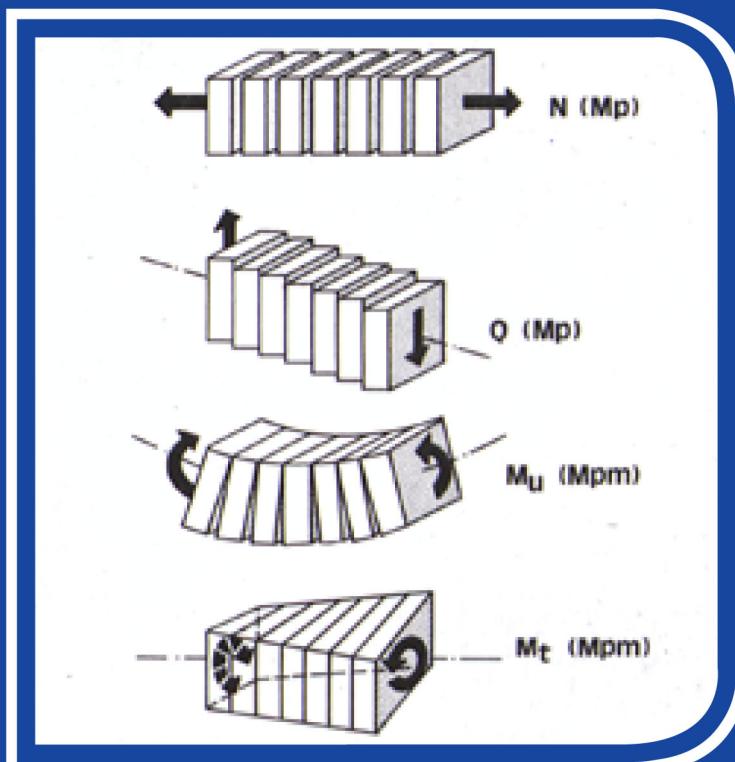




ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

Γεωργίου Ρ. Γκρος

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ.Π.





1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ο ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», πολύ νωρίς προέβλεψε και σχημάτισε την πεποίθηση ότι η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας, σε συνδυασμό με την εθνική αγωγή, θα ήταν αναγκαίος και αποφασιστικός παράγων για την πρόοδο του Έθνους μας.

Την πεποίθησή του αυτή ο Ευγενίδης εκδήλωσε με τη γενναιόφρονα πράξη ευεργεσίας, να κληροδοτήσει σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, το Φεβρουάριο του 1956 συστήθηκε το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου τη διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Το έργο του Ιδρύματος συνεχίζει από το 1981 ο κ. Νικόλαος Βερνίκος - Ευγενίδης.

Από το 1956 έως σήμερα η συμβολή του Ιδρύματος στην τεχνική εκπαίδευση πραγματοποιείται με διάφορες δραστηριότητες. Όμως απ' αυτές η σημαντικότερη, που κρίθηκε από την αρχή ως πρώτης ανάγκης, είναι η έκδοση βιβλίων για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Σχολών και Λυκείων.

Μέχρι σήμερα, με τη συνεργασία με τα Υπουργεία Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων και Εμπορικής Ναυτιλίας, εκδόθηκαν εκατοντάδες τόμοι βιβλίων, που έχουν διατεθεί σε πολλά εκατομμύρια αντίτυπα. Τα βιβλία αυτά κάλυπταν ή καλύπτουν ανάγκες των Κατωτέρων και Μέσων Τεχνικών Σχολών του Υπ. Παιδείας, των Σχολών του Οργανισμού Απασχολήσεως Εργατικού Δυναμικού (ΟΑΕΔ), των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων, των Τεχνικών Επαγγελματικών Σχολών και των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού.

Μοναδική φροντίδα του Ιδρύματος σ' αυτή την εκδοτική του προσπάθεια ήταν και είναι η συγγραφή και έκδοση βιβλίων ποιότητας, από ύποψη όχι μόνον επιστημονική, παιδαγωγική και γλωσσική, αλλά και ως προς την εμφάνιση, ώστε το βιβλίο να αγαπηθεί από τους μαθητές,

Για την επιστημονική και παιδαγωγική αρτιότητα των βιβλίων τα κείμενα υποβάλλονται σε πολλές επεξεργασίες και βελτιώνονται πριν από κάθε νέα έκδοση συμπληρούμενα καταλλήλως.

Ιδιαίτερη σημασία απέδωσε το Ίδρυμα από την αρχή στη γλωσσική διατύπωση των βιβλίων, γιατί πιστεύει ότι και τα τεχνικά βιβλία, όταν είναι γραμμένα σε γλώσσα σωστή και ομοιόμορφη αλλά και κατάλληλη για τη στάθμη των μαθητών, μπορούν να συμβάλλουν στη γλωσσική κατάρτιση των μαθητών.

Έτσι, με απόφαση που ίσχυσε ήδη από το 1956, όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Τεχνίτη, δηλαδή τα βιβλία για τις τότε Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, όπως αργότερα και για τις Σχολές του ΟΑΕΔ, ήταν γραμμένα σε γλώσσα δημοτική, με βάση τη γραμματική του Τριανταφυλλίδη, ενώ όλα τα άλλα τα βιβλία ήταν γραμμένα στην απλή καθαρεύουσα. Σήμερα ακολουθείται η γραμματική που διδάσκεται στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσεως. Η γλωσσική επεξεργασία των βιβλίων ανατίθε-

ται σε φιλολόγους του Ιδρύματος και έτσι εξασφαλίζεται η ενιαία σύνταξη και ορολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Η ποιότητα του χαρτιού, το είπερ ως των τυπογραφικών στοιχείων, τα σωστά σχήματα, η κάλαισθητη σελιδοποίηση, το εξώφυλλο και το μέγεθος του βιβλίου, περιλαμβάνονται και αυτά στις φροντίδες του Ιδρύματος και συμβάλλουν στη σωστή «λειτουργικότητα» των βιβλίων.

Το Ίδρυμα θεώρησε ότι είναι υποχρέωσή του, σύμφωνα με το πνεύμα του ιδρυτή του, να θέσῃ στη διάθεση του Κράτους όλη αυτή την πείρα του των 20 ετών, αναλαμβάνοντας το 1978 και την έκδοση των βιβλίων για τις νέες Τεχνικές Επαγγελματικές Σχολές και τα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια, σύμφωνα πάντοτε με τα εγκεκριμένα Αναλυτικά Προγράμματα του Π.Ι. και του ΥΠΕΠΘ.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Μιχαήλ Αγγελόπουλος, ομ. καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.

Αλέξανδρος Σταυρόπουλος, ομ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς,
Αντιπρόεδρος.

Ιωάννης Τεγόπουλος, καθηγητής ΕΜΠ.

Σταμάτης Παλαιοκρασάς, Ηλεκτρολόγος Μηχανικός, Σύμβουλος Παιδαγωγικού
Ινστιτούτου.

Λαρισαίος Γεώργιος, Δ/ντής Σπ. Δευτ. Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ.

Σύμβουλος εκδόσεων του Ιδρύματος **Κ.Α. Μανάφης**, καθηγ. Φιλ. Σχολής Παν/μίου
Αθηνών.

Γραμματέας της Επιτροπής, **Γεώργιος Ανδρεάκος**.

Διατελέσαντα μέλη ή σύμβουλοι της Επιτροπής

Γεώργιος Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, Αγγελος Καλογεράς (1957-1970)
Καθηγητής ΕΜΠ, Δημήτριος Νιάνιας (1957-1965) Καθηγητής ΕΜΠ, Μιχαήλ
Σπετσιέρης (1956-1959), Νικόλαος Βασιώτης (1960-1967), Θεόδωρος Κουζέλης
(1968-1976) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, Παναγιώτης Χατζηιωάννου (1977-1982) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ,
Αλέξανδρος· I. Παππάς (1955-1983) Καθηγητής ΕΜΠ, Χρυσόστομος Καβουνίδης
(1955-1984) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, Γεώργιος Ρούσσος (1970-1987) Χημ.-Μηχ. ΕΜΠ, Δρ.
Θεοδόσιος Παπαθεοδοσίου (1982-1984) Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας
Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ, Ιγνάτιος Χατζηευστρατίου (1985-1988) Μηχανολόγος,
Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαιδεύσεως ΥΠΕΠΘ, Γεώργιος Σταματίου
(1988-1990) Ηλεκτρολόγος ΕΜΠ, Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαιδεύσεως
ΥΠΕΠΘ, Σωτ. Γκλαβάς (1989-1993) Φιλόλογος, Δ/ντής Σπουδών Δευτεροβάθμιας



ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ρ. ΓΚΡΟΣ
ΔΡΟΣ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ
2002





ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗ ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΗ

Το νέο ευρύτερο αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας προβλέπει τη διδασκαλία της Αντοχής Υλικών στις Β' και Γ' τάξεις του Τεχνικού Λυκείου. Για το λόγο αυτό απαιτήθηκε η αναμόρφωση του περιεχομένου και η επέκταση κυρίως του Κεφαλαίου της Στατικής των ευθυγράμμων δοκών και των δικτυωμάτων.

Με την ευκαιρία αυτή προσαρμόσθηκε στις νέες επιστημονικές γνώσεις και τους τελευταίους κανονισμούς. Το παράρτημα χρειάσθηκε να αναθεωρηθεί και να εμπλουτισθεί έτσι, ώστε να παρέχει σε πυκνή μορφή τους τύπους υπολογισμού και τις τιμές που απαιτούνται για τη λύση των προβλημάτων κατά τη διάρκεια των σπουδών και στις εφαρμογές.

Και πάλι αναφέρεται ότι πρόκειται για διδακτικό βιβλίο στο οποίο η πραγμάτευση κάθε γνωστικού αντικειμένου πρέπει να πραγματοποιείται εκεί που πραγματικά χρειάζεται και εφαρμόζεται. Έτσι π.χ. η έννοια της ροπής αδρανείας αναφέρεται στο Κεφάλαιο «Κάμψη», επειδή σ' αυτήν τη θέση γίνεται πιο κατανοητή λόγω της άμεσης εφαρμογής της. Και πάλι τονίσθηκαν τα ουσιαστικά δεδομένα κάθε θέματος και η μαθηματική τους αφαίρεση χωρίς δύμας τη χρησιμοποίηση ανωτέρων μαθηματικών.

Η ενδιάθετη επιθυμία κάθε μηχανικού της πράξεως για δύο το δυνατό συντομότερη και έτσι εποπτικότερη παρουσίαση των θεωρητικών βάσεων του υπολογισμού, κρύβει πάντοτε τον κίνδυνο ασαφειών και ανεπιτρέπτων απλουστεύσεων. Γι' αυτό τηρήθηκε ο κανόνας «τόσο πολύ δύο είναι απαραίτητο και τόσο λίγο δύο είναι δυνατό».

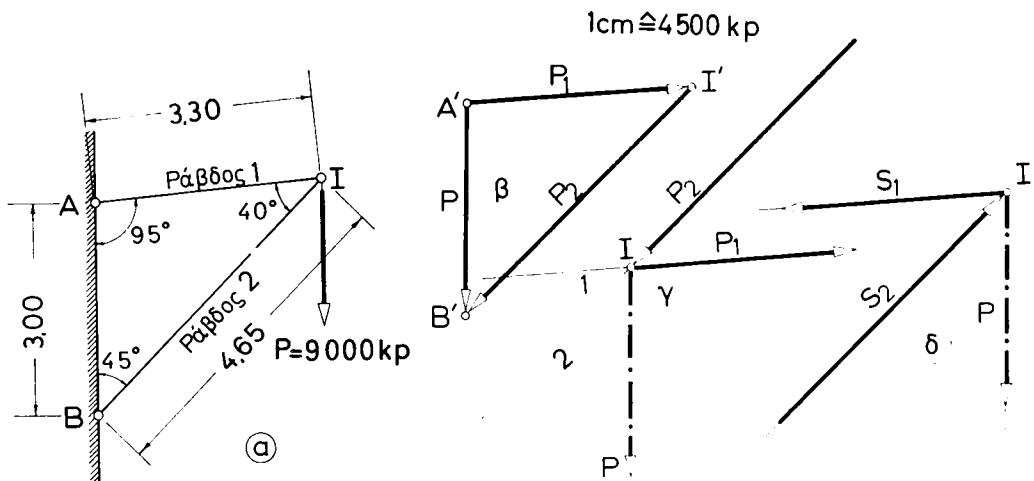
Ο συγγραφέας



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Ας θεωρήσομε το σύστημα των δύο ράβδων του σχήματος 1ο.δηλαδή το σύστημα δύο απλών στοιχείων κατασκευής 1 και 2 για την ανάληψη της δυνάμεως P και τη μετάδοσή της στις στηρίξεις A και B (σχ. 1o). Όπως βλέπομε οι ράβδοι συνδέονται με μια άρθρωση I, που τη λέμε κόμβο, και δημιουργούν το απλό δικτύωμα. Η Στατική μας διδάσκει τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων και των αντιδράσεων στα A και B.



Σχ. 10.

Στη Στατική θεωρούμε το δικτύωμα αυτό ως σωμα στερεό, απαραμόρφωτο· δεν ενδιαφερόμαστε για το αν η κάθε ράβδος μπορεί να αναλάβει με επαρκή ασφάλεια, χωρίς δηλαδή καταστροφή ή απαράδεκτη παραμόρφωση, την εσωτερική δύναμη που αναπτύσσεται, και δεν υπολογίζομε τις παραμορφώσεις του δικτύουματος (μηκύνσεις ράβδων και μετατοπίσεις κόμβων).

Η Αντοχή των Υλικών αξιοποιεί τα δεδομένα της Στατικής και, με γνωστές τις εσωτερικές δυνάμεις, μελετά τον τρόπο υπολογισμού των διαστάσεων (πλάτος, πάχος κλπ.), που πρέπει να έχει κάθε ράβδος, για να μπορεί με ασφάλεια να αναλάβει την εσωτερική δύναμη που υπολογίσθηκε. Στη συνέχεια η Αντοχή των Υλικών διδάσκει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζομε τις παραμοφώσεις των διαφόρων επί μέρους στοιχείων, που προκαλούνται από τις δυνάμεις, που αναπτύσσονται ή τη μεταβολή της θερμοκρασίας.

Έτσι π.χ. με τις μεθόδους της Αντοχής θα υπολογίσουμε ότι η ράβδος 1 του δικτυώματος πρέπει να αποτελείται από δύο ισοσκελή γωνιακά ελάσματα 50/4, η

ράβδος 2 από δύο ισοσκελή γωνιακά 100/10 κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτόν εκλέγομε για κάθε ράβδο εκείνο το γωνιακό που χρειάζεται, ούτε μεγαλύτερο, γιατί πληρώνομε πιο πολύ το χάλυβα και επιβαρύνομε άσκοπα την κατασκευή, ούτε μικρότερο, γιατί θα κινδυνεύσει να καταστραφεί ή να υποστεί απαράδεκτες παραμορφώσεις.

Ένα άλλο πιο περίπλοκο παράδειγμα είναι η μελέτη της κατασκευής πλοίου. Θα πρέπει ο μελετητής, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που διδάσκει η Αντοχή, να εκλέξει για κάθε θέση τις κατάλληλες διαστάσεις (πάχος λαμαρινών, διατομές κλπ.), ώστε το σύνολο του πλοίου να είναι οικονομικό στην κατασκευή (με την επιλογή μικρών διαστάσεων) χωρίς να παύσει να είναι ασφαλές.

Βλέπομε λοιπόν ότι η Αντοχή των Υλικών παίρνει ως δεδομένα από τη Στατική τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές, οι οποίες προκαλούνται από τα φορτία που αναλαμβάνει ο φορέας, και με βάση αυτές επιλύει τα ακόλουθα προβλήματα:

- α) Τον καθορισμό των διαστάσεων της διατομής έτσι, ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος θραύσεως του φορέα, όπου βεβαίως λαμβάνονται υπ' όψη οι ιδιότητες αντοχής του υλικού, που χρησιμοποιείται.
 - β) Τον υπολογισμό των τάσεων όταν η διατομή του φορέα είναι γνωστή. Οι τάσεις αυτές, δηλαδή οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας της διατομής, πρέπει να είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες προς τις *επιτρεπόμενες* για το υλικό του φορέα.
 - γ) Την εύρεση των παραμορφώσεων του φορέα, που δεν πρέπει να είναι τόσο μεγάλες, ώστε να παρενοχλεύται η χρησιμοποίηση.
- Η Αντοχή των Υλικών παρέχει επομένως στον Τεχνικό τη δυνατότητα να μελετά ασφαλείς και οικονομικές κατασκευές.

Συμπέρασμα.

Αντοχή των Υλικών είναι το κεφάλαιο της Μηχανικής που μελετά:

- α) Τις διαστάσεις του φορέα έτσι ώστε να αναλαμβάνει με ασφάλεια δεδομένα φορτία.
- β) Το μέγεθος των φορτίων που αναλαμβάνει με ασφάλεια φορέας με γνωστές διαστάσεις και γενικά την επιπόνηση που του γίνεται.
- γ) Τις παραμορφώσεις που γίνονται στο φορέα κατά την ανάληψη των φορτίων.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Εξωτερικές - Εσωτερικές δυνάμεις - Εντατική κατάσταση - Τάση - Παραμόρφωση.

Είναι αυτονόητο ότι παντού, όπου υπάρχουν και σχεδιάζονται δυνάμεις, υπάρχει πάντοτε ένα σώμα, πάνω στο οποίο ενεργούν. Οι φορτίσεις και οι αντιδράσεις στηρίζεων, που εξασφαλίζουν την ισορροπία του σώματος, αποτελούν **τις εξωτερικές δυνάμεις**. Η δράση των δυνάμεων αυτών έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη στο σώμα **εσωτερικών δυνάμεων** και την πρόκληση **παραμορφώσεων**.

Στο στύλο του σχήματος 1.1 ενεργεί η εξωτερική δύναμη F , που διαβιβάζεται, μέσα από το στύλο, στο θεμέλιό του. Ζητούνται οι δυνάμεις, που αναπτύσσονται στη διατομή αα του στύλου.

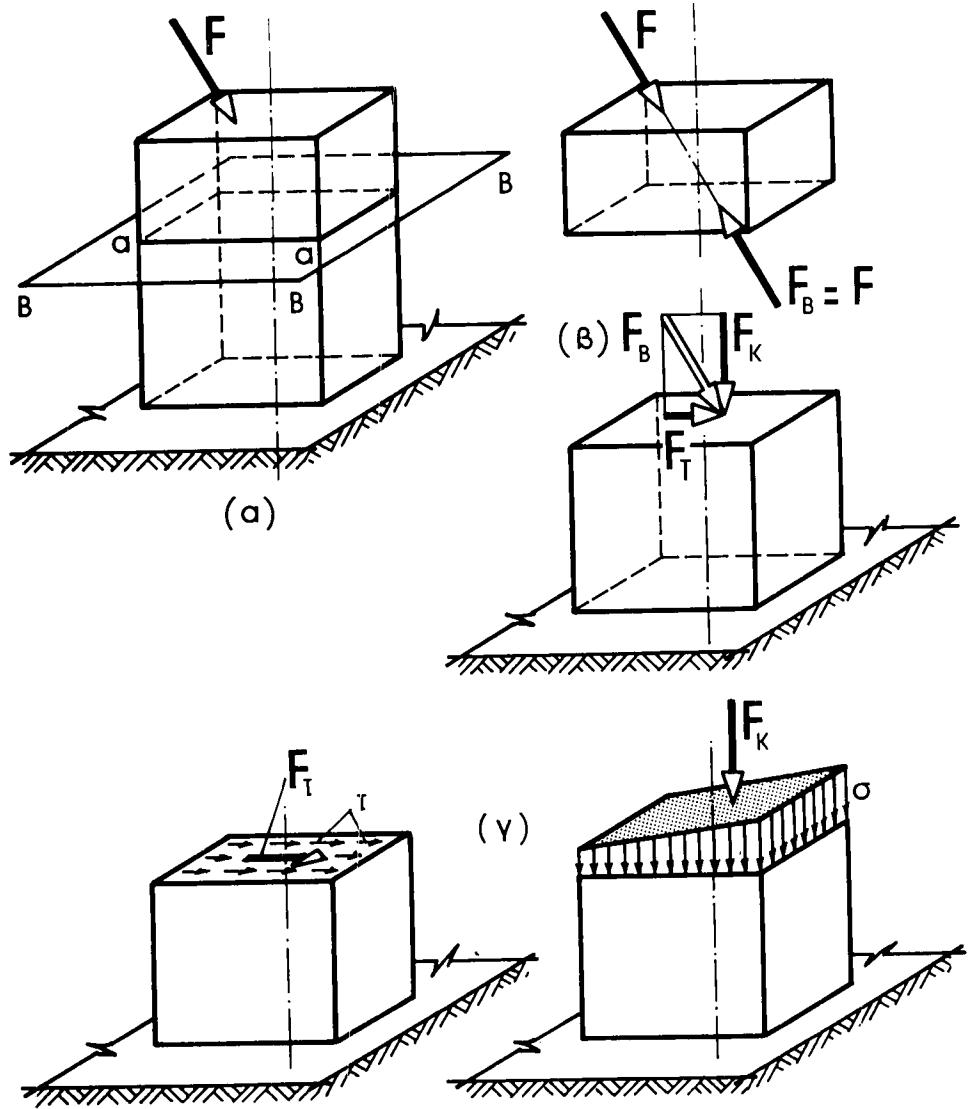
Έστω ότι γίνεται μια νοητή τομή του στύλου, **κάθετη στον άξονά του (διατομή)**, στη θέση αα και θεωρείται ότι το πάνω κομμάτι αποχωρίζεται, δηλαδή γίνεται ελεύθερος φορέας. Οι συνθήκες ισορροπίας δίνουν ότι στη διατομή αα πρέπει να ενεργεί μια δύναμη ίση και αντίφορη με την F , που μπορεί, κατά τα γνωστά, να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια κάθετη F_K και μια πάνω στο επίπεδο αα, την F_T [σχ. 1.1(a) και σχ. 1.1(β)]. Οι δυνάμεις F_K και F_T είναι **εσωτερικές** του στύλου, γιατί ακριβώς αναπτύσσονται στο εσωτερικό του. Είναι φανερό ότι η δύναμη F δεν μεταδίδεται μέσα στο στύλο κατά μήκος μιας γραμμής, αλλά κατανέμεται μέσα σε όλη τη μάζα του στύλου και καταπονεί διαφορετικά κάθε τμήμα του. Αυτό σημαίνει ότι οι δυνάμεις F_K και F_T δεν είναι παρά οι συνισταμένες της καθολικής φορτίσεως όλης της διατομής [σχ. 1.1(γ)]. Το μέγεθος αυτής της φορτίσεως καθορίζεται από τη δύναμη που αναλαμβάνει κάθε στοιχείο της διατομής, δηλαδή από το πηλίκο δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, που καλείται **τάση** και μπορεί να μεταβάλλεται από το ένα σημείο στο άλλο.

Η τάση που προκύπτει από την κάθετη στη διατομή δύναμη F_K ονομάζεται **ορθή τάση** και ο γενικός της ορισμός είναι:

$$\sigma = \frac{dF_K}{dA} \quad (1.1)$$

ενώ ανάλογα η τάση, που προκαλείται από την εφαπτομενική δύναμη F_T , ονομάζεται **διατμητική** με γενικό ορισμό:

$$\tau = \frac{dF_T}{dA} \quad (1.2)$$



Σχ. 1.1.

Αν οι τάσεις ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένες στη διατομή θα προέκυπτε:

$$\sigma = \frac{F_K}{A} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{F_T}{A} \quad (1.3)$$

Η καταπόνηση του υλικού, που προκύπτει από οποιοδήποτε είδος φορτίσεως, μπορεί να αναχθεί στις δύο τάσεις σ και τ .

Η επιβολή εξωτερικών δυνάμεων πάνω σε ένα σώμα έχει ως συνέπεια την πρόκληση παραμορφώσεων. Οποιουδήποτε μεγέθους και αν είναι η δύναμη,

προκαλεί οπωσδήποτε κάποια παραμόρφωση, ακόμη και όταν δεν τη βλέπουμε με γυμνό μάτι ή δεν μπορούμε να τη μετρήσουμε με τα συνηθισμένα μέσα, γιατί απόλυτα απαραμόρφωτο σώμα, όπως το υποθέσαμε στη Στατική, δεν υπάρχει στη φύση.

1.2 Ελαστικότητα - Ελαστικά και πλαστικά σώματα.

Οι παραμορφώσεις (δηλαδή ο μετασχηματισμός) ενός σώματος διακρίνονται σε:

- a) **Παροδικές**, που εξαφανίζονται μόλις παύσει η ενέργεια των δυνάμεων, που τις προκάλεσαν. Οι παραμορφώσεις αυτές ονομάζονται **ελαστικές** και λέμε ότι στο σώμα αυτό δεν ξεπεράστηκε το **όριο ελαστικότητας**.
- β) **Μόνιμες ή πλαστικές**, που δεν εξαφανίζονται μόλις παύσει να ενεργεί η δύναμη. Στην περίπτωση αυτή η ολική παραμόρφωση αποτελείται από ένα μέρος, που είναι ελαστικό και εξαφανίζεται με την αποφόρτιση, και ένα μέρος, που είναι πλαστικό και παραμένει στο σώμα.

Η ιδιότητα του σώματος να επανέρχεται στην αρχική μορφή και διαστάσεις μετά την αποφόρτιση ονομάζεται **ελαστικότητα** και εξαρτάται από:

- Το υλικό, από το οποίο αποτελείται το σώμα, π.χ. χάλυβας, αλουμίνιο, ξύλο κλπ.
- Τις διαστάσεις του σώματος.
- Το μέγεθος των δυνάμεων που επιβάλλονται.

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε τους νόμους που συνδέουν τους τρεις αυτούς παράγοντες, ώστε να μπορούμε να υπολογίζομε το μέγεθος της παραμορφώσεως.

Στην πραγματικότητα απόλυτα ελαστικά υλικά δεν υπάρχουν, γιατί μετά την αποφόρτιση πάντοτε μένει μια, έστω και πολύ μικρή, πλαστική παραμόρφωση. Σωστότερο συνεπώς είναι να μιλούμε για **ελαστοπλαστικά** υλικά.

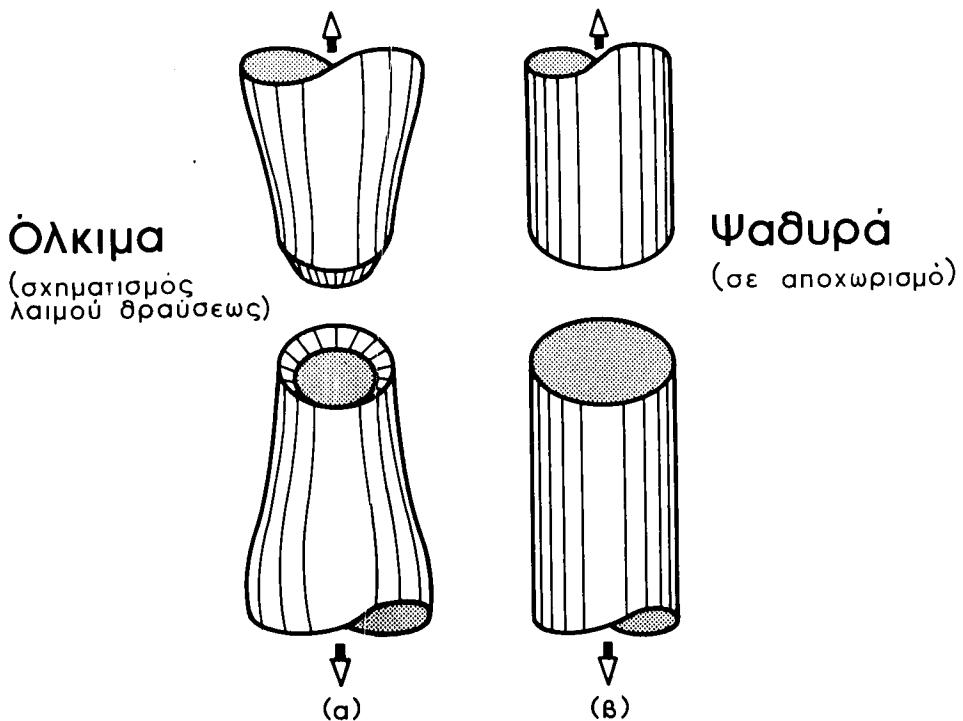
1.3 Όλκιμα και ψαθυρά υλικά - Θραύση.

Τα υλικά που εμφανίζουν σημαντικές παραμορφώσεις μέχρι τη θραύση ονομάζονται **όλκιμα**. Τέτοια είναι ο κοινός δομικός χάλυβας, το αλουμίνιο, ο χαλκός κ.ά. [σχ. 1.3(a)]. Αντίθετα **ψαθυρά** ονομάζονται τα υλικά που εμφανίζουν πολύ μικρές παραμορφώσεις μέχρι τη θραύση. Τέτοια είναι ο χυτοσίδηρος, το σκυρόδερμα, οι λίθοι κ.ά. [σχ. 1.3(b)]. Στα ψαθυρά κατά κανόνα η αντοχή θραύσεως σε θλίψη είναι πολλαπλάσια της αντοχής σε εφελκυσμό.

1.4 Σπουδαιότερες καταπονήσεις.

Ας θεωρήσουμε μια ράβδο σταθερής διατομής, την οποία φορτίζομε κατά τον άξονά της με δύναμη F (σχ. 1.4a). Η εσωτερική δύναμη, που αναπτύσσεται σε κάθε διατομή της ράβδου, είναι $N=F$, εφελκυστική.

Ποια είναι τα αποτελέσματα αυτής της φορτίσεως για ένα ελαστικό υλικό;



Σχ. 1.3.

Παρατηρούμε ότι η ράβδος μηκύνεται κατά τη διεύθυνση της φορτίσεως και βραχύνεται εγκάρσια. Η μεταβολή αυτή της μορφής δεν εξαρτάται μόνο από το μήκος, τη διατομή της ράβδου και το μέγεθος της δυνάμεως, αλλά και από το υλικό.

Αν λάβομε την ίδια ράβδο του σχήματος 1.4α και τη μεταβάλομε σε αμφιέρειστη δοκό ή πρόβολο με ένα συγκεντρωμένο φορτίο (σχ. 1.4β) θα παρατηρήσουμε άλλο είδος παραμορφώσεως. Η δοκός θα παραμορφωθεί κατά τη διεύθυνση των επιβαλλομένων φορτίων, ενώ ο άξονας της ράβδου θα καμφθεί. Για το λόγο αυτό η καταπόνηση λέγεται πλέον κάμψη.

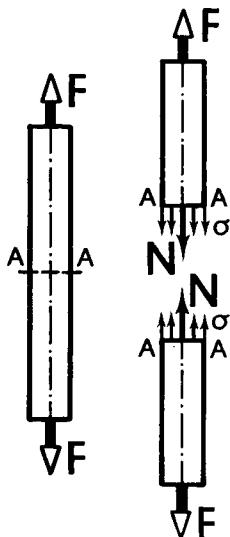
Τα δυνατά είδη απλών επιπονήσεων μιας ράβδου μπορούν να συνοψισθούν στα ακόλουθα (σχ. 1.4γ):

— Εφελκυσμός.

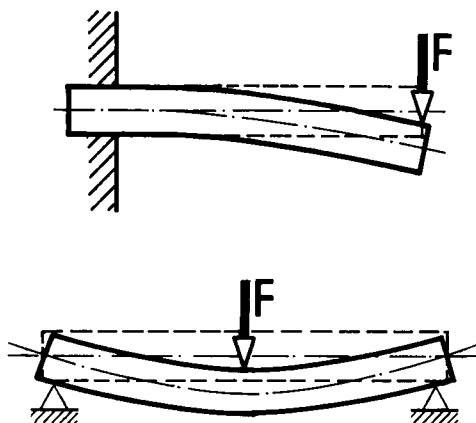
Οι δυνάμεις ενεργούν παράλληλα προς τον άξονά της ράβδου σε όλα τα στοιχεία επιφάνειας της διατομής. Η συνισταμένη τους Ν διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής, είναι εφελκυστική και προκαλεί επιμήκυνση της ράβδου, κατά την ευθεία ενέργειάς της, και εγκάρσια βράχυνση.

— Θλίψη.

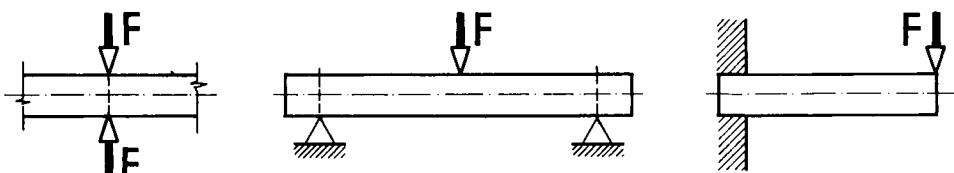
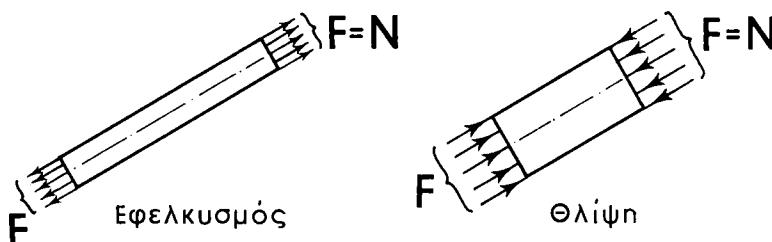
Αναλογικά αλλά αντίθετα με τα προηγούμενα η συνισταμένη είναι θλιπτική και προκαλεί διαμήκη βράχυνση και εγκάρσια διόγκωση.



Σχ. 1.4α.

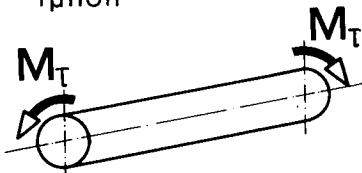


Σχ. 1.4β.

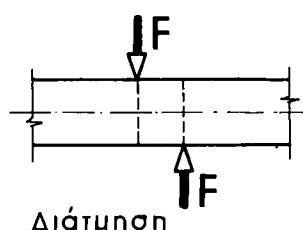


Τμήση

Κάμψη



Στρέψη



Σχ. 1.4γ.

— Τμήση.

Οι δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον áξονα της ράβδου, δρουν σχεδόν πάνω στην íδια ευθεία ενέργειας, είναι αντίφορες και προκαλούν ολίσθηση των διατομών.

— Κάμψη.

Οι δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον áξονα της ράβδου. Αναπτύσσονται ροπές κάμψεως και προκαλείται καμπύλωση της ράβδου.

— Διάτμηση.

Οι δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον áξονα της ράβδου, είναι αντίφορες, αλλά δεν δρουν πάνω στην íδια ευθεία ενέργειας και προκαλούν ολίσθηση των διατομών.

— Στρέψη.

Οι δυνάμεις ενεργούν στα επίπεδα των διατομών των μετωπικών πλευρών, προκαλείται ως προς τον áξονα της ράβδου ροπή στρέψεως και στροφή των διατομών μεταξύ τους.

1.5 Η έννοια της τάσεως.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.1, οι εσωτερικές δυνάμεις κατανέμονται συνεχώς πάνω σε όλη τη διατομή [σχ. 1.1(γ)]. Έστω τώρα ράβδος από χάλυβα με τετραγωνική διατομή και διαστάσεις $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$ που την υποβάλλομε σε εφελκυσμό με ανάρτηση φορτίου βάρους $B = 840 \text{ kp}$ (σχ. 1.5α). Η εσωτερική δύναμη, που αναπτύσσεται σε μια **διατομή** (κάθετη τομή στον áξονα) της ράβδου, είναι $N = 840 \text{ kp}$. Χωρίζομε την ορθή τομή (διατομή) της ράβδου σε τέσσερα ίσα τετράγωνα με πλευρές $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ (σχ. 1.5β). Αναλύομε την εσωτερική δύναμη N σε τέσσερις δυνάμεις $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N/4 = 210 \text{ kp}$, κάθε μια από τις οποίες ασκείται στο κέντρο βάρους του τετραγωνιδίου με διαστάσεις $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Τη δύναμη των 210 kp , που ασκείται σε κάθε τετραγωνικό εκατοστό της διατομής, δηλαδή στη μονάδα εμβαδού, την ονομάζουμε **τάση της ράβδου**. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτή ασκείται κάθετα (ορθά) στη διατομή και είναι τάση εφελκυσμού.

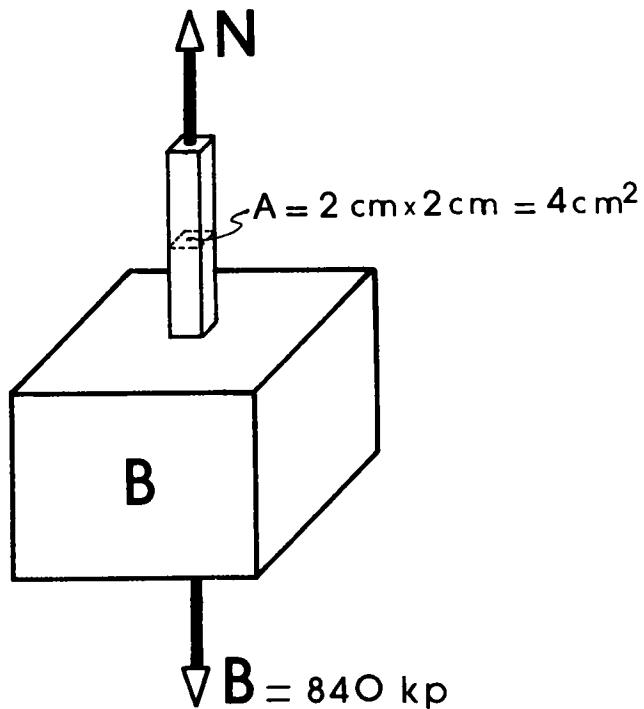
Η τάση έχει γενικά τα χαρακτηριστικά της δυνάμεως, με μέγεθος βέβαια δύναμη / επιφάνεια. Μπορεί συνεπώς να αναλυθεί σε συνιστώσες. Η ανάλυση αυτή γίνεται σε τάσεις κάθετες (ορθές) στη διατομή (βλέπε προηγούμενο παράδειγμα) και τάσεις διατμητικές (εφαπτομενικές) της διατομής, που συμβολίζονται διεθνώς αντίστοιχα με τα ελληνικά γράμματα σ και τ (σχ. 1.5γ) (βλέπε και παράγραφο 1.1). Γενικά οι τάσεις σ και τ μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο της διατομής.

a) Τάσεις - μονάδες.

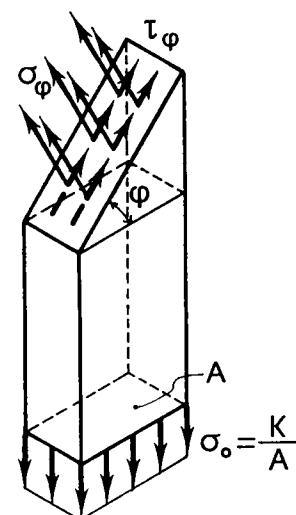
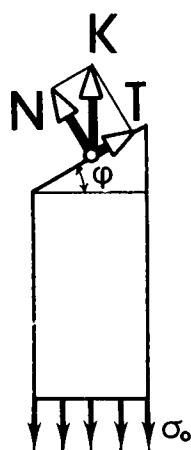
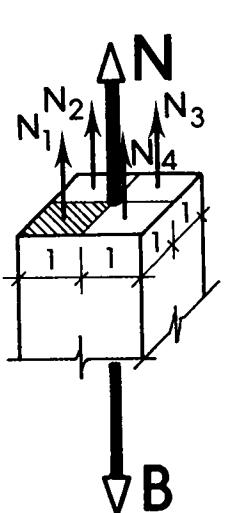
Αν συμβολίσουμε με A το εμβαδόν της διατομής της ράβδου (σχ. 1.5β) τότε $A = 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$ και η σχέση $N/A = 210$ γράφεται συμβολικά $N/A = \sigma$.

Με τα αριθμητικά δεδομένα του παραδείγματος είναι:

$$\sigma = \frac{840 \text{ kp}}{4 \text{ cm}^2} = \frac{630 \text{ kp}}{3 \text{ cm}^2} = \frac{420 \text{ kp}}{2 \text{ cm}^2} = \frac{210 \text{ kp}}{1 \text{ cm}^2} = 210 \text{ kp/cm}^2$$



$$\Sigma x. 1.5\alpha.$$



$$\Sigma x. 1.5\beta.$$

$$\Sigma x. 1.5\gamma.$$

Στην πράξη η τάση μετρείται σε μονάδες δυνάμεως διαιρεμένες διά της επιφάνειας, δηλαδή τάση = δύναμη/επιφάνεια. Επομένως οι διαστάσεις της τάσεως ή και οι μονάδες μετρήσεώς της είναι kp/mm², kp/cm², Mp/m², και με τις νεώτερες διεθνείς μονάδες N/mm² και MN/m².

Παράδειγμα.

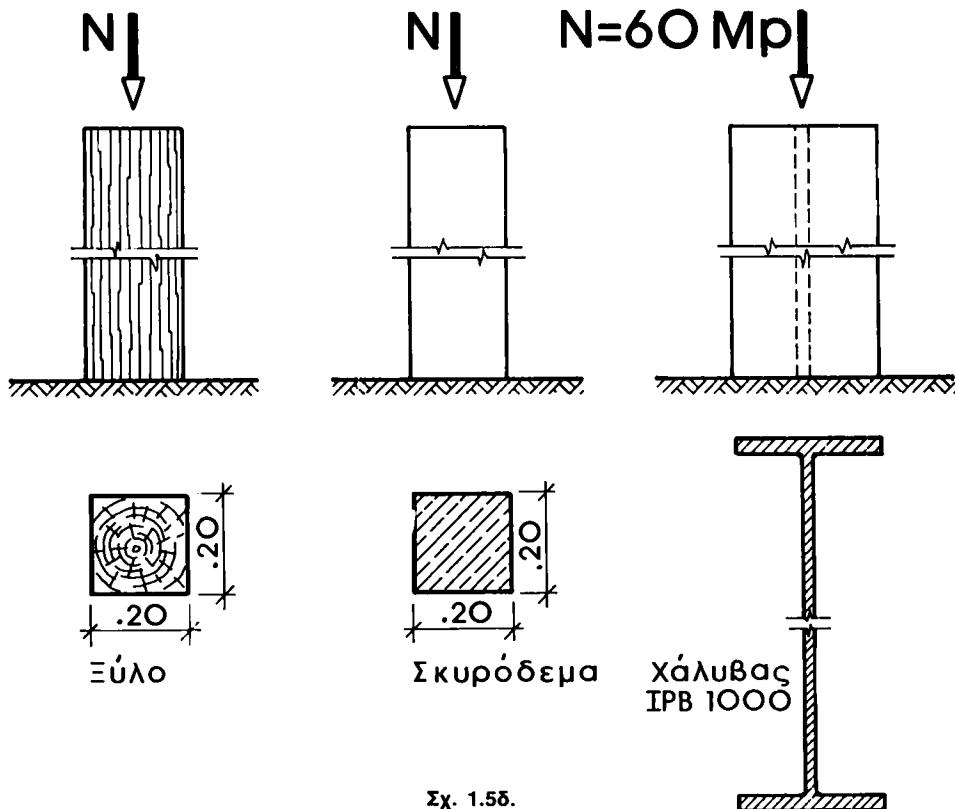
Δίνονται τρία υποστυλώματα από διαφορετικά υλικά:

— Ξύλο, διαστάσεων 20/20 cm.

— Σκυρόδεμα, επίστρης 20/20 cm.

— Χαλύβδινο όλασμα IPB-1000 (σχ. 1.5δ).

Και τα τρία έχουν την ίδια διατομή A=400 cm².



Λύση.

Δεχόμαστε ότι και τα τρία φορτίζονται αξονικά με το ίδιο φορτίο $F = N = 60000 \text{ kp}$, που κατανέμεται ομοιόμορφα στη διατομή. Η ορθή τάση, που αναπτύσσεται σε κάθε cm^2 της διατομής, είναι:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{60000 \text{ kp}}{400 \text{ cm}^2} = 150 \text{ kp/cm}^2$$

και είναι ανεξάρτητη από το υλικό του υποστυλώματος.

Αποτελεί βεβαίως άλλο θέμα, αν το υλικό μπορεί να αναλάβει αυτή την τάση και, όπως θα δούμε, η τάση αυτή είναι υψηλή για το ξύλο και το σκυρόδεμα και, αντίθετα, χαμηλή για το χάλυβα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΞΟΝΙΚΟΣ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΛΙΨΗ

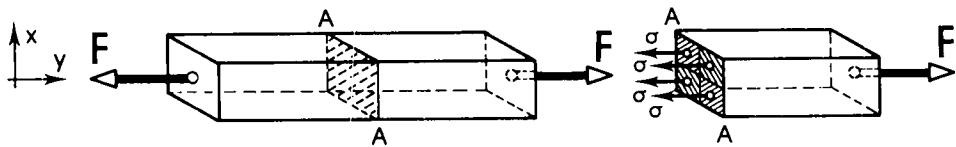
2.1 Γενικά - Παραδείγματα.

Κατά τον άξονα μιας πρισματικής ράβδου ενεργεί η δύναμη F (σχ. 2.1a). Για να υπολογισθεί η τάση στη διατομή AA θεωρούμε ότι με μια τομή χωρίσαμε τη ράβδο σε δύο μέρη (ελεύθερος φορέας). Η συνθήκη ισορροπίας $\Sigma y = 0$ δίνει:

$$\Sigma y = -\sigma A + F = 0$$

απ' όπου λαμβάνεται η τάση:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$



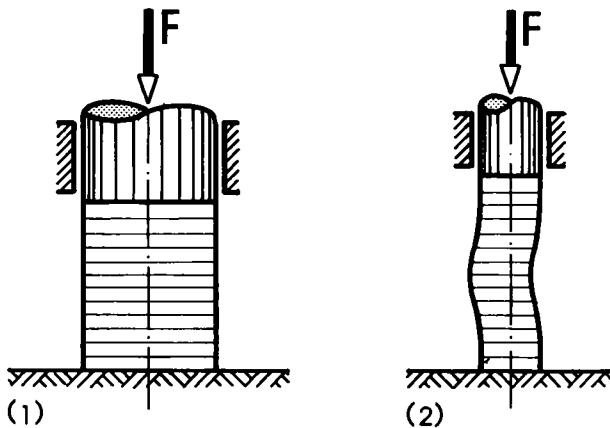
Σχ. 2.1a.

Για να ισχύει η εξίσωση αυτή προϋποτίθεται ότι:

- Ο άξονας της ράβδου είναι ευθύγραμμος.
 - Η ευθεία ενέργειας της δυνάμεως συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα της ράβδου.
 - Οι τάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στη διατομή.
 - Στα θλιβόμενα δομικά στοιχεία δεν υπάρχει κίνδυνος λυγισμού (σχ. 2.1β) (περισσότερα γι' αυτό θα αναφέρομε στο Κεφάλαιο 3 του Δευτέρου Μέρους).
- Σε ράβδους με μεταβλητή διατομή (σχ. 2.1γ) ισχύει:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{\min}} \quad (2.2)$$

Την εφελκυστική τάση συμφωνούμε να θεωρούμε θετική (+), γιατί προκαλεί



Σχ. 2.1β.

αύξηση του μήκους της ράβδου, και αντίστοιχα τη θλιπτική τάση αρνητική (—). Δηλαδή ορθή εφελκυστική δύναμη (+) προκαλεί τάσεις εφελκυσμού (θετικές), ενώ ορθή θλιπτική δύναμη (—) προκαλεί τάσεις θλίψεως (αρνητικές).

Τις τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως ονομάζομε **ορθές τάσεις**.

Ο τύπος (2.1) μπορεί να γραφεί με τρεις μορφές και επομένως να χρησιμοποιηθεί για τρεις σκοπούς:

a) **Διαστασιολόγηση**, όπου δίνονται η δύναμη F και η επιτρεπόμενη τάση (περισσότερα στην παράγραφο 2.4) και ζητείται η επιφάνεια A .

$$A = \frac{F}{\sigma_{\text{επ}}}$$

b) **Έλεγχο τάσεων**, όπου δίνονται το F και A και ζητείται η τάση που αναπτύσσεται:

$$\sigma_{\text{υπ.}} = \frac{F_{\text{υπ}}}{A_{\text{υπ}}} (\leq \sigma_{\text{επ}})$$

c) **Iκανότητα φορτίσεως**, όπου δίνονται το A και η επιτρεπόμενη τάση και ζητείται η δύναμη F που μπορεί να αναληφθεί:

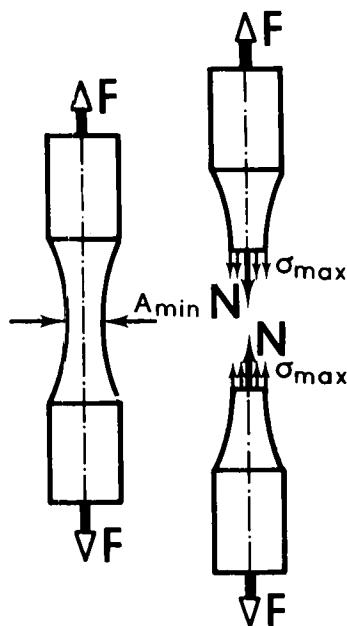
$$F_{\text{max}} = \sigma_{\text{επ}} \cdot A_{\text{υπ}}$$

Παράδειγμα 1.

Εφαρμογή του τύπου:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{έλεγχος τάσεων})$$

Χαλύβδινη ράβδος με ορθογωνική διατομή $A = 2,5 \times 3,0 = 7,5 \text{ cm}^2$, εφελκύεται με δύναμη $F = 1200 \text{ kp}$. Ζητείται η εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται σε μια διατομή της ράβδου.



Σχ. 2.1γ.

Λύση.

Από τον τύπο έχομε:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1200 \text{ kp}}{7,5 \text{ cm}^2} = 160 \text{ kp/cm}^2$$

Στην περίπτωση αυτή βλέπομε ότι αν και η δύναμη $F = 1200 \text{ kp}$ είναι μεγαλύτερη από τα 840 kp του παραδείγματος της παραγράφου 1.5, η τάση που αναπτύσσεται $\sigma = 160 \text{ kp/cm}^2$ είναι αρκετά μικρότερη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τετραγωνικό εκατοστό της διατομής αναλαμβάνει μικρότερη δύναμη, άρα το υλικό καταπονείται λιγότερο.

Για να βρούμε λοιπόν αν μια ράβδος που εφελκύεται καταπονείται πολύ ή λίγο δεν αρκεί μόνο το μέγεθος της εξωτερικής δυνάμεως, αλλά χρειάζεται και το εμβαδόν της διατομής.

Παράδειγμα 2.

Εφαρμογή του τύπου $F = \sigma \cdot A$ (ικανότητα φορτίσεως)

Χαλύβδινη ράβδος με τετραγωνική διατομή πλευράς $1,5 \text{ cm}$, εφελκύεται με δύναμη F . Ζητείται το μέγεθος της δυνάμεως F για να αναπτυχθεί στη διατομή της ράβδου τάση $\sigma = 1600 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

Πρώτα βρίσκομε το εμβαδόν της διατομής:

$$A = 1,5 \times 1,5 = 2,25 \text{ cm}^2$$

Από τον τύπο έχουμε $F = \sigma \cdot A = 1600 \text{ kp/cm}^2 \times 2,25 \text{ cm}^2 = 3600 \text{ kp}$. Άρα η δύναμη, που αναλαμβάνεται, από τη ράβδο είναι 3600 kp. Είναι προφανές ότι για μικρότερη δύναμη, π.χ. $F = 1800 \text{ kp}$, η τάση που αναπτύσσεται είναι μικρότερη από 1600 kp/cm^2 , δηλαδή:

$$\sigma = \frac{1800 \text{ kp}}{2,25 \text{ cm}^2} = 800 \text{ kp/cm}^2$$

Παράδειγμα 3.

$$\text{Εφαρμογή του τύπου: } A = \frac{F}{\sigma} \text{ (διαστασιολόγηση)}$$

Χαλύβδινη ράβδος με κυκλική διατομή πρόκειται να αναλάβει δύναμη $F = 4000 \text{ kp}$. Ζητείται η διάμετρος της ράβδου έτσι, ώστε η τάση που αναπτύσσεται να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την επιτρεπόμενη $\sigma_{\text{επ}} = 1600 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

$$\text{Από τον τύπο } A_{\text{απ}} = \frac{F_{\text{υπ}}}{\sigma_{\text{επ}}} \quad \text{βρίσκομε} \quad A_{\text{απ}} = \frac{4000 \text{ kp}}{1600 \text{ kp/cm}^2} = 2,5 \text{ cm}^2$$

δηλαδή η ράβδος πρέπει να έχει εμβαδόν $2,5 \text{ cm}^2$.

Από τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του κύκλου συναρτήσει της διαμέτρου έχουμε:

$$A_{\text{απ}} = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{ή} \quad d^2 = \frac{4A}{\pi}$$

και στην προκειμένη περίπτωση:

$$d = \sqrt{\frac{4 \times 2,5}{3,14}} = 1,78 \text{ cm}$$

Στην πράξη όμως δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η διάμετρος αυτή, επειδή στο εμπόριο υπάρχουν στρογγυλές ράβδοι με διάμετρο 16 και 18 mm, δηλαδή 1,6 και 1,8 cm, μεταξύ δε αυτών βρίσκεται η απαιτούμενη $d = 1,78 \text{ cm}$. Άρα υπάρχει εδώ το αντίστροφο πρόβλημα του παραδείγματος 2, ποια διάμετρο θα εκλέξουμε για να έχουμε τάση μικρότερη από 1600 kp/cm^2 και ποια θα είναι αυτή η τάση. Είναι ευνόητο ότι θα πρέπει να εκλέξουμε τη μεγαλύτερη διάμετρο $d = 1,8 \text{ cm}$ οπότε $A = \pi d^2 / 4 = 2,54 \text{ cm}^2$ και η τάση που αναπτύσσεται λόγω της δυνάμεως $F = 4000 \text{ kp}$ είναι:

$$\sigma = \frac{4000 \text{ kp}}{2,54 \text{ cm}^2} = 1575 \text{ kp/cm}^2 < 1600 \text{ kp/cm}^2$$

ενώ αν εκλέξουμε $d = 1,6 \text{ cm}$ έχουμε:

$$A = \frac{3,14 \times (1,6)^2}{4} \approx 2,01 \text{ cm}^2$$

$$\text{και η τάση που αναπτύσσεται είναι: } \sigma = \frac{4000 \text{ kp}}{2,01 \text{ cm}^2} \approx 1990 \text{ kp/cm}^2 > 1600 \text{ kp/cm}^2$$

δηλαδή μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη.

Άρα εκλέγομε $d = 1,8 \text{ cm}$.

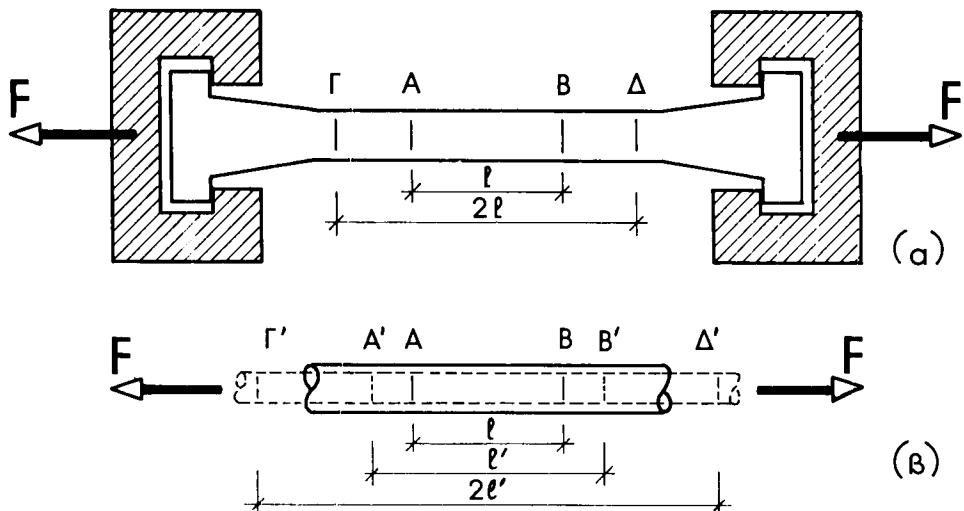
2.2 Πείραμα εφελκυσμού - Νόμος του Hooke.

Για να διαπιστωθεί η αντοχή των υλικών πρέπει να γίνει πείραμα. Πρέπει π.χ. κάποιος να εφελκύσει μία χαλύβδινη ράβδο διατομής $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$ με δύναμη $F = 840 \text{ kp}$ και να μετρήσει ότι τα 100 cm μήκους της ράβδου μηκύνθηκαν κατά $0,01 \text{ cm}$, για να μπορούμε να προβλέψουμε ότι τα δύο μέτρα μήκους της ράβδου θα μηκυνθούν περισσότερο.

Στη συνέχεια πρέπει να εφελκύσει τη ράβδο ώστου να τη θραύσει και να μετρήσει φορτίο θραύσεως $F_0 = 15000 \text{ kp}$, ώστε να γνωρίζουμε ότι χρησιμοποιώντας μία ράβδο διατομής $2 \times 2 \text{ cm}$ για ανάρτηση φορτίου 840 kp έχουμε πολύ μεγάλη ασφάλεια.

Θεμελιώδες για την αντοχή των υλικών είναι το πείραμα του εφελκυσμού, γι' αυτό και περιγράφεται διεξοδικά.

Παίρνουμε χαλύβδινη κυλινδρική ράβδο, έστω από χάλυβα κατηγορίας 37 (St 37), διατομής A, η οποία στα άκρα της έχει διευρύνσεις, και αφού τοποθετήσουμε τις διευρύνσεις μέσα στις σιαγόνες μιαδις ειδικής μηχανής εφελκυσμού, αρχίζουμε να εφελκύουμε τη ράβδο (την οποία ονομάζουμε **δοκίμιο**) με δύναμη F, που αυξάνει προοδευτικά [σχ. 2.2a(a)].



Σχ. 2.2a.

Προηγουμένως έχουμε χαράξει τη ράβδο στα σημεία, A, B που απέχουν μεταξύ τους απόσταση l . Σε κάθε αύξηση του φορτίου F, μετρούμε τη νέα απόσταση l' με ειδικό μικρόμετρο. Κατά την πορεία του πειράματος παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- 1) Η επιμήκυνση $\Delta l = l' - l$ [σχ. 2.2α(β)] διπλασιάζεται, όταν διπλασιάσουμε το φορτίο F, είναι δηλαδή ανάλογη του φορτίου.
- 2) Η επιμήκυνση Δl είναι διπλάσια, όταν για το ίδιο φορτίο F, τη μετρήσουμε σε διπλάσια απόσταση. Αν δηλαδή χαράξομε δύο σημεία Γ, Δ ώστε $ΔΓ = 2l$ θα έχουμε επιμήκυνση ($Δl_{ΓΔ} = 2Δl_{AB}$) διπλάσια. Άρα η επιμήκυνση είναι ανάλογη του μήκους l .
- 3) Αν πειραματισθούμε παράλληλα με ένα άλλο δοκίμιο, διατομής 2A, παρατηρούμε ότι η επιμήκυνση Δl , για το ίδιο φορτίο F, είναι ίση με το μισό εκείνης που μετρήσαμε στο δοκίμιο διατομής A. Δηλαδή η επιμήκυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής A.
- 4) Τέλος, για τις ίδιες διαστάσεις δοκιμίου και για το ίδιο φορτίο F, η επιμήκυνση διαφέρει, αν αντί δοκιμίου από χάλυβα χρησιμοποιήσουμε δοκίμιο από άλλο υλικό π.χ. χαλκό ή αλουμίνιο. Δηλαδή η επιμήκυνση εξαρτάται και από τη φύση του υλικού, από το οποίο αποτελείται το δοκίμιο.

Αυτές οι τέσσερις παρατηρήσεις εκφράζονται με τη σχέση που λέγεται νόμος του Hooke (Χουκ):

$$\Delta l = a \cdot \frac{F}{A} \cdot l \quad (2.3)$$

Ο αριθμός a είναι χαρακτηριστικός της φύσεως του υλικού. Επειδή όμως ειναι πολύ μικρός (για το χάλυβα είναι $a = 0,000\,000\,476 \text{ cm}^2/\text{kp}$) χρησιμοποιούμε το $1/a = E$, γιατί είναι προτιμότερο να χειριζόμαστε αριθμούς πολύ μεγάλους, παρά αριθμούς πολύ μικρούς (για το χάλυβα $E = 1/a = 2\,100\,000 \text{ kp/cm}^2$).

Το E καλείται **μέτρο ελαστικότητας** του υλικού, έχει διαστάσεις kp/cm^2 και προσδιορίζεται πειραματικά για κάθε υλικό.

Για το ντουραλουμίνιο είναι $E = 700\,000 \text{ kp/cm}^2$

Για το χυτοσίδηρο είναι $E = 1\,000\,000 \text{ kp/cm}^2$

Η εξίσωση (2.3) γίνεται:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \quad (2.3a)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι **για τα δεδομένα ενός ορισμένου πειράματος** (π.χ. ράβδος χαλύβδινη με μήκος 30 cm και διατομή 1cm^2), τοποθετούμε τα εξαγόμενα μετρήσεών του σε ένα διάγραμμα.

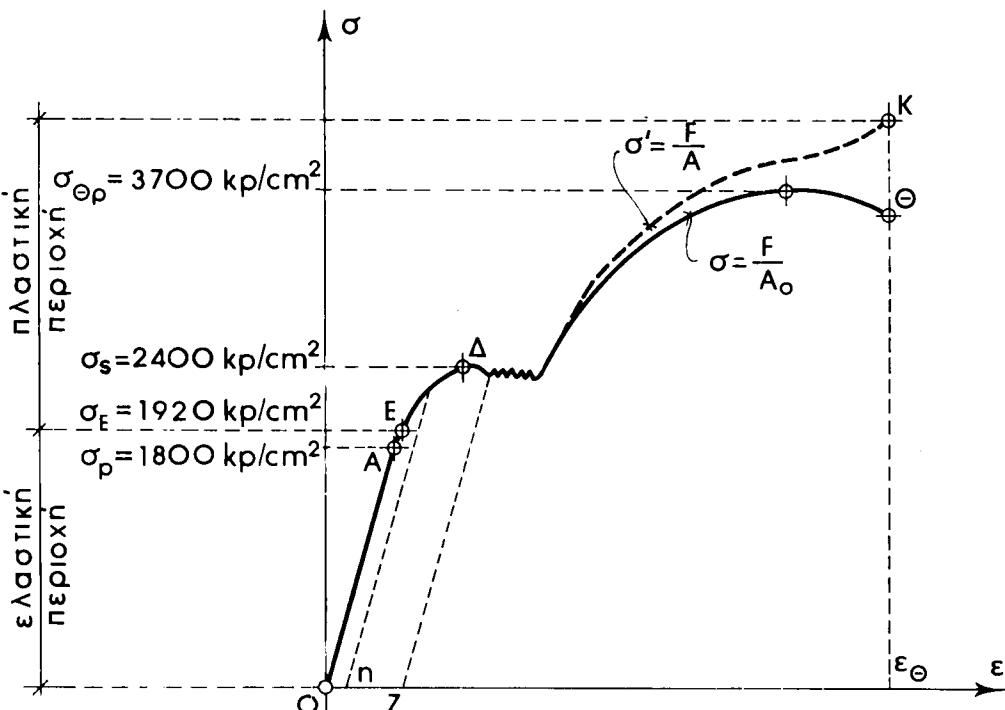
Θα μπορούσαμε στον οριζόντιο άξονα να αναφέρομε τις μηκύνσεις Δl και στον κατακόρυφο τα αντίστοιχα φορτία F που τις προκαλούν. Για να είμαστε όμως ανεξάρτητοι από το μέγεθος του φορτίου και από τις διαστάσεις του δοκιμίου, προτιμούμε να χρησιμοποιήσουμε ως μεγέθη την τάση $\sigma = F/A$ και την ανηγμένη μήκυνση $\epsilon = \Delta l/l$ και να σχεδιάσουμε το διάγραμμα με άξονες σ , ϵ (σχ. 2.2β).

Έτσι ο νόμος του Hooke διατυπώνεται απλούστερα με. τη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{A} \cdot \frac{1}{E} \quad \text{ή}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.4)$$

Στο διάγραμμα τάσεων-μηκύνσεων του σχήματος 2.2β παρατηρούμε μερικά χαρακτηριστικά σημεία αλλαγής της μορφής του. Όταν η τάση αυξάνεται από 0 έως $\sigma_p = 1800 \text{ kp/cm}^2$ το διάγραμμα είναι ευθύγραμμο και ισχύει ο νόμος του Hooke $\varepsilon = \sigma/E$. Από την τάση σ_p και πάνω το διάγραμμα καμπυλώνεται και παύει να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η τάση $\sigma_p = 1800 \text{ kp/cm}^2$ καλείται **όριο αναλογίας**. Στο σημείο Δ το διάγραμμα καμπυλώνεται περισσότερο και η καμπύλη βαίνει προς τα κάτω. Το δοκίμιο παραμορφώνεται χωρίς να του προσθέτομε άλλο φορτίο και λέμε ότι το υλικό διαρρέει. Η τάση $\sigma_s = 2400 \text{ kp/cm}^2$ καλείται **όριο διαρροής**. Από την τάση σ_s και πέρα, με μικρή αύξηση των τάσεων έχομε μεγάλη αύξηση των μηκύνσεων ώσπου να επέλθει η θραύση. Επειδή το υλικό στην περιοχή αυτή επανεμφανίζει κάποιαν αντοχή, το διάγραμμα παρουσιάζει την **καμπύλη κρατύνσεως**.



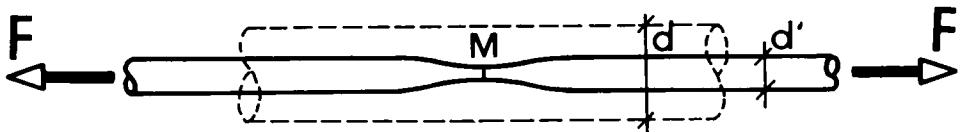
Σχ. 2.2β.

Τη μέγιστη τάση $\sigma_{\text{θρ}} = 3700 \text{ kp/cm}^2$, που εμφανίζεται λίγο πριν τη θραύση, ονομάζομε **τάση θραύσεως**, και τη μέγιστη ανηγμένη μήκυνση ϵ_{θ} , που μετρούμε κατά τη στιγμή της θραύσεως, ονομάζομε **μήκυνση θραύσεως**. Σκοπίμως αφήσαμε το σημείο E του διαγράμματος για να το τονίσουμε ιδιαίτερα. Μεταξύ των τάσεων σ_{θ} και σ_s υπάρχει κάποια άλλη $\sigma_E = 1920 \text{ kp/cm}^2$ στην οποία, αν σταματήσουμε το πείραμα και αποφορτίσουμε το δοκίμιο, αυτό επανέρχεται στις αρχικές του διαστάσεις. Το ίδιο βέβαια συμβαίνει και για οποιαδήποτε τάση μικρότερη από την σ_E . Αντίθετα αν ξεπεράσουμε την τάση σ_E και κατόπιν αποφορτίσουμε το δοκίμιο, αυτό δεν θα επανέλθει στις αρχικές του διαστάσεις, αλλά το διάγραμμα, ακολουθώντας ευθεία παράλληλη προς την OA (διακεκομμένη στο σχήμα 2.2β) θα καταλήξει στο σημείο Z. Τότε, για τάση $\sigma = 0$ (αφόρτιστο δοκίμιο), θα υπάρχει κάποια ανηγμένη μήκυνση οz **(μόνιμη ή πλαστική παραμόρφωση)**.

Η περιοχή του διαγράμματος από O έως E καλείται **ελαστική περιοχή** και η περιοχή από το E και πέρα καλείται **πλαστική περιοχή**. Η τάση σ_E καλείται **όριο ελαστικότητας**.

2.3 Εγκάρσια συστολή.

Παρατηρήσαμε ότι το μήκος / μιας ράβδου που εφελκύεται αυξάνεται σε l' και ονομάσαμε επιμήκυνση τη διαφορά $\Delta l = l' - l$. Συγχρόνως όμως παρατηρούμε ότι η διάμετρος του δοκιμίου d μειώνεται σε d' (σχ. 2.3a). Γενικότερα οι εγκάρσιες διαστάσεις της τυχούσας διατομής μειώνονται, όπως είναι φυσικό. Πρακτική



Σχ. 2.3a.

εμπειρία του φαινομένου αυτού μπορούμε να έχομε όταν τεντώσουμε ένα ελαστικό νήμα. Τότε παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η μήκυνσή του, τόσο το νήμα λεπταίνει (μειώνεται η διάμετρός του). Το φαινόμενο αυτό είναι γενικό για όλα τα ελαστικά σώματα. Η μείωση αυτή της διαμέτρου καλείται σε γενική περίπτωση **εγκάρσια συστολή** ϵ_e και ακολουθεί νόμο εντελώς ανάλογο προς το νόμο του Hooke. Βρίσκεται σε σταθερή σχέση με τη διαμήκη μήκυνση ϵ_d , που εξαρτάται μόνο από το υλικό. Από πειράματα βρέθηκε η τιμή του σταθερού λόγου:

$$\mu = \frac{\epsilon_e}{\epsilon_d} \quad (2.5)$$

που ονομάζεται **μέτρο του Poisson**.

Για τα μέταλλα γενικά $\mu = 0,3$, για το σκυρόδεμα $\mu = 0,15 \div 0,25$ και κατά μέσο

όρο $\mu = 0,20$. Άρα, η εγκάρσια ανηγμένη συστολή ε_e μπορεί να υπολογισθεί από τη διαμήκη μήκυνση ε_s :

$$\varepsilon_e = \mu \cdot \varepsilon_s = \frac{\mu \cdot \sigma}{E} \quad (2.6)$$

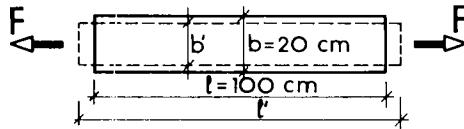
όπου για κυκλική διατομή:

$$\varepsilon_e = \frac{d - d'}{d} \quad (2.7)$$

Συχνά χρησιμοποιείται και η αντίστροφη τιμή του μέτρου του Poisson, δηλαδή $m = 1/\mu$ (καθαρός αριθμός, σταθερά του Poisson), που κυμαίνεται για τα συνήθη υλικά από 3,33 έως 6,50. Προφανώς για θετική τάση (εφελκυστική) έχομε αρνητικό ε_e (εγκάρσια συστολή), ενώ για αρνητική (θλιπτική) τάση έχομε θετικό ε_e (εγκάρσια διόγκωση).

Παράδειγμα.

Χαλύβδινο έλασμα (λάμα) με πάχος 1 mm, πλάτος 20 cm και μήκος 1,00 m, υποβάλλεται σε εφελκυσμό με δύναμη $F = 3000$ kp (σχ. 2.3β). Ζητείται η ολική μήκυνση και η εγκάρσια συστολή του ελάσματος, καθώς και οι νέες διαστάσεις του σε mm. Δίνονται: μέτρο ελαστικότητας $E = 2100\,000$ kp/cm², σταθερά Poisson $m = 10/3$.



Σχ. 2.3β.

Λύση.

1) Αναπτυσσόμενη τάση.

$$\text{Εμβαδόν διατομής } A = 0,1 \times 20 = 2 \text{ cm}^2$$

$$\text{τάση } \sigma = \frac{F}{A} = \frac{3000 \text{ kp}}{2 \text{ cm}^2} = 1500 \text{ kp/cm}^2$$

2) Ανηγμένη μήκυνση.

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma}{E} = \frac{1500 \text{ kp/cm}^2}{2100\,000 \text{ kp/cm}^2} = 0,000715$$

3) Ολική μήκυνση.

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = 0,000715 \cdot 100 \text{ cm} = 0,0715 \text{ cm} = 0,715 \text{ mm}$$

4) Εγκάρσια συστολή.

$$\varepsilon_e = \frac{-\sigma}{m \cdot E} = -\frac{\varepsilon_\delta}{m} = -\frac{0,000715}{3,33} = -0,000215$$

5) Νέες διαστάσεις.

Μήκος $1000,715$ mm.

Πλάτος $200 (1 - 0,000215) = 200 \times 0,999785 = 199,957$ mm.

Πάχος $0,999785$ mm.

2.4 Επιτρεπόμενες τάσεις και συντελεστής ασφάλειας - Επικίνδυνη διατομή.

Παράδειγμα.

Από χαλύβδινη ράβδο (St 37) αναρτάται φορτίο $F = 7200$ kp.

Ζητείται η διατομή της ράβδου. Δίνεται το όριο ελαστικότητας του υλικού $\sigma_E = 1820$ kp/cm².

Λύση.

α) περίπτωση.

Με βάση τα προηγούμενα πρέπει:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq 1820 \text{ kp/cm}^2$$

Άρα απαιτείται: $A \geq \frac{F}{1820} = \frac{7200}{1820} = 3,96 \text{ cm}^2$

Διαλέγομε ράβδο με διατομή $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, οπότε η τάση που αναπτύσσεται είναι:

$$\sigma = \frac{7200}{4} = 1800 \text{ kp/cm}^2 < 1820 \text{ kp/cm}^2$$

Την τάση $\sigma = 1800$ kp/cm² ονομάζομε **τάση λειτουργίας** της ράβδου.

β) περίπτωση.

Ας υποθέσουμε ότι το φορτίο F αυξάνεται για κάποιον απρόβλεπτο λόγο και γίνεται $F' = 7400$ kp.

Τότε η τάση λειτουργίας της ράβδου γίνεται:

$$\sigma' = \frac{F'}{A} = \frac{7400}{4} = 1850 \text{ kp/cm}^2 > 1820 \text{ kp/cm}^2$$

Δηλαδή για μικρή αύξηση του φορτίου η τάση λειτουργίας ξεπερνά το όριο ελαστικότητας. Αυτό σημαίνει ότι θα παρουσιασθεί και μόνιμη μήκυνση της ράβδου.

γ) περίπτωση.

Ας υποθέσουμε ότι η χαλύβδινη ράβδος που έχομε εκλέξει έχει διατομή 40 cm^2 , αλλά σε κάποιο σημείο της υπάρχει μέσα στη μάζα του χάλυβα ένα μικρό κενό, πράγμα που προκαλεί μείωση της διατομής σε $A' = 3,8 \text{ cm}^2$.

Τότε η τάση που αναπτύσσεται στη θέση αυτή είναι:

$$\sigma'' = \frac{F}{A} = \frac{7200}{3,8} = 1895 \text{ kp/cm}^2 > 1820 \text{ kp/cm}^2$$

Τα αποτελέσματα των περιπτώσεων β και γ είναι δυσμενή και πρέπει να φροντίζομε να τα αποφεύγομε. Τέτοιες μικροατέλειες στην κατασκευή (π.χ. ελαττωματικό υλικό) ή μικροϋπερβάσεις των φορτίων είναι πάντοτε πιθανές. Επίσης είναι δυνατό να υπάρχουν αποκλίσεις των εσωτερικών δυνάμεων και ροπών από την πραγματική τους τιμή λόγω ατελειών του στατικού υπολογισμού. Για το λόγο αυτό φροντίζομε να τηρούμε τις τάσεις λειτουργίας **χαμηλότερα** από το όριο ελαστικότητας.

Η καταπόνηση μιας κατασκευής δεν πρέπει να είναι τόσο μεγάλη, ώστε να προκαλείται θραύση της ή ανεπιθύμητες παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται πρέπει να είναι μικρότερες από ένα όριο.

Επιτρεπόμενη τάση λέγεται η τάση που δεχόμαστε να αναπτυχθεί σε μια διατομή του φορέα για να έχομε ασφαλή κατασκευή. Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν είχαμε καθορίσει την επιτρεπόμενη τάση σε 1400 kp/cm^2 θα βρίσκαμε:

$$A = \frac{7200}{1400} = 5,14 \text{ cm}^2$$

οπότε με την εκλογή χαλύβδινης ράβδου με διατομή $2,0 \times 2,6 = 5,2 \text{ cm}^2$ θα είχαμε αποφύγει τα δυσμενή αποτελέσματα των περιπτώσεων β και γ. Ευνόητο είναι ότι η τάση λειτουργίας πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την επιτρεπόμενη τάση, π.χ. για την ορθογωνική διατομή $2,0 \times 2,6 = 5,2 \text{ cm}^2$ η τάση λειτουργίας θα είναι:

$$\sigma = \frac{7200}{5,2} = 1385 \text{ kp/cm}^2 < 1400 \text{ kp/cm}^2$$

Ο καθορισμός της επιτρεπόμενης τάσεως είναι ένα δύσκολο πρόβλημα της Αντοχής των Υλικών, γιατί θα πρέπει η κατασκευή να είναι και οπωσδήποτε ασφαλής (μικρή επιτρεπόμενη τάση) αλλά και οικονομική (μικρές διατομές, άρα μεγάλη επιτρεπόμενη τάση). Πρέπει δηλαδή να συμβιβάζονται δύο αντίθετες απαιτήσεις.

Για το λόγο αυτό στο ίδιο υλικό, π.χ. St 37, η επιτρεπόμενη τάση κυμαίνεται σε ευρέα όρια, δηλαδή από 450 kp/cm^2 έως 1800 kp/cm^2 , ανάλογα με το είδος της κατασκευής και τον τρόπο καταπονήσεως.

Συνήθως ως κριτήριο για τον καθορισμό της επιτρεπόμενης τάσεως λαμβάνεται όχι το όριο ελαστικότητας, αλλά το όριο διαρροής ή το όριο θραύσεως (ειδικά για το χάλυβα το όριο διαρροής).

Ο αριθμός που μας καθορίζει πόσες φορές μικρότερη από το όριο διαρροης (ή το όριο θραύσεως) είναι η επιτρεπόμενη τάση, λέγεται **συντελεστής ασφάλειας**

έναντι διαρροής (ή έναντι θραύσεως) και συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα ν. Στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου για St 37 είναι $\sigma_s = 2400 \text{ kp/cm}^2$ και $\sigma_e = 3700 \text{ kp/cm}^2$, πήραμε το συντελεστή ασφάλειας έναντι διαρροής:

$$\gamma_s = \frac{\text{όριο διαρροής}}{\text{επιτρεπόμενη τάση}} = \frac{2400}{1400} = 1,71 \quad (2.8)$$

και ο συντελεστής ασφάλειας έναντι θραύσεως:

$$\gamma_e = \frac{\text{όριο θραύσεως}}{\text{επιτρεπόμενη τάση}} = \frac{3700}{1400} = 2,64 \quad (2.9)$$

Το μέγεθος του συντελεστή ασφάλειας προσδιορίζεται από πολλούς παράγοντες, όπως:

a) Η ομοιογένεια του υλικού.

Όσο περισσότερο ομοιογένες είναι το υλικό, τόσο μικρότερο λαμβάνεται το γ. Στο χάλυβα το γ λαμβάνεται μικρό, στο ξύλο μεγαλύτερο και στη λιθοδομή πολύ μεγαλύτερο.

β) Η αξιοπιστία των εσωτερικών δυνάμεων.

Άρα η ορθή αναλογία των βάσεων του στατικού υπολογισμού.

γ) Η επαλληλία των περιπτώσεων φορτίσεως.

Διακρίνονται δύο περιπτώσεις φορτίσεως:

- Φόρτιση H.** Περιλαμβάνει τα κύρια φορτία, δηλαδή τη σύγχρονη δράση του μόνιμου φορτίου, του ωφέλιμου φορτίου και του χιονιού, χωρίς όμως ανεμοπίεση.
- Φόρτιση Hz.** Περιλαμβάνει τα κύρια και τα πρόσθετα φορτία, δηλαδή εκτος από τα αναφερθέντα στην περίπτωση 1, την ανεμοπίεση, τις μεταβολές θερμοκρασίας, τις δυνάμεις πεδήσεως (φρένα) κλπ.

δ) Το είδος φορτίσεως.

