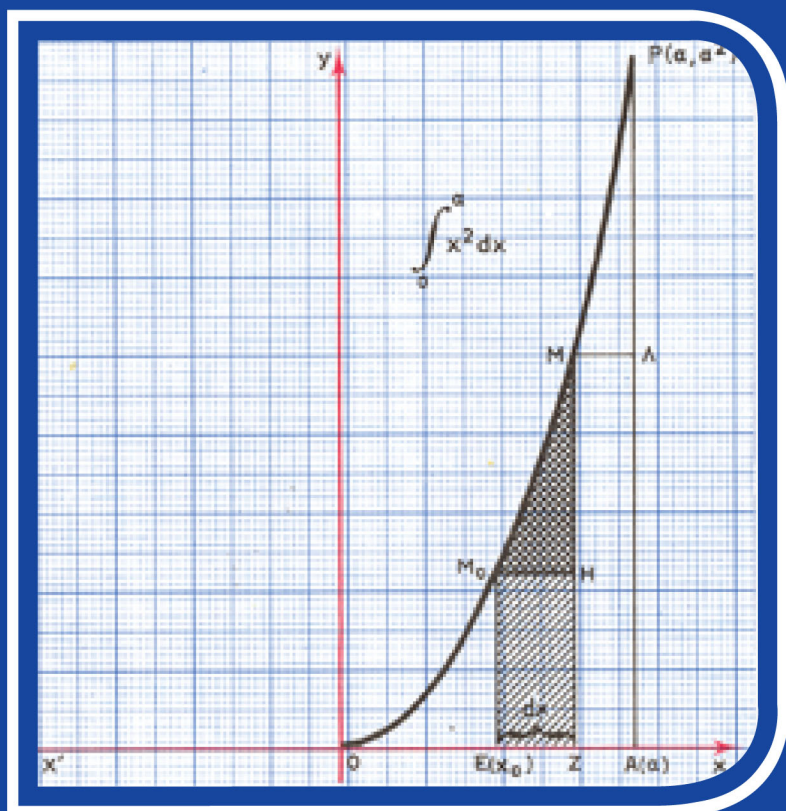


# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στρατή Παπαδόπουλου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ





1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ  
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ὁ ἰδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «Ἰδρύματος Εὐγενίδου», πολὺ νωρὶς πρόβλεψε καὶ σχημάτισε τὴν πεποίθησιν ὅτι ἡ ἄρτια κατάρτιση τῶν τεχνικῶν μας, σέ συνδυασμὸ μὲ τὴν ἐθνικὴ ἀγωγή, θὰ ἦταν ἀναγκαῖος καὶ ἀποφασιστικὸς παράγοντας τῆς προόδου τοῦ Ἑθνους μας.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴ ὁ Εὐγενίδης ἐκδήλωσε μὲ τὴ γενναιόφρονα πράξιν εὐεργεσίας, νὰ κληροδοτήσῃ σεβαστὸ ποσὸ γιὰ τὴ σύστασιν Ἰδρύματος πού θὰ εἶχε σκοπὸ νὰ συμβάλλῃ στὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς Ἑλλάδας.

Ἔτσι τὸ Φεβρουάριον τοῦ 1956 συστήθηκε τὸ «Ἰδρυμα Εὐγενίδου», τοῦ ὁποῖου τὴν διοίκησιν ἀνέλαβε ἡ ἀδελφὴ του κυρία Μαριάνθη Σίμου, σύμφωνα μὲ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτη.

Ἀπὸ τὸ 1956 μέχρι σήμερα ἡ συμβολὴ τοῦ Ἰδρύματος στὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευσιν πραγματοποιεῖται μὲ διάφορες δραστηριότητες. Ὅμως ἀπ' αὐτὲς ἡ σημαντικότερη, πού κρίθηκε ἀπὸ τὴν ἀρχὴ ὡς πρῶτης ἀνάγκης, εἶναι ἡ ἐκδοσὴ βιβλίων γιὰ τοὺς μαθητὲς τῶν τεχνικῶν σχολῶν.

Μέχρι σήμερα ἐκδόθηκαν 150 τόμοι βιβλίων, πού ἔχουν διατεθεῖ σέ πολλὰ ἑκατομμύρια τεύχη, καὶ καλύπτουν ἀνάγκες τῶν Κατώτερων καὶ Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ Ὑπ. Παιδείας, τῶν Σχολῶν τοῦ Ὄργανισμοῦ Ἀπασχολήσεως Ἑργατικοῦ Δυναμικοῦ (ΟΑΕΔ) καὶ τῶν Δημοσίων Σχολῶν Ἑμπορικοῦ Ναυτικοῦ.

Μοναδικὴ φροντίδα τοῦ Ἰδρύματος σ' αὐτὴ τὴν ἐκδοτικὴν του προσπάθειαν ἦταν καὶ εἶναι ἡ ποιότητα τῶν βιβλίων, ἀπὸ ἀποψη ὅχι μόνον ἐπιστημονικὴ, παιδαγωγικὴ καὶ γλωσσικὴ, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἀποψη ἐμφανίσεως, ὥστε τὸ βιβλίον νὰ ἀγαπηθεῖ ἀπὸ τοὺς νέους.

Γιὰ τὴν ἐπιστημονικὴ καὶ παιδαγωγικὴ ποιότητα τῶν βιβλίων, τὰ κείμενα ὑποβάλλονται σέ πολλὰς ἐπεξεργασίας καὶ βελτιώνονται πρὶν ἀπὸ κάθε νέα ἐκδοσιν.

Ἰδιαίτερη σημασίαν ἀπέδωσε τὸ Ἰδρυμα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν στὴν ποιότητα τῶν βιβλίων ἀπὸ γλωσσικὴ ἀποψη, γιατί πιστεύει ὅτι καὶ τὰ τεχνικὰ βιβλία, ὅταν εἶναι γραμμένα σέ γλῶσσα ἄρτια καὶ ὁμοιόμορφη ἀλλὰ καὶ κατάλληλη γιὰ τὴ στάθμην τῶν μαθητῶν, μποροῦν νὰ συμβάλλουν στὴν γλωσσικὴ διαπαιδαγώγησιν τῶν μαθητῶν.

Ἔτσι μὲ ἀπόφασιν πού πάρθηκε ἤδη ἀπὸ τὸ 1956 ὅλα τὰ βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Τεχνίτη, δηλαδὴ τὰ βιβλία γιὰ τίς Κατώτερες Τεχνικὲς Σχολές, ὅπως ἀργότερα καὶ γιὰ τίς Σχολές τοῦ ΟΑΕΔ, εἶναι γραμμένα σέ γλῶσσα δημοτικὴ μὲ βάση τὴν γραμματικὴν τοῦ Τριανταφυλλίδη, ἐνῶ ὅλα τὰ ἄλλα βιβλία εἶναι γραμμένα στὴν ἀπλὴ καθαρεύουσα. Ἡ γλωσσικὴ ἐπεξεργασία τῶν βιβλίων γίνεται ἀπὸ φιλολόγους τοῦ Ἰδρύματος καὶ ἔτσι ἐξασφαλίζεται ἡ ἐνιαία σύνταξις καὶ ὁρολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Ἡ ποιότητα τοῦ χαρτιοῦ, τό εἶδος τῶν τυπογραφικῶν στοιχείων, τά σωστά σχήματα καί ἡ καλαίσθητη σελιδοποίηση, τό ἐξώφυλλο καί τό μέγεθος τοῦ βιβλίου περιλαμβάνονται καί αὐτά στίς φροντίδες τοῦ Ἰδρύματος.

Τό Ἴδρυμα θεώρησε ὅτι εἶναι ὑποχρέωσή του, σύμφωνα μέ τό πνεῦμα τοῦ ἱδρυτῆ του, νά θέσει στήν διάθεση τοῦ Κράτους ὅλη αὐτή τήν πείρα του τῶν 20 ἐτῶν, ἀναλαμβάνοντας τήν ἐκδοση τῶν βιβλίων καί γιά τίς νέες Τεχνικές καί Ἑπαγγελματικές Σχολές καί τά νέα Τεχνικά καί Ἑπαγγελματικά Λύκεια.

#### ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

**Ἀλέξανδρος Ι. Παπᾶς**, Ὁμ. Καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.

**Χρυσόστομος Φ. Καβουνίδης**, Διπλ.-Μηχ.-Ἡλ. ΕΜΠ, Ἐπίτιμος Διοικητής ΟΤΕ, Ἀντιπρόεδρος.

**Μιχαήλ Γ. Ἀγγελόπουλος**, Τακτικός Καθηγητής ΕΜΠ, τ. Διοικητής ΔΕΗ.

**Θεοδόσιος Παπαθεοδοσίου**, Δρ. Μηχανολόγος Μηχανικός, Δ/ντής Ἐφ. Προγρ. καί Μελετῶν Τεχν. καί Ἑπαγγ. Ἑκπ. Ὑπ. Παιδείας.

Ἐπιστημ. Σύμβουλος, **Γ. Ροῦσσος**, Χημ.-Μηχ. ΕΜΠ.

Σύμβουλος ἐπί τῶν ἐκδόσεων τοῦ Ἰδρύματος **Κ. Α. Μανάφης**, Καθηγητής Φιλοσοφικῆς Σχολῆς Παν/μίου Ἀθηνῶν.

Γραμματεὺς, **Δ. Π. Μεγαρίτης**.

#### Διατελέσαντα μέλη ἢ σύμβουλοι τῆς Ἐπιτροπῆς

**Γεώργιος Κακριδής** † (1955 - 1959) Καθηγητής ΕΜΠ, **Ἀγγελος Καλογεράς** † (1957 - 1970) Καθηγητής ΕΜΠ, **Δημήτριος Νιάνιαν** (1957 - 1965) Καθηγητής ΕΜΠ, **Μιχαήλ Σπετασιέρης** (1956 - 1959), **Νικόλαος Βασιώτης** (1960 - 1967), **Θεόδωρος Κουζέλης** (1968 - 1976) Μηχ.-Ἡλ. ΕΜΠ, **Παναγιώτης Χατζηιωάννου** (1977 - 1982) Μηχ. Ἡλ. ΕΜΠ.





Γ' ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤΡΑΤΗ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΑΘΗΝΑ  
1983





## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

### Λίγα λόγια τοῦ συγγραφέα

Τό βιβλίο αὐτό περιέχει κυρίως τήν ὕλη πού τό Ὑπουργεῖο ἔχει καθορίσει γιά τό μάθημα Κορμοῦ τῶν μαθηματικῶν τῆς Γ' τάξεως Λυκείου. Γίνεται ὅμως καί ἀναφορά σέ μερικές (πολύ λίγες) ἔννοιες, πού «πρέπει νά μάθει ὁ μαθητής» καί οἱ ὁποῖες θά ἀναλυθοῦν διεξοδικότερα κατά τή διδασκαλία τοῦ μαθήματος τῆς Ἐπιλογῆς.

Συγκεκριμένα δίνονται οἱ ὁρισμοί καί οἱ ἐξισώσεις τοῦ κύκλου, τῆς ἐλλείψεως, τῆς παραβολῆς καί τῆς ὑπερβολῆς.

Αὐτό ἔγινε — μέ εὐθύνη τοῦ συγγραφέα — γιά δύο λόγους:

α) Γιά νά διευκρινισθοῦν ἔννοιες καί σχέσεις συναφεῖς (π.χ. ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως μέ τύπο  $y = ax^2 + bx + \gamma$ ).

β) Γιά νά μὴν ἀποτελεῖ ἄγνωστο τόπο γιά τοὺς ἀπόφοιτους τοῦ Λυκείου ἡ ἔννοια καί ἡ γεωμετρική φυσιογνωμία τῶν κωνικῶν τομῶν, μολονότι ἔρχονται ἀναγκαστικά σέ ἐπαφή μ' αὐτά τά σχήματα ἀπό ἄλλες προσβάσεις (Φυσική — Κοσμογραφία).

Πάντως ὅσοι παράγραφοι, θέματα, ἀσκῆσεις ἔχουν ἀστερίσκο δέν πρέπει νά διδαχθοῦν στό μάθημα Κορμοῦ· εἶναι ὑλικό γιά τό μάθημα Ἐπιλογῆς.

Ἐξάλλου ιδιότητες καί ἐφαρμογές πού εἶναι γραμμένες μέ μικρά στοιχεῖα — καί δέν φέρουν ἀστερίσκο — ἀφίνονται στήν κρίση τοῦ διδάσκοντος.

Στό τέλος τοῦ βιβλίου παραθέτονται καί λίγα στοιχεῖα Περιγραφικῆς Στατιστικῆς, σύμφωνα πάντοτε μέ τό ἀναλυτικό πρόγραμμα Κορμοῦ.

Ὁ συγγραφέας κατέβαλε ιδιαίτερη προσπάθεια γιά νά παρουσιάσει μέ τόν ἀπλούστερο δυνατό τρόπο τό πρόσθετο αὐτό ὑλικό καί νά εὐκολύνει ἔτσι — στό μέτρο τῶν δυνάμεών του — τό ἔργο καί τῶν μαθητῶν καί τῶν δασκάλων.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ  
ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ  
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ  
ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΑΙ Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1  
ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

**1.1 Άναγκαιότητα του διανύσματος.**

Μᾶς πληροφορήσαν ότι ένα πυροβόλο εκτοξεύει βλήματα που έχουν στο ξεκίνημά τους «ταχύτητα» ίση π.χ. με 2500 km/h.

Είναι ἄραγε δυνατό, μόνο μ' αυτό τό στοιχείο, νά καθορίσουμε τήν τροχιά πού θά διαγράψει ἕνα βλήμα αὐτοῦ τοῦ πυροβόλου καί νά βροῦμε σέ ποιό σημείο τοῦ ἐδάφους (περίπου τουλάχιστον) θά προσκρούσει τό βλήμα;

Καί ἂν δέν ἔχει κανείς τίς ἀπαραίτητες γνώσεις γιά νά ἀντιμετωπίσει ἕνα τέτοιο πρόβλημα, εἶναι εὐκολο νά συμπεράνει ὅτι: «χρειαζόμαστε ἀκόμα (τουλάχιστον) καί τή γωνία  $\hat{\omega}$ , πού σχηματίζει ὁ σωλήνας ΚΑ [σχ. 1.1 (α)] τοῦ πυροβόλου μέ τήν προβολή του Οχ πάνω στόν ὀρίζοντα».

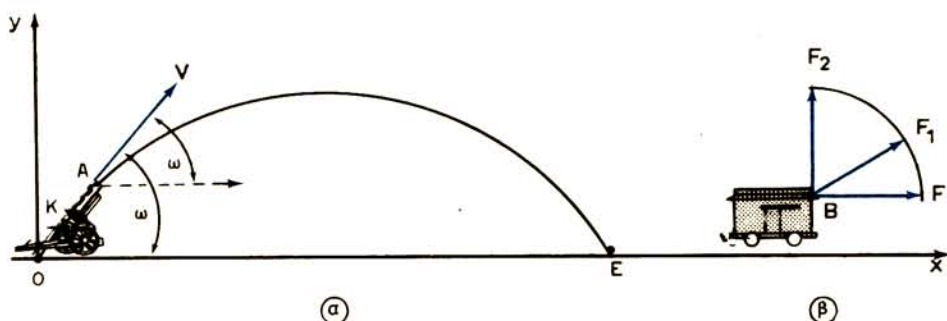
Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, δέν εἶναι ἀρκετό τό **φυσικό μέγεθος**, πού ὀνομάσαμε **ταχύτητα**, νά δίνεται μ' ἕνα μόνον ἀριθμό (ὅπως 2500 km/h). Πρέπει νά συνοδεύεται καί ἀπό πληροφορίες σχετικά μέ τόν τρόπο «ἐνεργείας του». Πρέπει δηλαδή νά γνωρίζομε πάνω σέ ποιιά εὐθεία καί μέ ποιιά φορά «ἐνεργεῖ» ἡ ταχύτητα, ἂν θέλομε νά ὁδηγηθοῦμε σέ σωστά καί πλήρη συμπεράσματα σχετικά μέ τ' ἀποτελέσματά της.

Ἔτσι, στό παράδειγμά μας, τήν ταχύτητα τοῦ βλήματος τήν παραστήσαμε μέ τό βέλος  $\vec{AV}$ .

Στό σχῆμα 1.1 (β) ἐμφανίζεται μιά ἄλλη παρόμοια περίπτωση.

Ἄν σ' ἕνα σημείο Β τοῦ ὀχήματος ἐνεργήσῃ μιά **δύναμη**, τό ἀποτέλεσμα τῆς δράσεώς της θά ἐξαρτηθεῖ καί ἀπό τόν «τρόπο ἐνεργείας» αὐτῆς τῆς δυνάμεως.

Ἔστω καί ἂν οἱ δυνάμεις, πού δηλώνονται μέ τά βέλη  $\vec{BF}$ ,  $\vec{BF}_1$ ,  $\vec{BF}_2$ , ἔχουν τήν ἴδια ἔνταση, οἱ συνέπειες τῆς ἐφαρμογῆς τους δέν εἶναι οἱ ἴδιες.



Σχ. 1.1.

Παρουσιάζεται κι εδώ η ίδια αναγκαιότητα, όπως προηγούμενα με την ταχύτητα· πρέπει δηλαδή να γνωρίζουμε, πέρα από την ένταση (τό μέτρο) μιάς δυνάμεως, και την ευθεία ενεργείας αλλά και τη φορά της.

#### Υπάρχουν τελικά δύο είδη φυσικών μεγεθών:

α) Εκείνα που μπορούν να ορισθούν με τη χρησιμοποίηση ενός αριθμού. Ο αριθμός αυτός είναι τό **μέτρο** του μεγέθους και τά μεγέθη αυτά λέγονται **αριθμητικά** ή **βαθμωτά**. Τέτοια π.χ. μεγέθη είναι ή **μάζα**, ό **όγκος**, ή **πυκνότητα**, ή **θερμοκρασία** ενός σώματος, ή **απόσταση** μεταξύ δύο πόλεων.

β) Όλα εκείνα που απαιτούν για τόν πλήρη καθορισμό τους μιά ένδειξη ως πρὸς τόν «τρόπο ενεργείας τους»· αυτά που δέν μπορούν να ορισθούν χωρίς τή μεσολάβηση τῶν έννοιῶν τῆς **διευθύνσεως** και **τῆς φορᾶς**, αυτά που ἐμφανίζονται μ' ένα συμψηφὶ **προσανατολισμό**.

Τά μεγέθη αυτά, όπως ή **δύναμη**, ή **ταχύτητα**, ή **ἐπιτάχυνση**, ή **πίεση** κλπ., λέγονται **διανυσματικά μεγέθη**.

Η λέξη **διάνυσμα** μᾶς θυμίζει γενικά ὄχι μόνο τή «μετάβαση» ἀπὸ μιάν ἀρχική κατάσταση A σέ μιά τελική B, ἀλλά ἀκόμα και τόν «τρόπο μεταβάσεως» ἀπὸ τήν κατάσταση A στή B.

Σύμφωνα μ' αὐτή τήν ιδέα, πολλῶν εἰδῶν μεταβολές θά μπορούσαν νά χαρακτηρισθῶν ὡς διανύσματα. Ἐτσι π.χ., μολονότι ή θερμοκρασία εἶναι ἓνα ἀριθμητικό μέγεθος, αὐτό που χαρακτηρίζει τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας γύρω ἀπὸ ἓνα σημεῖο A, συναρτῆσει τῆς διευθύνσεως, εἶναι ἓνα διάνυσμα.

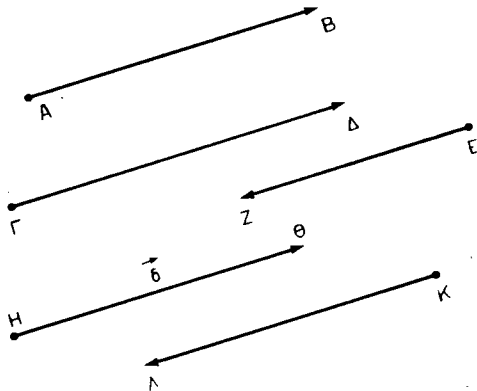
#### Τί εἶναι λοιπόν τό διάνυσμα;

Πρίν περάσουμε στή διεξοδική μελέτη τοῦ διανύσματος, καί κλείνοντας αὐτή τήν εἰσαγωγή, θά μπορούσαμε, σύμφωνα καί μέ τά προηγούμενα, νά δώσομε τήν ἐπόμενη ἀπάντηση: **Διάνυσμα εἶναι ή μαθηματική εἰκόνα — ή μαθηματική παράσταση — ἑνός διανυσματικοῦ μεγέθους.**

## 1.2 Τό εφαρμοστό διάνυσμα και τὰ στοιχεία του.

Μιά κατάλληλη ἐπινόηση γιά τήν παράσταση ενός προσανατολισμένου μεγέθους θά ἦταν κάθε τί πού θά ἐπέτρεπε νά ὀρίσουμε συγχρόνως ἕνα ποσό, μιά διεύθυνση καί μιά φορά.

Δυό σημεῖα  $A$  καί  $B$  στό χῶρο (σχ. 1.2) ὅταν τό ἕνα (ἔστω τό  $A$ ) χα-



Σχ. 1.2.

ρακτηρίζεται ὡς ἀρχή καί τό ἄλλο (τό  $B$ ) ὡς πέρας, μαζί μέ τό τμήμα πού ὀρίζουν αὐτά τὰ σημεῖα, εἶναι μιά καλή εἰκόνα διανυσματικοῦ μεγέθους.

Γι' αὐτό τό λόγο:

**Ὀνομάζουμε εφαρμοστό διάνυσμα ἕνα εὐθύγραμμο τμήμα, μέ ὀρισμένα ἄκρα, μαζί μέ μιά φορά πάνω σ' αὐτό τό τμήμα.**

Ἐτσι δυό σημεῖα  $A$  καί  $B$ , ἐνῶ ὀρίζουν ἕνα καί μόνο τμήμα (τό  $AB$  ἢ τό  $BA$  ἀδιάφορα), μᾶς παρέχουν δυό διαφορετικά διανύσματα: τό ἕνα μέ ἀρχή τό  $A$  καί πέρας τό  $B$  (συμβολικά:  $\overrightarrow{AB}$ ) καί τό ἄλλο μέ ἀρχή τό  $B$  καί πέρας τό  $A$  (συμβολικά:  $\overrightarrow{BA}$ ).

Δυό εφαρμοστά διανύσματα, πού κεῖνται στήν ἴδια εὐθεῖα ἢ σέ παράλληλες εὐθεῖες, λέγονται **παράλληλα** ἢ **συγγραμμικά διανύσματα**. λέμε ἀκόμα, σ' αὐτή τήν περίπτωση, ὅτι τὰ διανύσματα ἔχουν τήν **ἴδια διεύθυνση**. Π.χ. ὅλα τὰ εφαρμοστά διανύσματα τοῦ σχήματος 1.2 ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση.

Σέ κάθε σύνολο παραλλήλων εὐθειῶν, σέ κάθε δηλαδή διεύθυνση, ἀνήκουν δυό ἀντίθετες φορές (κατευθύνσεις).

Δυό παράλληλα εφαρμοστά διανύσματα, ἄν ἔχουν καί τήν ἴδια φορά, λέγονται **ὁμόρροπα**. δυό παράλληλα εφαρμοστά διανύσματα μέ ἀντίθετες φορές, λέγονται **ἀντίρροπα**.

Τά εφαρμοστά π.χ. διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$  καί  $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$  (σχ. 1.2) εἶναι ὁμόρροπα, ἐνῶ τὰ  $\overrightarrow{AB}$  καί  $\overrightarrow{EZ}$  εἶναι ἀντίρροπα.

Δυό εφαρμοστά διανύσματα λέγονται **ίσα** (ή **ισοδύναμα**) αν είναι όμορ-  
ροπα και ίσομήκη, όπως π.χ. τά διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{H\Theta}$  (σχ. 1.2)

Δυό εφαρμοστά διανύσματα λέγονται **αντίθετα** αν είναι αντίρροπα και  
ίσομήκη, όπως π.χ. τά διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{KL}$  (ή τά  $\vec{AB}$  και  $\vec{BA}$ , σχ. 1.2 ).

Άπό όσα άναφέραμε προκύπτει άβίαστα τό άκόλουθο σημαντικό συμπέ-  
ρασμα: «Κάθε εφαρμοστό διάνυσμα έχει τρία γνωρίσματα, τρία στοιχεία: α) **διεύθυνση** (ή **εύθεια** όπου κείται\* τό διάνυσμα και κάθε παράλληλη πρós αύτή), β) **φορά** και γ) **μήκος**».

Έδω είναι άναγκαίο νά γίνει ή διευκρίνιση ότι τά προηγούμενα άναφέρον-  
ται σέ διανύσματα τών όποιων τά άκρα είναι διαφορετικά. Και τούτο διότι  
είναι σκόπιμο (όπως θά δούμε και παρακάτω) νά δεχθούμε τήν ύπαρξη τού  
(λεγόμενου) **μηδενικού εφαρμοστού διανύσματος**: δηλαδή ενός (συμβατικού)  
διανύσματος, στο όποιο ή άρχή και τό πέρας συμπίπτουν.

Δυό όποιαδήποτε εφαρμοστά μηδενικά διανύσματα  $\vec{AA}$ ,  $\vec{BB}$ , είναι ίσα, διότι: α) τά μή-  
κη τους είναι ίσα (ώς μηδενικά): β) μπορούμε νά πάρουμε ως κοινή διεύθυνσή τους δυό εύθειες,  
άπό τά Α και Β, παράλληλες μεταξύ τους: γ) δεχόμεστε τέλος ότι έχουν και τήν ίδια φορά  
(όποια θέλουμε πάνω στά στηρίγματά τους).

### 1.3 Τό ελεύθερο διάνυσμα.

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, τά διάφορα εφαρμοστά διανύσματα τού  
χώρου διαμερίζονται σέ κλάσεις ίσων μεταξύ τους διανυσμάτων.

Δυό εφαρμοστά διανύσματα άπό διαφορετικές κλάσεις είναι άνισα, διότι,  
για νά άνήκουν σέ διαφορετικές κλάσεις, θά διαφέρουν σ' ένα τουλάχιστον άπό  
τά τρία στοιχεία (διεύθυνση, φορά, μήκος).

Ένα άπειροσύνολο άπό ίσα μεταξύ τους εφαρμοστά διανύσματα λέγεται **ελεύ-  
θερο διάνυσμα** ή συντόμως **διάνυσμα**.

Συνεπώς ένα (ελεύθερο) διάνυσμα είναι μία κλάση ίσων εφαρμοστών δια-  
νυσμάτων, δηλαδή εφαρμοστών διανυσμάτων πού έχουν τήν ίδια διεύθυνση,  
τήν ίδια φορά και τό ίδιο μήκος.

Γι' αυτό μπορούμε άκόμα νά λέμε ότι: **Διάνυσμα (μή μηδενικό) είναι τό σύ-  
στημα μιās διευθύνσεως, μιās φοράς, συσχετισμένης μ' αύτή τή διεύθυνση, και  
ένός μήκους  $\neq 0$ : μηδενικό δέ διάνυσμα είναι τό σύστημα μιās όποιασδήποτε  
διευθύνσεως, μιās όποιασδήποτε συσχετισμένης φοράς και τού μηδενικού μήκους.**

Ένα ελεύθερο διάνυσμα αντιπροσωπεύεται άπό κάποιο εφαρμοστό και  
σημειώνεται συνήθως μ' ένα μικρό γράμμα έπιγραμμισμένο μ' ένα βέλος, όπως:  
 $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\delta}$  (σχ. 1.2) . Για νά δηλώσουμε ότι ένα διάνυσμα είναι μηδενικό θά γράφομε:  
 $\vec{\alpha} = \vec{0}$ . Για νά δηλώσουμε ότι ένα ελεύθερο διάνυσμα  $\vec{\delta}$  αντιπροσωπεύεται άπό  
ένα εφαρμοστό  $\vec{H\Theta}$  θά γράφομε  $\vec{\delta} = \vec{H\Theta}$ .

\* Η εύθεια όπου κείται ένα εφαρμοστό διάνυσμα λέγεται και φοράς ή στήριγμα τού διανύ-  
σματος.

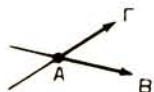


**Μέτρο** ενός διανύσματος  $\vec{\delta}$  λέγεται τό μήκος όποιοιδηόποτε από τά έφαρμoστά διανύσματα πού άπαρτίζουν τό (έλεύθερο) διάνυσμα  $\vec{\delta}$ · συμβολικά γράφoμε  $|\vec{\delta}|$ .

Στή Γεωμετρία καί τή Φυσική γίνεται συχνά χρήση τοῦ έλεύθερου διανύσματος. Έτσι π.χ. ή μεταφορά ενός σχήματος καθορίζεται μ' ένα έλεύθερο διάνυσμα. Επίσης μιά δύναμη, πού ένεργεί πάνω σ' ένα σώμα, καθορίζεται από ένα έλεύθερο διάνυσμα, όταν δέν παίζει ρόλο τό σημείο έφαρμογής τής δυνάμεως.

#### 1.4 Έφαρμογές καί παραδείγματα.

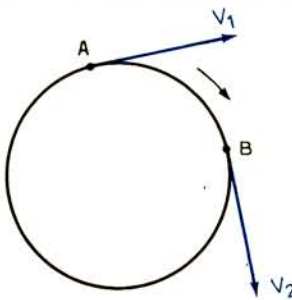
1) Μπορούμε, γιά τά διανύσματα  $\vec{AB}$  καί  $\vec{AG}$ , τοῦ σχήματος 1.4α νά θέσομε τό έρώτημα: Έχουν τά διανύσματα  $\vec{AB}$  καί  $\vec{AG}$  τήν ίδια ή διαφορετικές φορές;



Σχ. 1.4α.

Όχι. Διότι τά διανύσματα αυτά άνήκουν σέ διαφορετικές διευθύνσεις καί δυό διανύσματα μπορούν νά έχουν τήν ίδια ή αντίθετες φορές μόνον όταν άνήκουν στήν ίδια διεύθυνση.

2) Ένα κινητό κινείται όμαλά πάνω σέ κυκλική τροχιά· διανύει δηλαδή ίσα κυκλικά τόξα σέ ίσους χρόνους. Πώς θά παραστήσομε τήν ταχύτητά του; Είναι σωστή ή διατύπωση: «Τό κινητό διατηρεί σταθερή ταχύτητα»; (σχ. 1.4β)



Σχ. 1.4β.

1) Τήν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ, σ' ένα σημείο A τής τροχιάς του, θά τήν παραστήσομε μ' ένα διάνυσμα πάνω στήν έφαπτομένη τοῦ κύκλου, στό σημείο A. Τό διάνυσμα αυτό έχει ως άρχή τό σημείο A.

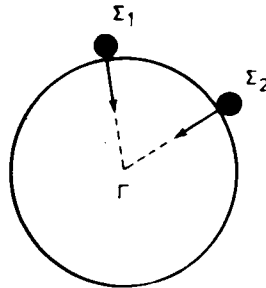
11) Η διατύπωση δέν είναι σωστή, διότι οί ταχύτητες  $\vec{AV}_1$  καί  $\vec{BV}_2$ , σέ διαφορετικά σημεία τής τροχιάς, έχουν διαφορετικές διευθύνσεις καί συνεπώς δέν μπορούν νά είναι ίσες.

Έκείνο πού μπορούμε νά πούμε στήν προκειμένη περίπτωση είναι: «τό μέτρο τής ταχύτητας τοῦ κινητοῦ διατηρείται σταθερό»· δηλαδή έχομε:  $|\vec{AV}_1| = |\vec{BV}_2|$ .

3) Τό βάρος ενός σώματος είναι αριθμητικό ή διανυσματικό μέγεθος; (σχ. 1.4γ)

Τό βάρος ενός σώματος (Σ) είναι δύναμη· είναι ή δύναμη μέ τήν όποία τό (Σ) έλκεται από τή Γή [όταν τό (Σ) βρίσκεται πάνω στή Γή]. Άρα τό βάρος είναι διανυσματικό μέγεθος. Σκό-

πιμο είναι νά παρατηρήσουμε ότι, τό βάρος ενός σώματος αλλάζει διεύθυνση από τόπο σέ τόπο,



Σχ. 1.4γ.

διότι κάθε φορά έχει φορέα τήν ευθεία πού συνδέει τό σώμα μέ τό κέντρο τῆς Γῆς. Ἐξάλλου καί ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ βάρους, ἐνός καί τοῦ ἴδιου σώματος, δέν εἶναι ἡ ἴδια σ' ὅλα τά σημεῖα τῆς Γῆς. Καί ἂν ἀκόμα θεωρήσουμε, λόγω τῆς ἀμελητέας διαφορᾶς, σταθερή τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ βάρους ἐνός σώματος πάνω στή Γῆ, αὕτη αλλάζει πάρα πολύ ὅταν τό ἴδιο σώμα βρεθεῖ π.χ. πάνω στή Σελήνη.

## 1.5 Ἀσκήσεις.

1. Ποιά κοινά γνωρίσματα ἔχουν οἱ ταχύτητες ὁλων τῶν αὐτοκινήτων πού κινοῦνται πάνω στόν ἴδιο δρόμο;

2. Τί εἶδους τετράπλευρο ὀρίζουν τά ἄκρα δυό ἴσων ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, πού δέν κεῖνται στήν αὕτη ευθεία;

3. Δίνεται ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα  $\vec{AB}$  καί ἕνα ἄλλο  $\vec{\Gamma\Delta}$  τό ὁποῖο μετατοπίζεται πάνω στό φορέα του (ε) καί γιά τό ὁποῖο γνωρίζουμε ὅτι  $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB}$ . Τί ἔχετε νά πείτε γιά τήν ευθεία (ε) καί γιά τά ζεύγη τῶν διανυσμάτων  $(\vec{A\Gamma}, \vec{B\Delta})$  πού ὀρίζονται γιά κάθε θέση τοῦ  $\vec{\Gamma\Delta}$ ;

4. Θεωροῦμε ἕνα κυρτό τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  μέ βάσεις τίς πλευρές  $AB$  καί  $\Gamma\Delta$ . Ἄς εἶναι  $E, Z, H$  καί  $\Theta$  τά μέσα ἀντιστοίχως τῶν πλευρῶν  $AD, B\Gamma$  καί τῶν διαγωνίων  $A\Gamma, B\Delta$ . Ἐφόσον τά διανύσματα  $\vec{AB}$  καί  $\vec{\Gamma\Delta}$  μετατοπίζονται πάνω στούς φορεῖς τους, τί ἔχετε νά πείτε γιά τά διανύσματα  $\vec{EZ}$  καί  $\vec{H\Theta}$ ; Ἄν εἰδικότερα εἶναι  $|\vec{AB}| = |\vec{\Gamma\Delta}|$  τί εἶναι τά διανύσματα  $\vec{AB}$  καί  $\vec{\Gamma\Delta}$  καί τί τό διάνυσμα  $\vec{H\Theta}$ ;

5. Τί ἔχετε νά πείτε γιά τήν ταχύτητα τοῦ βλήματος, στό σχῆμα 1.1, ἂν τό κινητό διαγράφει τή σημειούμενη τροχιά;

6. Νά βρεῖτε καί νά ἀναφέρετε διάφορα ἀριθμητικά καί διανυσματικά μεγέθη.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2

### ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

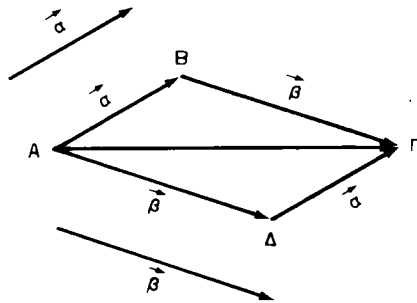
#### 2.1 Ἀθροισμα καί διαφορά διανυσμάτων.

α) Ἀθροισμα ἐφαρμοστῶν καί ἐλευθέρων διανυσμάτων.

Δυό ἐφαρμοστά διανύσματα  $\vec{AB}$  καί  $\vec{B\Gamma}$  (σχ. 2.1α) τέτοια ὥστε τό πέ-

ρας του ενός νά ταυτίζεται με την αρχή του άλλου, λέγονται **διαδοχικά**.

**\*Άθροισμα δύο διαδοχικών εφαρμοστών διανυσμάτων**  $\vec{AB}$  και  $\vec{B\Gamma}$  (σχ. 2.1α) λέγεται τό διάνυσμα  $\vec{A\Gamma}$ , δηλαδή εκείνο πού έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας τό πέρας του δευτέρου. Γράφομε:  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ .



Σχ. 2.1α.

**\*Άθροισμα δύο ελεύθερων διανυσμάτων**  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  λέγεται τό ελεύθερο διάνυσμα πού αντιπροσωπεύεται από ένα εφαρμοστό διάνυσμα  $\vec{A\Gamma}$  (σχ. 2.1α), αν τό  $\vec{A\Gamma}$  είναι τό άθροισμα δύο διαδοχικών εφαρμοστών διανυσμάτων, πού αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα τό  $\vec{\alpha}$  και τό  $\vec{\beta}$ . \*Αν δηλαδή είναι  $\vec{\alpha} = \vec{AB}$  και  $\vec{\beta} = \vec{B\Gamma}$ , τότε έχομε  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ .

\*Αν τά διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\alpha}_1$  είναι δύο αντίθετα διανύσματα και  $\vec{AB}$  είναι ένας αντιπρόσωπος του  $\vec{\alpha}$  (σχ. 2.1α), τότε τό  $\vec{BA}$  θά είναι ένας αντιπρόσωπος του  $\vec{\alpha}_1$ . \*Ετσι θά έχομε  $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_1 = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ .

Τό άθροισμα δηλαδή δύο αντίθετων διανυσμάτων είναι τό μηδενικό διάνυσμα.

**β) Ιδιότητες του άθροίσματος.** Γιά τό άθροισμα τών διανυσμάτων ισχύουν οί γνωστές, και από την πρόσθεση τών αριθμών, ιδιότητες:

$$I) \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} \text{ (άντιμεταθετική ιδιότητα).}$$

$$II) (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \text{ (προσεταιριστική ιδιότητα).}$$

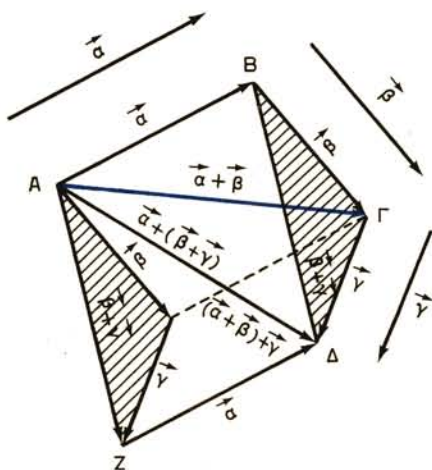
Τό σχήμα 2.1α μάς παρέχει, σύμφωνα με τίς ιδιότητες του παραλληλογράμμου, μία γεωμετρική επιβεβαίωση τής άντιμεταθετικής ιδιότητας.

\*Η προσεταιριστική ιδιότητα επίσης, γίνεται προφανής στό σχήμα 2.1β, και προκύπτει από τίς βασικές ιδιότητες του τριγώνου και του παραλληλογράμμου.

\*Όπως και στην πρόσθεση τών πραγματικών αριθμών έτσι κι εδώ μπορούμε, με τόν ίδιο τρόπο (στηριζόμενοι στίς προηγούμενες ιδιότητες), νά επεκτείνομε τό νόημα του άθροίσματος δύο διανυσμάτων σε περισσότερα από δύο.

$$*\text{Ετσι π.χ. έχομε } \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta}.$$

**Παρατηρήσεις:** 1) Νά πῶς γίνεται πρακτικά ἡ πρόσθεση δυό ἢ περισσοτέρων διανυσμάτων,  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$ , ..., πού κείνται στό ἴδιο ἐπίπεδο. Μέ ἀρχή τυχαῖο σημεῖο A (σχ. 2.1β) σχεδιάζουμε ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα  $\vec{AB}$  ἴσο μέ τό  $\vec{\alpha}$ . ἄκολούθως μέ ἀρχή τό B σχεδιάζουμε ἐφαρμοστό διάνυσμα  $\vec{B\Gamma}$  ἴσο μέ τό  $\vec{\beta}$ . ὅμοια μέ ἀρχή τό Γ σχεδιάζουμε ἐφαρμοστό διάνυσμα ἴσο μέ τό  $\vec{\gamma}$  κ.ο.κ. Ὁ ἀθροισμα τῶν διανυσμάτων θά εἶναι τό διάνυσμα μέ ἀρχή τό A καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου ἀπό τά θεωρούμενα διαδοχικά διανύσματα.



Σχ. 2.1β.

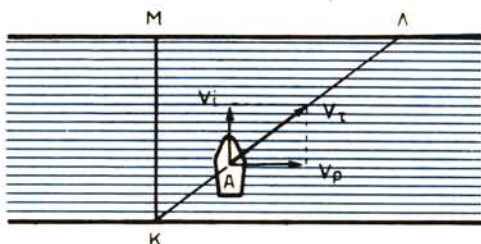
11) Εἶδαμε παραπάνω, ὅτι τό ἄθροισμα δυό ἀντιθέτων διανυσμάτων εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα. Γενικά, τό ἄθροισμα διαδοχικῶν ἐφαρμοστών (καί μή μηδενικῶν) διανυσμάτων εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα, ἂν τό πέρας τοῦ τελευταίου διανύσματος ταυτίζεται μέ τήν ἀρχή τοῦ πρώτου.

Ἔχομε π.χ. (σχ. 2.1β)  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta A} = \vec{AA} = \vec{0}$ .

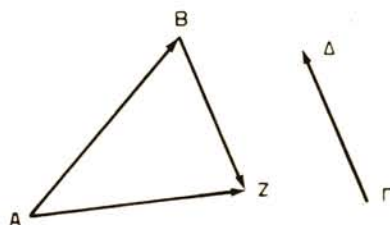
Νά λοιπόν γιατί εἶναι σκόπιμη ἡ **εἰσαγωγή τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος** μέσα στό σύνολο τῶν διανυσμάτων.

**Σημείωση:** Τό νόημα πού δόθηκε στό ἄθροισμα δυό διανυσμάτων συμβιβάζεται μέ τή «φυσική συμπεριφορά» δυό ὁμοειδῶν διανυσματικῶν μεγεθῶν, ὅταν αὐτά ἐνεργοῦν συγχρόνως.

Ἔτσι π.χ. ἂν A εἶναι ἕνα ποταμόπλοιο (σχ. 2.1γ),  $\vec{AV}_p$  ἡ ταχύτητα τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ καί  $\vec{AV}_i \perp \vec{AV}_p$  ἡ ταχύτητα πού ἀναπτύσσει τό ποταμόπλοιο σέ νερά πού ἡρεμοῦν, τότε: τό ποταμόπλοιο A θά κινηθεῖ τελικά σάν νά εἶχε ταχύτητα τήν  $\vec{AV}_t$ , πού αὕτη δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τή σύνθεση τῶν ταχυτήτων  $\vec{AV}_p$  καί  $\vec{AV}_i$ . εἶναι δέ  $\vec{AV}_t = \vec{AV}_p + \vec{AV}_i$ . Ἔτσι τό ποταμόπλοιο θά κινηθεῖ κατὰ μήκος τῆς εὐθείας ΚΛ καί ὄχι τῆς ΚΜ πού εἶναι παράλληλη τῆς  $\vec{AV}_i$  (κάθετη πρὸς τή διεύθυνση τοῦ ρεύματος).



Σχ. 2.1γ.



Σχ. 2.1δ.

γ) Διαφορά ενός διανύσματος  $\vec{\beta}$  από ένα διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  λέγεται ένα διάνυσμα  $\vec{\gamma}$ , αν για τό  $\vec{\gamma}$  ισχύει  $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$ .

Είναι δηλαδή  $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma} \iff \vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ .

\*Αν  $\vec{\beta}_1$  είναι τό αντίθετο του  $\vec{\beta}$ , τότε έχουμε  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

Πράγματι:  $\vec{\beta} + (\vec{\alpha} + \vec{\beta}_1) = \vec{\beta} + (\vec{\beta}_1 + \vec{\alpha}) = (\vec{\beta} + \vec{\beta}_1) + \vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ .

\*Ωστε: Γιά νά αφαιρέσουμε ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  από ένα διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ , άρκει νά προσθέσουμε στό  $\vec{\alpha}$  τό αντίθετο του  $\vec{\beta}$ .

\*Ετσι στό σχήμα 2.1δ έχουμε:

$$\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB} + \vec{BZ} = \vec{AZ}, \text{ αν } \vec{BZ} = \vec{\Delta\Gamma}.$$

## 2.2 Γινόμενο διανύσματος επί πραγματικών αριθμόν.

\*Ονομάζουμε γινόμενο ενός διανύσματος  $\vec{\alpha}$  επί ένα πραγματικών αριθμό  $\lambda \neq 0$ , ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  πού έχει: I) διεύθυνση τήν ίδια μέ τή διεύθυνση του  $\vec{\alpha}$ · II) φορά τήν ίδια ή αντίθετη πρós τή φορά του  $\vec{\alpha}$ , καθόσον  $\lambda > 0$  ή  $\lambda < 0$ · καί III) μέτρο ίσο μέ τό γινόμενο του μέτρου του  $\vec{\alpha}$  επί τήν απόλυτη τιμή του  $\lambda$  ( $|\vec{\beta}| = |\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$ ).

\*Αν  $\lambda = 0$  είτε  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ , τότε όρίζεται:  $\lambda \vec{\alpha} = \vec{0}$ .

Γιά τό γινόμενο διανύσματος επί πραγματικών αριθμό ισχύουν οί παρακάτω ιδιότητες:

I)  $\kappa(\lambda \vec{\alpha}) = (\kappa\lambda) \vec{\alpha} = (\lambda\kappa) \vec{\alpha} = \lambda(\kappa \vec{\alpha})$ , όπου  $\kappa$  καί  $\lambda$  πραγματικοί αριθμοί.

II)  $(\kappa + \lambda) \vec{\alpha} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\alpha}$ .

Δηλαδή: 'Η πράξη του πολλαπλασιασμού διανύσματος επί πραγματικών αριθμό είναι επιμεριστική ως πρós τήν πρόσθεση τών αριθμών.

III)  $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$  (βλέπε σχήμα 2.4β).

Δηλαδή: 'Η πράξη είναι επιμεριστική ως πρós τήν πρόσθεση τών διανυσμάτων.

\*Από τή σχέση  $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$  (μέ  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ ) παράγεται καί ό λόγος δυό παραλλήλων διανυσμάτων. Λέμε δηλαδή, ότi ό λόγος ενός διανύσματος  $\vec{\beta}$  πρós ένα παράλληλο καί μή μηδενικό  $\vec{\alpha}$

είναι ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$ , και γράφομε  $\frac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}} = \lambda$ , όταν και μόνο είναι  $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$ .

**Παρατήρηση:** Τό διάνυσμα  $(-1) \cdot \vec{\alpha}$  είναι, σύμφωνα με τόν όρισμό του γινομένου διανύσματος επί πραγματικών αριθμό, τό αντίθετο του  $\vec{\alpha}$ . Αντί  $(-1) \cdot \vec{\alpha}$  γράφομε συνήθως  $-\vec{\alpha}$ .

### 2.3 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1) 'Αν ή ταχύτητα  $\vec{AV}_p$  — στό σχήμα 2.1γ — έχει μέτρο 6 km/h και ή  $\vec{AV}_\tau$ , 8 km/h τότε νά βρεθεί: I) Τό μέτρο τής ταχύτητας  $\vec{AV}_\tau$ . II) ό χρόνος πού χρειάζεται τό πλοίο γιά τά περάσει από τή μάν όχθη του ποταμού στην άλλη, αν τό πλάτος του ποταμού είναι 150 μέτρα.

I) 'Από τό ορθογώνιο τρίγωνο  $AV_p V_\tau$  έχουμε:  $|\vec{AV}_p|^2 + |\vec{V}_p \vec{V}_\tau|^2 = |\vec{AV}_\tau|^2$  δηλαδή  $|\vec{AV}_\tau|^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow |\vec{AV}_\tau| = 10 \text{ km/h}$ .

II) 'Από τά όμοια τρίγωνα  $AV_p V_\tau$  και  $\Lambda MK$  παίρνομε:

$$\frac{\Lambda K}{AV_\tau} = \frac{MK}{V_p V_\tau} \Rightarrow \Lambda K = 150 \text{ m} \cdot \frac{10 \text{ km/h}}{8 \text{ km/h}} = 187,5 \text{ m}.$$

$$\text{'Ο χρόνος } t = \frac{s \text{ διάστημα}}{|\vec{v}| \text{ μέτρο ταχύτητας}} = \frac{187,5 \text{ m}}{10 \text{ km/h}} \quad (1).$$

$$\text{άλλά } 10 \text{ km/h} = \frac{10000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{25}{9} \text{ m/s} \text{ και ή τιμή τής (1) γίνεται } \frac{187,5 \cdot 9}{25} \text{ s} = 67,5 \text{ s} = 1 \text{ λεπτό και } 7,5 \text{ δευτερόλεπτα}.$$

2) Θεωρούμε τρία διαφορετικά σημεία  $A, B, \Gamma$  και γράφομε τīs σχέσεις:

$$I) \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}. \quad II) \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} \text{ (σχ. 2.3a)}.$$

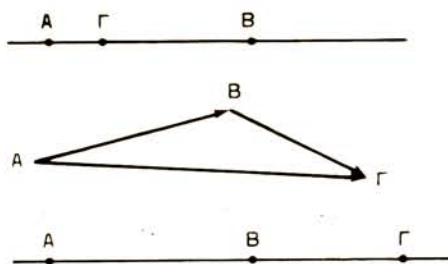
Τί παρατηρήσεις έχετε νά διατυπώσετε γι' αυτές τīs σχέσεις;

'Η πρώτη σχέση έκφράζει τό άθροισμα δυό διαδοχικών διανυσμάτων, και είναι σωστή, σύμφωνα με τόν όρισμό, γιά όποιαδήποτε σημεία  $A, B, \Gamma$ , είτε αυτά άνήκουν είτε δέν άνήκουν στην ίδια ευθεία.

'Η δεύτερη σχέση αναφέρεται σε ευθύγραμμα τμήματα (όχι σε διανύσματα) και είναι σωστή μόνο σε μιά είδική περίπτωση· όταν τά σημεία είναι συνευθειακά και έφόσον τό  $B$  κείται μεταξύ των  $A$  και  $\Gamma$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση έχουμε  $AB + B\Gamma > A\Gamma$ .

Δέν είναι χωρίς άξία νά παρατηρήσουμε ακόμα (γιά άλλη μιά φορά) ότι  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}$ , ενώ τό άθροισμα  $AB + B\Gamma + \Gamma A$  δίνει τήν περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

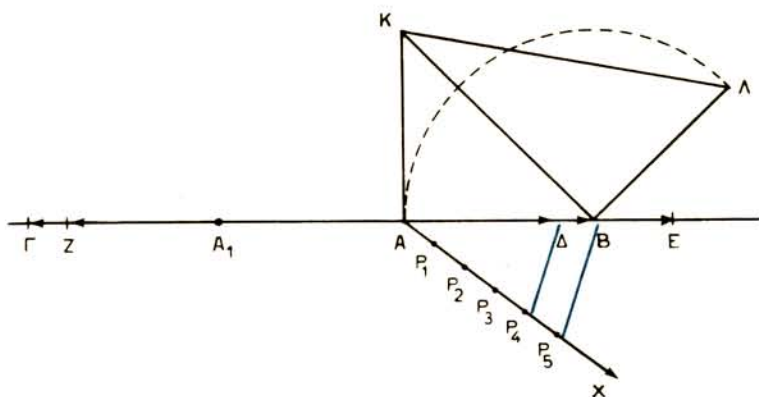




Σχ. 2.3α.

3) Αν  $\vec{AB}$  ένα εφαρμοστικό διάνυσμα, νά κατασκευασθούν πάνω στο φορέα του διανύσματα ίσα προς  $-2 \cdot \vec{AB}$ ,  $\frac{4}{5} \cdot \vec{AB}$ ,  $\sqrt{2} \cdot \vec{AB}$  και  $-\sqrt{3} \cdot \vec{AB}$ .

Γιά νά ὀρίσουμε ένα διάνυσμα ἴσο μέ  $-2\vec{AB}$  παίρνομε, πάνω στήν ἡμιευθεία τήν ἀντίθετη τῆς ἡμιευθείας  $AB$ , δύο διαδοχικά τμήματα ἴσα μέ τό τμήμα  $AB$ , τά  $AA_1$  καί  $A_1\Gamma$  (σχ. 2.3β).



Σχ. 2.3β.

Τότε διάνυσμα  $\vec{A\Gamma} = -2\vec{AB}$ .

Γιά νά ὀρίσουμε διάνυσμα ἴσο μέ  $\frac{4}{5} \cdot \vec{AB}$ , φέρομε τυχαία ἡμιευθεία  $Ax$  καί πάνω σ' αὐτή παίρνομε τά διαδοχικά καί ἴσα μεταξύ τους τμήματα  $AP_1$ ,  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$ ,  $P_4P_5$  (τό πρώτο αὐθαίρετα)· ἀκολουθῶς φέρνομε τήν  $P_5B$  καί ἀπό τό  $P_4$  τήν παράλληλη εὐθεία πρὸς τήν  $P_5B$ . Ἄν  $\Delta$  τό σημεῖο τομῆς αὐτῆς τῆς τελευταίας μέ τήν ἡμιευθεία  $AB$ , τότε διάνυσμα  $\vec{A\Delta} = \frac{4}{5} \vec{AB}$ .

Γιά τόν προσδιορισμό διανυσμάτων ἴσων μέ  $\sqrt{2} \cdot \vec{AB}$  καί  $-\sqrt{3} \cdot \vec{AB}$  ἐκτελοῦμε τά ἐπόμενα βήματα. Μέ μία κάθετη πλευρά τήν  $AB$  σχεδιάζομε τό ἰσοσκελές ὀρθογώνιο τρίγωνο  $KAB$  ( $\widehat{KAB} = 1^\circ$ ,  $AK = AB$ )· ἀκολουθῶς φέρομε τή  $B\Lambda \perp BK$  καί παίρνομε τμήμα  $B\Lambda$  ἴσο μέ  $AB$ .

Ἔχομε:  $(KB)^2 = (AB)^2 + (AK)^2 = 2(AB)^2 \Rightarrow KB = \sqrt{2} \cdot AB$  καί

$(K\Lambda)^2 = (KB)^2 + (B\Lambda)^2 = 2(AB)^2 + (AB)^2 = 3(AB)^2 \Rightarrow K\Lambda = \sqrt{3} \cdot AB$ .

\*Έτσι βλέπουμε ότι το τμήμα KB έχει μέτρο τό γινόμενο του μέτρου του AB επί τόν πραγματικό αριθμό  $\sqrt{2}$  και τό ΚΛ τό γινόμενο του μέτρου του AB επί τόν αριθμό  $\sqrt{3}$ . Παίρνουμε τώρα, πάνω στην ήμιευθεία AB, τμήμα AE ίσο μέ τό KB και, πάνω στην αντίθετη ήμιευθεία της AB, τμήμα AZ ίσο μέ ΚΛ· τό διάνυσμα  $\vec{AE}$  είναι τότε ίσο μέ τό  $\sqrt{2} \cdot \vec{AB}$  και τό AZ ίσο μέ  $-\sqrt{3} \cdot \vec{AB}$ .

## 2.4 Άσκήσεις.

1. Νά υπολογισθεῖ τό μέτρο του διανύσματος  $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG}$  αν:

I)  $|\vec{AB}| = |\vec{BG}| = 8 \text{ cm}$  καί γωνία  $\widehat{ABG} = 120^\circ$  II)  $|\vec{AB}| = 5 \text{ cm}$ ,  $|\vec{BG}| = 12 \text{ cm}$  καί γωνία  $\widehat{ABG} = 90^\circ$ .

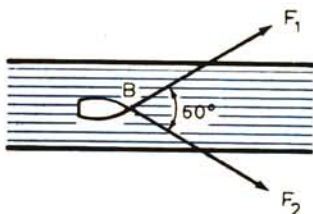
2. I) Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο ABΓΔ καί ἀκολουθῶς προσδιορίστε τά διανύσματα:

$$\vec{AB} + \vec{GD} \text{ καί } \vec{AB} - \vec{GD}.$$

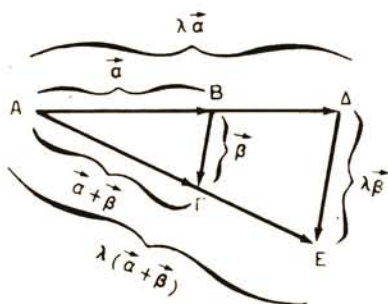
II) Σχεδιάστε ένα τετράπλευρο ABΓΔ καί ἀκολουθῶς προσδιορίστε τά διανύσματα:

$$\vec{AB} + \vec{BG}, \vec{AD} + \vec{DG}, \vec{DG} + \vec{GB}, \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} + \vec{DA}, \vec{AD} - \vec{AB} \text{ καί } \vec{AB} - \vec{AD}.$$

3. Δυό ἐργάτες τραβῶν, ἀπό τίς ὀχθές ενός καναλιῶ (ὁ ένας ἀπό τή μιά καί ὁ ἄλλος ἀπό τήν ἄλλη), μιά βάρκα (σχ. 2.4α) Ἄν ὁ καθένας ἀσκέι δύναμη ἐντάσεως 20 kρ καί τά σκοινιά ἔλξεως σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$ , νά καθορισθεῖ ἡ διεύθυνση κινήσεως τῆς βάρκας καί ἡ δύναμη πού ἀσκέται πάνω της.



Σχ. 2.4α.



Σχ. 2.4β.

4.\* Μέ τή βοήθεια του σχήματος 2.4β καί στηριζόμενοι στίς ιδιότητες τῶν ὁμοίων τριγώνων ν' ἀποδείξετε τήν ιδιότητα  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ .

## ΕΝΟΤΗΤΑ 3

### Η ΕΥΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΝΩ Σ' ΑΥΤΗ

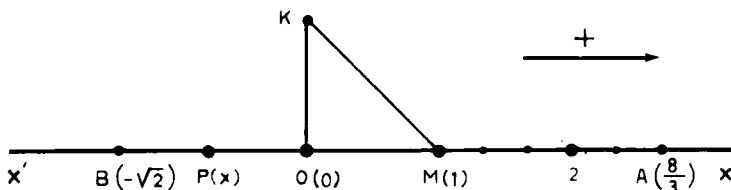
#### 3.1 Προσανατολισμένη ευθεία-ἄξονας. Τετμημένη σημείου.

\*Όπως ὅλοι γνωρίζουμε, πάνω σέ μιά ευθεία διακρίνομε δυό ἀντίθετες φορές· δηλαδή δυό τρόπους διατάξεως τῶν σημείων της.



Αν λοιπόν, πάνω σε μία άπερατη ευθεία  $\chi\chi'$  (σχ. 3.1), ή μία από τις δυό φορές (κατευθύνσεις) χαρακτηριστεί ως **θετική φορά** (καί συνεπώς ή άλλη ως **αρνητική**), τότε αυτή ή ευθεία λέγεται **προσανατολισμένη**.

**Σημείωση:** Παίρνουμε συνήθως ως θετική φορά αυτή πού δηλώνουμε με τήν έκφραση «άπ' άριστερά προς τά δεξιά».



Σχ. 3.1.

**Προχωρούμε** τώρα στον έφοδιασμό μιās προσανατολισμένης ευθείας και με άλλα στοιχεία.

Παίρνουμε άρχικά πάνω στην προσανατολισμένη ευθεία ένα σημείο  $O$  (όποιο θέλομε) και θεωρούμε τις δυό ήμιευθείες με άρχή τό  $O$ . Αυτή πού διαγράφεται κατά τή θετική φορά θά τήν όνομάζομε **θετική ήμιευθεία**, με άρχή τό  $O$ , και τήν άλλη **αρνητική**.

Όρίζομε ακόλουθως, στη θετική ήμιευθεία, ένα σημείο  $M$  (σχ. 3.1), τέτοιο ώστε τό τμήμα  $OM$  νά είναι εκείνο πού θέλομε νά χρησιμοποιοῦμε ως μονάδα μήκους.

Τό σημείο  $M$ , όπως και τό τμήμα  $OM$ , λέγεται **μοναδιαῖο**. επίσης και τό διάνυσμα  $\overrightarrow{OM}$  λέγεται **μοναδιαῖο διάνυσμα**.

Όταν όλα αυτά έχουν γίνει, λέμε ότι έχουμε όρίσει πάνω στην ευθεία έναν **άξονα** ή συντομότερα:

«**Η ευθεία έγινε ένας άξονας**».

Τώρα μπορούμε ν' αντιστοιχίσομε σε κάθε σημείο του άξονα ένα και μόνον ένα πραγματικόν αριθμό.

Στήν άρχή  $O$  του άξονα αντιστοιχίζεται ο αριθμός μηδέν και στο σημείο  $M$  ο αριθμός 1.

Σ' ένα σημείο  $A$  του **θετικού ήμιάξονα** αντιστοιχίζεται ο θετικός αριθμός πού προκύπτει από τή μέτρηση του τμήματος  $OA$  με μονάδα τό  $OM$ . Ο αριθμός αυτός είναι και τό μέτρο του διανύσματος  $\overrightarrow{OA}$ .

Σ' ένα σημείο  $B$  του **αρνητικού ήμιάξονα** αντιστοιχίζεται ένας αρνητικός αριθμός: ο αντίθετος ακριβώς του μέτρου του διανύσματος  $\overrightarrow{OB}$ .

Αντίστροφα, ένας πραγματικός αριθμός είναι αντίστοιχος ενός και μόνο

σημείου του άξονα. Ο αριθμός π.χ.  $\frac{8}{3}$  είναι αντίστοιχος του σημείου A του θετικού ημιάξονα (σχ. 3.1), αν βέβαια τό τμήμα OA προκύπτει από τό άθροισμα δυό τμημάτων ίσων πρὸς τό OM καί δυό τμημάτων ίσων πρὸς τό τρίτο του OM. Όμοια ὁ αριθμός  $-\sqrt{2}$  είναι αντίστοιχος του σημείου B του άρνητικού ημιάξονα, αν τό τμήμα OB είναι ίσο μέ τήν ὑποτείνουσα KM του ὀρθογωνίου καί ίσοσκελοῦς τριγώνου KOM (σχ. 3.1).

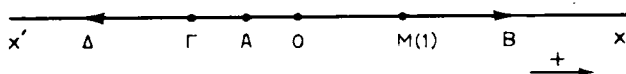
Έτσι ἔχομε κατασκευάσει μιά άμφιμονοσήμαντη άντιστοιχία μεταξύ ὄλων τῶν σημείων του άξονα καί ὄλων τῶν πραγματικῶν αριθμῶν· ἔχομε, ὅπως λέμε, κατασκευάσει τήν **εὐθεία τῶν πραγματικῶν αριθμῶν**.

Ο **πραγματικός αριθμός**, πού άντιστοιχίζεται σ' ένα σημείο P ενός άξονα, λέγεται **τετμημένη** αὐτοῦ του σημείου.

Σημειῶνομε γενικά τήν τετμημένη π.χ. μέ τό γράμμα x· καί δηλώνομε ὅτι τό σημείο P ἔχει τετμημένη x μέ τή γραφή P(x). Οἱ συμβολισμοί π.χ.  $A\left(\frac{8}{3}\right)$  καί  $B(-\sqrt{2})$  σημαίνουν ὅτι τό A ἔχει τετμημένη  $\frac{8}{3}$  καί τό B,  $-\sqrt{2}$ .

### 3.2 Τετμημένη διανύσματος παράλληλου πρὸς άξονα.

Θεωροῦμε έναν άξονα x'x καί πάνω σ' αὐτόν (ἢ σέ εὐθεῖες παράλληλές του) παίρνομε διάφορα ἑφαρμοστά διανύσματα,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$  κτλ. (σχ. 3.2).



Σχ. 3.2.

Θά ὀνομάζομε **τετμημένη ενός διανύσματος**  $\overrightarrow{AB}$ , πού είναι παράλληλο πρὸς έναν άξονα x'x ἢ κείται πάνω σ' αὐτόν, τό λόγο  $\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}}$ , ὅπου  $\overrightarrow{OM}$  τό μοναδιαῖο διάνυσμα του άξονα.

Γράφομε συμβολικά  $\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}}$ , ὁπότε  $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$ .

Ἡ τετμημένη ενός διανύσματος είναι θετικός αριθμός, αν φορά του διανύσματος είναι ἐκείνη πού χαρακτηρίστηκε ὡς θετική φορά του άξονα· ἰσοῦται τότε ἡ τετμημένη μέ τό μέτρο του διανύσματος. (Στό σχῆμα 3.2 είναι  $\overline{AB} > 0$ ).

Αν τό διάνυσμα ἔχει φορά τήν άρνητική του άξονα, τότε ἡ τετμημένη του ἰσοῦται μέ τόν αριθμό τόν άντίθετο του μέτρου του διανύσματος. (Στό σχῆμα 3.2 είναι  $\overline{\Gamma\Delta} < 0$ ).

\*Αν  $P$  ένα σημείο του  $\vec{OX}$  άξονα, τότε η τετμημένη του  $\vec{OP}$ , όπου  $O$  η άρχή, ταυτίζεται με την τετμημένη του σημείου  $P$ . (σχ. 3.1)

Είναι εξάλλου φανερό ότι δυό ίσα εφαρμοστά διανύσματα\* ενός άξονα έχουν ίσες τετμημένες και αντίστροφα, αν οι τετμημένες δυό εφαρμοστών διανυσμάτων, πάνω στον αυτόν άξονα, είναι ίσες, τότε και τά διανύσματα θά είναι ίσα.

\*Ακόμα είναι εύκολο νά συμπεράνουμε ότι: ο λόγος δυό διανυσμάτων, παραλλήλων προς έναν άξονα, ισούται με τό λόγο των τετμημένων τους.

$$\left( \text{Αν } \vec{\alpha} \text{ και } \vec{\beta} \text{ δυό παράλληλα διανύσματα προς έναν άξονα, τότε } \frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \right).$$

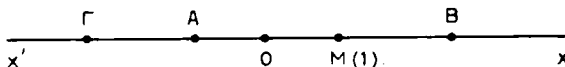
### 3.3 Πρόταση του Chasles (Σάλ).

Παίρνουμε έναν άξονα  $x'x$  και πάνω σ' αυτόν τρία τυχαία σημεία  $A, B, \Gamma$  (σχ. 3.3)

Γιά τις τετμημένες  $\overline{AB}, \overline{B\Gamma}$  και  $\overline{A\Gamma}$  των διανυσμάτων  $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}$  και  $\vec{A\Gamma}$  ισχύει η επόμενη σχέση:

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma} \text{ (σχέση Σάλ).}$$

Δηλαδή: Τό άθροισμα των τετμημένων δυό διανυσμάτων, παραλλήλων προς άξονα, ισούται με την τετμημένη του άθροίσματος των διανυσμάτων.



Σχ. 3.3.

\*Απόδειξη: Έπειδή τά διανύσματα  $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}$ , είναι διαδοχικά, ισχύει (σύμφωνα με τό γνωστό όρισμό) η σχέση  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$  (1).

\*Αν  $\vec{\mu} = \vec{OM}$  (όπου  $\vec{OM}$  τό μοναδιαίο διάνυσμα), τότε  $\vec{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{\mu}$ ,  $\vec{B\Gamma} = \overline{B\Gamma} \cdot \vec{\mu}$  και  $\vec{A\Gamma} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu}$ , όπότε η (1) γράφεται:

$$\overline{AB} \cdot \vec{\mu} + \overline{B\Gamma} \cdot \vec{\mu} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu} \text{ ή (σύμφωνα με τόν επιμεριστικό νόμο) } (\overline{AB} + \overline{B\Gamma}) \vec{\mu} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu} \text{ (2).}$$

\*Αλλά από τή (2) συμπεραίνουμε ότι  $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$  (γιατί;)

\*Ένα σημαντικό πόρισμα. \*Ας είναι  $A$  και  $B$  σημεία (διαφορετικά) ενός άξονα με τετμημένες αντίστοιχα  $\alpha$  και  $\beta$  ( $\overline{OA} = \alpha$ ,  $\overline{OB} = \beta$ ).

\*Έχομε:  $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB}$  (σχέση του Chasles γιά τά σημεία  $A, O, B$ )

$$\text{ή } \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB} \text{ δηλαδή } \boxed{\overline{AB} = \beta - \alpha}$$

\* Ένα διάνυσμα πού μετατοπίζεται πάνω στο φορέα του λέγεται συνήθως **όλισθαίνον διάνυσμα**.

Ώστε: Ἡ τετμημένη ενός διανύσματος πάνω σέ ἄξονα ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπό τήν τετμημένη τοῦ πέρατος τοῦ διανύσματος.

**Παρατηρήσεις:** I) Δέν πρέπει νά μᾶς διαφεύγει τό γεγονός, ὅτι ἡ προηγούμενη σχέση τοῦ Chasles εἶναι μιᾶ σχέση ἀριθμητική. (Σημειώνεται στό πρῶτο μέλος τῆς τό ἄθροισμα δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν).

II) Ἡ σχέση  $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AF}$  δέν ἔχει νόημα ἂν τά σημεῖα A, B, Γ δέν ἀνήκουν στόν αὐτόν ἄξονα (ἂν δηλαδή εἶναι κορυφές τριγώνου), διότι τότε οἱ φορές τῶν διανυσμάτων δέν συσχετίζονται.

III) Ἡ σχέση  $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BF}| = |\overrightarrow{AF}|$  ἔχει νόημα γιά ὁποιαδήποτε σημεῖα, ἀλλά δέν ἀληθεύει ὅταν τά σημεῖα δέν ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία ἢ ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία ἀλλά δέν ἔχουν κατάλληλη διάταξη.

Μποροῦμε νά γράφομε (γιά κάθε περίπτωση)  $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BF}| \geq |\overrightarrow{AF}|$  (ὑποτίθεται ὅτι χρησιμοποιήθηκε τό ἴδιο τμήμα ὡς μονάδα μετρήσεως).

Ἡ ἰσότητα ἰσχύει ὅταν τά σημεῖα A, B, Γ εἶναι συνευθειακά καί τό B κεῖται μεταξύ τῶν A καί Γ.

IV) Ἡ σχέση  $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AF}$  μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς:  
 $\overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FA} = 0$ , διότι:  $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AF} \iff \overline{AB} + \overline{BF} - \overline{AF} = 0 \iff \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FA} = 0$ .

### 3.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ἐν  $A(x_1)$  καί  $B(x_2)$  σημεῖα ἄξονα καί K τό μέσο τοῦ AB, τότε ἡ τετμημένη τοῦ K ἰσοῦται μέ  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ .

(Δηλαδή: Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου ενός τμήματος, πάνω σέ ἄξονα, ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος).

Ἐχομε:  $\overline{OK} = \overline{OA} + \overline{AK}$ . ἀλλά  $\overline{OA} = x_1$  καί  $\overline{AK} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$  (γιατί;)

συνεπῶς  $\overline{OK} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

2. I) Ἐν A, B, Γ, Δ ὁποιαδήποτε σημεῖα ενός ἄξονα, τότε:

$$\overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FA} = \overline{AA}.$$

II) Ἐν  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  σημεῖα μέ ὁποιαδήποτε διάταξη πάνω σ' ἕναν ἄξονα, τότε  $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n} = \overline{P_1P_n}$ .

I) Ἐχομε:  $\overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FA} = (\overline{AB} + \overline{BF}) + \overline{FA} = \overline{AF} + \overline{FA} = \overline{AA}$ .

II) Ἐχομε:

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} &= \overline{P_1P_3} \\ \overline{P_1P_3} + \overline{P_3P_4} &= \overline{P_1P_4} \\ &\vdots \\ \overline{P_1P_{n-1}} + \overline{P_{n-1}P_n} &= \overline{P_1P_n} \end{aligned}$$

προσθέτομε τά ὁμώνυμα μέλη τῶν παρα-

πάνω ισοτήτων και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & (\overline{P_1 P_2} + \overline{P_2 P_3} + \overline{P_3 P_4} + \dots + \overline{P_{v-1} P_v}) + \overline{P_1 P_3} + \overline{P_1 P_4} + \dots + \overline{P_1 P_{v-1}} = \\ & = \overline{P_1 P_3} + \overline{P_1 P_4} + \dots + \overline{P_1 P_{v-1}} + \overline{P_1 P_v} \implies \overline{P_1 P_2} + \overline{P_2 P_3} + \dots + \overline{P_{v-1} P_v} = \overline{P_1 P_v} \end{aligned}$$

3) \*Αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  σημεία άξονα ν' αποδειχθεί ότι:  $\overline{\Delta A^2} \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta B^2} \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{\Delta \Gamma^2} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = 0$ .

\*Έχουμε  $\overline{\Delta A^2} \cdot \overline{B\Gamma} = (\alpha - \delta)^2 \cdot (\gamma - \beta) = \gamma\alpha^2 - 2\alpha\delta\gamma + \gamma\delta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\delta\beta - \beta\delta^2$ .

\*Όμοια  $\overline{\Delta B^2} \cdot \overline{\Gamma A} = \alpha\beta^2 - 2\beta\delta\alpha + \alpha\delta^2 - \gamma\beta^2 + 2\beta\gamma\delta - \gamma\delta^2$  και  $\overline{\Delta \Gamma^2} \cdot \overline{AB} = \beta\gamma^2 - 2\gamma\delta\beta + \beta\delta^2 - \alpha\gamma^2 + 2\gamma\delta\alpha - \alpha\delta^2$ .

\*Έτσι παίρνουμε  $\overline{\Delta A^2} \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta B^2} \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{\Delta \Gamma^2} \cdot \overline{AB} = \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 - \beta\alpha^2 - \gamma\beta^2 - \alpha\gamma^2$  (1).

\*Εξάλλου  $\overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma) = -\alpha\beta^2 - \gamma\alpha^2 - \beta\gamma^2 + \beta\alpha^2 + \gamma\beta^2 + \alpha\gamma^2$  (2).

\*Από τις (1) και (2) παίρνουμε τελικά τη ζητούμενη (προσθέτοντας τά όμώνυμα μέλη).

### 3.5 Ασκήσεις.

1. Πάνω σε άξονα θεωρούμε:

I) Τά σημεία  $A(7,5)$  και  $B(2,3)$ · νά καθορισθεί ή τετμημένη και τό μέτρο του διανύσματος  $\overline{AB}$ .

II) Τό σημείο  $\Delta(-\frac{6}{7})$  και τό εφαρμοστό διάνυσμα  $\overrightarrow{\Delta E}$  μέ τετμημένη  $-2$ . Νά καθορισθεί τό μέτρο του διανύσματος και ή τετμημένη του  $E$ .

2. Δίνονται τά σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  ενός άξονα για τά όποία έχουμε:

$$\overline{AB} = -8, \overline{B\Gamma} = -3 \text{ και } \overline{\Gamma\Delta} = +5. \text{ Νά βρεθούν οι αριθμοί } \overline{\Gamma A}, \overline{\Delta\Delta}, \overline{\Delta B}, \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta A}.$$

3. Πάνω σ' άξονα παίρνουμε τά σημεία  $A(-1), B(-\frac{17}{5}), \Gamma(\sqrt{2})$  και  $\Delta(4)$ .

I) Νά όρισθουν οι αριθμοί  $\overline{AB}, \overline{A\Gamma}, \overline{\Delta A}, \overline{\Gamma B}$ .

II) \*Αν  $O$  ή άρχή του άξονα και άρα ομε σαν νέα άρχή τό σημείο  $O_1$  για τό όποιο  $\overline{OO_1} = -2$ , νά βρεθούν οι νέες τετμημένες των σημείων  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ .

(Υποτίθεται ότι διατηρούμε τό μήκος του μοναδιαίου διανύσματος).

4. \*Αν  $A, B, \Gamma$  σημεία ενός άξονα,  $K$  τό μέσο του  $AB$  και  $\Lambda$  τό μέσο του  $B\Gamma$  τότε:

$$I) \overline{\Gamma A} + \overline{\Gamma B} = 2\overline{\Gamma K} \text{ και } II) \overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = \overline{A\Lambda^2} - \overline{\Gamma\Lambda^2}.$$

5. Δίνεται σε άξονα ένα εφαρμοστό διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  τό όποιο έχει τετμημένη  $\overline{AB} = 8$ . Νά κατασκευασθεί τό σημείο  $P$  του άξονα για τό όποιο είναι:

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{4}{9} \text{ ή } -\frac{3}{2} \text{ ή } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ή } \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

6. \*Αν για τά σημεία ενός άξονα ισχύει ή ισότητα  $\overline{AB^3} + \overline{B\Gamma^3} + \overline{\Gamma A^3} = 0$ , τότε δύο τουλάχιστον απ' αυτά συμπίπτουν. (Υπόδειξη: εφαρμόστε την ταυτότητα

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \text{ στο άθροισμα } \overline{AB^3} + \overline{B\Gamma^3}.$$

7. \*Αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  σημεία ενός άξονα τότε:

$$I) \overline{\Delta A} \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta B} \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{\Delta \Gamma} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$II) \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma\Delta} \cdot \overline{\Delta B} - \overline{\Gamma\Delta} \cdot \overline{\Delta A} \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{\Delta A} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{B\Delta} - \overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = 0.$$

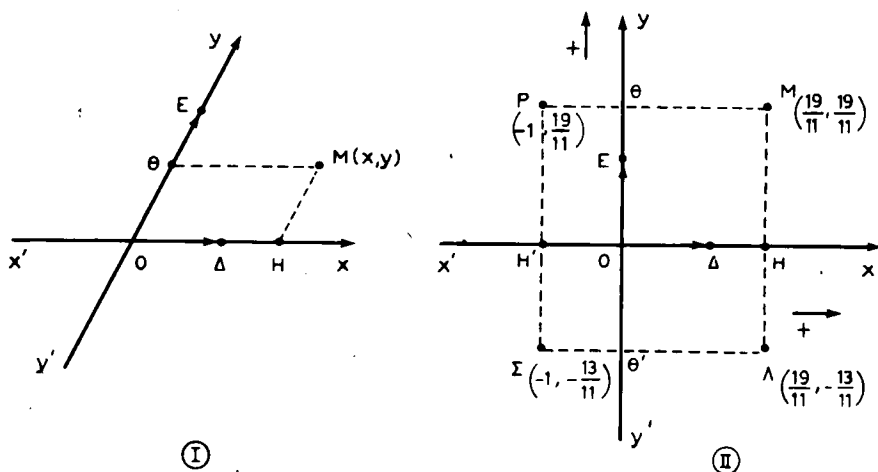
8. \*Αν  $A(\alpha), B(\beta), P(x)$  σημεία ενός άξονα και τέτοια ώστε νά έχουμε  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda$ , νά υπολογισθεί ή τετμημένη  $x$  του  $P$  συναρτήσει των  $\alpha, \beta$  και  $\lambda$ .

## ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ  
ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

## 4.1 Συντεταγμένες σημείου ως προς δύο άξονες.

Παίρνουμε πάνω σ' ένα επίπεδο δυό τεμνόμενες εὐθείες  $x'x$  καὶ  $y'y$  καὶ ὥς εἶναι  $O$  τὸ σημεῖο τῆς τομῆς τους [σχ. 4.1 (I καὶ II)]. Προσανατολίζουμε τὶς εὐθείες καί, μέ κοινή ἀρχή τὸ σημεῖο τομῆς τους  $O$ , καθορίζουμε τὰ μοναδιαῖα διανύσματα  $\vec{OD}$  καὶ  $\vec{OE}$ , ἀντίστοιχα πάνω στή  $x'x$  καὶ  $y'y$ . Ἐτσι ἔχομε κατασκευάσει στοῦ ἐπίπεδο ἓνα σύστημα δυό ἀξόνων.



Σχ. 4.1.

Μέ βάση αὐτό τὸ σύστημα (καὶ κάθε παρόμοιο), μπορούμε νά ἀντιστοιχίζουμε κάθε σημεῖο  $M$  τοῦ ἐπιπέδου πρὸς ἓνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντίστροφα κάθε διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν πρὸς ἓνα καὶ μόνο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.

Νά πῶς πραγματώνεται αὐτή ἡ ἀντιστοιχία.

Ἀπὸ τὸ σημεῖο  $M$  φέρουμε τὶς παράλληλες πρὸς τὶς  $y'y$  καὶ  $x'x$  καὶ ὥς εἶναι  $H$  καὶ  $\Theta$  τὰ σημεῖα τομῆς τους μέ τούς ἀξόνες  $x'x$  καὶ  $y'y$  ἀντίστοιχα.

Ἡ τετμημένη τοῦ  $H$ , ὁ λόγος δηλαδή  $x = \frac{\vec{OH}}{\vec{OD}}$ , θά λέγεται τώρα

τετμημένη τοῦ σημείου  $M$  καὶ ἡ τετμημένη τοῦ  $\Theta$ , ὁ λόγος  $y = \frac{\vec{OE}}{\vec{OE}}$ , θά

λέγεται (γιά διάκριση) τεταγμένη τοῦ σημείου  $M$ .

Οἱ δυό αὐτοὶ ἀριθμοὶ  $x$  καὶ  $y$  λέγονται μαζί καρτεσιανές ἢ παράλληλες

συντεταγμένες του σημείου  $M$ · και γιά νά δηλώσομε ὅτι ἓνα σημεῖο  $M$  ἔχει συντεταγμένες τούς ἀριθμούς π.χ.  $-\frac{\sqrt{6}}{5}$  καί 49· γράφομε  $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{5}, 49\right)$ .

Τό ζεῦγος  $(x, y)$ , τῶν συντεταγμένων ἑνός σημείου  $M$ , εἶναι ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχίζεται σ' αὐτό τό σημεῖο.

Ἀντίστροφα, ἂν  $(x, y)$  εἶναι ἓνα δοσμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε σ' αὐτό ἀντιστοιχίζεται — πάντα μέ βάση τό σύστημα τῶν ἀξόνων πού ἔχομε κατασκευάσει — ἓνα καί μόνο σημεῖο  $M$  τοῦ ἐπιπέδου. Τό σημεῖο  $M$  προσδιορίζεται μέ τήν ἀκόλουθη διαδικασία.

Πάνω στόν ἄξονα  $x'x$  τῶν τετμημένων παίρνομε ἐκεῖνο τό σημεῖο  $H$  πού ἔχει τετμημένη  $x$  καί πάνω στόν ἄξονα  $y'y$  τῶν τεταγμένων παίρνομε ἐκεῖνο τό σημεῖο  $\Theta$  πού ἔχει τετμημένη  $y$ .

Ἀπό τό  $H$  φέρνομε παράλληλη πρός τήν  $y'y$  καί ἀπό τό  $\Theta$  παράλληλη πρός τήν  $x'x$ · τό σημεῖο τομῆς αὐτῶν τῶν δυό εὐθειῶν πού φέραμε εἶναι τό μοναδικό σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου πού ἀντιστοιχίζεται στό ζεῦγος  $(x, y)$ .

Τό σημεῖο πού ὀρίζεται π.χ. ἀπό τό ζεῦγος  $(-2, 5)$  εἶναι, ὅπως εὐκόλα βλέπομε, διαφορετικό ἀπό τό σημεῖο πού ὀρίζεται ἀπό τό ζεῦγος  $(5, -2)$ · ἐφόσον βέβαια ὁ ἀριθμός πού κατέχει τήν πρώτη θέση εἶναι πάντα ἡ τετμημένη, καί ὁ ἐπόμενος ἡ τεταγμένη. Βλέπομε συνεπῶς ὅτι, τά ζεύγη  $(-2, 5)$  καί  $(5, -2)$  εἶναι διαφορετικά (δέν εἶναι ἴσα), μολονότι ἀποτελοῦνται ἀπό τά ἴδια στοιχεῖα. Τέτοια ζεύγη, ὅπου ἡ ἀλλαγὴ τῆς σειρᾶς τῶν στοιχείων συνεπάγεται καί ἀλλαγὴ τοῦ «ἀντικειμένου» πού ἐκφράζουν, λέγονται **διατεταγμένα ζεύγη**.

Ὅταν λοιπόν δίνομε ἓνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς συντεταγμένες ἑνός σημείου, δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι, ὁ πρῶτος ἀριθμός θά εἶναι πάντα ἡ τετμημένη τοῦ σημείου καί ὁ δεύτερος ἡ τεταγμένη.

