάρχει νερό. Νά ὑπολογισθεῖ τό μέτρο τῶν δυνάμεων, πού ἐξασκοῦνται στή βάση τοῦ δοχείου καί στήν πλευρική ἐπιφάνεια S_1.



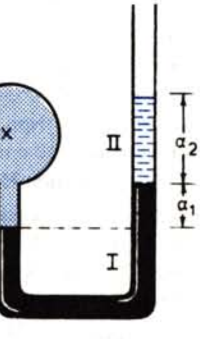
Σχῆμα 20.

59) Πόση στήλη λαδιοῦ πυκνότητας 0,8 g/cm³ ἰσορροπεῖ στήλη ὑδραργύρου 40 mm ($\rho_{Hg} = 13{,}6$ g/cm³).

60) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πίεση τοῦ ἀερίου στό χῶρο x (σχ. 21) ἄν $\alpha_1 = 10$ cm, $\alpha_2 = 20$ cm καί ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση = 750 mmHg. Τά δύο ὑγρά εἶναι τό I ὑδράργυρος ($\rho = 13{,}5$ g/cm³) καί τό II νερό.

61) Μιά ξύλινη σφαίρα πέφτει ἀπό ὕψος $h = 40$ cm στό νερό. Ἄν ἡ πυκνότητα τῆς ξύλινης σφαίρας εἶναι 0,7 g/cm³ καί τοῦ νεροῦ 1 g/cm³, νά ὑπολογισθοῦν: α) Τό βάθος x πού θά φτάσει ἡ σφαίρα μέσα στό νερό. β) Ὁ χρόνος πού ἀπαιτεῖται συνολικά γιά νά γίνει ἡ διαδρομή ΑΒ. (Δεχόμαστε ὅτι τό νερό δέν ἀσκεῖ ἀντίσταση στήν σφαίρα κατά τήν κίνησή της μέσα στό νερό).

62) Σῶμα στόν ἀέρα ζυγίζει 10 kp καί σέ ὑγρό πυκνότητας $\rho = 0{,}9$ g/cm³ ζυγίζει 6 kp. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος καί τό εἰδικό του βάρος.



Σχῆμα 21.

63) Ποσότητα κράματος χρυσοῦ καί ἀργύρου ζυγίζει 20 kp

στόν ἀέρα καί 18,8 kp μέσα στό νερό. Πόσος εἶναι ὁ χρυσός καί πόσος ὁ ἄργυρος στό κράμα ἄν, ὁ χρυσός ἔχει πυκνότητα $\rho_{Au} = 19{,}3\ g/cm^3$ καί ὁ ἄργυρος $\rho_{Ag} = 10{,}5\ g/cm^3$.

64) Σφαίρα ἀπό σίδερο ζυγίζει στόν ἀέρα 10 kp καί μέσα στό νερό 6 kp. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος τῆς ἐσωτερικῆς κοιλότητας πού ἔχει ἡ σφαίρα. Ἡ πυκνότητα τοῦ σίδερου εἶναι $\rho_{Fe} = 7{,}8\ g/cm^3$.

65) Νά βαθμολογηθεῖ τό πυκνόμετρο τοῦ σχήματος 22, ὅταν δίνονται τά ἑξῆς: α) Τό βάρος τοῦ πυκνόμετρου εἶναι B = 200 p. β) Ἡ διατομή $S = 4\ cm^2$. γ) Τό πυκνόμετρο ὅταν τοποθετεῖται μέσα σέ νερό βυθίζεται μέχρι τό A.

Σημείωση: 1) Ὅταν λέμε ὅτι θέλομε νά βαθμολογηθεῖ τό πυκνόμετρο, ἐννοοῦμε ὅτι θέλομε νά ὑπολογίσομε τήν τιμή τοῦ x. Ἐπισημαίνεται ἐδῶ ὅτι τό πυκνόμετρο τῆς ἀσκήσεως μετρᾶ ὑγρά ἀραιότερα ἀπό τό νερό. 2) Οἱ κ. κ. καθηγητές νά δώσουν διάφορες τιμές πυκνότητας ὑγρῶν καί οἱ μαθητές νά ὑπολογίσουν τό x.

66) Νά βαθμολογηθεῖ τό πυκνόμετρο τοῦ προηγούμενου σχήματος ἄν ἔχομε σάν δεδομένα: α) Τό βάρος τοῦ πυκνόμετρου εἶναι B = 200 p. β) Τό μῆκος τοῦ σωλήνα $l = 20$ cm. γ) Ἡ διατομή $S = 4\ cm^2$. δ) Τό πυκνόμετρο βυθίζεται στό νερό μέχρι τό σημεῖο B.

67) Ὁ ξύλινος κύλινδρος Σ ἔχει ὄγκο $V = 50\ cm^3$ καί πυκνότητα $\rho = 0{,}7\ g/cm^3$. Τοποθετεῖται μέσα σέ νερό καί ἐπιπλέει (σχῆμα 23).

Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ὁ λόγος x/y. β) Ἡ δύναμη F πού ἀπαιτεῖται ὥστε νά βυθισθεῖ ὁλόκληρος ὁ κύλινδρος μέσα στό νερό.

