ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΦΥΣΙΚΗ

Αργ. Κ. Μαυροματάκου
ΔΡΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Α΄ Τεχνικών Επαγγελματικών Σχολών

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Α΄ ΤΑΞΗ ΜΕΣΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ

(ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ)

ΑΡΓΥΡΗ Κ. ΜΑΥΡΟΜΜΑΤΑΚΟΥ
Δ^{ΡΟΣ} ΦΥΣΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ
1979

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ὁ ἱδρυτής καί χορηγός τοῦ «Ἱδρύματος Εὐγενίδου», πολύ νωρίς πρόβλεψε καί σχημάτισε τήν πεποίθηση ὅτι ἡ ἄρτια κατάρτιση τῶν τεχνικῶν μας, σέ συνδυασμό μέ τήν ἐθνική ἀγωγή, θά ἦταν ἀναγκαῖος καί ἀποφασιστικός παράγοντας τῆς προόδου τοῦ Ἔθνους μας.

Τήν πεποίθησή του αὐτή ὁ Εὐγενίδης ἐκδήλωσε μέ τή γενναιόφρονα πράξη εὐεργεσίας, νά κληροδοτήσει σεβαστό ποσό γιά τή σύσταση Ἱδρύματος πού θά εἶχε σκοπό νά συμβάλλει στήν τεχνική ἐκπαίδευση τῶν νέων τῆς Ἑλλάδας.

Ἔτσι τό Φεβρουάριο τοῦ 1956 συστήθηκε τό «Ἵδρυμα Εὐγενίδου», τοῦ ὁποίου τήν διοίκηση ἀνέλαβε ἡ ἀδελφή του κυρία Μαριάνθη Σίμου, σύμφωνα μέ τήν ἐπιθυμία τοῦ διαθέτη.

Ἀπό τό 1956 μέχρι σήμερα ἡ συμβολή τοῦ Ἱδρύματος στήν τεχνική ἐκπαίδευση πραγματοποιεῖται μέ διάφορες δραστηριότητες. Ὅμως ἀπ' αὐτές ἡ σημαντικότερη, πού κρίθηκε ἀπό τήν ἀρχή ὡς πρώτης ἀνάγκης, εἶναι ἡ ἔκδοση βιβλίων γιά τούς μαθητές τῶν τεχνικῶν σχολῶν.

Μέχρι σήμερα ἐκδόθηκαν 150 τόμοι βιβλίων, πού ἔχουν διατεθεῖ σέ πολλά ἑκατομμύρια τεύχη, καί καλύπτουν ἀνάγκες τῶν Κατώτερων καί Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ Ὑπ. Παιδείας, τῶν Σχολῶν τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἀπασχολήσεως Ἐργατικοῦ Δυναμικοῦ (ΟΑΕΔ) καί τῶν Δημοσίων Σχολῶν Ἐμπορικοῦ Ναυτικοῦ.

Μοναδική φροντίδα τοῦ Ἱδρύματος σ' αὐτή τήν ἐκδοτική του προσπάθεια ἦταν καί εἶναι ἡ ποιότητα τῶν βιβλίων, ἀπό ἄποψη ὄχι μόνον ἐπιστημονική, παιδαγωγική καί γλωσσική, ἀλλά καί ἀπό ἄποψη ἐμφανίσεως, ὥστε τό βιβλίο νά ἀγαπηθεῖ ἀπό τούς νέους.

Γιά τήν ἐπιστημονική καί παιδαγωγική ποιότητα τῶν βιβλίων, τά κείμενα ὑποβάλλονται σέ πολλές ἐπεξεργασίες καί βελτιώνονται πρίν ἀπό κάθε νέα ἔκδοση.

Ἰδιαίτερη σημασία ἀπέδωσε τό Ἵδρυμα ἀπό τήν ἀρχή στήν ποιότητα τῶν βιβλίων ἀπό γλωσσική ἄποψη, γιατί πιστεύει ὅτι καί τά τεχνικά βιβλία, ὅταν εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα ἄρτια καί ὁμοιόμορφη ἀλλά καί κατάλληλη γιά τή στάθμη τῶν μαθητῶν, μποροῦν νά συμβάλλουν στήν γλωσσική διαπαιδαγώγηση τῶν μαθητῶν.

Ἔτσι μέ ἀπόφαση πού πάρθηκε ἤδη ἀπό τό 1956 ὅλα τά βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Τεχνίτη, δηλαδή τά βιβλία γιά τίς Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, ὅπως ἀργότερα καί γιά τίς Σχολές τοῦ ΟΑΕΔ, εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα δημοτική μέ βάση τήν γραμματική τοῦ Τριανταφυλλίδη, ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα βιβλία εἶναι γραμμένα στήν ἁπλή καθαρεύουσα. Ἡ γλωσσική ἐπεξεργασία τῶν βιβλίων γίνεται ἀπό φιλολόγους τοῦ Ἱδρύματος καί ἔτσι ἐξασφαλίζεται ἡ ἑνιαία σύνταξη καί ὁρολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Ἡ ποιότητα τοῦ χαρτιοῦ, τό εἶδος τῶν τυπογραφικῶν στοιχείων, τά σωστά σχήματα καί ἡ καλαίσθητη σελιδοποίηση, τό ἐξώφυλλο καί τό μέγεθος τοῦ βιβλίου περιλαμβάνονται καί αὐτά στίς φροντίδες τοῦ Ἱδρύματος.

Τό Ἵδρυμα θεώρησε ὅτι εἶναι ὑποχρέωσή του, σύμφωνα μέ τό πνεῦμα τοῦ ἱδρυτή του, νά θέσει στήν διάθεση τοῦ Κράτους ὅλη αὐτή τήν πείρα του τῶν 20 ἐτῶν, ἀναλαμβάνοντας τήν ἔκδοση τῶν βιβλίων καί γιά τίς νέες Τεχνικές καί Ἐπαγγελματικές Σχολές καί τά νέα Τεχνικά καί Ἐπαγγελματικά Λύκεια, σύμφωνα μέ τά Ἀναλυτικά Προγράμματα τοῦ Κ.Ε.Μ.Ε.

Τά χρονικά περιθώρια γι' αὐτή τήν νέα ἐκδοτική προσπάθεια ἦταν πολύ περιορισμένα καί ἴσως γι' αὐτό, ἰδίως τά πρῶτα βιβλία αὐτῆς τῆς σειρᾶς, νά παρουσιάσουν ἀτέλειες στή συγγραφή ἤ στήν ἐκτύπωση, πού θά διορθωθοῦν στή νέα τους ἔκδοση. Γι' αὐτό τό σκοπό ἐπικαλούμαστε τήν βοήθεια ὅλων ὅσων θά χρησιμοποιήσουν τά βιβλία, ὥστε νά μᾶς γνωστοποιήσουν κάθε παρατήρησή τους γιά νά συμβάλλουν καί αὐτοί στή βελτίωση τῶν βιβλίων.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στό βιβλίο αὐτό πραγματευόμαστε τά θέματα τῆς Μηχανικῆς τῶν Στερεῶν, ἔτσι ὥστε νά ἀνταποκρίνεται στίς ἀπαιτήσεις τῶν μαθητῶν τῶν Μέσων Τεχνικῶν καί Ἐπαγγελματικῶν Σχολῶν.

Ἡ διάταξη τῆς ὕλης καί ὁ τρόπος πού ἀναπτύχθηκαν τά διάφορα κεφάλαια ἀποβλέπει στό:

α) Νά μάθουν οἱ μαθητές ὅλες τίς ἔννοιες τῆς «Μηχανικῆς τῶν στερεῶν», γιά νά βοηθηθοῦν στήν κατανόηση τῶν Τεχνολογικῶν μαθημάτων καί ἐργαστηριακῶν ἀσκήσεων πού πρόκειται νά διδαχθοῦν στή ἑπόμενη τάξη.

β) Οἱ μαθητές πού θά ἀποφοιτήσουν ἀπό τίς μέσες Σχολές, πρέπει νά εἶναι σέ θέση, ἄν τό ἐπιθυμοῦν, νά συνεχίσουν σπουδές στή β΄ τάξη τῶν Τεχνικῶν καί Ἐπαγγελματικῶν Λυκείων.

Ἐπειδή οἱ ἔννοιες τῆς «Μηχανικῆς τῶν στερεῶν» εἶναι ἀπαραίτητες γιά τήν κατανόηση τῶν ἄλλων βασικῶν ἐννοιῶν τῆς Φυσικῆς καθώς καί πολλῶν τεχνολογικῶν μαθημάτων, δόθηκε μεγάλη βαρύτητα στήν ἐξήγηση τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν μέ ἁπλό τρόπο. Γι΄ αὐτό χρησιμοποιήθηκε πολύ ἡ ἔκφραση «ὅταν λέμε... ἐννοοῦμε» δηλαδή κάθε ἔννοια τή «βλέπομε» ἀπό διάφορες σκοπιές καί στό τέλος δίνομε καί τή μαθηματική της ἔκφραση.

Γιά τόν ἴδιο σκοπό παραθέτομε ἀρκετά σχήματα, πολλές ἐφαρμογές καθώς καί λυμένα ἀριθμητικά παραδείγματα.

Πολλές ἀπό τίς ἐφαρμογές καί τά ἀριθμητικά παραδείγματα δέν θά διδαχθοῦν στήν τάξη, ἀλλά θά μελετηθοῦν ἀπό τούς μαθητές ὡς ἐργασία στό σπίτι.

Τά ἀριθμητικά παραδείγματα ἔχουν λυθεῖ μέ κάθε λεπτομέρεια, ὥστε νά ὑποβοηθήσουν τούς μαθητές νά ἀντιληφθοῦν τόν τρόπο ἐφαρμογῆς τῶν φυσικῶν ἐννοιῶν καί τῶν νόμων τῆς Φυσικῆς καί νά ἐμπεδώσουν ὅσα ἀναφέρονται στή θεωρία.

Κατά τή λύση τῶν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων δέν χρησιμοποιοῦνται πάντοτε οἱ δυνάμεις τῶν ἀριθμῶν καί τοῦτο γιά νά μποροῦν οἱ μαθητές νά συλλαμβάνουν σαφέστερα τό μέγεθος πού ἐκφράζουν οἱ ἀριθμοί.

Στό τέλος τοῦ βιβλίου παραθέτομε γενικές ἀσκήσεις, ἄλυτες, γιά νά μποροῦν οἱ μαθητές νά διαπιστώσουν κατά πόσο ἀφομοίωσαν τήν ὕλη πού διδάχθηκαν.

Ὁρισμένες ἑνότητες τυπώνονται μέ μικρότερα στοιχεῖα· αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ ἑνότητες αὐτές καί ἄν ἀκόμη δέν διδαχθοῦν, δέν διασποῦν τή συνέχεια τῆς ὕλης.

Ἐπιθυμῶ νά ἐκφράσω τίς εὐχαριστίες μου στό Ἵδρυμα Εὐγενίδου καί στούς συνεργάτες του πού βοήθησαν ὥστε τελικά τό βιβλίο αὐτό νά ἐκδοθεῖ ὅσο μποροῦσε καλύτερα.

Ὁ συγγραφέας

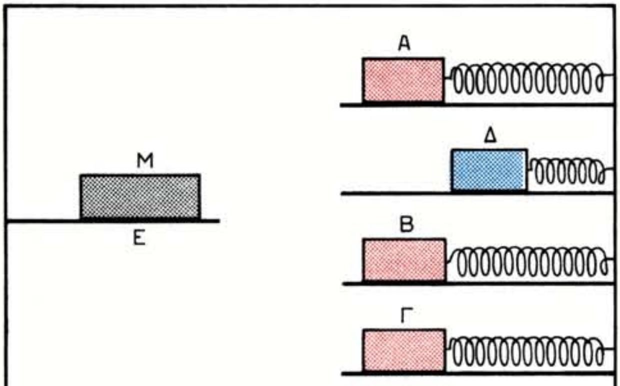
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1 Θέματα τῆς Φυσικῆς.

Φυσική εἶναι ἡ ἐπιστήμη πού μελετᾶ τίς γενικές ἰδιότητες τῶν σωμάτων καί τά ***φυσικά φαινόμενα.***

Ὅταν λέμε γενικές ἰδιότητες τῶν σωμάτων, ἐννοοῦμε ἐκεῖνες τίς ἰδιότητες πού τίς ἔχουν ὅλα τά σώματα. Τό βάρος π.χ. εἶναι μιά γενική ἰδιότητα τῶν σωμάτων, γιατί ὅλα τά σώματα ἔχουν βάρος, δηλαδή ὅλα τά σώματα ἕλκονται ἀπό τή γῆ. Ἡ ἀδράνεια ἐπίσης εἶναι μιά ἄλλη γενική ἰδιότητα τῶν σωμάτων, γιατί ὅλα τά σώματα ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ἀντιστέκονται στήν ἀλλαγή τῆς κινητικῆς τους καταστάσεως.

Ὅταν λέμε φαινόμενο, ἐννοοῦμε γενικά κάθε ἀλλαγή τῆς θέσεως ἤ τῶν ἰδιοτήτων ἑνός σώματος ἤ τήν ἀλλαγή τῶν ἰδιοτήτων ἑνός χώρου. Ἡ κίνηση π.χ. ἑνός σώματος εἶναι ἕνα φαινόμενο γιατί, ὅταν τό σῶμα κινεῖται, ἀλλάζει θέση. Ἡ πήξη ἐπίσης τοῦ νεροῦ εἶναι ἕνα ἄλλο φαινόμενο, γιατί τό νερό ἀλλάζει ἰδιότητες ὅταν ἀπό ὑγρό γίνεται στερεό (πήξη). Ἀκόμη, ἡ καύση ἑνός ξύλου εἶναι ἕνα φαινόμενο, γιατί οἱ ἰδιότητες τοῦ ξύλου εἶναι διαφορετικές ἀπό τίς ἰδιότητες πού ἔχουν τά προϊόντα τῆς καύσεως, δηλαδή ἡ στάχτη καί τά ἀέρια. Ἕνα φαινόμενο εἶναι ἐπίσης καί ἡ ἀνάλυση τοῦ νεροῦ, γιατί οἱ ἰδιότητες τῶν προϊόντων τῆς ἀναλύσεώς του, δηλαδή τοῦ ὑδρογόνου καί τοῦ ὀξυγόνου, εἶναι διαφορετικές ἀπό τίς ἰδιότητες τοῦ νεροῦ.



Σχ. 0.1.

Ἔστω ὅτι μέσα σέ ἕνα χῶρο x ὑπάρχουν τρία σιδερένια σώματα A, B, Γ καί ἕνα ξύλινο Δ, ὅλα ἀκίνητα (σχ. 0.1). Ἄν σέ μία θέση E τοῦ χώρου τοποθετήσομε ἕνα μαγνήτη Μ, τά σιδερένια σώματα Α, Β, Γ ἀρχίζουν νά κινοῦνται. Αὐτό σημαίνει ὅτι τώρα ὁ χῶρος x ἀπέκτησε τήν ἰδιότητα νά ἀσκεῖ δυνάμεις στά σιδερένια σώματα. Τήν ἰδιότητα αὐτή δέν τήν εἶχε ὁ χῶρος x, πρίν τοποθετήσομε τό μαγνήτη Μ στή θέση τοῦ Ε· ἀντίθετα, πρίν τοποθετήσομε τό μαγνήτη Μ, ὁ χῶρος x εἶχε τήν ἰδιότητα νά μήν ἀσκεῖ καμιά ἰδιαίτερη δύναμη στά σιδερένια αὐτά σώματα. Ἡ ἀλλαγή αὐτή τῆς ἰδιότητος τοῦ χώρου εἶναι ἕνα φαινόμενο.

Ὅταν λέμε φυσικά φαινόμενα, ἐννοοῦμε τά φαινόμενα ἐκεῖνα πού δέν συνοδεύονται μέ ἀλλαγή τοῦ εἴδους τῆς ὕλης τῶν σωμάτων· δηλαδή κατά τά φαινόμενα αὐτά δέν ἀλλάζει ἡ οὐσία τῶν σωμάτων.

Ἡ κίνηση π.χ. μιᾶς μολύβδινης σφαίρας εἶναι ἕνα φυσικό φαινόμενο, γιατί ἡ σφαίρα καθώς κινεῖται ἀλλάζει θέση.

Ἡ πήξη τοῦ νεροῦ εἶναι ἕνα ἄλλο φυσικό φαινόμενο, γιατί τό νερό ἀλλάζει κατάσταση, δηλαδή ἀπό ὑγρό γίνεται στερεό.

Ἀντίθετα ἡ καύση τοῦ ξύλου δέν εἶναι φυσικό φαινόμενο, καθόσον ἡ οὐσία τοῦ ξύλου εἶναι διαφορετική ἀπό τήν οὐσία τῆς στάχτης καί τῶν ἀερίων πού προκύπτουν ἀπό τήν καύση τοῦ ξύλου.

Ἐπίσης ἡ ἀνάλυση τοῦ νεροῦ δέν εἶναι φυσικό φαινόμενο, γιατί ἡ οὐσία τοῦ νεροῦ εἶναι διαφορετική ἀπό τήν οὐσία τοῦ ὑδρογόνου καί τοῦ ὀξυγόνου, πού προκύπτουν ἀπό τήν ἀνάλυση.

Σημείωση:

Τά φαινόμενα πού συνοδεύονται μέ ἀλλαγή τοῦ εἴδους τῆς ὕλης (τῆς οὐσίας) τῶν σωμάτων, ὅπως ἡ καύση τοῦ ξύλου, ἡ ἀνάλυση τοῦ νεροῦ, τά ὀνομάζομε ὅπως γνωρίζομε ***χημικά φαινόμενα.***

0.2 Χρονική διάρκεια (ἤ, ἁπλῶς, χρόνος) — Χρονική στιγμή.

Ὅταν λέμε χρονική διάρκεια ἑνός φαινομένου, ἐννοοῦμε τό χρόνο μέσα στόν ὁποῖο συμβαίνει τό φαινόμενο αὐτό.

Π.χ. ὅταν ἕνα κινητό ξεκινάει ἀπό τό σημεῖο Α στίς 12.00 ἀκριβῶς καί φθάνει στό σημεῖο Β στίς 12.10 ἀκριβῶς, τότε ὁ χρόνος τῶν 10 min πού χρειάστηκε τό κινητό γιά νά πάει ἀπό τό Α στό Β εἶναι ἡ χρονική διάρκεια τοῦ φαινομένου τῆς κινήσεως.

Ὅταν λέμε χρονική στιγμή, ἐννοοῦμε τήν ἀρχή ἤ τό τέλος κάποιας χρονικῆς διάρκειας. Οἱ χρονικές στιγμές προσδιορίζονται μέ τίς ἀντίστοιχες ἐνδείξεις ἑνός ρολογιοῦ.

Π.χ. ἄν θεωρήσομε μιά χρονική διάρκεια ἀπό τίς 12.00 ὥς τίς 12.10 ἀκριβῶς, τότε ἡ ὥρα 12.00 εἶναι μιά χρονική στιγμή, γιατί εἶναι ἡ ἀρχή τῆς χρονικῆς διάρκειας, καί ἡ ὥρα 12.10 ἀκριβῶς εἶναι μιά ἄλλη χρονική στιγμή, γιατί εἶναι τό τέλος αὐτῆς τῆς χρονικῆς διάρκειας*.

0.3 Γενικά περί τῶν φυσικῶν μεγεθῶν.

Ὁρισμός.

Γιά νά περιγράψομε ἕνα φυσικό ἤ χημικό φαινόμενο χρειαζόμαστε ὁρισμένα

---

* Ἄν t_1 εἶναι ἡ χρονική στιγμή πού ἀρχίζομε νά μελετᾶμε ἕνα φαινόμενο (π.χ. τήν κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου) καί t_2 εἶναι ἡ χρονική στιγμή πού σταματᾶμε νά μελετᾶμε τό φαινόμενο αὐτό (τήν κίνηση τοῦ ὑλικοῦ αὐτοῦ σημείου), τότε ἡ χρονική διάρκεια t τοῦ φαινομένου εἶναι: $t = t_2 - t_1$.

χαρακτηριστικά στοιχεῖα. Ἐπίσης γιά νά περιγράψομε τίς ἰδιότητες τῶν διαφόρων σωμάτων χρειαζόμαστε ἀνάλογα χαρακτηριστικά στοιχεῖα.

Τά χαρακτηριστικά λοιπόν στοιχεῖα, τά ὁποῖα μᾶς βοηθοῦν νά περιγράψομε ἕνα φαινόμενο ἤ τίς ἰδιότητες σωμάτων ὀνομάζονται Φυσικά Μεγέθη.

Γιά νά μελετήσομε τήν πτώση, ἑνός σώματος τά φυσικά μεγέθη, πού περιγράφουν τό φαινόμενο αὐτό εἶναι:

α) Ἡ ταχύτητα σέ κάποιο σημεῖο.

β) Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

γ) Τό διάστημα πού διήνυσε τό σῶμα.

δ) Ὁ χρόνος πού διέρρευσε ἀπό τή στιγμή τῆς πτώσεως κλπ.

Ὅλα αὐτά τά χαρακτηριστικά στοιχεῖα, δηλαδή ἡ ταχύτητα υ, ἡ ἐπιτάχυνση g, τό διάστημα s, ὁ χρόνος t, εἶναι τά φυσικά μεγέθη πού περιγράφουν πλήρως ἤ μᾶς δίνουν πληροφορίες γιά τό φαινόμενο τῆς πτώσεως τοῦ σώματος.

Ἡ ἰδιότητα τῆς ὕλης νά εἶναι πυκνή ἤ ἀραιή περιγράφεται ἀπό τό φυσικό μέγεθος τῆς πυκνότητας ρ.

Ἡ θερμική κατάσταση ἑνός σώματος περιγράφεται ἀπό τό φυσικό μέγεθος τῆς θερμοκρασίας.

Μέτρηση τῶν φυσικῶν μεγεθῶν.

Τά φυσικά μεγέθη μποροῦν νά μετρηθοῦν μέ ὄργανα ἤ νά ὑπολογισθοῦν μέ βάση ἄλλα φυσικά μεγέθη.

Μέτρηση ἑνός φυσικοῦ μεγέθους λέγεται ἡ σύγκρισή του πρός ἕνα ἄλλο ὅμοιο μέγεθος πού τό θεωροῦμε ***ὡς μονάδα μετρήσεως.***

Τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως εἶναι ἡ εὕρεση ἑνός ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ***ἀριθμητική τιμή*** τοῦ μεγέθους πού μετρᾶμε, καί δείχνει πόσες φορές ἐπαναλαμβανόμενη ἡ μονάδα μετρήσεως μᾶς δίνει τό μέγεθος αὐτό.

Ἡ ἀριθμητική τιμή ἑνός μεγέθους μαζί μέ τή μονάδα μετρήσεώς του ἀποτελοῦν ***τό μέτρο*** τοῦ μεγέθους αὐτοῦ.

Γιά τή μέτρηση ἑνός φυσικοῦ μεγέθους M παίρνομε τό ὁμοειδές φυσικό μέγεθος M_1, πού τό θεωροῦμε ὡς μονάδα μετρήσεως, καί βρίσκομε πόσες φορές ἐπαναλαμβανόμενο τό M_1 δίνει τό M.

Ἄν π.χ. βροῦμε ὅτι τό M_1 πρέπει νά ἐπαναληφθεῖ (α) φορές γιά νά δώσει τό M, τότε ὁ ἀριθμός (α) εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μεγέθους M.

Τό ἐξαγόμενο τῆς μετρήσεως παριστάνεται μέ τή σχέση:

$$\boxed{\frac{M}{M_1} = \alpha \qquad \Rightarrow M = \alpha \, . \, M_1}$$

Ἡ ἔκφραση $\alpha \, . \, M_1$ εἶναι τό μέτρο τοῦ μεγέθους M.

Π.χ.: Γιά νά μετρήσομε τό μῆκος M τῆς δοκοῦ A, συγκρίνομε τό μῆκος αὐτό πρός τό μῆκος m ἑνός μέτρου. Ἔστω πώς βρίσκομε ὅτι τό μῆκος M τῆς δοκοῦ A εἶναι τετραπλάσιο ἀπό τό μῆκος m τοῦ ἑνός μέτρου. Τότε λέμε ὅτι τό μέτρο τοῦ μήκους M τῆς δοκοῦ A εἶναι 4 m.

Ὁ ἀριθμός 4 εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μεγέθους πού μετρᾶμε, δηλαδή τοῦ μήκους M τῆς δοκοῦ A, καί τό m (= ἕνα μέτρο) εἶναι ἡ μονάδα μετρήσεως. Ἔτσι ἔχομε τή σχέση:

$$\frac{M}{m} = 4 \qquad \Rightarrow M = 4m$$

Σημείωση:

Μεταξύ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν ἑνός φαινομένου ὑπάρχει μία ἤ περισσότερες σχέσεις πού τά συνδέει. Π.χ. κατά τήν πτώση ἑνός σώματος ἡ ταχύτητά του εἶναι ἀνάλογη μέ τό χρόνο πτώσεώς του, ἐνῶ τό διάστημα πού πέφτει εἶναι ἀνάλογα μέ τό τετράγωνο τοῦ χρόνου.

0.4 Μέθοδοι τῆς Φυσικῆς.

Οἱ φυσικοί, ὅταν κάνουν ἔρευνα, χρησιμοποιοῦν τά ἀκόλουθα:

α) Παρατήρηση — Πείραμα.

Ὅταν λέμε παρατήρηση ἐννοοῦμε τήν παρακολούθηση καί μελέτη ἑνός φαινομένου ἀκριβῶς ὅπως γίνεται στή φύση*.

Μειονεκτήματα τῆς παρατηρήσεως.

α) ***Τά συμπεράσματα,*** στά ὁποῖα καταλήγομε μέ τήν παρατήρηση ἑνός φαινομένου, ***δέν εἶναι πάντοτε ἀσφαλή,*** γιατί στή φύση τό φαινόμενο πού παρατηροῦμε δέν γίνεται σχεδόν ποτέ μεμονωμένο, ἀλλά συνοδεύεται καί ἀπό ἄλλα φαινόμενα.

β) ***Ἡ διάρκεια ἑνός φαινομένου στή φύση εἶναι συνήθως μικρή,*** πράγμα πού δέν ἐπιτρέπει τήν ἄνετη μελέτη του μέ τήν παρατήρηση. Ἡ πτώση π.χ. ἑνός μήλου ἀπό τή μηλιά εἶναι πολύ γρήγορη ὥστε δέν προλαβαίνομε νά μελετήσομε τό φαινόμενο τῆς πτώσεώς του.

γ) ***Ἡ ἐπανάληψη ἑνός φαινομένου στή φύση δέν εἶναι συχνή οὔτε συμβαίνει ὅποτε ἐμεῖς τή θέλομε.*** Ἔτσι ἕνας μελετητής πού θέλει νά μελετήσει τό φαινόμενο τῆς πτώσεως δέν μπορεῖ νά περιμένει πότε θά πέσει ἕνα μῆλο ἀπό τή μηλιά.

Ἐπειδή ἡ παρατήρηση ἑνός φαινομένου πού συμβαίνει στή φύση ἔχει τά μειονεκτήματα πού ἀναφέραμε, οἱ ἐρευνητές ἐφαρμόζουν τό πείραμα γιά τή μελέτη τοῦ φαινομένου.

Ὅταν λέμε πείραμα, ἐννοοῦμε τήν τεχνητή δημιουργία ἑνός φαινομένου εἴτε ὅπως πράγματι αὐτό συμβαίνει στή φύση εἴτε μέ διαφορετικές συνθῆκες πού τίς ρυθμίζομε ἐμεῖς**.

Τό πείραμα μᾶς βοηθᾶ νά μελετᾶμε ἀνετότερα καί λεπτομερέστερα ἕνα φαινόμενο καί ἔτσι νά βγάζομε ἀσφαλέστερα συμπεράσματα πού μᾶς εἶναι χρήσιμα στήν ἐπιστήμη καί στήν τέχνη.

Γενικά μέ τό πείραμα ἐπιδιώκομε κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. Π.χ. νά βροῦμε τή σχέση πού συνδέει συγκεκριμένα μεγέθη ἑνός φαινομένου ἤ νά προσδιορίσομε τήν αἰτία πού τό παράγει. ***Πάντως πείραμα χωρίς συγκεκριμένο στόχο δέν ἔχει νόημα.***

---

* Ὅταν λέμε ὅτι μελετᾶμε ἕνα φαινόμενο σημαίνει ὅτι προσπαθοῦμε νά ἐξακριβώσομε τίς συνθῆκες μέ τίς ὁποῖες παρουσιάζεται τό φαινόμενο αὐτό, τήν αἰτία ἤ τίς αἰτίες πού τό προκαλοῦν καί τή σχέση ἤ τίς σχέσεις πού ὑπάρχουν μεταξύ τῶν μεγεθῶν πού ἐμφανίζονται κατά τήν ἐξέλιξή του.

** Πολλές φορές δημιουργοῦμε καί μελετᾶμε φαινόμενα πού δέν συμβαίνουν στή φύση, μέ σκοπό τά συμπεράσματα πού θά βγάλομε ἀπό αὐτά νά τά χρησιμοποιήσομε στήν ἐπιστήμη καί στήν τέχνη.

β) Φυσικό νόμο.

Ὅταν λέμε φυσικό νόμο ἑνός φαινομένου, ἐννοοῦμε κάθε σχέση πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν πού παρουσιάζονται κατά τήν ἐξέλιξη τοῦ φαινομένου αὐτοῦ.

Παράδειγμα.

Ἄν ἕλκομε ἕνα ἐλατήριο διαδοχικά καί μέ διαφορετική κάθε φορά δύναμη, τό ἐλατήριο αὐτό θά παθαίνει διαφορετική κάθε φορά ἐπιμήκυνση.

Στό παράδειγμα αὐτό ἡ ἐπιμήκυνση καί ἡ δύναμη πού τήν προκαλεῖ εἶναι δύο φυσικά μεγέθη τοῦ φαινομένου ***ἐπιμήκυνση ἐλατηρίου***. Μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο φυσικῶν μεγεθῶν ἔχει ἀποδειχθεῖ πειραματικά ὅτι ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέση: Ἡ ἐπιμήκυνση πού παθαίνει τό ἐλατήριο εἶναι ἀνάλογη τῆς δυνάμεως πού τήν προκαλεῖ.

Ἡ σχέση αὐτή εἶναι ὁ φυσικός νόμος τοῦ φαινομένου ***ἐπιμήκυνση ἐλατηρίου***.

Εὕρεση ἑνός φυσικοῦ νόμου.

Γιά νά βροῦμε ἕνα φυσικό νόμο ἑνός φαινομένου, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἔστω, ὅτι τά φυσικά μεγέθη πού ἐμφανίζονται κατά τήν ἐξέλιξη ἑνός φαινομένου εἶναι Α, Β, Γ, Δ, Ε καί θέλομε νά βροῦμε τό φυσικό νόμο (δηλαδή τή σχέση) μεταξύ τῶν μεγεθῶν, π.χ. Α καί Γ.

Κατά τή διάρκεια τοῦ φαινομένου κρατᾶμε τά μεγέθη Β, Δ, Ε σταθερά. Στό μέγεθος Γ δίνομε γνωστές τιμές καί μετρᾶμε μόνο τίς ἀντίστοιχες τιμές πού παίρνει τό μέγεθος Α. Ἔτσι βρίσκομε τό νόμο μεταξύ τῶν μεγεθῶν Α καί Γ.

Παράδειγμα α.

Παίρνομε μιά μάζα ἀερίου μέσα σέ κύλινδρο καί τή ζεσταίνομε. Τότε τά φυσικά μεγέθη τοῦ φαινομένου τῆς θερμάνσεως τοῦ ἀερίου εἶναι ἡ μάζα, ὁ ὄγκος, ἡ πίεση καί ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου.

Ἄν θέλομε νά βροῦμε τό νόμο πού ὑπάρχει μεταξύ τῆς πιέσεως καί τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀερίου, κρατᾶμε τή μάζα καί τόν ὄγκο τοῦ ἀερίου σταθερά, θερμαίνομε τό ἀέριο σέ ὁρισμένες θερμοκρασίες (πού τίς δείχνει ἕνα θερμόμετρο) καί μέ ἕνα μανόμετρο μετρᾶμε τίς ἀντίστοιχες πιέσεις τοῦ ἀερίου.

Παράδειγμα β.

Ἀφήνομε μιά σφαίρα νά κινηθεῖ ἐπάνω σέ κεκλιμένο ἐπίπεδο καί θέλομε νά βροῦμε τή σχέση (τό νόμο) πού ὑπάρχει μεταξύ τοῦ διαστήματος πού διατρέχει ἡ σφαίρα καί τοῦ χρόνου μέσα στόν ὁποῖο τό διατρέχει.

Μετρᾶμε τούς χρόνους t_1, t_2, t_3... καί τά διαστήματα s_1, s_2, s_3... πού διατρέχει ἡ σφαίρα στούς χρόνους αὐτούς ἀντίστοιχα καί ἔτσι βρίσκομε τό νόμο ὅτι: ***τά διαστήματα εἶναι ἀνάλογα πρός τά τετράγωνα τῶν χρόνων.***

(Ἄν $t_2 = 2t_1$ καί $t_3 = 3t_1$, τότε βρίσκομε: $s_2 = 4s_1$ καί $s_3 = 9s_1$).

Σημείωση:

α) Κάθε φυσικός νόμος ἑνός φαινομένου εἶναι συμπέρασμα ***πολλῶν παρατηρήσεων καί πειραμάτων.***

β) Τίς περισσότερες φορές τά συμπεράσματα πού προκύπτουν ἀπό τίς μετρήσεις τῶν φυσικῶν μεγεθῶν ἑνός φαινομένου μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν μέ μιά ἐξίσωση πού συνδέει τά μεγέθη αὐτά. Τότε ἡ ἐξίσωση αὐτή ἐκφράζει τό νόμο τοῦ φαινομένου.

Μεταξύ τῶν ὄγκων V_1, V_2, V_3... καί τῶν ἀντίστοιχων πιέσεων P_1, P_2, P_3... μιᾶς μάζας ἀερίου, πού ἔχει σταθερή θερμοκρασία, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$P_1V_1 = P_2V_2 = P_3V_3 = \text{σταθερό}$$

Ἡ σχέση αὐτή (0.1) ἐκφράζει τό φυσικό νόμο τοῦ φαινομένου ***μεταβολή τοῦ ὄγκου καί τῆς πιέσεως μιᾶς ὁρισμένης μάζας ἀερίου, ὅταν ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερή.***

Δηλαδή: Τό γινόμενο τῆς πιέσεως ἐπί τόν ὄγκο ὁρισμένης μάζας ἀερίου εἶναι σταθερό, ἐφόσον ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερή.

γ) Ἄν ξέρομε τούς φυσικούς νόμους ἑνός φαινομένου, μποροῦμε νά προβλέψομε τήν ἐξέλιξη τοῦ φαινομένου αὐτοῦ.

Ἄν ξέρομε τόν ὄγκο V_1 μιᾶς μάζας ἀερίου καί τήν πίεση P_1 πού ἔχει αὐτή ἡ μάζα ὅταν ὁ ὄγκος της εἶναι V_1, μποροῦμε νά ὑπολογίσομε (προβλέψομε) τήν πίεση P_2 πού θά ἔχει ἡ μάζα τοῦ ἀερίου, ὅταν ὁ ὄγκος του γίνει V_2, ἐνῶ ἡ θερμοκρασία του παραμένει ἡ ἴδια:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \qquad \text{καί} \qquad P_2 = \frac{P_1V_1}{V_2}$$

Σημείωση:

Δέν πρέπει νά μᾶς διαφεύγει ὅτι οἱ ἐξισώσεις (οἱ τύποι) τῆς Φυσικῆς ἐκφράζουν φυσικούς νόμους.

γ) Ὑπόθεση — Θεωρία.

Ὅταν λέμε ὑπόθεση, ἐννοοῦμε μιά πρόταση (ἀρχή) πού ἑρμηνεύει (δικαιολογεῖ) μιά ὁμάδα ὁμοειδῶν φαινομένων καί τήν παραδεχόμαστε (τήν ὑποθέτομε) ὡς σωστή.

Ὁ Νεύτων, π.χ., γιά νά ἑρμηνεύσει τό φαινόμενο τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων καί τό φαινόμενο τῆς περιστροφῆς τῶν πλανητῶν γύρω ἀπό τόν ἥλιο, διατύπωσε τήν πρόταση ὅτι:

Οἱ μάζες τῶν σωμάτων ἀλληλοέλκονται.

Ἡ πρόταση αὐτή γιά τήν ἐποχή ἐκείνη ἦταν μιά ὑπόθεση, γιατί:

α) Δέν ἐρχόταν σέ ἀντίθεση μέ τά ἀποτελέσματα τῶν πειραμάτων πού γίνονταν τότε, καί

β) Δέν εἶχε ἀκόμη ἀποδειχθεῖ μέ πειράματα ἡ ἀλήθειά της.

Γενικά, μιά ὑπόθεση θεωρεῖται σωστή, ἄν ἑρμηνεύει μιά ὁμάδα ὁμοειδῶν φαινομένων καί δέν ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τά ἀποτελέσματα τῶν πειραμάτων.

Ὅταν λέμε Θεωρία, ἐννοοῦμε μιά *ὑπόθεση* βάσει τῆς ὁποίας γίνονται πειράματα πού καταλήγουν σέ λογικά ἀποτελέσματα. Δηλαδή μιά ὑπόθεση πού ἐπιβεβαιώνεται ἀπό τά συμπεράσματα τῶν πειραμάτων.

Μιά ὑπόθεση παύει νά εἶναι ὑπόθεση καί γίνεται θεωρία ἀπό τή στιγμή πού ἐπιβεβαιώνεται ἀπό τά συμπεράσματα τῶν πειραμάτων.

Ἡ παραπάνω ὑπόθεση τοῦ Νεύτωνα ἔχει πάψει ἀπό πολύ καιρό τώρα νά εἶναι ὑπόθεση καί ἔχει πλέον γίνει θεωρία (θεωρία τοῦ πεδίου βαρύτητας), γιατί τά πειράματα πού ἔγιναν βάσει αὐτῆς κατέληξαν σέ λογικά ἀποτελέσματα.

Μιά θεωρία ἰσχύει, ἐφόσον ἐπιβεβαιώνεται πειραματικά ***γιά ὅλα τά φαινόμενα τῆς ὁμάδας στά ὁποῖα ἀναφέρεται.*** (Ὅταν ἔστω καί ἕνα φαινόμενο ἀπό αὐτά δέν ἐπιβεβαιώνεται πειραματικά, ἡ θεωρία καταρρίπτεται).

0.5 Θεμελιώδη καί παράγωγα μεγέθη. Θεμελιώδεις καί παράγωγες μονάδες.

Θεμελιώδη μεγέθη ὀνομάζονται ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ἡ μονάδα μετρήσεως ὁρίζεται αὐθαίρετα.

Θεμελιώδεις μονάδες ὀνομάζομε τίς μονάδες τῶν μεγεθῶν πού τίς ὁρίζομε αὐθαίρετα.

Παράγωγα μεγέθη ὀνομάζομε τά μεγέθη τῶν ὁποίων ἡ μονάδα δέν ὁρίζεται αὐθαίρετα.

Παράγωγες μονάδες ὀνομάζομε τίς μονάδες τῶν μεγεθῶν πού δέν ὁρίζομε αὐθαίρετα, ἀλλά τίς ὁρίζομε θέτοντας τίς μονάδες τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν στήν ἐξίσωση πού συνδέει τά μεγέθη αὐτά μέ τά θεμελιώδη μεγέθη.

Στήν ὁμαλή κίνηση π.χ. ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{\upsilon = \frac{S}{t}}$$

ὅπου: υ ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται ἕνα κινητό καί
S τό διάστημα πού διέτρεξε τό κινητό αὐτό σέ χρόνο t.

Ἡ ταχύτητα εἶναι παράγωγο μέγεθος, γιατί δέν ὁρίζομε αὐθαίρετα τή μονάδα μετρήσεώς του.

Ἀντίθετα, τό μέγεθος ***μῆκος*** (διάστημα S) καί τό μέγεθος ***χρόνος*** εἶναι θεμελιώδη μεγέθη, γιατί ὁρίζομε αὐθαίρετα τή μονάδα μετρήσεώς τους: π.χ. τό μέτρο (1m) γιά τό μῆκος καί τό δευτερόλεπτο (1s ἤ καί 1sec) γιά τό χρόνο.

Ἄν στήν ἐξίσωση (1) θέσομε: S = 1m καί t = 1s, τότε θά ἔχομε (= ὁρίζομε) τή μονάδα τοῦ μεγέθους ***ταχύτητα:***

$$\upsilon = \frac{S}{t} = \frac{1\,m}{1\,s} \qquad \text{δηλαδή} \qquad \upsilon = \frac{1\,m}{1\,s}$$

Ἡ μονάδα τῆς ταχύτητας 1m/1s εἶναι παράγωγη μονάδα, γιατί προέκυψε ὡς συνάρτηση τῶν θεμελιωδῶν μονάδων m καί s (sec).

0.6 Συστήματα μονάδων.

Σύστημα μονάδων ὀνομάζεται* ἕνα σύνολο ἀπό μονάδες φυσικῶν μεγεθῶν, ἀπό τίς ὁποῖες πολύ λίγες (3-6) ἔχουν ὁρισθεῖ αὐθαίρετα (θεμελιώδεις μονάδες) ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες ἔχουν ὁρισθεῖ ἀπό τίς ἐξισώσεις ὁρισμοῦ τῶν μεγεθῶν αὐτῶν.

---

* Τά φυσικά μεγέθη εἶναι πάρα πολλά. Γι' αὐτό, ἄν ὁρίζαμε αὐθαίρετα γιά κάθε μέγεθος τή μονάδα μετρήσεώς του, θά εἴχαμε πάρα πολλές μονάδες.

Γιά νά συνδέονται οἱ μονάδες τῶν διαφόρων μεγεθῶν μεταξύ τους, ἐπιλέγομε λίγα (3-6) μεγέθη, τῶν ὁποίων τίς μονάδες τίς ὁρίζομε αὐθαίρετα (Θεμελιώδη μεγέθη — Θεμελιώδεις μονάδες) καί τίς μονάδες τῶν ἄλλων μεγεθῶν τίς ὁρίζομε βάσει τῶν ἐξισώσεων ὁρισμοῦ τους (παράγωγα μεγέθη — παράγωγες μονάδες).

Χρησιμοποιοῦνται κυρίως δύο συστήματα μονάδων:

α) Τό Διεθνές Σύστημα μονάδων (S.I. — Systéme International, International System) καί

β) Τό Τεχνικό Σύστημα μονάδων (Τ.Σ.).

Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.).

— ***Τά θεμελιώδη μεγέθη στό διεθνές σύστημα μονάδων εἶναι τά ἑξῆς:***

1) Τό μῆκος (Longitudo — σύμβολο L)
2) Ἡ μάζα (Massa — σύμβολο M)
3) Ὁ χρόνος (Tempus — σύμβολο T)
4) Ἡ ἔνταση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος
5) Ἡ θερμοκρασία
6) Ἡ ἔνταση φωτεινῆς πηγῆς.

— ***Οἱ θεμελιώδεις μονάδες τους εἶναι ἀντίστοιχα:***

1) Τό μέτρο (mètre — σύμβολο m)
2) Τό χιλιόγραμμο (kilogram — σύμβολο kg ἤ kgr)
3) Τό δευτερόλεπτο (second — σύμβολο s ἤ sec)
4) Τό Ἀμπέρ (A)
5) Ὁ βαθμός Κέλβιν (^{o}K)
6) Ἡ candela (cd).

Σημείωση:

α) Στή μηχανική χρησιμοποιεῖται τό σύστημα μονάδων M.K.S., στό ὁποῖο τά θεμελιώδη μεγέθη εἶναι: Τό μῆκος, ἡ μάζα καί ὁ χρόνος, μέ ἀντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες: τό μέτρο (1m), τό χιλιόγραμμο (1kg) καί τό δευτερόλεπτο (1sec). Δηλαδή τό M.K.S. ἀποτελεῖ μέρος τοῦ S.I.
Τό σύστημα μονάδων M.K.S. ὀνομαζόταν καί σύστημα Giorgi.

β) Παλαιότερα χρησιμοποιοῦσαν πολύ καί τό σύστημα C.G.S. ὅπου θεμελιώδη μεγέθη εἶναι: Τό μῆκος, ἡ μάζα καί ὁ χρόνος, μέ ἀντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες.
   1) Τό ἑκατοστόμετρο (centimètre — σύμβολο cm)
   2) Τό γραμμάριο (gram — σύμβολο g ἤ gr)
   3) Τό δευτερόλεπτο (second — σύμβολο s ἤ sec).

γ) Τό σύστημα C.G.S. καί τό σύστημα M.K.S. (πού εἶναι μέρος τοῦ S.I.) ἔχουν τά ἴδια θεμελιώδη μεγέθη, ἀλλά οἱ μονάδες τους εἶναι διαφορετικές.

δ) Ἡ ὀνομασία C.G.S. καί M.K.S. προέρχεται ἀπό τά ἀρχικά τῶν θεμελιωδῶν μονάδων τους: cm, g, sec καί m, kg, sec.

Τεχνικό σύστημα μονάδων (Τ.Σ.).

— ***Τά θεμελιώδη μεγέθη στό τεχνικό σύστημα μονάδων εἶναι τά ἑξῆς:***

1) Τό μῆκος (L)
2) Ἡ δύναμη (F)
3) Ὁ χρόνος (t).

— ***Οἱ ἀντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες εἶναι:***

1) Τό μέτρο (m)

2) Τό κιλοπόντ (kilopond — σύμβολο: kp)
3) Τό δευτερόλεπτο (s).

0.7 Ἄνυσμα (ἤ διάνυσμα).

Ὁρισμός — Χαρακτηριστικά στοιχεῖα.

Ἄνυσμα (ἤ διάνυσμα) ὀνομάζεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, πού στό ἕνα του ἄκρο ἔχει βέλος καί συμβολίζεται $\vec{AB}$ (σχ. 0.7α).

Σχ. 0.7α.

Τά χαρακτηριστικά στοιχεῖα ἑνός ἀνύσματος (δηλαδή τά στοιχεῖα πού πρέπει νά γνωρίζομε γιά νά καθορίζομε ἕνα διάνυσμα) εἶναι τά ἑξῆς:

1) Ἡ ἀρχή καί τό τέλος τοῦ ἀνύσματος. Τό σημεῖο Α εἶναι ἡ ἀρχή τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$, καί τό σημεῖο Β εἶναι τό τέλος του.

2) Ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος. Διεύθυνση ἀνύσματος εἶναι ἡ εὐθεία, ἕνα τμῆμα τῆς ὁποίας εἶναι τό ἄνυσμα αὐτό. Ἡ διεύθυνση π.χ. τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ εἶναι ἡ εὐθεία x′x*.

3) Ἡ φορά τοῦ ἀνύσματος εἶναι ἡ κατεύθυνση ἀπό τήν ἀρχή πρός τό τέλος του καί ὑποδεικνύεται ἀπό τό βέλος. Ἡ φορά π.χ. τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ εἶναι ἀπό τό Α πρός τό Β.

4) Τό μέτρο τοῦ ἀνύσματος εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή του καί ἡ μονάδα μέ τήν ὁποία τό μετρήσαμε. Ὅταν, π.χ., ποῦμε ὅτι τό μέτρο τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ εἶναι $(AB) = 4$ cm, σημαίνει ὅτι τό μῆκος τοῦ $\vec{AB}$ εἶναι 4 φορές μεγαλύτερο ἀπό τό μῆκος τοῦ ἀνύσματος $\vec{A'B'}$ πού εἶναι 1 cm. Στήν περίπτωση αὐτή τό 4 εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ καί τό 1 cm εἶναι ἡ μονάδα μέ τήν ὁποία μετρήθηκε τό μῆκος τοῦ $\vec{AB}$**.

Ἀνύσματα παράλληλα, συγγραμμικά, ἴσα, ἀντίθετα.

α) Παράλληλα ἀνύσματα ὀνομάζονται ἐκεῖνα τά ὁποῖα εἶναι τμήματα παράλληλων εὐθειῶν. Π.χ. τά $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ καί $\vec{EZ}$ εἶναι παράλληλα ἀνύσματα, ἀφοῦ εἶναι τμήματα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν x_1, x_2, x_1' x_2'

---

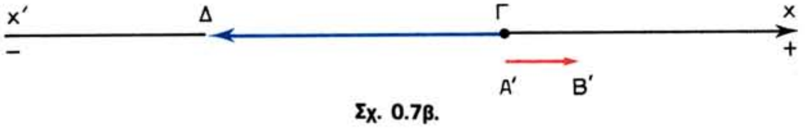
* Φορέας ἑνός ἀνύσματος $\vec{AB}$ ὀνομάζεται ἡ εὐθεία x′x, τῆς ὁποίας ἕνα τμῆμα εἶναι τό ἄνυσμα $\vec{AB}$.

** Ὅταν τό ἄνυσμα βρίσκεται ἐπάνω σέ ἄξονα (δηλαδή ἐπάνω σέ εὐθεία τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθεῖ ἡ θετική καί ἡ ἀρνητική φορά), τότε ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος εἶναι: θετικός ἀριθμός, ὅταν ἡ φορά του συμπίπτει μέ τή θετική φορά τοῦ ἄξονα, ἤ ἀρνητικός ἀριθμός, ὅταν ἡ φορά του εἶναι ἀντίθετη.

Αὐτό συμβαίνει, γιατί τό ἄνυσμα $\vec{A'B'}$ τό ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε γιά τή μέτρηση τῶν ἀνυσμάτων, δηλαδή τό ***μοναδιαῖο,*** ὅπως τό ὀνομάζομε, τό λαμβάνομε ***πάντοτε θετικό.***

Τό ἄνυσμα $\vec{AB}$ (σχ. 0.7α) ἔχει μέτρο: $\dfrac{AB}{A'B'} = 4$ cm, ἐνῶ

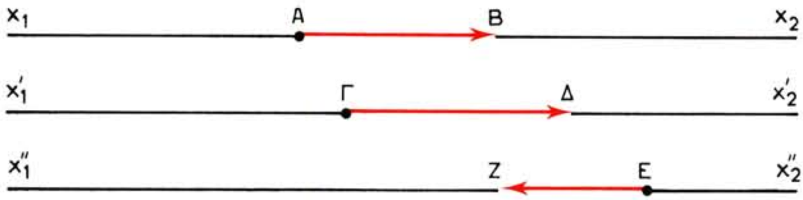
Τό ἄνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ (σχ. 0.7β) ἔχει μέτρο: $\dfrac{\Gamma\Delta}{A'B'} = -4$ cm



Σχ. 0.7β.

καί x_1'' x_2'' (σχ. 0.7γ).

Τά παράλληλα ἀνύσματα ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, γιατί, ὅπως ξέρομε, οἱ παράλληλες εὐθεῖες ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση.



Σχ. 0.7γ.

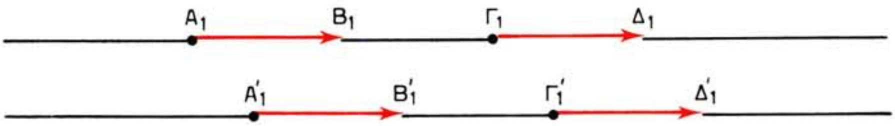
Τά παράλληλα ἀνύσματα, π.χ. $\vec{AB}$ καί $\vec{\Gamma\Delta}$, πού ἔχουν τήν ἴδια φορά ὀνομάζονται ὁμόρροπα, ἐνῶ ἐκεῖνα πού ἔχουν ἀντίθετη φορά, π.χ. τά $\vec{AB}$ καί $\vec{EZ}$, ὀνομάζονται ἀντίρροπα.

β) Συγγραμμικά ἀνύσματα ὀνομάζονται ἐκεῖνα πού εἶναι τμήματα τῆς ἴδιας εὐθείας (σχ. 0.7δ).

Τά συγγραμμικά ἀνύσματα, π.χ. $\vec{A'B'}$ καί $\vec{\Gamma'\Delta'}$, πού ἔχουν τήν ἴδια φορά ὀνομάζονται ***ὁμόρροπα,*** ἐνῶ ἐκεῖνα πού ἔχουν ἀντίθετη φορά, π.χ. $\vec{A'B'}$ καί $\vec{E'Z'}$, ὀνομάζονται ***ἀντίρροπα.***

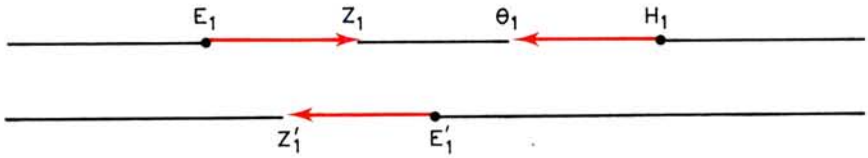
Σχ. 0.7δ.

γ) Ἴσα ἤ Ισοδύναμα ὀνομάζονται τά ἀνύσματα, π.χ. $\vec{A_1B_1}$, $\vec{\Gamma_1\Delta_1}$, $\vec{A_1'B_1'}$ καί $\vec{\Gamma_1'\Delta_1'}$ (σχ. 0.7ε), πού ἔχουν: τήν ἴδια διεύθυνση (παράλληλα-συγγραμμικά), τήν ἴδια φορά (ὁμόρροπα) καί τό ἴδιο μέτρο.



Σχ. 0.7ε.

δ) Ἀντίθετα ὀνομάζονται ἀνύσματα μέ τήν ἴδια διεύθυνση (παράλληλα-συγγραμμικά), τό ἴδιο μέτρο, ἀλλά ἀντίθετη φορά ***(ἀντίρροπα),*** π.χ. τό $\vec{E_1Z_1}$ εἶναι ἀντίθετο τοῦ $\vec{H_1\Theta_1}$ καί $\vec{E_1'Z_1'}$ (σχ. 0.7στ).



Σχ. 0.7στ.

Πρόσθεση (ἤ σύνθεση) ἀνυσμάτων.

Α) Πρόσθεση δύο ἀνυσμάτων.

Γιά νά συνθέσομε (προσθέσομε) τά ἀνύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{\Gamma\Delta}$ (σχ. 0.7ζ), δηλαδή γιά νά βροῦμε τό ἀνυσματικό ἄθροισμά τους, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

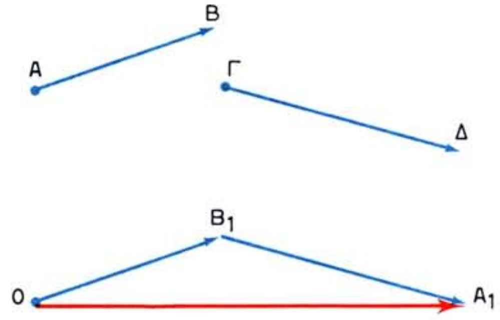
1) Ἀπό ἕνα τυχαῖο σημεῖο Ο (σχ. 0.7ζ) γράφομε τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OB_1}$, ἴσο μέ τό $\overrightarrow{AB}$.

2) Ἀπό τό σημεῖο (B_1), γράφομε τό ἄνυσμα $\overrightarrow{B_1A_1}$ ἴσο μέ τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

3) Γράφομε, τέλος, καί τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$.

Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$ εἶναι τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Εἶναι δηλαδή: $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$ λέγεται ***συνισταμένη*** τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἐνῶ τά ἀνύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ***συνιστῶσες*** τοῦ OA_1.



Σχ. 0.7ζ.

Μέθοδος τοῦ παραλληλογράμμου.

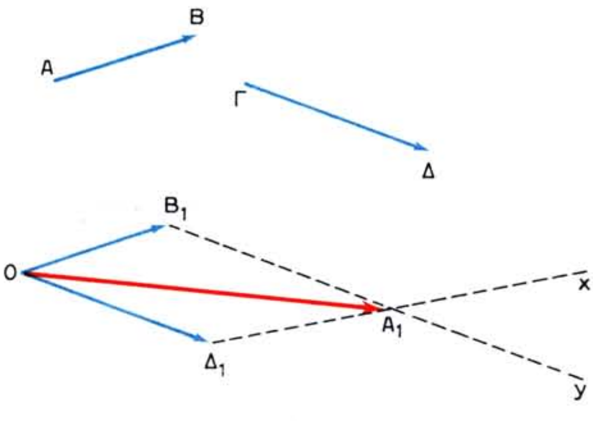
Τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ βρίσκεται καί μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο (σχ. 0.7η).

1) Ἀπό τυχαῖο σημεῖο Ο γράφομε: α) τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OB_1}$ ἴσο μέ $\overrightarrow{AB}$ καί β) τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O\Delta_1}$ ἴσο μέ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

2) Ἀπό τό Δ_1 φέρνομε τή Δ_1x παράλληλη πρός τό $\overrightarrow{OB_1}$.

3) Ἀπό τό B_1 φέρνομε τήν B_1y παράλληλη πρός τό $O\Delta_1$.

4) Φέρνομε τό ἄνυσμα OA_1, ὅπου A_1 τό σημεῖο πού τέμνονται οἱ εὐθεῖες Δ_1x καί B_1y.



Σχ. 0.7η.

Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$ εἶναι ***ἡ συνισταμένη*** τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή τό γεωμετρικό ἄθροισμά τους: $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{O\Delta_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Ἄρα ἡ συνισταμένη OA_1 δύο ἀνυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἡ διαγώνιος ἑνός παραλληλογράμμου, τό

ὁποῖο ἔχει ὡς προσκείμενες πλευρές δύο ἀνύσματα τά ὁποῖα εἶναι παράλληλα καί ὁμόρροπα πρός τίς συνιστῶσες καί ἔχουν τά ἴδια μέτρα μέ τίς συνιστῶσες.

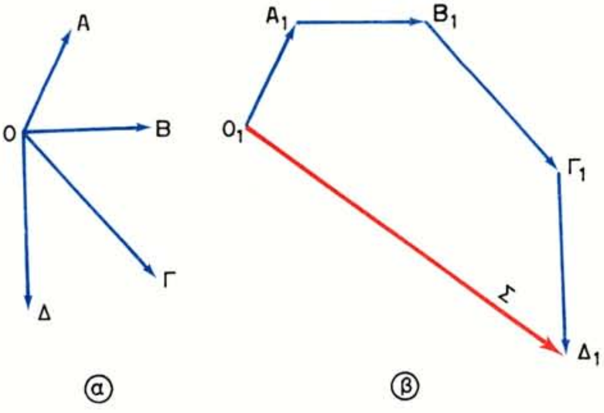
B) Πρόσθεση πολλῶν ἀνυσμάτων πού βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.

Μέθοδος τοῦ πολυγώνου.

Γιά νά προσθέσομε τά ἀνύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{O\Gamma}$ καί $\vec{O\Delta}$ [σχ. 0.7θ(α)], δηλαδή γιά νά βροῦμε τό ἀνυσματικό ἄθροισμά τους, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Ἀπό ἕνα τυχαῖο σημεῖο O_1 [σχ. 0.7θ (β)] γράφομε τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1A_1}$, παράλληλο καί ὁμόρροπο πρός τό $\vec{OA}$ καί νά ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ αὐτό, δηλαδή τό $\overrightarrow{O_1A_1}$ νά εἶναι ἴσο μέ τό $\vec{OA}$.
2) Ἀπό τό σημεῖο A_1 γράφομε τό ἄνυσμα $\overrightarrow{A_1B_1}$, παράλληλο καί ὁμόρροπο πρός τό $\vec{OB}$ καί νά ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ αὐτό, δηλαδή τό $\overrightarrow{A_1B_1}$ νά εἶναι ἴσο μέ τό $\vec{OB}$.
3) Ἀπό τό σημεῖο B_1 γράφομε τό ἄνυσμα $\overrightarrow{B_1\Gamma_1}$, παράλληλο καί ὁμόρροπο πρός τό $\vec{O\Gamma}$ καί νά ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ αὐτό, δηλαδή τό $\overrightarrow{B_1\Gamma_1}$ νά εἶναι ἴσο μέ τό $\vec{O\Gamma}$.
4) Ἀπό τό σημεῖο Γ_1 γράφομε τό ἄνυσμα $\overrightarrow{\Gamma_1\Delta_1}$, παράλληλο καί ὁμόρροπο πρός τό $\vec{O\Delta}$ καί νά ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ αὐτό, δηλαδή τό $\overrightarrow{\Gamma_1\Delta_1}$ νά εἶναι ἴσο μέ τό $\vec{O\Delta}$.

Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O\Delta_1}$ εἶναι ***τό ἀνυσματικό ἄθροισμα ἤ ἡ συνισταμένη*** τῶν ἀνυσμάτων $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{O\Gamma}$ καί $\vec{O\Delta}$.



Σχ. 0.7θ.

Ἡ μέθοδος αὐτή, μέ τήν ὁποία βρίσκομε τή συνισταμένη πολλῶν ἀνυσμάτων, λέγεται ***μέθοδος τοῦ πολυγώνου.*** Ἡ γραμμή $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ὀνομάζεται ***πολυγωνική γραμμή ἤ πολύγωνο*** τῶν ἀνυσμάτων $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{O\Gamma}$ καί $\vec{O\Delta}$*.

---

* 1) ***Διαδοχικά ἀνύσματα*** λέγονται τά ἀνύσματα στά ὁποῖα τό τέλος τοῦ ἑνός εἶναι ἡ ἀρχή τοῦ ἄλλου (σχ. 0.7ι).

Τά ἀνύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ καί $\vec{\Delta E}$ εἶναι διαδοχικά.

2) Ὅπως εἴδαμε, γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη πολλῶν ἀνυσμάτων μέ τή μέθοδο τοῦ πολυγώνου, ***κάνομε τά ἀνύσματα διαδοχικά*** καί, τότε, τό ἄνυσμα, πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου ἀνύσματος καί τέλος τό τέλος τοῦ τελευταίου ἀνύσματος, εἶναι ***ἡ συνισταμένη*** τῶν ἀνυσμάτων.

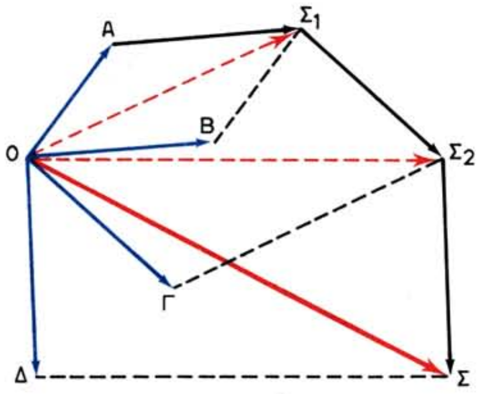
3) Ἄν τά διαδοχικά ἀνύσματα ἀποτελοῦν ***κλειστή*** πολυγωνική γραμμή, ἄν δηλαδή ἡ ἀρχή τοῦ πρώτου συμπίπτει μέ τό τέλος τοῦ τελευταίου, τότε ἡ συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων εἶναι ***μηδέν.***

Μέθοδος τοῦ παραλληλογράμμου.

Γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ καί $\overrightarrow{O\Delta}$ μέ τή μέθοδο τοῦ παραλληλογράμμου, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς (σχ. 0.7ια).

Βρίσκομε μέ τή μέθοδο τοῦ παραλληλογράμμου τή συνισταμένη $\overrightarrow{O\Sigma_1}$ τῶν $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$, κατόπιν τή συνισταμένη $\overrightarrow{O\Sigma_2}$ τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{O\Sigma_1}$ καί $\overrightarrow{O\Gamma}$ καί τέλος τή συνισταμένη $\overrightarrow{O\Sigma}$ τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{O\Sigma_2}$ καί $\overrightarrow{O\Delta}$.

Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O\Sigma}$ εἶναι ***ἡ συνισταμένη*** τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ καί $\overrightarrow{O\Delta}$.



Σχ. 0.7ι.

Γ) Πρόσθεση πολλῶν ἀνυσμάτων πού δέν βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.

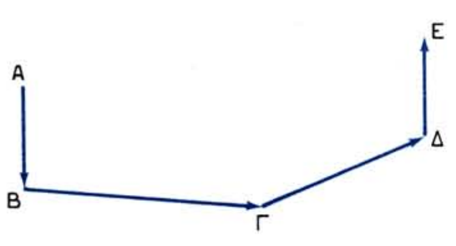
Ἄν τά ἀνύσματα δέν βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη τους, ἐργαζόμαστε ***ὅπως ἀκριβῶς θά ἐργαζόμασταν ἄν βρίσκονταν στό ἴδιο ἐπίπεδο.*** Κάνομε, δηλαδή, τά ἀνύσματα διαδοχικά καί διαπιστώνομε ὅτι ἡ συνισταμένη τους εἶναι τό ἄνυσμα πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου καί τέλος τό τέλος τοῦ τελευταίου ἀνύσματος.

Εἶναι εὐνόητο ὅτι ἡ πολυγωνική γραμμή δέν βρίσκεται ἐπάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο (εἶναι στρεβλή).

Ἀφαίρεση (ἤ διαφορά) ἀνυσμάτων.

Ὅταν λέμε ὅτι ἀφαιροῦμε τό διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ (ἀφαιρετέος) ἀπό τό διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ (μειωτέος), σημαίνει ὅτι πρέπει νά βροῦμε ἕνα τρίτο ἄνυσμα, τό ὁποῖο ἄν προστεθεῖ στό $\overrightarrow{OB}$, θά μᾶς δώσει τό $\overrightarrow{OA}$.

Γιά τήν ἀφαίρεση δύο ἀνυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς (σχ. 0.7ιβ).

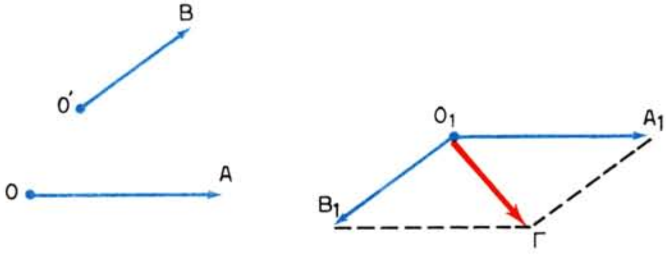


Σχ. 0.7ια.

1) Ἀπό ἕνα τυχαῖο σημεῖο O_1 (σχ. 0.7ιβ) γράφομε: α) τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1A_1}$ ἴσο πρός τό $\overrightarrow{OA}$ καί β) τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1B_1}$, ἀντίθετο πρός τό $\overrightarrow{O'B}$.

2) Βρίσκομε τή συνισταμένη $\overrightarrow{O_1\Gamma}$ τῶν δύο ἀνυσμάτων $\overrightarrow{O_1A_1}$ καί $\overrightarrow{O_1B_1}$, δηλαδή $\overrightarrow{O_1\Gamma} = \overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1}$.

Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1\Gamma}$ εἶναι ἡ γεωμετρική διαφορά τῶν δύο ἀνυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{O'B}$ δηλαδή $\overrightarrow{O_1\Gamma} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O'B}$ [γιατί, ἄν προσθέσομε στό $\overrightarrow{O_1B}$ $(\overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{O'B})$ τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1\Gamma}$, προκύπτει τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1A_1}$ $(\overrightarrow{O_1A_1} = \overrightarrow{OA})$].



Σχ. 0.7ιβ.

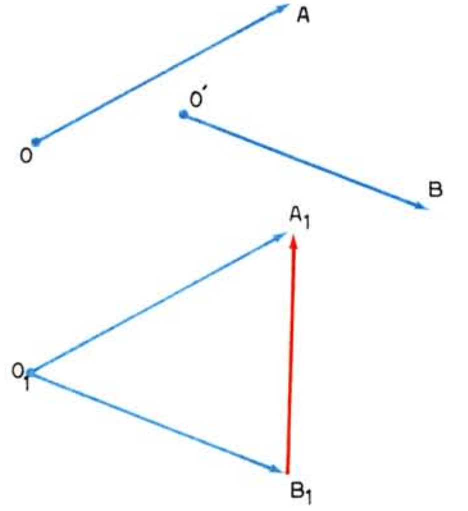
Γενικά, γιά νά βροῦμε τήν ἀνυσματική διαφορά ἑνός ἀνύσματος $\overrightarrow{O'B}$ ἀπό ἕνα ἄλλο ἄνυσμα $\overrightarrow{OA}$, προσθέτομε στό $\overrightarrow{OA}$ ἕνα ἄλλο διάνυσμα $\overrightarrow{O_1B_1}$, τό ὁποῖο εἶναι ἀντίθετο πρός τό $\overrightarrow{O'B}$. Ἡ συνισταμένη $\overrightarrow{O_1\Gamma}$ πού θά προκύψει ἀπό τήν πρόσθεση τῶν $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{O_1B_1}$ εἶναι ἡ διαφορά τῶν $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{O'B}$*.

* Τήν ἀνυσματική διαφορά τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{O'B}$ ἀπό τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OA}$ τή βρίσκομε καί μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο (σχ. 0.7ιγ).

1) Ἀπό ἕνα τυχαῖο σημεῖο O_1 γράφομε: α) Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1A_1}$, ἴσο πρός τό $\overrightarrow{OA}$ καί β) τό ἄνυσμα $\overrightarrow{O_1B_1}$ ἴσο πρός τό $\overrightarrow{O'B}$.

2) Ἀπό τό τέλος τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{O_1B_1}$ γράφομε τό ἄνυσμα $\overrightarrow{B_1A_1}$ (τό A_1 εἶναι τό τέλος τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{O_1A_1}$).

Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{B_1A_1}$ εἶναι ἡ ἀνυσματική διαφορά τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{O_1B_1}$ ἀπό τό $\overrightarrow{O_1A_1}$, ἐπειδή τό $\overrightarrow{B_1A_1}$, ἄν προστεθεῖ στό $\overrightarrow{O_1B_1}$, δίνει τό $\overrightarrow{O_1A_1}$. Ἄρα τό $\overrightarrow{B_1A_1}$ εἶναι ἡ ἀνυσματική διαφορά τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{O'B}$ ἀπό τό ἄνυσμα $\overrightarrow{OA}$, δηλαδή: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{O_1A_1} - \overrightarrow{O_1B_1} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O'B}$.



Σχ. 0.7ιγ.

Γινόμενο ἀνύσματος καί ἀριθμοῦ.

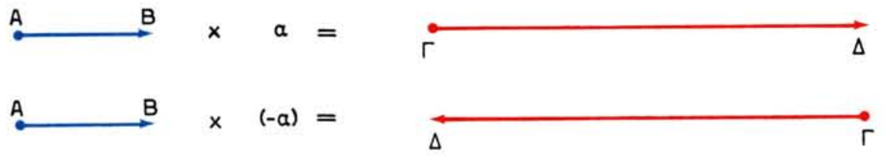
Ὅταν πολλαπλασιάσομε ἕνα ἄνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μέ ἕναν ἀριθμό (α) (σχ. 0.7ιδ) τότε προκύπτει ἄλλο ἄνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τό ὁποῖο ἔχει:

α) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

β) ***Φορά,*** τή φορά τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἄν ὁ ἀριθμός (α) εἶναι θετικός, ἤ ἀντίθετη φορά, ἄν ὁ ἀριθμός (α) εἶναι ἀρνητικός.

γ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ἐπί τόν ἀριθμό (α),

δηλαδή: $(\Gamma\Delta) = \alpha(AB)$ ἤ $(\Gamma\Delta) = -\alpha(AB)$



Σχ. 0.7ιδ.

Πηλίκο ἀνύσματος διά ἀριθμοῦ.

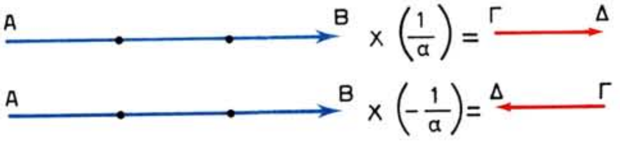
Ἄν διαιρέσομε ἕνα ἄνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 0.7ιε) μέ ἕναν ἀριθμό (α), τότε προκύπτει ἕνα ἄνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τό ὁποῖο ἔχει:

α) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

β) ***Φορά,*** τή φορά τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{AB}$, ἄν ὁ ἀριθμός (α) εἶναι θετικός, ἤ ἀντίθετη φορά, ἄν ὁ ἀριθμός (α) εἶναι ἀρνητικός.

γ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{AB}$ διά τοῦ ἀριθμοῦ (α),

δηλαδή: $\Gamma\Delta = \frac{1}{\alpha}\ (AB)$ ἤ $\Gamma\Delta = -\frac{1}{\alpha}\ (AB)$



Σχ. 0.7ιε.

Μέτρο καί διεύθυνση τῆς συνισταμένης δύο ἀνυσμάτων.

Ἄν ξέρομε τά μέτρα (ΟΑ) καί (ΟΒ) δύο ἀνυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ (σχ. 0.7ιστ) τή γωνία φ πού σχηματίζουν οἱ διευθύνσεις τους, τότε μποροῦμε νά βροῦμε τό μέτρο (Σ) τῆς συνισταμένης Σ τῶν δύο ἀνυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ καθώς καί τή διεύθυνσή της:

Τό μέτρο τῆς συνισταμένης τό βρίσκομε μέ τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,.\,(OB)\,.\,\text{συν}\varphi}}$$

ὅπου: Σ = τό μέτρο τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{O\Gamma}$, δηλαδή τῆς συνισταμένης τῶν ἀνυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$.

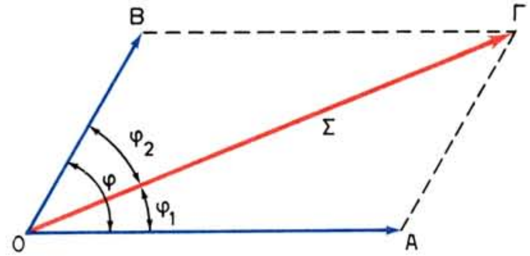
Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης προσδιορίζεται, ἄν εἶναι γνωστή μία ἀπό τίς γωνίες φ_1, φ_2. Τίς γωνίες φ_1, φ_2 τίς βρίσκομε ἀπό τίς ἐξισώσεις (1):

$$\boxed{\frac{(OA)}{\eta\mu\phi_2} = \frac{(OB)}{\eta\mu\phi_1} = \frac{\Sigma}{\eta\mu\phi}} \tag{1}$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) ἔχομε:

$$\eta\mu\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}\,\eta\mu\phi \tag{2}$$

$$\eta\mu\phi_2 = \frac{(OA)}{\Sigma}\,\eta\mu\phi \tag{3}$$



Σχ. 0.7ιστ.

Σχ. 0.7ιζ.

Εἰδικές περιπτώσεις.

1) Ἄν ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ δύο συνιστῶσες $\vec{OB}$ καί $\vec{OA}$ εἶναι μηδέν (σχ. 0.7ιζ), δηλαδή ἄν $\phi = 0$, τότε:

α) Οἱ συνιστῶσες ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά, τότε καί ἡ συνισταμένη $\vec{O\Gamma} = \vec{\Sigma}$ τῶν δύο συνιστωσῶν ἔχει ***διεύθυνση καί φορά τή διεύθυνση καί τή φορά τῶν συνιστωσῶν:***

$$\eta\mu\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}\,\eta\mu\phi \qquad \eta\mu\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}\,\eta\mu 0^\circ$$

$$\eta\mu\phi_1 = 0 \qquad \text{καί} \qquad \phi_1 = 0$$

β) Τό μέτρο τῆς συνισταμένης εἶναι:

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,.\,\text{συν}\phi}$$

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,.\,\text{συν}0^\circ}$$

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,.\,1}$$

$$\Sigma = \sqrt{[(OA) + (OB)]^2}$$

$$\boxed{\Sigma = (OA) + (OB)}$$

Δηλαδή: τό μέτρο τῆς συνισταμένης (Σ) εἶναι ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν.

2) Ἄν ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ δύο συνιστῶσες εἶναι 90° (σχ. 0.7ιη), δηλαδή $\phi = 90^\circ$, τότε:

α) Οἱ συνιστῶσες εἶναι κάθετες μεταξύ τους.

β) Τό μέτρο τῆς συνισταμένης εἶναι:

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,.\,\text{συν}\phi}$$

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,.\,\text{συν}90^\circ}$$

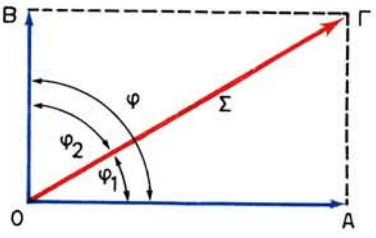
Καί ἐπειδή τό συν90° = 0, ἔχομε:

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,.\,0}$$

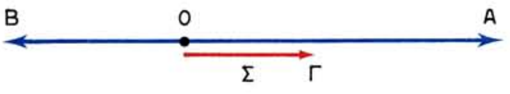
$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2}$$

γ) Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης εἶναι: $\text{ημ}\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}\,\text{ημ}\phi$ καί $\text{ημ}\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}\,\text{ημ}90^\circ$

Καί ἐπειδή τό ημ90° = 1, ἔχομε: $\text{ημ}\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}$



Σχ. 0.7ιη.



Σχ. 0.7ιθ.

3) Ἄν ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ δύο συνιστῶσες εἶναι 180° (σχ. 0.7ιθ), δηλαδή $\phi = 180^\circ$, τότε:

α) Οἱ συνιστῶσες ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση ἀλλά ἀντίθετη φορά,

β) Τό μέτρο τῆς συνισταμένης εἶναι:

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,\text{συν}\phi}$$

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)\,(OB)\,\text{συν}180^\circ}$$

Καί ἐπειδή συν180° = −1, ἔχομε:

$$\Sigma = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)\,(OB)}$$

$$\Sigma = \sqrt{[(OA) - (OB)]^2}$$

$$\boxed{\Sigma = (OA) - (OB)}$$

Δηλαδή: τό μέτρο τῆς συνισταμένης ἰσοῦται μέ τήν ἀλγεβρική διαφορά τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν.

γ) Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῶν συνιστωσῶν.

$$\text{ημ}\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}\,\text{ημ}\phi \qquad \text{καί} \qquad \text{ημ}\phi_1 = \frac{(OB)}{\Sigma}\,\text{ημ}\,180^\circ$$

Καί ἐπειδή ημ180° = 0, ἔχομε: $\text{ημ}\phi_1 = 0$ καί $\boxed{\phi_1 = 0}$

δ) Ἡ φορά τῆς συνισταμένης συμπίπτει μέ τή φορά τῆς συνιστώσας πού ἔχει μεγαλύτερο μέτρο.

Ἀνάλυση ἀνύσματος σέ δύο συνιστῶσες.

Ὅταν λέμε ὅτι ἀναλύομε ἕνα ἄνυσμα σέ δύο συνιστῶσες, τῶν ὁποίων οἱ διευθύνσεις εἶναι γνωστές, σημαίνει ὅτι βρίσκομε δύο ἀνύσματα πού ἔχουν συνισταμένη τό ἄνυσμα αὐτό.

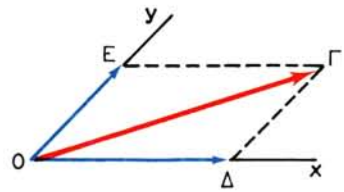
Ἔστω ὅτι θέλομε νά ἀναλύσομε τό ἄνυσμα ΟΓ σέ δύο συνιστῶσες (σχ. 0.7κ), τῶν ὁποίων οἱ διευθύνσεις εἶναι Οx καί Οy.

Ἀπό τό σημεῖο Γ, πού εἶναι τέλος τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{\text{Ο ξγ}}$, γράφομε:

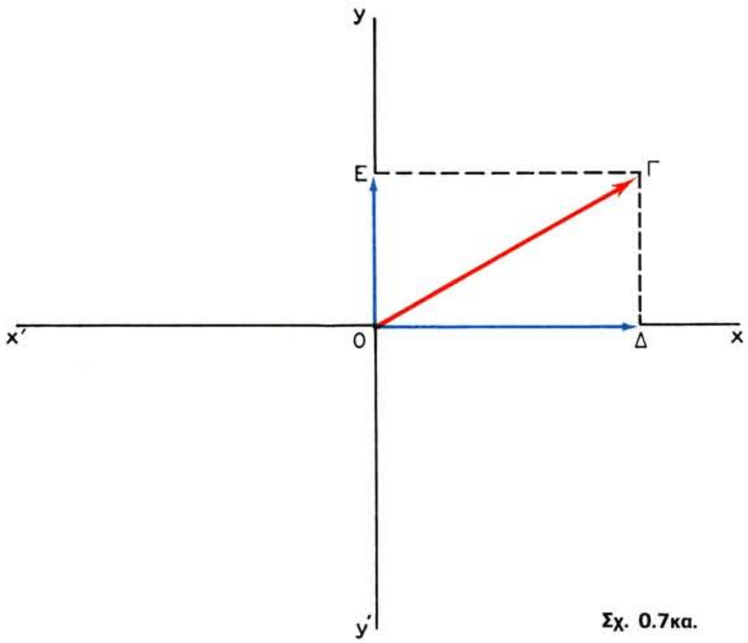
1) Τήν εὐθεία ΓΔ, πού νά εἶναι παράλληλη πρός τή διεύθυνση Οy καί τέμνει τή διεύθυνση Οx ἔστω στό σημεῖο Δ.

2) Τήν εὐθεία ΓΕ, πού νά εἶναι παράλληλη πρός τή διεύθυνση Οx καί τέμνει τή διεύθυνση Οy ἔστω στό σημεῖο Ε.

Τά ἀνύσματα $\overrightarrow{\text{ΟΕ}}$ καί $\overrightarrow{\text{ΟΔ}}$ εἶναι οἱ συνιστῶσες τοῦ $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}$, γιατί ἔχουν συνισταμένη τό $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}$.



Σχ. 0.7κ.



Σχ. 0.7κα.

Σημειώσεις:

1) Γιά νά ἀναλύσομε ἕνα ἄνυσμα σέ δύο συνιστῶσες, πρέπει νά μᾶς δίνονται οἱ διευθύνσεις τους.
2) Συνήθως οἱ δύο διευθύνσεις στίς ὁποῖες ἀναλύομε ἕνα ἄνυσμα σχηματίζουν ὀρθή γωνία, ὁπότε οἱ συνιστῶσες ὀνομάζονται ὀρθογώνιες συνιστῶσες (σχ. 0.7κα).

Οἱ ὀρθογώνιες συνιστῶσες τοῦ $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}$ εἶναι οἱ $\overrightarrow{\text{ΟΕ}}$ καί $\overrightarrow{\text{ΟΔ}}$.

0.8 Μονόμετρα καί ἀνυσματικά μεγέθη.

Γενικά.

Τά φυσικά μεγέθη διακρίνονται σέ μονόμετρα ἤ βαθμωτά ἤ ἀριθμητικά καί σέ ἀνυσματικά ἤ γεωμετρικά.

Μονόμετρο μέγεθος λέγεται τό μέγεθος πού μποροῦμε νά ὁρίσομε πλήρως μέ τό μέτρο του καί μόνο, δηλαδή μέ τήν ἀριθμητική τιμή του καί μέ τή μονάδα μετρήσεώς του.

Ἡ μάζα (m) ἑνός σώματος εἶναι ἕνα μονόμετρο μέγεθος, γιατί ἄν ποῦμε, π.χ., ὅτι ἡ μάζα του εἶναι $m = 4$ kg, ὁρίζομε πλήρως τό μέγεθος αὐτό.

Γιά τά μονόμετρα μεγέθη ἰσχύει ὁ ἀλγεβρικός λογισμός.

Ἀνυσματικό (ἤ διανυσματικό ἤ γεωμετρικό) μέγεθος ὀνομάζεται τό μέγεθος ἐκεῖνο, πού γιά νά τό ὁρίσομε πλήρως, ἀπαιτοῦνται τά ἑξῆς στοιχεῖα.

1) ***Τό μέτρο του,*** δηλαδή ἡ ἀριθμητική τιμή του καί ἡ μονάδα μετρήσεώς του.
2) ***Ἡ διεύθυνσή του*** ἤ ὁ φορέας του, δηλαδή ἡ εὐθεία κατά τήν ὁποία ***ἐνεργεῖ*** τό μέγεθος αὐτό.
3) ***Ἡ φορά του,*** δηλαδή ἡ κατεύθυνση κατά τήν ὁποία ***ἐνεργεῖ*** τό μέγεθος αὐτό.
4) ***Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς του,*** δηλαδή τό σημεῖο ὅπου ***ἐνεργεῖ*** τό μέγεθος αὐτό.

Ἡ ταχύτητα εἶναι ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος.

Ὅταν, π.χ., λέμε ὅτι ἕνα ἀεροπλάνο κινεῖται μέ ταχύτητα 900 kmh^{-1}, ὁριζοντίως καί πρός βορρά, προσδιορίζομε πλήρως τήν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου αὐτοῦ, γιατί δίνομε:

α) Τό μέτρο της: 900 kmh^{-1}, β) τή διεύθυνσή της: ὁριζοντίως καί γ) τή φορά της: πρός βορρά.

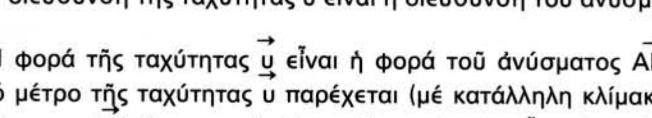
Γραφική παράσταση ἀνυσματικοῦ φυσικοῦ μεγέθους.

Κάθε ἀνυσματικό φυσικό μέγεθος παριστάνεται μέ ἕνα ἄνυσμα.

Ἡ ἀρχή, ἡ διεύθυνση καί ἡ φορά τοῦ ἀνύσματος, μέ τό ὁποῖο παριστάνομε τό ἀνυσματικό μέγεθος, φανερώνουν ἀντιστοίχως: ***τό σημεῖο ἐφαρμογῆς, τή διεύθυνση καί τή φορά τοῦ μεγέθους αὐτοῦ.***

Τό μῆκος τοῦ ἀνύσματος, μέ τό ὁποῖο παριστάνομε ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος, φανερώνει (μέ κατάλληλη κλίμακα) ***τό μέτρο τοῦ μεγέθους αὐτοῦ.***

Ὅταν, π.χ. λέμε ὅτι ἡ ταχύτητα υ ἑνός σώματος παριστάνεται μέ τό ἄνυσμα $\vec{AB}$, (σχ. 0.8α) ἐννοοῦμε ὅτι:



Σχ. 0.8α.

1) Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς ταχύτητας $\vec{υ}$ εἶναι ἡ ἀρχή τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$, δηλαδή τό A.

2) Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{υ}$ εἶναι ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$, δηλαδή ἡ (x′x).

3) Ἡ φορά τῆς ταχύτητας $\vec{υ}$ εἶναι ἡ φορά τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$.

4) Τό μέτρο τῆς ταχύτητας $\vec{υ}$ παρέχεται (μέ κατάλληλη κλίμακα) ἀπό τό μῆκος τοῦ ἀνύσματος AB. Ἄν π.χ., τό μέτρο τῆς ταχύτητας εἶναι 6 cm/sec καί δεχθοῦμε ὅτι τό μῆκος 1 cm παριστάνει ταχύτητα 2 cm/sec, τότε τό μῆκος τοῦ ἀνύσματος AB πού παριστάνει τήν ταχύτητα αὐτή πρέπει νά εἶναι 3 cm.

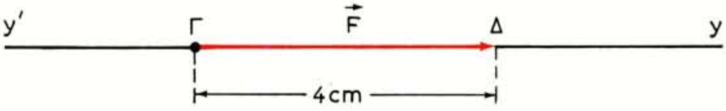
Ἄν τό ἄνυσμα ΓΔ (σχ. 0.8β) παριστάνει μιά δύναμη $\vec{F}$ καί κάθε ἑκατοστόμετρο τοῦ μήκους τοῦ ἀνύσματος παριστάνει δύναμη 3 kp, τότε ἔχομε:

α) Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι ἡ ἀρχή τοῦ ἀνύσματος $\vec{ΓΔ}$, δηλαδή τό Γ.

β) Ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\vec{ΓΔ}$, δηλαδή y΄y.

γ) Ἡ φορά τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι ἡ φορά τοῦ ἀνύσματος $\vec{ΓΔ}$, καί

δ) ἄν τό μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΓΔ εἶναι 4 cm, τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι 12 kp.



Σχ. 0.8β.

0.9 Γενική διάκριση τῶν φυσικῶν μεγεθῶν.

Τά φυσικά μεγέθη διακρίνονται σέ θεμελιώδη καί παράγωγα.

Τά θεμελιώδη καί παράγωγα φυσικά μεγέθη διακρίνονται σέ μονόμετρα καί ἀνυσματικά μεγέθη.

Δηλαδή ἕνα φυσικό μέγεθος θά εἶναι: Ἤ θεμελιῶδες καί μονόμετρο ἤ θεμελιῶδες καί ἀνυσματικό ἤ παράγωγο καί μονόμετρο ἤ παράγωγο καί ἀνυσματικό.

Ἡ μάζα ἑνός σώματος στό διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) εἶναι θεμελιῶδες καί μονόμετρο μέγεθος, ἐνῶ στό τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.) εἶναι παράγωγο καί μονόμετρο μέγεθος.

Ἡ δύναμη πού ἐνεργεῖ σέ ἕνα σῶμα ἤ ὑλικό σημεῖο στό τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.) εἶναι θεμελιῶδες καί ἀνυσματικό μέγεθος, ἐνῶ στό S.I. εἶναι παράγωγο καί ἀνυσματικό.

Ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται ἕνα σῶμα εἶναι παράγωγο καί ἀνυσματικό μέγεθος καί στά δύο συστήματα (Τ.Σ. καί S.I.).

0.10 Γραφικές παραστάσεις φαινομένου.

Ὁρισμός.

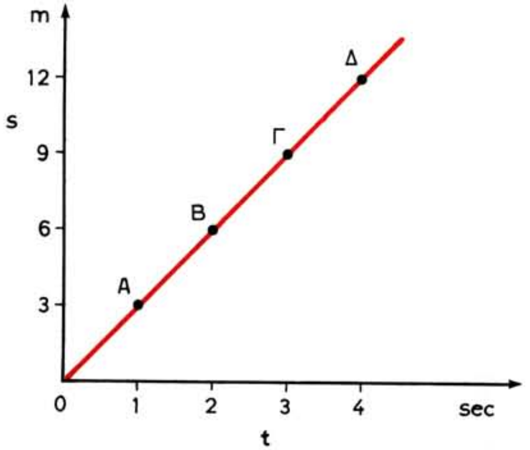
Μεταξύ τῶν τιμῶν τῶν φυσικῶν μεγεθῶν ἑνός φαινομένου ὑπάρχει συσχέτιση (ἀλληλοεξάρτηση). Δηλαδή: Οἱ τιμές πού παίρνει ἕνα φυσικό μέγεθος κατά τή διάρκεια ἑνός φαινομένου ἐξαρτῶνται ἀπό τίς ἀντίστοιχες τιμές πού παίρνουν τά ἄλλα φυσικά μεγέθη τοῦ φαινομένου. Τό διάστημα (φυσικό μέγεθος) πού θά τρέξει ἕνα αὐτοκίνητο (φαινόμενο κινήσεως) ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ταχύτητα (φυσικό μέγεθος) καί τό χρόνο (φυσικό μέγεθος) πού θά κινηθεῖ τό αὐτοκίνητο.

Οἱ τιμές πού παίρνει ἡ πίεση (φυσικό μέγεθος), ὅταν ζεσταίνομε (φαινόμενο θερμάνσεως) ἀέριο πού βρίσκεται σέ δοχεῖο, ἐξαρτῶνται ἀπό τίς τιμές πού παίρνει ἡ θερμοκρασία (φυσικό μέγεθος) τοῦ ἀερίου. Κατά τή διάρκεια ἑνός φαινομένου μεταβάλλονται συνήθως οἱ τιμές περισσότερων τῶν δύο φυσικῶν μεγεθῶν.

Συνήθως ὅμως γιά νά μελετήσομε ἕνα φαινόμενο βρίσκομε τήν ἀλληλοεξάρτηση (τή σχέση) τῶν τιμῶν ἀνά δύο μεγεθῶν του γιά ὁρισμένες τιμές τῶν ἄλλων μεγεθῶν του.

Ὅταν λέμε γραφική παράσταση ἑνός φαινομένου, ἐννοοῦμε τή γραμμή πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα, τά ὁποῖα ἔχουν ὡς συντεταγμένες τίς τιμές πού παίρνουν δύο φυσικά μεγέθη τοῦ φαινομένου, κατά τή διάρκεια τοῦ φαινομένου αὐτοῦ (συνήθως οἱ συντεταγμένες ἀναφέρονται σέ δύο ὀρθογώνιους ἄξονες).

Ἡ εὐθεία ΟΑΒΓΔ (σχ. 0.10α) εἶναι ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν μεγεθῶν τοῦ διαστήματος (S) καί τοῦ χρόνου (t) τοῦ φαινομένου τῆς κινήσεως ἑνός σώματος, τό ὁποῖο κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα 3 m/sec (κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλή).

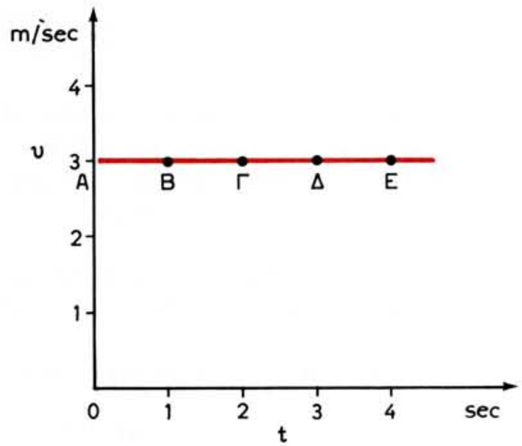


t_{sec}	s_m
1	3
2	6
3	9
4	12

Σχ. 0.10α.

Γιατί τό σῶμα, μέσα στούς χρόνους 1, 2, 3 καί 4 sec, διήνυσε τά διαστήματα 3, 6, 9 καί 12 m ἀντίστοιχα. Καί τά σημεῖα Ο, Α, Β, Γ, Δ τῆς εὐθείας ΟΑΒΓΔ ἔχουν συντεταγμένες Ο(0,0) Α(1,3), Β(2,6), Γ(3,9), Δ(4,12).

Ἡ εὐθεία ΑΕ (σχ. 0.10β) εἶναι ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ τῶν μεγεθῶν τοῦ χρόνου t καί τῆς ταχύτητας υ τοῦ φαινομένου τῆς κινήσεως ἑνός σώματος, πού κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα 3 m/sec.



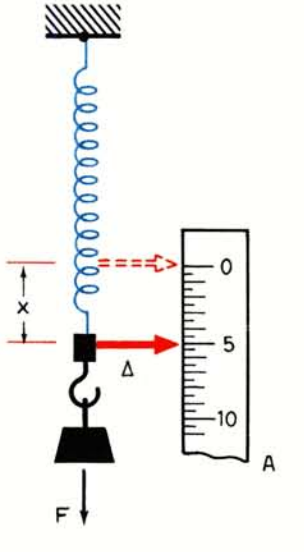
t_{sec}	$\upsilon_{m/sec}$
1	3
2	3
3	3
4	3

Σχ. 0.10β.

Γιατί τό σῶμα στούς χρόνους 1, 2, 3, 4 sec εἶχε ταχύτητα τήν ἴδια, 3 m/sec καί τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τῆς εὐθείας ΑΒΓΔΕ ἔχουν συντεταγμένες Α(0,3), Β(1,3), Γ(2,3), Δ(3,3) Ε(4,3).

Εὕρεση γραφικῆς παραστάσεως.

α) Ἔστω ὅτι θέλομε νά βροῦμε τή γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, μέ τήν ὁποία τεντώνομε ἕνα ἐλατήριο, καί τῆς ἐπιμηκύνσεως τήν ὁποία προκαλεῖ αὐτή ἡ δύναμη (σχ. 0.10γ).



Σχ. 0.10γ.

Γι' αὐτό ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Τοποθετοῦμε τήν κλίμακα Α σέ θέση τέτοια, πού ὁ δείκτης Δ νά δείχνει τό μηδέν της.

2) Ἐξαρτᾶμε ἀπό τό ἐλατήριο ἕνα βάρος, π.χ. $F_1 = 5$ p. Τότε τό ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται καί ὁ δείκτης δείχνει ἐπιμήκυνση, ἔστω, ἑνός ἑκατοστομέτρου ($x_1 = 1$ cm).

3) Ἀντικαθιστοῦμε τό βάρος τῶν 5 p μέ ἕνα ἄλλο βάρος, π.χ. $F_2 = 10$ p, καί ὁ δείκτης δείχνει τή νέα ἐπιμήκυνση $x_2 = 2$ cm.

Ἐξαρτᾶμε ἀπό τό ἐλατήριο διάφορα γνωστά βάρη καί παίρνομε ἀπό τήν κλίμακα τίς ἀντίστοιχες ἐπιμηκύνσεις, μέ τίς ὁποῖες φτιάχνομε τόν πίνακα (σχ. 0.10δ).

4) Παίρνομε δύο ἄξονες κάθετους μεταξύ τους (σχ. 0.10δ). Τόν ἕνα τόν ὀνομάζομε ἄξονα τῶν δυνάμεων (OF) καί τόν ἄλλο ἄξονα τῶν ἐπιμηκύνσεων (Ox).

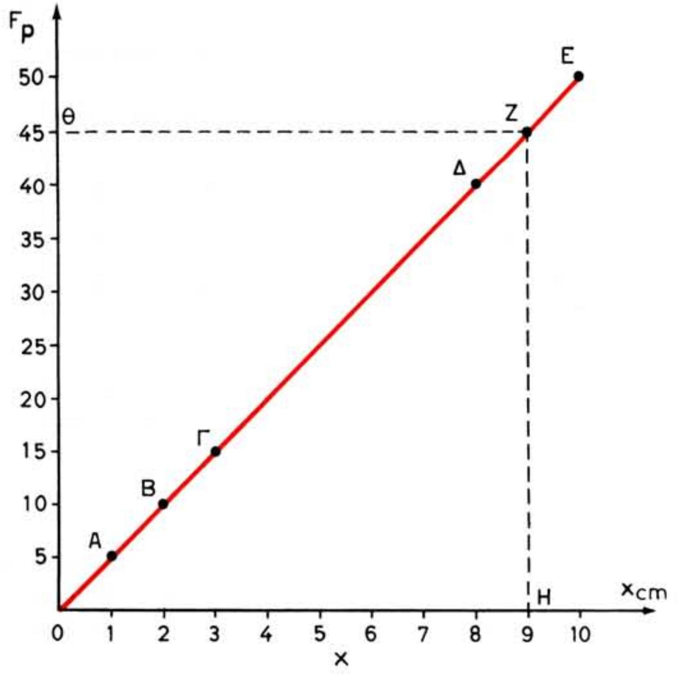
5) Χωρίζομε τόν κάθε ἄξονα σέ ἴσα μέρη.

6) Καθορίζομε μιά ὁρισμένη κλίμακα σέ κάθε ἄξονα. Π.χ. 1 cm τοῦ ἄξονα τῆς δυνάμεως νά ἀντιστοιχεῖ σέ δύναμη 5 p καί 1 cm τοῦ ἄξονα τῶν ἐπιμηκύνσεων νά ἀντιστοιχεῖ σέ ἐπιμήκυνση 1 cm.

7) Βρίσκομε στό ἐπίπεδο τῶν δύο ἀξόνων τά σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες τίς τιμές τοῦ πίνακα ἀνά δύο: Ο, Α, Β, Γ, Δ, Ε.

8) Ἑνώνομε τά σημεῖα Ο, Α, Β, Γ, Δ, Ε καί ἔχομε τή γραμμή ΟΑΒΓΔΕ.

Ἡ γραμμή ΟΑΒΓΔΕ εἶναι ἡ γραφική παράσταση πού θέλαμε νά βροῦμε.



F_p	x_{cm}
0	0
5	1
10	2
15	3
40	8
50	10

Σχ. 0.10δ.

β) Ἔστω ὅτι θέλομε νά βροῦμε τή γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ δύο φυσικῶν μεγεθῶν y καί x ἑνός φαινομένου, πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$y = 2 \cdot x^2 \qquad (1)$$

Γι' αὐτό ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Δίνομε στό x διαφορετικές τιμές καί ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ὑπολογίζομε τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ y καί φτιάχνομε τόν πίνακα (σχ. 0.10ε).

2) Παίρνομε δύο ἄξονες κάθετους μεταξύ τους (σχ. 0.10ε). Ἀπό αὐτούς, τόν ἕνα τόν ὀνομάζομε ἄξονα τοῦ μεγέθους x καί τόν ἄλλο ἄξονα τοῦ μεγέθους y.

3) Χωρίζομε τόν κάθε ἄξονα σέ ἴσα μέρη.

4) Καθορίζομε κλίμακα σέ κάθε ἄξονα. Π.χ. 1 cm τοῦ ἄξονα τοῦ μεγέθους x νά ἀντιστοιχεῖ σέ μιά μονάδα τοῦ x, καί 0,5 cm τοῦ ἄξονα τοῦ μεγέθους y νά ἀντιστοιχεῖ σέ 10 μονάδες τοῦ y.

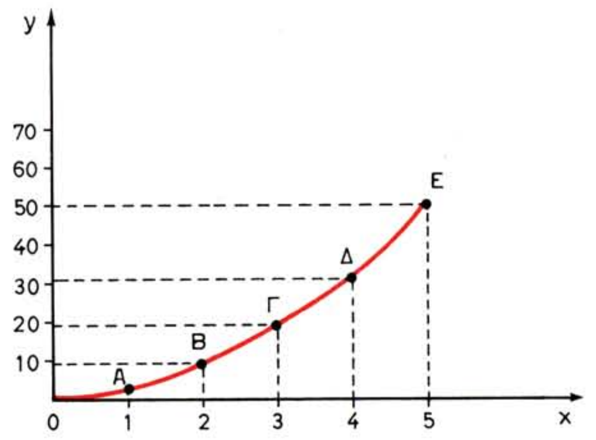
5) Βρίσκομε στό ἐπίπεδο τῶν δύο ἀξόνων τά σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες τίς τιμές τοῦ πίνακα.

6) Ἑνώνομε τά σημεῖα καί ἔχομε τή γραμμή ΟΑΒΓΔΕ.

Ἡ γραμμή ΟΑΒΓΔΕ εἶναι ἡ γραφική παράσταση.

Χρήση τῶν γραφικῶν παραστάσεων.

1) Μία γραφική παράσταση μᾶς δίνει σαφή εἰκόνα τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖο συμμεταβάλλονται τά μεγέθη της.



x	y
0	0
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50

Σχ. 0.10ε.

2) Ἄν γνωρίζομε τήν τιμή ἑνός ἀπό τά δύο μεγέθη, μποροῦμε ἀπό τή γραφική παράσταση νά βροῦμε τήν ἀντίστοιχη τιμή τοῦ ἄλλου μεγέθους. Π.χ. ἄν θέλομε νά βροῦμε ποιά δύναμη προκαλεῖ ἐπιμήκυνση 9 cm στό παράδειγμα τοῦ σχήματος 0.10δ, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Ἀπό τό σημεῖο Η(ΟΗ = 9 cm) τοῦ ἄξονα τῶν ἐπιμηκύνσεων x φέρνομε μιά παράλληλη εὐθεία πρός τόν ἄξονα τῶν δυνάμεων· ἔστω ὅτι ἡ εὐθεία αὐτή συναντᾶ τήν ΟΑΒΓΔΕ στό σημεῖο Ζ.

β) Ἀπό τό σημεῖο Ζ φέρνομε μιά παράλληλη εὐθεία πρός τόν ἄξονα x· ἔστω ὅτι ἡ εὐθεία αὐτή συναντᾶ τόν ἄξονα τῶν F στό σημεῖο Θ.

Ἡ δύναμη πού προκαλεῖ τήν ἐπιμήκυνση τῶν 9 cm εἶναι 45 p.

0.11 Κλάδοι τῆς Φυσικῆς — Μηχανική.

Γιά τήν καλύτερη κατανόηση τῆς ὕλης της καί κυρίως γιά τήν εὐκολότερη διδασκαλία της, ἡ Φυσική χωρίζεται στούς ἑξῆς κλάδους.

1) Μηχανική.
2) Ἀκουστική — Κυματική.
3) Θερμότητα.
4) Ὀπτική.
5) Μαγνητισμός — Ἠλεκτρισμός.
6) Ἀτομική καί Πυρηνική Φυσική.

Παρατήρηση:

Ἡ Μηχανική ***μελετᾶ*** τίς δυνάμεις καί τά ἀποτελέσματά τους καί ***χωρίζεται*** σέ:

α) Μηχανική τῶν στερεῶν καί

β) Μηχανική τῶν ρευστῶν.

Ἡ Μηχανική τῶν ***στερεῶν*** χωρίζεται στήν:

α) Κινητική, πού μελετᾶ τήν κίνηση τῶν σωμάτων,

β) Στατική, πού μελετᾶ τίς δυνάμεις καί τήν ἰσορροπία τους καί γ) Δυναμική, πού μελετᾶ τίς δυνάμεις σέ σχέση μέ τά ἀποτελέσματά τους.

Ἡ Μηχανική τῶν ***ρευστῶν*** χωρίζεται στήν:

α) Ὑδροστατική.

β) Ἀεροστατική.

γ) Ὑδροδυναμική — Ἀεροδυναμική.

Σημείωση:

Στό βιβλίο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ τή Μηχανική τῶν στερεῶν.

Ἡ Μηχανική τῶν στερεῶν εἶναι ὁ βασικότερος κλάδος τῆς Φυσικῆς, γιατί ἀσχολεῖται μέ ἔννοιες καί καταλήγει σέ νόμους, τῶν ὁποίων ἡ κατανόηση εἶναι ἀπαραίτητη προϋπόθεση γιά τήν κατανόηση τῆς ὕλης τῶν ἄλλων κλάδων της καί ὅλων τῶν τεχνῶν.

Γιά εὐκολότερη μελέτη τῆς Μηχανικῆς τῶν στερεῶν χωρίσαμε τό βιβλίο στά παρακάτω κεφάλαια:

1) Μηχανική τοῦ ὑλικοῦ σημείου, πού περιλαμβάνει:

α) Τήν Κινητική τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

β) Τή Στατική τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

γ) Τή Δυναμική τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

2) Μηχανική τοῦ στερεοῦ σώματος, ἡ ὁποία περιλαμβάνει:

α) Τήν Κινητική τοῦ στερεοῦ σώματος.

β) Τή Στατική τοῦ στερεοῦ σώματος.

γ) Τή Δυναμική τοῦ στερεοῦ σώματος.

3) Μηχανική τοῦ συστήματος στερεῶν σωμάτων, ἡ ὁποία περιλαμβάνει:

α) Τήν Κινητική τοῦ συστήματος στερεῶν σωμάτων.

β) Τή Στατική τοῦ συστήματος στερεῶν σωμάτων.

γ) Τή Δυναμική τοῦ συστήματος στερεῶν σωμάτων.

4) Εἰδικά θέματα.

α) Τριβή.

β) Ἐλαστικότητα.

γ) Ἔξοδος ἑνός σώματος ἀπό τό πεδίο βραύτητας τῆς γῆς.

δ) Ταλαντώσεις.

ε) Κίνηση ὑλικοῦ σημείου πού συνδέεται μέ ἐλατήριο.

στ) Ἰσοδυναμία μάζας καί ἐνέργειας.

ζ) Μεταβολή τῆς μάζας ἑνός σώματος μέ τήν ταχύτητά του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1.1 Ὑλικό σημεῖο — ἀπόλυτο στερεό σῶμα.

Ἕνα γεωμετρικό σημεῖο δέν ἔχει οὔτε ὄγκο οὔτε μάζα. Ἄν ὑποθέσομε ὅτι ἕνα γεωμετρικό σημεῖο ἔχει μάζα, τότε τό σημεῖο αὐτό τό ὀνομάζομε ***ὑλικό σημεῖο.***

Ἐπομένως, ὅταν λέμε ὑλικό σημεῖο, ἐννοοῦμε ἕνα γεωμετρικό σημεῖο, τό ὁποῖο ὅμως ὑποθέτομε ὅτι ἔχει μάζα.

Σέ πολλές περιπτώσεις θεωροῦμε ἕνα σῶμα ὡς ὑλικό σημεῖο, δηλαδή θεωροῦμε ὅλη τή μάζα τοῦ σώματος συγκεντρωμένη σέ ἕνα σημεῖο του.

Ἀπόλυτα στερεό σῶμα ὀνομάζεται ἐκεῖνο τό σῶμα, τό ὁποῖο δέν παραμορφώνεται ὁποιαδήποτε αἰτία καί ἄν ἐπιδράσει ἐπάνω του.

Τό ἀπόλυτα στερεό σῶμα* θεωροῦμε ὅτι ἀποτελεῖται ἀπό πολλά ὑλικά σημεῖα, τῶν ὁποίων οἱ ἀποστάσεις μεταξύ τους δέν μεταβάλλονται, ὁποιαδήποτε αἰτία καί ἄν ἐπιδράσει ἐπάνω στό σῶμα αὐτό. Ἔτσι τό σῶμα δέν παραμορφώνεται.

1.2 Κίνηση — Ἠρεμία — Κινητό.

Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα λέμε ὅτι κινεῖται ὡς πρός ἕνα ἄλλο ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα, ὅταν ἀλλάζει θέση ὡς πρός αὐτό. ***Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα λέμε ὅτι ἠρεμεῖ*** ὡς πρός ἕνα ἄλλο ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα, ὅταν ***δέν*** ἀλλάζει θέση ὡς πρός αὐτό.

Ἐπομένως, ὅταν λέμε ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα κινεῖται ἤ ἠρεμεῖ, πρέπει συγχρόνως νά λέμε ὡς πρός ποιό ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα κινεῖται ἤ ἠρεμεῖ.

Ἔτσι λέμε ὅτι ἕνα τραῖνο κινεῖται ὡς πρός τό κτίριο ἑνός σταθμοῦ, ὅταν ἀλλάζει θέση ὡς πρός αὐτό. Ἕνας ἐπιβάτης ὅμως, ὁ ὁποῖος βρίσκεται καθιστός μέσα στό τραῖνο λέμε ὅτι ἠρεμεῖ ὡς πρός τό τραῖνο, γιατί δέν ἀλλάζει θέση ὡς πρός αὐτό, ἀλλά κινεῖται ὡς πρός τό κτίριο τοῦ σταθμοῦ, γιατί ἀλλάζει θέση ὡς πρός αὐτό (μαζί μέ τό τραῖνο).

Ὥστε ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα μπορεῖ νά ἠρεμεῖ ὡς πρός ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα καί ταυτόχρονα νά κινεῖται ὡς πρός ἕνα ἄλλο ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα.

---

* Στήν πραγματικότητα δέν ὑπάρχει ἀπόλυτα στερεό σῶμα, γιατί ὅλα τά σώματα, ἄλλα λίγο καί ἄλλα περισσότερο, παραμορφώνονται ὅταν ἐπιδράσουν ἐπάνω τους δυνάμεις. Σέ πολλές ὅμως περιπτώσεις θεωροῦμε τά σώματα ὡς ἀπόλυτα στερεά γιά νά λύσομε διάφορα προβλήματα.

Τό ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα, ὡς πρός τό ὁποῖο ἀναφέρεται ἡ κίνηση ἤ ἡ ἠρεμία ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἤ σώματος, ὀνομάζεται ***σύστημα ἀναφορᾶς τῆς κινήσεώς του ἤ τῆς ἠρεμίας του.***

Παρατηρήσεις:

1) Ἡ κίνηση ἤ ἡ ἠρεμία ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἤ σώματος εἶναι ***σχετική,*** γιατί τό ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα κινεῖται ἤ ἠρεμεῖ ***σχετικά*** πρός ἕνα ἄλλο ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα (σχετικά πρός ἕνα ὁρισμένο σύστημα ἀναφορᾶς).
2) Ἀπόλυτη κίνηση ἤ ἠρεμία ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἤ σώματος, δηλαδή κίνηση ἤ ἠρεμία πού δέν *ἀναφέρεται* σέ ἕνα ἄλλο ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα — δηλαδή σέ ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς — ***δέν ἔχει νόημα.***
3) Συνήθως ἡ κίνηση ἤ ἡ ἠρεμία ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἀναφέρεται σέ ἕνα ἀκίνητο ὡς πρός τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς.

Κινητό: Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα, ὅταν κινεῖται ὡς πρός κάποιο σύστημα ἀναφορᾶς, τό ὀνομάζομε ***γενικά κινητό.***

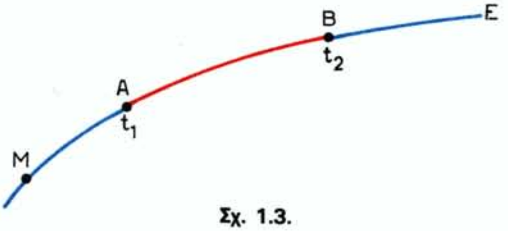
1.3 Τροχιά ὑλικοῦ σημείου — Διάστημα.

Ὅταν ἑνώσομε τίς διαδοχικές θέσεις πού παίρνει ἕνα ὑλικό σημεῖο καθώς κινεῖται, σχηματίζεται μιά γραμμή. Αὐτή τή γραμμή τήν ὀνομάζομε τροχιά τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὥστε, τροχιά ἑνός κινούμενου ὑλικοῦ σημείου ὀνομάζεται ἡ γραμμή πού σχηματίζεται ἄν ἑνώσομε τίς διαδοχικές θέσεις πού παίρνει τό ὑλικό σημεῖο κατά τήν κίνησή του.

Ἄν ἡ τροχιά τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι εὐθεία γραμμή, ἡ κίνηση ὀνομάζεται εὐθύγραμμη κίνηση. Ἄν ἡ τροχιά εἶναι καμπύλη, ἡ κίνηση ὀνομάζεται καμπυλόγραμμη (κυκλική, ἐλλειπτική, παραβολική κλπ.).

Ὑποθέτομε ὅτι ἕνα κινητό Μ κινεῖται σέ τροχιά Ε (σχ. 1.3) καί ὅτι κατά τίς χρονικές στιγμές t_1, t_2 διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α καί Β. Λέμε τότε ὅτι τό κινητό μέσα στό χρόνο $(t_2 - t_1)$ διήνυσε διάστημα ΑΒ. Τό σημεῖο Α τό ὀνομάζομε ἀρχή τοῦ διαστήματος ΑΒ.



Σχ. 1.3.

Γενικά, ***ὅταν μιλᾶμε γιά διάστημα πού διανύθηκε ἀπό κάποιο κινητό μέσα σέ ὁρισμένο χρόνο,*** ἐννοοῦμε τό τμῆμα ἐκεῖνο τῆς τροχιᾶς πού διήνυσε τό κινητό μέσα στόν ὁρισμένο αὐτό χρόνο.

Ἀρχή ἑνός διαστήματος πού διανύει τό κινητό σέ μιά χρονική διάρκεια ὀνομάζεται τό σημεῖο τῆς τροχιᾶς του ἐπάνω στό ὁποῖο βρισκόταν τό κινητό στήν ἀρχή τῆς χρονικῆς αὐτῆς διάρκειας.

1.4 Εὐθύγραμμη καί ὁμαλή κίνηση.

Ὁρισμός.

Εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ὀνομάζεται ἡ κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου ὅταν:

α) κινεῖται ἐπάνω σέ εὐθεία γραμμή (δηλαδή ἡ τροχιά εἶναι εὐθεία γραμμή),

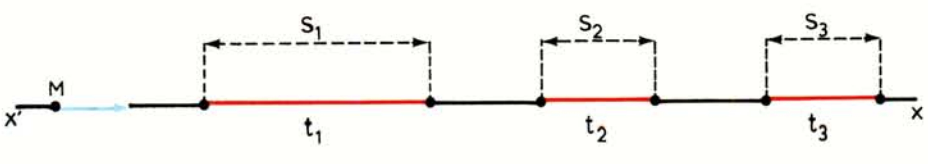
β) κινεῖται συνεχῶς πρός τήν ἴδια φορά, καί

γ) διανύει σέ ἴσους χρόνους ἴσα διαστήματα (δηλαδή τά διαστήματα πού διανύει εἶναι ἀνάλογα πρός τούς χρόνους στούς ὁποίους τά διανύει).

Π.χ. ἄν τό κινητό Μ (σχ. 1.4α) κινεῖται στήν εὐθεία x΄x μέ φορά συνεχῶς ἀπό τό x΄ πρός τό x καί διανύει σέ χρόνους t_1, t_2, t_3 τά διαστήματα S_1, S_2, S_3 ἀντίστοιχα, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\boxed{\frac{S_1}{t_1} = \frac{S_2}{t_2} = \frac{S_3}{t_3} = \text{σταθερό}}$$

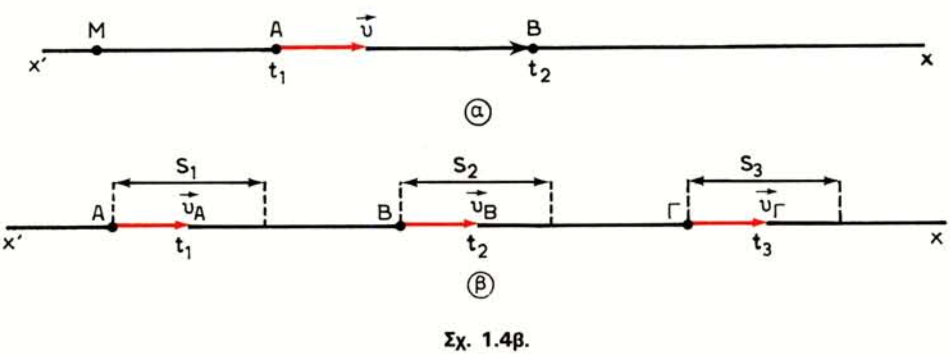
τότε λέμε ὅτι τό κινητό Μ κινεῖται μέ κίνηση ***εὐθύγραμμη ὁμαλή.***



Σχ. 1.4α.

Στιγμιαία ταχύτητα (ἤ ἁπλῶς: ταχύτητα) ὑλικοῦ σημείου πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση.

Ἔστω ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη ὁμαλή σέ τροχιά x_1x_2 καί ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t_1 διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Β [(σχ. 1.4β(α)].



Σχ. 1.4β.

Ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ στό σημεῖο Α κατά τή χρονική στιγμή t_1 ὀνομάζομε (ὁρίζομε) τό ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Ἀρχή,*** τό σημεῖο Α.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$, τό ὁποῖο παριστάνει τό διάστημα πού διέτρεξε τό ὑλικό σημεῖο Μ.

γ) ***Φορά,*** τή φορά τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$.

δ) ***Μέτρο,*** τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$, τό ὁποῖο παριστάνει τό διάστημα πού διέτρεξε τό ὑλικό σημεῖο, πρός τό χρόνο $(t_2 - t_1)$ κατά τόν ὁποῖο τό διέτρεξε, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{t_2 - t_1}} \quad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)} \qquad (1)$$

$$\left(u = \frac{(AB)}{t_2 - t_1}\right) \qquad (2)$$

Ἄν παραστήσομε $\vec{AB} = \vec{S}$ καί $t = t_2 - t_1$, τότε οἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) γράφονται:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{S}}{t}} \quad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)} \qquad (3)$$

$$\left(u = \frac{S}{t}\right) \qquad (4)$$

Παρατηρήσεις:

1) Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας εἶναι ἡ ἴδια σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς.
2) Ἡ φορά τῆς ταχύτητας εἶναι ἡ ἴδια σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς.
3) Τό μέτρο τῆς ταχύτητας εἶναι τό ἴδιο σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς. Δηλαδή ἰσχύει ἡ σχέση [σχ. 1.4β(β)]:

$$\boxed{u_A = u_B = u_\Gamma = \frac{S_1}{t_1} = \frac{S_2}{t_2} = \frac{S_3}{t_3}}$$

Ὅπου: S_1, S_2, S_3 εἶναι τά διαστήματα πού διανύει τό κινητό καί
t_1, t_2, t_3 εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι χρόνοι μέσα στούς ὁποίους τά διατρέχει.

4) Ἐπειδή ἡ ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος καί σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς διατηρεῖ τήν ἴδια διεύθυνση, τήν ἴδια φορά καί τό ἴδιο μέτρο, λέμε ***ὅτι στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἡ ταχύτητά του διατηρεῖται σταθερή σέ ὅλη τή διάρκεια τῆς κινήσεώς του.***

Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο. Δηλαδή:

Ἄν ἕνα κινητό κινεῖται μέ ταχύτητα σταθερή (σταθερή ὡς πρός τή διεύθυνση, τή φορά καί τό μέτρο), ***τότε τό κινητό κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη ὁμαλή.***

Ἐξίσωση τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως.

Τήν ταχύτητα στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση τήν ὁρίσαμε μέ τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{S}}{t}} \quad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)} \qquad (1)$$

$$\left(u = \frac{S}{t}\right) \qquad (2)$$

Ἄν λύσομε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός $\vec{S}$, θά προκύψει ἡ ἐξίσωση:

$$\vec{S} = \vec{u} \cdot t \qquad (3)$$

$$\boxed{(S = u \cdot t)}$$

Ἡ ἐξίσωση (3) ὀνομάζεται ἐξίσωση τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως.

Μέ τήν ἐξίσωση (3) μποροῦμε νά βροῦμε τό διάστημα S πού διανύει τό κινητό, ὅταν κινεῖται μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση, μέσα σέ χρόνο (t), ἄν ξέρομε τή σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$ μέ τήν ὁποία κινεῖται.

Νόμος τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως.

Ξέρομε ὅτι:

1) Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως εἶναι: $\vec{S} = \vec{u} \cdot t$ (1)

2) Στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση, τήν ἴδια φορά καί τό ἴδιο μέτρο, δηλαδή εἶναι μέγεθος σταθερό:

$$\vec{u} = \text{σταθερή} \qquad (2)$$

Οἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) ἐκφράζουν τό νόμο τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως πού ὁρίζει ὅτι:

Σέ κάθε εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση:

α) Ἡ ταχύτητα $\vec{u}$ τοῦ κινητοῦ εἶναι σταθερή ὡς πρός τή διεύθυνση, τή φορά καί τό μέτρο [σχέση (2)] καί

β) τά διαστήματα (S) πού διανύει τό κινητό εἶναι ἀνάλογα πρός τούς χρόνους πού τά διανύει [σχέση (1)].

Μονάδες ταχύτητας.

Σύστημα S.I. (Διεθνές Σύστημα).

Ἡ ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ταχύτητας εἶναι: $u = \dfrac{S}{t}$ (1)

Μονάδα μετρήσεως τοῦ διαστήματος στό S.I. εἶναι τό 1m, καί τοῦ χρόνου τό 1s. Ἄρα ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ταχύτητας στό S.I. εἶναι:

$$u = \frac{S}{t} = \frac{1\,m}{1\,s} = 1\ m/s \qquad \text{δηλαδή} \qquad u = 1\ m/s$$

Σύστημα Τ.Σ. (Τεχνικό Σύστημα).

Μονάδα μετρήσεως τοῦ διαστήματος στό Τ.Σ. εἶναι τό 1 m καί τοῦ χρόνου τό 1s. Ἄρα ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ταχύτητας στό Τ.Σ. εἶναι:

$$u = \frac{S}{t} = \frac{1\,m}{1\,s} = 1\ m/s \qquad \text{δηλαδή} \qquad u = 1\,m/s$$

Σύστημα C.G.S.

Μονάδα μετρήσεως τοῦ διαστήματος στό C.G.S. εἶναι τό 1cm καί τοῦ χρόνου τό 1s. Ἄρα ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ταχύτητας στό C.G.S. εἶναι:

$$u = \frac{S}{t} = \frac{1\,cm}{1\,s} = 1\ cm/s \qquad \text{δηλαδή} \qquad u = 1\ cm/s$$

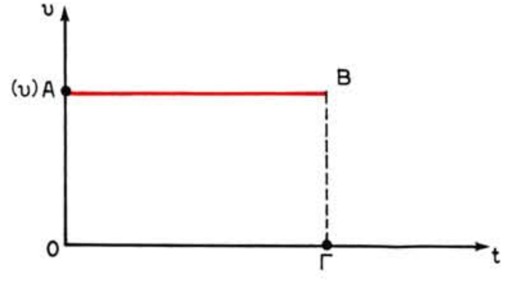
Παρατήρηση:

Στήν πράξη συνήθως χρησιμοποιοῦνται καί οἱ ἑξῆς μονάδες ταχύτητας: ἡ 1 m/min, ἡ 1 km/h καί ὁ κόμβος.

$$1 \text{ κόμβος} = \frac{\text{Ἕνα ναυτικό μίλι}}{\text{Μία ὥρα}} = 1853 \text{ m/h}$$

Γραφική παράσταση (ἤ διάγραμμα) τῆς σχέσεως μεταξύ ταχύτητας-χρόνου στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση.