Στα κτηριακά έργα, όπου η φόρτιση είναι κυρίως ήρεμη, το γ λαμβάνεται μικρότερο, στις γέφυρες η δυναμική φόρτιση από τα οχήματα προκαλεί εναλλασσόμενη επιπόνηση, που απαιτεί μεγαλύτερο γ.

ε) Ο τύπος του δομικού έργου και η σημασία του δομικού στοιχείου.

Σε προσωρινές ή δευτερεύουσες κατασκευές μπορεί να ληφθεί μικρότερο γ. Στα υποστυλώματα πρέπει να λαμβάνεται μεγαλύτερο, γιατί η αστοχία τους επηρεάζει περισσότερους όροφους.

Η πρόδοση στην έρευνα και η βελτίωση των συνθηκών κατασκευής, ιδίως κατά την τελευταία περίοδο, επέτρεψαν τη μείωση των συντελεστών ασφάλειας.

Σήμερα οι συντελεστές γ λαμβάνονται στα διάφορα υλικά ως εξής περίπου:

Χάλυβας $\gamma = 1,5 \div 1,7$ για το όριο διαρροής

$\gamma = 2 \div 3$ για το όριο θραύσεως

Ξύλο $\gamma = 3 \div 4,5$

Χυτοσίδηρος $\gamma = 6 \div 8$

Λιθοδομή και

Πλινθοδομή $\gamma = 8 \div 20$

Η εκλογή των συντελεστών ασφάλειας και το ύψος των επιτρεπομένων τάσεων

δεν αφήνεται στην κρίση του Μηχανικού.

Υπάρχουν Κρατικοί Κανονισμοί, με ισχύ νόμου, οι οποίοι τα καθορίζουν δεσμευτικά (Πίνακας 2.4.1).

Οι Κανονισμοί αυτοί μεταβάλλονται σε ορισμένα χρονικά διαστήματα και προσαρμόζονται στα αποτελέσματα των νέων ερευνών και των τεχνολογικών εξελίξεων.

Κυρίως χρησιμοποιείται ο συντελεστής ασφάλειας ως προς τη διαρροή.

Όπως έχουμε διακρίνει την επιτρεπόμενη τάση από την τάση λειτουργίας, με ανάλογο τρόπο διακρίνομε τον απαιτούμενο συντελεστή ασφάλειας από τον υπάρχοντα, δηλαδή:

$$\gamma_{\text{απαιτ.}} = \frac{\text{όριο διαρροής}}{\text{επιτρεπόμενη τάση}} \quad (2.10)$$

$$\text{και} \quad \gamma_{\text{υπαρχ.}} = \frac{\text{όριο διαρροής}}{\text{τάση λειτουργίας}} \quad (2.11)$$

Οι Κανονισμοί απαγορεύουν την καταπόνηση σε αξονικό εφελκυσμό του χυτοσίδηρου, των φυσικών και τεχνητών λίθων, του κονιάματος και του ξύλου, κάθετα προς τις ίνες του.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.1.

Επιτρεπόμενες τάσεις (kp/cm²) σε εφελκυσμό και θλίψη

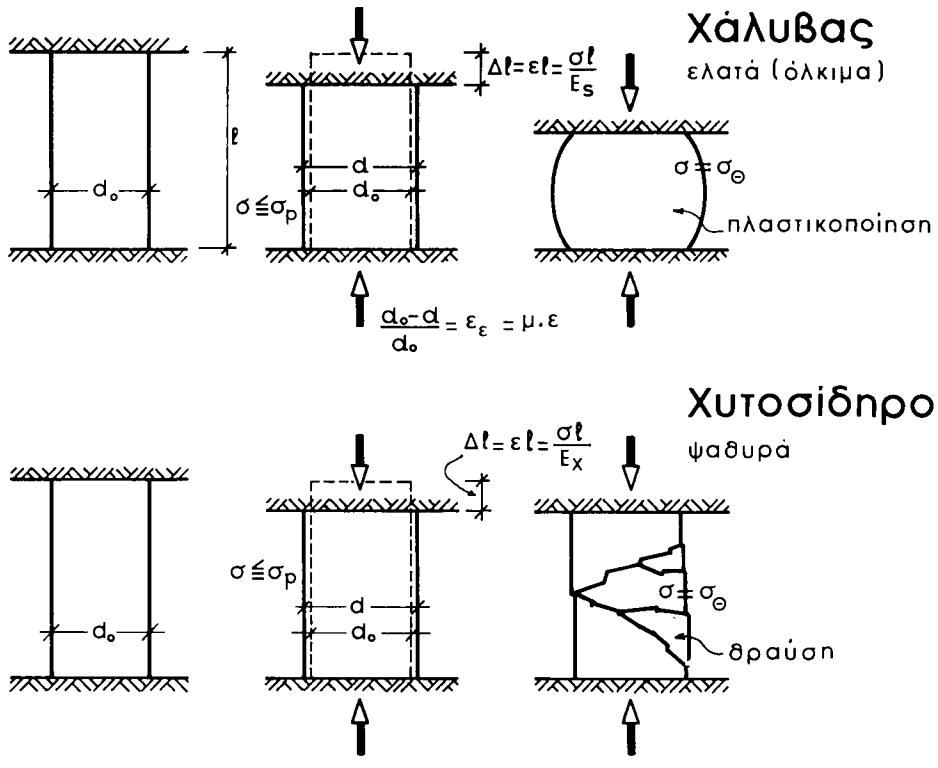
Υλικό	Φόρτιση	
	H	Hz
Χάλυβας St 37 (εφελκ.)	1600	1800
Χάλυβας ή (θλίψη)	1400	1600
Χάλυβας St 52 (εφελκ.)	2400	2700
Χάλυβας ή (θλίψη)	2100	2400
Ξύλο κατηγ. II	85	85

Όταν η ράβδος που εξετάζομε δεν έχει την ίδια διατομή σ' όλο το μήκος της, π.χ. επειδή υπάρχουν οι οπές για τους ήλους και τους κοχλίες συνδέσεως, οι εγκοπές, τα διάκενα κλπ., τότε στις θέσεις αυτές δεν είναι προφανώς καθοριστική η πλήρης διατομή Α αλλά η **εξασθενημένη καθαρή διατομή A_n**. Αυτό ισχύει πάντοτε για τις εφελκυόμενες ράβδους, ενώ για τις θλιβόμενες μόνο εφ' όσον οι οπές δεν έχουν γεμίσει τελείως με υλικό της ίδιας ποιότητας.

Για το λόγο αυτό οι οπές των ήλων π.χ. δεν αφαιρούνται, όπως οι οπές των κοχλιών.

2.5 Πείραμα Θλίψεως.

Παίρνομε δύο κυλινδρικά δοκίμια (σχ. 2.5a), το πρώτο από χάλυβα St 37 και το δεύτερο από χυτοσίδηρο, και αφού τα τοποθετήσομε σε ειδική μηχανή θλίψεως,



Σχ. 2.5α.

ασκούμε σ' αυτά θλιπτικές δυνάμεις που αυξάνονται προοδευτικά.

Από τα αποτελέσματα του πειράματος προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- 1) Ο χάλυβας ακολουθεί το νόμο του Ηooke, τον οποίο ακολουθεί και κατά το πείραμα του εφελκυσμού $\varepsilon = \sigma/E$.
- 2) Το όριο διαρροής του χάλυβα σε θλίψη είναι το ίδιο με το όριο διαρροής του σε εφελκυσμό σ_s $\text{θλ} = \sigma_s$ $\text{εφ} = 2400$ kN/cm^2 .
- 3) Μετά το όριο διαρροής ο χάλυβας δεν θραύεται, αλλά πλαστικοποιείται, δηλαδή παραμορφώνεται συνεχώς σαν να μην ήταν στερεό σώμα, αλλά πλαστικό (όπως π.χ. ο πηλός).

Τα υλικά που έχουν την ιδιότητα να πλαστικοποιούνται κατά τη θλίψη ονομάζονται **ελατά (όλκιμα)** (βλέπε και παράγραφο 1.3).

Τα υλικά αυτά παρουσιάζουν ανάλογη συμπεριφορά και κατά τον εφελκυσμό, δηλαδή επιμηκύνονται πολύ πριν από τη θραύση.

- 4) Ο χυτοσίδηρος μετά το όριο διαρροής θραύεται, με εμφάνιση ρωγμών που συνοδεύονται από κρότους. Τα υλικά που έχουν την ιδιότητα να θραύονται κατά τη θλίψη με εμφάνιση ρωγμών χωρίς να πλαστικοποιούνται πολύ, ονομάζονται **ψαθυρά**. Τα υλικά αυτά παρουσιάζουν ανάλογη συμπεριφορά

και κατά τον εφελκυσμό, δηλαδή μετά το όριο διαρροής θραύσονται χωρίς να επιμηκυνθούν πολύ.

5) Το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα είναι το ίδιο κατά τον εφελκυσμό και κατά τη θλίψη.

6) Κατά τη θλίψη, παράλληλα προς τη βράχυνση των δοκιμών, παρατηρείται εγκάρσια διαστολή, όπως ακριβώς κατά τον εφελκυσμό παρατηρείται εγκάρσια συστολή (βλέπε παράγραφο 2.3). Η εγκάρσια διαστολή προκύπτει:

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_\delta}{m} = \frac{\sigma}{mE} \quad (2.12)$$

(όπως και η εγκάρσια συστολή) και η σταθερά του Poisson m είναι η ίδια για τον εφελκυσμό και τη θλίψη.

Παράδειγμα 1.

Αν το πέδιλο του υποστυλώματος του σχήματος 2.7 ασκεί πάνω στο έδαφος δύναμη $80 \text{ Mp} = 80000 \text{ kp}$ και οι διαστάσεις του είναι $2,00 \times 2,00 = 4 \text{ m}^2 = 40000 \text{ cm}^2$, η επιφανειακή πίεση πάνω στο έδαφος θα είναι:

$$p = \frac{80 \text{ Mp}}{4 \text{ m}^2} = 20 \frac{\text{Mp}}{\text{m}^2} \quad \text{ή ακόμη}$$

$$p = \frac{80000 \text{ kp}}{40000 \text{ cm}^2} = 2 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Παράδειγμα 2.

Έστω ότι θέλομε να καρφώσομε βελόνα σε σανίδα. Πιέζομε προοδευτικά τη βελόνα ώσπου να αρχίσει να εισχωρεί στη σανίδα και παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει όταν η δύναμη, με την οποία πιέζομε, φθάσει τα 5 kp . Η διάμετρος της βελόνας είναι $0,8 \text{ mm}$ (σχ. 2.5β).

$$\text{Tότε η διατομή της είναι: } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \times 0,8^2}{4} = 0,5 \text{ mm}^2$$

και η τάση θλίψεως, που αναπτύσσεται στον κορμό της βελόνας, είναι 5 kp στα $0,5 \text{ mm}^2$, οπότε στο 1 mm^2 έχομε 10 kp και στα 100 mm^2 , δηλαδή στο 1 cm^2 προκύπτει 1000 kp . Δηλαδή:

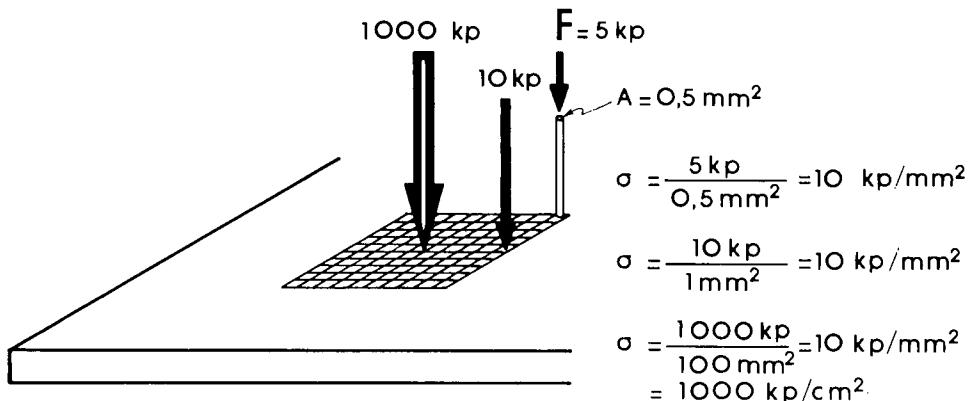
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5 \text{ kp}}{0,5 \text{ mm}^2} = 10 \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{ή } \sigma = \frac{1000 \text{ kp}}{100 \text{ mm}^2} = 1000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα βλέπομε ότι πρέπει να προσέχομε πολύ στις μονάδες που χρησιμοποιούμε κάθε φορά.

Παράδειγμα 3.

Το τετραγωνικό πέδιλο ενός υποστυλώματος κτηρίου μεταβιβάζει στο έδαφος



Σχ. 2.5β.

φορτίο $F = 45000 \text{ kp}$. Να βρούμε τις διαστάσεις του πεδίου αν η επιτρεπόμενη πίεση, που μπορεί να αναλάβει το έδαφος, είναι $\sigma_{\text{επ}} = 2 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

$$\text{Από τον τύπο } A = \frac{F}{\sigma_{\text{επ}}} \quad \text{έχομε } A = \frac{45000 \text{ kp}}{2 \text{ kp/cm}^2} = 22500 \text{ cm}^2$$

Αν L είναι η πλευρά του πεδίου πρέπει $L^2 = 22500 \text{ cm}^2$ ή $L = \sqrt{22500} = 150 \text{ cm}$.

Παράδειγμα 4.

Το ελαστικό έδρανο μιας μηχανής έχει διάμετρο 15 cm και ύψος 10 cm. Κατά την έδραση της μηχανής αναλαμβάνει φορτίο 3350 kp και το ύψος του μειώνεται σε 8 cm, ενώ η διάμετρός του αυξάνεται σε 16,20 cm. Ζητείται το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο Poisson του υλικού από το οποίο αποτελείται το εφέδρανο.

Λύση.

Η διατομή του εφεδράνου είναι:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \times 15^2}{4} = 177 \text{ cm}^2$$

$$\text{Από το νόμο του Hooke: } \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\text{οπότε έχομε: } E = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot A}$$

$$\Delta l = 10 - 8 = 2 \text{ cm}, \quad \text{και} \quad l = 10 \text{ cm.}$$

$$E = \frac{3350 \text{ kp} \cdot 10 \text{ cm}}{2 \text{ cm} \times 177 \text{ cm}^2} = 95 \text{ kp/cm}^2$$

Η ανηγμένη βράχυνση είναι:

$$\varepsilon_\delta = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Η ανηγμένη εγκάρσια διαστολή είναι:

$$\varepsilon_e = \frac{16,20 - 15}{15} = \frac{1,20}{15} = 0,08$$

και από τον τύπο (16)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\varepsilon_\delta}{\varepsilon_e} \quad (2.5)$$

έχομε:

$$m = \frac{\varepsilon_\delta}{\varepsilon_e} = \frac{0,2}{0,08} = 2,50$$

δηλαδή το μέτρο του Poisson:

$$\mu = \frac{1}{m} = \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_\delta} = \frac{1}{2,50} = 0,40$$

Παράδειγμα 5.

Κατά την έδραση σιδηροδοκού πάνω σε τοίχο μεταβιβάζεται στον τοίχο από τη σιδηροδοκό φορτίο $F = 2000 \text{ kp}$. Η επιφάνεια εδράσεως της δοκού πάνω στον τοίχο είναι $A = 10 \times 20 = 200 \text{ cm}^2$. Συνεπώς η επιφανειακή πίεση είναι:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2000}{200} = 10 \text{ kp/cm}^2$$

Αν η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως του τοίχου είναι $p = 5 \text{ kp/cm}^2$, προκύπτει η ανάγκη αυξήσεως της επιφάνειας εδράσεως, με την προσθήκη π.χ. μιας χαλύβδινης πλάκας διαστάσεων $20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$, οπότε η επιφανειακή πίεση γίνεται:

$$p' = \frac{F}{A} = \frac{2000}{400} = 5 \text{ kp/cm}^2$$

ίση πρός την ανεκτή τάση θλίψεως του τοίχου.

2.6 Παραμορφώσεις και τάσεις από θερμοκρασιακή μεταβολή.

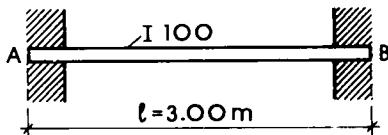
Γνωρίζομε από τη Φυσική (κεφάλαιο θερμότητας) ότι τα στερεά σώματα όταν θερμαίνονται διαστέλλονται και όταν ψύχονται συστέλλονται. Ο νόμος, τον οποίο ακολουθεί η θερμοκρασιακή παραμόρφωση, είναι:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T \quad (2.13)$$

όπου Δl η μεταβολή του μήκους μιας ράβδου μήκους l , της οποίας η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά ΔT . Ο συντελεστής α είναι χαρακτηριστικός για κάθε υλικό και λέγεται **συντελεστής θερμικής διαστολής**. Αν κατά κάποιο τρόπο εμποδίσομε τη μεταβολή του μήκους, θα αναπτυχθούν τάσεις στη ράβδο. Για να βρούμε το μέγεθος των τάσεων αυτών φανταζόμαστε ότι η παρεμπόδιση της μεταβολής του μήκους γίνεται σε δύο στάδια, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα.

Έστω μία χαλύβδινη ράβδος μήκους $l = 3,00 \text{ m}$, της οποίας και τα δύο άκρα A και B είναι αγκυρωμένα με τοίχους ανένδοτους (ανυποχώρητους), ώστε να αποκλείεται οποιαδήποτε μεταβολή μήκους της (σχ. 2.6). Φανταζόμαστε τώρα ότι το ένα άκρο της, έστω το B, ελευθερώνεται, ώστε να είναι δυνατή μεταβολή του μήκους



Σχ. 2.6.

AB. Κατά το πρώτο στάδιο ψύχομε τη ράβδο κατά 5°C . Τότε αυτή θα συσταλεί, η βράχυνσή της θα είναι $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$, και η ανηγμένη βράχυνση:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T \quad (2.14)$$

Επειδή για το χάλυβα είναι $\alpha = 0,000012$, θα έχομε $\epsilon = 0,000012 \times 5 = 0,00006$.

Κατά το δεύτερο στάδιο εφαρμόζομε στο ελεύθερο άκρο της ράβδου δύναμη F εφελκυσμού, τόσο μεγάλη, όστι χρειάζεται για να επανέλθει η ράβδος στο αρχικό της μήκος, δηλαδή να υποστεί τόση επιμήκυνση, όστι ήταν η λόγω της θερμικής συστολής βράχυνση. Η τάση που αναπτύσσεται θα είναι $\sigma = \epsilon \cdot E$ (νόμος του Hooke $\epsilon = \sigma/E$), δηλαδή $\sigma = 0,00006 \times 2100000 = 126 \text{ kp/cm}^2$.

Συμπέρασμα.

Όταν κατά την πτώση της θερμοκρασίας μιας ευθύγραμμης ράβδου εμποδίζεται η βράχυνσή της, αναπτύσσονται σ' αυτήν τάσεις εφελκυσμού:

$$\sigma = -\alpha \cdot E \cdot \Delta T \quad (2.15)$$

Ανάλογα όταν κατά την αύξηση της θερμοκρασίας μιας ευθύγραμμης ράβδου εμποδίζεται η διαστολή της, τότε αναπτύσσονται σ' αυτήν τάσεις θλίψεως:

$$\sigma = -\alpha \cdot E \cdot \Delta T$$

Παράδειγμα 1.

Σε χαλύβδινο έλασμα 80×8 mm, μήκους 3,0 m, αυξάνεται η θερμοκρασία κατά 60°C . Ζητούνται:

- Το νέο μήκος της ράβδου.
- Ποια τάση αναπτύσσεται στη ράβδο αν εμποδισθεί η μήκυνσή της.
- Σε ποια δύναμη αντιστοιχεί η παραπάνω τάση.

Λύση.

- $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T = 0,000012 \times 300 \text{ cm} \times 60 = 0,216 \text{ cm} = 2,16 \text{ mm}$
και το νέο μήκος $l = l + \Delta l = 300,216 \text{ cm}$
- $\sigma = -\alpha \cdot E \cdot \Delta T = \epsilon \cdot E = \Delta l / l \cdot E = -0,216 \text{ cm} / 300 \text{ cm} \times 2100000 \text{ kp/cm}^2 = 1512 \text{ kp/cm}^2$.
- $N = \sigma \cdot A = 1512 \text{ kp/cm}^2 \times 8 \text{ cm} \times 0,8 \text{ cm} = 9677 \text{ kp}$.

Παράδειγμα 2.

Χαλύβδινη δοκός γερανογέφυρας I PB 300 έχει συνολικό μήκος 28 m. Τα άκρα της είναι αμετακίνητα επειδή συνδέονται με άλλα τμήματα της κατασκευής. Δίνεται ότι οι οριζόντιες δυνάμεις, τις οποίες ασκεί αυτή στα άκρα της, δεν πρέπει να υπερβαίνουν τα $\pm 80 \text{ Mp}$. Ζητείται η μέγιστη επιτρεπτή διακύμανση της θερμοκρασίας. Το IPB 300 έχει $A = 149 \text{ cm}^2$.

Λύση.

Πρώτα βρίσκομε την αναπτυσσόμενη τάση για $N = \pm 80 \text{ Mp}$.

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} = \pm \frac{80 \text{ Mp}}{149 \text{ cm}^2} = \pm \frac{80000 \text{ kp}}{149 \text{ cm}^2} = \pm 537 \text{ kp/cm}^2$$

εφελκυστική για πτώση της θερμοκρασίας, θλιπτική για αύξηση της θερμοκρασίας.
Στη συνέχεια από τον τύπο:

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$$

έχομε: $\Delta T = \frac{\sigma}{\alpha \cdot E} = \frac{\pm 537}{0,000012 \times 2100000 \text{ kp/cm}^2} = \pm 21,3^{\circ}\text{C}$

Δηλαδή η ανεκτή διακύμανση της θερμοκρασίας είναι $\pm 21,3^{\circ}\text{C}$.

Παρατηρούμε ότι:

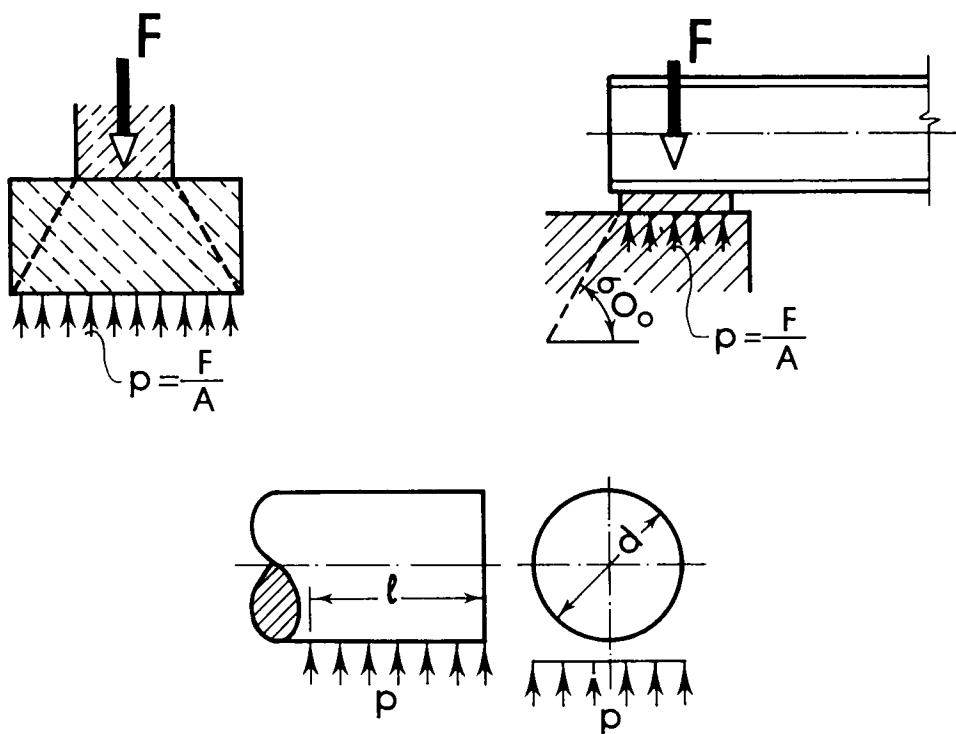
a) Για μικρή αύξηση ή μείωση της θερμοκρασίας, αναπτύσσονται μεγάλες δυνάμεις, που συνήθως δεν μπορούν να αναληφθούν από την κατασκευή. Γι' αυτό επιβάλλεται να προβλέπονται σε ορισμένες θέσεις **αρμοί διαστολής**, δύναμης, όπως π.χ. γίνεται στις σιδηροδρομικές γραμμές, όπου κατά διαστήματα αφήνονται μικρά κενά, για να μπορεί η σιδηροτροχιά, όταν αυξάνει η θερμοκρασία, να διαστέλλεται ελεύθερα, χωρίς να αναπτύσσονται δυνάμεις, οι οποίες θα μπορούσαν να προκαλέσουν το λυγισμό της τροχιάς (βλέπε κεφάλαιο λυγισμού).

β) Οι τάσεις που αναπτύσσονται σε μία ράβδο, όταν εμποδίζεται η συστολή ή διαστολή της, λόγω διακυμάνσεως της θερμοκρασίας, είναι ανεξάρτητες από το μήκος της ράβδου. Το ίδιο ισχύει και για τις δυνάμεις που ασκεί η ράβδος στις στηρίξεις των άκρων της. Είδαμε ότι στο παράδειγμα 1 για να βρούμε τις τάσεις δεν χρησιμοποιήσαμε το μήκος $l = 3,00 \text{ m}$ της ράβδου, αλλά το λόγο Δ/l . Το ίδιο στο παράδειγμα 2 δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά το μήκος $l = 28 \text{ m}$.

2.7 Επιφανειακή πίεση.

Ταυτόσημη προς την έννοια της θλιπτικής τάσεως είναι και η επιφανειακή πίεση. Η επιφανειακή πίεση ασκείται στην επιφάνεια επαφής δύο σωμάτων κατά τη διαβίβαση θλιπτικής δυνάμεως από το ένα στο άλλο. Επιφανειακή πίεση είναι π.χ. η πίεση που ασκείται από το πέδιλο του υποστυλώματος στην επιφάνεια του εδάφους, από το έδρανο μιας δοκού στην επιφάνεια της τοιχοποιίας, πάνω στην οποία αυτό στηρίζεται ή από ένα άξονα επάνω στο εδρανό του (σχ. 2.7). Μετρείται σε kN/cm^2 και υπολογίζεται όπως ακριβώς η τάση θλίψεως: $p = F/A$.

Αν η επιφανειακή πίεση ενός σώματος σε άλλο είναι μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη και υπάρχει κίνδυνος μεγάλων παραμορφώσεων, παρεμβάλλεται κατάλληλο σώμα μεταξύ των δύο, ώστε να μεγαλώνει η κοινή επιφάνεια επαφής. Γι' αυτόν το λόγο μεταξύ υποστυλώματος και εδάφους μεσολαβεί το πέδιλο.



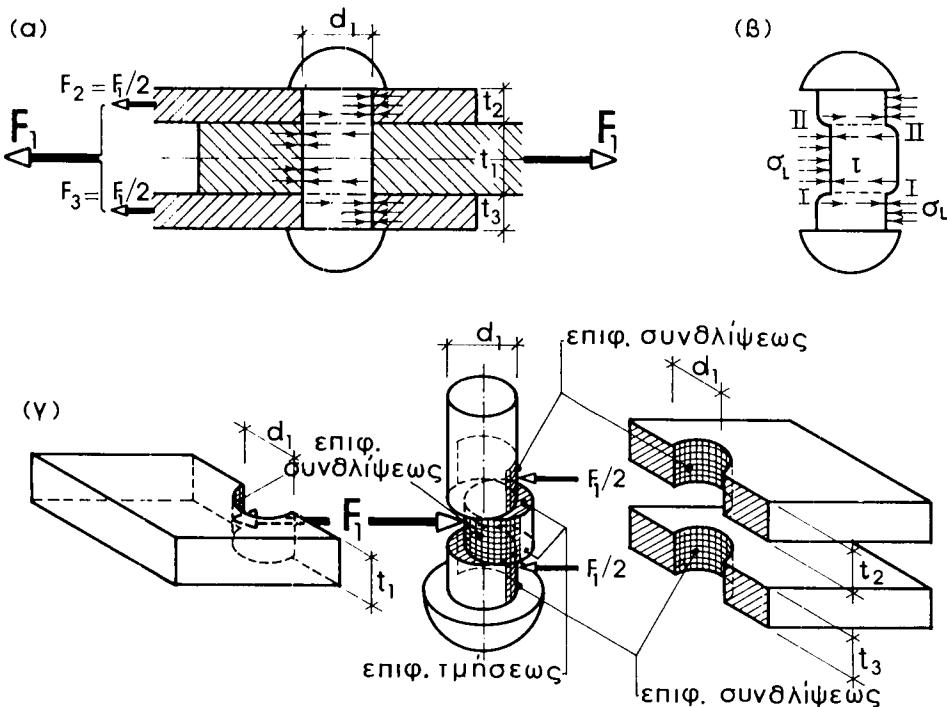
Σχ. 2.7.

2.8 Σύνθλιψη άντυγας οπών.

Η σύνδεση ελασμάτων με ήλους ή κοχλίες, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8(a) είναι πολύ συνηθισμένη στις σιδηρές κατασκευές (σιδηρές στέγες, γέφυρες κλπ). Η δύναμη $F_1 = 3800 \text{ kp}$ ισορροπείται από τις $F_2 = F_3 = F_1/2 = 1900 \text{ kp}$. Η μεταβίβαση της δυνάμεως F_1 από το έλασμα 1 στα ελάσματα 2 και 3 επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του ήλου διαμέτρου $d_1 = 14 \text{ mm}$. Ο ήλος αναλαμβάνει τη δύναμη από το έλασμα 1 και τη μεταδίδει στα ελάσματα 2 και 3 με τη βοήθεια των τάσεων σ_L . Οι τάσεις σ_L , που θλίβουν την κοίλη επιφάνεια των οπών, είναι επιφανειακές πιέσεις και λέγονται **τάσεις συνθλίψεως άντυγας**. Στο σχήμα 2.8(β) και 2.8(γ) έχουμε απομονώσει τον ήλο και σχεδιάσει τις τάσεις που ασκούνται μεταξύ του ήλου και της παράπλευρης επιφάνειας των οπών. Οι τάσεις αυτές ασκούνται σε επιφάνεια $A = t \cdot d_1$, όπου t το πάχος του ελάσματος και d_1 διάμετρος του ήλου, και δεχόμαστε ότι διανέμονται ομοιόμορφα.

Άρα για το έλασμα 1, πάχους $t_1 = 10 \text{ mm}$ η τάση συνθλίψεως άντυγας είναι

$$\sigma_L^{(1)} = \frac{F_1}{A_1} = \frac{3800 \text{ kp}}{(1.40 \times 1.0) \text{ cm}^2} = 2714 \text{ kp/cm}^2$$



Σχ. 2.8.

Για το έλασμα 2 και 3, πάχους $t_2 = 5$ mm είναι:

$$\sigma_L'' = \frac{F_2}{A_2} = \frac{1900 \text{ kp}}{(1,40 \times 0,50) \text{ cm}^2} = 2714 \text{ kp/cm}^2$$

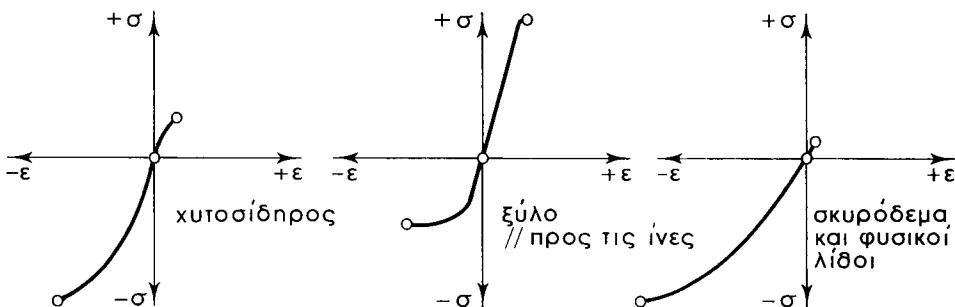
Το έλασμα στη θέση της οπής δέχεται μεγάλες επιφανειακές πιέσεις από τον ήλο.

Όπως όμως δείχνει το σχήμα 2.8(y) το κομμάτι αυτό του ελάσματος είναι εγκιβωτισμένο στη θέση του και ο χάλυβας που το περιβάλλει παρεμποδίζει την εγκάρσια διαστολή του. Για το λόγο αυτό το έλασμα στην οπή δεν διαρρέει ακόμη και σε τάση αρκετά μεγαλύτερη (περίπου διπλάσια) από το όριο διαρροής του. Έτσι δικαιολογείται, γιατί οι επιτρεπόμενες τάσεις συνθλίψεως άντυγας είναι μεγαλύτερες από το όριο διαρροής του υλικού.

2.9 Άλλοι νόμοι παραμορφώσεως.

Μέχρι τώρα διατυπώσαμε το νόμο του Hooke και επιμείναμε πάρα πολύ στο χάλυβα. Η επιμονή αυτή είναι βέβαια δικαιολογημένη αφού ο χάλυβας αποτελεί το σπουδαιότερο από τα υλικά, που χρησιμοποιούμε στις διάφορες κατασκευές.

Υπάρχουν άλλοι νόμοι ελαστικότητας (σχέσεις τάσεων-μηκύνσεων), που δεν είναι τόσο απλοί. Πολλά υλικά, που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές, όπως οι λίθοι, το σκυρόδεμα, το ξύλο κλπ. παρουσιάζουν διαγράμματα τάσεων-μηκύνσεων διαφορετικά, από τα οποία δυνατόν ακόμη και να λείπει (σχ. 2.9) εντελώς το ευθύγραμμο τμήμα, το χαρακτηριστικό του νόμου του Hooke στην ελαστική περιοχή. Μέσα στα



Σχ. 2.9.

όρια όμως των τάσεων και των παραμορφώσεων, που παρουσιάζονται στους συνηθισμένους υπολογισμούς αντοχής, δεχόμαστε ότι και γι' αυτά τα υλικά ισχύει ο νόμος του Hooke.

2.10 Διαξονική καταπόνηση εφελκυσμού.

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τον εφελκυσμό και τη θλίψη σε σώματα τα οποία έχουν

μορφή ευθυγράμμων ράβδων. Υπάρχουν όμως κατασκευές, που δεν αποτελούνται από ράβδους, αλλά από σώματα με μικρό πάχος και μεγάλη επιφάνεια (τοιχώματα, ελάσματα). Για παρόδειγμα αναφέρομε τους λέβητες, τις δεξαμενές, τα κελύφη κλπ.

Το είδος της καταπονήσεως αυτών των κατασκευών, στις οποίες δηλαδή αναπτύσσονται τάσεις σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, λέγεται **διαξονική καταπόνηση**.

Θα εξετάσουμε τις τάσεις που αναπτύσσονται στα λεπτά χαλύβδινα τοιχώματα ενός κυλινδρικού λέβητα.

Ο λέβητας του σχήματος 2.10a έχει εσωτερική διάμετρο $d = 30 \text{ cm}$ και πάχος τοιχώματος $s = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$, βρίσκεται δε υπό εσωτερική πίεση (μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική) $p = 5,0 \text{ kp/cm}^2$.

Οι τάσεις που αναπτύσσονται μέσα στα τοιχώματά του θα είναι και τάσεις **κατά δακτύλιους** ή **περιφερικές**, αλλά και **κατά γενέτειρες** ή **κατά μήκος**.

α) Τάσεις κατά δακτύλιους ή περιφερικές.

Φανταζόμαστε ότι ο λέβητας αποτελείται από δακτύλιους συγκολλημένους μεταξύ τους [σχ. 2.10a(β)] και σ' έναν από τους δακτύλιους αυτούς εφαρμόζομε ένα ξύλινο κύλινδρο, τον οποίο βυθίζομε στο νερό. Το ξύλο απορροφά νερό και διαστέλλεται, οπότε αναγκάζει σε διαστολή και το δακτύλιο που με τον τρόπο αυτό εφελκύεται. Αντιλαμβανόμαστε ότι και δταν ο λέβητας λειτουργεί υπό πίεση, θα αναπτύσσονται στα τοιχώματά του τάσεις εφελκυστικές κατά τους δακτύλιους. Τις τάσεις αυτές τις υπολογίζομε ως εξής:

Ας φαντασθούμε ότι κόβομε ένα δακτύλιο πλάτους $b = 1 \text{ cm}$ και ότι προς στιγμή ο δακτύλιος δεν είναι κυκλικός, αλλά όπως στο σχήμα 2.10a(γ). Στη βάση AB του δακτυλίου ασκείται πίεση $p = 5,0 \text{ kp/cm}^2$, άρα η συνολική δύναμη:

$$N = p \cdot b \cdot d = 5,0 \text{ kp/cm}^2 \times 1 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 150 \text{ kp}$$

Τη δύναμη $N_1 = 150 \text{ kp}$ πρέπει να την αναλάβουν τα τοιχώματα του λέβητα με διατομή $A = bs + bs = 2bs = 2 \times 1 \text{ cm} \times 0,1 \text{ cm} = 0,2 \text{ cm}^2$ [σχ. 2.10a(δ)].

Άρα η τάση εφελκυσμού, που αναπτύσσεται στα τοιχώματα του λέβητα είναι:

$$\sigma = \frac{N_1}{A} = \frac{pd}{2s} = \frac{p \cdot r}{s} = \frac{150}{0,2} = 750 \text{ kp/cm}^2$$

Καταλήγομε λοιπόν για την περιφερική τάση σ_1 [σχ. 2.10a(ε)] στον τύπο:

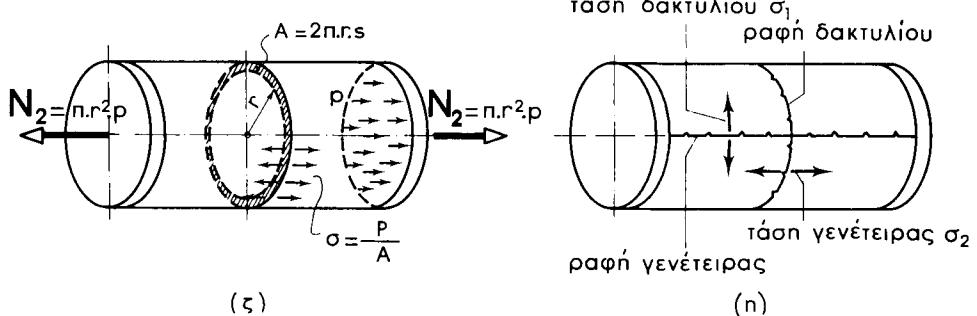
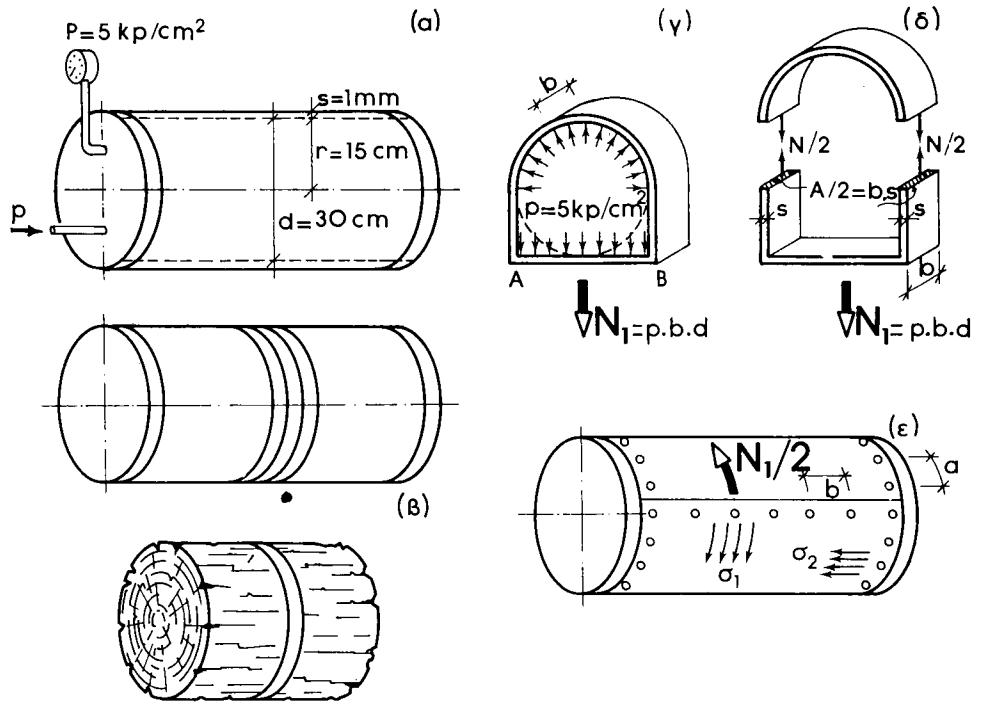
$$\sigma_1 = \frac{p \cdot r}{s} \quad (2.16)$$

β) Τάσεις κατά γενέτειρες ή κατά μήκος.

Είναι πια εύκολο να αντιληφθούμε ότι η εσωτερική πίεση του λέβητα, που ασκείται στις βάσεις του κυλίνδρου, προκαλεί τάσεις εφελκυσμού κατά τις γενέτειρες [σχ. 2.10a(ζ)].

Οι τάσεις αυτές βρίσκονται ως εξής:

Πάνω στις βάσεις του κυλίνδρου ασκείται πίεση $p = 5 \text{ kp/cm}^2$, άρα η συνολική



Σχ. 2.10α.

δύναμη που ασκεί ο υπό πίεση ατμός του λέβητα στη βάση εμβαδού:

$$A = \pi r^2 = 707 \text{ cm}^2 \quad \text{είναι} \quad N_2 = A \cdot p = \pi \cdot r^2 \cdot p = 3533 \text{ kp}$$

Τη δύναμη αυτή παραλαμβάνουν οι γενέτειρες του κυλίνδρου. Κατά την έννοια των γενετειρών η διατομή του ελάσματος είναι $A = 2\pi rs = 9,4 \text{ cm}^2$ [σχ. 2.10α(ζ)]. Συνεπώς οι τάσεις εφελκυσμού που αναπτύσσονται στις γενέτειρες είναι:

$$\sigma = \frac{N_2}{A} = \frac{\pi r^2 \cdot p}{2\pi rs} = \frac{p \cdot r}{2s} = \frac{3533 \text{ kp}}{9,4 \text{ cm}^2} = 376 \text{ kp/cm}^2$$

Άρα για τις τάσεις αυτές κατά μήκος ισχύει ο τύπος:

$$\sigma_2 = \frac{p \cdot r}{2s} \quad (2.17)$$

Δηλαδή οι τάσεις εφελκυσμού που αναπτύσσονται κατά τις γενέτειρες είναι ίσες με το μισό των τάσεων που αναπτύσσονται κατά τους δακτύλιους.

Για το λόγο αυτό η ραφή του ελάσματος, που γίνεται κατά μήκος της γενέτειρας ενός λέβητα [σχ. 2.10a(η)], χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή, γιατί βρίσκεται υπό τάσεις διπλάσιες από τις τάσεις που αναπτύσσονται σε ραφή κατά την περιφέρεια.

Παράδειγμα 1.

Κυλινδρικός λέβητας με εσωτερική διάμετρο $d = 1,20 \text{ m}$ κατασκευάζεται με χαλύβδινα ελάσματα και πρόκειται να λειτουργήσει υπό πίεση $p = 8 \text{ at} = 8 \text{ kp/cm}^2$. Ζητείται:

- α) το πάχος των τοιχωμάτων σε χιλιοστά, ώστε η τάση που αναπτύσσεται να μην υπερβαίνει τα 1000 kp/cm^2 .
- β) Το μέγεθος των τάσεων που αναπτύσσονται με βάση το πάχος που θα εκλεγεί.

Λύση.

Από τις δύο τάσεις σ_1 και σ_2 αποφασιστική για την εκλογή του πάχους είναι η δυσμενέστερη, δηλαδή η μεγαλύτερη:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{s}, \text{ όπου } p = 8 \text{ kp/cm}^2, \quad r = \frac{d}{2} = 60 \text{ cm}$$

Για να είναι η τάση $\sigma = 1000 \text{ kp/cm}^2$, ο τύπος γράφεται:

$$1000 \text{ kp/cm}^2 = \frac{8 \text{ kp/cm}^2 \times 60 \text{ cm}}{s}$$

από όπου προκύπτει το πάχος:

$$s = \frac{8 \times 60}{1000} \text{ cm} = 0,48 \text{ cm}$$

εκλέγομε $s = 5 \text{ mm}$.

β) Οι τάσεις που αναπτύσσονται είναι:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{s} = \frac{8 \times 60}{0,5} = 960 \text{ kp/cm}^2 < 1000 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2s} = \frac{\sigma_1}{2} = 480 \text{ kp/cm}^2 < 1000 \text{ kp/cm}^2 \quad (\text{προφανώς})$$

Παράδειγμα 2.

Ο λέβητας του προηγουμένου παραδείγματος θα κατασκευασθεί από ελάσματα που συνδέονται με ήλους. Κάθε ήλος μπορεί να αναλάβει δύναμη $N = 1920$ kp. Ζητείται η απόσταση στην οποία πρέπει να τοποθετηθούν οι ήλοι: α) της ραφής γενέτειρας και β) της ραφής δακτυλίου.

Λύση.

Στη ραφή της γενέτειρας αναπτύσσεται τάση.

$$\sigma_1 = 960 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \quad [\text{σχ. 2.10a(ε)}]$$

Αν η απόσταση των ήλων που ζητούμε είναι b , θα πρέπει η συνισταμένη των τάσεων, που αναπτύσσονται σε μήκος b , να ισορροπούν τη N , δηλαδή $\sigma_1 \cdot b \cdot s = N$.

$$b = \frac{N}{\sigma_1 \cdot s} = \frac{1920 \text{ kp}}{960 \text{ kp/cm}^2 \times 0,5 \text{ cm}} = 4,00 \text{ cm}$$

Στη ραφή του δακτυλίου οι ήλοι θα τοποθετηθούν σε αποστάσεις:

$$a = \frac{N}{\sigma_2 \cdot s} = \frac{1920}{480 \times 0,5} = 8,0 \text{ cm}$$

Βλέπομε δηλαδή ότι στις γενέτειρες πρέπει να τοποθετούνται διπλάσιοι ήλοι από ό,τι στους δακτύλιους.

Στην πραγματικότητα η απόσταση α πρέπει να είναι ακέραιο υποπολλαπλάσιο του μήκους της περιφέρειας. Επειδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα το μήκος της περιφερείας είναι:

$$L = \pi d = 3,14 \times 60 = 188 \text{ cm}$$

προκύπτει συνολικός αριθμός ήλων $n = 188/8 = 23,5$.

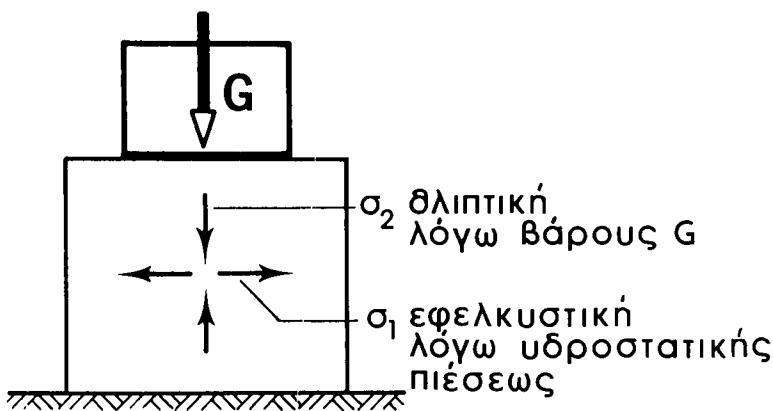
Εκλέγομε 24 ήλους, που θα τοποθετηθούν σε αποστάσεις:

$$a = \frac{188}{24} = 7,8 \text{ cm}$$

Παράδειγμα 3.

Κυλινδρική υδατοδεξαμενή έχει πάνω στο κάλυμμά της έναν οικίσκο. Στα τοιχώματα της δεξαμενής αναπτύσσονται στην περιφέρεια τάσεις εφελκυσμού λόγω της υδροστατικής πιέσεως. Κατά αντιστοιχία με ότι είδαμε για το λέβητα, στις γενέτειρες ασκούνται τάσεις θλίψεως που οφείλονται στο βάρος του οικίσκου (σχ. 2.10β). Βλέπομε λοιπόν ότι η διαξονική καταπόνηση εμφανίζεται με τρεις μορφές:

- a) $\sigma_1 = \text{εφελκυσμός}$ } περίπτωση λέβητα με πίεση μεγαλύτερη
 $\sigma_2 = \text{εφελκυσμός}$ } από την ατμοσφαιρική



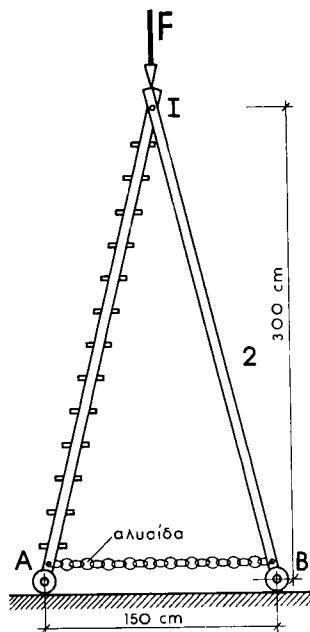
Σχ. 2.10β.

- β) $\sigma_1 = \text{εφελκυσμός}$
 $\sigma_2 = \text{θλίψη}$
- γ) $\sigma_1 = \text{θλίψη}$
 $\sigma_2 = \text{θλίψη}$
- } περίπτωση δεξαμενής
} περίπτωση λέβητα με πίεση μικρότερη από την ατμοσφαιρική

Στη μορφή (γ) αξίζει να αναφέρομε και την καταπόνηση που αναπτύσσεται στα τοιχώματα ενός σφαιρικού βαθυσκάφους, το οποίο βυθίζεται στη θάλασσα και βρίσκεται υπό μεγάλες υδροστατικές πιέσεις.

2.11 Ασκήσεις.

1. Να υπολογισθεί η αντοχή σε εφελκυσμό συρματόσχοινου, το οποίο αποτελείται από 6 δέσμες των 37 συρματιδίων κάθε μία, με διάμετρο κάθε συρματιδίου 0,5 mm. Να ληφθεί υπ' όψη 10% ελάττωση της αντοχής του, λόγω της συστροφής των συρματιδίων, και $\sigma_\theta = 150 \text{ kp/mm}^2$ με συντελεστή ασφάλειας 6.
2. Ο εγκάρσιος στροφέας μιας ατράκτου ασκεί στον τριβέα του εδράνου δύναμη 1500 kp. Αν η διάμετρος των στροφέων είναι 45 mm και το μήκος τους 60 mm, πόση είναι η πίεση ανά μονάδα επιφάνειας πάνω στον τριβέα και πόση θα ήταν η πίεση αυτή πάνω στον επίπεδο τριβέα, αν ο στροφέας ήταν αξονικός;
3. Σε μια δοκιμή εφελκυσμού υπολογίσθηκαν τα ακόλουθα δεδομένα: Το φορτίο στο όριο της αναλογίας (σο προς 3000 kp. Το φορτίο στο όριο της θραύσεως (σο πρός 5460 kp. Διάμετρος δοκιμίου 13,5 mm. Μήκος (αρχικό) 50 mm. Μήκυνση στο όριο της αναλογίας 0,05 mm. Να βρεθούν: α) το όριο της αναλογίας. β) Το όριο της θραύσεως. γ) Το μέτρο ελαστικότητας. δ) Να γίνει και το σχετικό διάγραμμα χωρίς κλίμακα.
4. Το έμβολο ενός υδραυλικού πιεστηρίου έχει διάμετρο 300 mm και η μέγιστη πίεση του νερού μέσα στον κύλινδρο είναι 150 at. Η διάμετρος καθενός από τους 4 στύλους του πιεστηρίου είναι 72 mm. Να βρεθεί η τάση εφελκυσμού, η οποία θα αναπτυχθεί μέσα στους στύλους.
5. Η πτυσσόμενη κλίμακα του σχήματος 2.10γ φορτίζεται στήν κορυφή της με κατακόρυφο φορτίο $F = 150 \text{ kp}$. Ζητούνται: α) Οι εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων 1 και 2. β) Η εφελκυστική δύναμη που αναλαμβάνει η αλυσίδα. γ) Αν η αλυσίδα έχει κρίκους κατασκευασμένους από υλικό με $\sigma_{sp} = 40 \text{ kp/mm}^2$, να βρεθεί η διάμετρος της διατομής κάθε κρίκου.



Σχ. 2.10γ.

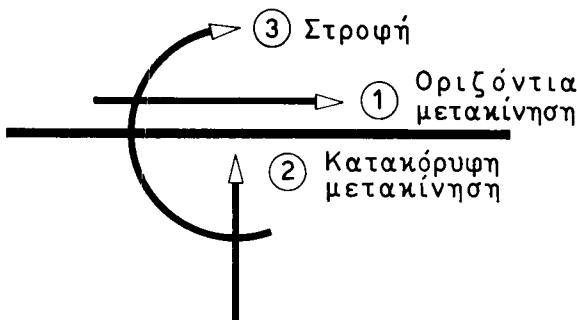
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

3.1 Είδη στηρίξεων - Αντιδράσεις - Είδη ισοστατικών φορέων.

Ένας φορέας πρέπει να στηρίζεται κατάλληλα, ώστε να μην μπορεί να κινηθεί, αλλά να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, που αποτελεί προϋπόθεση της Στατικής. Τα φορτία που επιβάλλονται στο φορέα μεταβιβάζονται στις στηρίξεις, όπου αναπτύσσονται δυνάμεις, **οι αντιδράσεις στηρίξεως**, οι οποίες εμποδίζουν την κίνηση (μετακίνηση και στροφή) του φορέα και δημιουργούν την κατάσταση ισορροπίας.

Οι δυνατότητες κινήσεως ενός φορέα στο επίπεδο είναι τρεις, μπορεί να μετακινηθεί κατά δύο τυχαίες διευθύνσεις, συνήθως λαμβάνεται η οριζόντια και η κατακόρυφη και να στραφεί (σχ. 3.1α). Έχει, όπως λέμε, **τρεις βαθμούς ελευθερίας**. Κάθε στήριξη μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας. Υπάρχουν τρία είδη στηρίξεων: η **πάκτωση**, η **άρθρωση** και η **κύλιση**. Στην πράξη η εκλογή τους καθορίζεται κυρίως από κατασκευαστικές απαιτήσεις, πρέπει όμως να εξασφαλίζουν πάντοτε ότι ο φορέας δεν μπορεί να μετακινηθεί οριζόντια και κατακόρυφα ούτε να στραφεί γύρω από ένα σημείο.



Σχ. 3.1α.

Οι **αντιδράσεις** που αναπτύσσονται στις στηρίξεις είναι κατ' αρχήν άγνωστες, δηλαδή δεν γνωρίζομε το **μέγεθος**, τη **διεύθυνση** και το **σημείο εφαρμογής**. Κάθε είδος στηρίξεως όμως έχει ορισμένα από τα παραπάνω καθοριστικά στοιχεία της δυνάμεως, γνωστά και ορισμένα άγνωστα.

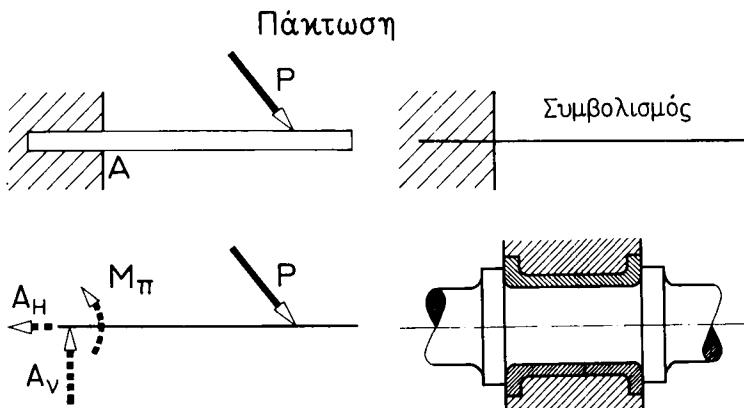
1) Πάκτωση (σχ. 3.1β).

Από την πράξη γνωρίζομε ότι ένας απλός τρόπος στηρίξεως μιας δοκού είναι να ενσωματώσουμε το ένα άκρο της μέσα σε ένα τοίχο.

Αυτό το είδος στηρίξεως προκαλεί τρεις δεσμεύσεις ελευθερίας κινήσεως, δηλαδή δεν επιτρέπει ούτε στροφή, ούτε μετακίνηση, κατακόρυφη ή οριζόντια. Ο τρόπος αυτός στηρίξεως ονομάζεται **πάκτωση**.

Τα άγνωστα στοιχεία της αντιδράσεως είναι τρία, όσες ακριβώς και οι δεσμεύσεις που πραγματοποιούνται με την πάκτωση, δηλαδή το μέγεθος, η διεύθυνση και το σημείο εφαρμογής.

Εάν ως σημείο εφαρμογής ληφθεί η εξωτερική παρειά της πακτώσεως, εμφανίζονται τρεις άγνωστες αντιδράσεις στηρίξεως, δηλαδή οι δυνάμεις A_v , A_H και η ροπή πακτώσεως M_{π} .



Σχ. 3.1β.

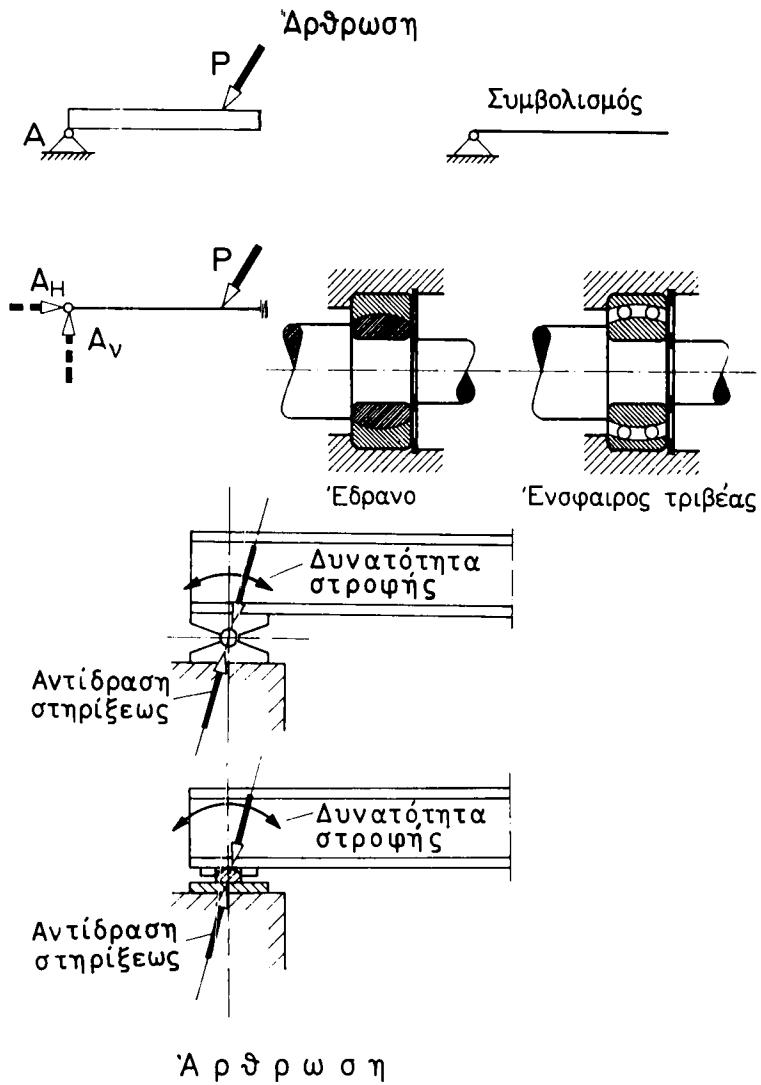
2) Σταθερή στήριξη ή άρθρωση (σχ. 3.1γ).

Αν καταργήσουμε την πρώτη δέσμευση της πακτωμένης δοκού λαμβάνομε μια δοκό, που συνδέεται στη θέση στηρίξεως της με ένα είδος σταθερού συνδέσμου, όπως είναι π.χ. το βλήτρο.

Η διάταξη αυτή δεν επιτρέπει ούτε την οριζόντια ούτε την κατακόρυφη μετακίνηση της δοκού, δεσμεύει επομένως δύο βαθμούς ελευθερίας, επιτρέπει όμως τη στροφή γύρω από το σημείο στηρίξεως της.

Από τα στοιχεία που προσδιορίζουν την αντίδραση της αρθρώσεως αυτό που γνωρίζομε από την αρχή είναι μόνο ότι η δύναμη περνά από το σημείο A.

Άγνωστα μας είναι δύο στοιχεία: το μέγεθος και η γωνία της δυνάμεως, π.χ. ως προς τον άξονα x ή, που είναι το ίδιο, η κατακόρυφη και η οριζόντια συνιστώσα της A_v και A_H .



Σχ. 3.1γ.

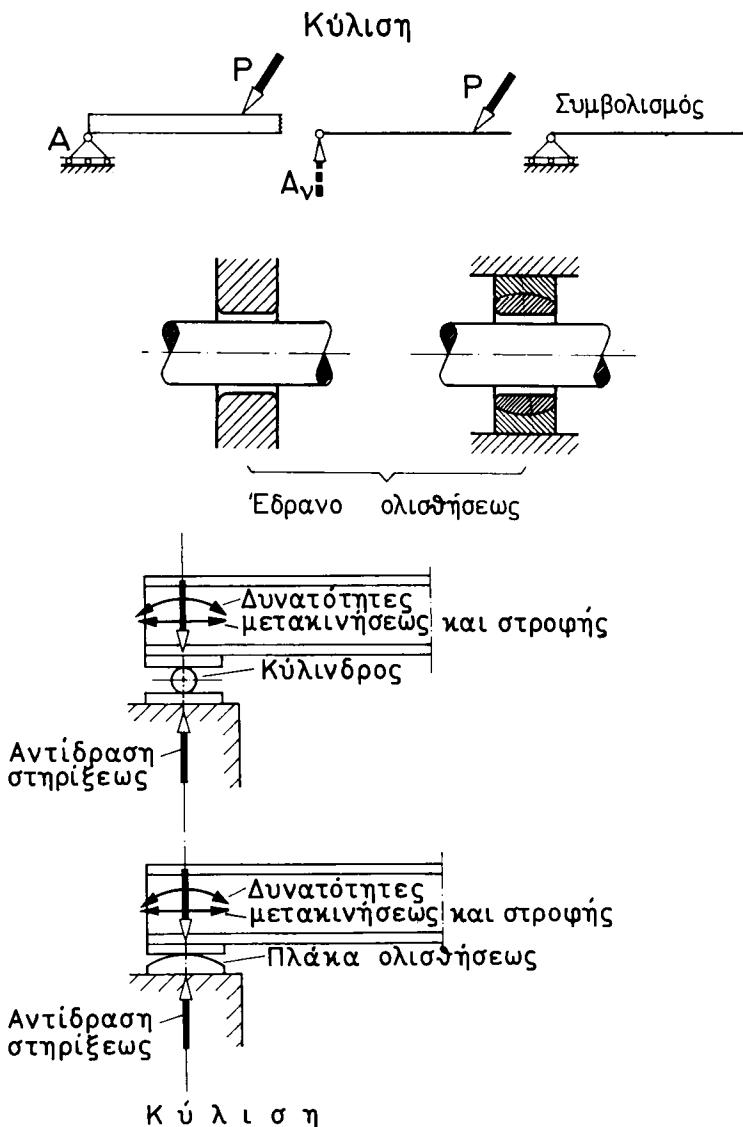
3) Κινητή στήριξη ή κύλιση (σχ. 3.1δ).

Με αυτήν δεσμεύεται μόνο η ελευθερία κινήσεως κάθετα στο επίπεδο στηρίξεως άρα η αντίδρασή της θα είναι οπωσδήποτε κάθετη σ' αυτό το επίπεδο.

Επί πλέον και το σημείο εφαρμογής είναι το Α, δηλαδή το μέσον της στηρίξεως.

Επομένως το μόνο στοιχείο της αντιδράσεως, που είναι άγνωστο, είναι το μέγεθός της.

Με τα παραπάνω είδη στηρίξεως κάθε ολόσωμος φορέας στηρίζεται σε ορισμένες θέσεις, στις οποίες μεταβιβάζει τα φορτία που αναλαμβάνει (Πίν. 3.11).



Σχ. 3.16.

Οι στηρίξεις πρέπει να του εξασφαλίζουν ευσταθή ισορροπία. Για το σκοπό αυτό απαιτείται, όπως προαναφέρθηκε, η δέσμευση τριών τουλάχιστον ελευθεριών κινήσεως.

Στη Στατική γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ των ολοσώμων φορέων που έχουν τρεις δεσμεύσεις και εκείνων με περισσότερες, γιατί υπάρχει βασική διαφορά ως προς τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται οι αντιδράσεις στηρίξεως.

Σε κάθε φορέα γνωρίζομε τα μόνιμα και ωφέλιμα φορτία καθώς και τις δράσεις από το κλιματικό περιβάλλον (χιόνι, άνεμος κ.λ.π.) που πρέπει να αναλάβει. Για να

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1.1.

Είδος	Μορφή	Ισοδυναμία με ράβδους	Συμβολισμός	Βαθμοί ελευθερίας			Αντιδράσεις στηρίξεως
				μετακίνηση	στροφή	σύνολο	
Κύλιση				1	1	2	1 0
Άρρωση				0	1	1	2 0
Πάτωση				0	0	0	2 1

υπολογίσομε όμως το φορέα πρέπει να γνωρίζομε όλες τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται επάνω του, άρα πρέπει να υπολογίσομε και τις αντιδράσεις στηρίξεως.

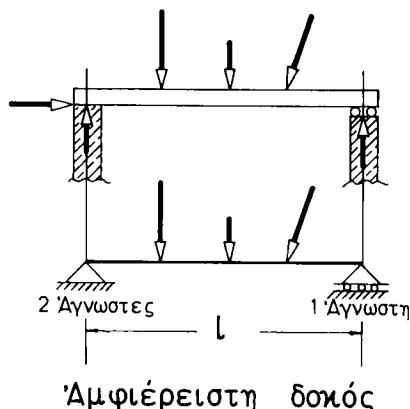
Για τον υπολογισμό τους διαθέτομε τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο $\Sigma x = 0$ $\Sigma y = 0$ $\Sigma M = 0$. Με τις τρεις αυτές εξισώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τρία άγνωστα μεγέθη αντιδράσεων. Όταν επομένως υπάρχει ο απαραίτητος αριθμός των τριών δεσμεύσεων, είναι δυνατό να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως χρησιμοποιώντας τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας.

Ο φορέας που στηρίζεται κατ' αυτό τον τρόπο ονομάζεται **ισοστατικός ή εξωτερικά στατικά ορισμένος**, που σημαίνει ότι στηρίζεται έτσι, ώστε να υπολογίζονται οι αντιδράσεις στηρίξεως με την εφαρμογή των τριών εξισώσεων ισορροπίας.

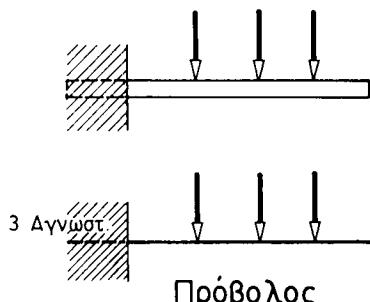
Ισοστατικοί φορείς της κατηγορίας αυτής είναι:

1) Αμφιέρειστος (σχ. 3.1ε).

Ο φορέας έχει μία σταθερή και μια κινητή στήριξη, άρα τρεις άγνωστες αντιδράσεις και επομένως είναι ισοστατικός.



Σχ. 3.1ε.



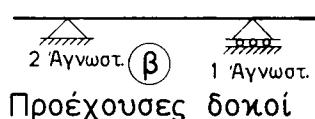
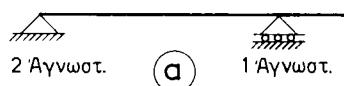
Σχ. 3.1στ.

2) Πρόβολος πακτωμένος (σχ. 3.1στ.).

Έχει το ένα άκρο πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο. Είναι ισοστατικός, γιατί οι άγνωστες αντιδράσεις είναι τρεις.

3) Προέχουσες δοκοί.

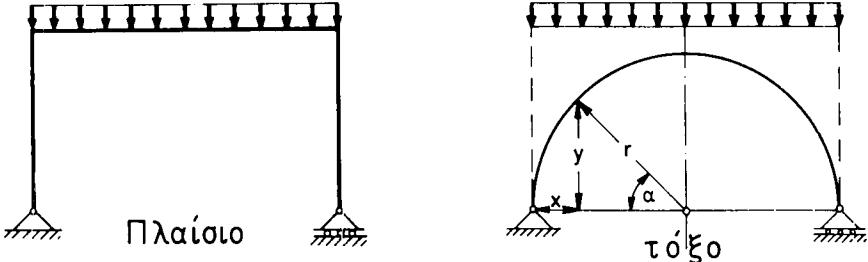
Είναι αμφιέρειστοι φορείς. Ονομάζονται **μονοπροέχουσες** όταν εξέχει ως πρόβολος το ένα άκρο [σχ. 3.1ζ(α)], **αμφιπροέχουσες** όταν εξέχουν από τις στηρίξεις και τα δύο άκρα [σχ. 3.1ζ(β)].



Σχ. 3.1ζ.

4) Αμφιέρειστο πλαίσιο και τόξο (σχ. 3.1η).

Είναι φορέας πολυγωνικός (πλαίσιο) ή καμπύλος (τόξο) που εδράζεται σε δύο στηρίξεις, μια σταθερή και μια κινητή.



Σχ. 3.1η.

3.2 Είδη εξωτερικών φορτίσεων φορέων.

Ο φορέας αναλαμβάνει κατά την εκπλήρωση του σκοπού, για τον οποίο δημιουργήθηκε, φορτίσεις διαφόρων μορφών και επί πλέον το δικό του βάρος.

Οι φορτίσεις αυτές διακρίνονται ανάλογα με:

- Τη **διάρκεια** της δράσεώς τους.
- Τη **διεύθυνση** κατά την οποία ενεργούν.
- Τη **μορφή διανομής**.

α) Με κριτήριο τη διάρκεια διακρίνομε **μόνιμα** και **μη μόνιμα** φορτία.

Στα **μόνιμα φορτία** περιέχονται:

- Το ίδιο βάρος του φορέα.
- Το βάρος των αμεταβλήτων στο χρόνο τμημάτων της κατασκευής, τόσο των φερόντων όσο και των μη φερόντων (τοιχώματα, επικαλύψεις, επιχρίσματα κλπ).

Στα **μη μόνιμα** φορτία περιλαμβάνονται:

– **Τα ωφέλιμα φορτία**, που προκύπτουν από τους χρήστες, τις εγκαταστάσεις, τα υλικά αποθηκεύσεως κ.λ.π.

– **To φορτίο χιονιού.**

– **To φορτίο ανέμου.**

– **H ώθηση των γαιών.**

– **Δυνάμεις λόγω αυξομειώσεως του μήκους του φορέα** που προκαλείται από τη μεταβολή της θερμοκρασίας κ.λ.π.

Σημαντική ομάδα των μη μονίμων φορτίων αποτελούν τα **δυναμικά φορτία** που είναι:

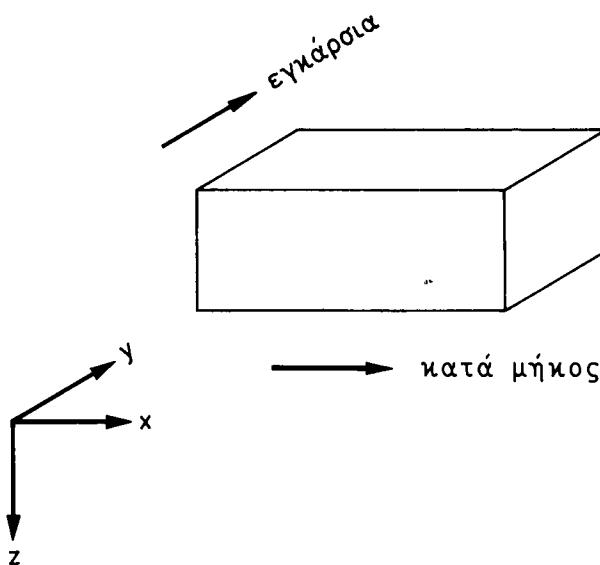
– **Δυνάμεις τροχοπεδήσεως** που προκαλούνται κατά την τροχοπέδηση ή επιταχυνση των οχημάτων.

– **Ατυχηματικά φορτία** π.χ. πρόσκρουση οχήματος, έκρηξη κ.λ.π. και

– **Σεισμός**, κατά τον οποίο κινείται το έδαφος θεμελιώσεως και λόγω της αδράνειας των μαζών του κτιρίου αναπτύσσονται δυνάμεις.

β) Με βάση τη **διεύθυνση** κατατάσσονται σε φορτία:

- **Κατακόρυφα** ή κατά τον άξονα z.



Σχ. 3.2α.

- **Οριζόντια** κατά τη διαμήκη έννοια της κατασκευής ή κατά τον άξονα x.
- **Οριζόντια** κατά την εγκάρσια έννοια της κατασκευής ή κατά τον άξονα y (σχ. 3.2α).

γ) Τέλος, αναφορικά με την **κατανομή** η φόρτιση ενός επίπεδου φορέα εμφανίζει συνήθως μία από τις ακόλουθες μορφές ή συνδυασμό των μορφών αυτών:

α) **Συγκεντρωμένα φορτία** [σχ. 3.2β(α)]. Θεωρούμε τα φορτία που προέρχονται από τους τροχούς αυτοκινήτων και γενικά οχημάτων, τα φορτία που διαβιβάζουν δοκοί που στηρίζονται σε άλλες δοκούς, υποστυλώματα ή τοιχώματα, τα φορτία των υποστυλωμάτων κ.λ.π.

β) **Ομοιόμορφα διανεμημένο φορτίο.** Όταν είναι διανεμημένο σε όλο το μήκος του φορέα καλείται **καθολικό** [σχ. 3.2β (β)], όταν σε ένα μέρος μόνο του φορέα **μερικό** [σχ. 3.2β (γ)].

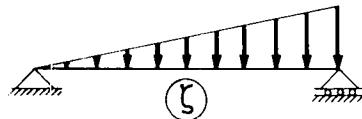
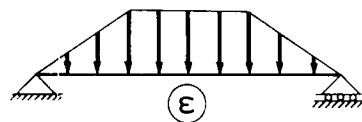
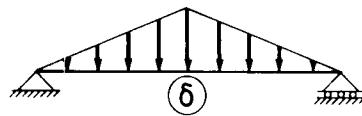
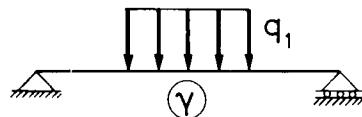
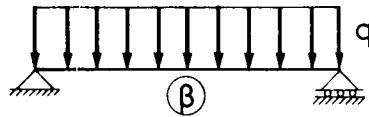
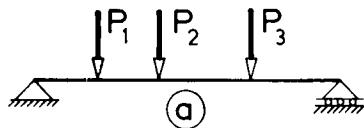
Καθολικό ομοιόμορφο φορτίο είναι το ίδιο βάρος της δοκού. Καθολικό ή μερικό ομοιόμορφο φορτίο προκαλείται από την επικάλυψη, τα ωφέλιμα φορτία, τα τοιχώματα κ.λ.π.

γ) **Τριγωνικό και τραπεζοειδές συμμετρικό** [σχ. 3.2β (δ) και (ε)].

Η φόρτιση αυτή εμφανίζεται κυρίως επάνω σε δοκούς, οι οποίες στηρίζουν πλάκες εδραζόμενες και στις τέσσερις πλευρές τους, σε δοκούς υπερθύρων (πρέκια) κ.λ.π.

δ) **Τριγωνικό ασύμμετρο** [σχ. 3.2β (ζ)].

Προκαλείται από την πίεση που ασκεί οποιοδήποτε υγρό επάνω στα τοιχώματα των δεξαμενών, από την ώθηση των χωμάτων επάνω στους τοίχους αντιστηρίζεως κ.λ.π.



Σχ. 3.2β.

3.3 Διαγράμματα εντατικών μεγεθών δοκού.

Δοκός ονομάζεται ο φορέας που έχει τη μία διάσταση, το μήκος, αρκετά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο (ύψος και πλάτος) και καταπονείται με δυνάμεις κυρίως κάθετες στον κατά μήκος άξονά του. Οι φορτίσεις και οι αντιδράσεις στηρίζεων, που συγκροτούν ένα σύστημα δυνάμεων σε ισορροπία, αποτελούν τις **εξωτερικές δυνάμεις** της δοκού.

Υπάρχει όμως το ερώτημα: Πώς μεταβιβάζονται οι φορτίσεις μέσα από τη δοκό προς τις στηρίξεις; Τι αναπτύσσεται στο εσωτερικό της δοκού και σε κάθε της θέση;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, φανταζόμαστε ότι η δοκός έχει κοπεί στη θέση που θέλομε να εξετάσουμε.

Η δοκός όμως ως σύνολο βρίσκεται σε ισορροπία, άρα σε ισορροπία βρίσκεται και κάθε τμήμα της που κόπηκε. Επομένως στις δύο επιφάνειες της τομής πρέπει

να αναπτυχθούν δυνάμεις και ροπές τέτοιου μεγέθους και διευθύνσεως, ώστε τα δύο τμήματα να παραμείνουν σε ισορροπία. Η συνισταμένη των δυνάμεων, που διανέμονται στην επιφάνεια της τομής και που τις ονομάσαμε τάσεις, αποτελεί την **εσωτερική δύναμη** και η συνισταμένη των ροπών την **εσωτερική ροπή**.

Η απάντηση επομένως στο ερώτημα είναι ότι η μεταβίβαση της φορτίσεως της δοκού προς τις στηρίξεις γίνεται με την ανάπτυξη σε κάθε διατομή της δοκού δυνάμεων και ροπών, οι οποίες για το λόγο αυτό καλούνται εσωτερικές (σχ. 3.3a).

Με τις υποθετικές τομές της δοκού κατορθώσαμε να μάθομε το μέγεθος της συνισταμένης των εσωτερικών δυνάμεων, που μας είναι απαραίτητες για να υπολογίσουμε την αντοχή της δοκού. Δεν μάθαμε όμως πώς διανέμονται οι δυνάμεις στην επιφάνεια της τομής. Αυτό θα εξετάσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Στο σχήμα 3.3a παρουσιάζεται μία δοκός, η οποία φορτίζεται από τις ακόλουθες εξωτερικές δυνάμεις:

- Τα **φορτία** P_1 , P_2 και P_3 και
- Τις **αντιδράσεις στηρίξεως** A και B.

Σε απόσταση x από την αριστερή στήριξη φανταζόμαστε μία τομή της δοκού, την 1-1, και ζητούμε να υπολογίσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις και την εσωτερική ροπή.

Εξετάζομε το τμήμα της δοκού αριστερά από την τομή 1-1. Πάνω σ' αυτό δρουν οι εξωτερικές δυνάμεις A και P_1 . Μπορούμε για απλούστευση να πάρομε τη συνισταμένη τους R [σχ. 3.3a(a)].

Μας ενδιαφέρει να μάθομε πώς καταπονείται από τη δύναμη R η διατομή 1-1. Προς το σκοπό αυτό μεταθέτουμε τη συνισταμένη R παράλληλα προς τον εαυτό της στο κέντρο βάρους O της διατομής 1-1 [σχ. 3.3a (β)].

Γνωρίζομε όμως ότι κατά την παράλληλη μετάθεση μιάς δυνάμεως σε ένα νέο σημείο εφαρμογής, εδώ το O, προκύπτει μία ροπή που έχει μέγεθος ίσο με το γινόμενο της δυνάμεως επί την απόσταση της α από το νέο σημείο εφαρμογής. Επομένως στη διατομή 1-1 δρουν η δύναμη R και η ροπή M = R . a. Τη δύναμη R μπορούμε να την αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες την R_x , που δρα κατά τον άξονα, και την R_y κάθετα στον άξονα της δοκού.