68) Πάνω σέ μιά ζυγαριά Z τοποθετοῦμε ἕνα δοχεῖο Δ μέ νερό. Ποιά θά εἶναι ἡ διαφορά τῶν ἐνδείξεων τῆς ζυγαριᾶς, ἄν μέσα στό νερό τοποθετήσομε ἕνα κομμάτι σίδερο τό ὁποῖο κρατοῦμε μέ τή βοήθεια τοῦ σχοινιοῦ ἀπό τό σημεῖο A; (σχῆμα 24).

Σημειώνομε ὅτι τό κομμάτι αὐτό ζυγίζει στόν ἀέρα 1 kp καί ἡ πυκνότητα τοῦ σίδερου εἶναι $\rho_{Fe} = 7{,}5\ g/cm^3$.

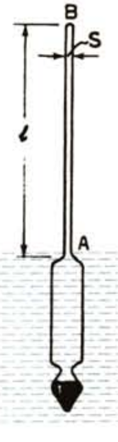
69) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πίεση πού ἐξασκεῖται σέ δύτη ὅταν βρίσκεται σέ βάθος 30 m μέσα στή θάλασσα. Δίνονται: α) Ἀτμοσφαιρική πίεση = 1 Atm. β) Πυκνότητα θαλασσινοῦ νεροῦ = $1{,}04\ g/cm^3$.

70) Τό βυθισμένο τμῆμα τοῦ πάγου μέσα στό θαλασσινό νερό πυκνότητας $1{,}04\ g/cm^3$ εἶναι 90% τοῦ συνολικοῦ ὄγκου τοῦ πάγου. Ποιά εἶναι ἡ πυκνότητα τοῦ πάγου;

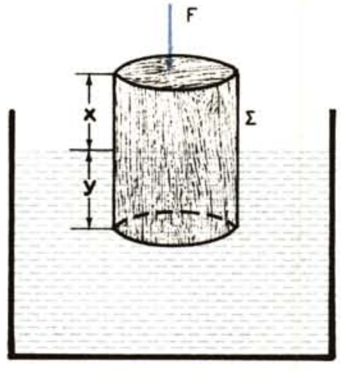
γ) ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

71) Μέσα στό κενό τοῦ σωλήνα τοῦ Torricelli τοποθετοῦμε ἀέριο, καί τό ὕψος h τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 400 mm (σχῆμα 25). Πόσο θά κατέβει ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια A τοῦ Hg, ἄν ὁ σωλήνας βυθισθεῖ κατά $\alpha = 10$ cm. Δίνονται $l = 50$ cm, ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση $P_{at} = 760$ mm Hg καί $\rho_{Hg} = 13{,}6\ g/cm^3$.

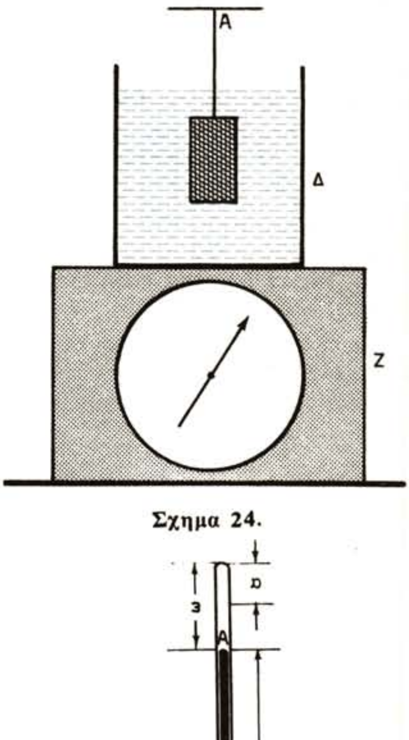
72) Στό σχῆμα 26 ἕνα ἔμβολο E πιέζει τό ἀέριο πού βρίσκεται στό χῶρο I. Στήν θέση II ὑπάρχει νερό καί τό ὕψος h = 0,8 m. Τό μανόμετρο M δείχνει ἔνδειξη 2,5 Atm. Ποιά θά εἶναι ἡ ἔνδειξη τοῦ μανόμετρου ἄν τό ἔμβολο E μετακινηθεῖ ἀπό τή θέση A στή θέση B, ὅπου $(AB) = \frac{(A\Gamma)}{2}$.



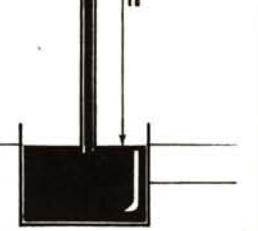
Σχῆμα 22.



Σχῆμα 23.



Σχημα 24.



Σχῆμα 25.

73) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πίεση στό χῶρο x ἄν $P_{at} = 760$ mmHg, $h_1 = 10$ cm, $h_2 = 15$ cm καί τό ὑγρό στούς δύο «κεκαμμένους» σωλῆνες εἶναι ὑδράργυρος. Κατά ποιό ποσοστό θά αὐξηθεῖ ὁ ὄγκος Vx ἄν βρεθεῖ στήν ἀτμοσφαιρική πίεση καί στήν ἴδια θερμοκρασία ($\varepsilon_{Hg} = 13{,}6$ g/cm³) (σχῆμα 27).

