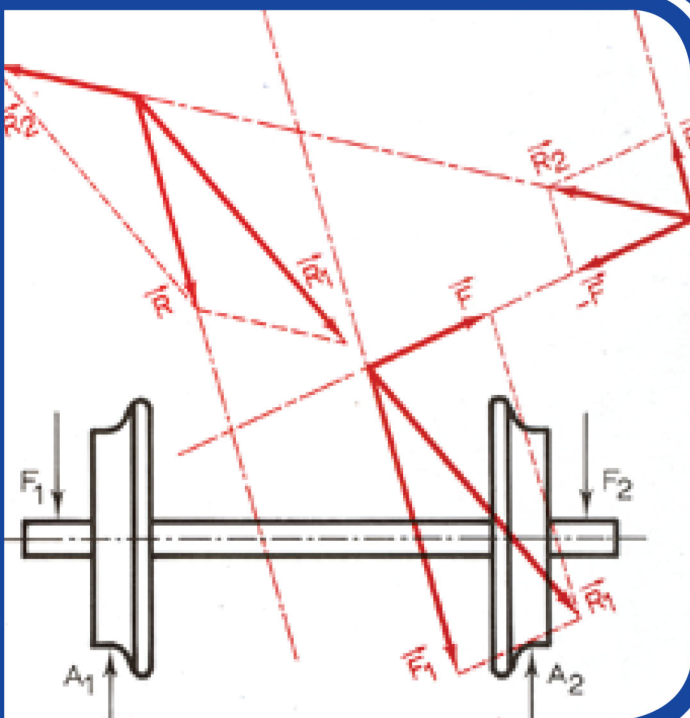
ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Γεωργίου Ρ. Γκρος
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ.Π.
Λαζάρου Ε. Λαζαρίδη
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥ ΗΛΕΚ/ΓΟΥ Ε.Μ.Π.



1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ο ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», πολύ νωρίς πρόβλεψε και σχημάτισε την πεποίθηση ότι η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας, σε συνδυασμό με την εθνική αγωγή, θα ήταν αναγκαίος και αποφασιστικός παράγοντας της προόδου του Έθνους μας.

Την πεποίθησή του αυτή ο Ευγενίδης εκδήλωσε με τη γενναιόφρονα πράξη ευεργεσίας, να κληροδοτήσει σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος που θα είχε σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι το Φεβρουάριο του 1956 συστήθηκε το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου τη διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του κυρία Μαριάνθη Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη.

Από το 1956 μέχρι σήμερα η συμβολή του Ιδρύματος στην τεχνική εκπαίδευση πραγματοποιείται με διάφορες δραστηριότητες. Όμως απ' αυτές η σημαντικότερη, που κρίθηκε από την αρχή ως πρώτης ανάγκης, είναι η έκδοση βιβλίων για τους μαθητές των τεχνικών σχολών.

Μέχρι σήμερα εκδόθηκαν εκατοντάδες τόμοι βιβλίων, που έχουν διατεθεί σε πολλά εκατομμύρια τεύχη. Τα βιβλία αυτά κάλυπταν ή καλύπτουν ανάγκες των Κατωτέρων και Μέσων Τεχνικών Σχολών του Υπ. Παιδείας, των Σχολών του Οργανισμού Απασχολήσεως Εργατικού Δυναμικού (ΟΑΕΔ) και των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού.

Μοναδική φροντίδα του Ιδρύματος σ' αυτή την εκδοτική του προσπάθεια ήταν και είναι η ποιότητα των βιβλίων, από άποψη όχι μόνον επιστημονική, παιδαγωγική και γλωσσική, αλλά και από άποψη εμφανίσεως, ώστε το βιβλίο να αγαπηθεί από τους νέους.

Για την επιστημονική και παιδαγωγική ποιότητα των βιβλίων τα κείμενα υποβάλλονται σε πολλές επεξεργασίες και βελτιώνονται πριν από κάθε νέα έκδοση.

Ιδιαίτερη σημασία απέδωσε το Ίδρυμα από την αρχή στην ποιότητα των βιβλίων από γλωσσική άποψη, γιατί πιστεύει ότι και τα τεχνικά βιβλία, όταν είναι γραμμένα σε γλώσσα άρτια και ομοιόμορφη αλλά και κατάλληλη για τη στάθμη των μαθητών, μπορούν να συμβάλλουν στη γλωσσική διαπαιδαγώγηση των μαθητών.

Έτσι με απόφαση που πάρθηκε ήδη από το 1956 όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Τεχνίτη, δηλαδή τα βιβλία για τις Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, όπως αργότερα και για τις Σχολές του ΟΑΕΔ, ήταν γραμμένα σε γλώσσα δημοτική με βάση τη γραμματική του Τριανταφυλλίδη, ενώ όλα τα άλλα βιβλία ήταν γραμμένα στην απλή καθαρεύουσα. Η γλωσσική επεξεργασία των βιβλίων γίνεται από φιλολόγους του Ιδρύματος και έτσι εξασφαλίζεται η ενιαία σύνταξη και ορολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Η ποιότητα του χαρτιού, το είδος των τυπογραφικών στοιχείων, τα σωστά σχήματα και η καλαίσθητη σελιδοποίηση, το εξώφυλλο και το μέγεθος του βιβλίου, περιλαμβάνονται και αυτά στις φροντίδες του Ιδρύματος.

Το Ίδρυμα θεώρησε ότι είναι υποχρέωσή του, σύμφωνα με το πνεύμα του ιδρυτή του, να θέσει στη διάθεση του Κράτους όλη αυτή την πείρα του των 20 ετών, αναλαμβάνοντας το 1978 και την έκδοση των βιβλίων για τις νέες Τεχνικές και Επαγγελματικές Σχολές και τα νέα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια, σύμφωνα με τα Αναλυτικά Προγράμματα του Π.Ι.

Α' ΕΚΔΟΣΗ 1978

Β' ΕΚΔΟΣΗ 1985

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ρ. ΓΚΡΟΣ
Δ^ΡΟΣ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ.Π.

ΛΑΖΑΡΟΥ Ε. ΛΑΖΑΡΙΔΗ
ΔΙΠΛ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥ-ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ
τ.ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Ε.Μ.Π.

[illegible]ΘΗΝ[illegible]
[illegible]

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Μηχανική και η διαίρεσή της.

Μηχανική ονομάζεται το τμημα της Φυσικης, το οποιο εξετάζει την κίνηση και την ισορροπία των σωμάτων.

Ανάλογα με την κατάσταση των σωμάτων διαιρείται σε τρία μέρη:

1. Μηχανική των στερεών.

2. Μηχανική των υγρών.

3. Μηχανική των αερίων.

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε ειδικά με τα στερεά μόνο σώματα, τα οποια περισσότερο από τα άλλα χρησιμοποιεί ο τεχνικός πάνω στη γη.

Συνεπως μας ενδιαφέρει μόνο η μηχανική των στερεών, η οποία διαιρείται επίσης σε τρία μέρη:

1) Τη Στατική. 2) Την Κινηματική και 3) τη Δυναμική.

Η ***Στατική*** εξετάζει τα ***σώματα που βρίσκονται σε ισορροπία.*** Ένα σωμα βρίσκεται σε ισορροπία, όταν όλες οι δυνάμεις, που ενεργούν σ' αυτό, εξουδετερώνουν η μία την άλλη, οπότε λέμε ότι οι δυνάμεις ισορροπούν. Τότε η συνολική δράση των δυνάμεων είναι μηδέν και ως εκ τούτου είτε το σώμα ηρεμεί, είτε όλα του τα σημεία κινούνται ευθύγραμμα με την ίδια ταχύτητα. Για να βρούμε όμως το τελικό αποτέλεσμα πολλών δυνάμεων, πρέπει να μάθομε να τις συνθέτομε και να τις αναλύομε. Ακριβέστερο επομένως είναι να πούμε ότι η Στατική εξετάζει ***την ισορροπία των δυνάμεων μαζί με τη σύνθεση και την ανάλυσή τους.***

Οι νόμοι και οι κανόνες της Στατικής εφαρμόζονται στις διάφορες δομικές και μηχανολογικές κατασκευές, όπου είναι απαραίτητο να γνωρίζομε τις δυνάμεις, που δρουν πάνω σ' αυτές. Παράλληλα σε μια κατασκευή δομική ή μηχανολογική πρέπει να καθορίσομε τις διαστάσεις της μετά από υπολογισμό. Οι υπολογισμοί αυτοί των διαστάσεων πρέπει να γίνονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι η κατασκευή κάτω από την επίδραση των δυνάμεων, που θα την επιβαρύνουν, δεν υπάρχει κίνδυνος να θραυσθεί ή να υποστεί απαράδεκτες παραμορφώσεις. Ταυτόχρονα όμως δεν επιτρέπεται να γίνεται σπατάλη υλικού, αλλά πρέπει να εξευρίσκεται κάθε φορά η πιο οικονομική διατομή της κατασκευής.

Στη Στατική, όπως θα εξετάσομε στο επόμενο κεφάλαιο, δεχόμαστε για να απλοποιήσομε τα προβλήματά της, ότι τα σώματα δεν παραμορφώνονται. Στην πραγματικότητα όμως κάθε σώμα υφίσταται παραμορφώσεις από την επίδραση δυνάμεων. Είναι απαραίτητο οι παραμορφώσεις αυτές (μήκυνση, βράχυνση, κάμψη, στροφή κλπ.) για κάθε υλικό να παραμείνουν τόσο μικρές, ώστε να μην παραβλάπτουν τη χρησιμότητα της κατασκευής. Επομένως πρέπει να γίνουν υπολογισμοί και για τις παραμορφώσεις αυτές.

Ειδικά με το θέμα αυτό του υπολογισμού των διαστάσεων και των παραμορφώσε ων των κατασκευων ασχολειται ιδιαίτερο τμημα της Μηχανικης, η « Αντοχή των Υλικών».

Το δεύτερο τμημα της μηχανικης των στερεων ειναι, όπως είπαμε, η ***Κινηματική***, η οποία ερευνά την κίνηση, χωρίς να εξετάζει τις δυνάμεις που την προκαλουν.

Η ***Δυναμική*** τέλος ερευνα τη μεταβολή της ταχύτητας μαζύ με τα αίτια, δηλαδή τις δυνάμεις που την προκαλουν. Μεταβολή της ταχύτητας σημαίνει αλλαγή είτε στο μέγεθός της, είτε στη διεύθυνσή της.

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ

1.1 Γενικά.

Είπαμε προηγουμένως ότι η Στατική μελετα τη σύνθεση, την ανάλυση και την ισορροπία των δυνάμεων. Με τη μελέτη αυτή μπορει η Στατική να ορίσει ποιες ειναι οι συνθηκες που πρέπει να υπάρχουν, ώστε οι δυνάμεις, που ενεργουν σε ένα σώμα, να μην το θέτουν σε κίνηση ή να μη μεταβάλλουν την ταχύτητά του. Ειδικότερα η ***Στατική των Στερεων*** ερευνα τις συνθηκες ισορροπίας του απόλυτα στερεού σώματος.

Τι ειναι όμως το απόλυτα στερεό σώμα; ***Απόλυτα στερεό σώμα καλείται κάθε σωμα, το οποιο δεν παραμορφώνεται όσες και αν είναι οι δυνάμεις, που ενεργούν επάνω του.*** Τέτοιου είδους όμως σώματα είναι ιδεατά, δεν υπάρχουν δηλαδή στην πραγματικότητα, γιατί όλα τα σώματα υπό την επίδραση δυνάμεων παραμορφώνονται, άλλα περισσότερο και άλλα λιγότερο. Η παραδοχή όμως αυτή μας επιτρέπει να δεχθουμε ότι οι δυνάμεις, που δρουν στα σώματα αυτά, που δεν παραμορφώνονται, διατηρουν αμετάβλητα τα χαρακτηριστικά τους. Με τον τρόπο αυτό απλοποιείται πολύ η εξέταση των προβλημάτων της Στατικης.

Στα σχέδια των επομένων κεφαλαίων δεν δείχνομε πάντα τα στερεά σώματα, πάνω στα οποια δρουν οι δυνάμεις. Ειναι όμως αυτονόητο ότι παντου, όπου υπάρχουν και σχεδιάζονται δυνάμεις, υπάρχει πάντοτε και ένα σωμα πάνω στο οποιο ενεργουν οι δυνάμεις αυτές.

1.2 Δύναμη.

Για να μεταβάλει ένα σωμα την κίνησή του ή να παραμορφωθει, πρέπει να υπάρχει κάποια αιτία. Την αιτία αυτή, την οποία δεν τη βλέπομε αλλά την αντιλαμβανόμαστε από τα αποτελέσματά της, π.χ. ως ένταση των μυων μας κατά την ανύψωση ενός σώματος, κατά την ώθηση ενός οχήματος ή κατά την ένταση ενός ελατηρίου, την ονομάζομε ***δύναμη.***

Η δύναμη, με την οποία η γη έλκει ένα σωμα, καλειται ***βάρος του σώματος.***

Μονάδα μετρήσεως της δυνάμεως.

Για να είμαστε σε θέση να μετρουμε τις διάφορες δυνάμεις και να δίνομε το αριθμητικό τους μεγεθος, πρέπει να έχομε από πριν καθορίσει τη μονάδα μετρήσεως των δυνάμεων.

Ως μονάδα δυνάμεως έχει ορισθει το κιλοπόν (ή χιλιοπόν), το οποιο συμβολίζεται με τα γράμματα kp.

Το κιλοπόν ειναι ίσο με το βάρος που έχει ένα λίτρο νερου σε θερμοκρασία 4°C, σε μέσο γεωγραφικό πλάτος και στο υψόμετρο της επιφάνειας της θάλασσας. Στην πράξη χρησιμοποιουμε επίσης και ένα πολλαπλάσιο της μονάδας αυτης, το μεγαπόν = 1,0 Mp = 1000,0kp.

Χαρακτηριστικά στοιχεια της δυνάμεως.

Γραφικός Καθορισμός.

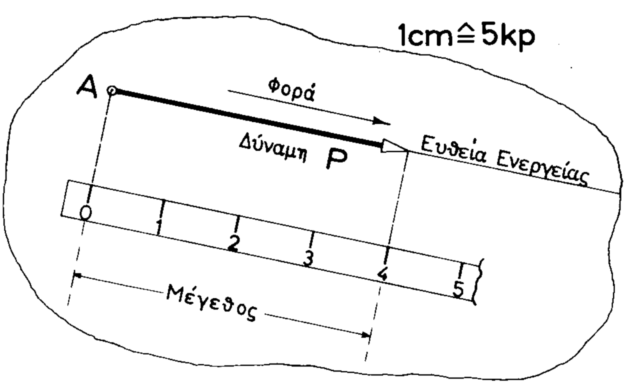
Μπορουμε να καθορίσομε με ακρίβεια μια δύναμη, όταν γνωρίζομε:

1) Το μέγεθός της, π.χ. 10 kp.
2) Την ευθεία της ενέργειάς της.
3) Τη φορά της και
4) το σημειο εφαρμογης της, π.χ. A (σχ. 1.2α).

Για το σκοπό αυτό παριστάνομε τη δύναμη γραφικως με ενα άνυσμα. Το μηκος του ανύσματος παριστάνει το μέγεθος της δυνάμεως υπό ορισμένη κλίμακα. Π.χ. όταν 1cm παριστάνει 5kp (1 cm $\triangleq$ 5 kp) και μετρήσομε άνυσμα μήκους 4 cm, αυτό σημαίνει ότι η δύναμη που παριστάνεται έχει μέγεθος 20kp.

Η ***αιχμή (βέλος)*** του ανύσματος παριστα τη φορά της δυνάμεως.

Η ***αρχή*** ή το ***τέλος (πέρας)*** της δυνάμεως είναι το σημειο εφαρμογης της.



Σχ. 1.2α.

Παράδειγμα.

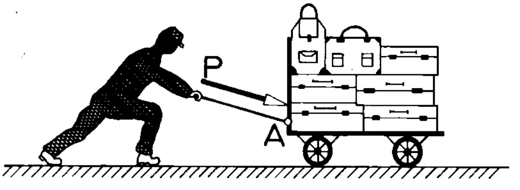
Ένα βαγόνι γεμάτο με αποσκευές έλκεται ή ωθειται από το σημειο A με τη βοήθεια χαλύβδινης ράβδου, η οποία στρέφεται γύρω από το A (σχ. 1.2β και 1.2γ).

Αντιλαμβανόμαστε εύκολα ότι:

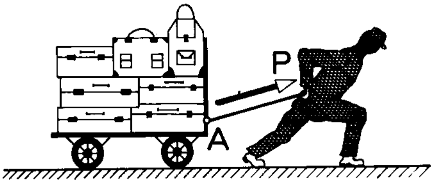
Το μέγεθος της δυνάμεως P, που χρειάζεται για να μετακινηθει το βαγόνι προς τα εμπρός ή προς τα πίσω, εξαρταται από το φορτίο του.

Η ευθεία της ενέργειας της δυνάμεως συμπίπτει με τον άξονα της ράβδου.

Η φορά της ορίζεται από το βέλος, το οποιο, αν μεν σύρομε το βαγόνι, διευθύνεται προς το μέρος μας (σχ. 1.2β), αν δε σπρώχνομε το βαγόνι, έχει την αντίθετη διεύθυνση (σχ.1.2γ). Το σημειο εφαρμογης της δυνάμεως ειναι το σημειο Α, όπου στερεώνεται η ράβδος επάνω στο βαγόνι.



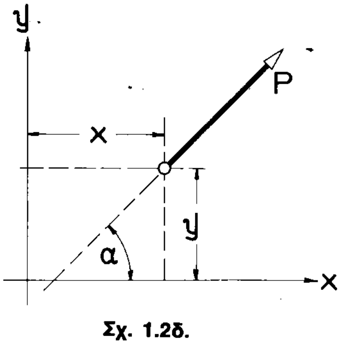
Σχ. 1.2β.



Σχ. 1.2γ.

Αναλυτικός καθορισμός.

Μπορουμε να καθορίσομε πλήρως μια δύναμη σε μια οποιαδήποτε θέση επάνω στο επίπεδο, όταν έχομε τα εξης τρία αριθμητικά της στοιχεια (σχ. 1.2δ):



Σχ. 1.2δ.

1) Το ***μέγεθος*** (π.χ. 10 kp).

2) Τη ***διεύθυνση,*** η οποία ορίζεται με τη γωνία α ως προς τον άξονα x τυχόντος συστήματος συντεταγμένων. Η γωνία αυτή προκύπτει, όταν ο θετικός άξονας x στραφει αντίθετα προς τη φορά των δεικτων του ρολογιου, μέχρι που να συμπέσει με τη δύναμη (π.χ. α = 40°).

3) Τη ***θέση,*** λ.χ. στις συντεταγμένες x και y του σημείου εφαρμογης της (π.χ. x = 18cm, y = 15 cm).

Συνισταμένη και συνιστωσες.

Μια δύναμη, η οποία επιφέρει σε ένα σωμα τα ***ίδια αποτελέσματα*** με εκεινα, τα οποια επιφέρουν συγχρόνως δύο ή περισσότερες δυνάμεις, που ενεργουν επάνω στο σωμα αυτό, καλειται ***συνισταμένη*** των δυνάμεων αυτων.

Οι δυνάμεις, η εφαρμογή των οποίων έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τη συνισταμένη, ονομάζονται ***συνιστώσες.***

Όταν ζητούμε να βρούμε τη συνισταμένη δύο ή περισσότερων συνιστωσών τότε λέμε ότι κάνομε ***σύνθεση δυνάμεων.*** Αντίστροφα, όταν βρίσκομε τις συνιστώσες δυνάμεις μιας συνισταμένης, λέμε ότι κάνομε ***ανάλυση των δυνάμεων.*** Ώστε:

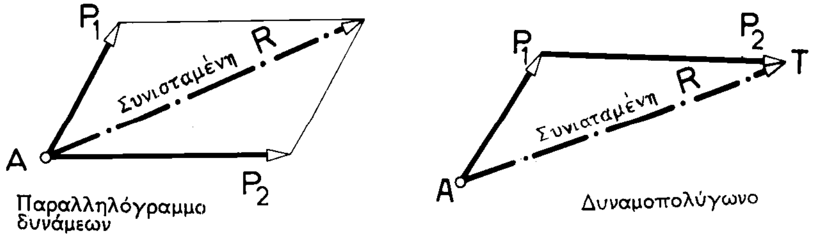
Σύνθεση δυνάμεων καλείται η εύρεση της συνισταμένης τους.

Ανάλυση δυνάμεως καλείται η εύρεση των συνιστωσών της. Τη συνισταμένη τη χαρακτηρίζομε συχνά με το κεφαλαίο λατινικό γράμμα R.

1.3 Αρχές της στατικής.

Παραλληλόγραμμο των δυνάμεων.

Αν λάβομε δύο δυνάμεις P_1 και P_2, οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής, το Α π.χ., τότε η συνισταμένη τους θα είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου, που σχηματίζεται από τις δύο αυτές δυνάμεις (σχ. 1.3α).



Σχ. 1.3α.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγομε επίσης ως εξής:

Λαμβάνομε τυχόν σημείο Α και φέρομε παράλληλη και ίση προς την P_1 και από το τέλος της P_1 παράλληλη και ίση προς την P_2, τηρώντας βέβαια τη φορά των δυνάμεων. Αν τώρα ενώσομε την αρχή Α της πρώτης δυνάμεως P_1 με το τέλος Τ της τελευταίας δυνάμεως P_2, η ευθεία ΑΤ αποτελεί τη συνισταμένη R των δύο δυνάμεων. Το σχήμα που προκύπτει καλείται δυναμοπολύγωνο (σχ. 1.3α). Η σειρά, κατά την οποία τοποθετούμε τις δυνάμεις τη μια μετά την άλλη στο δυναμοπολύγωνο, δεν έχει σημασία. Αυτό φαίνεται από το σχήμα 1.3β, στο οποίο αρχίζομε με τη δύναμη P_1 στο σημείο Α και τοποθετούμε στο τέλος της τη δύναμη P_2 έτσι, ώστε τα βέλη να είναι το ένα μετά το άλλο. Θα είχαμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα, αν αρχίζαμε στο Α με την P_2 και στο τέλος της θέταμε την P_1.

Μπορούμε πειραματικά να αποδείξομε την αρχή του παραλληλογράμμου των δυνάμεων. Δηλαδή μπορούμε να αποδείξομε ότι η ανάλυση ή η σύνθεση δυνάμεων, την οποία εκτελούμε επάνω στο χαρτί, αντιστοιχεί πράγματι σε φαινόμενα και σε γεγονότα.

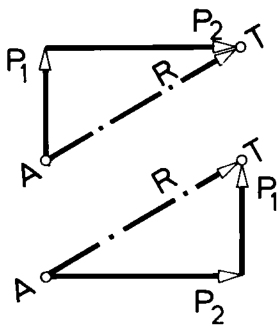
Ας αναφέρομε ένα παράδειγμα:

Τρία νήματα, από τα οποία προσδένονται τρία διαφορετικά σώματα, τα ενώνομε σε ένα κοινό κόμπο (σχ. 1.3γ).

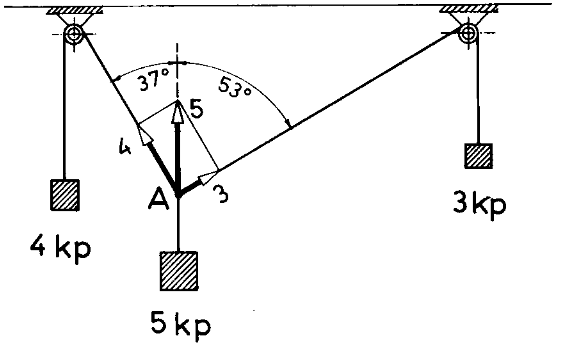
Η θέση ισορροπίας Α, την οποία θα πάρει μόνος του ο κόμπος, όταν τον αφήσομε ελεύθερο, είναι εκείνη, στην οποία οι τρεις δυνάμεις σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

Προκειμένου να αναλύσομε μία δύναμη σε δύο γνωστές διευθύνσεις, ενεργούμε κατά τρόπο αντίστροφο από τον προηγούμενο.

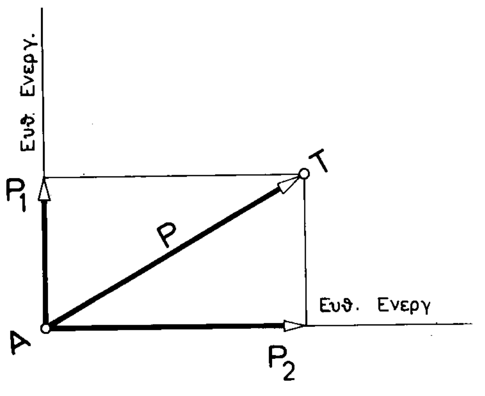
Φέρομε δηλαδή από το άκρο Α και Τ της δυνάμεως Ρ (σχ. 1.3δ), η οποία μας δίνεται, παράλληλες προς τις γνωστές ευθειες ενέργειας. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζομε το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων και συνεπως βρίσκομε τις ζητούμενες συνιστώσες P_1 και P_2 (σχ. 1.3δ).



Σχ. 1.3β.



Σχ. 1.3γ.



Σχ. 1.3δ.

Ή ανάλυση μιας δυνάμεως σε περισσότερες από δύο συνιστώσες με κοινό σημειο εφαρμογης είναι πρόβλημα, που μπορεί να λάβει άπειρες λύσεις.

Ζητειται π.χ. να αναλυθει η γνωστή δύναμη R σε τρεις συνιστωσες δυνάμεις πού ενεργουν στις ευθειες ενέργειας ε_1 ε_2 και ε_3.

Δύο από τις δυνατές λύσεις δίνονται στο σχημα 1.3ε.

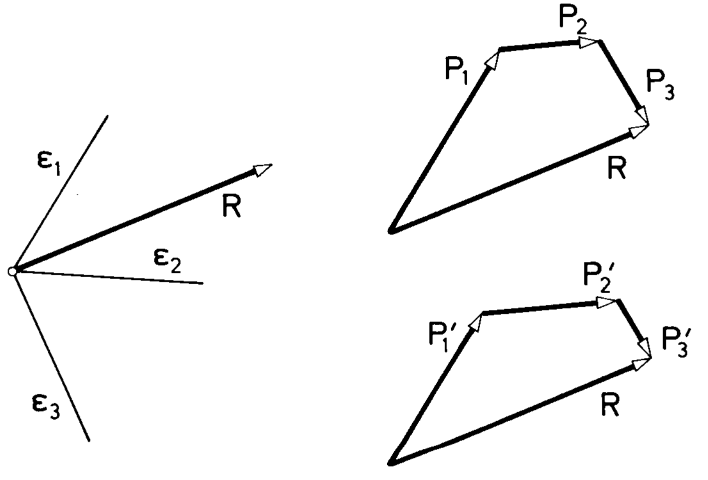
Τόσο οι δυνάμεις P_1, P_2 και P_3, όσο και οι P_1', P_2' και P_3' είναι συνιστώσες της R κατά τις δοθεισες ευθειες ενέργειας.

Η ανάλυση μιας δυνάμεως σε τρεις συνιστώσες, των οποίων οι ευθειες ενέργειας δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο, είναι δυνατή.

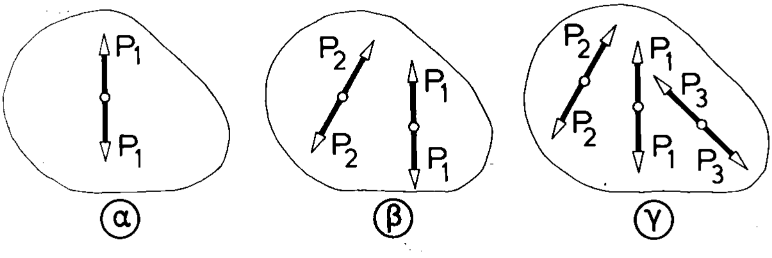
Πρόσθεση και αφαίρεση δυνάμεων.

Δύο δυνάμεις, που έχουν μεν το ίδιο μέγεθος και δρουν επάνω στην ίδια ευθεία ενέργειας, αλλά έχουν αντίθετη διεύθυνση, καλούνται ***ίσες και αντίρροπες*** (σχ. 1.3ζ).

Τέτοιου είδους δυνάμεις μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν από ένα απόλυτα στερεό σώμα, που ισορροπεί, χωρίς να μεταβάλλουν την κατάσταση ισορροπίας του.



Σχ. 1.3ε.



Σχ. 1.3ζ.
α) Το σύστημα ισορροπεί. β) και γ) Το σύστημα εξακολουθεί να ισορροπεί.

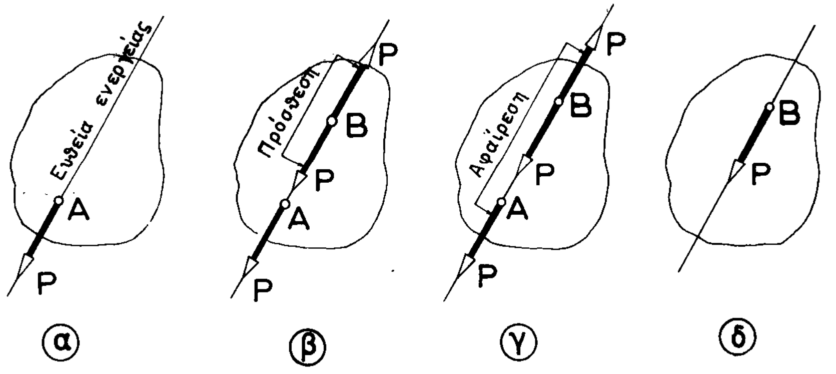
Μετάθεση των δυνάμεων επάνω στην ευθεία ενέργειάς τους.

Σε ένα απόλυτα στερεό σώμα και μόνο σ' αυτό κάθε δύναμη μπορεί να μετακινηθεί ελεύθερα επάνω στην ευθεία ενέργειάς της, χωρίς να μεταβληθεί η επίδρασή της επάνω στο σώμα.

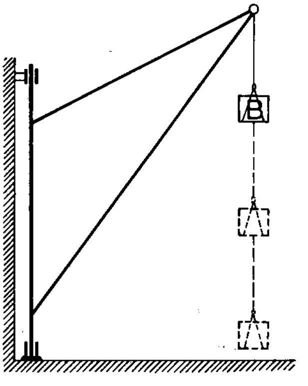
Επομένως τα αποτελέσματα, τα οποία προκαλεί μια δύναμη, είναι ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου εφαρμογής της.

Η αρχή αυτή είναι συνέπεια της προηγούμενης, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3η.

Μπορούμε να αντιληφθούμε εύκολα πώς γίνεται η μετάθεση μιας δυνάμεως, εάν την εφαρμόσομε σε ένα σώμα με τη βοήθεια ενός σχοινιού. Π.χ. προκειμένου να ανυψώσομε το βάρος Β (σχ. 1.3θ), η δύναμη που καταβάλλομε παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από το μήκος του συρματοσχοίνου, το οποίο χρησιμοποιούμε.



Σχ. 1.3η.
α) Αρχική θέση δυνάμεως. β) Πρόσθεση δύο ίσων και αντιρρόπων δυνάμεων. γ) Αφαίρεση δύο ίσων και αντιρρόπων δυνάμεων. δ) Η δύναμη μετακινήθηκε από το Α στο Β.



Σχ. 1.3θ.

1.4 Στατική ροπή.

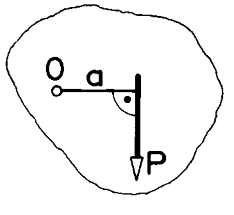
Αν σε ένα στερεό σωμα, το οποιο μπορει να περιστρέφεται γύρω από το σημειο Ο, δράσει μια δύναμη P, που δεν διέρχεται από το Ο, τότε το σωμα θα στραφει (σχ. 1.4α). Αποδεικνύεται ότι το μέγεθος της στροφης αυτης εξαρταται από το μέγεθος της δυνάμεως P καθώς και από την ελάχιστη απόσταση α μεταξύ της δυνάμεως και του σημείου Ο.

Η απόσταση αυτή α, δηλαδή το μηκος της κάθετης από το Θ επάνω στην ευθεία ενέργειας της P, καλειται ***μοχλοβραχίονας*** της δυνάμεως. Το μέγεθος $M = P.\alpha$ καλειται ***στατική ροπή.***

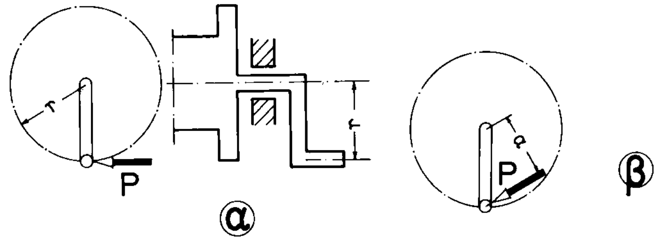
Την έννοια «στατική ροπή» ειναι δυνατόν να την αντιληφθουμε εύκολα στο βαρουλκο. Αν περιστρέψομε το βαρούλκο έτσι, ώστε η δύναμη P να εφάπτεται συνεχώς στην περίμετρο του βαρούλκου, τότε η ροπή ειναι ίση με $M = P.r$.

Αν η διεύθυνση της P ειναι τυχούσα, τότε η ροπή ειναι οπωσδήποτε μικρότερη από την προηγούμενη και ίση με M = P.α (σχ. 1.4β).

Σε πολλές εφαρμογές της καθημερινης ζωης χρησιμοποιουμε το δεδομένο ότι η ροπή μπορει να αυξηθει, μόνο εάν μεγαλώσει η δύναμη ή ο μοχλοβραχίονας.



Σχ. 1.4α.



·Σχ. 1.4β.

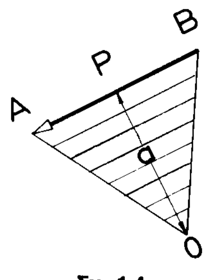
Επειδή όμως η δύναμη του ανθρώπου είναι περιορισμένη, αυξάνομε αναγκαστικά το μοχλοβραχίονα, όπως π.χ. στη μανιβέλλα, το γερμανικό κλειδί, την αρίδα του ξυλουργού κλπ.

1. ***Ορισμός. Η στατική ροπή*** ή απλως ***ροπή μιας δυνάμεως P ως προς ένα σημειο O ισουται με το γινόμενο της δυνάμεως επί το μοχλοβραχίονά της.***

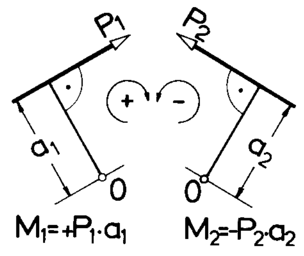
Οι συνηθισμένες μονάδες της ροπης ειναι το Kpm (χιλιοπόμετρο) ή για μεγαλύτερα μεγέθη το Mpm (μεγαπόμετρο).

Το μέγεθος της στατικής ροπής δυνάμεως P ως προς το σημείο O ισουται με το διπλάσιο εμβαδόν του τριγώνου, το οποιο έχει τη δύναμη ως βάση και το σημειο O ως κορυφή (σχ. 1.4γ). Πραγματικά το εμβαδόν του τριγώνου (OAB) = E = P α/2, άρα:

$$M = 2E$$



Σχ. 1.4γ.



Σχ. 1.4δ.

Στο σχημα 1.4γ έστω ότι η δύναμη P = 100 kp και ο μοχλοβραχίονας α = 0,6 m. Τότε η στατική ροπή:

$$M = Pa = 100 \text{kp} \times 0{,}6 \text{ m} = 60 \text{ kpm}.$$

'Οταν η δύναμη P στρέφει το σωμα κατά τη φορά περιστροφης των δεικτων του ρολογιου, τότε λέμε ότι η ροπή έχει δεξιόστροφη φορά και την καθορίζομε ως ***θετική*** (+).

Οταν αντίστροφα η δύναμη P στρέφει το σώμα κατά την αντίθετη έννοια, τότε η οπή ειναι αριστερόστροφη και την καθορίζομε ως αρνητική (—) (σχ. 1.4δ).

2. *Αρχή των ροπών.*

'Οπως υπάρχει συνισταμένη των δυνάμεων, έτσι υπάρχει και συνισταμένη τών ροπων τους. 'Εστω ότι έχομε τρεις ροπές M_{P1}, M_{P2} και M_{P3} που αντιστοιχούν στις δυνάμεις P_1, P_2 και P_3 ως προς ένα σημειο.

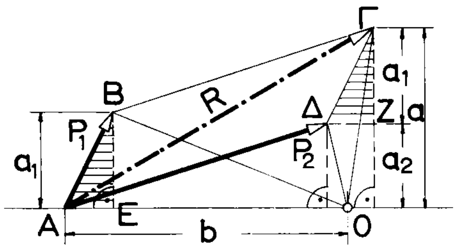
Η ροπή M_R της συνισταμένης R των τριών αυτών δυνάμεων ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που έχουν οι συνιστώσες P_1, P_2 και P_3. Δηλαδή:

$$M_R = M_{P1} + M_{P2} + M_{P3}.$$

Ας αποδείξομε τώρα την ορθότητα αυτης της προτάσεως. Ας πάρομε την περίπτωση δύο δυνάμεων P_1 και P_2 με συνισταμένη R και ας αποδείξομε ότι ως προς ένα σημειο Ο, που εκλέγομε τυχαία, έχομε $M_R = M_{P1} + M_{P2}$.

Από το σχημα 1.4ε προκύπτει ότι:

$$M_{P1} = 2 \times \text{εμβαδόν ΟΑΒ} = ba_1.$$
$$M_{P2} = 2 \times \text{εμβαδόν ΟΑΔ} = ba_2.$$
$$M_R = 2 \times \text{εμβαδόν ΟΑΓ} = ba.$$

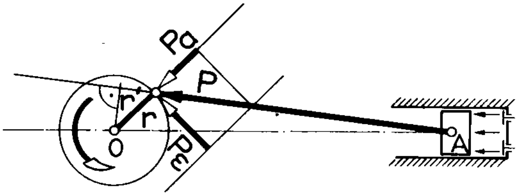


Σχ. 1.4ε.

Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα με τις διαγραμμίσεις είναι ίσα, επειδή οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ ειναι ίσες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και όλες οι γωνίες ειναι ίσες, μια και όλες οι πλευρές είναι παράλληλες μεταξύ τους.

'Αρα: ΒΕ = ΓΖ και $a = a_1 + a_2$· επομένως:

$$M_{P1} + M_{P2} = ba_1 + ba_2 = b(a_1 + a_2) = ba = M_R.$$



Σχ. 1.4ζ.

Ας εξετάσομε τώρα και την εφαρμογή της αρχης αυτης σε ένα στροφαλοφόρο ξονα μηχανης εσωτερικης καύσεως (σχ. 1.4ζ).

Οι δυνάμεις, οι οποιες παράγονται από την έκρηξη του καυσίμου στον κύλινδρο ης μηχανης, ωθουν το έμβολο Α.

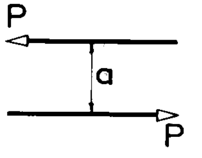
Η ευθύγραμμη όμως αυτή ώθηση με το διωστήρα και το στροφαλοφόρο άξονα μετατρέπεται σε περιστροφική κίνηση. Η ροπή, η οποία δρα στο στροφαλοφόρο άξονα Ο εξαρτάται από τη δύναμη P, που μεταβιβάζεται με το διωστήρα, καθώς και από την ελάχιστη απόσταση r′ της ευθείας ενέργειάς της από τον άξονα Ο.

$$M = P r'.$$

Αν αναλύσομε την P σε δύο συνιστώσες, μια P_ε κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης και μια P_α κατά τη διεύθυνση της ακτίνας, η ροπή θα ισούται με $M = P\,r' = P_\varepsilon r$. Αυτό συμβαίνει γιατί η P_ε είναι, ως εφαπτομένη, πάντοτε κάθετη στην ακτίνα r, ενώ η R_α δεν προκαλεί ροπή, επειδή η ευθεία ενέργειάς της διέρχεται από το Ο.

1.5 Ζεύγος δυνάμεων.

Δύο ίσες και αντίθετης φορας παράλληλες δυνάμεις αποτελούν ***ζεύγος δυνάμεων.*** Η απόσταση α μεταξύ των δύο αυτων δυνάμεων του ζεύγους καλείται ***μοχλοβραχίονας*** (σχ. 1.5α).



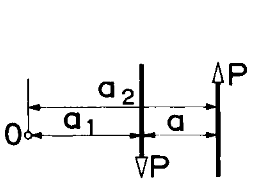
Σχ. 1.5α.

Ένα ζευγος δυνάμεων έχει συνισταμένη μηδέν και προκαλει μόνο μια στατική ροπή. Η ροπή αυτή ισουται πάντοτε με το γινόμενο της μιας δυνάμεως επί τη μεταξύ τους απόσταση α, ειναι δε ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου στροφης Ο. Πράγματι, ας υπολογίσομε τη ροπή του ζεύγους ως προς ένα οποιοδήποτε σημειο Ο (σχ. 1.5β). Ο μοχλοβραχίονας της μιας δυνάμεως P του ζεύγους είναι α_1 και της άλλης α_2.

Συνεπως έχομε $M = P\alpha_1 - P\alpha_2 = -P(\alpha_2 - \alpha_1) = -P\alpha$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα χαρακτηριστικά στοιχεία του ζεύγους είναι:

α) ***Το μέγεθος,*** που, ανεξάρτητα από το ποια ειναι η θέση του σημείου στροφής, ειναι πάντοτε ίσο με το γινόμενο της μιας δυνάμεως P επί το μοχλοβραχίονα του ζεύγους α.

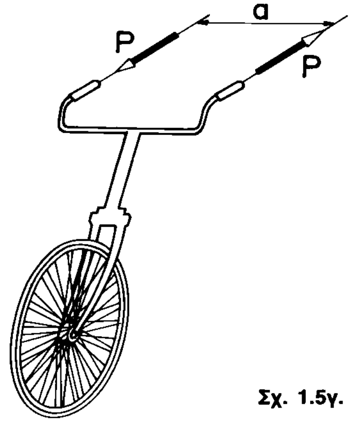


Σχ. 1.5β.

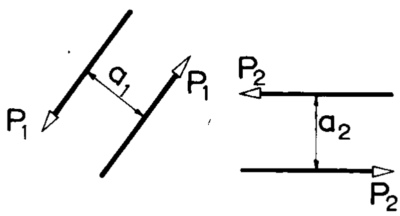
β) ***Το πρόσημο,*** δηλαδή το σημειο με το οποιο δηλώνομε την κατεύθυνση της στροφης. Για το δεξιόστροφο ζευγος ↷ το πρόσημον ειναι θετικό (+), για το αριστερόστροφο ↶ αρνητικό (—).

Τη φορά του ζεύγους τη βρίσκομε εύκολα. Αν π.χ. φαντασθουμε το σημειο στροφης τοποθετημένο πάνω στη μία δύναμη, τότε η φορά περιστροφης της άλλης δυνάμεως μας δίνει τη φορά περιστροφης του ζεύγους.

Τι ειναι στην πραγματικότητα ένα ζεύγος δυνάμεων και ποια ειναι τα αποτελέσματά του, το αντιλαμβανόμαστε στο τιμόνι ενός ποδηλάτου (σχ. 1.5γ).



Σχ. 1.5γ.



Σχ. 1.5δ.

Το μέγεθος του ζεύγους ειναι τόσο μεγαλύτερο, όσο μεγαλύτερη ειναι η δύναμη P, με την οποίαν στρέφομε το τιμόνι και όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση α μεταξύ των δύο χεριων μας.

Αν, όπως συμβαίνει στο σχήμα μας, το ζεύγος μας είναι αριστερόστροφο, το ποδήλατο θα στραφεί προς τα αριστερά, εάν είναι δεξιόστροφο θα στραφει προς τα δεξιά.

Αντικατάσταση ενός ζεύγους δυνάμεων με ένα άλλο.

Ένα ζευγος δυνάμεων με ροπή P_1a_1 μπορεί να αντικατασταθει από ένα άλλο ζευγος P_2a_2, το οποίο βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο, εάν οι ροπές τους έχουν το ίδιο μέγεθος και πρόσημο (σχ. 1.5δ), δηλαδή:

$$P_1a_1 = P_2a_2.$$

Επίσης πολλά ζεύγη δυνάμεων, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο μπορουν να αντικατασταθούν από ένα. Με τον τρόπο δηλαδή αυτό έχομε και εδω ***σύνθεση*** πολλων ζευγών.

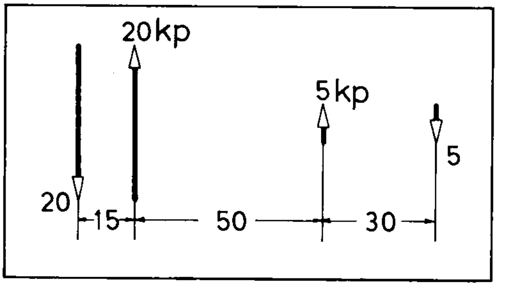
Σύνθεση πολλων ζευγών στο ίδιο επίπεδο.

Για να συνθέσομε πολλά ζεύγη δυνάμεων, τα οποια βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, προσθέτομε στην αρχή τα θετικά (δεξιόστροφα) ζεύγη και ύστερα τα αρνητικά (αριστερόστροφα). Έπειτα αφαιρουμε από το μεγαλύτερο από τα δύο το μικρότερο ζευγος. Η διαφορά που προκύπτει είτε είναι θετική είτε αρνητική, ανάλογα με το αν τρ μεγαλύτερο από τα αθροίσματα ειναι θετικό ή αρνητικό. Ο τρόπος αυτός της αθροίσεως ονομάζεται αλγεβρικός και παριστάνεται με το γράμμα Σ, δηλαδή:

$$M = \Sigma P a.$$

Παράδειγμα.

Μας ζητειται να συνθέσομε τα δύο ζεύγη ροπων, τα οποια δρουν στο σωμα του σχήματος 1.5ε.



Σχ. 1.5ε.

Λύση.

Από όσα μάθαμε, το ζητούμενο ζεύγος ροπών είναι ίσο με:

$$M = +5 \times 30 - 20 \times 15 = -150 \text{ kpcm}.$$

Επομένως το ζεύγος που προέκυψε είναι αριστερόστροφο με μέγεθος 150 kpcm, που σημαίνει δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις, π.χ. 10 kp με απόσταση μεταξύ τους 15 cm ή 15 kp με μοχλοβραχίονα 10 cm ή 30 kp με μοχλοβραχίονα 5 cm κλπ. Το ζευγος αυτό δυνάμεων μπορει να ενεργει σε οποιαδήποτε θέση του επιπέδου του σχήματος.

Μετάθεση των δυνάμεων παράλληλα προς την ευθεία ενέργειάς τους.

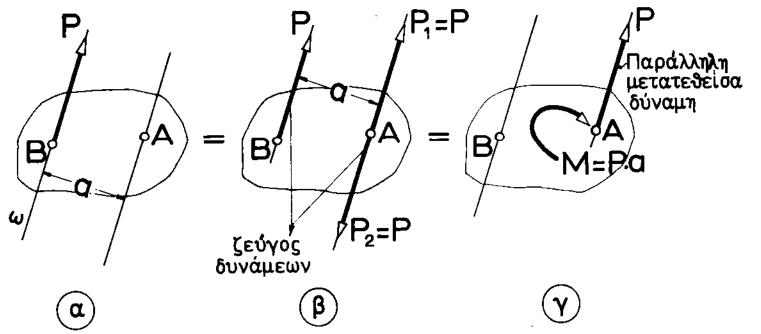
Στην παράγραφο 1.3 είδαμε ότι μία δύναμη μπορεί να μετακινηθει κατά μηκος της ευθείας ενέργειάς της ε, χωρίς να μεταβληθεί η επίδρασή της επάνω στο στερεό σωμα. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, όταν μετακινηθεί παράλληλα προς την ευθεία ενέργειάς της.

Στο σχημα 1.5ζ (α) δίδεται η δύναμη P και ζητούμε να μετακινηθει παράλληλα προς την ευθεία ενέργειάς της στο σημείο A, σε απόσταση α από αυτήν, χωρίς να μεταβληθει η επίδρασή της.

Στο σημειο A μπορούμε να τοποθετήσομε δύο ίσες και αντίρροπες δυνάμεις $P_1 = P_2 = P$ με ευθεία ενέργειας παράλληλη προς την ε, χωρίς να αλλάξει τίποτε στο επίπεδο των δυνάμεων [σχ. 1.5ζ(β)].

Οι τρεις δυνάμεις P, P_1, P_2 έχουν την ίδια επίδραση, που είχε μόνη η αρχική δύναμη P. Οι δύο από αυτές, η P και η P_2, αποτελούν δεξιόστροφο ζευγος δυνάμεων με μέγεθος $M = +P\alpha$, ενω η $P_1 = P$ είναι η δύναμη που μετατέθηκε παράλληλα. Επειδή, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.5, η επίδραση του ζεύγους ειναι ανεξάρτητη από το σημείο στροφής, το χαρακτηρίζομε με ένα τόξο, του οποίου το βέλος μας δίνει τη φορά του ζεύγους [σχ. 1.5ζ(γ)].

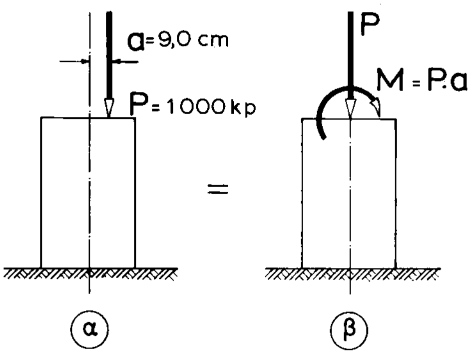
Ώστε μπορούμε να μετακινήσομε μια δύναμη P παράλληλα με την ευθεία ενέργειάς της σε απόσταση α, αλλά για να μη μεταβληθεί η επίδρασή της πρέπει να προσθέσομε στη δύναμη P, που μετακινήθηκε, μια ροπή με μέγεθος $M = P\alpha$.



Σχ. 1.5ζ.

Παράδειγμα.

Στο υποστύλωμα του σχήματος 1.5η (α) ενεργει η δύναμη P = 1000 kp σε απόσταση α = 9 cm από τον άξονά του. Ζητειται να μετακινηθει η δύναμη P παράλληλα προς τα αριστερά, ώστε να συμπέσει με τον άξονα του υποστυλώματος.



Σχ. 1.5η.

Λύση.

Για να γίνει εγκάρσια μετατόπιση, χωρίς να αλλάξει η επίδραση της αρχικης δυνάμεως P, πρέπει το νέο σύστημα δυνάμεων [σχ. 1.5η(β)] να αποτελειται από τη δύναμη P = 1000 kp στη νέα θέση επάνω στον άξονα και μια ροπή θετική, γιατί ειναι δεξιόστροφη, ίση με:

$$M = + P.a = 1000 \text{ kp}.0{,}09 \text{ m} = + 90 \text{ kpm}.$$

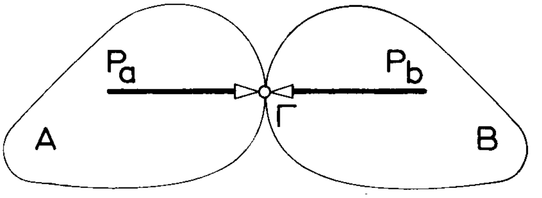
1.6 Δράση και αντίδραση. Στήριξη των σωμάτων.

Δράση και αντίδραση.

Δύο σώματα A και B, τα οποια βρίσκονται σε ηρεμία, εφάπτονται σε ένα σημειο τους, το Γ (σχ. 1.6α). Έστω ότι το σωμα A ασκει επάνω στο σώμα B μια δύναμη P_α. Τα δύο σώματα τότε μόνο παραμένουν σε ηρεμία, όταν και το σωμα Β ασκει επάνω στο Α μια ίση και αντίθετη δύναμη P_b.

Η P_a ονομάζεται ***δράση.***

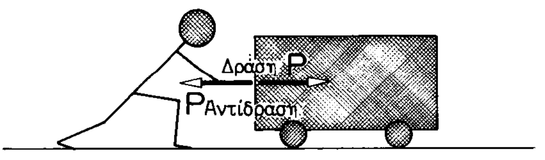
Η P_b ονομάζεται ***αντίδραση.***



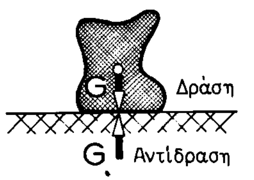
Σχ. 1.6α.

Παράδειγμα.

Ένας εργάτης σπρώχνει ένα βαγόνι. Με τους μυς και το σώμα του ασκεί επάνω στο βαγόνι μια δύναμη (δράση) P. Το βαγόνι ασκεί επίσης επάνω στον εργάτη μια δύναμη (αντίδραση) ίση και αντίθετη με την P (σχ. 1.6β).



Σχ. 1.6β.



Σχ. 1.6γ.

Ένα σωμα με βάρος G εδράζεται επάνω στο δάπεδο. Το σωμα ασκεί στο δάπεδο δύναμη (δράση) G. Το δάπεδο αντιδρα στο σωμα με μια δύναμη (αντίδραση) ίση και αντίθετη προς την G (σχ. 1.6γ).

Συμπέρασμα: Όπου υπάρχει δράση εκεί εμφανίζεται συγχρόνως και αντίδραση.

Στήριξη των σωμάτων.

Κάθε σωμα ασκεί στις στηρίξεις του δυνάμεις, δηλαδή ασκεί δράσεις επάνω στις στηρίξεις του.

Αλλά για να διατηρείται η ισορροπία του σώματος πρέπει, όπως είπαμε, να ασκουν και οι στηρίξεις επάνω στο σώμα δυνάμεις, οι οποίες να είναι ίσες και αντίθετες, δηλαδή να ασκούνται στο σώμα αυτό ***αντιδράσεις στηρίξεως.***

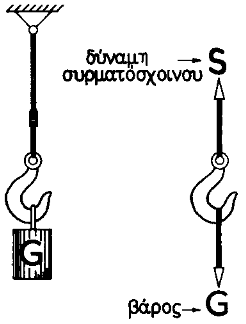
Ώστε οι εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες δρουν επάνω σε ένα στερεό σώμα, δεν εμφανίζονται ποτέ μόνες τους, αλλά πάντοτε μαζύ με τις αντιδράσεις στις θέσεις στηρίξεώς του.

Προκειμένου να λύσομε τα προβλήματα της Στατικής, αντικαθιστούμε τις στηρίξεις των σωμάτων με τις αντιδράσεις και εξετάζομε το σώμα σαν να ήταν ελεύθερο. Π.χ. στο άγκιστρο του σχήματος 1.6δ αντικαθιστούμε το συρματόσχοινο με μια δύναμη S κατά τον άξονά του με φορά προς τα επάνω και το φορτίο, που ανυψώνει με το βάρος του, δηλαδή τη δύναμη G.

Μόνο με τον τρόπο αυτό μπορούμε να εξετάσομε τις συνθηκες ισορροπίας του σώματος με τις μεθόδους, που θα μάθομε αργότερα.

'Ολες οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο σώμα, δηλαδή τα φορτία και οι αντιδράσεις στηρίξεως, πρέπει να ισορροπούν. Ανάλογα με το είδος της στηρίξεως μπορούν να αναπτυχθούν αντιδράσεις διαφόρου τύπου.

Τρία είναι τα είδη στηρίξεως των σωμάτων: Η πάκτωση, η σταθερή στήριξη ή άρθρωση και η κινητή στήριξη ή κύλιση. Θα τις εξετάσομε στην παράγραφο 7.3.



Σχ. 1.6δ.

1.7 Μέθοδοι στατικού υπολογισμού.

Είπαμε ότι η στατική ασχολείται με τη σύνθεση και την ανάλυση των δυνάμεων.

Για την επίλυση των προβλημάτων, τα οποία αναφέρονται σε θέματα συνθέσεως και αναλύσεως δυνάμεων, υπάρχουν δύο μέθοδοι: 1) Η γραφική και 2) η αναλυτική.

Μέχρι πριν από 40 χρόνια η προτίμηση στρεφόταν προς τις γραφικές μεθόδους (Γραφοστατική).

Σήμερα όμως προτιμούνται οι αναλυτικές μέθοδοι, οι οποίες και ακριβέστερες είναι, αλλά και ως επί το πλείστον ταχύτερες. Πάντως και για τις δύο μεθόδους απαιτούνται σχήματα και γραφικές παραστάσεις, γιατί έτσι παρακολουθείται εναργέστερα και ελέγχεται καλύτερα η πορεία των δυνάμεων και αποφεύγονται τα λάθη.

'Ενας σωστός στατικός υπολογισμός πρέπει:

α) Να είναι σαφής με καθαρό και σωστά ταξινομημένο περιεχόμενο.

β) Να περιέχει τα ίδια αριθμητικά στοιχεία (διαστάσεις κλπ), που αναγράφονται στα κατασκευαστικά σχέδια.

γ) Να παρακολουθεί την πραγματική πορεία των δυνάμεων.

Η αρχή αυτή επιβάλλει να υπολογίζεται πρώτα εκείνο το τμήμα του έργου, που θα κατασκευασθεί τελευταίο.

δ) Να μπορεί κανείς να τον ελέγξει εύκολα. Αυτό είναι απαραίτητο και για την αρμόδια Κρατική Υπηρεσία, η οποία θα κάνει τον έλεγχο, αλλά και για τον κατασκευαστή, ο οποίος πρέπει να τον παρακολουθεί με ευχέρεια.

Η ακρίβεια του λογαριθμικού κανόνα στις περισσότερες περιπτώσεις είναι υπεραρκετή, δηλαδή επαρκούν τα τρία πρώτα ψηφία ενός αποτελέσματος; π.χ. αντί 34581 μπορεί να τεθεί 34600. Υπερβολική ακρίβεια θα ήταν άσκοπη, γιατί οι φορτίσεις και τα ίδια βάρη, που λαμβάνονται στον υπολογισμό, είναι τιμές κατά προσέγγιση, που μπορούν να απέχουν από τις πραγματικές προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά 10%.

1.8 Τύποι συστημάτων δυνάμεων.

Πολλές δυνάμεις, όταν δρουν μαζύ, αποτελούν ένα σύστημα δυνάμεων. Οι δυνάμεις όμως αυτές είναι δυνατόν άλλοτε μεν να βρίσκονται όλες επάνω στο ίδιο επίπεδο και άλλοτε σε διαφορετικά επίπεδα.

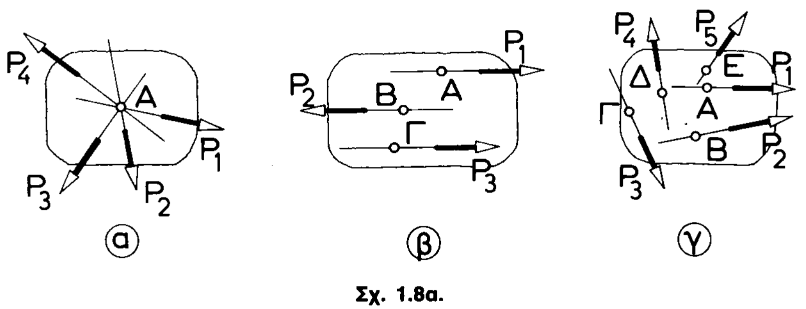
Όπως βλέπομε στο σχήμα 1.8α, οι δυνάμεις P_1,P_2,P_3 κλπ. βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο. Αυτού του είδους οι δυνάμεις, οι οποίες δρουν μαζύ ως σύστημα και των οποίων οι ευθειες ενέργειας βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. λέγονται ***συνεπίπεδες.*** Αντίθετα, όταν οι ευθείες ενέργειάς τους βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα, τότε λέγονται δυνάμεις ***στο χώρο.***

Όπως βλέπομε στο σχήμα 1.8α (α), οι ευθείες ενέργειας και των τεσσάρων δυνάμεων όχι μόνον είναι συνεπίπεδες, αλλά και διέρχονται από το ίδιο σημειο Α. Αυτού του είδους οι συνεπίπεδες δυνάμεις λέγονται ***συντρέχουσες.***

Στο σχήμα 1.8α (β) παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις P_1, P_2 και P_3 είναι συνεπίπεδες και οι ευθείες ενέργειάς τους είναι παράλληλες. Αυτού του είδους οι δυνάμεις λέγονται ***παράλληλες.***

Τέλος, όπως βλέπομε στο σχήμα 1.8α (γ), οι δυνάμεις ενέργειας είναι δυνατό να είναι συνεπίπεδες, αλλά να μην ειναι ούτε συντρέχουσες ούτε παράλληλες, αλλά να έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις. Αυτού του είδους οι συνεπίπεδες δυνάμεις λέγονται ***τυχούσες.***

Στο βιβλίο αυτό θα εξετάσομε μόνο συστήματα συνεπίπεδων δυνάμεων (όχι συστήματα στο χώρο).



Σχ. 1.8α.
α) Συντρέχουσες δυνάμεις. β) Παράλληλες δυνάμεις. γ) Τυχουσες δυνάμεις.

1.9 Ασκήσεις.

1) Δύο δυνάμεις $P_1 = 100$ kp και $P_2 = 60$ kp έχουν κοινό σημειο εφαρμογης Α κα τέμνονται κατ' ορθή γωνία (σχ. 1.9α). Να βρεθει: α) Η συνισταμένη τους R. β) Η γωνία α, την οποία σχηματίζει η R με τη δύναμη P_1.

Απάντηση: α) R = 116,7 kp. β) Γωνία α = 31°

2) Το έδρανο του σχήματος 1.9β φορτίζεται με τη δύναμη P = 2000 kp. Ποιες ειναι οι συνιστωσες της P κατά τους άξονες x και y;

Απάντηση: Px = 1000 kp. Py = 1732 kp.

3) Ένας εργάτης στρέφει το βαρούλκο του σχήματος 1.9γ με δύναμη P = 25 kp.

Ζητούνται α) Η ροπή, που ασκει ως προς τον άξονα Ο. β) Το βάρος Β σε kp, που μπορει να σηκώσει ο εργάτης με το βαρουλκο. γ) Πόση πρέπει να γίνει η χειρολαβή για να σηκώσει με την ίδια δύναμη βάρος Β = 100 kp. δ) Τι βάρος μπορει να σηκώσει με το βαρουλκο ο εργάτης, αν η χειρολαβή έχει μήκος ίσο με τη ακτίνα του βαρούλκου;

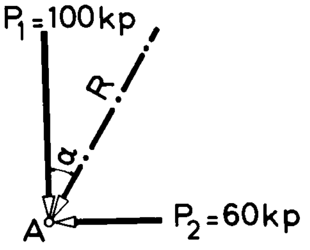
Λύση.

α) M = P.α = 25 kp.60 cm = 1500 kpcm = 15 kpm.

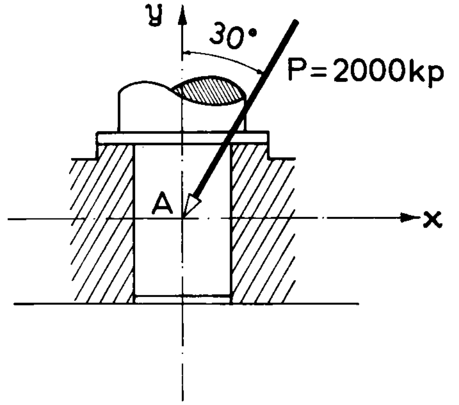
β) B.20 = P.α = 1500 kpcm B = 75 kp

γ) $P.\alpha_1$ = $25.\alpha_1$ = 100.20 α_1 = 80 cm

δ) 25 × 20 = B.20 B = 25 kp.



Σχ. 1.9α.

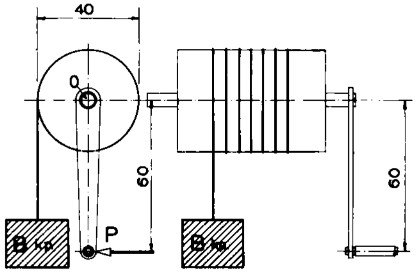


Σχ. 1.9β.

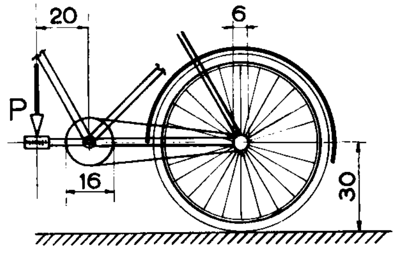
4) Για να χαλαρωθεί ο κοχλίας του τροχού ενός αυτοκινήτου, απαιτειται ροπή 4,5 kpm. Το μήκος του κλειδιου από το μέσο του κοχλία ως τη θέση που εφαρμόζεται το χέρι ειναι 30 cm. Ποια δύναμη πρέπει να ασκήσει το χέρι μας;

Απάντηση: 15 kp.

5) Στην οριζόντια θέση του πεδίλου (πεντάλ) ενός ποδηλάτου ασκειται δύναμη P = 20 kp (σχ. 1.9δ).



Σχ. 1.9γ.



Σχ. 1.9δ.

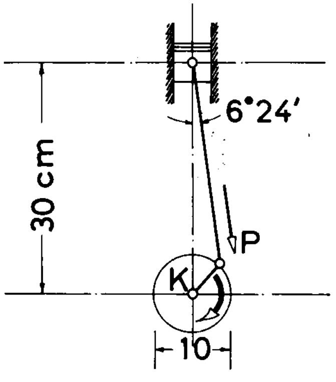
Ζητούνται α) Η ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του πεδίλου (πεντάλ). β) Η δύναμη που μεταβιβάζει η αλυσίδα. γ) Η ροπή ως προς τον άξονα του πίσω τροχού δ) Η δύναμη με την οποία σπρώχνει ο πίσω τροχός το έδαφος.

Απάντηση: α) 400 kpcm. β) 50 kp. γ) 150 kpcm. δ) 5 kp.

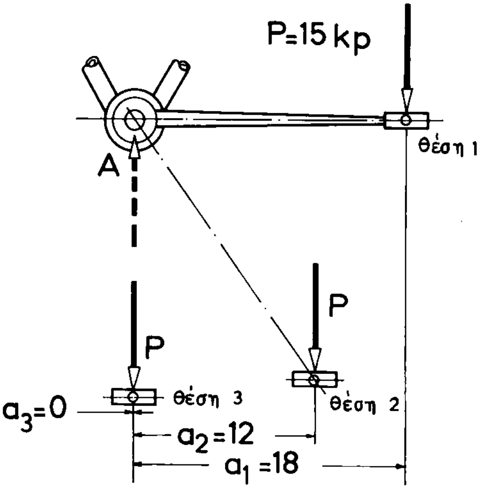
6) Ο διωστήρας μιας βενζινομηχανής διαβιβάζει, όταν βρίσκεται στη θέση του σχήματος 1.9ε, δύναμη P = 1000 kp.

Ζητούνται α) Ο μοχλοβραχίονας της δυνάμεως από τον άξονα του στροφαλοφόρου. β) Η ροπή που προκαλειται.

Απάντηση: α) 3,345 cm. β) 3345 kpcm.



Σχ. 1.9ε.



Σχ. 1.9ζ.

7) Να υπολογισθει η ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του πεδίλου ενός ποδηλάτου για τις τρεις θέσεις του σχήματος 1.9ζ. Πόση ειναι κάθε φορά η αντίδραση στο σημειο Α;

Απάντηση: α) M_1 = 270 kpcm. β) M_2 = 180 kpcm. γ) M_3 = 0 kpcm. δ) Και στις τρεις περιπτώσεις Α = 15 kp.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

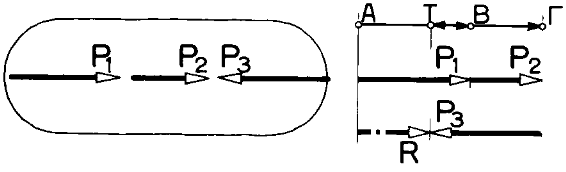
ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη γραφική μέθοδο.

2.1 Δυνάμεις σε μία ευθεία.

Σύνθεση.

Για να βρουμε τη συνισταμένη των δοσμένων δυνάμεων, τοποθετουμε τη μία δύναμη μετά την άλλη, θεωρώντας ως αρχή ένα οποιοδήποτε σημειο Α, έχοντας πάντοτε υπ' όψη μας το μέγεθος και ακολουθώντας τη φορά των δυνάμεων (σχ. 2. 1α).



Σχ. 2.1α.

Να μερικές παρατηρήσεις σχετικές με τη γραφική κατασκευή της συνθέσεως αυτης:

— Η ***αρχή κάθε δυνάμεως*** πρέπει να συμπίπτει με το τέλος της προηγούμενής της.

— Το ***μέγεθος της συνισταμένης*** ισουται με την απόσταση της αρχής Α της πρώτης δυνάμεως από το τέλος Τ της τελευταίας.

— Η ***φορά*** της συνισταμένης ορίζεται από την αρχή Α της πρώτης προς το τέλος Τ της τελευταίας.

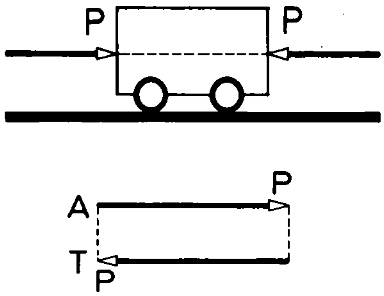
— ***Ευθεία ενέργειας*** της συνισταμένης ειναι η ευθεία ενέργειας των συνιστωσων.

Συνθήκη ισορροπίας επιτυγχάνεται, όταν η συνισταμένη $R = 0$, δηλαδή όταν το τέλος Τ της τελευταίας δυνάμεως συμπίπτει με την αρχή Α της πρώτης (σχ. 2. 1β).

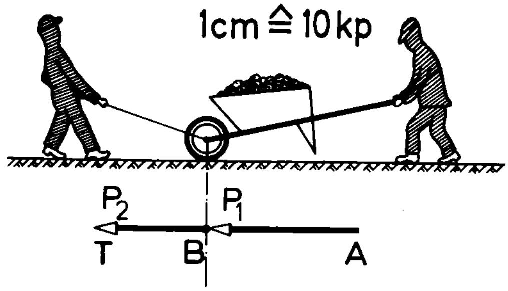
Παράδειγμα.

Μια χειράμαξα σπρώχνεται από ένα εργάτη με δύναμη $P_1 = 20$ kp και έλκεται από ένα άλλο με δύναμη $P_2 = 15$ kp (σχ. 2.1γ).

Ποια δύναμη ασκειται επάνω στη χειράμαξα;



Σχ. 2.1β.



Σχ. 2.1γ.

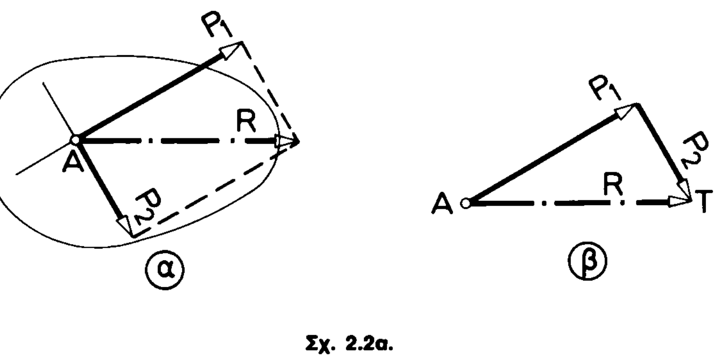
Λύση.

Οι δυό δυνάμεις ασκουνται στον άξονα του τροχου, είναι παράλληλες προς το δάπεδο και έχουν την ίδια φορά, δηλαδή τη διεύθυνση κινήσεως της χειράμαξας. Τοποθετούμε τη μία δύναμη μετά την άλλη υπό κλίμακα π.χ. 1 cm = 10 kp.Το μήκος AT ισούται με 3,5 cm, άρα το μέγεθος της συνισταμένης ειναι 35 kp. Η φορά της ειναι από το A προς το T και η ευθεία ενέργειάς της διέρχεται από τον άξονα του τροχου και είναι παράλληλη προς το δάπεδο.

2.2 Δύο συντρέχουσες δυνάμεις.

Σύνθεση.

Στην παράγραφο 1.3 μάθαμε ότι η συνισταμένη δύο δυνάμεων, που εφαρμόζονται στο ίδιο σημειο A, ισουται με τη διαγώνιο παραλληλογράμμου, που σχηματίζεται από τις δύο αυτές δυνάμεις. Η συνισταμένη αυτή των δυνάμεων διέρχεται από το σημειο A [σχ. 2.2α (α)].



Σχ. 2.2α.
α) Γενική διάταξη. β) Δυναμοπολύγωνο.

Συνηθέστερα βρίσκεται η συνισταμένη με το δυναμοπολύγωνο. Κατά τη σχεδίαση του δυναμοπολυγώνου πρέπει να δίνομε μεγάλη προσοχή στην τοποθέτηση των συνιστωσων δυνάμεων. Πρέπει δηλαδή να προσέχομε, ώστε το τέλος της μιας συνιστώσας (βέλος) να συμπίπτει με την αρχή της άλλης.

Η συνισταμένη R ειναι η γραμμή που συνδέει την αρχή Α της πρώτης δυνάμεως ιε το τέλος Τ της τελευταίας και διευθύνεται από το Α προς το Τ [σχ. 2.2α (β)]. Η φορά της ειναι επομένως αντίθετη από τη φορά των συνιστωσων.

Για να σχεδιάσομε τη γραφική σύνθεση δύο συντρεχουσων δυνάμεων, χρειαζόμαστε γενικά δύο σχήματα:

Πρωτο, τη γενική διάταξη στην οποία με ορισμένη κλίμακα μηκων, π.χ. 1 cm = 100 cm, εμφανίζονται οι διαστάσεις του σώματος, οι ευθειες ενέργειας και οι φορές των δυνάμεων.

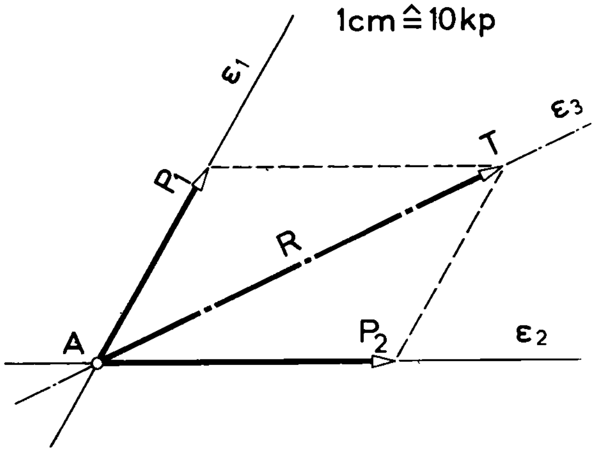
Δεύτερο,το δυναμοπολύγωνο, στο οποιο με ορισμένη κλίμακα δυνάμεων, π.χ. 1 cm = 200 kp, εμφανίζονται οι δυνάμεις κατά μέγεθος και φορά.

Από τα τρία στοιχεια της συνισταμένης τα δύο, δηλαδή το ***μέγεθος*** και η ***φορά,*** δίνονται από το δυναμοπολύγωνο, ενω το τρίτο, η ***ευθεία ενέργειας*** (δηλαδή η θέση της), από τη γενική διάταξη, επειδή η συνισταμένη πρέπει να διέρχεται από το σημειο Α των συνιστωσων.

Παράδειγμα.

Δίνονται οι δυνάμεις P_1 = 30 kp επάνω στην ευθεία ενέργειάς ε_1 και P_2 = 40 kp επάνω στην ευθεία ενέργειας ε_2 (σχ. 2.2β).

Ζητειται η συνισταμένη κατά μέγεθος, ευθεία ενέργειας και φορά.



Σχ. 2.2β.

Λύση.

Βρίσκομε με τη γραφική μέθοδο και σύμφωνα με όσα είπαμε στα προηγούμενα τη συνισταμένη R. Μετρουμε το μέγεθός της με τη δοσμένη κλίμακα των δυνάμεων και βρίσκομε 6 cm, δηλαδή 60 kp. Ευθεία ενέργειας ειναι η ε_3 και έχει φορά από Α προς Τ.

Ανάλυση.

Η ανάλυση αποτελει την αντίστροφη διαδικασία από τη σύνθεση (παρ. 1.3). Ανάλυση κάνομε γιατί συχνά υπολογίζομε τα αποτελέσματα μιας δυνάμεως ευκολότερα, όταν την αναλύσομε σε δύο δυνάμεις.

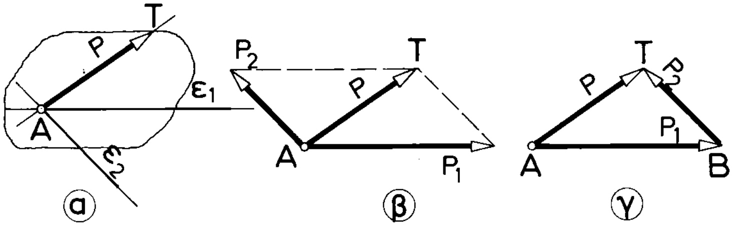
'Εστω ότι δίνεται μια δύναμη P και δύο ευθείες ενέργειας ε_1 και ε_2 [σχ. 2.2γ (α)].

Ζητουνται οι συνιστώσες της P κατά τις ε_1 και ε_2.

Για να ειναι δυνατή η ανάλυση, πρέπει οπωσδήποτε να υφίστανται οι εξης προϋποθέσεις:

1) Οι ευθείες ενέργειας των συνιστωσων να τέμνονται επάνω στην ευθεία ενέργειας της δοσμένης δυνάμεως (συνισταμένης).

2) Οι ευθείες ενέργειας της δυνάμεως P και των συνιστωσών της να κείνται επάνω στο ίδιο επίπεδο.



Σχ. 2.2γ.
α) Πρόβλημα. β) Λύση με παραλληλόγραμμο. γ) Λύση με δυναμοπολύγωνο.

Για να βρούμε τις συνιστώσες, φέρομε από τα άκρα της δυνάμεως παράλληλες προς ε_1 και ε_2. Με τον τρόπο αυτό έχομε το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων και από αυτό το ***μέγεθος*** και τη ***φορά*** των συνιστωσών. Η δύναμη P, που αναλύεται, πρέπει να είναι πάντοτε η διαγώνιος του παραλληλογράμμου [σχ. 2.2γ(β)].

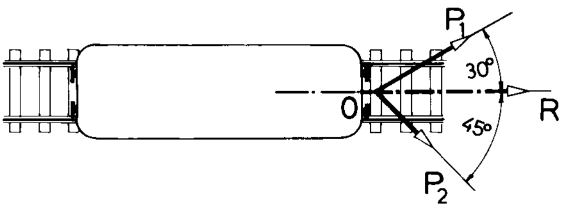
Συνηθέστερα από το άκρο A της δυνάμεως P φέρομε μια παράλληλη προς τη μία ευθεία ενέργειας ε_1 και από το τέλος T μια παράλληλη προς την άλλη ευθεία ενέργειας ε_2.

Σχηματίζεται το τρίγωνο δυνάμεων (δυναμοπολύγωνο) ABT [σχ. 2.2γ(γ)]. Οι συνιστώσες είναι η AB και η BT.

'Οταν το δυναμοπολύγωνο δείχνει ανάλυση ή σύνθεση, η φορά των βελών των συνιστωσών είναι αντίθετη από τη φορά της συνισταμένης.

Παράδειγμα.

Για να μετακινηθεί ένα σιδηροδρομικό όχημα απαιτείται δύναμη R = 200 kp, την οποία μπορούμε να ασκήσομε με δύο συρματόσχοινα P_1 και P_2 (σχ. 2.2δ).

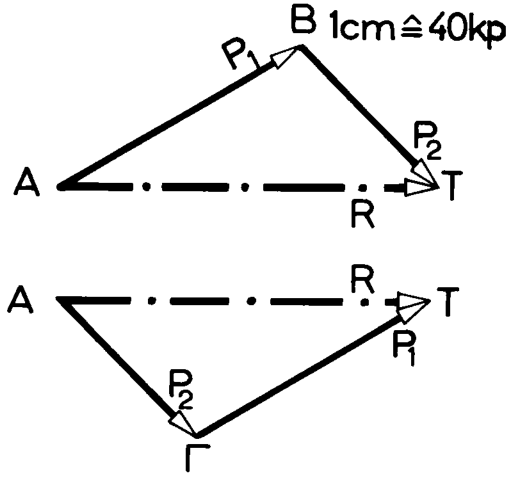


Σχ. 2.2δ.

Ποιες πρέπει να είναι οι δυνάμεις P_1 και P_2;

Λύση.