Ἡ ταχύτητα κινητοῦ πού ἐκτελεῖ κίνηση εὐθύγραμμη ὁμαλή εἶναι ἡ ἴδια σέ κάθε χρονική στιγμή τῆς κινήσεως (υ = σταθερό). Γι' αὐτό ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ καί τοῦ χρόνου ***εἶναι μία εὐθεία γραμμή ΑΒ πού εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῶν χρόνων*** (σχ. 1.4γ).



Σχ. 1.4γ.

Παρατήρηση:

Τό ἐμβαδό (Ε) τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ εἶναι ἴσο μέ (ΟΑ) . (ΟΓ) = Ε. Ἐπειδή ὅμως τό ΟΑ = υ καί τό ΟΓ = t, προκύπτει ὅτι:

$$E = \upsilon \,.\, t \qquad \text{δηλαδή} \qquad \boxed{E = \upsilon t = S}$$

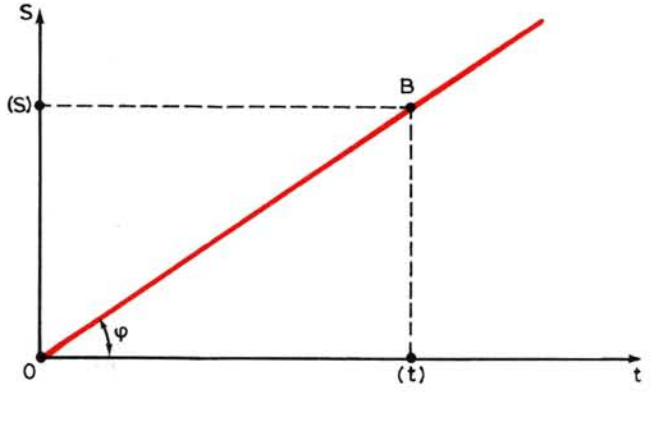
Ἑπομένως τό διάστημα S (S = υ . t) πού διανύει ἕνα κινητό μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση σέ χρόνο t καί μέ ταχύτητα υ εἶναι ἀριθμητικῶς ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου πού ἔχει:

α) Τό μῆκος τῆς μιᾶς κάθετης πλευρᾶς του ***ἴσο μέ τήν ταχύτητα*** (υ) καί

β) τό μῆκος τῆς ἄλλης κάθετης πλευρᾶς του ***ἴσο μέ τό χρόνο*** (t).

Γραφική παράσταση (ἤ διάγραμμα) τῆς σχέσεως μεταξύ διαστήματος-χρόνου στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση.

Ἡ σχέση διαστήματος καί χρόνου $S = \upsilon \,.\, t^1$ εἶναι ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ. Γι' αὐτό ἡ γραφική παράστασή της εἶναι ***μία εὐθεία γραμμή*** (ΟΒ) (σχ. 1.4δ).



Σχ. 1.4δ.

Παρατήρηση:

Ἀπό τό σχῆμα προκύπτει ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας φ, δηλαδή ἡ κλίση τῆς εὐθείας ΟΒ ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν χρόνων, ***εἶναι ἴση μέ τήν ἀριθμητική τιμή τῆς ταχύτητας:***

$$\boxed{\varepsilon\varphi\varphi = \frac{|S|}{|t|} = \upsilon}$$

1.5 Ὁρισμός τῆς στιγμιαίας καί τῆς μέσης ταχύτητας ἑνός ὑλικοῦ σημείου πού ἐκτελεῖ μιά ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμη κίνηση.

Α) Ἔστω ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται σέ τροχιά x_1x_2, ἀπό τό x_1 πρός τό x_2, καί ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t_1 διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Β (σχ. 1.5α).

Σχ. 1.5α.

Στιγμιαία ταχύτητα ἤ ἁπλά ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ αὐτοῦ σημείου Μ στό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του κατά τή χρονική στιγμή t_1 ὀνομάζομε (ὁρίζομε) τό ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Ἀρχή,*** τό σημεῖο Α.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$, τό ὁποῖο παριστάνει τό διάστημα πού διέτρεξε τό ὑλικό σημεῖο.

γ) ***Φορά,*** τή φορά τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$.

δ) ***Μέτρο,*** τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$, πρός τό χρόνο $(t_2 - t_1)$ κατά τόν ὁποῖο τό διέτρεξε, ***μέ τήν προϋπόθεση ὅμως ὅτι ὁ χρόνος αὐτός εἶναι πάρα πολύ μικρός,*** δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\vec{AB}}{t_2 - t_1}} \quad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

$$\left(\upsilon = \frac{AB}{t_2 - t_1}\right) \tag{1}$$

ὅπου: $(t_2 - t_1) \to 0$.

Σημείωση:

1) Γιά νά ὁρίσομε τήν ταχύτητα πού ἔχει κινητό σέ ἕνα σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του, πρέπει ὁ χρόνος $(t_2 - t_1)$ νά εἶναι πάρα πολύ μικρός, γιατί τότε καί τό διάστημα $\vec{AB}$ θά εἶναι πάρα πολύ μικρό, δηλαδή τά Α καί Β σχεδόν θά συμπέσουν.

2) Συνήθως τό πάρα πολύ μικρό διάστημα $\vec{AB}$ πού διανύεται σέ πάρα πολύ μικρό χρόνο $(t_2 - t_1)$ τό παριστάνομε μέ $\vec{\Delta S}$, καί τό χρόνο $(t_2 - t_1)$ μέ Δt. Ἔτσι οἱ τύποι (1) γράφονται συνήθως ὡς ἑξῆς:

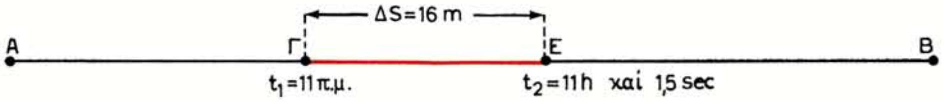
$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\vec{\Delta S}}{\Delta t}} \quad \text{καί} \quad \upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

3) Ὅταν ἕνα κινητό ἐκτελεῖ μιά ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμη κίνηση, τότε ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητάς του σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς τροχιᾶς του. Κι αὐτό, γιατί τά διάφορα μικρά διαστήματα $(\vec{AB})$, τά ὁποῖα διανύει τό κινητό σέ πάρα πολύ μικρούς χρόνους, ἔχουν ὅλα τή διεύθυνση τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ.

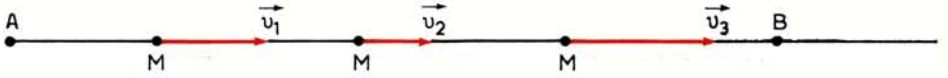
Παράδειγμα: Αὐτοκίνητο κινεῖται ἐπάνω στό δρόμο ΑΒ, ἀπό τό Α πρός τό Β, καί τή χρονική στιγμή $t_1 = 11$ π.μ. βρίσκεται στή θέση Γ.

Γιά νά ὁρίσομε τήν ταχύτητα πού θά ἔχει τό αὐτοκίνητο τή χρονική στιγμή $t_1 = 11$ π.μ. πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Γ (σχ. 1.5β) παίρνομε ἕνα μικρό τμῆμα τῆς διαδρομῆς του ΔS, π.χ 16m καί μετρᾶμε τό χρονικό διάστημα Δt πού χρειάσθηκε νά τό διατρέξει, ἔστω δέ ὅτι αὐτό εἶναι ἴσο πρός $\Delta t = 1{,}5$ sec (δηλ. τή χρονική στιγμή $t_2 = 11$ h καί 1,5 sec βρίσκεται στή θέση Ε). Ἡ ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου κατά τή χρονική στιγμή $t_1 = 11$ π.μ. πού διέρχεται ἀπό τό Γ θά εἶναι:

$$\upsilon = \frac{\Gamma E}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{16\text{m}}{1{,}5\text{sec}} = \frac{16 \times 10^{-3}\ \text{km}}{\dfrac{1{,}5}{3600}\ \text{h}} = 38{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Σχ. 1.5β.



Σχ. 1.5γ.

Β) Ἔστω ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται ἐπάνω στήν εὐθεία ΑΒ (σχ. 1.5γ) καί διανύει τό διάστημα ΑΒ σέ χρόνο t μέ ταχύτητες διαφορετικές κατά τά διάφορα σημεῖα τοῦ διαστήματος ΑΒ.

Μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ τοῦ κινητοῦ σημείου Μ κατά τήν κίνηση αὐτή ὀνομάζομε τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ διαστήματος (ΑΒ), τό ὁποῖο διανύει τό κινητό μέσα στό χρόνο t, διά τοῦ χρόνου αὐτοῦ t. Δηλαδή:

$$\boxed{\bar{\upsilon} = \frac{(AB)}{t}}$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό τῆς μέσης ταχύτητας μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι:

Μέση ταχύτητα ἑνός κινητοῦ πού κινεῖται εὐθυγράμμως καί διανύει ἕνα διάστημα (ΑΒ) σέ χρόνο t μέ διαφορετικές ταχύτητες λέγεται ἡ σταθερή (κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά) ταχύτητα, μέ τήν ὁποία ἄν ἔτρεχε τό κινητό πάνω στήν ἴδια εὐθεία, θά διέτρεχε τό ἴδιο διάστημα (ΑΒ) στόν ἴδιο χρόνο t.

1.6 Κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη.

Ὁρισμός.

Κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ὀνομάζεται ἡ κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου, πού:

α) κινεῖται ἐπάνω σέ εὐθεία γραμμή,

β) κινεῖται συνεχῶς πρός τήν ἴδια φορά καί

γ) τό μέτρο τῆς ταχύτητάς του αὐξάνει κατά τό ἴδιο ποσό σέ ἴσους χρόνους. (ἤ ἀλλιῶς: τό μέτρο τῆς ταχύτητάς του αὐξάνει κατά τό ἴδιο ποσό σέ κάθε μονάδα χρόνου).

Παρατήρηση:

1) Ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση, πού συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς εὐθείας πάνω στήν ὁποία κινεῖται.

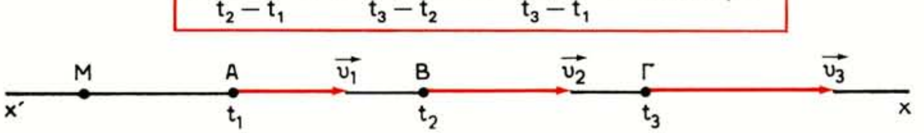
2) Ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του ἔχει τήν ἴδια φορά, ἡ ὁποία συμπίπτει μέ τή φορά τῆς κινήσεως.

3) Ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ δέν ἔχει σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του τό ἴδιο μέτρο. Τό μέτρο αὐξάνεται ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο.

4) Σέ κάθε μονάδα χρόνου τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ αὐξάνεται κατά τό ἴδιο ποσό (ἤ ἀλλιῶς: σέ ἴσους χρόνους κινήσεως τό μέτρο τῆς ταχύτητας αὐξάνει κατά τό ἴδιο ποσό).

Ἑπομένως, ἄν θέλομε νά βροῦμε ***τό μέτρο*** κατά τό ὁποῖο ***αὐξάνεται*** ἡ ταχύτητα ἑνός κινητοῦ, πού κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη, μέσα σέ ***μιά μονάδα χρόνου,*** διαιροῦμε τή διαφορά τῶν μέτρων δύο ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_3$, $\vec{\upsilon}_2$, $\vec{\upsilon}_1$, τίς ὁποῖες εἶχε τό κινητό κατά τίς χρονικές στιγμές t_3, t_2, t_1 (σχ. 1.6α) διά τοῦ χρόνου πού μεσολάβησε γιά νά γίνει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ἀπό $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, ἀπό $\vec{\upsilon}_2$, $\vec{\upsilon}_3$ ἀπό $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_3$. Δηλαδή:

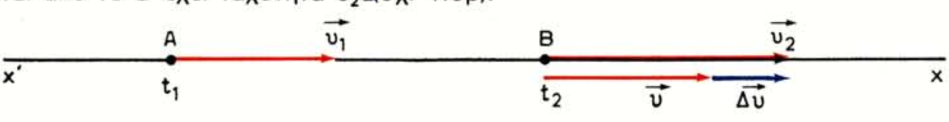
$$\boxed{\frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\upsilon_3 - \upsilon_2}{t_3 - t_2} = \frac{\upsilon_3 - \upsilon_1}{t_3 - t_1} = \text{σταθερό}}$$



Σχ. 1.6α.

Αὔξηση τῆς ταχύτητας κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση.

Ἔστω ὅτι ὑλικό σημεῖο κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενο ἐπάνω στήν εὐθεία x′x, μέ φορά ἀπό τό x′ πρός τό x, καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 πού διέρχεται ἀπό τό A καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 πού διέρχεται ἀπό τό B ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ (σχ. 1.6β).



Σχ. 1.6β.

Στήν περίπτωση αὐτή ***ἡ αὔξηση τῆς ταχύτητας*** τοῦ κινητοῦ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό Α στό Β, δηλαδή μέσα στό χρόνο $(t_2 - t_1)$, εἶναι ***ἡ ἀνυσματική διαφορά*** τῶν δύο ταχυτήτων $\vec{u}_2$ καί $\vec{u}_1$, δηλαδή:

$$\boxed{\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1}$$

ὅπου: $\Delta\vec{u}$ ἡ αὔξηση τῆς ταχύτητας.

Ἡ ἀνυσματική διαφορά $\Delta\vec{u}$ ***τῶν ταχυτήτων*** $\vec{u}_2$, $\vec{u}_1$ $(\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1)$ ***εἶναι μιά ταχύτητα μέ τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Διεύθυνση:*** Ἡ διεύθυνση τῆς $\Delta\vec{u}$ συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς εὐθείας ἐπάνω στήν ὁποία κινεῖται τό κινητό, δηλαδή εἶναι ἡ ἴδια μέ τή διεύθυνση πού ἔχει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς τροχιᾶς.

β) ***Φορά:*** Ἡ φορά τῆς $\Delta\vec{u}$ συμπίπτει μέ τή φορά τῆς κινήσεως, δηλαδή μέ τή φορά πού ἔχει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς τροχιᾶς.

γ) ***Μέτρο:*** Τό μέτρο τῆς $\Delta\vec{u}$ εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά τῶν μέτρων τῶν ταχυτήτων πού ἔχει τό κινητό στά σημεῖα Α καί Β $(\Delta u = u_2 - u_1)$.

δ) Ἄν ἔχομε ὁρίσει ὡς θετική φορά τῆς τροχιᾶς τή φορά τῆς ταχύτητας, ***τότε ἡ*** $\Delta\vec{u}$ ἔχει ***θετική φορά καί θετικό μέτρο,*** γιατί $u_2 > u_1$.

Ἐπιτάχυνση στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση.

Ἔστω ὅτι κινητό Μ κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενο ἐπάνω στήν εὐθεία x΄x, μέ φορά ἀπό τό x΄ πρός τό x, καί κατά τή χρονική στιγμή (t_1) πού διέρχεται ἀπό τή θέση Α ἔχει ταχύτητα $\vec{u}_1$, ἐνῶ τή χρονική στιγμή (t_2) πού διέρχεται ἀπό τή θέση Β ἔχει ταχύτητα $\vec{u}_2$ (σχ. 1.6γ).

Σχ. 1.6γ.

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ αὔξηση τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ Μ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό Α στό Β εἶναι $\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ καί ἔγινε σέ χρόνο $(t_2 - t_1)$.

Ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ Μ, ὅταν διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του, ὀνομάζεται ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{\gamma}$ ***πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Ἀρχή,*** τό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς αὐξήσεως τῆς ταχύτητας $\Delta\vec{u}$.

γ) ***Φορά,*** τή φορά τῆς αὐξήσεως $\Delta\vec{u}$.

δ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς αὐξήσεως $\Delta\vec{u}$, πού παθαίνει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό σημεῖο Α στό τυχαῖο σημεῖο Β τῆς τροχιᾶς του, διά τοῦ χρόνου τῆς μεταβάσεως αὐτῆς. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\gamma}_A = \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}} \quad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

$$\gamma_A = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$$

Παρατηρήσεις:

1) Ἐπειδή ἡ $\Delta\vec{\upsilon}$ ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό κινητό σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του, γι' αὐτό καί ἡ ἐπιτάχυνσή του $\vec{\gamma}$ ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό κινητό σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.
2) Τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση αὐξάνει κατά τό ἴδιο ποσό στή μονάδα τοῦ χρόνου. Ἑπομένως ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του ἔχει τό ἴδιο μέτρο (σταθερό).

Σύμφωνα μέ αὐτά, ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση ἔχει σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του τήν ἴδια φορά (τή φορά τῆς ταχύτητας), τήν ἴδια διεύθυνση (τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας) καί τό ἴδιο μέτρο. Δηλαδή: ***Ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση εἶναι ἕνα διανυσματικό σταθερό μέγεθος.***

Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο: Ἄν ἕνα κινητό κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά, ***τότε ἡ κίνησή του εἶναι εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη.***

Σημείωση:

Ἄν ἐπάνω στήν τροχιά ὁρίσομε ὡς θετική φορά τή φορά τῆς ταχύτητας, τότε ἡ $\vec{\gamma}$ ἔχει θετική φορά καί θετικό μέτρο.

Μονάδες ἐπιταχύνσεως.
Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἡ ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι: $$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

Ἄν $\upsilon_2 - \upsilon_1 = \upsilon$ καί $t_2 - t_1 = t$ ἡ σχέση (1) δίνει: $$\gamma = \frac{\upsilon}{t}$$

Μονάδα μετρήσεως τῆς ταχύτητας στό S.I. εἶναι 1 m/s καί τοῦ χρόνου τό 1s. Ἄρα ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ἐπιταχύνσεως στό S.I. εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{1\ \text{m/s}}{1\text{s}} = 1\ \text{m/s}^2 \quad \text{δηλαδή} \quad \gamma = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Σύστημα Τεχνικό (Τ.Σ.).

Μονάδα μετρήσεως τῆς ταχύτητας στό Τ.Σ. εἶναι 1 m/s καί τοῦ χρόνου τό 1s. Ἄρα ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ἐπιταχύνσεως στό Τ.Σ. εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{\frac{1\ \text{m}}{\text{s}}}{1\text{s}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{δηλαδή} \quad \gamma = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

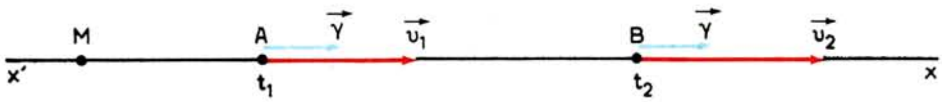
Σύστημα C.G.S.

Μονάδα μετρήσεως στό σύστημα C.G.S. εἶναι τό 1 cm/s καί τοῦ χρόνου τό 1s. Ἄρα ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς ἐπιταχύνσεως στό σύστημα C.G.S. εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{\frac{1\ \mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}{1\mathrm{s}} = \frac{1\ \mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{δηλαδή} \qquad \gamma = 1\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$$

Ἐξίσωση τῆς ταχύτητας στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση (ὑπολογισμός τῆς ταχύτητας).

Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενο ἐπάνω στήν εὐθεία x′x′ (σχ. 1.6δ) μέ φορά ἀπό τό x′ πρός τό x μέ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Ἔστω ὅτι τό κινητό κατά τή χρονική στιγμή t_1 διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$. Κατά τή χρονική στιγμή t_2 διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Β καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.



Σχ. 1.6δ.

Ἐπειδή τό κινητό Μ κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενο, τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεώς του $\vec{\gamma}$ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t} \tag{1}$$

ὅπου: t ὁ χρόνος πού χρειάσθηκε τό κινητό γιά νά πάει ἀπό τό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του στό σημεῖο Β, δηλαδή $t = t_2 - t_1$.
υ_1 ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t_1 καί
υ_2 ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ στό τέλος τοῦ χρόνου t, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t_2.

Ἄν λύσομε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός υ_2, θά ἔχομε τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\upsilon_2 = \upsilon_1 + \gamma t} \tag{2}$$

Ἡ ἐξίσωση (2) ὀνομάζεται ἐξίσωση τῆς ταχύτητας στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση μέ ἀρχική ταχύτητα διάφορη τοῦ μηδενός ($\upsilon_1 \neq 0$).

Παρατήρηση:

Συνήθως ἡ ἀρχική ταχύτητα υ_1 παριστάνεται μέ υ_0 καί ἡ τελική ταχύτητα υ_2 μέ υ. Τότε ἡ (2) γράφεται:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t} \tag{3}$$

Ἄν τό κινητό, κατά τήν ἀρχή τοῦ χρόνου t, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t_1, εἶχε ταχύτητα $\upsilon_0 = 0$, δηλαδή ἄν ξεκινοῦσε ἀπό τήν ἠρεμία στό σημεῖο Α, τότε ἡ ἐξίσωση (3) θά γινόταν:

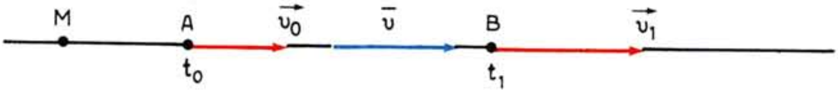
$$\boxed{υ = γ \cdot t} \quad (4)$$

Ἡ ἐξίσωση 4 ὀνομάζεται ἐξίσωση τῆς ταχύτητας στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση χωρίς ἀρχική ταχύτητα ($υ_0 = 0$).

Μέση ταχύτητα κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση.

Ἔστω ὅτι κινητό Μ, κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενο καί κατά τή χρονική στιγμή t_0 ἔχει ταχύτητα μέ μέτρο $υ_0$ ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_1 ἔχει ταχύτητα μέ μέτρο $υ_1$ (σχ. 1.6ε). Στήν περίπτωση αὐτή τῆς μέσης ταχύτητας τοῦ κινητοῦ $\overline{υ}$ κατά τό χρονικό διάστημα $(t_1 - t_0)$ εἶναι:

$$\boxed{\overline{υ} = \frac{υ_0 + υ_1}{2}} \quad (5)$$



Σχ. 1.6ε.

Δηλαδή: Τό μέτρο τῆς μέσης ταχύτητας ($\overline{υ}$) κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση εἶναι ἴσο μέ τό ἡμιάθροισμα τοῦ μέτρου τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας ($υ_0$) καί τοῦ μέτρου τῆς τελικῆς ταχύτητας ($υ_1$).

Ἄν ἡ ἀρχική ταχύτητα εἶναι μηδέν, τότε τό μέτρο τῆς μέσης ταχύτητας εἶναι: $\overline{υ} = \dfrac{υ_1}{2}$

Ἐξίσωση τῆς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως (ὑπολογισμός τοῦ διαστήματος).

Τό διάστημα (S) πού διατρέχει ἕνα κινητό, πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση μέ ἐπιτάχυνση (γ) καί μέ ἀρχική ταχύτητα ($υ_0$), μέσα σέ χρόνο (t), δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{S = υ_0 \cdot t + {}^1/_2 \cdot γ \cdot t^2} \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως μέ ἀρχική ταχύτητα ἀπό τήν ὁποία ὑπολογίζομε τό διάστημα S.

Πραγματικά: Τό διάστημα S, τό ὁποῖο διανύει ἕνα κινητό Μ πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση μέσα σέ χρόνο (t), εἶναι ἴσο μέ τό διάστημα S′ πού θά διέτρεχε τό κινητό Μ, ἄν ἔτρεχε ἐπί χρόνο (t) μέ ταχύτητα ἴση μέ τή μέση ταχύτητα $\overline{υ}$ τῆς κινήσεως μέ τήν ὁποία διέτρεξε τό διάστημα S, δηλαδή:

$$S = S' = \overline{υ} \cdot t \quad (α)$$

Γνωρίζομε ὅτι γιά τήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\overline{υ} = \frac{υ_0 + υ}{2} \quad (β)$$

$$υ = υ_0 + γ \cdot t \quad (γ)$$

Ἀπό τίς (α) καί (β) λαμβάνομε τή σχέση:

$$S = S' = \overline{υ} \cdot t = \left(\frac{υ_0 + υ}{2} \cdot t\right) \quad (δ)$$

Ἀπό τίς (δ) καί (γ) βρίσκομε τή σχέση (1), δηλαδή:

$$S = S' = \left(\frac{u_0 + u}{2}\right) . t = \left(\frac{u_0 + u_0 + \gamma . t}{2}\right) . t = \frac{2u_0 . t + \gamma . t^2}{2} \quad \text{καί} \quad S = u_0 . t + {}^1\!/_2 . \gamma . t^2$$

Ἄν τό κινητό M δέν εἶχε ἀρχική ταχύτητα ($u_0 = 0$), τότε ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως, εἶναι:

$$\boxed{S = {}^1\!/_2 \, \gamma . t^2} \qquad (2)$$

Πραγματικά: Ἔχομε τίς σχέσεις: $S = S' = \overline{u} . t$ (α)

$$\overline{u} = \frac{u}{2} \qquad (\epsilon)$$

$$u = \gamma . t \qquad (\sigma\tau)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (α) καί (ε) λαμβάνομε: $S = S' = \overline{u} . t = \dfrac{u}{2} \cdot t$ (ζ)

Ἀπό δέ τίς (ζ) καί (στ) βρίσκομε τή σχέση (2), δηλαδή:

$$S = \frac{u}{2} \cdot t = \frac{\gamma . t}{2} \cdot t = {}^1\!/_2 \, \gamma . t^2 \quad \text{ὥστε} \quad \boxed{S = {}^1\!/_2 \, \gamma . t^2}$$

Νόμοι τῆς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως.

Στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση ***χωρίς ἀρχική ταχύτητα ἰσχύουν οἱ ἑξῆς νόμοι:***

1) Ἡ ἐπιτάχυνση (γ) εἶναι σταθερή σέ ὅλη τή διάρκεια τῆς κινήσεως (γ = σταθερό).

2) Ἡ ταχύτητα (u) εἶναι ἀνάλογη τοῦ χρόνου (t), μέσα στόν ὁποῖο κινήθηκε τό κινητό ($u = \gamma . t$).

3) Τό διανυόμενο διάστημα (S) εἶναι ἀνάλογο μέ τό τετράγωνο τοῦ χρόνου (t^2) κατά τόν ὁποῖο διαρκεῖ ἡ κίνηση: $S = {}^1\!/_2 \, \gamma t^2$.

Σχέση διαστήματος καί ταχύτητας στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση.

Γιά νά βροῦμε τό διάστημα (S) πού διέτρεξε ἕνα κινητό στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση ἀπό: 1) τήν ταχύτητα (u) πού ἔχει τό κινητό στό τέλος τοῦ διαστήματος, 2) τήν ἐπιτάχυνσή του (γ) καί 3) τήν ἀρχική του ταχύτητα (u_0), χρησιμοποιοῦμε τή σχέση:

$$\boxed{S = \frac{u^2 - u_0{}^2}{2\gamma}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη:

Γιά κάθε κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἐξισώσεις:

$$S = u_0 \, t + {}^1\!/_2 \, \gamma . t^2 \qquad (\alpha)$$

$$u = u_0 + \gamma t \qquad (\beta)$$

Λύνομε τήν (β) ὡς πρός τό χρόνο t καί ἔχομε: $t = \dfrac{u - u_0}{\gamma}$ (γ)

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (α) τήν τιμή τοῦ t, πού τήν παίρνομε ἀπό τήν (γ), καί ἔχομε:

$$S = υ_0 \cdot \frac{υ - υ_0}{γ} + {}^1/_2 \cdot γ \cdot \frac{(υ - υ_0)^2}{γ^2} \quad ή \quad S = \frac{υ_0υ - υ_0^2}{γ} + {}^1/_2 \cdot \frac{υ^2 + υ_0^2 - 2υυ_0}{γ}$$

$$S = \frac{2υ_0υ - 2υ_0^2}{2γ} + \frac{υ^2 + υ_0^2 - 2υυ_0}{2γ} \quad καί \quad S = \frac{υ^2 - υ_0^2}{2 \, . \, γ}$$

Σημείωση:

Ἄν ὑποθέσομε ὅτι τό κινητό δέν ἔχει ἀρχική ταχύτητα (δηλ. $υ_0 = 0$), τότε ἡ σχέση (1) δίνει τή σχέση:

$$\boxed{S = \frac{υ^2}{2γ}} \tag{2}$$

Σχέση ταχύτητας καί διαστήματος στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση.

Γιά νά βροῦμε τήν ταχύτητα (υ) πού ἔχει τό κινητό στό τέλος τοῦ διαστήματος S, πού τό διέτρεξε μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη, ἄν ξέρομε: 1) τό διάστημα (S), 2) τήν ἀρχική του ταχύτητα ($υ_0$) καί 3) τήν ἐπιτάχυνσή του (γ), χρησιμοποιοῦμε τή σχέση:

$$\boxed{υ = \sqrt{υ_0^2 + 2γS}} \tag{3}$$

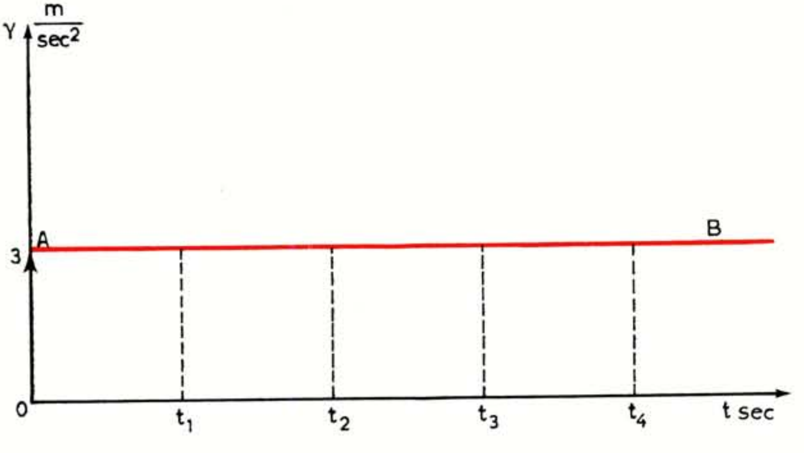
Τή σχέση (3) τή βρίσκομε, ἄν λύσομε τήν (1) ὡς πρός (υ).
Ἄν ὑποθέσομε ὅτι τό κινητό ***δέν ἔχει ἀρχική ταχύτητα,*** δηλαδή $υ_0 = 0$, τότε ἡ (3) γίνεται:

$$\boxed{υ = \sqrt{2 \, . \, γS}} \tag{4}$$

Γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ ἐπιταχύνσεως καί χρόνου στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση.

Ἡ ἐπιτάχυνση κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση εἶναι ἡ ἴδια (γ = σταθερό) σέ κάθε χρονική στιγμή τῆς κινήσεως. Γι' αὐτό ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ τῆς ἐπιταχύνσεως καί τοῦ χρόνου εἶναι ***μία εὐθεία γραμμή παράλληλη πρός τόν ἄξονα τοῦ χρόνου.***

Τό σχῆμα 1.6στ παριστάνει τή γραφική παράσταση (AB) μεταξύ ἐπιταχύνσεως καί χρόνου μιᾶς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως μέ ἐπιτάχυνση $γ = 3 \text{ m sec}^{-2}$.

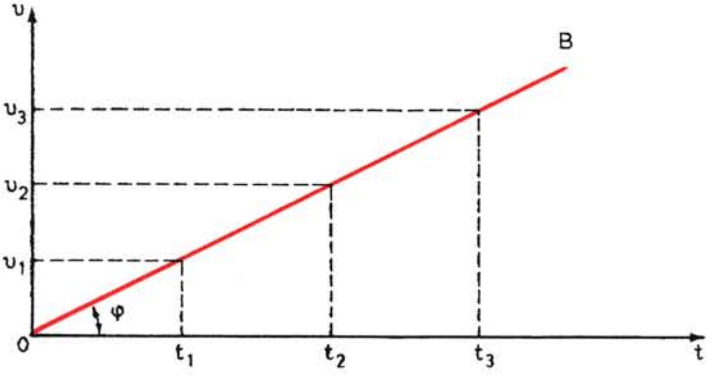


Σχ. 1.6στ.

Γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ ταχύτητας καί χρόνου στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση χωρίς ἀρχική ταχύτητα.

Ἡ σχέση ταχύτητας καί χρόνου $υ = γ \cdot t^1$ εἶναι ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ χωρίς σταθερό ὅρο. Γι' αὐτό ἡ γραφική παράστασή της εἶναι ***μιά εὐθεία γραμμή, ἡ ὁποία περνάει ἀπό τήν ἀρχή (0) τῶν ἀξόνων.***

Τό σχῆμα 1.6ζ παριστάνει τή γραφική παράσταση (ΟΒ) τῆς σχέσεως ταχύτητας - χρόνου μιᾶς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως χωρίς ἀρχική ταχύτητα.



Σχ. 1.6ζ.

Παρατήρηση:

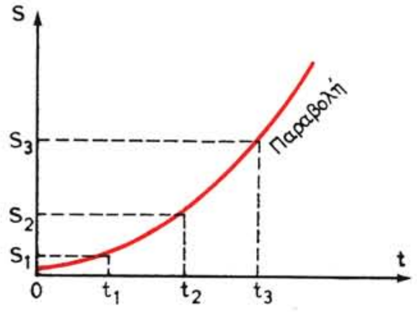
Ἀπό τό σχῆμα προκύπτει ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας φ, δηλαδή ἡ κλίση τῆς εὐθείας ΟΒ ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν χρόνων, εἶναι ἴση μέ τήν ἀριθμητική τιμή τῆς ἐπιταχύνσεως.

$$\boxed{εφφ = \frac{|υ|}{|t|} = γ}$$

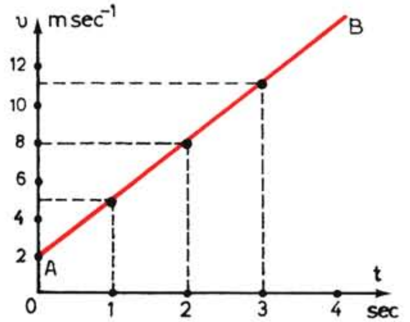
Γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ διαστήματος καί χρόνου στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση χωρίς ἀρχική ταχύτητα.

Ἡ σχέση διαστήματος καί χρόνου: $S = {}^1/_2\, γ \cdot t^2$

εἶναι ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ. ***Γι' αὐτό ἡ γραφική παράστασή της (σχ. 1.6η) εἶναι παραβολή πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.***



Σχ. 1.6η.



Σχ. 1.6θ.

Γραφική παράσταση τῆς σχέσεως ($υ = υ_0 + γt$) μεταξύ ταχύτητας καί χρόνου στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση μέ ἀρχική ταχύτητα.

Τό σχῆμα 1.6θ παριστάνει τή γραφική παράσταση (ΑΒ) τῆς σχέσεως ταχύτητας καί χρόνου ($υ = υ_0 + γt$) μιᾶς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως μέ ἀρχική ταχύτητα:

$$υ_0 = 2 \ m/sec^{-1}$$

1.7 Εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ὁρισμός.

Εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ὀνομάζεται ἡ κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου, τό ὁποῖο:

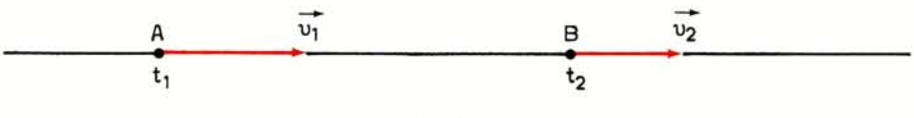
α) κινεῖται σέ εὐθεία γραμμή, δηλαδή ἡ τροχιά του εἶναι εὐθεία,
β) κινεῖται συνεχῶς πρός τήν ἴδια κατεύθυνση καί
γ) τό μέτρο τῆς ταχύτητάς του ἐλαττώνεται κατά τό ἴδιο ποσό σέ ἴσους χρόνους, ἤ ἀλλιῶς: ***τό μέτρο τῆς ταχύτητάς του ἐλαττώνεται κατά τό ἴδιο ποσό σέ κάθε μονάδα χρόνου.***

Παρατηρήσεις:

1) Ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση, ἡ ὁποία συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς εὐθείας ἐπάνω στήν ὁποία κινεῖται τό κινητό.
2) Ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του ἔχει τήν ἴδια φορά, ἡ ὁποία συμπίπτει μέ τή φορά τῆς κινήσεως.
3) Ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ δέν ἔχει σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του τό ἴδιο μέτρο, ἀλλά αὐτό ἐλαττώνεται ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο.
4) Σέ κάθε μονάδα χρόνου τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ ἐλαττώνεται κατά τό ἴδιο ποσό (ἤ ἀλλιῶς: σέ ἴσους χρόνους τῆς κινήσεως τό μέτρο τῆς ταχύτητας ἐλαττώνεται κατά τό ἴδιο ποσό).

Ἑπομένως, ἄν θέλομε νά βροῦμε πόσο ***ἐλαττώνεται τό μέτρο*** τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ μέσα σέ ***μιά χρονική μονάδα,*** θά διαιροῦμε τή διαφορά τῶν μέτρων τῶν δύο ταχυτήτων του $\vec{υ}_2$, $\vec{υ}_1$, τίς ὁποῖες εἶχε τό κινητό κατά τίς χρονικές στιγμές t_2, t_1, (σχ. 1.7α), διά τοῦ χρόνου ($t_2 - t_1$) πού μεσολάβησε γιά νά γίνει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ἀπό $\vec{υ}_1$, $\vec{υ}_2$. Δηλαδή ἡ ἐλάττωση τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας πού γίνεται μέσα σέ κάθε δευτερόλεπτο εἶναι:

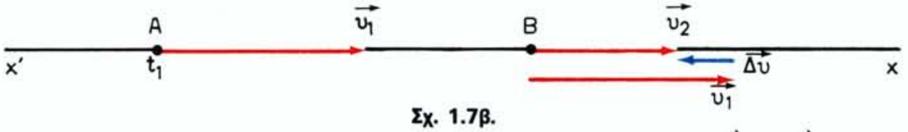
$$\boxed{\frac{υ_2 - υ_1}{t_2 - t_1} = \text{σταθερό}}$$



Σχ. 1.7α.

Ἐλάττωση τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ἄν ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται μέ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἐπάνω στήν εὐθεία x΄x (σχ. 1.7β) μέ φορά ἀπό τό x΄ πρός τό x, καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο A ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ἐνῶ τή χρονική στιγμή t_2 πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο B ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$, τότε ἡ ἐλάττωση πού ἔπαθε ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό A στό B, δηλαδή μέσα στό



Σχ. 1.7β.

χρόνο $(t_2 - t_1)$, εἶναι ***ἡ ἀνυσματική*** διαφορά τῶν δύο ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_2$ καί $\vec{\upsilon}_1$. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\Delta\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}$$

ὅπου: $\vec{\Delta\upsilon}$ ἡ ἐλάττωση τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ.

Ἡ ἐλάττωση πού παθαίνει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό A στό B τῆς τροχιᾶς του εἶναι μία ταχύτητα $\vec{\Delta\upsilon}$ μέ τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Διεύθυνση,*** Ἡ διεύθυνση τῆς $\vec{\Delta\upsilon}$ συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς εὐθείας ἐπάνω στήν ὁποία κινεῖται τό κινητό, δηλαδή εἶναι ἡ ἴδια μέ τή διεύθυνση πού ἔχει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.

β) ***Φορά,*** Ἡ φορά τῆς $\vec{\Delta\upsilon}$ εἶναι ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς κινήσεως, δηλαδή εἶναι ἀντίθετη πρός τή φορά πού ἔχει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.

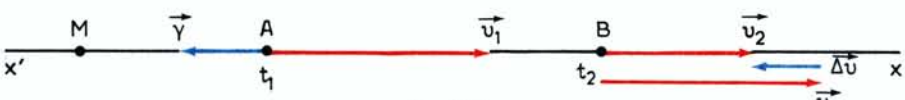
γ) ***Μέτρο,*** Τό μέτρο τῆς $\vec{\Delta\upsilon}$ εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό κινητό στό σημεῖο B (υ_2) καί τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό κινητό στό σημεῖο A (υ_1), δηλαδή:

$$\boxed{\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1}$$

Ἄν ἔχομε ὁρίσει ὡς θετική φορά τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ τή φορά τῆς ταχύτητάς του, ***τότε ἡ Δυ ἔχει ἀρνητική φορά καί ἀρνητική ἀριθμητική τιμή*** (καί τοῦτο γιατί: $\upsilon_2 < \upsilon_1$).

Ἐπιβράδυνση (ἤ ἀρνητική ἐπιτάχυνση) στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ἔστω ὅτι κινητό M ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἐπάνω στήν εὐθεία x΄x, μέ φορά ἀπό τό x΄ πρός τό x (σχ. 1.7γ), καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 διέρχεται ἀπό τή θέση A καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 διέρχεται ἀπό τή θέση B καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.



Σχ. 1.7γ.

Ἡ ἐλάττωση πού ἔπαθε ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό Α στό Β εἶναι:

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$$

καί ἔγινε μέσα στό χρόνο $(t_2 - t_1)$.

Ἐπιβράδυνση τοῦ κινητοῦ Μ, ὅταν αὐτό διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του ὀνομάζεται ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος $(\vec{\gamma})$ ***πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Ἀρχή,*** τό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς ἐλαττώσεως τῆς ταχύτητας $\Delta\vec{\upsilon}$.

γ) ***Φορά,*** τή φορά τῆς ἐλαττώσεως $\Delta\vec{\upsilon}$.

δ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς ἐλαττώσεως τῆς ταχύτητας $\Delta\vec{\upsilon}$, πού παθαίνει ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό σημεῖο Α σέ ἕνα τυχαῖο σημεῖο Β τῆς τροχιᾶς του διά τοῦ χρόνου τῆς μεταβάσεως αὐτῆς (δηλαδή διά τοῦ χρόνου στόν ὁποῖο ἔγινε ἡ ἐλάττωση $\Delta\vec{\upsilon}$):

$$\boxed{\vec{\gamma}_A = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}} \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

$$\gamma_A = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$$

Παρατηρήσεις:

1) Ἐπειδή ἡ $\Delta\vec{\upsilon}$ ἔχει τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του, γι' αὐτό καί ἡ ἐπιβράδυνση $\vec{\gamma}$ τοῦ κινητοῦ ἔχει — σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του — τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας.

2) Ἐπειδή ἡ $\Delta\vec{\upsilon}$ ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του, γι' αὐτό καί ἡ ἐπιβράδυνσή του $\vec{\gamma}$ ἔχει — σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του — φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς ταχύτητας.

3) Τό μέτρο τῆς ταχύτητας ἑνός κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἐλαττώνεται κατά τό ἴδιο ποσό στή μονάδα τοῦ χρόνου. Ἑπομένως ἡ ἐπιβράδυνση γ τοῦ κινητοῦ σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του ἔχει τό ἴδιο μέτρο (σταθερό), δηλαδή:

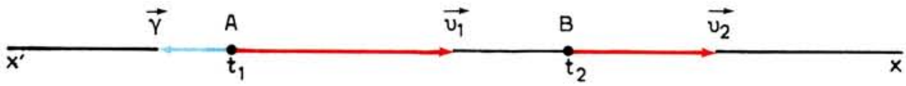
$$\boxed{\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \text{σταθερό}}$$

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι ἡ ἐπιβράδυνση ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἔχει — σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του — τήν ἴδια φορά (ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς ταχύτητας), τήν ἴδια διεύθυνση (τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας) καί τό ἴδιο μέτρο. ***Δηλαδή στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἡ ἐπιβράδυνση τοῦ κινητοῦ εἶναι ἕνα διανυσματικό σταθερό μέγεθος.*** Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο: Ἄν ἕνα κινητό κινεῖται μέ ἐπιβράδυνση σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά, ἡ κίνηση πού ἐκτελεῖ τό κινητό ***εἶναι κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη.***

Ἄν ἔχομε ὁρίσει ὡς θετική φορά τῆς τροχιᾶς τή φορά τῆς ταχύτητας, τότε ἡ ἐπιβράδυνση $(\vec{\gamma})$ ***ἔχει φορά ἀρνητική καί ἀρνητική ἀριθμητική τιμή,*** γιατί στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἡ ἐλάττωση $\overrightarrow{\Delta \upsilon}$ ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς ταχύτητας καί ἀρνητική ἀριθμητική τιμή, ἐπειδή $\upsilon_2 < \upsilon_1$.

Ἐξίσωση τῆς ταχύτητας (ὑπολογισμός τῆς ταχύτητας) στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ἔστω ὅτι ὑλικό σημεῖο Μ ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἐπάνω στήν εὐθεία x΄x (σχ. 1.7δ), μέ φορά ἀπό τό x΄ πρός τό x καί μέ ἐπιβράδυνση $\vec{\gamma}$. Κατά τή χρονική στιγμή t_1 διέρχεται ἀπό τή θέση Α τῆς τροχιᾶς του καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 διέρχεται ἀπό τή θέση Β τῆς τροχιᾶς του καί ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.



Σχ. 1.7δ.

Τό κινητό Μ κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη, ἐπομένως τό μέτρο γ τῆς ἐπιβραδύνσεώς του $\vec{\gamma}$ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} \qquad \boxed{\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t}} \qquad (1)$$

ὅπου: t ὁ χρόνος μεταβάσεως ἀπό τό σημεῖο Α στό σημεῖο Β, δηλ. $t = t_2 - t_1$

υ_1 ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t_1 (ἀρχική ταχύτητα τοῦ κινητοῦ).

υ_2 ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ στό τέλος τοῦ χρόνου t, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t_2 (τελική ταχύτητα τοῦ κινητοῦ).

Λύνομε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός υ_2 καί λαμβάνομε:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \gamma \cdot t \qquad (2)$$

Ἐπειδή στήν εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς ἐπιβραδύνσεως γ εἶναι ἀρνητική ἡ σχέση (2) γράφεται:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + (-\gamma t)$$

καί $\boxed{\upsilon_2 = \upsilon_1 - \gamma \cdot t}$ (ἐξίσωση τῆς ταχύτητας)* (3)

Παρατήρηση:

Οἱ ἐξισώσεις (3) καί (4) ἰσχύουν μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὡς ἀριθμητική τιμή τῆς (γ) λαμβάνεται ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς ἀριθμητικῆς της τιμῆς**.

---

* Συνήθως ἡ ἀρχική ταχύτητα υ_1 παριστάνεται μέ υ_0 καί ἡ τελική υ_2 μέ υ. Τότε ἡ ἐξίσωση (3) γράφεται:

$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t}$ (ἐξίσωση τῆς ταχύτητας) (4)

** Συνήθως ἡ ἐπιβράδυνση δίνεται ὡς ἀρνητική ἐπιτάχυνση: π.χ. ὅταν λέμε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση ἑνός κινητοῦ εἶναι $\gamma = -8$ m/sec^2 ἐννοοῦμε ὅτι τό κινητό ἐκτελεῖ κίνηση ἐπιβραδυνόμενη.

Ἄν χρησιμοποιήσομε στήν περίπτωση αὐτή τίς (3) καί (4) δέν θά βάλομε τό $\gamma = -8$ m/sec^2, ἀλλά θά τό βάλομε: $\gamma = 8$ m/sec^2. Ἄν μᾶς ποῦν ὅτι ἡ ἐπιβράδυνση τοῦ κινητοῦ εἶναι $\gamma = 8$ m/sec^2 καί χρησιμοποιήσομε τίς (3) καί (4) θά βάλομε: $\gamma = 8$ m/sec^2.

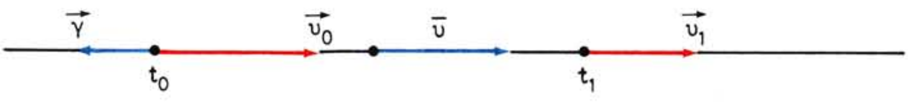
Γενική παρατήρηση:

Σέ ὅλες τίς σχέσεις τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως, πού θά συναντήσομε πιό κάτω, ἡ ἐπιβράδυνση ἤ ἀρνητική ἐπιτάχυνση γ παριστάνει τήν ***ἀπόλυτη τιμή*** τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς της.

Μέση ταχύτητα στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ἄν σέ ἕνα κινητό, πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση, κατά τή χρονική στιγμή t_0 ἡ ταχύτητά του ἔχει μέτρο $υ_0$ καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 ἔχει μέτρο $υ_1$ (σχ. 1.7ε), τότε τό μέτρο τῆς μέσης ταχύτητας τοῦ κινητοῦ αὐτοῦ κατά τό χρονικό διάστημα $(t_1 - t_0)$ εἶναι:

$$\boxed{\bar{υ} = \frac{υ_0 + υ_1}{2}}$$



Σχ. 1.7ε.

Δηλαδή τό μέτρο τῆς μέσης ταχύτητας στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό κινητό στήν ἀρχή τοῦ χρόνου (t_0) καί τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό κινητό στό τέλος τοῦ χρόνου (t_1).

Ἄν ἕνα κινητό πού κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη καί μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ σταματήσει, ἀφοῦ κινηθεῖ ἐπί χρόνο t, ***τότε ἡ μέση ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τή διάρκεια τοῦ χρόνου t θά εἶναι:***

$$\bar{υ} = \frac{υ_0 + 0}{2} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{\bar{υ} = \frac{υ_0}{2}}$$

Ἐξίσωση τῆς ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως (ὑπολογισμός τοῦ διαστήματος).

Τό διάστημα (S) πού διατρέχει κινητό Μ, πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση μέ ἐπιβράδυνση (γ) καί ἀρχική ταχύτητα $(υ_0)$, μέσα σέ χρόνο (t), δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{S = υ_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot γ \cdot t^2} \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωση (1) ὀνομάζεται ἐξίσωση τῆς κινήσεως, ἀπό τήν ὁποία μποροῦμε νά ὑπολογίσομε τό διάστημα (S).

Πραγματικά: Τό διάστημα (S) τό ὁποῖο διανύει κινητό Μ, πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση μέσα σέ χρόνο (t), εἶναι ἴσο μέ τό διάστημα (S′) πού θά διέτρεχε τό κινητό Μ ἄν ἔτρεχε ἐπί χρόνο (t) μέ ταχύτητα ἴση μέ τή μέση ταχύτητα $\bar{υ}$, τῆς κινήσεως μέ τήν ὁποία διήνυσε τό διάστημα S. Δηλαδή:

$$S = S' = \bar{υ} \cdot t \qquad (2)$$

Γνωρίζομε ὅτι γιά τήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\bar{υ} = \frac{υ_0 + υ}{2} \qquad (3)$$

$$υ = υ_0 - γ \cdot t \qquad (4)$$

'Από τίς (2) καί (3) ἔχομε τή σχέση: $S = S' = \bar{u} \cdot t = \frac{u_0 + u}{2} \cdot t$ (5)

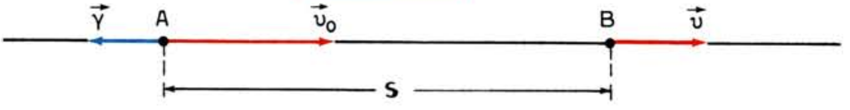
'Από τίς (5) καί (4) βρίσκομε τή σχέση (1), δηλαδή:

$$S = S' = \frac{u_0 + u}{2} \cdot t = \frac{u_0 + u_0 - \gamma t}{2} \cdot t = \frac{2u_0 \cdot t - \gamma t^2}{2} \quad \text{καί} \quad \boxed{S = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2}$$

Σχέση διαστήματος καί ταχύτητας στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Γιά νά βροῦμε τό διάστημα S (σχ. 1.7στ) πού διέτρεξε ἕνα κινητό μέ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση, ἄν γνωρίζομε α) τήν ταχύτητα (υ) πού ἔχει τό κινητό στό τέλος τοῦ διαστήματος, β) τήν ἐπιβράδυνσή του (γ) καί γ) τήν ἀρχική του ταχύτητα (u_0), χρησιμοποιοῦμε τήν ἑξῆς σχέση:

$$\boxed{S = \frac{u_0^2 - u^2}{2\gamma}}$$



Σχ. 1.7στ.

'Απόδειξη:

Στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$S = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$u = u_0 - \gamma \cdot t \qquad (2)$$

Λύνομε τήν ἐξίσωση (2) ὡς πρός τό χρόνο t καί ἔχομε: $t = \frac{u_0 - u}{\gamma}$ (3)

Θέτομε στήν ἐξίσωση (1) τήν τιμή τοῦ t, πού τήν παίρνομε ἀπό τήν (3), καί ἔχομε:

$$S = u_0 \cdot \frac{(u_0 - u)}{\gamma} - \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{(u_0 - u)^2}{\gamma^2} \quad \text{ἤ} \quad S = \frac{u_0^2 - u_0 u}{\gamma} - \frac{1}{2} \cdot \frac{u_0^2 + u^2 - 2u_0 u}{\gamma}$$

$$S = \frac{2u_0^2 - 2u_0 u}{2\gamma} - \frac{u_0^2 + u^2 - 2u_0 u}{2\gamma} \qquad \boxed{S = \frac{u_0^2 - u^2}{2\gamma}} \qquad (4)$$

Σχέση ταχύτητας καί διαστήματος στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Γιά νά βροῦμε τήν ταχύτητα (υ) πού θά ἔχει τό κινητό στό τέλος τοῦ διαστήματος S, ἄν γνωρίζομε: α) τό διάστημα αὐτό (S), β) τήν ἀρχική ταχύτητα (u_0) καί γ) τήν ἐπιβράδυνσή του (γ), χρησιμοποιοῦμε τή σχέση:

$$\boxed{u = \sqrt{u_0^2 - 2 \cdot \gamma \cdot S}} \qquad (1)$$

Τή σχέση (1) τή βρίσκομε, ἄν λύσομε τήν (4) ὡς πρός (υ).

Διάρκεια κινήσεως (μέγιστος χρόνος κινήσεως) στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Τό μέτρο τῆς ταχύτητας κινητοῦ πού ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου συνεχῶς ἐλαττώνεται. Ἄρα τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ αὐτοῦ γίνεται μηδέν μετά ἀπό ὁρισμένο χρόνο.

Τό χρόνο κατά τόν όποῖο διαρκεῖ ἡ κίνηση, δηλαδή τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται γιά νά γίνει τό μέτρο τῆς ταχύτητας μηδέν, ***τόν ὀνομάζομε μέγιστο χρόνο τῆς κινήσεως*** καί τόν βρίσκομε ὡς ἑξῆς:

Γνωρίζομε ὅτι στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad (1)$$

ὅπου: υ ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ, στό τέλος τοῦ χρόνου t
υ_0 ἡ ἀρχική ταχύτητα τοῦ κινητοῦ
γ ἡ ἐπιβράδυνση τοῦ κινητοῦ.

Ἄν στήν ἐξίσωση (1) θέσομε $\upsilon = 0$, τότε θά ἔχομε τό μέγιστο χρόνο τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ:

$$0 = \upsilon_0 - \gamma \; t_\mu$$

$$\boxed{t_\mu = \frac{\upsilon_0}{\cdot\,\gamma}} \qquad \text{(τύπος τοῦ μέγιστου χρόνου κινήσεως)} \qquad (2)$$

Ὁλικό διάστημα (μέγιστο διάστημα) στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ἔστω ὅτι κινητό ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0, ἐπιβράδυνση γ καί ἡ κίνησή του διαρκεῖ ἐπί χρόνο t_μ.

Γιά νά βροῦμε τό διάστημα πού θά διανύσει τό κινητό σέ ὅλη τή διάρκεια τῆς κινήσεώς του, δηλαδή ὥσπου νά σταματήσει, σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Γιά κάθε εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$S = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (1)$$

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t \qquad (2)$$

Ἄν στίς ἐξισώσεις (1) καί (2) θέσομε $t = t_\mu$, ὁπότε $\upsilon = 0$, θά ἔχομε:

$$S_\mu = \upsilon_0 t_\mu - \frac{1}{2}\gamma t_\mu^2 \qquad (3)$$

$$0 = \upsilon_0 - \gamma t_\mu \qquad (4)$$

Λύνομε τήν (4) ὡς πρός t_μ καί ἔχομε: $\quad t_\mu = \dfrac{\upsilon_0}{\gamma}$ (5)

Ἀπό τίς (3) καί (5) λαμβάνομε:

$$S_\mu = \upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon_0}{\gamma} - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{\upsilon_0^2}{\gamma^2}$$

$$S_\mu = \frac{\upsilon_0^2}{\gamma} - \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma}$$

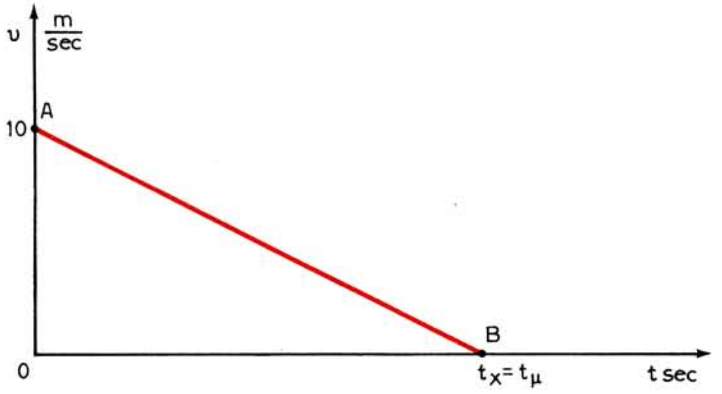
$$S_\mu = \frac{2 \cdot \upsilon_0^2}{2\gamma} - \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma}$$

$$\boxed{S_\mu = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma}} \qquad \text{(τύπος τοῦ μέγιστου διαστήματος)} \qquad (6)$$

Ἡ ἐξίσωση (6) δίνει τό διάστημα (S_μ) πού θά διατρέξει ἕνα κινητό ὥσπου νά σταματήσει (δηλαδή τό μέγιστο διάστημα), ἄν κινηθεῖ μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0 καί μέ σταθερή ἐπιβράδυνση (γ).

Γραφική παράσταση τῆς σχέσεως ταχύτητας καί χρόνου στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ἡ σχέση ταχύτητας-χρόνου $\boxed{\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t^1}$ εἶναι ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ. Γι' αὐτό ἡ γραφική της παράσταση ***εἶναι εὐθεία γραμμή*** (σχ. 1.7ζ).



Σχ. 1.7ζ.

Τό σχῆμα παριστάνει τή γραφική παράσταση (ΑΒ) τῆς σχέσεως ταχύτητας-χρόνου μιᾶς εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10$ m/sec.

Παρατήρηση:

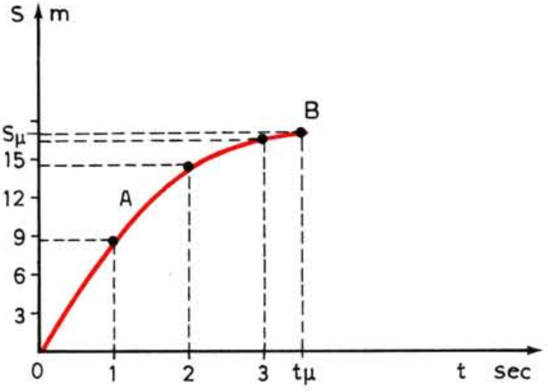
Κατά τή χρονική στιγμή t_x ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ μηδενίζεται, δηλαδή τό κινητό σταματάει. Ὁ χρόνος (t_x) ***εἶναι ὁ μέγιστος χρόνος κινήσεως τοῦ κινητοῦ,*** δηλαδή $t_x = t_\mu$.

Γραφική παράσταση τῆς σχέσεως διαστήματος καί χρόνου στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.

Ἡ σχέση διαστήματος-χρόνου: $\boxed{S = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2}$

εἶναι ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ. Γι' αὐτό ἡ γραφική της παράσταση ***εἶναι καμπύλη γραμμή*** (παραβολή).

Τό σχῆμα 1.7η παριστάνει τή γραφική παράσταση ΟΑΒ τῆς σχέσεως διαστήματος-χρόνου μιᾶς ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 10$ m/sec καί ἐπιβράδυνση $γ = 3$ m/sec^2.



Σχ. 1.7η.

Παρατήρηση:

Τό διάστημα πού διήνυσε τό κινητό ὥσπου νά σταματήσει εἶναι 16,66 m καί σταμάτησε μετά ἀπό χρόνο 3,33 sec.

Ἑπομένως: $S_μ = 16{,}66$ m καί $t_μ = 3{,}33$ sec.

1.8 Ἀπόδειξη τῶν σχέσεων: $S = 1/2 \cdot γt^2$ καί $S = υ_0 \cdot t \pm 1/2\, γt^2$.

Γενικά.

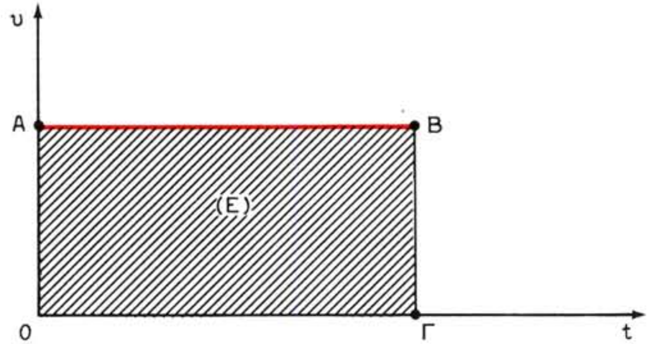
Εἴδαμε στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ὅτι τό διάστημα ($S = υ \cdot t$) εἶναι ἀριθμητικά ἴσο μέ τό ἐμβαδό (Ε) τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ (σχ. 1.8α) πού ἔχει τίς ἑξῆς πλευρές.

α) Τή γραφική παράσταση (ΑΒ) τῆς σχέσεως ταχύτητας καί χρόνου.

β) Τήν τιμή τῆς ταχύτητας (ΟΑ = υ) στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t.

γ) Τήν τιμή τῆς ταχύτητας (ΓΒ = υ) στό τέλος τοῦ χρόνου t.

δ) Τό χρόνο (ΟΓ = t).



Σχ. 1.8α.

Γενικά, ἄν κινητό ἐκτελεῖ ὁποιαδήποτε κίνηση τῆς ὁποίας ἡ γραφική παράσταση ***ταχύτητας - χρόνου*** εἶναι ἡ γραμμή ΑΒ (σχ. 1.8β), τότε τό διάστημα (S) πού διανύει τό κινητό μέσα σέ χρόνο $t = t_2 - t_1$ εἶναι ἀριθμητικά ἴσο μέ τό ἐμβαδό (Ε) τῆς ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος (ABt_2t_1) πού ὁρίζεται ἀπό:

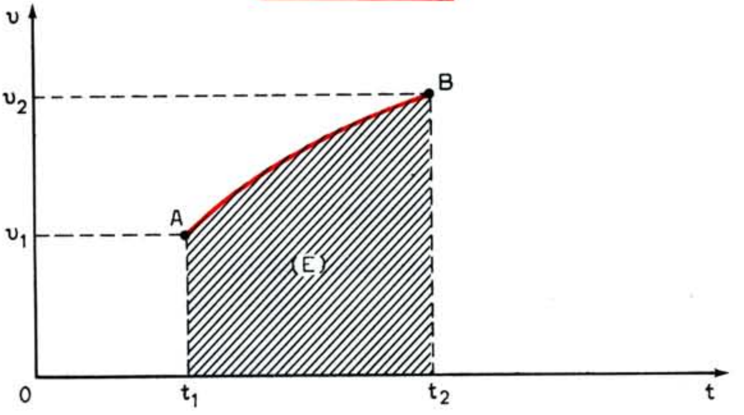
α) Τή γραφική παράσταση (ΑΒ) *ταχύτητας-χρόνου* τῆς κινήσεως.

β) Τήν τιμή τῆς ταχύτητας (υ_1) πού ἔχει τό κινητό στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t_1.

γ) Τήν τιμή τῆς ταχύτητας (υ_2) πού ἔχει τό κινητό στό τέλος τοῦ χρόνου t, δηλαδή κατά τή χρονική στιγμή t_2 καί

δ) Τό χρόνο $t = t_2 - t_1$.

$$\boxed{E = ABt_2t_1 = S}$$

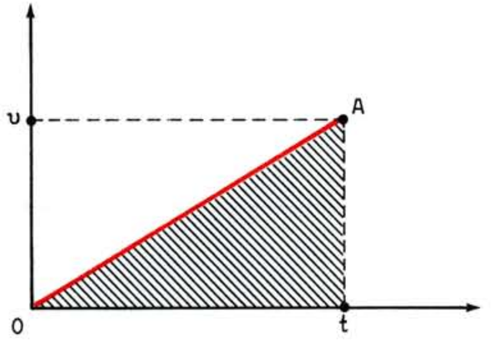


Σχ. 1.8β.

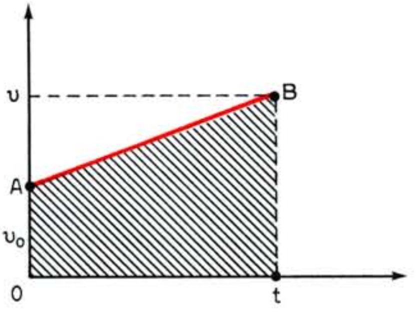
Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως $S = 1/2 \,.\, \gamma \,.\, t^2$.

Ἡ γραφική παράσταση ***ταχύτητας-χρόνου*** ($\upsilon = \gamma \,.\, t$) στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνομένη κίνηση, χωρίς ἀρχική ταχύτητα, παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία OA (σχ. 1.8γ). Σύμφωνα μέ ὅσα ἀναφέραμε πιό πάνω, τό διάστημα (S) πού θά διατρέξει τό κινητό μέσα σέ χρόνο t, μέ ἐπιτάχυνση γ καί μέ ταχύτητα υ στό τέλος τοῦ χρόνου t, θά εἶναι:

$$S = \epsilon\mu\beta\ OAt = \frac{(Ot)\,.\,(tA)}{2} = \frac{t\,.\,\upsilon}{2} \qquad \text{ἤ} \qquad S = \frac{\upsilon\,.\,t}{2} \tag{1}$$



Σχ. 1.8γ.



Σχ. 1.8δ.

Ἰσχύει ἡ σχέση: $\upsilon = \gamma \,.\, t$ (2)

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$S = \frac{u \cdot t}{2} = \frac{\gamma \cdot t \cdot t}{2} = 1/2\,\gamma \cdot t^2 \quad \text{ἤ} \quad S = 1/2\,\gamma \cdot t^2$$

Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως: $S = u_0 \cdot t + 1/2\,\gamma \cdot t^2$.

Ἡ γραφική παράσταση *ταχύτητας-χρόνου* ($u = u_0 + \gamma t$) στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση, μέ ἀρχική ταχύτητα u_0, παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία ΑΒ (σχ. 1.8δ). Σύμφωνα μέ ὅσα ἀναφέραμε πιό πάνω, τό διάστημα (S) πού θά διατρέχει τό κινητό μέσα σέ χρόνο t, μέ ἐπιτάχυνση γ καί μέ ταχύτητα u, θά εἶναι:

$$S = \text{ἐμβ. } OABt = 1/2\,(Ot)\,[(OA) + (tB)] \quad \text{ἤ} \quad S = 1/2\,t\,(u_0 + u) \qquad (1)$$

Ἐπειδή $u = u_0 + \gamma t$, ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$S = 1/2\,t\,[u_0 + u_0 + \gamma \cdot t] \quad \text{ἤ} \quad S = 1/2\,t\,(2u_0 + \gamma t) \quad \text{ἤ} \quad S = u_0 t + 1/2\,\gamma \cdot t^2$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Σχέσεις τῆς εὐθύγραμμης καί

ὁμαλῆς κινήσεως	*ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως*	*ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως*
u = σταθερή $\gamma = 0$ $u = \frac{S}{t}$ $S = u \cdot t$ $\bar{u} = u$	γ = σταθερή $u = \gamma \cdot t$ $S = 1/2\,\gamma \cdot t^2$ $u = \sqrt{2\gamma S}$ $\bar{u} = \frac{u}{2}$ $u = u_0 + \gamma \cdot t$ $S = u_0 t + 1/2\,\gamma t^2$ $u = \sqrt{u_0^2 + 2\gamma S}$ $\bar{u} = \frac{u + u_0}{2}$	γ = σταθερή (Στίς πιό κάτω σχέσεις τό γ παριστάνει **τήν ἀπόλυτη τιμή τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς ἐπιβραδύνσεως ἤ ἀρνητικῆς ἐπιταχύνσεως**) $u = u_0 - \gamma t$ $S = u_0 t - 1/2\,\gamma t^2$ $u = \sqrt{u_0^2 - 2\gamma S}$ $\bar{u} = \frac{u_0 + u}{2}$ $t_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{u_0}{\gamma}$ $S_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{u_0^2}{2\gamma}$ $\bar{u} = \frac{u_0}{2}$

ὅπου:
- γ = ἡ ἐπιτάχυνση ἤ ἐπιβράδυνση
- t = ὁ χρόνος κινήσεως
- u_0 = ἡ ἀρχική ταχύτητα τοῦ κινητοῦ
- u = ἡ τελική ταχύτητα
- S = τό διάστημα πού διανύει τό κινητό μέσα σέ χρόνο t
- $\bar{u}$ = ἡ μέση ταχύτητα τῆς κινήσεως
- $t_{\mu\epsilon\gamma}$ = ὁ μέγιστος χρόνος κινήσεως τοῦ κινητοῦ, δηλαδή ὁ χρόνος πού θά κινηθεῖ τό κινητό ὥσπου νά σταματήσει
- $S_{\mu\epsilon\gamma}$ = τό μέγιστο διάστημα πού θά διανύσει τό κινητό, ὥσπου νά σταματήσει.

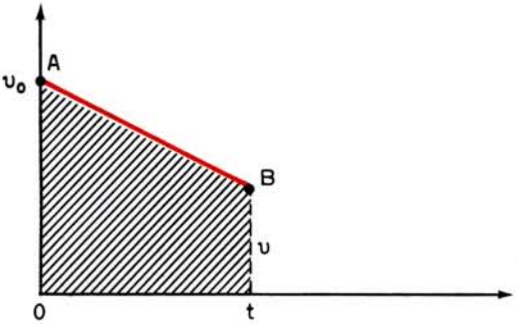
Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως: $S = \upsilon_0 t - 1/2\ \gamma t^2$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως $\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t$ (ταχύτητας-χρόνου), στήν εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιβραδυνομένη κίνηση, παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία ΑΒ (σχ. 1.8ε). Τό διάστημα πού διέτρεξε τό κινητό Ισοδυναμεῖ μέ τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου (ΟΑΒt). Δηλαδή:

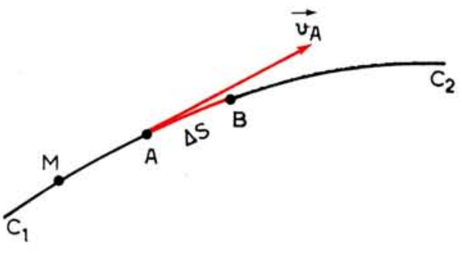
$$S = \text{εμβ. } OABt = 1/2\ (Ot)\ [(OA) + (tB)] \quad \text{καί} \quad S = 1/2\ t\ (\upsilon_0 + \upsilon_0) \qquad (1)$$

Ἰσχύει ἡ σχέση $\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t$

Συνεπῶς ἡ (1) γράφεται: $S = 1/2\ t\ (\upsilon_0 + \upsilon_0 - \gamma t)$ ἤ $S = \upsilon_0 t - 1/2\ \gamma t^2$



Σχ. 1.8ε.



Σχ. 1.9α.

1.9 Γενικός ὁρισμός τῆς στιγμιαίας καί τῆς μέσης ταχύτητας ἑνός κινητοῦ.

Κινητό Μ κινεῖται ἐπάνω σέ τυχαία τροχιά C_1C_2 (σχ. 1.9α) μέ φορά ἀπό τό C_1 πρός τό C_2 καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στή θέση Α, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στή θέση Β.

Ὀνομάζομε ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ τοῦ κινητοῦ Μ στό σημεῖο Α ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Ἀρχή,*** τό σημεῖο Α.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Α.

γ) ***Φορά,*** τή φορά τῆς κινήσεως, καί

δ) ***Μέτρο,*** τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ διαστήματος $\overset{\frown}{AB}$ πρός τό χρόνο $(t_2 - t_1)$, μέσα στόν ὁποῖο τό κινητό διέτρεξε τό διάστημα $\overset{\frown}{AB}$, ***μέ τήν προϋπόθεση ὅμως ὅτι ὁ χρόνος αὐτός $(t_2 - t_1)$ εἶναι πάρα πολύ μικρός, ὁπότε καί τό σημεῖο Β θά βρίσκεται πάρα πολύ κοντά στό Α,*** δηλαδή:

$$\boxed{\upsilon_A = \frac{(AB)}{(t_2 - t_1)}}$$

Παρατήρηση:

Ἕνα πάρα πολύ μικρό τμῆμα μιᾶς ὁποιασδήποτε τροχιᾶς μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς εὐθύγραμμο τμῆμα. Ἑπομένως, ***τό πάρα πολύ μικρό τόξο*** $\overset{\frown}{AB}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ τῆς τροχιᾶς C_1C_2, τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνση συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Α.

Τό διάστημα ΑΒ, τό ὁποῖο διέτρεξε τό κινητό ***μέσα σέ πάρα πολύ μικρό χρόνο***

$(t_2 - t_1)$, εἶναι ἕνα ἄνυσμα πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Ἀρχή,*** τό σημεῖο Α.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης καί

γ) ***Φορά,*** τή φορά τῆς κινήσεως.

Ἑπομένως, ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ στό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του ἔχει διεύθυνση καί τή φορά τοῦ ἀνυσματος $\vec{AB}$.

Ἔτσι μποροῦμε νά γράψομε:

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{AB}}{t_2 - t_1} \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

ὅπου: $(t_2 - t_1)$ εἶναι ὁ πάρα πολύ μικρός χρόνος, μέσα στόν ὁποῖο τό κινητό διατρέχει τό πάρα πολύ μικρό διάστημα $\vec{AB}$.

Συνήθως τό διάστημα $\vec{AB}$ παριστάνεται μέ $\vec{\Delta S}$ καί ὁ χρόνος $(t_2 - t_1)$ μέ τό Δt, ὁπότε ἔχομε:

$$\boxed{\bar{u}_A = \frac{\vec{\Delta S}}{\Delta t}}$$

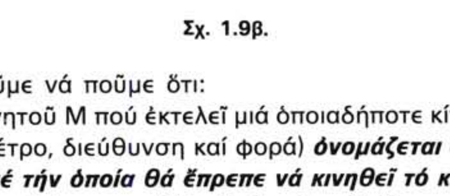
Ἔστω ὅτι κινητό Μ ἐκτελεῖ μιά ὁποιαδήποτε κίνηση ἐπάνω σέ τροχιά C_1C_2 μέ φορά ἀπό τό C_1 πρός τό C_2 (σχ. 1.9β) καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στή θέση Α, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στή θέση Β.

Ὀνομάζομε μέση ταχύτητα $\bar{u}$ τοῦ κινητοῦ Μ, κατά τήν κίνησή του ἀπό τό Α στό Β καί κατά τή διάρκεια τοῦ χρόνου $t = (t_2 - t_1)$, τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ τμήματος ΑΒ τῆς τροχιᾶς, τό ὁποῖο διέτρεξε τό κινητό μέσα στό χρόνο $t = (t_2 - t_1)$ διά τοῦ χρόνου αὐτοῦ, δηλαδή:

$$\boxed{\bar{u} = \frac{(AB)}{(t_2 - t_1)}} \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

Παρατήρηση:

Ἄν τό κινητό ἔτρεχε ἀπό τό Α στό Β μέ ταχύτητα σταθεροῦ μέτρου καί ἴσου μέ $u = \dfrac{(AB)}{t_2 - t_1}$ τότε θά διέτρεχε τό διάστημα $\overset{\frown}{AB}$ σέ χρόνο $(t_2 - t_1)$.



Σχ. 1.9β.

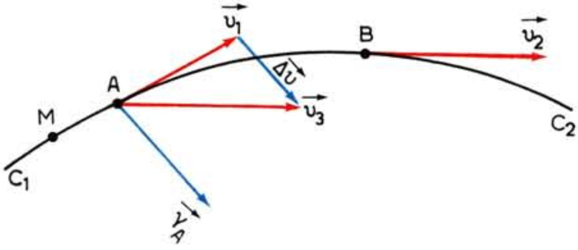
Ἑπομένως μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι:

Μέση ταχύτητα κινητοῦ Μ πού ἐκτελεῖ μιά ὁποιαδήποτε κίνηση μέ ταχύτητα μεταβαλλόμενη (κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά) ***ὀνομάζεται ἐκείνη ἡ σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, μέ τήν ὁποία θά ἔπρεπε νά κινηθεῖ τό κινητό γιά νά διανύσει στόν ἴδιο χρόνο τό ἴδιο διάστημα, τό ὁποῖο διανύει μέ τή μεταβαλλόμενη ταχύτητα.***

1.10 Γενικός ὁρισμός τῆς ἐπιταχύνσεως κινητοῦ.

Ἔστω ὅτι ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται σέ τροχιά C_1C_2 (σχ. 1.10) μέ φορά ἀπό τό C_1 πρός τό C_2 καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στό σημεῖο Α καί ἔχει ταχύτητα $\vec{u}_1$, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στό σημεῖο Β καί ἔχει ταχύτητα $\vec{u}_2$. Ὁ χρόνος $(t_2 - t_1)$ ***λαμβάνεται πάρα πολύ μικρός, ὁπότε τό Β εἶναι πάρα πολύ κοντά στό Α.***

Ἀπό τό σημεῖο Α γράφομε ***τό ἄνυσμα $\vec{u}_3$ ἴσο μέ τό $\vec{u}_2$.*** Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{u_1u_3}$ παριστάνει τή μεταβολή $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$ τῶν ταχυτήτων τοῦ κινητοῦ κατά τή μετάβασή του ἀπό τό Α στό Β, δηλαδή μέσα σέ χρόνο $(t_2 - t_1)$.



Σχ. 1.10.

Ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_A$ τοῦ κινητοῦ Μ στό σημεῖο Α, κατά τή χρονική στιγμή t_1 ὀνομάζεται τό ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Ἀρχή:*** τό σημεῖο Α.

β) ***Διεύθυνση:*** τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{u_1u_3} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$.

γ) ***Φορά:*** τή φορά τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{u_1u_3}$.

δ) ***Μέτρο:*** τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{u_1u_3}$ πρός τό χρόνο $(t_2 - t_1)$, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ***ὁ χρόνος αὐτός εἶναι πάρα πολύ μικρός,*** ὁπότε τό Β εἶναι πάρα πολύ κοντά στό Α, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\gamma}_A = \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{u_1u_3}}{t_2 - t_1}} \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

Συνήθως τή μεταβολή τῆς ταχύτητας πού γίνεται σέ πάρα πολύ μικρό χρόνο τήν παριστάνομε μέ $\Delta\vec{u}$, δηλαδή $\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ καί τόν πάρα πολύ μικρό χρόνο τόν παριστάνομε μέ Δt, δηλαδή $\Delta t = t_2 - t_1$. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\boxed{\vec{\gamma}_A = \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}}$$

1.11 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

1) *Κινητό κινεῖται συνέχεια μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ἐπί χρόνο $t = 4$ sec καί μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 2\ m/sec^2$. Ἄν ὑποθέσομε, ὅτι τό κινητό εἶχε ἀρχική ταχύτητα $u_0 = 10$ m/sec καί στό τέλος τοῦ χρόνου t ἀπέκτησε ταχύτητα $u_T = 18$ m/sec, νά βρεῖτε τή μέση ταχύτητα τοῦ κινητοῦ.*

Λύση.

Γνωρίζομε ὅτι ἡ μέση ταχύτητα $\bar{u}$ κινητοῦ πού κινεῖται συνέχεια ἐπί χρόνο t μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη, δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon_T}{2}} \qquad (1)$$

Δίνονται: $\upsilon_0 = 10$ m/sec καί $\upsilon_T = 18$ m/sec
Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon_T}{2} = \frac{10 + 18}{2} = 14 \text{ m/sec} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad \bar{\upsilon} = 14 \text{ m/sec.}$$

2) *Κινητό κινεῖται συνέχεια μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ἐπί χρόνο $t = 4$ sec καί ἐπιτάχυνση $\gamma = 2$ m/sec^2. Ἄν ὑποθέσομε ὅτι τό κινητό ξεκινάει ἀπό τήν ἠρεμία ($\upsilon_0 = 0$) καί στό τέλος τοῦ χρόνου t ἀποκτᾶ ταχύτητα $\upsilon_T = 8$ m/sec, νά βρεῖτε τή μέση ταχύτητα τοῦ κινητοῦ.*

Λύση.
Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_T}{2}} \qquad (1)$$

Δίνεται: $\upsilon_T = 8$ m/sec
Θέτομε στή σχέση (1) αὐτό πού δίνεται καί ἔχομε:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_T}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ m/sec} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad \bar{\upsilon} = 4 \text{ m/sec}$$

3) *Κινητό πού κινεῖται μέ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ἔχει ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 5$ m/sec καί τελική $\upsilon = 85$ m/sec, τήν ὁποία ἀποκτᾶ ὕστερα ἀπό παρέλευση χρόνου $t = 5$ sec. Μέ πόση ἐπιτάχυνση (γ) κινήθηκε τό κινητό;*

Λύση.
Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}} \qquad (1)$$

Δίνονται: $\upsilon_0 = 5$ m/sec, $\upsilon = 85$ m/sec καί $t = 5$ sec

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού μᾶς δίνονται καί ἔχομε:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{85 - 5}{5} = 16 \text{ m/sec}^2 \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad \gamma = 16 \text{ m/sec}^2$$

Στό σύστημα C.G.S.
Δίνονται:

$\upsilon_0 = 5$ m/sec $= 5 \times 10^2$ cm/sec $= 500$ cm/sec
$\upsilon = 85$ m/sec $= 85 \times 10^2$ cm/sec $= 8500$ cm/sec
$t = 5$ sec

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού μᾶς δίνονται καί ἔχομε:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{8500 - 500}{5} = 1600 \text{ cm/sec}^2 \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad \gamma = 1600 \text{ cm/sec}^2.$$

4) *Πόσο διάστημα S διατρέχει κινητό πού κινεῖται μέ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσή του εἶναι $\gamma = 2$ m/sec^2 καί ἡ ἀρχική του ταχύτητα εἶναι $\upsilon_0 = 3$ m/sec; Στήν περίπτωση πού ξεκινᾶ ἀπό τήν ἠρεμία, ποιό εἶναι τό διάστημα S΄ πού διατρέχει σέ χρόνο $t = 5$ sec;*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $\boxed{S = u_0 \cdot t + 1/2\ \gamma \cdot t^2}$ (1)

Δίνονται: $u_0 = 3$ m/sec $\gamma = 2$ m/sec^2 καί $t = 5$ sec

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$S = u_0 \cdot t + 1/2\ \gamma t^2 = 3 \times 5 \times + 1/2 \times 2 \times 5^2 = 40$ m ***ὥστε*** $S = 40$ m.

Στήν περίπτωση πού ξεκινάει ἀπό τήν ἠρεμία:

δίνονται: $u_0 = 0$ $\gamma = 2$ m/sec^2 καί $t = 5$ sec

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού μᾶς δίνονται καί ἔχομε:

$S' = u_0 t + 1/2\ \gamma t^2 = 0 \cdot t + 1/2\ \gamma t^2 = 1/2\ \gamma t^2 = 1/2 \times 2 \times 5^2 = 25$ m ***ὥστε*** $S' = 25$ m

Στό σύστημα C.G.S.

Δίνονται: $u_0 = 3$ m/sec $= 3 \times 10^2$ cm/sec $= 300$ cm/sec

$\gamma = 2$ m/sec^2 $= 2 \times 10^2$ cm/sec^2 $= 200$ cm/sec^2 καί $t = 5$ sec.

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$S = u_0\, t + 1/2\ \gamma t^2 = 300 \times 5 + 1/2 \times 200 \times 5^2 = 1500 + 100 \times 25 = 4000$ cm

καί $S = 4000$ cm

Στήν περίπτωση πού ξεκινάει ἀπό τήν ἠρεμία:

$S' = 1/2\ \gamma t^2 = 1/2 \times 200 \times 5^2 = 2500$ cm ***ὥστε*** $S' = 2500$ cm.

5) *Κινητό μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη ἐπί χρόνο $t = 4$ sec ἔχει ἐπιβράδυνση $\gamma = 2$ m/sec. Ἄν τό κινητό στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t εἶχε ἀρχική ταχύτητα $u_0 = 20$ m/sec καί στό τέλος τοῦ χρόνου t ἀπέκτησε ταχύτητα $u_T = 12$ m/sec, νά βρεθεῖ ἡ μέση ταχύτητα τοῦ κινητοῦ.*

Λύση.

Γνωρίζομε, ὅτι ἡ μέση ταχύτητα $\overline{u}$ ἑνός κινητοῦ γιά τό χρόνο t στήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{\overline{u} = \frac{u_0 + u_T}{2}} \qquad (1)$$

Δίνονται: $u_0 = 20$ m/sec καί $u_T = 12$ m/sec

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$\overline{u} = \frac{u_0 + u_T}{2} = \frac{20 + 12}{2} = 16 \text{ m/sec} \quad \textbf{ὥστε} \quad \overline{u} = 16 \text{ m/cm}$$

6) *Κινητό κινεῖται μέ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση μέχρις ὅτου σταματήσει καί μέ ἐπιβράδυνση $\gamma = 2$ m/sec^2. Ἄν τό κινητό εἶχε ἀρχική ταχύτητα $u_0 = 20$ m/sec, νά βρεθεῖ ἡ μέση ταχύτητα τοῦ κινητοῦ.*

Λύση.

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $\overline{u} = \dfrac{u_0}{2}$ Δίνεται: $u_0 = 20$ m/sec

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$\overline{u} = \frac{u_0}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/sec} \quad \textbf{ὥστε} \quad \overline{u} = 10 \text{ m/sec*}$$

7) *Ἡ ἐπιβράδυνση κινητοῦ πού κινεῖται μέ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση εἶναι $\gamma = 200\ cm/sec^2$. Τή στιγμή πού ἄρχισε ἡ ἐπιβράδυνση τό κινητό εἶχε ταχύτητα $\upsilon_0 = 80\ m/sec$. Πόσο διάστημα (S) διέτρεξε σέ χρόνο $t = 20\ sec$ ἀπό τή στιγμή πού ἄρχισε ἡ ἐπιβράδυνση καί πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ στό τέλος τοῦ εἰκοστοῦ δευτερολέπτου;*

Λύση.
Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι:

$$\boxed{S = \upsilon_0 t - 1/2\ \gamma\ .\ t^2} \qquad (1)$$

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t} \qquad (2)$$

Δίνονται: $\upsilon_0 = 80\ \dfrac{m}{sec}$, $\quad t = 20\ sec\quad$ καί $\quad \gamma = 200\ \dfrac{cm}{sec^2} = 200 \times 10^{-2}\ \dfrac{m}{sec^2} = 2\ \dfrac{m}{sec^2}$

Θέτομε στίς σχέσεις (1) καί (2) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$S = \upsilon_0 t - 1/2\ \gamma t^2 = 80 \times 20 - 1/2 \times 2 \times 20^2 = 1200\ m \quad \textit{ὥστε} \quad S = 1200\ m$$

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t = 80 - 2 \times 20 = 40\ m/sec \quad \textit{ὥστε} \quad \upsilon = 40\ m/sec$$

Στό σύστημα C.G.S.

Δίνονται: $\upsilon_0 = 80\ \dfrac{m}{sec} = 80 \cdot \dfrac{10^2 cm}{sec} = 8000\ \dfrac{cm}{sec}$, $\quad t = 20\ sec\quad$ καί $\quad \gamma = 200\ \dfrac{cm}{sec^2}$

Ἀντικαθιστοῦμε στίς σχέσεις (1) καί (2) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$S = \upsilon_0\ .\ t - 1/2\ \gamma t^2 = 8000 \times 20 - 1/2 \times 200 \times 20^2 = 120000\ cm$$

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t = 8000 - 200 \times 20 = 4000\ cm/sec$$

Ὥστε: $\quad S = 120000\ cm \quad$ καί $\quad \upsilon = 4000\ cm/sec$

8) *Ἡ ἐπιβράδυνση κινητοῦ πού κινεῖται μέ εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση εἶναι $\gamma = 200\ cm/sec^2$. Τή στιγμή πού ἄρχισε ἡ ἐπιβράδυνση τό κινητό εἶχε ταχύτητα $\upsilon_0 = 80\ m/sec$. Πόσο χρόνο t_μ θά κινηθεῖ τό κινητό καί πόσο διάστημα S_μ θά διατρέξει ὥσπου νά σταματήσει;*

Λύση.
Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι:

$$\boxed{t_\mu = \frac{\upsilon_0}{\gamma}} \qquad (1)$$

$$\boxed{S_\mu = \frac{\upsilon_0^{\,2}}{2\gamma}} \qquad (2)$$

Δίνονται: $\quad \upsilon_0 = 80\ m/sec \quad$ καί $\quad \gamma = 200\ cm/sec^2 = 2\ m/sec^2$

Θέτομε στίς σχέσεις (1) καί (2) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$t_\mu = \frac{\upsilon_0}{\gamma} = \frac{80}{2} = 40\ sec \quad \textit{ὥστε} \quad t_\mu = 40\ sec$$

$$S_\mu = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} = \frac{80^2}{2 \times 2} = 1600\ m \quad \textit{ὥστε} \quad S_\mu = 1600\ m$$

$S_{ολ} = S_1 + S_2 = 124{,}538 + 2{,}490 = 127{,}028$ km *ὥστε* $S_{ολ} = 127{,}028$ km

1.12 Ὁμαλή κυκλική κίνηση.

Ὁρισμός:

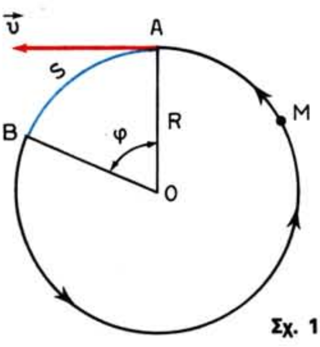
Ὁμαλή κυκλική κίνηση ὀνομάζεται ἡ κίνηση ὑλικοῦ σημείου πού:

α) κινεῖται ἐπάνω σέ περιφέρεια κύκλου καί

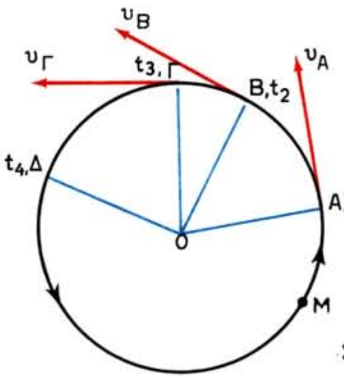
β) διανύει ἴσα τόξα σέ ἴσους χρόνους.

Γραμμική ταχύτητα (ἤ ἁπλῶς: ταχύτητα).

Ἔστω ὅτι κινητό Μ (σχ. 1.12α) κινεῖται μέ κυκλική καί ὁμαλή κίνηση καί βρίσκεται στό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του κατά τή χρονική στιγμή t_1 καί στό σημεῖο Β κατά τή χρονική στιγμή t_2.



Σχ. 1.12α.



Σχ. 1.12β.

Ὀνομάζομε γραμμική ταχύτητα $\vec{υ}$ τοῦ κινητοῦ Μ στό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Ἀρχή,*** τό σημεῖο Α.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση πού ἔχει ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας στό σημεῖο Α.

γ) ***Φορά,*** τή φορά τῆς κινήσεως.

δ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό πηλίκο τοῦ μήκους τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ πρός τό χρόνο $(t_2 - t_1) = t$, στόν ὁποῖο τό διατρέχει. Ἰσχύει δηλαδή ἡ σχέση:

$$υ = \frac{(AB)}{(t_2 - t_2)} = \frac{S}{t} \tag{1}$$

ὅπου: S = (AB).

Παρατηρήσεις.

1) Ὑποθέτομε ὅτι κινητό Μ κινεῖται μέ κίνηση κυκλική ὁμαλή (σχ. 1.12β) καί κατά τίς χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, t_4 διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀντίστοιχα. Τότε τά μέτρα τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό κινητό στά σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι:

$$υ_A = \frac{(AB)}{t_2 - t_1}, \qquad υ_B = \frac{(BΓ)}{t_3 - t_2} \qquad \text{καί} \qquad υ_Γ = \frac{(ΓΔ)}{t_4 - t_3}$$

Καθένα ἀπό τά πηλίκα $\frac{(AB)}{t_2 - t_1}$, $\frac{(B\Gamma)}{t_3 - t_2}$, $\frac{(\Gamma\Delta)}{t_4 - t_3}$, εἶναι ἀριθμητικῶς ἴσο μέ τό μῆκος τοῦ τόξου πού διανύει τό κινητό στή μονάδα τοῦ χρόνου. Ἀκόμη, ἐπειδή ἡ κίνηση εἶναι κυκλική ὁμαλή, τά πηλίκα αὐτά εἶναι ἴσα μεταξύ τους καί ἔχουν σταθερή τιμή. Δηλαδή:

$$υ_A = υ_B = υ_\Gamma = \frac{(AB)}{t_2 - t_1} = \frac{(B\Gamma)}{t_3 - t_2} = \frac{(\Gamma\Delta)}{t_4 - t_3} = \text{σταθερά}$$

2) Ἡ ταχύτητα κινητοῦ, πού κινεῖται μέ κυκλική ὁμαλή κίνηση, ἔχει ***τό ἴδιο μέτρο σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς*** καί ἡ διεύθυνσή της ***συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης σέ κάθε σημεῖο τῆς τροχιᾶς.***

3) Γιά νά βροῦμε τό ***μέτρο*** τῆς ταχύτητας στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ***διαιροῦμε τό μῆκος ἑνός ὁποιουδήποτε τόξου (S) τῆς τροχιᾶς πού διέτρεξε τό κινητό, διά τοῦ χρόνου (t) μέσα στόν ὁποῖο τό διέτρεξε.*** Δηλαδή, ἐφαρμόζομε τή σχέση:

$$υ = \frac{S}{t}$$

Περίοδος καί συχνότητα τῆς κυκλικῆς ὁμαλῆς κινήσεως.

Περίοδος (T) μιᾶς κυκλικῆς ὁμαλῆς κινήσεως ὀνομάζεται ὁ χρόνος πού χρειάζεται τό κινητό γιά νά διανύσει μιά φορά ὁλόκληρη τήν περιφέρεια (δηλαδή τόξο μήκους $2\pi R$, ὅπου R = ἡ ἀκτίνα τῆς τροχιᾶς), ἤ ἀλλοιῶς: ***ὁ χρόνος πού χρειάζεται τό κινητό γιά νά κάνει μιά πλήρη περιστροφή.***

Ἡ περίοδος (T) μιᾶς κυκλικῆς ὁμαλῆς κινήσεως εἶναι σταθερή. Δηλαδή: γιά κάθε ὁλόκληρη περιστροφή τό κινητό χρειάζεται ἴσο χρόνο (κίνηση: κυκλική ὁμαλή).

Συχνότητα κυκλικῆς ὁμαλῆς κινήσεως ὀνομάζεται τό πηλίκο (ν) τοῦ ἀριθμοῦ (α) τῶν περιστροφῶν, πού ἐκτελεῖ τό κινητό, πρός τό χρόνο (t), μέσα στόν ὁποῖο τίς ἐκτελεῖ. Δηλαδή:

$$ν = \frac{α}{t}$$

Τό πηλίκο $ν = α/t$, δηλαδή ***ἡ συχνότητα, ἐκφράζει τόν ἀριθμό τῶν περιστροφῶν πού ἐκτελεῖ τό κινητό στή μονάδα τοῦ χρόνου.*** Ἡ συχνότητα μιᾶς κυκλικῆς ὁμαλῆς κινήσεως εἶναι σταθερή.

Σχέση τῆς περιόδου (T) καί τῆς συχνότητας (ν) στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση.

Ἔστω ὅτι κινητό ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση, τῆς ὁποίας ἡ περίοδος εἶναι T sec. Ἄν θέλομε νά βροῦμε τόν ἀριθμό τῶν περιστροφῶν πού ἐκτελεῖ τό κινητό αὐτό σέ 1 sec, σκεπτόμαστε:

Σέ χρόνο T sec ἐκτελεῖ 1 περιστροφή.

Σέ χρόνο 1 sec ἐκτελεῖ x; Δηλαδή $x = \frac{1}{T}$

Ὁ ἀριθμός τῶν περιστροφῶν (x) πού ἐκτελεῖ τό κινητό σέ 1 sec εἶναι ἡ συχνότητα (ν) τῆς κινήσεως. Ἄρα:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (1)$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή συμπεραίνομε ***ὅτι ἡ περίοδος καί ἡ συχνότητα στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση εἶναι μεγέθη ἀντίστροφα.***

Μονάδες συχνότητας.

Ἔχομε τή σχέση: $\nu = \frac{1}{T}$

Ἡ μονάδα χρόνου ***σέ ὅλα τά συστήματα μονάδων εἶναι τό 1 s.*** Ἄρα ἡ μονάδα συχνότητας ***σέ ὅλα τά συστήματα εἶναι:***

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1\ s} = 1\ s^{-1}$$

Τή μονάδα συχνότητας $1.s^{-1}$ τή λέμε Hertz (1 Hz) ἤ κύκλο κατά δευτερόλεπτο (1 c/s), δηλαδή:

$$1\ Hz = 1\ s^{-1} \qquad ἤ \qquad 1\ \frac{c}{s} = 1\ s^{-1}$$

Ὥστε, ὅταν λέμε συχνότητα ἑνός Hertz (1 Hz) ἤ ἑνός κύκλου κατά δευτερόλεπτο (1 c/s), ἐννοοῦμε τή συχνότητα κινητοῦ πού ἐκτελεῖ κίνηση ὁμαλή κυκλική καί γράφει μιά ὁλόκληρη στροφή (1 κύκλο) σέ χρόνο ἑνός δευτερολέπτου ἤ πού ἔχει περίοδο ἴση μέ ἕνα δευτερόλεπτο, δηλαδή, T = 1 sec.

Πολλαπλάσια τῆς μονάδας Hertz (Hz) εἶναι:

α) Τό 1 kilohertz (1 kHz) = 1000 Hz = 10^3 Hz.
Τό kilohertz λέγεται καί χιλιόκυκλος κατά δευτερόλεπτο (1 kc/sec).

$$1\ kc/sec = 1000\ c/s = 1000\ Hz = 10^3\ Hz$$

β) Τό 1 Megahertz (1 MHz) = 10^6 Hz = 10^6 c/s.
Τό Megahertz λέγεται καί μεγάκυκλος κατά δευτερόλεπτο (1M c/s).

$$1\ Mc/s = 10^6\ c/s = 10^6\ Hz$$

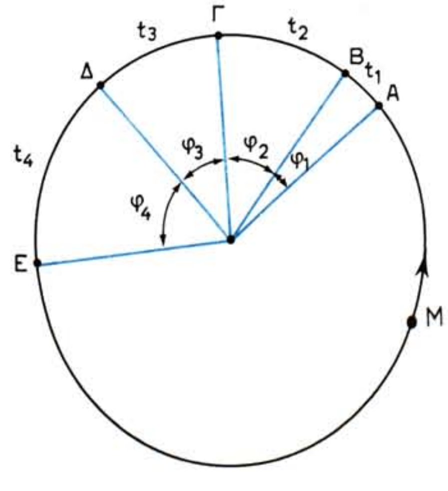
Γωνιακή ταχύτητα ($\vec{\omega}$) στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση.

Ἔστω ὅτι ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται μέ κίνηση κυκλική ὁμαλή καί κατά τή χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στή θέση Α, ἐνῶ τή χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στή θέση Β, καί ἡ ἐπίκεντρη γωνία τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι ἡ φ (σχ. 1.12γ).

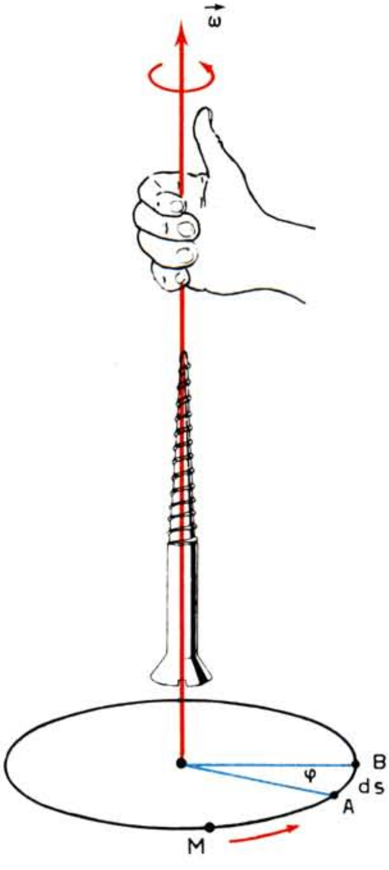
Ὀνομάζομε γωνιακή ταχύτητα τοῦ κινητοῦ Μ στή θέση Α, τό ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Ἀρχή,*** τό κέντρο τῆς περιφέρειας πού κινεῖται τό κινητό.
β) ***Διεύθυνση,*** κάθετη στό ἐπίπεδο τῆς περιφέρειας πού διαγράφει τό κινητό.
γ) ***Φορά,*** ἐξαρτᾶται ἀπό τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ ἐπάνω στήν περιφέρεια καί βρίσκεται μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία.
δ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό πηλίκο τῆς ἐπίκεντρης γωνίας (φ) τοῦ τόξου ΑΒ πρός τό χρόνο $t = (t_2 - t_1)$ πού χρειάσθηκε τό κινητό Μ γιά νά διανύσει τό τόξο ΑΒ, δηλαδή:

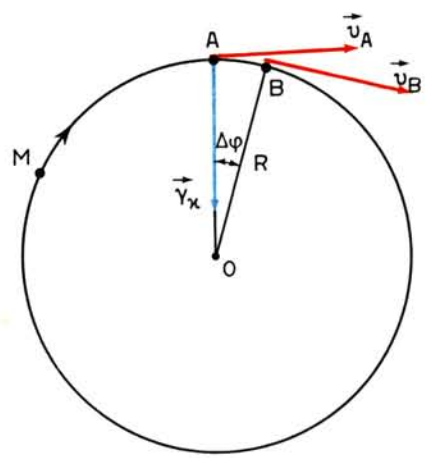
$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$



Σχ. 1.12δ.



Σχ. 1.12γ.



Σχ. 1.12ε.

Παρατηρήσεις.

1) Ἄν τό κινητό Μ πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση διανύει σέ χρόνους t_1, t_2, t_3, t_4 τά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$ (σχ. 1.12δ), τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες του εἶναι φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, τότε ἰσχύει:

$$\omega = \frac{\varphi_1}{t_1} = \frac{\varphi_2}{t_2} = \frac{\varphi_3}{t_3} = \frac{\varphi_4}{t_4} = \text{σταθερό}$$

Ἑπομένως: Τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ταχύτητας κινητοῦ πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση ***εἶναι τό ἴδιο (σταθερό) σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς.***

2) Γιά νά βρίσκομε τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ταχύτητας (ω) ἑνός κινητοῦ πού ἐ-

κτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση, ***θά διαιροῦμε τήν ἐπίκεντρη γωνία (φ) πού ἀντιστοιχεῖ σέ ὁποιοδήποτε τόξο*** (S), πού διέτρεξε τό κινητό, διά τοῦ χρόνου (t) μέσα στόν ὁποῖο τό διέτρεξε:

$$\omega = \frac{\phi}{t}$$

3) Στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ἔχει σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του τό ἴδιο μέτρο, τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά. ***Δηλαδή: ἡ γωνιακή ταχύτητα ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση εἶναι ἕνα σταθερό διανυσματικό μέγεθος.***

4) Ἄν ἕνα κινητό ἐκτελεῖ κίνηση τῆς ὁποίας ἡ γωνιακή ταχύτητα σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς ἔχει τό ἴδιο μέτρο, τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά, ***δηλαδή ἄν τό κινητό κινεῖται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα, τότε ἡ κίνηση αὐτή τοῦ κινητοῦ εἶναι κυκλική ὁμαλή.***

Μονάδα γωνιακῆς ταχύτητας.

Ἔχομε τή σχέση:
$$\omega = \frac{\phi}{t}$$

Ἡ μονάδα γωνίας στή φυσική εἶναι τό ἀκτίνιο (1 rad) καί ἡ μονάδα χρόνου εἶναι τό 1 s. Ἄρα ἡ μονάδα γωνιακῆς ταχύτητας σέ ὅλα τά συστήματα εἶναι:

$$\omega = \frac{1\ \mathrm{rad}}{1\ \mathrm{s}} = 1\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Ὥστε, ὅταν θά λέμε γωνιακή ταχύτητα ἑνός ἀκτινίου (1 rad) κατά δευτερόλεπτο, θά ἐννοοῦμε ***τή γωνιακή ταχύτητα τοῦ κινητοῦ πού ἐκτελεῖ κίνηση ὁμαλή κυκλική καί γράφει μέσα σέ ἕνα δευτερόλεπτο (t = 1 s) τόξο πού ἀντιστοιχεῖ σέ ἐπίκεντρη γωνία ἴση μέ ἕνα ἀκτίνιο (φ = 1 rad).***

Σημείωση: Ἡ γωνία εἶναι μονόμετρο μέγεθος (καθαρός ἀριθμός). Δηλαδή οἱ διαστάσεις της εἶναι (Ο, Ο, Ο). Ἄρα μποροῦμε νά γράψομε:

$$1\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$$

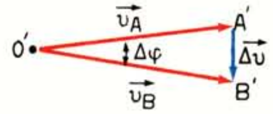
Ἐπιτάχυνση στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση (κεντρομόλος ἐπιτάχυνση).

Ἔστω ὅτι ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται μέ κίνηση ὁμαλή κυκλική σέ τροχιά πού ἔχει ἀκτίνα R. Ὅταν βρίσκεται στή θέση Α ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ καί ὅταν βρίσκεται στή θέση Β ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$ (σχ. 1.12ε). Οἱ δύο ταχύτητες $\vec{\upsilon}_A$ καί $\vec{\upsilon}_B$ ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, ***ἀλλά διαφορετική διεύθυνση, εἶναι ἐπομένως διαφορετικές*** (ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ ταχύτητα εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς σέ κάθε θέση τοῦ κινητοῦ).

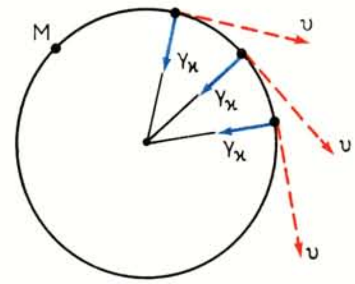
Ὥστε ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ Μ πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μεταβάλλεται ἀπό τό Α στό Β καί ἡ μεταβολή αὐτή εἶναι: $\vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A$.

Ἐπειδή ὅμως, ὅταν ἡ ταχύτητα ἑνός κινητοῦ μεταβάλλεται (εἴτε κατά τό μέτρο εἴτε κατά τή διεύθυνση εἴτε κατά τή φορά), τό κινητό αὐτό ἔχει ἐπιτάχυνση, συμπεραίνομε ***ὅτι τό κινητό πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση ἔχει ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$ γιατί μεταβάλλεται ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητάς του.***

'Επιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$ (σχ. 1.12ε) σέ ἕνα σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ Μ πού



Σχ. 1.12στ.



Σχ. 1.12ζ.

κινεῖται μέ ὁμαλή κυκλική κίνηση ***ὀνομάζεται κεντρομόλος ἐπιτάχυνση καί εἶναι ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***'Αρχή,*** τό σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς ἀκτίνας πού ἑνώνει τό σημεῖο Α μέ τό κέντρο τοῦ κύκλου (δηλαδή ἡ διεύθυνση τῆς $\vec{\gamma}_\kappa$ εἶναι κάθετη* πάνω στή διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_A$).

γ) ***Φορά,*** τή φορά ἀπό τό σημεῖο Α πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου.

δ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό πηλίκο τοῦ τετραγώνου τοῦ μέτρου τῆς γραμμικῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ διά τοῦ μήκους τῆς ἀκτίνας τῆς περιφέρειας. Δηλαδή:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon_A^2}{R}$$

Παρατηρήσεις:

1) 'Η ἐπιτάχυνση κινητοῦ πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση ἔχει ***σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του*** φορά ἀπό τό ὑλικό σημεῖο πρός τό κέντρο τῆς περιφέρειας (σχ. 1.12ζ). Γι' αὐτό τήν ἐπιτάχυνση αὐτή τήν ὀνομάζομε κεντρομόλο ἐπιτάχυνση.

---

* 'Από ἕνα σημεῖο Ο΄ (σχ. 1.12ε καί 1.12στ) φέρνομε τά διανύσματα $\vec{\upsilon}_A$ καί $\vec{\upsilon}_B$. Τό διάνυσμα πού προκύπτει, ἄν ἑνώσομε τά πέρατα τῶν υ_A

'Επειδή $\upsilon_A = \upsilon_B$ (ἴσα μέτρα), τό τρίγωνο Ο΄Α΄Β΄ (σχ. 1.12στ) εἶναι ἰσοσκελές καί γιά τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἔχομε:

$$\Delta\phi + O'A'B' + A'B'O' = 180^\circ \quad \text{ἀλλά} \quad O'A'B' = A'B'O' \quad \text{καί} \quad \Delta\phi + 2 \,.\, O'A'B' = 180^\circ$$

'Επειδή ἡ Δφ εἶναι πάρα πολύ μικρή ($\Delta\phi \approx 0$) (τό Β τό παίρνομε πολύ κοντά στό Α) μποροῦμε νά τήν παραλείψομε, ὁπότε ἔχομε:

$$2 \,.\, O'A'B' \approx 180^\circ \quad \text{καί} \quad O'A'B' \approx 90^\circ$$

Δηλαδή τά διανύσματα $\vec{\Delta\upsilon}$ καί $\vec{\upsilon}_A$ σχηματίζουν γωνία 90°. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό διάνυσμα $\vec{\Delta\upsilon}$ εἶναι κάθετο στό $\vec{\upsilon}_A$. 'Επομένως καί ἡ $\vec{\gamma}_\kappa$ πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς $\vec{\Delta\upsilon}$ θά εἶναι κάθετη στήν $\vec{\upsilon}_A$, δηλαδή θά ἔχει διεύθυνση τή διεύθυνση τῆς ἀκτίνας καί φορά πρός τό κέντρο.

2) Ἡ ἐπιτάχυνση κινητοῦ πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση ***ἔχει σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς τό ἴδιο μέτρο*** (σχ. 1.12ζ). Δηλαδή εἶναι:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Σχέση γραμμικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ καί περιόδου (Τ) στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση.

Τό μέτρο (υ) τῆς γραμμικῆς ταχύτητας ὑλικοῦ σημείου στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ἰσοῦται μέ τό πηλίκο τοῦ μέτρου (S) τοῦ μήκους τοῦ τόξου διά τοῦ χρόνου (t) μέσα στόν ὁποῖο τό κινητό διανύει τό τόξο αὐτό. Δηλαδή:

$$\upsilon = \frac{S}{t}$$

Ἕνα κινητό, πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια μέ ἀκτίνα R, κατά τή διάρκεια μιᾶς περιόδου (Τ) διανύει διάστημα ἴσο μέ (2πR), δηλαδή ὅσο εἶναι τό μῆκος τῆς περιφέρειας. Ἄρα:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T}$$

Σχέση γραμμικῆς ταχύτητας καί συχνότητας στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση.

Γνωρίζομε ὅτι στήν περίπτωση ὑλικοῦ σημείου, πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια μέ ἀκτίνα R, τό μέτρο τῆς γραμμικῆς ταχύτητας (υ), ἡ περίοδος (Τ) καί ἡ συχνότητα (ν) συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \qquad (1)$$

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad (2)$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (1) ἀντικαταστήσομε τήν (Τ) μέ τό ἴσο της πού μᾶς τό δίνει ἡ ἐξίσωση (2), θά ἔχομε:

$$\upsilon = 2\pi R \cdot \nu$$

Σχέση γωνιακῆς ταχύτητας (ω) καί περιόδου (Τ).

Τό μέτρο (ω) τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ἑνός ὑλικοῦ σημείου πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση ἰσοῦται μέ τό πηλίκο τῆς ἐπίκεντρης γωνίας φ, πού ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα τόξο (S), διά τοῦ χρόνου (t) μέσα στόν ὁποῖο τό κινητό διανύει τό τόξο αὐτό:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Τό κινητό πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση διανύει τόξο μήκους 2πR (μιά περιφέρεια) σέ χρόνο μιᾶς περιόδου (Τ) καί ἡ ἐπίκεντρη γωνία πού ἀντιστοιχεῖ στό τόξο αὐτό εἶναι 2π. Ἄρα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Παρατήρηση:

Ἐπειδή στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ἡ περίοδος (Τ) εἶναι σταθερή, συμπεραίνομε ***καί*** ἀπό τή σχέση (1) ὅτι ***τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου***

εἶναι τό ἴδιο σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του, εἶναι δηλαδή σταθερό.
Ἑπομένως:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \text{σταθερό}$$

Σχέση γωνιακῆς ταχύτητας (ω) καί συχνότητας (ν).

Γνωρίζομε ὅτι στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ταχύτητας (ω), ἡ περίοδος (T) καί ἡ συχνότητα (ν) συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (1)$$

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad (2)$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (1) ἀντικαταστήσομε τήν (T) μέ τό ἴσο της, πού μᾶς τό δίνει ἡ ἐξίσωση (2), θά ἔχομε:

$$\omega = 2\pi \,.\, \nu$$

Σχέση μεταξύ γραμμικῆς ταχύτητας (υ) καί γωνιακῆς (ω).

Γιά τό ὑλικό σημεῖο πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \qquad (1)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (2)$$

ὅπου: υ εἶναι τό μέτρο τῆς γραμμικῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου,
ω εἶναι τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου,
T εἶναι ἡ περίοδος τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἄν στή σχέση (1) ἀντικαταστήσομε τό (2π/T) μέ τό ἴσο του πού τό παίρνομε ἀπό τή σχέση (2), θά ἔχομε:

$$\upsilon = \omega R$$

1.13 Ἐπιτρόχιος καί κεντρομόλος ἐπιτάχυνση.

Ἔστω ὅτι ἕνα κινητό κινεῖται σέ τροχιά C_1C_2 (σχ. 1.13α) μέ φορά ἀπό τό C_1 πρός τό C_2 καί ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t_1 πού βρίσκεται στό A ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 πού βρίσκεται στό B ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ ($t_2 - t_1$ = πολύ μικρό). Ἔστω ἀκόμη ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση πού ἔχει τό κινητό στό A εἶναι ἡ $\vec{\gamma}$.

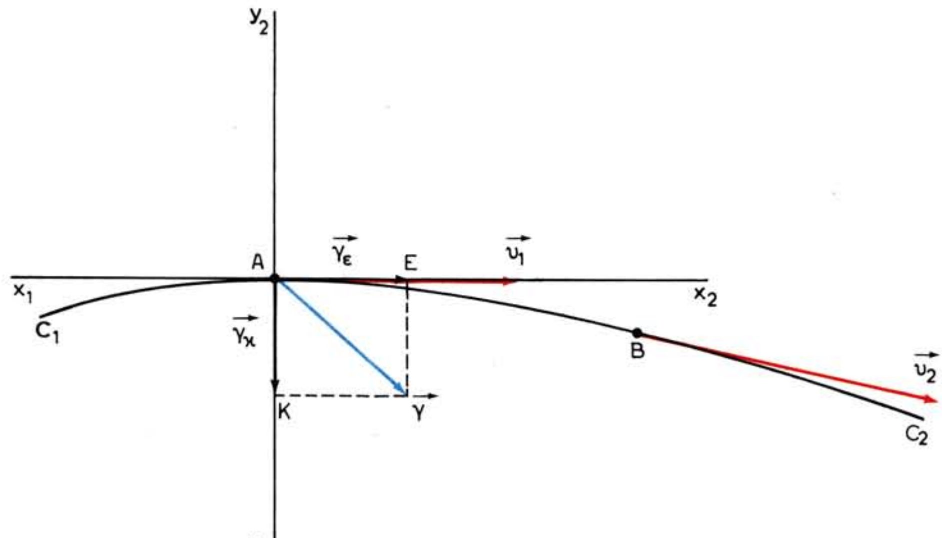
Ἀπό τό σημεῖο A γράφομε δύο εὐθεῖες: τή x_1x_2, ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο A (αὐτή συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς $\vec{\upsilon}_1$), καί τήν y_1y_2, κάθετη στήν ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο A (δηλαδή κάθετη στήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$). Ἀπό τό τέλος τοῦ διανύσματος $\vec{\gamma}$ γράφομε:

α) Μία παράλληλο πρός τήν εὐθεία y_1y_2. Αὐτή τέμνει τήν x_1x_2 ἔστω στό σημεῖο E, καί

β) Μία παράλληλο πρός τήν εὐθεία x_1x_2. Αὐτή τέμνει τήν y_1y_2 ἔστω στό σημεῖο K.

Τότε τά ἀνύσματα $\vec{AE}$ καί $\vec{AK}$ εἶναι οἱ συνιστῶσες τοῦ ἀνύσματος $\vec{\gamma}$.

Ἡ συνιστώσα $\vec{AE}$ πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο A (δηλαδή τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$) ***ὀνομάζεται ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνση ($\vec{\gamma}_\epsilon$) τοῦ κινητοῦ στό σημεῖο A καί ἔχει μέτρο τό πηλίκο τῆς διαφορᾶς τῶν μέτρων τῶν δύο ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ διά τοῦ πάρα πολύ μικροῦ χρόνου ($t_2 - t_1$). Δηλαδή:***



Σχ. 1.13α.

$$\gamma_\varepsilon = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1}$$

Ἡ συνιστώσα $\overrightarrow{AK}$ πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς καθέτου στήν ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Α (δηλαδή εἶναι κάθετος στήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$) ***ὀνομάζεται κεντρομόλος (γ_κ) ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ στό σημεῖο Α*** καί ἔχει φορά ἀπό τό Α πρός τό κέντρο καμπυλότητας τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Α καί μέτρο τό πηλίκο τοῦ τετραγώνου τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ διά τοῦ μέτρου τῆς ἀκτίνας καμπυλότητας* (R) τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Α. Δηλαδή:

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon_1^2}{R}$$

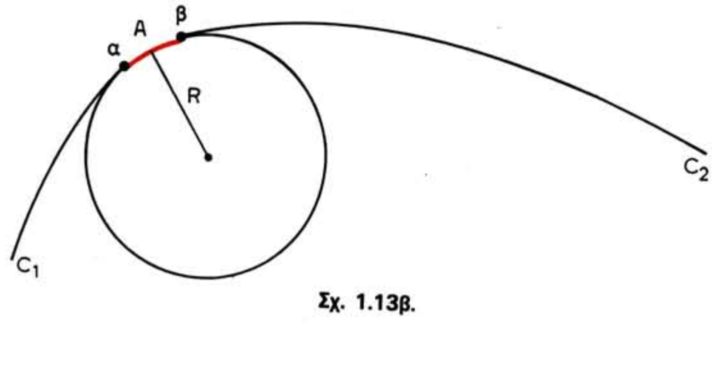
---

* Γιά νά βροῦμε τήν ἀκτίνα καμπυλότητας σέ ἕνα σημεῖο, π.χ. Α, μιᾶς καμπύλης, π.χ. τῆς C_1 C_2 (σχ. 1.13β) ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Παίρνομε γύρω ἀπό τό Α δύο σημεῖα α καί β πού νά εἶναι πολύ κοντά στό Α.

2) Γράφομε τήν περιφέρεια πού περνάει ἀπό τά σημεῖα α, Α, β.

Ἡ ἀκτίνα R τῆς περιφέρειας πού γράψαμε εἶναι ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας τῆς καμπύλης C_1 C_2 στό σημεῖο Α.

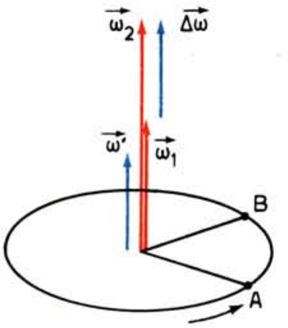


Σχ. 1.13β.

1.14 Γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$.

Ὁρισμός:

Ἔστω ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t_1 τό κινητό βρίσκεται (σχ. 1.14) στή θέση Α καί ἔχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_1$, ἐνῶ μετά ἀπό χρόνο Δt, πού λαμβάνεται ***πάρα πολύ μικρός,*** βρίσκεται στή θέση Β καί ἔχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_2$.



Σχ. 1.14.

Δηλαδή ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ κινητοῦ μέσα στό χρόνο Δt, πού λαμβάνεται πάρα πολύ μικρός, μεταβάλλεται κατά $\vec{\Delta\omega}$.

Ὀνομάζομε γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$ τοῦ κινητοῦ κατά τή χρονική στιγμή t_1 ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

1) Διεύθυνση καί φορά, τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\Delta\omega}$, καί
2) Μέτρο, τό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς μεταβολῆς $\vec{\Delta\omega}$ τῆς γωνιακῆς ταχύτητας πρός τό χρόνο Δt, μέσα στόν ὁποῖο γίνεται αὐτή ἡ μεταβολή, μέ τήν προϋπόθεση ***ὅτι ὁ χρόνος Δt εἶναι πάρα πολύ μικρός.*** Δηλαδή:

$$\vec{\omega}' = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{\Delta\omega}}{\Delta t} \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

$$\omega' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Μονάδα γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως.

Ἔχομε τή σχέση ὁρισμοῦ: $\vec{\omega}' = \frac{\vec{\Delta\omega}}{\Delta t}$ ἤ $\omega' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Μονάδα γωνιακῆς ταχύτητας ***γιά ὅλα τά συστήματα εἶναι*** 1 rad/s καί μονάδα χρόνου εἶναι 1s. Ἄρα ἡ μονάδα γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως ***γιά ὅλα τά συστήματα εἶναι:***

$$\omega' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\frac{1\ \text{rad}}{\text{s}}}{1\text{s}} = \frac{1\ \text{rad}}{\text{s}^2} = 1\ \text{s}^{-2}$$

1.15 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

9) *Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται μέ κίνηση ὁμαλή κυκλική. Ἄν ἡ γραμμική ταχύτητα τοῦ σημείου εἶναι $u = 4$ m/sec καί ἡ ἀκτίνα τῆς περιφέρειας $R = 1$ m, νά βρεθοῦν:*
α) Ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω) τοῦ ὑλικοῦ σημείου, β) ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσή του (γ_κ), γ) ἡ περίοδος (Τ) τῆς κινήσεώς του καί δ) ἡ συχνότητα (ν) περιφορᾶς.

Λύση.
α) Εὕρεση τῆς γωνιακῆς ταχύτητας (ω).

Ἰσχύει ἡ σχέση:
$$u = \omega \cdot R \tag{1}$$

Ἀπό τή σχέση (1) βρίσκομε:
$$\omega = \frac{u}{R} \tag{2}$$

Δίνονται: $u = 4$ m/sec καί $R = 1$ m.

Θέτομε στή σχέση (2) αὐτά πού δίνονται καί βρίσκομε:

$$\omega = \frac{u}{R} = \frac{4}{1} = 4 \text{ rad/sec} \quad \textit{ὥστε} \quad \omega = 4 \text{ rad/sec.}$$

β) Εὕρεση τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως (γ_K).