δ) ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

74) Ἡ διάμετρος τῆς διατομῆς τοῦ σωλήνα ἐξόδου τοῦ νεροῦ σέ μιά ὑδατόπτωση σέ ὑδροηλεκτρικό ἐργοστάσιο εἶναι $\delta = 20$ cm. Ἡ ὑψομετρική διαφορά $h = 200$ m (σχῆμα 28). Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἰσχύς πού θά παρασχεθεῖ ἀπό τήν ὑδατόπτωση σέ ὑδροστρόβιλο σέ μονάδες kW καί ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια πού θά παραχθεῖ ἀπό τήν ἔξοδο τῆς ἠλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως σέ 10 h, ἄν ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι 80%. (Ἡ ἐνέργεια νά ὑπολογισθεῖ σέ kWh).

75) Ἕνας ὁριζόντιος σωλήνας ἔχει στή θέση Α διατομή $S_1 = 18$ cm² καί στή θέση $S_2 = 6$ cm². Μέσα στό σωλήνα τρέχει νερό μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 0{,}5$ m/s στό σημεῖο Α, ἡ δέ στατική πίεση εἶναι $P_1 = 700$ mm Hg (σχῆμα 29). Νά ὑπολογισθοῦν ἡ ταχύτητα υ_2 καί ἡ στατική πίεση P_2 στό σημεῖο Β.

76) Ἡ διαφορά στάθμης στόν ὑδράργυρο τοῦ σωλήνα Prandtl ἑνός ἀεροπλάνου εἶναι 100 cm. Ἐάν ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα στό ὕψος πού πετᾶ τό ἀεροπλάνο εἶναι $\rho = 0{,}5$ g/lt, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου.

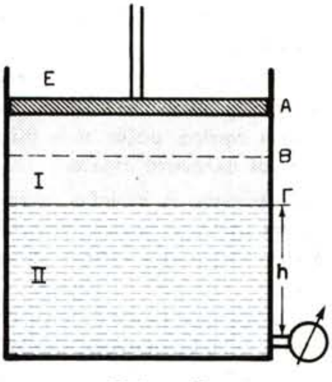
77) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἐλάχιστη ἰσχύς πού πρέπει νά ἔχει ἀεροπλάνο ὥστε νά πετᾶ ὁριζόντια μέ σταθερή ταχύτητα 600 km/h. Δίνονται: α) Ἐπιφάνεια τῶν πτερύγων τοῦ ἀεροπλάνου $S = 20$ m², γωνία προσβολῆς $\alpha = 15°$, συντελεστής ἀντιστάσεως $C = 0{,}08$ καί πυκνότητα ἀέρα 1 g/lt.

78) Ποιά εἶναι ἡ ὁριακή ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει σφαίρα ἀκτίνας $r = 10$ cm καί πυκνότητας $\rho_\sigma = 7{,}8$ g/cm³, ὅταν πέφτει μέσα στόν ἀτμοσφαιρικό ἀέρα πού ἔχει πυκνότητα $\rho_\alpha = 1{,}2$ kp/m³; Ἐπίσης πόση ἰσχύ καταναλίσκει ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα ὅταν ἡ σφαίρα ἀποκτήσει τήν ὁριακή ταχύτητα; Ὁ συντελεστής ἀντιστάσεως τῆς σφαίρας στόν ἀέρα εἶναι 0,25.

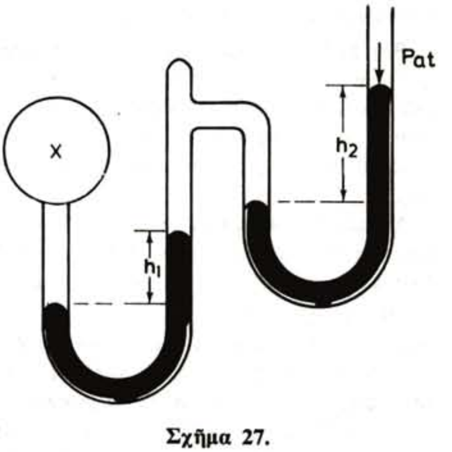
79) Ἡ ὑδραντλία ποταμόπλοιου γεμίζει μέ νερό ἀπό τό ποτάμι ἕνα δοχεῖο, ἀνεβάζοντάς το σέ ὕψος 3 m ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ. Ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία βγαίνει τό νερό ἀπό τό σωλήνα εἶναι 5 m/s καί ἡ διάμετρος τοῦ σωλήνα εἶναι $d = 0{,}1$ m. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀπαιτούμενη ἰσχύς μέ τήν ὁποία θά τροφοδοτεῖται ἡ ἀντλία, ἄν ὁ συντελεστής ἀποδόσεώς της εἶναι: α) 100%, β) 65%.

