ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Γεωργίου Ι. Γαλιώτου
ΦΥΣΙΚΟΥ ΗΛΕΚ. ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Αποστόλου Π. Ατματζίδη
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΟΥ Η/Υ

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ο ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», πολύ νωρίς προέβλεψε και σχημάτισε την πεποίθηση ότι η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας, σε συνδυασμό με την εθνική αγωγή, θα ήταν αναγκαίος και αποφασιστικός παράγων για την πρόοδο του Έθνους μας.

Την πεποίθησή του αυτή ο Ευγενίδης εκδήλωσε με τη γενναιόφρονα πράξη ευεργεσίας, να κληροδοτήσει σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, το Φεβρουάριο του 1956 συστήθηκε το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου τη διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Το έργο του Ιδρύματος συνεχίζει από το 1981 ο κ. Νικόλαος Βερνίκος - Ευγενίδης.

Από το 1956 έως σήμερα η συμβολή του Ιδρύματος στην τεχνική εκπαίδευση πραγματοποιείται με διάφορες δραστηριότητες. Όμως απ' αυτές η σημαντικότερη, που κρίθηκε από την αρχή ως πρώτης ανάγκης, είναι η έκδοση βιβλίων για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Σχολών και Λυκείων.

Μέχρι σήμερα, με τη συνεργασία με τα Υπουργεία Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων και Εμπορικής Ναυτιλίας, εκδόθηκαν εκατοντάδες τόμοι βιβλίων, που έχουν διατεθεί σε πολλά εκατομμύρια αντίτυπα. Τα βιβλία αυτά κάλυπταν ή καλύπτουν ανάγκες των Κατωτέρων και Μέσων Τεχνικών Σχολών του Υπ. Παιδείας, των Σχολών του Οργανισμού Απασχολήσεως Εργατικού Δυναμικού (ΟΑΕΔ), των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων, των Τεχνικών Επαγγελματικών Σχολών και των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού.

Μοναδική φροντίδα του Ιδρύματος σ' αυτή την εκδοτική του προσπάθεια ήταν και είναι η συγγραφή και έκδοση βιβλίων ποιότητας, από άποψη όχι μόνον επιστημονική, παιδαγωγική και γλωσσική, αλλά και ως προς την εμφάνιση, ώστε το βιβλίο να αγαπηθεί από τους μαθητές.

Για την επιστημονική και παιδαγωγική αρτιότητα των βιβλίων τα κείμενα υποβάλλονται σε πολλές επεξεργασίες και βελτιώνονται πριν από κάθε νέα έκδοση συμπληρούμενα καταλλήλως.

Ιδιαίτερη σημασία απέδωσε το Ίδρυμα από την αρχή στη γλωσσική διατύπωση των βιβλίων, γιατί πιστεύει ότι και τα τεχνικά βιβλία, όταν είναι γραμμένα σε γλώσσα σωστή και ομοιόμορφη αλλά και κατάλληλη για τη στάθμη των μαθητών, μπορούν να συμβάλλουν στη γλωσσική κατάρτιση των μαθητών.

Έτσι, με απόφαση που ίσχυσε ήδη από το 1956, όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Τεχνίτη, δηλαδή τα βιβλία για τις τότε Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, όπως αργότερα και για τις Σχολές του ΟΑΕΔ, ήταν γραμμένα σε γλώσσα δημοτική, με βάση τη γραμματική του Τριανταφυλλίδη, ενώ όλα τα άλλα βιβλία ήταν γραμμένα στην απλή καθαρεύουσα. Σήμερα ακολουθείται η γραμματική που διδάσκεται στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαιδεύσεως. Η γλωσσική επεξεργασία των βιβλίων ανατίθε-

ται σε φιλολόγους του Ιδρύματος και έτσι εξασφαλίζεται η ενιαία σύνταξη και ορολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Η ποιότητα του χαρτιού, το είδος των τυπογραφικών στοιχείων, τα σωστά σχήματα, η καλαίσθητη σελιδοποίηση, το εξώφυλλο και το μέγεθος του βιβλίου, περιλαμβάνονται και αυτά στις φροντίδες του Ιδρύματος και συμβάλλουν στη σωστή «λειτουργικότητα» των βιβλίων.

Το Ίδρυμα θεώρησε ότι είναι υποχρέωσή του, σύμφωνα με το πνεύμα του ιδρυτή του, να θέση στη διάθεση του Κράτους όλη αυτή την πείρα του των 20 ετών, αναλαμβάνοντας το 1978 και την έκδοση των βιβλίων για τις νέες Τεχνικές Επαγγελματικές Σχολές και τα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια, σύμφωνα πάντοτε με τα εγκεκριμένα Αναλυτικά Προγράμματα του Π.Ι. και του ΥΠΕΠΘ.

ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΓΑΛΙΩΤΟΥ
ΦΥΣΙΚΟΥ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΔΙΠΛΩΜ. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΡΙΣΙΩΝ

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Π. ΑΤΜΑΤΖΙΔΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΟΥ Η/Υ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Κ.Α.ΤΕ.Ε. ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΑΘΗΝΑ
1994

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξεως των επαγγελματικών Λυκείων και έχει γραφεί σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του ΚΕΜΕ. Η ύλη του καλύπτει θέματα δομής και λειτουργίας των ψηφιακών και αναλογικών ηλεκτρονικών υπολογιστών και συμπληρώνει συγχρόνως την ύλη της Β΄ τάξεως με την εισαγωγή της έννοιας του συμπληρώματος ενός αριθμού και της χρησιμοποιήσεώς του από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων.

Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε τα διάφορα θέματα να αναπτυχθούν με απλότητα και ικανοποιητική λεπτομέρεια και σύμφωνα με τις τελευταίες μέχρι τις ημέρες μας τεχνολογικές εξελίξεις. Πιστεύομε ότι το βιβλίο αυτό θα αποτελέσει ένα εύκολο και χρήσιμο βοήθημα για τους μαθητές σε θέματα δομής και λειτουργίας των Η/Υ.

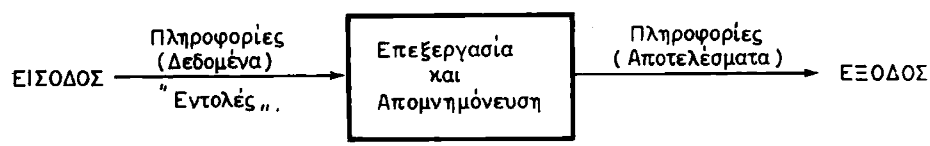
Ευχαριστούμε την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου που φρόντισε για την όσο το δυνατό άρτια παρουσίαση του βιβλίου. Ιδιαίτερα ευχαριστούμε τόν καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Γεώργιο Φιλοκύπρου που είχε την καλωσύνη να διεξέλθει υπομονετικά τα χειρόγραφα και να βοηθήσει αισθητά στήν πραγματοποίηση του σκοπού στον οποίο αποβλέπει το περιεχόμενο του βιβλίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1 Τι είναι ηλεκτρονικός υπολογιστής.

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές (computers) χρησιμοποιούνται σήμερα σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα για τη διεκπεραίωση διαφόρων εργασιών. Παραδείγματος χάρη οι λογαριασμοί του τηλεφώνου, του νερού και του ηλεκτρικού εκδίδονται και εκτυπώνονται με ηλεκτρονικό υπολογιστή. Ακόμα οι κρατήσεις θέσεων στο αεροπλάνο, όταν πρόκειται να ταξιδέψομε, η πρόβλεψη του καιρού, η αυτόματη καθοδήγηση των πυραύλων, ο αυτόματος έλεγχος παραγωγής σε εργοστάσια (π.χ. βιομηχανία παραγωγής χαρτιού, ηλεκτρικής ενέργειας κλπ.) γίνονται σήμερα με τη χρησιμοποίηση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Ο σημερινός ηλεκτρονικός υπολογιστής δέχεται δεδομένα υπό μορφή αριθμητικών και αλφαβητικών πληροφοριών, τα οποία επεξεργάζεται με «εντολές» με τις οποίες τον τροφοδοτούμε. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, που τους ξεχωρίζει από άλλες διατάξεις που εκτελούν υπολογισμούς (π.χ. λογαριθμικός κανόνας, ταμιακή μηχανή κλπ.) είναι ότι πέρα από τα δεδομένα, απομνημονεύει και τις εντολές που του δίνομε με τις οποίες θα τα επεξεργασθεί. Η όλη επεξεργασία μετά την εισαγωγή των δεδομένων και των εντολών γίνεται αυτόματα και χωρίς την επέμβασή μας. Συνοπτικό διάγραμμα του ηλεκτρονικού υπολογιστή δίνεται στο σχήμα 0.1α.



Σχ. 0.1α.
Συνοπτικό διάγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ένας σύγχρονος ηλεκτρονικός υπολογιστής αποτελείται από ηλεκτρικά καλώδια, τρανζίστορ, αντιστάσεις, πυκνωτές (συχνά σε μορφή ολοκληρωμένων κυκλωμάτων) συνδεσμολογημένα έτσι ώστε να αποτελούν μεγαλύτερες ηλεκτρονικές διατάξεις. Οι διατάξεις αυτές συγκροτούν μεγαλύτερες μονάδες, όπως είναι π.χ. η κεντρική μονάδα υπολογισμών, η κεντρική μνήμη, η μονάδα ελέγχου κλπ. Με συνδυασμό των στοιχείων που αναφέραμε με ηλεκτρομηχανικά στοιχεία (κινητήρες, αντλίες κενού κλπ.) συγκροτούνται μονάδες όπως η μονάδα μαγνητικής ταινίας, ο αναγνώστης διατρήτων δελτίων, η μονάδα μαγνητικού δίσκου κλπ. Οι μονάδες αυτές συνδέονται μεταξύ τους ηλεκτρικά με καλώδια και συγκροτούν ένα μεγαλύτερο και πλήρες σύστημα που το ονομάζομε σύστημα ηλεκτρονικού υπολογιστή ή απλά ηλεκτρονικό υπολογιστή (computer system ή computer).

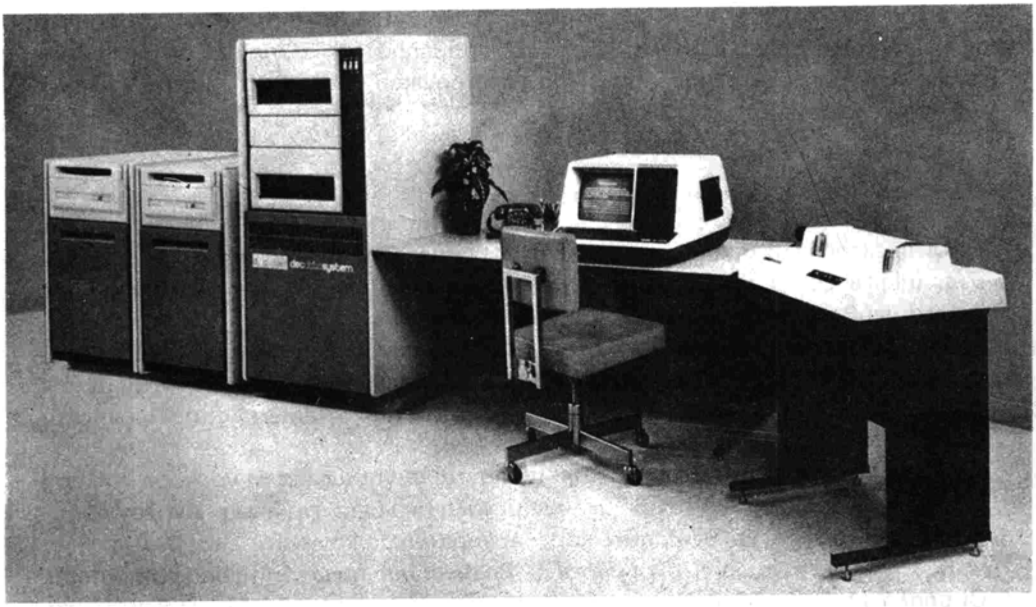
Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να δεχθεί ένα μεγάλο αριθμό δεδομένων στην είσοδό του, να τα επεξεργασθεί με μεγάλη ταχύτητα (π.χ. ο χρόνος προσθέσεως δύο πολυψηφίων αριθμών είναι της τάξεως του εκατομμυριοστού του δευτερολέπτου - μsec) και να μας δώσει τα αποτελέσματα στην έξοδό του είτε τυπωμένα σε χαρτί με ταχύτητα περίπου 60 - 3000 χαρακτήρες / sec είτε υπό μορφή σχεδίου εκτυπώσεως σε χαρτί ή σε οθόνη ή άλλη μορφή.

Το μέγεθος ενός σύγχρονου ηλεκτρονικού υπολογιστή ποικίλλει. Μπορεί να είναι μία μικρή επιτραπέζια συσκευή, αλλά μπορεί επίσης να είναι και ένα συγκρότημα διατάξεων (μονάδων), που συνεργάζονται μεταξύ τους όπως μια ενιαία μηχανή. Στην περίπτωση αυτή ο υπολογιστής μπορεί να καταλαμβάνει ένα χώρο περίπου 20 ως 450 m^2. Στα σχήματα 0.1β και 0.1γ παριστάνονται χαρακτηριστικοί τύποι συγχρόνων ηλεκτρονικών υπολογιστών.

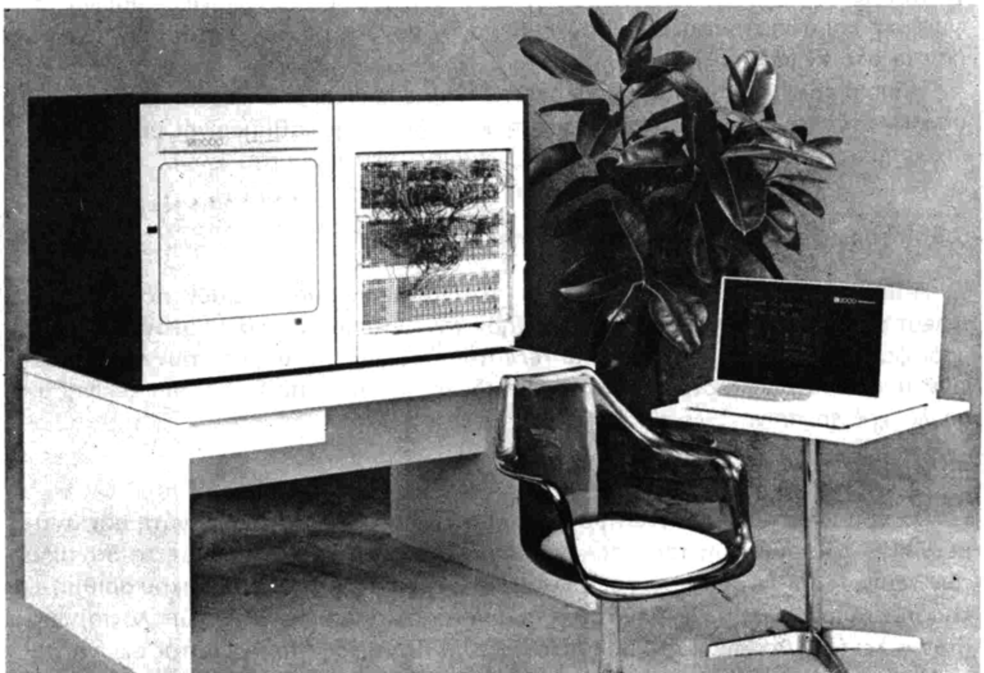
Σχ. 0.1β.

Οι υπολογιστές των σχημάτων 0.1β και 0.1γ είναι ψηφιακοί υπολογιστές. Στο σχήμα 0.1δ παριστάνεται ένας σύγχρονος αναλογικός υπολογιστής.

Πώς λειτουργεί όμως ένας σύγχρονος ηλεκτρονικός υπολογιστής; Σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι αυτός από κατασκευής δέχεται και αναγνωρίζει έναν ορισμένο αριθμό εντολών. Για την επίλυση ενός προβλήματος ή γενικότερα για τη διεκπεραίωση μιας εργασίας με υπολογιστή, τον τροφοδοτούμε με τα δεδο-



Σχ. 0.1γ.



Σχ. 0.1δ.

μένα του προβλήματος και ένα ορισμένο σύνολο εντολών το οποίο τον καθοδηγεί πώς να λειτουργήσει για την επίλυση ενός προβλήματος. Το σύνολο αυτό των εντολών το ονομάζομε «πρόγραμμα» του ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.

0.2 Τύποι ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές που αναφέραμε ονομάζονται ***ψηφιακοί υπολογιστές*** (digital computers). Σε αυτούς οι αριθμοί παριστάνονται με ένα σύνολο ψηφίων συνήθως στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα.

Μια άλλη κατηγορία ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι οι ***αναλογικοί υπολογιστές*** (analog computers). Σε αυτούς η αναπαράσταση ενός αριθμού γίνεται με την τιμή ενός ανάλογου φυσικού μεγέθους, συνήθως μιας ηλεκτρικής τάσεως ή ρεύματος ή ακόμα του μήκους.

Οι αναλογικοί υπολογιστές χρησιμοποιούνται συνήθως για τη γρήγορη επίλυση διαφορικών εξισώσεων όταν δε θέλομε μεγάλη ακρίβεια στη λύση. Αναλογικός υπολογιστής μπορεί να θεωρηθεί και ο λογαριθμικός κανόνας.

Μία τρίτη κατηγορία είναι οι ***μικτοί*** ή ***υβριδικοί υπολογιστές*** (hybrid computers). Οι υπολογιστές αυτοί αποτελούν συνδυασμό των ψηφιακών και αναλογικών έτσι ώστε να συνδυάζονται τα πλεονεκτήματα κάθε κατηγορίας. Ο συνδυασμός αυτός γίνεται με ειδικές μονάδες που μετατρέπουν πληροφορίες αναλογικής μορφής σε ψηφιακή και αντίστροφα. Περισσότερα για τις μονάδες αυτές μετατροπής αναφέρονται στο κεφάλαιο 9.

Η πιο διαδεδομένη μορφή υπολογιστών σήμερα είναι οι ψηφιακοί ηλεκτρονικοί υπολογιστές τους οποίους συναντάμε σε κάθε βήμα της καθημερινής μας ζωής (επιχειρήσεις, εργαστήρια, οργανισμούς, εκπαιδευτικά ιδρύματα κλπ.).

0.3 Ιστορική εξέλιξη ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Η μεγάλη πρόοδος στον τομέα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, που έγινε τα τελευταία 20 περίπου χρόνια, δημιούργησε την εντύπωση ότι οι υπολογιστές είναι πρόσφατη ανακάλυψη. Αντίθετα οι τελευταίες εξελίξεις στο χώρο των ηλεκτρονικών υπολογιστών αποτελούν συνέχεια ιδεών και προσπαθειών που ξεκίνησαν πολλά χρόνια πριν.

α) Άβακας.

Ο άνθρωπος από την πρώτη στιγμή που εμφανίσθηκε στον πλανήτη μας αντιμετώπισε το πρόβλημα του υπολογισμού. Στην αρχή χρησιμοποίησε τα δάχτυλα των χεριών του. Σε αυτό ίσως οφείλεται και η επικράτηση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος. Η πρώτη διάταξη που επενόησε ο άνθρωπος για υπολογισμούς ήταν ο λεγόμενος Άβακας (γύρω στο 3500 π.Χ). Αυτός ήταν γνωστός εκείνη την εποχή στην Ασία και τη Μέση Ανατολή και έμοιαζε με το γνωστό μας αριθμητήριο.

Μετακινώντας τις χάνδρες που είχε μπορούσαμε να σχηματίσομε αριθμούς και να εκτελέσομε στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις πάνω σε αυτούς.

β) Λογαριθμικός κανόνας.

Χρειάσθηκε να περάσουν αρκετοί αιώνες χωρίς καμιά βελτίωση στα υπολογιστικά μέσα για να φθάσομε έτσι στις αρχές του 17ου αιώνα που έχομε την εμφάνιση του γνωστού μας λογαριθμικού κανόνα.

γ) Μηχανή του Pascal.

Την ίδια περίπου εποχή και συγκεκριμένα το 1642 ο μεγάλος Pascal, στην προσπάθειά του να βοηθήσει στους υπολογισμούς τον πατέρα του, που ήταν εφοριακός, κατασκεύασε μια μηχανή με οδοντωτούς τροχούς στην περιφέρεια των οποίων ετοποθέτησε τους αριθμούς. Η μηχανή του Pascal μπορούσε να κάνει πρόσθεση και αφαίρεση. Η ίδια μηχανή βελτιώθηκε το 1694, από το Γερμανό μαθηματικό Leibnitz. Η νέα μηχανή τώρα μπορούσε να εκτελέσει και τις δύο άλλες αριθμητικές πράξεις, δηλαδή τόν πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

δ) Μηχανή Babbage.

Από τότε έχομε μια συνεχή προσπάθεια για βελτίωση των υπολογιστικών μηχανών με ουσιαστικό σταθμό το 1835. Τη χρονιά αυτή ο Άγγλος Babbage σχεδίασε ένα νέο τύπο υπολογιστικής μηχανής, την περίφημη « Αναλυτική μηχανή». Η μηχανή αυτή μπορούσε να απομνημονεύει πληροφορίες και οδηγίες για επεξεργασία των πληροφοριών αυτών. Δυστυχώς όμως η κατασκευή της ηταν πρακτικά ανέφικτη με τα τεχνολογικά μέσα της εποχής εκείνης με αποτέλεσμα ο Babbage να μήν κατορθώσει να ολοκληρώσει την κατασκευή της.

ε) Μηχανή Hollerith.

Έτσι φθάνομε στο τέλος του περασμένου αιώνα και συγκεκριμένα το 1880 που η ανάγκη επεξεργασίας των αποτελεσμάτων της απογραφής των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, οδήγησε τον υπάλληλο της στατιστικής υπηρεσίας των Η.Π.Α Hollerith νά σχεδιάσει και να κατασκευάσει μία μηχανή με βάση το διάτρητο δελτίο. Η μηχανή αυτή μπορούσε να επεξεργασθεί τα δεδομένα της απογραφής σε 3 χρόνια αντί 10 που θα χρειαζόντουσαν με τα μέσα που υπήρχαν μέχρι τότε.

ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΑΙΩΝΑΣ.

στ) Harvard Marc I.

Πέντε χρόνια αργότερα και συγκεκριμένα το 1944 έχομε την εμφάνιση του πρώτου ηλεκτρομηχανικού υπολογιστικού συστήματος που ονομάσθηκε Harvard Mark I και είχε διαστάσεις 15 μέτρα μήκος και 2,4 μέτρα ύψος. Ο Mark I μπορούσε να εκτελέσει τις 4 βασικές πράξεις: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Η ταχύτητα προσθέσεως δύο αριθμών με 23 δεκαδικά ψηφία ήταν 0,3 του δευτερολέπτου και του πολλαπλασιασμού 4,5 δευτερόλεπτα.

ζ) Eniac.

Ο Eniac (1944 - 46) αποτελεί βελτιωμένη μορφή του Mark I. Περιείχε 10.000 ηλεκτρονικές λυχνίες και κατανάλωνε ισχύ 150 kW. Χαρακτηριστικά της ταχύτητας του Eniac ήταν ότι μπορούσε να εκτελέσει σε 2 ώρες υπολογισμούς που 100 φυσικοί θα χρειαζόντουσαν 1 χρόνο να κάνουν με το χέρι.

η) Γενεές ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Με βελτιώσεις στα υπάρχοντα μέχρι τότε υπολογιστικά συστήματα φθάνομε στη δεκαετία 1950 - 1960 που χαρακτηρίζεται ως η δεκαετία των συγχρόνων ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά ηλεκτρονικές λυχνίες, αντιστάσεις, πυκνωτές κλπ. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές που είναι κατασκευασμένοι με αυτό τον τρόπο λέμε ότι ανήκουν στη «πρώτη γενεά».

Στη συνέχεια οι ηλεκτρονικές λυχνίες αντικατασταθήκανε με τρανζίστορς με αποτέλεσμα τον περιορισμό του όγκου και της ισχύος που καταναλώνει ο ηλεκτρονικός υπολογιστής και με παράλληλη αύξηση της ταχύτητας και πιστότητάς του. Οι υπολογιστές οι κατασκευασμένοι με βάση διακριτά ηλεκτρονικά στοιχεία όπως πυκνωτές, αντιστάσεις, τρανζίστορς κλπ. λέμε ότι ανήκουν στη «δεύτερη γενεά». Με την πρόοδο της τεχνολογίας χρησιμοποιούνται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές τα ολοκληρωμένα κυκλώματα με ακόμα μεγαλύτερο περιορισμό του μεγέθους και της ισχύος που καταναλώνουν και με παράλληλα σημαντική αύξηση της ταχύτητας και πιστότητάς τους. Ηλεκτρονικοί υπολογιστές κατασκευασμένοι με ολοκληρωμένα κυκλώματα λέμε ότι ανήκουν στην «τρίτη γενεά».

θ) Μικροϋπολογιστές.

Στις αρχές της τρέχουσας δεκαετίας και συγκεκριμένα το 1971 έχομε την εμφάνιση των «μικροεπεξεργαστών» (microprocessors). Ένας μικροεπεξεργαστής σήμερα είναι ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα διαστάσεων 1,3 cm x 1,3 cm περίπου, το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει πάνω από 20.000 ηλεκτρονικά στοιχεία (τρανζίστορς, πυκνωτές κλπ.). Οι μικροεπεξεργαστές χαρακτηρίζονται σήμερα από τη μεγάλη πιστότητα λειτουργίας τους, το χαμηλό τους κόστος και τον πάρα πολύ μικρό χώρο που καταλαμβάνουν. Στην τεχνική των μικροεπεξεργαστών οφείλεται η εμφάνιση των υπολογιστικών μηχανών τσέπης (calculators) και των ψηφιακών ρολογιών που όλοι μας σχεδόν χρησιμοποιούμε.

Αν συνδέσομε τους παραπάνω μικροεπεξεργαστές με μονάδες όπως μαγνητικό δίσκο, τηλέτυπο, οθόνη με πληκτρολόγιο, εκτυπωτή κλπ., δημιουργούμε ένα σύστημα ενός ηλεκτρονικού υπολογιστη που το ονομάζομε «μικροϋπολογιστή» (microcomputer).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (ΠΡΟΣΘΗΚΕΣ)

1.1 Γενικά.

Από την προηγούμενη τάξη του Λυκείου μας είναι γνωστά τα ακόλουθα:

— Τα διάφορα συστήματα αριθμήσεως (δεκαδικό, δυαδικό, οκταδικό, δεκαεξαδικό κλπ.).

— Οι βασικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών.

— Οι αριθμητικές πράξεις στα συστήματα αυτά.

Στη συνέχεια, αφού δώσομε μερικά παραδείγματα, με τις τέσσερεις πράξεις στο δυαδικό σύστημα, για να επαναφέρομε τα παραπάνω στη μνήμη μας, θα ολοκληρώσομε το κεφάλαιο του δυαδικού συστήματος με την εισαγωγή της έννοιας του συμπληρώματος ενός αριθμού. Η έννοια αυτή μας είναι απαραίτητη για την παράσταση των προσημασμένων αλγεβρικών αριθμών.

Παραδείγματα των 4 πράξεων του δυαδικού συστήματος.

α) Πρόσθεση.

<u>Δυαδικός</u>		<u>Δεκαδικός</u>	<u>Δυαδικός</u>		<u>Δεκαδικός</u>
$\begin{array}{r} 001101 \\ +\,100101 \\ \hline 110110 \end{array}$	$\begin{array}{c} \iff \\ \iff \end{array}$	$\left(\begin{array}{r} 13 \\ +\,37 \\ \hline 50 \end{array}\right)$	$\begin{array}{r} 1010 \\ +\,101 \\ \hline 1111 \end{array}$	$\begin{array}{c} \iff \\ \iff \end{array}$	$\left(\begin{array}{r} 10 \\ +\,5 \\ \hline 15 \end{array}\right)$

β) Ἀφαίρεση.

<u>Δυαδικός</u>		<u>Δεκαδικός</u>	<u>Δυαδικός</u>		<u>Δεκαδικός</u>
$\begin{array}{r} 10110 \\ -\,01010 \\ \hline 01100 \end{array}$	$\begin{array}{c} \iff \\ \iff \end{array}$	$\left(\begin{array}{r} 22 \\ -\,10 \\ \hline 12 \end{array}\right)$	$\begin{array}{r} 1011 \\ -\,1000 \\ \hline 0011 \end{array}$	$\begin{array}{c} \iff \\ \iff \end{array}$	$\left(\begin{array}{r} 11 \\ -\,8 \\ \hline 3 \end{array}\right)$

γ) Πολλαπλασιασμός.

Δυαδικός

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\ 101 \\ \hline 11011 \\ 00000\ + \\ 11011 \\ \hline 10000111 \end{array}$$

Δεκαδικός

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 5 \\ \hline \Downarrow \\ 135 \end{array}$$

δ) Διαίρεση.

Δυαδικός

$$\begin{array}{rl} \ 11110 & \big|\ \underline{101} \\ -\ \underline{101} & \big|\ 110 \\ 0101 & \big| \\ -\ \underline{101} & \big| \\ 00000 & \big| \end{array} \iff$$

Δεκαδικός

$$\begin{array}{r|l} 30 & \underline{5} \\ 00 & 6 \end{array}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού γίνεται από διαδοχικές ολισθήσεις * και προσθέσεις, και η διαίρεση από διαδοχικές ολισθήσεις και αφαιρέσεις. Με την εισαγωγή της έννοιας του συμπληρώματος και την αναπαράσταση των αρνητικών αριθμών με τα συμπληρώματά τους, η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση. Έτσι καταλήγομε να εκτελούμε και τις 4 πράξεις μέσω της προσθέσεως.

1.2 Συμπλήρωμα Αριθμού.

1.2.1 Συμπλήρωμα ψηφίου.

Καλούμε συμπλήρωμα ψηφίου a_i ενός αριθμητικού συστήματος βάσεως β και το συμβολίζομε με $\overline{a}_i$ το ψηφίο $\overline{a}_i = (\beta - 1) - a_i$ (1.1)

Επειδή το (β − 1) είναι το μεγαλύτερο ψηφίο του συστήματος βάσεως β ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Καλούμε συμπλήρωμα ψηφίου a_i συστήματος βάσεως β τη διαφορά του ψηφίου a_i από το μεγαλύτερο ψηφίο του συστήματος βάσεως β΄΄».

Παραδείγματα.

1) Το συμπλήρωμα του ψηφίου 6 στο δεκαδικό σύστημα είναι:

$$\overline{6} = (10 - 1) - 6 = 9 - 6 = 3$$

---

* Ολίσθηση είναι η μετακίνηση ενός δυαδικού αριθμού προς τα δεξιά ή αριστερά.

2) Το συμπλήρωμα των ψηφίων 1 και 0 στο δυαδικό σύστημα είναι:

$$\overline{1} = (2 - 1) - 1 = 0$$

$$\overline{0} = (2 - 1) - 0 = 1$$

Δηλαδή τα δύο ψηφία του δυαδικού συστήματος είναι το ένα συμπλήρωμα του άλλου.

1.2.2 Συμπλήρωμα αριθμού N βάσεως β, (N_β), ως προς β.

Έστω ο αριθμός N_β με n ακέραια ψηφία και m κλασματικά. Ονομάζομε συμπλήρωμα του αριθμού N_β ως προς β και το συμβολίζομε με $\overline{N_\beta}$ τον αριθμό:

$$\overline{N_\beta} = \beta^n - N_\beta \tag{1.2}$$

Παραδείγματα.

1) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_{10} = 219{,}25$ ως προς 10 είναι:

$$\overline{N_{10}} = 10^3 - 219{,}25 = 780{,}75$$

2) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 110111$ ως προς 2 είναι:

$$\overline{N_2} = 2^6 - 110111 = 64^* - 110111 = 1000000 - 110111 = 001001$$

3) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 11011$ ως προς 2 είναι:

$$\overline{N_2} = 2^5 - 11011 = 32^{**} - 11011 = 100000 - 11011 = 00101$$

4) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 110101{,}0110$ ως προς 2 είναι:

$$\overline{N_2} = 2^6 - 110101{,}0110 = 1000000 - 110101{,}0110 = 001010{,}1010$$

Από τον παραπάνω ορισμό και τα παραδείγματα συνεπάγεται εύκολα ο εξής κανόνας συμπληρώσεως αριθμού N_2 ως προς 2.

«Προχωρούμε αρχίζοντας από το λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού N_2, μέχρις ότου συναντήσομε για πρώτη φορά ψηφίο 1 αφήνοντας τα ψηφία αυτά του N_2 όπως έχουν (συμπεριλαμβάνεται και το πρώτο 1). Τα ψηφία τα οποία ακολουθούν τα συμπληρώνομε, δηλαδή γράφομε 0 όπου 1 και 1 όπου 0».

1.2.3 Συμπλήρωμα του αριθμού N_β ως προς (β — 1).

Έστω ο αριθμός N_β με n ακέραια και m κλασματικά ψηφία. Ονομάζομε συμπλήρωμα του αριθμού N_β ως προς (β — 1) και το συμβολίζομε με $\underline{N_\beta}$ τον αριθμό:

$$\underline{N_\beta} = \beta^n - N_\beta - \beta^{-m} \tag{1.3}$$

---

* Μετατρέπομε τον αριθμό 64 κατά τα γνωστά σε δυαδικό αριθμό.

** Μετατρέπομε τον αριθμό 32 κατά τα γνωστά σε δυαδικό αριθμό.

Παραδείγματα.

1) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_{10} = 219{,}25$ ως προς 9, δηλαδή $(10 - 1)$ είναι:

$$\underline{N_{10}} = 10^3 - 219{,}25 - 10^{-2} = 780{,}74.$$

2) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 110101{,}0110$ ως προς 1 είναι:

$$\underline{N_2} = 2^6 - 110101{,}0110 - 2^{-4} = 001010{,}1001$$

3) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 110101$ ως προς 1 είναι:

$$\underline{N_2} = 2^6 - 110101 - 10^0 = 64 - 110101 - 1 = 1000000 - 110100 = 001010$$

4) Το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 110110101$ ως προς 1 είναι:

$$\underline{N_2} = 2^9 - 110110101 - 10^0 = 1000000000 - 110110101 - 1 = 001001010$$

Από τον παραπάνω ορισμό (1.3) για το συμπλήρωμα ενός αριθμού ως προς 1 συνεπάγεται ο παρακάτω πρακτικός κανόνας: «Τα ψηφία του $\underline{N_\beta}$ είναι τα συμπληρώματα των αντιστοίχων ψηφίων του αριθμού N_β».

Με άλλα λόγια, όπου ο αριθμός $\underline{N_\beta}$ έχει το ψηφίο «1» ο N_β θα έχει το ψηφίο «0» και όπου $\underline{N_\beta}$ έχει ψηφίο το «0» ο N_β θα έχει «1».

Παραδείγματα.

$$1)\ N_2 = 0110110101 \Longleftrightarrow \underline{N_2} = 1001001010$$

$$2)\ N_2 = 1001010 \Longleftrightarrow \underline{N_2} = 0110101$$

και παραστατικά:

$$\begin{array}{r ccccccc}
\text{Αριθμός } N_2 = & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\text{Συμπλήρωμα } \underline{N_2} = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\text{(ως προς 1)} & & & & & & &
\end{array}$$

Από τις σχέσεις (1.2) και (1.3) συνεπάγεται ότι:

$$\overline{N_\beta'} = \underline{N_\beta} + 1 \qquad (1.4)$$

$$\text{ή} \quad \overline{N_2} = \underline{N_2} + 1 \text{ στο δυαδικό σύστημα}$$

Από τη σχέση (1.4) έχομε ότι το συμπλήρωμα ως προς 2 είναι μεγαλύτερο από το συμπλήρωμα ως προς 1 κατά μία μονάδα της τελευταίας τάξεως. Από την παρατήρηση αυτή οδηγούμασθε στην εξής μέθοδο ευρέσεως του συμπληρώματος ως προς 2.

Στην αρχή βρίσκομε το συμπλήρωμα του αριθμού ως προς 1 και μετά αυξάνομε το αποτέλεσμα κατά μία μονάδα προσθέτοντάς το στο ψηφίο της τελευταίας τάξεως αυτού σύμφωνα με τη σχέση (1.4).

Παραδείγματα.

1) Να υπολογισθεί το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 110111$ ως προς 2.

$$\underline{N}_2 = 001000 \text{ και } \overline{N}_2 = \underline{N}_2 + 1 = 001000 + 1 = 001001$$

$$\text{άρα } \boxed{\overline{N}_2 = 001001}$$

2) Να υπολογισθεί το συμπλήρωμα του αριθμού $N_2 = 0110110101$ ως προς 2.

$$\underline{N}_2 = 1001001010 \text{ και}$$

$$\overline{N}_2 = \underline{N}_2 + 1 = 1001001010 + 1 = 1001001011$$

$$\text{άρα } \boxed{\overline{N}_2 = 1001001011}$$

3) Να υπολογισθεί το συμπλήρωμα του συμπληρώματος του αριθμού $N_2 =$ $= 1010101010$ ως προς 2.

$$\underline{N}_2 = 0101010101 \text{ και}$$

$$\overline{N}_2 = \underline{N}_2 + 1 = 0101010101 + 1 = 0101010110$$

$$\left(\underline{\overline{N}}_2 = 1010101001 \text{ συμπλήρωμα του } \underline{N}_2 \text{ ως προς 2} \right)$$

ή σύμφωνα με την (1.4)

$$\overline{\overline{N}}_2 = \underline{\overline{N}}_2 + 1 = 1010101001 + 1 = 1010101010 = N_2$$

$$\text{άρα } \overline{\overline{N}}_2 = N_2$$

Ώστε: «Το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός».

Από τα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός του συμπληρώματος ενός αριθμού N_β ως προς 1 είναι πάρα πολύ εύκολος όπως το συμπλήρωμα ως προς 2.

1.3 Παράσταση προσημασμένων αριθμών.

Στα προηγούμενα εξετάσθηκε η παράσταση της απόλυτης τιμής καθώς και οι πράξεις στις απόλυτες τιμές των δυαδικών αριθμών.

Η παράσταση προσημασμένων αριθμών, όπως είναι γνωστό, γίνεται στην περίπτωση των δεκαδικών αριθμών, με τη χρησιμοποίηση του προσήμου + για τους θετικούς αριθμούς και του προσήμου — για τους αρνητικούς αριθμούς. Η παράσταση των προσημασμένων δυαδικών αριθμών μπορεί ασφαλώς να γίνει με παρόμοιο τρόπο. Στους ηλεκτρονικούς όμως υπολογιστές η παράσταση προσηρμασμένων αριθμών γίνεται όπως θα δούμε παρακάτω.

1.3.1 Λέξη υπολογιστή.

Στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές οι αριθμοί παριστάνονται με ένα πλήθος ψηφίων το οποίο είναι καθορισμένο για κάθε τύπο υπολογιστή.

Ένας αριθμός που εκφράζεται με το πλήθος αυτό των ψηφίων λέμε ότι αποτελεί μία ΛΕΞΗ του υπολογιστή. Ο αριθμός των ψηφίων μιας λέξεως λέγεται ΜΗΚΟΣ της λέξεως (Μ.Λ).

Όταν σε έναν υπολογιστή εισάγεται αριθμός με πλήθος ψηφίων μικρότερα από το μήκος της λέξεως του υπολογιστή συμπληρώνομε τον αριθμό κατάλληλα με μηδενικά. Π.χ. σε έναν υπολογιστή μήκους 6 δεκαδικών ψηφίων ο αριθμός 1543 γράφεται ως 001543.

1.3.2 Παράσταση Προσημασμένου Μεγέθους (ΠΠΜ).

Κατά την ΠΠΜ χρησιμοποιούμε ως πρόσημο το πλέον σημαντικό ψηφίο της λέξεως του υπολογιστή. Τα υπόλοιπα ψηφία της λέξεως παριστάνουν την απόλυτη τιμή του αριθμού.

Παραδείγματα.

α) Οι αριθμοί $N_{10} = -28$ παριστάνονται σε υπολογιστή μήκους λέξεως 8 δυαδικών ψηφίων υπό ΠΠΜ ως:

$$N_{10} = +28 \Longleftrightarrow 00011100$$

$$N_{10} = -28 \Longleftrightarrow 10011100$$

β) Ο αριθμός $N_{10} = 0$ παριστάνεται σε υπολογιστή Μ.Λ. 8 δυαδικών ψηφίων υπό ΠΠΜ ως:

$$N_{10} = 0 \Longleftrightarrow 00000000$$

$$N_{10} = 0 \Longleftrightarrow 10000000,$$

δηλαδή στην ΠΠΜ έχομε δύο παραστάσεις του 0, το -0 και το $+0$.

1.3.3 Παράσταση Προσημασμένου Συμπληρώματος του 2 (ΠΠΣ2).

Κατά την ΠΠΣ2 λέξη υπολογιστή η οποία έχει μήκος n δυαδικών ψηφίων χρησιμοποιείται για να παραστήσομε 2^{n-1} θετικούς αριθμούς στους οποίους περιλαμβάνεται και το 0 και 2^{n-1} αρνητικούς αριθμούς. Οι θετικοί αριθμοί εκφράζονται με την απόλυτη τιμή τους και οι αρνητικοί αριθμοί εκφράζονται με το συμπλήρωμα ως προς 2 της απόλυτης τιμής τους.

Ύστερα από αυτό όλοι οι θετικοί αριθμοί έχουν το πλέον σημαντικό ψηφίο της λέξεως του υπολογιστή, το 0, ενώ όλοι οι αρνητικοί αριθμοί έχουν το ψηφίο 1. Επομένως κατά την ΠΠΣ2 το πλέον σημαντικό ψηφίο της λέξεως του υπολογιστή παίζει το ρόλο «ψηφίο πρόσημο».

Παραδείγματα.

α) Οι αριθμοί $N_{10} = +27$ καί $N_{10} = -27$ παριστάνονται σε υπολογιστή μήκους λέξεως 8 δυαδικών ψηφίων υπό ΠΠΣ2 ως:

$$N_{10} = +27 \Longleftrightarrow \text{ΠΠΣ2} = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0011011}}$$

$$N_{10} = -27 \Longleftrightarrow \text{ΠΠΣ2} = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1100101}}$$

Η παράσταση του $N_{10} = -27$ προκύπτει δια συμπληρώσεως ως προς 2 του $N_{10} = +27$.

β) Ομοίως των αριθμών $N_{10} = +35$ και $N_{10} = -35$.

$$N_{10} = +35 \Longleftrightarrow ΠΠΣ2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0100011}}$$

$$N_{10} = -35 \Longleftrightarrow ΠΠΣ2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1011101}}$$

γ) Οι αριθμοί ΠΠΣ2 $N_2 = 01101011$ και ΠΠΣ2 $N_2 = 10101101$ να τραπούν σε δεκαδικούς.

Επειδή ο ΠΠΣ2 $N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{1101011}$ είναι θετικός γιατί, το πλέον σημαντικό ψηφίο του είναι το 0, η μετατροπή του σε δεκαδικό γίνεται εύκολα κατά τα γνωστά:

$$N_2 = \underline{0}\ \underline{1101011} = +(1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0) =$$
$$= +(64 + 32 + 8 + 2 + 1) = +107$$

Αλλά ο αριθμός ΠΠΣ2 $N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{0101101}}$ είναι αρνητικός, γιατί το πλέον σημαντικό ψηφίο είναι το 1, την απόλυτη τιμή του βρίσκομε συμπληρώνοντας το N ως προς 2.

$$N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{0101101}} = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1010011}} = -(1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 +$$
$$+ 1.2^0) = -(64 + 16 + 2 + 1) = -83$$

1.3.4 Παράσταση Προσημασμένου Συμπληρώματος του 1 (ΠΠΣ1).

Κατά την ΠΠΣ1 η λέξη υπολογιστη μήκους n δυαδικών ψηφίων χρησιμοποιείται για την παράσταση 2^{n-1} θετικών αριθμών και 2^{n-1} αρνητικών αριθμών. Οι θετικοί αριθμοί εκφράζονται με την απόλυτη τιμή τους, ενώ οι αρνητικοί αριθμοί εκφράζονται με το συμπλήρωμα του 1 της απόλυτης τιμής. Όλοι οι θετικοί αριθμοί έχουν ως πλέον σημαντικό ψηφίο της λέξεως του υπολογιστή το 0 και όλοι οι αρνητικοί αριθμοί το 1. Και εδώ, όπως παρατηρούμε, το πλέον σημαντικό ψηφίο της λέξεως του υπολογιστή παίζει το ρόλο «ψηφίο πρόσημο».

Παραδείγματα.

α) Οι αριθμοί $N_{10} = +27$ και $N_{10} = -27$ παριστάνονται σε υπολογιστή μήκους λέξεως 8 δυαδικών ψηφίων από ΠΠΣ1 ως:

$$N_{10} = +27 \Longleftrightarrow ΠΠΣ1\ N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0011011}}$$

$$N_{10} = -27 \Longleftrightarrow ΠΠΣ1\ N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1100100}}$$

Η παράσταση του $N_{10} = -27$ προκύπτει με συμπλήρωση ως προς 1 του $N_{10} = +27$.

β) Ομοίως των αριθμών $N_{10} = +35$ και $N_{10} = -35$.

$$N_{10} = +35 \Longleftrightarrow ΠΠΣ1\ N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0100011}}$$

$N_{10} = -35 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ1 $N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1011100}}$

γ) Οι αριθμοί ΠΠΣ1 $N_2 = 01101011$ και ΠΠΣ1 $N_2 = 10101101$ να τραπούν σε δεκαδικούς.

Επειδή ο $N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{1101011}}$ είναι θετικός τότε ο αντίστοιχος δεκαδικός βρίσκεται κατά τα γνωστά:

$N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{1101011}} = +(1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0) =$
$= +(64 + 32 + 8 + 2 + 1) = +107$

Ο $N_2 = \underline{\underline{1}}\underline{\underline{0101101}}$ είναι αρνητικός γιατί το πλέον σημαντικό ψηφίο του είναι το 1. Την απόλυτη τιμή του βρίσκομε συμπληρώνοντάς τον προς 1.

$N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{0101101}} = \underline{1}\ \underline{\underline{1010010}} = -(1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 +$

$+ 0.2^0) = -(64 + 16 + 2) = -82$

1.3.5 Πράξεις στους προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς.

Στην προηγούμενη τάξη του Λυκείου έχομε διδαχθεί την εκτέλεση των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων πάνω στις απόλυτες τιμές των δυαδικών αριθμών.

Από τις 4 αυτές πράξεις οι σπουδαιότερες είναι η πρόσθεση και η αφαίρεση. Ο πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών μπορεί να θεωρηθεί, όπως έχομε αναφέρει και στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, ως σύνολο προσθέσεων και ολισθήσεων, ενώ η διαίρεση ως σύνολο αφαιρέσεων, προσθέσεων και ολισθήσεων. Η πρόσθεση και η αφαίρεση απολύτων τιμών δυαδικών αριθμών είναι πράξεις τελείως διαφορετικές μεταξύ τους. Και όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, με τη χρησιμοποίηση των προσημασμένων αριθμών υπό μορφή ΠΠΣ2 ή ΠΠΣ1 δεν απαιτείται αφαίρεση απολύτων τιμών. Όλες οι αριθμητικές πράξεις εκτελούνται μέσω προσθέσεων, συμπληρώσεων και ολισθήσεων.

1.3.6 Εφαρμογές με δυαδικούς αριθμούς υπό ΠΠΣ2.

α) Δίνονται οι αριθμοί $X_{10} = +27$ και $Y_{10} = -43$ και ζητείται να βρεθεί ο αριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σε οκταψήφιο υπολογιστή με ΠΠΣ2.

$X_{10} = +27 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $\quad X_2 = \underline{0}\ \underline{0011011}$

$Y_{10} = -43 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $\quad Y_2 = 1\ 1010101$

$X_{10} + Y_{10} = -16 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $(X_2 + Y_2) = \underline{1}\ \underline{1110000}$

Η παράσταση $\underline{1}\ \underline{1110000}$ προκύπτει με συμπλήρωση ως προς 2 του $Y_{10} = +43$.

Το εξαγόμενο έχει σημαντικό ψηφίο 1, δηλαδή είναι αρνητικός αριθμός. Για να βρούμε την απόλυτή του τιμή βρίσκομε το συμπλήρωμά του ως προς 2.

Έτσι έχομε:

00010000, δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ο δυαδικός αριθμός — 16.

β) Δίνονται οι αριθμοί $X_{10} = -27$ καί $Y_{10} = +43$ και ζητείται ο αριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σε οκταψήφιο υπολογιστή με ΠΠΣ2.

$X_{10} = -27 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $\qquad X_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{1100101}$

$+$

$\underline{Y_{10} = +43} \Longleftrightarrow \underline{\text{ΠΠΣ2}} \qquad \underline{Y_2 = \underline{\underline{0}}\ 0101011}$

κρατούμενο 1
τελευτ. βαθμίδας

$X_{10} + Y_{10} = +16 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $(X_2 + Y_2) = \underline{\underline{0}}\ \underline{0010000}$

Η παραπάνω παράσταση $X_2 = \underline{1}\ \underline{1100101}$ προκύπτει με συμπλήρωση ως προς 2 του $X_{10} = +27$. Όπως γίνεται η πρόσθεση το κρατούμενο της τελευταίας βαθμίδας δεν λαμβάνεται υπόψη και παραλείπεται από τον υπολογιστή.

γ) Δίνονται οι αριθμοί $X_{10} = -27$ και $Y_{10} = -43$ και ζητείται ο αριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σε οκταψήφιο υπολογιστή με ΠΠΣ2.

$X_{10} = -27 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 : $\qquad X_2 = \underline{1}\ \underline{1100101}$

$+$

$\underline{Y_{10} = -43} \Longleftrightarrow \underline{\text{ΠΠΣ2 :}} \qquad \underline{Y_2 = \underline{1}\ 1010101}$

κρατούμενο 1
τελευταίας βαθμίδας

$X_{10} + Y_{10} = -70 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $(X_2 + Y_2) = \underline{\underline{1}}\ \underline{0111010}$

Όπως και παραπάνω το κρατούμενο της τελευταίας βαθμίδας δεν λαμβάνεται υπόψη. Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, γιατί έχει το πλέον σημαντικό ψηφίο, 1. Η απόλυτη τιμή του είναι κατά τα γνωστά 01000110. Δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ο δεκαδικός αριθμός — 70.

1.3.7 Εφαρμογές με δυαδικούς αριθμούς υπό ΠΠΣ1.

α) Δίνονται οι αριθμοί $X_{10} = +27$ και $Y_{10} = -43$ και ζητείται ο αριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σε οκταψήφιο υπολογιστή με ΠΠΣ1.

$X_{10} = +27 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ1 : $X_2 = \underline{0}\ \underline{0011011}$

$+$

$\underline{Y_{10} = -43} \Longleftrightarrow \underline{\text{ΠΠΣ1 : } Y_2 = \underline{\underline{1}}\ 1010100}$

$X_{10} + Y_{10} = -16 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ1 : $(X_2 + Y_2) = \underline{1}\ \underline{1101111}$

Η παράσταση $Y_2 = \underline{11010100}$ προκύπτει δια συμπληρώσεως ως προς 1 του $Y_{10} = +43$.

Το εξαγόμενο 11101111 έχει το πλέον σημαντικό ψηφίο 1. Δηλαδή είναι αρνητικός. Για να βρούμε την απόλυτή του τιμή βρίσκομε το συμπλήρωμά του ως προς 1. Έτσι έχομε: 00010000, δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ο δεκαδικός αριθμός − 16.

β) Δίνονται οι αριθμοί $X_{10} = -27$ και $Y_{10} = +43$ και ζητείται το άθροισμά των $(X_{10} + Y_{10})$ σε οκταψήφιο υπολογιστή υπό ΠΠΣ1.

$$
\begin{array}{lcll}
X_{10} = -27 & \Longleftrightarrow & \text{ΠΠΣ1} : X_2 = \underline{1}\ \underline{1100100} & \\
 & & \qquad\qquad\qquad + & \\
\underline{Y_{10} = +43} & \Longleftrightarrow & \underline{\text{ΠΠΣ1} : Y_2 = \underline{0}\ 0101011} & \\
X_{10} + Y_{10} = +16 & \Longleftrightarrow & \text{κρατούμενο } 1 & \leftarrow 00001111 \\
 & & \text{τελευτ. βαθμίδας} & \quad\ \ \underline{\qquad\quad 1\ +} \\
 & & & \quad 00010000
\end{array}
$$

Το κρατούμενο της τελευταίας βαθμίδας το προσθέτομε στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αποτελέσματος οπότε έχομε ως αποτέλεσμα το 00010000, δηλαδή το δεκαδικό αριθμό 16.

γ) Δίνονται οι αριθμοί $X_{10} = -27$ και $Y_{10} = -50$ και ζητείται το άθροισμά τους σε οκταψήφιο υπολογιστή υπό ΠΠΣ1.

$$
\begin{array}{lcll}
X_{10} = -27 & \Longleftrightarrow & \text{ΠΠΣ1} : X_2 = \underline{1}\ \underline{1100100} & \\
\underline{Y_{10} = -50} & \Longleftrightarrow & \underline{\text{ΠΠΣ1} : Y_2 = \underline{1}\ \underline{1001101}} & \\
X_{10} + Y_{10} = -77 & \Longleftrightarrow & \text{ΠΠΣ1} : (X_2 + Y_2) = 1 & \leftarrow 10110001 \\
 & & & \quad\ \ \underline{\qquad\quad 1\ +} \\
 & & & \quad \underline{10110010}
\end{array}
$$

Όπως και παραπάνω το κρατούμενο της τελευταίας βαθμίδας το προσθέτομε στό λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αποτελέσματος, για να βρούμε το τελικό εξαγόμενο.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι, όταν προσθέτομε αριθμούς στο ΠΠΣ1 κάθε φορά που υπάρχει κρατούμενο στην τελευταία βαθμίδα (υπερχείλιση — over — flow) το προσθέτομε στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αποτελέσματος για να βρούμε το τελικό εξαγόμενο.

Η διαδικασία αυτή λέγεται «ανακύκλωση της υπερχειλίσεως» (end around carry) και γίνεται αυτόματα από τον υπολογιστή.

1.3.8 Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση δυαδικών αριθμών.

Ο πολλαπλασιασμός των προσημασμένων αριθμών γίνεται με διαδοχικές προσθέσεις και ολισθήσεις και το αποτέλεσμα βγαίνει με το σωστό πρόσημο. Εννοείται ότι όταν εργαζόμασθε στο ΠΠΣ2 κάθε υπερχείλιση κατά την εκτέλεση της προσθέσεως ενός μερικού γινομένου δεν λαμβάνεται υπόψη, ενώ όταν εργαζόμασθε στο ΠΠΣ1 κάνομε ανακύκλωση της υπερχειλίσεως. Η πρόσθεση των μερικών γινομένων γίνεται καθώς αυτά δημιουργούνται με τις διαδοχικές ολισθήσεις. Αυτό γίνεται γιατί ο υπολογιστής εκτελεί την πρόσθεση μόνο δύο αριθμών.

Ανάλογα ισχύουν και για τη διαίρεση.

1.4 Ασκήσεις.

1. Να βρεθούν τα συμπληρώματα ως προς 2 και 1 των δυαδικών αριθμών:

   1010101, 1,110101, 011100, 000001

2. Δίνονται οι αρνητικοί αριθμοί:

   – 1001, – 00111, 0,1101, – 10,00101

   Να γραφούν με τη μορφή ΠΠΣ2 και ΠΠΣ1.

3. Δίνονται οι δυαδικοί αριθμοί:
   $X_2 = 01010$ και $Y_2 = 10010$ υπό ΠΠΣ2.
   Να υπολογισθεί το άθροισμα $X_2 + Y_2$ και να ελεγχεί το αποτέλεσμα των αντιστοίχων δεκαδικών αριθμών. Το ίδιο νά γίνει για τα ζεύγη αριθμών:

   α) $X_2 = 11010$, $Y_2 = 10010$

   β) $X_2 = 11010$, $Y_2 = 00010$

   γ) $X_2 = 01010$, $Y_2 = 00010$

   Να επαναληφθεί η άσκηση 3 αν θεωρηθεί ότι οι αριθμοί X_2 και Y_2 είναι υπό ΠΠΣ1.

4. Δίνονται οι αριθμοί $X_2 = -29$ και $Y_{10} = -52$ και ζητείται το άθροισμά των σε οκταψήφιο υπολογιστή υπό ΠΠΣ2 και υπό ΠΠΣ1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE - ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΝΟΛΩΝ - ΑΛΓΕΒΡΑ ΛΟΓΙΚΗΣ

2.1 Γενικά.

Στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές οι αριθμοί παριστάνονται με στοιχεία που έχουν δύο καταστάσεις. Τα στοιχεία αυτά καλούνται «Δίτιμα στοιχεία». Οι δύο καταστάσεις των στοιχείων αυτών αντιστοιχούν προς τα ψηφία 1 και 0 του δυαδικού συστήματος. Χρησιμοποιούνται ως δίτιμα στοιχεια, οι ηλεκτρονόμοι, οι κρυσταλλοδίοδοι και κρυσταλλοτρίοδοι λυχνίες.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι ο Ηλεκτρονικός Υπολογιστής αποτελείται από κυκλώματα διτίμων στοιχείων. Γιά τήν κατανόηση των λειτουργιών των παραπάνω κυκλωμάτων χρησιμοποιείται η άλγεβρα του Boole (Άγγλος Μαθηματικός ο οποίος γεννήθηκε το 1815 και πέθανε το 1864), η άλγεβρα των συνόλων και η άλγεβρα της λογικής.

2.2 Αξιώματα της άλγεβρας του Boole.

Για να μπορέσομε να αναπτύξομε την άλγεβρα του Boole, χρησιμοποιούμε ως σύμβολα τις πράξεις «+», «.» και «—», το σύμβολο «=», και την κλάση Ε, που την θεωρούμε ότι περιέχει τα στοιχεία Α, Β, Γ, ... Τα αξιώματα της Άλγεβρας του Boole είναι γνωστά ως αξιώματα του Huttington και είναι τα εξής:

Αξίωμα Πρώτο.

1α) Αν Α και Β είναι δύο στοιχεία που ανήκουν στην κλάση Ε, τότε και το στοιχειο (Α + Β) ανήκει στην κλάση Ε.

1β) Αν Α και Β ανήκουν στο Ε, τότε και το στοιχείο (Α . Β) ανήκει στο Ε.

Αξίωμα Δεύτερο.

2α) Υπάρχει ένα στοιχείο 0 που ανήκει στο Ε. Το στοιχείο αυτό ονομάζεται μηδενικό στοιχείο και είναι τέτοιο ώστε:

$$A + 0 = A \text{ για κάθε } A \text{ της } E$$

2β) Υπάρχει ένα στοιχείο 1 που ανήκει στο Ε, καλούμενο μοναδιαίο στοιχείο, τέτοιο ώστε:

$$A \,.\, 1 = A \text{ για κάθε } A \text{ της } E$$

Αξίωμα Τρίτο.

3α) Για κάθε ζεύγος στοιχείων Α και Β που ανήκουν στο Ε έχομε:

$$A + B = B + A$$

3β) Για κάθε ζεύγος στοιχείων Α και Β που ανήκουν στο Ε έχομε:

$$A \,.\, B = B \,.\, A$$

Αξίωμα Τέταρτο.

4α) Για κάθε τριάδα στοιχείων Α,Β,Γ που ανήκουν στο Ε έχομε:

$$A + (B \,.\, \Gamma) = (A + B) \,.\, (A + \Gamma)$$

4β) Για κάθε τριάδα στοιχείων Α, Β, Γ που ανήκουν στο Ε έχομε:

$$A \,.\, (B + \Gamma) = A \,.\, B + A \,.\, \Gamma$$

Αξίωμα Πέμπτο.

Για κάθε στοιχείο Α της Ε υπάρχει πάντοτε ένα στοιχειο $\overline{A}$ της Ε τέτοιο ώστε:

5α) $\quad A + \overline{A} = 1$

5β) $\quad A \,.\, \overline{A} = 0$

Αξίωμα Έκτο.

Στο Ε υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία Α και Β τέτοια ώστε:

$$A \neq B$$

Παρατηρούμε ότι μεταξύ τους τα αξιώματα που τα χαρακτηρίζομε με δείκτη α και β υπάρχει ένας «δυισμός» αν αντικαταστήσομε την πράξη (+) με τη δυική της (.) και το στοιχείο 1 (ή 0) με το δυικό του 0 (ή 1).

Π.χ. στο αξίωμα 5α ($A + \overline{A} = 1$) αν αντικαταστήσομε το «+» με το «.» και το 1 με το 0, βρίσκομε ότι:

$A \,.\, \overline{A} = 0$ που είναι ακριβώς το 5β.

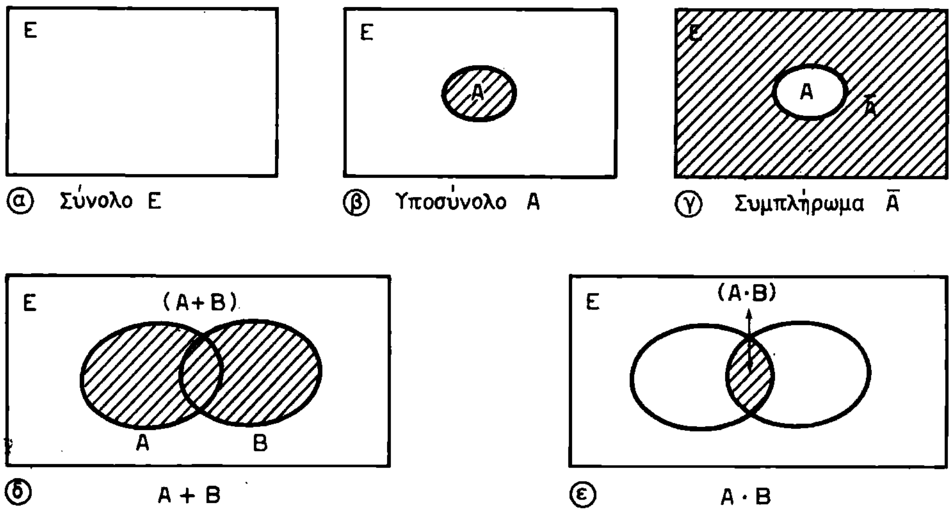
Η ιδιότητα αυτή της δυικότητας είναι χρήσιμη για την κατασκευή και απόδειξη των θεωρημάτων.

2.3 Άλγεβρα συνόλων.

2.3.1 Διαγράμματα Venn.

Στην άλγεβρα των συνόλων η κλάση Ε παριστάνει ένα βασικό σύνολο και τα στοιχεία Α, Β, Γ... παριστάνουν υποσύνολα του βασικού συνόλου Ε.

Το σύνολο «+» της άλγεβρας του Boole παριστάνει την «ένωση» συνόλων, το σύμβολο «.» την «τομή» συνόλων, το σύμβολο «—» το «συμπλήρωμα δοθέντος συνόλου ως προς το βασικό σύνολο Ε» και το «=» την «ισότητα» συνόλων. Επίσης το μοναδιαίο στοιχείο παριστάνει το βασικό σύνολο Ε και το μηδενικό στοιχείο το κενό σύνολο. Το βασικό σύνολο Ε μπορεί επίσης να παριστάνει ένα σύνολο σημείων του επιπέδου τα οποία στοιχεία βρίσκονται μέσα σε ένα ορθογώνιο [σχ. 2.3(α)]. Το υποσύνολο Α ή Β μπορεί να παρασταθεί ως ένα σύνολο σημείων του Ε τα οποία περικλείονται μέσα σε μία κλειστή γραμμή [σχ. 2.3(α)(β)]. Αν Α είναι



Σχ. 2.3.

ένα υποσύνολο του Ε, τότε με Α παριστάνομε το γραμμοσκιασμένο μέρος του Ε που δεν κατέχει το Α [σχ. 2.3(β)]. Με Α + Β παριστάνομε το γραμμοσκιασμένο τμήμα που αποτελείται από τη συνένωση των δύο συνόλων Α και Β [σχ. 2.3(δ)]. Τέλος με Α . Β παριστάνομε το κοινό μέρος των δύο συνόλων [σχ. 2.3(ε)]. Δηλαδή την τομή των δύο συνόλων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.1.
Αντιστοιχία της άλγεβρας Boole και της άλγεβρας Συνόλων

Άλγεβρα Boole	Άλγεβρα Συνόλων
0	Ø (Κενό σύνολο)
1	Ε (Βασικό σύνολο)
+	U (Ένωση συνόλων)
	∩ (Τομή συνόλων)
$\overline{p}$	p΄ (Συμπλήρωμα συνόλου)

Τα παραπάνω διαγράμματα του σχήματος καλούνται «διαγράμματα Venn». Στα διαγράμματα Venn δύο σύνολα Α και Β είναι ίσα όταν κατέχουν ακριβώς την ίδια περιοχή του Ε.

2.3.2 Σχέση μεταξύ άλγεβρας του Boole και άλγεβρας συνόλων.

Ο πίνακας 2.3.1 μας δίνει την αντιστοιχία των συμβόλων μεταξύ της άλγεβρας του Boole και της άλγεβρας των συνόλων.

2.4 Άλγεβρα Λογικής – Πίνακες Αληθείας.

Στην άλγεβρα της λογικής η κλάση Ε παριστάνει το σύνολο όλων των δυνατών προτάσεων και τα Α, Β, Γ, ... παριστάνουν τις προτάσεις. Κάθε πρόταση, όπως π.χ. «Το χιόνι είναι άσπρο», «Το άθροισμα των γωνιών παντός τριγώνου είναι 180°», «Το 5 είναι άρτιος» θεωρείται ότι μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής.