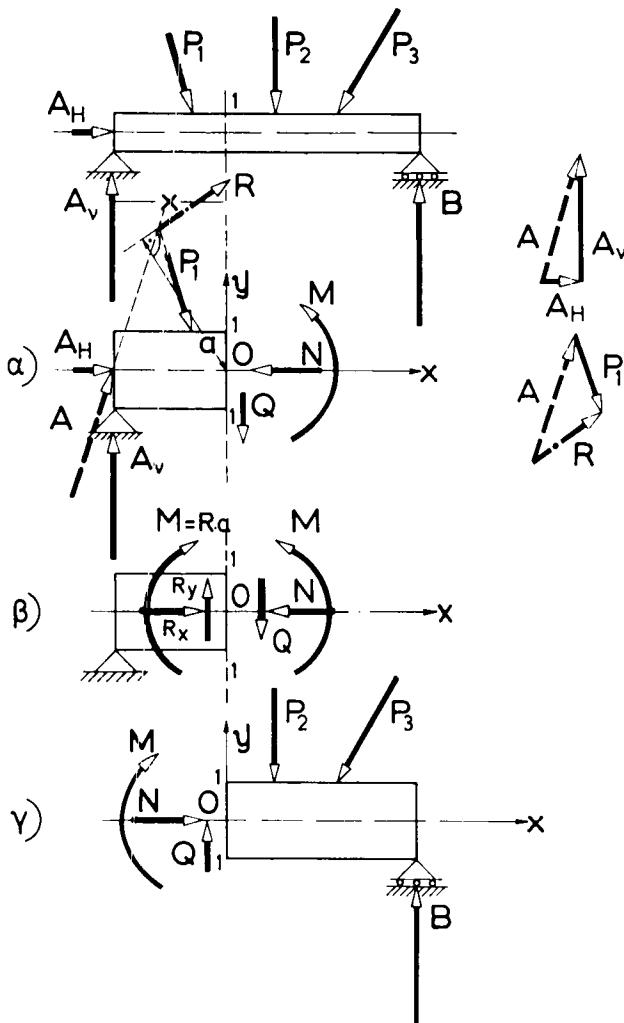
Για να ισορροπηθούν αυτές οι τρεις δράσεις πρέπει το δεξιό τμήμα της δοκού να ασκήσει επάνω στο αριστερό:

- μια δύναμη N ίση και αντίφορη της R_x
- μια δύναμη Q ίση και αντίφορη της R_y και
- μια ροπή M ίση και αντίφορη της R . a.

Οι εσωτερικές δυνάμεις, που θα αναπτυχθούν στις δύο πλευρές της τομής, θα έχουν το ίδιο μέγεθος, αλλ' αντίθετη διεύθυνση. Αυτό γίνεται γιατί πρέπει να ισορροπούν μεταξύ τους, μια και η μια αντιπροσωπεύει το ένα τμήμα των εξωτερικών δυνάμεων και η άλλη το υπόλοιπο. Αυτές όμως, όπως είπαμε στην αρχή, ισορροπούν.

Αυτό σημαίνει ότι είτε το αριστερό τμήμα της τομής της δοκού εξετάσομε, είτε το δεξιό, θα προκύψουν οι ίδιες εσωτερικές δυνάμεις στην τομή [σχ. 3.3a (β) και (γ)].

Αυτές τις δυνάμεις και τη ροπή τις καλούμε **εσωτερικές δυνάμεις** ή **εντατικά μεγέθη**.



Σχ. 3.3α.

Δεδομένου ότι σε κάθε τμήμα της δοκού το σύστημα εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων ισορροπεί, για να καθορίσομε τις εσωτερικές δυνάμεις πρέπει να εφαρμόσομε τις τρεις εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας:

$$\Sigma x = 0, \Sigma y = 0, \Sigma M = 0$$

όπου:

$\Sigma x = 0$ σημαίνει ότι στη διατομή αναπτύσσεται μία δύναμη \$N\$ ίση και αντίφορη προς την \$R_x\$. Η \$N\$ καλείται **ορθή δύναμη**.

$\Sigma y = 0$ σημαίνει ότι στη διατομή αναπτύσσεται μία δύναμη \$Q\$ ίση και αντίφορη προς την \$R_y\$. Η \$Q\$ καλείται **τέμνουσα δύναμη**.

$\Sigma M = 0$ δείχνει ότι στη διατομή αναπτύσσεται μία ροπή \$M\$ ίση και αντίφορη

προς την R.a. Η Μ ονομάζεται **ροπή κάμψεως**.

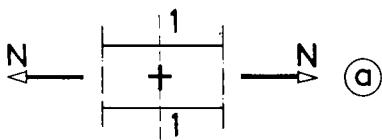
Ωστε εσωτερικές δυνάμεις είναι:

Η ορθή δύναμη N, η τέμνουσα δύναμη Q και η ροπή κάμψεως M. Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε και να τα συμπληρώσουμε ως εξής:

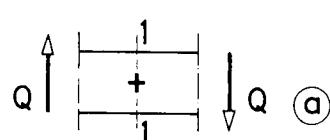
- Η ορθή δύναμη N** μιας διατομής της δοκού είναι ίση και αντίφορη προς το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν παράλληλα προς τον άξονα της δοκού, αριστερά (ή δεξιά) από τη διατομή που εξετάζεται.

Το πρόσημο θεωρείται θετικό (+), όταν η ορθή δύναμη εφελκύει τη διατομή [σχ. 3.3β (α)] και αρνητικό (-), όταν τη θλίβει [σχ. 3.3β (β)].

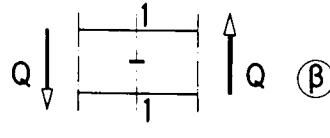
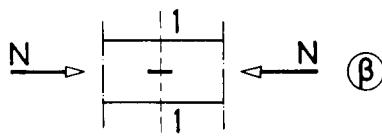
- Η τέμνουσα δύναμη Q** μιας διατομής της δοκού είναι ίση και αντίφορη προς το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν κάθετα προς τον άξονα της δοκού, αριστερά (ή δεξιά) από τη διατομή που εξετάζεται.



Σχ. 3.3β.



Σχ. 3.3γ.



Το πρόσημο θεωρείται θετικό (+), όταν η τέμνουσα δύναμη στο αριστερό τμήμα της τομής διευθύνεται προς τα κάτω, ή στο δεξιό τμήμα της δοκού προς τα άνω [σχ. 3.3γ (α)]. Στην αντίθετη περίπτωση η τέμνουσα Q είναι αρνητική (-) [σχ. 3.3γ (β)].

- Η ροπή κάμψεως M** μιας διατομής είναι ίση και αντίφορη προς το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων, που είναι αριστερά (ή δεξιά) από τη διατομή που εξετάζεται ως προς το κέντρο βάρους της.

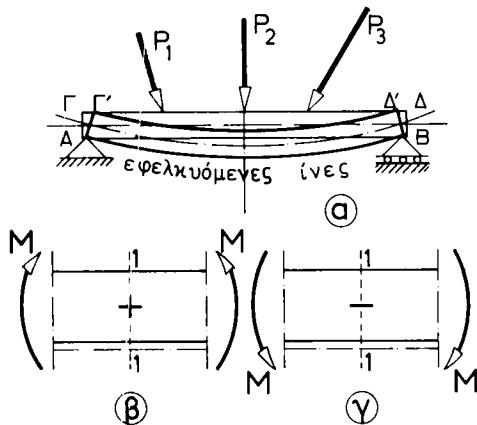
Το πρόσημο θεωρείται θετικό ή αρνητικό ανάλογα με τα παρακάτω:

- Λόγω των δυνάμεων P_1, P_2, P_3 , η δοκός θα καρφθεί και από τη θέση ΑΒΓΔ θα έλθει στη θέση ΑΒΓ'Δ' [σχ. 3.3δ (α)].

Αν υποθέσουμε ότι η δοκός αποτελείται από ίνες, οι οποίες είναι παράλληλες προς τον αξονά της, τότε στη νέα θέση της δοκού οι κάτω ίνες θα έχουν επιμηκυνθεί και οι επάνω θα έχουν βραχυνθεί. Όταν η ροπή κάμψεως αναγκάζει τις κάτω ίνες της δοκού να επιμηκυνθούν, τότε λέμε ότι η ροπή αυτή εφελκύει τις κάτω ίνες, και ονομάζεται θετική (+) [σχ. 3.3δ (β)]. Αντίθετα, όταν τις θλίβει, η ροπή ονομάζεται αρνητική (-) [σχ. 3.3δ (γ)].

Σε κάθε σημείο της δοκού υπολογίζομε τις εσωτερικές δυνάμεις, δηλαδή τα μεγέθη των ορθών δυνάμεων, των τέμνουσών δυνάμεων καθώς και των ροπών κάμψεως.

Με κατάλληλη κλίμακα σχεδιάζομε τα μεγέθη αυτά ως ευθείες κάθετες στον άξονα της δοκού. Όταν συνδέσουμε τα άκρα των ευθειών αυτών παίρνομε το **διά-**



Σχ. 3.3δ.

γραμμα ορθών δυνάμεων (Δ.Ο.Δ.), το **διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.)** και το **διάγραμμα ροπών κάμψεως (Δ.Ρ.Κ.)** (σχ. 3.3ε).

Τα διαγράμματα αυτά μας δίνουν μια παραστατική εικόνα της πορείας των εσωτερικών δυνάμεων κατά μήκος της δοκού.

Αναλυτικός υπολογισμός αντιδράσεων, εσωτερικών δυνάμεων και ροπών.

Στην πράξη μας δίνεται το άνοιγμα και τα φορτία της δοκού και ζητούμε να καθορίσουμε τις διαστάσεις της διατομής της, ώστε η δοκός με τα δεδομένα φορτία να μην καταστραφεί, ούτε να παραμορφωθεί υπερβολικά.

Για να το επιτύχουμε όμως αυτό, πρέπει να γνωρίζουμε όλες τις εξωτερικές δυνάμεις που φορτίζουν τη δοκό, στις οποίες ανήκουν και οι αντιδράσεις στηρίξεως Α και Β.

Λόγω των εξωτερικών δυνάμεων αναπτύσσονται στο εσωτερικό της δοκού, όπως είδαμε, οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές και είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τα μεγέθη τους, γιατί με βάση αυτές υπολογίζομε τις διαστάσεις της διατομής (σχ. 3.3ε).

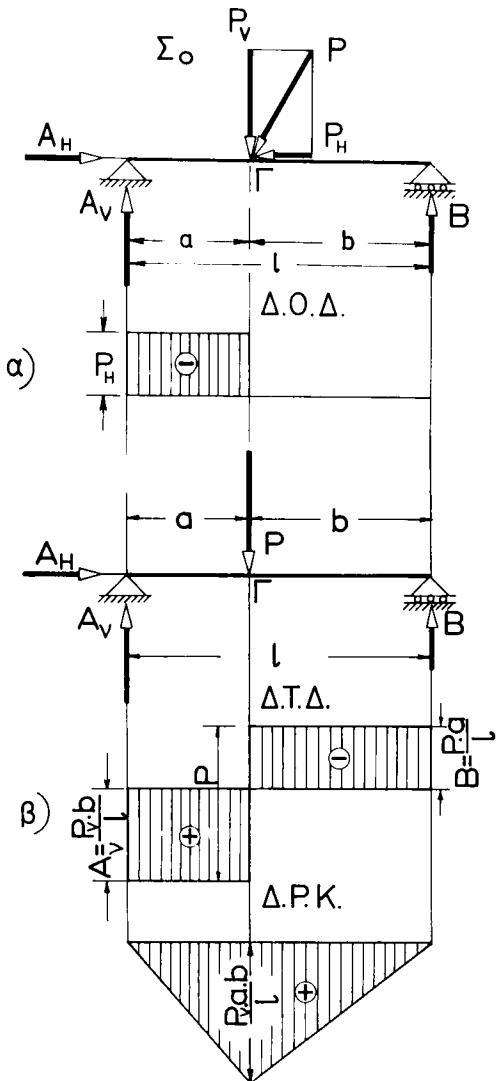
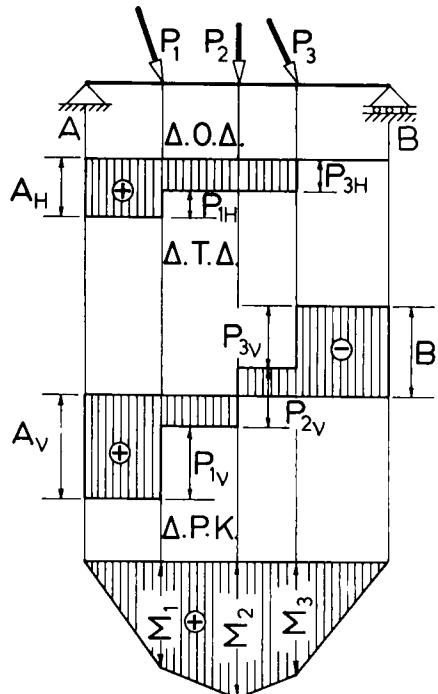
3.3.1 Αναλυτικός υπολογισμός αντιδράσεων.

Θεωρούμε ότι πάνω στη δοκό ενεργούν όλες οι εξωτερικές δυνάμεις, δηλαδή τα φορτία και οι αντιδράσεις στηρίξεως. Για την ευκολία του υπολογισμού αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες.

Τα φορτία μας είναι γνωστά, οι αντιδράσεις άγνωστες. Όλες όμως οι εξωτερικές δυνάμεις πρέπει να ισορροπούν. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επαληθεύονται οι εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας, δηλαδή $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma M = 0$.

Έτσι προκύπτουν τρεις εξισώσεις, με τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις τρεις άγνωστες αντιδράσεις στηρίξεως.

Ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα, δηλαδή μία αμφιέρειστη δοκό με ένα λοξό συγκεντρωμένο φορτίο σε κάποια θέση της (σχ. 3.3στ).



Η άρθρωση Α μας δίνει δύο άγνωστες αντιδράσεις, την A_v και την A_H . Η κύλιση Β μας δίνει μόνο την κατακόρυφη αντίδραση B .

Οι φορές των δυνάμεων A_v , A_H και B λαμβάνονται τυχαία. Αν μετά τον υπολογισμό προκύψει ότι οι δυνάμεις είναι θετικές, σημαίνει ότι επιλέξαμε το βέλος ορθά, αν προκύψουν όμως μία ή περισσότερες αρνητικές δυνάμεις, τότε πρέπει να αλλάξουμε τη φορά του βέλους γι' αυτές.

Αν εφαρμόσομε τις συνθήκες ισορροπίας, έχομε:

$$\Sigma y = 0 \quad A_v + B - P_v = 0 \quad (1)$$

Με μόνη αυτή την εξίσωση δεν μπορούμε βέβαια να υπολογίσομε δύο αγνώστους.

Η δεύτερη συνθήκη $\Sigma x = 0$ παρέχει ότι η:

$$A_H = P_H \quad (2)$$

Η τρίτη συνθήκη ισορροπίας που απομένει είναι η $\Sigma M = 0$ που ισχύει για οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της δοκού, π.χ. για το σημείο Σ . Αν δώμας παίρναμε τις ροπές ως προς Σ , θα προέκυπτε μια δεύτερη εξίσωση με δύο αγνώστους την A_v και B και έτσι θα έπρεπε να επιλυθεί σύστημα δύο εξίσωσεων με δύο αγνώστους. Αυτό όμως είναι σχετικά κοπιαστικό και μπορούμε να το αποφύγομε, αν δεχθούμε ως σημείο αναφοράς τη μία από τις δύο στηρίξεις, π.χ. τη B . Τότε η άγνωστη αντίδραση στηρίξεως B με μοχλοβραχίονα μηδέν, δεν προκαλεί ροπή περί το σημείο B και άρα απαλείφεται:

$$\Sigma M_B = 0 \quad + A_v \cdot l - P_v b \pm B \cdot 0 = 0 \quad (3)$$

$$A_v = \frac{P_v \cdot b}{l}$$

Στην πρώτη εξίσωση αντικαθιστούμε το A_v με την τιμή του και έχομε:

$$B = P_v \frac{a}{l}$$

που προκύπτει αμέσως αν λάβομε ροπές ως προς A , οπότε:

$$\Sigma M_A = 0, \text{ δηλαδή } Bl - P_v a = 0, \text{ από την οποία:}$$

$$B = P_v \frac{a}{l}$$

3.3.2 Αναλυτικός υπολογισμός εντατικών μεγεθών.

1) Διάγραμμα ορθών δυνάμεων.

Επειδή $A_H = P_H$ η ορθή δύναμη σε οποιαδήποτε διατομή της δοκού μεταξύ A και G είναι ίση με $-P_H$ (Θλιπτική) [σχ. 3.3στ(a)].

2) Διάγραμμα τέμνουσών δυνάμεων.

Στο τμήμα AG η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή και ίση με:

$$Q_{AG} = +A_v = +P_v \frac{b}{l}$$

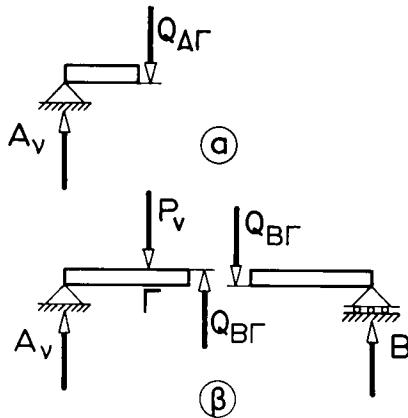
Το πρόσημο της τέμνουσας είναι θετικό (+), γιατί δεξιά από τη διατομή που εξετάζομε, διευθύνεται προς τα κάτω [σχ. 3.3ζ (α)]. Στο τμήμα BG είναι σταθερή:

$$Q_{BG} = +A_v - P = -B.$$

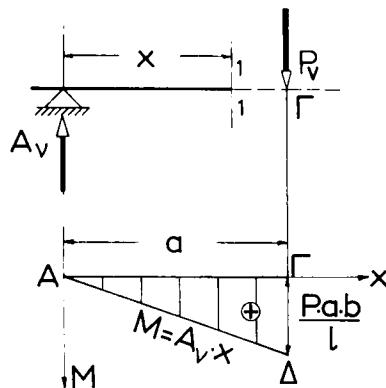
Το πρόσημο της τέμνουσας είναι αρνητικό (-), γιατί δεξιά από τη διατομή, που εξετάζομε, διευθύνεται προς τα πάνω ή αριστερά προς τα κάτω [σχ. 3.3ζ (β)].

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως.

– Τμήμα AG (σχ. 3.3η).



Σχ. 3.3ζ.



Σχ. 3.3η.

Στη διατομή 1-1 και σε απόσταση x από το A η ροπή κάμψεως είναι $M = A_v \cdot x$. Η εξίσωση αυτή δίνει τη ροπή ως συνάρτηση της αποστάσεως x . Επειδή μάλιστα είναι πρωτοβάθμια, σημαίνει ότι στο τμήμα $A\Gamma$ η ροπή κάμψεως ακολουθεί μία ευθεία γραμμή.

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία αυτή, πρέπει να καθορίσουμε δύο σημεία της. Ο καθορισμός γίνεται ως εξής:

Εκλέγομε μία κλίμακα ροπών, π.χ. $1 \text{ mm} \equiv 100 \text{ kpm}$

Για $x = 0 \quad M = 0$,

$$\text{Για } x = a \quad M = A_v \cdot a = \frac{P_v a b}{l}$$

Παίρνουμε το τμήμα $\Gamma\Delta$, με την κλίμακα που διαλέξαμε, ίσο με $\frac{P_v a b}{l}$ και φέρομε

την ευθεία $A\Delta$. Οι κάθετες από τα σημεία της ευθείας $A\Delta$ επάνω στην ευθεία $A\Gamma$ δείχνουν τις ροπές κάμψεως σ' δλες τις διατομές του τμήματος $A\Gamma$ της δοκού.

— Τμήμα $\Gamma\Delta$ (σχ. 3.3θ).

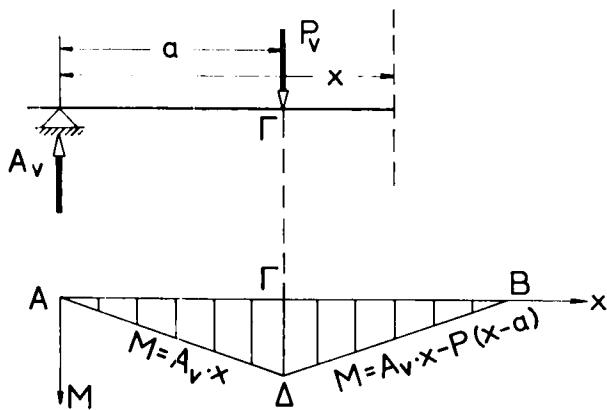
Στη διατομή 2-2 και σε απόσταση x από το A η ροπή κάμψεως είναι:

$$M = A_v \cdot x - P_v (x - a).$$

Και η εξίσωση αυτή παριστάνεται από ευθεία. Για να τη χαράξουμε καθορίζουμε δύο σημεία της.

$$\text{Για } x = a \quad \text{έχουμε} \quad M = A_v \cdot a = \frac{P_v ab}{l}$$

δηλαδή καταλήγομε και πάλι στο σημείο Δ , που έχουμε ήδη καθορίσει.



Σχ. 3.30.

Για $x = l$, δηλαδή για το σημείο B, το $M = 0$, άρα έχουμε ως δεύτερο σημείο το B.

3.3.3 Σχέση μεταξύ τέμνουσας δυνάμεως και ροπής κάμψεως.

Μάθαμε ότι για το τμήμα AΓ η ροπή κάμψεως $M = A_v \cdot x$, που σημαίνει ότι είναι ίση με την επιφ. EZMN = επιφ. διαγρ. τέμνουσών δυνάμεων αριστερά από τη διατομή x (σχ. 3.3i).

Για το τμήμα ΓΒ η ροπή κάμψεως $M = A_v \cdot x - P_v \cdot (x - a) =$ επιφ. EZΣΞ – επιφ. ΙΘΣΠ = αλγεβρικό άθροισμα επιφ. διαγρ. τέμνουσών δυνάμεων αριστερά από τη διατομή.

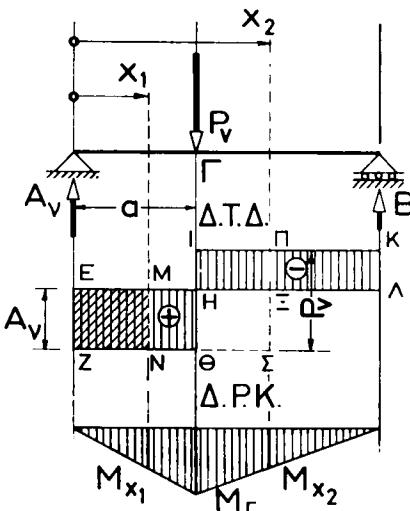
Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε τους ακόλουθους κανόνες:

- **Η ροπή κάμψεως σε οποιαδήποτε διατομή της δοκού είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα της ειπφάνειας των τέμνουσών δυνάμεων αριστερά (ή δεξιά) από τη διατομή.**
- **Η μέγιστη ροπή κάμψεως προκύπτει στη διατομή, στην οποία η τέμνουσα Q = 0, διότι για τη διατομή αυτή το εμβαδόν του διαγράμματος των τέμνουσών δυνάμεων, που είναι αριστερά (ή δεξιά) της, είναι μέγιστο. Τη ροπή αυτή χαρακτηρίζομε ως $\text{max}M$.**

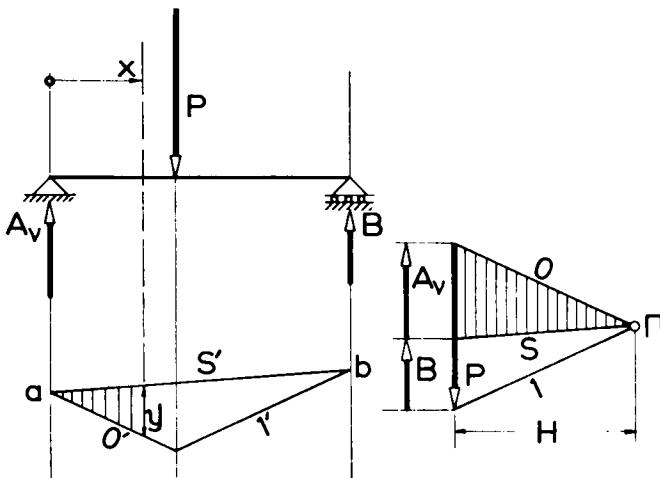
3.3.4 Γραφικός υπολογισμός διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών.

Ο γραφικός υπολογισμός των αντιδράσεων και ροπών κάμψεως γίνεται με τη βοήθεια δυναμοπολυγώνου και σχοινοπολυγώνου ως εξής (σχ. 3.3iα):

1. Σχεδιάζομε τη δοκό με κλίμακα, π.χ. 1:n.
2. Κατασκευάζομε στη συνέχεια το δυναμοπολύγωνο των φορτίων με κλίμακα, π.χ. 1 mm $\hat{=} \mu\text{kp}$.
3. Εκλέγομε τον πόλο Π έτσι, ώστε όταν μετρήσουμε την απόσταση Η με την κλίμακα των δυνάμεων να έχομε στρογγυλό αριθμό και κατασκευάζομε το σχοινοπολύγωνο.



Σχ. 3.31.



Σχ. 3.3ια.

4. Προεκτείνομε τις εξωτερικές πλευρές του σχοινοπολυγώνου O' και $1'$, ώσπου να κόψουν τις ευθείες ενέργειας των αντιδράσεων στηρίζεως στα σημεία a και b . Ενώνομε τα σημεία a και b και παίρνομε την κλείουσα S' .
 5. Δια του πόλου Γ φέρομε την πολική ακτίνα S παράλληλη προς την κλείουσα S' . Η πολική αυτή ακτίνα καθορίζει πάνω στο δυναμοπολύγωνο τις αντιδράσεις στηρίζεως A_v και B . Η A_v βρίσκεται ανάμεσα στις πολικές ακτίνες O και S , επειδή οι πλευρές O' και S' κόβονται πάνω στην A_v . Η B βρίσκεται ανάμεσα στις πολικές ακτίνες S και 1 , επειδή οι πλευρές S' και $1'$ κόβονται πάνω στη B .

Απόδειξη. Οι δυνάμεις που δρουν επάνω στη δοκό είναι οι A_v , B και P .

Το δυναμοπολύγωνό τους και το σχοινοπολυγωνό τους είναι κλειστά, ára ισορροπούν.

6. Η επιφάνεια που περικλείεται από τις πλευρές Ο', 1' και S' αποτελεί το διάγραμμα των ροπών κάμψεως. Για μια διατομή σε απόσταση x από το A η ροπή κάμψεως είναι: $M = y \cdot H$, όπου το H μετράται με την κλίμακα των δυνάμεων 1 mm $\hat{=}$ μkr και το y με την κλίμακα σχεδιάσεως της δοκού 1:v. Ας σημειωθεί ότι το y μετράται πάντοτε κάθετα πάνω στον áxona της δοκού.

Απόδειξη. Από τα διαγραμμισμένα δύοια τρίγωνα έχουμε:

$$\frac{A_v}{H} = \frac{y}{x}, \quad \text{από την οποία} \quad A_v \cdot x = y \cdot H$$

Γνωρίζομε δύος ότι η ροπή κάμψεως σε διατομή που απέχει x από το A είναι:

$$M = A_v \cdot x$$

άρα

$$M = y \cdot H$$

Επειδή το H σταθερό, η μέγιστη ροπή εμφανίζεται στη θέση όπου το y είναι μέγιστο. Άρα:

$$\max M = H \cdot \max y$$

3.4 Αμφιέρειστη δοκός με συγκεντρωμένα φορτία (σχ. 3.4a).

Αναφέρθηκε ότι για να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη της δοκού απαιτείται να είναι γνωστές όλες οι εξωτερικές δυνάμεις, δηλαδή τα φορτία και οι αντιδράσεις στηρίξεως. Συνεπώς απαιτείται πρώτα ο υπολογισμός των αντιδράσεων στηρίξεως και ακολουθεί η εύρεση των εντατικών μεγεθών. Επειδή η δοκός είναι οριζόντια και τα φορτία κατακόρυφα δεν εμφανίζονται ορθές δυνάμεις.

1) Αντιδράσεις στηρίξεως:

$$\Sigma x = 0 \quad A_H = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 = A_v \cdot l - P_1 b_1 - P_2 b_2 - P_3 b_3 \Rightarrow A_v = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3}{l}$$

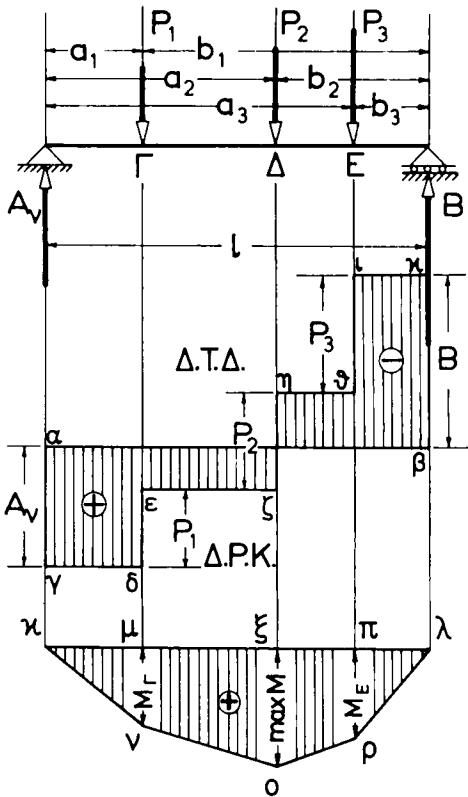
$$\Sigma M_A = 0 = -B \cdot l + P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 \Rightarrow B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{l}$$

Καλό είναι να ελέγχεται, για την αποφυγή αριθμητικών λαθών, ότι

$$\Sigma y = A_v + B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.).

Για να σχεδιάσουμε το Δ.Τ.Δ. φέρομε την ευθεία αβ παράλληλα προς τον áxona της δοκού και με την ίδια κλίμακα μηκών. Αριστερά της διατομής A η τέμνουσα δύναμη είναι μηδέν, δεξιά είναι ίση με A_v .



Σχ. 3.4a.

$$\text{Φέρομε την κάθετη αγ} = A_v = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3}{l}$$

Σε όλες τις διατομές μεταξύ Α και Γ η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή και ίση με $Q_{AG} = A_v$. Επομένως χαράσσομε τη γδ οριζόντια μέχρι το Γ. Αμέσως δεξιά από τη διατομή Γ η τέμνουσα ισούται με $A_v - P_1$. Φέρομε συνεπώς τη δε = P_1 , με διεύθυνση αντίθετη στη φορά της δυνάμεως. Στο τμήμα Γ-Δ η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή και ίση με $Q_{GD} = A_v - P_1$, για αυτό λαμβάνεται η ευθεία εζ οριζόντια. Με το ίδιο σκεπτικό στο τμήμα Δ-Ε η τέμνουσα ισούται με $Q_{DE} = A_v - P_1 - P_2$ και στο τμήμα Ε-Β $Q_{EB} = A_v - P_1 - P_2 - P_3 = -B$.

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως.

Στην παράγραφο 3.3.2 είδαμε ότι στα τμήματα της δοκού μεταξύ δυνάμεων, το Δ.Ρ.Κ. ακολουθεί ευθεία γραμμή. Αρκεί επομένως για τη χάραξη του Δ.Ρ.Κ. να υπολογίσουμε τις ροπές κάμψεως στις διατομές Α, Γ, Δ, Ε και Β στις οποίες δρουν οι δυνάμεις.

Στις διατομές Α και Β είναι $M_A = M_B = 0$.

Στη διατομή Γ έχουμε $M_\Gamma = +A_v \cdot a_1$, θετική, γιατί εφελκύει τις κάτω ίνες. Φέρομε την μν κάθετη στον άξονα της δοκού ίση με M_Γ για την κλίμακα ροπών που εκλέχθηκε.

Στη διατομή Δ προκύπτει, όπως αποδείξαμε στην παράγρ. 3.3.2, η μεγίστη ροπή κάμψεως, γιατί σ' αυτήν τη διατομή μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη.

Υπολογίζοντας τη ροπή κάμψεως με τις δυνάμεις, που βρίσκονται αριστερά από τη διατομή Δ, λαμβάνεται $M_\Delta = \max M = A_v \cdot a_2 - P_1 (a_2 - a_1)$, ή με τις δυνάμεις που βρίσκονται δεξιά από τη διατομή Δ προκύπτει το ίδιο μέγεθος ροπής κάμψεως $M_\Delta = \max M = B \cdot b_2 - P_3 (b_2 - b_3)$. Χαράσσομε την ξο κάθετα στον άξονα της δοκού.

Στη διατομή Δ έχουμε $M_\Delta = +B \cdot b_3$ η οποία είναι θετική, γιατί εφελκύει τις κάτω ίνες και που λαμβάνεται στο Δ.Ρ.Κ. ίση με πρ.

Ενώνομε τα σημεία κνορλ με ευθείες γραμμές και έτσι προκύπτει το διάγραμμα ροπών κάμψεως. Όταν συγκρίνομε το Δ.Τ.Δ με το Δ.Ρ.Κ. βλέπομε ότι η ροπή $M_\Gamma = A_v \cdot a_1$ είναι ίση με το εμβαδό του Δ.Τ.Δ στην περιοχή ΑΓ. Αν προχωρήσομε προς τη διατομή Δ διαπιστώνομε ότι το εμβαδό του Δ.Τ.Δ της περιοχής ΑΔ είναι:

$$A_v \cdot a_1 + (A_v - P_1) (a_2 - a_1) = A_v \cdot a_1 + A_v \cdot a_2 - A_v \cdot a_1 - P_1$$

$$(a_2 - a_1) = A_v \cdot a_2 - P_1 (a_2 - a_1) \quad \text{ίσο με τη ροπή κάμψεως } M_\Delta.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω καταλήγομε στα ακόλουθα **συμπεράσματα**:

- Η μεγίστη ροπή κάμψεως εμφανίζεται στη διατομή, όπου μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη.
- Η ροπή κάμψεως σε μια θέση είναι ίση με το εμβαδόν του Δ.Τ.Δ. από τη στήριξη ως τη θεωρούμενη θέση.
- Το εμβαδόν του θετικού μέρους του Δ.Τ.Δ. είναι ίσο με το εμβαδόν του αρνητικού.

Ειδικά για τη φόρτιση δοκού με συγκεντρωμένα μόνο φορτία προκύπτουν και τα ακόλουθα:

– Η τέμνουσα δύναμη στα τμήματα της δοκού μεταξύ φορτίων είναι σταθερή κάτω δύμως από τα συγκεντρωμένα φορτία μεταβάλλεται απότομα. Το Δ.Τ.Δ. αποτελείται επομένως από ορθογώνια.

– Το Δ.Ρ.Κ. αποτελείται από ευθείες γραμμές, που κόβονται μεταξύ τους κάτω από τα συγκεντρωμένα φορτία.

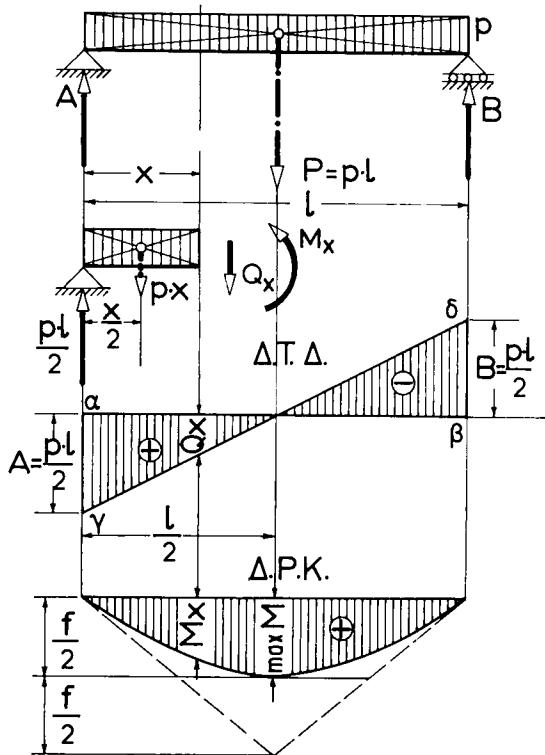
Είδαμε και στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις κατακορύφων φορτίων πάνω στην οριζόντια δοκό ότι έχουμε πάντοτε $A_H = 0$. Γι' αυτό στις ακόλουθες περιπτώσεις ορίζομε για απλούστευση:

$$A_v = A$$

3.5 Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφο διανεμημένο καθολικό φορτίο (σχ. 3.5a).

Το φορτίο που διανέμεται ομοιόμορφα συμβολίζεται με τα γράμματα g , p ή q και ορίζεται ως δύναμη ανά μέτρο μήκους. Οι συνήθεις διαστάσεις του είναι kP/m , Mp/m ή kN/m .

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στηρίζεως και των εσωτερικών δυνάμεων και



Σχ. 3.5α.

ροπών γίνεται όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις φορτίσεως.

1) Αντιδράσεις στηρίξεως.

Η συνολική φόρτιση της δοκού $P = p.l$. Επειδή η διάταξη της φορτίσεως ως προς το μέσο της δοκού είναι συμμετρική οι αντιδράσεις είναι ίσες. Άρα:

$$A = B = \frac{P}{2} = \frac{pl}{2}$$

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

$$\text{Στη στήριξη } A, Q_A = + A = \frac{pl}{2}$$

$$\text{Στη στήριξη } B, Q_B = - B = - \frac{pl}{2}$$

Σε μια διατομή σε απόσταση x από το A είναι:

$$Q_x = A - px = \frac{pl}{2} - px = p\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία. Η χάραξη της ευθείας αυτής είναι απλούστατη. Παίρνομε στο άκρο Α της δοκού το τμήμα:

$$\alpha y = + \frac{pl}{2}$$

με μία κλίμακα δυνάμεων 1mm $\hat{=}$ μέτρο και στο άλλο άκρο το τμήμα:

$$\beta \delta = - \frac{pl}{2}$$

με την ίδια κλίμακα δυνάμεων και ενώνομε με ευθεία το σημείο γ με το δ.

Η τέμνουσα δύναμη μηδενίζεται για:

$$x = - \frac{l}{2}$$

όπου, όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, πρέπει να αναπτύσσεται η μέγιστη ροπή κάμψεως.

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως.

Θα υπολογίσουμε τη ροπή κάμψεως σε μια διατομή σε απόσταση x από το Α. Οι δυνάμεις που ενεργούν αριστερά από τη διατομή αυτή είναι:

- 1) Η αντίδραση στηρίξεως Α με μοχλοβραχίονα x και
- 2) η φόρτιση, που διανέμεται ομοιόμορφα πάνω στο μήκος x. Ας σημειωθεί ότι αυτή αποτελείται από απείρως πολλά φορτία, που το κάθε ένα έχει διαφορετικό μοχλοβραχίονα. Όπως είναι γνωστό, το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών ως προς ένα σημείο είναι ίσο με τη ροπή της συνισταμένης ως προς το ίδιο σημείο. Η συνισταμένη όλων των απείρως πολλών αυτών παραλήλων φορτίων είναι ίση με p . x και ενεργεί στο κέντρο βάρους της φορτίσεως, δηλαδή x/2.

Επομένως η ροπή κάμψεως στη διατομή x είναι:

$$M_x = A \cdot x - px \cdot \frac{x}{2} = A \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2} = p \cdot \frac{l}{2} \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2}$$

Η εξίσωση αυτή, που προκύπτει, παριστάνει μια παραβολή, της οποίας ο τρόπος κατασκευής δίνεται παρακάτω.

Η μέγιστη ροπή αναπτύσσεται στο μέσο της δοκού, όπου:

$$\max M = p \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - p \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{pl^2}{8}$$

Για μια δοκό με φόρτιση που διανέμεται ομοιόμορφα πάνω σε όλο το μήκος της έξαγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα, από δύσα είπαμε:

– Η τέμνουσα δύναμη μεταβάλλεται συνεχώς κατά μία κεκλιμένη ευθεία γραμμή. Το Δ.Τ.Δ. αποτελείται από δύο ίσα τρίγωνα.

— Το Δ.Ρ.Κ. αποτελεί παραβολή.

Επειδή η σχεδίαση παραβολής, της οποίας είναι γνωστή η χορδή, ο άξονας και η κορυφή, είναι συχνότατη στη Στατική, για αυτό είναι απαραίτητο να μάθομε τον τρόπο της κατασκευής της.

Κατασκευή παραβολής.

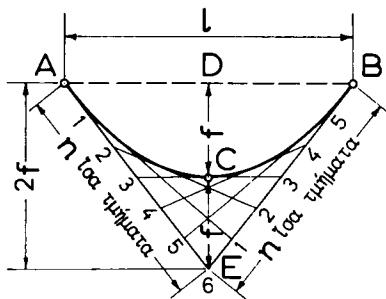
Για να κατασκευάσουμε μια παραβολή πρέπει να έχομε ορισμένα δεδομένα. Και αυτά είναι η χορδή AB , ο άξονας CD και η κορυφή της παραβολής C . Την παραβολή μπορούμε να την κατασκευάσουμε με τη βοήθεια των περιβαλλουσών εφαπτομένων, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5β.

Δηλαδή ορίζομε $CD = CE$. Φέρομε τις ευθείες AE και BE , που αποτελούν τις εφαπτόμενες στα άκρα της καμπύλης. Η παράλληλη (3-3) δια του C προς την AB αποτελεί την εφαπτομένη στην κορυφή.

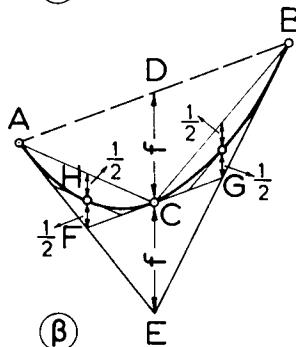
Για να βρούμε και άλλες εφαπτομένες, διαιρούμε τις ευθείες AE και BE σε η ίσα τμήματα, στο σχήμα $n = 6$, και ενώνομε τα σημεία της διαιρέσεως με τον τρόπο που βλέπομε στο σχήμα.

Προκύπτει έτσι μια ομάδα από εφαπτομένες, που περιβάλλουν την παραβολή, με των οποίων τη βοήθεια η κατασκευή της παραβολής γίνεται πάρα πολύ εύκολη.

Η ίδια κατασκευή μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα σημεία A και B δεν βρίσκονται επάνω στην ίδια κάθετη πάνω στον άξονα [σχ. 3.5β (β)].



(a)



(b)

Σχ. 3.5β.

Για να τη χαράξουμε όμως είναι προτιμότερο, στην περίπτωση που μας απασχολεί, να βρούμε ορισμένα σημεία της παραβολής.

Για το σκοπό αυτό χαράζομε τη χορδή AC, οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο AFC.

Το μέσο H της διαμέσου του τριγώνου AFC, που περνά από το F, είναι σημείο της παραβολής με εφαπτομένη παράλληλη προς την AC.

Την ίδια μέθοδο μπορούμε πια να εφαρμόσουμε για τη χορδή AH κ.ο.κ.

3.6 Αμφιέρειστη δοκός με συνδυασμό μεμονωμένων και ομοιόμορφα κατανεμημένων φορτίων (σχ. 3.6a).

1) Αντιδράσεις στηρίξεως.

$$\Sigma x = 0 \quad A_H = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 = A \cdot l - \frac{p l^2}{2} - P_1 b_1 - P_2 b_2 \Rightarrow A = \frac{p l}{2} + \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2}{l} \quad \text{και}$$

$$\Sigma M_A = 0 = -B \cdot l + \frac{p l^2}{2} + P_1 a_1 + P_2 a_2 \Rightarrow B = \frac{p l}{2} + \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l}$$

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

Είδαμε ότι κάτω από τα συγκεντρωμένα φορτία η τέμνουσα δύναμη μεταβάλλεται απότομα.

Είναι επομένως απαραίτητο να υπολογίσουμε τις τέμνουσες δυνάμεις αριστερά και δεξιά από τα συγκεντρωμένα φορτία. Έτσι λαμβάνομε:

$$Q_A = +A, \quad Q_{\Gamma}^{ap} = A - pa_1, \quad Q_{\Gamma}^{\delta} = A - pa_1 - P_1,$$

$$Q_{\Delta}^{ap} = A - pa_1 - P_1 - p(a_2 - a_1) = A - P_1 - pa_2$$

$$Q_{\Delta}^{\delta} = A - P_1 - pa_2 - P_2, \quad Q_B = -B.$$

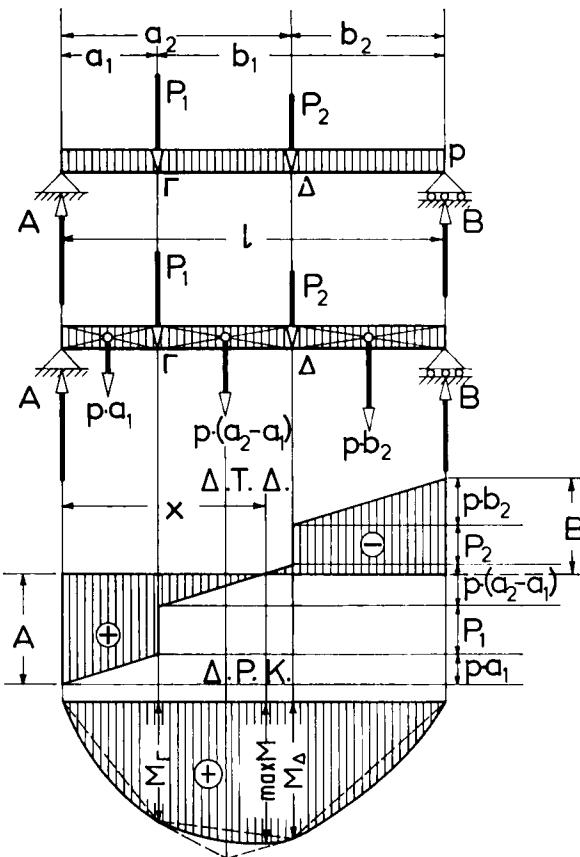
Για τα μεγέθη φορτίων, που δείχνει το σχήμα, ο μηδενισμός της τέμνουσας δυνάμεως προκύπτει μεταξύ των διατομών Γ και Δ. Η ακριβής θέση λαμβάνεται από την εξίσωση:

$$Q_x = 0 = A - P_1 - px \Rightarrow x = \frac{A - P_1}{p}$$

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως (Δ.Ρ.Κ.).

Για τη σχεδίαση του Δ.Ρ.Κ. υπολογίζονται οι ροπές κάμψεως κάτω από τα συγκεντρωμένα φορτία και οπωσδήποτε η μέγιστη ροπή, η οποία, όπως αποδείχθηκε, εμφανίζεται κάτω από τη διατομή στην οποία μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη.

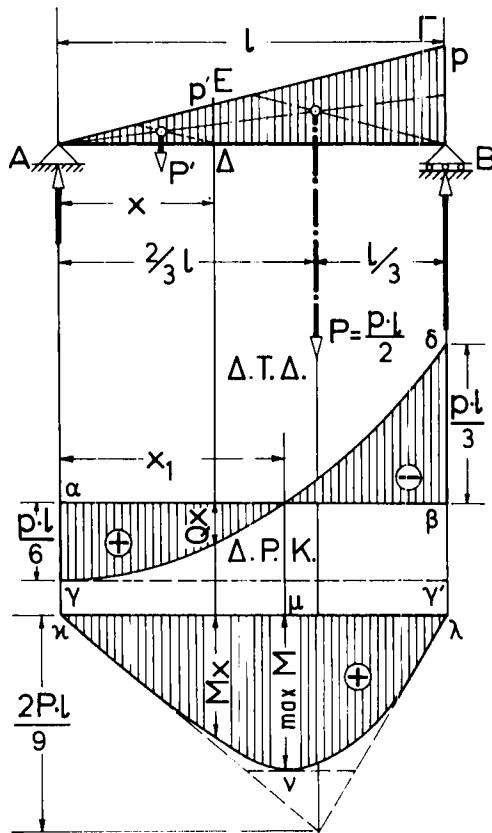
$$M_{\Gamma} = A \cdot a_1 - \frac{pa_1^2}{2} \quad M_{\Delta} = B \cdot b_2 - \frac{pb_2^2}{2}$$



Σχ. 3.6α.

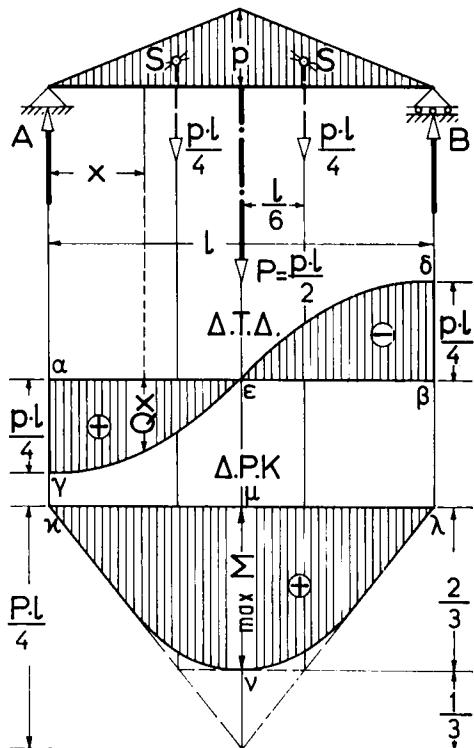
$$\max M = A \cdot x - P_1(x - a_1) - \frac{px^2}{2}$$

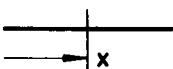
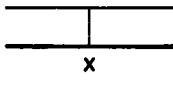
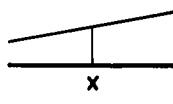
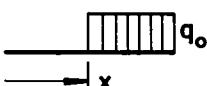
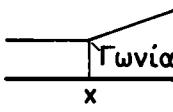
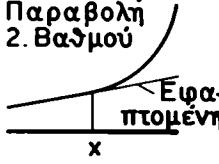
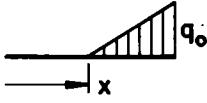
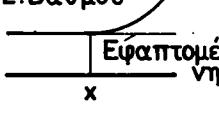
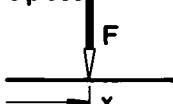
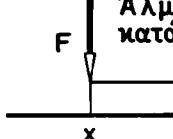
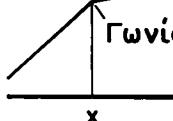
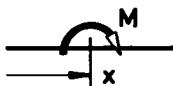
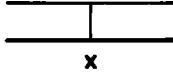
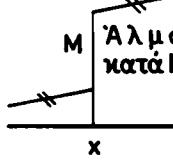
3.7 Αμφιέρειστη δοκός με ασύμμετρη τριγωνική (σχ. 3.7α) και συμμετρική τριγωνική φόρτιση (σχ. 3.7β). Μορφή διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών δοκού για διάφορες φορτίσεις (σχ. 3.7γ).



Σχ. 3.7α.

Σχ. 3.7β.



Φόρτιση	Δ.Τ.Δ.	Δ.Ρ.Κ.
Κανένα φορτίο	Σταθερό	Ευθύγραμμο
		
Ομοιόμορφο φορτίο	Ευθύγραμμο	Παραβολή 2. Βαθμού
		
Τριγωνικό φορτίο	Παραβολή 2. Βαθμού	Παραβολή 3. Βαθμού
		
Συγκεντρωμένο φορτίο	Άλμα κατά F	Γωνία
		
Συγκεντρωμένη ροπή	Σταθερό	Άλμα κατά M
		

Σχ. 3.7γ.

3.8 Πρόβολος.

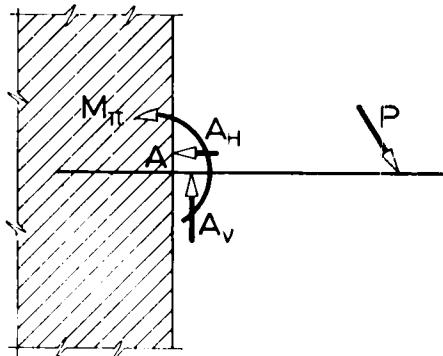
Όπως είδαμε στη παράγραφο 3.1, η πάκτωση δεν επιτρέπει ούτε μετακίνηση, ούτε στροφή.

Όταν έχουμε τη γενική περίπτωση, κατά την οποία επιβάλλομε ένα κεκλιμένο

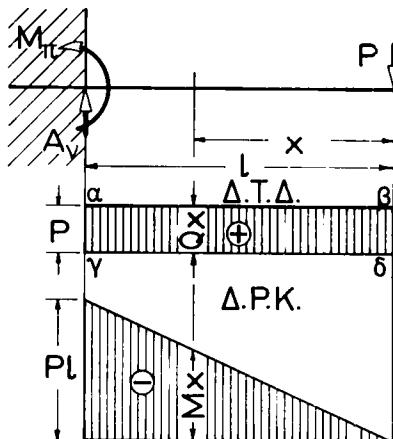
φορτίο πάνω στον πρόβολο (σχ. 3.8α), τότε προκύπτουν οι ακόλουθες αντιδράσεις πακτώσεως:

- 1) Κατακόρυφη δύναμη A_y .
- 2) Οριζόντια δύναμη A_H στον άξονα της δοκού και
- 3) Ροπή πακτώσεως M_π .

Στα επόμενα θα υπολογίσομε, για διάφορες περιπτώσεις φορτίσεως του προβόλου, τις αντιδράσεις στηρίξεως και τα διαγράμματα των εσωτερικών δυνάμεων και ροπών.



Σχ. 3.8α.



Σχ. 3.9α.

3.9 Πρόβολος με συγκεντρωμένο φορτίο στο άκρο (σχ. 3.9α).

Αποτελεί την απλούστερη περίπτωση φορτίσεως και εμφανίζεται πολύ συχνά στις πρακτικές εφαρμογές.

Επειδή ο πρόβολος φορτίζεται μόνο με κατακόρυφο φορτίο, δεν εμφανίζεται οριζόντια αντίδραση και επομένως ούτε ορθές δυνάμεις.

Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στηρίξεως, των τεμνουσών δυνάμεων και των ροπών κάμψεως είναι, όπως εξηγείται αρέσως παρακάτω, εξαιρετικά απλός:

1) Αντιδράσεις στηρίξεως.

$$\Sigma x = 0 \quad A_H = 0$$

$$\Sigma y = 0 \quad A_y - P = 0 \quad \text{Άρα} \quad A_y = P$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad M_\pi + Pl \quad \text{Άρα} \quad M_\pi = -P \cdot l$$

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

Αν λάβομε μια οποιαδήποτε διατομή της δοκού, η οποία να βρίσκεται σε απόσταση x από το άκρο, θα έχομε:

$$Q_x = +P$$

Η τέμνουσα δύναμη είναι θετική, επειδή δεξιά από την εξεταζόμενη διατομή διευθύνεται προς τα κάτω.

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως.

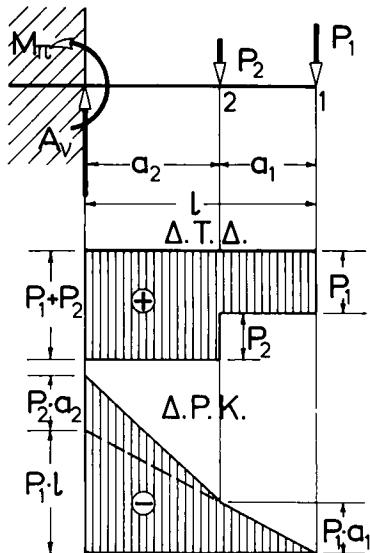
Σε μια διατομή x η ροπή κάμψεως είναι ίση με:

$$M_x = -P \cdot x$$

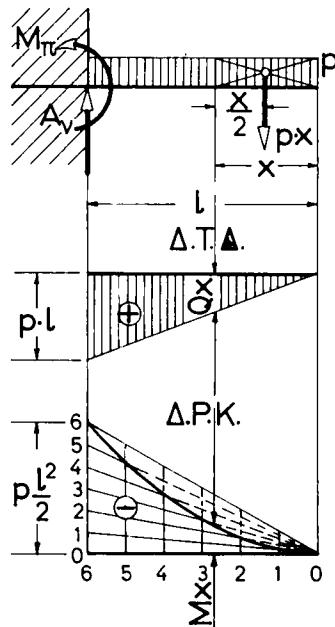
Η ροπή κάμψεως είναι αρνητική, επειδή οι κάτω ίνες της δοκού θλίβονται. Η αριθμητικά μέγιστη ροπή προκύπτει στη θέση πακτώσεως, όπου $M_{\pi} = -P \cdot l = \min M$.

Επομένως το Δ.Τ.Δ. είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το Δ.Ρ.Κ. τρίγωνο.

3.10 Πρόβολος με πολλά συγκεντρωμένα φορτία (σχ. 3.10α).



Σχ. 3.10α.



Σχ. 3.11α.

3.11 Πρόβολος με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο (σχ. 3.11α).

1) Αντιδράσεις στηρίξεως.

$$\begin{aligned}\Sigma x &= 0 & A_H &= 0 \\ \Sigma y &= 0 = A_v - pl & A_v &= pl\end{aligned}$$

$$\Sigma M_A = 0 = M_{\pi} + pl \frac{l}{2} \quad \text{από την οποία λαμβάνεται}$$

$$M_{\pi} = -\frac{pl^2}{2}$$

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

$$Q_x = + px$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία.

$$Q_A = + pl$$

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως.

$$M_x = -px \frac{x}{2} = -p \frac{x^2}{2}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει παραβολή. Η ροπή πακτώσεως, όπως υπολογίσαμε, είναι:

$$M_\pi = -p \frac{l^2}{2} = \min M$$

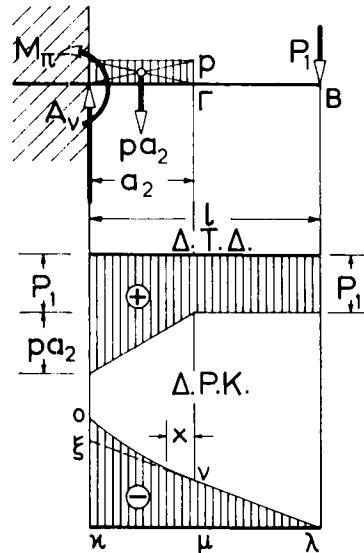
3.12 Πρόβολος με συνδυασμό μεμονωμένων και ομοιόμορφα κατανεμημένων φορτίων (σχ. 3.12a).

1) Αντιδράσεις στηρίξεως.

$$\Sigma x = 0 \quad A_H = 0$$

$$\Sigma y = 0 = A_v - P_1 - pa_2 \Rightarrow A_v = P_1 + pa_2$$

$$\Sigma M_A = 0 = M_\pi + P_1 \cdot l + pa_2 \frac{a_2}{2} \Rightarrow M_\pi = -P_1 \cdot l - p \frac{a_2^2}{2}$$



Σχ. 3.12a.

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.

$$Q_{BG} = +P_1, \quad Q_A = P_1 + pa_2$$

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως.

$$M_B = 0, \quad M_G = -P_1(l - a_2) = \mu v$$

Το διάγραμμα είναι ευθύγραμμο, οπότε συνδέομε τα σημεία λ και ν με ευθεία. Μεταξύ των διατομών Γ και Α η ροπή δίνεται από τη σχέση:

$$M_x = -P_1(l - a_2 + x) - p \cdot x \frac{x}{2} = -P_1(l - a_2 + x) - \frac{px^2}{2}$$

άρα το διάγραμμα είναι παραβολικό.

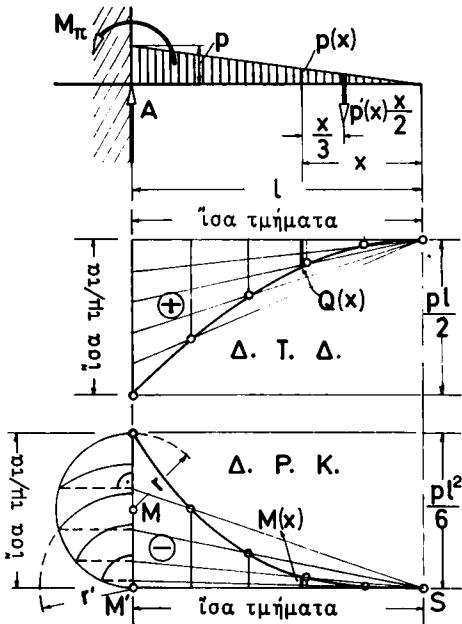
Η ροπή στη θέση πακτώσεως είναι:

$$M_\pi = -P_1l - p \frac{a_2^2}{2} = \min M = v_0$$

και συνδέομε τα σημεία ν και ο με παραβολή.

3.13 Πρόβολος με τριγωνική φόρτιση (σχ. 3.13a).

Η φόρτιση αυτή παρουσιάζεται σε τοιχώματα δεξαμενών, τοίχους αντιστηρίξεως κ.λ.π.



Σχ. 3.13a.

3.14 Προέχουσες δοκοί (Αμφιέρειστες δοκοί με προβόλους).

Στην παράγραφο 3.1 είδαμε ότι οι ολόσωμοι ισοστατικοί φορείς είναι τεσσάρων τύπων, ένας από τους οποίους είναι οι προέχουσες δοκοί, που διακρίνονται σε μονοπροέχουσες και αμφιπροέχουσες.

Μονοπροέχουσα είναι η αμφιέρειστη δοκός με ένα πρόβολο, ενώ **αμφιπροέχουσα** είναι με δύο προβόλους. Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στηρίξεως και των εσωτερικών δυνάμεων και ροπών γίνεται με τους ίδιους κανόνες, όπως στην αμφιέρειστη δοκό. Η φόρτιση που επιβάλλεται στο άνοιγμα, δεν προκαλεί εσωτερικές δυνάμεις και ροπές στον πρόβολο, ενώ αντίθετα η φόρτιση του προβόλου προκαλεί στο άνοιγμα I . Για το λόγο αυτό, προκειμένου να υπολογίσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές των προεχουσών δοκών, είναι κατ' αρχήν απλούστερο να υπολογίσουμε χωριστά τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές για τη φόρτιση του προβόλου και χωριστά για τη φόρτιση του ανοίγματος. Οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές για το σύνολο της φορτίσεως υπολογίζονται με την αλγεβρική άθροιση των τιμών, που προκύπτουν από τις επί μέρους φορτίσεις (Αρχή της επαλληλίας). Ανάλογα όμως με την περίπτωση φορτίσεως (βλ. παραγράφο 3.16. Δυσμενείς φορτίσεις) κρίνεται κάθε φορά αν η μέθοδος αυτή είναι σκοπιμότερη ή είναι πρακτικότερο να λαμβάνεται ταυτόχρονα η φόρτιση στο άνοιγμα και στον πρόβολο.

3.15(1) Μονοπροέχουσα με συγκεντρωμένα φορτία (σχ. 3.15a).

1) Φόρτιση μόνο στο άνοιγμα [σχ. 3.15a(β)].

Όπως και στην περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού προκύπτει:

a) Αντιδράσεις στηρίξεως

$$A_1 = \frac{P_1 b_1}{l} \quad B_1 = \frac{P_1 a_1}{l}$$

β) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

$$Q_{A\Gamma} = + A_1 = + \frac{P_1 b_1}{l}, \quad Q_{\Gamma\Delta} = - B = - \frac{P_1 a_1}{l}$$

$$Q_{B\Delta} = 0$$

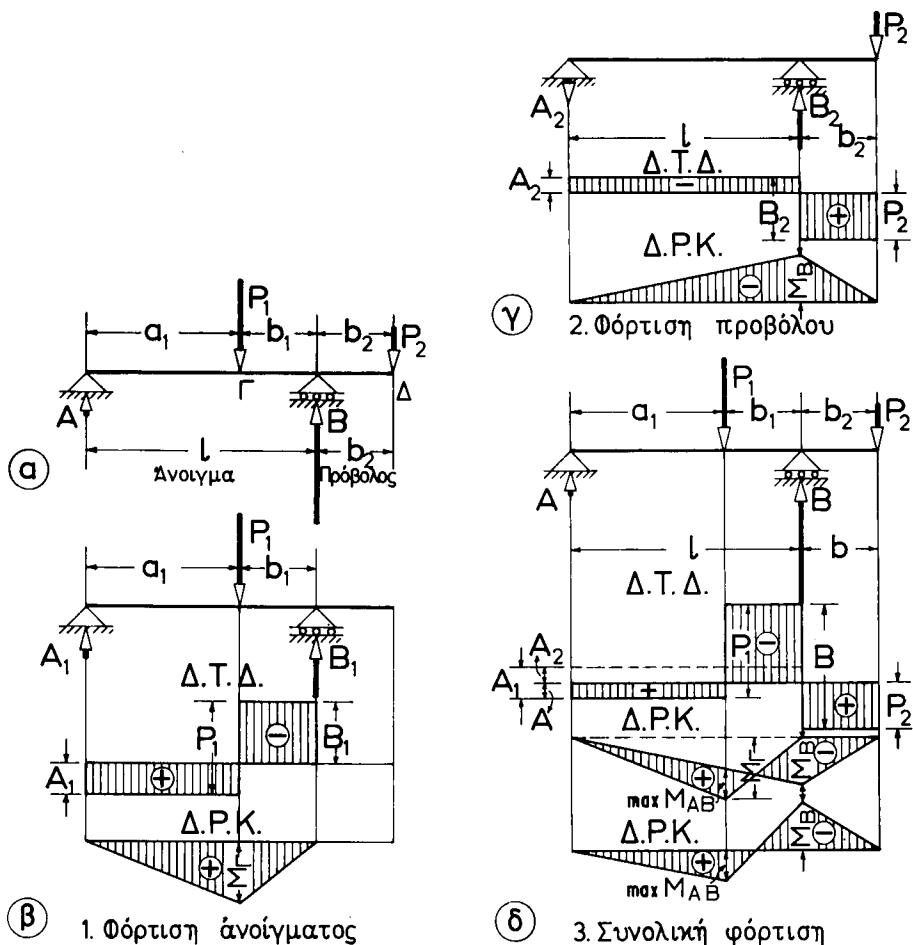
γ) Διάγραμμα ροπών κάρμψεως

$$M_A = 0, \quad M_B = 0, \quad M_\Gamma = \frac{P_1 \cdot a_1 \cdot b_1}{l}$$

2) Φόρτιση μόνο στον πρόβολο [σχ. 3.15a (γ)].

a) Αντιδράσεις στηρίξεως

Παραδεχόμαστε ότι οι αντιδράσεις A_2 και B_2 είναι θετικές.



Σχ. 3.15α.

$$\Sigma x = 0$$

$$A_H = 0$$

$$\Sigma y = 0$$

$$A_2 + B_2 - P_2 = 0 \text{ και}$$

$$\Sigma M_B = 0 = A_2 l + P_2 b_2 \quad \text{από την οποία}$$

$$A_2 = -\frac{P_2 b_2}{l} \quad \text{και} \quad B_2 = P_2 + \frac{P_2 b_2}{l} = P_2 \left(\frac{l + b_2}{l} \right)$$

Άρα η αντίδραση A_2 , την οποία είχαμε υποθέσει θετική, προέκυψε αρνητική – επομένως η φορά της πρέπει να είναι προς τα κάτω.

β) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

$$Q_{BD} = + P_2, \quad Q_{AB} = A_2 = - \frac{P_2 b_2}{l}$$

γ) Διάγραμμα ροπών κάμψεως

$$M_A = M_\Delta = 0, \quad M_B = -A_2 l = -P_2 b_2$$

3) **Συνολική φόρτιση** [σχ. 3.15α (δ)].

Αθροίζοντας αλγεβρικά τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη που προέκυψαν από τη φόρτιση του ανοίγματος και του προβόλου, λαμβάνομε τα μεγέθη που τελικά ζητούμε, δηλαδή:

a) **Αντιδράσεις στηρίξεως**

$$A = A_1 + A_2 = \frac{P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b_2}{l}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot (l + b_2)}{l}$$

β) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

Παρουσιάζονται δύο διατομές, στις οποίες μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη, μια στο άνοιγμα και μια στη στήριξη. Στην πρώτη προκύπτει η μέγιστη θετική ροπή, στη δεύτερη η ελάχιστη αρνητική.

γ) Διάγραμμα ροπών κάμψεως

$$\max M_{AB} = + A \cdot a_1 = \frac{P_1 b_1 - P_2 b_2}{l} a_1$$

$$\min M_B = -P_2 \cdot b_2$$

Παρατηρούμε ότι η τελική μέγιστη ροπή ανοίγματος $\max M_{AB}$ είναι μικρότερη από την M_Γ που προέκυψε κατά τη φόρτιση μόνο του ανοίγματος.

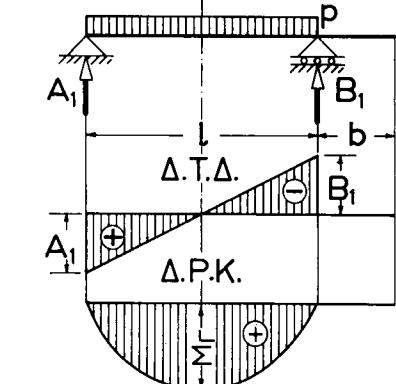
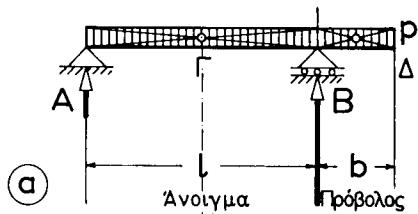
3.15 (2) Μονοπροέχουσα με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο (σχ. 3.15β).

1) **Αντιδράσεις στηρίξεως**

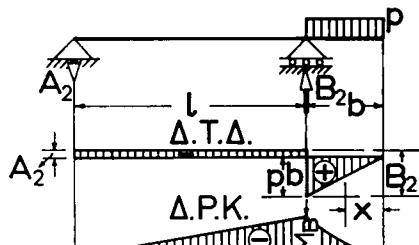
Στην προκειμένη περίπτωση λαμβάνεται ταυτόχρονα το φορτίο στο άνοιγμα και στον πρόβολο.

Ο φορτισμένος πρόβολος στο B μειώνει την αντίδραση στη στήριξη A και επιβαρύνει σε ίσο μέγεθος στη στήριξη B δεδομένου ότι $\Sigma y = 0$.

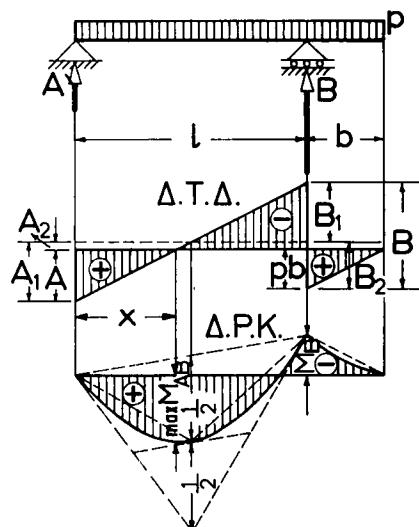
$$\text{Η επιβάρυνση στο B και η ελάφρυνση στο A είναι } A_2 = B_2 = \frac{|M_B|}{l} = \left| \frac{pb^2}{2l} \right|$$



(β) 1. Φόρτιση άνοιγματος



(γ) 2. Φόρτιση προβόλου



(δ) 3. Συνολική φόρτιση

Για να αποφευχθούν συγχύσεις λαμβάνομε το M_B ή ενδεχομένως το M_A με τις απόλυτες τιμές των $|M_A|$ και $|M_B|$, έχοντας όμως υπόψη ότι η ροπή αυτή του προβόλου επιβαρύνει τη στήριξη από την οποία προέχει και ελαφρύνει την απέναντι.

$$\text{Έτσι } M_B = -p \frac{b^2}{2}, \text{ οπότε λαμβάνεται:}$$

$$\Sigma M_B = 0 = Al - pl \frac{l}{2} + M_B \Rightarrow A = \frac{pl}{2} - \frac{|M_B|}{l} =$$

φόρτιση από το άνοιγμα - ελάφρυνση από ροπή προβόλου.

$$\Sigma y = 0 = A + B - pl - pb \Rightarrow B = \frac{pl}{2} + pb + \frac{|M_B|}{l} = \text{φόρτιση από το άνοιγμα} + \text{φόρτιση από τον πρόβολο} + \text{φόρτιση από ροπή προβόλου.}$$

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

Η αντίδραση στο A είναι ίση με την τέμνουσα Q_A .

$$Q_A = A = \frac{pl}{2} - \frac{|M_B|}{l}$$

Η αντίδραση στο Β είναι ίση με το άθροισμα των δύο τέμνουσών Q_B^{ap} και Q_B^δ .

$$B = |Q_B^{ap}| + |Q_B^\delta|$$

$$Q_B^\delta = pb \text{ και } Q_B^{ap} = \frac{pl}{2} + \frac{|M_B|}{l} = \text{μισό φορτίο του ανοίγματος}$$

προσαυξημένο από την επιρροή της ροπής του πριοβόλου.

$$\text{Ο μηδενισμός της τέμνουσας προκύπτει για } x = \frac{A}{p}$$

3) Διάγραμμα ροπών κάρμψεως

$$\max M_{AB} = A \cdot x - \frac{px^2}{2} = \frac{A^2}{2p} \quad \text{θέτοντας όπου } x = \frac{A}{p}$$

$$\min M_B = -\frac{pb^2}{2}$$

3.15 (3) Μονοπροέχουσα με συνδυασμό των δύο παραπάνω ειδών φορτίων.

Για να υπολογίσουμε τα εντατικά μεγέθη της δοκού εφαρμόζομε μια από τις δύο μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις φορτίσεως.

3.16 Αμφιπροέχουσα με συγκεντρωμένο φορτίο ή με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο και σε συνδυασμό των δύο.

Για να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις στηρίξεως, τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάρμψεως στην αμφιπροέχουσα δοκό, χρησιμοποιούμε τις ίδιες μεθόδους που εφαρμόσαμε στη μονοπροέχουσα δοκό.

Παράδειγμα.

Ζητούνται τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών της αμφιπροέχουσας του σχήματος 3.16a.

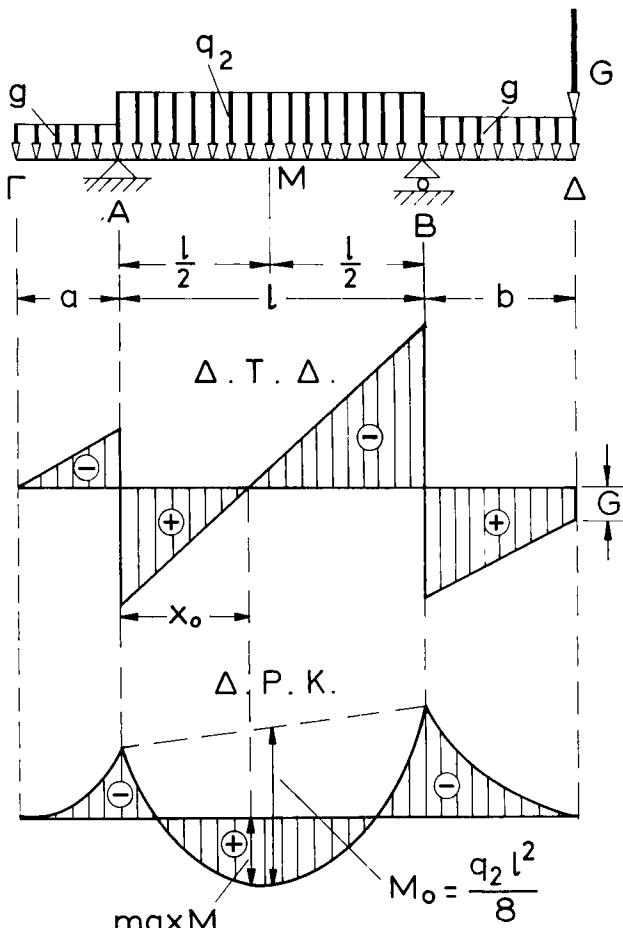
1) Αντιδράσεις στηρίξεως

Μπορούμε να τις υπολογίσουμε με τις τρεις γνωστές συνθήκες ισορροπίας

$$\Sigma x = 0, \Sigma y = 0 \text{ και } \Sigma M = 0.$$

Επειδή όμως η γνώση των ροπών των προβόλων (ροπές στηρίξεως)

$$M_A = -\frac{ga^2}{2} \quad \text{και} \quad M_B = -\frac{gb^2}{2} - Gb$$



Σχ. 3.16α.

είναι απαραίτητη, οι αντιδράσεις στηρίζεως προκύπτουν:

$$A = ga + \frac{q_2 l}{2} + \frac{|M_A|}{l} - \frac{|M_B|}{l}$$

$$B = gb + G + \frac{q_2 l}{2} - \frac{|M_A|}{l} + \frac{|M_B|}{l}$$

2) Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων

$$Q_A^{ap} = -ga$$

$$Q_A^\delta = +A - ga = \frac{q_2 l}{2} + \frac{|M_A|}{l} - \frac{|M_B|}{l}$$

Η τέμνουσα δύναμη μηδενίζεται σε απόσταση x_0 από τη στήριξη Α όπου:

$$x_0 = \frac{Q_A^{\delta}}{q_2}$$

$$Q_B^{\delta} = + G + gb, \quad Q_B^g = -B + G + gb = -\left(\frac{q_2 l}{2} - \frac{|M_A|}{l} + \frac{|M_B|}{l}\right)$$

3) Διάγραμμα ροπών κάμψεως

$$M_A = -g \frac{a^2}{2}, \quad M_B = -\frac{gb^2}{2} - G \cdot b$$

$$\max M = Ax_0 - q_2 \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} - g a \left(\frac{a}{2} + x_0 \right)$$

3.17 Δυσμενείς φορτίσεις.

Στην αμφιέρειστη δοκό οι μέγιστες αντίδρασεις στηρίξεως, τέμνουσες δυνάμεις και ροπές κάμψεως, προκύπτουν, όταν η δοκός φορτίζεται με όλα τα φορτία που πρόκειται να αναλάβει τόσο τα μόνιμα (g), όσο και τα κινητά (p), δηλαδή για **καθολική φόρτιση** $q = g + p$.

Τόσο στη μονοπρόέχουσα, όσο και στην αμφιπροέχουσα δοκό η φόρτιση του προβόλου μειώνει την αντίδραση της απομακρυσμένης απ' αυτόν στηρίξεως και τη ροπή κάμψεως του ανοίγματος (σχ. 3.17α). Επομένως οι απαιτούμενες για τη διαστασιολόγηση μέγιστες τιμές δεν λαμβάνονται για καθολική πάντοτε φόρτιση αλλά και για **μερική φόρτιση**.

Και το μεν μόνιμο φορτίο είναι αμετάβλητο στο χρόνο, συνεπώς γι' αυτό ισχύει οπωσδήποτε φόρτιση ολόκληρης της δοκού.

Ανάλογα όμως με τη θέση που έχει το κινητό φορτίο επάνω στη δοκό, μπορούν να προκύψουν οι ακόλουθες **περιπτώσεις φορτίσεως**.

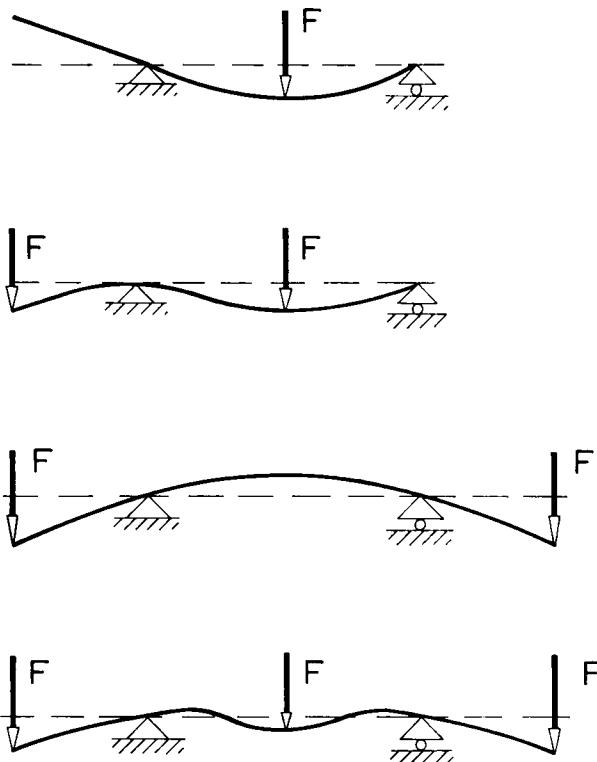
1) Μονοπρόέχουσα δοκός (σχ. 3.17β).