ε) ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

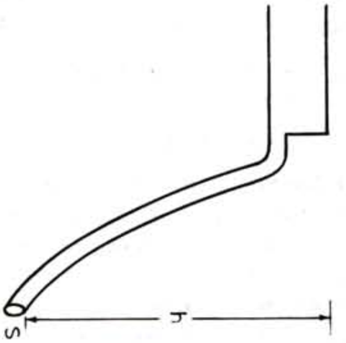
80) Σῶμα μάζας $m = 0{,}6$ kg κάνει ἁπλή ἁρμονική ταλάντωση μέ πλάτος $\alpha = 0{,}3$ m καί περίοδο $T = 3$ s. Νά ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ συχνότητα. β) Ἡ μέγιστη ταχύτητα καί ἡ στιγμιαία ταχύτητα τή χρονική στιγμή $t = 2$ s. γ) Ἡ μέγιστη ἐπιτάχυνση καί ἡ στιγμιαία ἐπιτάχυνση ὅταν ἀπομακρύνεται κατά $x = 0{,}2$ m. δ) Ἡ μέγιστη δύναμη καί ἡ δύναμη ὅταν $x = 0{,}1$ m. ε) Ἡ μέγιστη δυναμική ἐνέργεια. στ) Ἡ μέγιστη κινητική ἐνέρ-



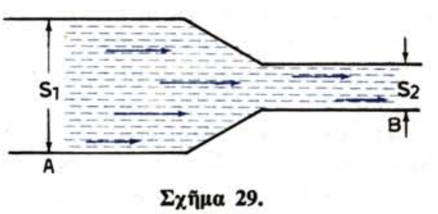
Σχῆμα 26.



Σχῆμα 27.



Σχῆμα 28.



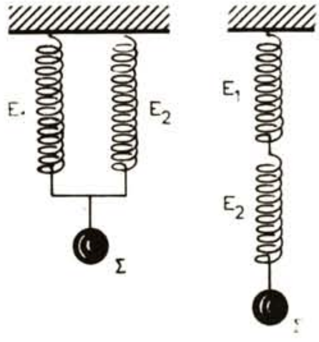
Σχῆμα 29.

γεια. ζ) Τό ἄθροισμα κινητικῆς καί δυναμικῆς ἐνέργειας σέ ὁποιαδήποτε στιγμή.

81) Ἄν ἐφαρμόσουμε σ' ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο δύναμη $F = 2$ kp ἐπιμηκύνεται κατά 10 cm. Στή μιά ἄκρη τοῦ ἐλατήρου τοποθετεῖται σφαίρα μάζας $m = 0{,}1$ kg καί ἡ ἄλλη ἄκρη του στηρίζεται σέ ἀκλόνητο σημεῖο.

Νά ὑπολογισθεῖ ἡ περίοδος αἰωρήσεως τῆς σφαίρας καί ἡ ἐξίσωση τῆς ἁπλῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεώς της, ὅταν ἐκτραπεῖ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας κατά 5 cm καί ἀφεθεῖ νά κάνει ἐλεύθερη ταλάντωση.

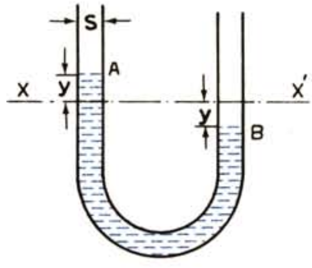
82. Δύο ἐλατήρια E_1 καί E_2 μέ κατευθύνουσες δυνάμεις $D_1 = 50$ kp/m καί $D_2 = 30$ kp/m συνδέονται ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 30, μέ σῶμα μάζας $m = 1$ g. Ὅταν ἡ μάζα ἀπομακρυνθεῖ, κάνει ἁπλή ἁρμονική ταλάντωση καί στίς δυό περιπτώσεις. Νά βρεθεῖ ἡ περίοδος σέ κάθε περίπτωση.



Σχῆμα 30.

83) Σέ ἕνα σωλήνα σχήματος U καί ἐμβαδοῦ διατομῆς $s = 40$ cm² τοποθετοῦμε 1,2 kg νερό. Ἄν μετακινήσουμε τό νερό μέσα στό σωλήνα, ὥστε οἱ ἐλεύθερες ἐπιφάνειες A καί B νά μετακινηθοῦν ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του xx' νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό νερό θά κάνει ἁρμονική ταλάντωση καί νά βρεθεῖ ἡ περίοδος αὐτῆς (σχ. 31).

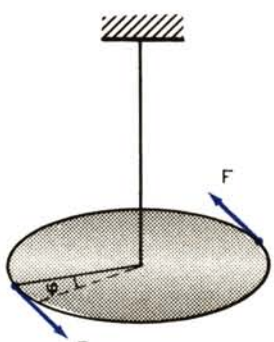
Σημείωση : Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ δύναμη πού τείνει νά ἐπαναφέρει τίς ἐλεύθερες ἐπιφάνειες A καί B στή θέση ἰσορροπίας xx' εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἀπομάκρυνση y.



Σχῆμα 31.

84) Ἕνας μεταλλικός δίσκος ἔχει ροπή ἀδρανείας ὡς πρός ἄξονα πού εἶναι κάθετος στό κέντρο τοῦ δίσκου ἴση μέ 10 kgm². Στό κέντρο τοῦ δίσκου εἶναι κολλημένο ἕνα ἀτσάλινο σύρμα, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 32. Ἐφαρμόζοντας ἕνα ζεῦγος δυνάμεων στό δίσκο ροπῆς $M = 0{,}8$ Nm, στρέφουμε τό δίσκο κατά γωνία φ. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ περίοδος αἰωρήσεως τοῦ δίσκου.

Σημείωση : Κατά τή στροφή τοῦ ἀτσάλινου σύρματος ἰσχύει ὅτι ἡ ροπή $\vec{M}$ εἶναι ἀνάλογη πρός τή γωνία στροφῆς φ (ἐλαστικότητα στή στρέψη): $M = -K\varphi$.



Σχῆμα 32.