Ἰσχύει ἡ σχέση:
$$\gamma_\kappa = \frac{u^2}{R} \tag{3}$$

Δίνονται: $u = 4$ m/sec καί $R = 1$ m.

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (3) καί ἔχομε:

$$\gamma_\kappa = \frac{u^2}{R} = \frac{4^2}{1} = 16 \text{ m/sec}^2 \quad \textit{ὥστε} \quad \gamma_\kappa = 16 \text{ m/sec}^2.$$

γ) Εὕρεση τῆς περιόδου Τ.

Ἰσχύει ἡ σχέση:
$$u = \frac{2\pi R}{T} \tag{4}$$

Ἀπό τήν (4) παίρνομε:
$$T = \frac{2\pi R}{u} \tag{5}$$

Δίνονται: $u = 4$ m/sec καί $R = 1$ m.

Θέτομε στήν (5) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$T = \frac{2\pi R}{u} = \frac{2 \times 3,14 \times 1}{4} = 1,57 \text{ sec} \quad \textit{ὥστε} \quad T = 1,57 \text{ sec.}$$

δ) Εὕρεση τῆς συχνότητας (ν).

Ἰσχύει ἡ σχέση:
$$\nu = \frac{1}{T} \tag{6}$$

Θέτομε στή σχέση (6) $T = 1,57$ sec καί λαμβάνομε:

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}57\ sec} = 0{,}63\ c/sec \quad \textbf{ὥστε} \quad v = 0{,}63\ c/sec.$$

10) *Πόση εἶναι ἡ συχνότητα τῆς περιστροφῆς (v) τῶν τροχῶν ἑνός αὐτοκινήτου ἀκτίνας $R = 40$ cm, ὅταν τό αὐτοκίνητο σέ χρόνο $t = 15$ min διατρέχει ἀπόσταση $S = 10$ km; Ἐπίσης νά βρεθεῖ ἡ γραμμική ταχύτητα ($υ_T$) τῆς κεφαλῆς ἑνός μικροῦ καρφιοῦ, πού ἔχει κολλήσει στόν τροχό καί νά συγκριθεῖ μέ τήν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου ($υ_α$).*

Λύση.

Εὕρεση τῆς συχνότητας περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ.

Ὅταν ὁ τροχός τοῦ αὐτοκινήτου κάνει μία στροφή, τό αὐτοκίνητο μετατοπίζεται ἀπόσταση τόση ὅσο εἶναι τό μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ τροχοῦ, δηλαδή διάστημα S_1 τό ὁποῖο εἶναι:

$$S_1 = 2\pi R \tag{1}$$

Ἑπομένως, ὅταν τό αὐτοκίνητο διατρέχει ἀπόσταση S, ὁ τροχός ἐκτελεῖ N στροφές, πού εἶναι:

$$N = \frac{S}{S_1} = \frac{S}{2\pi R} \tag{2}$$

Ἄν τό αὐτοκίνητο διέτρεξε σέ χρόνο t sec τό διάστημα S, τότε σέ χρόνο t ὁ τροχός ἔκανε (N) στροφές. Ἄρα ἡ συχνότητά του, δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν στροφῶν πού κάνει σέ ἕνα δευτερόλεπτο, θά εἶναι:

$$v = \frac{N}{t} \tag{3}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (2) ἔχομε: $v = \dfrac{N}{t} = \dfrac{\frac{S}{2\pi R}}{t}$ καί $v = \dfrac{S}{2\pi R \cdot t}$ (4)

Δίνονται: $R = 40$ cm $= 0{,}40$ m, $S = 10$ km $= 10 \times 10^3$ m καί $t = 15$ min $= 900$ sec.

Θέτομε στή σχέση (4) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$v = \frac{10 \times 10^3}{2 \times 3{,}14 \times 0{,}40 \times 900} = 4{,}4\ sec^{-1} = 4{,}4\ Hz \quad \textbf{ὥστε} \quad v = 4{,}4\ Hz$$

Εὕρεση τῆς γραμμικῆς ταχύτητας τῆς κεφαλῆς τοῦ καρφιοῦ, πού εἶναι ἡ ἴδια μέ τή γραμμική ταχύτητα πού ἔχουν ὅλα τά σημεῖα τῆς περιφέρειας τοῦ τροχοῦ.

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$υ_T = \frac{2\pi R}{T} \tag{5}$$

$$T = \frac{1}{v} \tag{6}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (6) βρίσκομε τή σχέση:

$$υ_T = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{\frac{1}{v}} \quad \text{καί} \quad υ_T = 2\pi R v \tag{7}$$

Θέτομε στή σχέση (7) τά γνωστά καί βρίσκομε:

$$\upsilon_T = 2 \times 3{,}14 \times 0{,}4 \times 4{,}4 = 11{,}05 \text{ m/sec} \quad \textit{ὥστε} \quad \upsilon_T = 11{,}05 \text{ m/sec}.$$

Ἡ ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου (υ_α) εἶναι:

$$\upsilon_\alpha = \frac{S}{t} = \frac{10 \times 10^3}{900} = 11{,}11 \text{ m/sec} \quad \textit{ὥστε} \quad \upsilon_\alpha = 11{,}11 \text{ m/sec}.$$

Οἱ δύο ταχύτητες υ_T καί υ_α θά πρέπει νά εἶναι ἴσες.

(Ἡ διαφορά: $(\upsilon_\alpha - \upsilon_T) = 0{,}06$ m/sec ὀφείλεται στό ὅτι, ὅταν κάναμε τίς ἀριθμητικές πράξεις γιά νά βροῦμε τή συχνότητα σταματήσαμε στό δεύτερο δεκαδικό ψηφίο).

1.16 Ἀρχή τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων. Συνισταμένη (ἤ σύνθετη κίνηση) δύο ἤ περισσότερων κινήσεων.

Ἡ ἀρχή τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων εἶναι ***ἐμπειρική ἀρχή*** καί ὁρίζει ὅτι:

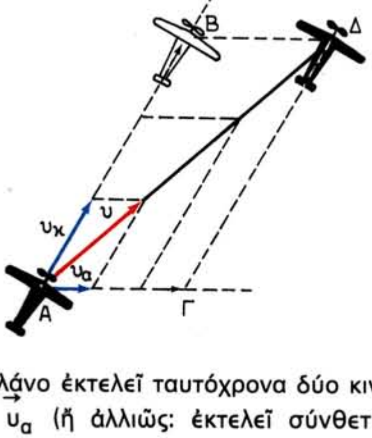
Ἄν ἕνα κινητό ἐκτελεῖ ταυτόχρονα πολλές κινήσεις, τότε κάθε κίνηση ἀπό αὐτές δέν τροποποιεῖται ἀπό τίς ἄλλες.

Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή αὐτή ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:

Ἄν ἕνα κινητό κατά τή διάρκεια ἑνός χρόνου t ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο ἤ περισσότερες κινήσεις, τότε τό κινητό κατά τή διάρκεια τοῦ χρόνου t στήν πραγματικότητα ἐκτελεῖ μία ἄλλη κίνηση, τῆς ὁποίας ὅμως τό ἀποτέλεσμα εἶναι τό ἴδιο μέ τό ἀποτέλεσμα πού τελικά θά προέκυπτε ἄν τό κινητό ἐκτελοῦσε καθεμιά ἀπό τίς κινήσεις αὐτές διαδοχικά καί τήν καθεμιά σέ χρόνο *t*. Τήν κίνηση αὐτή τήν ὀνομάζομε ***συνισταμένη τῶν κινήσεων*** πού κάνει συγχρόνως τό κινητό καί τίς κινήσεις αὐτές τίς ὀνομάζομε ***συνιστῶσες τῆς κινήσεως αὐτῆς.***

Μποροῦμε ἑπομένως νά μελετήσομε τή συνισταμένη κίνηση κινητοῦ πού ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο ἤ περισσότερες κινήσεις, ἄν θεωρήσομε ὅτι τό κινητό ἐκτελεῖ τίς κινήσεις αὐτές διαδοχικά καί μελετήσομε τήν καθεμιά χωριστά.

Ἔστω ὅτι ὁ κινητήρας ἀεροπλάνου (σχ. 1.16α) προσδίδει σ' αὐτό σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_K$, ἐνῶ ταυτόχρονα ὁ ἄνεμος τό παρασύρει μέ σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$.



Σχ. 1.16α.

Δηλαδή τό ἀεροπλάνο ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο κινήσεις, μία μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_K$ καί μία μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$ (ἤ ἀλλιῶς: ἐκτελεῖ σύνθετη κίνηση). Ἄν τό ἀεροπλάνο ἐκτελοῦσε μόνο τήν κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{υ}_κ$ (ἄν δέν παρασυρόταν ἀπό τόν ἀέρα, $\vec{υ}_α = 0$), θά ἐρχόταν, μετά ἀπό χρόνο t, ἀπό τή θέση Α ἔστω στή θέση Β:

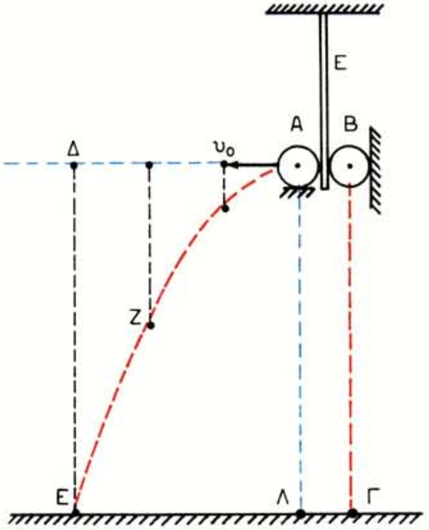
$$(ΑΒ) = υ_κ \cdot t$$

Ἄν τώρα τό ἀεροπλάνο ἀπό τή θέση Β ἐκτελοῦσε μόνο τήν κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{υ}_α$ (ἄν δηλαδή ὁ κινητήρας του δέν λειτουργοῦσε) θά ἐρχόταν, μετά ἀπό χρόνο t, ἀπό τή θέση Β ἔστω στή θέση Δ.

$$(ΒΔ) = υ_α \cdot t$$

Ὅταν τό ἀεροπλάνο ἐκτελεῖ ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις, δηλαδή ἐκτελεῖ τή σύνθετη κίνηση, μετά ἀπό χρόνο t ἔρχεται ἀπό τή θέση Α στή θέση Δ, ***δηλαδή στή θέση πού θά ἐρχόταν ἄν ἐκτελοῦσε διαδοχικά τίς κινήσεις αὐτές, τήν καθεμιά σέ χρόνο t.***

Ἔστω ὅτι ἔχομε δύο καθόλα ὅμοιες σφαῖρες Α καί Β (σχ. 1.16β). Ἡ σφαίρα Α στηρίζεται ἐπάνω σέ ὁριζόντιο ὑποστήριγμα ἐνῶ ἡ σφαίρα Β ὠθεῖται ἀπό ἕνα ἔλασμα Ε ἐπάνω σέ κατακόρυφο τοῖχο καί συγκρατεῖται.



Σχ. 1.16β.

Ἄν ὠθήσομε βιαίως τό ἔλασμα πρός τά ἀριστερά, τότε παρατηροῦμε ὅτι:

Ἡ Β ἀπελευθερώνεται καί πέφτει πρός τά κάτω, ἀκολουθώντας τή διεύθυνση ΒΓ, φθάνει στό ἔδαφος, μετά ἀπό χρόνο t.

Ἡ Α ὠθεῖται πρός τά ἀριστερά, κινεῖται ἐπάνω στήν τροχιά ΑΖΕ καί φθάνει στό ἔδαφος (σημεῖο Ε) μετά ἀπό χρόνο t ***(δηλαδή ὅσο ἔκανε καί ἡ Β νά φθάσει στό ἔδαφος).***

Ἡ Α πέφτει κατακόρυφα, ὅπως ἀκριβῶς καί ἡ Β, ἀλλά συγχρόνως μετατοπίζεται καί πρός τά ἀριστερά ἐξαιτίας τῆς ταχύτητας πού ἀπέκτησε ἀπό τήν ὤθηση.

Ἄν τίποτε δέν ὠθοῦσε τή σφαίρα Α πρός τά ἀριστερά καί, ἔτσι, ἔπεφτε μόνο πρός τά κάτω, θά ἔφτανε στό Λ μετά ἀπό χρόνο t, διαγράφοντας τήν κατακόρυφη τροχιά ΑΛ.

Ἄν ἡ σφαίρα Α κινιόταν μόνο πρός τά ἀριστερά, ἐξαιτίας τῆς ὠθήσεως, καί δέν ἔπεφτε πρός τά κάτω (δηλαδή δέν εἶχε βάρος), θά ἔφθανε μετά ἀπό χρόνο t ἔστω στό Δ, διαγράφοντας ἔτσι τήν τροχιά ΑΔ.

Ἡ σφαίρα Α, ὅταν ἐκτελεῖ καί τίς δύο κινήσεις συγχρόνως, φθάνει μετά ἀπό χρόνο t στό Ε (διαγράφοντας τήν τροχιά ΑΖΕ), δηλαδή στό ἴδιο σημεῖο πού θά ἔφθανε ἄν ἔκανε π.χ., πρῶτα τήν ὁριζόντια κίνηση σέ χρόνο t (ὁπότε θά ἐρχόταν στό Δ) καί ὕστερα, ἀπό τό Δ ἔκανε τήν κατακόρυφη κίνηση σέ χρόνο t (ὁπότε θά ἔφθανε στό Ε).

Παρατήρηση:

α) Ἡ κίνηση τῆς Α πρός τά ἀριστερά ἐξαιτίας τῆς ὠθήσεως δέν ἐπηρεάζει τήν κίνηση τῆς πτώσεώς της καί

β) ἡ κίνηση τῆς πτώσεως τῆς Α δέν ἐπηρεάζει τήν κίνησή της πρός τά ἀριστερά ἐξαιτίας τῆς ὠθήσεώς της.

Γενικά μποροῦμε νά βρίσκομε τό ἀποτέλεσμα μιᾶς συνισταμένης κινήσεως πού ἐκτελεῖ ἕνα κινητό, ἄν βρίσκομε τό ἀποτέλεσμα τῆς καθεμιᾶς ἀπό τίς συνιστῶσες κινήσεις της, θεωρώντας ὅτι οἱ κινήσεις αὐτές γίνονται διαδοχικά.

1.17 Σύνθεση κινήσεων.

Γενικά.

Ὅταν ἕνα κινητό ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο ἤ περισσότερες κινήσεις, μᾶς ἐνδιαφέρει, ἰδίως στήν πράξη, ***νά βροῦμε τήν κίνηση πού εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν κινήσεων αὐτῶν.*** Αὐτό τό ἐπιτυγχάνομε, ***ἄν ξέρομε τά στοιχεῖα τῶν κινήσεων πού ἐκτελεῖ συγχρόνως τό κινητό.***

Ἡ εὕρεση τῆς κινήσεως πού ἀποτελεῖ τή συνισταμένη τῶν κινήσεων, τίς ὁποῖες ἐκτελεῖ ταυτόχρονα ἕνα κινητό, ***ὀνομάζεται σύνθεση τῶν κινήσεων αὐτῶν.***

Μιά κίνηση εἶναι γνωστή ἄν ξέρομε τά ἑξῆς στοιχεῖα:

α) ***Τή θέση*** πού ἔχει τό κινητό σέ κάθε στιγμή τῆς κινήσεώς του.

β) ***Τήν τροχιά*** πού γράφει τό κινητό κατά τήν κίνησή του.

γ) ***Τήν ταχύτητα*** πού ἔχει τό κινητό σέ κάθε σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.

δ) ***Τήν ἐπιτάχυνση*** πού ἔχει τό κινητό σέ κάθε σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.

Εὕρεση τῆς θέσεως ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο κινήσεις.

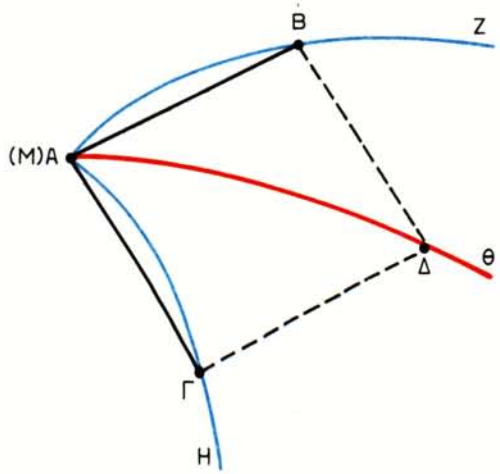
Ἔστω ὅτι ἕνα κινητό Μ ἐκτελεῖ σέ χρόνο t ταυτόχρονα δύο κινήσεις μέ τροχιές ΑΖ καί ΑΗ (σχ. 1.17α). ***Ἄν θέλομε νά βροῦμε τή θέση τοῦ κινητοῦ Μ στό τέλος τοῦ χρόνου t, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:***

1) Ὑποθέτομε ὅτι τό κινητό Μ ἐκτελεῖ μόνο τήν κίνηση πού ἔχει τροχιά τήν ΑΖ, καί βρίσκομε τή θέση Β, στήν ὁποία θά ἔφθανε σέ χρόνο t, ἄν στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t βρισκόταν στό Α.

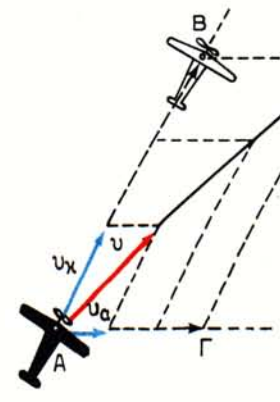
2) Ὑποθέτομε ὅτι τό κινητό ἐκτελεῖ μόνο τήν κίνηση ἐπάνω στήν τροχιά ΑΗ καί βρίσκομε τή θέση Γ, στήν ὁποία θά ἔφθανε σέ χρόνο t, ἄν στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t βρισκόταν στό Α.

3) Ἀπό τό σημεῖο Β γράφομε μία γραμμή παράλληλη πρός τή διεύθυνση ΑΓ καί ἀπό τό σημεῖο Γ ἄλλη γραμμή παράλληλη πρός τήν ΑΒ. Ἔστω ὅτι ἡ τομή τῶν δύο αὐτῶν γραμμῶν εἶναι τό Δ.

Τό σημεῖο Δ εἶναι ἡ θέση στήν ὁποία θά φτάσει τό κινητό ἀπό τό σημεῖο Α, ἄν ἐκτελέσει σέ χρόνο t συγχρόνως τίς δύο κινήσεις ΑΖ καί ΑΗ.



Σχ. 1.17α.



Σχ. 1.17β.

Γενικά ἰσχύει ἡ πρόταση:

Ἄν κινητό ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο ὁποιεσδήποτε κινήσεις ΑΖ καί ΑΗ, τότε ἡ θέση (Δ) πού θά ἔχει τό κινητό μετά ἀπό χρόνο t (ἄν ὑποθέσομε ὅτι στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t βρισκόταν στό σημεῖο Α) ***εἶναι ἡ τέταρτη κορυφή ἑνός παραλληλογράμμου πού ὁρίζεται ἀπό τά ἑξῆς τρία ἄλλα σημεῖα:***

α) Τή θέση Α πού εἶχε τό κινητό κατά τήν ἀρχή τοῦ χρόνου t.

β) Τή θέση Β πού θά εἶχε τό κινητό κατά τή λήξη τοῦ χρόνου t, ἄν ξεκινοῦσε ἀπό τό Α κι ἐκτελοῦσε σέ χρόνο t μόνο τή μία ἀπ' τίς δύο κινήσεις, τήν ΑΖ.

γ) Τή θέση Γ πού θά εἶχε τό κινητό κατά τή λήξη τοῦ χρόνου t, ἄν ξεκινοῦσε ἀπό τό Α καί ἐκτελοῦσε σέ χρόνο t τήν ἄλλη ἀπό τίς δύο κινήσεις, τήν ΑΗ.

Ἔστω ὅτι ὁ κινητήρας τοῦ ἀεροπλάνου (σχ. 1.17β) προσδίνει σ' αὐτό σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\kappa$ καί ταυτόχρονα ὁ ἄνεμος τό παρασύρει μέ σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$, δηλαδή τό ἀεροπλάνο ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο κινήσεις, μία μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\kappa$ καί μία μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$ (ἤ, ἀλλιῶς: ἐκτελεῖ σύνθετη κίνηση). Ἄν τό ἀεροπλάνο ἐκτελοῦσε μόνο τήν κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\kappa$ (ἄν δηλαδή δέν παρασυρόταν ἀπό τόν ἄνεμο, $\vec{\upsilon}_\alpha = 0$) θά ἐρχόταν, μετά ἀπό χρόνο t, ἀπό τή θέση Α ἔστω στή θέση Β:

$$(AB) = \upsilon_\kappa \cdot t$$

Ἄν τό ἀεροπλάνο ἐκτελοῦσε μόνο τήν κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$ (ἄν δηλαδή ὁ κινητήρας του δέν λειτουργοῦσε, $\upsilon_\kappa = 0$) θά ἐρχόταν, μετά ἀπό χρόνο t, ἀπό τή θέση Α ἔστω στή θέση Γ:

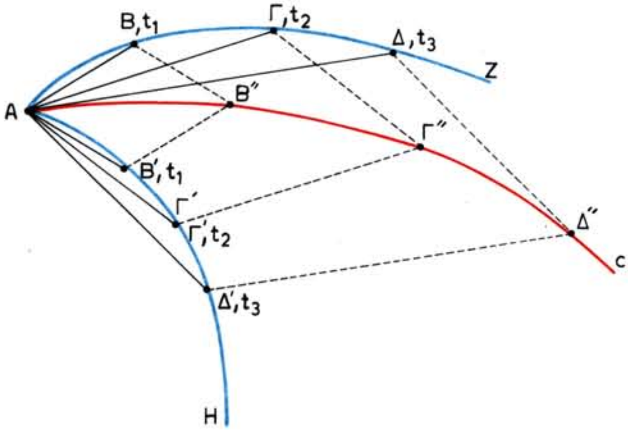
$$(A\Gamma) = \upsilon_\alpha \cdot t$$

Ὅταν τό ἀεροπλάνο ἐκτελεῖ ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις, δηλαδή ἐκτελεῖ τή σύνθετη κίνηση, μετά ἀπό χρόνο t ἔρχεται ἀπό τή θέση Α στή θέση Δ, ***πού εἶναι ἡ τέταρτη κορυφή τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα Α, Β καί Γ.***

Εὕρεση τῆς τροχιᾶς ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο κινήσεις (δηλαδή τῆς τροχιᾶς τῆς συνισταμένης κινήσεως τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων).

Ἔστω ὅτι κινητό Μ ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο κινήσεις: μία μέ τροχιά ΑΖ καί μία μέ τροχιά ΑΗ (σχ. 1.17γ). ***Ἄν θέλομε νά βροῦμε τήν τροχιά τῆς συνισταμένης τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:***

1) Ὑποθέτομε ὅτι τό κινητό ἐκτελεῖ μόνο τήν κίνηση πού ἔχει τροχιά τήν ΑΖ καί προσδιορίζομε τίς θέσεις Β, Γ, Δ, στίς ὁποῖες θά ἔφτανε τό κινητό κατά τούς χρόνους t_1, t_2, t_3, ἄν ξεκινοῦσε ἀπό τό Α.
2) Ὑποθέτομε ὅτι τό κινητό ἐκτελεῖ μόνο τήν κίνηση πού ἔχει τροχιά τήν ΑΗ καί προσδιορίζομε τίς θέσεις Β΄, Γ΄, Δ΄, στίς ὁποῖες θά ἔφτανε τό κινητό κατά τούς χρόνους t_1, t_2, t_3, ἄν ξεκινοῦσε ἀπό τό Α.
3) Βρίσκομε τήν τέταρτη κορυφή καθενός ἀπό τά παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων οἱ ὑπόλοιπες τρεῖς κορυφές τους εἶναι ἀντιστοίχως τά σημεῖα Α,Β,Β΄ — Α,Γ,Γ΄ — Α,Δ,Δ΄ καί ἔστω ὅτι αὐτές εἶναι τά σημεῖα Β΄΄, Γ΄΄, Δ΄΄.



Σχ. 1.17γ.

Τά σημεῖα Β΄΄, Γ΄΄, Δ΄΄ εἶναι οἱ θέσεις τίς ὁποῖες θά πάρει τό κινητό κατά τούς χρόνους t_1, t_2, t_3, ἄν ξεκινήσει ἀπό τό Α καί ἐκτελέσει συγχρόνως τίς δύο κινήσεις.

Μέ αὐτό τόν τρόπο βρίσκομε ὅλες τίς θέσεις πού παίρνει ἕνα κινητό, ὅταν ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο κινήσεις, δηλαδή βρίσκομε τήν τροχιά τῆς συνισταμένης κινήσεως τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων*.

Ταχύτητα ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο κινήσεις (δηλαδή ταχύτητα ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ τή συνισταμένη κίνηση τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων).

Ἔστω ὅτι κινητό, πού ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο κινήσεις, βρίσκεται κατά τή χρο-

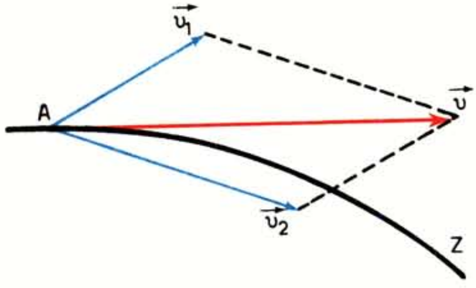
* Στήν περίπτωση πού οἱ δύο κινήσεις, τίς ὁποῖες ἐκτελεῖ ταυτόχρονα τό κινητό, εἶναι εὐθύγραμμες ὁμαλές, τότε ἡ τροχιά τῆς συνισταμένης κινήσεως εἶναι εὐθεία γραμμή.

Ἄν οἱ συνιστῶσες κινήσεις μιᾶς σύνθετης κινήσεως δέν εἶναι εὐθύγραμμες καί ὁμαλές, τότε ἡ τροχιά της εἶναι καμπύλη γραμμή.

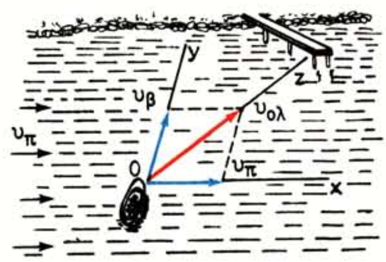
νική στιγμή t στή θέση A τῆς τροχιᾶς του Z (σχ. 1.17δ). Ἔστω ἐπίσης ὅτι τό κινητό κατά τήν ἴδια χρονική στιγμή t, ἄν ἐκτελοῦσε μόνο τή μία κίνηση, θά εἶχε ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, καί ἄν ἐκτελοῦσε μόνο τήν ἄλλη κίνηση, θά εἶχε ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.

Τότε ἡ συνισταμένη ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ κινητοῦ, πού ἐκτελεῖ συγχρόνως τίς δύο αὐτές κινήσεις, κατά τή χρονική στιγμή t καί στή θέση A ***εἶναι τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$****.

Δηλαδή: $$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$$



Σχ. 1.17δ.



Σχ. 1.17ε.

Ἔστω ὅτι στήν περίπτωση τῆς βενζινακάτου (σχ. 1.17ε) πού διασχίζει ἕνα ποταμό, ὁ κινητήρας της τῆς προσδίνει σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$, ἐνῶ τό νερό ρέει μέ σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\pi$.

Ἄν τό νερό ἦταν ἀκίνητο, τότε ἡ βενζινάκατος θά ἐκτελοῦσε μόνο τήν κίνηση κατά τή διεύθυνση (Oy) καί θά εἶχε ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$. Ἄν ὁ κινητήρας τῆς βενζινακάτου δέ λειτουργοῦσε, τότε αὐτή θά ἐκτελοῦσε μόνο τήν κίνηση κατά τήν διεύθυνση (Ox) καί θά εἶχε ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\pi$.

Ὅταν τό νερό κινεῖται καί ὁ κινητήρας λειτουργεῖ, τότε ἡ βενζινάκατος ἐκτελεῖ συγχρόνως καί τίς δυό αὐτές κινήσεις μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\lambda}$, πού εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $\vec{\upsilon}_\beta$ καί $\vec{\upsilon}_\pi$ ($\vec{\upsilon}_{o\lambda} = \vec{\upsilon}_\beta + \vec{\upsilon}_\pi$) καί κατά τή διεύθυνση (OZ).

Ἡ ἐπιτάχυνση κινητοῦ πού ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο κινήσεις (δηλαδή ἡ ἐπιτάχυνση κινητοῦ πού ἐκτελεῖ τή συνισταμένη κίνηση τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων).

Ἔστω ὅτι κινητό, πού ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο κινήσεις, κατά τή χρονική στιγμή t βρίσκεται στή θέση A τῆς τροχιᾶς του Z (σχ. 1.17στ). Ἔστω ἐπίσης ὅτι τό κινητό κατά τήν ἴδια χρονική στιγμή t, ἄν ἐκτελοῦσε μόνο τή μία κίνηση, θά εἶχε ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_1$, ἐνῶ ἄν ἐκτελοῦσε μόνο τήν ἄλλη κίνηση, θά εἶχε ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_2$.

Τότε ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ τοῦ κινητοῦ, πού ἐκτελεῖ συγχρόνως τίς δύο αὐτές κινήσεις, κατά τή χρονική στιγμή t καί στή θέση A ***εἶναι τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν***

---

* α) Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς Z στό σημεῖο A.

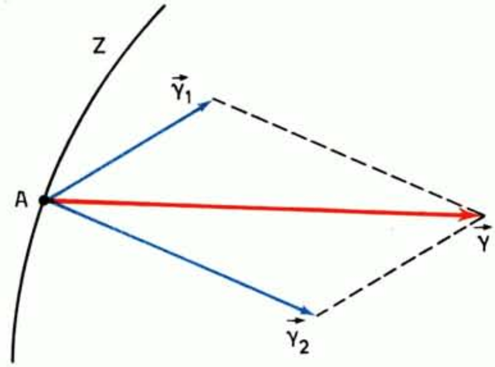
β) Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου πού ἔχει ὡς δύο προσκείμενες πλευρές τίς $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$.

δύο ἐπιταχύνσεων $\vec{\gamma}_1$ καί $\vec{\gamma}_2$*.

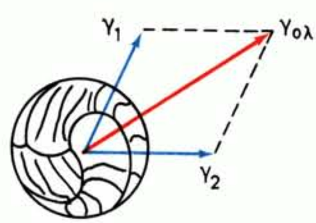
Δηλαδή: $$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$$

Ἔστω ὅτι τή μπάλα Α (σχ. 1.17ζ) τήν κλωτσᾶνε ταυτόχρονα δύο παῖκτες. Ἄν ὁ ἕνας παίκτης προσδίνει στή μπάλα ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_1$ καί ὁ ἄλλος $\vec{\gamma}_2$, τότε ἡ πραγματική ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_{ολ}$ τῆς μπάλας θά εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $\vec{\gamma}_1$ καί $\vec{\gamma}_2$, δηλαδή:

$$\vec{\gamma}_{ολ} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$$



Σχ. 1.17στ.



Σχ. 1.17ζ.

1.18 Ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων.

Ὁρισμός.

Ἐλεύθερη πτώση ἑνός σώματος ***ὀνομάζεται ἡ πτώση τοῦ σώματος, πού ὀφείλεται ἀποκλειστικά καί μόνο στήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του**.***

Παρατήρηση:

Σέ πολλές περιπτώσεις ἡ πτώση τῶν σωμάτων μέσα στήν ἀτμόσφαιρα ***θεωρεῖται*** ὡς ἐλεύθερη πτώση.

Νόμοι τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων.

Ἡ ἐλεύθερη πτώση ἑνός σώματος, ἀκολουθεῖ τούς ἑξῆς νόμους:

---

* Ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμου πού ἔχει ὡς δύο προσκείμενες πλευρές τίς $\vec{\gamma}_1$ καί $\vec{\gamma}_2$.

** Ἡ πτώση ἑνός σώματος, π.χ. μιᾶς μπάλας στόν ἀέρα, δέν εἶναι ἐλεύθερη πτώση, γιατί ἐπάνω της ἐνεργοῦν καί ἄλλες δυνάμεις (ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ρεύματα ἀέρα). Ἔτσι ἡ πτώση της δέν ὀφείλεται ἀποκλειστικά καί μόνο στήν ἐπίδραση τοῦ βάρους της.

Ἡ πτώση ἑνός σώματος στό κενό εἶναι ἐλεύθερη πτώση, γιατί ὀφείλεται ἀποκλειστικά καί μόνο στήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του.

Πρῶτος νόμος: Ἡ ἐλεύθερη πτώση ἑνός σώματος εἶναι κίνηση εὐθύγραμμη (κατακόρυφη) καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη, δηλαδή ἡ ἐπιτάχυνση πού ἔχει ἕνα σῶμα κατά τήν ἐλεύθερη πτώση του σέ ἕνα τόπο εἶναι ***πρακτικά σταθερή****.

Δεύτερος νόμος: Ὅλα τά σώματα, ὅταν πέφτουν μέ ἐλεύθερη πτώση στόν ἴδιο τόπο, τότε στά σημεῖα τῆς τροχιᾶς τους πού ἀπέχουν ἴσα ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἔχουν ἀκριβῶς τήν ἴδια ἐπιτάχυνση**.

Ἐξισώσεις τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων.

Οἱ νόμοι τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων ἐκφράζονται μέ τίς ἐξισώσεις (1), (2) καί (3), οἱ ὁποῖες λέγονται καί ***ἐξισώσεις τῆς ἐλεύθερης πτώσεως.***

$g = \text{σταθ.}$	(1)	***Ἐξίσωση τῆς ἐπιταχύνσεως:*** Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς ἐλεύθερης πτώσεως σέ ἕνα τόπο θεωρεῖται σταθερή, γιατί ἡ μεταβολή της μέ τό ὕψος μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀμελητέα γιά ἀρκετά μεγάλα ὕψη.
$u = g \cdot t$	(2)	***Ἐξίσωση τῶν ταχυτήτων:*** Οἱ ταχύτητες εἶναι ἀνάλογες πρός τούς χρόνους μέσα στούς ὁποίους ἀποκτήθηκαν.
$S = 1/2\, g \cdot t^2$	(3)	***Ἐξίσωση τῶν διαστημάτων:*** Τά διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα πρός τά τετράγωνα τῶν χρόνων κατά τούς ὁποίους διανύθηκαν.

Παρατήρηση:

Ἔχει βρεθεῖ μέ πειράματα ὅτι ἡ ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων εἶναι κίνηση εὐθύγραμμη (κατακόρυφη) καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη. Αὐτό ***δικαιολογεῖται*** ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἐλεύθερη πτώση εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἐπενέργειας τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Τό βάρος ἑνός σώματος σέ ἕνα τόπο — γιά σχετικά μικρά ὕψη — εἶναι δύναμη σταθερή. Ἄρα ἡ ἐλεύθερη πτώση ἑνός σώματος σέ ἕνα τόπο εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως στό σῶμα μιᾶς σταθερῆς δυνάμεως (τοῦ βάρους του). Ἑπομένως εἶναι κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη.

---

* Σέ ἕνα τόπο ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ σώματος κατά τήν πτώση του ἐλαττώνεται ὅσο πιό ψηλά ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας βρίσκεται τό σῶμα. Δηλαδή ὅσο πέφτει τό σῶμα, τόσο ἡ ἐπιτάχυνσή του αὐξάνεται (μεταβολή τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς ἐλεύθερης πτώσεως μέ τό ὕψος). Ἐπειδή ὅμως ἡ μεταβολή τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς ἐλεύθερης πτώσεως ***μέ τό ὕψος ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας εἶναι πολύ μικρή γιά ἀρκετά μεγάλες διαφορές ὕψους,*** γι' αὐτό σέ ἕνα τόπο θεωρεῖται σταθερή.

Τήν ἐπιτάχυνση τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τή συμβολίζομε μέ τό $\vec{g}$ καί τήν ***ὀνομάζομε ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.***

** Ἡ $\vec{g}$ ἑνός σώματος μεταβάλλεται ἀπό τόπο σέ τόπο, δηλαδή ἡ τιμή τοῦ $\vec{g}$ ἑνός σώματος ἐξαρτᾶται ἀπό τό γεωγραφικό πλάτος ϕ τοῦ τόπου πού βρίσκεται (μεταβολή τῆς $\vec{g}$ ἀνάλογα πρός τό γεωγραφικό πλάτος). Στόν Ἰσημερινό ($\phi = 0$) εἶναι $g = 978$ cm/sec^2, ἐνῶ στούς τόπους πού ἔχουν γεωγραφικό πλάτος $\phi = 45°$ ἡ $\vec{g}$ εἶναι $g = 981$ cm/sec^2 καί στούς πόλους (γεωγραφικό πλάτος 90°) εἶναι $g = 983$ cm/sec^2.

Γιά εὐκολία στή λύση τῶν διαφόρων προβλημάτων τό $\vec{g}$ λαμβάνεται ἴσο μέ 10 m/sec^2.

1.19 Βολές.

Α) Κατακόρυφη βολή πρός τά ἐπάνω.

Γενικά — Ἐξίσωση τῆς ταχύτητας καί τῆς κινήσεως.

Κατακόρυφη βολή ἑνός σώματος πρός τά ἐπάνω λέγεται ἡ κίνηση πού κάνει τό σῶμα, ὅταν ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά ἐπάνω.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἡ κατακόρυφη βολή σώματος πρός τά ἐπάνω εἶναι ***εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση*** τῆς ὁποίας ἡ ἐπιβράδυνση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.

Ἑπομένως στήν κατακόρυφη βολή πρός τά ἐπάνω ἑνός σώματος ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t \qquad \text{(ἐξίσωση ταχύτητας)} \qquad (1)$$

$$h = \upsilon_0 \cdot t - {}^1/_2\, g \cdot t^2 \qquad \text{(ἐξίσωση τῆς κινήσεως ἤ ἐξίσωση διαστήματος)} \qquad (2)$$

ὅπου: υ_0 εἶναι ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία ἐκτοξεύεται τό σῶμα, δηλαδή ἡ ταχύτητα τήν ὁποία ἔχει τό σῶμα τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του.

υ εἶναι ἡ ταχύτητα τήν ὁποία θά ἔχει τό σῶμα σέ χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του.

h εἶναι τό ὕψος στό ὁποῖο θά βρίσκεται τό σῶμα ἀπό τό σημεῖο τῆς ἐκτοξεύσεώς του, μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεως (δηλαδή τό διάστημα πού θά ἔχει διανύσει μέσα σέ χρόνο t).

Παρατήρηση:

Σῶμα πού ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά ἐπάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ κάνει ταυτόχρονα δύο κατακόρυφες κινήσεις.

1) Μιά κατακόρυφη ὁμαλή πρός τά ἐπάνω μέ ταχύτητα ἴση μέ τή $\vec{\upsilon}_0$ καί ἐξαιτίας αὐτῆς.
2) Μιά κατακόρυφη ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη πρός τά κάτω μέ ἐπιτάχυνση $\vec{g}$ ἐξαιτίας τοῦ βάρους του (ἐλεύθερη πτώση).

Ἑπομένως ἡ κατακόρυφη βολή σώματος εἶναι ἡ συνισταμένη κίνηση δύο κατακορύφων κινήσεων: α) μιᾶς πρός τά πάνω μέ ταχύτητα ἴση μέ τήν ταχύτητα ἐκτοξεύσεώς του ($\vec{\upsilon}_0$) καί β) μιᾶς πρός τά κάτω μέ ἐπιτάχυνση $\vec{g}$.

Εὕρεση τῆς ταχύτητας πού ἔχει τό σῶμα ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεως (σχ. 1.19α).

Ὅταν τό σῶμα ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά πάνω κάνει ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις πού ἀναφέραμε στήν πιό πάνω παρατήρηση.

Ἄν τό σῶμα ἔκανε μόνο τήν πρώτη κίνηση θά εἶχε, μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή ἐκτοξεύσεως, ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ καί ἡ φορά της θά ἦταν ἀπό κάτω πρός τά πάνω.

Ἄν τό σῶμα ἔκανε μόνο τή δεύτερη κίνηση θά εἶχε, μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή ἐκτοξεύσεως, ταχύτητα ($\vec{g} \cdot t$) καί ἡ φορά της θά ἦταν ἀπό πάνω πρός τά κάτω.

Δηλαδή οἱ δύο ταχύτητες ($\vec{\upsilon}_0$ καί $\vec{g} \cdot t$) θά εἶχαν τήν ἴδια διεύθυνση (κατακόρυφες) ἀλλά ἀντίθετη φορά.

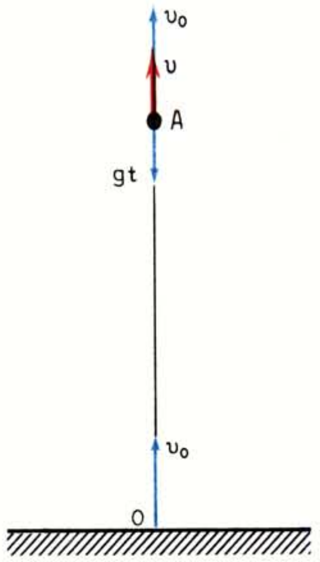
Τό σῶμα, ὅταν κάνει ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις (κατακόρυφη βολή) θά ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (στή θέση Α) ὕστερα ἀπό χρόνο t, ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του, ***πού θά εἶναι τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων ($\vec{\upsilon}_0$ καί $\vec{g}t$),*** τίς ὁποῖες θά εἶχε τό κινητό ὕστερα ἀπό χρόνο t, ἄν ἔκανε τίς κινήσεις αὐτές ξεχωριστά.

Συνεπῶς:
$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 - \vec{g} \cdot t \tag{3}$$

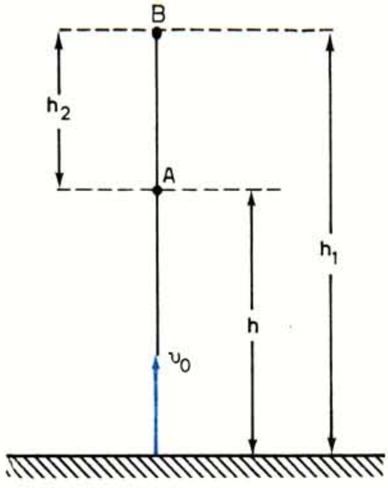
ὅπου: $\vec{\upsilon}_0$ ἡ ταχύτητα τῆς πρώτης κινήσεως, δηλαδή τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς πρός τά πάνω,

$\vec{g} \cdot t$ ἡ ταχύτητα τῆς δεύτερης κινήσεως, δηλαδή τῆς πτώσεως.

Ἐπειδή οἱ δύο ταχύτητες $\vec{\upsilon}_0$ καί $\vec{g} \cdot t$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση προκύπτει, ἀπό τή σχέση (3):
$$\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t \tag{4}$$



Σχ. 1.19α.



Σχ. 1.19β.

Εὕρεση τοῦ ὕψους πού θά διανύσει τό σῶμα σέ χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του.

Ὅταν τό σῶμα ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά πάνω κάνει ταυτόχρονα τίς δύο κινήσεις πού ἀναφέραμε στήν πιό πάνω παρατήρηση.

Ἄν τό σῶμα ἔκανε μόνο τήν πρώτη κίνηση, δηλαδή τήν εὐθύγραμμη ὁμαλή πρός τά πάνω, στό χρόνο t θά διήνυε ὕψος (διάστημα):
$$h_1 = \upsilon_0 \cdot t \tag{5}$$

καί θά ἔφθανε ἔστω στό σημεῖο Β (σχ. 1.19β).

Ἄν τό σῶμα ἀπό τό σημεῖο Β ἔκανε μόνο τή δεύτερη κίνηση, δηλαδή τήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη μέ ἐπιτάχυνση ($\vec{g}$) πρός τά κάτω (ἐλεύθερη πτώση ἀπό τό Β), τότε στό χρόνο t θά ἔφθανε στό σημεῖο Α, ἀφοῦ θά διήνυε τό ὕψος (διάστημα):

$$h_2 = {}^1/_2\, g \cdot t^2 \tag{6}$$

Τό κινητό, ὅταν κάνει ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις, δηλαδή ὅταν κάνει τή συνισταμένη κίνηση τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων, στό χρόνο t θά διανύσει τό ὕψος h (τό διάστημα):

$$h = h_1 - h_2 \tag{7}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (7), (5) καί (6) λαμβάνομε:

$$h = u_0 t - {}^1/_2\, g t^2 \tag{8}$$

Παρατήρηση:

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (4) καί (8), πού εἶναι ἴδιες μέ τίς (1) καί (2) ἀντίστοιχα, προκύπτει (ἀποδεικνύεται) ὅτι ***ἡ κατακόρυφη βολή ἑνός σώματος πρός τά πάνω εἶναι μιά εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση τῆς ὁποίας ἐπιβράδυνση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας.***

Εὕρεση τοῦ μέγιστου χρόνου ἀνόδου.

Ἕνα σῶμα ἀνέρχεται ὥσπου ἡ ταχύτητά του νά γίνει μηδέν.

Ἄρα $\qquad u = u_0 - g \cdot t \qquad$ καί $\qquad 0 = u_0 - g \cdot t_{αν}$

$$t_{αν} = \frac{u_0}{g} \tag{9}$$

Ἡ σχέση (9) ἐκφράζει τό μέγιστο χρόνο ἀνόδου.

Εὕρεση τοῦ μέγιστου ὕψους.

Ἔχομε: $\qquad h = u_0 \cdot t - {}^1/_2\, g \cdot t^2$

$$h_μ = u_0 \cdot t_{αν} - {}^1/_2\, g \cdot t_{αν}^2$$

$$h_μ = u_0 \cdot \frac{u_0}{g} - {}^1/_2\, g \frac{u_0^2}{g^2}$$

$$η_μ = \frac{u_0^2}{g} - {}^1/_2 \frac{u_0^2}{g}$$

$$h_μ = \frac{u_0^2}{2g} \tag{10}$$

Ἡ σχέση (10) ἐκφράζει τό μέγιστο ὕψος στό ὁποῖο θά ἀνέλθει τό σῶμα.

Εὕρεση τοῦ χρόνου καθόδου.

Τό σῶμα, ὅταν φθάσει στό μέγιστο ὕψος $h_μ$ ἀρχίζει νά πέφτει μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του, μέ ἀρχική ταχύτητα μηδέν. Τό διάστημα h πού θά διανύσει τό σῶμα ὥσπου νά φθάσει στό σημεῖο ἐκτοξεύσεως θά εἶναι ἴσο μέ τό h_μ.

Ἄρα ἔχομε: $h = h_\mu$ $\quad h = {}^1/_2\, g \,.\, t_\kappa^2$ $\quad$ καί $\quad h_\mu = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$

Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές λαμβάνομε:

$$\frac{\upsilon_0^2}{2g} = {}^1/_2\, g \,.\, t_\kappa^2 \qquad \frac{\upsilon_0^2}{g^2} = t_\kappa^2 \qquad \text{καί} \qquad t_\kappa = \frac{\upsilon_0}{g} \tag{11}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (9) καί (11) προκύπτει ὅτι ἡ διάρκεια ἀνόδου ($t_{\alpha\nu}$) εἶναι ἴση μέ τή διάρκεια καθόδου (t_κ) τοῦ σώματος πού ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά πάνω: $t_{\alpha\nu} = t_\kappa$.

Εὕρεση τῆς ταχύτητας πού θά ἔχει τό σῶμα τή στιγμή πού θά ξανάρθει στό σημεῖο ἐκτοξεύσεως.

Τό σῶμα ὅταν φτάσει στό μέγιστο ὕψος, ἀρχίζει νά πέφτει μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του καί μέ ἀρχική ταχύτητα ἴση μέ μηδέν. Ἑπομένως ἡ ταχύτητα πού θά ἔχει τό σῶμα, ὅταν φθάσει στό σημεῖο ἐκτοξεύσεώς του, θά εἶναι:

$$\upsilon_\kappa = g \,.\, t_\kappa$$

Ἐπειδή ἰσχύει ἡ σχέση: $\quad t_\kappa = \dfrac{\upsilon_0}{g} \quad$ ἔχομε $\quad \upsilon_\kappa = g \,.\, \dfrac{\upsilon_0}{g}$

$$\upsilon_\kappa = \upsilon_0$$

Ἐπειδή ἡ φορά τῆς $\vec{\upsilon}_\kappa$ εἶναι ἀντίθετης φορᾶς τῆς $\vec{\upsilon}_0$ ἔχομε:

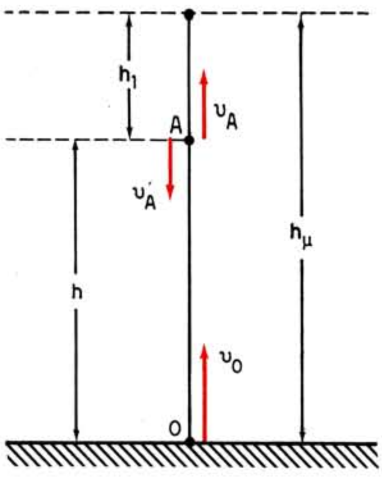
$$\vec{\upsilon}_0 = -\,\vec{\upsilon}_\kappa \tag{12}$$

Ἀπό τήν (12) προκύπτει ὅτι ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία ἐκτοξεύεται τό σῶμα πρός τά ἐπάνω ($\vec{\upsilon}_0$) καί ἡ ταχύτητα ($\vec{\upsilon}_\kappa$), πού ἔχει τό σῶμα ὅταν ἐπανέρχεται στό σημεῖο ἐκτοξεύσεώς του, ἔχουν: τό ἴδιο μέτρο, τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετη φορά.

Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ πού ἔχει τό σῶμα σέ ἕνα σημεῖο τῆς διαδρομῆς του (Α) κατά τήν ἄνοδο, εἶναι ἀντίθετη μέ τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}'_A$, πού ἔχει στό ἴδιο αὐτό σημεῖο (Α) κατά τήν κάθοδο, δηλαδή $\vec{\upsilon}_A = -\,\vec{\upsilon}'_A$ (σχ. 1.19γ).

Ἀπόδειξη.

Ἄς ὑποθέσομε ὅτι τό σημεῖο Α βρίσκεται σέ ὕψος h ἀπό τό σημεῖο ἐκτοξεύσεως (Ο) καί τό μέγιστο ὕψος πού φθάνει τό σῶμα εἶναι h_μ (σχ. 1.19γ). Μᾶς εἶναι γνωστό ἐξάλλου ὅτι ἡ κίνηση πρός τά ἐπάνω εἶναι εὐθύγραμμη ὁμαλή καί ἐπιβραδυνόμενη. Ἄρα ἰσχύει:



Σχ. 1.19γ.

$$\upsilon_A = \upsilon_o - g \cdot t_1 \quad (1)$$

$$h = \upsilon_o\, t_1 - 1/2\, g \cdot t_1^2 \quad (2)$$

ὅπου: t_1 εἶναι ὁ χρόνος πού χρειάζεται γιά νά φθάσει τό σῶμα στό σημεῖο Α.
Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) παίρνομε:

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2gh} \quad (3)$$

Τό σῶμα, ὅταν φθάσει στό μέγιστο ὕψος, ἀρχίζει νά πέφτει μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του καί μέ ἀρχική ταχύτητα ἴση μέ μηδέν. Ὅταν φτάσει στό σημεῖο Α, θά ἔχει διανύσει διάστημα $h_1 = h_\mu - h$. Ἄρα:

$$\upsilon'_A = g \cdot t_2 \quad (4)$$

$$h_1 = h_\mu - h = 1/2\, g \cdot t_2^2 \quad (5)$$

ὅπου: t_2 εἶναι ὁ χρόνος πού θέλει τό σῶμα γιά νά φθάσει, ὅταν κατεβαίνει, στό σημεῖο Α.

Ἀπό τίς (4) καί (5) ἔχομε: $$\upsilon'_A = \sqrt{2g(h\mu - h)} \quad (6)$$

Ἀλλά ἰσχύει ἡ σχέση: $$h_\mu = \frac{\upsilon_o^2}{2g} \quad (7)$$

Ἀπό τίς (6) καί (7) ἔχομε: $$\upsilon'_A = \sqrt{2g \cdot \frac{(\upsilon_o^2}{2g} - h)}$$

$$\upsilon'_A = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2gh} \quad (8)$$

Ἀπό τίς (3) καί (8) ἔχομε: $$\upsilon_A = \upsilon'_A \quad (9)$$

Ἐπειδή οἱ $\vec{\upsilon}_A$ καί $\vec{\upsilon}'_A$ ἔχουν ἀντίθετη φορά, ἀπό τήν (9) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\vec{\upsilon}_A = -\vec{\upsilon}'_A \quad (10)$$

Ἀπό τήν (10) προκύπτει ὅτι ἡ ταχύτητα πού ἔχει τό σῶμα σέ ἕνα σημεῖο τῆς διαδρομῆς του κατά τήν ἄνοδο, εἶναι ἀντίθετη μέ τήν ταχύτητα πού ἔχει τό σῶμα αὐτό κατά τήν κάθοδο.

Β) Ὁριζόντια βολή.

Γενικά.

Ὁριζόντια βολή ἑνός σώματος ὀνομάζεται ***ἡ κίνηση πού κάνει τό σῶμα ὅταν ἐκτοξεύεται ὁριζόντια, δηλαδή ὅταν ἡ ταχύτητα ἐκτοξεύσεώς του ἔχει ὁριζόντια διεύθυνση.***

Ἄν ἀπό ἕνα ὕψωμα καί ἀπό τό σημεῖο Α (σχ. 1.19δ), πού ἀπέχει ἀπό τό ὁριζόντιο ἔδαφος h, ἐκτοξεύσομε ἕνα σῶμα Σ μέ ὁριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ ***τότε αὐτό κάνει ταυτόχρονα δύο κινήσεις:***

1) Μιά ὁριζόντια εὐθύγραμμη ὁμαλή μέ ταχύτητα ἴση μέ τήν $\vec{\upsilon}_0$ καί ἐξαιτίας της.

2) Μία εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη πρός τά κάτω μέ ἐπιτάχυνση g, ἐξαιτίας τοῦ βάρους του $\vec{B} = m \cdot \vec{g}$ (ἐλεύθερη πτώση) καί χωρίς ἀρχική ταχύτητα.

Ἄν τό σῶμα Σ ἐκτελοῦσε μόνο τήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση μέ ταχύτητα $(\vec{\upsilon}_0)$, θά βρισκόταν — μετά ἀπό χρόνους t_1, t_2, t_3 καί t_4 ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του ἀπό τό σημεῖο Α — ἔστω στίς θέσεις 1, 2, 3 καί Γ, ἐνῶ ἄν ἐκτελοῦσε μόνο τήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση (ἐλεύθερη πτώση) θά βρισκόταν — μετά ἀπό χρόνους t_1, t_2, t_3, t_4 ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τό σημεῖο Α — ἔστω στίς θέσεις 1΄, 2΄, 3΄ καί Ε.

Τό σῶμα Σ, ὅταν ἐκτελεῖ ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις (ὁριζόντια βολή), θά βρίσκεται — μετά ἀπό χρόνους t_1, t_2, t_3 καί t_4 ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του ἀπό τό σημεῖο (Α) — στίς θέσεις: Θ, Η, Κ καί Δ.

Διάρκεια τῆς κινήσεως τοῦ σώματος (σχ. 1.19δ).

Τό σῶμα θά κινηθεῖ μέ τή συνισταμένη κίνηση ὅσο χρόνο θά κινιόταν, ***ἄν ἔκανε μόνο τή δεύτερη κίνηση, δηλαδή ὅσο χρόνο διαρκεῖ ἡ πτώση του.*** Ἄς ποῦμε ὅτι αὐτός εἶναι t_μ. Ἄρα:

$$AE = h = 1/2\, g \cdot t_\mu^2 \qquad \text{καί} \qquad t_\mu = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1}$$

Εὕρεση τοῦ διαστήματος, πού θά διήνυε μέσα σέ χρόνο t_μ τό σῶμα, ἄν ἔκανε μόνο τήν ὁριζόντια εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$.

Ἀφοῦ ἡ κίνηση τοῦ σώματος εἶναι εὐθύγραμμη ὁμαλή, ἔχομε:

$$A\Gamma = S_{op} = \upsilon_0 \cdot t_\mu \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε:
$$S_{op} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Εὕρεση τοῦ σημείου ἀφίξεως πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο-βεληνεκές.

Ἄν τό σῶμα ἔκανε μόνο τήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση, ὕστερα ἀπό χρόνο t_μ ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεως θά βρισκόταν στή θέση Γ (σχ. 1.19δ), ὅπου:

$$(A\Gamma) = S_{op} = \upsilon_0 \cdot t_\mu$$

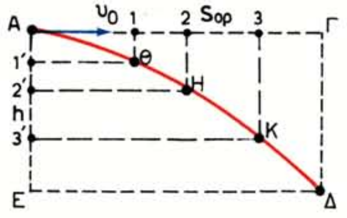
Ἄν τό σῶμα ἔκανε μόνο τήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του (ἐλεύθερη πτώση), ὕστερα ἀπό χρόνο t_μ θά βρισκόταν στή θέση Ε τοῦ ὁριζόντιου ἐπιπέδου:

$$AE = h = 1/2\, g \cdot t_\mu^2$$

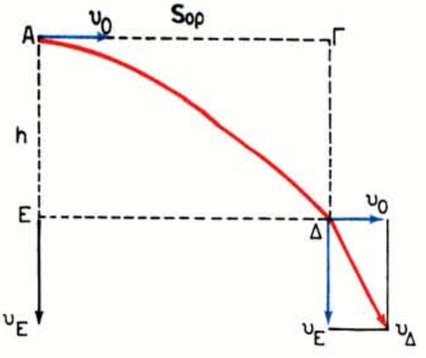
Ὅταν κάνει ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις (ὁριζόντια βολή), ὕστερα ἀπό χρόνο t_μ θά βρίσκεται στό σημεῖο Δ τοῦ ὁριζόντιου ἐπιπέδου, δηλαδή στήν τέταρτη κορυφή τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζεται ἀπό τά δύο διαστήματα (ΑΓ) καί (ΑΕ).

Βεληνεκές: Βεληνεκές ὀνομάζεται ἡ ὁριζόντια ἀπόστασ ΑΓ = ΕΔ (σχ. 1.19δ), τοῦ σημείου ἐκτοξεύσεως (Α) τοῦ σώματος ἀπό τό σημεῖο ἀφίξεώς του (Δ) στό ἔδαφος καί δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$(A\Gamma) = (E\Delta) = \upsilon_0 \cdot t_\mu$$



Σχ. 1.19δ.



Σχ. 1.19ε.

Εὕρεση τῆς ταχύτητας πού θά ἔχει τό σῶμα κατά τή χρονική στιγμή τῆς ἀφίξεώς του στό ἔδαφος.

Ἡ ταχύτητα πού ἔχει τό σῶμα στή θέση Δ (σχ. 1.19ε), δηλαδή ὕστερα ἀπό χρόνο t_μ, εἶναι ἴση μέ τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων πού θά εἶχε τό σῶμα ὕστερα ἀπό χρόνο t_μ, ἄν ἔκανε τίς δύο κινήσεις χωριστά, δηλαδή τῶν ταχυτήτων πού θά εἶχε στό σημεῖο Γ καί στό σημεῖο Ε. Ἄρα:

$$\vec{\upsilon}_\Delta = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_E$$

καί

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_E^2 + 2\upsilon_0 \cdot \upsilon_E \cdot \text{συν}\,90}$$

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_E^2} \quad (1)$$

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\upsilon_E = g \cdot t_\mu \quad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε:

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2\, t_\mu^2} \quad (3)$$

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$t_\mu = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4)$$

Ἀπό τήν (4) παίρνομε τή σχέση:

$$t_\mu^2 = \frac{2h}{g} \quad (5)$$

Ἀπό τίς (3) καί (5) ἔχουμε:

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 \cdot \frac{2h}{g}}$$

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2h \cdot g}$$

Ἐξισώσεις τῆς κινήσεως.
(Εὕρεση τῆς θέσεως πού θά ἔχει τό σῶμα ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεως).

Ἄν τό σῶμα ἔκανε μόνο τήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση, ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του θά βρισκόταν στή θέση (Z_1) (σχ. 1.19στ), ὅπου:

$$(AZ_1) = S_{op}' = \upsilon_0 t$$

Ἄν τό σῶμα ἔκανε μόνο τήν εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του (ἐλεύθερη πτώση), ὕστερα ἀπό χρόνο t θά βρισκόταν στή θέση (H_1), ὅπου:

$$(AH_1) = h' = {}^1\!/_2\, g \cdot t^2$$

Όταν κάνει ταυτόχρονα καί τίς δύο κινήσεις (όριζόντια βολή), ύστερα άπό χρόνο t τό σῶμα θά βρίσκεται στό σημεῖο Δ', δηλαδή στήν τέταρτη κορυφή τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζεται ἀπό τά δύο διαστήματα:

$$AZ_1 = u_0 \cdot t \qquad \text{καί} \qquad AH_1 = 1/2\ g \cdot t^2$$

Οἱ ἀποστάσεις (AZ_1) καί (AH_1) εἶναι ὀρθογώνιες συντεταγμένες (x, y) τῆς θέσεως (Δ'), στήν ὁποία θά βρίσκεται τό σῶμα μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεώς του, ὅταν ἐκτελεῖ καί τίς δύο κινήσεις ταυτόχρονα (βολή ὁριζόντια). Ἐπομένως οἱ ἐξισώσεις 1 καί 2 γράφονται:

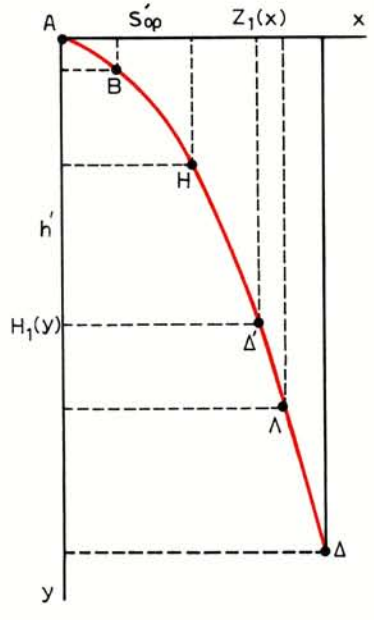
$$x = u_0 t \tag{3}$$

$$y = 1/2\ g \cdot t^2 \tag{4}$$

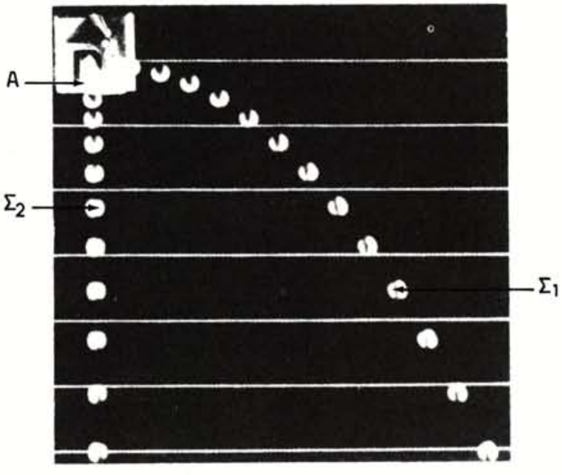
Οἱ ἐξισώσεις (3) καί (4) εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς ὁριζόντιας βολῆς καί μέ αὐτές μποροῦμε νά βρίσκομε τίς συντεταγμένες τῆς θέσεως καί ***ἐπομένως τή θέση πού θά ἔχει τό σῶμα μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τήν ἐκτόξευσή του****.

Εὕρεση τῆς τροχιᾶς (σχ. 1.19στ).

Γιά νά βροῦμε τήν τροχιά, βρίσκομε μέ τόν προηγούμενο τρόπο τίς θέσεις (Β, Η, Δ', Λ, ... Δ), πού θά ἔχει τό σῶμα σέ ὅλες τίς χρονικές στιγμές (t_1, t_2, t_3, t_4 ...) τοῦ χρονικοῦ διαστήματος (t) κατά τό ὁποῖο διαρκεῖ ἡ κίνησή του, καί τίς ἑνώνομε. Βρίσκομε τότε ὅτι ἡ τροχιά τοῦ σώματος πού ἐκτελεῖ ὁριζόντια κίνηση εἶναι μιά καμπύλη γραμμή καί μάλιστα τόξο παραβολῆς (ΑΒΗΔ'ΛΔ).



Σχ. 1.19στ.



Σχ. 1.19ζ.

Παραδείγματα:

α) Ἄν ἀπό τή θέση Α (σχ. 1.19ζ) τή στιγμή πού ἐκτοξεύεται σῶμα $Σ_1$ μέ ὁριζόντια ταχύτητα u_0 ἀ-

---

* Ἐπίσης μέ τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) μποροῦμε νά βρίσκομε τήν τροχιά τῆς κινήσεως τοῦ σώματος, προσδιορίζοντας ὅλες τίς θέσεις πού θά ἔχει τό σῶμα σέ κάθε χρονική στιγμή τῆς κινήσεώς του.

φήναμε ταυτόχρονα νά πέσει ἕνα ἄλλο σῶμα Σ_2 χωρίς ἀρχική ταχύτητα (ἐλεύθερη πτώση), τότε τά δύο σώματα Σ_1 καί Σ_2 θά βρίσκονταν σέ κάθε χρονική στιγμή στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί θά ἔφθαναν ταυτόχρονα στό ἔδαφος, θά εἶχαν ὅμως σέ κάθε χρονική στιγμή διαφορετικές ταχύτητες.

$$υ_1 = \sqrt{υ_0^2 + g^2 \cdot t^2}$$

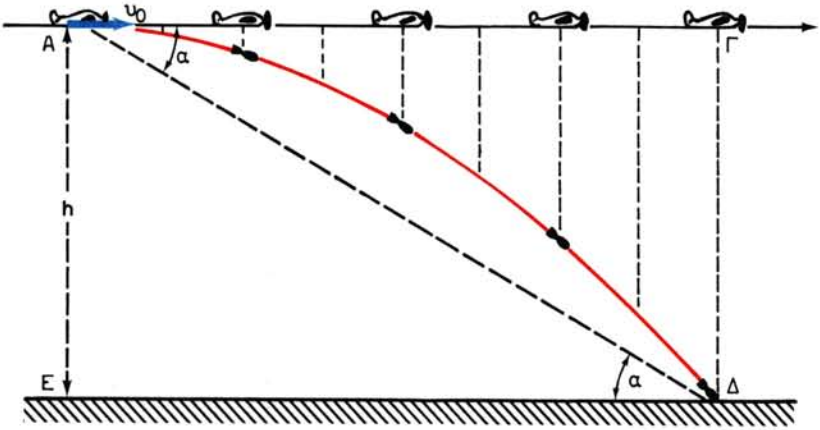
$$υ_2 = g \cdot t$$

β) Ἄν ἀεροπλάνο (σχ. 1.19η) κινεῖται συνέχεια μέ σταθερή ὁριζόντια ταχύτητα $\vec{υ}_0$ καί ἀφήσει ἕνα βλῆμα, τότε τό βλῆμα θά κάνει κίνηση πού θά εἶναι ὁριζόντια βολή μέ ἀρχική ταχύτητα $\vec{υ}_0$, δηλαδή τήν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου (γιατί αὐτή εἶχε τό βλῆμα προτοῦ νά ἐκτοξευθεῖ).

Τό ἀεροπλάνο, πού συνεχίζει νά κινεῖται μέ τή σταθερή ὁριζόντια ταχύτητα $\vec{υ}_0$, καί τό βλῆμα, πού κατεβαίνει, βρίσκονται σέ κάθε στιγμή τῆς κινήσεώς τους στήν ἴδια κατακόρυφη γραμμή, ἔχουν ὅμως διαφορετικές ταχύτητες:

$$υ_{αερ} = υ_0 \qquad \text{καί} \qquad υ_{βλ} = \sqrt{υ_0^2 + g^2 \cdot t^2}$$

ὅπου: $υ_{αερ}$ ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου καί $υ_{βλ}$ ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος.



Σχ. 1.19η.

1.20 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

11) *Ἕνα πλοῖο κινεῖται ἐπάνω στόν ἄξονα τοῦ πορθμοῦ τοῦ Εὐρίπου. Ὅταν τό πλοῖο κατεβαίνει, ἡ ταχύτητά του σχετικά μέ τήν παραλία εἶναι $υ_1 = 9$ m/sec, ἐνῶ ὅταν ἀνεβαίνει εἶναι $υ_2 = 3$ m/sec. Νά βρεθοῦν ἡ ταχύτητα τοῦ πλοίου $\vec{υ}_M$ πού τοῦ δίνει ἡ μηχανή του καί ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό νερό $\vec{υ}_N$.*

Λύση.

Ὅταν τό πλοῖο κατεβαίνει, ἐκτελεῖ μία κίνηση πού εἶναι ἡ συνισταμένη δύο ἄλλων κινήσεων, μιᾶς πού ὀφείλεται στήν ταχύτητα $\vec{υ}_M$ καί μιᾶς πού ὀφείλεται στήν ταχύτητα $\vec{υ}_N$. Ἑπομένως ἡ ταχύτητα $\vec{υ}_1$ μέ τήν ὁποία κατεβαίνει τό πλοῖο θά εἶναι τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων $\vec{υ}_M$ καί $\vec{υ}_N$, δηλαδή:

$$\vec{υ}_1 = \vec{υ}_M + \vec{υ}_N \qquad (1)$$

Ἐπειδή οἱ ταχύτητες $\vec{υ}_M$ καί $\vec{υ}_N$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά, ἀπό τήν (1) παίρνομε τή σχέση:

$$\boxed{\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_M + \vec{\upsilon}_N} \qquad (2)$$

Όταν τό πλοῖο ἀνεβαίνει, ἐκτελεῖ μιά κίνηση πού εἶναι ἡ συνισταμένη δύο ἄλλων κινήσεων, μιᾶς πού ὀφείλεται στήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_M$ καί μιᾶς πού ὀφείλεται στήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_N$.

Ἐπομένως ἡ ταχύτητα υ_2 μέ τήν ὁποία ἀνεβαίνει τό πλοῖο θά εἶναι τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_M$ καί $\vec{\upsilon}_N$, δηλαδή:

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_M + \vec{\upsilon}_N \qquad (3)$$

Ἐπειδή οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_M$ καί $\vec{\upsilon}_N$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση ἀλλά ἀντίθετη φορά, παίρνομε ἀπό τήν (1) τή σχέση:

$$\boxed{\upsilon_2 = \upsilon_M - \upsilon_N} \qquad (4)$$

Δίνονται: $\upsilon_1 = 9$ m/sec καί $\upsilon_2 = 3$ m/sec

Τοποθετοῦμε αὐτά πού δίνονται στίς σχέσεις (2) καί (4) καί ἔχομε:

$$9 = \upsilon_M + \upsilon_N \qquad (5)$$

$$3 = \upsilon_M - \upsilon_N \qquad (6)$$

Προσθέτομε τίς (5) καί (6) κατά μέλη καί ἔχομε:

$$12 = 2 \cdot \upsilon_M \quad \text{ἤ} \quad \upsilon_M = \frac{12}{2} = 6 \text{ m/sec} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad \upsilon_M = 6 \text{ m/sec}$$

Ἡ σχέση (6) γράφεται:

$$\upsilon_N = \upsilon_M - 3 \qquad (7)$$

Τοποθετοῦμε στή σχέση (7) τό υ_M μέ τό ἴσο της ($\upsilon_M = 6$ m/sec) πού βρήκαμε καί ἔχομε:

$$\upsilon_N = 6 - 3 = 3 \text{ m/sec} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad \upsilon_N = 3 \text{ m/sec.}$$

12) *Ἕνα πλοῖο ταξιδεύει σέ ποταμό πού ἔχει πλάτος $AB = S_1 = 60$ m. Ἡ ταχύτητα πού δίνει στό πλοῖο ἡ μηχανή του εἶναι κάθετη στό ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ καί ἔχει μέτρο $\upsilon_1 = 2$m/sec. Τό πλοῖο, ἄν δέν παρασυρόταν ἀπό τό ποτάμι, θά ἀκολουθοῦσε τήν τροχιά AB, παρασύρεται ὅμως ἀπό τό ποτάμι κατά ἀπόσταση $B\Gamma = S_2 = 24$ m καί ἀκολουθεῖ τήν τροχιά ΑΓ. Νά βρεθοῦν:*

1) Ἡ ταχύτητα ($\vec{\upsilon}_2$) τοῦ ποταμοῦ.

2) Ἡ ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$) μέ τήν ὁποία κινεῖται τό πλοῖο.

3) Τό διάστημα S τό ὁποῖο ἔτρεξε τό πλοῖο.

Λύση.

Ἡ κίνηση πού κάνει τό πλοῖο εἶναι ἡ συνισταμένη δύο ἄλλων κινήσεων. Μιᾶς κάθετης πρός τό ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ καί μιᾶς παράλληλης πρός αὐτόν μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.

Εὕρεση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2$ τοῦ ποταμοῦ.

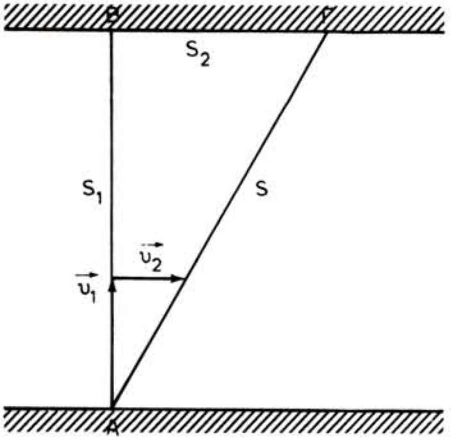
Ἄν τό πλοῖο ἐκτελοῦσε μόνο τήν πρώτη κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ τότε ἡ κίνησή του θά διαρκοῦσε χρόνο (t), πού τόν βρίσκομε ἀπό τή σχέση:

$$S_1 = \upsilon_1 t \quad \text{ἤ} \quad t = \frac{S_1}{\upsilon_1} = \frac{60}{2} = 30 \text{ sec}$$

Ἄν τό πλοῖο ἐκτελοῦσε μόνο τή δεύτερη κίνηση, σέ χρόνο t = 30 sec θά διέτρεχε διάστημα $S_2 = 24$ m. Ἐπομένως τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$, μέ τήν ὁποία θά ἔτρεχε, τή βρίσκομε ἀπό τή σχέση:

$$\upsilon_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{24}{30} = 0{,}8 \text{ m/sec}$$

ὥστε ἡ ταχύτητα τοῦ ποταμοῦ εἶναι: $\upsilon_2 = 0{,}8$ m/sec



Εὕρεση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ μέ τήν ὁποία κινεῖται τό πλοῖο.

Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μέ τήν ὁποία κινεῖται τό πλοῖο εἶναι τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$. Καί ἐπειδή οἱ δύο αὐτές ταχύτητες εἶναι κάθετες μεταξύ τους ἔχομε:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = \sqrt{2^2 + (0{,}8)^2} = \sqrt{4 + 0{,}64} \quad \textit{ὥστε} \quad \upsilon = 2{,}15 \text{ m/sec}$$

Εὕρεση τοῦ διαστήματος S τό ὁποῖο ἔτρεξε τό πλοῖο.

Τό διάστημα S = ΑΓ πού ἔτρεξε τό πλοῖο εἶναι τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν S_1 καί S_2, δηλαδή:

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{60^2 + 24^2} \quad \textit{ὥστε} \quad S = 64{,}6 \text{ m}$$

13) *Πόση θά εἶναι ἡ ταχύτητα (υ) μέ τήν ὁποία θά φθάσει στό ἔδαφος ἕνα σῶμα πού πέφτει ἐλεύθερα ἀπό ὕψος h = 10 m σέ ἕναν τόπο ὅπου ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι g = 9,8 m/sec².*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\upsilon = g \cdot t \qquad (1)$$

$$h = {}^1\!/_2\, gt^2 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2), ἄν ἀπαλείψομε τό t, βρίσκομε τή σχέση:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gh}} \qquad (3)$$

Δίνονται: h = 10 m καί g = 9,8 m/sec²

Θέτομε στή σχέση (3) αὐτά πού μᾶς δίνονται καί ἔχομε:

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 10} = 14 \text{ m/sec} \quad \textit{ὥστε} \quad \upsilon = 14 \text{ m/sec}$$

14) *Ἕνα σῶμα πού ἐκσφενδονίζεται κατακόρυφα πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 80$ m/sec σέ πόσο ὕψος (h) θά φθάσει σέ χρόνο t = 3 sec;*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι:

$$\boxed{h = \upsilon_0 \cdot t - {}^1\!/_2\, gt^2} \qquad (1)$$

Δίνονται: $\upsilon_0 = 80$ m/sec, $t = 3$ sec καί $g = 10$ m/sec^2

Τοποθετοῦμε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$$h = \upsilon_0 \cdot t - {}^1/_2\, gt^2 = 80 \times 3 - {}^1/_2 \times 10 \times 3^2 = 195 \text{ m} \quad \textit{ὥστε} \quad h = 195 \text{ m}$$

15) *Ἕνα σῶμα ἐκσφενδονίζεται κατακόρυφα πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 80$ m/sec. Ποιό εἶναι τό μέγιστο ὕψος (h_μ) πού θά φτάσει τό σῶμα καί σέ πόσο χρόνο (t_μ) θά τό διανύσει;*

Λύση.
Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι:

$$\boxed{h_\mu = \frac{\upsilon_0^2}{2g}} \tag{1}$$

$$\boxed{t_\mu = \frac{\upsilon_0}{g}} \tag{2}$$

Δίνονται: $\upsilon_0 = 80$ m/sec καί $g = 10$ m/sec^2

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στίς σχέσεις (1) καί (2) καί ἔχομε:

$$h_\mu = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{80^2}{2 \times 10} = 320 \text{ m} \quad \textit{ὥστε} \quad h_\mu = 320 \text{ m}$$

$$t_\mu = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{80}{10} = 8 \text{ sec} \quad \textit{ὥστε} \quad t_\mu = 8 \text{ sec}$$

16) *Ἕνα σῶμα ἐκσφενδονίζεται μέ ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα $\upsilon_0 = 80$ m/sec. Τό σῶμα ἐκσφενδονίζεται ἀπό ὕψος $h = 20$ m. Νά εὑρεθεῖ ἡ ὁριζόντια ἀπόσταση πού θά διατρέξει.*

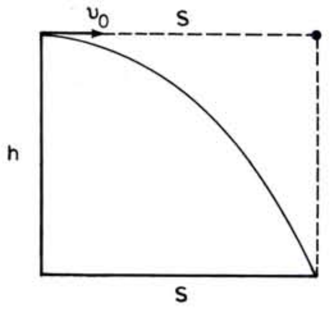
Λύση.
Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

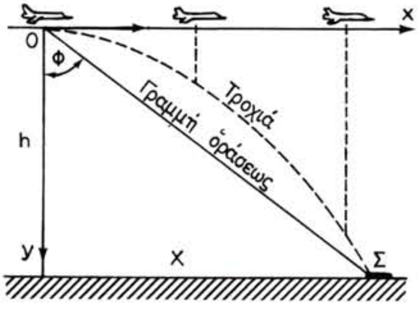
Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{S = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}} \tag{1}$$

Δίνονται: $\upsilon_0 = 80$ m/sec, $h = 20$ m καί $g = 10$ m/sec^2
Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$$S = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 80 \sqrt{\frac{2 \times 20}{10}} = 160 \text{ m} \quad \textit{ὥστε} \quad S = 160 \text{ m}$$





17) Ἀεροπλάνο πετάει ὁριζόντια σέ ὕψος $h = 2000$ m μέ σταθερή ταχύτητα $υ_0 = 50$ m/sec. Μέ ποιά γωνία φ πρέπει νά δεῖ ὁ πιλότος τό στόχο τή στιγμή πού ρίχνει τή βόμβα, γιά νά τόν πετύχει;

Λύση.

Ἡ βόμβα ὅταν ἀφήνεται ἀπό τό ἀεροπλάνο εἶναι σάν νά ἐκτοξεύεται ὁριζόντια μέ ἀρχική ταχύτητα τήν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου.

Ἡ ὁριζόντια ἀπόσταση x πού θά τρέξει ἡ βόμβα δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{x = υ_0 t} \qquad (1)$$

ὅπου: t ὁ χρόνος κινήσεως τῆς βόμβας.

Ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση $y = h$, πού θά τρέξει ἡ βόμβα δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{y = h = {}^1\!/_2\, gt^2} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$\boxed{x = υ_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}} \qquad (3)$$

Δίνονται: $υ_0 = 50$ m/sec, $h = 2000$ m καί $g = 10$ m/sec^2

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (3) καί βρίσκομε:

$$x = υ_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 50 \cdot \sqrt{\frac{2 \times 2000}{10}} = 1000 \text{ m}$$

Ἡ γωνία φ δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\text{εφ}\,φ = \frac{x}{y} = \frac{x}{h} = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2} \qquad \textit{ὥστε} \quad φ \simeq 23^\circ\, 30'$$

Β. ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1.21 Ἔννοια καί ὁρισμός τῆς δυνάμεως.

α) Γιά νά ἐπιμηκυνθεῖ (νά παραμορφωθεῖ) ἕνα χαλύβδινο ἐλατήριο (σχ. 1.21α) πρέπει νά τό ἕλξομε (νά τό τραβήξομε)· πρέπει δηλαδή νά ἐπιδράσει ἐπάνω του κάποιο αἴτιο.

Γιά νά ἀλλάξει σχῆμα (νά παραμορφωθεῖ) μία ἐλαστική σφαίρα (ἕνα τόπι) (σχ. 1.21β) πρέπει νά συμπιέσομε δυνατά τά τοιχώματά της· πρέπει δηλαδή νά ἐπιδράσει ἐπάνω της κάποιο αἴτιο.

Γενικά, γιά νά παραμορφωθοῦν τά σώματα πρέπει νά ἐπιδράσει ἐπάνω τους κάποιο αἴτιο.

Τό αἴτιο πού μπορεῖ νά προκαλέσει παραμόρφωση ἑνός σώματος ὀνομάζεται δύναμη.

β) Γιά νά κινηθεῖ ἕνα ἀκίνητο βαγονέτο (σχ. 1.21γ), θά πρέπει νά τό σπρώξομε· πρέπει δηλαδή νά ἐπιδράσει ἐπάνω του κάποιο αἴτιο.

Γιά νά κινηθεῖ ἕνα ἀκίνητο τόπι, πρέπει νά τό κλωτσήσομε πρέπει δηλαδή νά ἐπιδράσει ἐπάνω του κάποιο αἴτιο.

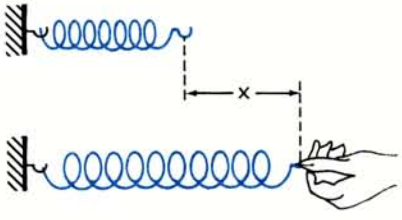
Τό αἴτιο πού μπορεῖ νά προκαλέσει τήν κίνηση ἑνός ἀκίνητου σώματος ὀνομάζεται δύναμη.

γ) Γιά νά σταματήσει ἕνα αὐτοκίνητο πού κινεῖται, πρέπει ὁ ὁδηγός του νά πατήσει φρένο· πρέπει δηλαδή νά ἐπιδράσει στό αὐτοκίνητο κάποιο αἴτιο.

Ἡ μπάλα ποδοσφαίρου, ὅταν συναντήσει τά δίχτυα τοῦ τέρματος, σταματάει. Αὐτό γίνεται, γιατί στήν κινούμενη μπάλα ἐπέδρασε κάποιο αἴτιο.

Γενικά, γιά νά σταματήσουν τά σώματα πού κινοῦνται, πρέπει νά ἐπιδράσει ἐπάνω τους κάποιο αἴτιο.

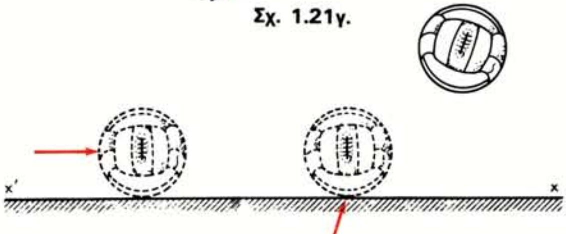
Τό αἴτιο πού μπορεῖ νά σταματήσει κάποιο κινούμενο σῶμα ὀνομάζεται δύναμη.



Σχ. 1.21α.

Σχ. 1.21γ.

Σχ. 1.21β.



Σχ. 1.21δ.

δ) Ἄν μιά μπάλα ποδοσφαίρου κινεῖται σέ εὐθεία τροχιά x'x (σχ. 1.21δ), ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητάς της εἶναι x'x. Γιά νά ἀλλάξει ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας τῆς μπάλας, πρέπει νά τήν κλωτσήσομε κατά ἄλλη διεύθυνση. Δηλαδή: γιά νά ἀλλάξει ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας τῆς μπάλας, πρέπει νά ἐπιδράσει ἐπάνω της κάποιο αἴτιο.

Γενικά, γιά νά ἀλλάξει ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας ἑνός σώματος πρέπει νά ἐπιδράσει ἐπάνω στό σῶμα κάποιο αἴτιο.

Τό αἴτιο πού μπορεῖ νά ἀλλάξει τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας ἑνός σώματος ὀνομάζεται δύναμη.

ε) Γιά νά ἀλλάξει τό μέτρο τῆς ταχύτητας ἑνός αὐτοκινήτου πού τρέχει συνεχῶς σέ εὐθύ δρόμο, πρέπει ὁ ὁδηγός ἄλλοτε νά πατάει περισσότερο τό γκάζι καί ἄλλοτε λιγότερο· πρέπει δηλαδή νά κάνει νά ἐπιδρᾶ στό αὐτοκίνητο κάποιο αἴτιο.

Γενικά, γιά νά ἀλλάξει τό μέτρο τῆς ταχύτητας μέ τήν ὁποία κινεῖται κάποιο σῶμα, πρέπει νά ἐπιδράσει ἐπάνω του κάποιο αἴτιο.

Τό αἴτιο πού κάνει νά ἀλλάξει τό μέτρο τῆς ταχύτητας ἑνός κινητοῦ ὀνομάζεται δύναμη. Σύμφωνα μέ τά παραπάνω μποροῦμε νά ὁρίσομε τή δύναμη ὡς ἑξῆς:

Δύναμη ὀνομάζεται κάθε αἴτιο τό ὁποῖο ἄν ἐπιδράσει ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα, μπο-

ρεῖ: νά τό παραμορφώσει ἤ νά τό θέσει σέ κίνηση (ἄν ἠρεμεῖ) ἤ νά τό σταματήσει (ἄν κινεῖται) ἤ νά ἀλλάξει τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας μέ τήν ὁποία κινεῖται ἤ νά ἀλλάξει τό μέτρο τῆς ταχύτητάς του ἤ νά προκαλέσει στό σῶμα ὅλες τίς μεταβολές αὐτές ταυτόχρονα.

Σημείωση:

Ὅταν ἕνα σῶμα ἠρεμεῖ, ἔχει ταχύτητα μηδέν. Ὅταν ὅμως τό σῶμα ἀρχίζει νά κινεῖται, σημαίνει ὅτι ἡ ταχύτητά του ἀπό μηδέν πῆρε κάποια τιμή, δηλαδή ἄλλαξε.

Ὅταν ἕνα σῶμα κινεῖται, ἔχει κάποια ταχύτητα. Ὅταν ὅμως τό σῶμα σταματήσει, ἡ ταχύτητά του γίνεται μηδέν. Ἄρα ὅταν τό σῶμα σταματάει, ἀλλάζει ταχύτητα.

Παρατηρήσεις:

1) Ὅταν ἀλλάζει ἡ ταχύτητα ἑνός σώματος, εἴτε κατά διεύθυνση εἴτε κατά μέτρο ἤ καί κατά τά δύο αὐτά, τό σῶμα ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση ἤ ἐπιβράδυνση. Ἀπό αὐτό προκύπτει καί ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός τῆς δυνάμεως:

Δύναμη ὀνομάζεται τό αἴτιο τό ὁποῖο, ἄν ἐπιδράσει ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα, μπορεῖ νά τοῦ προκαλέσει παραμόρφωση ἤ ἐπιτάχυνση ἤ ἐπιβράδυνση ἤ παραμόρφωση καί ἐπιτάχυνση ἤ παραμόρφωση καί ἐπιβράδυνση.

2) Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως μιᾶς δυνάμεως πού ἀσκεῖται ἐπάνω σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο εἶναι μόνο ἡ ἐπιτάχυνση ἤ ἐπιβράδυνση δεδομένου ὅτι τό ὑλικό σημεῖο δέν παραμορφώνεται, ἀφοῦ δέν ἔχει σχῆμα.

3) Τή δύναμη τήν ἀντιλαμβανόμαστε ἀπό τά ἀποτελέσματά της.

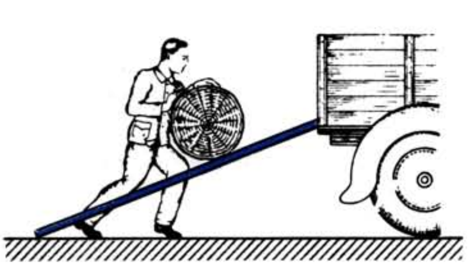
1.22 Εἴδη δυνάμεων.

Τίς δυνάμεις τίς διακρίνομε σέ δυνάμεις ἐπαφῆς καί σέ δυνάμεις ἐξ ἀποστάσεως (δυνάμεις πεδίου).

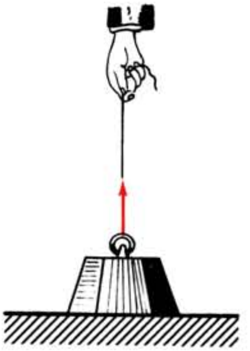
Δυνάμεις ἐπαφῆς.

Τή δύναμη πού ἀσκεῖ ἕνα σῶμα Α ἐπάνω σέ ἕνα ἄλλο σῶμα Β, μέ τό ὁποῖο ἐφάπτεται, τήν ὀνομάζομε δύναμη ἐπαφῆς.

Δύναμη ἐπαφῆς εἶναι π.χ. ἡ δύναμη πού ἀσκεῖ ὁ ἄνθρωπος, ὅταν σπρώχνει ἕνα σῶμα (σχ. 1.22α), ἡ δύναμη πού ἀσκεῖ ὁ ἄνθρωπος ὅταν σηκώνει ἕνα σῶμα (σχ. 1.22β), ἡ δύναμη πού ἀσκεῖ ὁ ἀέρας σέ ἕνα δέντρο (σχ. 1.22γ).

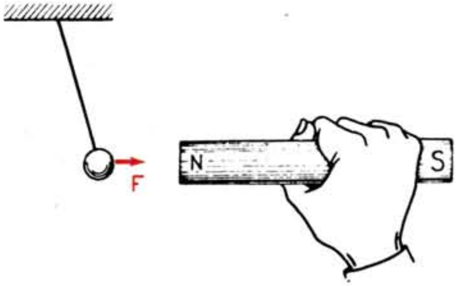


Σχ. 1.22α.

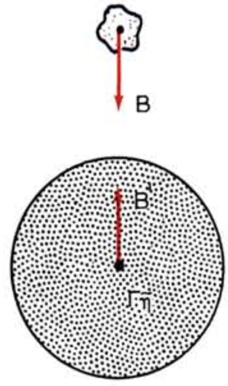


Σχ. 1.22β.

Σχ. 1.22γ.



Σχ. 1.22δ.



Σχ. 1.22ε.

Δυνάμεις ἐξ ἀποστάσεως (δυνάμεις πεδίου).

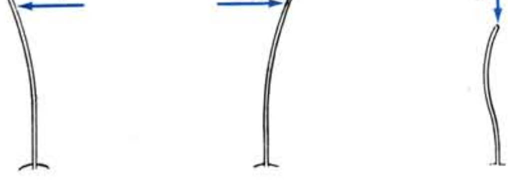
Τή δύναμη πού ἀσκεῖ ἕνα σῶμα Α ἐπάνω σέ ἕνα ἄλλο σῶμα Β, μέ τό ὁποῖο ὅμως δέν ἐφάπτεται, τήν ὀνομάζομε δύναμη ἐξ ἀποστάσεως ἤ δύναμη πεδίου.

Δύναμη ἐξ ἀποστάσεως εἶναι π.χ. ἡ δύναμη πού ἀσκεῖ ἡ γῆ σέ ἕνα σῶμα πού πέφτει (σχ. 1.22δ), ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία ἕνας μαγνήτης ἕλκει μιά σιδερένια σφαίρα ἀπό μακριά (σχ. 1.22ε).

1.23 Χαρακτηριστικά δυνάμεως. Γραφική παράσταση.

Ἡ δύναμη εἶναι ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος, γιατί τό ἀποτέλεσμά της δέν ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό μέτρο της, ἀλλά καί ἀπό τή διεύθυνσή της καί ἀπό τή φορά της.

Στό σχῆμα 1.23α βλέπομε ὅτι τά ἀποτελέσματα τῶν τριῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ εἶναι διαφορετικά, ἄν καί οἱ τρεῖς δυνάμεις ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, ἔστω 3 kp. Αὐτό συμβαίνει, γιατί οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά δέν ἔχουν τήν ἴδια φορά, καί ἡ δύναμη $\vec{F}_3$ ἔχει διαφορετική διεύθυνση καί διαφορετική φορά ἀπό τίς $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

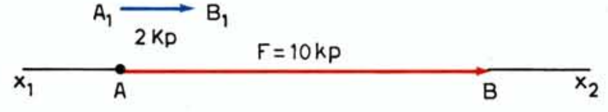


Σχ. 1.23α.

Ἀφοῦ ἡ δύναμη εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος, ***τά χαρακτηριστικά πού τήν προσδιορίζουν πλήρως εἶναι:***

1) Σημεῖο ἐφαρμογῆς.
2) Διεύθυνση.
3) Φορά.
4) Μέτρο.

Ἡ δύναμη, ἀφοῦ εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος, ***παριστάνεται γραφικά μέ ἕνα ἄνυσμα.*** Π.χ. ἡ δύναμη $\vec{F}$ παριστάνεται μέ τό ἄνυσμα $\vec{AB}$ (σχ. 1.23β). Ἡ ἀρχή Α, ἡ διεύθυνση x_1x_2 καί ἡ φορά (Α → Β) τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ παριστάνουν ἀντίστοιχα τό σημεῖο ἐφαρμογῆς, τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.



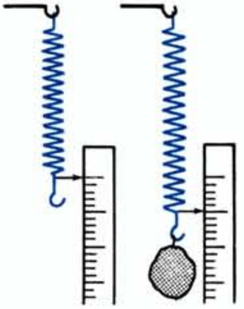
Σχ. 1.23β.

Τό μῆκος (ΑΒ) τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$, μέ τό ὁποῖο παριστάνεται ἡ δύναμη $\vec{F}$, παριστάνει, ὑπό κλίμακα, τό μέτρο της. Ἄν π.χ. ἔχομε καθορίσει ὅτι σέ μῆκος ἀνύσματος ἴσο μέ 1 cm ($\overrightarrow{A_1B_1}$) θά ἀντιστοιχεῖ δύναμη 2 kp (σχ. 1.23β), καί ἄν τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι $F = 10$ kp, τότε τό μῆκος τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ θά εἶναι 5 cm.

Ἡ δύναμη εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος καί ἐπομένως ***γιά τίς δυνάμεις ἰσχύουν ὅλα ὅσα ἀναφέραμε γιά τά ἀνύσματα.***

1.24 Στατική μέτρηση τῶν δυνάμεων.

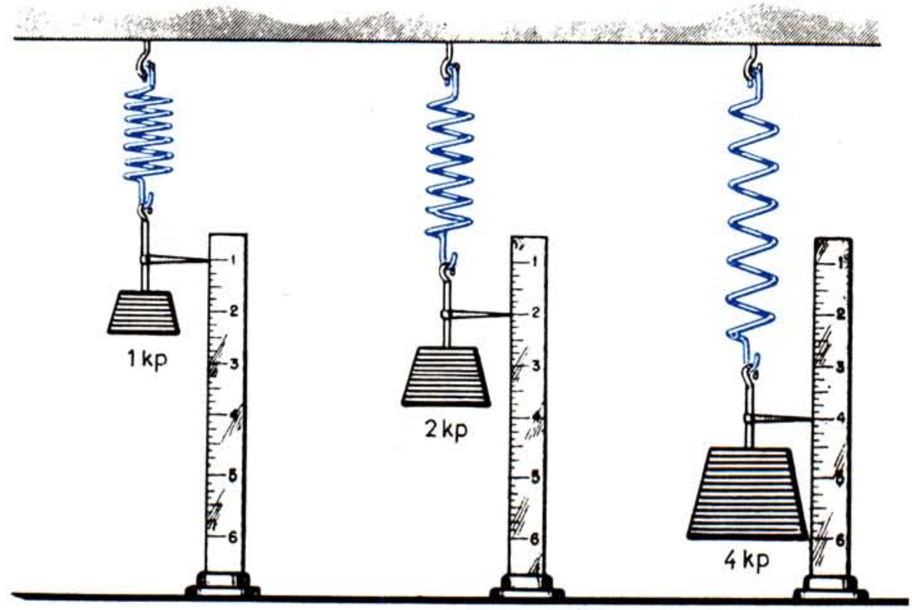
Ὅταν σέ ἕνα ἐλατήριο ἐπιδράσουν ὁρισμένες δυνάμεις, προκαλοῦν ὁρισμένες ἐπιμηκύνσεις τοῦ ἐλατηρίου αὐτοῦ (σχ. 1.24α καί 1.24β).



Σχ. 1.24α.

Οἱ ἐπιμηκύνσεις τῶν ἐλατηρίων (γενικότερα: οἱ παραμορφώσεις τῶν ἐλασμάτων) εἶναι ἀνάλογες πρός τίς δυνάμεις πού τίς προκαλοῦν, ἀρκεῖ οἱ δυνάμεις αὐτές νά μήν ὑπερβαίνουν μιά ὁρισμένη τιμή, τέτοια ὥστε νά μποροῦν τά ἐλατήρια μετά τήν ἐπίδραση τῶν δυνάμεων αὐτῶν νά ἐπανέρχονται στό μῆκος πού εἶχαν πρίν ἐπιδράσουν ἐπάνω τους οἱ δυνάμεις αὐτές ***(Νόμος Hooke).***

Ἄν σέ ἕνα ἐλατήριο ἐπιδράσει μιά δύναμη 1 kp καί τό ἐλατήριο ἐπιμηκυνθεῖ κατά 1 cm (σχ. 1.24β), τότε τό ἴδιο ἐλατήριο θά ἐπιμηκυνθεῖ κατά 2 cm, 4 cm ... ἄν σέ αὐτό ἐπιδράσουν δυνάμεις 2 kp, 4 kp ... ἀντίστοιχα.



Σχ. 1.24β.

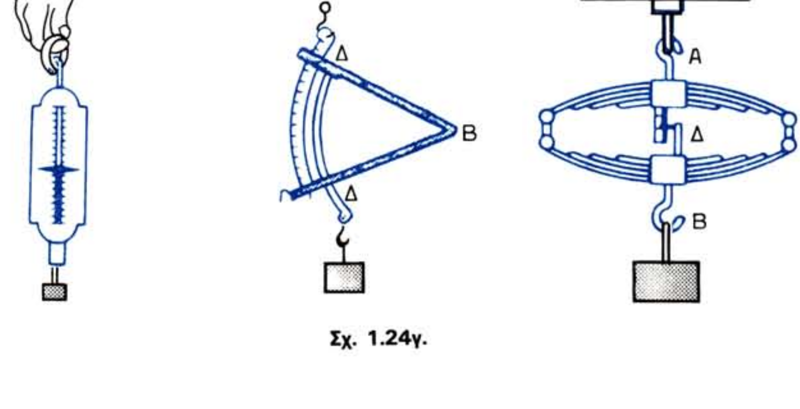
Μέ τά δυναμόμετρα (σχ. 1.24γ) μετρᾶμε τίς δυνάμεις.

῾Η μέτρηση τῶν δυνάμεων πού γίνεται μέ τά δυναμόμετρα ὀνομάζεται ***στατική μέτρηση τῶν δυνάμεων***.

῾Η λειτουργία τῶν δυναμομέτρων ***στηρίζεται στό νόμο τοῦ Hooke,*** σύμφωνα μέ τόν ὁποῖο:

Ἄν ἀπό ἕνα συγκεκριμένο ἐλατήριο ἐξαρτήσομε διαδοχικά τίς δυνάμεις 1 kp, 2 kp, 3 kp, 4 kp κλπ. καί ἐπάνω στήν κλίμακα σημειώσομε τίς θέσεις τοῦ δείκτη μέ 1, 2, 3, 4 κλπ., ἀντίστοιχα, τότε θά ἔχομε ἕνα βαθμολογημένο δυναμόμετρο.

Ἄν τώρα στό ἴδιο ἐλατήριο ἐξαρτήσομε μιά ἄγνωστη δύναμη καί ὁ δείκτης ἔλθει στή θέση 2,5, τότε ἡ ἄγνωστη δύναμη ἔχει μέτρο 2,5 kp.



Σχ. 1.24γ.

1.25 Σύνθεση (ἤ πρόσθεση) δυνάμεων πού ἐπιδροῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο.

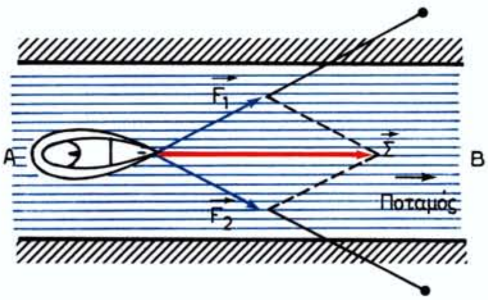
Γενικά.

Ὅταν λέμε ὅτι συνθέτομε τίς δυνάμεις πού ἐπιδροῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο, ἐννοοῦμε ὅτι βρίσκομε τή συνισταμένη τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

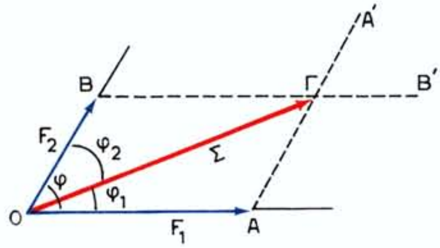
Συνισταμένη δύο ἤ περισσοτέρων δυνάμεων πού ἐπιδροῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ὀνομάζεται ἡ δύναμη ἐκείνη πού, ὅταν ἐπιδρᾶ σ' αὐτό τό ὑλικό σημεῖο, ἐπιφέρει τό ἴδιο ἀποτέλεσμα πού ἐπιφέρουν ὅλες οἱ ἄλλες μαζί, καί ἐπομένως μπορεῖ νά τίς ἀντικαταστήσει.

Οἱ δυνάμεις αὐτές ὀνομάζονται ***συνιστῶσες τῆς συνισταμένης τους.***

Ἄν ἐπί χρόνο (t) τραβᾶμε μιά βάρκα, μέ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ (σχ. 1.25α), τότε ἡ βάρκα ἔρχεται ἀπό τή θέση A στή θέση B. Φέρνομε τή βάρκα πάλι στή θέση A καί τήν τραβᾶμε μόνο μέ τή δύναμη $\vec{\Sigma}$. Ἄν ἡ βάρκα ἔλθει ἀπό τή θέση A στή θέση B μέσα σέ χρόνο t, τότε ἡ $\vec{\Sigma}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, τίς ὁποῖες λέμε συνιστῶσες τῆς $\vec{\Sigma}$.



Σχ. 1.25α.



Σχ. 1.25β.

Παρατήρηση:

Ἡ δύναμη εἶναι ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος. Ἑπομένως ***γιά τή σύνθεση τῶν δυνάμεων ἐφαρμόζομε ὅσα ἰσχύουν γιά τήν πρόσθεση τῶν ἀνυσμάτων.***

Σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο σημεῖο καί σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ.

Γιά τή συνισταμένη δύο δυνάμεων πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο σημεῖο ***ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ παραλληλογράμμου,*** ὁ ὁποῖος ὁρίζει ὅτι:

Ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο σημεῖο (O) καί σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ (σχ. 1.25β) εἶναι ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι πλευρές του καί ἡ ὁποία ἔχει ἀρχή τό (O).

Ἑπομένως, γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἐνεργοῦν στό σημεῖο (O) καί σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία (φ), γράφομε ἀπό τό τέλος (A) τῆς $\vec{F}_1$ τήν εὐθεία AA′ παράλληλη πρός τή διεύθυνση τῆς $\vec{F}_2$, καί ἀπό τό τέλος (B) τῆς $\vec{F}_2$ τήν εὐθεία BB′ παράλληλη πρός τή διεύθυνση τῆς $\vec{F}_1$.

Οἱ δύο εὐθεῖες AA′ καί BB′ τέμνονται στό σημεῖο Γ. Ἡ διαγώνιος ΟΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΟΒΓΑ εἶναι ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ τῶν δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

α) Τό μέτρο τῆς συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \text{συνφ}}} \qquad (1)$$

β) Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ καθορίζεται ἄν καθορισθεῖ ἡ γωνία πού σχηματίζει αὐτή μέ μία ἀπό τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις: $$\boxed{\frac{F_1}{\text{ημ}\phi_2} = \frac{\Sigma}{\text{ημ}\phi}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\frac{F_2}{\text{ημ}\phi_1} = \frac{\Sigma}{\text{ημ}\phi}} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) παίρνομε:

$$\text{ημ}\phi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \cdot \text{ημ}\phi \qquad (4)$$

$$\text{ημ}\phi_1 = \frac{F_2}{\Sigma} \cdot \text{ημ}\phi \qquad (5)$$

Σημείωση:

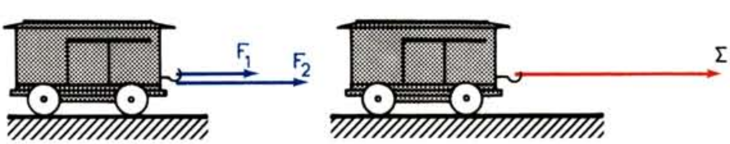
1) Μέ τίς ἐξισώσεις (1), (4) καί (5) μποροῦμε νά βρίσκομε: α) τό μέτρο (Σ) τῆς συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ καί β) τίς γωνίες ϕ_1 καί ϕ_2 πού σχηματίζει ἡ $\vec{\Sigma}$ μέ αὐτές, ἄν γνωρίζομε τά μέτρα τῶν $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί τή γωνία φ πού σχηματίζουν μεταξύ τους.

2) Ἡ σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἐκφράζεται ***ἀνυσματικά μέ τήν ἐξίσωση:*** $\vec{\Sigma} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά.

Ἐφόσον οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά, ἡ γωνία τήν ὁποία σχηματίζουν εἶναι μηδέν (φ = 0) (σχ. 1.25γ καί 1.25δ).

Σχ. 1.25γ.



Σχ. 1.25δ.

Τό μέτρο τῆς συνισταμένης τους εἶναι:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \,.\, \text{συν}\phi}$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \,.\, \text{συν}0^\circ}$$

Καί ἐπειδή συν$0^\circ = 1$, ἔχομε:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} \qquad \text{καί} \qquad \Sigma = \sqrt{(F_1 + F_2)^2}$$

$$\boxed{\Sigma = F_1 + F_2} \qquad (1)$$

Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης τους εἶναι:

$$\text{ημ}\phi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \,.\, \text{ημ}\phi \qquad \text{καί} \qquad \text{ημ}\phi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \,.\, \text{ημ}0^\circ$$

Καί ἐπειδή ημ$0^\circ = 0$:

$$\text{ημ}\phi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \cdot 0 \qquad \text{ἄρα} \qquad \text{ημ}\phi_2 = 0$$

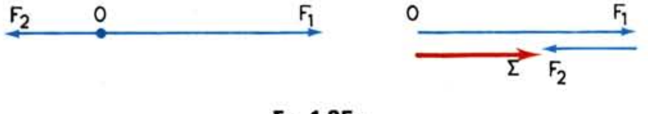
$$\boxed{\phi_2 = 0} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) συμπεραίνομε ὅτι:

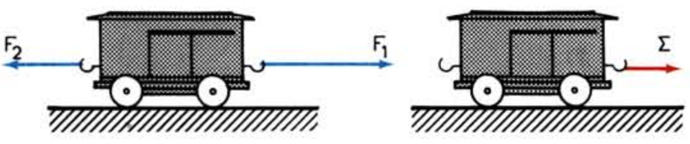
Ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά, ***ἔχει διεύθυνση καί φορά τή διεύθυνση καί τή φορά τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ καί τό μέτρο της (Σ) ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τους.***

Σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση ἀλλά ἀντίθετη φορά.

Ἐφόσον οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί ἀντίθετη φορά, ἡ γωνία τήν ὁποία σχηματίζουν εἶναι $\phi = 180^\circ$ (σχ. 1.25ε καί σχ. 1.25στ).



Σχ. 1.25ε.



Σχ. 1.25στ.

Τό μέτρο τῆς συνισταμένης εἶναι:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \,.\, \text{συν}\phi} \qquad \text{καί} \qquad \Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \,.\, \text{συν}180^\circ}$$

Καί ἐπειδή τό συν180° = − 1, ἔχομε:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} \quad \text{καί} \quad \Sigma = \sqrt{(F_1 - F_2)^2}$$

$$\boxed{\Sigma = F_1 - F_2} \qquad (1)$$

Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης εἶναι:

$$\eta\mu\phi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \cdot \eta\mu\phi \qquad \text{καί} \qquad \eta\mu\phi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \cdot \eta\mu 180°$$

Καί ἐπειδή ημ180° = 0, ἔχομε:

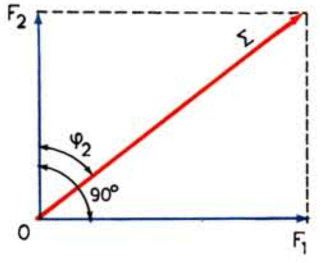
$$\eta\mu\phi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \cdot 0 \qquad \text{καί} \qquad \eta\mu\phi_2 = 0$$

$$\boxed{\phi_2 = 0} \qquad (2)$$

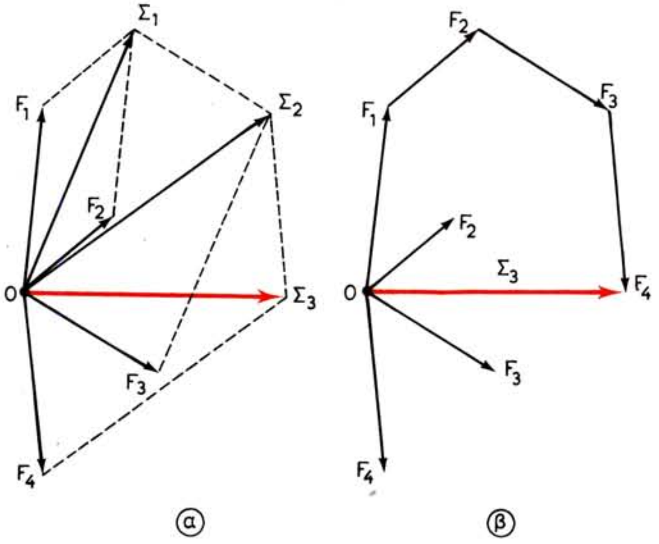
Ἀπό τίς (1) καί (2) συμπεραίνομε ὅτι:

Ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο καί ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση ἀλλά ἀντίθετη φορά, ***ἔχει διεύθυνση τή διεύθυνση τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, φορά τή φορά τῆς μεγαλύτερης ἀπό τίς δύο αὐτές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί τό μέτρο της ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν μέτρων τους.***

Σύνθεση δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο καί σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ = 90° (σχ. 1.25ζ).



Σχ. 1.25ζ.



Σχ. 1.25η.

Τό μέτρο τῆς συνισταμένης εἶναι:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \text{συν}\varphi} \quad \text{καί} \quad \Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \text{συν}90^\circ}$$

Καί ἐπειδή συν$90^\circ = 0$, ἔχομε:

$$\boxed{\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}$$

Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης εἶναι:

$$\text{ημ}\varphi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \cdot \text{ημ}\varphi \quad \text{καί} \quad \text{ημ}\varphi_2 = \frac{F_1}{\Sigma} \cdot \text{ημ}90^\circ$$

Καί ἐπειδή ημ$90^\circ = 1$, ἔχομε:

$$\boxed{\text{ημ}\varphi_2 = \frac{F_1}{\Sigma}}$$

Σύνθεση περισσότερων ἀπό δύο δυνάμεων πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο.

α) Γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη περισσότερων ἀπό δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο, ἐφαρμόζομε ***τό νόμο τοῦ παραλληλογράμμου διαδοχικά*** [σχ. 1.25η(α)]. Δηλαδή, βρίσκομε πρῶτα τή συνισταμένη $\vec{\Sigma}_1$ τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ὕστερα τή συνισταμένη $\vec{\Sigma}_2$ τῆς $\vec{\Sigma}_1$ καί τῆς δυνάμεως $\vec{F}_3$, μετά τή συνισταμένη $\vec{\Sigma}_3$ τῆς $\vec{\Sigma}_2$ καί τῆς δυνάμεως $\vec{F}_4$.

β) Ἐπίσης μποροῦμε νά βροῦμε τή συνισταμένη $\vec{\Sigma}_3$ περισσότερων ἀπό δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο, ***ἄν τίς κάνομε διαδοχικές καί ἑνώσομε τήν ἀρχή τῆς πρώτης μέ τό τέλος τῆς τελευταίας*** [σχ. 1.25η (β)] ***(Μέθοδος πολυγώνου)****.

1.26 Ἀνάλυση δυνάμεως σέ δύο συνιστῶσες.

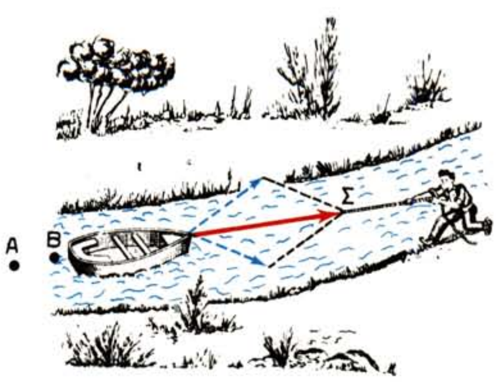
Ὅταν λέμε ὅτι θά ἀναλύσομε τή δύναμη $\vec{\Sigma}$, πού ἐπιδρᾶ σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο, σέ δύο συνιστῶσες, ἐννοοῦμε ὅτι πρέπει νά βροῦμε δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, οἱ ὁποῖες ἄν ἐπιδράσουν ταυτόχρονα στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο πού ἐπιδρᾶ ἡ $\vec{\Sigma}$, νά προκαλοῦν τό ἴδιο ἀποτέλεσμα πού προκαλεῖ ἡ $\vec{\Sigma}$ καί ἐπομένως νά μποροῦν νά τήν ἀντικαταστήσουν.

Ἄν τραβᾶμε μία βάρκα ἐπί χρόνο (t) καί μέ μιά δύναμη $\vec{\Sigma}$ (σχ. 1.26α), τότε ἡ βάρκα θά ἔρθει, ἔστω, ἀπό τή θέση Α στή θέση Β. Φέρνομε τή βάρκα πάλι στή θέση της Α καί τήν τραβᾶμε μέ δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ (σχ. 1.26β). Ἄν ἡ βάρκα ἔρθει ἀπό τή θέση Α στή θέση Β μέσα σέ χρόνο t, τότε λέμε ὅτι ἡ $\vec{\Sigma}$ μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ στίς $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

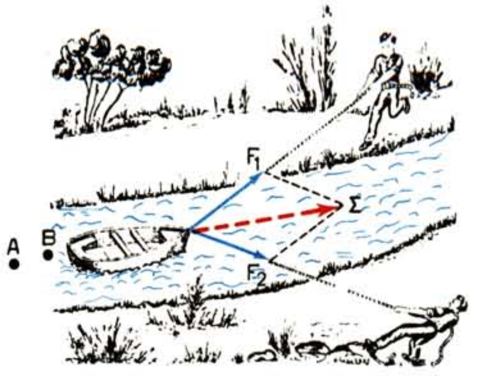
Ἡ ἀνάλυση μιᾶς δυνάμεως $\vec{\Sigma}$ (σχ. 1.26γ) σέ δύο ἄλλες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ***γίνεται μέ τό νόμο τοῦ παραλληλογράμμου, ἀρκεῖ νά δοθοῦν: οἱ διευθύνσεις Οx καί Οy τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, στίς ὁποῖες θέλομε νά ἀναλύσομε τή $\vec{\Sigma}$.***

---

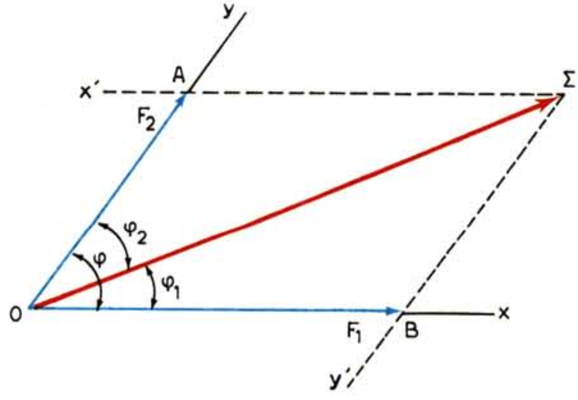
* Τό πολύγωνο $OF_1F_2F_3F_4$, πού σχηματίζεται κατά τήν πρόσθεση τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ καί $\vec{F}_4$ πού ἐνεργοῦν στό ὑλικό σημεῖο Ο, ***ὀνομάζεται δυναμοπολύγωνο τῶν δυνάμεων αὐτῶν.***



Σχ. 1.26α.



Σχ. 1.26β.



Σχ. 1.26γ.

Ἀπό τό τέλος τῆς $\vec{\Sigma}$ (σχ. 1.26γ) γράφομε τίς Σx′ καί Σy′ παράλληλες πρός τίς διευθύνσεις Οx καί Οy. Ἔστω ὅτι ἡ Σx′ τέμνει τήν Οy στό σημεῖο Α καί ἡ Σy′ τέμνει τήν Οx στό σημεῖο Β. Τότε οἱ δυνάμεις πού ζητοῦμε νά βροῦμε θά εἶναι οἱ $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

Γιά τή δύναμη $\vec{\Sigma}$ καί γιά τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, στίς ὁποῖες μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ ἡ $\vec{\Sigma}$, ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\boxed{\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \text{συνφ}}} \qquad (1)$$

$$\boxed{\frac{F_1}{\text{ημφ}_2} = \frac{\Sigma}{\text{ημφ}}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\frac{F_2}{\text{ημφ}_1} = \frac{\Sigma}{\text{ημφ}}} \qquad (3)$$

ὅπου: φ ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ διευθύνσεις τῶν δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.
φ_1 ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς $\vec{\Sigma}$ μέ τή διεύθυνση τῆς $\vec{F}_1$ καί
φ_2 ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς $\vec{\Sigma}$ μέ τή διεύθυνση τῆς $\vec{F}_2$.

Παρατήρηση:

1) Τό πρόβλημα τῆς ἀναλύσεως μιᾶς δυνάμεως σέ δύο συνιστῶσες ἔχει ἄπειρες λύσεις. Γιά νά ἔ-

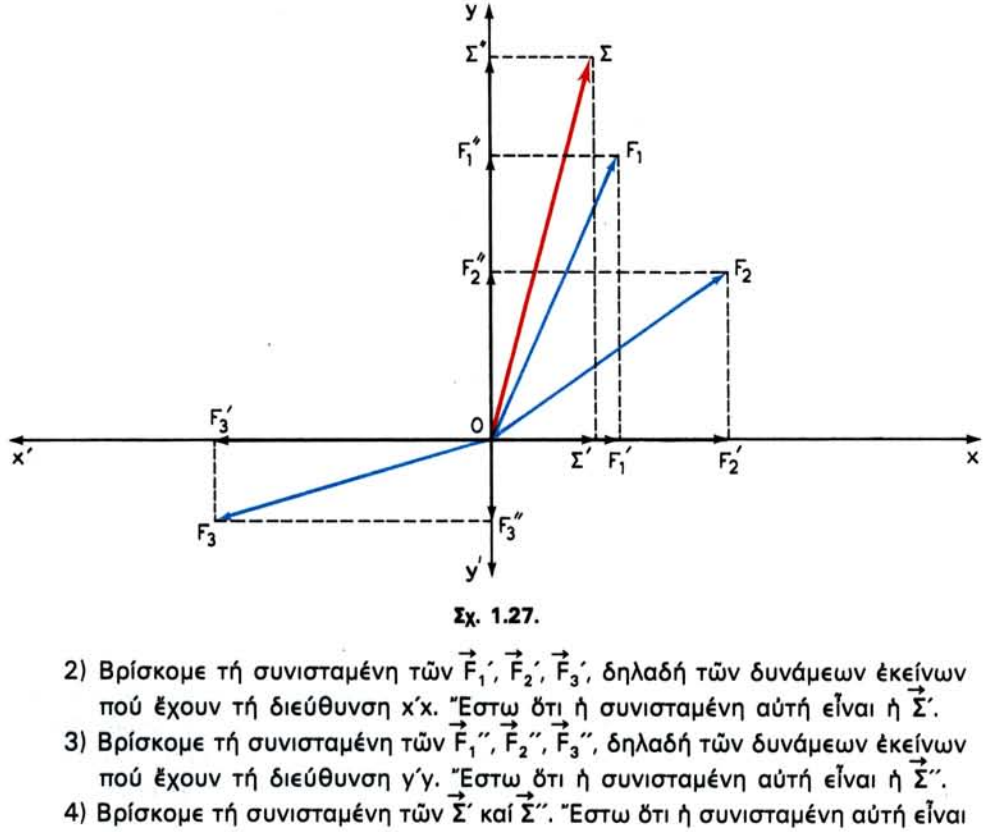
χει νόημα ἡ ἀνάλυση δυνάμεως θά πρέπει νά ὁρίζονται ταυτόχρονα οἱ διευθύνσεις τῶν δυνάμεων στίς ὁποῖες θά ἀναλυθεῖ.

2) Ἡ δύναμη εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος. Γι' αὐτό γιά τήν ἀνάλυση μιᾶς δυνάμεως ἰσχύουν ὅλα ὅσα ἰσχύουν γιά τήν ἀνάλυση ἀνυσμάτων.

1.27 Σύνθεση πολλῶν δυνάμεων, πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο, μέ τή μέθοδο τῆς ἀναλύσεως σέ ὀρθογώνιους ἄξονες.

Ἄν θέλομε νά βροῦμε τή συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Γράφομε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες x'x καί y'y (σχ. 1.27) καί ἀναλύομε καθεμιά ἀπ' τίς δυνάμεις αὐτές στίς συνιστῶσες της $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_1''$ — $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_2''$ — $\vec{F}_3'$, $\vec{F}_3''$.



Σχ. 1.27.

2) Βρίσκομε τή συνισταμένη τῶν $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_3'$, δηλαδή τῶν δυνάμεων ἐκείνων πού ἔχουν τή διεύθυνση x'x. Ἔστω ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτή εἶναι ἡ $\vec{\Sigma}'$.

3) Βρίσκομε τή συνισταμένη τῶν $\vec{F}_1''$, $\vec{F}_2''$, $\vec{F}_3''$, δηλαδή τῶν δυνάμεων ἐκείνων πού ἔχουν τή διεύθυνση y'y. Ἔστω ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτή εἶναι ἡ $\vec{\Sigma}''$.

4) Βρίσκομε τή συνισταμένη τῶν $\vec{\Sigma}'$ καί $\vec{\Sigma}''$. Ἔστω ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτή εἶναι ἡ Σ.

Ἡ Σ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.

1.28 Ἰσορροπία δυνάμεων πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο.

Γενικά.