Τά σημεία τοῦ ἄξονα  $x'x$  δίνονται τώρα μέ ζεύγη, τῶν ὁποίων τό δεύτερο στοιχεῖο εἶναι ὁ ἀριθμός 0· δηλαδή μέ ζεύγη τῆς μορφῆς  $(x, 0)$ . Ὅμοια τά σημεία τοῦ ἄξονα  $y'y$  δίνονται μέ ζεύγη τῶν ὁποίων τό πρῶτο στοιχεῖο εἶναι ὁ ἀριθμός 0, δηλαδή μέ ζεύγη τῆς μορφῆς  $(0, y)$ . Ἡ ἀρχὴ τέλος τῶν ἀξόνων δίνεται ἀπό τό ζεῦγος  $(0, 0)$ .

Ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ ἄξονες μπορεῖ, ἀπό λογικὴ ἀποψη, νά εἶναι ὅποιαδήποτε. Ἐντούτοις οἱ περισσότεροι τύποι καί ἐξισώσεις, πού μορφώνομε μέ τίς συντεταγμένες ἢ γιά τίς συντεταγμένες σημείων, εἶναι ἀπλούστεροι ὅταν οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι.

Γι' αὐτό τό λόγο κυρίως θά παίρνομε ἀπό δῶ καί πέρα, χωρίς ἐξαίρεση, τούς ἄξονες ὀρθογώνιους.

Ἐξάλλου τά μήκη τῶν μοναδιαίων διάνυσμάτων μπορεῖ γενικά νά εἶναι ἄνισα· συνηθίζεται ὅμως, ἐκτός ἀπὸ ἐξαιρετικές περιπτώσεις, νά παίρνονται ἰσομήκη.

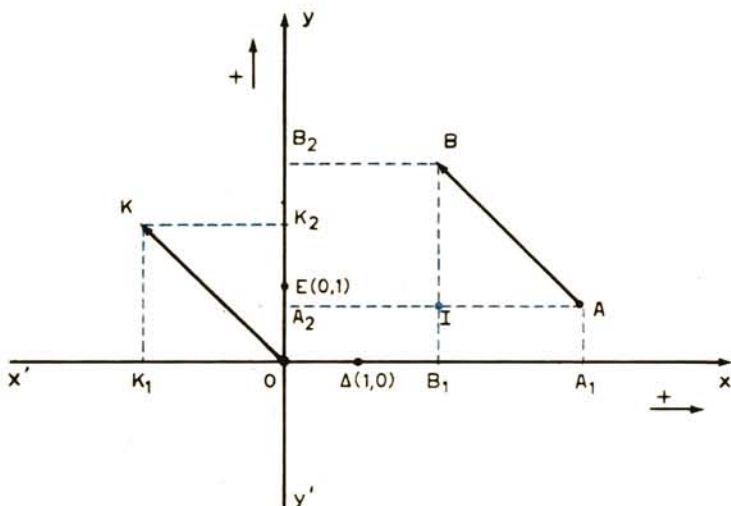
Ἐνα τέτοιο σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων, ὅπου δηλαδή οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι καί τά μοναδιαῖα διανύσματα εἶναι ἰσομήκη, λέγεται **ὀρθοκανονικό**.

**Παρατήρηση:** Είναι εύκολο νά διαπιστώσουμε ότι:

Όταν ένα σημείο ανήκει στο έσωτερικό της πρώτης γωνίας  $\widehat{xOy}$  ( $Ox, Oy$  οι θετικοί ημιάξονες), τότε και οι δύο συντεταγμένες είναι θετικοί αριθμοί· όταν ανήκει στο έσωτερικό της 2ης γωνίας  $\widehat{y'Ox}$ , τότε είναι  $x < 0$  και  $y > 0$ · όταν ανήκει στο έσωτερικό της τρίτης γωνίας  $\widehat{x'Oy'}$  είναι  $x < 0$  και  $y < 0$ · όταν τέλος ανήκει στο έσωτερικό της τέταρτης γωνίας  $\widehat{y'Ox}$  είναι  $x > 0$  και  $y < 0$ .

#### 4.2 Συντεταγμένες διανυσμάτων στο επίπεδο και βασικές σχέσεις.

α) Συντεταγμένες εφαρμοστού και ελεύθερου διανύσματος. Πάνω σ' ένα επίπεδο κατασκευάζουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων· και ως είναι  $\overrightarrow{AB}$  ένα εφαρμοστό διάνυσμα του επιπέδου (σχ. 4.2α) Φέρνουμε την  $AA_1 \perp x'x$



Σχ. 4.2α.

και την  $BB_1 \perp x'x$ · επίσης τις  $AA_2$  και  $BB_2$  κάθετες στην  $y'y$ . Τα σημεία  $A_1$  και  $B_1$  λέγονται (όρθες) προβολές των  $A$  και  $B$  αντίστοιχα πάνω στον άξονα  $x'x$ , και τα  $A_2, B_2$  προβολές των  $A, B$  στον άξονα  $y'y$ . Τα εφαρμοστά διανύσματα  $\overrightarrow{A_1B_1}$  και  $\overrightarrow{A_2B_2}$  είναι οι προβολές του  $\overrightarrow{AB}$  στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

Η τετμημένη  $\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha$  του  $\overrightarrow{A_1B_1}$  λέγεται **τετμημένη** και του διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$  και η τετμημένη του  $\overrightarrow{A_2B_2}$  λέγεται **τεταγμένη** του  $\overrightarrow{AB}$ · οι δύο μαζί λέγονται (καρτεσιανές) **συντεταγμένες** του  $\overrightarrow{AB}$ .

Έπειδή:  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} \Rightarrow x_1 + \alpha = x_2$ , θά είναι:

$$\alpha = x_2 - x_1$$

όμοια παίρνουμε

$$\beta = y_2 - y_1$$



Δηλαδή: «Παίρνουμε τις συντεταγμένες προβολές ενός διανύσματος, αν από τις συντεταγμένες του πέρατος αφαιρέσουμε τις ομώνυμες συντεταγμένες της αρχής του».

Ής σχεδιάσουμε τώρα τό εφαρμοστό διάνυσμα  $\vec{OK}$ , ίσο πρός τό  $\vec{AB}$ , μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων (σχ. 4.2α) .

Ἀπό τά ἴσα τρίγωνα  $ABI$  καί  $OKK_1$  παίρνουμε  $\vec{OK}_1 = \vec{AI} = \vec{A_1B_1}$  καί  $\vec{OK}_2 = \vec{K_1K} = \vec{IB} = \vec{A_2B_2}$ . Συμπεραίνομε λοιπόν ὅτι:

«Δυό ἴσα εφαρμοστά διανύσματα ἔχουν ἴσες ομώνυμες συντεταγμένες».

Ἰσχύει βέβαια καί τό ἀντίστροφο· ὅτι δηλαδή:

«Ἄν οἱ ομώνυμες συντεταγμένες δυό εφαρμοστών διανυσμάτων εἶναι ἴσες, τότε τά διανύσματα θά εἶναι ἴσα».

Εἶναι χρήσιμο νά παρατηρήσουμε ἐδῶ ὅτι ἕνα ὁποιοδήποτε ἐλεύθερο διάνυσμα στό ἐπίπεδο μπορεῖ νά ἀντιπροσωπεύεται ἀπό ἕνα εφαρμοστό διάνυσμα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων· καί ἀκόμα, ὅτι οἱ συντεταγμένες ἑνός διανύσματος μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων ταυτίζονται μέ τίς συντεταγμένες τοῦ πέρατος αὐτοῦ τοῦ διανύσματος.

Ὑστερα ἀπό τούς προηγούμενους ὁρισμούς καί τίς ιδιότητές τους, καί ἐπειδή σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζεται (μέ βάση ἕνα σύστημα ἀξόνων) ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἀντίστροφα σ' ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχίζεται ἕνα καί μόνο σημεῖο ἥ, πράγμα πού εἶναι τό ἴδιο, ἕνα καί μόνο εφαρμοστό διάνυσμα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, μπορούμε νά λέμε:

«Μεταξύ ὅλων τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου καί ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει μιᾶ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία».

**Σημείωση:** Τά εφαρμοστά διανύσματα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων τά ὀνομάζουμε μερικές φορές καί διανυσματικές ἀκτίνες.

**β) Συντελεστής διευθύνσεως διανύσματος.** Θέλομε τώρα νά βροῦμε σχέσεις μεταξύ παραλλήλων διανυσμάτων καί τῶν συντεταγμένων τους.

Γιά νά ἀπλοποιήσουμε τό ἔργο μας θά πάρομε διανύσματα μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων (γιατί;)

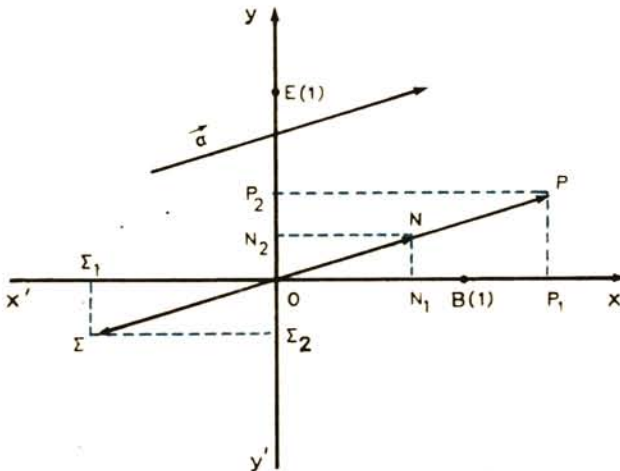
Ής θεωρήσουμε λοιπόν τά ὁμόρροπα διανύσματα  $\vec{ON}$ ,  $\vec{OP}$  καί τό  $\vec{OS}$  ἀντίρροπο τῶν προηγούμενων (σχ. 4.2β) . Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα  $OP_1P$  καί  $ON_1N$  παίρνουμε:

$$\frac{\vec{OP}}{\vec{ON}} = \frac{\vec{OP}_1}{\vec{ON}_1} = \frac{\vec{P_1P}}{\vec{N_1N}} = \frac{\vec{OP_2}}{\vec{ON_2}} \Rightarrow \frac{\vec{OP_2}}{\vec{OP_1}} = \frac{\vec{ON_2}}{\vec{ON_1}}. \quad (1)$$

Ἐπίσης ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα  $OP_1P$  καί  $OS_1\Sigma$  παίρνουμε:

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{O\Sigma}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OS_1}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{\Sigma_1\Sigma}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OS_2}} \Rightarrow \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:  $\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{ON_2}}{\overline{ON_1}} = \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}.$



Σχ. 4.2β.

Ωστε: «Αν δύο μή μηδενικά διανύσματα είναι παράλληλα, τότε οι συντεταγμένες του ενός είναι ανάλογες προς τις ομώνυμες συντεταγμένες του άλλου».

Ίσχύει βέβαια και τό αντίστροφο· δηλαδή:

«Αν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος είναι ανάλογες προς τις ομώνυμες συντεταγμένες ενός άλλου, τότε αυτά τά διανύσματα είναι παράλληλα».

Βλέπουμε λοιπόν ότι: ο λόγος της τεταγμένης προς την τετμημένη ενός μή μηδενικού διανύσματος  $\vec{a}$  (όχι παράλληλου προς τόν  $y'y$ ) μένει σταθερός (ανάλοιστος) μέσα σ' όλο τό σύνολο των διανυσμάτων των παραλλήλων προς τό  $\vec{a}$ .

Άρα ο λόγος αυτός χαρακτηρίζει τή διεύθυνση του διανύσματος και γι' αυτό ονομάζεται συντελεστής διευσθύνσεως του διανύσματος.

Μπορούμε λοιπόν νά λέμε: «Δυό διανύσματα έχουν τόν ίδιο συντελεστή διευσθύνσεως όταν και μόνο τά διανύσματα αυτά είναι παράλληλα».

γ) Γωνία άξονα και διανύσματος — γωνία δύο άξόνων.

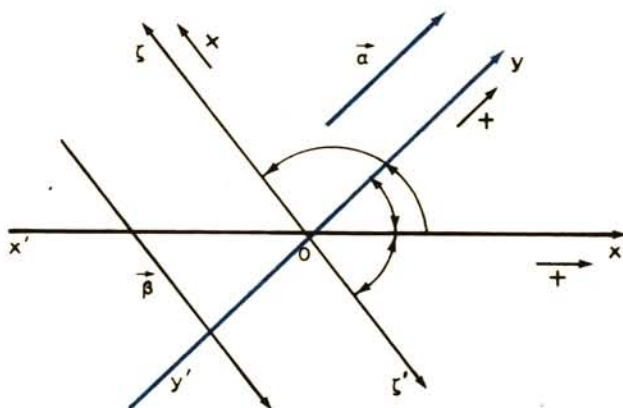
Όρισμοί: Κατεύθυνση ενός όχι μηδενικού διανύσματος  $\vec{a}$  θά ονομάζουμε τήν όποιαδήποτε ήμιοευθεία  $Oy$  (σχ. 4.2γ) που έχει τήν ίδια διεύθυνση και φορά μέ τή διεύθυνση και τή φορά του διανύσματος.

Γωνία άξονα και διανύσματος, σ' ένα προσανατολισμένο επίπεδο, ονομάζουμε τήν όποιαδήποτε γωνία που έχει πρώτη πλευρά τόν θετικό ήμιάξονα και

δεύτερη πλευρά τήν ήμιευθεία μέ ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ ἄξονα καί κατεύθυνση τήν κατεύθυνση τοῦ διανύσματος.

Στό σχῆμα π.χ. 4.2γ γωνία τοῦ ἄξονα  $x'x$  καί τοῦ διανύσματος  $\vec{a}$  εἶναι μιὰ γωνία μέ πρώτη πλευρά τήν ήμιευθεία  $Ox$  καί δεύτερη πλευρά τήν ήμιευθεία  $Oy$ , ἂν ἡ  $Oy$  εἶναι παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τό διάνυσμα  $\vec{a}$ . Ὅμοια, γωνία τοῦ ἄξονα  $x'x$  καί τοῦ διανύσματος  $\vec{\beta}$  εἶναι μιὰ γωνία  $(Ox, Oz')$ , ἂν ἡ  $Oz'$  εἶναι ήμιευθεία παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τό διάνυσμα  $\vec{\beta}$ .

**Γωνία δύο ἁξόνων** ὀνομάζομε τή γωνία τῶν θετικῶν κατευθύνσεων αὐτῶν τῶν ἁξόνων. Στό σχῆμα 4.2γ γωνία τῶν ἁξόνων  $x'x$  καί  $y'y$  εἶναι μιὰ γωνία  $(Ox, Oy)$  καί γωνία τῶν ἁξόνων  $x'x$  καί  $z'z$  εἶναι μιὰ γωνία  $(Ox, Oz)$ .



Σχ. 4.2γ.

**Σημείωση:** Εἶναι εὐκόλο νά διαπιστώσομε ὅτι: Ὄταν τό σύστημά μας εἶναι ὀρθοκανονικό, τότε ὁ συντελεστής διευσθύνσεως ἑνός διανύσματος ἰσοῦται μέ τήν τριγωνομετρική ἐφαπτομένη τῆς γωνίας τοῦ ἄξονα καί τοῦ διανύσματος.

(Ἡ ἀπόδειξη ἄς γίνῃ, ὡς ἀσκηση, ἀπό τό μαθητή).

**Παρατηρήσεις:** 1) Κάθε διάνυσμα παράλληλο πρός τόν ἄξονα  $x'x$  ἔχει τεταγμένη μηδέν (γιατί;) καί συνεπῶς ὁ συντελεστής διευσθύνσεως τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα τῶν τετμημένων ἰσοῦται μέ μηδέν.

11) Κάθε διάνυσμα παράλληλο πρός τόν ἄξονα  $y'y$  ἔχει τετμημένη μηδέν καί συνεπῶς ἔνα τέτοιο διάνυσμα δέν ἔχει γιά συντελεστή διευσθύνσεως ἕναν ἀριθμό. Συμφωνᾶμε νά λέμε ὅτι τά διανύσματα αὐτά ἔχουν συντελεστή διευσθύνσεως τό ἄπειρο ( $\infty$ ). Γνώρισμα τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα

τῶν τεταγμένων εἶναι ἡ ιδιότητα ὅτι ἔχουν τετμημένη μηδέν καθὼς καὶ ἡ ιδιότητα νὰ ἔχουν συντελεστή διευθύνσεως τὸ  $\infty$ .

**Σημείωση:** Συντελεστής διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας λέγεται ὁ συντελεστής διευθύνσεως ἑνὸς ὁποιουδήποτε διανύσματος παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεία.

**δ) Μέτρο διανύσματος συναρτήσει τῶν συντεταγμένων του.** Ὡς εἶναι  $\vec{OP}$  τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα, μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, τὸ ἴσο πρὸς ἓνα διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο  $OP_1P$  (σχ. 4.2β:  $P_1$  ἡ προβολὴ τοῦ  $P$  στὴν εὐθεία  $x'x$ ) παίρνομε:  $|\vec{OP}|^2 = (\overline{OP_1})^2 + (\overline{P_1P})^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ .

Ἀρα γιὰ τὸ μέτρο  $|\vec{\alpha}|$  ἑνὸς διανύσματος  $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$  ἔχομε (σ' ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων):

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

### 4.3 Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα.

1) *Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: Ἡ τετμημένη καθὼς καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ ἀθροίσματος  $\vec{a} + \vec{\beta}$ , δύο διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{\beta}$ , ἰσοῦται μέ τὸ ἀθροῖσμα τῶν τετμημένων καὶ ἀντίστοιχα τῶν τεταγμένων τῶν διανυσμάτων  $\vec{a}$  καὶ  $\vec{\beta}$ .*

Παίρνομε δύο διαδοχικὰ διανύσματα  $\vec{AB}$  καὶ  $\vec{B\Gamma}$  ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὸ  $\vec{a}$  καὶ  $\vec{\beta}$  ( $\vec{AB} = \vec{a}$  καὶ  $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$ ). Ἄν  $A_1, B_1$  καὶ  $\Gamma_1$  εἶναι οἱ προβολές τῶν  $A, B$  καὶ  $\Gamma$  πάνω στὸν ἀξονα τῶν τετμημένων, τότε (σύμφωνα μέ τὴ σχέση τοῦ Chasles) θά ἔχομε:  $\overline{A_1\Gamma_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1\Gamma_1}$ . ἀλλὰ  $\overline{A_1\Gamma_1}$  εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ  $\vec{A\Gamma}$ , ἀθροίσματος τῶν  $\vec{a}$  καὶ  $\vec{\beta}$ , καὶ  $\overline{A_1B_1}, \overline{B_1\Gamma_1}$  οἱ τετμημένες τῶν  $\vec{a}$  καὶ  $\vec{\beta}$  ἀντιστοίχως.

Ὅμοια ἐργαζόμεστε καὶ γιὰ τίς τεταγμένες. (Νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα).

2) *Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ συντεταγμένες ( $x', y'$ ) τοῦ μέσου  $M$  ἑνὸς τμήματος  $AB$ , τοῦ ἐπιπέδου  $xOy$ , συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος.*

Ὡς εἶναι  $A_1(x_1), B_1(x_2)$  οἱ προβολές τῶν  $A$  καὶ  $B$  στὸν ἀξονα  $x'x$  καὶ  $A_2(y_1), B_2(y_2)$  οἱ προβολές τους στὸν ἀξονα  $y'y$ .

Ἰσχύει τὸ θεώρημα: «Ἡ προβολὴ τοῦ μέσου ἑνὸς τμήματος, πάνω σ' ἓναν ἀξονα, εἶναι τὸ μέσο τῆς προβολῆς τοῦ τμήματος.» (Νὰ γίνῃ ἡ ἀπόδειξη).

Ἐτσι, ἂν  $M_1(x')$  εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ  $M$  στὸν ἀξονα  $x'x$  θά ἔχομε:

$\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1}$  ἢ  $x' - x_1 = x_2 - x'$  (1). (Γνωρίζομε ὅτι: ἡ τετμημένη διανύσματος ἰσοῦται μέ τὴ διαφορά τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τὴν τετμημένη τοῦ πέραςτος).

Τελικὰ ἀπὸ τὴν (1) παίρνομε  $x' = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

Ἐργαζόμεστε ὁμοια καὶ στὸν ἀξονα τῶν τεταγμένων καὶ παίρνομε:

$$y' = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

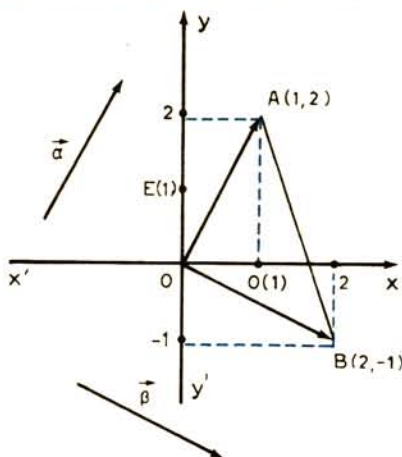
3) Αν  $(v_1, v_2)$  οί συντεταγμένες ενός ελεύθερου διανύσματος  $\vec{v}$  και  $\vec{\delta}$  και  $\vec{\epsilon}$  τά μοναδιαία διανύσματα του συστήματος αναφοράς, τότε  $\vec{v} = v_1 \vec{\delta} + v_2 \vec{\epsilon}$ .

Ας είναι  $\vec{OA} = \vec{v}$  (όπου Ο ή άρχή τών άξόνων) και  $A_1, A_2$  οί προβολές του Α στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \vec{OA} &= \vec{OA}_1 + \vec{A_1A} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 = \vec{OA}_1 \cdot \vec{\delta} + \vec{OA}_2 \cdot \vec{\epsilon} = \\ &= v_1 \vec{\delta} + v_2 \vec{\epsilon}. \end{aligned}$$

4) Ν' αποδειχθεί ότι οί διευθύνσεις τών διανυσμάτων  $\vec{a}(1,2)$  και  $\vec{b}(2,-1)$  εἶναι ὀρθογώνιες μεταξύ τους. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε γιά τούς συντελεστές διευθύνσεως αὐτῶν τών διανυσμάτων (σχ. 4.3).

Θεωροῦμε τίς διανυσματικές ἀκτίνες  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  καί  $\vec{OB} = \vec{\beta}$  (σχ. 4.3) καί ὀρίζομε τίς συντεταγμένες τοῦ  $\vec{AB}$  δηλαδή  $\vec{AB}(2-1, -1-2)$  ἤτοι  $\vec{AB}(1, -3)$ .



Σχ. 4.3.

$$\text{Έχουμε: } |\vec{OA}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \quad \text{καί} \quad |\vec{OB}|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

$$\text{καί} \quad |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 = 10. \quad \text{Άλλά καί} \quad |\vec{AB}|^2 = 1^2 + (-3)^2 = 10.$$

$$\text{Άρα } |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 = |\vec{AB}|^2 \quad \text{καί} \quad \text{συνεπῶς } \widehat{AOB} = 90^\circ.$$

Συντελεστής διευθύνσεως τοῦ  $\vec{\alpha}$  εἶναι ὁ ἀριθμός  $\lambda_1 = \frac{2}{1} = 2$  καί τοῦ  $\vec{\beta}$

$$\text{ὁ ἀριθμός } \lambda_2 = -\frac{1}{2}. \quad \text{παρατηροῦμε ὅτι } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

5) Θεωροῦμε τά σημεία  $A(2,0)$ ,  $B(0,1)$  καί  $P(3,1)$ . Νά προσδιορισθεῖ ὁ

λόγος  $\frac{\vec{OM}}{\vec{OP}}$ , ἂν  $M$  τό σημεῖο τομῆς τῶν  $OP$  καί  $AB$  καί νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ  $M$ .

Ἔχουμε:  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$  (1). Ὃς εἶναι  $\frac{\vec{OM}}{\vec{OP}} = \kappa$  καί  $\frac{\vec{AM}}{\vec{AB}} = \lambda$ , ὁπότε

$\vec{OM} = \kappa \cdot \vec{OP}$  καί  $\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{AB}$ . ἔτσι ἡ (1) γίνεται  $\kappa \cdot \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB}$  (2).

Εἶναι ὁμως  $\vec{OP} = 3\vec{\delta} + \vec{\epsilon}$  (βλέπε ἐφαρμογή 3) καί  $\vec{AB} = -2\vec{\delta} + \vec{\epsilon}$  (διότι οἱ συντεταγμένες τοῦ  $\vec{AB}$  εἶναι  $(0 - 2, 1 - 0) = (-2, 1)$ ).

Ἡ (2) τώρα γράφεται:  $\kappa(3\vec{\delta} + \vec{\epsilon}) = 2\vec{\delta} + \lambda(-2\vec{\delta} + \vec{\epsilon})$  ἢ  
 $3\kappa\vec{\delta} + \kappa\vec{\epsilon} = (2 - 2\lambda)\vec{\delta} + \lambda\vec{\epsilon}$ .

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι δυό ἴσα διανύσματα ἔχουν ἴσες ὁμώνυμες συντεταγμένες. Ἀρα πρέπει νά ἔχουμε  $3\kappa = 2 - 2\lambda$  (I) καί  $\kappa = \lambda$  (II).

Ἀπό τό σύστημα τῶν (I) καί (II) παίρνομε  $\kappa = \lambda = \frac{2}{5}$ .

Εἶναι λοιπόν  $\vec{OM} = \frac{2}{5} \vec{OP}$ ,  $\left(\frac{\vec{OM}}{\vec{OP}} = \frac{2}{5}\right)$ , ἢ  $\vec{OM} = \frac{2}{5}(3\vec{\delta} + \vec{\epsilon}) = \frac{6}{5}\vec{\delta} + \frac{2}{5}\vec{\epsilon}$ .

Ὡστε οἱ συντεταγμένες τοῦ  $M$  εἶναι  $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$ .

#### 4.4 Ἀσκήσεις.

1. Σέ σχέση  $\mu'$  ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων νά σχεδιασθεῖ διάνυσμα μέ συντεταγμένες  $(-2, 2)$ . Ἀκολούθως νά κατασκευασθεῖ ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλη πρὸς αὐτό τό διάνυσμα, πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο  $A(-4, \sqrt{6})$ .

2. Διάνυσμα  $\vec{ZP}$  ἔχει συντεταγμένες  $\left(8, -\frac{7}{9}\right)$ . ἂν πέρας εἶναι τό  $P(-1, -1)$ , νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του. Ἀκολούθως νά ὀρισθοῦν οἱ συντεταγμένες ἐκείνου τοῦ σημείου

$M$  τῆς  $ZP$  γιά τό ὅποιο ἔχομε  $\frac{\vec{ZM}}{\vec{MP}} = -\frac{1}{3}$ .

3. Δίνονται τά σημεία  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 0)$  καί  $\Gamma(0, 3)$ .

I) Νά ὀρισθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου  $\Delta$  γιά τό ὅποιο ἔχομε  $\vec{AD} = \vec{GB}$ .

II) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο  $AB\Gamma$  εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο.

4. Δίνονται τά διανύσματα  $\vec{\alpha}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$  καί  $\vec{\beta}(-6, \beta_2)$ . Νά βρεθεῖ ἡ τεταγμένη  $\beta_2$  τοῦ  $\vec{\beta}$ , ἂν γνωρίζομε ὅτι  $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$ .

5. Δίνονται τά διανύσματα  $\vec{\alpha}(-4, 7)$  καί  $\vec{\beta}(5, -3)$ .

I) Νά ὀρισθοῦν οἱ συντεταγμένες, τά μέτρα καί οἱ συντελεστές διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  καί  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

II) Ποίος εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τοῦ διανύσματος  $4\vec{\beta} + 5\vec{\alpha}$ ;

III) Νά σχεδιασθεί ένας αντιπρόσωπος για καθένα από τὰ προηγούμενα διανύσματα, μέ ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

6. Δίνονται τὰ διανύσματα  $\vec{\alpha}(-9, 13)$ ,  $\vec{\beta}(3, -\frac{13}{3})$ ,  $\vec{\gamma}(-18, 26)$ ,  $\vec{\zeta}(-8, 12)$  καί  $\vec{\eta}(9, 12)$ . Ὑπάρχουν μεταξύ αὐτῶν παράλληλα διανύσματα; Ἄν νάί, εἶναι τότε αὐτά ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα;

7\* Δίνονται τὰ διανύσματα  $\vec{\alpha}(11, -5)$ ,  $\vec{\beta}(3x - 1, y + 2)$ ,  $\vec{\gamma}(4 - x, 5 + 2y)$ ,  $\vec{\kappa}(3, 4)$ ,  $\vec{\lambda}(-20, 15)$ .

I) Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν  $x$  καί  $y$ , ἄν τὰ διανύσματα  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  καί  $3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$  εἶναι ἀντίστοιχα παράλληλα πρὸς τὰ  $\vec{\kappa}$  καί  $\vec{\lambda}$ .

II) Τί εἶναι οἱ διευθύνσεις τῶν  $\vec{\kappa}$  καί  $\vec{\lambda}$  μεταξύ τους;

8. Δίνονται τὰ σημεῖα  $A(1, 1)$ ,  $B(-1, 0)$  καί  $\Gamma(0, -1)$ . I) Νά καθορισθεῖ τό εἶδος τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ .

II) Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BN}$  καί  $\vec{GP}$  ἄν  $M$ ,  $N$  καί  $P$  εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$  καί  $AB$  ἀντιστοίχως.

III) Νά διαπιστώσετε ὅτι οἱ εὐθεῖες  $AM$ ,  $BN$  καί  $GP$  ἔχουν κοινὸ σημεῖο καί νά προσδιορίσετε τίς συντεταγμένες του.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 5

### ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

#### 5.1 Διανυσματική καί ἀναλυτική ἐξίσωση εὐθείας.

**α) Διανυσματική ἐξίσωση εὐθείας.** Θέλομε νά βροῦμε διανυσματική σχέση πού νά ἱκανοποιεῖται ἀποκλειστικά ἀπὸ τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας στό ἐπίπεδο, δηλαδή ἀπὸ τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς μέ βάση ἓνα σύστημα συντεταγμένων. Μιά τέτοια σχέση θά λέγεται **διανυσματική ἐξίσωση τῆς εὐθείας** στό ἐπίπεδο (σχ. 5.1).

Μιά εὐθεῖα εἶναι ὀρισμένη ἄν δίνονται δύο σημεῖα τῆς ἢ ἓνα σημεῖο τῆς καί ἓνα ὄχι μηδενικό διάνυσμα, πρὸς τό ὁποῖο ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλη.

Ἄς θεωρήσουμε λοιπόν ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων καί μιᾶ εὐθείας  $(\varepsilon)$  πού ὀρίζεται ἀπὸ δύο σημεῖα  $A(x_1, y_1)$  καί  $B(x_2, y_2)$  ἢ (πράγμα τό ἴδιο) ἀπὸ τό σημεῖο  $A(x_1, y_1)$  καί ἀπὸ τό μή μηδενικό διάνυσμα  $\vec{v}(v_1, v_2)$ , πρὸς τό ὁποῖο ἡ  $(\varepsilon)$  εἶναι παράλληλη. Θά ἀναζητήσουμε μιᾶ διανυσματική σχέση τήν ὁποία νά ἱκανοποιοῦν τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας μας καί μόνον αὐτά.

Πρὸς τοῦτο παίρνομε τυχαῖο σημεῖο  $M$  τῆς  $(\varepsilon)$  καί φέρνομε τή σταθερή διανυσματική ἀκτῖνα  $\vec{r}_1 = \vec{OA}$  καί τή μεταβλητὴ  $\vec{r} = \vec{OM}$ .

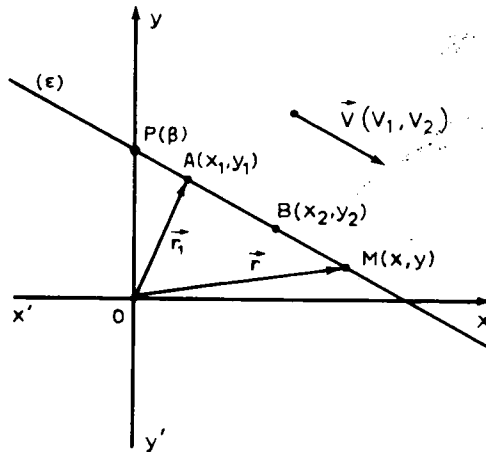
Γιά κάθε σημεῖο  $M$  τῆς  $(\varepsilon)$  ἔχομε:  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$  (1). Ἀλλά  $\vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$  ἢ  $\vec{AM} = t \cdot \vec{v}$ , ὅπου  $t$  ὁ κατάλληλος κάθε φορά πραγματικός ἀριθμὸς μέ τὸν ὁποῖο πρέπει νά πολλαπλασιάσουμε τό διάνυσμα  $\vec{AB}$  (ἢ τό  $\vec{v}$ ) γιά νά προκύπτει τό συγγραμμικὸ του διάνυσμα  $\vec{AM}$ .



Έτσι η σχέση (1) γράφεται:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{AB} \quad \eta \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{v}} \quad (2)$$

Η μεταβλητή  $t$ , που παίρνει εδώ πραγματικές τιμές, λέγεται **παράμετρος**.



Σχ. 5.1.

**Αντίστροφα**, αν δώσουμε στην παράμετρο  $t$  μία τυχαία πραγματική τιμή, τότε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2) παρέχει διάνυσμα που το πέρας του κείται επί της  $(\epsilon)$ , αν βέβαια η άρχή του διανύσματος είναι το σημείο  $O$ . Πράγματι:  $\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{AB}$  ή  $\vec{OM} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{OM} - \vec{OA} = t \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$ . Τά εφαρμοστά διανύσματα συνεπώς  $\vec{AM}$  και  $\vec{AB}$  είναι συγγραμμικά και, επειδή έχουν κοινή άρχή, έπεται ότι τά στηρίγματά τους συμπίπτουν.

Η σχέση (2), που, για τις διάφορες πραγματικές τιμές της  $t$ , παρέχει τις διανυσματικές ακτίνες των σημείων της θεωρούμενης ευθείας και μόνον αυτές, λέγεται **διανυσματική (παραμετρική) εξίσωση της ευθείας**.

**β) Αναλυτική εξίσωση ευθείας.** Άς είναι  $(x, y)$  οι συντεταγμένες της διανυσματικής ακτίνας  $\vec{OM} = \vec{r}$  και  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  και  $(v_1, v_2)$  οι συντεταγμένες αντίστοιχα της διανυσματικής ακτίνας  $\vec{OA}$ , του σημείου  $B$  και του διανύσματος  $\vec{v}$  (σχ. 5.1).

Μπορούμε τότε στη θέση της εξίσωσης (2) νά γράψουμε τις ακόλουθες δυό εξισώσεις: [Βλέπε και εφαρμογή 4.3 (1)] .

$$\left. \begin{aligned} y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \quad \eta \quad \left\{ \begin{aligned} y &= y_1 + t \cdot v_2 \\ x &= x_1 + t \cdot v_1 \end{aligned} \right.$$

ή ακόμα τις εξισώσεις



$$\left. \begin{array}{l} y - y_1 = t(y_2 - y_1) \\ x - x_1 = t(x_2 - x_1) \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} y - y_1 = t \cdot v_2 \\ x - x_1 = t \cdot v_1 \end{array} \right. \quad (3)$$

\*Αν  $x_2 - x_1 \neq 0$  ( $x_2 \neq x_1$ ) και  $t \neq 0$ , τότε από τις εξισώσεις (3) με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ή} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{v_2}{v_1}} \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) εκφράζει την αλληλεξάρτηση των συντεταγμένων των σημείων μιας ευθείας μη παράλληλης προς τον άξονα  $y'y'$  αυτής που ορίζεται από τα σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$  ή αυτής που είναι παράλληλη προς το ελεύθερο διάνυσμα  $(v_1, v_2)$  και διέρχεται από το σημείο  $(x_1, y_1)$ . Η εξίσωση αυτή, καθώς και κάθε άλλη που προκύπτει απ' αυτή με κατάλληλο μετασχηματισμό, λέγεται **αναλυτική εξίσωση ευθείας**.

Επειδή οι ίδιοι λόγοι  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{v_2}{v_1}$  είναι ο κοινός συντελεστής διευθύνσεως, έστω  $a$ , των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\vec{v}$  και συνεπώς και της ευθείας  $(\epsilon)$ , η εξίσωση (4) γράφεται:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = a} \quad (5)$$

Και λέμε ότι: η (5) είναι η **αναλυτική εξίσωση της ευθείας**, που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα  $y'y'$ , διέρχεται από το σημείο  $(x_1, y_1)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσεως  $a$ .

\*Αν ως αρχικό σημείο  $(x_1, y_1)$  της ευθείας πάρουμε το σημείο τομής της με τον άξονα  $y'y'$ , δηλαδή εκείνο για το οποίο έχουμε  $x_1 = 0$  και  $y_1 = \beta$ , τότε η εξίσωση (5) γίνεται

$$\boxed{y = ax + \beta} \quad (6)$$

Μπορούμε τώρα να λέμε γενικά ότι: η εξίσωση (6) είναι η εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $(0, \beta)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσεως ίσο με  $a$ .

Διότι και αντίστροφως τα σημεία του επιπέδου, των οποίων οι συντεταγμένες  $(x, y)$  ικανοποιούν την εξίσωση (6), κείνται σε μία και την ίδια ευθεία.

Πράγματι η εξίσωση  $y = ax + \beta$  προκύπτει, με απαλοιφή του  $t$ , από το σύστημα των παραμετρικών εξισώσεων

$$y = \beta + t \cdot a$$

$$x = 0 + t \cdot 1, \quad \text{και αυτές οι τελευταίες μπορούν να αντικαταστα-}$$

θούν από τη διανυσματική εξίσωση  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{\alpha}$ , όπου  $P$  το σημείο του άξονα  $y'y'$  με συντεταγμένες  $(0, \beta)$  και  $\vec{\alpha}$  το διάνυσμα με συντεταγμένες  $(1, a)$ .

Η εξίσωση μιας ευθείας παράλληλης προς τον άξονα  $x'x$  είναι :

$y = \beta$ , διότι ο συντελεστής διεύθυνσεως κάθε τέτοιας ευθείας είναι μηδέν.

‘Η εξίσωση μιᾶς ευθείας παράλληλης πρὸς τὸν ἄξονα  $y'y$  (ὁπότε ὁ συντελεστής διεύθυνσεως δέν εἶναι ἀριθμός) εἶναι  $x = \gamma$ , ὅπου  $\gamma$  ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τομῆς τῆς ευθείας μέ τὸν ἄξονα  $x'x$  (γιατί;).

‘Ο ἄξονας  $x'x$  ἔχει ὡς εξίσωση τὴν  $y = 0$  καὶ ὁ ἄξονας  $y'y$  ἔχει ὡς εξίσωση τὴν  $x = 0$ .

**‘Η εξίσωση  $y = ax$  ( $a \neq 0$ ) εἶναι ἡ εξίσωση μιᾶς ευθείας πού διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.**

**Άσκηση:** Νά σχεδιασθεῖ ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς εξισώσεως  $4x - 5y + 7 = 0$ . Ἐπίσης νά ὁρισθεῖ ὁ συντελεστής διεύθυνσεως τῆς καὶ νά βρεθοῦν τὰ σημεία τομῆς τῆς ευθείας μέ τούς ἀξονες.

## 5.2 Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα.

**1) Δίνεται ἡ εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$ , ὅπου  $A, B, \Gamma$  δοσμένοι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ  $|A| + |B| > 0$ , δηλαδή οἱ  $A$  καὶ  $B$  ὄχι συγχρόνως μηδέν. Τί παριστάνει ἡ εξίσωση σέ σχέση μ' ἓνα σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων στό ἐπίπεδο;**

‘Αν  $A = 0$ , ἡ εξίσωση γίνεται  $By + \Gamma = 0$  ἢ  $y = -\frac{\Gamma}{B}$ . ‘Η τελευταία ὁμως εξίσωση παριστάνει, ὅπως πλέον γνωρίζομε, ευθεῖα παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα  $x'x$  ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα  $y'y$  στό σημεῖο  $-\frac{\Gamma}{B}$ . ἐφόσον καὶ  $\Gamma = 0$  ἡ ευθεῖα ταυτίζεται μέ τὸν ἄξονα  $x'x$ .

‘Αν  $B = 0$ , τότε παίρνομε  $x = -\frac{\Gamma}{A}$ . ‘Η εξίσωση αὐτὴ παριστάνει ευθεῖα παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα  $y'y$  πού τέμνει τὸν ἄξονα  $x'x$  στό σημεῖο  $-\frac{\Gamma}{A}$ . ἐφόσον καὶ  $\Gamma = 0$  ἡ ευθεῖα ταυτίζεται μέ τὸν ἄξονα  $y'y$ .

‘Αν  $A \neq 0$  καὶ  $B \neq 0$ , τότε παίρνομε  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$ . ‘Η εξίσωση αὐτὴ παριστάνει ευθεῖα πού τέμνει τὸν ἄξονα  $y'y$  στό σημεῖο  $-\frac{\Gamma}{B}$  καὶ ἔχει συντελεστή διεύθυνσεως  $-\frac{A}{B}$ , δηλαδή εἶναι παράλληλη πρὸς τὸ διάνυσμα μέ συντεταγμένες  $(B, -A)$ . Τό σημεῖο τομῆς τῆς ευθείας μέ τὸν ἄξονα  $x'x$  ἔχει τετμημένη  $-\frac{\Gamma}{A}$  (γιατί;).

‘Αν  $\Gamma = 0$  (μέ  $|A| + |B| > 0$ ), ἡ ευθεῖα διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

**2) Δίνονται οἱ εξισώσεις  $Ax + By + \Gamma = 0$  καὶ  $A'x + B'y + \Gamma' = 0$ , μέ**

όλες τις σταθερές ( $A, B, \Gamma, A', B', \Gamma'$ ) μὴ μηδενικές. Τί έχετε νά πητε γιά τίς εὐθεΐες πού παριστάνουν, ἂν εἶναι  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'}$ ; Νά διατυπωθεῖ ἓνα παράδειγμα.

Οἱ ἐξισώσεις γράφονται ἰσοδύναμα :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B} \text{ καὶ } y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{\Gamma'}{B'}. \text{ ἄλλὰ ἀπὸ τὴν ἰσότητά } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

παίρνομε  $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$  ἢ  $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$  καὶ ἀπὸ τὴν  $\frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'} \Rightarrow -\frac{\Gamma'}{B'} =$

$$= -\frac{\Gamma}{B}. \text{ Οἱ εὐθεΐες κατὰ συνέπεια συμπίπτουν.}$$

Δυὸ τέτοιες ἐξισώσεις εἶναι π.χ. οἱ ἀκόλουθες:

$$5x - 9y + 12 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{5}{3}x - 3y + 4 = 0.$$

**Σημείωση:** Ἐφόσον  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{\Gamma}{\Gamma'}$ , τότε εἶναι φανερό ὅτι οἱ εὐθεΐες μας εἶναι παράλληλες χωρὶς νά συμπίπτουν.

3) Δίνεται ἡ εὐθεΐα ( $\epsilon$ ) μέ ἐξίσωση  $x - 2y + 2 = 0$ .

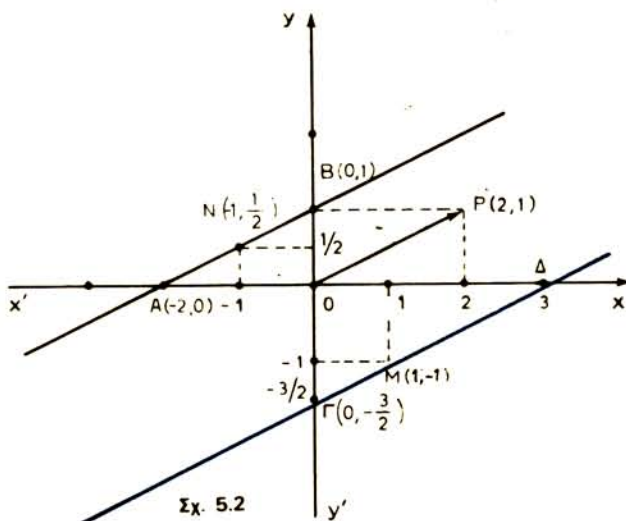
α) Νά σχεδιασθεῖ: I) ὕστερα ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸ ἑνὸς σημείου της καὶ ἑνὸς παράλληλου διανύσματος· II) μέ τὸν προσδιορισμὸ δυὸ σημείων της.

β) Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση εὐθείας ( $\epsilon'$ ) πού διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο  $M(1, -1)$  καὶ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν ( $\epsilon$ ).

γ) Νά βρεθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ( $\epsilon'$ ) μέ τοὺς ἄξονες.

α) Ἐπιλύομε τὴν ἐξίσωση ὡς πρὸς  $y$  καὶ ἔχομε  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

Ἐνα σημεῖο τῆς εὐθείας εἶναι τὸ  $(0,1)$ · αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ σημεῖο τομῆς της μέ τὸν ἄξονα  $y'y$  (σχ. 5.2). Ἐνα διάνυσμα παράλληλο τῆς ( $\epsilon$ ) εἶναι τὸ διάνυσμα  $\vec{OP}$  μέ συντεταγμένες τοῦ πέρατος  $(2,1)$ .



Γιά νά σχεδιάσουμε τήν (ε) φέρνομε από τό  $B(0, 1)$  τήν παράλληλη εὐθεία πρὸς τήν  $OP$ . Γιά νά βροῦμε ἓνα δεύτερο σημεῖο τῆς (ε) δίνομε στό  $x$  μιὰ τυχαία τιμὴ  $\neq 0$  καὶ ὀρίζομε, ἀπὸ τήν ἐξίσωση, τήν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ  $y$ . Ἐτσι π.χ. γιά  $x = -1$  παίρνομε  $y = \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{2}$ . ὥστε ἓνα δεύτερο σημεῖο τῆς εὐθείας εἶναι τό  $N\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ . Θά μπορούσαμε βέβαια νά βροῦμε τό σημεῖο τομῆς τῆς (ε) μέ τόν ἄξονα  $x'x$  ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νά δώσουμε στό  $y$  τήν τιμὴ 0.

β) Ἀφοῦ ἡ (ε') εἶναι παράλληλη πρὸς τήν (ε) θά εἶναι παράλληλη πρὸς τό διάνυσμα  $\vec{OP}$  καὶ συνεπῶς θά ἔχει ἐξίσωση τῆς μορφῆς  $y = \frac{1}{2}x + \beta_1$  (2). Γιά νά ἔχομε τήν ἐξίσωση τῆς (ε') ἀρκεῖ τώρα νά βροῦμε τήν τιμὴ τοῦ  $\beta_1$ . Ἐπειδὴ ἡ (ε') διέρχεται ἀπὸ τό σημεῖο  $M(1, -1)$ , φανερό εἶναι ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ  $M$  πρέπει νά πληροῦν τήν ἐξίσωση (2). Ἀρα πρέπει νά ἔχομε :

$$-1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \beta_1 \implies \beta_1 = -\frac{3}{2}.$$

Ὡστε ἡ ἐξίσωση τῆς (ε') εἶναι ἡ :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{ἢ} \quad x - 2y - 3 = 0.$$

Τό σημεῖο τομῆς τῆς (ε') μέ τόν ἄξονα  $y'y$  εἶναι τό σημεῖο  $\Gamma\left(0, -\frac{3}{2}\right)$  καὶ τό σημεῖο τομῆς μέ τόν ἄξονα  $x'x$  ἔχει τετμημένη:

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \implies x = 3.$$

**Σημείωση:** Γνωρίζοντας τό συντελεστή διευθύνσεως τῆς εὐθείας, πού ἰσοῦται μέ  $\frac{1}{2}$ , μπορούμε νά χρησιμοποιήσουμε καὶ τήν ἐξίσωση (5) τῆς παραγράφου 5.1 (β), ὁπότε βρίσκομε :  $\frac{y+1}{x-1} = \frac{1}{2} \iff x - 2y - 3 = 0$ .

**4. Δίνονται τὰ σημεῖα  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  καὶ  $\Gamma(x_3, y_3)$ . Νά βρεθεῖ ἡ συνθήκη πού ικανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν  $A, B, \Gamma$  ἐφόσον τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀνήκουν σὲ μιὰ εὐθεῖα ὃχι παράλληλη πρὸς τήν  $y'y$ .**

Ἄς εἶναι  $y = ax + \beta$  ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας ὅπου κεῖνται τὰ σημεῖα, τότε πρέπει νά ἔχομε :

$$y_1 = ax_1 + \beta \quad (1), \quad y_2 = ax_2 + \beta \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad y_3 = ax_3 + \beta \quad (3).$$

Ἀπὸ τίς (1) καὶ (2) παίρνομε (ἂν ἀφαιρέσουμε τὰ ὁμώνυμα μέλη)

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) \quad (1') \quad \text{καὶ ἀπὸ τίς (1) καὶ (3)} \quad y_1 - y_3 = a(x_1 - x_3) \quad (2').$$

$$\text{Ἀπὸ τίς (1') καὶ (2')} \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}.$$

### 5.3 Άσκησης.

1. Νά λυθούν γραφικά τὰ συστήματα:

$$\text{I)} \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

(Δηλαδή νά σχεδιασθούν οί εὐθείες πού ἔχουν ἐξισώσεις αὐτές τοῦ συστήματος (I) — ὕστερα τοῦ (II)— καί νά βρεθεῖ τό σημείο τῆς τομῆς τους, ἐφόσον ὑπάρχει).

2. Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἀνίσωση:  $2x + 3y - 6 > 0$ .

(Δηλαδή νά ἐντοπισθοῦν τὰ σημεία τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα, ὡς πρός ἕνα σύστημα ἀξόνων, ἔχουν συντεταγμένες  $(x, y)$  πού δίνουν θετική ἀριθμητική τιμή στό πολυώνυμο  $2x + 3y - 6$ ).

**Υπόδειξη:** Ἀφοῦ σχεδιάσετε τήν εὐθεία  $2x + 3y - 6 = 0$  παρατηρεῖστε (καί ἀποδείξτε) ὅτι οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ ἑνός ἡμιεπιπέδου, ὡς πρός αὐτή τήν εὐθεία, δίνουν στό πολυώνυμο  $2x + 3y - 6$  θετική τιμή καί ὅτι οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου δίνουν στό  $2x + 3y - 6$  τιμή ἀρνητική.

3. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθείες  $4x - 5y = 1$ ,  $-8x + 10y = 2$ ,  $3x + 2y = 0$ ,  $6x + 4y = -1$  σχηματίζουν παραλληλόγραμμο καί νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν κορυφῶν αὐτοῦ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἀκολουθῶς ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται, ἀφοῦ πρῶτα βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν διαγωνίων.

Ποιά τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν καί τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου; Νά σχεδιαστοῦν οἱ 6 παραπάνω εὐθείες.

4. Νά ὁρισθεῖ ἡ τιμὴ τοῦ  $\lambda$  ἔτσι ὥστε οἱ εὐθείες,  $4x - 2y = 1$ ,  $3x + 9y - 12 = 0$  καί  $(\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y - 7\lambda + 13 = 0$  νά ἔχουν κοινὸ σημείο.

5.\* Νά πάρετε στό σχέδιό σας 4 σημεία A, B, Γ, Δ (μέ τίς συντεταγμένες τους ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα) πού νά εἶναι κορυφές κυρτοῦ τετραπλεύρου καί ἀκολουθῶς νά βρῆτε:

I) Τίς ἐξισώσεις τῶν πλευρικῶν εὐθειῶν τοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ καί τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν του.

II) Τίς συντεταγμένες τῶν μέσων E, Z, H, Θ, K καί Λ τῶν πλευρῶν AB, BΓ, ΓΔ, ΔA καί τῶν διαγωνίων AΓ καί BΔ ἀντιστοίχως.

III) Τίς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν EH, ZΘ καί KΛ καί τὰ μέτρα αὐτῶν τῶν τμημάτων.

IV) Τίς ἐξισώσεις καί τὰ μέτρα τῶν διαγωνίων AΓ καί BΔ καθὼς καί τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων.

Ν' ἀποδείξετε τέλος ὅτι οἱ εὐθείες EH, ZΘ καί KΛ διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημείο, τοῦ ὁποῖου νά βρῆτε τίς συντεταγμένες.

6. I) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τὰ σημεία  $(-4, 3)$ ,  $(1, \frac{11}{7})$  καί  $(3, 1)$  κείνται στήν ἴδια εὐθεία. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωσή της καί ποῦ τέμνει τούς ἄξονες; Νά γίνῃ ἡ σχεδίαση τῆς εὐθείας.

II) Νά ὁρισθεῖ ἡ τιμὴ τοῦ  $x$ , ἔτσι ὥστε τὰ σημεία  $(x, -4)$ ,  $(2, -2)$  καί  $(-5, \frac{3}{7})$  νά κείνται στήν ἴδια εὐθεία.

7. Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τριῶν εὐθειῶν πού ὀρίζονται ὡς ἑξῆς: ἡ πρώτη διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεία  $(7, 0)$  καί  $(0, -11)$ , ἡ δευτέρα ἀπὸ τὰ  $(\frac{4}{5}, \sqrt{5})$  καί  $(\sqrt{3}, -6)$  καί ἡ τρίτη διέρχεται ἀπὸ τὸ σημείο τομῆς τῶν εὐθειῶν  $x + y - 1 = 0$  καί  $x - y + 2 = 0$  καί εἶναι παράλληλη πρὸς τὸ διάνυσμα  $(1, \sqrt{2})$ .

Νά γίνῃ ἡ σχεδίαση τῶν παραπάνω εὐθειῶν.

8. Δίνονται οι ευθείες α)  $4x - 6y - 1 = 0$  και β)  $3x + 2y = 0$ . 'Αφού παρατηρήσετε ότι αυτές είναι αντίστοιχα παράλληλες προς τα διανύσματα  $(6, 4)$  και  $(-2, 3)$ , ν' αποδείξετε άκολούθως ότι οι ευθείες είναι κάθετες. Νά γίνει τό κατάλληλο σχέδιο.

9\* Νά βρεθεί ή εξίσωση τής ευθείας πού: α) διέρχεται από τήν άρχή τών άξόνων και είναι κάθετη πρós τό διάνυσμα  $(2, -4)$ . β) διέρχεται από τό σημείο τομής τών ευθειών  $y = -4$  καί  $x = 2$  καί είναι κάθετη πρós τό διάνυσμα  $(8, 4)$ . Νά σχεδιασθούν οι ευθείες.

10\* Δίνονται τά σημεία  $A(-5, 5)$ ,  $B(7, 2)$  καί  $\Gamma(-1, -1)$ . I) Νά βρεθούν οι εξισώσεις τών διαμέσων τού τριγώνου  $AB\Gamma$  καί ν' αποδειχθεί ότι οι διάμεσες αυτές διέρχονται από τό ίδιο σημείο. Ποιές είναι οι συντεταγμένες αυτού τού σημείου; Νά γενικευθεί ή απόδειξη για τίς διάμεσες τυχαίου τριγώνου. II) Νά βρεθούν οι εξισώσεις τών ευθειών τών ύψων στό παραπάνω τρίγωνο καί ν' αποδειχθεί ότι οι ευθείες αυτές έχουν κοινό σημείο. III) Νά βρεθούν τά μέτρα τών διαμέσων καί τών ύψων.

### Άσκήσεις για επανάληψη.

1. Ποιά σημεία πάνω σ' έναν άξονα  $x'x$  παριστάνει καθεμιά από τίς ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha) 3x - 1 > 2 \quad \beta) x - \sqrt{2} < 1.$$

2\* Αν για τά σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  ενός άξονα ισχύει ή ισότητα  $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = -\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}}$ , ν' αποδειχθεί ότι  $2(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι οι τετμημένες τών  $A, B, \Gamma, \Delta$  αντίστοιχα.

3. Μέ κέντρο τήν άρχή ενός όρθοκανονικού συστήματος καί άκτίνα μέτρου 2 σχεδιάζομε κύκλο πού τέμνει τόν ήμισίαονα  $Ox$  στό  $A$ . Άκολούθως σχεδιάζομε τό κανονικό έξάγωνο, τό έγγεγραμμένο σ' αυτόν τόν κύκλο, πού έχει μία κορυφή του τό σημείο  $A$ . Νά βρεθούν οι συντεταγμένες τών άλλων κορυφών τού έξαγώνου.

4. Νά βρεθεί ή αναλυτική καί ή διανυσματική εξίσωση τής ευθείας πού διέρχεται από τά σημεία  $A(6, -8)$  καί  $B(1, -5)$  καί τής ευθείας πού διέρχεται από τό σημείο  $B(1, -5)$  καί είναι παράλληλη πρós τήν ευθεία  $-2x + 9y - 10 = 0$ .

5. Νά βρεθεί ή διανυσματική καί ή συνήθης αναλυτική εξίσωση τής ευθείας, τής οποίας οι αναλυτικές παραμετρικές εξισώσεις είναι  $x = 7 - 3t$  καί  $y = 13 + 21t$ .

6. Νά όρισθεί ή τιμή τής παραμέτρου  $\lambda$  έτσι, ώστε οι ευθείες  $(\lambda - 2)x = (\lambda - 1)y + 1$  καί  $-2\lambda x + (2\lambda + 5)y = 3$  α) νά είναι παράλληλες καί β) νά ταυτίζονται.

7\* Θεωρούμε τήν εξίσωση  $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ . Ν' αποδειχθεί ότι τό σύνολο τών σημείων τού επιπέδου, τών όποίων οι συντεταγμένες τήν έπαληθεύουν, αποτελείται από δύο ευθείες, τίς όποιες νά προσδιορίσετε καί νά σχεδιάσετε.

(Υπόδειξη: Τό πολυώνυμο  $x^2 + y^2 + 2xy - 1$  νά γίνει γινόμενο πρωτοβαθμίων ως πρós  $x$  καί  $y$  πολυωνύμων).

8\* Δίνονται τά σημεία  $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ ,  $B\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$  καί  $K(2, 2)$ . 'Αν τό  $K$  είναι τό κέντρο βάρους τού τριγώνου  $AB\Gamma$ , νά βρεθούν οι συντεταγμένες τού σημείου  $\Gamma$ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ  
ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ  
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

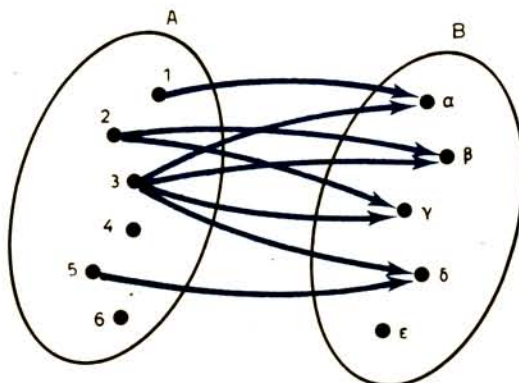
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ  
ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ. ΜΕΛΕΤΗ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

**6.1 Τί είναι ή συνάρτηση. Πραγματικές συναρτήσεις.**

α) **Εισαγωγικά :** \*Ας θεωρήσουμε δυό μὴ κενά σύνολα  $A$  καὶ  $B$  καὶ ἄς εἶναι π.χ.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  καὶ  $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$  (σχ. 6.1α). \*Ας ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι, κατὰ κάποιον τρόπο, ἓνα τουλάχιστον στοιχεῖο τοῦ συνόλου  $A$  συνδέεται μ' ἓνα ἢ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ συνόλου  $B$ .



Σχ. 6.1α.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε, ὅτι ἔχομε μιά **διμελή (μιά δυαδική) σχέση** ἀπό τό σύνολο  $A$  (πρῶτο σύνολο) πρὸς τό σύνολο  $B$  (δεύτερο σύνολο).

\*Ἐχομε ὀρίσει, κατ' αὐτό τόν τρόπο, ἓνα σύνολο  $R$  διατεταγμένων ζευγῶν μέ πρῶτα στοιχεῖα ἀπό τό  $A$  καὶ δεύτερα ἀπό τό  $B$ .

Στή σχέση πού ἐμφανίζει παραστατικά τό σχῆμα 6.1α τό σύνολο  $R$  εἶναι:  $R = \{(1, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta), (3, \gamma), (5, \delta), (6, \delta)\}$  καὶ τό

σύνολο αυτό τό ονομάζομε **γράφημα** τῆς θεωρούμενης σχέσεως.

“Όλα τά στοιχεῖα  $x \in A$ , καθένα ἀπό τά ὅποια ἔχει ἓνα (τουλάχιστον) ἀντίστοιχο  $y \in B$ , ἀποτελοῦν ἓνα ὑποσύνολο τοῦ  $A$  πού λέγεται **πεδίο ὀρισμοῦ** τῆς σχέσεως. Στό παράδειγμά μας πεδίο ὀρισμοῦ εἶναι τό σύνολο  $\Delta = \{1, 2, 3, 5\} \subset A$ .

“Όλα τά στοιχεῖα  $y \in B$ , καθένα ἀπό τά ὅποια εἶναι ἀντίστοιχο ἑνός (τουλάχιστον)  $x \in A$ , ἀποτελοῦν ἓνα ὑποσύνολο τοῦ  $B$  πού λέγεται **πεδίο τιμῶν** τῆς σχέσεως. Στό παράδειγμά μας πεδίο τιμῶν εἶναι τό σύνολο  $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ .

Γιά νά δηλώσωμε συμβολικά ὅτι ἓνα διατεταγμένο ζεῦγος  $(x, y)$ , μέ  $x \in A$  καί  $y \in B$ , ἀνήκει σ’ ἓνα σύνολο  $R$  μιᾶς σχέσεως  $\sigma$  ἀπό τό  $A$  πρὸς τό  $B$  γράφομε:

$$A \ni x \xrightarrow{\sigma} y \in B \quad \text{καί διαβάζομε:}$$

«Στό  $x$  τοῦ  $A$  ἀντιστοιχίζεται, μέσω τῆς  $\sigma$ , τό  $y$  τοῦ  $B$ ». Τά σύμβολα  $x$  καί  $y$ , πού παίρνουν τιμές μέσα στά σύνολα  $A$  καί  $B$  ἀντίστοιχα, πού ἀντιπροσωπεύουν δηλαδή διάφορα στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων, λέγονται **μεταβλητές**· καί τό  $x$  λέγεται εἰδικότερα **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ἐνῶ τό  $y$  λέγεται **ἐξαρτημένη μεταβλητή**.

**Θά θεωρήσωμε τώρα καί τό σύνολο**

$S = \{(\alpha, 1), (\beta, 2), (\gamma, 2), (\alpha, 3), (\beta, 3), (\gamma, 3), (\delta, 3), (\delta, 5)\}$ , δηλαδή τό σύνολο τῶν ζευγῶν πού παράγονται ἀπό τά ζεύγη καί μόνο τοῦ παραπάνω συνόλου  $R$  μέ ἐναλλαγή τῶν στοιχείων τους.

Ἐνῶ τό σύνολο  $R$  εἶναι ἓνα ὑποσύνολο τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου  $A \times B$ , τό σύνολο  $S$  εἶναι ὑποσύνολο τοῦ γινομένου  $B \times A$ .

Ἡ σχέση πού δίνεται ἀπό τό σύνολο  $S$ , καί ἡ ὅποια εἶναι μιά σχέση ἀπό τό σύνολο  $B$  (πρῶτο σύνολο) πρὸς τό σύνολο  $A$  (δεύτερο σύνολο), λέγεται **ἀντίστροφη** ἐκείνης πού δίνεται ἀπό τό σύνολο  $R$ .

Δηλαδή: **Δύο σχέσεις πού δίνονται ἀπό τά σύνολα διατεταγμένων ζευγῶν  $R$  καί  $S$  λέγονται ἀντίστροφες ὅταν καί μόνο ὅταν τά ζεύγη τῆς μιᾶς προκύπτουν μέ ἀντιμετάθεση τῶν στοιχείων τῶν ζευγῶν τῆς ἄλλης.**

Ἄν τό σύνολο  $R$  παριστάνει τήν πρώτη σχέση, τότε τό σύνολο  $S$  τῆς ἀντίστροφης σχέσεως συνηθίζομε νά τό σημειώνομε μέ τό συμβολισμό  $R^{-1}$ , πού θυμίζει τό συμβολισμό μέ τόν ὅποιο στήν Ἀριθμητική σημειώνομε τόν ἀντίστροφο ἑνός μή μηδενικοῦ ἀριθμοῦ.

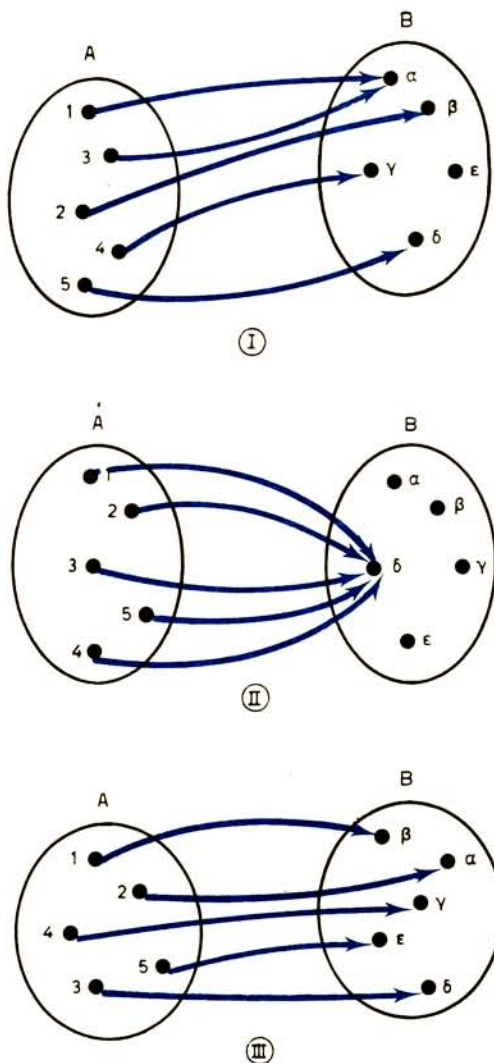
Εἶναι πολύ εὐκόλο, ἀλλά καί πολύ χρήσιμο, νά παρατηρήσωμε ὅτι: **πεδίο τιμῶν μιᾶς σχέσεως  $R$  εἶναι τό πεδίο ὀρισμοῦ τῆς ἀντίστροφῆς τῆς  $R^{-1}$  καί πεδίο ὀρισμοῦ τῆς  $R$  τό πεδίο τιμῶν τῆς  $R^{-1}$ .**

β) **Ὁρισμός τῆς συναρτήσεως**: Ὡς παρατηρήσωμε προσεκτικά τίς σχέσεις πού παριστάνουν τά γράφηματα τοῦ σχήματος 6.1β, Διαπιστώνομε ὅτι καί στίς τρεῖς περιπτώσεις πού εἰκονίζονται δέν ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ  $A$  στό ὅποιο ν’ ἀντιστοιχίζονται περισσότερα ἀπό ἓνα στοιχεῖα τοῦ  $B$ , πράγμα πού δέν συμβαίνει στό γράφημα τοῦ σχήματος 6.1α. Ἐκεῖ στό στοιχεῖο 2 τοῦ  $A$  ἀντι-



στοιχίζονται τό  $\beta$  και τό  $\gamma$  του  $B$  και στο 3 του  $A$  τά  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $\delta$  του  $B$ .

Τό κοινό γνώρισμα πού διακρίναμε στις σχέσεις πού εκφράζονται από τά γραφήματα του σχήματος 6.1β I, II και III κατατάσσει αυτές τις σχέσεις σέ μία ιδιαίτερη κατηγορία πολύ σημαντική και για τά Μαθηματικά και για τις εφαρμογές· οί σχέσεις αυτές λέγονται **συναρτήσεις**.



Σχ. 6.1β.

Δηλαδή: Μιά δυαδική σχέση, από ένα σύνολο  $A$  προς ένα σύνολο  $B$ , λέγεται **συνάρτηση** αν και μόνον αν σέ κάθε στοιχείο του  $A$  αντιστοιχίζεται ένα και μόνον ένα του  $B$ . (Τό σύνολο  $A$  είναι συγχρόνως και τό πεδίο ορίσμου της συναρτήσεως).

Μπορεί, σέ μία συνάρτηση, σέ δύο ή περισσότερα στοιχεῖα τοῦ πρώτου συνόλου νά ἀντιστοιχίζεται τό ἴδιο στοιχεῖο τοῦ δευτέρου συνόλου· αὐτό π.χ. συμβαίνει στό γράφημα τοῦ σχήματος 6.1β (I) γιά τά στοιχεῖα 1 καί 3 τοῦ A, τά ὁποῖα ἔχουν ἀντίστοιχο τό στοιχεῖο  $a \in B$ . Μπορεῖ ἀκόμα σέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ τῆς συναρτήσεως νά ἀντιστοιχίζεται τό ἴδιο στοιχεῖο τοῦ B· τότε λέμε ὅτι ἡ **συνάρτηση εἶναι σταθερή** [σχ. 6.1β (II)].

Γιά νά δηλώσουμε συμβολικά ὅτι ἔχομε μία συνάρτηση ἀπό ἕνα σύνολο A πρὸς ἕνα σύνολο B γράφουμε:

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \in B \quad \text{καὶ διαβάζουμε:}$$

«Στό x τοῦ A ἀντιστοιχίζεται, μέσω τῆς συναρτήσεως f, τό y τοῦ B». Συνηθίζουμε ὅμως, ὅταν μάλιστα εἶναι γνωστά ἀπὸ πρὶν τὰ σύνολα A καί B, νά χρησιμοποιοῦμε τὸν συντομότερο συμβολισμό:  $y = f(x)$ .

**Ἡ ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συναρτήσεως δέν εἶναι κατανάγκη συνάρτηση**· γιά νά συμβαίνει αὐτό πρέπει κάθε στοιχεῖο τοῦ δευτέρου συνόλου νά εἶναι ἀντίστοιχο ἑνὸς μόνο στοιχείου τοῦ πρώτου συνόλου. Ἔτσι ἀπὸ τίς συναρτήσεις ποῦ ἀπεικονίζονται στό σχῆμα 6.1β μόνο στὴν τρίτη συνάρτηση ἡ ἀντίστροφη σχέση εἶναι ἐπίσης συνάρτηση.

Ὅταν καί ἡ ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συναρτήσεως συμβαίνει νά εἶναι συνάρτηση, τότε αὐτή ἡ σχέση εἶναι μία **ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία\***.

Ἐπειδὴ στὰ παραπάνω παραδείγματα τὰ σύνολα A καί B ἦταν διαφορετικά, δέν πρέπει ν' ἀποκομίσουμε τὴν ἐντύπωση ὅτι ἀποκλείεται νά εἶναι καί ἴσα. Ὅρίζουμε δηλαδὴ καί σχέσεις, καί ἰδιαίτερα συναρτήσεις, μέσα σ' ἕνα καί τό ἴδιο σύνολο A. Δηλαδὴ συναρτήσεις ποῦ εἶναι ὀρισμένες μέσα σ' ἕνα σύνολο A καί ποῦ παίρνουν συγχρόνως τιμές ἀπὸ τό ἴδιο τό σύνολο A.

γ) **Πραγματικές συναρτήσεις.** Ἄν τό δεύτερο σύνολο μιᾶς συναρτήσεως, αὐτό δηλαδὴ ὅπου ἡ συνάρτηση παίρνει τίς τιμές της, εἶναι τό σύνολο  $\mathbb{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **πραγματική**. Ἄν ἐπιπλέον καί τό πρῶτο σύνολο εἶναι τό σύνολο  $\mathbb{R}$  ἢ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ  $\mathbb{R}$ , τότε μιᾶμε γιά **πραγματικὴ συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς**.

Μιά ἀκολουθία π.χ. πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μιᾶς πραγματικῆς συνάρτησης πραγματικῆς μεταβλητῆς μέ πρῶτο σύνολο καί πεδίο ὀρισμοῦ συγχρόνως τό σύνολο  $\mathbb{N}$  τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· διότι, ὅπως γνωρίζουμε, σέ μιάν ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, κάθε φυσικός ἀριθμός ἔχει ἀντίστοιχο ἕνα καί μόνον ἕνα πραγματικόν ἀριθμό.

Ἀπὸ δῶ καί πέρα θά ἀσχοληθοῦμε ἀποκλειστικά μέ πραγματικὲς συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καί ὅταν θά μιᾶμε γιά συνάρτηση θά ἐννοοῦμε πάντα μιᾶς συνάρτησης αὐτῆς τῆς κατηγορίας.

## 6.2 Πεδία ὀρισμοῦ καί τιμῶν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Θεωροῦμε μιᾶς σχέσης μέ πρῶτο σύνολο A (σύνολο ἀφετηρίας) τό σύνολο  $\mathbb{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί μέ δεύτερο σύνολο B (σύνολο καταλήξεως)

\*Δηλαδὴ μιᾶς ἀντιστοιχίας (μεταξύ τῶν στοιχείων δύο συνόλων A καί B) ὅπου οὔτε ἕνα στοιχεῖο τοῦ A συνδέεται μέ περισσότερα ἀπὸ ἕνα στοιχεῖα τοῦ B, οὔτε ἕνα τοῦ B μέ περισσότερα ἀπὸ ἕνα τοῦ A.

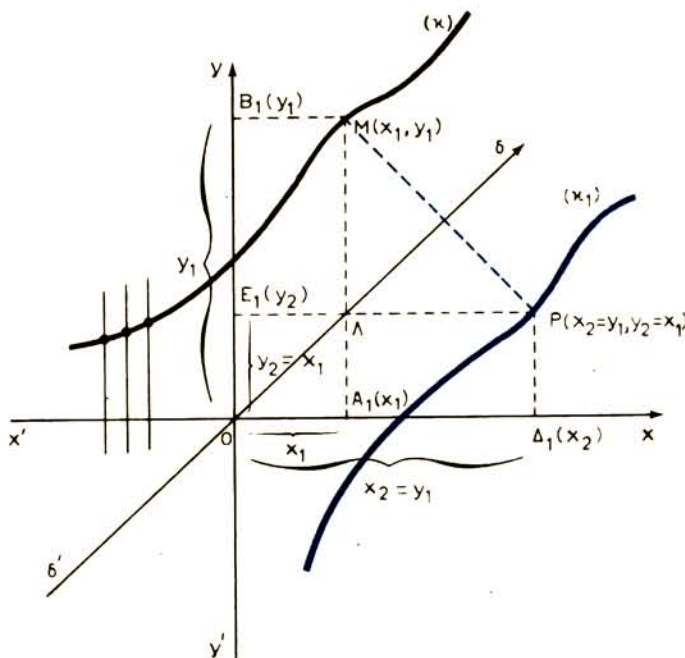
πάλι τό σύνολο  $\mathbf{R}$  τών πραγματικῶν· δηλαδή  $A = B = \mathbf{R}$ . Κάθε διατεταγμένο ζεύγος  $(x, y)$  αὐτῆς τῆς σχέσεως εἶναι τότε ἕνα ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν καί παριστάνεται, ὅπως γνωρίζουμε, στό ἐπίπεδο, μ' ἕνα σημεῖο.

Τό σύνολο τών παραστατικῶν σημείων μιᾶς τέτοιας σχέσεως εἶναι μία κατάλληλη ὀπτική παράσταση τῆς σχέσεως καί λέγεται, σ' αὐτήν εἰδικά τήν περίπτωση, **γραφική (ἢ γεωμετρική) παράσταση τῆς σχέσεως**.

Ὅταν εἰδικότερα ἡ σχέση μας εἶναι μιά συνάρτηση, τότε ἡ γραφική τῆς παράσταση ἢ θ' ἀποτελεῖται ἀπό μεμονωμένα σημεία (ὅπως π.χ. συμβαίνει γιά μιάν ἀκολουθία) ἢ καί ὄχι.

Πάντως κάθε εὐθεία παράλληλη πρὸς τόν ἄξονα  $y'y$  θά ἔχει ἕνα τό πολύ κοινό σημεῖο μέ τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (σχ. 6.2α).

Ὁ συνηθέστερος τρόπος μέ τόν ὁποῖο δίνουμε τό νόμο παραγωγῆς μιᾶς συναρτήσεως  $y$  τοῦ  $x$ , εἶναι ἡ κατασκευή μιᾶς ἀλγεβρικής παραστάσεως  $f(x)$  τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς  $x$ · καί τότε, ὅταν λέμε: «δίνεται ἡ συνάρτηση  $y = f(x)$ », ἐννοοῦμε ὅτι γράψαμε μιάν ἐξίσωση μεταξύ τῶν  $x$  καί  $y$ , τέτοια ὥστε ἡ τιμή πού παίρνει ἡ παράσταση  $f(x)$ , γιά μιά τιμή τοῦ  $x$  ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, νά εἶναι ἡ ἀντίστοιχη τιμή τοῦ  $y$ .



Σχ. 6.2α.

Εἶναι σημαντικό, σέ μιά τέτοια περίπτωση, νά προσδιορίζουμε, ὅταν δέν δίνεται ἐξαρχῆς, τό μέγιστο ἐπιτρεπόμενο πεδίο ὁρισμοῦ γιά κάθε τύπο συναρτήσεως. Αὐτό σημαίνει ὅτι καθορίζουμε γιά ποιές πραγματικές τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μετα-

βλητής ή παράσταση  $f(x)$  έχει νόημα αριθμού και μάλιστα πραγματικού.

Έκείνες οι πραγματικές τιμές του  $x$ , για τις οποίες συμβαίνει ή παράσταση  $f(x)$  να μην έχει νόημα ή να μην παίρνει πραγματικές τιμές, αποκλείονται, και μέγιστο πεδίο ορισμού της συναρτήσεώς μας είναι ή ένωση των διαστημάτων που απομένουν για τις τιμές του  $x$ .

\*Ας πάρουμε για παράδειγμα τή συνάρτηση που δίνεται από τον άλγεβρικό

$$\text{τύπο: } y = \frac{(x-5)\sqrt{4x-16}}{x^2-12x+35} \cdot \text{αυτός γράφεται επίσης: } y = \frac{(x-5)\sqrt{4(x-4)}}{(x-5)(x-7)}.$$

Η  $\sqrt{4(x-4)} = 2\sqrt{x-4}$  είναι πραγματικός αριθμός εφόσον  $x-4 \geq 0$ , δηλαδή για  $x \geq 4$ . Άρα από τό πεδίο ορισμού αποκλείεται τό διάστημα  $(-\infty, 4)$ .

Εξάλλου εξαιρούνται και οι τιμές  $x = 5$  και  $x = 7$ , διότι αυτές μηδενίζουν τόν παρονομαστή. Ωστε τελικά τό εύρύτερο πεδίο ορισμού της συναρτήσεώς μας είναι ή ένωση των διαστημάτων  $[4, 5) \cup (5, 7) \cup (7, +\infty)$ .

**Είναι σκόπιμο και πολλές φορές χρήσιμο** να καθορίζομε (αν μπορούμε) και τό πεδίο τιμών μιᾶς συναρτήσεως.

**Πρέπει να τονίσουμε σ' αυτή τή θέση ότι :** \*Αν σέ μιά σχέση με τό σύμβολο  $x$  δηλώνομε τά στοιχεία του πρώτου συνόλου  $A$  και με τό  $y$  τά στοιχεία του δευτέρου συνόλου  $B$  τότε, στήν αντίστροφη σχέση, με τό  $x$  θά δηλώσομε τίς τιμές από τό  $B$ , αφού τώρα πρώτο σύνολο είναι τό  $B$ , και με  $y$  τίς αντίστοιχες τιμές από τό  $A$ , αφού τό  $A$  είναι τώρα τό δεύτερο σύνολο.

\*Αν π.χ.  $(-1, 2), (0, 5), \left(\frac{4}{7}, \sqrt{3}\right)$  είναι μερικά διατεταγμένα ζεύγη μιᾶς σχέσεως  $R$ , τότε στήν αντίστροφη σχέση  $R^{-1}$  θά συναντήσομε αντίστοιχως τά ζεύγη  $(2, -1), (5, 0)$  και  $\left(\sqrt{3}, \frac{4}{7}\right)$ .

Και ενώ στήν αρχική σχέση παίρνομε τίς τιμές  $-1, 0$  και  $\frac{4}{7}$  πάνω στόν

ἄξονα  $x'x$  και αντίστοιχα τίς τιμές  $2, 5, \sqrt{3}$  πάνω στόν ἄξονα  $y'y$ , όταν θέλομε να προσδιορίσομε τά παραστατικά σημεία των προηγούμενων ζευγών, για να τοποθετήσομε τά παραστατικά σημεία τῆς αντίστροφης σχέσεως  $R^{-1}$  θά πάρουμε τίς τιμές  $2, 5$  και  $\sqrt{3}$  πάνω στόν ἄξονα  $x'x$  και αντίστοιχα τίς τιμές  $-1, 0, \frac{4}{7}$  πάνω στόν ἄξονα  $y'y$ .

\*Υστερα από τά προηγούμενα προκύπτουν δύο σημαντικά συμπεράσματα :

I) \*Αν  $y = f(x)$  είναι ή εξίσωση μιᾶς σχέσεως  $R$  μεταξύ των πραγματικῶν μεταβλητῶν  $x$  και  $y$ , τότε βρίσκομε τήν εξίσωση τῆς αντίστροφης σχέσεως  $R^{-1}$  ἂν ἐναλλάξομε, μέσα στήν εξίσωση τῆς  $R$ , τά γράμματα  $x$  και  $y$  δηλαδή ή  $R^{-1}$  ἐκφράζεται με τήν εξίσωση  $x = f(y)$ .

II) Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντιστρόφων σχέσεων (συναρτήσεων) εἰ-

ναι σχήματα συμμετρικά ως προς την εὐθεία, πού διχοτομεί τήν πρώτη καί τρίτη γωνία τῶν ἀξόνων.

**Πράγματι :** Ἄν  $M_1(x_1, y_1)$  εἶναι ἓνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως ( $\kappa$ ) (σχ. 6.2α) μιᾶς συναρτήσεως  $y = f(x)$ , τότε θά ὑπάρχει στή γραφική παράσταση ( $\kappa_1$ ) τῆς ἀντίστροφης σχέσεως  $x = f(y)$  τό σημεῖο  $P(x_2 = y_1, y_2 = x_1)$ , δηλαδή τό σημεῖο πού ἔχει ὡς τετμημένη τήν τεταγμένη τοῦ  $M$  καί ὡς τεταγμένη τήν τετμημένη τοῦ  $M$ . Δέν εἶναι δύσκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι τά σημεία  $M$  καί  $P$  εἶναι δύο σημεία συμμετρικά ὡς πρὸς τή διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν  $\widehat{xOy}$  καί  $\widehat{x'O'y'}$ .

**Τήν ἀντίστροφη σχέση** μιᾶς συναρτήσεως  $y = f(x)$ , ὅταν ἡ σχέση εἶναι συνάρτηση, τή συμβολίζομε συνήθως μέ  $y = f^{-1}(x)$ .

Θά ἐφαρμόσουμε τά προηγούμενα σέ δύο ἀπλά παραδείγματα.

**Παράδειγμα 1.** Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο  $y = 5x - 7$ . Ποιός τύπος δίνει τήν ἀντίστροφη σχέση; Εἶναι ἡ ἀντίστροφη σχέση συνάρτηση; Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῶν σχέσεων.

Ἡ παράσταση  $5x - 7$ , πού εἶναι ἓνα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο τοῦ  $x$ , μάς δίνει μιᾶς συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό σύνολο  $\mathbb{R}$ , διότι  $\forall x \in \mathbb{R}$  τό πολυώνυμο  $5x - 7$  παίρνει μιᾶ καί μόνο μιᾶ πραγματική τιμή. Ἡ ἀντίστροφη σχέση δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση  $x = 5y - 7$ , ἄρα τήν  $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$  πού ὀρίζει ἐπίσης συνάρτηση. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως εἶναι τό σύνολο  $\mathbb{R}$  πού εἶναι πεδίο τιμῶν τῆς ἀρχικῆς.

Ὅπως ξέρομε, οἱ δύο παραπάνω ἐξισώσεις παριστάνουν εὐθεῖες· ἐδῶ λέμε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν δύο αὐτῶν ἀντιστρόφων **γραμμικῶν συναρτήσεων** εἶναι δύο εὐθεῖες συμμετρικές ὡς πρὸς τή διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν  $\widehat{xOy}$  καί  $\widehat{x'O'y'}$ . (Νά γίνεи τό σχῆμα).

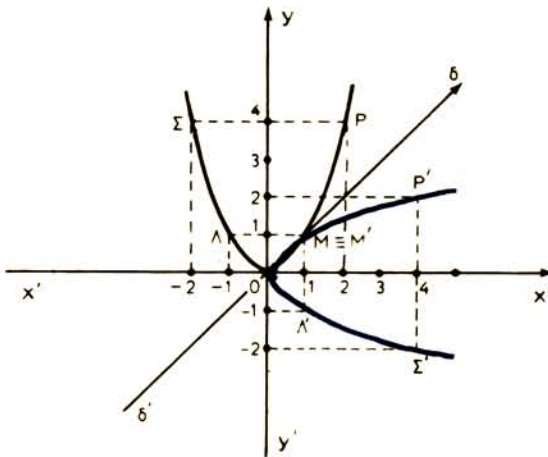
**Παράδειγμα 2.** Δίνεται ἡ ἐξίσωση  $y = x^2$  μέ  $x \in \mathbb{R}$ .

Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῆς σχέσεως πού προκύπτει μεταξύ  $x$  καί  $y$  καί νά γίνεи ἡ γραφική παράσταση αὐτῆς καθώς καί τῆς ἀντίστροφης σχέσεως.

Ἡ σχέση εἶναι προφανῶς συνάρτηση, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο  $\mathbb{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διότι τό μονώνυμο  $x^2$  παίρνει, γιά κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , μιᾶ καί μόνο μιᾶ πραγματική τιμή.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς  $y = x^2$  εἶναι ἡ καμπύλη ΣΛΟΜΡ (σχ. 6.2β) ὅπου  $\Sigma(-2, 4)$ ,  $\Lambda(-1, 1)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $M(1, 1)$  καί  $P(2, 4)$  εἶναι μερικά παραστατικά σημεία τῆς γραφικῆς παραστάσεως. Ἡ ἀντίστροφη σχέση δίνεται ἀπό τήν ἐξί-

σωση  $x = y^2$ · ή εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με τό ζεύγος τῶν εξισώσεων  $y = \sqrt{x}$  καί  $y = -\sqrt{x}$ . Ἐτσι βλέπομε ὅτι ἡ ἀντίστροφη σχέση δέν εἶναι συνάρτηση, διότι σέ μιά θετική τιμή τοῦ  $x$  ἀντιστοιχίζονται δυό ἀντίθετες τιμές τοῦ  $y$ . Π.χ. γιά  $x = 4$  παίρνομε  $y = 2$  καί  $y = -2$ . Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως  $y = \pm \sqrt{x}$  εἶναι τό σύνολο τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ( $x \geq 0$ )· ἄρα αὐτό εἶναι τό πεδίο τιμῶν τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως  $y = x^2$  ( $y \geq 0$ ). Ἐνῶ ἡ εξίσωση  $x = y^2$  δέν ὁρίζει συνάρτηση  $y$  τοῦ  $x$ , ἡ καθεμιά χωριστά ἀπό τίς εξισώσεις  $y = \sqrt{x}$  καί  $y = -\sqrt{x}$  ὁρίζει συνάρτηση μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο  $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ · ἡ μία ἔχει πεδίο τιμῶν τό σύνολο τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν καί ἡ ἄλλη τῶν ὄχι θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 6.2β.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς μιᾶς εἶναι τό τόξο  $OMP'$ , συμμετρικό τοῦ  $OMP$  ( $M \equiv M'$ ) ὡς πρὸς τὴν διχοτόμο  $\delta'$  τῆς  $\widehat{xOy}$ , καί ἡ γραφική παράσταση τῆς ἄλλης εἶναι τό τόξο  $OL\Sigma'$ , συμμετρικό τοῦ τόξου  $OL\Sigma$ . Ἡ καμπύλη  $P'MOL\Sigma'$  εἶναι συμμετρική τῆς  $\Sigma LOMP$  ὡς πρὸς τὴν εὐθεία  $\delta'$ . Λέμε ἐπίσης ὅτι ἡ καμπύλη  $\Sigma LOMP$  ἔχει εξίσωση τὴν  $y = x^2$  καί ἡ  $P'MOL\Sigma'$  τὴν  $x = y^2$ .

### 6.3 Μονοτονία συναρτήσεων. Ἀκρότατα.

α) **Αὐξουσες καί φθίνουσες συναρτήσεις.** Ὡς θεωρήσομε μιά συνάρτηση  $f(x)$  ὁρισμένη τουλάχιστο μέσα σ' ἓνα διάστημα  $\Delta = [\alpha, \beta]$ . Ἄν, γιά δυό ὅποιεςδήποτε διαφορετικές τιμές  $x_1, x_2$  τοῦ  $\Delta$  μέ  $x_1 < x_2$  ἔχομε  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , τότε ἡ συνάρτηση  $f(x)$  λέγεται **αὐξουσα** μέσα στό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ · ἂν εἰδικότερα μέ  $x_1 < x_2$  εἶναι  $f(x_1) < f(x_2)$ , ἡ συνάρτηση λέγεται **γνησίως αὐξουσα**.

Ὅμοια, ὅταν μέ  $x_1 < x_2$  ἔχομε  $f(x_1) > f(x_2)$ , τότε ἡ συνάρτηση  $f(x)$  λέγεται **φθίνουσα**· καί ἐφόσον  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ , ἡ  $f(x)$  λέγεται **γνησίως φθίνουσα**.



Μιά συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται **μονότονος**. Μιά συνάρτηση είναι **συγχρόνως αύξουσα και φθίνουσα** αν και **μόνον** αν είναι σταθερά (γιατί:).

**Βασική εφαρμογή:** Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $y = ax + \beta$  είναι γνησίως αύξουσα αν  $a > 0$  και γνησίως φθίνουσα αν  $a < 0$ , σ' όλο το πεδίο των πραγματικών αριθμών (τό πεδίο ορισμού της).

I) Μέ  $a > 0$ ,  $x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \implies ax_1 + \beta < ax_2 + \beta$ , δηλαδή  $y_1 < y_2$ . Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

II) Μέ  $a < 0$ ,  $x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \implies ax_1 + \beta > ax_2 + \beta$ , δηλαδή  $y_1 > y_2$ . Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

**Ένα σημαντικό θεώρημα.** "Αν μία συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) με πεδίο ορισμού ένα σύνολο πραγματικών αριθμών  $\Delta$  και πεδίο τιμών ένα σύνολο  $E$  επίσης πραγματικών αριθμών, τότε η αντίστροφη σχέση  $f^{-1}(x)$  είναι επίσης συνάρτηση και είναι και αυτή αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) με πεδίο ορισμού τό  $E$  και πεδίο τιμών τό  $\Delta$ .

**Απόδειξη:** Έπειδή μέ  $x_1 < x_2$  έχουμε πάντα (στήν προκείμενη περίπτωση)  $f(x_1) < f(x_2)$  [αντίστοιχα  $f(x_1) > f(x_2)$ ] παρατηρούμε ότι σέ δυό διαφορετικές τιμές του  $x$  αντιστοιχίζονται δυό διαφορετικές τιμές του  $y = f(x)$ . δηλαδή δέν υπάρχει τιμή του  $y$  (στοιχείο του  $E$ ) που νά είναι αντίστοιχη δυό ή περισσοτέρων τιμών του  $x$  (στοιχείων του  $\Delta$ ). Αυτό σημαίνει ότι η αντιστοιχία μεταξύ των  $x$  και  $y$  είναι **άμφιμονοσήμαντη**. Καί όταν μία αντιστοιχία είναι άμφιμονοσήμαντη, τότε καί η αντίστροφη σχέση μιās συναρτήσεως είναι πάλι συνάρτηση. "Όταν στίς τιμές  $x_1 < x_2$  αντιστοιχίζονται μέσω της  $f(x)$  τιμές  $y_1 < y_2$  (αντίστοιχα  $y_1 > y_2$ ), τότε αντίστροφα σέ τιμές  $y_1 < y_2$  (ή  $y_1 > y_2$ ) θά αντιστοιχίζονται διά της  $f^{-1}(x)$  τιμές  $x_1 < x_2$ . Δηλαδή τό είδος της μονοτονίας (αύξουσα - φθίνουσα) της άρχικής συναρτήσεως διατηρείται καί στήν αντίστροφη.

**β) Μέγιστα καί ελάχιστα συναρτήσεων:** "Ας θεωρήσουμε τή συνάρτηση  $y = -2x^2 + 5$  που έχει πεδίο ορισμού τό  $\mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι  $-2x^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  καί επομένως  $-2x^2 + 5 \leq 5$ . "Η τιμή όμως 5 είναι αυτή, που αντιστοιχίζεται στήν τιμή  $x = 0$ , δηλαδή  $5 = f(0)$ . "Ωστε  $5 = f(0) \geq -2x^2 + 5 \forall x \in \mathbb{R}$ . "Η τιμή λοιπόν  $5 = f(0)$  είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί νά πάρει η συνάρτηση καί αυτό συμβαίνει για  $x = 0$ . Γι' αυτό λέμε ότι: **"Η συνάρτηση  $-2x^2 + 5$  παρουσιάζει μέγιστο στό σημείο  $0$ · ή τιμή  $f(0)$  καλείται μέγιστη τιμή της συναρτήσεως  $f(x)$ .**

"Αν θεωρήσουμε τή συνάρτηση  $y = 2x^2 + 5$ , τότε έχουμε  $5 = f(0) \leq 2x^2 + 5 \forall x \in \mathbb{R}$ . "Αρα η τιμή τώρα  $f(0)$  είναι η μικρότερη τιμή που παίρνει η συνάρτηση. Γι' αυτό λέμε ότι: **"Η συνάρτηση  $2x^2 + 5$  παρουσιάζει ελάχιστο στό σημείο  $0$ · ή τιμή  $f(0)$  καλείται ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως  $f(x)$ .**

**Γενικά:** Λέμε ότι μία συνάρτηση  $f(x)$ , όρισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , παρουσιάζει **όλικό μέγιστο** σ' ένα σημείο  $x_0$  του  $\Delta$ , αν και **μόνον** αν είναι  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in \Delta$ .

**Επίσης** λέμε ότι μία συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει **όλικό ελάχιστο** σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $\Delta$ , αν και **μόνον** αν είναι  $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in \Delta$ .

Τήν τιμή  $f(x_0)$  ονομάζουμε αντίστοιχα **μεγίστη** ή **ελαχίστη** τιμή της συναρτήσεως  $f(x)$ .

\*Αν για ένα σημείο  $\rho$  ενός διαστήματος ( $\alpha < x < \beta$ ), πού περιέχεται στο πεδίο ορισμού μιᾶς συναρτήσεως, συμβαίνει νά ἔχομε  $f(x) \leq f(\rho)$  (ἀντίστοιχα  $f(x) \geq f(\rho) \forall x \in (\alpha, \beta)$ ), τότε λέμε ὅτι ἡ  $f(x)$  **παρουσιάζει τοπικό μέγιστο** (ἀντίστοιχα **τοπικό ἐλάχιστο**) στό σημείο  $\rho$ .

Τά τοπικά μέγιστα καί ἐλάχιστα μιᾶς συναρτήσεως τά ονομάζουμε μαζί (τοπικά) **ἀκρότατα**.

#### 6.4 Μελέτη καί γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως.

Ἡ μονοτονία καί τό ὁριστικό θέμα τῶν ἀκροτάτων, ἄν ὑπάρχουν, εἶναι ἀπό τά πιά σημαντικά γνωρίσματα μιᾶς συναρτήσεως καί γι' αὐτό σ' αὐτά ἀναφέρονται τά πρῶτα ἐρωτήματα πού θέτομε ὅταν μελετᾶμε μιά συνάρτηση. Ὡς σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἀπάντηση σ' αὐτά δίνει χρήσιμες πληροφορίες γιά νά ἐπιτύχομε τή σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως, πού εἶναι τό ἀναγκαῖο συμπλήρωμα τῆς ὅλης σπουδῆς τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως.

Ἡ γραφική παράσταση πέρα ἀπό τό ὅτι δίνει μιά συνοπτική εἰκόνα τῶν ιδιοτήτων καί τῶν ιδιαιτέρων χαρακτηριστικῶν μιᾶς συναρτήσεως, μπορεῖ νά εἶναι ἡ ἀφετηρία γιά τήν ἐξαγωγή ἀξιολόγων συμπερασμάτων, κυρίως ὅταν ἀποτελεῖ τήν ἐποπτική ἔκφραση τῆς ἀλληλεπιδράσεως δύο φυσικῶν μεταβλητῶν μεγεθῶν.

Οἱ γνώσεις πού μέχρι τώρα διαθέτομε μᾶς ἐπιτρέπουν νά διατυπώσομε τοὺς ἀκόλουθους κανόνες γιά τή μελέτη καί τή σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς δοσμένης συναρτήσεως  $y = f(x)$ .

I) Καθορίζουμε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως καί, ἂν μᾶς εἶναι βολικό, καί τό πεδίο τιμῶν.

II) Προσδιορίζουμε ἐκεῖνα τά διαστήματα, μέσα στό πεδίο ὁρισμοῦ, στά ὁποῖα ἡ συνάρτηση εἶναι αὐξουσα καί ἐκεῖνα στά ὁποῖα εἶναι φθίνουσα.

III) Βρίσκομε τά τοπικά ἀκρότατα. Εἶναι τά σημεία ἐκεῖνα σέ μιά περιοχή\* τῶν ὁποίων ἀλλάζει τό εἶδος τῆς μονοτονίας. Ὡς π.χ. ἀριστερά μιᾶς τιμῆς  $x_0$  τοῦ  $x$  ( $x < x_0$ ) ἡ συνάρτηση εἶναι αὐξουσα καί δεξιὰ ( $x > x_0$ ) εἶναι φθίνουσα, τότε στή θέση  $x_0$  ἔχομε τοπικό μέγιστο· ἂν ἀντίθετα ἀριστερά τοῦ  $x_0$  ἡ συνάρτηση εἶναι φθίνουσα καί δεξιὰ τοῦ  $x_0$  αὐξουσα, τότε στή θέση  $x_0$  ἔχομε τοπικό ἐλάχιστο.

IV) Προσδιορίζουμε (ἂν μποροῦμε) τίς πραγματικές τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς  $x$  πού μηδενίζουν τήν παράσταση  $f(x)$ . Ἔτσι καθορίζουμε τά σημεία, στά ὁποῖα ἡ γραφική παράσταση τέμνει τόν ἄξονα  $x'$ .

Ἡ τιμή  $f(0)$  εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου, στό ὁποῖο ἡ συνάρτηση τέμνει τόν ἄξονα  $y'$ .

V) Τοποθετοῦμε στό σχέδιό μας ὅλα τά σημεία πού ἔχομε προσδιορίσει, δηλαδή τά ἀκρότατα καί τά σημεία τομῆς τῆς γραφικῆς μέ τοὺς ἄξονες (ἂν καί

\*Περιοχή μέ κέντρο  $a$  ονομάζουμε κάθε ἀνοικτό διάστημα τῆς μορφῆς  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ .



ὅσα υπάρχουν). Ἀκολουθῶς δίνοντας μερικές ἀκόμα τιμές στή μεταβλητή  $x$ , μέ προσωπική ἐκτίμηση, βρίσκομε κι ἄλλα σημεία τῆς γραφικῆς παραστάσεως καί μετά προβαίνομε στή σχεδιάσή της.

**Παρατήρηση:** Ὅταν ἔχομε προσδιορίσει τό πεδίο τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως, εἶναι συχνά πολύ εὐκόλο νά διακρίνομε τά τοπικά τῆς ἀκρότατα.

**Σημείωση:** Μποροῦμε τίς διάφορες πραγματικές συναρτήσεις, πού δίνονται μέσω «ἀλγεβρικῶν τύπων», νά τίς κατατάξομε σέ κατηγορίες, σύμφωνα μέ τά εἰδικά χαρακτηριστικά πού ἐμφανίζουν. Ἡ ἀναγνώριση τῆς κατηγορίας στήν ὁποία ὑπάγεται μιᾶ συνάρτηση μᾶς διευκολύνει πολλές φορές στή μεθόδευση τῆς μελέτης. Θά ἀναφέρομε ἐδῶ τά σημαντικότερα γιά μᾶς εἶδη συναρτήσεων.

**I) Πολυωνυμική συνάρτηση:** Εἶναι κάθε συνάρτηση τῆς μορφῆς:  
 $y = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$ , ὅπου  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  ὁρισμένοι πραγματικοί ἀριθμοί καί  $n, n-1, \dots$  φυσικοί.

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση μπορεῖ νά ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ὅλο τό σύνολο  $\mathbb{R}$  - μπορεῖ νά εἶναι ὁρισμένη παντοῦ μέσα στό  $\mathbb{R}$  - (γιατί;).

**II) Ρητή συνάρτηση:** Εἶναι κάθε συνάρτηση τῆς μορφῆς  $y = \frac{\Pi(x)}{P(x)}$ , ὅπου  $\Pi(x)$  καί  $P(x)$  πολυώνυμα μέ πραγματικούς συντελεστές. Μιά ρητή συνάρτηση μπορεῖ νά εἶναι ὁρισμένη σ' ὅλο τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ ἐξαίρεση ἐκεῖνων τῶν τιμῶν πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή (γιατί;).

**III) Ἄρτια συνάρτηση:** Ἔτσι ὀνομάζεται μιᾶ συνάρτηση  $y = f(x)$  πού παίρνει τήν ἴδια τιμή γιά ἀντίθετες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. Οἱ συναρτήσεις π.χ.  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 2x^4 + x^2 + 1$  εἶναι ἄρτιες (γιατί;). Ὅταν ἔχομε μελετήσει μιᾶ ἄρτια συνάρτηση γιά τίς θετικές π.χ. τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς, τότε γνωρίζομε τί ἰσχύει καί γιά τίς ἀρνητικές τιμές τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς.

**IV) Περιττή συνάρτηση:** Ἔτσι ὀνομάζεται μιᾶ συνάρτηση πού παίρνει ἀντίθετες τιμές γιά ἀντίθετες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. Ἡ συνάρτηση π.χ.  $y = x^3 + x$  εἶναι μιᾶ περιττή συνάρτηση, διότι:

$$(-x_0)^3 + (-x_0) = -x_0^3 - x_0 = -(x_0^3 + x_0).$$

## 6.5 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῆς συναρτήσεως μέ τύπο

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Ἐπειδὴ τό πολυώνυμο  $x^2 + 1$  δέν μηδενίζεται γιά καμμιά πραγματική τιμή τοῦ  $x$ , ἔπεται ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι τό  $\mathbb{R}$ .

Ἐπιλύομε τήν παραπάνω ἐξίσωση ὡς πρός  $x$  καί παίρνομε:

$$2x = yx^2 + y \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0 \quad (1).$$

Οι τιμές του  $x$  προκύπτουν από τον τύπο:  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - y^2}}{y}$  (2) (μέ  $y \neq 0$ )· είναι

δηλαδή οι λύσεις της δευτεροβάθμιας ως προς  $x$  εξίσωσης (1).

Πρέπει όμως η μεταβλητή  $y$  να παίρνει τέτοιες πραγματικές τιμές ώστε ο τύπος (2) να μας δίνει πραγματικές τιμές και για τό  $x$ : άρα πρέπει να έχουμε:  $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$ . Για  $y = 0$  από την (1) παίρνουμε  $x = 0$ . "Ωστε τό πεδίο τιμών της συναρτήσεως είναι τό κλειστό διάστημα  $[-1, 1]$ . Μπορούμε συνακόλουθα νά πούμε ότι ή τιμή  $-1$  είναι ή ελάχιστη και ή  $+1$  ή μεγίστη τιμή της συναρτήσεως.

2. Θεωρούμε τή συνάρτηση πού δίνεται από τήν εξίσωση  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}$ .

I) Νά βρεθεί τό πεδίο ορισμού της. II) Νά καθορισθοούν, αν υπάρχουν, τά τοπικά άκρότατα.

I) 'Επειδή είναι  $x^2 - 1 = 0$  για  $x = -1$  ή  $x = 1$  συμπεραίνουμε ότι τό πεδίο ορισμού είναι τό σύνολο  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

II) Παίρνουμε τήν εξίσωση:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1} = y$$

και τήν επιλύουμε ως προς  $x$ . 'Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη μέ τή  $x^2 + 2x + 3 = yx^2 - y$  ή τήν  $(1 - y)x^2 + 2x + y + 3 = 0$ , ή όποία έχει ως προς  $x$  ρίζες πραγματικές, αν ή διακρίνουσα  $\Delta = 4 - 4(1 - y)(y + 3) \geq 0$  ή  $y^2 + 2y - 2 \geq 0$ .

'Η τελευταία άνίσωση άληθεύει αν  $y \leq -1 - \sqrt{3}$  ή  $y \geq -1 + \sqrt{3}$ . "Αρα τό πεδίο τιμών της συναρτήσεως είναι ή ένωση τών διαστημάτων  $(-\infty, -1 - \sqrt{3}]$  και  $[-1 + \sqrt{3}, +\infty)$ . 'Επομένως ή τιμή  $y_1 = -1 - \sqrt{3}$  είναι τοπικό μέγιστο, ένώ ή τιμή  $y_2 = -1 + \sqrt{3}$  τοπικό ελάχιστο.

3. Νά γίνει ή μελέτη και ή γραφική παράσταση τών συναρτήσεων: I)  $y = 10^x$  και II)  $y = \log x$ .

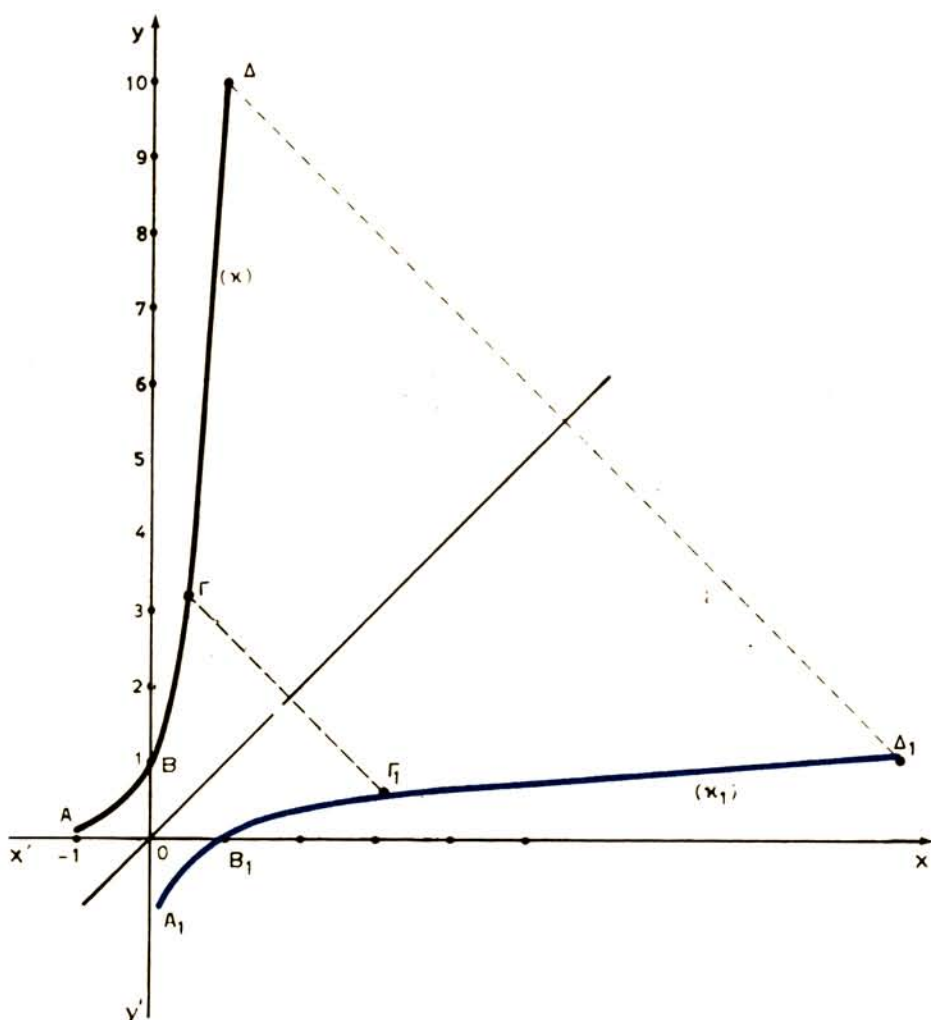
I) 'Η συνάρτηση  $y = 10^x$ , ή όποία λέγεται **έκθετική συνάρτηση**, έχει πεδίο ορισμού όλόκληρο τό σύνολο  $\mathbb{R}$ .

"Εχομε  $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 1 \leq 10^{x_1} < 10^{x_2}$ ,  $x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \geq 0 \Rightarrow 10^{-x_1} > 10^{-x_2} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{10^{x_1}} > \frac{1}{10^{x_2}} \geq 1 \Rightarrow 10^{x_1} < 10^{x_2} \leq 1$  και  $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 10^{x_1} < 1 < 10^{x_2}$ . "Αρα ή συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο τό πεδίο ορισμού της. Παρατηρούμε επιπλέον ότι: όταν τό  $x$  αύξάνει άπερίοριστα και τείνει, όπως λέμε, προς τό  $+\infty$ , τότε και τό  $y$  τείνει στο  $+\infty$ · ένώ, όταν τό  $x$  τείνει στο  $-\infty$ , τό  $y = \frac{1}{10^{-x}}$  τείνει στο 0. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι πεδίο τιμών της συναρτή-

σεως είναι τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

|                                                     |     |         |        |   |             |    |     |
|-----------------------------------------------------|-----|---------|--------|---|-------------|----|-----|
| Μερικά ζεύγη ἀντιστοι-<br>χων τιμῶν τῶν $x$ καί $y$ | $x$ | -2      | -1     | 0 | $1/2$       | 1  | 2   |
|                                                     | $y$ | $1/100$ | $1/10$ | 1 | $\sqrt{10}$ | 10 | 100 |

Κατασκευάζομε τόν παραπάνω πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν  $x$  καί  $y$  καί, ὡς πρὸς ἓνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, σημειώνομε μερικά σημεία ὅπως τὰ  $A \left(-1, \frac{1}{10}\right)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $\Gamma \left(\frac{1}{2}, \sqrt{10}\right)$  καί  $\Delta(1, 10)$  καί μέ τή βοήθεια αὐτῶν τῶν σημείων σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (σχ. 6.5).



Σχ. 6.5.

Από τον πίνακα των αντιστοιχών τιμών αλλά και από τη γραφική παράσταση βλέπουμε πόσο «γρήγορα κατεβαίνουν» οι τιμές της  $y$  προς το μηδέν, όταν η  $x$  παίρνει ολοένα μικρότερες αρνητικές τιμές και αντίθετα πόσο «γρήγορα ανεβαίνουν» προς το  $+\infty$  όταν η  $x$  παίρνει ολοένα μεγαλύτερες θετικές τιμές. Παρατηρούμε ότι, όταν το σημείο  $A$  της καμπύλης με εξίσωση  $y = 10^x$  (σχ. 6·5) μετατοπίζεται προς τ' αριστερά, η απόστασή του από την ευθεία  $x'x$  γίνεται όλο και μικρότερη και τείνει στο μηδέν.

Εκφράζουμε αυτή την ιδιότητα λέγοντας ότι η καμπύλη ( $\kappa$ ) έχει ασύμπτωτη την ευθεία  $x'x$ .

Γενικά λέμε ότι, ένας άπεριόριστος κλάδος επίπεδης γραμμής έχει ασύμπτωτη μιά ευθεία ( $\varepsilon$ ) του επιπέδου, αν η απόσταση από την ( $\varepsilon$ ) ενός σημείου που διαγράφει τον άπεριόριστο κλάδο έχει όριο το μηδέν. Π.χ. ο άπεριόριστος κλάδος  $y = \frac{1}{x}$

γιά  $0 < x \leq 1$  της γραμμής με εξίσωση  $y = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ), έχει ασύμπτωτη την

ευθεία  $x = 0$  (τόν άξονα  $y'y$ ) και ο άπεριόριστος κλάδος  $y = x + \frac{1}{x}$  γιά

$1 \leq x < +\infty$  της γραμμής με εξίσωση  $y = x + \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ), έχει ασύμπτωτη την

ευθεία  $y = x$  (διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{xOy}$ ).

**II) 'Η συνάρτηση που προκύπτει όταν σέ κάθε  $x > 0$  αντιστοιχίσουμε τό  $\log_{10}x$  (ό οποίος είναι μοναδικός) λέγεται λογαριθμική συνάρτηση και είναι αντίστροφη της έκθετικής μέ τύπο  $y = 10^x$ , έπειδή:**

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10}y$$

'Η λογαριθμική συνάρτηση έχει πεδίο όρισμού τό σύνολο  $\mathbb{R}^+$  (τό πεδίο τιμών της  $y = 10^x$ ) και πεδίο τιμών τό σύνολο  $\mathbb{R}$  (τό πεδίο όρισμού της  $y = 10^x$ ). Είναι και αυτή, όπως και η έκθετική, γνησίως αύξουσα σέ όλο τό πεδίο όρισμού της. 'Η γραφική παράσταση της συναρτήσεώς μας είναι η γραμμή  $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ , συμμετρική της  $AB\Gamma\Delta$  ως προς την ευθεία μέ εξίσωση  $y = x$  (τή διχοτόμο δηλαδή των γωνιών  $\widehat{xOy}$  και  $\widehat{x'O'y'}$ ). Παρατηρούμε επίσης ότι ο κλάδος  $y = \log x$  γιά  $0 < x \leq 1$  της καμπύλης ( $\kappa_1$ ), έχει ασύμπτωτη την ευθεία  $y'y$ .

**4. "Αν  $x$  και  $\omega$  δύο μεταβλητές μέ  $x \geq 0$  και  $\omega \geq 0$  και  $x + \omega = a$ , όπου  $a$  σταθερά  $> 0$ , ν' αποδειχθεί ότι: «τό γινόμενο  $x\omega$  γίνεται μέγιστο, όταν  $x = \omega = \frac{a}{2}$ ».**

"Αν θέσουμε  $y = x\omega$  και αντικαταστήσουμε τό  $\omega$  μέ  $a - x$  (λόγω της  $x + \omega = a$ ) έχομε τή συνάρτηση  $y = x(a - x) = -x^2 + ax$  (1) μέ πεδίο όρισμού τό διάστημα  $0 \leq x \leq a$ . Βρίσκομε τό πεδίο τιμών της (1) αν την επιλύσομε ως

πρός  $x$  και απαιτήσουμε ή δευτεροβάθμια ως προς  $x$  εξίσωση  $x^2 - \alpha x + y = 0$  (2) να έχει πραγματικές λύσεις. Προς τούτο πρέπει και αρκεί να είναι  $\alpha^2 - 4y \geq 0$  (γιατί;)· δηλαδή  $y \leq \frac{\alpha^2}{4}$ .

Άρα τό πεδίο τιμών της (1) είναι τό διάστημα  $\left[0, \frac{\alpha^2}{4}\right]$  και ή μεγίστη τιμή της συναρτήσεως (του γινομένου  $x\omega$ ) είναι  $\frac{\alpha^2}{4}$ .

Γιά  $y = \frac{\alpha^2}{4}$  ή (2) έχει ίσες ρίζες, τίς  $x_1 = x_2 = \frac{\alpha}{2}$ .

Όστε μέ  $x = \omega = \frac{\alpha}{2}$  τό γινόμενο  $x\omega$  παίρνει τή μεγαλύτερη δυνατή τιμή, ίση μέ  $\frac{\alpha^2}{4}$ .

5. *Αν  $x$  και  $\omega$  δυό μεταβλητές μέ  $x > 0$  και  $\omega > 0$  και  $x\omega = \kappa^2$ , όπου  $\kappa$  όρισμένος θετικός αριθμός, ν' αποδειχθεί ότι: «Τό άθροισμα  $x + \omega$  γίνεται ελάχιστο όταν  $x = \omega = \kappa$ ».*

Θέτομε  $y = x + \omega$  όποτε, λόγω της  $x\omega = \kappa^2$ , έχουμε τή συνάρτηση  $y = x + \frac{\kappa^2}{x}$  (1). Πεδίο όρισμού της (1) είναι τό σύνολο των θετικών πραγματικών. Τό πεδίο τιμών τό βρίσκομε αν επιλύσομε τήν (1) ως προς  $x$ . Έχομε  $y = x + \frac{\kappa^2}{x} \iff x^2 - yx + \kappa^2 = 0$  (2). Απαιτούμε τώρα ή (2) να έχει ως προς  $x$  λύσεις πραγματικές. Προς τούτο πρέπει και αρκεί να είναι  $y^2 - 4\kappa^2 \geq 0$  (γιατί;) ή  $y^2 \geq 4\kappa^2$ · δηλαδή  $y \geq 2\kappa$  (διότι  $y > 0$ ). Άρα τό πεδίο τιμών της (1) είναι τό διάστημα  $[2\kappa, +\infty)$  και ή ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως (του άθροίσματος  $x + \omega$ ) είναι  $2\kappa$ . Γιά  $y = 2\kappa$  ή (2) έχει ίσες ρίζες τίς  $x_1 = x_2 = \frac{y}{2} = \kappa$ . Όστε μέ  $x = \omega = \kappa$  τό άθροισμα  $x + \omega$  παίρνει τή μικρότερη δυνατή τιμή, ίση μέ  $2\kappa$ .

6. I) *Από όλα τά όρθογώνια παραλληλόγραμμα μέ τήν ίδια περίμετρο  $2\alpha$  ποίο έχει τό μέγιστο έμβαδόν;*

II) *Από όλα τά όρθογώνια παραλληλόγραμμα μέ τό ίδιο έμβαδόν  $\kappa^2$  ποίο έχει τήν ελάχιστη περίμετρο;*

I) Αν  $x$  και  $\omega$  οι διαστάσεις του όρθογωνίου έχομε  $x + \omega = \alpha$ . Σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα 4 τό έμβαδόν  $x\omega$  γίνεται μέγιστο όταν  $x = \omega = \frac{\alpha}{2}$ . Τό τετράγωνο λοιπόν μέ πλευρά  $\frac{\alpha}{2}$  έχει τό μέγιστο έμβαδόν, ίσο μέ  $\frac{\alpha^2}{4}$ .

II) Αν  $x$  και  $\omega$  οι διαστάσεις του όρθογωνίου έχομε  $x\omega = \kappa^2$ .

Σύμφωνα με τό παραπάνω θεώρημα 5 ή ήμιπερίμετρος  $x + \omega$  γίνεται ελάχιστη όταν  $x = \omega = \kappa$ . Έτσι πάλι τό τετράγωνο, με πλευρά τώρα ίση προς  $\kappa$ , έχει τήν ελάχιστη περίμετρο.

**7. Οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  ας έχουν τό ίδιο πεδίο ορισμού και τά πεδία τιμών τους ας είναι υποσύνολα του συνόλου των θετικών πραγματικών αριθμών τότε: αν και οι δύο συναρτήσεις είναι αύξουσες (φθίνουσες) θά είναι αύξουσα (άντίστοιχα φθίνουσα) και ή συνάρτηση  $f(x) \cdot g(x)$ .**

Μέ  $x_1 < x_2$  έχουμε  $0 < f(x_1) \leq f(x_2)$  [ $\eta f(x_1) \geq f(x_2) > 0$ ] και συγχρόνως  $0 < g(x_1) \leq g(x_2)$  [ $\eta g(x_1) \geq g(x_2) > 0$ ].

\*Αρα θά είναι και  $0 < f(x_1) \cdot g(x_1) \leq f(x_2) \cdot g(x_2)$  [ $\eta f(x_1) g(x_1) \geq f(x_2) g(x_2) > 0$ ].

**Σημείωση :** Όπως ξέρομε, όταν έχουμε άνισότητες όμοιόστροφες με θετικούς όρους μπορούμε νά τίς πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

## 6.6 Άσκήσεις.

1. Δίνεται ή συνάρτηση με τύπο  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ . Νά καθορισθοῦν τά πεδία ορισμού και τιμών, και νά ξετασθεί ή συνάρτηση ως προς τή μονοτονία.

(Ύπόδειξη : Για  $x \neq \pm 1$  μπορείτε νά χρησιμοποιήσετε αντί  $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}$  τήν έκφραση  $y = \frac{x-2}{x+1}$ ).

2. Δίνεται ή συνάρτηση  $y = |4x - 6| + 6$ . Νά γίνει ή μελέτη και ή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως.

(Ύπόδειξη : Νά διακρίνετε δύο περιπτώσεις:  $4x - 6 \leq 0$  και  $4x - 6 \geq 0$ ).

3. Νά βρεθοῦν τά πεδία τιμών και νά γίνουν οι γραφικές παραστάσεις τών συναρτήσεων: I)  $y = \frac{|x|}{x}$ . II)  $y = A_k(x)$ , όπου με τό συμβολισμό  $A_k(x)$  έννοούμε, για κάθε πραγματική τιμή  $x$ , τόν μεγαλύτερο άκέραιο πού δέν ξεπερνά τό  $x$ , δηλαδή  $A_k(x) \leq x < A_k(x) + 1$ .

Π.χ.  $A_k\left(-\frac{15}{4}\right) = -4$ ,  $A_k(\sqrt{53}) = 7$ ,  $A_k(-17) = -17$ .

4. Νά βρεθοῦν τά άκρότατα (αν υπάρχουν) τών συναρτήσεων: I)  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ .

II)  $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ . III)  $y = \frac{5x}{x^2 + x + 1}$ .

5. Νά γίνει ή γραφική παράσταση τών συναρτήσεων: I)  $y = 2^x$ . II)  $y = \log_2 x$ .

6. \*Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$ , με τό ίδιο πεδίο ορισμού, είναι και οι δύο αύξουσες (άντίστοιχα φθίνουσες), τότε και ή συνάρτηση  $f + g$  θά είναι επίσης αύξουσα (άντίστοιχα φθίνουσα).

7. \*Αν  $f$  είναι μιá μονότονη συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $\alpha < x < \beta$  και  $\kappa$  μιá σταθερά, νά ξετάσετε από άποψη μονοτονίας τίς συναρτήσεις:  $f + \kappa$ ,  $\kappa f$ ,  $\frac{1}{f}$  (εφόσον  $f > 0$ ),  $f^2$  και  $\sqrt{f}$  (εφόσον  $f \geq 0$ ).

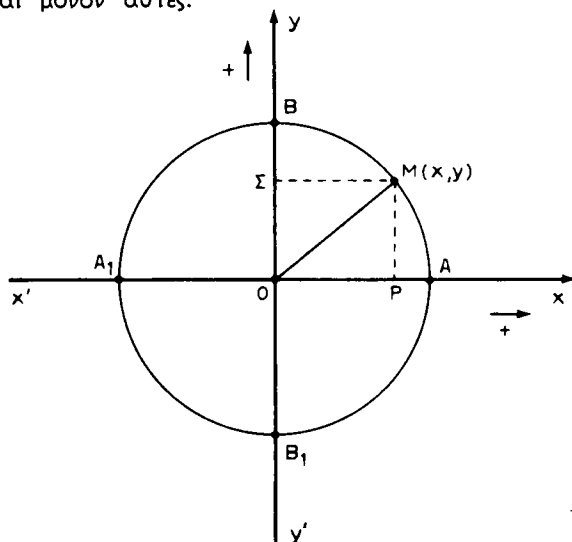
8. \*Από όλα τά όρθογώνια τρίγωνα με τό ίδιο έμβαδόν (έστω τό  $\kappa^2$ ) ποιό είναι εκείνο πού έχει τήν πιό μικρή ύποτείνουσα;

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

## Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ Η ΕΛΛΕΙΨΗ

## 7.1 Ἡ εξίσωση κύκλου με κέντρο τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

Θεωροῦμε ἕναν κύκλο \* ποὺ ἔχει ὡς κέντρο τὴν ἀρχὴ  $O$  ἐνὸς ὀρθοκανονικοῦ συστήματος ἀξόνων καὶ ἀκτίνα ἴση μὲ  $\rho$  ( $\rho$  τὸ μέτρο ἐνὸς δοσμένου τμήματος). Θέλομε νὰ βροῦμε μιά σχέση ποὺ νὰ ικανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ κύκλου καὶ μόνον αὐτές.



Σχ. 7.1.

\* Ἀς πάρουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο  $M(x, y)$  τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 7.1): ἂν  $P$  καὶ  $\Sigma$  εἶναι οἱ προβολές τοῦ  $M$  στοὺς ἀξονες  $x'x$  καὶ  $y'y$  ἀντιστοίχως, θὰ ἔχομε  $\overline{OP} = x$  καὶ  $\overline{PM} = \overline{O\Sigma} = y$ . Γιά ν' ἀνήκει τό σημεῖο  $M(x, y)$  στὸν κύκλο  $(O, \rho)$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι  $|\overrightarrow{OM}| = \rho$  ἢ  $|\overrightarrow{OM}|^2 = \rho^2$ . Ἀλλὰ εἶναι πάντα (γιά κάθε σημεῖο  $M$  τοῦ ἐπιπέδου)  $x^2 + y^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$  καὶ συνεπῶς ἀναγκαῖα καὶ ἱκανή συνθήκη, γιά νὰ ἀνήκει ἕνα σημεῖο  $M(x, y)$  στὸν κύκλο  $(O, \rho)$ , εἶναι

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (1)$$

Ἡ σχέση (1), ἐπειδὴ ἱκανοποιεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου  $(O, \rho)$  καὶ μόνον ἀπ' αὐτά, λέγεται **ἐξίσωση αὐτοῦ τοῦ κύκλου**.

\* Ἀν ἐπιλύσομε τὴν ἐξίσωση (1) ὡς πρὸς  $y$  θὰ πάρουμε  $y^2 = \rho^2 - x^2$  καὶ τελικά:

\* Ὅταν ἐδῶ μιλάμε γιά κύκλο, ἐννοοῦμε ὅ,τι μέχρι τώρα καλούσαμε περιφέρεια κύκλου.

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad (1\alpha) \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\rho^2 - x^2} \quad (1\beta).$$

Έτσι βλέπουμε ότι σε κάθε κατάλληλη πραγματική τιμή του  $x$  ( $|x| \leq \rho$ ) αντιστοιχίζονται δύο αντίθετες τιμές του  $y$ . Άρα η σχέση (1) δεν είναι συνάρτηση· χωρίζεται όμως σε δύο συναρτήσεις, τις (1α) και (1β), με κοινό πεδίο ορισμού. Τό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων (1α) και (1β) προσδιορίζεται από τη σχέση  $\rho^2 - x^2 \geq 0$ . Έχουμε  $\rho^2 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \rho^2 \iff |x| \leq \rho \iff -\rho \leq x \leq \rho$  δηλαδή τό πεδίο ορισμού είναι τό κλειστό διάστημα  $[-\rho, \rho]$ .

Πεδίο τιμών της σχέσεως (1) είναι τό ίδιο διάστημα  $[-\rho, \rho]$ , **διότι η σχέση μας είναι συμμετρική ως προς  $x$  και  $y$** . Ειδικά, πεδίο τιμών της συναρτήσεως (1α) είναι τό διάστημα  $[0, \rho]$ , ενώ της (1β) είναι τό διάστημα  $[-\rho, 0]$ .

Η συνάρτηση (1α) είναι γνησίως αύξουσα στό διάστημα  $[-\rho, 0]$  και γνησίως φθίνουσα στό διάστημα  $[0, \rho]$  (γιατί;) και έχει ως γραφική παράσταση τό ημικύκλιο  $A_1BA$  (σχ. 7.1), ενώ η συνάρτηση (1β) είναι γνησίως φθίνουσα στό διάστημα  $[-\rho, 0]$  και γνησίως αύξουσα στό  $[0, \rho]$  και έχει ως γραφική παράσταση τό ημικύκλιο  $A_1B_1A$ .

## 7.2 Η έλλειψη και η έξισωσή της.

α) **Όρισμός της έλλειψεως.** Άν  $E_1$  και  $E$  είναι δύο οποιαδήποτε όρισμένα σημεία ενός έπιπέδου και  $2a$  ένα οποιοδήποτε δοσμένο τμήμα με  $2a > E_1E$ , τότε τό σύνολο των σημείων  $M$  του έπιπέδου, για τά όποια έχουμε  $ME_1 + ME = 2a$  (1) λέγεται **έλλειψη**.

Δηλαδή: **Έλλειψη λέγεται ό γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  ενός έπιπέδου, τά όποια έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο δοσμένα σημεία  $E_1$  και  $E$  του έπιπέδου ( $ME_1 + ME = 2a > E_1E > 0$ ).**

Τά σταθερά σημεία  $E_1$  και  $E$  λέγονται **εστίες** της έλλειψεως.

Σχεδιάζουμε τήν ευθεία  $E_1E$  και επίσης τήν ευθεία  $y'y$  τή μεσοκάθετη στό τμήμα  $E_1E$  (σχ. 7.2). Είναι πολύ εύκολο ν' αποδείξουμε ότι οί ευθείες  $E_1E$  και  $y'y$  είναι άξονες (όρθης) συμμετρίας του τόπου και συνεπώς τό σημείο τομής  $O$  των  $E_1E$  και  $y'y$  ( $O \equiv$  μέσο του  $E_1E$ ) είναι κέντρο συμμετρίας. Πράγματι αν  $M$  είναι ένα τυχαίο σημείο της έλλειψεως, τότε τό  $M_1$ , συμμετρικό του  $M$  ως προς τήν  $E_1E$ , τό  $M_2$  συμμετρικό του  $M$  ως προς τήν  $y'y$  καθώς και τό  $M'$  συμμετρικό του  $M$  ως προς  $O$  ανήκουν επίσης στον τόπο.

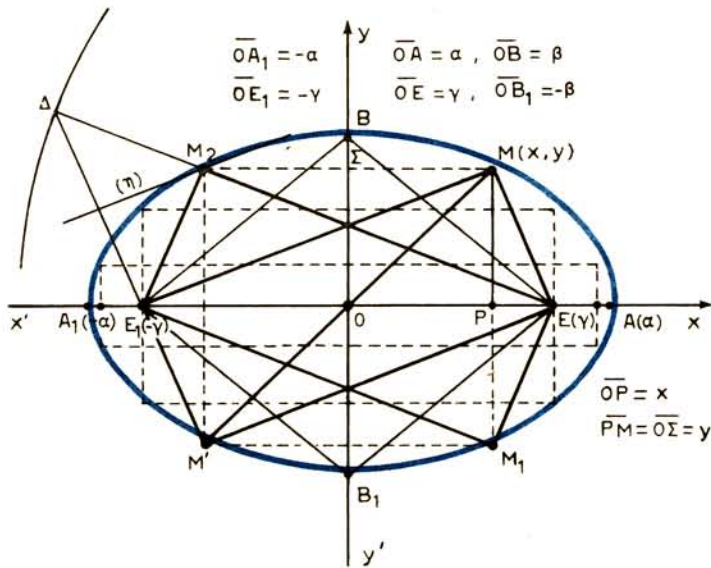
Φανερό είναι άκόμα ότι τά σημεία  $B_1$  και  $B$  του άξονα  $y'y$ , για τά όποια έχουμε  $EB_1 = EB = a$ , καθώς και τά σημεία  $A_1, A$  του άξονα  $E_1E$ , για τά όποια έχουμε  $OA_1 = OA = a$ , ανήκουν στον τόπο μας.

Θά παραστήσουμε με  $2\gamma$  τό τμήμα  $E_1E$  και με  $2\beta$  τό τμήμα  $B_1B$ · τότε από τό όρθογώνιο τρίγωνο  $BOE$  παίρνομε:

$$\beta^2 = a^2 - \gamma^2 \quad (II)$$

Με τά σύμβολα  $a, \beta, \gamma$  θά έννοούμε και τά μέτρα των τμημάτων  $OA, OB$  και  $OE$  αντίστοιχως. Τά τμήματα  $2a$  και  $2\beta$  λέγονται αντίστοιχα **μεγάλος** και





Σχ. 7.2.

**μικρός άξονας της έλλειψεως.**

β) **Η εξίσωση της έλλειψεως.** Ύστερα από τά παραπάνω είναι φυσικό νά ζητήσουμε τήν εξίσωση τής έλλειψεως ως πρός τό ορθοκανονικό σύστημα άξόνων πού είναι φτιαγμένο πάνω στους άξονες συμμετρίας του τόπου. Τόν πρώτο άξονα  $x'x$  θά τόν πάρομε πάνω στήν  $E_1E$  μέ θετική κατεύθυνση από τό  $E_1$  πρός τό  $E$ .

Θέλομε νά βρούμε, όπως καί γιά τόν κύκλο, τή σχέση πού ίκανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων μιās έλλειψεως καί μόνο αυτές.

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο  $M(x, y)$  του τόπου (τής έλλειψεως) του οποίου οι προβολές στους άξονες  $x'x$  καί  $y'y$  είναι αντίστοιχα τά σημεία  $P$  καί  $\Sigma$  (σχ. 7.2). τότε  $\overline{OP} = x$  καί  $\overline{PM} = \overline{O\Sigma} = y$ .

Από τά ορθογώνια τρίγωνα  $E_1PM$  καί  $EPM$  έχομε:

$$(\overline{ME_1})^2 = (\overline{E_1P})^2 + (\overline{PM})^2 \quad \text{(III)} \quad \text{καί} \quad (\overline{ME})^2 = (\overline{EP})^2 + (\overline{PM})^2 \quad \text{(IV)}.$$

Αλλά  $\overline{E_1P} = \overline{E_1O} + \overline{OP} = \gamma + x$  καί  $\overline{EP} = \overline{EO} + \overline{OP} = -\gamma + x$  (σχέση Chasles).

Έτσι οι ισότητες (III) καί (IV) γράφονται αντίστοιχα:

$$(\overline{ME_1})^2 = (x + \gamma)^2 + y^2 \implies \overline{ME_1} = \sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} \quad \text{(III}\alpha\text{)}$$

$$(\overline{ME})^2 = (x - \gamma)^2 + y^2 \implies \overline{ME} = \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2} \quad \text{(IV}\alpha\text{)}$$

Συνδυάζοντας τίς σχέσεις (I), (IIIα) καί (IVα) έχομε τήν εξίσωση:

$$\sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2) + 2\gamma x} + \sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2) - 2\gamma x} = 2\alpha \quad (2).$$

Τετραγωνίζουμε τά μέλη τῆς (2) καί παίρνομε:

$$2(x^2 + \gamma^2 + y^2) + 2 \sqrt{[(x^2 + \gamma^2 + y^2) + 2\gamma x] [(x^2 + \gamma^2 + y^2) - 2\gamma x]} = 4\alpha^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2)^2 - 4\gamma^2 x^2} = 2\alpha^2 - (x^2 + \gamma^2 + y^2) \quad (2').$$

Τετραγωνίζουμε πάλι τά μέλη τῆς (2') καί παίρνομε διαδοχικά:

$$(x^2 + \gamma^2 + y^2)^2 - 4\gamma^2 x^2 = 4\alpha^4 + (x^2 + \gamma^2 + y^2)^2 - 4\alpha^2(x^2 + \gamma^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$\alpha^2(x^2 + \gamma^2 + y^2) - \gamma^2 x^2 = \alpha^4 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^2 \gamma^2 - \gamma^2 x^2 = \alpha^4 \Rightarrow$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2 \gamma^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2).$$

Ἡ τελευταία λόγω τῆς (II) γράφεται:

$$\boxed{\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2} \quad (3) \quad \text{ἢ διαιρώντας καί τά} \quad \boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \quad (4)$$

δυσό μέλη διὰ  $\alpha^2 \beta^2$

Ὡστε οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ τόπου θά ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση (3) (πού εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν (4)).

**Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο:** Δηλαδή κάθε σημείο M τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες (x,y) ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση (3) ἀνήκει στήν ἔλλειψη μέ ἀξονες 2α καί 2β.

Ὑστερα ἀπ' ὅλα τά παραπάνωμποροῦμε πλέον νά λέμε ὅτι:

**Ἐξίσωση μιᾶς ἑλλείψεως μέ ἐστιακή ἀπόσταση  $2\gamma$  ( $E_1 E = 2\gamma$ ) καί μέγαλον ᾄξονα  $2\alpha$  ( $\alpha > \gamma > 0$ ) εἶναι ἡ ἐξίσωση (3) ἢ (4) ἰσοδυνάμως, ὅπου  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$  ( $2\beta$  ὁ μικρός ᾄξονας).**

**Σημείωση:** Γιά νά σχεδιάσουμε μιά ἔλλειψημποροῦμε νά πάρουμε ἕνα λεπτό νῆμα νάυλον καί νά καρφώσουμε τά ἄκρα του σέ δυσό σημεία  $E_1, E$  πού ἔχουν ἀπόσταση μικρότερη ἀπό τό μήκος τοῦ νήματος.

Ὑστερα μέ τήν ἄκρη τοῦ μολυβιοῦ μας τεντώνομε τό νῆμα καί, μετατοπίζοντας συνεχῶς τό μολύβι, γράφομε μιά γραμμή. Ἡ γραμμή αὐτή εἶναι μιά ἔλλειψη μέ ἐστίες τά σημεία  $E_1$  καί  $E$  καί μέγαλον ᾄξονα ἴσο πρὸς τό μήκος τοῦ νήματος.

**Ἐφαρμογή:** Νά σχεδιασθεῖ ἡ ἔλλειψη μέ ἐξίσωση  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . (Νά λάβετε μοναδιαῖο μήκος τό 1 cm).

**Περιγραφή:** Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνομε ἕνα τμήμα  $E_1 E$  ἴσο μέ 6 cm ( $2\gamma = 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 2\sqrt{25 - 16} = 2 \cdot 3$ ). Ὅρίζομε πάνω στήν  $E_1 E$  τά σημεία  $A_1, A$  γιά τά ὁποῖα  $OA_1 = OA = 5$  cm (O μέσο τοῦ  $E_1 E$ ,  $2\alpha = 10$  cm) καί πάνω στή μεσοκάθετη τοῦ  $E_1 E$  τά σημεία  $B_1, B$  γιά τά ὁποῖα  $OB_1 = OB = 4$  cm ( $2\beta = 8$  cm). Τά σημεία  $A_1, A, B_1, B$  ἀνήκουν στήν ἔλλειψη πού θέλομε νά σχεδιάσουμε. Ἀκολουθῶς ἐργαζόμεσθε, μ' ἕνα νῆμα μήκους 10 cm, ὅπως περιγράφομε παραπάνω.

“Ενας άλλος τρόπος σχεδιάσεως είναι νά προσδιορίσουμε αρκετά σημεία τῆς ἐλλείψεως μέ τήν παρακάτω ἀπλή γεωμετρική κατασκευή καί ὕστερα νά χαράξουμε τήν καμπύλη πού περνᾷ ἀπ’ αὐτά τά σημεία.

Μέ κέντρο τή μιᾶ ἐστία, ἔστω τήν  $E$ , καί ἀκτίνα ἴση μέ  $2\alpha$  γράφουμε κύκλο (σχ. 7.2). Παίρνουμε τώρα ἕνα τυχαῖο σημεῖο  $\Delta$  τοῦ κύκλου ( $E, 2\alpha$ ) καί κατασκευάζουμε τήν εὐθεία ( $\eta$ ) μεσοκάθετη στό τμήμα  $E_1\Delta$ . Ἄν ἡ ( $\eta$ ) τέμνει τήν  $ED$  στό  $M_2$  θά ἔχομε  $M_2E_1 + M_2E = M_2\Delta + M_2E = E\Delta = 2\alpha$  ἄρα τό  $M_2$  εἶναι σημεῖο τῆς ἐλλείψεως. [Παρατηρεῖστε ὅτι ἡ ( $\eta$ ) εἶναι ἐφαπτομένη στήν καμπύλη].

(Νά γίνηι τό πλήρες σχέδιο τῆς ἐλλείψεως μέ τήν παραπάνω σχεδίαση).

γ) Ἡ ἔλλειψη ὡς γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων. Ἡ σχέση πού προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση (3) δέν εἶναι συνάρτηση, διότι σέ μιᾶ κατάλληλη πραγματική τιμή τοῦ  $x$  ( $|x| \leq \alpha$ ) ἀντιστοιχοῦν γενικά δύο ἀντίθετες πραγματικές τιμές τοῦ  $y$ .

Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση (3) ὡς πρός  $y$  καί παίρνουμε τίς ἀκόλουθες δύο ἐκ-

$$\text{φράσεις:} \quad y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad (7\alpha)$$

$$\text{καί} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad (7\beta).$$

Οἱ ἐκφράσεις αὐτές μᾶς δίνουν συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ πού προκύπτει ἀπό τή σχέση  $\alpha^2 - x^2 \geq 0$ . Ἀλλά  $\alpha^2 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \alpha^2 \iff |x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$  ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων (7α) καί (7β) εἶναι, ὅπως εἶδαμε καί παραπάνω, τό διάστημα  $[-\alpha, \alpha]$ .

Βρίσκομε τό πεδίο τιμῶν τῆς  $y$  στή σχέση (3), δηλαδή τήν ἔνωση τῶν πεδίων τιμῶν τῶν (7α) καί (7β), ἄν ἐπιλύσουμε τήν (3) ὡς πρός  $x$ . Ἐτσι παίρνουμε  $x = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 - y^2}$ , ὁπότε ἔχομε:  $\beta^2 - y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq \beta^2 \iff |y| \leq \beta \iff -\beta \leq y \leq \beta$ .

Ὡστε τό πεδίο τιμῶν τῆς  $y$  στή σχέση (3) εἶναι τό διάστημα  $[-\beta, \beta]$  καί εἰδικότερα, τό πεδίο τιμῶν τῆς (7α) εἶναι τό διάστημα  $[0, \beta]$  καί τῆς (7β) τό διάστημα  $[-\beta, 0]$ .

Ἡ συνάρτηση (7α) ἔχει ὡς γραφική παράσταση τήν ἡμιέλλειψη  $A_1BA$  ἀπό τή μεριά τοῦ θετικοῦ ἡμιᾶξονα  $Oy$  (σχ. 7.2) καί ἡ συνάρτηση (7β) ἔχει ὡς γραφική παράσταση τήν ἡμιέλλειψη  $A_1B_1A$ .

### 7.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή μονοτονία ἡ συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}, \text{ μέ } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \text{ στό διάστημα } \Delta = [-\alpha, \alpha].$$

Ἄς πάρουμε τά σημεία  $x_1, x_2$  μέ  $-\alpha \leq x_1 < x_2 \leq 0$ . ἔχομε διαδοχικά:  
 $-\alpha \leq x_1 < x_2 \leq 0 \implies \alpha^2 \geq x_1^2 > x_2^2 \geq 0 \implies -\alpha^2 \leq -x_1^2 < -x_2^2 \leq 0 \implies$

$$0 \leq \alpha^2 - x_1^2 < \alpha^2 - x_2^2 \leq \alpha^2 \implies 0 \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_1^2) < \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_2^2) \leq \beta^2 \\ \implies \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x_1^2} < \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x_2^2}, \text{ δηλαδή: } y_1 < y_2.$$

Ωστε στο διάστημα  $[-\alpha, 0]$  η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Περνᾶμε τώρα στο υπόλοιπο διάστημα  $[0, \alpha]$  του πεδίου ὀρισμοῦ. Ἔχουμε:

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq \alpha \implies 0 \leq x_1^2 < x_2^2 \leq \alpha^2 \implies 0 \geq -x_1^2 > -x_2^2 \geq -\alpha^2 \implies \\ \alpha^2 \geq \alpha^2 - x_1^2 > \alpha^2 - x_2^2 \geq 0 \implies \beta^2 \geq \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_1^2) > \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_2^2) \geq 0, \\ \text{ἄρα: } y_1 > y_2.$$

Ωστε στο διάστημα  $[0, \alpha]$  η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Στή θέση  $x = 0$  η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο· αυτό είναι ἴσο με  $\beta$  ( $y_{\text{μεγ}} = \beta$ ).

**Όμοια βρίσκουμε** ὅτι η συνάρτηση  $y = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-\alpha, 0]$  καὶ γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, \alpha]$  καὶ ὅτι παρουσιάζει ἐλάχιστο στή θέση  $x = 0$ , τό ὅποιο ἰσοῦται με  $-\beta$ . Διακρίνουμε αὐτά τά συμπεράσματα ἂν ρίξουμε μιά ματιά στή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων, δηλαδή στή γραμμή πού ἔχει ἐξίσωση τή  $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ .

**2.\*** *Νά γίνει ἡ γραφική λύση τοῦ συστήματος  $x^2 + y^2 = 4$  (I) καί  $x + y = \lambda$  (II). Ἐφαρμογή γιά  $\lambda = 2\sqrt{2}$ .*

Σχεδιάζουμε τόν κύκλο μέ κέντρο τήν ἀρχή  $O$  τῶν ἀξόνων καί μέ ἀκτίνα ἴση μέ 2 καί τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση τή (II) ἢ τήν ἰσοδύναμή της  $y = -x + \lambda$  (σχ. 7.3α). Ἄν οἱ γραμμές αὐτές ἔχουν κοινά σημεῖα, τότε τό σύστημα ἔχει πραγματικές λύσεις· εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων. Τά κοινά λοιπόν σημεῖα τῶν γραμμῶν πού παριστάνουν οἱ ἐξισώσεις (I) καί (II) μᾶς παρέχουν γραφικά τίς πραγματικές λύσεις τοῦ συστήματος.

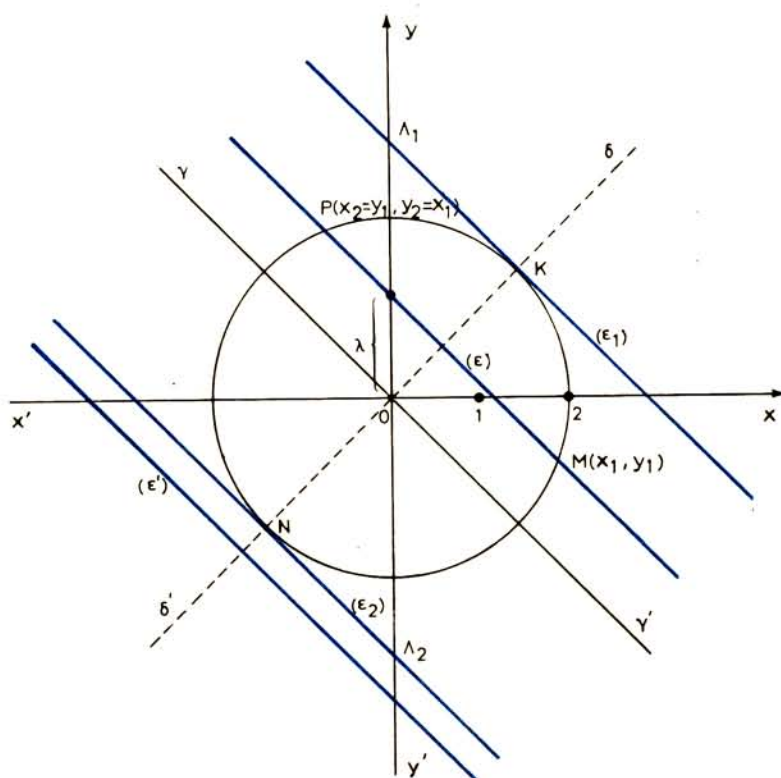
Οἱ εὐθείες ( $\epsilon$ ) μέ ἐξισώσεις  $y = -x + \lambda$  εἶναι παράλληλες πρὸς τή διχοτόμο  $\gamma'\gamma$  τῶν γωνιῶν  $\widehat{x'Oy}$  καί  $\widehat{y'Ox}$  (γιατί;) καί ὅσες ἀπ' αὐτές τίς εὐθείες τέμνουν τόν κύκλο  $(O, 2)$  θά τόν τέμνουν σέ σημεῖα συμμετρικά ὡς πρὸς τήν  $\delta'\delta$ , διχοτόμο τῶν γωνιῶν  $\widehat{x'Oy'}$  καί  $\widehat{x'Oy}$ .

Οἱ τιμές τῆς παραμέτρου  $\lambda$  εἶναι οἱ τεταγμένες τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν ( $\epsilon$ ) μέ τόν ἄξονα  $y'y$ .

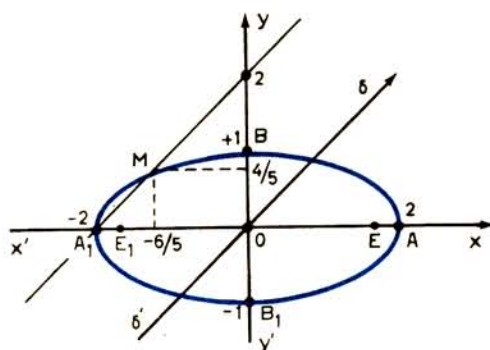
Ἄς εἶναι ( $\epsilon_1$ ) ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση  $y = -x + 2\sqrt{2}$ ,  $\Lambda_1$  τό σημεῖο τομῆς της μέ τήν  $\gamma', \gamma$  καί  $K$  τό σημεῖο τομῆς της μέ τήν  $\delta'\delta$ . Τό ὀρθογώνιο στό  $K$  τρίγωνο  $OK\Lambda_1$  εἶναι ἰσοσκελές· ἐπομένως  $2(OK)^2 = (O\Lambda_1)^2$ , δηλαδή  $2(OK)^2 = (2\sqrt{2})^2 \implies OK = 2$ . Ἄρα ἡ εὐθεία ( $\epsilon_1$ ) ἐφάπτεται στὸν κύκλο  $(O)$  στό σημεῖο  $K$ . Αὐτό σημαίνει ὅτι τό σύστημα  $x^2 + y^2 = 4$  καί  $x + y = 2\sqrt{2}$  ἔχει οὐσιαστικά μιά πραγματική λύση.

Όμοια βλέπουμε ὅτι καί ἡ εὐθεία ( $\epsilon_2$ ), μέ ἐξίσωση  $y = -x - 2\sqrt{2}$ , ἐφάπτεται στὸν κύκλο στό σημεῖο  $N$ , ἀντιδιαμετρικό τοῦ  $K$ . Ὑστερα ἀπ' αὐτά εἶναι φανερό ὅτι:

Ὄταν  $-2\sqrt{2} < \lambda < 2\sqrt{2}$ , τό σύστημα ἔχει δύο πραγματικές λύσεις· ὅταν  $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$  τό σύστημα ἔχει μιά διπλή πραγματική λύση καί ὅταν  $\lambda < -2\sqrt{2}$  ἢ  $\lambda > 2\sqrt{2}$ , τό σύστημα δέν ἔχει πραγματικές λύσεις.



Σχ. 7.3α.



Σχ. 7.3β.

3\* Νά γίνει ή γραφική λύση του συστήματος:  $x^2 + 4y^2 = 4$  [I] καί  $y = x + 2$  [II].  
 'Η εξίσωση (I) είναι εξίσωση έλλείψεως μέ μεγάλον άξονα 4 καί μικρό 2  $\left(\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1\right)$

καί ή (II) είναι εξίσωση ευθείας παράλληλης πρὸς τή διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν  $\widehat{xOy}$  καί  $\widehat{x'Oy'}$  πού τέμνει τόν άξονα  $y'y$  στό σημεῖο 2.

Σχεδιάζουμε αὐτές τίς γραμμές (σχῆμα 7.3β) καί βλέπομε ὅτι ἔχουν κοινά σημεῖα τά  $A_1(-2, 0)$  καί  $M(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$ . αὐτά τά σημεῖα ἀποτελοῦν καί τή γραφική λύση τοῦ συστήματος τῶν (I) καί (II).

## 7.4 Ἀσκήσεις.

1\* Νά βρεθεῖ ἡ εξίσωση τοῦ κύκλου πού ἔχει κέντρο τήν ἀρχή τῶν άξόνων καί διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου ABΓ μέ κορυφές τά σημεῖα B(-2, 0), Γ(2, 0) καί A(0, 5).

2\* Νά βρεθεῖ ἡ εξίσωση τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου στό τρίγωνο ABΓ μέ κορυφές τά σημεῖα A(-4, 3), B(3, -4), Γ(1,  $-2\sqrt{6}$ ).

3. Νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν εξισώσεων: I)  $6x^2 + 6y^2 = 30$ . II)  $x^2 + 2y^2 = 2$ . III)  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ . IV)  $25x^2 + 49y^2 = 1225$ .

4\* Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραμέτρου λ ὥστε ἡ ευθεία  $y = 2x + \lambda$  νά εἶναι ἐφαπτομένη στόν κύκλο  $x^2 + y^2 = 6$ .

5\* Νά γίνεи ἡ γραφική παράσταση τῶν σχέσεων:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  καί  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

Τί παρατηρεῖτε γιά τή γραμμή πού παριστάνει ἡ δεύτερη εξίσωση;

6\* Ν' ἀποδείξετε ὅτι ἡ εξίσωση  $(x-1)^2 + y^2 = 4$  παριστάνει κύκλο πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο (1, 0) καί ἀκτίνα μέ μέτρο 2.

7\* Νά χαραχθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς εξισώσεως  $x^2 + (y+1)^2 = 4$ .

8\* Νά σχεδιασθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ . Ποιά εἶναι ἡ θέση τῆς ἀρχῆς τῶν άξόνων ὡς πρὸς αὐτή τή γραφική παράσταση;

## ΕΝΟΤΗΤΑ 8

### Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΥΠΟ $y = ax^2 + bx + \gamma$ . Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

#### 8.1 Μελέτη καί γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού δίνεται ἀπό τόν άλγεβρικό τύπο: $y = ax^2 + bx + \gamma$ ( $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ ).

Ἡ σχέση  $y = ax^2 + bx + \gamma$  (1) παράγει μιά συνάρτηση  $y$  τοῦ  $x$  ὀρισμένη παντοῦ μέσα στό σύνολο  $\mathbb{R}$ , ὅπως ἐξάλλου κάθε πολώνυμο τοῦ  $x$ · διότι γιά κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ἡ παράσταση  $ax^2 + bx + \gamma$  παίρνει μιά καί μόνο μιά πραγματική τιμή.

Γιά τήν παραπέρα μελέτη τῆς συναρτήσεως θά μετασχηματίσουμε τό δευτεροβάθμιο ὡς πρὸς  $x$  τριώνυμο σέ μιά καταλληλότερη γιά τό σκοπό μας μορφή.

$$\text{Γράφουμε: } y = ax^2 + bx + \gamma = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\gamma}{a} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right] = \\
 &= \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.
 \end{aligned}$$

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, καθόσον  $\alpha > 0$  ή  $\alpha < 0$ .

1)  $\alpha > 0$ : Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συναρτήσεως άρχικά στο διάστημα:  $\left( -\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Έχουμε: } x_1 < x_2 \leq -\frac{\beta}{2\alpha} &\Rightarrow x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} < x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \leq 0 \Rightarrow \\
 \left( x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 > \left( x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \geq 0 &\Rightarrow \alpha \left( x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 > \alpha \left( x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \geq 0 \\
 \Rightarrow \alpha \left( x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} > \alpha \left( x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} &\geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.
 \end{aligned}$$

Δηλαδή  $y_1 > y_2 \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ . Άρα στο διάστημα  $\left( -\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$  η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Θά εξετάσουμε τώρα τό ίδιο ζήτημα στο διάστημα  $\left[ -\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Έχουμε: } -\frac{\beta}{2\alpha} \leq x_1 < x_2 &\Rightarrow 0 \leq x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} < x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow \\
 0 \leq \left( x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 < \left( x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 &\Rightarrow 0 \leq \alpha \left( x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 < \alpha \left( x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \\
 \Rightarrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \leq \alpha \left( x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} < \alpha \left( x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.
 \end{aligned}$$

Δηλαδή  $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \leq y_1 < y_2$ . Άρα στο διάστημα  $\left[ -\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$  η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Όστε, μέ  $\alpha > 0$  ή συνάρτηση είναι φθίνουσα, όταν τό  $x$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $\left( -\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$  καί αύξουσα, όταν τό  $x$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $\left[ -\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$ . Συνεπώς γιά τήν τιμή  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$  ή συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή καί αυτή είναι:  $y_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ .

II)  $\alpha < 0$ . 'Ακολουθώντας ακριβώς την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε ότι:

'Η συνάρτηση (μέ  $\alpha < 0$ ) είναι γνησίως αύξουσα όταν τό  $x$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$  και γνησίως φθίνουσα όταν τό  $x$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ . Για τήν τιμή  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$  ή συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή, τήν  $y_{\text{μεγ}} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ .

Στήν πρώτη περίπτωση ( $\alpha > 0$ ) τό πεδίο τιμών είναι τό διάστημα  $\left[\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}, +\infty\right)$  καί στή δεύτερη περίπτωση ( $\alpha < 0$ ) τό διάστημα  $\left(-\infty, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right]$ .

Τό σημείο μέ συντεταγμένες  $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right)$  λέγεται **κορυφή** τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως.

"Αν  $x' = -\frac{\beta}{2\alpha} + \rho$  καί  $x'' = -\frac{\beta}{2\alpha} - \rho$  δύο τιμές συμμετρικές ὡς πρός τήν τιμή  $-\frac{\beta}{2\alpha}$ , ὁπότε ἔχομε  $x' + \frac{\beta}{2\alpha} = \rho$  καί  $x'' + \frac{\beta}{2\alpha} = -\rho$  ( $\rho > 0$ ), τότε θά εἶναι  $y' = \alpha \left(x' + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha\rho^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} =$   
 $= \alpha \cdot (-\rho)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha \left(x'' + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = y''$ .

"Ωστε σέ κάθε ζευγος συμμετρικῶν, ὡς πρός τήν  $-\frac{\beta}{2\alpha}$ , τιμῶν τοῦ  $x$  ἀντιστοιχίζεται ἡ αὐτή τιμή τοῦ  $y$ .

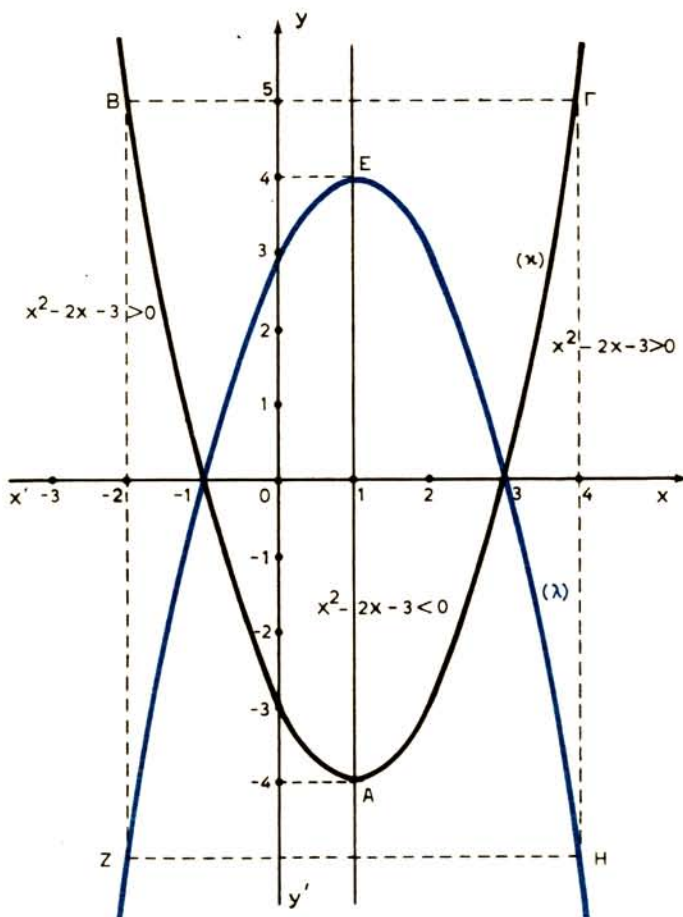
'Από τήν παραπάνω ιδιότητα προκύπτουν δύο ἀξιόλογα συμπεράσματα:

I) 'Η γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή τῆς γραφικῆς παραστάσεως καί εἶναι παράλληλη πρὸς τόν ἄξονα  $y'y$ , δηλαδή τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ .

II) 'Η ἀντίστροφη πρὸς τή συνάρτηση σχέση δέν εἶναι συνάρτηση, διότι σέ μιὰ τιμή τοῦ  $y$  ἀντιστοιχίζονται ἐν γένει δύο διαφορετικές τιμές τοῦ  $x$ .

Γιά νά σχεδιάσουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως φτιάχνουμε πρῶτα ἕναν πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν  $x$  καί  $y$ : ἀκολουθῶς τοποθετοῦμε τήν κορυφή τῆς καμπύλης, χάρασσομε τόν ἄξονα συμμετρίας καί μαρκάρομε τά παραστατικά σημεία, τῶν ὁποίων ἔχομε καθορίσει τίς συντεταγμένες (σχ. 8.1).





Σχ. 8.1.

Μεταξύ τών σημείων πού προκαταβολικά ἔχομε προσδιορίσει εἶναι καί τό σημείο τομῆς τῆς καμπύλης μέ τόν ἄξονα  $y'y'$ · αὐτό ἔχει συντεταγμένες  $(0, \gamma)$ .

Ἐπίσης, ἂν ἡ ἐξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  (2) ἔχει ρίζες πραγματικές, τότε προσδιορίζοντας αὐτές τίς ρίζες ἔχομε τά κοινά σημεία τῆς γραφικῆς παραστάσεως μέ τόν ἄξονα  $x'x$ .

Ἄν οἱ πραγματικές ρίζες (δταν ὑπάρχουν) τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι τέτοιοι ἀριθμοί πού τά ἀντίστοιχά τους σημεία πάνω στόν ἄξονα  $x'x$  τοποθετοῦνται μέ δυσκολία, τότε προτιμᾶμε νά σχεδιάσουμε τή γραφική παράσταση χρησιμοποιώντας ἄλλα σημεία καί νά ποριστοῦμε τά κοινά τῆς σημεία μέ τόν ἄξονα  $x'x$  μετά τή σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, ἐπειδή οἱ τετμημένες τῶν κοινῶν σημείων τῆς γραφικῆς παραστάσεως καί τοῦ ἄξονα  $x'x$  εἶναι οἱ τιμές πού μηδενίζουν τό πολυώνυμο  $ax^2 + bx + \gamma$ , λέμε ὅτι ἔχομε κάνει τή γραφική ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ .

Ἄν ἡ ἐξίσωση (2) ἔχει ἴσες ρίζες, τότε ἡ εὐθεῖα  $x'x$  θά εἶναι ἐφαπτομένη τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Στό σχῆμα 8.1 ἔχομε σχεδιάσει τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού προκύπτουν ἀπό τούς τύπους:

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \text{ (I) και } y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4 \text{ (II)}.$$

Τά πολυώνυμα  $x^2 - 2x - 3$ ,  $-x^2 + 2x + 3$  παίρνουν αντίθετες τιμές για την ίδια τιμή του  $x$ : συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (I) και (II) είναι σχήματα συμμετρικά ως προς την ευθεία  $x'x$ .

Για τη σχεδίαση της (I) χρησιμοποιήθηκαν τα σημεία  $(-2, 5)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(3, 0)$  και  $(4, 5)$  και για τη σχεδίαση της (II) τα σημεία  $(-2, -5)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(3, 0)$  και  $(4, -5)$ .

**Ἄν ἡ ἐξίσωση (2) δὲν ἔχει ρίζες πραγματικές**, τότε ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς (1) δὲν θά'χει κοινὰ σημεία μὲ τὸν ἄξονα  $x'x$ · καὶ ἂν  $a > 0$ , ἡ καμπύλη θά'ἔχει τὴ μορφή τῆς (u) (σχ. 8.1) καὶ θά βρῖσκεται ὁλόκληρη στὸ ἡμιεπίπεδο πού ἔχει σύνορο τὴν  $x'x$  καὶ περιέχει τὸν θετικὸ ἡμιάξονα  $Oy$ , ἂν ὅμως  $a < 0$  ἡ καμπύλη θά'ἔχει τὴ μορφή τῆς (λ) (σχ. 8.1) καὶ θά βρῖσκεται ὁλόκληρη στὸ ἡμιεπίπεδο μὲ  $y < 0$ .

Μὲ τὴ σχεδίαση τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἔχομε καὶ τὴ γραφικὴ ἐπίλυση τῆς ἀνισώσεως  $ax^2 + bx + \gamma > 0$  (ἀντίστοιχα  $ax^2 + bx + \gamma < 0$ ), διότι ἀπὸ τὸ σχῆμα προκύπτουν ἄμεσα οἱ τιμές τοῦ  $x$  γιὰ τίς ὁποῖες ἔχομε  $y > 0$  (ἀντίστοιχα  $y < 0$ ).

## 8.2 Ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς μὲ ἄξονα τετμημένων τὸν ἄξονα συμμετρίας τῆς.

α) **Ὁρισμός καὶ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς.** Παραβολὴ λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ μιά δοσμένη ευθεία (δ) τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀπὸ ἑνὰ δοσμένο σημεῖο  $E$ , πού δὲν ἀνήκει στὴ (δ). Τὸ σημεῖο  $E$  λέγεται ἐστία καὶ ἡ ευθεία (δ) **διευθετούσα** τῆς παραβολῆς.

**Φέρομε ἀπὸ τὸ  $E$  τὴν ευθεία  $x'x$  κάθετη στὴ διευθετούσα** καὶ ἄς εἶναι  $K$  τὸ σημεῖο τομῆς τῆς μὲ τὴ (δ) (σχ. 8.2)

Εἶναι προφανές ὅτι ὁ τόπος δέχεται ἄξονα (ὀρθῆς) συμμετρίας τὴν ευθεία  $EK$ : δηλαδή ἂν  $M$  ἑνὰ σημεῖο τῆς παραβολῆς, τότε καὶ τὸ  $M'$ , συμμετρικὸ τοῦ  $M$  ὡς πρὸς τὴν  $EK$ , θ' ἀνήκει στὸν τόπο. Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι καὶ τὸ μέσο  $O$  τοῦ τμήματος  $KE$  θ' ἀνήκει στὸν τόπο.

Θά ἀναζητήσουμε τώρα τὴν ἐξίσωση τῆς παραβολῆς στὸ σύστημα πού ἔχει ἄξονα τῶν τετμημένων πάνω στὴν ευθεία  $EK$  μὲ θετικὴ κατεύθυνση ἀπὸ τὸ  $K$  πρὸς τὸ  $E$  καὶ ἄξονα τεταγμένων πάνω στὴν ευθεία τὴν κάθετη πρὸς τὴν  $KE$  στὸ μέσο  $O$  τοῦ  $KE$ .

Στὸ παραπάνω σύστημα ἁξόνων τὸ σημεῖο  $O$  (μέσο τοῦ  $EK$ ) ἀνήκει στὴν ευθεία  $y'y$  καὶ ὅλα τὰ ἄλλα σημεία τῆς παραβολῆς κείνται στὸ ἡμιεπίπεδο πού ἔχει σύνορο τὴν  $y'y$  καὶ περιέχει τὸν θετικὸ ἡμιάξονα  $Ox$  (σχ. 8.2) Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖο  $O$  θά ἔχει τετμημένη μηδέν καὶ ὅλα τὰ ἄλλα σημεία τῆς παραβολῆς θά ἔχουν θετικὲς τετμημένες.

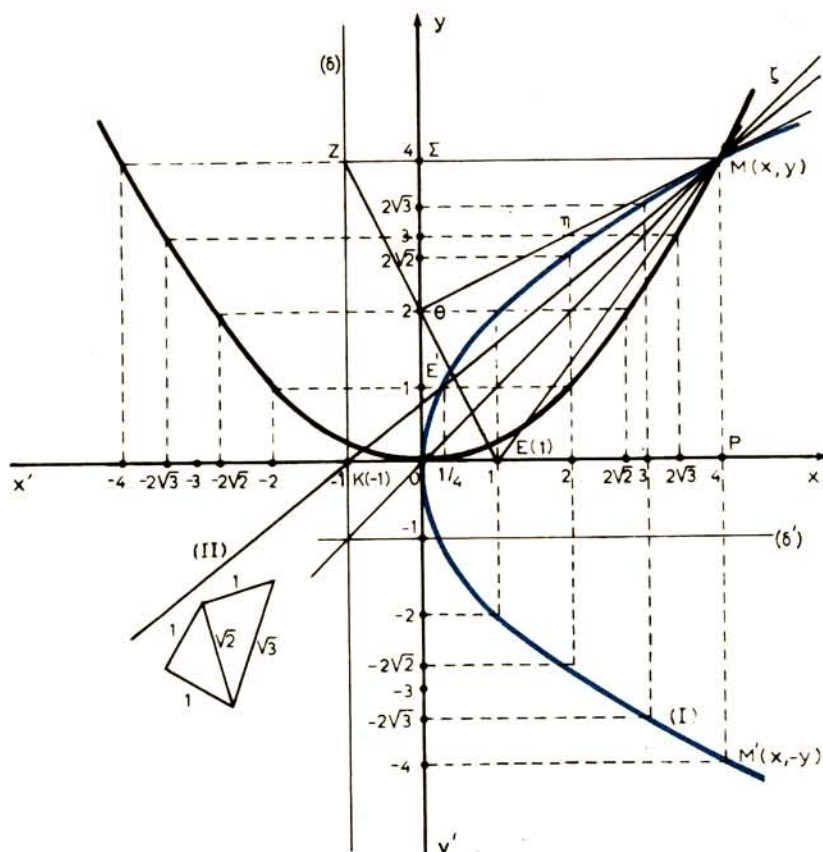
Θά παραστήσουμε τὸ μέτρο τοῦ  $\overrightarrow{KE}$  μὲ  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), ὁπότε οἱ συντεταγμένες τοῦ  $E$  θά εἶναι  $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$  καὶ τοῦ  $K$   $\left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ . ἡ ἐξίσωση τῆς ευθείας (δ) εἶναι τότε  $x = -\frac{\alpha}{2}$ .