Το πρόβλημα επιβάλλει να αναλύσομε τη συνισταμένη R = 200 kp κατά τις ευθειες ενέργειας της P_1 και P_2. Για να το επιτύχομε αυτό σχεδιάζομε υπό κλίμακα, π.χ. 1 cm = 40 kp, σε χωριστό σχέδιο (σχ. 2.2ε) την R παράλληλη προς τη δοσμένη ευθεία ενέργειάς της. Από το ένα άκρο Α φέρομε παράλληλη προς τη P_1 και από το άλλο άκρο Τ προς την P_2, οπότε λαμβάνομε το δυναμοπολύγωνο ΑΒΤ ή αν αρχίσομε με την P_2 το δυναμοπολύγωνο ΑΓΤ.



Σχ. 2.2ε.

Η σειρά, κατά την οποία λαμβάνομε τις δυνάμεις, δεν έχει καμιά σημασία για το αποτέλεσμα.

Η φορά των συνιστωσών P_1 και P_2 πρέπει να είναι αντίθετη προς τη φορά της συνισταμένης R.

Αν μετρήσομε στο δυναμοπολύγωνο το μήκος της P_1, βρίσκομε ότι είναι 3,7 cm, άρα το μέγεθός της είναι $P_1 = 3{,}7 \times 40 = 148$ kp.

Αντίστοιχα το μήκος της P_2 ειναι 2,6 cm, άρα το μέγεθός της είναι $P_2 = 2{,}6 \times 40 = 104$ kp.

2.3 Πολλές συντρέχουσες δυνάμεις.

Σύνθεση.

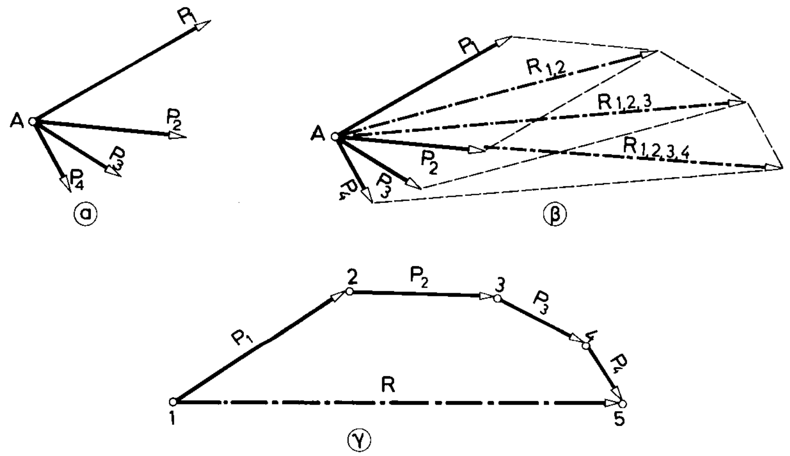
Όταν σε ένα σωμα δρουν περισσότερες από δύο δυνάμεις, π.χ. οι P_1, P_2, P_3, P_4 [σχ. 2.3α (α)], με κοινό σημείο εφαρμογής Α, η συνισταμένη τους R θα διέρχεται απαραίτητα από το σημείο Α. Το μέγεθος και τη φορά της τα βρίσκομε με δύο πάλι τρόπους:

α) Αν κατασκευάσομε διαδοχικά το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων και β) με το δυναμοπολύγωνο.

Στην πρώτη περίπτωση, συνθέτομε πρώτα τις δυνάμεις P_1 και P_2 προς τη συνισταμένη $P_{1,2}$ [σχ. 2.3α (β)], ύστερα, τη συνισταμένη αυτή με την P_3 προς την $R_{1,2,3}$ και τελικά αυτή με την P_4 προς την $P_{1,2,3,4}$.

Στη δεύτερη περίπτωση εκλέγομε ένα τυχόν σημειο 1 και σχεδιάζομε τις δυνάμεις με το δοσμένο μέγεθός τους. Τις σχεδιάζομε δε παράλληλα προς την ευθεία ενέργειάς τους με φορά που να συμπίπτει με τη δοσμένη [σχ. 2.3α (γ)].

Η αρχή κάθε μιας από τις δυνάμεις συμπίπτει με το τέλος της προηγούμενής της. Δεν έχει δε σημασία το ποια ειναι η σειρά με την οποία σχεδιάζομε τις δυνάμεις.



Σχ. 2.3α.

Τη συνισταμένη αποτελει η ευθεία, που κλείνει το δυναμοπολύγωνο, δηλαδή η ευθεία που συνδέει την αρχή 1 της πρώτης δυνάμεως με το τέλος 5 της τελευταίας.

Το μέγεθος της συνισταμένης ισουται με το μήκος της 1 5, το οποίο βέβαια μετρειται με την κλίμακα των δυνάμεων.

Η ευθεία ενέργειας της συνισταμένης είναι παράλληλη με την ευθεία 1 5 και διέρχεται από το σημείο Α.

Η φορά της συνισταμένης ορίζεται από τη φορά των δυνάμεων στο δυναμοπολύγωνο και, όπως είδαμε, αυτή είναι αντίθετη από τη φορά των συνιστωσων.

Παράδειγμα 1.

Επάνω στην σταθερή στήριξη (άρθρωση) [σχ. 2.3β (α)] μιας γέφυρας δρουν οι ακόλουθες δυνάμεις, που βλέπομε στο σχημα:

$$P_1 = 1000 \text{ kp}. \; P_2 = 400 \text{ kp}. \; P_3 = 600 \text{ kp και } P_4 = 800 \text{ kp}.$$

Ζητειται η συνισταμένη.

Λύση.

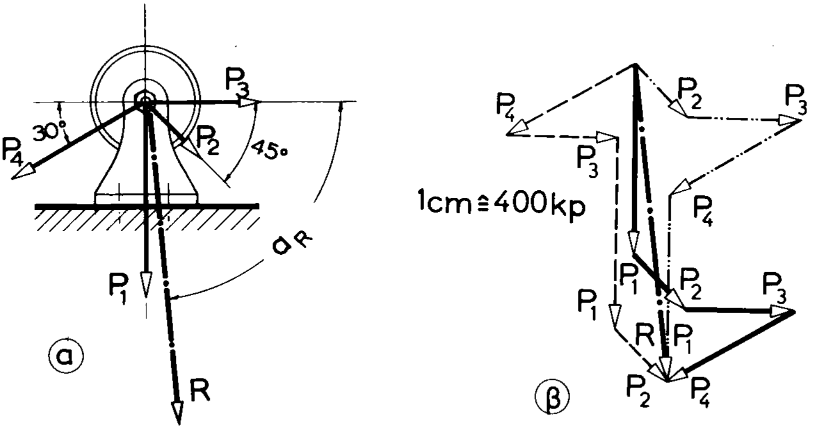
Θα κατασκευάσομε το δυναμοπολύγωνο των δυνάμεων. Όπως αποδεικνύεται και από το σχήμα 2.3β (β), η σειρά σχεδιάσεως των δυνάμεων στο δυναμοπολύγωνο δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Από το δυναμοπολύγωνο προκύπτει ότι το μηκος της συνισταμένης είναι 4,25 cm, άρα το μέγεθός της:

$$R = 4{,}25 \times 400 = 1700 \text{ kp}.$$

Η γωνία a_R ισούται, αν τη μετρήσομε, με 83° 30 .

Ανάλυση.

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 1.3, ανάλυση μιας δυνάμεως σε περισσότερες από δύο συνιστώσες, που έχουν το ίδιο σημειο εφαρμογής Α, είναι πρόβλημα αόριστο.

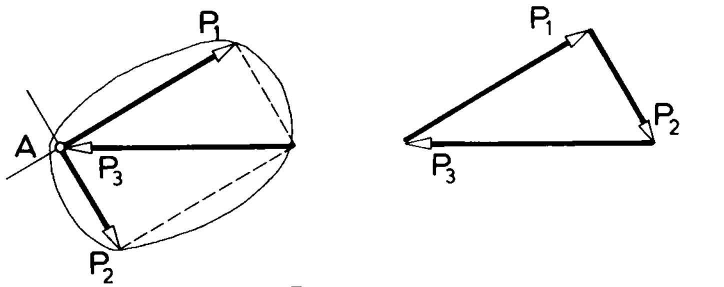


Σχ. 2.3β.

Ισορροπία.

Αν σε ένα σώμα δρουν δύο δυνάμεις P_1 και P_2, η επίδρασή τους μπορεί να εξισορροπηθεί από μία δύναμη P_3, ίση και αντίθετη προς τη συνισταμένη τους.

Οι τρεις δυνάμεις ισορροπούν (σχ. 2.3γ).



Σχ. 2.3γ.

Στο δυναμοπολύγωνο των τριών δυνάμεων το τέλος της τελευταίας δυνάμεως συμπίπτει με την αρχή της πρώτης, γιατί η P_3 είναι ίση και αντίθετη προς τη συνισταμένη των P_1 και P_2. Το δυναμοπολύγωνο αυτό καλείται ***κλειστό.*** Για τον ίδιο λόγο η φορά όλων των δυνάμεων του δυναμοπολυγώνου είναι η ίδια, δηλαδή όλες οι δυνάμεις έχουν ίδια κατεύθυνση ή ακολουθούν ***οδό μονης κατευθύνσεως.***

Ώστε μπορει να διατυπωθεί ο εξής κανόνας:

Τρεις δυνάμεις, που διέρχονται από το ίδιο σημείο, βρίσκονται σε ισορροπία, όταν το δυναμοπολύγωνό τους είναι κλειστό.

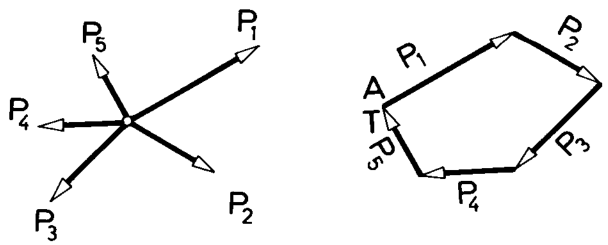
Όλες οι δυνάμεις στο δυναμοπολύγωνο έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Ο κανόνας αυτός βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στη λύση προβλημάτων της στατικής.

Τα ίδια ισχύουν και όταν σε ένα σώμα δρα οποιοδήποτε πλήθος δυνάμεων. Οι δυνάμεις αυτές, όπως είπαμε, θα ισορροπούν, όταν η συνισταμένη τους είναι μηδέν.

Αυτό σημαίνει ότι στο δυναμοπολύγωνο (σχ. 2.3δ) η αρχή της πρώτης δυνάμεως Α και το τέλος της τελευταίας Τ συμπίπτουν, άρα το δυναμοπολύγωνο είναι κλειστό. Στο δυναμοπολύγωνο αυτό όλες οι δυνάμεις είναι μονής κατευθύνσεως. Συνεπώς μπορούμε να γενικεύσομε τον κανόνα, που διατυπώσαμε παραπάνω και που αναφέρεται στην ισορροπία των τριών δυνάμεων, και να πούμε ότι:

Οι δυνάμεις, που διέρχονται από το ίδιο σημείο, βρίσκονται σε ισορροπία, όταν το δυναμοπολύγωνό τους είναι κλειστό.



Σχ. 2.3δ.

Παράδειγμα 2.

Στην πρύμνη ενός πορθμείου υπάρχει ένα περιστρεφόμενο δάπεδο για την είσοδο των αυτοκινήτων. Το δάπεδο αυτό, όταν ταξιδεύει το πορθμείο, τηρείται στη θέση που δείχνει το σχήμα 2.3ε. Το βάρος του ανέρχεται σε 500 kp.

Ζητούνται οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στην άρθρωση Α και στο συρματόσχοινο ΒΓ.

Λύση.

Οι δυνάμεις που δρουν στο δάπεδο όταν βρίσκεται σε ισορροπία είναι τρεις:

1) Το ***ίδιο βάρος του δαπέδου G.*** Της δυνάμεως αυτής γνωρίζομε όλα τα χαρακτηριστικά στοιχεία.

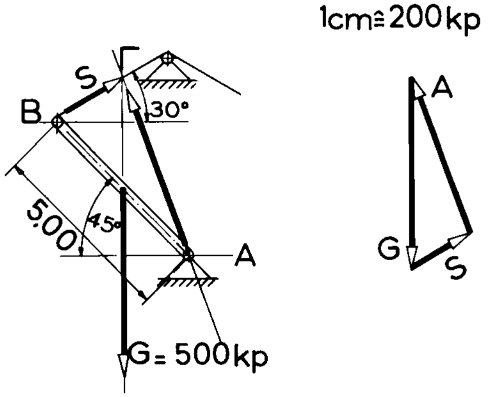
2) Η ***δύναμη του συρματόσχοινου S.*** Από αυτή τη δύναμη γνωρίζομε την ευθεία ενέργειάς της, η οποία συμπίπτει με τον άξονα του συρματοσχοίνου.

3) Η ***αντίδραση της αρθρώσεως Α,*** της οποίας γνωρίζομε μόνο το σημείο εφαρμογης.

Γνωρίζομε όμως ότι:

Για να ισορροπούν τρεις δυνάμεις, πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο και το δυναμοπολύγωνό τους να είναι κλειστό.

Προεκτείνομε την ευθεία ενέργειας της δυνάμεως G μέχρι που να συναντήσει την ευθεία του συρματοσχοίνου στο σημείο Γ. Για να ισορροπουν οι τρεις δυνάμεις πρέπει η ευθεία ενέργειας της Α να διέρχεται από το Γ, άρα μας είναι πια και αυτή γνωστή. Το κλειστό δυναμοπολύγωνο, που μπορούμε να κατασκευάσομε (σχ. 2.3ε), όταν γνωρίζομε μία δύναμη και τις ευθείες ενέργειας δύο άλλων, μας παρέχει τις δυνάμεις Α και S που ζητούμε. Από τη μέτρηση προκύπτει ότι το μήκος της Α



Σχ. 2.3ε.

ισούται με 2,19 cm. Άρα το μέγεθός της ισούται με 2,19 × 200 = 438 kp. Αντίστοιχα το μήκος της S ισούται με 0,90 cm και το μέγεθός της, 0,90 × 200 = 180 kp.

Η ανάλυση της Α σε μία κατακόρυφη και μία οριζόντια συνιστώσα δίνει:

$$A_v = 408 \text{ kp καί } A_H = 158 \text{ kp.}$$

2.4 Ασκήσεις.

1) Δίνεται μια τροχαλία αναρτημένη με ένα συρματόσχοινο από το σημειο Β. Την τροχαλία περιβάλλει μία αλυσίδα, η οποία έχει στο ένα της άκρο φορτίο 500 kp, ενώ το άλλο έλκεται υπό γωνία 60° ως προς την κατακόρυφη (σχ. 2.4α).

Ζητείται α) Με ποιά γωνία α ως προς την κατακόρυφη θα σταθεί το συρματόσχοινο και β) ποιά δύναμη θα αναλάβει;

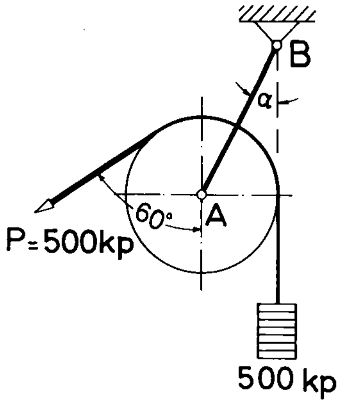
Απάντηση: α) 30°. β) 866 kp

2) Στην κορυφή ενός τερματικού ιστου (κολώνας) γραμμης υψηλης τάσεως ενεργεί από τα καλώδια μια οριζόντια δύναμη P_1 = 2000 kp και από τον επίτονο μια δύναμη P_2 = 2991 kp υπό γωνία α = 48° (σχ. 2.4β)

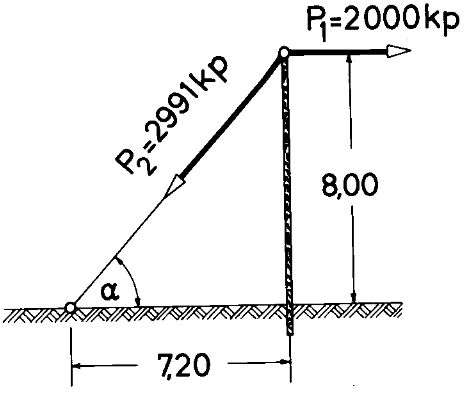
Ζητείται α) Η συνισταμένη R και β) η γωνία β, που σχηματίζει με τη P_1.

Απάντηση: α) R = 2222 kp. β) = 90°

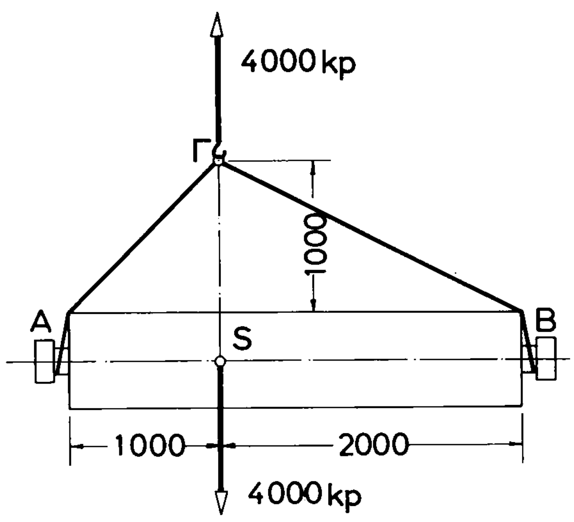
3) Ένα κιβώτιο περιέχει ένα τόρνο που έχει βάρος 4000 kp. Κατά την εκφόρτωσή του αναρταται με ένα συρματόσχοινο από το άγκιστρο γερανου (σχ. 2.4γ).



Σχ. 2.4α.



Σχ. 2.4β.



Σχ. 2.4γ.

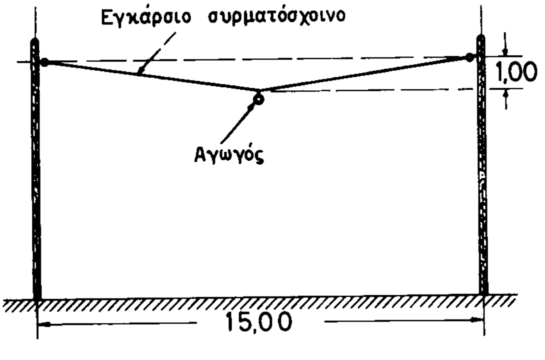
Ζητουνται οι δυνάμεις, που αναπτύσσονται στα δύο τμήματα του συρματοσχοίνου.

Απάντηση: ΑΓ = 3790 kp και ΒΓ = = 2980 kp

4) Ο ηλεκτροφόρος αγωγός των τρόλλεϋ αναρταται κάθε 50 m από εγκάρσια συρματόσχοινα, στα οποια, για απόσταση των ιστων 15 m, δίνεται βέλος 1,0 m. Το βάρος του αγωγου ανέρχεται σε 0,60 kp ανά τρέχον μέτρο. Παραλείπεται το ίδιο βάρος του εγκάρσιου συρματοσχοίνου (σχ. 2.4δ).

Ζητουνται α) Η κατακόρυφη φόρτιση στο σημειο αναρτήσεως. β) Οι δυνάμεις που αναλαμβάνει το συρματόσχοινο.

Απάντηση: α) 30 kp. β) 113,5 kp

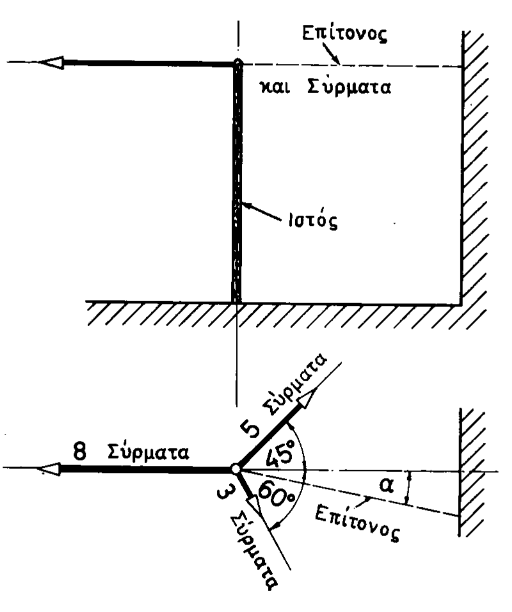


Σχ. 2.4δ.

5) Από τα 8 τηλεφωνικά σύρματα ενός ξύλινου ιστού, τα 5 διακλαδίζονται υπό γωνία 45° προς μία διεύθυνση και τα 3 υπό γωνία 60° προς άλλη (σχ. 2.4ε). Κάθε σύρμα έχει ένταση 45 kp.

Ζητούνται: α) Η οριζόντια συνισταμένη των δυνάμεων, που δρουν στην κορυφή του στύλου και β) η γωνία α, με την οποία πρέπει να αγκυρωθεί ο οριζόντιος επίτονος (δηλαδή το συρματόσχοινο με το οποίο συγκρατείται ο ιστός) σε γειτονική οικία, έτσι ώστε να μη καταπονείται ο ιστός.

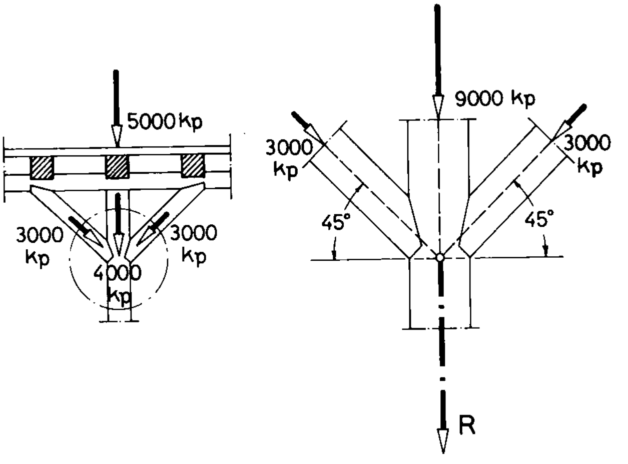
Απάντηση: α) R = 140 kp. β) α = 17° 30′



Σχ. 2.4ε.

6) Στο στύλο ξύλινης γέφυρας δρουν οι δυνάμεις του σχήματος 2.4ζ. Ζητείται η συνισταμένη.

Απάντηση: R = 13240 kp

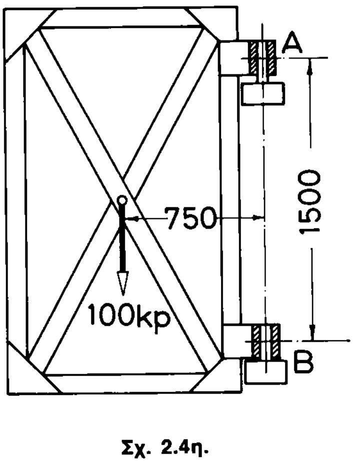


Σχ. 2.4ζ.

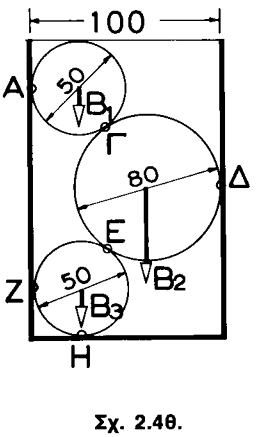
7) Μια θύρα, που έχει βάρος 100 kp, στηρίζεται με στροφεις στις θέσεις Α και Β (σχ. 2.4η). Ο στροφέας Β υποβαστάζει όλο το κατακόρυφο φορτίο, ενω ο στροφέας Α, επειδή έχει περιθώριο από το κάτω μέρος της στηρίξεως, αναλαμβάνει μόνο οριζόντιο φορτίο.

Ζητουνται α) Η ευθεία ενέργειας της αντιδράσεως Α και το μέγεθός της. β) Η αντίδραση Β. γ) Η οριζόντια συνιστώσα B_H και η κατακόρυφη συνιστώσα B_v της αντιδράσεως Β.

Απάντηση: α) Οριζόντια Α = 50 kp.
β) Β = 112 kp. γ) B_H = 50 kp, B_v = 100 kp.



Σχ. 2.4η.



Σχ. 2.4θ.

8) Μέσα σε ένα μακρόστενο κιβώτιο βρίσκονται τρία κυλινδρικά σώματα (σχ. 2.4θ). Το βάρος τους είναι αντίστοιχα $B_1 = 10$ kp, $B_2 = 25$ kp και $B_3 = 10$ kp.

Ζητούνται οι δυνάμεις, με τις οποίες α) τα σώματα πιέζονται μεταξύ τους στις θέσεις Γ και Ε β) πιέζουν τις πλευρές του κιβωτίου στις θέσεις Α, Δ και Ζ και γ) πιέζουν τον πυθμένα του κιβωτίου στην θέση Η.

Απάντηση: α) Γ = 11,9 kp. Ε = 41,6 kp. β) Α = 6,4 kp. Δ = 28,9 kp. Ζ = 22,5 kp. γ) Η = 45 kp

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

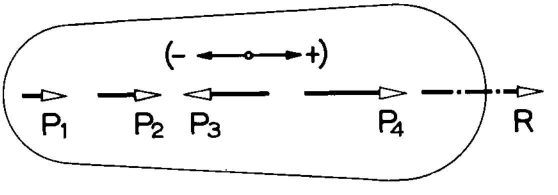
ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη μέθοδο των προβολών (αναλυτική).

3.1 Δυνάμεις επάνω σε μιά ευθεία.

Σύνθεση.

Για να γίνει η σύνθεση δυνάμεων, που βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία, πρέπει να γνωρίζομε τη φορά τους. Αυτό ειναι απαραίτητο γιατί μπορει δύο δυνάμεις να ενεργούν στην ίδια ευθεία, όπως βλέπομε στο σχήμα 3.1α, αλλά η μία να ειναι αντίθετη προς την άλλη. Οι δυνάμεις, που ενεργούν κατά την ίδια φορά, χαρακτηρίζονται ως ***θετικές*** (π.χ. + 10 kp), ενώ οι άλλες, που ενεργουν κατά την αντίθετη φορά, ως ***αρνητικές*** (π.χ. — 20 kp).



Σχ. 3.1α.

Τη συνισταμένη αυτών των δυνάμεων λαμβάνομε, όταν αθροίσομε κατά τον αλγεβρικό τρόπο (με τα πρόσημα + και —) όλες τις δυνάμεις, δηλαδή $R = \Sigma P$. Στο αλγεβρικό άθροισμα, όπως είναι γνωστό, για να προσθέσομε μεγέθη, πρέπει να λάβομε υπόψη μας αν τα πρόσημα είναι θετικά ή αρνητικά.

Αν το αποτέλεσμα της αθροίσεως αυτής είναι θετικό (+), η διεύθυνση της συνισταμένης συμπίπτει με τη θετική διεύθυνση των δυνάμεων, αν το αποτέλεσμα ειναι αρνητικό (—), τότε η διεύθυνση της συνισταμένης συμπίπτει με την αντίθετη διεύθυνση.

Συνθήκη ισορροπίας.

Για να ισορροπήσουν οι δυνάμεις, που βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία, θα πρέπει η συνισταμένη τους να είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων να είναι μηδέν ($\Sigma P = 0$) (σχ. 2.1β). Τότε μόνον οι δυνάμεις ισορροπούν.

3.2 Δύο συντρέχουσες δυνάμεις.

Σύνθεση.

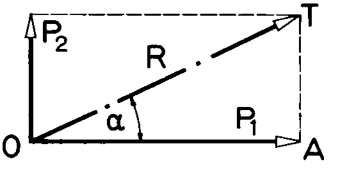
Ας λάβομε ως παράδειγμα δύο δυνάμεις P_1 και P_2 που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90° (σχ. 3.2α). Η σύνθεσή τους είναι απλούστατη, γιατί, όπως είπαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, για να τις συνθέσομε, βρίσκομε την συνισταμένη τους, η οποία ισούται με τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου, που σχηματίζεται από τις δύο αυτές δυνάμεις. Επειδή το τρίγωνο ΟΑΤ είναι ορθογώνιο έχομε κατά το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$R = \sqrt{P^2_1 + P^2_2}$$

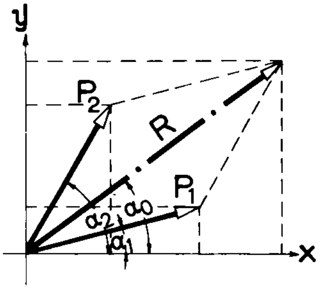
$$\text{και συνα} = \frac{P_1}{R}, \quad \text{ημα} = \frac{P_2}{R}$$

Η ανάλυση επίσης της δυνάμεως R σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους ειναι απλούστατη, γιατί:

$$P_1 = R \text{ συνα και } P_2 = R \text{ ημα}$$



Σχ. 3.2α.



Σχ. 3.2β.

Ας δούμε όμως την περίπτωση κατά την οποία οι δύο δυνάμεις P_1 και P_2 δεν σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία (σχ. 3.2β), αλλά σχηματίζουν είτε οξεία είτε αμβλεία γωνία. Τότε για τη σύνθεση εργαζόμαστε ως εξής:

α) Αναλύομε κάθε μία από τις δυνάμεις P_1 και P_2 σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες κατά τους άξονες x και y ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. (Οι συνιστώσες μιας δυνάμεως κατά τους άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων καλουνται και προβολές της δυνάμεως).

$$P_{1x} = P_1 \text{ συν}\alpha_1, \quad P_{1y} = P_1 \text{ ημ}\alpha_1$$
$$P_{2x} = P_2 \text{ συν}\alpha_2, \quad P_{2y} = P_2 \text{ ημ}\alpha_2.$$

β) Οι συνιστώσες με την ίδια ευθεία ενέργειας συνθέτονται αλγεβρικά, δηλαδή οι συνιστωσες κατά τον άξονα x στη συνισταμένη R_x και οι συνιστωσες κατά τον άξονα y στη συνισταμένη R_y. Η R_x και η R_y ειναι κάθετες μεταξύ τους.

$\Sigma x = R_x = P_{1x} + P_{2x} = P_1 \text{ συν}\alpha_1 + P_2 \text{ συν}\alpha_2$ και

$\Sigma y = R_y = P_{1y} + P_{2y} = P_1 \text{ ημ}\alpha_1 + P_2 \text{ ημ}\alpha_2.$

γ) Οι συνισταμένες R_x και R_y αποτελούν τις συνιστώσες της τελικής συνισταμένης R, προς την οποία συνθέτονται, όπως είδαμε προηγουμένως.

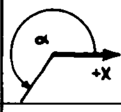
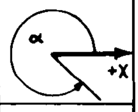
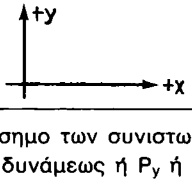
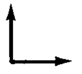
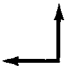
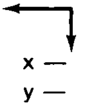
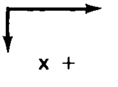
Άρα η τελική συνισταμένη $R = \sqrt{R^2_x + R^2_y}$ καί $συνα_0 = \dfrac{R_x}{R}$ και $ημα_0 = \dfrac{R_y}{R}$

Έτσι προκύπτει ότι οι προβολές της συνισταμένης είναι ίσες με τα αθροίσματα των προβολών των συνιστωσών.

Οι τύποι που βρέθηκαν ισχύουν ανεξάρτητα από το αν οι γωνίες $α_1$ και $α_2$ είναι οξειες ή αμβλείες. Αρκεί, στην περίπτωση που οι γωνίες είναι μεγαλύτερες από 90° να δοθει προσοχή στο πρόσημο του ημιτόνου και του συνημιτόνου σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2.1.

Κανόνες για τα πρόσημα της συνθέσεως συνεπίπεδων συντρεχουσών δυνάμεων.

Γωνία α (μεταξύ θετικού ημιάξονα x και δυνάμεως)	0 — 90°  	90° — 180°  	180° — 270°  	270° — 360° 
Γωνία υπολογισμού των τριγωνομετρικών μεγεθων	α	180° — α	α — 180°	360° — α
Τεταρτοκύκλιο μοναδιαίου κύκλου	I	II	III	IV
Πρόσημο των τριγωνομετρικών μεγεθών ημα συνα εφα	+ + +	+ — —	— — +	— + —
Διευθύνσεις των συνιστωσών της δυνάμεως  	 x + y +	 x — y +	 x — y —	 x + y —
Πρόσημο των συνιστωσών της δυνάμεως ή P_y ή R_y της συνισταμένης P_x ή R_x	+ +	+ —	— —	— +
Θέση της συνισταμένης (τεταρτοκύκλιο) $εφα_0 = \dfrac{R_y}{R_x}$	$\dfrac{+}{+} = +$ (I)	$\dfrac{+}{-} = -$ (II)	$\dfrac{-}{-} = +$ (III)	$\dfrac{-}{+} = -$ (IV)

Παράδειγμα συνθέσεως δύο συντρεχουσών δυνάμεων.

Να υπολογισθεί το μέγεθος και η διεύθυνση της συνισταμένης των δύο δυνάμεων του σχήματος 3.2γ[α].

Λύσεις.

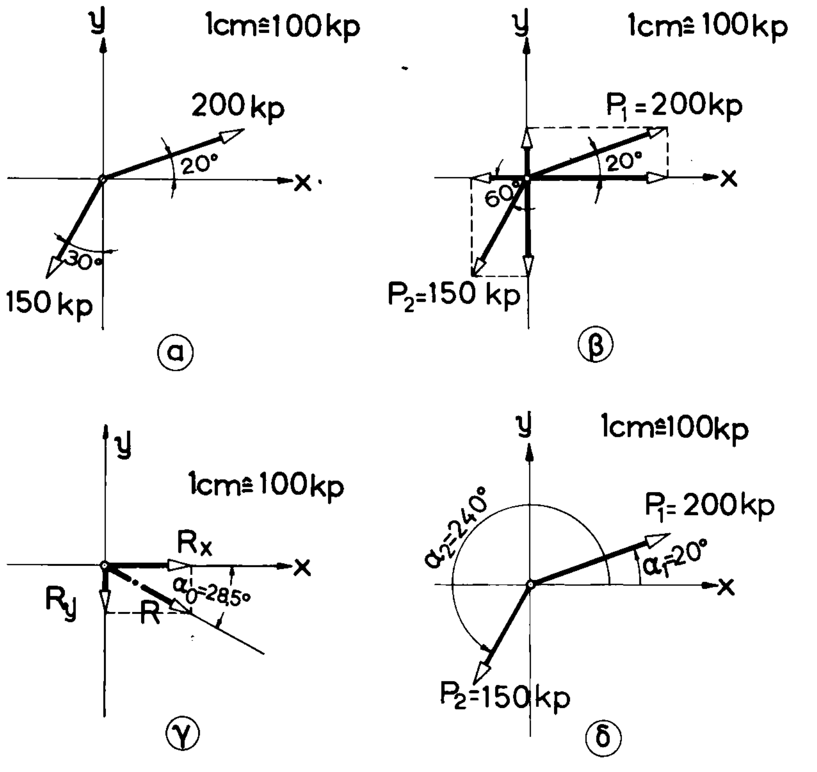
α) Με βάση το σχήμα με οξείες μόνο γωνίες [σχ. 3.2γ (β)].

Διαπιστώνεται από το σχήμα ότι η P_{2x} έχει αντίθετη διεύθυνση από την P_{1x}, άρα:
$\Sigma x = Rx = 200$. συν 20° — 150 . συν 60° $= 200 \times 0{,}940 - 150 \times 0{,}500 = 113$ kp ή $R_x = 113$ kp με διεύθυνση προς τα δεξιά.
$\Sigma_y = R_y = 200$. ημ 20° — 150 . ημ 60° $= 200 \times 0{,}342 - 150 \times 0{,}866 = -61{,}5$ kp ή $R_y = 61{,}5$ kp με διεύθυνση προς τα κάτω.

Από αυτά προκύπτει $R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} = \sqrt{113^2 + 61{,}5^2} = 128{,}6$ kp και συνα_0 =

$$\frac{R_x}{R} = \frac{113}{128{,}6} = 0{,}878 \text{ και } \alpha_0 = 28{,}5°.$$

Η R έχει διεύθυνση προς τα δεξιά και κάτω και σχηματίζει με τον άξονα x γωνία 28,5° [σχ. 3.2γ (γ)].



Σχ. 3.2γ.

β) Με οξείες και αμβλείες γωνίες [σχ. 3.2γ(δ)].

Όλες οι γωνίες μετρούνται από το θετικό ημιάξονα x.

Σύμφωνα με τις δοσμένες σχέσεις έχομε:

$\Sigma x = R_x = P_1$ συν$\alpha_1 + P_2$ συν$\alpha_2 = 200$. συν $20° + 150$. συν $240° = 200 \times 0{,}940 + 150 \times (-0{,}500) = +113$ kp.

$\Sigma y = R_y = P_1$ ημ$\alpha_1 + P_2$ ημ$\alpha_2 = 200$. ημ $20° + 150$. ημ $240° = 200 \times 0{,}342 + 150 \times (-0{,}866) = -61{,}5$ kp.

οπότε $R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} = \sqrt{113^2 + 61{,}5^2} = 128{,}6$ kp.

$$\text{ημ}\alpha_0 = \frac{R_y}{R} = -\frac{61{,}5}{128{,}6} = -0{,}477 \text{ άρα } \alpha_0 = 208{,}5° \text{ ή } 331{,}5°$$

$$\text{συν}\alpha_0 = \frac{R_x}{R} = \frac{113}{128{,}6} = 0{,}878 \text{ άρα } \alpha_0 = 28{,}5° \text{ ή } 331{,}5°.$$

Η ζητούμενη γωνία είναι εκείνη που συμπίπτει και για το ημίτονο και για το συνημίτονο και στην περίπτωση αυτή η:

$$\alpha_0 = 331{,}5° \quad (360 - 28{,}5°).$$

Όπως βλέπομε ο υπολογισμός με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ειναι λίγο περίπλοκος. Γι' αυτό είναι προτιμότερο να γίνεται σχέδιο των δυνάμεων και να εργαζόμαστε μόνο με οξείες γωνίες.

Ανάλυση.

Όπως συνθέτομε δύο δυνάμεις σε μια συνισταμένη, μπορούμε επίσης, όπως είδαμε, και να αναλύσομε μία δύναμη σε δύο συνιστώσες. Οι λόγοι, για τους οποίους γίνεται η ανάλυση είναι συνήθως οι εξής:

α) Θέλομε να αντικαταστήσομε μία δύναμη με δύο νέες έτσι, ώστε οι δύο μαζί να παρέχουν το ίδιο αποτέλεσμα, όπως η αρχική δύναμη.

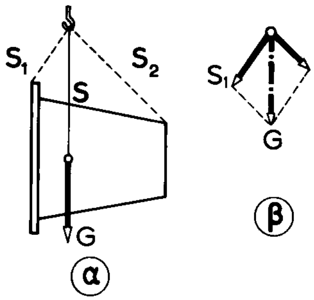
Παράδειγμα: Ένα σώμα μπορει να αναρτηθεί με ένα συρματόσχοινο S, που αναλαμβάνει όλο το βάρος G του σώματος [σχ. 3.2δ (α)]. Για να μη εμφανίζει όμως αστάθεια το αναρτουμε από τα άκρα του με δύο συρματόσχοινα. Με την ανάλυση της δυνάμεως G στις δύο συνιστώσες της S_1 και S_2 βρίσκομε τις δυνάμεις που αναλαμβάνουν τα δύο συρματόσχοινα [σχ. 3.2δ(β)].

β) Μας δίνεται μια δύναμη P με γνωστή τη διεύθυνση και θέλομε να βρούμε ποιο τμημα της ενεργεί κατά μία άλλη διεύθυνση, η οποία μας ενδιαφέρει. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει η P να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες P_x και P_y, ώστε η P_x να ενεργει κατά τη διεύθυνση που θέλομε, η δε P_y να είναι κάθετη σ' αυτήν, ώστε να μην έχει επίδραση.

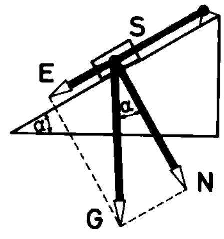
Παράδειγμα: Με ποια δύναμη πιέζει το σώμα βάρους G, που βρίσκεται επάνω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο, το δάπεδό του (σχ. 3.2ε); Αναλύομε τη δύναμη G σε δύο συνιστώσες, την N κάθετη στο επίπεδο και την E παράλληλη προς αυτό. Η N είναι η ζητούμενη δύναμη.

Παράδειγμα αναλύσεως δύο συντρεχουσών δυνάμεων.

Το παράδειγμα 3 της παραγράφου 2.2 να λυθει αναλυτικά (σχ. 3.2ζ).



Σχ. 3.2δ.



Σχ. 3.2ε.

Λύση.

Οι προβολές της συνισταμένης R και των συνιστωσών P_1 και P_2 πρέπει να είναι ίσες επάνω σε οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου. Για να φθάσομε γρήγορα στο αποτέλεσμα, εκλέγομε πρώτα τον άξονα O_y, που είναι κάθετος επάνω στη συνιστώσα P_2, οπότε η προβολή της P_2 επάνω στον O_y είναι μηδέν.

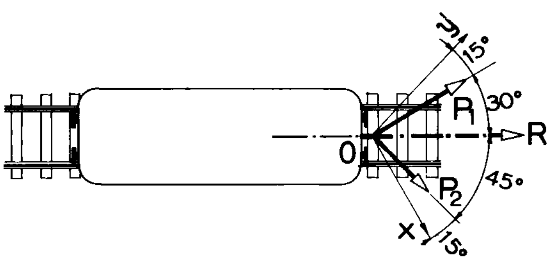
Επομένως, σύμφωνα με όσα έχουν λεχθεί παραπάνω:

$$P_1 \text{συν} 15° = R \text{συν} 45°, \quad P_1 = R \frac{\text{συν} 45°}{\text{συν} 15°} = 200 \frac{0{,}707}{0{,}966} = 146{,}3 \text{ kp}.$$

Στη συνέχεια εκλέγομε τον άξονα Ox, ο οποίος είναι κάθετος στη συνιστώσα P_1, επομένως η προβολή της P_1 επάνω στον Ox είναι μηδέν.

Οι προβολές της συνισταμένης και των συνιστωσών επάνω στον Ox μας δίνουν:

$$P_2 \text{ συν } 15° = R \text{ συν } 60°, \; P_2 = R \frac{\text{συν } 60°}{\text{συν } 15°} = 200 \frac{0{,}500}{0{,}966} = 103{,}5 \text{ kp}$$



Σχ. 3.2ζ.

3.3 Πολλές συντρέχουσες δυνάμεις.

Αφού εξετάσαμε τη σύνθεση και την ανάλυση δύο συντρεχουσών δυνάμεων, ας δούμε τώρα πώς γίνεται η σύνθεση και η ανάλυση πολλών συντρεχουσών δυνάμεων.

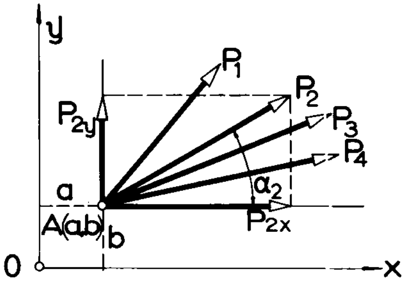
Σύνθεση.

Έστω ότι έχομε πολλές δυνάμεις, που έχουν κοινό σημείο εφαρμογής Α (a, b). Το μέγεθός τους Ρ και η διεύθυνσή τους α είναι γνωστά (σχ. 3.3α).

Ζητείται η συνισταμένη τους.

Για να βρούμε τη συνισταμένη, αναλύομε κάθε μία από τις δυνάμεις που μας δίνονται στις συνιστώσες τους κατά τους άξονες x και y ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων xOy.

$$P_{1x} = P_1 \text{ συν}\alpha_1 \qquad P_{1y} = P_1 \text{ ημ}\alpha_1$$
$$P_{2x} = P_2 \text{ συν}\alpha_2 \qquad P_{2y} = P_2 \text{ ημ}\alpha_2$$
$$P_{3x} = P_3 \text{ συν}\alpha_3 \qquad P_{3y} = P_3 \text{ ημ}\alpha_3$$
$$P_{4x} = P_4 \text{ συν}\alpha_4 \qquad P_{4y} = P_4 \text{ ημ}\alpha_4.$$



Σχ. 3.3α.

Όλες οι συνιστώσες κατά τον άξονα x συνθέτονται στη δύναμη:

$\Sigma x = R_x = \Sigma P \text{ συν}\alpha = P_1 \text{ συν}\alpha_1 + P_2 \text{ συν}\alpha_2 + P_3 \text{ συν}\alpha_3 + P_4 \text{ συν}\alpha_4$.

Κατά τον άξονα y αντιστοίχως:

$\Sigma y = R_y = \Sigma P \text{ ημ}\alpha = P_1 \text{ ημ}\alpha_1 + P_2 \text{ ημ}\alpha_2 + P_3 \text{ ημ}\alpha_3 + P_4 \text{ ημ}\alpha_4$.

Οι δυνάμεις R_x και R_y συνθέτονται στην τελική συνισταμένη, η οποία έχει:

Μέγεθος: $R = \sqrt{R^2_x + R^2_y}$

Ευθεία ενέργειας και φορά:

$$\text{ημ}\alpha_0 = \frac{R_y}{R}, \quad \text{συν}\alpha_0 = \frac{R_x}{R}$$

Σημείο εφαρμογής: Το σημείο εφαρμογής Α όλων των δυνάμεων.

Παράδειγμα.

Επάνω στην κορυφή ενός ιστού μιας ηλεκτρικής γραμμής δρουν οριζοντίως λόγω των καλωδίων οι δυνάμεις του σχήματος 3.3β.

Ζητείται η συνισταμένη τους.

Λύση.

$\Sigma x = R_x = 100 \text{ συν } 20° — 300 \text{ συν } 50° — 200 \text{ συν } 60° = 100 \times 0{,}940 — 300 \times 0{,}643 — 200 \times 0{,}500 = — 198{,}9$ kp, δηλαδή με διεύθυνση προς τα αριστερά.

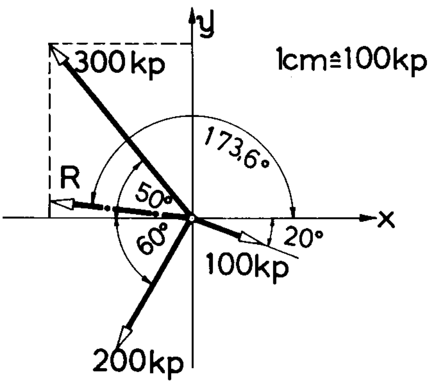
$\Sigma y = R_y = -100$ ημ $20° + 300$ ημ $50° - 200$ ημ $60° = -100 \times 0{,}342 + 300 \times 0{,}766 - 200 \times 0{,}866 = +22{,}4$ kp,

δηλαδή με διεύθυνση προς τα επάνω.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{198{,}9^2 + 22{,}4^2} = 200{,}1 \text{ kp}.$$

$$\text{συν}\alpha_0 = \frac{-198{,}9}{200{,}1} = -0{,}994, \text{ άρα } \alpha_0 = 173{,}6° \text{ ή } 186{,}4°$$

$$\text{ημ}\alpha_0 = \frac{22{,}4}{200{,}1} = 0{,}111 \text{ οπότε } \alpha_0 = 6{,}4° \text{ ή } 173{,}6°.$$



Σχ. 3.3β.

Επομένως η γωνία, την οποία σχηματίζει η συνισταμένη με το θετικό ημιάξονα των x, ειναι 173,6°.

Συνθήκη ισορροπίας.

Πολλές συντρέχουσες δυνάμεις ισορροπουν, όταν η συνισταμένη τους ισουται με μηδέν (R = 0).

Αλλά είδαμε ότι $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$.

Στην εξίσωση αυτή το R ισουται με το μηδέν, όταν και ***μόνον*** όταν συγχρόνως και το Σx και το Σy ισουται με το μηδέν.

Επομένως πολλές συντρέχουσες δυνάμεις ισορροπουν, αν πληρουται η σχέση:

$$R = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} \Sigma x &= 0 \\ \Sigma y &= 0. \end{aligned}$$

Αν στο παράδειγμα του σχήματος 3.3β είχαμε και τέταρτο καλώδιο, που να εξασκουσε επάνω στον ιστό δύναμη ίση και αντίθετη προς τη συνισταμένη R, που υπολογίσαμε, τότε οι τέσσερις δυνάμεις θα ισορροπουσαν, γιατί:

$$R = 0 \text{ ή } \Sigma x = 0 \text{ και } \Sigma y = 0.$$

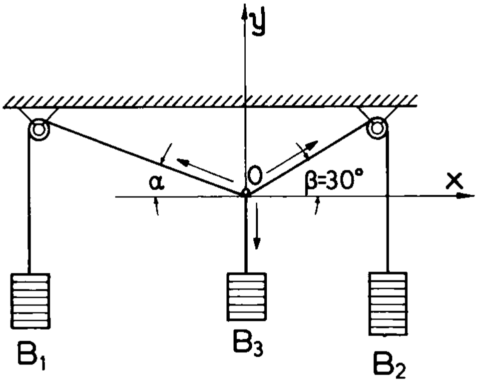
Αυτό θα εσήμαινε ότι ο ιστός δεν υφίσταται καταπόνηση.

Παράδειγμα.

Τρία φορτία B_1, B_2 και B_3 αναρτωνται από ένα συρματόσχοινο, το οποιο περιβάλλει δύο τροχαλίες (σχ. 3.3 γ).

Γνωρίζομε το βάρος των δύο φορτίων $B_1 = 34$ kp, $B_3 = 30$ kp και ότι τα τρία φορτία βρίσκονται σε ισορροπία, όταν η γωνία $\beta = 30°$.

Ζητούνται: Η γωνία α και το βάρος B_2.



Σχ. 3.3γ.

Λύση.

Για να μένει ο κόμπος Ο ακίνητος, σημαίνει ότι οι τρεις δυνάμεις B_1, B_2 και B_3, που διέρχονται από αυτόν, βρίσκονται σε ισορροπία.

Είδαμε όμως ότι πολλές συντρέχουσες δυνάμεις ισορροπούν όταν:

$$\Sigma x = 0 \qquad \Sigma y = 0.$$

Παίρνομε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Ο και με τον άξονα Οx οριζόντιο. Εφαρμόζομε τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\Sigma x = 0 \quad B_2\,\text{συν}\,30° - B_1\,\text{συν}\alpha = 0. \qquad (1)$$
$$\Sigma y = 0 \quad B_2\,\text{ημ}\,30° + B_1\,\text{ημ}\alpha - B_3 = 0. \qquad (1)$$

Για να βρούμε τη γωνία α, πολλαπλασιάζομε την πρώτη εξίσωση επί — ημ 30° και τη δεύτερη επί συν 30° και προσθέτομε κατά μέλη:

$$B_1\,(\text{ημ}\,30°\,\text{συν}\alpha + \text{συν}\,30°\,\text{ημ}\alpha) = B_3\,\text{συν}\,30°.$$

Η μέσα σε παρένθεση παράσταση ισούται με ημ (α + 30), άρα ημ (α + 30) =

$$\frac{B_3}{B_1}\,\text{συν}\,30° = \frac{30}{34} \times 866 = 0{,}764$$

και επομένως α + 30° = 50° και α = 20°.

Από την εξίσωση (1) λαμβάνομε:

$$B_2 = B_1\,\frac{\text{συν}\alpha}{\text{συν}\,30°} = 34\,\frac{\text{συν}\,20°}{\text{συν}\,30°} = 34\,\frac{0{,}940}{0{,}866} = 36{,}9 \text{ kp}.$$

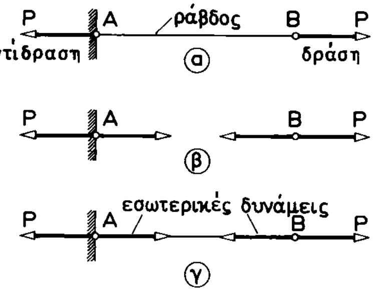
3.4 Συνθήκες ισορροπίας συστήματος δύο ράβδων.

Εφελκυόμενες και θλιβόμενες ράβδοι.

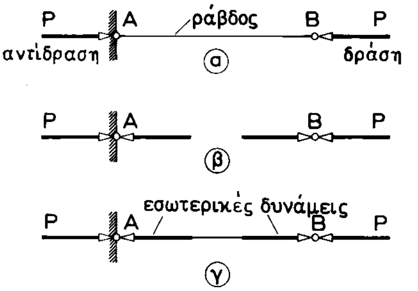
Η ράβδος είναι το απλούστερο στοιχείο κατασκευής για την ανάληψη δυνάμεως και μετάδοσή της στη στήριξη. Οι ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους πάντοτε με αρθρώσεις και σχηματίζουν φορείς, οι οποίοι καλούνται ***δικτυώματα.*** Οι θέσεις, όπου συνδέονται δύο ή περισσότερες ράβδοι, καλούνται ***κόμποι.***

Η ράβδος μπορεί να αναλάβει δύναμη μόνο κατά τον άξονά της. Η δύναμη αυτή είτε εφελκύει τη ράβδο ***(εφελκυόμενη ράβδος),*** είτε τη θλίβει ***(θλιβόμενη ράβδος).***

Έστω ότι η ράβδος ΑΒ [σχ. 3.4α (α)] στηρίζεται με άρθρωση στο σημείο Α και έλκεται στη θέση Β από την εξωτερική δύναμη Ρ.



Σχ. 3.4α.



Σχ. 3.4β.

Για να παραμείνει ο κόμπος Β σε ισορροπία, πρέπει η ράβδος ΑΒ να ασκεί επάνω του δύναμη ίση με την Ρ και αντίθετή της [σχ. 3.4α (β)]. Η δύναμη Ρ φθάνει από τη ράβδο ΑΒ στο Α. Για να μείνει η στήριξη Α ακίνητη, πρέπει να αναπτυχθεί αντίδραση ίση και αντίθετη με την Ρ [σχ. 3.4α (β)]. Και η αντίδραση αποτελει εξωτερική δύναμη. Για να φθάσει όμως η δύναμη Ρ από το Β στο Α διέρχεται μέσα από τη ράβδο ΑΒ, την οποία καταπονεί σε εφελκυσμό.

Για να το κατανοήσομε αυτό καλύτερα, ας φαντασθούμε ότι με το αριστερό μας χέρι κρατιόμαστε από το Α, ενώ μας έλκουν από το άλλο με δύναμη Ρ. Για να φθάσει η δύναμη Ρ από το δεξί μας χέρι (κόμπος Β) στο αριστερό (κόμπος Α) πρέπει να περάσει μέσα από το σώμα μας (ράβδος ΑΒ). Οι πλάτες μας κοντεύουν να ανοίξουν. Το σώμα μας καταπονείται σε εφελκυσμό.

Το σχήμα 3.4α (α) είναι απόλυτα ισοδύναμο προς το σχήμα 3.4α (β). Απλως στο δεύτερο αντί να τεθεί η ράβδος ΑΒ σχεδιάστηκαν οι δυνάμεις, που ασκει η ράβδος επάνω στους κόμπους Α και Β. Οι δυνάμεις αυτές καλουνται ***εσωτερικές.*** Συνήθως αντί για τη σχεδίαση του σχήματος 3.4α (β) προτιμάται η σχεδίαση του σχήματος 3.4α (γ), όπου, εκτός από τις εξωτερικές δυνάμεις και τις δύο εσωτερικές, που αναπτύσσονται σε κάθε ράβδο, φαίνεται και η ράβδος. Στην εφελκυόμενη ράβδο οι εσωτερικές δυνάμεις έχουν φορά από τον κόμπο προς τη μέση της ράβδου.

Αν η δύναμη Ρ θλίβει αντί να έλκει τη ράβδο ΑΒ, τότε οι δυνάμεις, που ασκει η ράβδος επάνω στους κόμπους Α και Β, διευθύνονται προς τους κόμπους (σχ. 3.4 β). Η ράβδος καταπονειται σε θλίψη. Σε μια ράβδο, που υφίσταται θλίψη, οι εσωτερικές δυνάμεις έχουν φορά από τη μέση της προς τον κόμπο.

Συμβολισμοί.

Για τα επόμενα εισάγονται οι ακόλουθοι συμβολισμοί:

Για τους κόμπους: οι λατινικοί αριθμοί I, II, III,....

Για τις ράβδους: οι αραβικοί αριθμοί 1, 2, 3,....

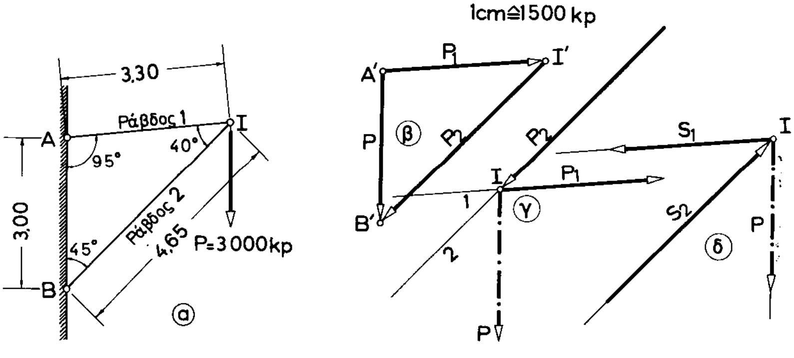
Για τις εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων: το λατινικό γράμμα S με δείκτη τον αριθμό της ράβδου.

Για τις εξωτερικές δυνάμεις και τις αντιδράσεις κεφαλαία λατινικά γράμματα.

Παράδειγμα.

Στον κόμπο I των ράβδων 1 και 2 δρα η δύναμη P = 3000 kp (σχ. 3.4γ).

Να βρεθούν οι συνιστώσες της δυνάμεως P κατά τους άξονες των ράβδων 1 και 2. Ποιές δυνάμεις πρέπει να ασκήσουν οι ράβδοι 1 και 2 επάνω στον κόμπο I για να μένει σε ισορροπία;



Σχ. 3.4γ.

Λύση.

α) Ανάλυση της δυνάμεως P.

Γραφική.

Η δύναμη P σχεδιάζεται με κατάλληλη κλίμακα. Από την αρχή της A′ φέρεται παράλληλη προς τη ράβδο 1 και από το τέλος της B′ παράλληλη προς τη ράβδο 2. Οι δύο παράλληλες τέμνονται στο σημείο I′. Οι ζητούμενες συνιστώσες της P ειναι οι:

$$A'I' = P_1 = 3300 \text{ kp καί } B'I' = P_2 = 4650 \text{ kp}.$$

Αναλυτική.

Το δυναμοπολύγωνο A′B′I′ και το τρίγωνο των ράβδων ABI είναι όμοια. Επομένως έχομε:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{3{,}30}{3{,}0} \text{, από την οποία } P_1 = 1{,}10\ P = 3300 \text{ kp}.$$

$$\frac{P_2}{P} = \frac{4{,}65}{3{,}0} \text{, από την οποία } P_2 = 1{,}55\ P = 4650 \text{ kp}.$$

'Εχουν υπολογισθεί με τον απλό αυτό τρόπο αναλυτικά τα μεγέθη των συνιστωσών. Ο αναλυτικός υπολογισμός της φοράς τους μπορεί να γίνει όπως στο παράδειγμα αναλύσεως της παραγράφου 3.2. Γίνεται όμως πολύ απλούστερα και ταχύτερα με το σκαρίφημα του δυναμοπολυγώνου [σχ. 3.4γ (β)].

β) Δυνάμεις των ράβδων επάνω στους κόμπους.

Οι συνιστώσες που έχουν υπολογισθεί είναι οι δυνάμεις που ενεργούν λόγω της P από τον κόμπο στις ράβδους [σχ. 3.4γ (γ) Για να μείνει ο κόμπος I σε ισορροπία, θα πρέπει οι ράβδοι να ασκήσουν ίσες και αντίθετες δυνάμεις [σχ. 3.4 γ (δ)] επάνω στους κόμπους, δηλαδή τις δυνάμεις $S_1 = P_1$ και $S_2 = P_2$. Από το σχημα φαίνεται ότι η εσωτερική δύναμη S_1 έχει φορά από τον κόμπο προς το μέσο, άρα η ράβδος 1 ειναι εφελκυόμενη, ενώ η S_2 έχει φορά προς τον κόμπο I, άρα η ράβδος 2 ειναι θλιβόμενη.

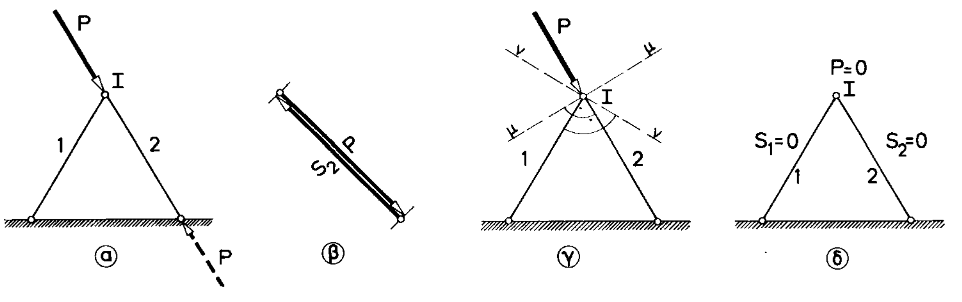
Ειδικές περιπτώσεις.

'Ενα σύστημα από δύο ράβδους φορτίζεται στον κόμπο I με δύναμη P. Η ευθεία ενέργειας της P συμπίπτει με τον άξονα της ράβδου 2 (σχ. 3.4δ).

Ζητουνται οι εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων 1 και 2.

Λύση.

Μπορουμε να δώσομε στην παραπάνω άσκηση δύο λύσεις, μία γραφική και μία αναλυτική.



Σχ. 3.4δ.

α) Γραφική.

Το δυναμοπολύγωνο περιορίζεται σε μία γραμμή [σχ. 3.4 δ (β)] $P = S_2$. Επειδή εξετάζεται η ισορροπία του κόμπου I, η S_2 έχει αντίθετη διεύθυνση από την P.

Η ράβδος 2 θλίβεται. Αν και η ράβδος 1 δεν αναλαμβάνει δύναμη, εν τούτοις χρειάζεται για τη διατήρηση της μορφής της κατασκευής.

β) Αναλυτική [σχ. 3.4δ (γ)].

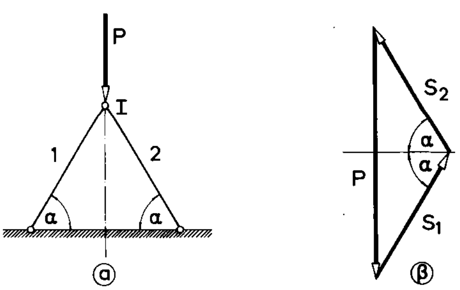
Ο κόμπος I ισορροπεί. 'Αρα, επάνω σε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από τον κόμπο I, οι συνιστώσες της δυνάμεως P και των εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων πρέπει να είναι ίσες. Επάνω στην ευθεία μμ, που είναι κάθετη στον άξονα της 2, οι συνιστώσες της P και της S_2 είναι μηδέν. Άρα $S_1 = 0$. Επάνω στην ευθεία νν, που είναι κάθετη στον άξονα της I, η συνιστώσα της S_1 είναι μηδέν, ενω οι συνιστώσες της P και της S_2 είναι ίσες. 'Αρα $S_2 = P$.

Αν η P ήταν μηδέν, τότε και η $S_2 = 0$ [σχ. 3.4δ(δ)].

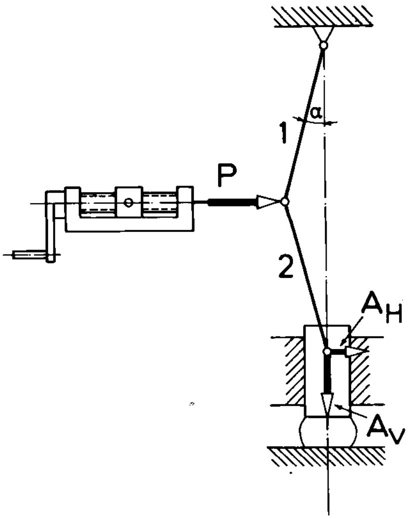
Αν το σύστημα των δύο ράβδων σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο και φορτίζεται με τη δύναμη P κατά τον άξονα συμμετρίας του, αποδεικνύεται εύκολα, π.χ. από το κλειστό δυναμοπολύγωνο (σχ. 3.4ε), ότι:

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2\,\eta\mu\alpha}$$

Για μικρές γωνίες α, το ημα γίνεται πολύ μικρό και το $S_1 = S_2$ πολύ μεγάλο. Πρακτική εφαρμογή αυτού έχομε στο πιεστήριο με χιαστούς μοχλούς (σχ. 3.4 ζ), όπου με μικρή δύναμη P προκαλούνται μεγάλες δυνάμεις στο έμβολο του πιεστηρίου.



Σχ. 3.4ε.



Σχ. 3.4ζ.

3.5 Ασκήσεις.

Α) Οι ασκήσεις 1 ως 8 της παραγράφου 2.4 να λυθούν με τη μέθοδο των προβολών (αναλυτικά).

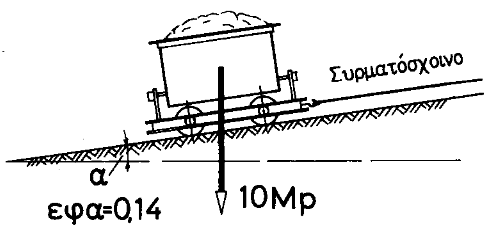
Β) Οι παρακάτω ασκήσεις να λυθούν γραφικά και αναλυτικά.

1) Ένα όχημα με συνολικό βάρος 10 Mp σταθμεύει σε μια οδό που έχει κλίση 14% (σχ. 3.5α). Ποιες ειναι οι συνιστώσες του βάρους του κάθετα και παράλληλα προς την επιφάνεια της οδού;

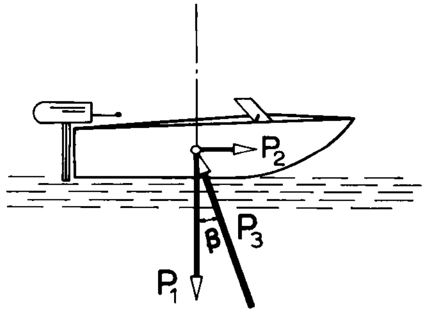
Απάντηση: N = 9900 kp. E = 1390 kp

2) Σε ένα ταχύπλοο σκάφος δρουν το ίδιο του βάρος $P_1 = 500$ kp, η ώθηση της έλικας $P_2 = 200$ kp οριζόντια προς τα εμπρός και η αντίσταση του νερού $P_3 = 550$ kp προς τα πάνω και πίσω με γωνία $\beta = 20°$ ως προς την κατακόρυφο (σχ. 3.5β). Να βρεθεί α) η συνισταμένη R και β) η γωνία α, που σχηματίζει με την οριζόντια.

Απάντηση: α) R = 20,8 kp. β) α = 55°



Σχ. 3.5α.

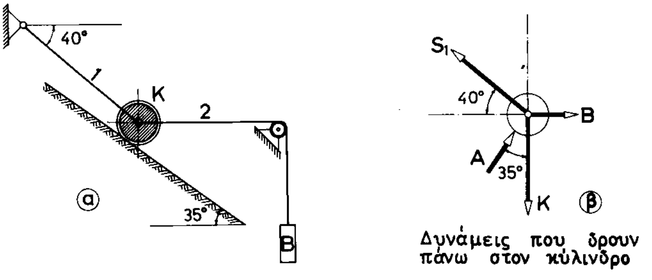


Σχ. 3.5β.

3) Κύλινδρος Κ βάρους 100 kp συγκρατειται με το σχοινί 1 επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο και συγκρατει με το σχοινί 2 βάρος Β = 50 kp (σχ. 3.5γ).

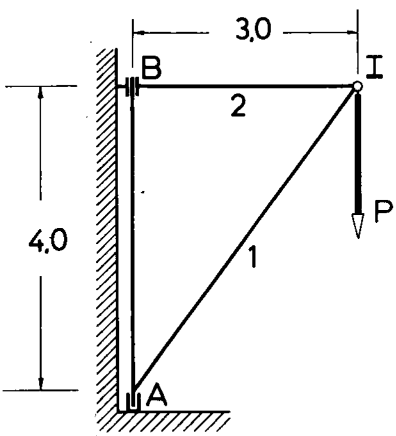
Ζητειται η δύναμη που ασκειται στο σχοινί 1 και η αντίσταση Α του κεκλιμένου επιπέδου.

Απάντηση: S_1 = 98,7 kp. A = 44,6 kp



Σχ. 3.5γ.

4) Ο περιστρεφόμενος γερανός του σχήματος 3.5δ έχει ανυψωτική ικανότητα Ρ = 5000 kp.



Σχ. 3.5δ.

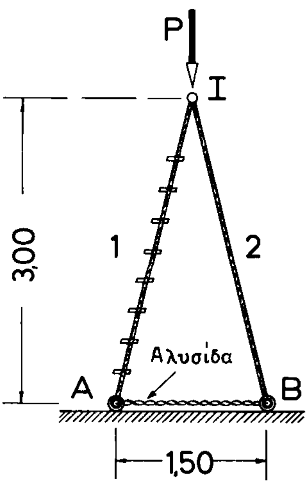
Ζητουνται α) Οι εσωτερικές δυνάμεις, που αναπτύσσονται στις ράβδους 1 και 2. β) Να αναλυθει στη θέση Α η δύναμη της ράβδου 1 σε μία κατακόρυφη συνιστωσα A_v καί μία όριζόντια A_H.

Απάντηση: α) S_1 = — 6250 kp (θλίψη), S_2 = + 3750 kp (εφελκυσμός), β) A_v = 5000 kp προς τα κάτω A_H = 3750 kp προς τα αριστερά.

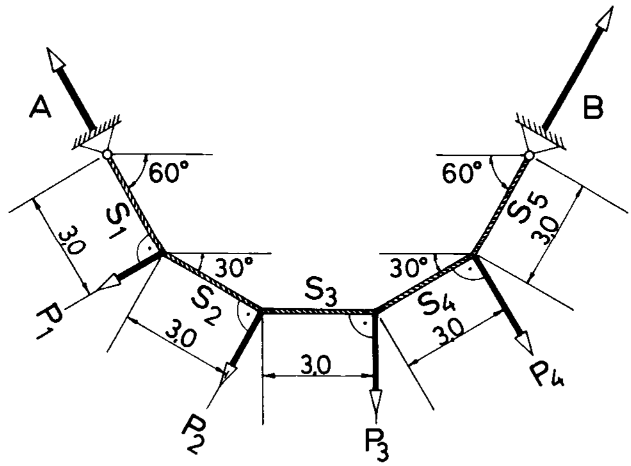
5) Η πτυσσόμενη κλίμακα του σχήματος 3.5ε φορτίζεται στην κορυφή της με κατακόρυφο φορτίο P = 90 kp.

Ζητουνται α) Οι εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων 1 και 2. β) Η εφελκυστική δύναμη που αναλαμβάνει η αλυσίδα.

Απάντηση: α) S_1 = S_2 = — 46,5 kp (θλίψη), β) 11,3 kp



Σχ. 3.5ε.



Σχ. 3.5ζ.

6) Επάνω σε ένα σχοινί, αναρτημένο από τα άκρα του Α και Β, δρουν οι δυνάμεις P_1, P_2, P_3 και P_4 (σχ. 3.5 ζ), των οποίων ειναι γνωστή η ευθεία ενέργειας και η φορά. Επίσης ειναι γνωστό το μέγεθος της P_1 = 200 kp και η μορφή του σχοινιου από την φόρτιση των τεσσάρων δυνάμεων.

Ζητουνται τα μεγέθη των P_2, P_3 και P_4 και οι τάσεις του σχοινιου S_1, S_2, S_3, S_4 και S_5.

Απάντηση: P_2 = 231 kp, P_3 = 267 kp, P_4 = 308 kp, S_1 = A = 346 kp, S_2 = 400 kp, S_3 = 462 kp, S_4 = 534 kp, S_5 = B = 616 kp

7) Το ικρίωμα του σχήματος 3.5η φορτίζεται με κατακόρυφο φορτίο P = 500 kp σε οριζόντια απόσταση 0,60 m από την κορυφή I.

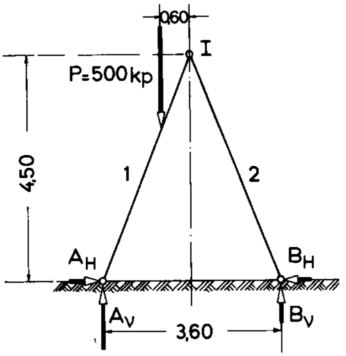
Ζητουνται α) Οι αντιδράσεις A_v και A_H, B_v και B_H, και β) η εσωτερική δύναμη της ράβδου 2.

Απάντηση: α) A_v = 333 kp. A_H = 67 kp. B_v 167 kp. B_H = 67 kp. β) S_2 = — 180 kp (θλίψη)

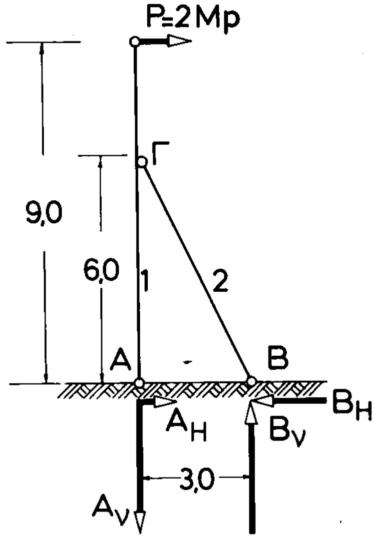
8) Ο κατακόρυφος ιστός του σχήματος 3.5θ φορτίζεται στην κορυφή με φορτίο P = 2 Mp και κρατιέται στη θέση του με την αντηρίδα ΒΓ.

Ζητουνται α) οι αντιδράσεις A_v και A_H , B_v και B_H. β) Η εσωτερική δύναμη της ράβδου 2.

Απάντηση: α) A_v = 6 Mp. A_H = 1 Mp (απαιτειται αγκύρωση της στηρίξεως A). B_v = 6 Mp. B_H = 3 Mp. β) S_2 = — 6,71 Mp (θλίψη)



Σχ. 3.5η.



Σχ. 3.5θ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

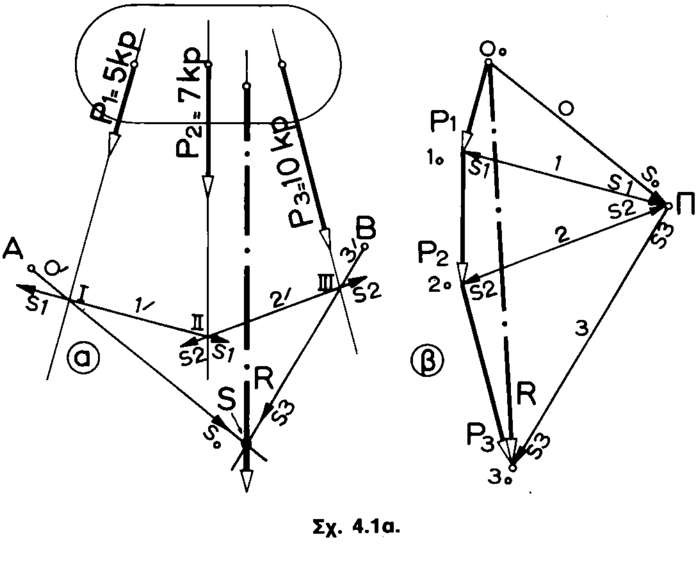
ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΤΥΧΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη γραφική μέθοδο.

4.1 Σύνθεση και ισορροπία.

Τη γραφική σύνθεση πολλων συνεπιπέδων δυνάμεων μπορουμε να την κάνομε με τη μέθοδο του ***σχοινοπολυγώνου.***

Για το σκοπό αυτό σχεδιάζομε πρωτα τη γενική διάταξη των δυνάμεων [σχ. 4. 1α(α)]. Στη συνέχεια με ορισμένη κλίμακα των δυνάμεων σχεδιάζομε το δυναμοπολύγωνο 0_0, 1_0, 2_0, 3_0 [σχ. 4 . 1α (β)]. Η συνδετήρια γραμμή μεταξύ της αρχης της πρώτης δυνάμεως 0_0 και του τέλους της τελευταίας 3_0 ειναι η συνισταμένη R. Από



Σχ. 4.1α.

το δυναμοπολύγωνο λαμβάνομε επομένως το μέγεθος και τη φορά της συνισταμένης. Αν όλες οι δυνάμεις ειχαν το ίδιο σημειο εφαρμογης, το πρόβλημα θα ειχε λυθει όπως μπορουμε εύκολα να δουμε, γιατί αυτό το σημειο θα ηταν και το σήμειο εφαρμογης της συνισταμένης. 'Οταν όμως οι δυνάμεις ειναι ***τυχουσες,*** τότε πρέπει να βρουμε και το σημειο εφαρμογης της συνισταμένης επάνω στο σωμα.

Για να βρούμε το σημείο αυτό εργαζόμαστε ως εξής: Λαμβάνομε ένα οποιοδήποτε σημειο Π [σχ. 4.1α(β)] εκτός από το δυναμοπολύγωνο. Το σημείο αυτό λέγεται ***πόλος***. Τον πόλο αυτό συνδέομε με τις ακμές του δυναμοπολυγώνου φέρνοντας τις γραμμές 0, 1, 2, 3. Οι γραμμές αυτές καλουνται ***πολικές ακτίνες***.

Για την κατασκευή του σχοινοπολυγώνου λαμβάνεται ένα οποιοδήποτε σημειο I της εύθείας ενέργειας της δυνάμεως P_1 [σχ. 4.1α(α)]. Από αυτό φέρομε ευθειες παράλληλες προς τις πολικές ακτίνες 0 και 1, τις 0′ και 1′.

Η ευθεία 1′ τέμνει την ευθεία ενέργειας της δυνάμεως P_2 στο σημειο II.

Από το σημειο II φέρομε την ευθεία 2′ παράλληλη προς την πολική ακτίνα 2, η οποία τέμνει την ευθεία ενέργειας της δυνάμεως P_3 στο III. Τέλος από το σημειο III φέρομε την ευθεία 3′ παράλληλη προς την πολική ευθεία 3.

Το σημειο τομης S των δύο ακραίων ευθειών του σχοινοπολυγώνου 0′ και 3′ δίνει το σημϊειο εφαρμογης της συνισταμένης.

Απόδειξη.

Στο σχημα 4.1α(α) κάθε δύναμη αναλύεται σε δύο συνιστώσες και μάλιστα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε όλες οι συνιστώσες να συναντωνται στο ίδιο σημέιο, δηλαδή στον πόλο Π. Συνεπως μπορούμε να εκλέξομε το Π εντελώς τυχαία.

Η δύναμη P_1 αναλύεται στις συνιστωσες S_0 και — S_1.

Η δύναμη P_2 αναλύεται στις συνιστώσες S_1 και — S_2.

Η δύναμη P_3 αναλύεται στις συνιστώσες S_2 και — S_3.

Οι συνιστωσες S_1 και — S_1, S_2 και — S_2 ειναι ίσες και αντίρροπες. Επομένως η μία εξουδετερώνει την άλλη. Απομένουν οι S_0 και S_3, που δεν είναι παρά οι συνιστωσες της συνισταμένης R.

Κατά τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε στο σχήμα 4.1α(α).

Αναλύομε τη δύναμη:

P_1 πάλι στην S_0 και — S_1
P_2 πάλι στην S_1 και — S_2
P_3 πάλι στην S_2 και — S_3.

Την ανάλυση αυτή κάνομε κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι ευθείες ενέργειας των S_1 και — S_1, των S_2 και — S_2 να συμπίπτουν. Το σημείο I, από το οποίο αρχίζει η ανάλυση, το εκλέγομε εντελώς τυχαία.

Οι δυνάμεις όμως S_1 και — S_1, καθώς επίσης και S_2 και — S_2, εξουδετερώνουν η μία την άλλη και απομένουν οι συνιστώσες S_0 και S_3.

Αυτές όμως ειναι πάλι οι συνιστώσες της συνισταμένης R και επομένως το σημειο τομης τους πρέπει να είναι σημείο της συνισταμένης (βλ. παράγραφο 2 . 2, Ανάλυση).

Στοιχεια ορθης κατασκευής του σχοινοπολυγώνου.

1) Κάθε πλευρά του σχοινοπολυγώνου, η οποία είναι παράλληλη προς μία πολική ακτίνα, βρίσκεται μεταξύ των δύο δυνάμεων, στο κοινό σημείο των οποίων καταλήγει η πολική ακτίνα στο δυναμοπολύγωνο.