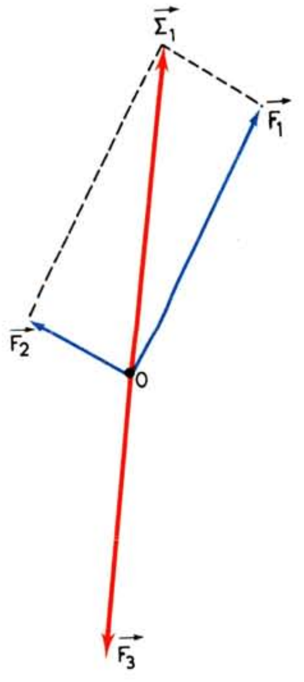
Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως μιᾶς ἤ περισσότερων δυνάμεων ἐπάνω σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο εἶναι ***τό σημεῖο αὐτό νά ἀποκτήσει ἐπιτάχυνση ἤ ἐπιβράδυνση.*** (Γιά παραμόρφωση δέ γίνεται λόγος, γιατί τό ὑλικό σημεῖο δέν ἔχει διαστάσεις).

Ὅταν λέμε ὅτι οἱ δυνάμεις πού ἐπιδροῦν συγχρόνως ἐπάνω σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ἰσορροποῦν, ἐννοοῦμε ***ὅτι τό συνολικό ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως ὅλων αὐτῶν τῶν δυνάμεων ἐπάνω στό ὑλικό αὐτό σημεῖο εἶναι μηδέν.*** Πράγμα πού σημαίνει ὅτι τό ὑλικό σημεῖο δέν ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση.

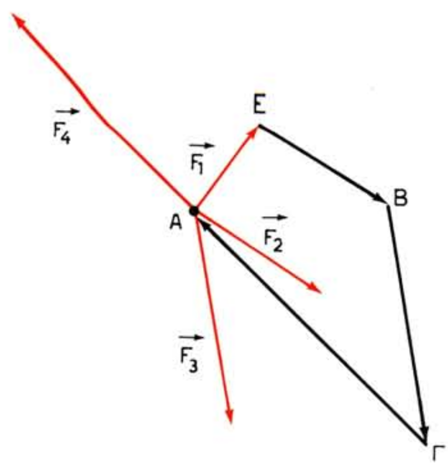
Ἰσορροπία δύο δυνάμεων πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ (σχ. 1.28α) ἐπάνω στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο ὅταν αὐτές ἔχουν τήν ἴδια διευθυνση, τό ἴδιο μέτρο ἀλλά ἀντίθετη φορά (δηλαδή εἶναι ἀντίθετες), εἶναι μηδέν.

Σχ. 1.28α.



Σχ. 1.28β.



Σχ. 1.28γ.

Ἀπό αὐτά προκύπτει ἡ συνθήκη ἰσορροπίας δύο δυνάμεων πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο. Ἡ συνθήκη αὐτή ὁρίζει τά ἀκόλουθα: ***Γιά νά ἰσορροποῦν δύο δυνάμεις πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο, πρέπει οἱ δυνάμεις αὐτές νά ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, τό ἴδιο μέτρο καί ἀντίθετη φορά, δηλαδή πρέπει νά εἶναι ἀντίθετες.***

Παρατήρηση:

Ἐπειδή ἡ συνισταμένη δύο ἀντιθέτων δυνάμεων πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο εἶναι μηδέν, ἡ πιό πάνω συνθήκη μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ καί ὡς ἑξῆς: ***Γιά νά ἰσορροποῦν δύο δυνάμεις πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο, πρέπει ἡ συνισταμένη νά εἶναι μηδέν.***

Ἰσορροπία τριῶν ὁμοεπιπέδων δυνάμεων πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο σημεῖο.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τριῶν δυνάμεων, π.χ. τῶν $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$ (σχ. 1.28β), πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο (0), εἶναι ἡ ἑξῆς: ***Γιά νά ἰσορροποῦν τρεῖς δυνάμεις, π.χ. οἱ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$, πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο (0), πρέπει:*** α) οἱ τρεῖς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$ νά βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί β) ἡ συνισταμένη, π.χ. Σ_1, δύο δυνάμεων ἀπό αὐτές, π.χ. τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, νά ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί τό ἴδιο μέτρο μέ τήν τρίτη δύναμη $\vec{F}_3$, ἀλλά φορά ἀντίθετη ἀπό τή φορά τῆς $\vec{F}_3$.

Παρατήρηση:

1) Ἐπειδή ἡ συνισταμένη τριῶν δυνάμεων, π.χ. τῶν $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$, πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο εἶναι μηδέν, ὅταν ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}_1$ τῶν δύο ἀπό αὐτές, π.χ. τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, εἶναι ἀντίθετη πρός τήν τρίτη δύναμη $\vec{F}_3$, ἡ πιό πάνω συνθήκη ἐκφράζεται καί ὡς ἑξῆς: ***Γιά νά ἰσορροποῦν τρεῖς δυνάμεις πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο, πρέπει ἡ συνισταμένη τους νά εἶναι μηδέν.***

2) Ὅταν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ἐπιδροῦν τρεῖς δυνάμεις πού ἰσορροποῦν, τότε ἰσχύουν τά ἑξῆς: α) Οἱ δυνάμεις αὐτές βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί β) ἡ συνισταμένη τῶν κάθε δύο ἀπό αὐτές ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί τό ἴδιο μέτρο μέ τήν τρίτη δύναμη, ἀλλά φορά ἀντίθετη ἀπό τή φορά της.

Ἰσορροπία πολλῶν δυνάμεων πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο.

Γιά νά ἰσορροποῦν οἱ δυνάμεις πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο, ***πρέπει τό συνολικό ἀποτέλεσμα τῆς ἐνέργειάς τους στό σημεῖο αὐτό νά εἶναι μηδέν*** (σχ. 1.28γ), δηλαδή τό σημεῖο νά μήν ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση ἀπό τήν ἐπίδραση τῶν δυνάμεων αὐτῶν ἐπάνω του. Ἑπομένως, γιά νά ἰσορροποῦν οἱ δυνάμεις πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο, πρέπει ἡ συνισταμένη τους νά εἶναι μηδέν.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ἡ ἀκόλουθη συνθήκη: ***Γιά νά ἰσορροποῦν δύο ἤ περισσότερες δυνάμεις πού ἐπιδροῦν στό ἴδιο σημεῖο, πρέπει ἡ συνισταμένη τους νά εἶναι μηδέν.***

Συνθήκη ἰσορροπίας ὑλικοῦ σημείου.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἡ ἑξῆς: ***Γιά νά ἰσορροπεῖ ἕνα ὑλικό σημεῖο, πρέπει ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἐπιδροῦν ἐπάνω του νά εἶναι μηδέν*** θά πρέπει δηλαδή τό δυναμοπολύγωνο τῶν δυνάμεων αὐτῶν νά εἶναι κλειστό (ΑΕΒΓ, σχ. 1.28γ).

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = 0} \qquad \text{(συνθήκη ἰσορροπίας ὑλικοῦ σημείου)}$$

Παρατήρηση:

Ἰσχύει καί τό ἑξῆς: Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο ἰσορροπεῖ, ***τότε ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἐπιδροῦν ἐπάνω του εἶναι μηδέν.***

1.29 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

18) *Οἱ διευθύνσεις τῶν δυνάμεων $F_1 = 15$ N καί $F_2 = 10$ N πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο Α σχηματίζουν γωνία $\phi = 60°$. Νά βρεῖτε τή συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$.*

Λύση.

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις: $\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1F_2 \cdot \text{συν}\phi}$ (1)

$$\text{ημ}\alpha = \frac{F_2}{\Sigma} \cdot \text{ημ}\phi \qquad (2)$$

Δίνονται: $F_1 = 15$ N, $F_2 = 10$ N, $\phi = 60°$, ημ$60° = 0{,}86$ καί συν$60° = 1/2$

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί λαμβάνομε:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1\,F_2\,\text{συν}\phi} = \sqrt{15^2 + 10^2 + 2 \times 15 \times 10\ \text{συν}60°}$$

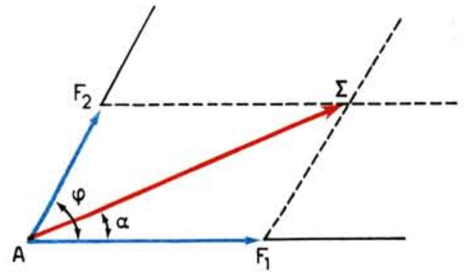
$$\Sigma = \sqrt{15^2 + 10^2 + 2 \times 15 \times 10 \times 0{,}5}, \quad \Sigma = \sqrt{225 + 100 + 150}, \quad \Sigma = \sqrt{475}$$

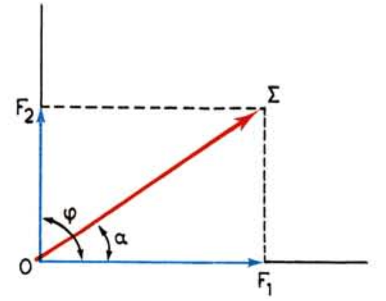
Ὥστε: $\Sigma = 21{,}79$ N

Εὕρεση τῆς διευθύνσεως τῆς $\vec{\Sigma}$.

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (2) καί λαμβάνομε:

$$\text{ημ}\alpha = \frac{F_2}{\Sigma}\,.\,\text{ημ}\phi = \frac{10}{21{,}79}\,.\,\text{ημ}60° = \frac{10}{21{,}79}\,0{,}86 \simeq 0{,}4 \quad \textit{ὥστε} \quad \alpha \simeq 23°\,30'$$





19) *Οἱ διευθύνσεις τῶν δυνάμεων $F_1 = 15$ N καί $F_2 = 10$ N πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο σημεῖο σχηματίζουν γωνία 90°. Νά βρεῖτε τή συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$.*

Λύση.

Ἐφόσον οἱ διευθύνσεις τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ σχηματίζουν γωνία $\phi = 90°$, ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \qquad (1)$$

$$\text{ημ}\alpha = \frac{F_2}{\Sigma}\,\text{ημ}\phi \qquad (2)$$

Δίνονται: $F_1 = 15$ N, $F_2 = 10$ N, $\phi = 90°$ καί ημ$90° = 1$

Εὕρεση τοῦ μέτρου τῆς $\vec{\Sigma}$.

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί βρίσκομε:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{15^2 + 10^2} = \sqrt{225 + 100} = \sqrt{325} \quad \textit{ὥστε} \quad \Sigma \simeq 18 \text{ N}$$

Εὕρεση τῆς διευθύνσεως τῆς $\vec{\Sigma}$.

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (2) καί βρίσκομε:

$$\text{ημ}\alpha = \frac{F_2}{\Sigma}\,.\,\text{ημ}\phi = \frac{10}{18}\,.\,\text{ημ}90 = \frac{10}{18}\,.\,1 = \frac{10}{18} = 0{,}55 \quad \textit{ὥστε} \quad \alpha \simeq 33°\,30'$$

20) *Νά ἀναλυθεῖ μία δύναμη $\Sigma = 10$ N σέ δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού οἱ διευθύνσεις τους νά σχηματίζουν γωνία $\alpha = 30°$ μέ τή διεύθυνση τῆς $\vec{\Sigma}$.*

Λύση.

Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πρέπει νά εἶναι τέτοιες ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$ημα_1 = \frac{F_2}{Σ} . ημφ \tag{1}$$

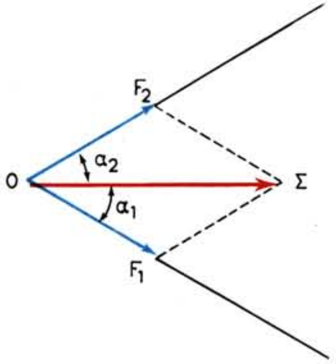
$$ημα_2 = \frac{F_1}{Σ} . ημφ \tag{2}$$

ὅπου: $φ = α_1 + α_2$
Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε:

$$F_2 = \frac{ημα_1 . Σ}{ημφ} \tag{3}$$

$$F_1 = \frac{ημα_2 . Σ}{ημφ} \tag{4}$$

Δίνονται: $α_1 = 30°$, $ημ30° = 0{,}5$, $α_2 = 30°$, $Σ = 10$ N, $φ = α_1 + α_2 = 60°$, $ημ60° = 0{,}86$.
Θέτομε αὐτά πού δίνονται στίς σχέσεις (3) καί (4) καί ἔχομε:



$$F_2 = \frac{ημα_1 . Σ}{ημφ} = \frac{ημ\ 30° . Σ}{60°} = \frac{0{,}5 \times 10}{0{,}86} = 5{,}8 \text{ N} \quad δηλαδή \quad F_2 = 5{,}8 \text{ N}$$

$$F_1 = \frac{ημα_2 . Σ}{ημφ} = \frac{ημ\ 30° . Σ}{ημ60°} = \frac{0{,}5 \times 10}{0{,}86} = 5{,}8 \text{ N} \quad δηλαδή \quad F_1 = 5{,}8 \text{ N}$$

Ὥστε: $F_1 = F_2 = 5{,}8$ N

21) *Νά ἀναλυθεῖ ἡ δύναμη $Σ = 5$ N σέ δύο κάθετες συνιστῶσες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ $\vec{F}_1$ νά ἔχει μέτρο $F_1 = 3$ N.*

Λύση.
Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πρέπει νά εἶναι τέτοιες ὥστε ἡ συνισταμένη τους νά εἶναι ἡ $\vec{Σ}$. Ἑπομένως θά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$Σ^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 . συν90° \tag{1}$$

Ἐπειδή $συν90° = 0$ ἡ σχέση (1) γράφεται: $Σ^2 = F_1^2 + F_2^2$ (2)

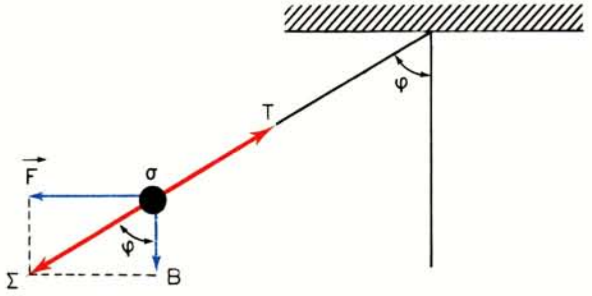
Ἀπό τή σχέση (2) παίρνομε: $F_2^2 = Σ^2 - F_1^2$ καί $F_2 = \sqrt{Σ^2 - F_1^2}$ (3)

Δίνονται: $Σ = 5$ N καί $F_1 = 3$ N
Θέτομε αὐτά πού δίνονται στήν (3) καί ἔχομε:

$$F_2 = \sqrt{Σ^2 - F_1^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ N}$$

Ὥστε: $F_2 = 4$ N

22) Ἡ σφαίρα σ ἔχει βάρος B = 1 N καί ἰσορροπεῖ στή θέση A ὑπό τήν ἐπίδραση καί τῆς ὁριζόντιας δυνάμεως F = 1,732 N. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία φ καί ἡ τάση τοῦ νήματος T.



Λύση.

Στή σφαίρα σ πού ἰσορροπεῖ στή θέση A ἀσκοῦνται οἱ ἑξῆς δυνάμεις:

α) Τό βάρος της B = 1 N

β) Ἡ δύναμη F = 1,732 N καί

γ) Ἡ τάση T τοῦ νήματος

Ἐφόσον ἡ σφαίρα ἰσορροπεῖ, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν $\vec{F}$ καί $\vec{B}$ νά εἶναι ἀντίθετη μέ τήν $\vec{T}$, δηλαδή:

$$\vec{\Sigma} = \vec{F} + \vec{B} = -\vec{T} \tag{1}$$

Τό μέτρο τῆς $\vec{\Sigma}$ εἶναι: $\Sigma = \sqrt{F^2 + B^2 + 2F \cdot B\ \text{συν}90^\circ}$ (2)

Ἐπειδή συν90° = 0, ἡ σχέση (2) δίνει: $\Sigma = \sqrt{F^2 + B^2}$ (3)

Δίνονται: F = 1,732 N καί B = 1 N

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση καί βρίσκομε: $\Sigma = \sqrt{F^2 + B^2} = \sqrt{(1{,}732)^2 + 1^2} = 1{,}999$ N

Σύμφωνα μέ τή σχέση (2) ***τό μέτρο τῆς τάσεως (T) τοῦ νήματος εἶναι:*** T = Σ = 1,999 N

Ἡ γωνία φ τῆς ἐκτροπῆς εἶναι: $\text{εφφ} = \dfrac{F}{B} = \dfrac{1{,}732}{1} = 1{,}732$ καί $\varphi = 60^\circ$

Γ. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1.30 Πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα ἤ ἀξίωμα τῆς ἀδράνειας.

Τό πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα ὁρίζει τά ἑξῆς:

Ἕνα σῶμα θά ἠρεμεῖ ἤ θά κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλή, ἄν δέν ἐπιδράσει ἐπάνω του καμιά ἐξωτερική δύναμη*.

---

* Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως συνάγεται ὅτι, ἄν ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα δέν ἐπιδρᾶ καμιά ἐξωτερική δύναμη, τό σῶμα δέν ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση, δηλαδή θά κινεῖται συνεχῶς μέ τήν ἴδια ταχύτητα (υ = σταθερό ἤ υ = 0), δηλαδή ἰσχύει τό πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα.

Ἀπό τό πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα προκύπτει καί τό ἑξῆς:

Ἄν ἕνα σῶμα ἔχει ἐπιτάχυνση, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἐπιδρᾶ ἐπάνω του κάποια δύναμη, καί ξαφνικά ἡ δύναμη αὐτή σταματήσει νά ἐνεργεῖ, τό σῶμα θά ἐξακολουθήσει νά κινεῖται ***μέ κίνηση εὐθύγραμμη ὁμαλή καί μέ τήν ταχύτητα πού εἶχε τή στιγμή πού ἔπαυσε ἡ δύναμη νά ἐνεργεῖ ἐπάνω του.*** (Αὐτό βεβαίως ἰσχύει ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι δέν θά ἐπιδράσουν ἐπάνω του ἄλλες δυνάμεις γιά νά τοῦ ἀλλοιώσουν τήν κίνηση).

Πραγματικά γνωρίζομε ἀπό τήν πείρα ὅτι, ἄν ἕνα σῶμα ἠρεμεῖ (δηλαδή ἔχει ταχύτητα μηδέν) καί δέν ἐπιδράσει ἐπάνω του καμιά δύναμη, τότε τό σῶμα συνεχῶς ἠρεμεῖ.

Ἄν ἐκσφενδονίσομε μιά σφαίρα ἐπάνω σέ ὁριζόντιο ἔδαφος, αὐτή, ἀφοῦ διανύσει ἕνα ὁρισμένο διάστημα, θά σταματήσει. Φαίνεται τότε ὅτι ἡ σφαίρα σταμάτησε μόνη της, ἀλλά αὐτό δέν εἶναι σωστό. Τό σωστό εἶναι ὅτι ἡ σφαίρα ἀναγκάστηκε νά σταματήσει ἀπό τή δύναμη τῆς τριβῆς πού ἀσκοῦσε ἐπάνω της τό ἔδαφος, καθώς καί ἀπό τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα.

Ἄν τή σφαίρα τήν ἐκσφενδονίσομε μέ τήν ἴδια δύναμη ἐπάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο πιό λεῖο, θά διαπιστώσομε ὅτι διανύει μεγαλύτερο διάστημα. Αὐτό συμβαίνει, γιατί ἡ ἀντίσταση τῆς τριβῆς εἶναι μικρότερη, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἄν κατορθώναμε νά μηδενίσομε τίς τριβές καί τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ἡ σφαίρα θά κινιόταν συνεχῶς μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλή, καί μέ ταχύτητα τήν ἴδια μέ ἐκείνη πού τῆς δώσαμε κατά τήν ἐκσφενδόνιση.

1.31 Δεύτερο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα ἤ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς.

Τό δεύτερο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα ὁρίζει τά ἑξῆς:

Ὅταν ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα ἀσκηθεῖ μία δύναμη, τότε τό σῶμα ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη πού τήν προκαλεῖ*.

Ἄν ἐπάνω στό σῶμα Α ἐπιδράσει μιά δύναμη 5p, τότε τό σῶμα θά ἀποκτήσει ἐπιτάχυνση ἡ ὁποία θά εἶναι, ἔστω, $2 \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$. Ἄν ἐπάνω στό ἴδιο σῶμα Α ἐπιδράσουν διαδοχικά οἱ δυνάμεις 10p, 15p, 20p, τότε τό σῶμα αὐτό θά ἀποκτήσει ἐπιτάχυνση $4 \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$, $6 \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$, $8 \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$ ἀντιστοίχως.

Ἄν τή δύναμη πού ἀσκεῖται ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα τή συμβολίσομε μέ $\vec{F}$ καί τήν ἐπιτάχυνση πού προκαλεῖ ἡ δύναμη αὐτή τή συμβολίσομε μέ $\vec{\gamma}$, τότε τό θεμελιώδη νόμο τῆς Μηχανικῆς μποροῦμε νά τόν ἐκφράσομε μέ τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}} \quad \textit{(θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς Μηχανικῆς)}^{**} \qquad (1)$$

ὅπου: m εἶναι συντελεστής ἀναλογίας, θετικός καί ὀνομάζεται μάζα τοῦ σώματος (μονόμετρο μέγεθος).

1.32 Συμπεράσματα πού προκύπτουν ἀπό τήν ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ *(διερεύνησή της)*.

Ὅταν ἕνα σῶμα ἔχει ἐπιτάχυνση, τότε ὁπωσδήποτε ἐπάνω στό σῶμα αὐτό ἐνεργεῖ μία δύναμη.

Ἔχομε τή σχέση: $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$

---

* Ὁ νόμος αὐτός ὀνομάζεται θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς, γιατί ἀπό αὐτόν ἐξάγονται ὅλοι οἱ ἄλλοι νόμοι της.

** α) Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση συνδέει τό αἴτιο (τή δύναμη) μέ τό ἀποτέλεσμα (τήν ἐπιτάχυνση).

β) Ὅταν ἐπάνω στό σῶμα ἐπιδροῦν πολλές δυνάμεις, τότε ἡ F τῆς ἐξισώσεως (1) παριστάνει τή συνισταμένη τους καί ἡ γ παριστάνει τή συνισταμένη τῶν ἐπιταχύνσεων πού προσδίδει στό σῶμα ἡ καθεμιά ἀπό αὐτές, δηλαδή παριστάνει τήν ὁλική ἐπιτάχυνση.

Ἄν ἡ $\vec{\gamma}$ εἶναι διαφορετική ἀπό τό μηδέν ($\vec{\gamma} \neq 0$), τότε καί ἡ $\vec{F}$ εἶναι διαφορετική ἀπό τό μηδέν, δεδομένου ὅτι ἡ m εἶναι διαφορετική ἀπό τό μηδέν.

Ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τήν ὁποία ἀποκτᾶ ἕνα σῶμα ὅταν ἐνεργεῖ ἐπάνω του μία δύναμη $\vec{F}$, ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά μέ τή δύναμη αὐτή.

Αὐτό ἰσχύει ἐπειδή στή σχέση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ τό m εἶναι θετικό καί μονόμετρο μέγεθος.

Ἄν ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα ἐνεργεῖ μιά δύναμη πού διατηρεῖται συνεχῶς σταθερή κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο, τότε τό σῶμα αὐτό ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση πού θά εἶναι συνεχῶς σταθερή κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο.

Ἔχομε: $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$

Ἄν ἡ $\vec{F}$ εἶναι σταθερή, τότε ἔχομε: σταθερή $= m \cdot \vec{\gamma}$

Καί ἐπειδή ἡ m εἶναι σταθερή, ἔχομε:

σταθ. = σταθ. $\vec{\gamma}$ καί ἄρα $\vec{\gamma}$ = σταθερή.

Παρατήρηση:

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι: Ἄν ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα ἐνεργεῖ μία δύναμη πού ἔχει συνεχῶς τήν ἴδια διεύθυνση, φορά καί μέτρο, ***τότε τό σῶμα αὐτό θά ἐκτελεῖ συνεχῶς εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση.***

Ἄν ἕνα σῶμα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση πού διατηρεῖται συνεχῶς σταθερή κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο, τότε ἐπάνω στό σῶμα αὐτό ἐνεργεῖ κάποια δύναμη πού διατηρεῖται συνεχῶς σταθερή κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο.

Ἔχομε: $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$

Ἄν $\vec{\gamma}$ = σταθερή, τότε: $\vec{F} = m$. σταθερή

Καί ἐπειδή ἡ m εἶναι σταθερή, ἔχομε:

$\vec{F}$ = (σταθ.) × (σταθ.) καί ἄρα $\vec{F}$ = σταθερή.

Ἄν ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα εἶναι μηδέν, τότε καί ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ σώματος εἶναι μηδέν.

Ἔχομε τή σχέση: $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$

Ἄν $\vec{F} = 0$ τότε $0 = m \cdot \vec{\gamma}$

Καί ἐπειδή τό $m \neq 0$ ἔχομε: $\vec{\gamma} = 0$ (1)

Παρατήρηση:

Τό συμπέρασμα αὐτό εἶναι στήν οὐσία τό πρῶτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα.

Ἡ ἐπιτάχυνση (γ), πού ἀποκτᾶ ἕνα σῶμα ἐξαιτίας τῆς ἐπιδράσεως μιᾶς δυνάμεως (F), εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη αὐτή (σχέση δυνάμεως πρός τήν ἐπιτάχυνση).

Πραγματικά:

Ἄν ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα m ἐπιδράσουν διαδοχικά δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, τότε τό σῶμα ἀποκτᾶ ἐπιταχύνσεις $\vec{\gamma}_1$ καί $\vec{\gamma}_2$ ἀντιστοίχως, τέτοιες ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$F_1 = m \cdot \gamma_1 \quad (1)$$

$$F_2 = m \cdot \gamma_2 \quad (2)$$

'Από τίς (1) καί (2) προκύπτει:

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \qquad (3)$$

Παρατήρηση:

Τό συμπέρασμα αὐτό εἶναι στήν οὐσία τό δεύτερο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα.

Πραγματικά:

Οἱ ἐπιταχύνσεις (γ) πού ἀποκτοῦν τά διάφορα σώματα ὅταν ἐπιδράσει ἐπάνω τους μιά δύναμη (F), εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρός τή μάζα τοῦ σώματος.

Ἄν μία δύναμη $\vec{F}$ ἐπιδράσει διαδοχικά ἐπάνω σέ δύο σώματα πού ἔχουν μάζες m_1 καί m_2, τότε τά σώματα αὐτά ἀποκτοῦν ἐπιταχύνσεις γ_1 καί γ_2, ἀντίστοιχα, τέτοιες, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$F = m_1\gamma_1 \qquad (1)$$

$$F = m_2\gamma_2 \qquad (2)$$

'Από τίς (1) καί (2) ἔχομε: $m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2$, καί

$$\boxed{\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m_2}{m_1}} \qquad (3)$$

Ἄν ἡ δύναμη πού ἐνεργεῖ ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα μέ μάζα m εἶναι ἡ ἕλξη τῆς γῆς, δηλαδή τό βάρος B τοῦ σώματος, τότε τό σῶμα πέφτοντας ἐλεύθερα ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση ***g***, ὁπότε ***ἔχομε τή σχέση:***

$$\boxed{\vec{B} = m \cdot \vec{g}}$$

1.33 Μάζα - δυναμικός ὁρισμός της - μέτρησή της.

Ὅταν λέμε μάζα ἑνός σώματος ἐννοοῦμε τήν ποσότητα τῆς ὕλης του. Λέγοντας π.χ. ὅτι τό σῶμα Σ ἔχει μάζα 2 kg ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ποσότητα τῆς ὕλης τοῦ σώματος Σ εἶναι 2 kg.

Ἡ μάζα τοῦ σώματος δέν μεταβάλλεται· παραμένει ἡ ἴδια σέ ὁποιοδήποτε τόπο ἤ ὕψος καί ἄν μεταφερθεῖ τό σῶμα.

Ἄν σέ ἕνα σῶμα Σ ἐπιδράσουν διαδοχικά οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4 \dots \vec{F}_\nu$, τό σῶμα Σ θά ἀποκτήσει ἀντίστοιχα τίς ἐπιταχύνσεις $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$, $\vec{\gamma}_3$, $\vec{\gamma}_4 \dots \vec{\gamma}_\nu$, οἱ ὁποῖες εἶναι τέτοιες, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{\gamma}_1} = \frac{\vec{F}_2}{\vec{\gamma}_2} = \frac{\vec{F}_3}{\vec{\gamma}_3} = \frac{\vec{F}_4}{\vec{\gamma}_4} \dots = \frac{\vec{F}_\nu}{\vec{\gamma}_\nu} = \text{σταθερό}$$

$$\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \frac{F_3}{\gamma_3} = \frac{F_4}{\gamma_4} \dots = \frac{F_\nu}{\gamma_\nu} = \text{σταθερό}$$

Δηλαδή: τό πηλίκο τῆς δυνάμεως πού ἐπιδρᾶ σέ ἕνα σῶμα, διά τῆς ἐπιταχύνσεως πού ἡ δύναμη αὐτή τοῦ προσδίδει, εἶναι σταθερό.

Δυναμικός ὁρισμός μάζας. Τό σταθερό πηλίκο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ πού ἐνεργεῖ ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα διά τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$ τήν ὁποία τοῦ προσδίδει τό ὀνομάζομε μάζα τοῦ σώματος καί τό συμβολίζομε μέ m:

$$\boxed{m = \frac{\vec{F}}{\vec{\gamma}}} \qquad \text{καί}$$

$$m = \frac{F}{\gamma}$$

Ἡ μάζα ἑνός σώματος, ὡς πηλίκο δύο ἀνυσματικῶν μεγεθῶν πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά, ***εἶναι μονόμετρο μέγεθος καί τό μέτρο της εἶναι θετικό.***

Τή μάζα ἑνός σώματος τή μετρᾶμε μέ τό ζυγό.

Ἔστω ὅτι θέλομε νά βροῦμε τή μάζα m_1 ἑνός σώματος Σ_1 πού ἔχει βάρος B_1 (τό ὁποῖο δέν ξέρομε). Ἄν γνωρίζομε τή μάζα m_2 καί τό βάρος B_2 ἑνός ἄλλου σώματος Σ_2 βρίσκομε, μέ τό ζυγό, τό λόγο τῶν B_1 καί B_2, ὁ ὁποῖος ἔστω ὅτι εἶναι 5:

$$\frac{B_1}{B_2} = 5 \tag{1}$$

Ξέρομε τίς σχέσεις: $B_1 = m_1 g \qquad B_2 = m_2 g$ (2)

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε τή σχέση: $\frac{B_1}{B_2} = \frac{m_1}{m_2}$ (3)

Ἀπό τή σχέση (3) παίρνομε τή σχέση:

$$\boxed{m_1 = \frac{B_1}{B_2} \cdot m_2} \tag{4}$$

Ἀντικαθιστοῦμε στή σχέση (4) τό λόγο B_1/B_2 μέ τό ἴσο του, πού βρήκαμε μέ τό ζυγό, καί βρίσκομε:

$$m_1 = \frac{B_1}{B_2} m_2 = 5\, m_2 \quad \text{δηλαδή} \quad m_1 = 5\, m_2$$

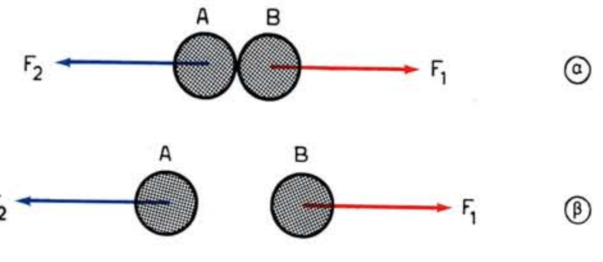
1.34 Τρίτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα ἤ ἀξίωμα δράσεως καί ἀντιδράσεως.

Τό τρίτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα ὁρίζει ὅτι:

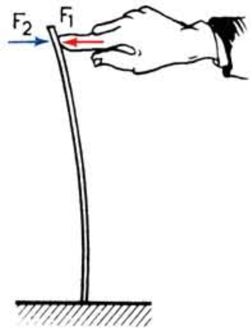
Ἄν ἕνα σῶμα Α ἀσκεῖ μιά δύναμη $\vec{F}_1$ ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα Β, τότε καί τό σῶμα Β ἀσκεῖ ταυτόχρονα στό Α μιά ἄλλη δύναμη $\vec{F}_2$. Οἱ δύο αὐτές δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τό ἴδιο μέτρο ἀλλά ἀντίθετες φορές (σχ. 1.34α).

Τά δύο σώματα Α καί Β μπορεῖ νά βρίσκονται σέ ἐπαφή [σχ. 1.34α(α)], ὁπότε οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι δυνάμεις ἐπαφῆς. Μπορεῖ ὅμως καί νά μή βρίσκονται σέ ἐπαφή [σχ. 1.34α(β)], ὁπότε οἱ δυνάμεις εἶναι δυνάμεις ἀποστάσεως.

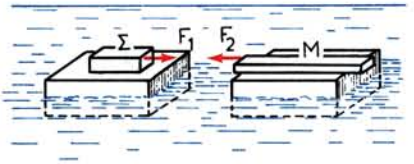
Ἄν μέ τό δάκτυλό μας ἀσκήσομε μιά δύναμη $\vec{F}_1$ ἐπάνω σέ ἕνα ἔλασμα (1.34β) τότε καί τό ἔλασμα ἀσκεῖ ἐπάνω στό δάκτυλό μας μιά δύναμη $\vec{F}_2$. Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$



Σχ. 1.34α.



Σχ. 1.34β.



Σχ. 1.34γ.

καί $\vec{F}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τό ἴδιο μέτρο, ἀλλά οἱ φορές τους εἶναι ἀντίθετες. Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι δυνάμεις ἐπαφῆς.

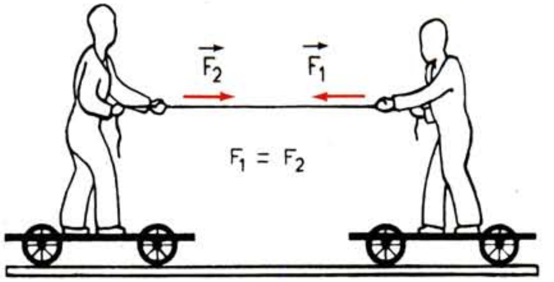
Ἐπάνω σέ πλωτῆρες στηρίζονται ὁ μαγνήτης Μ καί τό σιδερένιο σῶμα Σ (σχ. 1.34γ). Ὁ μαγνήτης Μ ἕλκει τό σῶμα Σ μέ δύναμη $\vec{F}_1$ καί τό σῶμα Σ ἕλκει τό μαγνήτη Μ μέ δύναμη $\vec{F}_2$. Οἱ δυό δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τό ἴδιο μέτρο, ἀλλά οἱ φορές τους εἶναι ἀντίθετες.

Ἡ δύναμη $\vec{F}_1$, πού ἀσκεῖται ἀπό τό μαγνήτη Μ στό σῶμα Σ, κάνει τό σῶμα Σ (μαζί μέ τόν πλωτήρα του) νά κινεῖται πρός τά δεξιά. Ταυτοχρόνως ὅμως κινεῖται πρός τά ἀριστερά ὁ μαγνήτης Μ (μαζί μέ τόν πλωτήρα του), ἐξαιτίας τῆς δυνάμεως $\vec{F}_2$ τήν ὁποία ἀσκεῖ ἐπάνω του τό σῶμα Σ.

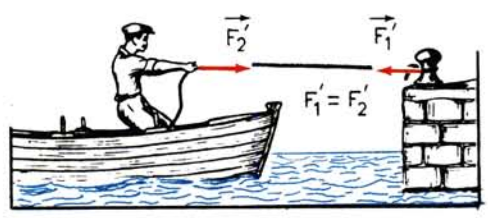
Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ στό παράδειγμα τοῦ σχήματος 1.34γ εἶναι δυνάμεις ἐξ ἀποστάσεως.

Παρατηρήσεις:

1) ***Οἱ δυνάμεις στή φύση ἐμφανίζονται κατά ζεύγη.***
2) Τή δύναμη F_1, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό σῶμα Α ἐπάνω στό σῶμα Β τήν ὀνομάζομε δράση, καί τή δύναμη $\vec{F}_2$, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό σῶμα Β ἐπάνω στό σῶμα Α, τήν ὀνομάζομε ἀντίδραση. Γι' αὐτό, τό τρίτο ἀξίωμα τοῦ Νεύτωνα τό ὀνομάζομε καί ***ἀξίωμα τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως.***
3) Δέν πρέπει νά μᾶς διαφεύγει ὅτι ἡ δράση $\vec{F}_1$ καί ἡ ἀντίδραση $\vec{F}_2$ ***ἀσκοῦνται ἐπάνω σέ δύο διαφορετικά σώματα*** (ἡ $\vec{F}_1$ στό Β ἀπό τό Α, καί ἡ $\vec{F}_2$ στό Α ἀπό τό Β).



Σχ. 1.34δ.



Σχ. 1.34ε.

1.35 Ἀδράνεια.

Γιά νά ἀλλάξει ἡ κινητική κατάσταση ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἤ σώματος, πρέπει νά ἐπιδράσει ἐπάνω του μία δύναμη ἤ μία ροπή.

Αὐτό σημαίνει ὅτι κάθε ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα προβάλλει ἀντίσταση σέ κάθε ἀλλαγή τῆς κινητικῆς του καταστάσεως (τῆς ταχύτητάς του).

Ὅταν λέμε ἀδράνεια ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἤ σώματος, ἐννοοῦμε τήν ἰδιότητα πού ἔχει τό σῶμα νά ἀντιδρᾶ (νά ἀντιστέκεται) σέ κάθε ἀλλαγή τῆς κινητικῆς καταστασεώς του.

Ἡ ἀδράνεια ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἤ σώματος, δηλαδή ἡ ἀντίσταση πού προβάλλει τό ὑλικό σημεῖο ἤ σῶμα σέ κάθε ἀλλαγή τῆς κινητικῆς του καταστάσεως, εἶναι τόσο μεγαλύτερη ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ ποσότητα τῆς ὕλης τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἤ σώματος, δηλαδή ἡ μάζα του. Ἔτσι πιό εὔκολα μετακινοῦμε ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα 5 kg παρά ἕνα ἄλλο πού ἔχει μάζα 20 kg.

Ἑπομένως συμπεραίνομε ὅτι ἡ μάζα ἑνός ὑλικοῦ σημείου καί ἡ μάζα ἑνός σώματος ἀποτελοῦν μέτρο τῆς ἀδράνειάς τους ἀντιστοίχως.

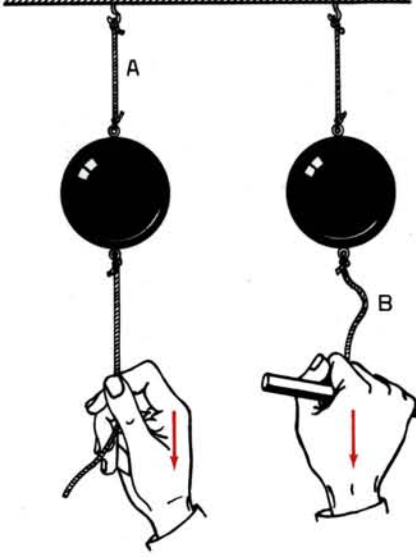
Ἡ ἀδράνεια τῶν σωμάτων, εἶναι τόσο μεγαλύτερη ὅσο πιό γρήγορα ἐπιχειροῦμε νά τούς ἀλλάξομε τήν κινητική κατάστασή τους. Ἔτσι μετακινοῦμε εὐκολότερα (δηλαδή μέ μικρότερη προσπάθεια) ἕνα σῶμα, ἄν τό σπρώξομε ἀργά παρά ἄν τό σπρώξομε ἀπότομα.

Ἄν τραβήξομε τή σφαίρα ἀργά (σχ. 1.35α) τότε θά σπάσει τό ἐπάνω σχοινί (Α). Αὐτό συμβαίνει ἐξαιτίας τῆς ἀργῆς μεταβολῆς τῆς κινητικῆς καταστάσεως τῆς σφαίρας, πού ἐπιδιώκομε μέ τό ἀργό τράβηγμα· ἔτσι ἡ ἀντίσταση πού προβάλλει ἡ σφαίρα εἶναι μικρή καί τό σχοινί (Α) σπάει ἀπό τό βάρος τῆς σφαίρας καί ἀπό τή δύναμη μέ τήν ὁποία τραβᾶμε τή σφαίρα.

Ἄν τραβήξομε τή σφαίρα ἀπότομα, τότε θά σπάσει τό κάτω σχοινί (Β). Αὐτό συμβαίνει ἐξαιτίας τῆς ἀπότομης μεταβολῆς τῆς κινητικῆς καταστάσεως τῆς σφαίρας, πού ἐπιδιώκομε μέ τό ἀπότομο τράβηγμα· ἔτσι ἡ σφαίρα προβάλλει μεγάλη ἀντίσταση (ἀδράνεια) καί τό σχοινί (Β) σπάζει.

Ἄν τραβήξομε ἀργά καί μέ λεπτό σχοινί μιά σφαίρα ἡ ὁποία βρίσκεται στό ἔδαφος εἶναι δυνατό νά τήν ἀνυψώσομε. Ἄν ὅμως τήν τραβήξομε ἀπότομα, τό σχοινί θά σπάσει, γιατί ἡ ἀντίσταση πού προβάλλει ἡ σφαίρα στήν περίπτωση αὐτή εἶναι πολύ μεγαλύτερη ἀπό ἐκείνη πού πρόβαλλε στήν πρώτη περίπτωση (μέ τό ἀργό τράβηγμα).

Γιά τόν ἴδιο λόγο οἱ ἐπιβάτες ἑνός ὀχήματος πέφτουν τόσο πιό γρήγορα πρός τά ἐμπρός ὅσο πιό ἀπότομα σταματήσει τό ὄχημα.



Σχ. 1.35α.

Σχ. 1.35β.

Μποροῦμε νά στερεώσομε μιά λίμα στήν ξυλολαβή της ὡς ἑξῆς (σχ. 1.35β).

α) Τοποθετοῦμε τή λίμα στήν ξυλολαβή της.

β) Σηκώνομε τό σύστημα ***ξυλολαβή-λίμα*** ἐπάνω ἀπό τό δάπεδο.

γ) Κινοῦμε τό σύστημα ***ξυλολαβή-λίμα*** ἀπότομα πρός τά κάτω, ὥστε νά χτυπήσει ἡ ξυλολαβή στό δάπεδο καί νά σταματήσει ἀπότομα.

Τότε παρατηροῦμε ὅτι, ἐνῶ ἡ ξυλολαβή σταμάτησε, ἡ λίμα εἰσχώρησε μέσα στό ξύλο. Αὐτό ἔγινε ἐξαιτίας τῆς ἀδράνειας τῆς λίμας (***ἤθελε*** ἡ λίμα νά συνεχίσει τήν κίνησή της).

Μέ ὅσο μεγαλύτερη ταχύτητα χτυπήσομε τήν ***ξυλολαβή-λίμα*** στό δάπεδο τόσο πιό βαθιά θά εἰσχωρήσει ἡ λίμα στήν ξυλολαβή. Γιατί ἡ *ἀδράνεια* τῆς λίμας ***εἶναι τόσο μεγαλύτερη ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ μεταβολή τῆς ταχύτητάς της.***

1.36 Μονάδες δυνάμεως.

Διεθνές Σύστημα (S.I.)

Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς εἶναι: $F = m \cdot \gamma$

Μονάδα μετρήσεως τῆς μάζας στό S.I. εἶναι τό 1 kg καί τῆς ἐπιταχύνσεως τό 1 m/s^2. Ἄρα ἡ μονάδα μετρήσεως τῆς δυνάμεως στό S.I. εἶναι:

$$F = m \cdot \gamma = 1\ kg \cdot 1 \frac{m}{s^2} = \frac{1\ kg \cdot m}{s^2}$$

$$F = 1\ kg \frac{m}{s^2} = 1\ N \qquad (1)$$

Ἡ μονάδα αὐτή λέγεται ***Νιοῦτον*** καί συμβολίζεται μέ 1 N. Ἑπομένως, ὅταν λέμε δύναμη 1 Νιοῦτον (1N) ἐννοοῦμε ***τή δύναμη ἐκείνη ἡ ὁποία, ὅταν ἐπιδράσει σέ ἕνα σῶμα μάζας 1 kg, τοῦ δίνει ἐπιτάχυνση ἴση μέ 1m/s²***.

Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.).

Στό τεχνικό σύστημα ἡ μονάδα δυνάμεως εἶναι θεμελιώδης καί εἶναι τό 1 kp.

Ὅταν λέμε δύναμη ἑνός κιλοπόντ (1 kp - kilopond), ***ἐννοοῦμε τή δύναμη ἐκείνη μέ τήν ὁποία ἡ γῆ τραβάει ἕνα σῶμα μέ μάζα 1 kg, σέ τόπο πού ἔχει γεωγραφικό πλάτος 45° καί εἶναι κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας.***

Ὑποπολλαπλάσιο τοῦ 1 kp εἶναι τό πόντ (1p): $1 = 10^{-3}$ kp (2)

Σύστημα C.G.S.

Μονάδα μετρήσεως τῆς μάζας στό σύστημα C.G.S. εἶναι τό 1g καί τῆς ἐπιταχύνσεως τό 1 cm/s². Ἄρα μονάδα δυνάμεως στό C.G.S. εἶναι:

$$F = m \cdot \gamma = 1\ g \cdot \frac{cm}{s^2} = 1\ g \frac{cm}{s^2}$$

$$F = 1 \frac{g \cdot cm}{s^2} = 1\ dyn \qquad (3)$$

Ἡ μονάδα αὐτή λέγεται ***δύνη*** καί συμβολίζεται μέ 1 dyn. Ἑπομένως ὅταν λέμε δύναμη μιᾶς δύνης (1 dyn), ἐννοοῦμε ***τή δύναμη ἐκείνη ἡ ὁποία, ὅταν ἐπιδράσει σέ ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα 1g, τοῦ δίνει ἐπιτάχυνση ἴση μέ 1 cm/s².***

Σχέσεις μεταξύ τῶν μονάδων δυνάμεως.

α) $$1N = \frac{1\ kg\ 1m}{1\ s^2} = \frac{10^3\ g \cdot 10^2\ cm}{1\ s^2} = \frac{10^5 g\ cm}{s^2} = 10^5\ dyn$$

$$1\ N = 10^5\ dyn$$

β) Ἔχομε τή σχέση: $B = m \cdot g$ ἄρα:

$$1\ kp = 1\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 9{,}81 \frac{kgm}{s^2} = 9{,}81\ N$$

$$1\ kp = 9{,}81\ N$$

γ) $1\ kp = 9{,}81\ N = 9{,}81 \cdot 10^5\ dyn$

$$1\ kp = 9{,}81 \cdot 10^5\ dyn$$

δ) $1\ p = 10^{-3}\ kp = 10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 10^5\ dyn = 9{,}81 \cdot 10^2\ dyn = 981\ dyn$

$$1\ p = 981\ dyn$$

1.37 Μονάδες μάζας.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Στό σύστημα αὐτό ἡ μονάδα μάζας εἶναι θεμελιώδης μονάδα καί εἶναι τό 1 kg. Ὅταν λέμε μάζα ἑνός χιλιογράμμου (1 k - 1 kilogram), ***ἐννοοῦμε τή μάζα τοῦ πρότυπου χιλιογράμμου.***

Τεχνικό Σύστημα (Τ.Σ.).

Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς εἶναι: $F = m \cdot \gamma$ (1)

Ἀπό τή σχέση (1) παίρνομε: $m = \dfrac{F}{\gamma}$ (2)

Μονάδα δυνάμεως στό Τ.Σ. εἶναι τό 1 kp καί τῆς ἐπιταχύνσεως τό 1 m/s^2. Ἄρα μονάδα μάζας στό Τ.Σ. εἶναι:

$$m = \frac{1\ kp}{\dfrac{1\ m}{s^2}} = 1\ \text{Τ.Μ μάζας} \qquad (3)$$

Ὅταν λέμε μάζα ἴση μέ μιά τεχνική μονάδα μάζας (1 Τ.Μ. μάζας), ***ἐννοοῦμε τή μάζα ἐκείνη, ἐπάνω στήν ὁποία, ἄν ἐπιδράσει δύναμη 1 kp, θά τῆς δώσει ἐπιτάχυνση ἴση μέ 1 m/S^2.***

Σύστημα C.G.S.

Στό σύστημα C.G.S. ἡ μονάδα μάζας εἶναι θεμελιώδης μονάδα καί εἶναι τό 1g. Τό 1g εἶναι ὑποπολλαπλάσιο τοῦ 1 kg.

$$1g = 10^{-3}\ kg$$

Σχέση μονάδων μάζας.

Γιά κάθε σῶμα ἰσχύει ἡ σχέση: $B = m \cdot g$ (1)

Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ἡ σχέση: $m = \dfrac{B}{g}$ (2)

Ἄν τό βάρος τοῦ σώματος εἶναι B = 1 kp καί ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $g = 9{,}81\ m/sec^2$, τότε ἡ μάζα m αὐτοῦ τοῦ σώματος θά εἶναι:

$$m = \frac{B}{g} = \frac{1kp}{9{,}81\ m/sec^2} = \frac{1}{9{,}81}\ \frac{1kp}{m/sec^2} \qquad (3)$$

Μιά τεχνική μονάδα μάζας εἶναι: $1\ TMM = \dfrac{1kp}{m/sec^2}$ (4)

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) ἔχομε: $m = \dfrac{1}{9{,}81}\ TMM$ (5)

Ἡ σχέση (5) δίνει τή μάζα m τοῦ σώματος, πού ἔχει βάρος 1 kp.
Ἡ μάζα ὅμως πού ἔχει βάρος 1 kp εἶναι ἕνα χιλιόγραμμο (1 kg).
Ἄρα ἀπό τήν (5) ἔχομε:

$$1\ kg = \frac{1}{9{,}81}\ TMM \qquad (6)$$

Ἀπό τήν (6) προκύπτει ἡ σχέση:

$$1\ \text{TMM} = 9{,}81\ \text{kg} \qquad (7)$$

1.38 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

23) *Ἕνα κινητό, τοῦ ὁποίου ἡ μάζα εἶναι $m = 200\ g$, ὠθεῖται ἀπό δύναμη $\vec{F}$ πού τοῦ προσδίδει ἐπιτάχυνση $\gamma = 3 m/sec^2$. Πόση εἶναι αὐτή ἡ δύναμη;*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $F = m \cdot \gamma$ (1)

Δίνονται: $m = 200 g = 200 \cdot 10^{-3}\ kg = 0{,}2\ kg$ καί $\gamma = 3 \dfrac{m}{sec^2}$

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$F = m \cdot \gamma = 0{,}2 \times 3 = 0{,}6\ N$ ***ὥστε*** $F = 0{,}6\ N$

Στό σύστημα C.G.S.

Δίνονται: $m = 200\ g$ καί $\gamma = 3 \dfrac{m}{sec^2} = 3 \times 100 \dfrac{cm}{sec^2} = 300 \dfrac{cm}{sec^2}$

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$F = m \cdot \gamma = 200 \times 300 = 60000\ dyn$ ***ὥστε*** $F = 60000\ dyn$

24) *Ὅταν σέ ἕνα κινητό ἐξασκεῖται δύναμη $F = 50000\ dyn$, τότε ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση $\gamma = 0{,}5\ m/sec^2$. Πόση εἶναι ἡ μάζα m τοῦ κινητοῦ αὐτοῦ;*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $m = \dfrac{F}{\gamma}$ (1)

Δίνονται: $F = 50000\ dyn = 50000 \times 10^{-5}\ N = 0{,}5 N$ καί $\gamma = 0{,}5 \dfrac{m}{sec^2}$

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$m = \dfrac{F}{\gamma} = \dfrac{0{,}5}{0{,}5} = 1\ kg$ ***ὥστε*** $m = 1\ kg$

25) *Μιά δύναμη $\vec{F}$ ἀσκεῖται ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα ἐπί χρόνο $t = 5\ sec$ καί τό σῶμα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 0{,}6\ \underline{m}/sec^2$. Ἄν ἡ μάζα τοῦ σώματος εἶναι $\underline{m} = 3\ g$ νά βρεθοῦν:*

α) ἡ δύναμη $\vec{F}$ πού δίνει στό σῶμα τήν ἐπιτάχυνση γ καί

β) τό διάστημα πού θά διατρέξει τό σῶμα μέσα σέ 3 sec ἀπό τή στιγμή πού θά σταματήσει νά ἐνεργεῖ ἡ δύναμη.

Λύση.

Εὕρεση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.

Ἰσχύει ἡ σχέση: $F = m \cdot \gamma$ (1)

Δίνονται: $m = 3\ g = 0{,}003\ kg$ καί $\gamma = 0{,}6 \dfrac{m}{sec^2}$

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί βρίσκομε:

$F = m \cdot \gamma = 0{,}003 \times 0{,}6 = 0{,}0018\ N$ δηλαδή $F = 180\ dyn$

Εὕρεση τοῦ διαστήματος.

Τό διάστημα πού θά διατρέξει τό σῶμα μέσα σέ χρόνο $t_1 = 3$ sec ἀπό τή στιγμή πού θά σταματήσει νά ἐξασκεῖται ἡ δύναμη θά τό τρέξει μέ κίνηση εὐθύγραμμη ὁμαλή καί μέ ταχύτητα ἐκείνη πού εἶχε τή στιγμή πού σταμάτησε νά ἐνεργεῖ ἐπάνω του ἡ δύναμη.

Γιά τήν κίνηση αὐτή ἰσχύει ἡ σχέση: $S = \upsilon \, . \, t_1$ (2)

ὅπου: υ ἡ ταχύτητα πού εἶχε τό σῶμα στό τέλος τοῦ πέμπτου δευτερολέπτου τῆς προηγούμενης εὐθύγραμμης καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενης κινήσεως (ἡ δύναμη σταμάτησε νά ἐνεργεῖ στό τέλος τοῦ πέμπτου δευτερολέπτου).

Ἡ υ δίνεται ἀπό τή σχέση: $\upsilon = \gamma \, . \, t$ (3)

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) ἔχομε: $S = \gamma \, . \, t \, . \, t_1$ (4)

Δίνονται: $\gamma = 0{,}6 \dfrac{m}{sec^2}$, $t = 5$ sec καί $t_1 = 3$ sec

Θέτομε στήν (4) αὐτά πού δίνονται καί ἔχομε:

$$S = \gamma \, . \, t \, . \, t_1 = 0{,}6 \times 5 \times 3 + 9 \text{ m} \quad \textit{ὥστε} \quad S = 9 \text{ m}$$

1.39 Κεντρομόλος δύναμη.

Γενικά.

Ξέρομε ὅτι, ἄν ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m ἔχει μία ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τότε ὁπωσδήποτε ἐνεργεῖ ἐπάνω του μία δύναμη $\vec{F}$, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνση καί ἡ φορά συμπίπτουν μέ τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$. Τό μέτρο τῆς δυνάμεως ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$ ἐπί τή μάζα m τοῦ ὑλικοῦ σημείου:

$$\vec{F} = m \, . \, \vec{\gamma} \qquad \text{καί} \qquad F = \mu \, . \, \gamma$$

Ἐπίσης ξέρομε ὅτι ὅταν ὑλικό σημεῖο μάζας m ἐκτελεῖ κίνηση ὁμαλή κυκλική (σχ. 1.39α), τότε ἔχει κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$, ἡ ὁποία ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

1) Σημεῖο ἐφαρμογῆς, τό ὑλικό σημεῖο.
2) Διεύθυνση συνεχῶς κάθετη ἐπάνω στή γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου, δηλαδή τή διεύθυνση πού ὁρίζεται ἀπό τή θέση τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί τό κέντρο τῆς περιφέρειας πού διαγράφει τό κινητό (τή διεύθυνση τῆς ἀκτίνας).
3) Φορά, τή φορά ἀπό τή θέση τοῦ κινητοῦ πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου.
4) Μέτρο, τό πηλίκο τοῦ τετραγώνου τοῦ μέτρου (υ) τῆς γραμμικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ διά τῆς ἀκτίνας R τοῦ κύκλου. Δηλαδή:

$$\boxed{\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \text{σταθερή}} \qquad (1)$$

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι: Ἐφόσον ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἐκτελεῖ κίνηση ὁμαλή καί κυκλική, ἔχει κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_\kappa$, πρέπει ὁπωσδήποτε νά ἀσκεῖται ἐπάνω του μία δύναμη $\vec{F}_\kappa$ (σχ. 1.39α), πού τοῦ προσδίνει αὐτή τήν ἐπιτάχυνση. Τή δύναμη αὐτή $\vec{F}_\kappa$, τήν ὀνομάζομε ***κεντρομόλο δύναμη.***

Ἄρα κεντρομόλο δύναμη $\vec{F}_{\kappa}$ ὀνομάζομε ***τή δύναμη πού προσδίνει τήν κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_{\kappa}$ σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο Α, τό ὁποῖο ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση καί ἡ ὁποία ἔχει τά ἀκόλουθα χαρακτηριστικά:***

1) Σημεῖο ἐφαρμογῆς, τό ὑλικό σημεῖο Α.
2) Διεύθυνση, τή διεύθυνση τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_{\kappa}$.
3) Φορά, τή φορά τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_{\kappa}$.
4) Μέτρο, τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_{\kappa}$, ἐπί τή μάζα (m) τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Δηλαδή:
$$\vec{F}_{\kappa} = m \, . \, \vec{\gamma}_{\kappa} \tag{2}$$
$$F_{\kappa} = m \, . \, \gamma_{\kappa} \tag{3}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (1) λαμβάνομε:

$$\boxed{F_{\kappa} = m \cdot \frac{\upsilon^2}{R} = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{\eta}}$$

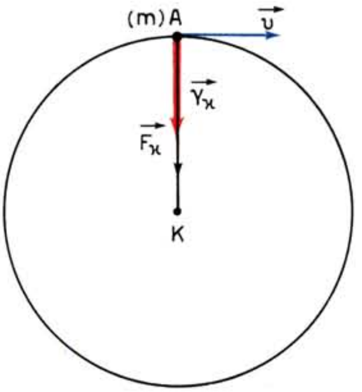
Παρατήρηση:

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι: Ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα (m), γιά νά ἐκτελεῖ κίνηση ὁμαλή καί κυκλική μέ γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ἐπάνω σέ περιφέρεια μέ ἀκτίνα R, πρέπει ὁπωσδήποτε νά ἀσκεῖται ἐπάνω του μία δύναμη $\vec{F}_{\kappa}$ (ἤ συνισταμένη δυνάμεων) ἡ ὁποία πρέπει:

α) νά εἶναι συνεχῶς κάθετη ἐπάνω στήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}$,
β) νά διευθύνεται συνεχῶς πρός ἕνα σημεῖο (τό κέντρο τῆς περιφερείας) καί
γ) νά ἔχει συνεχῶς μέτρο τέτοιο πού νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F_{\kappa} = m \cdot \frac{\upsilon^2}{R}$$

Δηλαδή μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι: ***Κάθε ὁμαλή κυκλική κίνηση παράγεται ἀπό μία κεντρομόλο δύναμη $\vec{F}_{\kappa}$ πού ἐπιδρᾶ ἐπάνω στό κινητό καί ἔχει μέτρο σταθερό καί ἴσο μέ:***



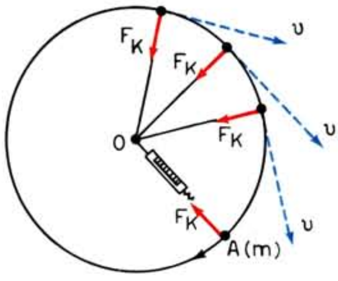
Σχ. 1.39α.

$$F_\kappa = \frac{m\,\upsilon^2}{R}$$

Ὅπου: m ἡ μάζα τοῦ κινητοῦ,

υ τό μέτρο τῆς γραμμικῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ,

R ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου.



Σχ. 1.39β.

Σημειώσεις.

α) Μικρή μεταλλική σφαίρα Α μέ μάζα m εἶναι δεμένη σέ ***νῆμα-δυναμόμετρο*** (σχ. 1.39β). Ἀναγκάζομε τή σφαίρα Α νά ἐκτελέσει κυκλική ὁμαλή κίνηση μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ὁπότε τό ***μῆκος τοῦ νήματος-τεντωμένου δυναμόμετρου*** ἔστω ὅτι εἶναι R.

Διαπιστώνομε τότε ὅτι:

1) Τό τεντωμένο νῆμα-δυναμόμετρο ἀσκεῖ στή σφαίρα τήν κεντρομόλο δύναμη $\vec{F}_\kappa$ καί

2) τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}_\kappa$, πού τό παίρνομε ἀπό τήν ἔνδειξη τοῦ δυναμόμετρου, εἶναι:

$$F_\kappa = m\frac{\upsilon^2}{R}$$

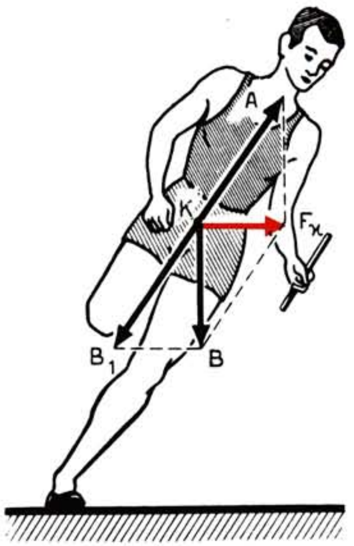
β) Ὁ δρομέας (σχ. 1.39γ) πού ἐπιθυμεῖ νά διανύσει καμπύλο τμῆμα τοῦ στίβου πρέπει νά κλίνει τό σῶμα του πρός τό κέντρο τοῦ καμπύλου τμήματος, ὥστε ἡ συνισταμένη $\vec{F}_\kappa$ τῆς ἀντιδράσεως $\vec{A}$ τοῦ ἐδάφους καί τοῦ βάρους του $\vec{B}$ νά εἶναι μία δύναμη, ἡ ὁποία νά διευθύνεται πρός τό κέντρο καί νά ἔχει μέτρο ἴσο μέ $m\upsilon^2/R$, δηλαδή νά εἶναι κεντρομόλος δύναμη.

ὅπου: m ἡ μάζα τοῦ δρομέα,

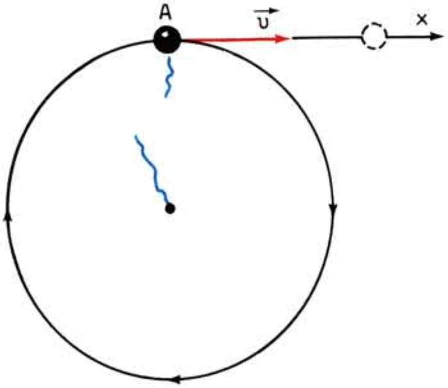
υ ἡ ταχύτητά του τήν ὥρα πού διαγράφει τό καμπύλο τμῆμα καί

R ἡ ἀκτίνα τοῦ καμπύλου τμήματος.

γ) Ἄν ἐπάνω σέ ἕνα κινητό Α, πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση, σταματήσει ἀπότομα νά ἐπιδρᾶ ἡ κεντρομόλος δύναμη (σχ. 1.39δ), τότε τό κινητό, ἐφόσον δέν ἐπιδρᾶ ἐπάνω του καμιά ἄλλη δύναμη, θά κινηθεῖ — σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς ἀδράνειας — εὐθύγραμμα καί ὁμαλά πρός τή διεύθυνση πού ἔχει ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τή στιγμή πού ἔπαψε νά ἐπιδρᾶ ἡ κεντρομόλος δύναμη. Δηλαδή θά κινηθεῖ πρός τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου σέ ἐκεῖνο τό σημεῖο πού ἦταν τό κινητό, ὅταν σταμάτησε νά ἐνεργεῖ ἡ κεντρομόλος δύναμη.



Σχ. 1.39γ.



Σχ. 1.39δ.

Ὑπολογισμός τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως (ἀπόδειξη τῆς σχέσεως $\gamma_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R}$).

Ἔστω ὅτι κινητό Α ἔχει κίνηση ὁμαλή κυκλική καί ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (σχ. 1.39ε). Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει ἀκτίνα R καί σέ χρόνο t γράφει τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ μέ τήν ἐπίδραση τῆς κεντρομόλου δυνάμεως $\vec{F}_\kappa$.

Ἄν τό κινητό αὐτό ἔτρεχε ἀπό τό Α μέ κίνηση εὐθύγραμμη ὁμαλή, χωρίς δηλαδή τήν ἐπίδραση τῆς $\vec{F}_\kappa$, καί μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, θά ἔφθανε σέ χρόνο t στό Β.

Ἄρα, στήν οὐσία, τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐνέργειας τῆς κεντρομόλου δυνάμεως σέ χρόνο t εἶναι ὅτι ἔφερε τό κινητό ἀπό τή θέση Β στή θέση Γ μέ ἐπιτάχυνση ἔστω $\vec{\gamma}_\kappa$.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω θά ἔχομε:

$(\mathrm{AB}) = \upsilon \cdot t$ (εὐθύγραμμη ὁμαλή) (1)

$(\mathrm{B\Gamma}) = {}^1/_2\, \gamma_\kappa t^2$ (εὐθύγραμμη ὁμαλή ἐπιταχυνόμενη) (2)

Καί ἀπό τή Γεωμετρία γνωρίζομε:

$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{B\Gamma}) \cdot (\mathrm{B\Delta})$ ἤ

$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{B\Gamma}) \cdot [(\mathrm{B\Gamma}) + 2R]$ (3)

Τό (ΒΓ) εἶναι πολύ μικρό σχετικά μέ τό 2R, γιατί ὁ χρόνος t θεωρεῖται πολύ μικρός. Ἑπομένως ἀπό τήν (3) ἔχομε:

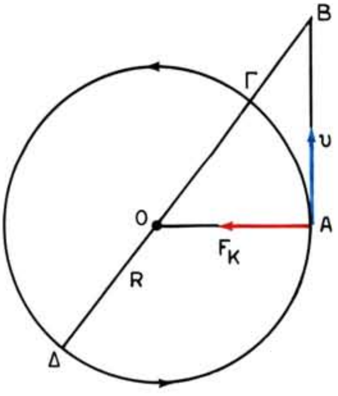
$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{B\Gamma}) \cdot 2R$ (4)

Καί ἀπό τίς (1), (2) καί (4) ἔχομε: $\upsilon^2 t^2 = {}^1/_2\, \gamma_\kappa \cdot t^2 \cdot 2R$ ἤ

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Ἐξισώσεις (τύποι) τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.

Γιά τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ σέ ὑλικό σημεῖο πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση, ἰσχύουν οἱ τύποι (1), (3), (5) καί (7) (ἐξισώσεις):



Σχ. 1.39ε.

$$\boxed{F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{R}} \qquad (1)$$

Ὅπου: F_κ = τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως πού ἀσκεῖται σέ ὑλικό σημεῖο πού ἔχει μάζα m καί κινεῖται μέ ταχύτητα υ σέ περιφέρεια κύκλου μέ ἀκτίνα R.
Στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\upsilon = \omega \,.\, R \qquad (2)$$

Ἄν στήν (1) ἀντί υ βάλομε τό ἴσο του πού τό παίρνομε ἀπό τήν (2), ἔχομε:

$$F_\kappa = m \cdot \frac{\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 \,.\, R \qquad (2)$$

$$\boxed{F_\kappa = m\omega^2 R} \qquad (3)$$

Στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\upsilon = \frac{2\pi}{T} \cdot R \qquad (4)$$

Ἄν στήν (1) ἀντί υ βάλομε τό ἴσο του πού τό παίρνομε ἀπό τήν (4), ἔχομε:

$$F_\kappa = m\frac{4\pi^2 R^2}{T^2 \,.\, R} = \frac{4\pi^2 m R}{T^2}$$

$$\boxed{F_\kappa = \frac{4\pi^2 \,.\, m \,.\, R}{T^2}} \qquad (5)$$

Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\upsilon = 2\pi\nu R \qquad (6)$$

Ἄν στήν (1) ὅπου υ βάλομε τό ἴσο του πού τό παίρνομε ἀπό τήν (6), ἔχομε:

$$F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{R} = \frac{m \,.\, 4\pi^2\nu^2R^2}{R} = 4 \,.\, m\pi^2\nu^2 R$$

$$\boxed{F = 4m \,.\, \pi^2 \,.\, \nu^2 R} \qquad (7)$$

Νόμοι τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.

1ος Νόμος (σχέση) κεντρομόλου δυνάμεως καί μάζας.

Ἄν ὑλικό σημεῖο ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση, τότε τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως πού τήν προκαλεῖ εἶναι ἀνάλογο πρός τή μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὁ νόμος αὐτός ἐκφράζεται ἀπό τούς προηγούμενους (1), (3), (5) καί (7) τύπους καί ταυτίζεται μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς μηχανικῆς.

2ος Νόμος (σχέση) κεντρομόλου δυνάμεως καί γραμμικῆς ταχύτητας, ὅταν διατηροῦνται σταθερές ἡ ἀκτίνα (R) τῆς τροχιᾶς καί ἡ μάζα (m) τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἄν ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου μέ ἀκτίνα R, τότε τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως εἶναι ἀνάλογο πρός τό τετράγωνο τοῦ μέτρου τῆς γραμμικῆς ταχύτητας ($υ^2$) τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὁ νόμος αὐτός ἐκφράζεται ἀπό τόν προηγούμενο τύπο (1).

Ἔστω ὅτι ἔχομε ἕνα ὑλικό σημεῖο μάζας m, τό ὁποῖο ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου ἀκτίνας R. Τό ὑλικό αὐτό σημεῖο, ὅταν ἀσκεῖται ἐπάνω του κεντρομόλος δύναμη F_1, ἔχει γραμμική ταχύτητα $υ_1$. Ἄν τώρα θέλομε ἡ γραμμική του ταχύτητα νά γίνει $2υ_1$, $3υ_1$, τότε πρέπει νά ἀσκήσομε ἐπάνω του κεντρομόλο δύναμη $4F_1$, $9F_1$ ἀντιστοίχως.

3ος Νόμος (σχέση) κεντρομόλου δυνάμεως καί γωνιακῆς ταχύτητας, ὅταν διατηροῦνται σταθερές ἡ ἀκτίνα (R) τῆς τροχιᾶς καί ἡ μάζα (m) τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἄν ὑλικό σημεῖο μάζας m ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου ἀκτίνας R, τότε τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως εἶναι ἀνάλογο πρός τό τετράγωνο τοῦ μέτρου τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ($ω^2$) τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὁ νόμος αὐτός ἐκφράζεται ἀπό τόν τύπο: $F = m \, . \, ω^2 \, . \, R$

Ἔστω ὅτι ἔχομε ἕνα ὑλικό σημεῖο μάζας m, τό ὁποῖο ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου ἀκτίνας R. Τό ὑλικό αὐτό σημεῖο, ὅταν ἀσκεῖται ἐπάνω του κεντρομόλος δύναμη F_1, ἔχει γωνιακή ταχύτητα $ω_1$. Ἄν τώρα θέλομε ἡ γωνιακή του ταχύτητα νά γίνει $ω_2 = 2ω_1$, $ω_3 = 3ω_1$, τότε πρέπει νά ἀσκήσομε ἐπάνω του κεντρομόλο δύναμη $F_2 = 4F_1$ καί $F_3 = 9F_1$ ἀντιστοίχως.

4ος Νόμος (σχέση) κεντρομόλου δυνάμεως καί ἀκτίνας, ὅταν διατηροῦνται σταθερές ἡ γραμμική ταχύτητα καί ἡ μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὅταν ὑλικό σημεῖο μάζας m ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ γραμμική ταχύτητα τῆς ὁποίας τό μέτρο εἶναι υ, τότε τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογο πρός τήν ἀκτίνα (R) τῆς περιφέρειας στήν ὁποία κινεῖται.

Ὁ Νόμος αὐτός ἐκφράζεται ἀπό τόν προηγούμενο τύπο (1).

Ἔστω ὅτι ἔχομε ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m, τό ὁποῖο ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου μέ ταχύτητα υ. Τό ὑλικό αὐτό σημεῖο, ὅταν ἀσκεῖται ἐπάνω του κεντρομόλος δύναμη F_1, κινεῖται σέ τροχιά R_1. Ἄν τώρα, θέλομε τό ὑλικό αὐτό σημεῖο νά κινηθεῖ μέ τήν ἴδια ταχύτητα υ ἐπάνω σέ περιφέρεια $R_2 = 2R_1$, πρέπει νά ἀσκήσομε ἐπάνω του κεντρομόλο δύναμη: $F_2 = F_1/F_2$

5ος Νόμος (σχέση) κεντρομόλου δυνάμεως καί ἀκτίνας, ὅταν ἡ γωνιακή ταχύτητα καί ἡ μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὅταν ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ γωνιακή ταχύτητα τῆς ὁποίας τό μέτρο εἶναι ω, τότε τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως εἶναι ἀνάλογο πρός τήν ἀκτίνα R τῆς περιφέρειας στήν ὁποία κινεῖται τό ὑλικό σημεῖο.

Ἔστω ὅτι ἔχομε ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m, τό ὁποῖο ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου μέ γωνιακή ταχύτητα ω. Τό ὑλικό αὐτό σημεῖο, ὅταν ἀσκεῖται ἐπάνω του κεντρομόλος δύναμη F_1, κινεῖται σέ τροχιά R_1. Ἄν, τώρα θέλομε τό ὑλικό αὐτό σημεῖο νά κινηθεῖ σέ περιφέρεια μέ ἀκτίνα $R_2 = 2R_1$, πρέπει νά ἀσκήσομε ἐπάνω του κεντρομόλο δύναμη $F_2 = 2F_1$.

Ἐφαρμογές τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.

Ρυθμιστής τοῦ Watt.

Ἀποτελεῖται ἀπό κατακόρυφο στέλεχος ΑΕ πού εἶναι δυνατό νά στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονά του (σχ. 1.39στ). Στό ἕνα ἄκρο τοῦ στελέχους αὐτοῦ ἀρθρώνονται δύο βραχίονες μήκους λ, πού ἔχουν στίς ἄκρες τους δύο ἴσες μεταλλικές σφαῖρες Μ καί Μ΄. Ἐπίσης τό στέλεχος ἔχει καί ἕνα δακτύλιο Ε. Ὅταν τό κατακόρυφο στέλεχος περιστρέφεται (σχ. 1.39ζ), οἱ σφαῖρες γράφουν κυκλική τροχιά μέ κέντρο στόν ἄξονα περιστροφῆς.

Ὅταν καθεμιά ἀπό τίς σφαῖρες αὐτές γράφει κυκλική τροχιά, ἀκτίνας R, ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ τῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ καθεμιά σφαίρα εἶναι ὁριζόντια (σχ. 1.39ζ), ἔχει διεύθυνση πρός τό κέντρο περιστροφῆς καί τό μέτρο της εἶναι $\Sigma = m\omega^2 R$ (α) (δηλαδή εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμη).

Σέ κάθε μιά σφαίρα ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις: α) τό βάρος $\vec{B}$ τῆς σφαίρας, τό ὁποῖο εἶναι κατακόρυφο καί β) ἡ δύναμη Τ, τήν ὁποία ἀσκεῖ ὁ βραχίονας στή σφαίρα.
Ἡ συνισταμένη τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων εἶναι:

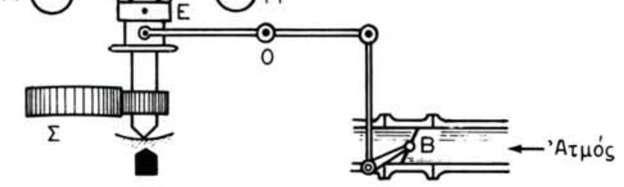
$$\Sigma = B \, . \, \varepsilon\varphi\phi = mg \, . \, \varepsilon\varphi\phi \qquad (1)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (α) καί (1) παίρνομε:

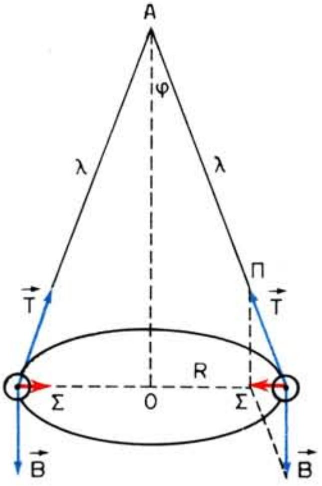
$$\boxed{m\omega^2 R = mg\varepsilon\varphi\phi} \quad \text{ἤ} \quad \varepsilon\varphi\phi = \frac{\omega^2 R}{g} \qquad (2)$$

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi} \qquad (3)$$



Σχ. 1.39στ.



Σχ. 1.39ζ.

$$\text{καί} \qquad R = \lambda \,.\, \text{ημφ} \tag{4}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2), (3) καί (4) ἔχομε:

$$\frac{\text{ημφ}}{\text{συνφ}} = \frac{\omega^2 \,.\, \lambda \,.\, \text{ημφ}}{g} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\text{συνφ}}{\text{ημφ}} = \frac{g}{\omega^2 \lambda \,.\, \text{ημφ}}$$

$$\text{συνφ} = \frac{g}{\omega^2 \lambda} \tag{5}$$

Ἀπό τή σχέση (5) προκύπτει ὅτι, ὅταν αὐξάνει ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῶν σφαιρῶν τό συνημίτονο τῆς γωνίας φ (συνφ) ἐλαττώνεται, ἄρα ἡ γωνία φ αὐξάνεται. Ἐπομένως οἱ σφαῖρες περιστρέφονται σέ ψηλότερο ἐπίπεδο, ὁπότε ὁ δακτύλιος ἀνεβαίνει πιό ψηλά.

Ὁ ρυθμιστής τοῦ Watt χρησιμοποιεῖται στίς ἀτμομηχανές, γιά νά ρυθμίζει τήν ποσότητα τῶν ἀτμῶν πού τίς τροφοδοτοῦν, ἔτσι, ὥστε ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τους νά παραμένει σταθερή.

Ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ στελέχους εἶναι ἀνάλογη πρός τή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῶν μηχανῶν, γιατί μεταφέρεται ἀπό αὐτές. Ἐπομένως, ἄν αὐξηθεῖ ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῶν μηχανῶν, αὐξάνεται καί ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ στελέχους.

Ἀλλά, ὅταν αὐξάνεται ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ στελέχους, αὐξάνεται καί ἡ γωνία φ. Ἄρα οἱ σφαῖρες τοῦ ρυθμιστῆ ἀνυψώνονται καί μαζί μέ αὐτές ἀνέρχεται καί ὁ δακτύλιος Ε.

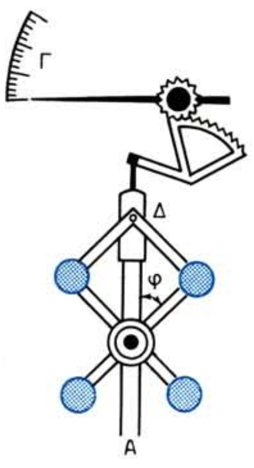
Μέ τή βοήθεια μοχλῶν, πού συνδέονται μέ τό δακτύλιο Ε, κλείνει ἡ βαλβίδα τροφοδοτήσεως (Β) περισσότερο καί ἔτσι μειώνει τή ροή τῶν ὑδρατμῶν. Μέ αὐτό τόν τρόπο ἐμποδίζεται ἡ συνεχής αὔξηση τῆς γωνιακῆς ταχύτητας περιστροφῆς τῶν κινητήρων καί διατηρεῖται στήν ἐπιθυμητή τιμή.

Τό ταχύμετρο.

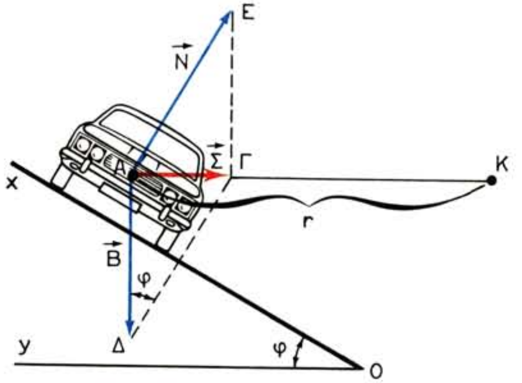
Ἀποτελεῖται ἀπό ἄξονα Α (σχ. 1.39η), τέσσερις μάζες καί ἕνα δρομέα Δ. Ἀνάλογα μέ τή γωνιακή ταχύτητα, μέ τήν ὁποία περιστρέφεται ὁ ἄξονας Α, ἡ γωνία φ παίρνει συγκεκριμένη τιμή, ὁπότε οἱ σφαῖρες ἀπομακρύνονται ἀπό τόν ἄξονα καί ὁ δρομέας Δ ἕλκεται πρός τά κάτω. Ἔτσι ὁ δείκτης μετακινεῖται ἀναλόγως ἐπάνω στήν κλίμακα τοῦ ὀργάνου.

Κίνηση ὀχήματος σέ στροφή δρόμου.

Ὅταν ἕνα ὄχημα κινεῖται ἐπάνω σέ στροφή δρόμου (σχ. 1.39θ), στήν οὐσία διαγράφει τόξο κυκλι-



Σχ. 1.39η.



Σχ. 1.39θ.

κῆς τροχιᾶς. Γιά νά διαγράφει τό ὄχημα κυκλική τροχιά πρέπει ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στό ὄχημα νά εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμη.

Γιά νά τό πετύχομε αὐτό δίνομε στό ἐπίπεδο τοῦ δρόμου μιά κλίση *φ. Στό ὄχημα ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις: Τό βάρος του $\vec{B}$, πού εἶναι κατακόρυφο, καί ἡ ἀντίδραση $\vec{N}$ τοῦ δαπέδου του πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδό του.

Ἡ συνισταμένη τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων εἶναι: $\Sigma = B \,.\, \varepsilon\varphi\varphi$

Ἡ δύναμη αὐτή πρέπει νά εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμη, γιά νά μπορεῖ τό ὄχημα νά διαγράψει τόξο κυκλικῆς τροχιᾶς.

$$F_\kappa = \Sigma \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{mu^2}{R} = B \,.\, \varepsilon\varphi\varphi$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{mu^2}{R\,.\,B} \qquad \text{ἤ} \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{mu^2}{R\,mg}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{u^2}{Rg} \tag{1}$$

Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι σέ ὁρισμένη κλίση φ τοῦ δρόμου ἀντιστοιχεῖ ὁρισμένη ταχύτητα (υ) τοῦ ὀχήματος.

1.40 Φυγόκεντρη δύναμη.

Ἄν ὑλικό σημεῖο (ἤ σῶμα) Α ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση (σχ. 1.40), τότε κάποιο ἄλλο ὑλικό σημεῖο (ἤ σῶμα) Κ, ἀσκεῖ ἐπάνω του τήν κατάλληλη ***κεντρομόλο δύναμη*** $\vec{F}_\kappa$ ***(δράση).*** Σύμφωνα ὅμως μέ τήν ἀρχή τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως, καί τό Α ἀσκεῖ ἐπάνω στό Κ ***μιά δύναμη*** $\vec{F}_\varphi$ ***ἀντίθετη πρός τή*** $\vec{F}_\kappa$ ***(ἀντίδραση) τήν ὁποία ὀνομάζομε φυγόκεντρη δύναμη.***

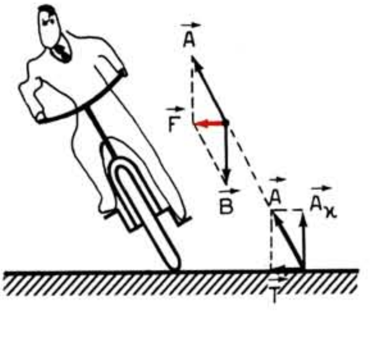
Ἄρα: ***φυγόκεντρη δύναμη*** $\vec{F}_\varphi$ ***ὀνομάζομε τή δύναμη πού εἶναι ἡ ἀντίδραση στήν κεντρομόλο*** $\vec{F}_\kappa$ ***δύναμη καί ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

1) Σημεῖο ἐφαρμογῆς, τό ὑλικό σημεῖο κ,

---

* Γι' αὐτό ἡ ἐξωτερική σιδηροτροχιά τῶν σιδηροδρόμων στίς στροφές τοποθετεῖται ψηλότερα ἀπό τήν ἐσωτερική, ὥστε ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ κάθε τμῆμα τοῦ συρμοῦ νά δημιουργοῦν τήν κατάλληλη κεντρομόλο δύναμη.

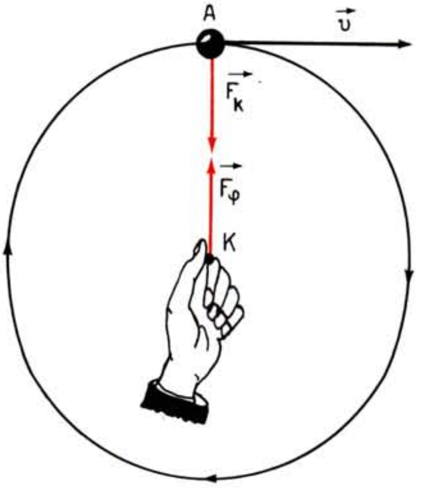
Γι' αὐτό ἐπίσης ὅταν ἕνας ποδηλάτης διατρέχει στροφή δρόμου (σχ. 1.39 ι), δίνει στό σῶμα του καί στό ποδήλατό του μιά ἐλαφρή κλίση πρός τό ἐσωτερικό τῆς στροφῆς, ὥστε ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων βάρους καί ἀντιστάσεως ἀπό τό ἔδαφος πού ἐνεργοῦν ἐπάνω του νά εἶναι ἡ κατάλληλη κεντρομόλος δύναμη.



Σχ. 1.39ι.

2) διεύθυνση, τή διεύθυνση τῆς κεντρομόλου δυνάμεως, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό κ ἐπάνω στό Α,
3) φορά, ἀντίθετη ἀπό τή φορά τῆς κεντρομόλου δυνάμεως $\vec{F}_\kappa$, τῆς ὁποίας εἶναι ἡ ἀντίδραση καί
4) μέτρο, ἴσο μέ τό μέτρο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως, τῆς ὁποίας εἶναι ἡ ἀντίδραση.

Δηλαδή: $\boxed{\vec{F}_\kappa = -\vec{F}_\varphi}$ καί $\boxed{F_\kappa = F_\varphi}$



Σχ. 1.40.

Ἄν μιά σφαίρα Α μέ μάζα m τή δέσομε σέ ἕνα νῆμα (σχ. 1.40) μέ μῆκος ΚΑ = R καί ἀρχίσομε νά τήν περιστρέφομε μέ κίνηση ὁμαλή κυκλική καί μέ ταχύτητα υ, τότε τό χέρι μας (μέσω τοῦ νήματος) ἀσκεῖ στή σφαίρα τήν ἀπαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη:

$$F_\kappa = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}$$

Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς δράσεως καί τῆς ἀντιδράσεως, ἡ σφαίρα ἀσκεῖ (μέσω τοῦ νήματος) στό χέρι μας μία ἀντίθετη δύναμη, δηλαδή τή φυγόκεντρη δύναμη:

$$\boxed{F_\varphi = \frac{m\upsilon^2}{R}}$$

Ἔστω ὅτι ἕνας ἐπιβάτης κάθεται σέ ἕνα ἀπό τά καθίσματα πού βρίσκονται στό πλευρικό τοίχωμα ἑνός αὐτοκινήτου. Τήν ὥρα πού τό αὐτοκίνητο διανύει μιά στροφή δρόμου, τό τοίχωμα τοῦ αὐτοκινήτου ἀσκεῖ ἐπάνω στόν ἐπιβάτη τήν ἀπαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη $\vec{F}_\kappa$, γιά νά μπορέσει ὁ ἐπιβάτης νά διαγράψει μαζί μέ τό αὐτοκίνητο τήν καμπύλη τροχιά. Ταυτόχρονα ὅμως καί ὁ ἐπιβάτης ἀσκεῖ στό τοίχωμα τοῦ αὐτοκινήτου μιά δύναμη (ἀντίδραση) ἀντίθετη πρός τή $\vec{F}_\kappa$, δηλαδή τή φυγόκεντρη δύναμη $\vec{F}_\varphi$.

Παρατήρηση:

Γιά τή φυγόκεντρη δύναμη ἰσχύουν οἱ ἴδιες ἐξισώσεις καί οἱ ἴδιοι νόμοι πού ἰσχύουν γιά τήν κεντρομόλο δύναμη.

1.41 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

26) *Σῶμα μέ μάζα m = 200 g ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση σέ περιφέρεια κύκλου ἀκτίνας r = 3 m καί μέ γωνιακή ταχύτητα ω = 0,5 rad/sec. Ποιά εἶναι ἡ γραμμική ταχύτητα (υ), ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση (γ_κ) καί ἡ κεντρομόλος δύναμη F_κ τοῦ σώματος;*

Λύση.
Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\upsilon = \omega \cdot r \tag{1}$$

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 \cdot r \tag{2}$$

$$F_\kappa = m\omega^2 r \tag{3}$$

Δίνονται: $\omega = 0{,}5$ rad/sec $\quad r = 3$ m $\quad$ καί $\quad m = 200$ g $= 0{,}2$ kg

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στίς σχέσεις (1), (2) καί (3) καί ἔχομε:

$\upsilon = \omega \cdot r = 0{,}5 \times 3 = 1{,}5$ m/sec. $\quad$ ***ὥστε*** $\quad \upsilon = 1{,}5$ m/sec

$\gamma_\kappa = \omega^2 r = (0{,}5)^2 \times 3 = 0{,}75$ m/sec^2 $\quad$ ***ὥστε*** $\quad \gamma_\kappa = 0{,}75$ m/sec^2

$F_\kappa = m\omega^2 r = 0{,}2 \times (0{,}5)^2 \times 3 = 0{,}15$ N $\quad$ ***ὥστε*** $\quad F_\kappa = 0{,}15$ N

27) *Στήν ἄκρη ἑνός νήματος μήκους R = 50 cm δένομε ἕνα σῶμα μάζας m = 300 g καί τό περιστρέφομε ὥστε νά διαγράφει κατακόρυφη τροχιά. Ἄν τό σῶμα ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ γραμμική ταχύτητα υ = 3 m/sec, νά βρεθεῖ πόση δύναμη ἐξασκεῖται στό χέρι μας, ὅταν τό σῶμα διέρχεται ἀπό τό κατώτατο σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.*

Λύση.

Ὅταν τό σῶμα ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση, ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν ἐπάνω του πρέπει νά εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή:

$$\Sigma = F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{R} \tag{1}$$

Ὅταν τό σῶμα βρίσκεται στό κατώτατο σημεῖο τῆς τροχιᾶς του, τότε ἐπάνω στό σῶμα ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση (κατακόρυφη) ἀλλά φορά ἀντίθετη: μιά $\vec{F}$ πού ἐξασκεῖ στό σῶμα τό χέρι μας μέ τό νῆμα καί ἡ ἄλλη τό βάρος του $\vec{B}$. Ἐπομένως ὅταν τό σῶμα βρίσκεται στήν κατώτατη θέση του, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\Sigma = F - B \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) βρίσκομε τή σχέση:

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = F - mg \qquad \text{καί} \qquad F = \frac{m\upsilon^2}{R} + mg \tag{3}$$

Δίνονται: $m = 300$ g $= 0{,}300$ kg, $\upsilon = 3$ m/sec, $R = 50$ cm $= 0{,}50$ m καί $g = 10$ m/sec^2

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (3) καί βρίσκομε:

$$F = \frac{0{,}300 \times 3^2}{0{,}5} + 0{,}300 \times 10 = 8{,}4 \text{ Nt} \qquad \text{καί} \qquad F = 8{,}4 \text{ N}$$

Ὥστε τό χέρι μας ἐξασκεῖ στό σῶμα, ὅταν αὐτό βρίσκεται στήν κατώτατη θέση του, τή δύναμη F = 8,4 N. Σύμφωνα ὅμως μέ τήν ἀρχή δράσεως καί ἀντιδράσεως, ***καί τό σῶμα ἐξασκεῖ στό χέρι μας μία δύναμη*** $\vec{F}_1$ ***ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετη τῆς*** $\vec{F}$, δηλαδή:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F} \qquad \text{καί} \qquad F_1 = F = 8{,}4 \text{ N}$$

28) *Ἀπό ὕψος h ἐπάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἐκσφενδονίζεται μέ ὁριζόντια διεύθυνση ἕνα βλῆμα. Μέ πόση ταχύτητα πρέπει νά ἐκσφενδονισθεῖ τό βλῆμα, ὥστε νά γράφει γύρω ἀπό τή γῆ περιφέρεια κύκλου;*

Λύση.

Τό βλῆμα γιά νά ἐκτελεῖ κίνηση ὁμαλή κυκλική πρέπει ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται ἐπάνω του νά εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή:

$$F_\kappa = \Sigma \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{m\upsilon^2}{(R + h)} = \Sigma \tag{1}$$

ὅπου: R ἡ ἀκτίνα τῆς γῆς καί υ ἡ ταχύτητα τήν ὁποία πρέπει νά ἔχει τό βλῆμα γιά νά ἐκτελεῖ κίνηση ὁμαλή κυκλική σέ τροχιά ἀκτίνας: (R + h).

Ἄν δέν λάβομε ὑπόψη μας τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, τότε πάνω στό βλῆμα ἀσκεῖται μόνο τό βάρος B τοῦ σώματος καί ἐπομένως αὐτό εἶναι αὐτή ἡ ἴδια ἡ κεντρομόλος δύναμη. Δηλαδή:

$$B = \Sigma = \frac{m\upsilon^2}{R} \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$B = \frac{m\upsilon^2}{(R + h)} \qquad \text{ἤ} \qquad mg = \frac{m\upsilon^2}{(R + h)} \tag{3}$$

Ἄν τό h εἶναι πάρα πολύ μικρό σχετικά μέ τήν ἀκτίνα R τῆς γῆς μποροῦμε νά τό παραλείψομε, ὁπότε ἀπό τή σχέση (3) βρίσκομε:

$$\upsilon = \sqrt{R \,.\, g} \tag{4}$$

Δίνονται: $R = 6400 \text{ km} = 64 \times 10^5 \text{ m}$ καί $g = 10 \text{ m/sec}^2$

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (4) καί βρίσκομε:

$$\upsilon = \sqrt{6410^5 \times 10} = 8 \,.\, 10^3 \text{ m/sec} \qquad \textit{ὥστε} \qquad \upsilon = 8 \text{ km/sec}$$

1.42 Ὁρμή (ἤ ποσότητα κινήσεως) ἑνός ὑλικοῦ σημείου.

Ὁρισμός.

Ὁρμή (ἤ ποσότητα κινήσεως) ὑλικοῦ σημείου κατά τή χρονική στιγμή t πού ἡ ταχύτητά του εἶναι $\vec{\upsilon}$ ***ὀνομάζεται ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος*** $\vec{j}$ [σχ. 1.42α (α) καί 1.42α(β)] ***τό ὁποῖο ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

1) ***Σημεῖο ἐφαρμογῆς,*** τό ὑλικό σημεῖο.
2) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου.
3) ***Φορά,*** τή φορά τῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου.
4) ***Μέτρο,*** τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς μάζας (m) τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐπί τό μέτρο τῆς ταχύτητάς του. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{j} = m \,.\, \vec{\upsilon}} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{j = m \,.\, \upsilon}$$

Σχ. 1.42α.

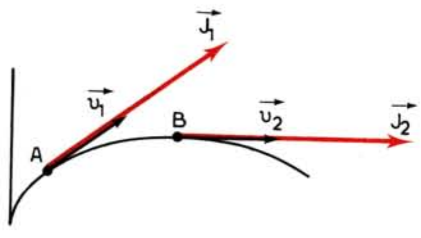
Νόμος μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς (ἄλλη διατύπωση τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς δυναμικῆς).

Ἔστω ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m κατά τή χρονική στιγμή t_1 πού βρίσκεται στή θέση Α ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 πού βρίσκεται στή θέση Β ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ (σχ. 1.42β). Τότε οἱ ὁρμές τοῦ ὑλικοῦ σημείου αὐτοῦ θά εἶναι κατά τίς χρονικές στιγμές t_1 καί t_2, ἀντιστοίχως, οἱ ἑξῆς:

$$\vec{j}_1 = m\vec{\upsilon}_1 \qquad \text{καί} \qquad \vec{j}_2 = m\vec{\upsilon}_2$$

Ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου μέσα στό χρόνο $(t_2 - t_1) = \Delta t$, δηλαδή κατά τή μετάβασή του ἀπό τό Α στό Β, εἶναι:

$$\vec{j}_2 - \vec{j}_1 = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 \qquad \text{καί} \qquad \vec{j}_2 - \vec{j}_1 = m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) \qquad (1)$$



Σχ. 1.42β.

Διαιροῦμε καί τά δύο μέλη τῆς σχέσεως (1) μέ τό χρόνο Δt, μέσα στόν ὁποῖο ἔγινε ἡ μεταβολή $(\vec{j}_2 - \vec{j}_1 = \Delta\vec{j})$ τῆς ὁρμῆς, καί ἔχομε:

$$\frac{\vec{j}_2 - \vec{j}_1}{\Delta t} = \frac{m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)}{\Delta t} \qquad (1)$$

καί
$$\boxed{\frac{\Delta\vec{j}}{\Delta t} = m\,\frac{(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)}{\Delta t}} \qquad (2)$$

Ἄν ὑποθέσομε ***ὅτι ὁ χρόνος Δt εἶναι πάρα πολύ μικρός,*** τότε γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} \qquad (3)$$

ὅπου: $\vec{\gamma}$ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἰσχύει ὅμως καί ἡ σχέση:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma} \qquad (4)$$

Ἄν στήν (4) ἀντικαταστήσομε τό $\vec{\gamma}$ μέ τό ἴσο του, πού τό παίρνομε ἀπό τήν (3), ἔχομε:

$$\vec{F} = m \, \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} \qquad (5)$$

Τά δεύτερα μέλη τῶν (2) καί (5) εἶναι ἴσα. Ἄρα ἔχομε:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{j}}{\Delta t} \qquad (6)$$

ὅπου: $\vec{F}$ ἡ δύναμη πού ἐπέδρασε στό ὑλικό σημεῖο ἐπί χρόνο Δt, δηλαδή γιά πολύ μικρό διάστημα, ὥστε κατά τή διάρκειά του ἡ $\vec{F}$ νά θεωρεῖται σταθερή.

$\Delta \vec{j}$ εἶναι ἡ μεταβολή πού ἔπαθε ἡ ὁρμή τοῦ σημείου μέσα στό χρόνο Δt καί τήν ὁποία προκάλεσε ἡ $\vec{F}$.

Ἡ σχέση (6) ἐκφράζει τόν ἑξῆς νόμο:

Ἄν ἐπάνω σέ κάποιο ὑλικό σημεῖο ἐπιδράσει μιά δύναμη $\vec{F}$ ἐπί χρονικό διάστημα Δt, τότε ἡ δύναμη αὐτή θά προκαλέσει μεταβολή $\Delta \vec{j}$ τῆς ὁρμῆς τοῦ σημείου ἡ ὁποία εἶναι ἕνα ἄνυσμα παράλληλο καί ὁμόρροπο πρός αὐτή. Τό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς $\Delta \vec{j}$, πού ἔγινε μέσα στό χρόνο Δt, διά τοῦ χρόνου αὐτοῦ Δt ἰσοῦται μέ τό μέτρο τῆς δυνάμεως αὐτῆς ($\vec{F}$).

Παρατήρηση:

Ὅταν ἐπάνω σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο δέν ἐπιδρᾶ καμιά δύναμη ἤ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων πού ἐπιδροῦν σ' αὐτό εἶναι μηδέν, τότε ἡ ὁρμή τοῦ ὑλικοῦ σημείου διατηρεῖται σταθερή, ἐπειδή δέν γίνεται καμιά μεταβολή τῆς ὁρμῆς του.

Πραγματικά: $\qquad \vec{F} = \dfrac{\Delta \vec{j}}{\Delta t}$

Ἄν $\vec{F} = 0$ $\qquad$ ἔχομε: $\qquad 0 = \dfrac{\Delta \vec{j}}{\Delta t}$

Καί ἐπειδή $\Delta t \neq 0$ $\qquad$ ἔχομε: $\quad \Delta \vec{j} = 0$ $\qquad$ δηλαδή $\quad \vec{j} =$ σταθερό

Μονάδες ὁρμῆς.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἡ σχέση ὁρισμοῦ τῆς ὁρμῆς εἶναι: $\quad j = m \cdot \upsilon$

Μονάδα μάζας στό σύστημα αὐτό εἶναι τό 1 kg καί μονάδα ταχύτητας τό 1 m/s. Ἄρα μονάδα ὁρμῆς στό S.I. εἶναι:

$$j = m \cdot \upsilon = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1\ \text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \qquad \text{δηλαδή} \qquad j = 1\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.).

$$j = m \cdot \upsilon = 1\ \text{Τ. Μ.Μ.}\ 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\ \text{Τ. Μ ὁρμῆς} = 1\ \frac{\text{kp}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\ \text{kp} \cdot \text{s}$$

Σύστημα C.G.S.

Μονάδα μάζας στό σύστημα C.G.S. εἶναι τό 1 g καί μονάδα ταχύτητας εἶναι τό 1 cm/s. Ἄρα μονάδα ὁρμῆς στό σύστημα C.G.S. εἶναι:

$$j = m \,.\, u = 1\ g \,.\, 1\ cm/s = 1\ g\ cm/s$$

$$\text{Μιά μονάδα ὁρμῆς} = 1\ g\ cm/s$$

1.43 Ὤθηση δυνάμεως.

Ἄν ἐπάνω σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ἐπιδράσει σταθερά μιά δύναμη $\vec{F}$ ἐπί χρόνο t, ***ὀνομάζομε ὤθηση τῆς δυνάμεως αὐτῆς F ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος Ω πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά της, καί μέτρο τό γινόμενο τοῦ μέτρου της (F) ἐπί τόν χρόνο (t) κατά τόν ὁποῖο αὐτή ἐπέδρασε ἐπάνω στό ὑλικό σημεῖο.***

Δηλαδή: $\vec{\Omega} = \vec{F} \cdot t$ καί $\Omega = F \cdot t$

Ἄν ἐπάνω σέ ὑλικό σημεῖο Μ, πού ἔχει μάζα m καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{u}_0$, ἐπενεργήσει σταθερά δύναμη $\vec{F}$ ἐπί χρόνο t, τότε ἡ ταχύτητα τοῦ σημείου αὐτοῦ θά γίνει: $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\gamma} \,.\, t$ (1)

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + (\vec{F}/m) \,.\, t \qquad (\vec{u} - \vec{u}_0)m = \vec{F} \,.\, t \qquad \text{καί} \qquad m\vec{u} - m\vec{u}_0 = \vec{F} \,.\, t \qquad (3)$$

Τό πρῶτο μέλος $(m\vec{u} - m\vec{u}_0)$ τῆς σχέσεως (3) παριστάνει τή μεταβολή τῆς ὁρμῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου τήν ὁποία προκάλεσε ἡ δύναμη $\vec{F}$ πού ἐπέδρασε ἐπάνω του ἐπί χρόνο t.

Ἡ σχέση (3) ἀποτελεῖ ἄλλη διατύπωση τοῦ νόμου τῆς μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς ἤ ἄλλη διατύπωση τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς πού ὁρίζει ὅτι: ***Ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς ἑνός κινητοῦ ἰσοῦται μέ τήν ὤθηση τῆς δυνάμεως πού ἐπέδρασε στό κινητό καί προκάλεσε τή μεταβολή.***

Ἡ σχέση (3) εἶναι ἀνυσματική.

Στήν περίπτωση ὅμως πού ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας, ἡ σχέση (3) γίνεται ἀλγεβρική:

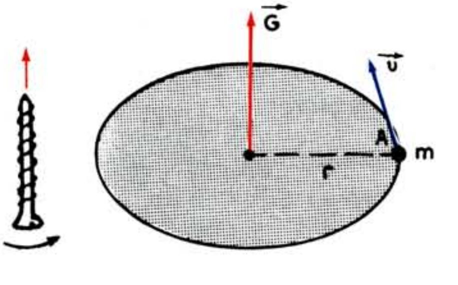
$$mu - mu_0 = F \,.\, t$$

Ὅταν ἡ ἀρχική ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι μηδέν, θά ἔχομε F . t = m . u, δηλαδή ἡ ὁρμή ἰσοῦται μέ τήν ὤθηση τῆς δυνάμεως.

1.44 Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου.

Ὁρισμός.

Ἄν τό ὑλικό σημεῖο Α, πού ἔχει μάζα m καί κινεῖται σέ κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα r (σχ. 1.44), κατά τή χρονική στιγμή t ἔχει ταχύτητα $\vec{u}$, ***ὀνομάζομε στροφορμή τοῦ***



Σχ. 1.44.

ὑλικοῦ σημείου Α ὡς πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου κατά τή χρονική στιγμή t ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{G}$, τό ὁποῖο ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

1) ***Σημεῖο ἐφαρμογῆς,*** τό κέντρο τοῦ κύκλου.
2) ***Διεύθυνση,*** τήν κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου.
3) ***Φορά,*** τή φορά πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία.
4) ***Μέτρο,*** τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς ὁρμῆς ($j = mu$) πού ἔχει τό ὑλικό σημεῖο κατά τή χρονική στιγμή t ἐπί τό μέτρο τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου. Δηλαδή:

$$G = mu \cdot r$$

Μονάδες στροφορμῆς.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἔχομε τή σχέση: $G = m \cdot u \cdot r$

Οἱ μονάδες τῶν μεγεθῶν m, u, r στό σύστημα S.I. εἶναι ἀντιστοίχως 1kg, 1m/s καί 1m. Ἄρα ἡ μονάδα στροφορμῆς στό σύστημα S.I. εἶναι:

$$G = m \cdot u \cdot r = 1\ kg \cdot 1\frac{m}{s} \cdot 1m = \frac{1\ kg \cdot m^2}{s}$$

Σύστημα C.G.S.

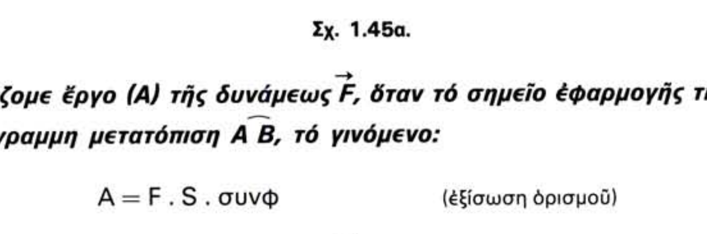
Οἱ μονάδες τῶν μεγεθῶν m, u, r στό σύστημα C.G.S εἶναι ἀντιστοίχως 1g, 1cm/s καί 1cm. Ἄρα ἡ μονάδα στροφορμῆς στό σύστημα C.G.S. εἶναι:

$$G = m \cdot u \cdot r = 1\ g\frac{1cm}{s}\ cm = \frac{1g\ cm^2}{s}$$

1.45 Ἔργο.

Ὁρισμός.

Ἔστω ὅτι τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ (σχ. 1.45α) μετατοπίζεται εὐθύγραμμα ἀπό τό Α στό Β, δηλαδή κατά τό εὐθύγραμμο τμῆμα $\vec{AB}$, καί ὅτι κατά τή μετατόπιση αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ διατηρεῖ τό ἴδιο μέτρο (σχῆμα 1.45α).



Σχ. 1.45α.

Ὀνομάζομε ἔργο (Α) τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, ὅταν τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της ὑποστεῖ τήν εὐθύγραμμη μετατόπιση $\overset{\frown}{AB}$, τό γινόμενο:

$$A = F \cdot S \cdot συνφ \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)} \tag{1}$$

ὅπου: F εἶναι τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.

S εἶναι τό μέτρο τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ (δηλαδή τῆς εὐθύγραμμης μετατοπίσεως πού ὑπέστη τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς $\vec{F}$).

φ εἶναι ἡ γωνία τῶν ἀνυσμάτων $\vec{F}$ καί $\vec{AB}$ (δηλαδή ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως μέ τή διεύθυνση τῆς μετατοπίσεως).

Τό ἔργο εἶναι μονόμετρο μέγεθος.

Παρατήρηση:

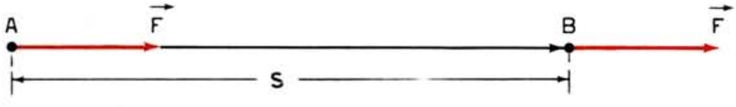
Ἔστω ὅτι τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ πού ἔχει σταθερό μέτρο (σχ. 1.45β) μετατοπίζεται εὐθύγραμμα ἀπό τό Α στό Β, καί κατά τή μετατόπιση αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά μέ τή μετατόπιση $\vec{AB}$. ***Ὀνομάζομε ἔργο (Α) τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, τό γινόμενο:***

$$A = F \cdot S \tag{2}$$

ὅπου: F εἶναι τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.

S εἶναι τό μέτρο τοῦ ἀνύσματος $\vec{AB}$ (δηλαδή τῆς εὐθύγραμμης μετατοπίσεως τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς $\vec{F}$).

Ὁ ὁρισμός (2) τοῦ ἔργου προκύπτει ἀπό τόν ὁρισμό (1), ***πού εἶναι ὁ γενικός ὁρισμός τοῦ ἔργου.***



Σχ. 1.45β.

Πραγματικά: Ὅταν ἡ διεύθυνση καί ἡ φορά τῆς δυνάμεως συμπίπτουν μέ τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς μετατοπίσεως τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της, τότε ἡ φ εἶναι: $\phi = 0$.

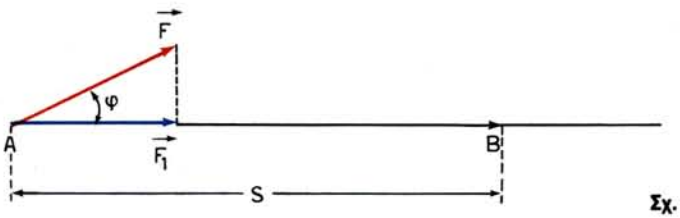
Ἐπειδή τό συν$0^\circ = 1$ ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$A = F \cdot S \cdot \text{συν}\phi = F \cdot S \cdot \text{συν}0^\circ = F \cdot S \cdot 1 = F \cdot S \quad \text{ἤ} \quad A = F \cdot S$$

Ἄλλη ἔκφραση τοῦ ἔργου μιᾶς δυνάμεως.

Ἄν προβάλλομε τή δύναμη $\vec{F}$ ἐπάνω στήν εὐθεία ὅπου βρίσκεται ἡ μετατόπιση $\vec{AB}$ (σχ. 1.45γ) παρατηροῦμε ὅτι τό μέτρο τῆς προβολῆς της $\vec{F_1}$ εἶναι:

$$F_1 = F \cdot \text{συν}\phi \tag{3}$$



Σχ. 1.45γ.

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (3) λαμβάνομε:

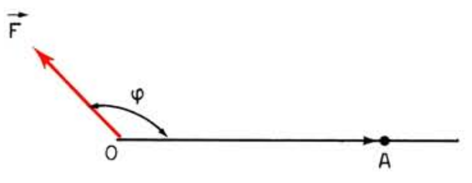
$$A = F \cdot S \cdot \text{συνφ} = F_1 \cdot S \qquad \text{καί} \qquad A = F_1 \cdot S$$

Δηλαδή, τό ἔργο μιᾶς σταθερῆς δυνάμεως, ὅταν τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της ὑποστεῖ εὐθύγραμμη μετατόπιση, ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς μετατοπίσεως ἐπί τό μέτρο τῆς προβολῆς τῆς δυνάμεως ἐπάνω στή μετατόπιση.

Ἔργο κινητήριο καί ἔργο ἀνθιστάμενο.

1) Ἄν ἡ γωνία φ (πού σχηματίζει ἡ δύναμη μέ τήν μετατόπιση) εἶναι μικρότερη ἀπό 90°, (φ< 90°) (σχ. 1.45δ), τότε τό συνφ εἶναι θετικό καί ἐπομένως τό ἔργο τῆς δυνάμεως θά εἶναι θετικό.

Σχ. 1.45δ.



Σχ. 1.45ε.

Ἄν τό ἔργο μιᾶς δυνάμεως εἶναι ***θετικό, τό ὀνομάζομε παραγόμενο ἔργο.***

Τό θετικό ἔργο μιᾶς δυνάμεως τό ὀνομάζομε ἐπίσης ***καί κινητήριο ἔργο,*** γιατί ἡ δύναμη ὄχι μόνο δέν ἀντιστέκεται στή μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της, ἀλλά ἀντίθετα συμβάλλει στή μετατόπιση αὐτή.

2) Ἄν ἡ γωνία φ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 90° καί μικρότερη ἀπό 180°, (90° < φ < 180°) (σχ. 1.45ε), τότε τό συνφ εἶναι ἀρνητικό καί ἐπομένως καί τό ἔργο τῆς δυνάμεως θά εἶναι ἀρνητικό.

Ἄν τό ἔργο μιᾶς δυνάμεως εἶναι ***ἀρνητικό, τό ὀνομάζομε καταναλισκόμενο ἔργο.***

Τό ἀρνητικό ἔργο μιᾶς δυνάμεως τό ὀνομάζομε ***καί ἀνθιστάμενο ἔργο,*** γιατί ἡ δύναμη ἀντιστέκεται στή μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της.

Σημείωση:

Λέμε ὅτι ἕνα σῶμα Α ***ἐκτελεῖ ἤ παράγει ἤ δίνει ἔργο,*** ὅταν τό ἔργο τῆς δυνάμεως τήν ὁποία τό σῶμα Α ἀσκεῖ σέ ἕνα ἄλλο σῶμα Β εἶναι θετικό ἤ κινητήριο.

Λέμε ὅτι τό σῶμα Α ***προσλαμβάνει ἤ ἀπορροφᾶ ἔργο,*** ὅταν τό ἔργο τῆς δυνάμεως τήν ὁποία κάποιο ἄλλο σῶμα Β ἀσκεῖ ἐπάνω στό Α εἶναι θετικό ἤ κινητήριο.

Ἔργο τῆς συνισταμένης δυνάμεων.

Τό ἔργο τῆς συνισταμένης δυνάμεων ἰσοῦται μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν συνιστωσῶν.

Ἂν οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ (σχ. 1.45στ) πού ἐνεργοῦν στό ἴδιο ὑλικό σημεῖο τό μεταφέρουν κατά τό τμῆμα $\vec{OA}$ καί ἔχουν συνισταμένη τήν $\vec{O\Sigma}$, τότε τό παραγόμενο ἔργο θά εἶναι:

$$A_1 = F_1' \,.\, (OA) \qquad (1)$$

$$A_2 = F_2' \,.\, (OA) \qquad (2)$$

$$A_3 = \Sigma' \, (OA) \qquad (3)$$

ὅπου: $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$ καί $\vec{\Sigma}'$ εἶναι οἱ προβολές τῶν $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$ ἐπάνω στήν (ΟΑ) καί

A_1, A_2, A_3 εἶναι τά ἀντίστοιχα ἔργα τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$.

Προσθέτομε τίς (1) καί (2) καί παίρνομε:

$$A_1 + A_2 = F_1' \, (OA) + F_2' \, (OA) = (F_1' + F_2') \, (OA)$$

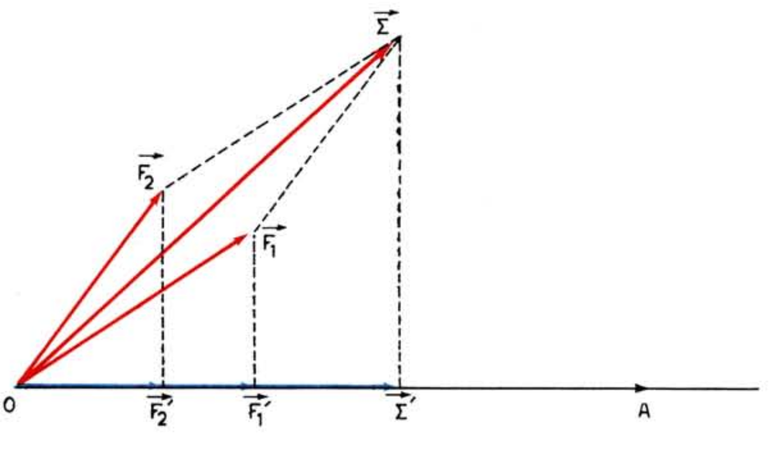
ἤ

$$A_1 + A_2 = (F_1' + F_2') \, (OA) \qquad (4)$$

Ἰσχύει ἡ σχέση: $\Sigma' = F_1' + F_2'$ (5)

Ἀπό τίς σχέσεις (4) καί (5) παίρνομε: $A_1 + A_2 = \Sigma' \,.\, (OA)$ (6)

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (6) παίρνομε: $A_3 = A_1 + A_2$



Σχ. 1.45στ.

Μονάδες ἔργου.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἡ σχέση τοῦ ἔργου εἶναι: $A = F \,.\, S \,.\,$ συνφ (1)

Ἂν βάλομε στή σχέση (1) $\phi = 0°$ παίρνομε: $A = F \,.\, S \,.\,$ συν0° (2)

Ἐπειδή εἶναι συν0° = 1 ἡ σχέση (2) μᾶς δίνει: $A = F \,.\, S$ (3)

Μονάδα δυνάμεως στό S.I. εἶναι τό 1N καί μονάδα διαστήματος εἶναι τό 1 m.

Ἄρα μονάδα ἔργου στό S.I. εἶναι:

$$A = F \,.\, S = 1N \,.\, 1m = 1 \text{ Joule} \qquad (4)$$

Ὅταν λέμε ἔργο ἑνός Joule ἐννοοῦμε τό ἔργο πού παράγεται ἀπό δύναμη 1N, ὅταν μετακινεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά 1m πρός τή διεύθυνσή της ($\phi = 0$).

Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.).

Μονάδα δυνάμεως στό Τ.Σ. εἶναι τό 1 kp καί μονάδα διαστήματος τό 1m.
Ἄρα μονάδα ἔργου στό Τ.Σ. εἶναι:

$$A = F \cdot S = 1\ kp \cdot 1\ m = 1\ kp \cdot m = 1 \text{ κιλοποντόμετρο}$$

Ὅταν λέμε ἔργο 1 kpm ἐννοοῦμε τό ἔργο πού παράγεται ἀπό μιά δύναμη 1kp, ὅταν μετακινεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά 1 m πρός τή διεύθυνσή της ($\phi = 0$).

Σύστημα C.G.S.

Μονάδα δυνάμεως στό σύστημα C.G.S. εἶναι ἡ 1 dyn καί μονάδα διαστήματος τό 1 cm. Ἄρα μονάδα ἔργου στό σύστημα C.G.S εἶναι:

$$A = F \cdot S = 1\ dyn \cdot 1\ cm = 1\ erg \text{ (1 ἔργιο)}$$

Ὅταν λέμε ἔργο ἑνός ἔργιου (1 erg) ἐννοοῦμε τό ἔργο πού παράγεται ἀπό δύναμη 1 dyn, ὅταν μετακινεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά 1cm πρός τή διεύθυνσή της ($\phi = 0$).

Σχέσεις τῶν μονάδων ἔργου:

$1\ Joule = 1\ N \cdot 1m = 10^5\ dyn \cdot 10^2 cm = 10^7 erg$ $\qquad 1\ Joule = 10^7\ erg$

$1\ kpm = 9{,}81 N \cdot 1m = 9{,}81\ Joule$ $\qquad 1\ kpm = 9{,}81\ Joule$

Στήν πράξη συνήθως θεωρεῖται: $\qquad 1\ kpm = 10\ Joule$

$1\ kpm = 9{,}81 N \cdot 1m = 9{,}81 \cdot 10^5\ dyn \cdot 10^2 cm = 9{,}81 \cdot 10^7 erg$

$$1\ kpm = 9{,}81 \cdot 10^7\ erg$$

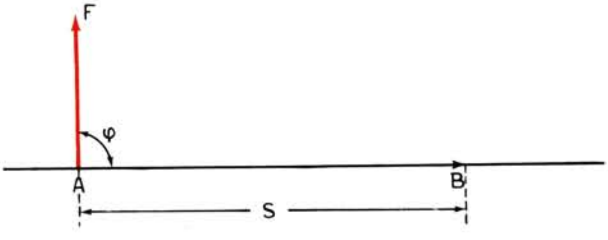
Ὑπολογισμός ἔργου σέ εἰδικές περιπτώσεις.

1) Ὅταν ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι συνεχῶς κάθετη στή μετατόπιση $(\vec{S})$ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της (σχ. 1.4 ζ), τότε τό ἔργο της εἶναι μηδέν.

Ἔχομε $\qquad A = F \cdot S \cdot \text{συν}\phi$

Ἄν $\phi = 90°$ ἔχομε $A = F \cdot s \cdot \text{συν}90°$

Καί ἐπειδή τό συν90° = 0 ἔχομε $A = F \cdot S \cdot 0$ καί $A = 0$



Σχ. 1.45ζ.

Σημείωση:

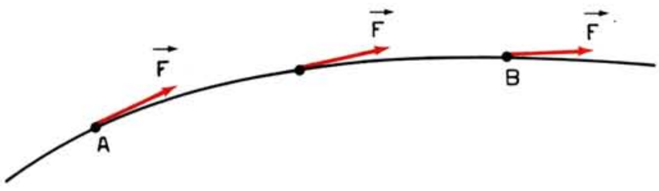
Τό ἔργο τοῦ βάρους ἑνός σώματος πού κινεῖται ἐπάνω σέ ὁριζόντιο δάπεδο εἶναι μηδέν, γιατί τό βάρος παραμένει κατά τήν κίνηση συνεχῶς κάθετο στό ὁριζόντιο δάπεδο (ἀφοῦ ἡ διεύθυνση τοῦ βάρους εἶναι συνεχῶς κατακόρυφη), δηλαδή κάθετο στή μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς.

Τό ἔργο τῆς κεντρομόλου δυνάμεως στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση εἶναι μηδέν, γιατί ἡ δύναμη αὐτή εἶναι συνεχῶς κάθετη στή μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της.

2) Ἔργο δυνάμεως ὅταν: α) Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της ἐκτελεῖ καμπυλόγραμμη κίνηση, β) τό μέτρο της παραμένει σταθερό καί γ) ἡ διεύθυνσή της εἶναι ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο τοῦ τόξου πού διαγράφει τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της.

Στήν περίπτωση αὐτή (σχ. 1.45η) τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου F τῆς δυνάμεως ἐπί τό μῆκος S τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ πού ἔγραψε τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της:

$$A = F \cdot (AB) = F \cdot S$$



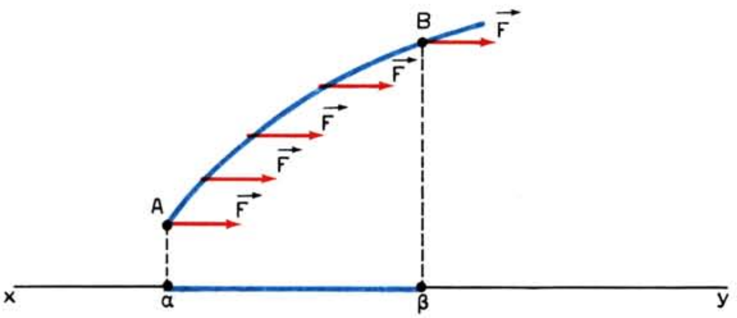
Σχ. 1.45η.

3) Ἔργο δυνάμεως ὅταν: α) Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της ἐκτελεῖ καμπυλόγραμμη κίνηση, β) τό μέτρο της παραμένει σταθερό καί γ) ἡ διεύθυνσή της παραμένει συνεχῶς παράλληλη πρός μιά ὁρισμένη εὐθεία (διεύθυνση).

Στήν περίπτωση αὐτή (σχ. 1.45θ) τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου F τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ἐπί τό μέτρο (αβ) τῆς προβολῆς τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (πού γράφει τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς $\vec{F}$) ἐπάνω στήν εὐθεία xy πρός τήν ὁποία ἡ $\vec{F}$ παραμένει συνεχῶς παράλληλη. Δηλαδή:

$$A = F\ (\alpha\beta)$$

ὅπου: (αβ) εἶναι ἡ προβολή τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ ἐπάνω στήν xy.



Σχ. 1.45θ.