\*Ἄς εἶναι  $M(x, y)$  ἑνὰ σημεῖο τοῦ ἡμιεπιπέδου ( $y'y$ ,  $Ox$ ) καὶ  $P, \Sigma$  οἱ προβολές τοῦ  $M$  πάνω στοὺς ἁξόνους  $x'x$  καὶ  $y'y$  ἀντίστοιχα. Ἐστω ἀκόμα ὅτι ἡ  $M\Sigma$  τέμνει τὴ (δ) στὸ σημεῖο  $Z$ .

Γιά ν' ανήκει τό σημείο  $M(x, y)$  στόν τόπο πρέπει καί ἄρκεϊ νά ἔχομε:  
 $|\vec{ZM}| = |\vec{EM}|$  ἢ ἰσοδύναμα  $|\vec{ZM}|^2 = |\vec{EM}|^2$  (3). Ἀλλά  $|\vec{ZM}|^2 = |\vec{KP}|^2 =$   
 $= (\vec{KO} + \vec{OP})^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2$  καί  $|\vec{EM}|^2 = \vec{EP}^2 + \vec{PM}^2 = (\vec{EO} + \vec{OP})^2 + y^2 =$   
 $= \left(-\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 + y^2$ . Γιά ν' ανήκει λοιπόν ἓνα σημείο  $M(x, y)$  στήν παρα-  
 βολή πρέπει καί ἄρκεϊ, σύμφωνα μέ τήν (3), νά ἔχομε:  $\left(-\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 + y^2 =$   
 $= \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2$ , δηλαδή:

$$y^2 = 2ax$$

(4)



Σχ. 8.2.

Όστε, στο σύστημα αξόνων που περιγράψαμε πιο πάνω, η εξίσωση (4) είναι η εξίσωση παραβολής της οποίας η εστία έχει απόσταση  $a$  από τη διευθετούσα.

Η εξίσωση (4) δεν ορίζει συνάρτηση  $y$  του  $x$  διότι σε κάθε  $x > 0$  αντιστοιχίζονται, μέσω της (4), δυο αντίθετες τιμές του  $y$ .

Μπορούμε όμως, αν θέλουμε, να πάρουμε στη θέση της (4) το ισοδύναμο της ζεύγος εξισώσεων  $y = \sqrt{2ax}$  ( $4_I$ ) και  $y = -\sqrt{2ax}$  ( $4_{II}$ ), καθεμιά από τις οποίες ορίζει και μία συνάρτηση  $y$  του  $x$  με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Η ( $4_I$ ) έχει πεδίο τιμών το διάστημα  $[0, +\infty)$  και γραφική παράσταση τόν «άπειρο βραχίονα»  $OM \dots$  (σχ. 8.2), ενώ η ( $4_{II}$ ) έχει πεδίο τιμών το διάστημα  $(-\infty, 0]$  και γραφική παράσταση τόν «άπειρο βραχίονα»  $OM' \dots$ . Προφανώς η ( $4_I$ ) είναι γνησίως αύξουσα ενώ η ( $4_{II}$ ) είναι γνησίως φθίνουσα.

Στό σχήμα 8.2 έχουμε σχεδιάσει (μέ μπλέ χάραξη) ειδικά την παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$  ( $y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$ ,  $a = 2$ ).

Για τη σχεδίαση χρησιμοποιήσαμε τόν παρακάτω πίνακα αντιστοίχων τιμών.

| x | 0 | 1       | 2                       | 3                       | 4       |
|---|---|---------|-------------------------|-------------------------|---------|
| y | 0 | $-2, 2$ | $-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ | $-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ | $-4, 4$ |

Εξάλλου μπορούμε να μαρκάρομε όσα θέλουμε σημεία της παραβολής με τήν ακόλουθη απλή γεωμετρική κατασκευή.

Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο  $Z$  της ( $\delta$ ) και φέρνομε τήν  $EZ$ . Στό  $Z$  ύψώνουμε τήν ευθεία  $Z\Xi$  τήν κάθετη πρὸς τή ( $\delta$ ) και κατασκευάζομε και τή μεσοκάθετη  $\Theta\eta$  του  $EZ$ . Τό σημείο τομής, έστω  $M$ , της  $Z\Xi$  με τή  $\Theta\eta$  είναι σημείο του τόπου, διότι  $MZ = ME$  και  $MZ \perp (\delta)$ . Η ευθεία  $\Theta M$  είναι μάλιστα εφαπτομένη της καμπύλης στό σημείο  $M$ . (Παρατηρείστε ότι τό μέσο του  $EZ$  θά είναι τό σημείο τομής της  $EZ$  με τήν  $y'y$ ).

β) **Αντιστροφή της σχέσεως που ορίζει η εξίσωση  $y^2 = 2ax$  (4) με  $a > 0$ .**  
Εναλλάσσοντας τά γράμματα  $x$  και  $y$  στην εξίσωση (4) παίρνουμε, όπως γνωρίζομε, τήν εξίσωση που μās δίνει τή σχέση τήν αντίστροφη εκείνης που ορίζει η παραπάνω εξίσωση. Έχομε δηλαδή τήν εξίσωση  $y = \frac{1}{2a}x^2$  (5) με  $a > 0$ .

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (5) είναι της μορφής:  $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ , όπου  $\beta = 0$  και  $\gamma = 0$ , και παρέχει συνεπώς συνάρτηση με πεδίο ορισμού τό σύνολο  $\mathbb{R}$  και πεδίο τιμών τό σύνολο  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς (5) θὰ εἶναι, ὅπως γνωρίζουμε, μιά καμπύλη συμμετρικὴ τῆς παραβολῆς μέ ἐξίσωση τήν  $y^2 = 2ax$ , ὡς πρὸς τὴ διχοτόμω  $Oz$  τῶν γωνιῶν  $\widehat{x'Oy'}$  καὶ  $\widehat{x'Oy}$  (σχ. 8.2). Διαπιστώνουμε λοιπόν ὅτι ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς (5) εἶναι μιά παραβολή μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία  $y'y$ , διευθετούσα τῆ (δ') συμμετρικὴ τῆς (δ) ὡς πρὸς τήν  $Oz$  καὶ ἐστία τὸ σημεῖο  $E'$  συμμετρικὸ τοῦ  $E$  ὡς πρὸς τήν  $Oz$  ἐπίσης. Μποροῦμε μάλιστα νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς (5) προκύπτει μέ στροφή τῆς παραβολῆς (4) περὶ τὸ  $O$  κατὰ  $90^\circ$  καὶ μέ φορά τέτοια ὥστε ὁ ἡμιᾶξονας  $Ox$  νά ταυτιστεῖ μέ τὸν ἡμιᾶξονα  $Oy$ .

Στὸ σχῆμα 8.2 ἔχομε σχεδιάσει τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὀρίζει ἡ ἐξίσωση  $y = \frac{1}{4}x^2$ . χρησιμοποίησαμε συνεπῶς τὸν παραπάνω

πίνακα παίρνοντας ὅμως τίς τιμές  $0, \mp 2, \mp 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{3}$  καὶ  $\mp 4$  στὸν ἄξονα  $x'x$  καὶ τίς ἀντίστοιχες τιμές  $0, 1, 2, 3, 4$  στὸν ἄξονα  $y'y$ .

Εἶναι προφανές τώρα ὅτι παραβολή εἶναι ἡ γραφικὴ παράσταση κάθε συναρτήσεως πού προκύπτει ἀπὸ ἐξίσωση τῆς μορφῆς  $y = ax^2 + bx + \gamma =$

$= a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a}$ . ἡ διαφορὰ εἶναι ὅτι ὁ ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς

τῆς παραβολῆς εἶναι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση  $x = -\frac{\beta}{2a}$  πάνω στήν ὁποία βρίσκεται ἡ ἐστία τῆς καμπύλης καὶ πρὸς τήν ὁποία εἶναι κάθετη ἡ διευθετούσα της.

Ἐξάλλου μποροῦμε εὐκόλα νά ἐπαληθεύσουμε ὅτι ἡ ἐστία ἔχει συντεταγμένες

$\left(-\frac{\beta}{2a}, \frac{4a\gamma - \beta^2 + 1}{4a}\right)$  καὶ ἡ διευθετούσα ἔχει ἐξίσωση  $y = \frac{4a\gamma - \beta^2 - 1}{4a}$ .

(Παρατηρεῖστε:  $y = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a} \Leftrightarrow y - \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a} =$

$= a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$ , ὁπότε, θέτοντας  $Y = y - \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a}$  καὶ  $x + \frac{\beta}{2a} = X$ ,

παίρνομε  $X^2 = \frac{1}{a}Y = 2 \cdot \frac{1}{2a}Y$ . Ἔτσι βλέπομε ὅτι ἡ ἐστία ἀπέχει ἀπὸ τήν

κορυφή ἀπόσταση  $Y_1 = \frac{1}{4a}$  καὶ συνεπῶς παίρνομε:

$$y_1 - \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a} = \frac{1}{4a} \Rightarrow y_1 = \frac{4a\gamma - \beta^2 + 1}{4a}$$

### 8.3 Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα.

1. Ἐπιδύοντας τήν ἐξίσωση  $y = ax^2 + bx + \gamma$  ( $a \neq 0$ ) ὡς πρὸς  $x$  νά βρῆτε τὸ πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως πού ὀρίζει αὐτὴ ἡ ἐξίσωση.

\*Ἐχομε:  $y = ax^2 + bx + \gamma \Leftrightarrow ax^2 + bx + \gamma - y = 0$  (I). Ἡ ἐξίσωση

(I) πρέπει νά ἔχει πραγματικές λύσεις ὡς πρὸς  $x$ · γι' αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ διακρίνουσά της  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot (\gamma - y)$  νά μὴ γίνεταί ἀρνητικός ἀριθμός. Δηλαδή πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχομε:  $\beta^2 - 4\alpha(\gamma - y) \geq 0 \iff \beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y \geq 0 \iff 4\alpha y \geq 4\alpha\gamma - \beta^2$  (2). Τώρα διακρίνομε δύο περιπτώσεις, καθόσον  $\alpha > 0$  ἢ  $\alpha < 0$ .

I) Ὃταν  $\alpha > 0$  ἀπὸ τῆ (2) παίρνομε  $y \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$  (2α). Ἡ (2α) μᾶς λέει ὅτι τὸ πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ διάστημα  $\left[ \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}, +\infty \right)$  καί ὅτι ἡ τιμὴ  $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$  εἶναι ἡ ἐλάχιστη. (Μεγίστη δὲν ὑπάρχει).

II) Ὃταν  $\alpha < 0$  ἀπὸ τῆ (2) παίρνομε  $y \leq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$  (2β). Ἡ (2β) μᾶς λέει ὅτι τὸ πεδίο τιμῶν εἶναι τώρα τὸ διάστημα  $\left( -\infty, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \right]$  καί ὅτι ἡ τιμὴ  $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$  εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως. (Ἐλάχιστη δὲν ὑπάρχει).

## 2. Νά ἐπιλυθεῖ γραφικά τὸ σύστημα $y^2 = 4x$ (I) καὶ $5y = 4x + 4$ (II).

Σχεδιάζομε στὸ ἴδιο σύστημα ἀξόνων τὶς γραμμὲς ποὺ παριστάνουν οἱ ἐξισώσεις (I) καὶ (II). Ὅπως πλεόν γνωρίζομε, ἡ (I) εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς μέ ἑστία τὸ σημεῖο  $E(1, 0)$  καὶ διευθετούσα τὴν εὐθεῖα μέ ἐξίσωση  $x = -1$ . ἡ (II) εἶναι ἡ ἐξίσωση εὐθείας (σχ. 8.2). Ὃταν, ὅπως συμβαίνει στὸ παράδειγμά μας, οἱ γραμμὲς (I) καὶ (II) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, τότε τὸ σύστημα ἔχει δύο πραγματικές λύσεις καὶ φυσικά οἱ λύσεις αὐτὲς δίνονται ἀπὸ τὶς συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων. Ἄν ἡ εὐθεῖα ἦταν ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, τότε τὸ σύστημα θά εἶχε δύο ἴσες πραγματικές λύσεις καὶ ἂν εὐθεῖα καὶ καμπύλη δὲν εἶχαν κοινὸ σημεῖο, τὸ σύστημα δὲν θά εἶχε πραγματικές λύσεις.

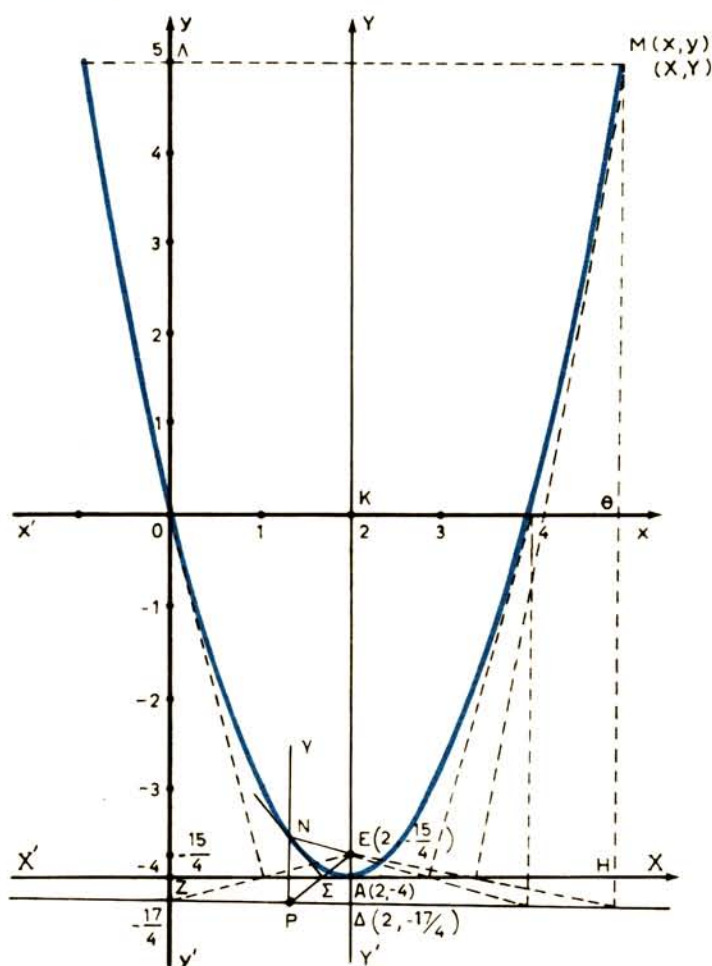
**3.\* Δίνεται ἡ ἐξίσωση  $y = x^2 - 4x$ . Νά σχεδιασθεῖ ἡ παραβολὴ τὴν ὁποία παριστάνει ἀφοῦ πρῶτα προσδιοριστοῦν ἡ ἑστία καὶ ἡ διευθετούσα τῆς παραβολῆς καὶ τοποθετηθοῦν μερικά σημεῖα τῆς καμπύλης μέ γεωμετρικὴ κατασκευὴ.**

Γράφομε πρῶτα τὴν ἐξίσωση ὡς ἐξῆς:  $y = (x - 2)^2 - 4$  (1) καὶ ὀρίζομε σ' ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων τὸ σημεῖο  $A(2, -4)$ . Ἡ εὐθεῖα  $Y'AY$  μέ ἐξίσωση  $x = 2$  εἶναι, ὅπως γνωρίζομε, ἄξονας συμμετρίας τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (1) καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο  $A(2, -4)$  (σχ. 8.3). Γιά  $x = 2$  ἡ συνάρτηση ποὺ ὀρίζει ἡ (1) παίρνει τὴν ἐλάχιστη τιμὴ τῆς  $y = -4$  καὶ τὸ ἀντίστοιχο παραστατικό σημεῖο εἶναι βέβαια τὸ  $A$ .

Φέρνομε τώρα ἀπὸ τὸ  $A$  τὴν εὐθεῖα  $X'AX$  παράλληλη πρὸς τὴν  $x'x$ , ἄρα κάθετη στὴν  $AY$ .

\*Ἄς εἶναι  $M(x, y)$  ἓνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (1). Θέτομε τὸ ἐρώτημα: τί μορφή θά πάρει ἡ (1) ἂν θεωρήσομε σὰν ἄξονες συντεταγμένων τοὺς  $X'AX$  καὶ  $Y'AY$  μέ ἀρχὴ τὸ  $A$ , μοναδιαῖα τμήματα ἴσα πρὸς τὰ μοναδιαῖα

τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος καί μέ θετικές κατευθύνσεις τίς ἴδιες μέ τίς θετικές κατευθύνσεις τῶν πρώτων ἀξόνων;



Σχ. 8.3.

Ἐπειδή εἶναι  $(X, Y)$  οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου  $M(x, y)$  στό νέο σύστημα.

Θά ἔχομε:  $X = \overline{AH} = \overline{K\Theta} = \overline{KO} + \overline{O\Theta} = -2 + x$  καί  $Y = \overline{HM} = \overline{Z\Lambda} = \overline{ZO} + \overline{O\Lambda} = 4 + y$ . ἐπομένως ἡ (1), πού γράφεται καί μέ τή μορφή  $y + 4 = (x - 2)^2$ , θά μετασχηματισθεῖ στήν  $Y = X^2$  (2) ὡς πρός τό νέο σύστημα ἀξόνων (σχ. 8.3).

Ἡ ἐξίσωση ὅμως (2), πού γράφεται  $X^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot Y$ , εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς παραβολῆς μέ ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα  $Y'Y$  τῶν τεταγμένων καί

εστία τό σημείο  $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$ . "Ωστε ή παραβολή πού έχει εξίσωση τή (2) θά έχει

εστία τό σημείο  $E$  μέ συντεταγμένες  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$  ως πρὸς τούς νέους ἄξονες, καί ἄρα

$\left(2, -\frac{15}{4}\right)$  ως πρὸς τούς παλιούς, καί διευθετούσα τήν εὐθεία μέ εξίσωση

$Y = -\frac{1}{4}$  ως πρὸς τό νέο σύστημα, ἄρα τήν εὐθεία μέ εξίσωση

$$y = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4} \text{ ως πρὸς τό ἀρχικό.}$$

Γιά νά βροῦμε γραφικά ἓνα σημείο τῆς παραβολῆς (1) παίρνομε ἓνα σημείο  $P$  τῆς διευθετούσας καί στό  $P$  ὑψώνομε τήν  $P\gamma$  κάθετη πρὸς τήν  $P\Delta$  (τή διευθετούσα). ἀκολουθῶς σχεδιάζομε τήν  $EP$  καί, ἂν  $\Sigma$  εἶναι τό σημείο τομῆς τῆς μέ τήν  $X'AX$ , τότε στό  $\Sigma$  ὑψώνομε κάθετη πρὸς τήν  $EP$ . ἂν  $N$  εἶναι τό σημείο τομῆς αὐτῆς τῆς κάθετης μέ τή  $P\gamma$ , τότε τό  $N$  εἶναι σημείο τῆς παραβολῆς (γιατί;).

**4. Δίνεται ἡ συνάρτηση πού ὀρίζει ἡ εξίσωση  $y = x^2 + 2x + 4$  (I) καί θεωροῦμε καί τίς εὐθεῖες μέ εξισώσεις  $y = \lambda x$  (II). Νά βρεθοῦν ἐκεῖνες οἱ πραγματικές τιμές τῆς παραμέτρου  $\lambda$ , γιά τίς ὁποῖες οἱ εὐθεῖες πού προκύπτουν ἀπό τή (II) εἶναι ἐφαπτόμενες τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (I).**

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (I) τό  $y$  μέ  $\lambda x$  καί παίρνομε τήν ως πρὸς  $x$  εξίσωση  $x^2 + (2 - \lambda)x + 4 = 0$  (III). Γιά νά ἐφάπτεται μιὰ εὐθεία τῆς δέσμης\* (II) στή γραφικὴ παράσταση τῆς (I) πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ εξίσωση (III) νά ἔχει διπλὴ ρίζα. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία καί ἡ καμπύλη (I) θά ἔχουν δυὸ ταυτιζόμενα κοινὰ σημεία. Πρέπει λοιπὸν νά ἔχομε: Διακρίνουσα τῆς (III)  $= (2 - \lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$ . Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου  $\lambda^2 - 4\lambda - 12$  εἶναι  $\lambda_1 = -2$  καί  $\lambda_2 = 6$ .

"Ωστε οἱ εὐθεῖες τῆς δέσμης (II) πού ἐφάπτονται στήν παραβολή (I) ἔχουν εξίσωση  $y = 6x$  καί  $y = -2x$ .

(Νά γίνεи τό σχῆμα καί νά βρεθοῦν τὰ σημεία ἐπαφῆς).

## 8.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνεи ἡ μελέτη καί νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικὲς παραστάσεις στό ἴδιο σύστημα ἁξόνων τῶν συναρτήσεων πού ὀρίζουν οἱ εξισώσεις: I)  $y = x^2 + 2$  II)  $y = x^2 - 2$ . Τί παρατηρεῖτε σχετικὰ μέ τὴ μορφή τῶν δυὸ γραφικῶν παραστάσεων;

2. Νά γίνεи ἡ μελέτη καί ἡ χάραξη τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν σχέσεων πού ὀρίζουν οἱ εξισώσεις:

$$I) y = \frac{1}{3}x^2 \quad II) y^2 = 3x \quad III) y = \frac{1}{3}x^2 + 1 \quad IV) y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

3. Νά ἐπιλυθοῦν γραφικά οἱ ἀνισώσεις:

$$I) -x^2 + x + 20 > 0 \quad II) x^2 - x + 1 < 0 \quad III) x^2 - 3x + 9 > 0.$$

4. Νά γίνεи ἡ μελέτη καί ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὀρίζει ἡ εξίσωση  $y = x^2 - |x|$ .

\* Τό σύνολο τῶν εὐθειῶν (II) ἀποτελεῖ μιὰ δέσμη εὐθειῶν πού διέρχονται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἁξόνων.



5. Θεωρούμε τη γραφική παράσταση (C) της συναρτήσεως που ορίζει η εξίσωση  $y = x^2$ , σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, και μία ευθεία (δ) που διέρχεται από το σημείο  $A(0, +1)$  και έχει συντελεστή διευσθύνσεως λ. 'Η (δ) τέμνει τη (C) στα σημεία  $M_1, M_2$ , τών οποίων οι προβολές στον άξονα  $x'x$  είναι  $B(x_1)$  και  $\Gamma(x_2)$  αντίστοιχως. 'Αποδείξτε ότι: I) τό γινόμενο  $x_1 \cdot x_2$  έχει μία τιμή ανεξάρτητη από τό λ. II) τό τρίγωνο  $BA\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

6. I) Νά προσδιοριστούν τά διαστήματα μονοτονίας και τά πεδία τιμών τών συναρτήσεων  $y = x^2 - 4x + 3$  και  $y = -x^2 + 6x - 5$ . II) Νά γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις στό ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και νά υπολογιστούν οι συντεταγμένες τών κοινών σημείων τους. III) Νά εξηγήσετε πώς, από τίς παραπάνω γραφικές παραστάσεις, παίρνομε τίς λύσεις τής άνισώσεως  $x^2 - 4x + 3 < -x^2 + 6x - 5$ ;

## ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΥΠΟ  $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ . Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

**9.1** Οί συναρτήσεις τίς όποιες όρίζουν εξισώσεις τής μορφής:  $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ . (1)

(όπου:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \neq 0$  και  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  μέ συνέπεια τήν  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ).

'Ερμηνεία τών συνθηκών που επιβάλαμε στίς σταθερές  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

Μέ  $\gamma = 0$  και  $\delta \neq 0$  θά είχαμε  $y = \frac{\alpha}{\delta}x + \frac{\beta}{\delta}$ , δηλαδή εξίσωση ευθείας.

\*Αν  $\gamma \neq 0$ , αλλά  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$ , θά είχαμε  $y = \frac{0}{\gamma x + \delta} = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\delta}{\gamma} \right\}.$$

\*Αν  $\gamma \neq 0$  και  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ , τότε  $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \delta = \beta$ . Καλούμε  $\rho$  τό πηλίκο  $\frac{\alpha}{\gamma}$  και έχομε  $\alpha = \rho\gamma$ ,  $\beta = \rho\delta$ . 'Επομένως στήν προκειμένη περίπτωση είναι

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\rho\gamma x + \rho\delta}{\gamma x + \delta} = \frac{\rho(\gamma x + \delta)}{\gamma x + \delta} = \rho = \text{σταθερά για}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\delta}{\gamma} \right\}.$$

Οί παραπάνω συνθήκες έχουν λοιπόν επιβληθεί για νά έχομε ένα νέο τύπο συναρτήσεως. 'Η συνάρτηση του νέου αυτού τύπου (1) λέγεται **όμογραφική**.

α) 'Η **άπλούστερη εξίσωση τής μορφής (1)** είναι **προφανώς** ή εξίσωση  $y = \frac{\beta}{x}$  (2), μέ  $\beta \neq 0$ , και μέ τή συνάρτηση που παρέχει αυτή ή εξίσωση θά ασχοληθοῦμε άρχικά.

**Πεδίο ορισμού** της συναρτήσεως (2) είναι τό σύνολο  $\mathbf{R} - \{0\}$ . έπειδή  
 $y = \frac{\beta}{x} \implies x = \frac{\beta}{y}$ , συμπεραίνομε ότι καί τό πεδίο τιμών είναι τό ίδιο σύνολο  $\mathbf{R} - \{0\}$ .

Θά μελετήσουμε τή συνάρτηση ώς πρός τή μονοτονία πρώτα στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  καί ύστερα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , διακρίνοντας δύο περιπτώσεις, καθόσον  $\beta > 0$  καί  $\beta < 0$ .

I)  $\beta > 0$ :  $x_1 < x_2 < 0 \implies \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} < 0 \implies \frac{\beta}{x_2} < \frac{\beta}{x_1} < 0 \implies y_2 < y_1$ . Άρα στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  ή συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα**.

Περνάμε τώρα στο δεύτερο διάστημα. Έχομε:  $0 < x_1 < x_2 \implies 0 < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \implies 0 < \frac{\beta}{x_2} < \frac{\beta}{x_1} \implies y_2 < y_1$ . Άρα καί στο διάστημα  $(0, +\infty)$  ή συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα**.

Η συνάρτηση δέν παρουσιάζει τοπικά άκρότατα, διότι, σέ καθένα από τά διαστήματα, όπου είναι ορισμένη, ή **μονοτονία της δέν αλλάζει είδος**.

Όταν ή  $x$  παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(-\infty, 0)$ , τότε καί ή  $y = \frac{\beta}{x}$  (μέ  $\beta > 0$ ) παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(-\infty, 0)$ . Όταν ή  $x$  παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(0, +\infty)$ , τότε καί ή  $y$  παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(0, +\infty)$ .

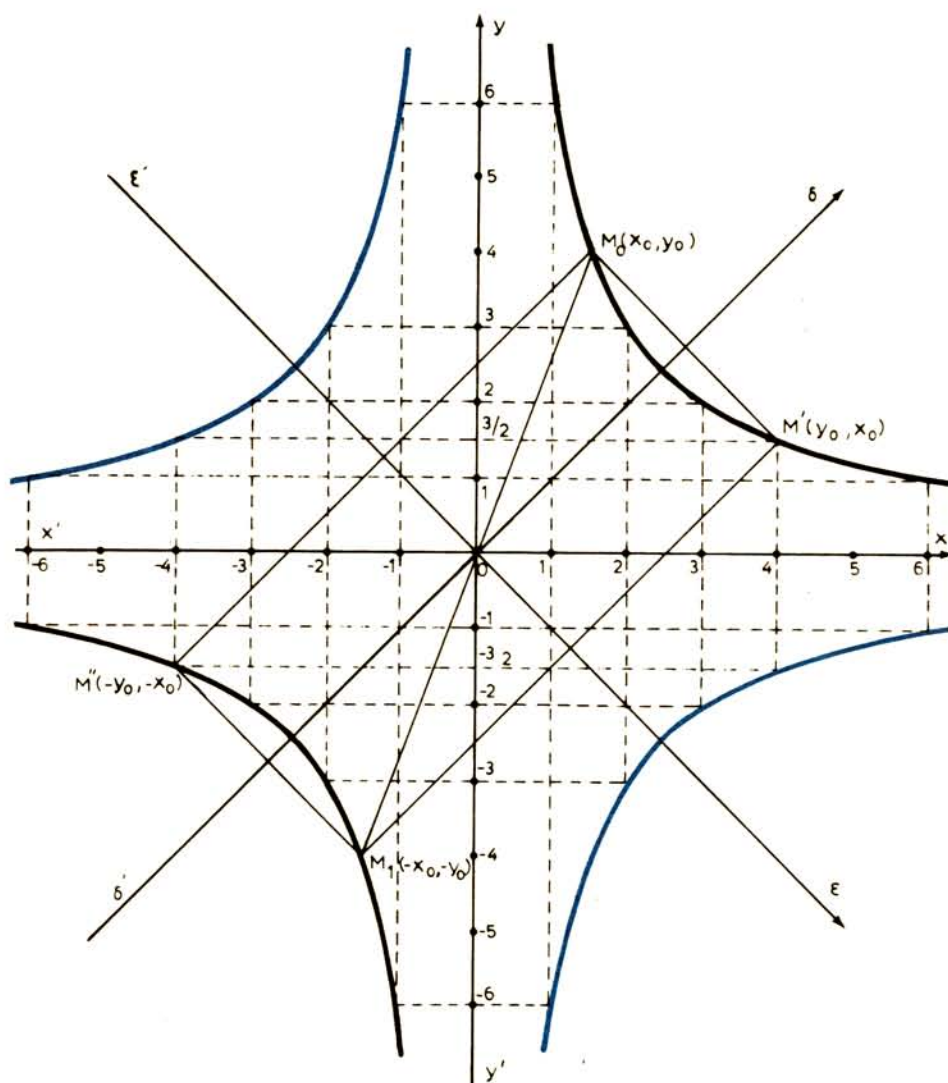
Αυτό σημαίνει ότι ή γραφική παράσταση της συναρτήσεως αποτελείται από δύο μέρη (κλάδους) από τά όποια τό ένα βρίσκεται μέσα στην τρίτη γωνία  $x'Oy'$  καί τό άλλο μέσα στην πρώτη γωνία  $x'Oy$  των άξόνων (σχ. 9.1α)

II)  $\beta < 0$ : Μέ τόν ίδιο τρόπο έργασίας, όπως στην πρώτη περίπτωση ( $\beta > 0$ ), βγάζομε τά άντιστοιχώς όμοια συμπεράσματα. Δηλαδή: Στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  είναι τώρα ή συνάρτηση **γνησίως αύξουσα** καθώς επίσης καί στο διάστημα  $(0, +\infty)$ . Δέν παρουσιάζει τοπικά άκρότατα, διότι καί στα δύο διαστήματα διατηρεί τό είδος της μονοτονίας της.

Όταν ή  $x$  παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(-\infty, 0)$  τώρα ή  $y = \frac{\beta}{x}$  παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(0, +\infty)$  καί όταν ή  $x$  παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(0, +\infty)$  ή  $y$  παίρνει τίς τιμές του διαστήματος  $(-\infty, 0)$  (σχ. 9.1α: μπλέ χάραξη).

Ο άξονας  $y'y$  είναι **άσύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως**, διότι όταν  $x \xrightarrow{\text{τείνει στο}} 0$  από άρνητικές (άντίστοιχα θετικές) τιμές, τότε ή παράσταση  $\frac{\beta}{x}$  **τείνει στο  $-\infty$  (άντίστοιχα στο  $+\infty$ )** έφόσον  $\beta > 0$  καί **τείνει στο  $+\infty$  (άντίστοιχα στο  $-\infty$ )** άν  $\beta < 0$ .

Ο άξονας επίσης  $x'$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως, διότι όταν  $x \rightarrow +\infty$  ή  $x \rightarrow -\infty$ , τότε  $y \rightarrow 0$ .



Σχ. 9.1α.

Διατυπώνουμε μερικές ακόμα σημαντικές παρατηρήσεις σχετικά με τη γραφική παράσταση της συνάρτησεώς μας.

Ἐὰς θεωρήσουμε ἓνα ζευγὸς ἀντίστοιχων τιμῶν  $(x_0, y_0)$  καὶ τὸ σημεῖο  $M_0(x_0, y_0)$  ποὺ ἀντιστοιχίζεται σ' αὐτό τὸ ζευγὸς· τότε θὰ ἔχομε:

$$y_0 = \frac{\beta}{x_0} \iff y_0 x_0 = \beta.$$

Τὸ σημεῖο  $M'(x' = y_0, y' = x_0)$  εἶναι συμμετρικὸ τοῦ  $M_0$  ὡς πρὸς τὴν δ'δ (σχ. 9.1α) διχοτόμο τῶν γωνιῶν  $\widehat{x'Oy'}$  καὶ  $\widehat{x'Oy}$ · τὸ  $M''(x'' = -y_0, y'' = -x_0)$  εἶναι συμμετρικὸ τοῦ  $M_0$  ὡς πρὸς τὴν ε'ε διχοτόμο τῶν γωνιῶν  $\widehat{y'Ox'}$  καὶ  $\widehat{y'Ox}$ · τὸ σημεῖο τέλος  $M_1(x_1 = -x_0, y_1 = -y_0)$  εἶναι συμμετρικὸ τοῦ  $M_0$  ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. ἔχομε ὁμῶς  $y_0 x_0 = \beta \iff x_0 y_0 = \beta$ , δηλαδή  $y'x' = \beta$ ·  $y_0 x_0 = \beta \iff x_0 y_0 = \beta \iff (-x_0) \cdot (-y_0) = \beta$ , δηλαδή  $y'' \cdot x'' = \beta$ ·  $y_0 \cdot x_0 = \beta \iff (-y_0)(-x_0) = \beta$ , δηλαδή  $y_1 x_1 = \beta$ .

Ὡστε ἂν  $M_0$  εἶναι ἓνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο  $y = \frac{\beta}{x}$ , τότε τὰ συμμετρικά τοῦ  $M_0$  ὡς πρὸς τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων καὶ τὸ συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴ ἀνήκουν ἐπίσης στὴ γραφικὴ παράσταση. Δηλαδή ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως ἔχει τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων ὡς ἄξονες (ὀρθῆς) συμμετρίας καὶ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων κέντρο συμμετρίας (σχ. 9.1α).

Ὑστερα ἀπ' ὅλα τὰ παραπάνω, μέ τὴ χρησιμοποίησι καὶ μερικῶν παραστατικῶν σημείων τῶν ὁποίων ἔχομε προσδιορίσει τίς συντεταγμένες, σχεδιάζομε τὴ γραφικὴ παράσταση.

Στὸ σχῆμα 9.1α, χρησιμοποιώντας καὶ τὸν παρακάτω πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν, ἔχομε σχεδιάσει τίς γραφικὲς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων:

$$y = \frac{6}{x} \quad \text{καὶ} \quad y = -\frac{6}{x}.$$

|   |    |    |    |                |    |
|---|----|----|----|----------------|----|
| x | 1  | 2  | 3  | 4              | 6  |
| y | 6  | 3  | 2  | $\frac{3}{2}$  | 1  |
| y | -6 | -3 | -2 | $-\frac{3}{2}$ | -1 |

**Παρατήρηση:** Ἐπειδὴ  $y = \frac{\beta}{x} \iff x = \frac{\beta}{y}$ , βλέπομε ὅτι ἡ ἀντί-

στροφή συνάρτηση ταυτίζεται μέ τὴν ἀρχική, πράγμα ἐξάλλου ποὺ φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴ γραφικὴ παράσταση, ἡ ὁποία ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴ διχοτόμο τῆς πρώτης καὶ τρίτης γωνίας τῶν ἀξόνων.

β) Στηριζόμενοι στα προηγούμενα συμπεράσματα θά μελετήσουμε τώρα τη γενική μορφή  $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$  (3) της όμογραφικής συναρτήσεως.

Παρατηρούμε άρχικά ότι πεδίο ορισμού της συναρτήσεως είναι τό σύνολο  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$ . Γιά νά βρούμε τό πεδίο τιμών ἐπιλύομε τήν ἐξίσωση  $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$  ὡς πρός  $x$  καί παίρνομε  $x = \frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha}$ . Ἐτσι βρίσκομε ὡς πεδίο τιμών τό σύνολο  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$ . (γιατί;).

Γιά τήν παραπέρα μελέτη τῆς συναρτήσεως γράφομε τήν ἐξίσωση (3) μέ τήν ἐξῆς μορφή:  $y = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}}{\gamma \left( x + \frac{\delta}{\gamma} \right)} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \frac{\delta}{\gamma}}$   
δηλαδή γράφομε:  $y = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\kappa}{x + \frac{\delta}{\gamma}}$  (4).

$\left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)$  εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ  $\alpha x + \beta$  διά τοῦ  $\gamma x + \delta$  καί  $\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}$  τό ὑπόλοιπο· θέσαμε ἐξάλλου  $\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} = \kappa$ .

Θά καλέσομε  $Y$  τήν παράσταση  $y - \frac{\alpha}{\gamma}$  καί  $X$  τήν  $x + \frac{\delta}{\gamma}$ . ἔτσι ἡ (4) θά γραφεῖ:  $Y = \frac{\kappa}{X}$  (5).

Παρατηρώντας τήν (5) σέ συνδυασμό μέ τήν (4) καί λαμβάνοντας ὑπόψη τίς προηγούμενες διαπιστώσεις τίς σχετικές μέ τή μορφή (5) καταλήγομε στά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

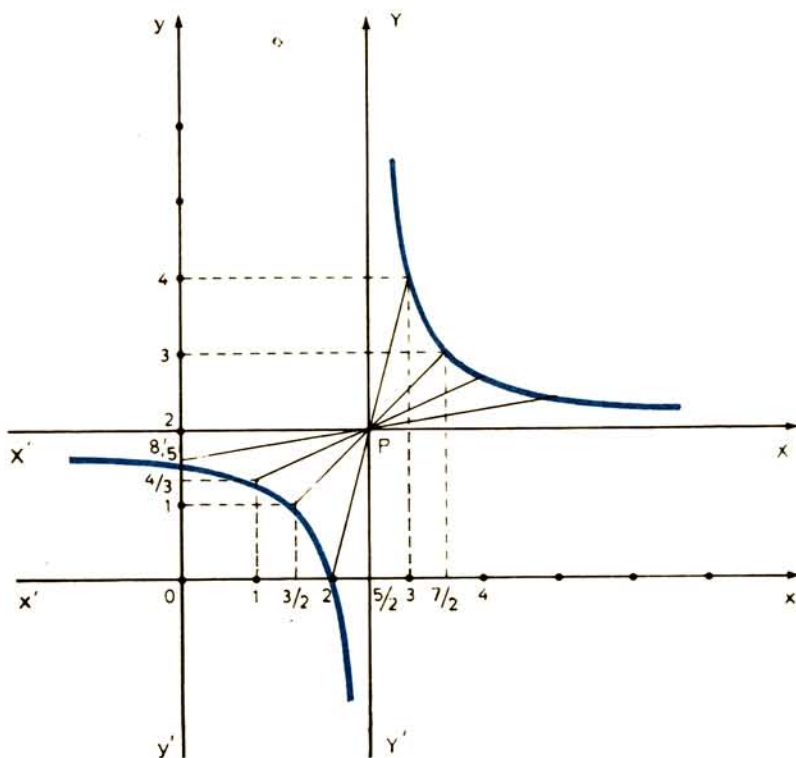
Ἡ γραφική παράσταση τῆς (4) ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία  $X'X$  (σχ. 9.1 β) μέ ἐξίσωση  $y = \frac{\alpha}{\gamma}$  (ἔχομε  $y \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}$ , ὅποτε  $Y \rightarrow 0$ , ὅταν  $x \rightarrow \pm \infty$ , ὅποτε καί  $X \rightarrow \pm \infty$ )· αὕτη εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα  $x'x$ . Ἐπίσης ἡ εὐθεία  $Y'Y$  μέ ἐξίσωση  $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ , παράλληλη τῆς  $y'y$ , εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς γραφικῆς παραστάσεως, ἐπειδή ὅταν  $x \rightarrow -\frac{\delta}{\gamma}$ , ὅποτε  $X \rightarrow 0$ , τότε  $y$  καί  $Y \rightarrow \pm \infty$ .

Ὅταν  $\kappa > 0$  ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα καί στά δύο δια-

στήματα  $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$  και  $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$  τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς. Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους ποὺ βρίσκονται μέσα στὶς γωνίες  $XPY$  καὶ  $X'PY'$  τῶν ἀσυμπτῶτων (σχ. 9.1β)

Ὄταν  $\kappa < 0$  ἡ συνάρτηση εἶναι **γνησίως αὐξουσα** καὶ στά δύο διαστήματα  $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$  καὶ  $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$  καὶ ἡ γραφικὴ τῆς παράσταση ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους μέσα στὶς γωνίες  $YPX'$  καὶ  $Y'PX$  τῶν ἀσυμπτῶτων.

Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὰ δύο μέρη τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀσυμπτῶτων καὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο τομῆς τῶν ἀσυμπτῶτων.



Σχ. 9.1β.

Στὸ σχῆμα (9.1β) χρησιμοποιώντας τὰ παραπάνω συμπεράσματα καὶ τὸν παρακάτω πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν, ἔχομε σχεδιάσει τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως ποὺ ὁρίζει ἡ ἐξίσωση:

$$y = \frac{4x-8}{2x-5} = 2 + \frac{2}{2x-5}.$$



Θέλουμε τώρα στο παραπάνω σύστημα νά βρούμε τή σχέση πού ικανοποιούν οί συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ τόπου μας καί μόνον αὐτές· νά βρούμε δηλαδή τήν ἐξίσωση τῆς ὑπερβολῆς. Ἐφαρμόζοντας ἀνάλογη διαδικασία μ' ἐκείνη πού χρησιμοποιήσαμε γιά νά προσδιορίσουμε τήν ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως βρίσκουμε:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2 - a^2} = 1} \quad (6)$$

ἤ, θέτοντας  $y^2 - a^2 = \beta^2$ ,

$$(7\alpha) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \iff \boxed{\beta^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 \beta^2} \quad (7\beta)$$

β) Ἡ ὑπερβολή γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων.

\*Αν ἐπιλύσουμε τήν (7β) ὡς πρὸς  $y$  παίρνομε:

$$y = \frac{\beta}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (8\alpha) \quad \text{καί} \quad y = -\frac{\beta}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (8\beta).$$

Παρατηροῦμε συνεπῶς ὅτι ἡ ἐξίσωση 7(α ἢ β) δέν ὀρίζει συνάρτηση  $y$  τοῦ  $x$ , διότι σέ μιά κατάλληλη τιμή τῆς μεταβλητῆς  $x$  ἀντιστοιχίζονται δύο ἀντίθετες τιμές τῆς  $y$  (οἱ 8α, 8β).

Καθεμιά ὁμως ἀπό τίς σχέσεις (8α), (8β), πού μαζί ἀποτελοῦν ἓνα ζευγάρι ἐξισώσεων ἰσοδύναμο πρὸς τήν (7β), ὀρίζει συνάρτησή μέ **κοινό πεδίο ὀρισμοῦ τήν ἔνωση διαστημάτων**  $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ .

(Πράγματι:  $x^2 - a^2 \geq 0 \iff x^2 \geq a^2 \iff |x| \geq |a| \iff \{x \geq a \quad \text{ἢ} \quad x \leq -a\}$ ).

Πεδίο τιμῶν τῆς (8α) εἶναι τό διάστημα  $[0, +\infty)$  καί τῆς (8β) τό διάστημα  $(-\infty, 0]$  (γιατί;).

Ἡ καμπύλη ἀποτελεῖται συνολικά ἀπό δύο πανομοιότυπα μέρη πού καλοῦμε κλάδους ὁ καθένας ἀπό τούς ὁποίους ἔχει δύο «ἀπεριόριστους βραχίονες», συμμετρικούς ὡς πρὸς τόν ἄξονα  $x'x$ .

Ὁ δεξιὰ κλάδος τῆς ὑπερβολῆς «ἀρχίζει» ἀπό τό σημεῖο  $A(a, 0)$  [δεξιὰ κορυφή τῆς ὑπερβολῆς: (σχ. 9.2α)] καί «ἀναπτύσσεται» στά δεξιὰ τοῦ ἄξονα  $y'y$ . Ὁ ἀριστερά κλάδος εἶναι συμμετρικός τοῦ προηγουμένου ὡς πρὸς τόν ἄξονα  $y'y$  καθὼς καί ὡς πρὸς τήν ἀρχή τῶν ἄξόνων καί ἔχει κορυφή τό σημεῖο  $A_1(-a, 0)$ .

Οἱ βραχίονες  $AM_0 \dots$ , καί  $AM'' \dots$ , αὐτοὶ δηλαδή πού κεῖνται στό ἡμιεπίπεδο  $y > 0$  (σχ. 9.2α), ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (8α), ἐνῶ οἱ ἄλλοι δύο βραχίονες ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση τῆς (8β).

Ἡ εὐθεία  $\lambda'\lambda$  μέ ἐξίσωση  $y = \frac{\beta}{a} x$  (σχ. 9.2α) εἶναι μιά ἀσύμπτωτη τῆς ὑπερβολῆς.



Πράγματι: Ὡς εἶναι  $M(x, y)$  ἓνα σημεῖο τοῦ δεξιά ἄνω βραχίονα τῆς ὑπερβολῆς καὶ  $MK \perp x'x$  [ $K \in (x'x)$ ],  $M\Delta \perp \lambda'\lambda$ .

Ἄν  $\Sigma$  τὸ σημεῖο τομῆς τῆς  $MK$  μετὰ τὴν  $\lambda'\lambda$ , τότε θὰ ἔχομε  $\overline{K\Sigma} = \frac{\beta}{\alpha} x$ ,

$$\overline{KM} = y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \quad \text{καὶ} \quad \overline{M\Sigma} = \overline{K\Sigma} - \overline{KM} = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} > 0.$$

Ἀλλὰ  $M\Delta = M\Sigma \cdot \eta\mu \widehat{M\Sigma\Delta} = M\Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu \widehat{x\hat{O}\Sigma} = M\Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu \omega$  ἄρα:

$$\begin{aligned} M\Delta &= \left( \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \right) \sigma\upsilon\nu \omega = \frac{\beta \sigma\upsilon\nu \omega}{\alpha} \cdot (x - \sqrt{x^2 - \alpha^2}) = \\ &= \frac{\beta \sigma\upsilon\nu \omega}{\alpha} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - \alpha^2})(x + \sqrt{x^2 - \alpha^2})}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\beta \sigma\upsilon\nu \omega}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \\ &= \epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu \omega \cdot \frac{\alpha^2}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} \cdot \eta\mu \omega. \end{aligned}$$

Ὅταν ὅμως  $x \rightarrow \infty$ , τότε  $\frac{\alpha^2}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} \rightarrow 0$ , ὁπότε καὶ  $M\Delta \rightarrow 0$ .

Ὅμοια ἀποδεικνύομε ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα  $\kappa'\kappa$ , συμμετρικὴ τῆς  $\lambda'\lambda$  ὡς πρὸς τοὺς ἄξονες, μετὰ ἐξίσωση  $y = -\frac{\beta}{\alpha} x$ , εἶναι μιά δευτέρη ἀσύμπτωτη τῆς ὑπερβολῆς.

Γιὰ νὰ σχεδιάσουμε μιά ὑπερβολή, τῆς ὁποίας γνωρίζομε τὴν ἐστιακὴ ἀπόσταση  $E_1E = 2\gamma$  καὶ τὸ τμήμα  $2\alpha$  (ἢ τὰ μέτρα αὐτῶν τῶν τμημάτων), παίρνομε δυὸ σημεῖα  $E_1, E$ , σὲ ἀπόσταση  $2\gamma$ , καὶ ἐκλέγομε ὅπως παραπάνω τοὺς ἄξονες συντεταγμένων· ἀκολουθῶς σχεδιάζομε τὶς ἀσύμπτωτες καὶ τοποθετοῦμε καὶ τὶς κορυφές  $A(\alpha, 0), A_1(-\alpha, 0)$ . Ὑστερα μέσω τῶν ἐξισώσεων (8α) καὶ (8β) προσδιορίζομε μερικὰ σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς καὶ τελικὰ προβαίνομε στὴ χάραξη τῆς γραμμῆς.

Μποροῦμε ἐξάλλου νὰ προσδιορίσουμε γραφικὰ ὅσα θέλομε σημεῖα τῆς καμπύλης, ἐφαρμόζοντας τὴν ἀκόλουθη ἀπλή γεωμετρικὴ κατασκευή. Μὲ κέντρο τὴ μιά ἐστία, ἔστω τὴν  $E_1$ , καὶ ἀκτῖνα ἴση μετὰ  $2\alpha$  γράφομε κύκλο. Ἄν  $P$  εἶναι ἓνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου ( $E_1, 2\alpha$ ), μὴ κείμενο πάνω στὸν ἄξονα  $x'x$ , φέρομε τὴ μεσοκάθετη  $\Theta\eta$  τοῦ  $EP$  καὶ ὀρίζομε τὸ σημεῖο τομῆς τῆς  $M_0$  (σχ. 9.2α). μετὰ τὴν εὐθεῖα  $E_1P$ . Τὸ σημεῖο  $M_0$  εἶναι ἓνα σημεῖο τῆς ὑπερβολῆς, διότι  $M_0P = M_0E$  καὶ συνεπῶς  $|M_0E_1 - M_0E| = |M_0E_1 - M_0P| = E_1P = 2\alpha$ .

Ἄν σὲ μιά ὑπερβολὴ ἔχομε εἰδικότερα  $\gamma = a\sqrt{2}$ , ὁπότε  $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$ , τότε ἡ ἐξίσωσή της γίνεται:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2 = \frac{\gamma^2}{2}} \quad (9)$$

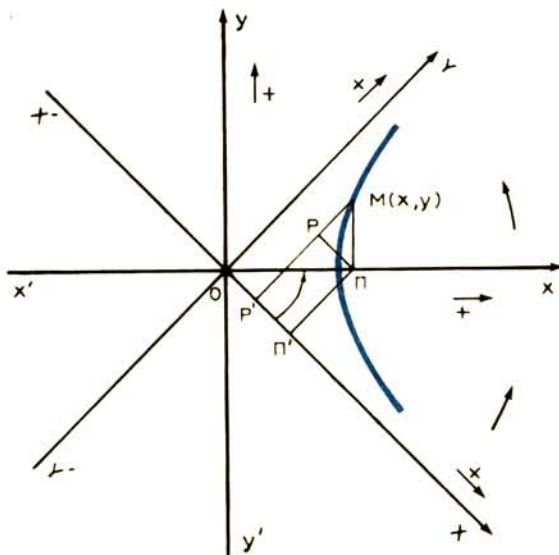
Μιά τέτοια υπερβολή ονομάζεται **ισοσκελής** και οι ασύμπτωτες αυτής είναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων, και συνεπῶς κάθετες μεταξύ τους.

\*Θά ἀναζητήσουμε τώρα τὴν ἐξίσωση τῆς **ισοσκελοῦς** υπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονες συντεταγμένων τῆς ὀρθογώνιες ασύμπτωτες αὐτῆς.

Παίρνουμε γιὰ ἄξονα τετμημένων  $X'OX$  τὴν ασύμπτωτη πού ἔχει ἐξίσωση (ὡς πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονες)  $y = -x$  και γιὰ ἄξονα τεταγμένων  $Y'OY$  τὴν ασύμπτωτη μέ ἐξίσωση  $y = x$  (σχ. 9.2β).

Τῖς θετικές φορές  $\vec{OX}$  και  $\vec{OY}$  τῖς ἐκλέγουμε ἔτσι ὥστε νά εἶναι  $\widehat{XOx} = +45^\circ$  και  $\widehat{xOY} = +45^\circ$ .

Ἐνα σημεῖο  $M(x, y)$  τοῦ ἐπιπέδου θά ἔχει ὡς πρὸς τό νέο σύστημα  $XOY$  συντεταγμένες  $(X, Y)$  πού τή σχέση τους πρὸς τῖς παλιές  $(x, y)$  τή βρίσκουμε εὐκόλα παρατηρῶντας τό σχῆμα 9.2β.



Σχ. 9.2β.

$$\begin{aligned} \text{Ἀκριβῶς ἔχομε: } X &= \overline{OP'} = \overline{OP} + \overline{P'P} = \overline{OP} - \overline{P'P} = \overline{OP} - \overline{PP'} = \\ &= \overline{OP} \cdot \sin 45^\circ - \overline{PM} \cdot \eta\mu 45^\circ = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x - y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

( $MP' \perp X'X$ ,  $MP \perp x'x$ ,  $PP' \perp X'X$  και  $PP' \parallel X'X$ ).

$$\begin{aligned} Y &= \overline{P'M} = \overline{P'P} + \overline{PM} = \overline{P'P} + \overline{PM} = \overline{OP} \cdot \eta\mu 45^\circ + \overline{PM} \cdot \sin 45^\circ = \\ &= x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x + y}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ὡστε ἡ μετάβαση ἀπὸ τῖς παλιές συντεταγμένες  $(x, y)$ , ἑνὸς σημείου  $M$  τοῦ ἐπιπέδου, στῖς νέες συντεταγμένες του  $(X, Y)$  γίνεται βάσει τῶν σχέσεων

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x-y}{\sqrt{2}} & (10\alpha) \\ Y &= \frac{x+y}{\sqrt{2}} & (10\beta) \end{aligned} \right\} \text{ που ισοδυναμούν με τις } \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$$

Όπως είδαμε παραπάνω οι συντεταγμένες  $(x, y)$  — ως προς τό αρχικό σύστημα  $xoy$  — κάθε σημείου  $M$  της ισοσκελούς υπερβολής ικανοποιούν την εξίσωση  $x^2 - y^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = \alpha^2 = \frac{\gamma^2}{2}$  (11).

Εισάγοντας στην (11) τις εκφράσεις των  $x-y$  και  $x+y$ , από τις (10α), (10β), μέσω των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, παίρνουμε τη σχέση  $X \cdot Y = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\gamma^2}{4}$ .

Από την τελευταία σχέση ποριζόμαστε την  $Y = \frac{\alpha^2}{2X}$ , ή όποια μᾶς λείπει ότι η μεταβλητή  $Y$  είναι μία όμογραφική συνάρτηση της μεταβλητῆς  $X$ .

Μπορούμε λοιπόν, ἄν ἀναφερθοῦμε σέ ὅσα ἐκθέσαμε στίς παραγράφους 9.1 (α) καί 9.1 (β), νά συμπεράνουμε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ὁμογραφικῶν συναρτήσεων, πού σχεδιάσαμε ἐκεῖ, εἶναι **ισοσκελεῖς υπερβολές**.

**Σημείωση:** Ὁ κύκλος, ἡ ἔλλειψη, ἡ παραβολή καί ἡ ὑπερβολή λέγονται μαζί **κωνικές τομές**. Διότι, ὅπως ἀποδεικνύεται, μποροῦμε νά πάρομε αὐτές τίς καμπύλες ὡς τομές ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἀπό ἐπίπεδο.

### 9.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. *Νά γίνει ἡ μελέτη καί νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού ὀρίζουν οἱ ἐξισώσεις:* I)  $y = \frac{3}{2x-1}$  καί II)  $y = \frac{x-1}{x}$ .

I) Ἡ συνάρτηση ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο  $\mathbb{R} - \{0\}$  (γιατί;). Εἶναι γνησίως φθίνουσα καί στά δύο διαστήματα  $\left( -\infty, \frac{1}{2} \right)$ ,  $\left( \frac{1}{2}, +\infty \right)$  τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Ἐχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες  $y = 0$  (τόν ἄξονα  $x'x$ ) καί  $x = \frac{1}{2}$ . Ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους μέσα στήν πρώτη καί τρίτη γωνία τῶν ἀσυμπτῶτων.

Χρησιμοποιώντας καί τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν νά χαράξετε τή γραφική παράσταση.

|   |                |    |    |   |   |
|---|----------------|----|----|---|---|
| x | -2             | -1 | 0  | 1 | 2 |
| y | $-\frac{3}{5}$ | -1 | -3 | 3 | 1 |

II) Έχομε  $y = \frac{x-1}{x} = 1 + \frac{-1}{x}$ . 'Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού τό

σύνολο  $\mathbb{R} - \{0\}$  και πεδίο τιμών τό σύνολο  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Είναι γνησίως αύξουσα και στά δυό διαστήματα  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  του πεδίου ορισμού της. Έχει ασύμπτωτες τīs ευθείες  $y = 1$  και  $x = 0$  (τόν άξονα  $y'y$ ).

'Η γραφική της παράσταση άποτελείται από δυό κλάδους μέσα στη δεύτερη και τέταρτη γωνία τών άσυμπτώτων. Χρησιμοποιώντας και τόν παρακάτω πίνακα τιμών νά χαράξετε τή γραφική παράσταση.

|   |               |               |    |                |   |               |
|---|---------------|---------------|----|----------------|---|---------------|
| x | -3            | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 2             |
| y | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | 2  | 3              | 0 | $\frac{1}{2}$ |

2.\* α) Νά γίνει ή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως πού όρίζει ή εξίσωση  $y = \frac{-6x-7}{2x+4}$  (I). Παρατηρώντας ότι αυτή ή γραφική παράσταση είναι μιά ίσοσκελής υπερβολή νά καθορίσετε τīs έστίες της.

β) Νά βρεθούν οι εξισώσεις τών ευθειών πού διέρχονται από τό σημείο  $(0, -\frac{7}{4})$  και εφάπτονται στην υπερβολή (I).

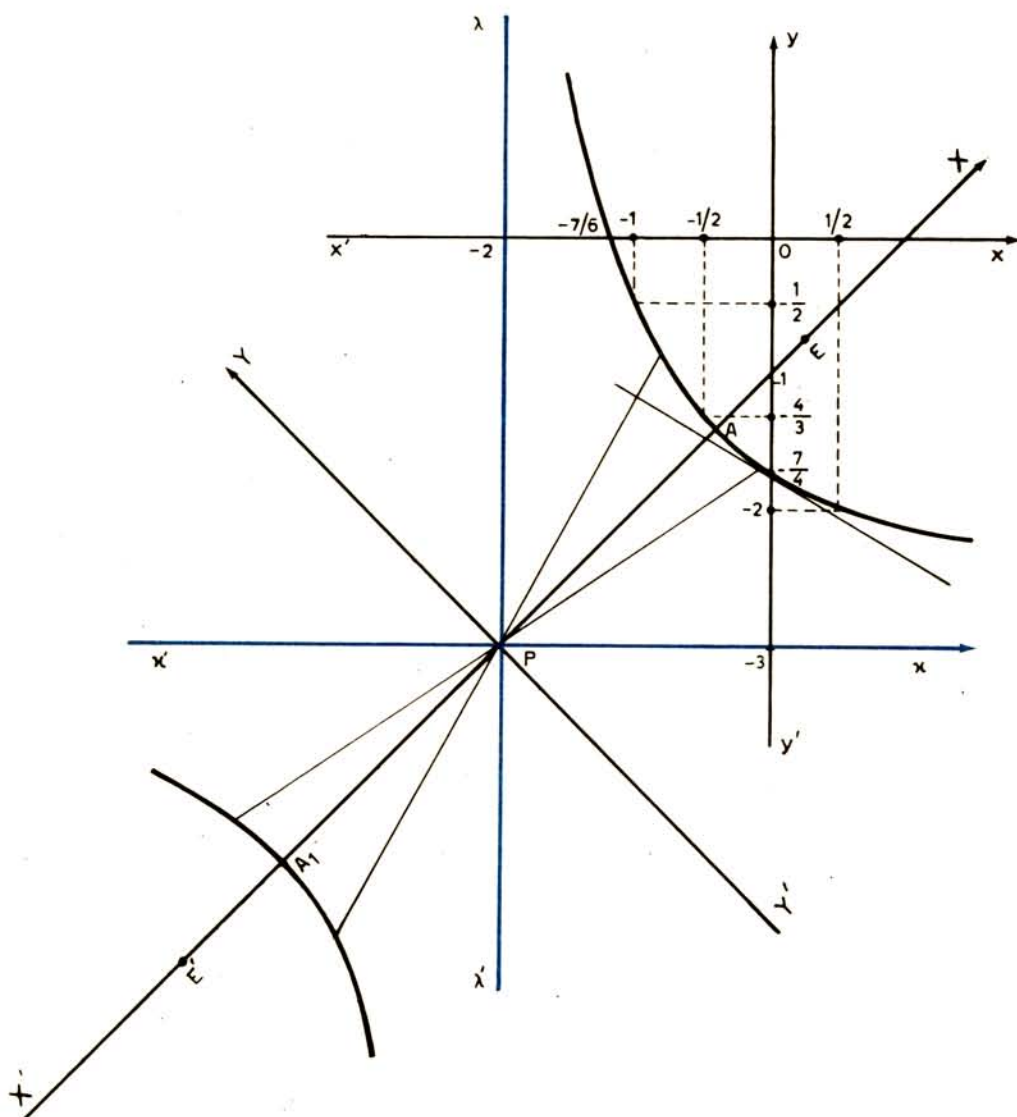
α) Γράφομε άρχικά τήν (I) ως εξής:  $y = -3 + \frac{5}{2x+4}$  (II). 'Ασύμπτωτες τής καμπύλης είναι οι ευθείες  $y = -3$  και  $x = -2$  (σχ. 9.3). Τά πεδία ορισμού και τιμών είναι άντιστοίχως τά σύνολα  $\mathbb{R} - \{-2\}$  και  $\mathbb{R} - \{-3\}$ .

Γιά τή σχεδίαση χρησιμοποιήθηκε και ό παρακάτω πίνακας άντίστοιχων τιμών:

|   |                |                |                |                |               |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| x | $-\frac{7}{6}$ | -1             | $-\frac{1}{2}$ | 0              | $\frac{1}{2}$ |
| y | 0              | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{7}{4}$ | -2            |

\*Αν θέσομε  $y+3 = \lambda$  και  $2x+4 = 2\kappa$ , τότε ή εξίσωση (II) γράφεται  $\kappa\lambda = \frac{5}{2}$  (III). Με άξονες συντεταγμένων τīs άσύμπτωτες  $\kappa'\kappa$  και  $\lambda'\lambda$  ή (III) θά είναι ή εξίσωση τής γραφικής παραστάσεως τής (I). Είναι λοιπόν ή καμπύλη μιά ίσοσκελής υπερβολή, τής όποιίας οι έστίες  $E_1$  και  $E$  κείνται στη διχοτόμο  $X'X$  τής γωνίας  $\widehat{\kappa'P\lambda}$  και άπέχουν από τό σημείο τομής P τών  $\kappa'\kappa$  και  $\lambda'\lambda$  άπόσταση ίση με  $\gamma = \sqrt{2 \cdot 5}$  (διότι  $\frac{\gamma^2}{4} = \frac{5}{2}$ ).

'Η εξίσωση τής καμπύλης με άξονες συντεταγμένων  $X'X$  και  $Y'Y$ , διχοτόμους τών γωνιών τών άσυμπτώτων, είναι  $X^2 - Y^2 = 5$  ( $\alpha^2 = \frac{\gamma^2}{2}$ ).



Σχ. 9.3.

β) \*Ας είναι  $\delta$  ο συντελεστής διεύθυνσεως μιᾶς εὐθείας πού διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο  $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$ . τότε ἡ ἐξίσωση αὐτῆς τῆς εὐθείας θά εἶναι:  $\frac{y + \frac{7}{4}}{x} =$   
 $= \delta \iff y = \delta x - \frac{7}{4} \quad (1).$

Τά κοινά σημεία τῶν γραμμῶν (I) καί (1) θά ἔχουν ἴσες τεταγμένες καί οἱ τετμημένες τους συνεπῶς θά ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση  $\frac{-6x-7}{2x+4} = \delta x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 4\delta x^2 + (8\delta + 5)x = 0$  (2). Γιά νά εἶναι ὅμως μιά εὐθεία τῆς μορφῆς (1) ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς (I) πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ρίζες τῆς (2) νά εἶναι ἴσες. Τότε ἡ εὐθεία καί ἡ καμπύλη ἔχουν δύο ταυτιζόμενα κοινά σημεία. Ἐπειδὴ ἡ (2) ἔχει μιά ρίζα τὸ μηδέν γιὰ  $\forall \delta \in \mathbb{R}$ , συμπεραίνομε ὅτι αὐτὴ πρέπει νά εἶναι διπλή. Πρὸς τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι  $8\delta + 5 = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{5}{8}$  (γιατί;).

Ὡστε ὑπάρχει μιά καί μόνο ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης πού διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο  $(0, -\frac{7}{4})$ , αὐτὴ πού ἔχει συντελεστή διευσθύνσεως  $-\frac{5}{8}$ . εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση  $y = -\frac{5}{8}x - \frac{7}{4}$ . Τὸ σημεῖο ἐπαφῆς ἔχει τετμημένη μηδέν καί συνεπῶς εἶναι τὸ σημεῖο  $(0, y = \frac{-6 \cdot 0 - 7}{2 \cdot 0 + 4} = -\frac{7}{4})$  τῆς ὑπερβολῆς. Βρήκαμε ἔτσι τήν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας στό σημεῖο  $(0, -\frac{7}{4})$  τῆς ὑπερβολῆς.

#### 9.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνεῖ ἡ μελέτη καί νά χαραχθοῦν οἱ γραφικὲς παραστάσεις τῶν σχέσεων πού ὀρίζουν οἱ ἐξισώσεις: I)  $y = \frac{-3}{5x+10}$  II)  $y = \frac{7x}{4x-10}$  III)  $x^2 - y^2 = 8$ .

$$\text{IV) } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{V) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2.\* Δίνεται ἡ σχέση πού ὀρίζει ἡ ἐξίσωση  $2xy + 4x - 3y - 2 = 0$ . I) Νά γίνεῖ ἡ μελέτη τῆς. II) Νά γίνεῖ ἡ γραφικὴ παράστασή της σ' ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων. III) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι ἡ γραφικὴ παράσταση εἶναι μιά ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ νά βρῆτε τὶς συντεταγμένες τῶν ἐστιῶν καί τῶν κορυφῶν αὐτῆς τῆς ὑπερβολῆς.

3.\* Νά δοθοῦν γραφικά οἱ πραγματικὲς λύσεις (ἂν ὑπάρχουν) σέ καθένα ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα συστήματα: 1)  $2xy + 4x - 3y - 2 = 0$  (I) καί  $y = 2x - 1$  (II). 2)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  (I) καί  $y = x - 5$  (II).

4.\* Δίνεται ἡ ἐξίσωση  $y = \frac{1}{x-1}$  (I). α) Νά βρεθοῦν ἐκεῖνες οἱ εὐθεῖες – ἂν ὑπάρχουν – πού διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖο  $(1, -1)$  καί ἐφάπτονται στὴ γραφικὴ παράσταση τῆς (I). β) Ὑπάρχουν ἄραγε εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας  $\widehat{xOy}$  πού νά ἐφάπτονται στὴ γραφικὴ παράσταση τῆς (I);

5.\* Δίνεται ἡ ἐξίσωση  $x^2 - y^2 = 9$  (I). α) Νά βρεθοῦν – ἂν ὑπάρχουν – οἱ εὐθεῖες πού εἶναι παράλληλες πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{v}(4, -3)$  καί ἐφάπτονται στὴν καμπύλη πού παριστάνει

ή (I). β) 'Αφού διαπιστώσετε ότι το σημείο (5, 4) ανήκει στην καμπύλη (I) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο (5, 4).

### Άσκησης για επανάληψη.

1.\* Νά βρεθούν γραφικά οι πραγματικές λύσεις του συστήματος:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (I) \quad \text{καί} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (II).$$

2.\* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$  καί  $\mathcal{D}(f) = (-8, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ . Είναι ά-

ραγε δυνατό να βρούμε δύο συναρτήσεις  $g(x)$  καί  $h(x)$  από τις οποίες η πρώτη να είναι άρτια, η δεύτερη περιττή καί τέτοιες ώστε να είναι  $f(x) = g(x) + h(x)$ ;

(Ύπόδειξη: Παρατηρήστε ότι πρέπει να έχουμε  $\frac{1+x}{1-x} = g(x) + h(x)$ , αλλά καί  $\frac{1-x}{1+x} = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ ).

3.\* Νά προσδιορισθεί τό πεδίο όρισμού καί τό πεδίο τιμών της συναρτήσεως πού παρέχει ό τύπος  $y = \frac{1}{Ak(x) - 1}$ .

(Ύπόδειξη: Για τό πεδίο όρισμού ξετάστε για ποιά  $x$  μηδενίζεται ό παρονομαστής  $Ak(x) - 1$ . Για τό πεδίο τιμών παρατηρήστε ότι: "Αν  $v \in \mathbb{N}$ , τότε  $\forall x$  με  $-v \leq x < -(v-1)$  είναι  $Ak(x) = -v$  καί συνεπώς  $y = -\frac{1}{v+1}$ , ενώ  $\forall x$  με  $v \leq x < v+1$  είναι  $Ak(x) = v$  καί συνεπώς  $y = \frac{1}{v-1}$  (με  $v \neq 1$ )).

4.\* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ . I) Νά βρείτε τό πεδίο όρισμού της.

II) "Αν  $x_1, x_2$  δυό διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής καί  $y_1, y_2$  οι αντίστοιχες τιμές της συναρτήσεως θά παραστήσουμε με  $\Delta x$  τή διαφορά  $x_2 - x_1$  καί με  $\Delta y$  τή διαφορά  $y_2 - y_1$ . Νά μελετήσετε τό πρόσημο του λόγου  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  για να βρείτε μέσω αυτού τό είδος της μονοτονίας της συναρτήσεως.

(Ύπόδειξη: Παρατηρήστε ότι, όταν  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$  σ' ένα διάστημα  $\alpha < x < \beta$ , τότε η συνάρτηση  $y$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα καί ότι, όταν  $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ , τότε είναι γνησίως φθίνουσα).

5.\* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:  $y = \frac{|x| - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - |x|}{x^2 - 2|x| + 1}$ .

Νά καθορίσετε τό πεδίο όρισμού της καί να γράψετε τον τύπο της με τον απλούστερο δυνατό τρόπο.

6.\* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:  $y = x - 2 + \frac{x(x^2 - 1)}{|x^2 - 1|}$ . Νά γίνει η μελέτη της συναρτήσεως ως προς τή μονοτονία καί να χαραχθεί η γραφική της παράσταση.

(Ύπόδειξη: Νά εργαστείτε χωριστά στα διαστήματα  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  καί  $(1, +\infty)$  του πεδίου όρισμού της).

7.\* Δίνεται η υπερβολή (Y) με εξίσωση  $yx = 6$ . I) 'Αφού σχεδιάσετε τήν (Y) (ως προς

ένα ορθοκανονικό σύστημα) να μαρκάρετε τα σημεία της Α, Β, Γ με τετμημένες αντίστοιχα 1, -2 και 3. II) Να σχηματίσετε την εξίσωση της κάθετης από το Α προς τη ΒΓ και ν' αποδείξετε ότι η ευθεία αυτή τέμνει την (Υ) στο όρθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Υπόδειξη: 'Αφού υπολογίσετε τις συντεταγμένες του δευτέρου σημείου τομής Δ της κάθετης από το Α προς τη ΒΓ με την υπερβολή (Υ), αποδείξτε ότι η ΔΓ είναι κάθετη προς την ΑΒ).

8.\* Να μελετηθεί η συνάρτηση που παρέχει ο τύπος  $y = \frac{|x-1|}{(x-1) \cdot |x|}$  και νά γίνει η γραφική της παράσταση σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα.

(Υπόδειξη: Νά διακρίνετε τρεις περιπτώσεις. 1)  $x < 0$  2)  $0 < x < 1$  3)  $x > 1$  και νά εργαστείτε στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  χωριστά).

9.\* Να αποδείξετε ότι τα μέσα παραλλήλων χορδών της παραβολής  $y^2 = 2ax$  ανήκουν σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

(Υπόδειξη: 'Αν  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  δύο σημεία της παραβολής, ο συντελεστής διευσθύνσεως  $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  (I) διατηρείται ο ίδιος για όλες τις παράλληλες χορδές προς την  $P_1P_2$ .

'Από  $y_2^2 = 2ax_2$ ,  $y_1^2 = 2ax_1$  και από την (I) αποδείξτε ότι η τεταγμένη  $\frac{y_1 + y_2}{2}$  του μέσου Μ του  $P_1P_2$  μένει σταθερή).

10.\* Μέ τη μέθοδο που υποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση ν' αποδείξετε τό εξής: Τα μέσα παραλλήλων χορδών της ελλείψεως  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (αντίστοιχα της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ) ανήκουν σε μία ευθεία που περνά από τό κέντρο συμμετρίας της ελλείψεως (αντίστοιχα της υπερβολής).

11.\* Θεωρούμε την έλλειψη  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  και την ευθεία  $y = \lambda x + \mu$  όπου λ δοσμένη σταθερά και μ μεταβλητή. Νά προσδιοριστούν οι τιμές της μεταβλητής μ για τις όποιες η ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με την έλλειψη.

12.\* Θεωρούμε την υπερβολή  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ . Νά δείξετε χρησιμοποιώντας εξισώσεις: 1) ότι η υπερβολή δέν έχει κοινά σημεία με τις ασύμπτωτές της, 2) ότι κάθε παράλληλη προς μιάν ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μοναδικό σημείο και 3) ότι η ευθεία  $y = \lambda x + \mu$  ( $\lambda, \mu$  δοσμένες σταθερές, ή  $\lambda \neq \pm \frac{b}{a}$ ) έχει με την υπερβολή δύο, ένα ή κανένα κοινά σημεία καθώςο  $b^2 - a^2\lambda^2 + \mu^2$  είναι  $> 0$ ,  $= 0$  ή  $< 0$ . Πώς κατανέμονται στους κλάδους τά σημεία τομής, όταν υπάρχουν;

## ΕΝΟΤΗΤΑ 10

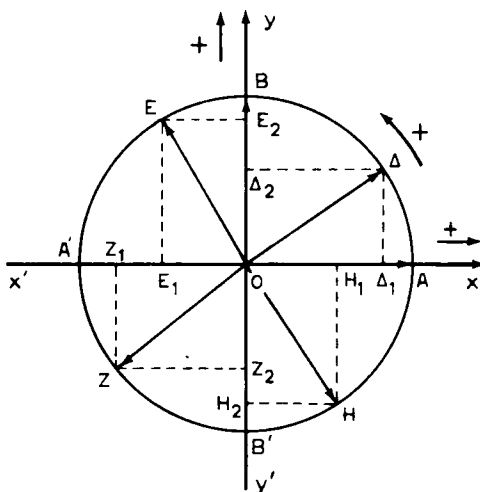
### ΟΙ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

#### 10.1 Οι τριγωνομετρικές συνάρτήσεις συν x και ημ x.

Κατασκευάζομε έναν τριγωνομετρικό κύκλο ( $O, R = 1, \quad \text{ } ^\circ +$ ), τοποθετούμε τούς



ἄξονες συνημιτόνων  $Ox$  καὶ ἡμιτόνων  $Oy$  καὶ παίρνομε καὶ ἓνα τόξο μέ ἀρχή τήν ἀρχή  $A$  τῶν τόξων καὶ πέρας ἓνα ὁποιοδήποτε σημεῖο  $\Delta$  (ἢ  $E$  ἢ  $Z$  ἢ  $H$ , σχ. 10.1) πάνω στὸν κύκλο.



Σχ. 10.1.

Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὴν  $\vec{OA}$  πού διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχή  $A$  τοῦ τόξου  $\widehat{AD}$  λέγεται συνήθως **ἀρχικὴ ἀκτὴν** τοῦ τόξου καὶ αὐτὴ πού διέρχεται ἀπὸ τὸ πέρας  $\Delta$  τοῦ τόξου, λέγεται **τελική**.

\*Ὡς εἶναι  $\Delta_1$  καὶ  $\Delta_2$  οἱ προβολές τοῦ  $\Delta$  στὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων καὶ τῶν ἡμιτόνων ἀντιστοίχως. Τότε:

i) Ὀνομάζομε **συνημίτονο** ἑνὸς τόξου  $\widehat{AD}$ , μέ ἀρχή  $A$  τὴν ἀρχή τῶν τόξων, τὸ **σχετικὸ μέτρο** τῆς **προβολῆς**  $\vec{OD_1}$  τῆς **τελικῆς ἀκτίνος**  $\vec{OD}$  πάνω στὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.

Μ' ἄλλα λόγια, τὸ **συνημίτονο** εἶναι ἡ **τετμημένη** τοῦ διανύσματος  $\vec{OD}$  (ἢ, πράγμα τὸ ἴδιο, τοῦ πέρατος  $\Delta$  τοῦ τόξου), στὸ ὀρθοκανονικὸ σύστημα συντεταγμένων, μέ ἄξονα τετμημένων τὸν  $Ox$ , ἄξονα τεταγμένων τὸν  $Oy$  καὶ μέ μοναδιαῖο διάνυσμα τὸ  $\vec{OA}$ .

\*Ὡς  $x$  εἶναι τὸ **σχετικὸ μέτρο** ἑνὸς τόξου  $\widehat{AD}$ , τότε **συνημίτονο** τοῦ  $x$  εἶναι ὁ ἀριθμὸς  $\overline{OD_1}$ . (Συμβολικά: **συν**  $x = \overline{OD_1}$ ).

ii) Ὀνομάζομε **ἡμίτονο** ἑνὸς τόξου  $\widehat{AD}$  τὸ **σχετικὸ μέτρο** τῆς **προβολῆς**  $\vec{OD_2}$  τῆς **τελικῆς ἀκτίνος**  $\vec{OD}$  πάνω στὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.

Δηλαδή τὸ **ἡμίτονο** εἶναι ἡ **τεταγμένη** τοῦ διανύσματος  $\vec{OD}$  στὸ ὀρθοκα-

νονικό σύστημα συντεταγμένων που περιγράψαμε παραπάνω. (Συμβολικά:  $\eta\mu x = \overline{OA_2}$ ).

Σέ κάθε τόξο μέ σχετικό μέτρο έναν αριθμό  $x \in \mathbb{R}$ , αντιστοιχίζεται έτσι ένας και μόνον ένας πραγματικός αριθμός ως συνημίτονο και ένας και μόνον ένας ως ημίτονο. Είναι προφανές εξάλλου ότι όλα τά (προσημασμένα) τόξα μέ τά ίδια άκρα έχουν τό ίδιο συνημίτονο και τό ίδιο ημίτονο. Συνεπώς **δύο τόξα τών οποίων τά μέτρα διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο του  $360^\circ$  (ή του  $2\pi$ ), έχουν ίσα συνημίτονα και ίσα ημίτονα.**

$$\begin{aligned}\text{Συμβολικά:} \quad & \sigma\upsilon\nu(360^\circ \kappa + x) = \sigma\upsilon\nu x \\ & \eta\mu(360^\circ \kappa + x) = \eta\mu x \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Γιά τά τόξα π.χ. } 750^\circ, 390^\circ, 30^\circ, -330^\circ, -690^\circ \text{ έχουμε } \sigma\upsilon\nu 750^\circ &= \sigma\upsilon\nu 390^\circ = \\ &= \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu(-330^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-690^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu 750^\circ = \eta\mu 390^\circ = \\ &= \eta\mu 30^\circ = \eta\mu(-330^\circ) = \eta\mu(-690^\circ) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**\*Αντιστοιχίζοντας σέ κάθε προσημασμένο τόξο  $x$  τό συνημίτόνό του και τό ημίτονό του έχουμε κατασκευάσει δύο πραγματικές συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ορισμού όλο τό σύνολο  $\mathbb{R}$  τών πραγματικών αριθμών.**

$$\text{Γράφομε συμβολικά: } \boxed{y = \sigma\upsilon\nu x} \quad (1) \quad , \quad \boxed{y = \eta\mu x} \quad (2)$$

“Όπως εύκολα προκύπτει από τήν έποπτεία του σχήματος 10.1 και σύμφωνα μέ τούς όρισμούς, **πεδίο τιμών και για τίς δύο συναρτήσεις είναι τό διάστημα  $[-1, 1]$ .**

\*Έχουμε δηλαδή για όποιοδήποτε τόξο  $x$ :

$$\begin{aligned}-1 &\leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \iff |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \\ -1 &\leq \eta\mu x \leq 1 \iff |\eta\mu x| \leq 1\end{aligned}$$

Σχετικά μέ τά διαστήματα μονοτονίας τών συναρτήσεων (1) και (2) μπορούμε νά διατυπώσουμε τά ακόλουθα προφανή συμπεράσματα:

$$1) \quad 0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \implies \begin{cases} 1 = \sigma\upsilon\nu 0 \geq \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \geq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0 \\ 0 = \eta\mu 0 \leq \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \leq \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$$

Δηλαδή: **Στό διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  τό συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα συ-**

νάριξη και τό ήμίτονο γνησίως αύξουσα. Καί οί δύο παίρνουν τίς τιμές τοῦ διαστήματος  $[0, 1]$ .

$$\text{II)} \quad \frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sin \frac{\pi}{2} \geq \sin x_1 > \sin x_2 \geq \sin \pi = -1 \\ 1 = \eta\mu \frac{\pi}{2} \geq \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2 \geq \eta\mu \pi = 0. \end{cases}$$

Στό διάστημα  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  καί οί δύο συναρτήσεις εἶναι γνησίως φθίνουσες. Τό

συνήμιτονο παίρνει ἀντίστοιχα τίς τιμές τοῦ διαστήματος  $[-1, 0]$  καί τό ήμίτονο τίς τιμές τοῦ διαστήματος  $[0, 1]$ .

$$\text{III)} \quad \pi \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} -1 = \sin \pi \leq \sin x_1 < \sin x_2 \leq \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \\ 0 = \eta\mu \pi \geq \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2 \geq \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1. \end{cases}$$

Στό διάστημα  $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$  τό συνήμιτονο εἶναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα

καί τό ήμίτονο γνησίως φθίνουσα. Καί οί δύο παίρνουν τίς τιμές τοῦ διαστήματος  $[-1, 0]$ .

$$\text{IV)} \quad \frac{3\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 2\pi \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin x_1 < \sin x_2 \leq \sin 2\pi = 1 \\ -1 = \eta\mu \frac{3\pi}{2} \leq \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \leq \eta\mu 2\pi = 0. \end{cases}$$

Στό διάστημα  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  καί οί δύο συναρτήσεις εἶναι γνησίως αύξουσες.

Τό συνήμιτονο παίρνει τίς τιμές τοῦ διαστήματος  $[0, 1]$  καί τό ήμίτονο τίς τιμές τοῦ διαστήματος  $[-1, 0]$ .

Καταγράφουμε συνοπτικά τά προηγούμενα συμπεράσματα στόν ἐπόμενο πίνακα:

| x     | 0°  | 90° | 180° | 270° | 360° |
|-------|-----|-----|------|------|------|
|       | ↓   | ↓   | ↓    | ↓    | ↓    |
| συν x | 1 ↘ | 0 ↘ | -1 ↗ | 0 ↗  | 1    |
| ημ x  | 0 ↗ | 1 ↘ | 0 ↘  | -1 ↗ | 0    |

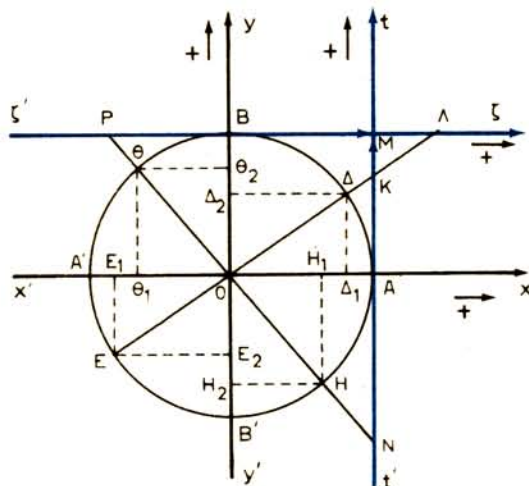
Όταν γιά μιá συνάρτηση  $f(x)$ , μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό  $\mathbb{R}$ , ὑπάρχει ἀριθμός  $\omega \neq 0$ .

τέτοιος ώστε νά ἔχομε  $f(x) = f(x + \omega) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **περιοδική μέ περίοδο τόν ἀριθμό  $\omega$** .