2) Σε κάθε ακμή I, III (σχ. 4.1α) του σχοινοπολυγώνου αντιστοιχεί ένα τρίγωνο στο δυναμοπολύγωνο, που σχηματίζεται από τις δυνάμεις που συναντώνται στην ακμή. Π.χ. στην ακμή II αντιστοιχεί το τρίγωνο P_2 S_1 S_2.

Τρόπος εργασίας για τη Γραφική Σύνθεση.

1) Σχεδιάζομε το σώμα με τις δυνάμεις που δρουν επάνω του.

2) Κατασκευάζομε το δυναμοπολύγωνο και βρίσκομε τη συνισταμένη R.

3) Εκλέγομε στη συνέχεια τυχόν σημειο Π ως πόλο και σχεδιάζομε τις πολικές ακτίνες.

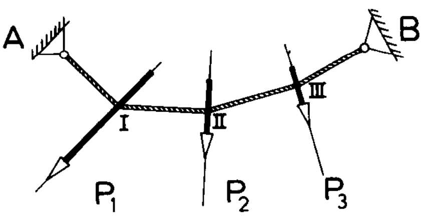
4) Σχεδιάζομε το σχοινοπολύγωνο με αρχή τυχόν σημείο Ι.

5) Προεκτείνομε την πρώτη και την τελευταία πλευρά του σχοινοπολυγώνου μέχρι που να τμηθούν.

6) Το σημείο τομής S δίνει τη θέση της συνισταμένης R στο σώμα. Το μέγεθος και η φορά της δίνονται από το δυναμοπολύγωνο.

Σημείωση: Το πολύγωνο Α, Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, Β του σχήματος 4.1β ονομάζεται σχοινοπολύγωνο, επειδή έχει τη μορφή σχοινιού χωρίς βάρος, το οποιο, αν στερεωθεί στα σημεια Α και Β και φορτισθει με τις δυνάμεις P_1, P_2, P_3, θα λάβει τη μορφή του πολυγώνου αυτού.

Όταν σχεδιάζομε το δυναμοπολύγωνο και το σχοινοπολύγωνο ειναι δυνατό να προκύψουν τρεις περιπτώσεις. Με παραδείγματα θα εξετάσομε παρακάτω την κάθε μία περίπτωση χωριστά.



Σχ. 4.1β.

Πρώτη περίπτωση.

Ειναι εκείνη κατά την οποία έχομε: ***δυναμοπολύγωνο ανοικτό και σχοινοπολύγωνο ανοικτό.***

Αποτέλεσμα: Μία συνισταμένη.

Παράδειγμα.

Η περίπτωση που εξετάσαμε στο σχήμα 4.1α.

Δεύτερη περίπτωση.

Ειναι εκείνη κατά την οποία έχομε:

δυναμοπολύγωνο κλειστό, σχοινοπολύγωνο ανοικτό.

Αποτέλεσμα: Ζευγος δυνάμεων.

Παράδειγμα.

Δίνονται οι δυνάμεις P_1, P_2, P_3 κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το δυναμοπολύγωνο που σχηματίζουν να ειναι κλειστό (σχ. 4.1γ).

Ζητειται το αποτέλεσμα της συνθέσεώς τους.

Λύση.

Κατασκευάζομε το δυναμοπολύγωνο $0_0, 1_0, 2_0, 3_0$ από τις δυνάμεις P_1, P_2, P_3. Το δυναμοπολύγωνο ειναι κλειστό, άρα η συνισταμένη ειναι μηδέν.

Εκλέγομε το τυχόν σημείο Π ως πόλο και φέρομε τις πολικές ακτίνες 0, 1, 2, 3, όπου η 3 συμπίπτει με την 0.

Με αρχή το τυχόν σημειο I της δυνάμεως P_1 σχεδιάζομε το σχοινοπολύγωνο.

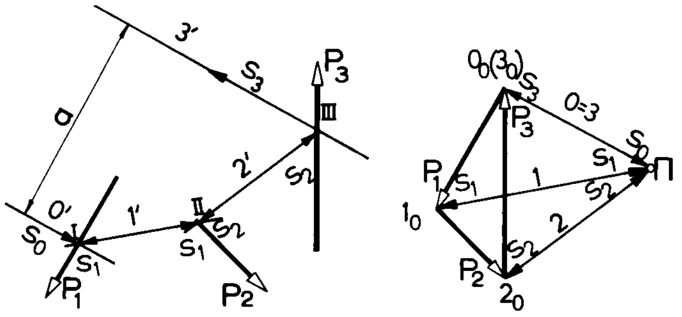
Η 0′ του σχοινοπολυγώνου ειναι παράλληλη προς την 0 του δυναμοπολυγώνου.

Από το σημειο I φέρομε την 1′ παράλληλη προς την 1, μέχρι που να τμήσει την P_2 στο σημειο II.

Από το σημειο II φέρομε την 2′ παράλληλη προς την 2, μέχρι που να τμήσει την P_3 στο σημειο III.

Από το σημειο III τέλος φέρομε την παράλληλη προς την 3.

Η πρώτη και η τελευταία πλευρά του σχοινοπολυγώνου είναι παράλληλη, άρα δεν υπάρχει σημειο τομής.



Σχ. 4.1γ.

Όπως αποδείξαμε στην πρώτη περίπτωση:
η P_1 αναλύεται στις συνιστωσες S_0 και — S_1
η P_2 αναλύεται στις συνιστωσες S_1 και — S_2
η P_3 αναλύεται στις συνιστωσες S_2 και — S_3.

Στο σχοινοπολύγωνο οι δυνάμεις S_1 και — S_1, καθώς και οι S_2 και — S_2 εξουδετερώνουν η μία την άλλη, οπότε απομένουν οι S_0 και S_3, οι οποίες, όπως φαίνεται από το δυναμοπολύγωνο, είναι παράλληλες, ίσες και αντίθετης φοράς. Συνεπως σχηματίζουν ένα ζεύγος, του οποίου η ροπή ισούται με $M = - S_0 \cdot a$. Το μέγεθος της δυνάμες $S_0 = S_3$ βρίσκεται από το δυναμοπολύγωνο, είναι δηλαδή η πλευρά $0 = 3$. Μοχλοβραχίονας α είναι η απόσταση μεταξύ των ακραίων πλευρών 0′ και 3′ του σχοινοπολυγώνου. Στο μέγεθος της ροπής Μ θέτομε πλην (—), γιατί στο παράδειγμα το ζεύγος προέκυψε αριστερόστροφο.

Τρίτη Περίπτωση.

Ειναι εκείνη κατά την οποίαν έχομε: ***δυναμοπολύγωνο κλειστό, σχοινοπολύγωνο κλειστό.***

Αποτέλεσμα: Ισορροπία.

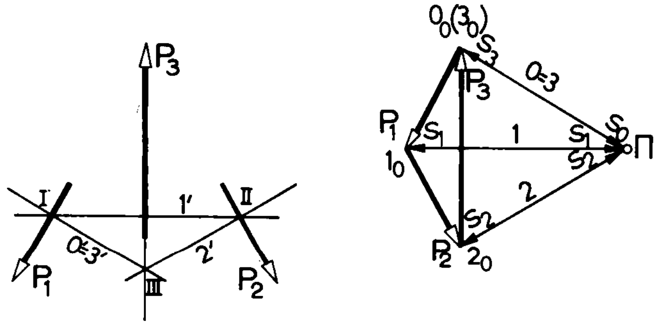
Παράδειγμα.

Αν στο παράδειγμα της προηγούμενης περιπτώσεως μετακινήσομε τη δύναμη P_3 προς τα αριστερά έτσι, ώστε η ευθεία 3′ να συμπέση με την 0′, τότε και οι δυνάμεις S_0 και S_3 εξουδετερώνουν η μία την άλλη (σχ. 4.1δ). Επομένως επάνω στο σωμα δεν δρα καμιά δύναμη και καμιά ροπή, άρα υπάρχει ***ισορροπία.***

Με το κλειστό λοιπόν δυναμοπολύγωνο μηδενίζονται οι δυνάμεις, ενω με το κλειστό σχοινοπολύγωνο μηδενίζονται οι ροπές.

Ειδική περίπτωση των τυχουσων δυνάμεων αποτελεί το να είναι όλες οι δυνάμεις παράλληλες μεταξύ τους.

Για τη σύνθεση επομένως των ***παραλλήλων δυνάμεων*** ισχύουν όσα στο κεφάλαιο αυτό είπαμε. Επειδή όμως η περίπτωση αυτή εμφανίζεται συνηθέστατα στην πράξη, θα εξετάσομε στα επόμενα παραδείγματα τρεις περιπτώσεις συνθέσεως παραλλήλων δυνάμεων.



Σχ. 4.1δ.

Παράδειγμα 1.

Να βρεθει το μέγεθος, η θέση και η φορά της συνισταμένης των παραλλήλων και ομόρροπων δυνάμεων $P_1 = 10$ kp και $\Pi_2 = 30$ kp (σχ. 4.1ε).

Λύση.

Με τις δυνάμεις P_1 και P_2 κατασκευάζομε το δυναμοπολύγωνο $0_0, 1_0, 2_0$.

Εκλέγομε τυχαια τον πόλο Π και φέρομε τις πολικές ακτίνες 0, 1 και 2.

Κατασκευάζομε κατά τα γνωστά το σχοινοπολύγωνο 0', 1', 2'. Η πρώτη και η τελευταία πλευρά του τέμνονται στο S.

Έχομε με τον τρόπο αυτό όλα τα στοιχεία της συνισταμένης R.

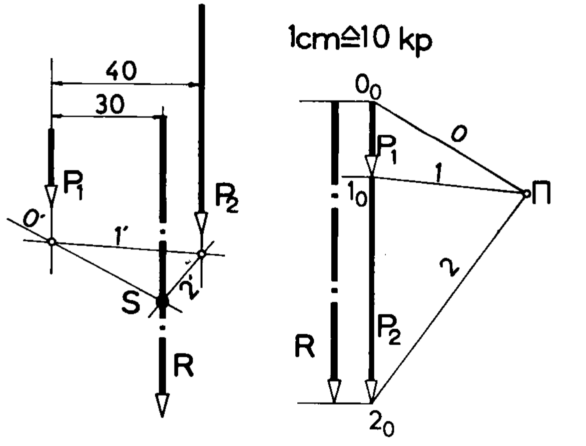
α) Το ***μέγεθος*** δίνεται από την κλείουσα $0_0\ 2_0$ του δυναμοπολυγώνου. Το μηκος της ευθείας ισουται με 4 cm, άρα το μέγεθος της συνισταμένης ειναι $4 \times 10 = 40$ kp.

β) ***Η ευθεία ενέργειας*** ειναι παράλληλη προς την ευθεία $0_0\ 2_0$ του δυναμοπολυγώνου και διέρχεται από το S.

γ) ***Η φορά*** δίνεται από το δυναμοπολύγωνο. Η συνισταμένη διευθύνεται από το πρωτο σημειο 0_0 προς το τελευταιο 2_0.

Συμπέρασμα.

Η συνισταμένη δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων ειναι ίση με το άθροισμά τους, βρίσκεται δε μεταξύ των δύο δυνάμεων και πιο κοντά στη μεγαλύτερη.



Σχ. 4.1ε.

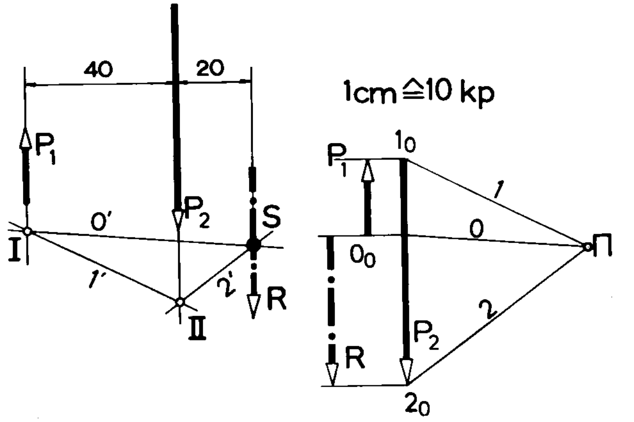
Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί το μέγεθος, η θέση και η φορά της συνισταμένης των παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων P_1 = 10 kp και P_2 = 30 kp (σχ. 4.1ζ).

Λύση.

Με τις δυνάμεις P_1 και P_2 κατασκευάζομε το δυναμοπολύγωνο 0_0 1_0 2_0.

Από ένα πόλο που εκλέγομε τυχαία φέρομε τις πολικές ακτίνες 0,1 και 2 και κατασκευάζομε το σχοινοπολύγωνο 0′ 1′ 2′



Σχ. 4.1ζ.

Γνωρίζομε τώρα τη συνισταμένη R γιατί:

α) Το ***μέγεθός της*** δίνεται από το μηκος της ευθείας 0_0 2_0 του δυναμοπολυγώνου, το οποίο ισούται με 2 cm, άρα το μέγεθος της συνισταμένης ειναι 2 × 10 = 20 kp.

β) Η ***ευθεία ενέργειάς της*** ειναι παράλληλη προς την ευθεία 0_0 2_0 και διέρχεται από το σημείο τομής S των ακραίων πλευρων 0′ και 2′ του σχοινοπολυγώνου.

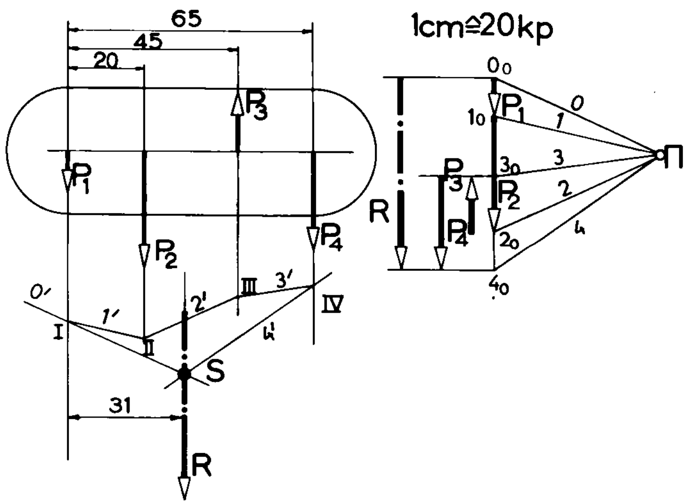
γ) Η ***φορά της*** καθορίζεται με διεύθυνση από το πρώτο σημείο του δυναμοπολυγώνου 0_0 προς το τελευταίο 2_0.

Συμπέρασμα.

Η συνισταμένη δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων έχει μέγεθος ίσο με τη διαφορά τους, βρίσκεται έξω από τις δύο δυνάμεις προς την πλευρά της μεγαλύτερης και έχει την ίδια φορά με αυτή.

Παράδειγμα 3.

Να βρεθεί η συνισταμένη κατά μέγεθος, θέση και φορά των παραλλήλων δυνάμεων P_1 = 10 kp, P_2 = 30 kp, P_3 = 15 kp και P_4 = 25 kp του σχήματος 4.1η.



Σχ. 4.1η.

Λύση.

Κατασκευάζομε το δυναμοπολύγωνο. Επειδή οι δυνάμεις είναι παράλληλες μεταξύ τους, το δυναμοπολύγωνο αποτελεί μια ευθεία γραμμή 0_0 4_0.

Εκλέγομε τον πόλο Π, φέρομε τις πολικές ακτίνες 0, 1, 2, 3, 4 και κατασκευάζομε το σχοινοπολύγωνο 0′, 1′, 2′, 3′ και 4′.

Βρίσκομε τη συνισταμένη R.

α) ***Το μέγεθός της*** μας δίνεται από την κλείουσα 0_0 4_0 του δυναμοπολυγώνου, δηλαδή την ευθεία που ενώνει την αρχή της πρώτης και το τέλος της τελευταίας δυνάμεως του δυναμοπολυγώνου. Το μήκος της ευθείας αυτής είναι 2,5 cm, άρα το ***μέγεθός της*** είναι 50 kp.

β) ***Η ευθεία ενέργειάς της*** είναι παράλληλη προς την ευθεία 0_0 4_0 δηλαδή παράλληλη προς τις δυνάμεις P_1, P_2 και διέρχεται από το σημείο τομής S των ακραίων πλευρών του σχοινοπολυγώνου 0′ και 4′.

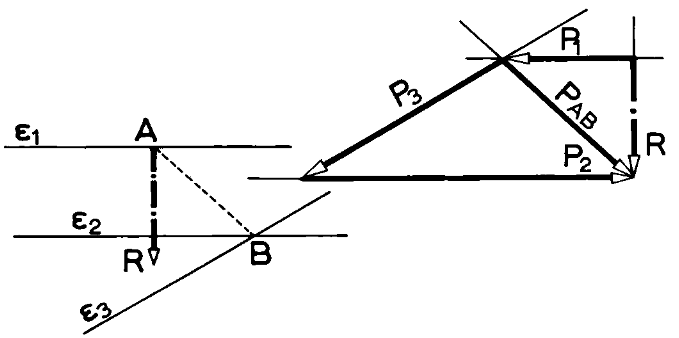
γ) ***Η φορά της*** καθορίζεται από το πρώτο σημείο 0_0 του δυναμοπολυγώνου προς το τελευταίο 4_0.

4.2 Ανάλυση.

Μια δύναμη R μπορεί να αναλυθεί σε τρεις συνιστωσες κατά τις ευθειες ενέργειας ε_1, ε_2 και ε_3. Δεν θα πρέπει όμως από τις ευθείες ενέργειας της R και των 3 συνιστωσών να τέμνονται περισσότερες από δύο στο ίδιο σημείο.

Μπορούμε να απλοποιήσομε το πρόβλημα, ώστε να καταλήξομε στην ανάλυση μιας δυνάμεως σε δύο συνιστώσες· η λύση του προβλήματος αυτού ειναι γνωστή.

Για να το κάνομε αυτό βρίσκομε το σημείο Α, όπου τέμνεται η μία ευθεία ενέργειας, ας πουμε η ε_1, με τη δύναμη R. Βρίσκομε επίσης και το σημειο Β, όπου τέμνονται οι δύο άλλες ευθείες ενέργειας (σχ. 4.2α).



Σχ. 4.2α.

Εν συνεχεία φέρομε τη βοηθητική ευθεία ΑΒ. Αναλύομε σύμφωνα με όσα γνωρίζομε τη δύναμη R κατά τις διευθύνσεις ε_1 και ΑΒ, κατασκευάζοντας ένα δυναμοπολύγωνο. Στο δυναμοπολύγωνο η φορά των συνιστωσών πρέπει να ειναι αντίθετη από τη φορά της συνισταμένης. Η P_1 είναι τελική συνιστώσα κατά την ε_1.

Αναλύομε ύστερα την P_{AB} κατά τις διευθύνσεις ε_2 και ε_3 κατασκευάζοντας επίσης δυναμοπολύγωνο. Προκύπτουν έτσι και οι συνιστώσες P_2 και P_3.

Κατά τον ίδιο βασικό τρόπο λύνεται το πρόβλημα, όταν δίνεται η δύναμη R και ζητειται να βρεθούν οι τρεις δυνάμεις P_1, P_2, P_3 κατά τις ευθείες ενέργειας ε_1, ε_2, ε_3 αντιστοίχως, έτσι ώστε οι τέσσερις δυνάμεις να βρίσκονται σε ισορροπία. Πρέπει όμως να προσέχομε ότι, όταν υπάρχει ισορροπία, το δυναμοπολύγωνο ειναι κλειστό, δηλαδή όλα τα βέλη των δυνάμεων ακολουθουν την ίδια φορά, δηλαδή το τέλος της μιας δυνάμεως αποτελεί αρχή της επόμενης κ.ο.κ.

Παράδειγμα.

Δίνεται η κλίμακα (σκάλα) του σχήματος 4.2β(α), η οποία στηρίζεται στο ανώτερο και κατώτερο άκρο της με τροχούς. Κάτω από το βάρος ενός ανθρώπου R = 75 kp, η σκάλα θα μετακινιόταν αν δεν υπηρχε το ελατήριο ΓΕ, που στηρίζεται στο σημειο Ε στον τοιχο.

Ζητειται να βρεθούν αντιδράσεις των σημείων στηρίξεων Α και Β και η δύναμη του ελατηρίου ΓΕ.

Λύση.

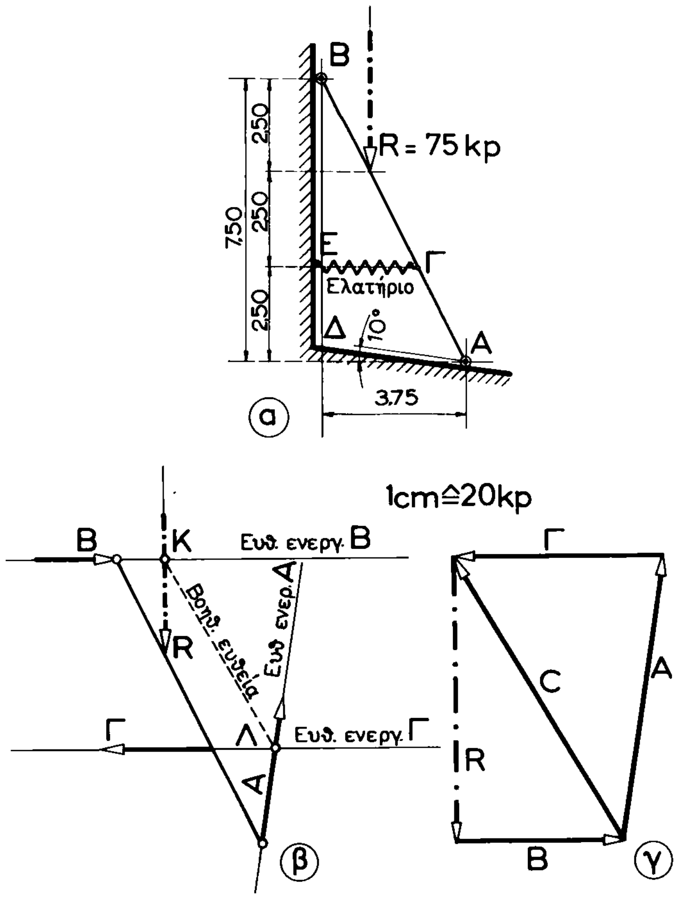
Γνωστά είναι το μέγεθος, η ευθεία ενέργειας και η φορά της δυνάμεως R, η ευθεία ενέργειας της αντιδράσεως Α, που είναι κάθετη στο επίπεδο κυλίσεως ΑΔ, η ευθεία ενέργειας της αντιδράσεως Β, που είναι κάθετη στο επίπεδο ΒΔ, καθώς επίσης και η ευθεία της δυνάμεως του ελατηρίου Γ.

Ώστε το πρόβλημα περιορίζεται πια στο να βρεθούν τρεις δυνάμεις Α, Β και Γ, των οποίων γνωρίζομε μόνο τις ευθείες ενέργειας. Οι δυνάμεις αυτές πρέπει να έχουν μέγεθος και φορά τέτοια, ώστε να ισορροπούν με την R.

Στο σχήμα 4 . 2 β (β) έχομε την κλίμακα με τις δυνάμεις που δρουν επάνω της.

Για να βρεθούν οι άγνωστες δυνάμεις Α, Β, Γ εργαζόμαστε ως εξής:

1) Προεκτείνομε την ευθεία ενέργειας της δυνάμεως R, μέχρι που να τμήσει μια από τις δοσμένες ευθείες ενέργειας, έστω της δυνάμεως Β, στο σημείο Κ. Προεκτείνομε ύστερα τις δύο άλλες ευθείες ενέργειας των δυνάμεων Α και Γ, μέχρι που να τμηθούν στο σημείο Λ. Ενώνομε τα σημεία Κ και Λ, οπότε προκύπτει η βοηθητική ευθεία ΚΛ.



Σχ. 4.2β.

2) Κατασκευάζομε το κλειστό δυναμοπολύγωνο από τη δύναμη R και τις δύο δυνάμεις, που έχουν ευθειες ενέργειας τη Β και τη βοηθητική ΚΛ [σχ. 4 . 2 β (γ)]. Το δυναμοπολύγωνο ειναι κλειστό, δηλαδή όλες οι δυνάμεις, οι οποιες το απαρτίζουν, έχουν τη ίδια φορά περιστροφης, επειδή οι τρεις δυνάμεις ισορροπουν. Με τον τρόπο αυτό βρέθηκε το μέγεθος της αντιδράσεως Β και της βοηθητικης δυνάμεως C.

3) Αναλύομε τη δύναμη C στις συνιστωσες, που έχουν ευθειες ενέργειας τις Α και Γ. Επειδή πρόκειται για ανάλυση, η φορά περιστροφης των συνιστωσων Α και Γ ειναι αντίθετη από τη φορά της συνισταμένης C. Προκύπτει έτσι:

$$A = 76{,}0 \text{ kp}, \; B = 44{,}1 \text{ kp}, \; \Gamma = 57{,}3 \text{ kp}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΕΣ ΤΥΧΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη μέθοδο των προβολών (αναλυτική).

5.1 Σύνθεση και ισορροπία.

Δίνονται οι συνεπίπεδες δυνάμεις P_1, P_2, P_3... $P_ν$. Για κάθε μια ειναι γνωστό το μέγεθός της P, το σημείο εφαρμογής της A με συντεταγμένες x και y, η ευθεία ενέργειας και η φορά της, που δίνονται με τη γωνία α.

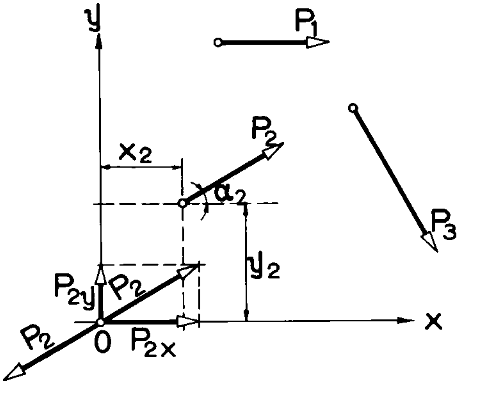
Ζητείται η συνισταμένη τους.

Για να την βρούμε μεταθέτομε κάθε δύναμη στην αρχή 0 ενός τυχαίου συστήματος συντεταγμένων, π.χ. την P_2, οπότε προκύπτει μια δύναμη P_2 στο 0 και μια ροπή:

$$M_2 = P_2 \,.\, συνα_2 \,.\, y_2 - P_2 \,.\, ημα_2 \,.\, x_2.$$

Με αυτό τον τρόπο παίρνομε ένα σύστημα δυνάμεων P_1, P_2, P_3...$P_ν$ με κοινό σημείο εφαρμογής 0 και ένα σύστημα ζευγών δυνάμεων με ροπή M_1, M_2, M_3...$M_ν$.

Στο σχήμα 5.1α σχεδιάσθηκε η μετάθεση μόνο της P_2.



Σχ. 5.1α.

Το πως βρίσκομε τη συνισταμένη πολλών συντρεχουσών δυνάμεων το γνωρίζομε από την παράγραφο 3 . 3, όπου είπαμε ότι όλες οι συνιστώσες κατά τον άξονα x συνθέτονται στη δύναμη:

$$\Sigma x = R_x = \Sigma P \sigma \upsilon \nu \alpha = P_1 \ \sigma \upsilon \nu \alpha_1 + P_2 \ \sigma \upsilon \nu \alpha_2 + P_3 \sigma \upsilon \nu \alpha_3 + ... + P_\nu \sigma \upsilon \nu \alpha_\nu.$$

Κατά τον άξονα y αντίστοιχα:

$$\Sigma_y = R_y = \Sigma P \eta \mu \alpha = P_1 \eta \mu \alpha_1 + R_2 \eta \mu \alpha_2 + P_3 \eta \mu \alpha_3 + ... + P_\nu \eta \mu \alpha_\nu.$$

Οι δυνάμεις R_x και R_y συνθέτονται στην τελική συνισταμένη R, η οποία έχει:

Μέγεθος: $R = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$

Φορά: $\eta \mu \alpha_0 = \dfrac{\Sigma y}{R}$, $\sigma \upsilon \nu \alpha_0 = \dfrac{\Sigma x}{R}$, $\varepsilon \varphi \alpha_0 = \dfrac{\Sigma y}{\Sigma x}$

Σημείο εφαρμογής: την αρχή των συντεταγμένων 0.

Η ροπή της δυνάμεως P_2 ως προς την αρχή των συντεταγμένων 0 ισούται με:

$$M_2 = P_2 \,.\, \sigma \upsilon \nu \alpha_2 \,.\, y_2 - P_2 \,.\, \eta \mu \alpha_2 \,.\, x_2 = P_{2x} \,.\, y_2 - P_{2y} \,.\, x_2.$$

Αντίστοιχα:

$$M_1 = P_{1x} \,.\, y_1 - P_{1y} \,.\, x_1 \ \kappa \lambda \pi.$$

Η συνισταμένη του συστήματος των ροπών είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους ροπών, δηλαδή:

$$\Sigma M = M_1 + M_2 + M_3 + ... + M_\nu.$$

Επομένως κατά τον αναλυτικό τρόπο συνθέσεως πολλών συνεπιπέδων δυνάμεων προκύπτει μια συνισταμένη R που δρα στην αρχή 0 ενός οποιουδήποτε συστήματος συντεταγμένη με γωνίαν α_0 ως προς τον άξονα x και ένα ζεύγος δυνάμεων με ροπή M.

Κατά τη σύνθεση αυτή μπορούν να εμφανισθούν τέσσερις περιπτώσεις.

1) $R>0$, $M \neq 0$, που είναι η γενική περίπτωση και σημαίνει ότι η συνισταμένη δεν διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων 0.

2) $R>0$, $M = 0$, δηλαδή η συνισταμένη διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων 0.

3) $R = 0$, $M \neq 0$, δηλαδή δεν υπάρχει συνισταμένη δύναμη, αλλά μόνο ένα ζεύγος δυνάμεων.

4) $R = 0$, $M = 0$, δηλαδή οι δοσμένες συνεπίπεδες δυνάμεις έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν και στατική ροπή ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο μηδενική· επομένως το σώμα στο οποίο δρουν ισορροπεί.

Γνωρίζομε όμως ότι $R = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$.

Στην εξίσωση αυτή το R ισούται τότε και μόνο με το μηδέν, όταν συγχρόνως $\Sigma x = 0$ και $\Sigma y = 0$.

Επομένως, πολλές συνεπίπεδες δυνάμεις ισορροπούν όταν:

α) $\Sigma x = 0$ (Σx = αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών όλων των δυνάμεων ως προς τον άξονα x).

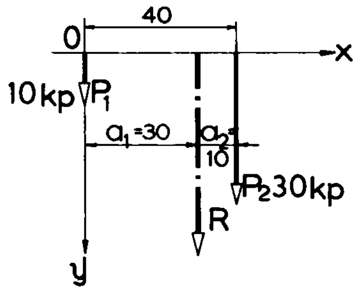
β) $\Sigma y = 0$ (Σy = αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών όλων των δυνάμεων ώς προς τον άξονα y).
γ) $\Sigma M = 0$ (ΣM = αλγεβρικό άθροισμα των στατικών ροπών των δυνάμεων ως προς τυχόν σημείο 0).

Οι τρεις αυτές εξισώσεις καλούνται ***συνθήκες*** ισορροπίας στο επίπεδο και μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Πολλές συνεπίπεδες δυνάμεις ισορροπούν, όταν το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών όλων των δυνάμεων ως προς τους άξονες x και y ισούται με το μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των στατικών ροπών όλων των δυνάμεων ως προς τυχόν σημείο 0 ισούται με το μηδέν.

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί το μέγεθος, η θέση και η διεύθυνση της συνισταμένης των παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων $P_1 = 10$ kp και $P_2 = 30$ kp (σχ. 5.1β).



Σχ. 5.1β.

Λύση.

Λαμβάνομε ένα τυχόν σύστημα συντεταγμένων, το x0y.

Για να περιορίσομε τις αριθμητικές πράξεις δεχόμαστε ότι ο άξονας y του συστήματος συμπίπτει με τη δύναμη P_1.

Υπολογίζομε τώρα τις συνιστώσες κατά τους άξονες x καί y.

$\Sigma x = P_1 \,.\, \text{συν}\, 90^\circ + P_2 \,.\, \text{συν}\, 90^\circ = 10 \times 0 + 30 \times 0 = 0.$

$\Sigma y = P_1 \,.\, \text{ημ}\, 90^\circ + P_2 \,.\, \text{ημ}\, 90^\circ = 10 \times 1 + 30 \times 1 = 40$ kp.

$\Sigma x = 0$ σημαίνει ότι η συνισταμένη είναι κάθετη στον άξονα των x, άρα παράλληλη προς τον άξονα των y.

Υπολογίζομε τώρα τις στατικές ροπές ως προς 0:

$\Sigma M = M_1 + M_2 = P_1 \,.\, 0 + P_2 \,.\, 40 = 10 \times 0 + 30 \times 40 = 1200$ kpcm.

Συμπέρασμα.

Πρώτο: Οι δύο δυνάμεις P_1 και P_2: α) είτε μπορούν να αντικατασταθούν από μία συνισταμένη $R = 40$ kp (που διέρχεται από το 0, συμπίπτει και έχει την ίδια διεύθυνση με τον άξονά της + y) και από ένα ζεύγος δυνάμεων δεξιόστροφο με ροπή $M = +1200$ kpcm, β) είτε μπορούν να αντικατασταθούν από μόνη τη δύναμη R, που δεν διέρχεται όμως πια από το 0, αλλά από σημείο που απέχει από το 0 απόσταση $a = M/R = 1200/40 = +30$ cm, δηλαδή δεξιά από το 0.

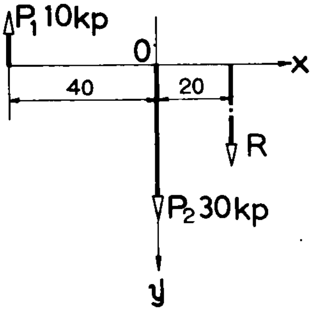
Δεύτερο: Η ευθεία ενέργειας της συνισταμένης δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων χωρίζει τη μεταξύ τους απόσταση σε λόγο αντίστροφα ανάλογο προς το μέγεθος των δυνάμεων, δηλαδή:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

Αν $P_1 = P_2$ τότε και $\alpha_1 = \alpha_2$, δηλαδή η συνισταμένη διέρχεται από το μέσο της αποστάσεως μεταξύ των δυνάμεων.

Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί το μέγεθος, η θέση και η φορά της συνισταμένης των παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων $P_1 = -10$ kp και $P_2 = 30$ kp (σχ. 5.1γ).



Σχ. 5.1γ.

Λύση.

Λαμβάνομε τυχόν σύστημα συντεταγμένων, έστω ένα όπου ο άξονας των y να συμπίπτει με τη δύναμη P_2.

Υπολογίζομε τώρα τις συνιστωσες κατά τους άξονες x και y:

$\Sigma x = P_1 \,.\, \text{συν}\, 90^\circ + P_2 \,.\, \text{συν}\, 90^\circ = 10 \times 0 + 30 \times 0 = 0.$

$\Sigma y = P_1 \,.\, \text{ημ}\, 90^\circ + P_2 \,.\, \text{ημ}\, 90^\circ = -10 \times 1 + 30 \times 1 = +20$ kp.

$\Sigma x = 0$ σημαίνει ότι η συνισταμένη P ειναι παράλληλη προς τον άξονα των y.

Υπολογίζομε τώρα τις συνιστωσες των ροπων ως προς 0:

$\Sigma M = M_1 + M_2 = P_1 \,.\, 40 + P_2 \,.\, 0 = 10 \times 40 + 30 \times 0 = 400$ kpcm.

Συμπέρασμα.

Οι δυνάμεις P_1 και P_2 α) είτε μπορουν να αντικατασταθουν από μια συνισταμένη $R = 20$ kp (που διέρχεται από το 0, έχει ευθεία ενέργεια που συμπίπτει με τον άξονα των y και διεύθυνση των + y) και από ένα δεξιόστροφο ζευγος δυνάμεων με ροπή $M = +400$ kpm, β) είτε μπορουν να αντικατασταθουν από μόνη τη δύναμη $R = 20$ kp, η οποία δεν διέρχεται πια από το 0, αλλά σε απόσταση:

$$\alpha = \frac{M}{R} = \frac{+400}{20} = +20 \text{ cm, δηλαδή δεξιά από το 0.}$$

Παράδειγμα 3.

Να βρεθει αναλυτικά το μέγεθος, η θέση και η φορά της συνισταμένης των παραλλήλων δυνάμεων $P_1 = 10$ kp, $P_2 = 30$ kp, $P_3 = -15$ kp και $P_4 = 25$ kp (σχ. 5.1δ).

Λύση.

Λαμβάνομε ένα οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Συνήθως φροντίζομε ο ένας άξονας να συμπίπτει με μία δύναμη. Έτσι λιγοστεύομε τις αριθμητικές πράξεις.

Έστω ότι συμπτίπτει με την P_1.

Πρέπει τώρα να υπολογίσομε τις συνιστώσες των δυνάμεων και τους άξονες x και y.

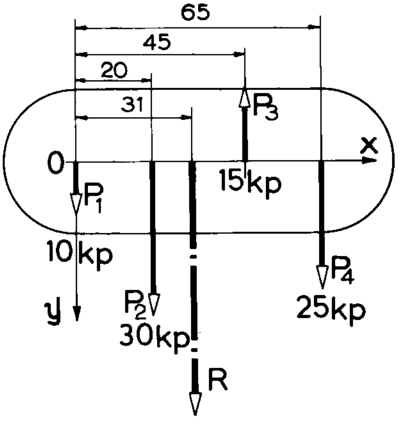
$\Sigma x = P_1 \,.\, \text{συν}\, 90° + P_2 \,.\, \text{συν}\, 90° - P_3 \,.\, \text{συν}\, 90° + P_4 \,.\, \text{συν}\, 90° = 0.$

$\Sigma y = P_1 \,.\, \text{ημ}90° + P_2 \,.\, \text{ημ}90° - P_3 \,.\, \text{ημ}90° + P_4 \,.\, \text{ημ}90° = 10 \times 1 + 30 \times 1 - 15 \times 1 + 25 \times 1 = 50$ kp.

Επειδή $\Sigma x = 0$, συμπεραίνομε ότι η συνισταμένη ειναι παράλληλη προς τον άξονα y.

Υπολογισμός των στατικων ροπών ως προς 0:

$\Sigma M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = P_1 \,.\, 0 + P_2 \,.\, 20 - P_3 \,.\, 45 + P_4 \,.\, 65 = 10 \times 0 + 30 \times 20 - 15 \times 45 + 25 \times 65 = +\ 1\ 550$ kpcm.



Σχ. 5.1δ.

Συμπέρασμα:

Οι τέσσερις δυνάμεις P_1, P_2, P_3 και P_4 μπορουν να αντικατασταθούν από μία δύναμη R = 50 kp (που διέρχεται από το 0, συμπίπτει και έχει το ίδιο βέλος με τον άξονα των y) και από ένα ζευγος δυνάμεων δεξιόστροφο με ροπή M = + 1550 kpcm.

Αν θέλομε μπορουμε να αντικαταστήσομε το R και M με μια μόνο δύναμη R, η οποία όμως δεν διέρχεται από το 0, αλλά από απόσταση ίση προς

$\alpha = M/R = +1550$ kpcm/50 kp $= +\ 31$ cm, δηλαδή δεξιά από το 0.

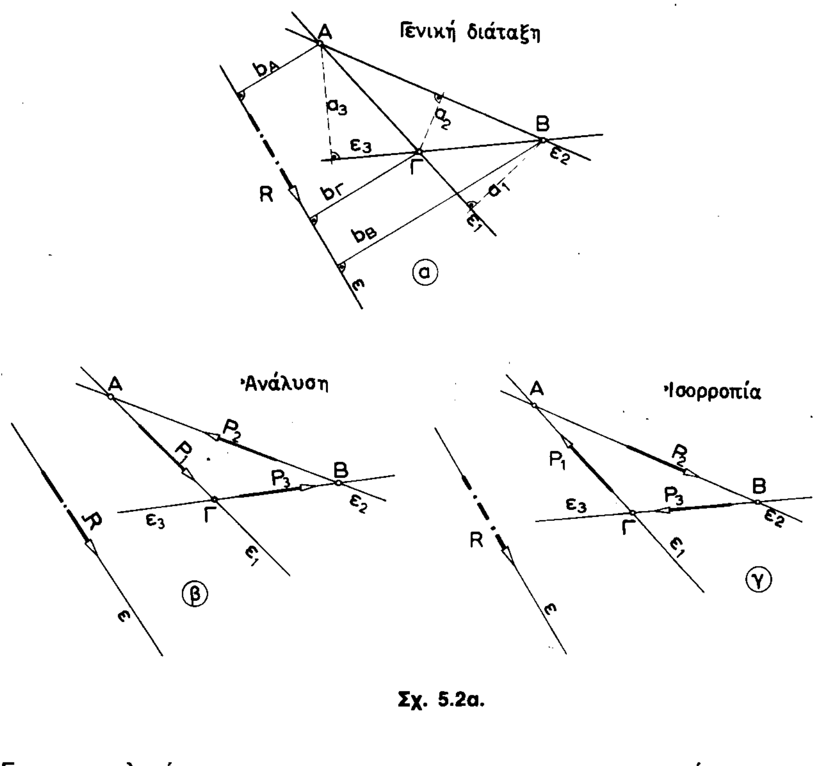
5.2 Ανάλυση μιας δυνάμεως σε τρεις συνιστώσες.

Δίνεται η δύναμη R και έστω ε η ευθεία ενέργειάς της. Δίνονται επίσης οι ευθειες ενέργειας ε_1, ε_2, ε_3 επάνω στις οποίες δρουν οι ζητούμενες συνιστώσες P_1, P_2, και P_3 αντίστοιχα (σχ. 5.2α).

Για να ειναι δυνατή η ανάλυση της P σε τρεις συνιστώσες απαιτείται οι ευθειες ενέργειας ε, ε_1, ε_2 και ε_3 να διέρχονται ***μόνο ανά δύο*** από το ίδιο σημείο.

Για να βρουμε τις άγνωστες συνιστώσες εργαζόμαστε ως εξής: Προεκτείνομε τις ευθείες ενέργειας ε_1, ε_2, ε_3, μέχρι που να τμηθούν ανά δύο στα σημεία Α, Β, Γ.

Στη συνέχεια βρίσκομε τις αποστάσεις των σημείων Α, Β, Γ, από την ευθεία ενέργειας της R, δηλαδή αντίστοιχα τις b_A, b_B και b_Γ [σχ. 5.2α(α)].



Σχ. 5.2α.

Για να υπολογίσομε τις συνιστωσες χρησιμοποιουμε την πρόταση των ροπων κατά την οποία «η στατική ροπή της συνισταμένης ως προς ένα σημειο ισουται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσων» (παράγρ. 1 . 4).

Αν επιτύχομε να εκλέγομε κάθε φορά τέτοιο σημείο, ώστε η ροπή δύο συνιστωσων ως προς αυτό να είναι μηδέν, τότε η ροπή της συνισταμένης ως προς το σημείο αυτό, που μας είναι απόλυτα γνωστή θα ισουται με τη ροπή μιας μόνο συνιστώσας. Από τη σχέση αυτή υπολογίζομε εύκολα, όπως θα δουμε αμέσως, το μέγεθος και τη φορά της συνιστώσας.

Υπολογισμός τής P_1. Δεχόμαστε ως σημειο στροφης το Β. Η ροπή των μέχρι τη στιγμή αυτή αγνώστων μας P_2 και P_3 ως προς το σημείο Β είναι μηδέν, γιατί διέρχονται από το Β Ροπή ως προς το Β αναπτύσσει μόνον η P_1.

Άρα $R \cdot b_B = P_1 \cdot a_1$, από την οποία προκύπτει:

$$P_1 = R \frac{b_B}{a_1}$$

Η φορά περιστροφής της P_1 ως προς το Β πρέπει να είναι η ίδια με τη φορά περιστροφής της R ως προς το Β [σχ. 5 . 2α (β)].

Υπολογισμός της P_2. Δεχόμαστε ως σημείο στροφής το Γ. Η ροπή των συνιστωσών P_1 και P_3 ως προς το Γ είναι μηδέν. Άρα $R \cdot b_Γ' = P_2 \cdot a_2$, από την οποία προκύπτει:

$$P_2 = R \frac{b_Γ}{a_2}$$

Η φορά περιστροφής της P_2 ως προς το σημείο Γ πρέπει να είναι η ίδια με τη φορά περιστροφής της R ως προς το ίδιο σημείο Γ.

Υπολογισμός της P_3. Σημείο στροφής το Α. $R.b_A = P_3 \cdot a_3$.

$$P_3 = R \frac{b_A}{a_3}$$

Η φορά περιστροφής της P_3 ως προς το σημείο Α συμπίπτει με τη φορά περιστροφής της R ως προς το ίδιο σημείο.

Κατά τον ίδιο τρόπο λύνεται το πρόβλημα, αν ζητείται η ισορροπία των δυνάμεων R, P_1, P_2 καί P_3.

Στην περίπτωση όμως αυτή η φορά περιστροφής της δυνάμεως P_1 ως προς Β πρέπει να είναι αντίθετη από την φορά περιστροφής της R ως προς Β κ.ο.κ. [σχ. 5 . 2α (γ)].

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η κλίμακα (σκάλα) του σχήματος 5 . 2β, η οποία στηρίζεται στο ανώτερο και το κατώτερο άκρο της με τροχούς.

Κάτω από το βάρος ενός ανθρώπου 75 kp η κλίμακα θα είχε μετακινηθει αν δεν υπηρχε το συρματόσχοινο ΓΔ.

Ζητειται να βρεθούν οι αντιδράσεις των στηρίξεων Α και Β, καθώς και η δύναμη του συρματόσχοινου Γ.

Λύση.

Γνωστά είναι το μέγεθος, η ευθεία ενέργειας και η φορά της δυνάμεως R, η ευθεία ενέργειας $ε_A$ της αντιδράσεως Α, που είναι κάθετη στο επίπεδο κυλίσεως ΑΓ, η ευθεία ενέργειας $ε_B$ της αντιδράσεως Β, που ειναι κάθετη στο επίπεδο κυλίσεως ΒΓ, η ευθεία ενέργειας $ε_Γ$ της αντιδράσεως του συρματόσχοινου, η οποία μόνο κατά την ΓΔ μπορεί να ασκηθεί.

Προεκτείνομε τις ευθείες ενέργειας ε_A, ε_B και ε_Γ και σχηματίζομε το τρίγωνο ΚΛΜ.

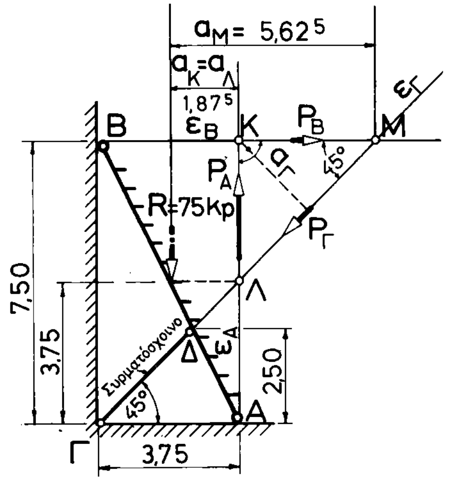
Η σειρά υπολογισμού των αντιδράσεων P_A, P_B και P_Γ είναι η εξής:

Υπολογισμός τῆς P_B.

Παίρνομε ροπές ως προς Λ.

$$R \cdot \alpha_K = P_B \cdot (K\Lambda), \text{ άρα } P_B = R \times \frac{\alpha_K}{(K\Lambda)} = 75 \times \frac{1{,}875}{3{,}75} = 37{,}5 \text{ kp.}$$

Επειδή πρόκειται για ισορροπία δυνάμεων, η φορά περιστροφής της P_B γύρω από το σημείο Λ πρέπει να είναι αντίθετη από τη φορά περιστροφης της R γύρω από το ίδιο σημείο.



Σχ. 5.2β.

Υπολογισμός της P_A.

Παίρνομε ροπές ως προς Μ.

$$R \cdot \alpha_M = P_A \cdot (KM) \text{ άρα } P_A = R \; \frac{\alpha_M}{(KM)} = 75 \times \frac{5{,}625}{3{,}75} = 112{,}5 \text{ kp.}$$

Η φορά περιστροφής της P_A ως προς Μ είναι αντίθετη από τη φορά περιστροφής της R ως προς Μ, γιατί πρόκειται περί ισορροπίας.

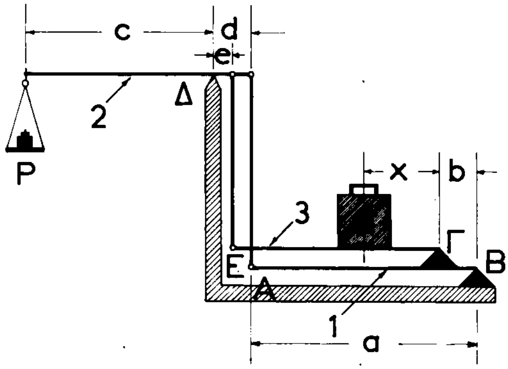
Υπολογισμός της P_Γ.

Παίρνομε ροπές ως προς Κ.

$$R \cdot \alpha_K = P_\Gamma \cdot \alpha_\Gamma, \text{ άρα } P_\Gamma = R \; \frac{\alpha_K}{\alpha_\Gamma} = 75 \times \frac{1{,}875}{0{,}707} \times 3{,}75 = 53 \text{ kp.}$$

Παράδειγμα 2.

Να υπολογισθεί η σχέση μεταξύ του βάρους G και των σταθμών P της πλάστιγγας του σχήματος 5.2γ. Για ποιά σχέση αποστάσεων έχομε την περίπτωση δεκαδικού ζυγού; (Ο ζυγός λέγεται δεκαδικός, όταν τα σταθμά που τοποθετούμε είναι το 1/10 του βάρους που θέλομε να ζυγίσομε, δηλαδή P = 1/10 G).



Σχ. 5.2γ.

Λύση.

Εξετάζεται η ισορροπία του κάθε τμήματος χωριστά (σχ. 5.2δ).

Τμημα 1.

$\Sigma y = A + B - \Gamma = 0$ (α)

$\Sigma M_B = A \cdot a - \Gamma \cdot b = 0$ (β)

Τμημα 2.

$\Sigma y = \Delta - A - E - P = 0$ (γ)

$\Sigma M_\Delta = Ee + Ad - Pc = 0$ (δ)

Τμήμα 3.

$\Sigma y = E + \Gamma - G = 0$ (ε)

$\Sigma M_\Gamma = E\,(d + a - e - b) - Gx = 0$ (ζ)

Μια και όλες οι αποστάσεις a, b c, d και e είναι γνωστές, οι 6 πρωτοβάθμιες εξισώσεις (α έως ζ) είναι αρκετές για να προσδιορισθούν οι άγνωστες δυνάμεις A, B, Γ, Δ, E και P. Εδώ όμως ενδιαφέρει μόνο πόσο είναι το P (τα σταθμά). Από την εξίσωση (δ) προκύπτει:

$$P = \frac{A \cdot d + E \cdot e}{c} \qquad (1)$$

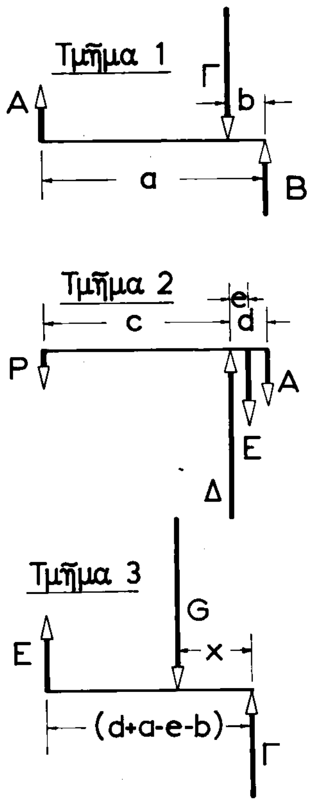
Από την εξίσωση (β) προκύπτει: $A = \Gamma \dfrac{b}{a}$ Την τιμή αυτή του A θέτομε στην παραπάνω εξίσωση (1), που παίρνει τη μορφή:

$$P = E\frac{e}{c} + \Gamma\,\frac{b\,d}{a\,c} \qquad (2)$$

Από την εξίσωση (ζ) προκύπτει Ε = G x/a + d — b — e και από την εξίσωση (ε) σε συνδυασμό με τη (ζ) η:

$$\Gamma = G + E = G\left[1 + \frac{x}{B3a + d - b - e}\right]$$

Αν οι δύο τελευταίες αυτές τιμές τεθούν στη (2), προκύπτει το P ως συνάρτηση των γνωστών a, b, c, d, e και G αλλά και του x, που θα πρέπει να αποφεύγεται, γιατί μόνον αν το P ειναι ανεξάρτητο από το x δεν θα μας ενδιαφέρει



Σχ. 5.2δ.

που θα τοποθετηθεί το φορτίο πάνω στην πλάστιγγα. Για να αποφύγομε λοιπόν το x θέτομε πάντοτε b/a = e/d, οπότε η εξίσωση (2) μετασχηματίζεται σε P = E e/c + Γ e/c = e/c (E + Γ) και σε συνδυασμό με την εξίσωση (ε) γίνεται:

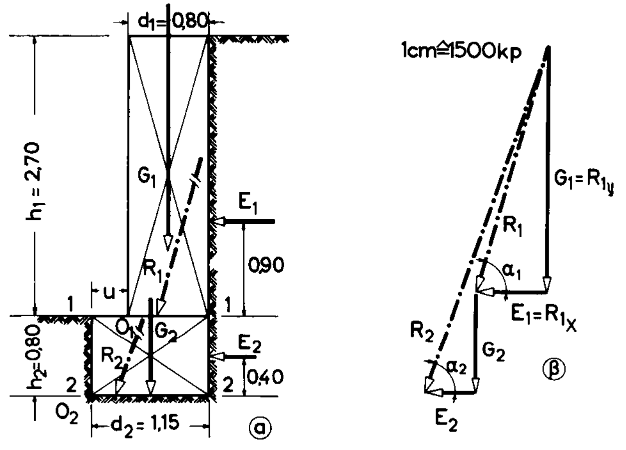
$$P = \frac{e}{c}\,G \qquad (3)$$

Ο ζυγός γίνεται δεκαδικός, όταν στην εξίσωση (3) e/c = 0,1, οπότε P = 0,1 G.

Παράδειγμα 3.

Επάνω στον τοίχο αντιστηρίξεως χωμάτων του σχήματος 5.2ε ενεργούν σε κάθε μέτρο μήκους οι ωθήσεις $E_1 = 1400$ kp, $E_2 = 900$ kp και το ίδιο του βάρος G_1 και G_2.

Να βρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων στη στάθμη 1—1 της επάνω επιφάνειας του θεμελίου και στη στάθμη 2—2 της επιφάνειας του εδάφους θεμελιώσεως.



Σχ. 5.2ε.

Λύση.

Δεχόμαστε ότι ο τοίχος και το θεμέλιο θα κατασκευασθούν από λιθοδομή με ειδικό βάρος $\gamma = 2{,}2$ Mp/m^3. Για μήκος τοίχου 1,0 m προκύπτει ότι:

$$G_1 = 0{,}80 \times 2{,}70 \times 2200 — 4750 \text{ kp και}$$
$$G_2 = 1{,}15 \times 0{,}80 \times 2200 — 2020 \text{ kp.}$$

Για την εύρεση της συνισταμένης θα εφαρμόσομε τις δύο γνωστές μας μεθόδους.

α) Αναλυτική μέθοδος.

Από όσα μάθαμε στην παράγραφο 5.1, η συνισταμένη στη στάθμη 1 — 1 είναι:

$$R_1 = \sqrt{^2R_{1x} + R^2_{1y}} = \sqrt{E^2_1 + G^2_1} = \sqrt{1400^2 + 4750^2} = 4950 \text{ kp.}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha_1 = \frac{G_1}{E_1} = \frac{4750}{1400} = 3{,}39 \text{ καί } \alpha_1 = 73° \, 36'.$$

Καθορίζομε το σημείο φαρμογής της R_1, αν λάβομε τις ροπές ως προς τυχόν σημείο της στάθμης 1 — 1. Για το σκοπό αυτό υπολογίζομε τις ροπές ως προς το 0_1. Για να απλοποιήσομε τους υπολογισμούς μας αναλύομε τη συνισταμένη R_1, στη στάθμη 1 — 1, σε μια κατακόρυφη συνιστώσα R_1, στη στάθμη R_{1y} και μια οριζόντια R_{1x} και έστω x_1 η απόσταση της R_{1y} από το 0_1.

Αφού η ροπή της συνισταμένης ως προς τυχόν σημείο ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών (παράγρ. 1 . 4) έχομε:

$$R_{1y} \,.\, x_1 + R_{1x} \,.\, 0 = G_1 \frac{d_1}{2} - E_1 \frac{h_1}{3}$$, από την οποία:

$$x_1 = \frac{G_1 \frac{d_1}{2} \quad E_1 \frac{h_1}{3}}{R_{1y}} = \frac{4750 \times 0{,}40 - 1400 \times 0{,}90}{4750} =$$

$$0{,}135 = \frac{d_1}{6}$$

Παρατήρηση.

Οι κανονισμοί κατασκευής λιθοδομών επιβάλλουν να έχομε την απόσταση x_1 μεγαλύτερη ή τουλάχιστο ίση με το 1/6 του πάχους του τοίχου.

Αντίστοιχα στην στάθμη 2 — 2 προκύπτει:

$$R_2 = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 + (G_1 + G_2)^2} =$$

$$\sqrt{(1400 + 900)^2 + (4750 + 2020)^2} = 7150 \text{ kp}.$$

$$\text{εφα}_2 = \frac{G_1 + G_2}{E_1 + E_2} = \frac{6770}{2300} = 2{,}943,\ \alpha_2 = 71^\circ\ 15'$$

Ροπές ως προς 0_2:

$$x_2 = \frac{G_1 \frac{d_1}{2} + \upsilon + G_2 \frac{d_2}{2} - E_1 \frac{h_1}{3} + h_2 - E_2 \frac{h_2}{2}}{G_1 + G_2} =$$

$$\frac{4750 \times 0{,}75 + 2020 \times 0{,}575 - 1400 \times 1{,}70 - 900 \times 0{,}40}{6770} =$$

$$0{,}293 \text{ m} > \frac{d_2}{6} = 0{,}192 \text{ m}.$$

β) Γραφική μέθοδος.

Με κλίμακα 1 cm $\triangleq$ 1500 kp κατασκευάζομε το δυναμοπολύγωνο από τις δυνάμεις E_1, G_1 για να βρούμε τη συνισταμένη R_1 στη στάθμη 1 — 1 και ύστερα το δυναμοπολύγωνο G_1, E_1, G_2, E_2, για να βρουμε τη συνισταμένη R_2 στη στάθμη 2 — 2 [σχ. 5 . 2 ε (β)].

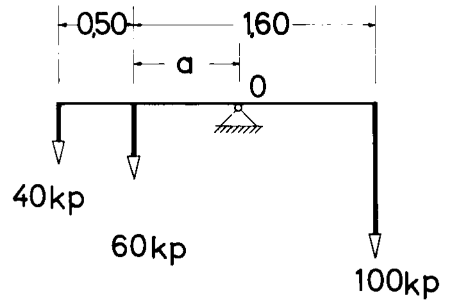
Για τον καθορισμό του σημείου εφαρμογης της συνισταμένης χρησιμοποιουμε το σχοινοπολύγωνο.

5.3 Ασκήσεις.

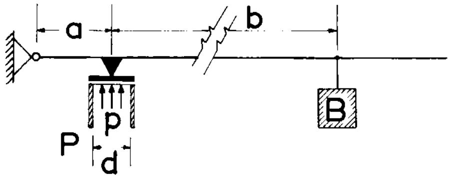
Οι επόμενες ασκήσεις να λυθουν αναλυτικά και γραφικά:

1) Σε μια σιδερένια ράβδο, που μπορει να περιστραφει γύρω από το Ο, ενεργούν οι τρεις δυνάμεις του σχήματος 5.3α. Σε ποιά απόσταση α από τη μεσαία δύναμη πρέπει να τεθεί η στήριξη Ο για να ισορροπεί η ράβδος;

Απάντηση: α = 0,70 m



Σχ. 5.3α.



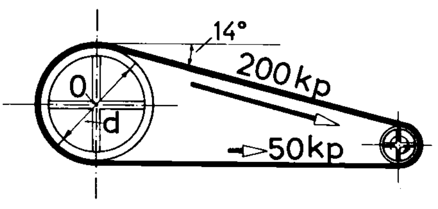
Σχ. 5.3β.

2) Η ασφαλιστική δικλείδα του σχήματος 5 . 3β ανοίγει, όταν η υπερπίεση του ατμού, που βρίσκεται σε αυλό με διάμετρο d = 20 mm, υπερβεί την τιμή p.

Αν η απόσταση α είναι 120 mm και το βάρος Β είναι 12 kp, σε ποιά απόσταση b πρέπει να μετακινήσομε το βάρος αυτό, ώστε η δικλείδα να ανοίγει μόλις η υπερπίεση p υπερβεί τα 20 kp/cm^2;

Απάντηση: b = 508 mm

3) Μια τροχαλία με διάμετρο d = 600 mm περιστρέφεται με έναν ιμάντα. Το επάνω τμήμα του ιμάντα μεταφέρει δύναμη 200 kp και έχει κλίση 14° ως προς την οριζόντια, ενώ το κάτω τμήμα είναι οριζόντιο και έλκεται με δύναμη 50 kp (σχ. 5 . 3γ).



Σχ. 5.3γ.

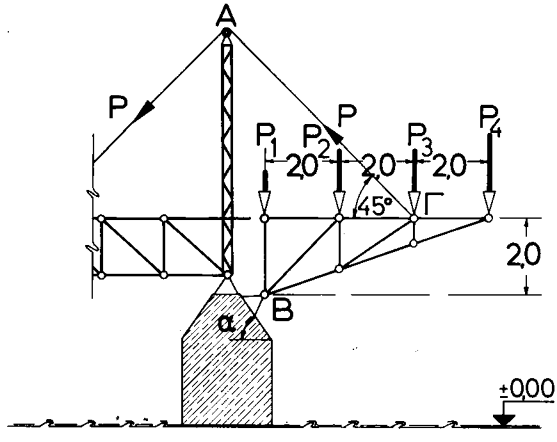
Να υπολογισθούν:

α) Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων του ιμάντα, δηλαδή το μέγεθός της, η γωνία της α ως προς την οριζόντια γραμμή και η απόσταση της x_0 από τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.

β) Η ροπή της συνισταμένης αυτής ως προς 0 καθώς και η ροπή των δύο δυνάμεων του ιμάντα ως προς το 0. Ποιά η διαφορά τους;

Απάντηση: α) $R = 248{,}7$ kp. $\alpha = 11°\ 12'$. $x_0 = 180$ mm.
β) $M_0 = 4500$ kpcm. Καμιά.

4) Το άκρο μεταφορικής ταινίας κατασκευάζεται αρθρωτό γύρω από το B, ώστε να είναι δυνατό να ανεβαίνει και να κατεβαίνει για την ευχερέστερη φόρτωση μικρών πλοίων (σχ. 5 . 3δ). Από το σκελετό της ταινίας διαβιβάζονται στην κατασκευή τα φορτία $P_1 = 400$ kp, $P_2 = P_3 = 800$ kp και $P_4 = 1000$ kp.



Σχ. 5.3δ.

Να υπολογισθούν:

α) Η δύναμη P, που πρέπει να ασκηθεί στο σημείο Γ από το συρματόσχοινο ΑΓ με γωνία 45°, ώστε η κατασκευή να ισορροπεί.

β) Η δύναμη που διαβιβάζεται στην άρθρωση B.

γ) Ποιά πρέπει να είναι η γωνία α, ώστε η B να είναι κάθετη στο υποστήριγμά της;

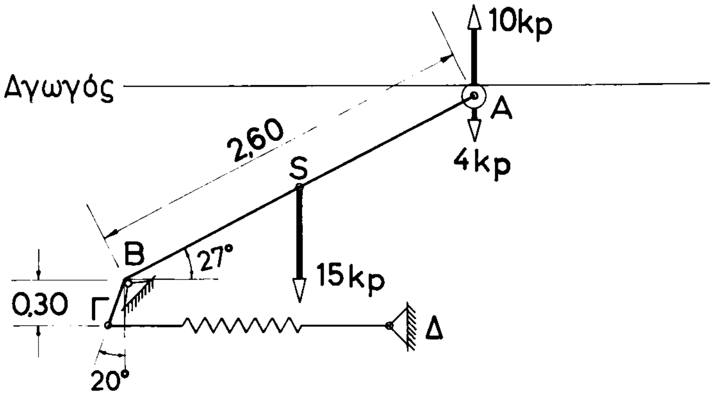
Από τις δύο λύσεις περιγράφομε παρακάτω για διευκόλυνση τη γραφική:

Με το δυναμοπολύγωνο βρίσκεται το μέγεθος της συνισταμένης $R = 3000$ kp των δυνάμεων P_1, P_2, P_3 και P_4 και με το σχοινοπολύγωνο η θέση της. Η ευθεία ενέργειας της δυνάμεως P είναι η ΑΓ.

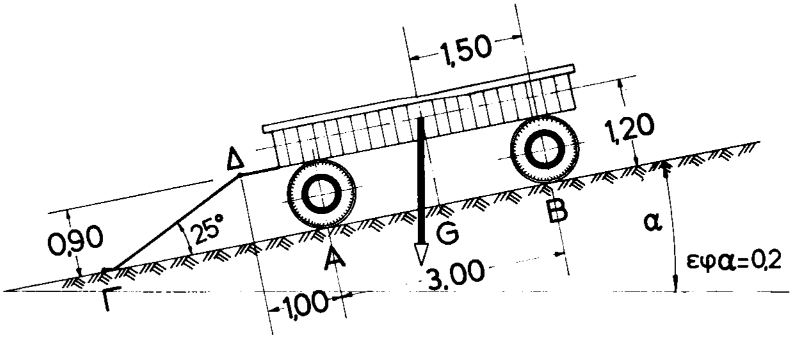
Από το σημείο τομής της ευθείας ενέργειας της P και της R πρέπει να διέρχεται και η αντίδραση B. Το δυναμοπολύγωνο R, P και B πρέπει να είναι κλειστό. Από αυτό προκύπτει $P = 2550$ kp, $B = 2160$ kp ($B_v = 1200$, $B_H = 1800$ kp) και $\alpha = 56°\ 20'$.

5) Η κεραία ενός τρόλλεϋ έχει τη μορφή του σχήματος 5.3ε.

Η μικρή τροχαλία A, για να μην απομακρύνεται από τον αγωγό, πιέζεται επάνω σ' αυτόν με δύναμη 10 kp και κατά την κύλισή της παραλαμβάνει ηλεκτρική ενέργεια. Η πίεση επιτυγχάνεται με το ελατήριο ΓΔ, που τοποθετείται στο άλλο άκρο της περιστρεπτής κεραίας που είναι γύρω στο B. Το ίδιο βάρος της κεραίας είναι 15 kp και δρα στο μέσο S του μήκους AB, ενώ το βάρος της τροχαλίας είναι 4 kp.



Σχ. 5.3ε.



Σχ. 5.3ζ.

Ζητείται η δύναμη που πρέπει να ασκεί το ελατήριο στο Γ.

Απάντηση: Γ = 176,7 kp

6) Η γεωργική «πλατφόρμα» του σχήματος 5 . 3ζ με συνολικό φορτίο, απόβαρο και ωφέλιμο, G = 5000 kp σταθμεύει σε αγροτικό δρόμο με κλίση 20% και συγκρατείται στη θέση της με τη ράβδο ΓΔ.

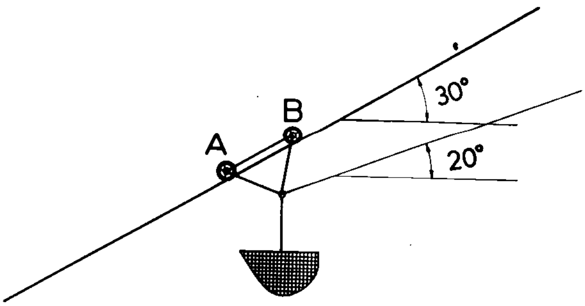
Ζητούνται α) Η φόρτιση των τροχών Α και Β και β) η εσωτερική δύναμη που αναπτύσσεται στη ράβδο ΓΔ.

Απάντηση: α) Α = 1941 kp. Β = 2505 kp. β) ΓΔ = — 1081 kp. (θλίψη)

7) Η εναέρια μεταφορά ενός μεταλλεύματος πραγματοποιείται με βαγόνια, κάθε ένα από τα οποία έχει συνολικό βάρος, ίδιο βάρος και βάρος του μεταλλεύματος που περιέχει 2 Mp. Το βαγόνι κυλιέται με τους τροχούς Α και Β επάνω σε χονδρό καλώδιο και έλκεται με λεπτό καλώδιο προς το τέρμα (σχ. 5 . 3η).

Ζητούνται α) Η απαιτούμενη για κάθε βαγόνι ελκτική δύναμη του λεπτού καλωδίου. β) Οι φορτίσεις των τροχών Α και Β.

Απάντηση: α) S = 1015 kp. β) Α = Β = 954 kp

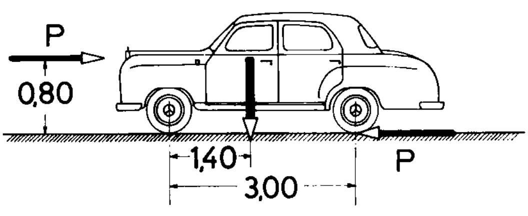


Σχ. 5.3η.

8) Ένα επιβατικό αυτοκίνητο ζυγίζει με τους επιβάτες του 1500 kp. Η απόσταση μεταξύ των αξόνων του (μεταξόνιο) είναι 3,0 m η δε συνισταμένη του βάρους του βρίσκεται σε απόσταση 1,40 m από τον μπροστινό άξονα (σχ. 5 . 3θ). Όταν αναπτύσσει ταχύτητα 120 km/h, η αντίσταση του αέρα ανέρχεται σε P = 150 kp, που υπερνικιέται από τη δύναμη προωθήσεως, με την οποία οι πίσω κινητήριοι τροχοί ωθούν το οδόστρωμα.

Ζητούνται α) Η φόρτωση A του μπροστινού άξονα και B του πίσω άξονα, όταν το αυτοκίνητο σταθμεύει σε οριζόντιο δρόμο. β) Οι φορτίσεις A και B, όταν το αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα 120 km/h.

Απάντηση: α) A = 800 kp. B = 700 kp. β) A = 760 kp. B = 740 kp



Σχ. 5.3θ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ - ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

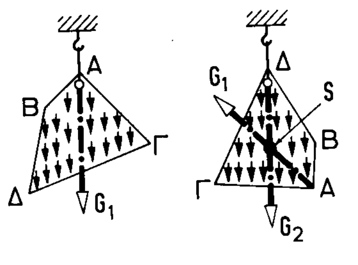
6.1 Γενικά.

Μπορουμε να θεωρήσομε ότι τα σώματα απαρτίζονται από πολλά μικρά τεμάχια ύλης. Σε κάθε ένα απο τα τεμάχια αυτά δρα μία δύναμη $P = m \cdot g$, δηλαδή το βάρος τους, με διεύθυνση προς το κέντρο της γης (σχ. 6.1α).

Επομένως τα βάρη όλων των τμημάτων ενός σώματος αποτελουν παράλληλες δυνάμεις με γνωστά σημεία εφαρμογης. Η συνισταμένη όλων των παράλληλων αυτών δυνάμεων ονομάζεται ***βάρος του σώματος.***

Το σημειο εφαρμογής της συνισταμένης αυτης ονομάζεται ***κέντρο βάρους του σώματος.***

Αν στρέψομε το σώμα, οι δυνάμεις θα παραμείνουν παράλληλες μεταξύ τους και θα έχουν συνισταμένη, που θα έχει το ίδιο μέγεθος και το ίδιο σημείο εφαρμογης S όπως και προηγουμένως (σχ. 6.1α).



Σχ. 6.1α.

Άρα ***κέντρο βάρους*** S ***σώματος*** είναι εκείνο το σημειο του, από το οποίο διέρχεται η συνισταμένη των δυνάμεων της βαρύτητας για οποιαδήποτε θέση του σώματος.

Αντίστοιχα έχομε και κέντρο βάρους γραμμών και επιφανειών, που ονομάζομε ***κεντροειδές.*** Μια επιφάνεια όμως ή μια γραμμή δεν έχουν μάζα. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν βάρος και επομένως και σημεία εφαρμογής του ως κέντρο βάρους. Για να κατανοήσομε την έννοια του κεντροειδούς, ας δεχθούμε μια επιφάνεια F, καλυμμένη ομοιόμορφα με το ίδιο ομοιογενές υλικό, π.χ. ένα έλασμα. Τη χωρίζομε σε επί μέρους επιφάνειες με εμβαδό f_1, f_2 και f_3 (σχ. 6.3α) και υπολογίζομε τα βάρη των διαφόρων τμημάτων της:

$$g_1 = f_1 \cdot \delta \cdot \gamma$$
$$g_2 = f_2 \cdot \delta \cdot \gamma$$
$$g_3 = f_3 \cdot \delta \cdot \gamma$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων g_1, g_2 και g_3 διέρχεται από το κέντρο βάρους του ελάσματος.

Επειδή έχομε υποθέσει ότι το πάχος δ και το ειδικό βάρος γ του υλικού είναι τα ίδια σε όλη την επιφάνεια, μπορούμε να τα παραλείψομε και, αντί να υπολογίζομε με τα βάρη, να πάρομε μόνο τα εμβαδά f_1, f_2 και f_3.

Συμπέρασμα.

Για να βρεθεί το κεντροειδές μιας επιφάνειας λαμβάνονται τα εμβαδά των τμημάτων της ως δυνάμεις και για να βρεθεί το κεντροειδές μιας γραμμης λαμβάνονται τα μήκη των τμημάτων της.

Κεντροβαρικός άξονας ονομάζεται κάθε ευθεία, που διέρχεται από το κέντρο βάρους. Η ευθεία συμμετρίας, π.χ. η διάμετρος ενός κύκλου ή η διαγώνιος ενός τετραγώνου, αποτελεί κεντροβαρικό άξονα. Το κέντρο βάρους μπορούμε να το βρουμε ως σημείο τομής δύο κεντροβαρικών αξόνων είτε θεωρητικά, αν εφαρμόσομε τους κανόνες της στατικής, είτε πρακτικά με ένα πείραμα.

Ο θεωρητικός τρόπος αναπτύσσεται στήν παράγραφο 6.3.

'Ο πρακτικός τρόπος εφαρμόζεται με τη διπλή ανάρτηση του σώματος. Αν έχομε π.χ. ένα ισοπαχές έλασμα, το ΑΒΓΔ, το αναρτάμε με ένα σύρμα διαδοχικά από δύο ακμές του, π.χ. τις Α και Δ και το αφήνομε κάθε φορά να ηρεμήσει (σχ. 6.1α). Στο σώμα ενεργούν δύο δυνάμεις, το βάρος του και η αντίδραση του σύρματος, οι οποιες βρίσκονται σε ισορροπία.

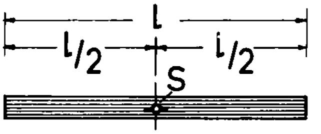
'Αρα οι δυνάμεις αυτές πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες. Απ' αυτό προκύπτει ότι ό άξονας του σύρματος συμπίπτει με την ευθεία ενέργειας της δυνάμεως βαρύτητας, δηλαδή οι ευθείες G_1 και G_2 αποτελούν κεντροβαρικούς άξονες του σώματος. Το σημείο τομής τους S αποτελεί το κέντρο βάρους της επιφάνειας ΑΒΓΔ. Το κέντρο βάρους του σώματος βρίσκεται στη θέση S και στο μέσο του πάχους του ελάσματος.

Στα επόμενα κεφάλαια βρίσκομε με γνωστούς τύπους τη θέση του κεντροειδους απλών γραμμών και επιφανειών και προσδιορίζομε το κεντροειδές των συνθέτων επιφανειών και το κέντρο βάρους των σωμάτων.

6.2 Κεντροειδές απλων γραμμών και επιφανειων.

α) Ευθείας γραμμης.

Σώματα, των οποίων οι δύο διαστάσεις ειναι πολύ μικρές, αν συγκριθουν με την τρίτη, όπως είναι π.χ. μια σιδερένια ράβδος, και έχουν την ίδια συμμετρική διατομή σε όλο το μηκος τους, θεωρουνται ως ***απλές γραμμές.*** Το κεντροειδές τους βρίσκεται στο μέσο του μήκους τους (σχ. 6.2α).



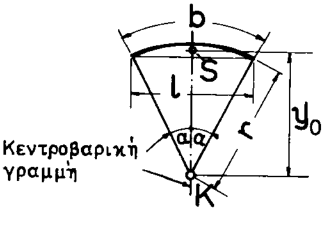
Σχ. 6.2α.

β) Κυκλικου τόξου (σχ. 6.2β).

Απόσταση του κέντρου βάρους:

$$y_0 = \frac{r \cdot l}{b}$$

$$\text{όπου } r = \text{ακτίνα, } b = 2r\,\frac{a^\circ}{57{,}3^\circ}$$



Σχ. 6.2β.

Ειδικές περιπτώσεις:

$$\text{Ημιπεριφέρεια } y_0 = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366\ r.$$

$$\text{Τεταρτοπεριφέρεια } y_0 = \frac{2\ r\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9003\ r.$$

$$\text{Εκτοπεριφέρεια } y_0 = \frac{3\ r}{\pi} = 0{,}9549\ r.$$

γ) Κύκλου και κυκλικης περιφέρειας.

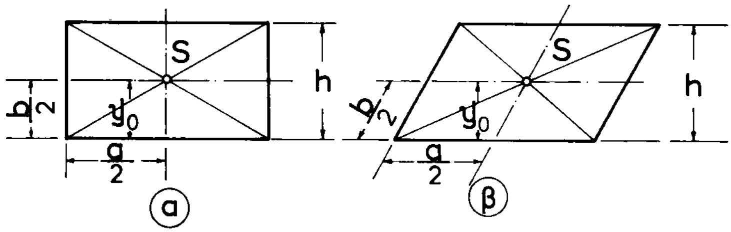
Το κέντρο του κύκλου.

δ) Παραλληλογράμμου (επιφάνειας και περιμέτρου).

Το κέντρο βάρους του παραλληλογράμμου βρίσκεται στο σημειο τομης των διαγωνίων (σχ. 6.2γ).

$$\text{Απόσταση του κέντρου βάρους } y_0 = \frac{h}{2}$$

Το ίδιο ισχύει και για το ορθογώνιο, το ρόμβο και το τετράγωνο.

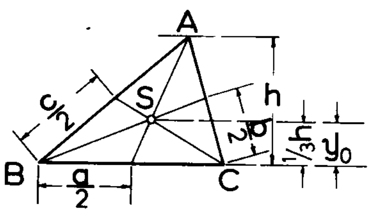


Σχ. 6.2γ.

ε) Τριγώνου (επιφάνειας).

Το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο τομής των διαμέσων (σχ. 6. 2δ).

$$y_0 = \frac{h}{3}$$



Σχ. 6.2δ.

στ) Τραπεζίου (επιφάνειας).

Για να βρουμε το κέντρο βάρους του τραπεζίου γραφικά, επεκτείνομε την πλευρά a κατά b και την πλευρά b κατά a και χαράζομε τη γραμμή ΑΒ.

Στη συνέχεια ενώνομε τα μέσα των πλευρων a και b.

Το σημειο τομης S ειναι το κέντρο βάρους (σχ. 6. 2ε).

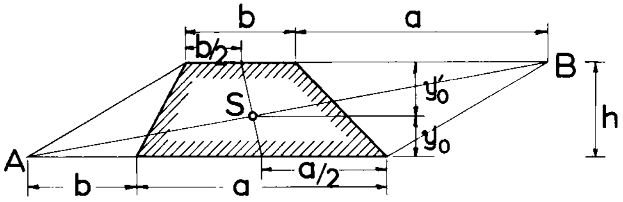
Αναλυτικά η απόσταση του κέντρου βάρους δίνεται από τον τύπο:

$$y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}, \qquad y_0' = \frac{h}{3}\,\frac{2a+b}{a+b}$$

ζ) Κυκλικου τομέα (επιφάνειας).