4) Ὑπολογισμός τοῦ ἔργου στήν περίπτωση πού τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως μετακινεῖται ἐπάνω σέ μιά ὁποιαδήποτε τροχιά καί ἡ δύναμη μεταβάλλεται κατά τή διαδρομή ***(Γενική περίπτωση).***

Διαιροῦμε τή διαδρομή (AB) (σχ. 1.45ι) σέ διαδοχικές ἀπείρως μικρές διαδρομές (ΔS), σέ καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες ἡ δύναμη $\vec{F}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σταθερή.

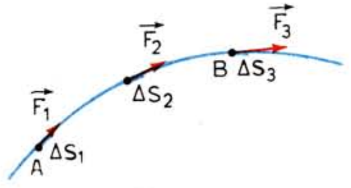
Ἔπειτα βρίσκομε τά ἔργα γιά κάθε μιά ἀπό τίς διαδρομές.

$$A_1 = F_1 \,.\, \Delta S_1 \text{ συνφ}_1$$
$$A_2 = F_2 \,.\, \Delta S_2 \text{ συνφ}_2$$
$$A_3 = F_3 \,.\, \Delta S_3 \text{ συνφ}_3$$

(κάθε μιά διαδρομή ΔS μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς εὐθύγραμμο τμῆμα, ἀφοῦ εἶναι πάρα πολύ μικρή).

Τέλος προσθέτομε τά ἔργα ὅλων αὐτῶν τῶν μικρῶν διαδρομῶν καί τό ἄθροισμα πού βρίσκομε εἶναι τό ὁλικό ἔργο, δηλαδή τό ἔργο γιά ὁλόκληρη τή διαδρομή (ΑΒ) εἶναι:

$$A_{ολ} = F_1 \Delta S_1 \text{ συνφ}_1 + F_2 \Delta S_2 \text{ συνφ}_2 + F_3 \Delta S_3 \text{ συνφ}_3 + \ldots$$



Σχ. 1.45ι.

Ἔργο βάρους.

α) Ἔργο βάρους ἑνός σώματος, ὅταν τό σῶμα ἀνυψώνεται.

Γιά νά ἀνυψώσομε τό σῶμα Σ ἀπό τή θέση Α στή θέση Γ (σχ. 1.45ια) τό ἕλκομε μέ μιά δύναμη $\vec{F}$. Τότε τό ἔργο τῆς $\vec{F}$ εἶναι:

$$A = F \,.\, (ΑΓ) \,.\, \text{συνφ} \qquad (1)$$

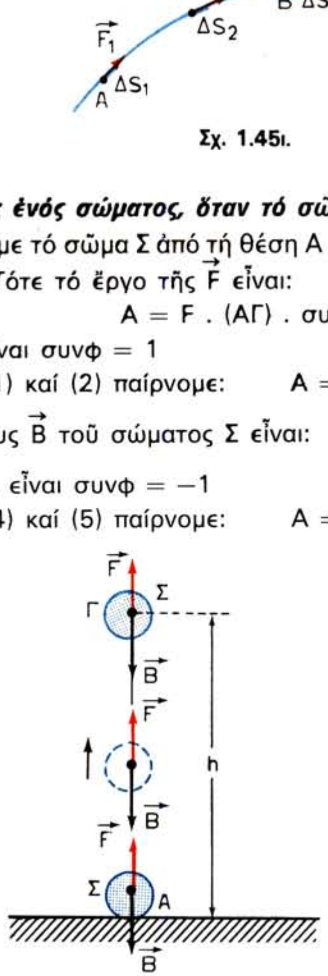
Ἐπειδή $φ = 0°$, εἶναι $\text{συνφ} = 1$ (2)

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε: $A = + F \,.\, (ΑΓ)$ (3)

Τό ἔργο τοῦ βάρους $\vec{B}$ τοῦ σώματος Σ εἶναι: $A = B \,.\, (ΑΓ) \,.\, \text{συνφ}$ (4)

Ἐπειδή $φ = 180°$, εἶναι $\text{συνφ} = -1$ (5)

Ἀπό τίς σχέσεις (4) καί (5) παίρνομε: $A = - B \,.\, (ΑΓ)$ (6)



Σχ. 1.45ια.

Ὥστε:

1) Γιά νά ἀνυψωθεῖ ἕνα σῶμα, πρέπει νά τοῦ δώσομε ἔργο. Στήν περίπτωση πού ἐξετάζομε, τό ἔργο αὐτό εἶναι τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ (σχέση 3).
2) Ὅταν ἀνυψώνεται ἕνα σῶμα, τό βάρος του $\vec{B}$ καταναλώνει ἕνα ἔργο (σχέση 6), γιατί τό ἔργο τοῦ βάρους $\vec{B}$ τοῦ σώματος εἶναι ἀρνητικό ($φ = 180°$). (Τό

βάρος $\vec{B}$ ἀντιστέκεται στήν ἀνύψωση καί τό ἔργο του εἶναι ἀνθιστάμενο).

3) Τό ἔργο τοῦ βάρους Β ἑνός σώματος (σχέση 6), ὅταν ἀνυψώνομε τό σῶμα κατακόρυφα (βλέπε τήν παρακάτω σημείωση) ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ βάρους Β ἐπί τό μέτρο τοῦ ὕψους στό ὁποῖο ἀνυψώνομε τό σῶμα:

$$A = -B \cdot h$$

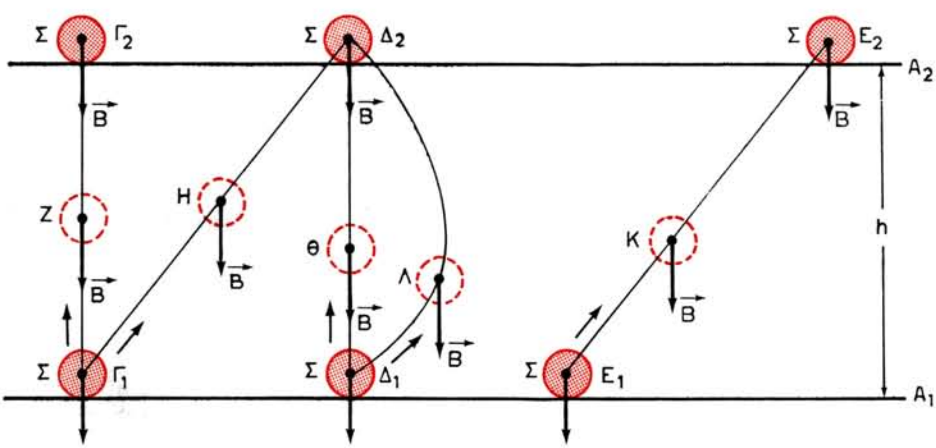
Παρατήρηση:

Τό (—) σημαίνει ὅτι ἡ φορά τοῦ βάρους $\vec{B}$ τοῦ σώματος εἶναι ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς ἀνυψώσεως, δηλαδή πρός τή φορά τῆς μετατοπίσεως τοῦ σώματος ($\phi = 180^\circ$).

Σημείωση:

Γενικά τό ἔργο πού καταναλώνει τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος Σ κατά τή μετακίνηση τοῦ σώματος αὐτοῦ ἀπό ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο A_1 σέ ἕνα ἄλλο ὁριζόντιο ἐπίπεδο A_2 (1.45ιβ) ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου Β τοῦ βάρους τοῦ σώματος ἐπί τήν κατακόρυφη ἀπόσταση (h) τῶν δύο ἐπιπέδων A_1 καί A_2 ἀνεξάρτητα ἀπό τό δρόμο πού θά ἀκολουθήσει τό σῶμα κατά τήν ἀνύψωσή του:

$$A_{\Gamma_1 Z \Gamma_2} = A_{\Gamma_1 H \Delta_2} = A_{\Delta_1 \Theta \Delta_2} = A_{\Delta_1 \Lambda \Delta_2} = A_{E_1 K E_2} = -B \cdot h$$



Σχ. 1.45ιβ.

β) Ἔργο τοῦ βάρους $\vec{B}$ ἑνός σώματος, ὅταν τό σῶμα κατέρχεται (σχ. 1.45ιγ).

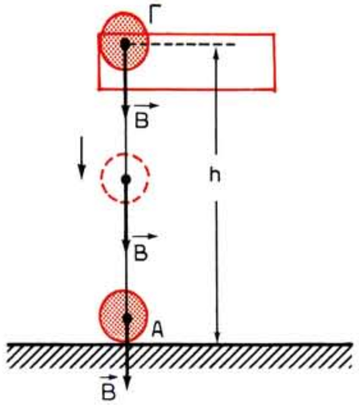
Τό ἔργο τοῦ βάρους $\vec{B}$ ἑνός σώματος Σ, ὅταν τό σῶμα κατέρχεται ἀπό τό σημεῖο Γ στό σημεῖο Α, εἶναι:

$$A = B \cdot (\Gamma A) \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$$

Καί ἐπειδή $\phi = 0^\circ$ καί $\sigma\upsilon\nu\phi = 1$, ἔχομε: $\quad A = +B \cdot (\Gamma A)$

Ὥστε:

1) Ὅταν ἕνα σῶμα κατέρχεται, τό βάρος του $\vec{B}$ παράγει ἔργο τό ὁποῖο εἶναι θετικό ($\phi = 0^\circ$).



Σχ. 1.45ιγ.

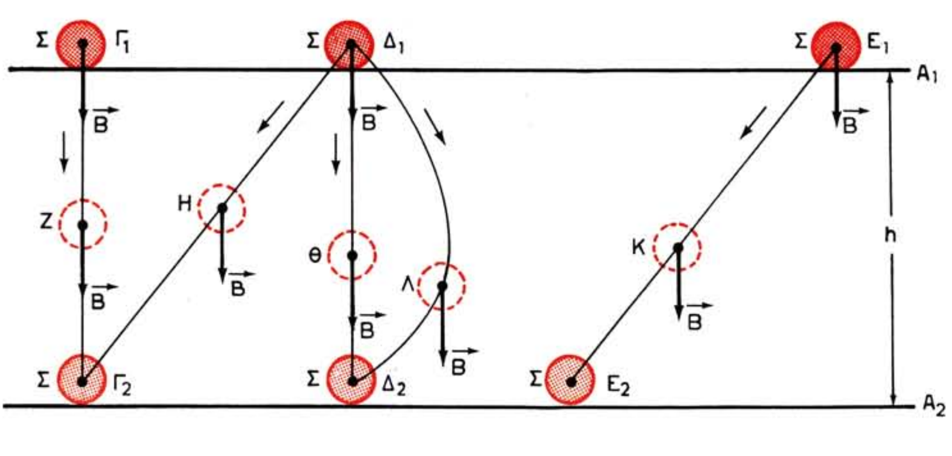
2) Τό ἔργο τοῦ βάρους ἑνός σώματος πού κατέρχεται κατακόρυφα (βλέπε τήν παρακάτω σημείωση) ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ βάρους $\vec{B}$ ἐπί τό μέτρο τοῦ ὕψους h ἀπό τό ὁποῖο ἔπεσε.

$$A = B \, . \, h$$

Σημείωση:

Γενικά τό ἔργο πού παράγεται ἀπό τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος κατά τή μετακίνηση τοῦ σώματος αὐτοῦ ἀπό ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο A_1 πρός ἄλλο ὁριζόντιο ἐπίπεδο A_2 (σχ. 1.45ιδ) ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου $\vec{B}$ τοῦ βάρους τοῦ σώματος ἐπί τήν κατακόρυφη ἀπόσταση (h) τῶν δύο ἐπιπέδων A_1 καί A_2, ***ἀνεξάρτητα ἀπό τό δρόμο πού θά ἀκολουθήσει τό σῶμα κατά τήν κάθοδό του.***

$$A_{\Gamma_1 Z \Gamma_2} = A_{\Delta_1 H \Gamma_2} = A_{\Delta_1 \Theta \Delta_2} = A_{\Delta_1 \Lambda \Delta_2} = A_{E_1 K E_2} = B \, . \, h$$



Σχ. 1.45ιδ.

Ἔργο σέ κεκλιμένο ἐπίπεδο.

Ἔστω ὅτι σῶμα Σ ὀλισθαίνει χωρίς τριβή ἀπό τή θέση Α στή θέση Γ (σχ. 1.45ιε). Τότε στό σῶμα ἐπιδροῦν δύο δυνάμεις: Ἡ $\vec{F}_\kappa$ καί τό βάρος τοῦ σώματος $\vec{B}$.

Ἡ $\vec{F}_\kappa$ πού τό κεκλιμένο ἐπίπεδο ἀσκεῖ ἐπάνω στό σῶμα Σ εἶναι κάθετη σ' αὐτό (ἀφοῦ τό σῶμα ὀλισθαίνει ἐπάνω του χωρίς τριβή) καί ἄρα τό ἔργο της εἶναι μηδέν.

Τό ἔργο τοῦ βάρους $\vec{B}$ τοῦ σώματος Σ εἶναι: $\quad A = B\ (A\Gamma)\ .\ \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$

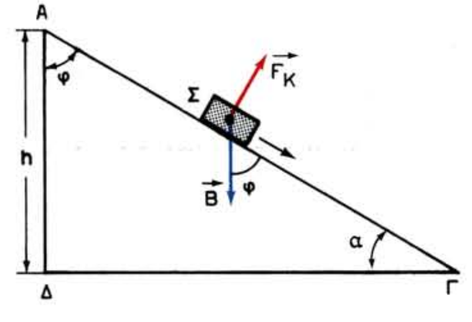
Ἐπειδή ὅμως $\varphi + \alpha = 90°$, ἰσχύει ἡ σχέση: $\quad \sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\alpha$

καί ἑπομένως ἡ σχέση (1) γράφεται: $\quad A = B\ (A\Gamma)\ .\ \eta\mu\alpha \qquad (2)$

Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ἔχομε: $\quad \eta\mu\alpha = \dfrac{(A\Delta)}{(A\Gamma)}$

ἄρα ἡ σχέση (2) μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$A = B\ (A\Gamma)\ .\ \frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)} = B\ (A\Delta) \qquad \text{καί} \qquad A = B\ (A\Delta) = B\ .\ h \qquad (3)$$



Σχ. 1.45ιε.

Παρατήρηση:

Ἄν τό σῶμα ἀφηνόταν νά πέσει κατακόρυφα ἀπό τό Α στό Δ, τό βάρος τοῦ $\vec{B}$ θά ἔδινε ἔργο: $A = B\ (A\Delta)$, δηλαδή ὅσο δίνει ὅταν ὀλισθαίνει κατά τό δρόμο ΑΓ.

Ἔτσι καταλήγομε καί ἐδῶ στό συμπέρασμα ὅτι:

Τό ἔργο πού παράγει τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς διαδρομῆς καί πάντοτε εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ βάρους $\vec{B}$ τοῦ σώματος ἐπί τό ὕψος πού πέφτει.

Γραφική παράσταση ἔργου δυνάμεως τῆς ὁποίας μεταβάλλεται τό μέτρο.

Ἔστω ὅτι μία δύναμη $\vec{F}$ ἔχει σταθερή διεύθυνση καί φορά καί μετατοπίζει τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά τή διεύθυνσή της καί ὅτι κατά τήν μετατόπιση τό μέτρο τῆς δυνάμεως συνεχῶς μεταβάλλεται. Ἔστω ἐπίσης, ὅτι τό μέτρο της δυνάμεως δίνεται σέ συνάρτηση μέ τή μετατόπιση (S) ἀπό τή σχέση:

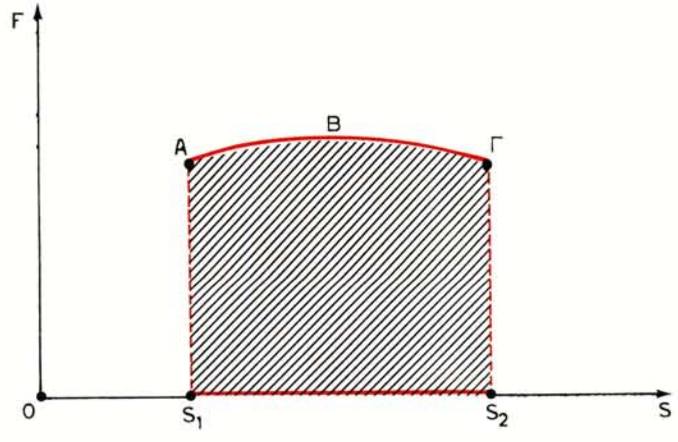
$$F = f\ (S) \qquad (1)$$

Ἔστω ἀκόμη ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως $F = f(S)$ εἶναι ἡ καμπύλη ΑΒΓ (σχ. 1.45ιστ).

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Τό ἔργο Α τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, ὅταν μετατοπίζει τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της ἀπόσταση (S_1S_2), ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό Ε τῆς ἐπιφάνειας $(S_1ΑΒΓS_2)$ πού ορίζεται μεταξύ τῆς καμπύλης ΑΒΓ [γραφική παράσταση τῆς $F = f(S)$], τοῦ ἄξονα τῶν μετατοπίσεων OS καί τῶν καθέτων πρός τόν ἄξονα αὐτό, πού ἄγονται ἀπό τά σημεῖα του τά ὁποῖα παριστάνουν τήν ἀρχική (S_1) καί τήν τελική (S_2) θέση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως. Δηλαδή:

$$A = E \qquad \text{τῆς } (S_1ΑΒΓS_2)$$



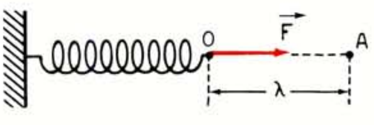
Σχ. 1.45ιστ.

Σημείωση:

Τό σχῆμα 1.45ιστ παριστᾶ τό διάγραμμα ἔργου δυνάμεως σταθερᾶς διευθύνσεως καί φορᾶς ἀλλά μεταβλητοῦ μέτρου, πού μεταθέτει τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά τήν διεύθυνσή της.

Ἐφαρμογή:

Ἐπιμηκύνομε τό ἐλατήριο (σχ. 1.45ιζ) κατά ΟΑ. Τό μέτρο τῆς δυναμεως $\vec{F}$ μέ τήν ὁποία τραβᾶμε τό ἐλατήριο γιά νά τό ἐπιμηκύνουμε κατά ΟΑ δέν παραμένει σταθερό.



Σχ. 1.45ιζ.

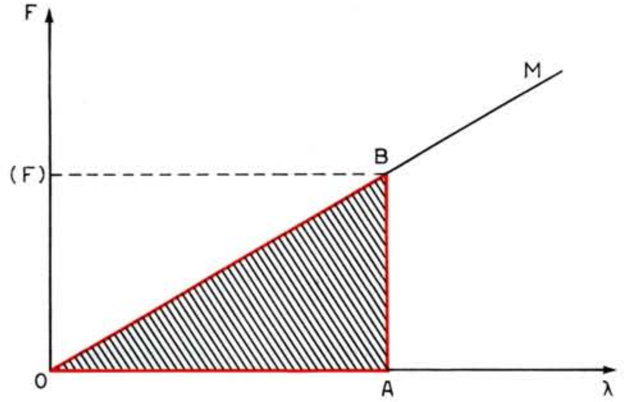
Ἡ δύναμη ἡ ὁποία προκαλεῖ ἐπιμήκυνση λ ἑνός ἐλατηρίου εἶναι ἀνάλογη τῆς ἐπιμηκύνσεως αὐτῆς λ, δηλαδή: $F = D \cdot λ$ (νόμος τοῦ Hooke) (1)

ὅπου: D σταθερός συντελεστής πού ὀνομάζεται συντελεστής σκληρότητας τοῦ ἐλατηρίου ἤ ἁπλῶς σταθερά του καί ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση καί τίς διαστάσεις τοῦ ἐλατηρίου.

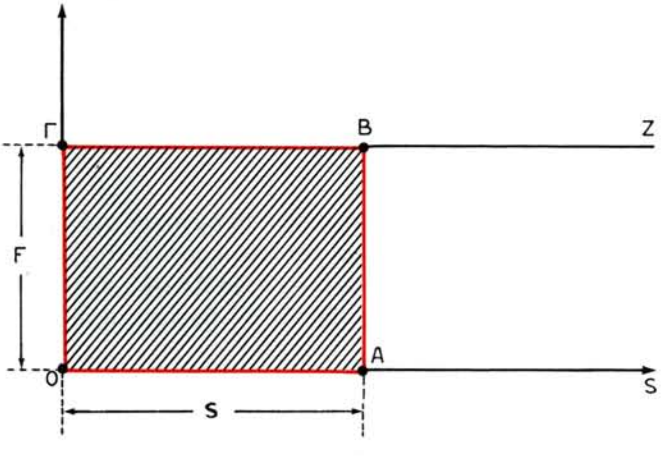
Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $F = D . \lambda$ εἶναι ἡ εὐθεία ΟΜ (σχ. 1.45ιη).

Τό ἔργο Α τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ κατά τήν ἐπιμήκυνση ἔστω (ΟΑ) ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΟΑΒ. Γιατί τό τρίγωνο ΟΑΒ περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς εὐθείαα ΟΜ (γραφική παράσταση τῆς $F = D . \lambda$), τοῦ ἄξονα τῶν ἐπιμηκύνσεων λ καί τῶν καθέτων ἐπάνω σ' αὐτόν πού ἄγονται ἀπό τά σημεῖα $\lambda = 0$ καί $\lambda = (OA)$.

Ἔχομε:
$$A = \frac{1}{2} (AB)\,(OA) \tag{2}$$
$$(AB) = F = D . \lambda = D\,(OA) \tag{3}$$
ὅπου: F εἶναι τό μέτρο τῆς δυνάμεως ὅταν ἡ ἐπιμήκυνση εἶναι ΟΑ.
Ἀπό τίς (2) καί (3) λαμβάνομε:
$$A = \frac{1}{2} . D . (OA) . (OA) \qquad \text{καί} \qquad A = \frac{1}{2} D . (OA)^2 \tag{4}$$



Σχ. 1.45ιη.



Σχ. 1.45ιθ.

Σημείωση:

Γιά τό ἔργο Α μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}$ σταθερῆς (κατά μέτρο διεύθυνση καί φορά) πού μεταθέτει τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της ἀπόσταση S καί κατά τή διεύθυνσή της ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{A = F \cdot S} \qquad (5)$$

Ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως (5) εἶναι ἡ γραμμή ΓΖ (σχ. 1.45ιθ). Ἄρα τό ἔργο τῆς $\vec{F}$ κατά τήν μετατόπιση ΟΑ ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ.

1.46 Ἰσχύς.

Ἰσχύς δυνάμεως.

Ὀνομάζομε ἰσχύ (Ν) μιᾶς δυνάμεως ἡ ὁποία παράγει ἤ καταναλώνει ***ἴσα ἔργα σέ ἴσους χρόνους,*** τό πηλίκο τοῦ ἔργου (Α), πού παράγει ἤ καταναλώνει μέσα σέ χρόνο t, διά τοῦ χρόνου t. Δηλαδή:

$$N = \frac{A}{t} \qquad \text{(ἐξίσωση ὁρισμοῦ)}$$

Ἰσχύς μηχανῆς.

Ὅταν λέμε ἰσχύ μηχανῆς ἐννοοῦμε τήν ἰσχύ τῶν δυνάμεων πού ἀναπτύσσει ἡ μηχανή αὐτή.

Ἡ ἰσχύς (Ν) μιᾶς μηχανῆς εἶναι σημαντικό χαρακτηριστικό της, γιατί, ἄν γνωρίζομε τήν ἰσχύ της, μποροῦμε νά βροῦμε τό ἔργο Α πού μπορεῖ ἡ μηχανή αὐτή νά παράγει ἤ νά καταναλώσει σέ χρόνο t:

$$N = \frac{A}{t} \qquad \text{καί} \qquad A = N \cdot t$$

Σημείωση:

Ἡ ἰσχύς μιᾶς μηχανῆς (ἤ δυνάμεως) εἶναι ***μονόμετρο μέγεθος*** καί παρέχει ***τό ρυθμό*** μέ τόν ὁποῖο ἡ μηχανή (ἤ δύναμη) παράγει ἤ καταναλώνει ἔργο.

Μέση ἰσχύς — Στιγμιαία ἰσχύς.

Ἄν ἡ μηχανή (ἤ δύναμη) ***δέν*** παράγει ἤ ***δέν*** καταναλώνει ἴσα ποσά ἔργου σέ ἴσους χρόνους, τότε χρησιμοποιοῦμε τίς ἔννοιες: Μέση ἰσχύς μηχανῆς (ἤ δυνάμεως) καί Στιγμιαία ἰσχύς μηχανῆς (ἤ δυνάμεως).

α) Μέση ἰσχύς ($\bar{N}$) μηχανῆς (ἤ δυνάμεως) σέ χρόνο t ὀνομάζομε τό πηλίκο:

$$N = \frac{A}{t}$$

ὅπου: Α τό ἔργο πού παράγει ἤ καταναλώνει ἡ μηχανή (ἤ δύναμη) στό χρόνο t.

β) Στιγμιαία ἰσχύς (Ν) μηχανῆς (ἤ δυνάμεως) κατά τή χρονική στιγμή t_1.
Ἔστω ὅτι ἡ μηχανή (ἤ δύναμη) παράγει ἤ καταναλώνει ἔργο ΔΑ σέ χρόνο $(t_2 - t_1)$.

Ὀνομάζομε στιγμιαία ἰσχύ (Ν) τῆς μηχανῆς (ἤ τῆς δυνάμεως) αὐτῆς κατά τή χρονική στιγμή t_1 τό πηλίκο:

$$N = \frac{\Delta A}{(t_2 - t_1)}$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τό χρονικό διάστημα ($t_2 - t_1$) εἶναι πάρα πολύ μικρό, ὥστε ἡ χρονική στιγμή t_2 νά εἶναι πάρα πολύ κοντά στή χρονική στιγμή t_1.

Μονάδες ἰσχύος.
Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἡ σχέση ὁρισμοῦ τῆς ἰσχύος εἶναι: $N = \dfrac{A}{t}$

Μονάδα ἔργου στό S.I. εἶναι τό Joule καί μονάδα χρόνου τό 1s.

Ἄρα μονάδα ἰσχύος στό S.I. εἶναι: $N = \dfrac{A}{t} = \dfrac{1\ \text{Joule}}{1\ \text{s}} = 1\ \text{W}$

Ὅταν λέμε ὅτι μιά μηχανή ἔχει ἰσχύ 1 W (ἕνα Watt) ἐννοοῦμε ὅτι ἡ μηχανή αὐτή παράγει ἔργο 1 Joule μέσα σέ χρόνο 1 s.

Τό 1 κιλοβάττ (1 kilowatt ἤ 1 kW) καί 1 μεγαβάττ (1 Megawatt ἤ 1 MW) εἶναι πολλαπλάσια τοῦ watt.

$$1\ \text{kW} = 10^3\ \text{W} \quad \text{καί} \quad 1\ \text{MW} = 10^6\ \text{W}$$

Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.).

Μονάδα ἔργου στό Τ. Σ. εἶναι τό 1 kpm καί μονάδα χρόνου τό 1s.

Ἄρα μονάδα ἰσχύος στό Τ. Σ. εἶναι: $N = \dfrac{A}{t} = \dfrac{1\ \text{kpm}}{\text{s}}$

Σύστημα C.G.S.

Μονάδα ἔργου στό σύστημα C.G.S εἶναι τό 1 erg καί μονάδα χρόνου τό 1s.
Ἄρα μονάδα ἰσχύος στό σύστημα C.G.S. εἶναι:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{1\ \text{erg}}{1\ \text{s}} = \frac{1\ \text{erg}}{\text{s}}$$

Σημείωση:

Στήν πράξη χρησιμοποιοῦνται καί οἱ ἑξῆς μονάδες:

α) Ὁ ἀτμόιππος (ἤ ἵππος) πού συμβολίζεται μέ 1 CV ἤ μέ 1 PS.

Ὅταν λέμε ὅτι μιά μηχανή ἔχει ἰσχύ ἕνα ἀτμόιππο ***ἐννοοῦμε ὅτι ἡ μηχανή αὐτή παράγει ἔργο 75 κιλοποντόμετρα σέ ἕνα δευτερόλεπτο.*** Δηλαδή:

$$1\ \text{CV} = 1\ \text{PS} = \frac{75\ \text{kpm}}{\text{s}}$$

β) Ὁ ἀγγλικός ἵππος πού συμβολίζεται μέ 1 Hp.

Ὅταν λέμε ὅτι μιά μηχανή ἔχει ἰσχύ ἑνός ἀγγλικοῦ ἵππου ***ἐννοοῦμε ὅτι ἡ μηχανή αὐτή παράγει ἔργο 76 κιλοποντόμετρα σέ ἕνα δευτερόλεπτο.*** Δηλαδή:

$$1\ \text{Hp} = \frac{76\ \text{kpm}}{\text{s}}$$

Σχέσεις μεταξύ τῶν μονάδων ἰσχύος:

α) $1\ \text{W} = \dfrac{1\ \text{Joule}}{\text{s}} = \dfrac{10^7\ \text{erg}}{\text{s}}$

β) $\dfrac{1\ \text{kpm}}{\text{s}} = \dfrac{9{,}81\ \text{Joule}}{\text{s}} = 9{,}81\ \text{W}$

γ) 1 CV ἤ 1 PS $= 75 \dfrac{\text{kpm}}{\text{s}} = 75 \times 9{,}81 \dfrac{\text{Joule}}{\text{s}} = 736\ \text{W}$

δ) $1\ \text{Hp} = 76 \dfrac{\text{kpm}}{\text{s}} = 76 \times 9{,}81 \dfrac{\text{Joule}}{\text{s}} = 746\ \text{W}$

ε) $1\ \text{kW} = 10^3\ \text{W} = \dfrac{10^3}{736}\ \text{CV} = 1{,}36\ \text{CV}$

1.47 Μεγάλες μονάδες ἔργου.

Βαττώριο (1 Wh).

Ἔχομε τή σχέση: $N = \dfrac{A}{t}$ (1)

Ἀπό τή σχέση (1) παίρνομε: $A = N\ .\ t$ (2)

Ἄν πάρομε $N = 1$ Watt καί $t = 1$ h, ἀπό τή σχέση (2) παίρνομε:

$$A = N\ .\ t = 1\ \text{W}\ .\ 1\text{h} = 1\ \text{Wh} = 1\ \text{Βαττώριο}$$

Ὅταν λέμε ἔργο ἑνός Βαττώριου ***ἐννοοῦμε τό ἔργο πού παράγει μιά μηχανή ἰσχύος ἑνός Watt (N = 1 W) σέ μία ὥρα (t = 1h).***

Κιλοβαττώριο (1 KW . h).

Ἄν πάρομε $N = 1$ kW καί $t = 1$h, ἀπό τή σχέση (2) παίρνομε:

$$A = N\ .\ t = 1\ \text{kW}\ .\ 1\text{h} = 1\ \text{kWh} = 1\ \text{Κιλοβαττώριο}$$

Ὅταν λέμε ἔργο ἑνός κιλοβαττώριου ***ἐνοοῦμε τό ἔργο πού παράγει μιά μηχανή ἰσχύος ἑνός κιλοβάττ (N = 1 kW) σέ μιά ὥρα (t = 1h).***

Σημείωση:

$1\ \text{Wh} = \dfrac{1\ \text{Joule}}{\text{s}} \cdot 3600\ \text{s} = 3600\ \text{Joule}$ $\qquad 1\ \text{Wh} = 3600\ \text{Joule}$

$1\ \text{kWh} = 1000\ \text{W}\ .\ 1\text{h} = 1000\ \text{Wh}$

$1\ \text{KWh} = 1000\ \text{W}\ .\ 1\text{h} = 1000 \dfrac{\text{Joule}}{\text{s}} \cdot 3600\ \text{s}$ $\qquad 1\ \text{kWh} = 3{,}6\ .\ 10^6\ \text{Joule}$

1.48 Γενικά περί ἐνέργειας.

Παρατήρηση:

Ὅσα ἀναφέρονται γιά τήν ἐνέργεια σώματος στίς παραγράφους 1.48 καί 1.49 ἰσχύουν καί γιά τό ὑλικό σημεῖο μέ μοναδική ἐξαίρεση τήν ἐνέργεια λόγω παραμορφώσεων.

Λέμε ὅτι ἕνα σῶμα ἔχει ἐνέργεια ὅταν μπορεῖ νά ἐκτελέσει (νά παραγάγει) ἔργο. Ὀνομάζομε ἐνέργεια Ε ἑνός σώματος τό ἔργο πού μπορεῖ νά παραγάγει τό σῶμα αὐτό.

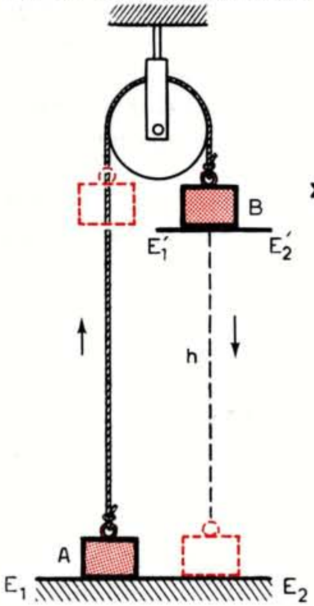
Ἕνα συσπειρωμένο ἐλατήριο λέμε ὅτι ἔχει ἐνέργεια, γιατί, ἄν βάλομε ἐπάνω του ἕνα σῶμα Α, μπορεῖ νά τό ἐκτινάξει, δηλαδή τό συσπειρωμένο ἐλατήριο μπορεῖ νά παραγάγει ἔργο.

Τό σῶμα Α, ἐξάλλου, γιά νά ἐκτιναχθεῖ, ἀπορρόφησε ἀπό τό ἐλατήριο — κατά τήν ἐκσπείρωση — κάποιο ἔργο. Τό ἔργο αὐτό πού παρήγαγε τό ἐλατήριο κατά τήν ἐκσπείρωσή του εἶναι ἡ ἐνέργεια πού εἶχε τό ἐλατήριο ὅταν ἦταν συσπειρωμένο.

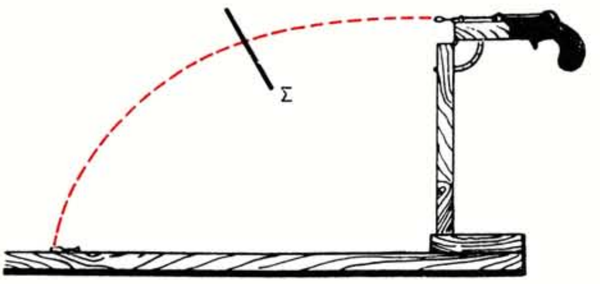
Ὅταν σῶμα Β βρίσκεται ἐπάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο $E_1' E_2'$ (σχ. 1.48α), λέμε ὅτι ἔχει ἐνέργεια ὡς πρός τό ἐπίπεδο E_1E_2, γιατί τό σῶμα Β μπορεῖ νά παραγάγει ἔργο.

Πραγματικά τό σῶμα Β μπορεῖ νά ἀνυψώσει τό σῶμα Α, ἄν ἀποσύρομε τό ὑποστήριγμά του $E_1' E_2'$, ὁπότε καί παράγει ἔργο.

Τό σῶμα Α, γιά νά ἀνυψωθεῖ ἀπό τό E_1E_2 στό $E_1' E_2'$, ἀπορροφᾶ ἔργο. Τό ἔργο αὐτό, πού τοῦ τό ἔδωσε τό σῶμα Β καθώς ἔπεφτε, εἶναι ἡ ἐνέργεια τοῦ σώματος Β ὅταν τό σῶμα βρισκόταν στό ἐπίπεδο $E_1' E_2'$.



Σχ. 1.48α.



Σχ. 1.48β.

Ἕνα κινούμενο βλῆμα ὅπλου (σχ. 1.48β) λέμε ὅτι ἔχει ἐνέργεια γιατί, ὅταν συναντήσει π.χ. μιά σανίδα Σ, μπορεῖ νά τή διαπεράσει συντρίβοντας τίς ἶνες τοῦ ξύλου, δηλαδή μπορεῖ νά παραγάγει ἔργο. Γιά νά συντριβοῦν οἱ ἶνες τοῦ ξύλου, καταναλώθηκε βεβαίως κάποιο ἔργο. Τό ἔργο αὐτό τό ἔδωσε (τό παρήγαγε) τό βλῆμα.

Σημείωση:

Εὐνόητο εἶναι ὅτι τήν ἐνέργεια, ἀφοῦ εἶναι ἔργο, τή μετρᾶμε μέ μονάδες ἔργου.

1.49 Μορφές μηχανικῆς ἐνέργειας.

Οἱ μορφές τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας εἶναι: ***ἡ δυναμική καί ἡ κινητική ἐνέργεια.***

Α) Δυναμική ἐνέργεια.

Ὁρισμός.

Δυναμική ἐνέργεια ὀνομάζεται ***ἡ ἐνέργεια τήν ὁποία ἔχει ἕνα σῶμα λόγω τῆς θέσεως ἤ τῆς καταστάσεώς του.***

Ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ συσπειρωμένου ἐλατηρίου εἶναι ἡ ἐνέργεια πού ὀφείλεται στήν κατάσταση (δηλαδή στή συσπείρωση) τοῦ ἐλατηρίου.

῾Η δυναμική ἐνέργεια ἑνός σώματος πού βρίσκεται σέ κάποιο ὕψος ἐπάνω ἀπό ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο εἶναι ἡ ἐνέργεια πού ὀφείλεται στή θέση τοῦ σώματος αὐτοῦ ὡς πρός τό ἐπίπεδο.

Μέτρηση τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας.

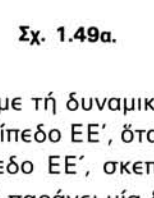
Γιά νά βρεθεῖ ἕνα σῶμα σέ μιά θέση ἤ κατάσταση, καταναλώνει (ἀπορροφᾶ - ἐναποθηκεύει) ἕνα ἔργο πού τό παρήγαγε ἡ δύναμη, ἡ ὁποία ἔφερε τό σῶμα στή θέση ἤ στήν κατάσταση πού βρίσκεται.

Αὐτό τό ἔργο πού ἀπορροφᾶ ἕνα σῶμα γιά νά βρεθεῖ σέ μιά θέση ἤ μιά κατάσταση, εἶναι ἴσο μέ τή δυναμική του ἐνέργεια, δηλαδή εἶναι ἴσο μέ τό ἔργο πού τό ἴδιο τό σῶμα μπορεῖ νά τό ἀποδώσει κατά τήν ἐπάνοδό του στήν προηγούμενη θέση ἤ κατάσταση.

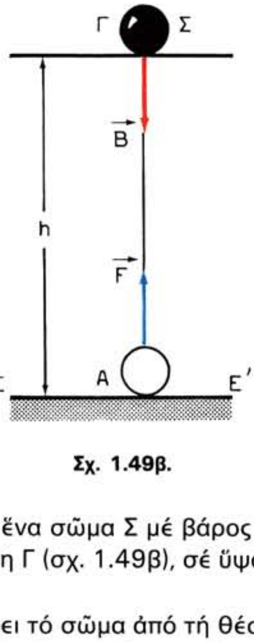
῾Επομένως, ***γιά νά βροῦμε (νά μετρήσομε) τή δυναμική ἐνέργεια ἑνός σώματος, ἀρκεῖ νά βροῦμε (νά μετρήσομε) τό ἔργο πού παρήγαγε ἡ δύναμη ἐκείνη πού ἐπέδρασε στό σῶμα (καί τό ὁποῖο ἀπορροφήθηκε ἀπό αὐτό) γιά νά ἀποκτήσει τή θέση ἤ τήν κατάσταση στήν ὁποία βρίσκεται.***

Γιά νά βροῦμε π.χ. τή δυναμική ἐνέργεια πού ἔχει ἕνα ἐλατήριο (σχ. 1.49α), ὅταν ἔχει συσπειρωθεῖ κατά x, βρίσκομε τό ἔργο πού παράγει μία δύναμη πού χρειάζεται νά ἀσκηθεῖ ἐπάνω στό ἐλατήριο γιά νά τό συσπειρώσει κατά x. Τό ἔργο αὐτό εἶναι $A = {}^1/_2\, D \,.\, x^2$. Ἄρα ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ συσπειρωμένου ἐλατηρίου κατά x εἶναι:

$$E_\delta = {}^1/_2\, Dx^2$$



Σχ. 1.49α.



Σχ. 1.49β.

Γιά νά βροῦμε τή δυναμική ἐνέργεια πού ἔχει ἕνα σῶμα Σ μέ βάρος $\vec{B}$ ὡς πρός τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο ΕΕ΄, ὅταν βρίσκεται στή θέση Γ (σχ. 1.49β), σέ ὕψος h ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο ΕΕ΄, σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Τό ἔργο πού παράγει μία δύναμη $\vec{F}$, γιά νά φέρει τό σῶμα ἀπό τή θέση Α τοῦ ὁριζόντιου ἐπιπέδου ΕΕ΄ στή θέση Γ, εἶναι $A = Bh$. Ἄρα ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ σώματος, ὅταν βρίσκεται στή θέση Γ ***ὡς πρός τό ἐπίπεδο*** ΕΕ΄, εἶναι:

$$E_\Delta = B\,h$$

Σημείωση:
Ἡ δυναμική ἐνέργεια ἑνός σώματος ἀναφέρεται ὡς πρός ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο ἤ ὡς πρός μία κατάστασή του.

Β) Κινητική ἐνέργεια.

Ὁρισμός.

Ὀνομάζομε κινητική ἐνέργεια σώματος ***τήν ἐνέργεια πού ἔχει λόγω τῆς ταχύτητάς του.***

Ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ κινούμενου βλήματος ἑνός ὅπλου εἶναι ἐνέργεια πού ὀφείλεται στήν ταχύτητα πού ἔχει τό βλῆμα. Ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ ἀέρα εἶναι ἐνέργεια πού ὀφείλεται στήν ταχύτητα τοῦ ἀέρα.

Μέτρηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας.

Γιά νά ἀποκτήσει ἕνα σῶμα μιά ταχύτητα υ πρέπει νά ἐνεργήσει ἐπάνω του μία δύναμη, ἡ ὁποία, ἀφοῦ τό ἐπιταχύνει, θά τοῦ δώσει τήν ταχύτητα αὐτή.

Ἡ δύναμη ὅμως πού ἐνήργησε στό σῶμα καί τοῦ ἔδωσε τήν ταχύτητα υ παρήγαγε κάποιο ἔργο. Τό ἔργο αὐτό τό ἀπορρόφησε τό σῶμα καί εἶναι ἴσο μέ τήν κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος τή στιγμή πού ἔχει ταχύτητα υ.

Ἐπομένως, ***γιά νά μετρήσομε τήν κινητική ἐνέργεια ἑνός σώματος, τή στιγμή πού ἔχει ταχύτητα (υ) ἀρκεῖ νά μετρήσομε τό ἔργο πού παρήγαγε ἡ δύναμη ἐκείνη ἡ ὁποία ἐπέδρασε στό σῶμα ὥσπου νά τοῦ προσδώσει τήν ταχύτητα (υ).***

Ἀποδεικνύεται ὅτι τό ἔργο πού παράγει μιά δύναμη $\vec{F}$, ὅταν ἐνεργεῖ σέ ἕνα σῶμα μέ μάζα m, ὥσπου νά τοῦ προσδώσει ταχύτητα υ, εἶναι: $A = {}^1/_2\, m\upsilon^2$

Ἐπομένως, ἡ κινητική ἐνέργεια ἑνός σώματος μάζας m, ὅταν ἔχει ταχύτητα υ, εἶναι:

$$E_\kappa = {}^1/_2\, m\, \upsilon^2$$

Γ) Μετατροπή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας σέ δυναμική καί τῆς δυναμικῆς σέ κινητική. Θεώρημα (ἤ ἀρχή) διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας.

1) Ἕνα σῶμα εἶναι δυνατό νά ἔχει συγχρόνως καί δυναμική ἐνέργεια (λόγω τῆς θέσεώς του ἤ λόγω τῆς καταστάσεώς του) καί κινητική ἐνέργεια (λόγω τῆς ταχύτητάς του).

Ἔστω ὅτι σῶμα Σ πού ἔχει βάρος $\vec{B}$ πέφτει κατακόρυφα (σχ. 1.49γ) καί ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t βρίσκεται στή θέση Α. Τότε τό σῶμα ἔχει:

α) δυναμική ἐνέργεια ὡς πρός τό ἐπίπεδο ΕΕ΄ ἴση μέ $E_\Delta = B\, h$ καί

β) κινητική ἐνέργεια ἴση μέ $E_\kappa = {}^1/_2\, m\, \upsilon_1^2$.

ὅπου: υ_1 ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος κατά τή χρονική στιγμή t στή θέση Α.

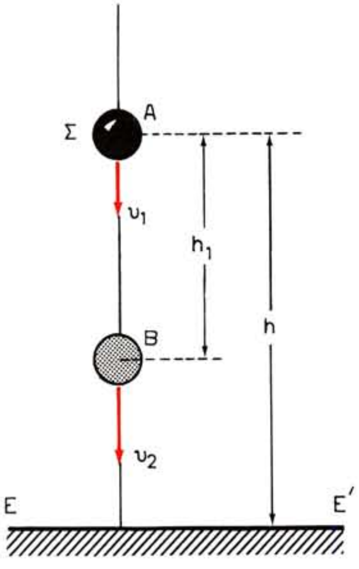
Ὅταν τό σῶμα Σ ἔπεσε ἀπό τή θέση Α στή θέση Β (σχ. 1.49γ), ἡ δυναμική του ἐνέργεια ἐλαττώθηκε κατά Bh_1, ἐνῶ ἡ κινητική του ἐνέργεια αὐξήθηκε κατά:

$$({}^1/_2\, m\upsilon_2^2 - {}^1/_2\, m\, \upsilon_1^2) = \Delta E_\kappa$$

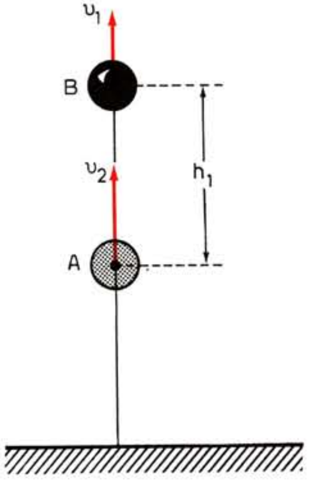
Βρίσκεται ὅτι ἡ ἐλάττωση Bh_1 εἶναι ἴση μέ τήν αὔξηση ΔE_κ, δηλαδή: $Bh_1 = \Delta E_\kappa$

Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ δυναμική ἐνέργεια Bh_1 μετατράπηκε σέ κινητική ἐνέργεια ΔE_κ.

Ὅταν ἕνα σῶμα πού ἔχει βάρος $\vec{B}$ ἀνέρχεται ἀπό τή θέση Α στή θέση Β (σχ. 1.49δ), τότε ἡ δυναμική του ἐνέργεια αὐξάνεται κατά Bh_1, ἐνῶ ἡ κινητική του ἐνέργεια ἐλαττώνεται κατά: $({}^1/_2\, m\, \upsilon_2^2 - {}^1/_2 m\, \upsilon_1^2) = \Delta E_\kappa$.



Σχ. 1.49γ.



Σχ. 1.49δ.

Βρίσκεται ὅτι ἡ αὔξηση Bh_1 τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας τοῦ σώματος εἶναι ἴση μέ τήν ἐλάττωση τῆς κινητικῆς του ἐνέργειας ΔE_κ. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ κινητική ἐνέργεια ΔE_κ τοῦ σώματος μετατράπηκε σέ δυναμική ἐνέργεια Bh_1.

Γενικά ἡ δυναμική ἐνέργεια ἑνός σώματος μπορεῖ νά μετατρέπεται σέ κινητική καί, ἀντιστρόφως, ἡ κινητική ἐνέργειά του μπορεῖ νά μετατρέπεται σέ δυναμική.

2) Ἄν μηχανική ἐνέργεια ἑνός σώματος ὀνομάσομε τό ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καί τῆς δυναμικῆς ἐνέργειάς του, τότε ἰσχύει τό ἑξῆς θεώρημα:

Κατά τίς μετατροπές τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας ἑνός σώματος σέ κινητική καί ἀντιστρόφως, ἡ μηχανική ἐνέργειά του (δηλαδή τό ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καί τῆς κινητικῆς του ἐνέργειας) παραμένει σταθερή, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ δυναμική του μετατρέπεται μόνο σέ κινητική του καί ἡ κινητική του μόνο σέ δυναμική του.

Δηλαδή: $E_M = E_{\Delta 1} + E_{\kappa 1} = E_{\Delta 2} + E_{\kappa 2} =$ σταθερή

ὅπου: E_M ἡ μηχανική ἐνέργεια τοῦ σώματος

$E_{\Delta 1}$ ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ σώματος ὅταν ἔχει κινητική E_{κ_1}

$E_{\Delta 2}$ ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ σώματος ὅταν ἔχει κινητική E_{κ_2}

Τό θεώρημα αὐτό εἶναι γνωστό ὡς θεώρημα ἤ ἀρχή ***διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας.***

Πραγματικά:

Ἔστω ὅτι στή θέση A βρίσκεται ἀκίνητο τό σῶμα Σ μάζας m (σχ. 1.49ε).

Στή θέση αὐτή τό σῶμα ἔχει: $E_{\Delta A} = B \cdot h = m \cdot g \cdot h$

$E_{\kappa A} = 0$ καί $E_{MA} = E_{\Delta A} + E_{\kappa A} = m \cdot g \cdot h + 0$ δηλαδή

$$E_{MA} = m \cdot g \cdot h \tag{1}$$

Ἀφήνομε τό σῶμα ἐλεύθερο νά πέσει, ὁπότε καί κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη (ἐλεύθερη πτώση).

Κατά τήν πτώση τοῦ σώματος ἔχομε συνεχῶς ἐλάττωση τοῦ h καί ἑπομένως ἐλάττωση τῆς $E_{\Delta A}$, ἐνῶ ταυτόχρονα αὐξάνει ἡ ταχύτητά του καί ἑπομένως ἡ $E_{\kappa A}$.

Τή στιγμή ἀκριβῶς πού τό σῶμα φθάνει στή γῆ, στή θέση Δ, θά ἔχομε:

$$E_{\Delta\Delta} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot 0 = 0$$

$$E_{\kappa\Delta} = {}^1\!/_2\, m \cdot \upsilon_\Delta^2$$

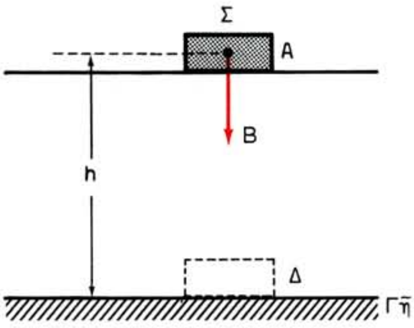
$$E_{M\Delta} = E_{\Delta\Delta} + E_{\kappa\Delta} = 0 + {}^1\!/_2\, m\, \upsilon_\Delta^2 \qquad (2)$$

ὅπου: υ_Δ εἶναι ἡ ταχύτητα πού ἔχει τό σῶμα μόλις ἔφθασε στό Δ, δηλαδή ἀφοῦ διέτρεξε διάστημα h.

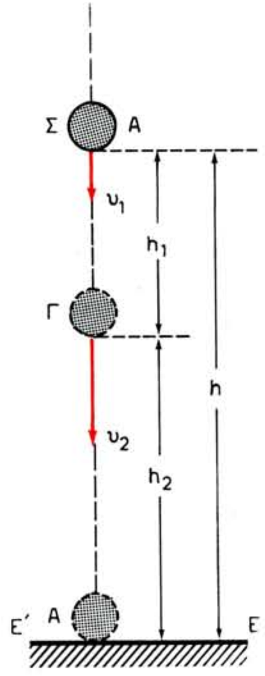
Ἰσχύει ἡ σχέση: $$\upsilon_\Delta^2 = 2gh \qquad (3)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) ἔχομε: $$E_{M\Delta} = m \cdot g \cdot h \qquad (4)$$

Συγκρίνοντας τίς σχέσεις (1) καί (4) ἔχομε: $E_{MA} = E_{M\Delta}$



Σχ. 1.49ε.



Σχ. 1.49στ.

Γιά καλύτερη κατανόηση ἄς δοῦμε καί τήν πιό κάτω περίπτωση:

Τό σῶμα Σ, ὅταν κατά τήν πτώση του (σχ. 1.49στ) διέρχεται ἀπό τή θέση Α, ἔχει:

α) Δυναμική ἐνέργεια: $E_{\Delta A} = Bh$ καί

β) Κινητική ἐνέργεια: $E_{\kappa A} = {}^1\!/_2\, m\, \upsilon_1^2$

ὅπου: υ_1 εἶναι ἡ ταχύτητά του στό Α.

Ἑπομένως ἡ μηχανική του ἐνέργεια (E_{MA}) στή θέση Α θά εἶναι:

$$E_{MA} = E_{\Delta A} + E_{\kappa A} = Bh + {}^1\!/_2\, m\upsilon_1^2 \qquad (1)$$

Τό σῶμα Σ, ὅταν κατά τήν πτώση του διέρχεται ἀπό τή θέση Γ (σχ. 1.49στ), ἔχει:

α) Δυναμική ἐνέργεια: $E_{\Delta\Gamma} = Bh_2$ καί

β) Κινητική ἐνέργεια: $E_{\kappa\Gamma} = {}^1\!/_2\, m\upsilon_2^2$

όπου: u_2 εἶναι ἡ ταχύτητά του στό Γ.
Ἑπομένως ἡ μηχανική του ἐνέργεια $E_{MΓ}$ στή θέση Γ θά εἶναι:

$$\boxed{E_{MΓ} = E_{ΔΓ} + E_{κΓ} = Bh_2 + {}^1/_2\, mu_2^2} \quad (2)$$

Ἰσχύει ἡ σχέση: $$u_2 = u_1 + gt \quad (3)$$

όπου: t εἶναι ὁ χρόνος πτώσεως τοῦ σώματος ἀπό τό Α στό Γ.
Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) παίρνομε: $E_{MΓ} = {}^1/_2\, mu_2^2 + Bh_2 = {}^1/_2 m\,(u_1 + gt)^2 + Bh_2$

$$E_{MΓ} = {}^1/_2 m\,(u_1^2 + g^2t^2 + 2u_1gt) + Bh_2 \quad καί \quad E_{MΓ} = {}^1/_2 mu_1^2 + {}^1/_2 mg^2t^2 + mu_1gt + Bh_2$$

$$E_{MΓ} = {}^1/_2 mu_1^2 + mg\,({}^1/_2 gt^2 + u_1t) + Bh_2 \quad (4)$$

Ἰσχύουν καί οἱ σχέσεις: $$mg = B \quad (5)$$

καί $${}^1/_2 gt^2 + u_1t = h_1 = (h - h_2) \quad (6)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (4), (5) καί (6) ἔχομε: $E_{MΓ} = {}^1/_2 mu_1^2 + B\,.\,(h - h_2) + Bh_2$ καί $E_{MΓ} = {}^1/_2 mu_1^2 + Bh$ (7)

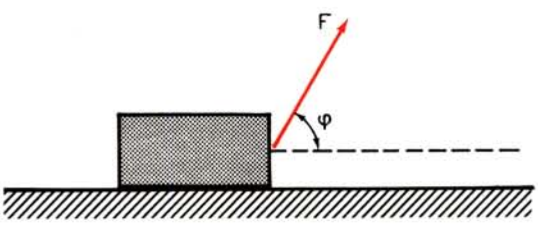
Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (7) παίρνομε: $${}^1/_2\, mu_2^2 + Bh_2 = {}^1/_2\, mu_1^2 + Bh \quad (8)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2) καί (8) παίρνομε: $$E_{MΓ} = E_{MA}$$

1.50 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

29) *Ἕνα σῶμα βρίσκεται ἐπάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἕλκομε τό σῶμα μέ ἕνα σχοινί πού σχηματίζει μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο γωνία $\phi = 60°$. Τό σῶμα σύρεται (ὀλισθαίνει) ἐπάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἡ δύναμη πού ἀσκοῦμε μέ τό σκοινί στό σῶμα εἶναι $F = 6N$. Πόσο εἶναι τό ἔργο Α τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, ὅταν μετατοπίσει τό σῶμα ἐπάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο κατά ἀπόσταση $S = 8$ m;*

Λύση:
Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).
Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $$A = F\,.\,S\,.\,συνφ \quad (1)$$



Δίνονται: $F = 6N$, $S = 8$ m, $\phi = 60°$ καί $συν60° = {}^1/_2$

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$A = F\,.\,S\,.\,συνφ = 6 \times 8\, συν60° = 6 \times 8 \times 1/2 = 24$ Joule ***ὥστε*** $A = 24$ Joule

Στό σύστημα C.G.S.
Δίνονται: $F = 6\,.\,N = 6 \times 10^5$ dyn, $S = 8m = 8 \times 10^2$ cm, $\phi = 60°$ καί $συν60° = {}^1/_2$

Ἀντικαθιστοῦμε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$A = F \,.\, S \,.\, \text{συν}60 = 6 \times 10^5 \times 8 \times 10^2 \times {}^1/_2 = 24 \times 10^7$ erg ***ὥστε*** $A = 24 \times 10^7$ erg

30) *Μιά μηχανή μέσα σέ χρόνο t = 8 sec ἀνεβάζει βάρος B = 150 kp σέ ὕψος h = 12m. Ποιά εἶναι ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς;*

Λύση:

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε τίς σχέσεις: $A = F \,.\, S = B \,.\, S$ (1)

$$N = \frac{A}{t} \quad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε τή σχέση: $N = \dfrac{B\,.\,S}{t}$ (3)

Δίνονται: $B = 150$ kp $= 150 \,.\, 10$ N $= 1500$ N, $S = 12$m καί $t = 8$ sec

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (3) καί ἔχομε:

$$N = \frac{B\,.\,S}{t} = \frac{1500 \times 12}{8} = 2250 \text{ Watt} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad N = 2250 \text{ Watt}$$

Στό τεχνικό σύστημα (T.Σ.).

Δίνονται: $B = 150$ kp, $S = 12$ m καί $t = 8$ sec

Ἀντικαθιστοῦμε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (3) καί ἔχομε:

$$N = \frac{B\,.\,S}{t} = \frac{150 \times 12}{8} = 225 \text{ kpm/sec} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad N = 225 \text{ kpm/sec}$$

δηλαδή $N = \dfrac{225}{75} = 3$ CV

31) *Ἡ ἰσχύς ἑνός ἠλεκτρικοῦ κινητήρα εἶναι N = 60 W. Πόσο θά κοστίσει ὁ κινητήρας αὐτός, ὅταν ἐργασθεῖ ἐπί χρόνο t = 5 h, ἄν τό 1 kwh κοστίζει 10 δραχμές;*

Λύση:

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $N = \dfrac{A}{t}$ (1)

Ἀπό τή σχέση (1) παίρνομε τή σχέση: $A = N \,.\, t$ (2)

Δίνονται: $N = 60$ W $= 60 \,.\, 10^{-3}$ kW $= 0{,}060$ kW , καί $t = 5$h

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (2) καί ἔχομε: $A = N \,.\, t = 0{,}060 \times 5 = 0{,}3$ kWh

ὥστε: $A = 0{,}3$ kWh καί ἄρα ὁ κινητήρας θά κοστίσει: $K = 0{,}3 \times 10 = 3$ δραχμές

32) *Κινητήρας ἔχει ἰσχύ N = 2000 Hp. Πόση ἐνέργεια A θά παραγάγει σέ kwh ἄν ἐργασθεῖ δύο ὧρες;*

Λύση:

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $N = \dfrac{A}{t}$ (1)

Ἀπό τή σχέση (1) παίρνομε τή σχέση: $A = N \,.\, t$ (2)

Δίνονται: 1 HP = 746 Watt, N = 2000 HP = 2000 . 746 Watt = 1492000 Watt = 1492 kW
καί t = 2 h

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (2) καί ἔχομε:

A = N . t = 1492 . 2 kW . h = 2984 kwh *ὥστε* A = 2984 kWh

33) *Δένομε ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα m = 80 g στήν ἄκρη ἑνός σχοινιοῦ μήκους l = 0,90 m καί τό περιστρέφομε μέ συχνότητα 2 στροφές στό δευτερόλεπτο. Νά βρεθεῖ τό ἔργο A τό ὁποῖο παράγει ἡ κεντρομόλος δύναμη* $\vec{F}_\kappa$ *πού ἀναγκάζει τό σῶμα νά περιστρέφεται καί τήν ὁποία ἀσκοῦμε ἐπάνω στό σῶμα μέ τό χέρι μας μέσω τοῦ σχοινιοῦ, ὅταν τό σῶμα αὐτό κάνει δύο στροφές.*

Λύση:

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: A = F . S . συνφ (1)

Ἐπίσης γνωρίζομε ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμη εἶναι συνέχεια κάθετη στή γραμμική ταχύτητα τοῦ σώματος, δηλαδή κάθετη στή μετατόπιση (φ = 90°).

Ἑπομένως ἡ σχέση (1) γράφεται: $A = F_\kappa \, . \, S \, . \, συν90°$ (2)

Ἐπειδή εἶναι συν90° = 0 ἀπό τή σχέση (2) ἔχομε: $A = F_\kappa \, . \, S \, . \, 0 = 0$ *ὥστε* A = 0

34) *Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς μιᾶς δυνάμεως F = 10 N γράφει τόξο καμπύλης μήκους S = 60 cm. Πόσο ἔργο A παράγει ἡ δύναμη* $\vec{F}$ *ἄν αὐτή παραμένει συνέχεια ἐφαπτομένη τοῦ τόξου αὐτοῦ;*

Λύση:

Γνωρίζομε ὅτι στήν περίπτωση αὐτή ἰσχύει ἡ σχέση: A = F . S (1)

Δίνονται: F = 10 N καί $S = 60 \text{ cm} = 60 \, . \, 10^{-2} \text{ m} = 0{,}60 \text{ m}$

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

A = F . S = 10 × 0,60 = 6 Joule *ὥστε* A = 6 Joule

35) *Ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα m = 3 kg καί βρίσκεται ἀκίνητο σέ ὕψος h = 8m ἀρχίζει νά πέφτει. Ποιά εἶναι ἡ δυναμική καί ποιά ἡ κινητική του ἐνέργεια, ὅταν φτάνει σέ ὕψος* h_1 *= 5m ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους;*

Λύση:

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

1) Εὕρεση τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας.

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $E_\delta = mgh_1$ (1)

Δίνονται: m = 3 kg, h_1 = 5 m καί g = 10 m/sec^2

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$E_\delta = m \, . \, g \, . \, h_1 = 3 \times 10 \times 5 = 150$ Joule *ὥστε* $E_\delta = 150$ Joule

2) Εὕρεση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας.

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $E_\kappa = {}^1/_2 \, m \, u^2$ (2)

Ἡ ταχύτητα $\vec{u}$ εἶναι αὐτή πού ἔχει σέ ὕψος h_1 = 5 m ἀφοῦ ἔπεσε κατά $h - h_1 = 8 - 5 = 3$m

Γιά τήν $\vec{u}$ ἰσχύει ἡ σχέση: $u = \sqrt{2g(h - h_1)}$ (3)

Ἄν στή σχέση (3) ἀντικαταστήσομε αὐτά πού μᾶς δίνονται παίρνομε:

$$u = \sqrt{2g(h - h_1)} = \sqrt{2 \times 10 \, (8 - 5)} = \sqrt{60} \text{ m/sec} \quad (4)$$

Ἔχομε: m = 3 kg καί $u = \sqrt{60}$ m/sec

Θέτομε τίς τιμές αὐτές στή σχέση (2) καί ἔχομε:

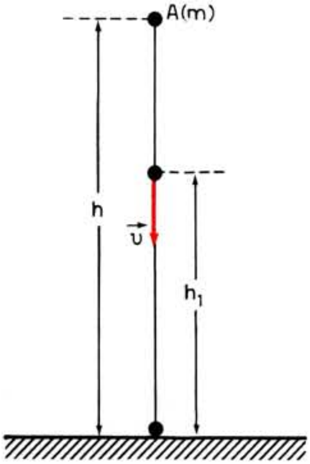
$E_\kappa = {}^1/_2 \, mu^2 = {}^1/_2 \times 3 \times (\sqrt{60})^2 = 90$ Joule *ὥστε* $E_\kappa = 90$ Joule

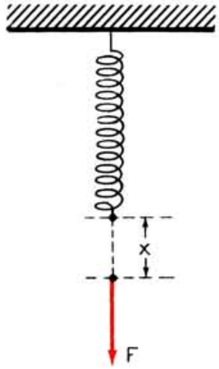
Σημείωση:

Ἡ κινητική ἐνέργεια, πού ἔχει τό σῶμα στό ὕψος $h_1 = 5$ m, εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας πού εἶχε στό ὕψος $h = 8$ m καί τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας πού ἔχει στό ὕψος $h_1 = 5$m:

$$E_\kappa = mgh - mgh_1$$

$E_\kappa = 3 \times 10 \times 8 - 3 \times 10 \times 5 = 240 - 150 = 90$ Joule   ***ὥστε*** $E_\kappa = 90$ Joule





36) *Πόση εἶναι ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ ἐλατηρίου ὅταν ἔχει ἐπιμηκυνθεῖ κατά $x = 5$ mm. Ἡ κατευθύνουσα δύναμη τοῦ ἐλατηρίου εἶναι $D = 70$ N/m;*

Λύση:

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$E_\delta = {}^1/_2\, D \,.\, x^2 \tag{1}$$

Δίνονται: $D = 70$ N/m καί $x = 5\text{mm} = 0{,}005$ m

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού δίνονται καί βρίσκομε:

$E_\delta = {}^1/_2\, D \,.\, x^2 = {}^1/_2 \times 70 \times (0{,}005)^2 = 875 \times 10^{-6}$ Joule   ἤ $E_\delta = 8750$ erg

37) *Μιά μηχανή ἀνυψώνει ἕνα σῶμα πού ἔχει βάρος $B = 250$ N μέ ταχύτητα $\upsilon = 2$ m/sec. Νά βρεθεῖ ἡ ἰσχύς N τῆς μηχανῆς.*

Λύση:

Ἔστω ὅτι τό σῶμα μέσα σέ χρόνο t ἀνυψώνεται κατά ὕψος h. Τό ἔργο A τό ὁποῖο ἀπαιτεῖται γιά τήν ἀνύψωση τοῦ σώματος κατά h δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$A = B \,.\, h \tag{1}$$

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$N = \frac{A}{t} \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$N = \frac{B\,h}{t} \tag{3}$$

Ἡ ταχύτητα υ μέ τήν ὁποία ἀνυψώνεται τό σῶμα δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\upsilon = \frac{h}{t} \tag{4}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) ἔχομε:

$$N = B \,.\, \upsilon \tag{5}$$

Δίνονται: $B = 250$ N καί $\upsilon = 2$ m/sec

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (5) καί βρίσκομε:

$N = B \,.\, \upsilon = 250 \times 2 = 500$ Watt   ***ὥστε*** $N = 500$ Watt

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

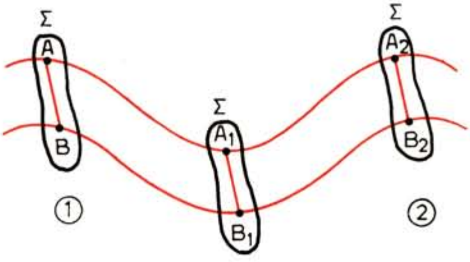
2.1 Μεταφορική κίνηση στερεοῦ σώματος.

Γενικά.

Ἕνα στερεό σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό πολλά ὑλικά σημεῖα, δηλαδή ἀπό πολλές στοιχειώδεις μάζες.

Θά λέμε ὅτι ἕνα σῶμα κάνει μεταφορική κίνηση, ***ὅταν ὅλα του τά ὑλικά σημεῖα σέ κάθε χρονική στιγμή τῆς κινήσεώς του κάνουν τήν ἴδια καθ' ὅλα κίνηση.***

Ἔστω ὅτι τό σῶμα Σ (σχ. 2.1α) μετακινεῖται ἀπό τή θέση 1 στή θέση 2 μέ κίνηση μεταφορική.



Σχ. 2.1α.

Παρατηροῦμε ὅτι, σέ ὁποιαδήποτε θέση καί νά βρίσκεται τό σῶμα κατά τή μετακίνηση αὐτή, ἕνα ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο τμῆμα του ΑΒ παραμένει παράλληλο πρός τήν ἀρχική του θέση ($AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$).

Αὐτό συμβαίνει, γιατί σέ κάθε στιγμή τῆς μεταφορικῆς κινήσεως τοῦ σώματος Σ ὅλα τά ὑλικά σημεῖα του ἔχουν ***ἴσες*** ταχύτητες.

Ἀπό τά παραπάνω μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι: Ἕνα σῶμα κάνει μεταφορική κίνηση, ***ὅταν κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα του παραμένει κατά τήν κίνηση αὐτή παράλληλο πρός τήν ἀρχική του θέση.***

Παρατήρηση:

Ὅταν ἕνα σῶμα κάνει μία μεταφορική κίνηση, τότε ὅλα του τά σημεῖα κάνουν σέ κάθε στιγμή τῆς μεταφορικῆς κινήσεως τήν ἴδια καθ' ὅλα κίνηση πού κάνει τό σῶμα.

'Επομένως, γιά νά μελετήσομε τή μεταφορική κίνηση ἑνός σώματος, ἀρκεῖ νά μελετήσομε τήν κίνηση ἑνός σημείου του, στό ὁποῖο θεωροῦμε συγκεντρωμένη ὅλη τή μάζα τοῦ σώματος.

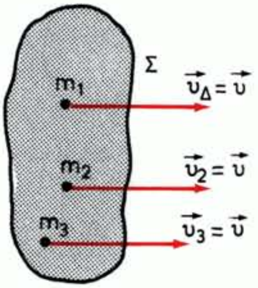
Γενικά, κατά τή μελέτη τῆς μεταφορικῆς κινήσεως σώματος πού ἔχει μάζα m θεωροῦμε τό σῶμα ὡς ἕνα ὑλικό σημεῖο πού ἔχει μάζα m καί ἐφαρμόζομε ὅλους τούς νόμους τῆς δυναμικῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Συνήθως ὡς ὑλικό σημεῖο μάζας m θεωροῦμε τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος.

Κινητική ἐνέργεια σώματος πού ἐκτελεῖ μεταφορική κίνηση.

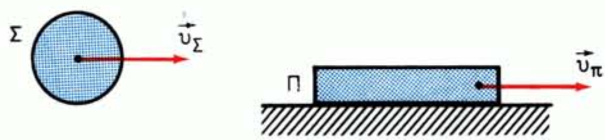
Ἔστω ὅτι τό σῶμα Σ, πού ἐκτελεῖ μεταφορική κίνηση, ἔχει μάζα m καί κατά τή χρονική στιγμή t ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (σχ. 2.1β).

'Η κινητική ἐνέργεια E_κ πού ἔχει τό σῶμα Σ κατά τή χρονική στιγμή t, δηλαδή τότε πού ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{E_\kappa = {}^1\!/_2\, m \,.\, \upsilon^2} \qquad (1)$$



Σχ. 2.1β.



Σχ. 2.1γ.

'Απόδειξη τῆς ἐξισώσεως (1).

Χωρίζομε τό σῶμα Σ σέ στοιχειώδεις μάζες (ὑλικά σημεῖα) m_1, m_2, m_3, m_4 ...

'Η κινητική ἐνέργεια E_κ τοῦ σώματος Σ, κατά τή χρονική στιγμή t κατά τήν ὁποία ἡ ταχύτητά του εἶναι $\vec{\upsilon}$, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν πού ἔχουν οἱ στοιχειώδεις μάζες του κατά τή χρονική στιγμή t, δηλαδή:

$$E_\kappa = {}^1\!/_2\, m_1 \upsilon_1^2 + {}^1\!/_2\, m_2 \upsilon_2^2 + {}^1\!/_2\, m_3 \upsilon_3^2 + ...$$

$$E_\kappa = {}^1\!/_2\, \upsilon^2 (m_1 + m_2 + m_3 + ...) \qquad (2)$$

'Επειδή ἡ μάζα (m) ἑνός σώματος εἶναι τό ἄθροισμα τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν (τῶν ὑλικῶν σημείων) του, ἔχομε: $m_1 + m_2 + m_3 + ... = m$ (3)

'Από τίς (2) καί (3) προκύπτει: $\boxed{E_\kappa = {}^1\!/_2\, m \,.\, \upsilon^2}$

Σημείωση:

'Από τή σχέση (1) συμπεραίνομε ὅτι: 'Η κινητική ἐνέργεια ἑνός σώματος πού ἐκτελεῖ μεταφορική κίνηση εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ἔχει διανεμηθεῖ ἡ ὕλη στό σῶμα αὐτό.

Ἔστω ὅτι ἡ σφαίρα σ καί τό παραλληλεπίπεδο Π ἔχουν ἴσες μάζες ($m_\sigma = m_\pi$) (σχ. 2.1γ). Γνωρίζομε ὅτι ἡ κατανομή τῆς μάζας m_σ στή σφαίρα εἶναι διαφορετική ἀπό τήν κατανομή τῆς μάζας m_π στό παραλληλεπίπεδο. Καί ὅμως, ὅταν ἡ σφαίρα σ καί τό παραλληλεπίπεδο Π ἐκτελοῦν μεταφορική κίνηση μέ τήν ἴδια ταχύτητα ($\upsilon_\sigma = \upsilon_\pi$), ἡ κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας σ εἶναι ἴση μέ τήν κινητική ἐνέργεια τοῦ παραλληλεπιπέδου Π.

$$E_{\kappa\sigma} = {}^{1}\!/_{2}\, m_\sigma\, \upsilon_\sigma^2$$

$$E_{\kappa\pi} = {}^{1}\!/_{2}\, m_\pi\, \upsilon_\pi^2$$

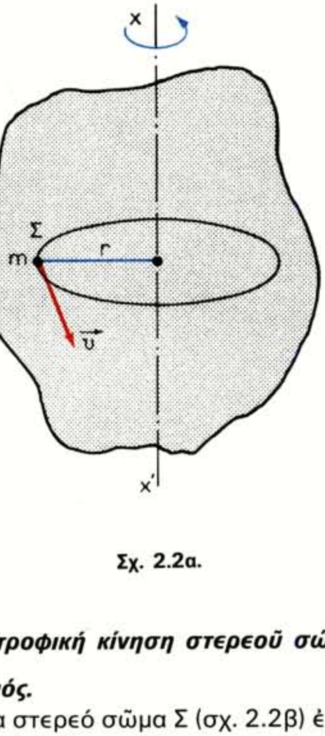
Καί ἐπειδή $m_\sigma = m_\pi$ καί $\upsilon_\sigma = \upsilon_\pi$ ἔχομε: $E_{\kappa\sigma} = E_{\kappa\pi}$

2.2 Περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα.

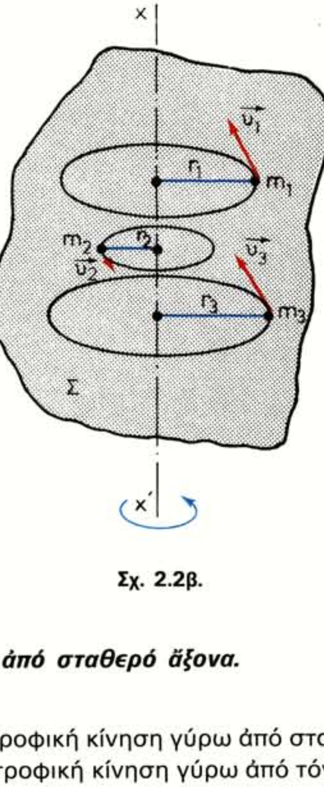
Περιστροφική κίνηση ὑλικοῦ σημείου γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα.

Ἕνα ὑλικό σημεῖο Σ ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό ἕνα σταθερό ἄξονα (x΄x), ὅταν γράφει κυκλική τροχιά πού τό κέντρο της βρίσκεται ἐπάνω στόν ἄξονα αὐτόν (x΄x) καί τό ἐπίπεδό της εἶναι κάθετο σέ αὐτόν (σχ. 2.2α).

Σημείωση: Γιά τό σημεῖο πού ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι καί οἱ ὁρισμοί τῆς κυκλικῆς κινήσεως.



Σχ. 2.2α.



Σχ. 2.2β.

Περιστροφική κίνηση στερεοῦ σώματος γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα.

Ὁρισμός.

Ἕνα στερεό σῶμα Σ (σχ. 2.2β) ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (x΄x), ὅταν κάθε του σημεῖο ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό τόν ἄξονα αὐτό (x΄x), δηλαδή ὅταν ὅλα τά σημεῖα του γράφουν κυκλικές τροχιές πού τά κέντρα τους βρίσκονται ἐπάνω στόν ἄξονα x΄x καί τά ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα σ' αὐτόν.

Σημείωση: Γιά κάθε σημεῖο τοῦ στερεοῦ σώματος πού ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι καί οἱ ὁρισμοί τῆς κυκλικῆς κινήσεως.

Χαρακτηριστικά τῆς περιστροφικῆς κινήσεως στερεοῦ σώματος γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα.

1) Ὅλα τά σημεῖα τοῦ σώματος, πού ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα, ἔχουν σέ κάθε χρονική στιγμή τῆς κινήσεως αὐτῆς τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα καί τήν ἴδια γωνιακή ἐπιτάχυνση*.

Εὐνόητο ὅτι, ἀφοῦ ὅλα τά σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα, ἔχουν καί τήν ἴδια συχνότητα καί τήν ἴδια περίοδο περιστροφῆς**.

2) Τά σημεῖα τοῦ σώματος πού βρίσκονται σέ διαφορετική ἀπόσταση ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς ἔχουν τό καθένα διαφορετική γραμμική ταχύτητα.

Ἄν ἕνα σημεῖο τοῦ σώματος ἀπέχει ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς ἀπόσταση r καί ἔχει γωνιακή ταχύτητα ω, ἡ γραμμική ταχύτητα υ τοῦ σημείου εἶναι:

$$\boxed{\upsilon = \omega \cdot r}$$

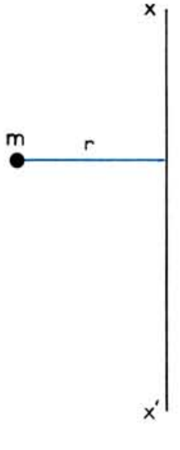
Δηλαδή: Ἡ γραμμική ταχύτητα ἑνός σημείου τοῦ στερεοῦ σώματος πού περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα εἶναι τόσο μεγαλύτερη ὅσο τό σημεῖο αὐτό βρίσκεται μακρύτερα ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

2.3 Ροπή ἀδράνειας.

Ροπή ἀδράνειας ἑνός ὑλικοῦ σημείου (στοιχειώδους μάζας) ὡς πρός ἄξονα x΄x.

Ροπή ἀδράνειας (Θ_σ) ἑνός ὑλικοῦ σημείου μέ μάζα m (σχ. 2.3α) ὡς πρός ἕναν ἄξονα x΄x, ἀπό τόν ὁποῖο ἀπέχει ἀπόσταση r, ὀνομάζεται τό γινόμενο τῆς m ἐπί τό τετράγωνο τῆς r. Δηλαδή:

$$\boxed{\Theta_\sigma = m \cdot r^2} \tag{1}$$



Σχ. 2.3α.

---

* Ὅταν λέμε γωνιακή ταχύτητα (ω) καί γωνιακή ἐπιτάχυνση (ω΄) κατά τή χρονική στιγμή t ἑνός στερεοῦ σώματος πού περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα, ἐννοοῦμε τή γωνιακή ταχύτητα (ω) καί τή γωνιακή ἐπιτάχυνση (ω΄) πού ἔχει κατά τή χρονική στιγμή t ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ σώματος.

** Ὅταν λέμε συχνότητα καί περίοδο ἑνός στερεοῦ σώματος πού περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα, ἐννοοῦμε τήν περίοδο καί τή συχνότητα μέ τήν ὁποία περιστρέφεται ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ σώματος αὐτοῦ γύρω ἀπό τόν ἄξονα αὐτό.

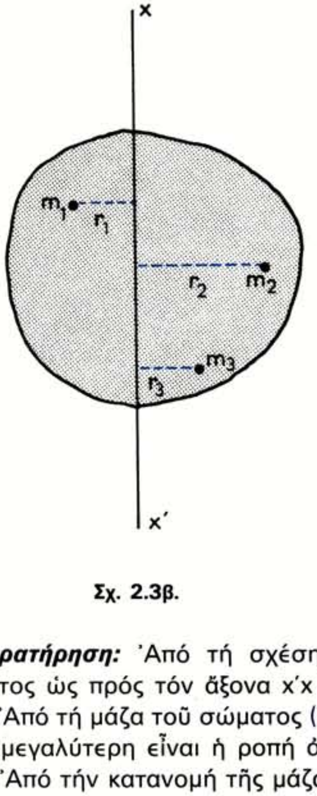
Σημείωση: Ὅταν μιλᾶμε γιά ροπή ἀδράνειας, πρέπει ὁπωσδήποτε νά ὁρίζομε καί τόν ἄξονα ὡς πρός τόν ὁποῖο ἀναφέρεται.

Ροπή ἀδράνειας σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x.

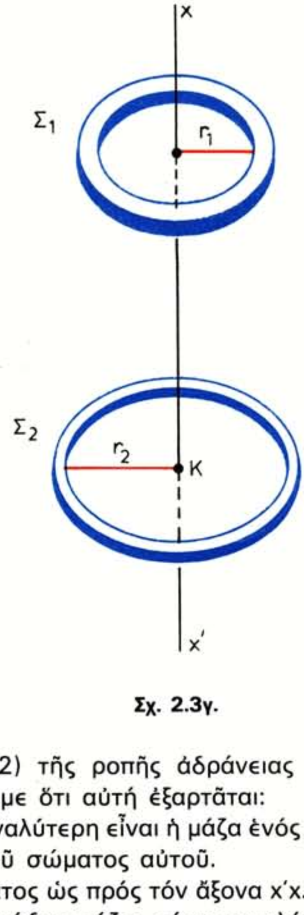
Ροπή ἀδράνειας (Θ_σ) ἑνός σώματος ὡς πρός ἕναν ἄξονα x΄x (σχ. 2.3β) ὀνομάζεται τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῆς ἀδράνειας ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x. Δηλαδή:

$$\boxed{\Theta_\sigma = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots} \tag{2}$$

ὅπου: r_1, r_2, r_3 ... εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν ὑλικῶν σημείων m_1, m_2, m_3 ... ἀπό τόν ἄξονα x΄x ἀντιστοίχως.



Σχ. 2.3β.



Σχ. 2.3γ.

Παρατήρηση: Ἀπό τή σχέση ὁρισμοῦ (2) τῆς ροπῆς ἀδράνειας Θ_σ ἑνός σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x συμπεραίνομε ὅτι αὐτή ἐξαρτᾶται:

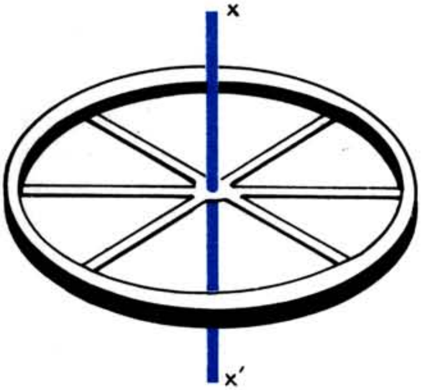
1) Ἀπό τή μάζα τοῦ σώματος (m). Ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ μάζα ἑνός σώματος, τόσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος αὐτοῦ.

2) Ἀπό τήν κατανομή τῆς μάζας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x. Ὅσο πιό μακριά ἀπό τόν ἄξονα x΄x βρίσκονται οἱ στοιχειώδεις μάζες, τόσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας Θ_σ τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα αὐτό*.

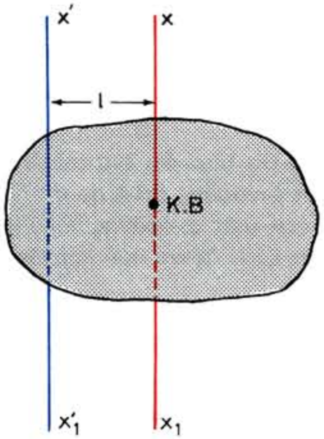
* Ἡ ἐξάρτηση τῆς Θ_σ ἀπό τήν κατανομή τῆς μάζας του ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x εἶναι μεγάλη. Γιατί ἡ Θ_σ ἐξαρτᾶται ἀπό τά τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων (r^2) τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν ἀπό τόν ἄξονα x΄x.

Οἱ δύο στεφάνες $Σ_1$ καί $Σ_2$ (σχ. 2.3γ) ἔχουν ἴσες μάζες, ἀλλά ἡ ροπή ἀδράνειας $Θ_2$ τῆς $Σ_2$ ὡς πρός τόν ἄξονα x'x εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή ροπή ἀδράνειας $Θ_1$ τῆς $Σ_1$ ($Θ_2 > Θ_1$) ὡς πρός τόν x'x, γιατί οἱ ἀποστάσεις τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν τῆς $Σ_2$ ἀπό τόν ἄξονα x'x εἶναι μεγαλύτερες ἀπό τίς ἀποστάσεις τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν τῆς $Σ_1$ ἀπό τόν ἴδιο ἄξονα x'x ($r_2 > r_1$).

Ἐπίσης ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ τροχοῦ τοῦ σχήματος 2.3δ ὡς πρός τόν ἄξονα x'x εἶναι μεγάλη, γιατί ἡ μάζα του εἶναι κατανεμημένη μακριά ἀπό τόν ἄξονα x'x.



Σχ. 2.3δ.



Σχ. 2.3ε.

Θεώρημα τοῦ Steiner.

Ἄν οἱ ἄξονες x_1x καί $x_1'x'$ (σχ. 2.3ε) εἶναι παράλληλοι καί ὁ ἄξονας x_1x διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος, τότε ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{Θ_{x_1'x'} = Θ_{x_1x} + ml^2} \qquad \text{(Θεώρημα τοῦ Steiner)} \qquad (1)$$

ὅπου: $Θ_{x_1'x'}$ ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα $x_1'x'$, πού εἶναι παράλληλος μέ τόν ἄξονα x_1x

$Θ_{x_1x}$ ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x_1x πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος

l ἡ ἀπόσταση τοῦ ἄξονα $x_1'x'$ ἀπό τόν ἄξονα x_1x

m ἡ μάζα τοῦ σώματος.

Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι ἡ ροπή ἀδράνειας ἑνός σώματος ὡς πρός διάφορους ἄξονες, ***πού εἶναι παράλληλοι μεταξύ τους, ἔχει τή μικρότερη τιμή ὡς πρός ἐκεῖνο τόν ἄξονα, πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος.***

Μονάδες ροπῆς ἀδράνειας.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἄν ὑποθέσομε ὅτι ἔχομε μιά στεφάνη ***πολύ μικροῦ*** πάχους, πού ἡ μάζα της ἔχει μοιραστεῖ ***ὁμοιόμορφα*** σέ αὐτή, τότε ἡ ροπή ἀδράνειάς της ὡς πρός τόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο της καί πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο της, θά εἶναι:

$$\boxed{Θ = m \cdot r^2}$$

ὅπου: r εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς στεφάνης.

Ἡ μονάδα μάζας στό σύστημα S.I. εἶναι τό 1 kg καί ἡ μονάδα μήκους τό 1 m. Ἄρα ἡ μονάδα ροπῆς ἀδράνειας στό σύστημα S.I. εἶναι:

$$\Theta = m \,.\, r^2 = 1 \text{ kg} \,.\, 1 \text{ m}^2 = 1 \text{ kgm}^2$$

Ὅταν θά λέμε ὅτι ἕνα σῶμα ἔχει ροπή ἀδράνειας ὡς πρός ἕναν ἄξονα, π.χ. 5 kgm^2, θά ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ροπή του αὐτή εἶναι πέντε φορές πιό μεγάλη ἀπό τή ροπή ἀδράνειας μιᾶς στεφάνης πολύ μικροῦ πάχους, πού ἔχει μάζα 1 kg καί ἀκτίνα 1 m, ὡς πρός ἕναν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο της καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδό της.

Σύστημα C.G.S.

Ἡ μονάδα μάζας στό σύστημα C.G.S. εἶναι τό 1 g καί ἡ μονάδα μήκους τό 1 cm. Ἄρα ἡ μονάδα ροπῆς ἀδράνειας στό σύστημα C.G.S. εἶναι:

$$\Theta = m \,.\, r^2 = 1\text{g} \,.\, 1 \text{ cm}^2 = 1 \text{ g} \,.\, \text{cm}^2$$

Ὅταν θά λέμε ὅτι ἕνα σῶμα ἔχει ροπή ἀδράνειας ὡς πρός ἕνα ἄξονα π.χ. 5 g . cm^2, θά ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ροπή του αὐτή εἶναι πέντε φορές πιό μεγάλη ἀπό τή ροπή ἀδράνειας μιᾶς στεφάνης πολύ μικροῦ πάχους, πού ἔχει μάζα 1 g καί ἀκτίνα 1cm, ὡς πρός ἕναν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο της καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδό της.

2.4 Ἀριθμητικό παράδειγμα.

37) *Ρόδα μέ ἀκτίνα r = 0,5 m ἔχει κατανεμημένη τή μάζα της στήν περιφέρειά της. Πόση εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειάς της (Θ) ὡς πρός ἕναν ἄξονα πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδό της καί διέρχεται ἀπό τό κέντρο της, ἄν ἡ μάζα της εἶναι m = 50 kg;*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $\boxed{\Theta = m \,.\, r^2}$ (1)

Δίνονται: m = 50 kg καί r = 0,5 m

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$\Theta = m \,.\, r^2 = 50 \times (0{,}5)^2 = 12{,}5 \text{ kg} \,.\, \text{m}^2$ ***ὥστε*** $\Theta = 12{,}5 \text{ kg} \,.\, \text{m}^2$

Στό σύστημα C.G.S.

Δίνονται: $m = 50 \text{ kg} = 50 \,.\, 10^3 \text{ g} = 5 \,.\, 10^4 \text{ g}$ καί $r = 0{,}5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$\Theta = m \,.\, r^2 = 5 \times 10^4 \times 50^2 = 125 \,.\, 10^6 \text{ g} \,.\, \text{cm}^2$ ***ὥστε*** $\Theta = 125 \,.\, 10^6 \text{ g} \,.\, \text{cm}^2$

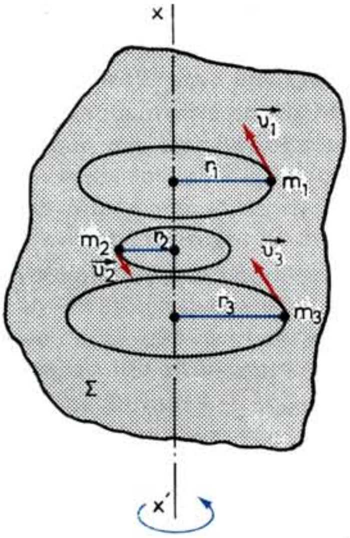
2.5 Κινητική ἐνέργεια σώματος πού περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα.

Ἔστω ὅτι ἕνα σῶμα Σ (σχ. 2.5), πού περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα x΄x, ἔχει μάζα m καί ὅτι κατά τή χρονική στιγμή t ἔχει γωνιακή ταχύτητα ω.

Ἡ κινητική ἐνέργεια E_K πού ἔχει τό σῶμα Σ κατά τή χρονική στιγμή t, δηλαδή ὅταν ἔχει γωνιακή ταχύτητα ω δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{E_K = {}^1\!/_2\, \Theta \,.\, \omega^2} \qquad (1)$$

ὅπου: Θ ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς του.



Σχ. 2.5.

Ἀπόδειξη τῆς ἐξισώσεως (1).

Χωρίζομε τό σῶμα Σ σέ στοιχειώδεις μάζες (ὑλικά σημεῖα) m_1, m_2, m_3, ...

Ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος Σ κατά τή χρονική στιγμή t ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν πού ἔχουν οἱ στοιχειώδεις μάζες του κατά τή χρονική αὐτή στιγμή t:

$$\boxed{E_κ = {}^1/_2\, m_1 υ_1^2 + {}^1/_2\, m_2 υ_2^2 + {}^1/_2\, m_3 υ_3^2 \ldots} \tag{1}$$

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις: $υ_1 = ω_1 r_1$, $υ_2 = ω_2 r_2$ καί $υ_3 = ω_3 r_3$ (2)

ὅπου: $ω_1$, $ω_2$, $ω_3$ οἱ γωνιακές ταχύτητες τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν m_1, m_2, m_3 τή χρονική στιγμή t, καί
r_1, r_2, r_3 οἱ ἀκτίνες τῶν περιφερειῶν πού γράφουν οἱ στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2, m_3, ...

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$E_κ = {}^1/_2\, m_1 ω_1^2 r_1^2 + {}^1/_2\, m_2 ω_2^2 r_2^2 + {}^1/_2\, m_3 ω_3^2 r_3^2 + \ldots \tag{3}$$

Ἐπειδή τό σῶμα Σ ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα, ὅλες οἱ στοιχειώδεις μάζες του ***σέ κάθε χρονική στιγμή ἔχουν τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα, πού εἶναι καί γωνιακή ταχύτητα τοῦ σώματος (ω).***

Ἐπομένως ἔχομε:

$$\boxed{ω_1 = ω_2 = ω_3 = ω} \tag{4}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) ἔχομε: $E_κ = {}^1/_2\, m_1 ω^2 r_1^2 + {}^1/_2\, m_2 ω^2 r_2^2 + {}^1/_2\, m_3 ω^2 r_3^2 + \ldots$

$$E_κ = {}^1/_2\, ω^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots) \tag{5}$$

Τό ἄθροισμα τῆς σχέσεως (5), πού βρίσκεται μέσα στήν παρένθεση, ***εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας Θ τοῦ σώματος Σ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς x΄x***. Δηλαδή:

$$Θ = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots \tag{6}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (6) προκύπτει : $\boxed{E_κ = {}^1/_2\, Θ \cdot ω^2}$

2.6 Σύνθετη (τυχαία) κίνηση στερεοῦ σώματος — Κινητική ἐνέργεια.

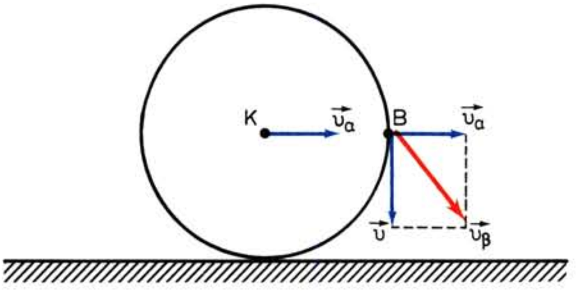
Γενικά.

Ὅταν ἕνα σῶμα κάνει μία σύνθετη (τυχαία) κίνηση, ὅσο πολύπλοκη καί νά εἶναι, μπορούμε νά θεωρήσομε ὅτι εἶναι ἀποτέλεσμα δύο κινήσεων πού κάνει τό σῶμα ταυτόχρονα: ***μιᾶς μεταφορικῆς κινήσεως ὁλόκληρου τοῦ σώματος καί μιᾶς περιστροφικῆς τοῦ σώματος γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα.***

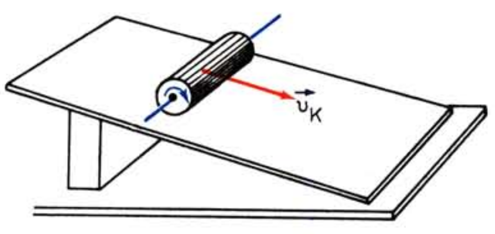
Ἑπομένως, κάθε σύνθετη κίνηση ἑνός σώματος ***μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ ἄθροισμα δύο κινήσεων, μιᾶς μεταφορικῆς καί μιᾶς περιστροφικῆς.***

Ὁ τροχός ἑνός αὐτοκινήτου (σχ. 2.6α) πού κυλάει στό ἔδαφος κάνει μία σύνθετη κίνηση, πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπό δύο κινήσεις: α) μία μεταφορική ὁλόκληρου τοῦ τροχοῦ (μέ ταχύτητα ὅση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου $\vec{\upsilon}_\alpha$), καί β) μία περιστροφική τοῦ τροχοῦ γύρω ἀπό τόν ἄξονά του.

Τό σημεῖο Β τοῦ τροχοῦ στήν πραγματικότητα ἔχει ταχύτητα τήν $\vec{\upsilon}_\beta$, ἡ ὁποία μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων: α) τῆς $\vec{\upsilon}_\alpha$, πού θά εἶναι ἡ ταχύτητα τῆς μεταφορικῆς του κινήσεως (δηλαδή ἡ ταχύτητα τῆς μεταφορικῆς κινήσεως ὁλόκληρου τοῦ τροχοῦ) καί β) τῆς γραμμικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ ($\upsilon = \omega \,.\, R$), πού θά εἶναι ἡ γραμμική ταχύτητα τῆς περιστροφικῆς του κινήσεως γύρω ἀπό τόν ἄξονα τοῦ τροχοῦ (ω = ἡ γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς ὁλόκληρου τοῦ τροχοῦ γύρω ἀπό τόν ἄξονα).



Σχ. 2.6α.



Σχ. 2.6β.

Ὁ κύλινδρος τοῦ σχήματος 2.6β κυλάει στό κεκλιμένο ἐπίπεδο καί ἡ κίνησή του εἶναι μιά σύνθετη κίνηση.

Μπορούμε νά θεωρήσομε ὅτι ἡ σύνθετη κίνηση τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἀποτέλεσμα δύο κινήσεων πού κάνει ὁ κύλινδρος ταυτόχρονα: α) μιᾶς μεταφορικῆς κινήσεως ὅλου τοῦ κυλίνδρου καί β) μιᾶς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ κυλίνδρου γύρω ἀπό τόν ἄξονά του.

Κινητική ἐνέργεια σώματος πού κάνει σύνθετη κίνηση.

Ἡ κινητική ἐνέργεια ἑνός σώματος πού κάνει σύνθετη κίνηση εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν πού θά ἔχει τό σῶμα ἐξαιτίας τῶν κινήσεων, στίς ὁποῖες μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ ἡ σύνθετη κίνηση.

$$E_{ολ} = E_{κμ} + E_{κπ} \quad (1)$$

ὅπου: $E_{ολ}$ ἡ ὁλική κινητ. ἐνέργεια τοῦ σώματος ἐξαιτίας τῆς σύνθετης κινήσεώς του

$E_{κμ}$ ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος ἐξαιτίας τῆς μεταφορικῆς κινήσεώς του

$E_{κπ}$ ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος ἐξαιτίας τῆς περιστροφικῆς κινήσεώς του γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα.

Στήν περίπτωση τοῦ τροχοῦ καί τοῦ κυλίνδρου, ὁ ἄξονας περιστροφῆς τους περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τους καί ἔχομε:

$$E_Τ = {}^1/_2\, m_Τ \,.\, υ_α^2 + {}^1/_2\, Θ_Τ \,.\, ω_Τ^2$$

$$E_Κ = {}^1/_2\, m_Κ \,.\, υ_Κ^2 + {}^1/_2\, Θ_Κ \,.\, ω_Κ^2$$

ὅπου: $E_Τ$ καί $E_Κ$ ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ τροχοῦ καί τοῦ κυλίνδρου

$Θ_Τ$ καί $Θ_Κ$ οἱ ροπές ἀδράνειας τοῦ τροχοῦ καί τοῦ κυλίνδρου ὡς πρός τούς ἄξονες πού περνοῦν ἀπό τό κέντρο βάρους τους,

$υ_α$ ἡ ταχύτητα τῆς μεταφορικῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ (ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου),

$υ_Κ$ ἡ ταχύτητα τῆς μεταφορικῆς κινήσεως τοῦ κυλίνδρου, δηλαδή ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται ὁ ἄξονας τοῦ κυλίνδρου (ὁ κύλινδρος),

$ω_Τ$ ἡ γωνιακή ταχύτητα τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ γύρω ἀπό τόν ἄξονά του, καί

$ω_Κ$ ἡ γωνιακή ταχύτητα τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ κυλίνδρου γύρω ἀπό τόν ἄξονά του.

2.7 Ἀριθμητικό παράδειγμα.

38) *Πόση εἶναι ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια $E_{ολ}$ κυλίνδρου πού κυλᾶ ἐπάνω στό κεκλιμένο ἐπίπεδο, όταν ὁ ἄξονάς του μεταφέρεται μέ ταχύτητα υ = 10 m/sec καί ὁ κύλινδρος περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονά του μέ γωνιακή ταχύτητα ω = 80 rad/sec; Ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ κυλίνδρου ὡς πρός τόν ἄξονά του εἶναι Θ = 100 kg m² καί ἡ μάζα τοῦ κυλίνδρου εἶναι m = 200 kg.*

Λύση.

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια ($E_{ολ}$) τοῦ κυλίνδρου εἶναι τό ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνέργειας λόγω τῆς μεταφορικῆς κινήσεως του $E_{κμ}$ καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας $E_{κπ}$ λόγω τῆς περιστροφικῆς κινήσεώς του γύρω ἀπό τόν ἄξονά του. Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_{κμ} + E_{κπ} \quad (1)$$

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$E_{κμ} = {}^1/_2\, mυ^2 \quad (2)$$

$$E_{κπ} = {}^1/_2\, Θω^2 \quad (3)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2) καί (3) ἔχομε τή σχέση:

$$E_{ολ} = {}^1/_2\, m\, υ^2 + {}^1/_2\, Θ \,.\, ω^2 \quad (4)$$

Δίνονται: m = 200 kg, υ = 10 m/sec, Θ = 100 kg . m² καί ω = 80 rad/sec

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (4) καί ἔχομε:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} Θω^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 100 \times 80^2 = 330000 \text{ Joule}$$

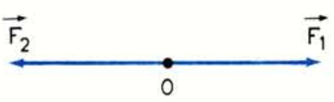
$$E_{ολ} = 3{,}3 \,.\, 10^5 \text{ Joule}$$

Β. ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

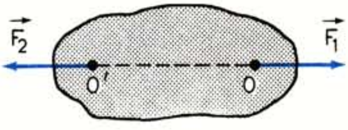
2.8 Θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Στατικῆς.

Ἡ στατική τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί τοῦ στερεοῦ σώματος στηρίζεται στίς ἑξῆς προτάσεις:

1) ***Ἄν δύο δυνάμεις*** $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, πού ἐπιδροῦν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ σέ ἕνα σημεῖο στερεοῦ σώματος, ἔχουν τόν ἴδιο φορέα καί τό ἴδιο μέτρο ($F_1 = F_2$) ἀλλά ἀντίθετη φορά (σχ. 2.8α), τότε οἱ δυνάμεις αὐτές ἰσορροποῦν, δηλαδή ἡ ἐπίδρασή τους δέν ἐπιφέρει κανένα ἀποτέλεσμα στό ὑλικό σημεῖο ἤ στό στερεό σῶμα.



Σχ. 2.8α.



Σχ. 2.8β.

2) ***Ἄν δύο δυνάμεις*** $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, πού ἐπιδροῦν σέ δύο σημεῖα (Ο,Ο′) ἑνός στερεοῦ σώματος, ἔχουν τόν ἴδιο φορέα καί τό ἴδιο μέτρο ($F_1 = F_2$) ἀλλά ἀντίθετη φορά (σχ. 2,8β), τότε οἱ δυνάμεις αὐτές ἰσορροποῦν, δηλαδή ἡ ἐπίδρασή τους δέν ἐπιφέρει κανένα ἀποτέλεσμα στό σῶμα.

2.9 Ἡ δύναμη εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος πού ὀλισθαίνει.

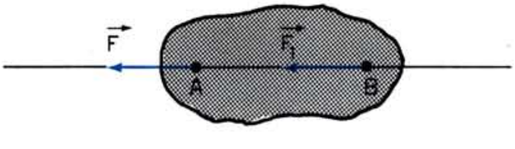
Ἄν τή δύναμη, πού ἀσκεῖται σέ ἕνα σημεῖο στερεοῦ σώματος, τή μεταφέρομε ἐπάνω στό φορέα της ἀλλάζοντάς της ἔτσι τό σημεῖο ἐφαρμογῆς, τότε τό ἀποτέλεσμά της ἐπάνω στό σῶμα δέν μεταβάλλεται.

Ἑπομένως μποροῦμε μιά δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 2.9α), πού ἀσκεῖται στό σημεῖο Α τοῦ στερεοῦ σώματος, νά τήν ἀντικαταστήσομε μέ μιά ἄλλη δύναμη $\vec{F}_1$, ἡ ὁποία νά ἔχει: α) τό ἴδιο μέτρο μέ τήν $\vec{F}$ ($F = F_1$), β) τόν ἴδιο φορέα μέ τήν $\vec{F}$, γ) τήν ἴδια φορά μέ τήν $\vec{F}$, ἀλλά σημεῖο ἐφαρμογῆς ἕνα ἄλλο σημεῖο Β τοῦ σώματος. Δηλαδή:

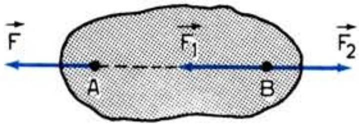
Μιά δύναμη πού ἀσκεῖται σέ στερεό σῶμα εἶναι ***ὀλισθαίνον ἀνυσματικό μέγεθος.***

Ἀπόδειξη.

Ἔστω ὅτι στό σημεῖο (Α) ἑνός στερεοῦ σώματος (σχ. 2.9β) ἐνεργεῖ ἡ δύναμη $\vec{F}$. Ἄν σέ ἕνα ἄλλο σημεῖο (Β) τοῦ ἴδιου σώματος ἐφαρμόσομε τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἔχουν φορέα καί μέτρο τό ἴδιο μέ τήν $\vec{F}$, ἀλλά ἡ $\vec{F}_1$ εἶναι ὁμόρροπη πρός τήν $\vec{F}$ ἐνῶ ἡ $\vec{F}_2$ εἶναι ἀντίρροπη πρός τήν $\vec{F}$, τότε τό ἀποτέλεσμα τῆς $\vec{F}$ δέν μεταβάλλεται. Αὐτό συμβαίνει, ἐπειδή, σύμφωνα μέ τή δεύτερη θεμελιώδη πρόταση τῆς Στατικῆς, οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}$ καί $\vec{F}_2$ ἀλληλοεξουδετερώνονται. Ἔτσι μποροῦμε νά ἀπομακρύνομε τίς δύο αὐτές δυνάμεις $\vec{F}$ καί $\vec{F}_2$, ὁπότε στό σῶμα θά μείνει μόνο ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ ἐφαρμοσμένη στό σημεῖο (Β). Δηλαδή:



Σχ. 2.9α.



Σχ. 2.9β.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς $\vec{F}$ στό στερεό σῶμα εἶναι τό ἴδιο εἴτε αὐτή εἶναι ἐφαρμοσμένη στό σημεῖο (Α) εἴτε στό σημεῖο (Β), ἀρκεῖ νά μήν ἀλλάξει ὁ φορέας της, ἡ φορά της καί τό μέτρο της.

2.10 Ροπή δυνάμεως.

Ροπή δυνάμεως ὡς πρός σημεῖο.

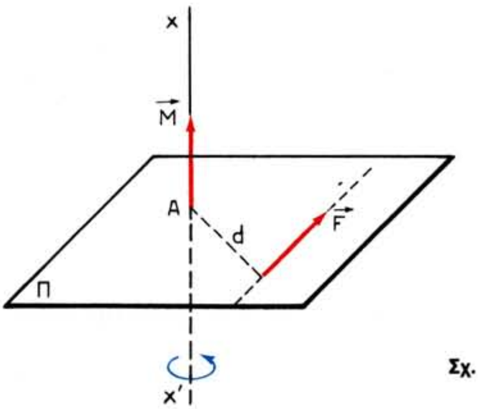
Ροπή μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός ἕνα σημεῖο Α (σχ. 2.10α) ὀνομάζομε ***ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{M}$ πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Σημεῖο ἐφαρμογῆς,*** τό σημεῖο Α,

β) ***Διεύθυνση,*** τήν κάθετο στό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τή διεύθυνση τῆς $\vec{F}$ καί τό σημεῖο Α,

γ) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς ἀποστάσεως d τοῦ σημείου Α ἀπό τή δύναμη $\vec{F}$, ἐπί τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, δηλαδή:

$$M = F \cdot d$$



Σχ. 2.10α.

δ) ***Φορά,*** ἐκείνη πού καθορίζεται μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία.*

Σημείωση:

1) Συνήθως ἡ ἀπόσταση d ὀνομάζεται μοχλοβραχίονας τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό σημεῖο Α.

2) Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό σημεῖο Α δέν μεταβάλλεται, ἄν ἡ δύναμη $\vec{F}$ μετακινηθεῖ ἐπάνω στό φορέα της. Γιατί κατά τή μετακίνηση αὐτή οὔτε ἡ d μεταβάλλεται οὔτε τό μέτρο (F) τῆς δυνάμεως μεταβάλλεται. Ἑπομένως ἡ ροπή παραμένει σταθερή, ἀφοῦ:

$$M = F \cdot d$$

3) Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό σημεῖο Α θά εἶναι μηδέν, ἄν ὁ φορέας της περνάει ἀπό τό σημεῖο Α. Γιατί, ὅταν ὁ φορέας τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ περνάει ἀπό τό Α, τότε ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν $\vec{F}$ εἶναι μηδέν. Ἔτσι ἔχομε:

$$M = F \cdot d$$

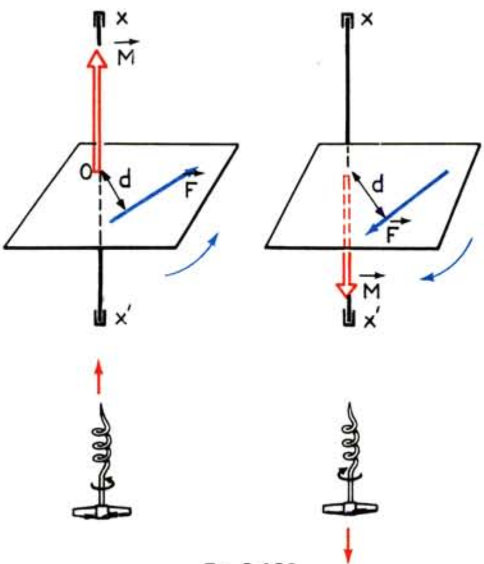
$$M = F \cdot 0$$

$$M = 0$$

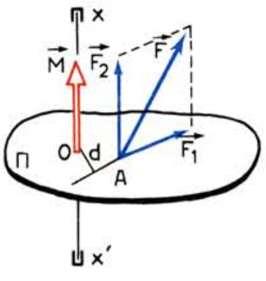
Ροπή δυνάμεως ὡς πρός ἄξονα.

Διακρίνομε δύο περιπτώσεις:

Α) Ροπή δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός ἕναν ἄξονα x΄x, (σχ. 2.10β), ***ὅταν ἡ δύναμη βρίσκεται σέ ἐπίπεδο πού εἶναι κάθετο στόν ἄξονα x΄x καί τόν τέμνει, ἔστω, στό σημεῖο (Ο).***



Σχ. 2.10β.



Σχ. 2.10γ.

Στήν περίπτωση αὐτή ὀνομάζομε ροπή $\vec{M}$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x ***ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x΄x.

β) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς ἀποστάσεως τοῦ (Ο) ἀπό τή δύναμη $\vec{F}$ ἐπί τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, δηλαδή:

$$M = F \cdot d$$

γ) ***Φορά,*** ἐκείνη πού καθορίζεται μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία.

Β) Ροπή δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός ἕναν ἄξονα x΄x (σχ. 2.10γ) ***ὅταν ἡ δύναμη αὐτή δέν βρίσκεται σέ ἐπίπεδο κάθετο στόν ἄξονα x΄x.***

Στήν περίπτωση αὐτή ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Ἀπό τό σημεῖο ἐφαρμογῆς Α τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ γράφομε ἕνα ἐπίπεδο Π πού νά εἶναι κάθετο στόν ἄξονα x΄x καί νά τόν τέμνει, ἔστω, στό σημεῖο (Ο).

β) Ἀναλύομε τή δύναμη $\vec{F}$ σέ συνιστῶσες: τήν $\vec{F}_1$, πού βρίσκεται στό ἐπίπεδο Π, καί τήν $\vec{F}_2$, πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο Π.

Ὅταν ἡ δύναμη $\vec{F}$ δέν βρίσκεται στό ἐπίπεδο πού εἶναι κάθετο στόν ἄξονα x΄x, ὀνομάζομε ροπή $\vec{M}$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x ***ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x΄x.

β) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς ἀποστάσεως d τοῦ σημείου (Ο) ἀπό τή συνιστώσα $\vec{F}_1$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ἐπί τό μέτρο τῆς συνιστώσας αὐτῆς $\vec{F}_1$, δηλαδή:

$$M = F_1 \cdot d$$

γ) ***Φορά,*** ἐκείνη πού καθορίζεται μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία.

Φυσική σημασία τῆς ροπῆς μιᾶς δυνάμεως.

Ἡ ροπή μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός ἕνα σημεῖο Α ἤ ὡς πρός ἕναν ἄξονα x΄x ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ***τήν περιστροφή τοῦ σώματος, στό ὁποῖο ἐνεργεῖ ἡ δύναμη αὐτή, γύρω ἀπό τό σημεῖο Α ἤ γύρω ἀπό τόν ἄξονα x΄x.***

Μονάδες ροπῆς.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἡ σχέση ὁρισμοῦ τῆς ροπῆς εἶναι: $M = F \cdot d$

Μονάδα δυνάμεως στό S.I. εἶναι τό 1 N καί μονάδα τοῦ διαστήματος εἶναι τό 1 m. Ἄρα μονάδα ροπῆς στό S.I. εἶναι:

$$M = F \cdot d = 1\ N \cdot 1\ m = 1\ N \cdot m$$

Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.).

Μονάδα δυνάμεως στό Τ.Σ. εἶναι τό 1 kp καί μονάδα τοῦ διαστήματος τό 1 m. Ἄρα μονάδα ροπῆς στό Τ.Σ. εἶναι:

$$M = F \cdot d = 1\ kp \cdot 1\ m = 1\ kp \cdot m$$

Σύστημα C.G.S.

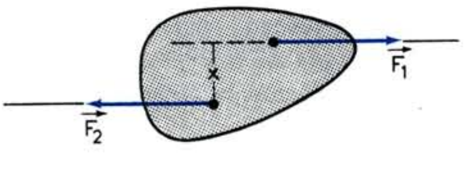
Μονάδα δυνάμεως στό C.G.S. εἶναι 1 dyn καί μονάδα τοῦ διαστήματος τό 1 cm. Ἄρα μονάδα ροπῆς στό C.G.S. εἶναι:

$$M = F \cdot d = 1\ dyn \cdot 1\ cm = 1\ dyn \cdot cm$$

2.11 Ζεῦγος δυνάμεων.

Ὁρισμός καί ροπή ζεύγους.

Δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ὅταν εἶναι παράλληλες, ἀντίρροπες καί ἔχουν ἴσα μέτρα ($F_1 = F_2$) λέμε ὅτι ἀποτελοῦν ζεῦγος δυνάμεων (σχ. 2.11α).



Σχ. 2.11α.

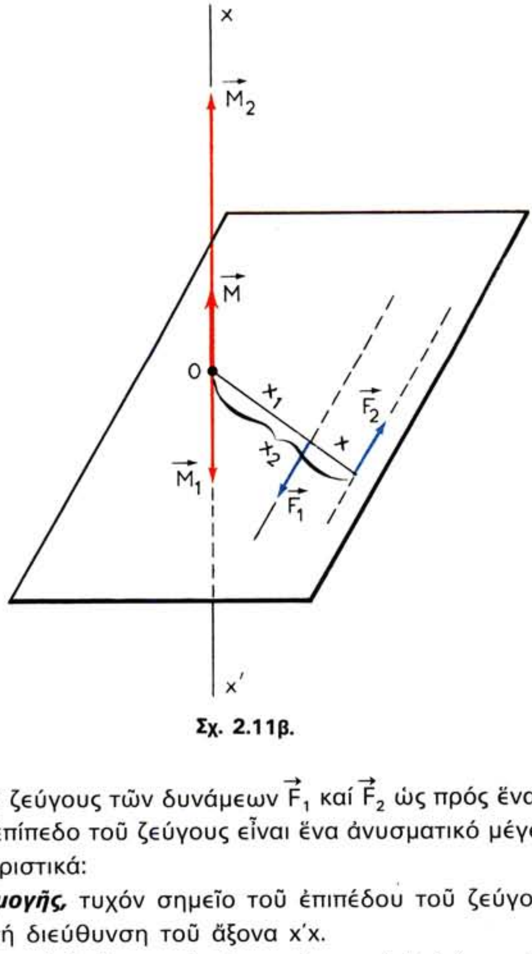
Ἄρα ***ζεῦγος δυνάμεων ὀνομάζομε*** ἕνα σύστημα δύο δυνάμεων πού εἶναι παράλληλες, ἀντίρροπες καί ἔχουν ἴσα μέτρα.

Τό ἐπίπεδο πού ὁρίζουν οἱ δυνάμεις ἑνός ζεύγους ***τό ὀνομάζομε ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους αὐτοῦ.***

Ἔστω ὅτι οἱ ροπές τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ (σχ. 2.11β), εἶναι οἱ $\vec{M}_1$ καί καί $\vec{M}_2$.

Ὀνομάζομε ροπή $\vec{M}_Z$ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδό του, ***τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν $\vec{M}_1$ καί $\vec{M}_2$ τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ὡς πρός τόν ἄξονα αὐτόν. Δηλαδή:***

$$\vec{M}_Z = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



Σχ. 2.11β.

Ἡ ροπή $\vec{M}_Z$ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ὡς πρός ἕναν ἄξονα xx΄, πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους εἶναι ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἀκόλουθα χαρακτηριστικά:

1) ***Σημεῖο ἐφαρμογῆς,*** τυχόν σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ζεύγους.
2) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x΄x.
3) ***Φορά,*** ἐκείνη πού ὁρίζεται μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία, καί
4) ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς μιᾶς ἀπό τίς δυό δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ τοῦ ζεύγους ἐπί τήν ἀπόστασή τους x. Δηλαδή:

$$M_Z = F_1 \,.\, x = F_2 \,.\, x \qquad (1)$$

Παρατηρήσεις:

1) Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι ἡ ροπή $\vec{M}_Z$ τοῦ ζεύγους ὡς πρός τόν ἄξονα

$x'x$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση του ὡς πρός τίς δύο δυνάμεις, ἀλλά μόνο ἀπό τό μέτρο τῶν δυνάμεων αὐτῶν (F_1, F_2) καί τή μεταξύ τους ἀπόσταση x.

Ἄρα ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι: ***Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους δυνάμεων εἶναι ἡ ἴδια ὡς πρός ὁποιοδήποτε ἄξονα κάθετο στό ἐπίπεδό του, δηλαδή εἶναι ἐλεύθερο ἀνυσματικό μέγεθος (μπορεῖ δηλαδή νά μετακινηθεῖ ἤ ἐπάνω στόν φορέα του ἤ παράλληλα πρός αὐτόν).***

2) Ἐπειδή ἡ ροπή ζεύγους δυνάμεων ὡς πρός ὁποιοδήποτε ἄξονα κάθετο στό ἐπίπεδό του ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό μέτρο τῶν δυνάμεών του καί τήν ἀπόστασή τους, ***εἶναι χαρακτηριστικό μέγεθος τοῦ ζεύγους.***

Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως: $M_Z = F_1 \cdot x$

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ὡς πρός τόν ἄξονα $x'x$ (σχ. 2.11β) εἶναι ἡ $\vec{M}_1$ πού ἔχει μέτρο:

$$M_1 = F_1 x_1 \tag{1}$$

ὅπου: x_1 εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ (Ο) ἀπό τήν $\vec{F}_1$.

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_2$ ὡς πρός τόν ἄξονα $x'x$ εἶναι ἡ $\vec{M}_2$ πού ἔχει μέτρο:

$$M_2 = F_2 x_2 \tag{2}$$

ὅπου: x_2 εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ (Ο) ἀπό τήν F_2.

Μέ βάση τόν ὁρισμό τῆς ροπῆς ζεύγους ὡς πρός τόν ἄξονα $x'x$ θά ἔχομε:

$$\vec{M}_Z = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \tag{3}$$

Τά $\vec{M}_Z$, $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ ἔχουν τόν ἴδιο φορέα. Ἄρα τό μέτρο τῆς $\vec{M}_Z$ θά εἶναι ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν $\vec{M}_1$ καί $\vec{M}_2$. Καί ἐπειδή ἡ $\vec{M}_2$ ἔχει ἀντίθετη φορά ἀπό τή $\vec{M}_1$, ἀπό τήν (3) παίρνομε:

$$M_Z = M_2 - M_1 \tag{4}$$

Ἀπό τίς (4), (2) καί (1) παίρνομε:

$$M_Z = F_2 \cdot x_2 - F_1 x_1 \tag{5}$$

Ἐπειδή $F_2 = F_1$, ἀπό τή σχέση (5) ἔχομε:

$$M_Z = F_1 (x_2 - x_1) \tag{6}$$

Ἡ $(x_2 - x_1)$ εἶναι ἡ ἀπόσταση x τῶν δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ τοῦ ζεύγους καί ἡ (6) γράφεται:

$$M_Z = F_1 \cdot x$$

Συνισταμένη δύο δυνάμεων πού εἶναι παράλληλες, ἀντίρροπες καί ἔχουν ἴσα μέτρα (Συνισταμένη δύο δυνάμεων πού ἀποτελοῦν ζεῦγος).

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων πού εἶναι παράλληλες, ἀντίρροπες καί ἔχουν ἴσα μέτρα ***εἶναι μηδέν.***

Ἑπομένως ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων πού ἀποτελοῦν ζεῦγος ***εἶναι μηδέν.***

Ἄρα ἕνα ζεῦγος δυνάμεων ***δέν μπορεῖ οὔτε νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό μία ἄλλη δύναμη οὔτε νά ἀντικαταστήσει μιά ἄλλη δύναμη.***

Φυσική σημασία τοῦ ζεύγους δυνάμεων.

1) Τό ζεῦγος δυνάμεων πού ἐξασκεῖται ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα δέν μπορεῖ νά προκαλέσει μεταφορική κίνηση αὐτοῦ, γιατί τό ζεῦγος δυνάμεων ἔχει συνισταμένη μηδέν.

2) Τό ζεῦγος δυνάμεων προκαλεῖ περιστροφή τοῦ σώματος, ἐπάνω στό ὁποῖο ἀσκεῖται, γύρω ἀπό ἕνα ἄξονα πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδό του.

Τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ (σχ. 2.11γ) γυρίζει τόν ἐκπωματιστή.

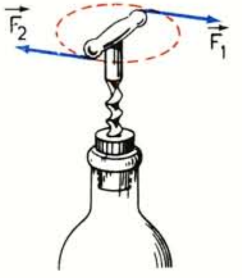
Παρατήρηση:

Πρέπει νά μήν ξεχνᾶμε ὅτι δέν μποροῦμε νά πετύχομε περιστροφή ἑνός σώματος μέ τήν ἐπίδραση ἐπάνω σέ αὐτό μιᾶς μόνο δυνάμεως, γιατί, ὅπως ξέρομε, τό ἀποτέλεσμα μιᾶς δυνάμεως πού ἐπιδρᾶ ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ σώματος ἤ παραμόρφωσή του ἤ καί τά δύο μαζί.

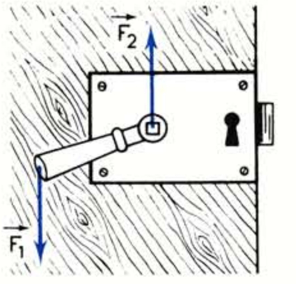
Ὅταν λέμε ὅτι ἐφαρμόζομε μία δύναμη $\vec{F}_1$ ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα καί αὐτό, μέ τήν ἐπίδραση τῆς ροπῆς της ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς του, περιστρέφεται, ἐννοοῦμε ὅτι τό σῶμα περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα μέ τήν ἐπίδραση τοῦ ζεύγους τῶν ἑξῆς δυνάμεων:

α) Τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$, τήν ὁποία ἐμεῖς ἀσκοῦμε ἐπάνω στό σῶμα καί β) μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}_2$, τήν ὁποία ἀσκεῖ ὁ ἄξονας ἐπάνω στό σῶμα· αὐτή εἶναι παράλληλη καί ἀντίρροπη τῆς $\vec{F}_1$ καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ τό μέτρο τῆς $\vec{F}_1$.