Αν μια πρόταση «Α» είναι αληθής, λέμε ότι έχει τιμή 1 και γράφομε Α = 1, αντίθετα αν είναι ψευδής λέμε ότι έχει τιμή 0 και γράφομε Α = 0. Όταν έχομε δύο προτάσεις Α και Β είναι δυνατόν και οι δύο να είναι αληθείς ή και οι δύο ψευδείς ή η Α αληθής και η Β ψευδής ή η Α ψευδής και η Β αληθής.

Όταν και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς τότε λέμε ότι οι προτάσεις είναι ίσες.

Οι τέσσερεις αυτές περιπτώσεις δίνονται παραστατικά από τον πίνακα 2.4.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.1.

Προτάσεις	
Α	Β
0	0
0	1
1	0
1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.2.

Προτάσεις		
Α	Β	Γ
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Από τον τελευταίο αυτόν συνδυασμό είναι προφανές ότι αν έχομε τρεις προτάσεις Α, Β, Γ θα έχομε 8 δυνατές περιπτώσεις (πίνακας 2.4.2). Γενικά για n προτάσεις θα έχομε 2^n δυνατές περιπτώσεις συνδυασμών των τιμών των.

Στην άλγεβρα της λογικής το σύμβολο «+» παριστάνει το λογικό «Η», το σύμβολο «.» παριστάνει το λογικό «ΚΑΙ», το σύμβολο «—» το λογικό «ΟΧΙ» και το σύμβολο «=» την ισότητα των προτάσεων.

Η πρόταση (A + B) είναι ψευδής μόνον όταν και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς (πίνακας 2.4.3). Η πρόταση (A . B) (πίνακας 2.4.4) είναι αληθινή όταν και οι δύο προτάσεις είναι αληθινές. Τέλος η πρόταση $\overline{A}$ είναι αληθής όταν η A είναι ψευδής και ψευδής όταν η A είναι αληθής (πίνακας 2.4.5).

Όταν σε έναν πίνακα που περιλαμβάνονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί τιμών για ένα αριθμό προτάσεων και δίνεται για κάθε συνδυασμό η τιμή μιας παραστάσεως η οποία περιλαμβάνει μία ή περισσότερες από αυτές τις προτάσεις καλείται «ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ» αυτών των προτάσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.3.

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.4.

A	B	A . B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.5.

A	$\overline{A}$
0	1
0	1
1	0
1	0

Η αντιστοιχία μεταξύ των συμβόλων της άλγεβρας του Boole και άλγεβρας της λογικής δίνεται από τον πίνακα 2.4.6.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.6.

Άλγεβρα Boole	Άλγεβρα λογικής
«+»	«Η»
«.»	«ΚΑΙ»
«—»	«ΟΧΙ»

Θεωρήματα άλγεβρας Boole.

Μετά την εισαγωγή των αξιωμάτων που έχομε ήδη αναφέρει στην παράγραφο 2.2 υπάρχουν πολλά είδη θεωρημάτων τα οποία προέρχονται από αυτά, μερικά των οποίων αναφέρομε παρακάτω.

Η απόδειξη των θεωρημάτων αυτών είναι δυνατόν να γίνει με τα προαναφερθέντα αξιώματα, με τα διαγράμματα Venn, με τους πίνακες αληθείας και με τα κυκλώματα των διακοπτών.

Τα σπουδαιότερα από τα θεωρήματα αυτά είναι:

1. Θεώρημα μοναδικότητας.

α) Το στοιχείο 1 είναι μοναδικό.

β) Το στοιχείο 0 είναι μοναδικό.

γ) Το $\overline{A}$ του A είναι μοναδικό.

2. Θεώρημα διπλής αρνήσεως.

$\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A$

3. Θεώρημα του De Morgan.

α) $\overline{(A + B)} = \overline{A} \,.\, \overline{B}$

β) $\overline{(A \,.\, B)} = \overline{A} + \overline{B}$

4. Θεώρημα συμπληρώματος.

α) $A + \overline{A} = 1$

β) $A \,.\, \overline{A} = 0$

5. Θεώρημα αυτοενώσεως και αυτοτομής.

α) $A + A = A$

β) $A \,.\, A = A$

6. Θεώρημα κυριαρχικότητας.

α) $A + 1 = 1$

β) $A \,.\, 0 = 0$

7. Θεώρημα απορροφητικότητας.

α) $A \,.\, (A + B) = A$

β) $A + (A \,.\, B) = A$

8. Θεώρημα αντιμεταθέσεως.

α) $A + B = B + A$

β) $A \,.\, B = B \,.\, A$

9. Θεώρημα προσεταιρισμού.

α) $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$

β) $A \,.\, (B \,.\, \Gamma) = (A \,.\, B) \,.\, \Gamma$

10. Θεώρημα επιμερισμού.

α) $A \,.\, (\overline{A} + B) = A \,.\, B$

β) $A + \overline{A} \,.\, B = A + B$

11. Θεωρήματα μηδενός και μονάδας.

α) $A + 0 = A$

β) $A \,.\, 1 = A$

και

α) $A + 1 = 1$

β) $A \,.\, 0 = 0$

Στα παραπάνω θεωρήματα τα α και β αποτελούν δυικά θεωρήματα.

Πράγματι, αν αποδείξομε ένα θεώρημα, αμέσως μπορούμε να κατασκευάσομε το δυικό του θεώρημα, αν αντικαταστήσομε την πράξη «+» με την πράξη «.» και αντίστροφα καθώς και το 0 (ή 1) με το 1 (ή 0) καθώς και αν αντικαταστήσομε κάθε στοιχείο με το συμπλήρωμά του.

2.4.1 Αποδείξεις των θεωρημάτων με τη βοήθεια των αξιωμάτων.

Θεώρημα Πρώτο.

α) Έστω ότι υπάρχουν δύο στοιχεία y_1 και y_2 για τα οποία ισχύουν: $A \,.\, y_1 = A$ και $A \,.\, y_2 = A$ για κάθε A. Αν στην πρώτη θέσομε όπου $A = y_2$ και στη δεύτερη όπου $A = y_1$, τότε έχομε:

$$y_2 \cdot y_1 = y_2 \quad \text{και} \quad y_1 \cdot y_2 = y_1$$

Αλλά με βάση το αξίωμα 3β της παραγράφου 2.2 έχομε: $y_2 = y_1$

β) Έστω ότι υπάρχουν δύο στοιχεία x_1 και x_2 για τα οποία ισχύουν $A + x_1 = A$ και $A + x_2 = A$. Αν θέσομε όπου $A = x_2$ στην πρώτη και $A = x_1$ στη δεύτερη ισότητα, τότε έχομε:

$$x_2 + x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad x_1 + x_2 = x_1$$

Αλλά με βάση το αξίωμα 3β της παραγράφου 2.2 έχομε: $x_2 = x_1$

γ) Έστω ότι το Α έχει δύο συμπληρώματα το $\overline{A}_1$ και $\overline{A}_2$ ώστε $A + \overline{A}_1 = A + \overline{A}_2 = 1$ και $A \,.\, \overline{A}_1 = A \,.\, \overline{A}_2 = 0$. Τότε θα έχομε:

$$\begin{aligned} \overline{A}_2 &= 1 \,.\, \overline{A}_2 = (A + \overline{A}_1) \,.\, \overline{A}_2 = A\overline{A}_2 + \overline{A}_1 \,.\, \overline{A}_2 \\ &= 0 + \overline{A}_1 \,.\, \overline{A}_2 = \overline{A}_1 \,.\, A + \overline{A}_1 \,.\, \overline{A}_2 \\ &= \overline{A}_1 \,(A + \overline{A}_2) = \overline{A}_1 \,.\, 1 = \overline{A}_1 \end{aligned}$$

Άρα $\overline{A}_2 = \overline{A}_1$.

Από την τελευταία σχέση συνάγεται ότι υπάρχει ένα μόνο συμπλήρωμα του Α.

Θεώρημα Δεύτερο.

Από τις γνωστές σχέσεις $A + \overline{A} = 1$ και $A \,.\, \overline{A} = 0$ συνεπάγεται ότι ένα συμπλήρωμα του $\overline{A}$ ισούται με το Α. Δηλαδή $\overline{(\overline{A})} = A$.

Θεώρημα Τρίτο.

Για την απόδειξη του θεωρήματος του De Morgan αρκεί να δείξομε ότι:

$$(A + B) + \bar{A} \,.\, \bar{B} = 1 \text{ καί } (A + B) \,.\, (\bar{A} \,.\, \bar{B}) = 0$$

α) $(A + B) + \bar{A} \,.\, \bar{B} = [(A + B) + \bar{A}] \,.\, [(A + B) + \bar{B}] = [(A + \bar{A}) + B] \,.\, [(B + \bar{B}) + A] = (1 + B) \,.\, (1 + A) = 1 \,.\, 1 = 1.$

β) $(A + B) \,.\, (\bar{A} \,.\, \bar{B}) = A \,.\, (\bar{A} \,.\, \bar{B}) + B \,.\, (\bar{A} \,.\, \bar{B}) = (A \,.\, \bar{A}) \,.\, \bar{B} + (B \,.\, \bar{B}) \,.\, \bar{A} = 0 \,.\, \bar{B} + 0 \,.\, \bar{A} = 0 + 0 = 0$

Θεώρημα Τέταρτο.

α) $\underline{A + A \,.\, B = A.}$

Έχομε: $A + A \,.\, B = A \,.\, 1 + A \,.\, B = A \,.\, (1 + B) = A \,.\, 1 = A$

β) $\underline{A \,.\, (A + B) = A.}$

Έχομε: $A \,.\, (A + B) = A \,.\, A + A \,.\, B = A + A \,.\, B = A$

Θεώρημα Πέμπτο.

α) $\underline{A + A = A.}$

Έχομε: $A + A = (A + A) \,.\, 1 = (A + A) \,.\, (A + \bar{A}) = A + A \,.\, \bar{A} = A + 0 = A$

β) $\underline{A \,.\, A = A.}$

Ομοίως: $A \,.\, A = A \,.\, A + 0 = A \,.\, A + A \,.\, \bar{A} = A\, (A + \bar{A}) = A \,.\, 1 = A$

Θεώρημα Έκτο.

α) $\underline{A + 1 = 1.}$

Έχομε: $A + 1 = (A + 1) \,.\, 1 = (A + 1) \,.\, (A + \bar{A}) = A + \bar{A} + 1 = A + \bar{A} = 1$

β) $A \,.\, 0 = 0.$

Ομοίως: $A \,.\, 0 = A \,.\, (A \,.\, \bar{A}) = (A \,.\, A) \,.\, \bar{A} = A \,.\, \bar{A} = 0$

Αν χρησιμοποιήσομε τα αξιώματα της παραγράφου 2.2 μπορούμε να αποδείξομε και τα υπόλοιπα θεωρήματα.

Άσκηση.

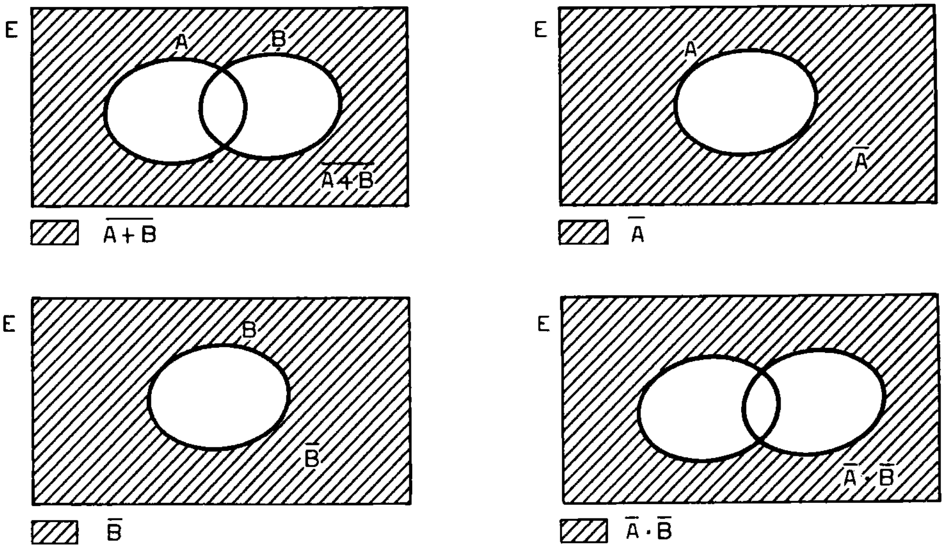
Να αποδειχθούν τα υπόλοιπα θεωρήματα με τη βοήθεια των αξιωμάτων.

2.4.2 Απόδειξη θεωρημάτων με τα διαγράμματα του Venn.

Η απόδειξη ενός θεωρήματος με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn επιτυγχάνεται με την ταύτιση των επιφανειών που καλύπτουν οι παραστάσεις κάθε μέλους μιας ισότητας.

α) Θεώρημα του De Morgan.

Από τα διαγράμματα του σχήματος 2.4α διαπιστώνεται ότι οι γραμμοσκιασμέ-



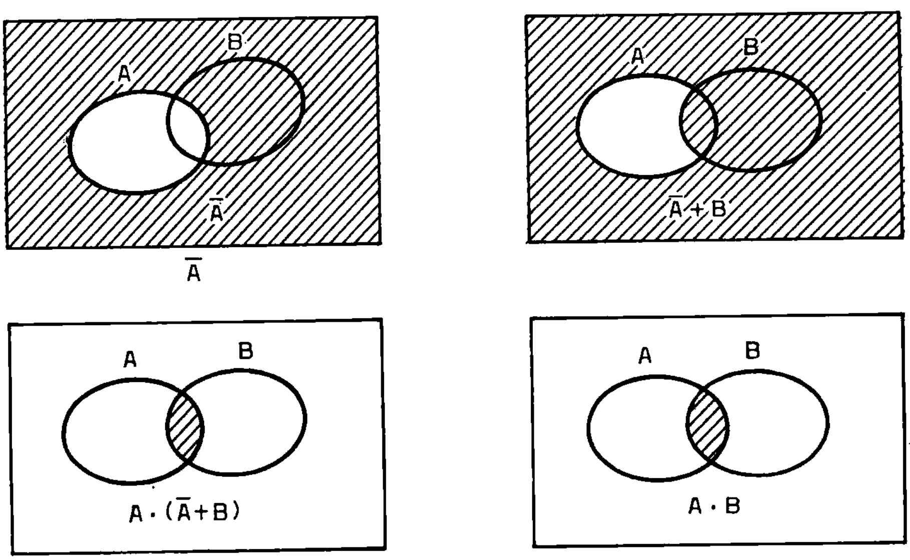
Σχ. 2.4α.

νες επιφάνειες $\overline{A + B}$ καί $\overline{A} \,.\, \overline{B}$ είναι ίδιες.

Άρα $\overline{A + B} = \overline{A} \,.\, \overline{B}$

β) Θεώρημα του επιμερισμού.

Από τα διαγράμματα του σχήματος 2.4β διαπιστώνομε ότι οι γραμμοσκιασμένες επιφάνειες $A \,.\, (\overline{A} + B)$ και $A \,.\, B$ ταυτίζονται.

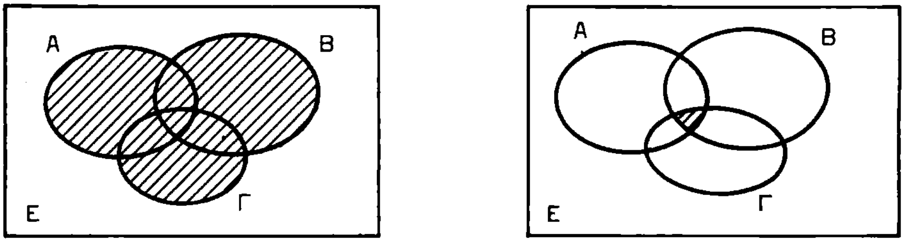


Σχ. 2.4β.

Άρα $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

γ) Θεώρημα του προσεταιρισμού (σχ. 2.4γ).

Η ένωση και η τομή τριών συνόλων είναι ανεξάρτητος από τη σειρά της ενώσεως ή τομής των συνόλων. Η απόδειξη θεωρημάτων με τους πίνακες αληθείας και με τα κυκλώματα των διακοπτών αναφέρεται στο κεφάλαιο 3.



$A+(B+\Gamma) = (A+B)+\Gamma$ $\qquad$ $A\cdot(B\cdot\Gamma)=(A\cdot B)\cdot\Gamma$

Σχ. 2.4γ.

2.5 Ασκήσεις.

α) Με τη βοήθεια των αξιωμάτων της παραγράφου 2.2 και των θεωρημάτων της παραγράφου 2.4 να αποδειχθούν οι παρακάτω λογικές ταυτότητες:

1) $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$

2) $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

3) $(A + B) \cdot (\overline{A} + \Gamma) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \Gamma$

4) $A \cdot B + \overline{A} \cdot \Gamma = (\overline{A} + B) \cdot (A + \Gamma)$

β) Με τη βοήθεια του αξιώματος 3 της παραγράφου 2.2 και του θεωρήματος 6 της παραγράφου 2.4 να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες πάνω στα στοιχεία 0 και 1:

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 0 + 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0 \qquad 0 + 1 = 1$$
$$1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1$$
$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 + 1 = 1$$

γ) Με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn να αποδειχθεί η αλήθεια των θεωρημάτων της παραγράφου 2.4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΔΙΑΚΟΠΤΩΝ

3.1 Γενικά.

Στην άλγεβρα των διακοπτών ως κλάση Ε θεωρούμε το σύνολο των διακοπτών Α, Β, Γ, . . . ενός συστήματος.

Στην αρχή η άλγεβρα του Boole αφορούσε περιγραφές προτάσεων των οποίων οι απαντήσεις ήταν αληθινές ή ψεύτικες.

Αργότερα όμως ο E. Shannon (1916) την εχρησιμοποίησε στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων πολλών επαφών όπως π.χ. στα τηλεφωνικά κυκλώματα τα οποία ήταν δυνατό να είναι ανοικτά ή κλειστά.

Η άλγεβρα του Boole βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στους Η/Υ. Συγκρινόμενη με τη συνηθισμένη (κλασική) άλγεβρα είναι πολύ απλή. Όπως είδαμε στην άλγεβρα, οι μεταβλητές λαμβάνουν μόνοι δύο τιμές 0 ή 1. Τέτοιες μεταβλητές λέγονται ***δίτιμα στοιχεια*** ή ***λογικές μεταβλητές*** ή ***μεταβλητές του Boole.***

Με τους αριθμούς 0 και 1 μπορεί να γίνει μια αντιστοιχία με κύκλωμα ανοικτό ή κλειστό, ή ακόμα με εσφαλμένη ή αληθινή κατάσταση ενός κυκλώματος, γιατί οι καταστάσεις αυτές από τη φύση τους είναι δυαδικές.

Για να αποδείξομε μερικά βασικά θεωρήματα στην άλγεβρα του Boole, θα χρησιμοποιήσομε ορισμένα κυκλώματα με διακόπτες.

Όταν σε ένα κύκλωμα ο διακόπτης Α π.χ. είναι ανοικτός, τότε λέμε ότι έχει τιμή $A = 0$, αν όμως είναι κλειστός, τότε λέμε ότι έχει τιμή $A = 1$. Όπως γνωρίζομε υπάρχουν κυκλώματα που έχουν τους διακόπτες σε παράλληλη θέση και κυκλώματα που έχουν τους διακόπτες σε σειρά.

Όταν θα έχομε ένα κύκλωμα με διακόπτες σε παράλληλη θέση, τότε το κύκλωμα θα καλείται και κύκλωμα «Η» και θα το συμβολίζομε με την πράξη «+», ενώ το κύκλωμα με διακόπτες σε σειρά θα καλείται κύκλωμα «ΚΑΙ» και θα το συμβολίζομε με την πράξη «.».

Στη συνέχεια περιγράφομε συνδυασμούς τέτοιων διακοπτών.

3.2 Κυκλώματα διακοπτών.

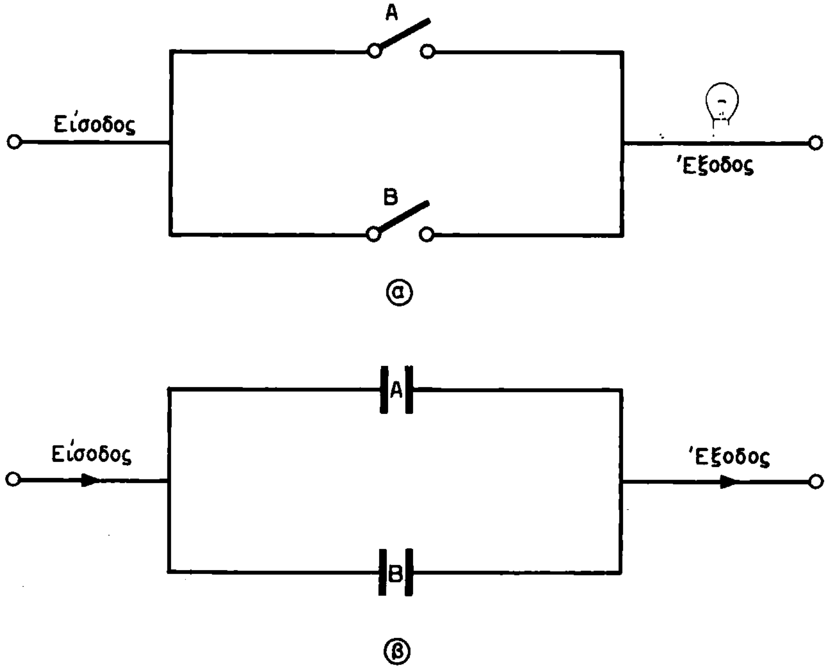
3.2.1 Κύκλωμα «Η» ή κύκλωμα εν παραλλήλω.

Από το σχήμα 3.2α διαπιστώνομε ότι:

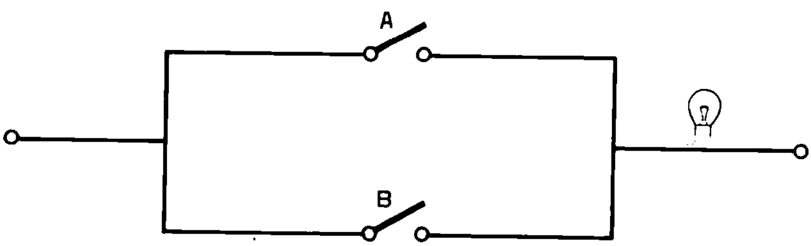
α) Αν και οι δύο διακόπτες Α και Β είναι ανοικτοί, τότε η λάμπα δεν ανάβει (σχ. 3.2β).

Α ανοικτός + Β ανοικτός = Λάμπα δεν ανάβει

0 + 0 = 0



Σχ. 3.2α.
Παράσταση του κυκλώματος «Η». Τα (α) και (β) συμβολίζουν το ίδιο κύκλωμα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσομε το ένα ή το άλλο.*



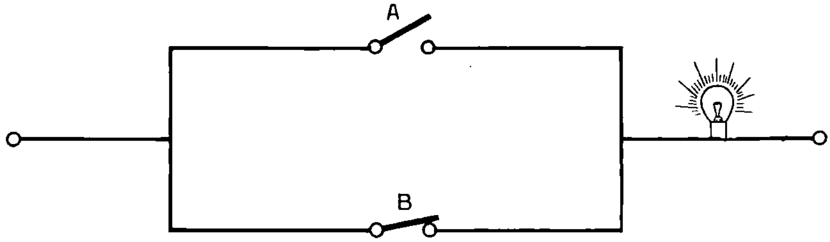
Σχ. 3.2β.

β) Αν Α διακόπτης ανοικτός και Β διακόπτης κλειστός, τότε η λάμπα ανάβει (σχ. 3.2γ).

Α ανοικτός + Β κλειστός = Λάμπα ανάβει

0 + 1 = 1

* Στο σχήμα 3.2α οι διακόπτες παριστάνονται κατά γενικό τρόπο ανεξάρτητα αν αυτοί είναι ανοικτοί ή κλειστοί. Με Α συμβολίζομε διακόπτη κλειστό και με $\overline{A}$ διακόπτη ανοικτό ή και αντιστρόφως.

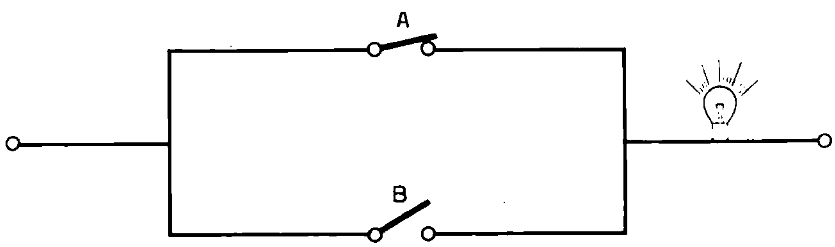


Σχ. 3.2γ.

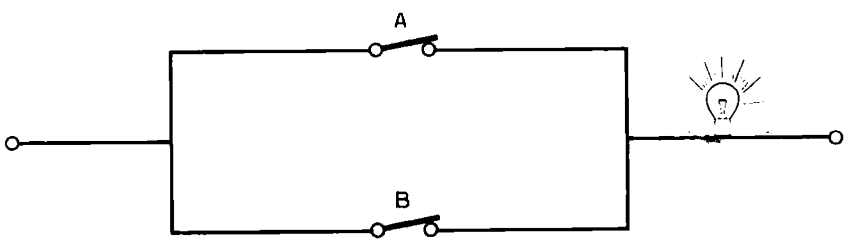
γ) Αν Α διακόπτης κλειστός και Β διακόπτης ανοικτός, τότε η λάμπα ανάβει (σχ. 3.2δ).

Α κλειστός + Β ανοικτός = Λάμπα ανάβει

1 + 0 = 1



Σχ. 3.2δ.



Σχ. 3.2ε.

δ) Αν και οι δύο διακόπτες κλειστοί, τότε η λάμπα ανάβει (σχ. 3.2ε).

Α κλειστός + Β κλειστός = Λάμπα ανάβει

1 + 1 = 1

Επομένως στο κύκλωμα «Η» έχομε:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

Παρατηρούμε ότι οι συνδυασμοί αυτοί των τιμών είναι οι ίδιοι με τον πίνακα αληθείας 2.4.1 της παραγράφου 2.4.

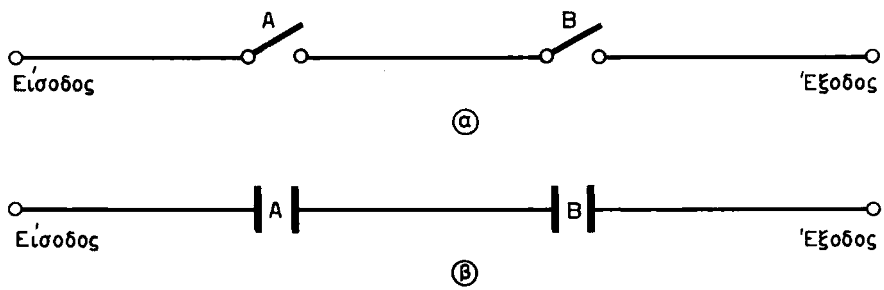
3.2.2 Κύκλωμα «ΚΑΙ» — Διακόπτες σε σειρά.

Από το σχήμα 3.2ζ διαπιστώνομε ότι:

α) Αν και οι δύο διακόπτες Α και Β είναι ανοικτοί, τότε η λάμπα δεν ανάβει (σχ. 3.2ζ).

Α ανοικτός . Β ανοικτός = Λάμπα δεν ανάβει

0 0 = 0



Σχ. 3.2στ.
Παράσταση του κυκλώματος «ΚΑΙ». Τα (α) και (β) είναι συμβολισμοί για το ίδιο κύκλωμα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσομε το ένα ή το άλλο.

Σχ. 3.2ζ.

β) Αν διακόπτης Α ανοικτός και Β κλειστός τότε η λάμπα δεν ανάβει (σχ. 3.2η).

Α ανοικτός . Β κλειστός = Λάμπα δεν ανάβει

0 1 = 0

Σχ. 3.2η.

γ) Αν διακόπτης Α κλειστός και Β ανοικτός, η λάμπα δεν ανάβει (σχ. 3.2θ).

Α κλειστός · Β ανοικτός = Λάμπα δεν ανάβει

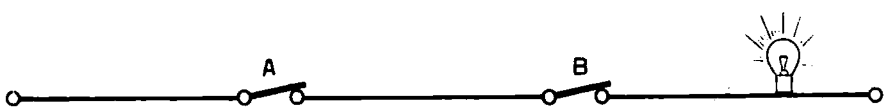
1 · 0 = 0

Σχ. 3.2θ.

δ) Αν και οι δύο διακόπτες Α και Β είναι συγχρόνως κλειστοί, τότε η λάμπα ανάβει (σχ. 3.2ι).

Α κλειστός · Β κλειστός = Λάμπα ανάβει

1 · 1 = 1



Σχ. 3.2ι.

Συνεπώς στο κύκλωμα «ΚΑΙ» έχομε:

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

3.3 Πίνακες Αληθείας.

Τα αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας του Boole αποδεικνύονται με τη βοήθεια των πινάκων αληθείας (βλέπε παράγραφο 2.4) στους οποίους ελέγχομε όλες τις δυνατές περιπτώσεις τιμών των μεταβλητών.

Παραδείγματα.

α) $A + B = B + A$, $\quad A \cdot B = B \cdot A$

Από τον πίνακα 3.3.1 φαίνεται ότι οι στήλες A + B, B + A, A · B, B · A σε όλες τις περιπτώσεις είναι:

$$A + B = B + A \text{ καί } A \cdot B = B \cdot A$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1.

A	B	A + B	B + A	A · B	B · A
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

β) $A + (B + Γ) = (A + B) + Γ$
$A \cdot (B \cdot Γ) = (A \cdot B) \cdot Γ$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.2.

A	B	Γ	B + Γ	A + (B + Γ)	A + B	(A + B) + Γ
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Από τον πίνακα 3.3.2 διαπιστώνεται ότι $A + (B + Γ) = (A + B) + Γ$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.3.

Α	Β	Γ	Β · Γ	Α · (Β · Γ)	Α · Β	(Α · Β) · Γ
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Από τον πίνακα 3.3.3 διαπιστώνεται ότι Α · (Β · Γ) = (Α · Β) · Γ.

γ) Α + (Β · Γ) = (Α + Β) · (Α + Γ)
Α · (Β + Γ) = (Α · Β) + (Α · Γ)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.4.

Α	Β	Γ	Β · Γ	Α + (Β · Γ)	Α + Β	Α + Γ	(Α + Β) · (Α + Γ)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.5.

A	B	Γ	B + Γ	A · (B + Γ)	A · B	A · Γ	(A · B) + (A · Γ)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Από τους πίνακες 3.3.4 και 3.3.5 διαπιστώνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις έχομε:

$$A + (B \cdot \Gamma) = (A + B) \cdot (A + \Gamma)$$
$$A \cdot (B + \Gamma) = (A \cdot B) + (A \cdot \Gamma)$$

δ) $A + 0 = A$ $\quad$ $A + 1 = 1$

$A \cdot 1 = A$ $\quad$ $A \cdot 0 = 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.6.

A	0	A + 0
0	0	0(= A)
1	0	1(= A)

A	1	A · 1
0	1	0(= A)
1	1	1(= A)

A	1	A + 1
0	1	1
1	1	1

A	0	A · 0
0	0	0
1	0	0

ε) $A + \overline{A} = 1$ $\quad$ $A . \overline{A} = 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.7.

A	$\overline{A}$	$A + \overline{A}$
0	1	1
1	0	1

A	$\overline{A}$	$A \cdot \overline{A}$
0	1	0
1	0	0

στ) $(\overline{A + B}) = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} + \overline{B}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.8.

A	B	A + B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	A · B	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Από τον πίνακα 3.3.8 έχομε:

$(\overline{A + B}) = \overline{A} \cdot \overline{B}$ καί $(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} + \overline{B}$

Ασκήσεις.

Με τη βοήθεια των πινάκων αληθείας, να αποδείξετε την αλήθεια των παρακάτω παραστάσεων.

— $AB + \overline{A}B + A\overline{B} = \overline{A} + B$

— $AB\Gamma + A\Gamma + B\Gamma = A + B + \Gamma$

— $AB + \Gamma\overline{B} + A\Gamma = AB + \overline{B}\Gamma$

3.4 Απλοποιήσεις Λογικών Παραστάσεων.

Δίνεται ο πίνακας 3.4.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}.B$	$A+\overline{A}.B$	A + B
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Από τον πίνακα 3.4.1 που μας δίνει την ισότητα $A + \overline{A} \, . \, B = A + B$ (1) διαπιστώνομε ότι σε κάθε αλγεβρική παράσταση αντιστοιχεί και ένας πίνακας αληθείας. Από τον πίνακα διαπιστώνομε ότι κάθε παράσταση μπορεί να δοθεί με απλούστερη μορφή και να είναι ισοδύναμη με την αρχική της παράσταση. Για να βρούμε την απλοποιημένη μορφή μιας αλγεβρικής παραστάσεως χρησιμοποιούμε εκτός από τους πίνακες αληθείας τα αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας του Boole.

Η μέθοδος αυτή απλοποιήσεως καλείται αλγεβρική.

Με την απλοποίηση αυτή η άλγεβρα του Boole γίνεται απαραίτητο εφόδιο για την κατασκευή απλουστέρων λογικών κυκλωμάτων.

Παρακάτω δίνομε απλοποιήσεις ορισμένων παραστάσεων με τη βοήθεια των αξιωμάτων και των θεωρημάτων της άλγεβρας του Boole. Εκτός από την παραπάνω μέθοδο, υπάρχουν και άλλοι τρόποι απλοποιήσεως παραστάσεων όπως π.χ. οι πίνακες Karnaugh με τους οποίους δεν θα ασχοληθούμε τώρα.

Ασκήσεις.

Α΄ ομάδα.

α) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις $A + \overline{A} \, . \, B$

Απόδειξη.

Έχομε $A + \overline{A} \, . \, B = (A + \overline{A})\,(A + \Gamma)$ = Θεώρημα επιμερισμού.

$= 1 \cdot (A + B)$ = Θεώρημα συμπληρώματος

$= A + B$

Άρα η παράσταση $A + \overline{A} \, . \, B$ έλαβε την ισοδύναμη μορφή $A \, . \, B$

β) Να απλοποιηθεί η παράσταση $A \, . \, B + \Gamma \, . \, \overline{B} + A \, . \, \Gamma$

$A \, . \, B + \Gamma \, . \, \overline{B} + A \, . \, \Gamma = (A \, . \, B) \, . \, 1 + (\Gamma \, . \, \overline{B}) \, . \, 1 + (A \, . \, \Gamma) \, . \, 1 =$

$= (A \, . \, B)\,(\Gamma + \overline{\Gamma}) + (\Gamma \, . \, \overline{B})\,(A + \overline{A}) + (A \, . \, \Gamma)\,(B + \overline{B})$

$= AB\Gamma + AB\overline{\Gamma} + A\overline{B}\Gamma + \overline{A}\overline{B}\Gamma + AB\Gamma + A\overline{B}\Gamma$

$= AB\Gamma + AB\overline{\Gamma} + A\overline{B}\Gamma + \overline{A}\overline{B}\Gamma$

$= AB\,(\Gamma + \overline{\Gamma}) + \overline{B}\Gamma\,(A + \overline{A})$

$= AB \, . \, 1 + \overline{B} \, . \, \Gamma \, . \, 1$

$= A \, . \, B + \overline{B} \, . \, \Gamma$

γ) $AB + \Gamma\overline{B}$

$AB + \Gamma\overline{B} = AB + \Gamma\overline{B} + A\Gamma$ (με βάση το παράδειγμα β)

$= AB + \Gamma\overline{B} + A\Gamma + B\overline{B}$ διότι $B \, . \, \overline{B} = 0$ (παράγρ. 2.2, αξίωμα 5)

$= A\,(B + \Gamma) + \overline{B}\,(B + \Gamma)$

$= (A + \overline{B})\,(B + \Gamma)$

δ) $(A + B)\,(B + \Gamma)\,(\Gamma + A) =$;

$(A + B)\,(B + \Gamma)\,(\Gamma + A) = [(A + B)\,(B + \Gamma)]\,(\Gamma + A)$

$= (B + A\Gamma)\,(\Gamma + A)$

$= B\Gamma + BA + A\Gamma\Gamma + AA\Gamma =$

$= B\Gamma + BA + A\Gamma + A\Gamma$

$= B\Gamma + BA + A\Gamma$

$= B\Gamma + AB + A\Gamma$

ε) $\overline{(A\overline{B} + \overline{A}B)} = \overline{(A \,.\, \overline{B})} \,.\, \overline{(\overline{A} \,.\, B)} = (\overline{A} + \overline{\overline{B}}) \,.\, (\overline{\overline{A}} + \overline{B})$

$= (\overline{A} + B) \,.\, (A + \overline{B})$

$= A\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + BA + B\overline{B} =$

$= 0 + \overline{A}\overline{B} + AB + 0$

$= \overline{A}\overline{B} + AB$

Β΄ ομάδα.

α) Να απλοποιήσετε τη λογική παράσταση:

$(A + \overline{A}B)\ (A + B)$

β) Ομοίως την παράσταση:

$\overline{\overline{A}\ (B + \overline{\Gamma})} \,.\, (A + \overline{B} + \Gamma) \,.\, \overline{(\overline{A} \,.\, \overline{B} \,.\, \overline{\Gamma})}$

γ) Ομοίως $A\overline{B} + AB \,.\, (A + B)$

δ) Ομοίως $\overline{A}B\Gamma + AB\overline{\Gamma} + AB\Gamma + \overline{A}B$

ε) Ομοίως $(\overline{A} + AB)\ (\overline{A} + B)$

στ) Ομοίως $\overline{(A\overline{B} + \overline{A}B)}$

3.5 Εύρεση της Λογικής παραστάσεως όταν δίνεται το κύκλωμα διακοπτών.

Έχομε ήδη εξετάσει κυκλώματα διακοπτών της μορφής «Η» (διακόπτες εν παραλλήλω) και κυκλώματα της μορφής «ΚΑΙ» (διακόπτες σε σειρά). Στους Η/Υ χρησιμοποιούμε εκτός από τα απλά κυκλώματα «Η», «ΚΑΙ» και σύνθετα κυκλώματα τα οποία είναι συνδυασμός των απλών κυκλωμάτων «Η, ΚΑΙ» ακριβώς ίδια με εκείνα που χρησιμοποιούνται για τη λειτουργία τηλεφώνων.

Θεωρούμε ότι κάθε διακόπτης αποτελεί μια μεταβλητή του Boole και μάλιστα όπως έχομε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, ορίζομε ότι ο κλειστός διακόπτης (διακόπτης που επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) έχει την τιμή 1 και ο ανοικτός διακόπτης (διακόπτης που δεν επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) την τιμή 0. Άρα κάθε συνδυασμός διακοπτών αντιστοιχεί σε μια παράσταση της άλγεβρας του Boole. Παρακάτω αναφέρομε παραδείγματα με τα οποία φαίνεται αυτή η αντιστοιχία.

Ασκήσεις.

Α΄ ομάδα.

α) Δίνεται το κύκλωμα διακοπτών του σχήματος 3.5α. Να γραφεί η αλγεβρική παράσταση του Boole.

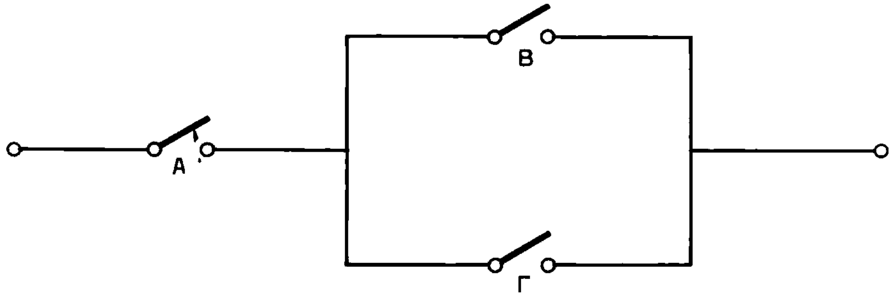
Απάντηση.

Επειδή οι διακόπτες Β και Γ βρίσκονται σε παράλληλη θέση και αποτελούν κύκλωμα «Η», συνδέονται μεταξύ τους ως $(B + \Gamma)$. Τέλος ο διακόπτης Α και ο όρος $(B + \Gamma)$ βρίσκονται σε σειρά, αποτελούν το κύκλωμα «ΚΑΙ» και συνδέονται μεταξύ τους ως $A \,.\, (B + \Gamma)$. Άρα η ζητούμενη αλγεβρική παράσταση του κυκλώματος είναι $A \,.\, (B + \Gamma)$.

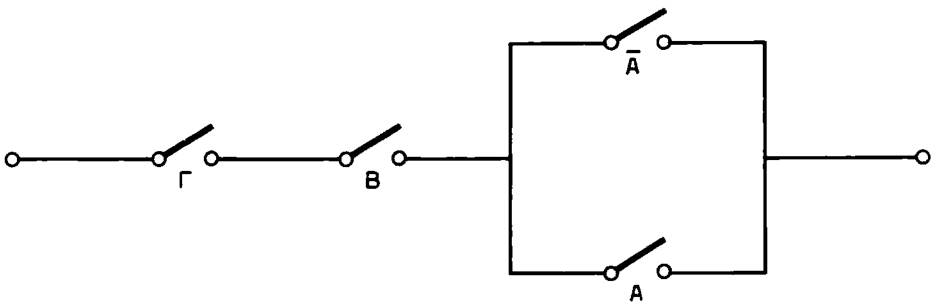
β) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 3.5β. Να γραφεί η αλγεβρική του παράσταση.

Απάντηση.

Οι διακόπτες Α και $\overline{A}$ αποτελούν το κύκλωμα «Η». Άρα συνδέονται μεταξύ τους με την πράξη



Σχ. 3.5α.



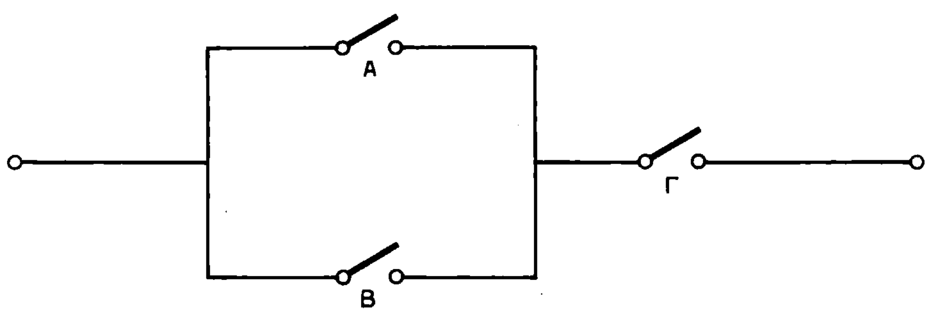
Σχ. 3.5β.

+ (A + $\bar{A}$). Οι διακόπτες Γ, B και ($\bar{A}$ + A) αποτελούν κύκλωμα «ΚΑΙ» και συνδέονται με την πράξη «.». Συνεπώς έχομε Γ . B . ($\bar{A}$ + A) που είναι και η ζητούμενη αλγεβρική παράσταση.

γ) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 3.5γ. Να γραφεί η αλγεβρική του παράσταση.

Απάντηση.

Οι διακόπτες A, B αποτελούν το κύκλωμα «Η». Συνεπώς συνδέονται μεταξύ τους με την πράξη (A + B). Ο διακόπτης Γ με τους διακόπτες (A + B) αποτελεί κύκλωμα «ΚΑΙ». Επομένως θα έχομε (A + B) . Γ που αποτελεί και τη ζητούμενη αλγεβρική εξίσωση του Boole.

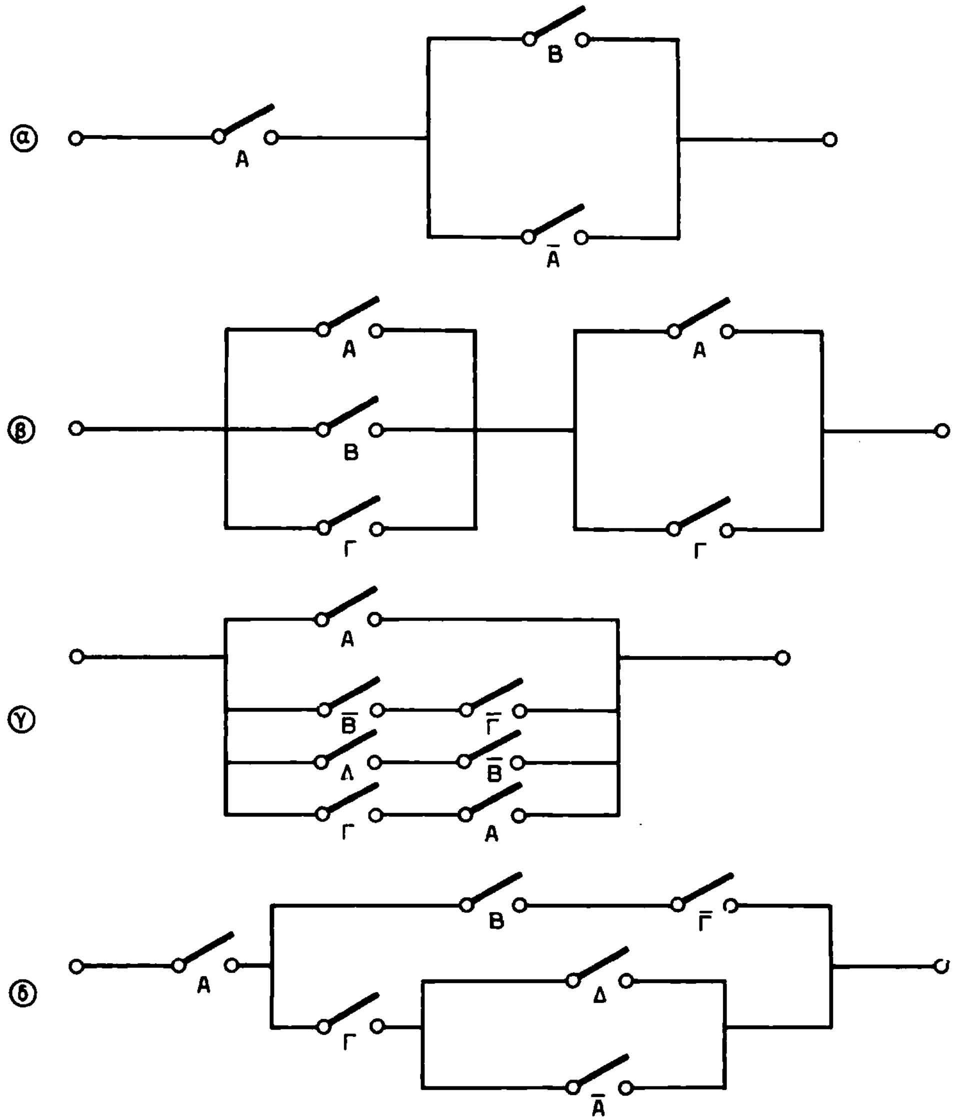


Σχ. 3.5γ.

Ασκήσεις.

Β΄ ομάδα.

Να γραφούν οι αλγεβρικές παραστάσεις του Boole των κυκλωμάτων του σχήματος 3.56.



Σχ. 3.56.

3.6 Κατασκευή κυκλώματος διακοπτών από τη Λογική παράσταση.

Έχομε εξετάσει στην προηγούμενη παράγραφο πως μπορούμε από το κύκλωμα να κατασκευάσομε την αλγεβρική παράσταση. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσομε ακριβώς το αντίστροφο. Δηλαδή πώς από την αλγεβρική παράσταση μπορούμε να κατασκευάσομε το κύκλωμα διακοπτών.

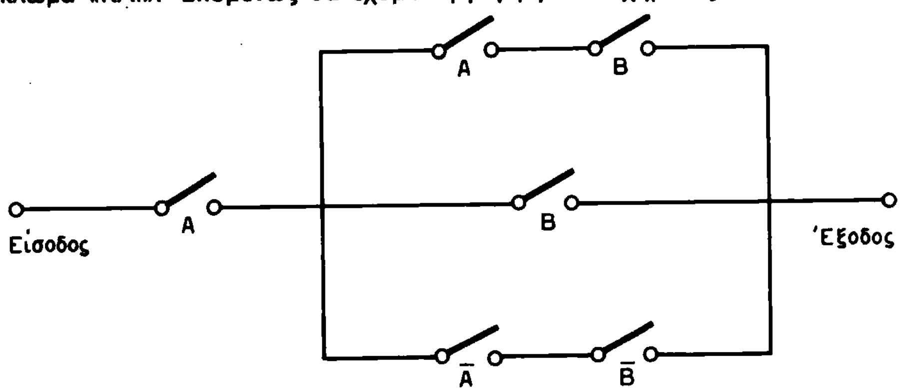
Παράδειγμα.

Δίνεται η παράσταση:

$$A \,.\, [(A \,.\, B) + B + (\overline{A} \,.\, \overline{B})]$$

Να κατασκευασθεί το κύκλωμά της.

Παρατηρούμε ότι στους όρους (A . B) και ($\overline{A} \,.\, \overline{B}$) οι μεταβλητές A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ συνδέονται μεταξύ τους με την πράξη «.». Συνεπάγεται ότι αποτελούν απλά κυκλώματα «ΚΑΙ». Επίσης οι όροι (A . B), B, ($\overline{A} \,.\, \overline{B}$) συνδέονται μεταξύ τους με την πράξη «+». Άρα αποτελούν κύκλωμα «Η». Τέλος ο διακόπτης A και ο όρος [(A . B) + B + ($\overline{A}$. B)] συνδέονται μεταξύ τους με την πράξη «.». Συνεπάγεται ότι αποτελούν νέο κύκλωμα «ΚΑΙ». Επομένως θα έχομε τη μορφή του σχήματος 3.6.



Σχ. 3.6.

Ασκήσεις.

Να κατασκευασθούν τα κυκλώματα των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων του Boole:

α) $(A \,.\, B) + [(\Gamma + B) \,.\, \overline{B}]$

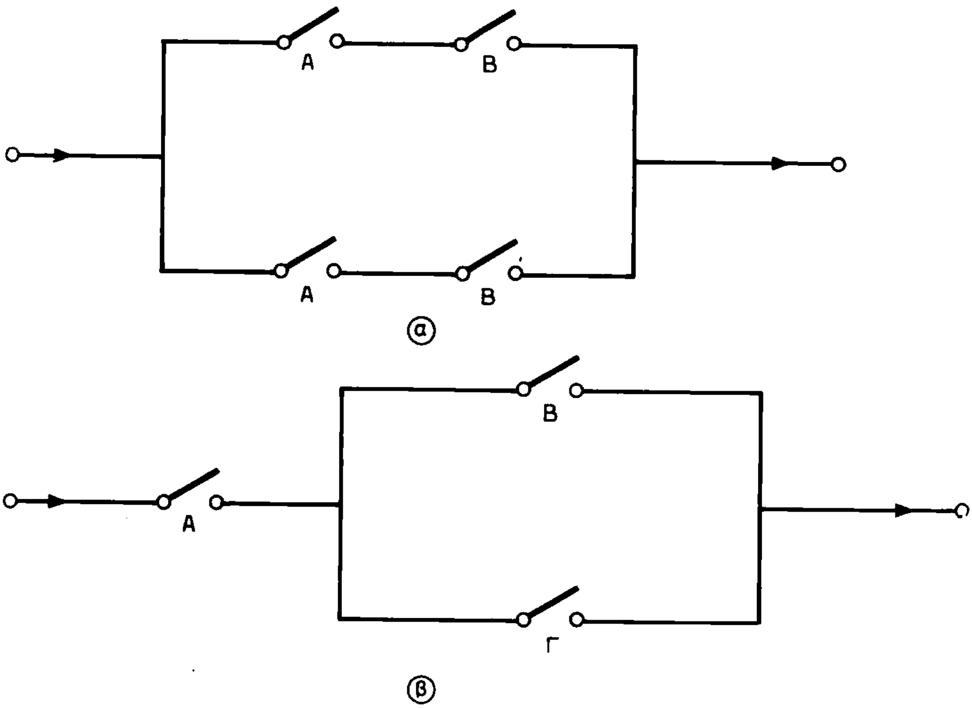
β) $A + (B \,.\, \overline{A}) + (\Gamma \,.\, \overline{B} \,.\, A) + \overline{\Gamma}$

γ) $A \,.\, [B + \Gamma + \Delta] \,.\, [E + (\overline{\Gamma} \,.\, \overline{A})]$

3.7 Απλοποίηση κυκλωμάτων διακοπτών.

Θεωρούμε ότι έχομε τα δύο επόμενα κυκλώματα (σχ. 3.7α).

Παρατηρούμε ότι όταν οι διακόπτες A και B είναι κλειστοί, τότε το ρεύμα ρέει και στα δύο κυκλώματα. Το δεύτερο όμως κύκλωμα έχει λιγότερους διακόπτες από το πρώτο. Συνεπώς το δεύτερο κύκλωμα σε σύγκριση με το πρώτο μπορεί να θεωρηθεί ως απλοποιημένο κύκλωμα γιατί λειτουργεί με λιγότερους διακόπτες.



Σχ. 3.7α.

Έχομε ήδη μάθει στο κεφάλαιο περί απλοποιήσεως αλγεβρικών παραστάσεων, πώς με βάση τα αξιώματα και θεωρήματα του Boole απλοποιούμε μια αλγεβρική παράσταση. Επειδή οι αλγεβρικές παραστάσεις παριστάνουν και ένα κύκλωμα διακοπτών, μπορούμε χρησιμοποιώντας τις μεθόδους εκείνες να αναπτύξομε και να εφαρμόσομε και τη μέθοδο της απλοποιήσεως και στα κυκλώματα των διακοπτών. Η μέθοδος της απλοποιήσεως έχει μεγάλη σπουδαιότητα, γιατί έχει σχέση με τον περιορισμό των διακοπτών μέσα σε ένα κύκλωμα και κατά συνέπεια χαμηλό κόστος κατασκευής των κυκλωμάτων.

Για να απλοποιήσομε ένα κύκλωμα που μας δίνεται εργαζόμασθε ως εξής:

— Γράφομε την αλγεβρική παράσταση του Boole για το κύκλωμα.
— Απλοποιούμε την προηγούμενη παράσταση με τη χρησιμοποίηση των αξιωμάτων και θεωρημάτων του Boole.
— Προσδιορίζομε το κύκλωμα των διακοπτών σε συνδυασμό με τον απλοποιημένο τύπο.

Παράδειγμα.

α) Δίνεται το κύκλωμα διακοπτών του σχήματος 3.7β.
Ζητείται η σχεδίαση του απλοποιημένου κυκλώματος.

Απάντηση.

Η αλγεβρική παράσταση του δοθέντος κυκλώματος είναι:

$$(A + B) \cdot (\overline{A} + \Gamma) \cdot (B + \Gamma)$$

Απλοποιούμε την παράσταση που βρήκαμε ως εξής:

$(A + B) \cdot (\overline{A} + \Gamma) \cdot (B + \Gamma) =$

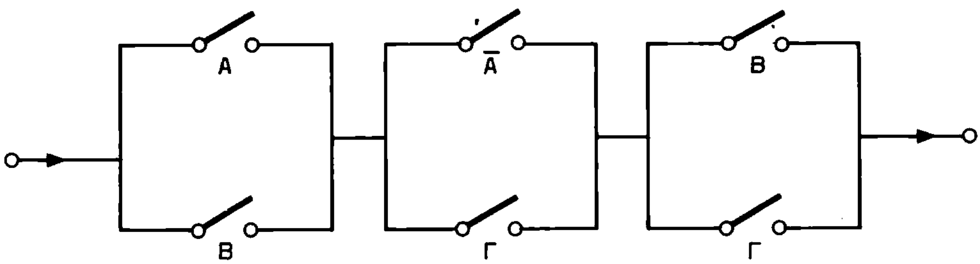
$(A + B) \cdot (B + \Gamma) \cdot (\overline{A} + \Gamma) =$ Αξίωμα αντιμεταθέσεως [παράγρ. 2.2(3ο)]

$(B + A) \cdot (B + \Gamma) \cdot (\overline{A} + \Gamma) =$ Αξίωμα αντιμεταθέσεως [παράγρ. 2.2(3ο)]

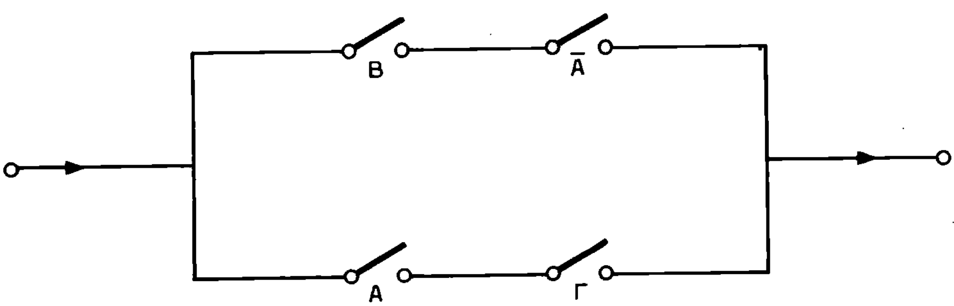
$(B + A) \cdot (B + \Gamma) \cdot (\overline{A} + \Gamma) \cdot (\overline{A} + A) =$ Θεώρημα συμπληρώματος [παράγρ. 2.4(4ο)]

$[B + (A \cdot \Gamma)] \cdot [\overline{A} + (A \cdot \Gamma)] =$ Θεώρημα επιμερισμού [παράγρ. 2.4(10ο)]

$(B \cdot \overline{A}) + (A \cdot \Gamma) =$ Θεώρημα επιμερισμού [παράγρ. 2.4(10ο)]



Σχ. 3.7β.



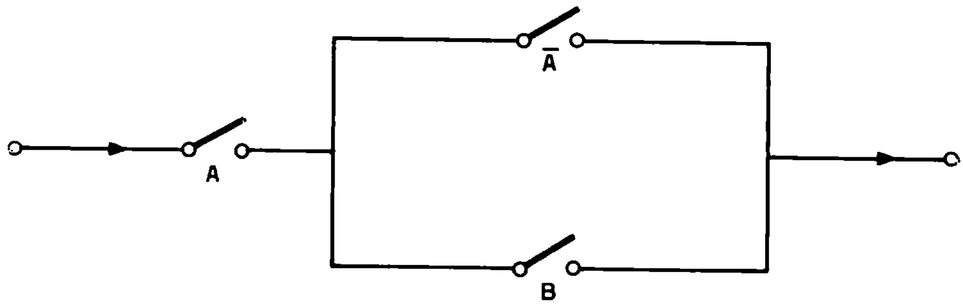
Σχ. 3.7γ.

Από την τελευταία παράσταση κατασκευάζομε το ζητούμενο κύκλωμα. Ο όρος $B \cdot \overline{A}$ είναι το απλό κύκλωμα «ΚΑΙ» Ομοίως ο όρος $A \cdot \Gamma$ είναι το απλό κύκλωμα «ΚΑΙ», ενώ το $(B \cdot \overline{A}) + (A \cdot \Gamma)$ είναι το κύκλωμα «Η» του οποίου η κατασκευή του είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 3.7γ.

Το τελευταίο κύκλωμα είναι το ζητούμενο απλοποιημένο κύκλωμα. Συγκρινόμενο με το αρχικό παρατηρούμε ότι έχει δύο διακόπτες λιγότερους.

β) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 3.7δ.

Ζητείται να σχεδιάσετε την απλοποιημένη μορφή του κυκλώματος.

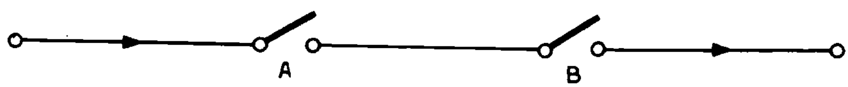


Σχ. 3.7δ.

Απάντηση.

$$A . (A + B) = (A . \bar{A}) + (A . B) \quad \text{Θεώρημα επιμερισμού [παράγρ. 2.4(10ο)]}$$
$$= 0 + (A . B) \quad \text{Θεώρημα αυτοτομής [παράγρ. 2.4(5ο)]}$$
$$= A . B$$

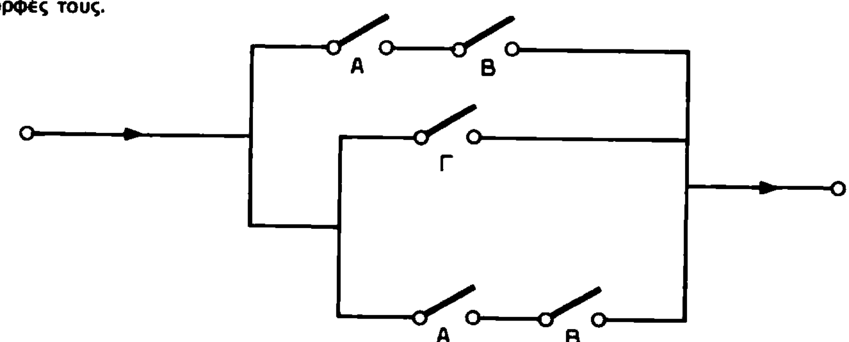
και συνεπώς η απλοποιημένη μορφή του ζητούμενου κυκλώματος είναι ένα κύκλωμα με δύο διακόπτες A και B σε σειρά (σχ. 3.7ε).



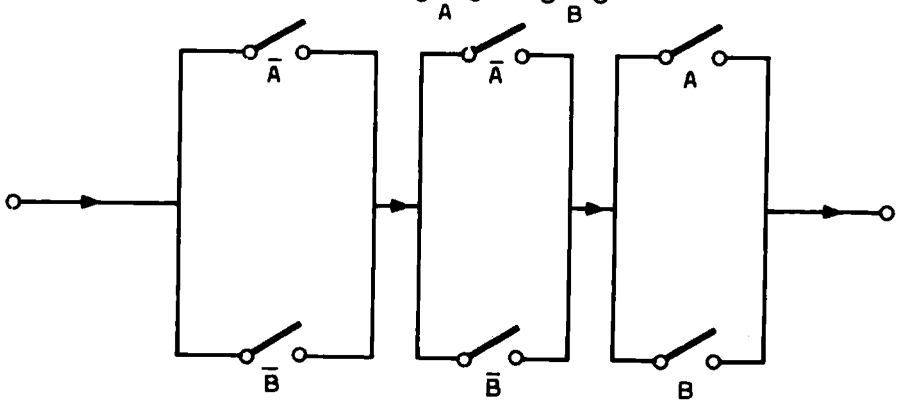
Σχ. 3.7ε.

Ασκήσεις.

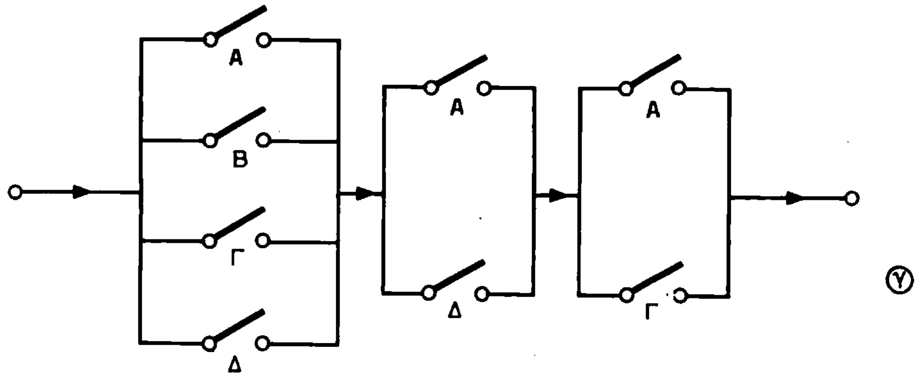
Δίνονται τα παρακάτω κυκλώματα (σχ. 3.7στ και 3.7ζ) διακοπτών και ζητούνται οι απλοποιημένες μορφές τους.

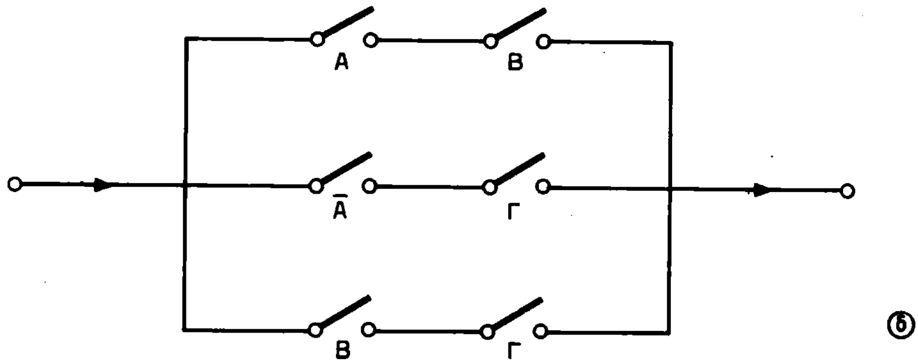


ⓐ



ⓑ





Σχ. 3.7στ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΛΟΓΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

4.1 Γενικά.

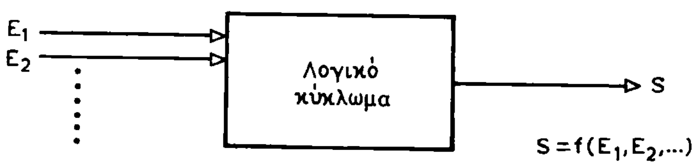
Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τις βασικές αρχές της άλγεβρας του Boole. Θεωρήσαμε ως λογική συνάρτηση τη συνάρτηση εκείνη της οποίας οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν μόνο δύο τιμές, τις 0 και 1. Θεωρήσαμε επίσης ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση είναι μόνο η τιμή 0 ή η τιμή 1.

Αν με E_1, E_2,... παραστήσομε τις μεταβλητές και με S τη συνάρτηση θα έχομε:

$$S = f\ (E_1,\ E_2,\ldots) \qquad (4.1)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσομε ηλεκτρονικά κυκλώματα, τα οποία πραγματοποιούν λογικές συναρτήσεις.