Απόσταση του κέντρου βάρους (σχ. 6 . 2ζ).

$$y_0 = \frac{2}{3}\,\frac{r \cdot l}{b}, \qquad b = 2r\,\frac{a^\circ}{57{,}3^\circ}$$



Σχ. 6.2ε.

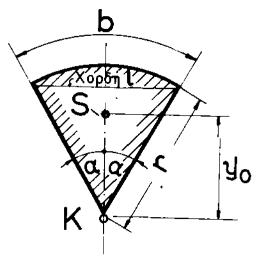
όπου: r = ακτίνα, l = 2r ημα.

Ειδικές περιπτώσεις:

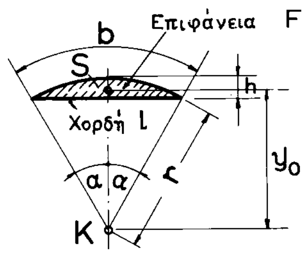
$$\text{Ημικύκλιο } y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244\ r.$$

$$\text{Τεταρτοκύκλιο } y_0 = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi} = 0{,}6002\ r$$

$$\text{Εκτοκύκλιο } y_0 = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366\ r.$$



Σχ. 6.2ζ.



Σχ. 6.2η.

η) Κυκλικού τμήματος.

Απόσταση του κέντρου βάρους (σχ. 6.2η).

$$y_0 = \frac{l^3}{12F}\ ,\ \text{όπου } F = \text{επιφάνεια} = \frac{r\,(b - l) + l\,h}{2}$$

$$h = 2r\ \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \qquad \text{και} \qquad l = 2r\eta\mu\alpha.$$

6.3 Κεντροειδές συνθέτων επιφανειων.

Όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 6.1, για να βρεθει το κεντροειδές μιας επιφάνειας θεωρουνται τα εμβαδά των τμημάτων της ως δυνάμεις παράλληλες μεταξύ τους.

Το κεντροειδές των συνθέτων επιφανειων καθορίζομε συνήθως ως το σημειο, όπου τέμνονται οι ευθειες ενέργειας της συνισταμένης των δυνάμεων αυτών.

Για την εύρεση της συνισταμένης αυτής, όπως μάθαμε στα κεφάλαια 4 και 5, χρησιμοποιουμε δύο μεθόδους:

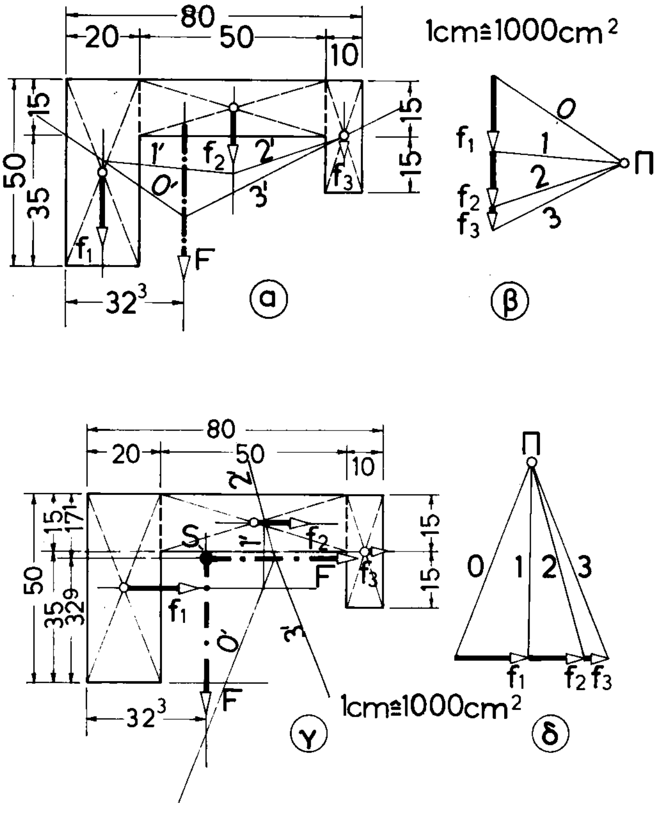
α) ***Τη γραφική μέθοδο,*** κατά την οποία χρησιμοποιουμε το σχοινοπολύγωνο.

β) ***Την αναλυτική,*** κατά την οποία χρησιμοποιουμε την πρόταση των ροπων.

Θα εξετάσομε τώρα αυτές τις δύο μεθόδους.

1. Γραφική μέθοδος προσδιορισμου κέντρου βάρους.

Χωρίζομε τη δοσμένη επιφάνεια F του σχήματος 6.3α σε επί μέρους επιφάνειες, π.χ. σε ορθογώνια, με εμβαδόν f_1, f_2, f_3, με γνωστό κέντρο βάρους.



Σχ. 6.3α.

Με βάση τα δεδομένα του σχήματος 6.3α υπολογίζομε τα εμβαδά f_1, f_2 και f_3 και βρίσκομε:

$$f_1 = 50 \times 20 = 1000 \text{ cm}^2$$
$$f_2 = 50 \times 15 = 750 \text{ cm}^2$$
$$f_3 = 10 \times 30 = 300 \text{ cm}^2$$

Στην περίπτωση αυτή αντί να μιλούμε για στατική ροπή δυνάμεων, μιλούμε για ***στατική ροπή επιφανειών.*** Θεωρούμε δηλαδή ότι τα εμβαδά των επιφανειών είναι ανάλογα με τα βάρη ενός στερεού, που έχει διατομή την επιφάνεια.

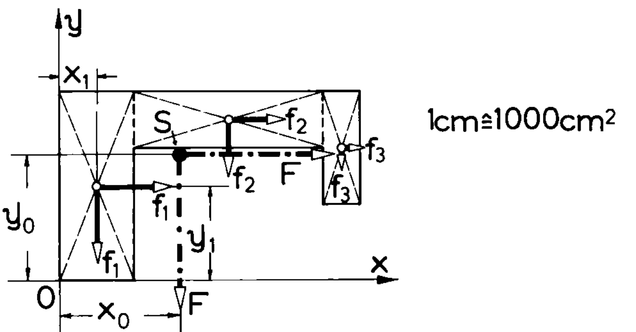
Σχεδιάζομε τα εμβαδά f_1, f_2, f_3 ως δυνάμεις στα κέντρα βάρους των τμημάτων κατά μία οποιαδήποτε διεύθυνση αλλά την ίδια πάντοτε και με την ίδια κλίμακα δυνάμεων, π.χ. 1 cm = 1000 cm^2.

Προσδιορίζομε τη συνισταμένη των δυνάμεων (των εμβαδών) f_1, f_2, f_3 με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και σχοινοπολυγώνου [σχ. 6.3α(β)]. Σχεδιάζομε ξανά τις δυνάμεις f_1, f_2, f_3 με το ίδιο σημείο εφαρμογής και μέγεθος, κατά μία όμως άλλη διεύθυνση [σχ. 6.3α (γ)]. Προσδιορίζομε τη συνισταμένη των δυνάμεων με την κατασκευή νέου δυναμοπολυγώνου και σχοινοπολυγώνου [σχ. 6.3α(δ)].

Το σημείο τομής των δύο συνισταμένων είναι το ζητούμενο κέντρο βάρους S.

2. Αναλυτική μέθοδος προσδιορισμού κέντρου βάρους.

Κατά την αρχή των ροπών (παράγρ. 1.4) «η στατική ροπή της συνισταμένης ως προς ένα σημείο, ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσων ως προς το ίδιο σημειο».



Σχ. 6.3β.

Λαμβάνομε δύο τυχόντες άξονες συντεταγμένων 0x και 0y (σχ. 6.3β) και υπολογίζομε ως προς κάθε ένα από αυτούς τις στατικές ροπές των δυνάμεων. Θα έχομε:

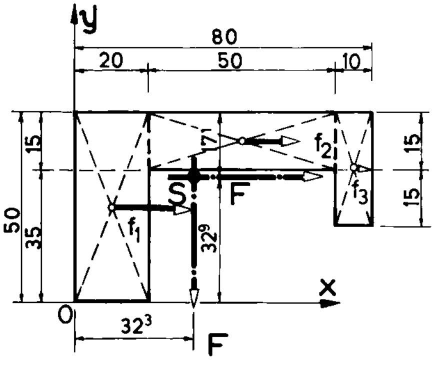
$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = Fx_0 \text{ καί}$$
$$f_1y_1 + f_2y_2 + f_3y_3 = Fy_0.$$

Επομένως οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους είναι:

$$x_0 = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3}{F} = \frac{\Sigma\, f\, x}{F}$$

$$y_0 = \frac{f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3}{F} = \frac{\Sigma\, f\, y}{F}$$

Αν συμπτωματικά ο άξονας x περνούσε από το κέντρο βάρους, αν ήταν δηλαδή κεντροβαρικός άξονας, τότε $x_0 = 0$, άρα $f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = 0$. Και αντίστοιχα αν ο άξονας y ήταν κεντροβαρική γραμμή, τότε $y_0 = 0$ και επομένως $f_1y_1 + f_2y_2 + f_3y_3 = 0$.



Σχ. 6.3γ.

Για το αριθμητικό παράδειγμα του σχήματος 6.3γ καταρτίζομε τον ακόλουθο πίνακα:

α/α	f cm^2	x cm	y cm	fx cm^3	fy cm^3
1	1000	10	25	10.000	25.000
2	750	45	42,5	33.750	31.875
3	300	75	35	22.500	10.500
	F = 2050			66.250	67.375

Οι αποστάσεις του κέντρου βάρους από τους άξονες των συντεταγμένων είναι:

$$x_0 = \frac{\Sigma\, f\, x}{F} = \frac{66.250}{2050} = 32{,}3 \text{ cm},$$

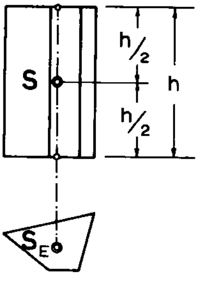
$$y_0 = \frac{\Sigma\, f\, y}{F} = \frac{67.375}{2050} = 32{,}9 \text{ cm}.$$

6.4 Κέντρο βάρους σωμάτων.

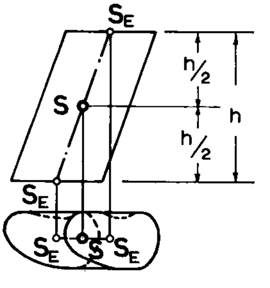
Στην πράξη ασχολούμαστε κυρίως με πρισματικά ή κυλινδρικά σώματα, από τα οποία εξετάζομε συνήθως τμήματα μήκους 1,00 m ή ύψους 1,00 m. Η εύρεση του κέντρου βάρους μας είναι απαραίτητη για να ελέγξομε την ευστάθεια και την αντοχή τους (π.χ. σε τοίχους αντιστηρίξεως γαιών, βάθρα γεφυρών κλπ.)

Στα πρισματικά ή κυλινδρικά σώματα είναι αρκετό να βρούμε το κέντρο βάρους S_E της διατομής τους. Το κέντρο βάρους S του σώματος βρίσκεται τότε στη μέση της γραμμής, που συνδέει τα κέντρα βάρους S_E των δυο ακραίων επιφανειών (σχ. 6.4α και 6.4β).

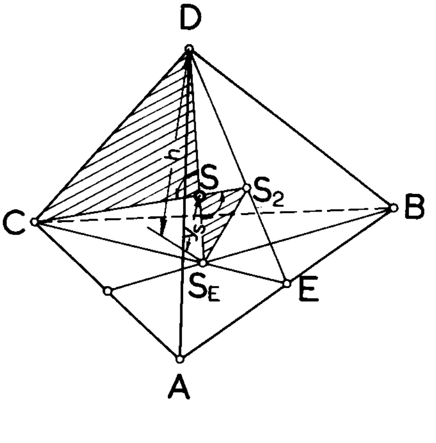
Το κέντρο βάρους S της πυραμίδας και του κώνου, ορθού ή λοξού, βρίσκεται επάνω στη γραμμή, η οποία συνδέει την κορυφή με το κέντρο βάρους S_E της βάσεως. Αν ως αρχή μετρήσεως θεωρήσομε την κορυφή, το κέντρο βάρους S βρίσκεται στα 3/4 της γραμμής (σχ. 6.4γ).



Σχ. 6.4α.



Σχ. 6.4β.



Σχ. 6.4γ.

6.5 Κανόνες των Πάππου και Guldin*.

Οι Πάππος και Guldin, είχαν συντάξει δυο κανόνες, τους οποίους χρησιμοποιούμε για να υπολογίζομε την επιφάνεια και τον όγκο σωμάτων εκ περιστροφής. Για να τοζς χρησιμοποιήσομε όμως χρειάζεται να γνωρίζομε τη θέση του κέντρου βάρους γραμμών και επιφανειών, που βρίσκομε ακολουθώντας τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια.

Οι κανόνες αυτοί είναι:

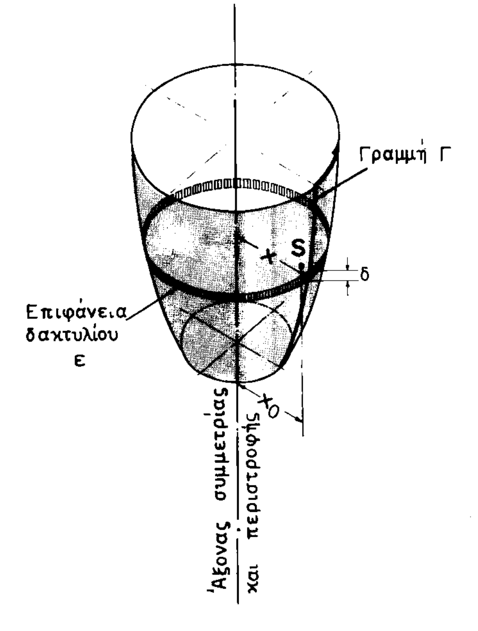
Πρώτος Κανόνας. Η επιφάνεια του μανδύα ενός σώματος εκ περιστροφής ισούται με το μήκος της γενέτειρας γραμμής επί το δρόμο που διατρέχει το κέντρο βάρους της γενέτειρας κατά την περιστροφή. Δηλαδή:

$F = \phi x_0 \Gamma$ για μερική περιστροφή

$F = 2\pi x_0 \Gamma$ για ολική περιστροφή.

Π.χ. η επιφάνεια όλων των πλευρικών ξύλων ενός βαρελιού (χωρίς τον πυθμένα) βρίσκεται, αν πολλαπλασιάσομε το μήκος Γ ενός ξύλου επί 2 π φορές την απόσταση του κέντρου βάρους του ξύλου αυτού από τον άξονα του βαρελιού.

Απόδειξη του πρώτου κανόνα. Η επιφάνεια του μανδύα σωμάτων εκ περιστροφής δημιουργείται με την περιστροφή μιας γραμμής (ευθείας ή καμπύλης) μήκους Γ, που καλείται γενέτειρα, γύρω από τον άξονα συμμετρίας του σώματος (σχ. 6.5α).



Σχ. 6.5α.

* Πάππος, Έλληνας Μαθηματικός, 3ος π.Χ. αιώνας.
Guldin, Ελβετός Μαθηματικός, 1577-1643.

Το πάρα πολύ μικρό τμήμα δ της γραμμής Γ δημιουργεί κατά την περιστροφή ένα δακτύλιο με εμβαδόν επιφάνειας:

$$f = 2\pi x \sigma.$$

Το άθροισμα όλων αυτών των μικρών τμημάτων αποτελεί τη συνολική επιφάνεια του μανδύα:

$$F = \Sigma f = \Sigma\ 2\pi x\delta = 2\pi\ \Sigma x\delta.$$

Το άθροισμα $\Sigma x\delta$ είναι το άθροισμα των ροπών των μικρών τμημάτων δ της γραμμής Γ ως προς τον άξονα περιστροφής.

Κατά την αρχή των ροπών, το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών ισούται με τη ροπή της συνισταμένης, άρα, αν x_0 είναι η απόσταση του κέντρου βάρους της γενέτειρας Γ από τον άξονα περιστροφής, προκύπτει ότι:

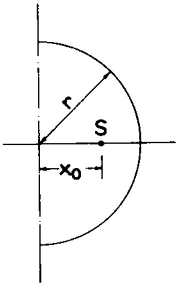
$$\Gamma \,.\, x_0 = \Sigma x\delta,$$

και σε συνδυασμό με την προηγούμενη εξίσωση λαμβάνεται:

$$F = 2\pi x_0 \Gamma.$$

Για να το κατανοήσομε καλύτερα θα λύσομε την εξής άσκηση:

Ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν F της επιφάνειας της σφαίρας, την οποία δημιουργεί η περιστροφή της ημιπεριφέρειας γύρω από τη διάμετρό της (σχ. 6.5β).



Σχ. 6.5β.

Λύση.

Γνωρίζομε ότι το κέντρο βάρους της ημιπεριφέρειας βρίσκεται σε απόσταση $x_0 = 2r/\pi$ από τη διάμετρο [παράγρ. 6.2(β)]. Κατά τον πρώτο κανόνα Πάππου - Guldin το εμβαδόν της σφαίρας είναι:

$$F = 2\pi x_0 \Gamma = 2\pi \frac{2r}{\pi} \pi r = 4\pi r^2,$$

όπως το γνωρίζομε από τη στερεομετρία.

Δεύτερος Κανόνας. Ο όγκος σώματος εκ περιστροφής ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας, η οποία με την περιστροφή της δημιουργεί το σώμα, επί το δρόμο που διατρέχει το κέντρο βάρους της επιφάνειας αυτής κατά την περιστροφή.

Δηλαδή:

$$V = \phi x_0 F \qquad \text{για μερική περιστροφή}$$

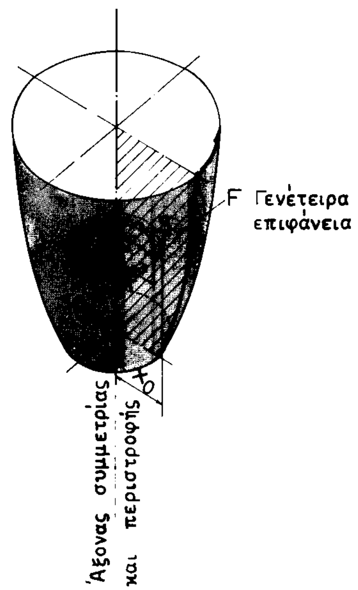
$$V = 2\pi x_0 F \qquad \text{για ολική περιστροφή}$$

Για να υπολογίσομε το περιεχόμενο ενός βαρελιού, π.χ. τον όγκο του κρασιού, πρέπει να πολλαπλασιάσομε το εμβαδόν F της επιφάνειας, που σχηματίζεται από τον άξονα του βαρελιού και ένα πλευρικό ξύλο, επί 2π φορές την απόσταση x_0 του κέντρου βάρους της επιφάνειας F από τον άξονα του βαρελιού.

Απόδειξη του δεύτερου κανόνα. Ο όγκος σωμάτων εκ περιστροφής δημιουργείται με την περιστροφή μιας επιφάνειας γύρω από τον άξονα συμμετρίας του σώματος (σχ. 6.5γ).

Κατά την περιστροφή της επιφάνειας το πάρα πολύ μικρό της τμήμα d δημιουργεί ένα δακτύλιο με όγκο:

$$u = 2\pi x f$$



Σχ. 6.5γ.

Το άθροισμα όλων αυτών των μικρών όγκων είναι ο συνολικός όγκος του σώματος:

$$V = \Sigma u = \Sigma\, 2\pi x f = 2\pi \Sigma x f.$$

Το άθροισμα **Σxf** είναι το άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα συμμετρίας όλων των τμημάτων της επιφάνειας F [παράγρ. 6.3(2)] και επομένως είναι ίσο με τη ροπή όλης της επιφάνειας F ως προς τον ίδιο άξονα.

Άρα $Fx_0 = \Sigma xf$, πού, αν τεθεί στην προηγούμενη εξίσωση, προκύπτει οτι:

$$V = 2\pi x_0 F.$$

Για να αντιληφθούμε καλύτερα το δεύτερο κανόνα θα λύσομε το εξής πρόβλημα:

Δίνεται ημικύκλιο με ακτίνα r.

Ζητείται να βρεθεί ο όγκος V της σφαίρας, την οποία δημιουργεί το ημικύκλιο, όταν περιστραφεί γύρω από τη διάμετρό του (σχ. 6.5δ).

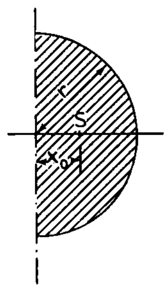
Λύση.

Είδαμε ότι το κέντρο βάρους του ημικυκλίου βρίσκεται σε απόσταση $x_0 = 4r/3\pi$ απο τη διάμετρό του [παράγρ. 6.2(ζ)].

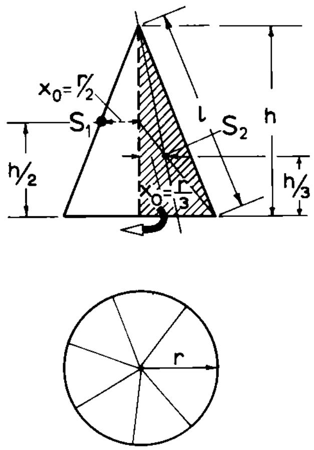
Κατά το δεύτερο κανόνα των Πάππου - Guldin έχομε:

$$\Omega = 2\pi x_0 . F = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

που είναι ο όγκος της σφαίρας, όπως το γνωρίζομε από τη Στερεομετρία.



Σχ. 6.5δ.



Σχ. 6.5ε.

Παράδειγμα 1.

Με τους δυο κανόνες Πάππου - Guldin να υπολογισθεί:

α) Η επιφάνεια του μανδύα και β) ο όγκος ενός ορθού κώνου με βάση κυκλική, ο οποίος έχει ύψος h και μήκος πλευράς *l* (σχ. 6.5ε).

Λύση.

α) Σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα Πάππου - Guldin έχομε ότι η επιφάνεια του μανδύα $F = 2\pi x_0 \Gamma$. Γνωρίζομε ότι το κέντρο βάρους S_1 ευθείας γραμμής με μήκος *l* βρίσκεται στο μέσο του μήκους της [παράγρ. 6.2(α)]. Επομένως απέχει από τον άξονα περιστροφής $x_0 = r/2$. Το μήκος της γραμμης Γ ισούται με *l*. Άρα έχομε:

$$F = 2\pi \frac{r}{2} l = \pi r l.$$

β) Από το δεύτερο κανόνα των Πάππου - Guldin γνωρίζομε ότι: $V = 2\pi x_0 F$. Είναι γνωστό ότι η επιφάνεια του τριγώνου F, που όταν περιστρέφεται γύρω από την πλευρά του δημιουργεί τον κώνο, ισούται με rh/2. Το κέντρο βάρους του S_2 βρίσκεται στα 2/3 του μήκους της διαμέσου του, αν μετρηθεί από την κορυφή και απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση $x_0 = r/3$.

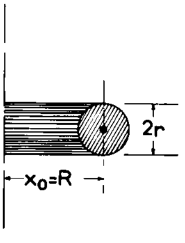
Άρα ο ζητούμενος όγκος ισούται με:

$$V = 2\pi \frac{r}{3} \frac{rh}{2} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Και τα δυο αυτά αποτελέσματα εύκολα τα επαληθεύομε από τη γεωμετρία.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται ο κυκλικός δακτύλιος του σχήματος 6.5ζ.



Σχ. 6.5ζ.

Ζητούνται α) το εμβαδό της επιφάνειάς του και β) ο όγκος του.

Λύση.

α) Σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα των Πάππου - Guldin:

$$F = 2\pi x_0 \Gamma = 2\pi R 2\pi r = 4\pi^2 r R.$$

β) Σύμφωνα με το δεύτερο κανόνα:

$$V = 2\pi x_0 F = 2\pi R \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R.$$

6.6 Είδη ισορροπίας. Ευστάθεια.

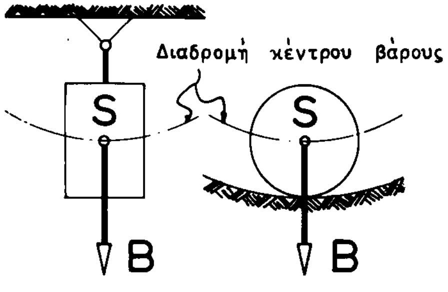
Όταν σε ένα σώμα ενεργεί η δύναμη της βαρύτητας, τότε η θέση του κέντρου βάρους του σχετικά με το σημείο ή την επιφάνεια στηρίξεως καθορίζει το είδος της ισορροπίας του.

Η θέση του κέντρου βάρους ενός σώματος σε σχέση με το σημείο ή την επιφάνεια στηρίξεώς του καθορίζει το είδος της ισορροπίας του.

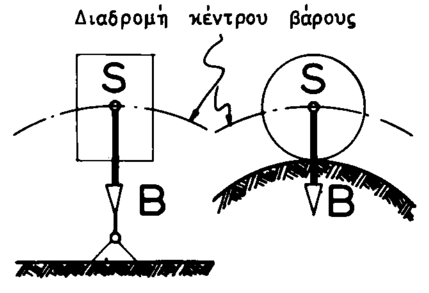
Διακρίνομε τρία είδη ισορροπίας: α) Την ***ευσταθή***. β) Την **ασταθή** και γ) την ***αδιάφορη***.

Η ***ευσταθής ισορροπία*** υπάρχει, όταν για μικρή αλλαγή της θέσεως τουσώματος, το κέντρο βάρους του υψώνεται, οπότε προκαλείται μια ροπή επαναφοράς. Η ροπή αυτή επαναφέρει το σώμα στην αρχική του θέση (σχ. 6.6α). Επομένως στην κατάσταση ηρεμίας του σώματος το κέντρο βάρους του βρίσκεται στη χαμηλότερή του θέση.

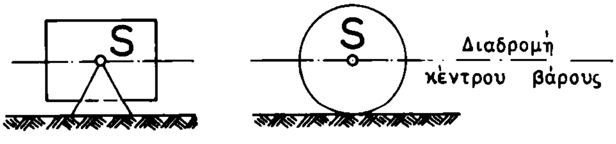
Η ***ασταθής ισορροπία*** υπάρχει, όταν για μικρή αλλαγή της θέσεως του σώματος, το κέντρο βάρους του χαμηλώνει, οπότε προκαλείται μια ροπή εκτροπής, που απομακρύνει το σώμα από την αρχική του θέση (σχ. 6.6β).



Σχ. 6.6α.



Σχ. 6.6β.



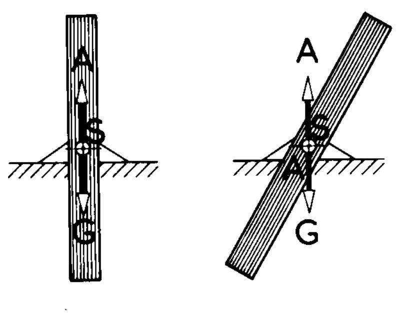
Σχ. 6.6γ.

Η ***αδιάφορη ισορροπία*** υπάρχει, όταν για μικρή αλλαγή της θέσεως του σώματος, το κέντρο βάρους του ούτε υψώνεται ούτε χαμηλώνει και επομένως δεν προκαλείται ούτε ροπή επαναφοράς, ούτε ροπή εκτροπής (σχ. 6.(γ).

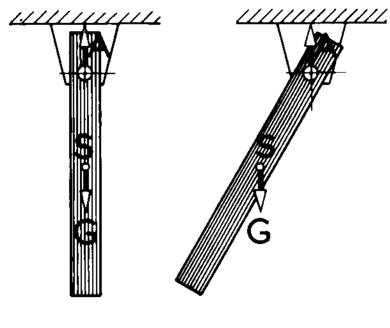
Τα τρία αυτά είδη ισορροπίας εμφανίζονται καθαρά στην περίπτωση μιας χαλύβδινης λάμας.

Αν στηρίξομε τη λάμα αυτή στο μέσο της και την τοποθετήσομε κατακόρυφα, θα ισορροπεί. Και αν την περιστρέψομε και την αφήσομε σε οποιαδήποτε θέση, πάλι θα ισορροπεί. Η ισορροπία εδώ είναι αδιάφορη (σχ. 6.6δ).

Αν την κρεμάσομε από το επάνω άκρο της και την αφήσομε κατακόρυφη, θα μείνει ακίνητη. Αν τη στρέψομε, θα επιστρέψει στην κατακόρυφη αρχική της θέση. Η ισορροπία εδώ είναι ***ευσταθής*** (σχ. 6.6ε).



Σχ. 6.6δ.



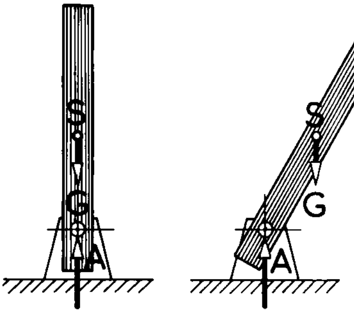
Σχ. 6.6ε.

Αν τη στηρίξομε από το κατώτερο άκρο της και την αφήσομε κατακόρυφη, ισορροπεί, εάν όμως τη στρέψομε, θα πέσει στο δάπεδο. Η ισορροπία εδώ είναι ***ασταθής*** (σχ. 6.6ζ).

Γενικότερα, στην περίπτωση που σε ένα σώμα ενεργούν πολλές δυνάμεις, τότε η ισορροπία του είναι ευσταθής, όταν για μικρή αλλαγή της θέσεώς του οι δυνάμεις τείνουν να το επαναφέρουν στην αρχική του θέση. Στην αντίθετη περίπτωση η ισορροπία είναι ***ασταθής.***

Όταν οι δυνάμεις που επενεργούν δεν τείνουν να μεταβάλλουν τη νέα θέση του σώματος, η ισορροπία είναι ***αδιάφορη.***

Από όλες μας τις κατασκευές απαιτούμε ευσταθή ισορροπία.



Σχ. 6.6ζ.

Ευστάθεια.

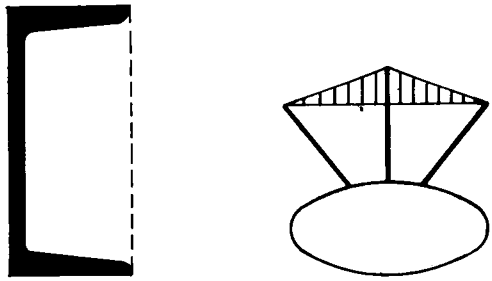
Επιφάνεια στηρίξεως μιας κατασκευής ονομάζεται η επιφάνεια, που σχηματίζεται από τις ευθείες, που συνδέουν τα σημεία στηρίξεώς της. Π.χ. επιφάνεια στηρίξεως ενός τρίποδα είναι το τρίγωνο, που σχηματίζουν τα τρία σκέλη του, ενώ επιφάνεια στηρίξεως ενός ελάσματος λυγισμένου σε σχήμα αγκύλης είναι ένα ορθογώνιο (σχ. 6.6η).

Στενή σχέση με την επιφάνεια στηρίξεως ενός σώματος έχει η ευστάθεια του σώματος αυτού, γιατί όταν η συνισταμένη όλων των δυνάμεων, που ενεργούν επάνω στο σώμα, βρίσκεται έξω από την επιφάνεια στηρίξεώς του, το σώμα ανατρέπεται, δηλαδή χάνει την ευστάθειά του.

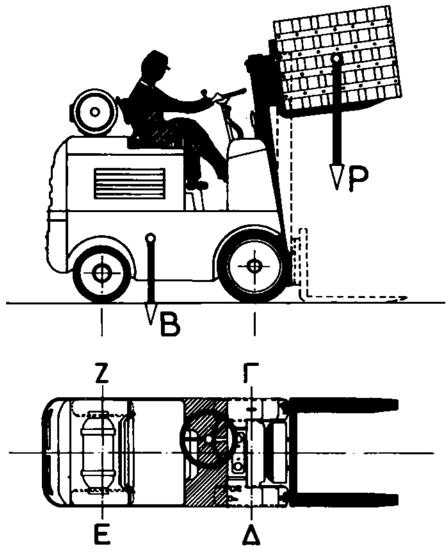
Ας εξετάσομε την περίπτωση ενός περονοφόρου οχήματος (σχ. 6.6θ), με το οποίο πρόκειται να ανυψώσομε ένα κιβώτιο βάρους P, και θέλομε να γνωρίζομε αν θα ανατραπεί ή όχι. Η απάντηση μπορεί να δοθεί μόνο όταν καθορίσομε τη συνισταμένη όλων των φορτίων, που επιβάλλονται επάνω στο όχημα, δηλαδή τη συνισταμένη του βάρους του B και του φορτίου P. Από τη θέση της εξαρτάται αν το όχημα θα ανατραπεί ή όχι. Αν η συνισταμένη βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια στηρίξεως ΓΔΕΖ, τότε δεν υπάρχει κίνδυνος ανατροπής. Το όχημα είναι ευσταθές. Εάν η συνισταμένη πέφτει ακριβώς στην εξωτερική γραμμή της επιφάνειας στηρίξεως, δηλαδή στη γραμμή ΓΔ για την περίπτωση που εξετάζομε, τότε υπάρχει ασταθής ισορροπία. Μόλις η συνισταμένη ξεπεράσει την επιφάνεια στηρίξεως, το όχημα θα ανατραπεί. Ώστε μπορούμε να διατυπώσομε τον ακόλουθο κανόνα:

Ένα σώμα (όχημα, μηχανή, τοίχος κλπ.) είναι ευσταθές, όταν η συνισταμένη όλων των φορτίων, που δρουν επάνω του, βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια στηρίξεως. Το ίδιον ορισμό μπορούμε να τον εκφράσομε και ως εξής:

Ένα σώμα είναι ευσταθές, δηλαδή δεν ανατρέπεται, τότε μόνο, όταν η ροπή ως προς μια πλευρά στηρίξεως όλων των δυνάμεων, που τείνουν να το ανατρέψουν, είναι μικρότερη από τη ροπή των δυ-



Σχ. 6.6η.



Σχ. 6.6θ.

νάμεων που τείνουν να το επαναφέρουν στη θέση του. Η ροπή $M_A = E \cdot a$ ονομάζεται ***ροπή ανατροπής***. Η ροπή $M_E = B \cdot b$ ονομάζεται ***ροπή επαναφοράς*** (σχ. 6.6ι).

Όταν $M_E > M_A$, το σώμα είναι ευσταθές.

Όταν $M_E < M_A$, το σώμα ανατρέπεται.

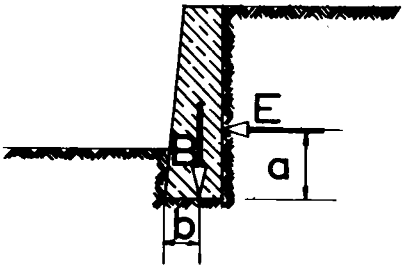
Ο λόγος $v = M_E / M_A$ καθορίζει την ασφάλεια, που υπάρχει σχετικά με τον κίνδυνο ανατροπής, και πρέπει να είναι πάντοτε μεγαλύτερος από τη μονάδα. Συνήθως οι κανονισμοί απαιτούν:

$$\omega \geqslant 1{,}5.$$

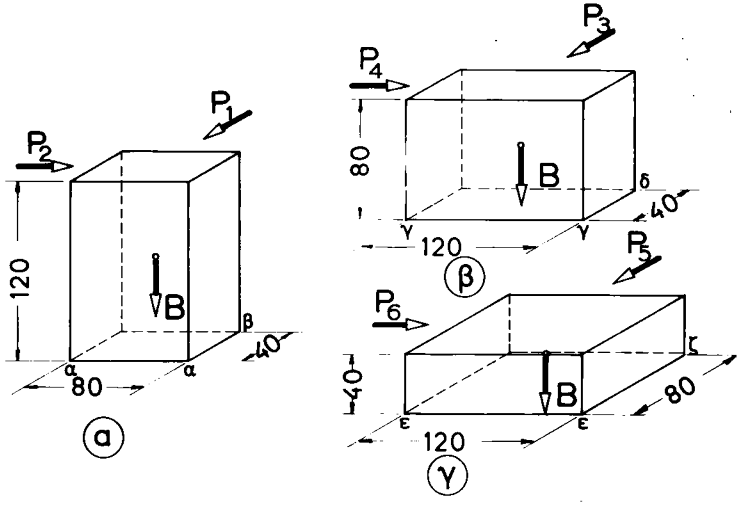
Παράδειγμα.

Ένα κομμάτι δρύινου ξύλου με διαστάσεις 40 × 80 × 120 cm έχει βάρος 350 kp (σχ. 6.6κ).

Ποια οριζόντια δύναμη P απαιτείται για την ανατροπή του ξύλου, αν αυτή ενεργεί στην ψηλότερη πλευρά του ξύλου και αυτό στηρίζεται:



Σχ. 6.6ι.



Σχ. 6.6κ.

α) Στη μικρότερη επιφάνειά του (40 × 80).
β) Στη μέση (40 × 120) και
γ) Στη μεγάλη (80 × 120).

Λύση.

Το κέντρο βάρους Β βρίσκεται στο μέσο του ύψους του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Για να ανατραπεί το ξύλο πρέπει η ροπή M_A της δυνάμεως Ρ ως προς τον άξονα περιστροφης να είναι μεγαλύτερη από τη ροπή επαναφοράς M_E του βάρους Β ως προς τον ίδιο άξονα.

Επειδή σε κάθε μια από τις περιπτώσεις α,β και γ, η περιστροφή του σώματος μπορεί να γίνει γύρω από δυο άξονες, οι δυνάμεις που την προκαλούν θα είναι γενικά διαφορετικές.

Περίπτωση α [σχ. 6.6κ(α)].

1) $P_1 . 120 > B . 20 \qquad P_1 > \dfrac{20}{120} \times 350 = 58{,}3\ \text{kp}.$

2) $P_2 . 120 \geqslant B . 40 \qquad P_2 > \dfrac{40}{120} \times 350 = 116{,}6\ \text{kp}.$

Περίπτωση β [σχ. 6.6κ(β)].

3) $P_3 . 80 \geqslant B . 20 \qquad P_3 > \dfrac{20}{80} \times 350 = 87{,}5\ \text{kp}.$

4) $P_4 . 80 \geqslant B . 60 \qquad P_4 > \dfrac{60}{80} \times 350 = 262{,}5\ \text{kp}.$

Περίπτωση γ [σχ. 6.6κ(γ)].

5) $P_5 . 40 \geqslant B . 40 \qquad P_5 > B = 350\ \text{kp}.$

6) $P_6 . 40 \geqslant B . 60 \qquad P_6 > \dfrac{60}{40} . B = 525\ \text{kp}.$

6.7 Ασκήσεις.

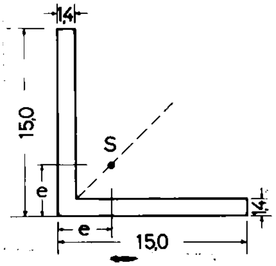
1) Δίνεται το γωνιακό έλασμα του σχήματος 6.7α. Να υπολογισθεί γραφικά και αναλυτικά η απόσταση e του κέντρου βάρους του.

Απάντηση: e = 4.26 cm

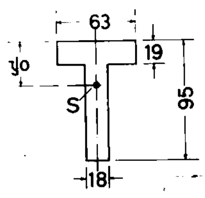
Σημ. Οι πίνακες για τα γωνιακά ελάσματα δίνουν e = 4,21 cm. Η μικρή διαφορά οφείλεται στις καμπύλες των εσωτερικών ακμών, που εμφανίζει το τυποποιημένο γωνιακό έλασμα (DIN 1028).

2) Δίνεται η δοκός του σχήματος 6.7β από σκυρόδεμα. Να υπολογισθεί γραφικά και αναλυτικά η απόσταση y_0 του κέντρου βάρους της.

Απάντηση: y_0 = 34,8 cm



Σχ. 6.7α.



Σχ. 6.7β.

3) Η βάση διατρητικού μηχανήματος έχει τη μορφή του σχήματος 6.7γ.

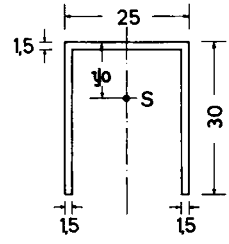
Να υπολογισθεί γραφικά και αναλυτικά η απόσταση y_0 του κέντρου βάρους.

Απάντηση: $y_0 = 11{,}2$ cm

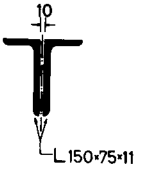
4) Οι επόμενες μορφές ράβδων: α) του σχήματος 6.7δ,β) του σχήματος 6.7ε,γ) του σχήματος 6.7ζ και δ) του σχήματος 6.7η συνθέτονται από ελάσματα απλά (λαμαρίνες), γωνιακά και μορφής [κατά τα DIN 1026 και 1029).

Ζητείται να βρεθεί η απόσταση y_0 του κέντρου βάρους τους από την επάνω ακμή της σύνθετης διατομής.

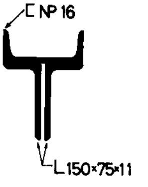
Απάντηση: α) $y_0 = 5{,}37$ cm. β) $y_0 = 6{,}75$ cm. γ) $y_0 = 4{,}62$ cm δ) $y_0 = 9{,}44$ cm



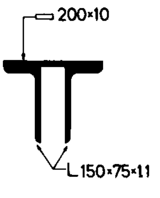
Σχ. 6.7γ.



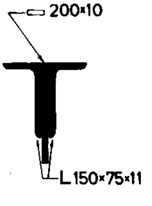
Σχ. 6.7δ.



Σχ. 6.7ε.



Σχ. 6.7ζ.



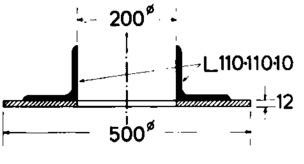
Σχ. 6.7η.

Οι επόμενες ασκήσεις 5, 6 και 7 αναφέρονται στην εφαρμογή των κανόνων Πάππου - Guldin:

5) Δίνεται ο δακτύλιος του σχήματος 6.7θ.

Ζητούνται: α) η επιφάνεια F, η οποία με την περιστροφή της δημιουργει το δακτύλιο. β) Η απόσταση του κέντρου βάρους της από τον άξονα περιστροφής και γ) ο όγκος του δακτυλίου.

Απάντηση: α) F = 39,2 cm^2. β) 15,1 cm. γ) 3717,2 cm^3

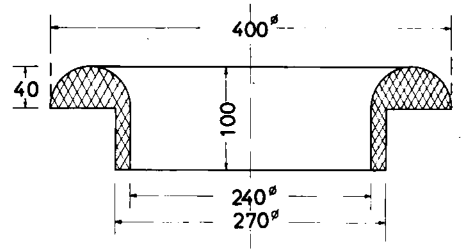


Σχ. 6.7θ.

6) Δίνεται ο δακτύλιος στεγανότητας του σχήματος 6.7ι από λάστιχο με ειδικό βάρος $\gamma = 1{,}3\ Mp/m^3$.

Ζητείται α) Ο όγκος V του δακτυλίου και β) το βάρος του G.

Απάντηση: α) $V = 3245\ cm^3$. β) $G = 4218{,}5\ p$

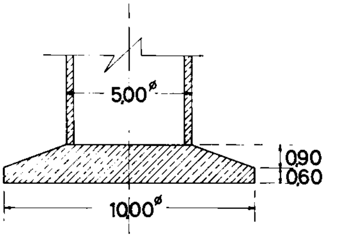


Σχ. 6.7ι.

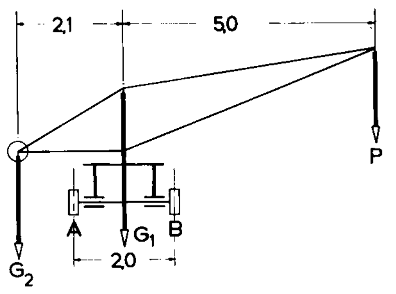
7) Το θεμέλιο καπνοδόχου έχει τη μορφή του σχήματος 6.7κ.

Ζητείται: α) Πόσα κυβικά μέτρα σκυροδέματος απαιτούνται για την κατασκευή του και β) πόσα τετραγωνικά μέτρα τσιμεντοκονίας απαιτούνται για την επίστρωση της κεκλιμένης επιφάνειας.

Απάντηση: α) $88{,}30\ m^3$. β) $62{,}65\ m^2$



Σχ. 6.7κ.



Σχ. 6.7λ.

8) Ο κινητός γερανός του σχήματος 6.7λ έχει ίδιο βάρος $G_1 = 6000$ kp και αντίβαρο $G_2 = 4000$ kp με απόσταση 2,1 m από τον άξονα περιστροφής.

Η μέγιστη ανυψωτική του ικανότητα σε απόσταση 5 m από τον άξονα περιστροφής ισούται με $P = 3500$ kp.

Ζητείται ο συντελεστής ασφάλειας από ανατροπή και η φόρτιση των τροχών A και B: α) γιά φορτισμένο και β) για αφόρτιστο γερανό.

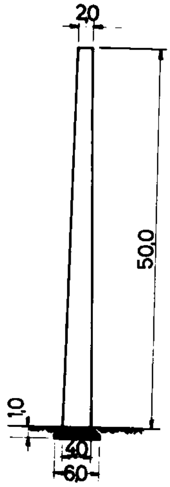
Απάντηση: α) $v_1 = 1{,}31$. $A_1 = 2200$ kp. $B_1 = 11300$ kp. β) $v_2 = 1{,}36$. $A_2 = 9200$ kp. $B_2 = 800$ kp

9) Μια καπνοδόχος κωλουροκωνικής μορφής έχει ύψος 50 m και ίδιο βάρος 300 Mp. Η διάμετρος της κορυφής είναι 2 m και της βάσεως 4 m (σχ. 6.7μ).

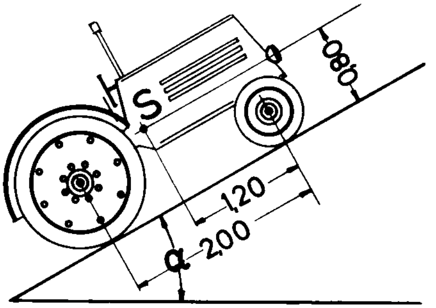
Η συνισταμένη της πιέσεως του ανέμου ισούται με 15 Mp και δρα στο κέντρο βάρους του τραπεζίου του σχήματος.

Ζητουνται: α) Το ύψος του κέντρου βάρους του τραπεζίου επάνω από τη στάθμη εδάφους. β) Η ροπή ανατροπής λόγω της πιέσεως ανέμου ως προς την επιφάνεια του εδάφους. γ) Η απόσταση της συνισταμένης από το ίδιο βάρος και την ανεμοπίεση από τον άξονα της καπνοδόχου στη στάθμη εδάφους. δ) Αν το πάχος του θεμελίου ειναι 1 m, η διάμετρός του 6 m και το βάρος του 50 Mp, ποιος είναι ο συντελεστής ασφάλειας σχετικά με τον κίνδυνο ανατροπής;

Απάντηση: α) 22,22 m. β) 333,3 Mpm. γ) 1,11 m. δ) 3,01.



Σχ. 6.7μ.



Σχ. 6.7ν.

10) Ένας ελκυστήρας βάρους 1500 kp ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα σε επίπεδο, που έχει κλίση ίση με εφα (σχ. 6.7ν).

Ζητούνται: α) Ως ποια γωνία α του κεκλιμένου επιπέδου δεν θα ανατραπεί ο ελκυστήρας προς τα πίσω; β) Πόση πρέπει να είναι η γωνία α, αν ο συντελεστής ασφάλειας ως προς τον κίνδυνο ανατροπής είναι 1,5; γ) Ποια η επιρροή του βάρους του ελκυστήρα στη γωνία α;

Απάντηση: α) α = 45°. β) α = 33° 40′. γ) Καμιά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

7.1 Γενικά.

Συχνά στην πράξη παρουσιάζεται η ανάγκη να μεταδοθεί η περιστροφική κίνηση από ένα άξονα σε άλλο.

Η μετάδοση αυτή γίνεται κατά διάφορους τρόπους. Οι τρόποι αυτοί ταξινομούνται ανάλογα με τα **μέσα που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση.**

Τα μέσα ή συστήματα που χρησιμοποιούνται είναι:

α) Ο ιμάντας, που διαμορφώνει την ιμαντοκίνηση.

β) Η αλυσίδα, που διαμορφώνει την αλυσοκίνηση.

γ) Οι οδοντωτοί τροχοί, που διαμορφώνουν την οδοντοκίνηση.

Πριν αναπτυχθούν τα διάφορα συστήματα μεταδόσεως κινήσεως, είναι ανάγκη να δοθεί κάποια ορολογία, απαραίτητη για την εύκολη διατύπωση και σωστή κατανόηση όλων των σχετικών με τη μετάδοση της περιστροφικής κινήσεως.

1. Σε κάθε μετάδοση κινήσεως βασικά απαιτούνται δύο άξονες. Ο ένας χαρακτηρίζεται ως ***κινητήριος*** και ο άλλος ως ***κινούμενος.***

Συνήθως οι στροφές του κινητήριου άξονα εκφράζονται με αριθμό μεγαλύτερο από τις στροφές του κινούμενου. Με τη μετάδοση δηλαδή της κινήσεως συνήθως επιχειρείται ***υποβιβασμός*** των στροφών ανά λεπτό, στον κινούμενο άξονα.

2. Σχέση μεταδόσεως (i) λέγεται ο λόγος:

$$i = \frac{n_2}{n_1}$$

όπου n_1 είναι η περιστροφική ταχύτητα του κινητήριου άξονα και
n_2 είναι η περιστροφική ταχύτητα του κινούμενου άξονα.

Συνήθως ο λόγος αυτός είναι μικρότερος της μονάδας (υποβιβασμός στροφών).

Έτσι έχομε π.χ. $i=1:3$ ή $i=1:4$ κλπ. που σημαίνουν αντίστοιχα:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{3} \quad ή \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{4} \quad κ.ο.κ.$$

3. Με απλή μετάδοση, δηλαδή με δυο άξονες, δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί πάρα πολύ μεγάλη σχέση υποβιβασμού. Γι' αυτό, όταν θέλομε να επιτύχομε μεγαλύτερη σχέση, όπως π.χ. μια σχέση υποβιβασμού 1:100, τότε καταφεύγομε σε

«πολλαπλή σχέση μεταδόσεως». Αυτό σημαίνει ***κλιμακωτή*** μείωση των στροφών με περισσότερα από ένα ζεύγη μεταδόσεως (περισσότερα ζεύγη αξόνων) π.χ.: σχέση μεταδόσεως 1 : 100 επιτυγχάνεται με μια τριπλή κλιμάκωση.

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4{,}16}$$

που σημαίνει ότι η συνολική σχέση θα εξισωθεί με μια τριπλή σχέση μεταδόσεως,

$$\frac{n_4}{n_1} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} \cdot \frac{n_4}{n_3}$$

και όπου $\qquad \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1}{4}, \qquad \dfrac{n_3}{n_2} = \dfrac{1}{6}, \qquad \dfrac{n_4}{n_3} = \dfrac{1}{4{,}16}$

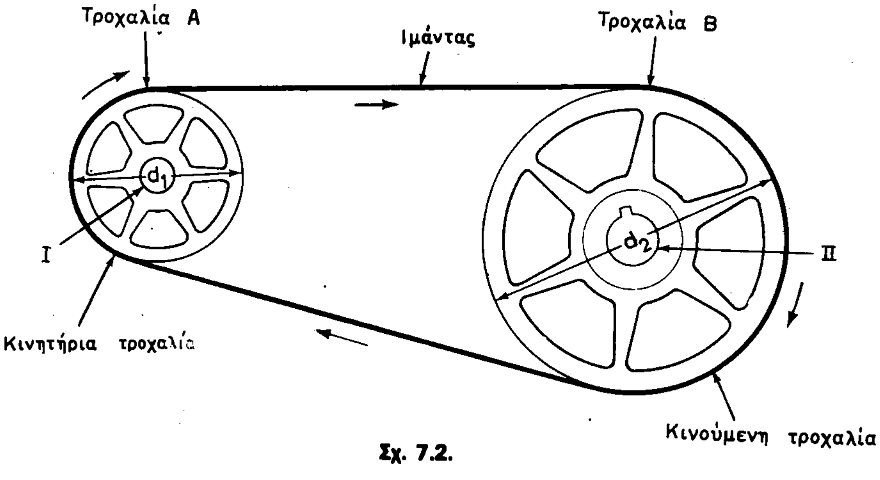
4. Το να υπολογισθεί σωστά ποιος συνδυασμός σχέσεων μεταδόσεως συμφέρει και το αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο α ή ο β τρόπος μεταδόσεως, συνιστούν την όλη ***μελέτη της μεταδόσεως,*** που σε ορισμένες περιπτώσεις και δύσκολη είναι και περίπλοκη.

7.2 Ιμαντοκίνηση.

Έστω ότι έχομε δυο άξονες Ι και ΙΙ παράλληλους και ζητείται να μεταβιβασθεί η περιστροφική κίνηση από τον ένα άξονα (Ι) στον άλλο (ΙΙ). Για το σκοπό αυτό.

α) Εξοπλίζεται ο καθένας με μια ***τροχαλία.***

β) Περιβάλλονται οι δυο τροχαλίες με έναν ατέρμονα ιμάντα, που τεντώνεται καλά, ώστε η πρόσφυσή του με τις επιφάνειες των τροχαλιών να είναι όσο μπορεί πιο τέλεια (σχ. 7.2).



Σχ. 7.2.

Αν η διάμετρος της τροχαλίας Α του άξονα Ι είναι d_1 και περιστρέφεται αυτός με n_1 στροφές στο λεπτό, η ταχύτητα ενός σημείου του ιμάντα ισούται με την περιφερειακή ταχύτητα της τροχαλίας Α, δηλαδή είναι ίση προς:

$$υ_A = υ_1 = \frac{\pi d_1 n_1}{60}$$

Αφού ο ιμάντας περιβάλλει και την τροχαλία Β, μεταβιβάζει με την πρόσφυση που έχει, πάνω στην επιφάνειά της, την περιφερειακή ταχύτητα και στην τροχαλία αυτή: και έτσι αναγκάζεται η τροχαλία Β να κινηθεί με τόσες στροφές ώστε να έχει την ίδια περιφερειακή ταχύτητα με την $υ_1$.

Κατόπιν αυτού έχομε:

$$\frac{\pi d_1 n_1}{60} = \frac{\pi d_2 n_2}{60} \quad ή$$

$$d_1 n_1 = d_2 n_2$$

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}} \qquad (1)$$

Από τη σχέση αυτή βλέπομε ότι ο λόγος των περιστροφικών ταχυτήτων των δυο τροχαλιών είναι αντίστροφα ανάλογος προς τις διαμέτρους των τροχαλιών. Στη ***μεγαλύτερη*** δηλαδή διάμετρο αντιστοιχούν οι ***λιγότερες*** στροφές.

Παράδειγμα.

Τροχαλία ηλεκτροκινητήρα διαμέτρου Ø 180mm με στροφές 1450/min μεταδίδει κίνηση σε παράλληλο άξονα με 600στρ/min. Τί διαμέτρου τροχαλία πρέπει να τοποθετηθεί στον άξονα ΙΙ;

Δεδομένα: $d_1 = 180mm$ $\quad n_1 = 1450$ στρ/min
$d_2 = ;$ $\quad n_2 = 600$ στρ/min

Λύση.

$$d_2 = d_1 \frac{n_1}{n_2} = 180 \frac{1450}{600} \quad \text{και άρα} \quad \boldsymbol{d_2 = 435mm}$$

Παρατηρήσεις.

— Στις ιμαντοκινήσεις με επίπεδο ιμάντα συνήθως στον άξονα ΙΙ δεν επιτυγχάνεται ο ***υπολογιστικός αριθμός*** περιστροφών, επειδή κατά τη μετάδοση της κινήσεως παρατηρείται ***μικρή ολίσθηση του ιμάντα πάνω στην τροχαλία Β.*** Έτσι ο πραγματικός αριθμός περιστροφών n_2 της κινούμενης τροχαλίας μπορεί να είναι ελαφρά μικρότερος του υπολογιστικού το πολύ μέχρι 5%. Στο παράδειγμά μας δηλαδή αντί 600 στρ/min μπορεί να φτάσουν το λιγότερο 570 στροφές.

— Με την επινόηση των «τραπεζοειδών ιμάντων», δηλαδή των ιμάντων με διατομή σχήματος τραπεζίου, επιτυγχάνεται ώστε η ολίσθηση του ιμάντα να περιοριστεί σε όρια πολύ μικρά (κάτω από 2%).

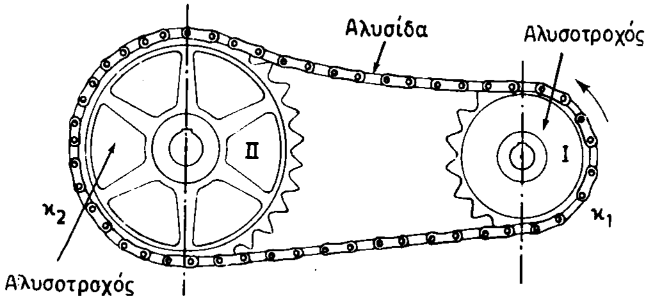
7.3 Αλυσοκίνηση.

Η αλυσοκίνηση διαφέρει από την ιμαντοκίνηση στο ότι αντί για τροχαλίες χρησιμοποιούνται οδοντωτοί τροχοί ***(αλυσοτροχοί)*** και αντί για ιμάντες χρησιμοποιείται ατέρμονη ***αλυσίδα*** (σχ. 7.3).

Και στην περίπτωση της αλυσοκινήσεως ο λόγος των τιμών της περιστροφικής ταχύτητας δυο αλυσοτροχών, που συνδέονται με αλυσίδα, είναι αντίστροφα ανάλογος προς το λόγο των αρχικών διαμέτρων τους.

Και στην περίπτωση της αλυσοκινήσεως ισχύει η ίδια σχέση μεταδόσεως:

$$d_2 n_1 = d_2 n_2$$



Σχ. 7.3.
Απλή αλυσοκίνηση.

Παρατηρήσεις.

— Στην αλυσοκίνηση δεν υπάρχει το φαινόμενο της ολισθήσεως και έτσι ταυτίζεται στην πράξη ο αριθμός των στροφών που υπολογίζεται με αυτόν που επιτυγχάνεται.

— Με την αλυσοκίνηση επιτυγχάνεται εξοικονόμηση χώρου, πολύ απαραίτητη πολλές φορές για λόγους κατασκευαστικούς.

— Στην αλυσοκίνηση αντίθετα δεν επιτρέπονται μεγάλες περιφερειακές ταχύτητες, σαν αυτές που χρησιμοποιούνται στην ιμαντοκίνηση, για λόγους υπέρμετρης φθοράς των αλυσίδων.

7.4 Οδοντοκίνηση.

Στην οδοντοκίνηση καταργούνται οι τροχαλίες και οι αλυσοτροχοί και τη θέση τους παίρνουν οι ***οδοντωτοί τροχοί*** (γρανάζια). Ο κάθε άξονας αντί για τροχαλία φέρει έναν οδοντωτό τροχό. Οι δυο αυτοί οδοντωτοί τροχοί έρχονται σε ***άμεση εμπλοκή*** και με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η μετάδοση της κινήσεως από τον ένα άξονα στον άλλο (σχ. 7.4α).

Και στην περίπτωση της οδοντοκινήσεως έχομε ανάλογη σχέση με την:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

με μόνη τη διαφορά ότι επειδή στην οδοντοκίνηση:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

τελικά η σχέση καταλήγει στη:

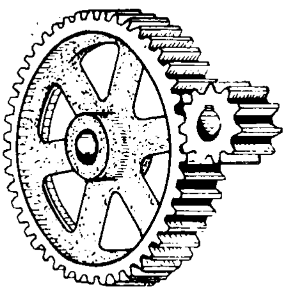
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad ή \quad \boxed{n_2 z_1 = n_2 z_2}$$

όπου z_1, z_2 είναι οι αριθμοί των δοντιών του ενός και του άλλου οδοντωτού τροχού.

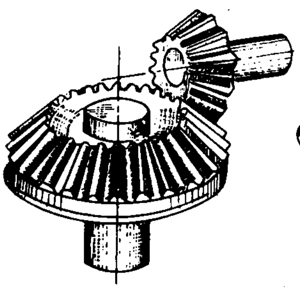
Άλλο σπουδαίο προσόν της οδοντοκινήσεως είναι ότι μπορεί να πετύχει μετάδοση κινήσεως από τον ένα άξονα στον άλλο, και όταν ακόμη η θέση των αξόνων είναι τυχαία στο χώρο, πράγμα που δεν είναι κατορθωτό ούτε στην ιμαντοκίνηση ούτε στην αλυσοκίνηση.

Έτσι διακρίνονται οι οδοντοκινήσεις.

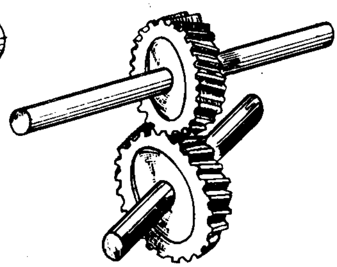
α) με ***παράλληλους οδοντωτούς τροχούς,*** όταν δηλαδή οι δυο άξονες είναι παράλληλοι (σχ. 7.4α),



Σχ. 7.4α.



Σχ. 7.4β.



Σχ. 7.4γ.

β) με ***κωνικούς τροχούς,*** όταν οι δυο άξονες διασταυρώνονται κάθετα (σχ. 7.4β),

γ) με ***ελικοειδείς οδοντωτούς τροχούς*** που επιτρέπουν μετάδοση περιστροφικής κινήσεως σε άξονες που δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο (άξονες ασύμβατοι) (σχ. 7.4γ).

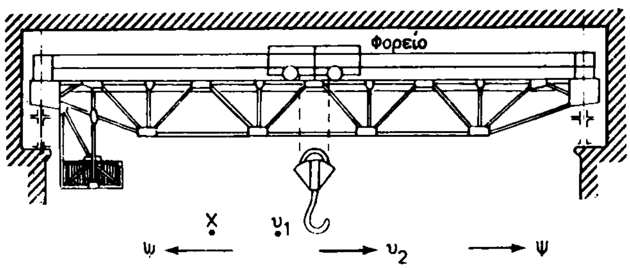
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

8.1 Εισαγωγή.

Πολλές φορές παρουσιάζεται η ανάγκη να μελετηθούν ορισμένες κινήσεις, που είναι αδύνατο να ενταχθούν σε μιαν από τις γνωστές κινήσεις, με αποτέλεσμα να γίνεται προσφυγή στο πείραμα, που και χρόνο χρειάζεται και δεν δίνει πάντα αρκετή ακρίβεια. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Το φορείο π.χ. μιας γερανογέφυρας (σχ. 8.1α).



Σχ. 8.1α.

2. Η κίνηση των τροχών αυτοκινήτου που τρέχει με ομοιόμορφη κίνηση (σχ. 8.1β).
3. Η κίνηση ενός βλήματος (σχ. 8.1γ).

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις είναι αδύνατο να προχωρήσει κανείς στη μελέτη των κινήσεων με βάση μόνο τις γνώσεις που απόκτησε μέχρι τώρα.

Εντούτοις είναι δυνατό, μετά από κάποιαν εμβάθυνση στο θέμα, να θεωρηθούν όλες αυτές οι κινήσεις ως **σύνθεση** απλών κινήσεων.

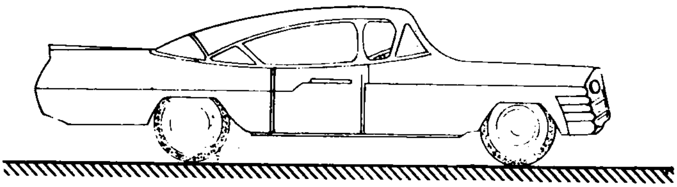
Πράγματι το φορείο της γερανογέφυρας εκτελεί ***σύγχρονα*** δύο ισοταχείς κινήσεις:

Σαν αναπόσπαστο τμήμα της γερανογέφυρας κινείται μαζύ της κατά μήκος [illegible]ρου που εξυπηρετεί (κατεύθυνση Χ κάθετη στο επίπεδο σχεδιάσεως) με [illegible]ητα $υ_1$.

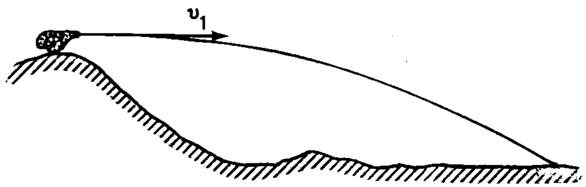
Σχετικά όμως προς τη γερανογέφυρα, το φορείο ***μπορεί να κινηθεί*** προς την κατεύθυνση Ψ με ταχύτητα $υ_2$.

Στην πράξη αυτές οι δυο κινήσεις γίνονται ***ταυτόχρονα.*** Έτσι η θέση, στην οποία θα φθάσει το φορείο της γερανογέφυρας μετά από πάροδο χρόνου t, θα εξαρτηθεί από τις τιμές των ταχυτήτων $υ_1$ και $υ_2$. Αν π.χ. η $υ_1$ είναι πολύ μεγαλύτερη από την $υ_2$ είναι φανερό ότι το φορείο της γερανογέφυρας θα μετακινηθεί περισσότερο κατά την κατεύθυνση Χ από ό,τι κατά την κατεύθυνση Ψ.

Αν αντίθετα η $υ_2$ είναι μεγαλύτερη από την $υ_1$, το φορείο θα μετακινηθεί πολύ περισσότερο προς την κατεύθυνση Ψ από ό,τι προς την κατεύθυνση Χ. Στην ειδική περίπτωση που το $υ_2=0$ θα μετακινηθεί μόνο κατά την κατεύθυνση Χ, ενώ αν $υ_1=0$ θα μετακινηθεί μόνο κατά την κατεύθυνση Ψ. Στις δύο αυτές περιπτώσεις το φορείο θα εκτελεί επομένως ομαλή κίνηση μιας κατευθύνσεως.



Σχ. 8.1β.



Σχ. 8.1γ.

Σε όλες τις περιπτώσεις, όπου $υ_1 \neq 0$ και $υ_2 \neq 0$, ***το φορείο θα εκτελεί σύνθετη κίνηση.*** Δηλαδή μια κίνηση που μπορεί να αναλυθεί σε δύο ισοταχείς κινήσεις που εκτελούνται ταυτόχρονα.

Οι τροχοί του αυτοκινήτου (σχ. 8.1β) εκτελούν επίσης δυο κινήσεις ταυτόχρονα, μιαν ομοιόμορφη (ως αναπόσπαστο μέρος του αυτοκινήτου) και μια περιστροφική γύρω από τον άξονα περιστροφής τους. Τέλος, αποδεικνύεται ότι και το βλήμα, που εκσφενδονίζει το πυροβόλο (σχ. 8.1γ) εκτελεί δυο κινήσεις ταυτόχρονα, μιαν ***ισοταχή*** κατά την οριζόντια διεύθυνση με ταχύτητα $υ_1$ και μιαν ομοιόμορφα επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα μηδενική και επιτάχυνση $g=9{,}81$ κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.

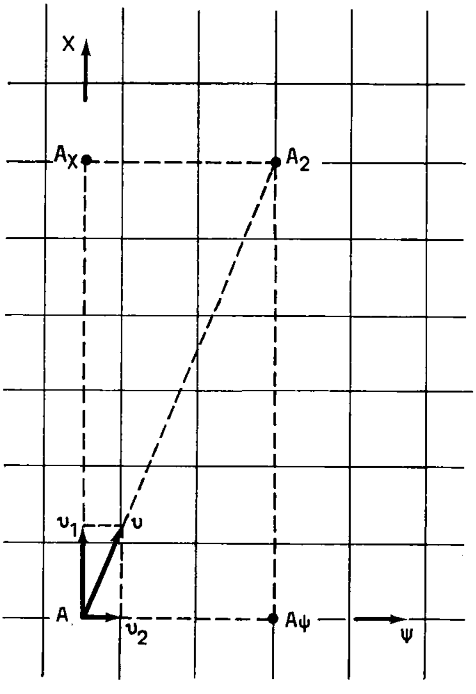
Κάθε μια από τις κινήσεις που περιγράψαμε είναι δυνατό να θεωρηθεί ως «συνισταμένη» δύο ξεχωριστών κινήσεων ή καλύτερα δύο «συνιστωσών» κινήσεων.

Η διαπίστωση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική, γιατί οδηγεί στον τρόπο αντιμετωπίσεως της μελέτης των ***συνθέτων κινήσεων.***

8.2 Κίνηση που μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση δυο ευθύγραμμων ισοταχών κινήσεων.

Ας επανέλθομε στο φορείο του σχήματος 8.1α. Υποθέτομε πως οι ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$ δίνονται ίσες προς $υ_1 = 1,2$ m/s και $υ_2 = 0,5$ m/s.

Όπως γνωρίζομε, η ταχύτητα είναι διάνυσμα. Αν λοιπόν παραστήσομε το φορείο με το υλικό σημείο A και εκλέξομε ως κλίμακα μετρήσεως των ταχυτήτων 1 cm ≙ 1 m/s, είναι πολύ εύκολο να απεικονίσομε γραφικά τα δεδομένα της προς μελέτη κινήσεως (σχ. 8.2α).



Κλ.ταχυτήτων : 1cm≙1m/s

Κλ.ταχυτήτων : 1cm≙1m/s

Σχ. 8.2α.

Με την επίδραση μόνο της ταχύτητας $υ_1$ το φορείο της γερανογέφυρας κινείται προς την κατεύθυνση X (μαζύ με ολόκληρη τη γερανογέφυρα) και διανύει μετά πάροδο π.χ. 5s διάστημα 6m ($A_1A_x = 1,2$m/s . 5s = 6m). Με την επίδραση μόνο της $υ_2$ το φορείο της γερανογέφυρας κινείται στην κατεύθυνση Ψ (δηλαδή κατά μήκος της γερανογέφυρας) και μετά από 5 δευτερόλεπτα καλύπτει διάστημα 2,5 m ($A_1A_ψ = 0,5$m/s . 5s = 2,5m).

Είναι μετά από αυτά λογικό να συμπεράνομε ότι με την ταυτόχρονη επίδραση των ταχυτήτων $υ_1$ και $υ_2$ το φορείο θα κινηθεί προς την ***κατεύθυνση της διαγωνίου*** του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $A_1A_xA_2A_ψ$ και θα βρίσκεται μετά από 5 δευτερόλεπτα στη θέση A_2.

Το συμπέρασμα αυτό μας οδηγεί στις εξής σημαντικές παρατηρήσεις:

— ***Η σύνθεση δύο ευθυγράμμων ισοταχών κινήσεων είναι επίσης ευθύγραμμη ισοταχής κίνηση.***

— ***Η ταχύτητα υ της σύνθετης αυτής κινήσεως προκύπτει κατ' αριθμητική τιμή και κατεύθυνση, αν προσθέσομε τα δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ (διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$).***

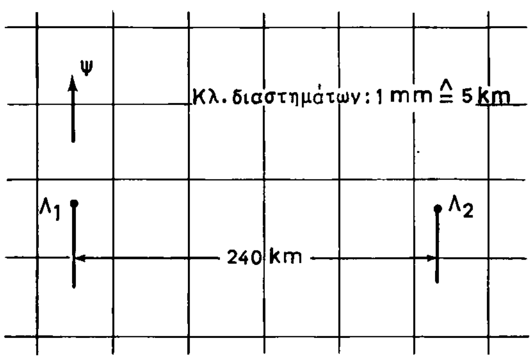
— Η θέση, στην οποία θα φθάσει το κινούμενο σώμα μετά από t δευτερόλεπτα, βρίσκεται, αν θεωρηθεί ότι οι δύο ξεχωριστές κινήσεις, που εκτελεί το σώμα, δεν συμβαίνουν σύγχρονα, αλλά διαδοχικά η μια μετά την άλλη και μάλιστα ανεξάρτητα από οποιαδήποτε σειρά προτεραιότητας.

Υποτίθεται ότι κάθε μια από τις κινήσεις θα διαρκεί χρόνο t, επί όσο χρόνο δηλαδή διαρκεί η σύνθετη κίνηση του σώματος. Έτσι στο συγκεκριμένο παράδειγμά μας (το φορείο δηλαδή της γερανογέφυρας) θα φθάσει στη θέση A_X, αν κινηθεί προς την κατεύθυνση X επί t = 5 δευτερόλεπτα με ταχύτητα $υ_1 = 1{,}2$ m/s, θα φθάσει δε μετά στην τελική θέση A_2, αν κινηθει προς την κατεύθυνση Ψ με ταχύτητα $υ_2 = 0{,}5$ m/s επί 5 επίσης δευτερόλεπτα. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα φθάσομε, αν θεωρήσομε ότι το φορείο της γερανογέφυρας κινείται πρώτα προς την κατεύθυνση Ψ επί 5 δευτερόλεπτα με ταχύτητα $υ_2$ και μετά προς την κατεύθυνση X επί χρόνο 5 δευτερολέπτων με ταχύτητα $υ_1$.

— Ο χρόνος, που διαρκεί η σύνθετη κίνηση του σώματος, είναι ίσος με το χρόνο που διαρκούν και οι χωριστές κινήσεις (συνιστώσες).

Παράδειγμα.

Ένα πλοίο πρέπει να καλύψει με θαλασσοταραχή, το ταχύτερο δυνατό, απόσταση 240 km, που χωρίζει τους λιμένες $Λ_1$ και $Λ_2$ (σχ. 8.2β).



Σχ. 8.2β.

Η μεγαλύτερη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το πλοίο είναι 25km/h. Η θαλασσοταραχή υπολογίζεται ότι προκαλεί μετατόπιση του πλοίου προς την κατεύθυνση Ψ με ταχύτητα 4 km/h. Με τις συνθήκες αυτές ποια κατεύθυνση πρέπει να δώσει ο κυβερνήτης στο πλοίο;

Στο πρόβλημά μας δίνονται:

α) Η κατεύθυνση της συνισταμένης ταχύτητας $υ_σ$, που πρέπει να είναι η κατεύθυνση $Λ_1Λ_2$, η οποία είναι η συντομότερη απόσταση.

β) Η ταχύτητα του ανέμου $υ_2=4$ km/h και η κατεύθυνσή της.

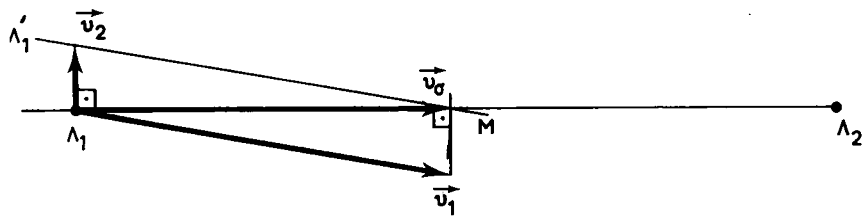
γ) Η αριθμητική τιμή της $υ_1=25$ km/h.

Και ζητούμε:

1) την κατεύθυνση της $\vec{υ_1}$.

2) την αριθμητική τιμή της $υ_σ$.

Με κέντρο το $Λ_1'$, άκρο του διανύσματος $\vec{υ_2}$, γράφομε τόξο με ακτίνα ίση προς την αριθμητική τιμή της $υ_1$ (εννοείται με την κλίμακα του σχεδίου), η οποία τέμνει τη $Λ_1Λ_2$ στο σημείο Μ (σχ. 8.2γ).



Σχ. 8.2γ.

Η κατεύθυνση, την οποία πρέπει να δώσει ο κυβερνήτης στο πλοίο του, δίνεται από την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{υ_1}$, που βρίσκεται ευκολότατα αν συμπληρωθεί η χάραξη του παραλληλογράμμου.

Το μέτρο της ταχύτητας $υ_σ$ με την οποία θα κινηθεί το πλοίο, δίνεται συνεπώς από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ($Λ_1$Μ). Από το ορθογώνιο τρίγωνο βρίσκομε $υ_σ=\sqrt{υ_1^2-υ_2^2}=\sqrt{24{,}67}$ km/h, οπότε ο απαιτούμενος χρόνος, για να διανύσει την απόσταση των 240 km, είναι ίσος με:

$$t' = \frac{s}{υ_σ} = \frac{240}{24{,}67} = 9{,}73\text{h}$$

8.3 Σύνθεση μιας ισοταχούς και μιας περιστροφικής κινήσεως.

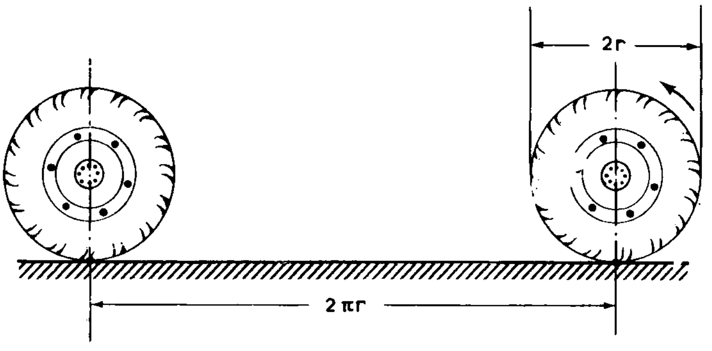
Στην ισοταχή κίνηση ενός αυτοκινήτου οι τέσσερις τροχοί του εκτελούν, όπως είπαμε, δύο είδη κινήσεων ταυτόχρονα: Μια περιστροφική ως προς τον άξονα συμμετρίας τους και μιαν ισοταχή ως προς οποιοδήποτε ακίνητο με τη Γη σημείο. Είναι φανερό ότι οι δύο αυτές κινήσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η μιά προϋποθέτει την άλλη. Όλοι γνωρίζομε ότι όσο ταχύτερα περιστρέφονται οι τροχοί, τόσο γρηγορότερα τρέχει το αυτοκίνητο και αντίστροφα. Θα πρέπει συνεπώς να υπάρχει κάποια σχέση, που να συνδέει ***ποσοτικά*** την περιστροφική ταχύτητα των τροχών με την ταχύτητα κινήσεως του αυτοκινήτου.

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι οι τροχοί του αυτοκινήτου περιστρέφονται με ταχύτητα n στρ/min. Είναι φανερό ότι ο χρόνος που χρειάζεται για τη συμπλήρωση μιας περιστροφής ισούται προς 1/n λεπτά. Στο χρόνο αυτό το αυτοκίνητο ως σύνολο θα διανύσει διάστημα ίσο προς 2πr (σχ. 8.3) όπου r η ακτίνα των τροχών του.

Αφού λοιπόν το αυτοκίνητο έτρεξε διάστημα 2πr σε χρόνο 1/n λεπτά, συμπεραίνομε πως σε ένα λεπτό θα διανύσει διάστημα ίσο προς 2πrn και συνεπώς η ταχύτητα υ της κινήσεως του θα είναι ίση προς:

$$υ = \frac{2πrn}{60} \text{ m/s}$$

όταν το r εκφράζεται σε m.



Σχ. 8.3.

Στην περίπτωση π.χ. που n = 450 στρ/min και r = 0,37 m η ταχύτητα του αυτοκινήτου στο δευτερόλεπτο είναι ίση προς:

$$υ = \frac{2 \,.\, π \,.\, 0{,}37 \,.\, 450}{60} = 17{,}42 \text{ m/s}$$

ή

$$υ = \frac{17{,}42 \times 3600}{1000} = 62{,}73 \text{ km/h}$$

8.4 Σύνθεση μιας ισοταχούς και μιας ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως.

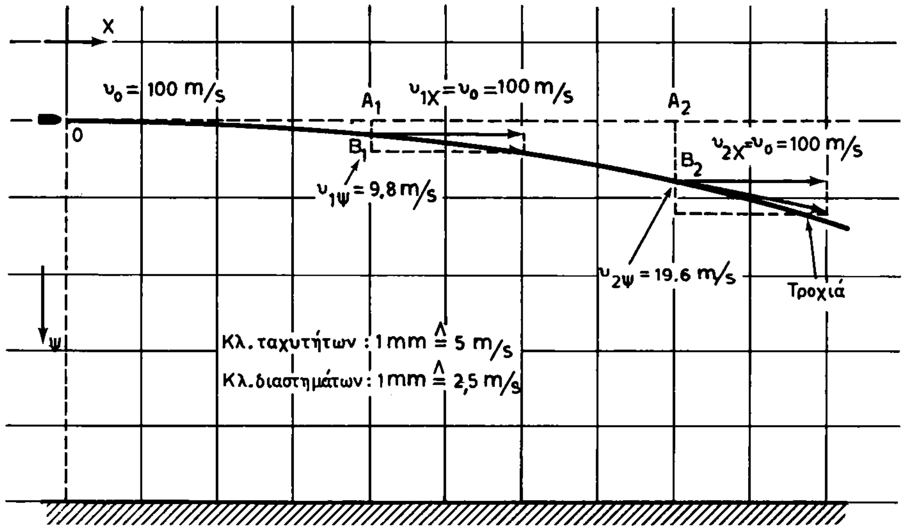
Χαρακτηριστικό παράδειγμα κινήσεως του είδους αυτού είναι η κίνηση που εκτελεί σώμα, όταν πέφτει και έχει αρχική ταχύτητα διάφορη από το μηδέν.