Ἐπειδή  $\sin(2\pi + x) = \sin x$  καί  $\eta\mu(2\pi + x) = \eta\mu x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , συμπεραίνομε ὅτι οἱ συναρτήσεις  $\sin x$  καί  $\eta\mu x$  εἶναι περιοδικές μέ περίοδο  $2\pi$ . Ἀλλά καί κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς  $2k\pi$ , ὅπου  $k \in \mathbb{Z}$ , εἶναι περίοδος τῶν δυό συναρτήσεων, ἀφοῦ  $\sin(2k\pi + x) = \sin x$  καί  $\eta\mu(2k\pi + x) = \eta\mu x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  καί  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . ὁ ἀριθμός  $2\pi$  εἶναι ἀπλῶς ἡ ἐλαχίστη θετική περίοδος.

## 10.2 Οἱ τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις εφ $x$ καί σφ $x$ .

Στό σημεῖο  $A$  — ἀρχή τῶν τόξων σ' ἓνα τριγωνομετρικὸ κύκλο (σχ. 10.2) — κατασκευάζομε τήν εὐθεῖα τ'τ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καί πάνω σ' αὐτὴ ὀρίζομε ἀξονα μέ ἀρχή τὸ  $A$  καί μοναδιαῖο διάνυσμα  $\vec{AM}$  ἴσο πρὸς τὸ  $\vec{OB}$ , τὸ μοναδιαῖο δηλαδὴ τοῦ ἀξονα γ'γ τῶν ἡμιτόνων. Τὸν ἀξονα τ'τ τὸν ὀνομάζομε **ἀξονα τῶν ἐφαπτομένων**.



Σχ. 10.2.

Φέρνομε ἀκόμα καί τήν εὐθεῖα  $\zeta'\zeta$ , ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό σημεῖο  $B$ , πέρας τοῦ πρώτου τεταρτημορίου (σχ. 10.2). καί ὀρίζομε πάνω σ' αὐτὴ

ἀξονα μέ ἀρχή τὸ  $B$  καί μοναδιαῖο διάνυσμα  $\vec{BM}$  ἴσο πρὸς τὸ  $\vec{OA}$ , τὸ μοναδιαῖο δηλαδὴ τοῦ ἀξονα  $x'x$  τῶν ἡμιτόνων. Τὸν ἀξονα  $\zeta'\zeta$  τὸν ὀνομάζομε **ἀξονα τῶν συνεφαπτομένων**.

Ἐπειδὴ εἶναι τώρα  $\Delta$  τὸ πέρας ἑνὸς τόξου καί  $K, \Lambda$  τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας  $OD$  μέ τοὺς ἀξονες τ'τ καί  $\zeta'\zeta$  ἀντιστοίχως, τότε τὸ σχετικὸ μέτρο τοῦ  $\vec{AK}$  τὸ ὀνομάζομε **ἐφαπτομένη** τοῦ τόξου  $\widehat{AD}$  καί τὸ σχετικὸ μέτρο τοῦ  $\vec{BL}$  **συνεφαπτο-**

μένη του  $\widehat{AD}$ . Δηλαδή:

Έφαπτομένη ενός τόξου  $\widehat{AD}$  (Α ή αρχή των τόξων) λέγεται τό σχετικό μέτρο του διανύσματος που έχει αρχή τό σημείο Α και πέρας τό σημείο τομής του άξονα των έφαπτομένων μέ τήν ευθεία ΟΔ της τελικής άκτίνας.

Συμβολικά:  $\epsilon\phi x = \overline{AK}$  (σχ. 10.2).

Συνεφαπτομένη ενός τόξου  $\widehat{AD}$  λέγεται τό σχετικό μέτρο του διανύσματος που έχει αρχή τό πέρας Β του πρώτου τεταρτημορίου και πέρας τό σημείο τομής του άξονα των συνεφαπτομένων μέ τήν ευθεία ΟΔ της τελικής άκτίνας.

Συμβολικά:  $\sigma\phi x = \overline{BL}$  (σχ. 10.2).

**Παρατηρήσεις:** Για τά τόξα που έχουν πέρας τό σημείο Β ή τό Β', αντιδιαμετρικό του Β, δέν όρίζεται έφαπτομένη, διότι οί ήμιευθείες ΟΒ και ΟΒ' είναι παράλληλες πρός τήν ευθεία τ'τ. "Ωστε κάθε τόξο που έχει μέτρο  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ , δέν έχει έφαπτομένη.

Επίσης για τά τόξα που λήγουν στό σημείο Α ή στό Α', αντιδιαμετρικό του Α, δέν όρίζεται συνεφαπτομένη, διότι οί ήμιευθείες ΟΑ και ΟΑ' είναι παράλληλες πρός τήν ευθεία ζ'ζ. "Ωστε κάθε τόξο που έχει μέτρο  $k\pi$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ , δέν έχει συνεφαπτομένη.

Επειδή σέ κάθε τόξο, μέ έξαίρεση τά τόξα  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  για τήν έφαπτομένη και τά τόξα  $k\pi$  για τή συνεφαπτομένη, αντιστοιχίζεται ένας και μόνον ένας πραγματικός άριθμός ως έφαπτομένη και ένας και μόνον ένας ως συνεφαπτομένη, έχομε δυό άκόμα, σχετικές μ' ένα τόξο, συναρτήσεις μέ τύπους:

$$\boxed{y = \epsilon\phi x} \quad (3) \quad \boxed{y = \sigma\phi x} \quad (4)$$

Η (3) έχει πεδίο όρισμού τό διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  και γενικά κάθε διάστημα της μορφής  $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  και ή (4) τό διάστημα  $(0, \pi)$  και γενικά κάθε διάστημα της μορφής  $(k\pi, (k+1)\pi)$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ , (γιατί;).

Πεδίο τιμών και για τίς δυό συναρτήσεις είναι όλο τό σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών άριθμών (γιατί;).

Για τά διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων  $\epsilon\phi x$  και  $\sigma\phi x$ , από τήν έποπτεία του σχήματος και τούς όρισμούς προκύπτουν τά ακόλουθα συμπεράσματα, που καταγράφομε συνοπτικά στους παρακάτω πίνακες.

|      |                  |   |                 |           |                  |
|------|------------------|---|-----------------|-----------|------------------|
| x    | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$     | $\frac{3\pi}{2}$ |
|      |                  | ↓ |                 | ↓         |                  |
| εφ x | $-\infty$        | 0 | $+\infty$       | $-\infty$ | 0                |
|      |                  | ↗ | ↘               | ↗         | ↘                |

|      |           |                 |           |                  |    |
|------|-----------|-----------------|-----------|------------------|----|
| x    | 0         | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$     | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
|      |           | ↓               |           | ↓                |    |
| σφ x | $+\infty$ | 0               | $-\infty$ | $+\infty$        | 0  |
|      |           | ↘               | ↗         | ↘                | ↗  |

Παρατηρώντας τό σχήμα καί συμφωνα μέ τούς όρισμούς συμπεραίνομε ότι:

Τόξα πού έχουν τό ίδιο πέρας (καί τήν ίδια πάντα άρχή) ή πέρατα συμμετρικά ως πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου (άντιδιαμετρικά σημεία) έχουν τήν ίδια έφαπτομένη καί τήν ίδια συνεφαπτομένη. Δυό τέτοια όμως τόξα διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ π (ή τῶν 180°). Άρα  $\epsilon\phi(x + \kappa\pi) = \epsilon\phi x$  καί  $\sigma\phi(x + \kappa\pi) = \sigma\phi x$  οί συναρτήσεις λοιπόν  $\epsilon\phi x$  καί  $\sigma\phi x$  είναι περιοδικές μέ ελάχιστη θετική περίοδο τόν άριθμό π.

**Σημείωση 1:** Όρίζομε ως **τέμνουσα** ενός τόξου x τόν αντίστροφο άριθμό τοῦ συνx καί ως **συντέμνουσα** τόν αντίστροφο τοῦ ημx, εφόσον  $\sin x \neq 0$  καί  $\eta\mu x \neq 0$ . Πεδίο όρισμοῦ τῆς συναρτήσεως **τεμx** μπορεῖ νά εἶναι π.χ. τό άνοικτό διάστημα  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  καί γενικά κάθε διάστημα τῆς μορφῆς  $(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2})$ , καί τῆς **στεμx** κάθε διάστημα τῆς μορφῆς  $[\kappa\pi, (\kappa + 1)\pi]$  όπου  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

Οί συναρτήσεις πού προκύπτουν από τούς τύπους  $y = \sin x$ ,  $y = \eta\mu x$ ,  $y = \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x}$ ,  $y = \sigma\phi x = \frac{\sin x}{\eta\mu x}$ ,  $y = \text{τεμ} x = \frac{1}{\sin x}$ ,  $y = \text{στεμ} x = \frac{1}{\eta\mu x}$  λέγονται **τριγωνομετρικές ή κυκλικές συναρτήσεις** καί οί άριθμοί  $\sin x$ ,  $\eta\mu x$ ,  $\epsilon\phi x$ ,  $\sigma\phi x$ ,  $\text{τεμ} x$ ,  $\text{στεμ} x$  **τριγωνομετρικοί άριθμοί** τοῦ τόξου x.

**Σημείωση 2:** Έπειδή σέ κάθε τόξο  $\widehat{AD}$ , ενός τριγωνομετρικοῦ κύκλου ( $O, R = 1, \gamma$ ) αντιστοιχίζεται καί μία προσανατολισμένη επίκεντρη γωνία, μία γωνία δηλαδή πού έχει άρχική πλευρά τήν OA καί τελική τήν OD καί σχετικό μέτρο τό μέτρο τοῦ αντίστοιχου τόξου  $\widehat{AD}$ , συμπεραίνομε ότι:μποροῦμε νά μιλάμε γιά **ήμίτονο, συνημίτονο, έφαπτομένη καί συνεφαπτομένη μιᾶς όποιασδήποτε προσημασμένης (θετικῆς ή άρνητικῆς) γωνίας** έννοώντας αντίστοιχα τό **ήμίτονο, συνημίτονο, τήν έφαπτομένη καί συνεφαπτομένη** τοῦ τόξου πού έχει τό ίδιο σχετικό μέτρο μέ τή θεωρούμενη γωνία.

**Άς παρατηρήσομε:** Όταν τό πέρας ενός τόξου x είναι σημείο τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, τότε τό τόξο έχει όλους τούς τριγωνομετρικούς του άριθμούς θετικούς. Όταν τό πέρας είναι σημείο τοῦ β' τεταρτημορίου, τότε τό τόξο έχει

τό ήμίτονο και τή συντέμνουσα θετικούς αριθμούς και όλους τούς άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς αρνητικούς· όταν τό πέρας είναι σημείο του γ' τεταρτημορίου τότε ή έφαπτομένη και ή συνεφαπτομένη είναι θετικοί αριθμοί και όλοι οί άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί αρνητικοί· τέλος όταν τό πέρας είναι σημείο του δ' τεταρτημορίου τότε τό συνημίτονο και ή τέμνουσα είναι θετικοί αριθμοί και όλοι οί άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου είναι αρνητικοί.

### 10.3 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. *Ός προς ένα ορθοκανονικό σύστημα άξόνων νά γίνει ή γραφική παράσταση των συναρτήσεων:*

$$I) \quad y = \eta \mu x \quad \text{και} \quad y = \sigma \upsilon \nu x \quad \text{για} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi.$$

$$II) \quad y = \epsilon \varphi x \quad \text{για} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

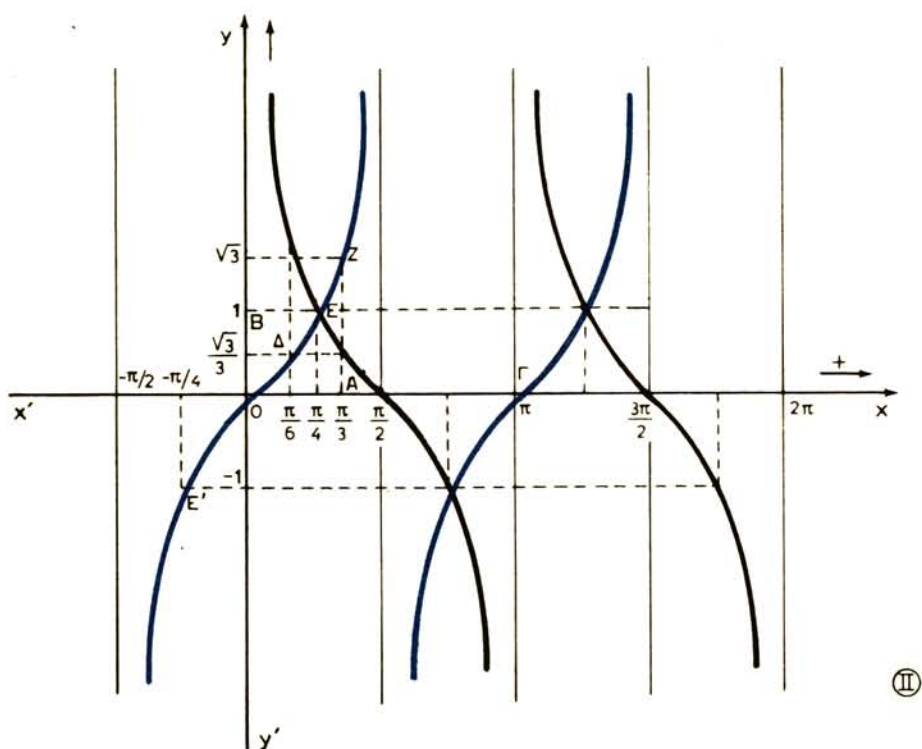
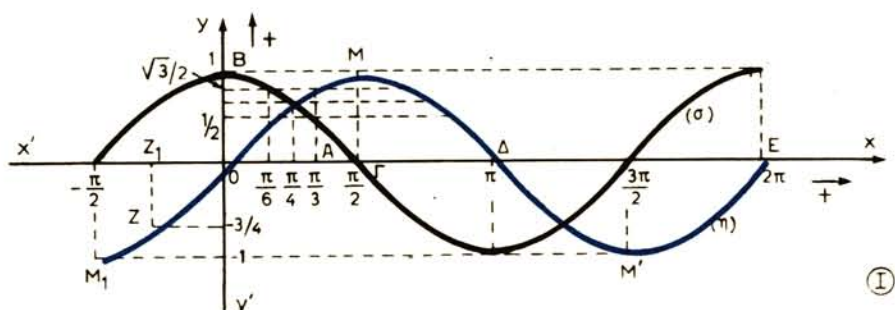
$$III) \quad y = \sigma \varphi x \quad \text{για} \quad 0 < x < \pi \quad \text{και} \quad \pi < x < 2\pi.$$

Κατασκευάζομε άρχικά ένα ζεύγος ορθογωνίων προσανατολισμένων ευθειών  $x'y$  και  $y'y$  και πάνω στη θετική ήμιευθεία  $Ox$  παίρνομε ένα τμήμα  $OA$  μήκους  $\frac{\pi}{3} \simeq 1,05$  [σχ. 10.3(I)]. Σημειώνομε πάνω στον άξονα  $x'x$  και τά σημεία  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ .

Άκολούθως πάνω στη θετική ήμιευθεία  $Oy$  παίρνομε ένα τμήμα  $OB = OA \simeq 1,05$  και τό θεωρούμε ως μοναδιαίο για τόν άξονα  $y'y$ .

1<sub>α</sub>) Πάνω στον άξονα  $y'y$  τοποθετούμε τά σημεία  $\eta \mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \eta \mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \eta \mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \eta \mu \frac{\pi}{2} = 1$ , προσδιορίζομε τά σημεία του επιπέδου μέ συντεταγμένες  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  και σχεδιάζομε τό τόξο  $OM$ . Είναι εύκολο νά παρατηρήσομε ότι: τό τόξο  $MD$  είναι συμμετρικό του  $OM$  ως προς τήν  $MG$  και τό τόξο  $\Delta M'E$  συμμετρικό του  $OM\Delta$  ως προς τό σημείο  $\Delta$ . έπίσης τό  $OM_1$  είναι συμμετρικό του  $OM$  ως προς τήν άρχή  $O$  των άξόνων.

Ή γραφική παράσταση της συναρτήσεως  $\eta \mu x$ , έφόσον πεδίο όρισμού της είναι όλο τό σύνολο  $\mathbb{R}$ , είναι μία άπεριόριστη «κυματοειδής» γραμμή ( $\eta$ ) [σχ. 10.3(I)], πού λέγεται **ήμιτονοειδής καμπύλη** και πού αποτελείται από τόξα ίσα προς τό  $OM\Delta M'E$ · καθένα άπ' αυτά τά ίσα τόξα μπορεί νά προκύψει από



Σχ. 10.3.

τό προηγούμενό του, στή σειρά, μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο πρὸς τὸ  $\vec{OE}$  ἢ ἀπὸ τὸ ἐπόμενό του στή σειρά μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο πρὸς τὸ  $\vec{EO} = -\vec{OE}$ .



Ιβ) Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως  $\sin x$  γίνεται μὲ τὴν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε γιὰ τὸ ἡμίτονο καὶ εἶναι καμπύλη (σ) [σχ. 10.3(I)] ἴση πρὸς τὴν ἡμιτονοειδή. Μπορεῖ μάλιστα νὰ προκύψει καὶ μὲ μεταφορὰ τῆς ἡμιτονοειδοῦς κατὰ διάνυσμα ἴσο πρὸς τὸ  $\vec{\Gamma\tilde{O}}$ .

II) Γιά νὰ σχεδιάσουμε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως  $\cos x$  ὀρίζομε τὰ σημεῖα μὲ συντεταγμένες  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$  καὶ χαράσσομε τὸν βραχίονα ΟΔΕΖ... [σχ. 10.3(II)]. ὁ ὁποῖος ἔχει ἀσύμπτωτη τὴν εὐθεῖα  $x = \frac{\pi}{2}$ . Ὁ βραχίονας ΟΕ'... εἶναι συμμετρικὸς τοῦ ΟΔ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴ Ο καὶ ἔχει ἀσύμπτωτη τὴν εὐθεῖα  $x = -\frac{\pi}{2}$ . Ἔτσι γιὰ τὸ διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  παίρνομε ἕναν ἀπεριόριστο κλάδο μὲ δυὸ βραχίονες συμμετρικοὺς ὡς πρὸς τὸ σημεῖο Ο (0, 0). Γιὰ τὸ διάστημα  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  ἔχομε, ὡς γραφικὴ παράσταση, ἕναν κλάδο ἴσο πρὸς τὸν προηγούμενο, πού προκύπτει ἀπ' αὐτόν μὲ μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα ἴσο μὲ  $\vec{O\tilde{\Gamma}}$  (δῖπου  $|\vec{O\tilde{\Gamma}}| \cong \pi$ ) [σχ. 10.3(III)].

III) Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς  $\sec x$  γίνεται μὲ τὴν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε γιὰ τὴν ἐφαπτομένη καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσους ἀπεριόριστους κλάδους πού ἔχουν ἀσύμπτωτες τὶς εὐθεῖες...  $x = -\pi, x = 0, x = \pi, x = 2\pi, \dots$

**Παρατήρηση:** Ὅπως καὶ ἀπὸ τὸ σχῆμα 10.3 (I) βλέπομε, τὰ σημεῖα τῶν γραφικῶν παραστάσεων μὲ τεταγμένες  $-1$  καὶ  $+1$  εἶναι τοπικὰ ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων  $y = \eta\mu x$  καὶ  $y = \sigma\upsilon\nu x$ .

2. Νὰ σημειωθοῦν πάνω στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο τὰ πέρατα τῶν τόξων πού δίνουν τὶς λύσεις τῆς ἐξισώσεως  $4\eta\mu x + 3 = 0$  καὶ νὰ βρεθεῖ γραφικὰ ἐκείνη ἡ λύση πού περιέχεται στὸ διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Παρατηροῦμε ἀρχικὰ ὅτι  $4\eta\mu x + 3 = 0 \iff \eta\mu x = -\frac{3}{4}$ .

I) Πάνω στὸν ἀρνητικὸ ἡμιάξονα  $Oy'$  παίρνομε σημεῖο Ρ τέτοιο ὥστε  $\overline{OP} = -\frac{3}{4}$  καὶ ἀπ' αὐτὸ φέρνομε εὐθεῖα (ε) παράλληλη πρὸς τὸν ἀξονα  $x'x$ .

Ἄν ἡ (ε) τέμνει τὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο στὰ σημεῖα Κ καὶ Λ, αὐτὰ εἶναι τὰ πέρατα ὅλων τῶν τόξων μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖο Α πού δίνουν τὶς ἀπείρες λύσεις τῆς ἐξισώσεως (γιατί;). (Νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα).

II) 'Αφού σχεδιάσουμε τή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως  $y = \eta\mu x$  [σχ. 10.3(II)], φέρνουμε από τό σημείο τοῦ ἄξονα  $y'y$  μέ τεταγμένη  $-\frac{3}{4}$  εὐθεία παράλληλη πρὸς τόν ἄξονα  $x'x$  πού τέμνει τό μέρος τής καμπύλης ( $\eta$ ), τό περιεχόμενο μεταξύ τῶν εὐθειῶν  $x = -\frac{\pi}{2}$  καί  $x = \frac{\pi}{2}$ , ἔστω στό  $Z$ . Ἄν  $Z_1$  ἡ προβολή τοῦ  $Z$  στὸν ἄξονα  $x'x$ , τότε ἡ τετμημένη τοῦ  $Z_1$  δίνει ἐκείνη τή λύση (σέ ἀκτίνια) τής ἐξισώσεως ἡ ὁποία περιέχεται στό διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . (Νά ὑπολογισθεῖ κατὰ προσέγγιση).

#### 10.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

I)  $y = \eta\mu x - \frac{1}{2}$  στό διάστημα  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

II)  $y = 1 - \sigma\upsilon\nu x$  στό διάστημα  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

III)  $y = 2 + \epsilon\phi x$  στό διάστημα  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

VI)  $y = -2 + \sigma\phi x$  στό διάστημα  $0 < x < \pi$ .

2.\* Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

I)  $y = \sigma\upsilon\nu \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  στό διάστημα  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

II)  $y = \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  στό διάστημα  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$ .

3.\* I) Νά σημειωθοῦν πᾶν τὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο τὰ πέρατα τῶν τόξων πού δίνουν τίς λύσεις τῶν ἐξισώσεων: α)  $5\sigma\upsilon\nu x + 4 = 0$ · β)  $-3\epsilon\phi x + 4 = 0$ · γ)  $2\eta\mu x - \sqrt{2} = 0$ .

II) Νά βρεθοῦν γραφικά οἱ λύσεις τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων οἱ περιεχόμενες στό διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

4.\* Νά βρεθεῖ ἡ ἐλαχίστη θετική περίοδος τῶν συναρτήσεων:

$$\eta\mu 2x, \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{4}, \epsilon\phi (-4x), \sigma\phi \left(\frac{5x}{3}\right).$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

## ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 11

## ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

## 11.1 Όριακές τιμές συναρτήσεων.

α) Η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει προς μιάν ορισμένη πραγματική τιμή.

**Παράδειγμα 1ο.** Άς πάρουμε τη συνάρτηση με τύπο  $f(x) = 4x - 1$  πού, όπως ξέρομε, είναι ορισμένη σ' όλο τό σύνολο  $\mathbb{R}$ .

Γιά  $x = 2$  έχουμε αντίστοιχα  $y = f(2) = 7$ .

Όταν δίνουμε στό  $x$  τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες του 2, αλλά όλο και πιο γειτονικές στην τιμή 2, διαπιστώνομε, από τόν παρακάτω πίνακα, ότι οι αντίστοιχες τιμές του  $y$  είναι όλο και πιο κοντινές στον αριθμό 7 (αντίστοιχα μεγαλύτερες ή μικρότερες).

|   |     |     |     |      |   |      |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|------|---|------|-----|-----|-----|
| x | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 1,99 | 2 | 2,01 | 2,1 | 2,2 | 2,3 |
| y | 5,8 | 6,2 | 6,6 | 6,96 | 7 | 7,04 | 7,4 | 7,8 | 8,2 |

**Μπορούμε ν' αποδείξομε** ότι σέ κάθε δοσμένο αριθμό  $\epsilon > 0$  είναι δυνατό ν' αντιστοιχεί ένας αριθμός  $\delta > 0$ , τέτοιος ώστε: γιά κάθε τιμή του  $x$  (μέ  $x \neq 2$ ) γιά την οποία είναι  $|x - 2| < \delta$  νά έχουμε αντίστοιχα  $|f(x) - 7| < \epsilon$ .

**Πράγματι :** Θέλομε νά έχουμε  $|(4x - 1) - 7| < \epsilon$ , όπου  $\epsilon$  ένας αυθαίρετα δοσμένος θετικός αριθμός. Είναι  $|4x - 1 - 7| < \epsilon \iff 4|x - 2| < \epsilon \iff |x - 2| < \frac{\epsilon}{4} \iff -\frac{\epsilon}{4} < x - 2 < \frac{\epsilon}{4} \iff 2 - \frac{\epsilon}{4} < x < 2 + \frac{\epsilon}{4}$ .

Γιά αριθμό  $\delta$  μπορούμε λοιπόν νά πάρομε τόν  $\frac{\epsilon}{4}$ . Αυτό σημαίνει ότι:

όταν ό  $x$  παίρνει τιμές μέσα στό διάστημα  $\left(2 - \frac{\epsilon}{4}, 2 + \frac{\epsilon}{4}\right)$ , τότε οι αντίστοιχες τιμές της  $f(x)$  θά διαφέρουν από την τιμή 7 λιγότερο από  $\epsilon$ .

Άν π.χ. θέλομε νά έχουμε  $|f(x) - 7| < 0,04$ , τότε ό  $x$  πρέπει καί άρκει νά παίρνει τιμές μέσα στό διάστημα (1,99, 2,01).

Έκφράζομε τήν παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ότι:

Όταν ό  $x$  τείνει προς τόν (αριθμό) 2, ή συνάρτηση  $f(x) = 4x - 1$  έχει όριακή τιμή (έχει όριο) τόν (αριθμό) 7.

**Γράφουμε συμβολικά:**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$  (limes = όριο).

**Παρατηρούμε** ότι, στο παράδειγμά μας, η όριακή τιμή της συναρτήσεως, όταν  $x \rightarrow 2$ , είναι η ίδια η τιμή της συναρτήσεως που αντιστοιχίζεται στη τιμή  $x = 2$  της ανεξάρτητης μεταβλητής.

**Παράδειγμα 2ο.** \*Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση με τύπο:

$$g(x) = \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2}, \text{ ή όποια είναι όρισμένη στο σύνολο } \mathbf{R} - \{2\}.$$

Τιμές της συναρτήσεως  $g(x)$  είναι οι τιμές του πολωνύμου:

$$4x - 1 = \frac{(x - 2)(4x - 1)}{x - 2} \quad \forall x \in \mathbf{R} - \{2\}, [4x^2 - 9x + 2 = (x - 2)(4x - 1)].$$

$$\text{*Άρα: } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 7.$$

\*Εδώ παρατηρούμε τά έξης: Μολονότι η συνάρτηση δέν είναι όρισμένη στη θέση 2, μολονότι δηλαδή δέν ύπάρχει στην τιμή 2 αντίστοιχη τιμή της συναρτήσεως, ύπάρχει όμως όριακή τιμή όταν  $x \rightarrow 2$ : ύπάρχει, μ' άλλα λόγια, άριθμός (έδω είναι ό άριθμός 7) πρός τόν όποιο «άδιάκοπα πλησιάζουν» οι τιμές της συναρτήσεως καθόσον οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής γίνονται όλοένα πιο γειτονικές μέ τόν 2.

Λέμε γενικά ότι μιά συνάρτηση  $f(x)$  όρισμένη τουλάχιστον σέ μιά περιοχή του  $x_0 \in \mathbf{R}$ , καί όχι κατ' ανάγκην καί στό  $x_0$ , έχει όριακή τιμή  $a \in \mathbf{R}$  καί σημειώνομε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , όταν καί μόνο όταν γιά κάθε θετικό άριθμό  $\epsilon$  ύπάρχει ένας άλλος θε-

τικός  $\delta$  πού έξαρτάται άπό τό  $\epsilon$  τέτοιος ώστε, γιά κάθε  $x \neq x_0$  νά έχομε:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

**Παράδειγμα 3ο.** Θα πάρομε τώρα τη συνάρτηση με τύπο  $\varphi(x) = x + \frac{|x|}{x}$ .

Αυτή είναι όρισμένη στο σύνολο  $\mathbf{R} - \{0\}$ . \*Έπειδή γιά  $\forall x < 0$  ή παραπάνω παράσταση γράφεται  $x + \frac{-x}{x} = x - 1$ , ένώ γιά  $\forall x > 0$  γράφεται  $x + \frac{x}{x} = x + 1$ , καί έπειδή ό άριθμός μηδέν δέν ανήκει στο πεδίο όρισμού της συναρτήσεως, σκεφτόμαστε ότι έχει ενδιαφέρον ν' ασχοληθούμε μέ τη «συμπεριφορά» της συναρτήσεως γύρω άπό τη θέση  $x = 0$ .

\*Έτσι διακρίνομε δυό περιπτώσεις, καθόσον  $x < 0$  ή  $x > 0$ , καί αναζητούμε (άν ύπάρχει) όριακή τιμή της συναρτήσεως  $\varphi(x)$ , όταν «ό  $x$  τείνει στο μηδέν μέσω άρνητικών τιμών» ή, όπως άλλιώς λέμε, όταν «ό  $x$  τείνει στο μηδέν από άριστερά» καί έπίσης όταν «ό  $x$  τείνει στο μηδέν από δεξιά» (όταν ό  $x$  τείνει στο μηδέν μέσω θετικών τιμών).

Σημειώνομε συμβολικά γιά τίς δυό περιπτώσεις άντίστοιχα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) \quad \Bigg| \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 \quad \bigg| \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

Όπως βλέπουμε, η οριακή τιμή της συναρτήσεως, όταν ο  $x$  τείνει στο 0 μέσω αρνητικών τιμών, είναι διαφορετική από την οριακή της τιμή, όταν ο  $x$  τείνει στο μηδέν μέσω θετικών τιμών. Τά δυό (διαφορετικά) αυτά όρια τά λέμε **μονόπλευρα**.

Επειδή στο παράδειγμά μας, τά δυό μονόπλευρα όρια, απ' άριστερά και δεξιά του μηδενός, είναι διαφορετικά, λέμε ότι **η συνάρτηση δεν έχει όριο στη θέση μηδέν**.

Στό ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και όταν δεν υπάρχει τουλάχιστον τό ένα από τά μονόπλευρα όρια. Αντιθέτως όταν υπάρχουν και τά δύο μονόπλευρα όρια σέ ένα σημείο  $x_0$  και είναι ίσα, τότε λέμε ότι η συνάρτηση έχει όριο στο σημείο  $x_0$  πού είναι ίσο μέ τό κοινό μονόπλευρο όριο. Έτσι στο παράδειγμα 2 έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 7.$$

**Παράδειγμα 4ο.** Θεωρούμε ακόμα τή συνάρτηση πού παρέχει η εξίσωση  $y = \text{Ακ} \left( \frac{1}{1+x^2} \right)$ , η οποία είναι ορισμένη παντού μέσα στο  $\mathbb{R}$ . Ζητάμε, αν υπάρχει, τό  $\lim_{x \rightarrow 0} y$ . Παρατηρούμε ότι  $f(0) = 1$ , ενώ  $f(x) = 0$  για  $\forall x \neq 0$ ,

$$\text{διότι } 0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\text{*Αρα έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} y = 0.$$

Όστε στήν προκειμένη περίπτωση η συνάρτηση, πού είναι ορισμένη στη θέση  $x = 0$ , έχει και οριακή τιμή όταν  $x \rightarrow 0$ , αλλά αυτή η οριακή τιμή είναι διαφορετική από την τιμή πού παίρνει η συνάρτηση για  $x = 0$ . Είναι δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ .

**Παράδειγμα 5ο.** Θά πάρουμε τέλος τή συνάρτηση μέ τύπο  $\sigma(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ ,

της οποίας πεδίο ορισμού είναι τό σύνολο  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Είναι εύκολο ν' αποδείξουμε ότι για όποιονδήποτε αυθαίρετα δοσμένο αριθμό  $M > 0$  υπάρχει αντίστοιχα ένα σύνολο τιμών του  $x$  της μορφής  $(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$  μέ  $\delta > 0$  εξαρτώμενο από τό  $M$ , για τό όποιο έχουμε:

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M.$$

$$\text{Πράγματι: } \frac{4}{(x-1)^2} > M \iff \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{M} \iff (x-1)^2 < \frac{4}{M} \iff |x-1| < \frac{2}{\sqrt{M}} \iff -\frac{2}{\sqrt{M}} < x-1 < \frac{2}{\sqrt{M}} \iff 1 - \frac{2}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{2}{\sqrt{M}}.$$

\*Αν π.χ.  $M = 10000$ , για νά έχουμε  $y > 10000$  πρέπει και άρκει ό  $x$  νά παίρνει τιμές στο διάστημα  $1 - \frac{2}{100} < x < 1 + \frac{2}{100}$  δηλαδή στο  $0,98 < x < 1,02$ .

Έκφραζουμε την παραπάνω ιδιότητα λέγοντας: **όταν ο  $x$  τείνει στον αριθμό 1, η συνάρτηση  $\sigma(x)$  τείνει στο  $+\infty$  ή ότι έχει όριο τό  $+\infty$ .** Γράφουμε συμβολικά:  $\lim_{x \rightarrow 1} \sigma(x) = +\infty$ .

$x \rightarrow 1$

Όμοια για τη συνάρτηση με τύπο  $y = -\frac{4}{(x-1)^2}$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{4}{(x-1)^2} \right) = -\infty.$$

Για τη συνάρτηση όμως με τύπο  $\rho(x) = \frac{1}{x-1}$ , που έχει τό ίδιο πεδίο ορισμοῦ με τη  $\sigma(x)$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \rho(x) = -\infty \quad (\text{διότι για } \forall x < 1 \text{ είναι } \frac{1}{x-1} < 0).$$

$$\text{καί } \lim_{x \rightarrow 1^+} \rho(x) = +\infty \quad (\text{διότι για } \forall x > 1 \text{ είναι } \frac{1}{x-1} > 0).$$

Δηλαδή η συνάρτηση  $\rho(x)$  δέν έχει ως όριο τό ίδιο «προσημασμένο άπειρο» όταν  $x \rightarrow 1$  άπ' άριστερά ή άπό δεξιά τοῦ 1. Άρα ή συνάρτηση  $\rho(x)$  δέν έχει όριο στή θέση 1.

β) Ἡ ανεξάρτητη μεταβλητή αὐξάνει ἀπολύτως ἀπεριόριστα καί τείνει μέσω θετικῶν (ἀντίστοιχα ἀρνητικῶν) τιμῶν πρὸς τό  $+\infty$  (ἀντιστοίχως πρὸς τό  $-\infty$ ).

Ἄς θεωρήσουμε πάλι τήν παραπάνω συνάρτηση με τύπο  $\rho(x) = \frac{1}{x-1}$ .

Εἶναι εὔκολο νά πεισθοῦμε ὅτι ή  $\rho(x)$  παίρνει τιμές ἀπολύτως μικρότερες ἀπό ὅποιονδήποτε ἀριθμό  $\varepsilon > 0$ , ἀρκεί ὁ  $x$  νά παίρνει τιμές ἀπολύτως μεγαλύτερες ἀπό κατάλληλα ὀριζόμενο ἀριθμό  $P > 0$ .

$$\text{Πράγματι: Εἶναι } \left| \frac{1}{x-1} \right| < \varepsilon \iff |x-1| > \frac{1}{\varepsilon} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x-1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x-1 < -\frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x < 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

Ἄν π.χ. θέλομε νά εἶναι  $\left| \frac{1}{x-1} \right| < \frac{1}{1000}$  πρέπει καί ἀρκεί νά δίνουμε στό  $x$  τιμές  $> 1 + 1000 = 1001$  ή  $< 1 - 1000 = -999$ .

Έκφραζουμε τήν παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ὅτι:

**Όταν τό  $x$  τείνει στό  $+\infty$  (ἀντιστοίχως στό  $-\infty$ ) ή συνάρτηση  $\rho(x)$  τείνει στο μηδέν.** Γράφουμε συμβολικά:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = 0 \quad (\text{ἀντιστοίχως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x) = 0).$$

Όταν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x) = a$ , για συντομία θα γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x) = a$ .

Όμοια συμπεραίνουμε ότι π.χ.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) = 2$ .

Ας πάρουμε όμως και τη συνάρτηση με τύπο  $y = 25x^2$ . Παρατηρούμε ότι για όποιονδήποτε δοσμένο αριθμό  $M > 0$  μπορούμε πάντοτε να προσδιορίσουμε έναν  $P > 0$  τέτοιον ώστε για τιμές του  $x$  (θετικές ή αρνητικές) με  $|x| > P$  να είναι  $25x^2 > M$ .

Πράγματι: είναι  $f(x) = 25x^2 > M \iff |x| > \frac{\sqrt{M}}{5} \iff$

$$\iff \begin{cases} x > \frac{\sqrt{M}}{5} \\ \text{ή} \\ x < -\frac{\sqrt{M}}{5} \end{cases} \quad \text{Αν π.χ. } M = 90000 \text{ θα έχουμε } y > 90000 \quad \forall x > \frac{300}{5} = 60$$

$$\text{ή} \quad x < -\frac{300}{5} = -60.$$

Εκφράζουμε την ιδιότητα αυτή λέγοντας: όταν τό  $x$  τείνει στο  $+\infty$  (άντιστοίχως στο  $-\infty$ ), η συνάρτηση τείνει στο  $+\infty$  (ή έχει όριο τό  $+\infty$ ).

Γράφουμε συμβολικά:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , (άντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ).

Όμοια συμπεραίνουμε ότι: π.χ.:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ , ενώ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ .

## 11.2 Ιδιότητες των ορίων.

α) Αν οι συναρτήσεις  $f(x)$ ,  $\phi(x)$  και  $g(x)$  έχουν τό ίδιο πεδίο ορισμού και σέ μία θέση  $x = x_0$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$  και είναι, σέ μία περιοχή του  $x_0$ ,  $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = l$ .

β) Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  με τό ίδιο πεδίο ορισμού και υποθέτουμε ότι σέ μία θέση  $x = x_0$  ή μέ  $x \rightarrow \pm\infty$  οι συναρτήσεις έχουν όριακές τιμές ορισμένους πραγματικούς αριθμούς. Τότε γιά τά όρια αυτά θα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

I)  $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ .

II)  $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ .

III)  $\lim [f(x) : g(x)] = \lim f(x) : \lim g(x)$ , εφόσον  $\lim g(x) \neq 0$ .

IV)  $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$ , εφόσον  $f(x) \geq 0$  γιά κάθε τιμή του πεδίου ορισμού.

ν) \*Αν  $\kappa$  σταθερά, τότε  $\lim [\kappa f(x)] = \kappa \lim f(x)$ .

γ) Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  με τό ίδιο πεδίο ορισμού και υποθέτουμε ότι σε μία θέση  $x = x_0$  ή με  $x \rightarrow +\infty$  ή  $x \rightarrow -\infty$  ή μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις έχει όριο ένα προσημασμένο άπειρο ( $+\infty$  ή  $-\infty$ ). Σ' αυτές τις περιπτώσεις ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

I) \*Αν  $\lim f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$  με  $\kappa \neq 0$  και  $\lim g(x) = \pm \infty$ , τότε:

$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \pm \infty$  έφόσον  $\kappa > 0$  και  $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \mp \infty$  έφόσον  $\kappa < 0$ .

II) \*Αν  $\lim f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$  και  $\lim g(x) = \pm \infty$ , τότε  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

III) \*Αν  $\lim f(x) = +\infty$  και  $\lim g(x) = +\infty$ , τότε και

$\lim [f(x) + g(x)] = +\infty$  επίσης με  $\lim f(x) = -\infty$  και  $\lim g(x) = -\infty$  έχουμε  $\lim [f(x) + g(x)] = -\infty$ .

**Πράξεις με όριακές τιμές:** Οι προηγούμενες ιδιότητες (β) και (γ) περιέχονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα, όπου με  $\varphi$ ,  $\omega$  συμβολίζουμε δύο συναρτήσεις και με  $\varphi_0$ ,  $\omega_0$  τις όριακές τους τιμές αντίστοιχα, όταν αυτές είναι πραγματικοί άριθμοί.

| $\varphi$   | $\omega$   | $\varphi + \omega$     | $\varphi \cdot \omega$            | $\frac{\varphi}{\omega}$                       |
|-------------|------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|
| $\varphi_0$ | $\omega_0$ | $\varphi_0 + \omega_0$ | $\varphi_0 \cdot \omega_0$        | $\frac{\varphi_0}{\omega_0} (\omega_0 \neq 0)$ |
| $\varphi_0$ | $\infty$   | $\infty$               | $\infty$ (άν $\varphi_0 \neq 0$ ) | 0                                              |
| $\infty$    | $\omega_0$ | $\infty$               | $\infty$ (άν $\omega_0 \neq 0$ )  | $\infty$                                       |
| 0           | 0          | 0                      | 0                                 | ;                                              |
| 0           | $\infty$   | $\infty$               | ;                                 | 0                                              |
| $\infty$    | 0          | $\infty$               | ;                                 | ;                                              |
| $+\infty$   | $+\infty$  | $+\infty$              | $+\infty$                         | ;                                              |
| $-\infty$   | $-\infty$  | $-\infty$              | $+\infty$                         | ;                                              |
| $+\infty$   | $-\infty$  | ;                      | $-\infty$                         | ;                                              |
| $-\infty$   | $+\infty$  | ;                      | $-\infty$                         | ;                                              |



**Σημείωση :** Υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις έχουν τό ίδιο πεδίο ορισμού και ότι έχουν όριο έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ή ένα προσημασμένο άπειρο, όταν  $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$  ή  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Τά έρωτηματικά, όπου υπάρχουν, έχουν τό νόημα ότι ή όριακή τιμή του άθροίσματος ή του γινομένου ή του πηλίκου, στίς αντίστοιχες περιπτώσεις, δέν καθορίζεται από τά πρίν καί μονοσήμαντα μέσω των όριακών τιμών των δυό άρχικών συναρτήσεων· υπάρχει — όπως συνήθως διατυπώνομε — άπροσδιοριστία.

\*Αν π.χ.  $\varphi(x) \rightarrow 0$  καί  $\omega(x) \rightarrow 0$  (μέ  $x \rightarrow x_0$  ή  $x \rightarrow \pm \infty$ ), τό πηλίκο  $\frac{\varphi(x)}{\omega(x)}$  μπορεί κατά περίπτωση νά έχει όριο τό 0 ή έναν άλλο πραγματικό αριθμό ή τό  $+\infty$  ή τό  $-\infty$  ή ακόμα νά μήν έχει κανένα όριο.

Παρακάτω στίς εφαρμογές θά προσδιορίσομε τίς όριακές τιμές σέ μερικές περιπτώσεις άπροσδιοριστίας.

δ) Δυό σημαντικές ιδιότητες γιά τίς όριακές τιμές πολωνύμων.

1. Όπως είδαμε καί στο 1ο παράδειγμα [παράγρ. 11.1(α)], ή όριακή τιμή ενός πολωνύμου  $f(x)$  σέ κάθε θέση  $x_0 \in \mathbb{R}$  είναι ή ίδια ή τιμή πού παίρνει τό πολωνύμο γιά  $x = x_0$ , δηλαδή έχουμε πάντοτε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

2. Τό όριο ενός πολωνύμου του  $x$ , όταν  $x \rightarrow \pm \infty$ , είναι τό ίδιο μέ τό όριο του μεγιστοβαθμίου όρου του πολωνύμου.

Δηλαδή: αν  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  (μέ  $a_0 \neq 0$ ), τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 x^n \text{ καί } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0 x^n.$$

Πράγματι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (a_0 x^n) \cdot \left( 1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 x^n) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 x^n), \end{aligned}$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} \right) = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1.$$

**Παρατηρήσεις:** Ι) Θά ονομάζομε **πόλο** μιās ρητής συναρτήσεως  $y = f(x)$  κάθε τιμή  $x = a \in \mathbb{R}$  γιά την όποία έχουμε  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ . 'Η εϋ-

θεία μέ εξίσωση  $x = a$  (παράλληλη στον άξονα  $y'y$ ) είναι τότε μιá ασύμπτωτη τής γραφικής παραστάσεως τής συναρτήσεως.

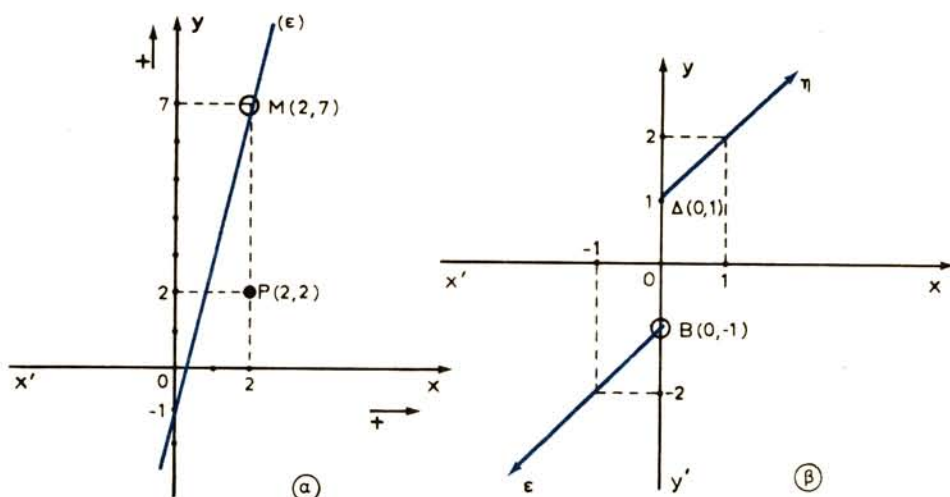
ΙΙ) Τά σύμβολα  $+\infty$ ,  $-\infty$  δέν πρέπει σέ καμιά περίπτωση νά θεωρούνται ως άριθμοί.

### 11.3 Συναρτήσεις συνεχείς. Σημεία ασυνεχείας.

α) Γνωρίζουμε πλέον ότι κάθε πολυώνυμο  $f(x)$  είναι συνάρτηση ορισμένη παντού μέσα στο  $\mathbb{R}$  και ότι η τιμή που παίρνει η συνάρτηση, για μία οποιαδήποτε τιμή  $x_0$  του  $x$ , ταυτίζεται με την όριακή τιμή της συναρτήσεως σ' αυτή τη θέση  $x_0$ .

Έκφράζουμε αυτή την ιδιότητα συνοπτικά λέγοντας ότι: **η συνάρτηση είναι συνεχής παντού μέσα στο πεδίο ορισμού της.**

Ας πάρουμε όμως τη συνάρτηση με τύπο  $g(x) = \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2}$ , που είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R} - \{2\}$  και ισοδυναμεί με την  $f(x) = 4x - 1 \quad \forall x \neq 2$ . Η γραφική παράσταση της  $y = 4x - 1$  είναι μία ευθεία ( $\epsilon$ ) που ορίζεται π.χ. από τα σημεία  $(0, -1)$  και  $(2, 7)$  [σχ. 11.3(α)]



Σχ. 11.3.

Επειδή η  $y = g(x)$  εξομοιώνεται με την  $f(x)$  για κάθε τιμή του  $x$  εκτός από την 2, έπεται ότι η γραφική παράσταση της  $g(x)$  είναι η ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξαίρεση του σημείου  $M(2, 7)$ . Εξάλλου γνωρίζουμε [παράδειγμα 2, παράγρ. 11.1 (α)] ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 7$ . Λέμε πάλι ότι η  $g(x)$  είναι συνεχής σε κάθε θέση από το

σύνολο  $\mathbb{R} - \{2\}$ . Για την τιμή  $x = 2$  δεν μπαίνει ζήτημα συνέχειας της  $g(x)$ , μιά και η τιμή αυτή δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.

Ας θεωρήσουμε τώρα και τις δύο συναρτήσεις  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{για } x = 2 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 2 & \text{για } x = 2 \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι πλέον παντού ορισμένες μέσα στο  $\mathbb{R}$ . 'Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 2} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4x-1) = 7 = \lim_{x \rightarrow 2} g_2(x).$$

Γιά τη  $g_1(x)$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 2} g_1(x) = g_1(2)$  και συνεπώς η  $g_1(x)$  είναι συνε-

χής και στη θέση 2. 'Η  $g_2(x)$  όμως δεν είναι συνεχής στη θέση 2, διότι η όριακή της τιμή 7, όταν  $x \rightarrow 2$ , δεν συμπίπτει με την τιμή  $g_2(2) = 2$  της συναρτήσεως για  $x = 2$ .

'Η γραφική παράσταση της  $g_1(x)$  είναι η ευθεία (ε) [σχ. 11.3 (α)] μαζί και με τό σημείο  $M(2, 7)$ , ενώ της  $g_2(x)$  είναι η ευθεία (ε) χωρίς τό σημείο  $M(2, 7)$ , αλλά μαζί με τό σημείο  $P(2, 2)$ .

**Από τά προηγούμενα μπορούμε νά συμπεράνομε τόν παρακάτω ορισμό: Μιά συνάρτηση  $f(x)$  λέγεται συνεχής σέ μία θέση  $x_0$  του πεδίου ορισμού της αν και μόνον αν έχει όριακή τιμή όταν  $x \rightarrow x_0$  και ή όριακή αυτή τιμή ταυτίζεται με την τιμή  $f(x_0)$  της συναρτήσεως για  $x = x_0$ . 'Αν στη θέση  $x_0$  ή  $f(x)$  δεν είναι συνεχής, τότε ή συνάρτηση λέγεται άσυνεχής στό  $x_0$  και τό  $x_0$  σημείο άσυνεχείας της  $f$ .**

Μιά συνάρτηση λέγεται συνεχής στό πεδίο ορισμού της αν είναι συνεχής σέ κάθε θέση  $x = x_0$  από τό πεδίο αυτό.

**Τώρα μπορούμε νά καταλάβομε** ότι ή συνάρτηση πού όρίζει ό τύπος:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + \frac{|x|}{x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

δέν είναι συνεχής στη θέση 0, διότι ή συνάρτηση δεν έχει όριακή τιμή όταν  $x \rightarrow 0$  [παράδειγμα 3, παράγρ. 11.1(α)].

'Η γραφική παράσταση της παραπάνω συναρτήσεως  $\varphi(x)$  αποτελείται από τίς ήμιευθείες  $Be$  (χωρίς την άρχή  $B$ ) και  $\Delta\eta$  (μέ την άρχή  $\Delta$ ) πού είναι αντίστοιχα οί γραφικές παραστάσεις τών συναρτήσεων  $y = x - 1$  μέ  $x < 0$  και  $y = x + 1$  μέ  $x \geq 0$  [σχ. 11.3(β)].

**Όμοια ή συνάρτηση  $y = A\kappa\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$**  [παράδειγμα 4, παράγρ. 11.1(α)]

δέν είναι συνεχής στη θέση 0, διότι, αν και έχει όριακή τιμή όταν  $x \rightarrow 0$ , αυτή ή όριακή τιμή δεν ίσοϋται με την τιμή της συναρτήσεως για  $x = 0$ . [Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  ενώ  $f(0) = 1$ ].

$x \rightarrow 0$

**β) Νά τώρα μερικές αξιόλογες ιδιότητες τών συνεχών συναρτήσεων.**

**1. 'Αν δυό συναρτήσεις είναι συνεχείς σ' ένα και τό ίδιο διάστημα  $[a, \beta]$  τότε: τό άθροισμα, ή διαφορά και τό γινόμενό τους είναι επίσης συνεχής συνάρτηση στό διάστημα  $[a, \beta]$ . άκόμα τό πηλίκο είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε τιμή τού  $x \in [a, \beta]$  πού δέ μηδενίζει τόν παρονομαστή.**

2. "Αν μιά συνάρτηση  $f(x)$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $[α, β]$ , τότε παίρνει τουλάχιστο μία φορά κάθε τιμή περιεχόμενη μεταξύ  $f(α)$  και  $f(β)$ . Ειδικά, αν  $f(α)$  και  $f(β)$  είναι αριθμοί έτερόσημοι, ή  $f(x)$  μηδενίζεται τουλάχιστο για μία τιμή  $x = x_0$  με  $α < x_0 < β$ .

**Παρατηρήσεις.** Ο προσδιορισμός τών όριακων τιμών συναρτήσεων αποσκοπεί κυρίως στον καθορισμό της συμπεριφοράς μιās συναρτήσεως  $y = f(x)$  στα άκρα του πεδίου όρισμού της ή στις περιοχές τιμών του  $x$  που δέν ανήκουν στο πεδίο όρισμού της συναρτήσεως.

Η εξέταση της συνεχείας, που θεμελιώνεται πάνω στην όριακή τιμή, αποτελεί μέρος της έρευνας για τή συμπεριφορά της συναρτήσεως γύρω από κάθε σημείο του πεδίου όρισμού της.

"Όταν ή συνάρτηση δέν είναι συνεχής σέ κάποια θέση, τότε εκεί παρουσιάζεται μιά «διακοπή», ένα «κενό», ένα «πήδημα» στίς τιμές της συναρτήσεως. Έχομε μιά άμεση έποπτική εικόνα αυτού του «χάσματος» αν κατασκευάσομε τή γραφική παράσταση της συναρτήσεως· τότε στα σημεία άσυνεχείας βλέπομε ότι ή γραμμή «κόβεται» και ή γραφική παράσταση άποτελείται από ξεχωριστά κομμάτια.

#### 11.4 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Δίνονται οί παρακάτω τρεις συναρτήσεις μέ τύπους :

$$I) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \cdot II) g(x) = \frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} \cdot III) h(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1}.$$

Νά βρεθοῦν τά πεδία όρισμού καί τά  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x)$  καί  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ .

Καί οί τρεις συναρτήσεις έχουν πεδίο όρισμού τό σύνολο  $\mathbb{R}$ , διότι οί παρονομαστές δέν μηδενίζονται μέ πραγματικές τιμές του  $x$ . Έπειδή μέ  $x \rightarrow \infty$  οί άριθμητές καί οί παρονομαστές τείνουν στό άπειρο, δέν μπορούμε νά έφαρμόσομε τόν κανόνα του πηλίκου.

$$\text{"Έχομε: } I) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ καί τώρα:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

$$II) g(x) = \frac{x^2 \left( 4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left( 2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} \text{ καί άκολουθως:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left( 4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left( 2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{III) } h(x) = \frac{x^3 \left( 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = x \cdot \frac{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \text{ και συνεπώς}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \\ &= -\infty \cdot \frac{2+0+0}{1+0+0} = -\infty \cdot 2 = -\infty. \end{aligned}$$

**Παρατήρηση:** Μπορούμε να βγάλουμε τό εξής γενικό συμπέρασμα: "Όταν έχουμε μία ρητή συνάρτηση (πηλίκo πολυωνύμων) τότε: αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από τό βαθμό του αριθμητή τό όριο τής συναρτήσεως, για  $x \rightarrow \pm \infty$ , είναι τό μηδέν· αν αριθμητής και παρονομαστής είναι πολώνυμα του αυτού βαθμού, τό όριο είναι τό πηλίκo τών συντελεστών τών μεγιστοβαθμίων όρων· αν ο αριθμητής είναι βαθμού μεγαλύτερου από τόν βαθμό του παρονομαστή, τότε τό όριο τής συναρτήσεως είναι ένα προσημασμένο άπειρο (για  $x \rightarrow \pm \infty$ ).

2. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο  $y = (x-2)^2 + \sqrt{\frac{4|x|}{x^2+2}}$ .

Νά βρεθεί τό  $\lim_{x \rightarrow 0} y$ .

Έχoμε:  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)^2 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4|x|}{x^2+2}} = 2^2 + 0 = 4.$

3. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο  $y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$  και πεδίο όρισμού

τό  $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ . Νά βρεθούν τά  $\lim_{x \rightarrow 1} y$  και  $\lim_{x \rightarrow -2} y$ .

Έπειδή μέ  $x = 1$  μηδενίζεται ο αριθμητής και ο παρονομαστής, έπεται ότι δέν μπορούμε νά εφαρμόσομε τόν κανόνα του πηλίκου.

Έχoμε:  $y = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+1}{x+2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}.$

άρα:  $\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)} = \frac{2}{3}.$

Όταν  $x \rightarrow -2$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5$ , ενώ τό  $x + 2$  τείνει στο μη-δέν μέσω αρνητικών τιμών, όταν  $x \rightarrow -2^-$ , και μέσω θετικών τιμών όταν  $x \rightarrow -2^+$ . Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = -\infty \quad \text{καί}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = +\infty.$$

Επειδή τά μονόπλευρα όρια είναι διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι ή συνάρτηση γιά  $x \rightarrow -2$  δέν έχει όριο.

4. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$ , όρισμένη στό  $\mathbb{R}$  (γιατί;). Νά βρεθοῦν τά  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$  καί  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ .

Πεδίο όρισμοῦ μπορεῖ νά είναι τό  $\mathbb{R}$  διότι  $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Επειδή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x + 3)} = +\infty$$

$$\text{καί} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty, \quad \text{έπεται ότι} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty.$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = +\infty$  καί  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ , έπεται ότι δέν μπορούμε νά εφαρμόσομε τόν κανόνα τοῦ άθροίσματος:  $[+\infty + (-\infty)] \div$ .

Γι' αυτό πρώτα μετασχηματίζομε κατάλληλα τήν παράσταση. Γράφομε:

$$y = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \frac{(x^2 + 2x + 3) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} =$$

$$= \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \frac{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \quad (\text{μέ } x > 0). \quad \text{Τώρα παίρνομε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) + 1}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

5. Θεωρούμε τή συνάρτηση μέ τύπο  $y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)}$ .

Ήραγε μπορεί νά είναι συνεχής παντού μέσα στό  $\mathbb{R}$ ; Ήν όχι, μήπως υπάρχει δυνατότητα μέ κατάλληλη συμπλήρωση του όρισμού νά εξουδετερώσουμε τήν ασυνέχεια όπου υπάρχει;

Ή συνάρτηση είναι συνεχής γιά κάθε  $x \in \mathbb{R}$  πού δέν μηδενίζει τόν παρονομαστή. Ήπειδή οί τιμές  $x = -2$  καί  $x = 1$  μηδενίζουν τόν παρονομαστή δέν μπορούν ν' ανήκουν στό πεδίο όρισμού· συνεπώς γι' αὐτές δέν μπαίνει ζήτημα συνεχείας. Ήπειδή  $\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{2}{3}$  (βλέπε τό παραπάνω παράδειγμα 3), ἄς θεωρή-

σομε τή συνάρτηση πού όρίζει ό τύπος  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{1, -2\} \\ \frac{2}{3} & \text{για } x = 1. \end{cases}$

τότε ἡ νέα συνάρτηση είναι συνεχής καί στή θέση 1.

Γιά τήν τιμή  $x = -2$  ὅμως δέν ἔχομε τή δυνατότητα νά ἐπεκτείνουμε τόν όρισμό ἔτσι ὥστε ἡ προκύπτουσα συνάρτηση νά είναι συνεχής στή θέση  $x = -2$ ,

διότι  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = -\infty$  καί  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = +\infty$ .

6. Θεωρούμε τή συνάρτηση πού όρίζεται ἀπό τόν τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{για } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{για } x = 1 \\ 4-x & \text{για } x > 1. \end{cases}$$

Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια μέσα στό πεδίο όρισμού της καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

Οί συναρτήσεις  $y = x$  καί  $y = 4 - x$  είναι παντού συνεχεῖς μέσα στό  $\mathbb{R}$ · συνεπώς καί ἡ  $f(x)$  είναι συνεχής στά διαστήματα  $[0, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ .

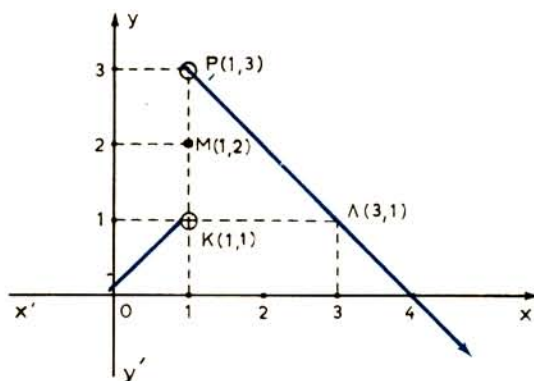
Ήπομένει λοιπόν νά ἐξετάσουμε τί συμβαίνει στή θέση  $x = 1$ . Ήχομε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \quad \text{καί} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4-x) = 3.$$

Ή συνάρτηση  $f(x)$  είναι όρισμένη στή θέση 1 (ἀφοῦ  $f(1) = 2$ ), ἀλλά δέν ἔχει όριακή τιμή σ' αὐτή τή θέση, διότι τά μονόπλευρα ὅρια είναι διαφορετικά· συνεπώς στή θέση 1 ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια.

Ή γραφική παράσταση τῆς παραπάνω συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό

τό τμήμα OK χωρίς τό σημείο K(1, 1) (σχ. 11.4α). από τό απομονωμένο σημείο M(1, 2) καί από τήν ήμιευθεία PL χωρίς τήν άρχή της P(1, 3).

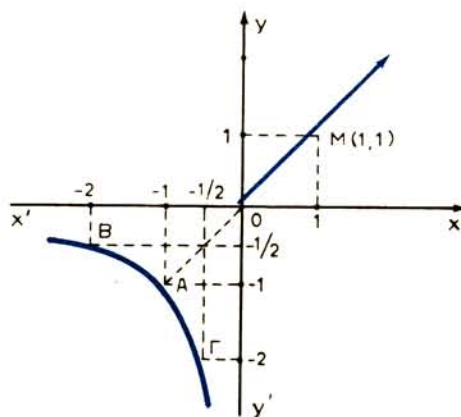


Σχ. 11.4α.

7. Θεωρούμε τή συνάρτηση που όρίζει ό τύπος:

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \forall x < 0. \end{cases}$$

Νά μελετηθεϊ ώς πρός τή συνέχεια καί νά γίνει ή γραφική της παράσταση.



Σχ. 11.4β.

Έπειδή ή συνάρτηση  $y = x$  είναι παντού συνεχής μέσα στό  $\mathbb{R}$  καί ή  $y = \frac{1}{x}$  επίσης παντού συνεχής μέσα στό  $\mathbb{R} - \{0\}$ , έπεται ότι καί ή  $f(x)$  είναι συνεχής μέσα στό  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

Θά εξετάσουμε λοιπόν τί συμβαίνει στή θέση  $x = 0$ .



$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\text{Ένῳ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \text{ Ὡστε ἡ συνάρτησή μας εἶναι ἀσυνε-$$

χῆς στὴ θέση 0.

Ἡ γραφικὴ τῆς παράστασης (σχ. 11.4β) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν κλάδο μὲ  $y < 0$  τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς  $yx = 1$  καὶ ἀπὸ τὴν ἡμιευθεία ΟΜ.

### 11.5 Ἀσκήσεις.

1. Νά βρεθοῦν τὰ παρακάτω ὅρια: I)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$  · II)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$  ·

III)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^2 - 6x + 2}}{3 - \sqrt{10x^2 - 19x + 10}}$  · IV)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 3}$  · V)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x + 1}{2x^2 + x - 3}$  ·

VI)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x + 4}$  · VII)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x + 4}$  · VIII)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}{x + 3}$  ·

IX)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}{2x + 3}$  · X)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9}{(x - 2)^2}$  · XI)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} (7 + \sqrt{x - 5})$  ·

XII)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x}$  · XIII)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x}$  · XIV)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - x}$  ·

XV)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - x}$  ·

2. Δίνεται ἡ συνάρτηση ποῦ ὁρίζει ὁ τύπος  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(x-1)}{x} & \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{γιά } x = 0 \end{cases}$

Νά μελετηθεῖ ὡς πρὸς τὴ συνέχεια καὶ νά γίνῃ ἡ γραφικὴ τῆς παράστασης.

3. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση μὲ τύπο  $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 10} - 2x$ .

α) Νά καθοριστῇ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς · β) νά βρεθοῦν τὰ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$  ·

γ) νά βρεθεῖ τὸ  $\lim_{x \rightarrow 1} y$  ·

4. Νά βρεθοῦν τὰ παρακάτω ὅρια: I)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$  · II)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$  ·

III)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$  · IV)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$  · V)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 5}{|x| x}$  ·

VI)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 5}{|x| x}$  · VII)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x}{x - 2}$  · VIII)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x}{x - 2}$  ·

IX)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5}$  · X)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5}$  ·

XI)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$  · XII)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^8 + 5x^3 - 1}{x^6 + x^2 - 7}$  ·

$$\text{XIII)} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{2x^3 + x + 1} \quad \text{XIV)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}.$$

$$\text{XV)} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x^2).$$

5.\* Νά μελετηθοῦν ὡς πρὸς τὴ συνέχεια καὶ νά παρασταθοῦν γραφικὰ οἱ συναρτήσεις πού ὀρίζονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$\text{I)} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{γιά } x = 0 \end{cases} \quad \text{II)} g(x) = \begin{cases} x & \text{ἀν } x \in [0, 1] \\ 2 + x & \text{ἀν } x \in (1, 2] \end{cases}.$$

$$\text{III)} \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ἀν } x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{ἀν } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{IV)} \sigma(x) = \begin{cases} |x| & \text{γιά } x < 0 \\ x & \text{γιά } 0 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{γιά } x \geq 2 \end{cases}.$$

$$6.* \text{Γιά ποιές τιμές τοῦ } x > 1 \text{ ἔχομε: } \alpha) \frac{5}{3} - \frac{5x + 9}{3x - 3} < \frac{1}{1000}.$$

$$\beta) \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - 1 < \frac{1}{100} \quad \gamma) \frac{\sqrt[3]{4x + 1}}{\sqrt[3]{4x - 2}} - 1 < \frac{1}{100};$$

7.\* Γιά ποιές τιμές τοῦ  $x$  ἔχομε  $|f(x)| > 1000$  ἀν:

$$\alpha) f(x) = x^3 \quad \beta) f(x) = 2x^3 - 458 \quad \gamma) f(x) = (x + 1) \sqrt[3]{|x + 1|}$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 12

### ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

#### 12.1 Τό νόημα καὶ ἡ σημασία τῆς παραγώγου.

α) **Εἰσαγωγικά.** Ὅλα σχεδόν τὰ φαινόμενα μέ τὰ ὁποῖα ἀσχολοῦνται οἱ φυσικές ἐπιστῆμες καὶ τὰ προβλήματα πού ἀντιμετωπίζει ἡ τεχνική, ἐκφράζονται μέσω συναρτήσεων. Μελετώντας αὐτές τίς συναρτήσεις καὶ τίς συναφεῖς γραφικές τους παραστάσεις, ποριζόμαστε χρήσιμες πληροφορίες γιά τήν ἐξέλιξη τῶν φαινομένων μέσα σέ κατάλληλα ἐκλεγμένα διαστήματα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν. Οἱ μέχρι τώρα γνώσεις μας γιά τίς ὀριακές τιμές μᾶς ἐπιτρέπουν νά κάνουμε μερικές διαπιστώσεις ὡς πρὸς τὴ συμπεριφορά μιᾶς συναρτήσεως ἐντός ἢ στά ἄκρα τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ της· καὶ πρὶν ἀπ' ὅλα ὡς πρὸς τὴ συνέχεια. Ἔτσι μπορούμε νά ξέρομε ἀν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἀλλάζει ἢ ὄχι μέ «ἄλματα», ἀν καὶ πότε αὕτη αὐξάνεται ἀπεριόριστα· ἀν μ' ἄλλα λόγια ἡ ἀντίστοιχη γραφικὴ παράσταση θά εἶναι ἢ ὄχι μιὰ «ἀδιάσπαστη», μιὰ ἀπεριόριστη ἢ ὄχι γραμμή. Δέν μπορούμε ὅμως, μόνο μέσω τῆς συνεχείας, νά διαπιστώσουμε πόσο μεγάλη εἶναι, σέ διάφορες θέσεις, ἡ «τάση μεταβολῆς» τῆς συναρτήσεως καὶ ἀντίστοιχα πόσο ἀπότομα θά ἀνέρχεται ἢ θά κατέρχεται ἡ γραφικὴ παράστασή της σέ μιὰ ὀρισμένη περιοχή. Οὔτε ξέρομε νά βρίσκομε, ἀν ὑπάρχουν καὶ σέ ποιές θέσεις, τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως.

Ἡ ἀπάντηση σέ τέτοια ἐρωτήματα, πού γιά τίς ἐφαρμογές ἔχουν μεγάλη σημασία, κάνει ἀναγκαία μιὰ νέα χρήση τῆς ἰδέας τοῦ ὁρίου.

Μ' αὐτὴ πετυχαίνομε νὰ δώσομε μὲ σαφήνεια καὶ πληρότητα τὸ νόημα καὶ τὴν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας σὲ καμπύλη, σ' ἓνα σημεῖο της, καὶ νὰ μεταφέρομε σὲ μιά καμπύλη τὴν ἔννοια τῆς «κλίσεως» μιᾶς εὐθείας.

Ἔτσι γεννήθηκε, μέσω τῶν ὀριακῶν τιμῶν, μιά νέα μαθηματικὴ ἔννοια ποὺ ἔπαιξε καθοριστικὸ ρόλο στὴν παραπέρα ἀνάπτυξη τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ τῶν ἄλλων Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς.

Ἡ ἔννοια αὕτὴ εἶναι ἡ **παράγωγος** καὶ μ' αὕτὴ θ' ἀσχοληθοῦμε λίγο στὰ παρακάτω.

### β) Μιά πρώτη ιδέα γιὰ τὴν παράγωγο καὶ τὸ διαφορικό.

Ἡ πιὸ ἀπλὴ σχέση ἀνάμεσα σὲ δυὸ ἀλληλοεξαρτώμενα μεταβλητὰ ποσὰ εἶναι ἡ σχέση τῆς ἀναλογίας· δηλαδὴ ἡ σχέση ποὺ δίνεται ἀπὸ τὸν ἀλγεβρικό τύπο  $y = ax$  (1), ὅπου  $a$  ἓνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμὸς  $\neq 0$  καὶ  $x, y$  μεταβλητές. Ἄς πάρουμε ὁμῶς τὴ συνάρτηση ποὺ ὀρίζει ὁ κάπως γενικότερος τύπος  $y = ax + b$  (2), ὅπου  $b$  ἐπίσης ἓνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμὸς. Τὸ πρωτοβάθμιο πολυώνυμο (2) μᾶς ὀρίζει στὸ  $\mathbb{R}$  τὴν ἀπλούστερη, ὅπως ξέρομε, συνάρτηση μετὰ τὴ σταθερὴ  $y = c$ .

Θὰ θεωρήσομε τώρα ἓνα ἀρχικὸ ζεῦγος ἀντιστοιχῶν τιμῶν  $(x_0, y_0)$  τῆς (2) καὶ ἀκολουθῶς ἓνα ὁποιοδήποτε ἄλλο ζεῦγος  $(x, y)$  ἀντιστοιχῶν τιμῶν· τότε θὰ ἔχομε  $y_0 = ax_0 + b$  καὶ  $y = ax + b$  καὶ συνεπῶς  $y - y_0 = a(x - x_0)$  (3).

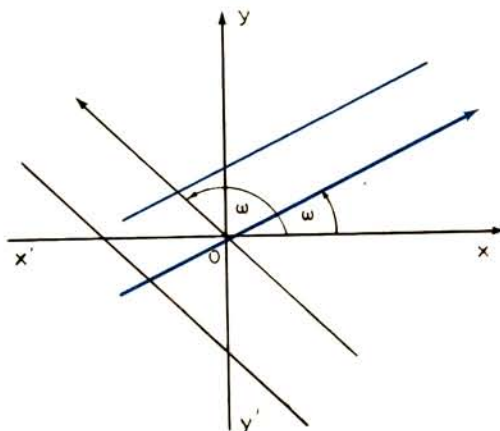
Θὰ παριστάνομε τὴ θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ διαφορὰ τιμῶν  $x - x_0$  μὲ  $\Delta x$  καὶ θὰ τὴν ὀνομάζομε, γιὰ συντομία, «αὔξηση» τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς· ἐπίσης τὴ διαφορὰ  $y - y_0$  θὰ τὴν παριστάνομε μὲ  $\Delta y$  καὶ θὰ τὴν ὀνομάζομε αὔξηση τῆς συναρτήσεως. Ἡ (3) τώρα γράφεται  $\Delta y = a \cdot \Delta x$  (3').

Ἀπὸ τὴν (3') συμπεραίνομε ὅτι ἡ αὔξηση  $\Delta y$  τῆς συναρτήσεως, ἀπὸ μιά ἀρχικὴ τιμὴ  $y_0$  σὲ μιάν ἄλλη  $y$ , εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὴν ἀντίστοιχη αὔξηση  $\Delta x$  τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς· δηλαδὴ ὁ λόγος  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ , τῶν ἀντιστοιχῶν αὐξήσεων (μεταβολῶν), διατηρεῖται σταθερὸς καὶ εἶναι ἀνεξάρτητος ὅχι μόνον ἀπὸ τὴν τιμὴ  $x$  ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ τιμὴ  $x_0$ . Ἔτσι γιὰ νὰ βρίσκομε κάθε φορά τὴν αὔξηση  $\Delta y$  τῆς  $y$  ποὺ ἀντιστοιχίζεται σὲ μιά δοσμένη αὔξηση  $\Delta x$  τῆς  $x$  δὲν ἔχομε παρὰ νὰ πολλαπλασιάσομε αὕτὴ τὴν αὔξηση  $\Delta x$  ἐπὶ τὸ σταθερὸ συντελεστή  $a$ .

Γνωρίζομε ἐξάλλου ὅτι ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς (2), σ' ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα συντεταγμένων, εἶναι μιά εὐθεῖα καὶ ὅτι ὁ σταθερὸς συντελεστής  $a$  εἶναι ὁ συντελεστής διευσθύνσεως αὐτῆς τῆς εὐθείας· διαπιστώνομε ἐπιπλέον ὅτι ὁ συντελεστής αὐτὸς ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ποὺ σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μὲ τὸν ἄξονα  $Ox$  (εφω =  $a$ : σχ. 12.1α).

Ἄς πάρουμε τώρα τὴ συνάρτηση μὲ τύπο:  $y = 2x^2$  (4). Γιὰ μιά τιμὴ  $x_0$  τοῦ  $x$  θὰ ἔχομε  $y_0 = 2x_0^2$  καὶ συνεπῶς:  $\Delta y = y - y_0 = 2x^2 - 2x_0^2$  (5).

Ἐπειδὴ  $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = \Delta x + x_0$ , ἡ (5) γίνεται:



Σχ. 12.1α.

$\Delta y = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 2x_0^2 + 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x_0^2 = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$   
δηλαδή έχουμε τελικά:  $\Delta y = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$  (6).

Παρατηρούμε τώρα ότι: \*Αν από το δεύτερο μέλος της ισότητας (6) ξλειπτε ο όρος  $2(\Delta x)^2$ , τότε η αύξηση  $\Delta y$  της συναρτήσεως, που θα ήταν ίση με  $4x_0 \cdot \Delta x$ , θα εξαρτιόταν βέβαια από την αρχική τιμή  $x_0$  της μεταβλητής, αλλά πάντως θα ήταν ανάλογη προς την αύξηση  $\Delta x$  αυτής της μεταβλητής (μέ συντελεστή ανάλογίας τό  $4x_0$ ).

Κατά συνέπεια είναι φυσικό νά αναζητήσουμε κάτω από ποιές συνθήκες ή επίδραση της παρουσίας του όρου  $2(\Delta x)^2$  θά μπορούσε νά μειωθεί έτσι ώστε στην περιοχή τουλάχιστο της θέσεως  $x_0$  (δηλαδή για τιμές  $x$  γειτονικές προς την  $x_0$ ) νά ισχύει κατά προσέγγιση ή αναλογία μεταξύ  $\Delta x$  καί  $\Delta y$ .

\*Ας θεωρήσουμε ως αρχική τιμή  $x_0$  την τιμή 1· τότε:

$$\Delta y = y - 2 = 4\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Μέ  $\Delta x = \pi \cdot x = \frac{1}{10}$  παίρνουμε  $\Delta y = 0,4 + 0,02 = 0,42$ .

Κρατώντας, από την όλική αύξηση 0,42, τό μέρος  $4\Delta x = 0,4 = 0,40$ , κάνομε σφάλμα ίσο μέ  $\frac{0,02}{0,42} = \frac{1}{21}$  της όλικής αύξήσεως της συναρτήσεως.

\*Αν ως  $\Delta x$  πάρομε  $\frac{1}{100}$  π.χ., τότε  $\Delta y = 0,04 + 0,0002 = 0,04002$ · αν

κρατήσομε τώρα τό μέρος  $4\Delta x = 0,04$ , τό σφάλμα μας περιορίζεται στό  $\frac{0,0002}{0,0402} = \frac{2}{402} = \frac{1}{201}$  της όλικής αύξήσεως της συναρτήσεως. \*Έτσι βλέ-

πομε ότι όσο πιό μικρή είναι ή  $|\Delta x|$ , τόσο πιό μικρό μέρος της όλικής αύξήσεως  $\Delta y$  «χάνομε» αν κρατήσομε μόνο τό κομμάτι  $4\Delta x$ . \*Όταν λοιπόν τό μέρος

$2(\Delta x)^2$  μπορεί νά είναι άμελητέο, σέ σχέση μέ τήν όλική αύξηση  $\Delta y$ , τότε τό μέρος  $4\Delta x$  μπορεί νά θεωρείται ώς τό «κύριο μέρος» αὐτῆς τῆς αύξήσεως  $\Delta y$  καί συνεπῶς «περίπου ἰσοδύναμο» μέ τήν ὅλη αύξηση.

**Θά μιλήσουμε τώρα κάπως γενικότερα, ἀλλ' ὅπωςδήποτε μέ τρόπο πού μᾶς εἶναι γνώριμος ὕστερα ἀπό τήν προηγούμενη θεωρία γιά τίς ὀριακές τιμές.**

Γυρίζομε στή σχέση (6) καί διαπιστώνομε: 1) Ὃταν  $\Delta x \rightarrow 0$ , δηλαδή ὅταν  $x \rightarrow x_0$ , τότε καί  $\lim_{x \rightarrow x_0} (y - y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y =$   
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2] = 0.$

Ὡστε ὅταν ἡ αύξηση τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς τείνει στό μηδέν, τότε καί ἡ αύξηση τῆς συναρτήσεως  $f(x) = 2x^2$  τείνει στό μηδέν. Αὐτό ὁμως σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησή μας εἶναι συνεχῆς στή θέση  $x_0$  διότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (y - y_0) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} y = y_0 \text{ δηλαδή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

II) Διαιρώντας καί τά δύο μέλη τῆς (6) διά  $\Delta x$  παίρνομε  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x$  καί βλέπομε ὅτι ὁ λόγος  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  τῶν αύξήσεων συναρτήσεως καί ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς ἐξαρτᾶται καί ἀπό τήν ἀρχική τιμή  $x_0$  καί ἀπό τήν αύξηση  $\Delta x$  τῆς μεταβλητῆς  $x$ .  
 Ἄν ὁμως  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow x_0$ ), τότε:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 4x_0.$$

Ἡ παραπάνω ὀριακή τιμή  $4x_0$  τοῦ πηλίκου διαφορῶν (αύξήσεων)  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  γιά  $x \rightarrow x_0$ , πού ἐξαρτᾶται πλέον μόνο ἀπό τήν ἀρχική τιμή  $x_0$ , εἶναι ὁ συντελεστής μέ τόν ὅποιο πρέπει νά πολλαπλασιάζομε τήν αύξηση  $\Delta x$  τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς γιά νά παίρνομε τό «κύριο μέρος»  $4x_0 \cdot \Delta x$  τῆς ὀλικῆς αύξήσεως τῆς συναρτήσεως.

Ὁ συντελεστής  $4x_0$  λέγεται **παράγωγος τῆς συναρτήσεως  $f(x) = 2x^2$  στή θέση  $x_0$** . τό δέ γινόμενο  $4x_0 \Delta x$ , πού ἀντικαθιστᾶ τήν ὀλική αύξηση  $\Delta y$ , ὅταν τό  $2(\Delta x)^2$  θεωρεῖται ἀμελητέο, λέγεται **διαφορικό τῆς  $f(x)$  στή θέση  $x_0$  καί τό συμβολίζομε μέ  $dy$**  γιά νά τό διακρίνομε ἀπό τήν αύξηση  $\Delta y$ .

Ἄς σημειωθεῖ ὅτι στήν εἰδική περίπτωση τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως  $y = ax + \beta$  τό διαφορικό  $dy$  εἶναι ἴσο μέ τήν αύξηση  $\Delta y$ .

Πράγματι, σέ μία θέση  $x_0$ , ἔχομε  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(ax + \beta) - (ax_0 + \beta)}{x - x_0} =$   
 $= \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$  καί συνεπῶς  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$  δηλαδή ἡ παράγωγος

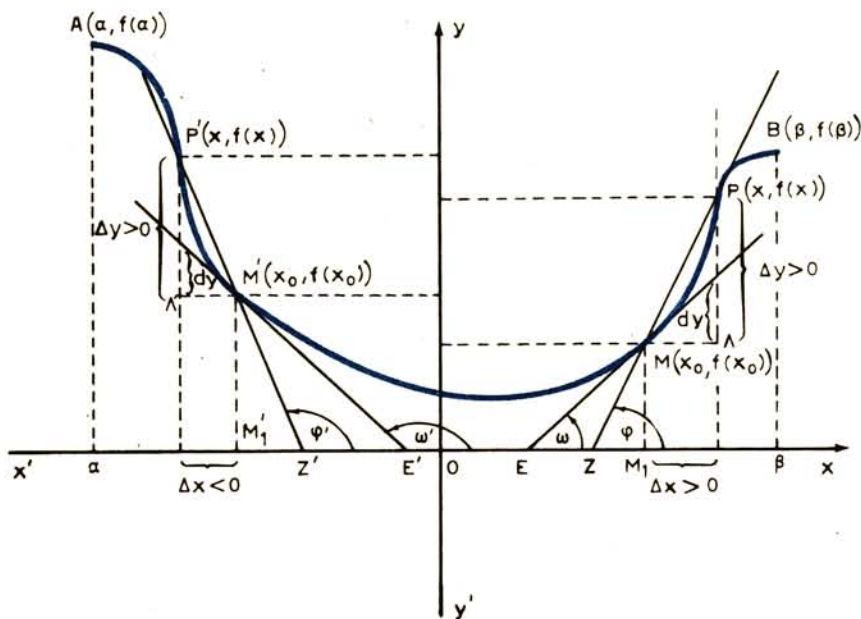
είναι  $\alpha$  και επομένως τό διαφορικό  $dy = \alpha \cdot \Delta x$ . Ίσχύει όμως και ή ισότητα  $\Delta y = \alpha \cdot \Delta x$ , άρα  $\Delta y = dy$ .

Μέ  $\alpha = 1$  και  $\beta = 0$  ή γραμμική συνάρτηση γίνεται  $y = x$  και συνεπώς έχομε  $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ . Μπορούμε λοιπόν νά γράφομε, στή σχέση  $dy = 4x_0 \Delta x$ ,  $dx$  αντί  $\Delta x$  και νά έχομε έτσι (γιά τή συνάρτηση  $y = 2x^2$  στή θέση  $x_0$ ) τόν τύπο:

$$dy = 4x_0 dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 4x_0$$

γ) Έξίσωση τής ευθείας τής εφαπτομένης σ' ένα σημείο τής γραφικής παραστάσεως μιās συναρτήσεως. Όρισμός τής παραγώγου.

\*Ας είναι  $y = f(x)$  μιá συνάρτηση όρισμένη και συνεχής τουλάχιστο σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και έστω  $AM'MB$  ή γραφική της παράσταση γιά τό παραπάνω διάστημα (σχ. 12.1β).



Σχ. 12.1β.

Παίρνομε ένα σημείο  $M$  τής καμπύλης μέ συντεταγμένες  $(x_0, f(x_0))$  και ένα δεύτερο σημείο τής  $P(x, f(x))$ , όπου  $x_0, x \in [\alpha, \beta]$  και  $x_0 \neq x$ .

Θα παραστήσομε μέ  $\Delta y$  τή διαφορά  $f(x) - f(x_0)$  και μέ  $\Delta x$  τή διαφορά  $x - x_0$  και, όπως ήδη είπαμε, θα ονομάζομε αυτές τίς διαφορές αύξηση τής συναρτήσεως και τής ανεξάρτητης μεταβλητής αντίστοιχα.

$$\text{Γνωρίζομε ότι ό λόγος } \lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

είναι ὁ συντελεστής διευσθύνσεως τοῦ διανύσματος  $\vec{MP}$  καί συνεπῶς καί τῆς εὐθείας  $MP$ .

$$\text{Ἄρα ἡ ἐξίσωση } \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (7) \text{ εἶναι ἡ}$$

ἐξίσωση τῆς εὐθείας  $MP$ .