Οι μεταβλητές E_1, E_2,... της συναρτήσεως (4.1) θα είναι είσοδοι του λογικού κυκλώματος και η S θα είναι η έξοδος του κυκλώματος. Στο σχήμα 4.1 δίνεται συμβολικά ένα λογικό κύκλωμα.



Σχ. 4.1.
Λογικό κύκλωμα.

Φυσικά οι είσοδοι του κυκλώματος μπορούν να πάρουν μόνον τις τιμές 0 ή 1 και η έξοδος επίσης μπορεί να πάρει την τιμή 0 ή 1. Ένας πίνακας στον οποίο περιλαμβάνονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των τιμών των εισόδων ενός λογικού κυκλώματος μαζί με τις αντίστοιχες τιμές της εξόδου του λέγεται Πίνακας Αληθείας του λογικού κυκλώματος.

Τα διάφορα στοιχεία που αποτελούν ένα λογικό κύκλωμα θα τα εξετάζομε σε δύο χαρακτηριστικές οριακές καταστάσεις στις οποίες μπορούν να λειτουργήσουν, αδιαφορώντας για τις ενδιάμεσες καταστάσεις λειτουργίας τους.

Παραδείγματα.

α) Δίοδος
- κατάσταση 1η άγει
- κατάσταδη 2η δεν άγει

β) Διακόπτης
- κατάσταση 1η ανοικτός
- κατάσταση 2η κλειστός

γ) Τρανζίστορ
- κατάσταση 1η κόρος (άγει)
- κατάσταση 2η αποκοπή (δεν άγει)

Περισσότερες λεπτομέρειες για τις οριακές αυτές καταστάσεις λειτουργίας αναφέρονται στην παράγραφο 4.4.1.

4.2 Βασικά λογικά κυκλώματα.

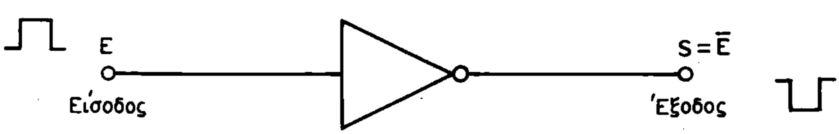
Τα λογικά κυκλώματα που μπορούν να εκτελέσουν βασικές λογικές πράξεις της άλγεβρας του Boole τα ονομάζομε ΠΥΛΕΣ (GATES).

Τέτοιες βασικές λογικές πράξεις είναι:
- Η πράξη της αντιστροφής ή συμπληρώματος.
- Η πράξη του λογικού «ΚΑΙ» (λογικός πολλαπλασιασμός).
- Η πράξη του λογικού «Η» (λογική πρόσθεση).

Οι πύλες αποτελούν τα βασικότερα λογικά κυκλώματα, συνδυασμός των οποίων μας επιτρέπει την κατασκευή πολυπλοκοτέρων λογικών κυκλωμάτων. Μερικά από αυτά θα μελετήσομε παρακάτω.

4.2.1 Αντιστροφέας (Inverter) ή πύλη ΟΧΙ (NOT GATE).

Το κύκλωμα αυτό εκτελεί την πράξη της αντιστροφής και το λογικό του σύμβολο απεικονίζεται στο σχήμα 4.2α.



Σχ. 4.2α.
Λογικό σύμβολο αντιστροφέα.

Ο πίνακας 4.2.1 είναι ο πίνακας αληθείας του αντιστροφέα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.1.
Πίνακας αληθείας του αντιστροφέα

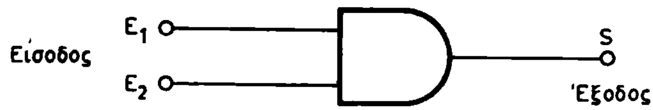
E	S
1	0
0	1

$\Longrightarrow$ $S = \bar{E}$, $\bar{S} = E$

Από τον πίνακα αληθείας φαίνεται ότι όταν η είσοδος Ε του κυκλώματος έχει την τιμή 1, η έξοδος έχει την τιμή 0 και αντίστροφα.

4.2.2 Πύλη «ΚΑΙ» (AND GATE).

Το κύκλωμα αυτό εκτελεί την πράξη του λογικού πολλαπλασιασμού (λογικό ΚΑΙ) και το λογικό του σύμβολο απεικονίζεται στο σχήμα 4.2β.



Σχ. 4.2β.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΚΑΙ».

Ο πίνακας 4.2.2 είναι ο πίνακας αληθείας της πύλης «ΚΑΙ».

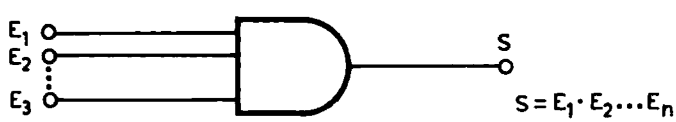
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.2.
Πίνακας αληθείας της πύλης «ΚΑΙ»

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\Longrightarrow \quad S = E_1 . E_2$

Από τον πίνακα αληθείας φαίνεται ότι η έξοδος έχει τιμή 1 μόνο όταν και οι δύο οι είσοδοι έχουν την τιμή 1. Αν έστω και μία είσοδος παίρνει τιμή 0, τότε η έξοδος παίρνει και αυτή τιμή 0.

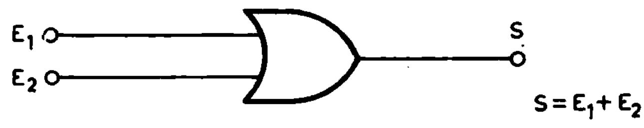
Στο παραπάνω κύκλωμα θεωρήσαμε ότι υπάρχουν δύο μόνον είσοδοι, οι E_1 και E_2. Τα ίδια πράγματα ισχύουν αν είχαμε περισσότερες εισόδους. Δηλαδή αν υποθέσομε ότι οι είσοδοι μιας Πύλης «ΚΑΙ» είναι οι είσοδοι E_1, E_2,... E_n, τότε η έξοδος θα παίρνει την τιμή 1 μόνον όταν όλες οι είσοδοι παίρνουν την τιμή 1 (σχ. 4.2γ).



Σχ. 4.2γ.
Πύλη «ΚΑΙ» με n εισόδους.

4.2.3 Πύλη «Η» (OR GATE).

Το κύκλωμα αυτό εκτελεί την πράξη της λογικής προσθέσεως (λογικό Η) και το λογικό του σύμβολο παριστάνεται στο σχήμα 4.2δ.



Σχ. 4.2δ.
Λογικό σύμβολο πύλης «Η».

Ο πίνακας 4.2.3 είναι ο πίνακας αληθείας του κυκλώματος «Η».

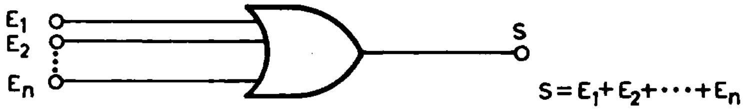
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.3.
Πίνακας αληθείας πύλης «Η»

E_1	E	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\Longrightarrow \quad S = E_1 + E_2$

Από τον πίνακα αληθείας φαίνεται ότι η έξοδος έχει τιμή 1, όταν τουλάχιστον μία είσοδος έχει τιμή 1. Δηλαδή αν η μία είσοδος ή και οι δύο παίρνουν τιμή 1, τότε η έξοδος παίρνει επίσης τιμή 1.

Και στην περίπτωση της πύλης «Η» θεωρήσαμε ότι το κύκλωμα έχει δύο εισόδους. Τα ίδια πράγματα ισχύουν αν το κύκλωμα είχε περισσότερες εισόδους. Δηλαδή αν θεωρήσομε ένα κύκλωμα με n εισόδους τις E_1, E_2,... E_n, τότε η έξοδος θα έχει την τιμή 1, όταν τουλάχιστον μία είσοδος έχει τιμή 1. Στο σχήμα 4.2ε απεικονίζεται ένα τέτοιο κύκλωμα.



Σχ. 4.2ε.
Πύλη «Η» με n εισόδους.

Παρατήρηση.

Ο αριθμός των εισόδων μιας πύλης δεν μπορεί να είναι απεριόριστος αλλά κυμαίνεται συνήθως μεταξύ 2-5 και εξαρτάται από τα στοιχεία που αποτελούν την πύλη και τα άλλα λογικά κυκλώματα με τα οποία συνεργάζεται η πύλη.

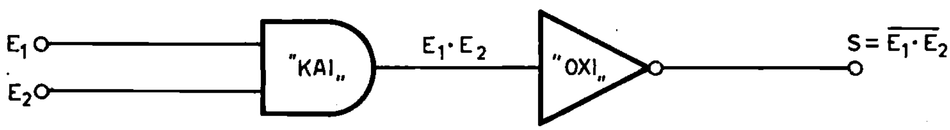
4.3 Άλλα λογικά κυκλώματα.

Τα λογικά κυκλώματα που εξετάσαμε προηγουμένως, εκτελούν τις βασικές λογικές πράξεις της άλγεβρας του Boole, δηλαδή τις πράξεις της αντιστροφής, της λογικής προσθέσεως και λογικού πολλαπλασιασμού.

Μπορούμε να συνδεσμολογήσομε κατάλληλα τα παραπάνω βασικά λογικά κυκλώματα και να κατασκευάσομε άλλα λογικά κυκλώματα, πολύ χρήσιμα και με πολλές εφαρμογές στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Τέτοια κυκλώματα είναι τα παρακάτω.

4.3.1 Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» (NAND GATE).

Το κύκλωμα αυτό αποτελεί συνδυασμό μιας πύλης «ΚΑΙ» και μιας πύλης «ΟΧΙ». Συγκεκριμένα, αν στην έξοδο μιας πύλης «ΚΑΙ» συνδέσομε μια πύλη «ΟΧΙ» τότε το κύκλωμα που προκύπτει (σχ. 4.3α), το ονομάζομε πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ».



Σχ. 4.3α.
Συνδεσμολογία πύλης «ΚΑΙ» και πύλης «ΟΧΙ» (Nand).

Το λογικό σύμβολο της πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ» δίνεται στο σχήμα 4.3β. Ο πίνακας αληθείας της πύλης είναι ο πίνακας 4.3.1 και η αντίστοιχη λογική συνάρτηση είναι η:

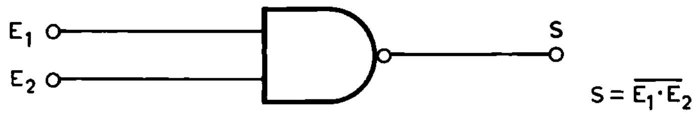
$$S = \overline{E_1 \cdot E_2}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.1.
Πίνακας αληθείας πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ»

E_1	E_2	$S = \overline{E_1 \cdot E_2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\Longrightarrow \quad S = \overline{E_1 \cdot E_2} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$$

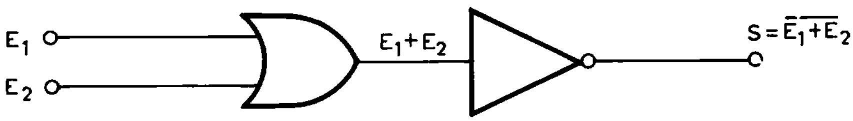
Αν συγκρίνομε τους πίνακες αληθείας 4.2.2 και 4.3.1 των πυλών «ΚΑΙ» και «ΟΧΙ ΚΑΙ» διαπιστώνομε ότι η έξοδος της πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ» είναι το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης «ΚΑΙ».



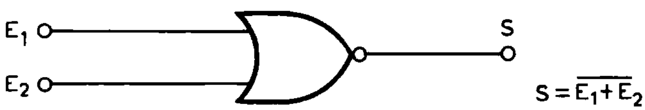
Σχ. 4.3β.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ».

4.3.2 Πύλη «ΟΧΙ Η» (NOR GATE).

Το κύκλωμα αυτό αποτελεί συνδυασμό μιας πύλης «Η» και μιας πύλης «ΟΧΙ». Συγκεκριμένα, αν στην έξοδο μιας πύλης «Η» συνδέσομε μια πύλη «ΟΧΙ» τότε το κύκλωμα που προκύπτει (σχ. 4.3γ), το ονομάζομε πύλη «ΟΧΙ Η».



Σχ. 4.3γ.
Συνδεσμολογία πύλης «Η» και πύλης «ΟΧΙ» (Nand).



Σχ. 4.3δ.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΟΧΙ Η».

Το λογικό σύμβολο της πύλης «ΟΧΙ Η» δίνεται στο σχήμα 4.3δ. Ο πίνακας αληθείας της πύλης είναι ο πίνακας 4.3.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.2.
Πίνακας αληθείας πύλης «ΟΧΙ Η»

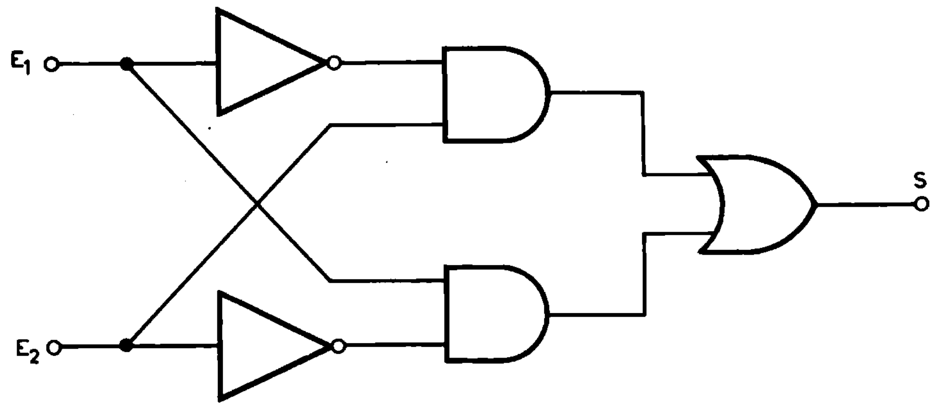
E_1	E_2	$S=\overline{E_1+E_2}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$\Longrightarrow \quad S=\overline{E_1+E_2}=\overline{E}_1 \,.\, \overline{E}_2$$

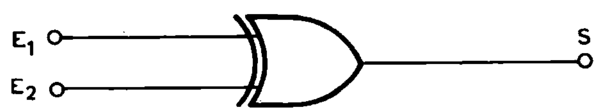
Αν συγκρίνομε τους πίνακας αληθείας 4.2.3 και 4.3.2 των πυλών «Η» και «ΟΧΙ Η», διαπιστώνομε ότι η έξοδος της πύλης «ΟΧΙ Η» είναι το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης «Η».

4.3.3 Πύλη αποκλειστικού «Η» (EXCLUSIVE OR GATE).

Το κύκλωμα αυτό αποτελεί συνδυασμό των τριών βασικών πυλών. Δηλαδή των πυλών «ΚΑΙ», «ΟΧΙ» και «Η». Η συνδεσμολογία παριστάνεται στο σχήμα 4.3ε.



Σχ. 4.3ε.
Πύλη «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η».



$S = E_1 \oplus E_2$

Σχ. 4.3στ.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η».

Το λογικό σύμβολο «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η» δίνεται στο σχήμα 4.3στ. Ο πίνακας αληθείας της πύλης είναι ο πίνακας 4.3.3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.3.
Πίνακας αληθείας πύλης «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η»

E_1	E_2	$S = E_1 \oplus E_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\Longrightarrow \quad S = E_1 \oplus E_2 = E_1 \cdot \overline{E}_2 + \overline{E}_1 \cdot E_2$$

Από τον πίνακα αληθείας φαίνεται ότι η έξοδος της πύλης «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η» παίρνει την τιμή 1 στην περίπτωση που μόνο μία από τις εισόδους έχει την τιμή 1. Με άλλα λόγια η έξοδος είναι 1, όταν οι είσοδοι είναι διαφορετικές, δηλαδή: $E_1 = 0$, $E_2 = 1$ ή $E_1 = 1$, $E_2 = 0$. Όταν οι δύο είσοδοι είναι ίδιες, δηλαδή $E_1 = E_2 = 0$ ή $E_1=E_2=1$, η έξοδος ειναι 0.

4.4 Πραγματοποίηση λογικών κυκλωμάτων.

4.4.1 Γενικά.

Όπως έχομε αναφέρει, τα λογικά κυκλώματα πραγματοποιούνται με παθητικά ή ενεργά ηλεκτρονικά στοιχεία (αντιστάσεις, πυκνωτές, δίοδοι, τρανζίστορ κλπ.). Στην είσοδο των κυκλωμάτων αυτών εφαρμόζονται ηλεκτρικές τάσεις ή ρεύματα και η έξοδός τους είναι επίσης ηλεκτρική τάση ή ρεύμα. Δηλαδή στην πράξη οι μεταβλητές μας είναι τάσεις ή ρεύματα. Στο κείμενό μας θα θεωρούμε ως μεταβλητές τις ηλεκτρικές τάσεις. Επειδή οι μεταβλητές πρέπει να είναι δίτιμες (γιατί είναι λογικές μεταβλητές) θα θεωρούμε ότι η τάση στις εισόδους και στην έξοδο των κυκλωμάτων αυτών παίρνει μόνο δύο δυνατές τιμές*, π.χ. + 5 Volt, – 5 Volt ή 0 Volt, + 3 Volt. Τις τιμές αυτές τις αντιστοιχούμε στο 0 και 1. Συνήθως το λογικό 1 αντιστοιχούμε στο μεγαλύτερο δυναμικό και το λογικό 0 στο χαμηλότερο.

Παράδειγμα:

+ 5 Volt ⇒ «1»		3 Volt ⇒ «1»
	ή	
– 5 Volt ⇒ «0»		0 Volt ⇒ «0»

Αν ορίσομε με τον τρόπο αυτό την αντιστοιχία δυναμικών (τάσεων) και λογικών 0 και 1, τότε λέμε ότι εργαζόμασθε με ΘΕΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ.

Αντίθετα, αν αντιστοιχήσομε το λογικό 0 στο υψηλότερο δυναμικό και το λογικό 1 στο χαμηλότερο, π.χ.:

+ 5 Volt ⇒ «0»		+ 3 Volt ⇒ «0»
	ή	
– 5 Volt ⇒ «1»		0 Volt ⇒ «1»

τότε λέμε ότι εργαζόμασθε με ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ.

Μερικές φορές το μεγαλύτερο δυναμικό το συμβολίζομε με το γράμμα Η (High Level) και το χαμηλότερο με το L (Lower Level).

Όταν μιλάμε για θετικά ή αρνητικά δυναμικά (ή τάσεις), πάντοτε αναφερόμασθε ως προς μία στάθμη δυναμικού, π.χ. της γης που θεωρείται 0 Volt.

Τα διαγράμματα του σχήματος 4.4α απεικονίζουν παραστατικά τις έννοιες της θετικής και αρνητικής λογικής.

Τα λογικά κυκλώματα μπορούν να κατασκευασθούν, από ηλεκτρονικά στοιχεία, (αντιστάσεις, πυκνωτές, διόδους, τρανζίστορς) συνδεσμολογημένα είτε ως διακρι-

(*) Οι τιμές αυτές καθορίζονται από τον κατασκευαστή και αναφέρονται στις προδιαγραφές των κυκλωμάτων.

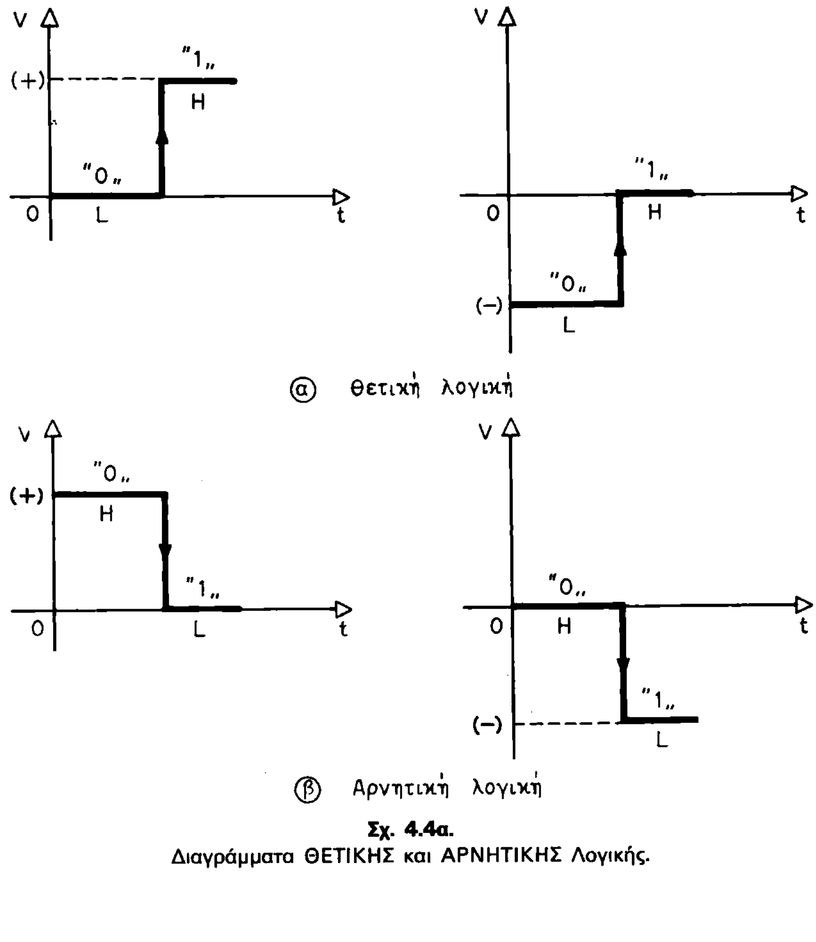
τα στοιχεία είτε ως ολοκληρωμένα κυκλώματα (πάνω σε ένα πολύ μικρό κομμάτι κρυστάλλου πυριτίου). Τα τελευταία παρουσιάζουν αρκετά πλεονεκτήματα και γι' αυτό το λόγο σήμερα χρησιμοποιούνται σχεδόν κατ' αποκλειστικότητα για την πραγματοποίηση των λογικών κυκλωμάτων.

Πριν εξετάσομε πώς μπορούμε να πραγματοποιήσομε τα βασικά λογικά κυκλώματα (πύλες) με διακριτά ηλεκτρονικά στοιχεία ή ολοκληρωμένα κυκλώματα, θα εξετάσομε βασικά στοιχεία για τη λειτουργία των ημιαγωγών. Αυτό θα μας βοηθήσει πολύ στο να καταλάβομε γρήγορα και σωστά την πραγματοποίηση και λειτουργία των πυλών και γενικότερα των λογικών κυκλωμάτων.

4.4.2 Βασικές ιδιότητες ημιαγωγών.

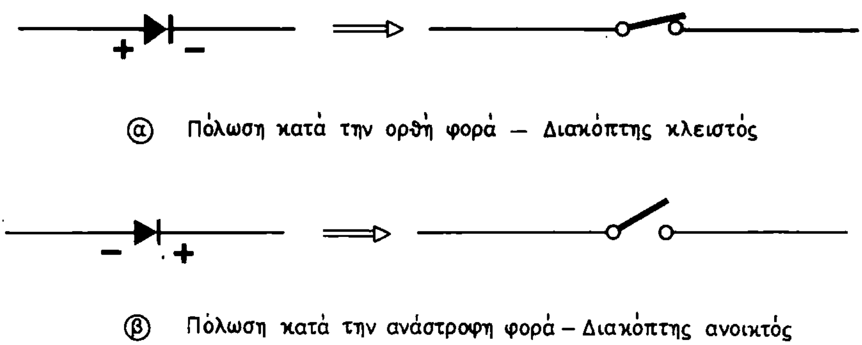
α) Δίοδος (DIODE).

Όταν η τάση της ανόδου είναι θετικότερη από την τάση της καθόδου, η δίοδος είναι πολωμένη κατά την «ορθή φορά» (Forward Biased) και άγει. Στην περίπτωση αυτή η δίοδος παρουσιάζει πρακτικά μηδενική αντίσταση και έτσι ουσιαστικά ενεργεί ως ένας κλειστός διακόπτης [σχ. 4.4β(α)].



Σχ. 4.4α.
Διαγράμματα ΘΕΤΙΚΗΣ και ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ Λογικής.

Όταν η τάση ανόδου είναι μικρότερη από την τάση καθόδου, τότε η δίοδος είναι πολωμένη κατά την «ανάστροφη φορά» (Reserve Biased) και δεν άγει. Στην περίπτωση αυτή η δίοδος παρουσιάζει πολύ μεγάλη αντίσταση (θεωρητικά άπειρη — ιδανική δίοδος) και ενεργεί ως ανοικτός διακόπτης [σχ. 4.4β(β)].



Σχ. 4.4β.
Δίοδος. α) Πόλωση κατά την ορθή φορά. β) Πόλωση κατά την αντίστροφη φορά.

β) Τρανζίστορ.

Τα τρανζίστορ με εφαρμογή καταλλήλων τάσεων στην είσοδό τους, μπορούν να λειτουργήσουν ως διακόπτες, όπως η δίοδος που είδαμε προηγουμένως.

Τα τρανζίστορ όταν χρησιμοποιούνται σε λογικά κυκλώματα φροντίζομε ώστε να λειτουργούν σε δύο περιοχές :

— Την περιοχή αποκοπής (μη αγώγιμο) ή
— την περιοχή κόρου (αγώγιμη).

Έτσι συμπεριφέρονται ως δικατάστατα στοιχεία και μπορούμε να κάνομε παρόμοια αντιστοιχία με αυτή της διόδου. Αμέσως παρακάτω θα εξετάσομε λεπτομερέστερα τους δύο τύπους τρανζίστορ PNP και NPN.

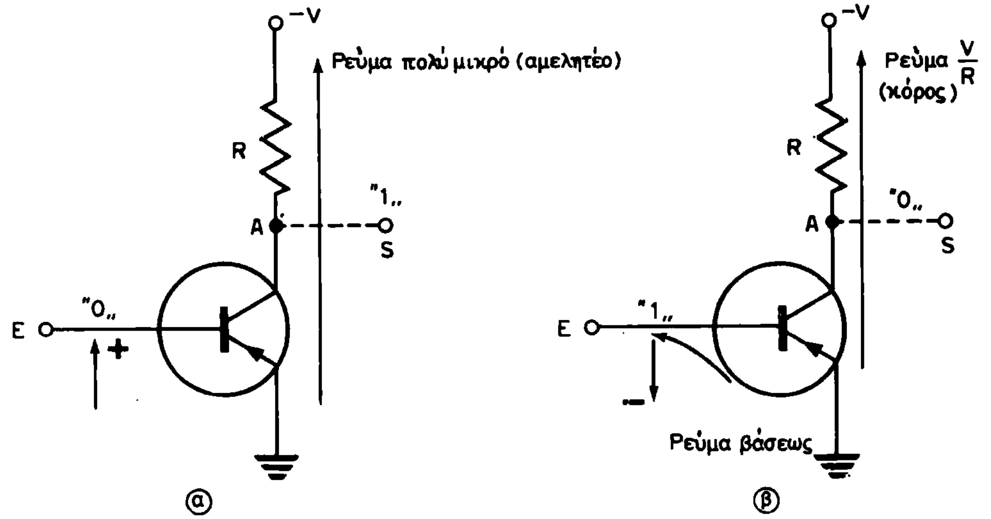
Transistor PNP.

Έστω ένα τρανζίστορ τύπου PNP το οποίο είναι συνδεσμολογημένο όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4γ.

Οι δύο καταστάσεις λειτουργίας που αναφέραμε προηγουμένως και που μας ενδιαφέρουν είναι:

α) Όταν η βάση είναι στο ίδιο ή θετικότερο δυναμικό με εκείνο του εκπομπού [σχ. 4.4γ(α)] μεταξύ εκπομπού και συλλέκτη κυκλοφορεί ένα πολύ μικρό ρεύμα της τάξεως των μA. Το ρεύμα αυτό είναι πρακτικά αμελητέο και λέμε ότι το τρανζίστορ βρίσκεται στην κατάσταση αποκοπής και συμπεριφέρεται ως ανοικτός διακόπτης. Επομένως το δυναμικό στο συλλέκτη (σημείο A) θα είναι το δυναμικό της πηγής, δηλαδή — V volt.

Άρα $\qquad S = -V \text{ volt} \Rightarrow$ «1»



Κατάσταση αποκοπής - Διακόπτης ανοικτός (δεν άγει)

Κατάσταση κόρου - Διακόπτης κλειστός (άγει)

Σχ. 4.4γ.
Transistor τύπου PNP.

β) Όταν η βάση οδηγηθεί σε δυναμικό αρνητικότερο από εκείνο του εκπομπού μεταξύ εκπομπού και συλλέκτη κυκλοφορεί ρεύμα I του οποίου η τιμή καθορίζεται μόνο από την τιμή του δυναμικού της πηγής — V volt και από την αντίσταση R $(I = \frac{V}{R})$. Τότε λέμε ότι το τρανζίστορ βρίσκεται στην κατάσταση κόρου. Το δυναμικό στο σημείο Α γίνεται πρακτικά 0 Volt.

Άρα S = 0 Volt ⟹ «0»

Παρόμοια είναι και η συμπεριφορά του τρανζίστορ τύπου NPN που παριστάνεται στο σχήμα 4.4δ.

4.4.3 Πραγματοποίηση πυλών.

α) Πύλη «ΚΑΙ» με διόδους.

Το κύκλωμα στο σχήμα 4.4ε παριστάνει μια πύλη «ΚΑΙ».

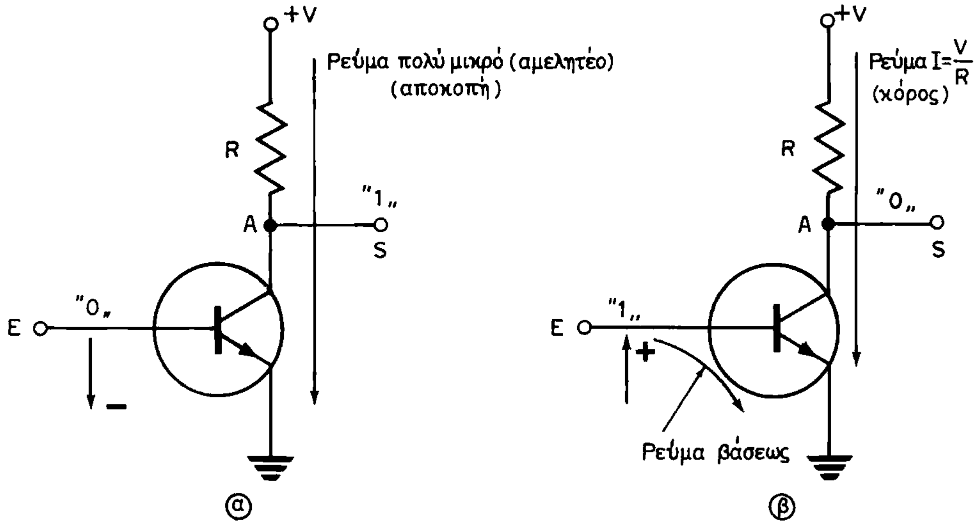
Εύκολα διαπιστώνομε ότι το κύκλωμα αυτό λειτουργεί ως πύλη «ΚΑΙ». Θεωρούμε ότι:

— Η αντιστοιχία είναι + 5 Volt ⟹ «1», — 5 Volt ⟹ «0» (θετική λογική).
— Οι δίοδοι είναι ιδανικές και
— η τάση τροφοδοτήσεως του κυκλώματος είναι + 5 Volt.

Δεδομένου ότι το κύκλωμα έχει δύο εισόδους, είναι δυνατόν να εμφανισθούν σε αυτές 4 συνδυασμοί τάσεων (σημάτων εισόδου):

$E_1 = -5$ V, $E_2 = -5$ V $E_1 = +5$ V, $E_2 = -5$ V

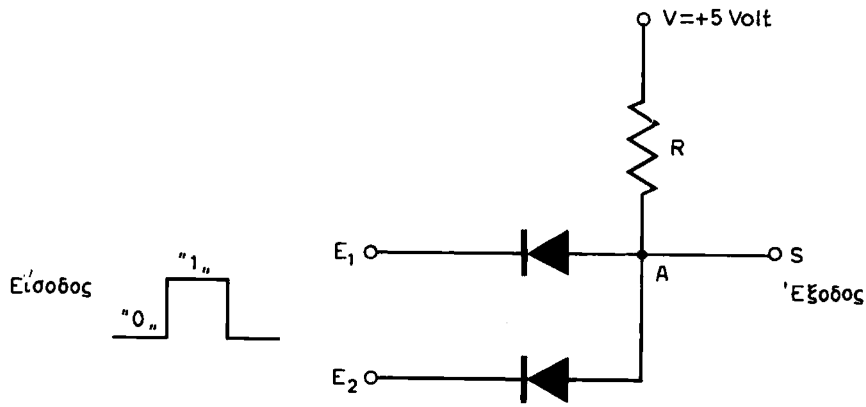
$E_1 = -5$ V, $E_2 = +5$ V $E_1 = +5$ V, $E_2 = +5$ V



Κατάσταση αποκοπής - Διακόπτης ανοικτός

Κατάσταση κόρου - Διακόπτης κλειστός

Σχ. 4.4δ.
Transistor τύπου NPN.



Σχ. 4.4ε.
Πύλη «ΚΑΙ» με διόδους.

Περίπτωση Πρώτη (E_1 = − 5 V, E_2 = − 5 V).

Στην περίπτωση αυτή οι δίοδοι (κύκλωμα του σχήματος 4.4ε) είναι πολωμένες κατά την ορθή φορά. Συνεπώς άγουν και ***συμπεριφέρονται*** ως κλειστοί διακόπτες. Άρα η τάση των − 5 V εμφανίζεται στο σημείο Α, δηλαδή στην έξοδο.

Επομένως: S = − 5 V.

Περίπτωση Δεύτερη (E_1 = − 5 V, E_2 = + 5 V).

Στην περίπτωση αυτή η μία δίοδος είναι πολωμένη κατά την ορθή φορά (δίοδος εισόδου E_1). Συνεπώς άγει και συμπεριφέρεται ως κλειστός διακόπτης. Άρα η τάση πάλι των — 5 V εμφανίζεται στο σημείο Α, δηλαδή στην έξοδο.

Επομένως: S = — 5 V.

Περίπτωση Τρίτη (E_1 = + 5 V, E_2 = — 5 V).

Στην περίπτωση αυτή πάλι η μία δίοδος άγει (δίοδος εισόδου E_2). Συνεπώς έχομε τα ίδια αποτελέσματα όπως προηγουμένως.

Επομένως: S = — 5 V.

Περίπτωση Τέταρτη (E_1 = + 5 V, E_2 = + 5 V).

Στην περίπτωση αυτή και οι δύο δίοδοι δεν άγουν (έχουν το ίδιο δυναμικό και στην άνοδο και στην κάθοδο) και συμπεριφέρονται ως ανοικτοί διακόπτες. Άρα η τάση τροφοδοτήσεως των + 5 V εμφανίζεται στο σημείο Α, δηλαδή στην έξοδο.

Επομένως: S = + 5 V.

Από τα παραπάνω μπορούμε να φτιάξομε τους πίνακες τάσεων και αληθείας (σχ. 4.4στ).

E_1	E_2	S
−5 V	−5 V	−5 V
−5 V	+5 V	−5 V
+5 V	−5 V	−5 V
+5 V	+5 V	+5 V

α) Πίνακας τάσεων

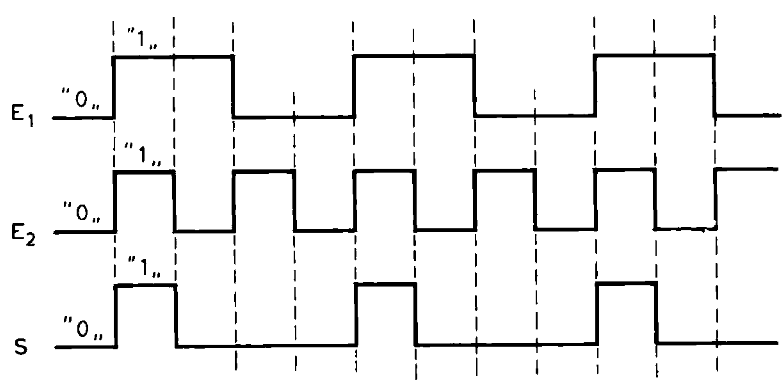
− 5 V ≡ «0»
+ 5 V ≡ «1»
⟹

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

β) Πίνακας αληθείας

Σχ. 4.4στ.
Πίνακες τάσεων και αληθείας πύλης «ΚΑΙ» με διόδους.

Πράγματι από τον πίνακα αληθείας του σχήματος 4.4στ διαπιστώνεται ότι το κύκλωμα του σχήματος 4.4ε είναι μία πύλη «ΚΑΙ».



Σχ. 4.4ζ.
Κυματομορφές εισόδου - εξόδου πύλης «ΚΑΙ».

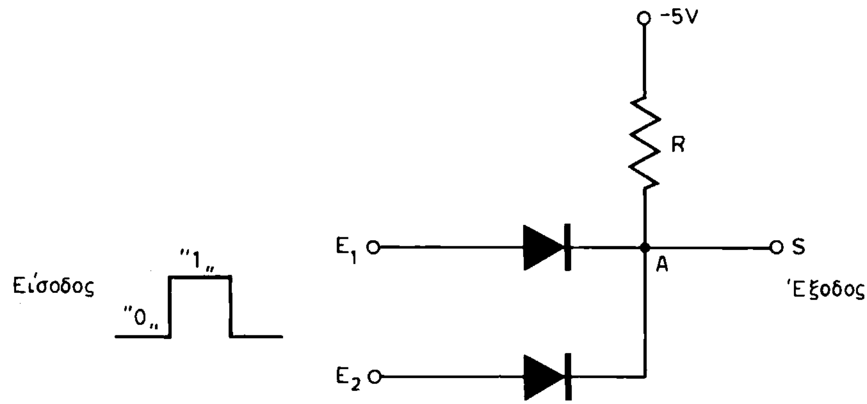
Έστω ότι στις εισόδους E_1 και E_2 του κυκλώματος «ΚΑΙ», εφαρμόζονται οι κυματομορφές E_1 και E_2. Τότε η κυματομορφή στην έξοχή θα έχει τη μορφή S (σχ. 4.4ζ) γιατί, αφού το κύκλωμά μας είναι πύλη «ΚΑΙ» θα έχομε στην έξοδο S⇒ «1» μόνον όταν και στις δύο εισόδους έχομε ταυτόχρονα «1».

β) Πύλη «Η» με διόδους.

Το κύκλωμα του σχήματος 4.4η παριστάνει μια πύλη «Η».

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε ότι το κύκλωμα αυτό λειτουργεί ως πύλη «Η», αν όπως και στην πύλη «ΚΑΙ» θεωρήσομε ότι:

— Η αντιστοιχία είναι + 5 V⇒ «1», — 5 V⇒ «0».
— Οι δίοδοι είναι ιδανικές και
— η τάση τροφοδοτήσεως είναι — 5 V.



Σχ. 4.4η.
Πύλη «Η» με διόδους.

Δεδομένου ότι το κύκλωμα έχει δύο εισόδους είναι δυνατόν να εμφανισθούν σε αυτές 4 συνδυασμοί τάσεων (σημάτων εισόδου):

$E_1 = -5$ V, $E_2 = -5$ V $\quad$ $E_1 = +5$ V, $E_2 = -5$ V

$E_1 = -5$ V, $E_2 = +5$ V $\quad$ $E_1 = +5$ V, $E_2 = +5$ V

Περίπτωση Πρώτη ($E_1 = -5$ V, $E_2 = -5$ V).

Στην περίπτωση αυτή, οι δίοδοι (κύκλωμα σχήματος 4.4η) είναι πολωμένες κατά την ανάστροφη φορά. Συνεπώς δεν άγουν και συμπεριφέρονται ως ανοικτοί διακόπτες. Άρα η τάση τροφοδοτήσεως — 5 V, εμφανίζεται στο σημείο A, δηλαδή στην έξοδο.

Επομένως: S = — 5 V.

Περίπτωση Δεύτερη ($E_1 = -5$ V, $E_2 = +5$ V).

Στην περίπτωση αυτή η μία δίοδος είναι πολωμένη κατά την ορθή φορά (δίοδος εισόδου E_2). Συνεπώς άγει και συμπεριφέρεται ως κλειστός διακόπτης. Άρα η τάση πάλι των + 5 V εμφανίζεται στο σημείο Α, δηλαδή στην έξοδο.

Επομένως: S = + 5 V.

Περίπτωση Τρίτη (E_1 = + 5 V, E_2 = − 5 V).

Στην περίπτωση αυτή πάλι η μία δίοδος άγει (δίοδος εισόδου E_1). Συνεπώς έχομε τα ίδια αποτελέσματα όπως προηγουμένως.

Επομένως: S = + 5 V.

Περίπτωση Τέταρτη (E_1 = + 5 V, E_2 = + 5 V).

Στην περίπτωση αυτή και οι δύο οι δίοδοι είναι πολωμένες κατά την ορθή φορά. Συνεπώς άγουν και συμπεριφέρονται ως κλειστοί διακόπτες.

Επομένως: S = + 5 V.

Από τα παραπάνω μπορούμε να φτιάξομε τους πίνακες τάσεων και αληθείας (σχ. 4.4θ).

E_1	E_2	S
− 5 V	− 5 V	− 5 V
− 5 V	+ 5 V	+ 5 V
+ 5 V	− 5 V	+ 5 V
+ 5 V	+ 5 V	+ 5 V

α) Πίνακας τάσεων

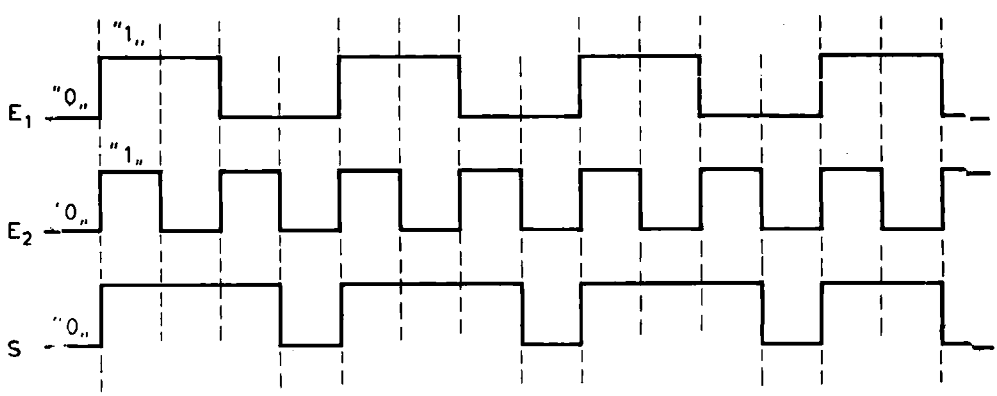
− 5 V ≡ «0»
+ 5 V ≡ «1»
⟹

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

β) Πίνακες αληθείας

Σχ. 4.4θ.
Πίνακες τάσεως και αληθείας τύπου «Η» με διόδους.

Πράγματι από τον πίνακα αληθείας του σχήματος 4.4θ διαπιστώνεται ότι το κύκλωμα του σχήματος 4.4η είναι μία πύλη «Η».



Σχ. 4.4ι.
Κυματομορφές εισόδου - εξόδου πύλης «Η».

Έστω ότι στις εισόδους E_1 και E_2 του κυκλώματος «ΚΑΙ», εφαρμόζονται οι κυματομορφές E_1 και E_2. Τότε η κυματομορφή στην έξοδο θα έχει τη μορφή S (σχ. 4.4ζ) γιατί, αφού το κύκλωμά μας είναι πύλη «ΚΑΙ» θα έχομε στην έξοδο S ⇒ «1» μόνον όταν και στις δύο εισόδους έχομε ταυτόχρονα «1».

Παρατηρήσεις.

α) Στα δύο κυκλώματα που εξετάσαμε παραπάνω, θεωρήσαμε ότι είχαμε δύο εισόδους. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν σε περίπτωση που είχαμε τρεις ή περισσότερες εισόδους. Π.χ. σε κύκλωμα «ΚΑΙ» με τρεις εισόδους θα είχαμε διαφορετικούς συνδυασμούς όπως φαίνεται στους πίνακες τάσεων και αληθείας του σχήματος 4.4ια, που αντιστοιχούν σε κύκλωμα «ΚΑΙ» με τρεις εισόδους.

E_1	E_2	E_3	S
− 5 V	− 5 V	− 5 V	− 5 V
− 5 V	− 5 V	+ 5 V	− 5 V
− 5 V	+ 5 V	− 5 V	− 5 V
− 5 V	+ 5 V	+ 5 V	− 5 V
+ 5 V	− 5 V	− 5 V	− 5 V
+ 5 V	− 5 V	+ 5 V	− 5 V
+ 5 V	+ 5 V	− 5 V	− 5 V
+ 5 V	+ 5 V	+ 5 V	+ 5 V

− 5 V ≡ «0»
+ 5 V ≡ «1»
⟹

E_1	E_2	E_3	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Σχ. 4.4ια.
Πίνακες τάσεων και αληθείας κυκλώματος «ΚΑΙ» με τρεις εισόδους.

β) Τα λογικά κυκλώματα με διόδους που εξετάσαμε μπορούν να λειτουργήσουν κατά τον ίδιο τρόπο, αν χρησιμοποιούσαμε τις τάσεις E_1 = + 5 Volt και E_2 = 0 Volt. Η τάση τροφοδοσίας στην περίπτωση αυτή πρέπει να είναι για την πύλη «ΚΑΙ» + 5 Volt και για την πύλη «Η» 0 Volt.

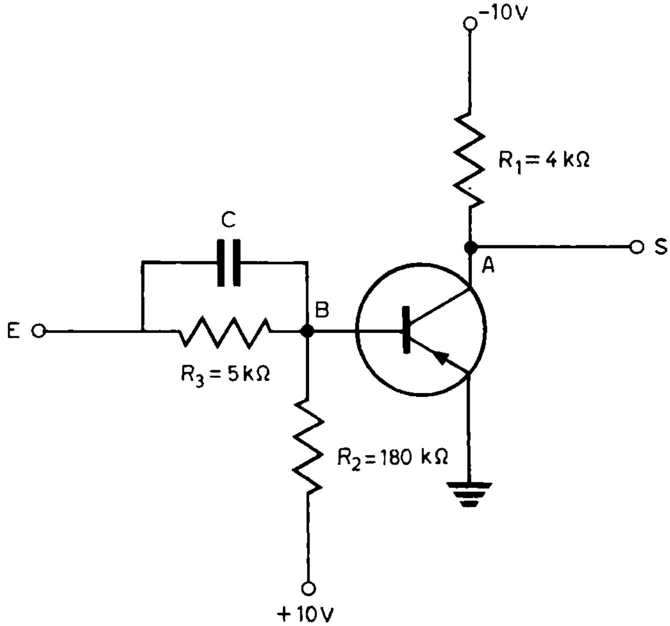
γ) Αντιστροφέας (Inverter).

Το κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα 4.4ιβ εκτελεί την πράξη της αντιστροφής και ονομάζεται πύλη «ΟΧΙ» ή αντιστροφέας (Inverter).

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε ότι το κύκλωμα αυτό εκτελεί την πράξη της αντιστροφής αν θεωρήσομε την αντιστοιχία 0 Volt ⇒ «0» και − 10 Volt ⇒ «1».

Περίπτωση Πρώτη (E = 0 Volt).

Αν στην είσοδο εφαρμόσομε μια τάση 0 Volt, οι αντιστάσεις R_2 και R_3 ενεργούν ως διαιρέτες τάσεως μεταξύ των 0 και + 10 Volt και η τάση στη βάση (σημείο Β) θα είναι ελαφρώς θετική. Με αυτές τις συνθήκες το τρανζίστορ βρίσκεται στην κατάσταση αποκοπής. Συνεπώς δεν άγει και το σημείο Α οδηγείται στην τάση των −10 Volt δηλαδή S = «1».



Σχ. 4.4ιβ.
Αντιστροφέας.

Περίπτωση Δεύτερη (Ε = −10 Volt).

Αν στην είσοδο εφαρμόσομε μια τάση −10 Volt, η τάση στη βάση του τρανζίστορ (σημείο Β) γίνεται αρνητική ως προς τον εκπομπό και το τρανζίστορ οδηγείται στην κατάσταση κόρου. Το δυναμικό του σημείου Α θα είναι 0 Volt (δηλαδή εκείνο του εκπομπού). Άρα S = «0». Συνεπώς για τους πίνακες τάσεων και αληθείας θα έχομε (σχ. 4.4ιγ).

E	S
0 V	−10 V
−10 V	0 V

0 V = «0»
−10 V = «1»
⟹

E	S
0	1
1	0

Σχ. 4.4ιγ.
Πίνακες τάσεων και αληθείας αντιστροφέα.

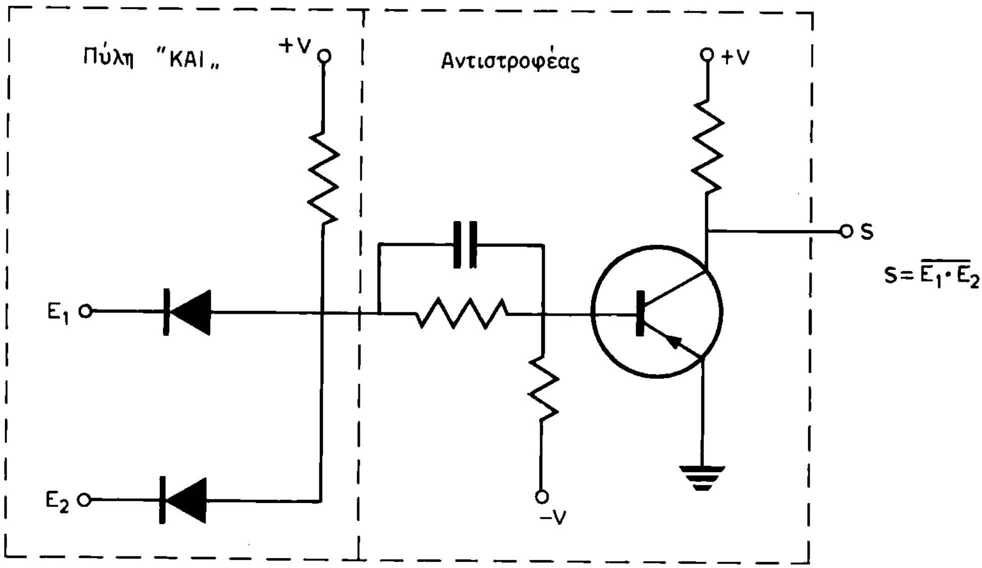
Από τους παραπάνω πίνακες διαπιστώνομε ότι η έξοδος είναι πάντοτε συμπλήρωμα της εισόδου ($S = \bar{E}$). Δηλαδή το κύκλωμά μας εκτελεί τη λογική πράξη της αντιστροφής.

Παρατήρηση.

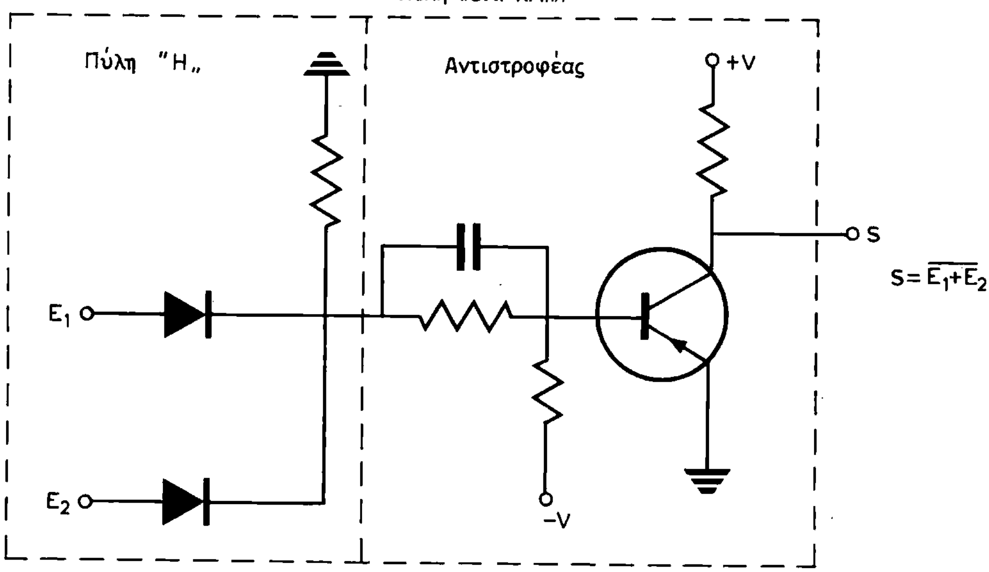
Ο πυκνωτής C δίνει στο κύκλωμα τη δυνατότητα να ανταποκρίνεται σε γρήγορες εναλλαγές 0 και 1 στην είσοδό του (η τιμή του πυκνωτή κυμαίνεται μεταξύ 40-200 pF).

δ) Πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ» και «ΟΧΙ Η».

Αν στην έξοδο μιας πύλης «ΚΑΙ» συνδέσομε έναν αντιστροφέα, τότε το κύκλωμα που προκύπτει είναι μία πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» (σχ. 4.4ιδ).



Σχ. 4.4ιδ.
Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ».



Σχ. 4.4ιε.
Πύλη «ΟΧΙ Η».

Επίσης, αν συνδέσομε έναν αντιστροφέα στην έξοδο μιας πύλης «Η», το κύκλωμα που προκύπτει είναι μια πύλη «ΟΧΙ Η» (σχ. 4.4ιε).

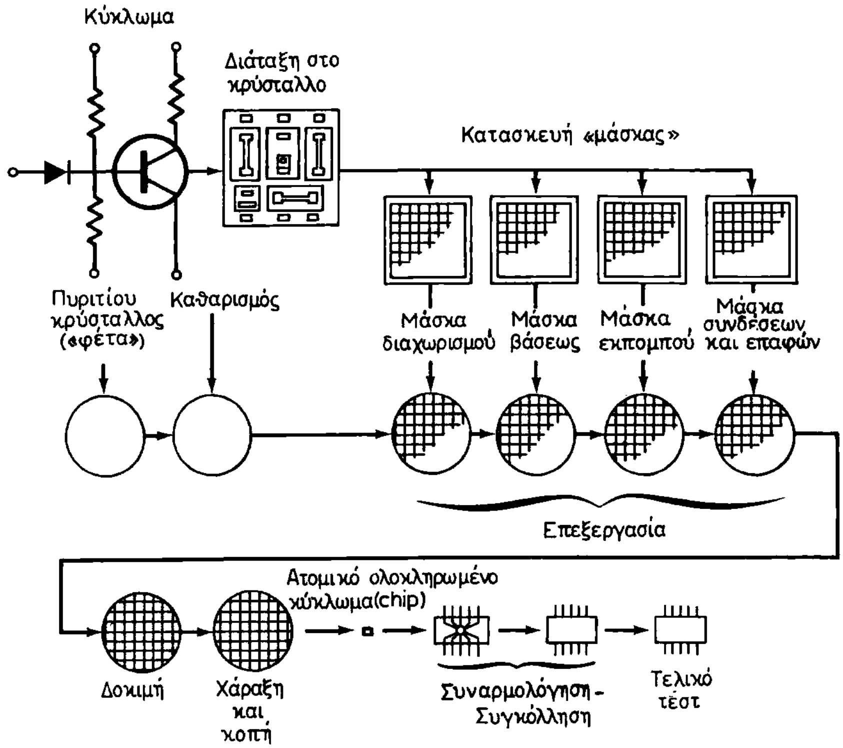
4.4.4 Πραγματοποίηση με ολοκληρωμένα κυκλώματα.

Μέχρι πριν από μερικά χρόνια, όλα τα κυκλώματα που αναφέραμε προηγουμένως κατασκευάζονταν από διακριτά ηλεκτρονικά στοιχεία, όπως π.χ. είναι οι αντιστάσεις, πυκνωτές, τρανζίστορ, δίοδοι κλπ.

Σήμερα, τα κυκλώματα αυτά καθώς και πολλά άλλα, πιο πολύπλοκα ακόμα, κατασκευάζονται με την τεχνική των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (Integrated Circuits ή απλώς I.C). Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα αποτελείται από ένα κομμάτι (φέτα) ημιαγωγού (Chip) στο οποίο με κατάλληλη επεξεργασία έχουν κατασκευασθεί όλα τα επί μέρους στοιχεία του κυκλώματος (αντιστάσεις, πυκνωτές, δίοδοι, τρανζίστορ) καθώς και οι συνδέσεις μεταξύ τους.

Για να κατασκευάσομε ένα κύκλωμα υπό ολοκληρωμένη μορφή, πρώτα το σχεδιάζομε με μεγάλες διαστάσεις. Το σχέδιο αυτό αποτυπώνεται επάνω στο κρύσταλλο (συνήθως κρύσταλλο πυριτίου) και ταυτόχρονα σμικρύνεται (η επιφάνεια του κρυστάλλου είναι μερικά τετραγωνικά χιλιοστά). Η αποτύπωση γίνεται με ειδικές φωτοχημικές διαδικασίες.

Στο σχήμα 4.4ιστ δίνεται παραστατικά η διαδικασία κατασκευής ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος. Στο σχήμα 4.4ιζ δίνεται η τυπική μορφή ενός ολοκληρωμέ-



Σχ. 4.4ιστ.
Διαδικασία κατασκευής ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (αρχή).

νου κυκλώματος στο τέλος .ς πιο πάνω διαδικασίας. Δηλαδή όπως το αγοράζομε σήμερα στο εμπόριο (διαστασεις 0,5 × 1,5 cm περίπου).

Σχ. 4.4ιζ.
Ολοκληρωμένο κύκλωμα (τελική μορφή).

α) Πλεονεκτήματα.

Τα σπουδαιότερα πλεονεκτήματα είναι η μεγάλη μείωση διαστάσεων και βάρους, σημαντική αύξηση της πιστότητας (Reliability) και της ταχύτητας, χαμηλή κατανάλωση ισχύος και το σημαντικότερο πολύ χαμηλή τιμή.

β) Οικογένειες ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.

Για την κατασκευή των κυκλωμάτων των πυλών «ΟΧΙ ΚΑΙ» και «ΟΧΙ Η» που αναφέραμε προηγουμένως, χρησιμοποιούνται δίοδοι και τρανζίστορ. Γι αυτό το λόγο λέμε ότι τα κυκλώματα αυτά ανήκουν στην οικογένεια των κυκλωμάτων «Διόδων — Τρανζίστορ» (Diode Transistor Logic ή DTL). Πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ» και «ΟΧΙ Η» καθώς και διάφορες άλλες πύλες μπορούμε να κατασκευάσομε και με άλλους συνδυασμούς στοιχείων (αντιστάσεις, διόδους, τρανζίστορ κλπ). Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε διάφορες «οικογένειες» κυκλωμάτων, μερικές από τις οποίες θα αναφέρομε παρακάτω.

1) Λογικά Κυκλώματα Αντιστάσεων — Τρανζίστορ (Resistor Transistor Logic — RTL).

Τα λογικά κυκλώματα της οικογένειας αυτής κατασκευάζονται αποκλειστικά από αντιστάσεις και τρανζίστορ. Είναι απλά στο σχεδιασμό και στην κατασκευή τους και επιπλέον έχουν μικρό κόστος. Το σχήμα 4.4ιη παριστάνει μία πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» της οικογένειας RTL με δύο εισόδους.

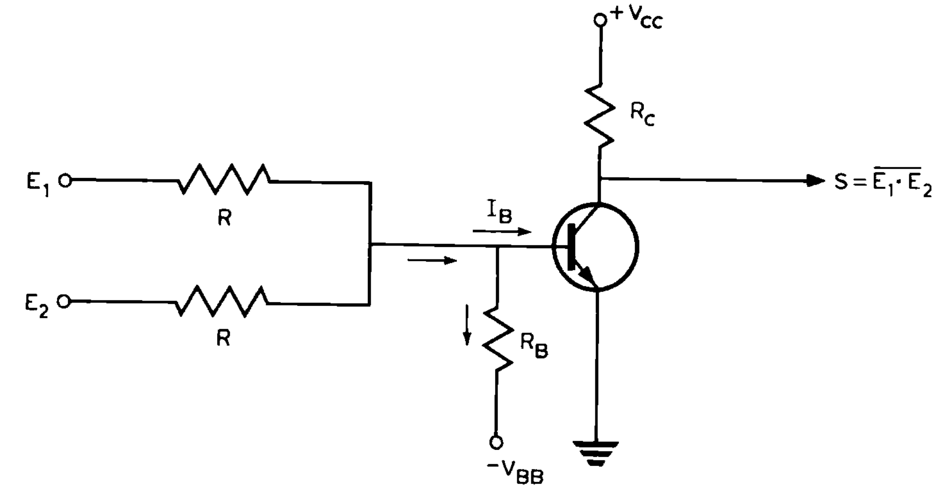
Η τιμή των αντιστάσεων R εκλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε μόνον όταν η τιμή και των δύο εισόδων E_1 και E_2 είναι 1, να οδηγείται το τρανζίστορ στον κόρο. (Τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R προστίθενται).

2) Λογικά Κυκλώματα Διόδων — Τρανζίστορ (Diode Transistor Logic — DTL).

Τα λογικά κυκλώματα της οικογένειας αυτής κατασκευάζονται από διόδους και τρανζίστορ και είναι λιγότερο ευαίσθητα στους θορύβους από τα RTL. Οι πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ» και «ΟΧΙ Η» που παριστάνονται στα σχήματα 4.4ιδ και 4.4ιε είναι κυκλώματα της οικογένειας DTL.

3) Λογικά κυκλώματα με μεγάλο κατώφλιο (High Threshold Logic — HTL).

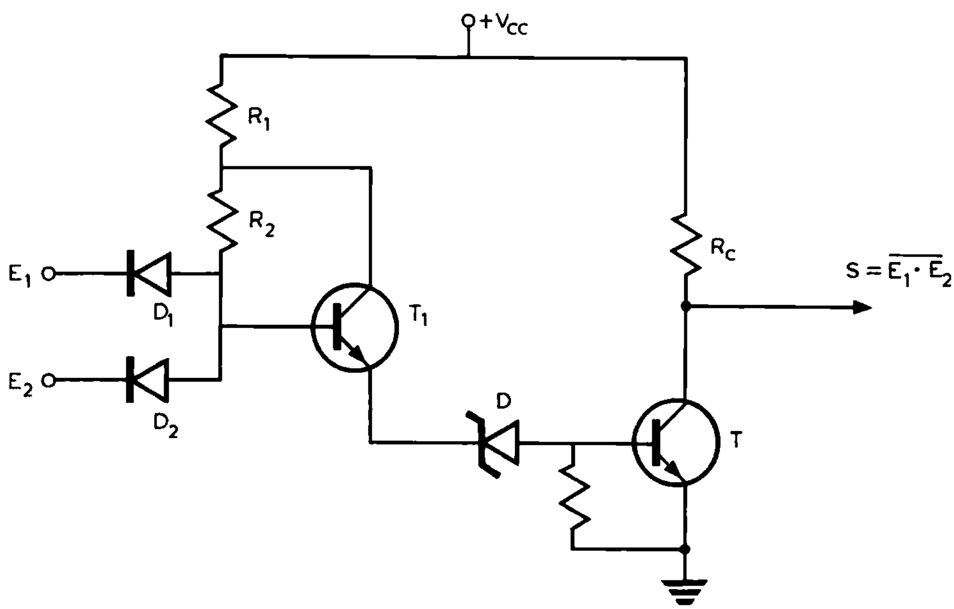
Τα λογικά κυκλώματα της οικογένειας αυτής έχουν ικανοποιητική «αναισθησία» στο θόρυβο (της τάξεως των 7 Volt) και είναι κατάλληλα μόνο για χαμηλές συχνό-



Σχ. 4.4ιη.
Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» της οικογένειας RTL με δύο εισόδους.

τητες. Τα κυκλώματα αυτά χρησιμοποιούνται σε βιομηχανικές εφαρμογές όπου η ύπαρξη κινητήρων, αυτοματισμών κλπ. δημιουργούν υψηλή στάθμη θορύβου.

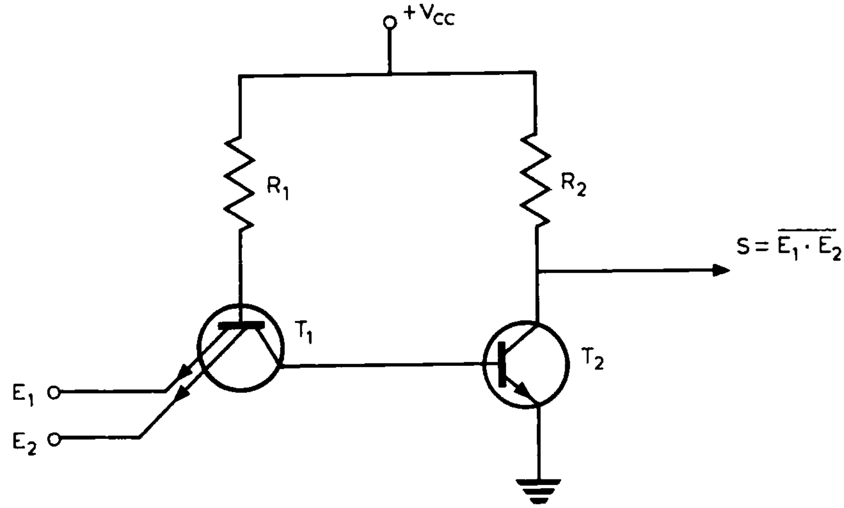
Το σχήμα 4.4ιθ παριστάνει μια πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» της οικογένειας HTL με δύο εισόδους. Από το σχήμα μπορούμε εύκολα να καταλάβομε ότι πρόκειται ουσιαστικά για μια πύλη DTL στην οποία έχει προστεθεί η δίοδος Zener D για να καθορίσει το κατώφλιο και το τρανζίστορ T_1 και για να ενισχύσει την έξοδο την διόδων D_1 και D_2.



Σχ. 4.4ιθ.
Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» της οικογένειας HTL με δύο εισόδους.