στ) ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

I) Διαστολή - Συστολή (στερεῶν - ὑγρῶν)

85) Ράβδος χάλκινη ἔχει μῆκος $l = 1{,}5$ m σέ θερμοκρασία 20° C. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἐπιμήκυνση τῆς ράβδου στή θερμοκρασία τῶν 40° C. Ὁ γραμμικός συντελεστής διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ εἶναι $16 \cdot 10^{-6}$ grad⁻¹.

86) Ὁ ἀπόλυτος συντελεστής διαστολῆς τοῦ ὑδράργυρου εἶναι $18 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1}. Ἡ πυκνότητα τοῦ Hg στούς 0° C εἶναι 13,6 g/cm³. Ἄν τό ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης ὑδραργυρικοῦ μανόμετρου εἶναι 970 mm σέ θερμοκρασία 30° C, πόση εἶναι ἡ πραγματική ἀτμοσφαιρική πίεση;

87) Σέ ποιά θερμοκρασία πρέπει νά θερμάνομε χάλκινο δακτύλιο, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος στούς 0°C εἶναι 99,8 mm, ὥστε νά περνᾶ σφαίρα ὄγκου 4187 cm³. Ὁ συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ εἶναι $16 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

88) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πυκνότητα τοῦ λευκόχρυσου στή

θερμοκρασία τῶν 40° C ὅταν στή θερμοκρασία 20° C ἔχει πυκνότητα 21,5 g/cm³ καί ὁ γραμμικός συντελεστής διαστολῆς του εἶναι $9 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

89) Μιά γυάλινη φιάλη ἔχει χωρητικότητα 1 *lt* στούς 15°C καί εἶναι γεμάτη μέ νερό θερμοκρασίας 15° C. Ἄν ἡ θερμοκρασία ἀνέβει στούς 50° C, πόσος ὄγκος νεροῦ θά χυθεῖ. Δίνεται ὅτι ὁ γραμμικός συντελεστής τοῦ γυαλιοῦ εἶναι $9 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} καί ὁ ἀπόλυτος (πραγματικός) συντελεστής διαστολῆς τοῦ νεροῦ εἶναι $18 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1}.

II) Ἀέρια - Νόμος Boyle - Mariotte, Gay Lussac

90) Ἡ πυκνότητα τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα στούς 20° C καί ὑπό πίεση 1 Atm εἶναι 1,3 kg/m³. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πυκνότητα στούς 60° C καί ὑπό πίεση 360 mmHg.

91) Στή θερμοκρασία −20° C καί πίεση 1 at ἕνα ἀέριο ἔχει ὄγκο 1 *lt*. Ἄν ἡ θερμοκρασία γίνει 40° C καί ὁ ὄγκος 1/2 *lt* πόση πίεση ἀσκεῖ τό ἀέριο;

92) 10 g ὀξυγόνου πόσον ὄγκο καταλαμβάνουν στή θερμοκρασία 30° C καί ὑπό πίεση 1000 mmHg ; (ἀτομικό βάρος ὀξυγόνου 16).

93) Πόσα μόρια περιέχονται σέ 10 *lt* ἀζώτου θερμοκρασίας 40°C καί πιέσεως 2 Atm. Νά βρεθεῖ καί τό βάρος τοῦ ἀζώτου (ἀτομικό βάρος ἀζώτου 14).

94) Νά ὑπολογισθεῖ τό μοριακό βάρος ἑνός ἀερίου ἄν ὄγκος 1,29 *lt* τοῦ ἀερίου αὐτοῦ στούς 18° C καί ὑπό πίεση 765 mmHg ζυγίζει 2,71 g.

95) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πυκνότητα τοῦ μεθανίου στούς 20°C καί ὑπό πίεση 5 at. Τό μοριακό βάρος τοῦ μεθανίου εἶναι 16.

III) Θερμιδομετρία

96) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ θερμοχωρητικότητα 2 kg χαλκοῦ. Πόση μάζα νεροῦ ἔχει τήν ἴδια θερμοχωρητικότητα; (Εἰδική θερμότητα χαλκοῦ 0,092 ca*l*/g · grad).

97) Πόση ποσότητα θερμότητας παίρνομε ἀπό 200 ton νεροῦ ὅταν ἡ θερμοκρασία του κατέβει κατά 2 grad.

98) Πόση θερμότητα χρειάζονται 2 kg πάγου θερμοκρασίας 0°C ὥστε νά γίνουν νερό θερμοκρασίας 80° C.

99) 5 g πάγου θερμοκρασίας 0° C τήκονται, ὅταν μέσα στό θερμιδόμετρο Lavoisier - Laplace τοποθετήσομε σῶμα μάζας 200 g καί θερμοκρασίας 50° C. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ σώματος.