α) Καθολική φόρτιση [σχ. 3.17β(α)] προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της εσωτερικής στηρίξεως ($\max B$) και την ελάχιστη (απολύτως μέγιστη) αρνητική ροπή ($\min M_B$).

β) Κινητό φορτίο μόνο στο άνοιγμα [σχ. 3.17β (β)] προκαλεί τη μέγιστη αντίδραση της ακραίας στηρίξεως ($\max A$) και τη μέγιστη ροπή ανοίγματος ($\max M_{AB}$).

γ) Κινητό φορτίο μόνο στον πρόβολο [σχ. 3.17β (γ)] προκαλεί την ελάχιστη ροπή κάμψεως στο άνοιγμα και την ελάχιστη αντίδραση της ακραίας στηρίξεως ($\min A$). Εάν αυτή προκύπτει αρνητική, πρέπει να αγκυρώνεται η δοκός στη στήριξη.

Στα σχήματα 3.17β(δ) και 3.17β(ε) σχεδιάσθηκαν από την ίδια οριζόντια, τα Δ.Τ.Δ. και Δ.Ρ.Κ. των τριών περιπτώσεων φορτίσεως. Η γραμμή που σε κάθε θέση δίνει τις ακραίες τιμές των εντατικών αυτών μεγεθών λέγεται **περιβάλλουσα**.



Σχ. 3.17α.

2) Αμφιπροέχουσα δοκός (σχ. 3.17γ).

Είδαμε ότι στην μονοπροέχουσα δοκό οι δυνατές περιπτώσεις φορτίσεως είναι τρεις. Στην αμφιπροέχουσα, που έχει δύο προβόλους, είναι αντίστοιχα έξι (το μόνιμο φορτίο είναι πάντοτε καθολικό) οι ακόλουθες:

Φόρτιση α.

Κινητό φορτίο ρ στους δύο προβόλους.
Προκύπτει η $\min M_A$, η $\min M_B$ και η $\min M_{AB}$.

Φόρτιση β.

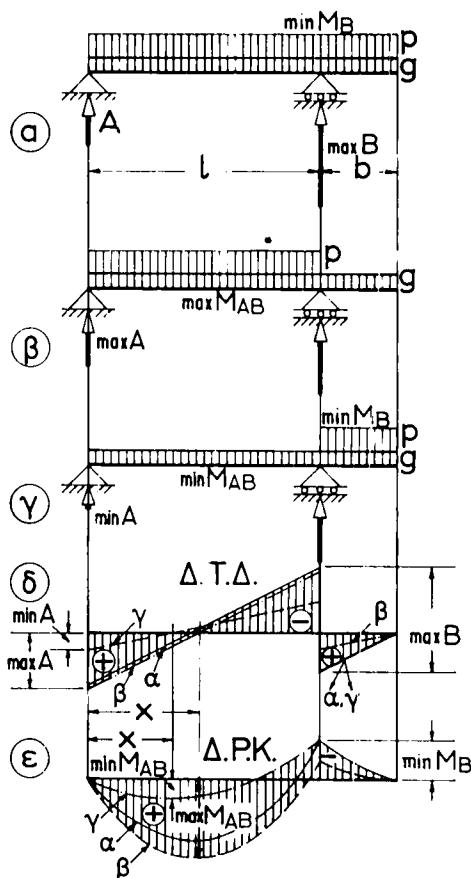
Κινητό φορτίο ρ στο άνοιγμα και τον αριστερό πρόβολο. Προκύπτει η $\max A$.

Φόρτιση γ.

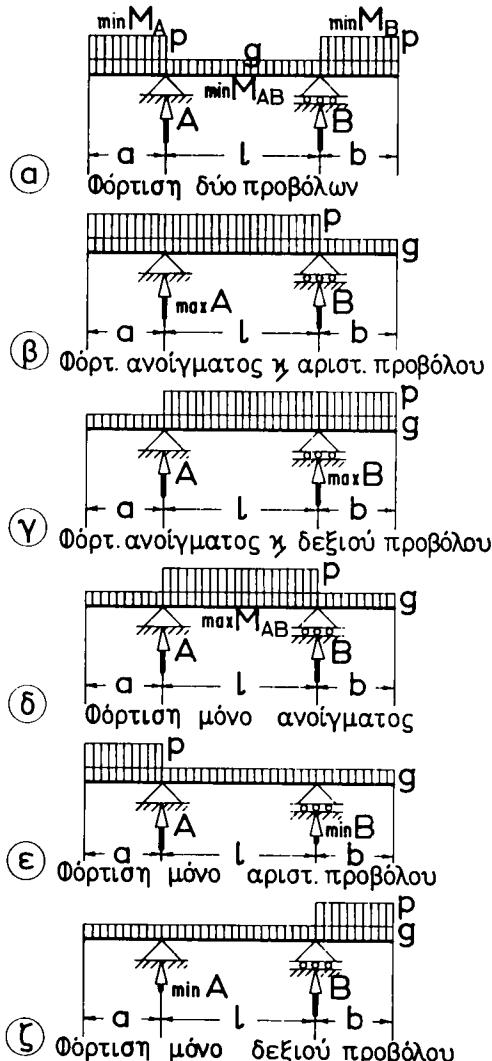
Κινητό φορτίο ρ στο άνοιγμα και το δεξιό πρόβολο. Προκύπτει η $\max B$.

Φόρτιση δ.

Κινητό φορτίο ρ μόνο στο άνοιγμα. Προκύπτει η $\max M_{AB}$.



Σχ. 3.17β.



Σχ. 3.17γ.

Φόρτιση ε.

Κινητό φορτίο p μόνο στον αριστερό πρόβολο.
Προκύπτει η $\min M_A$ και η $\min B$.

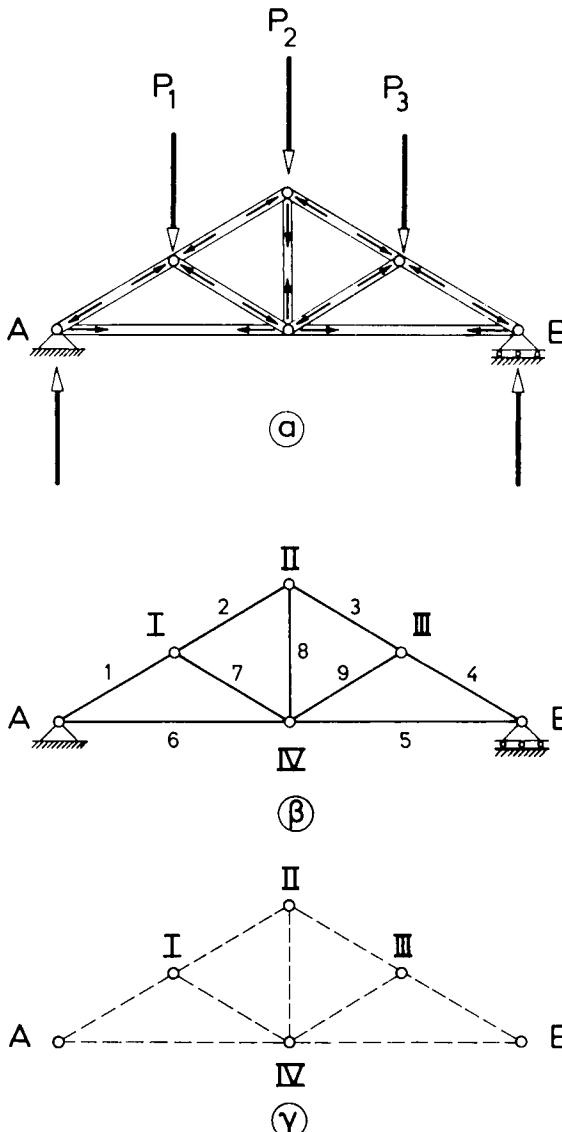
Φόρτιση ζ.

Κινητό φορτίο p μόνο στο δεξιό πρόβολο.
Προκύπτει η $\min M_B$ και η $\min A$.

3.18 Απλά τριγωνικά δικτυώματα. Ορισμοί.

Τα **δικτυώματα** είναι συστήματα ευθυγράμμων ράβδων, οι οποίες συνδέονται στα άκρα τους με **αρθρώσεις** έτσι, ώστε να αποτελούν στερεό (ευσταθή) σχηματισμό [σχ. 3.18α(α)].

Η θέση στην οποία συνδέονται δύο ή περισσότερες ράβδοι του δικτυώματος λέγεται **κόμβος** [σχ. 3.18α (β) και (γ)].



Σχ. 3.18α.

Το δικτύωμα αποτελεί, όπως και η δοκός, κατασκευή που έχει σκοπό να αναλάβει φορτία. Στην Τεχνική βρίσκεται μεγάλη εφαρμογή στις στέγες, τις γέφυρες, τα ικριώματα, τους γερανούς κ.λ.π.

Οι εξωτερικές δυνάμεις, τις οποίες αναλαμβάνει το δικτύωμα και στις οποίες περιλαμβάνονται τα φορτία και οι αντιδράσεις στηρίξεως, αποτελούνται κυρίως από συγκεντρωμένα φορτία, που δρουν επάνω στους κόμβους. Ο υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων είναι δυνατός με απλά μέσα μόνον, αν γίνουν οι ακόλουθες παραδοχές.

1) Αρθρώσεις χωρίς τριβή.

Η παραδοχή αυτή δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα όπου οι ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους, με τη μεσολάβηση κομβοελασμάτων με συγκόλληση, κοχλίωση ή ήλωση, πρακτικά άκαμπτα, ώστε να μπορούν να μεταβιβασθούν ροπές κάμψεως.

2) Φορτία μόνο στους κόμβους.

Η απαίτηση αυτή επιτυγχάνεται για το σημαντικότερο μέρος των φορτίσεων. Υπάρχουν βέβαια και διανεμημένες φορτίσεις, όπως είναι το ίδιο βάρος των ράβδων.

Στον υπολογισμό δεχόμαστε και τη φόρτιση αυτή να εφαρμόζεται σαν συγκεντρωμένο φορτίο στους δύο κόμβους κάθε ράβδου.

3) Οι κεντροβαρικοί άξονες των ράβδων συμπίπτουν με τις συνδετήριες ευθείες των κόμβων, δηλαδή διέρχονται από το θεωρητικό σημείο του κόμβου.

Το λάθος που προκύπτει από τις απλοποιητικές αυτές παραδοχές είναι σχετικά μικρό, επιτυγχάνεται όμως με αυτές απλός υπολογισμός, γιατί στις ράβδους αναπτύσσονται δυνάμεις μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονά τους δηλαδή ορθές δυνάμεις. Σύμφωνα με την αρχή δράσεως και αντιδράσεως, οι ράβδοι ασκούν στους κόμβους δυνάμεις ίσες και αντίφορες, τις οποίες καλούμε **εσωτερικές** [σχ. 3.18α (a)].

Η ράβδος **εφελκύεται**, όταν οι εσωτερικές της δυνάμεις διευθύνονται από τα άκρα προς το μέσο της ράβδου (ράβδοι 5.6.8) και **θλίβεται**, όταν διευθύνονται από το μέσο προς τα άκρα της ράβδου (1, 2, 3, 4, 7 και 9).

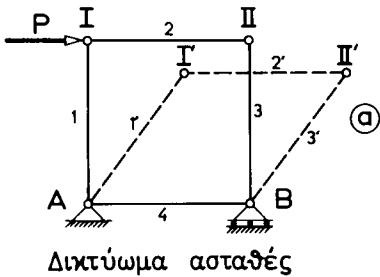
Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στηρίξεως γίνεται ακριβώς όπως και στις δοκούς. Επομένως το μόνο που μένει να εξετασθεί είναι η μέθοδος υπολογισμού των εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων.

Προηγουμένως όμως πρέπει να εξετάσομε τι είναι και πώς κατασκευάζεται ένα δικτύωμα ώστε να είναι ευσταθές.

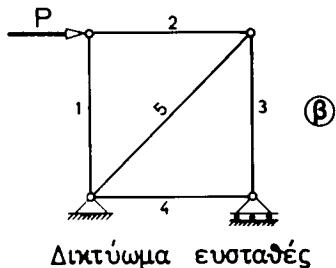
3.18 (1) Ευσταθή δικτυώματα.

Ένα δικτύωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως φορέας μόνο όταν για τυχούσα εξωτερική φόρτιση η θέση των κόμβων μεταξύ τους ή προς τις στηρίξεις δεν μεταβάλλεται. Το δικτύωμα, για το οποίο ισχύει αυτή η προϋπόθεση, λέγεται **ευσταθές**.

Βέβαια η φόρτιση προκαλεί ορθές δυνάμεις στις ράβδους και άρα επιμηκύνσεις



Δικτύωμα ασταθές



Δικτύωμα ευσταθές

Σχ. 3.18β.

ή βραχύνσεις τους, οι οποίες όμως είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες προς τα μήκη των ράβδων και μπορούν να αμεληθούν.

Το δικτύωμα στο οποίο δεν ισχύει η προϋπόθεση ότι η θέση των κόμβων δεν μεταβάλλεται, είναι **ασταθές**. Ένα τέτοιο δικτύωμα δεν μπορεί βέβαια να χρησιμοποιηθεί ως φορέας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα το δικτύωμα του σχήματος 3.18β (a), στο οποίο οι κόμβοι I και II μπορούν να μετακινηθούν στις θέσεις I' και II' χωρίς να μεταβληθεί το μήκος των ράβδων.

Για να γίνει ευσταθές πρέπει να προστεθεί η διαγώνια ράβδος 5 [σχ. 3.18β (b)].

Όπως φαίνεται από το παράδειγμα αυτό ένα δικτύωμα που αποτελείται από τρίγωνα είναι ευσταθές.

Το απλούστερο τριγωνικό δικτύωμα αποτελείται από ένα μόνο τρίγωνο και απαρτίζεται από τρεις ράβδους και τρεις κόμβους. Είναι δε ευσταθές, διότι κανείς κόμβος του δεν μπορεί να μετακινηθεί σχετικά προς τους άλλους (σχ. 3.18γ).

Αν π.χ. θέλαμε να μετακινήσουμε τον κόμβο I, δεν θα ήταν δυνατόν· αυτό οφείλεται στο ότι η ράβδος 1 τον υποχρεώνει να μετακινηθεί κατά μήκος του τόξου, που γράφεται με κέντρο το A και ακτίνα AΙ και η ράβδος 2 κατά μήκος του τόξου που γράφεται με κέντρο το II και ακτίνα IIΙ.

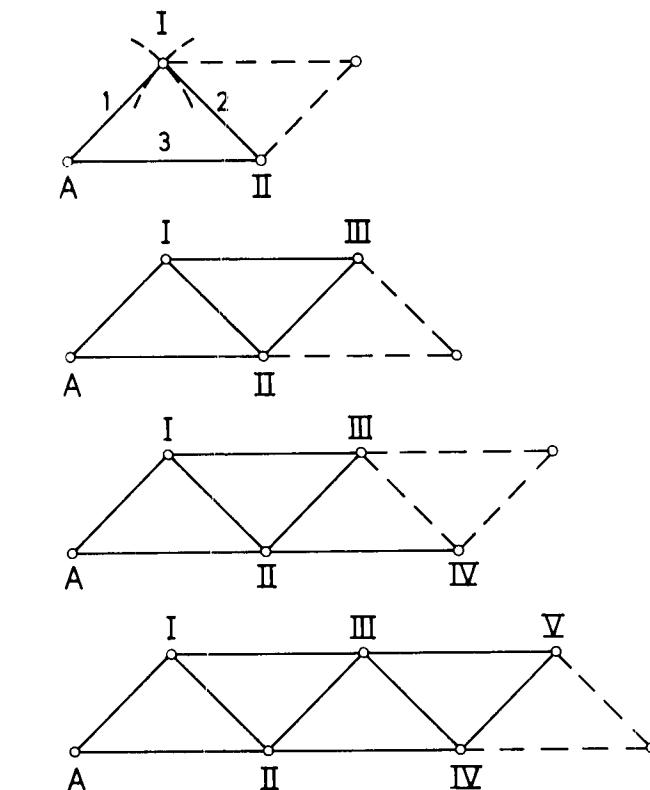
Τα δύο όμως αυτά τόξα έχουν μοναδικό κοινό σημείο το I, άρα ο κόμβος I είναι αμετάθετος.

Εάν στους δύο αμετάθετους κόμβους π.χ. I και II προστεθεί με δύο ράβδους, που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ένας νέος κόμβος, τότε, για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως, είναι και αυτός αμετάθετος και επομένως ευσταθές το τριγωνικό δικτύωμα που κατασκευάζεται έτσι.

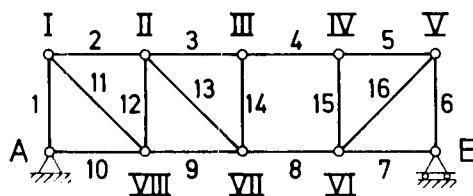
Στο πρώτο τρίγωνο του δικτυώματος υπάρχουν τρεις ράβδοι $r_0 = 3$ και τρεις κόμβοι $u_0 = 3$. Για να σχηματισθεί το δεύτερο τρίγωνο απαιτούνται δύο ράβδοι και ένας κόμβος, επομένως για τους επομένους $u_1 = u - 3$ κόμβους απαιτούνται $r_1 = 2(u_1 - 3)$ ράβδοι. Άρα για τους $u_0 + u_1 = u$ συνολικά κόμβους ο απαιτούμενος αριθμός ράβδων είναι:

$$r_0 + r_1 = r = 3 + 2(u - 3) = 2u - 3$$

Ο παραπάνω τύπος παρέχει την αριθμητική σχέση μεταξύ των ράβδων ρ και των κόμβων u ενός ευσταθούς δικτυώματος. Αν ο αριθμός των ράβδων προκύψει

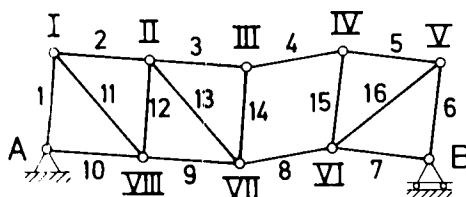


Σχ. 3.18γ.



$$\rho = 16 \quad u = 10$$

$$\rho = 16 < 2u - 3 = 17$$



Ασταθές δικτύωμα

Σχ. 3.18δ.

μικρότερος, αυτό σημαίνει ότι σε μια θέση του δικτυώματος δεν σχηματίζεται τρίγωνο, άρα το δικτύωμα είναι ασταθές (σχ. 3.18δ).

3.18 (2) Υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων με τη γραφική μέθοδο. Διάγραμμα Cremona .

Η ισορροπία κάθε κόμβου επιτυγχάνεται όταν όλες οι εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις, που ασκούνται επάνω του, έχουν συνισταμένη μηδέν. Για να συμβαίνει αυτό αρκεί, επειδή οι δυνάμεις συντρέχουν στο κόμβο, το δυναμοπολύγωνό τους να είναι κλειστό.

Θα ήταν επομένως δυνατό να σχεδιασθεί χωριστά για κάθε κόμβο ένα κλειστό δυναμοπολύγωνο.

Θα είμαστε έτσι υποχρεωμένοι να σχεδιάσουμε τόσα δυναμοπολύγωνα, όσοι είναι οι κόμβοι. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή σε ένα παράδειγμα. Δίνεται το δικτύωμα του σχήματος 3.18ε που αναλαμβάνει τα φορτία $P_1 = P_3 = 1000 \text{ kp}$ και $P_2 = 2000 \text{ kp}$.

Ζητούνται οι εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων.

Λύση.

α) Σχεδιάζομε το δικτύωμα με κατάλληλη κλίμακα. Αριθμούμε τους κόμβους, τις ράβδους και τις εξωτερικές δυνάμεις.

Κόμβοι: A, I, II, III, B, IV.

Ράβδοι: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Εξωτερικές δυνάμεις: P_1, P_2, P_3, B και A. Οι αντιδράσεις στηρίξεως είναι ακόμη άγνωστες.

β) Υπολογίζομε τις αντιδράσεις στηρίξεως A και B με εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας, ακριβώς όπως και στις δοκούς. Στην προκειμένη περίπτωση λόγω συμμετρίας προκύπτει $A = B = 2000 \text{ kp}$.

Σχεδιάζομε τις εξωτερικές δυνάμεις με τη σειρά P_1, P_2, P_3, B, A που θα τις συναντούσαμε περιτρέχοντας το δικτύωμα κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Κατά την ίδια φορά θα περιτρέχομε στα επόμενα κάθε κόμβο, ξεκινώντας πάντοτε από τις γνωστές δυνάμεις.

γ) Υπολογίζομε τις εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων από τα κλειστά δυναμοπολύγωνα κάθε κόμβου. Για να προκύπτουν αποτελέσματα με την απαιτούμενη στην πράξη προσέγγιση, επιλέγομε κατάλληλη κλίμακα δυνάμεων.

Ξεκινούμε πάντοτε από ένα κόμβο με δύο μόνο ράβδους.

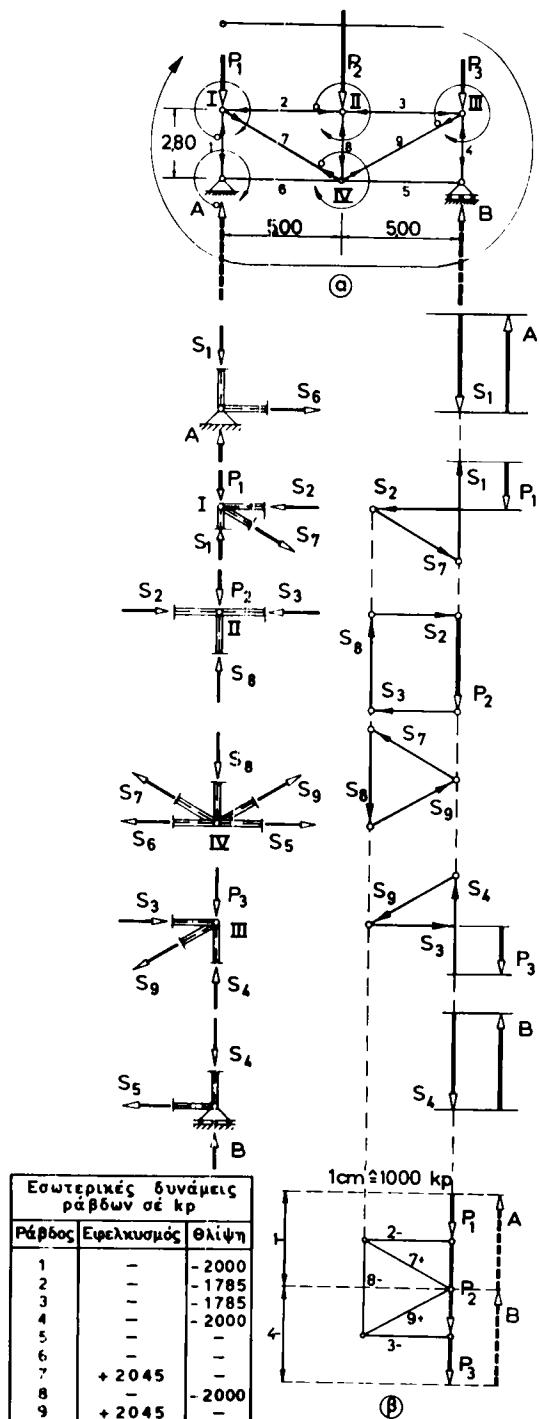
Κόμβος A.

Γνωστή είναι η A.

Άγνωστες οι S_1 και S_6 , οι οποίες ισορροπούν με την A.

Για να κατασκευάσουμε το κλειστό δυναμοπολύγωνο, ξεκινούμε από την A. Περιτρέχοντας τον κόμβο κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου, συναντούμε τη ράβδο 1, στην οποία δρα η άγνωστη ακόμα εσωτερική δύναμη S_1 . Φέρομε από το πέρας της A παράλληλη προς τη ράβδο 1. Στη συνέχεια συναντούμε τη ράβδο 6. Φέρομε από την αρχή της A παράλληλη προς τη ράβδο 6.

Διαπιστώνομε ότι το δυναμοπολύγωνο περιορίζεται σε μια ευθεία, από την



Ix. 3.18a.

οποία προκύπτει ότι η S_8 είναι μηδέν ενώ η S_1 , είναι ίση με την A και διευθύνεται προς τον κόμβο A , άρα θλίβει τον κόμβο στη ράβδο 1· η εσωτερική δύναμη είναι θλιπτική. Σχεδιάζομε στη ράβδο 1 του δικτυώματος το βέλος της δυνάμεως S_1 , που διευθύνεται προς τον κόμβο A και στο άλλο πέρας της ράβδου την ίδια δύναμη με αντίθετο βέλος. Τα βέλη αυτά μας δίνουν τη διεύθυνση των δυνάμεων που ασκούνται από τις ράβδους στους κόμβους.

Κόμβος I.

Γνωστές είναι οι S_1 και P_1 .

Ζητούνται οι S_2 και S_7 .

Κατασκευάζομε το κλειστό δυναμοπολύγωνο από τις δυνάμεις S_1 , P_1 , S_2 και S_7 , όπως τις συναντούμε ξεκινώντας από την πρώτη γνωστή S_1 , και περιτρέχοντας δεξιόφορα τον κόμβο. Η διεύθυνση των S_2 και S_7 , δίνεται από την ενιαία φορά των δυνάμεων στο δυναμοπολύγωνο, η οποία ορίζεται από τη διεύθυνση των γνωστών δυνάμεων S_1 , και P_1 . Η διεύθυνση των S_2 και S_7 , στον κόμβο I και η αντίθετη διεύθυνση στο άλλο άκρο τους παρουσιάζεται στις αντίστοιχες ράβδους 2 και 7 με δύο βέλη.

Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο εργαζόμαστε και στους υπόλοιπους κόμβους II, IV και III (σχ. 3.18ε).

Με τα πέντε κλειστά δυναμοπολύγωνα υπολογίσαμε όλες τις άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων S_1 , έως S_9 . Την ισορροπία των δυνάμεων στον κόμβο B εξετάζομε μόνο για να κάνομε έλεγχο.

δ) Με βάση την κλίμακα δυνάμεων που είχαμε εκλέξει μετρούμε από τα δυναμοπολύγωνα τα μεγέθη των εσωτερικών δυνάμεων και τα αναγράφομε σε ένα πίνακα. Όταν τα βέλη μιάς ράβδου κατευθύνονται προς τον κόμβο, η ράβδος αυτή καταπονείται σε θλίψη, οπότε χαρακτηρίζομε την εσωτερική δύναμη ως αρνητική. Όταν τα βέλη απομακρύνονται από τον κόμβο, καταπονείται σε εφελκυσμό και η εσωτερική δύναμη χαρακτηρίζεται ως θετική.

Με τη μέθοδο Cremona επιτυγχάνεται η συγκέντρωση όλων αυτών των χωριστών δυναμοπολυγώνων σε ένα σχέδιο. Έτσι δεν σχεδιάζεται δύο φορές η ίδια εσωτερική δύναμη με αποτέλεσμα τη μείωση της σχεδιαστικής εργασίας και τη βελτίωση στην ακρίβεια του μεγέθους των εσωτερικών δυνάμεων.

Λύση.

Τα (α) και (β) όπως και προηγουμένως.

γ) Αρχίζομε τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων από ένα κόμβο, στον οποίο συντρέχουν δύο μόνο ράβδοι π.χ. τον κόμβο A. Σχεδιάζομε το κλειστό δυναμοπολύγωνο ακριβώς όπως και στην περίπτωση των χωριστών δυναμοπολυγώνων.

Συνεχίζομε με τη σχεδίαση του δυναμοπολυγώνου εκείνου του κόμβου, στον οποίο απομένουν το πολύ δύο άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις ράβδων π.χ. του κόμβου I.

Εδώ όμως πρέπει να προσέξουμε το εξής: Οι δυνάμεις σε κάθε κόμβο διαιρούνται σε δύο κατηγορίες: τις γνωστές π.χ. S_1 , και P_1 , και τις άγνωστες που μπορεί να είναι το πολύ δύο π.χ. οι S_2 και S_7 . Διατρέχομε κάθε κόμβο κατά τη φορά των δει-

κτών του ωρολογίου και αρχίζομε πάντοτε με τις γνωστές δυνάμεις. Στην περίπτωσή μας πρώτη γνωστή δύναμη που συναντούμε είναι η S_1 , και δεύτερη η P_1 , τις οποίες έχομε σχεδιάσει στο πρώτο δυναμοπολύγωνο και δεν τις επαναλαμβάνομε.

Από το τέλος της P_1 φέρομε παράλληλη προς τη ράβδο 2 και από την αρχή της S_1 , προς την 7. Σχεδιάσαμε έτσι ένα κλειστό δυναμοπολύγωνο με την ακόλουθη σειρά δυνάμεων S_1, P_1, S_2, S_3 , απόλυτα όμοιο με το χωριστό δυναμοπολύγωνο της ισορροπίας του κόμβου I, που είχαμε σχεδιάσει προηγουμένως. Η διεύθυνση των αγνώστων δυνάμεων S_2 και S_3 , ορίζεται από την ενιαία φορά των δυνάμεων στο δυναμοπολύγωνο και παρουσιάζεται με ένα βέλος κοντά στον κόμβο που εξετάσαμε και με το αντίθετο βέλος στον άλλο κόμβο στον οποίο **συντρέχει η ράβδος**. Από τα δυναμοπολύγωνα που προέκυψαν και με βάση την κλίμακα δυνάμεων που χρησιμοποιήσαμε υπολογίζομε τα μεγέθη των εσωτερικών δυνάμεων.

δ) Ο τρόπος καταπονήσεως της ράβδου, εφελκυσμός ή θλίψη, προκύπτει από τη φορά των βελών. Όταν η εσωτερική δύναμη διευθύνεται προς τον κόμβο, η ράβδος θλίβεται και το μέγεθος της δυνάμεως λαμβάνεται αρνητικό, όταν απομακρύνεται από τον κόμβο εφελκύεται και το μέγεθος της δυνάμεως χαρακτηρίζεται θετικό.

Όταν από το κλειστό δυναμοπολύγωνο ενός κόμβου προκύπτει ότι μια εσωτερική δύναμη διευθύνεται π.χ. προς αυτόν, τούτο σημαίνει ότι η εσωτερική δύναμη και στον άλλο κόμβο, με τον οποίο η ράβδος αυτή συνδέεται, θα διευθύνεται με το ίδιο ακριβώς μέγεθος πάλι προς τον κόμβο.

3.18 (3) Υπολογισμός εσωτερικών δυνάμεων ράβδων με την αναλυτική μέθοδο (τομές Ritter).

Η μέθοδος Ritter επιτρέπει τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων **ορισμένων** ράβδων, ενώ το διάγραμμα Cremona καταρτίζεται για το **σύνολο** του δικτύωματος.

Για τον υπολογισμό μιάς άγνωστης εσωτερικής δυνάμεως ράβδου κάνομε μια φανταστική τομή στο δικτύωμα, έτσι ώστε να κόβονται τρείς το πολύ ράβδοι — με άγνωστες τις εσωτερικές δυνάμεις τους (σχ. 3.18στ). Δεχόμαστε ότι όλες οι άγνωστες δυνάμεις των ράβδων είναι εφελκυστικές. Εάν μετά τον υπολογισμό προκύψουν θετικές, αυτό σημαίνει ότι η παραδοχή που κάναμε ήταν σωστή. Εάν προκύψουν αρνητικές, σημαίνει ότι οι εσωτερικές δυνάμεις είναι θλιπτικές και συνεπώς το αρνητικό πρόσημο ορθό.

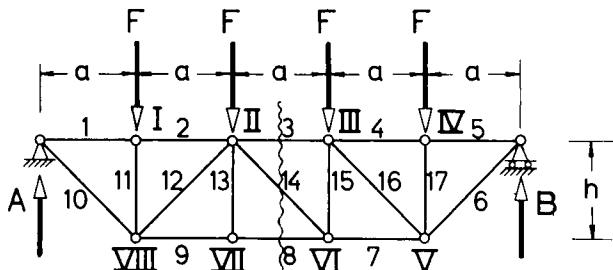
Εφ' όσον ολόκληρο το δικτύωμα ισορροπεί, πρέπει να ισορροπεί και κάθε τμήμα του, στο οποίο εκτός από τις εξωτερικές δυνάμεις ενεργούν και οι τρεις άγνωστες δυνάμεις των ράβδων της τομής.

Άρα ο αναλυτικός υπολογισμός των ζητουμένων εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων μπορεί να γίνει κατά τον ίδιο τρόπο, που γίνεται ο υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων των δοκών, δηλαδή με την εφαρμογή των τριών συνθηκών ισορροπίας:

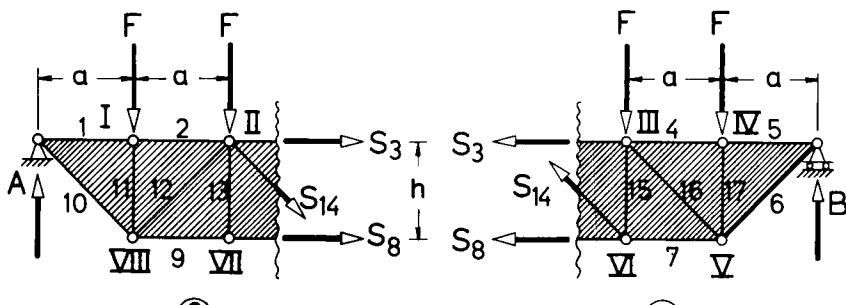
$$1) \quad \Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma M = 0$$

οι οποίες μπορεί να είναι προσφορότερο να μετασχηματισθούν στις εξής:

$$2) \quad \Sigma M_I = 0, \quad \Sigma M_{II} = 0, \quad \Sigma M_{III} = 0$$



(a)



(β)

(γ)

Σχ. 3.18στ.

όπου τα τρία σημεία αναφοράς δεν πρέπει να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, η

$$3) \quad \Sigma x = 0 \quad \text{ή} \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma M_I = 0, \quad \Sigma M_{II} = 0.$$

Επειδή οι εξισώσεις των συνθηκών ισορροπίας είναι τρείς, με κάθε τομή μπορούν να υπολογισθούν τρεις μόνο άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις ράβδων.

Ας εξετάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου αυτής για τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων 3, 8 και 14 στο δικτύωμα του σχήματος 3.18στ.

a) **Υπολογισμός της S_3 .**

Λόγω συμμετρίας $A = B = 2F$.

Λαμβάνομε $\Sigma M = 0$ ως προς ένα σημείο στο οποίο τέμνονται οι άλλες δύο ράβδοι 8 και 14, δηλαδή ως προς το σημείο VI έτσι, ώστε αυτές να μη προκαλούν ροπή.

Συνεπώς μόνο η S_3 έχει μοχλοβραχίονα ως προς το σημείο VI; επομένως:

$$\Sigma M_{VI} = 0 = A \cdot 3a - F2a - Fa + S_3 \cdot h \quad \text{από την οποία}$$

$$S_3 = \frac{3Fa - 3Aa}{h} = - \frac{3Fa}{h}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η ράβδος 3 θλίβεται.

β) Υπολογισμός της S_8

Πάλι εκλέγομε το σημείο αναφοράς έτσι, ώστε μόνο η άγνωστη S_8 να προκαλεί ροπή:

$$\Sigma M_{II} = 0 = A \cdot 2a - Fa - S_8 \cdot h$$

$$S_8 = \frac{2Aa - Fa}{h} = + \frac{3Fa}{h}$$

Η εσωτερική δύναμη της ράβδου S_8 έχει θετικό πρόσημο, άρα είναι εφελκυστική.

γ) Υπολογισμός της S_{14} .

Εδώ χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$\Sigma y = 0 = A - F - F - S_{14} \text{ ημα, από την οποία προκύπτει } S_{14} = 0.$$

Παράδειγμα.

Στο δίκτυο του σχήματος 3.18ζ να υπολογισθούν οι εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων 2, 7 και 10. Φόρτιση $F = 2000$ kp.

Λύση.

α) Αριθμούμε τους κόμβους και τις ράβδους.

β) Υπολογίζομε τις αντιδράσεις στηρίζεως $A = B = 3000$ kp.

γ) Τέμνομε τις ράβδους 2, 7 και 10 και εισάγομε στη θέση των ράβδων τις εσωτερικές τους δυνάμεις S_2 , S_7 και S_{10} , τις οποίες υποθέτομε εφελκυστικές [σχ. 3.18ζ(α)].

δ) Εξετάζομε την ισορροπία στο αριστερό τμήμα του δίκτυου του στο οποίο ενεργούν οι γνωστές δυνάμεις A και F και οι άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων S_2 , S_7 και S_{10} , τις οποίες ζητείται να υπολογίσομε.

Υπολογισμός της S_7 .

Λαμβάνομε ροπές ως προς τον κόμβο II, σημείο τομής των ράβδων 2 και 10.

$$\Sigma M_{II} = 0 = A \cdot 10 - F \cdot 5 - S_7 \cdot 5 \Rightarrow S_7 = \frac{A \cdot 10 - F \cdot 5}{5} = \frac{3000 \times 10 - 2000 \times 5}{5} = \\ = +4000 \text{ kp (εφελκυσμός).}$$

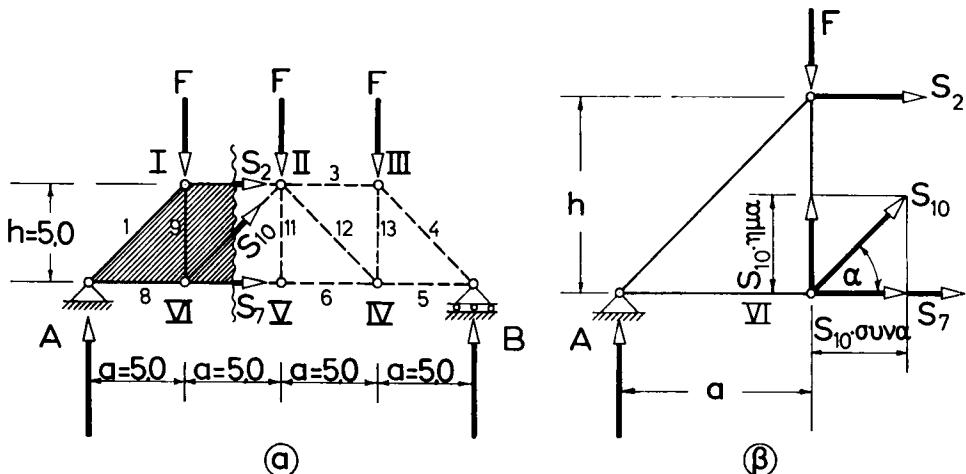
Υπολογισμός της S_2 .

Ροπές ως προς τον κόμβο VI, σημείο τομής των ράβδων 7 και 10.

$$\Sigma M_{VI} = 0 = A \cdot 5 + S_2 \cdot 5 \Rightarrow S_2 = -A = -3000 \text{ kp (θλιπτική).}$$

Υπολογισμός της S_{10} .

Ο υπολογισμός των ροπών ως προς το σημείο τομής των ράβδων 2 και 7 δεν είναι δυνατός, επειδή αυτές είναι παράλληλες. Συνεπώς ως τρίτη συνθήκη ισορρο-



Σχ. 3.18ζ.

πίας θα χρησιμοποιηθεί είτε η $\Sigma x = 0$, είτε η $\Sigma y = 0$. Η S_{10} αναλύεται στην οριζόντια συνιστώσα S_{10} συνα και την κατακόρυφη $S_{10}\etaμα$. [σχ. 3.18ζ(β)].

$$\Sigma y = 0 = A - F + S_{10}\etaμα \Rightarrow S_{10} = \frac{F - A}{\etaμα} = - \frac{1000}{0,707} = - 1420 \text{ (θλιππική)}$$

$$\text{όπου } \etaμα = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΑΠΛΗ ΚΑΜΨΗ

1.1 Διαστασιολόγηση χαλύβδινων και ξύλινων δοκών.

α) Εισαγωγή.

Στην Αντοχή Υλικών Μέρος πρώτο, Κεφάλαιο τρίτο, μάθαμε πώς καθορίζονται τα εντατικά μεγέθη (ορθές δυνάμεις, τέμνουσες δυνάμεις και ροπές κάμψεως) μιάς δοκού. Έτσι έχουμε τα απαραίτητα δεδομένα για να υπολογίσουμε τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τις προκαλούμενες παραμορφώσεις στην καμπτόμενη δοκό.

Οι διαστάσεις της δοκού πρέπει να εκλεγούν, δηλαδή η δοκός να διαστασιολογηθεί έτσι, ώστε σε καμμιά θέση της να μην υπερβάλλονται οι επιτρεπόμενες από τους Κανονισμούς τάσεις και παραμορφώσεις. Οι υπάρχουσες τάσεις σ και τα βέλη παραμορφώσεως f θα πρέπει να είναι μικρότερα ή ίσα με τα επιτρεπόμενα, δηλαδή υπαρχ. $\sigma < \text{επιτρ. } \sigma$, υπαρχ. $f < \text{επιτρ. } f$.

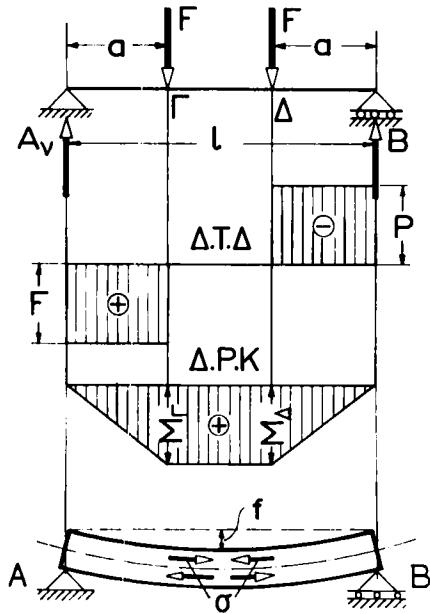
Θα ξεκινήσουμε με την απλούστερη περίπτωση φορτίσεως, κατά την οποία η δοκός δεν αναλαμβάνει ορθές και τέμνουσες δυνάμεις, αλλά μόνο ροπές κάμψεως, τη λεγόμενη δηλαδή καταπόνηση της απλής κάμψεως. Η θετική ροπή προκαλεί θλιπτικές τάσεις στις επάνω ίνες της δοκού και εφελκυστικές στις κάτω· η αρνητική ροπή το αντίθετο (σχ. 1.1a). Πώς διανέμονται όμως οι τάσεις αυτές στη διατομή; Για να δοθεί απάντηση απαιτείται να γίνουν ορισμένες παραδοχές.

β) Παραδοχές.

Η θεωρία που αναπτύσσεται παρακάτω αφορά την **απλή κάμψη**, που σημαίνει ότι η διατομή καταπονείται με τη ροπή κάμψεως μόνο, και ισχύει εφόσον ικανοποιούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- 1) Το ύψος h στη διατομή της δοκού είναι μικρότερο από το μισό του ανοιγματός της l .
- 2) Η δοκός έχει ένα επίπεδο συμμετρίας, δηλαδή η διατομή της έχει έναν άξονα συμμετρίας και παραμένει αμετάβλητη σ' όλο το μήκος της.
- 3) Τα φορτία βρίσκονται μέσα στο επίπεδο συμμετρίας της και είναι κάθετα στον άξονά της.
- 4) Ο άξονας της δοκού, προτού να παραμορφωθεί είναι ευθύγραμμος.
- 5) Για το υλικό που εξετάζεται, ισχύει ο νόμος του Ηooke, με το ίδιο μέτρο ελαστικότητας σε εφελκυσμό και θλίψη.

Επί πλέον γίνεται και η ακόλουθη βασική παραδοχή:



Σχ. 1.1α.

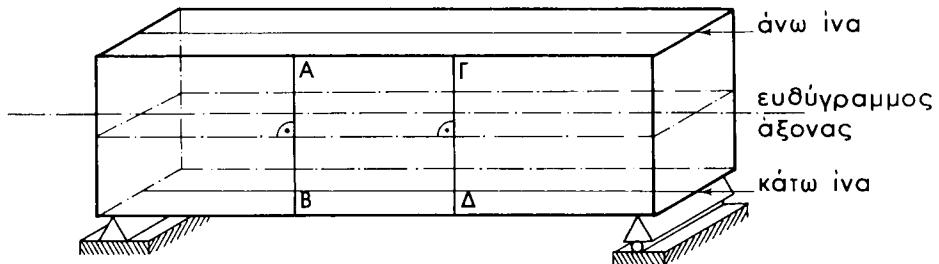
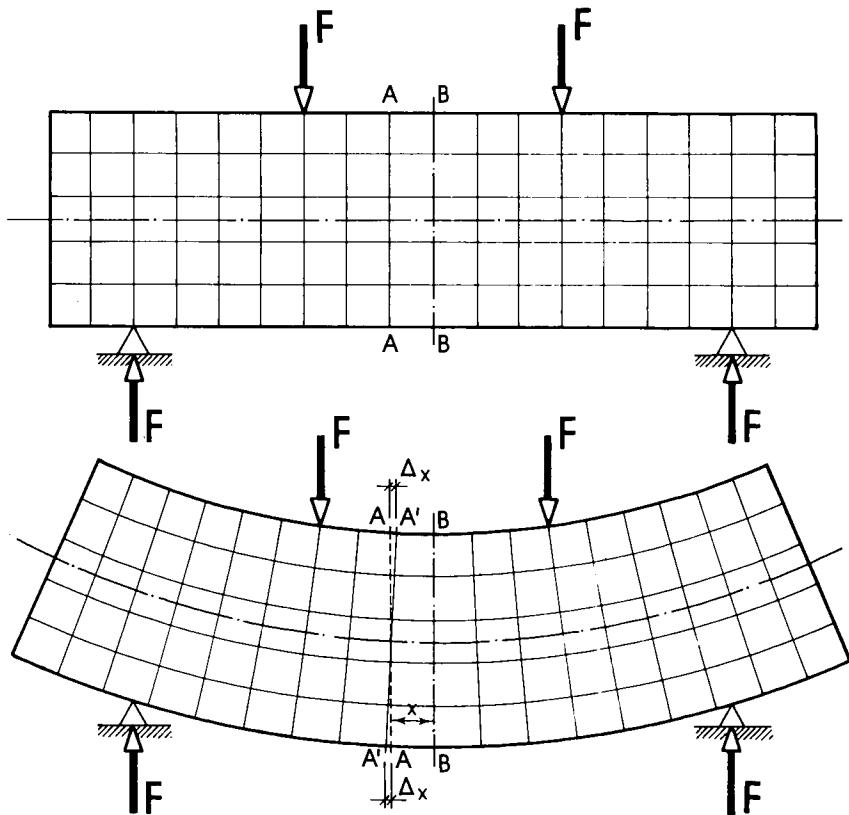
6) Οι επίπεδες διατομές της δοκού (τομές κάθετες στον άξονά της), παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση της δοκού (άρα κάθετες στη νέα θέση του άξονα της (σχ. 1.1β).

Η παραδοχή αυτή (υπόθεση Bernoulli) επαληθεύεται πειραματικά (σχ. 1.1β). Οι πιο πάνω προϋποθέσεις ικανοποιούνται συνήθως στην πράξη. Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι θα συνέβαινε αν ορισμένες απ' αυτές δεν ικανοποιούνταν.

1. Αν το ύψος h είναι μεγαλύτερο από το $\sqrt{2}$, τότε έχουμε την περίπτωση του δίσκου, στον οποίο δεν ισχύει πια η παραδοχή 6 της επιπεδότητας των διατομών μετά την παραμόρφωση.
2. Αν τα φορτία βρίσκονται μέσα στο επίπεδο συμμετρίας, αλλά δεν είναι κάθετα στον άξονα της δοκού, ή εάν ο άξονας της δοκού δεν είναι ευθύγραμμος, θα αναπτυχθεί εκτός από τη ροπή κάμψεως και ορθή (αξονική) δύναμη. Σ' αυτή την περίπτωση δεν έχουμε μόνο απλή κάμψη, αλλά σύνθετη καταπόνηση, με την οποία θα ασχοληθούμε σε άλλο κεφάλαιο.

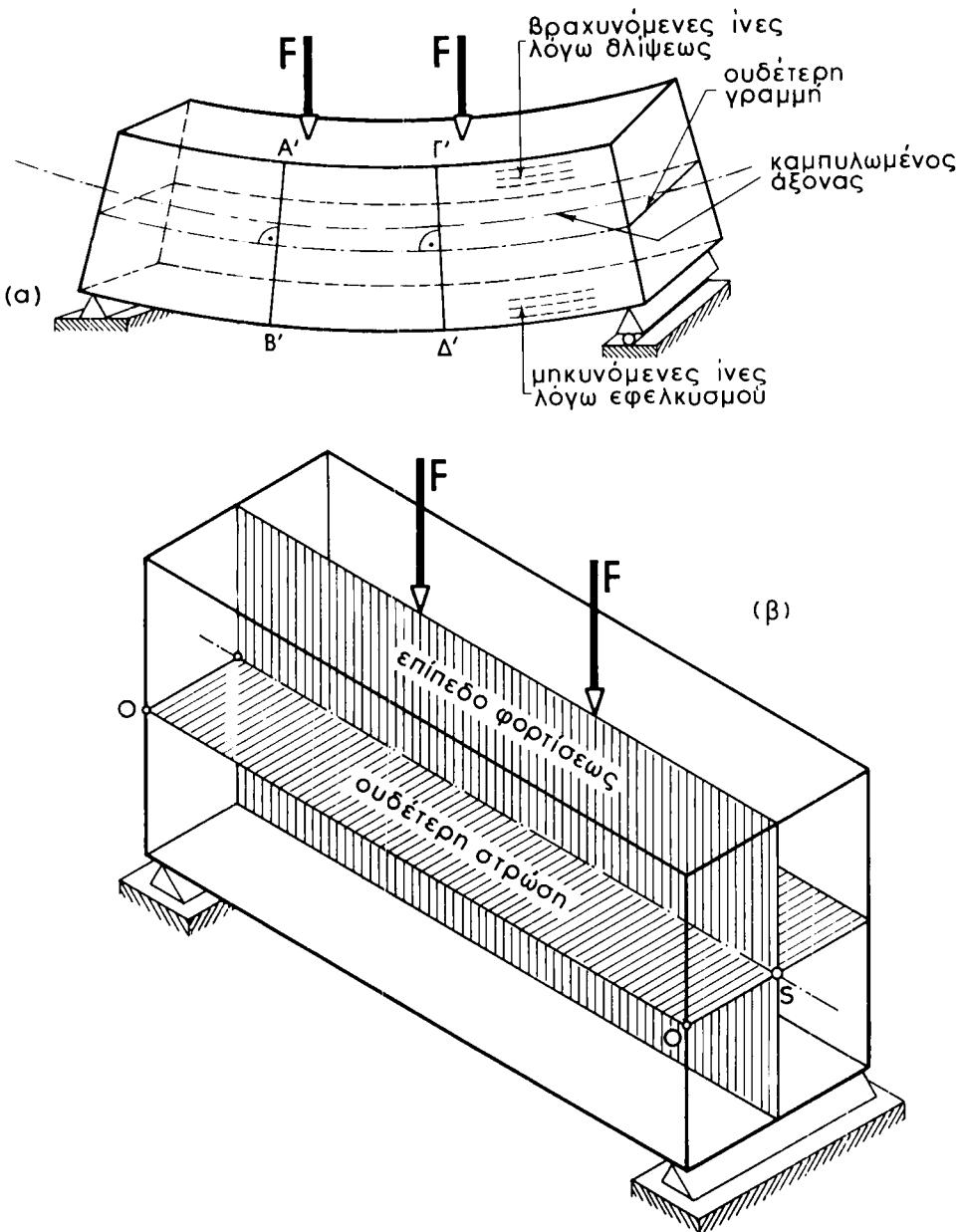
γ) Ουδέτερη γραμμή.

Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος 1.1β όταν είναι αφόρτιση, έχει άξονα ευθύγραμμο. Φανταζόμαστε ότι η δοκός αποτελείται από ευθύγραμμες ίνες παράλληλες προς τον άξονά της (όπως π.χ. συμβαίνει στο ξύλο). 'Όταν η δοκός



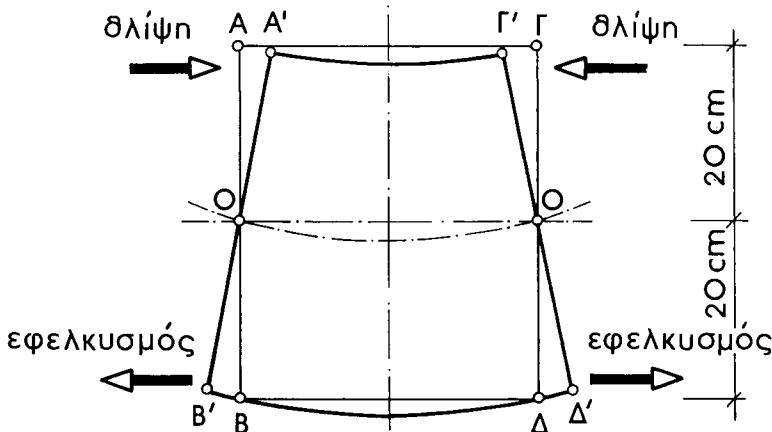
Σχ. 1.1β.

φορτιστεί [σχ. 1.1γ(α)] ο άξονάς της καμπυλώνει. Οι ίνες, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα επιμηκύνονται, ενώ αντίθετα όσες είναι πάνω από τον άξονα βραχύνονται. Μεταξύ των δύο περιοχών υπάρχει προφανώς μία στρώση ινών, η οποία ούτε εφελκύεται, ούτε θλίβεται και ακριβώς επειδή δεν μετέχει στην παραμόρφωση καλείται ουδέτερη γραμμή. Η γραμμή αυτή είναι ευθεία κάθετη στο επίπεδο φορτίσεως και για την απλή κάμψη διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής. Αν χα-



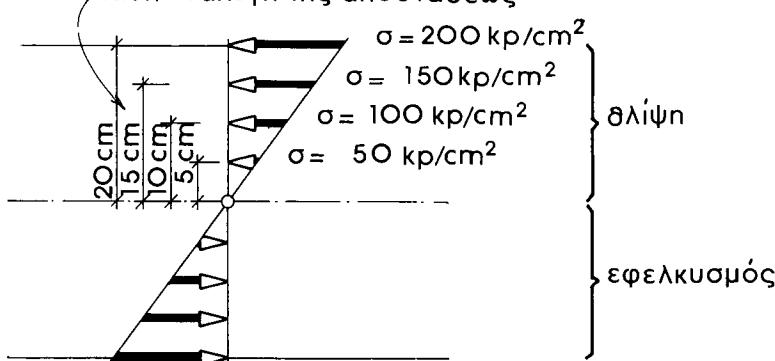
Σχ. 1.1γ.

ράχομε στην παρειά μιας αφόρτιστης δοκού δύο ευθείες AB και $ΓΔ$ κάθετες στον άξονά της, μετά τη φόρτιση και την παραμόρφωση της δοκού αυτές εξακολουθούν να είναι ευθείες, και στη νέα θέση τους $A'B'$ και $Γ'D'$ είναι κάθετες στον άξονα της δοκού που έχει καμπυλωθεί (ιπτόθεση Bernoulli) [σχ. 1.1β και 1.1γ(α)]. Επομένως οι οριζόντιες μετατοπίσεις των σημείων της ευθείας AB είναι ανάλογες προς τις αποστάσεις των σημείων από την ουδέτερη γραμμή $O-O$ (σχ. 1.1δ). Επειδή όμως



Σχ. 1.1δ.

τάσης ανάλογη της αποστάσεως



Σχ. 1.1ε.

οι παραμορφώσεις (μετατοπίσεις), σύμφωνα με το νόμο του Hooke, είναι ανάλογες με τις τάσεις που τις προκαλούν, προκύπτει ότι και οι τάσεις θα είναι ανάλογες με τις αποστάσεις των σημείων από την ουδέτερη γραμμή (σχ. 1.1ε).

Στο σχήμα 1.1ε φαίνεται η κατανομή των ορθών τάσεων σε μία διατομή δοκού που κάμπτεται. Βλέπομε ότι οι ορθές τάσεις δεν κατανέμονται ομοιόμορφα στην επιφάνεια της διατομής, όπως συμβαίνει με τον εφελκυσμό και με τη θλίψη, αλλά μεταβάλλονται γραμμικά από το μηδέν (στη θέση της ουδέτερης γραμμής), έως μια μέγιστη θετική τιμή, στην ακραία ίνα, που εφελκύεται και μια ελάχιστη αρνητική τιμή, στην ακραία ίνα που θλίβεται.

δ) Ο τύπος της κάμψεως.

Για τις καταπονήσεις, που μελετήσαμε μέχρι τώρα, δηλαδή εφελκυσμό και θλίψη, ήταν αρκετό το εμβαδόν της διατομής της ράβδου, που δεχόταν την καταπόνηση.

Για να δούμε τι συμβαίνει με τις δοκούς που κάμπτονται παραθέτομε ένα απλό

παράδειγμα μιάς κοινής σανίδας (σχ. 1.1στ) που στηρίζεται στα δύο της άκρα. Παρατηρούμε ότι παρουσιάζει πολύ μικρή αντοχή στην κάμψη, όταν ο κορμός της είναι οριζόντιος [σχ. 1.1στ(α)] και πολύ μεγαλύτερη, όταν ο κορμός της είναι κατακόρυφος [σχ. 1.1στ(β)]. Βλέπομε ότι η ίδια διατομή της σανίδας $A = 20 \times 2 = 40 \text{ cm}^2$ συμπεριφέρεται σημαντικά διαφορετικά όταν:

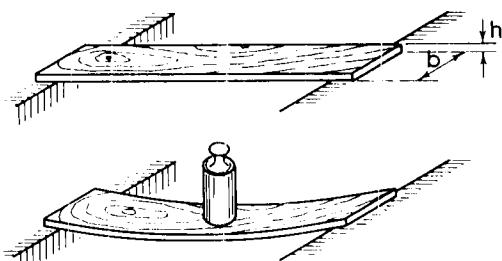
$$\frac{b}{h} = \frac{\text{πλάτος}}{\text{ύψος}} = \frac{20 \text{ cm}}{2 \text{ cm}}$$

και διαφορετικά όταν:

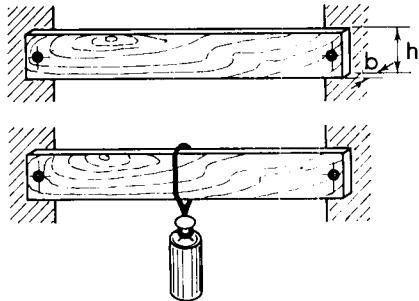
$$\frac{\text{πλάτος}}{\text{ύψος}} = \frac{2 \text{ cm}}{20 \text{ cm}}$$

Συνεπώς δεν επαρκεί μόνο το εμβαδόν A της διατομής για τη μελέτη της δοκού, που κάμπτεται.

Για να βρούμε το νόμο της διανομής των τάσεων σε μία διατομή, στην οποία επιβάλλεται η ροπή κάμψεως M , παίρνομε την απλή περίπτωση μιας αμφιέρειστης δοκού με ορθογωνική διατομή, που φορτίζεται με ένα τυχαίο φορτίο F το οποίο είναι κάθετο στον άξονα της δοκού και βρίσκεται μέσα στο επίπεδο συμμετρίας της διατομής.



(α)



(β)

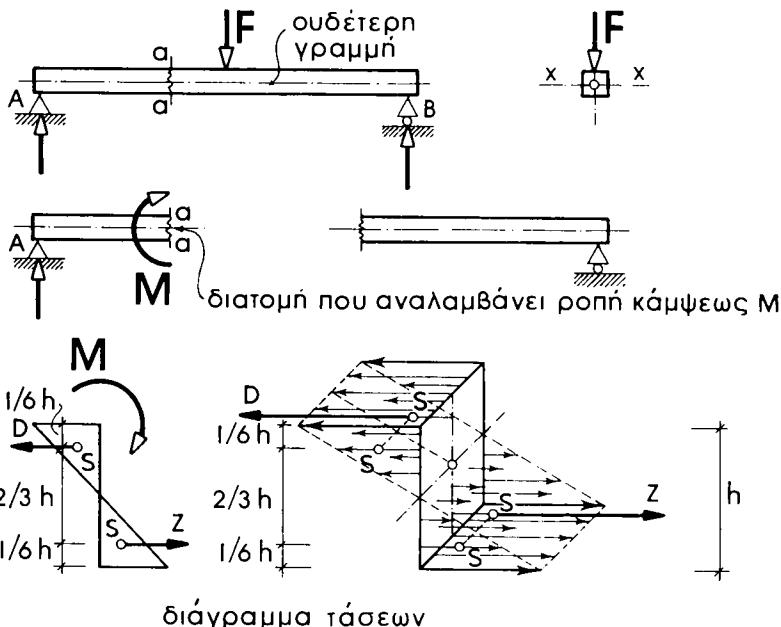
Σχ. 1.1στ.

Έχομε λοιπόν την περίπτωση της απλής κάμψεως. Είπαμε ότι κατά την αρχή του Bernoulli οι παραμορφώσεις των ινών — βραχύνσεις προς τα επάνω, επιμηκύνσεις προς τα κάτω — αυξάνουν, όσο μεγαλώνει η απόστασή τους από την ουδέτερη γραμμή, της οποίας δεν γνωρίζομε ακόμη τη θέση. Κατά το νόμο του Hooke οι τάσεις είναι ανάλογες με τις παραμορφώσεις, που σημαίνει ότι και οι τάσεις αυξάνονται όσο μεγαλώνει η απόσταση για από την ουδέτερη γραμμή· αυτό μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$\sigma = \lambda \cdot y \quad (1.1)$$

Για να μπορεί να καθοριστεί η τιμή της σ , πρέπει και αρκεί να βρεθεί το λ .

Αν κόψομε τη δοκό σε τυχαία θέση, στο σημείο της τομής ενεργεί η ροπή κάμψεως M (σχ. 1.1ζ).



Σχ. 1.1ζ.

Στη διατομή ενεργεί πάνω από την ουδέτερη γραμμή η συνισταμένη των θλιπτικών τάσεων D και κάτω η συνισταμένη των εφελκυστικών τάσεων Z . Για να ισορροπεί το αριστερό κομμάτι της δοκού που κόπηκε, πρέπει να ισχύουν οι τρεις συνθήκες ισορροπίας $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$ και $\Sigma M = 0$. $\Sigma x = 0$ σημαίνει $D = Z$. Για να συμβαίνει αυτό η ουδέτερη γραμμή πρέπει να είναι ο οριζόντιος άξονας της ορθογωνικής διατομής. Οι θλιπτικές και εφελκυστικές τάσεις, μορφώνουν από μια σφήνα με συνισταμένη το εμβαδόν της (σχ. 1.1η).

$$D = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} \lambda b h^2 = Z$$

Η συνισταμένη αυτή δρα στο κέντρο βάρους της σφήνας, που είναι στα $2/3$ του $h/2$ από την ουδέτερη γραμμή.

Επομένως η απόσταση μεταξύ D και Z είναι $2/3 h$.

Η εφαρμογή της συνθήκης ισορροπίας $\Sigma M = 0$ δίνει:

$$\Sigma M = 0 = M - D \cdot \frac{2}{3} h = M - \frac{1}{8} \lambda b h^2 \cdot \frac{2}{3} h = \lambda \frac{1}{12} b h^3$$

από την οποία

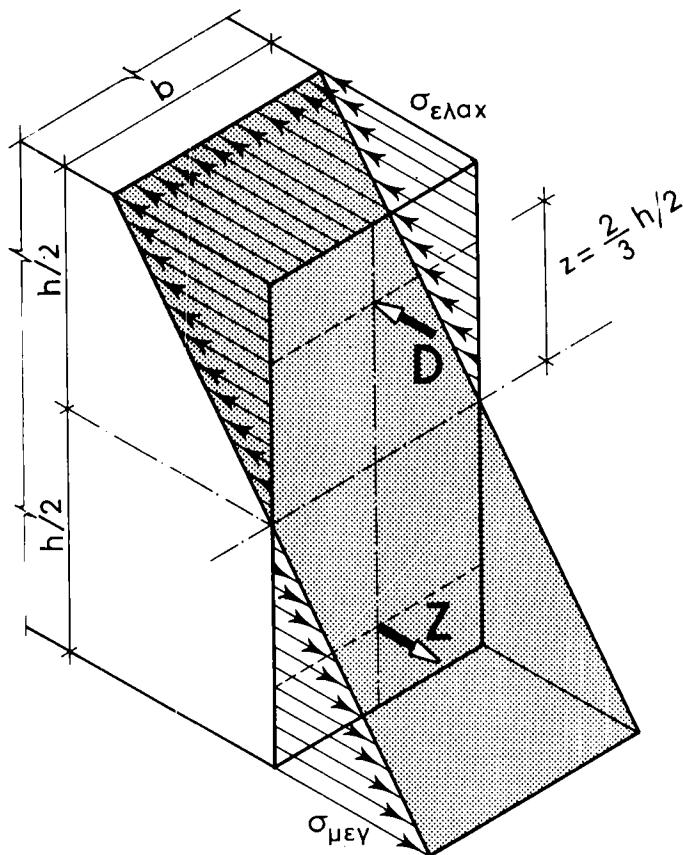
$$\lambda = \frac{M}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{M}{I_x} \quad (1.2)$$

Η έκφραση $1/12 bh^3 = I_x$ καλείται **ροπή αδρανείας**.

Το άγνωστο ως τώρα λ καθορίσθηκε, οπότε η εξίσωση (1.2) γίνεται:

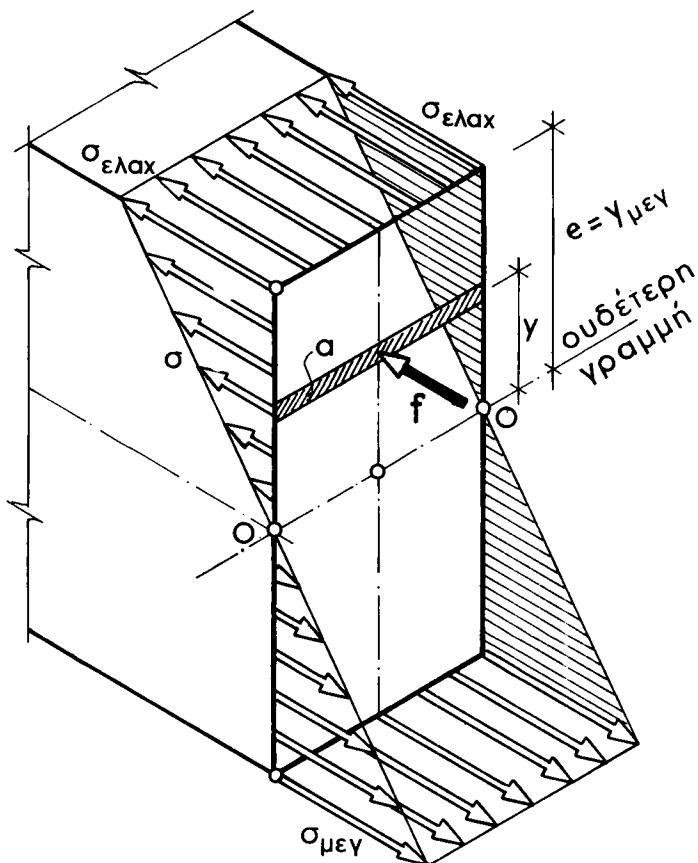
$$\sigma = \frac{M}{I_x} y \quad (1.3)$$

Γενικότερα για να βρούμε τις τάσεις στις διάφορες θέσεις τυχαίας διατομής, τη φανταζόμαστε να αποτελείται από πολλές λεπτές λωρίδες, παράλληλες με την ουδέτερη γραμμή.



Σχ. 1.1η.

Αν ονομάσουμε $\sigma_{μεγ}$ τη μέγιστη τάση, η οποία αναπτύσσεται στην ακραία ίνα, που απέχει απόσταση $y_{μεγ}$ από την ουδέτερη γραμμή, τότε στην απόσταση y από την ουδέτερη γραμμή αναπτύσσεται τάση σ , που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων (σχ. 1.1θ):



Σχ. 1.10.

$$\frac{\sigma_{\mu\gamma}}{\gamma_{\mu\gamma}} = \frac{\sigma}{\gamma}$$

$$\delta\text{ηλαδή} \quad \sigma = \sigma_{\mu\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{\mu\gamma}} \quad (1.4)$$

Στη θέση αυτή βρίσκεται μια λεπτή λωρίδα με εμβαδόν a , η οποία αναλαμβάνει δύναμη:

$$f = a \cdot \sigma = \sigma_{\mu\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{\mu\gamma}} \cdot a$$

Η ροπή της δυνάμεως f ως προς την ουδέτερη γραμμή είναι:

$$m = f \cdot y = \sigma_{\mu\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{\mu\gamma}} \cdot a \cdot y = \frac{\sigma_{\mu\gamma}}{\gamma_{\mu\gamma}} a y^2$$

Το άθροισμα των ροπών μ των δυνάμεων, οι οποίες αναλαμβάνονται απ' όλες τις λωρίδες που αποτελούν τη διατομή, θα πρέπει να ισορροπεί τη ροπή κάμψεως της διατομής. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \\ &= \frac{\sigma_{μεγ}}{γ_{μεγ}} \cdot (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + \dots) = \frac{\sigma_{μεγ}}{γ_{μεγ}} \cdot I \end{aligned}$$

Το μέσα στην παρένθεση άθροισμα των εμβαδών όλων των λεπτών λωρίδων επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από την ουδέτερη γραμμή, το οποίο παριστάνεται με J, λέγεται (αξονική) **ροπή αδρανείας της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή της** (ροπή επιφάνειας 2 βαθμού).

Έτσι προκύπτει ο θεμελιώδης τύπος της κάμψεως:

$$M = \frac{\sigma_{μεγ}}{γ_{μεγ}} \cdot I \quad \text{ή}$$

όπως συνηθέστερα γράφεται:

$$\sigma_{μεγ} = \frac{M}{I} \cdot γ_{μεγ} \quad (1.5)$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει τη μέγιστη τάση στην ακραία ίνα, που κυρίως μας ενδιαφέρει. Αν θέλομε να υπολογίσουμε την τάση, που αναπτύσσεται στην τυχαία απόσταση γ από την ουδέτερη γραμμή, χρησιμοποιούμε τον τύπο (1.1), ο οποίος μας δίνει:

$$\sigma = \frac{M}{Ix} \cdot y \quad (1.3)$$

Ο τύπος (1.3) είναι γενικός και μας δίνει τις ορθές τάσεις σ σε κάθε σημείο με απόσταση γ από την ουδέτερη γραμμή, όταν είναι γνωστή η ροπή αδρανείας I της διατομής, ως προς την ουδέτερη γραμμή και η ροπή κάμψεως M στη διατομή της δοκού που εξετάζομε.

Επειδή η Θετική φορά του άξονα των γ λαμβάνεται προς τα κάτω, θα έχομε από τον τύπο (1.3) για γ ομόσημο του M (π.χ. για ροπή κάμψεως Θετική και γ Θετικό, δηλαδή προς τα κάτω) ορθή τάση Θετική (εφελκυσμού). Αντίθετα για γ ετερόσημο του M (π.χ. M Θετικό και γ προς τα πάνω, είτε M αρνητικό και γ προς τα κάτω) θα προκύπτει ορθή τάση αρνητική (θλίψεως).

Αν στον τύπο (1.3) ορίσουμε την απόσταση γ_{μεγ} της ακραίας ίνας από την ουδέτερη γραμμή, θα έχομε, καθώς είπαμε ήδη, τη μέγιστη τάση σ_{μεγ} που εμφανίζεται στην υπ' όψη διατομής. Αν εξετάσουμε πολλές διατομές, η πιο δυσμενής θα είναι εκείνη, στην οποία αναπτύσσεται η μέγιστη ροπή κάμψεως, μια και στις ακραίες ίνες αυτής θα εμφανισθεί η μέγιστη τάση.

Η ροπή αδρανείας I ορίσθηκε ως άθροισμα εμβαδών πολλαπλασιασμένων επί τετράγωνα αποστάσεων και συνεπώς η μονάδα μετρήσεως της θα είναι:

$$(\text{εμβαδόν}) \times (\text{απόσταση})^2 = \text{cm}^2 \cdot \text{cm}^2 = \text{cm}^4$$

Γράφομε πάλι τον τύπο (1.3) με τις μονάδες μετρήσεως, που χρησιμοποιούμε συνήθως στην πράξη:

$$\sigma = (\text{kp/cm}^2) = \frac{\text{M (kp . cm)}}{\text{I (cm}^4)} \cdot y (\text{cm})$$

Βλέπομε ότι για να βρούμε την τάση σε kp/cm², πρέπει να εκφράσουμε τη ροπή κάμψεως σε kp . cm, τη ροπή αδρανείας σε cm⁴ και την απόσταση y σε cm.

Είδαμε ότι η μέγιστη τάση, που κυρίως ενδιαφέρει στην πράξη, εμφανίζεται στις ακραίες ίνες, όπου το y γίνεται μέγιστο.

Αν ορίσουμε I/y_{μεγ} = W, η εξίσωση (1.5) γράφεται:

$$\sigma_{\mu\text{εγ}} = \frac{\text{M}}{\text{W}} \quad (1.6)$$

Στην παραπάνω μορφή η εξίσωση (1.3) εμφανίζεται στις πρακτικές εφαρμογές.

Το πηλίκο:

$$\frac{\text{I}}{y_{\mu\text{εγ}}} = W \quad (1.7)$$

λέγεται **ροπή αντιστάσεως** της διατομής.

Από τον τύπο:

$$W = \frac{\text{I (cm}^4)}{y_{\mu\text{εγ}} (\text{cm})}$$

προκύπτει ότι η μονάδα μετρήσεως της ροπής αντιστάσεως είναι cm⁴/cm = cm³ χωρίς να έχει καμία σχέση με τη μονάδα όγκου.

Για μία ορθογωνική διατομή με πλάτος b και ύψος h δίνεται: I = bh³/12, οπότε:

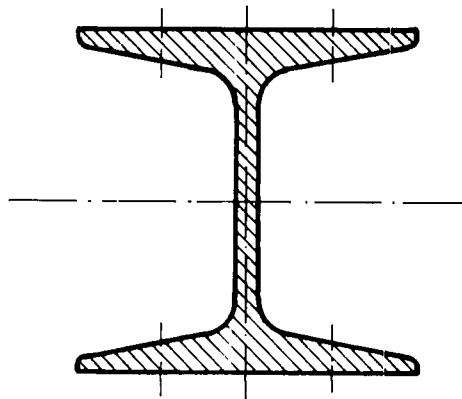
$$W = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \quad (1.7a)$$

Για τις συνηθισμένες μορφές διατομής δίνονται οι τύποι που παρέχουν τις ροπές αδρανείας και αντιστάσεως (βλέπε παράρτημα).

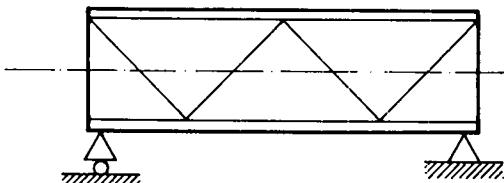
ε) Τρόπος εφαρμογής.

Στις δοκούς που κάμπτονται εξαντλείται η αντοχή των ακραίων μόνο ινών, ενώ η περιοχή της διατομής κοντά στην ουδέτερη γραμμή δεν αναλαμβάνει σημαντικές τάσεις. Για το λόγο αυτό επιδιώκουμε να συγκεντρώσουμε το υλικό μακριά από την ουδέτερη γραμμή σε δύο συμμετρικές ζώνες, τις οποίες ενώνομε με ένα λεπτό κορμό για να εξασφαλίσουμε τη συνεργασία τους. Έτσι προκύπτει οικονομία υλικού με τη χρησιμοποίηση των διατομών με μορφή διπλού ταυ (σχ. 1.1i).

Η ίδια επιδίωξη μας οδηγεί στη μόρφωση των δικτυωτών δοκών, στις οποίες τα



Σχ. 1.1ι.



Σχ. 1.1ια.

δύο πέλματα, πάνω και κάτω, συγκεντρώνουν τη μεγάλη μάζα, και συνδέονται με ελαφρές διαγώνιες ράβδους (σχ. 1.1ια).

Συνήθως στα προβλήματα της κάμψεως δίνεται η ροπή κάμψεως, που πρέπει να αναλάβει μία δοκός και ζητούνται οι διαστάσεις της δοκου. Τότε εφαρμόζομε τον τύπο (διαστασιολόγηση):

$$W_{\sigma\text{-ταιτ}} = \frac{M_{\mu\text{εγ}}}{\sigma_{\varepsilon\text{π}}} \quad (1.8)$$

και βρίσκομε την απαιτούμενη ροπή αντιστάσεως της δοκού. Στη συνέχεια εκλέγομε τέτοιες διαστάσεις δοκού, ώστε η ροπή αντιστάσεως που υπάρχει $W_{\text{υπ}}$ να είναι ίση η λίγο μεγαλύτερη από την απαιτούμενη. Πάντοτε όμως ελέγχομε το μέγεθος των τάσεων που αναπτύσσονται με τον τύπο (έλεγχος τάσεων):

$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{M_{\mu\text{εγ}}}{W_{\text{υπ}}} \leq \sigma_{\varepsilon\text{π}} \quad (1.9)$$

Ένα άλλο πρόβλημα είναι να ελέγξουμε τη ροπή κάμψεως που μπορεί να αναλάβει μια διατομή, που δίνεται με ροπή αντιστάσεως $W_{\text{υπ}}$. Τότε εφαρμόζομε τον τύπο (ικανότητα φορτίσεως):

$$M_{\mu\text{εγ}} = \sigma_{\varepsilon\text{π}} \cdot W_{\text{υπ}} \quad (1.10)$$

Με το σύμβολο $\sigma_{\varepsilon\text{π}}$ εννοούμε την επιτρεπόμενη τάση με την έννοια που την έχουμε ορίσει στο κεφάλαιο του εφελκυσμού-θλίψεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Παράδειγμα 1ο.

Αν θέλομε να συγκρίνουμε την αντοχή (ροπή αντιστάσεως) μιας δοκού, που

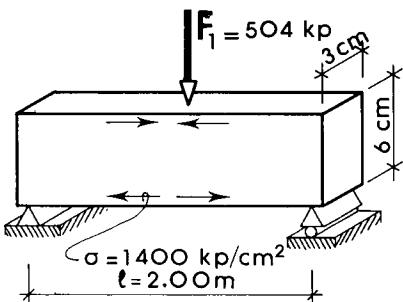
κάμπτεται, ορθογωνικής διατομής, πλάτους b και ύψους h , με την αντοχή δοκού πλάτους h και ύψους b , βρίσκομε:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{bh^2}{6} \\ W_2 &= \frac{hb^2}{6} \\ \frac{W_1}{W_2} &= \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{b} \end{aligned}$$

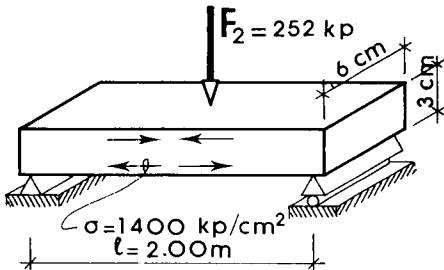
Παράδειγμα 2ο.

Αμφιέρειστη χαλύβδινη δοκός, με διατομή $3 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ και άνοιγμα $l = 2,00 \text{ m}$, πρόκειται να φορτωθεί στο μέσο της με φορτίο F . Αν η επιτρεπόμενη μέγιστη τάση του χάλυβα είναι $\sigma_{\text{επ}} = 1400 \text{ kp/cm}^2$, πόσο είναι το φορτίο που μπορεί να φέρει η δοκός;

- a) όταν το ύψος της είναι 6 cm και το πλάτος της 3 cm ;
- β) όταν το ύψος της είναι 3 cm και το πλάτος της 6 cm : (σχ. 1.1ιβ και 1.1ιγ).