4) Λογικά κυκλώματα Τρανζίστορ — Τρανζίστορ (Transistor — Transistor Logic — TTL ή T^2L).

Τα λογικά κυκλώματα της οικογένειας αυτής είναι παρόμοια με τα κυκλώματα της οικογένειας DTL με τη διαφορά ότι είναι ταχύτερα. Τούτο επιτυγχάνεται αν αντί για τις διόδους (σχ. 4.4ιδ και 4.4ιε) χρησιμοποιήσομε ένα τρανζίστορ με πολλαπλό εκπομπό, του οποίου η κατασκευή είναι εύκολη υπό ολοκληρωμένη μορφή. Το σχήμα 4.4κ παριστάνει μία πύλη «ΚΑΙ» της οικογένειας TTL με δύο εισόδους. Τα λογικά κυκλώματα TTL είναι σήμερα τα πιο διαδεδόμενα.



Σχ. 4.4κ.
Πύλη «ΚΑΙ» της οικογένειας TTL με δύο εισόδους.

γ) Άλλες Οικογένειες Λογικών Κυκλωμάτων.

Στα προηγούμενα εξετάσαμε στοιχειωδώς τις κυριότερες οικογένειες λογικών κυκλωμάτων. Εκτός από αυτές υπάρχουν και οι παρακάτω:

— Λογικά κυκλώματα με συνδεδεμένο εκπομπό (Emitter Coupled Logic - ECL ή Current Mode Logic - CML).
— Λογικά κυκλώματα Μετάλλου — Οξειδίου — Ημιαγωγού (Metal - Oxide Semiconductor Logic — MOS).
— Λογικά κυκλώματα εγχύσεως ρεύματος (Integrated Injection Logic - I^2L).
— Λογικά κυκλώματα Μετάλλου — Οξειδίου — Ημιαγωγού με συμπληρωματικά στοιχεία (Complementary Metal — Oxide — Semiconductor Logic — CMOS).

Για να χρησιμοποιήσομε τα λογικά κυκλώματα που αναφέραμε παραπάνω, σε μία εφαρμογή δεν πρέπει να αναμίξομε τις οικογένειες γιατί συνήθως δεν υπάρχει μεταξύ τους συμβιβαστότητα στα χαρακτηριστικά της λειτουργίας τους. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι:

— Ταχύτητα λειτουργίας.
— Αναισθησία στο θόρυβο.
— Ικανότητα ενός κυκλώματος να οδηγήσει άλλα (Fan — In, Fan — Out).

— Τάση τροφοδοτήσεως.
— Ισχύς καταναλώσεως του κυκλώματος.
— Περιοχή θερμοκρασίας για ασφαλή λειτουργία.
— Κόστος.

Η εκλογή της κατάλληλης οικογένειας για κάθε εφαρμογή γίνεται με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Στο πίνακα 4.4.1 συνοψίζονται τα κυριότερα χαρακτηριστικά των βασικών οικογενειών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.

Σήμερα κατασκευάζονται και παρουσιάζονται στο εμπόριο πολύπλοκα λογικά κυκλώματα όπως π.χ. αθροιστές, αποκωδικοποιητές, καταχωρητές, απαριθμητές κλπ. (μερικά από αυτά θα μελετήσομε στα παρακάτω κεφάλαια) ως ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα, η μορφή του οποίου δίνεται στο σχήμα 4.4ιστ(β). Τα ολοκληρωμένα αυτά κυκλώματα ονομάζονται ***μέσης κλίμακας ολοκληρώσεως*** και είναι γνωστά ως ***MSI*** από τα αρχικά των λέξεων ***Medium Scale Integration.***

Λογικά κυκλώματα περισσότερο πολύπλοκα όπως π.χ. το κύκλωμα που υπάρχει μέσα στο μικρό επιτραπέζιο ή τσέπης υπολογιστή λέγονται λογικά κυκλώματα ***μεγάλης κλίμακας ολοκληρώσεως*** και είναι γνωστά ως ***LSI*** από τα αρχικά των λέξεων ***Large Scale Integration.***

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4.1.
Χαρακτηριστικά ολοκληρωμένων κυκλωμάτων

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ	RTL	DTL	HTL	TTL	ECL	MOS	CMOS
Βασική πύλη	NOR	NAND	NAND	NAND	OR-NOR	NAND	NOR ή NAND
Καθυστέρηση ανά πύλη σε nsec	10	30	100	6-12	1-4	300	70
Συχνότητα λειτουργίας Flip-Flop σέ MHZ	10	12-30	44	15-60	60-500	2	5
Αναισθησία στο θόρυβο	μικρή	καλή	εξαιρετική	αρκετά καλή	μικρή	μικρή	πολύ καλή
Ισχύς ανά πύλη σε mW	10	8-12	50	10-20	40-50	0,2-10	0,01 για στατική λειτουργία σε 1MHZ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ

5.1 Γενικά.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τις πύλες, που αποτελούν και τα πλέον βασικά κυκλώματα. Χρησιμοποιώντας και συνδεσμολογώντας κατάλληλα τις πύλες αυτές μπορούμε να κατασκευάσομε πιο σύνθετα λογικά κυκλώματα, τα οποία να πραγματοποιούν μία λογική σχέση μεταξύ εισόδου - εξόδου, να πραγματοποιούν δηλαδή μια συνάρτηση.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσομε τις λογικές συναρτήσεις. Θα μελετήσομε το τρόπο με τον οποίο μπορούμε να τις παραστήσομε διαγραμματικά και να σχεδιάσομε το λογικό κύκλωμα που τις πραγματοποιεί. Θα εξετάσομε επίσης τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να τις απλοποιήσομε.

Με την απλοποίηση καταλήγομε σε μια συνάρτηση απλούστερη από αυτή που μας δόθηκε και ισοδύναμή της. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με κύκλωμα απλούστερο από αυτό που αντιστοιχεί στην αρχική συνάρτηση.

5.2 Λογικές συναρτήσεις — Πίνακας αληθείας.

Λογική μεταβλητή (ή μεταβλητή του Boole) είναι η μεταβλητή που παίρνει μόνο δύο τιμές, την 0 ή 1. Τις λογικές μεταβλητές τις συμβολίζομε με ένα κεφαλαιο γράμμα A, B, C, D, E, ..., X, Y, Z.

Κάθε συνάρτηση με μία ή περισσότερες λογικές μεταβλητές λέγεται λογική συνάρτηση (ή συνάρτηση του Boole). Αυτή συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα f, g, h, συνήθως το f. Παίρνει και αυτή μόνο δύο τιμές, την 0 ή 1. Π.χ. η f (A, B) είναι μία λογική συνάρτηση με δύο μεταβλητές τις A και B.

Η τιμή μιας λογικής συναρτήσεως εξαρτάται από τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές της. Όταν μας δίδεται μία λογική συνάρτηση μπορούμε να κατασκευάσομε έναν πίνακα, ο οποίος να μας δίνει την τιμή της συναρτήσεως για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών τους. Ο πίνακας αυτός λέγεται Πίνακας Αληθείας της λογικής συναρτήσεως. Π.χ. ο πίνακας αληθείας της λογικής συναρτήσεως με δύο μεταβλητές A και B $f(A, B) = \bar{A}B + A\bar{B}$ δίνεται στο πίνακα 5.2.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2.1.
Πίνακας αληθείας της συναρτήσεως f (A, B) και του συμπληρώματός της $\bar{f}$ (A, B)

A	B	f (A, B)	$\bar{f}$ (A, B)
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Στις πρώτες δύο στήλες δίδονται, κατά αύξουσα δυαδική τάξη, όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των τιμών των A και B. Στην τρίτη και τέταρτη στήλη δίδονται αντιστοίχως οι τιμές της συναρτήσεως f (A, B) και τα συμπληρώματά της, δηλαδή της $\bar{f}$ (A, B). Η τιμή της συναρτήσεως f (A, B), για ένα δεδομένο συνδυασμό τιμών των A και B, βρίσκεται αν αντικαταστήσομε τις αντίστοιχες τιμές τους στη συνάρτηση f (A, B). Π.χ. η τιμή της συναρτήσεως f (A, B) για $A = 1$ και $B = 0$ (δηλ. $\bar{A} = 0$ και $\bar{B} = 1$) είναι:

$$f\,(A, B) = 0\,.\,0 + 1\,.\,1 = 0 + 1 = 1$$

Από τον παραπάνω πίνακα αληθείας διαπιστώνομε εύκολα ότι f (A, B) = 1 όταν:

$$\left.\begin{array}{lll} A = 0 & \text{και} & B = 1 \\ A = 1 & \text{και} & B = 0 \end{array}\right\}$$

ή

Οι σχέσεις όμως αυτές μπορούν να γραφούν:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{A} = 1 & \text{και} & B = 1 \\ A = 1 & \text{και} & \bar{B} = 1 \end{array}\right\}$$

ή μπορούν ακόμα να γραφούν ως λογικά γινόμενα:

$$\bar{A}\,.\,B = 1 \quad \text{ή} \quad A\,.\,\bar{B} = 1$$

Δεδομένου ότι κάθε ένα από τα λογικά αυτά γινόμενα (ή ο αντίστοιχος συνδυασμός των τιμών των A και B) δίνουν στη συνάρτηση την τιμή 1, η συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως το λογικό άθροισμα των δύο αυτών λογικών γινομένων. Δηλαδή:

$$f\,(A, B) = \bar{A}B + A\bar{B} \qquad (5.1)$$

Από τα παραπάνω βλέπομε ότι:

Όταν δίδεται μία συνάρτηση μπορούμε να φτιάξομε έναν πίνακα αληθείας, ο οποίος να δίνει την τιμή της συναρτήσεως για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμων των μεταβλητών της και αντίστροφα, όταν δίδεται ένας πίνακας αληθείας μπορούμε να βρούμε μία συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό.

Από τον πίνακα αληθείας 5.2.1 διαπιστώνομε εύκολα ότι για τους συνδυασμούς τιμών:

$$\left.\begin{array}{lcl} A = 0 & \text{και} & B = 0 \\ A = 1 & \text{και} & B = 1 \end{array}\right\}$$

ή

οι οποίοι μπορούν να γραφούν:

$$\left.\begin{array}{lcl} A = 0 & \text{και} & B = 0 \\ \bar{A} = 0 & \text{και} & \bar{B} = 0 \end{array}\right\}$$

η συνάρτηση f (A, B) παίρνει την τιμή 0.

Οι παραπάνω όμως σχέσεις μπορούν να γραφούν ως λογικά αθροίσματα των A και B. Δηλαδή:

$$A + B = 0 \quad \text{ή} \quad \bar{A} + \bar{B} = 0$$

Δεδομένου δε ότι κάθε ένα από τα λογικά αυτά αθροίσματα κάνει την τιμή της συναρτήσεως 0 και το λογικό της γινόμενο θα κάνει την τιμή της συναρτήσεως 0. Δηλαδή:

$$f\,(A, B) = (A + B)\,.\,(\bar{A} + \bar{B}) \qquad (5.2)$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί:

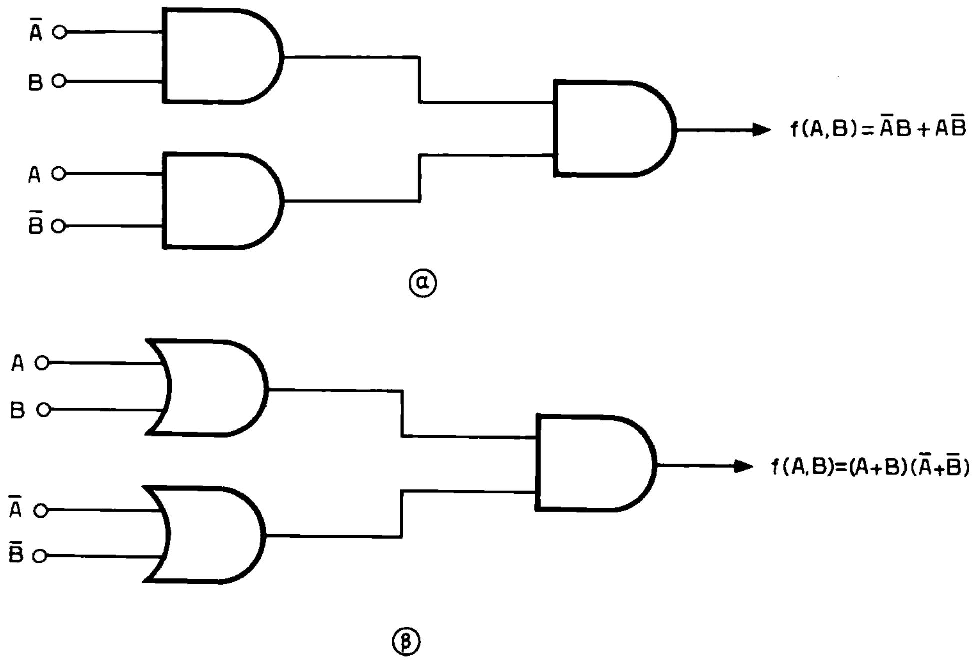
$$\begin{aligned} f\,(A, B) &= (A + B)\,.\,(\bar{A} + \bar{B}) && \text{ή} \\ &= A\,.\,\bar{A} + A\bar{B} + \bar{A}B + B\bar{B} && \text{ή} \\ &= 0 + A\bar{B} + \bar{A}B + 0 && \text{ή} \\ &= A\,.\,\bar{B} + \bar{A}B && \text{ή} \\ &= \bar{A}B + A\bar{B} \end{aligned}$$

Δηλαδή η μορφή της συναρτήσεως που είχαμε στη (5.1).

Από τα παραπάνω βλέπομε ότι στον αρχικό πίνακα αληθείας αντιστοιχούν δύο λογικές συναρτήσεις, οι οποίες παίρνουν τις ίδιες τιμές για τους διάφορους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών τους. Οι συναρτήσεις που έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας λέγονται ισοδύναμες.

Σε κάθε λογική συνάρτηση αντιστοιχεί ένα λογικό κύκλωμα που την πραγματοποιεί. Ισοδύναμες λογικές συναρτήσεις αντιστοιχούν σε ισοδύναμα λογικά κυκλώματα. Στις ισοδύναμες λογικές συναρτήσεις (5.1) και (5.2) αντιστοιχούν τα λογικά κυκλώματα (σχ. 5.2), τα οποία είναι ισοδύναμα.

Γενικά σε δεδομένη λογική συνάρτηση υπάρχει μια απειρία άλλων συναρτήσεων, οι οποίες είναι ισοδύναμες με αυτή. Φυσικό είναι συνεπώς να προσπαθήσει κανείς να βρει την απλούστερη η οποία θα οδηγήσει στην κατασκευή του απλού-



Σχ. 5.2.
Λογικά κυκλώματα συναρτήσεων (α) $f(A,B) = \bar{A}B + A\bar{B}$ καί (β) $f(A,B) = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$.

στερου λογικού και συνεπώς ηλεκτρονικού κυκλώματος που την πραγματοποιεί.

Στις επόμενες παραγράφους θα εξετάσομε τον τρόπο απλοποιήσεως μιας συναρτήσεως χρησιμοποιώντας την αλγεβρική μέθοδο (χρησιμοποίηση αξιωμάτων και θεωρημάτων Boole) και τη μέθοδο του Karnaugh.

5.3 Ελάχιστοι και μέγιστοι όροι.

Έστω δύο λογικές μεταβλητές Α και Β. Όλα τα λογικά γινόμενα που σχηματίζονται από τις λογικές αυτές μεταβλητές και τα συμπληρώματά τους, δηλαδή τα $A \cdot B$, $\bar{A} \cdot B$, $A \cdot \bar{B}$, $\bar{A} \cdot \bar{B}$, λέγονται «ελάχιστοι όροι» των μεταβλητών Α και Β.

Γενικότερα, οι ελάχιστοι όροι των μεταβλητών A, B, C,..., E είναι όλα τα λογικά γινόμενα $A \cdot B \cdot C \ldots E$, $\bar{A} \cdot B \cdot C \ldots E$,... $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \ldots \bar{E}$ των μεταβλητών αυτών, όπου κάθε μεταβλητή μπορεί να εμφανίζεται η ίδια ή το συμπλήρωμά της.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται οι μέγιστοι όροι δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, ως λογικά αθροίσματα των μεταβλητών αυτών και των συμπληρωμάτων τους.

Π.χ. οι όροι $(A + B)$, $(\bar{A} + B)$, $(A + \bar{B})$ και $(\bar{A} + \bar{B})$ είναι οι μέγιστοι όροι δύο μεταβλητών Α και Β.

Ας θεωρήσομε δύο μεταβλητές Α και Β. Στον πίνακα 5.3.1 δίδονται όλοι οι συνδυασμοί των τιμών των μεταβλητών αυτών με αύξουσα δυαδική τάξη καθώς και οι αντίστοιχες τιμές κάθε ελάχιστου και μέγιστου όρου των μεταβλητών αυτών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3.1.
Πίνακας ελαχίστων και μεγίστων όρων δύο μεταβλητών Α, Β

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A.B$	$\overline{A}.B$	$A.\overline{B}$	$\overline{A}.\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A}+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0

Από τον πίνακα αυτό βλέπομε ότι:

α) Κάθε όρος είναι μία συνάρτηση η οποία παίρνει την τιμή 1 μόνο για ένα συνδυασμό τιμών των μεταβλητών που περιλαμβάνει. Π.χ. ο ελάχιστος όρος $A \,.\, B$ παίρνει την τιμή 1 μόνο για $A = 1$ και $B = 0$.

Παρατηρούμε ακόμα ότι, αν σε ένα ελάχιστο όρο αντικαταστήσομε τη μεταβλητή με 1 και το συμπλήρωμά της με 0, π.χ. στον όρο $A \,.\, \overline{B}$ με το 1 0 (ένα μηδέν όχι δέκα), έχομε το συνδυασμό των τιμών των μεταβλητών Α και Β για τις οποίες και μόνο ο όρος έχει την τιμή 1.

β) Κάθε μέγιστος όρος είναι μία συνάρτηση η οποία έχει την τιμή 0 μόνο για ένα συνδυασμό τιμών των μεταβλητών που περιλαμβάνει. Π.χ. ο μέγιστος όρος $A + \overline{B}$ παίρνει τιμή 0 μόνο για $A = 0$ και $B = 1$.

Παρατηρούμε ακόμα ότι, αν σε ένα μέγιστο όρο αντικαταστήσομε τη μεταβλητή με 1 και το συμπλήρωμά της με 0, π.χ. στον όρο $A + \overline{B}$ με το $1 + 0$ (ένα ή μηδέν και όχι ένα συν μηδέν), έχομε το συνδυασμό των τιμών των μεταβλητών Α και Β για τις οποίες και μόνο ο όρος έχει την τιμή 0.

γ) Από τον πίνακα αληθείας 5.2.1 που παριστάνει τη συνάρτηση f (Α, Β), βλέπομε ότι η συνάρτηση έχει την τιμή 1 για δύο συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών της Α, Β τον 0 1 ή 1 0. Μπορούμε επομένως να θεωρήσομε ότι αυτή είναι το λογικό άθροισμα των ελαχίστων όρων που αντιστοιχούν στο συνδυασμό αυτό. Δηλαδή:

$$F\,(A,\,B) = \overline{A}\,.\,B + A\,.\,\overline{B}$$

Με ανάλογο τρόπο έχομε:

$$f\,(A,\,B) = (\overline{A} + \overline{B})\,.\,(A + B)$$

Από τα παραπάνω βλέπομε ότι, όταν μας δίδεται ο πίνακας αληθείας μιας συναρτήσεως μπορούμε να εκφράσομε τη συνάρτηση ως λογικό άθροισμα ελαχίστων όρων των μεταβλητών της που αντιστοιχούν στους συνδυασμούς τιμών τους για τους οποίους η συνάρτηση έχει την τιμή 1 ή ως λογικό γινόμενο μεγίστων όρων των μεταβλητών της που αντιστοιχούν στους συνδυασμούς τιμών τους για τους οποίους η συνάρτηση έχει την τιμή 0.

Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

1) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητών μπορεί να παρασταθεί με ένα και μόνο με ένα λογικό άθροισμα 2^n ελαχίστων όρων των n αυτών μεταβλητών. Δηλαδή:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i E_i$$

όπου E_i οι ελάχιστοι όροι και a_i οι «χαρακτηριστικοί αριθμοί» της λογικής συναρτήσεως και έχουν τις τιμές 0 ή 1.

2) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητών μπορεί να παρασταθεί με ένα και μόνο με ένα λογικό γινόμενο 2^n μεγίστων όρων των n μεταβλητών. Δηλαδή:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (a_i + M_i)$$

όπου M_i είναι οι μέγιστοι όροι και a_i οι «χαρακτηριστικοί αριθμοί» της συναρτήσεως.

Με τρεις μεταβλητές μπορούμε να σχηματίσομε 8 ελάχιστους και 8 μέγιστους όρους, οι οποίοι δίδονται στον πίνακα 5.3.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3.2.

Πίνακας ελαχίστων και μεγίστων όρων τριών μεταβλητών

A	B	C	Ελάχιστοι Όροι	Μέγιστοι Όροι
0	0	0	$E_0 = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	$M_0 = A + B + C$
0	0	1	$E_1 = \bar{A}.\bar{B}.C$	$M_1 = A + B + \bar{C}$
0	1	0	$E_2 = \bar{A}.B.\bar{C}$	$M_2 = A + \bar{B} + C$
0	1	1	$E_3 = \bar{A}.B.C$	$M_3 = A + \bar{B} + \bar{C}$
1	0	0	$E_4 = A.\bar{B}.\bar{C}$	$M_4 = \bar{A} + B + C$
1	0	1	$E_5 = A.\bar{B}.C$	$M_5 = \bar{A} + B + \bar{C}$
1	1	0	$E_6 = A.B.\bar{C}$	$M_6 = \bar{A} + \bar{B} + C$
1	1	1	$E_7 = A.B..C$	$M_7 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

Στον πίνακα 5.3.3 δίδονται οι τιμές αληθείας όλων των ελαχίστων όρων τριών μεταβλητών A, B, C. Παρατηρούμε ότι κάθε ελάχιστος όρος έχει τιμή 1 μόνο για ένα συνδυασμό τιμών των A, B, C.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3.3.
Πίνακας αληθείας των ελαχίστων όρων τριών μεταβλητών

A	B	C	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	$\overline{A}.\overline{B}.C$	$\overline{A}.B.\overline{C}$	$\overline{A}.B.C$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	$A.\overline{B}.C$	$A.B.\overline{C}$	$A.B.C$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Γενικά με n μεταβλητές σχηματίζονται 2^n ελάχιστοι και 2^n μέγιστοι όροι.

5.4 Θεωρήματα επάνω στις λογικές συναρτήσεις.

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσομε μερικά βασικά θεωρήματα επάνω στις λογικές συναρτήσεις χωρίς να προχωρήσομε στην απόδειξή τους, γιατί αυτό ξεπερνά τα όρια του βιβλίου αυτού.

Θεώρημα Πρώτο.

α) Το λογικό γινόμενο δύο ελαχίστων όρων, διαφορετικών μεταξύ τους, είναι 0. Δηλαδή:

$$E_i E_j = 0 \quad \text{διά} \quad i \neq j$$

β) Το λογικό άθροισμα δύο μεγίστων όρων, διαφορετικών μεταξύ τους, είναι 1. Δηλαδή:

$$M_i + M_j = 1 \quad \text{διά} \quad i \neq j$$

Θεώρημα Δεύτερο.

α) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητών μπορεί να παρασταθεί με ένα και μόνο με ένα λογικό άθροισμα 2^n ελαχίστων όρων των n αυτών μεταβλητών. Δηλαδή:

$$f(A_1, A_2, \dots A_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \; E_i$$

όπου E_i οι ελάχιστοι όροι και a_i οι «χαρακτηριστικοί αριθμοί» της λογικής συναρτήσεως και έχουν τις τιμές 0 ή 1.

β) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητών μπορεί να παρασταθεί με ένα και μόνο με ένα λογικό γινόμενο 2^n μεγίστων όρων των n μεταβλητών. Δηλαδή:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (a_i + M_i)$$

όπου M_i οι μέγιστοι όροι και a_i είναι και πάλι οι «χαρακτηριστικοί αριθμοί» της συναρτήσεως.

Με το Δεύτερο θεώρημα μπορούμε να σχηματίσομε την έκφραση μιας συναρτήσεως από τον πίνακα αληθείας.

Θεώρημα Τρίτο.

Το λογικό άθροισμα των 2^n διαφορετικών ελαχίστων όρων και το λογικό γινόμενο των 2^n διαφορετικών μεγίστων όρων n μεταβλητών ισούται με 1 και 0 αντιστοίχως. Δηλαδή:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} E_i = 1 \quad \text{και} \quad \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

Θεώρημα Τέταρτο.

Οποιοσδήποτε ελάχιστος όρος μιας συναρτήσεως n μεταβλητών ισούται με το λογικό γινόμενο $2^n - 1$ μεγίστων όρων και, αντιστοίχως, οποιοσδήποτε μέγιστος όρος ισούται με το λογικό άθροισμα $2^n - 1$ ελαχίστων. Δηλαδή:

$$E_\kappa = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2^n-1} M_i \qquad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, (2^n - 1)$$

και

$$M_\kappa = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2^n-1} E_i \qquad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, (2^n - 1)$$

Θεώρημα Πέμπτο.

Το πλήθος των διαφορετικών συναρτήσεων n μεταβλητών είναι 2^n.

5.5 Διαγράμματα Veitch — Χάρτης Karnaugh.

Η παράσταση των ελαχίστων (και μεγίστων) όρων μπορεί να γίνει εύκολα με τα διαγράμματα Veitch (Βάϊτς), όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5α.

$\bar{A}$	$\bar{A}$
A	A

(α)

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}.\bar{B}$	$\bar{A}.B$
A	$A.\bar{B}$	$A.B$

(β)

	$\bar{B}.\bar{C}$	$\bar{B}.C$	$B.\bar{C}$	$B.C$
$\bar{A}$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	$\bar{A}.\bar{B}.C$	$\bar{A}.B.\bar{C}$	$\bar{A}.B.C$
A	$A.\bar{B}.\bar{C}$	$A.\bar{B}.C$	$A.B.\bar{C}$	$A.B.C$

(γ)

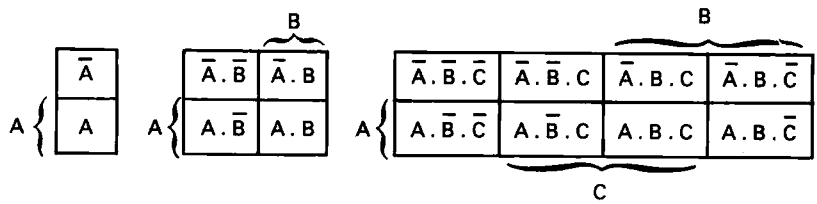
Σχ. 5.5α.
Διαγράμματα Veitch των ελαχίστων όρων μιας (α), δύο (β) και τριών (γ) μεταβλητών.

Στην περίπτωση μιας μεταβλητής έχομε μόνο δύο όρους A και $\bar{A}$, τοποθετημένους κατακορύφως [σχ. 5.5α(α)].

Στην περίπτωση δύο μεταβλητών, όπου έχομε τέσσερεις ελάχιστους όρους τοποθετούμε τις τιμές της A κατακορύφως και τις τιμές της B οριζοντίως [σχ. 5.5α(β)]. Με συνδυασμό των αντιστοίχων τιμών προκύπτουν οι τέσσερεις ελάχιστοι όροι.

Στην περίπτωση τριών μεταβλητών A, B και C, όπου έχομε οκτώ ελάχιστους όρους, τοποθετούμε την A κατακορύφως όπως προηγουμένως και τους ελάχιστους όρους των δύο άλλων μεταβλητών B, C οριζοντίως. Με συνδυασμό αυτών προκύπτουν οι οκτώ ελάχιστοι όροι των A, B και C [σχ. 5.5α(γ)].

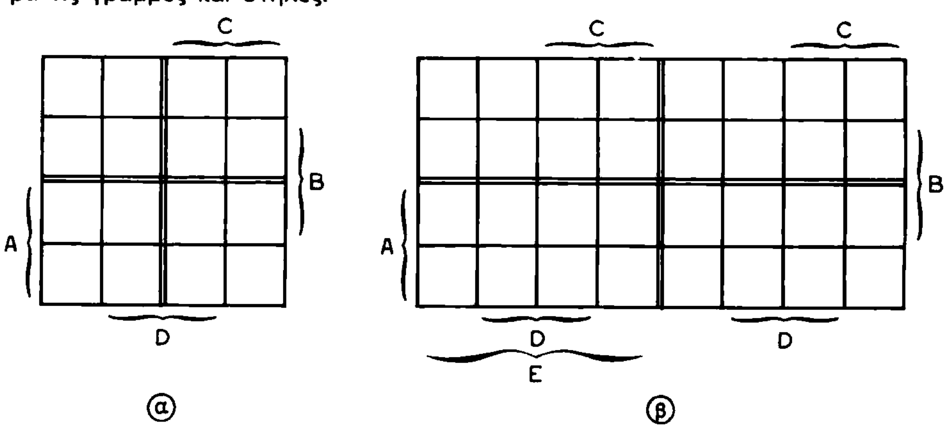
Για να παραστήσομε τους ελάχιστους (και μέγιστους) όρους μπορούμε να χρησιμοποιήσομε επίσης το χάρτη του Karnaugh. O χάρτης αυτός προκύπτει από τα διαγράμματα Veitch, αν ανακατατάξομε τα τετραγωνίδιά τους (σχ. 5.5β). Στις περιπτώσεις της μιας ή δύο μεταβλητών δεν υπάρχουν διαφορές στην παράσταση των ελαχίστων όρων με τα διαγράμματα Veitch ή το χάρτη του Karnaugh. Οι διαφορές τους αρχίζουν από την περίπτωση των τριών μεταβλητών και πάνω.



Σχ. 5.5β.
Χάρτες του Karnaugh που αντιστοιχούν στα διαγράμματα Veitch του σχήματος 5.5α.

Οι γραμμές ή οι στήλες που αντιστοιχούν στις αγκύλες περιέχουν τις μεταβλητές που δείχνονται από τις αγκύλες, ενώ οι υπόλοιπες περιέχουν τα συμπληρώματά τους.

Στο σχήμα 5.5γ δίνονται οι χάρτες του Karnaugh για τις περιπτώσεις τεσσάρων και πέντε μεταβλητών. Γι' αυτούς ισχύουν οι παραπάνω παρατηρήσεις όσον αφορά τις γραμμές και στήλες.



Σχ. 5.5γ.
Χάρτης Karnaugh για τέσσερεις (α) και πέντε (β) μεταβλητές.

Στην παράγραφο που ακολουθεί (5.6) θα εξετάσομε πως χρησιμοποιούμε το χάρτη του Karnaugh για να απλοποιήσομε μια λογική συνάρτηση.

5.6 Απλοποίηση λογικών συναρτήσεων.

5.6.1 Αλγεβρική μέθοδος.

Για να απλοποιήσομε μια συνάρτηση αλγεβρικά χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα που αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, παράγραφο 2.4. Παρακάτω θα αναφέρομε μερικά παραδείγματα τα οποία θα μας δείξουν πώς μπορούμε να απλοποιήσομε μια λογική συνάρτηση χρησιμοποιώντας αλγεβρική μέθοδο.

Παραδείγματα.

α) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $f\,(A, B, C) = A + A\,.\,\bar{B} + \bar{A}\,.\,B$

$$\begin{aligned} A + A\,.\,\bar{B} + \bar{A}B &= (A + A\,.\,\bar{B}) + \bar{A}\,.\,B \\ &= A + \bar{A}\,.\,B \\ &= A + B \end{aligned}$$

Άρα $f\,(A, B, C) = A + B$

β) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $f\,(A, B, C) = \bar{A}\,.\,B + A\,.\,B + \bar{A}\,.\,\bar{B}$

$$\begin{aligned} \bar{A}\,.\,B + A\,.\,B + \bar{A}\,.\,\bar{B} &= (\bar{A} + A)\,.\,B + \bar{A}\,.\,\bar{B} \\ &= 1\,.\,B + \bar{A}\bar{B} \\ &= B + \bar{A}\,.\,\bar{B} \\ &= B + \bar{A} \end{aligned}$$

Άρα $F\,(A, B, C) = B + \bar{A}$

γ) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $f\,(A, B, C) = (A + B)\,(A + \bar{B})$

$$\begin{aligned} (A + B)\,(A + \bar{B}) &= A\,.\,A + A\,.\,B + A\,.\,\bar{B} + B\,.\,\bar{B} \\ &= A + AB + A\,.\,\bar{B} \\ &= A + A\,(B + \bar{B}) \\ &= A + A\,.\,1 \\ &= A + A \\ &= A \end{aligned}$$

δ) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $f\,(A, B, \Gamma) = \bar{A}B\Gamma + A\bar{B}\Gamma + AB\bar{\Gamma} + AB\Gamma$. Δεδομένου ότι ένα όρο μπορούμε να τον θεωρήσομε πολλές φορές, π.χ. τον $AB\Gamma$, η συνάρτησή μας γράφεται:

$$\bar{A}B\Gamma + A\bar{B}\Gamma + AB\bar{\Gamma} + AB\Gamma + AB\Gamma + AB\Gamma$$

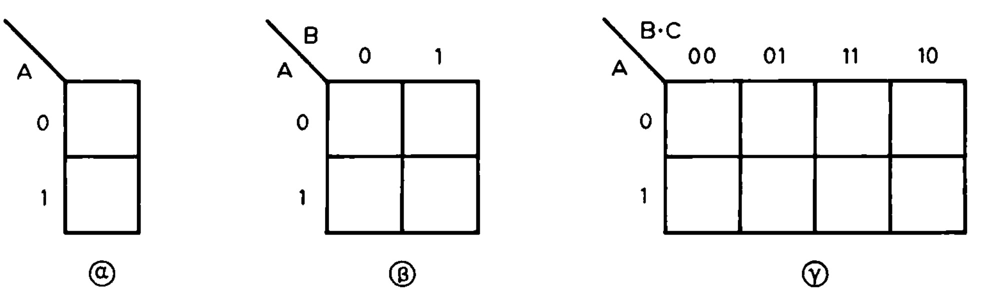
οπότε έχομε:

$= B\Gamma\,(\bar{A} + A) + A\Gamma\,(\bar{B} + B) + AB\,(\bar{\Gamma} + \Gamma)$
$= B\Gamma\,.\,1 + A\Gamma\,.\,1 + AB\,.\,1$
$= B\Gamma + A\Gamma + AB$

Η αλγεβρική μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε πάρα πάνω για την απλοποίηση μιας λογικής συναρτήσεως, εφαρμόζεται εύκολα στη περίπτωση απλών συναρτήσεων. Όταν όμως θέλομε να απλοποιήσομε πολύπλοκες συναρτήσεις, η μέθοδος αυτή είναι πολύ δύσκολη και κοπιαστική. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Karnaugh που στηρίζεται στο χάρτη Karnaugh τον οποίο εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

5.6.2 Μέθοδος Karnaugh.

Όπως αναφέραμε στα προηγούμενα, κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα των ελαχίστων όρων της. Κάθε ελάχιστος όρος όμως μπορεί να παρασταθεί στο χάρτη του Karnaugh. Αν σε ένα χάρτη Karnaugh, θέσομε 1 στις θέσεις των ελαχίστων όρων της συναρτήσεως και 0 στους υπόλοιπους παίρνομε την παράσταση της συναρτήσεως στο χάρτη του Karnaugh. Για να μπορούμε όμως να περάσομε εύκολα από τον πίνακα αληθείας μιας συναρτήσεως στο χάρτη του Karnaugh αυτής, χρησιμοποιούμε τη μορφή του χάρτη του Karnaugh πού δίδεται στο σχήμα 5.6α. Σε αυτή όπου έχομε A, B, C κλπ. θέτομε στη θέση τους 1 και όπου έχομε $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ κλπ. θέτομε στη θέση τους 0.

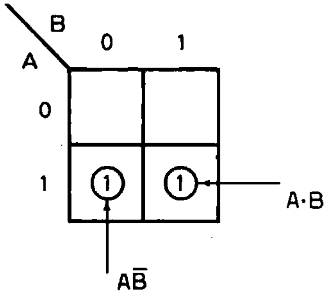


Σχ. 5.6α.
Απλοποιημένη μορφή χάρτου Karnaugh για τις περιπτώσεις μιας (α), δύο (β) και τριών (γ) μεταβλητών.

Από τα παραπάνω εύκολα συμπεραίνομε ότι μπορούμε να περάσομε από την έκφραση μιας συναρτήσεως με τους ελάχιστους όρους της ή από τον πίνακα αληθείας αυτής, στην παράστασή της στο χάρτη του Karnaugh. Αντίστροφα, όταν μάς δίδεται ο χάρτης του Karnaugh μιας συναρτήσεως, μπορούμε εύκολα να βρούμε τον πίνακα αληθείας της ή την παράστασή της με τους ελάχιστους όρους της. Στην περίπτωση αυτή δεν έχομε παρά να αθροίσομε τους ελάχιστους όρους στις θέσεις των οποίων υπάρχει πάνω στο χάρτη 1.

Παραδείγματα.

α) Δίνεται η συνάρτηση $f\,(A, B) = A\bar{B} + AB$. Αυτή περιλαμβάνει τους ελάχιστους όρους $A\overline{B}$ και ΑΒ. Η παράστασή της στο χάρτη του Karnaugh δίδεται στο σχήμα 5.6β.



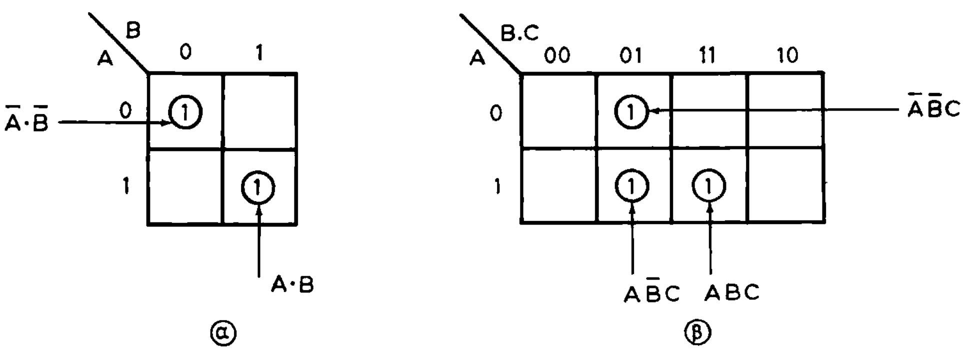
Σχ. 5.6β.
Παράσταση της λογικής συναρτήσεως (A, B) = A . B + A . B στο χάρτη του Kamaugh.

β) Να παρασταθούν οι παρακάτω λογικές συναρτήσεις στο χάρτη του Karnaugh.

$$(1)\ f\ (A,\ B) = A\ .\ B + \overline{A}\ .\ \overline{B}$$

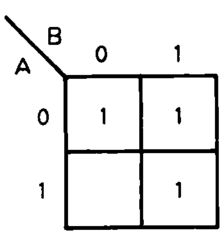
$$(2)\ f\ (A,\ B) = ABC + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C$$

Η συνάρτηση $f\ (A, B) = A\ .\ B + \overline{A}\ .\ \overline{B}$ παριστάνεται όπως στο σχήμα 5.6γ(α) και η $f(A, B) = A\ .\ B\ .\ C + A\ .\ \overline{B}\ .\ C + \overline{A}\ .\ \overline{B}\ .\ C$ όπως στο σχήμα 5.6γ(β).



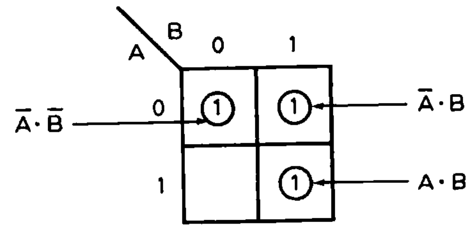
Σχ. 5.6γ.
Παράσταση λογικών συναρτήσεων στο χάρτη Karnaugh.

γ) Να ευρεθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράστασή της στο χάρτη του Karnaugh δίδεται από το σχήμα 5.6δ.



Σχ. 5.6δ.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως.

Τα 1 που υπάρχουν στα τετραγωνίδια του χάρτη του Karnaugh (σχ. 5.6δ) αντιστοιχούν στους ελάχιστους όρους $\bar{A} . \bar{B}$, $\bar{A} . B$ και $A . B$ (σχ. 5.6ε).



Σχ. 5.6ε.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως για το παράδειγμα (γ) της παραγράφου 5.6.2. (Παράσταση ιδίων ελαχίστων όρων).

Αν λάβομε υπόψη μας το θεώρημα 2 της παραγράφου 5.4, η ζητούμενη συνάρτηση είναι:

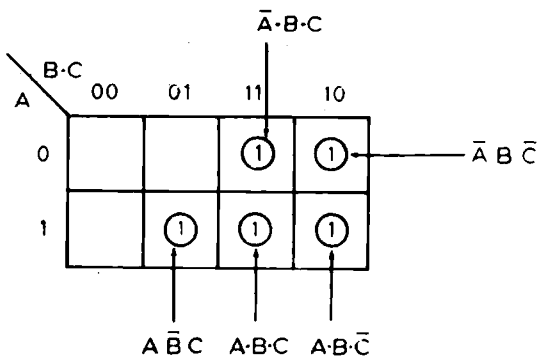
$$f(A, B) = \bar{A} . \bar{B} + \bar{A} . B + A . B$$

δ) Να ευρεθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράσταση στο χάρτη του Karnaugh δίδεται από το σχήμα 5.6στ.

A \ B·C	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

Σχ. 5.6στ.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως.

Με τον ίδιο τρόπο όπως στο παράδειγμα (γ) έχομε (σχ. 5.6ζ):



Σχ. 5.6ζ.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως για το παράδειγμα (δ) της παραγράφου 5.6.2. (Παράσταση ιδίων ελαχίστων όρων).

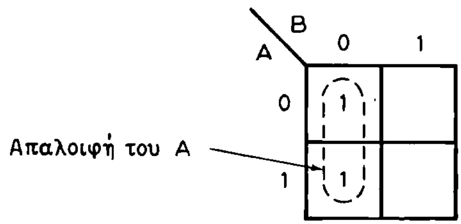
Ομοίως όπως στο παράδειγμα (γ) έχομε:

$$f\ (A,\ B,\ C) = A\ .\ \overline{B}\ .\ C + A\ .\ B\ .\ C + A\ .\ B\ .\ \overline{C} + \overline{A}\ .\ B\ .\ C + \overline{A}\ .\ B\ .\ \overline{C}$$

Η παράσταση των συναρτήσεων στο χάρτη του Karnaugh, με τους ελάχιστους (ή μέγιστους) όρους τους βρίσκει εφαρμογή στην απλοποίηση των συναρτήσεων αυτών εύκολα και γρήγορα. Η μέθοδος του Karnaugh στηρίζεται στις ιδιότητες του ομώνυμου χάρτη και είναι εφαρμόσιμη για συναρτήσεις μέχρι και 6 μεταβλητών. Εμείς θα εξετάσομε την απλοποίηση συναρτήσεων με δύο, τρεις και τέσσερεις μεταβλητές.

Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών $f\ (A,\ B) = A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}$.

Αυτή παριστάνεται στο χάρτη του Karnaugh (σχ. 5.6η):



Σχ. 5.6η.
Παράσταση της f (A, B) = AB + AB στο χάρτη Karnaugh.

Η συνάρτηση αποτελείται από δύο ελάχιστους όρους που βρίσκονται σε γειτονικά τετραγωνίδια με κοινή τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη. Η κοινή τετμημένη 1 οφείλεται στο ότι και οι δύο οι ελάχιστοι όροι περιέχουν τον παράγοντα $\overline{B}$ και η διαφορετική τεταγμένη στο ότι ο ένας όρος περιέχει τη μεταβλητή A (που αντιστοιχεί σε τεταγμένη 1) και ο άλλος όρος περιέχει τη συμπληρωματική της $\overline{A}$ (που αντιστοιχεί σε τεταγμένη 0).

Αν βγάλομε έξω από την παρένθεση τον κοινό παράγοντα $\overline{B}$ η συνάρτηση γράφεται:

$$f\ (A,\ B) = \overline{B}\ .\ (A + \overline{A}) = \overline{B}\ .\ 1 = \overline{B}$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσομε τον παρακάτω γενικό κανόνα απλοποιήσεως μιας συναρτήσεως, η οποία στο χάρτη του Karnaugh περιέχει δύο γειτονικά 1 (γειτονικά τετραγωνίδια).

Κανόνας Karnaugh.

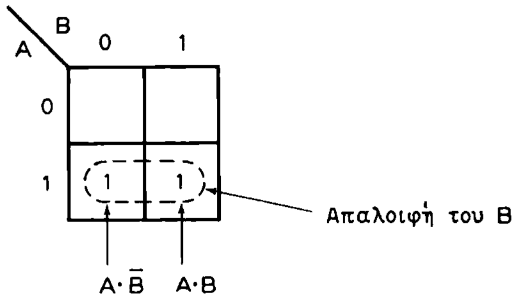
Αν η παράσταση μιας συναρτήσεως δύο μεταβλητών περιέχει δύο γειτονικά 1 (γειτονικά τετραγωνίδια), αντικαθιστούμε τους αντίστοιχους ελάχιστους όρους με έναν, στον οποίο δεν υπάρχει η μεταβλητή που αλλάζει τιμή από το ένα τετραγωνίδιο στο άλλο.

Παραδείγματα.

α) Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο του Karnaugh η συνάρτηση:

$$f\,(A,\,B) = A\,.\,B + A\,.\,\overline{B}$$

Η συνάρτηση παριστάνεται στο χάρτη του Karnaugh όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6θ.



Σχ. 5.6θ.
Απλοποίηση της συναρτήσεως f (A, B) = A . B + A . B

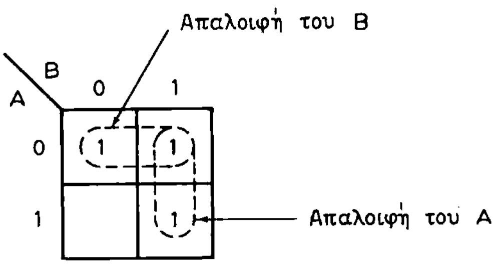
Κλείνομε μέσα σε διακεκομμένη γραμμή τα δύο γειτονικά 1. Η μεταβλητή που αλλάζει τιμή είναι η B. Άρα αντικαθιστούμε τους δύο ελάχιστους όρους της συναρτήσεως με ένα και παραλείπομε τη μεταβλητή B (που αλλάζει τιμή). Επομένως:

$$f\,(A,\,B) = A$$

β) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση:

$$f\,(A,\,B) = \overline{A}\,.\,\overline{B} + \overline{A}\,.\,B + A\,.\,B$$

Η συνάρτηση παριστάνεται στο χάρτη της Karnaugh όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6ι.



Σχ. 5.6ι.
Απλοποίηση της συναρτήσεως f (A, B) = $\overline{A}\,.\,\overline{B} + \overline{A}\,.\,B + A\,.\,B$.

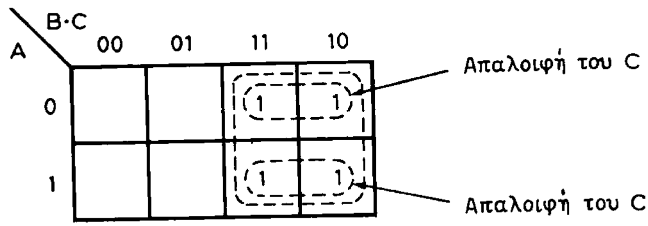
Προφανώς, αν χρησιμοποιήσομε περισσότερες φορές ένα ελάχιστο όρο η τιμή της συναρτήσεως δεν αλλάζει. Άρα μπορούμε, σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε προηγουμένως, να απαλείψομε τη μεταβλητή B αντικαθιστώντας τους δύο γειτονικούς όρους $\overline{A}\,.\,\overline{B}$, $\overline{A}B$ με τον $\overline{A}$ και στη συνέχεια να απαλείψομε τη μεταβλητή A αντικαθιστώντας τους δύο γειτονικούς όρους $\bar{A} . B$, $A . B$ με το B. Έτσι η απλοποιημένη μορφή της συναρτήσεως είναι:

$$f(A, B) = \bar{A} + B$$

γ) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση των τριών μεταβλητών:

$$f(A, B, C) = \bar{A} . B . C + \bar{A} . B . \bar{C} + A . B . C + A . B . \bar{C}$$

Η συνάρτηση f (A, B, C) παριστάνεται στο χάρτη Karnaugh, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6ια.



Σχ. 5.6ια.
Απλοποίηση συναρτήσεως τριών μεταβλητών.

Αν απλοποιήσομε το C, τα πάνω τετραγωνίδια αντιστοιχούν στον όρο $\bar{A}B$ ενώ τα κάτω αντιστοιχούν στον όρο AB. Άρα η συνάρτηση απλοποιείται ως εξής:

$$f(A, B, C) = \bar{A}B + AB$$

Παρατηρουμε ότι οι όροι που απόμειναν, έχουν κοινό παράγοντα το B, ενώ η μεταβλητή A αλλάζει τιμή. Τούτο φαίνεται στο χάρτη του Karnaugh από το γεγονός ότι η μεταβλητή B διατηρεί σταθερή τιμή 1 και στους τέσσερεις όρους. Αν απλοποιήσομε συνεπώς και τη μεταβλητή B, βρίσκομε τελικά ότι η απλοποιημένη μορφή της f (A, B, C) είναι:

$$f(A, B, C) = B$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ο εξης κανόνας Karnaugh.

Κανόνας Karnaugh.

Όταν 4 τετραγωνίδια, καθένα των οποίων είναι γειτονικό δύο άλλων, έχουν κοινή μόνο μία συντεταγμένη (στην περίπτωσή μας τη B = 1), τότε οι τέσσερεις ελάχιστοι όροι των τριών μεταβλητών μπορούν να αντικατασταθούν με ένα και μόνο όρο, με μοναδική μεταβλητή την κοινή μεταβλητή (στην περίπτωσή μας τη B).

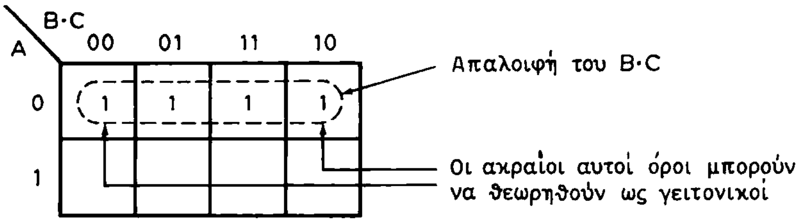
Ο παραπάνω κανόνας ισχύει και για την περίπτωση τεσσάρων τετραγωνιδίων που είναι διατεταγμένα σε σειρά (σχ. 5.6ιβ) γιατί και στην περίπτωση αυτή έχομε μόνο μία κοινή στυντεταγμένη και κάθε τετραγωνίδιο είναι γειτονικό των δύο άλλων (δεδομένου ότι τα ακραία τετραγωνίδια προς τα αριστερά και δεξιά θεωρούνται ως γειτονικά αλλάζει τιμή μόνο η μία μεταβλητή αν περάσομε από το ένα τετράγωνο στο άλλο).

Παραδείγματα.

α) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση:

$$f\ (A,\ B,\ C) = \bar{A}\ .\ \bar{B}\ .\ \bar{C} + \bar{A}\ .\ \bar{B}\ .\ C + \bar{A}\ .\ B\ .\ C + \bar{A}\ .\ B\ .\ \bar{C}$$

Η συνάρτησή μας παριστάνεται στο χάρτη του Karnaugh όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6ιβ.



Σχ. 5.6ιβ.
Απλοποίηση συναρτήσεως τριών μεταβλητών στην περίπτωση 4 τετραγωνιδίων σε σειρά.

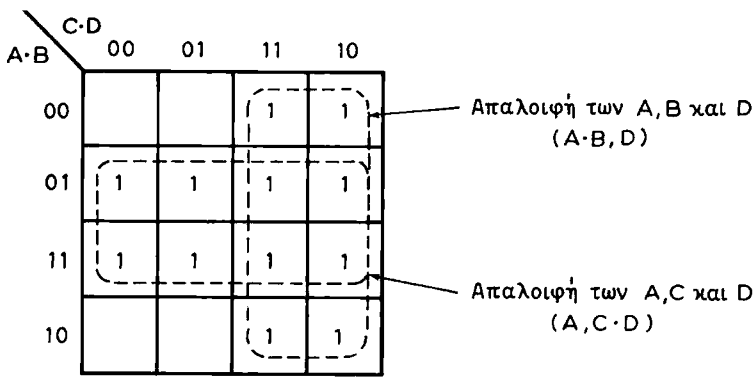
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αντικαταστήσομε τους 4 γειτονικούς όρους αυτής, με ένα μόνο με μοναδική μεταβλητή την κοινή μεταβλητή $\bar{A}$. Άρα:

$$f\ (A,\ B,\ C) = \bar{A}$$

β) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση με τέσσερεις μεταβλητές:

$$\begin{aligned} f\ (A,\ B,\ C,\ D) = {} & A.B.C.D + A.B.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.C.D \\ & + A.B. + \bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D \\ & + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση παριστάνεται στο χάρτη του Karnaugh όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6ιγ.



Σχ. 5.6ιγ.
Απλοποίηση συναρτήσεως με τέσσερεις μεταβλητές.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση περιέχει οκτώ τετραγωνίδια (οριζόντιο ορθογώνιο με διακεκομμένη γραμμή) με κοινή συντεταγμένη τη $B = 1$ και οκτώ τετραγωνίδια (κάθετο ορθογώνιο με διακεκομμένη γραμμή) με κοινή συντεταγμένη $C = 1$.

Άρα η συνάρτηση ισούται με $B + C$. Δηλαδή:

$$f\,(A, B, C, D) = B + C$$

5.7 Σχεδιασμός λογικών κυκλωμάτων.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο (παράγρ. 4.1) αναφέραμε ότι ένα λογικό κύκλωμα πραγματοποιεί, ή ικανοποιεί όπως θα λέγαμε διαφορετικά μια λογική συνάρτηση.

Αν E_1, E_2,... είναι οι μεταβλητές και S η συνάρτηση τότε συμβολίζομε:

$$S = f(E_1, E_2, \ldots)$$

Οι μεταβλητές E_1, E_2,... είναι οι είσοδοι του λογικού κυκλώματος και S η έξοδος του λογικού κυκλώματος.

Χρησιμοποιώντας ως μονάδες λογικών κυκλωμάτων τις πύλες που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να σχεδιάσομε σύνθετα λογικά κυκλώματα, τα οποία να πραγματοποιούν (ικανοποιούν) μια λογική συνάρτηση. Αντίστροφα, όταν μας δίνεται ένα λογικό κύκλωμα, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση που πραγματοποιεί (ικανοποιεί), δηλαδή τη λογική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην έξοδο και είσοδό του.

Στα παρακάτω θα αναφέρομε μερικά παραδείγματα και για τις δύο περιπτώσεις, δηλαδή:

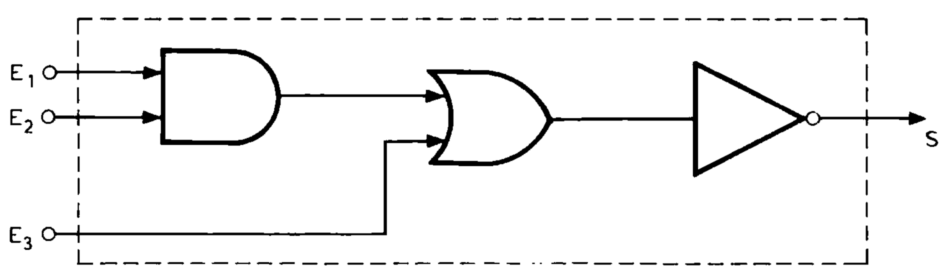
1) Όταν μας δίνεται το λογικό κύκλωμα θα βρούμε τη λογική σχέση (λογική συνάρτηση) που υπάρχει μεταξύ εισόδου - εξόδου και

2) όταν μας δίνεται μία λογική σχέση μεταξύ εισόδου - εξόδου (λογική συνάρτηση) να σχεδιάσομε το αντίστοιχο λογικό κύκλωμα.

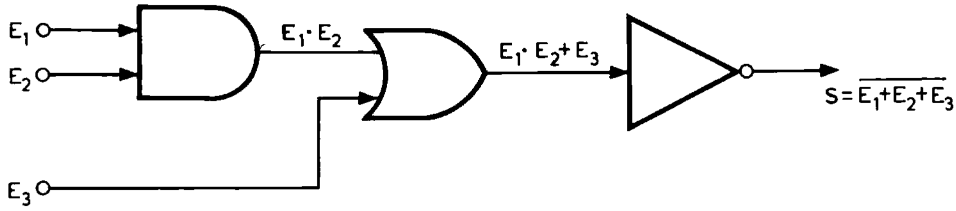
Παραδείγματα.

α) Να ευρεθεί η λογική συνάρτηση που πραγματοποιεί το παρακάτω λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7α).

Για το λογικό κύκλωμα θα έχομε την παράσταση του σχήματος 5.7β, δεδομένου ότι η πρώτη πύλη είναι πηγή «ΚΑΙ» ($E_1 \,.\, E_2$), η δεύτερη πύλη «Η» ($E_1 \,.\, E_2 + E_3$) και η τρίτη πύλη «ΟΧΙ» ($\overline{E_1 \,.\, E_2 + E_3}$).



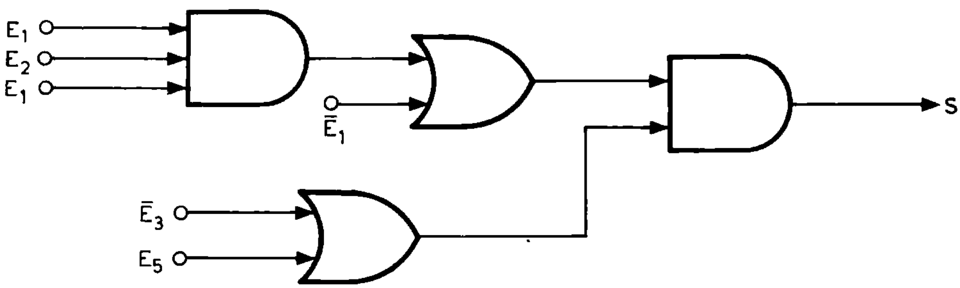
Σχ. 5.7α.
Λογικό κύκλωμα για παράδειγμα (1).



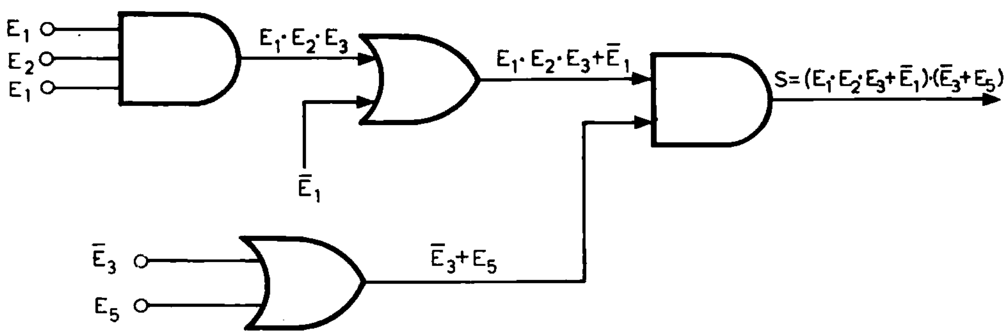
Σχ. 5.7β.

β) Να ευρεθεί η λογική συνάρτηση που πραγματοποιεί το παρακάτω λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7γ).

Αν σκεφθούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα θα έχομε την παράσταση του σχήματος 5.7δ.



Σχ. 5.7γ.



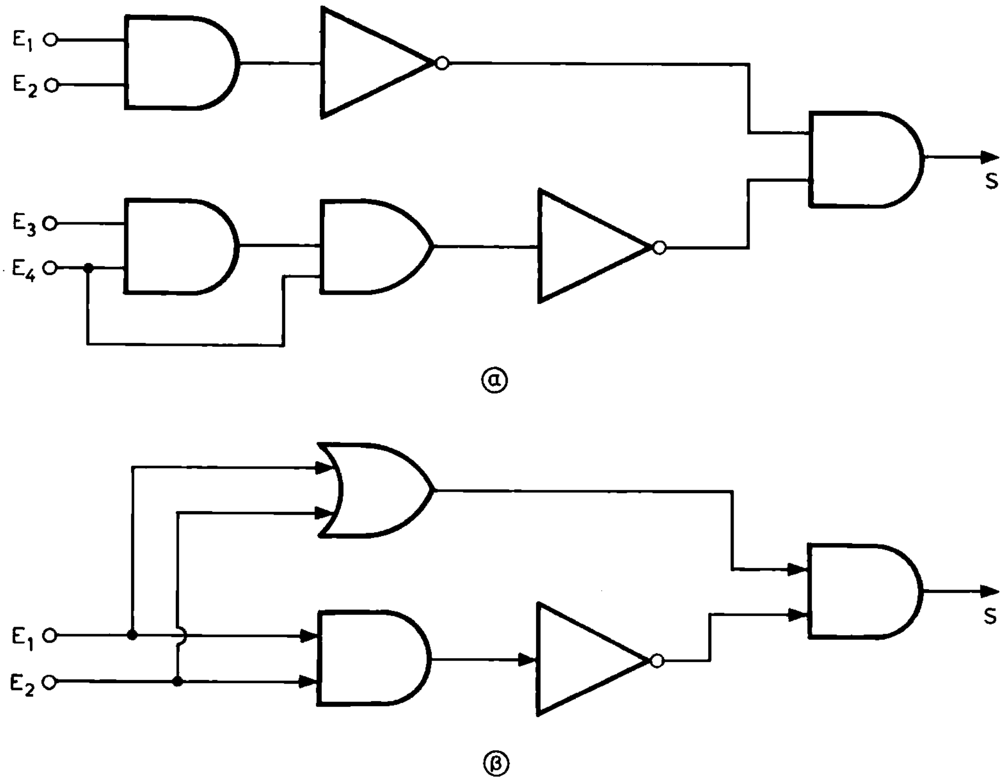
Σχ. 5.7δ.

γ) Να ευρεθούν οι λογικές συναρτήσεις που πραγματοποιούν τα παρακάτω λογικά κυκλώματα (σχ. 5.7ε).

Αν ενεργήσομε όπως προηγουμένως θα έχομε:

$$S = (\overline{E_1 \,.\, E_2}) \,.\, (\overline{E_3 \,.\, E_4 + E_4}) \quad \text{για το κύκλωμα (α)}$$

$$S = (\overline{E_1 \,.\, E_2}) \,.\, (E_1 + E_2) \quad \text{για το κύκλωμα (β)}$$



Σχ. 5.7ε.

δ) Να ευρεθούν οι λογικές συναρτήσεις που πραγματοποιούν τα παρακάτω λογικά κυκλώματα (σχ. 5.7στ).

Αν ενεργήσομε όπως προηγουμένως, θα έχομε:

$$S = \overline{E_1 \,.\, E_2 + E_3 \,.\, E_4} \quad \text{για το κύκλωμα (α)}$$

$$S = \bar{A} \,.\, \bar{B} + A \,.\, B \quad \text{για το κύκλωμα (β)}$$

ε) Να ευρεθεί η λογική συνάρτηση που πραγματοποιεί το παρακάτω λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7ζ).

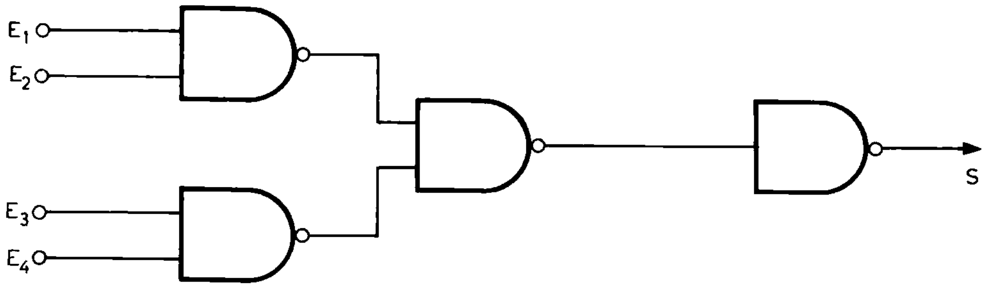
Αν ενεργήσομε όπως προηγουμένως, θα έχομε:

$$S = (E_1 + E_2) \,.\, (E_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3)$$

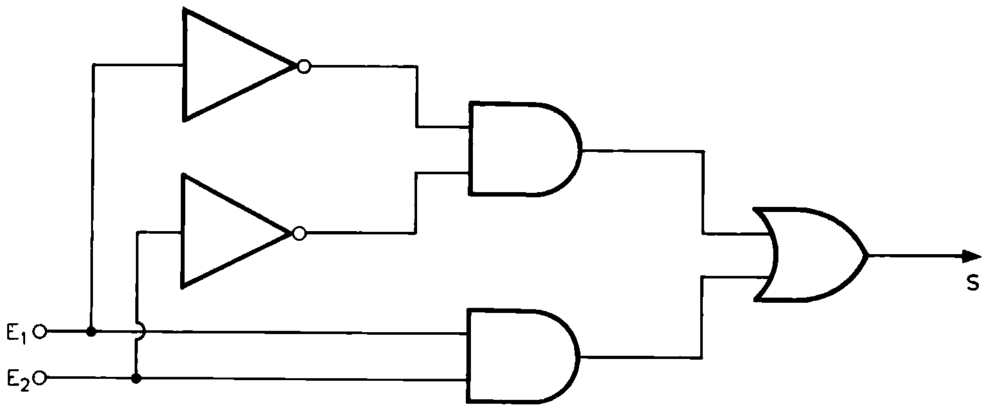
στ) Να σχεδιασθούν τα λογικά κυκλώματα που πραγματοποιούν τις παρακάτω λογικές συναρτήσεις:

α) $E_1 \,.\, E_3 + E_2$

β) $(E_1 \,.\, E_2 \,.\, E_3 + \bar{E}_1)\,(E_1 + \bar{E}_3)$

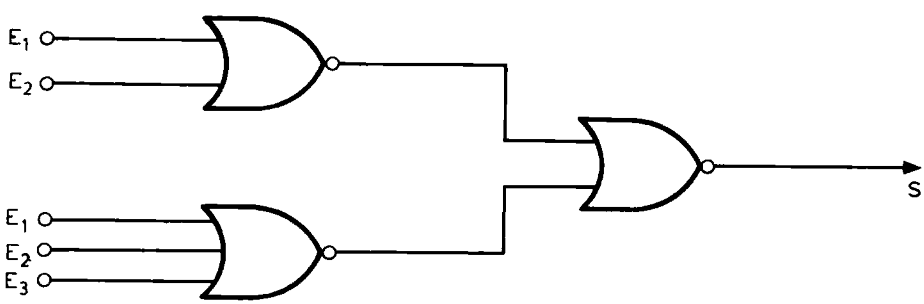


ⓐ



ⓑ

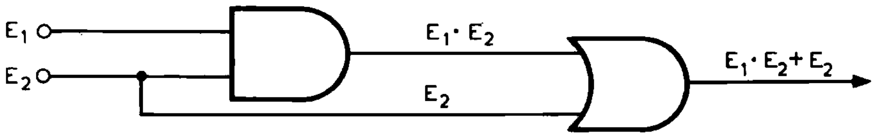
Σχ. 5.7στ.