Ὅταν τό σημεῖο  $P$  μετατοπίζεται πάνω στήν καμπύλη καί τείνει πρὸς τό σημεῖο  $M$ , τότε ἡ τετμημένη του  $x$  τείνει στό  $x_0$  καί συνεπῶς ἡ αὐξηση  $x - x_0 = \Delta x$  τείνει στό  $0$ . ἀλλὰ τότε, ἐπεὶ ὑποθέσαμε ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής, θά ἔχομε καί  $f(x) - f(x_0) = \Delta y \rightarrow 0$ .

Μέ τίς παραπάνω προϋποθέσεις ( $x \rightarrow x_0 \implies f(x) \rightarrow f(x_0)$ ), τό πηλίκο διαφορῶν (αὐξήσεων)  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  παίρνει τήν «ἀπροσδιόριστη μορ-

φή  $\frac{0}{0}$ » καί μπορεῖ νά ἔχει ἢ ὄχι ὀριακή τιμή ἕναν πραγματικό ἀριθμό.

Ἄν συμβαίνει νά εἶναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = l, \text{ ὅ-}$$

που  $l$  ἕνας ὀρισμένος πραγματικός ἀριθμός, τότε: ἡ εὐθεῖα μέ ἐξίσωση τήν

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = l \text{ ἢ } y = f(x_0) + l(x - x_0) \text{ ὀνομάζεται ἑφαπτομένη τῆς γραφικῆς}$$

παραστάσεως τῆς  $f(x)$  στό σημεῖο  $M(x_0, y_0 = f(x_0))$  καί ὁ ἀριθμός  $l$  παράγωγος τῆς  $f(x)$  στή θέση  $x_0$ . Δηλαδή παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως  $f$ , στό σημεῖο  $x_0$ , ἡ ὁποία εἶναι ὀρισμένη σέ ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ , λέγεται τό ὄριο

τοῦ πηλίκου διαφορῶν  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , μέ  $x \rightarrow x_0$ , ἂν αὐτό ὑπάρχει καί εἶναι πραγματικός ἀριθμός.

Συμβολικά ὁ  $l$  σημειώνεται μέ  $f'(x_0)$ . δηλαδή γράφομε:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)} \quad (8)$$

Ἐπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς ἑφαπτομένης τῆς γραφικῆς παραστάσεως γράφεται:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \quad (9)$$

Ἐφόσον ὑπάρχει τό ὄριο τοῦ πηλίκου  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , γιά  $x \rightarrow x_0$ ,

λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση  $f(x)$  παραγωγίζεται (ἔχει παράγωγο) στή θέση  $x_0$ . Ἄν ἡ συνάρτηση  $f(x)$  ἔχει παράγωγο σέ κάθε σημεῖο ἑνός διαστήματος  $\Delta$  ἀπό τό

πεδίο ορίσμου της, τότε, αντιστοιχίζοντας σε κάθε  $x \in \Delta$  την τιμή της παραγώγου  $f'(x)$ , κατασκευάζουμε μιά νέα συνάρτηση που λέγεται **παραγώγος συνάρτηση** ή απλά **παραγώγος** της  $f(x)$  στο  $\Delta$ .

Τό γινόμενο της παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως  $f(x)$  επί τήν αύξηση  $\Delta x$  της ανεξάρτητης μεταβλητῆς θά τό λέμε **διαφορικό της  $f(x)$**  καί θά τό θεωροῦμε ισοδύναμο μέ τήν ὁλική αύξηση της συναρτήσεως ὅταν  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Ἐξάλλου, ὅπως εἶδαμε πιοῦ πάνω, ἡ αύξηση  $\Delta x$  της ανεξάρτητης μεταβλητῆς εἶναι ἴση μέ τό διαφορικό  $dx$  της συναρτήσεως  $y = x$  ἔτσι ἔχομε γενικά:

$$\boxed{dy = f'(x)dx \iff \frac{dy}{dx} = f'(x)} \quad (10)$$

**Παρατηρήσεις :** I) Ἡ τριγωνομετρική ἑφαπτομένη της γωνίας  $\varphi$  (εφ  $\varphi$ ) που ἡ εὐθεία MP σχηματίζει μέ τόν ἄξονα  $x'x$  (σχ. 12.1β) ἰσοῦται, ὅπως ξέρομε, μέ τό συντελεστή διευσθύνσεως της εὐθείας MP, ὁ ὁποῖος λέγεται καί **κλίση** της εὐθείας πρὸς τόν ἄξονα  $x'x$ . Ἀπό τό σχῆμα 12.1β προκύπτει τώρα ὅτι, ὅταν ὑπάρχει παράγωγος  $f'(x_0)$  στή θέση  $x_0$ , τότε ἡ κλίση  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  της εὐ-

θείας MP ἔχει ὄριο τόν ἀριθμό  $f'(x_0)$  γιά  $x \rightarrow x_0$ . Συνεπῶς ἡ κλίση  $f'(x_0)$  της ἑφαπτομένης της γραφικῆς παραστάσεως στό σημείο της  $M(x_0, f(x_0))$  εἶναι ἴση μέ τήν τριγωνομετρική ἑφαπτομένη της γωνίας  $\hat{\omega}$  που ἡ ἑφαπτομένη εὐθεία σχηματίζει μέ τόν ἄξονα  $x'x$ :  $f'(x_0) = \text{εφ } \omega$ . Ἡ γωνία  $\omega$  εἶναι ὁξεία ἢ ἀμβλεία καθόσον  $f'(x_0) \geq 0$  ἢ  $f'(x_0) < 0$ .

II) Ὅταν τό πεδίο ορίσμου μιᾶς συναρτήσεως  $f(x)$  εἶναι ἓνα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  καί τό  $x_0$  εἶναι τό ἀριστερό ἄκρο τοῦ διαστήματος ( $x_0 = \alpha$ ), τότε παίρνομε τό  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  καί ἐφόσον αὐτό ὑπάρχει λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση  $f(x)$  ἔχει παράγωγο στή θέση  $\alpha$  ἀπό δεξιά. Ὅμοια ἂν ὑπάρχει τό  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$ , τότε λέμε ὅτι ἡ  $f(x)$  ἔχει παράγωγο στή θέση  $\beta$  ἀπ' ἀριστερά. Ἡ ἀπ' ἀριστερά ἢ ἀπό δεξιά παράγωγος σέ μιά θέση λέγεται **μονόπλευρη παράγωγος**.

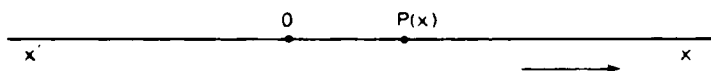
**Σημείωση :** Ἐστω  $f(x)$  μιά συνάρτηση ὀρισμένη, συνεχῆς καί παραγωγίσιμη μέσα σ' ἓνα διάστημα  $\Delta = [\alpha, \beta]$  καί ἔστω  $\sigma(x)$  ἡ παράγωγος (συνάρτηση) της  $f(x)$ . Ἄν καί ἡ  $\sigma(x)$  παραγωγίζεται ἐπίσης μέσα στό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , τότε ἡ παράγωγος  $\sigma'(x)$  της  $\sigma(x)$  λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της  $f(x)$  καί σημειώνεται συμβολικά μέ  $f''(x)$ . Ἡ  $\sigma(x) = f'(x)$  λέγεται τότε **πρώτη παράγωγος** της  $f(x)$ .

Ὅμοια μιλάμε καί γιά τρίτη κλπ παράγωγο της  $f(x)$ , ὅταν βέβαια ὑπάρχουν.



## 12.2 Μία εφαρμογή στη Φυσική.

Θεωρούμε πάνω σ' έναν άξονα  $x'x$  ένα κινητό σημείο  $P$  (σχ. 12.2), τοῦ οποίου ἡ θέση, γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα πού πραγματοποιεῖται ἡ κίνηση, εἶναι ὁρισμένη σέ κάθε χρονική στιγμή  $t$ .



Σχ. 12.2.

Αὐτό οὐσιαστικά σημαίνει ὅτι ἡ τετμημένη  $x$  δίνεται ἀπὸ μιά γνωστή συνάρτηση  $x = f(t)$  (1) τοῦ χρόνου  $t$ .

\*Αν ἡ συνάρτηση (1) εἶναι γραμμική, δηλαδή ἂν  $x = \lambda t + \beta$  ὅπου  $\lambda$  καὶ  $\beta$  ὁρισμένοι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ  $\lambda \neq 0$ , τότε τὸ κινητὸ διανύει, πάνω στὴν τροχιά του  $x'x$ , σέ ἴσους χρόνους ἴσα διανύσματα. Μ' ἄλλα λόγια ἔχομε  $f(t) - f(t_0) = \lambda(t - t_0) = \lambda(t' - t'_0) = f(t') - f(t'_0)$  ἂν  $t - t_0 = t' - t'_0$ .

Συνεπῶς τὸ πηλίκο  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lambda$  μένει ἐδῶ σταθερὸ γιὰ ὅλα τὰ  $\Delta t$ .

Αὐτὸς ὁ σταθερὸς λόγος λέγεται, στὴν προκειμένη περίπτωση, **μέτρο τῆς ταχύτητας (ἢ συντομότερα ταχύτητα) τοῦ κινητοῦ καὶ ἡ κίνηση χαρακτηρίζεται ὡς ἰσοταχύς ἢ ὁμαλὴ εὐθύγραμμη.**

\*Ὡς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἡ συνάρτηση (1) δὲν εἶναι γραμμική· τότε τὸ πηλίκο  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  δὲν θὰ διατηρεῖται σταθερὸ στὰ διάφορα χρονικά διαστήματα  $t - t_0$ .

Αὐτὸ τὸ (μεταβαλλόμενο) πηλίκο τὸ ὀνομάζουμε **μέση ταχύτητα γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα  $t - t_0$ .**

Με τὴν προϋπόθεση ὅτι ὑπάρχει, προσδιορίζουμε ἀκολούθως τὸ:

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  αὐτὸ τὸ ὄριο, πού εἶναι ἡ παράγωγος

τῆς  $f(t)$  στὴ θέση  $t_0$ , λέγεται **ταχύτητα τοῦ  $P$  κατὰ τὴ χρονικὴ στιγμή  $t_0$ .**

\*Αν μέ  $V(t)$  παραστήσουμε τὴν παράγωγο (συνάρτηση)  $f'(t)$  τῆς  $f(t)$ , γιὰ κάθε χρονικὴ στιγμή  $t$  ἀπὸ τὸ χρονικὸ διάστημα ὅπου πραγματοποιεῖται ἡ κίνηση, τότε ἡ ἐξίσωση  $V = V(t)$  εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ταχύτητας γιὰ τὴν παραπάνω χρονικὴ περίοδο.

## 12.3 Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα.

1. *Ἡ παράγωγος κάθε σταθερῆς συναρτήσεως εἶναι μηδέν.*

**Πράγματι:** \*Αν  $f(x) = c$ , ὅπου  $c$  μιά σταθερά, τότε:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0 \text{ για όποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές } x \text{ και } x_0. \text{ Άρα}$$

$$\text{καί } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

2. Η παράγωγος της γραμμικής συναρτήσεως  $y = ax + \beta$  (μέ  $a, \beta \in \mathbb{R}$  και  $a \neq 0$ ) είναι:  $f'(x) = a$ .

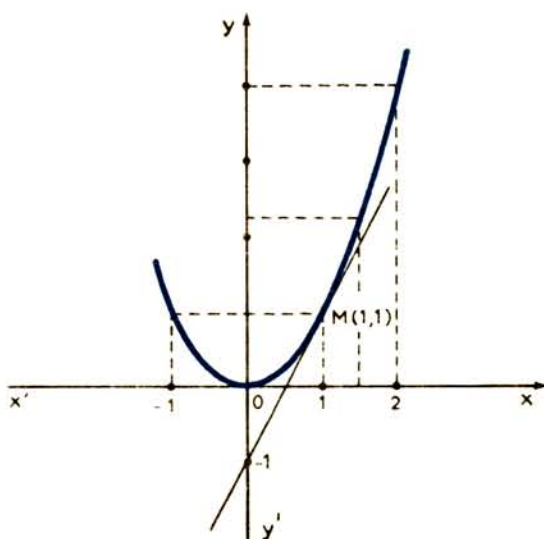
$$\text{Πράγματι: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a \quad \forall x \neq x_0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$$

3. Νά βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως μέ τύπο  $y = x^2$  (I) και ακολούθως νά προσδιοριστούν οι εξισώσεις των ευθειών πού εφάπτονται στά σημεία  $x = 0$  και  $x = 1$  της γραφικής παραστάσεως της (I).

$$\text{Έχουμε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \quad \forall x \neq x_0.$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$



Σχ. 12.3.

Έπειδή η παράγωγος της  $x^2$  στή θέση  $x_0$  είναι  $2x_0$ , για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ , συμπεραίνουμε ότι η παράγωγος συνάρτηση της  $x^2$  είναι  $2x$ . Ωστε  $(x^2)' = 2x$ .

**Τό σημείο της γραφικής παραστάσεως της (I) μέ  $x = 0$**  (σχ. 12.3) είναι η άρχή τών άξόνων. Άρα ή εξίσωση τής έφαπτομένης στό σημείο  $O(0, 0)$  είναι:

$$\frac{y-0}{x-0} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ πρόκειται συνεπώς γιά τόν άξονα } x'x.$$

**Τό σημείο της γραφικής παραστάσεως μέ  $x = 1$**  είναι τό  $M(1, 1)$  (σχ. 12.3), διότι από τήν (I) παίρνομε  $f(1) = 1^2 = 1$ .

Έπειδή ή παράγωγος συνάρτηση τής  $x^2$  είναι  $2x$ , έπεται ότι ή παράγωγος στή θέση 1 ίσοῦται μέ  $2 \cdot 1 = 2$ . Άρα ή εξίσωση τής έφαπτομένης στό

σημείο  $M(1, 1)$  είναι:  $\frac{y-1}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$ .

## 12.4 Άσκήσεις.

1. α) Νά βρεθεί ή παράγωγος τής συναρτήσεως μέ τύπο  $y = 5x^2 + 7x - 6$  (α).

β) Νά βρεθοῦν οί εξισώσεις τών ευθειών (ε) καί (η) πού έφάπτονται μέ τή γραφική παράσταση τής (α) στά σημεία της μέ τετμημένες  $-0,7$  καί  $-1$  αντίστοιχα. γ) Νά υπολογιστεί ή γωνία τής (η) μέ τόν άξονα  $x'x$ .

2. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο  $y = x^3$  (α). I) Νά βρεθεί ή παράγωγος τής (α). II) Νά προσδιοριστοῦν οί εξισώσεις τών ευθειών πού έφάπτονται στή γραφική παράσταση τής (α) στά σημεία μέ τετμημένες 0,  $-1$  καί  $+1$ .

3\* Θεωρούμε τή συνάρτηση μέ τύπο  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ . νά βρεθεί ή παράγωγος της.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 13

### ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

#### 13.1 Ιδιότητες τών παραγώγων. Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων.

α) Ό άπευθείας προσδιορισμός τής παραγώγου βάσει τοῦ όρισμοῦ της είναι εύκολος μόνο γιά λίγες βασικές συναρτήσεις.

Γιά τήν παραγωγή τών άλλων συναρτήσεων χρησιμοποιούμε τά αποτελέσματα πού βρίσκομε μέ τόν παραπάνω άμεσο προσδιορισμό σέ συνδυασμό μέ όρισμένες γενικές ιδιότητες τών παραγώγων.

Παρακάτω έκθέτομε πρώτα αὐτές τίς γενικές ιδιότητες.

**Πρόταση 1.** Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη μέσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι καί συνεχής μέσα στό ίδιο διάστημα.

**Πράγματι:** Από  $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$  μέ  $x \neq x_0$ , συμ-

περαίνομε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ · ή τελευταία ισότητα σημαίνει ότι ή συνάρτηση

$f(x)$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0$  του διαστήματος  $\Delta$ .

Τό αντίστροφο δέν ἀληθεύει. Δηλαδή μπορεί μιὰ συνάρτηση νά είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορίσμου της, χωρίς νά είναι αναγκαστικά καί παραγωγίσιμη σ' αὐτό.

Ἐς πάρομε γιά παράδειγμα τή συνάρτηση μέ τύπο  $y = |x|$ , ή όποία είναι παντοῦ συνεχής μέσα στό  $\mathbb{R}$ , ἀκόμα καί στό σημείο 0· διότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$  καί  $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 = f(0)$ .

Ἐν τούτοις ή  $|x|$  δέν ἔχει παράγωγο στή θέση 0 διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\text{καί} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Ἐς θεωρήσουμε ἀκόμα τή συνάρτηση μέ τύπο  $y = \sqrt[3]{x}$ . Ἡ συνάρτηση είναι παντοῦ συνεχής μέσα στό  $\mathbb{R}$ · ὁμως στή θέση 0 δέν ἔχει ὡς παράγωγο ἕναν

$$\text{πραγματικό ἀριθμό. Πράγματι: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty. \text{ Ἐτσι, ή συνάρτηση } \sqrt[3]{x} \text{ δέν ἔχει}$$

παράγωγο γιά  $x = 0$  μολονότι είναι συνεχής στή θέση 0. Λέμε ὁμως μερικές φορές, **ἐπεκτείνοντας τήν ἔννοια τῆς παραγώγου**, ὅτι ή παράγωγος στό σημείο 0 είναι τό σύν ἄπειρο. Γεωμετρικά αὐτό σημαίνει ὅτι ή γραφική παράσταση τῆς  $y = \sqrt[3]{x}$  ἔχει ἐφαπτομένη στό σημείο  $O(0, 0)$  (στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων) τόν ἄξονα  $Oy$ .

**Πρόταση 2.** Ἐν οἱ συναρτήσεις  $f(x)$  καί  $g(x)$  παραγωγίζονται σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε καί οἱ συναρτήσεις  $f(x) + g(x)$  καί  $f(x) - g(x)$  παραγωγίζονται στό ἴδιο διάστημα καί μάλιστα είναι  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ .

[Δηλαδή ή παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος (ἀντίστοιχα τῆς διαφορᾶς) δύο συναρτήσεων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα (ἀντίστοιχα τή διαφορά) τῶν παραγῶγων].

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι μέ } x \neq x_0 \text{ ἔχομε: } & \frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{x - x_0} = \\ & = \frac{[f(x) - f(x_0)] \pm [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \text{ Ἐρα} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

δηλαδή  $[f(x_0) \pm g(x_0)]' = f'(x_0) \pm g'(x_0).$

**Παρατήρηση:** Ἡ ιδιότητα  $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$  γενικεύεται γιὰ ἕνα ὁποιοδήποτε πλῆθος συναρτήσεων. Δηλαδή  $[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$ , ἐφόσον οἱ συναρτήσεις εἶναι παραγωγίσιμες μέσα σ' ἕνα κοινὸ διάστημα. (Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη μὲ μαθηματικὴ ἐπαγωγή).

**Πρόταση 3.** Ἄν οἱ συναρτήσεις  $f(x)$  καὶ  $g(x)$  παραγωγίζονται μέσα σ' ἕνα διάστημα  $\Delta$ , τότε καὶ ἡ συνάρτηση  $f(x) \cdot g(x)$  παραγωγίζεται καὶ εἶναι  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

**Πράγματι** μὲ  $x \neq x_0$  ἔχομε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \\ &+ f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

\* Ἀρα  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Ἐπειδὴ ἡ  $g(x)$  εἶναι παραγωγίσιμη θὰ εἶναι καὶ συνεχὴς καὶ συνεπῶς ἔχομε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ . Ὡστε  $[f(x_0) \cdot g(x_0)]' = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .

**Παρατήρηση.** Ἡ ιδιότητα γενικεύεται. Δηλαδή  $[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) + \dots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n'(x)$ , ἐφόσον οἱ συναρτήσεις παραγωγίζονται μέσα σ' ἕνα κοινὸ διάστημα  $\Delta$ .

(Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη μὲ τὴ μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς).

**Πόρισμα:** Ἄν  $f(x)$  μιὰ συνάρτηση παραγωγίσιμη (σ' ἕνα διάστημα) καὶ  $c$  μιὰ σταθερά  $\neq 0$ , τότε  $(cf(x))' = cf'(x)$ .

**Ἐφαρμογή.** «Εἶναι  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  καὶ  $(ax^n)' = nax^{n-1}$ , ἂν  $n \in \mathbb{N}$ ».

Πράγματι, σύμφωνα μὲ τὴ γενίκευση τῆς προτάσεως 3 ἔχομε:

$$(x^n)' = (x \cdot x \cdot \dots \cdot x)' = x' \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x + x \cdot x' \cdot x \cdot \dots \cdot x + \dots + x \cdot x \cdot \dots \cdot x' = nx^{n-1}, \text{ διότι } x' = 1.$$

Ἀκολούθως, σύμφωνα καὶ μὲ τὸ ἀμέσως προηγούμενο πόρισμα, ἔχομε  $(ax^n)' = nax^{n-1}$ , ὅπου  $a \in \mathbb{R}$  καὶ  $n \in \mathbb{N}$ .

**Παράδειγμα.** Νά βρεθεί η παράγωγος του πολυωνύμου  $\sqrt{5}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 1$ .

Σύμφωνα με την πρόταση 2 και την παραπάνω εφαρμογή παίρνουμε:

$$\left(\sqrt{5}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 1\right)' = 4\sqrt{5}x^3 - \frac{7}{2} \cdot 2x^1 + 0 = 4\sqrt{5}x^3 - 7x.$$

**Πρόταση 3.** Αν οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  παραγωγίζονται μέσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και είναι  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Delta$ , τότε:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{για } x \in \Delta).$$

Θά βρούμε πρώτα την παράγωγο της  $\frac{1}{g(x)}$ . Με  $x \neq x_0$  έχουμε:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \quad \text{και συνεπώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}.$$

Αλλά  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = \frac{1}{g^2(x_0)}$  [διότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$  αφού ή  $g(x)$  σάν παραγωγίσιμη είναι και συνεχής] και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -g'(x_0).$$

$$\text{*Αρα: } \left[\frac{1}{g(x_0)}\right]' = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Τώρα, σύμφωνα και με τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right]' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

**Εφαρμογή:** Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο  $y = x^{-v}$  όπου  $v \in \mathbb{N}$  είναι  $(x^{-v})' = -v \cdot x^{-v-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι έχουμε: } (x^{-v})' &= \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^v - 1 \cdot (x^v)'}{x^{2v}} = \\ &= \frac{0 - vx^{v-1}}{x^{2v}} = -\frac{vx^{v-1}}{x^{2v}} = -v \cdot \frac{1}{x^{2v-v+1}} = -v \cdot \frac{1}{x^{v+1}} = -v \cdot x^{-v-1}. \end{aligned}$$

**Παρατήρηση :** Βλέπουμε (στήν παραπάνω εφαρμογή) ότι ο κανόνας παραγωγίσεως δυνάμεως με έκθετη φυσικό (εφαρμογή προτάσεως 3) ισχύει και σε δύναμη με έκθετη άρρητικό άκέραιο.

**β) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\phi x$ ,  $\sigma\phi x$  είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες παντού μέσα στο πεδίο ορισμού τους (τά μέτρα τῶν τόξων δίνονται σε άκτίνια).**

1) Έχουμε για τό ήμίτονο :  $\eta\mu x - \eta\mu x_0 = 2\eta\mu \frac{x-x_0}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2}$  . Άλλά

$$\left| \eta\mu \frac{x-x_0}{2} \right| \leq \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \quad (\text{γιατί;} ) \quad \text{και} \quad \left| \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 1. \quad \text{Άρα:}$$

$$\left| \eta\mu x - \eta\mu x_0 \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \cdot 1 = |x-x_0| \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0| = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι και  $\lim_{x \rightarrow x_0} |\eta\mu x - \eta\mu x_0| = 0$  και συνεπώς  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ .

**Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τό συνημίτονο είναι συνάρτηση συνεχής.**

Ός πρὸς τήν **εφαπτομένη**  $= \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$  και τή **συνεφαπτομένη**  $= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$  άρ-

κεϊ νά παρατηρήσουμε ότι είναι πηλικά συνεχῶν συναρτήσεων και συνεπώς είναι κι αὐτές συνεχείς [βλέπε πρόταση 1 τῆς παραγράφου 11.3(β)].

II) Προσδιορίζουμε τώρα τίς παραγώγους : Έχουμε :  $\frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} =$

$$= \frac{2\eta\mu \frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2} = \frac{\eta\mu \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2} =$$

$$= \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2x_0 + \Delta x}{2} = \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right), \quad (x = x_0 + \Delta x).$$

Θ' αποδείξουμε ότι :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = 1$ . Παίρνουμε σ' έναν τριγωνομετρικό

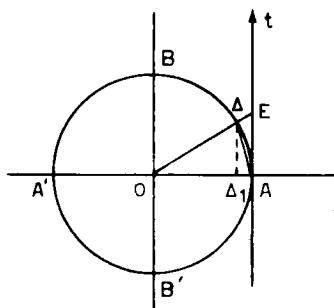
κύκλο ένα θετικό τόξο  $\widehat{AD} = \omega$  rad όπου  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$  (σχ. 13.1) και ἄς είναι

E τό σημείο τομῆς τῆς τελικῆς άκτίνιας τοῦ τόξου μέ τόν ἄξονα At τῶν ἐφα-

πτομένων. Έχουμε : ἔμβαδόν τριγώνου ( $\triangle O\widehat{AD}$ ) < ἔμ. κυκλικοῦ τομέα ( $\triangle OAD$ ) <

$$< \text{ἔμ. τριγώνου } \triangle OAE \Rightarrow \frac{1}{2} |\vec{OA}| \cdot \overline{AD} < \pi \cdot |\vec{OA}|^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} < \frac{1}{2} |\vec{OA}| \cdot \overline{AE}.$$

καί ἐπειδὴ  $|\vec{OA}| = 1$ , παίρνομε:  $\overline{\Delta_1\Delta} < \omega < \overline{AE}$  (I). Ἀλλὰ  $\overline{\Delta_1\Delta} = \eta\mu \omega$  καί



Σχ. 13.1.

$\overline{AE} = \epsilon\phi \omega$  καί συνεπῶς ἡ σχέση (I) γράφεται  $\eta\mu \omega < \omega < \epsilon\phi \omega \Rightarrow$   
 $1 < \frac{\omega}{\eta\mu \omega} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \omega} \Rightarrow 1 > \frac{\eta\mu \omega}{\omega} > \sigma\upsilon\nu \omega$  (II). Ἐπειδὴ  $0 < \sigma\upsilon\nu \omega < 1$

(γιά τόξα τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος  $(0, \frac{\pi}{2})$ ) καί ἐπειδὴ  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu \omega = 1$

(τό συνημίτονο εἶναι συνάρτηση συνεχῆς) συμπεραίνομε ἀπό τή (II) ὅτι καί

$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = 1$ . Ἄν  $\omega < 0$  γράφομε  $\frac{\eta\mu \omega}{\omega} = \frac{\eta\mu(-\omega)}{(-\omega)}$  καί βρίσκομε

πάλι  $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = \lim_{-\omega \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu(-\omega)}{-\omega} = 1$ . ( $\omega < 0 \Leftrightarrow -\omega > 0$ ).

Ὑστερα ἀπ' αὐτό παίρνομε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) =$$

$= 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(x_0) = \sigma\upsilon\nu x_0$ . [Εἶναι  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$  διότι τό συνημίτονο εἶναι συνάρτηση συνεχῆς].

Ὡστε :

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

Ὅμοια βρίσκομε ὅτι :

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

Γιά τήν  $\epsilon\phi x$  καί  $\sigma\phi x$  ἔχομε:



$$(\epsilon\phi x)' = \left( \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)' - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\text{καί} \quad (\sigma\phi x)' = \left( \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \right)' = - \frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

$$\text{"Ωστε: } \boxed{(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \quad \text{καί} \quad \boxed{(\sigma\phi x)' = - \frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

**13.2** Ἡ παράγωγος τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως μιᾶς δοσμένης συναρτήσεως  $y = f(x)$ .

Ἄν ἡ ἀντίστροφη σχέση  $x = \sigma(y)$  μιᾶς συναρτήσεως  $y = f(x)$  εἶναι ἐπίσης συνάρτηση καὶ ἡ  $f(x)$  ἔχει σ' ἓνα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  παράγωγο  $f'(x) \neq 0$ , τότε καὶ ἡ  $\sigma(y)$  ἔχει παράγωγο στὸ πεδίο ὁρίσμου της καὶ εἶναι  $\sigma'(y) = \frac{1}{f'(x)}$  σέ ἀντίστοιχες θέσεις  $x$  καὶ  $y$ .

Ἄς εἶναι  $(x_0, y_0)$  καὶ  $(x, y)$  ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν  $x, y$  στὶς συναρτησιακὲς σχέσεις  $y = f(x)$  καὶ  $x = \sigma(y)$ . Θέτομε  $\Delta x = x - x_0$  καὶ  $\Delta y = y - y_0$ . Ἐπειδὴ ἡ  $f(x)$  ὡς παραγωγίσιμη εἶναι καὶ συνεχὴς ἔχομε

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{καὶ} \quad \text{συνεπῶς} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0. \quad \text{Εἶναι ὅμως} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \quad \text{ἄρα:}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \text{"Ωστε ὅχι μόνο}$$

$$\text{ὑπάρχει τὸ} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad \text{δηλαδή ἡ παράγωγος} \quad \sigma'(y_0), \quad \text{ἀλλὰ εἶναι καὶ}$$

$$\sigma'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Ἐφαρμογή 1.** *Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέ τύπο  $y = \sqrt{x}$  (1), ἂν  $x > 0$ .*

Ἀντίστροφη τῆς (1) εἶναι ἡ συνάρτηση  $x = y^2$  μέ  $y > 0$ . Ἔχομε σύμφωνα μέ τὸν παραπάνω τύπο:  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

**Ἄμεσος προσδιορισμός:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt[x]{x} + \sqrt[x]{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[x]{x} + \sqrt[x]{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt[x]{x_0}}.$$

**Εφαρμογή 2.** *Νά βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως με τύπο:*

$$y = \sqrt[\lambda]{x} = x^{\frac{1}{\lambda}} \quad (2), \text{ όπου } \lambda \text{ φυσικός } > 2 \text{ και } x > 0.$$

Αντίστροφη της (2) είναι η συνάρτηση  $x = y^\lambda$  με  $y > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{*Έχουμε: } \left(\sqrt[\lambda]{x}\right)' &= \frac{1}{(y^\lambda)'} = \frac{1}{\lambda y^{\lambda-1}} = \frac{1}{\lambda \left(\sqrt[\lambda]{x}\right)^{\lambda-1}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt[\lambda]{x^{\lambda-1}}} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} = \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1}{\lambda}-1}. \end{aligned}$$

### 13.3 Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως.

\*Αν σέ μιά συνάρτηση  $y = f(\omega)$  αντικαταστήσουμε τή μεταβλητή  $\omega$  με μιά συνάρτηση άλλης μεταβλητής  $x$ , αν δηλαδή θέσουμε  $\omega = g(x)$ , τότε ή προκύπτουσα συνάρτηση  $y = f(g(x))$  λέγεται **σύνθετη συνάρτηση**. \*Αν π.χ. έχουμε  $y = \eta\mu \omega$  (I) και  $\omega = 5x$  (II), τότε λέμε ότι ή συνάρτηση  $y = \eta\mu(5x)$  (III) προέρχεται από τή σύνθεση τών συναρτήσεων (II) και (I).

Γιά νά βρούμε τήν παράγωγο της συναρτήσεως (III) ως προς  $x$  πρέπει νά χρησιμοποιήσουμε τήν παράγωγο της (I) ως προς  $\omega$  και τήν παράγωγο της  $\omega$  ως προς  $x$ . Πρός τούτο χρησιμοποιούμε τόν τύπο του διαφορικού ό οποίος (όπως αποδεικνύεται) ισχύει πάντοτε. Δηλαδή γράφουμε γιά τήν (I):  $dy = (\eta\mu \omega)' d\omega$ · ακολουθώντας από τήν (II) έχουμε  $d\omega = (5x)' dx$  και συνεπώς  $dy = (\eta\mu \omega)' (5x)' dx = (\sin \omega) \cdot 5 \cdot dx = (5 \sin 5x) dx \implies \frac{dy}{dx} = 5 \sin 5x$ . \*Ωστε  $(\eta\mu 5x)'_x = 5 \sin 5x$ .

[Ο συμβολισμός  $(\eta\mu 5x)'_x$  σημαίνει: «Η παράγωγος του  $\eta\mu 5x$  ως προς  $x$ »].

**Γενικά.** \*Έστω  $y = f(\omega)$  και  $\omega = g(x)$ · θέλουμε νά βρούμε τήν παράγωγο της  $y = f(g(x))$  ως προς  $x$  (τήν  $y'_x$ ).

$$\text{*Έχουμε: } dy = f'_\omega(\omega) \cdot d\omega = f'_\omega(\omega) \cdot g'_x(x) \cdot dx \implies \frac{dy}{dx} = f'_\omega(\omega) \cdot g'_x(x).$$

δηλαδή

$$y'_x = y'_\omega \cdot \omega'_x$$

**Εφαρμογή.** *Νά βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως με τύπο  $y = x^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{x^\kappa}$ , όπου  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$  και  $x > 0$ .*

\*Έπειδή  $x^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\kappa$ , γράφουμε  $\omega = x^{\frac{1}{\lambda}}$  (I) και  $y = \omega^\kappa$  (II). \*Ακολουθώντας

$$\text{παίρνουμε } y'_x = (\omega^k)'_{\omega} \cdot \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)' = k \omega^{k-1} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = k \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \frac{k}{\lambda} \cdot x^{\frac{k-\lambda}{\lambda}} = \frac{k}{\lambda} \cdot x^{\frac{k}{\lambda}-1}.$$

**Παρατήρηση.** Έπειδή και  $\left(x - \frac{k}{\lambda}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{k}{\lambda}}}\right)' = -\frac{\left(x^{\frac{k}{\lambda}}\right)'}{\left(x^{\frac{k}{\lambda}}\right)^2} =$

$$= -\frac{\frac{k}{\lambda} x^{\frac{k}{\lambda}-1}}{x^{\frac{2k}{\lambda}}} = -\frac{k}{\lambda} \cdot x^{\frac{k-\lambda}{\lambda}} : x^{\frac{2k}{\lambda}} = -\frac{k}{\lambda} x^{-\frac{k}{\lambda}-1}, \text{ συμπεραίνουμε ότι } \delta$$

κανόνας της παραγωγίσεως δυνάμεως ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι ένα πηλίκo άκεραίων.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει συνοπτικά τὰ προηγούμενα συμπεράσματα.

| Συνάρτηση | $\frac{c}{\text{σταθερά}}$ | $x$ | $f(x) \pm g(x)$   | $f(x) \cdot g(x)$         | $f(x) : g(x)$                         | $\frac{x^p}{p = \text{ρητός} \neq 0}$ | $\eta\mu x$           | $\sigma\upsilon\nu x$ | $\varepsilon\varphi x$            | $\sigma\varphi x$        | $f(\omega), \omega = g(x)$         |
|-----------|----------------------------|-----|-------------------|---------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| Παράγωγος | 0                          | 1   | $f'(x) \pm g'(x)$ | $f' \cdot g + f \cdot g'$ | $\frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ | $p x^{p-1}$                           | $\sigma\upsilon\nu x$ | $-\eta\mu x$          | $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ | $-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ | $f'_x = f'_\omega \cdot \omega'_x$ |

### 13.4 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Νά εξεταστεί αν η συνάρτηση μέ τύπο  $y = |x^2 - 1|$  (1) έχει παράγωγο στο σημείο  $x = 1$ .

Έπειδή για  $x \geq 1$  (καθώς και για  $x \leq -1$ ) ή (1) γράφεται  $y = x^2 - 1$  ενώ για  $-1 < x < 1$  ή (1) γράφεται  $y = 1 - x^2$ , θά αναζητήσουμε μονόπλευρες παραγώγους στη θέση 1.

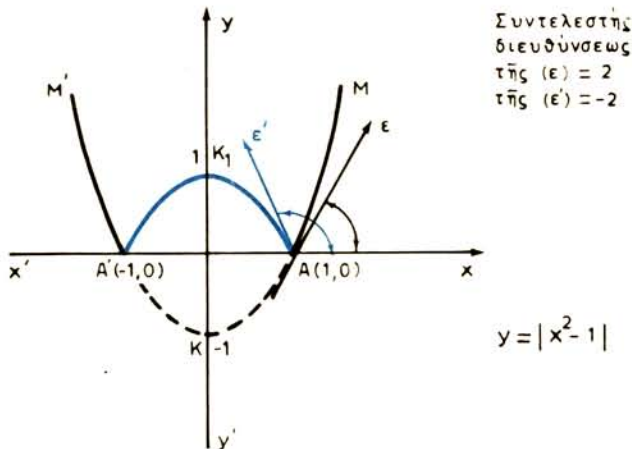
$$\begin{aligned} \text{Μέ } x_0 = 1 \text{ και } \Delta x > 0 \text{ έχουμε: } y_0 = x_0^2 - 1, y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - 1 = \\ = x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - 1 = (x_0^2 - 1) + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta y = 2x_0 \Delta x + \\ + (\Delta x)^2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Μέ } x_0 = 1 \text{ και } -1 < \Delta x < 0 \text{ έχουμε: } y_0 = 1 - x_0^2, y_0 + \Delta y = 1 - (x_0 + \Delta x)^2 = \\ = (1 - x_0^2) - 2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2 = y_0 - 2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2x_0 - \Delta x \Rightarrow \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2x_0 = -2. \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε η συνάρτησή μας δέν έχει παράγωγο στη θέση 1, διότι έχει βέβαια μονόπλευρες παραγώγους από αριστερά και από δεξιά του σημείου 1,

άλλά αυτές δέν συμπίπτουν. Ἡ συνάρτηση εἶναι πάντως στὴ θέση 1 συνεχής, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$



Σχ. 13.4.

Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ παραβολικὸ τόξο  $A'K_1A$  (σχ. 13.4) καὶ τοὺς βραχίονες  $A'M'$ ,  $AM$  τῆς παραβολῆς  $M'KM$  μέ ἐξίσωση  $y = x^2 - 1$ . τὸ τόξο  $A'K_1A$  μέ τὴν μπλέ χάραξη εἶναι συμμετρικὸ τοῦ  $A'KA$  ὡς πρὸς τὸν ἄξονα  $x'x$ .

## 2. Νά βρεθοῦν οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων μέ τύπους:

I)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  · II)  $y = \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$  μέ  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  · III)  $y = \sigma\upsilon\nu^3 2x$ .

I) Θέτομε  $\omega = x^2 + 1$  καὶ  $y = \sqrt{\omega}$ . Ἀκολουθῶς ἔχομε:

$$y'_x = (\sqrt{\omega})' \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

II) Θέτομε  $\omega = 4x - \frac{\pi}{2}$  καὶ  $y = \varepsilon\varphi \omega$  καὶ παίρνομε:  $y'_x =$

$$(\varepsilon\varphi \omega)' \cdot \left(4x - \frac{\pi}{2}\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega} \cdot 4 = \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{\eta\mu^2 4x}.$$

III) Θέτομε  $\varphi = 2x$ ,  $\omega = \sigma\upsilon\nu \varphi$  καὶ  $y = \omega^3$ , ὁπότε:  $y'_x =$

$$(\omega^3)' \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi)' \cdot (2x)' = 3\omega^2 \cdot (-\eta\mu \varphi) \cdot 2 = -6 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \varphi \cdot \eta\mu \varphi = -6\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu^2 2x.$$

### 13.5 Άσκησης.

1. Νά βρεθούν οι παράγωγοι τών συναρτήσεων μέ τύπους:

$$I) y = (x^2 + 3x - 6)^2 \cdot II) y = x^2(x + 2)^2(x + 3) \cdot III) y = \text{τεμ } x + \text{στεμ } x \text{ μέ } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$IV) y = \frac{6x^5 - 8x^3 + 1}{4x^4 + 2x^2 + 7} \cdot V) y = \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot VI) y = \sqrt[3]{\eta \mu x} \text{ μέ } 0 \leq x \leq \pi \cdot VII) y = \sqrt[3]{\epsilon \phi x} \text{ μέ } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

2. Νά βρεθεί ή πρώτη καί ή δεύτερη παράγωγος καθεμιάς από τίς συναρτήσεις πού δίνονται μέ τούς παρακάτω τύπους: I)  $y = \sin^2 \frac{5x}{4}$  · II)  $y = \sqrt[3]{\sigma \phi^2 4x}$  μέ  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  · III)  $y = \frac{5}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$  · IV)  $y = \frac{\sin x - \eta \mu x}{\sqrt[3]{\eta \mu^2 x}}$  μέ  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  ·

3. I) 'Υπολογίστε τίς παραγώγους 1ης, 2ης, 3ης καί 4ης τάξεως τών συναρτήσεων  $\eta \mu x$  καί  $\sin x$  ( $x$  δηλώνει άκτίνια). Τί παρατηρείτε;

II) 'Υπολογίστε τίς παραγώγους 1ης καί 2ης τάξεως τών συναρτήσεων  $f(x) = \eta \mu(ax + \beta)$  καί  $g(x) = \sin(ax + \beta)$ , όπου  $\alpha$  καί  $\beta$  σταθερές.

III) 'Υπολογίστε τήν παράγωγο τής συναρτήσεως  $\sigma(\omega) = \eta \mu \omega$ , όπου  $\omega$  δηλώνει μοίρες.

(Ύπόδειξη: Νά λάβετε υπόψη ότι μεταξύ τών μέτρων  $\omega$  καί  $x$  ενός καί τοῦ ίδιου τόξου σέ μοίρες καί άντίστοιχα σέ άκτίνια ισχύει ή σχέση:  $\omega = \frac{180^\circ}{\pi} x$  · άρα  $\Delta \omega = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \Delta x$ ).

4. Θεωρούμε τή συνάρτηση  $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  · Αποδείξτε ότι, αν  $\phi'(p) = 0$ , τότε  $\phi(p) = \frac{f'(p)}{g'(p)}$  ·

(Ύποθέτομε ότι οι συναρτήσεις  $f(x)$  καί  $g(x)$  έχουν παραγώγους στή θέση  $x = p$  καί ότι  $g(p) \neq 0$  καί  $g'(p) \neq 0$ ).

## ΕΝΟΤΗΤΑ 14

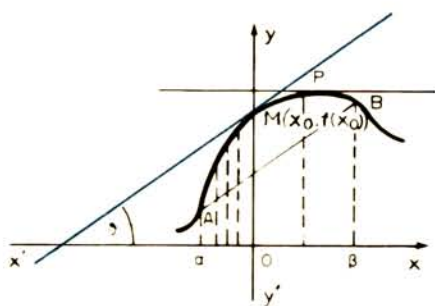
### ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

#### 14.1 Τό Θεώρημα τής μέσης τιμής καί ή μονοτονία.

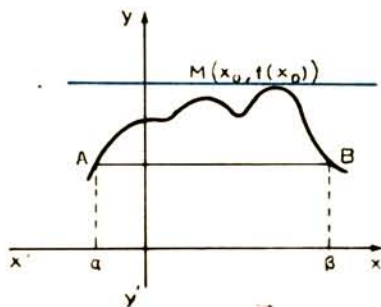
α) \*Ας θεωρήσομε μιá συνάρτηση  $f(x)$  συνεχή καί παραγωγίσιμη τουλάχιστο σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  καί ας υποθέσομε ότι ή γραμμή AMPB [σχ. 14.1(α)] είναι ή γραφική παράστασή της.

Παρατηρούμε ότι σέ κάθε σημείο τοῦ τόξου AP, όπου ή συνάρτηση είναι αύξουσα, ο συντελεστής διευθύνσεως τής εφαπτομένης είναι θετικός (ή κλίση  $\epsilon \phi > 0$ ) καί ελαττώνεται διαρκώς καθόσον οι τιμές τών τεταγμένων αύξάνουν. Στό σημείο P, όπου ή τεταγμένη παίρνει τή μεγαλύτερη τιμή από όλες εκείνες πού άντιστοιχίζονται στίς τιμές τοῦ διαστήματος  $[\alpha, \beta]$ , ή εφαπτομένη τής καμπύλης έχει γίνει παράλληλη πρός τόν άξονα  $x'x$ .

Στά σημεία του τόξου PB, όπου η συνάρτηση είναι φθίνουσα, οί συντελεστές διευσθύνσεως τών εφαπτομένων είναι αριθμοί άρνητικοί ( $\epsilon\phi\theta < 0$ ). Ξέρομε όμως ότι ο συντελεστής διευσθύνσεως της εφαπτομένης, σ' ένα σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  της γραφικής παραστάσεως μιās συναρτήσεως  $f(x)$ , είναι ή παράγωγος της  $f(x)$  στή θέση  $x_0$ .



(α)



(β)

Σχ. 14.1.

Είναι λοιπόν φανερό ότι: ή παράγωγος μιās συναρτήσεως  $f(x)$  — όταν υπάρχει — συνδέεται σέ κάθε θέση του πεδίου ορισμού της  $f(x)$  άμεσα μέ τόν τρόπο μεταβολής της συναρτήσεως γύρω από τό θεωρούμενο σημείο.

Πιο συγκεκριμένα: μέ τή βοήθεια της παραγώγου μπορούμε νά βρίσκομε τά διαστήματα καί τό είδος της μονοτονίας μιās συναρτήσεως καί νά προσδιορίζομε τά σημεία στά όποία ή συνάρτησή μας έμφανίζει τοπικά άκρότατα.

Τά θεωρήματα πού άκολουθούν έχουν σάν σκοπό νά έξυπηρετήσουν τούς παραπάνω στόχους.

**Θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.**

«Αν  $f(x)$  μιá συνάρτηση συνεχής καί παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ ,

τότε υπάρχει αριθμός  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$  (1)».

Έπειδή ο λόγος  $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$  είναι ο συντελεστής διευσθύνσεως του δια-

νύσματος  $\overrightarrow{AB}$  [σχ. 14.1(α)] καί συνεπώς καί της ευθείας AB καί έπειδή  $f'(x_0)$  είναι ο συντελεστής διευσθύνσεως της ευθείας της εφαπτομένης στο σημείο M της καμπύλης AMPB, είναι φανερό ότι ή γεωμετρική έρμηνεία του θεωρήματος της μέσης τιμής είναι ή παρακάτω:

«Αν μιá καμπύλη AMB (A, B τά άκρα της) έχει εφαπτομένη σέ κάθε σημείο της, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο M της καμπύλης όπου ή εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τή χορδή AB».

«Αν ειδικότερα συμβαίνει νά είναι  $f(a) = f(\beta)$ , τότε από τήν σχέση (1)

παίρνουμε  $f'(x_0) = 0$ . Έτσι προκύπτει ή παρακάτω πρόταση πού ονομάζεται **θεώρημα του Rolle**.

**«Αν μιά συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$  καί είναι  $f(a) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $x_0 \in (a, \beta)$  γιά τό όποιο έχουμε  $f'(x_0) = 0$ ».**

Από γραφική άποψη σημαίνει ότι υπάρχει σημείο  $M$  του τόξου  $AMB$  [σχ. 14.1(β)] στό όποιο ή έφαπτομένη είναι παράλληλη πρός τόν άξονα  $x'x$ .

β) Στηριζόμενοι στό **θεώρημα τής μέσης τιμής** βγάζουμε τήν παρακάτω πολύ σημαντική συνέπεια γιά τή μονοτονία μιās συναρτήσεως.

**«Θεωρούμε μιά συνάρτηση  $f(x)$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, \beta]$ , τότε ή  $f(x)$  είναι αύξουσα μέσα σ' αυτό τό διάστημα. Αν  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, \beta]$ , τότε ή  $f(x)$  είναι φθίνουσα μέσα στό ίδιο διάστημα».**

**Πράγματι :** Ας είναι  $x_1$  καί  $x_2$  δυο τιμές του διαστήματος  $[a, \beta]$  μέ  $x_2 > x_1$ , τότε, σύμφωνα μέ τό **θεώρημα τής μέσης τιμής**, υπάρχει αριθμός  $\rho \in (x_1, x_2)$  τέτοιος ώστε  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\rho)$  (2). Αν τώρα είναι  $f'(\rho) \geq 0$ , από τήν (2) παίρνουμε  $f(x_2) \geq f(x_1)$  (άφοϋ  $x_2 > x_1 \iff x_2 - x_1 > 0$ ). δηλαδή ή συνάρτηση είναι αύξουσα. Αν όμως  $f'(\rho) \leq 0$ , τότε έχουμε (πάλι από τήν (2))  $f(x_2) \leq f(x_1)$ . δηλαδή ή συνάρτηση είναι φθίνουσα.

#### 14.2 Η μονοτονία καί τά άκρότατα.

Είναι ένδιαφέρον νά εξετάσουμε τώρα πώς, μέσω τής παραγώγου, μπορούμε νά άναγνωρίσουμε αν υπάρχουν τοπικά άκρότατα μιās συναρτήσεως καί σέ ποιά σημεία του πεδίου όρισμού της. Η παρακάτω πρόταση υποδεικνύει τή διαδικασία πού πρέπει τελικά νά ακολουθήσουμε.

**Θεωρούμε μιά συνάρτηση  $f(x)$  συνεχή καί παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(a, \beta)$ .**

I) Αν ή  $f(x)$  δέχεται σέ μιά θέση  $x_0 \in (a, \beta)$  τοπικό άκρότατο, τότε ή (πρώτη) παράγωγος σ' αυτή τή θέση θά ίσούται μέ μηδέν ( $f'(x_0) = 0$ ).

II) Αντίστροφα : Αν γιά μιά τιμή  $x_0 \in (a, \beta)$  είναι  $f'(x_0) = 0$ , δέν έπεται κατανάγκη ότι ή  $f(x)$  θά παρουσιάζει στή θέση  $x_0$  τοπικό άκρότατο. Γιά νά συμβαίνει αυτό άρκεί επιπλέον οι τιμές τής παραγώγου άριστερά καί δεξιά του σημείου  $x_0$  (γιά τό όποιο έχουμε  $f'(x_0) = 0$ ), σ' ένα διάστημα πού περιέχει τόν αριθμό  $x_0$ , νά είναι έτερόσημες.

**Πράγματι :**

I) Έστω ότι ή  $f(x)$  παρουσιάζει στή θέση  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα διάστημα  $(\kappa, \lambda)$  πού περιέχει τόν αριθμό  $x_0$  ( $\kappa < x_0 < \lambda$ ), στό όποιο έχουμε  $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (\kappa, \lambda)$ , είτε είναι ό  $x < x_0$  είτε είναι  $x > x_0$ , όπότε:

$$\text{αν } x < x_0, \text{ τότε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{καί}$$

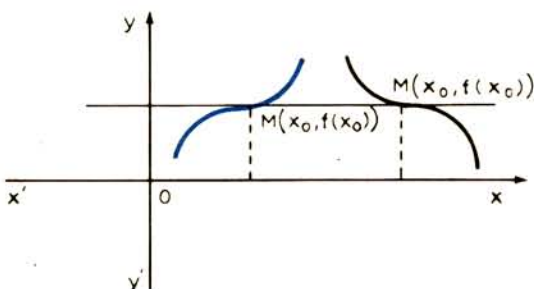
$$\text{αν } x > x_0, \text{ τότε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

$$\text{"Ετσι όμως: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$$

Άρα κατανάγκη  $f'(x_0) = 0$ .

II) **Αντίστροφα**, ή συνθήκη  $f'(x_0) = 0$  δεν είναι μόνη της ικανή για να παρουσιάζει ή συνάρτηση τοπικό άκρότατο στη θέση  $x_0$ . Σημαίνει βέβαια όπως-δήποτε ότι ή έφαπτομένη, στο σημείο της γραφικής παραστάσεως της  $f(x)$  με τετμημένη  $x_0$ , είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ : μπορεί όμως ή γραφική παράσταση να έχει στην περιοχή του σημείου  $M_0(x_0, f(x_0))$ , τή μιά ή τήν άλλη μορφή που εμφανίζει τό σχήμα 14.2, όπου βλέπομε ότι ή μονοτονία της συναρτήσεως δεν αλλάζει κατά τή «διάβαση» της συναρτήσεως από τήν τιμή  $x_0$ .



Σχ. 14.2.

"Όταν όμως ή παράγωγος από θετική άριστερά του  $x_0$  μετατρέπεται σε άρνητική δεξιά του  $x_0$ , τότε ή συνάρτηση από αύξουσα (άριστερά του  $x_0$ ) μετατρέπεται σε φθίνουσα (δεξιά του  $x_0$ ).

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τιμές του  $x < x_0$  για τίς όποιες είναι  $f(x_0) \geq f(x)$  και επίσης τιμές  $x > x_0$  για τίς όποιες πάλι είναι  $f(x_0) \geq f(x)$ . "Αρα στη θέση  $x_0$  ή συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. "Όμοια, όταν ή παράγωγος από άρνητική άριστερά γίνεται θετική δεξιά του  $x_0$ , τότε στη θέση  $x_0$  ή συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

"Ωστε: Μιά συνάρτηση  $f(x)$ , που έχει παράγωγο σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , παρουσιάζει σε μιά θέση  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τοπικό μέγιστο αν  $f'(x_0) = 0$  και αν ή παράγωγος  $f'(x)$  από θετική άριστερά γίνεται άρνητική δεξιά του  $x_0$ . "Επίσης παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο αν  $f'(x_0) = 0$  και αν ή  $f'(x)$  από άρνητική άριστερά γίνεται θετική δεξιά του  $x_0$ .

Για να βρούμε λοιπόν σε ποιά σημεία του πεδίου όρισμ. της μιά παραγω-



γίσιμη συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά άκρότατα προσδιορίζουμε τις τιμές που μηδενίζουν την παράγωγο και εξετάζουμε τὰ πρόσημα τῆς παραγώγου στίς περιοχές τῶν σημείων μηδενισμού τῆς.

Ἐκεῖ ὅπου τὰ πρόσημα ἀλλάζουν ἔχομε τοπικά άκρότατα, ἐκεῖ ὅπου διατηροῦνται τοπικά άκρότατα δέν ὑπάρχουν.

**Παράδειγμα :** Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο :

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 6x + 1. \text{ Νά καθοριστοῦν τὰ δια-}$$

στήματα μονοτονίας καί τὰ τοπικά άκρότατα τῆς συναρτήσεως.

Ἔχομε:  $y' = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = x^4 - x^3 - 7x^2 + 7x + 6x - 6 =$   
 $= x^3(x-1) - 7x(x-1) + 6(x-1) = (x-1)(x^3 - 7x + 6) =$   
 $= (x-1)(x^3 - x - 6x + 6) = (x-1)[x(x^2 - 1) - 6(x-1)] =$   
 $= (x-1)^2 \cdot [x(x+1) - 6] = (x-1)^2 \cdot (x^2 + x - 6).$  Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου  $x^2 + x - 6$  εἶναι  $x_1 = -3$  καί  $x_2 = 2$  καί συνεπῶς  $y' = (x-1)^2(x+3)(x-2).$

Κατασκευάζομε τώρα τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν καί μεταβολῶν, ἀφοῦ παρατηρήσουμε ὅτι γιά  $\forall x \in (-3, 1) \cup (1, 2)$  ἡ παράσταση  $(x-1)^2(x+3)(x-2)$  διατηρεῖται ἀρνητική, ἐπειδή τό  $(x-1)^2$  εἶναι θετικό γιά  $\forall x \neq 1$  καί τό γινόμενο  $(x+3)(x-2)$  παίρνει ἀρνητικές τιμές στό διάστημα  $(-3, 2).$

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |   |   |           |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|---|-----------|
| x  | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                               | -3 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| y' | +                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0  | - | 0 | +         |
| y  | <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">             μεγ<br/> <br/> <math>\frac{1433}{20}</math> </div> <div style="text-align: center;">             ελ<br/> <br/> <math>-\frac{19}{15}</math> </div> </div> |    |   |   |           |

### 14.3 Προσδιορισμός ὁριακῶν τιμῶν μέσω τῶν παραγῶγων. Κανόνας τοῦ L'Hospital (Λοπιτάλ).

Τό παρακάτω θεώρημα, πού ἀναφέρεται συνήθως ὡς κανόνας τοῦ L'Hospital, μᾶς δίνει τή δυνατότητα νά ὑπολογίζομε, μέσω τῶν παραγῶγων, εὐκολα καί σύντομα διάφορες ὁριακές τιμές.

**Θεώρημα.** Ἄν δύο συναρτήσεις  $f(x)$  καί  $g(x)$ , ὁρισμένες μέσα σ' ἓνα διάστημα  $[a, b]$ , μηδενίζονται γιά μιᾶ τιμή  $\rho \in [a, b]$  καί ἔχουν παραγῶγους συνε-  
 χεῖς μέσα στό  $[a, b]$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . (Ἐφόσον τό  $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ὑπάρχει).

**Πράγματι:** Έχουμε 
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho}}{\frac{g(x) - g(\rho)}{x - \rho}} = \frac{f'(x')}{g'(x'')} \text{ όπου } x' \in (x, \rho) \text{ και } x'' \in (x, \rho).$$

Άρα 
$$\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \text{ [Είναι } \frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho} = f'(x') \text{ και } \frac{g(x) - g(\rho)}{x - \rho} = g'(x'') \text{ κατά το θεώρημα της μέσης τιμής].}$$

**Σημείωση:** Αποδεικνύεται ότι το θεώρημα ισχύει και όταν:  
 $\lim_{x \rightarrow \rho} f(x) = \pm \infty$  και  $\lim_{x \rightarrow \rho} g(x) = \pm \infty$ .

**Εφαρμογή: Νά βρεθεί:** I)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}$  · II)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi x}{x}$ .

Έχουμε: I) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1} = 1.$$

II) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\epsilon\varphi x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1} = 1.$$

#### 14.4 Εφαρμογές και παραδείγματα.

**1. Γενικοί κανόνες για τη μελέτη των μεταβολών μιās συναρτήσεως και για τη χάραξη της γραφικής παραστάσεως.**

I) Καθορίζουμε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.

II) Άν η τιμή  $x = 0$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως ορίζουμε την τιμή  $f(0)$ · είναι εκείνο το σημείο του άξονα  $y'y$  που ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f(x)$ .

III) Προσδιορίζουμε, αν μπορούμε, τις ρίζες της  $f(x)$ , δηλαδή τις τιμές του  $x$  που απεικονίζονται στον αριθμό μηδέν.

IV) Βρίσκουμε τα σημεία ασυνεχείας αν υπάρχουν, καθορίζοντας σε ποιές θέσεις τα (υπάρχοντα) μονόπλευρα όρια της συναρτήσεως είναι διαφορετικά και σε ποιές θέσεις ή τιμή της συναρτήσεως δέν ταυτίζεται με την όριακή της τιμή.

V) Υπολογίζουμε την παράγωγο της συναρτήσεως και καθορίζουμε τις τιμές του  $x$  που τη μηδενίζουν.

VI) Καθορίζοντας πότε η παράγωγος παίρνει τιμές αρνητικές και πότε θετικές, βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως (αν υπάρχουν).

VII) Προσδιορίζουμε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων, αν υπάρχουν, και τις σχεδιάζουμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

VIII) Τοποθετούμε, ως προς το παραπάνω σύστημα συντεταγμένων, όλα

τά σημεία που έχουμε προσδιορίσει, τά σημεία δηλαδή πάνω στους άξονες και τά ακρότατα.

ΙΧ) Βρίσκουμε μερικά ακόμα σημεία κατά προσωπική μας εκτίμηση και τελικά προβαίνουμε στη χάραξη της γραφικής παραστάσεως.

**Παρατήρηση :** Από τη γραφική παράσταση μπορούμε νά διακρίνουμε και τό πεδίο τιμών της συναρτήσεως.

**Σημείωση για τόν προσδιορισμό τών ασυμπτώτων.**

Όταν  $y = \frac{P(x)}{R(x)}$  είναι μία ρητή συνάρτηση, όταν δηλαδή οί παραστάσεις

$P(x)$  και  $R(x)$  είναι πολυώνυμα του  $x$ , βρίσκουμε τίς ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως εφαρμόζοντας τούς παρακάτω κανόνες:

α) Αν ό παρονομαστής  $R(x)$  είναι πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού από τόν αριθμητή, τότε ή ευθεία μέ εξίσωση  $y = 0$  (δηλαδή ό άξονας  $x'x$ ) είναι ασύμπτωτη· διότι έχουμε  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ .

β) Αν τά πολυώνυμα  $P(x)$  και  $R(x)$  είναι ίσοβάθμια, τότε ή ευθεία μέ εξίσωση  $y = \kappa$ , όπου  $\kappa$  ό λόγος του συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του  $P(x)$  πρὸς τό συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του  $R(x)$ , είναι ασύμπτωτη· διότι τότε έχουμε  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{P(x)}{R(x)} = \kappa$ .

γ) Αν για μία τιμή  $\alpha \in \mathbb{R}$  έχουμε  $R(\alpha) = 0$  και  $P(\alpha) \neq 0$ , τότε ή ευθεία μέ εξίσωση  $x = \alpha$  είναι ασύμπτωτη (παράλληλη πρὸς τόν άξονα  $y'y$ )· διότι τότε έχουμε  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm \infty$ .

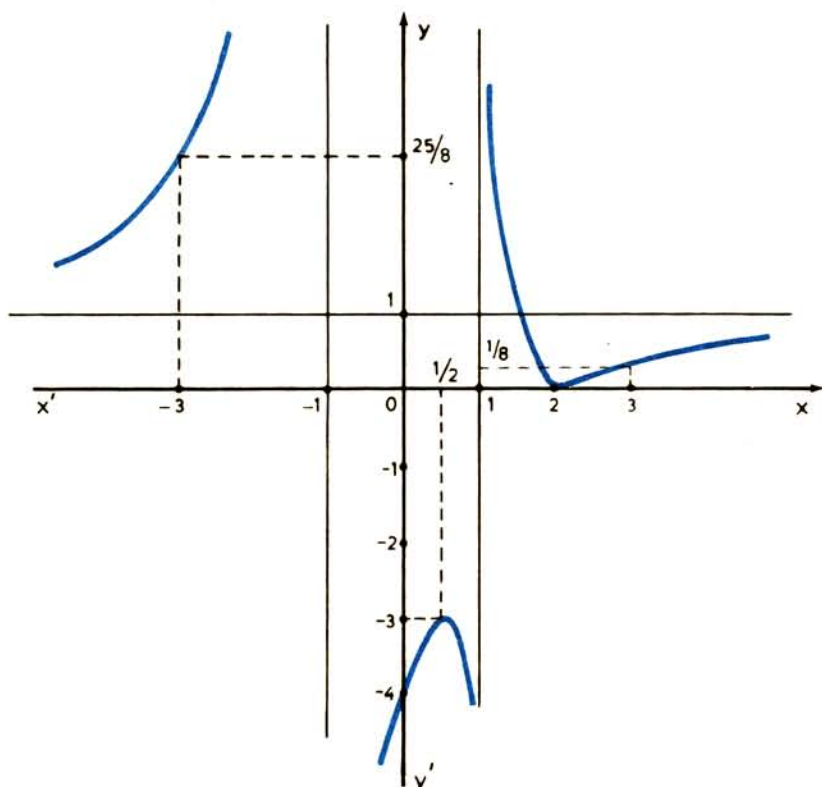
δ) Αν ό βαθμός του αριθμητή είναι κατά μονάδα μεγαλύτερος από τό βαθμό του παρονομαστή, τότε ή γραφική παράσταση της συναρτήσεως έχει πλάγια ασύμπτωτη τήν ευθεία μέ εξίσωση  $y = \lambda x + \beta$ , όπου  $\lambda x + \beta$  είναι τό πηλίκο της (άλγοριθμικής) διαιρέσεως του  $P(x)$  διά του  $R(x)$ .

**Παράδειγμα :** Νά βρεθοῦν οί ασύμπτωτες τών γραφικῶν παραστάσεων τών συναρτήσεων μέ τύπους :

$$I) \quad y = \frac{x^2 + x + 2}{(x - 2)(x + 1)} \quad II) \quad y = \frac{8x^2 + 7}{(2x - 6)(2x + 6)} \quad III) \quad y = \frac{4x^2 + 1}{2x - 1}.$$

Ασύμπτωτες της (I) είναι οί ευθείες μέ εξισώσεις  $x = 2$  και  $y = 0$ · της (II) οί ευθείες μέ εξισώσεις  $x = 3$ ,  $x = -3$  και  $y = 2$ · ή (III) έχει ασύμπτωτες τίς ευθείες μέ εξισώσεις  $x = \frac{1}{2}$  και  $y = 2x + 1$  (έπειδή  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x - 1} = 2x + 1 + \frac{2}{2x - 1}$ ).

2. Νά γίνει ή μελέτη καί νά σχεδιαστεί ή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως πού όρίζει ό τύπος  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+1)}$  (α) (σχ. 14.4α).



Σχ. 14.4α.

I) Τό πεδίο όρισμοϋ τής συναρτήσεως είναι:  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

II) Για  $x = 0$  παίρνομε  $y = -4$ .

III) Έχομε  $y = 0$  για  $x = 2$  [ $f(2) = 0$ ]. καί έπειδή ό άριθμός 2 είναι διπλή ρίζα τής έξισώσεως  $\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+1)} = 0$ , συμπεραίνομε ότι ή ευθεία  $x'x$  είναι έφαπτομένη τής γραφικής παραστάσεως στό σημείο  $(2, 0)$ .

IV) 'Η συνάρτηση είναι παντοϋ συνεχής μέσα στό πεδίο όρισμοϋ της.

V) Βρίσκομε  $y' = \frac{2(x-2)(2x-1)}{(x^2-1)^2}$ . Οι τιμές πού μηδενίζουν τήν

$y'$  είναι  $x = \frac{1}{2}$  καί  $x = 2$ .

VI) Έχομε  $y' > 0$  για  $x < \frac{1}{2}$  ή  $x > 2$  καί  $y' < 0$  για  $\frac{1}{2} < x < 2$ .

Κατασκευάζουμε τώρα τον παρακάτω πίνακα τιμών και μεταβολών.

|    |               |                                                  |                                       |     |     |           |
|----|---------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------|-----|-----|-----------|
| x  | $-\infty$     | $-1$                                             | $\frac{1}{2}$                         | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| y' | 0 ↙ +         | + 0 ↓ -                                          | - 0 ↓ +                               | 0 ↗ |     |           |
| y  | 1 ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ $\mu\epsilon\gamma = -3$ ↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘ $\epsilon\lambda = 0$ ↗ 1 |     |     |           |

Στή θέση  $x = \frac{1}{2}$  η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο κι αυτό

$$\text{Ισοϋται με } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = -3 \text{ και στή θέση } x = 2 \text{ το-}$$

πικό ελάχιστο ίσο με  $f(2) = 0$ .

VII) 'Ασύμπτωτες. τής γραφικής παραστάσεως είναι οι ευθείες με εξισώσεις  $x = -1$  και  $x = 1$  (παράλληλες προς τον άξονα  $y'y$ ), διότι όταν  $x \rightarrow -1^+$  ή  $x \rightarrow 1^+$  τότε  $y \rightarrow \pm \infty$ . Επίσης η ευθεία με εξίσωση  $y = 1$  (παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ ), διότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

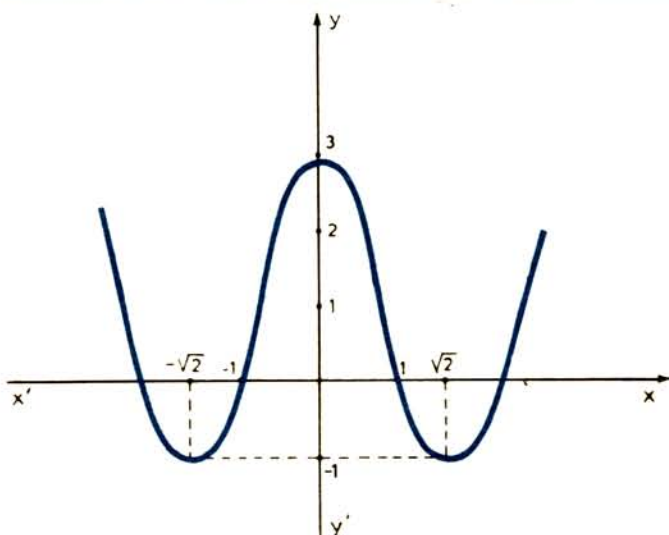
VIII) 'Ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τοποθετούμε τα σημεία  $(0, -4)$ ,  $(2, 0)$ , σχεδιάζουμε τις ασύμπτωτες και ορίζουμε ακόμα και τα σημεία  $\left(-3, \frac{25}{8}\right)$ ,  $\left(3, \frac{1}{8}\right)$ . 'Ακολουθως χαράσσουμε τή γραφική παράσταση.

Παρατηρώντας τή γραφική παράσταση εύκολα διαπιστώνουμε ότι τό πεδίο τιμών τής συναρτήσεως είναι ή ένωση των διαστημάτων  $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$ .

**3. Νά μελετηθεί και νά παρασταθεί γραφικά ή συνάρτηση  $y = x^4 - 4x^2 + 3$ .**

'Η συνάρτηση, σάν πολυώνυμο, είναι όρισμένη και συνεχής παντού μέσα στό  $\mathbb{R}$ . 'Η παράγωγός της είναι  $y' = 4x^3 - 8x$  και μηδενίζεται για  $x = -\sqrt{2}$ ,  $0$  και  $\sqrt{2}$ . Με  $x = 0$  παίρνουμε  $y = 3$ . Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα και σχεδιάζουμε τή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως, χρησιμοποιώντας ότι ήδη βρήκαμε και τοποθετώντας και μερικά ακόμα σημεία (σχ. 14.4β).

|    |           |             |          |            |           |
|----|-----------|-------------|----------|------------|-----------|
| x  | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | 0        | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| y' | -         | 0           | +        | 0          | -         |
| y  | $+\infty$ | $-1$<br>ελ  | 3<br>μεγ | $-1$<br>ελ | $+\infty$ |



Σχ. 14.4β.

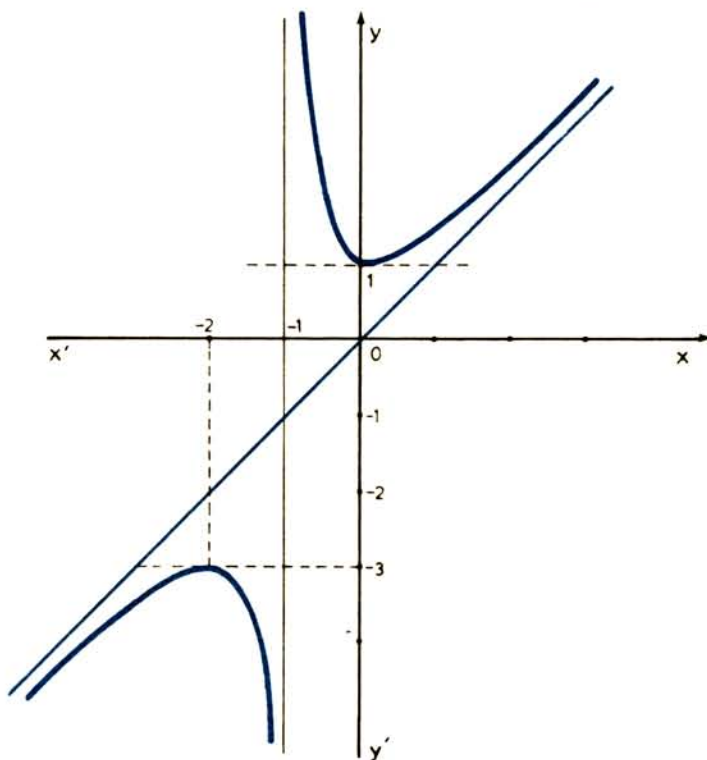
4. Νά γίνει η μελέτη της συναρτήσεως με τύπο  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  και νά χαραχθεί η γραφική της παράσταση.

Πεδίο ορισμού της συναρτήσεως είναι τό σύνολο  $\mathbb{R} - \{-1\}$ . 'Η παράγωγός της είναι:  $y' = \frac{(x+2)x}{(x+1)^2}$ . Στά σημεία  $-2$  και  $0$ , για τὰ ὁποῖα

ἔχομε  $f'(-2) = 0$  καί  $f'(0) = 0$ , ἡ συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ἀκρότατα, διότι στήν περιοχή αὐτῶν τῶν σημείων ἀλλάζει ἡ μονοτονία τῆς συναρτήσεως. 'Ο παρακάτω πίνακας ἐκφράζει τήν ὅλη μεταβολή τῆς συναρτήσεώς μας· χρησιμοποιώντας τὰ περιλαμβανόμενα σ' αὐτόν καί τίς εὐθείες  $y = x$  καί  $x = -1$  πού εἶναι ἀσύμπτωτες, σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση. (σχ. 14.4γ).

|    |           |          |           |           |           |
|----|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | -2       | -1        | 0         | $+\infty$ |
| y' | +         | 0        | -         | -         | 0         |
| y  | $+\infty$ | μεγ = -3 | $-\infty$ | $+\infty$ | ελ = 1    |

**Σημείωση :** Η ευθεία με εξίσωση  $y = x$  (πού είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων) είναι πλάγια ασύμπτωτη, διότι άκραιο μέρος του πηλίκου του  $x^2 + x + 1$  διά του  $x + 1$  είναι τό μονώνυμο  $x$ .



Σχ. 14.4γ.

5. Νά υπολογισθούν οι παρακάτω όριακές τιμές: I)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu x}{x - \frac{\pi}{3}}$ .

II)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 4}{x^6 + 4x^5 - x^2 - 2x - 2}$  · III)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^2}$ .

IV)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sigma\phi x)$ .

I) Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής μηδενίζονται με

$$x = \frac{\pi}{3}. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)'}{(x - \frac{\pi}{3})'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\eta\mu x}{1} = \sqrt{3}$$

II) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και τὰ δύο πολυώνυμα (άριθμητῇ, παρονομαστῇ) μηδενίζονται μέ  $x = 1$ . Συνεπῶς παίρνομε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 4)'}{(x^6 + 4x^5 - x^2 - 2x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{42x^6 - 20x^3 + 9x^2}{6x^5 + 20x^4 - 2x - 2} = \frac{31}{22}.$$

III) Ἔχομε:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{2x}$ . Ἐπειδὴ οἱ παραστάσεις  $1 - \sigma\upsilon\nu x$  καὶ  $2x$  μηδενίζονται καὶ οἱ δύο μέ  $x = 0$  ἐφαρμόζομε ξανά τὸν κανόνα τοῦ L'Hospital καὶ παίρνομε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{2} = 0.$$

$$\text{IV) Ἔχομε: } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sigma\phi x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\phi x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma\phi x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(\eta\mu^2 x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

### 14.5 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνει ἡ μελέτη, ὡς πρὸς τὴ μονοτονία καὶ τὰ ἀκρότατα, τῶν συναρτήσεων πού δίνονται ἀπὸ τοὺς παρακάτω τύπους: I)  $y = \frac{x+1}{x-1}$  · II)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  ·

III)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 30x$  · IV)  $y = (x+2)^2(2x-7)$  · V)  $y = x - \eta\mu 2x$  · VI)  $y = x + \epsilon\phi x$  μέ  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ .

2. Ὡς ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς ν' ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω προτάσεις:

I) Ἄν ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως  $f(x)$  ἰσοῦται μέ μηδέν σέ κάθε σημείο ἐνός διαστήματος  $(\alpha, \beta)$ , τότε ἡ  $f(x)$  εἶναι σταθερή σ' αὐτό τό διάστημα.

II) Ἄν δύο συναρτήσεις  $f(x)$  καὶ  $g(x)$  ἔχουν ἴσες (πεπερασμένες) παραγώγους σέ κάθε σημείο ἐνός διαστήματος  $(\alpha, \beta)$ , τότε οἱ συναρτήσεις θά διαφέρουν, σ' αὐτό τό διάστημα, κατὰ σταθερόν ἀριθμό.

3. Νά μελετηθοῦν καὶ νά παρασταθοῦν γραφικά οἱ συναρτήσεις πού δίνονται ἀπὸ τοὺς παρακάτω τύπους:

$$\text{I) } y = \frac{5x+6}{7x-11} \cdot \text{II) } y = x^4 + x^2 + 1 \cdot \text{III) } y = x^3 - 3x - 2 \cdot \text{IV) } y = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x \cdot$$

$$\text{V) } y = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 2x - 8}.$$



4. Νά υπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \varepsilon\varphi x \right] &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}} \quad \text{II)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x}{\eta\mu 5x} \\ \text{III)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 10x}{4x} \quad \text{IV)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 8x}{\varepsilon\varphi 4x} \quad \text{V)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{x - \pi} \\ \text{VI)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \quad \text{VII)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 2x}{x^2} \end{aligned}$$

5. Νά βρεθεῖ πολυώνυμο τῆς μορφῆς  $x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  μηδενιζόμενο διά  $x = 0$  καί τό ὁποῖο παίρνει τοπικά ἀκρότατα στίς θέσεις  $x = -\frac{7}{3}$  καί  $x = 1$ .

## ΕΝΟΤΗΤΑ 15

### ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

**15.1 Ένα πρόβλημα καί πῶς λύεται μέ μιá μέθοδο τοῦ Ἀρχιμήδη.**

α) «Θεωροῦμε τήν παραβολή μέ ἐξίσωση, ὡς πρός ἓνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἁξόνων,  $y = x^2$ »

Παίρνομε ἓνα σημεῖο  $A(\alpha)$  τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα  $\vec{Ox}$  καί ὀρίζομε καί τό ἀντίστοιχο σημεῖο  $P(\alpha, \alpha^2)$  τῆς παραβολῆς.

Θέλομε νά υπολογίσομε τό ἐμβαδόν τοῦ μέρους τοῦ ἐπιπέδου πού περικλείεται μεταξύ τοῦ τόξου  $OP$  τῆς παραβολῆς, τοῦ ἡμιάξονα  $\vec{Ox}$  καί τῆς  $PA \perp Ox$ . Τό μικτόγραμμα αὐτό σχῆμα θά τό λέμε **παραβολικό χωρίο**. (σχ. 15.1α)

Χωρίζομε τό τμήμα  $OA$  σέ ἴσα μέρη, π.χ. σέ 6, μέ τά σημεία  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \equiv A$  καί κατασκευάζομε: I) τά ἐσωτερικά στό παραβολικό χωρίο ὀρθογώνια  $A_1 M_1 E_1 A_2, (A_1 M_1 \perp Ox, M_1 E_1 \parallel Ox, M_2 A_2 \perp Ox), A_2 M_2 E_2 A_3, (E_2 A_3 \perp Ox, M_2 E_2 \parallel Ox), A_3 M_3 E_3 A_4, A_4 M_4 E_4 A_5$  καί  $A_5 M_5 E_5 A$  [σχ. 15.1α(α)] καί II) τά ἐξωτερικά  $OA_1 M_1 \Delta_1 (M_1 \Delta_1 \perp Oy), A_1 A_2 M_2 \Delta_2 (M_2 \Delta_2 \perp Oy, \Delta_2 A_1 \parallel Oy), A_2 A_3 M_3 \Delta_3, A_3 A_4 M_4 \Delta_4, A_4 A_5 M_5 \Delta_5$  καί  $A_5 A P \Delta_6$  [σχ. 15.1α(β)]

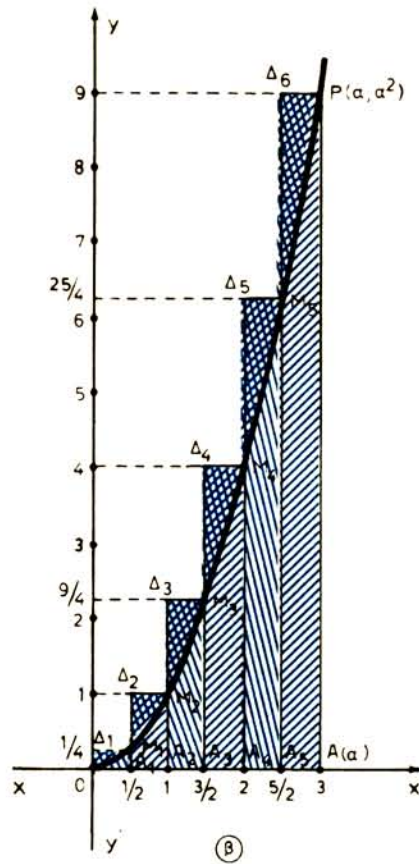
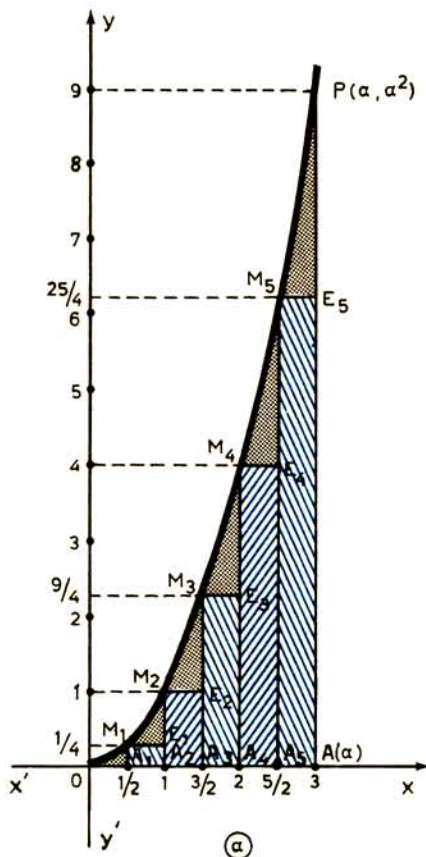
Παρατηροῦμε ὅτι: τό ἐμβαδόν  $E$  τοῦ παραβολικοῦ χωρίου  $OAP$  περιέχεται μεταξύ τῶν δύο ἁθροισμάτων.

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= 0 + (A_1 M_1 E_1 A_2) + (A_2 M_2 E_2 A_3) + (A_3 M_3 E_3 A_4) + (A_4 M_4 E_4 A_5) + \\ &+ (A_5 M_5 E_5 A_6) = 0 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left( \frac{\alpha}{6} \right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left( \frac{2\alpha}{6} \right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left( \frac{3\alpha}{6} \right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left( \frac{4\alpha}{6} \right)^2 \\ &+ \frac{\alpha}{6} \cdot \left( \frac{5\alpha}{6} \right)^2 = \left( \frac{\alpha}{6} \right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2). \end{aligned}$$

$$\text{Καί } \Sigma_6 = (OA_1 M_1 \Delta_1) + (A_1 A_2 M_2 \Delta_2) + (A_2 A_3 M_3 \Delta_3) + (A_3 A_4 M_4 \Delta_4) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ (A_4 A_5 M_5 \Delta_5) + (A_5 A P \Delta_6) = \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{3\alpha}{6}\right)^2 + \\
 &+ \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{4\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{5\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{6\alpha}{6}\right)^2 = \\
 &= \left(\frac{\alpha}{6}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \cdot \text{δηλαδή έχουμε } \sigma_6 < E < \Sigma_6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left[ \text{Είπαι } OA_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = A_4 A_5 = A_5 A = \frac{\alpha}{6}, A_1 M_1 = \right. \\
 &= \left. \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2, (A_2 M_2) = \left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2, \dots, AP = \left(\frac{6\alpha}{6}\right)^2 = \alpha^2 \right].
 \end{aligned}$$



Σχ. 15.1α.

Γενικά αν χωρίσουμε τό τμήμα  $OA$  σε  $n$  ίσα μέρη θά έχουμε πάντα ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )  $\sigma_n < E < \Sigma_n$  (I), όπου:

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 \cdot (0 + 1^2), \sigma_3 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 \cdot (0 + 1^2 + 2^2), \dots, \sigma_n =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{v}\right)^3 \cdot [0 + 1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2], \text{ και } \Sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{1}\right)^3 \cdot 1^2, \Sigma_2 =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2), \Sigma_3 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2), \dots,$$

$$\Sigma_v = \left(\frac{\alpha}{v}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2).$$

Ἐπειδὴ  $\Sigma_v - \sigma_v = \alpha^3 \cdot \frac{1}{v}$  καὶ συνεπῶς  $\lim_{v \rightarrow \infty} (\Sigma_v - \sigma_v) =$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \alpha^3 \cdot \frac{1}{v} \right) = \alpha^3 \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} = 0, \text{ ἔπεται ὅτι } \lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_v \cdot \text{ ἄρα}$$

λόγω τῆς (1) πρέπει νὰ ἔχομε  $E = \lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_v.$

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπόν τὸ ἔμβαδόν  $E$  τοῦ παραπάνω παραβολικοῦ χωρίου ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ  $\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v$  (ἢ τὸ  $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_v$ ).