100) Θερμιδόμετρο ἔχει χωρητικότητα 400 ca*l*/grad καί θερμοκρασία 20° C. Ἄν προσθέσομε σ' αὐτό 20 g νερό θερμοκρασίας 60°C, ποιά θά εἶναι ἡ τελική θερμοκρασία τοῦ θερμιδόμετρου;

101) Σέ θερμιδόμετρο χωρητικότητας 500 ca*l*/grad καί θερμοκρασία 20° C τοποθετοῦμε σῶμα μάζας m = 300 g καί θερμοκρασίας 50° C. Ἡ τελική θερμοκρασία τοῦ θερμιδόμετρου γίνεται 25° C. Ποιά εἶναι ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ σώματος;

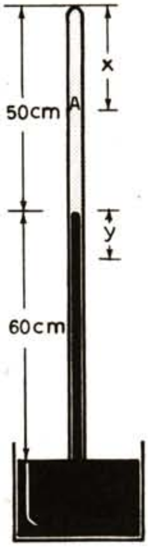
102) Ἀναμιγνύονται 10 g πάγου θερμοκρασίας 0° C καί 8 g νεροῦ θερμοκρασίας 40° C. Ποιά θά εἶναι ἡ τελική κατάσταση τοῦ μείγματος;

103) 500 g νεροῦ καί 100 g πάγου βρίσκονται στή θερμοκρασία 0° C. Ἄν 200 g ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100° C εἰσαχθοῦν στό παγωμένο μεῖγμα, νά βρεθεῖ ἡ τελική θερμοκρασία καί ἡ σύσταση τοῦ μείγματος.

104) Πόση θερμότητα χρειάζεται ὥστε 10 g πάγου θερμοκρασίας 0° C νά γίνουν ἀτμός θερμοκρασίας 100° C.

IV) Ἐξαέρωση - Ὑγροποίηση

105) Στό χῶρο A τοῦ σωλήνα τοῦ Torricelli (σχῆμα 33) ὑπάρχουν ἀτμοί αἰθέρα. Ἡ θερμοκρασία εἶναι 20° C. Νά ὑπολογισθεῖ πόσο πρέπει νά κατέβει ὁ σωλήνας (ὑπολογισμός x) καί ἡ ἐλεύθερη στάθμη τοῦ Hg (y), ὥστε στό χῶρο A νά δημιουργηθοῦν συνθῆκες κορεσμοῦ γιά τόν αἰθέρα (ὁ αἰθέρας νά ἀρχίζει νά ὑγροποιεῖται). Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τοῦ αἰθέρα στούς 20° C εἶναι 40 cmHg.



Σχῆμα 33.

Σημείωση : Οἱ ἀτμοί τοῦ αἰθέρα θεωροῦνται ὅτι ἀκολουθοῦν τό νόμο τοῦ Boyle - Mariotte ὅσο εἶναι ἀκόρεστοι. Ἑπομένως γιά νά λυθεῖ τό πρόβλημα θά ἐφαρμοσθεῖ ὁ νόμος αὐτός.

Ἀγωγιμότητα

106) Μιά πλάκα ἀπό χαλκό ἔχει πάχος 2 cm καί ἐμβαδόν 5000 cm². Ἡ θερμοκρασία στή μιά ἐπιφάνεια τῆς πλάκας εἶναι 150° C καί στήν ἄλλη 140° C. Πόση θερμότητα μεταφέρεται κάθε λεπτό ἀπό τή μιά ἐπιφάνεια τῆς πλάκας στήν ἄλλη; Ὁ συντελεστής θερμικῆς ἀγωγιμότητας τοῦ χαλκοῦ εἶναι 0,93 cal/s · cm · · grad.

107) Σέ ἐγκατάσταση κεντρικῆς θερμάνσεως σπιτιοῦ μιά ἀντλία κινεῖ τό νερό ἔτσι, ὥστε ἡ παροχή του νά εἶναι 0,4 *l*t/s. Τό νερό ὅταν ξεκινᾶ ἀπό τό λέβητα ἔχει θερμοκρασία 60° C ἐνῶ ὅταν ἐπιστρέφει ἔχει θερμοκρασία 20° C. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἀπώλεια θερμότητας ἀνά λεπτό στό γύρω χῶρο, ὥστε μέ τήν ἐγκαταστημένη κεντρική θέρμανση νά διατηρεῖται σταθερή ἡ θερμοκρασία τοῦ σπιτιοῦ στούς 20° C.

108) Νά ὑπολογισθεῖ σέ Watt ἡ συνολική θερμική ἰσχύς πού ἀκτινοβολεῖ μιά σφαίρα διαμέτρου 2 cm, ἡ ὁποία μπορεῖ νά θεωρηθεῖ μέλαν σῶμα καί βρίσκεται σέ θερμοκρασία 600° C. Ὁ συντελεστής σ στόν τύπο τοῦ Stefan - Boltzmann εἶναι:

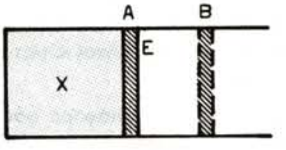
$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot grad}}$$

V) Θερμοδυναμική

109) Ἕνας κινητήρας ἰσχύος 0,4 HP χρησιμοποιεῖται γιά νά ἀναταράξει 20 kg νεροῦ. Δεχόμαστε ὅτι ὅλη ἡ μηχανική ἐνέργεια πού βγαίνει ἀπό τόν κινητήρα μετατρέπεται σέ θερμότητα. Ἐπί πόσο χρόνο πρέπει νά ἐργάζεται ὁ κινητήρας, ὥστε ἡ θερμοκρασία τοῦ νεροῦ νά ἀνέβει κατά 5 grad;

110) Ἕνα θερμιδόμετρο Joule ἀποτελεῖται ἀπό δοχεῖο χαλκοῦ μάζας 108 g καί περιέχει 800 g λάδι. Οἱ εἰδικές θερμότητες χαλκοῦ καί λαδιοῦ εἶναι ἀντιστοίχως 0,093 cal/g·grad καί 0,520 cal/g·grad. Τό λάδι ἀναδεύεται μέ περιστρεφόμενα πτερύγια τά ὁποῖα στρέφονται μέ τή βοήθεια ροπῆς ἴσης μέ 10 N · m. Νά ὑπολογισθεῖ τό μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας ἄν μετά ἀπό 141 στροφές ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδόμετρου αὐξήθηκε κατά 5 grad.