Η πιο απλή περίπτωση ειναι βέβαια εκείνη, κατά την οποία το σώμα έχει αρχική ταχύτητα με διεύθυνση κατακόρυφη, οπότε η τροχιά που διανύει είναι ευθύγραμμη. Την περίπτωση όμως αυτή την μελετήσαμε στα προηγούμενα.

Τώρα θα εξετασθεί η περίπτωση κατά την οποία η αρχική ταχύτητα του σώματος, που κινείται με την επίδραση της έλξεως της Γης, ***δεν έχει κατακόρυφη*** διεύθυνση. Η απλούστερη απ' αυτές είναι εκείνη που το σώμα έχει αρχική ταχύτητα με διεύθυνση οριζόντια (σχ. 8.4α).

'Οπως ειπώθηκε και στην παράγραφο 8.1, είναι δυνατό στην κίνηση αυτή να θεωρηθεί ότι το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο κινήσεις, μιαν ισοταχή με ταχύτητα $υ_o$, ίση π.χ. προς 100 m/s προς την κατεύθυνση X, και μιαν ομοιόμορφα επιταχυνόμενη προς την κατεύθυνση Ψ με αρχική ταχύτητα μηδενική και επιτάχυνση $g = 9{,}81$ m/s^2.

Για τη μελέτη της κινήσεως αρκεί να εφαρμοσθούν οι τρεις τελευταίες παρατηρήσεις της παραγράφου 8.2.



Σχ. 8.4α.

Αν υποτεθεί ότι το σώμα εκτελεί στην αρχή μόνο την ισοταχή κίνηση, είναι φανερό πως με την πάροδο t = 1s θα βρεθεί στη θέση A_1, αφού διανύσει διάστημα $(OA_1) = υ_o \,.\, 1 = 100$m.

Αν κατόπιν αλλάξει κατεύθυνση και κινηθεί κατά την κατεύθυνση Ψ για χρόνο 1 δευτερολέπτου, θα διανύσει διάστημα:

$$(A_1B_1) = 0 + \frac{1}{2}\, gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times 1^2 = 4{,}9 \text{ m}$$

'Ετσι συμπεραίνομε ότι στην πάροδο του πρώτου δευτερολέπτου το σώμα θα βρίσκεται στή θέση B_1. ***Το B_1 συνεπώς αποτελεί σημείο της τροχιάς που διαγράφει το σώμα.***

Με τους ίδιους ακριβώς συλλογισμούς βρίσκομε πως μετά πάροδο t = 2s το σώμα θα βρίσκεται στη θέση B_2 όπου:

$$(OA_2) = υ_o \,.\, t = 100 \times 2 = 200 \text{ m} \qquad \text{κ.α.}$$

$$(A_2B_2) = \frac{1}{2}\,gt^2 = \frac{1}{2}\,9{,}81 \times 2^2 = 19{,}6\ \text{m}$$

Σημείο προς σημείο είναι δυνατό να χαραχθεί η τροχιά που διαγράφει το κινητό στην κίνησή του αυτή. Όπως βλέπομε στο σχήμα 8.4α η τροχιά δεν είναι ευθύγραμμη. ***Το σώμα δηλαδή εκτελεί καμπυλόγραμμη τροχιά.***

Η μελέτη της κινήσεως έχει ουσιαστικά τελειώσει, αφού γνωρίζομε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Χρειάζεται εντούτοις να γραφούν τα σχετικά μεγέθη με τη μορφή των γνωστών μας τύπων, οι οποίοι ακολουθούν τις δυο συνιστώσες κινήσεις του σώματος. Έτσι:

$u_{tx} = u_o$ είναι η αριθμητική τιμή της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος, η οποία προφανώς είναι ανεξάρτητη του χρόνου, αφού υποθέσαμε ότι η οριζόντια κίνηση είναι ισοταχής.

$u_{t\psi} = g.t$ είναι η αριθμητική τιμή της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος, η οποία όμως εξαρτάται από το t, δηλαδή από το χρόνο, κατά τον οποίο εκινήθη το σώμα ώσπου να φθάσει στη θέση που έφθασε.

$s_{tx} = u_o t$, είναι το διάστημα που διανύει το σώμα κατά την κατεύθυνση X, αν κινηθεί επί χρόνο t.

$s_{t\psi} = \frac{1}{2} gt^2$ είναι το διάστημα που διανύει το σώμα στην κατεύθυνση Ψ, αν κινηθεί επί χρόνο t.

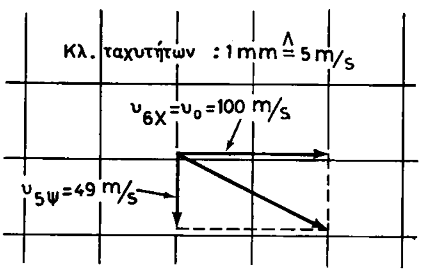
Με την εφαρμογή αυτών των τύπων βρίσκεται π.χ. ότι, αν το σώμα κινηθεί επί χρόνο t = 5 s, θα φθάσει στη θέση B_5 (σχ. 8.4γ) όπου:

$$(OA_5) = s_{5x} = u_o\ .\ t = 100 \times 5 = 500\ \text{m}$$

και

$$(A_5B_5) = s_{5\psi} = \frac{1}{2}\,gt^2 = \frac{1}{2}\,9{,}81 \times 5^2 = 122{,}5\text{m}$$

και ότι θα κινείται τότε με ταχύτητα ίση προς τη συνισταμένη των δύο ταχυτήτων: $u_{5x} = u_0 = 100$ m/s και $u_{5\psi} = gt = 9{,}81 \times 5 = 49$ m/s (σχ. 8.4β).

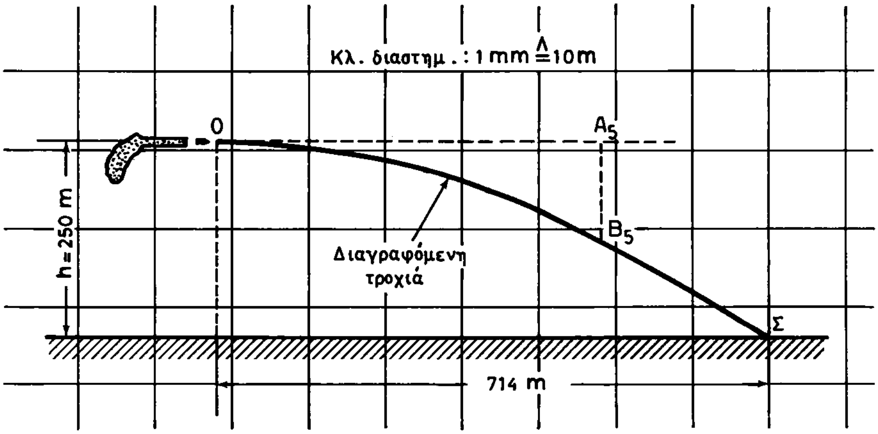


Σχ. 8.4β.

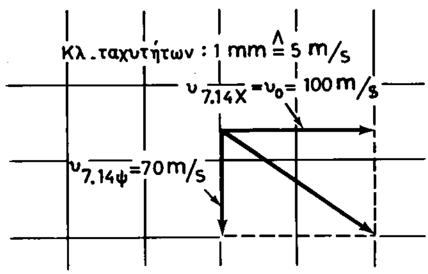
Τέλος είναι φανερό ότι το σώμα θα προσκρούσει στο έδαφος, όταν $s_{t\psi}$ = h (σχ. 8.4γ). Έτσι, αν στο συγκεκριμένο παράδειγμα πάρομε h = 250 m βρίσκομε από τη σχέση $h = 1/2\ gt^2$ ότι η κίνηση θα διαρκέσει συνολικά επί χρόνο:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 250}{9{,}81}} = 7{,}14\ s$$

Η θέση Σ, στην οποία θα βρεθεί το σώμα, προσδιορίζεται από τη σχέση $s_{tx} = u_o t$, όπου $u_o = 100\ m/s$ και $t = 7{,}14 s$ (σχ. 13.4δ) η δε ταχύτητά του, ως συνισταμένη των δύο ταχυτήτων $u_{tx} = u_o = 100\ m/s$ και $u_{t\psi} = u_{7,14\psi} = 9{,}81 \times 7{,}14 = 70\ m/s$ (σχ. 8.4δ).

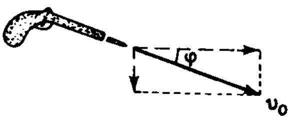


Σχ. 8.4γ.

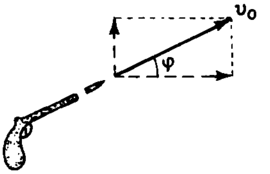


Σχ. 8.4δ.

Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι η κίνηση, που μελετήθηκε εδώ, αποτελεί μερική περίπτωση των κινήσεων, οι οποίες μπορούν να αναλυθούν σε μιαν ισοταχή και μιαν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Πραγματικά, η αρχική ταχύτητα του σώματος δεν θα έχει γενικά διεύθυνση παράλληλη προς το οριζόντιο επίπεδο, αλλά διεύθυνση που θα σχημάτιζε κάποια γωνία Φ με το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 8.4ε και σχ. 8.4ζ). Αλλά και στη γενική αυτή περίπτωση, δεν έχομε παρά να αναλύσομε την αρχική ταχύτητα u_0 του σώματος σε δυο συνιστώσες, μιαν οριζόντια και μια κατακόρυφη, και να εργασθούμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως και προηγούμενα.



Σχ. 8.4ε.



Σχ. 8.4ζ.

Ανακεφαλαίωση.

1. Η κίνηση ενός κινητού Μ, ως προς ένα σύστημα αναφοράς, μπορεί να αναλυθει σε δύο ταυτόχρονες κινήσεις:

Μια κίνηση ***σχετική*** του κινητού σημείου Μ προς ένα σύστημα συγκρίσεως (S).

Μια κίνηση ***μεταφορική*** του συστήματος (S) σχετικά ως προς ένα άλλο σύστημα (S_o).

Η κίνηση του σημείου Μ σχετικά προς το σύστημα (S_o) είναι μια ***σύνθετη κίνηση.***

Η αναζήτηση της συνισταμένης κινήσεως σημαίνει τη σύνθεση της σχετικης κινήσεως και της κινήσεως μεταφοράς.

2. Η συνισταμένη κίνηση δύο ευθυγράμμων και ομαλών κινήσεων, διαφορετικων κατευθύνσεων, είναι επίσης μια κίνηση ευθύγραμμη και ομαλή.

Η ταχύτητά της υ σε μέγεθος, διεύθυνση και φορά παριστάνεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου, που σχηματίζεται με πλευρές τα διανύσματα των δύο συνιστωσών ταχυτήτων.

3. Ο χρόνος που διαρκεί η σύνθετη κίνηση του σώματος είναι ίσος με το χρόνο που διαρκεί κάθε μια από τις συνιστώσες κινήσεις.

Παραδείγματα.

α) Ας μελετήσομε την κινηση βλήματος, που έχει αρχικη ταχύτητα $υ_0 = 100$ m/s με κατεύθυνση αυτήν που φαίνεται στο σχήμα 8.4ε. Αν $φ = 30°$ η κίνηση αυτή είναι δυνατό να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο κινήσεων. Μιας ισοταχούς με ταχύτητα

$$υ_{ox} = υ_o \text{ συν } 30° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s} \qquad \text{ή} \qquad υ_{ox} = 87 \text{ m/s}$$

προς την κατεύθυνση Χ και μιας ομοιόμορφα επιταχυνόμενης με αρχική ταχύτητα $υ_{oψ} = υ_o$ ημ $30° = 100 \times 1/2 = 50$ m/s και επιτάχυσνη $g = 9{,}8$ m/s προς την κατεύθυνση Ψ.

Αν κάνομε τους ίδιους συλλογισμούς, όπως και προηγούμενα, θα καταλήξομε στο συμπέρασμα ότι: $υ_{tx} = υ_{ox}$ είναι η αριθμητική τιμή της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος, σταθερής κατά τη διάρκεια της κινήσεως.

$υ_{tψ} = υ_{oψ} + gt$ είναι η αριθμητική τιμή της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος

$s_{tx} = υ_{ox} \cdot t$ είναι το διάστημα που διανύει το σώμα προς την κατεύθυνση Χ, αν κινηθεί επί χρόνο t και

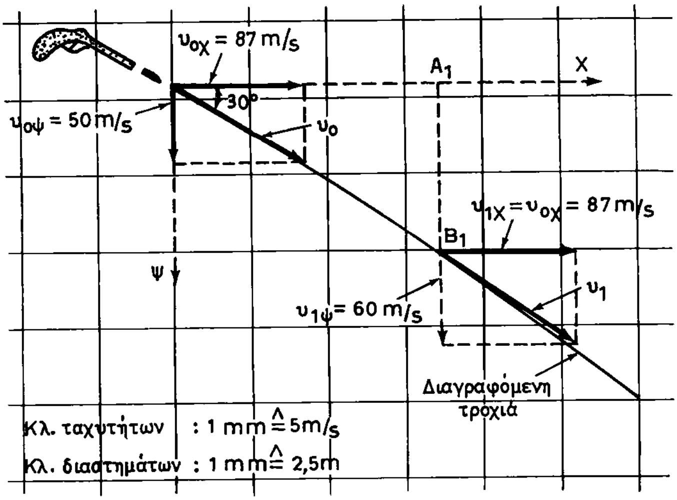
$s_{t\psi} = u_{o\psi} \,.\, t + 1/2\, gt^2$ το διάστημα που διανύει το σώμα προς την κατεύθυνση Ψ, αν κινηθεί επί χρόνο t.

Έτσι, αν το σώμα κινηθεί επί χρόνο t = 1s θα φθάσει στη θέση B_1 (σχ. 8.4η), όπου $(OA_1) = S_{tx} = u_{ox} \,.\, t = 87 \times 1 = 87$ m και $A_1B_1 = s_{t\psi} = u_{o\psi} \,.\, t + 1/2\, gt^2 \times = 50 \times 1 + 1/2\; 9{,}81 \times 1^2 = 54{,}9$ m, και θα κινείται με ταχύτητα u_1 ίση προς τη συνισταμένη των δύο ταχυτήτων $u_{tx} = u_o = 87$ m/s και $u_{t\psi} = u_{o\psi} + gt = 50 + 9{,}8 \times 1 = 59{,}8$ m/s.

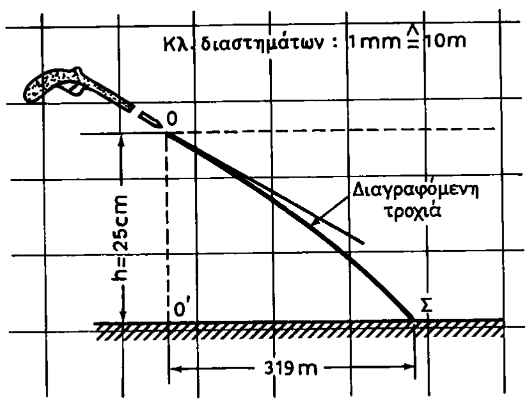
Ο χρόνος πάλι που θα διαρκέσει η κίνηση, προσδιορίζεται επίσης από τη σχέση $s_{t\psi} = h$ (σχ. 8.4θ), δηλαδή από τη $gt^2 + 2u_{o\psi}\, t - 2h = 0$.

$$t = \frac{-\,u_{o\psi} + \sqrt{u_{o\psi}^2 + 2gh}}{g} = 3{,}67 \text{ s}$$

Η θέση Σ, στην οποία θα βρεθεί το βλήμα στην πρόσκρουσή του με το έδαφος, είναι δυνατό να προσδιορισθεί με τη βοήθεια του τύπου $(O'\Sigma) = s_{tx} = u_{ox} \,.\, t$, όπου $u_{ox} = 87$ m/s και t = 3,67 s.



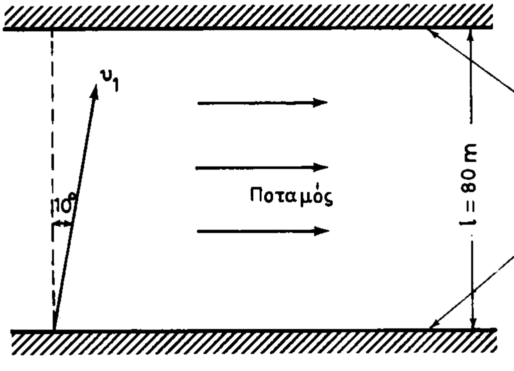
Σχ. 8.4η.



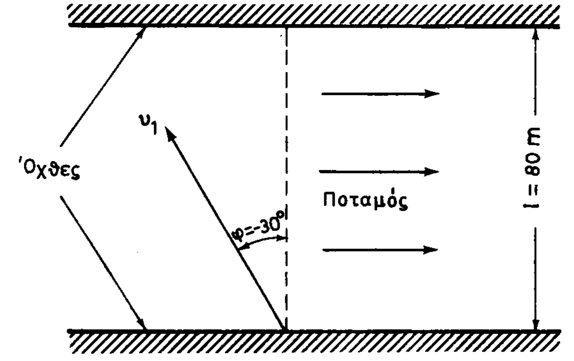
Σχ. 8.4θ.

8.5 Ασκήσεις.

1. Κολυμβητής επιθυμεί να διασχίσει κατά πλάτος ποταμό του οποίου οι όχθες απέχουν μεταξύ τους απόσταση l = 80 m. Δεδομένα: α) Ο κολυμβητής διανύει συνήθως την απόσταση των 100 m σε χρόνο 1,04 του λεπτού. β) Αν αφεθεί ξύλινο αντικείμενο να παρασυρθεί από το ρεύμα του ποταμού, διανύει αυτό απόσταση 50 m σε χρόνο 0,85 min.
Ζητούνται:
α) Ποια η αριθμητική τιμή $υ_1$ σε m/s της ταχύτητας του κολυμβητή, όταν τρέχει τα 100 m;
β) Ποια ειναι η ταχύτητα σε m/s του ρεύματος του ποταμού;
γ) Επί πόσο χρόνο θα μείνει στο νερό ο κολυμβητής, αν προσπαθήσει να διασχίσει τον ποταμό στην κατεύθυνση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 8.5α;
δ) Επί πόσο χρόνο θα μείνει στο νερό, αν προσπαθήσει να διασχίσει τον ποταμό προς την κατεύθυνση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 8.5β;



Σχ. 8.5α.



Σχ. 8.5β.

2. Αυτοκίνητο κινείται ομοιόμορφα με ταχύτητα υ = 60 km/h. Η εξωτερική διάμετρος d των τροχων του είναι ιση προς 0,84 m.
Ζητουνται:
α) Η περιστροφική ταχύτητα των τροχών του αυτοκινήτου σε στρ/min.

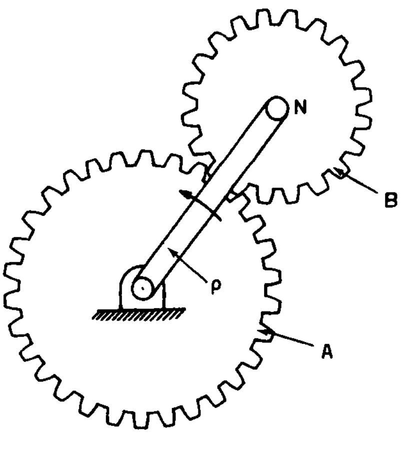
β) Η ταχύτητα του σημείου Α σχετικά με τον άξονα περιστροφής του τροχου (αριθμητική τιμή και κατεύθυνση).

γ) Η ταχύτητα του σημείου Β της εξωτερικης περιφέρειας του τροχού σχετικά με το ακίνητο κατάστρωμα του δρόμου (θα βρεθεί ως συνισταμένη δύο ταχυτήτων).

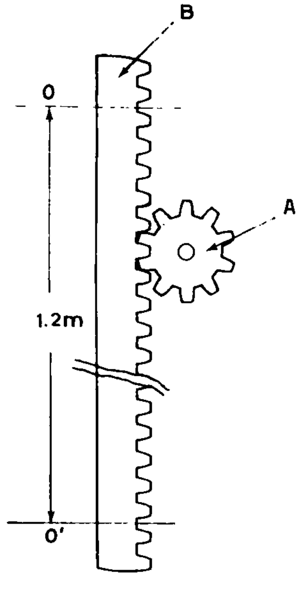
δ) Η ταχύτητα του σημείου Γ σχετικά με το ακίνητο κατάστρωμα του δρόμου.

ε) Η ταχύτητα του κέντρου Κ του τροχού σχετικά με το ακίνητο κατάστρωμα του δρόμου.

3. Στο μηχανισμό του παρακάτω σχήματος 8.5γ ο οδοντωτός τροχός Α είναι ακίνητος και έχει αρχική διάμετρο $d_A = 150$ mm, ο τροχός Β έχει αρχική διάμετρο $d_B = 100$ mm, η δε ράβδος ρ προκαλεί περιστροφική κίνηση με ταχύτητα h = 200 στρ/min.



Σχ. 8.5γ.



Σχ. 8.5δ.

Ζητουνται:

α) Τι είδους κίνηση εκτελει το σημείο Ν;

β) Ποια ειναι η αριθμητική τιμή της ταχύτητας του σημείου Ν;

γ) Τι είδους κίνηση εκτελεί ο οδοντωτός τροχός Β;

δ) Ποια ειναι η περιστροφική ταχύτητα n_B του οδοντωτού τροχού Β;

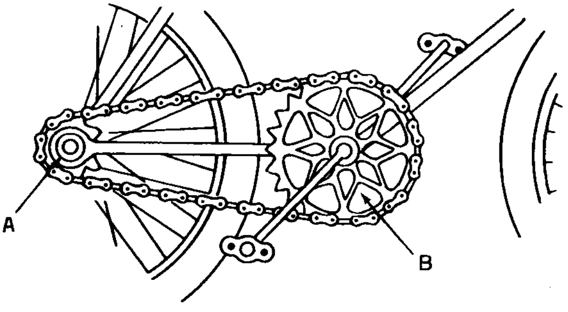
4. Ο οδοντωτός κανόνας Β του παρακάτω σχήματος 8.5δ παραμένει ακίνητος. Ο τροχός Α κινείται από τη θέση Ο στη θέση Ο' σε χρονικό διάστημα 12,5 s. Αν υποτεθεί ότι η αρχική διάμετρος του οδοντωτού τροχού είναι $d_A = 30$ mm και η απόσταση (ΟΟ') ίση προς 1,2 m, ζητούνται:

α) Η αριθμητική τιμή της ταχύτητας του κέντρου του τροχού.

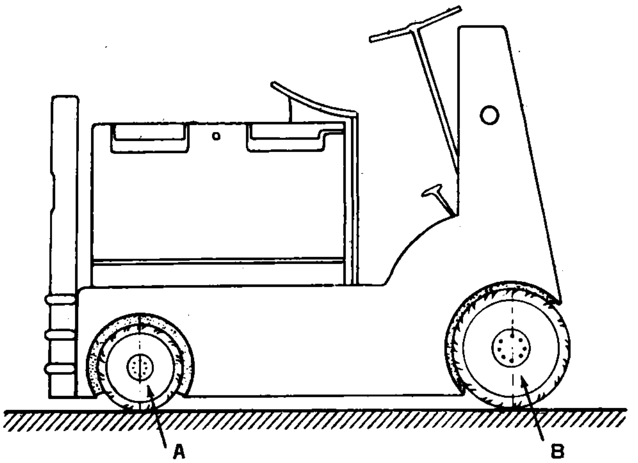
β) Η περιστροφική ταχύτητα του τροχού σε στρ/sec.

5. Οι διάμετροι των δύο αλυσοτροχών ποδηλάτου είναι αντίστοιχα $d_A = 6$ cm και $d_B = 18$ cm, ενώ η διάμετρος των τροχών του d = 65 cm (σχ. 8.5ε).
Ποια ειναι η περιστροφική ταχύτητα, την οποία προσδίδει ο ποδηλάτης στον αλυσοστροχό Β (στρ/min), όταν κινειται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα 40 km/h;

6. Όχημα κινείται ισοταχώς με ταχύτητα υ όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα 8.5στ. Οι κινητήριοι τροχοί του Α περιστρέφονται με ταχύτητα $M_A = 175$ στρ/min.



Σχ. 8.5ε.



Σχ. 8.5ζ.

Ποια είναι η περιστροφική ταχύτητα των εμπροσθίων τροχών του οχήματος;
Οι διάμετροι των οπισθίων και εμπροσθίων τροχών του οχήματος είναι αντίστοιχα ίσες προς $d_A = 300mm$ και $d_B = 420mm$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

9.1 Ορισμοί.

Μια κίνηση είναι περιοδική, και γενικότερα ένα φαινόμενο λέγεται περιοδικό, όταν αυτό αναπαράγεται αυτούσιο, δηλαδή το ίδιο ακριβώς, σε ίσα χρονικά διαστήματα. Πιο αναλυτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι, αν ένα κινητό σε μια τυχούσα χρονική στιγμή t έχει ορισμένα χαρακτηριστικά, που αφορούν στην απόσταση, την οποία κάλυψε από μια αρχή, ή έχουν σχέση με την ταχύτητά του, ως διάνυσμα, τα ίδια απαράλλακτα χαρακτηριστικά σε μέγεθος και κατεύθυνση θα τα έχει το κινητό μετά παρέλευση ορισμένου χρόνου T.

Η ***περίοδος T*** είναι ακριβώς ο χρόνος που πρέπει να περάσει, για να ξαναποκτήσει το κινητό τα ίδια χαρακτηριστικά.

Η ομαλή κυκλική κίνηση αποτελεί κλασσικό παράδειγμα περιοδικής κινήσεως.

Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του κινητού που κινείται ομοιόμορφα στην περιφέρεια, τότε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Καλούμε συχνότητα ν περιοδικού φαινομένου τον αριθμό των περιόδων, που εκτελεί στη μονάδα του χρόνου. Άρα εξ ορισμού:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

9.2 Αρμονική κίνηση.

Έστω ένα κινητό Μ, που κινείται σε κυκλική τροχιά, η οποία έχει ακτίνα r και περίοδο T. Ας μελετήσομε την κίνηση που εκτελεί η προβολή του σημείου Μ, το (m) στον διαμετρικό άξονα XX'.

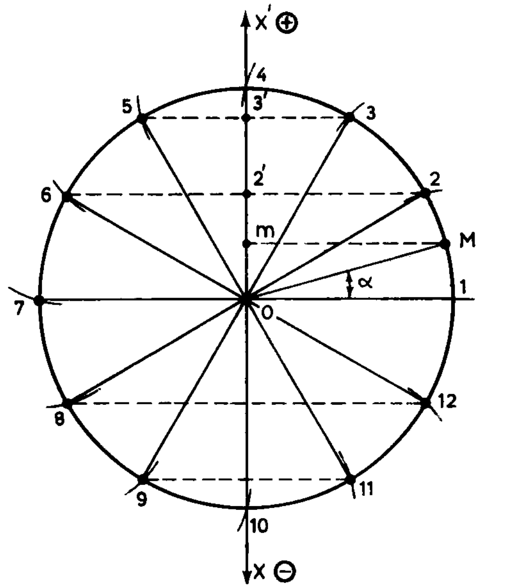
Χωρίζομε την περιφέρεια της κινήσεώς του σε 12 ίσα μέρη με αρχή το σημείο 1 (σχ. 9.2α).

Πρώτα παρατηρούμε ότι σε κάθε θέση του σημείου Μ στην κυκλική τροχιά αντιστοιχεί ένα σημείο m στην ευθεία XX'. Το μεταβλητό μέγεθος (Om) καλείται ***απομάκρυνση.***

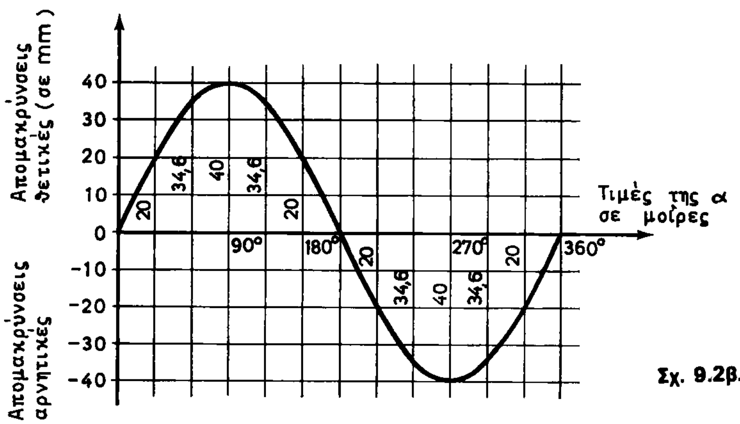
Η απομάκρυνση του κινητού, όταν αυτό βρίσκεται στη θέση 1, είναι μηδενική. Στη θέση 2 είναι η O2′, στη θέση 3 είναι η O3′ κ.ο.κ.

Αν η ακτίνα του κύκλου στο σχήμα 9.2α είναι 40 mm, στον επόμενο πίνακα δίνονται οι απομακρύνσεις για μια πλήρη περίοδο.

γωνία περιστροφής	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
απομάκρυνση	0	20	34,6	40	34,6	20	0	-20	-34,6	-40	-34,6	-20	0



Σχ. 9.2α.



Σχ. 9.2β.

Σε χαρτί με ορθογώνιες διαγραμμίσεις φέρομε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων (σχ. 9.2β).

Ως τετμημένες θεωρούμε τις τιμές της γωνίας α (κλίμακα 5 mm για 30°) και ως τεταγμένες με το πρόσημά τους τις απομακρύνσεις (κλίμακα 1 mm γιά 2 mm απομάκρυνση).

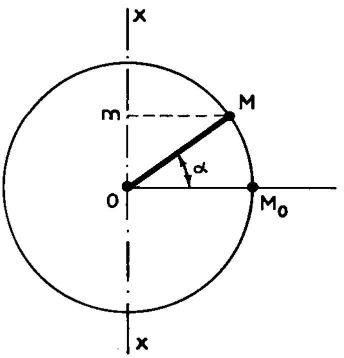
Η καμπύλη που συνδέει κατά συνεχή τρόπο τα σημεία 1-12 εξηγεί τη μεταβολή των απομακρύνσεων του σημείου m σε συνάρτηση προς τη γωνία α της περιστροφής του σημείου M.

9.3 Το διάγραμμα του σχήματος 9.2β είναι ημιτονοειδής καμπύλη.

Η μορφή της θυμίζει πράγματι αυτήν την καμπύλη. Αλλά και θά το αποδείξομε αμέσως.

Έστω m η προβολή του σημείου M στον άξονα XX' (σχ. 14.3). Στο ορθογώνιο τρίγωνο OMm η γωνία OMm = α επειδή $mM // OM_o$ καί

$$Om = OM ημα = r\ ημα$$



Σχ. 9.3.

Το r είναι μέγεθος σταθερό, η απομάκρυνση Om είναι ανάλογη προς το ημίτονο της γωνίας α. Άρα η καμπύλη που απεικονίζει τις μεταβολές της είναι ***ημιτονοειδής*** καμπύλη.

Όταν το M περιστρέφεται ομαλά, η κίνηση του σημείου m είναι ημιτονοειδής.

Έστω ω η σταθερή γωνιακή ταχύτητα (σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο) της επιβατικής ακτίνας OM.

Παίρνομε ως αρχή των χρόνων τη στιγμή που το σημείο βρίσκεται στο M_o, αρχή των διαστημάτων.

Μετά t δευτερόλεπτα η γωνία α, εκφρασμένη σε ακτίνια, σαρωμένη δε από την ακτίνα OM με αρχή το M_o, έχει για τιμή:

$$α = ω \cdot t \quad rd$$

Η απομάκρυνση s = Om εκφράζεται, άρα, σε συνάρτηση με το χρόνο, από τον τύπο:

$$\boxed{s = r.ημω} \qquad (1)$$

Η κίνηση του σημείου m λέγεται ***ευθύγραμμη ημιτονοειδής.***

Με τα δεδομένα του πειράματος: s= 40 ημωt.

Η απομάκρυνση περνά από ένα μέγιστο r = 40 mm για ωt = 90° (π/2) και επίσης περνά από ένα ελάχιστο r = — 40 mm για ωt = 270° (3π/2). Η μέγιστη τιμή της απομακρύνσεως, 40 mm, είναι το πλάτος της κινήσεως.

Συμπέρασμα.

Όταν σημείο M διαγράφει περιφέρεια ακτίνας r με κίνηση ομαλή, η προβολή του m, σε μια διάμετρο του κύκλου, έχει μία ευθύγραμμη ημιτονοειδή κίνηση πλάτους r.

Σημείωση.

Ο τύπος (1) δίνει την απομάκρυνση στη στιγμή t και όχι, αν κινητό έκανε πολλούς κύκλους, δηλαδή το συνολικό μήκος της τροχιάς, που κάλυψε από την αρχή μετρήσεως του χρόνου. Συμφωνούμε ωστόσο να τον καλούμε ***τύπο διαστημάτων.***

Αριθμητική εφαρμογή.

Σημείο M διαγράφει κύκλο με ακτίνα 25 mm και με περιστροφική ταχύτητα n = 30 στρ/min. Να υπολογισθεί η απομάκρυνση του σημείου m στο τέλος του 0,4 του δευτερολέπτου.

Η γωνιακή ταχύτητα του κινητού είναι:

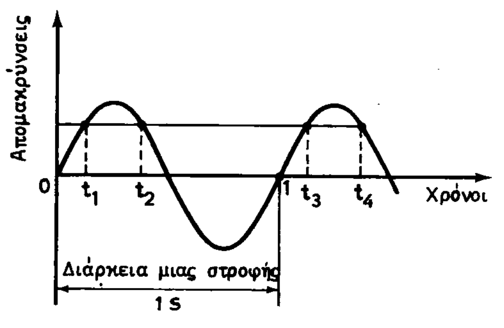
$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 30}{30} = \pi \ \ \text{rd/s}$$

Για να υπολογίσομε το ημίτονο της γωνίας ωt, οφείλομε να εκφράσομε το ω σε μοίρες ανά δευτερόλεπτο.

Εδώ	ω	= π rd/s	=	180° ανά s
γιά	t	= 0,4s ωt	=	0,4×180 = 72°
	ημ ωt	= ημ 72°	=	0,951
άρα	s	= 25×0,951	=	23,8 mm

9.4 Διάγραμμα απομακρύνσεων σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για μια δοσμένη τιμή της ω σε κάθε στιγμή αντιστοιχεί μια ορισμένη τιμή ημωt και συνεπώς μια τιμή απομακρύνσεως. Είναι δυνατή άρα η χάραξη διαγράμματος απομακρύνσεων σε συνάρτηση προς το χρόνο.



Σχ. 9.4.

Το σχήμα 14.4 παριστάνει ένα τέτοιο διάγραμμα για την ειδική περίπτωση, όπου:

$$\omega = 6{,}28 \text{ rd/s} \quad \text{και} \quad r = 40\text{mm}$$

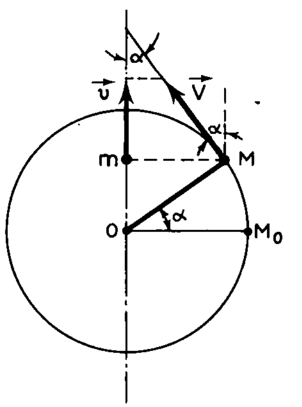
Σημείωση.

Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι σε μια δοσμένη απομάκρυνση αντιστοιχούν πολλές τιμές του χρόνου.

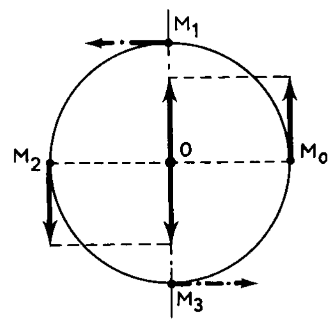
9.5 Διάγραμμα για τις ταχύτητες.

Έστω $\vec{V}$ η γραμμική ταχύτητα του κινητού επάνω στην περιφέρεια. Σε κάθε στιγμή παριστάνεται αυτή από ένα διάνυσμα $\vec{V}$ εφαπτόμενικό στην τροχιά (σχ. 9.5α). Επίσης η ταχύτητα υ του κινητού m (προβολή του M στη διάμετρο) παριστάνεται από το διάνυσμα υ, που είναι προβολή του V στον άξονα X'X.

Παραδεχόμαστε εδώ, χωρίς απόδειξη, ότι η ορθή προβολή στον άξονα X'X του διανύσματος $\vec{V}$ του κινητού M παριστάνει ***κατά μέγεθος και φορά*** το διάνυσμα ταχύτητας του κινητού m.



Σχ. 9.5α.



Σχ. 9.5β.

Όπως προκύπτει, από το σχήμα 9.5β, η ταχύτητα υ του κινητού m διευθύνεται, τόσο από το O προς X, όσο και από το O προς X'. Ισούται δε προς V, όταν το M είναι στο M_0 ή στο M_2 και είναι 0, όταν είναι στο M_1 ή M_3.

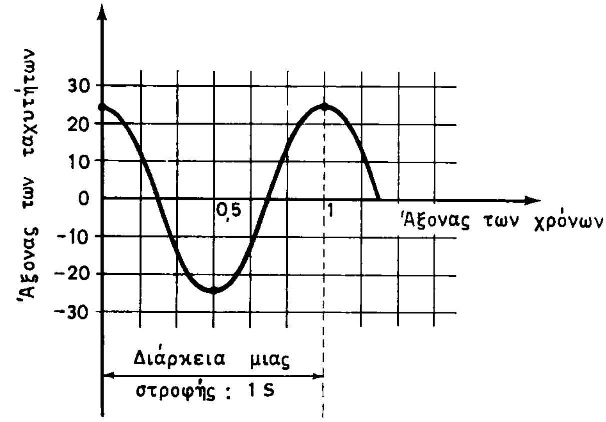
Ας πάρομε το προηγούμενο παράδειγμα, όπου $\omega = 6{,}28$ rd/s. Η ταχύτητα V του κινητού M έχει αριθμητική τιμή:

$$V = \omega . r = 6{,}28 \times . 40 = 251 \text{ mm/s}$$

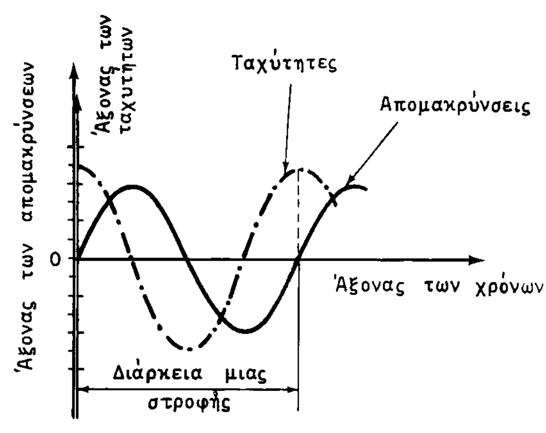
Σε διάφορα σημεία της τροχιάς του M παριστάνομε το διάνυσμα-ταχύτητα σε κάποια κλίμακα (π.χ. 1 mm για 20 mm/s) και την προβάλομε στον άξονα X'X. Έχομε έτσι το διάνυσμα-ταχύτητα του κινητού m.

Στους άξονες συντεταγμένων ας πάρομε για τετμημένες μεν το χρόνο και για τεταγμένες τις ταχύτητες με το πρόσημό τους που έχουν στον άξονα XX' (σχ. 9.5γ). Η καμπύλη που ενώνει κατά τρόπο συνεχή τα διάφορα παραστατικά σημεία που λαμβάνομε, παριστάνει την ταχύτητα του m σε συνάρτηση προς το χρόνο.

Είναι και αυτή ημιτονοειδής, που σχετικά με την καμπύλη του σχήματος 9.5δ εί-ναι ***σε απόκλιση προς τα αριστερά κατά ποσότητα, που αντιστοιχεί στο 1/4 της διάρκειας μιας στροφής.*** Ας αποκαταστήσομε πραγματικά το νόμο των ταχυτήτων του κινητού σημείου m.



Σχ. 9.5γ.



Σχ. 9.5δ.

Στο σχήμα 9.5α οι διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{V}$ σχηματίζουν μεταξύ τους τη γωνία α. Συνεπώς το διάνυσμα $\vec{u}$, ορθή προβολή του διανύσματος $\vec{V}$ στον άξονα X'X, έχει για μήκος:

$$u = V \text{ συν} \alpha$$

όπου $V = \omega \cdot r$

και $\alpha = \omega \cdot t$

και η ταχύτητα u τη στιγμή t έχει για αριθμητική τιμή:

$$\boxed{u = \omega \cdot r \cdot \text{συν}\, \omega \cdot t} \qquad (2)$$

Ο τύπος αυτός εξηγεί το νόμο των ταχυτήτων. Εκφράζει ότι η ταχύτητα είναι απευθείας ανάλογη προς το συνημίτονο της γωνίας ωt.

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν ένα κινητό σημείο Μ διαγράφει μια περιφέρεια με μια ομαλή κίνηση, η προβολή του m, σε μια διάμετρο XX', κινείται με κίνηση ευθύγραμμη ημιτονοειδή.

2. Απομάκρυνση του σημείου m λέμε την απόστασή του από το κέντρο της περιφέρειας. Η τιμή της για μια δοσμένη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{s_t = r \,.\, \eta\mu\ \omega t}$$

όπου r είναι η ακτίνα της περιφέρειας, και ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της ομαλής κυκλικής κινήσεως.

3. Το διάνυσμα-ταχύτητα του σημείου m είναι η προβολή στην τροχιά του XX' του διανύσματος-ταχύτητα του σημείου Μ. Η τιμή της ταχύτητας υ σε δοσμένη χρονική στιγμή είναι:

$$\boxed{\upsilon = \omega \,.\, r\ \sigma\upsilon\nu\ \omega t}$$

4. Η καμπύλη των διαστημάτων και εκείνη των ταχυτήτων είναι δύο ημιτονοειδείς σε απόκλιση κατά ένα τέταρτο της περιόδου.

5. Η κίνηση σημείου λέγεται περιοδική όταν αυτή αναπαράγεται αυτούσια κατά ίσα χρονικά διαστήματα.

Η ημιτονική κίνηση είναι μία περιοδική κίνηση. Η περίοδος Τ είναι το χρονικό διάστημα που πρέπει να περάσει για να ξαναποκτήσει το κινητό τα ίδια χαρακτηριστικά. Αν ω είναι η σταθερή γωνιακή ταχύτητα:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

9.6 Ασκήσεις.

1. Κινητό σημειο περιστρέφεται ομαλά σε περιφέρεια που έχει ακτίνα r = 60 mm. Η περιστροφική του ταχύτητα είναι N = 750 στρ/min. Στην αρχή το σημείο βρίσκεται στη θέση M_0 (σχ. 9.5α). Υπολογίστε την απομάκρυνση και την ταχύτητα σε m/s του σημείου m, προβολή του Μ στη XX', στο τέλος του 0,01 του δευτερολέπτου. Ποιά είναι η περίοδος Τ της κινήσεως;
2. Αποδείξτε, ξεκινώντας από το νόμο της ευθύγραμμης ημιτονικής κινήσεως, ότι η ταχύτητα εκφράζεται σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη σχέση:

$$\upsilon = \pm\,\omega\sqrt{r^2 - s_t^2} \qquad (\omega\ \sigma\varepsilon\ rd/s)$$

Διερευνήστε το διπλό σημείο (±).

3. Έστω κινητό σημείο Μ σε μια περιφέρεια. Η αρχή των διαστημάτων βρίσκεται στο Α και στην αρχή των χρόνων το κινητό βρίσκεται στο σημείο M_0, όπου $OAM_0 = \varphi$.
Καθορίστε το νόμο της κινήσεως του σημείου m, προβολή του σημείου Μ στη διάμετρο ΟΑ.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική, ως τρίτο Μέρος της μηχανικής των στερεών, μετά από τη Στατική και την Κινηματική, ερευνά τον τρόπο που ***μεταβάλλεται η ταχύτητα*** σε ένα σώμα ***σε συνδυασμό*** με τα αίτια που την προκαλούν.

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια πήραμε ως ***δοσμένη τη δύναμη*** και εξετάσαμε μόνο τα αποτελέσματα που μπορεί αυτή να προκαλεί στα σώματα.

Στη δυναμική, αντίθετα, η δύναμη ερευνάται ως έννοια και επισημαίνονται οι παράγοντες που τη θεμελιώνουν και την επηρεάζουν.

Ακόμη πιο απλά μπορούμε να πούμε ότι στη δυναμική εξετάζεται ***η Δύναμη ως αίτιο, η δε επιτάχυνση*** που αυτή προκαλεί ***ως αποτέλεσμα.***

Η εξέταση αρχίζει με τη δυναμική του υλικού σημείου, έννοια αντίστοιχη με το γεωμετρικό σημείο της κινηματικής, και ολοκληρώνεται με τη δυναμική του απόλυτα στερεού σώματος.

Ο Νεύτων (Newton 1624-1717) πρέπει να θεωρείται ο θεμελιωτής της Δυναμικής, γιατί πρώτος αυτός μας έκανε γνωστά τα τρία αξιώματά της.

Τα αξιώματα αυτά θεωρούνται ως τα τώρα αληθινά και αδιάβλητα επειδή συνεχώς επαληθεύονται στις πρακτικές εφαρμογές.

Μπορούμε όμως να πούμε και τούτο:

Όπως στο κεφάλαιο της Κινηματικής κυριαρχούν οι έννοιες: ***ταχύτητα*** και ***επιτάχυνση,*** έτσι και στη Δυναμική δεσπόζουν οι έννοιες ***δύναμη*** και ***μάζα.***

Η δύναμη, ως φυσικό μέγεθος, κατ' αρχήν μας γίνεται αντιληπτή από την αίσθηση της μυικής προσπάθειας.

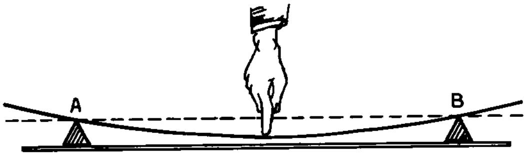
Χρειάζεται εδώ να τονισθεί πως η δύναμη ποιοτικά χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες:

— Την ιδιότητα του να ***παραμορφώνει ένα ελαστικό σώμα.***

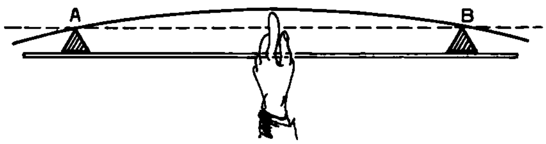
— Την ιδιότητα του να ***επιταχύνει ένα σώμα.***

Για την ιδιότητα της παραμορφώσεως αναφέρομε ένα παράδειγμα:

Αν πιέσομε με το δάκτυλο του χεριού μας μια λεπτή μεταλλική λάμα, που στηρίζεται στα σημεία Α και Β (σχ. 1), βλέπομε αμέσως πως αυτή παραμορφώνεται (λέμε ότι η λάμα κάνει «κοιλιά»).



Σχ. 1.



Σχ. 2.

Αν αντίθετα την τραβήξομε από το ίδιο σημείο, πάλι παραμορφώνεται, αλλά τώρα κάνει καμπούρα (σχ. 2).

Στο ίδιο όμως αποτέλεσμα, από πλευρά παραμορφώσεως καταλήγομε αν, στο ίδιο σημείο της λάμας που πιέσαμε προηγουμένως, τοποθετήσομε ένα μικρό βάρος (σχ. 3).

Σχ. 3.

Το ***αίτιο*** αυτό που προκάλεσε την παραμόρφωση της λάμας το λέμε ***δύναμη,*** που την ταυτίζομε με τη μυική μας προσπάθεια και την παραλληλίζομε με το ***βάρος.***

Από τα σχήματα 1 και 2 βλέπομε πως τα αποτελέσματα των δυνάμεων είναι ***διαφορετικά*** αν αλλάξει η διεύθυνση ή η φορά τους, πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η δύναμη αποτελεί ***διάνυσμα.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Α' ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

10.1 Πρώτο αξίωμα.

Όταν σε ένα σώμα δεν ενεργεί καμιά εξωτερική δύναμη, αυτό είτε ηρεμεί, είτε κινείται ευθύγραμμα και ισοταχώς.

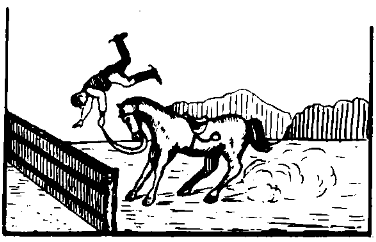
Το αξίωμα αυτό που λέγεται και αξίωμα της αδράνειας μπορεί να διατυπωθεί και διαφορετικά:

Κανένα σώμα μόνο του, δεν μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση, αν δεν επιδράσει σ' αυτό κάποια εξωτερική δύναμη.

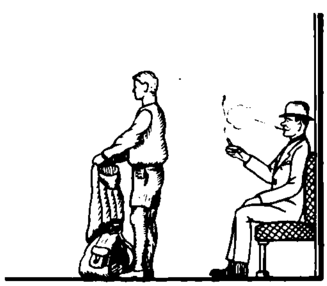
Το αξίωμα αυτό είναι ***θεμελιώδες*** γιατί δεν προκύπτει από άλλο νόμο· γι' αυτό αποτελεί βασικό νόμο της μηχανικής.

Ας αναφέρομε μερικά παραδείγματα:

1. Καβαλλάρης που τρέχει καλπάζοντας πάνω στο άλογό του, αν δεν κρατηθεί καλά πάνω σ' αυτό, κινδυνεύει να πέσει κάτω, όταν το άλογο σταματήσει απότομα. Η πτώση του αυτή, αν συμβεί, θα οφείλεται στην αδράνεια του σώματός του κατά τη στιγμή που σταμάτησε το άλογο και στην ελευθερία που είχε το σώμα του σχετικά με το άλογο (σχ. 10.1α).



Σχ. 10.1α.

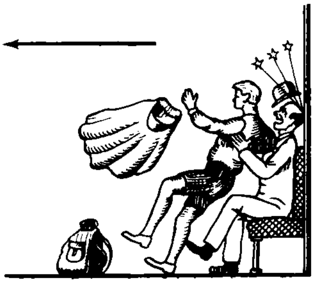


Σχ. 10.1β.

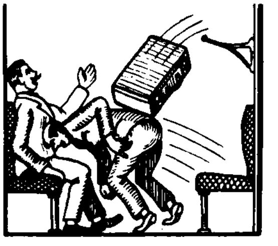
2. Διαστημόπλοιο, αν βρεθεί δίχως καύσιμα έξω από τις ελκτικές δυνάμεις των ουρανίων σωμάτων, θα κινείται αιώνια ευθύγραμμα και ισοταχώς με την ταχύτητα που έτυχε να έχει σ' αυτό το περιβάλλον και σχετικά προς ένα σταθερό παγκόσμιο σύστημα αναφοράς, που περικλείει το χώρο αυτό.

3. Στο σχήμα 10.1β βλέπομε δυο επιβάτες σε ακίνητο όχημα. Όταν το όχημα

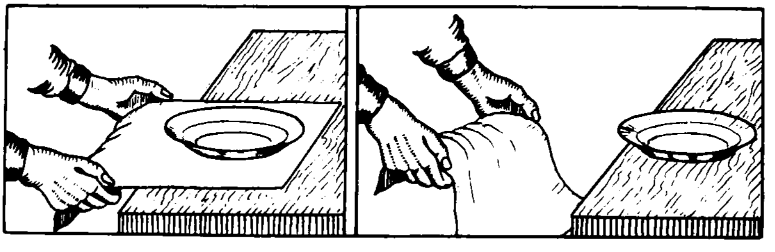
αυτό ***ξεκινήσει απότομα*** το σχήμα 10.1γ μας δείχνει τα αποτελέσματα. Στο σχήμα 10.1δ βλέπομε τί συμβαίνει στο ίδιο όχημα, όταν αυτό ***σταματήσει απότομα.*** Η εξήγηση των αποτελεσμάτων αυτών δίνεται με βάση το πρώτο αξίωμα της δυναμικής.



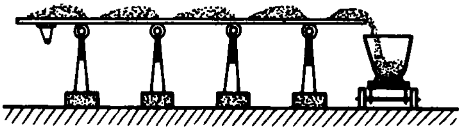
Σχ. 10.1γ.



Σχ. 10.1δ.



Σχ. 10.1ε.



Σχ. 10.1ζ.

4. Στο σχήμα 10.1ε βλέπομε ένα πιάτο επάνω σε ένα φύλλο χαρτί. Αν ***τραβήξομε το χαρτί σιγά-σιγά,*** η δύναμη της προσφύσεως μεταξύ χαρτιού και πιάτου είναι αρκετή για να μεταδώσει στο πιάτο ταχύτητα ίση με αυτή που έχει το χαρτί. Αποτέλεσμα της ενέργειας αυτής είναι ότι ***το πιάτο μετακινείται μαζύ με το χαρτί.***

Αν το χαρτί ***τραβηχθεί απότομα,*** η ίδια δύναμη προσφύσεως ενεργεί για πολύ μικρό διάστημα, αλλά η έντασή της είναι πολύ μικρότερη από τη δύναμη που χρειάζεται για να υπερνικήσει την αδράνεια του πιάτου· γι' αυτό μένει το πιάτο στο τραπέζι.

Οι ***δονητικοί μεταφορείς*** αποτελούν βιομηχανική εφαρμογή του προηγούμενου πειράματος (σχ. 10.1ζ).

10.2 Δεύτερο αξίωμα.

Όταν δύναμη F επιδράσει σε ένα σώμα, αυτό αποκτά μια επιτάχυνση γ, που είναι ανάλογη προς τη δύναμη.

Το πηλίκον δηλαδή της δυνάμεως προς την επιτάχυνση είναι σταθερό.

$$\boxed{\frac{F}{\gamma} = \text{σταθ.}} \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{\frac{F}{\gamma} = m} \quad \text{ή} \quad \boxed{F = m \cdot \gamma} \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2), που ονομάζεται ***θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής***, συνδέει απλά το ***αίτιο***, δηλαδή τη δύναμη, με το ***αποτέλεσμα***, δηλαδή την επιτάχυνση.

Η σταθερή σχέση της δυνάμεως προς την επιτάχυνση που προκαλεί, ονομάσθηκε από μεν τους φυσικούς ***ύλη***, από δε τους τεχνικούς ***μάζα***.

Βέβαια μάζα και ύλη αποτελούν τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος και χαρακτηρίζουν το σώμα στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ένα σώμα εκτός από τη γεωμετρική του ***υπόσταση*** και ***μορφή*** έχει και κάποια ***σύσταση***, που ταυτίζεται στη φυσικοχημεία με αυτό που ονομάζομε ***ύλη***. Η τεχνική προικοδοτεί την ύλη και με δύο καινούργιες ιδιότητες που είναι η ***αδράνεια*** και το ότι είναι ***μέγεθος μονοδιάστατο***.

Έτσι ταυτίζονται μάζα και ύλη σε ένα μέγεθος με διάσταση και μονάδες μετρήσεως.

α) Διερεύνηση της θεμελιώδους εξισώσεως.

Σταθερή δύναμη προκαλεί ***σταθερή επιτάχυνση.***

Αν στήν εξίσωση $F = m \cdot \gamma$ θέσομε $F =$ σταθερό, τότε και το $m \cdot \gamma =$ σταθερό και επειδή το $m =$ σταθερό πρέπει και το γ να μείνει σταθερό. Αλλά από την κινηματική γνωρίζομε πως όταν ένα σώμα κινείται με ***σταθερή επιτάχυνση***, τότε λέμε ότι κινείται μέ κίνηση ***ομαλά μεταβαλλόμενη***. Άρα ***κάθε σώμα που επάνω του ενεργεί μόνιμα μια δύναμη, κινείται με κίνηση ομαλά μεταβαλλόμενη.***

β) Βάρος σώματος και επιτάχυνση βαρύτητας.

Από πειράματα προέκυψε το συμπέρασμα πως, όταν ένα σώμα πέφτει από ένα ύψος ελεύθερα στη Γη σε περιβάλλον απαλλαγμένο από αέρα (κενό), η κίνησή του είναι ***ομαλά επιταχυνόμενη***. Η σταθερή επιτάχυνση για το γεωγραφικό πλάτος 45° και κοντά στη θάλασσα έχει τιμή 9,81 m/s^2 και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα g.

$$g = 9{,}81 \; m/s^2$$

Αν λοιπόν το σωμα που πέφτει έχει μάζα m, τότε, σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικης, δέχεται μια δύναμη σταθερή ίση προς m . g.

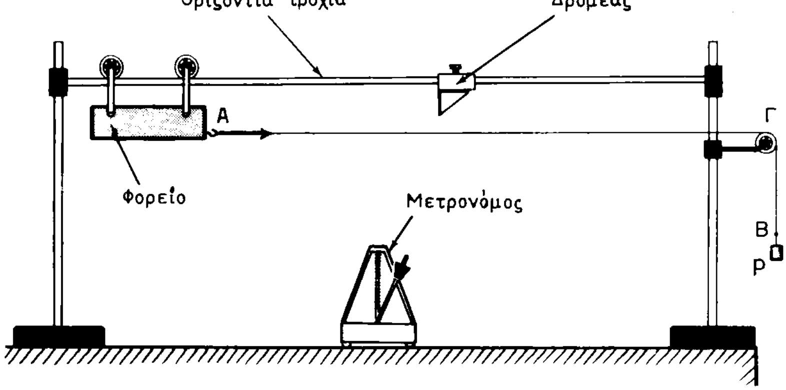
Η δύναμη αυτή, που οφείλεται στην έλξη του σώματος από τη Γη, ονομάζεται ***βάρος του σώματος*** και εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες που εκφράζονται και όλες οι άλλες δυνάμεις:

$$B = m \cdot g$$

Παρακάτω αναφέρομε τρία πειράματα που επιβεβαιώνουν το δεύτερο αξίωμα της Δυναμικης

Πείραμα 1.

Μικρό κινητό φορείο σε οριζόντια τροχιά, έλκεται με τη βοήθεια νήματος που καταλήγει σε ένα βάρος p (σχ. 10.2α). Το φορείο αποτελεί ένα σώμα, που μπορεί ελεύθερα να μετατοπίζεται στην οριζόντια τροχιά. Στο σύστημα αυτό εκτελούμε ορισμένα πειράματα.



Σχ. 10.2α.

— Μετρούμε τα διαστήματα που διανύει το φορείο σε 1, 2, 3 δευτερόλεπτα. Τους χρόνους μας τους δίνει κατάλληλος μετρονόμος και τα τέρματα των διαδρομών ειδικός δρομέας.

Έτσι μετρήσαμε:

Διάρκεια κινήσεως	***Διανυθέντα διαστήματα***
1s	$9\ cm = 9 \times 1^2$
2s	$36\ cm = 9 \times 2^2$
3s	$81\ cm = 9 \times 3^2$

Τα διαστήματα που διανύονται είναι ανάλογα προς τα ***τετράγωνα*** των αντιστοίχων χρόνων.

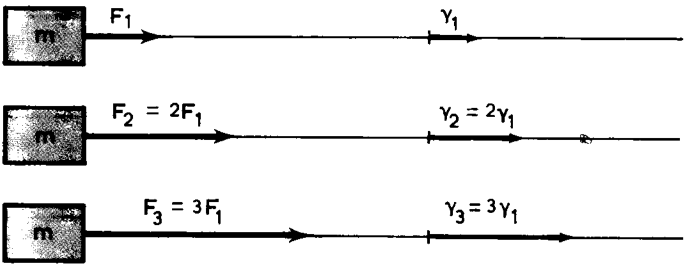
Η κίνηση άρα του φορείου είναι ομαλά επιταχυνόμενη γιατί εφαρμόσθηκε η δύναμη F_1.

— Ανάλογα με την επιτάχυνση που θέλομε ν' αποκτήσει ένα σώμα είναι και η δύναμη που πρέπει να εφαρμοσθεί σ' αυτό.

$$F = m \cdot \gamma$$

Αν με δύναμη F_1 αποκτά ένα σώμα με μάζα m επιτάχυνση γ_1, τότε για διπλάσια επιτάχυνση $2\gamma_1$ πρέπει να εφαρμόσομε διπλάσια δύναμη $2F_1$ (10.2β).

Για επαλήθευση της παραπάνω προτάσεως εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα.



Σχ. 10.2β.

Πείραμα 2.

Ας επανέλθομε στο σχήμα 15.2α και ας παραδεχθούμε πως η ολική μάζα του φορείου, του σώματος και του βαριδιού είναι 550 γραμμάρια.

Η δύναμη F_1 υποθέτομε πως είναι ίση προς το βάρος μάζας 10 g, δηλαδή 0,01 kp.

Μετρούμε το διάστημα που διανύει το φορείο σε ένα δευτερόλεπτο και βρίσκομε 9 cm. Η επιτάχυνση άρα είναι:

$$\gamma = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 9}{1^2} = 18 \text{ cm/s}^2$$

— Προσθέτομε στο σημείο Β μάζα 10 g, που την παίρνομε όμως από το φορείο. Έτσι η ολική μάζα του συστήματος ***δεν*** αλλάζει, απλώς η κινητήρια δύναμη γίνεται διπλάσια.

Μετρούμε πάλι την αντίστοιχη επιτάχυνση και τη βρίσκομε:

$$\gamma_2 = 36 \text{ cm/s}^2$$

Διπλασιάσθηκε η δύναμη, για την αυτή μάζα, διπλασιάσθηκε και η επιτάχυνση, άρα

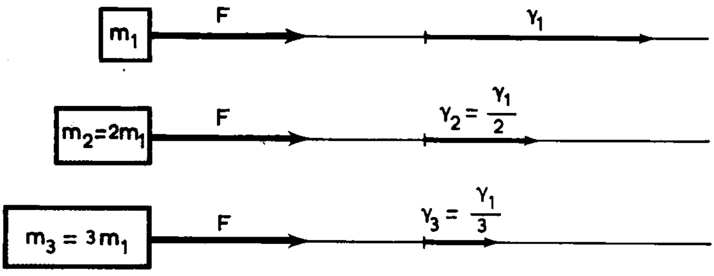
$$\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \text{σταθ.}$$

Για δοσμένη δύναμη F η επιτάχυνση γ είναι ***αντίστροφα*** ανάλογη προς τη μάζα του σώματος. Η θεμελιώδης εξίσωση γράφεται:

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

Από τον τύπο αυτό βλέπομε ότι όταν το F = σταθερό, τότε η επιτάχυνση γ είναι αντίστροφα ανάλογη προς τη μάζα m του σώματος. Όσο μεγαλύτερη η μάζα του σώματος τόσο μικρότερη η επιτάχυνση για την ίδια δύναμη (σχ. 10.2γ).

Και για απόδειξη της παραπάνω προτάσεως εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα.



Σχ. 10.2γ.

Πείραμα 3.

Και πάλι αναφερόμαστε στο σχήμα 10.2α.

Φορτίζομε τώρα το φορείο με πρόσθετο φορτίο έτσι ώστε στο σύνολο η μάζα του να είναι 1100 g. Με τον τρόπο αυτό η μάζα του συστήματος διπλασιάσθηκε. Διατηρούμε ως κινητήρια δύναμη αυτή που έχει μάζα 10 g, δηλαδή F_3 = 0,01 kp. Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση που μετρούμε φθάνει τα 9 cm/s.

Η ίδια δύναμη εφαρμοσμένη σε δυο φορές μεγαλύτερη μάζα δίνει δύο φορές μικρότερη επιτάχυνση (σχ. 10.2γ).

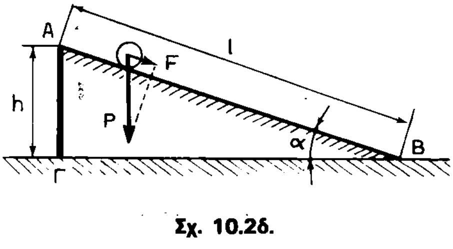
$$m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2 = F\ \sigma\tau\alpha\theta.$$

γ) Κεκλιμένο επίπεδο.

Γνωρίζομε ότι σφαίρα βάρους P (σχ. 10.2δ) όταν αφεθεί να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο, που σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο, αυτή θα κινηθεί:

— Στην ευθεία με τη μεγαλύτερη κλίση και

— με την ώθηση δυνάμεως ίσης προς Ρήμα.



Σχ. 10.2δ.

Δίνομε στο h τις διαδοχικές τιμές h_1, h_2, h_3 (σχ. 10.2ε) τέτοιες, ώστε ημα_1 = 0,02, ημα_2 = 0,04 και ημα_3 = 0,06.

Πείραμα 1.

ημα_1 = 0,02 Δύναμη f_1 = 0,02 P Επιτάχυνση γ_1

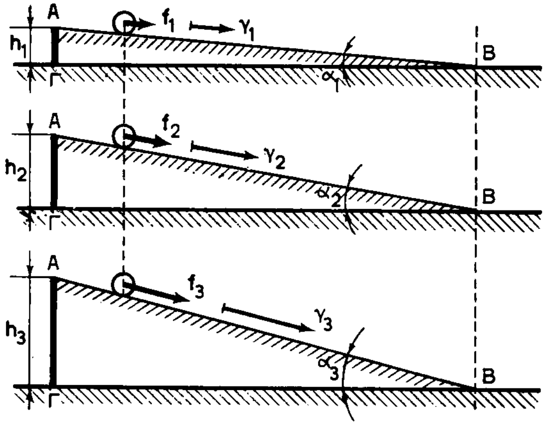
Πείραμα 2.

ημα$_2$ = 0,04 Δύναμη f_2 = 0,04 P = $2f_1$ Επιτάχυνση $\gamma_2 = 2\gamma_1$

Πείραμα 3.

ημα$_3$ = 0,06 Δύναμη f_3 = 0,06 P = $3f_1$ Επιτάχυνση $\gamma_3 = 3\gamma_1$

Επαληθεύεται έτσι και η πρόταση ότι η επιτάχυνση που αποκτά ένα κινητό είναι ανάλογη προς τη δύναμη που το ωθεί (σχ. 10.2ε).



Σχ. 10.2ε.

10.3 Τρίτο αξίωμα.

Αν ένα σώμα εξασκεί μια δύναμη σε άλλο σώμα, τότε και το δεύτερο σώμα αντιδρά προς το πρώτο εξασκώντας σ' αυτό μια δύναμη ίση κατά μέτρο και αντίθετη κατά φορά.

Μπορεί κατόπιν αυτού να υπάρξει και άλλη διατύπωση του τρίτου αυτού αξιώματος.

Οι δυνάμεις παρουσιάζονται πάντοτε κατά ζεύγη που έχουν ίσο μέτρο και είναι αντίθετες.

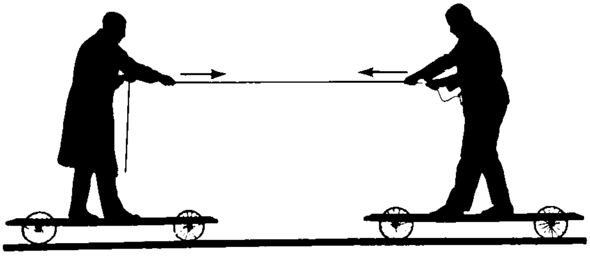
Σχ. 10.3α.

Ας εξετάσομε παρακάτω μερικές περιπτώσεις, για να καταλάβομε καλύτερα το τρίτο αξίωμα.

— Κανένα σώμα δεν παραμορφώνεται αν δεν πιασθεί από δυο σημεία (σχ. 10.3α).

Εκ πείρας γνωρίζομε ότι δεν μπορεί κανένας να παραμορφώσει ένα σώμα, αν δεν το πιάσει με τα δυο του χέρια· αυτό σημαίνει ότι πρέπει να πιάσει το σώμα σε δυο του σημεία, για να εφαρμόσει έτσι δύο δυνάμεις που να ισορροπούν μεταξύ τους.

— Στο σχήμα 10.3β βλέπομε δυο πλατφόρμες που μπορούν να κινηθούν οριζόντια προς μια κατεύθυνση και υποθέτομε χωρίς τριβή. Η διάταξη με τους ανθρώπους και τις πλατφόρμες είναι τέλεια συμμετρική. Τα δύο άτομα που βρίσκονται επάνω στις πλατφόρμες συνδέονται με ένα σχοινί. Όταν ο ένας τραβήξει το σχοινί, ο άλλος πρέπει μόνο να το κρατάει. Οποιοσδήποτε από τους δύο τραβήξει το σχοινί, οι πλατφόρμες θα συναντηθούν ακριβώς στο μέσο της αποστάσεως.



Σχ.10.3β.

Η δράση λοιπόν φέρνει την αντίδραση.

Δράση = αντίδραση

10.4 Μονάδες μάζας.

— ***Διεθνές Σύστημα (S.I.).***

Στο Διεθνές σύστημα (S.I.) η μονάδα μάζας είναι θεμελιώδης και είναι το χιλιόγραμμο, kg.

— ***Τεχνικό σύστημα.***

Στο τεχνικό σύστημα η μονάδα μάζας είναι μέγεθος παράγωγο και προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση:

$$m = \frac{F}{\gamma}$$

Αν $F = 1$ kp και $\gamma = 1\ m/s^2$

τότε $$m = \frac{1\ kp}{1 m/s^2} = 1 \text{ Τ.Μ. Μάζας}$$

Ώστε μια τεχνική μονάδα μάζας (1 Τ.Μ.Μ.) είναι εκείνη η μάζα, στην οποία όταν ενεργήσει δύναμη 1 kp προκαλεί επιτάχυνση 1 m/s^2.

Σχέση μονάδων μάζας.

Γνωρίζομε ότι μάζα 1 kg έλκεται από τη Γη με δύναμη ενός κιλοπόντ, επομένως το 1 kg είναι ίσο προς το 1/9,81 Τ.Μ. Μάζας, γιατί και οι δύο αυτές μάζες έλκονται από τη Γη με την ιδια δύναμη του ενός κιλοπόντ.

$$1 \text{ kg} = \frac{1}{9{,}81} \text{ Τ.Μ.Μάζας} \qquad \text{ή} \qquad 1 \text{ Τ.Μ.Μ.} = 9{,}81 \text{ kg}$$

10.5 Μονάδες δυνάμεως.

— ***Διεθνές Σύστημα (S.I.).***

$$F = m\gamma$$

Αν $\gamma = 1 \text{ m/s}^2$ και $m = 1 \text{ kg}$

τότε $F = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m kg/s}^2$

Η μονάδα αυτή λέγεται Newton, N. Δηλαδή 1N είναι η δύναμη που όταν επιδράσει σε σώμα μάζας 1kg προκαλεί σ' αυτό επιτάχυνση 1m/s^2.

Τεχνικό Σύστημα.

Η μονάδα δυνάμεως στο σύστημα αυτό είναι θεμελιώδης και είναι το ***κιλοπόντ,*** (kp).

Ένα κιλοπόντ είναι το ***βάρος σώματος μάζας ενός χιλιογράμμου,*** kg.

— ***Σύστημα C.G.S.***

$$F = m\gamma$$

Αν $\gamma = 1 \text{cm/s}^2$ και $m = 1 \text{g}$

τότε $F = 1 \text{g} \cdot 1 \text{cm/s}^2 = 1 \text{g cm/s}^2$

Η μονάδα αυτή λέγεται ***δύνη*** (dyn).

Δηλαδή η δύνη είναι η δύναμη που, όταν ενεργεί σε μάζα ενός g προκαλεί επιτάχυνση 1cm/s^2.

Σχέση μονάδων δυνάμεως.

— ***Σχέση μονάδων N και kp.***

Στον ορισμό της μονάδας κιλοπόντ, kp, είπαμε ότι ένα κιλοπόντ είναι το βάρος σώματος μάζας ενός χιλιογράμμου, kg. Επομένως:

$$1 \text{kp} = 9{,}81 \text{N}.$$

— ***Σχέση μονάδων N και dyn.***

Από τον ορισμό τους προκύπτει ότι:

$$1 \text{N} = 10^5 \text{ dyn}$$

Ανακεφαλαίωση.

1. Υλικό σημείο μάζας m, όταν διεγείρεται από μια δύναμη, αποκτά επιτάχυνση γ της ίδιας διευθύνσεως και φοράς με τη δύναμη.

2. Αν $\vec{F}=0$ και $\vec{\gamma}=0$ η ταχύτητα του σημείου μπορεί να είναι ή μηδενική ή σταθερή. Αν η $\vec{F}$ είναι σταθερή σε ένταση, διεύθυνση και φορά, η κίνηση του σημείου είναι ευθύγραμμη, ομαλά μεταβαλλόμενη.

3. Αρχή αδράνειας: Όταν ένα σημείο δεν διεγείρεται από καμιά δύναμη, τότε:

— Αν ηρεμεί, παραμένει στην ηρεμία.

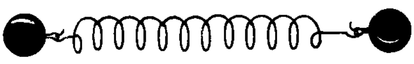
— Αν κινείται, διατηρεί την κίνηση που έχει ως προς την ένταση, διεύθυνση και φορά.

4. Στο Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) μονάδα της δυνάμεως είναι η δύναμη που μεταδίδει σε μάζα ενός kg επιτάχυνση 1 m/s^2.

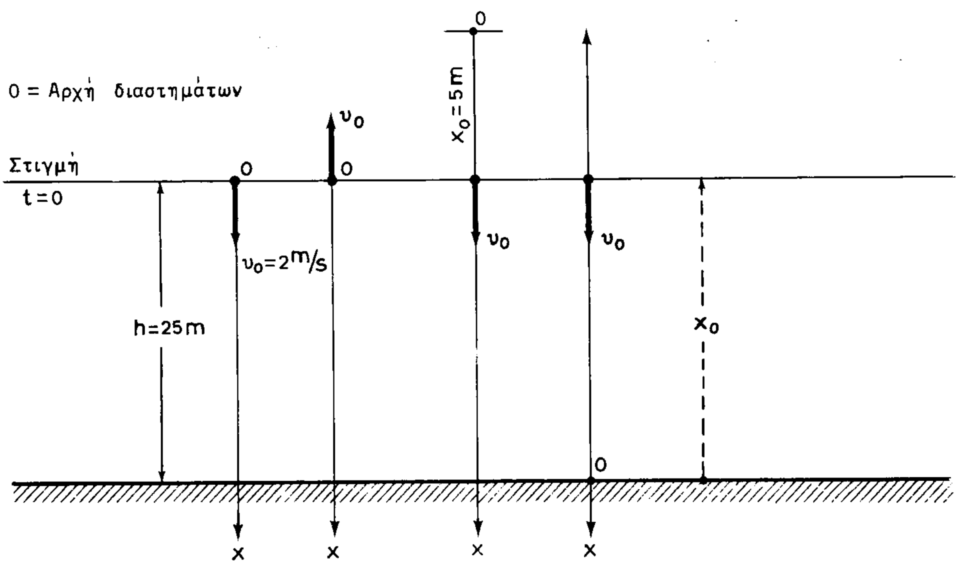
10.6 Ασκήσεις.

1. Σφαίρα μάζας 1 kg (σχ. 10.6α) και άλλη με άγνωστη μάζα m προσαρμόζονται στα άκρα ελατηρίου αμελητέας μάζας. Με την απομάκρυνση των σφαιρών τεντώνει το ελατήριο και στη συνέχεια το σύστημα αφήνεται ελεύθερο, οπότε παρατηρούμε ότι η σφαίρα μάζας m έχει διπλάσια επιτάχυνση από την πρώτη σφαίρα. Ποια είναι η διεύθυνση των επιταχύνσεων και ποια η μάζα της δεύτερης σφαίρας;

Απάντηση: m = 0,5 kg



Σχ. 10.6α.



Σχ. 10.6β.

2. Με τη βοήθεια καλωδίου μεταβιβάζεται σε ανελκυστήρα μάζας 5 τόννων, δυνάμη 5,5 Mp με διεύθυνση προς τα πάνω. Να βρεθεί: α) Πόση είναι η επιτάχυνση του ανελκυστήρα και β) Πόσο διάστημα θα διανύσει αυτός σε τρία δευτερόλεπτα όταν ξεκινάει από την ηρεμία. ($g=10$ m/s^2).

   Απάντηση: α) 1 m/s^2 καί β) 4,5 m

3. Να μελετηθεί η κίνηση της ελεύθερης πτώσεως του υλικού σημείου στις διάφορες περιπτώσεις του σχήματος 10.6β.
4. Στο οριζόντιο επίπεδο ενός ξύλινου τραπεζιού, σπρώχνοντας με το χέρι, αφήνομε να ολισθήσει ένα μικρό νόμισμα. Το νόμισμα αφού διανύσει διάστημα 0,80 m σταματάει. Η χρονική διάρκεια της διαδρομής ήταν ένα δευτερόλεπτο. Η κίνηση θεωρείται ομαλά επιβραδυνόμενη. Η μάζα του νομίσματος είναι: $m=5g$.

   Ζητείται να υπολογισθεί η δύναμη τριβής που προκάλεσε την επιβράδυνση.

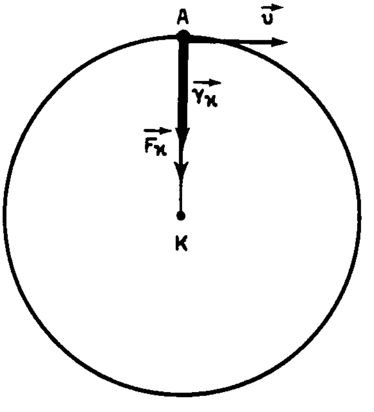
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΚΑΙ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΗ

11.1 Κεντρομόλος δύναμη.

Από το κεφάλαιο της Φυσικής περί κυκλικής κινήσεως γνωρίζομε τη σχέση που συνδέει την περιφερειακή ταχύτητα υ με τη γωνιακή ω (σχ. 11.1α):

$$υ = ω \cdot r$$



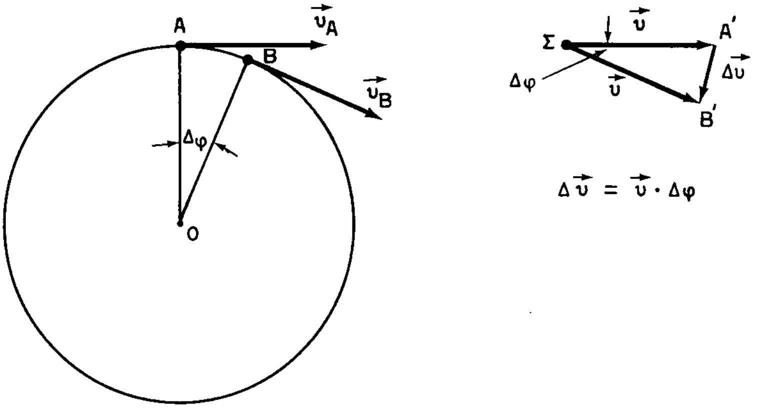
Σχ. 11.1α.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 11.1α, η διεύθυνση της ταχύτητας του κινητού σημείου δεν μένει σταθερή. Αλλάζει συνεχώς από τη μια θέση στην άλλη.

Για να συμβαίνει όμως αυτό, σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα της δυναμικής θα πρέπει να ενεργεί στο κινητό συνεχώς κάποια δύναμη. Η δύναμη αυτή που αναγκάζει το κινητό να κινείται σε κυκλική τροχιά λέγεται ***κεντρομόλος δύναμη.***

Μια δύναμη όμως όταν ενεργεί ***συνεχώς*** σε ένα σώμα, σύμφωνα πάλι με το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, προκαλεί σ' αυτό μια σταθερή επιτάχυνση. Αυτή λοιπόν τη σταθερή επιτάχυνση που προκαλείται από την κεντρομόλο δύναμη την ονομάζομε ***κεντρομόλο επιτάχυνση.***

Έστω υλικό σημείο μάζας m που κινείται σε περιφέρεια που έχει ακτίνα r (σχ. 11.1β). Υποθέτομε ότι κάποια χρονική στιγμή t το κινητό βρίσκεται στη θέση Α. Μετά από παρέλευση μικρού χρόνου Δt το κινητό φθάνει στη θέση Β (σχ. 11.1β). Στη θέση Β το κινητό έχει μεν ταχύτητα υ αλλά διαφορετικής διευθύνσεως. Η $υ_B$ είναι πάλι εφαπτομένη της τροχιάς στο Β ενώ η $υ_A$ είναι εφαπτομένη της τροχιάς στο Α.