Σχ. 1.1ιβ.



Σχ. 1.1ιγ.

Λύση.

a) Στην πρώτη περίπτωση:

$$W_1 = \frac{bh^2}{6} = \frac{3 \text{ cm} \cdot 6^2 \text{ cm}^2}{6} = 18 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{\text{επ}} = \frac{M_1}{W_1} \quad \text{άρα}$$

$$M_1 = \sigma_{\text{επ}} \cdot W_1 = 1400 \text{ kp/cm}^2 \cdot 18 \text{ cm}^3 = 25200 \text{ kp} \cdot \text{cm} = 252 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Δηλαδή η δοκός μπορεί να αναλάβει ροπή $M_1 = 252 \text{ kp} \cdot \text{m}$.

Γνωρίζομε από τη Στατική ότι η μέγιστη ροπή της αμφιέρειστης δοκού με ένα συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσο της είναι:

$$M_{\text{μεγ}} = \frac{F \cdot l}{4}$$

άρα:

$$F_1 = \frac{4M_1}{l} = \frac{4 \cdot 252 \text{ kp} \cdot \text{m}}{2 \text{ m}} = 504 \text{ kp}$$

Δηλαδή το φορτίο που ζητούμε και που προκαλεί μέγιστη ροπή,

$$M_1 = 252 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

και μέγιστη τάση $\sigma = \pm 1400 \text{ kp/cm}^2$ είναι $F_1 = 504 \text{ kp}$.

β) Στη δεύτερη περίπτωση:

$$W_2 = \frac{hb^2}{6} = \frac{6 \text{ cm} \cdot 3^2 \text{ cm}^2}{6} = 9 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{\text{επ}} = \frac{M_2}{W_1} \quad \text{άρα } M_2 = \sigma_{\text{επ}} \cdot W_2 = 1400 \text{ kp/cm}^2 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 12600 \text{ kp} \cdot \text{cm} = 126 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Σε αναλογία προς την πρώτη περίπτωση βρίσκομε:

$$F_2 = \frac{4M_2}{l} = \frac{4 \cdot 126 \text{ kp} \cdot \text{m}}{2 \text{ m}} = 252 \text{ kp}$$

Δηλαδή αν η δοκός στραφεί, μπορεί να φέρει μόνο το μισό του φορτίου F_1 . Αν υποθέσουμε ότι εφελκύομε την ίδια δοκό με δύναμη N ώσπου να ενταθεί με τάση εφελκυσμού $\sigma = 1400 \text{ kp/cm}^2$, η δύναμη που μπορεί να αναλάβει η δοκός είναι $N = \sigma \cdot A = 1400 \text{ kp/cm}^2 \cdot 18 \text{ cm}^2 = 25200 \text{ kp}$ δηλαδή πενήντα φορές μεγαλύτερη από το φορτίο F_1 και εκατό φορές μεγαλύτερη από το φορτίο F_2 .

Βλέπομε λοιπόν ότι η κάμψη είναι ένα είδος καταπονήσεως που επιτρέπει στο υλικό ανάληψη δυνάμεων πολύ μικρότερη από όση ο εφελκυσμός ή η θλίψη.

Παράδειγμα 3ο.

Από τον τύπο της ροπής αντιστάσεως:

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1) Αν έχομε μία δοκό με σταθερό ύψος h και διπλασιάσουμε ή τριπλασιάσουμε το πλάτος της b , η ροπή αντιστάσεως, δηλαδή η αντοχή της στην κάμψη, διπλασιάζεται ή τριπλασιάζεται αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$W_1 = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_2 = \frac{(2b) \cdot h^2}{6} = 2 W_1$$

$$W_3 = \frac{(3b) \cdot h^2}{6} = 3 W_1$$

2) Αν το πλάτος είναι σταθερό και το ύψος h διπλασιασθεί ή τριπλασιασθεί κλπ., η ροπή αντιστάσεως τετραπλασιάζεται, εννεαπλασιάζεται κλπ.

$$W_1 = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_2 = \frac{b(2h)^2}{6} = 4 \cdot \frac{bh^2}{6} = 4 W_1$$

$$W_3 = \frac{b(3h)^2}{6} = 9 \cdot \frac{bh^2}{6} = 9 W_1$$

Παράδειγμα 4ο.

Αμφιέρειστη δοκός με πλήρη ορθογωνική διατομή $b \cdot h$ [σχ. 1.1ιδ (α)] χωρίζεται με οριζόντια τομή σε δύο δοκούς με το μισό ύψος [σχ. 1.1ιδ (β)].

Ζητείται: α) πόσο μειώνεται η αντοχή, δηλαδή η ροπή αντιστάσεώς της και β) πόσο συνολικά ύψος h' πρέπει να έχουν δύο τέτοιες δοκοί, πλάτους b [σχ. 1.1ιδ (γ)], ώστε να προκύπτει ή ίδια ροπή αντιστάσεως, όπως στην πλήρη δοκό.

Λύση.

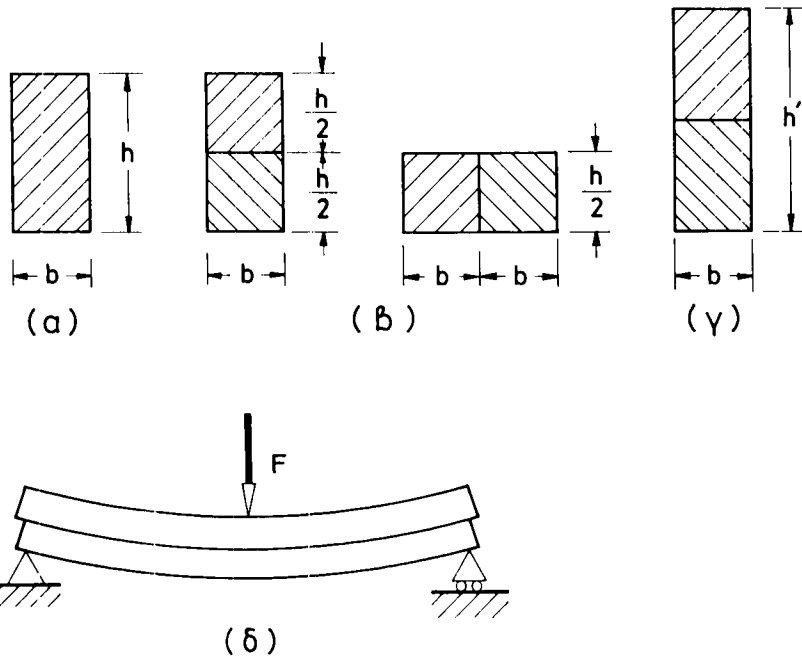
α) Η κάθε μια από τις δύο δοκούς κάμπτεται εντελώς ανεξάρτητα από την άλλη [σχ. 1.1ιδ (δ)], γιατί απλώς τοποθετείται η μία επάνω στην άλλη χωρίς να συνδέονται και έχουν την ίδια αντοχή σαν να τις τοποθετούσαμε τη μία δίπλα στην άλλη [σχ. 1.1ιδ (β)]. Επομένως προκύπτει:

$$W = 2 \frac{b \left(\frac{h}{2} \right)^2}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^2}{6}$$

Η ροπή αντιστάσεως των δύο δοκών είναι το μισό της πλήρους δοκού που σημαίνει ότι η αντοχή μειώνεται στο 50%.

β) Για να έχουν την ίδια ροπή αντιστάσεως πρέπει:

$$2 \frac{b \left(\frac{h'}{2} \right)^2}{6} = \frac{bh^2}{6}$$



Σχ. 1.1δ.

από την εξίσωση αυτή λαμβάνεται $h' = \sqrt{2}h = 1,41h$.

Από το παράδειγμα αυτό προκύπτουν δύο διαπιστώσεις για την αντοχή σε κάμψη.

- a) Το ύψος της δοκού παίζει πολύ πιο σημαντικό ρόλο από το πλάτος και
- β) η δοκός κατά την έννοια του ύψους της πρέπει να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 5ο.

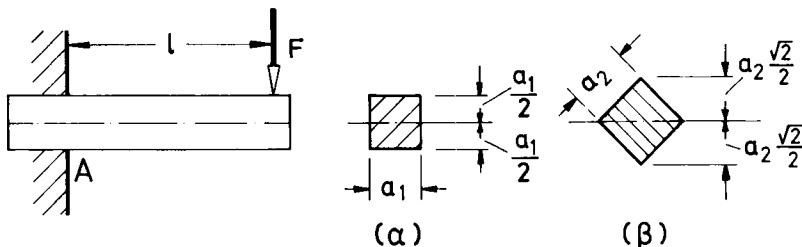
Πρόβολος μήκους $l = 600$ mm από χάλυβα St37 έχει τετραγωνική διατομή και αναλαμβάνει στο άκρο του συγκεντρωμένο φορτίο $F = 330$ kp (σχ. 1.1ιε). Η επιτρεπόμενη τάση κάμψεως είναι 1400 kp/cm².

Ζητούνται:

- α) Η μέγιστη ροπή κάμψεως.
- β) Η απαιτούμενη ροπή αντιστάσεως.
- γ) Η πλευρά α₁ του τετραγώνου, όταν τοποθετείται οριζόντια.
- δ) Η πλευρά α₂ όταν τοποθετείται κατακορυφήν.
- ε) Ποιά λύση είναι οικονομικότερη.

$$\text{α) } \max |M_A| = F \cdot l = 330 \text{ kp} \times 60 \text{ cm} = 19800 \text{ kpcm}$$

$$\text{β) απαιτ. } W = \frac{\max M_A}{\text{επιτρ.σ}} = \frac{19800 \text{ kpcm}}{1400 \text{ kp/cm}^2} = 14,4 \text{ cm}^3$$



Σχ. 1.1ιε.

$$\gamma) W_1 = \frac{a_1^3}{6} [(\text{σχ. } 1.1\text{ιε } (\alpha)], a_1^3 = 6W$$

$$a_1 = \sqrt[3]{6W} = \sqrt[3]{6} \times 14,14 \text{ cm}^3 = \sqrt[3]{84,84} \simeq 4,4 \text{ cm}$$

$$\delta) W_2 = \frac{I_2}{Y_{μεγ}}$$

Η ροπή αδρανείας του τετραγώνου είναι για κάθε άξονα που περνά από το κέντρο βάρους του η ίδια; δηλαδή:

$$I = \frac{a^4}{12} \quad \text{Το } Y_{μεγ.} = a_2 \frac{\sqrt{2}}{2} [\text{σχ. } 1.1\text{ιε } (\beta)]$$

$$\text{άρα} \quad W_2 = \frac{\frac{a_2^4}{12}}{a_2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a_2^3}{6\sqrt{2}}$$

$$a_2^3 = 6\sqrt{2} W_2, a_2 = \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{2} \cdot 14,14 \text{ cm}^3 = \sqrt{119,96} \simeq 5,0 \text{ cm}$$

ε) Η διάταξη γ είναι οικονομικότερη.

Εξήγηση.

Στην κατακορυφήν τοποθέτηση το ύψος γίνεται βέβαια μεγαλύτερο, αλλά το πλεονέκτημα αυτό αναιρείται από τον περιορισμό των ινών κοντά στη μέγιστη τάση, γιατί η ζώνη που καταπονείται δεν είναι πια ορθογωνική, αλλά τριγωνική.

Συμπέρασμα.

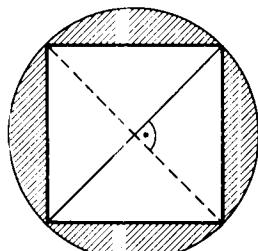
Το μεγαλύτερο τμήμα των θλιβομένων και εφελκυομένων ινών πρέπει να τοποθετείται στα άκρα της διατομής.

Παράδειγμα 6ο.

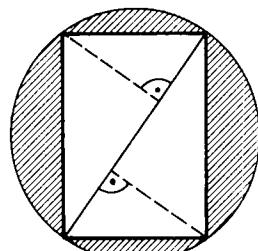
Το εμβαδόν μιας διατομής μετριέται σε **δύο** διαστάσεις, δηλαδή σε cm^2 . Η ροπή αντιστάσεως αντίθετα μετριέται σε τρεις διαστάσεις, δηλαδή σε cm^3 .

Η διαφορά αυτή μας επιτρέπει να θυμόμαστε τον ακόλουθο μνημονικό κανόνα:

Όταν από ένα κυκλικό κορμό θέλομε να κόψουμε μία ράβδο, η οποία θα υποστεί εφελκυσμό, η μεγαλύτερη ωφέλιμη διατομή είναι η τετραγωνική, που την πετυχαίνουμε αν διαιρέσουμε τη διάμετρο του κορμού σε δύο ίσα μέρη και φέρομε καθέτους στο σημείο διαιρέσεως (σχ. 1.1ιστ.).



Μέγιστη επιφάνεια



Μέγιστη ροπή αντιστάσεως

Σχ. 1.1ιστ.

Σχ. 1.1ιζ.

Όταν θέλομε να κόψουμε μία ράβδο, η οποία θα καμφθεί, η πιο ωφέλιμη διατομή είναι εκείνη που έχει τη μεγαλύτερη ροπή αντιστάσεως και βρίσκεται αν διαιρέσουμε τη διάμετρο σε τρία ίσα μέρη και φέρομε καθέτους στα σημεία διαιρέσεως (σχ. 1.1ιζ.).

ζ) Ροπές αδρανείας και αντιστάσεως.

Οι ροπές αδρανείας και αντιστάσεως είναι γεωμετρικά μεγέθη που έχουν σχέση μόνο με τις διαστάσεις και τη μορφή της διατομής. Για τις τυποποιημένες διατομές δοκών, από ένα ή χάλυβα, υπάρχουν πίνακες που δίνουν, εκτός από το εμβαδόν της διατομής, τη ροπή αδρανείας I και τη ροπή αντιστάσεως W (βλέπε παράρτημα).

1) Ορθογωνική διατομή.

Εξετάζοντας το σχήμα 1.1ιη βλέπομε ότι για την ορθογωνική διατομή έχουμε δύο ροπές αδρανείας:

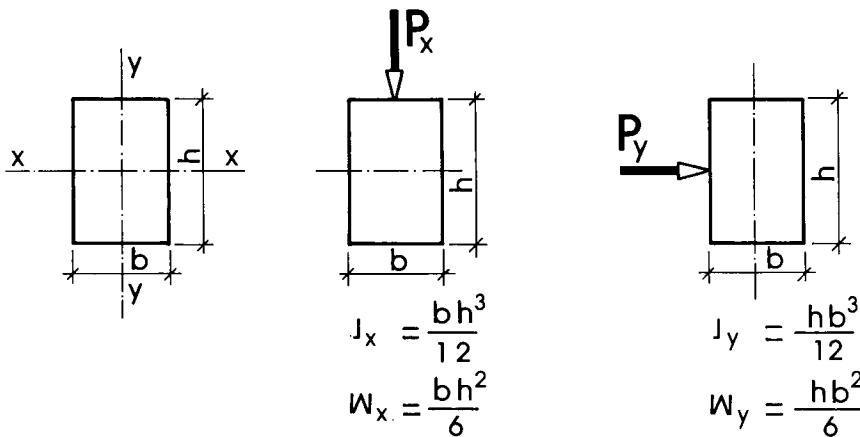
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad \text{καὶ} \quad I_y = \frac{b^3h}{12}$$

στις οποίες αντιστοιχούν οι ροπές αντιστάσεως:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad \text{καὶ} \quad W_y = \frac{b^2h}{6}$$

και τις οποίες χρησιμοποιούμε ανάλογα με τη διεύθυνση επιβολής των φορτίων.

Έτσι τα φορτία P_x , που είναι κάθετα στον άξονα συμμετρίας $x-x$, προκαλούν ροπές, που τις συμβολίζουμε M_x , και μέγιστη τάση:



Σχ. 1.1ιη.

$$\sigma_{μεγ} = \frac{M_x \cdot μεγ}{W_x}$$

Αντίστοιχα τα φορτία P_x , που είναι κάθετα στον άξονα συμμετρίας $y-y$, προκαλούν ροπές M_y και τάση:

$$\sigma_{μεγ} = \frac{M_y \cdot μεγ}{W_y}$$

2) Άλλες μορφές διατομών.

Ας υποθέσουμε ότι η διατομή έχει σχήμα απλού ταυ (σχ. 1.1ιζ). Η ουδέτερη γραμμή $x-x$, όπως είπαμε, είναι κεντροβαρικός άξονας κάθετος στον άξονα συμμετρίας, κατά τον οποίο δρουν τα φορτία, και ως προς αυτήν υπολογίζεται η ροπή αδρανείας I_x . Έχουμε δύο ακραίες αποστάσεις ινών από την ουδέτερη γραμμή. Η ακραία θλιβόμενη ίνα απέχει y_o , ενώ η ακραία εφελκυόμενη απέχει y_u . Επομένως έχουμε δύο ροπές αντιστάσεως ως προς τον άξονα x , τις:

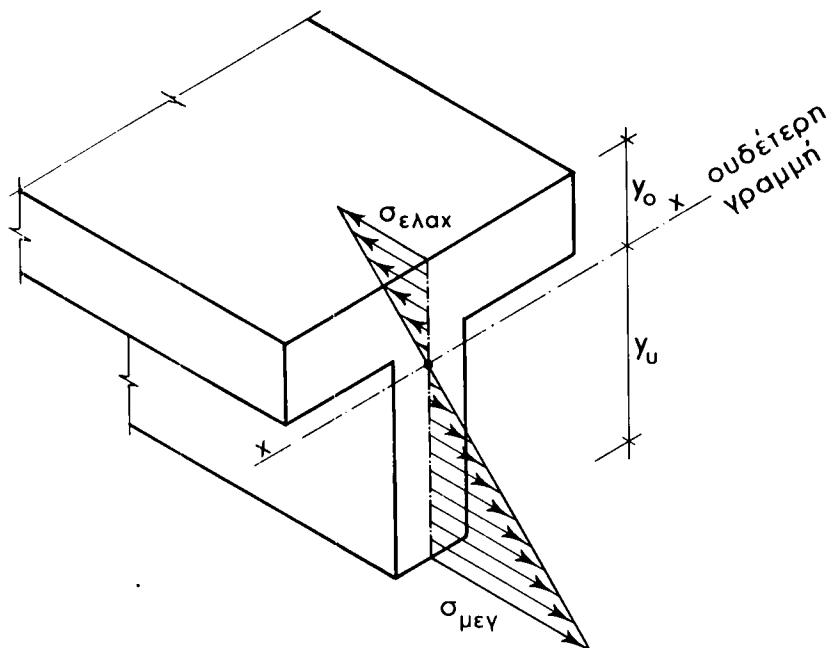
$$W_{xo} = \frac{I_x}{y_o} \quad \text{καὶ} \quad W_{xu} = \frac{I_x}{y_u}$$

Από αυτά προκύπτουν, για θετική ροπή κάμψεως M_x , δύο ακρότατες τιμές τάσεων, μία μέγιστη εφελκυστική,

$$\sigma_{μεγ} = \frac{M_x}{W_{xu}}$$

και μία ελάχιστη (δηλαδή κατ' απόλυτη τιμή μέγιστη αρνητική) θλιπτική:

$$\sigma_{ελαχ} = \frac{M_x}{W_{xo}}$$



Σχ. 1.1ιθ.

Παράδειγμα.

Η τριγωνική διατομή του σχήματος 1.1 κ. έχει διαστάσεις $b = 10 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$ και επιβαρύνεται με ροπή κάμψεως $M = + 600 \text{ kp. m}$. Να βρεθούν οι τάσεις σ_o και σ_u που αναπτύσσονται.

$$\text{Από τον τύπο } I = \frac{bh^3}{36} \quad \text{έχομε} \quad I = \frac{10 \times 12^3}{36} = 480 \text{ cm}^4$$

$$y_o = \frac{2y}{3} = 8 \text{ cm}$$

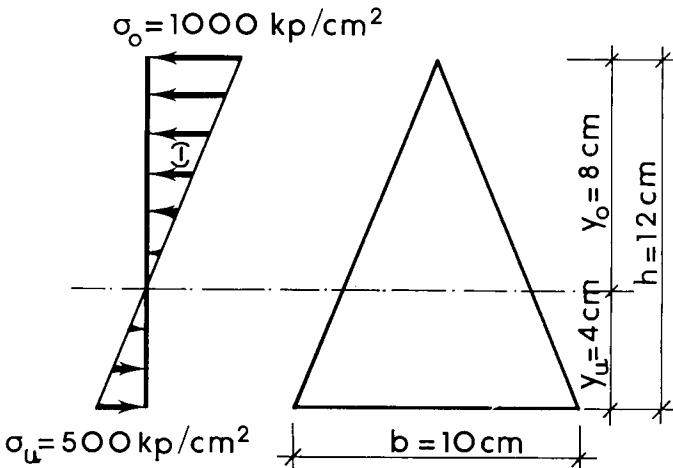
$$y_u = \frac{h}{3} = 4 \text{ cm}$$

$$W_o = \frac{I}{y_o} = \frac{480}{8} = 60 \text{ cm}^3$$

$$W_u = \frac{I}{y_u} = \frac{480}{4} = 120 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{W_o} = -\frac{60000 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{60 \text{ cm}^3} = -1000 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_u = \frac{M}{W_u} = \frac{60000 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{120 \text{ cm}^3} = 500 \text{ kp/cm}^2$$



Σχ. 1.1κ.

Πρέπει πάντοτε να δίνεται προσοχή στις μονάδες της ροπής κάμψεως π.χ. Mp . m ή kp . m και στη ροπή αντιστάσεως π.χ. m^3 ή cm^3 , γιατί θα έχουμε αντίστοιχα μονάδα τάσεως, π.χ. Mp/m^2 ή kp/cm^2 .

3) Εύρεση ροπής αδρανείας σύνθετης διατομής.

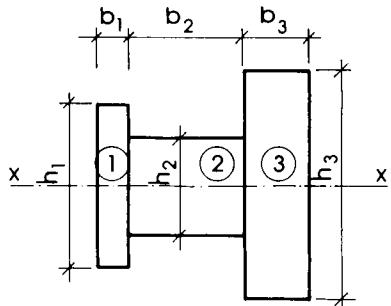
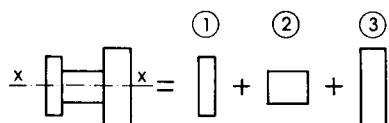
Όταν η διατομή δεν έχει απλό γεωμετρικό σχήμα, αλλά είναι σύνθετη από τμήματα διατομών, για τα οποία γνωρίζομε τις ροπές αδρανείας, μπορούμε να βρούμε τη ροπή αδρανείας της σύνθετης διατομής με τη βοήθεια δύο κανόνων.

— Η ροπή αδρανείας μιας διατομής, ως προς τον άξονα $x-x$, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών αδρανείας, ως προς τον ίδιο άξονα $x-x$, όλων των μερικών τμημάτων που αποτελούν τη διατομή.

Παράδειγμα 10.

Η ροπή αδρανείας της διατομής του σχήματος 1.1 κα ως προς τον άξονα $x-x$, είναι

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{b_2 h_2^3}{12} + \frac{b_3 h_3^3}{12}$$



Σχ. 1.1κα.

Παράδειγμα 2ο.

Α) Η ροπή αδρανείας της διατομής του σχήματος 1.1κβ ως προς τον άξονα x-x είναι:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12}$$

Στο πρόβλημα της κάμψεως μας ενδιαφέρει η ροπή αδρανείας της διατομής ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα. Ο πρώτος κανόνας μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν τα μερικά τμήματα, που αποτελούν τη διατομή, έχουν τον ίδιο κεντροβαρικό άξονα με τη σύνθετη διατομή.

Αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε. Στο σχήμα 3.2κα π.χ. για να εφαρμοσθεί ο πρώτος κανόνας πρέπει να γνωρίζομε τη ροπή αδρανείας των ορθογωνίων 1 και 2 ως προς

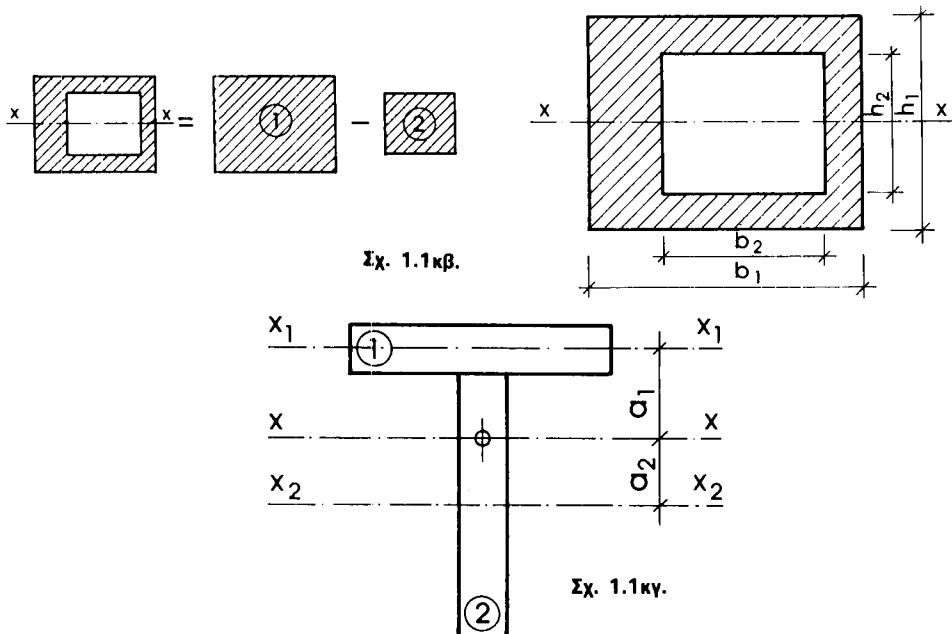
Αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε. Στο σχήμα 1.1κγ π.χ. για να εφαρμοσθεί ο πρώτος κανόνας πρέπει να γνωρίζομε τη ροπή αδρανείας των ορθογωνίων 1 και 2 ως προς τον κεντροβαρικό άξονα x-x της σύνθετης διατομής. Τότε εφαρμόζομε τον δεύτερο κανόνα.

— Αν η σύνθετη διατομή αποτελείται από τις μερικές διατομές 1,2,3..., που οι άξονες τους $x_1, x_2, x_3...$ απέχουν από τον παράλληλο προς αυτούς κεντροβαρικό άξονα της σύνθετης διατομής αποστάσεις $a_1, a_2, a_3...,$, τότε η ροπή αδρανείας της σύνθετης διατομής είναι (ση με:

$$I = (I_1 + A_1 \cdot a_1^2) + (I_2 + A_2 \cdot a_2^2) + (I_3 + A_3 \cdot a_3^2) + \dots$$

όπου A_1, A_2, A_3 τα εμβαδά των μερικών διατομών 1,2,3... και I_1, I_2, I_3 οι ροπές αδρανείας των διατομών 1,2,3... ως προς τους κεντροβαρικούς τους άξονες $x_1, x_2, x_3...$

Ο δεύτερος κανόνας (πρόταση Steiner, Στάινερ) είναι γενικός και περιλαμβάνει τον πρώτο κανόνα, αν ορίσουμε $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$.



Πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι οι παραπάνω κανόνες ισχύουν μόνο για τη ροπή αδρανείας. Για να βρούμε τις ροπές αντιστάσεως W_o και W_u μιας διατομής, θα βρούμε πρώτα τη ροπή αδρανείας και από αυτή τις:

$$W_o = \frac{I}{y_o} \quad \text{και} \quad W_u = \frac{I}{y_u}$$

Παράδειγμα 1o.

Δίνεται η διατομή σχήματος διπλού ταυ του σχήματος 1.1κδ. Να βρεθεί η ροπή αδρανείας της.

Λύση.

Εφαρμόζομε τον τύπο:

$$I_x = (I_1 + A_1 \cdot a_1^2) + (I_2 + A_2 \cdot a_2^2) + (I_3 + A_3 \cdot a_3^2)$$

$$I_1 = \frac{20 \times 6^3}{12} = 360 \text{ cm}^4$$

$$A_1 \cdot a_1^2 = (6 \times 20) \times 12^2 = 17280 \text{ cm}^4$$

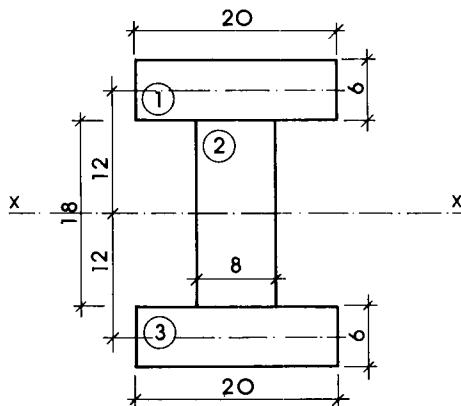
$$I_2 = \frac{8 \times 18^3}{12} = 3888 \text{ cm}^4$$

$$A_2 \cdot a_2^2 = (8 \times 18) \times 0^2 = 0$$

$$I_3 = \frac{20 \times 6^3}{12} = 360 \text{ cm}^4$$

$$A_3 \cdot a_3^2 = (6 \times 20) \times 12^2 = 17280 \text{ cm}^4$$

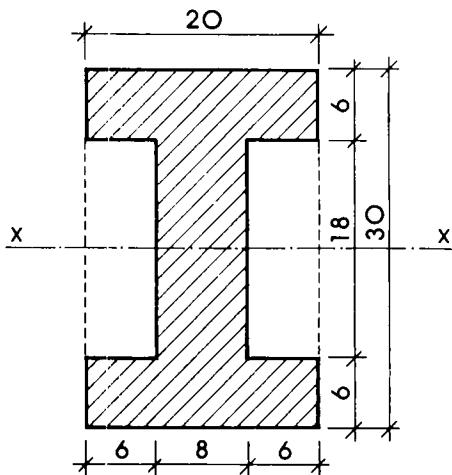
$$\text{Συνολικό } I = 39168 \text{ cm}^4$$



Σχ. 1.1κδ.

Παράδειγμα 2ο.

Τη ροπή αδρανείας της ίδιας διατομής του σχήματος 1.1κδ θα μπορούσαμε να βρούμε αφαιρώντας από τη ροπή αδρανείας ενός ορθογωνίου διαστάσεων $b_1 = 20 \text{ cm}$, $h_1 = 30 \text{ cm}$, τις ροπές αδρανείας δύο ορθογωνίων διαστάσεων $b_2 = 6 \text{ cm}$, $h_2 = 18 \text{ cm}$ το καθένα (σχ. 1.1κε).



Σχ. 1.1κε.

Λύση.

$$I_{\text{ολ}} = I_{20 \times 30} - 2I_{6 \times 18}$$

$$I_{20 \times 30} = \frac{20 \times 30^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

$$I_{6 \times 18} = \frac{6 \times 18^3}{12} = 2916 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{ολ}} = 45000 - 2 \times 2916 = 39168 \text{ cm}^4$$

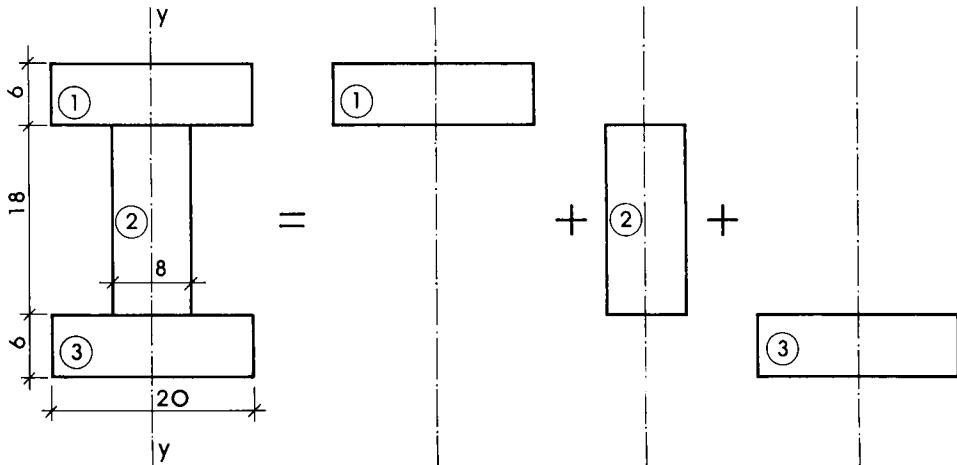
Εφαρμόσαμε τον τύπο $I = bh^3/12$ χωρίς το συμπληρωματικό όρο Aa^2 γιατί ο άξονας $x-x$ περνά από τα κέντρα βάρους και του μεγάλου ορθογωνίου, και των δύο μικρών (Κανόνας πρωτος).

Παράδειγμα 3ο.

Να βρεθεί η ροπή αδρανείας της ίδιας διατομής του προηγούμενου παραδείγματος ως προς τον άξονα $y-y$ (σχ. 1.1κστ).

Λύση.

Εφαρμόζοντας τον πρώτο Κανόνα:



Σχ. 1.1κστ.

$$I_y = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{6 \times 20^3}{12} = 4000 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{18 \times 8^3}{12} = 786 \text{ cm}^4$$

$$I_3 = \frac{6 \times 20^3}{12} = 4000 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 8768 \text{ cm}^4$$

Παράδειγμα 4ο.

Δίνεται η σύνθετη διατομή του σχήματος 1.1κζ, που κάμπτεται με ροπή $M = 800$ kp.m. Να βρεθούν οι μέγιστες τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως. Η εργασία ακολουθεί την παρακάτω πορεία:

α) Βρίσκομε το κέντρο βάρους της σύνθετης διατομής.

Χωρίζομε τη διατομή σε ένα τρίγωνο και ένα ορθογώνιο και βρίσκομε τα αντίστοιχα εμβαδά.

$$A_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60 \text{ cm}^2$$

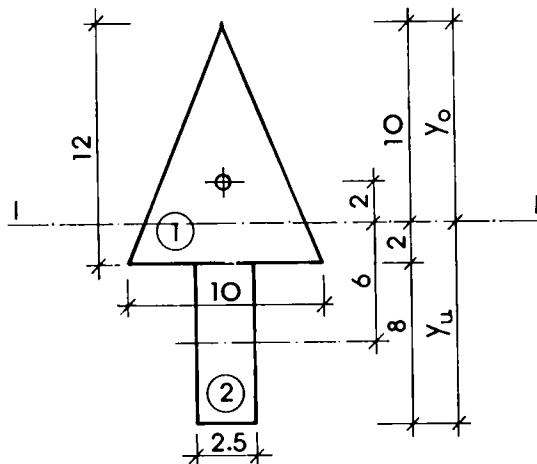
$$A_2 = 2,5 \times 8 = 20 \text{ cm}^2$$

Αν πάρουμε στατικές ροπές ως προς τη βάση του ορθογώνιου:

$$60 \times \left(8 + \frac{12}{3} \right) + 20 \times \frac{8}{2} = (60 + 20) \cdot y_u$$

$$720 + 80 = 80 \cdot y_u \quad y_u = \frac{800}{80} = 10 \text{ cm}$$

οπότε και $y_o = 20 - 10 = 10 \text{ cm}$.



Σχ. 1.1κζ.

Σκόπιμα έχουν επιλεγεί οι διαστάσεις της διατομής τέτοιες, ώστε να προκύπτει $y_o = y_u$. Γενικά δεν ισχύει αυτό.

β) Βρίσκομε τη ροπή αδρανείας σύνθετης διατομής ως προς τον κεντροβαρικό άξονα 1-1.

Ροπή αδρανείας τριγώνου ως προς τον άξονα του κέντρου βάρους του και παράλληλο προς τη βάση του.

$$I_o = \frac{bh^3}{36} = \frac{10 \times 12^3}{36} = 480 \text{ cm}^4$$

Ροπή αδρανείας τριγώνου ως προς τον άξονα 1-1.

$$I_1 = I + A \cdot a^2 = 480 + 60 \times 2^2 = 480 + 240 = 720 \text{ cm}^4$$

Ροπή αδρανείας ορθογωνίου ως προς τον άξονα του κέντρου βάρους του.

$$I_o = \frac{2,5 \times 8^3}{12} = 107 \text{ cm}^4$$

Ροπή αδρανείας ορθογωνίου ως προς τον άξονα 1-1.

$$I_2 = I_o + A \cdot a^2 = 107 + 20 \times 6^2 = 107 + 720 = 827 \text{ cm}^4$$

Ολική ροπή αδρανείας της διατομής.

$$I_{\text{ολ}} = I_1 + I_2 = 720 + 827 = 1547 \text{ cm}^4$$

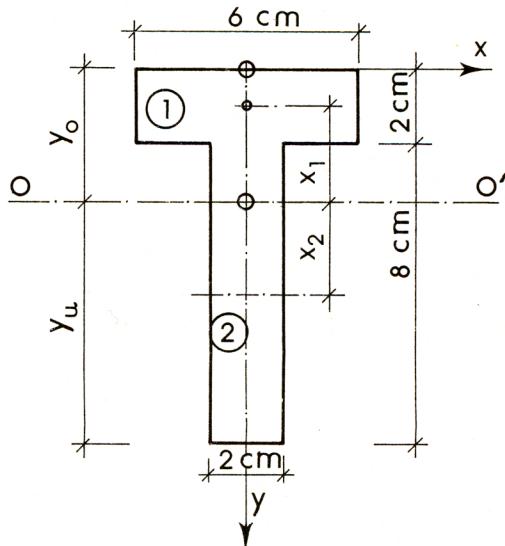
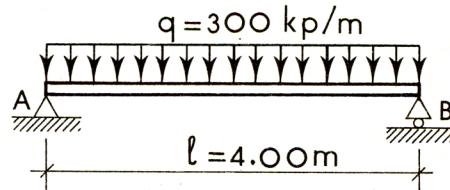
γ) Βρίσκομε τις ροπές αντιστάσεως και τις τάσεις.

$$W_o = W_u = \frac{I}{y} = \frac{1547}{10} = 154,7 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{M}{W} = \frac{800 \text{ kp.m}}{154,7 \text{ cm}^3} = \frac{80000 \text{ kp.cm}}{154,7 \text{ cm}^3} = 517 \text{ kp/cm}^2$$

Παράδειγμα 50.

Μία αμφιέρειστη δοκός, με άνοιγμα $l = 4,00 \text{ m}$, αποτελείται από χαλύβδινο έλασμα με διατομή σε σχήμα απλό ταυ (σχ. 1.1κη) και φέρει ομοιόμορφο φορτίο $q = 300 \text{ kp/m}$.



Σχ. 1.1κη.

Να βρεθούν οι τάσεις της πάνω και κάτω ίνας.

- α) Στη δυσμενέστερη θέση.
- β) Στην απόσταση $1,50 \text{ m}$ από το στήριγμα A.

Λύση.

a) Βρίσκομε το κέντρο βάρους της διατομής.

Τμήμα	x_i	y_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	0	1,0	12,0	0	12,0
2	0	6,0	16,0	0	96,0
Σύνολο			28	0	108

Συντεταγμένες Κ.Β.

$$x_K = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A} = \frac{0}{28} = 0$$

$$y_K = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A} = \frac{108}{28} = 3,86 \text{ cm}$$

$$y_o = 3,86 \text{ cm} \quad y_u = 10,00 - 3,86 = 6,14 \text{ cm.}$$

β) Βρίσκομε τη ροπή αδρανείας της διατομής ως προς τον άξονα 0-0'.

$$I = I_1 + I_2$$

Βοηθητικές αποστάσεις κέντρων βάρους των τμημάτων 1,2 από τον άξονα 0-0':

$$x_1 = 3,86 - 1,00 = 2,86 \text{ cm}$$

$$x_2 = 6,14 - 4,00 = 2,14 \text{ cm}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + A_1 \cdot x_1^2 = \frac{6 \times 2^3}{12} + (6 \times 2) \times 2,86^2 = 4 + 98,16 = 102,16 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{bh^3}{12} + A_2 \cdot x_2^2 = \frac{2 \times 8^3}{12} + (2 \times 8) \times 2,14^2 = 85,33 + 73,28 = 158,61 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{ολ}} = I_1 + I_2 = 102,16 + 158,61 = 260,77 \text{ cm}^4$$

γ) Βρίσκομε τις ροπές αντιστάσεως.

$$W_o = \frac{I}{y_o} = \frac{260,77 \text{ cm}^4}{3,86 \text{ cm}} = 67,56 \text{ cm}^3$$

$$W_u = \frac{I}{y_u} = \frac{260,77 \text{ cm}^4}{6,14 \text{ cm}} = 42,47 \text{ cm}^3$$

δ) Βρίσκομε τις ροπές κάμψεως στις διατομές 1 (δυσμενέστερη) και 2 (σε απόσταση 1,5 m από το στήριγμα).

$$M_1 = \frac{q l^2}{8} = \frac{300 \text{ kp/m} \cdot 4^2 \text{ m}^2}{8} = 600 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 600 \text{ kp} \cdot 1,50 \text{ m} - 1,50 \cdot 300 \cdot \frac{1,50}{2} = 561 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

ε) Βρίσκομε τις τάσεις, που ζητούνται:

Στη θέση 1.

$$\sigma_o = -\frac{M_1}{W_o} = -\frac{600 \text{ kp} \cdot \text{m}}{67,56 \text{ cm}^3} = -\frac{60000 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{67,56 \text{ cm}^3} = -888 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_u = \frac{M_1}{W_u} = \frac{600 \text{ kp} \cdot \text{m}}{42,47 \text{ cm}^3} = \frac{60000 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{42,47 \text{ cm}^3} = 1413 \text{ kp/cm}^2$$

Στη θέση 2.

$$\sigma_o = -\frac{M_2}{W_o} = -\frac{561 \text{ kp} \cdot \text{m}}{67,56 \text{ cm}^3} = -\frac{56100 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{67,56 \text{ cm}^3} = -830 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_u = \frac{M_2}{W_u} = \frac{561 \text{ kp} \cdot \text{m}}{42,47 \text{ cm}^3} = \frac{56100 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{42,47 \text{ cm}^3} = 1321 \text{ kp/cm}^2$$

Για τις τυποποιημένες διατομές χαλυβδίνων ελασμάτων του εμπορίου με σχήμα I, L, L, υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν απ' ευθείας τις τιμές y_o , y_u , W_o , W_u , I και έτσι δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε όλη την εργασία του προηγούμενου παραδείγματος (βλέπε «7. Διατομές χαλυβδίνων ελασμάτων» στο Παράρτημα).

1.2 Παραμορφώσεις λόγω κάμψεως. Ελαστική γραμμή.

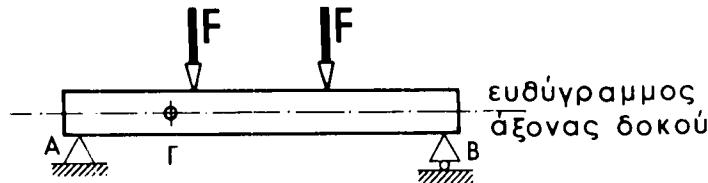
Για να κατασκευάσουμε μία δοκό, δεν είναι πάντοτε αρκετό να ελέγχουμε τις τάσεις και να τις περιορίζουμε στα επιτρεπόμενα όρια. Σε πολλές περιπτώσεις, είναι ανάγκη να γνωρίζουμε τις παραμορφώσεις που γίνονται στη δοκό από την κάμψη και να ελέγχουμε μήπως είναι υπερβολικά μεγάλες, οπότε είναι ενοχλητικές και μπορούν να προκαλέσουν ζημιές στις κατασκευές, που στηρίζονται πάνω στη δοκό.

Είναι επομένως απαραίτητο να γνωρίζουμε τους νόμους παραμορφώσεως των δοκών και συγκεκριμένα να μπορούμε να βρούμε για κάθε δοκό που κάμπτεται την **ελαστική γραμμή**, δηλαδή την καμπύλη γραμμή στην οποία παραμορφώνεται ο αρχικά ευθύγραμμος δέξοντας της δοκού, μετά την κάμψη (σχ. 1.2a).

Την μετατόπιση $f = \Gamma'$ ενός τυχαίου σημείου Γ του άξονα, λόγω της κάμψεως, ονομάζομε **βέλος κάμψεως** της δοκού στη θέση Γ . Για τις αμφιέρειστες δοκούς, εφ' όσον έχουν σταθερή ροπή αδρανείας σε όλο το μήκος τους, ισχύει η πρόταση Mohr (Mohr).

Για την εφαρμογή της ακολουθούμε την παρακάτω μέθοδο:

- α) Βρίσκομε το διάγραμμα των ροπών κάμψεως της δοκού για τη φόρτισή της.
- β) Θεωρούμε τώρα ότι η δοκός φορτίζεται με το παραπάνω διάγραμμα ροπών κάμψεως σάν να ήταν νέα φόρτισή της.
- γ) Βρίσκομε για τη νέα αυτή φόρτιση το ιδεατό διάγραμμα ροπών κάμψεως της δοκού.

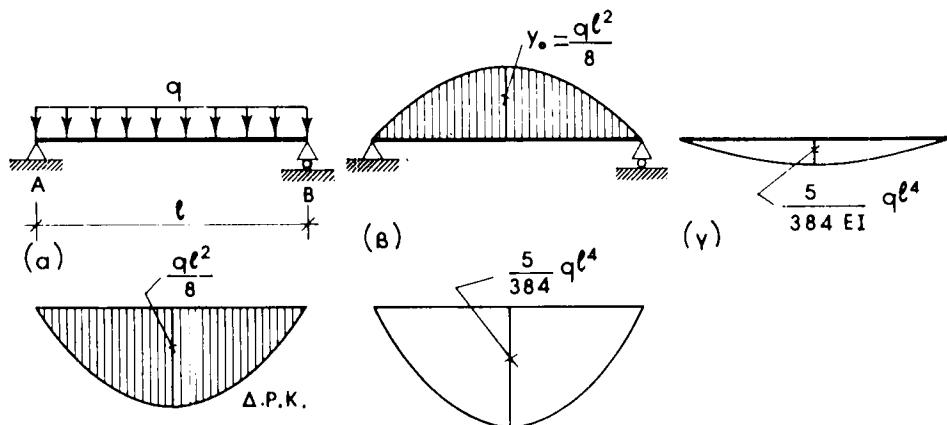


Σχ. 1.2α.

- δ) Διαιρούμε τις τιμές του διαγράμματος αυτού δια του μέτρου δυσκαρψίας EI και έχομε την ελαστική γραμμή της δοκού.

Παράδειγμα 1ο.

Έστω ότι ζητάμε την ελαστική γραμμή της αμφιέρειστης δοκού του σχήματος 1.2β (a), που φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο q.



Σχ. 1.2β.

Λύση.

Σχεδιάζομε το διάγραμμα ροπών κάμψεως της δοκού [σχ. 1.2β (a)]. Στη συνέχεια το αναστρέφομε και το θεωρούμε ως ιδεατή φόρτιση πάνω στην (διά τη δοκό). Της δοκού αυτής με την ιδεατή φόρτιση, βρίσκομε το ιδεατό διάγραμμα ροπών κάμψεως. Τις τεταγμένες του ιδεατού αυτού διαγράμματος διαιρούμε διά EI και έχομε την ελαστική γραμμή.

Για να βρούμε το βέλος κάμψεως στο μέσο του ανοίγματος, ανατρέχομε στη

Στατική και βρίσκομε τη μέγιστη ροπή κάμψεως δοκού με φόρτιση παραβολική και μέγιστη τεταγμένη παραβολής q_0 :

$$M_{\text{μεγ}} = \frac{5}{48} \cdot q_0 \cdot l^2$$

δηλαδή η ιδεατή ροπή στο μέσο της δοκού AB είναι:

$$M_{l\text{μεγ}} = \frac{5}{48} \cdot \left(\frac{q/l^2}{8} \right) \cdot l^2 = \frac{5}{384} \cdot q \cdot l^4$$

και το βέλος στο μέσο του ανοίγματος:

$$f_{\text{μεγ}} = \frac{M_{l\text{μεγ}}}{EI} = \frac{5 \cdot q l^4}{384 EI}$$

Παράδειγμα 2ο.

Αμφιέρειστη δοκός, με διατομή προφίλ Ι PE 180 από χάλυβα St 37 και άνοιγμα $l = 6,00$ m, φέρει στο μέσο της φορτίο $P = 1200$ kp.

Να ελεγχθούν οι τάσεις και να βρεθεί το βέλος κάμψεως στο μέσο του ανοίγματος, όταν παραλειφθεί η επιρροή που έχει το δικό της βάρος.

Δίνεται: $I_x = 1320 \text{ cm}^4$ $E = 2,10 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ $\sigma_{\text{επ}} = 1400 \text{ kp/cm}^2$
 $W_x = 146 \text{ cm}^3$ (βλέπε 7.3 Παραρτήματος).

Λύση.

α) Στην αρχή βρίσκομε τη μέγιστη ροπή κάμψεως.

$$M_{\text{μεγ}} = \frac{P l}{4} = 1800 \text{ kp.m} \quad \text{και ελέγχομε τις τάσεις}$$

$$\sigma_{\text{μεγ}} = \frac{M}{W} = \frac{1800 \text{ kp.m}}{146 \text{ cm}^3} = \frac{180\,000 \text{ kp.cm}}{146 \text{ cm}^3} = 1233 \text{ kp/cm}^2 < 1400 \text{ kp/cm}^2$$

β) Σχεδιάζομε το διάγραμμα ροπών κάμψεως της δοκού [σχ. 1.2γ(α)].

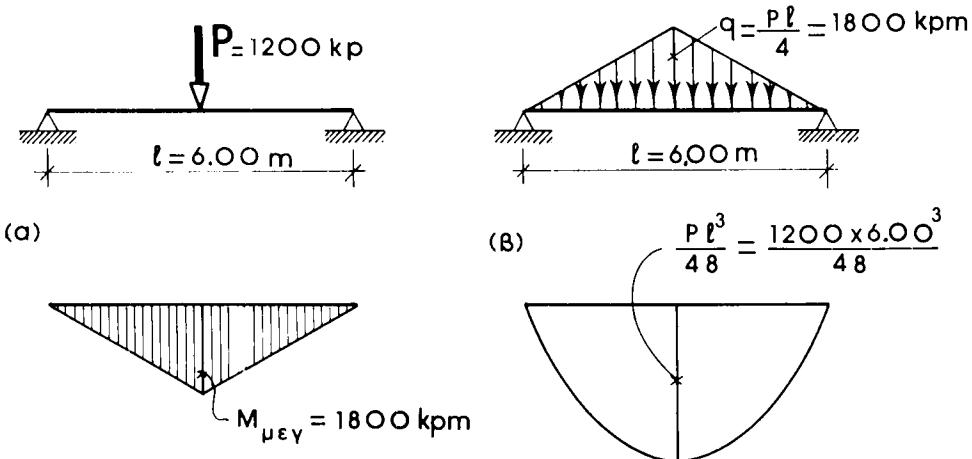
γ) Σχεδιάζομε την (ίδια δοκό και τη φορτίζομε με το ανεστραμμένο τριγωνικό διάγραμμα ροπών κάμψεως.

δ) Βρίσκομε το νεο διάγραμμα ροπών κάμψεως [σχ. 1.2γ(β)], το οποίο αποτελεί την ελαστική γραμμή της δοκού με κλίμακα $E \cdot I = 2\,100\,000 \times 1320 = 2\,772\,000\,000 \text{ kp.cm}^2 = 277\,200 \text{ kp.m}^2$.

Από τη Στατική γνωρίζομε τη μέγιστη ροπή αμφιέρειστης δοκού με τριγωνικό φορτίο

$$M_l = \frac{q l^2}{12} = \frac{P l^3}{48} = \frac{1200 \times 600^3}{48} = 5400 \text{ kp.m}^3$$

Το μέγιστο βέλος θα είναι στο μέσο του ανοίγματος:



Σχ. 1.2γ.

$$f_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{P l^3}{48 EI} = \frac{5400 \text{ kp.m}^3}{277200 \text{ kp.m}^2} = \frac{5,4}{277,2} = 0,024 \text{ m} = 2,4 \text{ cm}$$

Για τις δοκούς σε πρόβολο, εφ' όσον έχουν σταθερή ροπή αδρανείας J , αποδεικνύεται ότι:

Το βέλος κάμψεως στο ελεύθερο άκρο A μιας δοκού σε πρόβολο είναι ίσο με τη ροπή του διαγράμματος των κάμψεως της δοκού, ως προς το ελεύθερο άκρο του προβόλου, διαιρημένη δια του μέτρου δυσκαμψίας EI (σχ. 1.2β).

Παράδειγμα 3ο.

Πρόβολος με μήκος 1,30 m από τυποποιημένη διατομή IPE 180 St 37 φέρει στο άκρο του φορτίο $P = 1500 \text{ kp}$ (σχ. 1.2δ).

Να ελεγχθούν οι τάσεις και να βρεθεί το βέλος κάμψεως στο ελεύθερο άκρο του προβόλου. Το βάρος της ίδιας της δοκού δεν λαμβάνεται υπ' όψη. Δίνεται $\sigma_{\text{επ}} = 1400 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

Βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της προτάσεως είναι να ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή οι τάσεις να μην υπερβαίνουν τα ανεκτά όρια.

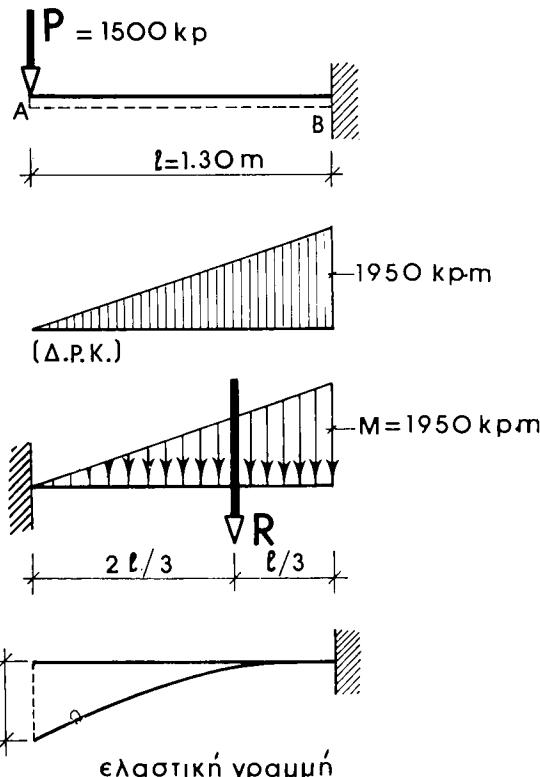
$$M_{\mu\epsilon\gamma} = P \cdot l = 1500 \text{ kp} \cdot 1,30 \text{ m} = 1950 \text{ kp.m}$$

Από τους πίνακες βρίσκομε για τη διατομή I PE 180

$$W_x = 146 \text{ cm}^3 \quad I_x = 1320 \text{ cm}^4$$

Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται, είναι

$$\sigma_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{M}{W} = \frac{1950 \text{ kp.m}}{146 \text{ cm}^3} = \frac{195000 \text{ kp.cm}}{146 \text{ cm}^3} = 1336 \text{ kp/cm}^2 < 1400 \text{ kp/cm}^2$$



Σχ. 1.2δ.

Για να βρούμε το βέλος κάμψεως θεωρούμε το διάγραμμα ροπών κάμψεως ως ιδεατή φόρτιση και βρίσκουμε τη ροπή της φορτίσεως αυτής ως προς το ελεύθερο άκρο A.

Η ιδεατή συνισταμένη της νέας αυτής φορτίσεως εφαρμόζεται σε απόσταση $2/3 l$ από το ελεύθερο άκρο A του προβόλου και το μέτρο της είναι

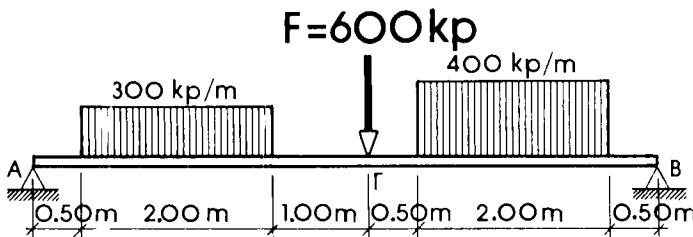
$$R = \frac{1}{2} \cdot l \cdot M = \frac{1}{2} \cdot l \cdot PI = \frac{PI^2}{2}$$

Επομένως η ροπή της R ως προς το σημείο A είναι:

$$M_i = \frac{P \cdot l^3}{3}$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως, το βέλος κάμψεως f είναι:

$$f = \frac{M_i}{EI} = \frac{P \cdot l^3}{3 EI}$$

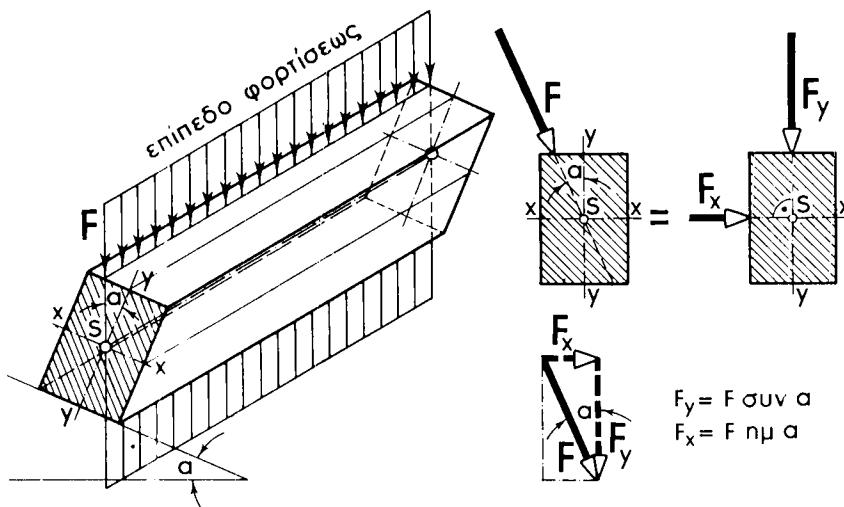


Σχ. 1.3ζ.

1.4 Λοξή κάμψη.

Από τις προϋποθέσεις που καθορίσθηκαν στην ανάπτυξη της θεωρίας της απλής κάμψεως μπορεί να εγκαταλειφθεί η 2 και μερικά η 4. Εξετάζεται επομένως το πρόβλημα της κάμψεως είτε σε ασύμμετρες διατομές, είτε σε συμμετρικές, αλλά με επίπεδο φορτίσεως που δεν συμπίπτει με το επίπεδο συμμετρίας. Παραδεχόμαστε μόνο ότι το επίπεδο φορτίσεως περιλαμβάνει τον άξονα της δοκού.

Η φόρτιση F αναλύεται κατά τα γνωστά στη F_y , που προκαλεί τη ροπή κάμψεως M_x και στην F_x με ροπή κάμψεως M_y (σχ. 1.4α).



Σχ. 1.4α.

Είτε υπολογίζεται η συνολική ροπή κάμψεως M , που αναλύεται στη M_x και M_y κατά τον άξονα συμμετρίας και τον κάθετο σ' αυτόν κεντροβαρικό της διατομής (σχ. 1.4β)

$$M_x = M \cdot \text{συν } \alpha \quad M_y = M \cdot \eta \mu \alpha$$

Κάθε μία από τις ροπές M_x και M_y αποτελεί περίπτωση απλής κάμψεως, που προκαλεί ορθές τάσεις κατά την εξίσωση (1.3):

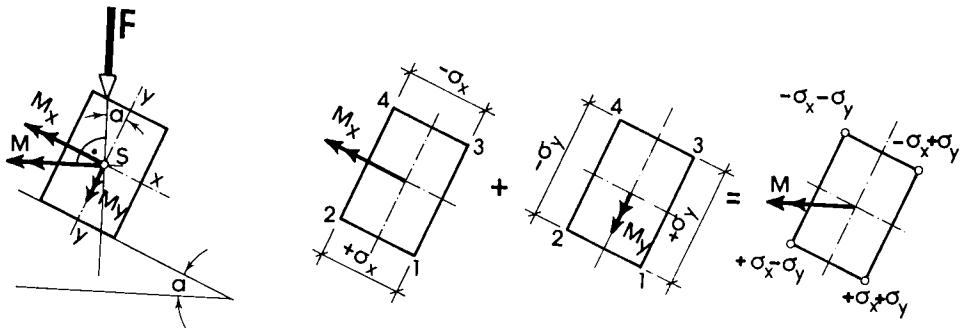
$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad \text{καὶ} \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

Η συνολική τάση, που επικρατεί σε κάθε σημείο της διατομής, βρίσκεται με την αλγεβρική άθροιση των μερικών τάσεων.

$$\sigma = - \left(\frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x \right) \quad (1.11)$$

Για τη συνηθισμένη περίπτωση των διατομών με δύο άξονες συμμετρίας η εξίσωση για τις μέγιστες τάσεις απλοποιείται στην

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leqq \sigma_{\text{επ}} \quad (1.12)$$



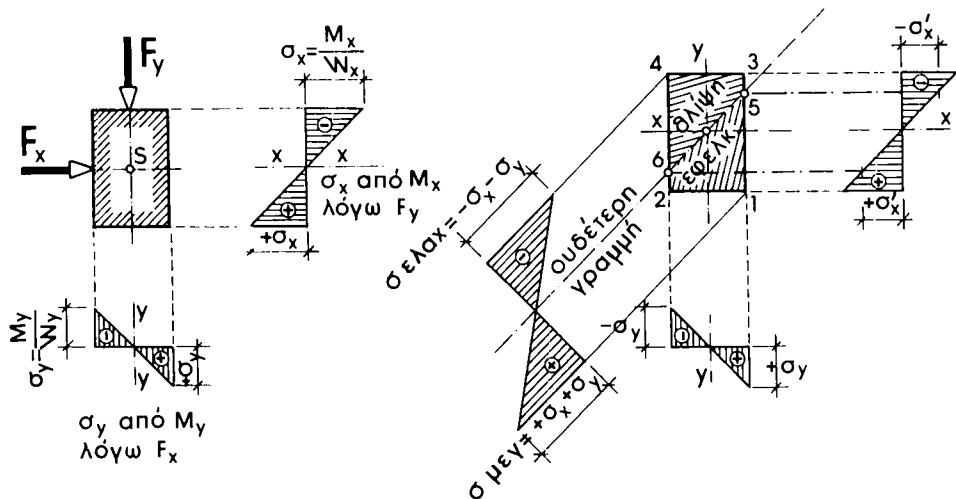
Σχ. 1.4β.

Ο τρόπος υπολογισμού της συνολικής τάσεως δείχνεται στο παράδειγμα της ορθογωνικής διατομής (σχ. 1.4γ). Από τη ροπή κάμψεως M_x προκαλείται η μέγιστη θετική τάση σ_x στην πλευρά 1-2 και από την ροπή M_y η μέγιστη θετική τάση σ_y στην πλευρά 1-3. Οι δύο πλευρές έχουν κοινή ακμή το 1. Εκεί αθροίζονται αλγεβρικά (νόμος επαλληλίας) οι δύο τάσεις στη συνολική $\sigma_1 = +\sigma_x + \sigma_y$. Αντίστοιχα στην ακμή 4 αθροίζονται οι δύο αρνητικές τάσεις $\sigma_4 = -\sigma_x - \sigma_y$.

Αν τώρα αθροισθεί π.χ. η τάση $+\sigma_y$ στην πλευρά 1-3 με μια ίσου μεγέθους τάση $-\sigma'_x$ τότε στη θέση 5 η τάση $\sigma = +\sigma_y - \sigma'_x = 0$.

Με τον ίδιο τρόπο με την $-\sigma_y$ και την σ'_x καθορίζεται στην πλευρά 2-4 το σημείο 6.

Από τα σημεία 5 και 6 περνά η ουδέτερη γραμμή, που διέρχεται φυσικά και από το κέντρο βάρους της διατομής. Κατά τη διεύθυνση της ουδέτερης γραμμής χαράσσομε το διάγραμμα των συνολικών τάσεων.



Σχ. 1.4γ.

Στις εφαρμογές προκαθορίζεται ο λόγος:

$$\kappa = \frac{W_x}{W_y}$$

οπότε με μετασχηματισμό της εξισώσεως (1.2) προκύπτει:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_x} = \frac{M_x + \kappa M_y}{W_x} \quad \text{ή} \quad W_x \text{ ανατ } = \frac{M_x + \kappa \cdot M_y}{\sigma_{\text{επ}}}$$

$$\kappa$$

Για τις ξύλινες ορθογωνικές δοκούς

$$\kappa = \frac{bh^2/6}{hb^2/6} = \frac{h}{b} = 1,2 \div 2,0$$

Στα χαλύβδινα τυποποιημένα ελάσματα $\kappa = 6 \div 9$, εκτός από τα πλατύπελμα όπου $\kappa = 3$.

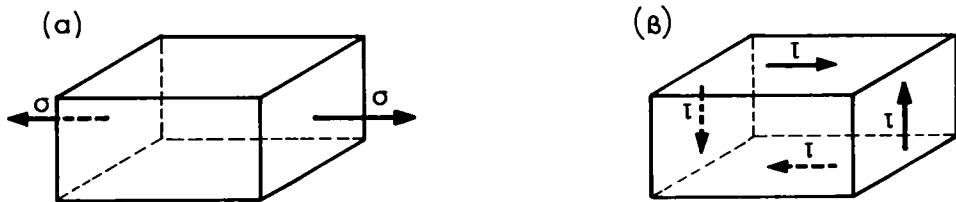
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΤΜΗΣΗ-ΔΙΑΤΜΗΣΗ

2.1 Γενικά - Τύποι υπολογισμού.

Στις κατασκευές που μελετήσαμε ως τώρα η καταπόνηση ήταν αξονική και οι τάσεις πάντοτε ορθές, δηλαδή η διεύθυνσή τους κάθετη στην καταπονούμενη επιφάνεια [σχ. 2.1α(α)].

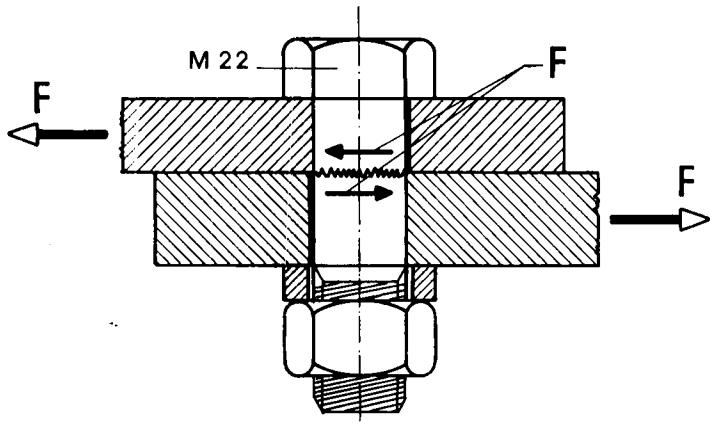
Είναι δυνατόν όμως η τάση να είναι παράλληλη προς την καταπονούμενη επιφάνεια [σχ. 2.1α(β)], οπότε την ονομάζουμε **διατμητική** και τη συμβολίζουμε με το γράμμα τ . Επομένως **τάση διατμήσεως** ονομάζουμε τη δύναμη που αναλαμβάνει η μονάδα της επιφάνειας που διατέμνεται.



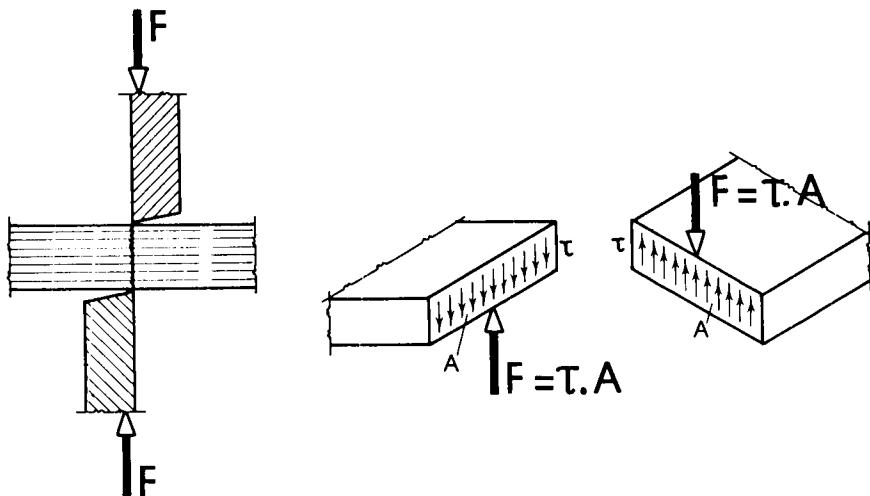
Σχ. 2.1α.

Συνδέομε δύο λάμες από χάλυβα St 37 με ένα κοχλία διαμέτρου 22 mm και τις εφελκύουμε με δύναμη $F = 3800 \text{ kp}$ (σχ. 2.1β). Με την καταπόνηση που παραλαμβάνει ο κοχλίας κινδυνεύει να κοπεί σαν να βρισκόταν στα σκέλη μιας ψαλίδας. Το είδος αυτό της καταπονήσεως ονομάζουμε **ψαλιδισμός** ή **τμήση** (ειδική απλουστευμένη περίπτωση διατμήσεως). Στην περίπτωση αυτή και γενικότερα, όταν οι αντίθετες διατμητικές δυνάμεις (δράση και αντίδραση) είναι πολύ κοντά (σχεδόν πάνω στο ίδιο επίπεδο), δεχόμαστε ότι η κατανομή των τάσεων πάνω στην επιφάνεια που διατέμνεται είναι ομοιόμορφη και βρίσκομε την αντίστοιχη διατμητική τάση με τον τύπο $\tau = F/A$ (σχ. 2.1γ).

Δεχόμαστε ότι στο δομικό στοιχείο (τον κοχλία) δεν αναπτύσσεται ροπή κάμψεως. Διάτμηση εμφανίζεται όταν αναπτύσσεται ροπή κάμψεως και τέμνουσα δύναμη. Πρέπει να τονισθεί ότι τμήση δεν μπορεί να εμφανισθεί στην πράξη όπου, πάντοτε μαζί με την τέμνουσα δύναμη αναπτύσσεται και ροπή κάμψεως, η οποία όμως για να απλουστευθεί ο υπολογισμός, θεωρείται αμελητέα.



Σχ. 2.1β.



Σχ. 2.1γ.

Στο παράδειγμα του σχήματος 2.1β η διατμητική τάση που αναπτύσσεται στον κορμό του κοχλία με διατομή:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 3,8 \text{ cm}^2 \quad \text{είναι}$$

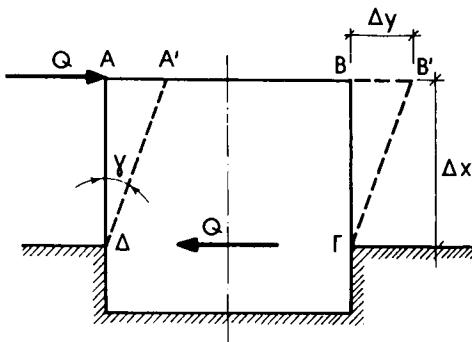
$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{3800}{3,8} = 1000 \text{ kp/cm}^2$$

Από πείρα γνωρίζομε ότι οι δύο λείες επιφάνειες, τις οποίες έχομε επαλείψει με λάδι, απομακρύνονται ευκολότερα με ολίσθηση, παρά με αποκόλληση.

Το πρώτο παράδειγμα είναι ανάλογο με την απλή διάτμηση (τμήση) και το δεύτερο με τον εφελκυσμό. Κάτι παρόμοι συμβαίνει και στα ελαστικά σώματα. Η αντοχή τους στη διάτμηση είναι μικρότερη από την αντοχή τους στον εφελκυσμό.

Καταπόνηση από τμήση εμφανίζεται κυρίως στα μέσα συνδέσεως των χαλύβδινων και ξύλινων κατασκευών, όπως είναι οι ήλοι, οι κοχλίες και οι συγκολλήσεις.

Η εφαρμογή διατμητικών δυνάμεων έχει ως αποτέλεσμα τη μετάθεση των διατομών μεταξύ τους. Αν σε ένα πρόβολο, με μήκος Δx , εφαρμοσθεί μια δύναμη Q , η διατομή AB θα μετακινηθεί στη θέση $A'B'$ (σχ. 2.1δ).



Σχ. 2.1δ.

Η γωνία γ είναι ανάλογη προς τη δύναμη Q και συνδέονται με τη σχέση $\gamma = Q/AG$ όπου A η επιφάνεια της διατομής του προβόλου και G ένα μέγεθος ανάλογο προς το μέτρο ελαστικότητας, το οποίο ονομάζεται **μέτρο ολισθήσεως** και εξαρτάται από το υλικό του δομικού στοιχείου (προβόλου). Ο τύπος γράφεται $\gamma = \tau/G$ και μας θυμίζει το νόμο του Hooke για τον εφελκυσμό $\epsilon = \sigma/E$.

Τα μέτρα ελαστικότητας E και ολισθήσεως G για το ίδιο υλικό συνδέονται μεταξύ τους με τον τύπο:

$$G = \frac{m \cdot E}{2(m + 1)} \quad (2.2)$$

όπου m ο συντελεστής της εγκάρσιας διαστολής (σταθερά του Poisson) που μάθαμε στον εφελκυσμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Παράδειγμα 1ο.

Ο κοχλίας του σχήματος 2.1β θραύεται από τμήση, όταν η δύναμη F φθάσει τα 10500 kp, ενώ, αν εφελκυσθεί ο κορμός του, θραύεται με δύναμη $F_1 = 14000$ kp. Η τάση θραύσεως του κοχλία σε εφελκυσμό είναι:

$$\sigma_\theta = \frac{14000}{3,8} = 3684 \text{ kp/cm}^2$$

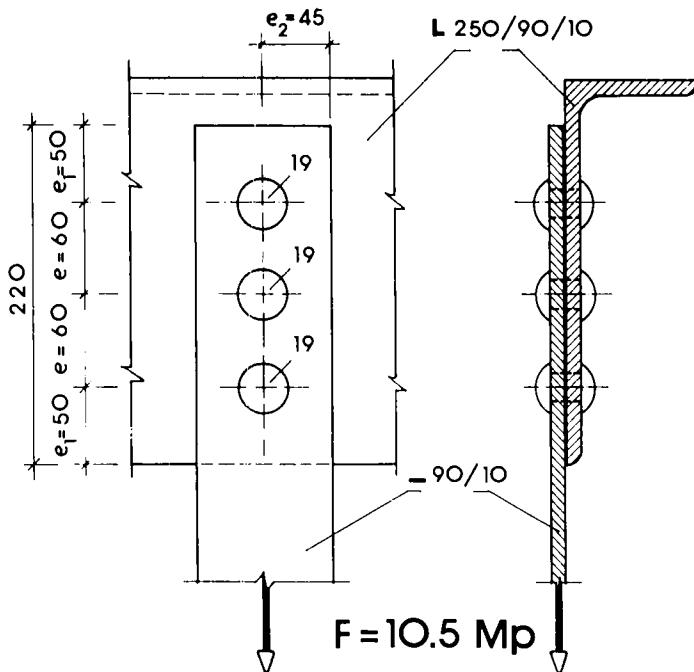
και σε διάτμηση:

$$\tau_{\theta} = \frac{10500}{3,8} = 2763 \text{ kp/cm}^2 = 0,75 \cdot \sigma_{\theta}$$

Για τους μαλακούς χάλυβες η τάση θραύσεως στη διάτμηση είναι $\tau_{\theta} = 0,75 \cdot \sigma_{\theta}$, ενώ για τους σκληρούς χάλυβες $\tau_{\theta} = 0,50 \cdot \sigma_{\theta}$.

Παράδειγμα 2o.

Το έλασμα του σχήματος 2.1ε, πάχους $t = 10 \text{ mm}$, συνδέεται με το ανισοσκελές γωνιακό $250 \times 90 \times 10$, με τους τρεις ήλους διαμέτρου 19 mm . Από το έλασμα αναρτάται φορτίο $F = 10500 \text{ kp}$. Πόσος είναι ο συντελεστής ασφαλείας των ήλων για τη διάτμηση αν η τάση θραύσεως είναι $\tau_{\theta} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ και για τη σύνθλιψη της άντυγας των όπων, αν η τάση θραύσεως είναι $\sigma_{le} = 4800 \text{ kp/cm}^2$.



Σχ. 2.1ε.

Λύση.

Κάθε ήλος αναλαμβάνει φορτίο:

$$F_n = \frac{10500}{3} = 3500 \text{ kp}$$

Η διατομή του είναι:

$$A = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \times 1,9^2}{4} = 2,83 \text{ cm}^2$$

Η ήλωση είναι **μονότιμη**, γιατί κάθε ήλου διατέμνεται μία επιφάνεια, επομένως το φορτίο κάθε ήλου $F_n = 3500 \text{ kp}$ επιβαρύνει μία διατομή $A = 2,83 \text{ cm}^2$.

Άρα η διατμητική τάση λειτουργίας των ήλων είναι:

$$\tau_{un} = \frac{3500}{2,83} = 1237 \text{ kp/cm}^2$$

και ο συντελεστής ασφαλείας για τη διάτμηση:

$$\gamma = \frac{\tau_\theta}{\tau_{un}} = \frac{2400}{1237} = 1,94$$

Αντίστοιχα η τάση συνθλίψεως άντυγας όπων:

$$\sigma_{Lun} = \frac{3500}{1,0 \times 1,9} = 1843 \text{ kp/cm}^2$$

και ο συντελεστής ασφαλείας για τη σύνθλιψη άντυγας οπων:

$$\gamma = \frac{\sigma_{L\theta}}{\sigma_{Lun}} = \frac{4800}{1843} = 2,60$$

Παράδειγμα 3o.

Μία μηχανή μπορεί να ασκήσει θλιπτική δύναμη 25000 kp και πρόκειται να διανοίξει τετραγωνικές οπές με πλευρά 22 mm σε χαλύβδινο έλασμα. Πόσο μπορεί να είναι το πάχος του ελάσματος όταν $\tau_\theta = 3300 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

Η επιφάνεια που μπορεί να αποτμηθεί είναι:

$$A = \frac{F}{\tau_\theta} = \frac{25000 \text{ kp}}{3300 \text{ kp/cm}^2} = 7,58 \text{ cm}^2$$

Η περίμετρος της όπης είναι $4 \times 2,2 = 8,8 \text{ cm}$. Αν το πάχος του ελάσματος είναι t , θα έχομε:

$$t = \frac{A}{8,8} = \frac{7,58}{8,8} = 0,86 \text{ cm}$$

Δηλαδή το μέγιστο πάχος ελάσματος είναι $0,86 \text{ cm} = 8,6 \text{ mm}$.

Παράδειγμα 4o.

Δύο επίπεδα ελάσματα (σχ.2.1στ), πάχους $t_1 = 10 \text{ mm}$ το καθένα, πρόκειται να συνδεθούν με τη βοήθεια ήλων διαμέτρου $d = 17 \text{ mm}$, ώστε να μπορούν να αναλάβουν αξονική εφελκύουσα δύναμη $F = 11 \text{ Mp}$. Πόσο είναι το πλάτος b , το οποίο πρέπει να δοθεί στα ελάσματα, αν $\sigma_{ep} = 1400 \text{ kp/cm}^2$ και ποιος ο αριθμός των ήλων, που απαιτούνται, αν η ήλωση εκτελεσθεί, όπως στο σχήμα 2.1στ.με χρησιμοποίηση αρμοκαλυμμάτων πάχους $t_2 = 6 \text{ mm}$. Επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως των ήλων $\tau_{ep} = 1400 \text{ kp/cm}^2$ και τάση συνθλίψεως της άντυγας των οπών $\sigma_{ep} = 2800 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

Η διατομή του εφελκυόμενου ελάσματος που απαιτείται είναι:

$$A_{\text{απαιτ}} = \frac{11000 \text{ kp}}{1400 \text{ kp/cm}^2} = 7,86 \text{ cm}^2$$

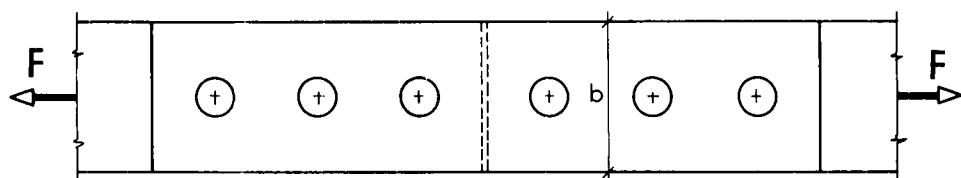
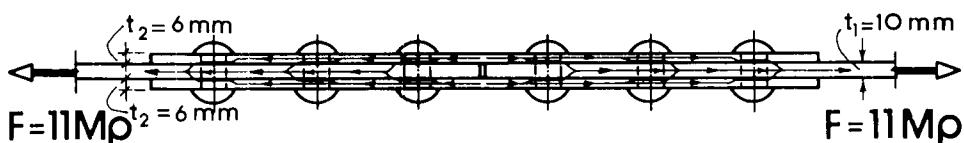
και είναι ίση, όταν αφαιρεθεί η οπή ενός ήλου διαμέτρου $d = 1,7 \text{ cm}$, με $(b - d) \cdot t_1 = (b - 1,7) \times 1,0$.