111) Στό χῶρο x (σχῆμα 34) πού ἔχει ὄγκο 10 lt ὑπάρχει ἀέριο ὑπό πίεση 1 Atm καί θερμοκρασία $\theta_1 = 20°$ C. Τό ἔμβολο Ε ἰσορροπεῖ στήν θέση Α. Ἄν θερμάνομε τό ἀέριο, τότε τό ἔμβολο μετακινεῖται ἀπό τήν θέση Α στή θέση Β καί ἡ θερμοκρασία αὐξάνεται στούς 40°C. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἔργο πού θά παραχθεῖ κατά τή μετακίνηση τοῦ ἐμβόλου ἀπό τή θέση Α στή Β.



Σχῆμα 34.

112) Ἡ θερμοκρασία 5 kg ἀζώτου αὐξάνει ἀπό 10°C στούς 130°C : α) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πυκνότητα τοῦ ἀζώτου στούς 10°C (Μορ. βάρος ἀζώτου 28). β) Ἐάν ἡ μεταβολή ἔγινε μέ σταθερή πίεση (P = 14 Atm), νά ὑπολογισθοῦν ἡ θερμότητα πού πῆρε τό ἀέριο ἀπό τό περιβάλλον, ἡ μεταβολή τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας καί τό ἔργο πού παρήγαγε τό ἀέριο στήν ἰσοβαρή αὐτή μεταβολή. γ) Ἐάν ἡ μεταβολή εἶναι ἰσόχωρη νά ὑπολογισθεῖ τό ποσό θερμότητας πού χρειάσθηκε. Γιά τό ἄζωτο ἰσχύει $c_v = 0{,}177$ cal/g . grad καί $c_p = 0{,}248$ cal/g · grad.

113) Νά ὑπολογισθεῖ ὁ θερμ/κός συντελεστής ἀποδόσεως θερμικῆς μηχανῆς πού ἐργάζεται μεταξύ τῶν θερμοκρασιῶν 100°C καί 400°C.

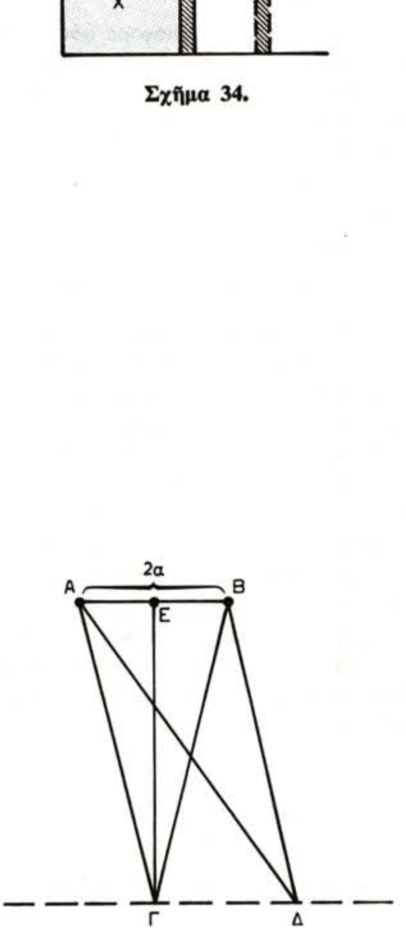
114) Μιά ἀτμομηχανή ἐργάζεται μεταξύ θερμοκρασιῶν 410° F καί 120° F καί ἀποδίδει ἰσχύ 8 HP. Ἐάν ὁ βιομηχανικός συντελεστής ἀποδόσεως εἶναι τό 30% τοῦ θερμ/κοῦ συντελεστῆ ἀποδόσεως ἰδανικῆς θερμικῆς μηχανῆς, νά ὑπολογισθεῖ τό ποσό θερμότητας πού ἀπορροφᾶται ἀνά δευτερόλεπτο ἀπό τή θερμή πηγή.

115) Ἕνα θερμιδόμετρο θερμαίνεται μέ μετατροπή ἠλεκτρικῆς σέ θερμική ἐνέργεια. (Μέσα στό θερμιδόμετρο ἔχομε τοποθετήσει μιά ἠλεκτρική ἀντίσταση, ὅπως αὐτές πού ἔχουν οἱ ἠλεκτρικές θερμάστρες). Τό θερμιδόμετρο περιέχει 380 g νεροῦ στήν θερμοκρασία τῶν 10°C. Ὅταν ἡ παρεχόμενη ἠλεκτρική ἰσχύς εἶναι 84W διαπιστώνομε ὅτι σέ 10 min ἡ θερμοκρασία τοῦ νεροῦ ἀνεβαίνει στούς 40°C. Δεχόμαστε ὅτι τό δοχεῖο τοῦ θερμιδομέτρου καί ἡ ἠλεκτρική ἀντίσταση ἔχουν θερμοχωρητικότητα 20 cal/grad. Νά ὑπολογισθεῖ τό μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας.