Σχ. 5.7ζ.

Συνάρτηση (α).

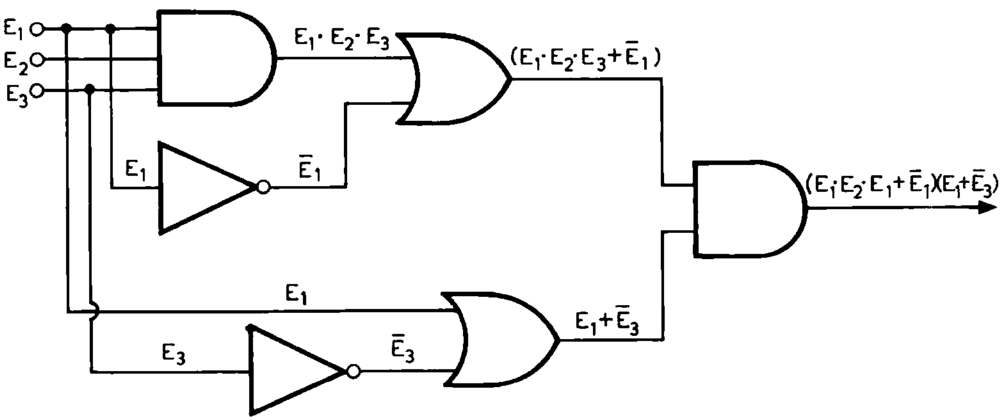
Προφανώς οι E_1, E_2 είναι είσοδοι μιας πύλης «ΚΑΙ» ενώ η έξοδος της πύλης «ΚΑΙ» και η E_2 είναι είσοδοι μιας πύλης «Η» (σχ. 5.7η).



Σχ. 5.7η.

Συνάρτηση (β).

Σκεφτόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα έχομε το κύκλωμα του σχήματος 5.7θ.



Σχ. 5.7θ.

Το ίδιο κύκλωμα μπορούμε να το σχεδιάσομε με πιο εύκολο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7ι.

ζ) Να σχεδιασθεί το λογικό κύκλωμα που πραγματοποιεί τη λογική συνάρτηση:

$$S = E_1 \,.\, E_3 + E_2$$

Προφανώς ο όρος $E_1 \,.\, E_3$ είναι η έξοδος πύλης «ΚΑΙ» με εισόδους τις E_1, E_3, ενώ ο όρος $E_1 \,.\, E_3 + E_2$, δηλαδή η S είναι η έξοδος πύλης «Η» με εισόδους τις $E_1 \,.\, E_3$ (η έξοδος της πύλης «ΚΑΙ») και της E_2.

Άρα το κύκλωμά μας θα είναι το κύκλωμα του σχήματος 5.7ια.

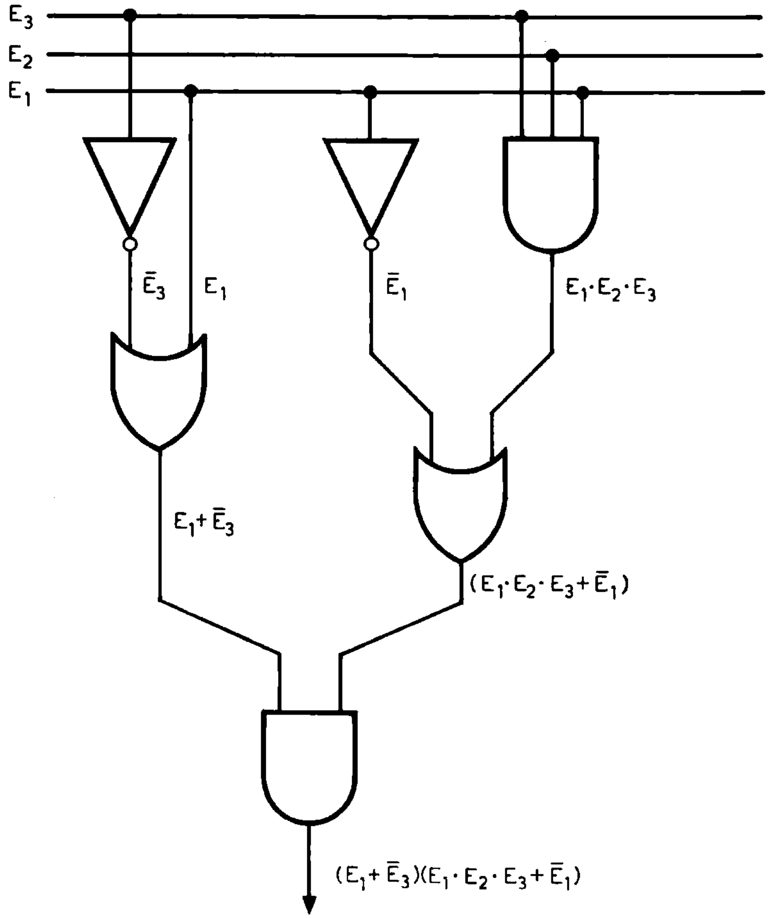
Το ίδιο κύκλωμα μπορούμε να το σχεδιάσομε με πιο εύκολο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7ια.

η) Να σχεδιασθεί το κύκλωμα που πραγματοποιεί τη λογική συνάρτηση:

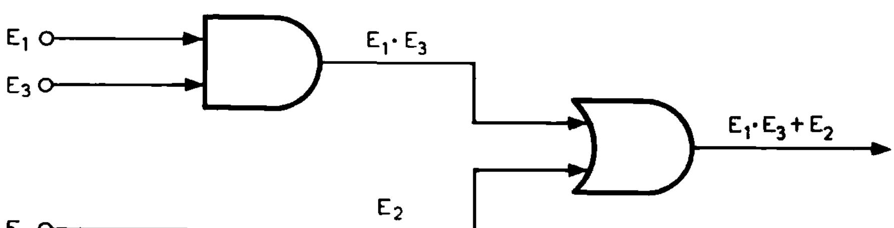
$$S = E_1 \,.\, E_2 + E_1 \,.\, \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \,.\, \bar{E}_2$$

Αν ενεργήσομε όπως προηγουμένως, θα έχομε το λογικό κύκλωμα του σχήματος 5.7ιβ.

Το λογικό κύκλωμα που σχεδιάσαμε παραπάνω (σχ. 5.7ιβ), δεν γνωρίζομε αν είναι το απλούστερο που θα μπορούσαμε να σχεδιάσομε, δηλαδή, αν αντιστοιχεί στην απλούστερη ισοδύναμη συνάρτηση της $S = E_1 \,.\, E_2 + E_1 \,.\, \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \,.\, \bar{E}_2$. Όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου αυτού (παράγρ. 5.2), όταν δίνεται μια

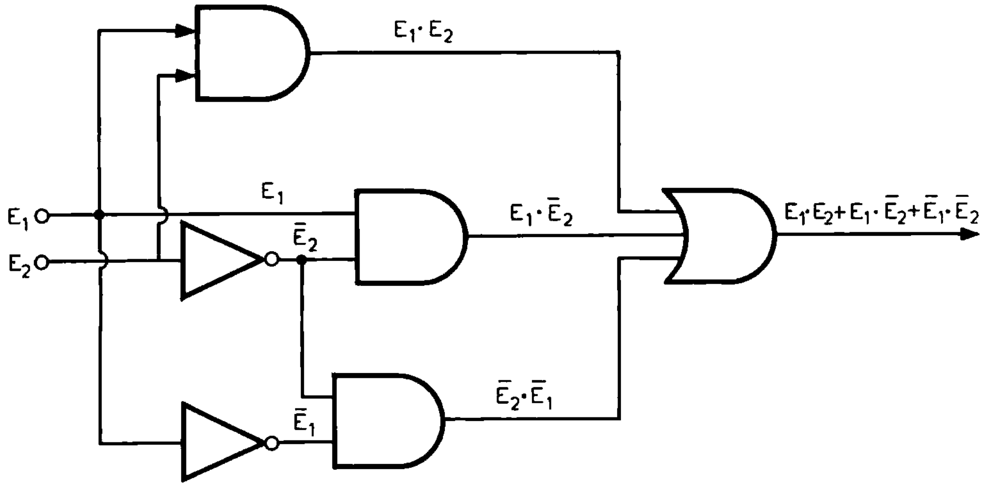


Σχ. 5.7ι.



Σχ. 5.7ια.

συνάρτηση, το απλούστερο λογικό κύκλωμα αντιστοιχεί στην απλούστερη ισοδύναμη συνάρτηση της δοθείσης συναρτήσεως. Άρα για να διαπιστώσομε αν πράγματι το κύκλωμα που σχεδιάσαμε·είναι το απλούστερο που θα μπορούσαμε να σχεδιάσομε, πρέπει να εξετάσομε αν η συνάρτηση που μας δίνεται, στην περίπτω-



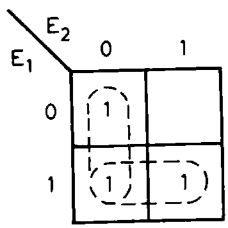
Σχ. 5.7ιβ.

ση μας η S, απλοποιείται ή όχι. Αν η συνάρτηση απλοποιείται, τότε θα πρέπει να την απλοποιήσομε και να σχεδιάσομε το λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί στην απλοποιημένη συνάρτηση. Αυτό θα είναι και το απλούστερο λογικό κύκλωμα που θα μπορούμε να σχεδιάσομε και που θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$S = E_1 \,.\, E_2 + E_1 \,.\, \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \,.\, \bar{E}_2$$

Απλοποίηση της S.

Αν απλοποιήσομε την S, π.χ. με τη μέθοδο του Karnaugh (σχ. 5.7ιγ).



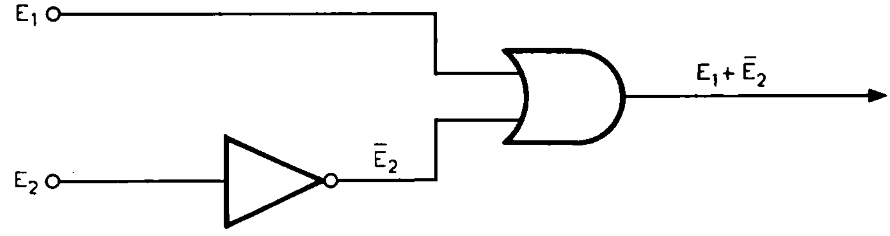
Σχ. 5.7ιγ.
Απλοποίηση συναρτήσεως $S = E_1 \,.\, E_2 + E_1 \,.\, \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \,.\, \bar{E}_2$

θα έχομε:

$$S = E_1 + \bar{E}_2$$

Η συνάρτηση που προέκυψε ($E_1 + \bar{E}_2$), είναι η απλούστερη ισοδύναμη της συναρτήσεως $S = E_1 \,.\, E_2 + E_1 \,.\, \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \,.\, \bar{E}_2$. Άρα το λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί σε αυτή θα είναι το απλούστερο λογικό κύκλωμα που μπορούμε να σχεδιάσομε για τη δοθείσα συνάρτησή μας S. Το κύκλωμα αυτό είναι το κύκλωμα του σχήματος 5.7ιδ.

Αν συγκρίνομε το λογικό κύκλωμα του σχήματος 5.7ιδ με εκείνο του σχήματος



Σχ. 5.7ιδ.
Απλοποιημένο λογικό κύκλωμα της $S = E_1 . E_2 + E_1 . \bar{E}_2 + \bar{E}_1 . \bar{E}_2$.

5.7ιβ μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε ότι πράγματι το πρώτο είναι πολύ πιο απλό από το δεύτερο. Το πρώτο χρησιμοποιεί 2 πύλες ενώ το δεύτερο χρησιμοποιεί 6.

Συμπέρασμα.

Αν μας δοθεί μια συνάρτηση και θέλομε να σχεδιάσομε το απλούστερο λογικό κύκλωμα που την πραγματοποιεί, απλοποιούμε τη συνάρτηση που μας δίνεται, αν απλοποιείται φυσικά, και σχεδιάζομε το λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί στην απλοποιημένη συνάρτηση, γιατί αυτή είναι ισοδύναμη προς την αρχική.

Παράδειγμα.

Να σχεδιασθεί το απλούστερο λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί στη συνάρτηση:

$$S = \bar{E}_1 . E_2 . E_3 + E_1 . \bar{E}_2 . E_3 + E_1 . E_2 . E_3 + E_2 . \bar{E}_3$$

Απλοποίηση συναρτήσεως.

Απλοποιούμε τη συνάρτηση S κατά τα γνωστά:

$E_1 \backslash E_2 \cdot E_3$	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

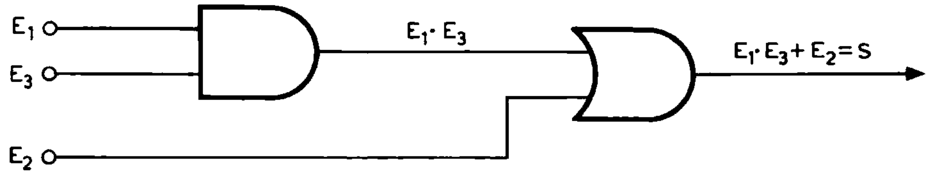
Αντιστοιχούν στον όρο $E_2 \cdot \bar{E}_3$
γιατί αυτός είναι ανεξάρτητος
της E_1

Από το χάρτη του Karnaugh έχομε:

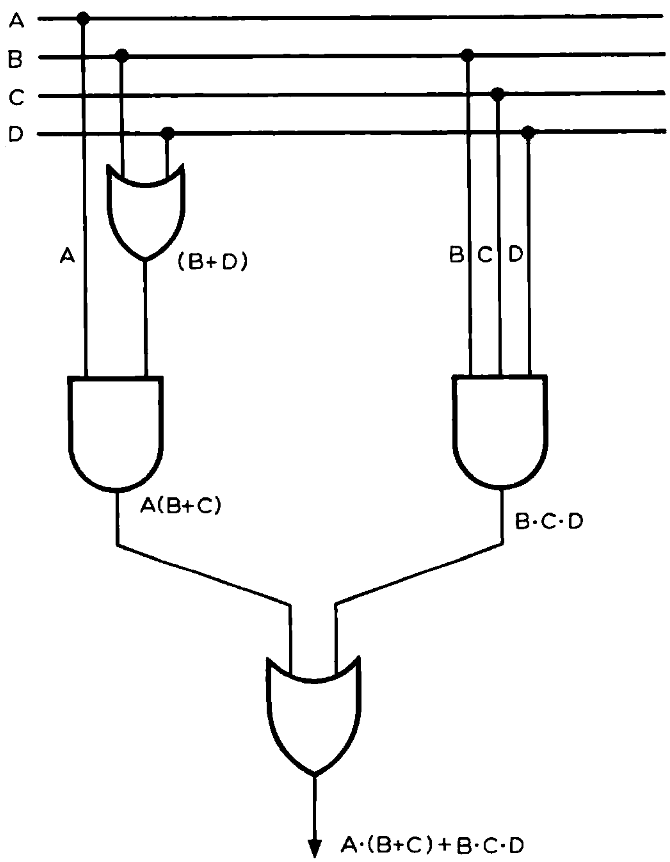
$$S = E_1 . E_3 + E_2$$

Σχεδιασμός του λογικού κυκλώματος.

Το κύκλωμα που αντιστοιχεί στην απλοποιημένη συνάρτηση $S = E_1 . E_3 + E_2$ είναι το κύκλωμα του σχήματος 5.7ιε.



Σχ. 5.7ιε.



Σχ. 5.7ιστ.

Παράδειγμα.

Να σχεδιασθεί το λογικό κύκλωμα μιας κλειδαριάς του χρηματοκιβωτίου μιας Τράπεζας, το οποίο έχει θέσεις για διαφορετικά κλειδιά που έχουν ανά ένα ο Διευθυντής, ο Υποδιευθυντής, ο Ταμίας και ο βοηθός Ταμίας της Τράπεζας, έτσι ώστε να ανοίγει μόνο:

— Όταν είναι παρών ο Διευθυντής και ο Ταμίας ή ο βοηθός Ταμίας ή
— όταν είναι παρών ο Υποδιευθυντής, ο Ταμίας και ο βοηθός Ταμίας.

Αν παραστήσομε με:

A: Παρουσία (κλειδί) Διευθυντού.

B: Παρουσία (κλειδί) Υπ/ντού.

C: Παρουσία (κλειδί) Ταμία και

D: Παρουσία (κλειδί) βοηθού Ταμία,

τότε σύμφωνα με το πρόβλημα το χρηματοκιβώτιο θα ανοίγει μόνο αν είναι παρόντες:

1) Διευθυντής ΚΑΙ Ταμίας Ή Διευθυντής ΚΑΙ βοηθός Ταμίας Ή.

2) Υποδιευθυντής ΚΑΙ Ταμίας ΚΑΙ βοηθός Ταμίας.

Οι λογικές αυτές προτάσεις γράφονται στην άλγεβρα του Boole:

1)	A . C	+	A . D	$\longrightarrow$ A . (C + D)
	↓	↓	↓	
	ΚΑΙ	Η	ΚΑΙ	
	(Λογικό)	(Λογικό)	(Λογικό)	

ή

2)	B	.	C	.	D
		↓		↓	
		ΚΑΙ		ΚΑΙ	
		(Λογικό)		(Λογικό)	

Και οι δύο μαζί ως μία λογική σχέση γράφονται:

$$A \cdot (C + D) + B \cdot C \cdot D$$

Το λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί σε αυτή τη σχέση (συνάρτηση) είναι το ζητούμενο λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7ιστ).

5.8 Ασκήσεις.

1. Να κατασκευασθούν οι πίνακες αληθείας των συναρτήσεων:

α) $\bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C + B \cdot \bar{C}$

β) $A \cdot C + B$

γ) $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot (C + B)$

Τι συμπεραίνετε για τις συναρτήσεις (α) και (β);

2. Να γραφούν οι ελάχιστοι και μέγιστοι όροι τεσσάρων μεταβλητών A, B, C, D.

3. Να αποδειχθούν οι παρακάτω λογικές σχέσεις:

α) $(A + \bar{B}C)(\bar{A}B + C) = AC + \bar{B}C$

β) $A\bar{B} + BC + AC = A\bar{B} + BC$

γ) $(A + B)(\bar{A} + C) = AC + \bar{A}B$

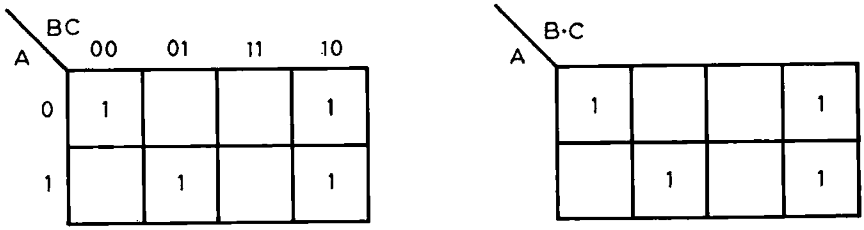
4. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $AB + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}$

β) $E_1E_3 + E_1 \cdot \bar{E}_3E_2 + E_2 \cdot E_3 + \bar{E}_2 \cdot \bar{E}_3$

γ) $E_1 \cdot E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 + \bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2$

5. Να γραφεί η απλούστερη συνάρτηση που αντιστοιχεί στους παρακάτω χάρτες του Karnaugh (σχ. 5.8):



Σχ. 5.8.

6. Να σχεδιασθεί το απλούστερο λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί στη συνάρτηση:

$$S = E_1 \cdot \bar{E}_2 \cdot E_3 + E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 + \bar{E}_1 \cdot E_2 \cdot E_3 + E_1 \cdot E_2 \cdot \bar{E}_3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΠΟΛΥΔΟΝΗΤΕΣ

6.1 Γενικά.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τις «πύλες» που αποτελούν τα απλούστερα λογικά κυκλώματα και είδαμε πώς μπορούμε με αυτές να πραγματοποιήσομε οποιοδήποτε λογικό κύκλωμα.

Στα λογικά κυκλώματα η τιμή της εξόδου σε κάθε χρονική στιγμή, εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων τους κατά την ίδια χρονική στιγμή. Τέτοια κυκλώματα δέν είναι κατάλληλα για απομνημόνευση, γιατί μόλις αλλάξει η είσοδός τους, αλλάζει και η έξοδος ανεξάρτητα από την προηγούμενη τιμή της. Στους ψηφιακούς όμως ηλεκτρονικούς υπολογιστές χρειάζονται κυκλώματα, στα οποία να μπορούμε να απομνημονεύσομε ένα δυαδικό ψηφίο (0 ή 1). Δηλαδή χρειάζονται κυκλώματα τα οποία μπορούν να βρεθούν σε δύο δυνατές καταστάσεις (τις οποίες αντιστοιχούμε στο 0 και 1) και τα οποία να έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

α) Για ορισμένο συνδυασμό των τιμών των εισόδων τους να μπορούν να παραμένουν στην κατάσταση 0 ή 1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το κύκλωμα απομνημονεύει (αποθηκεύει) το 0 ή 1.

β) Για ορισμένο συνδυασμό των τιμών των εισόδων τους να μπορούν να τεθούν στην κατάσταση 0 ή 1, ανεξάρτητα από την κατάσταση στην οποία ήταν προηγουμένως.

Ηλεκτρονικά κυκλώματα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά τα ονομάζομε πολυδονητές δύο σταθερών καταστάσεων (Bistable Multivibrators) ή Φλιπ - Φλοπ (Flip - Flop). Η δεύτερη ονομασία Φλιπ - Φλοπ, επικράτησε διεθνώς και αυτή θα χρησιμοποιήσομε στο βιβλίο αυτό.

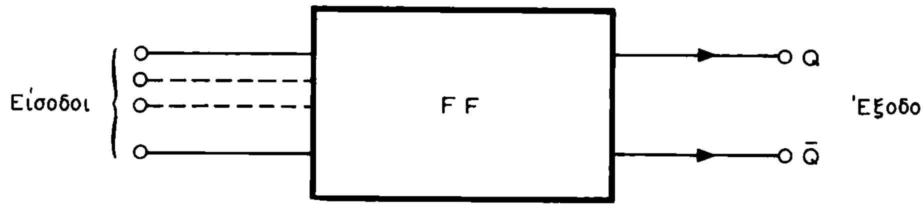
Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσομε επίσης και άλλα παρόμοια και χρήσιμα κυκλώματα, όχι όμως με δύο σταθερές καταστάσεις. Τα κυκλώματα αυτά τα ονομάζομε επίσης πολυδονητές και είναι:

— Ο πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως (Monostable Multivibrator).
— Ο ασταθής πολυδονητής (Astable Multivibrator) και
— το κύκλωμα «σκανδάλης» Schmitt (Schmitt Trigger).

Όταν μιλάμε για πολυδονητές αναφερόμασθε συνήθως στα τρία αυτά κυκλώματα.

Όλα τα κυκλώματα που αναφέραμε παραπάνω, μπορούμε να τα κατασκευάσομε με διακριτά ηλεκτρονικά στοιχεία (αντιστάσεις, πυκνωτές, διόδους, τρανζίστορς κλπ.) ή χρησιμοποιώντας την τεχνική των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Σήμερα κατασκευάζονται σχεδόν αποκλειστικά με τη δεύτερη μέθοδο και έχουν μεγάλη εφαρμογή στην κατασκευή των ηλεκτρονικών υπολογιστών και γενικότερα των ψηφιακών ηλεκτρονικών διατάξεων.

Κάθε Φλιπ - Φλοπ έχει δύο εξόδους που είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους. Για να τις διακρίνομε χρησιμοποιούμε συνήθως ένα γράμμα του λατινικού αλφαβήτου και του συμπληρώματός του. Στο βιβλίο αυτό θα χρησιμοποιήσομε το γράμμα Q και το συμπλήρωμά του $\bar{Q}$. Στο σχήμα 6.1 παριστάνεται το λογικό σύμβολο ενός Φλιπ - Φλοπ. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού θα εξετάσομε πώς και από ποια στοιχεία αποτελείται ένα Φλιπ - Φλοπ.



Σχ. 6.1.
Λογικό σύμβολο Φλιπ - Φλοπ.

Όταν:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έξοδος } Q \longrightarrow «1» \\ \text{Έξοδος } \bar{Q} \longrightarrow «0»\end{array}\right\}$$

λέμε ότι το Φλιπ - Φλοπ βρίσκεται ή τοποθετήθηκε στην κατάσταση 1, ενώ όταν:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έξοδος } Q \longrightarrow «0» \\ \text{Έξοδος } \bar{Q} \longrightarrow «1»\end{array}\right\}$$

λέμε ότι το Φλιπ - Φλοπ βρίσκεται ή τοποθετήθηκε στην κατάσταση 0.

Δηλαδή η ***μία έξοδος*** του Φλιπ - Φλοπ και συγκεκριμένα η έξοδος Q χαρακτηρίζει την κατάστασή του, δηλαδή:

— Όταν Q ⟶ «1», το Φλιπ - Φλοπ βρίσκεται στην κατάσταση 1 και όταν Q ⟶ «0», το Φλιπ - Φλοπ βρίσκεται στην κατάσταση 0.

Τα Φλιπ - Φλοπ είναι από τα βασικά κυκλώματα που συναντάμε στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και χρησιμοποιούνται για απομνημόνευση πληροφοριών (αποθήκευση), κατασκευή ειδικών κυκλωμάτων, όπως είναι οι καταχωρητές (Registers) και οι μετρητές (Counters).

Παρατήρηση.

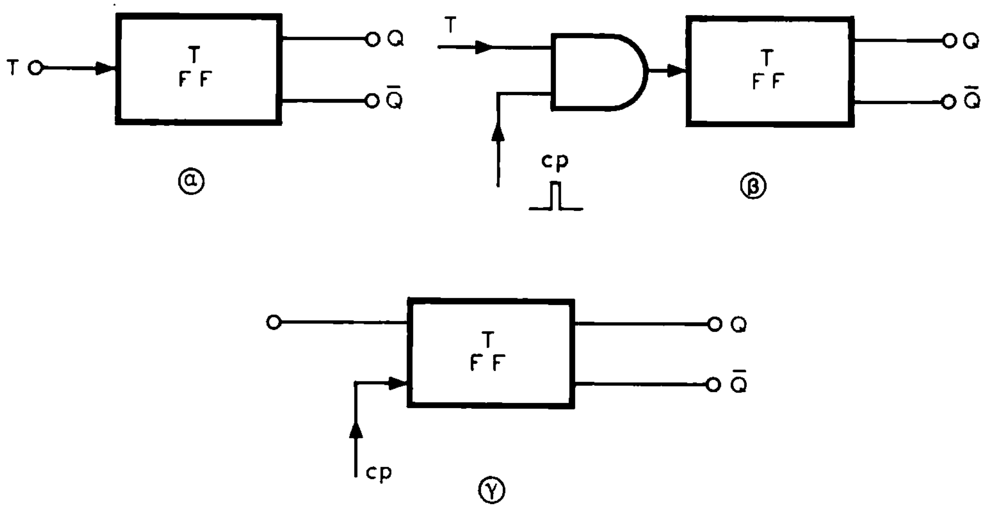
Στο λογικό σύμβολο του Φλιπ - Φλοπ του σχήματος 6.1 θεωρήσαμε ότι αυτό έχει έναν αριθμό εισόδων. Στην πράξη υπάρχουν, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, τύποι Φλιπ - Φλοπ με μία, δύο ή τρεις εισόδους. Επίσης στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε και μία επί πλέον είσοδο η οποία χρησιμοποιείται για λόγους χρονισμού. Την είσοδο αυτή ονομάζουμε «ωρολόγιο» (Clock) και την παριστάνομε με το CP (Clock Pulse). Γι' αυτή θα μιλήσομε παρακάτω.

6.2 Φλιπ - Φλοπ (Flip - Flop).

Τα Φλιπ - Φλοπ κατατάσσονται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τον αριθμό των εισόδων τους και τον τρόπο που αλλάζουν κατάσταση. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσομε τα βασικότερα και πιο χρήσιμα από αυτά.

6.2.1 Τ Φλιπ - Φλοπ (Τ Flip - Flop ή Trigger Flip - Flop).

Το Τ Φλιπ - Φλοπ έχει μία είσοδο και όπως όλα τα Φλιπ - Φλοπ δύο εξόδους από τις οποίες η μία είναι συμπλήρωμα της άλλης. Το Τ Φλιπ - Φλοπ αλλάζει κατάσταση, όταν η είσοδός του πάρει την τιμή 1, ενώ όταν η είσοδός του πάρει την τιμή 0 η κατάστασή του παραμένει αμετάβλητη. Στο σχήμα 6.2α φαίνεται το σύμβολο του Τ Φλιπ - Φλοπ και στον πίνακα 6.2.1 ο πίνακας αληθείας του.



Σχ. 6.2α.
Τ Φλιπ - Φλοπ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.1.
Πίνακας αληθείας Τ Φλιπ - Φλοπ

Είσοδος Τ	Παλιά κατάσταση Q_n	Νέα κατάσταση Q_{n+1}	
0	0	0	
0	1	1	← $\bar{T}Q_n$
1	0	1	← $T\bar{Q}_n$
1	1	0	

Από τον παραπάνω πίνακα αληθείας προκύπτει η σχέση:

$$Q_{n+1} = \bar{T}\,Q_n + T\bar{Q}_n \qquad (6.2)$$

όπου Q_n η παλιά κατάσταση του Φλιπ - Φλοπ και Q_{n+1} η κατάσταση του Φλιπ - Φλοπ μετά την εφαρμογή «0» ή «1» στην είσοδό του Τ.

Η σχέση (6.2) λέγεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** του Φλιπ - Φλοπ.

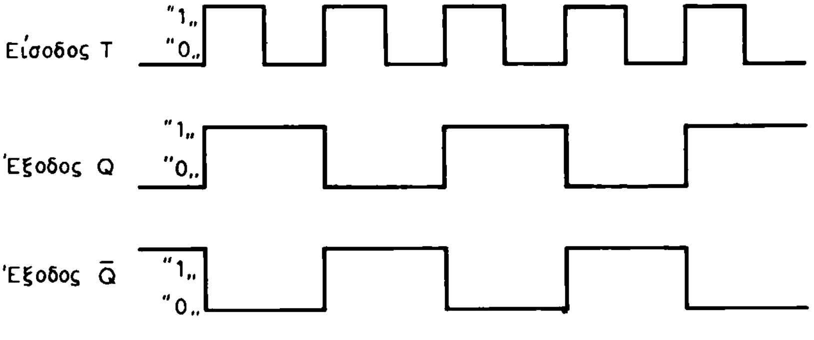
Παρατηρήσεις.

α) Παρατηρούμε ότι όταν στην είσοδο του Φλιπ - Φλοπ εφαρμοσθεί σήμα που αντιστοιχεί στο λογικό 1 η έξοδός του αν ήταν 0 θα γίνει 1, ενώ αν ήταν 1, θα γίνει 0. Όταν στην είσοδό του εφαρμοσθεί σήμα που αντιστοιχεί στο λογικό 0 η έξοδός του αν ήταν 0 θα μείνει 0, ενώ αν ήταν 1, θα μείνει 1. Δηλαδή όταν η είσοδός του είναι 0, το Τ Φλιπ - Φλοπ «απομνημονεύει» την προηγούμενη κατάστασή του, ενώ όταν ή είσοδός του είναι 1 το Τ Φλιπ - Φλοπ αλλάζει κατάσταση.

β) Στο σχήμα 6.2α(β) δίνεται ένα Τ Φλιπ - Φλοπ στο οποίο η είσοδός του Τ εφαρμόζεται μέσω μιας πύλης ΚΑΙ δύο εισόδων. Στη δεύτερη είσοδο της πύλης εφαρμόζεται ο ωρολογιακός παλμός CP. Αυτός είναι ηλεκτρικός παλμός με πολύ μικρή διάρκεια (λεπτός παλμός) και καθορίζει τη στιγμή που η είσοδος Τ θα επηρεάσει το Τ Φλιπ - Φλοπ. Όταν δεν υπάρχει ωρολογιακός παλμός, η έξοδος της πύλης ΚΑΙ είναι πάντοτε 0 και η είσοδος Τ δεν επηρεάζει το Φλιπ - Φλοπ. Όταν δε χρησιμοποιείται λεπτός ωρολογιακός παλμός, θα πρέπει η διάρκεια της εισόδου του Τ Φλιπ - Φλοπ να είναι μικρότερη από το χρόνο που χρειάζεται το Φλιπ - Φλοπ να αλλάξει κατάσταση. Αν δεν συμβαίνει αυτό, δηλαδή αν η διάρκεια της εισόδου είναι μεγαλύτερη από το χρόνο που χρειάζεται το Φλιπ - Φλοπ να αλλάξει κατάσταση, η έξοδος θα παίρνει διαδοχικά τις τιμές 0 και 1, όπως είναι εύκολο να δει κανένας από τον ορισμό του Τ Φλιπ - Φλοπ. Στην πράξη η είσοδος του Τ Φλιπ - Φλοπ είναι έτσι κατασκευασμένη ώστε αυτό να μην επηρεάζεται από συνεχή δυναμικά, αλλά από μεταβολές δυναμικού. Οι μεταβολές αυτές ισοδυναμούν με λεπτό παλμό.

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να καθορίζομε με ακρίβεια τις χρονικές στιγμές που το Φλιπ - Φλοπ αλλάζει κατάσταση. Όταν χρησιμοποιούμε είσοδο ωρολογίου, παραλείπομε συνήθως την πύλη και συμβολίζομε το Φλιπ - Φλοπ όπως στο σχήμα 6.2α(γ).

Στο σχήμα 6.2β απεικονίζονται οι κυματομορφές εξόδου του Τ Φλιπ - Φλοπ όταν η είσοδός του παίρνει διαδοχικά τις τιμές «0» ή «1».



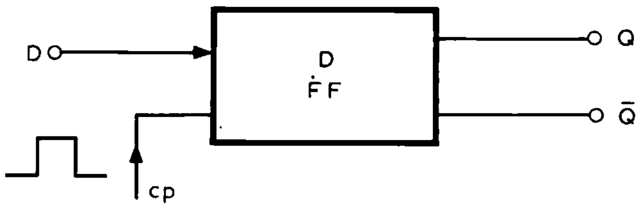
Σχ. 6.2β.
Κυματομορφές εισόδου – εξόδου σε Τ Φλιπ - Φλοπ.

6.2.2 D Φλιπ - Φλοπ (D Flip - Flop ή Delay Flip - Flop).

Το D Φλιπ - Φλοπ είναι επίσης ένα Φλιπ - Φλοπ μιας εισόδου (σχ. 6.2γ). Ο πίνακας αληθείας του είναι ο πίνακας 6.2.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.2.
Πίνακας αληθείας D Φλιπ - Φλοπ

D	Q_n	Q_{n+1}	
0	0	0	
0	1	0	
1	0	1	$\longrightarrow D\bar{Q}_n$
1	1	1	$\longrightarrow DQ_n$



Σχ. 6.2γ.
D Φλιπ - Φλοπ

Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει η σχέση:

$$Q_{n+1} = D\bar{Q}_n + DQ_n$$

ή $$Q_{n+1} = D(\bar{Q}_n + Q_n)$$

ή $$Q_{n+1} = D \qquad (6.2)$$

δεδομένου ότι $\bar{Q}_n + Q_n = 1$

Από τη χαρακτηριστική εξίσωση του Φλιπ - Φλοπ,

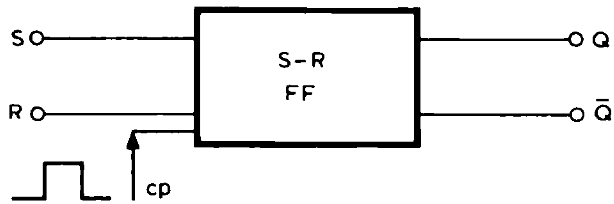
$$Q_{n+1} = D,$$

παρατηρούμε ότι η πληροφορία που εφαρμόζεται στην είσοδό του μεταφέρεται στο Φλιπ - Φλοπ ανεξάρτητα από την προηγούμενη κατάστασή του. Συνήθως η μεταφορά πραγματοποιείται με την εφαρμογή του ωρολογιακού παλμού στην είσοδό του. Αυτό μας επιτρέπει να μεταφέρομε την πληροφορία από την είσοδό του στο Φλιπ - Φλοπ (Q, Q), όταν εμείς το θέλομε, δηλαδή τη χρονική στιγμή που το απαιτεί η λειτουργία του κυκλώματος ή γενικότερα της διατάξεως στην οποία ανήκει το Φλιπ - Φλοπ.

Από τις παραπάνω ιδιότητες του D Φλίπ - Φλόπ εύκολα συμπεραίνομε ότι τούτο μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε για καθυστέρηση της πληροφορίας που εφαρμόζεται στην είσοδό του και η οποία εμφανίζεται στην έξοδό του μόνο όταν εφαρμοσθεί ο ωρολογιακός παλμός, είτε για εναποθήκευση ή μεταφορά πληροφορίας.

6.2.3 S - R Φλιπ - Φλοπ (Set - Reset Flip - Flop).

Το S - R Φλιπ - Φλοπ έχει δύο εισόδους, την S (Set = Βάζω) και R (Reset = Βγάζω). Στο σχήμα 6.2δ φαίνεται το σύμβολο του S - R Φλιπ - Φλοπ και ο πίνακας αληθείας που περιγράφει τη λειτουργία είναι ο πίνακας 6.2.3.



Σχ. 6.2δ.
S - R Φλίπ - Φλόπ.

Από τον πίνακα αληθείας 6.2.3 διαπιστώνομε τα εξής:

α) Η κατάσταση Q_{n+1} του Φλιπ - Φλοπ εξαρτάται από τις εισόδους S και R, αλλά και από την προηγούμενη κατάστασή του Q_n.

β) Όταν R = S = 0, το Φλιπ - Φλοπ δεν αλλάζει κατάσταση, δηλαδή απομνημονεύει την προηγούμενη κατάσταση.

Όταν S = 1 και R = 0, το Φλιπ - Φλοπ παίρνει την κατάσταση 1 ανεξάρτητα από την προηγούμενη κατάστασή του. Δηλαδή, όταν θέλομε να εγγράψομε στο Φλιπ - Φλοπ το 1 πρέπει να θέσομε S = 1 και R = 0.

Όταν R = 1 και S = 0, το Φλιπ - Φλοπ παίρνει την κατάσταση 0 ανεξάρτητα από την προηγούμενη κατάστασή του. Δηλαδή όταν θέλομε να εγγράψομε στο Φλιπ - Φλοπ το 0 (Reset), πρέπει να θέσομε R = 1 και S = 0.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.3.
Πίνακας αληθείας S - R Φλιπ - Φλοπ

R	S	Q_n	Q_{n+1}	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\rightarrow \bar{R}.\bar{S}.Q_n$
0	1	0	1	$\rightarrow \bar{R}.S.\bar{Q}_n$
0	1	1	1	$\rightarrow \bar{R}.S.Q_n$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	;	
1	1	1	;	

γ) Αν εφαρμόσομε ταυτοχρόνως και στις δύο εισόδους R, S πληροφορίες λογικου — 1, δηλαδή R = S = «1», τότε η κατάσταση του Φλιπ - Φλοπ Q_{n+1} γίνεται απροσδιόριστη και τη συμβολίζομε με ένα ερωτηματικό (;). Γι' αυτό το λόγο η συνθήκη R = S = «1» απαγορεύεται (δηλαδή πρέπει να είναι R = 1 και S = 0 ή R = 0 και S = 1. Αυτό το εκφράζομε με τη λογική σχέση $R \cdot S = 0$). Αυτό σημαίνει ότι ο κατασκευαστής του κυκλώματος ή διατάξεως που ανήκει το R - S Φλιπ - Φλοπ, πρέπει να έχει σχεδιάσει το κύκλωμα ή διάταξη με τέτοιο τρόπο ώστε ποτέ να μη φθάνουν στην είσοδο του Φλιπ - Φλοπ συγχρόνως δύο σήματα λογικού 1. Αν τούτο συμβεί, τότε υπάρχει κάποια βλάβη στο κύκλωμα ή τη διάταξη.

Από τον πίνακα αληθείας μπορούμε επίσης να έχομε τη χαρακτηριστική εξίσωση του Φλιπ - Φλοπ, που είναι:

$$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q + \bar{R} \cdot S \cdot \bar{Q}_n + \bar{R} \cdot S \cdot Q_n \quad \text{με} \quad R \cdot S = 0$$

Η σχέση αυτή μπορεί να μετασχηματισθεί ως εξής:

$$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + \bar{R}S\,(\bar{Q}_n + Q_n)$$

ή $$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + \bar{R}S \qquad \text{επειδή} \quad \bar{Q}_n + Q_n = 1$$

ή $$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + \bar{R}S + RS, \qquad \text{επειδή} \quad R \cdot S = 0$$

ή $$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + S\,(\bar{R} + R) \qquad \text{επειδή} \quad \bar{R} + R = 1$$

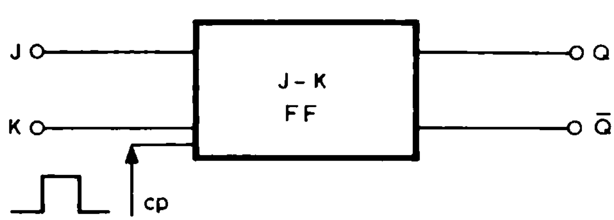
ή $$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + S$$

ή $$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot Q_n + S \qquad \text{με} \quad S \cdot R = 0$$

δηλ. $$Q_{n+1} = S + \bar{R}Q \qquad \text{με} \quad S \cdot R = 0 \qquad (6.3)$$

6.2.4 J - K Φλιπ - Φλοπ (J - K Flip Flop).

Το J - K Φλιπ - Φλοπ (σχ. 6.2ε) έχει επίσης δύο εισόδους, την J και K και αποτελεί συνδυασμό των προηγουμένων Φλιπ - Φλοπ. Επίσης, όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσομε από τον πίνακα αληθείας του 6.2.4, το Φλιπ - Φλοπ αυτό, σε αντίθεση με το RS Φλιπ - Φλοπ επιτρέπει την ταυτόχρονη εφαρμογή στην είσοδό



Σχ. 6.2ε.
J - K Φλιπ - Φλοπ.

του λογικού 1, δηλαδή τη συνθήκη J = K = «1». Στην περίπτωση αυτή το Φλιπ - Φλοπ αλλάζει κατάσταση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.4.
Πίνακας αληθείας του J - K Φλιπ - Φλοπ

J	K	Q_n	Q_{n+1}	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\rightarrow \overline{J}.\overline{K}.Q_n$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\rightarrow J.\overline{K}.\overline{Q}_n$
1	0	1	1	$\rightarrow J.\overline{K}.Q_n$
1	1	0	1	$\rightarrow J.K.\overline{Q}_n$
1	1	1	0	

Από τον πίνακα αληθείας 6.2.4 έχομε:

$$Q_{n+1} = \overline{J}.\overline{K}.Q_n + J.\overline{K}.\overline{Q}_n + J.\overline{K}.Q_n + J.K.\overline{Q}_n$$

ή $Q_{n+1} = \overline{K}.Q_n + J.Q_n$, αφού $J + \overline{J} = 1$ και $K + \overline{K} = 1$

ή $Q_{n+1} = \overline{K}.Q_n + J.Q_n$ (6.4)

Το J - K Φλιπ - Φλοπ είναι από τα Φλιπ - Φλοπ που χρησιμοποιούνται συχνότερα στα κυκλώματα των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

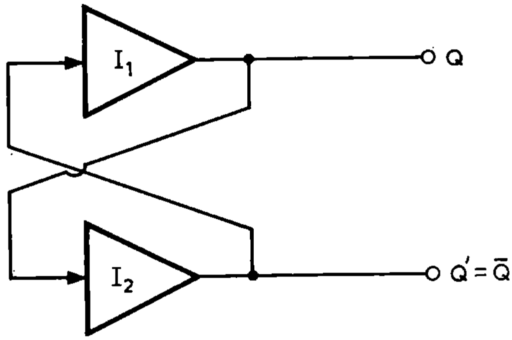
Εκτός από τα Φλιπ - Φλοπ τα οποία αναφέραμε υπάρχουν και άλλα, όπως το R - S - T, το Master - Slave κλπ., καθώς και συνδυασμοί όλων των τύπων. Δεν θα τα αναφέρομε όμως, γιατί είναι έξω από τα όρια και τον προορισμό του βιβλίου μας.

6.3 Πραγματοποίηση Φλιπ - Φλοπ.

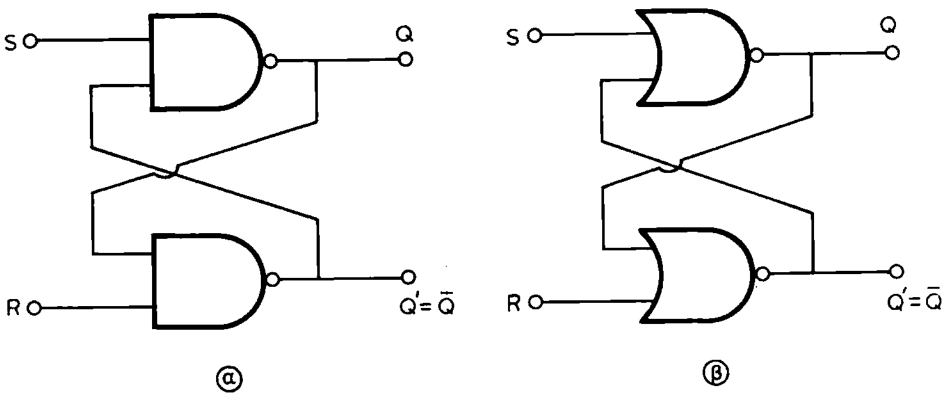
Τα Φλιπ - Φλοπ μπορούν να κατασκευασθούν από διακριτά ηλεκτρονικά στοιχεία, δηλαδή αντιστάσεις, πυκνωτές, τρανζίστορ κλπ. ή από ολοκληρωμένα κυκλώματα χρησιμοποιώντας τις πύλες «ΟΧΙ», «ΟΧΙ ΚΑΙ» ή «ΟΧΙ Η». Σήμερα όλα τα Φλιπ - Φλοπ κατασκευάζονται σχεδόν αποκλειστικά ως ολοκληρωμένα κυκλώματα.

Το απλούστερο και βασικότερο κύκλωμα που αποτελεί το «κύτταρο» κάθε τύπου Φλιπ - Φλοπ είναι το κύκλωμα του σχήματος 6.3α. Το κύκλωμα αυτό αποτελείται από δύο αντιστροφείς, που είναι συνδεσμολογημένοι έτσι ώστε η έξοδος του ενός να είναι είσοδος του άλλου.

Αν $Q = 0$, επειδή αυτό αποτελεί είσοδο του κυκλώματος I_2, θα είναι $Q' = 1$. Αν



Σχ. 6.3α.
Κύκλωμα στοιχειώδους Φλιπ - Φλοπ.



Σχ. 6.3β.
α) S - R Φλιπ - Φλοπ με πύλες NAND. β) S - R Φλιπ - Φλοπ με πύλες NOR.

συμβαίνει αυτό, το Φλιπ - Φλοπ θα παραμείνει στην κατάσταση αυτή δεδομένου ότι στο κύκλωμα του σχήματος 6.3α δεν έχει είσοδο.

Αντίστοιχα, αν $Q = 1$ θα είναι $Q' = 0$. Είναι αδύνατο το κύκλωμα αυτό να βρεθεί στην κατάσταση $Q = 0$, $Q' = 0$ ή $Q = 1$, $Q' = 1$. Δηλαδή στο κύκλωμα αυτό είναι $Q' = \bar{Q}$.

Στο σχήμα 6.3β(α) δίνεται το S - R Φλιπ - Φλοπ κατασκευασμένο με πύλες NAND και στο σχήμα 6.3β(β) το ίδιο Φλιπ - Φλοπ με πύλες NOR. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς τον πίνακα αληθείας του S-R Φλιπ - Φλοπ για τα κυκλώματα αυτά.

Στο σχήμα 6.3γ παριστάνεται ένα R - S Φλιπ - Φλοπ, κατασκευασμένο από διακριτά ηλεκτρονικά στοιχεία, όπως ήδη αναφέραμε.

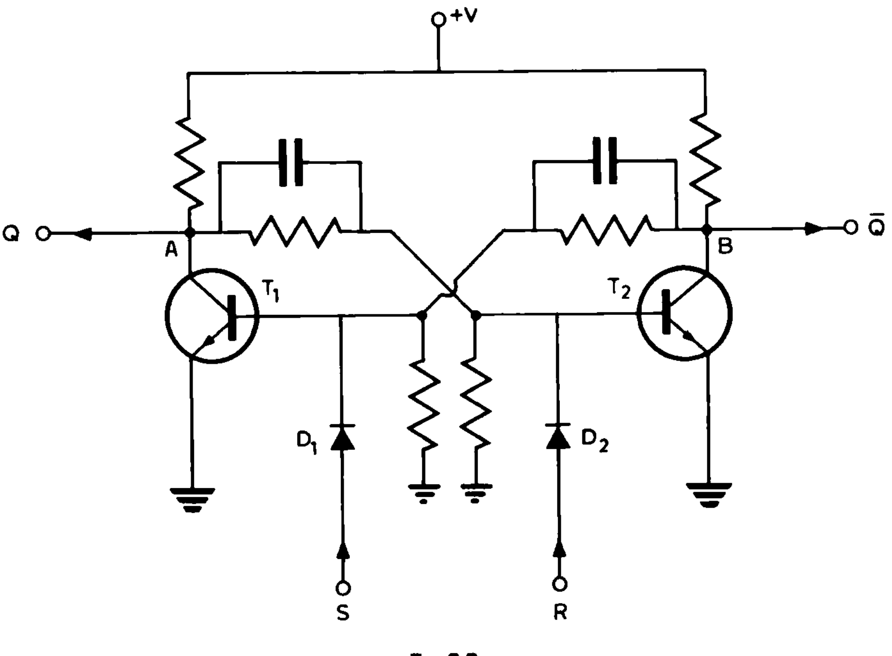
Οι δύο καταστάσεις του παραπάνω Φλιπ - Φλοπ ορίζονται ως εξής:

— Τρανζίστορ T_1 σε αποκοπή (cut off) και τρανζίστορ T_2 σε κατάσταση αγωγιμότητας (on).
— Τρανζίστορ T_1 σε κατάσταση αγωγιμότητας (on) και τρανζίστορ T_2 σε αποκοπή (cut off).

Αν υποθέσομε ότι το Φλιπ - Φλοπ βρίσκεται στην κατάσταση Ο, δηλαδή Q = «Ο» και $\bar{Q}$ = «1» το T_1 άγει ενώ το T_2 είναι σε αποκοπή.

Αν εφαρμόσομε ένα παλμό θετικής τάσεως στην είσοδο S η δίοδος είναι πολωμένη κατά την ορθή φορά,συνεπώς άγει και το σήμα εισόδου εφαρμόζεται στη βάση του T_1 και οδηγεί το τρανζίστορ σε κατάσταση αποκοπής, ενώ το T_2 μεταβαίνει σε κατάσταση αγωγιμότητας, δηλαδή το δυναμικό του σημείου Α είναι + V Volt, ενώ του Β περίπου Ο Volt, δηλαδή Q = «1» και $\bar{Q}$ = «Ο». Επομένως το Φλιπ - Φλοπ μεταβαίνει στην κατάσταση «1». Αν το Φλιπ - Φλοπ βρίσκεται στην κατάσταση 1 ($Q = 1$, $Q' = 0$) και εφαρμόσομε παλμό θετικής τάσεως στην είσοδο R, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι τελικά το Φλιπ - Φλοπ θα οδηγηθεί στην κατάσταση Ο ($Q = 0$, $Q' = 1$).

Το κύκλωμα του σχήματος 6.3γ δεν μπορεί να βρεθεί σε άλλη κατάσταση από αυτές που περιγράψαμε. Πράγματι, τη στιγμή που το συνδέομε με την τάση τροφοδοσίας το δυναμικό στα σημεία Α και Β δεν μπορεί να είναι ακριβώς το ίδιο. Αυτό συμβαίνει, γιατί πάντα υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις τιμές αντιστάσεων που είναι ίσες ονομαστικά καθώς και στις παραμέτρους τρανζίστορ του ίδιου τύπου.



Σχ. 6.3γ.
S - R Φλιπ - Φλοπ (ηλεκτρονικό κύκλωμα).

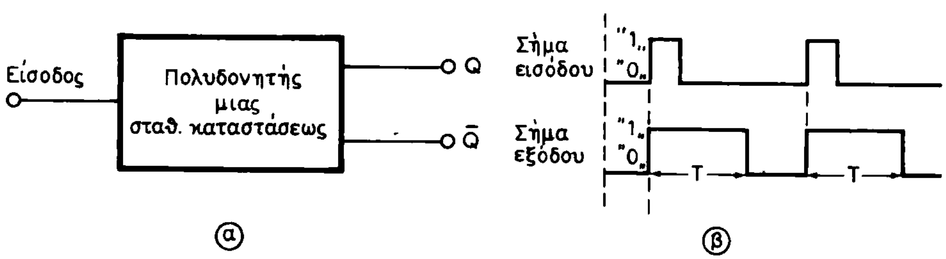
Έστω ότι το δυναμικό στο σημείο Β είναι θετικότερο από το δυναμικό στο σημείο Α. Επομένως το ρεύμα που διαρρέει το τρανζίστορ T_1 (ρεύμα εκπομπού συλλέκτη) θα είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ρεύμα του τρανζίστορ T_2. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση του δυναμικού στο σημείο Α και την αύξηση του δυναμικού στο σημείο Β, πράγμα που συνεπάγεται ακόμα μεγαλύτερη αύξηση του ρεύματος του τρανζίστορ T_1 και ελάττωση του ρεύματος του τρανζίστορ T_2

κ.ο.κ. Έτσι τελικά το τρανζίστορ T_2 οδηγείται στην αποκοπή οπότε το δυναμικό στο σημείο Β παίρνει την τιμή + V Volt (λογικό 1), ενώ το τρανζίστορ T_1 οδηγείται στον κόρο οπότε το δυναμικό στο σημείο Α γίνεται 0 Volt (λογικό 0). Αν αντίθετα την ώρα που το συνδέομε στην τάση, το δυναμικό στο σημείο Β είναι για τους λόγους που αναφέραμε, μικρότερο από το δυναμικό στο σημείο Α, θα καταλήξει με την ίδια διαδικασία να είναι το δυναμικό στο σημείο Β 0 Volt (λογικό 0) και στο σημείο Α + V Volt (λογικό 1).

6.4 Πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως (Monostable Multivibrator).

Ο πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως, είναι ένα κύκλωμα που έχει σχεδιασθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να έχει μια μόνο σταθερή κατάσταση λειτουργίας. Το κύκλωμα παραμένει στην κατάσταση αυτή, εφ' όσον δεν εφαρμόζεται κατάλληλο σήμα στην είσοδό του. Με την εφαρμογή του κατάλληλου σήματος (παλμού) στην είσοδό του, το κύκλωμα αλλάζει κατάσταση, στην οποία παραμένει για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα T. Ο χρόνος αυτός καθορίζεται από τις αντιστάσεις και τους πυκνωτές του κυκλώματος.

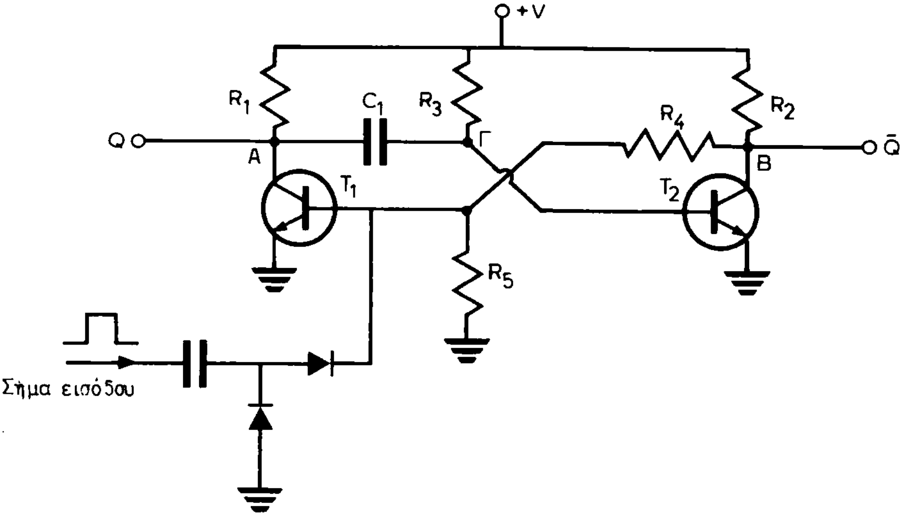
Στο σχήμα 6.4α φαίνεται το σύμβολο του πολυδονητή μιας σταθερής καταστάσεως με τις αντίστοιχες κυματομορφές (σήματα) εισόδου και εξόδου, ενώ στο σχήμα 6.4β το ηλεκτρονικό κύκλωμα του πολυδονητή.



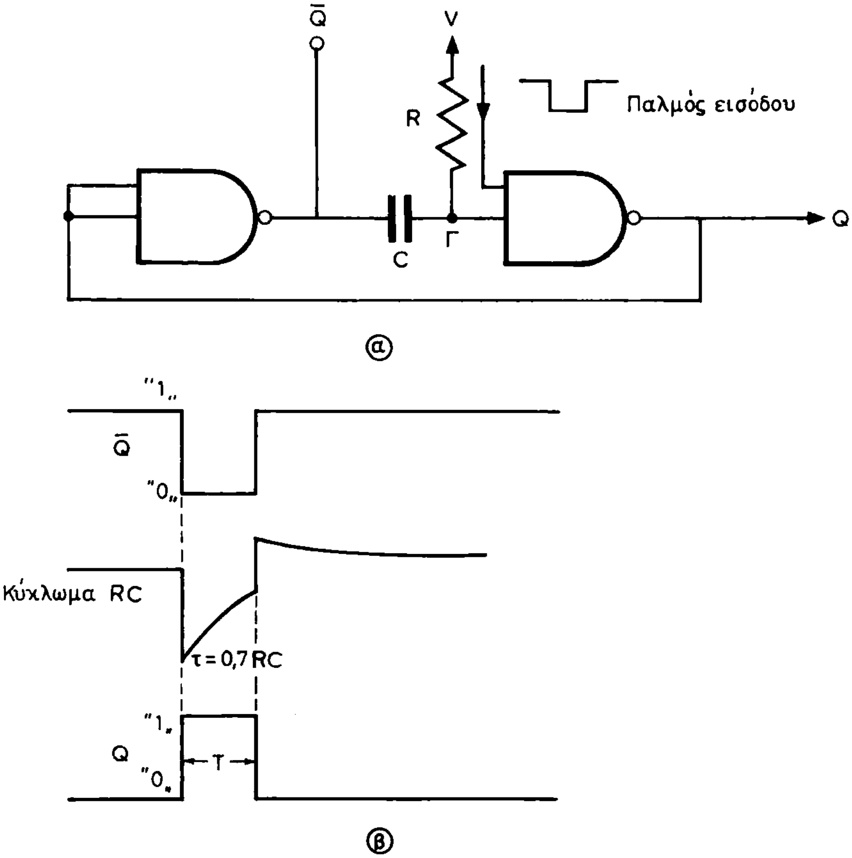
Σχ. 6.4α.
Πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως. α) Σύμβολο πολυδονητή. β) Κυματομορφές (σήματα) εισόδου και εξόδου.

Μόλις το κύκλωμα αυτό το συνδέσομε με την τάση τροφοδοτήσεως, το τρανζίστορ T_2 οδηγείται σε κόρο, επειδή η βάση του μέσω της αντιστάσεως R_3 συνδέεται με την τάση + V Volt. Επομένως το δυναμικό στο σημείο Β θα είναι 0 Volt (λογικό 0). Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το τρανζίστορ T_1 να οδηγηθεί στην αποκοπή οπότε το δυναμικό στο σημείο Α είναι + V Volt (λογικό 1). Το κύκλωμα θα παραμείνει στην κατάσταση αυτή εφ' όσον δεν εφαρμόζεται σήμα στην είσοδο. Αυτή είναι η «σταθερή κατάσταση» του κυκλώματος.

Αν στην είσοδο εφαρμοσθεί ένας θετικός παλμός, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.4β, η βάση του τρανζίστορ T_1 οδηγείται σε θετικό δυναμικό, οπότε το T_1 άγει, δηλαδή το δυναμικό στο σημείο Α από + V Volt (λογικό 1) γίνεται 0 Volt (λογικό 0). Η μεταβολή αυτή μεταφέρεται με τον πυκνωτή C_1 στη βάση του τρανζίστορ T_2 της οποίας το δυναμικό γίνεται – V Volt περίπου. Δηλαδή το τρανζίστορ T_2 οδηγείται στην αποκοπή. Στη συνέχεια ο πυκνωτής C_1 που είναι φορτισμένος με τάση



Σχ. 6.4β.
Πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως (ηλεκτρονικό κύκλωμα).



Σχ. 6.4γ.
Πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως με πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ». α) Λογικό κύκλωμα. β) Κυματομορφές.

— V Volt, αρχίζει να εκφορτίζεται μέσω της αντιστάσεως R_3 που είναι συνδεδεμένη με τάση τροφοδοσίας + V Volt. Όταν το δυναμικό του σημείου Γ (βάση του τρανζίστορ T_2) γίνει λίγο μεγαλύτερο από 0 Volt, το τρανζίστορ T_2 οδηγείται και πάλι στον κόρο, οπότε το τρανζίστορ T_1 οδηγείται στην αποκοπή. Η εκφόρτιση αυτή του πυκνωτή C_1 από την τάση — V Volt στην τάση 0 Volt περίπου χρειάζεται ένα χρονικό διάστημα το οποίο εξαρτάται από την τιμή του πυκνωτή C_1 και την τιμή της αντιστάσεως R_3. Για πολλά πρακτικά κυκλώματα πολυδονητών μιας σταθερής καταστάσεως ο χρόνος αυτός τ αποδεικνύεται ότι είναι: $\tau \approx 0{,}7\ R_3\ C_1$. Στην πράξη μπορούμε να επιτύχομε τιμές του τ από μερικά μsec μέχρι μερικά msec.

Επομένως, όταν εφαρμοσθεί ο παλμός στην είσοδο, αλλάζει η κατάσταση του κυκλώματος. Το κύκλωμα θα παραμείνει στη νέα κατάσταση για ορισμένο χρόνο τ και θα επανέλθει στη σταθερή του κατάσταση. Ο πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως χρησιμοποιείται για μετατροπή κυματομορφών, χρονισμό και δημιουργία καθυστερήσεων.

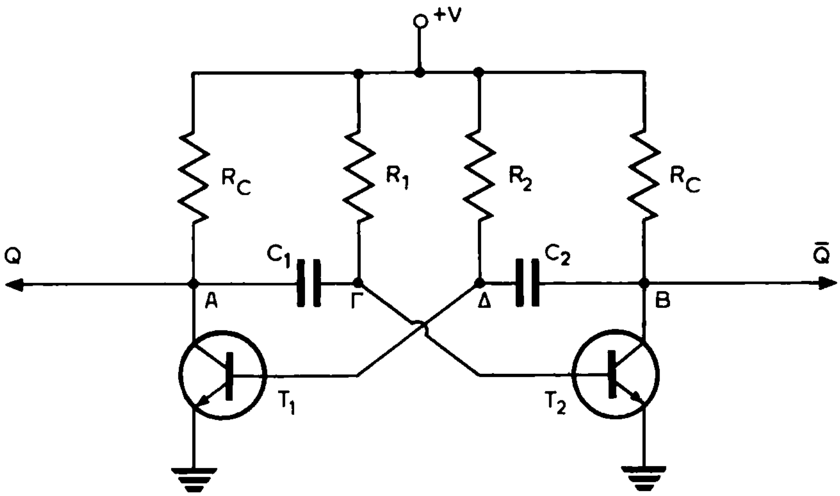
Κυκλώματα πολυδονητών κατασκευάζονται και από ολοκληρωμένα λογικά κυκλώματα που περιέχουν πύλες «ΟΧΙ», «ΟΧΙ ΚΑΙ» ή «ΟΧΙ Η».

Στο σχήμα 6.4γ(α) παριστάνεται ένας πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως, κατασκευασμένος με δύο πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ». Στο σχήμα 6.4γ(β) παριστάνονται οι κυματομορφές εξόδου (Q, Q) καθώς και η κυματομορφή στο σημείο Γ. [Ο πολυδονητής μιας σταθερής καταστάσεως λέγεται και (μονοδονητής)].