Σχ. 11.1β.

Γνωρίζομε από τη Γεωμετρία ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB} = r \,.\, \Delta φ$.

Σχεδιάζομε τώρα το τρίγωνο ΣΑ'Β' με πλευρές τις ταχύτητες του κινητού στα σημεία Α και Β, οπότε βρίσκομε ότι η μεταβολή Δυ της ταχύτητας υ μπορεί, λόγω της μικρής γωνίας Δφ, αντί για ευθεία Α'Β' να παρασταθεί με το τόξο $\overset{\frown}{A'B'}$, οπότε γράφεται:

$$\Delta υ = υ \,.\, \Delta φ$$

Αν διαιρέσομε και τα δύο μέλη με το Δt, δηλαδή το χρόνο μέσα στόν οποίο έγινε αυτή η αλλαγή της ταχύτητας, θα έχομε:

$$\frac{\Delta υ}{\Delta t} = υ \cdot \frac{\Delta φ}{\Delta t}$$

$$γ = υ \,.\, ω$$

$$γ = υ \cdot \frac{υ}{r} = \frac{υ^2}{r}$$

$$γ = ω^2 \,.\, r$$

Η κεντρομόλος λοιπόν επιτάχυνση διευθύνεται συνεχώς, όπως και η δύναμη, προς το κέντρο και έχει μέτρο το $ω^2 \,.\, r$. Αν m είναι η μάζα του κινητού, τότε η κεντρομόλος δύναμη θα εκφράζεται με τη σχέση:

$$F_κ = m \cdot \frac{υ^2}{r} \qquad ή$$

$$F_\kappa = m\omega^2 \cdot r$$

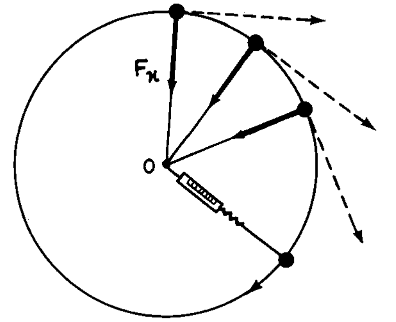
Για να εκφρασθεί το F_κ σε N πρέπει η μάζα m να εκφράζεται σε kg, το ω σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο και το r σε m.

Καταλήγομε έτσι στο συμπέρασμα:

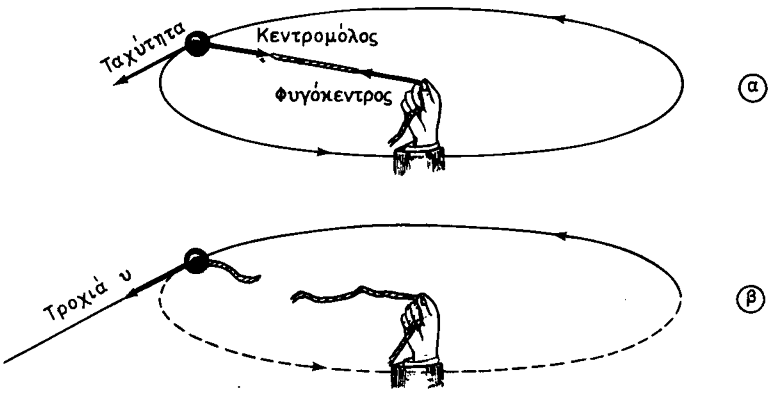
Όταν σωμα μάζας m κινείται ομαλά σε περιφέρεια κύκλου που έχει ακτίνα r, τότε αναπτύσσεται σ' αυτό κεντρομόλος δύναμη, στην οποία και αντιστοιχει κεντρομόλος επιτάχυνση γ_κ.

$$\gamma_\kappa = \omega^2 \cdot r \qquad \text{ή} \qquad \gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}$$

Πειραματικά μπορούμε να το διαπιστώσομε αυτό, αν στην άκρη ενός λεπτού σχοινιού προσδέσομε μικρή σφαίρα και κρατώντας την άλλη άκρη του σχοινιού το στρέψομε κυκλικά, ώστε να παραχθεί κυκλική κίνηση. Τότε στη σφαίρα ενεργεί η



Σχ. 11.1γ.



Σχ. 11.1δ.

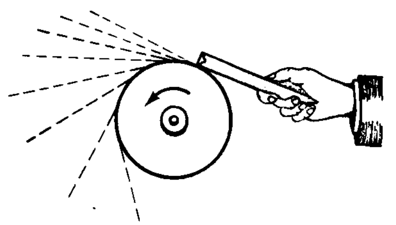
κεντρομόλος δύναμη, που μπορεί μάλιστα να μετρηθεί αν παρεμβληθεί στο σχοινί ένα δυναμόμετρο (σχ. 11.1γ). Αν κοπεί το σχοινί, τότε μηδενίζεται η κεντρομόλος δύναμη και το σώμα, σύμφωνα με την αρχή της αδράνειας, θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της αρχικής τροχιάς (σχ. 11.1δ).

Όταν παρακολουθούμε σμυριδοτροχό σε λειτουργία, βλέπομε ότι οι σπινθήρες, που είναι ερυθροπυρωμένα τεμαχίδια του τροχού, ξεφεύγουν από τον τροχό εφαπτομενικά (σχ. 11.1ε).
Από την φασική γνωρίζομε επίσης ότι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Όπου: ν είναι ο αριθμός στροφών του κινητού στο δευτερόλεπτο (συχνότητα).
Αν αντικατασταθεί η τιμή του ω στον τύπο, αυτή θα αλλάξει έκφραση.

$$F_\kappa = m4\pi^2 \, . \, \nu^2 \, . \, r$$



Σχ. 11.1ε.

Παράδειγμα.

Σφαιρίδιο μάζας 50g προσδένεται στο άκρο σχοινιού μήκους 1m. Κρατώντας το άλλο άκρο του σχοινιού περιστρέφομε το σφαιρίδιο έτσι, ώστε να εκτελεί αυτό ομαλά έξη (6) στροφές στο δευτερόλεπτο. Πόση είναι η κεντρομόλος δύναμη;

Λύση.

Για να λύσομε το πρόβλημα βρίσκομε πρώτα την περιφερειακή ταχύτητα του σφαιριδίου:

$$u = 2\pi\nu \, . \, r = 2\pi \times 6 \times 1 = 37{,}68 \text{ m/s}$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω είναι: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \, . \, 6 = 37{,}68$ rd/s
Η $\gamma_\kappa = \omega^2 \, . \, r = 37{,}68^2 \times 1 = 1419{,}78$ m/s^2
Η κεντρομόλος άρα δύναμη F_κ ισούται με:

$$F_\kappa = 0{,}05 \times 1419{,}78 = 71{,}0 \text{ N}$$

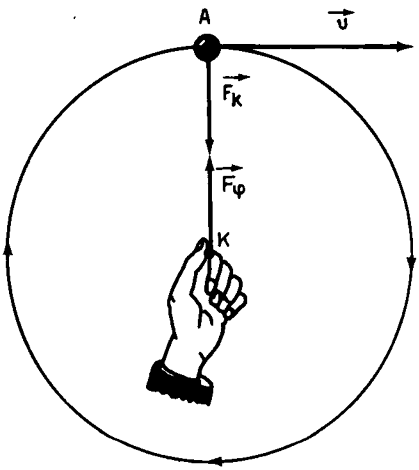
11.2 Φυγόκεντρος δύναμη.

Σύμφωνα με το τρίτο αξίωμα της δυναμικής κάθε ***δράση*** προκαλεί ***αντίδραση.*** Και στην περίπτωση της κεντρομόλου δυνάμεως (δράση) αναπτύσσεται τέτοια αντίδραση, που λέγεται ***φυγόκεντρος δύναμη.***

Στο πείραμα με τη σφαίρα και το σχοινί, στο χέρι μας αισθανόμαστε να ισορροπούν δυο δυνάμεις (σχ. 11.2). Η φυγόκεντρος F_Φ και η κεντρομόλος F_K.

Με το χέρι μας τραβάμε τη σφαίρα με δύναμη F_{κ} και τότε η σφαίρα αντιδρά και τραβά το χέρι μας με δύναμη F_{ϕ}:

$$F_{\kappa} + F_{\phi} = 0$$



Σχ. 11.2

Αν σπάσει το σχοινί που κρατά τη σφαίρα, τότε μηδενίζονται και οι δυο δυνάμεις (και η κεντρομόλος και η φυγόκεντρος δύναμη) και το σώμα κινείται πλέον ευθύγραμμα και ομαλά κατά την εφαπτομένη της τροχιάς του.

Νόμοι της κεντρομόλου και φυγοκέντρου δυνάμεως.

Από τους διάφορους τύπους που εκφράζουν την κεντρομόλο και τη φυγόκεντρο δύναμη προκύπτουν και οι νόμοι που τις χαρακτηρίζουν και είναι:

$$F_{\kappa} = m\,\omega^2 \,.\, r$$

$$F_{\kappa} = m\,4\pi^2\,\nu^2 \,.\, r$$

$$F_{\kappa} = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r$$

— **ΠΡΩΤΟΣ ΝΟΜΟΣ.** ***Η κεντρομόλος δύναμη είναι ανάλογη προς τη μάζα.***

Αυτό σημαίνει ότι, αν δύο κινητά που περιστρέφονται έχουν, εκτός από τις μάζες τους, όλα τα άλλα χαρακτηριστικά, όπως ακτίνα και περιφερειακή ταχύτητα, τα ίδια, τότε στο κινητό που έχει διπλάσια μάζα ασκείται διπλάσια κεντρομόλος δύναμη.

— **ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ.** ***Η κεντρομόλος δύναμη είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της γωνιακής ή της γραμμικής ταχύτητας.***

Αυτό σημαίνει ότι, αν κινητό που στρέφεται π.χ. με πέντε στροφές στο δευτερόλεπτο δέχεται μια κεντρομόλο δύναμη F_{κ}, όταν διπλασιασθούν ή τριπλασιασθούν οι στροφές του, τότε η κεντρομόλος δύναμη που θα δεχθεί τετραπλασιάζεται ή εννεαπλασιάζεται αντίστοιχα.

— ΤΡΙΤΟΣ ΝΟΜΟΣ. ***Αν κινητό κινείται με σταθερό αριθμό περιστροφών στο δευτερόλεπτο, τότε η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται το κινητό μεταβάλλεται ανάλογα με την ακτίνα περιστροφης.***

Αυτό σημαίνει ότι, αν δύο κινητά που περιστρέφονται με τις ίδιες στροφές, έχουν τις ίδιες μάζες, διαφέρουν όμως στις ακτίνες περιστροφής τους, τότε στο κινητό με τη μεγαλύτερη ακτίνα ασκείται μεγαλύτερη κεντρομόλος δύναμη.

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο αν τα δύο κινητά, αντί να έχουν τις ίδιες στροφές, έχουν τις ίδιες περιστροφικές ταχύτητες.

Στην περίπτωση αυτή το κινητό με τη μεγαλύτερη ακτίνα έχει τη μικρότερη κεντρομόλο δύναμη. Η κεντρομόλος δύναμη τότε είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την ακτίνα.

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν υλικό σημείο m διαγράφει κυκλική τροχιά με μία κίνηση ομαλή (περιφερειακή ταχύτητα $\upsilon = \omega \cdot r$) εφαρμόζεται σ' αυτό μια κεντρομόλος δύναμη που το κρατάει στην τροχιά του. Η δύναμη αυτή εκφράζεται:

$$\boxed{F = m\omega^2 \cdot r} \quad \text{ή} \quad \boxed{F = m \cdot \frac{\upsilon^2}{r}}$$

2. Στην κεντρομόλο δύναμη αντιστοιχεί και κεντρομόλος επιτάχυνση:

$$\boxed{\gamma_\kappa = \omega^2 \cdot r} \quad \text{ή} \quad \boxed{\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}}$$

3. Στο Διεθνές σύστημα το μέγεθος F εκφράζεται σε N, το m σε kg, το r σε m, η υ σε m/s, το ω σε rd/s και το γ σε m/s^2.

11.3 Ασκήσεις.

1. Μάζα 60 g κινείται σε περιφέρεια με ακτίνα 25 cm και κάνει 2 στροφές στο δευτερόλεπτο. Να υπολογισθούν: α) Η γραμμική ταχύτητα σε m/s. β) Το μέγεθος και η διεύθυνση της επιταχύνσεως. γ) Η κεντρομόλος δύναμη σε N.
2. Σώμα μάζας 0,2 kg είναι δεμένο από το άκρο νήματος μήκους 40 cm και περιστρέφεται κυκλικά, σε κατακόρυφο επίπεδο, με σταθερή γραμμική ταχύτητα 200cm/s. Ποια δύναμη ασκεί το νήμα στο ανώτατο και στο κατώτατο σημείο της τροχιάς; ($g = 10\ m/s^2$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ

ΕΙΔΗ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

Β' ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Στα επόμενα, σαν στερεό σώμα θα θεωρούμε σύνολο υλικών σημείων με σταθερές αποστάσεις μεταξύ τους, που αποτελούν ένα ομοιογενές σύστημα.

12.1 Πτώση σώματος λόγω βαρύτητας.

Τύπος $B = M \cdot g$

Είναι γνωστό ότι εξαιτίας της βαρύτητας όλα τα σώματα, όταν αφήνονται να πέσουν ελεύθερα σε χώρο δίχως αέρα (κενό), πέφτουν κατακόρυφα με την ίδια επιτάχυνση.

Η επιτάχυνση αυτή έχει τιμή στις τεχνικές εφαρμογές 9,81 m/s^2. Μπορούμε όμως να παραδεχθούμε, κάνοντας λάθος 2%, ως τιμή του g την τιμή $10 m/s^2$ δηλαδή:

$$g = 10 m/s^2$$

Ας εφαρμόσομε σε ένα σώμα το θεμελιώδη νόμο: $F = m\gamma$.

Το σώμα, όπως είπαμε παραπάνω, θεωρείται ότι αποτελείται από μικρά σωματίδια με μάζες m_1, m_2, m_3,... τα οποία κατά την πτώση τους διεγείρονται από κατακόρυφες δυνάμεις που έχουν όλες κατεύθυνση προς τα κάτω.

$$F_1 = m_1 g, \qquad F_2 = m_2 g, \qquad F_3 = m_3 g \ \ldots$$

Μεταφερμένες όλες αυτές οι δυνάμεις στο Κ.Β. (κέντρο βάρους) του σώματος δίνουν μια ***μοναδική συνισταμένη. Το βάρος Β του σώματος:***

$$B = (m_1 g + m_2 g + m_3 g + \ldots) = g\,(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)$$

$$B = M \cdot g$$

Αριθμητική εφαρμογή.

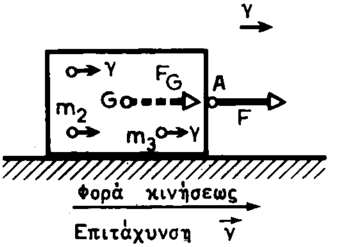
Έστω μάζα σώματος $M = 20$ kg και επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 m/s^2$. Τότε βάρος του σώματος:

$$B = 20 \times 10 = 200 \text{ N}$$

12.2 Κίνηση στερεού σε οριζόντιο επίπεδο.

Το στερεό λαμβάνεται σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Θεωρείται επίσης ως σώμα ομοιογενές και που διατηρεί ένα μετωπικό επίπεδο συμμετρίας, το επίπεδο της σελίδας, στο σημείο Α του οποίου εφαρμόζεται η δύναμη F.

Η δύναμη αυτή είναι παράλληλη προς το οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο εδράζεται το σώμα, ο δε άξονας ενέργειάς της διέρχεται από το Κ.Β. του σώματος (σχ. 12.2α).



Σχ. 12.2α.

Όταν το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, το βάρος του Β εξισορροπείται από το σύνολο των δυνάμεων επαφής, που ασκούνται στο σώμα από το επίπεδο εδράσεως.

α) Πρώτη υπόθεση.

Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του σώματος και του επιπέδου εδράσεως.

Μόλις επιδράσει η δύναμη F, το σώμα αρχίζει να κινείται. Σε κάθε στιγμή όλα τα σωματίδια από τα οποία αποτελείται, και που έχουν μάζες m_1, m_2, m_3, ... κλπ. έχουν την ίδια ταχύτητα υ και την ίδια επιτάχυνση γ. Συμβαίνει συνεπώς σαν σε όλα τα σημεία χωριστά του σώματος να ηταν εφαρμοσμένες οι δυνάμεις $m_1\gamma$, $m_2\gamma$, $m_3\gamma$, ... όλες παράλληλες προς το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 12.2α).

Η αναγωγή όλων αυτών των δυνάμεων στο Κ.Β. του σώματος δίνει μια συνισταμένη δύναμη F που βρίσκεται στο επίπεδο συμμετρίας:

$$F = m_1\gamma + m_2\gamma + m_3\gamma + ... = \gamma\,(m_1 + m_2 + m_3 + ...) = M\,.\,\gamma$$

όπου: Μ είναι η μάζα του σώματος.

Αφού η τριβή είναι μηδενική, τότε:

$$M\,.\,\gamma = F$$

Αριθμητική εφαρμογή.

Έστω μάζα $M = 20kg$, δύναμη $F = 100N$ και $\gamma = F : M = 5\ m/s^2$

Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη και ομοιόμορφα επιταχυνόμενη.

Έτσι μπορούμε να υπολογίσομε την ταχύτητα που έχει το σώμα για κάθε στιγμή καθώς και το διάστημα πού διανύει σ' αυτό το χρόνο. Μετά τέσσερα λοιπόν δευτερόλεπτα το σώμα θα έχει:

ταχύτητα: $u = \gamma\,.\,t = 5 \times 4 = 20\ m/s$

θα διανύσει δε διάστημα: $s = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 16 = 40$ π

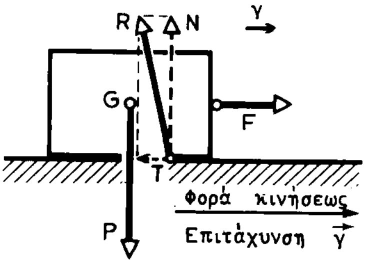
β) Δεύτερη υπόθεση.

Λαμβάνεται τώρα υπόψη η ***τριβή ολισθήσεως*** μεταξύ σώματος και επιπέδου (σχ. 12.2β).

Στην περίπτωση αυτή η επίδραση του οριζόντιου επιπέδου στο σώμα εκδηλώνεται με μια συνισταμένη δύναμη που αναλύεται σε:

— Μια συνιστώσα N κάθετη στο επίπεδο, συνεπώς παράλληλη προς τη B, με ίση προς αυτήν ένταση, αλλά αντίθετη φορά και

— Μια συνιστώσα εφαπτομένη T με μικρότερη ένταση από την N και με φορά ***αντίθετη*** πάντα προς τη φορά κινήσεως.



Σχ. 12.2β.

Έστω F η εφαρμοζόμενη στο σωμα δύναμη. Η έντασή της πρέπει να είναι μεγαλύτερη από εκείνη της T.

Η θεμελιώδης εξίσωση τότε γράφεται ως εξής:

$$M \cdot \gamma = F - T$$

Αριθμητική εφαρμογή.

$M = 20\text{kg}, \qquad F = 100\text{N} \qquad$ καί $\qquad T = 40\text{N}$

Η επιτάχυνση γ έχει τότε τιμή:

$$\gamma = \frac{100 - 40}{20} = 3\text{m/s}^2$$

Η κίνηση του σώματος είναι πάλι ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη.

12.3 Μάζα και αδράνεια σώματος.

Η αρχή της αδράνειας που είδαμε να εφαρμόζεται στο υλικό σημείο, εφαρμόζεται και σε κάθε στερεό σώμα.

Ας κάνομε το ακόλουθο πείραμα.

Κατά μήκος του εργαστηρίου ενός μηχανουργείου στερεώνονται δυο μεταλλικές γωνιές, ως παράλληλες τροχιές, στις οποίες στηρίζονται οι 4 τροχοί ενός φορείου. Το φορείο από τη μια του πλευρά φέρει λαβή, από την οποία μπορεί κανείς ή να το σπρώξει ή να το σταματήσει όταν κινείται, ή ακόμη να το χειρισθεί κατά μήκος των τροχιών.

Στα δύο άκρα των τροχιών υπάρχουν ελατηριωτά πέρατα.

Έστω ότι το φορείο έχει μάζα 20 kg. Τοποθετείται πρώτα στο ένα άκρο των τροχιών. Έπειτα το ωθούμε απότομα από τα αριστερά προς τα δεξιά. Με την ώθηση που του δώσαμε αρχίζει να κινείται. Παρατηρούμε όμως ότι κατά την ώθηση αντιμετωπίζομε κάποια αντίδραση του σώματος στην κίνηση αυτή και μάλιστα η αντίδραση αυτή είναι τόσο μεγαλύτερη όσο η κίνηση που θέλομε να του μεταδώσομε είναι ταχύτερη. ***Η μάζα λοιπόν του φορείου ανθίσταται στην επιτάχυνση.*** Παράλληλα αν, όταν το φορείο βρίσκεται σε κίνηση, προσπαθήσομε να το σταματήσομε απότομα, τραβώντας το από τη λαβή αντίθετα από την κίνησή του, θα συναντήσομε πάλι αντίσταση που θα μας γίνει αντιληπτή από τη μυική κόπωση που θα αισθανθούμε. Συνεπώς η ***μάζα του φορείου ανθίσταται και στην επιβράδυνση.***

Αν επαναλάβομε το πείραμα κατά τρόπο που να προκαλούμε μια κίνηση πήγαινε-έλα στο φορείο τόσο γρήγορη, όσο μας το επιτρέπουν οι δυνάμεις μας το συμπέρασμα βγαίνει μόνο του.

Η μάζα του σώματος αντιδρά στην επιτάχυνση, δηλαδή σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του.

Ας πάρουμε κι άλλο παράδειγμα:

Μια αμαξοστοιχία π.χ. με μεγάλο αριθμό βαγονιών. Αν το τραίνο είναι σημαντικά βαρύ (700-800 τόννοι) ξεκινάει σιγά. Αν είναι ελαφρύ ξεκινάει γρήγορα.

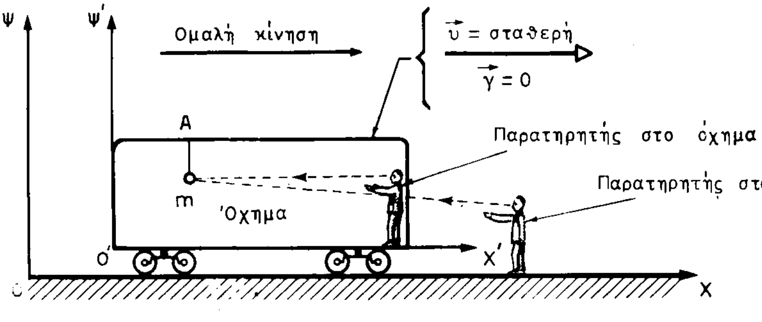
Όσο λοιπόν πιο μεγάλη είναι η μάζα του σώματος τόσο περισσότερο ανθίσταται στην αλλαγή της ταχύτητας ή, με άλλα λόγια, τόσο πιο μεγάλη είναι η αδράνειά του.

Η μάζα ενός σώματος χαρακτηρίζει την αδράνειά του.

12.4 Δύναμη αδράνειας σώματος που έχει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Σε σιδηροδρομικό όχημα που κυλάει σε ευθύγραμμη και οριζόντια τροχιά αναρτάται από την οροφή του με νήμα χαλύβδινη σφαίρα μάζας m.

— ***Πρώτη περίπτωση:*** Όταν η κίνηση του βαγονιού είναι ομαλή, τότε ***το νήμα αναρτήσεως παραμένει κατακόρυφο,*** γεγονός που διαπιστώνεται από δυο παρατηρητές, που ο ένας είναι μέσα στο βαγόνι και ο άλλος έξω απ' το βαγόνι (έδαφος) (σχ. 12.4α).



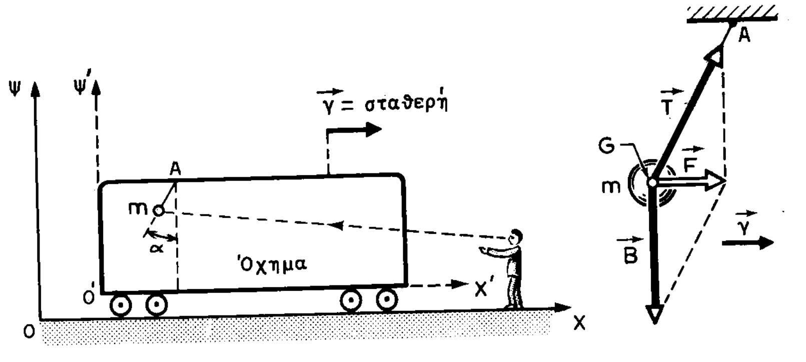
Σχ. 12.4α.

— ***Δεύτερη περίπτωση:*** Όταν το όχημα αποκτά αιφνίδια κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη (γ=σταθ.), τότε ***το νήμα κλίνει αντίθετα προς την κίνηση*** και παίρνει μια κατάλληλη θέση ισορροπίας με γωνία α ως προς την κατακόρυφο, πράγμα που το διαπιστώνουν και οι δυο παρατηρητές (σχ. 12.4β και σχ. 12.4γ). Πώς εξηγείται το φαινόμενο αυτό;

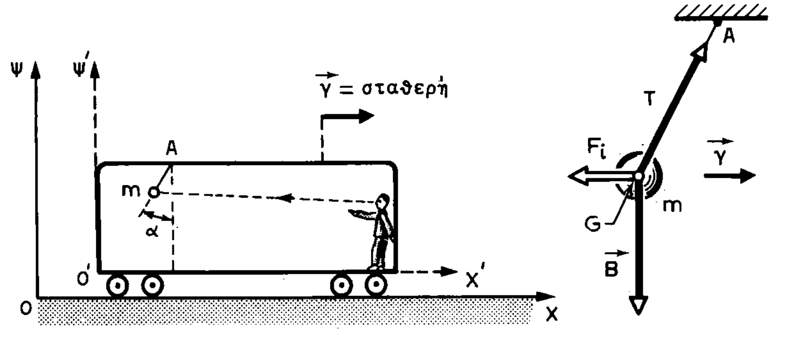
α) Από τον παρατηρητή που είναι στο έδαφος:

Γι' αυτόν, ως προς τους σταθερούς άξονας ΟΧ, ΟΨ που συνδέονται με τη Γη, η κίνηση της σφαίρας είναι γραμμική οριζόντια με επιτάχυνση γ (σχ. 12.4β).

Η σφαίρα διεγείρεται από μια δύναμη F που υπολογίζεται από την εξίσωση F=m . γ. Η δύναμη αυτή F είναι η συνισταμένη δύο δυνάμεων: Του βάρους της σφαίρας (B=m . g) και της δράσεως του νήματος (που το βαγόνι το τραβάει από το σημείο Α) επάνω στη σφαίρα.



Σχ. 12.4β.



Σχ. 12.4γ.

β) Από τον παρατηρητή που είναι στο βαγόνι.

Γι' αυτόν τον παρατηρητή — που συναισθάνεται πολύ καλά τα ψυχολογικά αποτελέσματα της επιτάχυνσης — η σφαίρα και το κορδόνι αναρτήσεώς της είναι ακίνητα ως προς το βαγόνι (σχ. 12.4γ). Ο παρατηρητής αυτός σκέπτεται με τον ακόλουθο τρόπο: Η σφαίρα ισορροπεί ως προς το βαγόνι υπό την επίδραση 3 δυνάμεων: του βάρους της B, της τάσεως T του νήματος αναρτήσεώς της από το βαγόνι και μιας τρίτης δυνάμεως F_i αναγκαστικά αντίθετης προς την συνισταμένη των δύο άλλων.

Η αντιπαραβολή των συλλογισμών οδηγεί στο να παραδεχθούμε πως η F_i είναι αντίθετη της F:

$$F_i = -F = -m \cdot \gamma$$

Η F_i καλείται δύναμη αδράνειας της σφαίρας στην επιταχυνόμενη κίνηση.

12.5 Ποσότητα κινήσεως σώματος το οποίο μετακινείται.

Εξ ορισμού η ποσότητα κινήσεως υλικού σημείου μάζας m και ταχύτητας $\vec{u}$ σε δοσμένη στιγμή δίνεται από το γινόμενο $m \cdot \vec{u}$ (μέγεθος διανυσματικό).

Για ένα σώμα μάζας M του οποίου όλα τα σημεία σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{u}$ η ποσότητα κινήσεως ισούται με $M \cdot \vec{u}$.

Σημείωση.

Όταν στον τύπο $F = m \cdot \gamma$ η επιτάχυνση είναι μηδέν η ταχύτητα υ είναι σταθερή ή μηδέν. Από αυτό προκύπτει ότι αν ένα σώμα κινείται ομαλά, το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητά του είναι σταθερό.

$$M \cdot \upsilon = \text{σταθ.}$$

Ανακεφαλαίωση.

1. Ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής όταν εφαρμόζεται σε στερεό μάζας M που αφήνεται σε ελεύθερη πτώση στο κενό οδηγεί στη σχέση:

$$\boxed{B = M \cdot g}$$

2. Ένα σώμα με μάζα M, όταν θεωρείται ότι το βάρος του εξισορροπείται από τις ανταγωνιστικές δυνάμεις της βαρύτητας, υπό την επίδραση μιας δυνάμεως F, αποκτά μιαν επιτάχυνση γ της αυτής διευθύνσεως και της αυτής φοράς με τη δύναμη και την ένταση που δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\vec{F} = M \cdot \vec{\gamma}}$$

3. Η μάζα ενός σώματος χαρακτηρίζει την αδράνειά του, δηλαδή την αντίστασή του σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του.
4. Η δύναμη αδράνειας ενός υλικού σημείου μάζας m που εκτελεί μια κίνηση ομαλώς επιταχυνόμενη με μιαν επιτάχυνση γ μπορεί να παρασταθεί με ένα διάνυσμα $-m\vec{\gamma}$ αντίθετης φοράς προς την επιτάχυνση. Η δύναμη αυτή εξαφανίζεται αμέσως όταν $F = 0$, δηλαδή όταν η κίνηση μεταπέσει σε ομαλή.

12.6 Ασκήσεις.

1. Αυτοκίνητο μάζας 1000 kg είναι σταματημένο σε οριζόντιο δρόμο. Στο ξεκίνημα όλα συμβαίνουν ωσάν να εφαρμόζεται δύναμη 500 N. α) Τι επιτάχυνση αποκτά το όχημα; β) Ποια είναι η ταχύτητά του 5 δευτερόλεπτα μετά από την εκκίνησή του;

2. Ποια είναι η ελκτική δύναμη μιας ατμομηχανής που είναι συνδεμένη με τραίνο μάζας 200 t που, ξεκινώντας από την ηρεμία, σε διάστημα 200 δευτερολέπτων κάνει ώστε να αποκτήσει το τραίνο ταχύτητα 70 km/h. ($g = 10 m/s^2$).
3. Σε κεκλιμένο επίπεδο και κατά μήκος της ευθείας με τη μεγαλύτερη κλίση, ρίχνομε μια σφαίρα από το κάτω μέρος προς τα επάνω. Αναλύστε τις δυνάμεις που ενεργούν πάνω στη σφαίρα σε μια δεδομένη στιγμή της προς τα επάνω κινήσεώς της. Αποδείξτε ότι δέχεται μια συνισταμένη δύναμη σταθερή και παράλληλη προς το επίπεδο. Παραδεχόμαστε πως η προς τα επάνω κίνηση της σφαίρας είναι ομαλά επιβραδυνόμενη.
4. Αυτοκίνητο έχει μάζα 8t. Τρέχοντας με ταχύτητα 50km/h μπορεί και σταματάει σε απόσταση 13,5 m άμα φρενάρει δυνατά. Με την προϋπόθεση πως η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη να υπολογισθούν: α) Η επιβράδυνση γ. β) Η δύναμη F, σε N, που μπορεί ν' αντικαταστήσει τα φρένα του αυτοκινήτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΗ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ ΟΜΑΛΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΑΞΟΝΑ

13.1 Γενικά.

Θεωρούμε σώμα που εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα.

Κάθε σημείο του σώματος εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση και προκαλεί μια κεντρομόλο δύναμη που διευθύνεται προς το κέντρο της περιφέρειας που διαγράφει το σημείο.

Αποδεικνύεται ότι η συνισταμένη όλων των στοιχειωδών κεντρομόλων δυνάμεων έχει την ίδια τιμή με αυτήν που προκύπτει αν όλη η μάζα του σώματος ήταν συγκεντρωμένη στο Κ.Β. του σώματος. Ας καλέσομε:

ω	τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος
u	την περιφερειακή ταχύτητα του Κ.Β. (G) του σώματος
r	την απόσταση του Κ.Β. από τον άξονα περιστροφής ($u = \omega \cdot r$)
B	το βάρος και M την μάζα του στερεού ($B = M \cdot g$)
γ_κ	την κεντρομόλο επιτάχυνση του Κ.Β. (G) ($\gamma_\kappa = u^2/r = \omega^2 r$)
F_κ	την ένταση της κεντρομόλου δυνάμεως επί της μάζας Μ, που υποτίθεται συγκεντρωμένη στο Κ.Β. του σώματος

$$F_\kappa = M\omega^2 \cdot r \qquad\qquad F_\kappa = M \cdot \frac{u^2}{r}$$

Παρατηρήσεις.

1) Αν η ακτίνα είναι πολύ μεγάλη σχετικά με τις διαστάσεις του περιστρεφόμενου σώματος, μπορούμε να δεχθούμε ότι η συνισταμένη F διέρχεται από το Κ.Β., πράγμα που θα υποθέτουμε πως συμβαίνει στα επόμενα.

2) Αν σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα συμμετρίας του (π.χ. σφόνδυλος) τό Κ.Β. του βρίσκεται στον άξονα ($r=0$, $\omega^2 r=0$ και $F=0$).

13.2 Φυγόκεντρος δύναμη στερεού.

Στην κεντρομόλο δύναμη αντιστοιχεί μια ίση αντίδραση: ***Η φυγόκεντρος δύναμη.***

Παράδειγμα 1.

Όταν σφαίρα σφενδονίζεται:

α) Το νήμα έλκει την σφαίρα προς τα μέσα. Αυτή η ελξη είναι η ***κεντρομόλος δύναμη.***

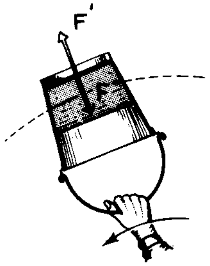
β) Σύμφωνα με την αρχή της ισότητας δράσεως και αντιδράσεως η σφαίρα τραβά το νήμα προς τα έξω με μια δύναμη F′ αντίθετη της F και της αυτής εντάσεως.

Η δύναμη αυτή λέγεται ***φυγόκεντρος.***

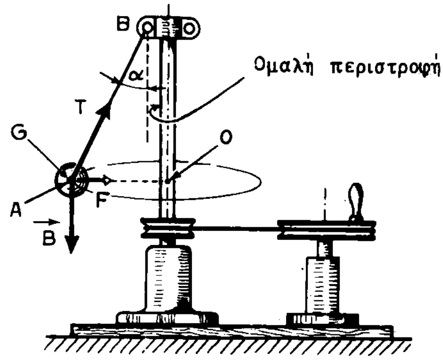
Παράδειγμα 2.

Έστω κουβάς που περιέχει νερό. Αν τον κουβά δεμένο στην άκρη σχοινιού αρχίσουμε να τον λεριστρέφουμε σε ένα κατακόρυφο επίπεδο, το νερό παραμένει στον πυθμένα του κουβά και όταν ακόμα βρίσκεται στην πάνω κατακόρυφη θέση, δηλαδή τέλεια αναποδογυρισμένος (σχ. 13.2α).

β) Το νερό πιέζει τον πυθμένα του κουβά κατ' αντίθετη φορα ***(φυγοκεντρος δύναμη).***



Σχ. 13.2α.



Σχ. 13.2β.

Παράδειγμα 3.

Ας κάνομε να περιστραφεί μια σφαίρα με τη βοήθεια της διατάξεως του σχήματος 13.2β.

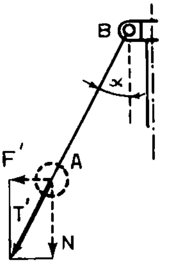
Όταν η ταχύτητα είναι σταθερή, το στέλεχος AB κλίνει με ορισμένη γωνία α ως προς την κατακόρυφο. Το κέντρο G της σφαίρας εκτελεί κύκλο κέντρου O και ακτίνας OA

α) Το βάρος $\vec{B}$ της σφαίρας και η έλξη T που δέχεται η σφαίρα στο σημείο A από το στέλεχος AB έχουν μια συνισταμένη κεντρομόλο δύναμη F που κρατά το κέντρο της σφαίρας στην κυκλική τροχιά.

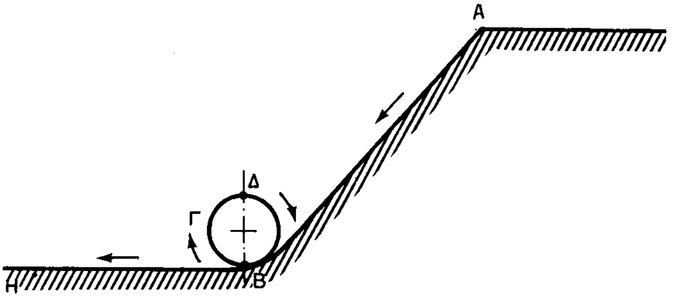
β) Η τάση T′, που ασκείται από την κινούμενη σφαίρα στο στέλεχος αναρτήσεως, είναι ίση και αντίθετη προς την T (σχ. 13.2γ) και αναλύεται σε μια κατακόρυφη συνιστώσα, ίση προς το B, και μια οριζόντια συνιστώσα F′ ίση και αντίθετη της F. Η τελευταία αυτή συνιστώσα είναι η φυγόκεντρος δύναμη.

Και όπως συμβαίνει πάντοτε σχετικά με την δράση και αντίδραση, η κεντρομόλος δύναμη και η φυγόκεντρος δύναμη ενεργούν σε διαφορετικά σώματα.

Η κεντρομόλος δύναμη στο κινούμενο σώμα, ενώ η φυγόκεντρος στους οδηγούς ή στα στηρίγματα (εδώ στο άκρο του στελέχους ΑΒ).



Σχ. 13.2γ.



Σχ. 13.2δ.

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν ένα υλικό σημείο μάζας m διαγράφει κυκλική τροχιά με μια κίνηση ομοιόμορφη (περιφ. ταχύτητα $\upsilon = r \cdot \omega$) διεγείρεται από μια κεντρομόλο δύναμη η οποία το συγκρατεί στην τροχιά του. Η δύναμη αυτή έχει ως έκφραση:

$$\boxed{F_\kappa = m\omega^2 \cdot r} \quad \text{ή} \quad \boxed{F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{r}}$$

Στην κεντρομόλο δύναμη αντιστοιχεί μια κεντρομόλος επιτάχυνση:

$$\boxed{\gamma_\kappa = \omega^2 \cdot r} \quad \text{ή} \quad \boxed{\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}}$$

Στο Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) το μέγεθος F πρέπει να εκφρασθεί σε N, το γ σε m/s^2, το m σε kg, το r σε m, το υ σε m/s, και το ω σε rd/s.

2. Γενίκευση: Όταν το Κ.Β. στερεού σώματος (μάζας M) διαγράφει κύκλο ακτίνας r, με σταθερή ταχύτητα, οι κεντρομόλες δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε σημείο του συνθέτουν μια συνισταμένη που έχει μέγεθος:

$$\boxed{F_\kappa = M\omega^2 r} \quad \text{ή} \quad \boxed{F_\kappa = M \cdot \frac{\upsilon^2}{r}}$$

3. Η κεντρομόλος δύναμη ενεργεί στο κινούμενο σώμα. Βάσει της αρχής της δράσεως και αντιδράσεως, τα στοιχεία συνδέσεως που κρατούν το σώμα στην κυκλική τροχιά διεγείρονται από μια ***φυγόκεντρο δύναμη*** κατευθείαν αντίθετη στην κεντρομόλο δύναμη.

4. Αν το σώμα στρέφεται γύρω από έναν υλικό άξονα συμμετρίας, το Κ.Β. βρίσκεται στον άξονα αυτόν ($r=0$) η δε συνισταμένη των κεντρομόλων δυνάμεων είναι μηδενική, όπως ακριβώς και η συνισταμένη των φυγοκέντρων δυνάμεων.

5. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι:

Όταν σώμα διεγείρεται από μιαν ομοιόμορφη κυκλική κίνηση, οι δυνάμεις που εφαρμόζονται σ' αυτό σχηματίζουν, με μια δύναμη ίση και αντίθετη προς την κεντρομόλο δύναμη, ένα σύστημα δυνάμεων σε ισορροπία.

Η φυγόκεντρος δύναμη φέρεται ως μια δύναμη αδράνειας της περιστροφής.

13.3 Ασκήσεις.

1. Χαλύβδινο σύρμα διατομής $1 mm^2$ σπάει με φορτίο 600N. Στερεώνομε στο ένα του άκρο μάζα 1 kg και το περιστρέφομε κυκλικά σε κατακόρυφο επίπεδο. Η ακτίνα του κύκλου που διαγράφεται από το κέντρο βάρους είναι 0,50 kg. Να υπολογισθούν: α) Η τάση του σύρματος όταν η ταχύτητα περιστροφής είναι 3στρ/s. β) Η ταχύτητα περιστροφής που πρέπει να σπάσει το σύρμα.
2. Κινητήριο στρόφαλο έχει το Κ.Β. του σε απόσταση 160 mm από τον άξονα περιστροφής. Ποια είναι η ένταση της δυνάμεως όταν η ταχύτητα περιστροφής είναι 120 στρ/s, γνωρίζοντας οτι η μάζα του στροφάλου είναι 15kg;
3. Σε ένα αυλάκι, που σχηματίζει μια μπούκλα, αφήνομε να κυλίσει σφαίρα από το υψηλότερο σημείο του. Όταν ξεκινάει σφαίρα από τόσο ψηλά βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με την τροχιά.
   Έστω ότι: r η ακτίνα της μπούκλας, υ η γραμμική ταχύτητα της σφαίρας στο ψηλότερο σημείο της μπούκλας, B το βάρος της σφαίρας, g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Να δείξετε ότι η σχέση $u^2 > g \cdot r$ πρέπει να ισχύει για να μπορεί η σφαίρα να εφάπτεται στο αυλάκι στο σημείο D.
   Αριθμητική εφαρμογή: Αν $r=0{,}20m$ και $g=9{,}81 m/s^2$, τότε $u=$;
4. Να βρεθεί η τάση του σύρματος αναρτήσεως ανελκυστήρα μάζας 8 t, όταν αυτός με τον κινητήρα του αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $1{,}2\ m/s^2$.
5. Μοτοσυκλετιστής κινείται κυκλικά στο εσωτερικό κυρτής επιφάνειας ενός κάθετα τοποθετημένου κυλίνδρου ακτίνας 8 m. Η συνισταμένη του βάρους και της φυγοκέντρου δυνάμεως πρέπει να σχηματίζει με το επίπεδο της τροχιάς το πολύ γωνία $\alpha=20°$ γιατί σε μεγαλύτερες γωνίες γλυστρούν οι τροχοί.
   Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της γραμμικής ταχύτητας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

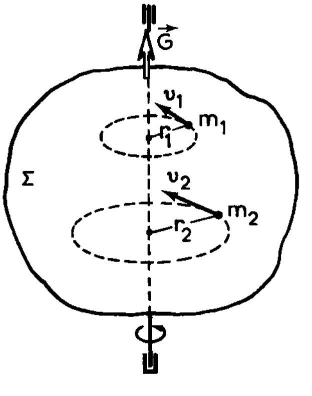
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

14.1 Στροφορμή - ροπή αδράνειας.

Στην κινηματική μιλήσαμε αρκετά για την περιστοφική κίνηση και είδαμε ότι κύριο χαρακτηριστικό της κινήσεως αυτής είναι ***ο άξονας κινήσεως*** και τα στοιχεία που τον σταθεροποιούν στο χώρο ώστε να μην μπορεί το σώμα να κάνει άλλη κίνηση.

Τα στοιχεία αυτά είναι τα έδρανα, δηλαδή τα ***δύο*** τουλάχιστον σημεία στηρίξεως του άξονα για να περιστραφεί.

Έστω ότι το σώμα Σ περιστρέφεται γύρω από άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω (σχ. 14.1).



Σχ. 14.1.

Κατά την περιστροφή, όπως ξέρομε, τα διάφορα σημεία του σώματος διαγράφουν κυκλικές τροχιές που τα επίπεδά τους είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Ολα τα σημεία του στερεού έχουν επίσης την αυτή γωνιακή ταχύτητα ω.

Διαφέρουν όμως οι περιφερειακές τους ταχύτητες υ_1, υ_2, υ_3, ... επειδή τα σημεία κινούνται συνήθως σε διαφορετικές περιφέρειες.

Κάθε σημείο με μάζα m_i, ακτίνα r_i και περιφερειακή ταχύτητα υ_i λέμε ότι έχει ***στροφορμή*** που εκφράζεται με το γινόμενο $m_i\,\upsilon_i\,r_i$. Θα καλέσουμε στροφορμή του σώματος Σ το άθροισμα των στροφορμών όλων των υλικών σημείων που το αποτελούν.

$$\boxed{G = m_1 u_1 r_1 + m_2 u_2 r_2 + \ldots} \qquad (1)$$

Οι ταχύτητες όμως u_1, u_2, u_3, ... ισούνται αντίστοιχα με ωr_1, ωr_2, ωr_3, ωr_4 .... (Αφου η γωνιακή ταχύτητα παραμένει κοινή για όλα τα σημεία).

Αν αντικαταστήσομε τις τιμές αυτές στον τύπο (1) λαμβάνομε:

$$\begin{aligned} G &= m_1 r_1^2 \,.\, \omega + m_2 r_2^2 \,.\, \omega + \ldots \\ &= \omega\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots) \\ &= \omega \,.\, \Sigma\, m_i \,.\, r_i^2 \end{aligned}$$

Το άθροισμα $\Sigma m_i r_i^2$ καλείται ***ροπή αδράνειας*** (Ι) του σώματος Σ προς τον άξονα περιστροφής, οπότε η (1) γράφεται:

$$G = I \,.\, \omega$$

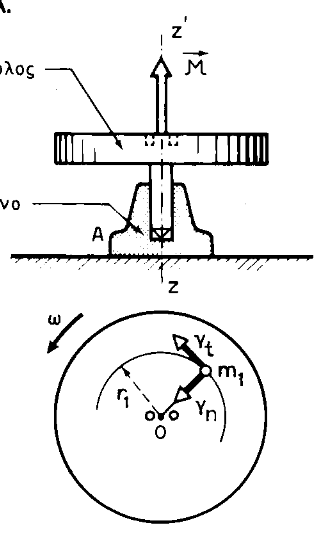
Για να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας Ι του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής Α χωρίζεται το σώμα σε μικρά τεμαχίδια με αντίστοιχες μάζες m_1, m_2, m_3, ... και πολλαπλασιάζεται κάθε μικρή μάζα επί τό τετράγωνο της αποστάσεώς της από τον άξονα περιστροφής. Στη συνέχεια αθροίζονται τα γινόμενα που προκύπτουν.

Σημείωση.

Επειδή ο παραπάνω υπολογισμός είναι λίγο δύσκολος γι' αυτό για ορισμένα σώματα πού έχουν συμμετρικές μορφές ως προς τον άξονα περιστροφής, υπάρχει ευκολότερος αναλυτικός τρόπος υπολογισμού της Ι.

14.2 Θεμελιώδης εξίσωση της περιστροφικής κινήσεως.

'Εστω ο σφόνδυλος του σχήματος 14.2α που το βάρος του εξισορροπείται από το ωστικό έδρανο Α.



Σχ. 14.2α.

1) Έστω υλικό σημείο m_1, του σφονδύλου.

Αυτό με τη περιστροφή του σφονδύλου διαγράφει περιφέρεια με ακτίνα r_1 και γωνιακή ταχύτητα ω. Στην τυχούσα περιστροφική κίνηση του σώματος η επιτάχυνση γ_1 του σημείου αυτού αναλύεται σε δυο συνιστώσες:

Μιαν ***εφαπτομενική*** $\quad \gamma_t = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = r_1 \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ και

μια ***κάθετη*** προς αυτή $\quad \gamma_n = \omega^2 . r_1$.

Στην επιτάχυνση γ_1 αντιστοιχεί μια δύναμη $F_1 = m_1\gamma_1$.

Αυτή αναλύεται σε δυο συνιστώσες:

$$F_t = m_1\gamma_t, \quad \text{και} \quad F_n = m_1 . \gamma_n$$

Η ροπή της F_1 ως προς τον άξονα O ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών. Δηλαδή:

$$\mathcal{M}_o(F_1) = \mathcal{M}_o(F_t) + \mathcal{M}_o(F_n)$$

Αφού όμως $\quad \mathcal{M}_o(F_n) = 0$

$$\mathcal{M}_o(F_1) = \mathcal{M}_o(F_t)$$

αλλά $\quad F_t = m_1\gamma_t = m_1 r_1 \cdot \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$$\mathcal{M}_o(F_t) = r_1\left(m_1 r_1 \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right)$$

και τελικά $\quad \boxed{\mathcal{M}_o(F_1) = m_1 r_1^2 \cdot \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}} \qquad (1)$

2) Για όλα τα σημεία του σφονδύλου μπορούμε να γράψομε μια σχέση παρόμοια με την (1). Το αλγεβρικό άθροισμα των στοιχειωδών ροπών ως προς τον άξονα ZZ' ισούται με τη συνισταμένη ροπή $\mathcal{M}$ που πρέπει να ασκηθεί για να στραφεί ο δίσκος.

$$\mathcal{M}_o(F_1) + \mathcal{M}_o(F_2) + \mathcal{M}_o(F_3) + ... + \mathcal{M}_o(F_\mu) = m_1 r_1^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + m_2 r_2^2 . \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + ...$$

$$= \frac{\Delta\omega}{\Delta t}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...)$$

Η ποσότητα εντός παρενθέσεως εξ ορισμού είναι η ροπή αδράνειας του σφονδύλου ως προς τον άξονα ZZ', οπότε η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$\mathcal{M} = I . \omega'$$

όπου το ω' παριστά τη γωνιακή επιτάχυνση. Έχομε επίσης τη σχέση:

$$\omega' = \frac{\mathcal{M}}{I}$$

Από τον τύπο αυτό βλέπουμε πως:

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι ανάλογη προς τη ροπή Μ του κινητηρίου ζεύγους και αντιστρόφως ανάλογη προς τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Η διατύπωση αυτή αποτελεί το ***θεμελιώδη νόμο της δυναμικής*** στην περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα.

Παρατηρήσεις.

1) Ας συγκρίνομε τους τύπους.

$F = m \cdot \gamma$ (μετάθεση) και $\mathcal{M} = I\,\omega'$ (περιστροφή) που είναι όμοιοι.

— Στη δύναμη F αντιστοιχεί η ροπή $\mathcal{M}$ (αιτία της μεταβολής της ταχύτητας).

— Στη μάζα Μ αντιστοιχεί η ροπή αδράνειας Ι (αντίσταση στη μεταβολή της ταχύτητας).

— Στη γραμμική επιτάχυνση αντιστοιχεί η γωνιακή επιτάχυνση.

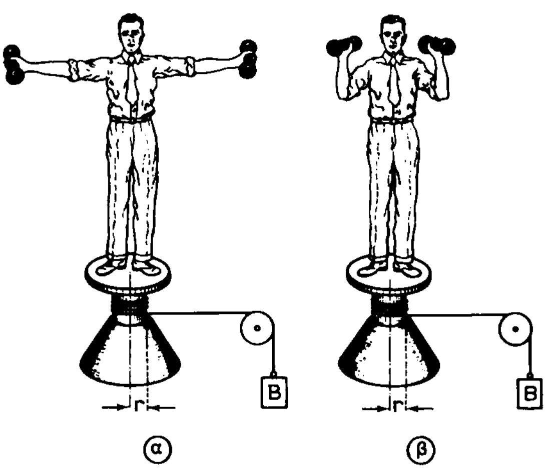
2) Αν ω = σταθερό, τότε $\omega' = 0$ άρα $\mathcal{M} = 0$

Αντίστροφα, αν $\mathcal{M} = 0$ τότε, ή $\omega = 0$ (σφόνδυλος ακίνητος) ή ω = σταθερό (ομαλή κυκλική κίνηση).

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη της στατικής ισορροπίας $\mathcal{M} = 0$ (ζεύγος κινήσεως μηδέν ή συνισταμένη των δυνάμεων μηδενική) αντιστοιχεί εξίσου με την περίπτωση που η κίνηση του σώματος είναι ομαλή.

Εφαρμογή.

Έστω ότι άτομο στέκεται όρθιο σε περιστρεφόμενο τραπέζι με τεντωμένους τους βραχίονές του και κρατώντας δύο βάρη. Γύρω από τον άξονα του τραπεζιού είναι περιτυλιγμένο σχοινί, από το άλλο άκρο του οποίου κρέμεται βάρος Β. Το τεντωμένο σχοινί ασκεί στο τραπέζι μια ροπή $M = B \cdot r$ (σχ. 14.2β).



Σχ. 14.2β.

Με τη ροπή αυτή το άτομο αποκτά γωνιακή επιτάχυνση. Αν το πείραμα επαναληφθεί με τους βραχίονες σε κάμψη, τότε η γωνιακή επιτάχυνση θα είναι πολύ μεγαλύτερη (γιατί για την ίδια ροπή $\mathcal{M}$ έχομε μικρότερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής).

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν σώμα στερεό στρέφεται γύρω από άξονα με την ενέργεια μιας σταθερής ροπής, η κίνηση της περιστροφής του είναι ομαλά επιταχυνόμενη.

2. Η γωνιώδης επιτάχυνση ω' της περιστροφικής κινήσεως είναι ανάλογη της ροπής $\mathcal{M}$ του κινητήριου ζεύγους και αντιστρόφως ανάλογη προς τη ροπή αδράνειας I του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

Από αυτό βγαίνει και η σπουδαία σχέση:

$$\boxed{\mathcal{M} = I \cdot \omega'}$$

3. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ανάλογη προς τη μάζα του σώματος και είναι τόσο μεγαλύτερη, οσο η μάζα του σώματος που το συνιστά βρίσκεται μοιρασμένη μακρύτερα από τον άξονα περιστροφής.

4. Ροπή αδράνειας ως προς το γεωμετρικό άξονα περιστροφής.

α) Δίσκος ακτίνας R και μάζας M

$$\boxed{I = \frac{M\,R^2}{2}}$$

β) Σφόνδυλος μέσης ακτίνας R_m και μάζας M.

$$\boxed{I = M\,R_m^2}$$

14.3 Ασκήσεις.

1. Σφόνδυλος σε μορφή δίσκου έχει διάμετρο 400 mm, πάχος 50 mm και μάζα 7,8 kg/dm^3. Ο δίσκος είναι σφηνωμένος σε άξονα, που στηρίζεται σε δύο έδρανα και που μπορεί να δεχθεί την επίδραση ζεύγους ροπης $\mathcal{M}$ = 2mN. Παραλείπομε τη ροπή αδράνειας του άξονα ως προς τον άξονα xx' της περιστροφής όπως και τις αντιστάσεις τριβής του άξονα στα έδρανα.

   Υπολογίστε:

   α) Τη μάζα του δίσκου.

   β) Τη ροπή της αδράνειάς του και προς τον άξονα xx'.

   γ) Τη γωνιώδη επιτάχυνση ω' που παίρνει με την επίδραση του ζεύγους $\mathcal{M}$.

   δ) Τη γωνιακή του ταχύτητα 10 δευτερόλεπτα μετά το ξεκίνημα.

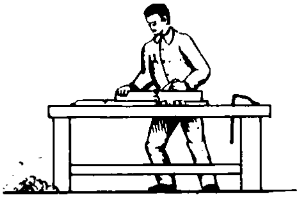
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΕΡΓΟ

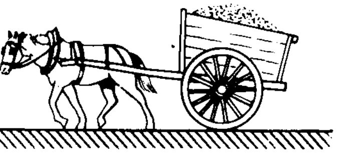
15.1 Μηχανικό έργο.

Ας παρατηρήσομε ένα χειρώνακτα. Όποιος και να είναι: εργάτης, εφαρμοστής, ξυλουργός, οικοδόμος ... είναι ένας άνθρωπος που καταβάλλει μια προσπάθεια που παρατείνεται κατά μήκος κάποιας διαδρομής (σχ. 15.1α).

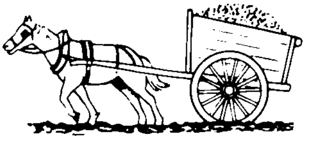
Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειάς του είναι η παραγωγή έργου. Στο κεφάλαιο αυτό θα καθορισθεί η έννοια του έργου και θα προσδιορισθεί ο τρόπος μετρήσεώς του.



Σχ. 15.1α.



Σχ. 15.1β.



Σχ. 15.1γ.

α) Μια δύναμη εκτελεί έργο όταν μετακινείται το σημείο εφαρμογής της.

Ένα άλογο σύρει κάποιο αμάξι (σχ. 15.1β).

1. Αν το αμάξι ***προχωρεί*** παραδεχόμαστε ότι το άλογο ***παράγει έργο*** ή καλύτερα ότι η δύναμη του αλόγου αποδίδει έργο.

Το έργο που παράγεται κατ' αυτόν τον τρόπο λέγεται ***μηχανικό έργο.***

2. Αν το αμάξι δεν μετακινείται, το άλογο άδικα κουράζεται γιατί παρά τις προσπάθειές του ***δεν*** παράγει κανένα έργο. Για να παραχθεί έργο πρέπει απαραίτητα να γίνει μετάθεση της δυνάμεως (σχ. 21.1γ).
τα να γίνει μετάθεση της δυνάμεως (σχ. 15.1γ).

β) Το μηχανικό έργο είναι μέγεθος που μετριέται.

Παρατηρήστε το σχήμα 15.1δ.

— Ο Β έχει εργασθεί δυο φορές περισσότερο από τον Α γιατί ο Α πρέπει να ξανασηκώσει ένα φορτίο που ζυγίζει 20kp ή 200N για να επιτύχει το ίδιο αποτέλεσμα με τον Β. Η δύναμη άρα F_2 των 400N απέδωσε έργο διπλάσιο από το έργο της F_1 των 200N για την ίδια μετατόπιση.

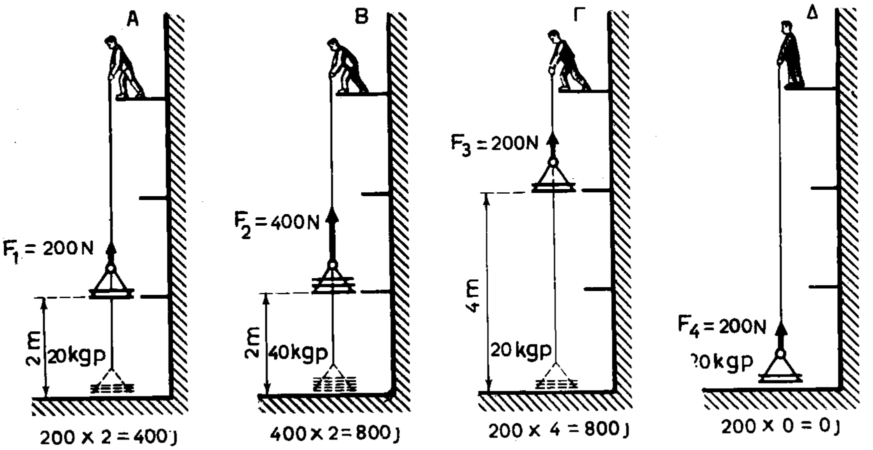
Το έργο μιας δυνάμεως είναι ανάλογο με το μέγεθος της δυνάμεως αυτής.

— Ο Γ έχει εργασθεί διπλάσια από τον Α, γιατί ο Α πρέπει να συνεχίσει τη δουλειά του, για να ανεβάσει το φορτίο κατά δύο μέτρα πιο πάνω, ώστε να συμπληρώσει το έργο που έκανε ο Γ.

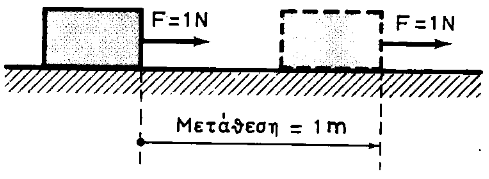
Η δύναμη F_3 των 200N έκανε έργο διπλάσιο της δυνάμεως F_1 του ίδιου μεγέθους με αυτήν. ***Το έργο μιας δυνάμεως είναι ανάλογο της μεταθέσεως του σημείου εφαρμογής κατά τη διεύθυνση της δυνάμεως.***

— Ο Δ κράτησε 15 λεπτά στον αέρα φορτίο με τούβλα που ζύγιζαν 200N. Σε όλο αυτό το διάστημα κατέβαλε μυική δύναμη 200N. Δεν απέδωσε όμως κανένα έργο αν και κουράστηκε πολύ. Μπορούσε να δέσει το σχοινί με το βάρος σ' ένα δοκάρι· έτσι θα πετύχαινε το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς αυτός να κουρασθεί.

Η δύναμη F_4 της οποίας το σημείο εφαρμογής έμεινε ακίνητο, δεν απέδωσε έργο.



Σχ. 15.1δ.



Σχ. 15.1ε.

γ) Η μονάδα του έργου στο Διεθνές σύστημα είναι το joule.

Το joule (σύμβολο J) είναι το έργο που παράγεται από δύναμη ενός N, της οποίας το σημείο εφαρμογής μετατοπίζεται κατά ένα μέτρο στην κατεύθυνση της δυνάμεως (σχ. 15.1ε). Σύρετε ένα οποιοδήποτε σώμα με δύναμη 1N και το μεταθέτετε κατά 1m στην κατεύθυνση που το τραβάτε. Το έργο της δυνάμεως είναι 1 J.

Παράδειγμα.

Σώμα έχει μάζα 1kg. Η Γη το έλκει με δύναμη 9,81N. Πέφτει κατά 1m. Το βάρος του παράγει έργο: 9,81 × 1 = 9,81J.

Παρατήρηση.

Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν και μιαν άλλη μονάδα, το ***χιλιογραμμόμετρο,*** mkp. Είναι το έργο που αποδίδει ***δύναμη 1 kp όταν μετατίθεται κατά 1 m στην κατεύθυνση της δυνάμεως.***

15.2 Έργο δυνάμεως σταθερής κατά διεύθυνση, φορά και ένταση.

Πολλές είναι οι περιπτώσεις που πρέπει να διακρίνομε ανάλογα με το αν το σημείο εφαρμογής κινήθηκε κατά τη διεύθυνση της δυνάμεως ή κατ' άλλη διεύθυνση ή ακολούθησε μια τυχούσα διαδρομή.

α) Περίπτωση 1η.

Το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως μετατίθεται πάνω στο φορέα της δυνάμεως και προς την κατεύθυνση της δυνάμεως.

Αυτή είναι π.χ. η περίπτωση της δυνάμεως F_1 στο σχήμα 15.1δ. Δύναμη 200N της οποίας το σημείο εφαρμογής μετατίθεται κατά 2 m. Πόσο έργο έχει παραχθεί από τη δύναμη αυτή;

Αρκεί η απλή μέθοδος των τριών για τον υπολογισμό.

Δύναμη	1 N	μετατιθέμενη	κατά	1 m	παράγει έργο	=	1 J
»	200 N	»	»	1 m	200 × 1	=	200 J
»	200 N	»	»	2 m	200 × 2	=	400 J

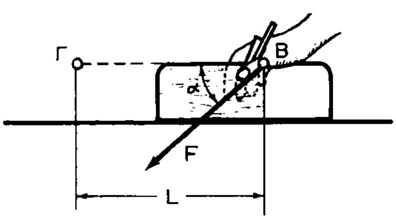
Γενικεύοντας: Αν F η ένταση της δυνάμεως σε N και L η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της σε m τότε, το παραγόμενο σε J έργο είναι:

$$\boxed{W = F \cdot L} \tag{1}$$

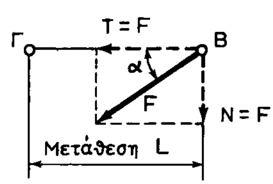
β) Περίπτωση 2η.

Το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως μετατίθεται πάνω σε ευθεία που σχηματίζει γωνία α με τη διεύθυνση της δυνάμεως.

Είναι η περίπτωση π.χ. του ξυλουργού που σπρώχνει το ροκάνι με δύναμη F, της



Σχ. 15.2α.



Σχ. 15.2β.

οποίας το σημείο εφαρμογής μετατίθεται στην ευθεία ΒΓ, όταν η δύναμη σχηματίζει σταθερή γωνία α με την κατεύθυνση της κινήσεως (σχ. 15.2α και 15.2β).

Εξ ορισμού το παραγόμενο έργο ισούται με:

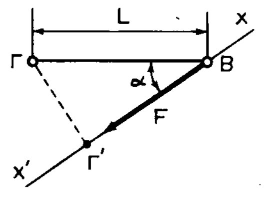
$$\boxed{W = F \cdot L \cdot συνα} \tag{2}$$

Σημείωση 1.

Ο τύπος (1) δεν ειναι παρά ειδική περίπτωση του τύπου (2). Πραγματικά, όταν η μετατόπιση της δυνάμεως συμπίπτει με την κατεύθυνση της δυνάμεως, τότε $\alpha = 0$ και $\sigma \upsilon \nu \alpha = 1$, οπότε $W = F \cdot L$.

Σημείωση 2.

Ας προβάλομε τη διαδρομή ΒΓ του σημείου εφαρμογής της δυνάμεως στην ευθεία xx' της δυνάμεως F (σχ. 15.2γ). Έστω ΒΓ' η προβολή.



Σχ. 15.2γ.

Γνωρίζομε ότι: $B\Gamma' = B\Gamma \; \sigma \upsilon \nu \alpha$

Ο τύπος (2) μπορει άρα να γραφει:

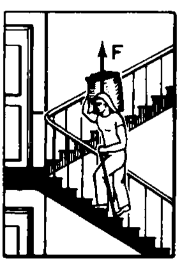
Έργο = Δύναμη × προβολή της μετατοπίσεως πάνω στο φορέα της δυνάμεως

Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική. Θα μας επιτρέψει να διερευνήσομε την περίπτωση που η διαδρομή του σημείου εφαρμογής είναι τυχαία.

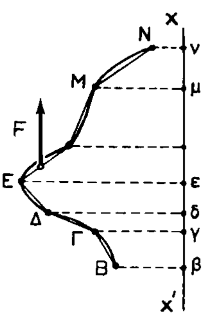
γ) Περίπτωση 3η.

Έργο δυνάμεως σταθερής κατά διεύθυνση, φορά και ένταση, της οποίας το σημείο εφαρμογής ακολουθεί τυχούσα διαδρομή.

Είναι η περίπτωση του παραδότη εμπορεύματος, που ανεβαίνει τη σκάλα σπιτιού φορτωμένος με το εμπόρευμά του (σχ. 15.2δ). Το εμπόρευμα στηρίζεται στους ώμους του παραδότη και αντιδρά αυτός με μια δύναμη ίση και αντίθετη προς το βάρος Β του εμπορεύματος.



Σχ. 15.2δ.



Σχ. 15.2ε.

Η αντίδραση αυτή διευθύνεται από κάτω προς τα επάνω και είναι ιση π.χ. προς 500N (που αντιστοιχει σε φορτίο 50kp).

Έστω Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ... Μ, Ν η γραμμή που διαγράφεται από το σημειο εφαρμογής της δυνάμεως F στο σχήμα 21.2ε (υποθέτομε ότι η γραμμή είναι επίπεδη, αλλά και σε περίπτωση που η γραμμή θα ήταν στρεβλή είναι το ίδιο).

Τη γραμμή λοιπόν αυτή μπορούμε να τη μοιράσομε σε μιαν ακολουθία μικρών ευθυγράμμων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ... που όλα προβάλλονται σαν τμήματα βγ, γδ, δε, ... κατά τη διεύθυνση της δυνάμεως x'x (βn = 3m π.χ.) (σχ. 21.2ε).

Έργο	της	F από το Β στο Γ	= F . βγ
»	»	F από το Γ στο Δ	= F . γδ
»	»	F από το Δ στο Ε	= F . δε
Έργο	της	F από το Μ στο Ν	= F . μν
ή	»	F από το Β στο Ν	= F . βγ + F . γδ + F . δε + ...
			= F (βγ + γδ + δε + ...)
			= 500 × 3 = 1500 J

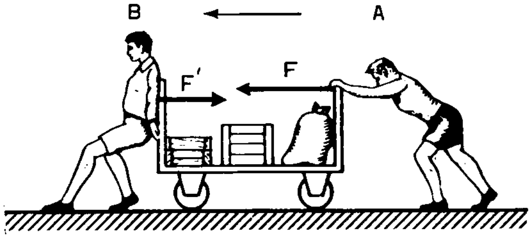
Το έργο σταθερής δυνάμεως κατά διεύθυνση, φορά και ένταση, ισούται προς το γινόμενο της δυνάμεως επί την προβολή της τροχιάς του σημείου εφαρμογής της στη διεύθυνση της δυνάμεως.

15.3 Έργο κινητήριο και έργο καταναλισκόμενο.

α) Οι δυνάμεις που προκαλούν την κίνηση ή τη βοηθούν παράγουν έργο κινητήριο. Εκείνες που ανθίστανται παράγουν έργο καταναλισκόμενο ή αντιστάσεως.

Στο σχήμα 15.3α η δύναμη του Α, που προκαλεί την κίνηση, καλείται ***κινητήρια δύναμη*** και το έργο που παράγει ***κινητήριο.***

Η δύναμη F′ του Β, που ανθίσταται στην κίνηση, καλείται ***δύναμη αντιστάσεως*** και το έργο που παράγει ***έργο καταναλισκόμενο*** ή ***αντιστάσεως.***



Σχ. 15.3α.

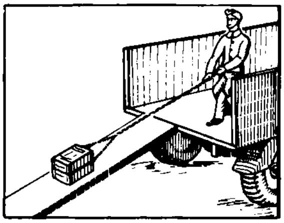
Το φορτίο (σχ. 15.3β και 15.3γ) που σύρεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου δέχεται:

Μια δύναμη από απόσταση: τη δύναμη F και την αντίδραση R πάντα κεκλιμένη ενάντια στην κίνηση (λόγω της τριβής).

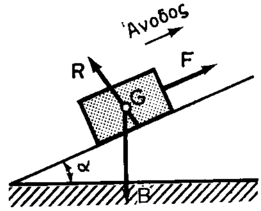
Η δύναμη F που ενεργεί κατά την κατεύθυνση της κινήσεως παράγει έργο κινητήριο. Η δύναμη R που αντιτίθενται στην κίνηση παράγει έργο καταναλισκόμενο.

Αν το φορτίο κατέρχεται (σχ. 15.3δ) τότε το βάρος Β του φορτίου είναι κινητήρια δύναμη, γιατί η προβολή του βάρους Β στο φορέα της κινήσεως συμπίπτει με την κατεύθυνση της κινήσεως.

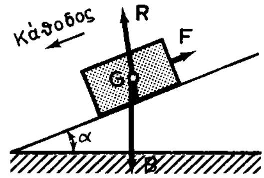
Οι δυνάμεις F και R τότε είναι αντιστάσεις.



Σχ. 15.3β.



Σχ. 15.3γ.



Σχ. 15.3δ.

β) Στους υπολογισμούς ο αριθμός που εκφράζει το κινητήριο έργο έχει σημειο θετικό, ενώ αυτός που εκφράζει το καταναλισκόμενο έργο έχει σημείο αρνητικό.

Ο γενικός τύπος υπολογισμού του έργου είναι: W = F . L . συνα.

Το συνα ανάλογα με την τιμή που παίρνει καθορίζει αν το έργο είναι κινητήριο ή καταναλισκόμενο.

Αν α<90° η δύναμη είναι κινητήρια, άρα και το έργο θετικό. Αν α>90° τότε και το γινόμενο F . L αρνητικό.

Ανακεφαλαίωση.

1. Από μηχανική άποψη μια δύναμη αποδίδει έργο, όταν μετακινείται το σημείο εφαρμογής της.

2. Η μονάδα έργου στο Διεθνές σύστημα μονάδων είναι το joule και είναι το έργο που παράγεται από δύναμη ενός Ν της οποίας το σημείο εφαρμογής μετατίθεται κατά τη διεύθυνση της δυνάμεως κατά 1m.

3. Έργο που παράγεται από δύναμη σταθερής εντάσεως διευθύνσεως και φοράς.

1η Περίπτωση. Το σημείο εφαρμογής μετατοπίζεται κατά ένα μήκος L στην ευθεία ενέργειας της δυνάμεως και προς την κατεύθυνση της δυνάμεως.

$$\boxed{W = F \, . \, L}$$

2η Περίπτωση. Το σημείο εφαρμογής μετατοπίζεται κατά ένα μήκος L σε ευθεία που σχηματίζει γωνία α με την κατεύθυνση της δυνάμεως.

$$\boxed{W = F \, . \, L\text{συν}\alpha}$$

3η Περίπτωση. Το σημείο εφαρμογής μετατοπίζεται σε τυχούσα ευθεία.

W = F × προβολή του σημείου εφαρμογής στην διεύθυνση της δυνάμεως.

4. Κάθε δύναμη που προκαλεί κίνηση ή βοηθά στην κίνηση παράγει έργο κινητήριο. Κάθε δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση καταναλίσκει έργο αντιστάσεως. Στους υπολογισμούς ο αριθμός που μετρά το κινητήριο έργο σημειώνεται με το πρόσημο +(συν), ενώ το καταναλισκόμενο έργο έχει το πρόσημο — (πλην).

15.4 Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε σε joules το έργο που παράγεται από το βάρος ενός ταύρου μάζας 50kg που πέφτει κατακόρυφα από ύψος 3,8m.
2. Το σημείο εφαρμογής μιας σταθερής δυνάμεως F = 400N μετατίθεται κατά 5m σε μία ευθεία. Ποιο το παραγόμενο έργο όταν η διεύθυνση της δυνάμεως σχηματίζει με την ευθεία γωνία:

α = 0°	α = 30°	α = 45°	α = 60°
α = 90°	α = 120°	α = 135°	α = 180°

Χαράξτε ένα διάγραμμα στο οποίο για τετμημένη έχετε υπό κλίμακα τις γωνίες α και για τεταγμένη, υπό κλίμακα, το έργο. Παραστήστε τη μεταβολή του έργου σε συνάρτηση με τη γωνία.
3. Πεζός βαδίζει απόσταση 10km. Κάνει βήματα σταθερά των 0,75 και ανασηκώνει το πόδι του κάθε φορά κατά 20 mm. Υπολογίστε σε joules το μυικό έργο που καταναλώθηκε από τον πεζό γνωρίζοντας ότι το βάρος του είναι 75kp.
4. Δύναμη παράγει πάντα έργο όταν το σημείο εφαρμογής της μετατίθεται: Όταν κινητό σημείο διαγράφει περιφέρεια, μπορούμε να πούμε ότι η κεντρομόλος δύναμη που εφαρμόζεται σ' αυτό παράγει έργο; Και η φυγόκεντρος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ

ΕΡΓΟ ΖΕΥΓΟΥΣ

16.1 Το έργο στην περιστροφική κίνηση.

Για να στρέψομε το τύμπανο βαρούλκου (σχ. 16.1α) ενεργούμε στη λαβή του χειροστροφάλου. Την πιέζομε όταν είναι στην επάνω θέση και την τραβάμε όταν είναι στην κάτω. Ενστικτωδώς κατευθύνεται η δύναμή μας έτσι, ώστε να ενεργεί πάντα κατά τη φορά που μετατίθεται η λαβή. Η διεύθυνσή της αλλάζει σταθερά, παραμένει όμως πάντα εφαπτομενική στην περιφέρεια που διαγράφει η λαβή του στροφάλου, που συμπίπτει με το σημείο εφαρμογής της (σχ. 16.1α).

α) Έργο δυνάμεως σταθερής εντάσεως, της οποίας το σημείο εφαρμογής διαγράφει περιφέρεια, στην οποία το διάνυσμα της δυνάμεως παραμένει εφαπτόμενο σ' αυτήν.

Το έργο που παράγεται μετά από μια περιστροφή είναι:

$$W = F \, . \, 2\pi r$$

και μετά από n στροφές:

$$\boxed{W = F \, . \, 2\pi \, . \, r \, . \, n} \qquad (1)$$

όπου το 2πrn είναι το μήκος που διαγράφει το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως F, πάνω στην περιφέρεια, απ' όπου και η πρόταση:

Το έργο που παράγεται από μια δύναμη σταθερής εντάσεως η οποία παραμένει πάντα εφαπτομενική στην τροχιά που διαγράφει το σημείο εφαρμογής της, ισούται με το γινόμενο της δυνάμεως επί το διανυόμενο από το σημείο εφαρμογής της διάστημα.

Άσκηση.

Εργάτης ασκεί στη λαβή του στροφάλου βαρούλκου δύναμη 150N. Το μήκος του στροφάλου είναι 0,4m. Ποιο είναι το έργο που παράγει μετά από 15 στροφές;

$$F = 150N \qquad r = 0{,}4m \qquad n = 25$$

$$W = 150 \times 2\pi \times 0{,}4 \times 25 = 9420J$$

Ο τύπος (1) μπορεί να γραφεί:

$$W = (r \,.\, F) \,.\, 2\pi n$$

όπου το F.r είναι η ροπή της δυνάμεως ως προς τον άξονα περιστροφης $\mathcal{M}_o(F)$ και το 2πn ειναι η γωνία θ που σαρώνει το στρόφαλο, σε ακτίνια, κατά την περιστροφή του.

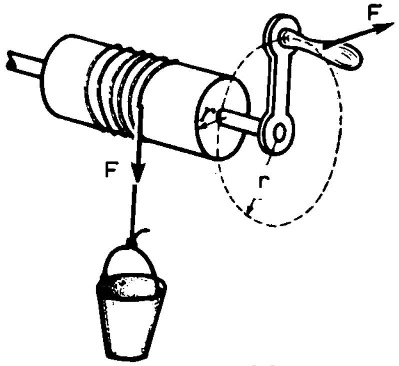
Άρα $\qquad W = \mathcal{M}_o(F) \,.\, \theta \qquad$ δηλαδή:

Το έργο μιας δυνάμεως εφαρμοσμένης σε ένα στερεό, που περιστρέφεται γύρω από άξονα, ισούται με το γινόμενο της ροπής της δυνάμεως ως προς τον άξονα περιστροφής επί τη γωνία σε ακτίνια που το σώμα διαγράφει.

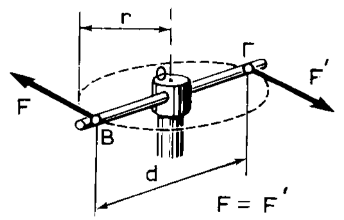
β) Έργο ζεύγους εφαρμοσμένου σε στερεό που περιστρέφεται γύρω από άξονα.

Έστω η απλή περίπτωση όπου οι δυνάμεις του ζεύγους βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα περιστροφής (σχ. 16.1β). Το έργο του ζεύγους W είναι το άθροισμα των έργων κάθε μιας από τις δύο δυνάμεις.

$$W = \text{έργο της } F + \text{έργο της } F'$$



Σχ. 16.1α.



Σχ. 16.1β.

Έστω τώρα ότι θ ακτίνια είναι η γωνία που το ζεύγος έχει στραφεί, τότε:

$$W = \mathcal{M}_o(F) \,.\, \theta + \mathcal{M}_o(F') \,.\, \theta$$

ή

$$\boxed{W = \mathcal{M} \,.\, \theta}$$

όπου M: η ροπή του ζεύγους M = F.d.

Παράδειγμα.

Το κινητήριο ζεύγος που κινεί το τύμπανο ενός ηλεκτροκινητήρα έχει ροπή 48 mN. Το τύμπανο στρέφεται με 1500 στρ/min. Ποιο είναι το έργο που παράγει το κινητήριο ζεύγος κάθε δευτερόλεπτο;

Λύση.

Ανά δευτερόλεπτο το τύμπανο εκτελεί:

1500/60 = 25 στροφές $\qquad$ ή $\qquad$ 25 × 2π = 157 ακτίνια

$$\theta = 157 \text{ rd}$$

Το παραγόμενο άρα έργο είναι:

$$W = 48 \times 157 = 7536J$$

Ανακεφαλαίωση.