116) Μιά ἀτμομηχανή παράγει 10 HP καί ὁ λέβητας τῆς ἀτμομηχανῆς καίει 10 kg κάρβουνο τήν ὥρα. Ἄν ἡ θερμότητα πού παράγει τό κάρβουνο κατά τήν καύση εἶναι 8,5 kcal/g, νά ὑπολογισθεῖ ὁ βιομηχανικός συντελεστής ἀποδόσεως τῆς ἀτμομηχανῆς.

ζ) ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ - ΗΧΟΥ

117) Ἡ ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ ἤχου στόν ἀέρα εἶναι 340 m/s. Νά ὑπολογισθεῖ τό μῆκος κύματος σέ ἦχο συχνότητας 1000 Hz.



Σχῆμα 35.

118) Δύο πηγές ἤχου Α καί Β τῆς ἴδιας συχνότητας 1500 Hz ἔχουν τήν ἴδια φάση (σχῆμα 35). Ἡ ἀπόσταση $AB = 2\alpha = 2$m καί ἡ ἀπόσταση $E\Gamma = 4$ m.

Νά ὑπολογισθεῖ τό μῆκος κύματος καί ἡ ταχύτητα μεταδόσεως τοῦ ἤχου, ἄν ὁ 2ος κροσσός μέγιστου ἀκούγεται στή θέση Δ ὅπου $\Gamma\Delta = 1$ m (ὁ κροσσός μέγιστου στό σημεῖο Γ θεωρεῖται σάν μηδενικός κροσσός).

119) Ἡ ἐξίσωση ἑνός κύματος εἶναι:

$$\xi = \xi_o \, \eta\mu \, \pi \left(\frac{t}{0{,}5} - \frac{x}{0{,}2} \right)$$

Τό σύστημα εἶναι τό S.I.

Νά καθορισθοῦν: α) Τό μῆκος κύματος. β) Ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως. γ) Ἡ φάση σέ σημεῖο πού ἀπέχει ἀπό τήν πηγή ἀπόσταση $x = 4$ m, ὅταν ἔχει περάσει χρόνος $t = 15$ s ἀπό τή στιγμή πού ἄρχισε ἡ πηγή νά ταλαντώνεται.

120) Ἡ ἐξίσωση $\xi = 10 \text{ συν } \pi \dfrac{x}{10} \text{ ημ } \pi \dfrac{t}{0,2}$ εἶναι ἡ ἐξίσωση ἑνός κύματος πού δημιουργεῖται σέ μιά χορδή.

Νά βρεθεῖ τό εἶδος τοῦ κύματος καί νά ἀναγνωρισθοῦν τά στοιχεῖα του (πλάτος, μῆκος κύματος καί περίοδος). (Τό σύστημα εἶναι τό C.G.S.).

121) Πόση εἶναι ἡ διαφορά φάσεως σέ μοῖρες δύο σημείων A καί B τά ὁποῖα βρίσκονται στόν ἀέρα στή διεύθυνση μεταδόσεως ἠχητικοῦ κύματος καί ἀπέχουν ἀπόσταση $AB = 0,2$ m; Ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου εἶναι 340 m/s καί ἡ συχνότητα τοῦ κύματος 680 Hz.

122) Δύο χορδές εἶναι κατασκευασμένες ἀπό τό ἴδιο ὑλικό, πυκνότητας $\rho = 3$ g/cm^3, ἔχουν τήν ἴδια διατομή ἀκτίνας $r = 1$ mm καί τό ἴδιο μῆκος $l = 10$ cm, τείνονται ὅμως μέ διαφορετικές δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ τείνουσα δύναμη $\vec{F}_2$ ὥστε νά ἀκοῦμε διακρότημα ἀπό τίς δύο χορδές περιόδου $T_\delta = 2$ s ὅταν ἡ τείνουσα δύναμη $F_1 = 0,942$ N;

123) Νά ὑπολογισθεῖ τό βάθος ἑνός πηγαδιοῦ, ὅταν ὁ χρόνος πού περνᾶ ἀπό τή στιγμή, πού μιά πέτρα ἀφήνεται ἀπό τό στόμιο τοῦ πηγαδιοῦ ἐλεύθερη νά πέσει μέχρις ὅτου νά ἀκουσθεῖ ὁ ἦχος τῆς πτώσεως, εἶναι 3 s (νά ληφθεῖ ταχύτητα ἤχου = 340 m/s καί g = 10 m/s).

124) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου σέ μιά χορδή πού ἔχει μῆκος $l = 20$ cm καί ἡ συχνότητα τῆς δεύτερης ἁρμονικῆς της εἶναι 1600 Hz.

125) Ὁ τέταρτος ἁρμονικός κλειστοῦ ἠχητικοῦ σωλήνα μήκους 0,4 m ἔχει τήν ἴδια συχνότητα μέ τόν πρῶτο ἁρμονικό ἀνοικτοῦ ἠχητικοῦ σωλήνα. Νά ὑπολογισθεῖ τό μῆκος τοῦ τελευταίου.

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ "ΑΣΠΙΩΤΗ - ΕΛΚΑ" Α. Ε.