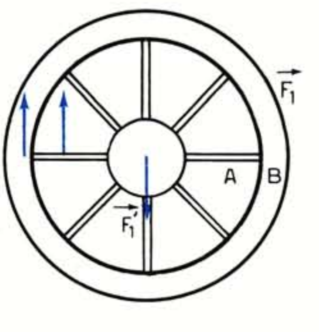
Τήν $\vec{F}_2$ τήν ἀσκεῖ ὁ ἄξονας ἐπάνω στό σῶμα, γιατί, ὅταν ἐμεῖς ἀσκοῦμε ἐπάνω στό σῶμα τή δύναμη $\vec{F}_1$, τότε αὐτή μέσω τοῦ σώματος ἀσκεῖται καί ἐπάνω στόν ἄξονα, ὁπότε ὁ ἄξονας, βάσει τῆς ἀρχῆς δράσεως-ἀντιδράσεως, ἀσκεῖ τήν $\vec{F}_2$ ἐπάνω στό σῶμα (δηλαδή στό σῶμα ἀσκοῦνται οἱ $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$).



Σχ. 2.11γ.



Σχ. 2.11δ.



Σχ. 2.11ε.

Τήν περιστροφή τῆς χειρολαβῆς (σχ. 2.11δ) τήν προκαλεῖ τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ καί ὄχι ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ πού ἐφαρμόζομε ἐμεῖς, γιατί:

Μόλις ἐφαρμόσομε τή δύναμη $\vec{F}_1$ πάνω στή χειρολαβή αὐτή ἀσκεῖται μέ τή χειρολαβή καί πάνω στόν ἄξονα περιστροφῆς της, ὁπότε ὁ ἄξονας ἀσκεῖ ἐπάνω στό σημεῖο στηρίξεως τῆς χειρολαβῆς μιά δύναμη $\vec{F}_2$, ἀντίθετη τῆς $\vec{F}_1$. Δηλαδή πάνω στή χειρολαβή ἀσκεῖται ζεῦγος δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού τήν κάνει νά γυρίζει.

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ πού τήν ἐφαρμόσαμε ἐμεῖς πάνω στή χειρολαβή ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς της εἶναι ἴση μέ τή ροπή τοῦ ζεύγους $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού τή γυρίζει.

Ἐπειδή ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_2$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι μηδέν, λέμε, ***καταχρηστικά,*** ὅτι τό σῶμα περιστρέφεται ἐξαιτίας τῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ὡς πρός τόν ἄξονα.

3) Ἡ περιστροφή τοῦ σώματος πού τήν προκαλεῖ ἕνα ζεῦγος δυνάμεων, ἐξαρτᾶται ὄχι μόνο ἀπό τό μέτρο τῶν δυνάμεών του ἀλλά καί ἀπό τήν ἀπόστασή τους, δηλαδή ἐξαρτᾶται ἀπό τή ροπή τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων.

Ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ (σχ. 2.11ε) προκαλεῖ μεγαλύτερο ἀποτέλεσμα ὅταν τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της εἶναι τό B ἀπό ὅ,τι ὅταν εἶναι τό A (γιατί ἡ ροπή τοῦ ζεύγους τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_1'$ εἶναι μεγαλύτερη, ὅταν ἡ $\vec{F}_1$ ἐφαρμόζεται στό B, ἀπό τήν ροπή του ὅταν αὐτή ἐφαρμόζεται στό A).

4) Ἄν ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα πού δέν μπορεῖ νά περιστραφεῖ ἀσκεῖται ζεῦγος δυνάμεων, τό παραμορφώνει. Αὐτό π.χ. συμβαίνει ὅταν προσπαθοῦμε νά ξεβουλώσομε ἕνα μπουκάλι μέ τό χέρι: ὁ φελλός παθαίνει στρέψη..

Ἡ ἐπίδραση τοῦ ζεύγους εἶναι ἀναγκαία προϋπόθεση γιά νά περιστραφεῖ ἕνα σῶμα γύρω ἀπό ἄξονα.

Γιά νά περιστραφεῖ ἕνα σῶμα γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, ***πρέπει νά ἐπιδράσει ἐπάνω του ἕνα ζεῦγος δυνάμεων. Ἡ διεύθυνση τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους αὐτοῦ πρέπει νά συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα:*** πρέπει δηλαδή τό ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους νά εἶναι κάθετο στόν ἄξονα.

Ὅταν στόν τροχό (σχ. 2.11στ) ἐφαρμόζομε μιά δύναμη $\vec{F}_1$ καί αὐτός περιστρέφεται, τότε συμβαίνει τό ἑξῆς:

Ὅταν ἐφαρμόσομε στόν τροχό τή δύναμη $\vec{F}_1$, τότε ὁ τροχός ἀσκεῖ καί στόν ἄξονα μία δύναμη $\vec{F}_1'$, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη καί ὁμόρροπη μέ τήν $\vec{F}_1$ καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ τό μέτρο της ($F_1 = F_1'$).

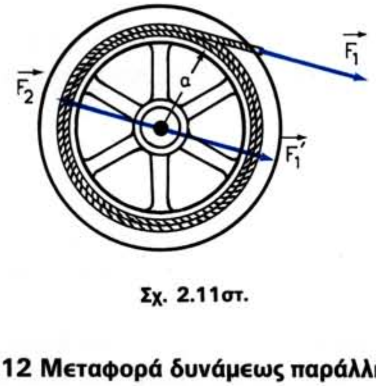
Ἐπειδή ὁ τροχός ἀσκεῖ στόν ἄξονα τή δύναμη $\vec{F}_1'$ (δράση), ὁ ἄξονας ἀσκεῖ στό τροχό τή δύναμη $\vec{F}_2$ (ἀντίδραση), ἡ ὁποία ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί τό ἴδιο μέτρο, μέ τήν $\vec{F}_1'$ ἀλλά ἀντίθετη φορά.

Ἐπομένως στόν τροχό ἀσκοῦνται δύο δυνάμεις: ἡ $\vec{F}_1$, τήν ὁποία ἀσκοῦμε ἐμεῖς, καί ἡ $\vec{F}_2$, τήν ὁποία ἀσκεῖ ὁ ἄξονάς του.

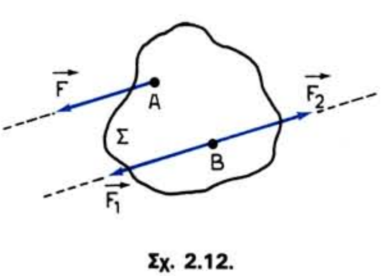
Οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἀσκοῦνται στόν τροχό εἶναι παράλληλες, ἔχουν ἴσα μέτρα καί ἀντίθετες φορές.

Ἔτσι στόν τροχό ἐπιδρᾶ ἕνα ζεῦγος δυνάμεων ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$) πού κάνει τόν τροχό νά περιστρέφεται.

Ἐπειδή ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_2$ ὡς πρός τόν ἄξονα εἶναι μηδέν, λέμε τότε, ***καταχρηστικά,*** ὅτι ὁ τροχός περιστρέφεται ἐξαιτίας τῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$.



Σχ. 2.11στ.



Σχ. 2.12.

2.12 Μεταφορά δυνάμεως παράλληλα πρός τόν ἑαυτό της (ἀναγωγή δυνάμεως ὡς πρός ἕνα σημεῖο).

Ἔστω ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἀσκεῖται στό σημεῖο Α ἑνός σώματος Σ (σχ. 2.12) καί ὅτι θέλομε νά μεταφέρομε τή δύναμη αὐτή παράλληλα πρός τόν ἑαυτό της, γιά νά ἀποκτήσει νέο σημεῖο ἐφαρμογῆς τό σημεῖο Β τοῦ σώματος.

Γιά τό σκοπό αὐτό ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Στό σημεῖο Β τοῦ σώματος Σ ἐφαρμόζομε δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού εἶναι: α) παράλληλες πρός τήν $\vec{F}$, β) $F = F_1 = F_2$ καί γ) ἡ $\vec{F}_1$ ὁμόρροπη πρός τήν $\vec{F}$ καί ἡ $\vec{F}_2$ ἀντίρροπη πρός τήν $\vec{F}$ καί πρός τήν $\vec{F}_1$.

Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ἐπειδή εἶναι $F_1 = F_2$ καί ἀντίρροπες καί ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαίως.

Ἑπομένως, ὅταν στό σῶμα ἐπιδροῦν ταυτόχρονα οἱ τρεῖς δυνάμεις $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, προκαλοῦν τό ἴδιο ἀποτέλεσμα μέ ἐκεῖνο πού προκαλεῖ ἡ $\vec{F}$ ὅταν ἐνεργεῖ μόνη της. Δηλαδή:

Τό σύστημα τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}$ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τή δύναμη $\vec{F}$.

Ἀλλά τό σύστημα τῶν τριῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}$ εἶναι μία δύναμη $\vec{F}_1$, καί ἕνα ζεῦγος δυνάμεων $(\vec{F}, \vec{F}_2)$. Ἄρα:

Ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ μιά δύναμη $\vec{F}_1$ καί μέ ἕνα ζεῦγος δυνάμεων $(\vec{F}, \vec{F}_2)$. Ἔτσι:

Τό ἀποτέλεσμα πού προκαλεῖ ἡ δύναμη $\vec{F}$, ὅταν ἀσκεῖται μόνη της στό σημεῖο Α τοῦ στερεοῦ σώματος Σ, εἶναι τό ἴδιο μέ τό ἀποτέλεσμα πού προκαλοῦν ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ (Β) καί τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων $\vec{F}$, $\vec{F}_2$ ἄν ἀσκηθοῦν ταυτόχρονα στό σῶμα αὐτό.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι:

Μιά δύναμη $\vec{F}$ (Α) πού ἀσκεῖται σέ ἕνα στερεό σῶμα μπορεῖ ***νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἕνα ζεῦγος δυνάμεων $(\vec{F}, \vec{F}_2)$,*** ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία εἶναι αὐτή ἡ ἴδια ἡ δύναμη $\vec{F}$, ***καί ἀπό μιά ἄλλη δύναμη $(\vec{F}_1)$ ἡ ὁποία:*** α) ἔχει τό ἴδιο μέτρο μέ τήν $\vec{F}$ $(\vec{F}_1 = \vec{F})$, β) εἶναι παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τήν $\vec{F}$, ἀλλά γ) ἔχει ἄλλο σημεῖο ἐφαρμογῆς (τό Β).

Σημείωση:

1) Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων $\vec{F}$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι ἴση μέ τή ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό σημεῖο Β.
2) Τήν ἀντικατάσταση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ἀπό ἕνα ζεῦγος δυνάμεων $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ καί ἀπό μιά δύναμη $(\vec{F}_1)$ τήν ὀνομάζομε ***ἀναγωγή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό σημεῖο Β ἤ παράλληλη μεταφορά τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.***

2.13 Θεώρημα τῶν ροπῶν ἤ Θεώρημα τοῦ Varignon.

Ὅταν οἱ δυνάμεις πού ἀσκοῦνται σέ ἕνα σῶμα, ἀνεξάρτητα ἄν εἶναι ὁμοεπίπεδες ἤ ὄχι, μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν ἀπό ***μία μόνο δύναμη,*** τότε ἰσχύει τό ἑξῆς θεώρημα τῶν ροπῶν:

Ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ πολλῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ..., πού ἐνεργοῦν ποικιλοτρόπως σέ ἕνα σῶμα καί μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν μόνο ἀπό τή $\vec{\Sigma}$, ὡς πρός ἕνα σημεῖο ἤ ἄξονα, ἰσοῦται μέ τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$ ... τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ... ὡς πρός τό σημεῖο ἤ τόν ἄξονα αὐτό. Δηλαδή εἶναι:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 \ldots$$

Ἄν οἱ δυνάμεις πού ἀσκοῦνται σέ ἕνα σῶμα εἶναι ὁμοεπίπεδες, ἰσχύει τό θεώρημα τῶν ροπῶν μέ τήν ἑξῆς διατύπωση:

Ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ πολλῶν ὁμοεπιπέδων δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ..., πού ἀσκοῦνται σέ ἕνα σῶμα ὡς πρός ἕνα σημεῖο ἤ ἄξονα, ἰσοῦται μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$ ... τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ὡς πρός τό σημεῖο ἤ τόν ἄξονα αὐτό.

Δηλαδή:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 \ldots$$

Ἡ σχέση ἰσχύει, γιατί στήν περίπτωση πού οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$... εἶναι ὁμοεπίπεδες, οἱ ροπές τους $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση.

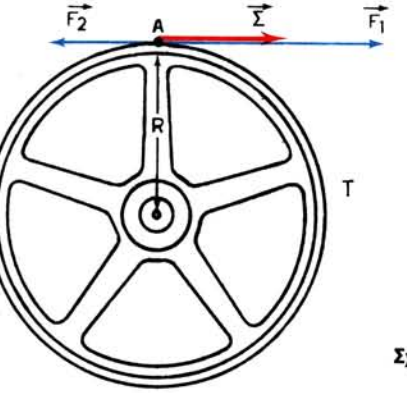
Ἄν σέ ἕνα τροχό Τ (σχ. 2.13) ἀσκοῦνται οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἔχουν συνισταμένη τήν $\vec{\Sigma}$, τότε γιά τά μέτρα τῶν ροπῶν τους ὡς πρός τόν ἄξονα τοῦ τροχοῦ ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$M_1 = F_1 \,.\, R \qquad (1)$$

$$M_2 = F_2 \,.\, R \qquad (2)$$

$$M_\Sigma = \Sigma \,.\, R = (F_1 - F_2)\, R \qquad (3)$$

$$M_\Sigma = F_1 \,.\, R - F_2 \,.\, R$$



Σχ. 2.13.

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2) καί (3) παίρνομε: $\quad M_\Sigma = M_1 - M_2$

Σημείωση:

Οἱ ροπές $\vec{M}_1$ καί $\vec{M}_2$ εἶναι ἀντίθετες (τείνουν νά στρέψουν τόν τροχό ἀντίθετα ἡ μία ἀπό τήν ἄλλη) καί γι' αὐτό ἡ συνισταμένη τους $\vec{M}_\Sigma$ ἔχει μέτρο: $M_\Sigma = M_1 - M_2$

2.14 Συνθῆκες ἰσορροπίας στερεοῦ σώματος.

Γιά νά ἰσορροπεῖ ἕνα σῶμα στό ὁποῖο ἐπιδροῦν μέ ὁποιοδήποτε τρόπο πολλές δυνάμεις, ***πρέπει καί άρκεῖ νά ἰσχύουν ταυτοχρόνως τά ἑξῆς:***

α) Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων νά εἶναι μηδέν καί

β) Ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο ἤ ἄξονα νά εἶναι ἐπίσης μηδέν. Πρέπει δηλαδή:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \qquad \text{(πρώτη συνθήκη)} \qquad (1)$$

$$\Sigma\vec{M} = 0 \qquad \text{(δεύτερη συνθήκη)} \qquad (2)$$

Παρατηρήσεις.

1) Οἱ δύο αὐτές συνθῆκες ὀνομάζονται ***συνθῆκες ἰσορροπίας ἑνός σώματος ἤ συνθῆκες ἰσορροπίας τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στό σῶμα αὐτό.***

2) Ὅταν ἰσχύουν καί οἱ δύο συνθῆκες ταυτόχρονα, ἡ κινητική κατάσταση τοῦ σώματος παραμένει ἀμετάβλητη, δηλαδή τό σῶμα ἰσορροπεῖ ($\gamma = 0$, $\omega' = 0$).

2.15 Σύνθεση δύο παράλληλων καί ὁμόρροπων δυνάμεων.

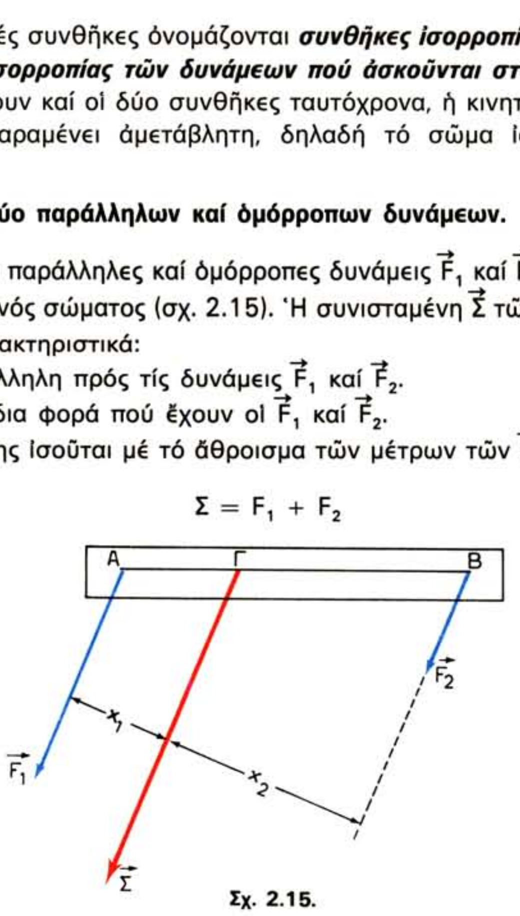
Ἔστω ὅτι δύο παράλληλες καί ὁμόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἐνεργοῦν σέ δύο σημεῖα Α καί Β ἑνός σώματος (σχ. 2.15). Ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ τῶν δυνάμεων αὐτῶν ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) Εἶναι παράλληλη πρός τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

β) Ἔχει τήν ἴδια φορά πού ἔχουν οἱ $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

γ) Τό μέτρο της ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Δηλαδή:

$$\Sigma = F_1 + F_2 \qquad (1)$$



Σχ. 2.15.

δ) Ὁ φορέας της τέμνει τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ πού ἑνώνει τά δυό σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ σέ ἕνα σημεῖο Γ, πού οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τά σημεῖα ἐφαρμογῆς Α καί Β εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρός τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, δηλαδή:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \qquad (2)$$

2.16 Ἀποδείξεις σχέσεων: $\Sigma = F_1 + F_2$ *καί* $\frac{F_1}{F_2} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

1. Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως: $\Sigma = F_1 + F_2$.

Γιά νά ἀποδείξομε τή σχέση $\Sigma = F_1 + F_2$, σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Δεχόμαστε ὅτι ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ περνάει ἀπό τό σημεῖο Γ.

β) Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν γιά τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$ ὡς πρός τόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$, ὁπότε ἔχομε:

$$F_1 \cdot 0 + F_2 (x_1 + x_2) = \Sigma \cdot x_1 \qquad (1)$$

γ) Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν γιά τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$ ὡς πρός τόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Β καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$, ὁπότε ἔχομε:

$$F_1 (x_1 + x_2) + F_2 \cdot 0 = \Sigma \cdot x_2 \qquad (2)$$

δ) Προσθέτομε τίς (1) καί (2) καί ἔχομε:

$$F_1 (x_1 + x_2) + F_2 (x_1 + x_2) = \Sigma x_2 + \Sigma x_1$$

ἤ

$$(F_1 + F_2)(x_1 + x_2) = \Sigma (x_2 + x_1)$$

ἤ

$$\Sigma = F_1 + F_2$$

2. Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

Γιά νά ἀποδείξομε τή σχέση $\frac{F_1}{F_2} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Δεχόμαστε ὅτι ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ περνάει ἀπό τό σημεῖο Γ.

β) Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν γιά τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$ ὡς πρός τόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Γ καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ὁπότε ἔχομε:

ροπή τῆς F_1 + ροπή τῆς F_2 = ροπή τῆς Σ

Δηλαδή: $\quad -F_1x_1 + F_2x_2 = \Sigma \cdot 0 \quad$ καί $\quad F_2x_2 = F_1x_1$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{x_2}{x_1} \qquad (1)$$

γ) Ἀπό τή Γεωμετρία ἔχομε: $\quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \qquad (2)$

δ) Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε: $\quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

2.17 Σύνθεση δύο ἀνίσων παραλλήλων καί ἀντιρρόπων δυνάμεων.

Ἔστω ὅτι οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι δύο ἄνισες ($\vec{F}_1 > \vec{F}_2$) παράλληλες καί ἀντίρροπες δυνάμεις καί ἐνεργοῦν σέ δύο σημεῖα Α καί Β ἑνός σώματος (σχ. 2.17). Ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ τῶν δυνάμεων αὐτῶν ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) Εἶναι παράλληλη πρός τίς $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

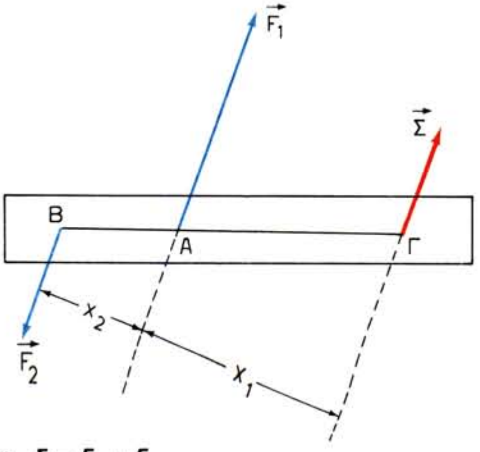
β) Ἔχει φορά, τή φορά τῆς μεγαλύτερης ἀπό τίς δύο συνιστῶσες, δηλ. τῆς $\vec{F}_1$.

γ) Ἔχει μέτρο ἴσο μέ τή διαφορά τῶν μέτρων τῶν δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, δηλαδή:

$$\Sigma = F_1 - F_2$$

δ) Ὁ φορέας της τέμνει τήν εὐθεία, πού ἑνώνει τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, πιό πέρα ἀπό τή μεγαλύτερη καί σέ ἕνα σημεῖο Γ, πού οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τά σημεῖα ἐφαρμογῆς Α καί Β τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες πρός τίς δυνάμεις αὐτές, δηλαδή:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$$



Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως: $\boldsymbol{Σ = F_1 - F_2}$.

Γιά νά ἀποδείξομε τή σχέση $Σ = F_1 - F_2$ σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Δεχόμαστε ὅτι ἡ συνισταμένη $\vec{Σ}$ τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ περνάει ἀπό τό σημεῖο Γ.

β) Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν γιά τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{Σ}$ ὡς πρός τόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{Σ}$, ὁπότε ἔχομε:

$$F_2x_2 + F_1 \,.\, 0 = Σ \,.\, x_1 \qquad (1)$$

γ) Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν γιά τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{Σ}$ ὡς πρός τόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Β καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{Σ}$, ὁπότε ἔχομε:

$$F_2 \,.\, 0 + F_1x_2 = Σ\,(x_1 + x_2) \qquad (2)$$

δ) Ἀφαιροῦμε τήν (1) ἀπό τή (2) καί ἔχομε:

$$F_1x_2 - F_2x_2 = Σ\,(x_1 + x_2) - Σx_1$$

$$(F_1 - F_2) \,.\, x_2 = Σ \,.\, x_2$$

$$Σ = F_1 - F_2$$

Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως: $\boldsymbol{\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΓ}}$

Γιά νά ἀποδείξομε τή σχέση $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΓ}$ σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Δεχόμαστε ὅτι ἡ συνισταμένη $\vec{Σ}$ τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ περνάει ἀπό τό σημεῖο Γ.

β) Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν γιά τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{Σ}$ ὡς πρός τόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Γ καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{Σ}$, ὁπότε ἔχομε:

Ροπή τῆς F_1 + ροπή τῆς F_2 = ροπή τῆς Σ

Δηλαδή: $\quad F_1 \,.\, x_1 - F_2\,(x_1 + x_2) = Σ \,.\, 0 \quad$ καί $\quad F_1x_1 = F_2\,(x_1 + x_2)$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(x_1 + x_2)}{x_1} \qquad (1)$$

Ἀπό τή Γεωμετρία ἔχομε: $$\frac{x_1 + x_2}{x_1} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} \qquad (2)$$

δ) Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε: $$\frac{F_1}{F_2} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$$

2.18 Σύνθεση δύο ὁμοεπίπεδων ἀλλά ὄχι παραλλήλων δυνάμεων.

Ἔστω ὅτι σέ δύο σημεῖα Α καί Β ἑνός στερεοῦ σώματος ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, οἱ ὁποῖες βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί οἱ διευθύνσεις τους τέμνονται στό σημεῖο Γ (σχ. 2.18).

Γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη $\vec{Σ}$ τῶν δυνάμεων αὐτῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Μεταφέρομε τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἐπάνω στούς φορεῖς τους, ὥστε νά ἀποκτήσουν τίς θέσεις $\vec{F}'_1$ καί $\vec{F}'_2$, δηλαδή νά ἀποκτήσουν τό ἴδιο σημεῖο ἐφαρμογῆς Γ.

β) Βρίσκομε τή συνισταμένη $\vec{Σ}'$ τῶν $\vec{F}'_1$ καί $\vec{F}'_2$ ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τοῦ παραλληλογράμμου.

γ) Μεταθέτομε τήν $\vec{Σ}'$ ἐπάνω στό φορέα της, ὥστε νά ἀποκτήσει ὡς σημεῖο ἐφαρμογῆς της ἕνα σημεῖο Δ τοῦ σώματος. ***Ἔτσι στή θέση αὐτή ἡ $\vec{Σ}'$, δηλαδή ἡ $\vec{Σ}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.***

Ἑπομένως ***ἡ συνισταμένη $\vec{Σ}$ τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

1) Μέτρο, πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

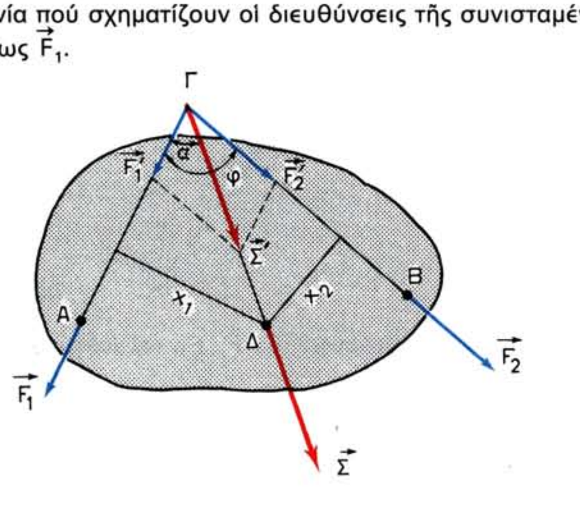
$$Σ = Σ' = \sqrt{F'^2_1 + F'^2_2 + 2F'_1 \,.\, F'_2 \text{ συνφ}} = \sqrt{F^2_1 + F^2_2 + 2F_1 \,.\, F_2 \text{ συνφ}}$$

ὅπου: φ ἡ γωνία πού σχηματίζουν μεταξύ τους οἱ διευθύνσεις τῶν δύο δυνάμεων ($\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$).

2) Διεύθυνση, ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\text{ημα} = \frac{F'_2}{Σ'} \text{ ημφ} = \frac{F_2}{Σ} \text{ ημφ}$$

ὅπου: α ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ διευθύνσεις τῆς συνισταμένης $\vec{Σ}$ καί τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$.



Σχ. 2.18.

3) Σημεῖο ἐφαρμογῆς, ἕνα ἀπό τά σημεῖα τοῦ σώματος, ἔστω τό Δ, ἀπό τό ὁποῖο περνάει ἡ διεύθυνση τῆς $\vec{\Sigma}'$ πού συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς $\vec{\Sigma}$ καί γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ὑποχρεωτικά ἡ σχέση:

$$F_1 x_1 = F_2 x_2 \tag{1}$$

ὅπου: x_1 καί x_2 οἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Δ ἀπό τίς διευθύνσεις τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως (1).

Ἡ σχέση (1) προκύπτει ὡς ἑξῆς: Ἄν ἐφαρμόσομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρός ἕναν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό σημεῖο ἐφαρμογῆς Δ τῆς συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{\Sigma}$, θά ἔχομε:

$$\text{ροπή τῆς } F_1 + \text{ροπή τῆς } F_2 = \text{ροπή τῆς } \vec{\Sigma}$$

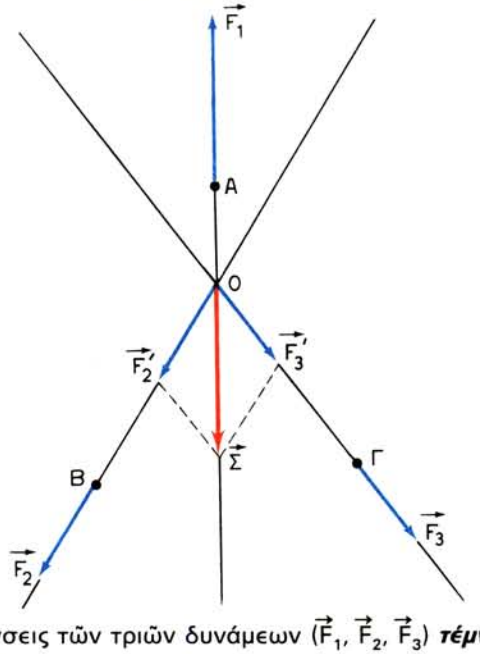
Δηλαδή $\quad F_1x_1 - F_2x_2 = \Sigma \,.\, 0 \quad$ καί $\quad F_1x_1 = F_2x_2$

Παρατήρηση:

Ἄν σέ ἕνα σῶμα ἀσκοῦνται περισσότερες ἀπό δύο ὁμοεπίπεδες καί ὄχι παράλληλες δυνάμεις, γιά νά τίς συνθέσομε, ἐργαζόμαστε μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἐργαζόμαστε γιά τή σύνθεση δύο τέτοιων δυνάμεων. Βρίσκομε τή συνισταμένη δύο δυνάμεων, συνθέτομε τή συνισταμένη τους μέ τήν τρίτη δύναμη, ὕστερα τή συνισταμένη αὐτή μέ τήν τέταρτη δύναμη κ.ο.κ., ὥσπου νά ἐξαντληθοῦν ὅλες οἱ δυνάμεις.

2.19 Ἰσορροπία τριῶν ὁμοεπίπεδων δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ τρία σημεῖα στερεοῦ σώματος.

Τρεῖς ὁμοεπίπεδες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$, πού ἐνεργοῦν σέ τρία σημεῖα Α, Β, Γ (σχ. 2.19) στερεοῦ σώματος, ***ἰσορροποῦν, ὅταν ἰσχύουν ταυτόχρονα τά ἑξῆς:***



Σχ. 2.19.

1) Οἱ διευθύνσεις τῶν τριῶν δυνάμεων ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$) ***τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Ο τοῦ σώματος καί***

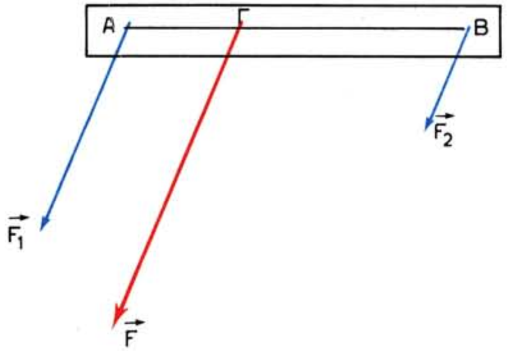
2) Κάθε μία ἀπό αὐτές εἶναι ἀντίθετη πρός τή συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξη.

Μεταφέρομε τίς δύο δυνάμεις $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$ ἐπάνω στό φορέα τους, ὥστε νά ἀποκτήσουν σημεῖο ἐφαρμογῆς τό Ο, πού εἶναι ἡ τομή τῶν διευθύνσεών τους. Ἔστω ὅτι οἱ καινούργιες θέσεις τῶν $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$ εἶναι οἱ $\vec{F}'_2$ καί $\vec{F}'_3$. Βρίσκομε τή συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ τῶν $\vec{F}'_2$ καί $\vec{F}'_3$. Γιά νά ἰσορροποῦν οἱ τρεῖς δυνάμεις F_2, F_3 καί F_1 (ἑπομένως καί οἱ $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ καί $\vec{F}_1$), πρέπει ἡ συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ νά ἰσορροπεῖται ἀπό τήν $\vec{F}_1$. Ἀλλά γιά νά γίνεται αὐτό, πρέπει ἡ διεύθυνση τῆς $\vec{F}_1$ νά πέφτει ἐπάνω στή διεύθυνση τῆς $\vec{\Sigma}$, ὁπότε θά περνάει ἀπό τό σημεῖο Ο, νά ἔχει μέτρο ὅσο ἡ $\vec{\Sigma}$ καί φορά ἀντίθετή της.

2.20 Ἀνάλυση δυνάμεως σέ δύο συνιστῶσες πού εἶναι παράλληλές της καί ἔχουν τήν ἴδια φορά.

Ἔστω ὅτι θέλομε νά ἀναλύσομε τή δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 2.20) σέ δύο παράλληλες καί ὁμόρροπες της δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, πού νά διέρχονται ἀπό τά σημεῖα Α καί Β. ***Ζητᾶμε δηλαδή νά βροῦμε τά μέτρα τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.***



Σχ. 2.20.

Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πρέπει νά εἶναι τέτοιες, ὥστε ἡ συνισταμένη τους νά εἶναι ἡ $\vec{F}$. Ἑπομένως θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$F = F_1 + F_2 \qquad (1)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(\Gamma B)}{(A\Gamma)} \qquad (2)$$

Ἀπό τή σχέση (2) προκύπτει ὅτι:

$$\frac{F_1}{F_2 + F_1} = \frac{\Gamma B}{A\Gamma + \Gamma B}$$

$$F_1 = (F_2 + F_1)\frac{\Gamma B}{AB} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (3) βρίσκομε τό μέτρο τῆς $\vec{F}_1$, δηλαδή:

$$F_1 = F \cdot \frac{(\Gamma B)}{(AB)} \qquad (4)$$

Ἀπό τή σχέση (2) προκύπτει:

$$\frac{F_1 + F_2}{F_2} = \frac{(\Gamma B + A\Gamma)}{A\Gamma}$$

$$F_2 = (F_1 + F_2)\,\frac{A\Gamma}{(B\Gamma + A\Gamma)} \qquad (5)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (5) βρίσκομε τό μέτρο τῆς F_2, δηλαδή:

$$F_2 = F\,\frac{(A\Gamma)}{(AB)}$$

2.21 Ἰσορροπία στερεοῦ πού μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα.

Γιά νά ἰσορροπεῖ ἕνα σῶμα, στό ὁποῖο ἀσκοῦνται πολλές ὁμοεπίπεδες δυνάμεις καί τό ὁποῖο εἶναι δυνατόν νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων αὐτῶν, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ ἑξῆς συνθῆκες:

1) Ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στό σῶμα νά εἶναι μηδέν.

Δηλαδή:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \qquad \text{(πρώτη συνθήκη)}$$

2) Ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στό σῶμα ὡς πρός τόν ἄξονα νά εἶναι μηδέν.

Δηλαδή:

$$\Sigma\vec{M} = 0 \qquad \text{(δεύτερη συνθήκη)}$$

Ἔστω ὅτι ἡ ράβδος (AB) (σχ. 2.21) μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα (O) ***πού εἶναι κάθετος στή ράβδο.*** Ἐφαρμόζομε στή ράβδο τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, πού εἶναι ***ὁμοεπίπεδες καί κάθετες στή ράβδο (ἑπομένως ὁ ἄξονας (O) εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων).***

Ἐπάνω στή ράβδο ἀσκοῦνται συνολικά οἱ ἑξῆς δυνάμεις: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ καί ἡ $\vec{F}_\alpha$ (ἡ $\vec{F}_\alpha$ εἶναι ἡ δύναμη πού ἀσκεῖ στή ράβδο ὁ ἄξονας).

Γιά νά ἰσορροπεῖ ἡ ράβδος ***πρέπει νά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ ἑξῆς συνθῆκες.***

α) Ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στή ράβδο νά εἶναι μηδέν, δηλαδή:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_3 - \vec{F}_2 - \vec{F}_{\alpha\xi} = 0 \qquad \text{(πρώτη συνθήκη)} \qquad (1)$$

β) Ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στή ράβδο ὡς πρός τόν ἄξονά της νά εἶναι μηδέν, δηλαδή:

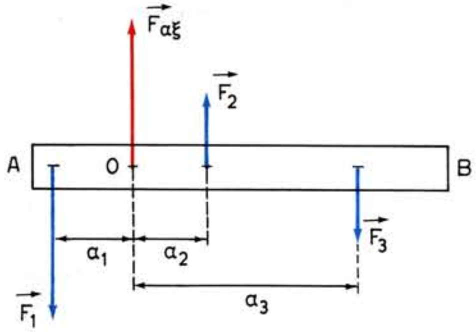
$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_{\alpha\xi} = 0 \qquad (2)$$

Ἐπειδή ἡ δύναμη $\vec{F}_{\alpha\xi}$ τέμνει τόν ἄξονα, ἡ ροπή της ὡς πρός τόν ἄξονα αὐτόν εἶναι μηδέν. Δηλαδή:

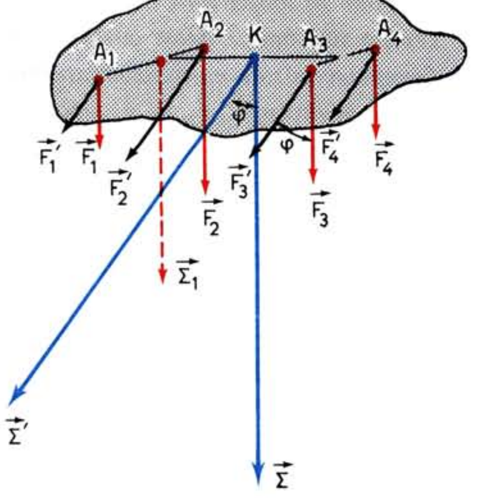
$$\vec{M}_{\alpha\xi} = 0 \qquad (3)$$

Ἄν λάβομε ὑπόψη τή σχέση (3), ἡ συνθήκη (2) γράφεται:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0 \qquad (4)$$



Σχ. 2.21.



Σχ. 2.22.

2.22 Σύνθεση πολλῶν παραλλήλων δυνάμεων.

Ἄν σέ ἕνα στερεό σῶμα ἐνεργοῦν πολλές παράλληλες καί ὁμόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, ***τότε ἡ συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$*** (σχ. 2.22) ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) Εἶναι παράλληλη πρός τίς συνιστῶσες.

β) Εἶναι ὁμόρροπη πρός τίς συνιστῶσες.

γ) Τό μέτρο της εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν:

$\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \ldots$

δ) Σημεῖο ἐφαρμογῆς της εἶναι ἕνα ὁρισμένο σημεῖο K τοῦ σώματος.

Γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη $\vec{\Sigma}$ πολλῶν παραλλήλων καί ὁμορρόπων δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, συνθέτομε δύο ἀπό αὐτές τίς δυνάμεις, ἔστω τίς $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ καί βρίσκομε τή συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}_1$. Ἔπειτα συνθέτομε τή συνισταμένη αὐτή $\vec{\Sigma}_1$ μέ τή δύναμη $\vec{F}_3$ κατά τόν ἴδιο τρόπο κ.ο.κ.

2.23 Θεώρημα τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων.

Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης $\vec{\Sigma}$ πολλῶν παραλλήλων δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ (σχ. 2.22) πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα σῶμα εἶναι ἕνα ὁρισμένο σημεῖο K τοῦ σώματος, τό ὁποῖο ὀνομάζεται ***κέντρο τῶν παραλλήλων αὐτῶν δυνάμεων.***

Γιά τό κέντρο τῶν παράλληλων δυνάμεων πού ἐνεργοῦν σέ ἕνα σῶμα, ἰσχύει τό ἀκόλουθο ***θεώρημα τοῦ κέντρου τῶν παραλλήλων δυνάμεων.***

Τό κέντρο τῶν παραλλήλων δυνάμεων πού ἀσκοῦνται σέ ἕνα σῶμα εἶναι ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τοῦ σώματος αὐτοῦ, τό ὁποῖο παραμένει τό ἴδιο ἄν ὅλες οἱ δυνάμεις στραφοῦν γύρω ἀπό τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τους, χωρίς ὅμως νά μετα-

βληθοῦν τά μέτρα τους καί χωρίς νά πάψουν νά εἶναι παράλληλες. Ἐπίσης τό κέντρο τῶν παραλλήλων δυνάμεων παραμένει τό ἴδιο καί ὅταν τά μέτρα τῶν δυνάμεων αὐτῶν πολλαπλασιασθοῦν μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.

Ἄν τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, πού ἔχουν συνισταμένη τήν $\vec{\Sigma}$, τίς στρέψομε κατά μιά ὁποιαδήποτε γωνία φ, τότε οἱ δυνάμεις αὐτές ἔρχονται στίς θέσεις $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$, $\vec{F}'_3$, $\vec{F}'_4$ καί ἡ συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}'$: α) σχηματίζει μέ τή $\vec{\Sigma}$ γωνία φ, β) περνάει ἀπό τό Κ πού περνοῦσε ἡ $\vec{\Sigma}$ καί γ) ἔχει μέτρο ὅσο καί ἡ $\vec{\Sigma}$.

Στήν οὐσία δηλαδή, ἡ $\vec{\Sigma}'$ εἶναι ἡ $\vec{\Sigma}$ στραμμένη κατά γωνία φ, ὅσο δηλαδή στράφηκαν οἱ συνιστῶσες της*.

2.24 Ἀριθμητικά Παραδείγματα

39) *Ἡ διεύθυνση μιᾶς δυνάμεως $F = 5N$ σχηματίζει μέ ἕνα ἐπίπεδο Π γωνία $\phi = 30°$. Ἕνας ἄξονας x΄x πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο Π τό τέμνει στό σημεῖο Α. Πόση εἶναι ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x, ἄν τό σημεῖο Α ἀπέχει ἀπό τή διεύθυνση τῆς προβολῆς της $\vec{F}_1$ ἐπάνω στό ἐπίπεδο Π ἀπόσταση $d = 40$ cm.*

Λύση.

Ἀφοῦ ἡ προβολή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ πάνω στό ἐπίπεδο Π εἶναι ἡ $\vec{F}_1$, ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$M = F_1 \cdot d \tag{1}$$

Ἰσχύει καί ἡ σχέση: $$F_1 = F \cdot \text{συν}\phi \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) βρίσκομε τή σχέση: $$M = F \cdot \text{συν}\phi \cdot d \tag{3}$$

Δίνονται: $F = 5N$, $\phi = 30°$, συν 30° = 0,866 καί $d = 40\text{ cm} = 40 \cdot 10^{-2}\text{m} = 0{,}40\text{ m}$

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (3) καί ἔχομε:

$M = F \cdot \text{συν }\phi \cdot d = 5 \cdot \text{συν }30° \cdot 0{,}40 = 5 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}40$ Nm ***ὥστε*** $M = 1{,}8$ Nm

40) *Ἐπάνω σέ ἕνα δοκάρι ΑΒ ἀσκοῦνται οἱ παράλληλες δυνάμεις $F_1 = 10$ kp, $F_2 = 4$ kp, $F_3 = 2$ kp καί $F_4 = 8$ kp. Ἄν οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ καί $\vec{F}_4$ ἀπό τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς $\vec{F}_1$ εἶναι ἀντίστοιχα $a_2 = 0{,}5$m, $a_3 = 1$m καί $a_4 = 1{,}5$m νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη τους.*

Λύση.

Εὕρεση τοῦ μέτρου τῆς συνισταμένης.

$\Sigma = (F_1 + F_4) - (F_2 + F_3) = (10 + 8) - (4 + 2) = 18 - 6 = 12$ kp ***ὥστε*** $\Sigma = 12$ kp

Εὕρεση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης.

Ἔστω ὅτι τό σημεῖο ἐφαρμογῆς (Ο) τῆς συνισταμένης ἀπέχει ἀπό τό Α ἀπόσταση (x).
Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρός τό σημεῖο Α καί ἔχομε:

$$\Sigma \cdot x = F_4 \cdot a_4 + F_1 \cdot 0 - F_2\, a_2 - F_3\, a_3$$

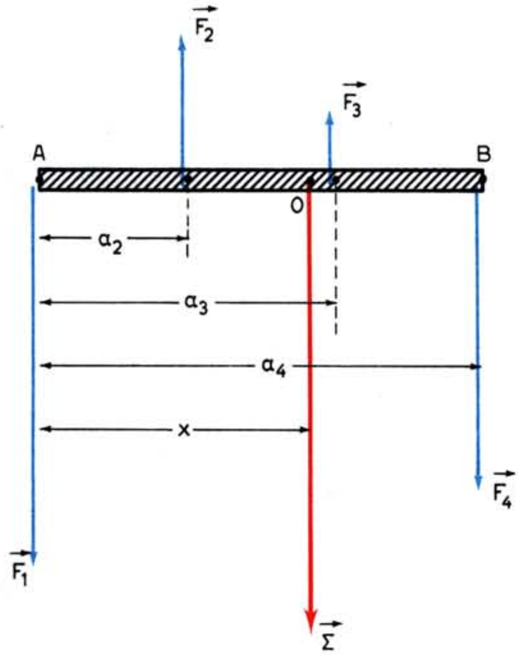
$$x = \frac{F_4 a_4 - F_2 a_2 - F_3 a_3}{\Sigma} \tag{1}$$

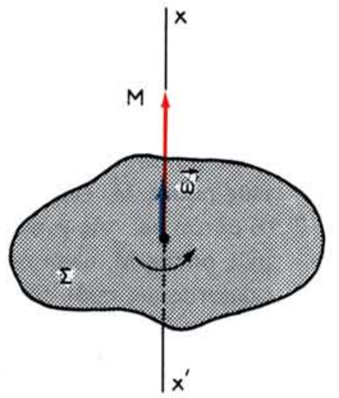
---

* Τό θεώρημα τοῦ κέντρου τῶν παράλληλων δυνάμεων ὀνομάζεται καί ***Θεώρημα τοῦ Κάντ γιά τίς παράλληλες δυνάμεις.***

Δίνονται: $F_2 = 4$ kp, $\alpha_2 = 0{,}5$ m, $F_3 = 2$ kp, $\alpha_3 = 1$m, $F_4 = 10$ kp, $\alpha_4 = 1{,}5$ m καί $\Sigma = 12$ kp
Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί βρίσκομε:

$$x = \frac{F_4\alpha_4 - F_2\alpha_2 - F_3\alpha_3}{\Sigma} = \frac{10 \times 1{,}5 - 4 \times 0{,}5 - 2 \times 1}{12} \quad \textit{ὥστε} \quad x = 0{,}91\text{m}$$





Σχ. 2.25.

Γ. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

2.25 Θεμελιώδης νόμος τῆς περιστροφικῆς κινήσεως καί θεμελιώδης ἐξίσωσή της.

Ἄν σέ ἕνα σῶμα Σ (σχ. 2.25), πού περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα x΄x, ἀσκεῖται μία ροπή $\vec{M}$ τότε τό σῶμα περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα x΄x μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$, τέτοια πού νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\vec{M} = \Theta \, . \, \vec{\omega}' \qquad \text{(θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς περιστροφικῆς κινήσεως)} \qquad (1)$$

ὅπου: Θ εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς x΄x.

Ἡ ἐξίσωση (1) ὀνομάζεται ***θεμελιώδης ἐξίσωση*** τῆς περιστροφικῆς κινήσεως καί ἐκφράζει τό ***θεμελιώδη νόμο*** τῆς περιστροφικῆς κινήσεως, ὁ ὁποῖος ὁρίζει:

Ἄν σέ ἕνα σῶμα Σ, πού μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα x΄x, ἀσκεῖται μία ροπή $\vec{M}$, ***τότε ἡ ροπή $\vec{M}$ προσδίδει στό σῶμα μία γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$ ἡ ὁποία ἔχει διεύθυνση καί φορά τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ροπῆς $\vec{M}$, πού τήν προκαλεῖ, καί μέτρο ἀνάλογο πρός τό μέτρο τῆς $\vec{M}$***.

Ἐπειδή ἡ ροπή $\vec{M}$ καί ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά καί τό Θ εἶναι μονόμετρο θετικό μέγεθος, ἀπό τή σχέση (1) ἔχομε τή σχέση:

$$M = \Theta \cdot \omega' \tag{2}$$

2.26 Γενικές παρατηρήσεις [Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως (1)].

1) Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\vec{\omega}' = \frac{\vec{M}}{\Theta} \tag{3}$$

ἤ

$$\omega' = \frac{M}{\Theta} \tag{4}$$

Ἀπό τή σχέση (4) προκύπτουν:

α) Τό μέτρο ω' τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\omega}'$, πού ἀποκτᾶ ἕνα σῶμα ἐξαιτίας μιᾶς ροπῆς $\vec{M}$, εἶναι ἀνάλογο τοῦ μέτρου τῆς M,

β) Τό μέτρο ω' τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\omega}'$, πού ἀποκτᾶ ἕνα σῶμα ἐξαιτίας μιᾶς ροπῆς $\vec{M}$, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογο πρός τή ροπή ἀδράνειας Θ τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα τῆς περιστροφῆς του.

2) Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\Theta = \frac{\vec{M}}{\vec{\omega}'} \tag{5}$$

Ἀπό τή σχέση (5) προκύπτει ὅτι:

Ἡ ροπή ἀδράνειας ἑνός σώματος ὡς πρός ἄξονα x΄x εἶναι τό πηλίκο τῆς ροπῆς $\vec{M}$, πού ἐνεργεῖ στό σῶμα ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x, διά τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\omega}'$, τήν ὁποία ἀποκτᾶ τό σῶμα ἐξαιτίας τῆς ροπῆς αὐτῆς.

3) Ἄν στήν ἐξίσωση (1) γράψομε: $\vec{M} = 0$ θά ἔχομε:

$$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}'$$

$$0 = \Theta \cdot \vec{\omega}'$$

Καί ἐπειδή εἶναι $\Theta \neq 0$, ἔχομε $\vec{\omega}' = 0$.

Δηλαδή, ***ἄν σέ ἕνα σῶμα, πού μπορεῖ νά περιστραφεῖ γύρω ἀπό ἄξονα, δέν ἀσκεῖται καμιά ροπή, ἤ ἄν ἡ συνισταμένη ροπή τῶν ροπῶν πού τυχόν ἀσκοῦνται στό σῶμα αὐτό εἶναι μηδέν, τότε τό σῶμα ἤ δέν θά περιστρέφεται ἤ θά περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (ἀφοῦ ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$ θά εἶναι μηδέν).***

4) Ἄν στήν ἐξίσωση (1) γράψομε $\vec{\omega}' = 0$, τότε προκύπτει καί ὅτι $\vec{M} = 0$, ἀφοῦ τό $\Theta \neq 0$. Δηλαδή:

Ἄν ἕνα σῶμα στρέφεται γύρω ἀπό ἕνα ἄξονα μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}' = 0$) ἤ δέν περιστρέφεται, τότε δέν ἀσκεῖται ἐπάνω του καμιά ροπή ἤ καί ἄν

ἀσκοῦνται ροπές, ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν.

5) Ἄν στήν ἐξίσωση (1) γράψομε $\vec{M}$ = σταθερό τότε προκύπτει ὅτι καί $\vec{\omega}'$ = σταθερό.

Ἔχομε: $\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}'$

Καί ἐπειδή $\vec{M}$ = σταθερό καί Θ = σταθερό, εἶναι καί $\vec{\omega}'$ = σταθερό

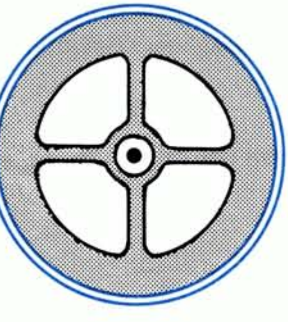
Δηλαδή:

Ἄν σέ ἕνα σῶμα, πού μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ἡ ροπή πού ἀσκεῖται ἐπάνω του εἶναι συνεχῶς σταθερή ($\vec{M}$ = σταθερό), τότε τό σῶμα περιστρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ἐπιτάχυνση ($\vec{\omega}'$ = σταθερό).

2.27 Σφόνδυλος.

Γενικά.

Σφόνδυλος εἶναι ἕνας δίσκος, πού σχεδόν ὅλη ἡ μάζα του εἶναι μαζεμένη στήν περιφέρειά του καί πού μπορεῖ νά γυρίζει γύρω ἀπό ἄξονα, ὁ ὁποῖος περνάει ἀπό τό κέντρο του καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδό του (σχ. 2.27).



Σχ. 2.27.

Ἡ μάζα τοῦ σφονδύλου **εἶναι συγκεντρωμένη** στήν περιφέρειά του, γιά **νά ἀπέχει** αὐτή ὅσο τό δυνατό **περισσότερο** ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς του **καί ἔτσι ὁ** σφόνδυλος ***νά ἔχει μεγάλη ροπή ἀδράνειας*** ὡς πρός τόν ἄξονα γύρω ἀπό τόν **ὁποῖο** γυρίζει.

Ροπή ἀδράνειας τοῦ σφονδύλου ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς του.

Ἄν ὑποθέσομε ὅτι ὅλη ἡ μάζα τοῦ σφονδύλου εἶναι συγκεντρωμένη στήν περιφέρειά του, θά ἔχομε:

$$\Theta = m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 r^2 + m_4 r^2 + \ldots \qquad (1)$$

ὅπου: Θ ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σφονδύλου ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς του, πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ σφονδύλου καί περνάει ἀπό τό κέντρο του.

r ἡ ἀκτίνα τοῦ σφονδύλου.

m_1, m_2, m_3, m_4 οἱ στοιχειώδεις μάζες ἀπό τίς ὁποῖες ἀποτελεῖται ὁ σφόνδυλος.

Ἀπό τή σχέση (1) παίρνομε τή σχέση:

$$\Theta = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \ldots)\, r^2 \qquad (2)$$

Ἐπειδή τό ἄθροισμα: $(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \ldots)$ εἶναι ὁλόκληρη ἡ μάζα (m) τοῦ σφονδύλου, ἡ σχέση (2) γράφεται:

$$\Theta = m \cdot r^2 \qquad (3)$$

Κινητική ἐνέργεια τοῦ σφονδύλου.

Ἡ κινητική ἐνέργεια κάθε σώματος πού στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, καί ἑπομένως καί τοῦ σφονδύλου, δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$E_K = {}^1/_2\, \Theta \cdot \omega^2 \qquad (4)$$

Ἀπό τίς (3) καί (4) παίρνομε, γιά τήν κινητική ἐνέργεια τοῦ σφονδύλου καί τή σχέση:

$$E_K = {}^1/_2\, m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \qquad (5)$$

Γωνιακή ἐπιτάχυνση σφονδύλου.

Ὁ σφόνδυλος κάνει περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό τόν ἄξονά του. Ἄρα γιά τήν κίνησή του αὐτή θά ἰσχύει ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς στήν περιστροφική κίνηση. Δηλαδή:

$$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}' \qquad (6)$$

ὅπου: $\vec{\omega}'$ ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση πού ἀποκτᾶ ὁ σφόνδυλος, ὅταν ἐπάνω του ἀσκεῖται ἡ ροπή $\vec{M}$.

Ἀπό τήν (6) παίρνομε:

$$\vec{\omega}' = \frac{\vec{M}}{\Theta} \qquad (7)$$

Σκοπός καί λειτουργία τοῦ σφονδύλου.

Ὁ σφόνδυλος στερεώνεται στόν ἄξονα περιστροφῆς τῆς μηχανῆς καί ἑπομένως περιστρέφεται μ' αὐτόν. Σκοπός τοῦ σφονδύλου εἶναι νά ἐμποδίζει τίς μεταβολές τῆς γωνιακῆς ταχύτητας τοῦ ἄξονα περιστροφῆς τῆς μηχανῆς, στόν ὁποῖο στερεώνεται, δηλαδή νά ἐξασφαλίζει τήν ὁμαλή περιστροφή τοῦ ἄξονα τῆς μηχανῆς.

Ἀπό τήν $\vec{\omega}' = \vec{M}/\Theta$ προκύπτει ὅτι, ἄν ἡ μηχανή ἐξασκήσει ἐπάνω στό σφόνδυλο μία ροπή $\vec{M}$, τότε αὐτή δίνει στό σφόνδυλο μιά γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$, πού εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρός τή ροπή ἀδράνειας Θ τοῦ σφονδύλου ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς του.

Ἄρα, ἐπειδή ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σφονδύλου Θ εἶναι μεγάλη, οἱ μικρές ροπές $\vec{M}$ ἐπάνω στό σφόνδυλο προκαλοῦν πολύ μικρές γωνιακές ἐπιταχύνσεις σ' αὐτόν, ἑπομένως καί στόν ἄξονα περιστροφῆς τῆς μηχανῆς.

Σέ περίπτωση λοιπόν πού ἡ συνισταμένη ροπή τῆς μηχανῆς τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων δέν εἶναι σταθερή ἀλλά μεταβάλλεται λίγο, ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση τοῦ σφονδύλου, ἄρα καί τοῦ ἄξονα περιστροφῆς τῆς μηχανῆς, εἶναι πολύ μικρή, δηλαδή ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ σφονδύλου καί τοῦ ἄξονα περιστροφῆς τῆς μηχανῆς ***μένει σχεδόν σταθερή.***

2.28 Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου καί στερεοῦ σώματος ὡς πρός ἄξονα.

Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου ὡς πρός ἄξονα x΄x.

Ἄν ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ γράφει κυκλικη τροχιά πού τό κέντρο της βρίσκεται ἐπάνω στόν ἄξονα x΄x (σχ. 2.28α) καί τό ἐπίπεδό της εἶναι κάθετο στόν ἄξονα αὐτόν, τότε στροφορμή $\vec{G}_\sigma$ τοῦ ὑλικοῦ αὐτοῦ σημείου ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x κατά τή χρονική στιγμή t ***ὀνομάζομε ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x΄x, πού εἶναι καί ἡ διεύθυνση τῆς γωνιακῆς του ταχύτητας $\vec{\omega}$.

β) ***Φορά,*** τή φορά πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα δεξιόστροφου κοχλία, πού εἶναι καί ἡ φορά τῆς γωνιακῆς του ταχύτητας $\vec{\omega}$.

γ) ***Μέτρο,*** τό γινόμενο:

$$G_\sigma = m \cdot \upsilon \cdot r \tag{1}$$

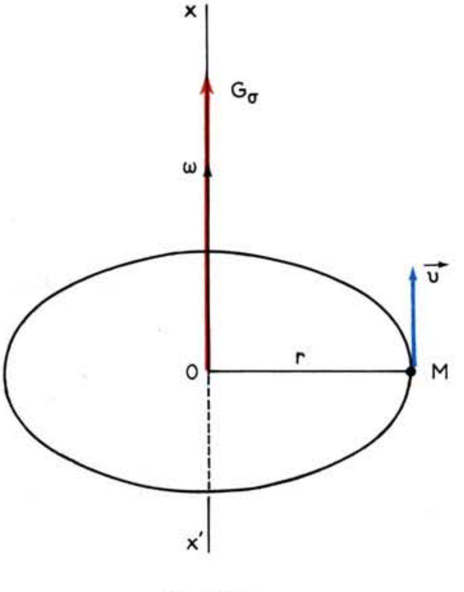
ὅπου: m ἡ μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου

r ἡ ἀκτίνα τῆς περιφέρειας πού διαγράφει τό σημεῖο, καί

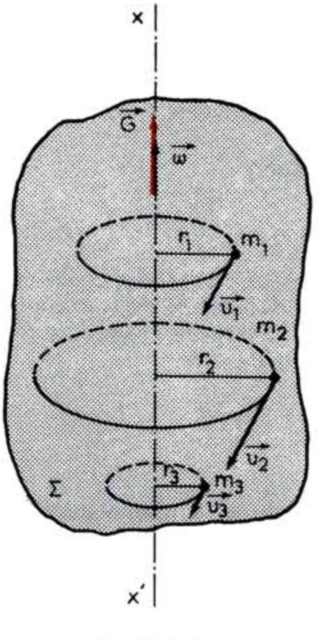
υ τό μέτρο τῆς γραμμικῆς ταχύτητας πού ἔχει τό ὑλικό σημεῖο κατά τή χρονική στιγμή t.

Ἐπειδή ἰσχύει ἡ σχέση: $\upsilon = \omega \cdot r$ ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$G_\sigma = m \cdot r^2\omega \tag{2}$$



Σχ. 2.28α.



Σχ. 2.28β.

Στροφορμή στερεοῦ σώματος ὡς πρός ἄξονα x΄x.

Ὅταν ἕνα σῶμα ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα x΄x (σχ. 2.28β), ***ὀνομάζομε στροφορμή τοῦ σώματος $\vec{G}_\Sigma$ ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x κατά τή***

χρονική στιγμή t, τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν στροφορμῶν πού ἔχουν τή στιγμή αὐτή ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα αὐτόν.

Γιά νά βροῦμε, ἐπομένως, τή στροφορμή ἑνός στερεοῦ σώματος Σ, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Χωρίζομε τό σῶμα Σ σέ στοιχειώδεις μάζες: m_1, m_2, m_3 ...

β) Βρίσκομε τή στροφορμή καθεμιᾶς στοιχειώδους μάζας ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x κατά τή χρονική στιγμή t, καί ἔστω ὅτι αὐτές εἶναι:

$$\vec{G}_1,\ \vec{G}_2,\ \vec{G}_3\ ...$$

γ) Ἀθροίζομε τίς $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ καί βρίσκομε:

$$\vec{G}_\Sigma = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + G_3 ... \qquad (1)$$

Ἡ (1) μᾶς δίνει τή στροφορμή τοῦ στερεοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x κατά τή χρονική στιγμή t.

Παρατήρηση:

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ στροφορμή $\vec{G}_\Sigma$ ἑνός σώματος ὡς πρός ἕναν ἄξονα x΄x (σχ. 2.28β) ὅταν περιστρέφεται γύρω ἀπό αὐτόν εἶναι ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος, ***τό ὁποῖο ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***

α) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα, πού εἶναι καί ἡ διεύθυνση τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\omega}$.

β) ***Φορά,*** τή φορά πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα δεξιόστροφου κοχλία, πού εἶναι καί ἡ φορά τῆς γωνιακῆς του ταχύτητας $\vec{\omega}$.

γ) ***Μέτρο,*** τό γινόμενο τοῦ μέτρου (ω) τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\omega}$ ἐπί τή ροπή ἀδράνειας Θ τοῦ σώματος αὐτοῦ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς x΄x.

Δηλαδή:
$$\vec{G}_\Sigma = \Theta \cdot \vec{\omega} \qquad (2)$$

καί
$$G_\Sigma = \Theta \cdot \omega \qquad (3)$$

Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως (2) καί (3):

α) Χωρίζομε τό σῶμα στίς στοιχειώδεις μάζες του m_1, m_2, m_3 ... (σχ. 2.28β).

β) Βρίσκομε τίς στροφορμές τῶν μαζῶν ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x κατά τή χρονική στιγμή t. Ἔστω ὅτι αὐτές εἶναι:

$$\vec{G}_1 = m_1 r_1^2 \vec{\omega}_1 \qquad (4)$$
$$\vec{G}_2 = m_2 r_2^2 \vec{\omega} \qquad (5)$$
$$\vec{G}_3 = m_3 r_3^2 \vec{\omega}_3 \qquad (6)$$

ὅπου: $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ εἶναι οἱ γωνιακές ταχύτητες τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν κατά τή χρονική στιγμή t.

Ἐπειδή τό σῶμα ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση γύρω ἀπό τόν ἄξονα x΄x, ***ὅλα τά σημεῖα του σέ κάθε στιγμή θά ἔχουν τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα ω.***

Ἐπομένως ἔχομε:
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = ... \qquad (7)$$

Ἀπό τίς (7), (4), (5), (6) ἔχομε:
$$\vec{G}_1 = m_1 r_1^2 \vec{\omega} \qquad (8)$$
$$\vec{G}_2 = m_2 r_2^2 \vec{\omega} \qquad (9)$$
$$\vec{G}_3 = m_3 r_3^2 \vec{\omega} \qquad (10)$$

Ὡς στροφορμή τοῦ στερεοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x κατά τή χρονική στιγμή t ὁρίσαμε τό ἄθροισμα τῶν στροφορμῶν τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν του. Ἐπομένως ἔχομε:

$$\vec{G}_{\Sigma} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \ldots \qquad (11)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (8), (9), (10), (11) προκύπτει:

$$\vec{G}_{\Sigma} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)\vec{\omega} \qquad (12)$$

Τό ἄθροισμα πού εἶναι μέσα στήν παρένθεση, εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας (Θ) τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x. Δηλαδή:

$$\Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots \qquad (13)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (12) καί (13) προκύπτει: $\vec{G}_{\Sigma} = \Theta \, . \, \vec{\omega}$

καί $G_{\Sigma} = \Theta \, . \, \vec{\omega}$

Μονάδες στροφορμῆς.
Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Μονάδα τῆς ροπῆς ἀδράνειας στό σύστημα S.I. εἶναι 1kg m^2 καί μονάδα γωνιακῆς ταχύτητας εἶναι 1 rad/s. Ἄρα ἡ μονάδα τῆς στροφορμῆς στό σύστημα S.I. εἶναι:

$$G = \Theta \, . \, \omega = 1 \text{ kg} \, . \, m^2 \, . \, 1 \text{ rad/s} = 1 \text{ kg} \, . \, m^2 \, . \, \text{rad/s}$$

Σύστημα C.G.S.

Μονάδα τῆς ροπῆς ἀδράνειας στό σύστημα C.G.S. εἶναι τό 1 g . cm^2 καί μονάδα γωνιακῆς ταχύτητας 1 rad/sec. Ἄρα ἡ μονάδα τῆς στροφορμῆς στό σύστημα C.G.S. εἶναι:

$$G = \Theta \, . \, \omega = 1 \text{ g} \, . \, cm^2 \, . \, \text{rad/s} = 1 \text{ g} \, . \, cm^2 \, . \, \text{rad/s}$$

2.29 Γενικότερη διατύπωση τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς περιστροφικῆς κινήσεως.

Ξέρομε ὅτι:

$$\vec{M} = \Theta \, . \, \vec{\omega}' \qquad (1)$$

$$\vec{G} = \Theta \, . \, \vec{\omega} \qquad (2)$$

Ἄν σέ ἕνα σῶμα ἐπιδράσει ἡ ροπή $\vec{M}$ ἐπί χρόνο $(t_2 - t_1)$, τότε ἡ στροφορμή του $\vec{G}$ (μεταβάλλεται κατά $\Delta\vec{G}$ καί ἡ γωνιακή του ταχύτητα $\vec{\omega}$ κατά $\Delta\vec{\omega}$. Σύμφωνα μέ τή σχέση (2) οἱ μεταβολές $\Delta\vec{G}$ καί $\Delta\vec{\omega}$ συνδέονται μέ τή σχέση:

$$\Delta\vec{G} = \Theta \, . \, \Delta\vec{\omega} \qquad (4)$$

Ἄν διαιρέσομε καί τά δύο μέλη τῆς (4) μέ τό χρόνο $(t_2 - t_1)$, θά ἔχομε:

$$\frac{\Delta\vec{G}}{(t_2 - t_1)} = \Theta \; \frac{\Delta\vec{\omega}}{(t_2 - t_1)} \qquad (5)$$

Τό πηλίκο τῆς μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\Delta\vec{\omega}$, διά τοῦ χρόνου $(t_2 - t_1)$ μᾶς δίνει τή γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\omega}'$ πού προσέδωσε ἡ ροπή $\vec{M}$ στό σῶμα. Δηλαδή:

$$\vec{\omega}' = \frac{\Delta\vec{\omega}}{t_2 - t_1} \tag{6}$$

'Από τίς σχέσεις (5) καί (6) ἔχομε:

$$\frac{\Delta\vec{G}}{(t_2 - t_1)} = \Theta\omega' \tag{7}$$

Καί ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (7):

$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{G}}{\Delta t} \tag{8}$$

ὅπου: $\Delta t = (t_2 - t_1)$

Ἡ ἐξίσωση (8), ἡ ὁποία ***εἶναι γενικότερη διατύπωση τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς στροφικῆς κινήσεως, ἐκφράζει τά ἑξῆς:***

α) Ἄν σέ ἕνα σῶμα, πού μπορεῖ νά περισταφεῖ γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, ἐπιδράσει μιά ροπή, τότε ἡ ροπή θά προκαλέσει μεταβολή τῆς στροφορμῆς τοῦ σώματος καί

β) τό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς $\Delta\vec{G}$ ἑνός σώματος τήν ὁποία προκαλεῖ μία ροπή $\vec{M}$ ὅταν ἐπιδράσει ἐπάνω σέ αὐτό ἐπί χρόνο Δt, διά τοῦ χρόνου τούτου εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τῆς ροπῆς $\vec{M}$.

2.30 Ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς ἑνός σώματος.

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{G}}{\Delta t} \tag{1}$$

ὅπου: $\Delta\vec{G}$ εἶναι ἡ μεταβολή πού παθαίνει ἡ στροφορμή ἑνός σώματος, ὅταν ἐπάνω του ἐπιδράσει ἐπί χρόνο Δt μιά ροπή $\vec{M}$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) προκύπτει ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς, ἡ ὁποία ὁρίζει ὅτι: ***"Ἄν σέ ἕνα σῶμα πού μπορεῖ νά περιστραφεῖ γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα δέν ἀσκεῖται καμιά ροπή, τότε ἡ στροφορμή τοῦ σώματος παραμένει σταθερή.***

Πραγματικά: ἄν $M = 0$, τότε, ἐπειδή $\Delta t \neq 0$, ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\vec{G} = 0$$

Ἀλλά $\Delta\vec{G} = 0$ σημαίνει ὅτι ἡ στροφορμή $\vec{G}$ τοῦ σώματος παραμένει σταθερή.

2.31 Ἀριθμητικό παράδειγμα.

41) *Μιά ρόδα στρέφεται γύρω στόν ἄξονά της μέ γωνιακή ταχύτητα $\omega = 20$ rad/sec. Ποιά εἶναι ἡ κινητική της ἐνέργεια E_K καί ἡ στροφορμή της $\vec{G}$, ἄν ἡ ροπή ἀδράνειάς της ὡς πρός τόν ἄξονά της εἶναι $\Theta = 125$ kg . m²;*

Λύση.

Στό σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις: $E_K = {}^1/_2\,\Theta \cdot \omega^2$ (1)

$$G = \Theta \cdot \omega \tag{2}$$

Δίνονται: $\Theta = 125\ kg \cdot m^2$ καί $\omega = 20\ rad/sec$

Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στίς σχέσεις (1) καί (2) καί ἔχομε:

$$E_K = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}125 \times 20^2 = 25000\ Joule \quad \textit{ὥστε} \quad E_K = 25000\ Joule$$

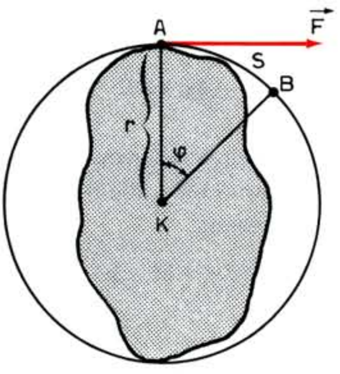
$$G = \Theta \cdot \omega = 125 \times 20 = 2500\ kg \cdot m^2/sec \quad \textit{ὥστε} \quad G = 2500\ kg \cdot m^2/sec$$

2.32 Ἔργο ροπῆς δυνάμεως.

Ὅταν λέμε ἔργο A ροπῆς $\vec{M}$ μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}$, ***ἐννοοῦμε τό ἔργο τῆς δυνάμεως*** $\vec{F}$.

Τό ἔργο A τῆς ροπῆς $\vec{M}$ μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}$ (δηλαδή τό ἔργο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$), τό ὁποῖο παράγεται ἤ καταναλώνεται ὅταν αὐτή ἀσκεῖται σέ σῶμα Σ πού περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα K κατά γωνία φ (σχ. 2.32), δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$A = M \cdot \phi \tag{1}$$



Σχ. 2.32.

Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως (1).

Ἄν ἡ δύναμη $\vec{F}$ βρίσκεται ***σέ ἐπίπεδο κάθετο στόν ἄξονα K*** (ἄν δηλαδή ἡ διεύθυνση τῆς ροπῆς $\vec{M}$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα K συμπίπτει μέ τόν ἄξονα K), τότε κατά τήν περιστροφή τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα K, τό σημεῖο A ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ γράφει περιφέρεια κύκλου μέ ἀκτίνα r καί ἡ δύναμη $\vec{F}$ παραμένει ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας.

Ὅταν τό σῶμα περιστραφεῖ κατά γωνία φ, τό σημεῖο ἐφαρμογῆς A τῆς $\vec{F}$ γράφει τόξο: $\widehat{AB} = S = \phi \cdot r$. Τό ἔργο A τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ κατά τήν περιστροφή αὐτή εἶναι:

$$A = F \cdot S = F \cdot \phi \cdot r \tag{2}$$

Ἡ ροπή M τῆς δυνάμεως F ὡς πρός τόν ἄξονα K εἶναι: $M = F \cdot r$ (3)

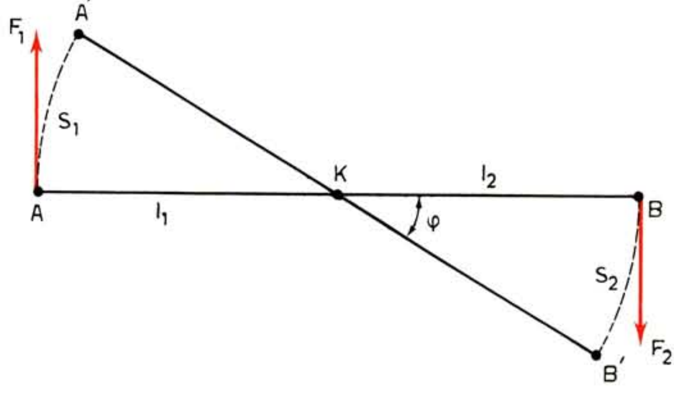
Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) προκύπτει: $A = M \cdot \phi$

Σημείωση:

Ἡ σχέση (1) εἶναι γενική σχέση. Δηλαδή ἰσχύει καί στήν περίπτωση πού ἡ δύναμη $\vec{F}$ δέν βρίσκεται σέ ἐπίπεδο κάθετο στόν ἄξονα K.

2.33 Ἔργο ροπῆς ζεύγους δυνάμεων.

Ὅταν λέμε ἔργο ροπῆς $\vec{M}$ ἑνός ζεύγους δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού ἀσκεῖται σέ ἕνα σῶμα περιστρεφόμενο γύρω ἀπό τόν ἄξονα Κ (σχ. 2.33), ὁ ὁποῖος ἔχει διεύθυνση κάθετη στό ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους, ***ἐννοοῦμε τό ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ τοῦ ζεύγους.***



Σχ. 2.33.

Τό ἔργο Α τῆς ροπῆς $\vec{M}$ ἑνός ζεύγους δυνάμεων, τό ὁποῖο παράγεται ἤ καταναλώνεται ὅταν αὐτή ἀσκεῖται σέ ἕνα σῶμα πού περιστρέφεται γύρω ἀπό ἕνα ἄξονα κατά γωνία φ, δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$A = M \cdot \phi \quad (1)$$

Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως (1)

Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ τοῦ ζεύγους βρίσκονται σέ ἐπίπεδο πού εἶναι κάθετο στόν ἄξονα Κ καί ἔστω ὅτι ἀπέχουν ἀπό τόν ἄξονα αὐτόν l_1 καί l_2.

Ὅταν τό σῶμα περιστρέφεται, τά σημεῖα ἐφαρμογῆς Α καί Β τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ γράφουν περιφέρεια κύκλου καί οἱ δυνάμεις παραμένουν ἐφαπτόμενες τῆς περιφέρειας αὐτῆς.

Ὅταν τό σῶμα περιστραφεῖ κατά γωνία φ, τότε τά σημεῖα ἐφαρμογῆς Α καί Β τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ γράφουν τά τόξα: $S_1 = \phi \cdot l_1$ καί $S_2 = \phi \cdot l_2$ καί τό ἔργο καθεμιᾶς κατά τήν περιστροφή αὐτή εἶναι:

$$A_1 = F_1 \cdot S_1 = F_1 \cdot \phi\, l_1$$

$$A_2 = F_2 \cdot S_2 = F_2 \cdot \phi\, l_2$$

Τό ὁλικό ἔργο καί τῶν δύο δυνάμεων εἶναι: $A = A_1 + A_2 = F_1 \cdot \phi\, l_1 + F_2 \cdot \phi\, l_2$ (2)

Ἐπειδή $F_1 = F_2$, ἀπό τήν (2) ἔχομε: $A = F_1 \cdot \phi\, (l_1 + l_2)$ (3)

Ἐπειδή $F_1\,(l_1 + l_2) = M$, ἀπό τήν (3) ἔχομε: $A = M \cdot \phi$

2.34 Ἰσχύς ροπῆς δυνάμεως.

Ὅταν λέμε ἰσχύ Ν ροπῆς $\vec{M}$ μιᾶς δυνάμεως $\vec{F}$, ***ἐννοοῦμε τήν ἰσχύ τῆς δυνάμεως αὐτῆς ($\vec{F}$).***

Όταν τό σῶμα Σ (σχ. 2.32), στό ὁποῖο ἀσκεῖται ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς Κ, περιστραφεῖ κατά γωνία φ μέσα σέ χρόνο t, τότε τό ἔργο τῆς ροπῆς $\vec{M}$ (τῆς δυνάμεως $\vec{F}$) πού παρήχθη ἤ καταναλώθηκε μέσα στό χρόνο t εἶναι:

$$A = M \cdot \phi \tag{1}$$

Ἄν διαιρέσομε τό ἔργο Α, πού παράγει ἤ καταναλώνει ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ σέ χρόνο t, διά τοῦ χρόνου t, βρίσκομε τήν ἰσχύ της:

$$N = \frac{A}{t} \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$N = \frac{M\phi}{t} \tag{3}$$

Τό πηλίκο τῆς γωνίας φ, κατά τήν ὁποία περιστράφηκε τό σῶμα μέσα σέ χρόνο t, διά τοῦ χρόνου t παρέχει τή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς του:

$$\omega = \frac{\phi}{t} \tag{4}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) ἔχομε:

$$N = M \cdot \omega$$

2.35 Ἰσχύς ροπῆς ζεύγους δυνάμεων.

Όταν λέμε ἰσχύ Ν ροπῆς $\vec{M}$ ἑνός ζεύγους δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ (σχ. 2.33) ***ἐννοοῦμε τήν ἰσχύ τῶν δυνάμεων τοῦ ζεύγους, δηλαδή τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.***

Όταν τό σῶμα, στό ὁποῖο ἐπιδρᾶ τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, περιστραφεῖ γύρω ἀπό τόν ἄξονα Κ κατά γωνία φ μέσα σέ χρόνο t, τότε τό ἔργο τῆς ροπῆς $\vec{M}$ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ πού καταναλώθηκε μέσα στό χρόνο t εἶναι:

$$A = M \cdot \phi \tag{1}$$

Ἄν διαιρέσομε τό ἔργο Α πού παράγει ἤ καταναλώνει ἡ ροπή $\vec{M}$ τοῦ ζεύγους διά τοῦ χρόνου t, βρίσκομε τήν ἰσχύ της:

$$N = \frac{A}{t} \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$N = \frac{M \cdot \phi}{t} \tag{3}$$

Τό πηλίκο τῆς γωνίας φ, κατά τήν ὁποία περιστράφηκε τό σῶμα μέσα στό χρόνο t, διά τοῦ χρόνου t παρέχει τή γωνιακή ταχύτητα τῆς περιστροφῆς τοῦ σώματος:

$$\omega = \frac{\phi}{t} \tag{4}$$

Ἀπό τίς (3) καί (4) ἔχομε:

$$N = M \cdot \omega$$

2.36 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

42) *Σέ σῶμα ἀσκεῖται ἡ ροπή M = 10 Nm καί τό σῶμα περιστρέφεται ὑπό τήν ἐπίδρασή της γύρω ἀπό ἄξονα τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνση συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς ροπῆς* $\vec{M}$. Νά βρεῖτε τό ἔργο A τό ὁποῖο παράγει ἡ ροπή $\vec{M}$ ὅταν τό σῶμα περιστραφεῖ κατά γωνία $\phi = 5$ *rad.*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $A = M \cdot \phi$ (1)

Δίνονται: $M = 10$ Nm καί $\phi = 5$ rad

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$A = M \cdot \phi = 10 \times 5 = 50$ Joule ***ὥστε*** $E = 50$ Joule

Στό σύστημα CGS.

Δίνονται: $M = 10$ Nm $= 10 \cdot 10^5$ dyn $\cdot 10^2$ cm $= 10 \cdot 10^7$ dyn cm καί $\phi = 5$ rad

Ἀντικαθιστοῦμε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$A = M \cdot \phi = 10 \times 10^7 \times 5 = 50 \cdot 10^7$ erg ***ὥστε*** $A = 50 \cdot 10^7$ erg

Στό τεχνικό σύστημα.

Δίνονται: 1 kp = 10 N $M = 10$ Nm $= 10 \cdot 10^{-1}$ kpm $= 1$ kpm καί $\phi = 5$ rad

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$A = M \cdot \phi = 1 \times 5 = 5$ kpm ***ὥστε*** $A = 5$ kpm

43) *Σέ ἕνα σῶμα ἀσκεῖται ἡ ροπή M = 20 Nm καί τό σῶμα περιστρέφεται ὑπό τήν ἐπίδρασή της γύρω ἀπό ἄξονα τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνση συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς* $\vec{M}$, μέ γωνιακή ταχύτητα: $\omega = 10$ *rad/sec. Νά βρεῖτε τήν ἰσχύ N τῆς ροπῆς* $\vec{M}$.

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $N = M \cdot \omega$ (1)

Δίνονται: $M = 20$ Nm καί $\omega = 10$ rad/sec

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$N = M \cdot \omega = 20 \times 10 = 200$ Watt ***ὥστε*** $N = 200$ Watt

2.37 Ἁπλές μηχανές.

Γενικά.

Μηχανή γενικά ὀνομάζεται ἕνα σύστημα σωμάτων, πού μπορεῖ νά μετατρέπει μιά μορφή ἐνέργειας σέ ἄλλη μορφή. Δηλαδή οἱ μηχανές δέν παράγουν ἐνέργεια, ***ἀλλά μετασχηματίζουν μιά μορφή ἐνέργειας σέ ἄλλη μορφή της.***

Οἱ θερμικές μηχανές μετασχηματίζουν τή θερμική ἐνέργεια σέ μηχανική.

Ὁ ἀνεμιστήρας εἶναι μιά μηχανή, γιατί μετατρέπει τήν ἠλεκτρική ἐνέργεια σέ κινητική ἐνέργεια.

Ἁπλές μηχανές ὀνομάζομε τίς μηχανές, στίς ὁποῖες ***προσφέρομε μηχανικό ἔργο καί μᾶς δίνουν πάλι μηχανικό ἔργο*** (π.χ. μοχλοί, τροχαλίες, βαροῦλκο κλπ.).

Κινητήρια δύναμη ἁπλῆς μηχανῆς ὀνομάζομε τή δύναμη τήν ὁποία ἐμεῖς ἀσκοῦμε στή μηχανή, γιά νά ὑπερνικήσομε μιάν ἄλλη δύναμη πού ἀσκεῖται στή μηχανή αὐτή. ***Ἀντίσταση μιᾶς ἁπλῆς μηχανῆς*** ὀνομάζομε τή δύναμη πού ἀσκεῖται στή μηχανή καί θέλομε νά τήν ὑπερνικήσομε μέ τή βοήθεια τῆς μηχανῆς.

Μοχλοί.

Μοχλός λέγεται ἕνα στερεό σῶμα π.χ. AB, πού γυρίζει γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, π.χ. O (σχ. 2.37α). Ὁ ἄξονας (O), πού γύρω του μπορεῖ νά γυρίζει ὁ μοχλός, ***λέγεται ὑπομόχλιό του.***

Ὁ μοχλός εἶναι μιά ἁπλή μηχανή. Δηλαδή στό μοχλό δαπανᾶμε μηχανικό ἔργο, γιά νά πάρομε πάλι μηχανικό ἔργο.

Στό μοχλό ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις (σχ. 2.37α).

α) Ἡ κινητήρια δύναμη $\vec{F}_1$, πού τήν ἀσκοῦμε ἐμεῖς στό μοχλό,

β) ἡ ἀντίσταση $\vec{F}_2$, πού θέλομε νά τήν νικήσομε μέ τό μοχλό, καί

γ) ἡ ἀντίδραση $\vec{F}_3$ πού ἀσκεῖ στό μοχλό τό ὑπομόχλιο, δηλαδή ὁ ἄξονας (Ο) γύρω ἀπό τόν ὁποῖο γυρίζει ὁ μοχλός.

Ὑπολογισμός τῆς $\vec{F}_1$: Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ βρίσκονται σέ ἕνα ***ἐπίπεδο πού εἶναι κάθετο στόν ἄξονα τοῦ μοχλοῦ.***

Ὁ μοχλός ἰσορροπεῖ, ὅταν ***τό ἄθροισμα*** τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς (τό ὑπομόχλιο) ***εἶναι μηδέν.*** Δηλαδή:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0 \tag{1}$$

ὅπου: $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$ εἶναι οἱ ροπές τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς (Ο) τοῦ μοχλοῦ.

Ἐπειδή ἡ δύναμη $\vec{F}_3$ περνᾶ ἀπό τόν ἄξονα (Ο), ἡ ροπή της ὡς πρός αὐτόν εἶναι μηδέν ($\vec{M}_3 = 0$) καί ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0 \tag{2}$$

Ἐπειδή οἱ ροπές $\vec{M}_1$ καί $\vec{M}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, καί φορά ἀντίθετη, ἡ σχέση (2) γράφεται:

$$M_1 - M_2 = 0 \qquad ἤ \qquad F_1 \,.\, α - F_2 \,.\, β = 0$$

$$F_1 \,.\, α = F_2 \,.\, β \quad καί \tag{3}$$

$$F_1 = \frac{β}{α} \cdot F_2 \tag{4}$$

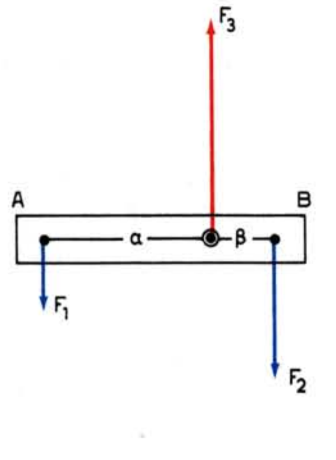
ὅπου: α, β εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, ἀντιστοίχως, ἀπό τόν ἄξονα (Ο).

Παρατήρηση.

1) Ἡ σχέση (3) εἶναι ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ.

2) Ἀπό τή σχέση (4) προκύπτει ὅτι ἀνάλογα μέ τήν τιμή τοῦ λόγου (β/α) ἡ κινητήρια δύναμη μπορεῖ νά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀντίσταση ἤ καί μεγαλύτερη ἀπό αὐτήν.

3) Διακρίνομε μοχλούς μέ ἕνα βραχίονα καί μοχλούς μέ δύο βραχίονες, ἀνάλογα μέ τή θέση τοῦ ὑπομόχλιου σχετικά μέ τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Μέ δύο βραχίονες λέγεται ὁ μοχλός, ὅταν τό ὑπομόχλιό του βρίσκεται μεταξύ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Ἄν βρίσκεται ἔξω, λέγεται μοχλός μέ ἕνα βραχίονα.



Σχ. 2.37α.

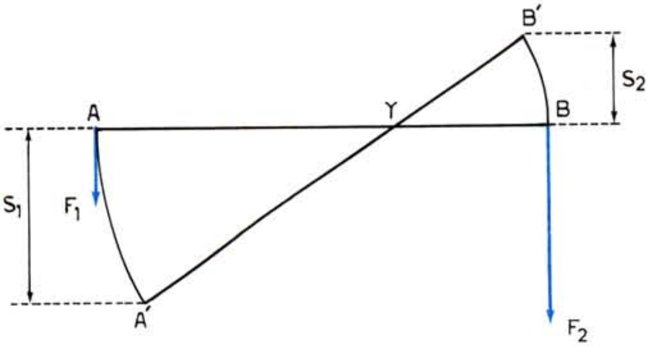
Διατήρηση τῆς ἐνέργειας στίς ἁπλές μηχανές.

Ὀνομάσαμε ἁπλή μηχανή μιά διάταξη στήν ὁποία προσφέρομε μηχανική ἐνέργεια καί αὐτή μᾶς δίνει μηχανική ἐνέργεια. Δεχόμαστε ὅτι ***ὅση μηχανική ἐνέργεια προσφέρομε στίς ἁπλές μηχανές, αὐτές τήν ἀποδίδουν ὅλη, δηλαδή ὅτι οἱ μηχανές αὐτές λειτουργοῦν χωρίς ἀπώλειες μηχανικῆς ἐνέργειας.***

Ἡ πρόταση αὐτή, πού δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει, ἀποτελεῖ ***τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας γιά τίς ἁπλές μηχανές.*** Στήν πραγματικότητα ἡ πρόταση αὐτή δέν ἰσχύει ἀπόλυτα, γιατί ὑπάρχουν τριβές.

Χρυσός κανόνας τῆς Μηχανικῆς.

Ἄν τό σημεῖο (σχ. 2.37β) ἐφαρμογῆς A τῆς κινητήριας δυνάμεως $\vec{F}_1$ μέσα σέ χρόνο t γράψει τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$, τότε καί τό σημεῖο ἐφαρμογῆς B τῆς ἀντιδράσεως $\vec{F}_2$ μέσα στόν ἴδιο χρόνο t θά γράψει τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$.



Σχ. 2.37β.

Οἱ προβολές τῶν $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{AB}$ στή διεύθυνση τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι ἀντίστοιχα S_1 καί S_2.

Ἄρα τά ἔργα τους εἶναι:

$$A_1 = F_1 \,.\, S_1 \tag{1}$$

$$A_2 = F_2 \,.\, S_2 \tag{2}$$

Ἀπό τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας στίς ἁπλές μηχανές καί ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε:

$$F_1 \,.\, S_1 = F_2 \,.\, S_2 \qquad \text{καί} \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_2}{S_1} \tag{3}$$

Ἡ σχέση (3) ἰσχύει γιά ὅλες τίς ἁπλές μηχανές καί ἐκφράζει τό ***χρυσό κανόνα τῆς μηχανικῆς***, ὁ ὁποῖος ὁρίζει: ***Τά διαστήματα πού διανύουν τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν κινητήριων δυνάμεων καί τῶν ἀντιστάσεων στίς ἁπλές μηχανές εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τά μέτρα τους. Δηλαδή: ὅ,τι κερδίζομε σέ δύναμη, τό χάνομε σέ δρόμο καί ἀντίστροφα.***

Συντελεστής ἀποδόσεως μηχανῆς.

Γενικά σέ κάθε μηχανή προσφέρομε μιά μορφή ἐνέργειας γιά νά μᾶς ἀποδώσει μιά ἄλλη μορφή ἐνέργειας. Δηλαδή ***κάθε μηχανή ἔχει σκοπό νά ἀποδώσει μιά συγκεκριμένη μορφή ἐνέργειας.*** (Ὅσα ἀναφέρομε ἐδῶ γιά τό συντελεστή ἀποδόσεως μηχανῆς ἰσχύουν καί γιά τίς ἁπλές μηχανές).

Τήν ὁρισμένη μορφή ἐνέργειας πού προορίζεται νά ἀποδώσει ἡ μηχανή ὀνομάζομε ***ὠφέλιμη ἐνέργεια τῆς μηχανῆς.*** Ὁ ἠλεκτροκινητήρας ἔχει σκοπό νά ἀποδώσει μηχανική ἐνέργεια ἐνῶ τοῦ προσφέρομε ἠλεκτρική ἐνέργεια.

Ἡ μηχανική ἐνέργεια πού ἀποδίδει ὁ ἠλεκτροκινητήρας εἶναι ἡ ὠφέλιμη ἐνέργειά του.

Ἡ γεννήτρια ἔχει σκοπό νά ἀποδώσει ἠλεκτρική ἐνέργεια ἐνῶ τῆς προσφέρομε κινητική ἐνέργεια.

Ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια πού ἀποδίδει ἡ γεννήτρια εἶναι ἡ ὠφέλιμη ἐνέργειά της.

Γενικά ἡ ποσότητα Ε΄ τῆς ὠφέλιμης ἐνέργειας, πού ἀποδίδεται ἀπό μία μηχανή εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ποσότητα Ε τῆς ἐνέργειας πού προσφέρεται σέ αὐτή. Γιατί ὅταν λειτουργεῖ μία μηχανή, πάντα ἕνα μέρος τῆς ἐνέργειας πού τῆς προσφέρεται μετατρέπεται καί σέ ἄλλες μορφές ἐνέργειας ἐκτός ἀπό τήν ὠφέλιμη ἐνέργεια.

Στόν ἠλεκτροκινητήρα ἕνα μέρος τῆς ἐνέργειας πού προσφέρεται γίνεται θερμότητα (γι' αὐτό ζεσταίνεται ὁ κινητήρας) καί τό ὑπόλοιπο γίνεται μηχανική ἐνέργεια πού εἶναι ἡ ὠφέλιμη ἐνέργειά του.

Ὥστε ὅλες οἱ μηχανές πετυχαίνουν νά μετατρέπουν σέ ὠφέλιμη ἐνέργειά τους ἕνα μόνο μέρος τῆς ἐνέργειας πού τούς προσφέρεται.

Συντελεστής ἀποδόσεως (η) ἤ ἀπόδοση μιᾶς μηχανῆς λέγεται ὁ λόγος τῆς ποσότητας Ε΄ τῆς ὠφέλιμης ἐνέργειας πού ἀποδίδει ἡ μηχανή, πρός τήν ποσότητα Ε τῆς ἐνέργειας πού προσφέραμε στή μηχανή. Δηλαδή:

$$\eta = \frac{E'}{E} \qquad (1)$$

Ἐπειδή ἡ ποσότητα Ε΄ ἀποδίδεται ἀπό τή μηχανή στόν ἴδιο χρόνο (t) πού προσφέρεται σέ αὐτή ἡ ποσότητα Ε, ἀπό τή σχέση (1) παίρνομε:

$$\eta = \frac{E'.t}{E.t} = \frac{N'}{N}$$

$$\eta = \frac{N'}{N} = \frac{\text{ὠφέλιμη ἰσχύς}}{\text{προσφερόμενη ἰσχύς}} \qquad (2)$$

Μέ βάση τή σχέση (2) μποροῦμε νά δώσουμε καί τόν ἑξῆς ὁρισμό τοῦ συντελεστῆ ἀποδόσεως (η) μηχανῆς:

Συντελεστής ἀποδόσεως ἤ ἀπόδοση μιᾶς μηχανῆς λέγεται ὁ λόγος τῆς ὠφέλιμης (Ν΄) ἰσχύος πού δίνει ἡ μηχανή πρός τήν ἰσχύ Ν πού ἀπορροφᾶται ἀπό τή μηχανή.

Ὕστερα ἀπό τά παραπάνω δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι ὁ συντελεστής ἀποδόσεως ὅλων τῶν μηχανῶν εἶναι μικρότερος ἀπό τή μονάδα, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει μηχανή πού νά μήν μετατρέπει μέρος τῆς προσφερόμενης σέ αὐτήν ἐνέργειας καί σέ ἄλλες μορφές ἐνέργειας ἐκτός ἀπό τήν ὠφέλιμή της (δηλαδή χωρίς ἀπώλειες).

Ἔστω ὅτι ἕνας ἠλεκτροκινητήρας ἀπορροφᾶ ἰσχύ 5 kW καί δίνει ὠφέλιμη ἰσχύ 4 kW τότε ὁ συντελεστής ἀποδόσεώς του θά εἶναι:

$$\eta = \frac{N'}{N} = \frac{4\ \text{kW}}{5\ \text{kW}} = 0{,}80$$

Ὁ ἀριθμός 0,80 εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό $^{80}/_{100}$ ἑπομένως μποροῦμε νά γράψομε:

$$\eta = 0{,}80 = \frac{80}{100}$$

Τό $\eta = {}^{80}/_{100}$ σημαίνει ὅτι ὁ ἠλεκτροκινητήρας θά ἔδινε ὠφέλιμη ἰσχύ 80 kW ἄν τοῦ προσφερότανε ἰσχύς 100 kW, ἤ μετατρέπει σέ ὠφέλιμη ἰσχύ τά $^{80}/_{100}$ τῆς ἰσχύος πού τοῦ προσφέρεται.

Τά ὑπόλοιπα $^{20}/_{100}$ εἶναι οἱ ἀπώλειες.

Γενικά ὁ συντελεστής ἀποδόσεως μιᾶς μηχανῆς ***ἐκφράζεται συνήθως ἐπί τοῖς ἑκατό (%).***

Ἄν π.χ. ποῦμε ὅτι ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τοῦ ἠλεκτροκινητῆρα εἶναι 80% θά ἐννοοῦμε ὅτι ὁ συντελεστής του εἶναι $\eta = {}^{80}/_{100}$ ἤ $\eta = 0{,}80$.

Σημείωση:

Τίς ἁπλές μηχανές πού περιγράψαμε τίς θεωροῦμε ἰδανικές, δηλαδή μέ συντελεστή ἀποδόσεως 100%.

Ἀριθμητικό παράδειγμα.

44) *Ἡ ὠφέλιμη μηχανική ἰσχύς τοῦ στροβίλου μιᾶς ὑδροηλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι:*

$N_{\sigma\tau}$ = 9000 CV καί ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τῆς γεννήτριας τῆς ὑδροηλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι $\eta_1 = 0{,}6$. Ἄν ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τῆς γεννήτριας τῆς ὑδροηλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι $\eta_2 = 0{,}9$ νά βρεθεῖ πόσος εἶναι ὁ συντελεστής ἀποδόσεως ($\eta_{o\lambda}$) ὁλόκληρης τῆς ἐγκαταστάσεως.

Λύση.

Ἡ ὠφέλιμη ἰσχύς τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι ἡ ἠλεκτρική ἰσχύς τῆς γεννήτριας $N_{\eta\lambda}$.

Ἡ ἰσχύς πού προσφέρεται στήν ἐγκατάσταση εἶναι ἡ ἰσχύς τήν ὁποία δίνει ἡ ὑδατόπτωση στόν ὑδροστρόβιλο $N_{\upsilon\delta}$, δηλαδή ἔχομε:

$$\eta_{o\lambda} = \frac{N_{\eta\lambda}}{N_{\upsilon\delta\alpha\tau}} \qquad (1)$$

Εὕρεση τῆς $N_{\upsilon\delta}$:

ἔχομε:

$$\eta_1 = \frac{N_{\sigma\tau\rho}}{N_{\upsilon\delta}} \qquad (2)$$

Ἀπό τή σχέση (2) βρίσκομε:

$$N_{\upsilon\delta} = \frac{N_{\sigma\tau\rho}}{\eta_1} = \frac{900\ \text{CV}}{0{,}6} = 15000\ \text{CV} \qquad (3)$$

Εὕρεση τῆς $N_{\eta\lambda}$:

$$\eta_2 = \frac{N_{\eta\lambda}}{N_{\sigma\tau\rho}} \qquad (4)$$

$$N_{\eta\lambda} = \eta_2 \cdot N_{\sigma\tau\rho} = 0{,}9 \,.\, 9000\ \text{CV} = 8100\ \text{CV} \qquad (5)$$

Θέτομε στή σχέση (1) αὐτά πού βρήκαμε στίς σχέσεις (3) καί (5) καί ἔχομε:

$$\eta_{o\lambda} = \frac{N_{\eta\lambda}}{N_{\upsilon\delta}} = \frac{8100}{15.000} = 0{,}54 \qquad \textit{ὥστε} \qquad \eta_{o\lambda} = 0{,}54 \text{ ἤ } \eta_{o\lambda} = 54\%$$

Παρατήρηση.

Τό ἴδιο βρίσκεται ἄν πολλαπλασιάσομε τίς δύο ἀποδόσεις γιά νά βροῦμε τήν ὁλική ἀπόδοση. Δηλαδή,

$$\eta_{o\lambda} = \eta_1 \,.\, \eta_2 = 0{,}6 \,.\, 0{,}9 = 0{,}54 \qquad \textit{ὥστε} \qquad \eta_{o\lambda} = 54\%$$

2.38 Βαρύτητα — Παγκόσμια ἕλξη.

Πεδίο δυνάμεων — Πεδίο βαρύτητας.

Ὀνομάζεται πεδίο δυνάμεων ὁ χῶρος, σέ κάθε σημεῖο τοῦ ὁποίου ἄν τοποθετήσομε ἕνα κατάλληλο ***ὑπόθεμα,*** θά ἐξασκεῖται ἐπάνω σέ αὐτό μιά δύναμη, τῆς ὁποίας τό μέτρο, ἡ διεύθυνση καί ἡ φορά ἐξαρτῶνται ἀπό τή θέση τοῦ σημείου σ' αὐτόν τό χῶρο.

Ὁ χῶρος γύρω ἀπό ἕνα ἠλεκτρικό φορτίο εἶναι πεδίο δυνάμεων. Γιατί, σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο του καί ἄν τοποθετήσομε ἕνα ἄλλο ἠλεκτρικό φορτίο, θά ἐπιδρᾶ ἐπάνω του μία δύναμη.

Ὁ χῶρος, πάλι, γύρω ἀπό τόν ἥλιο εἶναι πεδίο δυνάμεων. Γιατί σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο του καί ἄν βρεθεῖ ἕνα ὑλικό σῶμα (γῆ, σελήνη κλπ.) θά ἐπιδρᾶ ἐπάνω του μιά δύναμη. Ὁ χῶρος γύρω ἀπό τή γῆ εἶναι πεδίο δυνάμεων. Γιατί, σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο του καί ἄν βρεθεῖ ἕνα ὑλικό σῶμα θά ἐπιδρᾶ ἐπάνω του μιά δύναμη.

Πεδίο βαρύτητας ὀνομάζεται ἐκεῖνο τό πεδίο δυνάμεων γιά τό ὁποῖο τό κατάλληλο ***ὑπόθεμα*** εἶναι ἡ ὕλη, δηλαδή ὁ χῶρος ἐκεῖνος σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ὁποίου κι ἄν τοποθετήσομε ἕνα ποσό ὕλης θά ἐπιδράσει ἐπάνω στήν ὕλη αὐτή μιά δύναμη.

Τά πεδία δυνάμεως τῆς γῆς καί τοῦ ἥλιου εἶναι πεδία βαρύτητας, γιατί τό κατάλληλο ὑπόθεμά τους εἶναι ἡ ὕλη.

Ὁ χῶρος γύρω ἀπό κάθε ὑλικό σῶμα (m_1) εἶναι πεδίο βαρύτητας, γιατί σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο του καί ἄν τοποθετήσομε ἕνα ἄλλο ὑλικό σῶμα (m_2), θά ἐπιδράσει πάνω στό σῶμα (m_2) μιά δύναμη.

Σημείωση:

Ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως πιό κάτω, ἡ δύναμη πού θά ἐπιδράσει ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα μάζας m_2, ἄν τό τοποθετήσομε σέ ἕνα σημεῖο τοῦ πεδίου βαρύτητας τοῦ ὑλικοῦ σώματος μάζας m_1, θά εἶναι ἡ Νευτώνια δύναμη τοῦ m_1 στό m_2.

Ἐπομένως μποροῦμε νά δώσομε ***καί τόν ἑξῆς ὁρισμό τοῦ πεδίου βαρύτητας:***

Πεδίο βαρύτητας ὀνομάζεται ὁ χῶρος σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ὁποίου καί ἄν φέρομε μιά ποσότητα ὕλης, θά ἀσκηθεῖ ἐπάνω της μία Νευτώνια δύναμη.

Βαρύτητα — Παγκόσμια ἕλξη — Νόμος τοῦ Νεύτωνα.

Βαρύτητα ὀνομάζεται ἡ ἰδιότητα πού ἔχει ἡ ὕλη νά ἕλκει ἄλλη ὕλη.

Τήν ἰδιότητα πού ἔχει ἡ γῆ νά ἕλκει ὅλα τά ὑλικά σώματα τήν ὀνομάζομε βαρύτητα τῆς γῆς.

Τήν ἰδιότητα πού ἔχουν ὅλα τά ὑλικά σώματα νά ἕλκουν τή γῆ τήν ὀνομάζομε βαρύτητα τῶν σωμάτων αὐτῶν.

Τήν ἰδιότητα πού ἔχει ἕνα ὑλικό σῶμα νά ἕλκει ἕνα ἄλλο ὑλικό σῶμα τήν ὀνομάζομε βαρύτητα τοῦ σώματος αὐτοῦ.

Τήν ἰδιότητα πού ἔχει ὁ ἥλιος νά ἕλκει ὅλα τά ὑλικά σώματα τήν ὀνομάζομε βαρύτητα τοῦ ἥλιου.

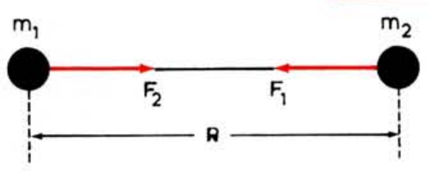
Ὅλα τά ὑλικά σώματα ἀλληλοέλκονται· ἡ ἀλληλοέλξη ὅλων τῶν ὑλικῶν σωμάτων ***ὀνομάζεται παγκόσμια ἕλξη.***

Ὁ ἥλιος ἕλκει τή γῆ (δράση), ἀλλά καί ἡ γῆ ἕλκει τόν ἥλιο μέ ἴση καί ἀντίθετη δύναμη (ἀντίδραση).

Ἡ γῆ ἕλκει τή σελήνη (δράση), ἀλλά καί ἡ σελήνη ἕλκει τή γῆ μέ ἴση καί ἀντίθετη δύναμη (ἀντίδραση).

Ἡ γῆ ἕλκει ἕνα ἀεροπλάνο πού πετάει (δράση), ἀλλά καί τό ἀεροπλάνο ἕλκει τή γῆ μέ ἴση καί ἀντίθετη δύναμη (ἀντίδραση).

Ἔστω ὅτι ἔχομε δύο ὑλικά σημεῖα μέ μάζα m_1 καί m_2 (σχ. 2.38α). Τό m_1 ἕλκει τό m_2 μέ μιά δύναμη $\vec{F}_1$ καί συγχρόνως τό m_2 ἕλκει τό m_1 μέ μιά δύναμη $\vec{F}_2$, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετη πρός τήν $\vec{F}_1$, δηλαδή εἶναι: $\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$



Σχ. 2.38α.

Τό μέτρο τῆς $\vec{F}_1$ καί τῆς $\vec{F}_2$ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{F_1 = F_2 = K\,\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}} \qquad \text{(1)}$$

Νόμος τοῦ Νεύτωνα
ἤ
Νόμος τῆς παγκόσμιας ἕλξεως

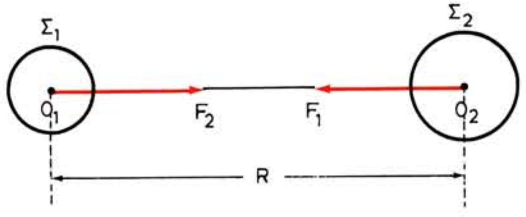
ὅπου: R ἡ ἀπόσταση τῶν ὑλικῶν σημείων m_1 καί m_2,
K ἡ σταθερά τῆς παγκόσμιας ἕλξεως ἴση μέ:

$$\boxed{K = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{N}\,.\,\mathrm{m^2/kg^2}}$$

Ἡ παγκόσμια σταθερά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή φύση τῶν ὑλικῶν σημείων πού ἕλκονται.

Ἡ ἐξίσωση (1) ἐκφράζει τό ***Νόμο τῆς Παγκόσμιας Ἕλξεως,*** ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται καί ***Νόμος τοῦ Νεύτωνα,*** καί ὁρίζει ὅτι:

Τό μέτρο τῆς δυνάμεως, μέ τήν ὁποία ἕνα ὑλικό σημεῖο μάζας m_1 ἕλκει ἕνα ἄλλο ὑλικό σημεῖο μάζα m_2, εἶναι ἀνάλογο πρός τό γινόμενο τῶν μαζῶν m_1 καί m_2 καί ἀντιστρόφως ἀνάλογο πρός τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεώς τους.



Σχ. 2.38β.

Σημείωση:

Ὁ νόμος τοῦ Νεύτωνα ἰσχύει ***καί γιά τά ὑλικά σώματα.*** Ὡς ἀπόσταση (R) μεταξύ δύο ὑλικῶν σωμάτων λαμβάνεται ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο αὐτῶν ὑλικῶν σωμάτων. Τό μέτρο π.χ. τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ μέ τήν ὁποία ἡ σφαίρα Σ_1 (σχ. 2.38β) ἕλκει τή σφαίρα Σ_2 εἶναι:

$$\boxed{F_1 = K\,\frac{m_1 m_2}{(O_1 O_2)^2}}$$

ὅπου: m_1 ἡ μάζα τῆς Σ_1 καί m_2 ἡ μάζα τῆς Σ_2.

Πεδίο βαρύτητας τῆς γῆς.

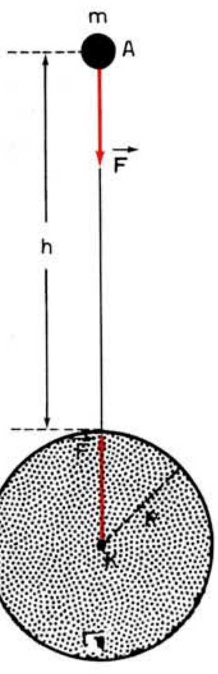
Ὁ χῶρος γύρω ἀπό τή γῆ εἶναι πεδίο βαρύτητας γιατί σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο του καί ἄν βρεθεῖ ἕνα ὑλικό σῶμα, ἐξασκεῖται ἐπάνω σ' αὐτό μιά δύναμη.

Ὁ χῶρος γύρω ἀπό τή γῆ ὀνομάζεται ***πεδίο βαρύτητας τῆς γῆς.***

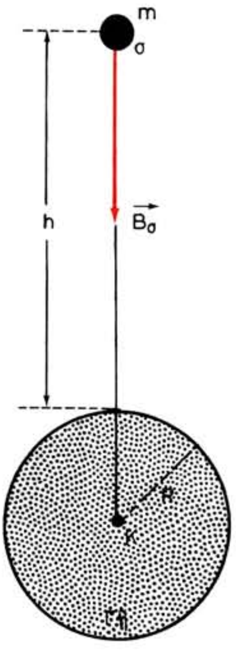
Ἔστω ὅτι ἕνα σῶμα μέ μάζα (m) τοποθετεῖται στή θέση A τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς γῆς (σχ. 2.38γ). Στό σῶμα αὐτό ἀσκεῖται τότε ἀπό τή γῆ μιά δύναμη $\vec{F}$ ἕλξεως, τῆς ὁποίας τό μέτρο εἶναι:

$$\boxed{F = K \frac{mM}{(R+h)^2}}$$

ὅπου: M ἡ μάζα τῆς γῆς, τήν ὁποία θεωροῦμε συγκεντρωμένη στό κέντρο της καί K ἡ σταθερά τῆς παγκόσμιας ἕλξεως.



Σχ. 2.38γ.



Σχ. 2.39α.

2.39 Βάρος.

Βάρος ὑλικοῦ σημείου.

Βάρος ὑλικοῦ σημείου ὀνομάζεται ***ἡ δύναμη $\vec{B}_\sigma$, μέ τήν ὁποία ἡ γῆ ἕλκει τό ὑλικό σημεῖο.***

Τό βάρος $\vec{B}_\sigma$ ἑνός ὑλικοῦ σημείου σ (σχ. 2.39α) ἀφοῦ εἶναι δύναμη, εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Σημεῖο ἐφαρμογῆς,*** τό ὑλικό σημεῖο.

β) ***Διεύθυνση,*** τήν κατακόρυφο τοῦ τόπου.

γ) ***Φορά,*** τή φορά ἀπό τό ὑλικό σημεῖο πρός τό κέντρο τῆς γῆς.

δ) ***Μέτρο,*** πού δίνεται ἀπό τό νόμο τοῦ Νεύτωνα:

$$\boxed{B_\sigma = F = K \frac{m \, . \, M}{(R+h)^2}} \qquad (1)$$

ὅπου: B_σ τό μέτρο τοῦ βάρους τοῦ ὑλικοῦ σημείου.
M ἡ μάζα τῆς γῆς.

m ἡ μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

R ἡ ἀκτίνα τῆς γῆς στόν τόπο ὅπου βρίσκεται τό ὑλικό σημεῖο.

h τό ὕψος πού βρίσκεται τό ὑλικό σημεῖο ἐπάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς.

K ἡ σταθερά τῆς παγκόσμιας ἕλξεως.

Βάρος ἑνός σώματος.

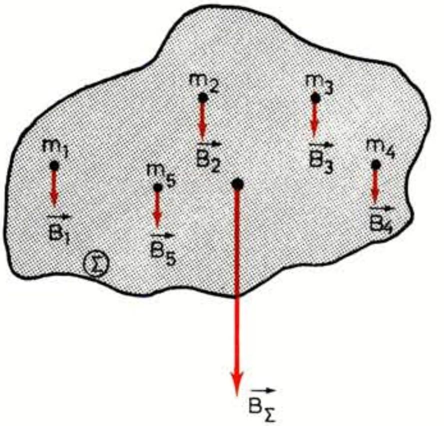
Ὁρισμός.

Βάρος σώματος ὀνομάζεται ***ἡ δύναμη $\vec{B}_\Sigma$ μέ τήν ὁποία ἡ γῆ ἕλκει τό σῶμα αὐτό.***

Ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία ἡ γῆ ἕλκει ἕνα σῶμα ***εἶναι ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων μέ τίς ὁποῖες ἡ γῆ ἕλκει ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος.***

Ἑπομένως μποροῦμε νά δώσομε καί τόν ἑξῆς ὁρισμό τοῦ βάρους:

Βάρος $\vec{B}_\Sigma$ σώματος Σ ὀνομάζομε τή συνισταμένη τῶν βαρῶν $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ ... τῶν ὑλικῶν σημείων m_1, m_2, m_3 ,... ἀπό τά ὁποῖα ἀποτελεῖται τό σῶμα (σχ. 2.39β).



Σχ. 2.39β.

Τά βάρη τῶν ὑλικῶν σημείων ἑνός σώματος εἶναι δυνάμεις κατακόρυφες μέ φορά πρός τό κέντρο τῆς γῆς. Ἄρα:

Τό βάρος $\vec{B}_\Sigma$ ἑνός σώματος θά ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Σημεῖο ἐφαρμογῆς,*** τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν βαρῶν τῶν ὑλικῶν σημείων ἀπό τά ὁποῖα ἀποτελεῖται τό σῶμα.

β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῶν βαρῶν τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, δηλαδή τήν κατακόρυφο τοῦ τόπου.

γ) ***Φορά,*** τή φορά τῶν βαρῶν τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, δηλαδή πρός τό κέντρο τῆς γῆς.

δ) ***Μέτρο,*** τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν βαρῶν τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, δηλαδή:

$$B_\Sigma = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots = K\frac{m_1 M}{(R+h)^2} + K\frac{m_2 M}{(R+h)^2} +$$

$$+ K\frac{m_3\, M}{(R+h)^2} + \ldots$$

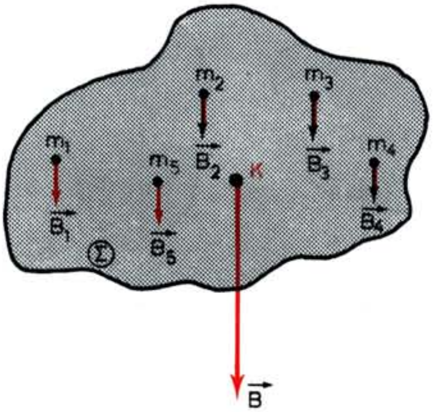
$$B_\Sigma = \frac{KM}{(R+h)^2}\,(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)$$

$$\boxed{B_\Sigma = K\,\frac{m_\Sigma\, M}{(R+h)^2}}$$

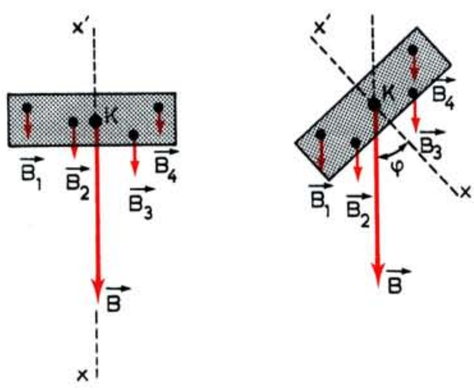
ὅπου: m_1, m_2, m_3, . . . οἱ μάζες τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος καί
m_Σ ἡ μάζα τοῦ σώματος.

Κέντρο βάρους ἑνός σώματος.

Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς Κ τοῦ βάρους $\vec{B}$ ἑνός σώματος Σ, δηλαδή τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν βαρῶν ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων (τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν) ἀπό τά ὁποῖα ἀποτελεῖται τό σῶμα, ***ὀνομάζεται κέντρο βάρους τοῦ σώματος*** (σχ. 2.39γ).



Σχ. 2.39γ.



Σχ. 2.39δ.

Τό κέντρο βάρους ἑνός σώματος ***εἶναι ἀπόλυτα ὁρισμένο*** (σχ. 2.39δ) ὁποιαδήποτε θέση καί ἄν πάρει τό σῶμα μέσα στό χῶρο.

Αὐτό συμβαίνει ἐπειδή:

1) Τό κέντρο βάρους ἑνός σώματος εἶναι τό κέντρο βάρους τῶν παράλληλων δυνάμεων, μέ τίς ὁποῖες ἡ γῆ ἕλκει τίς στοιχειώδεις μάζες τοῦ σώματος, καί
2) Οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι πάντοτε παράλληλες, ὁποιαδήποτε θέση καί ἄν πάρει τό σῶμα, καί αὐξάνονται ἤ ἐλαττώνονται κατά τό ἴδιο ποσό ἄν τό σῶμα μεταφερθεῖ ἀπό τόπο σέ τόπο.

Ἡ θέση τοῦ κέντρου βάρους ἑνός σώματος ἐξαρτᾶται ἀπό τά ἑξῆς:

1) Ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος καί

Σχ. 2.39ε.

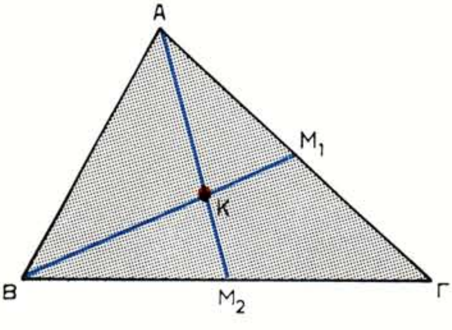
2) Ἀπό τήν κατανομή τῆς ὕλης τοῦ σώματος στό σχῆμα του.

Ἄν τό σῶμα εἶναι ὁμοιογενές καί ἔχει κέντρο συμμετρίας, τότε τό κέντρο βάρους του εἶναι τό κέντρο συμμετρίας του.

Τό κέντρο βάρους μιᾶς ὁμοιογενοῦς σφαίρας εἶναι τό κέντρο της (σχ. 2.39ε).

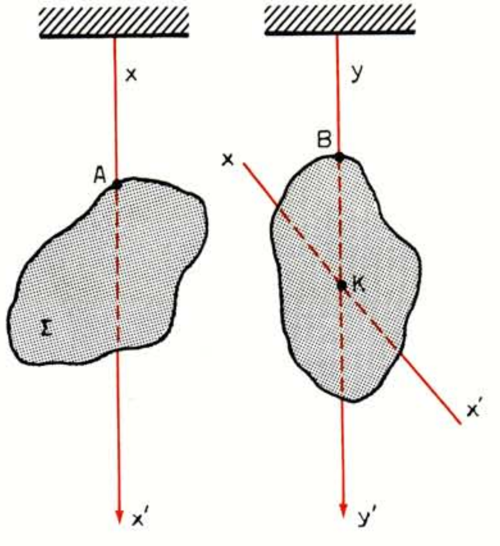
Τό κέντρο βάρους ἑνός τριγώνου (σχ. 2.39στ) πού εἶναι ὁμοιογενές εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαμέσων του.

Ἡ θέση τοῦ κέντρου βάρους ἑνός σώματος εἶναι δυνατό νά βρίσκεται καί ***ἔξω ἀπό τήν ὕλη τοῦ σώματος.*** Τό κέντρο βάρους π.χ. ἑνός ὁμοιογενοῦς δακτυλίου (σχ. 2.39ζ) εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου. Δηλαδή βρίσκεται ἔξω ἀπό τήν ὕλη τοῦ δακτυλίου.



Σχ. 2.39στ.

Σχ. 2.39ζ.



Σχ. 2.39η.

Μιά ἁπλή μέθοδος γιά νά βρίσκομε τό κέντρο βάρους ἑνός ἐπίπεδου σώματος εἶναι ***ἡ μέθοδος τῶν ἐξαρτήσεων.*** Ἐνεργοῦμε ὡς ἑξῆς:

1) Κρεμᾶμε τό σῶμα ἀπό ἕνα σημεῖο του Α (σχ. 2.39η) καί σημειώνομε ἐπάνω στό σῶμα τήν κατακόρυφο xx′ πού διέρχεται ἀπό τό Α.

2) Κρεμᾶμε ὕστερα τό σῶμα ἀπό ἕνα σημεῖο του Β καί σημειώνομε ἐπάνω του τήν κατακόρυφο yy′ πού διέρχεται ἀπό τό Β.

Τό σημεῖο τομῆς Κ τῶν xx′ καί yy′ εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος, γιατί ἀπό τήν πρώτη ἐξάρτηση προκύπτει ὅτι τό κ.β. βρίσκεται ἐπάνω στή xx′ καί ἀπό τή δεύτερη ἐπάνω στήν yy′.

Μεταβολές τοῦ βάρους ἑνός σώματος.

Εἴπαμε ὅτι τό βάρος ἑνός σώματος εἶναι ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία ἡ γῆ ἕλκει τό σῶμα αὐτό. Ἐπομένως, ὅταν τό σῶμα βρίσκεται σέ ὕψος h ἐπάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, τό βάρος του θά εἶναι:

$$\boxed{B = K\,\frac{m \cdot M}{(R+h)^2}} \qquad (1)$$

Τά Κ, m, Μ εἶναι μεγέθη σταθερά. Ἑπομένως τό $\vec{B}$ ἑνός σώματος μεταβάλλεται ὅταν μεταβάλλονται τά R καί h.

Τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος στόν ἴδιο τόπο (δηλαδή R σταθερό) μειώνεται ὅσο ψηλότερα βρίσκεται τό σῶμα.

Τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος μεταβάλλεται ἀπό τόπο σέ τόπο, γιατί ἡ γῆ δέν εἶναι σφαιρική καί τό R εἶναι διαφορετικό στούς διάφορους τόπους. Ἡ ἰσημερινή ἀκτίνα τῆς γῆς εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν πολική της ἀκτίνα, καί γι' αὐτό στούς πόλους τό σῶμα ἔχει μεγαλύτερο βάρος ἀπό ἐκεῖνο πού ἔχει στόν ἰσημερινό. Ἔτσι:

Τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος αὐξάνεται ὅταν μεταφέρεται σέ τόπους πού ἔχουν μεγαλύτερο γεωγραφικό πλάτος, δηλαδή σέ τόπους πού ἡ ἀκτίνα τῆς γῆς εἶναι μικρότερη.

Σημείωση:

Ὅταν τό σῶμα βρίσκεται στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, δηλαδή h = 0, τότε τό βάρος του εἶναι:

$$\boxed{B_o = K\,\frac{m\,.\,M}{R^2}} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$\boxed{B = B_o\left(\frac{R}{R+h}\right)^2} \qquad (3)$$

Ἀπό τή σχέση (3) μποροῦμε νά ὑπολογίζομε τό βάρος B τοῦ σώματος, ὅταν βρίσκεται σέ ὕψος h, ἄν γνωρίζομε:

α) τό βάρος του στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας,
β) τό ὕψος h καί
γ) τήν ἀκτίνα (R) τῆς γῆς, τόν τόπο δηλαδή πού βρίσκεται τό σῶμα.