6.5 Ασταθής πολυδονητής (Astable Multivibrator).

Ο ασταθής πολυδονητής είναι ένα κύκλωμα με δύο καταστάσεις από τις οποίες καμιά δεν είναι σταθερή. Δηλαδή ο πολυδονητής παραμένει στη μία κατάσταση για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα τ_1 και ύστερα μεταπίπτει στην άλλη κατάσταση στην οποία παραμένει ένα χρονικό διάστημα τ_2 μετά από το οποίο επανέρχεται στην πρώτη κ.ο.κ. Ο χρόνος $T = \tau_1 + \tau_2$ λέγεται περίοδος του πολυδονητή και καθορίζεται από ορισμένα στοιχεία του κυκλώματος (αντιστάσεις, πυκνωτές).

Ένα κύκλωμα ασταθούς πολυδονητή φαίνεται στο σχήμα 6.5α.



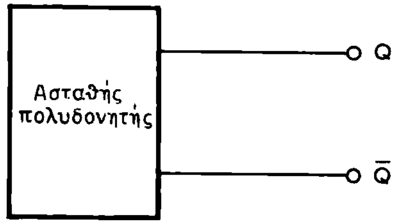
Σχ. 6.5α.
Ασταθής πολυδονητής - ηλεκτρονικό κύκλωμα.

Στο σχήμα 6.5β, φαίνεται το σύμβολό του. Μπορούμε να εξηγήσομε τη λειτουργία του κυκλώματος αυτού με τρόπο ανάλογο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε για τον πολυδονητή μιας σταθερής καταστάσεως.

Για πολλά πρακτικά κυκλώματα ασταθών πολυδονητών οι χρόνοι τ_1 και τ_2 αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\tau_1 \simeq 0{,}7\ R_1C_1 \qquad \text{και} \qquad \tau_2 \simeq 0{,}7\ R_2C_2$$

$$\text{οπότε } T \cong 0{,}7\ (P_1C_1 + R_2C_2)$$



Σχ. 6.5β.
Σύμβολο ενός ασταθούς πολυδονητή.

Η συχνότητα του κυκλώματος f είναι:

$$f = \frac{1}{T} \simeq \frac{1}{0{,}7\ R_1C_1 + 0{,}7\ R_2C_2}$$

ή

$$f = \frac{1}{T} \simeq \frac{1{,}4}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

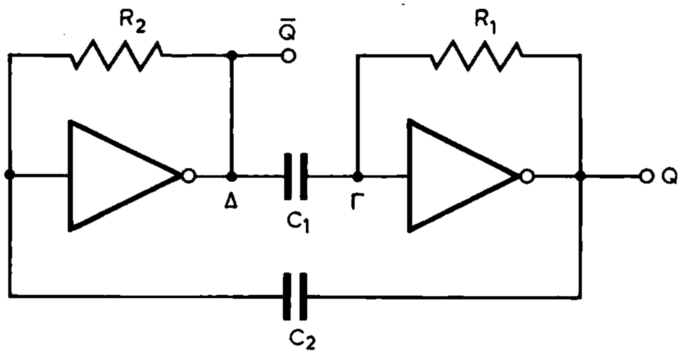
Στην περίπτωση του $R_1 = R_2 = R$ και $C_1 = C_2 = C$, έχομε:

$$f \simeq \frac{0{,}7}{RC}$$

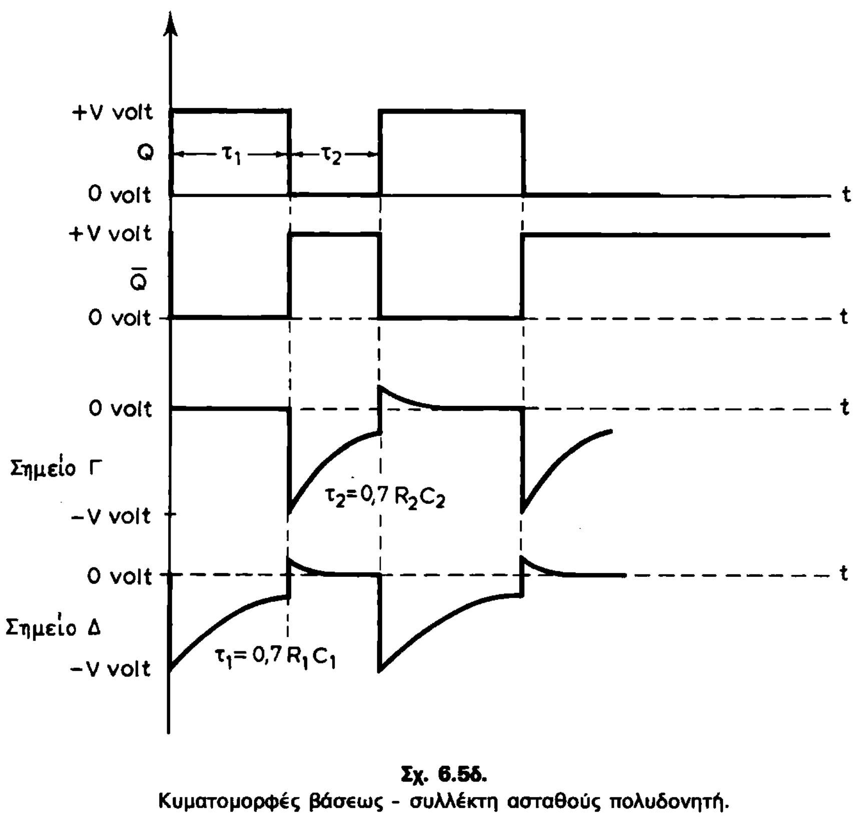
Το κύκλωμα αυτό χρησιμοποιείται ως γεννήτρια παλμών οι οποίοι ονομάζονται και ωρολογιακοί παλμοί (Clock). Οι παλμοί αυτοί παίζουν βασικό ρόλο στους υπολογιστές και γενικότερα στα ψηφιακά κυκλώματα, γιατί αποτελούν τα σήματα χρονισμού. Η συχνότητα ενός ασταθούς πολυδονητή, επειδή εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμες των αντιστάσεων και πυκνωτών του κυκλώματος, μπορεί να καθορισθεί με την ακρίβεια με την οποία μπορούν να καθορισθούν οι τιμές αυτές (π.χ. οι συνήθεις αντιστάσεις και πυκνωτές του εμπορίου έχουν ακρίβεια 10%). Και επειδή, όπως είναι γνωστό, οι τιμές των αντιστάσεων αλλάζουν με τη θερμοκρασία, θα μεταβάλλεται αντίστοιχα και η συχνότητα του πολυδονητή. Όταν πρέπει να κατασκευάσομε γεννήτρια ωρολογιακών παλμών σταθερής συχνότητας, τότε χρησιμοποιούμε κύκλωμα στο οποίο υπάρχει κρύσταλλος.

Στη διεθνή βιβλιογραφία οι ασταθείς πολυδονητές αναφέρονται και ως «ελεύθεροι πολυδονητές» (Free Running Multivibrators).

Κυκλώματα ασταθών πολυδονητών κατασκευάζονται και από ολοκληρωμένα λογικά κυκλώματα που περιέχουν πύλες «ΟΧΙ», «ΟΧΙ ΚΑΙ» και «ΟΧΙ Η».



Σχ. 6.5γ.
Ασταθής πολυδονητής με πύλες «ΟΧΙ».



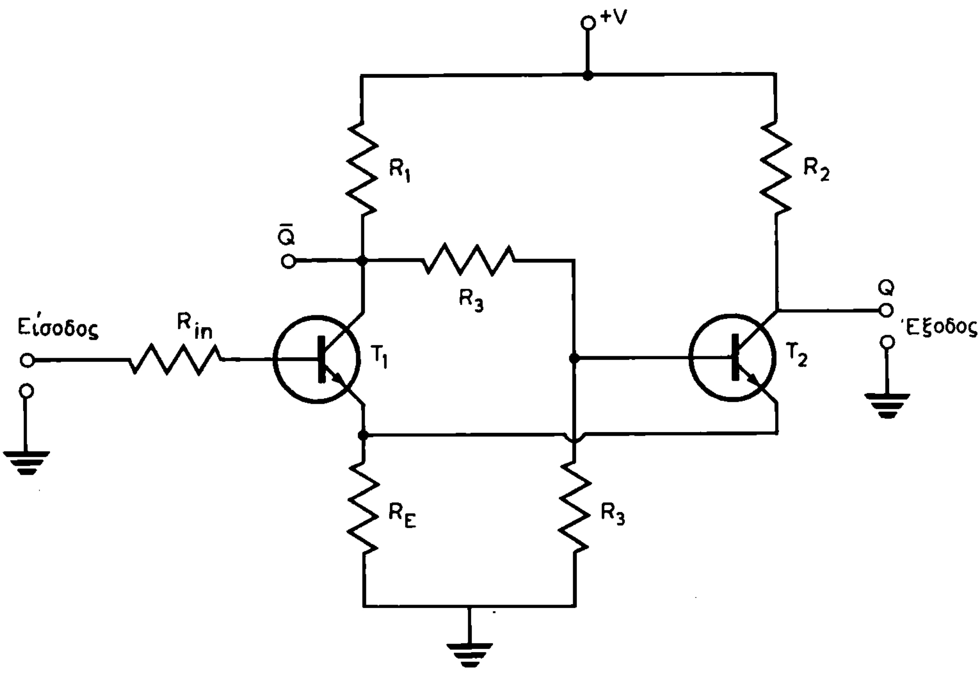
Σχ. 6.5δ.
Κυματομορφές βάσεως - συλλέκτη ασταθούς πολυδονητή.

Στο σχημα 6.5γ φαίνεται ένας ασταθής πολυδονητής κατασκευασμένος με δύο πύλες «ΟΧΙ». Στο σχήμα 6.5δ φαίνονται οι κυματομορφές εξόδου (Q, $\overline{Q}$) καθώς και οι κυματομορφές στα σημεία Γ και Δ.

6.6 Κύκλωμα «σκανδάλης» Schmitt (Schmitt Trigger Circuit).

Το κύκλωμα «σκανδάλης» Schmitt είναι ένα κύκλωμα του οποίου η έξοδος έχει δύο σταθερές καταστάσεις όπως τα κυκλώματα πολυδονητών που εξετάσαμε. Το σήμα εισόδου που διεγείρει το κύκλωμα δεν είναι ένας παλμός, όπως είδαμε στα προηγούμενα κυκλώματα, αλλά μία μεταβαλλόμενη κυματομορφή. Σε όλες τις περιπτώσεις λαμβάνομε στην έξοδο μια κυματομορφή, υπό μορφή παλμών, της οποίας η περίοδος, η μορφή και το πλάτος εξαρτώνται από την κυματομορφή εισόδου και τα στοιχεία του κυκλώματος. Θα θεωρήσομε ότι στην είσοδο του κυκλώματος εφαρμόζεται μία ημιτονοειδής κυματομορφή.

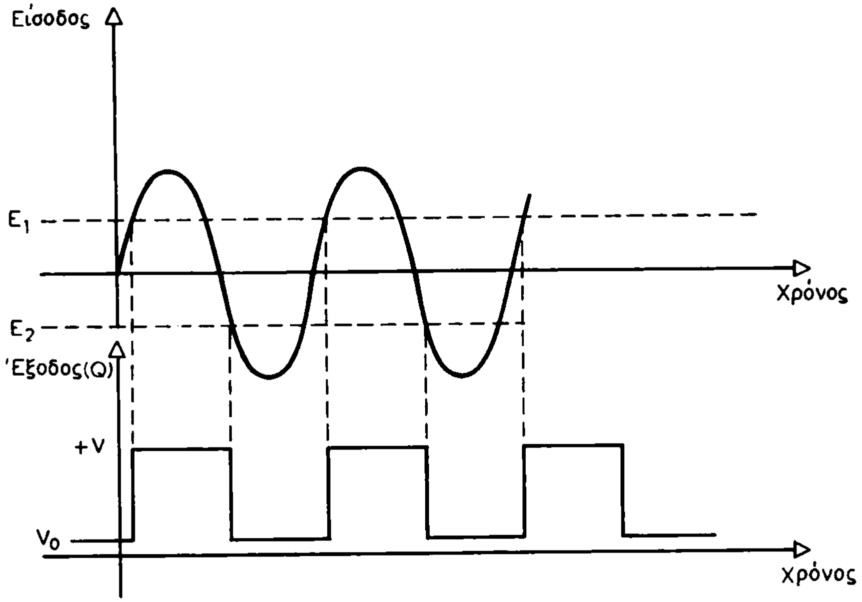
Το βασικό κύκλωμα σκανδάλης Schmitt παριστάνεται στο σχήμα 6.6α.



Σχ. 6.6α.
Κύκλωμα σκανδάλης Schmitt.

Όταν δεν εφαρμόζεται τάση στην είσοδο του κυκλώματος, το τρανζίστορ T_1 βρίσκεται σε κατάσταση αποκοπής, άρα δεν άγει, ενώ το τρανζίστορ T_2 οδηγείται στην κατάσταση αγωγιμότητας. Στην περίπτωση αυτή η τάση στην έξοδο είναι ίση με V_0 (σχ. 6.6β — Κυματομορφές κυκλώματος Schmitt).

Αν τώρα εφαρμόσομε μία ημιτονοειδή τάση στην είσοδο και αυτή αυξανόμενη πάρει την τιμή E_1, τότε το T_1 αρχίζει να άγει. Η τάση στο συλλέκτη του ελαττώνεται με αποτέλεσμα το τρανζίστορ T_2 να άγει ακόμα λιγότερο και έτσι η πτώση τάσεως στην αντίσταση R_E να γίνεται συνεχώς μικρότερη και το T_1 να γίνεται



Σχ. 6.6β.
Κυματομορφές εισόδου - εξόδου κυκλώματος Schmitt.

περισσότερο αγώγιμο. Αυτό οδηγεί τελικά το T_2 στην κατάσταση αποκοπής με αποτέλεσμα η έξοδος να είναι ίση με την τάση +V.

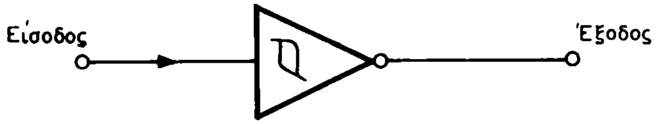
Αν τώρα η τάση στην είσοδο αρχίζει να μειώνεται και γίνει ίση με E_2 το τρανζίστορ T_1 οδηγείται σε αποκοπή, ενώ το T_2 αρχίζει να άγει και οδηγειται γρήγορα στην κατάσταση κόρου.

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι οι τάσεις E_1 και E_2 είναι χαρακτηριστικές, γιατί όταν η είσοδος πάρει τις τιμές αυτές, το κύκλωμα αλλάζει κατάσταση. Τη διαφορά αυτή των τάσεων $E_1 - E_2$ την ονομάζομε ***υστέρηση*** και είναι χαρακτηριστική του κυκλώματος.

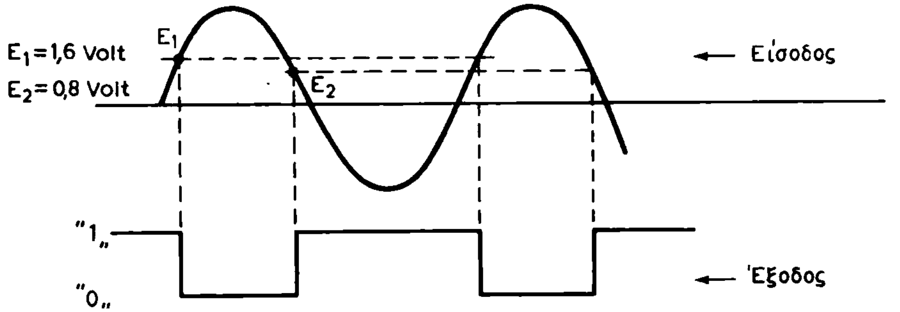
Οι τάσεις E_1 και E_2 ονομάζονται τάσεις «κατωφλίου», γι' αυτό και το κύκλωμα Schmitt το ονομάζομε και «κύκλωμα κατωφλίου».

Το κύκλωμα «σκανδάλης» του Schmitt χρησιμοποιείται ως κύκλωμα συγκρίσεως ή λήψεως τετραγωνικών παλμών από μεταβαλλόμενες τάσεις (συνήθως ημιτονοειδείς), που εφαρμόζονται στην είσοδό του. Σήμερα κυκλώματα «σκανδάλης» Schmitt κατασκευάζονται σχεδόν αποκλειστικά από ολοκληρωμένα κυκλώματα. Π.χ. το ολοκληρωμένο κύκλωμα SN7414. Όπως φαίνεται η έξοδος του κυκλώματος αυτού είναι αντεστραμμένη, δηλαδή η τάση εξόδου του είναι «Ο» όταν η τάση εισόδου είναι μεγαλύτερη από E_1 και ειναι «1» όταν η τάση εισόδου του είναι E_2.

Στο σχήμα 6.6γ(α) παριστάνεται το σύμβολο του κυκλώματος σκανδάλης Schmitt. Στα σχήματα 6.6γ(β) και 6.6γ(γ) παριστάνονται οι κυματομορφές εισόδου - εξόδου του ολοκληρωμένου κυκλώματος SN7414 που περιέχει έξι κυκλώματα σκανδάλης Schmitt.



ⓐ



ⓑ

Σχ. 6.6γ.
Κύκλωμα σκανδάλης Schmitt με ολοκληρωμένα κυκλώματα. α) Σύμβολο. β) Κυματομορφές εισόδου και εξόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΚΑΤΑΧΩΡΗΤΕΣ – ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΕΣ

7.1 Γενικά.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τους πολυδονητές και τους διακρίναμε σε:

— Πολυδονητές δύο σταθερών καταστάσεων (ή Φλιπ - Φλοπ).
— Πολυδονητές μιας σταθερής καταστάσεως και
— πολυδονητές ασταθείς ή ελεύθερης ταλαντώσεως.

Και οι τρεις τύποι των πολυδονητών χρησιμοποιούνται στα κυκλώματα που συγκροτούν έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Συγκεκριμένα: οι πολυδονητές δύο σταθερών καταστάσεων χρησιμοποιούνται στα κυκλώματα που αποθηκεύουν πληροφορίες (καταχωρητές). Οι πολυδονητές μιας σταθερής καταστάσεως χρησιμοποιούνται για την παραγωγή σημάτων ή μορφοποίηση σημάτων και οι ασταθείς ή ελεύθερης ταλαντώσεως πολυδονητές χρησιμοποιούνται για την παραγωγή σημάτων χρονισμού τα οποία είναι απαραίτητα για τη λειτουργία όλων σχεδόν των κυκλωμάτων που συγκροτούν έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσομε διάφορους τύπους καταχωρητών.

7.2 Καταχωρητές (Registers).

Όταν θέλομε να αποθηκεύσομε ένα δυαδικό ψηφίο (bit) μπορούμε να χρησιμοποιήσομε το δικατάστατο στοιχείο Φλιπ - Φλοπ. Όταν θέλομε να αποθηκεύσομε πληροφορία που περιλαμβάνει περισσότερα από ένα δυαδικά ψηφία χρειαζόμαστε τόσα Φλιπ - Φλοπ όσα είναι και τα δυαδικά ψηφία της πληροφορίας. Το σύνολο των Φλιπ - Φλοπ που χρησιμοποιούμε για την αποθήκευση της πληροφορίας αυτης λέμε ότι αποτελεί έναν «καταχωρητή». Το πλήθος των Φλιπ - Φλοπ που περιλαμβάνει ένα καταχωρητής, δηλαδή το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που μπορεί να αποθηκεύσει λέγεται μήκος του καταχωρητή. Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής έχει πάντοτε μεγάλο πλήθος από καταχωρητές, των οποίων το μήκος είναι συνήθως ίσο με το μήκος (πλήθος δυαδικών ψηφίων) της λέξεως του υπολογιστή.

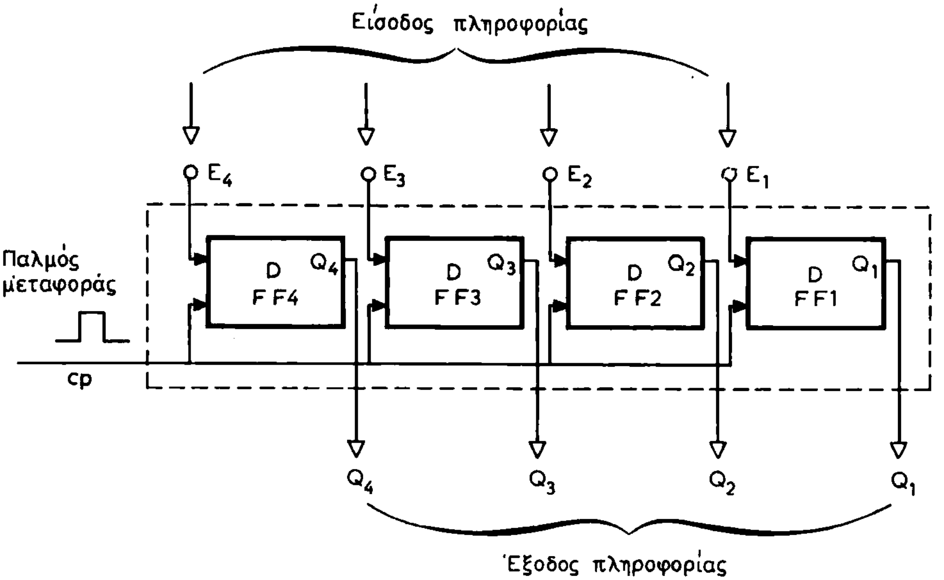
Τους καταχωρητές τους διακρίνομε συνήθως στις εξής κατηγορίες:

7.2.1 Στατικός καταχωρητής.

Ο στατικός καταχωρητής είναι ένας καταχωρητής στον οποίο αποθηκεύομε μία πληροφορία την οποία μπορούμε να την πάρομε αργότερα.

Στο σχήμα 7.2α απεικονίζεται ένας στατικός καταχωρητής ο οποίος αποτελείται από Φλιπ - Φλοπ τύπου D. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο καταχωρητής αποτελείται από 4 Φλιπ - Φλοπ, δηλαδή έχει μήκος 4.

Η πληροφορία που θέλομε να αποθηκεύσομε 4 Bit στην προκειμένη περίπτωση, εφαρμόζεται στην είσοδο του καταχωρητή, δηλαδή στα E_1, E_2, E_3, E_4 αντιστοίχως. Όπως ήδη γνωρίζομε από τη λειτουργία του D Flip - Flop (παράγρ. 6.2) η πληροφορία πού εφαρμόσαμε στα E_1, E_2, E_3, E_4 θα εμφανισθεί στα Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 όταν εφαρμοσθεί ο ωρολογιακός παλμός CP. Ο παλμός αυτός λέγεται στην περίπτωσή μας «παλμός μεταφοράς», γιατί μεταφέρει την κατάσταση της εισόδου κάθε Φλιπ - Φλοπ του καταχωρητή στην αντίστοιχη έξοδο.

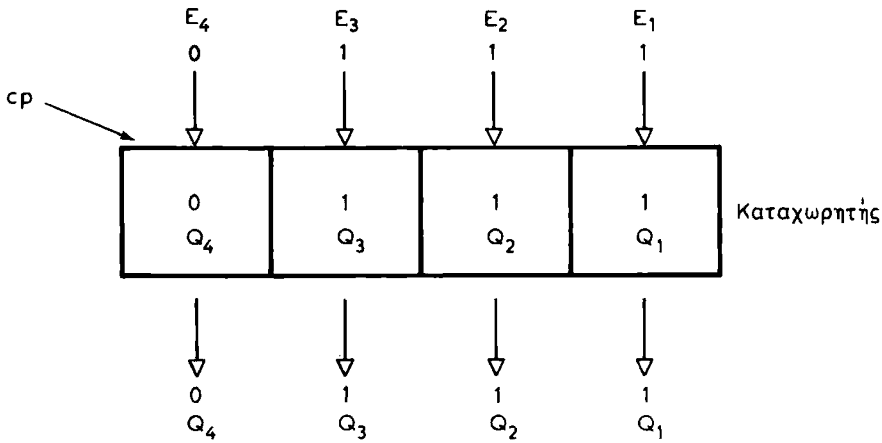


Σχ. 7.2α.
Στατικός καταχωρητής 4 Bit.

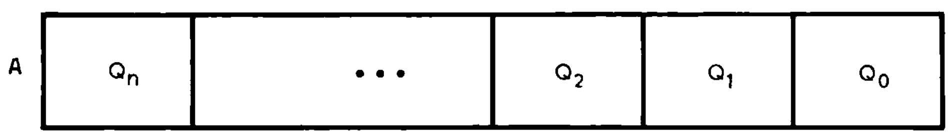
Αν υποθέσομε ότι στην είσοδο του καταχωρητή εφαρμόζεται η πληροφορία 0111, δηλαδή $E_4 = 0$, $E_3 = 1$, $E_2 = 1$ και $E_1 = 1$, τότε το περιεχόμενο του καταχωρητή μετά την εφαρμογή των παλμών μεταφοράς θα είναι 0111, δηλαδή $Q_4 = 0$, $Q_3 = 1$, $Q_2 = 1$, $Q_1 = 1$. Τούτο φαίνεται παραστατικά στο διάγραμμα του σχήματος 7.2β.

Για να ονομάσομε τους καταχωρητές, χρησιμοποιούμε γράμματα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου, π.χ. Α, Β, Γ, κλπ. ή Α, Β, C, κλπ. Συμβολικά ένας καταχωρητής παριστάνεται με μία σειρά τετραγώνων ή ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Π.χ. ένας καταχωρητής Α που μπορεί να αποθηκεύσει μία πληροφορία n δυαδικών ψηφίων παριστάνεται συμβολικά όπως στο διάγραμμα του σχήματος 7.2γ.

Επίσης χρησιμοποιούμε την έκφραση ότι το περιεχόμενο του καταχωρητή Α είναι $a_{n-1} \dots a_2\, a_1\, a_0$ όταν στο πρώτο από δεξιά (a_0 — λιγότερο σημαντικό ψηφίο)



Σχ. 7.2β.
Αποθήκευση της πληροφορίας 0111 στον καταχωρητή.



Σχ. 7.2γ.
Συμβολικό διάγραμμα καταχωρητή n Bit.

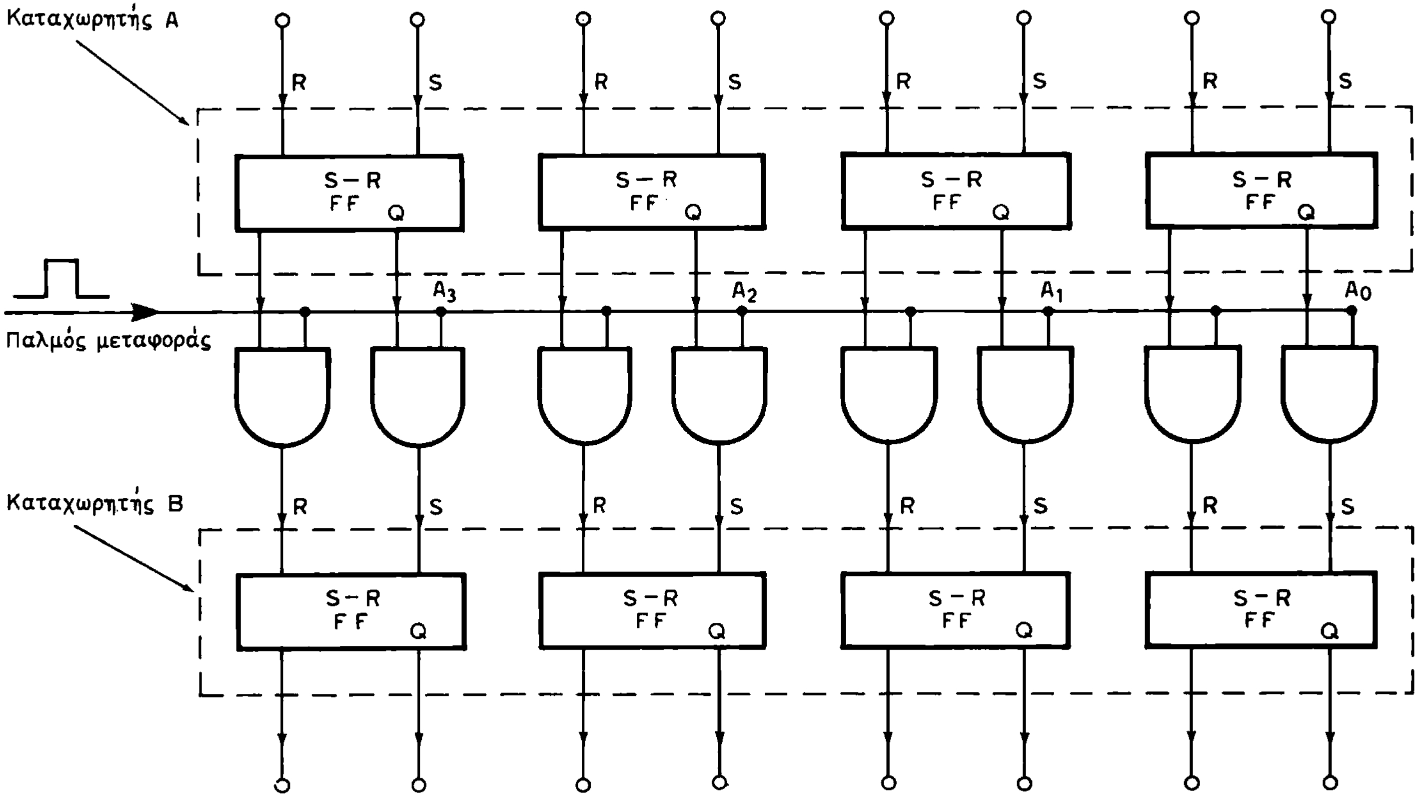
Φλιπ - Φλοπ του καταχωρητή είναι αποθηκευμένο το ψηφίο α_0, στο αμέσως επόμενο το α_1 κ.ο.κ.

Ένας καταχωρητής μπορεί να κατασκευασθεί όχι μόνο από D Φλιπ - Φλοπ, αλλά και από R - S ή J - K Φλιπ - Φλοπ.

Στο σχήμα 7.2δ απεικονίζονται δύο καταχωρητές A και B κατασκευασμένοι από R-S Φλιπ - Φλοπ και συνδεσμολογημένοι κατά τέτοιο τρόπο ώστε το περιεχόμενο του καταχωρητή A να μεταφέρεται στον καταχωρητή B με την εφαρμογή του παλμού μεταφοράς.

Όταν δεν υπάρχει παλμός μεταφοράς όλες οι είσοδοι του καταχωρητή B είναι «0» και συνεπώς κάθε καταχωρητής διατηρεί το περιεχόμενό του. Όταν εφαρμοσθεί ο παλμός μεταφοράς, τότε το περιεχόμενο κάθε Φλιπ - Φλοπ του καταχωρητή A εμφανίζεται στην είσοδο του αντίστοιχου Φλιπ - Φλοπ του καταχωρητή B και αποθηκεύεται σε αυτόν.

Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής περιέχει ένα μεγάλο αριθμό στατικών καταχωρητών όπως οι καταχωρητές που εξετάσαμε στο κεφάλαιο αυτό. Βρίσκονται στην αριθμητική μονάδα του υπολογιστή όπου χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση ενδιαμέσων αποτελεσμάτων επεξεργασίας. Σε αυτή την περίπτωση οι καταχωρητές αυτοί είναι γνωστοί ως καταχωρητές γενικής χρήσεως (General Purpose Registers). Στους νεώτερους ηλεκτρονικούς υπολογιστές μπορούμε να πούμε ότι ολόκληρη η μνήμη τους αποτελείται από ένα σύνολο στατικών καταχωρητων (υπολογιστές με ημιαγωγική μνήμη — Κεφάλαιο 8).



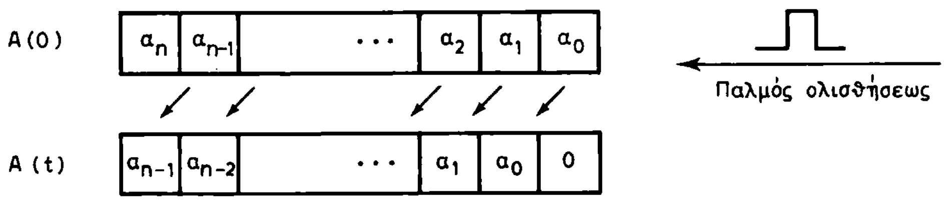
Σχ. 7.2δ.
Μεταφορά του περιεχομένου του καταχωρητή Α στο Β.

7.2.2 Ολισθητής (Shift Register).

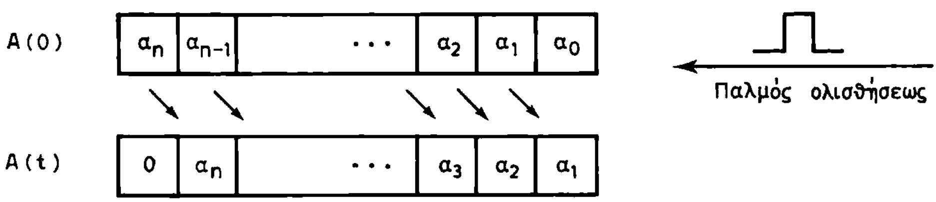
Ολισθητής είναι ένας καταχωρητής που μπορεί να ολισθήσει (να μετακινήσει) το περιεχόμενό του κατά μία θέση, κάθε φορά που εφαρμόζεται σε αυτόν ένας εξωτερικός παλμός τον οποίο ονομάζομε παλμό ολισθήσεως.

Η ολίσθηση μπορεί να γίνει ανάλογα με την κατασκευή του, προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά ή και προς τις δύο κατευθύνσεις. Όταν ο ολισθητής μπορεί να ολισθαίνει το περιεχόμενό του και προς τις δύο κατευθύνσεις λέγεται «αμφίδρομος».

Όταν η ολίσθηση γίνεται προς τα αριστερά, το τελευταίο προς τα αριστερά ψηφίο του ολισθητή χάνεται ενώ το πρώτο προς τα δεξιά ψηφίο αντικαθίσταται με μηδέν (σχ. 7.2ε).



Σχ. 7.2ε.
Ολίσθηση προς τα αριστερά μία θέση.

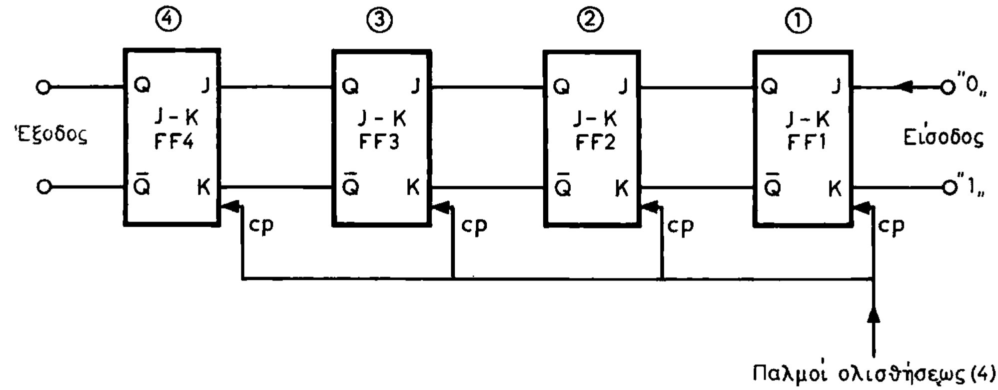


Σχ. 7.2στ.
Ολίσθηση προς τα δεξιά μια θέση.

Όταν η ολίσθηση γίνεται προς τα δεξιά, το τελευταίο προς τα δεξιά ψηφίο του ολισθητή χάνεται ενώ το τελευταίο προς τα αριστερά ψηφίο αντικαθίσταται με 0 (σχ. 7.2στ).

Ένας τύπος ολισθητή κατασκευασμένος από J - K Φλιπ - Φλοπ απεικονίζεται στο σχήμα 7.2ζ.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.2ζ στις εισόδους του FF1 Φλιπ-Φλοπ εφαρμόζομε J = 0 και K = 1. Είναι φανερό ότι με τον πρώτο παλμό ολισθήσεως το περιεχόμενο του κάθε Φλιπ - Φλοπ θα μεταφερθεί στο διπλανό του, ενώ το περιεχόμενο του FF1 θα γίνει «0» και το περιεχόμενο του FF4 θα χαθεί. Προφανώς μετά την εφαρμογή 4 παλμών ολισθήσεως το περιεχόμενο όλων των Φλιπ - Φλοπ θα γίνει 0. Στον πίνακα 7.2.1 δίνονται τα διαδοχικά στάδια ολισθήσεως του αριθμού 1101 που υποθέτομε ότι υπήρχε αρχικά στον καταχωρητή.

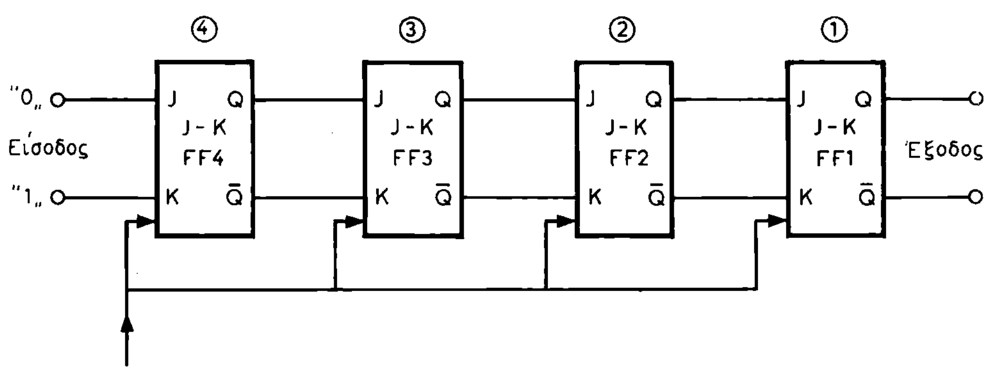


Σχ. 7.2ζ.
Ολισθητής με J - K Φλιπ - Φλοπ [Ολίσθηση - παλμοί ολισθήσεως (4)].

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2.1.
Πίνακας λειτουργίας ολισθητή (ολίσθηση προς τα αριστερά)

Παλμός ολισθήσεως	④	③	②	①
0	1	1	0	1
1ος	1	0	1	0
2ος	0	1	0	0
3ος	1	0	0	0
4ος	0	0	0	0

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο λειτουργεί και ο ολισθητής πού πραγματοποιεί ολίσθηση προς τα δεξιά. Ένας τέτοιος ολισθητής απεικονίζεται στο σχήμα 7.2η.



Σχ. 7.2η.
Ολισθητής με J - K Φλιπ - Φλοπ (ολίσθηση προς τα δεξιά).

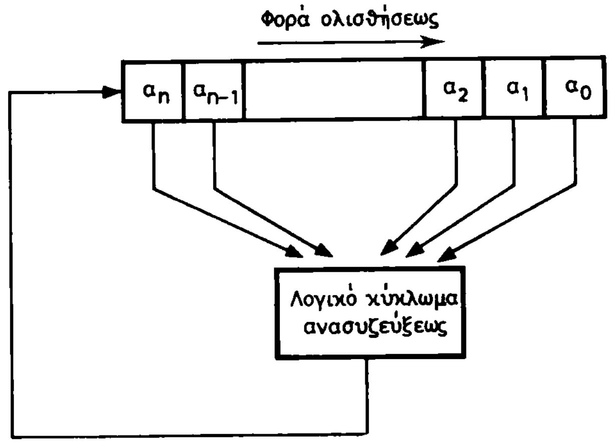
Αν υποθέσομε ότι το αρχικό (δηλαδή πριν από την εφαρμογή του παλμού ολισθήσεως) περιεχόμενο του ολισθητή είναι 1101, η λειτουργία θα είναι όπως αυτή που περιγράφεται στον πίνακα 7.2.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2.2.
Πίνακας λειτουργίας ολισθητή (ολίσθηση προς τα δεξιά)

Παλμός ολισθήσεως	④	③	②	①
0	1	1	0	1
1ος	0	1	1	0
2ος	0	0	1	1
3ος	0	0	0	1
4ος	0	0	0	0

Όταν ο ολισθητής είναι κατασκευασμένος έτσι ώστε το ψηφίο που χάνεται κατά την ολίσθηση (αριστερά ή δεξιά) να αντικαθιστά το ψηφίο που μηδενίζεται, τότε ο ολισθητής λέγεται «κυκλικός ολισθητής» (Shift Around Register).

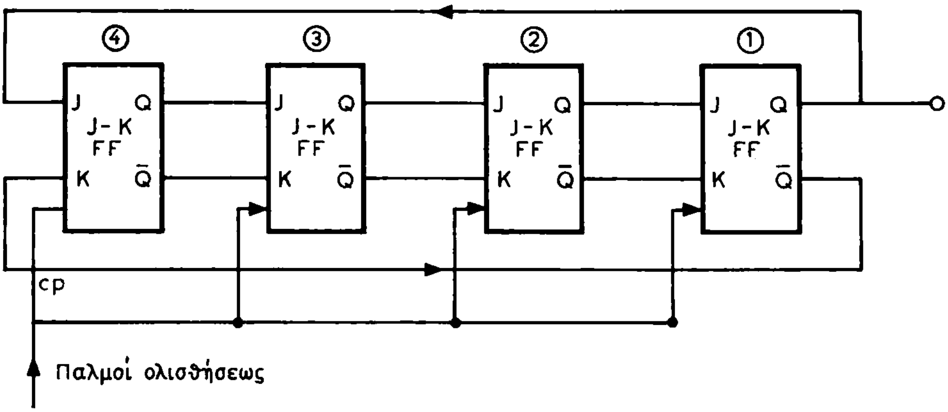
Ο κυκλικός ολισθητής αποτελεί μία ειδική περίπτωση των «ολισθητών με ανασύζευξη», στους οποίους το ψηφίο που μηδενίζεται αντικαθίσταται από την έξοδο ενός λογικού κυκλώματος οι είσοδοι του οποίου τροφοδοτούνται από ένα ή περισσότερα ψηφία του ολισθητή (σχ. 7.2θ).



Σχ. 7.2θ.
Ολισθητής με ανασύζευξη.

Στο σχήμα 7.2ι φαίνεται ένας κυκλικός ολισθητής που αποτελείται από J-K Φλιπ - Φλοπ.

Στο πίνακα 7.2.3 δίνονται τα διαδοχικά περιεχόμενα ενός κυκλικού ολισθητή με αρχικό περιεχόμενο 1101.



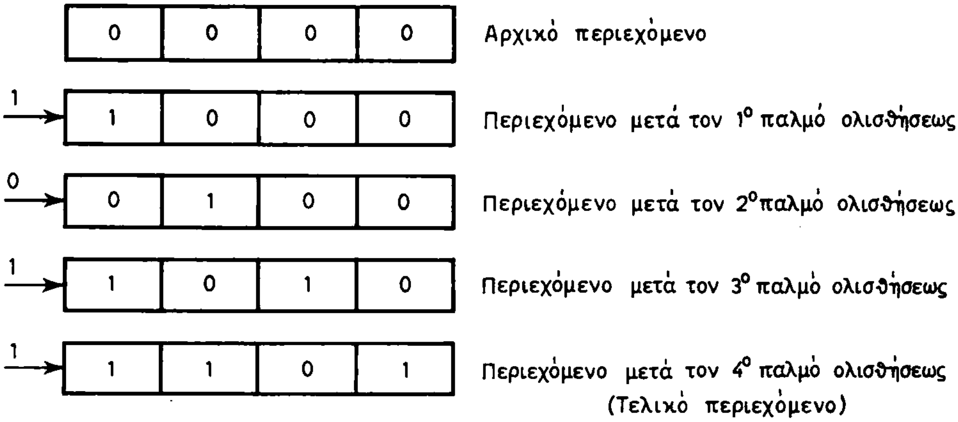
Σχ. 7.2ι.
Κυκλικός ολισθητής (ολίσθηση προς τα δεξιά και κυκλική).

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2.3.
Πίνακας λειτουργίας κυκλικού ολισθητή

Παλμοί ολισθήσεως	④	③	②	①
0	1	1	0	1
1ος	1	1	1	0
2ος	0	1	1	1
3ος	1	0	1	1
4ος	1	1	0	1

Είναι φανερό ότι μετά τον τέταρτο παλμό, το περιεχόμενο του ολισθητή είναι το ίδιο με το αρχικό.

Το αρχικό περιεχόμενο ενός ολισθητή μπορεί να τοποθετηθεί στα Φλιπ - Φλοπ από τα οποία αποτελείται όπως στους στατικούς καταχωρητές, δηλαδή ταυτόχρονη είσοδος σε όλα τα Φλιπ - Φλοπ. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχομε παράλληλη είσοδο της πληροφορίας (Parallel Input). Μπορεί επίσης να τοποθετηθεί με διαδοχικές ολισθήσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.2ια όπου δίνεται η είσοδος που εφαρμόζομε στο Φλιπ - Φλοπ ανώτερης τάξεως και το αντίστοιχο κάθε φορά (για κάθε ολίσθηση) περιεχόμενο του ολισθητή για την εισαγωγή του αριθμού 1011. Είναι φανερό ότι το τελικό περιεχόμενο του ολισθητή θα είναι 1011, ανεξάρτητα από το αρχικό του περιεχόμενο. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχομε διαδοχική είσοδο (Serial Input) της πληροφορίας στον ολισθητή.



Σχ. 7.2ια.
Διαδοχική εισαγωγή πληροφορίας στον ολισθητή.

Το περιεχόμενο ενός ολισθητή το παίρνομε με τους εξής τρόπους:

— Ταυτόχρονη λήψη του περιεχομένου όλων των Φλιπ-Φλοπ του ολισθητή. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχομε παράλληλη έξοδο (Parallel Output).

— Λήψη του περιεχομένου διαδοχικά από ένα Φλίπ - Φλόπ του ολισθητή (συνήθως του τελευταίου). Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχομε διαδοχική έξοδο (Serial Output).

Είναι φανερό ότι σε ένα ολισθητή μπορούμε να έχομε:

— Παράλληλη είσοδο — παράλληλη έξοδο.
— Παράλληλη είσοδο — διαδοχική έξοδο.
— Διαδοχική είσοδο — παράλληλη έξοδο.
— Διαδοχική είσοδο — διαδοχική έξοδο.

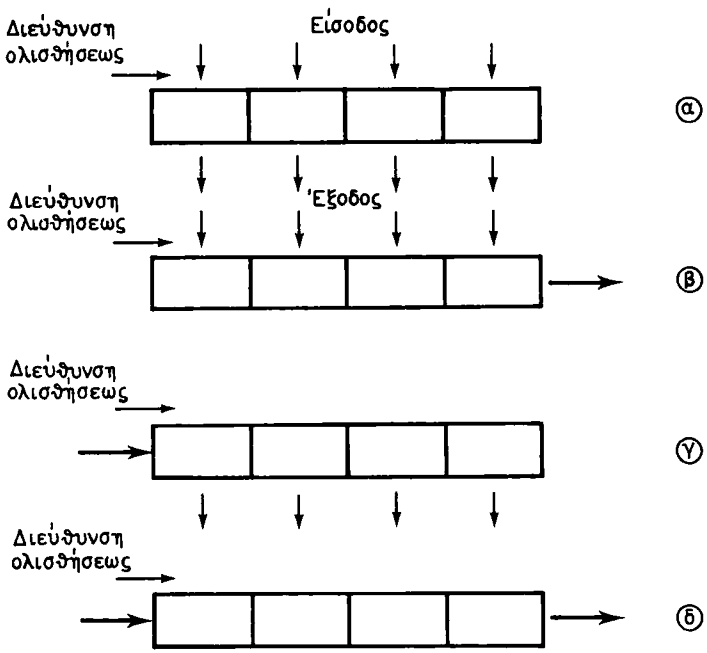
Ολισθητές με παράλληλη είσοδο = παράλληλη έξοδο χρησιμοποιούνται στην αριθμητική μονάδα των υπολογιστών (ολίσθηση ενός δυαδικού αριθμού προς τα δεξιά ισοδυναμεί σε διαίρεση δια 2, ενώ ολίσθηση προς τα αριστερά ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό επί 2).

Ολισθητές με παράλληλη είσοδο — διαδοχική έξοδο χρησιμοποιούνται όταν θέλομε να διαβιβάσομε μία πληροφορία πολλών διαδοχικών ψηφίων από ένα καλώδιο, π.χ. εκπομπή στην τηλετυπία.

Ολισθητές με διαδοχική είσοδο — παράλληλη έξοδο χρησιμοποιούνται για τη λήψη πληροφορίας πολλών διαδοχικών ψηφίων που διαβιβάσθηκε μέσα από ένα καλώδιο, π.χ. λήψη στην τηλετυπία.

Ολισθητές με διαδοχική είσοδο — διαδοχική έξοδο χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή καθυστερήσεως σε μετάδοση μιας πληροφορίας ή κυματομορφής στις μονάδες ελέγχου των υπολογιστών και σε άλλες περιπτώσεις. Την εισαγωγή καθυστερήσεως τη βλέπομε από το σχήμα 7.2ια όπου είναι φανερό ότι το περιεχόμενο του τελευταίου Φλιπ - Φλοπ του ολισθητή γίνεται ίδιο με το περιεχόμενο του πρώτου μετά από 4 παλμούς ολισθήσεως.

Στο σχήμα 7.2ιβ δίνονται τα σύμβολα του ολισθητή για τις διάφορες περιπτώσεις που εξετάσαμε.



Σχ. 7.2ιβ.
Σύμβολα ολισθητών. α) Με παράλληλη είσοδο - παράλληλη έξοδο. β) Παράλληλη είσοδο - διαδοχική έξοδο. γ) Διαδοχική είσοδο - παράλληλη έξοδο. δ) Διαδοχική είσοδο - διαδοχική έξοδο.

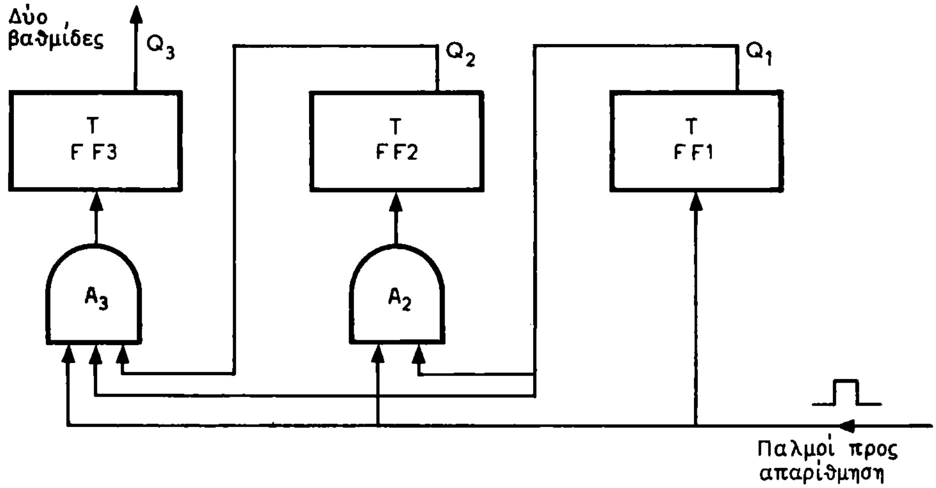
7.3 Απαριθμητές (Counters).

Απαριθμητής είναι ένας καταχωρητής ο οποίος μπορεί να μεταβάλλει το περιεχόμενό του κατά μία μονάδα, κάθε φορά που στην είσοδό του δέχεται ένα κατάλληλο παλμό. Όταν ο απαριθμητής αυξάνει το περιεχόμενό του, λέμε ότι απαριθμεί κατά την ορθή φορά ή ότι απαριθμεί προς τα πάνω (Up Counter). Όταν ελαττώνει το περιεχόμενό του, λέμε ότι απαριθμεί κατά την ανάστροφη φορά ή ότι απαριθμεί πρός τα κάτω (Down Counter). Όταν ο απαριθμητής μπορεί να μετράει και προς τα πάνω και προς τα κάτω (με εξωτερική επιλογή) λέγεται «αμφίδρομος απαριθμητής» (Up-Down Counter). Είναι επίσης δυνατόν ένας απαριθμητής κατά τη διάρκεια της απαριθμήσεως το περιεχόμενό του να μη μεταβάλλεται κατά μία μονάδα, αλλά κατά ένα μεγαλύτερο αριθμό. Ο απαριθμητής αυτός λέγεται «απαριθμητής άλματος».

Είναι δυνατόν ένας απαριθμητής να μετράει στο δυαδικό σύστημα, οπότε ο απαριθμητής λέγεται «δυαδικός», είναι όμως δυνατόν να μετράει στο δεκαδικό σύστημα με κωδικοποίηση BCD, οπότε ο απαριθμητής λέγεται «δεκαδικός απαριθμητής» ή «απαριθμητής BCD».

7.3.1 Παράλληλος δυαδικός απαριθμητής.

Στο σχήμα 7.3α παριστάνεται ένας απαριθμητής τριών βαθμίδων. Η κάθε βαθμίδα αποτελείται από ένα Τ Φλιπ - Φλοπ. Οι παλμοί προς απαρίθμηση εφαρμόζον-

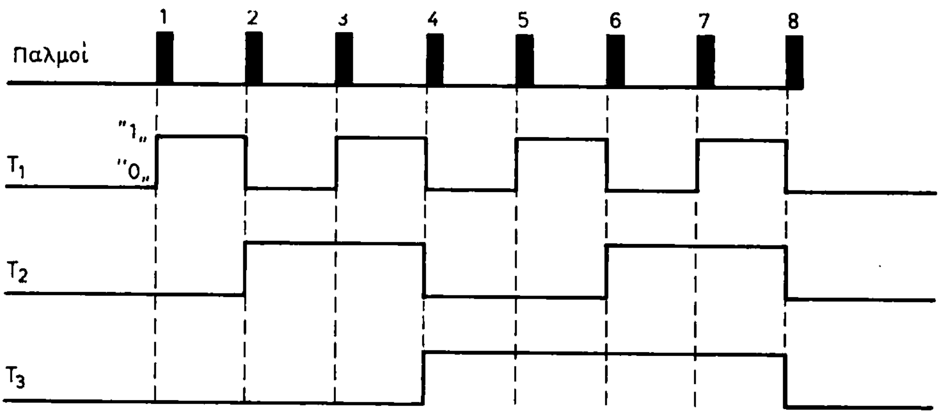


Σχ. 7.3α.
Παράλληλος δυαδικός απαριθμητής (σύγχρονος).

ται απ' ευθείας στην είσοδο της πρώτης βαθμίδας, δηλαδή στο πρώτο Φλιπ - Φλοπ και μέσω των αντιστοίχων πυλών A_2, A_3 στις άλλες δύο βαθμίδες.

Έστω ότι το αρχικό περιεχόμενο και των τριών Φλιπ - Φλοπ είναι «0», δηλαδή $Q_1 = Q_2 = Q_3 =$ «0». Κατά την εφαρμογή του πρώτου παλμού στην είσοδό του το T_1 θα αλλάξει κατάσταση και θα γίνει $T_1 =$ «1» (δηλαδή $Q_1 = 1$), ενώ τα T_2 και T_3 θα παραμείνουν όπως έχουν λόγω της παρουσίας των πυλών ΚΑΙ, A_2 και A_3 των οποίων η μια είσοδός τους είναι «0». Κατά την εφαρμογή του δεύτερου παλμού, τα T_1 και T_2 θα αλλάξουν κατάσταση, δηλαδή θα γίνουν $T_1 =$ «0» και $T_2 =$ «1», ενώ το T_3 θα παραμείνει στην αρχική του κατάσταση, δηλαδή $T_3 =$ «0» (λόγω της πύλης ΚΑΙ A_3).

Συνεχίζοντας την εφαρμογή των παλμών, θα πάρομε διαδοχικά όλους τους τριψήφιους δυαδικούς αριθμούς όπως φαίνεται στο πίνακα 7.3.1.



Σχ. 7.3β.
Χρονική παράσταση της μεταβολής των καταστάσεων των T_1, T_2, T_3 του απαριθμητή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3.1.
Πίνακας λειτουργίας παράλληλου απαριθμητή τριών βαθμίδων

Χρόνος	Παλμοί	Q_1	Q_2	Q_3
t_0	0	0	0	0
t_1	1ος	0	0	1
t_2	2ος	0	1	0
t_3	3ος	0	1	1
t_4	4ος	1	0	0
t_5	5ος	1	0	1
t_6	6ος	1	1	0
t_7	7ος	1	1	1
t_8	8ος	0	0	0

Όταν φθάσομε στον αριθμό 111 και εφαρμοσθεί ο επόμενος παλμός και τα τρία Φλιπ - Φλοπ θα αλλάξουν κατάσταση, δηλαδή θα πάρομε τον αριθμό 000.

Στον παραπάνω απαριθμητή ο παλμός εισόδου (παλμός προς απαρίθμηση) εφαρμόζεται σε όλες τις βαθμίδες του και γι' αυτό ονομάζεται «παράλληλος απαριθμητής». Ο απαριθμητής αυτός ονομάζεται και «σύγχρονος απαριθμητής».

Η χρονική μεταβολή των καταστάσεων T_1, T_2, T_3 των Φλιπ - Φλοπ του απαριθμητή δίνεται στον πίνακα 7.3.1 και στο διάγραμμα του σχήματος 7.3β.

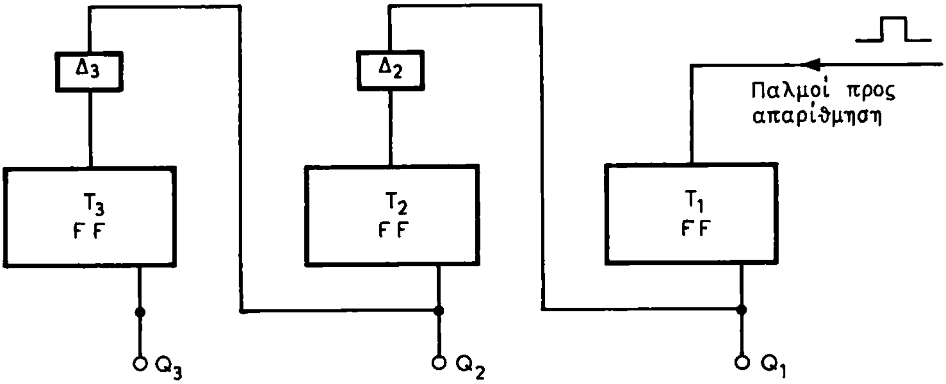
Όπως είναι φανερό από το σχήμα 7.3β η έξοδος κάθε Φλιπ - Φλοπ είναι μια κυματομορφή «τετραγωνικών παλμών». Η συχνότητα των παλμών αυτών υποδιπλασιάζεται από βαθμίδα σε βαθμίδα γι' αυτό και ο δυαδικός απαριθμητής λέγεται και κλίμακα των δύο (Scale of Two).

7.3.2 Δυαδικός απαριθμητής διαδοχικού κρατουμένου (Binary Ripple Counter).

Στό σχήμα 7.3γ παριστάνεται ένας δυαδικός απαριθμητής διαδοχικού κρατουμένου τριών βαθμίδων. Η κάθε βαθμίδα αποτελείται από ένα Τ Φλιπ - Φλοπ. Οι παλμοί προς απαρίθμηση εφαρμόζονται στην είσοδο της πρώτης βαθμίδας, δηλαδή στο πρώτο Φλιπ - Φλοπ.

Τα κυκλώματα Δ_2 και Δ_3 παράγουν ένα παλμό, όταν η είσοδός τους μεταβληθεί από «1» σε «0». Τέτοια κυκλώματα είναι τα γνωστά ηλεκτρονικά κυκλώματα διαφοριστών με ψαλίδιση. Στον απαριθμητή του σχήματος 7.3γ τα Δ_2 και Δ_3 παριστάνονται ως ιδιαίτερα κυκλώματα. Στην πράξη όμως κάθε Τ Φλιπ - Φλοπ περιέχει ενσωματωμένα τα κυκλώματα αυτά γι' αυτό και στο εξής θα τα παραλείπομε.

Έστω ότι το αρχικό περιεχόμενο και των τριών Φλιπ - Φλοπ είναι μηδέν, δηλαδή $Q_1 = Q_2 = Q_3 =$ «0». Κατά την εφαρμογή του πρώτου παλμού, το T_1 θα αλλάξει



Σχ. 7.3γ.
Δυαδικός απαριθμητής διαδοχικού κρατουμένου.

κατάσταση από 0 σε 1 οπότε τα κυκλώματα $Δ_2$ και $Δ_3$ δε θα δώσουν παλμούς και τα Φλιπ - Φλοπ T_2 και T_3 θα παραμείνουν όπως έχουν.

Κατά την εφαρμογή του δεύτερου παλμού το T_1 θα αλλάξει κατάσταση από 1 σε 0, το $Δ_2$ θα δώσει παλμό ο οποίος θα μεταβάλλει την κατάσταση του T_2 από 0 σε 1 και το T_3 θα παραμείνει όπως έχει, δηλαδή 0. Συνεχίζοντας κατά τον τρόπο αυτό θα λάβομε διαδοχικά όλους τους τριψήφιους δυαδικούς αριθμούς. Όταν λάβομε τον αριθμό 111, η εφαρμογή του επόμενου παλμού θα οδηγήσει το T_1 από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 0, το $Δ_2$ θα δώσει παλμό που θα οδηγήσει το T_2 από 1 σε 0 και τέλος το $Δ_3$ θα οδηγήσει το T_3 στην κατάσταση 0.

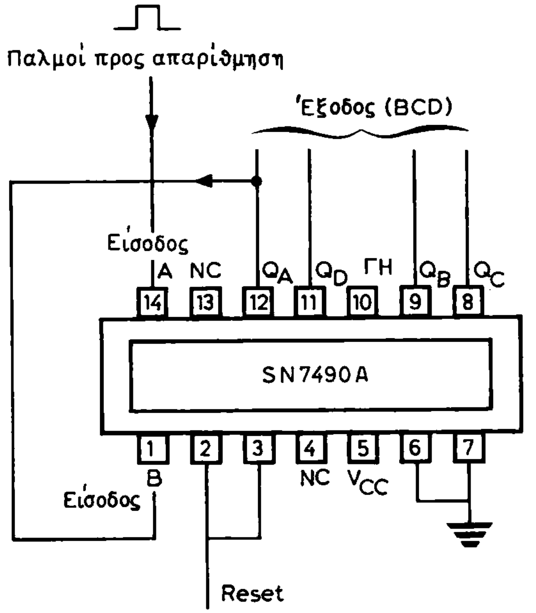
Παρατηρούμε ότι το κρατούμενο που προέκυψε μετά τον τελευταίο παλμό δημιούργησε νέο κρατούμενο στη δεύτερη βαθμίδα το οποίο διήγειρε την τρίτη βαθμίδα. Για το λόγο αυτό απαριθμητές όπως του σχήματος 7.3γ λέγονται «απαριθμητές διαδοχικού κρατουμένου». Οι απαριθμητές του τύπου αυτού λέγονται και «ασύγχρονοι απαριθμητές».

Είναι φανερό ότι μεταξύ της στιγμής της εφαρμογής ενός παλμού και της αυξήσεως του αριθμού που περιέχει ο απαριθμητής κατά 1 μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα που είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των βαθμίδων μέσα από τις οποίες πρέπει να προωθηθεί το κρατούμενο.

7.4 Απαριθμητές από ολοκληρωμένα κυκλώματα.

Σήμερα διατίθενται στο εμπόριο υπό μορφή ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (IC Chips) απαριθμητές πολλών βαθμίδων που μπορούν να απαριθμούν στο δυαδικό ή σε BCD κώδικα.

Στο σχημα 7.4 δίνεται το συμβολικό διάγραμμα ενός δεκαδικού ασύγχρονου απαριθμητή διαδοχικού κρατουμένου που διατίθεται στο εμπόριο με την ονομασία SN7490A. Οι αριθμοί στο διάγραμμα αντιστοιχούν στην είσοδο και στις εξόδους (ποδαράκια) του απαριθμητή αυτού.


Παλμοί προς απαρίθμηση
Έξοδος (BCD)
Είσοδος
A
NC
Q_A
Q_D
ΓΗ
Q_B
Q_C
14
13
12
11
10
9
8
SN7490A
1
2
3
4
5
6
7
B
NC
V_{CC}
Είσοδος
Reset

Σχ. 7.4.

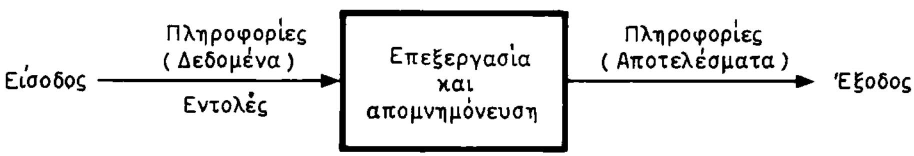
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

8.1 Γενικά.

Όπως ήδη έχομε αναφέρει στην εισαγωγή, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής είναι ένα σύστημα επεξεργασίας αλφαριθμητικών δεδομένων. Εκτός από τα δεδομένα αυτά εισάγονται στον υπολογιστή και οι εντολές με βάση τις οποίες θα γίνει η επεξεργασία των δεδομένων. Τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των δεδομένων δίνονται από τον υπολογιστή με αλφαριθμητική ή άλλη (π.χ. γραφική) μορφή. Η όλη επεξεργασία μετά την εισαγωγή των δεδομένων και των εντολών στον υπολογιστή γίνεται αυτόματα. Αυτό μας λέει ότι ο υπολογιστής εκτός από την ικανότητα επεξεργασίας (π.χ. εκτελέσεως πράξεων) διαθέτει και την ικανότητα να απομνημονεύει τα δεδομένα και τις εντολές που εισάγονται σ' αυτόν.