1. Το έργο που παράγεται από μια δύναμη σταθερής εντάσεως, που παραμένει πάντα εφαπτομενική σε κυκλική τροχιά που διαγράφει το σημείο εφαρμογής της, έχει ως μέτρο το γινόμενο της εντάσεως της δυνάμεως επί το διανυόμενο μήκος από το σημείο εφαρμογής της.

$$\boxed{W = F \,.\, 2\pi r \,.\, n}$$

όπου: r είναι η ακτίνα της περιφέρειας και n είναι ο αριθμός περιστροφών.

2. Ο τύπος μπορεί ακόμη να γραφεί:

$$\boxed{W = \mathcal{M}_o(F) \,.\, \theta}$$

όπου: $\mathcal{M}_o$ είναι η ροπή της δυνάμεως F ως προς το κέντρο της περιφέρειας που διαγράφεται από το σημείο εφαρμογής και θ είναι η γωνία σε ακτίνια που διαγράφεται από το σημείο εφαρμογής.

3. Ζεύγος δυνάμεων με ροπή Μ που περιστρέφεται κατά θ ακτίνια παράγει έργο:

$$\boxed{W = \mathcal{M} \,.\, \theta}$$

16.2 Ασκήσεις.

1. Στη λαβή του χειροστροφάλου του τυμπάνου ενός βαρούλκου εργάτης εφαρμόζει σταθερή δύναμη 100N, που ο φορέας ενέργειάς της είναι πάντα εφαπτόμενος στην τροχιά της. Να υπολογισθεί το έργο που παράγεται από τον εργάτη στο τέλος των 50 στροφών γνωρίζοντας ότι η ακτίνα του στροφάλου είναι 0,35m.
2. Για να ανυψώσομε βάρος μάζας 56kg σε ύψος 12m με τη βοήθεια τυμπάνου πρέπει ο εργάτης να γυρίση το τύμπανο ώστε αυτό να κάνει 30 στροφές. Ποια δύναμη πρέπει να επιβάλει στη λαβή του χειροστροφάλου ο εργάτης γνωρίζοντας ότι η ακτίνα του χειροστροφάλου είναι 0,35m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

17.1 Για να χαρακτηρισθεί ένας κινητήρας δεν αρκεί να γνωρίζομε το έργο που μπορεί να παράγει.

Για να μεταφέρει ένα άτομο ένα τσουβάλι κάρβουνα μάζας 50 kg στον τέταρτο όροφο πολυκατοικίας, δηλαδή σε ύψος 15 μέτρα από το έδαφος, σηκώνει το φορτίο στους ώμους του και ανεβαίνει φορτωμένος τα σκαλοπάτια σε 100 έστω δευτερόλεπτα.

Το άτομο αυτό παράγει έργο:

$$500 \times 15 = 7500 \text{ J}$$

ή έργο 75J ανά δευτερόλεπτο.

Ένα παιδί μπορεί να μεταφέρει τα κάρβουνα, χωρίζοντάς τα σε φορτία των 10 κιλών, έστω σε 10 λεπτά. Και το παιδί παρήγαγε ***το ίδιο*** έργο αλλά σε ***600 δευτερόλεπτα*** ή παρήγαγε έργο 12,5 J σε ένα δευτερόλεπτο.

Αφού το ίδιο έργο μπορεί να παραχθεί από κινητήρες ***πολύ διαφορετικούς*** μεταξύ τους δεν μπορεί το έργο αυτό ***μόνο του*** να τους χαρακτηρίσει.

17.2 Αντίθετα χαρακτηρίζει τη μηχανή το έργο που παράγει ή δέχεται στην περίοδο μιας χρονικής μονάδας, όταν λειτουργεί με κανονικό ρυθμό.

Υπάρχουν διαφόρων ειδών μηχανές που ***παράγουν*** μηχανικό έργο, όπως π.χ. ατμομηχανές, υδραυλικοί στρόβιλοι (υδροτουρμπίνες), ατμοστρόβιλοι (ατμοτουρμπίνες), μηχανές εσωτερικής καύσεως (βενζινομηχανές, πετρελαιομηχανές), ηλεκτροκινητήρες κλπ. Όλες αυτές οι μηχανές χαρακτηρίζονται ***ως κινητήριες μηχανές*** ή απλώς ***κινητήρες.***

Υπάρχουν όμως και άλλες μηχανές που παραλαμβάνουν το μηχανικό έργο. Αυτές εργάζονται μόνον αν συνδεθούν, κατά κάποιο τρόπο, με μια κινητήρια μηχανή που θα τους δώσει έργο. Τέτοιες μηχανές είναι οι εργαλειομηχανές (τόρνος, πλάνη, φραιζομηχανή), οι αντλίες κλπ. Όλες αυτού του είδους οι μηχανές χαρακτηρίζονται ως ***εργομηχανές.***

Λέμε πως μια κινητήρια μηχανή ή μια εργομηχανή λειτουργεί ***με κανονικό ρυθμό*** (σε κατάσταση εμμονής), όταν το παραγόμενο από αυτήν ανά δευτερόλεπτο ή το παραλαμβανόμενο από αυτήν έργο είναι πάντοτε ***το ίδιο.***

Όσο πιο μεγαλύτερο είναι αυτό το έργο, τόσο πιο ***ισχυρή*** είναι η μηχανή.

Ορισμός. Η ισχύς μιας μηχανής έχει ως μέτρο το σταθερό έργο που παράγει ή λαμβάνει ανά δευτερόλεπτο, όταν εργάζεται με κανονικό ρυθμό.

Γνωρίζοντας την ισχύ μιας μηχανής έχεις την πιο σπουδαία πληροφορία του τι μπορεί να σου προσφέρει η μηχανή αυτή.

Έστω W το έργο που παράγεται ή παραλαμβάνεται σε t δευτερόλεπτα. Η ισχύς P της μηχανής εκφρασμένη σε joules ανά δευτερόλεπτο (J/s) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

17.3 Μονάδες ισχύος.

Η μονάδα ισχύος στο Διεθνές σύστημα (S.I.) είναι το ***watt (w).***

Εξ ορισμού:

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ Joule ανά δευτερόλεπτο (J/s)}$$

Το πολλαπλάσιό του, που πολύ χρησιμοποιείται είναι το ***kilowatt (kw).***

$$1\text{kw} = 1000\text{w} = 1000\text{J/s}$$

Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν εξίσου μιαν άλλη μονάδα τον ***ίππο*** (P.S.) ή (C.V.)

$$1\text{P.S.} = 75\text{mkp} = 736\text{J/s} = 736\text{w}$$
$$1\text{kw} = 1{,}36 \text{ P.S.}$$

α) Μονάδες έργου ως παράγωγες των μονάδων ισχύος.

1. Εξ ορισμού το ***χιλιοβαττώριο*** (kwh) είναι το έργο που παράγεται σε μιαν ώρα από μηχανή ισχύος 1kw.

$$1 \text{ kwh} = 1000 \times 3600 = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

Το έργο αυτό μπορεί να παραχθεί είτε λειτουργεί η μηχανή συνεχώς, είτε διακεκομμένα. Αυτό δεν μας ενδιαφέρει. Οι παραγωγοί π.χ. ηλεκτρικής ενέργειας εγκαθιστούν ***γνώμονες*** που μετρούν ***το έργο*** που καταναλώνουν οι πελάτες τους σε περίοδο ενός μήνα ή δυο μηνών κλπ.

Οι τεχνικοί χρησιμοποιούν ακόμη και τον ***ωριαίο ίππο*** (h.P.H).

Εξ ορισμού είναι το έργο που παράγει σε μια ώρα μηχανή ισχύος ενός ίππου.

$$(1 \text{ h.P.H.}) = 270.000 \text{ mkp} = 265 \times 10^4 \text{ J.}$$

β) Ισχύς μιας δυνάμεως της οποίας το σημείο εφαρμογής κινείται με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση πάνω στο φορέα της δυνάμεως.

Έστω ότι είναι F η ένταση της δυνάμεως, *l* το διάστημα που έχει διανύσει και P η ισχύς που ανέπτυξε.

Το έργο που παρήχθη σε t δευτερόλεπτα ισούται με: F . l άρα η ισχύς P:

$$P = \frac{F \times l}{t} = F \frac{l}{t} = F \times u$$

Με τις μονάδες του Διεθνούς συστήματος η σχέση γράφεται:

$$P = F \times u$$

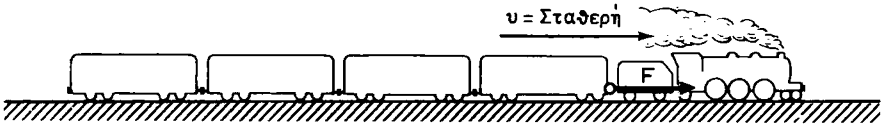
Άσκηση.

Ατμομηχανή εξασκεί στα βαγόνια που τραβά δύναμη 50.000N. Η ταχύτητα του συρμού είναι 72 km/h. Να υπολογισθεί η ισχύς στο σημείο της συνδέσεως (σχ. 23.3).

Η ταχύτητα 72 km/h ισουται με: $\frac{72.000}{3600} = 20\text{m/s}$

Η ισχύς στο σημείο της συνδέσεως του συρμού είναι:

$$P = 50.000 \times 20 = 1.000.000 \text{ w} = 1000 \text{ kw}$$



Σχ. 17.3.

17.4 Ισχύς ζεύγους στρεφόμενου με σταθερή ταχύτητα.

Έστω M η ροπή του ζεύγους σε mN που εφαρμόζεται σε στρεφόμενο σωμα με n στροφές στο λεπτό.

Το έργο ανά στροφή είναι M × 2π στο δε λεπτό M × 2πn και η ισχύς

$$P = \frac{M \times 2\pi n}{60}$$

Παράδειγμα.

Υπολογίστε την ισχύ ηλεκτροκινητήρα που στρέφεται με 750 στρ/min γνωρίζοντας ότι το τύμπανο κινείται από ζεύγος ροπής M = 48mN.

Η ισχύς σε watt δίδεται από τον τύπο:

$$P = \frac{M \times 2\pi n}{60}$$

M = 48 mN   n = 750   ἄρα

$$P = \frac{48 \times 2\pi \times 750}{60} = 3788 \text{ W}$$

Σημείωση.

Αν ο τύπος (5) λυθεί ως προς M θα έχομε:

$$M = 7025 \cdot \frac{P}{n}$$

όπου το P σε PS και το n σε στρ/min.

Ανακεφαλαίωση.

1. Η ισχύς μιας μηχανής έχει ως μέτρο το σταθερό έργο που παράγει ή λαμβάνει η μηχανή κάθε δευτερόλεπτο όταν λειτουργεί με κανονικό ρυθμό.

2. Οι μονάδες για την ισχύ είναι:

— Το watt (w): 1 watt = 1 joule το δευτερόλεπτο

— Το kilowatt (kw): 1000 watt = 1000 joule το δευτερόλεπτο

Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν ακόμη τον ίππο (P.S.):

$$\boxed{1 \text{ P.S.} = 736 \text{ watt}} \quad \text{και} \quad \boxed{1 \text{ kw} = 1{,}36 \text{ P.S.}}$$

3. Η έκφραση της ισχύος σε διάφορες ειδικές περιπτώσεις:

α) Ισχύς μιας δυνάμεως σταθερής της οποίας το σημείο εφαρμογής μετατίθεται με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία.

$$\boxed{P = F \cdot u}$$

β) Ισχύς ενός ζεύγους ροπής M που στρέφεται με σταθερή ταχύτητα n στροφών στο λεπτό (στρ/min).

$$\boxed{P = \frac{M \times 2\pi n}{60}}$$

17.5 Ασκήσεις.

1. Αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα 72 km/h. Ο κινητήρας του αναπτύσσει ισχύ 24 HP. Ποια είναι η ένταση της σταθεράς δυνάμεως η οποία μπορεί να αντικαταστήσει την ενέργεια του κινητήρα αποδίδοντας την ίδια ισχύ;
2. Σε ένα ηλεκτροκινητήρα ο κατασκευαστής έχει σημειώσει: Ισχύς 3 kw, ταχύτητα περιστροφής 1420 στρ/min. Υπολογίστε τη ροπή του ζεύγους που διεγείρει το επαγωγικό τύμπανο του ηλεκτροκινητήρα.
3. Το τελεφερίκ του Mont Parnes σηκώνει σε 6 λεπτά σε ύψος 350m μια καμπίνα που περιέχει 40 άτομα. Η ολική μάζα της καμπίνας είναι τότε 4850kg. Υπολογίστε: α) Το έργο που πρέπει να καταναλωθεί για την ανύψωση. β) Την αντίστοιχη ισχύ.
(Το καλώδιο αναρτήσεως της καμπίνας στηρίζεται στα δύο του άκρα και κάνει τόξο του οποίου η χορδή είναι 1756m, η δε οριζόντιά του προβολή είναι 1328m).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΟΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

18.1 Η ενέργεια εκφράζει την ικανότητα παραγωγής έργου.

Όταν ένα σώμα βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος τότε το σώμα αυτό ***μπορεί*** πέφτοντας στη Γη να παράγει ή να αποδώσει έργο.

Στη θέση λοιπόν που βρίσκεται, στο ύψος h από το έδαφος διατηρεί την ικανότητα ή μάλλον απέκτησε την ικανότητα να αποδώσει έργο.

Λέμε λοιπόν ***ότι το σώμα στη θέση αυτή έχει ενέργεια.***

Την ικανότητα αυτή τη ***χάνει*** το σώμα όταν βρεθεί στο έδαφος. Ώστε η ενέργεια την οποία έχει το σώμα όταν βρίσκεται στο ύψος h οφείλεται στη ***θέση*** που έχει το σώμα σχετικά ως προς το έδαφος.

Ελατήριο που έχει ***παραμορφωθεί*** (κουρδισθεί) εγκλείει μέσα του κάποια ενέργεια την οποία μετατρέπει σιγά-σιγά σε έργο προκειμένου να κινήσει το μηχανισμό ενός ρολογιού.

Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι η ενέργεια που έχει αποκτήσει το ελατήριο προέρχεται από την ***ελαστική παραμόρφωσή του.***

Το νερό χειμάρρου ***μπορεί*** να κινήσει μύλο. Κινούμενο βλήμα όπλου ***μπορεί*** να τρυπήσει ορισμένου πάχους τοίχωμα αν προσκρούσει σ' αυτό κ.ο.κ.

Η ενέργεια του ελατηρίου και του σώματος που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος καλείται ***δυναμική ενέργεια.***

Η ενέργεια του χειμάρρου, του βλήματος κλπ. καλείται ***κινητική ενέργεια.***

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η μηχανική ενέργεια παρουσιάζεται σε δυο μορφές, ***τη δυναμική*** και την ***κινητική.***

Η δυναμική ενέργεια είναι ***ενέργεια-απόθεμα*** που διαθέτει το σώμα είτε λόγω θέσεως, είτε λόγω παραμορφώσεως, είτε λόγω φυσικής καταστάσεως (αέριο υπό πίεση).

Αξιολογείται δε αυτή η ενέργεια με το ισοδύναμο έργο στο οποίο μπορεί να μετατρέπει, άμα καταναλωθεί εξ ολοκλήρου.

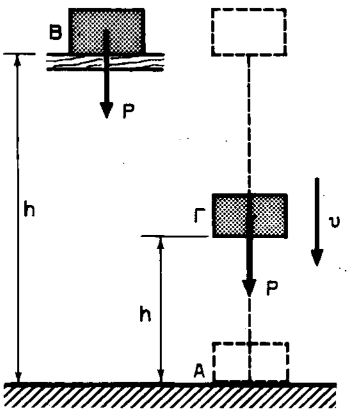
Η κινητική ενέργεια σώματος σε δοσμένη στιγμή μετριέται από το έργο που μπορεί να αποδόσει χάνοντας τελείως την ταχύτητά του.

Τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια μετριούνται με τις ίδιες μονάδες που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του έργου.

18.2 Υπολογισμός της δυναμικής ενέργειας.

Σώμα βάρους Β που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος (σχ. 18.2) έχει δυναμική ενέργεια ίση προς:

$$E_{δυν} = B \,.\, h \text{ joules}$$



Σχ. 18.2.

Πραγματικά για να μεταφερθεί το βάρος Bkp στο ύψος h καταβλήθηκε ισόποσο έργο

$$B \,.\, h$$

το οποίο εναποθηκεύθηκε στο σώμα, υπό μορφή δυναμικής ενέργειας.

18.3 Η κινητική ενέργεια υλικού σημείου μάζας m και ταχύτητας υ ισούται προς 1/2 mυ².

α) Ας υπολογίσουμε το μηχανικό έργο που εναποθηκεύεται σε ένα υλικό σημείο που ξεκινά από την ηρεμία μέχρις ότου αποκτήσει την ταχύτητα υ (σχ. 18.3).

Έστω F η δύναμη που ενεργεί επάνω στο σημείο σε όλη τη διαδρομή.

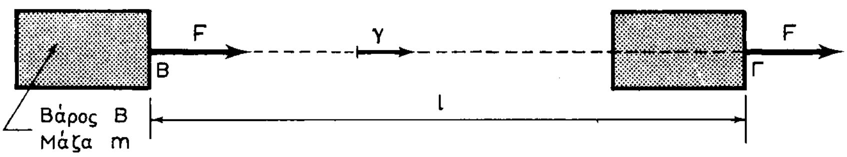
Το έργο που εναποθηκεύεται στο σώμα είναι,

$$W = F \,.\, l$$

Μπορούμε όμως να το υπολογίσομε και διαφορετικά. Το κινητό αποκτά μιαν επιτάχυνση γ τέτοιαν ώστε F = mγ και αυτό σε όλο το διάστημα που εφαρμόζεται η δύναμη.

Στο τέλος της διαδρομής η ταχύτητα υ = γt και το διάστημα που διέτρεξε ισούται με:

$$l = \frac{1}{2}\gamma t^2$$



Σχ. 18.3.

$$W = F \cdot l = m\gamma \cdot \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} m (\gamma t)^2 = \frac{1}{2} m u^2$$

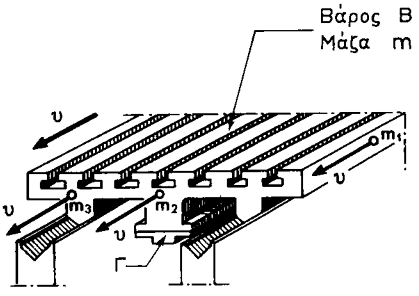
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το ίδιο σημείο μάζας m, έχοντας την ταχύτητα υ, θα αποδώσει, σταματώντας, έργο ίσο με $1/2\ mu^2$.

Άρα ένα σημείο μάζας m, που απόκτησε ταχύτητα υ, διαθέτει κινητική ενέργεια ίση προς:

$$W_{κιν} = \frac{1}{2} m u^2$$

18.4 Κινητική ενέργεια στερεού σε μεταφορική κίνηση.

Ό,τι και να είναι το σώμα στερεό, υγρό ή αέριο δεν είναι τελικά παρά το άθροισμα υλικών σημείων. Συνεπώς και ***η κινητική του ενέργεια είναι άθροισμα των κινητικών ενεργειών κάθε του σημείου.*** Έστω το τραπέζι μιας πλάνης (σχ. 18.4). Όλα της τα σημεία σε μια στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα υ. Σημειώνοντας με m_1,



Σχ. 18.4.

m_2, m_3, τις μάζες αυτων των διαφόρων σημείων και με $W_{κιν}$ την κινητική ενέργεια του τραπεζιου έχομε:

$$W_{κιν} = \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2 + \frac{1}{2} m_3 u^2 + \ldots$$

$$W_{κιν} = \frac{1}{2} u^2 (m_1 + m_2 + \ldots)$$

$$W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} M\upsilon^2$$

Άσκηση.

Το τραπέζι της πλάνης έχει μάζα 400 kg. Η ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη στιγμή είναι 2,5 m/s. Ποια είναι η κινητική ενέργεια του τραπεζιού εκείνη τη στιγμή;

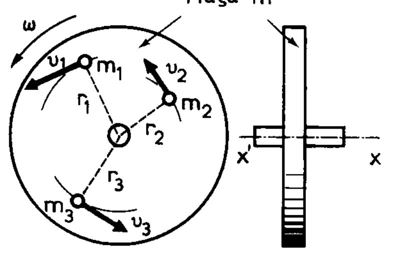
$$W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} 400 \times 2{,}5^2$$

$$= 1350 \text{ J}$$

18.5 Κινητική ενέργεια στερεού σε περιστροφική κίνηση.

Έστω σφόνδυλος μηχανής που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα xx' (σχ. 18.5). Όλα τα υλικά του σημεία m_1, m_2, m_3, ... έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω.

Το σημείο π.χ. μάζας m_1, που βρίσκεται σε απόσταση r_1, από το γεωμετρικό άξονα περιστροφής έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon_1 = \omega r_1$ και συνεπώς η κινητική ενέργεια σημείου θα ισούται με $1/2 m_1\upsilon_1^2 = 1/2 m_1\omega^2 r_1^2$.



Σχ. 18.5.

Αν εφαρμόσομε για όλα τα σημεία τον παραπάνω τύπο και αθροίσομε τις ενέργειες όλων των σημείων, τότε η ολική ενέργεια του σφονδύλου θα δίνεται από τη σχέση:

$$W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2\omega^2 r_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...)$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 I$$

$$W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Πρόβλημα.

Σφόνδυλος έχει το σχήμα δίσκου ακτίνας R = 0,2 m. Η μάζα του είναι 38 kg και στρέφεται με 600 στρ/min. Ποία είναι η κινητική του ενέργεια;

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} 38 \times 0{,}2^2 = 0{,}76 \text{ kgm}^2$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{3{,}14 \times 600}{30} = 62{,}8 \text{ rd/s}$$

$$\omega^2 = 62{,}8^2 = 3944$$

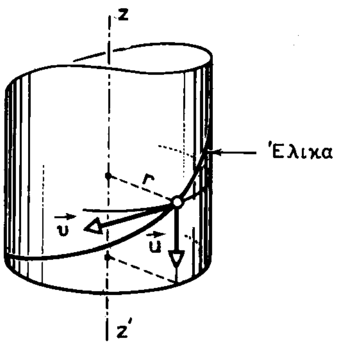
$$W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} 0{,}76 \times 3944 = 1500 \text{ J}$$

18.6 Κινητική ενέργεια στερεού που εκτελεί ελικοειδή κίνηση.

Γνωρίζομε ότι η ελικοειδής κίνηση σημείου Μ προκύπτει από τη σύνθεση δύο κινήσεων.

— Μιας περιστροφικής κινήσεως γύρω από το γεωμετρικό άξονα ZZ′ με περιφερειακή ταχύτητα υ.

— Μιας γραμμικής ομαλής κινήσεως με ταχύτητα u παράλληλη προς τον άξονα ZZ′ και της οποίας η κατεύθυνση είναι κάθετη προς την ταχύτητα υ (σχ. 18.6α).



Σχ. 18.6α.

Η συνισταμένη ταχύτητα στο σημείο Μ δίνεται από τη σχέση:

$$V = \sqrt{\omega^2 r^2 + u^2}$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια ενός τέτοιου σημείου μάζας m γράφεται:

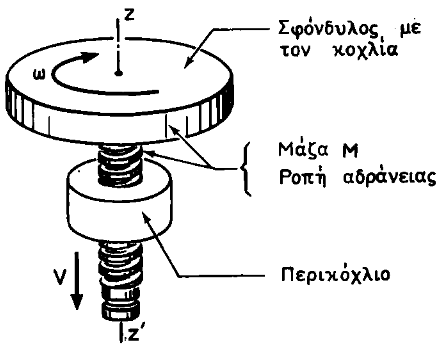
$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} m (\omega^2 r^2 + u^2)$$

Αν εφαρμόσομε το αποτέλεσμα αυτό στο σφόνδυλο μιας πρέσσας (σχ. 18.6β) όπου όλα τα σημεία του έχουν:

1. Την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω.
2. Την ίδια ταχύτητα μεταφοράς υ, τότε η συνολική κινητική ενέργεια του σφονδύλου της πρέσσας γράφεται:

$$W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon^2$$

Η συνολική κινητική ενέργεια στερεού σώματος που διαγράφει ελικοειδή κίνηση είναι ίση με την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής επαυξημένη με την κινητική ενέργεια λόγω της μεταφορικής κινήσεως.



Σχ. 18.6β.

18.7 Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Σε πολλές περιπτώσεις, ενέργεια της μιας μορφής μετατρέπεται σε ενέργεια της άλλης μορφής. Έτσι στην ελεύθερη πτώση ενός σώματος η δυναμική του ενέργεια ***συνεχώς*** ελαττώνεται, ενώ αντίστοιχα αυξάνει η κινητική του ενέργεια, επειδή αυξάνει η ταχύτητά του.

Θα συγκρίνομε την δυναμική ενέργεια που είχε το σώμα πριν από την πτώση του, όταν δηλαδή βρισκόταν στο ύψος h.

$$E_{\delta\upsilon\nu} = B \times h$$

Αν το αφήσομε να πέσει, όταν φθάσει στο $h = 0$ η δυναμική του ενέργεια θα έχει γίνει μηδέν. Ταυτόχρονα όμως θα έχει αποκτήσει ταχύτητα υ η οποία υπολογίζεται από τους τύπους της ελεύθερης πτώσεως των σωμάτων.

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \upsilon = gt \qquad \text{άρα} \qquad \upsilon = \sqrt{2gh}$$

Επομένως η κινητική του ενέργεια στο ύψος h=υ θα είναι:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} m2gh = mgh = B \times h$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η κινητική ενέργεια του σώματος στο ύψος h=0 είναι ακριβώς ίση προς τη δυναμική ενέργεια που είχε στο ύψος h.

Στην ελεύθερη πτώση των σωμάτων βλέπομε ότι η μηχανική ενέργεια των σωμάτων παραμένει σταθερή.

Το πόρισμα αυτό ισχύει για όλα τα φαινόμενα της Μηχανικής, όπου έχομε ***μεταβολή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική και αντίστροφα και φέρει το όνομα: Αρχή της διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας.***

Παρατήρηση.

Η αρχή της διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας για κινήσεις ισχύει εκεί μόνο που δεν παρουσιάζονται κρούσεις ή τριβές.

Ανακεφαλαίωση.

1. Η ενέργεια εκφράζει την ικανότητα παραγωγής έργου.

2. Η μηχανική ενέργεια εκδηλώνεται υπό δυό μορφές:

— Δυναμική ενέργεια ($W_{δυν}$).

— Κινητική ενέργεια ($W_{κιν}$).

Η δυναμική ενέργεια είναι ενέργεια σε απόθεμα που κατέχει ένα σώμα, είτε λόγω θέσεως, είτε λόγω παραμορφώσεως, είτε λόγω φυσικής καταστάσεως.

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος σε μια συγκεκριμένη στιγμή μετριέται με το έργο που μπορεί το σώμα να αποδώσει χάνοντας την ταχύτητά του.

Η ολική μηχανική ενέργεια ($W_{ολ}$) σε μια συγκεκριμένη στιγμή, είναι το άθροισμα των ενεργειών, δυναμικής και κινητικής, αυτής της στιγμής.

3. Η κινητική ενέργεια $W_{κιν}$ ενός σώματος με μάζα m που εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα υ δίνεται απ' τον τύπο:

$$\boxed{W_{κιν} = \frac{1}{2} Mu^2}$$

Η κινητική ενέργεια σώματος με περιστροφική κίνηση δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{W_{κιν} = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

όπου το I είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής και το ω είναι η γωνιακή ταχύτητα.

4. Η κινητική ενέργεια στερεού που εκτελεί ελικοειδή κίνηση αποτελείται από την κινητική ενέργεια του σώματος λόγω περιστροφής και την κινητική ενέργεια του ίδιου σώματος λόγω μεταφοράς.

$$W_{κιν} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} Mu^2$$

18.8 Ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί η τιμή της κινητικής ενέργειας που διαθέτει η μάζα ενός σφυριού μάζας 10kg τη στιγμή που ο σιδηρουργός του δίνει ταχύτητα 6 m/s.
2. Σφόνδυλος ατμομηχανής του οποίου τη μάζα υποθέτομε καταμερισμένη, στο άκρο της περιφέρειας, έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:
   Μάζα: 3000kg, Μέση ακτίνα: 1,80m
   Να υπολογισθούν:
   α) Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής.
   β) Η κινητική του ενέργεια όταν λειτουργεί με 100 στρ/min.
3. Ρίχνομε κατακόρυφα μια σφαίρα μάζας m με αρχική ταχύτητα u_o. Έστω h το ύψος που φθάνει στο τέλος της διαδρομής. Εφαρμόστε το θεώρημα της διατηρήσεως της ολικής μηχανικής ενέργειας στην αρχή και το τέλος της διαδρομής.
   Εκφράστε το ύψος h σε συνάρτηση με τη u_o και το g.
4. Τροχός μύλου εκτελεί 10 στροφές το λεπτό, η διάμετρός του είναι 1m και η ισχύς του 2HP. Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στην περιφέρειά του;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ

ΒΑΘΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΕΩΣ

Ηλεκτροκινητήρας κινεί, μέσω μηχανισμού μεταδόσεως, το τύμπανο βαρούλκου. Η ισχύς που παραλαμβάνει από το δίκτυο είναι 8HP. Το βαρούλκο σηκώνει βάρος 3000kp με ταχύτητα 0,15 m/s. Η ισχύς που χρειάζεται για την ανύψωση αυτή του βάρους είναι:

$$\frac{B\,.\,u}{75}\ \mathrm{HP}$$

δηλαδή
$$P = \frac{3000 \times 0{,}15}{75} = 6\ \mathrm{HP}$$

Βλέπει κανείς ότι δεν εκμεταλλεύεται ολόκληρη τη διαθέσιμη ισχύ για την ανύψωση. Δυο ίπποι καταναλώνονται για την υπερνίκηση των αντιστάσεων τριβής. ***Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται σε κάθε περίπτωση μετατροπής και μεταδόσεως ενέργειας.***

Γι' αυτό σε κάθε μηχανή διακρίνομε:

α) Την ωφέλιμη ισχύ P_ω, αυτή δηλαδή που μετατρέπεται σε ωφέλιμο έργο, και

β) Τη διαθέσιμη ισχύ P_κ.

Η σχέση μεταξύ της ωφέλιμης ισχύος P_ω και της διαθέσιμης P_Δ μας δίνει το μηχανικό βαθμό αποδόσεως της μηχανής που συμβολίζεται με το γράμμα «η».

Στο προηγούμενο παράδειγμα ο βαθμός αποδόσεως ήταν:

$$\eta = \frac{P_\omega}{P_\Delta} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Η ωφέλιμη ισχύς χαρακτηρίζεται και ως «ενδεικνυμένη» ισχύς, γιατί είναι εκείνη που καταγράφεται όταν η μηχανή διαθέτει σχετικά όργανα.

Ο βαθμός αποδόσεως ως πηλίκον δύο ομοίων όρων είναι καθαρός αριθμός και ***πάντοτε μικρότερος της μονάδας.***

Αποτελεί πάντως ***μέτρο ποιότητας της μηχανής.***

Πρόβλημα 1.

Σε μια υδροτουρμπίνα (υδροστρόβιλο) εισρέουν κάθε λεπτό 240 m^3 νερού από πτώση 16 m. Πόση ωφέλιμη ισχύς παραλαμβάνεται όταν ο βαθμός αποδόσεως της τουρμπίνας είναι 0,87.

Λύση.

Η διαθέσιμη ισχύς υπολογίζεται σε:

$$P_\kappa = \frac{240.000 \times 16}{60 \times 75} = 853 \text{ HP}$$

$$\eta = 0{,}87$$

$$P_\omega = \eta \,.\, P_\kappa = 0{,}87 \times 853 = 742 \text{ HP}$$

Πρόβλημα 2.

Ηλεκτρογεννήτρια πρέπει να τροφοδοτήσει δίκτυο με 12.000 kw. Πόσοι ίπποι πρέπει να καταναλωθούν από την κινητήρια μηχανή όταν ο βαθμός αποδόσεως του συστήματος είναι 0,96;

Λύση.

$$P_\omega = 12.000 \times 1{,}36 = 16.300 \text{ P.S.}$$

$$P_\kappa = \frac{16.300}{0{,}96} = 17.000 \text{ P.S.}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κινηματική, όπως άλλωστε το λέει και το όνομά της, ασχολείται με τις κινήσεις των σωμάτων σχετικά προς το χρόνο και ανεξάρτητα από τα αίτια που τις προκαλούν.

Βασικά, για να περιγραφούν οι κινήσεις, δυο έννοιες υποτίθενται γνωστές και αυτές είναι: Η **ταχύτητα** και η **επιτάχυνση.**

Με τις έννοιες αυτές ως εργαλείο της σκέψεως, είναι δυνατό να διατυπωθούν, κατά τρόπο σαφή και εύκολο, όλοι οι νόμοι που διέπουν τις κινήσεις.

Για τη μεθοδευμένη όμως ανάπτυξη του περιεχομένου της κινηματικής είμαστε υποχρεωμένοι να προσφύγομε και σε ***ορισμένες παραδοχές.***

Οι παραδοχές αυτές κατ' αρχήν απλουστεύουν τη θεώρηση των φυσικών πραγμάτων και με βοηθό τη ***φαντασία*** εξιδανικεύουν τα φαινόμενα, μετατρέποντάς τα σε ιδεατά μεγέθη, που, παρ' όλα αυτά, μπορούν και απεικονίζουν με ικανοποιητική προσέγγιση τη φυσική πραγματικότητα. Με βάση αυτή την αφαίρεση, όταν εξετάζομε την κίνηση ενός σώματος, αντί να το θεωρούμε όπως είναι με το σχήμα του, τον όγκο του, την ιδιοτυπία του κλπ., που ενδεχομένως θα μας δυσκόλευαν στη θεώρηση που θέλομε να του έχομε, το εξιδανικεύομε και το συρρικνώνομε σε ένα μικροσκοπικό σωματίδιο, που από δω και πέρα θα το λέμε ***υλικό σημείο.*** Ό,τι θα μελετήσομε στο σημείο αυτό θα μπορεί να μεταφερθεί και στο φυσικό σώμα με ικανοποιητική προσέγγιση.

Σημειώνεται επίσης ότι θεωρούνται ως γνωστά τα αναφερόμενα:

- στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
- στην ευθύγραμμη ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση
- στην ομαλή κυκλική κίνηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 Κίνηση.

Λέμε ότι ένα σώμα ***κινείται,*** όταν αυτό αλλάζει θέση στο χώρο σχετικά προς ένα άλλο σώμα που θεωρείται ***ακίνητο.***

'Ετσι λέμε π.χ. ότι ένα πλοίο ***κινείται,*** επειδή, όταν απομακρύνεται από την προβλήτα, αλλάζει συνεχώς θέση σχετικά προς τα σπίτια και τους φανοστάτες της προκυμαίας. Αντίθετα λέμε ότι το πλοίο ***δεν κινείται,*** δηλαδή ότι ***ηρεμεί,*** όταν είναι αγκυροβολημένο στο λιμάνι.

Λέμε επίσης π.χ. ότι το έμβολο μιας βενζινομηχανής ***κινείται,*** όταν η μηχανή λειτουργεί, επειδή αλλάζει αυτό θέση σχετικά με τα τοιχώματα του κυλίνδρου της.

Μόλις λοιπόν διαπιστώσομε ότι ένα σώμα κινείται, πρώτη μας δουλειά είναι να καθορίσομε ***ως προς ποιο σώμα*** θα αναφέρομε την κίνησή του.

Κατά ένα γενικό τρόπο: 'Ενα σώμα ***θα θεωρείται ότι κινείται ως προς ένα σταθερό σύστημα, όταν οι αποστάσεις που το χωρίζουν από ένα οποιοδήποτε σημείο αυτού του συστήματος μεταβάλλονται.***

Στην παρακάτω ανάπτυξη θεωρούμε τη Γη και όλα τα αντικείμενα που βρίσκονται επάνω της ως ακίνητα σώματα, χωρίς να λαμβάνομε υπόψη την κίνηση της Γης γύρω από τον εαυτό της ούτε γύρω από τον 'Ηλιο.

1.2 Τροχιά.

Είναι φανερό πως δεν αρκεί να διαπιστώνομε μόνο ότι ένα σώμα κινείται σχετικά προς ένα άλλο. Πρέπει να εξετάσομε και ***πώς*** κινείται σχετικά με το σώμα αυτό.

Αυτό το «πώς» αποτελεί ακριβώς τη ***μελέτη*** της κινήσεως και το πρώτο μας βήμα είναι η ***περιγραφή*** της κινήσεως. Σαν πρώτη σκέψη που μας έρχεται στο μυαλό είναι να περιγράψομε τις διαδοχικές θέσεις που παίρνει το σώμα κατά την κίνησή του, δηλαδή την διαδρομή που ακολουθεί. Αυτή τη διαδρομή ***θα τη λέμε από δω και πέρα τροχιά.***

Η τροχιά συνεπώς που διαγράφει κινούμενο σώμα δεν είναι τίποτα άλλο παρά το ***σύνολο των θέσεων*** από τις οποίες ***πέρασε*** ή ***πρόκειται να περάσει*** κατά την κίνησή του.

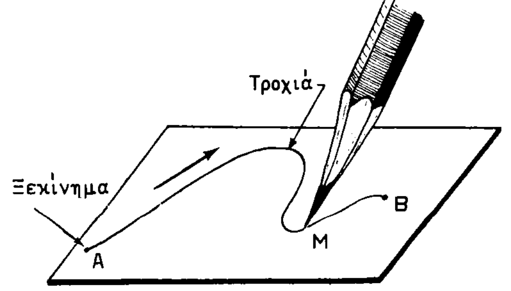
Επαναλαμβάνομε πως η ***τροχιά*** πρέπει να σχετίζεται προς ένα σώμα που θεωρείται ακίνητο και ως προς το οποίο αναφέρεται η κίνηση ***(Σύστημα αναφοράς).***

Έτσι, όταν χαράσσεται μια γραμμή με το χάρακα, η μύτη του μολυβιού ***κινείται*** σχετικά προς το ***χαρτί,*** η δε τροχιά που διαγράφει είναι ***ευθεία.***

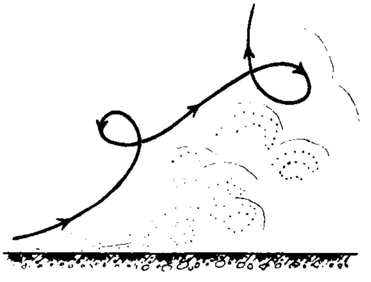
Μπορούμε συνεπώς να πούμε ότι η μύτη του μολυβιού εκτελεί κατά τη χάραξη της γραμμής ευθύγραμμη κίνηση.

Αν αντίθετα η χάραξη της γραμμής γίνει με καμπυλόγραμμο, η ***μύτη του μολυβιου εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση,*** ακριβώς επειδή η τροχιά που διαγράφει η μύτη του μολυβιού επάνω στο χαρτί σχεδιάσεως είναι ***καμπύλη*** (σχ. 1.2α).

Ειδικότερα στην ***κυκλική κίνηση,*** που αποτελεί ειδική περίπτωση της καμπυλόγραμμης κινήσεως, η τροχιά που διαγράφει το κινούμενο σώμα ***είναι περιφέρεια κύκλου.*** Κυκλική κίνηση κάνει π.χ. η μύτη του μολυβιού κατά τη χάραξη περιφέρειας κύκλου με τη βοήθεια διαβήτη.



Σχ. 1.2α.

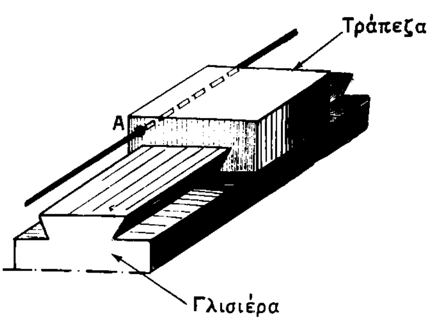


Σχ. 1.2β.

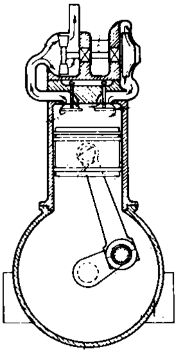
Ορισμός: Καλουμε τροχιά κινητού σημείου τη γραμμή που συνδέει κατά τρόπο συνεχή τις διάφορες θέσεις, που καταλαμβάνει το σημείο αυτό, κατά την κίνησή του.

Παραδείγματα τροχιών.

Η τροχιά του κονιορτού, όπως παρασύρεται από τον αέρα, είναι μια τυχούσα καμπύλη δίχως κανένα δυνατό γεωμετρικό ορισμό (σχ. 1.2β).



Σχ. 1.2γ.

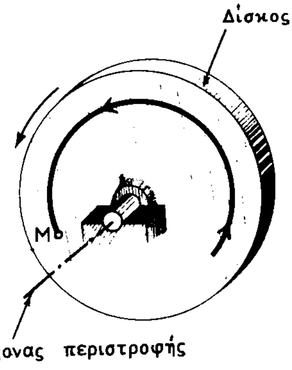


Σχ. 1.2δ.

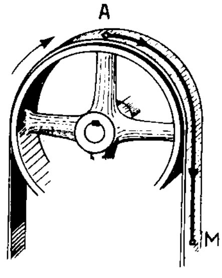
Στην πράξη μπορούμε να παρατηρήσομε τις ακόλουθες τροχιές:

1. Ευθεία: Τέτοια είναι η τροχιά οποιουδήποτε σημείου Α της τράπεζας μιας πλάνης (σχ. 1.2γ) ή του εμβόλου μιας μηχανής (σχ. 1.2δ).

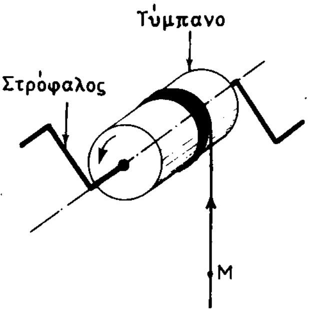
2. Περιφέρεια: Τυχόν σημείο Μ σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα, διαγράφει κυκλική τροχιά (σχ. 1.2ε). Το ίδιο συμβαίνει και με κάθε σημείο μιας τροχαλίας, ενός στροφάλου, ενός σφονδύλου κλπ. (σχ. 1.2στ και σχ. 1.2ζ).



Σχ. 1.2ε.



Σχ. 1.2στ.



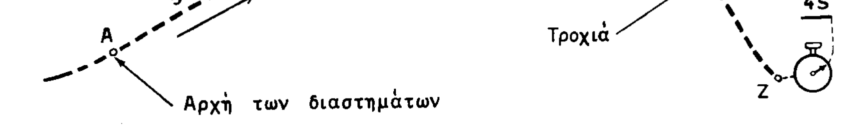
Σχ. 1.2ζ.

1.3 Διαστημα.

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η τροχιά που διαγράφει κινούμενο σώμα δεν είναι τίποτε άλλο από το ***γεωμετρικό σχήμα*** της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα κατά την κίνησή του.

Ορισμός: Διάστημα είναι η πάνω στην τροχιά διαδρομή που ακολουθεί το σώμα κατά την κίνησή του και συμβολίζεται με το γράμμα s.

Για να μπορούμε να ορίσομε τη θέση του κινητού στην τροχιά του, θα εκλέξομε ένα σημείο αναφοράς σ' αυτήν, που θα το ογομάσομε ***Αρχή των διαστημάτων*** (π.χ. το σημείο Α στο σχήμα 1.3) και ως προς την αρχή αυτή θα εκφράζομε πάντοτε την απόσταση του κινητού.



Σχ. 1.3.

Η απόσταση θα εκφράζεται σε μιαν από τις γνωστές μονάδες μήκους (μέτρο χιλιόμετρο, εκατοστόμετρο κλπ.).

Η απόσταση του κινητού από την αρχή των διαστημάτων θα λέγεται ***διανυθέν διάστημα.***

1.4 Ταχύτητα.

Ας υποθέσομε ότι παρακολουθούμε την κίνηση πολλών αυτοκινήτων σε ευθύγραμμο δρόμο που έχει μήκος 1 χιλιόμετρο. Όλα τα αυτοκίνητα κατά την κίνησή τους διαγράφουν ευθύγραμμη τροχιά· άρα όλα εκτελούν ***ευθύγραμμη κίνηση.***

Δεν κινούνται όμως όλα τα αυτοκίνητα κατά τον ίδιο τρόπο. Άλλα τρέχουν πιο πολύ και άλλα πιο λίγο. Άρα άλλα φθάνουν νωρίτερα και άλλα αργότερα στο τέρμα. Για την περιγραφή συνεπώς μιας κινήσεως δεν αρκεί να ξέρομε μόνο ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη και το σώμα διανύει κατά την κίνησή του ορισμένο διάστημα. ***Πρέπει να γνωρίζομε και πόσο χρόνο χρειάζεται το σώμα για να διανύσει αυτό το διάστημα.***

Οδηγούμεθα έτσι στη σκέψη να ορίσομε ένα νέο μέτρο, ***την ταχύτητα,*** το οποίο να σχετίζει το διάστημα που διανύει ένα κινητό, ***με το χρόνο*** που χρειάζεται για να διανύσει αυτό το διάστημα.

Ορισμός: Ταχύτητα είναι το διάστημα που διανύει κινούμενο σώμα στη μονάδα του χρόνου.

Αυτή η μονάδα του χρόνου μπορεί να είναι είτε το δευτερόλεπτο είτε πολλαπλάσιά του, όπως το λεπτό, η ώρα κλπ.

Μετά τον ορισμό της ταχύτητας είναι εύκολο να γίνει ***σύγκριση*** της κινήσεως δύο κινητών. Ένα κινητό είναι ταχύτερο από ένα άλλο, όταν για την ίδια απόσταση το πρώτο χρειάζεται ***λιγότερο*** χρόνο ή όταν το πρώτο κινείται με ***μεγαλύτερη*** ταχύτητα από το δεύτερο.

Παρατήρηση.

Με την ευκαιρία που ορίσαμε την ταχύτητα ως ***μέγεθος*** που επηρεάζεται από το πέρασμα του χρόνου, πρέπει να τονισθεί ότι σε κάθε τέτοιο μέγεθος, εκτός από τη μεταβολή, αυτή καθ' εαυτή, που παθαίνει αυτό, μας ενδιαφέρει και ο ***ρυθμός της μεταβολής του,*** που σημαίνει το πόσο γρήγορα ή αργά μεταβάλλεται το μέγεθος ***στη μονάδα του χρόνου.***

Ας δούμε λοιπόν από την άποψη αυτή το ***μέγεθος διάστημα*** που διανύει ένα κινητό. Το μέγεθος αυτό, όπως ξέρομε, μεταβάλλεται από τη στιγμή που αρχίζει να κινείται το κινητό. Αν εξετάσομε το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου, τότε αμέσως ξεπροβάλλει η έννοια της ***ταχύτητας.***

Ταχύτητα δηλαδή είναι ο ρυθμός της μεταβολής του διαστήματος.

Η ταχύτητα ως διάνυσμα.

Η ταχύτητα, όπως την ορίσαμε προηγουμένως, συνδέει το διάστημα που διανύει ένα σώμα κατά την κίνησή του με το χρόνο που χρειάσθηκε για να το διανύσει: αποτελεί δηλαδή έννοια καθαρά ποσοτική. Η τροχιά αντίθετα είναι μια έννοια περιγραφική και μας δείχνει το σύνολο των θέσεων, από τις οποίες πέρασε ή πρόκειται να περάσει το κινούμενο σώμα. Με άλλα λόγια μας δείχνει την ***κατεύ-***

θυνση κατά την οποία κινείται σε κάθε μια θέση το σώμα. Εφόσον όμως γίνεται λόγος για κατεύθυνση μιας κινήσεως, είναι απαραίτητο να καθορίσομε και την κατεύθυνση της ταχύτητας. ***Η ταχύτητα είναι δηλαδή μέγεθος διανυσματικό.***

Για να ορισθεί ακριβώς η ταχύτητα, όπως και κάθε διάνυσμα, θα πρέπει να γνωρίζομε τη διεύθυνσή της, τη φορά της και το μέτρο της· το πόσο δηλαδή μεγάλη είναι.

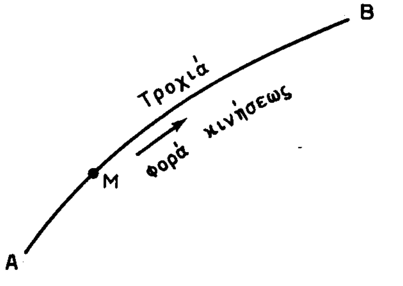
Το γεγονός ότι η ταχύτητα είναι μέγεθος, που χαρακτηρίζεται και από αριθμητική τιμή (μέτρο) και από κατεύθυνση, μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: Για να θεωρήσομε ότι η ταχύτητα ενός υλικού σημείου ***δεν*** μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της κινήσεώς του, θα πρέπει καθ' όλη τη διάρκεια της κινήσεως να μένουν σταθερά και το μέτρο της και η κατεύθυνσή της. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το υλικό σημείο εκτελεί ευθύγραμμη ***ισοταχή*** ή ***ομαλή κίνηση.*** Στην περίπτωση που η ταχύτητα αλλάζει κατεύθυνση, ενώ η αριθμητική της τιμή μένει σταθερή, τότε πρόκειται: ***είτε για ομαλή*** ή ***ομοιόμορφη κυκλική κίνηση είτε για ομαλή*** ή ***ομοιόμορφη καμπυλόγραμμη κίνηση.*** Τέλος στην περίπτωση που αλλάζει ***είτε το μέτρο μόνο είτε το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας, τότε η κίνηση αυτή ονομάζεται ανισοταχής.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΙΝΗΣΗ

2.1 Γενικά.

Έστω ότι κινητό σημείο Μ κινείται σε τυχούσα τροχιά ΑΒ και μάλιστα από το Α προς το Β (σχ. 2.1). Αν το σημείο πάνω στην τροχιά του κινείται με σταθερή ταχύτητα από πλευράς αριθμητικής τιμής μόνο, χωρίς να εξετάζομε την ενδεχόμενη αλλαγή της κατευθύνσεώς του, τότε μιλούμε ***για ομοιόμορφη κίνηση του κινητού.*** Με βάση αυτή την παραδοχή, σε ίσους χρόνους θα διανύει ίσα διαστήματα·



Σχ. 2.1.

άρα ***τα διαστήματα θα είναι ανάλογα των χρόνων*** καί συνεπώς το διανυόμενο διάστημα σε t δευτερόλεπτα από κινητό που τρέχει με ταχύτητα υ . m/s, θα δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{s = \upsilon \cdot t} \qquad (1)$$

όπου: υ είναι η σταθερή αριθμητική τιμή της ταχύτητας σε m/s και t είναι ο απαιτηθείς χρόνος σε δευτερόλεπτα.

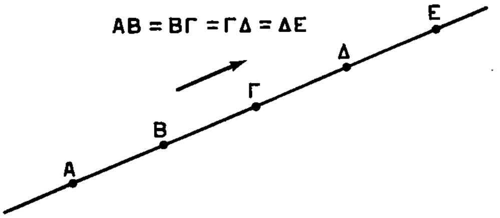
Ο τύπος αυτός μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσομε ένα οποιοδήποτε από τα τρία μεγέθη, όταν μας είναι γνωστά τα άλλα δύο.

2.2 Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Παράδειγμα.

Πεζός βαδίζει σ' ευθύ δρόμο και χρειάζεται 70 δευτερόλεπτα για να καλύψει απόσταση 100 m (σχ. 2.2α). Αν μοιράσομε τη διαδρομή σε 10 ίσα μέρη, δηλαδή σε τμήματα των 10 m το καθένα, παρατηρούμε ότι χρειάζεται 7 δευτερόλεπτα για να ξεπεράσει κάθε τμήμα. Επειδή ο πεζός αυτός διανύει ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους, λέμε πως η ***κίνησή του είναι ομαλή και ευθύγραμμη.***

Ορισμός: Η κίνηση ενός σημείου χαρακτηρίζεται ευθύγραμμη και ομαλή, όταν το κινητό κινείται σε ευθεία και κατά την ίδια πάντα κατεύθυνση, ίσα δε διαστήματα τα διανύει σε ίσους χρόνους.



Σχ. 2.2α.

α) Νόμος των αποστάσεων.

Από τον ίδιο τον ορισμό της κινήσεως προκύπτει ότι, αν ο χρόνος γίνει 2,3,4...n φορές μεγαλύτερος τότε και το διανυόμενο διάστημα θα γίνει επίσης 2,3,4...n φορές μεγαλύτερο.

Δηλαδή: ***Σε κάθε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση το διανυόμενο διάστημα ειναι ανάλογο του χρόνου που χρειάζεται, για να διανυθεί. Αυτή η πρόταση συνιστά το νόμο των διαστημάτων.***

$$s = u \cdot t$$

β) Νόμος των ταχυτήτων.

Μετά από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι: σε κάθε ομαλή ευθύγραμμη κίνηση το πηλίκον της διαιρέσεως του διανυόμενου διαστήματος δια του αντίστοιχου χρόνου είναι σταθερό.

Εξ ορισμού το πηλίκον αυτό είναι η ταχύτητα της κινήσεως και συμβολίζεται με το γράμμα υ ή V.

Παράδειγμα.

Πεζός διανύει 13,5 km σε 2 h 30min με κίνηση ομαλή. Ποια είναι η ταχύτητά του;

Το διάστημα που έχει διανύσει είναι 13,5km ή 13.500m. Ο χρόνος που χρειάσθηκε για να το καλύψει είναι 2 ώρες και 30 λεπτά ή $150 \times 60 = 9000$ δευτερόλεπτα. Συνεπώς η ταχύτητά του είναι:

$$u = \frac{13500}{9000} = 1{,}5\text{m/s}$$

Παρατηρήσεις.

— Ο αριθμός 1,5 μέτρα είναι το διάστημα που έχει διανυθεί στη μονάδα του χρόνου, που εδώ είναι το δευτερόλεπτο. Γι' αυτό λέμε συχνά ότι η ταχύτητα μιας ομαλης κινήσεως είναι η σταθερή απόσταση που διανύεται από το κινητό σώμα στη μονάδα του χρόνου. Πρέπει πάντα να θυμόμαστε όμως, ότι η ταχύτητα δεν είναι μέγεθος ***της ίδιας φύσεως*** με το μήκος: Δεν είναι μήκος αλλά το ***πηλίκον της διαιρέσεως του μήκους δια του χρόνου.***

— Η μονάδα ταχύτητας στο διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) εκφράζεται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/s). Χρησιμοποιούμε όμως και άλλες μονάδες, όπως π.χ. μέτρα ανά λεπτό (m/min), χιλιόμετρα ανά ώρα (km/h) κλπ.

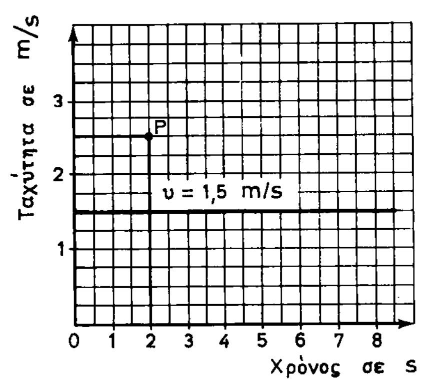
Είναι ουσιώδες να εκλέγομε με φροντίδα τις μονάδες μήκους και τις μονάδες χρόνου, ***όταν ορίζομε την ταχύτητα ενός κινητού.*** Λέμε π.χ. η ταχύτητα πεζού είναι 5 km/h, η ταχύτητα ενός ιμάντα είναι 2,5 m/s, η ταχύτητα κοπής εργαλείου τόρνου είναι 20 m/min.

γ) Γραφική παράσταση των νόμων της ομαλής κινήσεως.

1. Διάγραμμα ταχύτητας.

Έστω υ = 1,5 m/s η ταχύτητα κινητού σημείου, το οποίο εκτελεί ομαλή κίνηση.

Χαράσσομε σ' ένα φύλλο χαρτιού δυο κάθετους άξονες (σχ. 2.2β).



Σχ. 2.2β.

α) Στον άξονα των τετμημένων, που τον παίρνομε ως άξονα των χρόνων, παριστάνομε τα δευτερόλεπτα υπό κλίμακα 5mm.

β) Στον άξονα των τεταγμένων, που τον παίρνομε ως άξονα για τις ταχύτητες, η μονάδα είναι 1m/s και παριστάνεται από τμήμα μήκους 10mm.

Κάθε σημείο του επιπέδου αυτού των αξόνων, όπως π.χ. το P, παριστάνει:

— Με την τετμημένη του (2) μια χρονική στιγμή απολύτως καθορισμένη. Δηλαδή αυτήν που ακολουθεί 2 δευτερόλεπτα μετά τη στιγμή που ορίσθηκε για αρχή της μετρήσεως των χρόνων.

— Με την τεταγμένη 2,5 παριστάνει μια ταχύτητα, μέγεθος απόλυτα καθορισμένο, 2,5 m/s.

Το σημείο P εκφράζει έτσι ότι κατά τη συγκεκριμένη στιγμή των 2s, από την αρχή μετρήσεως των χρόνων, η ταχύτητα είναι 2,5 m/s.

Στο παράδειγμά μας η ταχύτητα είναι σταθερή και μάλιστα 1,5 m/s. Όλα λοιπόν τα σημεία που την αποκτούν βρίσκονται σε μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων (σχ. 2.2β) σε απόσταση 1,5 m/s από αυτόν.

2. Διάγραμμα των διαστημάτων.

Πρώτη περίπτωση. Στην αρχική στιγμή το κινητό βρίσκεται στην αρχή της μετρήσεως των διαστημάτων:

$$s_t = u \cdot t$$

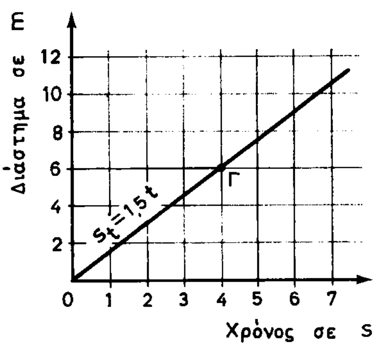
Ο τύπος αυτός των διαστημάτων, όπου υ είναι ένας σταθερός αριθμός, δείχνει ότι το διάστημα είναι συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς το χρόνο.

Η γραφική του απεικόνιση σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων, με άξονα τετμημένων το χρόνο και άξονα τεταγμένων τα διαστήματα, ***είναι ευθεία που περνά από την αρχή της μετρήσεως.*** Για να ορισθεί η ευθεία χρειάζεται να βρεθούν δύο σημεία.

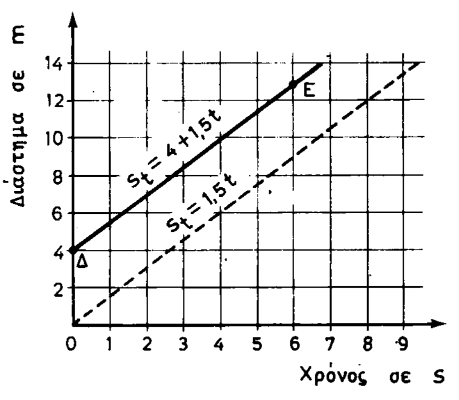
Στο σχήμα 2.2γ φαίνεται π.χ. η γραφική απεικονιση των διαστημάτων της κινήσεως $s_t = 1{,}5t$:

Γιά	$t = 0s$	$s_t = 0m$
Γιά	$t = 4s$	$s_t = 6m$

Τα παραστατικά σημεία είναι τα Ο και Γ. Η γραφική παράσταση είναι η ευθεία ΟΓ (σχ. 2.2γ).



Σχ. 2.2γ.



Σχ. 2.2δ.

Δεύτερη περίπτωση. Στην αρχή μετρήσεως των χρόνων το κινητό βρίσκεται σε κάποια απόσταση από την αρχή της μετρήσεως των διαστημάτων, τότε:

$$s_t = s_o + u \cdot t$$

Έστω για παράδειγμα $s_t = 4 + 1{,}5t$ ο ειδικός τύπος της ομαλής κινήσεως.

στο χρόνο $t=0s$	$s=4m$
στο χρόνο $t=6s$	$s=4 + 1{,}5 \times 6 = 13m$

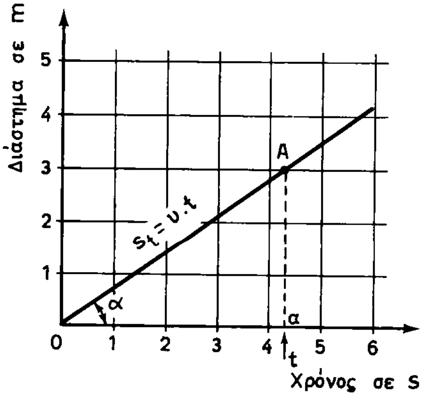
Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η ευθεία ΔΕ του σχήματος 2.2δ. Η γραμμή αυτή αποτελεί παράλληλη μετατόπιση της γραμμής ΟΓ κατά ΟΔ.

3. Η ταχύτητα της ομαλής κινήσεως σχετίζεται με την κλίση της ευθείας των διαστημάτων.

Έστω το διάγραμμα διαστημάτων του σχήματος 2.2ε όπου οι κλίμακες αντίστοιχα είναι:

κλίμακα χρόνων l mm γιά 1s
κλίμακα διαστημάτων l' mm για 1m

Έστω Α το παραστατικό σημείο του διαστήματος s_t που έχει καλυφθεί στο χρόνο t.



Σχ. 2.2ε.

$$\text{Έχομε} \quad Oα = l \times t$$
$$αA = l' \times s_t$$

$$\frac{s_t}{t} = \frac{l}{l'} \cdot \frac{αA}{Oα} \quad \text{αλλά} \quad \frac{s_t}{t} = υ \text{ και } \frac{αA}{Oα} = εφα$$

άρα,

$$υ = \frac{l}{l'} εφα$$

Η εφα μετρά την κλίση της ευθείας των διαστημάτων προς τον άξονα των χρόνων.

Σημείωση 1.

Αν $l = l'$, $υ = εφα$: Είναι η περίπτωση του σχήματος, όπου $l = l'$.

$αA = 21$ mm $Oα = 30$ mm
$εφα = 0{,}7$ $υ = 0{,}7$ m/s

Σημείωση 2.

Όσο μεγαλύτερη η κλίση της ευθείας, τόσο μεγαλύτερη και η ταχύτητα της ομαλής κινήσεως.

2.3 Εφαρμογές των διαγραμματων της ομαλής κινήσεως.

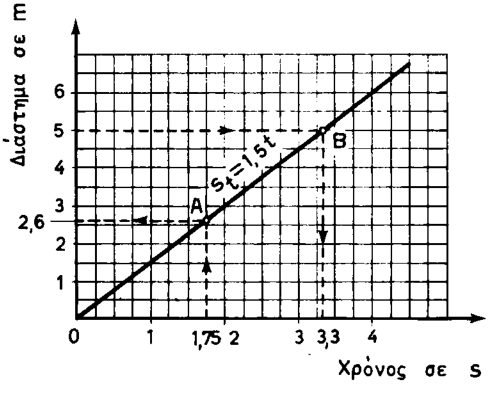
α) Προβλήματα που μπορούν να λυθούν γραφικά με το διάγραμμα των διαστημάτων.

Δίνεται ο νόμος της μεταβολής των διαστημάτων: $S_t = 1,5.t$
Ζητειται:

1) Καθορισμός (με τη βοήθεια του διαγράμματος του σχήματος 2.3α) του χρόνου t, που χρειάζεται κινητό για να διανύσει απόσταση 5m.

Τα βέλη (5 → B → 3,3) δίνουν τη λύση:

$$t = 3,3 \text{ s}$$



Σχ. 2.3α.

2) Το διανυθέν διάστημα στα 1,75s. Τα βέλη (1,75 → A → 2,6) δίνουν το αποτέλεσμα:

$$s = 2,6 \text{ m}$$

Στις δύο περιπτώσεις το σφάλμα υπολογισμου ειναι τόσο πιο ασήμαντο, όσο οι κλίμακες που παίρνομε είναι πιό μεγάλες.

β) Ανάγνωση και ερμηνεία ενός διαγράμματος διαστημάτων.

Ας πάρομε το διάγραμμα του σχήματος 2.3β.

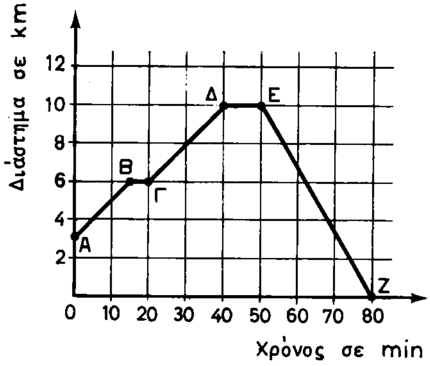
1) Το σημείο A δείχνει πως στην αρχή μετρήσεως των χρόνων το κινητό βρίσκεται 3 km από την αρχή μετρήσεως των διαστημάτων.

2) Το τμήμα AB δείχνει ότι αυτό το κινητό έχει διατρέξει με ομαλή κίνηση 3 km σε 15 λεπτά ή ότι κινήθηκε με ταχύτητα 12 km/h.

3) Το τμήμα ΒΓ, παράλληλο προς τον άξονα των χρόνων, αντιστοιχει με σταμάτημα 5 λεπτών.

4) Το κινητό ξεκίνησε και διάνυσε 4 km σε 20 λεπτά (τμημα ΓΔ) ή έτρεξε με ταχύτητα 12 km/h.

5) Μετά από σταμάτημα 10 λεπτών (τμήμα ΔΕ) το κινητό κινήθηκε κατ' αντίθετη φορά και κάλυψε 10 km σε 30 λεπτά ή κινήθηκε με ταχύτητα 20 km/h (τμημα ΕΖ).



Σχ. 2.3β.

Ανακεφαλαίωση.

1 Ενα κινητό εκτελεί κίνηση ευθύγραμμη ομαλή, ***αν διατρέχει σε ευθεία και πάντα προς την αυτή κατεύθυνση, ίσα διαστήματα σε ίσους χρόνους.***

2. Το διανυόμενο διάστημα είναι ανάλογο, προς τον δαπανόμενο χρόνο.

3 Η ταχύτητα είναι το πηλίκον της διαιρέσεως της αποστάσεως δια του αντίστοιχου χρόνου και είναι σταθερή.
Παριστάνομε την ταχύτητα ***με διάνυσμα*** προσανατολισμένο προς την κατεύθυνση της κινήσεως και με μήκος ανάλογο προς την αριθμητική του τιμή.

4 Ανάλογα με το αν το κινητό συμπίπτει ή όχι κατά την έναρξη μετρήσεως των χρόνων με την έναρξη μετρήσεως των διαστημάτων, ο τύπος του διαστήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$\boxed{s_t = u \cdot t} \quad \text{ή} \quad \boxed{s_t = s_o + u \cdot t}$$

5. Το διάγραμμα της ταχύτητας είναι ***ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων,*** ενώ το διάγραμμα των διαστημάτων ***ευθεία με κλίση ως προς τον ίδιο άξονα.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

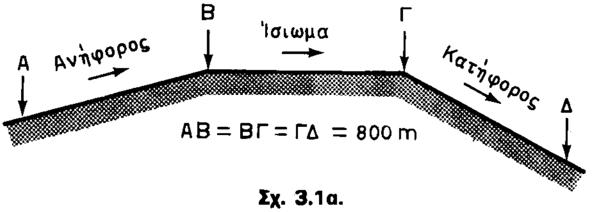
3.1 Γενικά.

Ο καθένας μας έχει δει να κινείται σφαίρα σε κατωφερικό δρόμο. Από τη στιγμή που θα ξεκινήσει, όσο κατεβαίνει, τόσο πιο γρήγορα κινείται. Η κίνησή της δεν φαίνεται ***ομαλή.***

Ας μελετήσομε λοιπόν μια κίνηση ανάλογη μ' αυτήν. Την κίνηση δηλαδή μιας μικρης σφαίρας σε ένα κεκλιμένο επίπεδο.

Στοιχειώδης ορισμός μέσης ταχύτητας.

Ποδηλάτης κινείται, χωρίς να σταματήσει, από το σημείο Α προς το Δ, σε δρόμο, του οποίου η κατατομή ΑΒΓΔ είναι τέτοια, ώστε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = 800 m (σχ. 3.1α).



Σχ. 3.1α.

Ανεβαίνει με κόπο την πλευρά ΑΒ, κινείται ευκολότερα στο οριζόντιο κατάστρωμα ΒΓ και κατεβαίνει πολύ εύκολα την πλευρά ΓΔ.

Ας υποθέσομε πως χρειάσθηκε:

4	λεπτά	για	κάλυψη	του	διαστήματος	ΑΒ
2	»	»	»	»	»	ΒΓ
1,5	»	»	»	»	»	ΓΔ

— Ίσες αποστάσεις ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ καλύφθηκαν σε άνισους χρόνους.

Η κίνηση άρα δεν είναι ***ομαλή*** αλλά ***μεταβαλλόμενη.***

— Η συνολική απόσταση ΑΔ = 2400m χρειάσθηκε, για να διανυθεί, χρόνο 7,5 λεπτών ή 450 s.

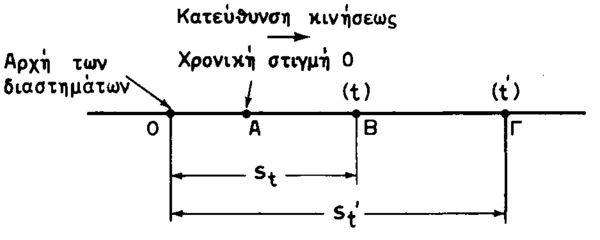
Ο ποδηλάτης αυτός θα είχε διανύσει το ίδιο διάστημα, στον ίδιο χρόνο, με κίνηση ομαλή, αν έτρεχε με ταχύτητα:

$$u = \frac{2400}{450} = 5{,}33 \text{m/s}$$

Ο αριθμός αυτός μετρα τη ***μέση ταχύτητα*** του ποδηλάτη κατά το χρόνο των 450 δευτερολέπτων που κινήθηκε.

Γενίκευση:

Μέση ταχύτητα κινητού, για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα είναι η ταχύτητα ιδεατου κινητού, το οποίο με ισοταχή κίνηση καλύπτει το ίδιο διάστημα στον ίδιο χρόνο.



Σχ. 3.1β.

Ας θεωρήσομε την περίπτωση μιας ευθύγραμμης τροχιάς (σχ. 9.1β).

Έστω	s_t	το	διάστημα	που	διανύει	σε	χρόνο t
	s_t'	»	»	»	»	»	» t'

ένα κινητό σημείο.

Η μέση ταχύτητα του κινητού στο ενδιάμεσο διάστημα των χρόνων t και t' είναι εξ ορισμου:

$$\boxed{u_m = \frac{s_t' - s_t}{t' - t}} \qquad (1)$$

3.2 Πειραματική μελέτη κινήσεως σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο.

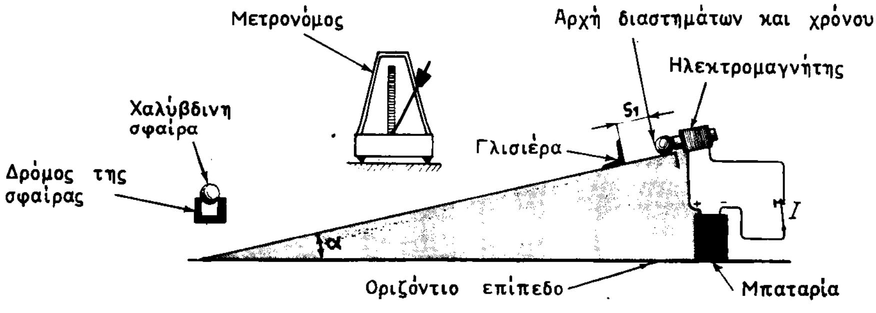
Ας αφήσομε να κυλίσει μεταλλική σφαίρα σε κεκλιμένο επίπεδο. Το κέντρο της μετατίθεται παράλληλα προς το επίπεδο. Ας μελετήσομε την κίνηση του κέντρου της σφαίρας με τη βοήθεια της διατάξεως του σχήματος 3.2α. Για το πείραμα θα μας χρειασθεί ένα μέτρο για τη μέτρηση των αποστάσεων και ένας μετρονόμος, που να κτυπά τα δευτερόλεπτα, για τη μέτρηση του χρόνου.

α) Πειράματα.

— Η σφαίρα πριν ξεκινήσει συγκρατείται στην αφετηρία με ηλεκτρομαγνήτη και αφήνεται τη στιγμή που αρχίζει να κτυπά ο μετρονόμος.

Ανιχνευτικά ρυθμίζομε τη θέση της γλισιέρας κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η σφαίρα να κτυπήσει σ' αυτήν ένα δευτερόλεπτο μετά από το ξεκίνημά της. Μετραμε το διάστημα που διανύει και έστω s=0,10m.

— Επαναλαμβάνομε το πείραμα και θέτομε τη γλισιέρα σέ αποστάσεις τέτοιες, ώστε η σφαίρα να φθάνει σ' αυτήν σε 2, 3, 4 δευτερόλεπτα από τη στιγμή του ξεκινήματός της και έστω s_2, s_3, s_4 τα αντίστοιχα διαστήματα που έχουν μετρηθεί.



Σχ. 3.2α.

Χαράζομε τον πίνακα των αποτελεσμάτων:

Διάρκεια κινήσεως	Διανυθέντα διαστήματα
$t_1 = 1$ sec	$s_1 = 0{,}10$ m
$t_2 = 2$ sec	$s_2 = 0{,}40$ m
$t_3 = 3$ sec	$s_3 = 0{,}90$ m
$t_4 = 4$ sec	$s_4 = 1{,}60$ m
$t_5 = 5$ sec	$s_5 = 2{,}50$ m

β) Ερμηνεία των μετρήσεων.

— Η κίνηση δεν είναι ομοιόμορφη, γιατί τα διαστήματα δεν είναι ανάλογα προς τους χρόνους.

— Ας διαρέσομε κάθε διάστημα με το τετράγωνο του χρόνου που διανύθηκε.

$$\frac{s_1}{t_1^2} = \frac{0{,}1}{1^2} = 0{,}1 \qquad \frac{s_3}{t_3^2} = \frac{0{,}9}{3^2} = 0{,}1$$

$$\frac{s_2}{t_2^2} = \frac{0{,}4}{2^2} = 0{,}1 \qquad \frac{s_4}{t_4^2} = \frac{1{,}6}{4^2} = 0{,}1$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα πηλίκα είναι ίσα πρός 0,1.

Γενικεύομε αυτό το συμπέρασμα: Αν η σφαίρα διανύσει διάστημα s_t σε χρόνο t θα έχομε πάντα:

$$\frac{s_t}{t^2} = 0{,}1 \qquad \text{ή}$$

$$s_t = 0{,}1t^2$$

Αυτός ο τύπος εκφράζει ότι ***το διάστημα που διανύει η σφαίρα είναι ανάλογο προς το τετράγωνο του χρόνου που χρειάζεται για να το διανύσει.***

Ο αριθμός 0,1 είναι ο συντελεστής της αναλογίας. Σημειώνομε ότι η τιμή αυτή συμπίπτει με το διάστημα που διανύει το κινητό στο πρώτο δευτερόλεπτο.

γ) Επίδραση της κλίσεως.

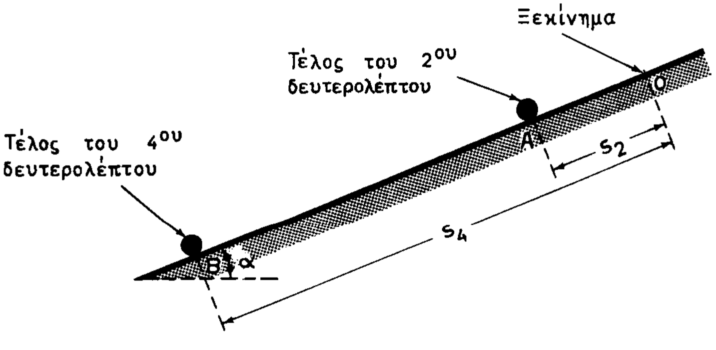
Αν αυξήσομε την κλίση του επιπέδου, διαπιστώνομε ότι η σφαίρα υπακούει σε νόμο ανάλογο με τον προηγούμενο, με τη διαφορά ότι ***αυξάνει ο συντελεστής αναλογίας.***

Κατά ένα γενικό τρόπο, αν «α» είναι ο συντελεστής αναλογίας που καθορίζεται πειραματικά, ο νόμος της κινήσεως γράφεται:

$$\boxed{s = \alpha t^2} \quad (1)$$

δ) Μέση ταχύτητα της σφαίρας για ορισμένο διάστημα χρόνου.

Έστω χρονικό διάστημα δύο δευτερολ., που περιλαμβάνεται π.χ. μεταξύ του δεύτερου και του τέταρτου δευτερολέπτου (σχ. 3.2β).



Σχ. 3.2β.

Μετά τον ορισμό της μέσης ταχύτητας θα έχομε:

$$u_m = \frac{s_4 - s_2}{t_4 - t_2} = \frac{1,6 - 0,4}{4 - 2} = 0,6 \text{ m/s}$$

Κατά ένα γενικότερο τρόπο, αν s_t είναι το διάστημα που διανύθηκε από τη σφαίρα στο χρόνο t και $s_{t'}$ το διάστημα που διανύθηκε στο χρόνο t', τότε η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα t'—t έχει ως τιμή:

$$u_m = \frac{s_{t'} - s_t}{t' - t} = \frac{\alpha t'^2 - \alpha t^2}{t' - t} = \alpha \frac{t'^2 - t^2}{t' - t} = \alpha (t' + t)$$

$$\boxed{u_m = \alpha (t' + t)} \quad (2)$$

ε) Στιγμιαία ταχύτητα της σφαίρας στη χρονική στιγμή t.

Στο προηγούμενο πείραμα βρήκαμε:

$$\alpha = 0,10$$

Η μέση ταχύτητα μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t και t' είναι:

$$u_m = \alpha (t' + t)$$

Ας υπολογίσομε την αριθμητική της τιμή στο χρονικό διάστημα που περιλαμβάνεται μεταξύ του 2ου δευτερολέπτου και μιας στιγμης t', πολύ γειτονικης προς το t.

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τις διαδοχικές πράξεις:

Χρονικό	Διάστημα	1	$t_2=2$	$t'=3$	$\upsilon_m=0{,}10(2+3)$	$=0{,}5$	m/s
»	»	0,1	$t_2=2$	$t'=2{,}1$	$\upsilon_m=0{,}10(2+2{,}1)$	$=0{,}41$	m/s
»	»	0,01	$t_2=2$	$t'=2{,}01$	$\upsilon_m=0{,}10(2+2{,}01)$	$=0{,}401$	m/s
»	»	0,001	$t_2=2$	$t'=2{,}001$	$\upsilon_m=0{,}10(2+2{,}001)$	$=0{,}4001$	m/s

Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό γίνεται το διάστημα $t' - t$, η μέση ταχύτητα στο διάστημα αυτό συγκλίνει προς την τιμή 0,4 m/s. Γι' αυτό το λόγο λέμε ότι η ***ταχύτητα στη στιγμή*** 2 έστω υ_2 είναι 0,4m/s.

Γενίκευση:

Βρίσκομε την ταχύτητα ενός κινητού για μια δοσμένη στιγμή t υπολογίζοντας τη μέση ταχύτητα μεταξύ της στιγμής αυτής και μιας στιγμής t' απειροστά γειτονικής προς αυτή.

υ_t είναι το όριο της υ_m μεταξύ t και t', όταν το t' τείνει προς το t.

— Για την ειδική περίπτωση, όπου η μέση ταχύτητα μεταξύ δύο στιγμών t και t' δίνεται από τον τύπο:

$$\upsilon_m = \alpha\,(t+t')$$

η ταχύτητα στη στιγμή t είναι:

$$\boxed{\upsilon_t = \alpha\,(t+t) = 2\alpha t} \qquad (3)$$

Συμπέρασμα.

Η ταχύτητα της σφαίρας αυξάνει ανάλογα με το χρόνο. Είναι ο ***νόμος των ταχυτήτων.***

στ) Φυσική σημασία της στιγμιαίας ταχύτητας σε μια στιγμή t.

Ας φαντασθούμε πως από μια χρονική στιγμή t και πέρα η ταχύτητα υ ***δεν*** αλλάζει πια. Η κίνηση της σφαίρας μεταπίπτει σε ***ευθύγραμμη ομαλή,*** με ταχύτητα εκείνη που είχε τη στιγμή t.