2.40 Ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας $\vec{g}$.

Γενικά:

Ἔστω g_h ἡ ἐπιτάχυνση τήν ὁποία ἔχει ἕνα σῶμα σέ ὕψος h, ὅταν πέφτει μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του, δηλαδή ἔστω g_h ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας σέ ὕψος h, τότε:

$$B_h = m\,.\,g_h \qquad (1)$$

ὅπου: B_h τό βάρος τοῦ σώματος στό ὕψος h.

Τό βάρος B_h ἑνός σώματος σέ ὕψος h δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{B_h = \frac{K\,.\,m\,.\,M}{(R+h)^2}} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$g_h = K\,\frac{M}{(R+h)^2} \qquad (3)$$

Ἀπό τή σχέση (3) προκύπτει ὅτι:

Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ***εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή μάζα τοῦ σώματος.***

Ἄν τά ὕψη h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, ἀπό τά ὁποῖα πέφτουν τά σώματα, τά θεωρήσομε ἀμελητέα ὡς πρός τήν ἀκτίνα τῆς γῆς, τότε ἡ (3) γίνεται:

$$\boxed{g = K\frac{M}{R^2}} \tag{4}$$

Ἀπό τή σχέση (4) προκύπτει ὅτι:

Ὅλα τά σώματα, πού πέφτουν σέ ἕναν τόπο μόνο μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους τους ἀπό ἀμελητέα ὕψη, ***πέφτουν μέ τήν ἴδια ἐπιτάχυνση (g).***

Μεταβολές τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας $\vec{g}$.

Εἴπαμε ὅτι, ὅταν ἕνα σῶμα πέφτει ἀπό ὕψος h μέ τήν ἐνέργεια μόνο τοῦ βάρους του (ἐλεύθερη πτώση), πέφτει μέ ἐπιτάχυνση g, ἡ ὁποία δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$g = K\frac{M}{(R+h)^2} \tag{1}$$

Τά μεγέθη K καί M εἶναι σταθερά.

Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι ἡ g μεταβάλλεται ὅταν μεταβάλλονται τά R καί h.

α) Ἡ g αὐξάνεται στόν ἴδιο τόπο (R = σταθερά) ὅσο τό ὕψος ἐλαττώνεται. Δηλαδή, ὅσο κατέρχεται τό σῶμα πρός τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς τόσο αὐξάνει ἡ g.

Ἡ αὔξηση τῆς g πού γίνεται κατά τήν πτώση ἑνός σώματος ἀπό ἕνα ὕψος εἶναι μικρή. Γι' αὐτό στήν πράξη ἡ g, γιά ἀρκετά μεγάλα ὕψη θεωρεῖται σταθερή σέ ἕνα τόπο.

β) Ἡ g μεταβάλλεται ἀπό τόπο σέ τόπο, γιατί ἡ γῆ δέν εἶναι σφαιρική καί ἐπομένως ἡ ἀκτίνα της (R) δέν ἔχει τήν ἴδια τιμή σέ ὅλους τούς τόπους.

Ἡ g ἔχει τή μικρότερη τιμή της στόν Ἰσημερινό καί τή μεγαλύτερή της στούς πόλους ($R_\pi < R < R_{\iota\sigma}$).

Σέ γεωγραφικό πλάτος 45°: $g = 9{,}81\ \text{m/sec}^2$.
Σέ γεωγραφικό πλάτος 90° (πόλοι): $g = 9{,}83\ \text{m/sec}^2$.
Σέ γεωγραφικό πλάτος 0° (Ἰσημερ.): $g = 9{,}78\ \text{m/sec}^2$.

Ἄν ὀνομάσομε g_o τήν ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας θά ἔχομε:

$$\boxed{g_o = \frac{K \,.\, M}{R^2}} \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε:

$$\boxed{g = g_o\left(\frac{R}{R+h}\right)^2} \tag{3}$$

Μέ τή σχέση (3) μποροῦμε νά ὑπολογίζομε τήν ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας πού θά ἔχει ἕνα σῶμα σέ ἕνα ὕψος h, ὅταν ξέρομε:

α) τήν ἐπιτάχυνση g_o κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς,

β) τό ΰψος h καί
γ) τήν άκτίνα R τῆς γῆς στόν τόπο πού βρίσκεται τό σῶμα.

2.41 Ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς γῆς.

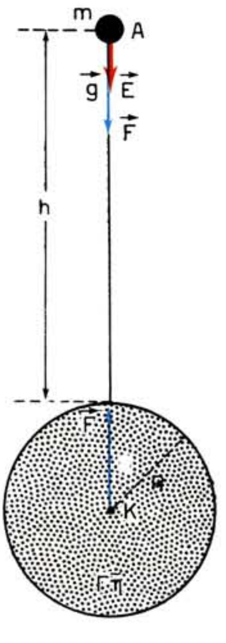
Φέρνομε ἕνα ὑλικό σημεῖο μάζας m σέ ἕνα σημεῖο A τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς (2.41).
Ἔνταση $\vec{E}$ τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς γῆς στό σημεῖο A τοῦ πεδίου ***ὀνομάζεται ἕνα ἀνυσματικό μέγεθος*** πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) ***Σημεῖο ἐφαρμογῆς,*** τό σημεῖο A τοῦ πεδίου.
β) ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$, μέ τήν ὁποία ἡ γῆ ἕλκει τό ὑλικό σημεῖο m πού βρίσκεται στή θέση A.
γ) ***Φορά,*** τή φορά τῆς δυνάμεως $\vec{F}$.
δ) ***Μέτρο,*** τό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ διά τῆς μάζας m, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}} \tag{1}$$

$$\boxed{E = \frac{F}{m}} \tag{2}$$

Γιά τή δύναμη $\vec{F}$, μέ τήν ὁποία ἡ γῆ ἕλκει τό ὑλικό σημεῖο m, ἰσχύει ἡ σχέση:



Σχ. 2.41.

$$F = K \frac{m \cdot M}{(R + h)^2} \tag{3}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) προκύπτει:

$$E = \frac{F}{m} = \frac{K \cdot m \cdot M}{m(R+h)^2} = K \frac{M}{(R+h)^2} \qquad (4)$$

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$g = K \frac{M}{(R+h)^2} \qquad (5)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (4) καί (5) προκύπτει:

$$\boxed{E = g} \qquad (6)$$

Ἐπειδή ἡ ἔνταση $\vec{E}$ τοῦ πεδίου βαρύτητας καί ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{g}$ τῆς βαρύτητας ἔχουν τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς $\vec{F}$, ἀπό τήν σχέση (6) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{g}} \qquad (7)$$

Ἀπό τή σχέση (7) προκύπτει ὅτι:

Ἡ ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας $\vec{E}$ στό σημεῖο Α καί ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας $\vec{g}$ στό ἴδιο σημεῖο Α εἶναι δύο ἀνυσματικά μεγέθη ἐντελῶς ὅμοια.

Γι' αὐτό πολλές φορές καί τά δύο αὐτά μεγέθη συμβολίζονται μέ τό g καί ἀναφέρονται ἄλλοτε ὡς ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας καί ἄλλοτε ὡς ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας — χωρίς διάκριση.

2.42 Συνέπειες ἀπό τή σχέση $\vec{B} = m \cdot \vec{g}$.

1) Ἔστω ὅτι δύο σώματα Σ_1 καί Σ_2 ἔχουν βάρη $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$ καί μάζες m_1 καί m_2. Ἄν ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $\vec{g}$ θά ἔχομε:

$$B_1 = m_1 g \qquad (1)$$

$$B_2 = m_2 g \qquad (2)$$

Ἄν διαιρέσομε τίς (1) καί (2), θά ἔχομε:

$$\boxed{\frac{B_1}{B_2} = \frac{m_1}{m_2}} \qquad (3)$$

Ἀπό τή σχέση (3) προκύπτει ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν βαρῶν δύο σωμάτων σέ ἕνα τόπο εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν μαζῶν τους.***

2) Ἔστω ὅτι δύο σώματα Σ_1 καί Σ_2 ἔχουν ἴσα βάρη $\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}$ καί μάζες m_1 καί m_2. Ἄν ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $\vec{g}$ θά ἔχομε:

$$B_1 = B = m_1 g \qquad (1)$$

$$B_2 = B = m_2 g \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε: $\quad m_1 g = m_2 g$

$$\boxed{m_1 = m_2} \qquad (3)$$

Ἀπό τή σχέση (3) προκύπτει ὅτι: ***Ἄν δύο σώματα ἔχουν στόν ἴδιο τόπο ἴσα βάρη ($B_1 = B_2$), τότε τά σώματα αὐτά ἔχουν καί ἴσες μάζες.***

3) Ἔστω ὅτι δύο σώματα Σ_1 καί Σ_2 ἔχουν ἴσες μάζες ($m_1 = m_2 = m$) καί ὅτι τά βάρη τους εἶναι $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$.

Ἄν ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας σέ ἕναν τόπο εἶναι $\vec{g}$, τότε στόν τόπο αὐτό θά ἔχομε:

$$B_1 = m_1 g = m \cdot g \qquad (1)$$

$$B_2 = m_2 g = m \cdot g \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε: $\boxed{B_1 = B_2}$ (3)

Ἀπό τήν (3) συμπεραίνομε ὅτι: ***Ἄν δυό σώματα ἔχουν ἴσες μάζες, τότε στόν ἴδιο τόπο τά σώματα αὐτά ἔχουν καί ἴσα βάρη.***

4) Ἔστω ὅτι δύο σώματα Σ_1 καί Σ_2 ἔχουν μάζες m_1 καί m_2 καί ὅτι τά βάρη τους σέ ἕνα τόπο (Α), ὅπου ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $\vec{g}_1$, εἶναι $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$, ἐνῶ σέ ἕναν ἄλλο τόπο (Α΄), ὅπου ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $\vec{g}_2$, εἶναι $\vec{B}_1'$ καί $\vec{B}_2'$. Τότε ἔχομε:

$$B_1 = m_1 g_1 \qquad (1)$$

$$B_2 = m_2 g_1 \qquad (2)$$

$$B_1' = m_1 g_2 \qquad (3)$$

$$B_2' = m_2 g_2 \qquad (4)$$

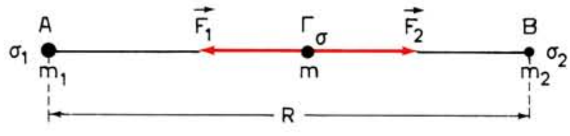
Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2), (3) καί (4) προκύπτει ὅτι:
Ἄν ἰσχύει ἡ σχέση $\boxed{B_1 = B_2}$ (5)
τότε θά ἰσχύει καί ἡ σχέση $\boxed{B_1' = B_2'}$ (6)

Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (6) συμπεραίνομε ὅτι:

Ἄν δυό σώματα ἔχουν σέ ἕναν τόπο Α ἴσα βάρη, τότε θά ἔχουν ἴσα βάρη σέ ὁποιοδήποτε τόπο Α΄.

2.43 Ἀριθμητικά Παραδείγματα.

45) *Δύο ὑλικά σημεῖα (σ_1) καί (σ_2) πού ἔχουν μάζες $m_1 = 18$ g καί $m_2 = 2$ g ἀντίστοιχα, βρίσκονται στά σημεῖα Α καί Β τά ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόσταση $R = 20$ cm. Ἐπάνω στό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μπορεῖ νά κινεῖται ἐλεύθερα ἕνα ὑλικό σημεῖο (σ) πού ἔχει μάζα $m = 7$ g. Σέ ποιό σημεῖο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ μπορεῖ νά ἰσορροπήσει τό ὑλικό σημεῖο σ;*



Λύση.

Τό ὑλικό σημεῖο (σ) θά ἰσορροπήσει σέ ἐκεῖνο τό σημεῖο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος (ΑΒ), στό ὁποῖο οἱ δυνάμεις πού ἐξασκοῦνται ἐπάνω του ἀπό τά σημεῖα (σ_1) καί (σ_2) δίνουν συνισταμένη μηδέν, δηλαδή εἶναι ἀντίθετες. Ἔστω ὅτι αὐτό εἶναι τό σημεῖο Γ.

Τότε ἔχομε:

$$\boxed{F_1 = K \frac{m_1 m}{(A\Gamma)^2}} \qquad (1)$$

$$\boxed{F_2 = K \frac{m_2 m}{(B\Gamma)^2}} \qquad (2)$$

ὅπου $\vec{F}_1$ ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία τό ὑλικό σημεῖο (σ_1) ἕλκει τό ὑλικό σημεῖο (σ).

$\vec{F}_2$ ἡ δύναμη μέ τήν ὁποία τό ὑλικό σημεῖο (σ_2) ἕλκει τό ὑλικό σημεῖο (σ).

Ἐπειδή τό (σ) ἰσορροπεῖ στή θέση Γ, οἱ $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι ἀντίθετες, δηλαδή:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \text{καί} \quad \boxed{F_1 = F_2} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2) καί (3) ἔχομε:

$$\boxed{K\,\frac{m_1\,m}{(\text{ΑΓ})^2} = K\,\frac{m_2\,.\,m}{(\text{ΒΓ})^2}} \qquad (4)$$

Ἀπό τή σχέση (4) πέρνομε:

$$\text{ΑΓ} = \frac{R\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}}{1+\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}} \qquad (5)$$

Δίνονται: $m_1 = 18$ g, $m_2 = 2$ g καί $R = 20$ cm.
Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (5) καί βρίσκομε:

$$(\text{ΑΓ}) = \frac{20\sqrt{18/2}}{1+\sqrt{18/2}} = \frac{20\times 3}{1+3} = 15\text{ cm} \quad \textit{ὥστε} \quad (\text{ΑΓ}) = 15\text{ cm}$$

καί $\quad \text{ΒΓ} = R - \text{ΑΓ} = 20 - 15 = 5\text{ cm} \quad$ ***ὥστε*** $\quad \text{ΒΓ} = 5\text{ cm}$

Ἄρα τό σημεῖο Γ ἀπέχει 15 cm ἀπό τό Α καί 5 cm ἀπό τό Β· ἑπομένως προσδιορίζεται πλήρως.

46) *Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα $m = 10$ kg. Πόσα κιλοπόντ εἶναι τό βάρος του (Β), ὅταν ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $g = 9{,}81$ m/sec²;*

Λύση.

Βρίσκομε τό βάρος τοῦ σώματος στό σύστημα S.I. καί ἔπειτα κάνομε τή μετατροπή πού χρειαζόμαστε.

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $\boxed{B = m\,.\,g}$ (1)

Δίνονται: $m = 10$ kg καί $g = 9{,}81$ m/sec².
Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε: $B = m.g = 10 \times 9{,}81 = 98{,}1$ N

Γνωρίζομε ὅτι $\boxed{9{,}81\text{ N} = 1\text{ kp}}$ Ἑπομένως ἔχομε:

$$B = 98{,}1\text{ N} = \frac{98{,}1}{9{,}81}\text{ kp} = 10\text{ kp}$$

47) *Δύο ὁμοιογενεῖς ράβδοι μήκους $AB = 1$ m καί $A\Gamma = 0{,}80$ m εἶναι ἑνωμένες ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 2.42α. Ἄν τά βάρη τους εἶναι $B_1 = 100$ N καί $B_2 = 80$ N νά βρεθεῖ τό κέντρο βάρους τους.*

Λύση.

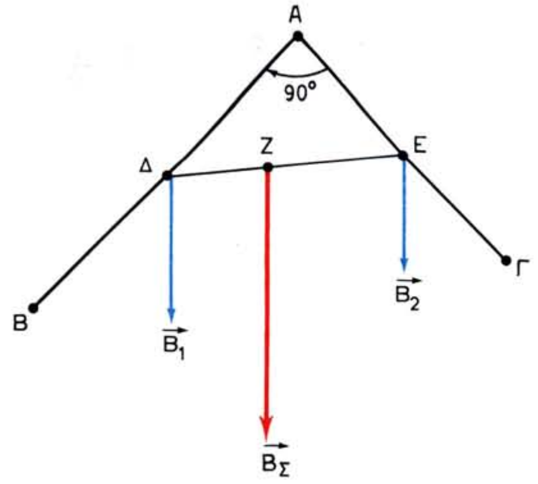
Τό κέντρο βάρους τῆς ράβδου ΑΒ εἶναι τό μέσο της Δ καί τῆς ΑΓ τό μέσο της Ε. Τό κέντρο βάρους τῶν δύο ράβδων εἶναι τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν βαρῶν $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$ τῶν δύο ράβδων.

Τά δύο βάρη $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$ εἶναι δύο δυνάμεις παράλληλες καί ὁμόρροπες καί ἡ συνισταμένη τους $\vec{B}_\Sigma$ ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) Εἶναι παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τίς δυνάμεις αὐτές.

β) Τό μέτρο της ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$, δηλαδή:

$$\boxed{B_\Sigma = B_1 + B_2 = 100 + 80 = 180\text{ N}} \qquad (1)$$



γ) Σημεῖο ἐφαρμογῆς της εἶναι τό σημεῖο Z τῆς εὐθείας ΔE πού ἑνώνει τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$ καί τό ὁποῖο εἶναι τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$B_1 \,.\, (\Delta Z) = B_2 \,.\, (EZ) \quad \text{ἤ} \quad \boxed{B_1(\Delta Z) = B_2(\Delta E - \Delta Z)} \qquad (2)$$

Λύνομε τή σχέση (2) ὡς πρός (ΔZ) καί ἔχομε:

$$\boxed{(\Delta Z) = \frac{B_2\,(\Delta E)}{B_1 + B_2}} \qquad (3)$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΔAE βρίσκομε τή (ΔE):

$$(\Delta E)^2 = (A\Delta)^2 + (AE)^2 = (0{,}5)^2 + (0{,}4)^2 = 0{,}41 \quad \text{καί} \quad \Delta E = 0{,}64 \text{ m}$$

Θέτομε στή σχέση (3) $B_1 = 100$ N, $B_2 = 80$ N καί $\Delta E = 0{,}64$ m καί βρίσκομε:

$$\Delta Z = \frac{80 \times 0{,}64}{100 + 80} = 0{,}28 \text{ m} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad \Delta Z = 0{,}28 \text{ m}$$

$$EZ = E\Delta - \Delta Z = 0{,}64 - 0{,}28 = 0{,}36 \text{ m} \quad \textbf{\textit{ὥστε}} \quad EZ = 0{,}36 \text{ m}$$

2.44 Ζυγός.

Γενικά.

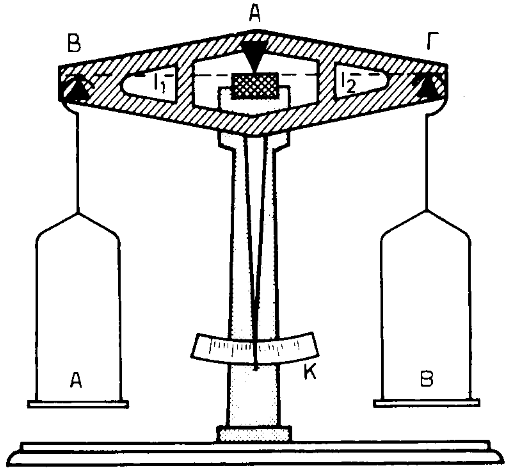
Ὁ ζυγός εἶναι διάταξη μέ τήν ὁποία ***συγκρίνομε τά βάρη δύο σωμάτων, Σ_1 καί Σ_2***. Ὅπως εἶναι γνωστό ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (1)$$

ὅπου: m_1 ἡ μάζα τοῦ Σ_1, m_2 ἡ μάζα τοῦ Σ_2, B_1 τό βάρος τοῦ Σ_1 καί B_2 τό βάρος τοῦ Σ_2.

Ἐπειδή ἰσχύει ἡ σχέση (1) μέ τό ζυγό ***μποροῦμε νά συγκρίνομε καί τίς μάζες δύο σωμάτων.***

Ὁ ζυγός τοῦ σχήματος 2.44α ἀποτελεῖται:



Σχ. 2.44α.

1) Ἀπό τή φάλαγγα.

Ἡ φάλαγγα εἶναι μιά ἐλαφριά μεταλλική ράβδος ΒΓ πού ἔχει στή μέση της πρισματική ἀκμή ἀπό χάλυβα. Ἡ φάλαγγα στηρίζεται μέ τήν πρισματική ἀκμή πού ἔχει στή μέση της σέ ὁριζόντια πλάκα Α ἀπό χάλυβα καί μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό αὐτή τήν πρισματική ἀκμή.

Ἡ πρισματική αὐτή ἀκμή, βασικά εἶναι ὁριζόντιος ἄξονας, δηλαδή ἡ φάλαγγα μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα κάθετο σέ αὐτή.

Ἐπίσης ἡ φάλαγγα ἔχει δύο ὅμοιες πρισματικές ἀκμές στά ἄκρα της καί σέ ἴση ἀπόσταση ἀπό τή μεσαία ἀκμή.

Οἱ τρεῖς πρισματικές ἀκμές τῆς φάλαγγας ***εἶναι παράλληλες καί βρίσκονται σέ ἕνα ἐπίπεδο.***

2) Ἀπό δύο δίσκους Α καί Β.

Οἱ δίσκοι αὐτοί, πού ἔχουν τό ἴδιο βάρος καί κρέμονται ἀπό τίς πρισματικές ἀκμές πού βρίσκονται στά ἄκρα τῆς φάλαγγας, μποροῦν νά αἰωροῦνται ἐλεύθερα γύρω ἀπό τίς ἀκμές αὐτές.

3) Ἀπό δείκτη.

Αὐτός εἶναι στερεωμένος ἐπάνω στή φάλαγγα καί στρέφεται μαζί μέ αὐτή. Ὁ δείκτης κινεῖται μπροστά ἀπό κλίμακα Κ καί ἐπιτρέπει τόν προσδιορισμό τῆς θέσεως πού ἔχει κάθε φορά ἡ φάλαγγα. Ὅταν ἡ φάλαγγα ἰσορροπεῖ στήν ὁριζόντιά της θέση, ὁ δείκτης βρίσκεται στή διαίρεση μηδέν τῆς κλίμακας.

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ὁ ζυγός τοῦ σχήματός μας ***εἶναι μία ράβδος πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα, πού εἶναι κάθετος στόν ἄξονά της.***

Ζύγιση.

Ἄν ἡ φάλαγγα εἶναι ὁριζόντια (ὁ δείκτης δείχνει τό 0 τῆς κλίμακας), ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι ἀφόρτιστοι, τότε, ἄν ἐπάνω στούς δίσκους βάλομε ἴσα βάρη, ἡ φάλαγγα θά παραμείνει στήν ὁριζόντια θέση της, γιατί οἱ ροπές τῶν ἴσων βαρῶν ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴσες.

Ἑπομένως, ἄν βάλομε πάνω στόν ἕνα δίσκο σῶμα ἄγνωστου βάρους καί ἐπάνω στόν ἄλλο τόσα σταθμά ὥστε ὁ δείκτης νά δείχνει τό (0) τῆς κλίμακας (ὁριζόντια θέση φάλαγγας), τό βάρος τοῦ σώματος θά εἶναι ἴσο μέ τό γνωστό βάρος τῶν σταθμῶν.

(βλ. παράγρ. 1.33)

Ἰδιότητες τοῦ ζυγοῦ.

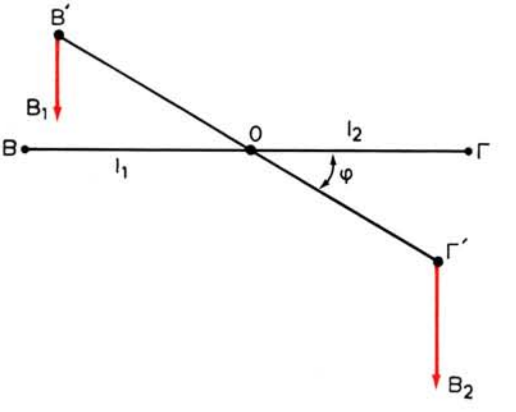
1) Εὐαισθησία τοῦ ζυγοῦ.

Ὅταν λέμε εὐαισθησία (ε) ἑνός ζυγοῦ ἐννοοῦμε τό πηλίκο τῆς γωνίας φ (σχ. 2.44β) πού θά μετακινηθεῖ ἡ φάλαγγα ἀπό τήν ὁριζόντια θέση της, ὅταν ἐπάνω στούς δίσκους τοποθετηθοῦν ἄνισα βάρη $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$, διά τῆς διαφορᾶς αὐτῶν τῶν βαρῶν, δηλαδή:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\phi}{B_2 - B_1}} \quad (1)$$

Ἀπό τή σχέση (1) φαίνεται ὅτι ἡ εὐαισθησία ἑνός ζυγοῦ εἶναι τόσο μεγαλύτερη, ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ γωνία φ πού ἡ φάλαγγα μετακινεῖται ἀπό τήν ὁριζόντια θέση ἰσορροπίας της, ***ὑπό τήν αὐτή διαφορά βαρῶν στούς δίσκους.*** Βρίσκεται ὅτι ἡ εὐαισθησία ἑνός ζυγοῦ εἶναι τόσο μεγαλύτερη:

1) Ὅσο τό μῆκος τῆς φάλαγγας εἶναι μεγαλύτερο.
2) Ὅσο τό βάρος τῆς φάλαγγας εἶναι μικρότερο καί
3) Ὅσο τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος ***φάλαγγας-δίσκων*** βρίσκεται πλησιέστερα πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τῆς φάλαγγας.



Σχ. 2.44β.

2) Ἀκρίβεια ζυγοῦ.

Ἕνας ζυγός εἶναι ἀκριβής, ὅταν συμβαίνουν τά ἑξῆς δύο:

1) Ἡ φάλαγγα βρίσκεται στήν ὁριζόντια θέση ἰσορροπίας, ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι ἀφόρτιστοι καί
2) Ἡ φάλαγγα βρίσκεται πάλι στήν ὁριζόντια θέση ἰσορροπίας, ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι φορτισμένοι μέ ἴσα βάρη.

Συνθήκη ἀκρίβειας.

Γιά νά εἶναι ἕνας ζυγός ἀκριβής, ***πρέπει τά μήκη τῶν δύο βραχιόνων τῆς φάλαγγας νά εἶναι ἴσα.***

Γιατί ἄν τά μήκη τῶν δύο βραχιόνων τῆς φάλαγγας εἶναι ἴσα καί βάλομε ἴσα βάρη στούς δίσκους, ἡ φάλαγγα παραμένει ὁριζόντια, γιατί οἱ ροπές τῶν δύο ἴσων βαρῶν ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τῆς φάλαγγας εἶναι ἴσες καί ἀντίθετες, δηλαδή δίνουν συνισταμένη ροπή μηδέν.

Γιά νά διαπιστώσομε ἄν ἕνας ζυγός εἶναι ἀκριβής, ὅταν ἡ φάλαγγά του εἶναι ὁριζόντια χωρίς φορτία στούς δίσκους, κάνομε τά ἑξῆς:

1) Βάζομε στό δίσκο Α ἕνα σῶμα Σ καί στό δίσκο Β τόσα σταθμά (σ), ἔτσι πού ἡ φάλαγγα νά ἰσορροπήσει στήν ὁριζόντια θέση της.
2) Μετά βάζομε στόν Α τά σταθμά (σ) καί στόν Β τό σῶμα Σ. Ἄν ὁ ζυγός εἶναι ἀκριβής, δηλαδή $l_1 = l_2$ ἡ φάλαγγα καί στή δεύτερη περίπτωση θά πάρει τήν ὁριζόντια θέση της, ἀφοῦ τό σῶμα καί τά σταθμά ἔχουν τά ἴδια βάρη.

Ἄν δέν εἶναι ἀκριβής, $l_1 \neq l_2$, τότε ἡ φάλαγγα στή δεύτερη περίπτωση θά ἰσορροπήσει σέ ὄχι ὁριζόντια θέση.

3) Εὐστάθεια ζυγοῦ.

Ἕνας ζυγός εἶναι εὐσταθής, ὅταν τό κέντρο βάρους τῆς φάλαγγάς του βρίσκεται ***κάτω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς της.***

4) Πιστότητα ζυγοῦ.

Ἕνας ζυγός εἶναι πιστός, ὅταν τό ἀποτέλεσμα τῆς ζυγίσεως ἑνός σώματος εἶναι πάντα τό ἴδιο σέ ὁποιαδήποτε θέση τοῦ δίσκου κι ἄν τό βάλομε.

Δηλαδή, ἕνας ζυγός εἶναι πιστός, ἄν μᾶς δίνει τό ἴδιο ἀποτέλεσμα βάζοντας τό σῶμα σέ διάφορες θέσεις στό δίσκο.

Ἕνας ζυγός εἶναι πιστός ***ὅταν συμβαίνουν τά ἑξῆς:***

1) Ὅταν οἱ τρεῖς πρισματικές ἀκμές εἶναι παράλληλες καί βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί

2) Ὅταν οἱ δύο ἀκριανές πρισματικές ἀκμές ἀπέχουν ἴσα ἀπό τή μεσαία.

Ζύγιση μέ ἀνακριβή ζυγό.

Μποροῦμε νά ζυγίσομε μέ ἀκρίβεια ἕνα σῶμα καί μέ ἀνακριβή ζυγό δηλαδή μέ ζυγό πού οἱ βραχίονες τῆς φάλαγγάς του εἶναι ἄνισοι, μέ τίς ἀκόλουθες συνήθως μεθόδους.

1) Μέθοδος ἀντικαταστάσεως.

Κάνομε τά ἀκόλουθα:

α) Βάζομε τό σῶμα Σ πού θέλομε νά ζυγίσομε στό δίσκο Α καί στό δίσκο Β βάζομε π.χ. ἄμμο μέχρις ὅτου ἡ φάλαγγα ἰσορροπήσει.

β) Βγάζομε ἀπό τό δίσκο Α τό σῶμα Σ καί βάζομε ἀντί αὐτοῦ σταθμά (σ) τόσα, μέχρις ὅτου ἡ φάλαγγα ἰσορροπήσει πάλι. Τότε τό βάρος τοῦ σώματος εἶναι ἴσο μέ τό βάρος τῶν σταθμῶν (σ).

2) Μέθοδος τῆς διπλῆς ζυγίσεως ἤ ***μέθοδος τῆς ἀντιμεταθέσεως.***

α) Βάζομε τό σῶμα Σ, πού τό βάρος του (x) θέλομε νά βροῦμε, στό δίσκο Α καί στό δίσκο Β τόσα σταθμά B_1, μέχρις ὅτου ἰσορροπήσει ἡ φάλαγγα στήν ὁριζόντιά της θέση, τότε θά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{x \cdot l_1 = B_1 \cdot l_2} \qquad (1)$$

β) Βάζομε τώρα τό σῶμα Σ στό δίσκο Β καί στό δίσκο Α τόσα σταθμά B_2, μέχρις ὅτου ἡ φάλαγγα ἰσορροπήσει στήν ὁριζόντιά της θέση, τότε θά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{B_2 \cdot l_1 = x \cdot l_2} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) βρίσκομε τό βάρος (x) τοῦ σώματος.

$$\frac{x \cdot l_1}{B_2 \cdot l_1} = \frac{B_1 \cdot l_2}{x \cdot l_2}$$

$$\frac{x}{B_2} = \frac{B_1}{x}$$

$$x^2 = B_2 \cdot B_1$$

$$\boxed{x = \sqrt{B_2 \cdot B_1}}$$

Αὐτόματοι ζυγοί (ζυγοί ἐπιστολῶν).

Αὐτόματος ζυγός λέγεται ὁ ζυγός πού λειτουργεῖ χωρίς σταθμά. Ἕνας συνηθισμένος αὐτόματος ζυγός (σχ. 2.44γ) ἀποτελεῖται:

1) Ἀπό μιά λυγισμένη ράβδο ΑΒΓ, πού μπορεῖ νά γυρνᾶ γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα, πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο της Β.

2) Ἀπό δίσκο, πού κρέμεται ἀπό τήν ἄκρη Α τῆς ράβδου καί πού τό βάρος του ἔστω ὅτι εἶναι B_Δ.

3) Ἀπό σῶμα βάρους Β (ἀντίβαρο τοῦ δίσκου) πού βρίσκεται στήν ἄλλη ἄκρη Γ τῆς ράβδου.

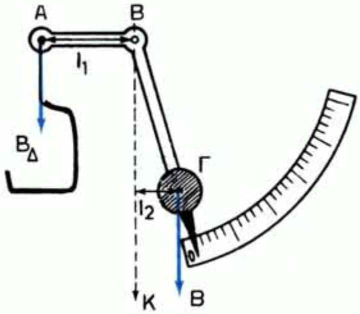
4) Ἀπό δείκτη πού βρίσκεται στερεωμένος στήν ἄκρη Γ τῆς ράβδου καί πού κινεῖται μπροστά σέ κλίμακα. ***Ὅταν ὁ δίσκος εἶναι ἀφόρτιστος καί ἰσορροπεῖ ἡ φάλαγγα, τότε ἰσχύει ἡ σχέση:***

$$\boxed{B_\Delta \cdot l_1 = B \cdot l_2} \qquad (1)$$

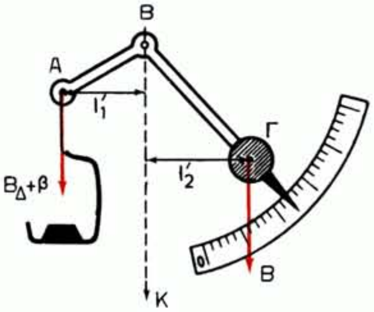
Ὅταν στό δίσκο βάλομε βάρος β (σχ. 2.44δ), τότε ἡ ράβδος ΑΒΓ στρέφεται καί ἰσορροπεῖ σέ νέα θέση τέτοια, πού νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{(B_\Delta + \beta)\, l_1' = B l_2'} \qquad (2)$$

Κατά τήν κίνηση τῆς ράβδου ὁ δείκτης μετακινεῖται μπροστά στήν κλίμακα καί σταματᾶ ἐκεῖ πού θά ἰσχύει ἡ σχέση (2), καί ἡ ἔνδειξη τοῦ δείκτη μας δίνει τό βάρος β τοῦ σώματος.



Σχ. 2.44γ.



Σχ. 2.44δ.

2.45 Ἰσορροπία τῶν στερεῶν σωμάτων στό πεδίο τῆς βαρύτητας.

Σημείωση:

Θά ἐξετάσομε δύο περιπτώσεις ἰσορροπίας ἑνός σώματος:

1η) Ὅταν τό σῶμα στηρίζεται σέ ὁριζόντιο δάπεδο, καί

2η) ὅταν τό σῶμα στηρίζεται σέ ὁριζόντιο ἄξονα, γύρω ἀπό τόν ὁποῖο μπορεῖ νά περιστρέφεται.

Εἴδη ἰσορροπίας ἑνός σώματος - Κριτήριο τοῦ εἴδους τῆς ἰσορροπίας ἑνός σώματος.

Ἡ ἰσορροπία ἑνός σώματος στό ὁποῖο ἐπιδρᾶ μόνο ἡ δύναμη τοῦ βάρους του καί οἱ ἀντιδράσεις τοῦ δαπέδου ἤ τοῦ ἄξονα στόν ὁποῖο στηρίζεται τό σῶμα αὐτό μπορεῖ νά εἶναι: ***Εὐσταθής, ἀσταθής, ἀδιάφορη.***

Εὐσταθής ἰσορροπία ἑνός σώματος ὀνομάζεται ἡ ἰσορροπία ἐκείνη, πού ὅταν λίγο ἀπομακρύνομε τό σῶμα ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του, ἐπανέρχεται σέ αὐτή μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως τοῦ βάρους του καί τῶν ἀντιδράσεων τοῦ δαπέδου ἤ τοῦ ἄξονα στηρίξεώς του.

Κριτήριο στήν εὐσταθή ἰσορροπία εἶναι τό γεγονός ὅτι, ὅταν ἀπομακρύνομε τό σῶμα ἀπό τή θέση τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας του, τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος αὐτοῦ ἀνέρχεται.

Ἀσταθής ἰσορροπία ἑνός σώματος ὀνομάζεται ἡ ἰσορροπία ἐκείνη, πού ὅταν λίγο ἀπομακρύνομε τό σῶμα ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας δέν ἐπανέρχεται σέ αὐτή ἀλλά ἀπομακρύνεται περισσότερο ἀπό αὐτή, μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως τοῦ βάρους του καί τῶν ἀντιδράσεων τοῦ δαπέδου ἤ τοῦ ἄξονα στηρίξεώς του.

Κριτήριο στήν ἀσταθή ἰσορροπία εἶναι τό γεγονός ὅτι, ὅταν ἀπομακρύνομε τό σῶμα ἀπό τή θέση τῆς ἀσταθοῦς ἰσορροπίας του, τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος κατέρχεται.

Ἀδιάφορη ἰσορροπία ἑνός σώματος ὀνομάζεται ἡ ἰσορροπία ἐκείνη, πού ὅταν ἀπομακρύνομε τό σῶμα ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας, αὐτό συνεχίζει νά ἰσορροπεῖ καί στή νέα του θέση μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως τοῦ βάρους του καί τῶν ἀντιδράσεων τοῦ δαπέδου ἤ τοῦ ἄξονα στηρίξεώς του.

Κριτήριο στήν ἀδιάφορη ἰσορροπία εἶναι τό γεγονός ὅτι, ὅταν ἀπομακρύνομε τό σῶμα ἀπό τή θέση τῆς ἀδιάφορης ἰσορροπίας του, τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος αὐτοῦ οὔτε κατέρχεται οὔτε ἀνέρχεται.

Ἰσορροπία ἑνός σώματος πού στηρίζεται σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

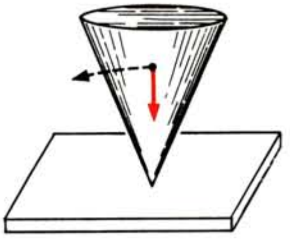
1) Ὅταν τό σῶμα στηρίζεται μέ ἕνα μόνο σημεῖο του (σχ. 2.45α).

Στήν περίπτωση αὐτή τό σῶμα θά ἰσορροπεῖ, ἐφόσον ἡ κατακόρυφος πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος περνᾶ καί ἀπό τό σημεῖο στηρίξεώς του.

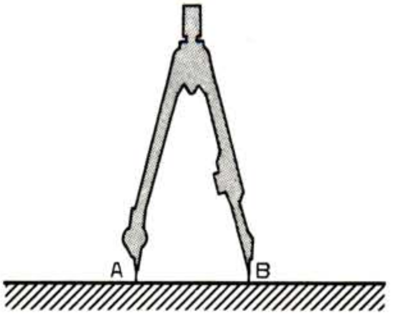
Αὐτό συμβαίνει ἐπειδή τότε:

α) Ἡ ροπή τοῦ βάρους τοῦ σώματος καί τῆς ἀντιδράσεως τοῦ δαπέδου ὡς πρός τό σημεῖο στηρίξεως εἶναι μηδέν· ἔτσι τό σῶμα δέν μπορεῖ νά περιστραφεῖ γύρω ἀπό τό σημεῖο αὐτό.

β) Ἡ δύναμη τοῦ βάρους τοῦ σώματος καί ἡ ἀντίδραση τοῦ δαπέδου δέν δίνουν συνιστώσα παράλληλη πρός τό δάπεδο, ὥστε αὐτή νά προκαλέσει ὀλίσθηση τοῦ σώματος.



Σχ. 2.45α.



Σχ. 2.45β.

2) Ὅταν τό σῶμα στηρίζεται μέ δύο ἤ περισσότερα σημεῖα πού βρίσκονται ἐπάνω στή ἴδια εὐθεία (σχ. 2.45β).

Στήν περίπτωση αὐτή τό σῶμα θά ἰσορροπεῖ, ἐφόσον ἡ κατακόρυφος πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος, συναντᾶ τό εὐθύγραμμο τμῆμα, τό ὁποῖο ὁρίζεται ἀπό τά δύο ἀκραῖα σημεῖα τῆς στήρίξεως (Α καί Β) τοῦ σώματος· ἐφόσον δηλαδή ἡ διεύθυνση τοῦ βάρους τοῦ σώματος συναντᾶ τό εὐθύγραμμο τμῆμα, τό ὁποῖο ὁρίζεται ἀπό τά δύο ἀκραῖα σημεῖα στηρίξεως (Α καί Β) τοῦ σώματος.

Αὐτό συμβαίνει ἐπειδή τότε:

α) Ἡ ροπή τοῦ βάρους τοῦ σώματος καί τῶν ἀντιδράσεων τοῦ δαπέδου ὡς πρός τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι μηδέν· ἔτσι τό σῶμα δέν μπορεῖ νά περιστραφεῖ οὔτε γύρω ἀπό τό τμῆμα ΑΒ οὔτε γύρω ἀπό τό Α οὔτε γύρω ἀπό τό Β.

β) Δέν μπορεῖ τό σῶμα νά ὀλισθήσει, γιατί καί τό βάρος τοῦ σώματος καί οἱ δυνάμεις (ἀντιδράσεις) τοῦ δαπέδου δέν δίνουν συνιστώσα παράλληλη πρός τό δάπεδο.

3) Όταν τό σῶμα στηρίζεται μέ πολλά σημεῖα πού ὅμως δέ βρίσκονται ἐπάνω στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 2.45γ).

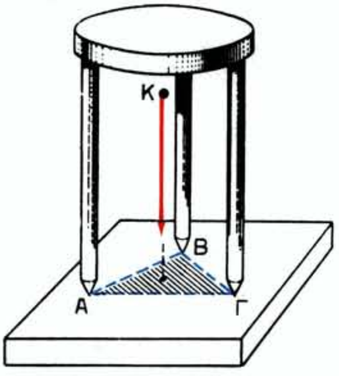
Στήν περίπτωση αὐτή τό σῶμα θά ἰσορροπεῖ, ἐφόσον ἡ κατακόρυφος πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος συναντᾶ τή βάση στηρίξεως* (ΑΒΓ) τοῦ σώματος. Γιατί τότε:

1) Ἡ ροπή τοῦ βάρους τοῦ σώματος καί τῶν ἀντιδράσεων τοῦ δαπέδου ὡς πρός ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς βάσεως στηρίξεως καί ὡς πρός ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο τμῆμα της εἶναι μηδέν· ἑπομένως δέν μπορεῖ τό σῶμα νά περιστραφεῖ οὔτε γύρω ἀπό ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς βάσεως στηρίξεως οὔτε γύρω ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο τμῆμα της.
2) Δέν μπορεῖ τό σῶμα νά ὀλισθαίνει, ἐπειδή καί τό βάρος του καί οἱ δυνάμεις (ἀντιδράσεις) τοῦ δαπέδου δέν δίνουν συνιστώσα παράλληλη πρός τό δάπεδο.

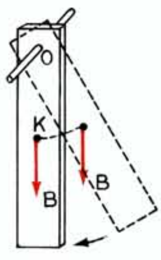
Ἰσορροπία ἑνός σώματος πού στηρίζεται σέ σταθερό ὁριζόντιο ἄξονα.

Στήν περίπτωση αὐτή τό σῶμα θά ἰσορροπεῖ, ἐφόσον ἡ κατακόρυφος πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος, δηλαδή ἡ διεύθυνση τοῦ βάρους τοῦ σώματος συναντᾶ τόν ἄξονα στηρίξεως. Γιατί τότε:

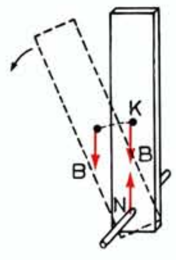
1) Ἡ ροπή τοῦ βάρους τοῦ σώματος καί τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ἄξονα στηρίξεως, ὡς πρός τόν ἄξονα στηρίξεως εἶναι μηδέν· ἔτσι δέν μπορεῖ τό σῶμα νά περιστραφεῖ γύρω ἀπό τόν ἄξονα.
2) Δέν μπορεῖ τό σῶμα νά ὀλισθήσει, ἐπειδή καί τό βάρος του καί ἡ δύναμη (ἡ ἀντίδραση) τοῦ ἄξονα δέν δίνουν συνιστώσα παράλληλη πρός τόν ἄξονα.



Σχ. 2.45γ.



Σχ. 2.45δ.



Σχ. 2.45ε.

Περιπτώσεις ἰσορροπίας.

α) ***Όταν τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος βρίσκεται κάτω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα*** (σχ. 2.45δ), ***τότε ἡ ἰσορροπία τοῦ σώματος εἶναι εὐσταθής ἰσορροπία.*** Καί αὐτό

---

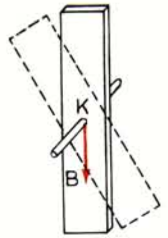
* Τό πολύγωνο πού θά σχηματισθεῖ ἄν ἑνώσομε μέ εὐθεῖες γραμμές τά ἐξωτερικά σημεῖα στηρίξεως τοῦ σώματος ὀνομάζεται πολύγωνο τῆς βάσεως ἤ βάση στηρίξεως. Καί εἶναι εὐνόητο ὅτι κανένα ἀπό τά σημεῖα στηρίξεως τοῦ σώματος δέν βρίσκεται ἔξω ἀπό τό πολύγωνο τῆς βάσεως ἤ τή βάση στηρίξεως.

γιατί, ὅταν τό σῶμα ἀπομακρύνεται ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας, ἡ ροπή τοῦ βάρους ὡς πρός ἄξονα τό ἐπαναφέρει στή θέση τῆς ἰσορροπίας.

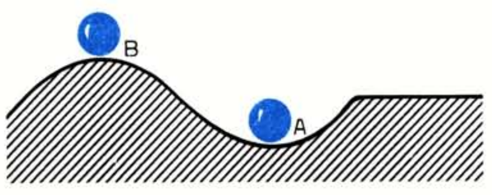
Τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος ἀνέρχεται καθώς τό σῶμα ἀπομακρύνεται ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας.

β) ***Ὅταν τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος βρίσκεται ἐπάνω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα στηρίξεως*** (σχ. 2.45ε), ***τότε ἡ ἰσορροπία τοῦ σώματος αὐτοῦ εἶναι ἀσταθής ἰσορροπία.*** Κι αὐτό γιατί, ὅταν τό σῶμα ἀπομακρύνεται ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας, ἡ ροπή τοῦ βάρους του ὡς πρός τόν ἄξονα δέν ἐπαναφέρει τό σῶμα στή θέση τῆς ἰσορροπίας. Τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος κατέρχεται καθώς τό σῶμα ἀπομακρύνεται ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας.

γ) ***Ὅταν τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος βρίσκεται ἐπάνω στόν ὁριζόντιο ἄξονα στηρίξεώς του*** (σχ. 2.45στ), ***δηλαδή ὅταν ὁ ἄξονας αὐτός περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος, τότε ἡ ἰσορροπία τοῦ σώματος εἶναι ἀδιάφορη.*** Κι αὐτό γιατί ἡ ροπή τοῦ βάρους τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα ἐξακολουθεῖ νά εἶναι μηδέν καί ὅταν τό σῶμα ἀλλάζει θέση. Τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος οὔτε κατέρχεται οὔτε ἀνέρχεται κατά τή μετατόπισή του.



Σχ. 2.45στ.



Σχ. 2.45ζ.

Δυναμική ἐνέργεια σώματος πού βρίσκεται σέ θέση ἰσορροπίας.

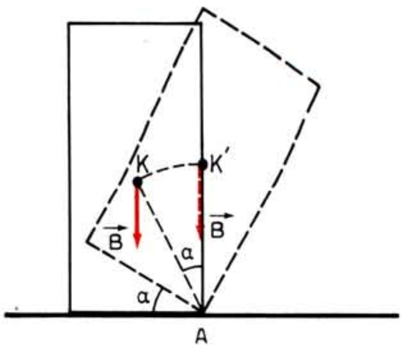
Κατά τήν ἀπομάκρυνση τοῦ σώματος ἀπό τή θέση τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας ***ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ σώματος αὐξάνει*** γιατί τό κέντρο βάρους του ἀνέρχεται. Ὅταν ἀπομακρύνεται ἕνα σῶμα ἀπό τή θέση τῆς ἀσταθοῦς ἰσορροπίας του, τό κέντρο βάρους του κατέρχεται, ἑπομένως ***ἡ δυναμική του ἐνέργεια ἐλαττώνεται.***

Ἀπό αὐτά συμπεραίνομε ὅτι, ὅταν ἕνα σῶμα βρίσκεται σέ θέση εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, ***ἔχει τή λιγότερη δυναμική ἐνέργεια·*** ἐνῶ ὅταν βρίσκεται σέ θέση ἀσταθοῦς ἰσορροπίας, ***ἔχει τή μεγαλύτερη δυναμική ἐνέργεια.*** Ἡ σφαίρα ἔχει τή λιγότερη δυναμική ἐνέργεια στή θέση Α καί τή μεγαλύτερη στή θέση Β (σχ. 2.45ζ).

Βαθμός εὐστάθειας.

Ὅταν ἕνα σῶμα βρίσκεται σέ θέση εὐσταθοῦς ἰσορροπίας μπορεῖ νά ἀνατραπεῖ, δηλαδή νά μήν ἐπανέλθει στή θέση τῆς ἰσορροπίας του, ἄν ἀπομακρυνθεῖ πιό πέρα ἀπό μιά ὁρισμένη θέση.

Γιά νά ἀνατραπεῖ ἕνα παραλληλεπίπεδο, πρέπει νά τό ἐκτρέψομε κατά γωνία μεγαλύτερη ἀπό τή γωνία α (σχ. 2.45η), ἀλλιῶς, στίς περιπτώσεις δηλαδή πού οἱ ἐ-



Σχ. 2.45η.

κτροπές θά εἶναι μικρότερες ἀπό τή γωνία α, τό παραλληλεπίπεδο κάθε φορά θά ἐπανέρχεται στή θέση τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας του.

Τή γωνία α τήν ὀνομάζομε βαθμό εὐστάθειας τοῦ παραλληλεπιπέδου ***ὡς πρός τήν ἀκμή του Α.***

Γενικά, ***τήν πιό μεγάλη γωνία*** κατά τήν ὁποία μποροῦμε νά περιστρέψομε ἕνα σῶμα ἀπό ἕνα σημεῖο ἤ γύρω ἀπό ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς βάσεως στηρίξεώς του χωρίς τό σῶμα νά ἀνατραπεῖ τήν ***ὀνομάζομε βαθμό εὐστάθειας τοῦ σώματος αὐτοῦ ὡς πρός τό σημεῖο αὐτό ἤ ὡς πρός τό αὐτό εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς βάσεως στηρίξεώς του.***

Ὅσο πιό μεγάλος εἶναι ὁ βαθμός εὐστάθειας ἑνός σώματος τόσο πιό σταθερή εἶναι ἡ θέση τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας τοῦ σώματος. Δηλαδή: ὁ βαθμός εὐστάθειας μᾶς δίνει κατά κάποιο τρόπο τό βαθμό σταθερότητας τοῦ σώματος στή θέση τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας.

Ὁ βαθμός εὐστάθειας καί ***ἑπομένως ὁ βαθμός σταθερότητας*** ἑνός σώματος εἶναι:

1) Τόσο μεγαλύτερος ὅσο τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος βρίσκεται χαμηλότερα πρός τή βάση στηρίξεώς του.
2) Τόσο μεγαλύτερος ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ ἐπιφάνεια στηρίξεώς του.

Οἱ εἰσπράκτορες στά αὐτοκίνητα καί οἱ παλαιστές, γιά νά αὐξήσουν τό βαθμό τῆς εὐστάθειάς τους ἀνοίγουν περισσότερο τά πόδια τους, γιατί ἔτσι αὐξάνουν τή βάση στηρίξεώς τους. Παράλληλα ὅμως κάμπτουν τά πόδια τους γιά νά χαμηλώσουν τό κέντρο τοῦ βάρους τους.

Στά κηροπήγια αὐξάνουν τό βάρος τῆς βάσεως γιά νά αὐξήσουν περισσότερο τό βαθμό τῆς εὐστάθειάς τους γιατί ἔτσι τό κέντρο τοῦ βάρους τους βρίσκεται πιό χαμηλά.

2.46 Πυκνότητα καί εἰδικό βάρος σώματος.

Ὁρισμοί.

Ὁμογενές ἤ ὁμοιογενές ὀνομάζεται ἕνα σῶμα, ὅταν ἡ ὕλη του εἶναι ὁμοιόμορφα μοιρασμένη σέ ὅλο τόν ὄγκο του.

Ὀνομάζομε πυκνότητα (ρ) ἑνός ὁμοιογενοῦς σώματος τό πηλίκο τῆς μάζας (m) τοῦ σώματος διά τοῦ ὄγκου του (V) δηλαδή:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \qquad (1)$$

Ὀνομάζομε εἰδικό βάρος (ε) ἑνός ὁμοιογενοῦς σώματος τό πηλίκο τοῦ βάρους τοῦ σώματος (Β) διά τοῦ ὄγκου του V δηλαδή:

$$\boxed{\epsilon = \frac{B}{V}} \qquad (2)$$

Σχέση μεταξύ πυκνότητας (ρ) καί εἰδικοῦ βάρους (ε) σώματος.

Τό βάρος (Β) ἑνός σώματος καί ἡ μάζα του (m) συνδέονται μέ τή σχέση:

$$B = m \cdot g \qquad (3)$$

ὅπου: g ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας
Ἀπό τίς σχέσεις (2), (3) καί (1) ἔχομε:

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g$$

$$\boxed{\epsilon = \rho \cdot g} \qquad (4)$$

Μονάδες πυκνότητας.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἡ σχέση ὁρισμοῦ τῆς πυκνότητας εἶναι:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ἡ μονάδα μάζας στό S.I. εἶναι τό 1 kg καί ἡ μονάδα ὄγκου εἶναι τό 1 m^3 ἄρα ἡ μονάδα πυκνότητας στό S.I. εἶναι:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1kg}{1m^3} = \frac{1kg}{m^3}$$

Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.). $\rho = \frac{m}{V} = \frac{1T.MM}{1m^3} = 1\,\frac{TMM}{m^3}$

Σύστημα C.G.S.

Ἡ μονάδα μάζας στό C.G.S. εἶναι τό 1g καί ἡ μονάδα ὄγκου εἶναι τό 1cm^3. Ἄρα ἡ μονάδα πυκνότητας στό σύστημα C.G.S εἶναι:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1g}{1cm^3} = 1\,\frac{g}{cm^3}$$

Σχέση τῶν μονάδων πυκνότητας τῶν συστημάτων S.I. καί C.G.S.

$$1\,\frac{kg}{m^3} = \frac{10^3\,g}{10^6\,cm^3} = 10^{-3}\,\frac{g}{cm^3}$$

Μονάδες εἰδικοῦ βάρους.

Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Ἡ σχέση ὁρισμοῦ τοῦ εἰδικοῦ βάρους εἶναι:

$$\boxed{\epsilon = \frac{B}{V}}$$

Ἡ μονάδα δυνάμεως ἄρα καί τοῦ βάρους στό S.I. εἶναι τό 1 N καί ἡ μονάδα ὄγκου εἶναι τό $1 m^3$, ἄρα ἡ μονάδα εἰδικοῦ βάρους στό S.I. εἶναι:

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{1N}{1m^3} = \frac{1N}{1m^3} = 1 \frac{N}{m^3}$$

Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.).

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{1kp}{1m^3} = 1 \frac{kp}{m^3}$$

Σύστημα C.G.S.

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{1dyn}{1cm^3} = 1 \frac{dyn}{cm^3}$$

Παρατήρηση.

Στήν πράξη χρησιμοποιεῖται συνήθως σάν μονάδα τοῦ εἰδικοῦ βάρους τό $1\ p/cm^3$ γιά δύο λόγους:

1) Γιατί οἱ μονάδες $1\ N/m^3$, $1\ kp/m^3$ καί $1\ dyn/cm^3$ εἶναι πολύ μικρές καί
2) Γιατί τό εἰδικό βάρος ἑνός σώματος ὅταν μετριέται σέ μονάδες (p/cm^3) καί ἡ πυκνότητά του ὅταν μετριέται σέ (g/cm^3) ἐκφράζονται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό. Τό εἰδικό βάρος τοῦ σιδήρου π.χ. εἶναι: $\epsilon = 7{,}8\ p/cm^3$.

Ἡ πυκνότητα τοῦ σιδήρου εἶναι: $\rho = 7{,}8\ g/cm^3$

Πρέπει νά μήν ξεχνᾶμε ὅτι ἡ μονάδα τοῦ εἰδικοῦ βάρους $1\ p/cm^3$ δέν ἀνήκει σέ κανένα ἀπό τά συστήματα μονάδων, ἐνῶ ἡ μονάδα πυκνότητας $1\ g/cm^3$ ἀνήκει στό σύστημα C.G.S.

Σχέση μονάδων τοῦ εἰδικοῦ βάρους.

$$1 \frac{N}{m^3} = \frac{10^5\ dyn}{10^6\ cm^3} = 0{,}1\ dyn/cm^3$$

$$1 \frac{kp}{m^3} = \frac{981 \times 10^3\ dyn}{10^6 cm^3} = 0{,}981\ dyn/cm^3$$

$$1 \frac{p}{cm^3} = 981 \frac{dyn}{cm^3}$$

2.47 Ἀριθμητικά παραδείγματα.

48) *Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα $m = 6\ g$ καί ὄγκο $V = 3\ cm^3$. Πόση εἶναι ἡ πυκνότητά του;*

Λύση.

Στό Διεθνές Σύστημα (S.I.).

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1}$$

Δίνονται: $m = 6\ g = 6\ .\ 10^{-3}\ kg$ καί $V = 3\ cm^3 = 3\ .\ 10^{-6}\ m^3$
Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-6}} = 2000\ \frac{kg}{m^3} \quad \textit{ὥστε} \quad \rho = 2000\ kg/m^3$$

49) *Ἕνα σῶμα ἔχει βάρος $B = 0{,}02\ kp$ καί ὄγκο $V = 5\ cm^3$. Πόσο εἶναι τό εἰδικό βάρος (ϵ) τοῦ σώματος αὐτοῦ;*

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $\epsilon\ \frac{B}{V}$ (1)

Δίνονται: $B = 0{,}02\ kp = 20\ p$ καί $V = 5\ cm^3$.
Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{20}{5} = 4\ \frac{p}{cm^3} \quad \textit{ὥστε} \quad \epsilon = 4\ p/cm^3$$

50) *Ἕνα σῶμα ἔχει πυκνότητα $\rho = 5\ g/cm^3$. Νά βρεθεῖ τό εἰδικό του βάρος ϵ, σέ p/cm ὅταν ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $g = 9{,}81\ m/sec^2$.*

Λύση.
Βρίσκομε τό εἰδικό βάρος τοῦ σώματος σέ ἕνα ἀπό τά συστήματα, π.χ. στό C.G.S. καί ἔπειτα κάνομε τή μετατροπή πού χρειαζόμαστε:

Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $\epsilon = \rho\ .\ g$ (1)

Δίνονται: $\rho = 5\ g/cm^3$ καί $g = 9{,}81\ m/sec^2 = 9{,}81\ .\ 10^2\ cm/sec^2 = 981\ cm/sec^2$.
Θέτομε αὐτά πού μᾶς δίνονται στή σχέση (1) καί ἔχομε:

$$\epsilon = \rho\ .\ g = 5 \times 981 = 4905\ dyn/cm^3$$

Γνωρίζομε ὅτι: $1p = 981\ dyn$ Ἑπομένως ἔχομε:

$$\epsilon = 4905\ \frac{dyn}{cm^3} = \frac{4905}{981}\ \frac{p}{cm^3} = 5\ \frac{p}{cm^3}$$

51) *Ἕνα σῶμα ἔχει εἰδικό βάρος $\epsilon = 2\ p/cm^3$. Νά βρεθεῖ ἡ πυκνότητά του (ρ), ὅταν ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $981\ cm/sec^2$.*

Λύση.
Γνωρίζομε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $\epsilon = \rho\ .\ g$ (1)
Ἀπό τή σχέση (1) παίρνομε τή σχέση:

$$\rho = \frac{\epsilon}{g} \qquad (2)$$

Δίνονται: $\epsilon = 2\ p/cm^3 = 2 \times 981\ dyn/cm^3 = 1962\ dyn/cm^3$ καί $g = 981\ cm/sec^2$.

Θέτομε αὐτά πού δίνονται στή σχέση (2) καί ἔχομε:

$$\rho = \frac{\epsilon}{g} = \frac{1962}{981} = 2\ g/cm^3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

3.1 Σύστημα σωμάτων - Ἐσωτερικές καί Ἐξωτερικές δυνάμεις - Ἀπομονωμένο σύστημα.

Σύστημα σωμάτων, ὀνομάζομε δύο ἤ περισσότερα σώματα πού τά ἐξετάζομε ὡς ἕνα σύνολο.

Οἱ ἐπιβάτες ἑνός λεωφορείου καί τό λεωφορεῖο, ἄν ἐξετάζονται ὡς ἕνα σύνολο, ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα σωμάτων. Τά σώματα τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι οἱ ἐπιβάτες καί τό λεωφορεῖο.

Ἄν ἀπό τά βαγόνια Α, Β,Γ,Δ,Ε μιᾶς ἁμαξοστοιχίας ἐξετάζομε σάν ἕνα σύνολο τά βαγόνια Γ καί Δ, τότε λέμε ὅτι τά δύο αὐτά βαγόνια Γ καί Δ ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα σωμάτων.

Ἐσωτερικές δυνάμεις ἑνός συστήματος σωμάτων ὀνομάζομε ***τίς δυνάμεις πού ἀσκοῦν μεταξύ τους τά σώματα πού ἀποτελοῦν τό σύστημα.***

Οἱ ἐσωτερικές δυνάμεις ἑνός συστήματος σωμάτων ***ἐμφανίζονται δύο-δύο καί ἔχουν συνισταμένη μηδέν.*** Αὐτό συμβαίνει γιατί ἡ μία δύναμη εἶναι ἡ δράση ἑνός ἀπό τά σώματα τοῦ συστήματος ἐπάνω σέ ἄλλο σῶμα, καί ἡ ἄλλη εἶναι ἡ ἀντίδραση τοῦ ἄλλου σώματος τοῦ συστήματος ἐπάνω σ' αὐτό. Ἔστω ὅτι οἱ σφαῖρες $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα (σχ. 3.1α). Ἄν ἡ $Σ_1$ ἀσκεῖ στίς σφαῖρες $Σ_2$, $Σ_3$ τίς δυνάμεις* $\vec{F}_2$ καί $\vec{F}_3$, τότε καί οἱ σφαῖρες $Σ_2$, $Σ_3$ θά ἀσκοῦν ταυτόχρονα ἐπάνω στή $Σ_1$ τίς δυνάμεις $\vec{F}_2'$ καί $\vec{F}_3'$ οἱ ὁποῖες εἶναι $\vec{F}_2 = -\vec{F}_2'$ καί $\vec{F}_3 = -\vec{F}_3'$.

Ἄν ἡ σφαίρα $Σ_2$ ἀσκεῖ στή σφαίρα $Σ_3$ τή δύναμη $\vec{F}_4$, τότε καί ἡ $Σ_3$ θά ἀσκεῖ ταυτόχρονα ἐπάνω στή $Σ_2$ τή δύναμη $\vec{F}_4'$ πού εἶναι $\vec{F}_4 = -\vec{F}_4'$.

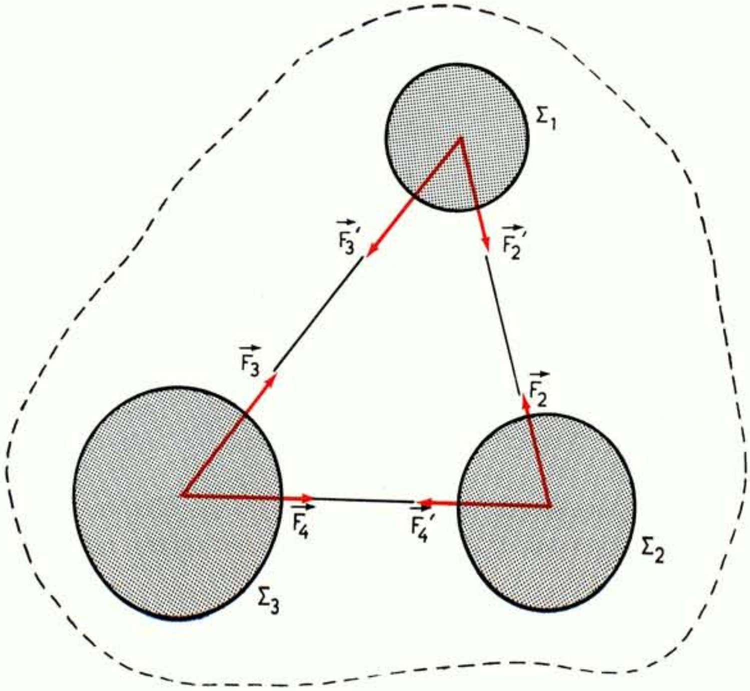
Ἐξωτερικές δυνάμεις ἑνός συστήματος σωμάτων ὀνομάζομε τίς δυνάμεις πού ἀσκοῦνται στά σώματα τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἀπό ἄλλα σώματα πού δέν ἀνήκουν στό σύστημα. Ἔστω ὅτι οἱ τρεῖς σφαῖρες $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ (σχ. 3.1β) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα καί ὅτι μία τέταρτη σφαίρα ἡ $Σ_4$ δέν ἀνήκει στό σύστημα αὐτό.

Ἄν ἡ $Σ_4$ ἀσκεῖ στίς σφαῖρες $Σ_1$ καί $Σ_2$ τίς δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, τότε λέμε ὅτι οἱ δυνάμεις αὐτές $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ εἶναι ἐξωτερικές δυνάμεις γιά τό σύστημα τῶν $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$.

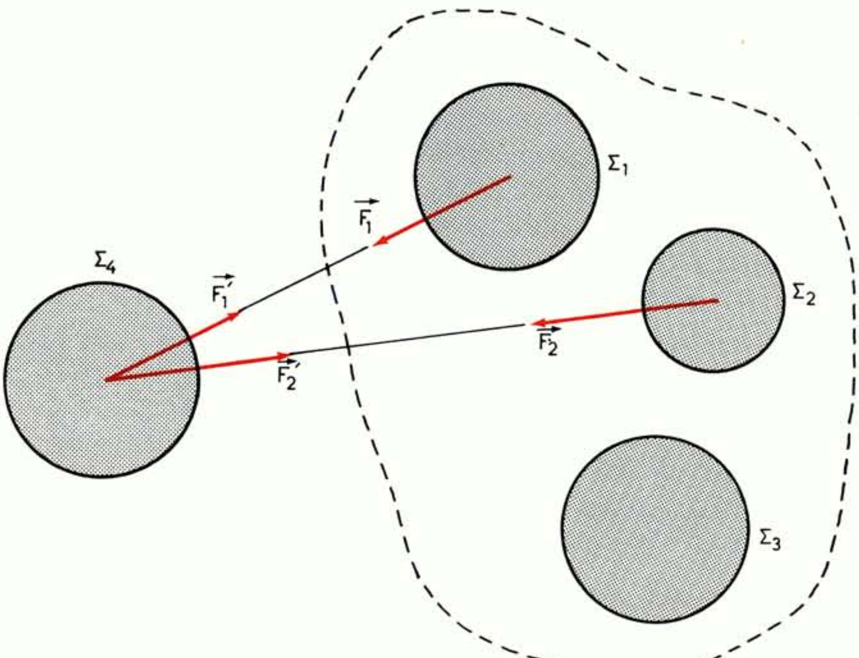
Ἔστω, πάλι, ὅτι ὁ μαγνήτης Μ (σχ. 3.1γ), τό σιδερένιο σῶμα σ καί ὁ πλωτήρας

---

* Εὐνόητο εἶναι ὅτι οἱ δυνάμεις $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_3'$, $\vec{F}_4$ καί $\vec{F}_4'$ εἶναι ἐσωτερικές δυνάμεις τοῦ συστήματος, πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς σφαῖρες $Σ_1$, $Σ_2$ καί $Σ_3$, γιατί καθεμιά ἀπό τίς $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_3'$, $\vec{F}_4$ καί $\vec{F}_4'$ ἐξασκεῖται ἐπάνω σέ μιά ἀπό τίς σφαῖρες $Σ_1$, $Σ_2$ καί $Σ_3$ καί μόνο ἀπό αὐτές.



Σχ. 3.1α.

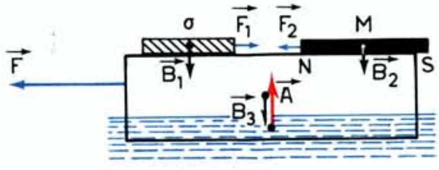


Σχ. 3.1β.

ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα Σ καί ὅτι σύρομε τόν πλωτήρα μέ μιά δύναμη $\vec{F}$.

Οἱ ἐξωτερικές δυνάμεις γιά τό σύστημα Σ (μαγνήτης Μ - σῶμα σ - πλωτήρας) εἶναι:

1) Τό βάρος τοῦ σώματος σ ($\vec{B}_1$).
2) Τό βάρος τοῦ μαγνήτη Μ ($\vec{B}_2$).
3) Τό βάρος τοῦ πλωτήρα ($\vec{B}_3$).
4) Ἡ ἄνωση $\vec{A}$.
5) Ἡ δύναμη $\vec{F}$ μέ τήν ὁποία σύραμε τόν πλωτήρα.



Σχ. 3.1γ.

Παρατήρηση:

Οἱ ἐσωτερικές δυνάμεις ἑνός συστήματος δέν ἐπηρεάζουν τήν κινητική κατάσταση τοῦ συστήματος, δηλαδή δέν ἐπηρεάζουν τήν κινητική κατάσταση τοῦ συνόλου τῶν σωμάτων.

Αὐτό συμβαίνει γιατί οἱ ἐσωτερικές δυνάμεις ἐμφανίζονται δύο-δύο, εἶναι ἀντίθετες μεταξύ τους καί ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν. Ἔτσι γιά τό σύνολο τῶν σωμάτων οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι σάν νά μήν ὑπάρχουν.

Βέβαια οἱ ἐσωτερικές δυνάμεις ἑνός συστήματος σωμάτων ἐπηρεάζουν τήν κινητική κατάσταση τῶν σωμάτων τοῦ συστήματος, ὄχι ὅμως καί τήν κινητική κατάσταση τοῦ συστήματος. Γιατί, ἄν μεταβληθεῖ ἡ κινητική κατάσταση ἑνός σώματος τοῦ συστήματος ἐξαιτίας μιᾶς ἐσωτερικῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$, θά μεταβληθεῖ ταυτόχρονα καί ἡ κινητική κατάσταση ἑνός ἄλλου σώματος τοῦ συστήματος ἐπάνω στό ὁποῖο θά ἐπιδράσει ἡ ἀντίδραση τῆς $\vec{F}_1$. Αὐτές οἱ μεταβολές εἶναι τέτοιες πού ἡ κινητική κατάσταση τοῦ συστήματος τῶν σωμάτων νά μή μεταβληθεῖ.

Ἀπομονωμένο σύστημα:

Ἕνα σύστημα σωμάτων τό ὀνομάζομε ἀπομονωμένο σύστημα, ἄν δέν ἀσκεῖται ἐπάνω του καμιά ἐξωτερική δύναμη, ἤ ἄν ἀσκοῦνται ἐπάνω του ἐξωτερικές δυνάμεις πού ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν.

Τό ἀπομονωμένο σύστημα τό λέμε καί ***ἀποκλεισμένο*** ἤ καί ***μεμονωμένο.***

3.2 Κέντρο βάρους ἑνός συστήματος σωμάτων.

Κέντρο βάρους ἑνός συστήματος σωμάτων ὀνομάζομε τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν βαρῶν τῶν σωμάτων πού ἀποτελοῦν τό σύστημα.

Γιά νά βροῦμε τό κέντρο βάρους ἑνός συστήματος πρέπει:

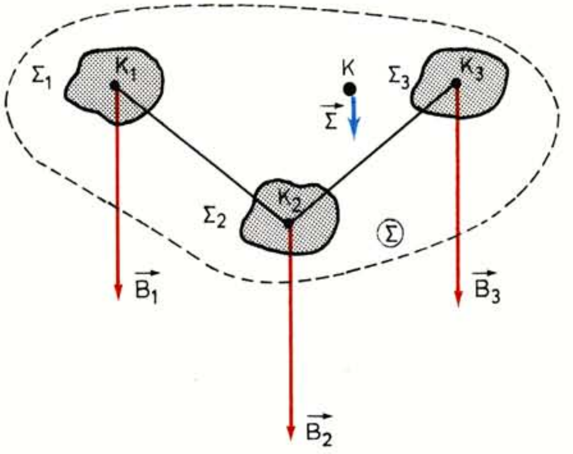
α) Νά βροῦμε τά βάρη τῶν σωμάτων πού ἀποτελοῦν τό σύστημα.

β) Νά βροῦμε τά κέντρα βάρους τῶν σωμάτων πού ἀποτελοῦν τό σύστημα καί

γ) νά προσδιορίσομε τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν βαρῶν τῶν σωμάτων τοῦ συστήματος.

Ἔστω ὅτι τά σώματα $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ (σχ. 3.2α) πού ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα Σ ἔχουν βάρη $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ καί τά κέντρα βάρους τους εἶναι τά K_1, K_2, K_3 ἀντιστοίχως. Τότε τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος Σ εἶναι τό Κ, γιατί αὐτό εἶναι τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης $\vec{Σ}$ τῶν βαρῶν $\vec{B}_1$,$\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, ($\vec{Σ} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$).

Τό κέντρο βάρους ἑνός συστήματος εἶναι ***μαθηματικό σημεῖο.*** Ὅμως γιά νά ἁπλοποιήσομε ὁρισμένα προβλήματα, θεωροῦμε πολλές φορές τό κέντρο βάρους ἑνός συστήματος ὡς ἕνα ὑλικό σημεῖο πού ἔχει μάζα ὅση εἶναι ὁλόκληρη ἡ μάζα τοῦ συστήματος.



Σχ. 3.2α.

Θεώρημα κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους ἑνός συστήματος σωμάτων.

Ἔστω ὅτι ἔχομε ἕνα σύστημα σωμάτων Σ μέ κέντρο βάρους τό Κ καί ὅτι ἡ συνισταμένη ὅλων ***τῶν ἐξωτερικῶν*** δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στό σύστημα Σ εἶναι μιά δύναμη $\vec{F}$. Ἰσχύει τότε τό ἑξῆς θεώρημα:

Τό κέντρο βάρους Κ τοῦ συστήματος Σ κινεῖται σάν ἕνα ὑλικό σημεῖο πού ἔχει μάζα ἴση μέ τήν ὁλική μάζα m τοῦ συστήματος καί ὑφίσταται τήν ἐνέργεια τῆς συνισταμένης $\vec{F}$ ὅλων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στό σύστημα.

Ἑπομένως, ἄν θέλομε νά μελετήσομε τήν κίνηση τοῦ κέντρου βάρους Κ ἑνός συστήματος, θά θεωρήσομε ὅτι τό Κ εἶναι ὑλικό σημεῖο πού ἔχει μάζα ὅση εἶναι ἡ μάζα ὁλόκληρου τοῦ συστήματος καί ὅτι σέ αὐτό ἀσκεῖται ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων πού ἀσκοῦνται στό σύστημα. Ἔτσι θά ἐφαρμόσομε ὅλους τούς ὁρισμούς καί νόμους (ἐξισώσεις) πού ἐφαρμόζομε στή δυναμική τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Συνεπῶς, ἄν σέ ἕνα σύστημα σωμάτων μέ ὁλική μάζα m ἀσκοῦνται οἱ ἐξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ καί $\vec{F}_4$ πού ἔχουν συνισταμένη τή $\vec{F}$, τότε τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος θά ἀποκτήσει ἐπιτάχυνση $\vec{γ}$ πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{γ} \qquad (1)$$

Ἂν στή σχέση (1) γράψομε $\vec{F} = 0$, τότε θά εἶναι καί $\vec{\gamma} = 0$, ἀφοῦ $m \neq 0$.

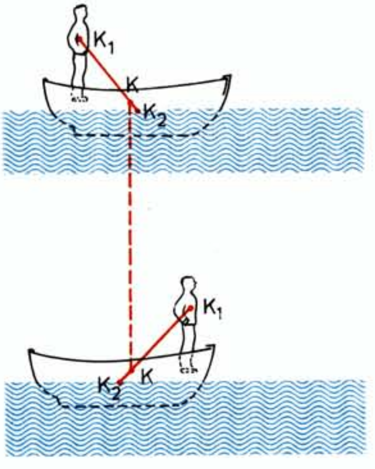
Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ***τό ἑξῆς:***

Ἂν σέ σύστημα σωμάτων δέν ἀσκεῖται καμιά ἐξωτερική δύναμη ἤ, καί ἄν ἀσκοῦνται ἐξωτερικές δυνάμεις ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν, τότε τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος δέν ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση, δηλαδή διατηρεῖ σταθερή τήν ταχύτητά του, πού σημαίνει ὅτι ἤ κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα ($\vec{u}$ = σταθ.) ἤ ἠρεμεῖ ($\vec{u} = 0$).

Ἔστω ὅτι ***ἡ βάρκα*** καί ὁ ***ἄνθρωπος*** τοῦ σχήματος 3.2β ἀποτελοῦν ἀπομονωμένο σύστημα τότε παρατηροῦμε:

Ὅταν ὁ ἄνθρωπος μετακινεῖται μέσα στή βάρκα ἀλλάζει θέση τό κέντρο βάρους του K_1, ταυτόχρονα ἀλλάζει θέση καί τό κέντρο βάρους τῆς βάρκας K_2, γιατί μετακινεῖται ἀντίθετα ἀπό τή μετακίνηση τοῦ ἀνθρώπου.

Ὅμως τό κέντρο βάρους Κ τοῦ συστήματος ***βάρκα-ἄνθρωπος*** δέν ἀλλάζει θέση.



Σχ. 3.2β.

Ὅταν λέμε κινητική ἐνέργεια τοῦ κέντρου βάρους ἑνός συστήματος, ἐννοοῦμε:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + \dots)\,u_K^2 = \frac{1}{2} m u_K^2}$$

ὅπου: m_1, m_2,m_3..., οἱ μάζες τῶν σωμάτων πού ἀποτελοῦν τό σύστημα,
m ἡ μάζα ὁλόκληρου τοῦ συστήματος ($m = m_1 + m_2 + \dots$) καί
u_K ἡ ταχύτητα τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος.

Ὅταν λέμε ὁρμή τοῦ κέντρου βάρους ἑνός συστήματος ἐννοοῦμε:

$$\boxed{\vec{j}_K = (m_1 + m_2 + m_3 \dots)\,\vec{u}_K = m\,.\,\vec{u}_K}$$

3.3 Ὁρμή συστήματος σωμάτων.

Ὁρμή $\vec{j}_\Sigma$ ἑνός συστήματος σωμάτων κατά τή χρονική στιγμή t ὀνομάζομε τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$... πού ἔχουν τά σώματα τοῦ συστήματος κατά χρονική στιγμή t, δηλαδή,

$$\boxed{\vec{j}_\Sigma = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 \ldots} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\vec{j}_\Sigma = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + m_3\vec{u}_3 + \ldots}$$

ὅπου: $\vec{j}_\Sigma$ ἡ ὁρμή τοῦ συστήματος κατά τή χρονική στιγμή t,

$\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ ... οἱ ὁρμές τῶν σωμάτων τοῦ συστήματος κατά τήν ἴδια χρονική στιγμή t,

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ... οἱ ταχύτητες τῶν σωμάτων κατά τή χρονική στιγμή t καί

m_1, m_2, m_3 ... οἱ μάζες τῶν σωμάτων τοῦ συστήματος.

Παρατήρηση.

Ἡ ὁρμή $\vec{j}_\Sigma$ ἑνός συστήματος σωμάτων κατά τή χρονική στιγμή t ἰσοῦται μέ τήν ὁρμή $\vec{j}_{\kappa\beta}$ πού ἔχει κατά τήν ἴδια χρονική στιγμή τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος, ἄν αὐτό θεωρηθεῖ ὡς ὑλικό σημεῖο μέ μάζα ἴση πρός τή μάζα ὁλόκληρου τοῦ συστήματος, δηλαδή:

$$\vec{j}_\Sigma = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + m_3\vec{u}_3 + \ldots = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)\,\vec{u}_{\kappa\beta} = \vec{j}_{\kappa\beta}$$

ἤ

$$\boxed{\vec{j}_\Sigma = \vec{j}_{\kappa\beta}}$$

ὅπου: $\vec{u}_{\kappa\beta}$ ἡ ταχύτητα πού ἔχει τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος κατά τή χρονική στιγμή t.

Θεωρήματα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς τοῦ κέντρου βάρους συστήματος σωμάτων καί συστήματος σωμάτων.

α) Γιά τό κέντρο βάρους ἑνός συστήματος σωμάτων, πού θεωρεῖται ὡς ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα ἴση μέ τή μάζα ὁλόκληρου τοῦ συστήματος, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\Delta\vec{j}_{\kappa\beta}}{\Delta t}} \qquad (1)$$

ὅπου: $\Delta\vec{j}_{\kappa\beta}$ εἶναι ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος, πού τήν προκαλεῖ ἡ δύναμη $\vec{F}$ ὅταν ἀσκεῖται στό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος γιά χρονικό διάστημα Δt.

Ἄν στή σχέση (1) γράψομε $\vec{F} = 0$, τότε καί $\Delta\vec{j}_{\kappa\beta} = 0$.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει τό θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς τοῦ κέντρου βάρους συστήματος σωμάτων, τό ὁποῖο ὁρίζει:

Ἄν στό κέντρο βάρους Κ ἑνός συστήματος σωμάτων δέν ἀσκεῖται καμιά ἐξωτερική δύναμη ἤ οἱ ἐξωτερικές δυνάμεις πού τυχόν ἀσκοῦνται ἔχουν συνισταμένη μηδέν, τότε ἡ ὁρμή τοῦ κέντρου βάρους διατηρεῖται σταθερή ($\Delta\vec{j}_{\kappa\beta} = 0$).

β) Ἐπειδή ἡ ὁρμή $\vec{j}_\Sigma$ ἑνός συστήματος σωμάτων σέ κάθε χρονική στιγμή t εἶναι ἴση μέ τήν ὁρμή πού ἔχει τό κέντρο βάρους Κ τοῦ συστήματος μποροῦμε νά γράψομε:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{j}_{\kappa\beta}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{j}_\Sigma}{\Delta t} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{\vec{F} = \frac{\Delta \vec{j}_\Sigma}{\Delta t}} \qquad (2)$$

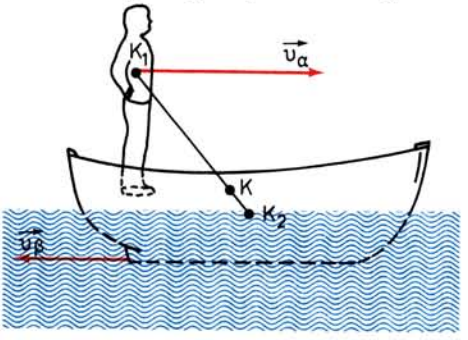
Ἄν στή σχέση (2) γράψομε $\vec{F} = 0$ τότε εἶναι καί $\Delta \vec{j}_\Sigma = 0$.

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τό θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς σέ ἕνα σύστημα σωμάτων, τό ὁποῖον ὁρίζει:

Ἡ ὁρμή ἑνός συστήματος σωμάτων, δηλαδή τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τῶν σωμάτων τοῦ συστήματος, διατηρεῖται σταθερή (κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο), ἄν στό σύστημα δέν ἀσκεῖται καμιά ἐξωτερική δύναμη ἤ κι ἄν ἀσκοῦνται ἐξωτερικές δυνάμεις ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν.

Ἄν λάβομε ὑπόψη μας τόν ὁρισμό τοῦ ἀπομονωμένου συστήματος, μποροῦμε τό θεώρημα αὐτό νά τό διατυπώσομε καί ὡς ἑξῆς:

Ἡ ὁρμή ἀπομονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρεῖται σταθερή.



Σχ. 3.3α.

Ἔστω ὅτι ***ἡ βάρκα καί ὁ ἄνθρωπος*** τοῦ σχήματος 3.3α ἀποτελοῦν μεμονωμένο σύστημα τότε:

1) Ὅταν ὁ ἄνθρωπος παραμένει ἀκίνητος ὁπότε ἀκίνητη παραμένει καί ἡ βάρκα, ἔχομε:

Ὁρμή ἀνθρώπου: $m_\alpha \cdot 0 = 0$

Ὁρμή βάρκας: $m_\beta \cdot 0 = 0$

Ὁρμή τοῦ συστήματος: $m_\alpha \cdot 0 \pm m_\beta \cdot 0 = 0$

2) Ὅταν ὁ ἄνθρωπος κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$ ὁπότε καί ἡ βάρκα κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$ ἔχομε:

Ὁρμή ἀνθρώπου: $m_\alpha \cdot \vec{\upsilon}_\alpha$

Ὁρμή βάρκας: $m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta$

Ὁρμή συστήματος: $m_\alpha \vec{\upsilon}_\alpha + m_\beta \vec{\upsilon}_\beta$

Ἐπειδή ὅμως τό σύστημα ***βάρκα-ἄνθρωπος*** εἶναι μεμονωμένο ἔχομε:

$$\boxed{\text{Ὁρμή συστήματος:} \quad 0 + 0 = m_\alpha \vec{\upsilon}_\alpha + m_\beta \vec{\upsilon}_\beta = 0}$$

Ἐφαρμογές τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς.

Ἀνάκρουση (τίναγμα).

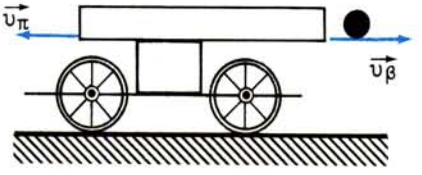
Ὅταν λέμε ἀνάκρουση, ἐννοοῦμε τήν κίνηση τοῦ ὅπλου, ὅταν ἐκσφενδονίζει τό βλῆμα, πού εἶναι ἀντίθετη πρός τήν κίνηση τοῦ βλήματος.

Ἡ ἀνάκρουση δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Τό πυροβόλο καί τό βλῆμα (σχ. 3.3β) τό θεωροῦμε ἀπομωνομένο σύστημα.

Πρίν ἀπό τήν ἐκπυρσοκρότηση τό ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τοῦ πυροβόλου καί τοῦ βλήματος εἶναι μηδέν. Δηλαδή:

$$m_\pi \cdot 0 + m_\beta \cdot 0 = 0 \qquad (1)$$



Σχ. 3.3β.

Ὅταν γίνεται ἡ ἐκπυρσοκρότηση, τά ἀέρια ἀσκοῦν δυνάμεις καί στό πυροβόλο καί στό βλῆμα. Οἱ δυνάμεις αὐτές δίνουν στό βλῆμα ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$ καί στό πυροβόλο $\vec{\upsilon}_\pi$, τά ὁποῖα ἀποκτοῦν ὁρμές $m_\beta \vec{\upsilon}_\beta$ καί $m_\pi \vec{\upsilon}_\pi$ ἀντίστοιχα.

Τό ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τοῦ πυροβόλου καί τοῦ βλήματος μετά τήν πυροδότηση εἶναι:

$$\vec{j}_\Sigma = m_\pi \cdot \vec{\upsilon}_\pi + m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta \qquad (2)$$

Ἐπειδή οἱ δυνάμεις τῶν ἀερίων πού δημιουργήθηκαν ἀπό τήν ἀνάφλεξη τῆς ἐκρηκτικῆς ὕλης εἶναι ἐσωτερικές δυνάμεις γιά τό σύστημα ***πυροβόλο-βλῆμα,*** πρέπει ἡ ὁρμή τοῦ συστήματος πρίν ἀπό τήν ἐκπυρσοκρότηση (σχέση 1) νά εἶναι ἴδια μέ τήν ὁρμή τοῦ συστήματος ὕστερα ἀπό τήν ἐκπυρσοκρότηση (σχέση 2) (θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς) Δηλαδή:

$$m_\pi \cdot 0 + m_\beta \cdot 0 = m_\pi \vec{\upsilon}_\pi + m_\beta \vec{\upsilon}_\beta \qquad (3)$$

Ἀπό τή σχέση (3) παίρνομε:

$$\boxed{\vec{\upsilon}_\pi = -\frac{m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta}{m_\pi}} \qquad (4)$$

Ἀπό τή σχέση (4) προκύπτει ὅτι:

1) Ἡ φορά τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_\pi$ τοῦ πυροβόλου εἶναι ἀντίθετη τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_\beta$ τοῦ βλήματος, δηλαδή τό πυροβόλο θά κινηθεῖ πρός τά πίσω ἐνῶ τό βλῆμα θά κινηθεῖ πρός τά ἐμπρός.
2) Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\pi$ τοῦ πυροβόλου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη τῆς μάζας του m_π.

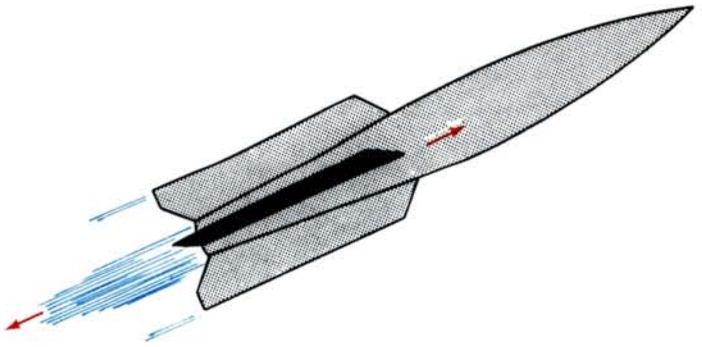
Κίνηση πυραύλου.

Ἡ λειτουργία τοῦ πυραύλου στηρίζεται στό θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς.

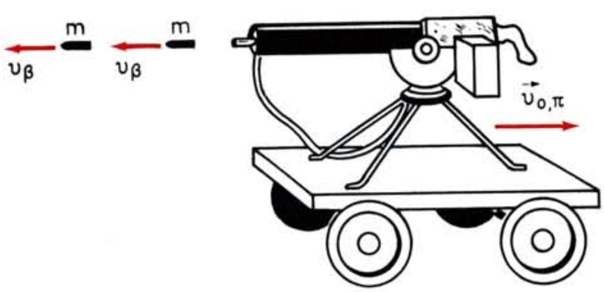
Ὁ πύραυλος (σχ. 3.3γ) ἐκσφενδονίζει συνέχεια μέ μεγάλη ταχύτητα πρός τά πίσω ἀέρια, πού προέρχονται ἀπό τήν καύση κατάλληλου ὑλικοῦ καί αὐτός κινεῖται πρός τά ἐμπρός.

Αὐτό σημβαίνει γιατί ἡ μάζα τῶν ἀερίων πού ἐκσφενδονίζονται ἀποκτᾶ μιά ὁρμή, ἄρα καί ὁ πύραυλος πρέπει νά ἀποκτήσει μιά ἀντίθετη ὁρμή, ὥστε ἡ ὁρμή τοῦ συστήματος ***πύραυλος-ἀέρια*** νά παραμένει σταθερή.

Γιά νά καταλάβομε καλύτερα τή λειτουργία τοῦ πυραύλου δίνομε τά παρακάτω παραδείγματα:



Σχ. 3.3γ.



Σχ. 3.3δ.

1) Σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μπορεῖ νά κινεῖται ὄχημα πού μεταφέρει ἐπάνω του πυροβόλο (σχ. 3.3δ). Τό ὄχημα, τό πυροβόλο καί τά βλήματά του τά θεωροῦμε ὡς ἀπομονωμένο σύστημα.

Ὅταν τό πυροβόλο ἐκσφενδονίζει τό πρῶτο βλῆμα, ἄς ὑποθέσομε μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$, τότε τό ὄχημα μέ τό πυροβόλο κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\pi}$ ἀντίρροπη πρός τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$ τοῦ βλήματος. Δηλαδή:

$$\vec{\upsilon}_{o\pi} = -\frac{m_\beta}{m_{o\pi}} \cdot \vec{\upsilon}_\beta$$

ὅπου: m_β ἡ μάζα τοῦ βλήματος καί $m_{o\pi}$ ἡ μάζα τοῦ ὀχήματος καί τοῦ πυροβόλου.

Ἄν τό πυροβόλο ἐκσφενδονίζει συνέχεια βλήματα, τό ὄχημα μέ τό πυροβόλο θά κινεῖται συνέχεια μέ ταχύτητα ἀντίρροπη τῶν βλημάτων.

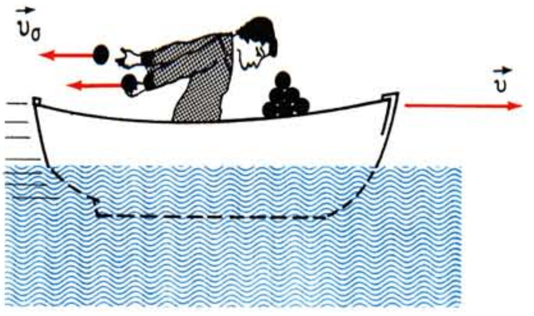
Στόν πύραυλο τό ρόλο τῶν βλημάτων τόν παίζει ἡ μάζα τῶν ἀερίων πού ἐκσφενδονίζονται πρός τά πίσω.

2) Ἐπάνω σέ μιά βάρκα (σχ. 3.3ε) πού ἠρεμεῖ βρίσκεται ἕνας ἄνθρωπος καί πολλές σφαῖρες. Θεωροῦμε ὅτι ἡ βάρκα, ὁ ἄνθρωπος καί οἱ σφαῖρες ἀποτελοῦν ἀπομονωμένο σύστημα.

Ὅταν τό σύστημα (βάρκα-ἄνθρωπος-σφαῖρες) ἠρεμεῖ ἡ ὁρμή του εἶναι μηδέν.

Ἄν ὁ ἄνθρωπος ἀρχίζει νά πετᾶ σφαῖρες πρός τά πίσω, ἡ βάρκα, ὁ ἄνθρωπος καί οἱ ὑπόλοιπες σφαῖρες θά κινοῦνται πρός τά ἐμπρός ἔτσι, ὥστε τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῆς ὁρμῆς τῶν σφαιρῶν πού πετᾶ ὁ ἄνθρωπος καί τῆς ὁρμῆς τοῦ ἀνθρώπου, τῆς βάρκας, καί τῶν ὑπολοίπων σφαιρῶν νά διατηρεῖται πάντα μηδέν, δηλαδή ὅσο ἦταν ἡ ἀρχική ὁρμή τοῦ συστήματος (θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς).

Τό ρόλο τῶν σφαιρῶν πού πετᾶ ὁ ἄνθρωπος τῆς βάρκας, στόν πύραυλο τόν παίζει ἡ μάζα τῶν ἀερίων πού ἐκτοξεύει.



Σχ. 3.3ε.

Κίνηση ἀεριωθούμενου ἀεροπλάνου.

Ὅπως κινεῖται ὁ πύραυλος ἔτσι κινοῦνται καί τά ἀεριωθούμενα ἀεροπλάνα. Ἡ κύρια διαφορά εἶναι ὅτι στούς πύραυλους τό ὀξυγόνο πού χρειάζεται γιά τήν καύση τῆς καύσιμης ὕλης ὑπάρχει μαζί μέ αὐτήν μέσα στόν πύραυλο, ἐνῶ στά ἀεριωθούμενα ἀεροπλάνα χρησιμοποιεῖται τό ὀξυγόνο τῆς ἀτμόσφαιρας.

Οἱ πύραυλοι, ἐπειδή δέν χρησιμοποιοῦν τό ὀξυγόνο τῆς ἀτμόσφαιρας, μποροῦν νά κινοῦνται καί ἔξω ἀπό αὐτή.

3.4 Στροφορμή συστήματος σωμάτων.

Ὁρισμός.

Στροφορμή $\vec{G}_\Sigma$ ἑνός συστήματος σωμάτων Σ_1, Σ_2, Σ_3 ὡς πρός τόν ἄξονα x'x, γύρω ἀπό τόν ὁποῖο περιστρέφεται τό σύστημα κατά τή χρονική στιγμή t, ὀνομάζομε τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν στροφορμῶν $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ πού ἔχουν τά σώματα Σ_1, Σ_2, Σ_3 ὡς πρός τόν ἄξονα x'x κατά τή χρονική στιγμή t. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{G}_\Sigma = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \ldots} \quad \text{καί} \quad \boxed{\vec{G}_\Sigma = \Theta_1\vec{\omega}_1 + \Theta_2\vec{\omega}_2 + \Theta_3\vec{\omega}_3 + \ldots}$$

ὅπου: Θ_1, Θ_2, Θ_3 οἱ ροπές ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τῶν σωμάτων Σ_1, Σ_2, Σ_3 καί

$\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ οἱ γωνιακές ταχύτητες πού ἔχουν τά σώματα Σ_1, Σ_2, Σ_3 καθώς περιστρέφονται γύρω ἀπό τόν ἄξονα x'x κατά τή χρονική στιγμή t.

Θεώρημα τῆς στροφορμῆς ἑνός συστήματος σωμάτων.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἄν σέ σύστημα σωμάτων ἐνεργήσει γιά χρονικό διάστημα Δt ἡ ἐξωτερική ροπή $\vec{M}$, τότε αὐτή προκαλεῖ μεταβολή $\Delta\vec{G}_\Sigma$ τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς τοῦ συστήματος τέτοια πού νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\Delta\vec{G}_\Sigma}{\Delta t}} \qquad (1)$$

Ἄν στή σχέση (1) γράψομε $\vec{M} = 0$, τότε εἶναι καί $\Delta\vec{G}_\Sigma = 0$.

Ἔτσι συνάγεται τό θεώρημα διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς γιά ἕνα περιστρεφόμενο σύστημα σωμάτων, τό ὁποῖο ὁρίζει τά ἑξῆς:

Ἄν σέ ἕνα σύστημα σωμάτων δέν ἀσκοῦνται ἐξωτερικές δυνάμεις, ἤ καί ἄν ἀσκοῦνται, ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν τους ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ συστήματος εἶναι μηδέν, τότε ἡ ὁλική στροφορμή τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή κατά τό μέτρο, τή διεύθυνση καί τή φορά.

Ἄν λάβομε ὑπόψη μας τόν ὁρισμό τοῦ ἀπομονωμένου συστήματος, μποροῦμε νά διατυπώσομε τό πιό πάνω θεώρημα καί ὡς ἑξῆς:

Ἡ στροφορμή ἀπομονωμένου συστήματος διατηρεῖται σταθερή.

Τό σχῆμα 3.4 παριστάνει ἕναν ἄνθρωπο πού κάθεται ἐπάνω σέ ἕνα κάθισμα πού μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα. Ὁ ἄνθρωπος κρατᾶ μέ τό ἕνα του χέρι τόν ἄξονα ἑνός τροχοῦ κατακόρυφα.

Σχ. 3.4.

Ἔστω ὅτι ***ὁ ἄνθρωπος, τό κάθισμα καί ὁ τροχός*** ἀποτελοῦν μεμονωμένο σύστημα, τότε:

1) Ὅταν ὁ ἄνθρωπος-κάθισμα καί ὁ τροχός εἶναι ἀκίνητα:

Στροφορμή ἀνθρώπου-καθίσματος: $\Theta_{\alpha\kappa} \cdot 0 = 0$

Στροφορμή τροχοῦ ὡς πρός τόν ἄξονά του: $\Theta_{\tau} \cdot 0 = 0$

2) Ὅταν ἄνθρωπος θέσει σέ περιστροφή τόν τροχό μέ τό ἄλλο του χέρι καί τοῦ προσδώσει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_{\tau}$, τότε παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἄνθρωπος-κάθισμα περιστρέφονται ἀντίθετα μέ γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_{\alpha\kappa}$, ἔτσι ὥστε νά ἔχομε:

Στροφορμή ἀνθρώπου-καθίσματος: $\vec{G}_{\alpha\kappa} = \Theta_{\alpha\kappa} \cdot \vec{\omega}_{\alpha\kappa}$

Στροφορμή τροχοῦ: $\vec{G}_{\tau} = \Theta_{\tau} \cdot \vec{\omega}_{\tau}$ καί

$$\boxed{0 + 0 = \Theta_{\alpha\kappa} \cdot \vec{\omega}_{\alpha\kappa} + \Theta_{\tau} \cdot \vec{\omega}_{\tau}}$$

3.5 Κρούση.

Γενικά.

Ὅταν λέμε κρούση δύο ἤ περισσότερων σωμάτων ἐννοοῦμε τή σύγκρουσή τους πού διαρκεῖ μικρό χρονικό διάστημα, κατά τό ὁποῖο τό ἕνα ἐξασκεῖ ἐπάνω στό ἄλλο ἀντίθετες δυνάμεις (δράσεις-ἀντιδράσεις). Αὐτές οἱ δυνάμεις ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα νά ἀλλάζουν οἱ ταχύτητες τῶν σωμάτων καί νά δημιουργοῦνται πιθανῶς καί μόνιμες παραμορφώσεις.

Οἱ δυνάμεις πού ἐμφανίζονται κατά τήν κρούση τῶν σωμάτων εἶναι μεγάλες, γι' αὐτό ***θεωροῦμε*** τίς ἄλλες δυνάμεις πού τυχόν ἀσκοῦνται στά σώματα αὐτά κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως ὡς ἀμελητέες.

Δηλαδή θεωροῦμε ὅτι κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως τά συγκρουόμενα σώματα ἀποτελοῦν μεμονωμένο σύστημα.

Συνεπῶς: ***ἡ ὁλική*** ὁρμή καί ***ἡ ὁλική*** ἐνέργεια τοῦ συστήματος τῶν σωμάτων πού συγκρούονται ***διατηροῦνται σταθερές κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεώς τους.***

Εἴδη κρούσεως.

Διακρίνομε τά ἀκόλουθα εἴδη κρούσεως:

1) Τελείως ἐλαστική κρούση.

Ἔτσι ὀνομάζεται ἡ κρούση, ***ὅταν:***

α) Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος τῶν συγκρουόμενων σωμάτων εἶναι ἡ ἴδια πρίν καί μετά τήν κρούση (δηλαδή κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως δέν γίνεται μετατροπή κινητικῆς ἐνέργειας σέ θερμότητα).

β) Ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος τῶν συγκρουόμενων σωμάτων εἶναι ἡ ἴδια πρίν καί μετά τήν κρούση.

γ) Οἱ παραμορφώσεις τῶν συγκρουόμενων σωμάτων πού συμβαίνουν κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως ἐξαφανίζονται τελείως μετά τήν κρούση, δηλαδή μετά τήν κρούση τους τά συγκρουόμενα σώματα ἀποκτοῦν τό ἴδιο ἀκριβῶς σχῆμα πού εἶχαν πρίν ἀπό τήν κρούση.

δ) Τά σώματα μετά τήν κρούση ἀποχωρίζονται μέ διαφορετικές ταχύτητες ἀπό τίς ταχύτητες πού εἶχαν πρίν ἀπό τήν κρούση.

2) Τελείως πλαστική κρούση.

Ἔτσι ὀνομάζεται ἡ κρούση, ***ὅταν:***

α) Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια πού ἔχει τό σύστημα τῶν συγκρουόμενων σωμάτων μετά τήν κρούση εἶναι ***μικρότερη*** ἀπό ἐκείνη πού εἶχε τό σύστημα αὐτό πρίν ἀπό τήν κρούση (δηλαδή ἕνα μέρος ἀπό τήν κινητική ἐνέργεια τῶν σωμάτων μετατράπηκε κατά τήν κρούση σέ θερμότητα).

β) Ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος τῶν συγκρουόμενων σωμάτων εἶναι ***ἡ ἴδια*** καί πρίν ἀπό τή σύγκρουση καί μετά τή σύγκρουση.

γ) Οἱ παραμορφώσεις τῶν συγκρουόμενων σωμάτων πού συμβαίνουν κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως ***μονιμοποιοῦνται.***

δ) Τά σώματα δέν ἀποχωρίζονται μετά τήν κρούση, ἀλλά κινοῦνται ***μέ τήν ἴδια*** ταχύτητα.

3) Ἡμιελαστική ἤ ἡμιπλαστική κρούση.

Ἔτσι ὀνομάζεται ἡ κρούση, ***ὅταν:***

α) Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια πού ἔχει τό σύστημα τῶν συγκρουόμενων σωμάτων μετά τήν κρούση εἶναι ***μικρότερη*** ἀπό ἐκείνη πού εἶχε τό σύστημα πρίν ἀπό τήν κρούση (δηλαδή ἕνα μέρος τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῶν σωμάτων μετατράπηκε κατά τήν κρούση σέ θερμότητα).

β) Ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος τῶν συγκρουόμενων σωμάτων εἶναι ἡ ἴδια πρίν καί μετά τήν κρούση.

γ) Οἱ παραμορφώσεις τῶν συγκρουόμενων σωμάτων πού συμβαίνουν κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως ***δέν μονιμοποιοῦνται ἐντελῶς ἀλλά μερικῶς.***

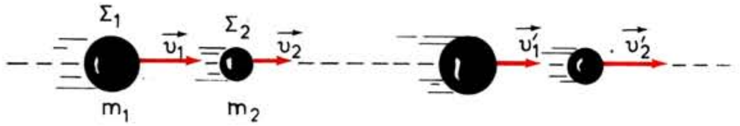
δ) Τά σώματα μετά τήν κρούση ἀποχωρίζονται μέ διαφορετικές ταχύτητες ἀπό τίς ταχύτητες πού εἶχαν πρίν ἀπό τήν κρούση.

Κεντρική κρούση δύο σωμάτων.

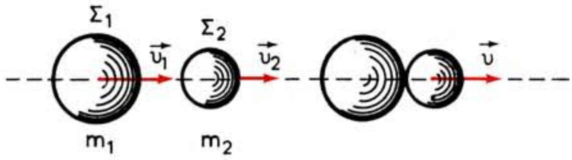
Κεντρική κρούση δύο σωμάτων λέγεται ἡ κρούση ἐκείνη πού συμβαίνει ὅταν:

α) Τά κέντρα βάρους τῶν σωμάτων κινοῦνται, πρίν καί μετά ἀπό αὐτή, ἐπάνω στήν εὐθεία πού τά ἑνώνει πρίν τά σώματα συγκρουσθοῦν, καί

β) Οἱ διευθύνσεις τῶν ταχυτήτων τῶν σωμάτων, πρίν καί μετά ἀπό αὐτή, βρίσκονται ἐπάνω στήν εὐθεία πού ἑνώνει τά κέντρα βάρους τους πρίν τά σώματα συγκρουσθοῦν (σχ. 3.5α καί σχ. 3.5β).



Σχ. 3.5α.



Σχ. 3.5β.

1) Ἐλαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν.

Οἱ δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 (σχ. 3.5α), πού οἱ μάζες τους εἶναι m_1 καί m_2, κινοῦνται μέ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$. Μετά ἀπό ὁρισμένο χρόνο ἡ σφαίρα Σ_1 φτάνει τή Σ_2 καί ἀρχίζει ἡ κρούση.

Ἐπειδή ἡ κρούση εἶναι ἐλαστική, μετά τό τέλος τῆς κρούσεως οἱ σφαῖρες χωρίζουν. Ἄς ὑποθέσομε πώς κινοῦνται μετά τήν κρούση μέ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ καί $\vec{\upsilon}_2'$. Γιά νά βροῦμε τίς ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ καί $\vec{\upsilon}_2'$, ἀφοῦ γνωρίζομε τίς ταχύτητες πού εἶχαν οἱ σφαῖρες πρίν ἀπό τήν κρούση καί τίς μάζες τους, σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ἡ κρούση εἶναι ἐλαστική κεντρική κρούση ἰσχύουν:

1) Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος τῶν δύο σφαιρῶν πρίν ἀπό τήν κρούση εἶναι ἴση μέ τήν ὁλική κινητική του ἐνέργεια μετά τήν κρούση, δηλαδή:

$$\boxed{\frac{1}{2}\,m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,(\upsilon_1')^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,(\upsilon_1')^2} \qquad (1)$$

2) Ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος τῶν δύο σφαιρῶν πρίν ἀπό τήν κρούση εἶναι ἴση μέ τήν ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος μετά τήν κρούση ***(αὐτό ἰσχύει γιά ὅλα τά εἴδη κρούσεως)*** δηλαδή:

$$\boxed{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'} \qquad (2)$$

Ἐπειδή οἱ ταχύτητες $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_1'$ καί $\vec{u}_2'$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση (κεντρική κρούση), ἀπό τήν (2) προκύπτει ἡ ***ἀλγεβρική*** ἐξίσωση:

$$\boxed{m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2'} \qquad (3)$$

Οἱ ἐξισώσεις (1) καί (3) ἀποτελοῦν σύστημα μέ δύο ἀγνώστους u_1' καί u_2'. Ἄρα λύνοντας τό σύστημα ὡς πρός τίς u_1' καί u_2' προσδιορίζομε τίς ταχύτητες τῶν σωμάτων μετά τήν κρούση.

Εἰδικές περιπτώσεις.

α) Ἐλαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν Σ_1 καί Σ_2 (σχ. 3.5γ) πού ἔχουν τήν ἴδια μάζα (m) καί ἡ ταχύτητα πρίν ἀπό τή κρούση τῆς Σ_1 εἶναι $\vec{u}_1$ ἐνῶ τῆς Σ_2 εἶναι $\vec{u}_2 = 0$.

Εἴδαμε ὅτι γιά τήν ἐλαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (u_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_1')^2 \qquad (1)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \qquad (2)$$

ὅπου: $\vec{u}_1'$ καί $\vec{u}_2'$ οἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν μετά τήν κρούση.

Βάζοντας στίς (1) καί (2): $m_1 = m$, $m_2 = m$ καί $u_2 = 0$ παίρνομε:

$$u_1^2 = (u_1')^2 + (u_1')^2 \qquad (3)$$

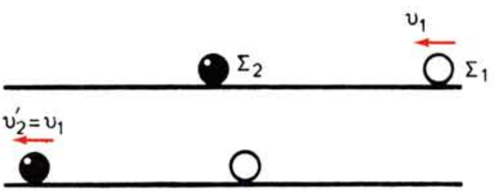
$$u_1 = u_1' + u_2' \qquad (4)$$

Ἀπό τίς (3) καί (4) παίρνομε:

$$\vec{u}_1' = 0 \qquad (5)$$

$$\vec{u}_2' = \vec{u}_1 \qquad (6)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (6) συμπεραίνεται, ὅτι κατά τήν κρούση αὐτή ἔγινε ἀνταλλαγή τῶν ταχυτήτων τῶν δύο αὐτῶν σφαιρῶν.



Σχ. 3.5γ.

β) Ἐλαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν Σ_1 καί Σ_2, πού ἔχουν τήν ἴδια μάζα καί ἡ ταχύτητα πρίν ἀπό τήν κρούση τῆς Σ_1 εἶναι $\vec{u}_1$, ἐνῶ τῆς Σ_2 εἶναι $\vec{u}_2$.

Εἴδαμε ὅτι γιά τήν ἐλαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (u_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_1')^2 \qquad (1)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \qquad (2)$$

ὅπου: $\vec{u}_1'$ καί $\vec{u}_2'$ οἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν μετά τήν κρούση.

Βάζοντας στίς (1) καί (2): $m_1 = m_2 = m$ παίρνομε:

$$u_1^2 + u_2^2 = (u_1')^2 + (u_2')^2 \qquad (3)$$

$$u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \qquad (4)$$

'Από τίς (3) καί (4) ἔχομε:

$$\boxed{\vec{u}_1' = \vec{u}_2} \qquad (5)$$

$$\boxed{\vec{u}_2' = \vec{u}_1} \qquad (6)$$

'Από τίς (5) καί (6) βγαίνει ὅτι κατά τήν ἐλαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν Σ_1 καί Σ_2 πού ἔχουν τήν ἴδια μάζα γίνεται ἀνταλλαγή τῶν ταχυτήτων τους.

2) Πλαστική κεντρική κρούση δύο σφαιρῶν.

Ἄς ποῦμε, ὅτι οἱ δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 (σχ. 3.5β) πού οἱ μάζες τους εἶναι m_1 καί m_2, κινοῦνται μέ ταχύτητες $\vec{u}_1$ καί $\vec{u}_2$. Μετά ὁρισμένο χρόνο ἡ σφαίρα Σ_1 φθάνει τή Σ_2 καί ἀρχίζει ἡ κρούση.

'Επειδή ἡ κρούση εἶναι πλαστική, οἱ δύο σφαῖρες δέν ἀποχωρίζονται, ἀλλά κινοῦνται μέ τήν ἴδια ταχύτητα, ἄς ποῦμε $\vec{u}$.

Γιά νά βροῦμε τήν ταχύτητα $\vec{u}$ σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

'Η ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος τῶν δύο σφαιρῶν Σ_1 καί Σ_2 πρίν ἀπό τήν κρούση εἶναι ἴση μέ τήν ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος μετά τήν κρούση ***(αὐτό ἰσχύει γιά ὅλα τά εἴδη κρούσεως).*** Δηλαδή:

$$\boxed{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{u}} \qquad (1)$$

'Επειδή οἱ ταχύτητες $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ καί $\vec{u}$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση (κεντρική κρούση), ἀπό τήν (1) προκύπτει ἡ ***ἀλγεβρική*** ἐξίσωση:

$$\boxed{m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)\, u} \qquad (2)$$

'Από τή (2) παίρνομε:

$$u = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

Γιά τήν ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος, πρίν ἀπό τήν κρούση καί μετά τήν κρούση, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 > \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, u^2$$

'Η διαφορά:

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, u^2 = E_\Theta}$$

μετατράπηκε κατά τή διάρκεια τῆς κρούσεως σέ θερμότητα.

Γενική παρατήρηση:

Εὐνόητο εἶναι ὅτι γιά νά χρησιμοποιήσομε τίς ἀλγεβρικές ἐξισώσεις (1), (3) καί (2) πρέπει νά ὁρίσομε ἐπάνω στήν εὐθεία πού ἑνώνει τά κέντρα βάρους τῶν συγκρουόμενων σωμάτων τή θετική καί ἀρνητική φορά. Τά πρόσημα τῶν u_1 καί u_2 λαμβάνονται (+) ἤ (—) ἀνάλογα μέ τή φορά τους. Ἄν βροῦμε ὅτι οἱ u_1 καί u_2 εἶναι θετικές τότε αὐτές ἔχουν θετική φορά, ἐνῶ ἄν εἶναι ἀρνητικές, τότε ἔχουν ἀρνητική φορά.

3.6 Ἀσκήσεις.

1) *Ποιά εἶναι ἡ ὁρμή j σώματος πού ἔχει μάζα m = 0,2 kg καί ταχύτητα υ = 15 m/sec;*

$$j = m \cdot u = 0{,}2 \times 15 = 3 \text{ kgm/sec}$$

2) *Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m = 0,2 kg καί ταχύτητα u_1 = 15 m/sec. Ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος αὐτοῦ αὐξάνει κατά 6 m/sec μέσα σέ χρόνο 3 sec. Ποιά ἐπιτάχυνση γ ἀπέκτησε; Ποιά εἶναι ἡ μεταβολή Δj τῆς ὁρμῆς του καί ποιά δύναμη F ἐπέδρασε στό σῶμα;*

3) *Ὑλικό σημεῖο γράφει κυκλική τροχιά ἀκτίνας r = 100 cm μέ γωνιακή ταχύτητα ω = 15 rad/sec. Ἄν ἡ μάζα του εἶναι m = 20 g, πόση εἶναι ἡ στροφορμή του G;*

4) *Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα ἀνακρούσεως ὅπλου ($u_{\alpha o}$), ὅταν ἐκσφενδονίζει βλῆμα μέ ταχύτητα $u_{\beta\lambda}$ = 1000 m/sec. Ἡ μάζα τοῦ ὅπλου εἶναι $m_{o\pi}$ = 12 kg καί ἡ μάζα τοῦ βλήματος $m_{\beta\lambda}$ = 40 g.*

5) *Ἕνα σῶμα βρίσκεται σέ κατάσταση ἠρεμίας (ἡ ὁρμή του j_1 εἶναι μηδέν, j_1 = 0). Ἀπό μιά ξαφνική ἔκρηξή του τό σῶμα διασπᾶται σέ δύο κομμάτια, πού τό ἕνα ἔχει μάζα m_1 = 0,2 kg καί τό ἄλλο m_2 = 0,3 kg. Ἄν ἡ ταχύτητα τῆς μάζας m_1 εἶναι u_1 = 30 m/sec, ποιά θά εἶναι ἡ ταχύτητα u_2 τῆς μάζας m_2, ἐφόσον θά ἔχει τόν ἴδιο φορέα μέ τήν u_1;*

6) *Δύο σώματα πού ἔχουν μάζες m_1 = 20 g καί m_2 = 5 g κινοῦνται ἐπάνω στήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετα, μέ ταχύτητες u_1 = 40 cm/sec καί u_2 = 60 m/sec ἀντίστοιχα. Τά σώματα αὐτά συγκρούονται καί μετά τή σύγκρουση δέν ἀποχωρίζονται, ἀλλά κινοῦνται μέ τήν ἴδια ταχύτητα $\vec{u}$. Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα $\vec{u}$.*

7) *Δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 κινοῦνται μέ τήν ἴδια φορά καί τά κέντρα τους βρίσκονται ἐπάνω στήν ἴδια εὐθεία. Οἱ δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 κινοῦνται μέ ταχύτητες $u_{1\pi}$ = 10 m/sec καί $u_{2\pi}$ = 24 m/sec καί ἔχουν μάζες m_1 = 8 kg καί m_2 = 20 kg ἀντίστοιχα. Οἱ σφαῖρες εἶναι τελείως ἐλαστικές καί ἡ Σ_1 προηγεῖται τῆς Σ_2. Νά βρεθεῖ πόση εἶναι ἡ ταχύτητα $\vec{u}_{1\mu}$ τῆς σφαίρας Σ_1 καί πόση εἶναι ἡ ταχύτητα $\vec{u}_{2\mu}$ τῆς σφαίρας Σ_2 μετά τή σύγκρουσή τους.*

8) *Στό ἕνα ἄκρο μιᾶς βάρκας βρίσκονται 4 ἄνθρωποι ἀκίνητοι. Ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς ἀρχίζει νά τρέχει πάνω στή βάρκα μέ ταχύτητα ὡς πρός τή βάρκα u_α = 5 m/sec καί κατόπιν πέφτει στή θάλασσα. Τό ἴδιο κάνουν διαδοχικά, μέ τήν ἴδια σχετική ταχύτητα (u_α) ὡς πρός τή βάρκα, καί οἱ ὑπόλοιποι τρεῖς ἄνθρωποι. Ἄν ἡ μάζα κάθε ἀνθρώπου εἶναι m_α = 70 kg καί τῆς βάρκας m_β = 500 kg, νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα πού θά ἔχει ἡ βάρκα, ὅταν τήν ἐγκαταλείψει καί ὁ 4ος ἄνθρωπος. Ἐπίσης νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα πού θά ἀποκτήσει ἡ βάρκα ἄν τήν ἐγκαταλείψουν καί οἱ τέσσερις μαζί μέ τήν ἴδια ταχύτητα u_α.*

9) *Μία σφαίρα ἀφήνεται νά πέσει ἐπάνω σέ ὁριζόντια πλάκα ἀπό ὕψος h = 10 m. Ἡ σφαίρα ἔχει μάζα m = 0,8 kg καί μετά τήν σύγκρουσή της μέ τήν πλάκα ἀνακλᾶται καί ἀνέρχεται. Ἄν σέ κάθε κρούση τά 40% τῆς κινητικῆς ἐνέργειας μετατρέπονται σέ θερμότητα, νά βρεθεῖ τό ὕψος στό ὁποῖο ἀνέρχεται ἡ σφαίρα μετά τή δεύτερη κρούση της στήν ὁριζόντια πλάκα.*

10) *Ἔχομε κρεμασμένο ἕνα κομμάτι ξύλο μάζας M = 20 kg, μέ σχοινί πού ἔχει μῆκος l = 2 m. Ἕνα βλῆμα μάζας m_β = 20 g, τό ὁποῖο κινεῖται ὁριζόντια, σφηνώνεται στό ξύλο καί τό ξύλο μαζί μέ τό βλῆμα κινεῖται καί φθάνει ὥς τή θέση Β. Ἄν ἡ γωνία φ εἶναι φ = 5°, νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα u_β πού εἶχε τό βλῆμα κατά τή στιγμή πού σφηνώθηκε στό ξύλο.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

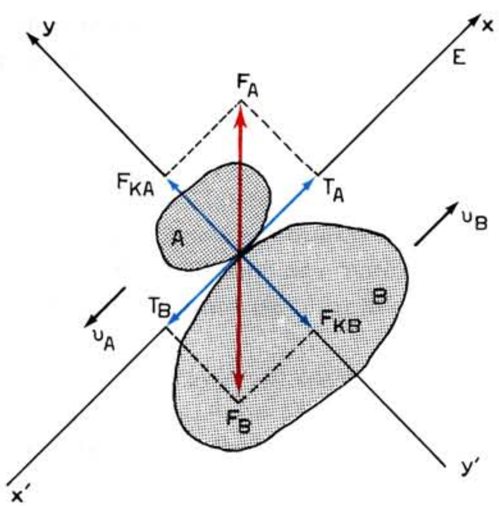
Α. ΤΡΙΒΗ

Τριβή εἶναι τό φαινόμενο κατά τό ὁποῖο ὅταν δύο σώματα βρίσκονται σέ ἐπαφή (σέ ἠρεμία ἤ σέ κίνηση τό ἕνα ὡς πρός τό ἄλλο) ***τό ἕνα ἐξασκεῖ ἐπί τοῦ ἄλλου τέτοιες δυνάμεις πού ἐμποδίζουν τήν κίνησή τους.***

4.1 Τριβή ὀλισθήσεως.

Γενικά.

α) Ἔστω ὅτι δύο σώματα Α καί Β βρίσκονται σέ ἐπαφή (σχ. 4.1α) καί τό Α ὀλισθαίνει ἐπάνω στό Β μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ ὡς πρός τό Β, ἐνῶ ταυτόχρονα τό Β ὀλισθαίνει ἐπάνω στό Α μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$ ὡς πρός τό Α.



Σχ. 4.1α.

Στήν περίπτωση αὐτή τό σῶμα Β ἀσκεῖ στό Α τή δύναμη $\vec{F}_A$ (δράση) καί τό Α ἀσκεῖ στό Β τή δύναμη $\vec{F}_B$ (ἀντίδραση): $(\vec{F}_A = -\vec{F}_B)$

Οἱ δυνάμεις $\vec{F}_A$ καί $\vec{F}_B$ εἶναι πλάγιες στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς (Ε) τῶν σωμάτων Α καί Β.

Παίρνομε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες x'x καί y'y, ἀπό τούς ὁποίους ὁ y'y εἶναι κάθετος στό κοινό ἐπίπεδο (Ε), ἐνῶ ὁ x'x βρίσκεται ἐπάνω στό κοινό αὐτό ἐπίπεδο.

Ἀναλύομε τή δύναμη $\vec{F}_A$ σέ δύο συνιστῶσες: τή $\vec{F}_{KA}$, πού εἶναι κάθετη στό κοινό ἐπίπεδο, καί τήν $\vec{T}_A$, πού βρίσκεται ἐπάνω σ' αὐτό καί ἔχει τή διεύθυνση τῆς $\vec{u}_A$, ***ἀλλά ἀντίθετη φορά.***

Ἐπίσης ἀναλύομε τή δύναμη $\vec{F}_B$ σέ δύο συνιστῶσες: τή $\vec{F}_{KB}$, πού εἶναι κάθετη στό κοινό ἐπίπεδο, καί τήν $\vec{T}_B$, πού βρίσκεται ἐπάνω στό κοινό αὐτό ἐπίπεδο καί ἔχει τή διεύθυνση τῆς $\vec{u}_B$ ***ἀλλά ἀντίθετη φορά.***

Ἡ δύναμη $\vec{F}_{KA}$, ἐπειδή εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τῶν δύο σωμάτων, δηλαδή κάθετη στή διεύθυνση τῆς ὀλισθήσεως (x'x), δέν ἐμποδίζει τήν ὀλίσθηση τοῦ Α ὡς πρός τό Β. Ἀντίθετα, ἡ δύναμη $\vec{T}_A$, ἐπειδή βρίσκεται ἐπάνω στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς καί ἔχει τή διεύθυνση τῆς $\vec{u}_A$ ἀλλά φορά ἀντίθετη, ἐμποδίζει τήν ὀλίσθηση.