Άρα προκύπτει: $b_{\text{απ}} = 7,86 + 1,7 = 9,56 \text{ cm}$.

Ορίζομε $b = 10 \text{ cm}$.

Η ήλωση είναι **δίτυμη** (βλ. και σχ. 2.8, Πρώτου Μέρους), γιατί επιβαρύνονται στην τμήση δύο διατομές κάθε ήλου. Μπορεί δηλαδή ένας ήλος να αναλάβει σε τμήση δύναμη:

$$N_A = 2 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \sigma_{\text{επ}} = 2 \times \frac{3,14 \times 1,7^2}{4} \times 1400 = 6350 \text{ kp}$$



Σχ. 2.1στ.

Σε σύνθλιψη άντυγας των οπών μπορεί κάθε ήλος να αναλάβει δύναμη $N_L = t_1 \cdot d \cdot \sigma_{\text{επ}}$ (η τιμή αυτή είναι μικρότερη από την $2 \cdot t_2 \cdot d \cdot \sigma_{\text{επ}}$, γιατί $t_1 < 2t_2$) δηλαδή:

$$N_L = 1,0 \times 1,7 \times 2800 = 4760 \text{ kp}$$

Για να αναληφθεί η δύναμη $F = 11 \text{ Mp}$ από τους ήλους σε τμήση απαιτείται αριθμός ήλων:

$$n \geq \frac{F}{N_A} = \frac{11000}{6350} = 1,73$$

δηλαδή τουλάχιστον 2 ήλοι, και στη σύνθλιψη:

$$n \geq \frac{F}{N_L} = \frac{11000}{4760} = 2,32$$

δηλαδή του λάχιστον 3 ήλοι.

Παίρνομε τη μεγαλύτερη από τις δύο τιμές και επομένως θα τοποθετήσουμε 3 ήλους σε κάθε πλευρά του αρμού.

Παράδειγμα 5ο.

Επίπεδο έλασμα, πάχους $t = 8 \text{ mm}$, συνδέεται με συγκόλληση με κομβοέλασμα, όπως στο σχήμα 2.1ζ και φορτίζεται από δύναμη εφελκυσμού $F = 15 \text{ Mp}$. Πόσο είναι το μήκος l , που απαιτείται για κάθε μία από τις δύο ραφές συγκόλλήσεως, αν η επιτρεπόμενη τάση διατμήσεως για τη συγκόλληση είναι $\tau_{\text{επ}} = 1350 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

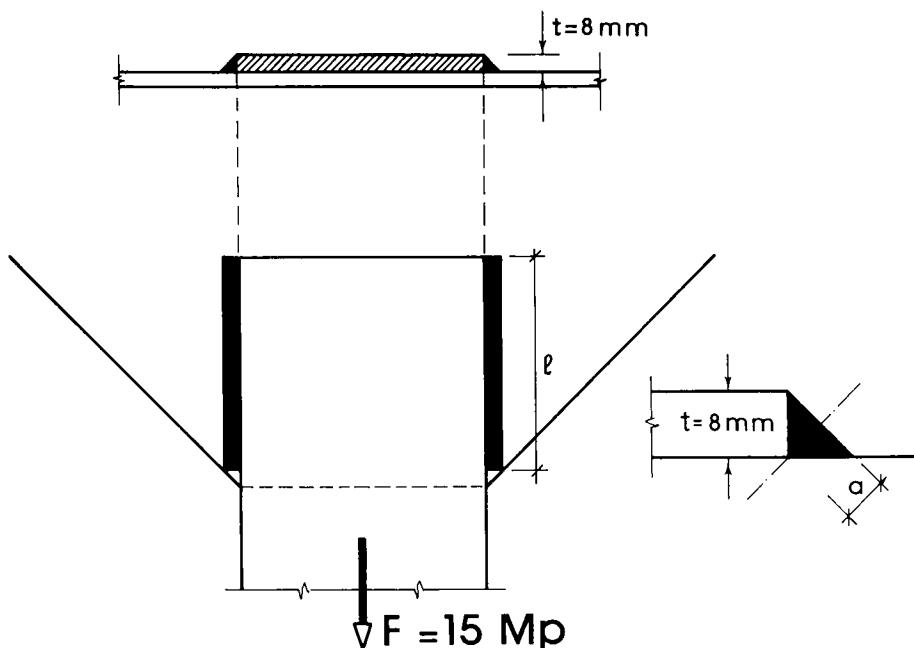
Η ελάχιστη διάσταση της ραφής συγκόλλήσεως, όπου υπάρχει ο μεγαλύτερος κίνδυνος διατμήσεως, είναι, όπως φαίνεται από το σχήμα, το μήκος:

$$a = \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{0,8}{\sqrt{2}} = 0,566 \text{ cm}$$

Συνολικά τέμνεται επιφάνεια $A = 2l \cdot a$ και θα είναι $F = A \cdot \tau_{\text{επ}} = 2l \cdot a \cdot \tau_{\text{επ}}$

$$\text{ή } l = \frac{F}{2a \cdot \tau_{\text{επ}}} = \frac{15000}{2 \times 0,566 \times 1350} = 9,8 \text{ cm}$$

Παίρνομε $l = 10 \text{ cm}$.

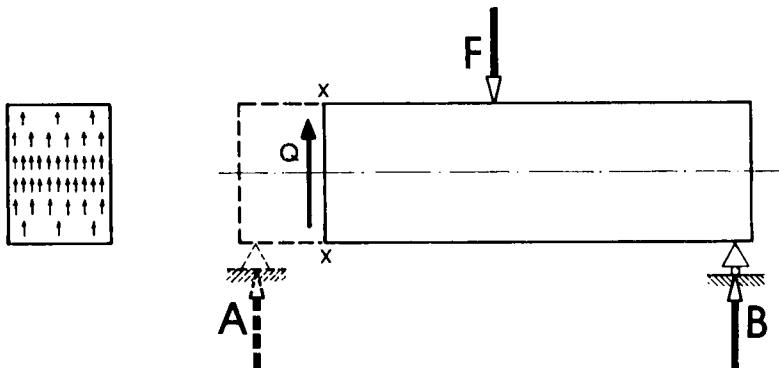


Σχ. 2.1ζ.

2.2 Διατμητικές τάσεις σε δοκούς που κάμπτονται.

Στο κεφάλαιο της κάμψεως μάθαμε να υπολογίζομε τις τέμνουσες δυνάμεις σε κάθε διατομή μιας δοκού που κάμπτεται.

Αν κόψομε την ορθογωνική δοκό AB του σχήματος 2.2a, για να αποκαταστήσουμε την ισορροπία πρέπει να εφαρμόσουμε πάνω στη διατομή x-x μια δύναμη Q ίση προς την τέμνουσα στη θέση της τομής. Η Q είναι η συνισταμένη όλων των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στη διατομή κατά τη φόρτιση.



Σχ. 2.2a.

Την παραπάνω δοκό, με την ίδια φόρτιση, τέμνομε με μια οριζόντια τομή I-I και τοποθετούμε το ένα τμήμα της δοκού πάνω στο άλλο, ώστε να καμφθούν και τα δύο κάτω από τη δράση του φορτίου F.

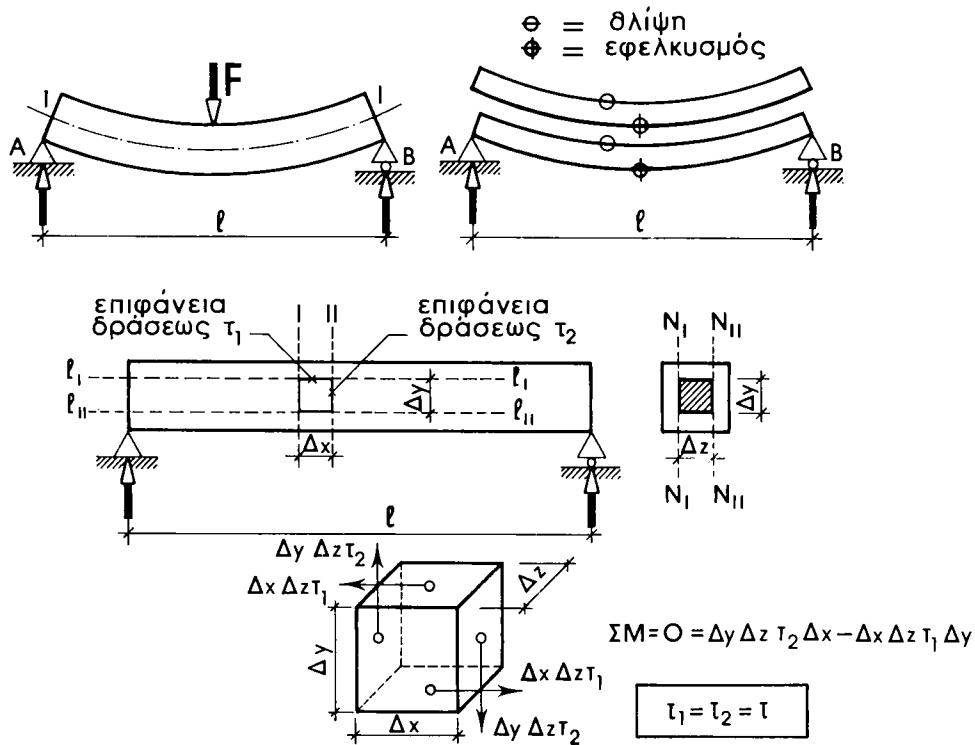
Όπως είναι γνωστό από το κεφάλαιο της κάμψεως, οι κάτω ίνες του πάνω τμήματος όταν εφελκύονται επιμηκύνονται, ενώ οι πάνω ίνες του κάτω τμήματος όταν θλίβονται βραχύνονται. Αν θελήσουμε να αναγκάσουμε τα δύο τμήματα να συνεργασθούν, ώστε η αρχική δοκός να καμφθεί σαν να ήταν ενιαία, θα πρέπει να βραχύνομε τις κάτω ίνες του πάνω τμήματος έτσι, ώστε στο τέλος της παραμορφώσεως οι δύο σε επαφή επιφάνειες της τομής να έχουν ίση παραμόρφωση. Για να το πετύχομε αυτό πρέπει στις δύο επιφάνειες της τομής να αναπτυχθούν διατμητικές δυνάμεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2β.

Αν π.χ. κολλήσουμε ή καρφώσουμε το ένα τμήμα της δοκού με το άλλο, αυτές τις διατμητικές δυνάμεις θα τις μεταφέρουν η κόλλα ή τα καρφιά και τα δύο τμήματα θα εργάζονται σαν ένα.

Οι διατμητικές αυτές τάσεις εμφανίζονται σε οποιοδήποτε ύψος και αν γίνει η τομή I-I, και αποδεικνύεται ότι είναι ίσες προς τις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται εξ αιτίας της τέμνουσας δυνάμεως πάνω στο επίπεδο της διατομής στο αντίστοιχο ύψος (σχ. 2.2β και 2.2γ).

Συμπέρασμα.

Οι διατμητικές τάσεις εμφανίζονται **πάντοτε σε ζεύγη**, σύγχρονα στις διατομές της ράβδου και στα κάθετα σ' αυτές επίπεδα κατά μήκος της ράβδου. **Οι δύο αυτές διατμητικές τάσεις είναι ίσες**, και είτε διευθύνονται προς την κοινή ακμή, είτε



Σχ. 2.2β.

απομακρύνονται απ' αυτήν (σχ. 2.2γ)

Βλέπουμε δηλαδή ότι σε κάθε σημείο μιας δοκού που κάμπτεται, αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Η τιμή της διατμητικής τάσεως θα είναι διαφορετική σε διάφορες θέσεις κατά το ύψος της διατομής, και υπολογίζεται (με την παραδοχή ότι κατά το πλάτος της διατομής θα είναι σταθερή) από τον τύπο:

$$\tau = \frac{QS}{Ib} \quad (2.2)$$

όπου:

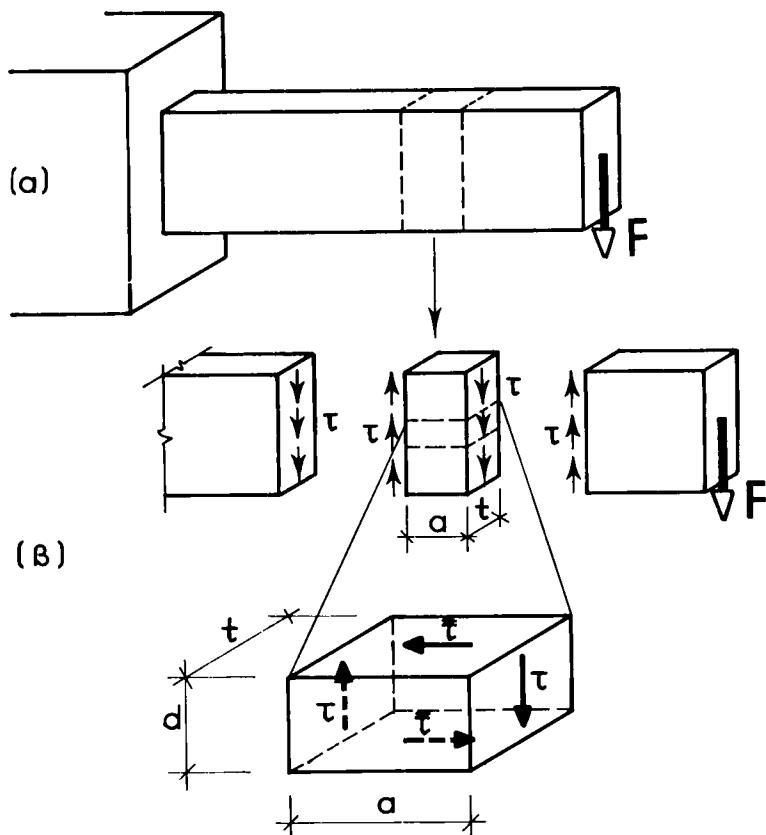
Q: η τέμνουσα δύναμη στη διατομή που εξετάζομε,

S: η στατική ροπή, ως προς την ουδέτερη γραμμή, του τμήματος της διατομής, που περιλαμβάνεται ανάμεσα στην παράλληλη προς την ουδέτερη γραμμή στη θέση, που ζητάμε την τάση, και την άνω ακραία ίνα της δοκού,

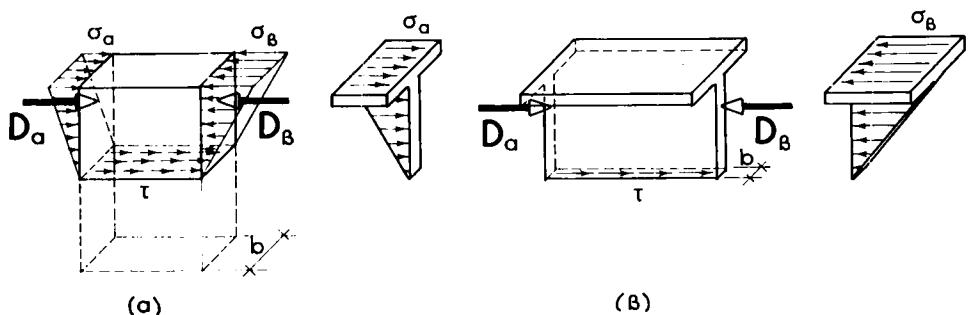
b: το πλάτος της διατομής στην παραπάνω θέση,

I: η ροπή αδρανείας της διατομής (ως προς την ουδέτερη γραμμή).

Σε μιά διατομή της δοκού το Q και το I είναι γνωστά, οπότε η διατμητική τάση εξαρτάται από το λόγο S/b. Επομένως για τις ακραίες ίνες το S = 0 άρα και η τ = 0. Για την ουδέτερη γραμμή η S γίνεται μέγιστη, επομένως και η τ μέγιστη. Η διατμητική τάση είναι αντίστροφα ανάλογη προς το πλάτος b (σχ. 2.2δ).



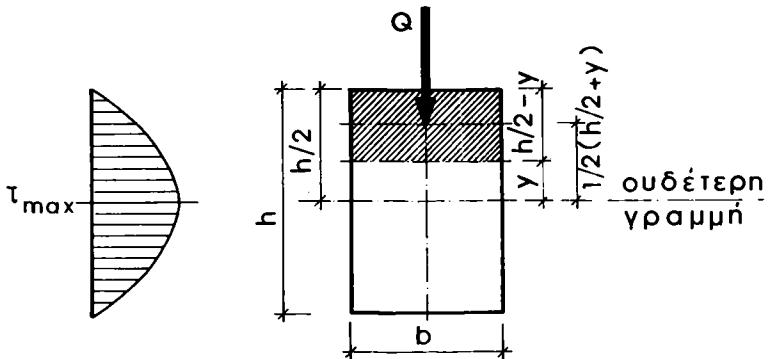
Σχ. 2.2γ.



Σχ. 2.2δ.

Τον τύπο αυτό μπορούμε να εφαρμόσουμε για να προσδιορίσουμε την τιμή της διατμητικής τάσεως όχι μόνο σε ορθογωνική, αλλά και σε οποιαδήποτε άλλη διατομή, συμμετρική ως προς το επίπεδο των φορτίων.

Εφαρμογή: Για μία δοκό ορθογωνικής διατομής είναι (σχ. 2.2ε):



Σχ. 2.2ε.

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot b \left(\frac{h}{2} + y \right) \cdot \frac{1}{2} = \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \cdot \frac{b}{2}$$

$$\tau = \frac{Q}{2I} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

άρα η κατανομή ακολουθεί καμπύλη παραβολής (σχ. 2.2ε και 2.2α).

Η μέγιστη τιμή της τ εμφανίζεται στο μέσο όπου $y = 0$ και είναι:

$$\tau = \frac{Q}{2I} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \tau_{\max} = \frac{Q \cdot h^2}{8 \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}$$

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τις τάσεις διατμήσεως εξ αιτίας της τέμνουσας δυνάμεως και τις ορθές τάσεις εξ αιτίας της ροπής κάμψεως ως δύο ανεξάρτητες περιπτώσεις εντάσεως.

Εφ' όσον όμως μέσα στη δοκό που κάμπτεται αναπτύσσονται ταυτόχρονα με τις ορθές και διατμητικές τάσεις λόγω της υπάρξεως τέμνουσας, θα έπρεπε να εξετάσουμε την ίδια περίπτωση και ως σύνθετη καταπόνηση. Αποδεικνύεται όμως γενικά ότι για τις συνηθισμένες περιπτώσεις δοκών από ξύλο και χάλυβα, των οποίων το άνοιγμα είναι μεγάλο (10πλάσιο και άνω) σε σχέση προς το ύψος της διατομής και των οποίων η διατομή δεν έχει πολύ λεπτά τοιχώματα, η επίδραση των διατμητικών τάσεων είναι αμελητέα και αρκεί ο έλεγχος της μέγιστης ορθής τάσεως από τη ροπή κάμψεως.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση μιας χαλύβδινης δοκού με διατομή διπλό ταυ (I). Πρώτα υπολογίζομε τη μέγιστη ορθή τάση στις ακραίες ίνες, όπου, καθώς είπαμε ήδη, η διατμητική τάση είναι μηδενική, και ελέγχομε αν $\sigma_{μεγ} \leq \sigma_{επ}$.

'Υστερα υπολογίζομε τη μέγιστη διατμητική τάση, η οποία εμφανίζεται στην ουδέτερη γραμμή, δηλαδή στην περίπτωσή μας λόγω της συμμετρίας της διατομής, στο μέσο του ύψους. Στη θέση αυτή η ορθή τάση είναι μηδενική, και επομένως δεν

έχομε παρά να ελέγξουμε αν $\tau_{μεγ} \leq \tau_{επ}$.

Ο υπολογισμός:

$$\tau = \frac{QS}{I \cdot b}$$

όπου τώρα S θα είναι η στατική ροπή, ως προς την ουδέτερη γραμμή του πάνω από αυτή μισού της διατομής και b το πάχος του κορμού του I . Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή μπορεί να γίνει με αρκετή προσέγγιση ο υπολογισμός της μέγιστης διατμητικής τάσεως με τον τύπο:

$$\tau_{μεγ} = \frac{Q}{b \cdot h_1} \quad (2.3)$$

όπου b το πάχος και h_1 το ύψος του κορμού I , χωρίς δηλαδή τα πέλματα.

Αν τώρα θελήσουμε να ελέγξουμε τις τάσεις στη θέση συναρμογής του κορμού με το πέλμα, παρατηρούμε ότι υπάρχουν τάσεις ορθές και διατμητικές μικρότερες από τις μέγιστες, αλλά τόσο μεγάλες ώστε να δημιουργούν το ερώτημα, μήπως η ταυτόχρονη ανάπτυξη ορθών και διατμητικών τάσεων στην ορισμένη θέση προκαλεί καταπόνηση του υλικού δυσμενέστερη από εκείνη που οφείλεται στις μέγιστες ορθές τάσεις. Ο κανονισμός των σιδηρών κατασκευών μας επιβάλλει να βρούμε την ισοδύναμη τάση συγκρίσεως $\sigma_o = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ και να απαιτήσουμε όπως $\sigma_o \leq \sigma_{επ}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Δοκός με διατομή I PB 180 από χάλυβα St 37 και άνοιγμα $l = 3.20$ m, φέρει ομοιόμορφο φορτίο $q = 4$ Mp/m. Να ελεγχθούν οι ισοδύναμες τάσεις συγκρίσεως στο μέσο του ανοίγματος, στο τέταρτο του ανοίγματος και κοντά στη στήριξη.

Λύση.

Σχεδιάζομε τα διαγράμματα ροπών κάμψεως και τεμνουσών δυνάμεων, και βρίσκομε τα αντίστοιχα μεγέθη M , Q στις θέσεις που ζητά το πρόβλημα (σχ. 2.2 στ).

$$M_1 = 0 \quad Q_1 = 6400 \text{ kp}$$

$$M_2 = 3840 \text{ kpm} \quad Q_2 = 3200 \text{ kp}$$

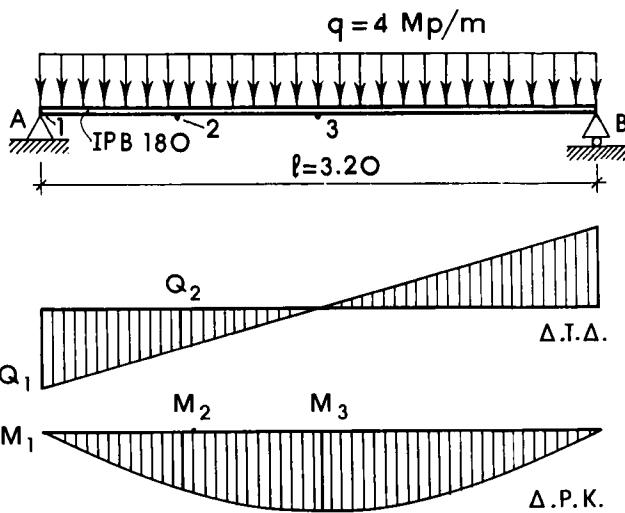
$$M_3 = 5120 \text{ kpm} \quad Q_3 = 0$$

Βρίσκομε τις μέγιστες ορθές τάσεις στις θέσεις 1, 2, 3:

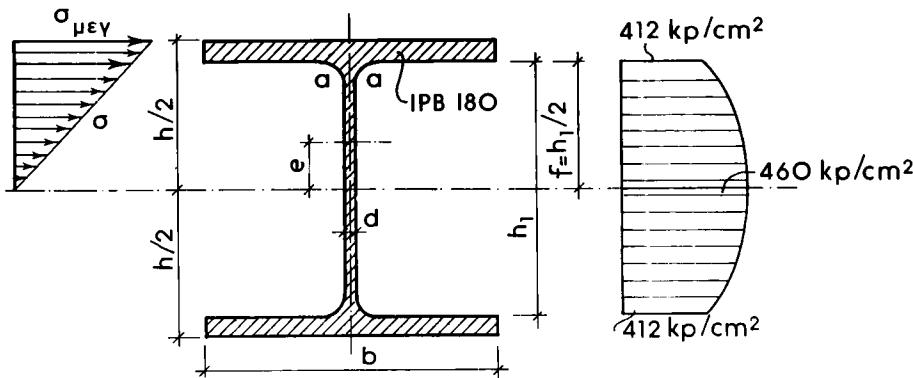
$$\sigma_{1μεγ} = 0$$

$$\sigma_{2μεγ} = \frac{M_2}{W} = \frac{384000 \text{ kp.cm}}{426 \text{ cm}^3} = 901 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{3μεγ} = \frac{M_3}{W} = \frac{512000 \text{ kp.cm}}{426 \text{ cm}^3} = 1202 \text{ kp/cm}^2$$



Σχ. 2.2στ.



Σχ. 2.2ζ.

Βρίσκομε τις ορθές τάσεις στα σημεία συναρμογής του κορμού με το πέλμα (σχ. 2.2ζ):

$$\sigma_{1'} = 0$$

$$\sigma_{2'} = \sigma_{2\mu\gamma} \cdot \frac{7,6}{9,0} = 901 \times \frac{7,6}{9,0} = 762 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{3'} = \sigma_{3\mu\gamma} \cdot \frac{7,6}{9,0} = 1202 \times \frac{7,6}{9,0} = 1015 \text{ kp/cm}^2$$

Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις (στο μέσο του ύψους) θα είναι:

$$\begin{aligned}\tau_{1\mu\text{εγ}} &= \frac{QS}{Jb} = \frac{6400 \times (18,0 \times 1,4 \times 8,3 + 0,85 \times 7,6 \times 3,8)}{3830 \times 0,85} = \\ &= \frac{6400 \times 233,7}{3830 \times 0,85} = 460 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{2\mu\text{εγ}} &= \frac{3200 \times 233,7}{3830 \times 0,85} = 230 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{3\mu\text{εγ}} &= 0\end{aligned}$$

Ο κατά προσέγγιση τύπος για τη μέγιστη διατμητική τάση δίνει:

$$\begin{aligned}\tau_{1\mu\text{εγ}} &= \frac{Q}{b \cdot h_1} = \frac{6400}{0,85 \times 15,2} = 496 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{2\mu\text{εγ}} &= \frac{3200}{0,85 \times 15,2} = 248 \text{ kp/cm}^2\end{aligned}$$

Οι διατμητικές τάσεις στη θέση συναρμογής κορμού και πέλματος, για τον κορμό θα είναι:

$$\begin{aligned}\tau_1' &= \frac{Q \cdot S}{lb} = \frac{6400 \times 18,0 \times 1,4 \times 8,3}{3830 \times 0,85} = \frac{6400 \times 209,2}{3830 \times 0,85} = 412 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_2' &= \frac{3200 \times 209,2}{3830 \times 0,85} = 206 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_3' &= 0\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω εξαγόμενα κατασκευάζομε το διάγραμμα κατανομής των διατμητικών τάσεων κατά το ύψος της διατομής στη θέση 1 του στηρίγματος (σχ. 2.2ζ).

Οι ισοδύναμες τάσεις συγκρίσεως για την αμέσως κάτω από το πέλμα θέση του κορμού θα είναι με την εφαρμογή του τύπου:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad \text{στις τρεις διατομές της δοκού:} \\ \sigma_{01} &= \sqrt{0 + 3 \times 412^2} = 412 \cdot \sqrt{3} = 713 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_{02} &= \sqrt{762^2 + 3 \times 206^2} = 841 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_{03} &= \sqrt{1015^2 + 0} = 1015 \text{ kp/cm}^2\end{aligned}$$

'Ωστε για τον έλεγχο της αντοχής της δοκού αρκεί να είναι $\sigma_{\mu\text{εγ}} = 1202 \text{ kp/cm}^2 \leq \sigma_{03}$ και $\tau_{\mu\text{εγ}} = 460 \text{ kp/cm}^2 \leq \tau_{03}$.

Επειδή, καθώς φαίνεται από το διάγραμμα διατμητικών τάσεων, δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ $\tau_{\mu\text{εγ}}$ και της τ' (στη θέση συναρμογής με το πέλμα), γίνεται δεκτό στον υπολογισμό της σ_0 στη θέση συναρμογής να χρησιμοποιείται αντί της τ'

η $\tau_{\mu\gamma}$, που υπολογίζεται με τον απλούστερο τύπο $\tau_{\mu\gamma} = Q/bh_1$, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση αντί 412 και 206 kp/cm² θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στον τύπο της σο αντίστοιχα 496 και 248 kp/cm².

Παράδειγμα 2ο.

Η ίδια δοκός του προηγούμενου παραδείγματος φέρει στο μέσο φορτίο $F = 6400$ kp.

Να γίνει ο έλεγχος των τάσεων στο μέσο του ανοίγματος.

Λύση.

Σχεδιάζομε τα διαγράμματα ροπών κάμψεως και τεμνουσών δυνάμεων. Στο μέσο του ανοίγματος έχουμε $Q = 3200$ kp, $M = 5120$ kp·m.

Μέγιστη ορθή τάση $\sigma_{\mu\gamma} = M/W = 1202$ kp/cm².

Μέγιστη διατμητική τάση κορμού με τον κατά προσέγγιση τύπο:

$$\tau_{\mu\gamma} = \frac{Q}{b \cdot h_1} = \frac{3200}{0,85 \times 15,2} = 248 \text{ kp/cm}^2.$$

Ορθή τάση στο σημείο συναρμογής του κορμού με το πέλμα:

$$\sigma = 1202 \cdot \frac{7,6}{9,0} = 1015 \text{ kp/cm}^2$$

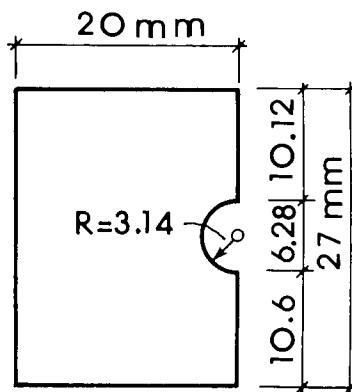
Ισοδύναμη τάση:

$$\sigma_o = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{1015^2 + 3 \times 248^2} = 1102 \text{ kp/cm}^2$$

Και εδώ δυσμενέστερη είναι η $\sigma_{\mu\gamma} = 1202$ kp/cm² στις ακραίες ίνες της διατομής.

Ασκήσεις για λύση.

- Για τη δίτμητη ήλωση μιας αναρτήσεως για βάρος 8,5 τόννων χρησιμοποιούνται 3 ήλοι. Να υπολογισθεί η διάμετρος των ήλων, αν το υλικό ήλου έχει $\tau_{\epsilon\pi} = 1400$ kp/cm² και το υλικό κατασκευής έχει επιτρεπόμενη τάση σε σύνθλιψη άντυγας οπων $\sigma_{\epsilon\pi} = 2800$ kp/cm². Πάχος ελάσματος 8 mm.
- Πρέσσα κόβει κομμάτια του παρακάτω σχήματος 2.2η από χάλυβα με $t_\theta = 3000$ kp/cm². Το πάχος των ελασμάτων είναι 2 mm. Να βρεθεί: α) Η δύναμη κοπῆς της πρέσσας και β) σε ποιο σημείο θα εφαρμοσθεί αυτή.



Σχ. 2.2η.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΛΥΓΙΣΜΟΣ

3.1 Γενικά - Παραδείγματα.

Στις καταπονήσεις σε θλίψη, που μελετήσαμε ως τώρα, ελέγχομε τις τάσεις λειτουργίας μιας κατασκευής και τις περιορίζομε στα επιτρεπόμενα όρια. Υπάρχουν όμως κατασκευές στις οποίες, χωρίς προφανή υπέρβαση των επιτρεπομένων τάσεων, οι παραμορφώσεις αυξάνονται γρήγορα και οδηγούν σε αχρήστευση του φορέα.

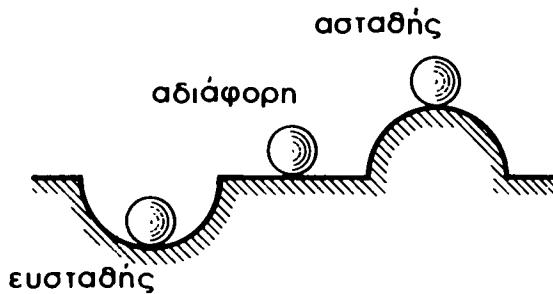
Παράδειγμα.

Λεπτή, ευθύγραμμη, ελαστική ράβδος π.χ. ένα ταυ σχεδιάσεως φορτίζεται αξονικά με θλιπτική δύναμη που αυξάνει συνεχώς. Ως μια ορισμένη τιμή F της δυνάμεως, η ράβδος δεν παθαίνει καμία καμπύλωση. Αν όμως η τιμή F της δυνάμεως αυξηθεί ακόμη, έστω και λίγο, η ράβδος κινδυνεύει να καμπυλωθεί και να θραυσθεί.

Το φαινόμενο αυτό της καμπυλώσεως και στη συνέχεια θραύσεως της ράβδου, όταν η θλιπτική δύναμη ξεπεράσει ορισμένη τιμή, λέγεται **λυγισμός**.

Από τη Μηχανική γνωρίζομε ότι η ισορροπία ενός σώματος μπορεί να είναι ευσταθής, αδιάφορη ή ασταθής (σχ. 3.1α).

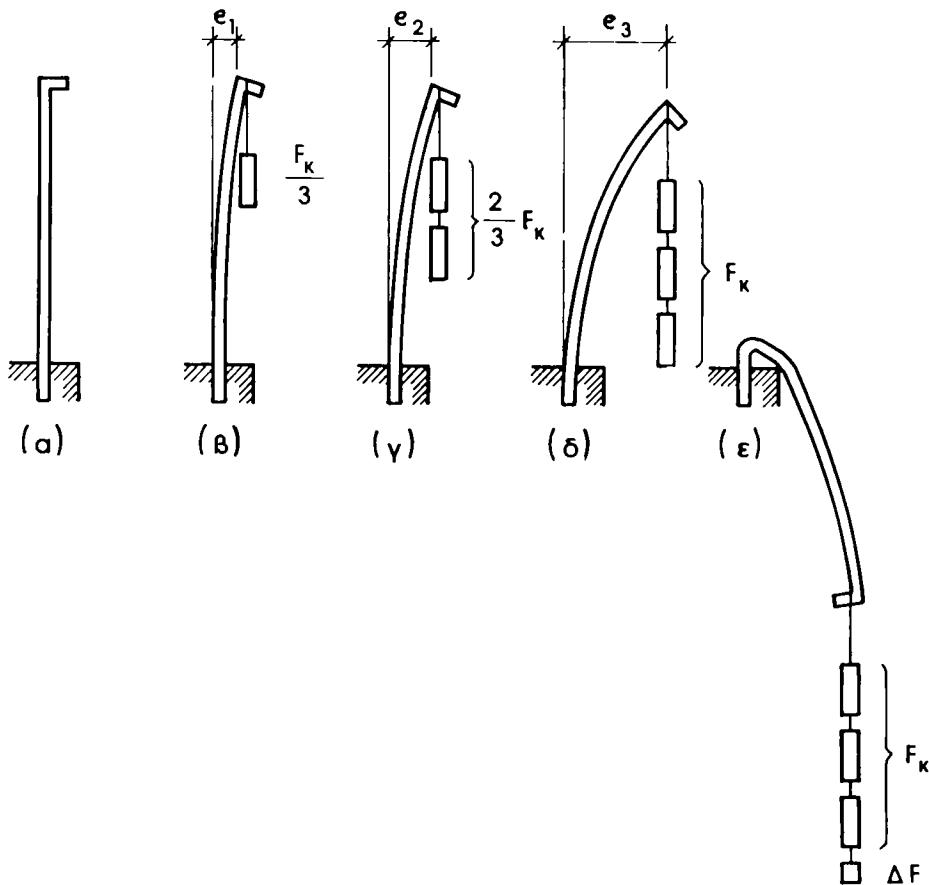
Ισορροπία σφαίρας



Σχ. 3.1α.

Στην τρίτη περίπτωση (της αστάθειας), όταν ενεργούν μόνο οι δύναμεις βαρύτητας, αρκεί μικρή μεταβολή της θέσεως της σφαίρας ή ορθότερα του κέντρου

βάρους της, για να καταλυθεί η ισορροπία. Ανάλογη συμπεριφορά παρουσιάζουν οι θλιβόμενες ελαστικές ράβδοι, όπου όμως κριτήριο του είδους της ισορροπίας δεν είναι η θέση του κέντρου βάρους, αλλά το μέγεθος της θλιπτικής δυνάμεως. Δηλαδή για F μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο από ορισμένη τιμή F_k έχομε ευσταθή, αδιάφορη ή ασταθή ισορροπία (λυγισμό). Αν σε κατακόρυφη ράβδο, που πακτώνεται στη βάση και είναι ελεύθερη κατά το επάνω άκρο της, εφαρμόσομε αξονικό



Σχ. 3.1β.

φορτίο F (σχ. 3.1β), εφ' όσον το φορτίο αυτό είναι σχετικά μικρό, η ράβδος θα παραμείνει ευθύγραμμη [σχ. 3.1β(α)], ή, αν από τυχαία αφορμή καμφθεί ελαστικά, θα έχει την τάση να επανέλθει στην ευθύγραμμη αρχική μορφή της [σχ. 3.1β(β) και (γ)] (ευσταθής ελαστική ισορροπία). Αν το φορτίο F αυξηθεί και λάβει μία ορισμένη τιμή F_k και συγχρόνως η ράβδος υποστεί κάποια ελαστική παραμόρφωση [σχ. 3.1β(δ)], θα παραμείνει στη θέση αυτή σε ισορροπία χωρίς να τείνει να επανέλθει στην αρχική ευθύγραμμη μορφή της ή να καμφθεί περισσότερο (αδιάφορη ισορροπία). Αν τέλος το φορτίο F αυξηθεί λίγο περισσότερο από την τιμή F_k θα

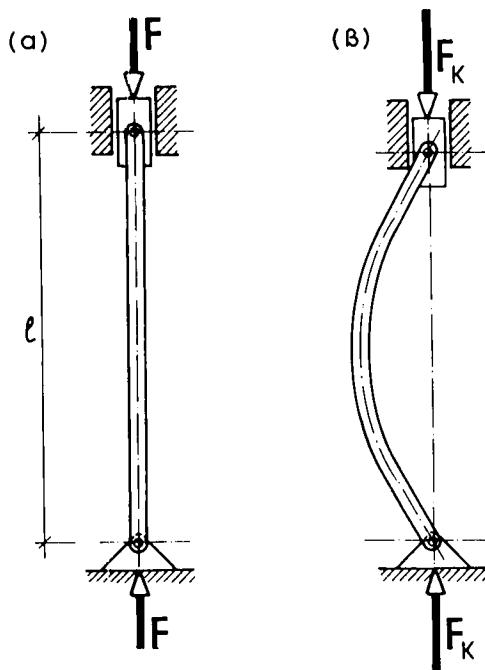
αυξηθεί αμέσως έντονα η ελαστική παραμόρφωση της ράβδου [σχ. 3.1β(ε)] και θα επέλθει η θραύση (ασταθής ισορροπία). Σημειώνομε ότι πάντοτε υπάρχουν κατασκευαστικά αίτια, που μπορούν να προκαλέσουν μικρή παραμόρφωση της ράβδου, όπως ελαφρά καμπυλότητα της ράβδου κατά την εκτέλεση, έκκεντρη τοποθέτηση του φορτίου πάνω σ' αυτήν κλπ. Την οριακή τιμή F_K του φορτίου ονομάζομε **κρίσιμο φορτίο λυγισμού**.

Στα επόμενα υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού F_K (σχ. 3.1γ) για τις δύο περιοχές καταπονήσεως του υλικού της ράβδου, που είναι:

- η ελαστική, όπου ισχύει ο νόμος του Hooke και
- η πλαστική, όπου δεν ισχύει ο νόμος του Hooke.

Για τον υπολογισμό γίνονται οι ακόλουθες παραδοχές:

- 1) Η ράβδος είναι ιδανικά ευθύγραμμη.
- 2) Το φορτίο ενεργεί ακριβώς στον άξονα της ράβδου.
- 3) Το υλικό είναι ισότροπο, δηλαδή έχει τις ίδιες ιδιότητες σε εφελκυσμό και θλίψη.



Σχ. 3.1γ.

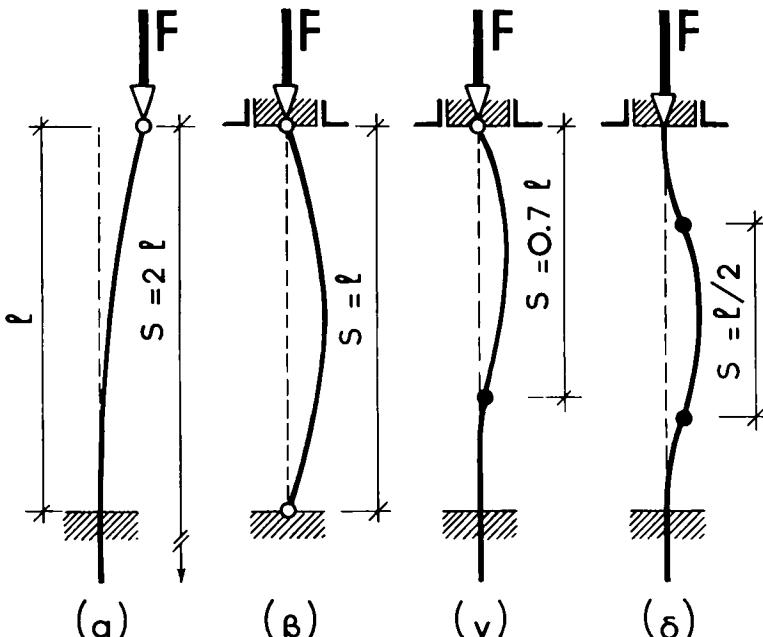
Οι θεωρητικές αυτές παραδοχές, ιδιαίτερα η 1 και 2, δεν μπορούν να επιτευχθούν στην πράξη. Χωρίς αυτές όμως δεν είναι δυνατό να αντιμετωπισθεί με προσιτά μαθηματικά μέσα το πρόβλημα του λυγισμού. Γι' αυτό οι κανονισμοί στην περίπτωση του λυγισμού προβλέπουν μεγαλύτερους, από ότι συνήθως, συντελεστές ασφαλείας.

3.2 Λυγισμός στην ελαστική περιοχή - Τύπος του Euler.

Εκτός από τις τρεις παραδοχές, που αναφέραμε παραπάνω, δεχόμαστε ότι ισχύει και ο νόμος του Hooke. Αυτό σημαίνει ότι η τάση $\sigma_k = F_k/A$, που αναπτύσσεται στο υλικό, όταν ενεργεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού F_k , είναι μικρότερη από την τάση σ_F του ορίου αναλογίας $\sigma \leq \sigma_F$. Άρα η σ_k βρίσκεται στην ελαστική περιοχή του διαγράμματος τάσεων-μηκώνσεων.

Εξετάζομε ως πρώτη περίπτωση μια ιδανικά ευθύγραμμη ράβδο με μήκος l , που στηρίζεται στα άκρα της με αρθρώσεις [σχ. 3.1γ και 3.2α(β)]. Η διατομή της είναι σ' όλο το μήκος σταθερή με την ίδια ροπή αδρανείας, για όλους τους κεντροβαρικούς άξονες. Η ράβδος φορτίζεται με ένα ιδανικά αξονικό φορτίο και ζητείται να υπολογισθεί η τιμή F_k , για την οποία το φορτίο αυτό γίνεται κρίσιμο. Πριν 240 χρόνια υπολογίσθηκε από τον Euler, ως καθαρά μαθηματικό πρόβλημα, το κρίσιμο αυτό φορτίο λυγισμού και γι' αυτό ο παρακάτω τύπος φέρει το όνομά του.

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3.1)$$



$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \frac{2\pi^2 EI}{l^2} \quad \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

Σχ. 3.2α.

Ο Euler ερεύνησε τέσσερις περιπτώσεις, οι οποίες διαφέρουν στον τρόπο στηρίζεως των άκρων της ράβδου και γι' αυτό έχουν διαφορετικό κρίσιμο φορτίο.

Περίπτωση 1: Η ράβδος στο ένα άκρο είναι πακτωμένη και στο άλλο ελεύθερη [σχ. 3.2α(α)].

Περίπτωση 2: Η ράβδος είναι αμφιαρθρωτή. Η μία άρθρωση μπορεί να μετακινηθεί κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου [σχ. 3.2α(β)].

Περίπτωση 3: Η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο. Στο άλλο έχει άρθρωση που μπορεί να μετακινηθεί κατά τον άξονα της ράβδου [σχ. 3.2α(γ)].

Περίπτωση 4: Η ράβδος είναι αμφίπακτη. Η μία πάκτωση μπορεί να μετακινηθεί κατά τον άξονα της ράβδου [σχ. 3.2α(δ)].

Στο σχήμα 3.2α δίνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού κάθε περιπτώσεως και η ελαστική γραμμή της ράβδου κάτω απ' αυτό το φορτίο.

Βλέπομε ότι στην περίπτωση 1 η ράβδος έχει την ίδια ελαστική γραμμή, όπως το επάνω μισό μιας αμφιαρθρωτής ράβδου με μήκος $2l$. Από αυτό το δεδομένο μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα, που βέβαια επιβεβαιώνεται από το θεωρητικό υπολογισμό, ότι το κρίσιμο φορτίο F_k προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση αν τεθεί αντί του l το διπλάσιο μήκος της ράβδου $2l$, οπότε λαμβάνεται:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (3.2)$$

Το κρίσιμο φορτίο της περιπτώσεως 1 ισούται με το ένα τέταρτο της 2 και γι' αυτό στην πράξη τα υποστυλώματα τέτοιας μορφής απαιτουν ιδιαίτερη προσοχή.

Από το σχήμα 3.2α βλέπομε ότι τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και για τις άλλες δύο περιπτώσεις, που εξέτασε ο Euler, διαφέρουν από τα προηγούμενα μόνο κατά ένα αριθμητικό συντελεστή. Μπορούμε επομένως τις τέσσερις περιπτώσεις να τις αντιμετωπίσουμε με ένα τύπο. Για να το πετύχομε αυτό αρκεί αντί να θέσουμε το πραγματικό μήκος της ράβδου l , να δημιουργήσουμε μια νέα έννοια, το **μήκος λυγισμού**.

$$s = \beta \cdot l \quad (3.3)$$

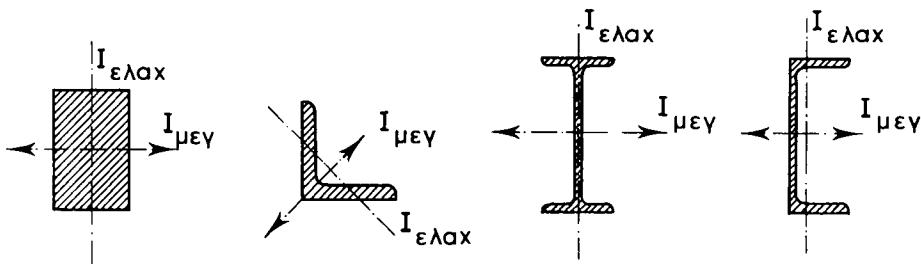
Το μήκος λυγισμού s είναι το πραγματικό μήκος l πολλαπλασιασμένο με ένα συντελεστή β , ο οποίος εξαρτάται **μόνο** από τις συνθήκες στηρίξεως της ράβδου.

Τότε και οι τέσσερις περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με ένα ενιαίο τύπο:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{s^2} \quad (3.4)$$

Επομένως το κρίσιμο φορτίο λυγισμού εξαρτάται από το υλικό (μέτρο ελαστικότητας E), από τις διαστάσεις και τη μορφή της διατομής (ροπή αδρανείας I) και τέλος από το μήκος της ράβδου και τον τρόπο στηρίξεως στα άκρα της (μήκος λυγισμού s).

Η κάμψη της θλιβόμενης ράβδου θα γίνει προς τη διεύθυνση, κατά την οποία η ράβδος είναι περισσότερο εύκαμπτη. Αν π.χ. εφαρμόσουμε κεντρικό φορτίο πάνω σε ένα ταυ σχεδιάσεως, αυτό θα λυγίσει κάθετα προς τη μεγαλύτερη διάσταση της διατομής του. Γι' αυτό στον τύπο του Euler ως ροπή αδρανείας εισέρχεται η ελάχιστη ροπή αδρανείας της διατομής $I_{\text{ελαχ}}$ (σχ. 3.2β).



Σχ. 3.28.

3.3 Ακτίνα αδρανείας - Λυγηρότητα.

Ακτίνα αδρανείας μιας διατομής ονομάζομε το βοηθητικό μέγεθος:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.5)$$

όπου I η ροπή αδρανείας της διατομής ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα και A το εμβαδόν της. Η ακτίνα αδρανείας εκφράζεται συνήθως σε cm δηλαδή:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{cm^4}{cm^2}} = \sqrt{cm^2} = cm$$

Για μία ορθογωνική διατομή με διαστάσεις $b \times d$, η ακτίνα αδρανείας ως προς τους άξονες συμμετρίας x και y είναι αντίστοιχα:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bd^3}{12(bd)}} = \frac{d}{\sqrt{12}} = 0,289 d \text{ και} \quad (3.6)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{b^3d}{12(bd)}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,289 b \quad (3.7)$$

Για μια κυκλική διατομή με διάμετρο d :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{d}{4} = 0,25 d \quad (3.8)$$

Λυγηρότητα μιας ράβδου είναι ο λόγος:

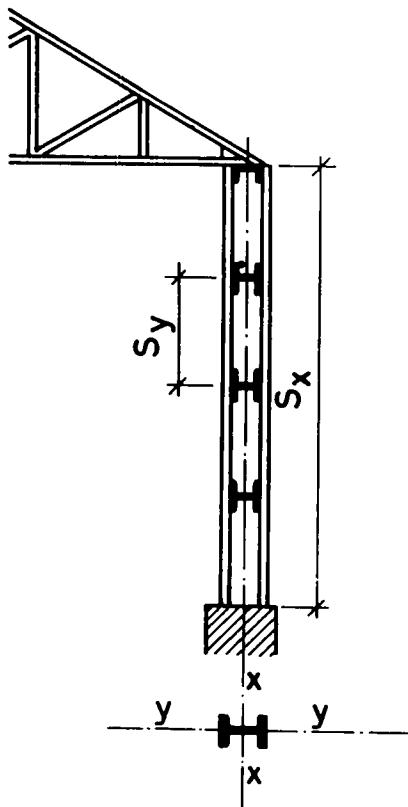
$$\lambda = \frac{s}{i} \quad (3.9)$$

όπου s το μήκος λυγισμού της ράβδου και i η ακτίνα αδρανείας της διατομής της.

Η λυγηρότητα είναι αριθμός καθαρός, αδιάστατος και εκφράζει την ευαισθησία της ράβδου σε λυγισμό.

Η λυγηρότητα λεξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία της ράβδου, δηλαδή το μήκος της ράβδου και τον τρόπο στηρίξεως (από όπου προκύπτει το μήκος λυγισμού s), καθώς και τη μορφή και διαστάσεις της διατομής (από όπου προκύπτει η ακτίνα αδρανείας $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$).

Για μία και την αυτή ράβδο είναι δυνατόν να έχομε διαφορετικά μήκη λυγισμού, όταν η ράβδος έχει ενδιάμεσα πλευρικά στηρίγματα (σχ. 3.3) κατά τη μία ή την άλλη έννοια.



Σχ. 3.3α.

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ελέγχεται η λυγηρότητα κατά τις δύο διευθύνσεις:

$$\lambda_x = \frac{s_x}{i_x} \quad (3.10)$$

$$\lambda_y = \frac{s_y}{l_y} \quad (3.11)$$

Αποφασιστική για το λυγισμό της ράβδου θα είναι πάντοτε η μεγαλύτερη από τίς λ_x , λ_y , γιατί κάθετα στον αντίστοιχο άξονα θα λυγίσει η ράβδος.

3.4 Κρίσιμη τάση λυγισμού - Οριακή λυγηρότητα.

Από το γενικό τύπο του Euler:

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot EI}{s^2}$$

μπορούμε να εκφράσουμε την τάση που αναπτύσσεται στη ράβδο, όταν αυτή αναλαμβάνει το κρίσιμο φορτίο.

Η τάση:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{A \cdot s^2} \quad (3.12)$$

ονομάζεται **κρίσιμη τάση λυγισμού**.

Ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot EI}{A \cdot s^2} = \frac{\pi^2 E}{s^2} \cdot \frac{I}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{s^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{s}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (3.13)$$

Από τον τύπο (3.13), που αποτελεί άλλη μορφή του τύπου του Euler, βλέπομε ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού για ένα υλικό με μέτρο ελαστικότητας E εξαρτάται **μόνο** από τη λυγηρότητα της ράβδου και είναι εντελώς ανεξάρτητη από την τάση θραύσεως του υλικού.

Αναφέραμε ότι ο τύπος του Euler ισχύει όταν η κρίσιμη τάση λυγισμού σ_k είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας δηλαδή $\sigma_k \leq \sigma_p$. Για $\sigma_k > \sigma_p$ δεν ισχύουν πλέον οι τύποι (3.1) ή (3.4) ή (3.13).

Το όριο ισχύος καθορίζεται, όταν $\sigma_k = \sigma_p$, δηλαδή:

$$\sigma_k = \sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2}$$

απ' όπου προκύπτει η οριακή λυγηρότητα:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (3.14)$$

Για κάθε υλικό με δεδομένο το E και το σ_p είναι εύκολο να υπολογίσουμε την οριακή αυτή λυγηρότητα λ_p .

Π.χ. για τον χάλυβα St 37 με $E = 2.100.000 \text{ kp/cm}^2$ και $\sigma_p = 1920 \text{ kp/cm}^2$ λαμβάνεται:

$$\lambda_P = 3,14 \sqrt{\frac{2100}{1,92}} \cong 104 \approx 100$$

για το ξύλο με $E = 100000 \text{ kp/cm}^2$ και $\sigma_P = 100 \text{ kp/cm}^2$ προκύπτει:

$$\lambda_P = 3,14 \sqrt{\frac{100000}{100}} \cong 100.$$

Συμπέρασμα:

Για τιμές λυγηρότητας λ μεγαλύτερες ή τουλάχιστον ίσες της λ_P η $\sigma_K \leq \sigma_P$ δηλαδή ισχύει ο νόμος του Hooke. Ο λυγισμός συμβαίνει στην ελαστική περιοχή επομένων ο υπολογισμός γίνεται με τον τύπο του Euler.

Όταν όμως το $\lambda < \lambda_P$ τότε το $\sigma_K > \sigma_P$, οπότε δεν ισχύει πλέον ο νόμος του Hooke. Ο λυγισμός γίνεται στην πλαστική περιοχή.

3.5 Λυγισμός στην πλαστική περιοχή - Τύπος Tetmajer.

Ο υπολογισμός γίνεται με βάση εμπειρικούς τύπους, οι οποίοι στηρίζονται στα αποτελέσματα μεγάλου αριθμού πειραμάτων που πραγματοποίησε ο Tetmajer. Με τα πειράματα αυτά επαληθεύθηκε σύγχρονα η ορθότητα του τύπου του Euler για την ελαστική περιοχή.

Για την πλαστική περιοχή η κρίσιμη τάση λυγισμού δίνεται από τον ακόλουθο εμπειρικό τύπο:

$$\sigma_K = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (3.15)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1
Τάσεις λυγισμού σε kp/cm²

Υλικό	Λυγισμός στην πλαστική περιοχή (Tetmajer)		Λυγισμός στην ελαστική περιοχή (Euler)	
	Περιοχή ισχύος	Εξίσωση του σ_K	Περιοχή ισχύος	$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$
St 37	$0 < \lambda < 60$	$\sigma_K = 2400$	$\lambda > 104$	$\sigma_K = \frac{2070}{\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2}$
	$60 < \lambda < 104$	$\sigma_K = 3100 - 11,4\lambda$		
St 60	$0 < \lambda < 88$	$\sigma_K = 3350 - 6,2\lambda$	$\lambda > 88$	
Xυοσιδηρός GG 18	$0 < \lambda < 80$	$\sigma_K = 7760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2$	$\lambda > 80$	$\sigma_K = \frac{987}{\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2}$
Ξύλο	$0 < \lambda < 100$	$\sigma_K = 293 - 1,94\lambda$	$\lambda > 100$	$\sigma_K = \frac{99}{\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2}$

Οι συντελεστές a , b και c είναι σταθερές του υλικού, που περιέχονται στον Πίνακα 3.5.1.

3.6 Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως – Υπολογισμός κατά Euler ή Tetmajer.

Η κρίσιμη τάση λυγισμού σ_k που υπολογίζεται με βάση τους τύπους του Euler ή του Tetmajer δεν είναι προφανώς επιτρεπόμενη τάση. Όσο μικρή και να προκύπτει η σ_k και μπορεί να προκύψει πολύ μικρή για μεγάλη λυγηρότητα λ , ισοδυναμεί πρακτικά με τάση θραύσεως. Πρέπει συνεπώς να διαιρεθεί με ένα συντελεστή ασφαλείας γ για να λάβομε την επιτρεπόμενη τάση θλίψεως για την υπόψη λυγηρότητα:

$$\sigma_{\text{λεπ}} = \frac{\sigma_k}{\gamma} \quad (3.16)$$

Πώς γίνεται τώρα η διαστασιολόγηση μιας ράβδου σε λυγισμό.

Στις πρακτικές εφαρμογές γνωστά είναι το θλιπτικό φορτίο F , το χρησιμοποιούμενο υλικό, άρα το E και ο συντελεστής ασφαλείας γ . Ζητείται να καθορισθεί η διατομή.

Η απαιτούμενη ροπή αδρανείας της άγνωστης ακόμη διατομής μπορεί να υπολογισθεί απ' ευθείας μόνο με τον τύπο του Euler. Ο τύπος του Tetmajer περιλαμβάνει στο δεύτερο μέλος του την λυγηρότητα λ , απαιτείται επομένως να γνωρίζουμε από την αρχή την ακτίνα αδρανείας i , άρα τη διατομή. Γι' αυτό ξεκινάμε πάντα με τον τύπο του Euler ορίζοντας το φορτίο F (σο προς το πηλίκο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού δια του συντελεστή ασφαλείας:

$$F = \frac{F_k}{\gamma} = \frac{\pi^2 \cdot E I}{\gamma s^2}$$

Λύνοντας αυτόν τον τύπο ως προς I έχουμε την ελάχιστη ροπή αδρανείας της διατομής, που απαιτείται:

$$I_{\text{απαιτ}} = \frac{\gamma \cdot F \cdot s^2}{\pi^2 E}$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη διατομή.

Ο τύπος του Euler όμως που χρησιμοποιήσαμε για τη διαστασιολόγηση προϋποθέτει ότι ο λυγισμός γίνεται στην ελαστική περιοχή. Πρέπει συνεπώς τώρα να ελέγξουμε αν αυτό πραγματικά συμβαίνει. Για το σκοπό αυτό υπολογίζομε την $\lambda = s/i$.

Αν αυτή η $\lambda \geq \lambda_p$ π.χ. του 100 για το χάλυβα και το ξύλο η διαστασιολόγηση είναι σωστή και γίνεται δεκτή η διατομή που επιλέξαμε.

Αν όμως προκύψει η $\lambda < \lambda_p$, αυτό σημαίνει ότι η σ_k βρίσκεται στην πλαστική περιοχή, οπότε η διαστασιολόγηση πρέπει να γίνει κατά Tetmajer. Στην περίπτωση αυτή ξεκινάμε συνήθως με την λ και την διατομή, που βρέθηκαν κατά Euler και υπολογίζομε:

$$\sigma_k = a - b\lambda + c\lambda^2$$

$$\sigma_k = \sigma_{\lambda \text{ επ}} A \quad \text{και} \quad \gamma_{\text{υπ}} = \frac{F_k}{F} \geq \gamma_{\text{επ}}$$

Αν προκύψει $\gamma_{\text{υπ}} < \gamma_{\text{επ}}$, τότε η διατομή που εκλέξαμε είναι μικρή και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Απαιτείται να μεγαλώσουμε τη διατομή και να επαναλάβουμε την διαστασιολόγηση κατά Tetmajer.

Παράδειγμα.

Να υπολογισθεί ράβδος θλιβόμενης μηχανής από χάλυβα St 52, που δέχεται φορτίο $F = 60 \text{ Mp}$. Το μήκος λυγισμού της ράβδου είναι $s = 1,50 \text{ m}$, η διατομή είναι τετραγωνική και θα ληφθεί συντελεστής ασφαλείας $\gamma = 5$ $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

Κατ' αρχήν θα πάρομε από τον τύπο του Euler:

$$I_{\text{απαιτ}} = \frac{\gamma F s^2}{\pi^2 E} = \frac{5 \cdot 60000 \cdot 150^2}{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 326 \text{ cm}^4 = \frac{d^4}{12}$$

$$d^4 = 3912 \text{ cm}^4 \quad \text{και} \quad d = 7,9 \text{ cm}$$

Έχουμε $d = 8 \text{ cm}$. Η ακτίνα αδρανείας της τετραγωνικής διατομής με πλευρά d είναι:

$$i = \sqrt{\frac{d^4 / 12}{d^2}} = \frac{d}{\sqrt{12}} = 0,289 d = 2,31 \text{ cm}$$

και η λυγηρότητα:

$$\lambda = \frac{s}{i} = \frac{150}{2,31} = 65 < 100$$

Επομένως βρισκόμαστε έξω από την περιοχή που ισχύει ο τύπος Euler. Χρησιμοποιούμε τον τύπο Tetmajer για St 52:

$$\sigma_k = 3350 - 6,2\lambda$$

Θέτομε $\lambda = 65$ και έχομε:

$$\sigma_k = 3350 - 6,2 \cdot 65 = 2947 \text{ kp/cm}^2$$

Η επιτρεπόμενη τάση λυγισμού θα είναι:

$$\sigma_{\lambda \text{ επ}} = \frac{\sigma_k}{5} = \frac{2947}{5} = 589 \text{ kp/cm}^2$$

Θα απαιτηθεί άρα εμβαδόν διατομής:

$$A_{\text{απαιτ}} = \frac{F}{\sigma_{\lambda \text{ επ}}} = \frac{60000}{589} = 101,8 \text{ cm}^2$$

Η διατομή που πήραμε 8×8 δεν επαρκεί. Παίρνομε νέα διατομή $d = 10 \text{ cm}$. Θα έχομε:

$$i = 0,289 \text{ d} = 2,89 \text{ cm}$$

και

$$\lambda = \frac{150}{2,89} \approx 52 < 60$$

Ο τύπος του Tetmajer για το σ_k που πήραμε ισχύει για τιμές λ μεταξύ 60 και 100. Για $\lambda \leq 60$ ισχύει $\sigma_k = 3200 \text{ kp/cm}^2$ (το όριο διαρροής). Θα είναι:

$$\sigma_{\lambda \text{ επ}} = \frac{3200}{5} = 640 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

$$A_{\text{απαιτ}} = \frac{60000}{640} = 93,8 \text{ cm}^2$$

$$d_{\text{απαιτ}} = \sqrt{93,8} \approx 9,7 \text{ cm}$$

Άρα επαρκέ η διατομή $10 \times 10 \text{ cm}$.

3.7 Μέθοδος των συντελεστών ω .

Για τη διαστασιολόγηση των θλιβομένων ράβδων από χάλυβα και ξύλο αναπτύχθηκε ενιαία μέθοδος, που βασίζεται στα δσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα. Με τις παραπάνω εξισώσεις είναι δυνατό να υπολογισθεί για κάθε υλικό και για κάθε λυγηρότητα λ η αριθμητική τιμή της κρίσιμης τάσεως λυγισμού σ_k . Κατά τις παραπάνω εξισώσεις ισχύει για την ελαστική περιοχή:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

και για την πλαστική περιοχή:

$$\sigma_k = a - b\lambda + c\lambda^2$$

Διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο περιοχών είναι η οριακή λυγηρότητα:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

Ο συντελεστής ασφαλείας γ προδιαγράφεται από τους Κανονισμούς, οπότε μπορεί να υπολογισθεί για κάθε λυγηρότητα η επιτρεπόμενη θλιπτική τάση:

$$\sigma_{\lambda \text{ επ}} = \frac{\sigma_k}{\gamma}$$

Ο έλεγχος των τάσεων θα περιορίζοταν στη διαπίστωση:

$$\hat{\sigma} = \frac{F}{A} \leqq \sigma_{\lambda \text{ επ}}$$

Η επιτρεπόμενη δύμως θλιππική τάση, λόγω του λυγισμού σλ επ, είναι μεταβλητή και πρέπει να υπολογίζεται κάθε φορά ως συνάρτηση της λυγηρότητας λ. Η κοπιαστική αυτή διαδικασία παρακάμπτεται με τη μέθοδο των συντελεστών ω.

Τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας μπορούμε να τα πολλαπλασιάσουμε με το θετικό αριθμό $\sigma_{επ}$ που είναι η επιτρεπόμενη τάση θλίψεως χωρίς λυγισμό (Κεφ. 2, Πρώτου μέρους) και να μεταφέρουμε ύστερα το $\sigma_{επ}$ στο πρώτο μέλος:

$$\frac{F}{\sigma_{επ}} \leq \sigma_{λ \text{ επ. }} \cdot \sigma_{επ}$$

$$\frac{F}{A} \cdot \frac{\sigma_{επ}}{\sigma_{λ \text{ επ. }}} := \sigma_{επ}$$

Το λόγο

$$\frac{\sigma_{επ}}{\sigma_{λ \text{ επ. }}} =$$

ονομάζομε ω, γι' αυτό και η μέθοδος αυτή διαστασιολογήσεως πήρε το όνομα **μέθοδος συντελεστών ω**:

$$\omega = \frac{\sigma_{επ}}{\sigma_{λ \text{ επ. }}} \quad (3.17)$$

Ο συντελεστής ω είναι ο λόγος της κανονικής επιτρεπόμενης θλιππικής τάσεως του υλικού προς την επιτρεπόμενη θλιππική τάση, όταν λαμβάνεται υπόψη ο λυγισμός. Είναι επομένως για κάθε υλικό και λυγηρότητα διαφορετικός. Οι αριθμητικές τιμές του ω δίνονται για κάθε υλικό χωριστά από τους Κανονισμούς σε πίνακες (βλέπε Παράρτημα) και είναι βέβαια πάντοτε $\omega \geq 1$. Άρα δεν χρειάζεται να αναζητείται αν θα εφαρμοσθούν οι τύποι της ελαστικής ή πλαστικής περιοχής, γιατί αυτό έγινε όταν καταρτίσθηκαν οι Πίνακες με τις τιμές του ω. Πρέπει απλά και μόνο να ελεγχθεί αν:

$$\sigma = \omega \frac{F}{A} \leq \sigma_{επ} \quad (3.18)$$

Η διαστασιολόγηση μιας θλιβόμενης ράβδου από χάλυβα ή ξύλο γίνεται με την παραπάνω απλή σχέση, όπου η θλιππική τάση που πραγματικά υπάρχει πολλαπλασιάζεται με το συντελεστή ω. Η προηγούμενη εξίσωση δεν προσδιορίζει την τάση που πραγματικά υπάρχει, αλλά ελέγχει αν η ράβδος είναι ευσταθής. Γι' αυτό σωστό είναι να λέμε ότι δεν κάνουμε έλεγχο τάσεων αλλά έλεγχο ευσταθείας. Την εξίσωση δεν μπορούμε να τη λύσουμε ως προς Α και να καθορίσουμε έτσι τη διατομή, και τούτο γιατί ο συντελεστής ω είναι συνάρτηση της λυγηρότητας, συνεπώς της ροπής αδρανείας της διατομής που ζητούμε.

Η διαστασιολόγηση στην πράξη γίνεται κατά τον ακόλουθο τρόπο.

Δίνονται: η θλιππική δύναμη F της ράβδου και το μήκος της l .

Εκλέγεται: η διατομή με το εμβαδόν της A και την ακτίνα αδρανείας i .

Καθορίζονται:

1. Το μήκος λυγισμού $s = \beta \cdot l$

2. Η λυγηρότητα

$$\lambda = \frac{s}{i} \quad \text{ή} \quad \lambda_x = \frac{s_x}{i_x} \quad \text{και}$$

$$\lambda_y = \frac{s_y}{i_y}$$

3. Ο συντελεστής ω ως συνάρτηση του λ από Πίνακες.
4. Ο έλεγχος

$$\sigma = \omega \frac{F}{A} \leq \sigma_{\text{ep}}$$

Αν $\sigma > \sigma_{\text{ep}}$, πρέπει να εκλεγεί νέα μεγαλύτερη διατομή και να επαναληφθεί ο υπολογισμός.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στη διαστασιολόγηση οικοδομικών έργων, γεφυρών και γερανών. Η διαστασιολόγηση σε λυγισμό τμημάτων μηχανών γίνεται με τη βοήθεια των τύπων λυγισμού της παραγράφου 3.4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Παράδειγμα 1.

Τετραγωνική ράβδος από χάλυβα St 37 με διατομή $5 \times 5 \text{ cm}$ και μήκος 100 cm , είναι πακτωμένη στο κάτω άκρο και ελεύθερη στο επάνω. Πόσο είναι το φορτίο που μπορεί να αναλάβει σε θλίψη:

A) Με τους τύπους λυγισμού, αν ο συντελεστής ασφαλείας είναι $\gamma = 2,5$;

B) Με τη μέθοδο ω, αν η επιτρεπόμενη τάση σε απλή θλίψη είναι $\sigma_{\text{ep}} = 1400 \text{ kp/cm}^2$;

Λύση.

A) Με τους τύπους λυγισμού:

Ακτίνα αδρανείας:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5^3}{12 \cdot 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{12}} \cong 1,45 \text{ cm}$$

Μήκος λυγισμού:

$$s = 2i = 200 \text{ cm}$$

Λυγηρότητα:

$$\lambda = \frac{s}{i} = \frac{200}{1,45} = 137,9 > 100$$

Άρα ισχύει ο τύπος του Euler:

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot EI}{s^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{(200)^2} \cdot \frac{5^4}{12} \cong 27000 \text{ kp}$$

Δηλαδή το κρίσιμο φορτίο είναι 27000 kp και για το συντελεστή ασφαλείας $\gamma = 2,5$ προκύπτει:

$$F_{\omega\phi} = \frac{F_k}{\gamma} = \frac{27000}{2,5} = 10800 \text{ kp}$$

B) Με τη μέθοδο ω :

Γιά $\lambda = 138$ από τον πίνακα που αντιστοιχεί σε χάλυβα St 37 βρίσκομε $\omega = 3,22$.

Άρα:

$$\sigma_{un} = \frac{F_\omega}{A} \leq \sigma_{ep} = 1400 \text{ kp/cm}^2$$

και

$$F \leq \frac{1400 A}{\omega} = \frac{1400 \times 25}{3,22} = 10870 \text{ kp}$$

Παράδειγμα 2.

Στύλος από χάλυβα St 37, μορφής IPB, αμφιαρθρωτός, ύψους 2,80 m, φέρει φορτίο $F = 35 \text{ Mp}$. Να βρεθεί η διατομή. Δίνεται $\sigma_{ep} = 1400 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

Αν δεν υπήρχε κίνδυνος λυγισμού η διατομή του στύλου θα ήταν:

$$A = \frac{35000}{1400} = 25 \text{ cm}^2$$

Επειδή υπάρχει κίνδυνος λυγισμού εκλέγομε ράβδο IPB 140 με $A \approx 43 \text{ cm}^2$, $i_x \approx 5,9 \text{ cm}$, $i_y = 3,58 \text{ cm}$, $s = 2,80 \text{ m}$ (αμφιαρθρωτή)

Ελέγχομε μόνο κατά τη διεύθυνση i_y (δυσμενέστερη, γιατί $i_y < i_x$) οπότε:

$$\lambda = \frac{s}{i_y} = \frac{280}{3,58} = 78,2 \quad \omega = 1,52$$

$$\sigma = \frac{F\omega}{A} = \frac{35000 \times 1,52}{43} = 1237,2 \text{ kp/cm}^2 < 1400$$

Αν πάρομε την αμέσως μικρότερη διατομή IPB 120 έχομε:
 $A = 34 \text{ cm}^2$, $i_y = 3,06 \text{ cm}$,

$$\lambda = \frac{280}{3,06} = 91,5,$$

$$\omega = 1,73$$

$$\sigma = \frac{F\omega}{A} = \frac{35000 \times 1,73}{34} = 1780,9 \text{ kp/cm}^2 > 1400,$$

άρα ορθά πήγαμε IPB 140.

Παράδειγμα 3.

Αμφιαρθρωτός στύλος από χάλυβα St 37, ύψους 3,50 m, φέρει φορτίο 69 Mp. Πόση είναι η διατομή IPB, την οποία πρέπει να έχει ο στύλος, αν στο μέσο του ύψους του συγκρατείται από οριζόντια δοκίδα κατά τη μία διεύθυνση. Δίνεται $\sigma_{\text{επ}} = 1400 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

$$s_x = h = 3,50 \text{ m}$$

$$s_y = \frac{h}{2} = 1,75 \text{ m}$$

Ελάχιστη διατομή χωρίς κίνδυνο λυγισμού:

$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{69000}{1400} = 49,3 \text{ cm}^2$$

Εκλέγομε IPB 180 μέ $A = 65,3 \text{ cm}^2$, $i_x = 7,66 \text{ cm}$, $i_y = 4,57 \text{ cm}$,

$$\lambda_x = \frac{s_x}{i_x} = \frac{350}{7,66} = 45,7$$

$$\lambda_y = \frac{s_y}{i_y} = \frac{175}{4,57} = 38,3$$

Ο έλεγχος γίνεται κατά τη διεύθυνση της μεγαλύτερης λυγηρότητας $\omega_x = 1,18$

$$\sigma = \frac{F\omega}{A} = \frac{69000 \times 1,18}{65,3} = 1246,9 \text{ kp/cm}^2 < 1400.$$

Ασκήσεις για λύση.

1. Με ποιο φορτίο μπορεί να φορτισθεί κατακόρυφα στύλος από χυτοσίδηρο με εξωτερική διάμετρο 240mmπάχους 24 mm και ύψος λυγισμού 4,25 m. Δίνεται $\sigma_{\text{επ}} = 900 \text{ kp/cm}^2$ σε απλή θλίψη.
2. Αμφιαρθρωτός στύλος με κυκλική διατομή 10 cm και μήκος 3 m υποβαστάζει φορτίο 4,5 Mp. Με τι συντελεστή ασφαλείας εργάζεται και ποια η λυγηρότητά του; Δίνεται $E = 2100000 \text{ kp/cm}^2$.

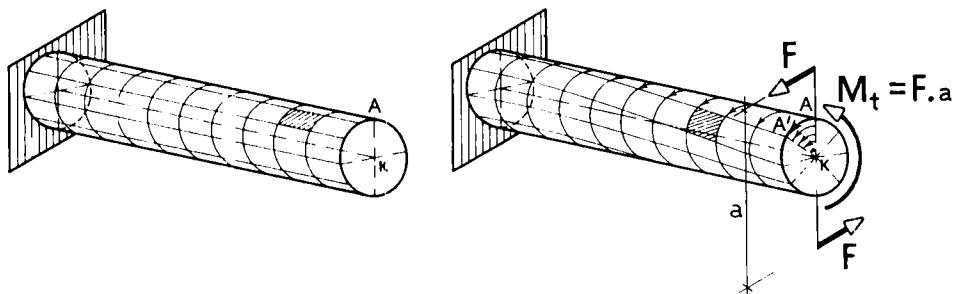
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΣΤΡΕΨΗ

4.1 Γενικά – Παραδείγματα.

Ράβδος με ευθύγραμμο άξονα λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη, όταν ενεργεί πάνω σ' αυτή ροπή, της οποίας το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονά της (σχ. 4.1α). Η ροπή αυτή ονομάζεται **ροπή στρέψεως** και συμβολίζεται ως M_t (t από τη λέξη torsion = στρέψη).

Η δράση της ροπής στρέψεως προκαλεί την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων τ_t πάνω στις διατομές της ράβδου και παραμορφώσεων, που εκδηλώνονται ως στροφή των διατομών μεταξύ τους [σχ. 4.1α]. Η ράβδος στρέφεται περι ένα άξονα στροφής, που προκειμένου για μία διπλά συμμετρική διατομή, είναι ο κεντροβαρικός της άξονας. Το σημείο τομής του άξονα αυτού με τη διατομή είναι το **μόνο**, που δεν μετακινείται και ονομάζεται **κέντρο στροφής**.



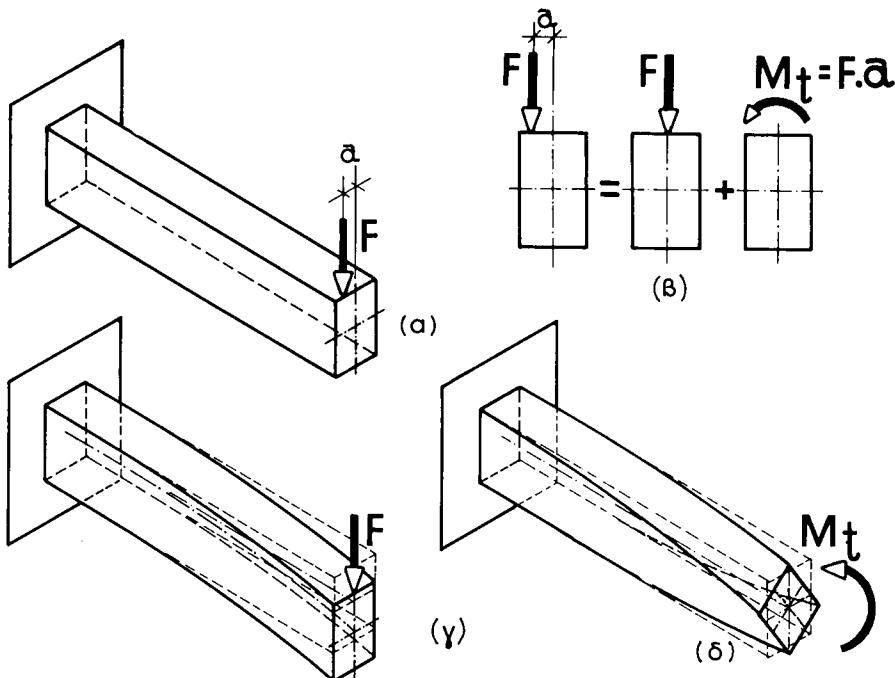
Σχ. 4.1α.

Κατά τη μελέτη του φαινομένου της στρέψεως ζητούμε:

- 1) Τον προσδιορισμό των διατμητικών τάσεων, οι οποίες, για διάκριση, ονομάζονται ειδικότερα τάσεις στρέψεως τ_t .
- 2) Τον υπολογισμό της γωνίας στροφής των διατομών ϕ .

— Παραδείγματα καταπονήσεως σε στρέψη.

Έστω ένας πρόβολος με ορθογωνική διατομή, που φορτίζεται με τη δύναμη F , η οποία δεν βρίσκεται μέσα στο επίπεδο συμμετρίας [σχ. 4.1β(α)]. Η δύναμη αυτή μπορεί να αντικατασταθεί, όπως γνωρίζομε από τη στατική, από μία δύναμη F , που διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής, και μία ροπή $M_t = F \cdot a$ [σχ. 4.1β(β)].