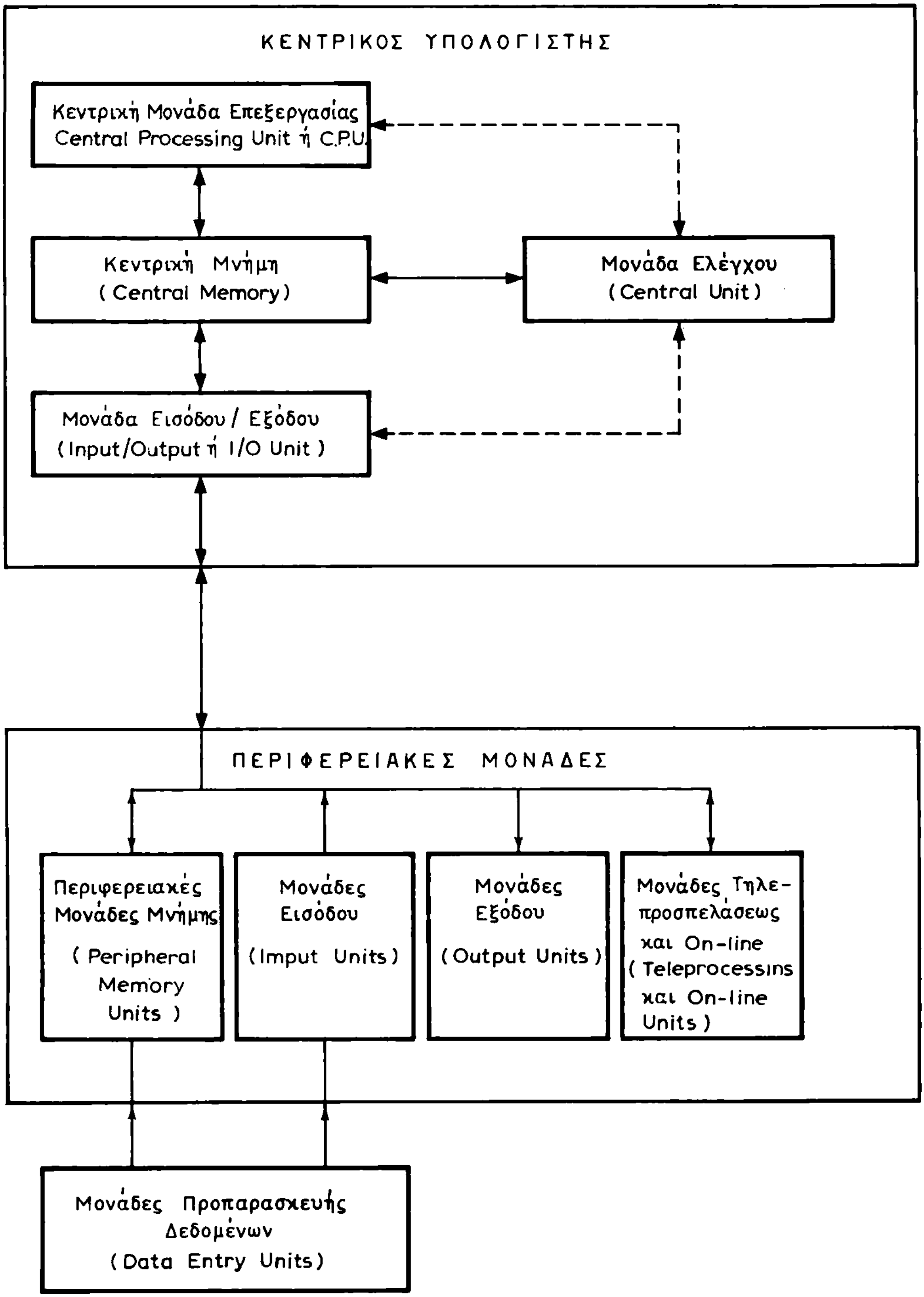
Στο σχήμα 8.1α φαίνεται ένα συνοπτικό διάγραμμα της αρχής λειτουργίας ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή.



Σχ. 8.1α.
Συνοπτικό διάγραμμα λειτουργίας ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής αποτελείται από έναν αριθμό μονάδων η καθεμιά από τις οποίες αναλαμβάνει την εκτέλεση καθορισμένης εργασίας. Έτσι λοιπόν για την επεξεργασία των δεδομένων χρειάζονται μονάδες που χρησιμεύουν για να εισάγομε στον υπολογιστή πληροφορίες (δεδομένα και εντολές), μονάδες που χρησιμεύουν για να αποθηκεύομε αυτές τις πληροφορίες, μονάδες για την εκτέλεση αριθμητικών και λογικών πράξεων, μονάδες που να ελέγχουν τη διακίνηση και επεξεργασία των πληροφοριών και μονάδες στις οποίες μπορούμε να πάρομε και να δώσομε στον άνθρωπο τα αποτελέσματα της επεξεργασίας σε εύχρηστη και επιθυμητή μορφή.

Στο σχήμα 8.1β φαίνεται ένα διάγραμμα της γενικής οργανώσεως ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στο σχήμα βλέπομε τις βασικές μονάδες από τις οποίες αποτελείται ο ηλεκτρονικός υπολογιστής και πώς αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Οι απλές συνεχείς γραμμές δείχνουν διακίνηση πληροφοριών, ενώ οι διακεκομμένες



Σχ. 8.1β.
Γενική οργάνωση ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή.

διακίνηση σημάτων ελέγχου. Τα βέλη δείχνουν γενικά τη φορά διακινήσεως των πληροφοριών και των σημάτων ελέγχου.

Τα στοιχεία που πρόκειται να επεξεργασθεί ο υπολογιστής και οι εντολές εισέρχονται σ' αυτόν από τη μονάδα εισόδου-εξόδου και καταλήγουν στη μνήμη του. Η επεξεργασία των στοιχείων γίνεται στη μονάδα επεξεργασίας με βάση τις εντολές. Οι εντολές από τη μνήμη διαβιβάζονται στη μονάδα ελέγχου που ρυθμίζει τη διακίνηση των πληροφοριων μέσα στον υπολογιστή και τη λειτουργία των διαφόρων μονάδων του. Τα αποτελέσματα της επεξεργασίας αποθηκεύονται στη μνήμη του υπολογιστή απ' όπου στέλνονται μέσω της μονάδας εισόδου - εξόδου στην έξοδο ή χρησιμοποιούνται ως ενδιάμεσα στοιχεια για παραπέρα επεξεργασία.

Οι περιφερειακές μονάδες μνήμης συμπληρώνουν την κεντρική μνήμη της οποίας το κόστος είναι υψηλό και η χωρητικότητα περιορισμένη. Οι πιο συνήθεις περιφερειακές μονάδες μνήμης ειναι οι μαγνητικοί δίσκοι, μαγνητικές δισκέττιες (μίνι-δίσκοι), μαγνητικές ταινίες, μαγνητικές κασέτες, μαγνητικά τύμπανα κλπ. Το περιεχόμενο των περιφερειακών μονάδων μνήμης μπορεί να είναι δεδομένα ή εντολές ή και τα δύο. Οι περιφερειακές μονάδες μνήμης μπορούν να αποθηκεύουν μεγάλες ποσότητες δεδομένων, π.χ. μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες εκατομμύρια λέξεων, αλλά είναι βραδύτερες από την κεντρική μνήμη.

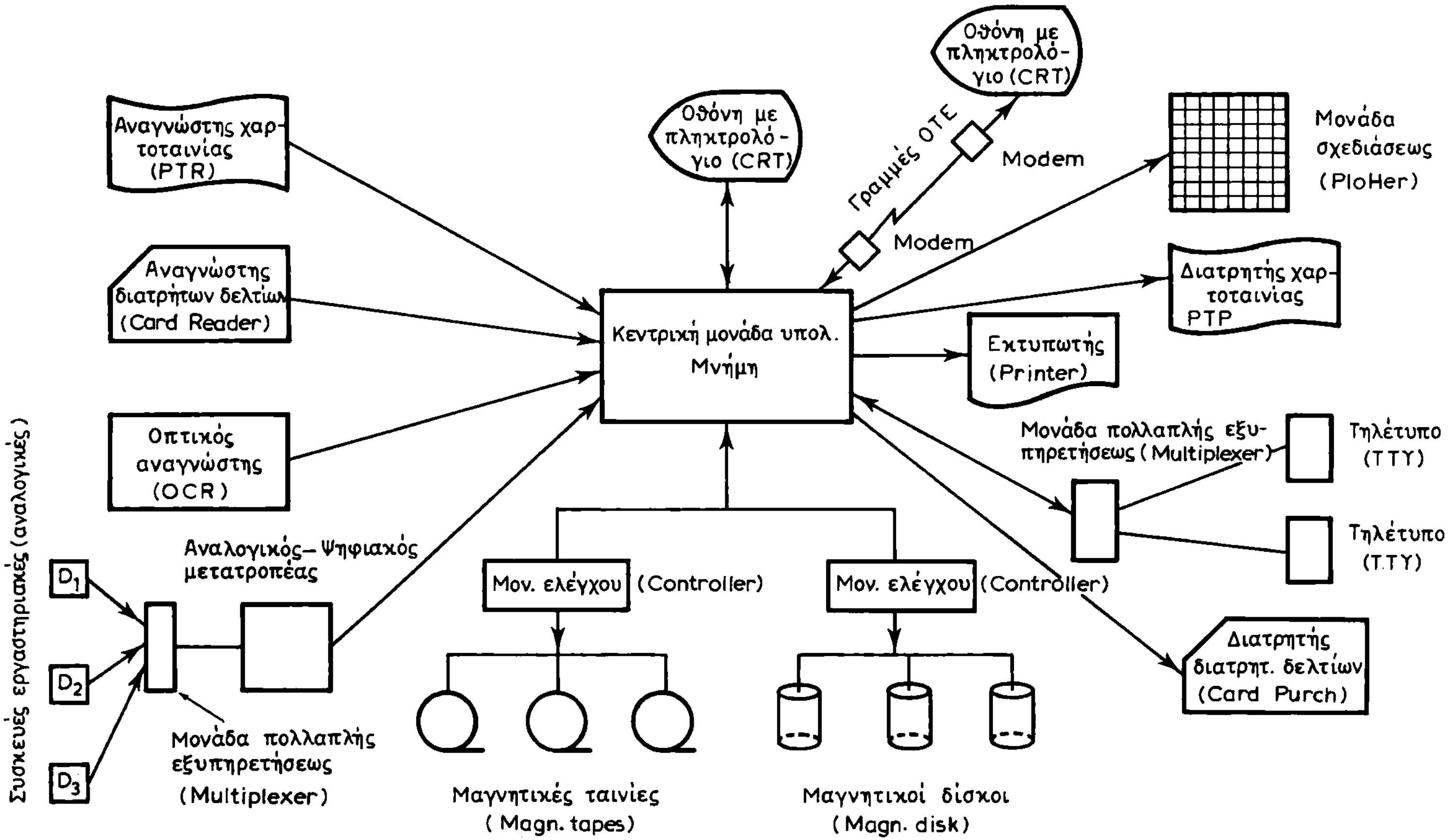
Οι μονάδες εισόδου είναι συνήθως μηχανές αναγνώσεως διατρήτων δελτίων (Card Reader), διατρητής χαρτοταινίας (Paper Tape Reader), πληκτρολόγια (Keyboards) απλά ή σε συνδυασμό με γραφομηχανή ή τελέτυπο (TTY) ή οθόνη (Cathode Ray Tube - CRT), οπτικοί αναγνωστες (Optical Character Reader - OCR), μονάδες αναγνώσεως συντεταγμένων (Digitizers), αναλογοψηφιακοί μετατροπείς (Analog to Digital Converter - ADC) κλπ.

Τα δεδομένα εισάγονται με τις μονάδες αυτές στην κεντρική μνήμη του υπολογιστή μέσω της μονάδας εισόδου-εξόδου, αφού προηγουμένως τα κωδικοποιήσομε σε μορφή κατάλληλη για τον υπολογιστή.

Οι μονάδες εξόδου είναι συνήθως εκτυπωτές (Printer), μηχανές διατρήσεως δελτίων (Card Punch) ή διατρήσεως χαρτοταινίας (Paper Tape Punch), γραφομηχανές (Typewriter), τηλέτυπα (TTY), μηχανές σχεδιάσεως (Plotter), οθόνες κλπ.

Μπορεί οι μονάδες εισόδου-εξόδου να βρίσκονται κοντά στον υπολογιστή, οπότε συνδέονται με αυτόν με ένα σύνολο απλών καλωδίων ή να βρίσκονται μακριά, οπότε συνδέονται με αυτόν με τηλεγραφική, τηλεφωνική, ασύρματη ή άλλη γραμμή. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχομε τηλεπροσπέλαση του υπολογιστή (Remote Access). Όταν έχομε τηλεπροσπέλαση μεταξύ των μονάδων εισόδου - εξόδου και του υπολογιστή, μεσολαβούν ειδικές τηλεπικοινωνιακές μονάδες γνωστές ως διαμορφωτές - αποδιαμορφωτές (Modem). Οι μονάδες αυτές μετατρέπουν τα δεδομένα σε μορφή κατάλληλη για διαβίβαση από τον υπολογιστή σε τηλεπικοινωνιακές γραμμές και αντίστροφα.

Εκτός από τη σύνδεση των μονάδων εισόδου-εξόδου και των μονάδων μαζικής μνήμης με έναν υπολογιστή, είναι δυνατόν να έχομε σύνδεση υπολογιστών μεταξύ τους. Οι υπολογιστές αυτοί μπορούν να ανταλλάσσουν μεταξύ τους πληροφορίες (δεδομένα ή εντολές) ή να χρησιμοποιεί ο ένας τις περιφερειακές μονάδες του άλλου. Πολλοί υπολογιστές συνδεδεμένοι μεταξύ τους με αυτό τον τρόπο λέμε ότι αποτελούν ένα δίκτυο υπολογιστών (Computer Network).



Σχ. 8.1γ.
Διάγραμμα ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή με τις βασικές του περιφερειακές μονάδες.

Γιά την προετοιμασία των δεδομένων για εισαγωγή τους στον υπολογιστή, χρησιμοποιούμε μηχανές προπαρασκευής δεδομένων (ή προετοιμασίας δεδομένων) όπως είναι διατρητική μηχανή δελτίων (Card Punch) ή διατρητική μηχανή χαρτοταινίας (Paper Tape Punch) ή μηχανές απ' ευθείας εγγραφής σε μαγνητικό δίσκο ή μαγνητική ταινία (Key to Disk, Key to Tape). Οι τελευταίες είναι οι πιο διαδομένες σήμερα και εκτοπίζουν συνεχώς τις διατρητικές μηχανές. Οι μηχανές απ' ευθείας εγγραφής μπορεί να είναι συνδεδεμένες με τον υπολογιστή και να χρησιμοποιούν έναν από τους μαγνητικούς δίσκους ή μια από τις μαγνητικές ταινίες του.

Στο σχήμα 8.1γ φαίνεται το διάγραμμα ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή με τις βασικές του περιφερειακές μονάδες.

8.2 Μονάδα κεντρικής μνήμης.

8.2.1 Γενικά.

Η κεντρική μνήμη διαθέτει έναν αριθμό (συνήθως μερικές δεκάδες χιλιάδες) ***θέσεων*** στις οποίες αποθηκεύονται δεδομένα ή εντολές. Σε καθεμιά θέση μπορεί να αποθηκευθεί ένας χαρακτήρας ή λέξη. Κάθε θέση χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό που λέγεται ***διεύθυνση*** της θέσεως. Όταν πρόκειται να εισαχθεί ένας χαρακτήρας ή λέξη στη μνήμη, πρέπει να καθορισθεί η διεύθυνση στην οποία θα γραφεί. Επίσης όταν πρόκειται να πάρομε από τη μνήμη (δηλαδή να διαβάσομε από τη μνήμη) πρέπει να καθορίσομε τη διεύθυνση στην οποία βρίσκεται το δεδομένο.

Η κεντρική μνήμη ενός υπολογιστή χαρακτηρίζεται με βάση:

α) ***Τά φυσικά στοιχεία*** στα οποία αποθηκεύονται τα δεδομένα. Τα πιο συνηθισμένα στοιχεία είναι οι μαγνητικοί δακτύλιοι (ή πυρήνες) και οι ημιαγωγοί με τη μορφή ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Τελευταία έχουν αναπτυχθεί μνήμες μαγνητικών φυσαλίδων (Magnetic Bubble Memories) και μνήμες φορτισμένων στοιχείων (Charge Coupled Devises — CCD).

β) ***Το χρόνο*** που απαιτείται για την εγγραφή ή την ανάγνωση δεδομένων. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται κύκλος μνήμης (Memory Cycle) και είναι της τάξεως του εκατομμυριοστού του δευτερολέπτου (μsec).

γ) ***Τη χωρητικότητα.*** Χωρητικότητα μιας μνήμης είναι ο αριθμός των θέσεων που διαθέτει η μνήμη. Μονάδα χωρητικότητας είναι το Kilo-Byte (K-Byte ή KB) ή η Kilo-λέξη (K-Word ή KW). 1KB = 2^{10} Byte = 1024 Byte. Επίσης 1 KW = 2^{10} Word = 1024 Word.

Π.χ. όταν λέμε ότι η χωρητικότητα της μνήμης ενός υπολογιστή είναι 64KB, σημαίνει ότι η μνήμη του υπολογιστή αυτού διαθέτει 64 × 1024 = 65.536 Byte. Χρησιμοποιείται επίσης η μονάδα Mega-Byte = 2^{20} Byte = 2^{10} K Byte (ομοίως και για Mega-word).

8.2.2 Μνήμη μαγνητικών δακτυλίων (Core Memory).

Ο τύπος αυτός της μνήμης εξετάσθηκε στη Β' τάξη του Λυκείου (Τ. Καλβουρίδη, Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές, σσ. 74 - 80).

Μια μνήμη μαγνητικών δακτυλίων συγκρατεί το περιεχόμενό της και όταν διακοπεί το ρεύμα με το οποίο τροφοδοτείται ο υπολογιστής. Δηλαδή η μνήμη των μαγνητικών δακτυλίων είναι μία «μη πτητική» (non Volitile) μνήμη. Αυτό είναι σημαντικό πλεονέκτημα, γιατί οι μικροδιακοπές (βυθίσεις) του ηλεκτρικού δικτύου οι οποίες συμβαίνουν συχνά κατά τη διάρκεια λειτουργίας του υπολογιστή, δεν επηρεάζουν το περιεχόμενο της μνήμης του.

Παρ' όλο που στην κατασκευή μνημών μαγνητικών δακτυλίων έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος, το μέγεθός τους είναι σχετικά μεγάλο. Επίσης απαιτούν μεγάλα ρεύματα για τη μαγνήτιση και απομαγνήτιση των δακτυλίων και έχουν σχετικά μικρή ταχύτητα λειτουργίας και μεγάλο κόστος κατασκευής. Γι' αυτό στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές τελευταίου τύπου η μνήμη μαγνητικών δακτυλίων έχει πρακτικά εγκαταλειφθεί.

8.2.3 Μνήμη από ημιαγωγούς.

Η μνήμη από ημιαγωγούς χρησιμοποιείται σήμερα ευρύτατα σε όλους σχεδόν τους τύπους των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι οι πολύ μικρές διαστάσεις της, π.χ. 16.000 θέσεις (16 KByte) μνήμης βρίσκονται σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα διαστάσεων περίπου 2 mm x 2 mm, το χαμηλό της κόστος και η μεγάλη ταχύτητά του, 20 - 200 n/sec.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι μνήμης ημιαγωγών από τους οποίους οι βασικότεροι είναι:

α) Μνήμη τυχαίας προσπελάσεως (Random Access Memory — RAM).

β) Μνήμη μόνο αναγνώσεως (Read Only Memory — ROM).

γ) Προγραμματιζόμενη μνήμη μόνο αναγνώσεως (Programmamble Read Only Memory — PROM).

δ) Επαναπρογραμματιζόμενη μνήμη μόνο αναγνώσως (Erasable Programmamble Read Only Memory — EPROM).

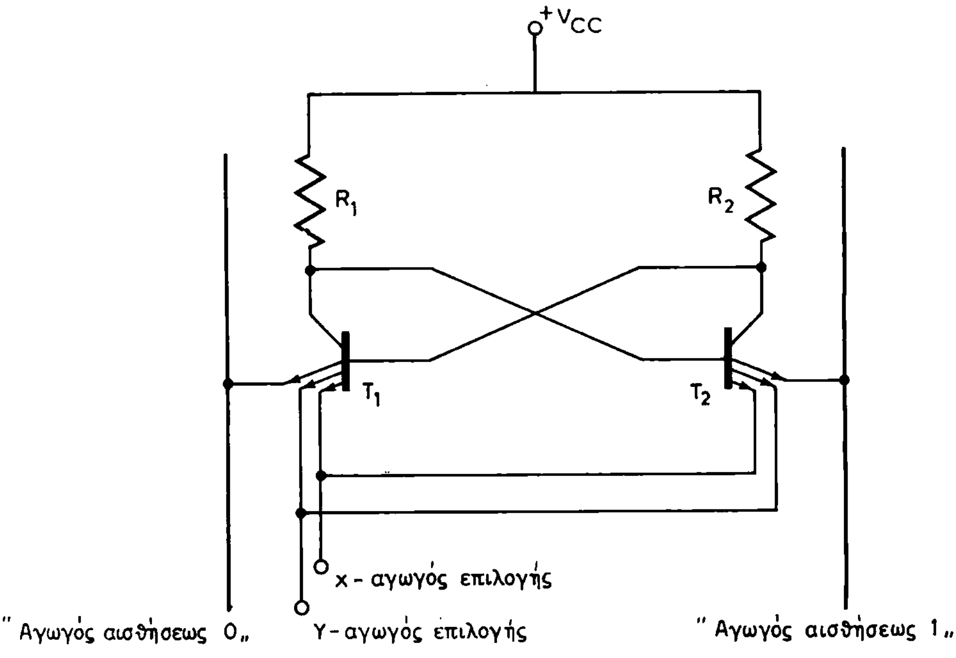
α) Μνήμη τυχαίας προσπελάσεως (RAM).

Μνήμη τυχαίας προσπελάσεως λέγεται η μνήμη στην οποία μπορούμε να γράψομε σε οποιαδήποτε διεύθυνσή της και να διαβάσομε το περιεχόμενο οποιασδήποτε διευθύνσεώς της. Πολλές φορές η μνήμη αυτή στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως μνήμη αναγνώσεως και εγγραφής (Read and Write Memory).

Αυτή η μνήμη των ημιαγωγών διακρίνεται σε ***στατική (Static)*** και ***δυναμική (Dynamic)***.

Η ***στατική RAM*** χρησιμοποιεί ένα Φλίπ - Φλόπ, για την αποθήκευση ενός δυαδικού ψηφίου (Bit). Δηλαδή μια στατική ημιαγωγική μνήμη RAM αποτελείται από τόσα Φλιπ-Φλοπ όσα είναι τα δυαδικά ψηφία που μπορεί να αποθηκεύσει. Στο σχήμα 8.2α παριστάνεται ένα Φλιπ-Φλοπ της οικογένειας TTL που χρησιμοποιει δύο τρανζίστορ T_1 και T_2 πολλαπλού εκπομπού και δύο αντιστάσεις R_1 και R_2. Το Φλιπ-Φλοπ αυτό αποτελεί «το κύτταρο» (Cell) της στατικής μνήμης και όπως αναφέραμε παραπάνω, μπορούμε να απομνημονεύσομε σε αυτό ένα δυαδικό ψηφίο.

Έστω ότι οι αγωγοί επιλογής x και y (σχ. 8.2α) είναι σε χαμηλό δυναμικό (δυναμικό 0 Volt). Αν το Φλιπ-Φλοπ έχει αποθηκευμένη την πληροφορία 1 το τρανζίστορ T_2 θα άγει και το τρανζίστορ T_1 θα βρίσκεται σε αποκοπή, δηλαδή θα περνάει ρεύμα μόνο μέσα από το τρανζίστορ T_2 προς τη γη μέσα από τους αγωγούς επιλογής. Αντίθετα αν στα Φλιπ-Φλοπ είναι αποθηκευμένη η πληροφορία 0 θα περνάει ρεύμα μέσα από το τρανζίστορ T_1 προς τη γη μέσα από τους αγωγούς επιλογής.



Σχ. 8.2α.
Στατική μνήμη RAM για την αποθήκευση ενός δυαδικού ψηφίου (Bit).

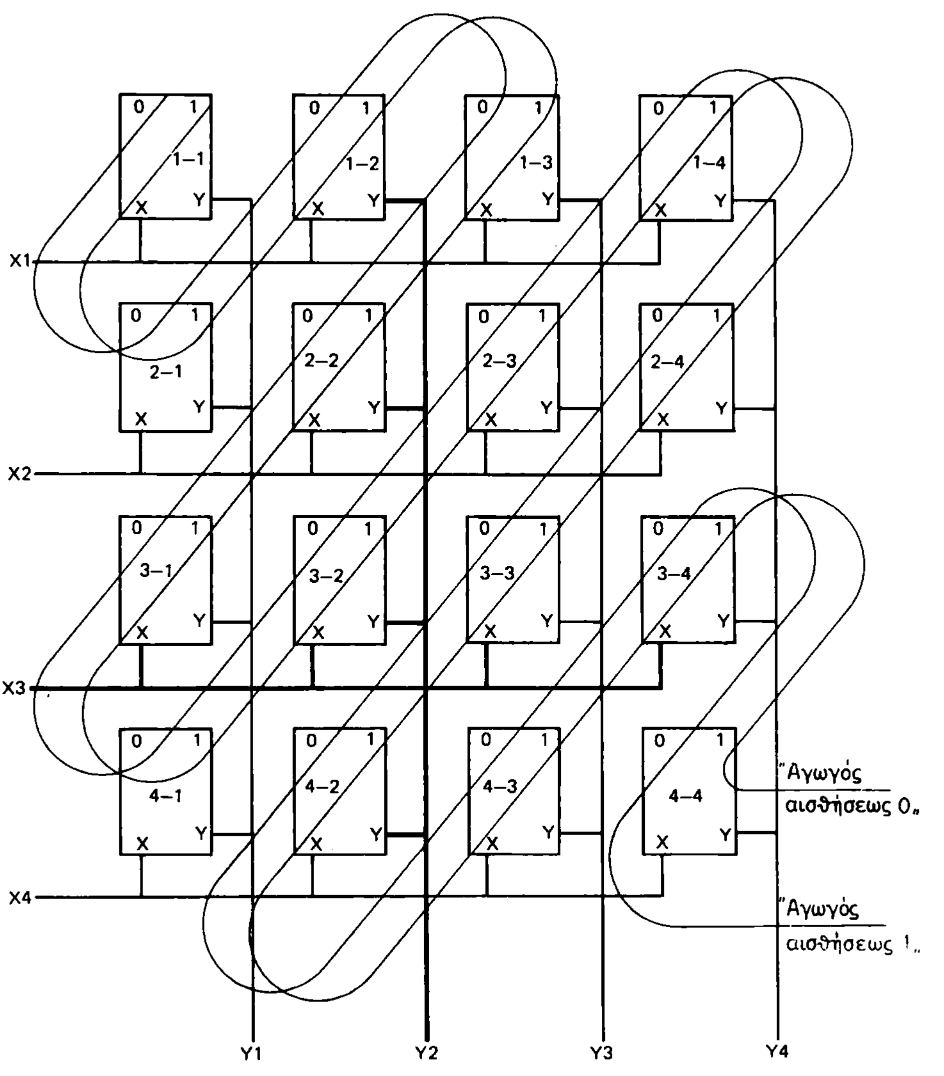
Έστω τώρα ότι οι αγωγοί επιλογής x και y είναι και οι δυο σε θετικό δυναμικό ($+V_{CC}$ Volt) και οι αγωγοί αισθήσεως για το 1 και 0 είναι και οι δύο σε δυναμικό 0. Αν στα Φλιπ-Φλοπ είναι αποθηκευμένη η πληροφορία 1 θα περνάει ρεύμα μέσα από το T_2 προς τη γη μέσω του αγωγού αισθήσεως 1. Αν είναι αποθηκευμένη η πληροφορία 0 θα περνάει ρεύμα μέσα από το T_1 προς τη γη μέσω του αγωγού αισθήσεως 0. Άρα για την ανάγνωση του περιεχομένου του Φλιπ-Φλοπ φέρομε τους αγωγούς επιλογής σε θετικό δυναμικό και εξετάζομε σε ποιον από τους αγωγούς αισθήσεως υπάρχει ρεύμα.

Έστω ότι θέλομε να εγγράψομε στο Φλιπ-Φλοπ την πληροφορία 1. Φέρομε τους δύο αγωγούς επιλογής και τον αγωγό αισθήσεως για το 0 σε θετικό δυναμικό, ενώ τον αγωγό αισθήσεως για το 1 σε χαμηλό δυναμικό (0 Volt).

Τότε περνάει ρεύμα μόνο από το τρανζίστορ T_2 και τον αγωγό «αισθήσεως 1». Αν θέλομε το Φλιπ-Φλοπ να γράψει την πληροφορία 0, φέρομε σε θετικό δυναμικό τους δύο αγωγούς επιλογής και τον αγωγό αισθήσεως 1.

Στο σχήμα 8.2β φαίνεται ένα σύνολο από $4 \times 4 = 16$ Φλιπ-Φλοπ που σχηματίζουν μία μνήμη 16 Bit. Με χοντρές γραμμές απεικονίζεται πως επιλέγομε με τους αγωγούς x,y ένα συγκεκριμένο Φλίπ-Φλόπ. Είναι φανερό ότι αν φέρομε τους αγωγούς επιλογής x_3 και ψ_2 σε θετικό δυναμικό, θα εμφανισθεί το περιεχόμενο του Φλιπ-Φλοπ 3 - 2 σε έναν από τους δύο αγωγούς αισθήσεως.

Στατικές μνήμες κατασκευάζονται και με Φλιπ-Φλοπ που περιέχουν τρανζίστορ άλλων οικογενειών, π.χ. της οικογένειας μετάλλου ημιαγωγού (Metal Oxyde Surface MOS).

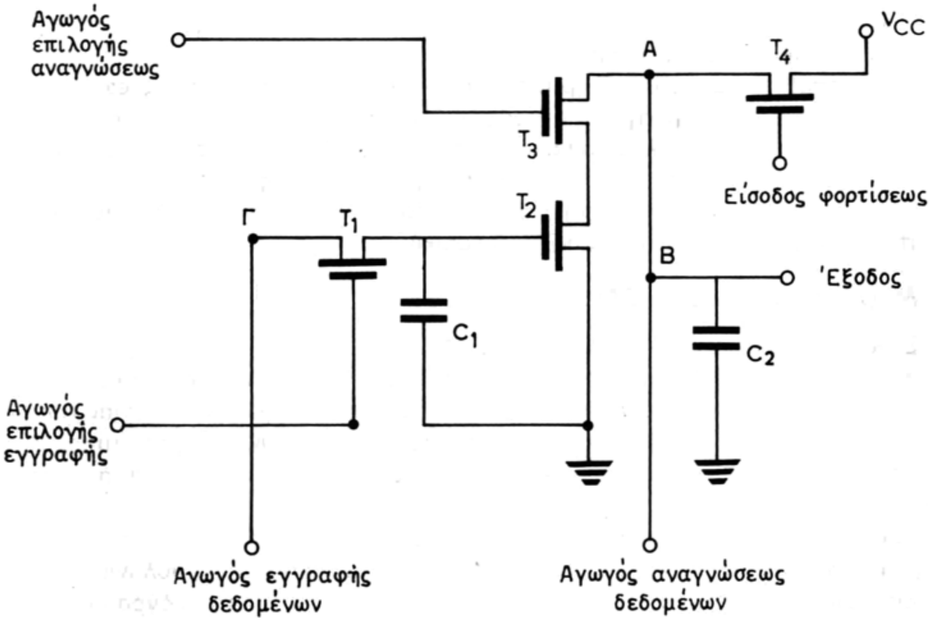


Σχ. 8.2β.

Οι στατικές μνήμες που κατασκευάζονται με τον τρόπο που αναφέραμε, έχουν το χαρακτηριστικό ότι διατηρούν το περιεχόμενό τους όσο χρόνο εφαρμόζεται σε αυτές η τάση τροφοδοτήσεως. Όταν διακοπεί η τάση τροφοδοτήσεως τα δεδομένα χάνονται. Όταν μια μνήμη έχει την ιδιότητα αυτή λέμε ότι είναι «πτητική» (Volatile) μνήμη.

Όταν σε ένα υπολογιστή δεν θέλομε να χάνομε το περιεχόμενο της μνήμης του κατά τις διακοπές του ηλεκτρικού δικτύου, χρησιμοποιούμε συσσωρευτές οι οποίοι τροφοδοτούν αυτόματα τον υπολογιστή όταν διακοπεί η τάση του δικτύου.

Στη δυναμική RAM η πληροφορία αποθηκεύεται ως φορτίο σε έναν πυκνωτή. Επειδή οι πυκνωτές δεν μπορούν να συγκρατήσουν το φορτίο τους επ' άπειρον



Σχ. 8.2γ.
Στοιχείο δυναμικής μνήμης.

χρειάζεται ανανέωση (Refresh) των φορτίων κατά περιοδικά διαστήματα, συνήθως 1 - 3 msec.

Στο σχήμα 8.2γ παριστάνεται ένα κύκλωμα στοιχείου δυναμικής μνήμης στο οποίο μπορούμε να αποθηκεύσομε ένα δυαδικό ψηφίο. Σε αυτό φαίνεται ο πυκνωτής C_1 στον οποίο αποθηκεύεται το φορτίο. Τα τρανζίστορ T_1, T_2, T_3 και T_4 είναι τύπου μετάλλου - ημιαγωγού (MOS).

Για να διαβάσομε το περιεχόμενο του στοιχείου της δυναμικής αυτής μνήμης, φορτίζομε τον πυκνωτή C_2 εφαρμόζοντας κατάλληλη τάση στην είσοδο φορτίσεως (τρανζίστορ T_4). Το δυναμικό στο σημείο Α είναι τώρα V_{CC} Volt. Εφαρμόζομε στον αγωγό επιλογής αναγνώσεως κατάλληλο δυναμικό, ώστε το τρανζίστορ T_3 να μπορεί να άγει. Αν έχομε αποθηκεύσει στο στοιχείο το Bit 0 (πυκνωτής μη φορτισμένος), το T_2 δεν άγει και το δυναμικό του σημείου Β (έξοδος) θα συνεχίζει να είναι V_{CC}, δηλαδή «1». Αν έχομε αποθηκεύσει στο στοιχείο το Bit

Σχ. 8.2δ.
Μνήμη RAM.

α) Στατική RAM τύπος MM 74C930 χωρητικότητας 1024 Bit (1K). Ταχύτητα προσπελάσεως 240 nanosec. β) Δυναμική RAM τύπος MM 5280 χωρητικότητας 4096 Bit (4K). Ταχύτητα προσπελάσεως 200 nanosec.

1 (πυκνωτής φορτισμένος), το T_2 άγει, ο πυκνωτής C_2 θα εκφορτίζεται και το δυναμικό στο σημείο Β είναι περίπου 0 Volt, δηλαδή «0».

Για να αποθηκεύσομε μία πληροφορία στο στοιχείο αντί της μνήμης, εφαρμόζομε κατάλληλη τάση στον αγωγό εγγραφής δεδομένων και στη συνέχεια ενεργοποιούμε με κατάλληλο παλμό τον αγωγό επιλογής εγγραφής. Έτσι το T_1 άγει και ο πυκνωτής φορτίζεται στο δυναμικό του αγωγού εγγραφής δεδομένων.

Στο σχήμα 8.2δ απεικονίζεται μια μνήμη RAM. Η πρώτη [σχ. 8.2δ(α)] είναι στατική και η δεύτερη [σχ. 8.2δ(β)] δυναμική.

β) Μνήμη αναγνώσεως (ROM).

Στον τύπο αυτό της μνήμης μπορούμε μόνο να διαβάσομε το περιεχόμενο των διαφόρων διευθύνσεών της. Το περιεχόμενό της τοποθετείται στο στάδιο της κατασκευής της και δεν αλλοιώνεται κάτω από ομαλές συνθήκες λειτουργίας του υπολογιστή ούτε σε διακοπές της τάσεως τροφοδοσίας του. Μνήμες του τύπου αυτού είναι γνωστές ως μνήμες προγραμματισμένες με «μάσκα» (Mask Programmable ROM).

Στις μνήμες ROM αποθηκεύομε συνήθως μικροπρογράμματα, σταθερές, πίνακες και άλλες πληροφορίες που χρησιμοποιούνται συχνά από τον υπολογιστή κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας. Στους νεώτερους υπολογιστές το πρόγραμμα αρχικής φορτίσεως (Bootstrap), δηλαδή του προγράμματος που επιτρέπει τη μεταφορά στη μνήμη του εποπτεύοντος (λειτουργικού) συστήματος του υπολογιστή, είναι πάντοτε γραμμένο σε ROM.

Στο σχήμα 8.2ε παριστάνεται η δομή μιας ROM με διόδους.

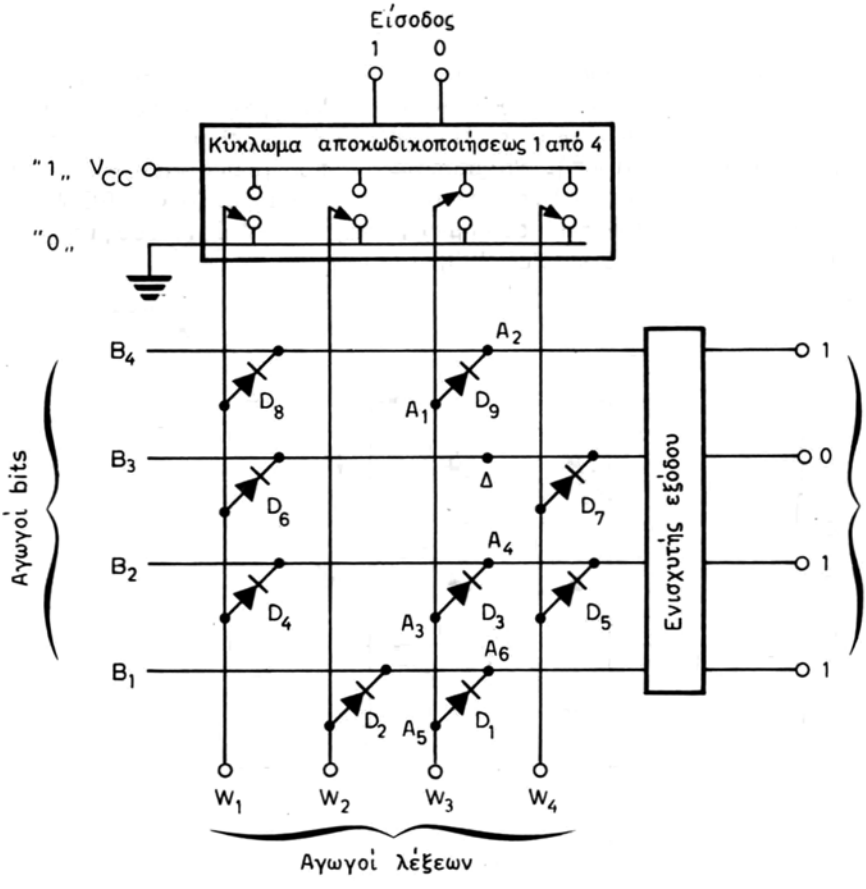
Η ROM του προηγούμενου σχήματος είναι μια μνήμη τεσσάρων λέξεων W_1, W_2, W_3, W_4 και κάθε λέξη έχει 4 ψηφία (Bit) B_1, B_2, B_3, B_4. Η μνήμη είναι κατασκευασμένη έτσι, ώστε το περιεχόμενό της να είναι:

Bit λέξεων	$B_4 \rightarrow$	1	0	1	0
	$B_3 \rightarrow$	1	0	0	1
	$B_2 \rightarrow$	1	0	1	1
	$B_1 \rightarrow$	0	1	1	0
		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
		W_1	W_2	W_3	W_4

Λέξεις

Για να διαβάσομε το περιεχόμενο μιας λέξεως της ROM ενεργοποιούμε μέσω του κωδικοποιητή τον αγωγό που αντιστοιχεί στη λέξη αυτή. Π.χ. για να διαβάσομε τη λέξη W_3, εφαρμόζομε στην είσοδο τη δυαδική μορφή 1 0 που αποκωδικοποιείται και ενεργοποιεί τον αγωγό της λέξεως W_3 (το δυναμικό του αγωγού γίνεται $V_{CC} \rightarrow$ «1»). Έτσι οι δίοδοι D_9, D_3 και D_1 είναι πολωμένες κατά την ορθή φορά, άρα ενεργούν ως κλειστοί διακόπτες και τα δυναμικά στα σημεία A_2, A_4 και A_8 ισούνται με V_{CC} Volt, δηλαδή «1». Προφανώς το δυναμικό του σημείου Δ είναι 0 Volt, δηλαδή «0». Άρα στην έξοδο διαβάζομε 1 0 1 1, που είναι το περιεχόμενο της λέξεως W_3.

Οι δίοδοι του σχήματος μπορούν να αντικατασταθούν με τρανζίστορ είτε κοινά (διπολικά) είτε τρανζίστορ μετάλλου-ημιαγωγού (MOS).



Σχ. 8.2ε.
Μνήμη ROM με διόδους 16 Bit (4 λέξεις × 4 Bit).

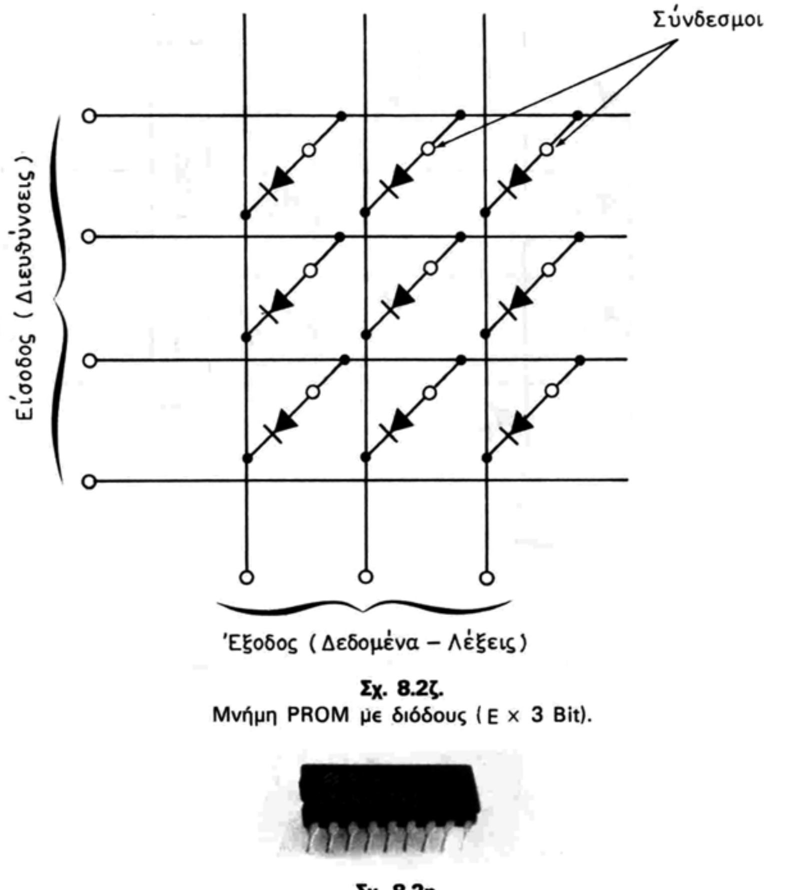
Σχ. 8.2στ.
Μνήμη ROM τύπος MM 52116 χωρητικότητας 16384 Bit (16K).

Σήμερα κατασκευάζονται ημιαγωγικές ROM με χωρητικότητα μέχρι 64KB σε ένα κρύσταλλο διαστάσεων περίπου 2 mm × 2 mm. Στο σχήμα 8.2στ απεικονίζεται μία μνήμη ROM. Η μνήμη είναι χωρητικότητας 16.384 Bit (16K). Οι εξωτερικές διαστάσεις της είναι μεγαλύτερες από 2 mm × 2 mm, γιατί πρέπει να υπάρχει χώρος για τους αγωγούς (ποδαράκια) για τη σύνδεσή τους με άλλα κυκλώματα. Η ταχύτητα προσπελάσεως της μνήμης αυτής είναι 300 nanosec και είναι οργανωμένη σε 2048 λέξεις των 8 Bit η καθεμιά (2048 × 8).

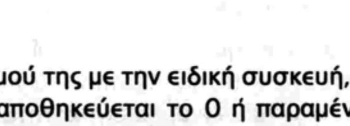
γ) Προγραμματιζόμενη μνήμη μόνο αναγνώσεως (PROM).

Ο τύπος αυτός της μνήμης είναι μερική περίπτωση της ROM. Είναι μια ROM την οποία ο κατασκευαστής την παρέχει «λευκή», δηλαδή χωρίς να έχει αποθηκευθεί σ' αυτή οποιαδήποτε πληροφορία. Η μνήμη αυτή μπορεί, με ειδική συσκευή, που ονομάζεται προγραμματιστής (Programmer), να προγραμματισθεί από το χρήστη της (User) και γι' αυτό το λόγο λέγεται και προγραμματιζόμενη ROM.

Στο σχήμα 8.2ζ παριστάνεται η δομή μιας μνήμης PROM με διόδους που περιλαμβάνει τρεις λέξεις των 3 ψηφίων (Bit).



Σχ. 8.2ζ.
Μνήμη PROM με διόδους (E × 3 Bit).



Σχ. 8.2η.
Μνήμη PROM τύπος DM 74S573 χωρητικότητας 4096 Bit (4K).

Στη φάση του προγραμματισμού της με την ειδική συσκευή, οι σύνδεσμοι καταστρέφονται (καίγονται), οπότε αποθηκεύεται το 0 ή παραμένουν, οπότε αποθηκεύεται το 1. Οι δίοδοι του σχήματος μπορούν να αντικατασταθούν με τρανζίστορ κυρίως τύπου MOS.

Στο σχήμα 8.2η απεικονίζεται μια μνήμη PROM. Η μνήμη είναι χωρητικότητας 4096 Bit (4K). Ο μέγιστος χρόνος προσπελάσεως αυτής της μνήμης είναι

60 nanosec και είναι οργανωμένη σε 1024 λέξεις των 4 Bit η καθεμιά (1024 × 4). Η μνήμη προγραμματίζεται ηλεκτρικά.

δ) Επαναπρογραμματιζόμενη μνήμη μόνο αναγνώσεως (EPROM).

Ο τύπος αυτός της μνήμης είναι μία PROM στην οποία μπορούμε να «σβήσομε» (Erase → Erasable) το περιεχόμενό της και να γράψομε (αποθηκεύσομε) νέο. Το σβήσιμο αυτό μπορεί να γίνει ανάλογα με τον τύπο της με υπεριώδη ακτινοβολία ή ηλεκτρικά αν εφαρμόσομε στην είσοδό της υψηλή τάση. Στην πρώτη περίπτωση η ROM λέγεται EPROM και στη δεύτερη EAROM (Electrically Alterable ROM), δηλαδή μνήμη της οποίας, το περιεχόμενο μπορεί να αλλοιωθεί ηλεκτρικά. Το EAROM ονομάζεται στη βιβλιογραφία μνήμη κυρίως αναγνώσεως (Read Mostly Memory – RMN). Εννοείται ότι ο επαναπρογραμματισμός και όταν ακόμα γίνεται με ηλεκτρικό τρόπο, απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο από την ανάγνωσή της.

Στο σχήμα 8.2θ απεικονίζεται μια μνήμη EPROM χωρητικότητας 4096 Bit (4K). Ο μέγιστος χρόνος προσπελάσεως της μνήμης αυτής είναι 1,25 μsec και είναι οργανωμένη σε 512 λέξεις των 8 Bit η καθεμιά (512 × 8). Η μνήμη προγραμματίζεται ηλεκτρικά.

Σχ. 8.2θ.
Μνήμη EPROM τύπου MM 4204 με χωρητικότητα 4096 Bit (4K).

8.3 Μονάδα επεξεργασίας.

Στη μονάδα επεξεργασίας μεταφέρονται από τη μνήμη του υπολογιστή δεδομένα για να εκτελεσθούν με αυτά πράξεις. Οι πράξεις αυτές μπορεί να είναι:
– Αριθμητικές, όπως πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, προσαύξηση (αύξηση ενός αριθμού κατά 1).
– Λογικές πράξεις, πράξεις μεταξύ αντιστοίχων ψηφίων λέξεων, όπως «ΚΑΙ», «Η» και «ΟΧΙ».
– Πράξεις μετασχηματισμού και ανακατατάξεως λέξεων, όπως π.χ. η ολίσθηση.

Οι πράξεις αυτές εκτελούνται με διαδοχική εκτέλεση απλουστέρων θεμελιωδών λειτουργιών, όπως είναι η πρόσθεση, η ολίσθηση και οι βασικές λογικές πράξεις «ΚΑΙ», «Η» και «ΟΧΙ». Π.χ. ο πολλαπλασιασμός δύο αριθμών εκτελείται με διαδοχικές ολισθήσεις, συγκρίσεις και προσθέσεις. Η αφαίρεση ενός αριθμού από έναν άλλο εκτελείται με συμπλήρωση του δεύτερου και πρόσθεση. Για το λόγο αυτό στην αριθμητική μονάδα υπάρχουν μονάδες οι οποίες μπορούν να εκτελέσουν τις θεμελιώδεις αυτές λειτουργίες. Έτσι:

α) Η πρόσθεση εκτελείται στο «Συσσωρευτή». Ο συσσωρευτής είναι ένας καταχωρητής ο οποίος προσθέτει τους αριθμούς που του δίνονται διαδοχικά και συγκρατεί το εκάστοτε άθροισμα.

β) Η ολίσθηση εκτελείται με τους ολισθητές. Ο ολισθητής, όπως ήδη έχομε αναφέρει στο κεφάλαιο 7, είναι ένας καταχωρητής ο οποίος μπορεί να ολισθήσει (μετακινήσει δεξιά ή αριστερά) το περιεχόμενό του κατά μία θέση.

γ) Οι λογικές πράξεις εκτελούνται με μεταφορά των αριθμών σε καταχωρητές που επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω λογικών κυκλωμάτων, των οποίων η έξοδος δίνει το αποτέλεσμα.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι η αριθμητική μονάδα αποτελείται από έναν αριθμό καταχωρητών που επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω ελεγχομένων οδών. Ένας ή περισσότεροι από τους καταχωρητές αυτούς μπορούν να δεχθούν απ' ευθείας δεδομένα από τον καταχωρητή δεδομένων της μνήμης, αλλά και να δώσουν σ' αυτόν αριθμούς οι οποίοι είναι το αποτέλεσμα πράξεων. Η επικοινωνία των καταχωρητών μεταξύ τους καθώς επίσης και η επικοινωνία τους με τον καταχωρητή δεδομένων της μνήμης καθορίζεται και ελέγχεται από τη μονάδα ελέγχου του υπολογιστή. Π.χ. για την εκτέλεση της προσθέσεως αριθμών η μονάδα ελέγχου δίνει τις παρακάτω εντολές:

1) Μεταφορά του πρώτου αριθμού από την αντίστοιχη θέση της μνήμης στο συσσωρευτή.

2) Μεταφορά του δεύτερου αριθμού από τη μνήμη στο συσσωρευτή, οπότε γίνεται και πρόσθεση του αριθμού στον αριθμό ο οποίος ήδη υπάρχει.

3) Συνέχιση της προσθέσεως και άλλων αριθμών ή μεταφορά του περιεχομένου του συσσωρευτή στη μνήμη.

Σημειώνεται ότι εκτός από τους απαραίτητους καταχωρητές (συσσωρευτής, ολισθητές) και τα λογικά κυκλώματα, η αριθμητική μονάδα ενός υπολογιστή μπορεί να περιλαμβάνει έναν αριθμό καταχωρητών οι οποίοι είναι γνωστοί ως καταχωρητές γενικής χρήσεως (General Purpose Registers) και οι οποίοι χρησιμεύουν για την αποθήκευση αριθμών που εξάγονται ως ενδιάμεσα αποτελέσματα διαφόρων πράξεων. Με αυτό τον τρόπο η εκτέλεση των πράξεων επιταχύνεται σημαντικά, γιατί τα ενδιάμεσα αποτελέσματα δεν χρειάζεται να αποθηκευθούν στη μνήμη της οποίας η ταχύτητα προσπελάσεως είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα των καταχωρητών.

8.4 Μονάδα ελέγχου και χρονισμού.

Η μονάδα ελέγχου ρυθμίζει τη λειτουργία όλων των τμημάτων του υπολογιστή. Στη μονάδα ελέγχου μεταφέρονται από τη μνήμη διαδοχικά οι εντολές του προγράμματος που πρόκειται να εκτελεσθεί. Ανάλογα με την εντολή που διαβιβάζεται στη μονάδα ελέγχου, ενεργοποιούνται τα κυκλώματα εκείνα της μονάδας τα οποία καθορίζουν τη διαδοχή των λειτουργιών των διαφόρων τμημάτων του υπολογιστή έτσι, ώστε να εκτελεσθεί η εντολή. Στη μονάδα ελέγχου περιλαμβάνονται τα εξής:

α) Καταχωρητής εντολών.

Όπως ήδη αναφέραμε στην παράγραφο 8.1 στη μνήμη του υπολογιστή διαβιβάζονται και αποθηκεύονται δεδομένα και εντολές. Με τις εντολές καθορίζεται ο τρόπος επεξεργασίας των δεδομένων και οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται τα δεδομένα που πρόκειται να επεξεργασθούν. Στον καταχωρητή εντολών καταχωρείται το τμήμα εκείνο της εντολής το οποίο καθορίζει τον τρόπο επεξεργασίας, π.χ. εκτέλεση αριθμητικής ή άλλης πράξεως, δηλαδή ο κώδικας εντολής.

β) Καταχωρητής διευθύνσεων εντολών.

Στον καταχωρητή αυτό καταχωρείται η διεύθυνση της εντολής που πρόκειται να εκτελεσθεί. Συνήθως ο καταχωρητής αυτός είναι ένας απαριθμητής έτσι, ώστε αυξάνοντας το περιεχόμενό του κατά 1 να βρίσκεται η διεύθυνση της επόμενης εντολής. Η διεύθυνση αυτή μεταφέρεται στον καταχωρητή διευθύνσεων της μνήμης για να κληθεί η επόμενη εντολή. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που η επόμενη εντολή έχει διεύθυνση η οποία δεν ακολουθεί τη διεύθυνση της εκτελούμενης εντολής. Αυτό συμβαίνει όταν εκτελούνται εντολές ελέγχου, οι οποίες καθορίζουν ένα άλμα που τις περισσότερες φορές εξαρτάται από το αποτέλεσμα μιας συγκρίσεως. Στις περιπτώσεις αυτές το περιεχόμενο του καταχωρητή διευθύνσεων εντολών αυξάνεται ή ελαττώνεται όσο καθορίζει η εντολή ελέγχου, δηλαδή όσο είναι το απαιτούμενο άλμα.

γ) Αποκωδικοποιητής εντολών.

Ο αποκωδικοποιητής εντολών είναι ένα λογικό κύκλωμα το οποίο αποκωδικοποιεί τον κώδικα της εντολής. Κάθε εντολή ενεργοποιεί μια ή περισσότερες από τις εξόδους του αποκωδικοποιητή. Κατά αυτό τον τρόπο καθορίζονται τα κυκλώματα της μονάδας ελέγχου που πρέπει να λειτουργήσουν για να εκτελεσθεί η εντολή.

δ) Καταχωρητές δεικτών.

Το περιεχόμενο των καταχωρητών αυτών καθορίζει μία μεταβολή διευθύνσεως. Η διεύθυνση αυτή είναι διεύθυνση δεδομένου ή εντολής.

ε) Κυκλώματα χρονισμού.

Για να εκτελεσθεί μια εντολή χρειάζεται μετακίνηση λέξεων από έναν καταχωρητή σε έναν άλλο. Π.χ. για την πρόσθεση δύο αριθμών, χρειάζεται η διαδοχική μεταφορά τους στο συσσωρευτή, για τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών χρειάζεται να πραγματοποιηθεί ένας αριθμός διαδοχικών ολισθήσεων και προσθέσεων.

Η διαδοχή των λειτουργιών οι οποίες είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθούν για την εκτέλεση κάθε εντολής και ο καθορισμός της χρονικής στιγμής στην οποία κάθε λειτουργία θα πραγματοποιηθεί, καθορίζεται από ειδικά κυκλώματα χρονισμού, δηλαδή κυκλώματα τα οποία δίνουν ηλεκτρικούς παλμούς σε ακριβώς προκαθορισμένες χρονικές στιγμές.

Τα κυκλώματα χρονισμού οδηγούνται από μία κεντρική πηγή ωρολογιακών παλμών η οποία ονομάζεται «ρολόι του υπολογιστή» (Computer Clock). Συνήθως το ρολόι αυτό είναι ένας ταλαντωτής του οποίου η συχνότητα διατηρείται σταθερή με τη χρήση κρυστάλλου. Τα κυκλώματα χρονισμού περιλαμβάνουν απαριθμητές με τους οποίους πετυχαίνομε υποπολλαπλασιασμό της συχνότητας του ρολογιού (βλέπε παράγραφο 7.3) και μονοδονητές για τον καθορισμό χρονικών διαστημάτων.

στ) Κυκλώματα ελέγχου.

Τα κυκλώματα αυτά είναι, συνήθως, απαριθμητές ή συγκριτές με τους οποίους παρακολουθείται ο αριθμός των στοιχειωδών βημάτων για να καθορισθεί το τέλος διαφόρων λειτουργιών.

8.5 Μονάδα εισόδου - εξόδου.

Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής επικοινωνεί με το περιβάλλον του με τη μονάδα εισόδου-εξόδου. Το περιβάλλον ενός υπολογιστή είναι οι πηγές από τις οποίες ο υπολογιστής δέχεται πληροφορίες ή οι αποδέκτες στους οποίους ο υπολογιστής δίνει πληροφορίες. Πηγές και αποδέκτες πληροφοριών μπορούν να είναι ο άνθρωπος, ένας άλλος υπολογιστής, ένα σύστημα του οποίου τη λειτουργία ελέγχει ο υπολογιστής, π.χ. ένα μηχάνημα παραγωγής χαρτιού σε ένα εργοστάσιο.

Επειδή η ταχύτητα λειτουργίας του υπολογιστή είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα λειτουργίας των περιφερειακών μονάδων (1 - 20 φορές περίπου), η απ' ευθείας επικοινωνία υπολογιστή - περιφερειακών είναι ασύμφορη, γιατί σ' αυτή θα χρησιμοποιούσαμε μόνο μικρό μέρος από τις δυνατότητες του υπολογιστή. Γι' αυτό το λόγο στη μονάδα εισόδου - εξόδου του υπολογιστή περιλαμβάνονται ειδικά κυκλώματα που ονομάζονται ***διόρυγες*** ή ***δίαυλοι*** (Channels). Τα κυκλώματα αυτά εξομαλύνουν τη διαφορά ταχύτητας μεταξύ υπολογιστή και περιφερειακών. Όταν ο υπολογιστής πρόκειται να επικοινωνήσει με μία περιφερειακή μονάδα, αναθέτει σε μια από τις διώρυγες την εκτέλεση της εργασίας, ενώ ο υπολογιστής απασχολείται με την εκτέλεση άλλων εργασιών. Μπορούμε να πούμε ότι οι διώρυγες οι ίδιες αποτελούν μικρούς υπολογιστές, οι οποίοι έχουν αποστολή τη μεταφορά πληροφοριών από και προς τις περιφερειακές μονάδες και τον έλεγχο της λειτουργίας τους. Μια διώρυγα μπορεί να εξυπηρετεί πολλές περιφερειακές μονάδες.

Εκτός από τις διώρυγες που αναφέραμε παραπάνω και που κατασκευάζονται για να εξυπηρετήσουν τις περιφερειακές μονάδες, υπάρχουν και διώρυγες για ειδικούς σκοπούς, π.χ. διώρυγες για άμεση προσπέλαση της μνήμης (Direct Memory Access - DMA), οι διώρυγες τηλεπικοινωνίας κλπ. Οι πρώτες χρησιμοποιούνται όταν η ταχύτητα λήψεως ή αποστολής πληροφοριών από τον υπολογιστή θέλομε να είναι πολύ μεγάλη και οι δεύτερες για την επικοινωνία του υπολογιστή με περιφερειακές μονάδες ή άλλους υπολογιστές μέσω τηλεπικοινωνιακών γραμμών (τηλεφωνικές, τηλεγραφικές, ασύρματες κλπ.).

Όπως ήδη έχομε αναφέρει, οι περιφερειακές μονάδες χρησιμεύουν για την εισαγωγή και λήψη πληροφοριών από τον άνθρωπο, καθώς και για την αποθήκευση ενδιαμέσων αποτελεσμάτων (περιφερειακή μνήμη, όπως π.χ. μαγνητικοί δίσκοι, ταινίες κλπ.).

Η συνεργασία κάθε περιφερειακής μονάδας με τη μονάδα εισόδου-εξόδου του υπολογιστή πραγματοποιείται με μια ειδική μονάδα η οποία ονομάζεται μονάδα ελέγχου (Controller) της περιφερειακής μονάδας. Π.χ. η συνεργασία ενός εκτυπωτή με τη μονάδα εισόδου-εξόδου πραγματοποιείται με μια μονάδα που ονομάζεται ***μονάδα ελέγχου*** του εκτυπωτή. Η μονάδα ελέγχου ενός περιφερειακού πληροφορεί τον υπολογιστη για την κατάσταση του περιφερειακού, π.χ. αν αυτό είναι ελεύθερο να δώσει ή να πάρει πληροφορίες.

8.6 Περιφερειακές μονάδες.

Όπως αναφέραμε στα προηγούμενα, ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής είναι ένα σύστημα που δέχεται πληροφορίες στην είσοδό του, τις επεξεργάζεται και μας δίνει τα αποτελέσματά τους στην έξοδο.

Οι εισαγόμενες πληροφορίες, αφού προηγουμένως εγγραφούν σε κωδικοποιημένη μορφή πάνω σε κάποιο φορέα, π.χ. διάτρητο δελτίο ή χαρτοταινία, μαγνητικό δίσκο ή ταινία κλπ., εισάγονται στον υπολογιστή μέσω ειδικών μονάδων τις οποίες ονομάζομε ***μονάδες εισόδου.***

Μετά την επεξεργασία τα αποτελέσματα τα παίρνομε σε ειδικές επίσης μονάδες, π.χ. σε ένα φύλλο χαρτί (εκτυπωτής), σε ένα χαρτί σχεδίου (Plotter) κλπ. Τις μονάδες αυτές τις ονομάζομε ***μονάδες εξόδου.***

Τις μονάδες εισόδου και τις μονάδες εξόδου τις ονομάζομε γενικά ***περιφερειακές μονάδες*** ή με μία λέξη ***περιφερειακά του ηλεκτρονικού υπολογιστή.***

Δεν θα αναφέρομε λεπτομέρειες για τις μονάδες αυτές, γιατί περιγράφονται στο βιβλίο του κ. Καλβουρίδη Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές (σσ. 29 - 74) το οποίο διδάσκεται στη Β΄ τάξη Λυκείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

9.1 Γενικά.

Όπως ήδη αναφέραμε, τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές τους κατατάσσομε σε δύο βασικές κατηγορίες: τους Αναλογικούς (Analogue) και τους ψηφιακούς (Digital). Οι μικτοί ή υβριδικοί (Hybrid) δεν αποτελούν παρά συνδυασμό των δύο αυτών κατηγοριών.

Οι αναλογικοί υπολογιστές χρησιμοποιούνται βασικά για τη λύση διαφορικών εξισώσεων και γενικότερα για την επίλυση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων. Επίσης χρησιμοποιούνται για τη μελέτη διαφόρων φυσικών συστημάτων* με τη μέθοδο της εξομοιώσεως (Simulation). Στη δεύτερη περίπτωση κατασκευάζομε το μοντέλο του συστήματος που θέλομε να μελετήσομε και που μπορεί να είναι π.χ. ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο συμπίπτουν ή έχουν την ίδια μορφή με το υπό μελέτη φυσικό σύστημα. Έτσι μελετούμε το μοντέλο του συστήματος αντί το ίδιο το φυσικό σύστημα, δεδομένου ότι τις περισσότερες φορές είναι πολύ δύσκολη, αν όχι αδύνατη η απ' ευθείας μελέτη του ίδιου του συστήματος.

Εδώ θα αναφέρομε δύο παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσομε καλύτερα τη σπουδαιότητα των αναλογικών κυκλωμάτων από τα οποία αποτελείται ένας αναλογικός υπολογιστής και επίσης τη σπουδαιότητα της μεθόδου της εξομοιώσεως.

Παράδειγμα 1.

Θεωρούμε το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 9.1α, όπου V_1, V_2 είναι οι τάσεις εισόδου του, V_S η τάση εξόδου και G η ενίσχυση του ενισχυτή της τάσεως V_0 στο σημείο Β.