Ταχύτητα κινητου σημείου σε μια στιγμή t, είναι η ταχύτητα που θα είχε το σημειο, αν από τη στιγμή αυτή και πέρα κινιόταν με κίνηση ομαλή.

ζ) Επιτάχυνση της κινήσεως.

Αν χρησιμοποιήσομε τον τύπο (3), για να υπολογίσομε τη στιγμιαία ταχύτητα της σφαίρας για τις στιγμές 1s, 2s, 3s κλπ., θα έχομε:

$$\begin{aligned}
\upsilon_1 &= 2 \times 0{,}10 \times 1 = 0{,}2 \quad \text{m/s}\\
\upsilon_2 &= 2 \times 0{,}10 \times 2 = 0{,}4 \quad \text{»}\\
\upsilon_3 &= 2 \times 0{,}10 \times 3 = 0{,}6 \quad \text{»}\\
\upsilon_4 &= 2 \times 0{,}10 \times 4 = 0{,}8 \quad \text{»}
\end{aligned}$$

Παρατηρουμε ότι η ταχύτητα ***αυξάνει κάθε δευτερόλεπτο*** κατά 0,2 m/s.

Καλουμε επιτάχυνση την αύξηση της ταχύτητας στη μονάδα του χρόνου.

Στην πὲρίπτωση που μελετήσαμε, η αύξηση αυτή ***ειναι σταθερή*** και γι' αυτό η κίνηση της σφαίρας λέγεται ***ομαλά επιταχυνόμενη.***

Θα παριστάνομε την επιτάχυνση με το γράμμα γ.

Στο παραπάνω παράδειγμα $\gamma = 0{,}2 m/s$ ανά δευτερόλεπτο, που συμβολικά γράφεται $\gamma = 0.2 m/s/s$ ή $\gamma = 0{,}2\ m/s^2$.

Παρατήρηση.

Στη γενική περίπτωση μιας κινήσεως ομαλά επιταχυνόμενης, που τα διαστήματα δίνονται από τον τύπο:

$$s_t = \alpha \,.\, t^2$$

και ο νόμος της ταχύτητας από τον τύπο:

$$\upsilon_t = 2\alpha t$$

η τιμή της επιταχύνσεως είναι:

$$\boxed{\gamma = 2\alpha}$$

Σημειώνομε πως το διάστημα που διανύεται από το κινητό κατά το πρωτο δευτερόλεπτο έχει τιμή ίση με:

$$s_1 = \alpha \,.\, 1^2 = \alpha$$

άρα:

Ο αριθμός που εκφράζει την επιτάχυνση ισούται με το διπλάσιο του αριθμου που μετρά το διάστημα, το οποίο διανύεται από το κινητό στο πρώτο δευτερόλεπτο. (Το κινητό ξεκινά από την ηρεμία).

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν σφαίρα κυλίεται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου, το κέντρο της εκτελει κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

2. Αν η σφαίρα ξεκινά από την ηρεμία, χωρίς να έχει εκτοξευθεί, και θεωρήσομε τα διανυόμενα διαστήματα από το σημείο του ξεκινήματος και τους χρόνους από τη στιγμή του ξεκινήματος, τότε:

α) ***το διανυόμενο διάστημα s_t είναι ανάλογο προς το τετράγωνο του χρόνου που το διέτρεξε (Νόμος των διαστημάτων).***

$$\boxed{s_t = \alpha t^2} \quad (\alpha = \text{σταθ.})$$

β) ***Η στιγμιαία ταχύτητα υ_t είναι ανάλογη προς το χρόνο t (Νόμος των ταχυτήτων).***

$$\boxed{\upsilon_t = 2\alpha t}$$

γ) ***Η επιτάχυνση γ,*** που είναι η αύξηση της ταχύτητας στην μονάδα του χρόνου, ***είναι σταθερή.***

$$\boxed{\gamma = 2\alpha}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΕΙΔΗ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

4.1 Τύποι της ευθύγραμμης και ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως (δίχως αρχική ταχύτητα).

α) Ευθύγραμμη κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη (δίχως αρχική ταχύτητα).

Στα προηγούμενα ορίσαμε τους νόμους της κινήσεως του κέντρου μιας μικρής σφαίρας, που κινιόταν κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου.

— Όταν η σφαίρα αφήνεται να κινηθεί δίχως αρχική ταχύτητα και δίχως καμιά ώθηση.

— Όταν τα διανυόμενα διαστήματα υπολογίζονται από το σημείο του αρχικού ξεκινήματος.

— Όταν οι χρόνοι υπολογίζονται από τη στιγμή του αρχικού ξεκινήματος.

Τότε η κίνηση υπακούει στους ακόλουθους νόμους:

1) Νόμο του διαστήματος: $s_t = \alpha t^2$
2) Νόμο των ταχυτήτων: $u_t = 2\alpha t$
3) Νόμο της επιταχύνσεως: $\gamma = 2\alpha =$ σταθ.

Αν αντικαταστήσομε το α με το γ/2, οι προηγούμενοι τύποι γίνονται:

$$\boxed{s_t = \frac{1}{2}\gamma t^2} \qquad (1)$$

$$\boxed{u_t = \gamma t} \qquad (2)$$

Ο τύπος (1) ταιριάζει για την περίπτωση, που το κινητό σημείο βρίσκεται στην αρχή μετρήσεως των διαστημάτων τη στιγμή του ξεκινήματος. Αν όμως τη στιγμή του ξεκινήματος μετρήσεως του χρόνου το κινητό είχε ήδη διανύσει ένα διάστημα s_o, είναι φανερό ότι μετά παρέλευση χρόνου t, το κινητό θα έχει διανύσει διάστημα:

$$\boxed{s_t = s_o + \frac{1}{2}\gamma t^2} \qquad (3)$$

β) Η ταχύτητα σε μια οποιαδήποτε στιγμή μπορεί να εκφρασθεί και με μια σχέση που να έχει για παραμέτρους την επιτάχυνση και το διάστημα το οποίο έχει διανυθεί στο χρόνο αυτό.

Έστω $s_t = 1/2\gamma t^2$ το διάστημα που έχει διανυθεί στο χρόνο t. Η ταχύτητα τη στιγμή αυτή είναι $u = \gamma t$. Απ' αυτή τη σχέση έχομε $t = u/\gamma$. Αν την τιμή αυτή την αντικαταστήσομε στον τύπο του διαστήματος, τότε:

$$s_t = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{u}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{\gamma}$$

$$\boxed{u = \sqrt{2\gamma s_t}} \qquad (4)$$

Παράδειγμα.

Κινητό ξεκινά από την ηρεμία με επιτάχυνση $5 m/s^2$. Ποια είναι η ταχύτητά του όταν διατρέξει 90m;

Εδω $\gamma = 5 m/s^2$ και $s_t = 90 m$.

Άρα $u = \sqrt{2 \times 5 \times 90} = 30$ m/s.

Παρατήρηση:

Από τον τύπο του διαστήματος:

$$s_t = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

αν λύσομε ως προς γ, τότε μπορεί η επιτάχυνση να υπολογισθεί από το διάστημα s_t και το χρόνο που χρειάσθηκε για να διανυθεί:

$$\boxed{\gamma = \frac{2s_t}{t^2}} \qquad (5)$$

γ) Διάνυσμα της επιταχύνσεως.

Έστω ότι το κινητό που ξεκινά από την ηρεμία αναπτύσσει κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $\gamma = 0{,}2 m/s^2$ (σχ. 4.1α).

Οι ταχύτητες του κινητού στις χρονικές στιγμές 1s, 2s, 3s είναι αντίστοιχα $u_1 = 0{,}2 \times 1 = 0{,}2$ m/s, $u_2 = 0{,}2 \times 2 = 0{,}4$ m/s και $u_3 = 0{,}2 \times 3 = 0{,}6$ m/s.

Έστω Α,Β,Γ οι θέσεις του σημείου στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Σε κάθε θέση ας χαράξομε το αντίστοιχο διάνυσμα της ταχύτητας.

Παρατηρούμε ότι όλα τα διανύσματα είναι της αυτής φοράς και διαφέρουν το ένα από το άλλο κατά ένα ***σταθερό διάνυσμα της αυτής φοράς και με αριθμητική τιμή, την τιμή*** που έχει το διάνυσμα της επιταχύνσεως $0{,}2 m/s^2$.

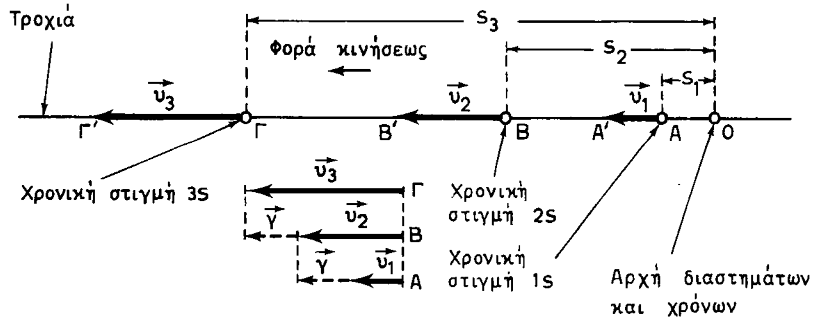
Μεταφερόμαστε λοιπόν από το διάνυσμα $\vec{u}_1$ στο διάνυσμα $\vec{u}_2$ προσθέτοντας στο $\vec{u}_1$ ***το σταθερό διάνυσμα, που δεν είναι άλλο από το διάνυσμα της επιταχύνσεως $\vec{\gamma}$.***

Σε τυχόν σημείο Μ της τροχιάς (σχ. 4.1β) παριστάνεται στην αυτή κλίμακα το διάνυσμα της ταχύτητας και το διάνυσμα της επιταχύνσεως.

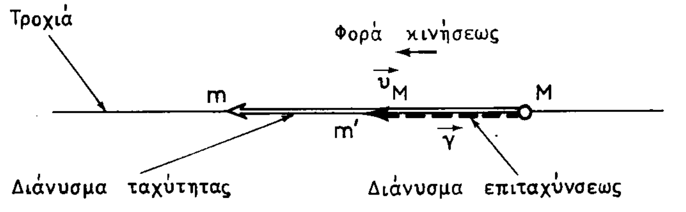
Γραφική παράσταση των νόμων της κινήσεως.

Ας μελετήσομε την ειδική περίπτωση όπου:

$$\gamma = 3 m/s^2 \qquad u_t = 3t \qquad s_t = 1{,}5t^2$$



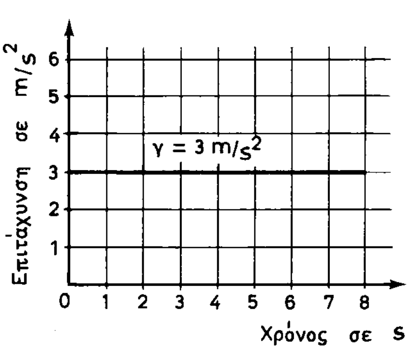
Σχ. 4.1α.



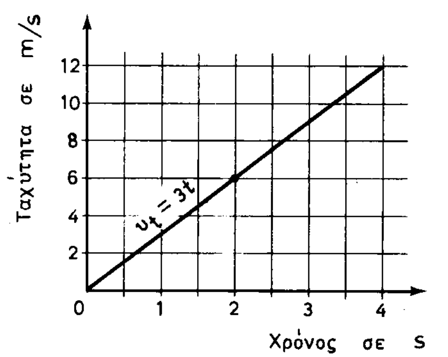
Σχ. 4.1β.

δ) Διάγραμμα επιταχύνσεως.

Η επιτάχυνση, επειδή είναι σταθερή, θα παρασταθεί με ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων στην τιμή $\psi = 3 m/s^2$ (σχ. 10.1γ).



Σχ. 4.1γ.



Σχ. 4.1δ.

ε) Διάγραμμα ταχύτητας.

Ο τύπος $\upsilon = 3t$ δείχνει ότι η ταχύτητα υ_t είναι συνάρτηση πρώτου βαθμου ως προς το χρόνο. Σε σύστημα άρα ορθογωνίων συντεταγμένων με τετμημένες τους χρόνους και τεταγμένες τις ταχύτητες, οι τιμές της ταχύτητας δίνονται από μια ευθεία που περνά από την αρχή (σχ. 4.1δ).

στ) Διάγραμμα διαστημάτων.

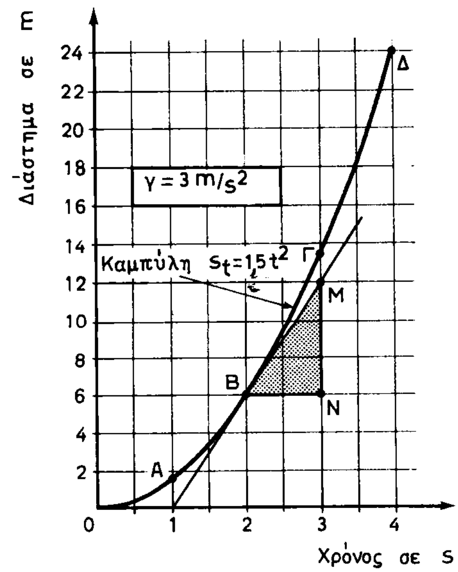
Η έκφραση $s_t = 1{,}5t^2$ είναι συνάρτηση 2ου βαθμού ως προς το χρόνο, (θεωρούμε εδώ μόνο τις θετικές τιμές του t).

Ας υπολογίσομε τα διανυόμενα διαστήματα για χρόνους 1, 2, 3, 4, 5 s:

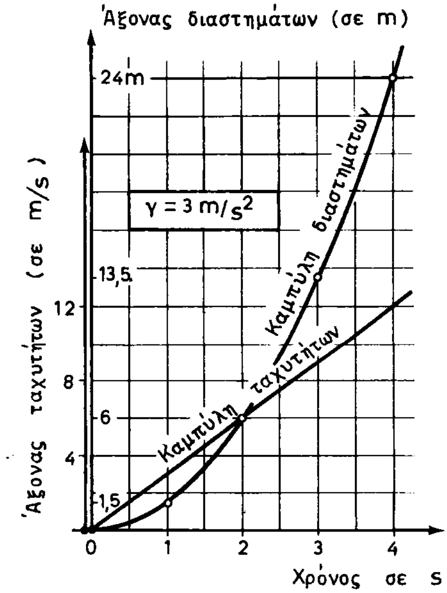
$$s_1 = 1{,}5\text{m},\ s_2 = 6{,}0\text{m},\ s_3 = 13{,}5\text{m},\ s_4 = 24\text{m}$$

Τα αντίστοιχα σημεία του διαγράμματος είναι τα Α,Β,Γ,Δ (σχ. 4.1ε).

Η παραστατική καμπύλη είναι κλάδος παραβολής, όπου η εφαπτομένη στο Ο ειναι ο άξονας των τετμημένων.



Σχ. 4.1ε.



Σχ. 4.1ζ.

Σημείωση.

— Χαράσσομε συχνά στο ίδιο διάγραμμα την ευθεία των ταχυτήτων και την καμπύλη των διαστημάτων (σχ. 4.1ζ).

Η κλίμακα των χρόνων είναι η ίδια, ενώ οι κλίμακες των διαστημάτων και ταχυτήτων μπορεί να είναι διαφορετικές.

— Δεν πρέπει να συγχέομε ποτέ ***την καμπύλη*** των διαστημάτων (που ειναι παραβολή) ***με την τροχιά*** των διαστημάτων (που είναι ευθύγραμμη).

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν κινητό, που ξεκινά από την ηρεμία, αποκτά κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη, το διανυόμενο διάστημα s_t και η ταχύτητα του u_t σε μια τυχούσα χρονική στιγμή t δίνονται από τους τύπους:

$$\boxed{s_t = \frac{1}{2}\gamma t^2}$$

$$\boxed{\upsilon = \gamma t}$$

όπου γ παριστάνει τη σταθερή επιτάχυνση.

2. Η ταχύτητα υ_t μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με το διανυόμενο κατά τον ίδιο χρόνο διάστημα s_t.

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2\gamma s_t}}$$

3. Τό διάγραμμα της επιταχύνσεως είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων, ενώ το διάγραμμα της ταχύτητας ευθεία που ξεκινά από την αρχή των συντεταγμένων.

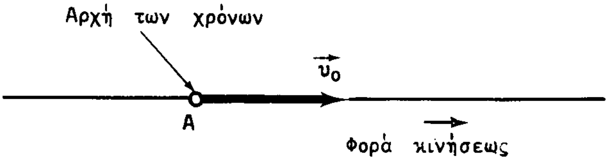
Το διάγραμμα των διαστημάτων είναι κλάδος παραβολής εφαπτόμενος στην αρχή του άξονα των τετμημένων.

4.2 Ευθύγραμμη κίνηση ομαλά μεταβαλλόμενη (με αρχική ταχύτητα).

α) Εισαγωγή.

Στα προηγούμενα μελετήθηκε η κίνηση στην περίπτωση που οι αρχές χρόνων και διαστημάτων ***συμπίπτουν.***

Στο κεφάλαιο αυτό οι δυο αρχές αποκλίνουν και μάλιστα με καθυστερημένη την αρχή μετρήσεως των χρόνων. Ως αποτέλεσμα αυτής της καθυστερήσεως ειναι, στην έναρξη μετρήσεως των χρόνων, το κινητό να έχει ήδη μια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ (σχ. 4.2α).



Σχ. 4.2α.

β) Νόμος της επιταχύνσεως.

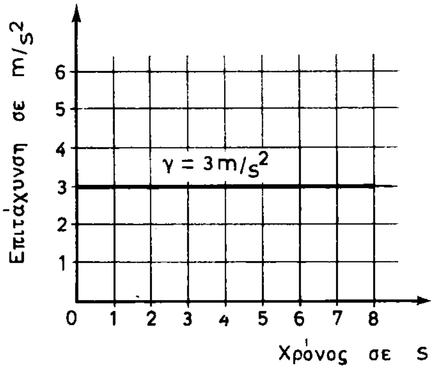
Αφού η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη με σταθερή την επιτάχυνση $\vec{\gamma}$, το διάγραμμα της επιταχύνσεως παραμένει το ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση (σχ. 4.2β).

γ) Νόμος μεταβολής της ταχύτητας.

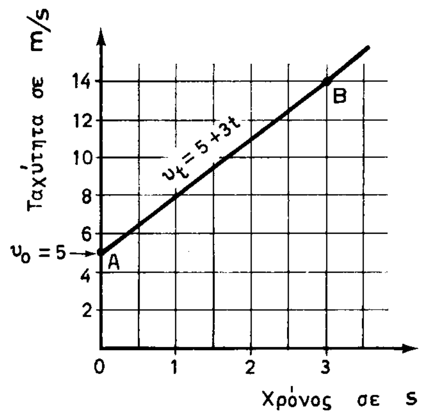
Ας υποθέσομε ότι στην αρχή μετρήσεως των χρόνων το κινητό έχει ταχύτητα υ_o. Σε κάθε επόμενο δευτερόλεπτο η ταχύτητά του θα αυξάνει σταθερά κατά γ και άρα μετά παρέλευση t δευτερολέπτων η ταχύτητά του θα γίνει:

$$\boxed{\upsilon_t = \upsilon_o + \gamma t} \qquad (1)$$

Το υ_t είναι συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς t και άρα η γραφική απεικόνιση του νόμου μεταβολής είναι ***ευθεία.***



Σχ. 4.2β.



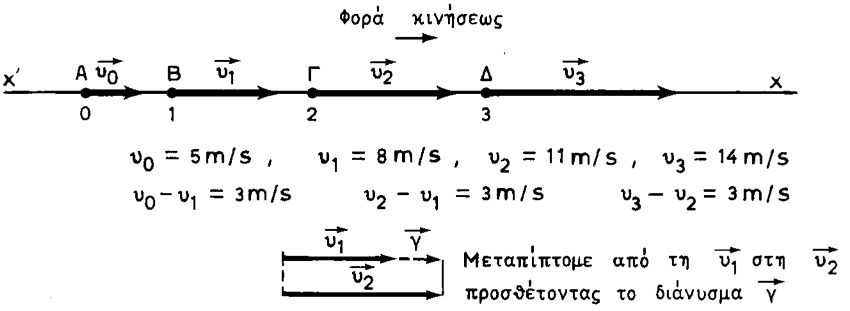
Σχ. 4.2γ.

Στο σχήμα 4.2γ έχομε γραφική απεικόνιση της περιπτώσεως:

$$\upsilon_o = 5\ m/s, \qquad \gamma = 3\ m/s^2$$

δ) Νόμος των διαστημάτων.

Ας λάβομε για αρχή μετρήσεως των διαστημάτων το σημείο Α της τροχιάς, το οποίο αντιστοιχεί στην αρχή μετρήσεως των χρόνων και έστω s_t το διανυθέν διάστημα στη χρονική στιγμή t (σχ. 4.2δ).



Σχ. 4.2δ.

Μπορούμε να γράψομε:

$$s_t = \upsilon_m \cdot t$$

Στο διάγραμμα ταχύτητας του σχήματος 4.2ε τη μέση ταχύτητα υ_m για το διάστημα από $0 \longrightarrow t$ παριστάνει η ευθεία mM του τραπεζίου ΟΑΒβ.

$$\upsilon_m = mM = \frac{OA + \beta B}{2} = \frac{\upsilon_o + (\upsilon_o + \gamma t)}{2}$$

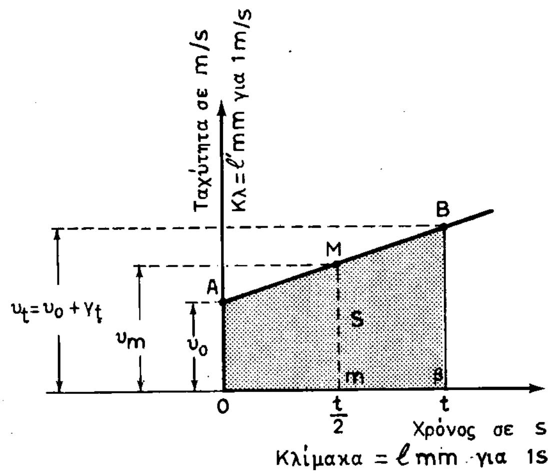
$$υ_m = υ_o + \frac{γt}{2}$$

συνεπώς
$$s_t = \left(υ_o + \frac{γt}{2}\right) t$$

$$\boxed{s_t = υ_o t + \frac{1}{2} γt^2} \qquad (2)$$

Όπου το $υ_o t$ παριστάνει το διανυόμενο διάστημα από το κινητό, αν αυτό κινιόταν ομοιόμορφα μόνο με την αρχική του ταχύτητα.

Το $1/2γt^2$ παριστάνει το διανυόμενο διάστημα από το κινητό, αν αυτό ξεκινούσε από την ηρεμία με κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη.



Σχ. 4.2ε.

ε) Γραφική παράσταση του διαστήματος.

Η γραφική παράσταση του διαστήματος στο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπου $υ_o = 5m/s$ και $γ = 3m/s^2$ είναι επίσης τμήμα παραβολής, με μόνη διαφορά ότι το τμήμα αυτό δεν είναι εφαπτόμενο στο 0 του άξονα των χρόνων (σχ. 4.2ζ).

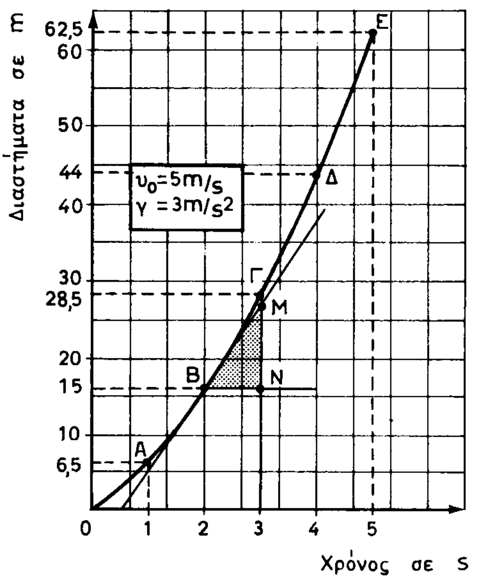
Η ταχύτητα στη χρονική στιγμή t μπορεί να εκφρασθεί και στην περίπτωση αυτή με συνάρτηση της επιταχύνσεως και του διανυθέντος διαστήματος s_t.

$$υ = υ_o + γt$$

$$s_t = υ_o t + \frac{1}{2} γt^2$$

με απαλοιφή του t από τις δύο εξισώσεις έχομε τον τύπο:

$$\boxed{u = \sqrt{u_o^2 + 2\gamma s_t}} \quad (3)$$



Σχ. 4.2ζ.

Αριθμητικό παράδειγμα.

Κινητό έχει αρχική ταχύτητα 10m/s και ξεκινά με κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη με $\gamma = 1 m/s^2$. Ποια είναι η ταχύτητά του, όταν θα έχει διανύσει $s_t = 22m$;

Στο παράδειγμα αυτό έχομε $u_o = 10m/s$, $\gamma = 1m/s^2$ και $s_t = 22m$.

Εφαρμόζομε τον τύπο (3) και έχομε:

$$u = \sqrt{10^2 + 2 \times 1 \times 22}$$

$$u = 12m/s$$

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν κινητό εκτελει κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και έχει αρχική ταχύτητα u_o, τότε:

— Η επιτάχυνση γ = σταθερή.

— Η ταχύτητα στη χρονική στιγμή t ειναι: $u = u_o + \gamma t$

— Το διανυθέν διάστημα στη χρονική στιγμή t είναι:

$$\boxed{s_t = u_o t + \frac{1}{2}\gamma t^2}$$

2. Όταν το κινητό διανύσει διάστημα s_t από την αρχή μετρήσεως των χρόνων, τότε η ταχύτητα τη στιγμή αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2\gamma s_t}}$$

4.3 Ευθυγραμμη κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη.

α) Εισαγωγή.

Όταν ο οδηγός αυτοκινήτου φρενάρει το όχημά του, ανακόπτει την ταχύτητά του και τελικά το όχημα σταματά. Παρόμοια όταν ένας ηλεκτροκινητήρας παύσει να τροφοδοτείται με ρεύμα, μετά κάποιο χρονικό διάστημα ηρεμεί.

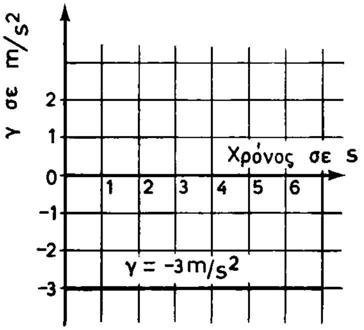
Τέτοιου είδους συμβάντα μας δίνουν την ιδέα της επιβραδυνόμενης κινήσεως, δηλαδή της κινήσεως όπου ελαττώνεται ομοιόμορφα η ταχύτητα του κινητού.

β) Ορισμός της ομαλά επιβραδυνόμενης κινήσεως.

Μια κίνηση λέγεται ομαλά επιβραδυνόμενη, όταν η ταχύτητα ελαττώνεται ***κατά σταθερή ποσότητα ανά μονάδα χρόνου.***

Αυτή η σταθερή μείωση της ταχύτητας στη μονάδα του χρόνου λέγεται ***επιβράδυνση.***

Συμβολίζεται ***και*** η επιβράδυνση με το γράμμα γ, γιατί, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί η επιβράδυνση να θεωρηθεί ως ***αρνητική επιτάχυνση.*** Στο σχήμα 4.3α παριστάνεται γραφικά η επιβράδυνση με τιμή $\gamma = -3 m/s^2$.



Σχ. 4.3α.

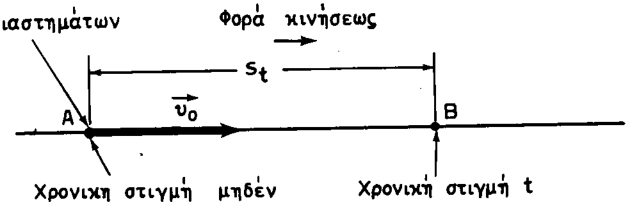
Έστω κινητό σημείο, που κινείται με ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και έστω υ_0 η αρχική του ταχύτητα. Στο σχήμα 4.3β παριστάνεται η υ_0 με το διάνυσμα που εφαρμόζεται στο σημείο Α. Υποθέτομε ότι $\upsilon_o = 12 m/s$ και $\gamma = 3 m/s^2$. Σε κάθε δευτερόλεπτο η ταχύτητα του κινητού θα ελαττώνεται κατά 3m/s και θα πάρει συνεπώς τις ακόλουθες τιμές.

$t_o = 0$	υ_o	$= 12$	m/s
$t_1 = 1s$	$\upsilon_1 = 12 - 3$	$= 9$	m/s
$t_2 = 2s$	$\upsilon_2 = 12 - 2 \times 3$	$= 6$	m/s
$t_3 = 3s$	$\upsilon_3 = 12 - 3 \times 3$	$= 3$	m/s
$t_4 = 4s$	$\upsilon_4 = 12 - 3 \times 4$	$= 0$	m/s

Έτσι στο τέλος του 4ου δευτερολέπτου η ταχύτητα μηδενίζεται. Ας μελετήσομε την κίνηση ως αυτή τη στιγμή.

Παραδεχόμαστε πως σε μια στιγμή, που περιλαμβάνεται μεταξύ 0 και 4s, η ταχύτητα υ_t θα εκφράζεται μέ τον τύπο:

$$\upsilon = \upsilon_o - 3t$$



Σχ. 4.3β.

Γενίκευση:

Αν υ_o είναι η αρχική ταχύτητα και γ η σταθερή επιβράδυνση της κινήσεως, η ταχύτητα υ_t τη στιγμή t έχει ως έκφραση:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o - \gamma t} \qquad (1)$$

Η ταχύτητα αυτή μηδενίζεται όταν $\upsilon_t = 0$ ή αφού περάσει ο χρόνος

$$\boxed{t = \frac{\upsilon_o}{\gamma}} \qquad (2)$$

δ) Διάγραμμα ταχυτήτων.

Ο τύπος (2) εκφράζει ότι η ταχύτητα υ_t είναι συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς την μεταβλητή (t). Το διάγραμμα της ταχύτητας είναι κατά συνέπεια ευθεία που ορίζεται με δύο σημεία της.

Το σχήμα 4.3γ παριστάνει το διάγραμμα των ταχυτήτων μιας ομαλά επιβραδυνόμενης κινήσεως. Παριστάνει δηλαδή τις μεταβολές της ταχύτητας μεταξύ αρχικής στιγμής και της στιγμής που μηδενίζεται η ταχύτητα.

$$\text{Γιά } t = 0s \qquad \upsilon_o = 12m/s$$

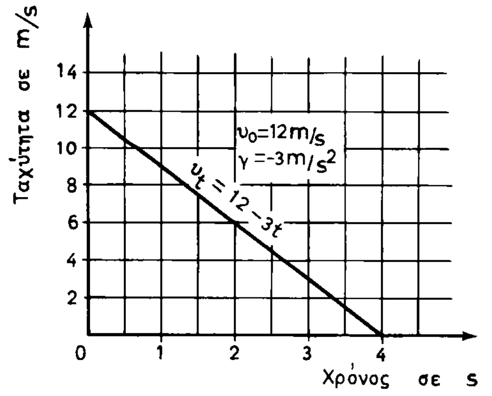
$$\text{γιά } t = 4s \qquad \upsilon = 0m/s$$

Σημείωση.

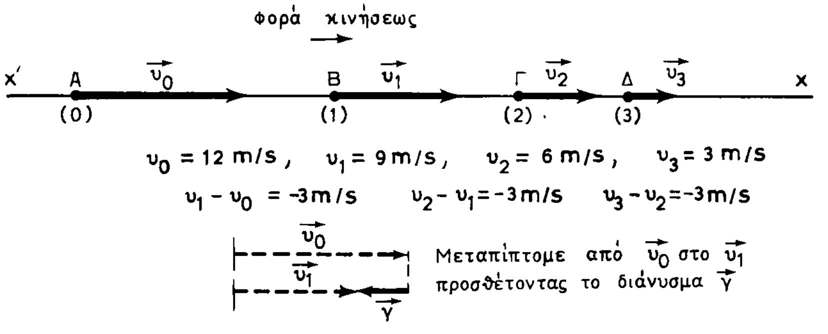
Έστω Α,Β,Γ,Δ οι θέσεις του κινητού σημείου στις χρονικές στιγμές 0,1,2, 3,4(s). Σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία ας χαράξομε με κάποια κλίμακα τις αντίστοιχες ταχύτητες-διανύσματα (σχ. 4.3δ).

Παρατηρούμε ότι μεταπίπτομε από το ένα διάνυσμα στο αμέσως επόμενο προσθέτοντας ένα διάνυσμα αντίθετης φορας και μήκους ανάλογου προς την επιβράδυνση και το οποίο καλούμε ***διάνυσμα επιβραδύνσεως.***

Σε μια κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη το διάνυσμα της επιβραδύνσεως είναι λοιπόν ***αντίθετης φοράς προς το διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας υ_o.***



Σχ. 4.3γ.



Σχ. 4.3δ.

ε) Τύπος διαστημάτων.

Ας πάρομε ως αρχή των διαστημάτων το σημείο Α, που αντιστοιχεί στην αρχή των χρόνων (σχ. 4.3ε). Έστω s_t το διανυθέν διάστημα στη στιγμή t:

$$s_t = u_m \cdot t$$

Στο διάγραμμα των ταχυτήτων του σχήματος 4.3ε η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα από 0 έως t παριστάνεται ως η διάμεσος mM του τραπεζίου ΟΑΒβ.

$$u_m = mM = \frac{OA + \beta B}{2} = \frac{u_o + (u_o - \gamma t)}{2}$$

$$u_m = u_o - \frac{\gamma t}{2}$$

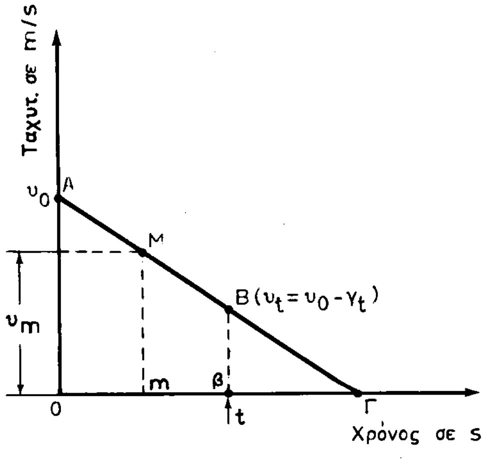
από αυτό προκύπτει:

$$s_t = u_m t = \left(u_o - \frac{\gamma t}{2}\right) \cdot t \quad \text{καί} \quad \boxed{s_t = u_o t - \frac{1}{2}\gamma t^2} \qquad (4)$$

Ο τύπος αυτός μας δείχνει ότι το διανυθέν διάστημα στη στιγμή t είναι διαφορά δύο διαστημάτων. Στον τύπο (4):

Το $υ_o t$ παριστάνει το διάστημα που θα είχε διανυθεί αν η επιβράδυνση ήταν μηδενική, δηλαδή αν η κίνηση ήταν ομαλή.

Το $1/2\ γt^2$ παριστάνει το διάστημα που θα διανυόταν σε αντίθετη κατεύθυνση από την προηγούμενη κίνηση, αν η κίνηση ήταν ομαλά επιταχυνόμενη.



Σχ. 4.3ε.

στ) Διάγραμμα διαστημάτων.

Ας πάρομε το αριθμητικό παράδειγμα:

$$γ = 3\ m/s^2 \qquad καί \qquad υ_o = 12\ m/s$$

Ο τύπος του διαστήματος γράφεται:

$$s_t = 12t - \frac{1}{2} \cdot 3t^2$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται στο τέλος των 4 δευτερολέπτων. Ας υπολογίσομε τα διαστήματα που θα διανυθούν στο τέλος του 1s, 2s, 3s, 4s.

$$s_0 = 0$$
$$s_1 = 10{,}5m$$
$$s_2 = 18{,}0m$$
$$s_3 = 22{,}5m$$
$$s_4 = 24{,}0m$$

Στις τιμές αυτές αντιστοιχούν τα σημεία ΟΑΒΓΔ του διαγράμματος του σχήματος 4.3ζ και ανήκουν όλα σε μια παραβολή με κορυφή το Δ. Η εφαπτομένη σ' αυτό το σημείο, δηλαδή η ΖΖ', είναι η παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων.

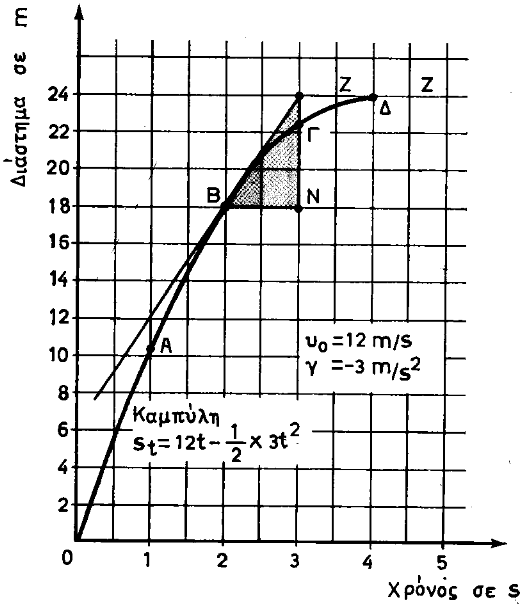
Η ταχύτητα μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με την επιβράδυνση και το διανυθέν διάστημα s_t:

$$u_t = \sqrt{u_o^2 - 2\gamma s_t}$$

(Να αποδειχθεί από τους μαθητές)

επίσης $$s_t = \frac{u_o^2}{2\gamma}$$

το διανυθέν διάστημα, ώσπου να μηδενισθεί η ταχύτητα.



Σχ. 4.3ζ.

Αριθμητική Εφαρμογή.

Στην αρχική στιγμή η ταχύτητα ενός κινητού είναι 20m/s. Η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση $\gamma = 2\text{m/s}^2$. Να υπολογισθεί το διάστημα που θα διανυθεί ώσπου να μηδενισθεί η ταχύτητα.

$$s_t = \frac{20^2}{2 \times 2} = 100\text{m}$$

Ανακεφαλαίωση.

1. Σε μια κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη (αρχική ταχύτητα u_o):

— Η επιβράδυνση είναι σταθερή.

— Η ταχύτητα στη στιγμή t είναι:

$$\boxed{u_t = u_o - \gamma t}$$

Μηδενίζεται μετά παρέλευση χρόνου:

$$\boxed{t = \frac{u_o}{\gamma}}$$

Το διανυθέν διάστημα στη στιγμή t ειναι:

$$\boxed{s_t = u_o t - \frac{1}{2}\gamma t^2}$$

2. Η ταχύτητα υ εκφράζεται σε συνάρτηση με το διανυθέν διάστημα s_t από την αρχική στιγμή:

$$\boxed{u = \sqrt{u_o^2 - 2\gamma s_t}}$$

3. Το διανυθέν διάστημα μεταξύ της αρχικής στιγμής και της στιγμής που μηδενίζεται η ταχύτητα, έχει ως έκφραση τον τύπο:

$$\boxed{s_t = \frac{u_o^2}{2\gamma}}$$

4. Το διάγραμμα επιβραδύνσεων είναι γραμμή παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων, το διάγραμμα των ταχυτήτων ευθεία και των διαστημάτων παραβολή.

4.4 Εφαρμογή του νόμου της ομαλά μεταβαλλόμενης κινήσεως στην πτώση των σωμάτων.

1) Όλα τα βαριά σώματα πέφτουν ελεύθερα ακολουθώντας την κατακόρυφο, της οποίας η διεύθυνση συμπίπτει με το νημα της στάθμης.

Ο Γαλιλαίος ήταν ο πρώτος που απόδειξε την παραπάνω πρόταση ρίχνοντας από το ψηλότερο σημείο του κεκλιμένου πύργου της Πίζας διάφορα σώματα (πέτρες, σίδερα, ξύλα) και διαπιστώνοντας πως όλα φθάνανε με τον ίδιο χρόνο στο έδαφος.

Ο Newton όμως είναι εκείνος που απόδειξε ότι όλα τα σώματα, αδιακρίτως ειδικού βάρους, στο κενό πέφτουν με την ίδια ταχύτητα. Είναι γνωστός ο σωλήνας του Νεύτωνα που περιεχει ένα πούπουλο, ένα κομμάτι χαρτιού και μια μικρή μολύβδινη σφαίρα.

Όταν αφαίρεσε από το σωλήνα τον αέρα και αναποδογύρισε το σωλήνα, και τα τρία σώματα φθάσανε ταυτόχρονα στο κάτω σημείο (σχ. 4.4α).

2) Η κίνηση της πτώσεως είναι ομαλά επιταχυνόμενη.

Η πρόταση αυτή έχει αποδειχθεί πειραματικά με πολλούς τρόπους.

3) Τιμή της επιταχύνσεως σώματος σε ελεύθερη πτώση.

Με μετρήσεις ακρίβειας, που δεν είναι δυνατό να περιγραφούν εδω, αποδεικνύεται ότι στον ίδιο τόπο η επιτάχυνση ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση δεν μεταβάλλεται και είναι η ίδια για όλα τα σώματα. Η επιτάχυνση σε υψόμετρο μηδέν και γεωγραφικό πλάτος 45° (περιοχή Παρισιού) είναι:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

Το διάνυσμα της επιταχύνσεως της βαρύτητας είναι ***κατακόρυφο.***
Η φορά είναι ή ίδια με τη φορά της ταχύτητας, δηλαδή από πάνω προς τα κάτω.

Σχ. 4.4α.

Τύποι της ελεύθερης πτώσεως.

Περίπτωση 1η. Το σώμα αφήνεται δίχως αρχική ταχύτητα.

Παίρνομε ως αρχή των διαστημάτων το σημείο από όπου αφήνεται το σώμα και ως αρχή μετρήσεως των χρόνων τη στιγμή που αφήνεται να πέσει το σώμα.

Έστω u_t η ταχύτητα του τη χρονική στιγμή t και h το ύψος από όπου έπεσε. Μπορούμε να γράψομε:

$$\boxed{u = g \cdot t} \quad (1)$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2} g t^2} \quad (2)$$

$$\boxed{u = \sqrt{2gh}} \quad (3)$$

Αριθμητικό παράδειγμα.

Χαλύβδινη σφαίρα πέφτει ελεύθερα από ύψος h = 20m. Υπολογίστε: ***Τη διάρκεια της πτώσεως*** και ***την ταχύτητα*** τη στιγμή της πτώσεως, χωρίς να ληφθεί υπόψη η αντίσταση του αέρα.

δίνονται: h, g

άγνωστα: u, t

— Διάρκεια της πτώσεως:

Από τον τύπο $h = 1/2gt^2$, λύνοντας ως προς t έχομε:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad t = \sqrt{\frac{2 \times 20}{9{,}81}} = 2{,}02 \text{ s}$$

— Ταχύτητα τη στιγμή της πτώσεως:

Είναι η ταχύτητα της σφαίρας, όταν διανύσει απόσταση 20 m.

$$υ = \sqrt{2gh} \qquad υ = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 20} = 19{,}8 \text{ m/s}$$

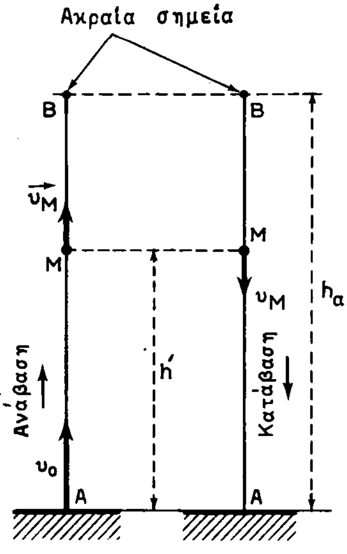
Σημείωση.

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσομε και τον τύπο:

$$υ = g \,.\, t \qquad υ = 9{,}81 \times 2{,}02 = 19{,}8 \text{ m/s}$$

Περίπτωση 2η. Το σώμα εκσφενδονίζεται προς τα επάνω κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $υ_o$.

Ας παρακολουθήσομε μια τέτοια κίνηση εκσφενδονίζοντας μια σφαίρα στον αέρα (σχ. 4.4β). Η σφαίρα ξεκινά από το Α με μιαν αρχική ταχύτητα $υ_0$, ανεβαίνει προς τα πάνω με επιβράδυνση, φθάνει σ' ένα σημείο Β και μετά ξανακατεβαίνει στο Α. Τόσο στην άνοδο όσο και στην κάθοδο η επιτάχυνση της βαρύτητας πάντα επιδρά στη σφαίρα. Η ανοδική κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη, ενώ η καθολική κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη.



Σχ. 4.4β.

— ***Ανοδική κίνηση.*** Οι τύποι που ισχύουν γι' αυτήν είναι:

$$υ = υ_o - gt, \qquad h = υ_o t - \frac{1}{2} gt^2 \qquad υ^2 = υ_o{}^2 - 2gh$$

Ο χρόνος ανόδου $t_α$ φαίνεται από τον τύπο:

$$t_α = \frac{υ_o}{g}$$

Το ύψος ανόδου $h_α$ δίνεται από τον τύπο:

$$h_α = \frac{υ_o^2}{2g}$$

Αριθμητικό Παράδειγμα.

Έστω $υ_o = 49 m/s$, $g = 9{,}80 \; m/s^2$. Να υπολογισθεί η διάρκεια της ανόδου.

$$t_α = \frac{υ_o}{g} = \frac{49}{9{,}8} = 5 s$$

$$\text{Το ύψος ανόδου } h_α = \frac{υ_o^2}{2g} = \frac{49^2}{2 \times 9{,}8} = 122{,}5 \text{ m}$$

—Καθοδική κίνηση.

Ο τύπος που ισχύει σ' αυτήν είναι: $h_α = \frac{1}{2} \cdot gt^2$

Αλλά $h_α = \frac{υ_o^2}{2g}$ οπότε $t_κ = \frac{υ_o}{g}$

Η διάρκεια ανόδου είναι ίση με τη διάρκεια καθόδου.

Σημείωση.

Η ταχύτητα σ' ένα ορισμένο σημείο της διαδρομής είναι η ίδια κατά μέγεθος, τόσο στην άνοδο όσο και στην κάθοδο, αλλά αντίθετη στη φορά.

Στο σχήμα 4.4β το h' είναι η απόσταση του σημείου Μ από το έδαφος. Κατά την άνοδο, όταν το κινητό φτάσει στο Μ θα έχει ταχύτητα:

$$υ_α = \sqrt{υ_o^2 - 2gh'}$$

Κατά την κάθοδο το διάνυσμα της ταχύτητας έχει διεύθυνση από πάνω προς τα κάτω.

$$υ_κ = \sqrt{2g\,(h_α - h')} = \sqrt{2gh_α - 2gh'} = \sqrt{υ_o^2 - 2gh'}$$

άρα $υ_α = υ_κ$

Ανακεφαλαίωση.

1. Ένα σώμα, όταν αφήνεται σε ελεύθερη πτώση, δίχως αρχική ταχύτητα, παίρνει μια κίνηση κατακόρυφη ομαλά επιταχυνόμενη της οποίας η επιτάχυνση είναι $g = 9{,}81 \; m/s^2$.

$$\boxed{υ = gt} \qquad \boxed{h = \frac{1}{2} gt^2} \qquad \boxed{υ = \sqrt{2gh}}$$

2. Αν το σώμα εκσφενδονισθεί προς τα κάτω κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $υ_o$, οι τύποι γίνονται:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_o + gt}$$

$$\boxed{h = \upsilon_o t + \frac{1}{2} gt^2}$$

$$\boxed{\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2gh}$$

3. Αν το σωμα εκσφενδονισθει κατακόρυφα από κάτω προς τα πάνω με ταχύτητα υ_o, τότε θα έχομε:

α) Ανοδική κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη:

$$\boxed{\upsilon_\alpha = \upsilon_o - gt}$$

$$\boxed{h = \upsilon_o t - \frac{1}{2} gt^2}$$

$$\boxed{\upsilon^2 = \upsilon_o^2 - 2gh}$$

β) Καθοδική κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη δίχως αρχική ταχύτητα.

$$\boxed{\upsilon = gt,}$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2} gt^2,}$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gh}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

5.1 Νόμοι της κινήσεως.

α) Ορισμός της κυκλικής κινήσεως.

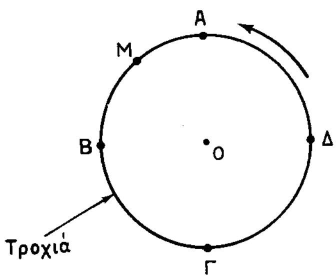
Όταν χαρακτηρίσαμε τα είδη των κινήσεων, αναφέραμε ως ειδική περίπτωση της καμπυλόγραμμης κινήσεως και την ***κυκλική κίνηση,*** που είναι εκείνη η κίνηση, στην οποία το κινητό έχει ως τροχιά του την περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα r.

Θα λέμε ***ομαλή*** την κυκλική αυτή κίνηση του κινητού, όταν το μέτρο της ταχύτητάς του μένει σταθερό σε όλη τη διάρκεια της κινήσεως.

Το διάστημα συνεπώς, το οποίο θα διανύει το κινητό σε χρόνο t δευτερολέπτων, θα βρίσκεται με την εφαρμογή του τύπου $s_t = u \cdot t$.

Η μόνη διαφορά που υπάρχει είναι ότι το διάστημα μετριέται κατά μήκος της ***κυκλικής*** τροχιάς.

Ορισμός: ένα σημείο θα λέμε ότι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, όταν διαγράφει σε μια περιφέρεια και πάντοτε προς την αυτή κατεύθυνση ίσα τόξα σε ίσους χρόνους, όποιοι και να είναι οι χρόνοι αυτοί (σχ. 5.1α).



Σχ. 5.1α.

β) Ορισμός της γραμμικής ή περιφερειακης ταχύτητας.

Ας υποθέσομε ότι r = 0,40m η ακτίνα της περιφέρειας που διαγράφει το κινητό M. Σε ένα λεπτο ή 60 δευτερόλεπτα το κινητό έστω ότι διαγράφει 50 φορές την περιφέρεια διατρέχει δηλαδή διάστημα:

$$s = 2\pi r n = 2\pi \cdot 0{,}4 \times 50 = 125{,}6 \text{ m}$$

Εξ ορισμού το πηλίκον του διαστήματος με το χρόνο είναι η γραμμική ή περιφερειακή ταχύτητα του κινητού.

Δηλαδή στην περίπτωση μας:

$$υ = \frac{125,6}{60} = 2,1 \text{ m/s}$$

Γενικά: Αν n ο αριθμός των στροφών ανά λεπτό και r η ακτίνα του κύκλου (ή d η διάμετρος) γράφομε:

$$\boxed{υ = \frac{2\pi r n}{60} = \frac{\pi d n}{60} = \frac{\pi r n}{30}} \quad (1)$$

Από τον τύπο αυτόν προκύπτει ότι η ταχύτητα είναι:

— ***Ανάλογη προς την ακτίνα.***

— ***Ανάλογη προς την ταχύτητα περιστροφής.***

γ) Παράσταση της ταχύτητας με διάνυσμα

Έστω Ο το κέντρο της περιφέρειας που διαγράφεται από το κινητό σημείο (σχ. 5.1β) όπου:

Μ είναι η θέση του κινητού τη στιγμή t και Μ' είναι η θέση του κινητού τη στιγμή t' (πολύ γειτονική στην t).

Κατά το χρονικό διάστημα t'— t το κινητό διατρέχει το διάστημα ΜΜ' με την ταχύτητα 2,1 m/s. Αν το (t'— t) είναι πολύ μικρό, τότε και το τόξο ΜΜ' θα είναι πολύ μικρό και η διεύθυνση ΜΜ', προς την οποία μετατίθεται το κινητό, τείνει να ***συμπέσει με την εφαπτομένη στο σημείο Μ*** της περιφέρειας.

Άρα, όταν το κινητό περνά από το σημείο Μ, η διεύθυνση μετατοπίσεώς του, και συνεπώς η διεύθυνση της γραμμικής του ταχύτητας είναι εκείνη της ***εφαπτομένης της περιφέρειας στο σημείο αυτό.***

Συνέπεια: Για να παραστήσομε τη γραμμική ταχύτητα του κινητού σημείου όταν περνά από το σημείο Μ, πρέπει:

— ***Να χαράξομε την εφαπτομένη στο σημείο Μ.***

— ***Να φέρομε σ' αυτήν την εφαπτομένη, με αρχή το σημείο Μ προς την κατεύθυνση της κινήσεως, ένα διάνυσμα*** $υ_M$ σε μήκος ανάλογο προς την αριθμητική του τιμή.

Σημείωση.

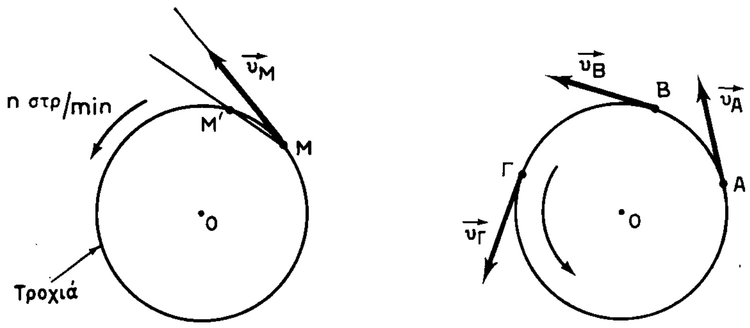
Όταν παριστάνομε με την ίδια κλίμακα τα διανύσματα της ταχύτητας στα διάφορα σημεία Α,Β,Γ της τροχιάς (σχ. 5.1β) όλα είναι μεν ***του αυτού μήκους,*** αλλά το καθένα ***διαφορετικής κατευθύνσεως.***

δ) Νόμος των διαστημάτων.

Είδαμε προηγουμένως ότι:

$$\boxed{υ = \frac{s_t}{t}} \quad ή \quad \boxed{s_t = υ \cdot t} \quad (2)$$

Αυτός ο τύπος, ο ίδιος με τον τύπο 1 της ευθύγραμμης ομαλής κινήσεως, εκφράζει ότι ***το διανυόμενο διάστημα είναι ανάλογο προς το χρόνο, που χρειάσθηκε για να διανυθεί.***



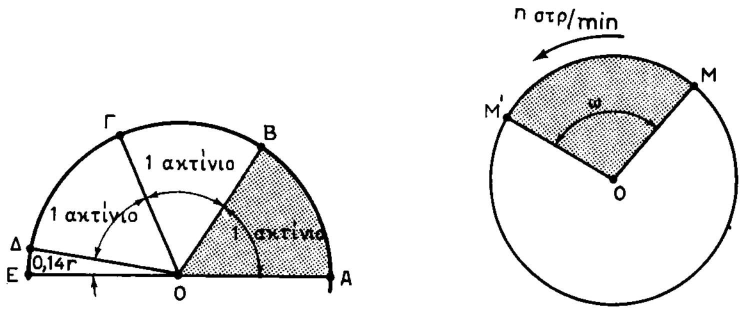
Σχ. 5.1β.

ε) Ορισμός της γωνιακης ταχύτητας.

1. Γωνιακή ταχύτητα ω ενός σημείου Μ είναι η γωνία σε ακτίνια που σαρώνεται σε ένα δευτερόλεπτο από την ακτίνα ΟΜ (σχ. 5.1γ).

Αν n ο αριθμός των στροφών στο λεπτό του κινητού σημείου Μ, τότε σε μια στροφή το σημειο σαρώνει 2π ακτίνια και σε n στροφές 2πn ακτίνια. Ο αριθμός των ακτινίων που σαρώνονται σε ένα δευτερόλεπτο ή η γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rd/s)}$$



Σχ. 5.1γ.

Σημείωση.

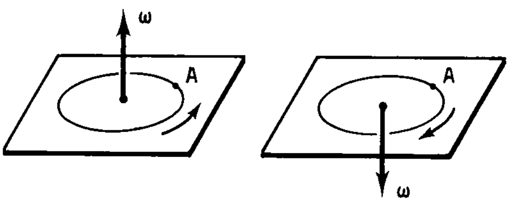
Η γραμμική ταχύτητα: $\upsilon = \dfrac{\pi r n}{30}$

και η γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$

συνδέονται με τον τύπο: $u = \omega \cdot r$

2. *Η γωνιακή ταχύτητα ως ανυσματικό μέγεθος.*

Έστω ότι το κινητό Α κινείται στην περιφέρεια κύκλου (σχ. 5.1δ). Η γωνιακή ταχύτητα ω παριστάνεται ***με ένα διάνυσμα, του οποίου η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου,*** η κατεύθυνση (φορά) συμπίπτει με το προχώρημα (βίδωμα) δεξιόστροφου κοχλία, που στρέφεται κατά τη φορά της κινήσεως, και η αριθμητική τιμή είναι το πηλίκον φ/t.



Σχ. 5.1δ.

Πρόβλημα 1.

Σημειο Μ στρέφεται με 500 στρ/min. Ποια ειναι η γωνιακή του ταχύτητα:

Λύση.

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 500}{30} = 52{,}3 \text{ rd/s}$$

Πρόβλημα 2.

Η γωνιακή ταχύτητα σημείου Μ ειναι 314 rd/s. Να υπολογισθει η ταχύτητα περιστροφης του σε στροφές ανά λεπτό.

Λύση.

Από τον τύπο $\omega = \pi n/30$, αν λύσομε ως προς n, έχομε:

$$n = \frac{\omega \cdot 30}{\pi}$$

$$n = \frac{314 \times 30}{3{,}14} = 3000 \text{ στρ/min}$$

Πρόβλημα 3.

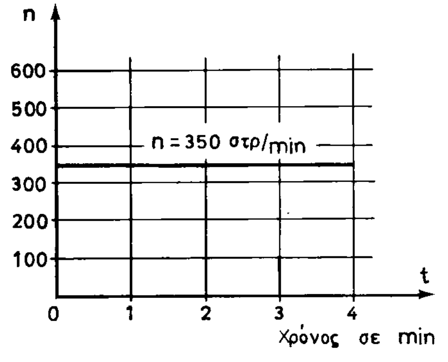
Η ακτίνα της περιφέρειας που διαγράφεται από το σημείο Μ είναι r = 1,5 m. Η γωνιακή του ταχύτητα 12 rd/s. Ποια ειναι η γραμμική του ταχύτητα;

Λύση.

$$u = \omega \cdot r \qquad u = 12 \times 1{,}5 = 18 \text{ m/s}$$

στ) Γραφική παράσταση του νόμου της κινήσεως.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση ενός σημείου, η ταχύτητα περιστροφης, η γραμμική ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα ειναι ποσότητες σταθερές. Το διάγραμμα κάθε μεγέθους από αυτά χαρακτηρίζεται από ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων. ***Πρακτικά δεν χρησιμοποιουμε παρά μόνο το διάγραμμα της ταχύτητας περιστροφής.*** Στο σχήμα 5.1ε η ταχύτητα περιστροδής του κινητού είναι 350 στρ/min.



Σχ. 5.1ε.

ζ) Περίοδος και συχνότητα.

1. Στην ομαλή κυκλική κίνηση ***περίοδος*** καλειται ο χρόνος Τ, που απαιτειται για μια πλήρη περιστροφή του κινητου.

2. Συχνότητα ν καλειται το πηλίκον του αριθμου περιστροφων, που εκτελεί το κινητό σε ένα χρονικό διάστημα, δια του χρόνου αυτου. Ας υποθέσομε ότι σε χρόνο t γίνονται n στροφές. Επειδή ο χρόνος μιας στροφης ειναι Τ, έχομε τη σχέση $t = nT$. Εξάλλου η συχνότητα ν, ως αριθμός στροφων δια του αντίστοιχου χρόνου, δίνεται από τη σχέση $\nu = n/t$ και με το συνδυασμό των δύο τύπων βρίσκομε ότι:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

3. Μονάδα συχνότητας είναι η ***μία στροφή στο δευτερόλεπτο,*** γράφεται 1Hz, και καλείται Hertz (χέρτς).

Επίσης τη μονάδα συχνότητας τη λέμε και ***ένας κύκλος στο δευτερόλεπτο*** (1 c/s). Επίσης χρησιμοποιούνται και τα πολλαπλάσια αυτης της μονάδας, ήτοι:

$$1\ \text{kc/s} = 1000\ \text{c/s} = 1\ \text{kHz}$$
$$1\ \text{Mc/s} = 10^6\ \text{c/s} = 1\ \text{MHz}$$

4. Σχέση γωνιακής ταχύτητας και συχνότητας.

Εξ ορισμού γωνιακή ταχύτητα ειναι το πηλίκον της διαγραφόμενης γωνίας με τον αντίστοιχο χρόνο. Αν ως χρόνο πάρομε μια περίοδο Τ, η γωνία που διαγράφεται στο χρόνο αυτό ειναι $2\pi(360^\circ)$, οπότε η γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi/T$ και αντικαθιστώντας το Τ με το $1/\nu$ έχομε:

$$\omega = 2\pi\nu \text{ ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rd/s)}$$

Αριθμητική εφαρμογή.

Τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ίση προς π/2 rd/s. Να βρεθεί η συχνότητα του τροχού σε στροφές/λεπτό.

Λύση:

Από τον τύπο $\omega = 2\pi\nu$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \text{ Hz}$$

$$\nu = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4} \text{ Hz}$$

και στο λεπτό $$n = 60 \times \frac{1}{4} = 15 \text{ στρ/min}$$

η) Επιτάχυνση του κινητού στην ομαλή κυκλική κίνηση.

Έστω σημείο που κινείται ομαλά σε κυκλική τροχιά ακτίνας r, με ταχύτητα γραμμική υ.

Ξέρομε ότι, αν και η αριθμητική τιμή της ταχύτητας (μέτρο) παραμένει σταθερή, εντούτοις ***μεταβάλλεται*** η διεύθυνσή της. Άρα στην κίνηση αυτή η ταχύτητα ως μέγεθος διανυσματικό μεταβάλλεται ***και συνεπώς το κινητό έχει επιτάχυνση.*** Η επιτάχυνση αυτή διευθύνεται προς το κέντρο και καλείται κεντρομόλος επιτάχυνση γ_κ, έχει δε μέτρο ίσο προς:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} \text{ m/s}^2$$

και επειδή $\upsilon = \omega \,.\, r$

$$\gamma_\kappa = \omega^2 \,.\, r$$

και επειδή $\omega = 2\pi\nu$

$$\gamma_\kappa = 4\,\pi^2 \,.\, \nu^2 \,.\, r$$

και επειδή $\omega = 2\pi/T$

$$\gamma_\kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} \,.\, r$$

Ανακεφαλαίωση.

1. Ένα σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, όταν διαγράφει σε περιφέρεια και πάντα προς την αυτή κατεύθυνση ίσα τόξα σε ίσους χρόνους.

2. Η ταχύτητα περιστροφής του είναι ο αριθμός στροφών n, που εκτελεί σε ένα λεπτό.

3. Η περιφερειακή ή γραμμική του ταχύτητα έχει την ίδια τιμή με το διανυόμενο διάστημα σε ένα δευτερόλεπτο.

$$\boxed{u = \frac{\pi r n}{30}\ \text{m/s}}$$

4. Η γωνιακή ταχύτητα έχει την ίδια τιμή με τη γωνία που σαρώνεται σε ένα δευτερόλεπτο από την ακτίνα του σημείου M (επιβατική ακτίνα).
Εκφράζεται σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο.

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n}{30}\ \text{rd/s}}$$

Έχομε προφανώς:

$$\boxed{u = \omega \cdot r}$$

5. Σε ένα σημείο της τροχιάς, η γραμμική ταχύτητα παριστάνεται με ένα διάνυσμα εφαπτόμενο της περιφέρειας στο σημείο αυτό, προσανατολισμένο προς τη διεύθυνση της κινήσεως και που έχει μήκος ανάλογο προς την αριθμητική του τιμή.

6. Η γωνιακή ταχύτητα ω παριστάνεται ως διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του κύκλου, με φορά που να συμπίπτει με το προχώρημα δεξιόστροφου κοχλία, ο οποίος στρέφεται κατά τη φορά της κινήσεως.

7. Η περίοδος T με τη συχνότητα ν συνδέονται με τη σχέση:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

η δε γωνιακή ταχύτητα ω συνδέεται με την περίοδο T και τη συχνότητα ν με τις σχεσεις:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad \boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

8. Η επιτάχυνση του κινητού στην ομαλή κυκλική κίνηση διευθύνεται προς το κέντρο της περιφέρειας επάνω στην οποία κινείται το σημείο και έχει μέτρο:

$$\boxed{\gamma_\kappa = \frac{u^2}{r}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\gamma_\kappa = \omega^2 \cdot r}$$

5.2 Ασκησεις.

1. Ο τροχός τουρμπίνας ατμού με ακτίνα 0,5m στρέφεται με 10.000 στρ/min. Να υπολογισθούν:
   — Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας.

— Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.

2. Να υπολογισθεί η εξωτερική διάμετρος σφονδύλου που στρέφεται με 60 στρ/min, ώστε η γραμμική του ταχύτητα να μην υπερβεί τα 12 m/s.
3. Σε κανονική λειτουργία, ο κινητήρας αυτοκινήτου στρέφεται με 3600 στρ/min. Η σύνδεση του στροφαλοφόρου άξονα με τους κινητήριους τροχούς γίνεται με τη βοήθεια ενός κιβωτίου ταχυτήτων και ενός διαφορικού. Τα δύο αυτά σκοπό έχουν να μειώσουν τις στροφές της μηχανής στο 1/6. Το κέντρο των τροχών βρίσκεται σε ύψος 0,35 m από το έδαφος.

   Ποια είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου σε m/s και km/h;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΟΡΜΗ - ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

6.1 Γενικά.

Καλούμε ορμή κινούμενου υλικού σημείου, που έχει μάζα m και ταχύτητα $\vec{u}$, το διάνυσμα $\vec{J}$ που έχει φορά και διεύθυνση της ταχύτητας του σημείου $\vec{u}$ και μέτρο το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί το μέτρο της ταχύτητάς του mu.

Σύμφωνα με τον ορισμό της ορμής μπορούν να ορισθούν και οι μονάδες μετρήσεώς της στα διάφορα συστήματα.

— ***Διεθνές Σύστημα (S.I.).***

$$J = mu = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s} = 1 \text{ mkg/s}$$

— ***Τεχνικό σύστημα.***

$$J = mu = 1 \text{ TMM} \cdot 1 \text{ m/s} = 1 \text{ T.M. ορμης}$$

Άλλη διατύπωση στη θεμελιώδη εξίσωση της Δυναμικής.

Έστω υλικό σημείο το οποίο στη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα u και συνεπώς ορμή mu. Αν τη στιγμή αυτή και για πολύ μικρή χρονική διάρκεια Δt εφαρμοσθεί στο σημείο μια δύναμη F, τότε η ταχύτητα του σημείου θα μεταβληθεί από u σε u + Δu. Αν καλέσομε τη νέα του ορμή, στο τέλος αυτής της μικρής χρονικής διάρκειας, J + ΔJ, τότε η μεταβολή της ορμής εκφράζεται από τη σχέση:

$$\Delta J = m\,\Delta u$$

Αν διαιρεθεί αυτή η σχέση κατά μέλη με το Δt, θα προκύψει τότε μια άλλη σχέση:

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = m \cdot \gamma$$

$$\boxed{\frac{\Delta J}{\Delta t} = F} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) αποτελεί γενικότερη έκφραση για τη θεμελιώδη εξίσωση της Δυναμικής.

Με βάση τον τύπο (1) μπορούμε να διατυπώσομε το θεμελιώδη νόμο της Δυναμικής ως εξής:

Η δύναμη F ισούται με το πηλίκον της μεταβολής της ορμής προς τον αντίστοιχο χρόνο.

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει τώρα και νέα διατύπωση της αρχής της αδράνειας: ***Αν σε ένα υλικό σημείο (κινούμενο ή ακίνητο) δεν εφαρμόζεται καμιά δύναμη ή εφαρμόζονται δυνάμεις που έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν, η ορμή του σώματος παραμένει σταθερή.***

Στην ειδική περίπτωση της ομαλά μεταβαλλόμενης ευθύγραμμης κινήσεως, όπου η ενεργούσα δύναμη είναι σταθερή εφαρμόζεται η σχέση:

$$\gamma = \frac{u}{t}$$

Αν στη χρονική στιγμή t_1 το σημείο έχει ταχύτητα u_1, στη χρονική στιγμή t_2 θα πρέπει να έχει ταχύτητα $u_1 + \gamma\,(t_2 - t_1)$.

Η μεταβολή της ορμής στο διάστημα αυτό $t_2 - t_1$ ειναι:

$$J_2 - J_1 = mu_2 - mu_1$$

$$J_2 - J_1 = m \cdot \gamma(t_2 - t_1)$$

$$\frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} = m \cdot \gamma$$

$$\frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} = F \qquad \text{ή}$$

$$\boxed{J_2 - J_1 = F\,(t_2 - t_1)} \qquad (2)$$

Αν το γινόμενο $F\,(t_2 - t_1)$ το καλέσομε ***ώθηση της δυνάμεως,*** τότε, σύμφωνα με την εξίσωση (2), η μεταβολή της ορμής που προκαλείται από μια σταθερή δύναμη, που εφαρμόζεται σε ένα σημείο επί χρόνο $(t_2 - t_1)$, ισούται προς την ώθηση της δυνάμεως για το ίδιο χρονικό διάστημα.

6.2 Αρχή διατηρήσεως της ορμής.

Αν σε ένα οποιοδήποτε σώμα που κινείται τυχαία δεν ενεργήσουν εξωτερικές δυνάμεις, τότε το άθροισμα όλων των ορμών του παραμένει σταθερό ή γενικότερα αν σε ένα οποιοδήποτε σύστημα από τυχαία κινούμενα σώματα δεν επιδράσουν εξωτερικές δυνάμεις, το άθροισμα των ορμών των σωμάτων του συστήματος παραμένει σταθερό.

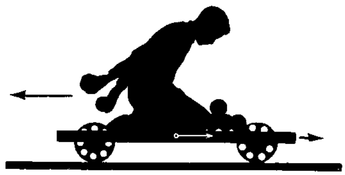
Ας επεξηγήσομε με μερικά παραδείγματα την αρχή αυτή.

1) Σε μικρή πλατφόρμα βρίσκεται άνθρωπος και σωρός από μεταλλικές σφαίρες συνολικής μάζας m_α (σχ. 6.2α). Αρχικά η ορμή του συστήματος είναι ίση προς μηδέν. Αν ο άνθρωπος ***εκσφενδονίσει προς τα πίσω*** μια σφαίρα μάζας m_σ με

ταχύτητα $υ_σ$, θα παρατηρήσομε ότι η πλατφόρμα, με αυτόν μαζύ, θα αρχίσει να κινειται ***προς τα εμπρός*** με ταχύτητα $υ_α$.

Η διατήρηση της ορμής δίνει τότε:

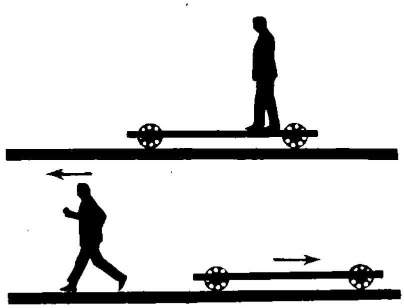
$$m_α \cdot υ_α - m_σ \cdot υ_σ = 0 \qquad \text{καί} \qquad υ_α = \frac{m_σ \cdot υ_σ}{m_α}$$



Σχ. 6.2α.

2) Ας φαντασθούμε έναν άνθρωπο ακίνητο μέσα σε μια βάρκα η οποία ηρεμεί. Αν ο άνθρωπος πηδήσει έξω από τη βάρκα, θα παρατηρήσομε ότι αυτή θα κινηθει αντίθετα. Αυτό γίνεται γιατί ο άνθρωπος όταν ***πήδησε,*** απόκτησε ορμή, άρα και η βάρκα πρέπει να αποκτήσει αντίθετη και ίση ορμή.

3) Δίνεται μια πλατφόρμαελ[λεδη με μήκος 2 m σε ηρεμία (σχ. 6.2β). Στη δεξιά άκρη της στέκεται ένα άτομο. Άτομο και πλατφόρμα αποτελούν ένα σύστημα. Αιφνίδια το άτομο αρχίζει να τρέχει προς τα αρίστερά. Με το τρέξιμο το άτομο είναι σαν να δέχθηκε μιαν ώθηση με κατεύθυνση προς τα αριστερά. Ταυτόχρονα, με την κίνηση αυτή του ατόμου, βλέπομε το όχημα να κινείται προς τα δεξιά. Το όχημα, σύμφωνα με την αρχή της διατηρήσεως της ορμής δέχθηκε μιαν ορμή ίσου μεγέθους αλλά αντίθετης κατευθύνσεως.

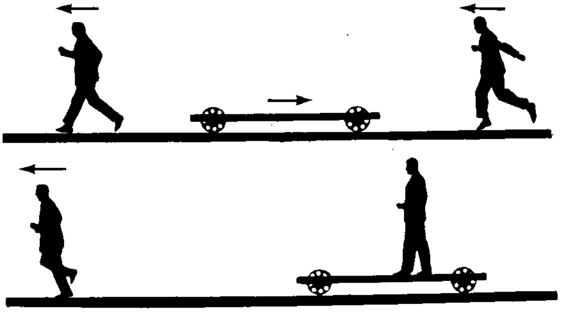


Σχ. 6.2β.

Το άτομο μόλις φθάσει τρέχοντας στο αριστερό άκρο της πλατφόρμας την εγκαταλείπει παίρνοντας μαζύ του και την ορμή του. Η πλατφόρμα παράλληλα κινειται και αυτή με σταθερή ταχύτητα προς τα δεξιά, γιατί και αυτή διατηρει την ορμή της, όπως και το άτομο, αλλά με αντίθετη κατεύθυνση.

Αν τώρα την κινούμενη προς τα δεξιά πλατφόρμα τη συναντήσει κάποιο άλλο άτομο, που τρέχει αντίθετα προς αυτήν με μάζα και ταχύτητα την ίδια με το προηγούμενο άτομο και σταθεί επάνω της ακίνητο, αμέσως σταματά και η πλατφόροα (σχ. 6.2γ).

Την ορμή που πήρε μαζύ του το πρώτο, άτομο, την ξανάδωσε στην πλατφόρμα το δεύτερο άτομο ανεβαίνοντας και μένοντας ακίνητο πάνω της. Γι' αυτό άλλωστε και η πλατφόρμα σταμάτησε αμέσως.



Σχ. 6.2γ.

4) 'Αλλη εφαρμογή της αρχης διατηρήσεως της ορμής έχομε με την ***ανάκρουση των πυροβόλων.*** Τη στιγμή που εγκαταλείπει το βλήμα το σωλήνα του πυροβόλου, το πυροβόλο κινείται ***αντίθετα*** προς το βλήμα δημιουργώντας τη λεγόμενη ***ανάκρουση*** (κλώτσημα). Η κίνηση αυτή του πυροβόλου εξηγείται με την αρχή της διατηρήσεως της ορμής ως εξής:

Τα δύο σώματα, βλήμα και πυροβόλο, αποτελούν ένα σύστημα, στο οποίο οριζόντια δεν ασκείται καμιά εξωτερική δύναμη. Πριν γίνει η έκρηξη, τόσο η ορμή του βλήματος όσο και του πυροβόλου ήταν ίσες προς μηδέν. Μετά την έκρηξη, το βλήμα μάζας m_σ βγαίνοντας από το σωλήνα του πυροβόλου με ταχύτητα $υ_\sigma$, έχει ορμή $m_\sigma \,.\, υ_\sigma$. Αντίστοιχα η ορμή του πυροβόλου, που οπισθοχωρεί, θα είναι ίση προς $m_\pi \,.\, υ_\pi$

Σύμφωνα λοιπόν με αυτά έχομε:

$$m_\pi \,.\, υ_\pi + m_\sigma \,.\, υ_\sigma = 0 \qquad \text{καί} \qquad υ_\pi = -\frac{m_\sigma \,.\, υ_\sigma}{m_\pi}$$

Το αρνητικό σημείο στη σχέση μας λέει ότι το πυροβόλο θα κινηθεί ***αντίθετα*** προς το βλήμα.

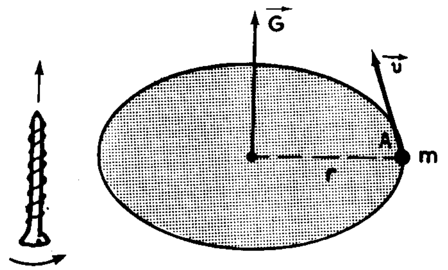
6.3 Στροφορμή υλικού σημείου.

Θεωρούμε υλικό σημείο με ορμή $\vec{J}$ που κινείται σε περιφέρεια κύκλου, ο οποίος έχει ακτίνα r.

Καλούμε ***στροφορμή*** του υλικού σημείου ως προς τον άξονα περιστροφής Α το διάνυσμα $\vec{G}$, που έχει μέτρο ίσο προς το γινόμενο του μέτρου της ορμής επί την ακτίνα.

$$G = J \,.\, r \qquad \text{ή} \qquad G = mυ \,.\, r$$

Ο φορέας του διανύσματος συμπίπτει με τον άξονα A, η δε φορά του βρίσκεται με τον **κανόνα** του δεξιόστροφου κοχλία.
Το μέγεθος αυτό είναι θεμελιώδες για την περιστροφή των σωμάτων (σχ. 6.3).



Σχ. 6.3.

Ανακεφαλαίωση.

1. Η ορμή κινούμενου υλικού σημείου με μάζα m και ταχύτητα $\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα $\vec{J}$ που έχει τη φορά και διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{u}$ και μέτρο το γινόμενο (m . u).

2. Με βάση τον ορισμό αυτόν η θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής μπορει να εκφρασθεί: Η δύναμη $\vec{F}$ ισούται με το πηλίκον της μεταβολής της ορμής προς τον αντίστοιχο χρόνο.

3. Στην περίπτωση της ομαλά μεταβαλλόμενης ευθύγραμμης κινήσεως η μεταβολή της ορμής που προκαλείται από μια σταθερή δύναμη, που εφαρμόζεται σε ένα σημείο επί χρόνο (t_2 — t_1), ισούται με την ώθηση της δυνάμεως για το ίδιο χρονικό διάστημα.

4. Αν σε ένα σώμα που κινείται τυχαία δεν ενεργήσουν εξωτερικές δυνάμεις, τότε το άθροισμα των ορμών του παραμένει σταθερό.

6.4 Ασκήσεις.

1. Η ορμή σε ένα σώμα έχει τιμή 40 000g . cm/s. Πόση δύναμη χρειάζεται για να ηρεμήσει το σώμα σε 8 δευτερόλεπτα;

   Απάντηση: $F = 5 \times 10^3$ dyn

2. Σφαίρα μάζας 60g βάλλεται από πυροβόλο όπλο, που έχει μάζα 4,5 τόννους, με ταχύτητα 600 m/s. Να υπολογισθεί η ταχύτητα ανακρούσεως του πυροβόλου.
3. Πόσο χρόνο πρέπει να ενεργήσει δύναμη 300 N σε σώμα, που έχει βάρος 120 kp, για να αυξηθεί η ταχύτητά του από 5 m/s στο δεκαπλάσιο; ($g = 10\ m/s^2$).
4. Πόση ειναι η ορμή φορτηγού αυτοκινήτου που έχει μάζα 5 τόννους, όταν κινείται με ταχύτητα 96 km/h. ($g = 10\ m/s^2$).

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Βασικές έννοιες της στατικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη γραφική μέθοδο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Συνεπίπεδες συντρέχουσες δυνάμεις

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη μέθοδο των προβολών (αναλυτική)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη γραφική μέθοδο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Συνεπίπεδες τυχούσες δυνάμεις

Σύνθεση, Ανάλυση και Ισορροπία με τη μέθοδο των προβολών (αναλυτική)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Κέντρο βάρους - Ευστάθεια

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Μετάδοση της περιστροφικής κινήσεως

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

Σύνθετες κινήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

Περιοδική κίνηση

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ

Αξιώματα της Δυναμικής

Α. Δυναμική του υλικού σημείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

Κεντρομόλος και φυγόκεντρος δύναμη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ

Είδη κινήσεων

Β. Δυναμική του απόλυτα στερεού σώματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ

Κεντρομόλος δύναμη σώματος που εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Περιστροφική κίνηση στερεού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ

Έργο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ

Έργο ζεύγους

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ

Μηχανική ισχύς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΟΟ

Μηχανική ενέργεια

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Είδη κινήσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Ομαλή κυκλική κίνηση σημείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Ορμή – Αρχή διατηρήσεως της ορμής