Εἶναι  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$  καὶ ἔπομένως

$$\Sigma_v = \left(\frac{\alpha}{v}\right)^3 \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{v^3} =$$

$$\frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{v+1}{v} \cdot \frac{2v+1}{v} = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(2 + \frac{1}{v}\right).$$

ἀλλὰ  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right) = 1$  καὶ  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{v}\right) = 2$  καὶ συνεπῶς

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right) \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{v}\right) = \frac{\alpha^3}{6} \cdot 2 = \frac{\alpha^3}{3}.$$

ὥστε:

$$E = \frac{a^3}{3}$$

Ὁ τρόπος πού χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἔμβαδόν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου εἶναι ἡ διατύπωση, στὴ σύγχρονη μαθηματική γλῶσσα, τῆς μεθόδου πού χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης γιὰ νὰ ἐπιλύσει αὐτὸ τὸ πρόβλημα καὶ ἄλλα παρόμοια.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ ὀνομάστηκε **μέθοδος τῆς ἐξαντλήσεως** καὶ ἡ ἀνάπτυξή της ἔδωσε γένεση σ' ἓναν κλάδο τῶν Μαθηματικῶν πού λέγεται **ὀλοκληρωτικός Λογισμός**· αὐτός παρέχει γενικές μεθόδους γιὰ τὴν πραγμάτευση ὄχι μόνο τοῦ προβλήματος τοῦ ἔμβαδου μικτογράμμων ἐπιπέδων σχημάτων ἀλλὰ καὶ ποικίλων ἄλλων ζητημάτων ἀπὸ τὰ Μαθηματικά, ἀπὸ τίς φυσικὲς Ἐπιστῆμες



«λεπτές» παραβολικές ταινίες με πλάτος μικρότερο ή ίσο προς τό ΕΖ και ἄς θεωρήσουμε τό ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ὅπως τό ΕΜ<sub>0</sub>ΗΖ, ἄθροισμα πού θά συμβολίσουμε μέ  $\Sigma x^2 dx$ .

Ὅσο πιά μικρό ἐκλέγεται τό ΕΖ = Δx, τόσο πιά μικρή θά εἶναι ἡ διαφορά τοῦ  $\Sigma x^2 dx$  ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ταινιῶν, ὅπως ἡ Μ<sub>0</sub>ΕΖΜ, πού συναποτελοῦν τό παραβολικό χωρίο ΟΑΡ.

Ὅταν Δx → 0, ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει τό ὄριο τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπάνω ὀρθογωνίων, πού τό καθένα τους ἔχει ὄριο τό μηδέν καί πού τό πλῆθος τους ἔχει ὄριο τό ἀπείρο, καί ὅτι αὐτό τό ὄριο ἰσοῦται μέ Φ(α) - Φ(0), ὅπου Φ(x) ἡ συνάρτηση τοῦ διαφορικοῦ τύπου (1), δηλαδή μία συνάρτηση μέ παράγωγο  $x^2$  (Φ'(x) =  $x^2$ ).

Ἐπειδή  $\left(\frac{1}{3} x^3 + c\right)' = x^2$ , ὅπου c μία αὐθαίρετη σταθερά, καταλαβαίνομε ὅτι  $\Phi(x) = \frac{1}{3} x^3 + c$ . Ἐχομε λοιπόν  $\lim_{x=0}^{x=a} x^2 dx = \Phi(a) - \Phi(0) = \left(\frac{1}{3} a^3 + c\right) - \left(\frac{1}{3} 0^3 + c\right) = \frac{1}{3} a^3$ .

Τό παραπάνω ὄριο τό ὀνομάζομε **ὀρισμένο ὀλοκλήρωμα τῆς  $f(x) = x^2$  ἀπό 0 ἕως α**, καί τό παριστάνομε συμβολικά μέ:

$$\int_0^a x^2 dx$$

Οἱ ἄκραῖες τιμές 0 καί α τῆς μεταβλητῆς x λέγονται **ἄκρα τοῦ ὀλοκληρώματος**.

Ἡ συνάρτηση  $\Phi(x) = \frac{1}{3} x^3 + c$ , μέ c αὐθαίρετη σταθερά, πού ἔχει ὡς παράγωγο τή συνάρτηση  $x^2$ , λέγεται **ἀόριστο ὀλοκλήρωμα** τοῦ διαφορικοῦ  $x^2 dx$  ἢ **παράγουσα** (συνάρτηση) τῆς  $f(x) = x^2$  καί συμβολίζεται, κατ' ἀντιστοιχία πρὸς τό ὀρισμένο ὀλοκλήρωμα, μέ

$$\int x^2 dx$$

Ἔτσι ἀπό τόν διαφορικό τύπο (1) παίρνομε τόν τύπο:

$$\int d \Phi(x) = \int x^2 dx = \Phi(x) = \frac{1}{3} x^3 + c \quad (2)$$

**γ) Γενικά μπορούμε νά διατυπώσουμε τά ακόλουθα :**

“Αν  $f(x)$  είναι μία συνάρτηση συνεχής σ’ ένα διάστημα  $[α, β]$ , τότε υπάρχουν στο  $[α, β]$  συναρτήσεις  $Φ(x)$  τέτοιες ώστε νά είναι  $Φ'(x) = f(x)$  γιά  $∀ x ∈ [α, β]$ . Οί συναρτήσεις αυτές διαφέρουν ή μία από τήν άλλη κατά μία σταθερά· έτσι αν  $φ(x)$  είναι μία απ’ αυτές, τότε όλες οι άλλες δίνονται από τόν τύπο  $Φ(x) = φ(x) + c$  όπου  $c$  σταθερά.

Κάθε συνάρτηση  $Φ(x) = φ(x) + c$  λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα** (άκριβώς επειδή ή τιμή τής σταθεράς  $c$  αφήνεται άπροσδιόριστη) ή **παράγουσα** τής  $f(x)$  στο διάστημα  $[α, β]$  καί συμβολίζεται μέ  $∫ f(x) dx$ .

Έτσι έχουμε  $(∫ f(x) dx)' = (Φ(x))' = (φ(x) + c)' = f(x)$  καί συνεπώς  $d ∫ f(x) dx = d(φ(x) + c) = (φ(x) + c)' dx = f(x) dx$ .

Η διαφορά  $Φ(β) - Φ(α) = (φ(β) + c) - (φ(α) + c)$  λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα τής  $f(x)$  από  $α$  έως  $β$** , επειδή είναι ένας ορισμένος αριθμός άνεξάρτητος από τήν τιμή τής  $c$ , καί συμβολίζεται μέ  $∫_α^β f(x) dx$ .

“Αν  $f(x) ≥ 0$  γιά  $∀ x ∈ [α, β]$ , τότε τό  $∫_α^β f(x) dx = Φ(β) - Φ(α)$  ισοϋται μέ τό έμβαδό του έπιπέδου χωρίου πού περικλείεται από τόν άξονα  $x'$ , από τή γραφική παράσταση τής  $y = f(x)$  στο  $[α, β]$ , ως πρός ένα όρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, καί από τίς δύο εϋθείες  $x = α$  καί  $x = β$  τίς παράλληλες πρός τόν άξονα  $y'y$ .

**Σημείωση :** Μονάδα έμβαδού είναι τό τετράγωνο μέ πλευρά τό κοινό μήκος τών μοναδιαίων διανυσμάτων τών δύο άξόνων συντεταγμένων.

**Παράδειγμα :** Έστω  $f(x) = λx + μ$  γιά  $x ∈ ℝ$  μέ  $λ$  καί  $μ$  σταθερές· τότε:

$$∫ (λx + μ) dx = \frac{1}{2} λx^2 + μx + c \text{ καί } ∫_{x_1}^{x_2} (λx + μ) dx =$$

$$λ(x_2^2 - x_1^2) + μ(x_2 - x_1).$$

“Από τά παραπάνω γίνεται φανερό **ότι :** Γιά νά υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα  $∫_α^β f(x) dx$  άρκει νά βρούμε τό αόριστο ολοκλήρωμα  $∫ f(x) dx$ , δηλαδή μία συνάρτηση  $Φ(x)$  μέ  $Φ'(x) = f(x)$  στο  $[α, β]$ .

Έχουμε τότε  $∫_α^β f(x) dx = [Φ(x)]_α^β = Φ(β) - Φ(α)$ .

$$\text{Π.χ. } ∫_{-2}^2 x^4 dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 = \frac{1}{5} \cdot 2^6 = \frac{64}{5}.$$

## 15.2 Θεμελιώδεις ιδιότητες του ολοκληρώματος.

Σύμφωνα μέ τούς προηγούμενους όρισμούς είναι εύκολο νά διαπιστώσουμε ότι γιά τό ολοκλήρωμα ισχύουν οί παρακάτω βασικές ιδιότητες:

I) Ἐὰν  $f(x)$  μιὰ συνάρτηση συνεχῆς σ' ἓνα διάστημα  $[a, \beta]$  καὶ  $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ , τότε  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx$ .

II) Ἐὰν  $x_1, x_2, x_3 \in [a, \beta]$ , τότε  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx$ .

III) Μὲ  $c = \text{σταθερά}$  ἰσχύει:  $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$  καὶ  $\int_a^\beta c f(x) dx = c \int_a^\beta f(x) dx$ .

IV) Ἐὰν  $f(x)$  καὶ  $g(x)$  δύο συναρτήσεις συνεχεῖς στὸ διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε  $\int_a^\beta (f(x) + g(x)) dx = \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta g(x) dx$ .

Πραγματικά, ἂν  $\Phi(x) = \int f(x) dx$  καὶ  $\Omega(x) = \int g(x) dx$  εἶναι δύο παράγουσες τῶν  $f(x)$  καὶ  $g(x)$  ἀντιστοίχως, τότε  $\Phi(x) + \Omega(x)$  εἶναι μιὰ παράγουσα τῆς  $f(x) + g(x)$  καὶ ἐπομένως:

$$\begin{aligned} \int_a^\beta (f(x) + g(x)) dx &= \left[ \Phi(x) + \Omega(x) \right]_a^\beta = (\Phi(\beta) + \Omega(\beta)) - (\Phi(\alpha) + \Omega(\alpha)) = \\ &= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) + \Omega(\beta) - \Omega(\alpha) = \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta g(x) dx. \end{aligned}$$

**Ἀσκηση.** Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων I ἕως καὶ III.

### 15.3 Μερικὰ στοιχειώδη ὁλοκληρώματα.

I) Ἐχομε:  $\left( \frac{1}{\kappa + 1} x^{\kappa+1} \right)' = x^\kappa$ , ἐφόσον  $\kappa \neq -1$ , καὶ

συνεπῶς  $\int x^\kappa dx = \frac{1}{\kappa + 1} \cdot x^{\kappa+1} + c$  (1), (μέ  $\kappa \neq -1$ ), ὅπου  $c$  αὐθαίρετη σταθερή.

$$\text{II) } (\eta \mu x)' = \sigma \nu x \implies \int \sigma \nu x dx = \eta \mu x + c \quad (2)$$

$$\text{III) } (-\sigma \nu x)' = \eta \mu x \implies \int \eta \mu x dx = -\sigma \nu x + c \quad (3)$$

$$\text{IV) } (\epsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sigma \nu^2 x} \implies \int \frac{dx}{\sigma \nu^2 x} = \epsilon \varphi x + c \quad (4)$$

$$\text{V) } (-\sigma \varphi x)' = \frac{1}{\eta \mu^2 x} \implies \int \frac{dx}{\eta \mu^2 x} = -\sigma \varphi x + c. \quad (5)$$

**Κλείνουμε ἐδῶ τὰ ἐλάχιστα στοιχεῖα τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὀλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ**, ποὺ ἐκθέσαμε σ' αὐτό τό κεφάλαιο, παραθέτοντας τὰ λόγια μέ τὰ ὁποῖα ἀρχίζει τό ἐξαιρετό βιβλίό του «Διαφορικός καὶ Ὀλοκληρωτικός Λογισμός» ὁ καθηγητής τοῦ Τεχνολογικοῦ Ἰνστιτούτου τῆς Καλιφόρνιας Τόμ Ἀποστολ

«Η τόσο μεγάλη πρόοδος, πού στα τελευταία εκατό χρόνια σημειώθηκε στην Έπιστήμη και στην Τεχνολογία, κατά μεγάλο μέρος οφείλεται στην ανάπτυξη των Μαθηματικῶν.

Ο κλάδος τῶν Μαθηματικῶν πού εἶναι γνωστός μέ τό ὄνομα Διαφορικός καί Όλοκληρωτικός Λογισμός χρησιμεύει σάν ἓνα φυσικό καί πολυδύναμο ἐργαλεῖο γιά τήν πραγμάτευση ποικιλίας προβλημάτων πού παρουσιάζονται στή Φυσική, στήν Ἀστρονομία, στή Μηχανολογία, στή Χημεία, στή Γεωλογία, στή Βιολογία καθώς καί σέ ἄλλα πεδία τῆς ἀνθρώπινης δραστηριότητας, ἀνάμεσα στα ὁποῖα θά πρέπει νά κατατάξουμε, στα τελευταία μᾶλλον χρόνια, καί τίς κοινωνικές Ἐπιστῆμες . . . ».

## 15.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

### 1. Νά βρεθοῦν τά παρακάτω ἄοριστα ὁλοκληρώματα:

$$I) \int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx \cdot II) \int \sqrt{x} dx \cdot III) \int \sqrt[5]{x^3} dx \cdot IV) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Ἔχομε: I)  $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int dx =$   
 $= 4 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int 1 dx = 4 \cdot \frac{1}{4} x^4 + 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 +$   
 $+ x + c = x^4 + x^3 + x^2 + x + c.$

$$II) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} x^{1 + \frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$III) \int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{8} \cdot x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + c.$$

$$IV) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \cdot x^{-\frac{1}{2} + 1} + c = 2 x^{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= 2 \sqrt{x} + c \text{ (γιά } x \geq 0).$$

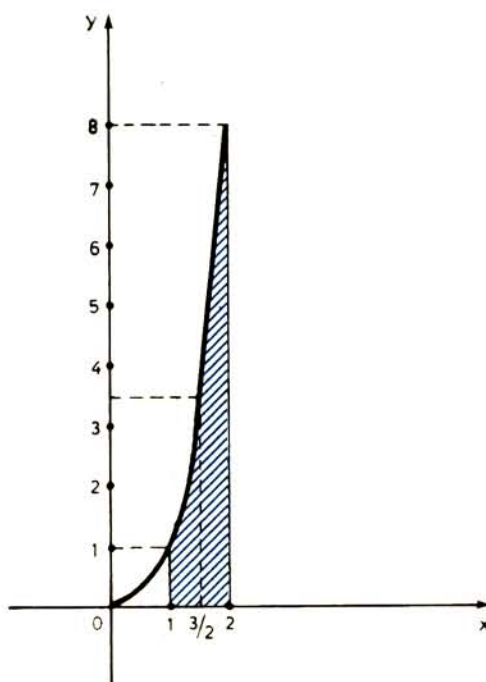
2. Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως μέ τύπο  $y = x^3$  λέγεται **κυβική παραβολή**. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου τῆς παραπάνω κυβικῆς παραβολῆς, μεταξύ τῶν ἐνθεῶν  $x = 1$  καί  $x = 2$  (σχ. 15.4α).

Ζητᾶμε τήν τιμή τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος  $\int_1^2 x^3 dx$ .

Ἐπειδή  $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c$ , ἔχομε:

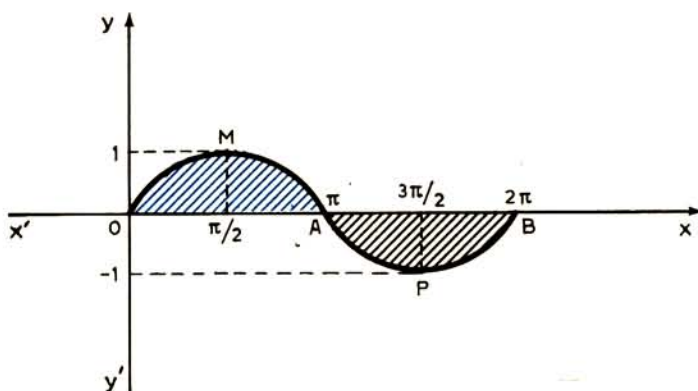


$$\int_1^2 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 + c \right]_1^2 = \left( \frac{1}{4} 2^4 + c \right) - \left( \frac{1}{4} \cdot 1^4 + c \right) = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$



Σχ. 15.4α.

3. Νά βρεθεί τό ἔμβαδόν τοῦ χωρίου μεταξύ τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης  $y = \eta\mu x$ , ἀπό τή θέση  $O (0, 0)$  ἕως τή θέση  $2\pi$ , καί τοῦ ἄξονα  $\vec{Ox}$  (σχ. 15.4β).



Σχ. 15.4β.

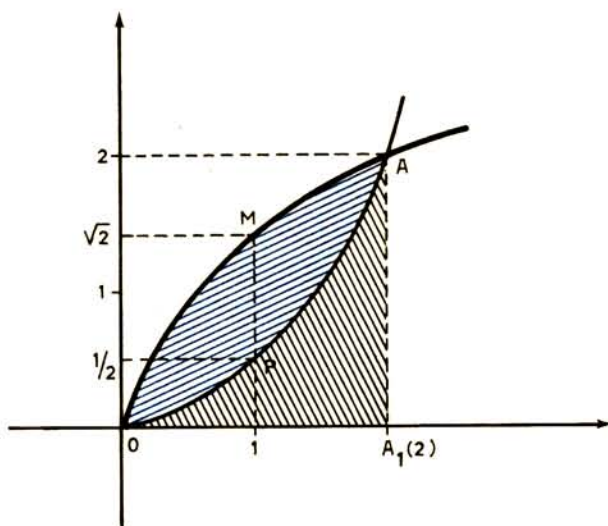
Ἐπειδή τά μικτόγραμμα σχήματα OMA καί APB εἶναι ἴσα θά ἔχουν καί ἴσα ἔμβαδά.

Ἡ συνάρτηση ὅμως  $\eta\mu x$  παίρνει ἀρνητικές τιμές στό διάστημα  $(\pi, 2\pi)$  καί εἶναι ἐπίσης  $\int_{\pi}^{2\pi} \eta\mu x = \left[ -\sigma\upsilon\nu x \right]_{\pi}^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi - (-\sigma\upsilon\nu \pi) = -1 - (+1) = -2 < 0$ .

Ἄν δέν θέλομε νά μιᾶμε καί γιά ἀρνητικό ἐμβαδόν, ὑπολογίζομε τό ἐμβαδόν τοῦ OMA, πού ἰσοῦται μέ  $\int_0^{\pi} \eta\mu x \, dx = \left[ -\sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu \pi - (-\sigma\upsilon\nu 0) = 2$ , καί τό διπλασιάζομε γιά νά ἔχομε τό ἐμβαδόν ἀπό τή θέση O (0,0) ἕως τή θέση  $2\pi$ .

4. Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις πού δίνονται γιά  $x \geq 0$  ἀπό τούς τύπους  $y = \frac{1}{2}x^2$  (I) καί  $y = \sqrt{2x}$  (II) ὡς πρός τό αὐτό ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς.

Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου OMAPO τό περιεχόμενο μεταξύ τῶν τόξων OPA καί OMA τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν (I) καί (II), ὅπου A τό κοινό τους σημεῖο ἐκτός ἀπό τό O (σχ. 15.4γ).



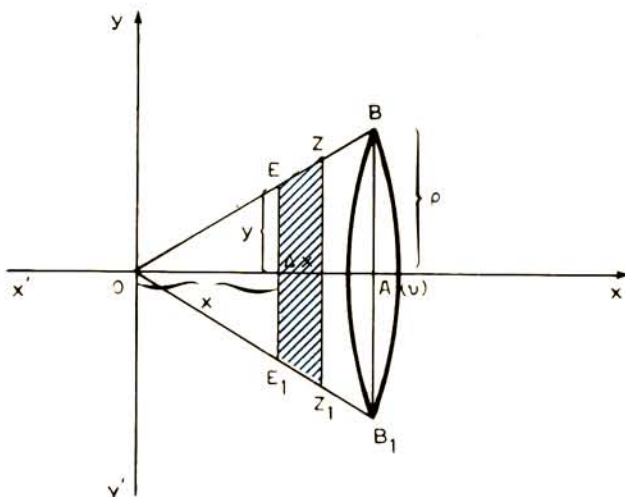
Σχ. 15.4γ.

Γιά νά βροῦμε τό 2ο κοινό σημεῖο ἐξισώνομε τά δεύτερα μέλη τῶν (I) καί (II). Παίρνομε  $\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2x} \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 = 2x \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ . ἄρα τό 2ο κοινό σημεῖο A τῶν γραμμῶν ἔχει συντεταγμένες  $\left(2, \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2\right)$ .

Εἶναι εὐκόλο, μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος, νά καταλάβομε ὅτι τό ζητούμενο ἐμβαδόν εἶναι:  $E = \int_0^2 \sqrt{2x} \, dx - \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 \, dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{x} dx &= \sqrt{2} \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2} \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2^3} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2^4} = \frac{8}{3} \text{ και } \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3} \text{ και συνε-} \\ \text{πώς } E &= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5. Νά υπολογισθεί ό όγκος κώνου μέ ύψος  $v$  και άκτίνα βάσεως  $\rho$  (σχ. 15.4δ).



Σχ. 15.4δ.

Ό κώνος παράγεται μέ μία πλήρη περιστροφή ενός όρθογωνίου τριγώνου  $OAB$  ( $\hat{A} = 1^\circ$ ), μέ κάθετες πλευρές  $OA = v$  και  $AB = \rho$ , γύρω στην ευθεία  $OA$ . Θεωρούμε όρθοκανονικό σύστημα άξόνων μέ θετικό ήμιάξονα  $\vec{Ox}$  την ήμιευθεία  $OA$ . Τό τραπέζιο  $EE_1Z_1Z$  παράγει κατά την περιστροφή έναν κόλουρο κώνο· αντί γι' αυτόν θά πάρομε τόν κύλινδρο μέ όγκο  $\pi y^2 dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Ό όγκος του κώνου ίσοῦται μέ: } V &= \int_0^v \pi y^2 dx. \text{ Άλλά } \frac{y}{x} = \frac{\rho}{v} \Rightarrow \\ y &= \frac{\rho}{v} x \text{ και συνεπώς } V = \int_0^v \pi \frac{\rho^2}{v^2} x^2 dx = \frac{1}{3} \pi \rho^2 v. \end{aligned}$$

### 15.5 Άσκήσεις.

1. Νά βρεθούν τά παρακάτω άόριστα όλοκληρώματα:

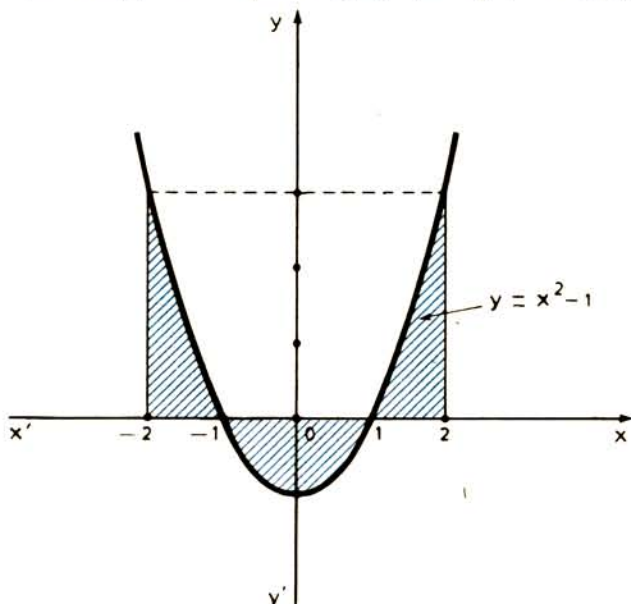
$$\text{I) } \int (2x^8 - 4x^5 + 3x^2) dx \quad \text{II) } \int x^8 dx \quad \text{III) } \int \sin^2 x dx \quad \text{και} \quad \int \eta \mu^2 x dx.$$

(Χρησιμοποιήστε τό μετασχηματισμό  $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 + \sin 2x)$  και  $\eta \mu^2 x = \frac{1}{2} (1 - \sin 2x)$ )

$$\text{IV)} \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{d 2x}{\sin^2 2x} \quad \text{V)} \int \frac{dx}{\eta\mu^2 2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d 2x}{\eta\mu^2 2x} \quad \text{VI)} \int \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx$$

$$\text{VII)} \int \eta\mu\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) dx.$$

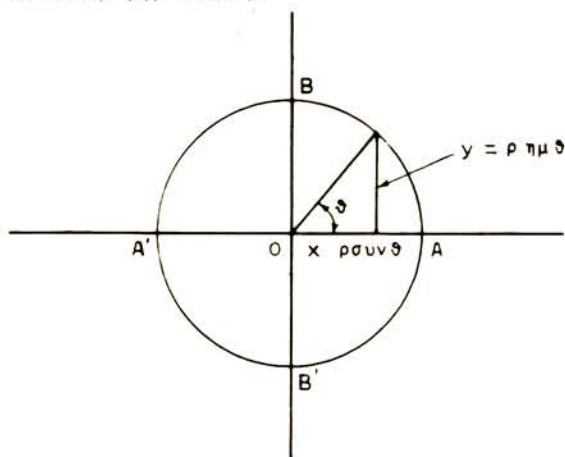
2. Νά υπολογισθεί τό ἔμβαδόν τῶν τριῶν διαγραμμισμένων χωρίων τοῦ σχήματος 15.5α.



Σχ. 15.5α.

3. Νά υπολογισθεί τό ἔμβαδόν τῶν χωρίων πού ὀρίζονται ἀπό τήν καμπύλη μέ ἐξίσωση  $y = x^2 - 2x - 3$ , ἀπό τοὺς ἄξονες συντεταγμένων καί ἀπό τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση  $x = \frac{7}{2}$ .

4. Ὑπολογίζοντας τό ὁλοκλήρωμα  $\int_0^p y dx$ , ὅπου  $y = \rho \eta\mu \theta$  καί  $x = \rho \sigma\upsilon\nu \theta$  νά βρεῖτε τό ἔμβαδόν κύκλου ἀκτίνας  $\rho$  (σχ. 15.5β).



Σχ. 15.5β.

(Ύποδειξη:  $dx = -\rho \eta \mu \theta d\theta$ ,  $\int_0^{\rho} y dx = -\rho^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \eta \mu^2 \theta d\theta$ ).

5. Νά υπολογισθεί τό άθροισμα τών έμβαδών τών χωρίων πού όρίζονται από τή γραμμή μέ έξίσωση  $y = \sin x$  και από τό τμήμα του άξονα  $Ox$  μέ άκρα τό σημείο  $O$  και τό σημείο  $\frac{3\pi}{2}$ .

6. Νά προσδιορισθούν οι έξισώσεις τών παραβολών ( $y = ax^2 + bx + \gamma$ ) πού διέρχονται από τά σημεία  $(-1, 0)$  και  $(3, 0)$  και ή μιá έχει κορυφή τό σημείο  $(1, -2)$  και ή άλλη τό  $(1, 1)$ . άκόλουθως νά υπολογισθεί τό έμβαδόν του πεπερασμένου χωρίου πού περιέχεται μεταξύ τών δυο παραβολών.

7. Η δύναμη πού άσκούμε για νά επιβάλομε σ' ένα έλατήριο επιμήκυνση  $x$  είναι ίση μέ  $kx$ , όπου  $k$  μιá θετική σταθερά πού εξαρτάται από τό έλατήριο. Τό δαπανόμενο έργο για ν' αύξήσουμε τήν επιμήκυνση κατά  $\Delta x$  είναι  $kx \cdot \Delta x$ . Νά βρεθεί τό όλικό έργο πού άπαιτείται για μιá επιμήκυνση  $s$  από τή θέση  $0$ .

(Ύποδειξη: Παρατηρήστε ότι  $W_{ολ} = \int_0^s kx dx$ ).

### Άσκήσεις για επανάληψη.

1. Νά προσδιορισθούν τά παρακάτω όρια:

I)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$  · II)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3}$ .

III)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$  · IV)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \sqrt[3]{x^2+1} - x \right)$  · V)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt[4]{x^4+1} - x \right)$ .

VI)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^3}{x^3-5^3}$  · VII)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2}$  · VIII)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x - 2\eta \mu x}$ .

IX)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1}$  · X)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3} \right]$ .

XI)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$  · XII)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon \varphi 5x}{\eta \mu 7x}$  · XIII)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta \mu 3x}{2x-3\eta \mu 2x}$ .

XIV)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{\sin x} - \epsilon \varphi x \right]$  · XV)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ (\alpha^2 - x^2) \epsilon \varphi \frac{\pi x}{2\alpha} \right]$  · XVI)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \eta \mu x}{\sqrt{1 - \sin x}}$

XVII)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu 3x}{1 - 2 \sin x}$ .

2.\* Νά γίνει ή μελέτη τής συναρτήσεως πού όρίζει ή εξίσωση  $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$  καί νά κατα-

σκευαστεί ή παραστατική της καμπύλη (Κ). 'Ακολούθως νά προσδιοριστεί ή έφαπτομένη τής (Κ) στό σημείο Ο (0,0).

3. Θεωρούμε τή συνάρτηση  $f(x)$  πού δίνεται από τόν τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} & \text{γιά } x \neq 0. \\ 1 & \text{γιά } x = 0. \end{cases}$$

Νά μελετηθεί ώς πρός τή συνέχεια καί νά γίνει ή γραφική της παράσταση.

4.\* Μέ πεδίο όρισμοῦ τό διάστημα  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  θεωρούμε τή συνάρτηση  $f(x)$  πού δίνεται από τόν τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}{\eta\mu x} & \text{γιά } x \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{γιά } x = 0. \end{cases}$$

Νά εξετάσετε αν ή συνάρτηση είναι συνεχής στή θέση  $x = 0$ .

5.\* Δίνεται ή συνάρτηση πού όρίζει ή εξίσωση  $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \alpha x$ , μέ  $\alpha \in \mathbb{R}$ . νά βρεθούν τά όρια αὐτῆς τής συναρτήσεως όταν  $x \rightarrow \pm \infty$ .

6.\* Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ . Νά βρεθεί τό  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = \lambda$  καί άκο-  
λούθως τό  $\lim (y - \lambda x)$ , όταν  $x \rightarrow \pm \infty$ .

7.\* Θεωρούμε τή συνάρτηση μέ τύπο  $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$  καί πεδίο όρισμοῦ τό διά-  
στημα  $[0, +\infty)$ .

I) Νά άποδείξετε ότι ή συνάρτηση αὐτή είναι γνησίως αύξουσα μέσα σ' όλο τό πεδίο  
όρισμοῦ της.

II) Νά δώσετε τήν έκφραση τής αντίστροφης συναρτήσεως  $y = f^{-1}(x)$  καί άκολουθώς  
νά σχεδιάσετε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων  $f(x)$  καί  $f^{-1}(x)$  στό ίδιο όρθοκανονικό  
σύστημα συντεταγμένων.

8. Νά βρεθούν οί παράγωγοι τῶν συναρτήσεων πού δίνονται από τούς παρακάτω τύπους:

$$I) y = x^3(x+1)^2 \quad II) y = \frac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^3} \quad III) y = 2x^2: \sqrt{1+x^2}.$$

$$IV) y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^3 \cdot \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^4 \quad V) y = \eta\mu^2 \frac{x}{4} : \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{5}}.$$

$$VI) y = \frac{\epsilon\phi x}{1 + \sigma\phi^2 x} \left( \text{μέ } 0 < x < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$9.* I) \text{ Νά βρεθούν τά: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \eta\mu \frac{1}{x} \right) \text{ καί } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \eta\mu \frac{1}{x}.$$

II) Θεωρούμε τίς συναρτήσεις  $f(x)$  καί  $g(x)$  πού δίνονται από τούς παρακάτω τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} x \eta\mu \frac{1}{x} & \text{γιά } x \neq 0 \\ 0 & \text{γιά } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} & \text{γιά } x \neq 0 \\ 0 & \text{γιά } x = 0. \end{cases}$$

Νά εξετάσετε αν οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στη θέση  $x = 0$ .

$$10.* \text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } f(x) \text{ με τύπο: } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3 \pi |x|}{x^2} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Νά εξετάσετε αν είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στη θέση  $x = 0$ .

$$11.* \text{Θεωρούμε τη συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο } f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

I) Νά βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών. II) νά διαμορφώσετε τον τύπο της αντίστροφης συναρτήσεως  $f^{-1}(x)$ . III) νά σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

12.\* Θεωρούμε τη συνάρτηση που δίνεται από την εξίσωση  $y = ax^2 + bx + \gamma$  ( $a \neq 0$ ) και γράφουμε τη σχέση του θεωρήματος της μέσης τιμής με τη μορφή:

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x+\theta h), \text{ όπου } h > 0 \text{ και } 0 < \theta < 1.$$

N' αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\theta$  παίρνει μία όρισμένη τιμή, ανεξάρτητη από τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma, x$  και  $h$ , και νά δώσετε μία γεωμετρική έρμηνεία σ' αυτή την ιδιότητα.

13.\* Νά γίνει η μελέτη και η γραφική των συναρτήσεων που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$I) y = \sqrt[3]{x(x-1)} + \sqrt[3]{x(x+1)} \quad II) y = \sqrt[3]{x^3 - x} \quad III) y = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

14.\* Νά βρείτε τις γωνίες των γραμμών με εξισώσεις:

$$\alpha) y = x^2 \text{ και } y = \frac{1}{2}x \quad \beta) y = x^3 + x^2 \text{ και } y = 2x. \text{ (Δηλαδή τη γωνία των εφαπτομένων στα κοινά σημεία).}$$

15.\* Προσδιορίστε συναρτήσεις  $f(x)$  για τις οποίες έχουμε:

$$I) f'(x) = -4 \quad II) f'(x) = 5x - 3 \quad III) f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad IV) f''(x) = 7.$$

$$V) f''(x) = \eta\mu x \quad VI) f''(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad VII) f''(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x.$$

16.\* Νά εξετάσετε αν η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = x \cdot |x|$  έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στις θέσεις  $x = 0$  και  $x = 1$ .

17.\* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1$ . I) Νά γίνει η γραφική της παράσταση. II) Νά βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτομένες της γραφικής παραστάσεως στις θέσεις  $-1$  και  $+1$ , με τον άξονα  $x'x$ . III) Σέ ποιά θέση η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την  $x'x$ .

18.\* Νά βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$I) \int (x+1)(x+2)^2 dx \quad II) \int x \sqrt{1+x^2} dx \quad III) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$IV) \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)} dx \quad V) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi^2 x dx \quad VI) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\epsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu 2x} dx.$$

$$VII) \int (\alpha \sigma\upsilon\nu^2 \omega t + \beta \eta\mu^2 \omega t) dt \quad VIII) \int \sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu 2x dx.$$

$$IX) \int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu 2x dx.$$

19. I) Νά υπολογίσετε τὰ ὀρισμένα ὁλοκληρώματα:

α)  $\int_{-1}^1 4x^3 dx$       καί    β)  $\int_{-2}^2 4x^4 dx$ .

II) Νά υπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου μεταξύ τοῦ ἄξονα  $x'x$ , τῶν εὐθειῶν  $x = -1$  καί  $x = 1$ , καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο  $y = 4x^4$ .

III) Νά υπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου μεταξύ τοῦ ἄξονα  $x'x$ , τῶν εὐθειῶν  $x = -2$  καί  $x = 2$ , καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο  $y = 4x^3$ .

IV) Νά υπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου μεταξύ τῶν τόξων τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν  $y = 4x^3$  καί  $y = 4x^4$  ποὺ ὀρίζονται ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεία αὐτῶν τῶν γραμμῶν.



## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΕΝΟΤΗΤΑ 1

#### ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

##### 1.1 Γενικά.

Από τα πολύ παλιά χρόνια, δηλαδή πριν 4 και 5 χιλιάδες χρόνια από σήμερα, όταν αναπτύσσονταν και άκμαζαν οι πρώτοι ανατολικοί πολιτισμοί της αρχαίας Κίνας, των Σουμερίων, της χώρας του Νείλου, των Περσών και φυσικά όταν στη Μεσόγειο ανθοῦσε ο Έλληνικός Πολιτισμός και αργότερα όταν στον τότε γνωστό κόσμο κυριαρχούσε η PAX ROMANA, όλα τα κράτη έκαναν απογραφές και μετρήσεις πραγμάτων, προϊόντων, ζώων και ανθρώπων και γενικά διάφορες καταγραφές που παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες διοικητικής φύσεως. Έκαναν δηλαδή και τότε **απογραφές** προσώπων και αγαθών **έπί κρατικού επιπέδου**.

Δέν είναι λοιπόν υπερβολή να δεχθούμε ότι η συγκέντρωση **στατιστικών πληροφοριών** άρχισε ευθύς μόλις οι ανθρώπινες κοινωνίες πέρασαν από τις άναρχες ομάδες των γενών στην κρατική οργάνωση. Η ίδια η λέξη «στατιστική» προέρχεται από τη Λατινική λέξη «STATUS», που σημαίνει κατάσταση, καθεστώς. Τί είναι λοιπόν η **Στατιστική**;

Σύμφωνα με τη σύγχρονη αντίληψη γι' αυτή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

**Στατιστική είναι η Έπιστήμη που αποβλέπει στην έρμηνεία μιας μεγάλης κατηγορίας φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων μέσω της έπεξεργασίας και μελέτης πληροφοριών που προέρχονται από παρατηρήσεις ή και πειράματα και επιδέχονται ταξινόμηση και όμαδοποίηση.**

Η Στατιστική δέν άρκείται σήμερα, όπως γινόταν μέχρι τον 18ο αιώνα, στην καταγραφή και τη συσσώρευση **στατιστικών δεδομένων**, προχωρεί - όπως είπαμε - στην έπεξεργασία των συγκεντρωμένων **στοιχείων** γιά να βγάλει την ακριβή σημασία τους, πέρα από τις προσωπικές έπιδράσεις και έκτιμήσεις του Παρατηρητή. Οι θεωρητικές βάσεις της Στατιστικής θεμελιώνονται και η μεθοδολογική της ανάπτυξη οφείλεται στη Θεωρία των Πιθανοτήτων, η οποία, μέ άφετηρία τη μελέτη των τυχερών παιγνιδιών, έμφανίστηκε κατά τον 18ο αιώνα και αναπτύχθηκε ραγδαία σ' έναν ιδιαίτερο κλάδο των Μαθηματικών.

Καί άκριβώς τά δεδομένα πού συγκεντρώνομε καί έξετάζομε, σέ μιά στατιστική μελέτη, παρουσιάζουν μεταβολές πού δέν μπορούν νά προβλεφθοούν ή νά εξηγηθοούν, πού υπόκεινται δηλαδή στήν επίδραση αύτου πού όνομάζομε «τύχη». Τέτοια είναι π.χ. ή περίπτωση τών βιολογικών δεδομένων, όπως τό βάρος ή τό ύψος τών ανθρώπων ή άκόμα ή άρτηριακή πίεση κτλ.

Είναι π.χ. ό καπνός συντελεστικός παράγων του καρκίνου τών πνευμόνων; ή Ι-λαρά ή έμφανιζόμενη κατά τήν ανάπτυξη του ανθρώπου είναι πραγματικά υπεύθυνη τών καρδιακών αλλοιώσεων; Σέ τέτοια καί άλλα παρόμοια έρωτήματα Ιατρικής φύσεως ή άπάντηση δέν μπορεί νά προκύψει (πρός τό παρόν τουλάχιστον) παρά μόνον από τή Στατιστική.

Διότι ή στατιστική διαδικασία είναι ή ειδική εκείνη μέθοδος (θά μπορούσαμε νά πούμε), ή μόνη δυνατή άλλωστε, γιά νά διεισδύσομε σέ φαινόμενα καί καταστάσεις πού δέν μπορούν νά αναπαραχθοούν μέ πειράματα (σύμφωνα μέ τήν κλασσική έννοια του όρου, όπως π.χ. τά πειράματα τής Φυσικής), αλλά μόνο νά παρατηρηθοούν, νά περιγραφθοούν καί νά καταγραφθοούν· άκόμα, είναι ή κατάλληλη μέθοδος γιά νά άντιληφθοούμε φαινόμενα, τών όποιων δέν έλέγχομε τίς αίτίες πού τά παράγουν είτε διότι αυτές μās είναι άγνωστες είτε διότι είναι πολυάριθμες καί σύνθετες, πράγμα πού ίσοδυναμεί στήν πράξη μέ άγνοια.

Έν τούτοις ή στατιστική διαδικασία έρχεται πολλές φορές νά συμπληρώσει ή καί νά έπιβεβαιώσει πορίσματα πού έχουν προκύψει μέ τίς μεθόδους τών **άκριβών** Έπιστημών. Αυτό είναι κατεξοχήν έντυπωσιακό στήν ίδια τή Φυσική όπου ή στατιστική σπουδή τών «μικροφαινομένων» έρχεται πολύ συχνά νά δώσει «τό κλειδί» τών «άκριβών νόμων», αύτων πού άπορρέουν κατά τή μελέτη σέ μακροσκοπική κλίμακα.

## 1.2 Διάρθρωση τής στατιστικής.

Μιά διεξοδική στατιστική έρευνα άποτελείται από τρεις φάσεις, πού αναπαράγουν - θά μπορούσαμε νά πούμε - τά στάδια ανάπτυξεως τής Στατιστικής.

Ή πρώτη φάση αρχίζει μέ τή συλλογή τών **στατιστικών στοιχείων** καί συνεχίζεται μέ τήν ταξινόμηση καί παρουσίασή τους κάτω από μιά «συμπυκνωμένη» μορφή. Έπιδιώκομε έδω νά κάνομε όσο γίνεται σαφή καί προσιτή τή γενική εικόνα του **στατιστικού μας πληθυσμού** (τών στατιστικών δεδομένων) καί νά βγάλομε τίς ουσιώδεις πληροφορίες πού περιέχονται μέσα στά στατιστικά δεδομένα. Ή παραπάνω έπεξεργασία άποτελεί τό περιεχόμενο καί είναι τό άντικείμενο τής λεγόμενης **Περιγραφικής Στατιστικής**.

**Σέ μιά δεύτερη φάση**, ξεκινώντας από τά συμπυκνωμένα συμπεράσματα πού πήραμε στό τέλος τής πρώτης διαδικασίας, έπιδιώκομε νά άντιληφθοούμε τή σημασία τών στοιχείων πού συγκεντρώσαμε, νά αναλύσομε καί νά εξηγήσομε αυτά τά στοιχεία. Ή φάση αύτή είναι - θά μπορούσαμε νά πούμε - ή **ερμηνευτική Στατιστική** καί θεμελιώνεται έξ όλοκλήρου στά πορίσματα του Λογισμού τών Πιθανοτήτων.

Τέλος, σ' ένα τελευταίο στάδιο προσπαθοούμε νά βγάλομε από τή στατιστική γνώση του «παρελθόντος» προβλέψεις γιά τό μέλλον· αυτό συνήθως συμβαίνει κυρίως σέ προβλήματα οικονομικής μορφής.

### 1.3 Μέθοδοι έργασίας.

Πρακτικά ή στατιστική μελέτη αρχίζει από τη συγκέντρωση και καταγραφή πληροφοριών και μετρήσεων πάνω σε μία ή περισσότερες μεταβλητές ιδιότητες ενός ορισμένου συνόλου  $\Sigma$ . Το σύνολο αυτό  $\Sigma$  λέγεται **στατιστικός πληθυσμός** ή απλά **πληθυσμός** και τα στοιχεία του χαρακτηρίζονται ως άτομα του πληθυσμού· οι πληροφορίες εξάλλου, που αποτελούν το αντικείμενο της στατιστικής μας έρευνας, λέγονται **παρατηρήσεις** ή **στατιστικά δεδομένα** ή ακόμα και **στατιστικά στοιχεία**. Όταν τα στατιστικά δεδομένα προκύπτουν από όλα τα άτομα (στοιχεία) του (στατιστικού) πληθυσμού που μας ενδιαφέρει, τότε λέμε ότι έχουμε κάνει **άπογραφή** αυτού του πληθυσμού. Έτσι π.χ. κάνομε άπογραφή όλων των εργατών και ιδιωτικών υπαλλήλων μιάς πόλεως, όταν απαριθμούμε τους εργάτες και υπαλλήλους που εργάζονται σε κάθε παραγωγικό τομέα της οικονομίας αλλά και εκείνους που εργάζονται στη μεταφορά, διανομή και έμπορεία των προϊόντων και ακόμα και εκείνους που εργάζονται στις λεγόμενες υπηρεσίες (π.χ. στα τουριστικά επαγγέλματα).

Μιά άπογραφή όμως, όταν μάλιστα ο στατιστικός πληθυσμός είναι πολυάριθμος, απαιτεί μεγάλη οργάνωση, πολύ χρόνο και είναι συχνά δαπανηρή· άλλοτε πάλι μιά άπογραφή μπορεί να είναι ανέφικτη. Γι' αυτούς τους λόγους όχι σπάνια καταφεύγουμε στη λεγόμενη **δειγματοληψία**, κατά την οποία οι παρατηρήσεις μας δεν αναφέρονται σε όλα τα άτομα του πληθυσμού, αλλά σ' ένα **δείγμα** του, με άλλα λόγια σ' ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολο του πληθυσμού. Γιά την επιλογή των δειγμάτων εφαρμόζομε διάφορους κανόνες και μεθόδους έτσι, ώστε τα αποτελέσματα της έρευνάς μας - στο μέτρο του δυνατού - να μὴν είναι ουσιαδῶς διάφορα από εκείνα που θα παίρναμε αν χρησιμοποιούσαμε ολόκληρο το σχετικό πληθυσμό.

Οι παραπάνω γραμμές καθώς και τά λίγα Μαθήματα που ακολουθούν, και τά όποια περιορίζονται στις βάσεις της Περιγραφικής Στατιστικής, δέν εξασφαλίζουν πληρότητα αναπτύξεως του θέματος· απλῶς επιδιώκεται μ' αυτά να δειχθεί στόν αναγνώστη ή αξία και ή σημασία της Στατιστικής σ' όλες τίς Έπιστήμες, από την Οικονομία μέχρι την Φυσική και την Άστρονομία, αλλά και στη σύγχρονη οργάνωση της κοινωνικής ζωής, και να προκαλέσουν τό ενδιαφέρον του.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2

### ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ. ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ. ΠΙΝΑΚΕΣ

#### 2.1 Ταξινόμηση παρατηρήσεων.

Η άπασχόλησή μας μέ τά στοιχεία ενός κάποιου συνόλου άφορα βεβαίως - όπως είπαμε και παραπάνω - στη συγκριτική μελέτη μιάς ή περισσότερων ιδιοτήτων των θεωρούμενων στοιχείων. Οι ιδιότητες αυτές μπορεί να είναι **ποιοτικές**, όπως π.χ. τό χρώμα των ματιών των παιδιών μιάς κατασκηνώσεως ή τό είδος των βιβλίων μιάς γενικής βιβλιοθήκης (λογοτεχνικά, έγκυκλοπαιδικά, έπιστημονικά)· μπορεί επίσης να είναι **ποσοτικές**, όπως τά βάρη ή τά ύψη των έλληνίδων μιάς ορισμένης ηλικίας, τό πλήθος των αγοριών μέσα σε κάθε οικογένεια ενός χωριού, τά πο-

σοστά της χοληστερίνης στο αίμα μιᾶς ομάδας ασθενῶν κλπ. Ἐπειδὴ μιὰ ποσοτική ιδιότητα ἐμφανίζεται, στὰ διάφορα άτομα ἐνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ, μέ διάφορες ἀριθμητικές **τιμές** τήν ὀνομάζομε συνήθως **ποσοτική μεταβλητή** ἢ ἀπλᾶ **μεταβλητή**. Ἐνίστε καί μιὰ ποιοτική ιδιότητα τήν ὀνομάζομε **ποιοτική μεταβλητή**, μιὰ πού καί οἱ ποιοτικές ιδιότητες ἐμφανίζονται μέ διάφορες ἀποχρώσεις, παραλλαγές, ἀκόμα καί εἰδικότερες κατηγορίες.

Ἄν ἔχομε στή διάθεσή μας τὰ ἀποτελέσματα κάποιων παρατηρήσεων, ἕνα σύνολο, συγκεκριμένα, ἀριθμητικῶν τιμῶν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  μιᾶς μεταβλητῆς, τιμῶν πού ἀναφέρονται σέ κάποια ιδιότητα τῶν ἀτόμων ἐνός πληθυσμοῦ, τότε τό πρῶτο βῆμα τῆς στατιστικῆς ἐπεξεργασίας εἶναι νά ταξινομήσομε αὐτά τὰ ἀποτελέσματα. Τίς διάφορες τιμές μιᾶς μεταβλητῆς  $x$  τίς ἔχομε πάρει προφανῶς κατὰ μιὰ τυχαία τάξη· εὐλογο εἶναι ν' ἀρχίσομε μέ τήν καταγραφή αὐτῶν τῶν τιμῶν κατ' αὐξανόμενο μέγεθος. Αὐτή τήν προεργασία τήν ὀνομάζομε **ταξινόμηση τῶν δεδομένων**. Ἀκολουθεῖ ἡ παρουσίαση τῶν ταξινομημένων παρατηρήσεων μέ μιὰ μορφή προσιτή καί βολική γιά μελέτη καί ἐξαγωγή συμπερασμάτων.

## 2.2 Συχνότητες μιᾶς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς. Κατανομή.

Ἄς ξεκινήσομε μέ ἕνα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 1ο.

«Ἐνα χωριό  $K$  ἔχει 175 οἰκογένειες. Θέλομε νά μελετήσομε τί σχετικά συμβαίνει μέ τό πλῆθος τῶν παιδιῶν στίς οἰκογένειες τοῦ χωριοῦ  $K$ ». Ἀρχικά σημειώνομε - μέ μιὰ ὁποιαδήποτε σειρά - τό πλῆθος τῶν παιδιῶν πού ἔχει καθεμιᾶ ἀπό τίς 175 οἰκογένειες. Ὑστερα ἀπαριθμοῦμε τό πλῆθος τῶν οἰκογενειῶν πού ἔχουν μηδέν (0) παιδιά, τό πλῆθος τῶν οἰκογενειῶν πού ἔχουν ἕνα (1) παιδί, πού ἔχουν δύο (2) παιδιά κ.ο.κ. μέχρι συμπληρώσεως τοῦ στατιστικοῦ μας πληθυσμοῦ.

Ἄς ὑποθέσομε ὅτι βρήκαμε: μηδέν παιδιά ἔχουν (δέν ἔχουν παιδιά) 2 οἰκογένειες· ἀπό ἕνα παιδί 5 οἰκογένειες· ἀπό 2 παιδιά ἔχουν 12 οἰκογένειες· ἀπό 3 παιδιά 30 οἰκογένειες· ἀπό 4, 34 οἰκογένειες· ἀπό 5, 42 οἰκογένειες· ἀπό 6, 20 οἰκογένειες· ἀπό 7 παιδιά, πάλι 20 οἰκογένειες· ἀπό 8, 7 οἰκογένειες· καί ἀπό 9 παιδιά ἔχουν 3 οἰκογένειες».

Μέχρις ἐδῶ ἔχομε κάνει τήν ταξινόμηση τῶν στατιστικῶν μας δεδομένων.

Ἡ ιδιότητα πού μᾶς ἐνδιαφέρει στό παραπάνω παράδειγμα εἶναι τό πλῆθος τῶν παιδιῶν σέ καθεμιᾶ οἰκογένεια· εἶναι λοιπόν ἡ ιδιότητα αὕτη μιὰ ποσοτική μεταβλητή  $x$  (ὅπου  $x$  πλῆθος παιδιῶν κατὰ οἰκογένεια) καί οἱ μὴ ἀρνητικοί ἀκέραιοι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 καί 9 εἶναι οἱ τιμές της. Ἐπειδὴ μάλιστα οἱ τιμές πού παίρνει ἡ μεταβλητή αὕτη εἶναι ἀριθμοί μεμονωμένοι, καί εἰδικά ἐδῶ ἀκέραιοι, καί δέν ὑπάρχει ἡ δυνατότητα νά πάρει αὕτη τιμές ἀνάμεσα σέ δύο διαδοχικούς ἀκεραίους, λέγεται **ἀσυνεχῆς μεταβλητή**. Οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί 2, 5, 12, 30, 34, 42, 20, 20, 7, 3 τῶν οἰκογενειῶν λέγονται **ἀπόλυτες συχνότητες** ἢ ἀπλᾶ **συχνότητες** τῶν τιμῶν 0, 1, 2 κτλ. Λέμε π.χ. ὅτι ἡ (ἀπόλυτη) **συχνότητα** τῆς τιμῆς 5 εἶναι 42.

Γενικά ὀνομάζομε **ἀπόλυτη συχνότητα** ἢ **ἀπλᾶ συχνότητα** μιᾶς τιμῆς (μιᾶς μεταβλητῆς) τόν μὴ ἀρνητικό ἀκέραιο ἀριθμό  $\Sigma$  πού δηλώνει πόσες φορές ἐμφανίζεται ἡ θεωρούμενη τιμή  $x$  τῆς ἐξεταζόμενης μεταβλητῆς μέσα σ' ἕνα σύνολο παρατηρήσεων.

“Αν  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  είναι οι συχνότητες αντίστοιχως των διαφορετικών μεταξύ τους τιμών  $x_1, x_2, \dots, x_k$  μιᾶς μεταβλητῆς  $x$  καί  $v$  είναι τό πλήθος τῶν ἀτόμων τοῦ ἐξεταζόμενου στατιστικοῦ πληθυσμοῦ - στό παραπάνω παράδειγμα ἔχομε  $v = 175$  - τότε φανερό εἶναι ὅτι ἰσχύει:

$$v = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$$

Δηλαδή:

**Τό ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ τό πλήθος ὄλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ.**

Οἱ διάφορες συχνότητες πού βρίσκομε μέ τήν ταξινόμηση τῶν παρατηρήσεών μας ἀποτελοῦν αὐτό πού συνήθως λέμε **κατανομή συχνοτήτων** τῶν τιμῶν τῆς (θεωρούμενης) μεταβλητῆς. Στό παραπάνω παράδειγμα ἡ κατανομή συχνοτήτων πού διαπιστώνομε εἶναι 2,5,12,30,34,42,20,20,7,3. Παρατηροῦμε μάλιστα ὅτι στό ἀναφερόμενο παράδειγμα ἡ συχνότητα 20 ἐμφανίζεται δύο φορές· ὥστε εἶναι δυνατό μιά ἢ περισσότερες συχνότητες νά ἐμφανίζονται περισσότερο ἀπό μιά φορά. Μπορεῖ ἀκόμα ἡ συχνότητα μιᾶς τιμῆς νά ἰσοῦται μέ μηδέν· αὐτό σημαίνει ὅτι ἐκεῖνη ἡ τιμή δέν ἀντιστοιχίζεται μήτε σ’ ἓνα ἄτομο τοῦ πληθυσμοῦ.

Γιά νά μποροῦμε νά συγκρίνομε διαφορετικούς πληθυσμούς ὡς πρός τήν ἴδια ἰδιότητα τῶν στοιχείων τους καί νά βγάζομε χρήσιμα συμπεράσματα εἶναι ἐνδιαφέρον νά κάνομε ἀναγωγή τῶν ἀπόλυτων συχνοτήτων στόν ὅλο πληθυσμό, νά ὀρίζομε δηλαδή τούς λόγους τῶν συχνοτήτων τῶν διαφόρων τιμῶν πρός τό πλήθος ὄλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ. Ὁ **λόγος ἀκριβῶς μιᾶς ἀπόλυτης συχνότητας  $\Sigma$  πρός τό πλήθος  $v$  ὄλων τῶν ἀτόμων ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ, λέγεται σχετική συχνότητα.**

“Αν λοιπόν μέ  $\sigma$  συμβολίσομε γενικά τή σχετική συχνότητα, ἔχομε τόν τύπο  $\sigma = \frac{\Sigma}{v}$ . Ἔτσι ἂν  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  εἶναι οἱ σχετικές συχνότητες πού ἀντιστοιχοῦν στίς (ἀπολυτες) συχνότητες  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ , ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ μέ  $v$  ἄτομα, τότε παίρνομε:

$$\sigma_1 \sigma_2 + \dots + \sigma_k = \Sigma \sigma_i = \frac{\Sigma_1}{v} + \frac{\Sigma_2}{v} + \dots + \frac{\Sigma_k}{v} = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k}{v} = \frac{v}{v} = 1 \quad (1)$$

Δηλαδή: **τό ἄθροισμα τῶν σχετικῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ τή μονάδα.**

Στό προηγούμενο παράδειγμα οἱ σχετικές συχνότητες εἶναι:

$$\sigma_1 = \frac{2}{175} \approx 0,0114,$$

\* Ὁ συμβολισμός  $\sum_{i=1}^k \sigma_i$  σημαίνει τό ἄθροισμα τῶν ὀρων  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , ὅπου τό  $i$  παίρνει τιμές (φυσικές) ἀπό 1 ἕως καί  $k$ .

\*\* Τό σύμβολο  $\approx$  σημαίνει περίπου ἴσο.

$$\sigma_2 = \frac{5}{175} \simeq 0,0286 \text{ κτλ.}$$

Πολλές φορές ή σχετική συχνότητα μιās τιμής  $x_i$  ανάγεται σέ 100 περιπτώσεις· δίνεται δηλαδή τό ισοδύναμο του άριθμού έμφανίσεως τής όρισμένης αúτης τιμής (τής μεταβλητής) μέσα σέ πληθυσμό 100 ατόμων. Αυτό τόν άριθμό θά τόν όνομά-ζομε **έκατοστιαία συχνότητα** καί τόν βρίσκομε άν πολλαπλασιάσομε τή σχετική συ-χνότητα επί 100. Έχομε δηλαδή, άν μέ  $\epsilon$  συμβολίσομε τήν έκατοστιαία συχνότη-τα:

$$\epsilon = 100 \cdot \sigma$$

Διότι άν: σέ πληθυσμό  $v$  ή συχνότητα μιās τιμής  $x$  είναι  $\Sigma$   
σέ πληθυσμό 100 ή συχνότητα τής ίδιας τιμής είναι; =

$$\Sigma \cdot \frac{100}{v} = \frac{\Sigma}{v} \cdot 100 = \sigma \cdot 100.$$

Είναι φανερό ότι τό άθροισμα  $\sum_{i=1}^k$  τών έκατοστιαίων συχνοτήτων είναι ίσο μέ

100 άφοú  $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_k = 100(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k) = 100 \cdot 1 = 100$ . έξάλλου, όπως είπαμε, οί άριθμοί  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k$  δέν είναι παρά οί άριθμοί μέ τούς όποιους θά έπρεπε νά έμφανίζονται μέσα σέ πληθυσμό 100 οί τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_k$  αντίστοίχως γιά νά διατηροúν αúτοί οί άριθμοί τήν άναλογία μέ τήν όποία έμφανίζονται μέσα στόν άρχικό πληθυσμό  $v$ .

$$(\text{Θέλομε } \mu' \text{ άλλα λόγια νά ισχύει: } \frac{\epsilon_i}{100} = \frac{\Sigma_i}{v} = \sigma_i)$$

Μερικές φορές είναι χρήσιμη καί ή λεγόμενη **άθροιστική συχνότητα** διαδοχικών τιμών, πού είναι τό άθροισμα τής συχνότητας μιās τιμής μαζί μέ τίσ συχνότητες ό-λων τών προηγούμενων (μικροτέρων) τιμών. Έτσι έχομε:

$A_1 = \Sigma_1, A_2 = \Sigma_1 + \Sigma_2, A_3 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \dots, A_k = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k = v$ , άν μέ  $A_i$  σημειώσομε τήν άθροιστική συχνότητα μέχρι τής τιμής  $x_i$ .

## 2.3 Πίνακες συχνοτήτων.

Γιά νά έχομε μιá συνοπτική εικόνα τής κατανομής τών συχνοτήτων τών τιμών μιās μεταβλητής καί γενικά τών αποτελεσμάτων τής πρώτης, όπως παραπάνω, έ-πεξεργασίας τών στοιχείων ενός στατιστικού πληθυσμού, κατασκευάζομε συγκεν-τρωτικούς **πίνακες**, όπου σέ χωριστές στήλες καταγράφομε διατεταγμένα τίσ τιμές τής έξεταζόμενης μεταβλητής, τίσ αντίστοιχες συχνότητες, σχετικές συχνότητες κτλ.

Ό παρακάτω πίνακας 2.3.1 είναι ό πίνακας συχνοτήτων του προηγούμενου πρώτου παραδείγματος.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.1.**  
**Κατανομή αριθμού οικογενειών κατά τό πλήθος τών παιδιών.**

| Πλήθος παιδιών | Αριθμός οικογενειών<br>(απόλυτη συχνότηταΣ)       | Σχετική<br>συχνότητα<br>$\sigma = \Sigma/\nu$   | Έκατοστιαία<br>συχνότητα<br>$\epsilon = 100 \cdot \sigma$ | Αθροιστική<br>συχνότητα<br>F |
|----------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------|
| 0              | 2                                                 | $\frac{2}{175} \approx 0,114$                   | 1,14                                                      | 2                            |
| 1              | 5                                                 | $\frac{5}{175} \approx 0,0286$                  | 2,86                                                      | 7                            |
| 2              | 12                                                | $\frac{12}{175} \approx 0,0686$                 | 6,86                                                      | 19                           |
| 3              | 30                                                | $\frac{30}{175} \approx 0,1714$                 | 17,14                                                     | 49                           |
| 4              | 34                                                | $\frac{34}{175} \approx 0,1943$                 | 19,43                                                     | 83                           |
| 5              | 42                                                | $\frac{42}{175} \approx 0,2400$                 | 24,00                                                     | 125                          |
| 6              | 20                                                | $\frac{20}{175} \approx 0,1143$                 | 11,43                                                     | 145                          |
| 7              | 20                                                | $\frac{20}{175} \approx 0,1143$                 | 11,43                                                     | 165                          |
| 8              | 7                                                 | $\frac{7}{175} \approx 0,0400$                  | 4,00                                                      | 172                          |
| 9              | 3                                                 | $\frac{3}{175} \approx 0,0171$                  | 1,71                                                      | 175                          |
| άθροίσματα     | $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_{10} = 175$ | $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{10} = 1$ | $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_{10} = 100$         |                              |

“Ας κατασκευάσουμε τώρα - για άσκηση - τόν πίνακα συχνοτήτων μιās μεταβλη-  
 τής πού μπορεί νά θεωρηθεῖ ως ποιοτική. Ἡ ποιοτική αὐτή ιδιότητα εἶναι οἱ τάξεις  
 ἑνός (ἐξαταξίου) δημοτικού σχολείου.

#### **Παράδειγμα 2ο.**

«Σ’ ἓνα ἐξατάξιο δημοτικό σχολεῖο μέ τήν ἑναρξη τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1978 - 79  
 γράφηκαν: Στήν Α’ τάξη 38 μαθητές· στή Β’ τάξη 40· στή Γ’ 38· στή Δ’ 34· στήν Ε’

30 καί στήν ΣΤ΄ 28 μαθητές. Νά κατασκευασθεῖ ὁ πίνακας συχνότητων». (Ἡ ποιοτική ιδιότητα εἶναι «οἱ τάξεις τοῦ σχολείου». Ἐξάλλου, ὅπως παρατηροῦμε, τά στοιχεῖα δίνονται ἐξαρχῆς ταξινομημένα).

**ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.2.**  
**Κατανομή τῶν μαθητῶν Δημοτικοῦ σχολείου κατά τάξεις.**

| Τάξεις<br>σχολείου | Ἀριθμός Μαθητῶν<br>κατά τάξη<br>(ἀπόλυτη συχνότητα Σ) | Σχετική<br>συχνότητα<br>$\sigma = \Sigma/\nu$                         | Ἑκατοστιαία<br>συχνότητα<br>$\epsilon = 100 \cdot \sigma$                           |
|--------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Α΄                 | 38                                                    | $\frac{38}{208} \approx 0,1827$                                       | $18,27 \approx 18$                                                                  |
| Β΄                 | 40                                                    | $\frac{40}{208} \approx 0,1923$                                       | $19,23 \approx 19$                                                                  |
| Γ΄                 | 38                                                    | $\frac{38}{208} \approx 0,1827$                                       | $18,27 \approx 18$                                                                  |
| Δ΄                 | 34                                                    | $\frac{34}{208} \approx 0,1635$                                       | $16,35 \approx 16$                                                                  |
| Ε΄                 | 30                                                    | $\frac{30}{208} \approx 0,1442$                                       | $14,42 \approx 14$                                                                  |
| ΣΤ΄                | 28                                                    | $\frac{28}{208} \approx 0,1349$                                       | $13,46 \approx 13$                                                                  |
| ΟΛΙΚΑ              | $\nu = 28$                                            | $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 = 1$ | $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 = 100$ |

“Ὅπως παρατηροῦμε, τό πλῆθος ὅλων τῶν μαθητῶν (τῶν ἀτόμων) τοῦ στατιστικοῦ πληθυσμοῦ) προκύπτει - στό παράδειγμα 2 - ἂν προσθέσουμε τίς γνωστές ἀπόλυτες συχνότητες τῶν ἑξι «τιμῶν» τῆς μεταβλητῆς (πίνακας 2.3.2).

**2.4 Ὁμαδοποίηση δεδομένων, ὅταν ἡ μεταβλητή εἶναι συνεχής.**

“Ὅταν ἡ ἐξεταζόμενη ιδιότητα εἶναι μιά ποσοτική ιδιότητα καί μπορεῖ νά παίρνει ὅλες τίς δυνατές τιμές ενός δοσμένου διαστήματος, ὅπως π.χ. ὅταν πρόκειται γιά τό ὕψος ἢ τό βάρος μιᾶς ομάδας ἀνθρώπων, ζώων ἢ καί ἀντικειμένων, τότε ἡ μελετώμενη μεταβλητή ὀνομάζεται **συνεχής**.

Σέ μιά τέτοια περίπτωση τό πλῆθος τῶν παρατηρούμενων διαφορετικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἶναι συνήθως πολύ μεγάλο καί μάλιστα ὅταν ὁ θεωρούμενος στατιστικός πληθυσμός εἶναι πολυάριθμος· οἱ συχνότητες ἀντίστοιχα τῶν διαφόρων



τιμών είναι μικρές και η κατανομή τους πολύ διάσπαρτη και συνεπώς διόλου εύχρηστη.

Αναγκαζόμαστε τότε να κάνουμε αναγωγή και «σύμπτυξη» του πλήθους των δυνατών τιμών, ομαδοποιώντας πολλές γειτονικές τιμές. Ακριβέστερα ή όλη εργασία γίνεται ως εξής: χωρίζουμε το διάστημα των δυνατών τιμών της μεταβλητής σε ένα ορισμένο πλήθος διαστημάτων, του ίδιου (κατά προτίμηση) πλάτους, και μέσα σε καθένα απ' αυτά τα υποδιαστήματα, που λέγονται **τάξεις** ή **κλάσεις**, απαριθμούμε τους αντίστοιχους μερικότερους πληθυσμούς. Έτσι, σε μία ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, δέν έχουμε πλέον συχνότητα (ή σχετική συχνότητα) μιᾶς κάποιας τιμῆς, αλλά **συχνότητα κλάσεως** (ή αντίστοιχα σχετική συχνότητα κλάσεως). Για να γίνει σαφέστερη η σχετική διαδικασία σ' αυτές τις περιπτώσεις θα επεξεργασθούμε κι ἐδῶ ένα παράδειγμα.

### Παράδειγμα 3ο.

«Έχουμε να μελετήσουμε τό βάρος 100 προσώπων. Τά βάρη **κυμαίνονται από 40 ως 45 kg\***, δηλαδή οι τιμές του βάρους β ίκανοποιούν τή σχέση  $40 \leq \beta < 75^*$ . Χωρίζουμε τό διάστημα μεταβολῆς σε υποδιαστήματα των 5 kg\* (τό πλάτος του κάθε υποδιαστήματος είναι 5) συμφωνώντας τό κάθε διάστημα να είναι κλειστό από αριστερά (ὅπως και τό ὁλικό διάστημα [40,75)). Έτσι έχουμε τίς παρακάτω ἐπτά κλάσεις [40,45), [45,50), [50,55), [55,60), [60,65), [65,70), [70,75).

Έστω ἀκόμα ὅτι οἱ ἀντίστοιχες (ἀπόλυτες) συχνότητες κλάσεως βρέθηκαν, ὕστερα ἀπό ομαδοποίηση (ἄθροιση) τῶν περιπτώσεων πού πέφτουν μέσα σέ κάθε κλάση, ἴσες μέ: 5,12,31,31,16,3,2. Νά γίνει ἡ πινακοποίηση τῶν συχνοτήτων τῶν κλάσεων» (πίνακας 2.4.1).

**ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.1.**

**Κατανομή βαρῶν 100 προσώπων.**

| Κλάσεις | Μέση τιμή | Απόλυτη συχνότητα Σ | Σχετική συχνότητα $\sigma = \Sigma/\nu$                                          | Έκατοστιαία συχνότητα $\epsilon = 100 \cdot \sigma$                                              | Αθροιστική συχνότητα |
|---------|-----------|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| [40,45) | 42,5      | 5                   | 0,05                                                                             | 5                                                                                                | 5                    |
| [45,50) | 47,5      | 12                  | 0,12                                                                             | 12                                                                                               | 17                   |
| [50,55) | 52,5      | 31                  | 0,31                                                                             | 31                                                                                               | 48                   |
| [55,60) | 57,5      | 31                  | 0,31                                                                             | 31                                                                                               | 79                   |
| [60,65) | 62,5      | 16                  | 0,16                                                                             | 16                                                                                               | 95                   |
| [65,70) | 67,5      | 3                   | 0,03                                                                             | 3                                                                                                | 98                   |
| [70,75) | 72,5      | 2                   | 0,02                                                                             | 2                                                                                                | 100                  |
| ΟΛΙΚΑ   |           | $\nu = 100$         | $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 = 1$ | $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 = 100$ |                      |

Έχει ενδιαφέρον να συζητήσουμε ἀκόμα λίγο πάνω στόν τρόπο ἐκλογῆς τῶν τάξεων. Πρέπει καταρχήν ὅλες οἱ κλάσεις - τό εἶπαμε ἤδη - νά ἔχουν τό ἴδιο πλάτος

\* Ἡ σχέση  $40 \leq \beta$  δέ σημαίνει ὅτι ἔχουμε συναντήσει τιμή ἴση μέ 40, ἀλλά ὅτι ὅπωςδήποτε δέν ὑπάρχει τιμή κάτω ἀπό 40.

καί νά εἶναι γειτονικές, χωρίς ἐπικαλύψεις καί χωρίς χάσματα (πηδήματα). Γι' αὐτό τίς παίρνομε κλειστές ἀπό τό ἓνα μέρος (π.χ. ἀριστερά) καί ἀνοικτές ἀπό τό ἄλλο.

Μποροῦμε ἀκόμα νά χαρακτηρίζομε τίς διάφορες κλάσεις σημειώνοντας τήν τιμή πού βρίσκεται ἀκριβῶς στό μέσο τοῦ κάθε ὑποδιαστήματος· τήν τιμή αὐτή τήν ὀνομάζομε **μεσαία τιμή** (ἢ **μέσο σημεῖο**) τῆς κλάσεως. Ἡ μεσαία τιμή μιᾶς τάξεως εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ἀκραίων τιμῶν τῆς τάξεως. Στό παραπάνω παράδειγμα βλέπομε ὅτι οἱ μεσαῖες διαδοχικές τιμές εἶναι:

$$\frac{40 + 45}{2} = 42,5, \quad \frac{45 + 50}{2} = 47,5, \dots, 72,5.$$

Μέ τή χρησιμοποίηση τῶν μεσαίων τιμῶν καί τήν ἐξομοίωση καί ἀντικατάσταση ὅλων τῶν τιμῶν μιᾶς κλάσεως μέ μιά μοναδική τιμή, ἐκείνη τοῦ μέσου σημείου, ξαναγυρνοῦμε πάλι στήν περίπτωση μιᾶς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς.

**Σημείωση:** Εἶναι ἐνδεχόμενο μιά κλάση νά ἔχει ἀπόλυτη συχνότητα μηδέν, ὅπως ἀκριβῶς καί μιά κάποια τιμή μιᾶς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς.

**Παρατήρηση.** Ἀπό τήν προσεκτική μελέτη τῶν διαφόρων στηλῶν καταλαβαίνομε εὐκόλα τή σημασία καί τήν ἀξία τῆς καθεμιᾶς. Ἔτσι π.χ. ἀπό τήν 3η στήλη τοῦ πίνακα 2.4.1 πληροφοροῦμαστε ὅτι 12 πρόσωπα ἔχουν μέσο βάρος 47,5 kg\*· ἀπό τήν 6η στήλη τοῦ ἴδιου πίνακα βλέπομε ὅτι 79 πρόσωπα ἔχουν βάρος κάτω ἀπό 60 kg\*· ἀπό τήν 4η στήλη τοῦ πίνακα 2.3.1 διαπιστώνομε ὅτι τό 24% τῶν οἰκογενειῶν ἔχουν 5 παιδιά.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 3

### ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

#### 3.1 Τό πολύγωνο συχνότητων.

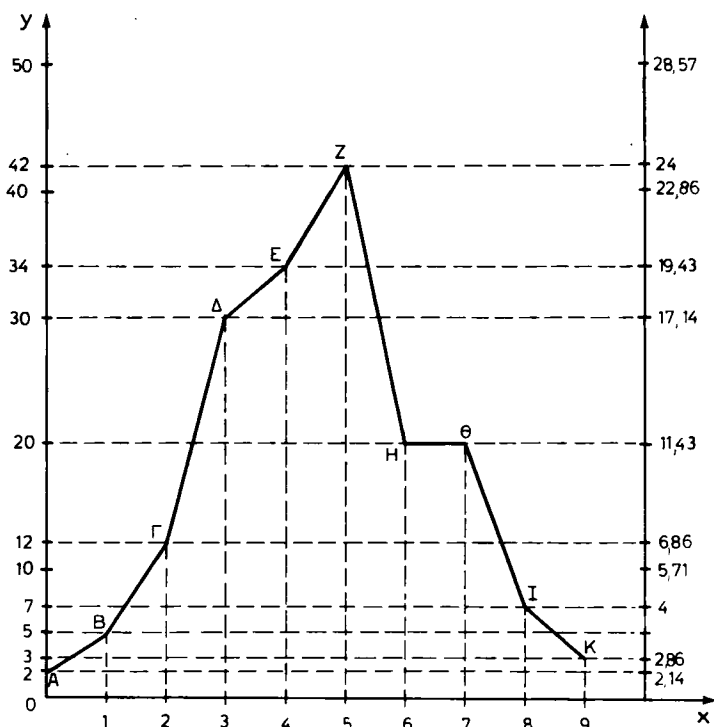
Εἶναι ἐνδιαφέρον καί χρήσιμο νά συνοδεύομε τούς πίνακες κατανομῆς συχνότητων, πού παρουσιάζουν συγκεντρωτικά ἀριθμητικά στοιχεῖα, μέ κατάλληλες κατά περίπτωση γραφικές παραστάσεις.

Μιά γραφική παράσταση εἶναι μιά εἰκόνα πού παρέχει ἄμεσα τή γενική συμπεριφορά τῶν στατιστικῶν στοιχείων· καί ἡ ἀμεσότητα τῶν ἐντυπώσεων εἶναι τέτοια, ὥστε ὄχι σπάνια ἀντικαθιστοῦμε ὁλότελα τούς πίνακες μέ γραφικές παραστάσεις.

Οἱ γραφικές αὐτές παραστάσεις παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία· στήν περίπτωση ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν λέγονται συνήθως **διαγράμματα συχνότητων**.

Ἄς δοῦμε ἀμέσως πῶς κατασκευάζεται τό διάγραμμα συχνότητων τοῦ πίνακα 2.3.1. Οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς καί οἱ ἀντίστοιχες (ἀπόλυτες) συχνότητες ἀποτελοῦν διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν· στό παράδειγμα 1 (παράγρ. 2.2) εἶναι: (0,2), (1,5), (2,12), (3,30), (4,34), (5,42), (6,20), (7,20), (8,7), (9,3). Τά πρῶτα στοιχεῖα αὐτῶν τῶν (διατεταγμένων) ζευγῶν δηλώνουν πλῆθος παιδιῶν καί τά δεύτερα

στοιχεία δηλώνουν τις αντίστοιχες συχνότητες. Σ' αυτή την περίπτωση παίρνουμε ένα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καί πάνω στόν ἀξονα τῶν τετμημένων σημειώ-  
νομε τίς τιμές τῆς ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς (σχ. 3.1), ἐνῶ στόν ἀξονα τῶν τεταγμέ-  
νων σημειώνομε τίς συχνότητες. Τό μήκος τοῦ μοναδιαίου διανύσματος πάνω  
στόν ἀξονα τῶν τετμημένων ἐκφράζει μίαν ὀρισμένη τιμή τῆς ἀσυνεχοῦς μεταβλη-  
τῆς (στό θεωρούμενο παράδειγμα τό ἓνα παιδί) καί πάνω στόν ἀξονα τῶν τεταγμέ-  
νων ἓνα ὀρισμένο πλῆθος ἀτόμων ἀπό τό στατιστικό πληθυσμό, π.χ. 10. Ἀκολου-



Σχ. 3.1.

θως ὀρίζομε, κατά τά γνωστά, τά παραστατικά σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ τῶν προηγουμένων διατεταγμένων ζευγῶν. Αὐτά τά μεμονωμένα σημεία μπορού-  
με νά θεωρήσομε ὅτι ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση (τό διάγραμμα) τῶν συ-  
χνοτήτων στό θεωρούμενο παράδειγμα. Ἐν τούτοις σχεδιάζομε (συνήθως) καί τά  
εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ (σχ. 3.1) καί παίρνομε ἔ-  
τσι μιά συνεχή πολυγωνική (τεθλασμένη) γραμμή. Ἡ γραμμή αὕτη λέγεται **πολύ-  
γωνο συχνοτήτων**.

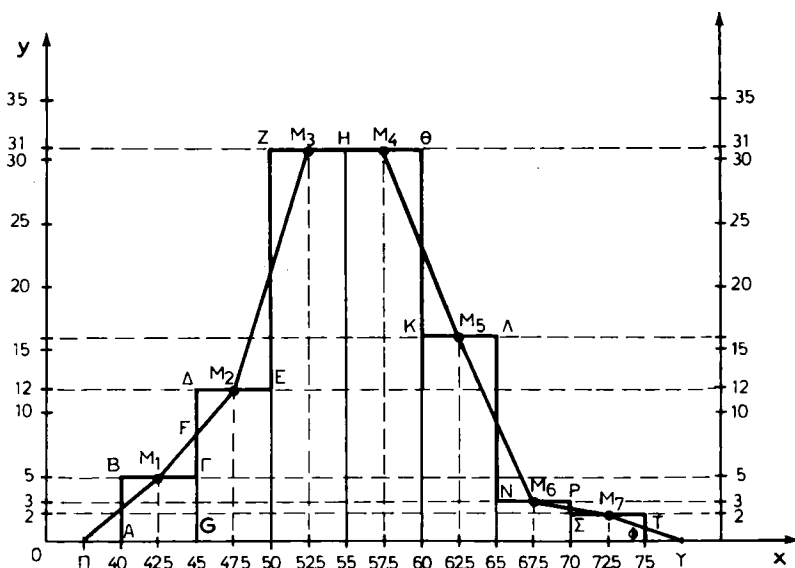
### 3.2 Τό Ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Ὁ συνηθέστερα χρησιμοποιούμενος τρόπος γραφικῆς παραστάσεως συχνοτή-

**των συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής είναι τό λεγόμενο Ιστογράμματα συχνότητων.**

Πάνω στον άξονα των τετμημένων παίρνομε ίσα διαδοχικά τμήματα, καθένα από τά όποία έκφράζει τό διάστημα μιās κλάσεως. Άκολουθως κατασκευάζομε όρθογώνια μέ βάσεις τά διαστήματα των κλάσεων καί έμβαδά ίσα προς τίς αντίστοιχες συχνότητες. Άν οί κλάσεις έχουν ίσα πλάτη, τότε τίς βάσεις των όρθογωνίων τίς παίρνομε ίσες (σχ. 3.2) καί συνεπώς τά ύψη των όρθογωνίων είναι τότε ανάλογα προς τίς αντίστοιχες συχνότητες, μιά καί τά έμβαδά αυτών των όρθογωνίων θεωροῦνται ίσα προς τίς συχνότητες. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε νά δεχθοῦμε ότι τά ύψη των διαδοχικών όρθογωνίων του Ιστογράμματος παριστάνουν τίς συχνότητες των αντίστοιχων κλάσεων, τίς όποιες συχνότητες σημειώνομε καί πάνω στον άξονα των τεταγμένων\*.

Τό έμβαδόν του σχήματος που όρίζεται από την πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ-ΖΗΘΚΛΝΡΣΤΦ καί τό τμήμα ΑΦ του άξονα των τετμημένων (σχ. 3.2) είναι ίσο μέ τό άθροισμα των έμβαδών των διαδοχικών όρθογωνίων, καί παριστάνει τό πλήθος των στοιχείων του έξεταζόμενου στατιστικού πληθυσμού.



Σχ. 3.2.

Στό σχήμα 3.2 έχομε σχεδιάσει τό Ιστογράμματα του παραδείγματος 3 (παράγραφος 2.4) καί παρατηρούμε ότι τό έμβαδόν του Ιστογράμματος, που είναι ίσο μέ:

$$(5 + 12 + 31 + 31 + 16 + 3 + 2) \cdot \frac{ΑΦ}{5} = 100 \cdot ΑΓ,$$

έκφράζει τό πλήθος των προσώπων, των όποιων τό βάρος έξετάσαμε, αν βέβαια θεωρήσομε μοναδιαία τά μήκη των ίσων πλευρών των όρθογωνίων.

\* Είναι σάν νά δεχόμαστε ότι οί πλευρές των όρθογωνίων, που είναι πάνω στον άξονα των x, έχουν μέτρο ένα.

“Αν συνδέσουμε μέ εὐθύγραμμα τμήματα τά μέσα  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  καί  $M_7$  (σχ. 3.2) τῶν ἄνω πλευρῶν τῶν ὀρθογώνιων τοῦ ἱστογράμματος, ἡ πολυγωνική γραμμή  $\Pi M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7$ , ὅπου  $\Pi$  καί  $\Upsilon$  εἶναι τά σημεῖα τομῆς τοῦ ἄξονα  $Ox$  μέ τίς εὐθεῖες πού ὀρίζουν τά σημεῖα  $M_1, M_7$  μέ τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ἱστογράμματος (πρώτης) καί  $T\Phi$  (τελευταίας) ἀντιστοίχως, λέγεται πάλι **πολύγωνο συχνοτήτων**.

Εἶναι τώρα ἐνδιαφέρον νά παρατηρήσουμε ὅτι κάθε πλευρά τοῦ πολυγώνου συχνοτήτων κόβει καί ἀφήνει ἀπέξω ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, ὅπως π.χ. τό  $\Delta M_2 F$  (σχ. 3.2)· αὐτό ὅμως ἀντικαθίσταται ἀπό ἕνα ἴσο ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού ἀνήκει στό ἐσωτερικό τοῦ πολυγώνου καί ἔχει τή μιά κάθετή του πλευρά πάνω στόν ἄξονα τῶν  $x$  ἢ πάνω στήν ἄνω βάση τοῦ προηγούμενου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ὅπως π.χ. συμβαίνει μέ τό  $M_1 G F$ , ζευγάρι τοῦ  $\Delta M_2 F$ . Ἐτσι ἡ ἐπιφάνεια ἡ περικλειόμενη ἀπό τό πολύγωνο συχνοτήτων καί τόν ἄξονα  $Ox$  εἶναι ἀκριβῶς ἰσοδύναμη μέ τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἱστογράμματος. Συνεπῶς τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου πού ὀρίζεται ἀπό τό πολύγωνο συχνοτήτων καί τόν ἄξονα τῶν  $x$  ἐκφράζει (ὅπως ἀκριβῶς καί τό ἱστόγραμμα) τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ ἐξεταζόμενου στατιστικοῦ πληθυσμοῦ.