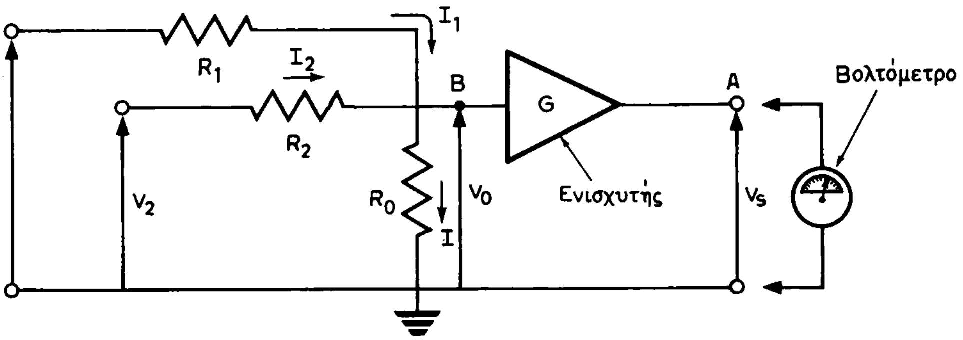
Από το νόμο του Ohm έχομε:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2} \quad \text{και} \quad I = \frac{V_0}{R_0}$$

Επειδή όμως $I = I_1 + I_2$, έχομε:

$$\frac{V_0}{R_0} = \frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2}.$$

* Όταν λέμε φυσικό σύστημα εννοούμε ένα οποιοδήποτε υπαρκτό σύστημα, π.χ. ένας πυρηνικός αντιδραστήρας, ένας κινούμενος πύραυλος, ένα αεροπλάνο, μια εγκατάσταση ραντάρ κλπ.



Σχ. 9.1α.
Ηλεκτρικό κύκλωμα που κάνει πρόσθεση.

ή
$$V_0\left(1+\frac{R_0}{R_1}+\frac{R_0}{R_2}\right)=\frac{R_0}{R_1}V_1+\frac{R_0}{R_2}V_2 \qquad (9.1)$$

Αν δεχθούμε ότι οι αντιστάσεις R_1, R_2 είναι πολύ μεγαλύτερες από την R_0, δηλαδή $R_0/R_1 << 1$ και $R_0/R_2 << 1$, η ποσότητα $R_0/R_1 + R_0/R_2$ είναι επίσης πολύ μικρότερη από τη μονάδα (δηλαδή: $R_0/R_1 + R_0/R_2 << 1$) και συνεπώς αμελητέα ως προς τη μονάδα, τότε η σχέση (9.1) γίνεται:

$$V_0=\frac{R_0}{R_1}V_1+\frac{R_0}{R_2}V_2 \qquad (9.1\alpha)$$

Δεδομένου ότι λόγω ενισχυτή έχομε: $V_S = GV_0$, άρα $V_0 = V_S/G$ όπου G η πραγματοποιούμενη ενίσχυση η (9.1α) γράφεται:

$$V_S=\frac{GR_0}{R_1}V_1+\frac{GR_0}{R_2}V_2 \qquad (9.2)$$

Αν διαλέξομε έτσι τις αντιστάσεις R_0, R_1, R_2 και τον ενισχυτή, ώστε να έχομε $GR_0/R_1 = GR_0/R_2 = 1$ (π.χ. $R_0 = 100\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 1\ M\Omega$ και $G = 10^4$), η σχέση (9.2) γράφεται:

$$V_S = V_1 + V_2$$

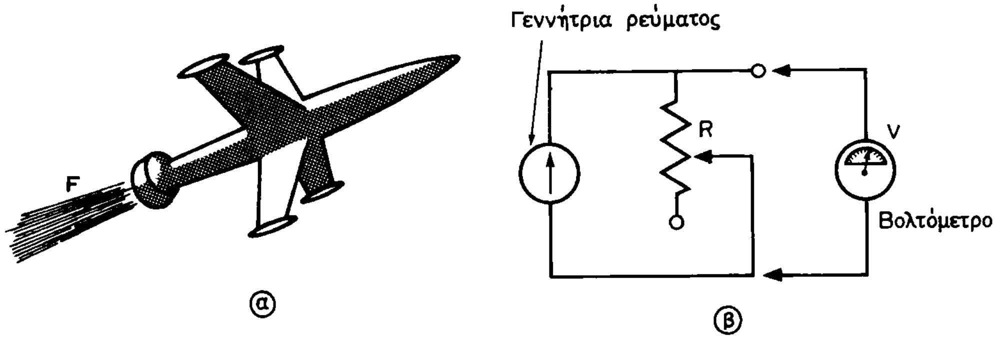
Δηλαδή, αν στην είσοδο του κυκλώματός μας (σχ. 9.1α) θέσομε $V_1 = 5$ Volt και $V_2 = 8$ Volt, η ένδειξη στην έξοδο, δηλαδή η τάση εξόδου V_S θα ισούται με 13 Volt, που είναι το άθροισμα των τάσεων V_1 και V_2. Με άλλα λόγια το κύκλωμα του σχήματος 9.1α είναι ένα κύκλωμα που πραγματοποιεί την αριθμητική πράξη της προσθέσεως.

Παρατήρηση.

Στην πράξη, το παραπάνω κύκλωμα είναι πιο πολύπλοκο, αλλά στο παράδειγμά μας δεν θα μπούμε σε λεπτομέρειες, γιατί δεν μας ενδιαφέρουν τη στιγμή αυτή.

Παράδειγμα 2.

Θεωρούμε έναν πύραυλο μάζας m = 5 μονάδες μάζας [σχ. 9.1β(α)] κινούμενο



Σχ. 9.1β.
α) Κινούμενος πύραυλος (φυσικό σύστημα). β) Ηλεκτρικό κύκλωμα (μοντέλο).

με επιτάχυνση $\gamma = 80$ μονάδες επιταχύνσεως.

Γνωρίζομε από τη Φυσική ότι η δύναμη προωθήσεως του πυραύλου δίνεται από το νόμο του Νεύτονα σύμφωνα με τον οποίο:

$$F = m \cdot \gamma \tag{9.3}$$

Θεωρούμε επίσης ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που αποτελείται από τη γεννήτρια ρεύματος και το ποτενσιόμετρο μεταβλητής αντιστάσεως R [σχ. 9.1β(β)]. Σύμφωνα με το νόμο του Ohm η τάση V είναι:

$$V = I \cdot R \tag{9.4}$$

Από τις σχέσεις (9.3) και (9.4) παρατηρούμε ότι:

Η ***δύναμη*** προωθήσεως του πυραύλου = Μάζα του πυραύλου × Επιτάχυνση του πυραύλου.

Η ***τάση*** στα άκρα του ποτενσιομέτρου = Ένταση ρεύματος × Αντίσταση του ποτενσιομέτρου.

Δηλαδή οι παραπάνω σχέσεις (9.3) και (9.4) που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των συστημάτων κινούμενος πύραυλος - ηλεκτρικό κύκλωμα είναι της ίδιας μορφής. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα δύο συστήματα είναι ανάλογα και μπορούμε να επωφεληθούμε από τη σχέση αυτή μεταξύ των δύο συστημάτων, ώστε μελετώντας το ένα να μπορούμε να βγάλομε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του άλλου. Πράγματι, αν ρυθμίσομε το ποτενσιόμετρο στο ηλεκτρικό κύκλωμα έτσι, ώστε η αντίστασή του R να έχει τιμή 80 και τη γεννήτρια ρεύματος να δίνει ρεύμα εντάσεως 5 A, θα παρατηρήσομε ότι το βολτόμετρο θα μας δείξει αυτόματα την ένδειξη 400, όση δηλαδή είναι η δύναμη F προωθήσεως του κινούμενου πυραύλου.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με μια γεννήτρια ρεύματος, ένα ποτενσιόμετρο και ένα βολτόμετρο, μπορούμε να κατασκευάσομε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, το οποίο μελετώντας το να μπορούμε να βγάλομε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του κινούμενου πυραύλου.

Με άλλα λόγια το ηλεκτρικό κύκλωμα μπορεί να θεωρηθεί ως μοντέλο του συστήματος κινούμενος πύραυλος που αποτελεί προφανώς το φυσικό σύστημα (εξομοίωση).

Είναι φανερά τα πλεονεκτήματα και η σπουδαιότητα της μεθόδου εξομοιώσεως. Είναι πολύ πιο εύκολο να διαβάσομε την ένδειξη ενός βολτομέτρου στο εργαστήριο, αντί να προσπαθήσομε να μετρήσομε απ' ευθείας τη δύναμη προωθήσεως του κινούμενου πυραύλου.

Τα ηλεκτρικά κυκλώματα που αναφέραμε στα παραδείγματα, χρησιμοποιούν ως μεταβαλλόμενο μέγεθος την ηλεκτρική τάση (ή επίσης και την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος) που μεταβάλλεται κατά ένα συνεχή τρόπο, δηλαδή αναλογικό. Τα δύο αυτά κυκλώματα τα χαρακτηρίζομε ως αναλογικά.

Ένας αναλογικός υπολογιστής αποτελείται από παρόμοια κυκλώματα ή πολυπλοκότερα. Το βασικότερο κύκλωμά του ονομάζεται ***τελεστικός ενισχυτής*** (Operational Amplifier). Τη λειτουργία και τις βασικές εφαρμογές του τελεστικού ενισχυτή θα εξετάσομε στην επόμενη παράγραφο.

9.2 Τελεστικός ενισχυτής.

Ο τελεστικός ενισχυτής αποτελεί, όπως ήδη αναφέραμε, το βασικότερο κύκλωμα ενός αναλογικού υπολογιστή.

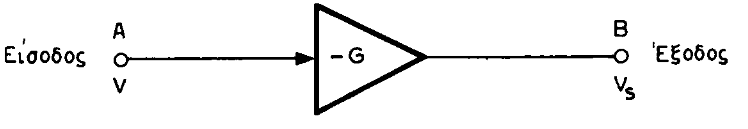
Ο τελεστικός ενισχυτής είναι ένας ηλεκτρονικός ενισχυτής με άμεση σύζευξη και με πολύ υψηλή ενίσχυση (απολαβή).

Το συμβολικό διάγραμμα ενός τελεστικού ενισχυτή φαίνεται στο σχήμα 9.2α.

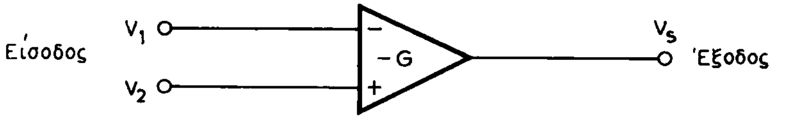
όπου: V η τάση εισόδου.

V_S η τάση εξόδου και

G η απολαβή του τελεστικού ενισχυτή.



Σχ. 9.2α.
Συμβολικό διάγραμμα τελεστικού ενισχυτή.



Σχ. 9.2β.
Συμβολικό διάγραμμα τελεστικού ενισχυτή με δύο εισόδους.

Η τάση εισόδου V και η τάση εξόδου V_S συνδέονται με τη σχέση:

$$V_S = -GV \tag{9.5}$$

Το αρνητικό σημείο οφείλεται στο γεγονός ότι η έξοδος του τελεστικού ενισχυτή έχει αντίθετο πρόσημο από εκείνο της εισόδου. Δηλαδή ο τελεστικός ενισχυτής «αναστρέφει» το σήμα εισόδου.

Ο τελεστικός ενισχυτής μπορεί να έχει δύο εισόδους. Στην περίπτωση αυτή ενισχύει τη διαφορά των τάσεων που εφαρμόζονται στην είσοδό του. Το συμβολικό

του διάγραμμα στην περίπτωση αυτή δίνεται στο σχήμα 9.2β.
όπου: V_1, V_2 οι τάσεις εισόδου.
V_S η τάση εξόδου και
G η απολαβή του τελεστικού ενισχυτή.

Στην περίπτωση αυτή η τάση εξόδου συνδέεται με τις τάσεις εισόδου με τη σχέση:

$$V_S = -G\,(V_1 - V_2) \tag{9.6}$$

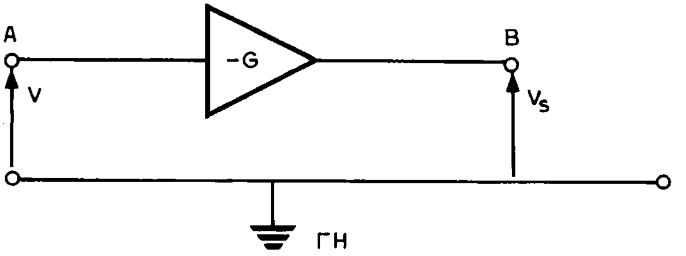
Χαρακτηριστικά του τελεστικού ενισχυτή.

Τα κυριότερα χαρακτηριστικά ενός τελεστικού ενισχυτή είναι τα εξής:

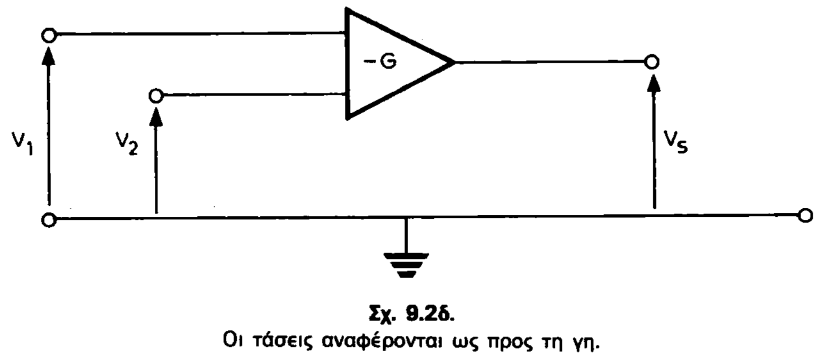
— Λειτουργεί με συνεχείς τάσεις.
— Η απολαβή του G είναι πάρα πολύ υψηλή (της τάξεως 10^3 - 10^8).
— Η αντίσταση εισόδου είναι πολύ μεγάλη και πρακτικά θεωρείται ότι έχει τιμή άπειρη.
— Η αντίσταση εξόδου είναι πολύ μικρή και πρακτικά θεωρείται ότι έχει τιμή μηδέν.

Παρατηρήσεις.

α) Οι τάσεις εισόδου και στις δύο παρακάτω περιπτώσεις του τελεστικού ενισχυτή αναφέρονται ως προς τη γη, που χάρη απλότητας την παραλείπομε (σχ. 9.2γ και 9.2δ).



Σχ. 9.2γ.
Οι τάσεις αναφέρονται ως προς τη γη.



Σχ. 9.2δ.
Οι τάσεις αναφέρονται ως προς τη γη.

β) Επειδή η απολαβή G είναι πολύ μεγάλη, η τάση στο σημείο A για πρακτικές τιμές της τάσεως στο σημείο B (συνήθως της τάξεως των 10 Volt) είναι πολύ μικρή και πρακτικά θεωρείται μηδενική. Για το λόγο αυτό το σημείο αυτό A θεωρείται σημείο γειώσεως και ονομάζεται συμβατικό σημείο γειώσεως ή «υπερβατική γη». Στα επόμενα θα παραλείπομε την αναφορά των τάσεων ως προς τη γη.

Η χρησιμότητα του τελεστικού ενισχυτή θεωρείται θεμελιακή, γιατί αν συνδέσομε στην είσοδό του και μεταξύ εισόδου - εξόδου κατάλληλες αντιστάσεις και πυκνωτές, ο τελεστικός ενισχυτής μπορεί να εκτελέσει διάφορες αριθμητικές πράξεις, π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, ολοκλήρωση κλπ.

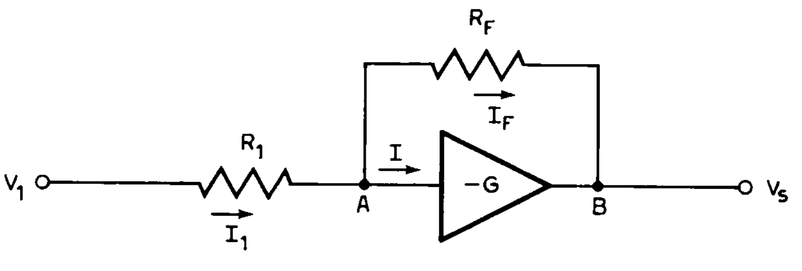
Στην επόμενη παράγραφο θα αναφέρομε και θα εξετάσομε μερικές από τις πλέον βασικές εφαρμογές του τελεστικού ενισχυτή.

9.3 Εφαρμογές τελεστικού ενισχυτή.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσομε μερικά από τα βασικά κυκλώματα του τελεστικού ενισχυτή.

9.3.1 Κύκλωμα αλλαγής σημείου — Αναστροφέας (Inverter).

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 9.3α όπου R_1 είναι η αντίσταση εισόδου και R_F η αντίσταση ανασυζεύξεως. Αν V_1 είναι η τάση εισόδου και V_S η τάση εξόδου και εφαρμόσομε το νόμο του Kirchhoff στον κόμβο A, θα έχομε: $I_1 = I + I_F$.



Σχ. 9.3α.
Αναστροφέας.

Δεχόμασθε ότι το ρεύμα εισόδου I του ενισχυτή είναι ίσο με μηδέν, γιατί, όπως είπαμε, ο τελεστικός ενισχυτής έχει άπειρη αντίσταση εισόδου, οπότε έχομε:

$$I_1 = I_F$$

Δηλαδή:
$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} = \frac{V_A - V_S}{R_F}$$

Επειδή όμως $V_S = -GV_A$ και επομένως $V_A = -V_S/G$ αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχομε:

$$\frac{V_S}{V_1} = -\frac{R_F}{R_1}\left[\frac{1}{1 + \frac{1}{G}\left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)}\right] \qquad (9.7)$$

Επειδή όμως η απολαβή G είναι πολύ μεγάλη, δηλαδή:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{G}\left(1+\frac{R_F}{R_1}\right)} \simeq 1$$

η (9.7) γίνεται:

$$\frac{V_S}{V_1} = -\frac{R_F}{R_1}$$

ή

$$V_S = -\frac{R_F}{R_1} V_1 \qquad (9.8)$$

ή αν θέσομε $R_F / R_1 = K$, τότε:

$$V_S = -KV_1 \qquad (9.9)$$

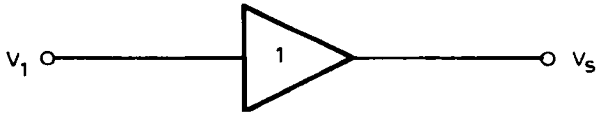
Αν διαλέξομε έτσι τις R_F, R_1, ώστε $R_F = R_1$, οπότε $K = 1$, έχομε:

$$V_S = -V_1$$

Δηλαδή η τάση εξόδου είναι ίση και αντίθετου σημείου της τάσεως εισόδου.

Με άλλα λόγια έχομε ένα κύκλωμα με το οποίο μπορούμε να κάνομε αλλαγή σημείου του σήματος εισόδου (αναστροφή σημείου). Το κύκλωμα αυτό το ονομάζομε απλά ***κύκλωμα αλλαγής σημείου*** ή ***αναστροφέα.***

Στο σχήμα 9.3β δίνεται το συμβολικό διάγραμμα του αναστροφέα. Ο αριθμός 1 στο σχήμα δηλώνει την απόλυτη τιμή της ενισχύσεως του ενισχυτή.



Σχ. 9.3β.
Συμβολικό διάγραμμα αναστροφέα.

Παρατήρηση.

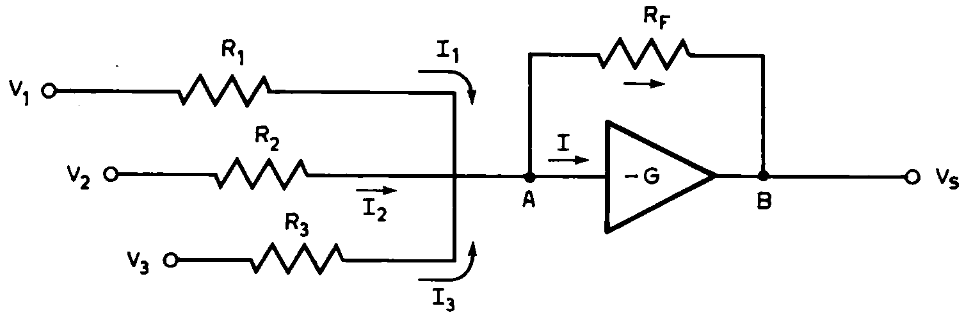
Από τη σχέση (9.9), $V_S = -K \cdot V_1$, όπου $K = \frac{R_F}{R_1}$ παρατηρούμε ότι, αν $R_F \neq R_1$, το κύκλωμά μας εκτός από την αλλαγή σημείου που πραγματοποιεί στην τάση εισόδου, πολλαπλασιάζει την τάση με τη σταθερά K.

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή έχομε ένα κύκλωμα που πραγματοποιεί την αριθμητική πράξη του πολλαπλασιασμού.

9.3.2 Κύκλωμα προσθέσεως ή αθροιστής (Summing Amplifier).

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 9.3γ, όπου R_1, R_2, R_3 είναι οι αντιστάσεις εισόδου και R_F η αντίσταση ανασυζεύξεως. Αν V_1, V_2, V_3 είναι οι αντίστοιχες τάσεις εισόδου και εφαρμόσομε το νόμο του Kirchhoff στον κόμβο A, θα έχομε:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I + I_F$$



Σχ. 9.3γ.
Αθροιστής.

Επειδή όπως είπαμε I = 0, έχομε:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_F$$

ή

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \frac{V_3 - V_A}{R_3} = \frac{V_A - V_S}{R_F} \qquad (9.10)$$

Επειδή $V_S = -\,GV_A$ ή $V_A = -\,V_S/G$ αντικαθιστώντας στην (9.10) και επιλύοντας ως προς V_S έχομε:

$$V_S = -\left(\frac{R_F}{R_1}\,.V_1 + \frac{R_F}{R_2}\,.V_2 + \frac{R_F}{R_3}\,.V_3\right) \times \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{G}\left(1 + \frac{R_F}{R_1} + \frac{R_F}{R_2} + \frac{R_F}{R_3}\right)}\right) \qquad (9.11)$$

Επειδή η απολαβή G είναι πολύ μεγάλη, ο δεύτερος παράγοντας της σχέσεως (9.11) ισούται με τη μονάδα (κατά μεγάλη προσέγγιση προφανώς), οπότε η σχέση αυτή γίνεται:

$$V_S = -\left(\frac{R_F}{R_1}\,.V_1 + \frac{R_F}{R_2}\,.V_2 + \frac{R_F}{R_3}\,.V_3\right)$$

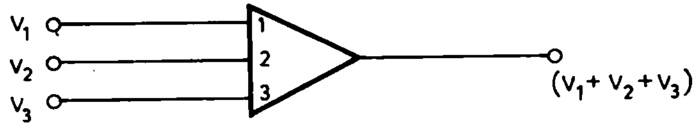
ή αν θέσομε $K_1 = \frac{R_F}{R_1}$, $K_2 = \frac{R_F}{R_2}$ και $K_3 = \frac{R_F}{R_3}$ τότε

$$V_S = -\,(K_1\,.V_1 + K_2\,.V_2 + K_3\,.V_3) \qquad (9.11α)$$

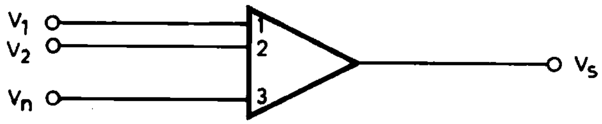
Αν διαλέξομε τις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 και R_F έτσι ώστε $R_1 = R_2 = R_3 = R_F$ θά έχομε:

$$V_S = -\,(V_1 + V_2 + V_3) \qquad (9.12)$$

Δηλαδή η τάση εξόδου είναι ίση και αντίθετου σημείου με το άθροισμα των τάσεων εισόδου. Συνεπώς το κύκλωμα του σχήματος 9.3γ είναι ένα κύκλωμα που πραγματοποιεί την αριθμητική πράξη της προσθέσεως. Είναι ένας αθροιστής. Στο σχήμα 9.3δ δίνεται το συμβολικό διάγραμμα ενός αθροιστή με τρεις εισόδους.



Σχ. 9.3δ.
Συμβολικό διάγραμμα αθροιστή με τρεις εισόδους.



Σχ. 9.3ε.
Συμβολικό διάγραμμα αθροιστή με n εισόδους.

Παρατήρηση.

Στο κύκλωμά μας θεωρήσαμε τρεις μόνο αντιστάσεις εισόδου. Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαμε να εργασθούμε με τέσσερις ή περισσότερες αντιστάσεις. Π.χ. αν θεωρήσομε n αντιστάσεις εισόδου τις R_1, R_2... R_n και έστω V_1, V_2... V_n οι αντίστοιχες τάσεις εισόδου, θα έχομε:

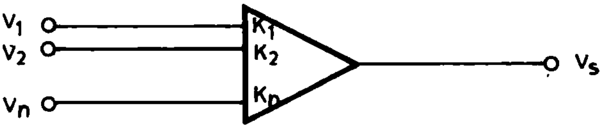
$$V_S = -\left(\frac{R_F}{R_1} V_1 + \frac{R_F}{R_2} V_2 + \dots + \frac{R_F}{R_n} V_n\right)$$

ή αν

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n = R_F$$

$$V_S = -(V_1 + V_2 + \dots + V_n) \qquad (9.13)$$

Το συμβολικό διάγραμμα του αθροιστή φαίνεται στο σχήμα 9.3ε. Εάν το κύκλωμα πραγματοποιεί και ενίσχυση, τότε το συμβολικό διάγραμμα του αθροιστή θα είναι το διάγραμμα του σχήματος 9.3στ, όπου K_1, K_2...K_n είναι οι συντελεστές ενισχύσεως.



Σχ. 9.3στ.
Συμβολικό διάγραμμα αθροιστή με ενίσχυση.

9.3.3 Κύκλωμα πολλαπλασιασμού με σταθερά $K \leqslant 1$. Ποτενσιόμετρα.

Στο κύκλωμα του αθροιστή είδαμε ότι για τη τάση εξόδου είχαμε:

$$V_S = -(K_1 . V_1 + K_2 . V_2 + K_3 . V_3),$$

όπου K_1, K_2 και K_3 είναι σταθερές (συντελεστές) ίσες αντίστοιχα με R_F / R_1, R_F / R_2 και R_F / R_3.

Παρουσιάζεται όμως το ερώτημα: πώς μπορούμε να δημιουργήσομε συντελεστές μιας οποιασδήποτε επιθυμητής τιμής, αφού οι αντιστάσεις που κυκλοφορούν στο εμπόριο έχουν καθορισμένες τιμές;

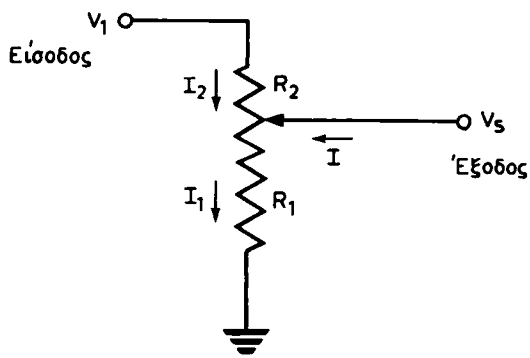
Αυτό το πετυχαίνομε με τη χρήση ποτενσιομέτρων. Ας θεωρήσομε το ποτενσιόμετρο του σχήματος 9.3ζ. Αν δεχθούμε ότι το ρεύμα εξόδου I είναι μηδέν, τότε έχομε:

$$I_1 = I_2$$

ή
$$\frac{V_1 - V_S}{R_2} = \frac{V_S}{R_1}$$

ή
$$V_S = \frac{R_1}{R_1 + R_2} . V_1$$

ή
$$V_S = K . V_1 \quad \text{όπου} \quad K = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \leqslant 1$$

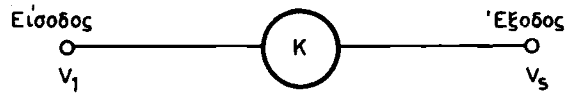


Σχ. 9.3ζ.
Ποτενσιόμετρο για δημιουργία συντελεστή.

Παρατηρούμε συνεπώς ότι με τη χρησιμοποίηση ενός ποτενσιομέτρου μπορούμε να δημιουργήσομε μια σταθερά (ένα συντελεστή) μιας επιθυμητής τιμής. Η τιμή της σταθεράς εξαρτάται από τις τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2 και είναι μικρότερη ή ίση με τη μονάδα: $K \leqslant 1$.

Το συμβολικό διάγραμμα του κυκλώματος πολλαπλασιασμού με μία σταθερά $K \leqslant 1$ παριστάνεται στο σχήμα 9.3η.

Στην περίπτωση που θέλομε η τιμή της σταθεράς K να είναι μεγαλύτερη από τη

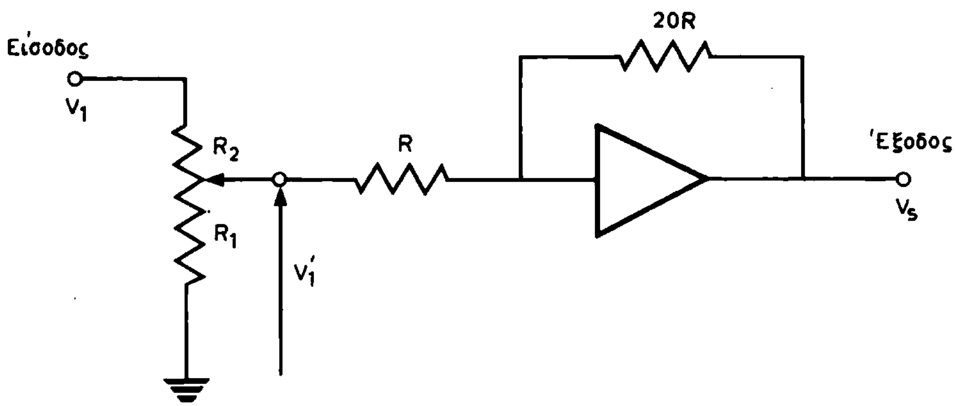


Σχ. 9.3η.
Συμβολικό διάγραμμα κυκλώματος πολλαπλασιασμού με σταθερά $K \leqslant 1$.

μονάδα, $K > 1$, χρησιμοποιούμε ένα ποτενσιόμετρο, όπως προηγουμένως, σε συνδυασμό με ένα κύκλωμα τελεστικού ενισχυτή, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.3θ.

Από το κύκλωμα του σχήματος 9.3θ έχομε:

$$V_S = -20V_1' = -KV_1, \qquad \text{όπου} \qquad 0 \leqslant K \leqslant 20$$



Σχ. 9.3θ.
Ποτενσιόμετρο με τελεστικό ενισχυτή για $K > 1$.

9.3.4 Κύκλωμα ολοκληρώσεως ή ολοκληρωτής (Integrator).

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 9.3ι. Αν V_1 και V_S είναι αντίστοιχα οι τάσεις εισόδου και εξόδου, τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο A, θα έχομε:

$$I_1 = I_F + I$$

Επειδή $I = 0$, τότε:

$$I_1 = I_F$$

ή

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} = C_F \frac{d(V_A - V_S)}{dt}$$

ή αφού

$$V_S = -GV_A \rightarrow V_A = -\frac{V_S}{G}$$

ή $$V_1 + \frac{V_S}{G} = -R_1C_F \frac{d}{dt} (V_S + \frac{V_S}{G})$$

ή αφού το G έχει μεγάλες τιμές, θα έχομε:

$$V_1 = -R_1C_F \frac{dV_S}{dt} \qquad (9.14)$$

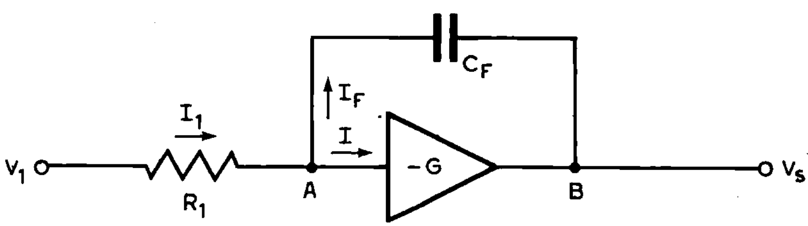
ή αν ολοκληρώσομε την (9.14) από t = 0 ως t = t τότε :

$$V_S(t) = -\frac{1}{R_1C_F} \int_o^t V_1(t)dt + V_S(0) \qquad (9.15)$$

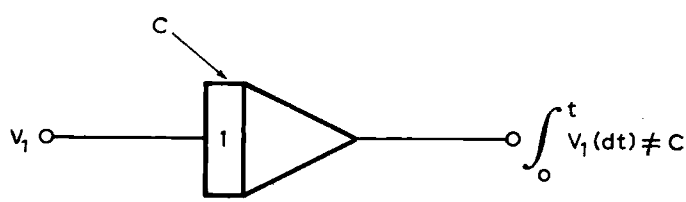
όπου V_S (0) η σταθερά ολοκληρώσεως. Η σταθερά αυτή είναι η αρχική τιμή της τάσεως εξόδου. Αν δεχθούμε V_S (0) = 0, η προηγούμενη σχέση (9.15) γίνεται:

$$V_S(t) = -\frac{1}{R_1C_F} \int_o^t V_1(t)\, dt \qquad (9.16)$$

Δηλαδή η τάση εξόδου V_S του κυκλώματος του σχήματος 9.3θ είναι ίση με το ολοκλήρωμα της τάσεως εισόδου πολλαπλασιασμένο με τη σταθερά $-1/R_1C_F$. Γι' αυτό το λόγο το κύκλωμα του σχήματος 9.3ι το λέμε κύκλωμα ολοκληρώσεως ή απλά ολοκληρωτή.



Σχ. 9.3ι.
Κύκλωμα ολοκληρώσεως ή ολοκληρωτής.

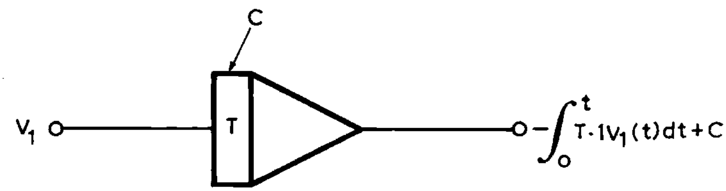


Σχ. 9.3ια.
Συμβολικό διάγραμμα ολοκληρωτή.

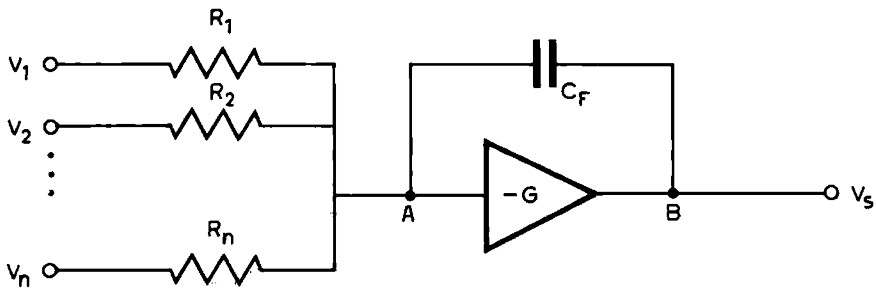
Στο σχήμα 9.3ια δίνεται το συμβολικό διάγραμμα ενός ολοκληρωτή και στο σχήμα 9.3ιβ δίνεται το συμβολικό διάγραμμα ενός ολοκληρωτή με ενίσχυση, όπου C είναι η σταθερά ολοκληρώσεως και χαρακτηρίζει τις αρχικές συνθήκες.

Αν στην είσοδο του παραπάνω κυκλώματος ολοκληρώσεως συνθέσομε περισσότερες ωμικές αντιστάσεις (σχ. 9.3ιγ), τότε η σχέση (9.16) γίνεται:

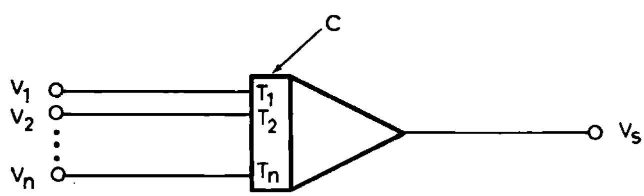
$$V_S(t) = -\frac{1}{R_1C_F}\int_0^t V_1(t)\,dt - \frac{1}{R_2C_F}\int_0^t V_2(t)\,dt - \dots - \frac{1}{R_nC_F}\int_0^t V_n(t)\,dt + V_S(0)$$



Σχ. 9.3ιβ.
Συμβολικό διάγραμμα ολοκληρωτή με ενίσχυση.



Σχ. 9.3ιγ.
Κύκλωμα ολοκληρώσεως και αθροίσεως ή ολοκληρωτής και αθροιστής.



Σχ. 9.3ιδ.
Συμβολικό διάγραμμα αθροιστικού ολοκληρωτή.

Δηλαδή το κύκλωμά μας (σχ. 9.3ιγ) δεν κάνει μόνο ολοκλήρωση αλλά και άθροιση γι' αυτό και χαρακτηρίζεται ως αθροιστικός ολοκληρωτής.

Το συμβολικό διάγραμμα του αθροιστικού ολοκληρωτή φαίνεται στο σχήμα 9.3ιδ.

όπου $T_1 = -\frac{1}{R_1C_F}$, $T_2 = -\frac{1}{R_2C_F}$ ..., $T_n = -\frac{1}{R_nC_F}$ είναι σταθερές (συντελεστές) που χαρακτηρίζουν τη λαμβανόμενη ενίσχυση και C η σταθερά ολοκληρώσεως $V_S(0)$ που χαρακτηρίζει τις αρχικές συνθήκες.

9.3.5 Κύκλωμα διαφορίσεως ή διαφοριστής (Differentiator).

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 9.3ιε. Αν V_1 και V_S είναι αντίστοιχα οι τάσεις εισόδου και εξόδου και εφαρμόσομε τον κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο Α, θα έχομε:

$$I_1 = I + I_F$$

Αφού, $I = 0$, έχομε:

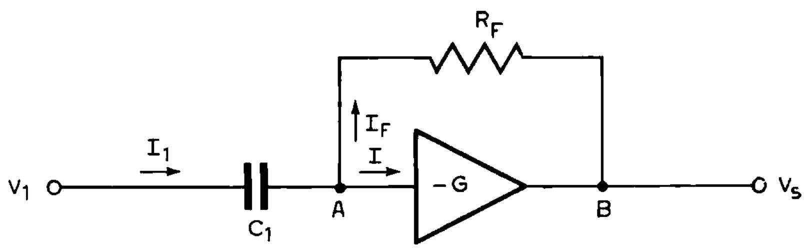
$$I_1 = I_F$$

ή

$$C_1 \frac{d(V_1 - V_A)}{dt} = \frac{V_A - V_S}{R}$$

ή αφού $V_S = -GV_A$ και G πολύ μεγάλο, θα έχομε:

$$V_S = -RC_1 \frac{dV_1}{dt} \qquad (9.17)$$



Σχ. 9.3ιε.
Κύκλωμα διαφοριστή.

Δηλαδή η τάση εξόδου του κυκλώματος του σχήματος 9.3ιε είναι ίση με την παράγωγο της τάσεως εισόδου, πολλαπλασιασμένη με τη σταθερά $-RC_1$. Γι αυτό το λόγο το κύκλωμα αυτό το λέμε κύκλωμα διαφορίσεως ή απλά διαφοριστή.

Αν θεωρήσομε ότι η V_1 στην είσοδο είναι μία ημιτονική τάση, δηλαδή

$$V_1 = V_m \text{ ημωt},$$

έχομε

$$V_S = -RC\,\omega \text{ συνωt}$$

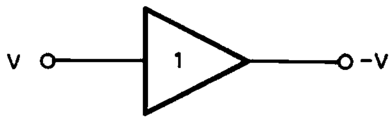
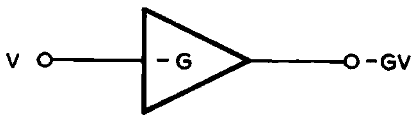
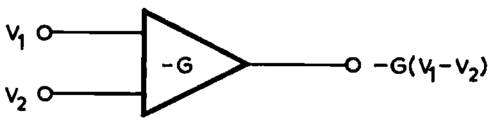
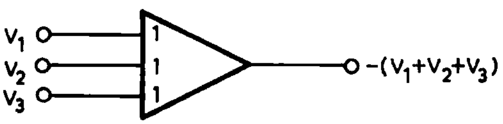
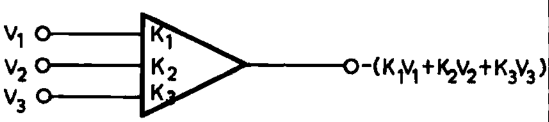
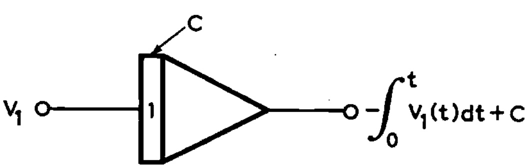
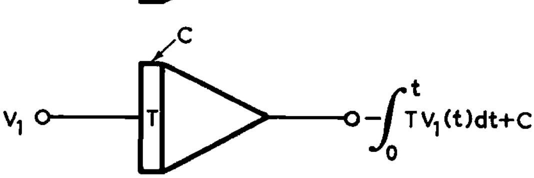
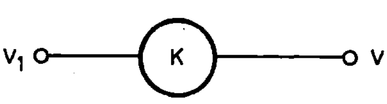
Παρατηρούμε ότι το πλάτος της εξόδου αυξάνει με τη συχνότητα. Γι' αυτό το κύκλωμα αυτό ενισχύει τις απότομες μεταβολές και είναι πολύ ευπαθές στο θόρυβο. Έτσι στην πράξη χρησιμοποιείται σπάνια.

Αν στην είσοδο του κυκλώματος διαφορίσεως (σχ. 9.3ιε) συνδέσομε περισσότερες χωρητικές αντιστάσεις (περισσότερους πυκνωτές), έστω $C_1, C_2 \dots C_n$ τότε θα έχομε:

$$V_S(t) = -R_1 C_1 \frac{dV_1}{dt} - R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt} - \dots - R_n C_n \frac{dV_n}{dt}$$

Στον Πίνακα 9.3.1 δίνονται τα σύμβολα των βασικών αναλογικών κυκλωμάτων που εξετάσαμε στο κεφάλαιο αυτό.

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.3.1.
ΣΥΜΒΟΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ (Ή ΑΠΛΩΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ) ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ
	Αναστροφέας
	Τελεστικός ενισχυτής
	Τελεστικός ενισχυτής δύο εισόδων
	Αθροιστής
	Αθροιστής με ενίσχυση
	Ολοκληρωτής
	Ολοκληρωτής με ενίσχυση
 $0 \leqslant K \leqslant 1$	Πολλαπλασιαστής με σταθερά (συντελεστή) που είναι μικρότερη από τη μονάδα

9.4 Ειδικά αναλογικά κυκλώματα.

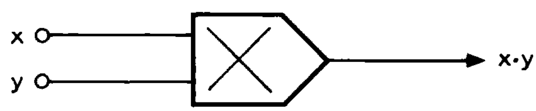
Όπως ήδη αναφέραμε στα προηγούμενα, ο τελεστικός ενισχυτής αποτελεί το κυριότερο κύκλωμα ενός αναλογικού υπολογιστή. Εκτός όμως από το βασικό αυτό κύκλωμα ένας αναλογικός υπολογιστής χρησιμοποιεί και άλλα ειδικά κυκλώματα, π.χ. κυκλώματα που μπορούν να πραγματοποιούν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού, της διαιρέσεως, εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας κλπ. Επίσης χρησιμοποιεί κυκλώματα παραγωγής συναρτήσεων.

Στα επόμενα θα αναφέρομε μερικές βασικές έννοιες για τα κυκλώματα πολλαπλασιασμού (ή απλώς πολλαπλασιαστές) και τις εφαρμογές τους, κυκλώματα διαιρέσεως (ή διαιρέτες) και κυκλώματα εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας.

9.4.1 Πολλαπλασιαστές (Multipliers).

Υπάρχουν βασικά δύο τύποι πολλαπλασιαστών: Οι ηλεκτρονικοί (Electronic Multipliers) και οι σερβοπολλαπλασιαστές (Servo Multipliers).

Οι ηλεκτρονικοί πολλαπλασιαστές είναι περισσότερο γρήγοροι και περισσότερο ακριβείς από τους σερβοπολλαπλασιαστές. Το συμβολικό διάγραμμα ενός πολλαπλασιαστή φαίνεται στο σχήμα 9.4α.

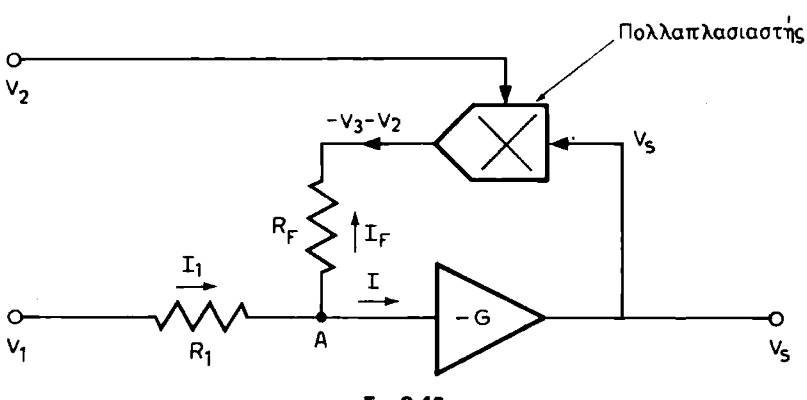


Σχ. 9.4α.
Συμβολικό διάγραμμα πολλαπλασιαστή.

Τον πολλαπλασιαστή μπορούμε να τον χρησιμοποιήσομε σε συνδυασμό με έναν τελεστικό ενισχυτή και να κατασκευάσομε άλλα κυκλώματα όπως το κύκλωμα διαιρέσεως ή εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας.

9.4.2 Κύκλωμα διαιρέσεως.

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 9.4β όπου στον κλάδο ανασυζεύξεως έ-



Σχ. 9.4β.
Κύκλωμα διαιρέσεως.

χομε τοποθετήσει ένα πολλαπλασιαστή. Αν εφαρμόσομε το νόμο του Kirchhoff στον κόμβο A θα έχομε:

$$I_1 = I + I_F$$

Δεδομένου ότι δεχόμασθε $I = 0$, τότε $I_1 = I_F$ και

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_S \cdot V_2}{R_F}$$

ή

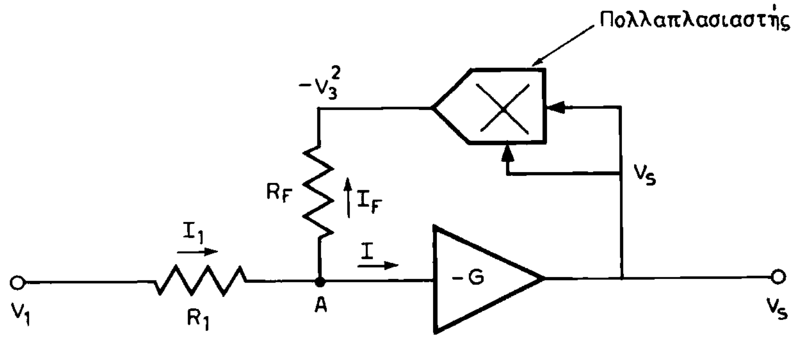
$$V_S = \frac{R_F}{R_1} \cdot \frac{V_1}{V_2}$$

ή αν $R_F = R_1$ $\quad V_S = \dfrac{V_1}{V_2}$

Δηλαδή η τάση εξόδου είναι ίση με το πηλίκο των τάσεων V_1, V_2 στην είσοδο του κυκλώματος του σχήματος 9.4β.

9.4.3 Κυκλώματα τετραγωνικής ρίζας.

Το κύκλωμα εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος 9.4γ.



Σχ. 9.4γ.
Κύκλωμα εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας.

Ομοίως όπως στην παράγραφο 9.4.2 έχομε:

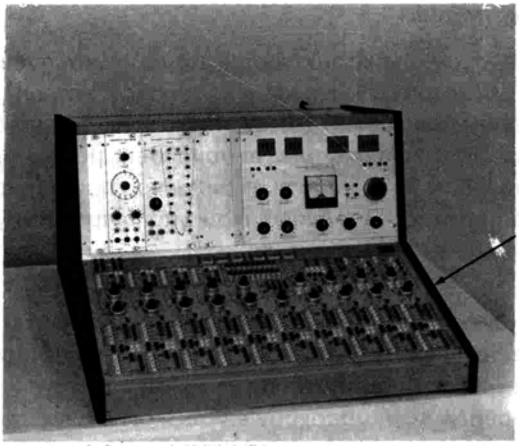
$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_S^2}{R_F}$$

ή αν $R_1 = R_F$ $\quad V_S = \sqrt{V_1}$

Δηλαδή η τάση εξόδου είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα της τάσεως εισόδου.

9.5 Οργάνωση ενός αναλογικού υπολογιστή.

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψομε περιληπτικά την οργάνωση ενός αναλο-



Σχ. 9.4δ.

γικού υπολογιστή και τον τρόπο με τον οποίο συνεργάζονται οι διάφορες μονάδες που τον αποτελούν για τη λύση ενός προβλήματος. Τα κύρια στοιχεία και οι κύριες μονάδες που συγκροτούν έναν αναλογικό υπολογιστή είναι:

9.5.1 *Τελεστικοί ενισχυτές. Αντιστάσεις. Πυκνωτές. Ποτενσιόμετρα.*

Ο τελεστικός ενισχυτής αποτελεί το βασικότερο στοιχείο ενός αναλογικού υπολογιστή. Με αυτόν μπορούμε να εκτελέσομε πρόσθεση ή αφαίρεση σημάτων, πολλαπλασιασμό ενός σήματος με μία σταθερά και επίσης ολοκλήρωση ή διαφόριση σημάτων. Με τις πράξεις αυτές και με τη βοήθεια των πολλαπλασιαστών μπορούμε να λύσομε διαφορικές εξισώσεις (γραμμικές ή μη). Ένας αναλογικός υπολογιστής αποτελείται από ένα σύνολο τελεστικών ενισχυτων, οι περισσότεροι από τους οποίους διαθέτουν πολλές εισόδους.

Ένας αναλογικός υπολογιστής φέρει επίσης μία σειρά από αντιστάσεις (με τις οποίες πετυχαίνομε ποικίλες ενισχύσεις) και ένα σύνολο πυκνωτών τους οποίους χρησιμοποιούμε για την ολοκλήρωση σημάτων.

Με τα ποτενσιόμετρα που φέρει ο αναλογικός υπολογιστής μπορούμε να πολλαπλασιάσομε ένα σήμα με μία σταθερά μικρότερη από τη μονάδα. Αν όμως συνδυάσομε τα ποτενσιόμετρα με τελεστικούς ενισχυτές, μπορούμε να πολλαπλασιάσομε ένα σήμα με σταθερά μεγαλύτερη από τη μονάδα.

Οι είσοδοι και έξοδοι των στοιχείων που αναφέραμε παραπάνω τερματίζουν σε ειδικές υποδοχές οι οποίες βρίσκονται σ' έναν πίνακα που λέγεται πίνακας προγραμματισμού και που φαίνεται στο σχήμα 9.4δ. Ο πίνακας αυτός αναφέρεται παρακάτω. Οι συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων στοιχείων του υπολογιστή γίνονται με καλώδια τα οποία εισάγονται στις υποδοχές.

9.5.2 *Ειδικά κυκλώματα του υπολογιστή.*

Στα κυκλώματα αυτά ανήκουν οι πολλαπλασιαστές, οι διαιρέτες, το κύκλωμα υπολογισμού τετραγωνικής ρίζας κλπ. Οι πολλαπλασιαστές και οι διαιρέτες χρησιμοποιούνται αντίστοιχα για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση σημάτων, ενώ το κύκλωμα υπολογισμού τετραγωνικής ρίζας για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας.

9.5.3 Πίνακας προγραμματισμού.

Όπως ήδη αναφέραμε, στον πίνακα προγραμματισμού καταλήγουν οι ακροδέκτες των στοιχείων που αποτελούν έναν αναλογικό υπολογιστή, δηλαδή οι ακροδέκτες των τελεστικών ενισχυτών, αντιστάσεων, πυκνωτών, ποτενσιομέτρων κλπ. Στον πίνακα αυτό γίνονται με τα καλώδια όλες οι συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων στοιχείων του υπολογιστή για τη λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Η εργασία αυτή λέγεται προγραμματισμός του αναλογικού υπολογιστή και γι' αυτό και ο πίνακας ονομάσθηκε πίνακας προγραμματισμού.

9.5.4 Μονάδα ελέγχου.

Στη μονάδα αυτή γίνονται μερικές βασικές λειτουργίες και ρυθμίσεις όπως π.χ. ρύθμιση των ποτενσιομέτρων, τοποθέτηση και ρύθμιση των αρχικών συνθηκών (ολοκλήρωση) κλπ. Στη μονάδα αυτή υπάρχουν επίσης και λυχνίες υπερφορτίσεως των ενισχυτών με τις οποίες ελέγχομε αν οι τελεστικοί ενισχυτές βρίσκονται στο δυναμικό κόρου. Γενικά με τη μονάδα αυτή καθορίζομε και ελέγχομε τις διάφορες λειτουργίες τις οποίες μπορεί να πραγματοποιήσει ένας αναλογικός υπολογιστής.

9.5.5 Μονάδα τροφοδοσίας.

Η μονάδα αυτή παρέχει στους τελεστικούς ενισχυτές και στις υπόλοιπες μονάδες τις τάσεις που απαιτούνται για τη λειτουργία του αναλογικού υπολογιστή.

Στο σχήμα 9.4δ απεικονίζεται ένας αναλογικός υπολογιστής ο οποίος κατασκευάστηκε στο Κ.Π.Ε. Δημόκριτος.

9.6 Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 9.6α όπου $V_1 = 1{,}0$ Volt, $V_2 = 0{,}5$ Volt, $V_3 = -1{,}0$ Volt, $V_4 = 1{,}2$ Volt και $V_5 = -0{,}9$ Volt. Επίσης $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 2\ k\Omega$. Να υπολογισθεί η τάση εξόδου V_S.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο A, θα έχομε:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = I_6$$

ή
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4} + \frac{V_5}{R_5} = \frac{V_S}{R_6}$$

ή
$$V_S = -V_1\frac{R_6}{R_1} + V_2\frac{R_6}{R_2} + V_3\frac{R_6}{R_3} + V_4\frac{R_6}{R_4} + V_5\frac{R_6}{R_5}$$

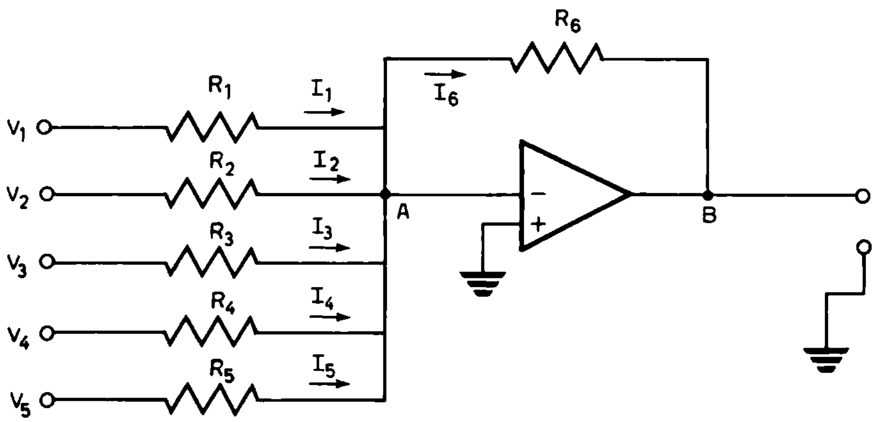
ή αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές.

$$V_S = -[5 + 2{,}5 - 5 + 6 - 4{,}5] = 4{,}0\ \text{Volt}$$

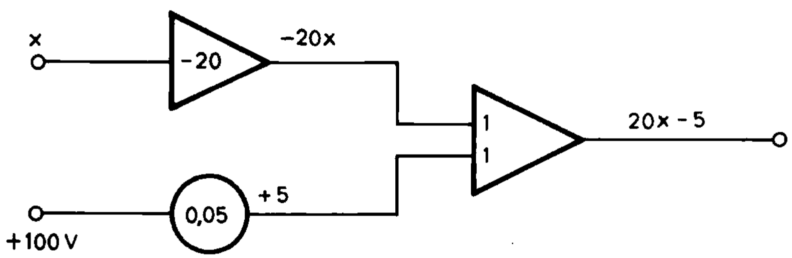
Παράδειγμα 2.

Να σχεδιασθεί ένα αναλογικό κύκλωμα για την επίλυση της εξισώσεως: $y = 20x - 5$.

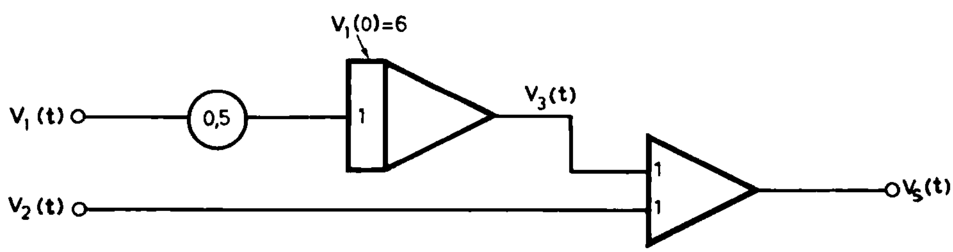
Το δεύτερο μέλος της εξισώσεώς μας, δηλαδή το $20x - 5$ περιέχει τους όρους



Σχ. 9.6α.
Κύκλωμα για παράδειγμα 1.



Σχ. 9.6β.
Κύκλωμα για παράδειγμα 2.



Σχ. 9.6γ.
Κύκλωμα για παράδειγμα 3.

20x και — 5, οι οποίοι προστιθέμενοι μας δίνουν την τιμή της y. Θα πρέπει λοιπόν να δημιουργήσομε τους όρους 20x και —5 και στη συνέχεια να τους προσθέσομε. Το κύκλωμα που μας ζητείται όπως εύκολα μπορεί να αντιληφθεί κανείς, είναι το κύκλωμα του σχήματος 9.6β.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται το αναλογικό κύκλωμα του σχήματος 9.6γ. Εάν V_1 (t) = 5 Volt με αρχική συνθήκη V_1 (0) = 6 Volt και V_2 (t) = 3 t με αρχική συνθήκη V_2 (t) = 0 Volt, ζητείται να υπολογισθεί η έξοδος V_S της κυκλώματος.

Η τάση στην έξοδο του ολοκληρωτή θα είναι:

$$V_3(t) = -0,5 \int_0^t V_1(t)\,dt - V_1(0) = -2,5\,t - 6$$

Η τάση στην έξοδο του αθροιστή θα είναι:

$$V_S\ (t) = -\ [V_3(t) + V_2(t)] = +\,2,5\,t + 6 - 3\,t = 0,5\,t + 6$$

$$V_S\ (t) = -\,0,5\,t + 6$$

Παράδειγμα 4.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 9.6δ. Να υπολογισθεί η τάση εξόδου. Τι συμπεραίνετε για το κύκλωμα;

Η τάση στις εξόδους των πολλαπλασιαστών 1 και 2 αντίστοιχα θα είναι z^2 και z^3.

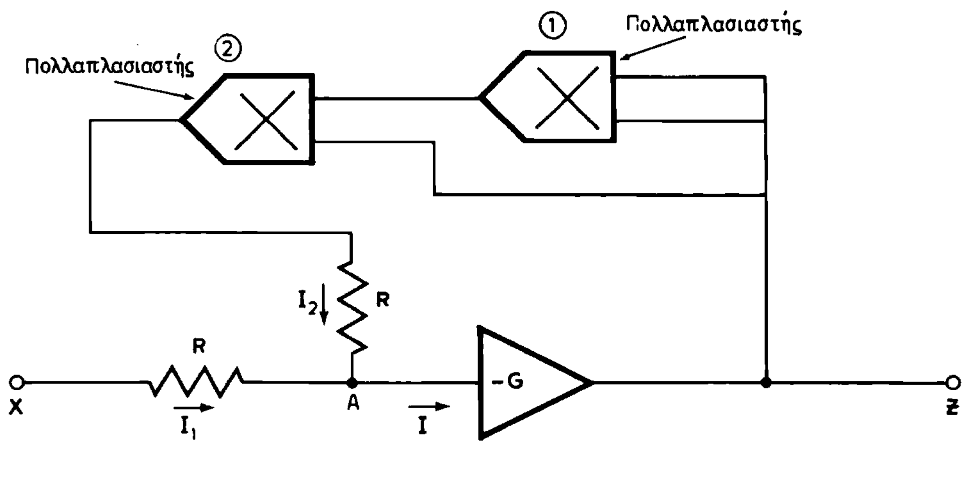
Αν εφαρμόσομε το νόμο του Kirchhoff στον κόμβο Α, θα έχομε:

$$I_1 + I_2 = I$$

ή $$I_1 = -I_2 \quad \text{ή} \quad \frac{x}{R} = \frac{z^3}{R} \quad (\text{αφού } I = 0)$$

ή $$z^3 = x \quad \text{ή} \quad z = \sqrt[3]{x}$$

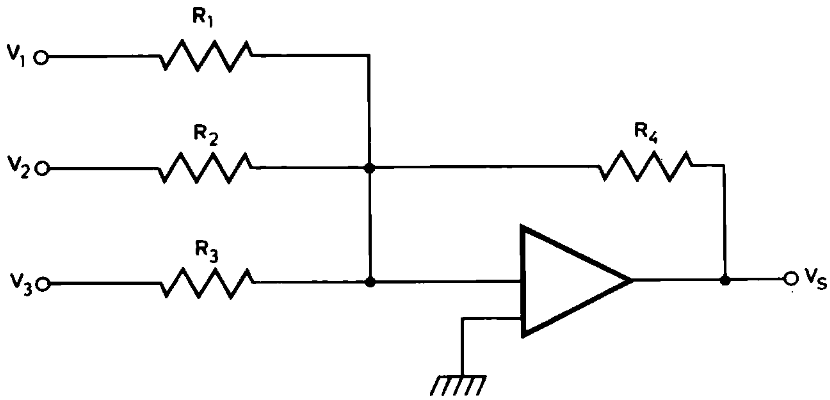
Το κύκλωμα προφανώς υπολογίζει την κυβική ρίζα της τάσεως εισόδου.



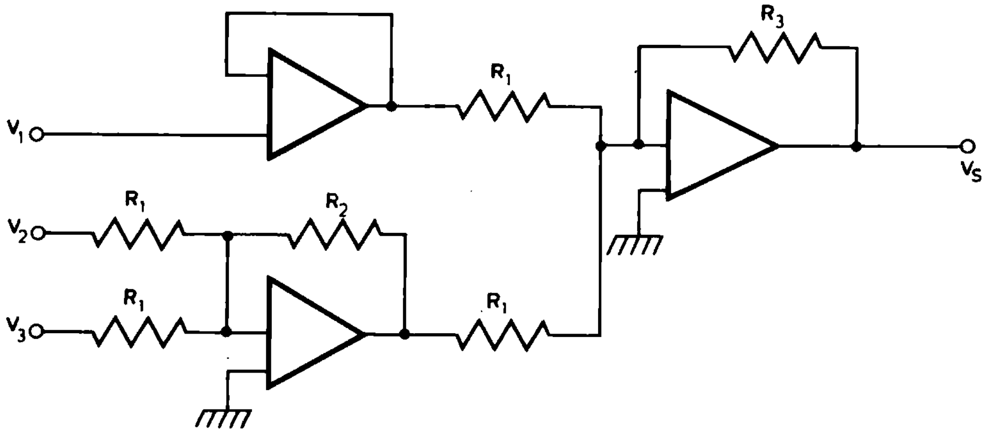
Σχ. 9.6δ.

9.7 Ασκήσεις.

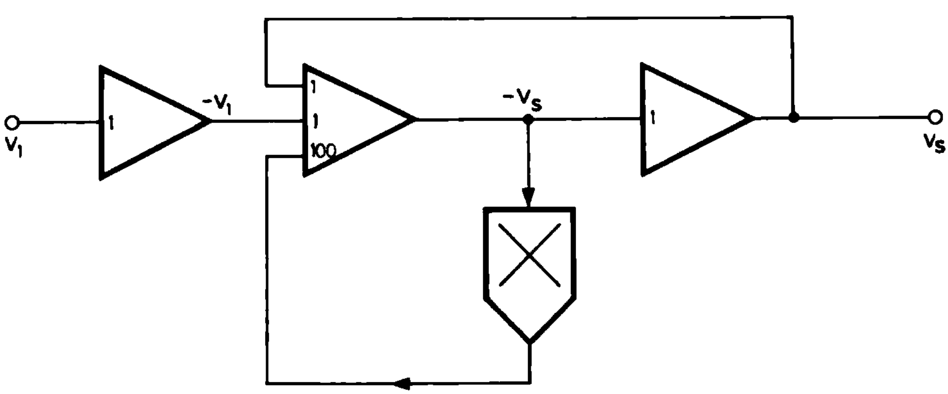
1. Να υπολογισθεί η τάση εξόδου V_S στο κύκλωμα του σχήματος 9.7α. Δίνεται $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 5$ kΩ, $R_3 = 20$ kΩ, $R_4 = 20$ kΩ, $V_1 = 0{,}02$ Volt, $V_2 = 0{,}22$ Volt και $V_3 = 1{,}0$ Volt.
2. Να υπολογισθεί η τάση εξόδου V_S στο κύκλωμα του σχήματος 9.7β. Δίνεται $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 50$ kΩ και $R_3 = 100$ kΩ, $V_1 = 2{,}2$ Volt, $V_2 = 0{,}05$ Volt και $V_3 = 0{,}1$ Volt.
3. Δίνεται το αναλογικό κύκλωμα του σχήματος 9.7γ. Να ευρεθεί η V_S. Τι συμπεραίνετε για το κύκλωμα;



Σχ. 9.7α.



Σχ. 9.7β.



Σχ. 9.7γ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Ἀριθμητικά συστήματα (προσθῆκες)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ἄλγεβρα Boole — Ἄλγεβρα Συνόλων — Ἄλγεβρα Λογικῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Ἄλγεβρα διακοπτῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Λογικά κυκλώματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Λογικές συναρτήσεις – Ἀπλοποίηση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Πολυδονητές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Καταχωρητές — 'Απαριθμητές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

Βασικές μονάδες καί ἀρχιτεκτονική ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

Στοιχεῖα ἀναλογικῶν ὑπολογιστῶν