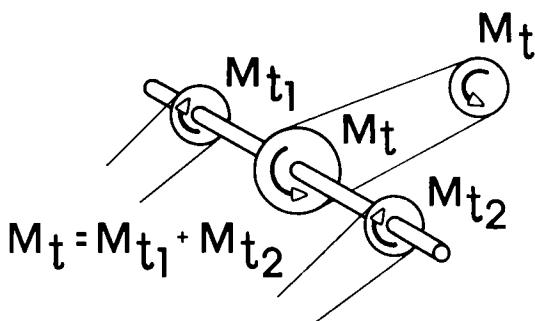
Σχ. 4.1β.

Η ροπή αυτή, που το επίπεδό της είναι κάθετο στον άξονα της ράβδου, αποτελεί **ροπή στρέψεως**.

Η δοκός αυτή πρέπει να ελεγχθεί για δύο καταπονήσεις:

- 1) Σε κάμψη ως πρόβολος, με ένα συγκεντρωμένο φορτίο στο άκρο [σχ. 4.1β (γ)], σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 1.
- 2) Σε στρέψη, όπου σ' όλο το μήκος της ράβδου επιβάλλεται η ίδια ροπή στρέψεως $M_t = F \cdot a$ [σχ. 4.1β(δ)].

Άλλο παράδειγμα είναι οι άξονες (άτρακτοι) ως στοιχείο των μηχανών (σχ. 4.1γ). Η ροπή στρέψεως M_t παραλαμβάνεται από ένα κινητήρα και μεταφέρεται από τον άξονα σε άλλες μηχανές.



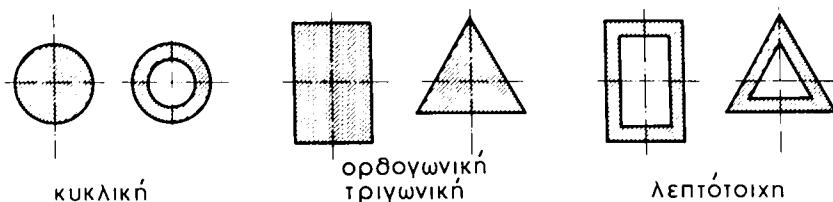
Σχ. 4.1γ.

4.2 Ιδιομορφία της στρέψεως.

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την καταπόνηση σε εφελκυσμό, θλίψη, κάμψη, τμήση και διάτμηση. Σε όλες αυτές τις καταπονήσεις οι τύποι, που καθορίζαν τις τάσεις, ήταν γενικά ανεξάρτητοι από τη μορφή της διατομής. Π.χ. οι τύποι $\sigma = N/A$ στον εφελκυσμό, $\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$ στην κάμψη, $\tau = Q/A$ στην τμήση, ισχύουν καθολικά, αδιάφορα αν η διατομή είναι κυκλική, ορθογωνική, σωληνωτή ή οποιαδήποτε άλλη.

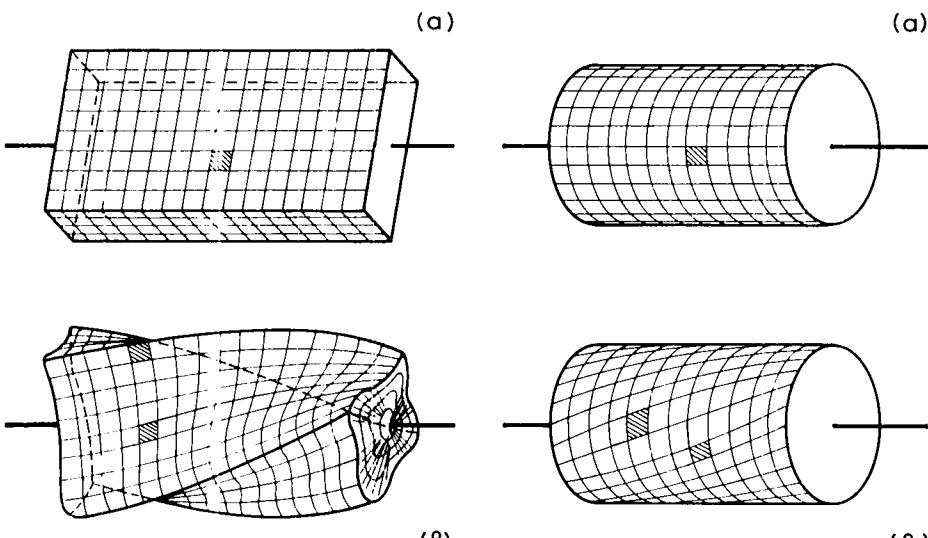
Τα προβλήματα της στρέψεως δεν είναι τόσο απλά. Οι τύποι που καθορίζουν τις τάσεις και τις παραμορφώσεις δεν είναι ανεξάρτητοι από τη μορφή της διατομής. Γι' αυτό είμαστε υποχρεωμένοι να εξετάσουμε χωριστά τις ακόλουθες τρεις κατηγορίες διατομών, δηλαδή την κυκλική, την ορθογωνική-τριγωνική και την λεπτότοιχη (σχ. 4.2a).

ΔΙΑΤΟΜΕΣ



Σχ. 4.2α.

Ταξινόμηση προβλημάτων στρέψεως διατομών.



Σχ. 4.2β.

Η διάκριση αυτή είναι απαραίτητη γιατί, όπως θα δούμε στα επόμενα, **μόνο** οι κυκλικές ή δακτυλιοειδείς διατομές στρεφομένων ράβδων μένουν επίπεδες, δηλαδή όλα τα σημεία τους κινούνται κατά τη στροφή της ράβδου σε κύκλους κάθετους στον άξονα στροφής. Αντίθετα στις ορθογωνικές διατομές τα σημεία τους κινούνται όχι μόνο κάθετα αλλά και παράλληλα προς τον άξονα της ράβδου (σχ. 4.2β).

4.3 Τύποι στρέψεως για διάφορες διατομές ράβδου.

a) Στρέψη ράβδου με κυκλική διατομή.

Η θεωρία που αναπτύσσεται παρακάτω αφορά στην απλή στρέψη ράβδου με κυκλική διατομή, που σημαίνει ότι η διατομή καταπονείται με ροπή στρέψεως μόνο και ισχύει εφ' όσον ικανοποιούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

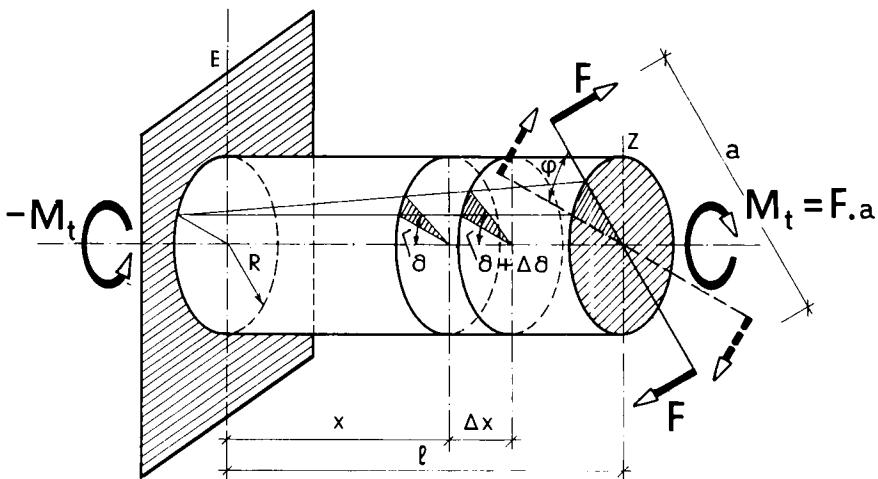
1) Η ράβδος είναι από υλικό ομοιογενές και ισότροπο.

2) Ο άξονάς της είναι ευθύγραμμος.

3) Στις ακραίες διατομές κάθετα στον άξονα της ράβδου ενεργούν δύο ίσες και αντίφορες ροπές.

Επί πλέον ισχύει το πειραματικό δεδομένο ότι:

4) Σημεία, που βρίσκονται πριν από την παραμόρφωση επάνω σε μια διατομή της ράβδου, παραμένουν και μετά την παραμόρφωση επάνω στην ίδια διατομή, δηλαδή οι διατομές παραμένουν επίπεδες. Τα σημεία μιας διατομής στρέφονται κατά την αυτή στροφή γύρω από τον άξονα και κάθε ακτίνα διατομής παραμένει ευθύγραμμη κατά τη στρέψη της ράβδου (σχ. 4.1α και 4.3α).

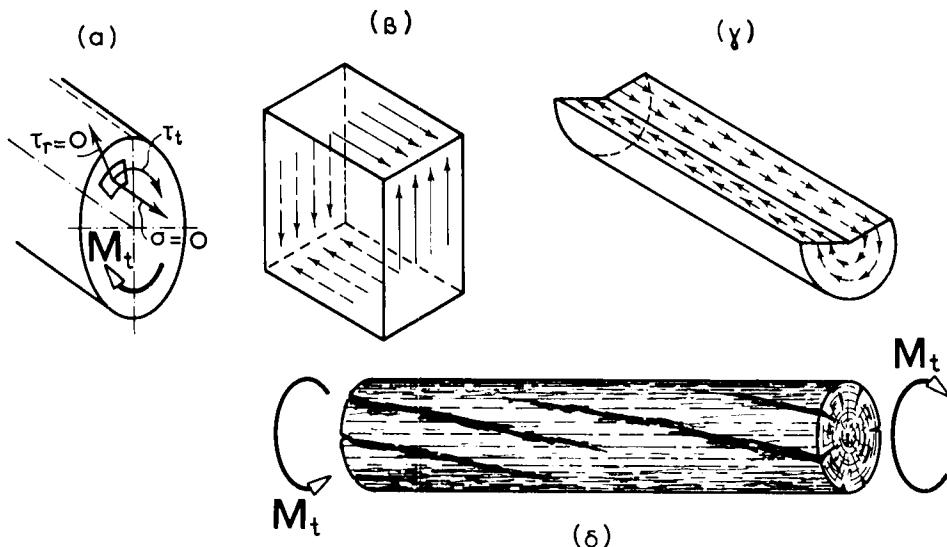


Σχ. 4.3α.

Στη διατομή του σχήματος 4.3β(a) ενεργεί ως μοναδική εσωτερική δύναμη η ροπή στρέψεως M_t . Η ροπή αυτή προκαλεί διατμητικές τάσεις τ_t κάθετες στις ακτίνες των κύκλων με κέντρο το σημείο στροφής. Διατμητικές τάσεις τ_t κατά τη διεύθυνση των ακτίνων και ορθές τάσεις σ δέν μπορούν να αναπτυχθούν, όπως

αποδεικνύει η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας [σχ. 4.3β(α)]. Οι διατμητικές τάσεις, όπως αναφέρθηκε και στη διάτμηση, εμφανίζονται πάντοτε σε ζεύγη, σε δύο κάθετες μεταξύ τους τομές που είναι ίσες και διευθύνονται όπως δείχνει το σχήμα 4.3β(β).

Αν κόβαμε τη ράβδο παράλληλα προς τον άξονά της, θα παρατηρούσαμε ότι στις διατμητικές τάσεις τ_t , που αναπτύσσονται στη διατομή, αντιστοιχούν διατμητικές τάσεις κατά μήκος της ράβδου, που καταπονούν το υλικό παράλληλα προς τον άξονα [σχ. 4.3β(γ)]. Αυτές οι διαμήκεις διατμητικές τάσεις ενδέχεται να καταστρέψουν τη ράβδο, αν είναι κατασκευασμένη από ένα ανισότροπο υλικό, δηλαδή υλικό που δεν έχει την ίδια αντοχή σε όλες τις διευθύνσεις, όπως π.χ. είναι το ξύλο, που έχει μικρή διατμητική αντοχή παράλληλα προς τις ίνες του [σχ. 4.3β(δ)].



Σχ. 4.3β.

Εάν ϕ είναι η γωνία στροφής, με την οποία στρέφεται διατομή που βρίσκεται σε απόσταση l από σταθερό άκρο (σχ. 4.3γ), η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους ϕ_1 , θα

είναι $\phi_1 = \frac{\Phi}{l}$ και το μέγεθός της δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_1 = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (4.1)$$

Οι διατμητικές τάσεις, που αναπτύσσονται στη διατομή, καθορίζονται από τους τύπους:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \quad (4.2)$$

$$\text{όπου } I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad \text{με μέγιστη τιμή τάσεως} \quad \tau_{\text{μεγ}} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R \quad (4.3)$$

όπου: M_t ροπή στρέψεως, G μέτρο ολισθήσεως, I_p πολική ροπή αδρανείας της κυκλικής διατομής, τ διατμητική τάση, ρ απόσταση τυχόντος σημείου της διατομής από τον άξονα της ράβδου, R ακτίνα της κυκλικής διατομής.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο της κυκλικής διατομής η διατμητική τάση στρέψεως είναι ανάλογη προς την απόσταση του σημείου αυτού από το κέντρο της διατομής (σχ. 4.3δ).

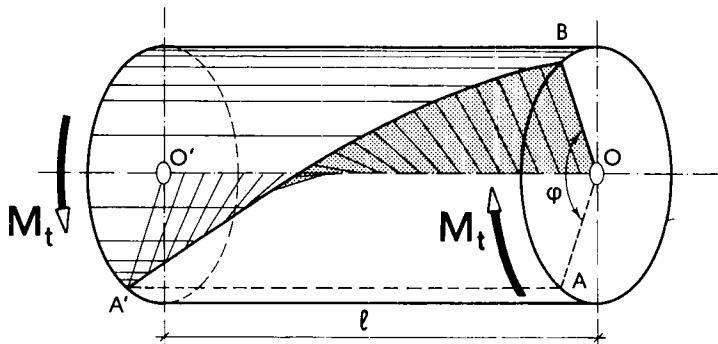
Εάν θέσομε:

$$\frac{I_p}{R} = W_p \quad (\text{πολική ροπή αντιστάσεως}) \quad (4.4)$$

τότε: $T_{\mu\gamma} = \frac{M_t}{W_p}$ (4.5)

Με $W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cong 0,2 \cdot D^3 = \frac{\pi R^3}{2}$ (4.6)

είτε $T_{\mu\gamma} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} = \frac{2M_t}{\pi \cdot R^3}$ (4.7)



Σχ. 4.3γ.

Η σχετική γωνία στροφής σε ακτίνια μεταξύ δύο διατομών που απέχουν απόσταση l θα είναι:

$$\phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{32M_t \cdot l}{G \pi D^4} = \frac{2M_t \cdot l}{G \pi R^4} \quad (4.8)$$

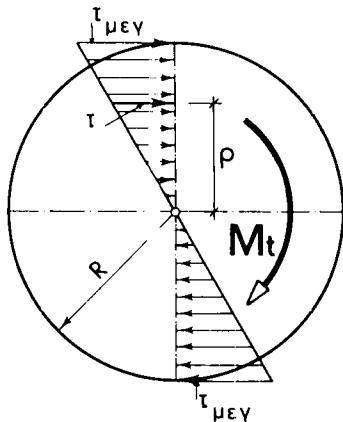
β) Στρέψη ράβδου με δακτυλιοειδή διατομή.

Με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι βασικές αρχές της προηγούμενης παραγράφου, στην περίπτωση στρέψεως κυλινδρικού άξονα με διατομή δακτυλιοειδή και ακτίνες R εξωτερική και r εσωτερική (σχ. 4.3ε), προκύπτουν αναλογικά οι ίδιες σχέσεις:

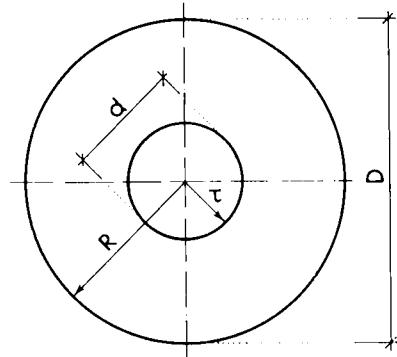
$$I_p = \frac{\pi}{2} \cdot (R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{32} \cdot \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) \quad (4.9)$$

$$\tau_{\mu\gamma} = \frac{M_t}{W_p} \quad \text{με} \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \cdot \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) \quad (4.10)$$

Για πάχος τοιχώματος τ μικρόσε σύγκριση με την εξωτερική ακτίνα R της διατομής, το πρόβλημα απλουστεύεται με την προϋπόθεση ότι θα υπάρξουν διατμητικές τάσεις σταθερές σε όλο το πάχος t, όπως θα διαπιστώσουμε σε επόμενη παράγραφο (σχ. 4.3η).



Σχ. 4.3δ.



Σχ. 4.3ε.

Παράδειγμα.

Άξονας μήκους 10 m καταπονείται σε στρέψη από ροπή $M_t = 100 \text{ kp . m}$. Η διατομή του άξονα είναι δακτυλιοειδής, όπως στο σχήμα 4.3στ. Ζητείται η μέγιστη και ελάχιστη διατμητική τάση, που αναπτύσσονται στη διατομή, το διάγραμμα κατανομής των διατμητικών τάσεων και η σχετική γωνία στροφής φ των δύο ακραίων διατομών του άξονα. Δίνεται: $G = 8.10^5 \text{ kp/cm}^2$.

Λύση.

Η πολική ροπή αδρανείας:

$$I_p = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} \cdot \left(1 - \frac{3^4}{6^4} \right) = 119,3 \text{ cm}^4$$

Η διατμητική τάση σε απόσταση ρ από το κέντρο K της διατομής:

$$\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_p} = \frac{10000 \text{ kp . cm}}{119,3 \text{ cm}^4} \cdot \rho \text{ (cm)} = 83,8 \cdot \rho \text{ kp/cm}^2$$

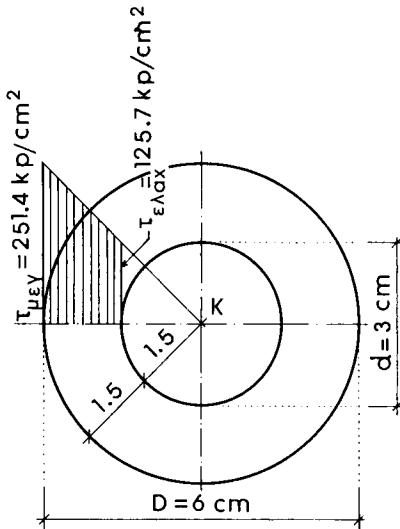
Οι ακραίες τάσεις (σχ. 4.3στ).

$$\tau_{\mu\gamma} = 83,8 \cdot 3,0 = 251,4 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_{\epsilon\lambda} = 83,8 \cdot 1,5 = 125,7 \text{ kp/cm}^2$$

Η γωνία στροφής:

$$\phi = \phi_1 \cdot l = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{10^4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^5 \cdot 119,3} = 0,1047 \text{ ακτίν.} = 6^0$$



Σχ. 4.3στ.

γ) Στρέψη ράβδου με μη κυκλική διατομή.

— Διατομή ορθογωνική.

Σε ράβδους ορθογωνικής διατομής, που παραλαμβάνουν στρέψη, οι διατομές δεν παραμένουν επίπεδες κατά τη στροφή, όπως υποθέσαμε στην περίπτωση ράβδου κυκλικής διατομής, αλλά στρεβλώνονται. Δηλαδή το σημείο διατομής δεν κινείται μόνο κατά τη φορά στροφής, αλλά συγχρόνως μετακινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Η μετακίνηση αυτή εξαρτάται από τη θέση του σημείου στη ράβδο. Τη στρεβλωση των διατομών διαπιστώνομε εύκολα, αν χαράξουμε στην πλευρική επιφάνεια ράβδου ορθογωνικής διατομής δίκτυο γραμμών, που διασταυρώνονται ορθογώνια (σχ. 4.2β).

Μια τέτοια μορφή στρέψεως είναι η ονομαζόμενη καθαρή ή ελεύθερη. Η ύπαρξη τέτοιας στρέψεως είναι δυνατή μόνο, αν η διατομή της ράβδου και το μέγεθος της ροπής στρέψεως είναι σταθερά, ενώ τα άκρα της ράβδου είναι ελεύθερα. Ο προσδιορισμός των διατμητικών τάσεων για μη κυκλικές διατομές, που καταπονούνται σε στρέψη, είναι πρόβλημα δυσκολότατο, που δεν επιλύεται με τις στοιχειώδεις αρχές και μεθόδους αντοχής των υλικών. Για ορθογωνικές

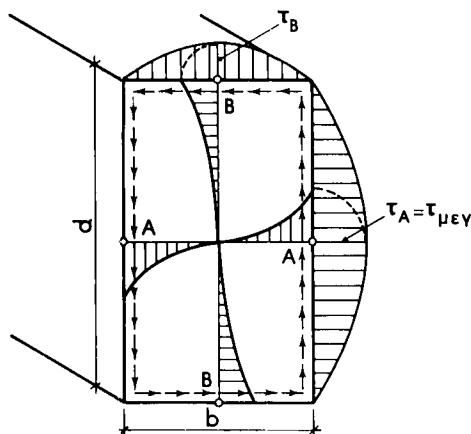
διατομές με πλευρές $d > b$ (σχ. 4.3ζ) οι μέγιστες τάσεις διατμήσεως εμφανίζονται στα μέσα των μακροτέρων πλευρών, δίνονται δε από τη σχέση:

$$\tau_A = \tau_{\mu\gamma} = \frac{M_t}{abd^2} \quad (4.11)$$

$$\text{Στο σημείο } B: \tau_B = \eta \cdot \tau_{\mu\gamma}. \quad (4.12)$$

Η γωνία στροφής σε ακτίνια είναι:

$$\phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot \beta bd^3} \quad (4.13)$$



Σχ. 4.3ζ.

Οι συντελεστές α , η , β εξαρτώνται από το λόγο των πλευρών d/b και δίνονται στον πίνακα 4.3.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.1.

d/b	1	1.5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	00
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

— Διατομή τριγωνική.

Για την περίπτωση ράβδου με διατομή ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά a , οι μέγιστες τάσεις διατμήσεως αναπτύσσονται στα μέσα των πλευρών και δίνονται από τη σχέση:

$$\tau_{\mu\gamma} = \frac{20 M_t}{a^3} \quad (4.14)$$

Η γωνία στροφής σε ακτίνια είναι:

$$\phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot \frac{\sqrt{3}}{80} \cdot a^4} \quad (4.15)$$

Γενικά για ράβδους με μη κυκλική διατομή:

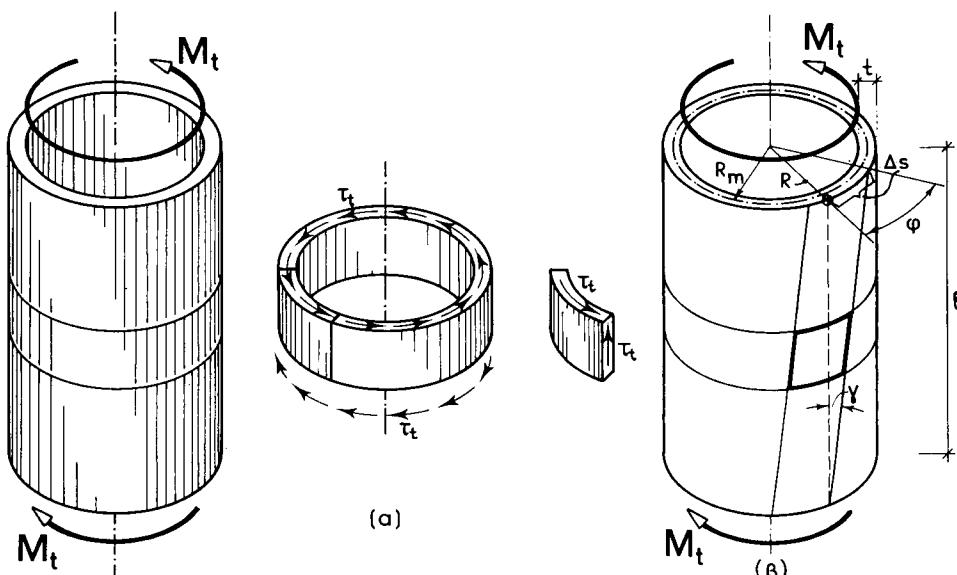
$$\tau_{\mu\gamma} = \frac{M}{W_t} \quad (4.16)$$

$$\phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \quad (4.17)$$

Οι εκφράσεις I_t και W_t είναι αυστηρά γεωμετρικές σταθερές, που απαιτούνται για τον υπολογισμό της αντοχής και της παραμορφώσεως ράβδου με μη κυκλική διατομή που αναλαμβάνει στρέψη και εξαρτώνται από τη μορφή της διατομής. Για διάφορες μορφές διατομών τους αντίστοιχους τύπους βλέπε στο σχετικό πίνακα του Παραρτήματος.

δ) Στρέψη ράβδου με λεπτότοιχη σωληνωτή διατομή.

Εξετάζομε την περίπτωση κυκλικού δακτυλιοειδούς σωλήνα με σχετικά μικρό πάχος τοιχώματος t και μέση ακτίνα R_m , στου οποίου τα άκρα ενεργούν δύο ίσες και αντίφορες ροπές M_t (σχ. 4.3η).



Σχ. 4.3η.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε λωρίδα που κόβεται από το σωλήνα εμφανίζονται μόνο, εφαπτομενικές της διατομής, διατμητικές τάσεις τ_t . Το μέγεθος της τάσεως τ_t προσδιορίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας της ροπής των ομοιόμορφα διανεμημένων πάνω στην εγκάρσια διατομή εσωτερικών δυνάμεων, τ_t . t. Δε με την εξωτερική ροπή στρέψεως M_t . Θα έχουμε συνεπώς:

$$\tau_t \cdot t \cdot 2\pi R_m \cdot R_m = M_t \quad \text{ή} \quad \tau_t = \frac{M_t}{2\pi R_m^2 t} \quad (4.18)$$

Η γωνία στροφής μεταξύ δύο διατομών που απέχουν κατά l είναι:

$$\Phi = \frac{M_t \cdot l}{2\pi G R_m^3 t} \quad (4.19)$$

Αντίστοιχα για κάθε μορφή διατομής ο τύπος γίνεται:

$$\tau_t = \frac{M_t}{2A_m t} \quad (4.20)$$

όπου: A_m είναι η επιφάνεια, που περικλείεται από τη γραμμή που διχοτομεί το πάχος του τοιχώματος [σχ. 4.3η(β)].

Ο τύπος δείχνει ότι η μέγιστη τάση στρέψεως εμφανίζεται στη θέση, όπου το πάχος t του τοιχώματος γίνεται ελάχιστο. Όταν το πάχος του τοιχώματος είναι σταθερό και η διατμητική τάση τ_t παραμένει σταθερή.

Παράδειγμα.

Η κιβωτοειδής διατομή του σχήματος 4.3θ καταπονείται με ροπή στρέψεως $M_t = 10,8 \text{ Mpm}$.

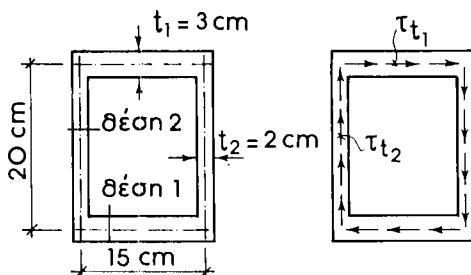
Ζητούνται οι τάσεις στρέψεως που αναπτύσσονται στις θέσεις 1 και 2.

Λύση.

Η επιφάνεια που περικλείεται από τη μέση γραμμή του τοιχώματος είναι:

$$A_m = 15 \times 20 = 300 \text{ cm}^2$$

Η διατμητική τάση στη θέση 1 προκύπτει:



Σχ. 4.3θ.

$$\tau_{t_1} = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t} = \frac{1080000}{2 \times 300 \times 3} = 600 \text{ kp/cm}^2$$

Αντίστοιχα στη θέση 2:

$$\tau_{t_2} = \frac{1080000}{2 \times 300 \times 2} = 900 \text{ kp/cm}^2$$

4.4 Υπολογισμός περιστρεφόμενου άξονα (ατράκτου) σε στρέψη.

a) Ισχύς.

Ισχύς είναι το παρεχόμενο έργο στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή:

$$\text{Ισχύς } N = \frac{\text{Έργο } W}{\text{Χρόνος } t}$$

Έργο είναι το γινόμενο της προβολής της δυνάμεως πάνω στην ευθεία μετακίνησεως του σημείου εφαρμογής της επί το δρόμο, που αυτό διατρέχει, δηλαδή:

Έργο $W = \Delta \text{ύναμη } P \text{ επί δρόμος } s$, οπότε η ισχύς γίνεται:

$$N = \frac{P \cdot s}{t} \quad (\alpha)$$

Το πηλίκο s/t έχει διαστάσεις m/sec , είναι συνεπώς, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, ταυτόσημο με την έννοια της ταχύτητας, οπότε η ισχύς μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή:

$$N = P \cdot v \quad (\beta)$$

Στην πράξη η ισχύς εκφράζεται σε ίππους HP (1 HP = 75 kpm/sec), οπότε ο τύπος γίνεται:

$$N_{HP} = \frac{P \cdot v}{75} \quad (P \text{ σε kp}) \quad (\gamma)$$

β) Τάση και παραμόρφωση στρέψεως.

Κατά τη μεταβίβαση ισχύος περιστρεφόμενου άξονα πρέπει στον τύπο (γ) αντί της γραμμικής ταχύτητας ν να ληφθεί ο ανά πρώτο λεπτό αριθμός στροφών π του άξονα. Όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα με η στροφές ανά πρώτο λεπτό, η ταχύτητα σε απόσταση R (m) από τον άξονα είναι:

$$v = \frac{2\pi nR}{60} \quad m/sec \quad (\delta)$$

Εάν η σχέση αυτή, αντικατασταθεί στον τύπο (γ), η ισχύς, που μεταβιβάζεται με τον περιστρεφόμενο άξονα, είναι:

$$N_{HP} = \frac{2\pi n R \cdot P}{75 \times 60} \quad (ε)$$

Το γινόμενο RP αποτελεί τη ροπή στρέψεως M_t , οπότε η σχέση μεταξύ ισχύος και ροπής στρέψεως γίνεται:

$$N_{HP} = \frac{2\pi n \cdot M_t}{75 \times 60} = \frac{M_t \cdot \pi \cdot n}{2250} \text{ kp . m/sec}$$

Τελικά λαμβάνεται η ροπή στρέψεως για δεδομένη ισχύ από την εξίσωση:

$$M_t = \frac{225000}{\pi} \cdot \frac{N}{n} = 71620 \cdot \frac{N}{n} (\text{kp . cm}) \quad (ζ)$$

Ο τύπος, που παρέχει τη μέγιστη τάση στρέψεως άξονα κυκλικής διατομής διαμέτρου D , ο οποίος διαβιβάζει ισχύ N ίππων, είναι:

$$\tau_{μεγ} = \frac{M_t}{W_P} = \frac{16 M_t}{\pi D^3} = \frac{36 \cdot 10^5 N}{\pi^2 D^3 n} (\text{kp/cm}^2) \quad (4.21)$$

Η σχετική στροφή δύο διατομών, μεταξύ των οποίων η απόσταση είναι 1 cm, προκύπτει αντίστοιχα:

$$\Phi_1 = \frac{M_t}{GJ_P} = \frac{72 \cdot 10^5 N}{\pi^2 D^4 G n} \text{ σε ακτίνια} \quad (4.22)$$

$$\Phi_1^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \quad \Phi_1 = \frac{1296 \times 10^6 N}{\pi^3 D^4 G} \frac{N}{n} \text{ σε μοίρες} \quad (4.23)$$

Σε όλους τους παραπάνω τύπους η ισχύς δίνεται σε ίππους. Εφ' όσον δίνεται σε kW πρέπει να μετατρέπεται σε ίππους κατά τη γνωστή σχέση: 1 HP = 0,736 kW ή 1 kW = 1,36 HP.

Οι κινητήριοι άξονες (άτρακτοι) επιβαρύνονται σε στρέψη και σε κάμψη. Συνήθως δεν είναι γνωστή η ροπή κάμψεως, την οποία θα δέχεται ο άξονας, ενώ από τη μεταβιβαζόμενη ισχύ και τον αριθμό στροφών είναι γνωστή η ροπή στρέψεως. Εξ αιτίας αυτού του γεγονότος η απαιτούμενη διάμετρος υπολογίζεται αρχικά με βάση μόνο τη ροπή στρέψεως, αλλά λαμβάνεται, για την επιτρεπόμενη τάση σε στρέψη τεπ τιμή χαμηλή (περίπου το μισό αυτής που συνήθως ισχύει για το αντίστοιχο υλικό). Η διάμετρος όμως αυτή ελέγχεται εκ των υστέρων σε σύνθετη καταπόνηση από κάμψη και στρέψη.

Παράδειγμα.

Να υπολογισθεί η διάμετρος χαλύβδινου άξονα που μεταφέρει ισχύ $N = 45$ ίππων με 90 στροφές ανά πρώτο λεπτό με βάση:

— την επιτρεπόμενη τάση σε στρέψη:

$$\tau_{επ} = \frac{500}{2} = 250 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

και

— την επιτρεπόμενη παραμόρφωση σε στρέψη:

$$\phi_1 = \frac{1^0}{4} \quad \text{ανά μέτρο μήκους άξονα.}$$

Δίνεται:

$$G = 8 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Λύση.

α) Από τον τύπο που έχει δοθεί:

$$\tau_{\mu\text{εγ}} = \frac{36 \times 10^5}{\pi^2 D^3} \cdot \frac{N}{n}$$

αν θέσουμε $N = 45 \text{ HP}$, $n = 90 \text{ στρ./min}$, $\tau_{\mu\text{εγ}} = \tau_{\varepsilon\text{π}} = 250 \text{ kp/cm}^2$ και λύσουμε ως προς D λαμβάνομε:

$$D^3 = \frac{36 \times 10^5}{3,14^2 \times 250} \cdot \frac{N}{n} = 1460 \frac{N}{n}$$

$$D = 11,35 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 11,35 \cdot \sqrt[3]{\frac{45}{90}} = 11,35 \times 0,79 = 9,0 \text{ cm}$$

β) Από τον τύπο:

$$\phi_1^0 = \frac{1296 \times 10^6}{\pi^3 D^4 G} \cdot \frac{N}{n}$$

αν θέσουμε

$$\phi_1^0 = \frac{1^0}{4} \cdot \frac{1}{100} \frac{\text{μοίρες}}{\text{cm}}$$

και λύσουμε ως προς D λαμβάνομε:

$$D^4 = \frac{4 \times 1296 \times 10^8}{3,14^3 \times 8 \times 10^5} \cdot \frac{N}{n} = 20900 \frac{N}{n}$$

και

$$D = 12 \cdot \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 12 \cdot \sqrt[4]{\frac{45}{90}} = 12 \times 0,84 = 10,0 \text{ cm.}$$

Προκρίνομε τη δυσμενέστερη από τις δύο τιμές και δίνομε διάμετρο $D = 10 \text{ cm.}$

Ασκήσεις για λύση.

1. Χαλύβδινη άτρακτος, με κυκλική διατομή διαμέτρου 150 mm και μήκος 3,5 m, μεταφέρει ισχύ 500 ίππων με 120 στρ/λεπτό. Να βρεθούν: α) η γωνία στροφής φ και β) η αναπτυσσόμενη τάση διατμήσεως τ.
 2. Δίνεται κινητήρια τροχαλία, διαμέτρου 250 mm και αριθμού στροφών 1000/λεπτό. Η τροχαλία περιστρέφεται με ιμάντα πάχους 5 mm και πλάτους 40 mm. Να βρεθεί η ισχύς σε kW, την οποία μεταβιβάζει, αν η τάση του ιμάντα είναι $\sigma_{\text{επ}} = 16 \text{ kp/cm}^2$.
 3. Χειροκίνητο βαρούκλο με διάμετρο τυμπάνου 400 mm χρησιμοποιείται για την ανύψωση βάρους 180 kp σε ύψος 40 m, με καννάβινο σχοινί και κινείται με χειροστρόφαλο ακτίνας 400 mm. Ζητούνται: α) Η δύναμη, που πρέπει να καταβληθεί για την ανύψωση του βάρους, αν ο βαθμός αποδόσεως είναι 0,9. β) Το μήκος του τυμπάνου για διπλή περιέλιξη του σχοινιού πάνω στο τύμπανο και η διάμετρος του σχοινιού αν είναι από υλικό με $\sigma_{\text{επ}} = 120 \text{ kp/cm}^2$. γ) Η διάμετρος του άξονα του τυμπάνου, αν το υλικό του έχει $\tau_{\text{επ}} = 500 \text{ kp/cm}^2$ και η καταπόνηση σε κάμψη είναι αμελητέα.
-

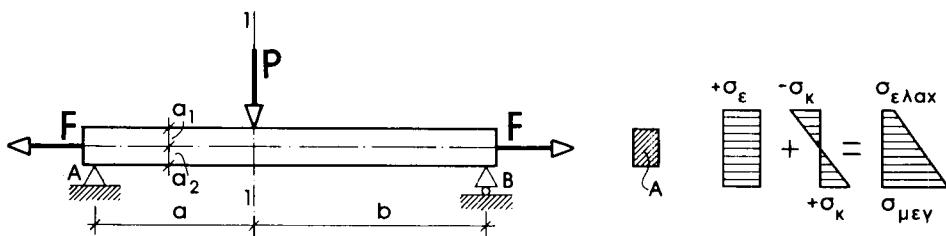
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΕΝΤΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

5.1 Κάμψη και αξονικός εφελκυσμός ή θλίψη.

Η δοκός του σχήματος 5.1a φορτίζεται με δύναμη P και συγχρόνως με μία εφελκυστική δύναμη F , που εφαρμόζεται κεντρικά. Η εφελκυστική δύναμη F κατανέμεται ομοιόμορφα στη διατομή της δοκού, οπότε έχουμε:

$$\sigma_e = \frac{F}{A}$$



Σχ. 5.1a.

Όσον αφορά τις ορθές τάσεις από κάμψη σε οποιαδήποτε θέση κατά μήκος της δοκού θα έχουμε:

$$\sigma_k = \pm \frac{M}{I} \cdot y$$

(από τα πρόσημα, όπως είναι γνωστό το + ισχύει για την εφελκυστική τάση και το - για τη θλιπτική). Βεβαίως σε κάθε θέση της δοκού το M είναι διαφορετικό ($\Delta.P.K.$). Στην περίπτωση του φορέα και της φορτίσεως, που πήραμε, η μέγιστη ροπή κάμψεως και επομένως η μέγιστη τάση από κάμψη αναπτύσσεται στη διατομή 1-1.

Με αλγεβρική άθροιση των επί μέρους ορθών τάσεων (νόμος επαλληλίας) λαμβάνομε τη συνολική τάση. Επομένως ισχύουν:

Για την εφελκυσμένη πλευρά:

$$\sigma_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \quad (5.1)$$

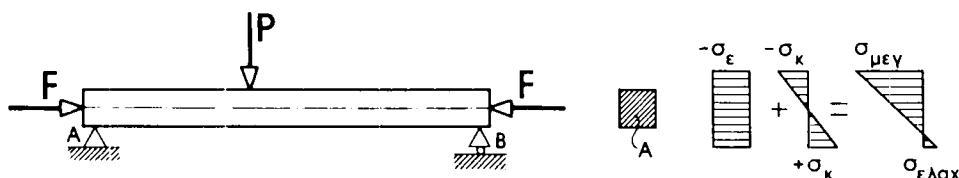
Για τη θλιβόμενη πλευρά:

$$\sigma_{\text{ελαχ.}} = \frac{F}{A} - \frac{M}{W} \quad (5.2)$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι τάσεις μεγαλώνουν στην πλευρά, όπου εμφανίζεται εφελκυσμός από κάμψη, ενώ μειώνονται (κατ' απόλυτη τιμή) στην πλευρά, όπου εμφανίζεται θλίψη από κάμψη.

Η συνολική τάση και στην επάνω και στην κάτω πλευρά της ράβδου δεν επιτρέπεται να υπερβαίνει την αντίστοιχη επιτρεπόμενη ορθή τάση του υλικού.

Με ομοιο τρόπο προς την καμπτόμενη δοκό με αξονικό εφελκυσμό βρίσκονται οι τάσεις για την καμπτόμενη δοκό με αξονική θλίψη (σχ. 5.1β). Η δύναμη F όταν είναι θλιπτική λαμβάνεται, όπως είναι γνωστό με αρνητικό πρόσημο.



Σχ. 5.1β.

Θα έχουμε αντίστοιχα:

Προς τη θλιβόμενη πλευρά:

$$\sigma_{\mu\gamma} = \frac{F}{A} - \frac{M}{W} \quad (\text{κατ' απόλυτη τιμή μέγιστη}) \quad (5.3)$$

και προς την εφελκυόμενη:

$$\sigma_{\text{ελαχ.}} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \quad (F \text{ με αρνητικό πρόσημο}) \quad (5.4)$$

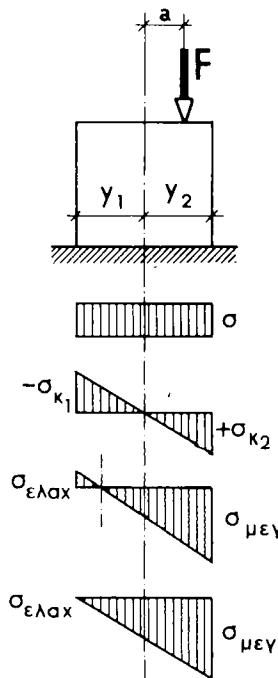
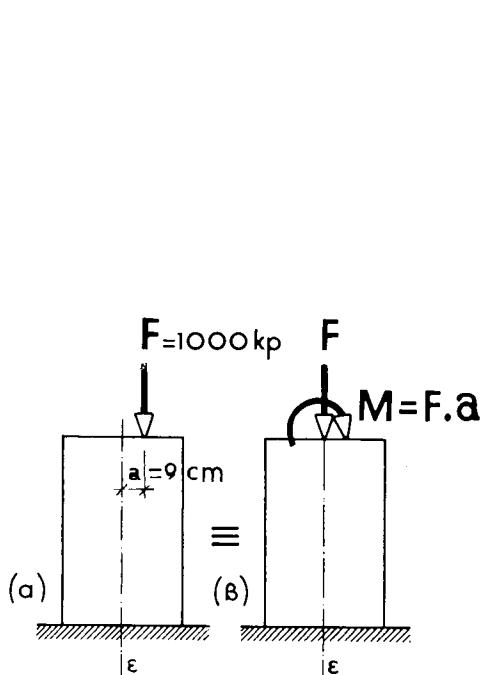
Μια δύναμη F με ευθεία ενέργειας ε και μια ροπή M μπορούν να αντικατασταθούν, όπως είδαμε και στη Μηχανική, από μια μόνο δύναμη F , που δρα κατά μία άλλη ευθεία ενέργειας. Η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς την ε και σε απόσταση a από αυτήν, ώστε $M = F.a$ (σχ. 5.1γ).

Άρα και για το έκκεντρο, εφελκυόμενο ή θλιβόμενο στοιχείο (σχ. 5.1δ), ισχύουν οι ίδιοι τύποι, οπότε οι τάσεις στις ακραίες ίνες προκύπτουν:

$$\begin{array}{ll} \text{μεγ.} & \sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{F.a}{W} \\ \text{ελαχ.} & \end{array} \quad (5.5)$$

Η προς την πλευρά της εφαρμογής της δυνάμεως μέγιστη - σε απόλυτη τιμή - αναπτυσσόμενη τάση, δεν επιτρέπεται να υπερβαίνει την επιτρεπόμενη τάση του υλικού.

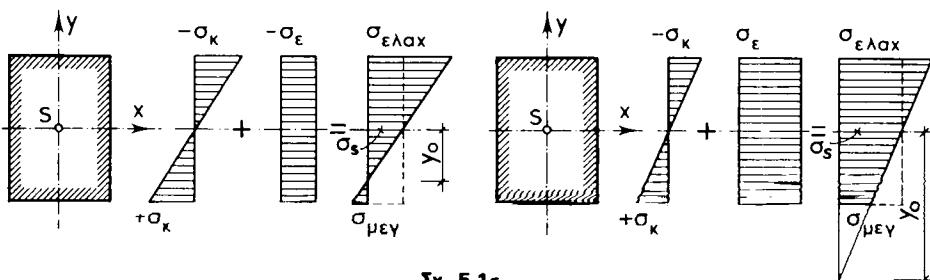
Προς την αντίθετη πλευρά μπορούν οι τάσεις σ να είναι ομόσημες προς την



Σχ. 5.1γ.

Σχ. 5.1δ.

ορθή δύναμη ή όχι ανάλογα του αν υπερισχύουν οι τάσεις από την ορθή δύναμη ή την κάμψη (σχ. 5.1ε).



Σχ. 5.1ε.

Στην περίπτωση λοξής κάμψης με αξονικό εφελκυσμό ή θλίψη ισχύουν σε αναλογία όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι τάσεις στις ακραίες ίνες π.χ. για την ορθογώνια διατομή στις τέσσερις κορυφές, δίνονται από τον τύπο:

$$\begin{array}{ll} \text{μεγ.} & \sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \\ \text{ελαχ.} & \end{array} \quad (5.6)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.

Να καθορισθεί η συνολική τάση για τη δυσμενέστερη διατομή του προβόλου του σχήματος 5.1στ. Δίνεται $W = 20 \text{ cm}^3$ και $A = 16 \text{ cm}^2$.

Λύση.

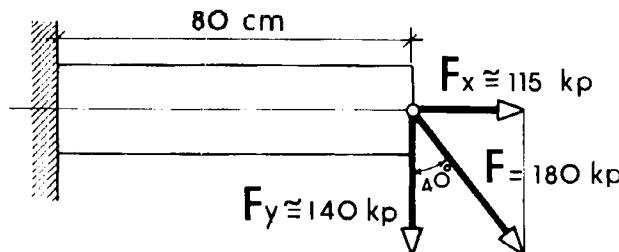
Αναλύουμε την εφαρμοζόμενη δύναμη $F = 180 \text{ kp}$ και βρίσκομε $F_x \approx 115 \text{ kp}$ και $F_y = 140 \text{ kp}$. Έτσι προκύπτει:

$$M = F_y \cdot l = 140 \times 80 = 11200 \text{ kp cm}$$

και από τις σχέσεις:

$$\sigma_{\mu\gamma} = + \frac{F_x}{A} + \frac{M}{W} = \frac{115}{16} + \frac{11200}{20} = 7,2 + 560,0 = 567,2 \text{ kp/cm}^2$$

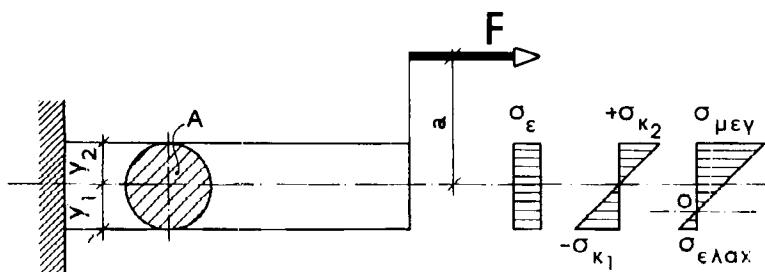
$$\sigma_{\epsilon\lambda\alpha} = + \frac{F_y}{A} - \frac{M}{W} = 7,2 - 560,0 = 552,8 \text{ kp/cm}^2$$



Σχ. 5.1στ.

Παράδειγμα 2.

Η δοκός του σχήματος 5.1ζ πακτώνεται κατά το ένα της άκρο, ενώ στο άλλο άκρο εφαρμόζεται δύναμη F , παράλληλη προς τον κεντροβαρικό άξονα της δοκού



Σχ. 5.1 ζ.

και σε απόσταση α από αυτόν, που φορτίζει τη δοκό έκκεντρα και εφελκυστικά. Επάνω στη διατομή συναντιώνται, εκτός από τις εφελκυστικές τάσεις

$$\sigma_e = \frac{F}{A}$$

που κατανέμονται ομοιόμορφα, και εκείνες που αναπτύσσονται λόγω της εκκεντρότητας της εφαρμοζόμενης δυνάμεως. Δηλαδή αυτές που οφείλονται στη ροπή $M = F \cdot a$ και οι οποίες δίνονται από τη σχέση

$$\sigma_k = \pm \frac{M}{I} \cdot y \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} \text{μεγ.} \\ \text{ελαχ.} \end{array} \quad \sigma_k = \pm \frac{F \cdot a}{W}$$

αφού φυσικά η ροπή κάμψεως για κάθε διατομή της ράβδου είναι: $M = F \cdot a$.

Από τις επί μέρους τάσεις λαμβάνομε με πρόσθεση τη συνολική τάση, βρίσκομε δε ότι για την πλευρά, προς την οποία εφαρμόζεται η δύναμη, είναι:

$$\sigma_{\text{μεγ}} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot a}{W}$$

και για την αντίθετη πλευρά:

$$\sigma_{\text{ελαχ}} = \frac{F}{A} - \frac{F \cdot a}{W}$$

Η συνολική τάση δεν επιτρέπεται να υπερβαίνει την επιτρεπόμενη ορθή τάση του υλικού. Όταν

$$\frac{F}{A} > \frac{F \cdot a}{W}$$

τότε εμφανίζονται σε όλη τη διατομή εφελκυστικές τάσεις, που κατανέμονται ανομοιόμορφα.

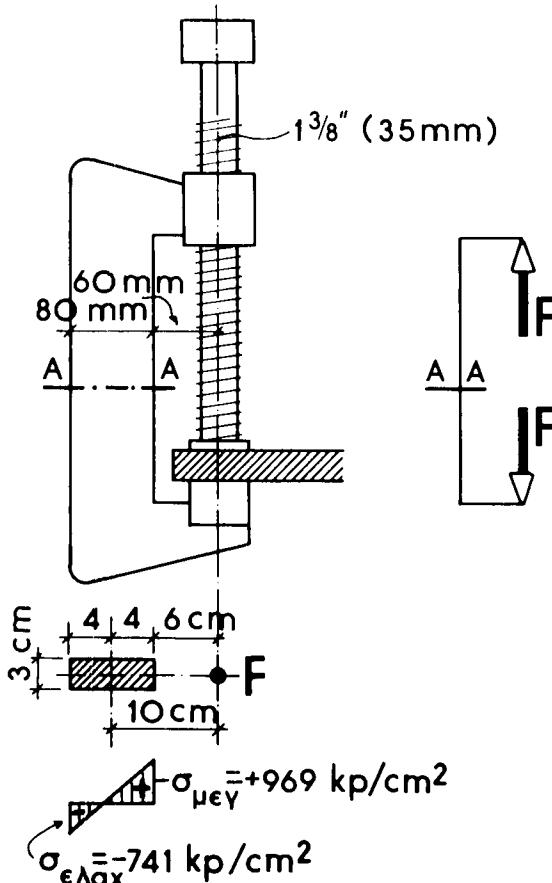
Αν όμως

$$\frac{F}{A} < \frac{F \cdot a}{W}$$

έχομε στην ίδια διατομή θλιπτικές και εφελκυστικές τάσεις. Τότε έχομε μία ουδέτερη γραμμή στο φορέα, που δεν διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής.

Παράδειγμα 3.

Στο κοχλιωτό πιεστήριο του σχήματος 5.1 η να υπολογισθούν οι μέγιστες τάσεις εφελκυσμού και θλίψεως στη διατομή AA, όταν ο κοχλίας (διαμέτρου 13/8") περιστραφεί τόσο, ώστε η τάση θλίψεως που αναπτύσσεται στη διατομή του να φθάσει τα 400 kp/cm². Διατομή πυρήνα κοχλία $A_k = 6,84 \text{ cm}^2$.



Σχ. 5.1η.

Λύση.

Η φόρτιση της διατομής AA θα γίνεται από δύναμη εφελκύουσα:

$$F = 400 \text{ kp/cm}^2 \cdot 6,84 \text{ cm}^2 = 2730 \text{ kp}$$

που ενεργεί επάνω στον άξονα συμμετρίας και στην απόσταση $a = 10 \text{ cm}$ από το κέντρο βάρους της διατομής. Η ροπή αντιστάσεως:

$$W = \frac{3 \times 8^2}{6} \text{ cm}^3 = 32 \text{ cm}^3$$

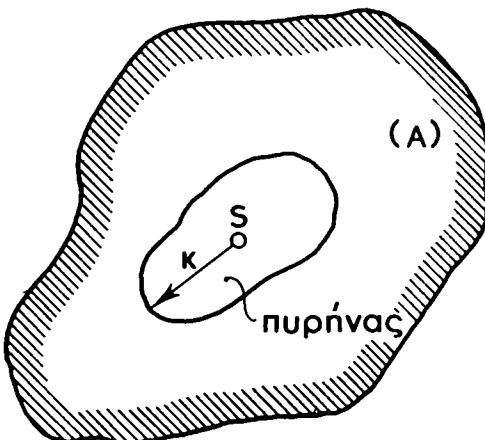
Επομένως:

$$\sigma_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W} = \frac{2730}{24} + \frac{2730 \times 10}{32} = 114 + 855 = 969 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{ελαχ}} = \frac{F}{A} - \frac{Fe}{W} = 114 - 855 = -741 \text{ kp/cm}^2$$

5.2 Πυρήνας διατομής.

Δίνεται τυχούσα διατομή (A). Ας υποθέσουμε ότι έχομε δύναμη F, η οποία ενεργεί κάθετα προς το επίπεδο της διατομής (σχ. 5.2a). Εάν φαντασθούμε ότι συνεχώς αλλάζομε το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως F, θα παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημεία, που, όταν ασκείται η δύναμη F επάνω τους έχομε σε ολόκληρη τη διατομή τάσεις ομόσημες με τη δύναμη F. Δηλαδή έχουμε **μόνο** τάσεις εφελκυστικές, αν η F είναι εφελκυστική ή **μόνο** θλιπτικές, αν η ασκούμενη δύναμη F είναι θλιπτική.



Σχ. 5.2a.

Εάν παρατηρήσουμε τα σημεία αυτά, θα διαπιστώσουμε ότι βρίσκονται μέσα σε μια κλειστή περιοχή, που περιβάλλει το κέντρο βάρους της διατομής και η οποία ονομάζεται **πυρήνας**.

Η απόσταση ενός σημείου του περιγράμματος του πυρήνα από το Κ.Β. της διατομής ονομάζεται **ακτίνα του πυρήνα** (k).

Οι ακτίνες του πυρήνα επάνω στον άξονα συμμετρίας της διατομής και τον κάθετο σ' αυτόν κεντροβαρικό άξονα, τους οποίους ονομάζομε κύριους άξονες x, y της διατομής, δίνονται από τις σχέσεις:

$$k_x = \frac{W_y}{A} \quad k_y = \frac{W_x}{A} \quad (5.7)$$

όπου: W_x, W_y οι ροπές αντιστάσεως της διατομής κατά τους κύριους άξονες και A η επιφάνεια της διατομής.

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν αν στον τύπο

$$\sigma_{\text{ελαχ}} = \frac{F}{A} - \frac{F \cdot a}{W}$$

θέσομε $\sigma_{\text{ελαχ}} = 0$, που σημαίνει ότι η τάση μηδενίζεται σε μια ακραία ίνα, οπότε η αντίστοιχη εκκεντρότητα

$$a = k = \frac{W}{A}$$

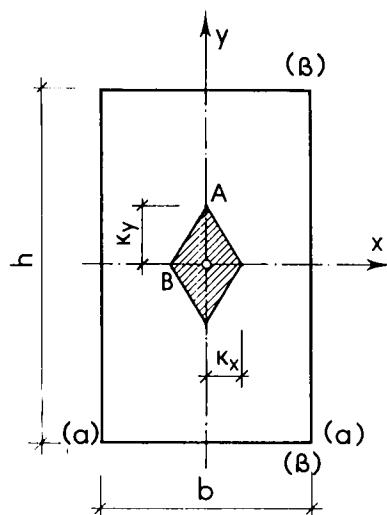
ισούται με την ακτίνα του πυρήνα πάνω στον κύριο άξονα.

Δηλαδή στην ορθογωνική διατομή πλευρών h , b

$$k_y = \frac{\frac{bh^2}{6}}{bh} = \frac{h}{6} \quad (5.8)$$

$$k_x = \frac{\frac{hb^2}{6}}{bh} = \frac{b}{6} \quad (5.9)$$

Για τις ακτίνες του πυρήνα άλλων διατομών υπάρχουν σχετικοί πίνακες στο παράρτημα. Εάν το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως F διαγράφει την περίμετρο της διατομής, η ουδέτερη γραμμή που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο της περιμέτρου περιβάλλει τον πυρήνα. Δηλαδή εάν στο σχήμα 5.2β το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως είναι το σημείο A , η αντίστοιχη ουδέτερη γραμμή θα είναι η πλευρά $a-a$,



Σχ. 5.2β.

ενώ, εάν το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως είναι το σημείο Β, η αντίστοιχη ουδέτερη γραμμή θα είναι η β-β. Εάν το σημείο εφαρμογής κινείται επί της ΑΒ, η ουδέτερη γραμμή διέρχεται από το σημείο (α)-(β). Ομοίως, εάν το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως Φ διαγράφει την (α)-(α), η αντίστοιχη ουδέτερη γραμμή διέρχεται από το σημείο Α, ενώ, εάν το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως διαγράφει την (β)-(β), η αντίστοιχη ουδέτερη γραμμή διέρχεται από το σημείο Β. Τέλος, όταν το σημείο εφαρμογής της Φ είναι το (α)-(β), η αντίστοιχη ουδέτερη γραμμή διέρχεται από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι η ΑΒ.

Συνεπώς καταλήγομε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- 1) Εάν το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως διαγράφει την περίμετρο της διατομής, η αντίστοιχη ουδέτερη γραμμή περιβάλλει το περίγραμμα του πυρήνα.
- 2) Εάν το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως διατρέχει το περίγραμμα του πυρήνα, η αντίστοιχη ουδέτερη γραμμή περιβάλλει τη διατομή χωρίς να την τέμνει.

5.3 Έκκεντρη Θλίψη επάνω σε υλικά που δεν αντέχουν σε εφελκυσμό.

α) Γενικά.

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι τα υλικά των κατασκευών μας μπορούν να αναλάβουν με τις ίδιες ιδιότητες θλιπτικές και εφελκυστικές τάσεις. Υπάρχουν όμως υλικά και δομικά στοιχεία, όπως η λιθοδομή, η πλινθοδομή, ο αρμός μεταξύ θεμελίου και εδάφους και το άσπλο σκυρόδεμα, τα οποία είναι ικανά να αναλάβουν μόνο θλιπτικές τάσεις.

Στην περίπτωση αυτή, εάν το σημείο εφαρμογής της θλιπτικής δυνάμεως βρίσκεται μέσα στον πυρήνα της διατομής, στη διατομή ολόκληρη θα αναπτυχθούν μόνο θλιπτικές τάσεις.

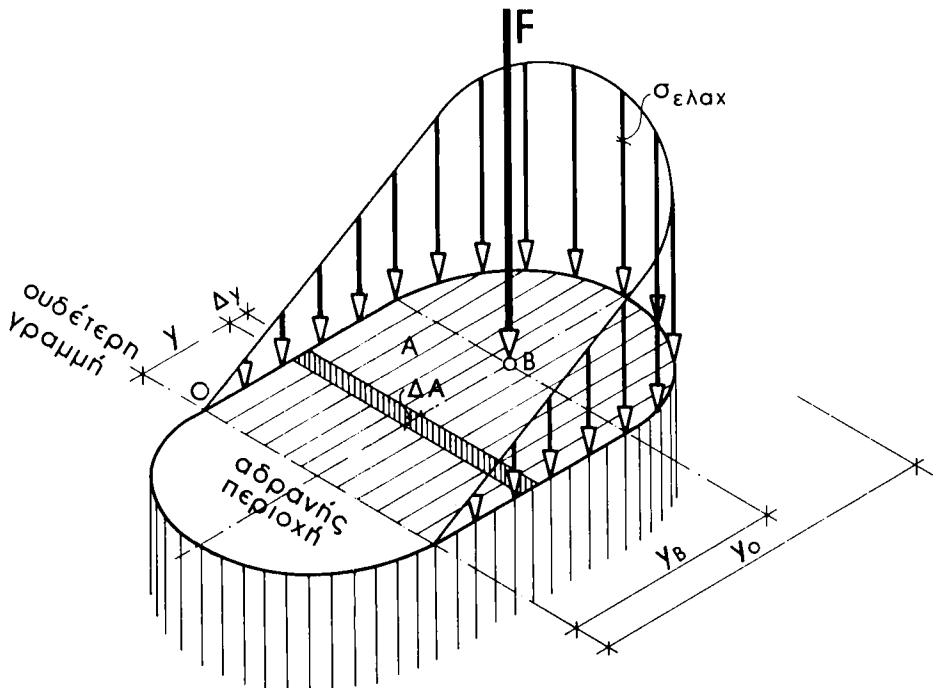
Όταν όμως το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως βρίσκεται έξω από τον πυρήνα, θα πρέπει σε ένα τμήμα της διατομής να αναπτυχθούν και εφελκυστικές τάσεις. Επειδή ομως το υλικό δεν μπορεί να τις αναλάβει, θα δημιουργηθεί ένα είδος αρμού. Μια περιοχή της διατομής δεν μετέχει στην ανάληψη τάσεων, γι' αυτό ονομάζεται **αδρανής** και θα πρέπει η θλιπτική δύναμη, που ενεργεί, να εξισορροπηθεί μόνο με θλιπτικές τάσεις.

Ο πρώτος έλεγχος συνεπώς αποβλέπει στη διαπίστωση αν το σημείο εφαρμογής της θλιπτικής δυνάμεως βρίσκεται μέσα ή έξω από τον πυρήνα. Στην πρώτη περίπτωση θα εφαρμοσθούν οι τύποι της παραγράφου 5.2, η δεύτερη περίπτωση θα μας απασχολήσει παρακάτω.

β) Διανομή των τάσεων.

Η θλιπτική δύναμη διέρχεται έξω από τον πυρήνα της διατομής, της οποίας εργάζεται τμήμα μόνο, στο οποίο αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις και χωρίζεται από το αδρανές τμήμα με μία ευθεία, την **ουδέτερη γραμμή**. Οι θλιπτικές τάσεις, που αναπτύσσονται, είναι ανάλογες με την απόστασή τους από την ουδέτερη γραμμή. Επομένως οι θλιπτικές τάσεις μορφώνουν μια σφήνα, στην οποία η ουδέτερη γραμμή είναι μία ακμή και η ελάχιστη ακραία τάση το ύψος (σχ. 5.3a).

Ο καθορισμός της ουδέτερης γραμμής και της ελάχιστης τάσεως σ γίνεται με



Σχ. 5.3α.

το δεδομένο ότι ο όγκος της σφήνας πρέπει να ισούται με τη δύναμη F και το κέντρο βάρους της να βρίσκεται επάνω στην ευθεία ενέργειας της F . Οι όροι αυτοί δεν είναι τίποτε άλλο, παρά η πλήρωση των συνθηκών ισορροπίας $\Sigma y = 0$ και $\Sigma M = 0$.

Ισορροπία δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η δύναμη δρα έξω από τη διατομή ή στο άκρο της.

Όταν το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως βρίσκεται σε μικρή απόσταση από το άκρο, υπάρχει θεωρητικά δυνατότητα ισορροπίας, όχι όμως και πρακτικά, γιατί οι τάσεις ακμής γίνονται απαράδεκτα μεγάλες και ευαίσθητες σε μικρές μετακινήσεις της F .

γ) Ορθογωνική διατομή.

Η διατομή, που χρησιμοποιείται συνηθέστερα στην πράξη, είναι η ορθογωνική. Συνήθως η θλιπτική δύναμη εφαρμόζεται σε ένα άξονα συμμετρίας. Έστω α η απόσταση της από το κέντρο βάρους (*σχ. 5.3β*). Η αντίστοιχη απόσταση του άκρου του πυρήνα είναι $k = h/6$ και θα πρέπει $a > h/6$, γιατί διαφορετικά η δύναμη θα βρισκόταν μέσα στον πυρήνα. Έστω ξ η απόσταση της δυνάμεως από τη θλιβόμενη ακραία (*σχ. 5.3γ*).

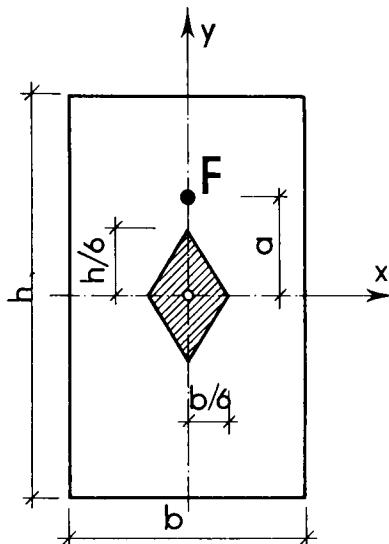
Η ευθεία ενέργειας της F διέρχεται από το κέντρο βάρους της σφήνας ($\Sigma M = 0$) μόνο εάν το μήκος της είναι $3ξ$. Έτσι προσδιορίζεται ο ουδέτερος άξονας και ο ενεργός διατομή. Η μέγιστη τάση προσδιορίζεται από τη συνήθηκη ότι ο όγκος της

σφήνας, που μορφώνουν οι τάσεις, πρέπει να είναι ίσος με τη δύναμη $F(\Sigma X = 0)$ δηλαδή:

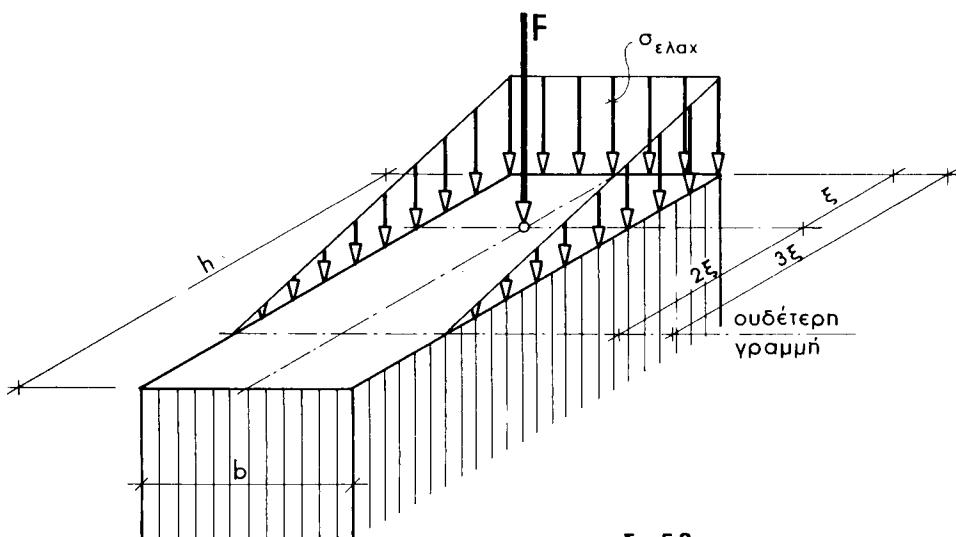
$$\sigma_{\text{ελαχ}} \cdot \frac{3\xi b}{2} = F \quad (5.10)$$

από την οποία:

$$\sigma_{\text{ελαχ}} = \frac{2F}{3\xi b} \quad (5.11)$$



Σχ. 5.3β.



Σχ. 5.3γ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

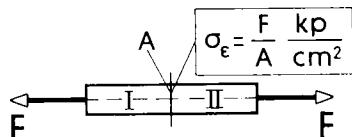
1. Τυπολόγιο
2. Αξονικές ροπές αδρανείας I ροπές αντιστάσεως W και ακτίνες αδρανείας i .
3. Πολικές ροπές αδρανείας I_p και αντιστάσεως W_p .
4. Πυρήνες διατομών.
5. Αντιδράσεις, ροπές κάμψεως και βέλη παραμορφώσεως.
6. Συντελεστές λυγισμού ω για διάφορα υλικά.
7. Διατομές χαλυβδίνων ελασμάτων.
8. Ξύλινες διατομές.
9. Επιτρεπόμενες τάσεις χαλυβδίνων δομικών στοιχείων και συνδέσεων.
10. Συντελεστές θερμικής διαστολής.
11. Μηχανικές ιδιότητες κοχλιών.
12. Ελάσματα διατομής T

1. Τυπολόγιο

Θλίψη και εφελκυσμός

Απαιτούμενη διατομή
(διαστασιολόγηση)

$$A_{\text{απ}} = \frac{F}{\sigma_{\text{επ}}}$$



Υπάρχουσα τάση
(έλεγχος τάσεων)

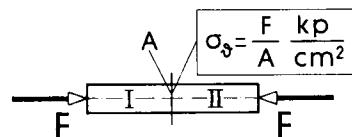
$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{F}{A_{\text{υπ}}} \leq \sigma_{\text{επ}}$$

Ικανότητα φορτίσεως

$$F_{\text{π max}} = \sigma_{\text{επ}} \cdot A_{\text{υπ}}$$

Μήκυνση

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l}$$



Νόμος του Hooke

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l} E$$

Παραμόρφωση

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E}$$

Τάση από θερμοκρασία

$$\sigma_\theta = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$$

Παραμόρφωση από
θερμοκρασία

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

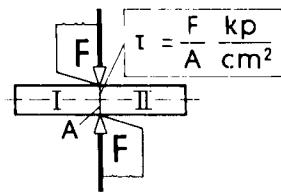
Τμήση

Απαιτούμενη διατομή
(διαστασιολόγηση)

$$A_{\text{απ}} = \frac{F}{\tau_{\text{επ}}}$$

Υπάρχουσα τάση
(έλεγχος τάσεων)

$$\tau_{\text{υπ}} = \frac{F}{A_{\text{υπ}}} \leq \tau_{\text{επ}}$$



Ικανότητα φορτίσεως

$$F_{\text{max}} = A_{\text{υπ}} \cdot \tau_{\text{επ}}$$

Επιφανειακή πίεση και σύνθλιψη άντυγας όπων

Επιφανειακή πίεση
σε έδρανα

$$p = \frac{F}{A_{\text{προβ}}} = \frac{F}{d/l} \leq p_{\text{επ}}$$

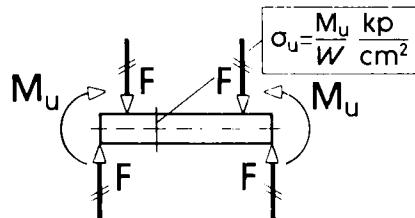
Σύνθλιψη άντυγας όπων

$$\sigma_L = \frac{F_L}{A_{\text{προβ}}} = \frac{F_L}{d_1 \cdot t} \leq \sigma_{L \text{ επ}}$$

Κάμψη

Απαιτούμενη ροπή
αντιστάσεως
(διαστασιολόγηση)

$$W_{\text{απ}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{επ}}}$$



Υπάρχουσα τάση
(έλεγχος τάσεων)

$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_{\text{υπ}}} \leq \sigma_{\text{επ}}$$

Απαιτούμενη διάμετρος
κυκλικής διατομής

$$d_{\text{απ}} = \sqrt[3]{\frac{M_u}{0,1 \cdot \sigma_{\text{επ}}}}$$

Τάσεις σε ασύμμετρη διατομή

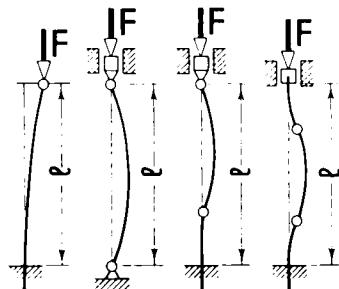
Μέγιστη εφελκυστική τάση $\sigma_{\text{max}} = \frac{M \cdot y_{1 \text{ max}}}{I} = \frac{M}{W_1}$

Μέγιστη θλιπτική τάση $\sigma_{\text{max}} = \frac{M \cdot y_{2 \text{ max}}}{I} = \frac{M}{W_2}$

Λυγισμός

Κρίσιμο φορτίο κατά Euler $F_k = \frac{\pi^2 E l_{min}}{s^2}$

$s=2l$ $s=l$ $s=0,7l$ $s=0,5l$



Απαιτούμενη ροπή
αδρανείας κατά Euler $I_{opt} = \frac{\gamma F s^2}{E \pi^2}$

Τάση λυγισμού κατά Euler $\sigma_k = \frac{E \pi^2}{\lambda^2}$

Ασφάλεια έναντι λυγισμού $\gamma = \frac{F_k}{F} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{up}}$

Λυγηρότητα $\lambda = \frac{s}{i}$ ακτίνα αδρανείας $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

Υλικό	Μέτρο ελαστικότητας E σε kp/cm ²	Οριακή λυγηρότητα λ_p	Εξίσωση Tetmajer για σ_k σε kp/cm ²
Ξύλο (από κωνοφόρα δένδρα)	100000	100	$\sigma_k = 293 - 1,94 \cdot \lambda$
Χυτοσίδηρος	1000000	80	$\sigma_k = 7760 - 120 \cdot \lambda + 0,53 \cdot \lambda^2$
St 37	2100000	104	$\sigma_k = 3100 - 11,4 \cdot \lambda$
St 50 και St 60	2100000	88	$\sigma_k = 3350 - 6,2 \cdot \lambda$
Al - Cu - Mg	700000	66	
Al - Mg 3	700000	110	

Μέθοδος συντελεστών ω $\sigma_\omega = \frac{F \cdot \omega}{A} \leq \sigma_{EP.}$ $\lambda = \frac{s}{i}$

Προσεγγιστικοί τύποι
καθορισμού διατομής χάλυβα.