### 3.3 Τό πολύγωνο τῶν σχετικῶν συχνοτήτων καί τό πολύγωνο τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων.

“Αν στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων τοποθετήσουμε ὀχι τίς ἀπόλυτες συχνότητες ἀλλά τίς σχετικές, ἔχομε τότε τό **πολύγωνο τῶν σχετικῶν συχνοτήτων**. Ἐπειδὴ

$$\sigma = \frac{\Sigma}{v} = \Sigma \cdot \frac{1}{v}, \text{ ἐπειδὴ δηλαδή οἱ ἀριθμοὶ πού ἐκφράζουν τίς σχετικές συχνότητες}$$

εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνους πού ἐκφράζουν τίς ἀπόλυτες  $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{1}{v}$ , μέ συντελε-

στή  $\frac{1}{v}$ , ἔπεται ὅτι ἡ μορφή τοῦ ἱστογράμματος καί τοῦ πολυγώνου συχνοτήτων δέν

ἀλλάζει ὅταν περνᾷμε ἀπό τίς ἀπόλυτες στίς σχετικές συχνότητες. “Αν μάλιστα στά σημεῖα τῶν συχνοτήτων (πάνω στόν ἄξονα  $O\psi$ ) σημειώσουμε τίς ἀντίστοιχες σχετικές συχνότητες, τότε τό ἴδιο ἀκριβῶς σχῆμα (ἱστόγραμμα, πολύγωνο συχνοτήτων) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἱστόγραμμα καί πολύγωνο ἀντίστοιχα τῶν σχετικῶν συχνοτήτων. Προτιμᾷμε κιόλας στή θέση τῶν σχετικῶν συχνοτήτων νά παίρνομε τίς ἑκατοστιαῖες συχνότητες πού εἶναι - καθὼς γνωρίζομε - τά ἑκατονταπλάσια τῶν σχετικῶν. Οἱ ἀριθμοὶ τότε, οἱ σημειούμενοι πάνω στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων, ἐκφράζουν σέ πόσα ἑκατοστά τοῦ ὁλικοῦ πληθυσμοῦ ἐμφανίζονται οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς μεταβλητῆς πού σημειώνονται στόν ἄξονα τῶν τετμημένων. Σ’ αὐτή τήν κλίμακα - τῆς ἑκατοστιαίας συχνότητας - εἶναι κατασκευασμένοι, στά σχήματα 3.1 καί 3.2, οἱ ἄξονες οἱ παράλληλοι πρὸς τούς ἄξονες  $O\psi^*$ .

**Πολλές φορές μᾶς εἶναι χρήσιμη ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς ἀθροιστικῆς συχνό-**

\* Στὴν περίπτωση πού παριστάνει τό σχῆμα 3.2 οἱ τιμές τῆς ἀπόλυτης συχνότητας ταυτίζονται μέ ἐκείνες τῆς ἑκατοστιαίας, διότι ἡ ὁλικὴ συχνότητα συμβαίνει νά εἶναι 100. Ἄρα μπορεῖ ὁ 2ος κατακόρυφος ἄξονας νά παραλειφθεῖ.



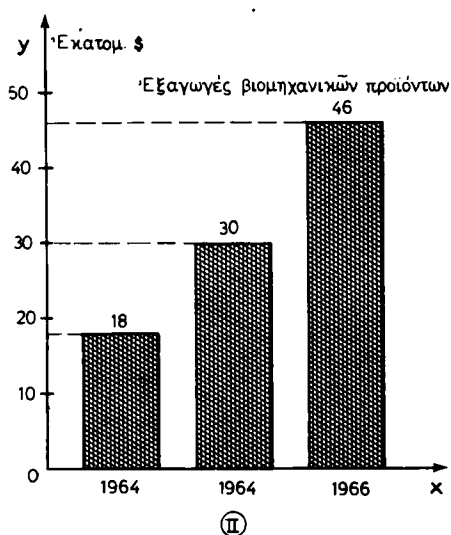
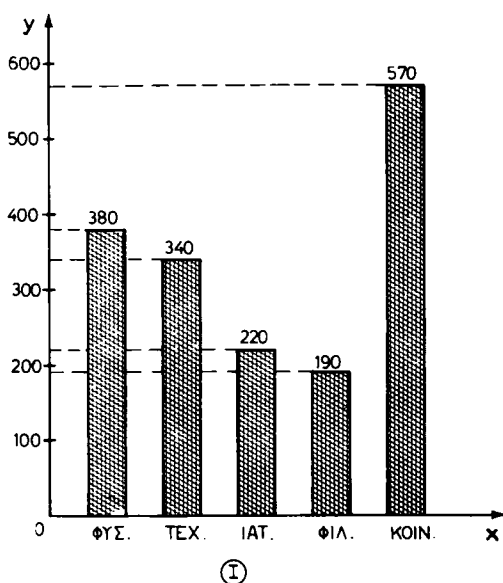
έχουν (κατανάλγκν) συμπίπτουσες πλευρές καί τά τμήματα τών βάσεων έχουν συμβατικό νόημα, δεδομένου ότι αυτός ό τρόπος γραφικής παραστάσεως - όπως καί ό άμέσως επόμενος - χρησιμοποιείται κυρίως όταν ή μεταβλητή είναι ποιοτική ή όταν πρόκειται γιά κατανομή συχνοτήτων σέ διακεκριμένες χρονικές περιόδους.

Άλλά άς μιλήσουμε καλύτερα μέ παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 4ο.

«Μέσα στό ήμερολογιακό έτος 1978 από τό Πανεπιστήμιο Π άποφοίτησαν: από τίς Φυσικομαθηματικές σχολές 380· από τίς Τεχνικές Σχολές 340· από τίς Ίατρικές 220· από τίς Φιλοσοφικές 190 καί από τίς Σχολές Κοινωνικών Έπιστημών 570. Νά δοθεί μέ ραβδόγραμμα ή γραφική παράσταση τής κατανομής τών συχνοτήτων».

Στό σχήμα 3.4α(Ι) έχομε σχεδιάσει τό ραβδόγραμμα τής κατανομής τών συχνοτήτων του πληθυσμού τών  $1700 = 380 + 340 + 220 + 190 + 570$  άποφοίτων του Πανεπιστημίου Π (κατά τό έτος 1978) μέ βάση τήν ποιοτική μεταβλητή «είδος πανεπιστημιακής Σχολής».



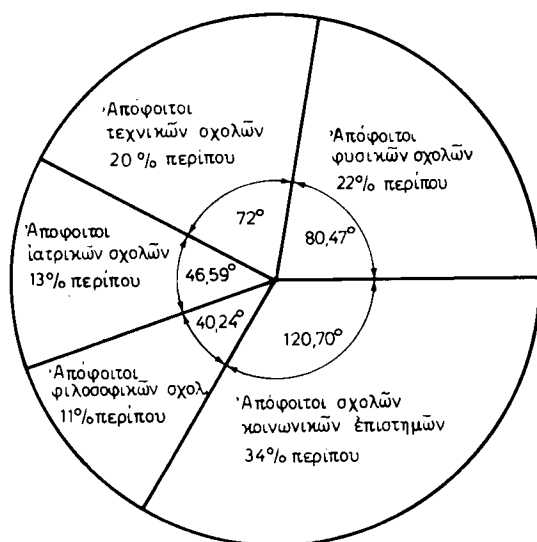
Σχ. 3.4α.

Στό σχήμα 3.4α(ΙΙ) βλέπομε τό ραβδόγραμμα που έκφράζει τό ύψος εξαγωγής - σέ έκατομμύρια δολλάρια - βιομηχανικών προϊόντων τής χώρας μας κατά τήν τριετία 1964, 65, 66.

Ένας άλλος ακόμη, έξισου απλός, τρόπος γραφικής έκφράσεως μιās κατανομής είναι τό κυκλικό διάγραμμα. Τό κυκλικό διάγραμμα δέν είναι τίποτε περισσότερο από έναν κυκλικό δίσκο χωρισμένο σέ κυκλικούς τομείς, τών οποίων τά έμβαδά πα-

ριστάνουν τής συχνότητες κατανομής τοῦ ἐξεταζόμενου πληθυσμοῦ (σχ. 3.4β)\*. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἐπίκεντρος γωνίες τῶν κυκλικῶν τομέων θά ἔχουν μέτρα ἀνάλογα πρὸς τής συχνότητες.

Τό σχῆμα 3.4β εἶναι τό κυκλικό διάγραμμα τοῦ παραπάνω παραδείγματος 4.



Σχ. 3.4β.

Ἀρχικά μετατρέπομε τής σχετικές συχνότητες:

$$\frac{380}{1700} = \frac{38}{170} \quad \frac{34}{170} \quad \frac{22}{170} \quad \frac{19}{170} \quad \frac{57}{170}$$

σέ μοῖρες, δηλαδή σέ μέρη τοῦ 360 ἀνάλογα. Συγκεκριμένα παίρνομε:

$$\frac{38}{170} \cdot 360 \simeq 0,2235294 \cdot 360 \simeq 80,47^\circ, \quad \frac{360}{170} \cdot 34 = \frac{36}{17} \cdot 34 = 72^\circ,$$

$$\frac{36}{17} \cdot 22 \simeq 2,117647 \cdot 22 \simeq 46,59^\circ, \quad \frac{36}{17} \cdot 19 \simeq 2,117647 \cdot 19 \simeq 40,24^\circ$$

$$\text{καί} \quad \frac{36}{17} \cdot 57 \simeq 120,70^\circ.$$

(Παρατηρεῖστε:  $22\% + 20\% + 13\% + 11\% + 34\% = 100\%$ )

\* Θεωροῦμε ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ δίσκου παριστάνει ὁλόκληρο τόν πληθυσμό.



## ΕΝΟΤΗΤΑ 4

## ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΙΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

## 4.1 Γενικά.

Μιά κατανομή συχνοτήτων μᾶς δίνει βέβαια αρκετές χρήσιμες πληροφορίες για μία μεταβλητή (ποσοτική ή ποιοτική) ενός πληθυσμού που μελετάμε. Οἱ πίνακες κατανομῆς τῶν συχνοτήτων καί πολύ περισσότερο οἱ γραφικές τους παραστάσεις μᾶς διευκολύνουν νά ἀποκτήσουμε μιά συνολική καί πλήρη ἐποπτεία τοῦ πληθυσμοῦ που ἐξετάζουμε σέ συνδυασμό μέ τή συσχετισμένη μεταβλητή που μᾶς ἐνδιαφέρει. Ἐντούτοις ἡ ἀνάγνωση μιᾶς κατανομῆς συχνοτήτων (ἀπό ἕναν πίνακα) δέν εἶναι πάντα πολύ βολική καί ὅπωςδήποτε δέν ἐπιτρέπει τή γρήγορη παραγωγή μιᾶς γενικῆς ἰδέας αὐτῆς τῆς κατανομῆς. Ἀκόμα, μόνο μέ τούς πίνακες καί τὰ διαγράμματα τῶν συχνοτήτων, δέν εἶναι δυνατό νά ἀντιληφθοῦμε τήν ὑπαρξη νομοτελειᾶς συνθέσεως τῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν. Ἀναζητοῦμε λοιπόν νά παρουσιάσουμε τὰ βασικά χαρακτηριστικά ενός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ κάτω ἀπό μιά μορφή πῶς λακωνική, μέ τή βοήθεια ενός ὀρισμένου πλήθους τυπικῶν τιμῶν, που λέγονται **χαρακτηριστικές τιμές**.

Αὐτές που ἐμεῖς ἐδῶ θά ἐξετάσουμε εἶναι οἱ ἑξῆς: ὁ **ἀριθμητικός μέσος** (ἡ μέση τιμή) τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς, ἡ **διάμεσος τιμή** καί ἡ **ἐπικρατοῦσα τιμή**.

## 4.2 Ἀριθμητικός μέσος (ἡ μέση τιμή).

Ἄν  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_v$  εἶναι οἱ τιμές μιᾶς ποσοτικῆς μεταβλητῆς  $x$ , τότε τό πηλίκο τοῦ ἀθροίσματος  $\sum_{i=1}^v x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_v$  διά τοῦ πλήθους  $v$  αὐτῶν τῶν τιμῶν λέγεται

**μέση τιμή ἢ ἀριθμητικός μέσος** (τῆς μεταβλητῆς  $x$ ). Ἄν αὐτή τήν τιμή τή σημειώσουμε μέ  $\bar{x}$  (διαβάζουμε:  $x$  ἐπιγραμμισμένο), τότε γράφουμε:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v}} \quad \text{ἢ συντομότερα} \quad \boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v}} \quad (1)$$

Ἄν π.χ. 2,47, 4,89, 6,09, 5,49, 5,13, 6,13, 8,01 καί 10,27 εἶναι ὀκτώ τιμές μιᾶς μεταβλητῆς (ἀποτελέσματα, ἄς ποῦμε, 8 μετρήσεων ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους), τότε ἡ μέση τιμή τους εἶναι:

$$\frac{2,47 + 4,89 + 6,09 + 5,49 + 5,13 + 6,13 + 8,01 + 10,27}{8} = \frac{48,48}{8} = 6,06 \simeq 6.$$

Στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία μιά ἢ περισσότερες τιμές ἐμφανίζονται ὄχι μόνο μιά φορά, ὅταν δηλαδή ἡ (ἀπόλυτη) συχνότητα μιᾶς τιμῆς δέν εἶναι ἡ μονάδα, εἶναι φανερό ὅτι πρέπει νά τήν προσθέσουμε - αὐτή τήν τιμή - τόσες φορές, ὅσες ἔχει παρατηρηθεῖ· μέ ἄλλα λόγια πρέπει νά προσθέσουμε τό γινόμενο τῆς λογιζόμενης τιμῆς ἐπὶ τήν ἀντίστοιχη συχνότητα. Πῶς συγκεκριμένα: Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ

τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_k$  παρουσιάζουν αντίστοιχα συχνότητες (απόλυτες)  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ . τότε η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_1 x_1 + \Sigma_2 x_2 + \dots + \Sigma_k x_k}{v} = \frac{\Sigma_1}{v} \cdot x_1 + \frac{\Sigma_2}{v} \cdot x_2 + \dots + \frac{\Sigma_k}{v} \cdot x_k \quad (2)$$

Οι παραπάνω συντελεστές  $\frac{\Sigma_1}{v}, \frac{\Sigma_2}{v}, \dots, \frac{\Sigma_k}{v}$  του τύπου (2) δέν είναι

τίποτε άλλο από τις σχετικές συχνότητες  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ . Έτσι έχουμε και τον τύπο:

$$\bar{x} = \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \dots + \sigma_k x_k = \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i x_i \quad (3)$$

Στήν κατανομή π.χ. που περιγράψαμε στον Πίνακα 2.3.1 η μέση τιμή είναι ίση μέ:

$$\frac{2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 34 \cdot 4 + 42 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 9}{175} =$$

$$= \frac{808}{175} \approx 4,62.$$

Όταν οι τιμές της  $x$  είναι ομαδοποιημένες σε κλάσεις, τότε κάθε κλάση αντιπροσωπεύεται, όπως γνωρίζουμε, από τη μεσαία τιμή της και τότε στον τύπο (2) τά  $x_1, x_2, \dots, x_k$  παριστάνουν τά κέντρα (τίς μεσαίες τιμές) των κλάσεων ενώ,  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  είναι αντίστοιχως οι συχνότητες αυτών των κλάσεων.

Έτσι ο αριθμητικός μέσος στήν κατανομή που δίνεται από τον πίνακα 2.4.1 ισοϋται μέ:

$$\frac{5 \cdot 42,5 + 12 \cdot 47,5 + 31 \cdot 52,5 + 31 \cdot 57,5 + 16 \cdot 62,5 + 3 \cdot 67,5 + 2 \cdot 72,5}{100} =$$

$$= \frac{212,5 + 570 + 1627,5 + 1782,5 + 1000 + 202,5 + 145}{100} = 55,40.$$

Μπορούμε λοιπόν νά λέμε ότι τό **μέσο βάρος** των 100 προσώπων που αναφέρονται στον πίνακα 2.4.1 είναι περίπου 55,5 κιλά.

Αν  $\bar{x}$  ο αριθμητικός μέσος μιᾶς αριθμητικής σειράς  $x_1, x_2, \dots, x_v$ ,  $v$  τιμών, τότε τή διαφορά  $x_i - \bar{x}$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, v$ , τήν ονομάζουμε **άποκλίση** τῆς τιμῆς  $x_i$  από τόν αριθμητικό μέσο  $\bar{x}$  των θεωρούμενων τιμών. Παρατηρούμε ότι:

$$x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + \dots + x_v - \bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_v) - v\bar{x} =$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_v) - v \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v} = 0.$$

δηλαδή τό άθροισμα όλων των αποκλίσεων είναι ίσο μέ μηδέν.

### 4.3 Διάμεσος τιμή. Έπικρατούσα τιμή.

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{v-1}, x_v$  οι τιμές μιᾶς μεταβλητῆς ταξινομημένες κατ' αὐξανόμενο μέγεθος σ' έναν πληθυσμό με  $v$  στοιχεία. Ἄν  $v$  περιττός ( $v = 2\rho - 1$ ), τότε ἡ τιμή  $x_\delta = x_\rho$ , ὅπου  $\rho = \frac{v+1}{2}$ , πού εἶναι ὁ μεσαῖος ὅρος τῆς ἀκολουθίας τῶν τιμῶν, λέγεται **διάμεσος** (τιμή) αὐτῶν τῶν τιμῶν. Ἄν ὁμως  $v$  εἶναι ἄρτιος ( $v = 2\rho$ ), τότε **διάμεσος** τῶν τιμῶν λέγεται τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὁρῶν  $x_\rho$  καὶ  $x_{\rho+1}$ , δηλαδή ὁ ἀριθμός:

$$x_\delta = \frac{x_\rho + x_{\rho+1}}{2}$$

Ἄν π.χ. οἱ μεμονωμένες τιμές μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι: 7, 19, 23, 23, 34, 47, 50, 50, 63, ἡ διάμεσος τιμή εἶναι ὁ ἀριθμός 34, ἐνῶ ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν ἰδίων τιμῶν ἰσοῦται μέ:

$$\frac{7 + 19 + 23 + 23 + 34 + 47 + 50 + 50 + 63}{9} = \frac{316}{9} \simeq 35,1$$

Ἄν ὁμως οἱ τιμές πού διαθέτομε εἶναι π.χ.:

6, 16, 43, 50, 51, 52, 52, 60, 60, 68, τότε ἡ διάμεσος τιμή ἰσοῦται μέ

$$\frac{51 + 52}{2} = \frac{103}{2} = 51,5 \text{ (τὸ ἡμιάθροισμα τοῦ 5ου καὶ 6ου ὁρου), ἐνῶ ὁ ἀριθ-}$$

μητικός μέσος αὐτῶν τῶν τιμῶν ἰσοῦται μέ:

$$\frac{6 + 16 + 43 + 50 + 51 + 52 + 52 + 60 + 60 + 68}{10} = 45,8.$$

Παρατηροῦμε ὅτι: στό πρῶτο παραπάνω παράδειγμα ἡ διαφορὰ μεταξύ μέσου ἀριθμητικοῦ καὶ διαμέσου τιμῆς δέν εἶναι σημαντική· τὸ ἀντίθετο ὁμως συμβαίνει στό δεύτερο παράδειγμα.

Ἡ διάμεσος τιμή στό παράδειγμα 1 τῆς παραγράφου 2.2 εἶναι ἡ τιμή τῆς τάξεως  $\frac{175+1}{2} = 88$ , ἀφοῦ στήν προκείμενη περίπτωση εἶναι  $v = 175$ . Παρατηρώντας

τόν πίνακα τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος διαπιστώσαμε ὅτι ἡ διάμεσος βρίσκεται στήν 6η ὀριζόντια γραμμὴ καὶ συνεπῶς εἶναι  $x_\delta = 5$ . Παραπάνω ἔχομε βρεῖ ὅτι ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν ἰδίων τιμῶν εἶναι ἴσος μέ 4,62 (σελ. 197).

Ὁ ὑπολογισμός τῆς διαμέσου στήν περίπτωση ὁμαδοποιημένων παρατηρήσεων παρουσιάζει δυσκολίες, ἐπειδὴ δέν γνωρίζομε μέ ἀκρίβεια τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς.

**Έπικρατούσα τιμή** ὀνομάζομε ἐκείνη τήν τιμή, ἀνάμεσα σ' ὅλες τίς ἐμφανιζόμενες τιμές τῆς μεταβλητῆς μας, πού παρουσιάζει τὴ μεγαλύτερη συχνότητα.

Στό παράδειγμα 1 (παράγρ. 2.2) ἐπικρατούσα τιμή εἶναι ἡ  $x_e = 5$ , διότι αὐτὴ ἔχει τὴ μεγαλύτερη συχνότητα ἴση μέ  $\Sigma_6 = 42$ . Παρατηροῦμε ὅτι στό ἀναφερόμε-

νο παράδειγμα ή διάμεσος τιμή  $x_δ$  και ή έπικρατούσα τιμή  $x_ε$  είναι ίσες ( $x_δ = x_ε = 5$ ).

**Παρατήρηση:** Από τις τρεις παραπάνω κεντρικές τιμές (άριθμητικός μέσος, διάμεσος, έπικρατούσα τιμή) εκείνη που εκφράζεται από έναν καθορισμένο και εύκολα προσδιοριζόμενο αριθμό είναι ο **άριθμητικός μέσος**. Γι' αυτό τό λόγο ή **μέση τιμή** είναι εκείνη που πιο πολύ χρησιμοποιείται στη στατιστική πράξη.

Τών δύο άλλων τιμών δέν είναι πάντα πολύ εύκολος ο προσδιορισμός και όχι σπάνια οι αριθμοί που τις εκφράζουν έχουν προκύψει μέ μιά προσεγγιστική διαδικασία. Πάντως σέ μερικές περιπτώσεις ή μιά ή ή άλλη (άπό τή διάμεσο και τήν έπικρατούσα τιμή) είναι προτιμητέα γιά τόν έντοπισμό του σημείου γύρω από τό όποιο βρίσκονται (κατά «πρότίμηση») οι τιμές τής μεταβλητής μας.

#### 4.4 Διακύμανση κατανομής — Τυπική απόκλιση.

“Ας ξεκινήσουμε πάλι μέ ένα παράδειγμα.

##### Παράδειγμα 5ο.

«Δύο μαθητές α και β του ίδιου Γυμνασίου και τής ίδιας τάξεως πήραν στο τέλος μιάς σχολικής χρονιάς τούς παρακάτω βαθμούς:

| ΜΑΘΗΜΑΤΑ   | Νέα Έλλ. | Άρχαία | Μαθημ. | Φυσ/μεία | Ίστορ. | Γεωγρ. | Θρησκ. | Μουσ. | Τεχν. | Γυμν. |
|------------|----------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| Μαθητής α' | 15       | 10     | 15     | 16       | 10     | 10     | 10     | 11    | 11    | 14    |
| Μαθητής β' | 12       | 11     | 7      | 12       | 12     | 13     | 15     | 10    | 10    | 20 »  |

Οι βαθμοί λοιπόν του α' (οι τιμές τής στατιστικής μεταβλητής) κατ' αύξανόμενο μέγεθος είναι:

10, 10, 10, 10, 11, 11, 14, 15, 15, 16.

Οι βαθμοί του β' είναι: (κατά αύξανόμενο μέγεθος)

7, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 20.

Ο στατιστικός μας πληθυσμός και στίς δύο περιπτώσεις είναι τό πλήθος 10 τών μαθημάτων. Στην πρώτη περίπτωση οι συχνότητες τών διαφορετικών τιμών 10, 11, 14, 15, 16 είναι αντίστοιχα 4, 2, 1, 2, 1· στη δεύτερη περίπτωση οι συχνότητες τών διαφορετικών τιμών 7, 10, 11, 12, 13, 15, 20 είναι αντίστοιχα 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1.

Η διάμεσος στην πρώτη περίπτωση είναι:

$$x_δ = \frac{11 + 11}{2} = 11$$

και στη δεύτερη είναι

$$x_δ = \frac{12 + 12}{2} = 12.$$

Η έπικρατούσα τιμή στην πρώτη περίπτωση είναι  $x_ε = 10$ , ένω στη δεύτερη είναι  $x_ε = 12$ .

Τέλος ή μέση τιμή στήν πρώτη περίπτωση είναι:

$$\frac{4.10 + 2.11 + 14 + 2.15 + 16}{10} = \frac{122}{10} = 12,2$$

καί στή δεύτερη είναι επίσης:

$$\frac{7 + 2.10 + 11 + 3.12 + 13 + 15 + 20}{10} = 12,2.$$

Αν σταθοῦμε στή διάμεσο καί στήν επικρατούσα τιμή διαπιστώνομε ὅτι στήν περίπτωση τοῦ μαθητῆ β εἶναι ἴσες καί ἔχομε τήν αἴσθηση ὅτι ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη ἐκφράζει τό πραγματικό «δυναμικό» τοῦ μαθητῆ β. Στήν πρώτη περίπτωση (τοῦ μαθητῆ α)· οἱ δύο αὐτές τιμές παρουσιάζουν μικρή διαφορά (11 — 10), ἀλλά ἀμέσως αἰσθανόμαστε ὅτι καί ἡ μεγαλύτερη ἀπό τίς δύο τιμές ἀδικεῖ τό μαθητή α, πολύ περισσότερο μάλιστα πού τόν ἐμφανίζει πιο ἀδύνατο ἀπό τόν β, μολονότι ἄλλη ἐντύπωση παρέχει ἡ μελέτη ὅλης τῆς κλίμακας τῶν βαθμῶν.

Φαίνεται λοιπόν ὅτι πιο κοντά στήν πραγματικότητα εἶναι ὁ ἀριθμητικός μέσος (ὁ μέσος ὁρος) τῶν βαθμῶν πού εἶναι ὁ ἴδιος καί γιά τούς δύο μαθητές. Πράγματι αὕτη ἡ κεντρική τιμή χαρακτηρίζει «δικαιότερα» - στήν προκείμενη περίπτωση - τό μέγεθος τῶν δυνατοτήτων τῶν δύο μαθητῶν καί αὕτη ἡ χαρακτηριστική τιμή χρησιμοποιεῖται, ὅπως ξέρομε, στή σχολική πράξη.

Θά μπορούσαμε λοιπόν νά κλείσωμε ἐδῶ τό ζήτημα ἂν δέν εἶχαμε νά κάνομε δύο σημαντικές παρατηρήσεις πού φαίνονται νά ἀνατρέπουν τίς προηγούμενες ἐκτιμήσεις μας.

Πρῶτον, οἱ βαθμοί τοῦ πρώτου μαθητῆ κατανέμονται ἀπό 10, πού εἶναι ὁ μικρότερος, μέχρι 16 πού εἶναι ὁ μέγιστος· παρουσιάζουν - ὅπως λέμε - μικρή **διασπορά** καί ἔχουν βέβαια μικρό σχετικό εὖρος κατανομῆς (16 — 10 = 6). Ἀντίθετα ἡ διασπορά τῶν βαθμῶν τοῦ δεύτερου, ἀπό 7 μέχρι 20, εἶναι σημαντικά μεγαλύτερη ἀπό ἐκείνη τοῦ πρώτου, ὅπως ἐπίσης μεγάλο εἶναι τό εὖρος 13 = 20 — 7 τῆς μεταβολῆς. Οἱ διαπιστώσεις αὐτές, μαζί μέ τό γεγονός ὅτι ὁ μαθητής β παρουσιάζει ἔντονη ἀδυναμία σ' ἓνα ἀπό τά σημαντικότερα μαθήματα, χρωματίζουν τώρα ἐντελῶς διαφορετικά τή συνεκτίμηση τῶν ἱκανοτήτων τῶν δύο μαθητῶν.

Ἡ δεύτερη παρατήρηση εἶναι τά ἐντελῶς διαφορετικά ἀποτελέσματα γιά τούς δύο μαθητές, μολονότι στό τέλος τῆς σχολικῆς χρονιάς εἶχαν ἐπιτύχει τόν ἴδιο μέσο ὅρο. Ὁ πρῶτος, ὡς γνωστόν, προάγεται, ἐνῶ ὁ δεύτερος μένει ἀνεξεταστέος στά Μαθηματικά.

Βλέπομε λοιπόν ὅτι μόνες οἱ χαρακτηριστικές τιμές δέν εἶναι πάντοτε ἐπαρκεῖς γιά τήν ἀξιολόγηση μιᾶς κατανομῆς. Γι' αὐτό τό λόγο ἀναζητοῦμε καί προσδιορίζομε ἓνα μέγεθος, τό ὁποῖο δηλώνει τό «βαθμό» ἀπομακρύνσεως (ἢ συγκεντρώσεως) τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἀπό τή μέση τιμή της ἢ γενικότερα ἀπό μιά χαρακτηριστική τιμή.

Τό πλάτος τῆς κατανομῆς δέν εἶναι κατάλληλο γιά νά δώσει τήν εἰκόνα τῆς διασποράς, διότι ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς ἀκραῖες τιμές καί μπορεῖ νά ὀδηγήσει σέ σφαλές ἐντυπώσεις.

Ἀς πάρομε, χρησιμοποιώντας τό παραπάνω παράδειγμα 5, ὅλες τίς ἀποκλίσεις

τῶν μεμονωμένων τιμῶν ἀπὸ τῆ μέση τιμῆ. Στὴν περίπτωση τοῦ πρώτου π.χ. μαθητῆ ἔχομε:

$$10 - 12,2 = -2,2, \quad 10 - 12,2 = -2,2, \quad 10 - 12,2 = -2,2, \quad 10 - 12,2 = -2,2, \\ 11 - 12,2 = -1,2, \quad 11 - 12,2 = -1,2, \quad 14 - 12,2 = 1,8, \quad 15 - 12,2 = 2,8, \\ 15 - 12,2 = 2,8, \quad 16 - 12,2 = 3,8.$$

Εἶναι ὅμως  $(-2,2) + (-2,2) + (-2,2) + (-2,2) + (-1,2) + (-1,2) + 1,8 + 2,8 + 2,8 + 3,8 = 0$ . Τό ἀποτέλεσμα αὐτό παρουσιάζεται πάντοτε· δηλαδή τό ἄ-

θροισμα  $\sum_1^v (x_i - \bar{x})$  ὄλων τῶν ἀποκλίσεων εἶναι πάντοτε μηδέν. Ἐτσι ἡ συνολική

διασπορά δέν μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μέ τήν ἀθροιστική συνεκτίμηση τῶν ἀποκλίσεων. Κάπως ἔτσι φτάνομε στήν ἰδέα νά χρησιμοποιήσουμε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων. Νά πάρομε δηλαδή - προκειμένου γιά τό παραπάνω παράδειγμα - τό ἄθροισμα:

$$(-2,2)^2 + (-2,2)^2 + (-2,2)^2 + (-2,2)^2 + (-1,2)^2 + (-1,2)^2 + (1,8)^2 + (2,8)^2 + (2,8)^2 + (3,8)^2 = 55,60. \quad \text{Τόν ἀριθμό αὐτό τόν διαιροῦμε μέ τό πλήθος τῶν μεμονωμένων τιμῶν, πού εἶναι τό ἴδιο μέ τό πλήθος τῶν προσθετέων (τῶν μεμονωμένων περιπτώσεων) τοῦ παραπάνω ἀθροίσματος, καί παίρνομε} \quad \frac{55,60}{10} = 5,56.$$

Ὁ τελευταῖος ἀριθμός (ὁ 5,56) εἶναι αἰσθητά διάφορος ἀπό τίς πραγματικές ἀποκλίσεις, ἀλλά καί ἔχει ἄλλη διάσταση, μιά καί προέρχεται ἀκριβῶς ἀπό τά τετράγωνα τῶν ἀρχικῶν τιμῶν. Παίρνομε λοιπόν στή θέση τοῦ τήν τετραγωνική του ρίζα πού στό παράδειγμά μας εἶναι  $\sqrt{5,56} \approx 2,36$ .

Ὁ ἀριθμητικός μέσος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων ὄλων τῶν μεμονωμένων ἀποκλίσεων, δηλαδή τό πηλίκο τοῦ ἀθροίσματος  $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2$  διὰ τοῦ πλήθους  $v$  τοῦ πληθυσμοῦ, ὀνομάζεται **διακύμανση κατανομῆς ἢ μέση τετραγωνική ἀπόκλιση** καί ἡ θετική τετραγωνική της ρίζα λέγεται **τυπική ἀπόκλιση**· ἂν αὕτη τήν παραστήσουμε μέ  $\alpha$ , ἔχομε τοὺς τύπους:

$$\alpha^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{v} \quad (1\text{I}), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{v}} \quad (1\text{II})$$

ὅπου  $i = 1, 2, \dots, v$

Ἄς ὑπολογίσουμε ἀκόμα τήν τυπική ἀπόκλιση καί στή δεύτερη περίπτωση τοῦ παραδείγματος 5.

Ἐχομε:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = (7 - 12,2)^2 + 2(10 - 12,2)^2 + (11 - 12,2)^2 + 3(12 - 12,2)^2 + (13 - 12,2)^2 + (15 - 12,2)^2 + (20 - 12,2)^2 = (-5,2)^2 + 2(-2,2)^2 + (-1,2)^2 + 3(-0,2)^2 + (0,8)^2 + (2,8)^2 + (7,8)^2 = 107,6.$$

$$\alpha^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{107,6}{10} = 10,76 \quad \text{καί}$$

$$\text{τελικά } \alpha = \sqrt{10,76} \approx 3,28.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ἡ διασπορά τῶν βαθμῶν τοῦ δεύτερου μαθητῆ, ἀπό τήν κοινή καί γιά τοὺς δύο μέση τιμή (12,2), εἶναι ἐντονότερη ἀπὸ τῆ διασπορά

τῶν βαθμῶν τοῦ πρώτου. Αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ μέσος ὁρος 12,2 ἐκφράζει πιστότερα τήν πραγματική δυναμικότητα καί ἀξία τοῦ πρώτου μαθητῆ, διότι οἱ βαθμοί του (μικρότεροι ἢ μεγαλύτεροι τοῦ 12,2) εἶναι πιό κοντά σ' αὐτόν τό μέσο ὁρο ἀπό ὅ,τι συμβαίνει μέ τούς βαθμούς τοῦ δεύτερου μαθητῆ. Ποιά εἶναι λοιπόν ἡ σημασία τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως; **Ἡ μέση τιμή  $\bar{x}$  καί ἡ τυπική ἀπόκλιση** μᾶς δίνουν τή δυνατότητα νά ἀντιληφθοῦμε - αὐτό πλέον εἶναι φανερό - τήν τάση καί τή φυσιογνωμία κατανομῆς τῶν συχνότητων, ὅταν μάλιστα ἡ διασπορά τῶν στοιχείων γύρω ἀπό τόν ἀριθμητικό μέσο ἐμφανίζεται μέ μιά συμμετρικότητα. Εἰδικότερα, ὅταν ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι μικρή, τότε τά στοιχεῖα τείνουν νά **συμπυκνωθοῦν** γύρω ἀπό τή μέση τιμή, ἐνῶ ὅταν αὐτή εἶναι μεγάλη, τά στοιχεῖα τείνουν νά **ἀπομακρυνθοῦν** ἀπό τήν περιοχή τῆς μέσης τιμῆς.

$$\begin{aligned}\text{Ἐπειδὴ: } \sum (x_i - \bar{x})^2 &= (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2 - 2\bar{x} (x_1 + x_2 + \dots + x_v) + v \cdot \bar{x}^2 = \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) - 2\bar{x} \cdot v\bar{x} + v\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - v\bar{x}^2,\end{aligned}$$

οἱ τύποι 1i καί 1ii γίνονται ἀντίστοιχα:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{v} - \bar{x}^2 \quad (2i), \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{v} - \bar{x}^2} \quad (2ii)$$

**Στὴν περίπτωση μιᾶς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς**, γιά νά ὑπολογίσουμε τίς ἀποκλίσεις, χρησιμοποιοῦμε τίς μεσαῖες τιμές τῶν κλάσεων.

**Γιά ἐφαρμογή** θά ὑπολογίσουμε ἀκόμα καί τήν τυπική ἀπόκλιση τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς πού μᾶς δίνει ὁ Πίνακας 2.4.1.

Βρίσκομε πρῶτα τόν ἀριθμητικό μέσο  $\bar{x} = 58,90$  καί ἀκολούθως κατασκευάζομε τόν πίνακα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4.1.**

| Μέσες τιμές κλάσεων | Ἀπόλυτη συχνότητα | $x_i^2$<br>i ἀπὸ 1 ἕως 7 | $\sum x_i$                     |
|---------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 42,5                | 5                 | $42,5^2 = 1806,25$       | $5 \cdot 1806,25 = 9031,25$    |
| 47,5                | 12                | $47,5^2 = 2256,25$       | $12 \cdot 2256,25 = 27075$     |
| 52,5                | 31                | $52,5^2 = 2756,25$       | $31 \cdot 2756,25 = 85443,75$  |
| 57,5                | 31                | $57,5^2 = 3306,25$       | $31 \cdot 3306,25 = 102493,75$ |
| 62,5                | 16                | $62,5^2 = 3906,25$       | $16 \cdot 3906,25 = 62500$     |
| 67,5                | 3                 | $67,5^2 = 4556,25$       | $3 \cdot 4556,25 = 13668,75$   |
| 72,5                | 2                 | $72,5^2 = 5256,25$       | $2 \cdot 5256,25 = 10512,5$    |
| Ἀθροίσματα          | 100               |                          | 310725                         |

Τό ἄθροισμα  $\sum x_i$  εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν μεμονωμένων καί ἐπαναλαμβανομένων κατὰ τήν ἀντίστοιχη συχνότητα τιμῶν, ἐνῶ ὁ στατιστικός πληθυσμός εἶναι  $v = \sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_k$  · ἐδῶ (στοῦ παράδειγμα) ἴση μέ 100. Ἔτσι σύμφωνα μέ τόν τύπο (2ii) παίρνομε:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_j x_{ij}^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{310725}{100} - (55,40)^2} =$$

$$= \sqrt{3107,25 - 3069,16} = \sqrt{38,09} \approx 6,17.$$

**Σημείωση:** Η τυπική απόκλιση, πού είναι τό μέτρο τής διαφοράς, εκφράζεται μέ τίς αρχικές μονάδες μετρήσεως τών στοιχείων.

### Άσκήσεις.

1. Μιά βιβλιοθήκη περιέχει συνολικά 1024 τόμους βιβλίων. 352 από αυτά είναι λογοτεχνικά· 127 έγκυκλοπαιδικά· 45 Ιστορικά καί τά υπόλοιπα μαθηματικά. Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομής τών συχνοτήτων καί νά σχεδιάσετε τό ραβδόγραμμα τής έκατοστιαίας συχνότητας.

2. Στήν πρώτη τάξη ενός Λυκείου φοιτούν 38 παιδιά. Τό ύψος αύτών τών μαθητών κυμαίνεται από 155 cm έως 185 cm. 9 μαθητές έχουν ύψος από [155, 160) cm· 14 παιδιά έχουν ύψος από [160, 165) cm· 10 παιδιά έχουν ύψος από [165, 170)· 4 μαθητές έχουν ύψος από [170, 175) καί ένας μαθητής έχει ύψος 183 cm.

Νά γίνουν: ό πίνακας κατανομής συχνοτήτων, τό Ιστόγραμμα καί τό πολύγωνο τών έκατοστιαίων συχνοτήτων καί νά βρεθεί ό αριθμητικός μέσος τών ύψών.

3. Γιά τ' αποτελέσματα τών απολυτηρίων εξετάσεων τής Γ' Λυκείου ενός σχολείου έχομε τίς πληροφορίες πού περιέχει ό παρακείμενος πίνακας. Άφού συμπληρώσετε μέ τούς κατάλληλους αριθμούς τά κενά πλαίσια του πίνακα νά κατασκευάσετε τό ραβδόγραμμα καί τό κυκλικό διάγραμμα τής κατανομής τών συχνοτήτων.

| Άποτελέσματα | Μαθητές | %    |
|--------------|---------|------|
| Άριστα       | 3       | ---- |
| Λίαν καλώς   | 12      | ---- |
| Καλώς        | 12      | ---- |
| Σχεδόν καλώς | ----    | 25   |
| Άθροισμα     | 36      | ---- |

4. Σ' ένα Γυμνάσιο υπηρετούν 6 φιλόλογοι, 3 μαθηματικοί, 2 φυσικοί, 1 χημικός, 1 φυσιολγνώστης, 1 γυμναστής, 1 Θεολόγος, 2 ξένων γλωσσών, 1 μουσικός καί 1 τών τεχνικών. Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα συχνοτήτων του διδακτικού προσωπικού του Γυμνασίου καί ένα κατάλληλο (κατά τήν κρίση σας) διάγραμμα.

5. Μετρήσαμε τή διάρκεια ζωής (σέ ώρες) 44 ηλεκτρονικών λαμπτήρων καί βρήκαμε τά παρακάτω αποτελέσματα:

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|
| 1045 | 639  | 982  | 791  | 953  | 912  | 701  | 888  | 1150 | 800 | 653  |
| 1065 | 1018 | 1080 | 1001 | 1078 | 1111 | 802  | 913  | 1033 | 900 | 783  |
| 1073 | 951  | 732  | 999  | 897  | 1070 | 1053 | 739  | 955  | 620 | 893  |
| 1019 | 812  | 845  | 698  | 944  | 673  | 1004 | 1025 | 756  | 730 | 1033 |

Νά όμαδοποιήσετε τίς παραπάνω παρατηρήσεις σέ κλάσεις μέ πλάτος 100 ώρων· νά κατασκευάσετε τόν πίνακα συχνοτήτων καί νά σχεδιάσετε τό Ιστόγραμμα καί τό πολύγωνο συχνότητας.

6. Κατά τό 1964 ή παραγωγή τών κυριότερων κτηνοτροφικών προϊόντων τής χώρας μας ήταν: Κρέας 214 χιλιάδες τόνοι· Γάλα 1077 χιλ. τόνοι· Αύγά 78 χιλ. τόνοι καί Τυρί 101,2 χιλ. τόνοι. Νά κατασκευάσετε τό σχετικό ραβδόγραμμα.



7. Σ' ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά οι 39 μαθητές μιάς τάξεως πήραν τούς παρακάτω βαθμούς:

13, 9, 14, 16, 11, 10, 10, 12, 17, 16, 12, 13, 15  
 19, 12, 16, 8, 18, 13, 14, 15, 11, 10, 9, 18, 20  
 9, 15, 15, 14, 13, 13, 14, 13, 12, 16, 12, 17, 13

Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομής συχνοτήτων (απόλυτης, σχετικής, εκατοστιαίας, άθροιστικής)· νά σχεδιάσετε τό διάγραμμα τής εκατοστιαίας καί τής άθροιστικής συχνότητας· νά βρείτε τόν αριθμητικό μέσο, τή διάμεσο τιμή καί τήν έπικρατούσα τιμή.

8. Οι ξένοι τουρίστες πού ήλθαν στή χώρα μας κατά τά έτη 1959 έως καί 1965 ήταν σέ χιλιάδες άτομα:

| Έτος      | 1959  | 1960  | 1961  | 1962  | 1963  | 1964  | 1965  |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Τουρίστες | 340,0 | 399,4 | 494,2 | 597,9 | 741,2 | 757,5 | 971,1 |

Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομής τών συχνοτήτων, τό πολύγωνο συχνότητας, τό πολύγωνο άθροιστικής συχνότητας καί τό σχετικό ραβδόγραμμα. Νά βρείτε ακόμα τόν αριθμητικό μέσο καί τή διάμεσο τιμή.

9. Οι 36 υπάλληλοι ενός καταστήματος έχουν τīs παρακάτω ηλικίες:

16, 18, 18, 20, 20, 20, 24, 23, 21, 24, 28, 29,  
 30, 31, 31, 30, 29, 31, 35, 35, 33, 36, 40, 38,  
 41, 42, 41, 22, 25, 27, 39, 38, 59, 27, 34, 23

Νά ομαδοποιήσετε τīs παραπάνω τιμές σέ κλάσεις πλάτους 5 καί νά κατασκευάσετε τό αντίστοιχο Ιστόγραμμα.

10. Από τīs 24 οικογένειες μιάς πολυκατοικίας 2 δέν έχουν παιδιά· 4 έχουν από 1 παιδί· 10 έχουν από 2 παιδιά· 7 έχουν από 3 παιδιά καί 1 έχει 5 παιδιά. Νά βρείτε τήν τυπική απόκλιση.

11. Η μέση τιμή 7 διαδοχικών περιπτώσεων άκεραιών είναι 63. Αφού βρείτε αυτούς τούς άκεραίους νά προσδιορίσετε ακολούθως τή διάμεσο καί τήν τυπική απόκλιση.

12. Οι ελάχιστες ημερήσιες θερμοκρασίες πού παρατηρήθηκαν στήν Άττική σέ 10 διαδοχικές ήμέρες ήταν: 16, 17, 18, 22, 21, 17, 24, 18, 21, 18. Νά προσδιορίσετε τή μέση τιμή, τή διάμεσο, τήν έπικρατούσα τιμή καί τήν τυπική απόκλιση τών παραπάνω θερμοκρασιών.

13. Τό 1966 ό χερσαίος έλλαδικός χώρος παρουσίαζε τήν παρακάτω κατανομή: Γεωργικές καλλιέργειες 30%· Δασικές εκτάσεις 20,3%· Βοσκότοποι 38,2%· Οίκισμοί 3,5%· Αμμώδεις εκτάσεις 4,8%. Εκτάσεις καλυπτόμενες από νερά 3,2%.

Νά κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα κατανομής.

14. Οι υπάλληλοι μιάς δημόσιας υπηρεσίας κατανέμονται ανάλογα μέ τά έτη υπηρεσίας ως εξής:

| Έτη υπηρεσίας     | 1 - 5 | 5 - 10 | 10 - 15 | 15 - 20 | 20 - 25 | 25 - 30 | 30 - 35 |
|-------------------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Αριθμός υπαλλήλων | 23    | 45     | 38      | 36      | 36      | 20      | 8       |

Νά κατασκευάσετε τόν πίνακα κατανομής συχνοτήτων (απόλυτης, σχετικής, άθροιστικής) καί νά βρείτε τīs χαρακτηριστικές τιμές  $\bar{x}$ ,  $x_d$ ,  $x_e$  καί τήν τυπική απόκλιση.

| Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων |         |         |         |         |         |         |         |        |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| Μοίρες                            | Ήμιτονο |         |         |         |         |         |         |        |
|                                   | 0°      | 10°     | 20°     | 30°     | 40°     | 50°     | 60°     |        |
| 0                                 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01454 | 0,01745 | 89     |
| 1                                 | 0,01745 | 0,02036 | 0,02327 | 0,02618 | 0,02908 | 0,03199 | 0,03490 | 88     |
| 2                                 | 0,03490 | 0,03781 | 0,04071 | 0,04362 | 0,04653 | 0,04943 | 0,05234 | 87     |
| 3                                 | 0,05234 | 0,05524 | 0,05814 | 0,06105 | 0,06395 | 0,06685 | 0,06976 | 86     |
| 4                                 | 0,06976 | 0,07266 | 0,07556 | 0,07846 | 0,08136 | 0,08426 | 0,08716 | 85     |
| 5                                 | 0,08716 | 0,09005 | 0,09295 | 0,09585 | 0,09874 | 0,10164 | 0,10453 | 84     |
| 6                                 | 0,10453 | 0,10742 | 0,11031 | 0,11320 | 0,11609 | 0,11898 | 0,12187 | 83     |
| 7                                 | 0,12187 | 0,12476 | 0,12764 | 0,13053 | 0,13341 | 0,13629 | 0,13917 | 82     |
| 8                                 | 0,13917 | 0,14205 | 0,14493 | 0,14781 | 0,15069 | 0,15356 | 0,15643 | 81     |
| 9                                 | 0,15643 | 0,15931 | 0,16218 | 0,16505 | 0,16792 | 0,17078 | 0,17365 | 80     |
| 10                                | 0,17365 | 0,17651 | 0,17937 | 0,18224 | 0,18509 | 0,18795 | 0,19081 | 79     |
| 11                                | 0,19081 | 0,19366 | 0,19652 | 0,19937 | 0,20222 | 0,20507 | 0,20791 | 78     |
| 12                                | 0,20791 | 0,21076 | 0,21360 | 0,21644 | 0,21928 | 0,22212 | 0,22495 | 77     |
| 13                                | 0,22495 | 0,22778 | 0,23062 | 0,23345 | 0,23627 | 0,23910 | 0,24192 | 76     |
| 14                                | 0,24192 | 0,24474 | 0,24756 | 0,25038 | 0,25320 | 0,25601 | 0,25882 | 75     |
| 15                                | 0,25882 | 0,26163 | 0,26443 | 0,26724 | 0,27004 | 0,27284 | 0,27564 | 74     |
| 16                                | 0,27564 | 0,27843 | 0,28123 | 0,28402 | 0,28680 | 0,28959 | 0,29237 | 73     |
| 17                                | 0,29237 | 0,29515 | 0,29793 | 0,30071 | 0,30348 | 0,30625 | 0,30902 | 72     |
| 18                                | 0,30902 | 0,31178 | 0,31454 | 0,31730 | 0,32006 | 0,32282 | 0,32557 | 71     |
| 19                                | 0,32557 | 0,32832 | 0,33106 | 0,33381 | 0,33655 | 0,33929 | 0,34202 | 70     |
| 20                                | 0,34202 | 0,34475 | 0,34748 | 0,35021 | 0,35293 | 0,35565 | 0,35837 | 69     |
| 21                                | 0,35837 | 0,36108 | 0,36379 | 0,36650 | 0,36921 | 0,37191 | 0,37461 | 68     |
| 22                                | 0,37461 | 0,37730 | 0,37999 | 0,38268 | 0,38537 | 0,38805 | 0,39073 | 67     |
| 23                                | 0,39073 | 0,39341 | 0,39608 | 0,39875 | 0,40142 | 0,40408 | 0,40674 | 66     |
| 24                                | 0,40674 | 0,40939 | 0,41204 | 0,41469 | 0,41734 | 0,41998 | 0,42262 | 65     |
| 25                                | 0,42262 | 0,42525 | 0,42788 | 0,43051 | 0,43313 | 0,43575 | 0,43837 | 64     |
| 26                                | 0,43837 | 0,44098 | 0,44359 | 0,44620 | 0,44880 | 0,45140 | 0,45399 | 63     |
| 27                                | 0,45399 | 0,45658 | 0,45917 | 0,46175 | 0,46433 | 0,46690 | 0,46947 | 62     |
| 28                                | 0,46947 | 0,47204 | 0,47460 | 0,47716 | 0,47971 | 0,48226 | 0,48481 | 61     |
| 29                                | 0,48481 | 0,48735 | 0,48989 | 0,49242 | 0,49495 | 0,49748 | 0,50000 | 60     |
| 30                                | 0,50000 | 0,50252 | 0,50503 | 0,50754 | 0,51004 | 0,51254 | 0,51504 | 59     |
| 31                                | 0,51504 | 0,51753 | 0,52002 | 0,52250 | 0,52498 | 0,52745 | 0,52992 | 58     |
| 32                                | 0,52992 | 0,53238 | 0,53484 | 0,53730 | 0,53975 | 0,54220 | 0,54464 | 57     |
| 33                                | 0,54464 | 0,54708 | 0,54951 | 0,55194 | 0,55436 | 0,55678 | 0,55919 | 56     |
| 34                                | 0,55919 | 0,56160 | 0,56401 | 0,56641 | 0,56880 | 0,57119 | 0,57358 | 55     |
| 35                                | 0,57358 | 0,57596 | 0,57833 | 0,58070 | 0,58307 | 0,58543 | 0,58779 | 54     |
| 36                                | 0,58779 | 0,59014 | 0,59248 | 0,59482 | 0,59716 | 0,59949 | 0,60182 | 53     |
| 37                                | 0,60182 | 0,60414 | 0,60645 | 0,60876 | 0,61107 | 0,61337 | 0,61566 | 52     |
| 38                                | 0,61566 | 0,61795 | 0,62024 | 0,62251 | 0,62479 | 0,62706 | 0,62932 | 51     |
| 39                                | 0,62932 | 0,63158 | 0,63383 | 0,63608 | 0,63832 | 0,64056 | 0,64279 | 50     |
| 40                                | 0,64279 | 0,64501 | 0,64723 | 0,64945 | 0,65166 | 0,65386 | 0,65606 | 49     |
| 41                                | 0,65606 | 0,65825 | 0,66044 | 0,66262 | 0,66480 | 0,66697 | 0,66913 | 48     |
| 42                                | 0,66913 | 0,67129 | 0,67344 | 0,67559 | 0,67773 | 0,67987 | 0,68200 | 47     |
| 43                                | 0,68200 | 0,68412 | 0,68624 | 0,68835 | 0,69046 | 0,69256 | 0,69466 | 46     |
| 44                                | 0,69466 | 0,69675 | 0,69883 | 0,70091 | 0,70298 | 0,70505 | 0,70711 | 45     |
| Συνημίτονο                        |         |         |         |         |         |         |         |        |
|                                   | 60°     | 50°     | 40°     | 30°     | 20°     | 10°     | 0°      | Μοίρες |

| Τιμές τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων |            |         |         |         |         |         |         |        |
|-----------------------------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| Μοίρες                            | Συνημίτονο |         |         |         |         |         |         |        |
|                                   | 0'         | 10'     | 20'     | 30'     | 40'     | 50'     | 60'     |        |
| 0                                 | 1,00000    | 1,00000 | 0,99998 | 0,99996 | 0,99993 | 0,99989 | 0,99985 | 89     |
| 1                                 | 0,99985    | 0,99979 | 0,99973 | 0,99966 | 0,99958 | 0,99949 | 0,99939 | 88     |
| 2                                 | 0,99939    | 0,99929 | 0,99917 | 0,99905 | 0,99892 | 0,99878 | 0,99863 | 87     |
| 3                                 | 0,99863    | 0,99847 | 0,99831 | 0,99813 | 0,99795 | 0,99776 | 0,99756 | 86     |
| 4                                 | 0,99756    | 0,99736 | 0,99714 | 0,99692 | 0,99668 | 0,99644 | 0,99619 | 85     |
| 5                                 | 0,99619    | 0,99594 | 0,99567 | 0,99540 | 0,99511 | 0,99482 | 0,99452 | 84     |
| 6                                 | 0,99452    | 0,99421 | 0,99390 | 0,99357 | 0,99324 | 0,99290 | 0,99255 | 83     |
| 7                                 | 0,99255    | 0,99219 | 0,99182 | 0,99144 | 0,99106 | 0,99067 | 0,99027 | 82     |
| 8                                 | 0,99027    | 0,98986 | 0,98944 | 0,98902 | 0,98858 | 0,98814 | 0,98769 | 81     |
| 9                                 | 0,98769    | 0,98723 | 0,98676 | 0,98629 | 0,98580 | 0,98531 | 0,98481 | 80     |
| 10                                | 0,98481    | 0,98430 | 0,98378 | 0,98325 | 0,98272 | 0,98218 | 0,98163 | 79     |
| 11                                | 0,98163    | 0,98107 | 0,98050 | 0,97992 | 0,97934 | 0,97875 | 0,97815 | 78     |
| 12                                | 0,97815    | 0,97754 | 0,97692 | 0,97630 | 0,97566 | 0,97502 | 0,97437 | 77     |
| 13                                | 0,97437    | 0,97371 | 0,97304 | 0,97237 | 0,97169 | 0,97100 | 0,97030 | 76     |
| 14                                | 0,97030    | 0,96959 | 0,96887 | 0,96815 | 0,96742 | 0,96667 | 0,96593 | 75     |
| 15                                | 0,96593    | 0,96517 | 0,96440 | 0,96363 | 0,96285 | 0,96206 | 0,96126 | 74     |
| 16                                | 0,96126    | 0,96046 | 0,95964 | 0,95882 | 0,95799 | 0,95715 | 0,95630 | 73     |
| 17                                | 0,95630    | 0,95545 | 0,95459 | 0,95372 | 0,95284 | 0,95195 | 0,95106 | 72     |
| 18                                | 0,95106    | 0,95015 | 0,94924 | 0,94832 | 0,94740 | 0,94646 | 0,94552 | 71     |
| 19                                | 0,94552    | 0,94457 | 0,94361 | 0,94264 | 0,94167 | 0,94068 | 0,93969 | 70     |
| 20                                | 0,93969    | 0,93869 | 0,93769 | 0,93667 | 0,93565 | 0,93462 | 0,93358 | 69     |
| 21                                | 0,93358    | 0,93253 | 0,93148 | 0,93042 | 0,92935 | 0,92827 | 0,92718 | 68     |
| 22                                | 0,92718    | 0,92609 | 0,92499 | 0,92388 | 0,92276 | 0,92164 | 0,92050 | 67     |
| 23                                | 0,92050    | 0,91936 | 0,91822 | 0,91706 | 0,91590 | 0,91472 | 0,91355 | 66     |
| 24                                | 0,91355    | 0,91236 | 0,91116 | 0,90996 | 0,90875 | 0,90753 | 0,90631 | 65     |
| 25                                | 0,90631    | 0,90507 | 0,90383 | 0,90259 | 0,90133 | 0,90007 | 0,89879 | 64     |
| 26                                | 0,89879    | 0,89752 | 0,89623 | 0,89493 | 0,89363 | 0,89232 | 0,89101 | 63     |
| 27                                | 0,89101    | 0,88968 | 0,88835 | 0,88701 | 0,88566 | 0,88431 | 0,88295 | 62     |
| 28                                | 0,88295    | 0,88158 | 0,88020 | 0,87882 | 0,87743 | 0,87603 | 0,87462 | 61     |
| 29                                | 0,87462    | 0,87321 | 0,87178 | 0,87036 | 0,86892 | 0,86748 | 0,86603 | 60     |
| 30                                | 0,86603    | 0,86457 | 0,86310 | 0,86163 | 0,86015 | 0,85866 | 0,85717 | 59     |
| 31                                | 0,85717    | 0,85567 | 0,85416 | 0,85264 | 0,85112 | 0,84959 | 0,84805 | 58     |
| 32                                | 0,84805    | 0,84650 | 0,84495 | 0,84339 | 0,84182 | 0,84025 | 0,83867 | 57     |
| 33                                | 0,83867    | 0,83708 | 0,83549 | 0,83389 | 0,83228 | 0,83066 | 0,82904 | 56     |
| 34                                | 0,82904    | 0,82741 | 0,82577 | 0,82413 | 0,82248 | 0,82082 | 0,81915 | 55     |
| 35                                | 0,81915    | 0,81748 | 0,81580 | 0,81412 | 0,81242 | 0,81072 | 0,80902 | 54     |
| 36                                | 0,80902    | 0,80730 | 0,80558 | 0,80386 | 0,80212 | 0,80038 | 0,79864 | 53     |
| 37                                | 0,79864    | 0,79688 | 0,79512 | 0,79335 | 0,79158 | 0,78980 | 0,78801 | 52     |
| 38                                | 0,78801    | 0,78622 | 0,78442 | 0,78261 | 0,78079 | 0,77897 | 0,77715 | 51     |
| 39                                | 0,77715    | 0,77531 | 0,77347 | 0,77162 | 0,76977 | 0,76791 | 0,76604 | 50     |
| 40                                | 0,76604    | 0,76417 | 0,76229 | 0,76041 | 0,75851 | 0,75661 | 0,75471 | 49     |
| 41                                | 0,75471    | 0,75280 | 0,75088 | 0,74896 | 0,74703 | 0,74509 | 0,74314 | 48     |
| 42                                | 0,74314    | 0,74120 | 0,73924 | 0,73728 | 0,73531 | 0,73333 | 0,73135 | 47     |
| 43                                | 0,73135    | 0,72937 | 0,72737 | 0,72537 | 0,72337 | 0,72136 | 0,71934 | 46     |
| 44                                | 0,71934    | 0,71732 | 0,71529 | 0,71325 | 0,71121 | 0,70916 | 0,70711 | 45     |
|                                   | 60'        | 50'     | 40'     | 30'     | 20'     | 10'     | 0'      | Μοίρες |
| Ήμιστονο                          |            |         |         |         |         |         |         |        |

| Τιμές τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων |         |         |         |         |         |         |         |        |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| Εφαπτομένη                        |         |         |         |         |         |         |         |        |
| Μοίρες                            | 0'      | 10'     | 20'     | 30'     | 40'     | 50'     | 60'     |        |
| 0                                 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01455 | 0,01746 | 89     |
| 1                                 | 0,01746 | 0,02036 | 0,02328 | 0,02619 | 0,02910 | 0,03201 | 0,03492 | 88     |
| 2                                 | 0,03492 | 0,03783 | 0,04075 | 0,04366 | 0,04658 | 0,04949 | 0,05241 | 87     |
| 3                                 | 0,05241 | 0,05533 | 0,05824 | 0,06116 | 0,06408 | 0,06700 | 0,06993 | 86     |
| 4                                 | 0,06993 | 0,07285 | 0,07578 | 0,07870 | 0,08163 | 0,08456 | 0,08749 | 85     |
| 5                                 | 0,08749 | 0,09042 | 0,09335 | 0,09629 | 0,09923 | 0,10216 | 0,10510 | 84     |
| 6                                 | 0,10510 | 0,10805 | 0,11099 | 0,11394 | 0,11688 | 0,11983 | 0,12278 | 83     |
| 7                                 | 0,12278 | 0,12574 | 0,12869 | 0,13165 | 0,13461 | 0,13758 | 0,14054 | 82     |
| 8                                 | 0,14054 | 0,14351 | 0,14648 | 0,14945 | 0,15243 | 0,15540 | 0,15838 | 81     |
| 9                                 | 0,15838 | 0,16137 | 0,16435 | 0,16734 | 0,17033 | 0,17333 | 0,17633 | 80     |
| 10                                | 0,17633 | 0,17933 | 0,18233 | 0,18534 | 0,18835 | 0,19136 | 0,19438 | 79     |
| 11                                | 0,19438 | 0,19740 | 0,20042 | 0,20345 | 0,20648 | 0,20952 | 0,21256 | 78     |
| 12                                | 0,21256 | 0,21560 | 0,21864 | 0,22169 | 0,22475 | 0,22781 | 0,23087 | 77     |
| 13                                | 0,23087 | 0,23393 | 0,23700 | 0,24008 | 0,24316 | 0,24624 | 0,24933 | 76     |
| 14                                | 0,24933 | 0,25242 | 0,25552 | 0,25862 | 0,26172 | 0,26483 | 0,26795 | 75     |
| 15                                | 0,26795 | 0,27107 | 0,27419 | 0,27732 | 0,28046 | 0,28360 | 0,28675 | 74     |
| 16                                | 0,28675 | 0,28990 | 0,29305 | 0,29621 | 0,29938 | 0,30255 | 0,30573 | 73     |
| 17                                | 0,30573 | 0,30891 | 0,31210 | 0,31530 | 0,31850 | 0,32171 | 0,32492 | 72     |
| 18                                | 0,32492 | 0,32814 | 0,33136 | 0,33460 | 0,33783 | 0,34108 | 0,34433 | 71     |
| 19                                | 0,34433 | 0,34758 | 0,35085 | 0,35412 | 0,35740 | 0,36068 | 0,36397 | 70     |
| 20                                | 0,36397 | 0,36727 | 0,37057 | 0,37388 | 0,37720 | 0,38053 | 0,38386 | 69     |
| 21                                | 0,38386 | 0,38721 | 0,39055 | 0,39391 | 0,39727 | 0,40065 | 0,40403 | 68     |
| 22                                | 0,40403 | 0,40741 | 0,41081 | 0,41421 | 0,41763 | 0,42105 | 0,42447 | 67     |
| 23                                | 0,42447 | 0,42791 | 0,43136 | 0,43481 | 0,43828 | 0,44175 | 0,44523 | 66     |
| 24                                | 0,44523 | 0,44872 | 0,45222 | 0,45573 | 0,45924 | 0,46277 | 0,46631 | 65     |
| 25                                | 0,46631 | 0,46985 | 0,47341 | 0,47698 | 0,48055 | 0,48414 | 0,48773 | 64     |
| 26                                | 0,48773 | 0,49134 | 0,49495 | 0,49858 | 0,50222 | 0,50587 | 0,50953 | 63     |
| 27                                | 0,50953 | 0,51320 | 0,51688 | 0,52057 | 0,52427 | 0,52798 | 0,53171 | 62     |
| 28                                | 0,53171 | 0,53545 | 0,53920 | 0,54296 | 0,54673 | 0,55051 | 0,55431 | 61     |
| 29                                | 0,55431 | 0,55812 | 0,56194 | 0,56577 | 0,56962 | 0,57348 | 0,57735 | 60     |
| 30                                | 0,57735 | 0,58124 | 0,58513 | 0,58905 | 0,59297 | 0,59691 | 0,60086 | 59     |
| 31                                | 0,60086 | 0,60483 | 0,60881 | 0,61280 | 0,61681 | 0,62083 | 0,62487 | 58     |
| 32                                | 0,62487 | 0,62892 | 0,63299 | 0,63707 | 0,64117 | 0,64528 | 0,64941 | 57     |
| 33                                | 0,64941 | 0,65355 | 0,65771 | 0,66189 | 0,66608 | 0,67028 | 0,67451 | 56     |
| 34                                | 0,67451 | 0,67875 | 0,68301 | 0,68728 | 0,69157 | 0,69588 | 0,70021 | 55     |
| 35                                | 0,70021 | 0,70455 | 0,70891 | 0,71329 | 0,71769 | 0,72211 | 0,72654 | 54     |
| 36                                | 0,72654 | 0,73100 | 0,73547 | 0,73996 | 0,74447 | 0,74900 | 0,75355 | 53     |
| 37                                | 0,75355 | 0,75812 | 0,76272 | 0,76733 | 0,77196 | 0,77661 | 0,78129 | 52     |
| 38                                | 0,78129 | 0,78598 | 0,79070 | 0,79544 | 0,80020 | 0,80498 | 0,80978 | 51     |
| 39                                | 0,80978 | 0,81461 | 0,81946 | 0,82434 | 0,82923 | 0,83415 | 0,83910 | 50     |
| 40                                | 0,83910 | 0,84407 | 0,84906 | 0,85408 | 0,85912 | 0,86419 | 0,86929 | 49     |
| 41                                | 0,86929 | 0,87441 | 0,87955 | 0,88473 | 0,88992 | 0,89515 | 0,90040 | 48     |
| 42                                | 0,90040 | 0,90569 | 0,91099 | 0,91633 | 0,92170 | 0,92709 | 0,93252 | 47     |
| 43                                | 0,93252 | 0,93797 | 0,94345 | 0,94896 | 0,95451 | 0,96008 | 0,96569 | 46     |
| 44                                | 0,96569 | 0,97133 | 0,97700 | 0,98270 | 0,98843 | 0,99420 | 1,00000 | 45     |
|                                   | 60'     | 50'     | 40'     | 30'     | 20'     | 10'     | 0       | Μοίρες |
| Συνεφαπτομένη                     |         |         |         |         |         |         |         |        |

| Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων |          |           |           |           |          |          |          |        |
|-----------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|--------|
| Συνεφαπτομένη                     |          |           |           |           |          |          |          |        |
| Μοίρες                            | 0°       | 10°       | 20°       | 30°       | 40°      | 50°      | 60°      |        |
| 0                                 | ∞        | 343,77371 | 171,88540 | 114,58865 | 85,93979 | 68,75009 | 57,28996 | 89     |
| 1                                 | 57,28996 | 49,10388  | 42,96408  | 38,18846  | 34,36777 | 31,24158 | 28,63625 | 88     |
| 2                                 | 28,63625 | 26,43160  | 24,54176  | 22,90377  | 21,47040 | 20,20555 | 19,08114 | 87     |
| 3                                 | 19,08114 | 18,07498  | 17,16934  | 16,34986  | 15,60478 | 14,92442 | 14,30067 | 86     |
| 4                                 | 14,30067 | 13,72674  | 13,19688  | 12,70621  | 12,25051 | 11,82617 | 11,43005 | 85     |
| 5                                 | 11,43005 | 11,05943  | 10,71191  | 10,38540  | 10,07803 | 9,78817  | 9,51436  | 84     |
| 6                                 | 9,51436  | 9,25530   | 9,00983   | 8,77689   | 8,55555  | 8,34496  | 8,14435  | 83     |
| 7                                 | 8,14435  | 7,95302   | 7,77035   | 7,59575   | 7,42871  | 7,26873  | 7,11537  | 82     |
| 8                                 | 7,11537  | 6,96823   | 6,82694   | 6,69116   | 6,56055  | 6,43484  | 6,31375  | 81     |
| 9                                 | 6,31375  | 6,19703   | 6,08444   | 5,97576   | 5,87080  | 5,76937  | 5,67128  | 80     |
| 10                                | 5,67128  | 5,57638   | 5,48451   | 5,39552   | 5,30928  | 5,22566  | 5,14455  | 79     |
| 11                                | 5,14455  | 5,06584   | 4,98940   | 4,91516   | 4,84300  | 4,77286  | 4,70463  | 78     |
| 12                                | 4,70463  | 4,63825   | 4,57363   | 4,51071   | 4,44942  | 4,38969  | 4,33148  | 77     |
| 13                                | 4,33148  | 4,27471   | 4,21933   | 4,16530   | 4,11256  | 4,06107  | 4,01078  | 76     |
| 14                                | 4,01078  | 3,96165   | 3,91364   | 3,86671   | 3,82083  | 3,77595  | 3,73205  | 75     |
| 15                                | 3,73205  | 3,68909   | 3,64705   | 3,60588   | 3,56557  | 3,52609  | 3,48741  | 74     |
| 16                                | 3,48741  | 3,44951   | 3,41236   | 3,37594   | 3,34023  | 3,30521  | 3,27085  | 73     |
| 17                                | 3,27085  | 3,23714   | 3,20406   | 3,17159   | 3,13972  | 3,10842  | 3,07768  | 72     |
| 18                                | 3,07768  | 3,04749   | 3,01783   | 2,98869   | 2,96004  | 2,93189  | 2,90421  | 71     |
| 19                                | 2,90421  | 2,87700   | 2,85023   | 2,82391   | 2,79802  | 2,77254  | 2,74748  | 70     |
| 20                                | 2,74748  | 2,72281   | 2,69853   | 2,67462   | 2,65109  | 2,62791  | 2,60509  | 69     |
| 21                                | 2,60509  | 2,58261   | 2,56046   | 2,53865   | 2,51715  | 2,49597  | 2,47509  | 68     |
| 22                                | 2,47509  | 2,45451   | 2,43422   | 2,41421   | 2,39449  | 2,37504  | 2,35585  | 67     |
| 23                                | 2,35585  | 2,33693   | 2,31826   | 2,29984   | 2,28167  | 2,26374  | 2,24604  | 66     |
| 24                                | 2,24604  | 2,22857   | 2,21132   | 2,19430   | 2,17749  | 2,16090  | 2,14451  | 65     |
| 25                                | 2,14451  | 2,12832   | 2,11233   | 2,09654   | 2,08094  | 2,06553  | 2,05030  | 64     |
| 26                                | 2,05030  | 2,03526   | 2,02039   | 2,00569   | 1,99116  | 1,97680  | 1,96261  | 63     |
| 27                                | 1,96261  | 1,94858   | 1,93470   | 1,92098   | 1,90741  | 1,89400  | 1,88073  | 62     |
| 28                                | 1,88073  | 1,86760   | 1,85462   | 1,84177   | 1,82906  | 1,81649  | 1,80405  | 61     |
| 29                                | 1,80405  | 1,79174   | 1,77955   | 1,76749   | 1,75556  | 1,74375  | 1,73205  | 60     |
| 30                                | 1,73205  | 1,72047   | 1,70901   | 1,69766   | 1,68643  | 1,67530  | 1,66428  | 59     |
| 31                                | 1,66428  | 1,65337   | 1,64256   | 1,63185   | 1,62125  | 1,61074  | 1,60033  | 58     |
| 32                                | 1,60033  | 1,59002   | 1,57981   | 1,56969   | 1,55966  | 1,54972  | 1,53987  | 57     |
| 33                                | 1,53987  | 1,53010   | 1,52043   | 1,51084   | 1,50133  | 1,49190  | 1,48256  | 56     |
| 34                                | 1,48256  | 1,47330   | 1,46411   | 1,45501   | 1,44598  | 1,43703  | 1,42815  | 55     |
| 35                                | 1,42815  | 1,41934   | 1,41061   | 1,40195   | 1,39336  | 1,38484  | 1,37638  | 54     |
| 36                                | 1,37638  | 1,36800   | 1,35968   | 1,35142   | 1,34323  | 1,33511  | 1,32704  | 53     |
| 37                                | 1,32704  | 1,31904   | 1,31110   | 1,30323   | 1,29541  | 1,28764  | 1,27994  | 52     |
| 38                                | 1,27994  | 1,27230   | 1,26471   | 1,25717   | 1,24969  | 1,24227  | 1,23490  | 51     |
| 39                                | 1,23490  | 1,22758   | 1,22031   | 1,21310   | 1,20593  | 1,19882  | 1,19175  | 50     |
| 40                                | 1,19175  | 1,18474   | 1,17777   | 1,17085   | 1,16398  | 1,15715  | 1,15037  | 49     |
| 41                                | 1,15037  | 1,14363   | 1,13694   | 1,13029   | 1,12369  | 1,11713  | 1,11061  | 48     |
| 42                                | 1,11061  | 1,10414   | 1,09770   | 1,09131   | 1,08496  | 1,07864  | 1,07237  | 47     |
| 43                                | 1,07237  | 1,06613   | 1,05994   | 1,05378   | 1,04766  | 1,04158  | 1,03553  | 46     |
| 44                                | 1,03553  | 1,02952   | 1,02355   | 1,01761   | 1,01170  | 1,00583  | 1,00000  | 45     |
|                                   | 60°      | 50°       | 40°       | 30°       | 20°      | 10°      | 0°       | Μοίρες |
| Έφαπτομένη                        |          |           |           |           |          |          |          |        |

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Τό διάνυσμα. Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο.

#### Τό διάνυσμα και ή εὐθεία στο επίπεδο

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 'Ενότητα 1: Τό νόημα και τά στοιχεῖα τοῦ διανύσματος .....                     | 1  |
| 1 - 1 'Αναγκαιότητα τοῦ διανύσματος .....                                      | 1  |
| 1 - 2 Τό ἐφαρμοστό διάνυσμα και τά στοιχεῖα τοῦ .....                          | 3  |
| 1 - 3 Τό ἐλεύθερο διάνυσμα .....                                               | 4  |
| 1 - 4 'Εφαρμογές και παραδείγματα .....                                        | 5  |
| 1 - 5 'Ασκήσεις .....                                                          | 6  |
| 'Ενότητα 2: Πράξεις μέ διανύσματα .....                                        | 6  |
| 2 - 1 'Αθροισμα και διαφορά διανυσμάτων .....                                  | 6  |
| 2 - 2 Γινόμενο διανύσματος ἐπὶ πραγματικό ἀριθμό .....                         | 9  |
| 2 - 3 'Εφαρμογές και παραδείγματα .....                                        | 10 |
| 2 - 4 'Ασκήσεις .....                                                          | 12 |
| 'Ενότητα 3: 'Η εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν και τό διάνυσμα πάνω σ' αὐτήν .. | 12 |
| 3 - 1 Προσανατολισμένη εὐθεία - ἄξονας. Τετμημένη σημείου .....                | 12 |
| 3 - 2 Τετμημένη διανύσματος παραλλήλου πρὸς ἄξονα .....                        | 14 |
| 3 - 3 Πρόταση τοῦ Chasles (Σάλ) .....                                          | 15 |
| 3 - 4 'Εφαρμογές και παραδείγματα .....                                        | 16 |
| 3 - 5 'Ασκήσεις .....                                                          | 17 |
| 'Ενότητα 4: Καρτεσιανές συντεταγμένες σημείων και διανυσμάτων στο επίπεδο .... | 18 |
| 4 - 1 Συντεταγμένες σημείου ὡς πρὸς δύο ἄξονες .....                           | 18 |
| 4 - 2 Συντεταγμένες διανυσμάτων στο επίπεδο και βασικές σχέσεις .....          | 20 |
| 4 - 3 'Εφαρμογές και παραδείγματα .....                                        | 24 |
| 4 - 4 'Ασκήσεις .....                                                          | 26 |
| 'Ενότητα 5: 'Εξίσωση εὐθείας στο επίπεδο .....                                 | 27 |
| 5 - 1 Διανυσματική και ἀναλυτική ἐξίσωση εὐθείας .....                         | 27 |
| 5 - 2 'Εφαρμογές και παραδείγματα .....                                        | 30 |
| 5 - 3 'Ασκήσεις .....                                                          | 33 |
| 'Ασκήσεις γιά ἐπανάληψη .....                                                  | 34 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Βασική μελέτη πραγματικῶν συναρτήσεων. 'Εξισώσεις κωνικῶν τομῶν.

#### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

|                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 'Ενότητα 6: Γενικά γιά συναρτήσεις. Πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς.<br>Μελέτη - γραφική παράσταση ..... | 35 |
| 6 - 1 Τί εἶναι ή συνάρτηση. Πραγματικές συναρτήσεις .....                                                            | 35 |
| 6 - 2 Πεδία ὁρισμοῦ και τιμῶν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων .....                                                      | 38 |
| 6 - 3 Μονοτονία συναρτήσεων. 'Ακρότατα .....                                                                         | 42 |
| 6 - 4 Μελέτη και γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως .....                                                            | 44 |
| 6 - 5 'Εφαρμογές και παραδείγματα .....                                                                              | 45 |
| 6 - 6 'Ασκήσεις .....                                                                                                | 50 |

|                                                                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Ένότητα 7: Ο κύκλος και η Έλλειψη</b>                                                                                                            | <b>51</b>  |
| 7 - 1 Έξισωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων                                                                                                  | 51         |
| 7 - 2 Έλλειψη και η εξίσωσή της                                                                                                                     | 52         |
| 7 - 3 Εφαρμογές και παραδείγματα                                                                                                                    | 55         |
| 7 - 4 Ασκήσεις                                                                                                                                      | 58         |
| <b>Ένότητα 8: Η συνάρτηση με τύπο <math>y = ax^2 + bx + \gamma</math>. Η παραβολή και η εξίσωσή της</b>                                             | <b>58</b>  |
| 8 - 1 Μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησεως που δίνεται από τον αλγεβρικό τύπο:<br>$y = ax^2 + bx + \gamma$ ( $a, b, \gamma$ , $a \neq 0$ )  | 58         |
| 8 - 2 Έξισωση της παραβολής με άξονα τετμημένων τον άξονα συμμετρίας της                                                                            | 62         |
| 8 - 3 Εφαρμογές και παραδείγματα                                                                                                                    | 65         |
| 8 - 4 Ασκήσεις                                                                                                                                      | 68         |
| <b>Ένότητα 9: Η συνάρτηση με τύπο <math>y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}</math>. Η υπερβολή και η εξίσωσή της</b>                           | <b>69</b>  |
| 9 - 1 Οι συναρτήσεις τις οποίες ορίζουν εξισώσεις της μορφής $y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$                                             | 69         |
| 9 - 2 Η υπερβολή και η εξίσωσή της                                                                                                                  | 75         |
| 9 - 3 Εφαρμογές και παραδείγματα                                                                                                                    | 79         |
| 9 - 4 Ασκήσεις                                                                                                                                      | 82         |
| Ασκήσεις για επανάληψη                                                                                                                              | 83         |
| <b>Ένότητα 10: Οι κυκλικές συναρτήσεις και οι μεταξύ τους σχέσεις</b>                                                                               | <b>84</b>  |
| 10 - 1 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συν x και ημ x                                                                                                | 84         |
| 10 - 2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις εφ x και σφ x                                                                                                 | 88         |
| 10 - 3 Εφαρμογές και παραδείγματα                                                                                                                   | 91         |
| 10 - 4 Ασκήσεις                                                                                                                                     | 94         |
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Όριακή τιμή και συνέχεια συναρτήσεως. Η παράγωγος μιās συναρτήσεως. Εφαρμογή της παραγώγου στη μελέτη συναρτήσεων. Τό ολοκλήρωμα</b> |            |
| <b>Ένότητα 11: Όριακή τιμή και συνέχεια συναρτήσεως</b>                                                                                             | <b>95</b>  |
| 11 - 1 Όριακές τιμές συναρτήσεων                                                                                                                    | 95         |
| 11 - 2 Ιδιότητες των ορίων                                                                                                                          | 99         |
| 11 - 3 Συναρτήσεις συνεχείς. Σημεία ασυνεχείας                                                                                                      | 102        |
| 11 - 4 Εφαρμογές και παραδείγματα                                                                                                                   | 104        |
| 11 - 5 Ασκήσεις                                                                                                                                     | 109        |
| <b>Ένότητα 12: Έννοια της παραγώγου. Βασικές εφαρμογές</b>                                                                                          | <b>110</b> |
| 12 - 1 Τό νόημα και η σημασία της παραγώγου                                                                                                         | 110        |
| 12 - 2 Μία εφαρμογή στη Φυσική                                                                                                                      | 117        |
| 12 - 3 Εφαρμογές και παραδείγματα                                                                                                                   | 117        |
| 12 - 4 Ασκήσεις                                                                                                                                     | 119        |
| <b>Ένότητα 13: Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων. Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως</b>                                                                | <b>119</b> |
| 13 - 1 Ιδιότητες των παραγώγων. Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων                                                                                   | 119        |
| 13 - 2 Η παράγωγος της αντίστροφης συναρτήσεως μιās δοσμένης συναρτήσεως $y = f(x)$                                                                 | 125        |
| 13 - 3 Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως                                                                                                               | 126        |
| 13 - 4 Εφαρμογές και παραδείγματα                                                                                                                   | 127        |
| 13 - 5 Ασκήσεις                                                                                                                                     | 129        |

|                                                                                              |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Ένότητα 14: Μελέτη συναρτήσεων μέσω των παραγώγων</b>                                     | <b>129</b> |
| 14 - 1 Τό θεώρημα της μέσης τιμής και η μονοτονία                                            | 129        |
| 14 - 2 Η μονοτονία και τα άκροτατα                                                           | 131        |
| 14 - 3 Προσδιορισμός όριακων τιμών μέσω των παραγώγων. Κανόνας του L' Hospital (του Λοπιτάλ) | 133        |
| 14 - 4 Έφαρμογές και παραδείγματα                                                            | 134        |
| 14 - 5 Άσκήσεις                                                                              | 140        |
| <b>Ένότητα 15: Τό ολοκλήρωμα</b>                                                             | <b>141</b> |
| 15 - 1 Ένα πρόβλημα και πώς λύνεται με μία μέθοδο του Άρχιμήδη                               | 141        |
| 15 - 2 Θεμελιώδεις ιδιότητες του ολοκληρώματος                                               | 146        |
| 15 - 3 Μερικά στοιχειώδη ολοκληρώματα                                                        | 147        |
| 15 - 4 Έφαρμογές και παραδείγματα                                                            | 148        |
| 15 - 5 Άσκήσεις                                                                              | 151        |
| Άσκήσεις για επανάληψη                                                                       | 153        |

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Ένότητα 1: Τι είναι ή Στατιστική. Προκαταρκτικά.</b>                              |     |
| 1 - 1 Γενικά                                                                         | 157 |
| 1 - 2 Διάρθρωση της Στατιστικής                                                      | 158 |
| 1 - 3 Μέθοδοι έργασίας                                                               | 159 |
| <b>Ένότητα 2: Ταξινόμηση δεδομένων. Συχνότητες και κατανομή συχνοτήτων. Πίνακες.</b> |     |
| 2 - 1 Ταξινόμηση παρατηρήσεων                                                        | 159 |
| 2 - 2 Συχνότητες μιάς άσυνεχους μεταβλητής. Κατανομή                                 | 160 |
| 2 - 3 Πίνακες συχνοτήτων                                                             | 162 |
| 2 - 4 Όμαδοποίηση δεδομένων όταν η μεταβλητή είναι συνεχής                           | 164 |
| <b>Ένότητα 3: Γραφικές παραστάσεις συχνοτήτων.</b>                                   |     |
| 3 - 1 Τό πολύγωνο συχνοτήτων                                                         | 166 |
| 3 - 2 Τό ιστόγραμμα συχνοτήτων                                                       | 167 |
| 3 - 3 Τό πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τό πολύγωνο των άθροιστικών συχνοτήτων | 169 |
| 3 - 4 Τό ραβδόγραμμα και τό κυκλικό διάγραμμα                                        | 170 |
| <b>Ένότητα 4: Χαρακτηριστικές τιμές μιάς κατανομής.</b>                              |     |
| 4 - 1 Γενικά                                                                         | 173 |
| 4 - 2 Άριθμητικός μέσος (ή μέση τιμή)                                                | 173 |
| 4 - 3 Διάμεσος τιμή-έπικρατούσα τιμή                                                 | 175 |
| 4 - 4 Διακύμανση κατανομής — Τυπική απόκλιση                                         | 176 |
| Άσκήσεις                                                                             | 180 |