- Για την ελαστική περιοχή $I_{opt} = 1,2 \cdot F \cdot s^2$
($\lambda \geq 100$)

Τιμή προφίλ

$$k = \frac{A}{i^2}$$

- Για την πλαστική περιοχή ($\lambda < 100$)

$$A_{\text{ap}} = \frac{F}{1.40} + 0.58 \text{ ks}^2$$

για

St 37

$$A_{\text{ap}} = \frac{F}{2.10} + 0.72 \text{ ks}^2$$

για

St 52

F	s	A	I	k
M _p	m	cm ²	cm ⁴	1

Σύνθετη καταπόνηση — Κάμψη και ορθή δύναμη

Ακραία τάση εφελκυσμού-θλίψεως

$$\sigma_{\text{εφ}} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W}$$

$$\sigma_{\theta A} = \frac{F}{A} - \frac{M}{W}$$

Στρέψη

Απαιτούμενη ροπή αντιστάσεως (διαστασιολόγηση)

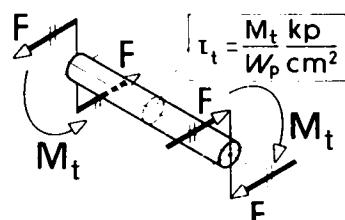
$$W_p = \frac{M_t}{T_{t \text{ en}}}$$

Υπάρχουσα τάση (έλεγχος τάσεων)

$$T_{t \text{ en}} = \frac{M_t}{W_p} \doteq T_{t \text{ en}}$$

Μέγιστη ροπή στρέψεως

$$M_{t \text{ max}} = W_p \cdot T_{t \text{ en}}$$



Απαιτούμενη διάμετρος κυκλικής διατομής

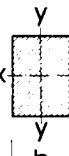
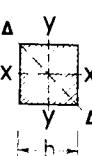
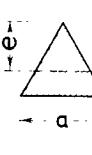
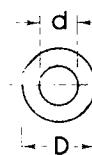
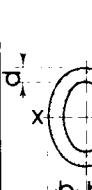
$$d_{\text{ap}} = \sqrt[3]{\frac{M_t}{0.2 \cdot T_{t \text{ en}}}}$$

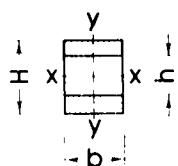
Γωνία στροφής

$$\phi^0 = \frac{T_{t/l}}{G r} \cdot 57,3^\circ \quad , \quad \phi^0 = \frac{M_t l}{W_p r G} \cdot 57,3^\circ \quad ,$$

$$\phi^0 = \frac{M_t l}{I_p G} \cdot 57,3^\circ$$

2. Αξονικές ροπές αδρανείας I , ροπές αντιστάσεως W και ακτίνες αδρανείας i
 (για την κάμψη και το λυγισμό)

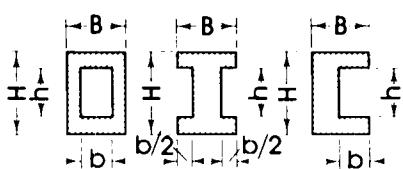
 $I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$ $W_x = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$ $i_x = 0,289 h \quad i_y = 0,289 b$	 $I_x = I_y = I_\Delta = \frac{h^4}{12}$ $W_x = W_y = \frac{h^3}{6}, \quad W_\Delta = \sqrt{2} \cdot \frac{h^3}{12}$ $i = 0,289 h$
	 $I = \frac{ah^3}{36} \quad e = \frac{2}{3} h$ $W = \frac{ah^2}{24} \quad i = 0,236 h$
 $I = \frac{\pi d^4}{64} \approx \frac{d^4}{20}$ $W = \frac{\pi d^3}{32} \approx \frac{d^3}{10}$ $i = \frac{d}{4}$	 $I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$ $i = 0,25 \sqrt{D^2 + d^2}$
 $I_x = \frac{\pi a^3 b}{4} \quad I_y = \frac{\pi b^3 a}{4}$ $W_x = \frac{\pi a^2 b}{4} \quad W_y = \frac{\pi b^2 a}{4}$ $i_x = \frac{a}{2} \quad i_y = \frac{b}{2}$	 $I_x = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1)$ $I_x \cong \frac{\pi}{4} a^2 d (a + 3b)$ $W = \frac{I_x}{a} \cong \frac{\pi}{4} ad (a + 3b)$



$$I_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3) \quad I_y = \frac{b^3}{12} (H - h)$$

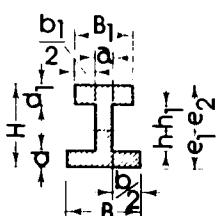
$$W_x = \frac{b}{6H} (H^3 - h^3) \quad W_y = \frac{b^2}{6} (H - h)$$

$$i_x = \sqrt{\frac{H^3 - h^3}{12(H-h)}} \quad i_y = 0,289 b$$



$$I = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

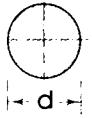
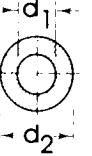
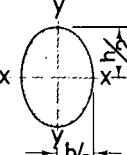
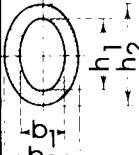
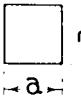
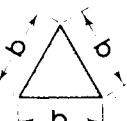
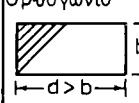
$$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$



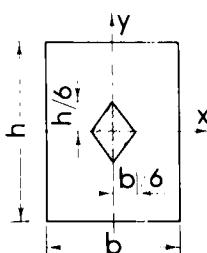
$$I = \frac{1}{3} (Be_1^3 - bh^3 + B_1e_2^3 - b_1h_1^3)$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bd^2 + b_1d_1(2H - d_1)}{aH + bd + b \cdot d_1}$$

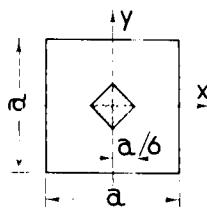
$$e_2 = H - e_1$$

Διατομή	Ροπή αντιστάσεως W_T	Ροπή αδρανείας I_T	Παρατήρηση							
	$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \approx \frac{d^3}{5}$	$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \approx \frac{d^4}{10}$	Μέγιστη τάση σε όλα τα σημεία της περιμέτρου.							
	$W_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}$	$I_p = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4)$	Μέγιστη τάση σε όλα τα σημεία της περιμέτρου.							
	$W_p = \frac{\pi}{16} n b^3$ $\frac{h}{b} = n > 1$	$I_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3 b^4}{n^2 + 1}$	Στα άκρα του μικρού δξονα $T_{t \max} = \frac{M_t}{W_p}$ Στα άκρα του μεγάλου δξονα $T_t = \frac{T_{t \max}}{n}$							
	$\frac{h_2}{b_2} = \frac{h_1}{b_1} = n > 1$ $\frac{h_1}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} = a < 1$ $W_p = \frac{\pi}{16} n b_2^3 (1 - a^4)$	$I_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} \cdot b_2^4 (1 - a^4)$	Στα άκρα του μικρού δξονα $T_{t \max}$ Στα άκρα του μεγάλου δξονα $T_t = \frac{T_{t \max}}{n}$							
	$W_T = 0,208 a^3$	$I_T = 0,14 a^4 = \frac{a^4}{7,1}$	Στο μέσο των πλευρών $T_{t \max}$ Στα άκρα $t_t = 0$							
	$W_T = 0,05 b^3 = \frac{h^3}{7,5 \sqrt{3}}$ $W_T = \frac{h^3}{13} = \frac{2 J_t}{h}$	$I_T = \frac{h^4}{15 \sqrt{3}}$ $I_T = \frac{b^4}{46,2}$	Στο μέσο των πλευρών $T_{t \max}$ ΣΤΙΣ ΚΟΡΥΦΕΣ $t_t = 0$							
	$\beta b^2 d$									
	d/b	1,00	1,25	1,50	2,00	3,00	4,00	6,00	10,00	∞
	a	0,140	0,171	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333
	β	0,208	0,221	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333

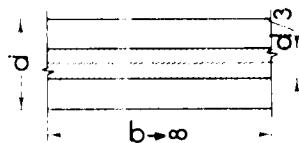
4. Πυρήνες διατομών



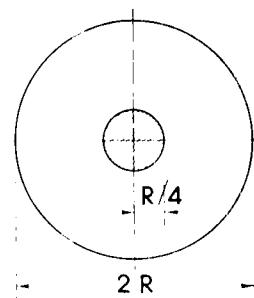
$$k_y = \frac{h}{6}, \quad k_x = \frac{b}{6}$$



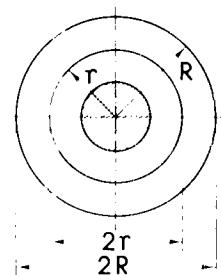
$$k_x = k_y = \frac{a}{6}$$



$$k_y = \frac{d}{6}$$



$$\rho = \frac{R}{4}$$

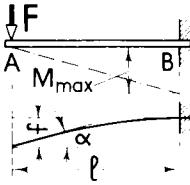


$$\rho = \frac{R}{4} \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

5. Αντιδράσεις, ροπές κάμψεως και βέλη παραμορφώσεως καμπτομένων δοκών σταθερής διατομης

$$F_B = F$$

$$M_{max} = -Fl$$

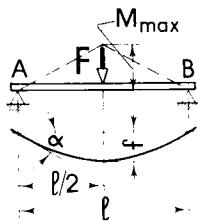


$$f = \frac{Fl^3}{3EI}$$

$$\alpha = \frac{Fl^2}{2EI}$$

$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

$$M_{max} = \frac{Fl}{4}$$

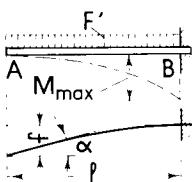


$$f = \frac{Fl^3}{48EI}$$

$$\alpha = \frac{Fl^2}{16EI} = \frac{3f}{l}$$

$$F_B = F = F'l$$

$$M_{max} = -\frac{Fl}{2}$$

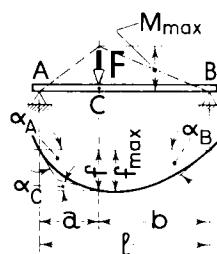


$$f = \frac{Fl^3}{8EI}$$

$$\alpha = \frac{Fl^2}{6EI} = \frac{4f}{3l}$$

$$M_{max} = F \frac{ab}{l}$$

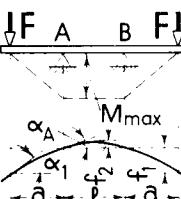
$$f = \frac{Fa^2b^2}{3EI}$$



$$f_{max} = f \frac{l+a}{3a} \sqrt{\frac{l+a}{3b}}$$

$$\alpha_A = f \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \right) \quad \alpha_B = f \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2a} \right)$$

$$F_A = F_B = F$$



$$M_{max} = Fa$$

$$f_1 = \frac{Fa^2}{EI} \left(\frac{a}{3} + \frac{l}{2} \right)$$

$$f_2 = \frac{Fa^2}{8EI}$$

$$\alpha_1 = \frac{Fa(l+a)}{2EI} \quad \alpha_A = \frac{Fa}{2EI}$$

$$F_A = F_B = F$$

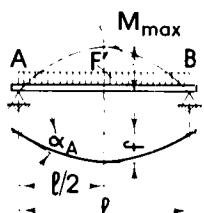
$$M_{max} = Fa$$

$$f = \frac{F^3 a^2}{2EI l^2} \left(1 - \frac{4a}{3l} \right)$$

$$f_{max} = \frac{F^3 a}{8EI l} \left(1 - \frac{4a^2}{3l^2} \right)$$

$$\alpha_A = \frac{Fa(a+c)}{2EI}$$

$$\alpha_C = \alpha_D = \frac{Fac}{2EI}$$

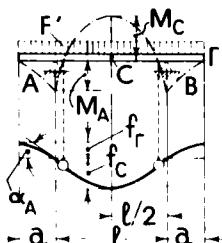


$$F_A = F_B = \frac{F'l}{2}$$

$$M_{\max} = 0,125 F/l$$

$$f \approx 0.013 \frac{F l^3}{EI}$$

$$\alpha_A = \frac{Fl^2}{24EI} = \frac{16f}{5l}$$



$$F_A = F_B = F' \left(\frac{l}{2} + a \right)$$

$$M_A = - \frac{F'a^2}{2}$$

$$M_C = \frac{F'l^2}{2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$$

$$f_A = \frac{F'l^4}{4EI} \left[\frac{a}{6l} \left(\frac{a}{l} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l} \right)^4 \right]$$

$$\alpha_A = \frac{F'l^3}{4EI} \left[\frac{1}{6} - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \quad f_C = \frac{F'l^4}{16EI} \left[\frac{5}{24} - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$$

6. Συντελεστές λυγισμού ω για διάφορα υλικά

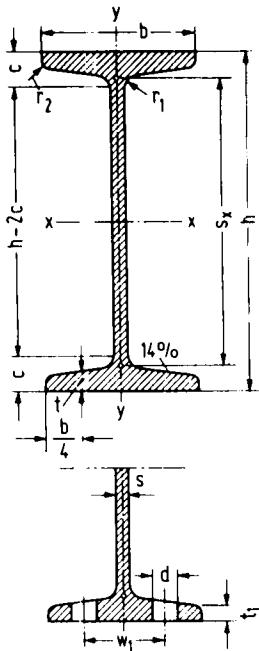
(σε συνάρτηση με τη λυγηρότητα λ)

Λυγηρότητα λ	St 37 ω	St 52 ω	A/CuMg1 ω	A/Mg3 ω	Ξύλο ω
20	1,04	1,06	1,03	1,00	1,15
30	1,08	1,11	1,18	1,02	1,25
40	1,14	1,19	1,39	1,06	1,36
50	1,21	1,28	1,66	1,15	1,50
60	1,30	1,41	1,99	1,26	1,67
70	1,41	1,58	2,57	1,38	1,87
80	1,55	1,79	3,36	1,52	2,14
90	1,71	2,05	4,26	1,68	2,50
100	1,90	2,53	5,25	1,87	3,00
110	2,11	3,06	6,36	2,09	3,73
120	2,43	3,65	7,57	2,43	4,55
130	2,85	4,28	8,88	2,85	5,48
140	3,31	4,96	10,30	3,30	6,51
150	3,80	5,70	10,82	3,79	7,65
160	4,32	6,48	13,45	4,31	8,91
170	4,88	7,32	15,19	4,87	10,29
180	5,47	8,21	17,03	5,46	11,80
190	6,10	9,14	18,97	6,08	13,43
200	6,75	10,13	21,02	6,74	15,20
210	7,45	11,17	23,17	7,43	17,11
220	8,17	12,26	25,43	8,16	19,17
230	8,93	13,40	27,80	8,92	21,37
240	9,73	14,59	30,27	9,71	23,73
250	10,55	15,83	32,84	10,53	26,25

7. Διατομές χαλύβδινων ελασμάτων

7.1 ΣΤΕΝΕΣ ΔΟΚΟΙ Ι

(με κεκλιμένες τις εσωτερικές επιφάνειες των πελμάτων)



Συμβολοσύνος	Διαστάσεις					F cm ²	G kg/m	Για τον άξονα κάμψεως χ-χ			Για τον άξονα κάμψεως γ-γ					d ¹⁾²⁾³⁾ mm	w ₁ mm	Opis στα πέλματα
	h mm	b mm	s = r ₁ mm	t mm	r ₁ mm			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	S _x cm ³	i _x cm	S _y cm ³	i _y cm	
I	Nέα σύμβολα	t ₁	t ₂	A	I _y	W _y	i _y	I _x	W _x	i _x	S _y	i _y						
80	80	42	3,9	5,9	2,3	7,57	5,94	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	6,84	6,4	22	
100	100	50	4,5	6,8	2,7	10,6	8,34	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	8,57	6,4	28	
120	120	58	5,1	7,7	3,1	14,2	11,1	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	10,3	8,4	32	
140	140	66	5,7	8,6	3,4	18,2	14,3	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	47,7	12,0	11	34	
160	160	74	6,3	9,5	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	13,7	11	40	
180	180	82	6,9	10,4	4,1	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	15,5	13	44	
200	200	90	7,5	11,3	4,5	33,4	26,2	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	17,2	13	48	
220	220	98	8,1	12,2	4,9	39,5	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	18,9	13	52	
240	240	106	8,7	13,1	5,2	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	20,6	17	56	
260	260	113	9,4	14,1	5,6	53,3	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	22,3	17	60	
280	280	119	10,1	15,2	6,1	61,0	47,9	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	24,0	17	62	
300	300	125	10,8	16,2	6,5	69,0	59,0	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	25,7	21	64	
320	320	131	11,5	17,3	6,9	77,7	61,0	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	27,4	21	70	
340	340	137	12,2	18,3	7,3	86,7	68,0	15700	923	13,5	674	98,4	2,80	540	29,1	21	74	
360	360	143	13,0	19,5	7,8	97,0	76,1	19610	1090	14,2	818	114	2,90	638	30,7	23	76	
380	380	149	13,7	20,5	8,2	107	84,0	24010	1260	15,0	975	131	3,02	741	32,4	23	82	
400	400	155	14,4	21,6	8,6	118	92,4	29210	1460	15,7	1160	149	3,13	857	34,1	23	86	
(425)	425	163	15,3	23,0	9,2	132	104	36970	1740	16,7	1440	176	3,30	1020	36,2	25	88	
(450)	450	170	16,2	24,3	9,7	147	115	45850	2040	17,7	1730	203	3,43	1200	38,3	25	94	
(475)	475	178	17,1	25,6	10,3	163	128	56480	2380	18,6	2090	235	3,60	1400	40,4	28	96	
500	500	185	18,0	27,0	10,8	179	141	68740	2750	19,6	2480	268	3,72	1620	42,4	28	100	
(550)	550	200	19,0	30,0	11,9	212	166	99180	3610	21,6	3490	349	4,02	2120	46,8	28	110	
(600)	600	215	21,6	32,4	13,0	254	199	139000	4630	23,4	4670	434	4,30	2730	50,9	28	120	

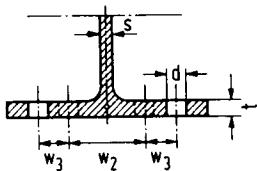
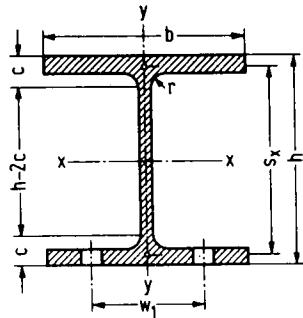
Σημείωση: Τα ελάσματα 1380, 425, 475, 550 και 600 δεν παράγονται πλέον.

7.2 ΠΛΑΤΥΠΕΛΜΕΣ ΔΟΚΟΙ

7.2.1 ΠΛΑΤΥΠΕΛΜΕΣ ΔΟΚΟΙ ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΕΛΜΑΤΩΝ

Σειρά IPB

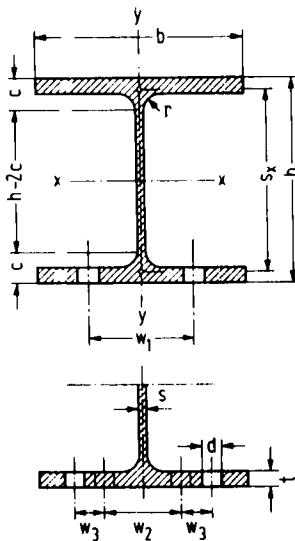
(Αντιστοιχεί στη σειρά B (HE-B) του Euronorm 53-62)



Συμβολισμός IPB	Διαστάσεις					Για τον άξονα κάμψεως χ-χ			Για τον άξονα κάμψεως γ-γ			Οπές στα πέλματα							
	h mm	b mm	s mm	t mm	r mm	F cm²	G kg/m	J _x cm⁴	W _x cm³	i _x cm	J _y cm⁴	W _y cm³	i _y cm	S _x cm³	s _x cm	d ^(1,2) mm	w ₁ mm	w ₂ mm	w ₃ ⁽³⁾ mm
	Νέα σύμβολα: t _s , t _x					A		I _y	W _y	i _y	I _z	W _z	i _z	S _y	s _y				
100	100	100	6	10	12	26,0	20,4	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53	52,1	8,63	13	56	—	—
120	120	120	6,5	11	12	34,0	26,7	864	144	5,04	318	52,9	3,06	82,6	10,5	17	66	—	—
140	140	140	7	12	12	43,0	33,7	1510	216	5,93	550	78,5	3,58	123	12,3	21	76	—	—
160	160	160	8	13	15	54,3	42,6	2490	311	6,78	889	111	4,05	177	14,1	23	86	—	—
180	180	180	8,5	14	15	65,3	51,2	3830	426	7,66	1360	151	4,57	241	15,9	25	100	—	—
200	200	200	9	15	18	78,1	61,3	5700	570	8,54	2000	200	5,07	321	17,7	25	110	—	—
220	220	220	9,5	16	18	91,0	71,5	8090	736	9,43	2840	258	5,59	414	19,6	25	120	—	—
240	240	240	10	17	21	106	83,2	11260	938	10,3	3920	327	6,08	527	21,4	25	96	35	—
260	260	260	10	17,5	24	118	93,0	14920	1150	11,2	5130	395	6,58	641	23,3	25	106	40	—
280	280	280	10,5	18	24	131	103	19270	1380	12,1	6590	471	7,09	767	25,1	25	110	45	—
300	300	300	11	19	27	149	117	25170	1680	13,0	8560	571	7,58	934	26,9	28	120	45	—
320	320	300	11,5	20,5	27	161	127	30820	1930	13,8	9240	616	7,57	1070	28,7	28	120	45	—
340	340	300	12	21,5	27	171	134	36660	2160	14,6	9690	646	7,53	1200	30,4	28	120	45	—
360	360	300	12,5	22,5	27	181	142	43190	2400	15,5	10140	676	7,49	1340	32,2	28	120	45	—
400	400	300	13,5	24	27	198	155	57680	2880	17,1	10820	721	7,40	1620	35,7	28	120	45	—
450	450	300	14	26	27	218	171	79890	3550	19,1	11720	781	7,33	1990	40,1	28	120	45	—
500	500	300	14,5	28	27	239	187	107200	4290	21,2	12620	842	7,27	2410	44,5	28	120	45	—
550	550	300	15	29	27	254	199	136700	4970	23,2	13080	872	7,17	2800	48,9	28	120	45	—
600	600	300	15,5	30	27	270	212	171000	5700	25,2	13530	902	7,08	3210	53,2	28	120	45	—
650	650	300	16	31	27	286	225	210600	6480	27,1	13980	932	6,99	3660	57,5	28	120	45	—
700	700	300	17	32	27	306	241	256900	7340	29,0	14440	963	6,87	4160	61,7	28	126	45	—
800	800	300	17,5	33	30	334	262	359100	8980	32,8	14900	994	6,68	5110	70,2	28	130	40	—
900	900	300	18,5	35	30	371	291	494100	10980	36,5	15820	1050	6,53	6290	78,5	28	130	40	—
1000	1000	300	19	36	30	400	314	644700	12890	40,1	16280	1090	6,38	7430	86,8	28	130	40	—

7.2.2 ΠΛΑΤΥΠΕΛΜΕΣ ΔΟΚΟΙ ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΕΛΜΑΤΩΝ

Σειρά IPB
Ελαφρός τύπος
 (Αντιστοιχεί στη σειρά A (HE-A) του Euronorm 53-62)



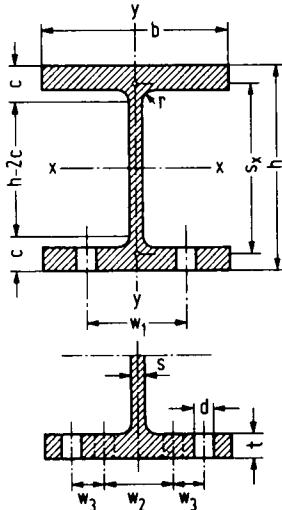
Συμβολισμός IPB 1	Διαστάσεις					F cm ²	G kg/m	Για τον άξονα κάμψεως x-x			Για τον άξονα κάμψεως y-y			Οπές στα πέλματα				
	h mm	b mm	s mm	t mm	r mm			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	S _x cm ³	s _x cm	d ^{1,2)} mm	w ₁ mm	w ₂ mm
	ήκα σύνθολα	t _s	t _b	A	I _y	W _y	i _y	I _x	W _x	i _x	S _y	s _y						
100	96	100	5	8	12	21,2	16,7	349	72,8	4,06	134	26,8	2,51	41,5	8,41	13	56	—
120	114	120	5	8	12	25,3	19,9	606	106	4,89	231	38,5	3,02	59,7	10,1	17	66	—
140	133	140	5,5	8,5	12	31,4	24,7	1030	155	5,73	389	55,6	3,52	86,7	11,9	21	76	—
160	152	160	6	9	15	38,8	30,4	1670	220	6,57	616	76,9	3,98	123	13,6	23	86	—
180	171	180	6	9,5	15	45,3	35,5	2510	294	7,45	925	103	4,52	162	15,5	25	100	—
200	190	200	6,5	10	18	53,8	42,3	3690	389	8,28	1340	134	4,98	215	17,2	25	110	—
220	210	220	7	11	18	64,3	50,5	5410	515	9,17	1950	178	5,51	284	19,0	25	120	—
240	230	240	7,5	12	21	76,8	60,3	7760	675	10,1	2770	231	6,00	372	20,9	25	94	35
260	250	260	7,5	12,5	24	86,8	68,2	10450	836	11,0	3670	282	6,50	460	22,7	25	100	40
280	270	280	8	13	24	97,3	76,4	13670	1010	11,9	4760	340	7,00	556	24,6	25	110	45
300	290	300	8,5	14	27	113	88,3	18260	1260	12,7	6310	421	7,49	692	26,4	28	120	45
320	310	300	9	15,5	27	124	97,6	22930	1480	13,6	6990	466	7,49	814	28,2	28	120	45
340	330	300	9,5	16,5	27	133	105	27690	1680	14,4	7440	496	7,46	925	29,9	28	120	45
360	350	300	10	17,5	27	143	112	33090	1890	15,2	7890	526	7,43	1040	31,7	28	120	45
400	390	300	11	19	27	159	125	45070	2310	16,8	8560	571	7,34	1280	35,2	28	120	45
450	440	300	11,5	21	27	178	140	63720	2900	18,9	9470	631	7,29	1610	39,6	28	120	45
500	490	300	12	23	27	198	155	86970	3550	21,0	10370	691	7,24	1970	44,1	28	120	45
550	540	300	12,5	24	27	212	166	111900	4150	23,0	10820	721	7,15	2310	48,4	28	120	45
600	590	300	13	25	27	226	178	141200	4790	25,0	11270	751	7,05	2680	52,8	28	120	45
650	640	300	13,5	26	27	242	190	175200	5470	26,9	11720	782	6,97	3070	57,1	28	120	45
700	690	300	14,5	27	27	260	204	215300	6240	28,8	12180	812	6,84	3520	61,2	28	120	45
800	790	300	15	28	30	286	224	303400	7680	32,6	12640	843	6,65	4350	69,8	28	130	40
900	890	300	16	30	30	321	252	422100	9480	36,3	13550	903	6,50	5410	78,1	28	130	40
1000	990	300	16,5	31	30	347	272	553800	11190	40,0	14000	934	6,35	6410	86,4	28	130	40

7.2.3 ΠΛΑΤΥΠΕΛΜΕΣ ΔΟΚΟΙ ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΕΛΜΑΤΩΝ

Ενισχυμένος τύπος

Σειρά IPBv.

(Αντιστοιχεί στη σειρά Mn(HE-M) του Euronorm 53-62)

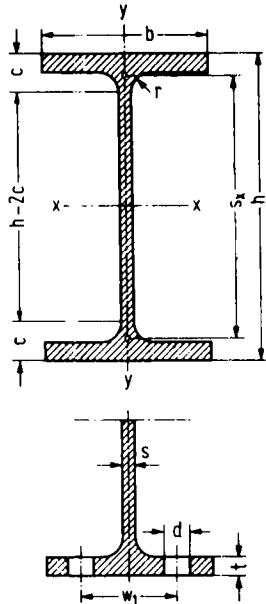


Συμβολαιός IPBv	Διαστάσεις				F cm ²	G kg/m	Για τον αξονα κάμψεως x-x			Για τον αξονα κάμψεως y-y			Οπές στα πέλματα						
	h mm	b mm	s mm	t mm			J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	S _x cm ³	s _x cm	d ¹⁾ ²⁾ ³⁾ mm	w ₁ mm	w ₂ mm	w ₃ mm	
	Nέα σύμβολα	t _s	t _g	A			I _y	W _y	i _y	I _z	W _z	i _z	S _y	s _y					
100	120	106	12	20	12	53,2	41,8	1140	190	4,63	399	75,3	2,74	118	9,69	13	60	—	
	140	126	12,5	21	12	66,4	52,1	2020	288	5,51	703	112	3,25	175	11,5	17	68	—	
140	160	146	13	22	12	80,6	63,2	3290	411	6,39	1140	157	3,77	247	13,3	21	76	—	
160	180	166	14	23	15	97,1	76,2	5100	566	7,25	1760	212	4,26	337	15,1	23	86	—	
180	200	186	14,5	24	15	113	88,9	7480	748	8,13	2580	277	4,77	442	16,9	25	100	—	
200	220	206	15	25	18	131	103	10640	967	9,00	3650	354	5,27	568	18,7	25	110	—	
	220	240	226	15,5	26	18	149	117	14600	1220	9,89	5010	444	5,79	10	20,6	25	120	—
240	270	248	18	32	21	200	157	24290	1800	11,0	8150	657	6,39	1060	22,9	25/23	100	35	
260	290	268	18	32,5	24	220	172	31310	2160	11,9	10450	780	6,90	1260	24,8	25	110	40	
280	310	288	18,5	33	24	240	189	39550	2550	12,8	13160	914	7,40	1480	26,7	25	116	45	
300	340	310	21	39*	27	303	238	59200	3480	14,0	19400	1250	8,00	2040	29,0	25	120	50	
320/305	320	305	16	29	27	225	177	40950	2560	13,5	13740	901	7,81	1460	28,0	28	120	50	
320	359	309	21	40	27	312	245	68130	3800	14,8	19710	1280	7,95	2220	30,7	28	126	47	
340	377	309	21	40	27	316	248	76370	4050	15,6	19710	1280	7,90	2360	32,4	28	126	47	
360	395	308	21	40	27	319	250	84870	4300	16,3	19520	1270	7,83	2490	34,0	28	126	47	
400	432	307	21	40	27	326	256	104100	4820	17,9	19340	1260	7,70	2790	37,4	28	126	47	
450	478	307	21	40	27	335	263	131500	5500	19,8	19340	1260	7,59	3170	41,5	28	126	47	
500	524	306	21	40	27	344	270	161900	6180	21,7	19150	1250	7,46	3550	45,7	28	130	45	
550	572	306	21	40	27	354	278	198000	6920	23,6	19160	1250	7,35	3970	49,9	28	130	45	
600	620	305	21	40	27	364	285	237400	7660	25,6	18980	1240	7,22	4390	54,1	28	130	45	
650	668	305	21	40	27	374	293	281700	8430	27,5	18980	1240	7,13	4830	58,3	28	130	45	
700	716	304	21	40	27	383	301	329300	9200	29,3	18800	1240	7,01	5270	62,5	28	130	42	
800	814	303	21	40	30	404	317	442600	10870	33,1	18630	1230	6,79	6240	70,9	28	132	42	
900	910	302	21	40	30	424	333	570400	12540	36,7	18450	1220	6,60	7220	79,0	28	132	42	
1000	1008	302	21	40	30	444	349	722300	14330	40,3	18460	1220	6,45	8280	87,2	28	132	42	

7.3 ΔΟΚΟΙ Ι
(Μέισου πλάτους με παράλληλες επιφάνειες πελμάτων)

Σειρά IPE
(Αντιστοιχεί στο Euronorm 19-57)

Για τη συμπλήρωση της σειράς IPE προέκυψαν οι διατομές IPE₆, IPE_v και IPE_s, που δεν είναι πριν ποτοιημένες.

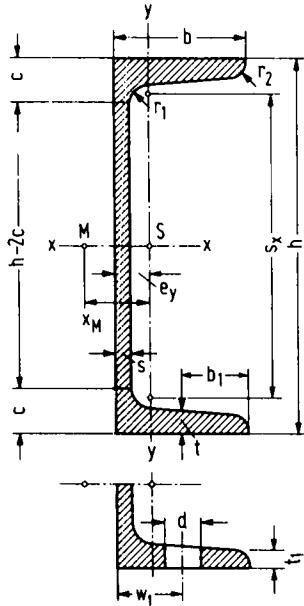


Συντομολογίας IPE ₆	Διαστάσεις					Για τον άξονα κάμψεως x-x			Για τον άξονα κάμψεως y-y			Οπές στα πέλματα d ¹²⁾⁵⁾ mm mm					
	h mm	b mm	s mm	t mm	r mm	F cm ²	G kg/m	J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	S _x cm ³	s _x cm		
	IPE _v		t _g		A			I _y	W _y	i _y	I _x	W _x	i _x	S _y	s _y		
80	80	46	3,8	5,2	5	7,64	6,00	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	11,6	6,9	6,4	26
100	100	55	4,1	5,7	7	10,3	8,10	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	19,7	8,6	8,4	30
120	120	64	4,4	6,3	7	13,2	10,4	318	55,0	4,90	27,7	8,65	1,45	30,4	10,5	8,4	36
140	140	73	4,7	6,9	7	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65	44,2	12,3	11	40
160	160	82	5,0	7,4	9	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	61,9	14,0	13 ³⁾	44
180	180	91	5,3	8,0	9	23,9	18,8	1320	146	7,42	101	22,2	2,05	83,2	15,8	13	50
180c	182	92	6,0	9,0	9	27,1	21,3	1510	165	7,45	117	25,5	2,08	94,6	15,9	13	50
200	200	100	5,6	8,5	12	28,5	22,4	1940	194	8,26	142	28,5	2,24	110	17,6	13	56
200c	202	102	6,2	9,5	12	32,0	25,1	2210	219	8,32	169	33,1	2,30	125	17,7	13	56
220	220	110	5,9	9,2	12	33,4	26,2	2770	252	9,11	205	37,3	2,48	143	19,4	17	60
220c	222	112	6,6	10,2	12	37,4	29,4	3130	282	9,16	240	42,8	2,53	161	19,5	17	62
240	240	120	6,2	9,8	15	39,1	30,7	3890	324	9,97	284	47,3	2,69	183	21,2	17	68
240c	242	122	7,0	10,8	15	43,7	34,3	4370	361	10,0	329	53,9	2,74	205	21,3	17	68
270	270	135	6,6	10,2	15	45,9	36,1	5790	429	11,2	420	62,2	3,02	242	23,9	21	72
270c	274	136	7,5	12,2	15	53,8	42,3	6950	507	11,4	514	75,5	3,09	287	24,2	21	72
300	300	150	7,1	10,7	15	53,8	42,2	8360	557	12,5	604	80,5	3,35	314	26,6	23	80
300c	304	152	8,0	12,7	15	62,8	49,3	9900	658	12,6	746	98,1	3,45	372	26,9	23	80
330	330	160	7,5	11,5	18	62,6	49,1	11770	713	13,7	788	98,5	3,55	402	29,3	25	86
330c	334	162	8,5	13,5	18	72,6	57,0	13910	833	13,8	960	119	3,64	471	29,5	25	86
360	360	170	8,0	12,7	18	72,7	57,1	16270	904	15,0	1040	123	3,79	510	31,9	25	90
360c	364	172	9,2	14,7	18	84,1	66,0	19050	1050	15,1	1250	146	3,86	593	32,1	25	90

Συνέχεια πίνακα διατομών

Συμβολισμός	Διαστάσεις						Για τον άξονα κάμψεως χ-γ			Για τον άξονα κάμψεως γ-γ			Οπές στα πέλματα				
	h mm	b mm	s mm	t mm	r mm	F cm ²	G kg/m	J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	S _x cm ³	s _x cm	d ⁽¹⁾²⁾⁵⁾ mm	w ₁ mm
ΙΡΕ ⁶⁾																	
ΙΡΕν	Nέα σύμβολα	t _z	t _g			A		I _y	W _y	i _y	I _z	W _z	i _z	S _y	s _y		
400	400	180	8,6	13,5	21	84,5	66,3	23130	1160	16,5	1320	146	3,95	654	35,4	28	25
400	404	182	9,7	15,5	21	96,4	75,7	26750	1320	16,7	1560	172	4,03	751	35,6	28	25
400v	406	182	10,6	17,5	21	107	84,0	30120	1480	16,8	1770	194	4,06	841	35,8	28	25
450	450	190	9,4	14,6	21	98,8	77,6	33740	1500	18,5	1680	176	4,12	851	39,7	28	106
450v	456	192	11,0	17,6	21	118	92,4	40920	1790	18,7	2090	217	4,21	1020	40,0	28	106
450v	460	194	12,4	19,6	21	132	104	46200	2010	18,7	2400	247	4,26	1160	39,8	28	106
500	500	200	10,2	16,0	21	116	90,7	48200	1930	20,4	2140	214	4,31	1100	43,9	28	110
500v	506	202	12,0	19,0	21	137	107	57780	2280	20,6	2620	261	4,38	1310	44,2	28	110
500v	514	204	14,2	23,0	21	164	129	70720	2750	20,8	3270	321	4,46	1580	44,7	28	110
550	550	210	11,1	17,2	24	134	106	67120	2440	22,3	2670	254	4,45	1390	48,2	28	120
550v	556	212	12,7	20,2	24	156	123	79160	2850	22,5	3220	304	4,55	1630	48,5	28	120
550v	566	216	17,1	25,2	24	202	159	102300	3620	22,5	4260	395	4,59	2100	48,7	28	120
600	600	220	12,0	19,0	24	156	122	92080	3070	24,3	3390	308	4,66	1760	52,4	28	120
600v	610	224 *	15,0	24,0	24	197	154	118300	3880	24,5	4520	404	4,79	2240	52,9	28	120
600v	618	228	18,0	28,0	24	234	184	141600	4580	24,6	5140	489	4,88	2660	53,2	28	120
Συμβολισμός	Διαστάσεις						Για τον άξονα κάμψεως χ-γ			Για τον άξονα κάμψεως γ-γ			Οπές στα πέλματα				
ΙΡΕ ⁷⁾																	
	Nέα σύμβολα	t _z	t _g			A		I _y	W _y	i _y	I _z	W _z	i _z	S _y	s _y		
500/503	503,2	201	11,2	17,6	21	127	99,7	53290	2120	20,5	2390	238	4,34	1210	44,1	28	110
500/506	506,2	202	12,2	19,1	21	138	108	58210	2300	20,5	2640	261	4,37	1320	44,2	28	110
550/553	553	211	12,1	18,7	24	146	115	73330	2650	22,4	2940	279	4,49	1520	48,3	28	120
550/556	556,2	212	13,1	20,3	24	159	124	79950	2880	22,4	3240	306	4,51	1660	48,5	28	120
600/603	603,2	221	13	20,6	24	169	133	100300	3330	24,4	3720	337	4,70	1910	52,5	28	120
600/606	606,4	222	14	22,2	24	182	143	108600	3580	24,4	4070	367	4,73	2060	52,7	28	120
750/738	738	227,5	12,5	18	27	176	138	149600	4060	29,2	3560	312	4,49	2350	63,6	28	120
750/744	744	228	13	21	27	193	152	170100	4570	29,7	4170	366	4,65	2640	64,4	28	120
750/747	747	229	14	22,5	27	208	163	183100	4900	29,7	4530	396	4,67	2840	64,5	28	120
750/750	750	230	15	24	27	222	174	196200	5230	29,7	4900	426	4,70	3040	64,6	28	120
750/753	753	231	16	25,5	27	236	186	209500	5560	29,8	5280	457	4,73	3240	64,7	28	130
750/756	756	232	17	27	27	251	197	223000	5900	29,8	5660	488	4,75	3440	64,9	28	130
750/760	760	233	18	29	27	268	210	239900	6310	29,9	6160	529	4,80	3690	65,1	28	130
750/763	763	234	19	30,5	27	282	222	253800	6650	30,0	6570	562	4,83	3890	65,2	28	130
750/766	766	235	20	32	27	297	233	267800	6990	30,0	6990	595	4,85	4100	65,3	28	130

7.4 ΕΛΑΣΜΑΤΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ [

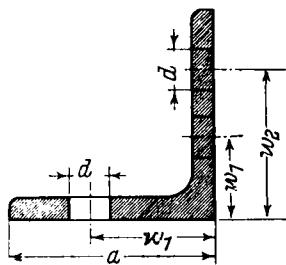
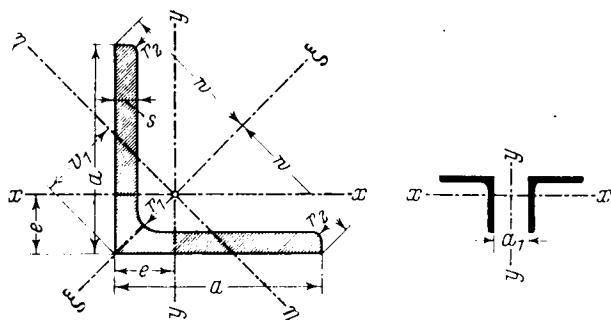


h	b_1	Κλίση πελμάτος
≤ 300	$b/2$	8%
> 300	$\frac{b-s}{2}$	5%

Συγχρόνισμας	Διαστάσεις				Για τον άξονα κάμψεως χ-χ			Για τον άξονα κάμψεως γ-γ						Οπές στα πίλιματα mm mm						
	h mm	b mm	s mm	t_1 mm	r_1 mm	r_2 mm	F cm^2	G kg/m	J_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	J_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	S_x cm^3	t_x cm	e_y cm	x_M cm		
									t_2 mm	t_4 mm	A	I_y	W_y	i_y	I_z	W_z	i_z	S_y	s_y	e_z
U																				
30 x 15	30	15	4	4,5	2		2,21	1,74	2,53	1,69	1,07	0,38	0,39	0,42	—	—	0,52	0,74	4,3	10
	30	33	5	7	3,5		5,44	4,27	6,39	4,26	1,08	5,33	2,68	0,99	—	—	1,31	2,22	8,4	20
40 x 20	40	20	5	5,5 ^{a)}	2,5		3,66	2,87	7,58	3,79	1,44	1,14	0,86	0,56	—	—	0,67	1,01	6,4	11
	40	35	5	7	3,5		6,21	4,87	14,1	7,05	1,50	6,68	3,08	1,04	—	—	1,33	2,32	8,4	20
50 x 25	50	25	5	6	3		4,92	3,86	16,8	6,73	1,85	2,49	1,48	0,71	—	—	0,81	1,34	8,4	16
	50	38	5	7	3,5		7,12	5,59	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13	—	—	1,37	2,47	11	20
	60	30	6	7	3		6,46	5,07	31,6	10,5	2,21	4,51	2,16	0,84	—	—	0,91	1,50	8,4	18
	65	42	5,5	7,5	4		9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	—	—	1,42	2,60	11	25
	80	45	6	8	4		11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	6,65	1,45	2,67	13 ^{b)}	25
	100	50	6	8,5	4,5		13,5	10,6	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	8,42	1,55	2,93	13	30
	120	55	7	9	4,5		17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	10,0	1,60	3,03	17	13
	140	60	7	10	5		20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	11,8	1,75	3,37	17	35
	160	65	7,5	10,5	5,5		24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	13,3	1,84	3,56	21	17
	180	70	8	11	5,5		28,0	22,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	15,1	1,92	3,75	21	40
	200	75	8,5	11,5	6		32,2	25,3	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	16,8	2,01	3,94	23	21
	220	80	9	12,5	6,5		37,4	29,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	18,5	2,14	4,20	23	45
	240	85	9,5	13	6,5		42,3	33,2	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	20,1	2,23	4,39	25	23
	260	90	10	14	7		48,3	37,9	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	21,8	2,36	4,66	25	50
	280	95	10	15	7,5		53,3	41,8	6280	448	10,9	399	57,2	2,74	266	23,6	2,53	5,02	25	50
	300	100	10	16	8		58,8	46,2	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	25,4	2,70	5,41	28	55
	320	100	14	17,5	8,75		75,8	59,5	10870	679	12,1	597	80,6	2,81	413	26,3	2,60	4,82	28	58
	350	100	14	16	8		77,3	60,6	12840	734	12,9	570	75,0	2,72	459	28,6	2,40	4,45	28	58
	380	102	13,5	16	8		80,4	63,1	15760	829	14,0	615	78,7	2,77	507	31,1	2,38	4,58	28	60
	400	110	14	18	9		91,5	71,8	20350	1020	14,9	846	102	3,04	618	32,9	2,65	5,11	28	60

7.5 ΓΩΝΙΑΚΑ ΕΛΑΣΜΑΤΑ (με στρογγυλεμένες ακμές)

7.5.1 Ισοσκελή γωνιακά ελάσματα



Ο άξονας ξ-ξ διχοτομεί τη γωνία

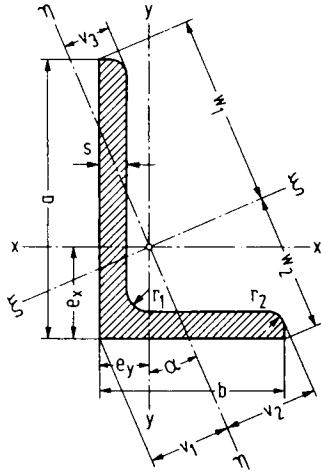
Συμβολισμός	Διαστάσεις		Διατομή A	Βάρος G	Αποστάσεις αξόνων		Για τον άξονα κάμψεως								Οπές στα πέλματα				
							x-x = y-y	ξ-ξ	η-η										
	L	a mm	s mm	cm²	kg/m	e cm	w cm	v₁ cm	I_x = I_y cm⁴	W_x = W_y cm³	l_z cm	I_z cm⁴	l_z cm	I_η cm⁴	W_η cm³	h cm	d mm	w₁ mm	w₂ mm
• 20 x 3	20	3		1,12	0,88	0,60		0,85	0,39	0,28	0,59	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37	4,3	12	-
• 25 x 3		3	4	1,42	1,12	0,73		1,03	0,79	0,45	0,75	1,27	0,95	0,31	0,30	0,47			
			25	1,85	1,45	0,76	1,77	1,06	1,01	0,68	0,74	1,61	0,93	0,40	0,37	0,47	6,4	15	-
• 30 x 3		3	4	1,74	1,36	0,84		1,18	1,41	0,65	0,90	2,24	1,14	0,57	0,48	0,57			
			30	2,27	1,78	0,89	2,12	1,24	1,81	0,86	0,89	2,85	1,12	0,76	0,61	0,58	8,4	17	-
			4	2,78	2,18	0,92		1,30	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,91	0,70	0,57			
• 35 x 4		4	5	2,67	2,10	1,00		1,41	2,96	1,18	1,05	4,68	1,33	1,24	0,88	0,68			
			35	3,28	2,57	1,04	2,47	1,47	3,56	1,45	1,04	5,63	1,31	1,49	1,10	0,67	11	18	-
• 40 x 4		4	5	3,08	2,42	1,12		1,58	4,48	1,56	1,21	7,09	1,52	1,86	1,18	0,78			
			40	3,79	2,97	1,16	2,83	1,64	5,43	1,91	1,20	8,64	1,51	2,22	1,35	0,77	11	22	-
• 45 x 4		4	5	3,49	2,74	1,23		1,75	6,43	1,97	1,36	10,2	1,71	2,68	1,53	0,88			
			45	4,30	3,38	1,28		1,81	7,83	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87	13	25	-
• 50 x 5		5	6	4,80	3,77	1,40		1,98	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,59	2,32	0,98			
			6	5,69	4,47	1,45		2,04	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,24	2,57	0,96	13	30	-
			7	6,56	5,15	1,49	3,54	2,11	14,6	4,15	1,49	23,1	1,88	6,02	2,85	0,96			
55 x 6	55	6		6,31	4,95	1,56		2,21	17,3	4,40	1,66	27,4	2,08	7,24	3,28	1,07	17	30	-
							3,89												

Συμβολισμός	Διαστάσεις L	Διατομή A	Βάρος G kg/m	Αποστάσεις αξόνων	Για τον άξονα κάμψεως										Οπές στα πέλματα			
					x-x = y-y					ξ-ξ			η-η					
					ε cm	w cm	v ₁ cm	I _x = I _y cm ⁴	W _x = W _y cm ³	I _x = I _y cm	I _x = I _y cm ⁴	W _x = W _y cm ³	I _η cm	W _η cm ³	I _η cm	d mm	w ₁ mm	w ₂ mm
• 60 x 5	5	5,82	4,57	1,64		2,32	19,4	4,45	1,82	30,7	2,30	8,03	3,46	1,17				
6	6	6,91	5,42	1,69		2,39	22,8	5,29	1,82	36,1	2,29	9,43	3,95	1,17				
8	60	9,03	7,09	1,77	4,24	2,50	29,1	6,88	1,80	46,1	2,26	12,1	4,84	1,16	17	35	—	
65 x 7	7	8,70	6,83	1,85		2,62	33,4	7,18	1,96	53,0	2,47	13,8	5,27	1,26				
	65				4,60										21	35	—	
• 70 x 6	5	8,13	6,38	1,93		2,73	36,9	7,27	2,13	58,5	2,68	15,3	5,60	1,37				
7	7	9,40	7,38	1,97		2,79	42,4	8,43	2,12	67,1	2,67	17,6	6,31	1,37				
9	70	11,9	9,34	2,05	4,95	2,90	52,6	10,6	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36	21	40	—	
75 x 7	7	10,1	7,94	2,09		2,96	52,4	9,87	2,28	83,6	2,88	21,1	7,15	1,45				
8	75	11,5	9,03	2,13	5,30	3,01	58,9	11,0	2,26	93,3	2,85	24,4	8,11	1,46	23	40	—	
• 80 x 6	6	9,35	7,34	2,17		3,07	55,8	9,57	2,44	88,5	3,08	23,1	7,54	1,57				
8	8	12,3	9,68	2,28		3,20	72,3	12,6	2,42	115	3,06	29,6	9,25	1,55				
10	80	15,1	11,9	2,34	5,86	3,31	87,5	15,5	2,41	139	3,03	35,9	10,9	1,54	23	45	—	
• 90 x 7	7	12,2	9,61	2,45		3,47	92,6	14,1	2,75	147	3,46	38,3	11,0	1,77				
9	90	15,5	12,2	2,54		3,59	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76				
					6,36								15,4	1,75	25	50	—	
• 100 x 8	8	15,5	12,2	2,74		3,87	145	19,9	3,06	230	3,85	59,9	15,5	1,96				
10	10	19,2	15,1	2,82		3,99	177	24,7	3,04	280	3,82	73,3	18,4	1,95				
12	12	22,7	17,8	2,90		4,10	207	29,2	3,02	328	3,80	86,2	21,0	1,95				
100					7,07										25	55		
• 110 x 10	10	21,2	16,6	3,07		4,34	239	30,1	3,36	379	4,23	96,6	22,7	2,16				
110					7,78										25	45	70	
120 x 10	0	23,2	16,6	3,07		4,69	313	36,0	3,67	479	4,63	129	27,5	2,36				
11	1	25,4	19,9	3,36		4,75	341	39,5	3,66	541	4,62	140	29,5	2,35				
12	2	27,5	21,6	3,40		4,80	368	42,7	3,65	584	4,60	152	31,6	2,35				
120					8,49										25	50	80	
130 x 12	12	30,0	23,6	3,64		5,15	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54				
130	130				9,19										25	50	90	
140 x 13	13	35,0	27,5	3,92		5,54	638	63,3	4,27	1010	5,38	262	47,3	2,74				
140	140				9,90										28	55	95	
150 x 12	12	34,8	27,3	4,12		5,83	737	67,7	4,60	1170	5,80	303	52,0	2,95				
14	14	40,3	31,6	4,21		5,95	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94				
15	150	43,0	33,8	4,25	10,6	6,01	898	83,5	4,57	1430	5,76	370	61,6	2,93				
160	15	46,1	36,2	4,49	1,3	6,35	1100	95,6	4,88	1750	6,15	453	71,3	3,14				
17	160	51,8	40,7	4,57		6,46	1230	108	4,86	1950	6,13	506	78,3	3,13	28	60	115	
180 x 16	16	55,4	43,5	5,02		7,11	1680	130	5,51	2690	6,96	679	95,5	3,50				
18	18	61,9	48,6	5,10		7,22	1870	145	5,49	2970	6,93	757	105	3,49				
180					12,7										28	60	135	
200 x 16	16	61,8	48,5	5,52		7,80	2340	162	6,15	3740	7,78	943	121	3,91				
18	18	6,91	54,3	5,60		7,92	2600	181	6,13	4150	7,75	1050	133	3,90				
20	200	76,4	5,9	5,68	14,1	8,04	2850	199	6,11	4540	7,72	1160	144	3,89				
24	24	90,6	71,1	5,84		8,26	3330	235	6,06	5280	7,64	1380	167	3,90				

• Προτιμητέα γωνιακά ελάσματα

() Κατά το δυνατό να αποφεύγονται τα γωνιακά ελάσματα 200 x 16, 18, 20, 24· δεν είναι πρωτοποιημένα.

7.5.2 Ανισοσκελή γωνιακά ελάσματα



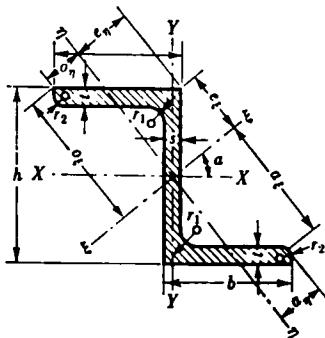
Συμβολισμός L	Διαστάσεις a, b, s mm mm mm	F cm ²	G kg/m	Αποστάσεις αξόνων								Για τον άξονα κάμψεως y-y								$\xi \xi$		$\eta-\eta$	
				e _x cm	e _y cm	w _x cm	w _y cm	v _x cm	v _y cm	J _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	J _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	J _t cm ⁴	i _t cm	J _η cm ⁴	i _η (min)	J _t cm ⁴	i _t cm		
				Nέα σύμβολα A	e _y cm	e _t cm	I _y	W _y	I _t	I _η	W _η	i _t	I _η	W _η	i _η	I _t	i _t	I _η	W _η	i _η	I _t	i _t	
30 x 20 x 3 ● 4 ●	30 20 3	1,42	1,11	0,99 0,50	2,04 1,51	0,86 1,04	0,56	1,25	0,62 1,94	0,44	0,29 0,56	1,43	1,00	0,25 0,42	1,81 0,99	0,33 0,42	1,81 0,99	0,33 0,42	1,81 0,99	0,33 0,42			
40 x 20 x 3 ● 4 ●	40 20 3	1,72	1,35	1,43 0,44	2,61 1,77	0,79 1,19	0,46	2,79	1,08 1,27	0,47	0,30 0,52	2,96	1,31	0,30 0,42	3,79 1,30	0,39 0,42	3,79 1,30	0,39 0,42	3,79 1,30	0,39 0,42			
40 x 25 x 4 ● 4 ●	40 25 4	2,25	1,77	1,47 0,48	2,57 1,80	0,83 1,18	0,50	3,59	1,42 1,26	0,60	0,39 0,52	3,96	1,64	0,39 0,42	4,83 1,64	0,48 0,52	4,83 1,64	0,48 0,52	4,83 1,64	0,48 0,52			
45 x 30 x 3 ● 4 ●	45 30 3	2,19	1,72	1,43 0,70	3,09 2,23	1,21 1,59	0,80	4,47	1,46 1,43	1,60	0,70 0,86	5,15 1,53	0,93 0,65	0,93 0,65	5,78 1,91	1,42 2,05	0,91 0,85	6,65 1,52	1,18 0,64	6,65 1,52	1,18 0,64		
45 x 30 x 3 ● 5 ●	45 30 5	2,87	2,25	1,48 0,74	3,07 2,26	1,27 1,58	0,83	5,78	1,91 1,42	2,05	0,91 0,85	6,65 1,52	1,18 0,64	6,65 1,52	7,27 1,91	1,42 2,05	0,91 0,85	8,02 1,51	1,44 0,64	8,02 1,51	1,44 0,64		
50 x 30 x 4 ● 5 ●	50 30 4	3,07	2,41	1,68 0,70	3,36 2,35	1,24 1,67	0,78	7,71	2,33 1,59	2,09	0,91 0,82	8,53 1,67	1,27 0,64	1,27 0,64	8,53 1,67	1,33 1,04	1,12 0,82	10,4 1,66	1,56 0,64	10,4 1,66	1,56 0,64		
50 x 40 x 4 ● 5 ●	50 40 4	3,78	2,96	1,73 0,74	3,33 2,38	1,28 1,66	0,80	9,41	2,88 1,58	2,54	1,12 0,82	10,4 1,66	1,56 0,64	10,4 1,66	10,4 1,66	10,4 1,66	10,4 1,66	10,4 1,66	10,4 1,66	10,4 1,66	10,4 1,66		
50 x 40 x 4 ● 5 ●	50 40 5	3,46	2,71	1,52 1,03	3,50 2,85	1,67 1,84	1,26	8,54	2,47 1,57	4,86	1,64 1,19	10,9 1,78	2,46 0,84	2,46 0,84	10,9 1,78	13,1 1,18	1,18 1,18	13,1 1,18	1,18 1,18	13,1 1,18	1,18 1,18	13,1 1,18	
60 x 30 x 5 ● 6 ●	60 30 5	4,29	3,37	2,15 0,68	3,90 2,67	1,20 1,77	0,72	15,6	4,04 1,90	2,60	1,12 0,78	16,5 1,96	1,63 0,63	1,63 0,63	16,5 1,96	18,9 2,02	1,13 1,13	19,8 2,03	2,50 0,86	19,8 2,03	2,50 0,86	19,8 2,03	
60 x 40 x 5 ● 6 ●	60 40 6	5,79	3,76	1,96 0,97	4,08 3,01	1,68 2,09	1,10	17,2	4,25 1,89	6,11	2,02 1,13	23,1 2,02	1,12 0,82	1,12 0,82	23,1 2,02	27,4 2,12	1,12 1,12	23,1 2,02	4,12 0,85	23,1 2,02	4,12 0,85	23,1 2,02	
65 x 50 x 5 ● 7 ●	65 50 7	5,54	4,35	1,99 1,25	4,52 3,61	2,08 2,38	1,50	23,1	5,11 2,04	11,9	3,18 1,47	28,8 2,28	1,61 1,06	1,61 1,06	28,8 2,28	34,2 2,07	1,44 1,44	38,4 2,25	8,37 1,05	38,4 2,25	8,37 1,05	38,4 2,25	
65 x 50 x 5 ● 9 ●	65 50 9	7,60	5,97	2,07 1,33	4,50 3,62	2,19 2,37	1,52	31,0	6,99 2,02	15,8	4,31 1,44	47,0 2,22	1,05 1,05	1,05 1,05	47,0 2,22	53,9 2,07	1,42 1,42	53,9 2,07	10,5 1,05	53,9 2,07	10,5 1,05	53,9 2,07	

Συνέχεια ανισοσκελών γωνιακών ελασμάτων

Συμβολισμός L	Διαστάσεις a b t	Αποστάσεις αξόνων									Για τον άξονα κάμψεως						$\eta \cdot \eta$ $I_y \cdot I_z (min)$ $cm^4 \cdot cm$					
		e _x	e _y	w ₁	w ₂	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	J _x	x-x	W _x	t _x	J _y	y-y	W _y	t _y	J _z	z-z	I _y		
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ³	cm ³	cm	cm ³	cm ³	cm	cm ³	cm	cm ³	cm	cm ³		
		e _y	e _z							I _y	W _y	t _y		I _z	W _z	t _z	I _y	I _z	I _η	I _η	I _f	I _f
70 x 50 x 6 ●	70 50 6	2,24	1,25	4,82	3,68	2,20	2,52	1,42	33,5	7,04	2,21	14,3	3,81	1,44	3,99	2,41	7,94	1,07				
75 x 50 x 7 ●	75 50 7	2,48	1,25	5,10	3,77	2,13	2,63	1,38	46,4	9,24	2,36	16,5	4,39	1,41	53,3	2,53	9,56	1,07				
75 x 55 x 5 ●	75 55 5	2,31	1,33	5,06	3,80	2,22	2,62	1,44	57,4	11,6	2,34	20,2	5,49	1,39	65,7	2,50	11,9	1,07				
75 x 55 x 7 ●	75 55 7	2,40	1,41	5,16	4,02	2,37	2,70	1,62	47,9	9,39	2,35	16,2	3,39	1,60	43,1	2,61	8,68	1,17				
75 x 55 x 9 ●	75 55 9	2,47	1,48	5,14	4,04	2,46	2,70	1,66	59,4	11,8	2,33	26,8	6,66	1,57	71,3	2,55	11,8	1,17				
80 x 40 x 6 ●	80 40 6	2,85	0,88	5,21	3,53	1,55	2,42	0,89	44,9	8,73	2,55	7,59	2,44	1,05	47,6	2,63	4,90	0,84				
80 x 40 x 8 ●	80 40 8	2,94	0,95	5,21	3,57	1,65	2,38	1,04	57,6	11,4	2,53	9,68	3,18	1,04	60,9	2,60	6,41	0,84				
80 x 60 x 7	80 60 7	2,51	1,52	5,55	4,42	2,70	2,92	1,68	59,0	10,7	2,51	28,4	8,34	1,74	72,0	2,77	15,4	1,28				
80 x 65 x 8 ●	80 65 8	2,47	1,73	5,59	4,65	2,79	2,74	2,05	68,1	12,5	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36				
80 x 65 x 10 ●	80 65 10	2,55	1,81	5,56	4,68	2,90	2,95	2,11	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	2,79	24,8	1,35				
90 x 60 x 6 ●	90 60 6	2,89	1,41	6,14	4,50	2,46	3,16	1,60	71,7	11,7	2,87	25,8	5,61	1,72	82,8	3,09	14,6	1,30				
90 x 60 x 8 ●	90 60 8	2,97	1,49	6,11	4,54	2,56	3,15	1,69	92,9	15,4	2,85	33,0	7,31	1,70	107	3,06	19,0	1,29				
100 x 50 x 6 ●	100 50 6	3,49	1,04	6,50	4,39	1,91	2,98	1,15	89,7	13,8	3,20	15,3	3,86	1,32	95,2	3,30	9,78	1,06				
100 x 50 x 10 ●	100 50 10	3,59	1,13	6,48	4,44	2,00	2,95	1,18	116	18,0	3,18	19,5	5,04	1,31	123	3,28	12,6	1,05				
100 x 65 x 7 ●	100 65 7	3,23	1,51	6,83	4,91	2,66	3,48	1,73	113	16,6	3,17	37,6	7,54	1,84	128	3,39	21,6	1,39				
100 x 65 x 9 ●	100 65 9	3,32	1,59	6,78	4,94	2,76	3,46	1,78	141	21,0	3,15	46,7	9,52	1,82	160	3,36	27,2	1,39				
100 x 65 x 11 ●	100 65 11	3,40	1,67	6,74	4,97	2,65	3,45	1,33	167	25,3	3,13	55,1	11,4	1,80	190	3,34	32,6	1,38				
100 x 75 x 7 ●	100 75 7	3,06	1,83	6,96	5,42	3,10	3,61	2,18	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59				
100 x 75 x 9 ●	100 75 9	3,15	1,91	6,91	5,45	3,22	3,63	2,22	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59				
100 x 75 x 11 ●	100 75 11	3,23	1,99	6,87	5,49	3,32	3,65	2,27	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,4	1,58				
120 x 80 x 8 ●	120 80 8	3,83	1,87	8,23	5,99	3,27	4,20	2,16	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,29	261	4,10	45,8	1,72				
120 x 80 x 10 ●	120 80 10	3,92	1,95	8,18	6,03	3,27	4,19	2,19	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,27	318	4,07	56,1	1,71				
130 x 65 x 8 ●	130 65 8	4,56	1,37	8,50	5,71	2,49	3,86	1,47	263	31,1	4,17	44,8	8,72	1,72	280	4,31	28,6	1,38				
130 x 65 x 10 ●	130 65 10	4,65	1,45	8,43	5,76	2,58	3,82	1,54	321	38,4	4,15	54,2	10,7	1,71	340	4,27	35,0	1,37				
130 x 65 x 12 ●	130 65 12	4,74	1,53	8,37	5,81	2,64	3,80	1,60	376	45,5	4,12	63,0	12,7	1,69	397	4,24	41,2	1,37				
130 x 90 x 10 ●	130 90 10	4,15	2,18	8,92	6,69	3,75	4,62	2,51	358	40,5	4,11	141	20,6	2,58	420	4,46	78,5	1,93				
130 x 90 x 12 ●	130 90 12	4,24	2,26	8,84	6,72	3,85	4,60	2,56	420	48,0	4,09	165	24,4	2,56	492	4,43	92,6	1,92				
150 x 75 x 9 ●	150 75 9	5,28	1,57	9,79	6,62	2,90	4,46	1,72	455	46,8	4,83	78,3	13,2	2,00	484	4,98	50,0	1,60				
150 x 100 x 10 ●	150 100 10	4,80	2,34	10,3	7,50	4,10	5,25	2,63	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15				
150 x 100 x 12 ●	150 100 12	4,89	2,42	10,2	7,53	4,19	5,24	2,73	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15				
150 x 100 x 14 ●	150 100 14	4,97	2,50	10,2	7,56	4,28	5,23	2,77	744	74,1	4,73	264	33,2	2,82	856	5,07	152	2,14				
160 x 80 x 12	160 80 12	5,72	1,77	10,4	7,10	3,15	4,75	1,89	720	70,0	5,11	122	19,6	2,10	763	5,26	78,9	1,69				
180 x 90 x 10 ●	180 90 10	6,28	1,85	11,8	7,89	3,38	5,42	2,00	880	75,1	5,80	151	21,2	2,40	934	5,37	97,4	1,93				
180 x 90 x 12 ●	180 90 12	6,37	1,93	11,7	7,95	3,48	5,38	2,07	040	89,3	5,77	177	25,1	2,38	1100	5,34	114	1,92				
200 x 100 x 10 ●	200 100 10	6,93	2,01	13,2	8,76	3,75	5,93	2,22	220	93,2	6,40	210	26,3	2,68	1300	6,66	133	2,14				
200 x 100 x 12 ●	200 100 12	7,03	2,10	13,1	8,82	3,84	5,95	2,26	440	111	6,43	247	31,3	2,67	1530	6,63	158	2,13				
200 x 100 x 14 ●	200 100 14	7,12	2,18	13,0	8,88	3,93	5,92	2,32	650	128	6,41	282	36,1	2,65	1760	6,60	181	2,12				

● Προγριμητέα γωνιακά ελάσματα

7.6 ΕΛΑΣΜΑΤΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ



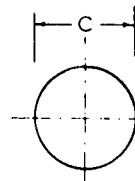
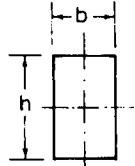
Συμβολισμός	Διαστάσεις σε mm						Διατομή A cm ²	G kg/m	Θέση του άξονα ξ-ξ tga	Αποστάσεις σε cm από τους άξονες ξ-ξ και η-η					
	h	b	s	t	r ₁	r ₂				q ₁	q ₁	q ₂	q ₂	q ₃	q ₃
30	30	38	4	4,5	4,5	2,5	4,32	3,39	1,655	3,86	9,38	0,61	1,39	3,54	0,87
40	40	40	4,5	5	5	2,5	5,43	4,26	1,181	4,17	0,91	1,12	1,67	3,82	1,19
50	50	43	5	5,5	5,5	3	6,77	5,31	0,939	4,60	1,24	1,65	1,89	4,21	1,49
60	60	45	5	6	6	3	7,91	6,21	0,778	4,98	1,51	2,21	2,04	4,56	1,76
80	80	50	6	7	7	3,5	11,1	8,71	0,588	5,83	2,02	3,30	2,29	5,35	2,25
100	100	55	6,5	8	8	4	14,5	11,4	0,492	6,77	2,43	4,34	2,50	6,24	2,65
120	120	60	7	9	9	4,5	18,2	14,3	0,433	7,75	2,80	5,37	2,70	7,16	3,02
140	140	65	8	10	10	5	22,9	18,0	0,385	9,72	3,18	6,39	2,89	8,08	3,39
160	160	70	8,5	11	11	5,5	27,5	21,6	0,357	9,74	3,51	7,39	3,09	9,04	3,72
180	180	75	9,5	12	12	6	33,3	26,1	0,329	10,7	3,86	8,40	3,27	9,99	4,08
200	200	80	10	13	13	6,5	38,7	30,4	0,313	11,8	4,17	9,39	3,47	11,0	4,39

Συμβολισμός	Για τον άξονα κάμψεως										Φυγό κεντρητικής		
	X-X			Y-Y			ξ-ξ			η-η			
L	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _ξ cm ⁴	W _ξ cm ³	i _ξ cm	I _η cm ⁴	W _η cm ³	i _η cm	I _{ηγ} cm ⁴
30	5,96	3,97	1,17	13,7	3,80	1,78	18,1	4,69	2,04	1,54	1,11	0,60	7,35
40	13,5	6,75	1,58	17,6	4,66	1,80	28,0	6,72	2,27	3,05	1,83	0,75	12,2
50	26,3	10,5	1,97	23,8	5,88	1,88	44,9	9,76	2,57	5,23	2,76	0,88	19,6
60	44,7	14,9	2,38	30,1	7,09	1,95	76,2	13,5	2,81	7,60	3,73	0,98	28,8
80	109	27,3	3,13	47,4	10,1	2,07	142	24,4	3,58	14,7	6,44	1,15	55,6
100	222	44,4	3,91	72,5	14,0	2,24	270	39,8	4,31	24,6	9,26	1,30	97,2
120	402	67,0	4,70	106	18,8	2,42	470	60,6	5,08	37,7	12,05	1,44	158
140	676	96,6	5,43	148	24,3	2,54	768	88,0	5,79	56,4	16,6	1,67	239
160	1060	132	6,20	204	31,0	2,72	1180	121	6,57	79,5	21,4	1,70	349
180	1600	178	6,92	270	38,4	2,84	1760	164	7,26	110	27,0	1,82	490
200	2300	230	7,71	357	47,6	3,04	2510	213	8,06	147	33,4	1,95	674

8. Ξύλινες διατομές

8.1 Ορθογωνικές διατομές

b cm	h cm	A cm ²	G kg/m	I _y cm ⁴	W _y cm ³	I _z cm ⁴	W _z cm ³	min I cm
6	6	36	2,18	108	36,8	108	36,8	1,73
6	8	48	2,88	256	64,0	144	48,0	1,73
6	10	60	3,80	500	100	180	60,0	1,73
6	12	72	4,32	864	144	216	72,0	1,73
6	14	84	5,04	1372	198	252	84,0	1,73
8	8	64	3,84	341	85	341	85,0	2,31
8	10	80	4,80	667	133	427	107	2,31
8	12	96	5,76	1150	192	512	128	2,31
8	14	112	6,72	1830	261	587	149	2,31
8	16	128	7,68	2730	341	683	171	2,31
8	18	144	8,67	3888	432	788	192	2,31
8	20	160	9,60	5330	533	853	213	2,31
10	10	100	6,00	833	167	833	167	2,89
10	12	120	7,20	1440	240	1000	200	2,89
10	14	140	8,40	2290	327	1170	233	2,89
10	16	160	9,60	3410	427	1330	287	2,89
10	18	180	10,8	4860	540	1500	300	2,89
10	20	200	12,0	6670	667	1670	333	2,89
10	22	220	13,2	8870	807	1830	387	2,89
12	12	144	8,84	1730	288	1730	288	3,48
12	14	168	10,1	2740	392	2020	336	3,48
12	16	192	11,5	4100	512	2300	384	3,48
12	18	216	12,9	5830	648	2590	432	3,48
12	20	240	14,4	8000	800	2880	480	3,48
12	22	264	15,8	10850	988	3170	528	3,48
12	24	288	17,3	13820	1150	3480	576	3,48
12	26	312	18,7	17570	1350	3740	624	3,48
13	16	208	12,5	4430	555	2930	451	3,78
13	18	234	14,0	6320	702	3300	507	3,78
14	14	198	11,7	3200	457	3200	457	4,04
14	16	224	13,4	4780	567	3660	523	4,04
14	18	252	15,1	6800	756	4120	588	4,04
14	20	280	16,8	9333	933	4570	653	4,04
×14	22	308	18,5	12420	1130	5030	719	4,04
×14	24	338	20,1	18130	1340	5490	784	4,04
×14	26	364	21,8	20510	1580	5950	849	4,04
×14	28	392	23,4	25610	1830	6400	915	4,04
16	16	258	15,3	5460	683	5460	683	4,62
16	18	288	17,3	7780	864	6140	768	4,62
16	20	320	19,2	10870	1087	6830	853	4,62
16	22	352	21,1	14200	1290	7510	939	4,62
16	24	384	23,0	18430	1536	8190	1024	4,62
×16	26	416	25,0	23440	1800	8870	1110	4,62
×16	28	448	26,8	29270	2080	9560	1190	4,62
×16	30	480	28,8	36000	2400	10240	1280	4,62
18	18	324	19,4	8750	972	8750	972	5,20
×18	20	360	21,6	12000	1200	9720	1080	5,20
18	22	398	23,7	15870	1450	10890	1188	5,20
18	24	432	26,9	20740	1730	11660	1286	5,20
×18	26	468	28,0	26360	2030	12840	1400	5,20
×18	28	504	30,2	32830	2350	13810	1510	5,20
×18	30	540	32,4	40500	2700	14580	1620	5,20
20	20	400	24,0	13330	1330	13330	1330	5,77
×20	22	440	26,4	17750	1610	14670	1470	5,77
20	24	480	28,8	23040	1920	16000	1600	5,77
20	26	520	31,2	29290	2250	17330	1730	5,77
×20	28	560	33,6	36580	2610	18670	1870	5,77
×20	30	600	36,0	45000	3000	20000	2000	5,77
×22	22	484	29,0	19520	1770	19620	1770	6,35
×24	24	576	34,5	27650	2300	27650	2300	6,93



8.2 Κυκλικές

c cm	A cm ²	I cm ⁴	W cm ³	i cm	max λ = 150 γιο s _K (m)
8	50,3	201	50,3	2,00	3,00
9	63,6	322	71,6	2,25	3,37
10	78,5	491	98,2	2,50	3,75
11	95,0	719	131	2,75	4,12
12	113	1020	170	3,00	4,50
13	133	1400	216	3,25	4,87
14	154	1890	269	3,50	5,25
15	177	2490	331	3,75	5,62
16	201	3220	402	4,00	6,00
17	227	4100	482	4,25	6,37
18	254	5150	573	4,50	6,75
19	284	6400	673	4,75	7,12
20	341	7850	785	5,00	7,50
21	346	9550	909	5,25	7,87
22	380	11500	1050	5,50	8,25
23	415	13740	1190	5,75	8,62
24	452	16290	1360	6,00	9,00
25	491	19170	1530	6,25	9,87
26	531	22430	1730	6,50	9,75
28	616	30170	2160	7,00	10,50
30	707	39760	2650	7,50	11,25
32	804	51470	3220	8,00	12,00
35	962	73660	4210	8,75	13,12
38	1130	102350	5390	9,50	14,25
40	1260	125700	6280	10,0	15,00
50	1960	306800	12270	12,5	18,75

Παρ.: 1) Τα βάρη G υπολογίσθηκαν για ποιότητα 600 kg/m³.

2) Οι διατομές που χαρακτηρίζονται με x δεν είναι πρωτοποιημένες.

9. Επιτρεπόμενες τάσεις χαλύβδινων δομικών στοιχείων και συνδέσεων σε kp/cm²
(κατά DIN 18800/1981)

	1	2	3	4	5
Είδος τάσεως	Υλικό				
	St 37		St 52		
	Περίπτωση φορτίσεως				
	2) H	2) HZ	2) H	2) HZ	
	kp/cm ²	kp/cm ²	kp/cm ²	kp/cm ²	kp/cm ²
1	Θλίψη & θλίψη από κάμψη όταν απαιτείται έλεγχος ευστάθειας	1400	1600	2100	2400
2	Εφελκυσμός & εφελκυσμός από κάμψη Θλίψη και θλίψη από κάμψη όταν δεν είναι δυνατή παρέκκλιση των θλιβομένων πελμάτων	1600	1800	2400	2700
3	Διάτμηση	920	1040	1390	1560
4	Σύνθλιψη άντυγας οπών κοινών κοχλιών 4.6, 5.6 1)	2800	3200	4200	4800
5	Σύνθλιψη άντυγας οπών ήλων St 36 & St 44 και εφαρμοσμένων κοχλιών 4.6 και 5.6 με διάκενο $\Delta d \leq 0.3 \text{ mm}$ 1)	3200	3600	4800	5400
6	Τμήση κοινών κοχλιών 4.6, 5.6	1120	1280	1680	1920
7	Τμήση ήλων St 36 & St 44 και εφαρμοσμένων κοχλιών 4.6 και 5.6	1400	1600	2100	2400

1) Εφόσον η κατηγορία αντοχής κοχλιών 4.6 χρησιμοποιείται σε δομικά στοιχεία από St 52 τότε εφαρμόζονται οι ιαχύουσες τιμές για St 37.

2) Η = Κύρια φορτία (μόνιμο ωφέλιμο και χτόνι)

ΗΖ = Κύρια και πρόσθετα φορτία. (εκτός από τα παραπάνω και το φορτίο ανέμων μεταβολές θερμοκρασίας κ.λπ.)



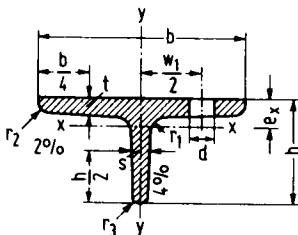
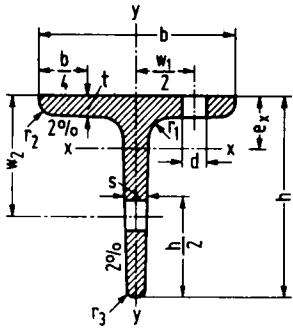
10 . Συντελεστές θερμικής διαστολής ανά °C για την περιοχή 0 °C μέχρι 100°C

Αλουμίνιο	$2,4 \cdot 10^{-5}$	Ινβαρό	$0,1 \cdot 10^{-5}$
Σκυρόδεμα	$1,1 \cdot 10^{-5}$	(36% Ni, 64% Fe)	
Μόλυβδος	$2,8 \cdot 10^{-5}$	Ορείχαλκος	$1,9 \cdot 10^{-5}$
Μιπρούντζος	$1,8 \cdot 10^{-5}$	Νικέλιο	$1,3 \cdot 10^{-5}$
Χάλυβας	$1,2 \cdot 10^{-5}$	Πλατίνη	$0,9 \cdot 10^{-5}$
Γιαλί	$0,8 \cdot 10^{-5}$	Άργυρος	$2,0 \cdot 10^{-5}$
Χαλκός	$1,6 \cdot 10^{-5}$	Ψευδάργυρος	$3,0 \cdot 10^{-5}$

11. Μηχανικές ιδιότητες κοχλιών

Κατηγορία Αντοχής	Αντοχή σε εφελκυσμό ¹ kp/cm ²	Όριο διαρροής kp/cm ²	Μήκυνση θραύσεως %
4.6	4000	2400	22
5.6	5000	3000	20
10.9	10000	9000	9

12. Ελάσματα διατομής T



Συμβολισμός T	Διαστάσεις					A cm ²	G kg/m	e _y cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	I _z cm	Για τον άξονα κάμψεως								
	h mm	b mm	s=t mm	r ₁ mm	r ₂ mm							γ - γ								
												γ	γ	z						
T 20	20	20	3	1.5	1	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42						
T 25	25	25	3,5	2	1	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51						
T 30	30	30	4	2	1	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62						
T 35	35	35	4,5	2,5	1	2,97	2,33	0,99	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,73						
T 40	40	40	5	2,5	1	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83						
T 45	45	45	4,5	5,5	3	1,5	4,67	3,67	1,26	8,13	2,51	1,32	4,01	1,78	0,93					
T 50	50	50	6	3	1,5	5,66	4,44	1,39	12,1	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03						
T 60	60	60	7	3,5	2	7,94	6,23	1,66	23,8	5,48	1,73	12,2	4,07	1,24						
T 70	70	70	8	4	2	10,6	8,32	1,94	44,5	8,79	2,05	22,1	6,32	1,44						
T 80	80	80	9	4,5	2	13,6	10,7	2,22	73,7	12,8	2,33	37,0	9,25	1,65						
T 90	90	90	10	5	2,5	17,1	13,4	2,48	119	18,2	2,64	58,5	13,0	1,85						
T 100	100	100	11	5,5	3	20,9	16,4	2,74	179	24,6	2,92	88,3	17,7	2,05						
T 120	120	120	13	6,5	3	29,6	23,2	3,28	366	42,0	3,51	178	29,7	2,45						
T 140	140	140	15	7,5	4	39,9	31,3	3,80	660	64,7	4,07	330	47,2	2,88						
TB 30	30	60	5,5	3	1,5	4,64	3,64	0,67	2,58	1,11	0,75	8,62	2,87	1,36						
TB 35	35	70	6	3	1,5	5,94	4,66	0,77	4,49	1,65	0,87	15,1	3,31	1,59						
TB 40	40	80	7	3,5	2	7,91	6,21	0,88	7,81	2,50	0,99	28,5	7,13	1,90						
TB 50	50	100	8,5	4,5	2	12,0	9,42	1,09	18,7	4,78	1,25	67,7	13,5	2,38						
TB 60	60	120	10	5	2,5	17,0	13,4	1,30	38,0	8,09	1,49	137	22,8	2,84						



ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Βασικές έννοιες

1.1 Εξωτερικές – Εσωτερικές δυνάμεις – Εντατική κατάσταση – Τάση – Παραμόρφωση	3
1.2 Ελαστικότητα – Ελαστικά και πλαστικά σώματα	5
1.3 Όλκιμα και ψαθυρά υλικά – Θραύση	5
1.4 Σπουδαιότερες καταπονήσεις	5
1.5 Η έννοια της τάσεως	8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Αξονικός εφελκυσμός και θλίψη

2.1 Γενικά -- Παραδείγματα	12
2.2 Πείραμα εφελκυσμού – Νόμος του Hooke	16
2.3 Εγκάρσια συστολή	19
2.4 Επιτρεπόμενες τάσεις και συντελεστής ασφάλειας – Επικίνδυνη διατομή	21
2.5 Πείραμα θλίψεως	24
2.6 Παραμορφώσεις και τάσεις από θερμοκρασιακή μεταβολή	28
2.7 Επιφανειακή πίεση	31
2.8 Σύνθλιψη άντυγας οπών	32
2.9 Άλλοι νόμοι παραμορφώσεως	33
2.10 Διαζονική καταπόνηση εφελκυσμού	33
2.11 Ασκήσεις	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Επιλύσεις Ισοστατικών Φορέων

3.1 Είδη στηρίξεων – Αντιδράσεις – Είδη ισοστατικών φορέων	40
3.2 Είδη εξωτερικών φορτίσεων φορέων	46
3.3 Διαγράμματα εντατικών μεγεθών δοκού	48
3.3.1 Αναλυτικός υπολογισμός αντιδράσεων	51
3.3.2 Αναλυτικός υπολογισμός εντατικών μεγεθών	54
3.3.3 Σχέση μεταξύ τέμνουσας δυνάμεως και ροπής κάμψεως	56
3.3.4 Γραφικός υπολογισμός διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών	56
3.4 Αμφιέρειστη δοκός με συγκεντρωμένα φορτία	58
3.5 Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφο διανεμημένο καθολικό φορτίο	60
3.6 Αμφιέρειστη δοκός με συνδυασμό μεμονωμένων και ομοιόμορφα κατανεμημένων φορτίων	64
3.7 Αμφιέρειστη δοκός με ασύμμετρη τριγωνική και συμμετρική τριγωνική φόρτιση. Μορφή διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών δοκού για διάφορες φορτίσεις	65
3.8 Πρόβολος	67
3.9 Πρόβολος με συγκεντρωμένο φορτίο στο άκρο	68
3.10 Πρόβολος με πολλά συγκεντρωμένα φορτία	69
3.11 Πρόβολος με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο	69
3.12 Πρόβολος με συνδυασμό μεμονωμένων και ομοιόμορφα κατανεμημένων φορτίων	70

3.13 Πρόβολος με τριγωνική φόρτιση	71
3.14 Προέχουσες δοκοί (Αμφιέρειστες δοκοί με προβόλους)	72
3.15(1) Μονοπροέχουσα με συγκεντρωμένα φορτία	72
3.15(2) Μονοπροέχουσα με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο	74
3.15(3) Μονοπροέχουσα με συνδυασμό των δύο παραπάνω ειδών φορτίων	76
3.16 Αμφιπροέχουσα με συγκεντρωμένο φορτίο ή με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο και σε συνδυασμό των δύο	76
3.17 Λυσμενείς φορτίσεις	78
3.18 Απλά τριγωνικά δίκτυωματα. Ορισμοί	81
3.18 (1) Ενσταθή δίκτυωματα	82
3.18(2) Υπολογισμός των επωτερικών δυνάμεων των ράβδων με τη γραφική μέθοδο. Διάγραμμα Cremona	85
3.18(3) Υπολογισμός επωτερικών δυνάμεων ράβδων με την αναλυτική μέθοδο (τομές Ritter) ..	88

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Απλή Κάμψη

1.1 Λαστιστιολογηση χαλύβιδινων και ξύλινων δοκών	93
1.2 Παραμορφώσεις λόγω κάμψεως. Ελαστική γραμμή	121
1.3 Ασκήσεις για λύση	126
1.4 Λοξή κάμψη	128

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ Τμήση – Διάτμηση

2.1 Γενικά - Τύποι υπολογισμού	131
2.2 Λιατμητικές τάσεις σε δοκούς που κάμπονται	138

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ Λυγισμός

3.1 Γενικά - Παραδείγματα	146
3.2 Λυγισμός στην ελαστική περιοχή – Τύπος του Euler	148
3.3 Ακτίνα αδρανείας – Λιγνηρότητα	151
3.4 Κρισμή τάσης λυγισμού – Οριακή λιγνηρότητα	153
3.5 Λυγισμός στην πλαστική περιοχή – Τύπος Tetmajer	154
3.6 Επιτρεπόμενη τάση θλίψεως – Υπολογισμός κατά Euler ή Tetmajer	155
3.7 Μέθοδος των συντελεστών ω	157

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ Στρέψη

4.1 Γενικά -- Παραδείγματα	162
4.2 Ιδιομορφία της στρέψεως	164
4.3 Τύποι στρέψεως για διάφορες διατομές ράβδου	165
4.4 Υπολογισμός περιστρεφόμενου άξονα (ατράκτου) σε στρέψη	173

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Σύνθετες εντατικές καταστάσεις

5.1 Κάμψη και αξονικός εφελκυσμός ή θλίψη	177
5.2 Πυρήνας διατομής	183
5.3 Έκκεντρη θλίψη επάνω σε υλικά που δεν αντέχουν σε εφελκυσμό	185
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	188

COPYRIGHT ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