Ἐξάλλου, ἡ δύναμη $\vec{F}_{KB}$, ἐπειδή εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς, δηλαδή κάθετη στή διεύθυνση τῆς ὀλισθήσεως (x'x), δέν ἐμποδίζει τήν ὀλίσθηση τοῦ Β ὡς πρός τό Α κατά τή διεύθυνση (x'x). Ἀντίθετα ἡ δύναμη $\vec{T}_B$, ἐπειδή βρίσκεται ἐπάνω στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς καί ἔχει τή διεύθυνση τῆς $\vec{u}_B$ ἀλλά φορά ἀντίθετη, ἐμποδίζει τήν ὀλίσθηση τοῦ Β ὡς πρός τό Α.

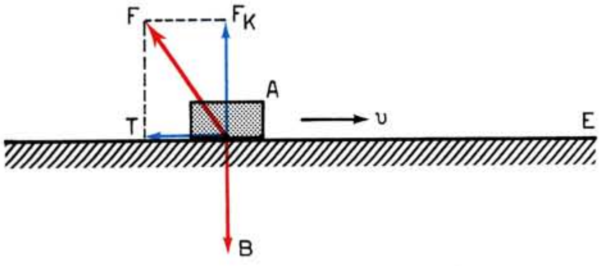
Τή δύναμη $\vec{T}_A$, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό σῶμα Β στό σῶμα Α ὅταν τό Α ὀλισθαίνει ἐπάνω στό Β κατά τή διεύθυνση (x'x), τήν ὀνομάζομε δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως τοῦ Α. Ἐνῶ τή δύναμη T_B, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό σῶμα Α στό σῶμα Β ὅταν τό Β ὀλισθαίνει ἐπάνω στό Α κατά τή διεύθυνση (x'x), τήν ὀνομάζομε δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως τοῦ Β.

β) Ἄν ἐκσφενδονίσομε μέ δύναμη ἕνα σῶμα Α ἐπάνω σέ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο Ε (σχ. 4.1β), τό σῶμα Α θά κινηθεῖ γιά λίγο καί μετά θά σταματήσει, γιατί τό ἐπίπεδο Ε ἀσκεῖ στό σῶμα Α μιά πλάγια δύναμη $\vec{F}$. Ἡ δύναμη αὐτή $\vec{F}$ ἀναλύεται σέ δύο συνιστῶσες, τή $\vec{F}_K$, πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τοῦ Α καί τοῦ Ε, καί τήν $\vec{T}$, πού βρίσκεται ἐπάνω στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τοῦ Α καί τοῦ Ε καί ἡ ὁποία ἔχει:

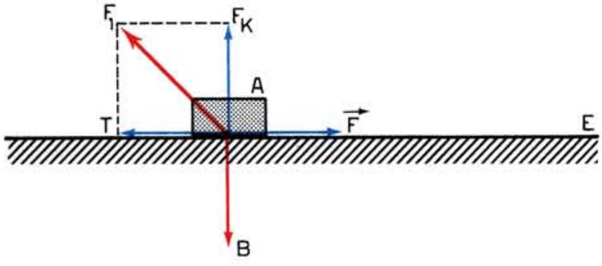
1) Τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{u}$ πού ἀπέκτησε τό σῶμα Α κατά τήν ἐκσφενδόνισή του καί
2) φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς ταχύτητας $\vec{u}$.

Ἡ δύναμη $\vec{T}$ εἶναι ἡ δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως τοῦ Α στό Ε (ἐπειδή ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς $\vec{u}$ προκαλεῖ ἐπιβράδυνση τοῦ σώματος Α, τό ὁποῖο καί τελικά σταματᾶ).

γ) Ἐπάνω σέ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο Ε τοποθετοῦμε τό σῶμα Α (σχ. 4.1γ). Ἄν στό σῶμα Α ἐφαρμόσομε μιά ***κατάλληλη σταθερή δύναμη $\vec{F}$***, τότε τό Α ὀλισθαίνει ἐπάνω στό δάπεδο μέ ταχύτητα σταθερή, δηλαδή μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση. Ὡστόσο θά περιμέναμε ἡ κίνηση νά εἶναι εὐθύγραμμη ὁμαλή καί ἐπιταχυνόμενη ($\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$) ἀφοῦ στό Α ἀσκεῖται μιά δύναμη σταθερή $\vec{F}$. Αὐτό ὅμως δέν συμβαίνει,



Σχ. 4.1β.



Σχ. 4.1γ.

γιατί τό δάπεδο Ε ἀσκεῖ στό σῶμα Α μιά πλάγια δύναμη $\vec{F}_1$, πού ἀναλύεται στή $\vec{F}_K$ καί στήν $\vec{T}$ (τριβή). Στήν περίπτωσή μας ἡ $\vec{T}$ εἶναι ἀντίθετη πρός τή $\vec{F}$ ($\vec{T} = -\vec{F}$) καί γι' αὐτό ἡ συνισταμένη τους εἶναι μηδέν. Ἔτσι τό Α κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα (δηλαδή ἡ τριβή ἐξουδετερώνει τή $\vec{F}$).

Παρατηρήσεις.

1) Γενικά, ὅταν ἕνα σῶμα Α ὀλισθαίνει ἐπάνω σέ ἕνα ἄλλο σῶμα Β μέ ταχύτητα ὡς πρός αὐτό $\vec{υ}$, τότε τό Β ἀσκεῖ στό Α μιά πλάγια δύναμη πού ἀναλύεται σέ δύο δυνάμεις: τή $\vec{F}_K$, ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στό κοινό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τους, καί τήν $\vec{T}$, ἡ ὁποία βρίσκεται στό ἐπίπεδο αὐτό καί ***ὀνομάζεται δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως.***
2) Ἡ δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}$, ἡ ὁποία ἀσκεῖται στό σῶμα Α ἀπό τό σῶμα Β ἐπάνω στό ὁποῖο ὀλισθαίνει τό Α, εἶναι ***δύναμη πού ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:***
   — ***Διεύθυνση,*** τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας τοῦ Α ὡς πρός τό Β, δηλαδή τή διεύθυνση τῆς ὀλισθήσεως τοῦ Α ὡς πρός τό Β.
   — ***Φορά,*** ἀντίθετη πρός τήν ταχύτητα τοῦ Α ὡς πρός τό Β, δηλαδή ἀντίθετη πρός τήν ὀλίσθηση (αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ $\vec{T}$ ἀντιστέκεται στήν ὀλίσθηση τοῦ Α ἐπάνω στό Β).
   — ***Μέτρο,*** ἴσο μέ τό μέτρο τῆς δυνάμεως πού πρέπει νά ἐφαρμόσομε στό Α γιά νά ὀλισθήσει μέ σταθερή ταχύτητα ὡς πρός τό Β, γιά νά εἶναι δηλαδή ἡ ὀλίσθηση μιά εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση.

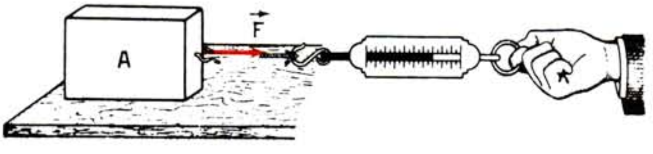
3) Στίς περιπτώσεις πού θεωροῦμε ὅτι ἀνάμεσα στά σώματα πού βρίσκονται σέ ἐπαφή δέν ὑπάρχει τριβή, τότε ἡ δύναμη πού ἀσκεῖ τό ἕνα σῶμα ἐπάνω στό ἄλλο ἐξαιτίας τῆς ἐπαφῆς εἶναι δύναμη κάθετη στό κοινό ἐπίπεδο τῶν δύο σωμάτων.

Μέτρηση τῆς δυνάμεως τριβῆς ὀλισθήσεως.

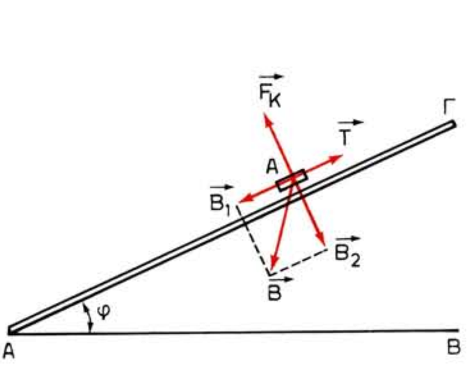
Τό μέτρο τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τῆς δυνάμεως πού πρέπει νά ἐφαρμόσομε στό σῶμα γιά νά ὀλισθαίνει μέ ταχύτητα σταθερή, δηλαδή νά εἶναι ἡ ὀλίσθηση κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλή.

α) Ἄν σύρομε τό σῶμα Α μέ σταθερή ταχύτητα (σχ. 4.1δ), τότε ἡ ἔνδειξη τοῦ δυναμόμετρου δείχνει τή δύναμη $\vec{F}$ μέ τήν ὁποία ἕλκομε τό σῶμα. Αὐτή ἡ δύναμη εἶναι ἀντίθετη τῆς τριβῆς, δηλαδή:

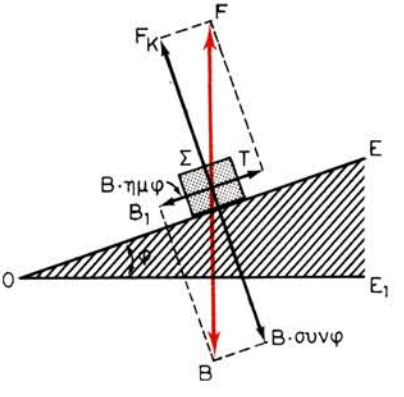
$$\vec{T} = -\vec{F} \qquad \text{ἤ} \qquad T = F$$



Σχ. 4.1δ.



Σχ. 4.1ε.



Σχ. 4.1στ.

β) Ἔστω ὅτι σέ ἕνα κεκλιμένο ἐπίπεδο (σχ. 4.1ε) δίνομε τή γωνία φ, πού εἶναι τέτοια ὥστε τό σῶμα Α νά ὀλισθαίνει στό κεκλιμένο ἐπίπεδο μέ σταθερή ταχύτητα.

Ἡ δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως πού ἀσκεῖται στό σῶμα Α ἀπό τό κεκλιμένο ἐπίπεδο εἶναι:

$$\vec{T} = -\vec{B}_1 \qquad \text{ἤ} \qquad T = B_1 = B\eta\mu\phi$$

Ἔτσι, ἄν ξέρομε τό βάρος τοῦ σώματος $\vec{B}$ καί τή γωνία φ, μποροῦμε νά βροῦμε τήν $\vec{T}$.

Συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως.

Ὁρισμός.

Κατά τήν ὀλίσθηση ἑνός σώματος Α ἐπάνω σέ ἕνα ἄλλο σῶμα Β, τό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}$ διά τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως $\vec{F}_K$ διατηρεῖται σταθερό.

Συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως (η) δύο σωμάτων ὀνομάζομε τό σταθερό πηλίκο τοῦ μέτρου τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}$ τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων διά τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως $\vec{F}_K$ δηλαδή:

$$\eta = \frac{T}{F_K}$$

Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι ***καθαρός ἀριθμός,*** ἀφοῦ εἶναι πηλίκο δύο δυνάμεων.

Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως ἐξαρτᾶται:

1) Ἀπό τή φύση τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανειῶν: Ἄν καί τά δύο σώματα εἶναι ἀπό χυτοσίδηρο, τότε η = 0,14. Ἄν τό ἕνα εἶναι ἀπό ὀρείχαλκο καί τό ἄλλο ἀπό χυτοσίδηρο, τότε η = 0,19.

2) Ἀπό τό βαθμό λειάνσεως τῶν δύο ἐπιφανειῶν: Ὅσο πιό λεῖες εἶναι οἱ ἐφαπτόμενες ἐπιφάνειες τόσο μικρότερος θά εἶναι ὁ (η).

Σημείωση:

Ἄν ἀνάμεσα στίς δύο ἐπιφάνειες βάλομε λιπαντικές οὐσίες (π.χ. λίπος, λάδι κλπ.), τότε ὁ (η) μειώνεται, γιατί ἀποφεύγεται κατά κάποιο μέτρο ἡ ἐμπλοκή ἐσοχῶν καί ἐξοχῶν τῶν ἐπιφανειῶν καί ἔτσι μειώνεται ἡ $\vec{T}$ καί μαζί της καί ὁ (η).

Μέτρηση τοῦ συντελεστῆ τριβῆς ὀλισθήσεως — γωνία τριβῆς.

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ε (σχ. 4.1στ) μπορεῖ νά περιστραφεῖ γύρω ἀπό ἕναν ὁριζόντιο ἄξονα (ο) καί ἔτσι μποροῦμε νά ἀλλάξομε τή γωνία φ τῆς ἐπιφάνειας σχετικά μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο (OE_1).

Τό σῶμα Σ ὅταν ἡ γωνία φ εἶναι μικρή δέν ὀλισθαίνει. Ἄν αὐξήσομε βαθμιαῖα τή φ, κάποτε θά πάρει τέτοια τιμή ($\varphi = \varphi_{\tau\rho}$), πού τό σῶμα Σ θά ἀρχίσει νά ὀλισθαίνει μέ σταθερή ταχύτητα ἐπάνω στό σῶμα Ε, ὁπότε ἔχομε:

$$B_1 = T = B \,.\, \eta\mu\varphi_{\tau\rho} \qquad (1)$$

$$F_K = B \,.\, \sigma\upsilon\nu\varphi_{\tau\rho} \qquad (2)$$

Διαιροῦμε τή σχέση (1) διά τῆς (2) καί ἔχομε:

$$\frac{T}{F_K} = \frac{B \,.\, \eta\mu\varphi_{\tau\rho}}{B \,.\, \sigma\upsilon\nu\varphi_{\tau\rho}}$$

$$\frac{T}{F_K} = \varepsilon\varphi\varphi_{\tau\rho} \qquad (3)$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ συντελεστῆ τριβῆς ὀλισθήσεως ἔχομε:

$$\eta = \frac{T}{F_K} \qquad (4)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) παίρνομε:

$$η = εφφ_{τρ}$$

Δηλαδή: Ἄν μετρήσομε τή γωνία $φ_{τρ}$, πού σχηματίζεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια Ε καί τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ὅταν τό Σ ὀλισθαίνει πάνω στήν Ε μέ σταθερή ταχύτητα, καί πάρομε τήν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας $φ_{τρ}$ τότε βρίσκομε τό συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως, γιατί ἔχομε:

$$η = εφφ_{τρ}$$

Ἄν ἡ γωνία $φ_{τρ}$ εἶναι π.χ. 30°, τότε ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως θά εἶναι:

$$η = εφφ_{τρ} = εφ\ 30° = 0{,}58$$

Τή γωνία $φ_{τρ}$, κατά τήν ὁποία ἀρχίζει τό σῶμα Σ νά ὀλισθαίνει ἐπάνω στήν Ε μέ σταθερή ταχύτητα καί τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη ἰσοῦται μέ τό συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως ($εφφ_{τρ} = η$) τήν ὀνομάζομε ***γωνία τριβῆς.***

Νόμοι τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως.

1) Ἡ δύναμη τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας συνεπαφῆς τῶν δύο σωμάτων.

Ἐπάνω σέ ἕνα ὁριζόντιο τραπέζι τοποθετοῦμε τό σῶμα Α (σχ. 4.1ζ), πού ἔχει σχῆμα παραλληλεπιπέδου, κατά τέτοιο τρόπο ὥστε νά ἐφάπτεται μέ τό τραπέζει ἡ πλευρά του E_1. Μέ ἕνα δυναμόμετρο σύρομε τό σῶμα Α, ὥστε νά ὀλισθήσει ἐπάνω στό τραπέζι μέ ταχύτητα σταθερή. Ἡ ἔνδειξη τότε τοῦ δυναμόμετρου μᾶς δίνει τό μέτρο τῆς δυνάμεως τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}_1$, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό τραπέζι στό σῶμα Α. Ἔστω ὅτι αὐτό εἶναι $T_1 = 5$ pont.

Ἄν τώρα, ἐπάνω στό ἴδιο τραπέζι τοποθετήσομε τό σῶμα Α (σχ. 4.1η), ἔτσι ὥστε νά ἐφάπτεται μέ τό τραπέζι ἡ πλευρά E_2 καί ἔπειτα σύρομε τό σῶμα μέ ἕνα δυναμόμετρο ὥστε νά ὀλισθήσει μέ ταχύτητα σταθερή, ἡ ἔνδειξη τοῦ δυναμόμετρου θά μᾶς δώσει τότε τό μέτρο τῆς δυνάμεως τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}_2$, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό τραπέζι στό σῶμα Α.

Διαπιστώνομε τότε ὅτι ἡ δύναμη τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}_2$ εἶναι ἴση μέ τήν $\vec{T}_1$ τοῦ προηγούμενου παραδείγματος, δηλαδή:

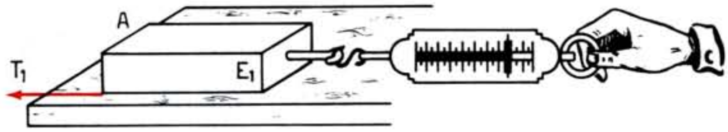
$$T_2 = T_1 = 5 \text{ pont}$$

Ἔτσι ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ δύναμη τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας συνεπαφῆς τῶν δύο σωμάτων.

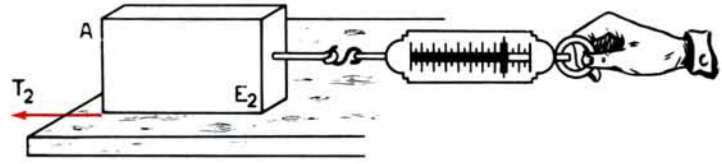
2) Τό μέτρο τῆς δυνάμεως τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι ἀνάλογο πρός τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}_K$ πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τῶν σωμάτων.

Ἔστω ὅτι ἕνα σῶμα Α (σχ. 4.1θ) ἔχει βάρος $\vec{B}$, ὁπότε ἰσχύει $F_K = B$. Σύρομε τό Α μέ ἕνα δυναμόμετρο, μέ σταθερή ταχύτητα ὡς πρός τό τραπέζι, καί βρίσκομε ὅτι ἡ ἔνδειξη τοῦ δυναμόμετρου εἶναι ἔστω, F_1, ὁπότε ἰσχύει: $F_1 = T_1$.

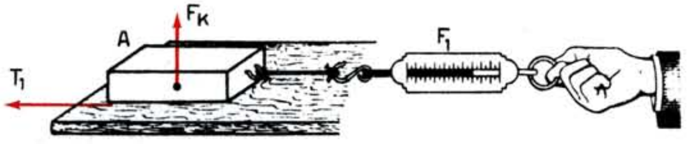
Ἄν τώρα (σχ. 4.1ι) σύρομε τό σῶμα 2Α (ὁπότε ἡ $F'_K = 2B = 2F_K$) μέ ἕνα δυναμόμετρο, μέ σταθερή ταχύτητα ὡς πρός τό τραπέζι, τότε ἡ ἔνδειξη τοῦ δυναμόμετρου F_2 θά εἶναι:



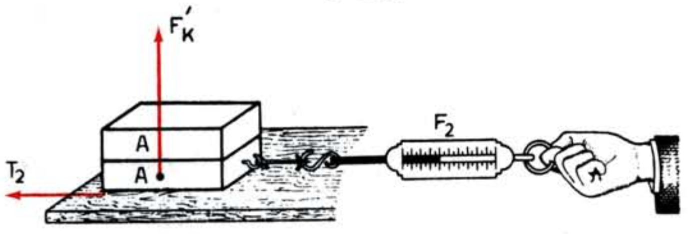
Σχ. 4.1ζ.



Σχ. 4.1η.



Σχ. 4.1θ.



Σχ. 4.1ι.

$$F_2 = T_2 = 2F_1 = 2T_1 \qquad \text{δηλαδή} \qquad T_2 = 2T_1$$

Ἑπομένως συμπεραίνομε ὅτι:

Ἄν διπλασιασθεῖ τό μέτρο τῆς δυνάμεως πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τῶν σωμάτων, διπλασιάζεται καί τό μέτρο τῆς δυνάμεως τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως. Ἤ, ἀλλιῶς, τό μέτρο τῆς δυνάμεως τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}$ εἶναι ἀνάλογο πρός τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}_K$ πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τῶν σωμάτων.

3) Ἡ δύναμη τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό ἕνα σῶμα ὡς πρός τό ἄλλο, ἐφόσον ἡ ταχύτητα δέν ὑπερβαίνει ὁρισμένο ὅριο.

4) Ἡ δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τῶν ἐπιφανειῶν πού τρίβονται καθώς καί ἀπό τό βαθμό λειάνσεώς τους.

Παρατήρηση:

Ἀπό τούς παραπάνω νόμους συνάγεται ὅτι ἡ δύναμη τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως $\vec{T}$ ἐξαρτᾶται:

α) Ἀπό τή δύναμη $\vec{F}_K$, ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς.

β) Ἀπό τή φύση τῶν ἐπιφανειῶν ἐπαφῆς.

γ) Ἀπό τό βαθμό λειάνσεως τῶν ἐπιφανειῶν ἐπαφῆς.

Ἐξίσωση τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως.

Οἱ νόμοι τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως ἐκφράζονται μέ τήν ἐξίσωση:

$$T = \eta \cdot F_K \qquad (1)$$

ὅπου: F_K τό μέτρο τῆς δυνάμεως πού ἀσκεῖται στό σῶμα καί εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς τῶν δύο σωμάτων,

η ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τῶν ἐπιφανειῶν ἐπαφῆς τῶν δύο σωμάτων καί τό βαθμό λειάνσεώς τους.

Προέλευση τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως.

Οἱ ἐπιφάνειες τῶν σωμάτων παρουσιάζουν ἀνωμαλίες, δηλαδή ἐσοχές καί ἐξοχές. Γι αὐτό ὅταν δύο σώματα ἐφάπτονται, οἱ ἐξοχές τοῦ ἑνός εἰσχωροῦν στίς ἐσοχές τοῦ ἄλλου καί παρεμποδίζουν τήν ὀλίσθηση. Γιά νά ὑπερνικήσομε τήν ἀντίσταση πού προέρχεται ἀπό τήν ἐμπλοκή αὐτή τῶν ἐσοχῶν καί τῶν ἐξοχῶν τῶν δύο ἐπιφανειῶν, πρέπει νά ἀσκήσομε δύναμη. Αὐτή ἡ ἀντίσταση ***πού προέρχεται ἀπό τήν ἐμπλοκή τῶν ἐσοχῶν καί ἐξοχῶν τῶν δύο ἐπιφανειῶν*** εἶναι στήν οὐσία ἡ δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως.

4.2 Στατική τριβή.

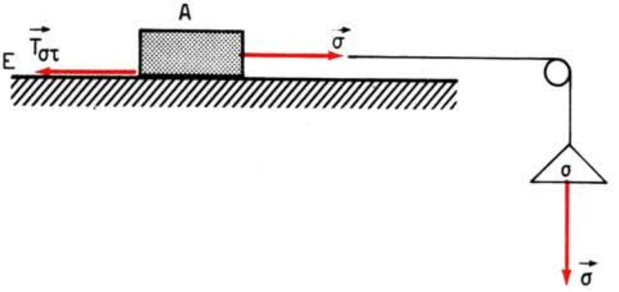
Δυνάμεις τριβῆς ἐμφανίζονται καί ὅταν τά σώματα βρίσκονται σέ ἐπαφή καί τό ἕνα ΔΕΝ κινεῖται ὡς πρός τό ἄλλο, ἐφόσον ὅμως ἀσκοῦνται ἐπάνω τους δυνάμεις πού τείνουν νά κινήσουν τό ἕνα ὡς πρός τό ἄλλο.

Ἐπάνω στό δίσκο (σχ. 4.2α) βάζομε σταθμά σ (λιγότερα ἀπό ἐκεῖνα πού χρειάζονται γιά νά ἀρχίσει νά ὀλισθαίνει τό σῶμα Α), δηλαδή στό σῶμα Α ἀσκοῦμε τή δύναμη $\vec{\sigma}$, καί παρατηροῦμε ὅτι τό σῶμα αὐτό ἠρεμεῖ. Ἐπειδή στό σῶμα Α ἀσκεῖται ἡ δύναμη $\vec{\sigma}$ καί αὐτό ἠρεμεῖ, πρέπει ὁπωσδήποτε νά ἀσκεῖται ἐπάνω του καί μία ἄλλη δύναμη πού νά εἶναι ἀντίθετη πρός τή δύναμη $\vec{\sigma}$.

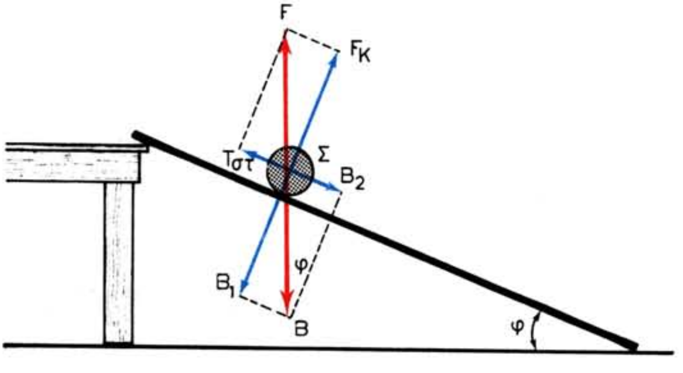
Πραγματικά, τό δάπεδο Ε ἀσκεῖ στό Α τή δύναμη $\vec{T}_{\sigma\tau}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετη πρός τή $\vec{\sigma}$ ($\vec{T}_{\sigma\tau} = -\vec{\sigma}$ καί $T_{\sigma\tau} = \sigma$). Τή δύναμη $\vec{T}_{\sigma\tau}$ τήν ὀνομάζομε ***δύναμη τῆς στατικῆς τριβῆς.***

Ἔστω ὅτι ἐπάνω σέ ἕνα κεκλιμένο ἐπίπεδο τοποθετοῦμε ἕνα σῶμα Σ (σχ. 4.2β). Ἄν ἡ γωνία φ εἶναι μικρότερη ἀπό μιά ὁρισμένη τιμή, τότε τό σῶμα Σ ἠρεμεῖ ἐπάνω στό κεκλιμένο ἐπίπεδο, γιατί αὐτό ἀσκεῖ στό Σ τή δύναμη $\vec{T}_{\sigma\tau}$, πού τήν ὀνομάζομε ***δύναμη τῆς στατικῆς τριβῆς.***

Πραγματικά, στό σῶμα Σ ἀσκοῦνται δύο δυνάμεις: Τό βάρος του $\vec{B}$ καί ἡ $\vec{F}$ πού ἐξασκεῖται ἀπό τό κεκλιμένο ἐπίπεδο.



Σχ. 4.2α.



Σχ. 4.2β.

Τό βάρος $\vec{B}$ ἀναλύεται σέ δύο συνιστῶσες:

Τή $B_1 = B\ .\ \text{συνφ}$ καί τή $B_2 = B\ .\ \text{ημφ}$.

῾Η δύναμη $\vec{F}$ ἀναλύεται στή $\vec{F}_K$ καί στή $\vec{T}_{\sigma\tau}$. ῾Η $\vec{F}_K$ ἐξουδετερώνει τή $\vec{B}_1$, δηλαδή εἶναι:

$$\vec{F}_K = -\vec{B}_1 \qquad \text{καί} \qquad F_K = B\ .\ \text{συνφ} \tag{1}$$

῾Η $\vec{T}_{\sigma\tau}$ ἐξουδετερώνει τή $\vec{B}_2$, δηλαδή εἶναι:

$$\vec{T}_{\sigma\tau} = -\vec{B}_2 \qquad \text{καί} \qquad T_{\sigma\tau} = B\ .\ \text{ημφ} \tag{2}$$

Δηλαδή: ἡ $\vec{B}_2$ δέν προκαλεῖ ὀλίσθηση τοῦ σώματος ἐπάνω στό κεκλιμένο ἐπίπεδο, γιατί τό κεκλιμένο ἐπίπεδο ἀσκεῖ στό σῶμα τήν $\vec{T}_{\sigma\tau}$ πού εἶναι ἀντίθετή της. Ὥστε:

Ὅταν θά λέμε δύναμη στατικῆς τριβῆς θά ἐννοοῦμε τή δύναμη πού ἐξασκεῖται σέ ἕνα σῶμα Α ἀπό ἕνα ἄλλο σῶμα Β, μέ τό ὁποῖο βρίσκεται σέ ἐπαφή καί ἠρεμεῖ ὡς πρός αὐτό, ἐφόσον ἀσκεῖται ἐπάνω του (στό Α) μιά δύναμη πού τείνει νά τό κινήσει ὡς πρός τό Β.

Παρατήρηση:

῾Επειδή τά σταθμά (σ) (σχ. 4.2α) καί ἡ γωνία (φ) (σχ. 4.2β) εἶναι μικρότερα ἀπό τά σταθμά καί τή γωνία πού θά ἄρχιζε ἡ ὀλίσθηση τῶν σωμάτων Α καί Σ, σημαίνει ὅτι ἡ στατική τριβή τους $\vec{T}_{\sigma\tau}$ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν τριβή ὀλισθήσεως τους $\vec{T}_{o\lambda}$.

Γενικά, ἡ στατική τριβή μπορεῖ νά πάρει τιμές ἀπό μηδέν (π.χ. ὅταν στό δίσκο δέν βάλομε καθόλου σταθμά) μέχρι τήν τιμή τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως. Δηλαδή ἰσχύει ἡ σχέση:

$$T_{\sigma\tau} < T_{o\lambda} = \eta F_K$$

4.3 Τριβή κυλίσεως — συντελεστής τριβῆς κυλίσεως.

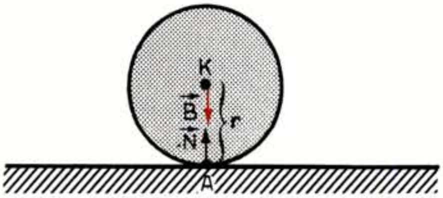
Γενικά.

1) Στόν κύλινδρο τοῦ σχήματος 4.3α ἀσκοῦνται οἱ ἑξῆς δυνάμεις:

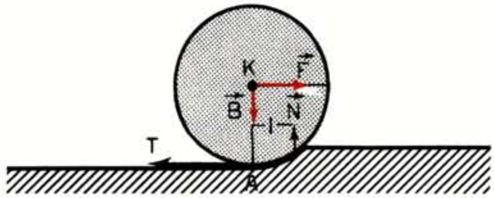
α) Τό βάρος τοῦ $\vec{B}$, καί

β) ἡ δύναμη $\vec{N}$ πού ἐξασκεῖται ἀπό τό δάπεδο.

Οἱ δύο δυνάμεις $\vec{B}$ καί $\vec{N}$ εἶναι ἀντίθετες ($\vec{B} = -\vec{N}$), ἐπομένως ὁ κύλινδρος ἰσορροπεῖ.



Σχ. 4.3α.



Σχ. 4.3β.

2) Στόν κύλινδρο τοῦ σχήματος 4.3β ἀσκοῦνται οἱ ἑξῆς δυνάμεις:

α) Τό βάρος του $\vec{B}$,

β) ἡ δύναμη $\vec{F}$ (τήν ὁποία ἐμεῖς ἐξασκοῦμε),

γ) ἡ δύναμη $\vec{N}$ πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς καί τήν ἐξασκεῖ τό δάπεδο καί

δ) Ἡ δύναμη $\vec{T}$ πού βρίσκεται στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς καί τήν ἐξασκεῖ τό δάπεδο.

Ἄν πάρομε τίς ροπές τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὡς πρός ἕναν ἄξονα, ἔστω τόν Α (στιγμιαῖο), τότε ἔχομε:

$$M_1 = F \,.\, R$$

$$M_2 = T \,.\, 0 = 0$$

$$M_3 = B \,.\, 0 = 0$$

$$M_4 = N \,.\, l$$

Δηλαδή παρατηροῦμε ὅτι:

Ὅταν στόν κύλινδρο ἀσκοῦμε μιά ροπή ($M_1 = F \,.\, R$), τότε καί τό δάπεδο ἀσκεῖ στόν κύλινδρο μιά ἀντίθετη ροπή ($M_4 = N \,.\, l$). Ἡ ροπή $M_1 = F \,.\, R$ πού ἐμεῖς ἀσκοῦμε τείνει νά κυλίσει τόν κύλινδρο ἐπάνω στό δάπεδο, ἐνῶ ἡ ροπή $M_4 = N \,.\, l$ πού τό δάπεδο ἀσκεῖ στόν κύλινδρο ἐμποδίζει τόν κύλινδρο νά κυλίσει.

Ἐπομένως: Γιά νά κυλίσει ὁ κύλινδρος στό δάπεδο, πρέπει νά ἀσκήσομε ἐπάνω του μιά ροπή τέτοια πού νά ἐξουδετερώσει τή ροπή πού τό δάπεδο ἀσκεῖ στόν κύλινδρο.

Ἄν ἡ ροπή (M_1) τήν ὁποία ἀσκοῦμε ἐπάνω στόν κύλινδρο εἶναι ἀντίθετη μέ τή ροπή (M_4) τήν ὁποία τό δάπεδο ἀσκεῖ ἐπάνω στόν κύλινδρο, τότε ὁ κύλινδρος κυλίεται ἐπάνω στά δάπεδο ἰσοταχῶς.

Τότε ἰσχύει ἡ σχέση:

$$M_1 = M_4 \qquad \text{ἤ} \qquad F \cdot R = N \cdot l$$

Τή ροπή (M_4) τῆς δυνάμεως, πού ἀσκεῖ τό δάπεδο στόν κύλινδρο (κυλιόμενο σῶμα) ὡς πρός τόν στιγμιαῖο ἄξονα Α, ὅταν ὁ κύλινδρος κυλίεται ἐπάνω στό δάπεδο ἰσοταχῶς καί ἡ ὁποία (ροπή) ἀντιστέκεται στήν κύλισή του, τήν ὀνομάζομε τριβή κυλίσεως ἤ ροπή τῆς τριβῆς κυλίσεως.

Σημείωση.

Τό μῆκος l ὅταν ὁ κύλινδρος κυλίεται ***ἰσοταχῶς*** ὀνομάζεται ***συντελεστής τριβῆς κυλίσεως καί τό μετρᾶμε μέ μονάδες μήκους.***

Ὁ συντελεστής τριβῆς κυλίσεως δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή $\vec{N}$. ***Ἐξαρτᾶται*** μόνο ἀπό τήν πλαστικότητα τῆς ὕλης τοῦ κυλίνδρου καί τοῦ ὑποστηρίγματος ἤ, ὅπως συνήθως λέμε, ἀπό τή φύση τῶν δύο ἐφαπτόμενων ἐπιφανειῶν.

Παρατήρηση:

Ὅλα τά παραπάνω ἰσχύουν μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ δύναμη $\vec{T}$ εἶναι τόση ὥστε νά μή γίνεται ὀλίσθηση τοῦ κυλίνδρου.

Προέλευση τῆς τριβῆς κυλίσεως.

Ὅταν στόν κύλινδρο δέν ἀσκεῖται δύναμη ($\vec{F}$) τέτοια πού νά τείνει νά τόν κυλίσει ἐπάνω στό ὑποστήριγμά του (σχ. 4.3α), τότε τό ὑποστήριγμα ἀσκεῖ στόν κύλινδρο μιά δύναμη $\vec{N}$ πού εἶναι κάθετη στό κοινό ἐπίπεδο ἐπαφῆς καί διέρχεται ἀπό τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου· ἀκόμη εἶναι ἀντίθετη τοῦ βάρους τοῦ σώματος, δηλαδή:

$$\vec{B} = -\vec{N}$$

Ὅταν στόν κυλίνδρο (σχ. 4.3β) ἐφαρμόζομε μιά δύναμη ($\vec{F}$), ἡ ὁποία τείνει νά τόν κυλίσει ἐπάνω στό δάπεδο, τότε τό δάπεδο παθαίνει μιά ἐλαφρά κοίλωση καί ὁ κύλινδρος μιά ἐλαφρά ἄμβλυνση. Ἑπομένως ὁ κύλινδρος κατά τήν κύλιση εἶναι ὑποχρεωμένος νά ἀναρριχᾶται συνεχῶς σέ μιά μικρή κλίση.

Ἡ συνέπεια αὐτοῦ, δηλαδή αὐτῶν τῶν παραμορφώσεων εἶναι:

1) Ἡ δύναμη $\vec{T}$ καί
2) ἡ παράλληλη μετατόπιση τῆς $\vec{N}$ κατά l, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἡ $\vec{M}_K$ ὀφείλεται στή μετατόπιση l. Ἐπειδή ὅμως ἡ l ὀφείλεται στίς πιό πάνω παραμορφώσεις ἄρα σέ αὐτές θά ὀφείλεται καί ἡ $\vec{M}_K$.

4.4 Δύναμη ἕλξεως — συντελεστής ἕλξεως.

Γιά νά κυλίεται ὁ κύλινδρος (σχ. 4.3β) (ἤ ἕνας τροχός) ***ἰσοταχῶς*** πρέπει νά ἀσκεῖται στόν ἄξονά του μιά δύναμη $\vec{F}$ τέτοια, ὥστε ἡ ροπή της $\vec{M}_1$ ὡς πρός τό στιγμιαῖο ἄξονα Α νά εἶναι ἀντίθετη πρός τήν τριβή κυλίσεως $\vec{M}_4$, δηλαδή: $\vec{M}_1 = -\vec{M}_4$ καί:

$$M_1 = M_4 \qquad ἤ \qquad F \, . \, R = N \, . \, l \qquad (1)$$

ὅπου: R ἡ ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου (ἤ τοῦ τροχοῦ),

l, ὁ συντελεστής τῆς τριβῆς κυλίσεως,

$\vec{N}$ ἡ δύναμη πού τό δάπεδο ἀσκεῖ στόν κύλινδρο (ἤ στόν τροχό) καί εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς.

Τή δύναμη $\vec{F}$ τήν ὀνομάζομε δύναμη ἕλξεως.

Δηλαδή:

Δύναμη ἕλξεως ὀνομάζομε τή δύναμη ἐκείνη τήν ὁποία πρέπει νά ἐφαρμόσομε στόν ἄξονα κυλίνδρου (ἤ τροχοῦ), ὥστε αὐτός νά κυλίεται ἰσοταχῶς.

Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει:

$$F = \frac{l}{R} \, . \, N \qquad (2)$$

Ἐπειδή τό ὑποστήριγμα ἀσκεῖ στόν κύλινδρο (ἤ στόν τροχό) τή δύναμη $\vec{N}$ κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς, ἕπεται ὅτι καί ὁ κύλινδρος (ἤ ὁ τροχός) ἀσκεῖ στό ὑποστήριγμα μιά δύναμη $\vec{N}'$ πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ἐπαφῆς καί ἀντίθετη πρός τή $\vec{N}$.

Ἔτσι ἡ (2) γράφεται:

$$F = \frac{l}{R} \, . \, N' \qquad (3)$$

Στήν περίπτωση πού ὁ κύλινδρος (ἤ ὁ τροχός) κυλίεται ἐπάνω σέ ὁριζόντιο δάπεδο, ἡ $\vec{N}'$ εἶναι τό ἴδιο τό βάρος του $\vec{B}$, δηλαδή: $\vec{N}' = \vec{B}$.

Ὁπότε ἡ (3) γράφεται:

$$F = \frac{l}{R} \, . \, B \qquad (4)$$

Ἀπό τήν (3) συμπεραίνομε τά ἀκόλουθα:

1) Ἡ δύναμη ἕλξεως ἑνός κυλίνδρου (ἤ τροχοῦ), δηλαδή ἡ δύναμη πού πρέπει νά ἀσκήσομε στόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου (ἤ τοῦ τροχοῦ) γιά νά κυλίεται ἰσοταχῶς, εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη πού ἀσκεῖ ὁ κύλινδρος (ἤ ὁ τροχός) καθέτως στό ὑποστήριγμά του. Στήν περίπτωση πού ἔχομε ὁριζόντιο ὑποστήριγμα, ἡ δύναμη εἶναι ἀνάλογη πρός τό βάρος του (σχέση 4). Δηλαδή:

   Ὅσο μεγαλύτερο εἶναι τό βάρος τοῦ κυλίνδρου (ἤ τοῦ τροχοῦ) τόσο μεγαλύτερη δύναμη πρέπει νά ἀσκήσομε στόν ἄξονά του, ὥστε αὐτός νά κυλίεται ἰσοταχῶς.

2) Ἡ δύναμη ἕλξεως ἑνός κυλίνδρου (ἤ τροχοῦ) εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρός τήν ἀκτίνα του R δηλαδή:

   Ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ τροχοῦ, τόσο μικρότερη δύναμη πρέπει νά ἀσκήσομε στόν ἄξονά του, ὥστε νά κυλίεται ἰσοταχῶς.

3) Ἡ δύναμη ἕλξεως ἑνός κυλίνδρου (ἤ τροχοῦ) εἶναι ἀνάλογη πρός τό συντελεστή τῆς τριβῆς κυλίσεως.

Συνεπῶς, γιά νά κινηθεῖ ἰσοταχῶς ἕνα τροχοφόρο ὄχημα ἐπάνω σέ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο πρέπει στούς ἄξονες τῶν τροχῶν του νά ἀσκηθεῖ συνολική δύναμη ἕλξεως:

$$F_{o\lambda} = \frac{l}{R} \cdot B \qquad (5)$$

ὅπου: R ἡ ἀκτίνα τῶν τροχῶν του

$\vec{B}$ τό συνολικό βάρος τῶν τροχῶν, τοῦ ὀχήματος καί τοῦ φορτίου του.

Ἀπό τή σχέση (5) παρατηροῦμε ὅτι ἡ δύναμη ἕλξεως ἑνός τροχοφόρου ὀχήματος ἐπάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο εἶναι:

α) Ἀνάλογη πρός τό συνολικό βάρος τοῦ ὀχήματος, δηλαδή: ὅσο μεγαλύτερο εἶναι τό βάρος τοῦ ὀχήματος καί τοῦ φορτίου του, τόσο μεγαλύτερη δύναμη πρέπει νά ἀσκήσομε γιά νά κινηθεῖ τό ὄχημα ἰσοταχῶς.

β) Ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρός τήν ἀκτίνα. Γι' αὐτό συνήθως στά κάρρα προτιμοῦνται τροχοί μεγάλης διαμέτρου.

γ) Ἀνάλογη πρός τό συντελεστή τριβῆς κυλίσεως l. Γι' αὐτό χρησιμοποιοῦνται σιδερένιοι τροχοί πού κυλίονται ἐπάνω σέ σιδηροτροχιά.

Συντελεστής ἕλξεως.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχομε τή σχέση:

$$F_{o\lambda} = \frac{l \cdot N'}{R} \qquad (6)$$

ὅπου: $F_{o\lambda}$ ἡ δύναμη ἕλξεως ἑνός τροχοφόρου ὀχήματος

N′ ἡ δύναμη τήν ὁποία ἀσκεῖ τό ὄχημα κάθετα στό δάπεδο.

Ἀπό αὐτή ἔχομε:

$$\frac{F_{o\lambda}}{N'} = \frac{l}{R} \qquad (7)$$

Τό πηλίκο τῆς δυνάμεως ἕλξεως ἑνός τροχοφόρου ὀχήματος πρός τή δύναμη πού ἀσκεῖ τό ὄχημα κάθετα πρός τό δάπεδο τό ὀνομάζομε ***συντελεστή ἕλξεως (φ) τοῦ ὀχήματος.*** Δηλαδή:

$$\varphi = \frac{F_{o\lambda}}{N'} \qquad (8)$$

Ἀπό τή σχέση (8) προκύπτει ἡ σχέση (9):

$$F_{o\lambda} = \varphi N' \qquad (9)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (7) καί (8) προκύπτει ἡ (10):

$$\varphi = \frac{l}{R} \qquad (10)$$

Ἀπό τή σχέση (9) προκύπτει ὅτι ἡ δύναμη ἕλξεως εἶναι ἀνάλογη πρός τό συντελεστή τῆς ἕλξεως φ. Ἀπό τήν (10) προκύπτει ὅτι ὁ φ εἶναι:

Τό πηλίκο τοῦ συντελεστῆ τριβῆς κυλίσεως (*l*) διά τῆς ἀκτίνας (R) τῶν τροχῶν τοῦ ὀχήματος. Ἑπομένως ὁ φ ἐξαρτᾶται ἀπό τήν πλαστικότητα τῶν δύο ἐφαπτόμενων ἐπιφανειῶν (*l*) καί ἀπό τήν ἀκτίνα τῶν τροχῶν (R).

Ὁ συντελεστής ἕλξεως ἑνός ὀχήματος μέ σιδερένιους τροχούς ἐπάνω σέ κοινό δρόμο εἶναι φ = 0,03, ἐνῶ ἐπάνω σέ σιδηροτροχιά εἶναι φ = 0,004.

Ὁ συντελεστής ἕλξεως εἶναι ***καθαρός ἀριθμός, ἀφοῦ εἶναι πηλίκο δύο δυνάμεων*** (σχέση 8).

Παρατήρηση:

Ἄν θέλομε τό ὄχημα νά ***ὀλισθαίνει*** ἰσοταχῶς πρέπει νά ἀσκήσομε δύναμη:

$$F_{\text{ολισθ}} = T = \eta \,.\, F_K = \eta \,.\, N$$

Ἄν θέλομε τό ὄχημα ***νά κυλίεται*** ἰσοταχῶς, πρέπει νά ἀσκήσομε δύναμη:

$$F_{\text{κυλισ}} = \varphi \,.\, N$$

Ἐπειδή ὁ συντελεστής ἕλξεως εἶναι πολύ μικρότερος ἀπό τό συντελεστή τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως ($\varphi < \eta$), ἕπεται ὅτι:

$$F_{\text{κυλισ}} < F_{\text{ολισθ}}$$

Στή σχέση $F_{\text{κυλισ}} < F_{\text{ολισθ}}$ στηρίζεται τό ὅτι προτιμοῦμε νά κυλᾶμε ἕνα σῶμα παρά νά τό σύρομε.

Σημείωση:

Συνήθως γίνεται τό ἑξῆς σφάλμα:

Ἀντί νά λέμε ὅτι ὁ συντελεστής ἕλξεως εἶναι μικρότερος ἀπό τό συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως, λέμε ὅτι ***ὁ συντελεστής τριβῆς κυλίσεως εἶναι μικρότερος ἀπό τό συντελεστή τριβῆς ὀλισθήσεως.***

(Σύγκριση τοῦ συντελεστῆ τριβῆς κυλίσεως καί τοῦ συντελεστῆ τριβῆς ὀλισθήσεως δέν εἶναι νοητή. Γιατί ὁ πρῶτος ἔχει διαστάσεις μήκους, ἐνῶ ὁ δεύτερος εἶναι καθαρός ἀριθμός).

Ἐπίσης συνήθως γίνεται καί τό ἑξῆς σφάλμα:

Ἀντί νά λέμε ὅτι ἡ δύναμη ἕλξεως εἶναι μικρότερη ἀπό τή δύναμη πού ἀπαιτεῖται γιά νά ὑπερνικηθεῖ ἡ τριβή ὀλισθήσεως, λέμε ὅτι ***ἡ τριβή κυλίσεως εἶναι μικρότερη ἀπό τήν τριβή ὀλισθήσεως.***

(Σύγκριση τριβῆς ὀλισθήσεως καί τριβῆς κυλίσεως δέν εἶναι νοητή, γιατί ἡ πρώτη εἶναι δύναμη καί ἡ δεύτερη εἶναι ροπή).

4.5 Σημασία τῆς τριβῆς.

Κατά τήν ὀλίσθηση ἡ τριβή ὀλισθήσεως ἀντιστέκεται στήν κίνηση καί καταναλώνει ἔργο.

Ἐπίσης κατά τήν κύλιση ἡ τριβή κυλίσεως ἀντιστέκεται στήν κύλιση καί καταναλώνει ἔργο.

Τό ἔργο τῆς τριβῆς μετατρέπεται σέ θερμότητα πού θερμαίνει τίς τριβόμενες ἐπιφάνειες καί, ἄν δέν λάβομε σχετική πρόνοια, μπορεῖ νά καταστρέψει τίς ἐπιφάνειες ἐπαφῆς.

Ἡ τριβή ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα καί τή φθορά τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι:

Ἡ τριβή εἶναι ἐπιζήμια, ἀλλά ὑπάρχουν περιπτώσεις πού εἶναι ἀπαραίτητη. Χωρίς τριβή π.χ. θά ἦταν ἀδύνατη ἡ λειτουργία τῶν φρένων, ἡ κίνηση τῶν ὀχημάτων, ἡ μετάδοση κινήσεων μέ ἱμάντες κλπ.

Ἀσκήσεις.

1. *Ἐπάνω σέ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα $m = 2$ kg κινεῖται μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς ὁριζόντιας δυνάμεως F μέ σταθερή ταχύτητα. Πόση εἶναι ἡ δύναμη τῆς τριβῆς T πού ἀντιδρᾶ στήν κίνηση, ἄν οἱ τριβόμενες ἐπιφάνειες παρουσιάζουν συντελεστή τριβῆς $\eta = 0{,}2$ ($g = 10$ m/sec^2);*

2. *Ἕνα σιδηροδρομικό ὄχημα ἔχει βάρος $B = 50.000$N καί ὁ συντελεστής ἕλξεως εἶναι $\varphi = 0{,}004$. Πόση εἶναι ἡ δύναμη ἕλξεως, ὅταν τό ὄχημα κινεῖται σέ ὁριζόντιες σιδηροτροχιές;*

3. *Ὅταν τό μῆκος τῆς ὁμοιογενοῦς ἀλυσίδας, πού βρίσκεται ἐπάνω στό ὁριζόντιο τραπέζι, εἶναι 70 cm καί τό μῆκος πού κρέμεται κατακόρυφα 30 cm, τότε ἡ ἀλυσίδα ἠρεμεῖ. Νά βρεθεῖ ὁ συντελεστής τριβῆς μεταξύ τῆς ἀλυσίδας καί τοῦ τραπεζιοῦ.*

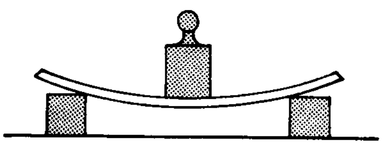
4. *Ὁ ὁδηγός αὐτοκινήτου ἀντιλαμβάνεται κίνδυνο, πατᾶ φρένο, καί τό αὐτοκίνητο σταματᾶ μετά ἀπό χρόνο $t = 12{,}5$ sec. Ἄν τή στιγμή πού πάτησε φρένο ὁ ὁδηγός τό αὐτοκίνητο εἶχε ταχύτητα $\upsilon = 90$ km/h, νά βρεθεῖ τό ἔργο E τῆς τριβῆς. Ἡ μάζα τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι $m = 2000$ kg.*

D. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

4.6 Ἐλαστικά σώματα — Πλαστικά σώματα — Νόμος τοῦ Hook — Ἑλκυσμός.

Τά στερεά σώματα μποροῦν νά παραμορφωθοῦν ἐξαιτίας τῆς ἐπιδράσεως ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἤ ροπῶν, δηλαδή νά ἀλλάζουν σχῆμα ἤ ὄγκο ἤ καί τά δύο.

Ἄν μιά ξύλινη ράβδο (σχ. 4.6α) πού στηρίζεται στά δυό της ἄκρα τήν πιέσομε, θά καμφθεῖ (θά ἀλλάξει σχῆμα, θά παραμορφωθεῖ). Ἄν πιέσομε ἕνα τόπι ἀπό καουτσούκ, καί αὐτό θά παραμορφωθεῖ.



Σχ. 4.6α.

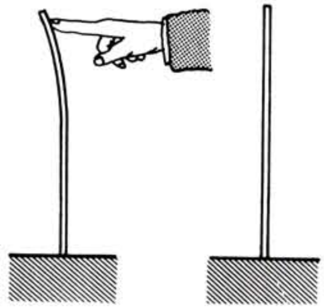
Ἄν ἐξαλειφθεῖ ἡ αἰτία πού προκάλεσε τήν παραμόρφωση ἑνός σώματος, τό σῶμα ἤ θά ἀποκτήσει πάλι ἀπό μόνο του τό ἀρχικό του σχῆμα καί τόν ὄγκο του ἤ θά παραμείνει παραμορφωμένο.

Ἡ ἰδιότητα πού ἔχουν τά σώματα νά ἀνακτοῦν ἀπό μόνα τους τό ἀρχικό τους σχῆμα καί τόν ὄγκο τους ***ὀνομάζεται ἐλαστικότητα.***

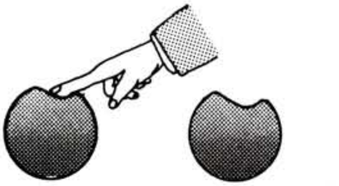
Μιά παραμόρφωση ἑνός σώματος τήν ὀνομάζομε ἐλαστική, ὅταν ἐξαλείφεται τελείως μόλις πάψουν νά ἐνεργοῦν στό σῶμα οἱ δυνάμεις καί οἱ ροπές πού τήν προκάλεσαν.

Τά σώματα πού ἀπό μόνα τους ἀνακτοῦν τό ἀρχικό τους σχῆμα καί τόν ὄγκο τους, ὅταν πάψουν νά ἐνεργοῦν ἐπάνω τους οἱ δυνάμεις ἤ οἱ ροπές πού τά παραμόρφωσαν, ὀνομάζονται τελείως ἐλαστικά ἤ ἁπλῶς ἐλαστικά σώματα.

Ἔτσι τό ἔλασμα τοῦ σχήματος 4.6β εἶναι ἕνα ἐλαστικό σῶμα καί ἡ παραμόρφωση πού ἔπαθε εἶναι ἐλαστική παραμόρφωση, γιατί ἀνακτᾶ τελείως τό ἀρχικό του σχῆμα ἄν σταματήσομε νά τό σπρώχνομε.



Σχ. 4.6β.



Σχ. 4.6γ.

Μιά παραμόρφωση ἑνός σώματος τήν ὀνομάζομε πλαστική ὅταν δέν ἐξαλείφεται τελείως μόλις πάψουν νά ἐνεργοῦν στό σῶμα οἱ δυνάμεις ἤ οἱ ροπές πού τήν προκάλεσαν.

Τά σώματα πού δέν ἀνακτοῦν ἀπό μόνα τους τό ἀρχικό τους σχῆμα καί τόν ὄγκο τους, ὅταν πάψουν νά ἐνεργοῦν ἐπάνω τους οἱ δυνάμεις ἤ οἱ ροπές πού τά παραμόρφωσαν, ὀνομάζονται πλαστικά σώματα.

Ἔτσι ἡ σφαίρα ἀπό πλαστελίνη (σχ. 4.6γ) εἶναι πλαστικό σῶμα καί ἡ παραμόρφωση πού ἔπαθε εἶναι πλαστική, γιατί δέν ἀνακτᾶ τό ἀρχικό της σχῆμα ἄν σταματήσομε νά τήν συμπιέζομε.

Νόμος τοῦ Χούκ (Hooke).

Ὁ νόμος τοῦ Χούκ ὁρίζει τά ἑξῆς:

Οἱ ἐλαστικές παραμορφώσεις τῶν σωμάτων εἶναι ἀνάλογες πρός τίς δυνάμεις ἤ τίς ροπές πού τίς προκαλοῦν.

Τονίζομε ἰδιαίτερα ὅτι ὁ νόμος τοῦ Χούκ ἰσχύει μόνο γιά τίς ἐλαστικές παραμορφώσεις τῶν σωμάτων, μόνο δηλαδή γιά ἐκεῖνες πού ἐξαλείφονται πλήρως ὅταν πάψουν νά ἐνεργοῦν οἱ αἰτίες πού τίς προκάλεσαν.

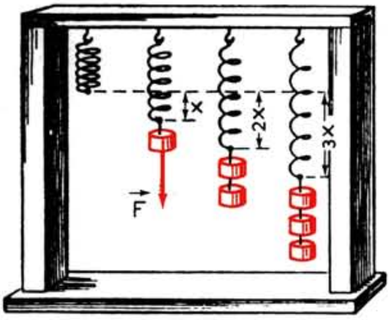
Ἄν σέ ἕνα ἐλατήριο (σχ. 4.6δ) ἀσκηθεῖ μιά δύναμη $\vec{F}$, τότε αὐτό ἐπιμηκύνεται κατά x, τόσο πού νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{F = Dx}$$

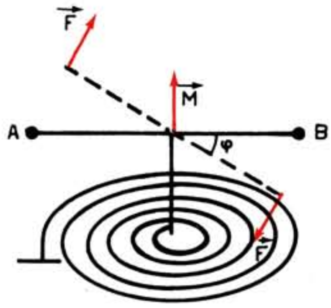
ὅπου: D μιά σταθερά ἡ ὁποία ὀνομάζεται κατευθύνουσα δύναμη τοῦ ἐλατηρίου.

Δηλαδή: Ἡ ἐπιμήκυνση x εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη $\vec{F}$ πού τήν προκάλεσε.

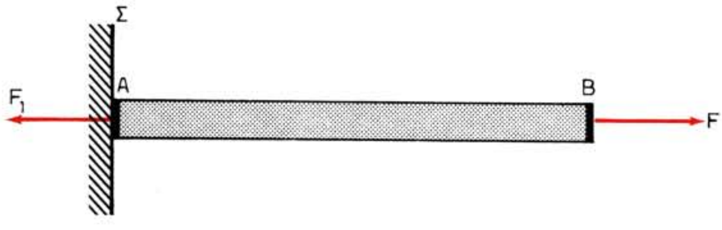
Ἄν σέ ἕναν ἀλτήρα (σχ. 4.6ε) ἐφαρμόσομε μιά ροπή $\vec{M}$, τότε αὐτός στρέφεται κατά γωνία φ τέτοια, πού νά ἰσχύει ἡ σχέση:



Σχ. 4.6δ.



Σχ. 4.6ε.



Σχ. 4.6στ.

$$\boxed{M = D^* \phi}$$

ὅπου: D* μία σταθερά ἡ ὁποία ὀνομάζεται κατευθύνουσα ροπή τοῦ ἐλατηρίου.

Δηλαδή: Ἡ γωνία φ εἶναι ἀνάλογη πρός τή ροπή Μ.

Ἑλκυσμός.

1) Γενικά.

Ἑλκυσμός ὀνομάζεται ἡ παραμόρφωση ἑνός σώματος, κατά τήν ὁποία τό σχῆμα του δέν ἀλλάζει, ἀλλά αὐξάνεται μόνο τό μῆκος του.

Ὁ ἑλκυσμός ἑνός σώματος προκαλεῖται ἀπό δύο δυνάμεις πού τείνουν νά διασπάσουν τό σῶμα.

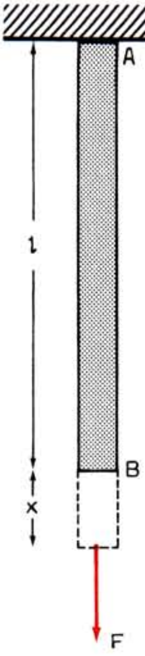
Στή ράβδο τοῦ σχήματος 4.6στ ἀσκεῖται ἡ δύναμη $\vec{F}$, πού ἐμεῖς ἐφαρμόζομε στήν τομή Β τῆς ράβδου, καί ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ ($\vec{F}_1 = -\vec{F}$) πού ἀσκεῖ τό στήριγμα Σ στήν τομή Α τῆς ράβδου.

2) Νόμος τοῦ Χούκ στόν ἑλκυσμό — Μέτρο ἐλαστικότητας.

Ἔστω ὅτι ἔχομε μιά χαλύβδινη ράβδο (σύρμα) μέ μῆκος l καί διατομή S (σχ. 4.6ζ). Μέ τό ἕνα ἄκρο της (Α) τή στερεώνομε κάπου καί στό ἄλλο της ἄκρο (Β) ἐφαρμόζομε μιά δύναμη $\vec{F}$ τέτοια, πού νά εἶναι ὁμοιόμορφα μοιρασμένη σέ ὅλη τήν ἐπιφάνεια τῆς διατομῆς τῆς ράβδου.

Τότε παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

1) Ἡ ράβδος ἐπιμηκύνεται, ἔστω κατά x, χωρίς ὅμως καί νά ἀλλάξει τό σχῆμα της, παθαίνει δηλαδή ἑλκυσμό (τέντωμα).



Σχ. 4.6ζ.

2) Ἡ ἐπιμήκυνση x εἶναι τέτοια, πού μᾶς δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$x = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \qquad (1)$$

ὅπου: E εἶναι μιά σταθερή (ἕνας συντελεστής) πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑλικό τῆς ράβδου καί ὀνομάζεται μέτρο ἐλαστικότητας ἤ μέτρο τοῦ Γιούγκ.

Ἡ σχέση (1) ἐκφράζει τό νόμο τοῦ Χούκ γιά τόν ἐλκυσμό. Πραγματικά, ἡ ἐπιμήκυνση x τῆς ράβδου εἶναι ἀνάλογη πρός τή δύναμη $\vec{F}$ (τήν αἰτία) πού τήν προκαλεῖ.

Ὅσο μεγαλύτερη τιμή ἔχει τό μέτρο ἐλαστικότητας τοῦ ὑλικοῦ ἀπό τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἕνα σῶμα τόσο δυσκολότερα ἐπιμηκύνεται τό σῶμα. Ἑπομένως:

Τό μέτρο ἐλαστικότητας ἑνός σώματος, μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς μέτρο τῆς ἀντιστάσεως πού προβάλλει τό σῶμα στίς ἐλαστικές παραμορφώσεις.

Σημείωση:

Δεχόμαστε ὅτι κατά τόν ἐλκυσμό τά σώματα ἐπιμηκύνονται μόνο, γιατί στήν πραγματικότητα ἡ παραμόρφωσή τους αὐτή συνοδεύεται καί ἀπό ἐλάττωση τῆς διατομῆς τους, γίνονται δηλαδή καί πιό λεπτά.

Τήν ἐλάττωση πού παθαίνει ἡ διατομή τῶν σωμάτων κατά τόν ἐλκυσμό τήν ὀνομάζομε ἐκλέπτυνση.

Ὅριο ἐλαστικότητας — Ὅριο θραύσεως.

Κανένα σῶμα δέν εἶναι ἀπόλυτα ἐλαστικό ἤ ἀπόλυτα πλαστικό.

Ἄν οἱ αἰτίες (δυνάμεις-ροπές) πού προκαλοῦν τήν παραμόρφωση ἑνός ἐλαστικοῦ σώματος εἶναι τέτοιες, ὥστε ἡ παραμόρφωσή του νά ὑπερβεῖ ὁρισμένο ὅριο, τότε ἡ παραμόρφωση γίνεται μερικῶς μόνιμη.

Τήν πιό μεγάλη παραμόρφωση, μετά άπό τήν όποία τό σῶμα μπορεῖ νά ἀνακτήσει ἀπό μόνο του τό ἀρχικό του σχῆμα καί τόν ὄγκο, μόλις πάψουν νά τό ἐπηρεάζουν οἱ αἰτίες πού προκάλεσαν τήν παραμόρφωσή του, τήν ὀνομάζομε ὅριο ἐλαστικότητας τῆς ἐλαστικῆς παραμορφώσεως τοῦ σώματος (δηλαδή μετά τήν παραμόρφωση αὐτή ἀρχίζουν μόνιμες παραμορφώσεις τοῦ σώματος).

Ἄν αὐξάνομε συνεχῶς τίς αἰτίες (δυνάμεις-ροπές) πού προκαλοῦν τήν παραμόρφωση ἑνός σώματος, τότε ἡ παραμόρφωση συνεχῶς αὐξάνεται καί ἔρχεται στιγμή πού γίνεται ἡ μεγαλύτερη πού μπορεῖ νά γίνει καί ὕστερα ἀπό αὐτή τό σῶμα θραύεται.

Ἡ μεγαλύτερη παραμόρφωση πού μπορεῖ νά πάθει ἕνα σῶμα χωρίς νά θραυσθεῖ ὀνομάζεται ὅριο θραύσεως.

Γ. ΕΞΟΔΟΣ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

4.7 Ταχύτητα διαφυγῆς — Περιφορά τοῦ σώματος γύρω ἀπό τή γῆ — Δορυφόροι.

Μόλις ἕνα σῶμα ἐκτοξευθεῖ ἀπό ἕνα σημεῖο πού βρίσκεται ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς, ἕλκεται ἀπό τή γῆ, γιατί βρίσκεται μέσα στό πεδίο βαρύτητας τῆς γῆς.

Ἑπομένως, γιά νά ἀπομακρυνθεῖ ἕνα σῶμα ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς, πρέπει νά ἐκτοξευθεῖ μέ τέτοια ταχύτητα, ὥστε νά ὑπερνικήσει τήν ἕλξη πού ἀσκεῖ ἐπάνω του ἡ γῆ.

Διακρίνομε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

1η) Ἡ ταχύτητα (υ) ἐκτοξεύσεως τοῦ σώματος εἶναι μικρότερη ἀπό 11,2 km/sec, δηλαδή $υ < 11{,}2$ km/sec.

Ἄν ἕνα σῶμα ἐκτοξευθεῖ μέ ὁποιαδήποτε γωνία ἐκτοξεύσεως (βολῆς) ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς μέ ταχύτητα $υ < 11{,}2$ km/sec, τότε τό σῶμα ἀφοῦ ἀνέλθει σέ ἕνα ὕψος ἐπάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς, θά ἐπανέλθει ὁπωσδήποτε στή γῆ.

2η) Ἡ ταχύτητα (υ) ἐκτοξεύσεως τοῦ σώματος εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 11,2 km/sec, δηλαδή: $υ > 11{,}2$ km/sec.

Ἄν ἕνα σῶμα ἐκτοξευθεῖ μέ ὁποιαδήποτε γωνία ἐκτοξεύσεως (βολῆς) ἀπό ἕνα σημεῖο πού βρίσκεται ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς μέ ταχύτητα $υ > 11{,}2$ km/sec, τότε τό σῶμα ΔΕΝ θά ἐπανέλθει στή γῆ.

Ὥστε ἄν ἕνα σῶμα ἐκτοξευθεῖ ἀπό σημεῖο πού βρίσκεται ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς, τότε ἤ θά ἐπανέλθει στή γῆ ($υ < 11{,}2$ km/sec) ἤ θά ἀπομακρυνθεῖ τελείως ἀπ' αὐτή ($υ > 11{,}2$ km/sec).

Ἡ ταχύτητα $\boxed{υ = 11{,}2 \text{ km/sec}}$ ὀνομάζεται ταχύτητα διαφυγῆς καί εἶναι πολύ μεγάλη.

Γι' αὐτό, ὅταν θέλομε νά ἀπομακρύνομε τελείως ἀπό τή γῆ ἕνα σῶμα τοῦ προσδίνομε τήν ταχύτητα αὐτή σταδιακά, χρησιμοποιώντας πυραύλους.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, γιά νά μπορέσει ἕνα σῶμα νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή γῆ, δηλαδή νά γίνει δορυφόρος της, πρέπει:

1) Νά ἐκτοξευθεῖ ἀπό σημεῖο πού βρίσκεται ἀρκετά ψηλά ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς,
2) ἡ ταχύτητα ἐκτοξεύσεώς του νά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς ($υ < υ_δ$), καί
3) ἡ ταχύτητα ἐκτοξεύσεώς του νά εἶναι τόσο μεγάλη, ὥστε νά μήν πέσει τό σῶμα στή γῆ.

Ἡ ταχύτητα, μέ τήν ὁποία πρέπει τό σῶμα νά ἐκτοξευθεῖ γιά νά μήν πέσει στή γῆ, ἐξαρτᾶται ἀπό τό πόσο ψηλά ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς εἶναι τό σημεῖο ἀπό τό ὁποίο γίνεται ἡ ἐκτόξευση.

Ἄν τό σημεῖο ἀπ' ὅπου γίνεται ἡ ἐκτόξευση δέν ἀπέχει πολύ ἀπ' τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς, τότε τό σῶμα, γιά νά μήν πέσει στή γῆ, θά πρέπει νά ἐκτοξευθεῖ μέ ταχύτητα τουλάχιστον $\boxed{8 \text{ km/sec}}$

Ἄν ἡ ταχύτητα ἐκτοξεύσεως τοῦ σώματος εἶναι 8 km/sec, τό σῶμα γράφει περιφέρεια κύκλου μέ κέντρο τή γῆ, ἄν ἡ ταχύτητα υ εἶναι $\boxed{8 \text{ km/sec} < υ < 11{,}2 \text{ km/sec}}$ τό σῶμα γράφει ἐλλειπτική τροχιά γύρω ἀπό τή γῆ.

Γιά νά καταστήσομε ἕνα σῶμα δορυφόρο τῆς γῆς, τό φέρνομε σέ ἕνα ὕψος ἐπάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς μέ τή βοήθεια ἑνός πυραύλου. Στό ὕψος αὐτό ὁ πύραυλος δίνει στό σῶμα τήν κατάλληλη ταχύτητα ἐκτοξεύσεως καί τότε ἐκεῖνο περιφέρεται γύρω ἀπό τή γῆ εἴτε σέ κυκλική εἴτε σέ ἐλλειπτική τροχιά.

Ἀπό τή στιγμή πού τό σῶμα ἀρχίζει νά κινεῖται σέ κυκλική ἤ σέ ἐλλειπτική τροχιά, κινεῖται ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του, τό ὁποῖο ἐνεργεῖ σάν κεντρομόλος δύναμη πού ἀπαιτεῖται γιά μιά τέτοια κίνηση.

Σήμερα κινοῦνται γύρω ἀπό τή γῆ πολλοί τεχνητοί δορυφόροι, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται κυρίως γιά τή μελέτη τῆς ἀτμόσφαιρας καί γιά τήν ἐξυπηρέτηση τῶν τηλεπικοινωνιῶν.

4.8 Ἀσκήσεις.

1. *Τεχνητός δορυφόρος ἔχει μάζα $m = 100$ kg καί περιφέρεται γύρω ἀπό τή γῆ σέ κυκλική τροχιά καί ὕψος $h = 100$ km. Ποία εἶναι ἡ ταχύτητά του $\vec{υ}$;*

Δεχόμαστε ὅτι ἡ ἀκτίνα τῆς γῆς εἶναι $R = 6370$ km καί ὅτι στό ὕψος h ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι $g = 9{,}81$ m/sec².

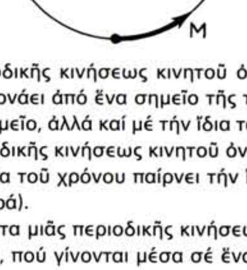
2. *Τεχνητός δορυφόρος ἔχει μάζα $m = 100$ kg καί περιφέρεται γύρω ἀπό τή γῆ σέ κυκλική τροχιά καί ὕψος $h = 1000$ km. Νά βρεθοῦν πόσα καύσιμα καίει ὁ δορυφόρος τήν ὥρα καί πόσο ἔργο καταναλίσκει μέσα σέ μιά ὥρα.*

Δ. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

4.9 Γενικοί ὁρισμοί.

1) ***Περιοδική κίνηση*** ὀνομάζεται ἡ κίνηση ἑνός κινητοῦ, ὅταν τό κινητό λαμβάνει τήν ἴδια θέση καί τήν ἴδια ταχύτητα (κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά) σέ ἴσα χρονικά διαστήματα.

Ἡ ὁμαλή κυκλική κίνηση ἑνός κινητοῦ Μ (σχ. 4.9) εἶναι περιοδική, γιατί τό κινητό παίρνει τή θέση Α καί τήν ταχύτητα $\vec{υ}$ μετά ἀπό ἴσα χρονικά διαστήματα.



Σχ. 4.9.

2) ***Περίοδος (Τ)*** μιᾶς περιοδικῆς κινήσεως κινητοῦ ὀνομάζεται ὁ χρόνος πού μεσολαβεῖ ἀπό τή στιγμή πού τό κινητό περνάει ἀπό ἕνα σημεῖο τῆς τροχιᾶς του μέχρι τή στιγμή τῆς ἑπόμενης ἐπανόδου του στό ἴδιο σημεῖο, ἀλλά καί μέ τήν ἴδια ταχύτητα (κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο).

3) ***Συχνότητα (ν)*** μιᾶς περιοδικῆς κινήσεως κινητοῦ ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός πού ἐκφράζει πόσες φορές τό κινητό στή μονάδα τοῦ χρόνου παίρνει τήν ἴδια θέση καί μέ τήν ἴδια ταχύτητα (κατά μέτρο, διεύθυνση, καί φορά).

Ἐπομένως ἡ συχνότητα μιᾶς περιοδικῆς κινήσεως ἐκφράζει τόν ἀριθμό τῶν πλήρων ἐπαναλήψεων τοῦ φαινομένου, πού γίνονται μέσα σέ ἕνα δευτερόλεπτο. Ἀπό τούς ὁρισμούς αὐτούς προκύπτει ἡ σχέση:

$$ν = \frac{1}{T}$$

4) *Ταλάντωση* ἤ ***παλινδρομική κίνηση*** ὀνομάζεται ἡ κίνηση, ὅταν: α) εἶναι περιοδική κίνηση καί β) τό κινητό μετατοπίζεται ***ἑκατέρωθεν*** μιᾶς ὁρισμένης θέσεως, πού θεωρεῖται θέση ἰσορροπίας. Ἡ κίνηση τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι μία ταλάντωση, γιατί εἶναι περιοδική καί πραγματοποιεῖται ἀριστερά καί δεξιά μιᾶς δεδομένης θέσεως.

5) *Γραμμική ταλάντωση* ἤ ***γραμμική παλινδρομική κίνηση*** ὀνομάζεται ἡ κίνηση ἑνός κινητοῦ ὅταν: α) εἶναι περιοδική κίνηση, β) τό κινητό μετατοπίζεται ***ἑκατέρωθεν*** μιᾶς ὁρισμένης θέσεως πού θεωρεῖται θέση ἰσορροπίας καί γ) ἡ τροχιά του εἶναι εὐθεία. Μέ ἄλλα λόγια: Γραμμική ταλάντωση ἤ γραμμική παλινδρομική κίνηση ὀνομάζεται ἡ παλινδρομική κίνηση τῆς ὁποίας ἡ τροχιά εἶναι εὐθεία.

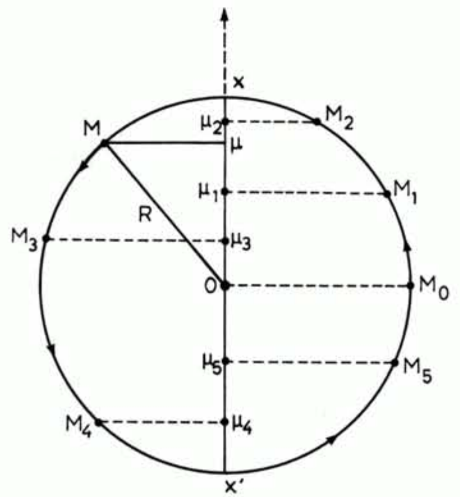
6) *Στροφική ταλάντωση* ἤ ***στροφική παλινδρομική κίνηση*** ὀνομάζεται ἡ παλινδρομική κίνηση τῆς ὁποίας ἡ τροχιά εἶναι τόξο περιφέρειας κύκλου.

4.10 Γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἤ ἁπλή ἁρμονική κίνηση.

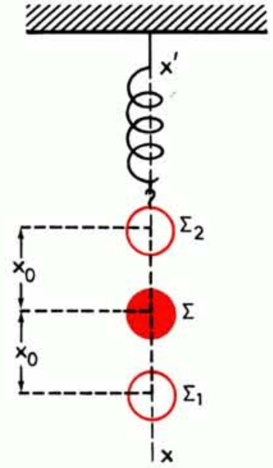
Ἔννοιες καί ὁρισμοί.

Ἔστω ἕνα κινητό Μ (σχ. 4.10α) πού κινεῖται κατά τή φορά τοῦ βέλους μέ κίνηση ὁμαλή κυκλική καί μέ περίοδο Τ ἐπάνω σέ περιφέρεια κύκλου πού ἔχει ἀκτίνα R. Παίρνομε μιά διάμετρο x'x τῆς περιφέρειας αὐτῆς καί ὁρίζομε θετική φορά ἀπό τό x' πρός τό x. Θά ἐξετάσομε τήν κίνηση πού ἐκτελεῖ ἡ προβολή (μ) τοῦ Μ ἐπάνω στή διάμετρο x'x.

Ὅταν τό κινητό Μ βρίσκεται στή θέση M_0, τότε ἡ προβολή του μ θά βρίσκεται στή θέση Ο. Ὅταν τό κινητό Μ ἔρθει στή θέση M_1, τότε ἡ προβολή του μ θά βρίσκεται στή θέση μ_1. Ὅταν τό κινητό Μ ἔρθει στή θέση M_2, τότε ἡ προβολή τοῦ μ θά βρίσκεται στή θέση μ_2. Ὅταν τό κινητό Μ ἔρθει στή θέση M_3, τότε ἡ προβολή τοῦ μ θά βρίσκεται στή θέση μ_3 κ.ο.κ.



Σχ. 4.10α.



Σχ. 4.10β.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ προβολή μ ἐπάνω στή διάμετρο x'x τοῦ κινητοῦ Μ, πού κινεῖται μέ κυκλική ὁμαλή κίνηση καί μέ περίοδο Τ, ἐκτελεῖ μιά γραμμική παλινδρομική κίνηση (γραμμική ταλάντωση) μέ περίοδο Τ, τῆς ὁποίας ἡ θέση ἰσορροπίας εἶναι τό Ο.

Τήν κίνηση αὐτή τῆς μ, ὅπως καί κάθε ὅμοιά της, τήν ὀνομάζομε εἰδικῶς ***γραμμική ἁρμονική ταλάντωση.***

Προσδένομε μία σφαίρα Σ (σχ. 4.10β) στήν ἄκρη ἑνός ἐλατηρίου. Τή φορά ἀπό τό x' πρός τό x τή λαμβάνομε ὡς θετική. Ἔστω ὅτι ἡ σφαίρα, ἰσορροπεῖ στή θέση Σ. Τραβᾶμε τή σφαίρα καί τή φέρνομε στή θέση Σ_1, δηλαδή τήν ἀπομακρύνομε ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας της (Σ) κατά x_0. Ἄν ἀφήσομε τώρα ἐλεύθερη τή σφαίρα, θά ἀρχίσει νά κινεῖται μεταξύ τῶν σημείων Σ_1 καί Σ_2.

Ἡ κίνηση τήν ὁποία κάνει ἡ σφαίρα μεταξύ τῶν σημείων Σ_1 καί Σ_2, τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό σημεῖο Σ τῆς ἰσορροπίας της, εἶναι ὅμοια μέ τήν κίνηση τήν ὁποία ἔκανε ἡ προβολή μ τοῦ σημείου Μ ἐπάνω στή διάμετρο x'x τῆς προηγούμενης περιπτώσεως, δηλαδή εἶναι γραμμική ἁρμονική ταλάντωση.

Παρατήρηση.

Γενικά σέ κάθε γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἀντιστοιχεῖ μιά κυκλική κίνηση, τῆς ὁποίας (δηλαδή τῆς κυκλικῆς κινήσεως) εἶναι προβολή ἐπάνω σέ διάμετρο τῆς τροχιᾶς της.

Πλάτος τῆς κινήσεως.

Πλάτος μιᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως, τήν ὁποία ἐκτελεῖ ἕνα κινητό, ὀνομάζεται ἡ μέγιστη θετική ἀπομάκρυνσή του ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του.

Στήν περίπτωση τῆς κινήσεως τῆς προβολῆς (μ), πού ἀναφέραμε, εἶναι ἡ $(Ox = R)$, ἐνῶ στήν περίπτωση τῆς σφαίρας εἶναι ἡ $(\Sigma\Sigma_1 = x_0)$.

Περίοδος Τ τῆς κινήσεως.

Περίοδος μιᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως τήν ὁποία ἐκτελεῖ ἕνα κινητό ὀνομάζεται ὁ χρόνος πού μεσολαβεῖ ἀπό τή στιγμή πού τό κινητό διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο τῆς τροχιᾶς του ὥς τήν ἑπόμενη ἐπάνοδό του στό ἴδιο σημεῖο, ἀλλά καί μέ τήν ἴδια ταχύτητα (κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο). Ἡ περίοδος Τ μιᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως εἶναι ἴση μέ τήν περίοδο τῆς ἀντίστοιχης πρός αὐτήν ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως.

Συχνότητα (ν) τῆς κινήσεως.

Συχνότητα τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως τήν ὁποία ἐκτελεῖ ἕνα κινητό ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός πού ἐκφράζει πόσες φορές τό κινητό στή μονάδα τοῦ χρόνου παίρνει τήν ἴδια θέση καί μέ τήν ἴδια ταχύτητα (κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά).

Ἐπομένως ἡ συχνότητα μιᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως ἐκφράζει τόν ἀριθμό τῶν πλήρων ἐπαναλήψεων τοῦ φαινομένου, πού γίνονται μέσα σέ ἕνα δευτερόλεπτο.

Ἡ συχνότητα (ν) μιᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως εἶναι ἴση μέ τή συχνότητα τῆς ἀντίστοιχης πρός αὐτήν ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως.

Κυκλική συχνότητα (ω).

Κυκλική συχνότητα μιᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως, τήν ὁποία ἐκτελεῖ ἕνα κινητό, ὀνομάζεται ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω) τῆς ἀντίστοιχης πρός αὐτήν ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως.

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Ἀπομάκρυνση.

Ἀπομάκρυνση ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση κατά τή χρονική στιγμή t ὀνομάζεται ἡ ἀπόσταση τοῦ κινητοῦ ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του κατά τή χρονική αὐτή στιγμή t.

Ἡ ἀπομάκρυνση ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση μπορεῖ νά εἶναι θετική, μπορεῖ ὅμως νά εἶναι καί ἀρνητική. Ἄν ἔχει ὁρισθεῖ ὡς θετική φορά (σχ. 4.10γ) ἀπό τό x' πρός τό x, τότε ἡ ἀπομάκρυνση τοῦ κινητοῦ μ ὅταν βρίσκεται στή θέση μ_1, δηλαδή ἡ $(O\mu_1)$, εἶναι θετική, ἐνῶ ὅταν βρίσκεται στή θέση μ_2, δηλαδή ἡ $(O\mu_2)$, εἶναι ἀρνητική.

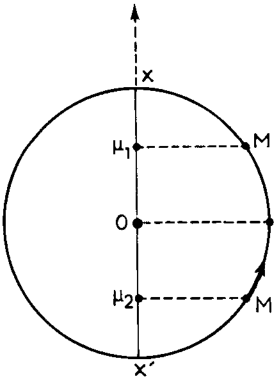
Φάση τῆς κινήσεως.

Ἔστω ὅτι τό σημεῖο μ, πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση, ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του (Ο), βρίσκεται στή θέση μ (σχ. 4.10δ) καί τό σημεῖο Μ, πού ἐκτελεῖ τήν ἀντίστοιχή του ὁμαλή κυκλική κίνηση, βρίσκεται στή θέση Μ, ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή πού βρισκόταν στή θέση M_0.

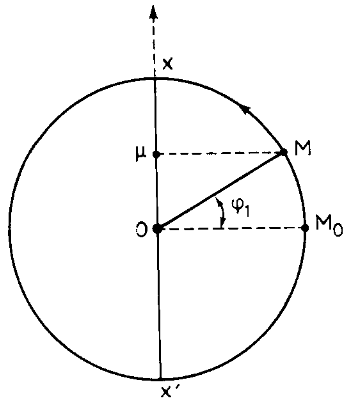
Ὀνομάζομε φάση φ τοῦ κινητοῦ μ, πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του (Ο), τό γινόμενο τῆς κυκλικῆς συχνότητάς του (ω) ἐπί τό χρόνο t.

Δηλαδή:

$$\boxed{\varphi = \omega \cdot t} \qquad (1)$$



Σχ. 4.10γ.



Σχ. 4.10δ.

Παρατήρηση.

Τό κινητό Μ, μέσα σέ χρόνο t ἀπό τή στιγμή πού βρισκόταν στή θέση M_0, ἔχει γράψει τόξο $(\overset{\frown}{M_0M})$ πού ἀντιστοιχεῖ σέ ἐπίκεντρη γωνία ϕ_1, ἡ ὁποία εἶναι:

$$\phi_1 = \omega . t \qquad (2)$$

ὅπου: ω ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ Μ, ἡ ὁποία εἶναι καί ἡ κυκλική συχνότητα τοῦ (μ).

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\Phi = \Phi_1 \qquad (3)$$

Σύμφωνα μέ τή σχέση (3) μποροῦμε νά δώσομε καί τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Φάση (φ) ἑνός κινητοῦ (μ), πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του (Ο), ὀνομάζεται ἡ γωνία (ϕ_1), τήν ὁποία γράφει ἡ ἐπιβατική ἀκτίνα (ΟΜ) τοῦ σημείου Μ, πού ἐκτελεῖ τήν ἀντίστοιχή της ὁμαλή κυκλική κίνηση, σέ χρόνο t ἀπό τή στιγμή πού βρισκόταν στή θέση, πού ἡ προβολή του (Μ) πάνω στήν τροχιά τοῦ (μ) εἶναι τό (Ο).

Δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι ἡ φάση (φ) ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἡ ὁποία εἶναι γωνία, συνεχῶς αὐξάνεται μέ τό χρόνο, γιατί εἶναι:

$$\phi = \omega . t$$

ὅπου τό ω εἶναι σταθερό.

Ἐξίσωση τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως (ἡ ἐξίσωση τῆς ἀπομακρύνσεως).

Ἄν κατά τή χρονική στιγμή $t_1 = 0$ (ἀρχή τῶν χρόνων) τό κινητό Μ (σχ. 4.10ε) πού ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ γωνιακή ταχύτητα ω βρίσκεται στή θέση Α, τότε κατά τή χρονική στιγμή t_2 θά βρίσκεται στή θέση Μ πού εἶναι τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$AOM = \omega . (t_2 - t_1) \qquad (1)$$

ὅπου: $(t_2 - t_1)$ εἶναι ὁ χρόνος πού χρειάστηκε τό κινητό γιά νά πάει ἀπό τή θέση Α στή θέση Μ.

Ἄν θέσομε $(t_2 - t_1) = t$, τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$AOM = \omega . t \qquad (2)$$

Κατά τή χρονική στιγμή t_1 τό σημεῖο μ, πού εἶναι ἡ προβολή τοῦ Μ ἐπάνω στή διάμετρο x'x, βρίσκεται στή θέση Ο, δηλαδή στή θέση ἰσορροπίας του, ἐνῶ κατά τή χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στή θέση μ πού εἶναι τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$(O\mu) = (OM)\ \eta\mu\ (\mu MO) \qquad (3)$$

Ἐπειδή ἡ γωνία μΜΟ εἶναι ἴση μέ τή γωνία ΑΟΜ, ἡ σχέση (3) γράφεται:

$$(\mathrm{O}\mu) = (\mathrm{OM})\ \eta\mu\ \mathrm{AOM} \qquad (4)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (4) προκύπτει ἡ σχέση:

$$(\mathrm{O}\mu) = (\mathrm{OM})\ \eta\mu\omega t \qquad (5)$$

Ἄν θέσομε $(\mathrm{O}\mu) = x$ καί $\mathrm{OM} = \mathrm{O}\Delta = x_0$, τότε ἡ σχέση (5) γράφεται:

$$x = x_0\ \eta\mu\omega t \qquad \text{(ἐξίσωση τῆς ἀπομακρύνσεως)} \qquad (6)$$

ὅπου: x ἡ ἀπομάκρυνση τοῦ σημείου μ, πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση, τήν ὁποία θά ἔχει ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τό τό σημεῖο τῆς ἰσορροπίας του (Ο).

$x_0 = \mathrm{OM} = \mathrm{O}\Delta$ τό πλάτος τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως τήν ὁποία ἐκτελεῖ τό (μ).

ω ἡ κυκλική συχνότητα τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως τήν ὁποία ἐκτελεῖ τό μ.

ω . t ἡ φάση τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως, τήν ὁποία ἐκτελεῖ τό μ, ὕστερα ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεως τοῦ μ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του (Ο).

Παρατήρηση:

1) Στή σχέση (6) τό x_0 λαμβάνεται πάντοτε ὡς θετικό,

2) Ἡ ἐξίσωση (6) ΔΕΝ δίνει τό συνολικό διάστημα τό ὁποῖο διατρέχει τό κινητό (μ) μέσα στό χρόνο t, ἀλλά τήν ἀπομάκρυνσή του (x) τήν ὁποία ἔχει τό κινητό μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του.

Ἡ ἀπομάκρυνση (x) μπορεῖ νά πάρει μόνο τίς τιμές: ἀπό (0) ὥς $(+x_0)$ καί ἀπό (0) ὥς $(-x_0)$

Γενικός ὁρισμός τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἤ ἁπλή ἁρμονική κίνηση ὀνομάζεται ἡ κίνηση τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωση εἶναι:

$$x = x_0 \eta\mu\omega t$$

ὅπου: x ἡ ἀπομάκρυνση τήν ὁποία θά ἔχει τό κινητό πού ἐκτελεῖ τήν κίνηση, μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του.

x_0 τό πλάτος τῆς κινήσεως.

ω ἡ κυκλική συχνότητα τῆς κινήσεως.

ω . t ἡ φάση τῆς κινήσεως μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεως τοῦ κινητοῦ ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του.

Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $x = x_0 \eta\mu\omega t_0$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $x = x_0\eta\mu\omega t$ εἶναι ἡ γραμμή οαβγδε... τοῦ σχήματος 4.10στ.

Ἐξίσωση τῆς ταχύτητας.

Μπορούμε νά ἀποδείξομε, ὅτι ἡ ἡ ταχύτητα υ_μ, τήν ὁποία ἔχει τό κινητό (μ) κατά ὁποιαδήποτε χρονική στιγμή, εἶναι καθ' ὅλα ἴδια μέ τήν προβολή ἐπάνω στή διάμετρο x'x τῆς ταχύτητας υ_M πού ἔχει τό Μ κατά τή χρονική αὐτή στιγμή (σχ. 4.10ζ).

Ἑπομένως ἰσχύει ἡ σχέση: $\qquad \upsilon_\mu = \upsilon_M \,.\, \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$

Ἐπειδή $\varphi = \omega t$, ἡ σχέση (1) γράφεται: $\qquad \upsilon_\mu = \upsilon_M \,.\, \sigma\upsilon\nu\omega t \qquad (2)$

ὅπου: υ_μ ἡ ταχύτητα τοῦ (μ) μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του (Ο).

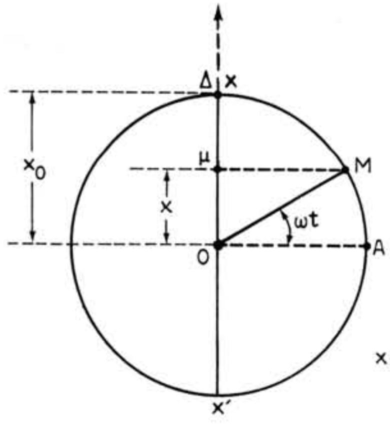
υ_M ἡ ταχύτητα τοῦ Μ μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή πού βρισκόταν στή θέση (Α).

ω ἡ κυκλική συχνότητα τῆς κινήσεως τοῦ (μ) πού εἶναι καί ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ Μ.

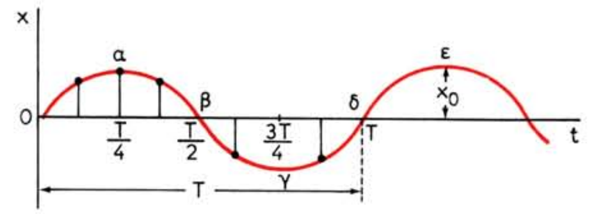
Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\upsilon_M = \omega \,.\, R = \omega \,.\, x_0 \qquad (3)$$

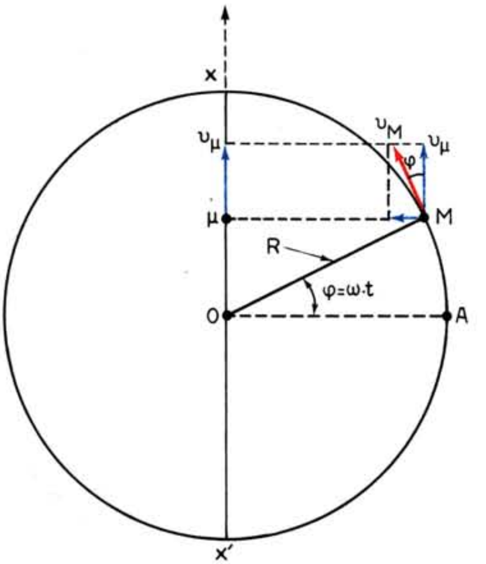
Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) προκύπτει ἡ σχέση:



Σχ. 4.10ε.



Σχ. 4.10στ.



Σχ. 4.10ζ.

$$\upsilon_\mu = \upsilon_M \,.\, \text{συν}\omega t = \omega \,.\, x_0 \,.\, \text{συν}\omega t \qquad \text{καί}$$

$$\upsilon_\mu = \omega \,.\, x_0 \,.\, \text{συν}\omega t \tag{4}$$

Ἐπίσης ἰσχύει ἡ σχέση:

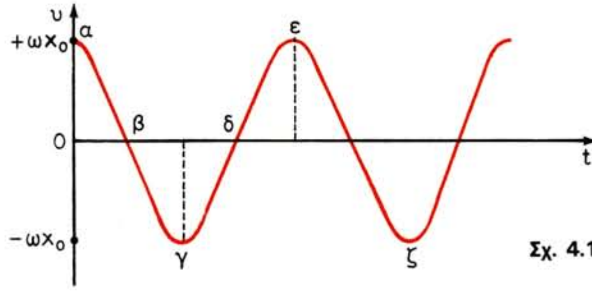
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (4) καί (5) προκύπτει ἡ σχέση:

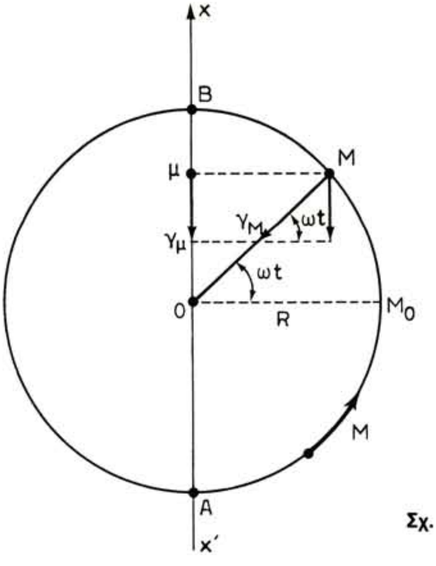
$$\upsilon_\mu = \omega \,.\, x_0 \, \text{συν} \frac{2\pi \,.\, t}{T} \qquad \text{(ἐξίσωση τῆς ταχύτητας)}$$

Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $υ_μ = ωx_0$ συν 2πt/T.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $υ_μ = ωx_0$ συν 2πt/T εἶναι ἡ γραμμή αβγδεζ... τοῦ σχήματος 4.10η.



Σχ. 4.10η.



Σχ. 4.10θ.

Ἐξίσωση τῆς ἐπιταχύνσεως.

Ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ μ (σχ. 4.10θ) πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση δέν παραμένει σταθερή. Ἑπομένως κατά τήν κίνηση αὐτή τό κινητό ἔχει ἐπιτάχυνση. Μποροῦμε νά ἀποδείξομε, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση $γ_μ$ τήν ὁποία ἔχει τό κινητό (μ) κατά ὁποιαδήποτε χρονική στιγμή εἶναι καθ' ὅλα ἴδια μέ τήν προβολή ἐπάνω στή διάμετρο ΑΒ τῆς ἐπιταχύνσεως $γ_M$ πού ἔχει τό Μ κατά τή χρονική αὐτή στιγμή.

Ἑπομένως ἰσχύει ἡ σχέση: $$γ_μ = γ_M \cdot ημωt \qquad (1)$$

ὅπου: $γ_μ$ ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ (μ) μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς του ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του (0).

$γ_M$ ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση τοῦ Μ μετά ἀπό χρόνο t ἀπό τή στιγμή πού βρισκόταν στή θέση M_0,

ω ἡ κυκλική συχνότητα τῆς κινήσεως τοῦ (μ), πού εἶναι καί ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ Μ.

Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$γ_M = ω^2 \cdot R = ω^2 \cdot x_0 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει ἡ σχέση:

$$γ_μ = γ_M \cdot ημωt = ω^2 \cdot x_0 ημωt$$

$$\gamma_\mu = \omega^2 . x_0 . \eta\mu\omega t \quad (3)$$

Ἰσχύει ἡ σχέση: $$x = x_0 . \eta\mu\omega t \quad (4)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) προκύπτει ἡ σχέση: $$\gamma_\mu = \omega^2 . x \quad (5)$$

Ἐπειδή ἡ ἐπιτάχυνση (γ_μ) τοῦ μ ἔχει κάθε στιγμή ἀντίθετη φορά ἀπό τήν ἀπομάκρυνσή του x, γι' αὐτό ἡ σχέση (5) γράφεται:

$$\gamma_\mu = -\omega^2 x \quad (6)$$

Ἡ σχέση (6) μᾶς δίνει τήν ἐπιτάχυνση πού θά ἔχει τό μ, ὅταν ἡ ἀπομάκρυνσή του εἶναι x.
Ἀπό τίς σχέσεις (6) καί (4) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\gamma_\mu = -\omega^2 x_0 \eta\mu\omega t \quad (7)$$

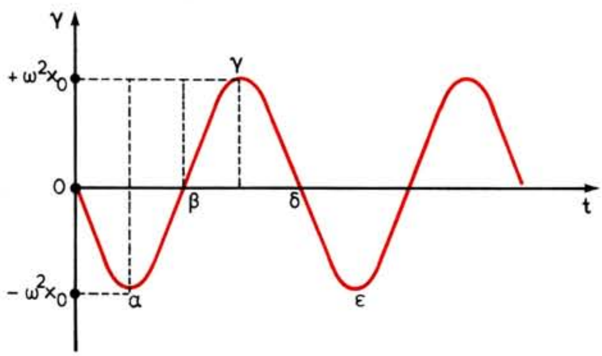
Ἰσχύει ἡ σχέση: $$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (7) καί (8) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\boxed{\gamma_\mu = -\omega^2 x . \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad \text{(ἐξίσωση τῆς ἐπιταχύνσεως)}$$

Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $\gamma_\mu = -\omega^2 x_0 \eta\mu 2\pi t/T$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $\gamma_\mu = -\omega^2 x_0 \eta\mu\ 2\pi t/T$ εἶναι ἡ γραμμή οαβγδε... τοῦ σχήματος 4.10ι.



Σχ. 4.10ι.

Δύναμη ἡ ὁποία προκαλεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση (ἐξίσωση τῆς δυνάμεως).

Ὅπως εἴδαμε, ἕνα κινητό (μ) τό ὁποῖο ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἔχει ἐπιτάχυνση ἡ ὁποία δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\gamma_\mu = -\omega^2 x$$

ὅπου: ω ἡ κυκλική συχνότητα τῆς κινήσεως τοῦ μ καί
x ἡ ἀπομάκρυνση τοῦ μ κατά τήν ὁποία ἔχει τήν ἐπιτάχυνση γ_μ.

Σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς Μηχανικῆς, ἄν ἕνα κινητό μάζας m ἔχει ἐπιτάχυνση γ, τότε ἀσκεῖται ἐπάνω του ὁπωσδήποτε μία δύναμη F τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F = m . \gamma$$

Ἑπομένως, ἀφοῦ τό κινητό μ πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἔχει ἐπιτάχυνση γ_μ, θά ἀσκεῖται ἐπάνω του μιά δύναμη F τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F = m \cdot \gamma_\mu = - m \cdot \omega^2 x$$

$$F = - m\omega^2 x \tag{1}$$

ὅπου: F ἡ δύναμη πού ἀσκεῖται ἐπάνω στό κινητό (μ) μάζας m, πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση μέ κυκλική συχνότητα ω, ὅταν ἀπέχει ἀπό τή θέση ἰσορροπίας ἀπόσταση x.

Ἰσχύει ἡ σχέση:
$$x = x_0 \eta\mu\omega t \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνομε τή σχέση:

$$F = - m \cdot \omega^2 x_0 \eta\mu\omega t \tag{3}$$

Ἰσχύει ἡ σχέση:
$$\omega = 2\pi/T \tag{4}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) προκύπτει ἡ σχέση:

$$\boxed{F = - m\omega^2 x_0 \, \eta\mu \, \frac{2\pi}{T} \cdot t} \qquad \text{(ἐξίσωση τῆς δυνάμεως)} \tag{5}$$

Παρατήρηση.

1) Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι ἡ δύναμη F ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπάνω σέ κινητό πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἀπομάκρυνσή του $\vec{x}$.
2) Τό πλήν (—) τῆς σχέσεως (1) σημαίνει ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$ καί ἡ ἀπομάκρυνση x ἔχουν σέ κάθε σημεῖο τῆς τροχιᾶς ἀντίθετη φορά.
3) Ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει πάντοτε φορά πρός τό σημεῖο ἰσορροπίας (O). Δηλαδή ἡ δύναμη $\vec{F}$ τείνει νά φέρει τό κινητό στό σημεῖο ἰσορροπίας. Γι' αὐτό τή δύναμη $\vec{F}$ τήν ὀνομάζομε δύναμη ἐπαναφορᾶς.
4) Τό γινόμενο $(m \cdot \omega^2)$ τῆς σχέσεως (1) εἶναι σταθερό καί θετικό. Τό ὀνομάζομε ***σταθερά ἐπαναφορᾶς τῆς κινήσεως*** καί τό παριστάνομε συνήθως μέ D.

$$\boxed{D = m \cdot \omega^2} \tag{6}$$

Ἄν στή σχέση (1) ἀντί τοῦ γινομένου $(m \cdot \omega^2)$ βάλομε τό ἴσο του, πού τό παίρνομε ἀπό τή σχέση (6), τότε ἡ σχέση αὐτή γράφεται:

$$\vec{F} = - D\vec{x} \tag{7}$$

Ἄν λύσομε τή σχέση (7) ὡς πρός D καί πάρομε τά μέτρα τῶν F, x ἔχομε:

$$D = \frac{F}{x} = m\omega^2 \tag{8}$$

Ἀπό τή σχέση (8) προκύπτει ὅτι ἡ D ἐκφράζει τή δύναμη πού πρέπει νά ἀσκεῖται στό κινητό, γιά νά τοῦ προκαλεῖ ἀπομάκρυνση ἴση μέ τή μονάδα.

Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως τῆς δυνάμεως.

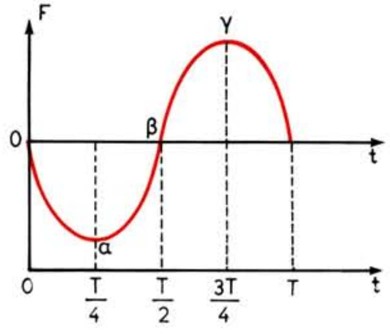
Ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως $F = - m\omega^2 x_0 \eta\mu \, 2\pi t/T$ εἶναι ἡ γραμμή οαβγ... τοῦ σχήματος 4.10ια.

Συνθήκη παραγωγῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Γιά νά ἐκτελεῖ ἕνα κινητό μάζας (m) γραμμική ἁρμονική ταλάντωση μέ κυκλική συχνότητα ω, πρέπει νά ἀσκεῖται ἐπάνω του μία δύναμη $\vec{F}$ τέτοια πού νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{F = - m \cdot \omega^2 \cdot x = - D \cdot x} \tag{1}$$

Ἡ σχέση (1) ἐκφράζει τή συνθήκη παραγωγῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.



Σχ. 4.10ια.

Περίοδος γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Στή γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$D = m\omega^2 \tag{1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

ὅπου: D ἡ σταθερά ἐπαναφορᾶς τῆς κινήσεως.
m ἡ μάζα τοῦ κινητοῦ.
ω ἡ κυκλική συχνότητα τῆς κινήσεως.
T ἡ περίοδος τῆς κινήσεως.

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$D = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

Μηχανική ἐνέργεια ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση.

Ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργεια, τήν ὁποία ἔχει ἕνα κινητό πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση σέ ἕνα σημεῖο τῆς τροχιᾶς του, εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καί τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας πού ἔχει στό σημεῖο αὐτό. Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_κ + E_Δ \tag{1}$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἕνα κινητό πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἔχει σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς τροχιᾶς του τήν ἴδια ὁλική μηχανική ἐνέργεια, ἡ ὁποία δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{E_{ολ} = \frac{1}{2}\, m \,.\, \omega^2 \,.\, x_0^2} \quad ἤ \tag{2}$$

$$\boxed{E_{ολ} = \frac{1}{2}\, D x_0^2} \tag{3}$$

ὅπου: m ἡ μάζα τοῦ κινητοῦ.
ω ἡ κυκλική συχνότητα τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ.
x_0 τό πλάτος τῆς κινήσεως.
D ἡ σταθερά ἐπαναφορᾶς τῆς κινήσεως.

Πίνακας μεταβολῶν τῆς ἀπομακρύνσεως (x), τῆς ταχύτητας (υ), τῆς ἐπιταχύνσεως (γ) καί τῆς δυνάμεως ἐπαναφορᾶς (F) μετά τοῦ χρόνου (t) κινητοῦ πού ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση (T ἡ περίοδος τῆς κινήσεως καί ω ἡ κυκλική συχνότητά της)

t	x	υ	γ	F
0	0	$+\omega x_0$	0	0
$\frac{T}{4}$	$+x_0$	0	$-\omega^2 x_0$	$-m\omega^2 x_0$
$\frac{T}{2}$	0	$-\omega x_0$	0	0
$\frac{3T}{4}$	$-x_0$	0	$+\omega x_0$	$+m\omega^2 x_0$
T	0	$+\omega x_0$	0	0

Ἐλεύθερη Ταλάντωση — Ἰδιοσυχνότητα — Ἰδιοπερίοδος.

Ἐλεύθερη ταλάντωση ὀνομάζομε τήν ταλάντωση πού ἐκτελεῖ ἕνα σύστημα, ὅταν τοῦ δοθεῖ ἀπ' ἔξω ἕνα ποσό ἐνέργειας μόνο μιά φορά. Π.χ. προσδένομε τή σφαίρα Σ στήν ἄκρη ἑνός ἐλατηρίου (σχ. 4.10ιβ) καί ἔστω ὅτι αὐτή ἰσορροπεῖ στή θέση Σ.

Ἀπομακρύνομε τή σφαίρα ἀπό τή θέση Σ στή θέση $Σ_1$, δηλαδή κατά x_0.

Γιά τήν ἀπομάκρυνση τῆς σφαίρας καί τό τέντωμα τοῦ ἐλατηρίου κατά x_0 καταναλώσαμε ἕνα ἔργο, τό ὁποῖο προσέλαβε τό σύστημα ***ἐλατήριο-σφαίρα***. Ἄν ἡ σφαίρα ἀφαιθεῖ ἀπό τή θέση $Σ_1$ ἐλεύθερη, τότε θά ἐκτελέσει μιά ταλάντωση καί ἡ δυναμική ἐνέργεια, τήν ὁποία ἔχει στή θέσει $Σ_1$ θά μετατρέπεται σέ κινητική καί τό ἀντίστροφο.

Ἡ κίνηση τῆς σφαίρας Σ εἶναι μιά ἐλεύθερη ταλάντωση, γιατί τό σύστημα ***ἐλατήριο-σφαίρα*** προσέλαβε ἀπ' ἔξω ἕνα ποσό ἐνέργειας μόνο μιά φορά. Ἄν ὠθήσομε μία κούνια μόνο μιά φορά ἡ κούνια θά κάνει μιά ταλάντωση, πού θά εἶναι ἐλεύθερη, γιατί ἡ κούνια προσέλαβε ἕνα ποσό ἐνέργειας (κατά τήν ὤθηση) μόνο μιά φορά.

Ἡ συχνότητα καί ἡ περίοδος μιᾶς ἐλεύθερης ταλαντώσεως ὀνομάζεται ἰδιοσυχνότητα καί ἰδιοπερίοδος (T_0) ἀντίστοιχα τοῦ συστήματος πού ἐκτελεῖ τήν ἐλεύθερη αὐτή ταλάντωση.

Ἡ ἰδιοσυχνότητα καί ἡ ἰδιοπερίοδος ἑνός συστήματος εἶναι σταθερές, γιατί ἐξαρτῶνται ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ συστήματος. Π.χ. γιά τό σύστημα ***ἐλατήριο-σφαίρα*** ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}} \quad \text{καί} \quad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

ὅπου: m ἡ μάζα τῆς σφαίρας.
D ἡ σταθερά ἐπαναφορᾶς ἤ σταθερά τοῦ ἐλατηρίου.

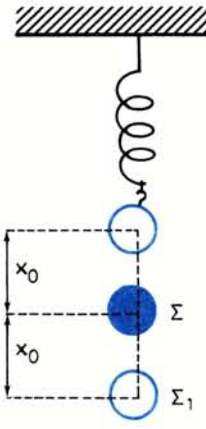
Σημείωση:

Ἡ ἰδιοσυχνότητα καί ἡ ἰδιοπερίοδος ἑνός συστήματος εἶναι χαρακτηριστικά μεγέθη του καί παραμένουν σταθερά.

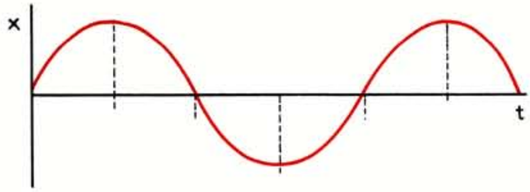
Ἡ ἰδιοσυχνότητα καί ἡ ἰδιοπερίοδος ἑνός συστήματος δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τό πλάτος ταλαντώσεώς του.

Ἀμείωτη καί φθίνουσα ταλάντωση.

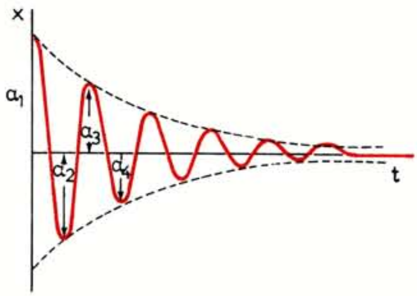
Ἄν ἡ μηχανική (κινητική + δυναμική) ἐνέργεια τήν ὁποία προσδώσαμε στό κινητό διατηρεῖται σταθερή κατά τή διάρκεια τῆς ταλαντώσεώς του, δηλαδή δέν μετατρέπεται σέ ἄλλες μορφές ἐνέργειας, τότε τό πλάτος τῆς ταλαντώσεώς του διατηρεῖται σταθερό.



Σχ. 4.10ιβ.



Σχ. 4.10ιγ.



Σχ. 4.10ιδ.

Πραγματικά, ἡ μηχανική ἐνέργεια (κινητική + δυναμική) ἑνός κινητοῦ πού ἐκτελεῖ ταλάντωση δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{E_{ολ} = \frac{1}{2} D x_0^2} \qquad (1)$$

Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι: Ἄν ἡ $E_{ολ}$ διατηρεῖται σταθερή τότε καί τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ κινητοῦ διατηρεῖται σταθερό.

Ἄν τό πλάτος μιᾶς ταλαντώσεως ἑνός κινητοῦ δέν ἐλαττώνεται ἀλλά διατηρεῖται σταθερό, τότε τήν ταλάντωση αὐτή τήν ὀνομάζομε ἀμείωτη ταλάντωση (σχ. 4.10ιγ).

Ἄν ἡ μηχανική (κινητική + δυναμική) ἐνέργεια τήν ὁποία προσδώσαμε στό κινητό ΔΕΝ διατηρεῖται σταθερή κατά τή διάρκεια τῆς ταλαντώσεώς του, ἀλλά συνεχῶς μετατρέπεται σέ ἄλλες μορφές ἐνέργειας, π.χ. σέ θερμότητα, τότε τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ κινητοῦ συνεχῶς ἐλαττώνεται καί τελικά γίνεται μηδέν.

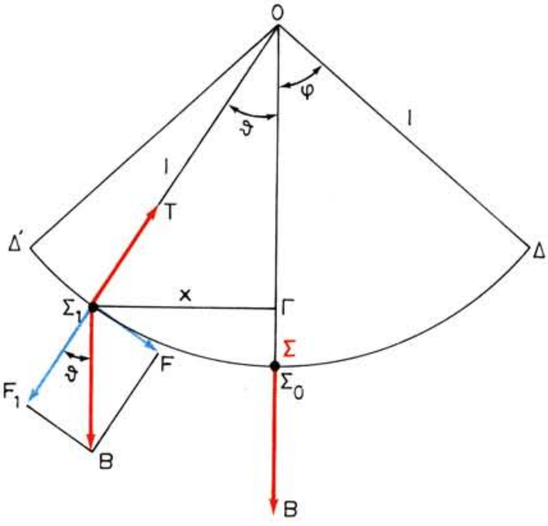
Πραγματικά, ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι: Ἄν ἡ $E_{ολ}$ ἐλαττώνεται συνεχῶς, ἐπειδή ἡ D εἶναι σταθερή, τότε καί τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ κινητοῦ ἐλαττώνεται συνεχῶς, καί ὅταν ἡ $E_{ολ}$ γίνει μηδέν, τότε τό πλάτος γίνεται μηδέν.

Ἄν τό πλάτος μιᾶς ταλαντώσεως ἑνός κινητοῦ ἐλαττώνεται (φθίνει) συνεχῶς καί τελικά γίνεται μηδέν, τότε τήν ταλάντωση αὐτή τήν ὀνομάζομε φθίνουσα ταλάντωση (σχ. 4.10ιδ).

Ἁπλό (ἤ μαθηματικό) ἐκκρεμές.

Ἁπλό ἐκκρεμές ὀνομάζεται τό σύστημα πού ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ὑλικό σημεῖο Σ μέ μάζα m, πού εἶναι δεμένο στό ἕνα ἄκρο ἑνός νήματος, τοῦ ὁποίου ἡ μάζα εἶναι ἀμελητέα μπροστά στή m καί τό ὁποῖο δέν μπορεῖ νά ἐπιμηκυνθεῖ (σχ. 4.10ιε).

Τό σύστημα ἐξαρτᾶται μέ τό ἄλλο ἄκρο τοῦ νήματός του ἀπό ἕναν ὁριζόντιο ἄξονα (Ο) κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό νῆμα νά μπορεῖ νά περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω ἀπό τόν ἄξονα αὐτόν. Ἄν φέρομε τό ὑλικό σημεῖο Σ ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του $Σ_0$ στή θέση ἔστω Δ καί τό ἀφήσομε ἐλεύθερο, τότε αὐτό θά ἀρχίσει νά ἐκτελεῖ ἐλεύθερη ταλάντωση.



Σχ. 4.10ιε.

Πραγματικά, ἐπάνω στό ὑλικό σημεῖο Σ, σέ ὁποιαδήποτε θέση καί ἄν βρίσκεται, ἀσκοῦνται δύο δυνάμεις: α) τό βάρος του $\vec{B}$ καί β) ἡ δύναμη $\vec{T}$, τήν ὁποία ἀσκεῖ τό νῆμα πάνω στό Σ.

Ἔστω ὅτι τό ὑλικό σημεῖο Σ βρίσκεται σέ μιά τυχαία θέση $Σ_1$. Ἀναλύομε τό βάρος $\vec{B}$ σέ δύο συνιστῶσες: τή $\vec{F_1}$ κατά τή διεύθυνση τοῦ νήματος καί τή $\vec{F}$ κάθετη στή διεύθυνση τοῦ νήματος, δηλαδή κατά τήν ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς πού γράφει τό Σ.

Ἡ $\vec{F_1}$ ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς τάσεως $\vec{T}$ ἀλλά μέτρο ἴσο μέ τό μέτρο της, γιατί δέν γίνεται κίνηση κατά τή διεύθυνση τοῦ νήματος.

Ἑπομένως ἡ δύναμη πού κινεῖ τό ὑλικό σημεῖο Σ εἶναι ἡ συνιστώσα $\vec{F}$ τοῦ βάρους.
Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F = Bημθ \tag{1}$$

Ἀπό τό τρίγωνο $ΟΓΣ_1$ προκύπτει ἡ σχέση:

$$ημθ = \frac{x}{l} \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔχομε:

$$F = B \cdot ημθ = B \cdot \frac{x}{l} \quad \text{καί}$$

$$F = \frac{B}{l} \cdot x \tag{3}$$

Ἄν ἡ γωνία θ εἶναι μικρότερη ἀπό τρεῖς μοῖρες ($θ<3°$), τότε ἡ ἀπόσταση x καί τό τόξο $Σ_1Σ_0$ συμπίπτουν. Ἐπιπλέον ἡ δύναμη $\vec{F}$ συμπίπτει καί αὐτή μέ τήν ἀπόσταση x καί ἔχει φορά ἀντίθετη πρός τή φορά της.

Ἑπομένως ἡ σχέση (3) γράφεται:

$$\boxed{F = -\frac{B}{l}.x} \tag{4}$$

Ἀπό τή σχέση (4) προκύπτει ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$ πού ἐνεργεῖ ἐπάνω στό ὑλικό σημεῖο Σ, ὅταν βρίσκεται σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς τροχιᾶς του, εἶναι ἀνάλογη πρός τήν ἀπομάκρυνσή του ἀπό τό σημεῖο Σ_0 τῆς ἰσορροπίας του καί ἡ φορά της εἶναι ἀντίθετη τῆς φορᾶς τῆς ἀπομακρύνσεως.

Ἐπομένως τό ὑλικό σημεῖο Σ, ὅταν ἀπομακρυνθεῖ ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του (Σ_0) κατά γωνία (θ) μικρότερη ἀπό τρεῖς μοῖρες ($\theta<3^\circ$) καί ἀφεθεῖ ἐλεύθερο, θά ἐκτελεῖ κατά προσέγγιση γραμμική ἁρμονική ταλάντωση [γιατί ἐξασκεῖται συνεχῶς ἐπάνω του μιά δύναμη ἐπαναφορᾶς (F)].

Σημείωση:

Μῆκος ἐκκρεμοῦς ὀνομάζεται τό μῆκος ΟΔ $= l$ τοῦ νήματος τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Πλάτος τοῦ ἐκκρεμοῦς ὀνομάζεται ἡ γωνία (φ), τήν ὁποία σχηματίζει ἡ κατακόρυφος πού περνάει ἀπό τό σημεῖο ἰσορροπίας (Σ_0) τοῦ ἐκκρεμοῦς καί τόν ἄξονα Ο, μέ τή διεύθυνση τοῦ νήματος (ΟΔ), ὅταν τό ὑλικό σημεῖο βρίσκεται στήν ἀκραία θέση τῆς τροχιᾶς του Δ.

Ὅταν τό ὑλικό σημεῖο Σ ξεκινάει ἀπό τή θέση Δ καί φθάνει στή Δ΄, τότε λέμε ὅτι τό ἐκκρεμές ἔκανε μιά ἁπλή αἰώρηση. Ἐπίσης θά λέμε ὅτι ἔκανε μιά ἁπλή αἰώρηση, ὅταν ξεκινάει ἀπό τή θέση Δ΄ καί φθάνει στή Δ.

Ὅταν τό ὑλικό σημεῖο Σ ξεκινάει ἀπό τή θέση Δ, φθάνει στή θέση Δ΄ καί ξαναγυρίζει στή θέση Δ, τότε λέμε ὅτι τό ἐκκρεμές ἔκανε μία πλήρη αἰώρηση.

Περίοδος ἑνός ἐκκρεμοῦς ὀνομάζεται ὁ χρόνος πού χρειάζεται τό ἐκκρεμές γιά νά κάνει μιά πλήρη αἰώρηση.

Ἐπίπεδο αἰωρήσεως ἑνός ἐκκρεμοῦς, ὀνομάζομε τό κατακόρυφο ἐπίπεδο στό ὁποῖο κινεῖται τό νῆμα τοῦ ἐκκρεμοῦς αὐτοῦ κατά τήν ταλάντωσή του. Ὅταν λέμε ὅτι ἕνα ἐκκρεμές κάνει αἰωρήσεις μικροῦ πλάτους, ἐννοοῦμε ὅτι τό πλάτος αὐτό εἶναι μέχρι τρεῖς περίπου μοῖρες.

Περίοδος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ἀφοῦ ἡ κίνηση τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι γραμμική ἁρμονική ταλάντωση, ἡ δύναμη ἐπαναφορᾶς του θά εἶναι:

$$F = -D.x \tag{5}$$

ὅπου: D εἶναι ἡ σταθερά ἐπαναφορᾶς τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Γιά τό ἁπλό ἐκκρεμές ἰσχύει ἡ σχέση (4).

Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (4) ἔχομε:

$$-Dx = -\frac{B}{l}x$$

$$D = \frac{B}{l} = \frac{mg}{l} \qquad \text{καί}$$

$$D = \frac{m.g}{l} \tag{6}$$

Ἐπειδή ἡ κίνηση τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι γραμμική ἁρμονική ταλάντωση, ἡ περίοδός του δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{7}$$

ὅπου: m εἶναι ἡ μάζα τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ἀπό τίς σχέσεις (6) καί (7) ἔχομε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m.l}{m.g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{καί}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (8)$$

Περίοδος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, ὅταν ἐκτελεῖ αἰωρήσεις μικροῦ πλάτους.

Νόμοι τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, ὅταν ἐκτελεῖ αἰωρήσεις μικροῦ πλάτους ($\varphi<3°$).

α) Νόμος τοῦ ἰσόχρονου τῶν ταλαντώσεων μικροῦ πλάτους. Ἡ περίοδος ἑνός ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό πλάτος του, ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι αὐτό εἶναι μικρό ($\varphi<3°$).

Γενικά ἡ περίοδος ἑνός ἐκκρεμοῦς ἐξαρτᾶται ἀπό τό πλάτος του, ἀλλά ἡ ἐπίδραση τοῦ πλάτους εἶναι μικρή, ἄν τό πλάτος εἶναι μικρό. Μέ ἀκρίβεια ἡ περίοδος ἑνός ἐκκρεμοῦς δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)$$

ὅπου φ εἶναι τό πλάτος, τό ὁποῖο ἐκφράζεται σέ ἀκτίνια.

β) Νόμος τῶν μηκῶν.

Ἡ περίοδος ἑνός ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνάλογη πρός τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ μήκους του.

γ) Νόμος τῶν ἐπιταχύνσεων τῆς βαρύτητας.

Ἡ περίοδος ἑνός ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρός τήν τετραγωνική ρίζα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητας.

δ) Νόμος τῆς σταθερότητας τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς.

Τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς παραμένει σταθερό στό χῶρο. Δηλαδή οἱ αἰωρήσεις ἑνός ἐκκρεμοῦς γίνονται ὅλες στό ἴδιο ἐπίπεδο.

4.11 Ἐξαναγκασμένη ταλάντωση — Συντονισμός.

Ἄν σύρομε τή σφαίρα Σ (σχ. 4.11α) ἀπό τήν θέση Σ καί, ἀφοῦ τή φέρομε στή θέση Σ_1, τήν ἀφήσομε ἐλεύθερη, τότε ἡ σφαίρα Σ θά ἐκτελέσει ἐλεύθερη ταλάντωση.

Ἡ ἰδιοσυχνότητα V_0 τῆς ἐλεύθερης ταλαντώσεως εἶναι ὁρισμένη γιά τό σύστημα ***ἐλατήριο-σφαίρα***, γιατί ὅπως ξέρομε, ἐξαρτᾶται ἀπό τή μάζα (m) τῆς σφαίρας καί ἀπό τή σκληρότητα (D) τοῦ ἐλατηρίου.

Ἄν τό σημεῖο στηρίξεως Ε (σχ. 4.11β) τοῦ ἐλατηρίου (τό χέρι μας) τό μετακινοῦμε περιοδικά ἐπάνω σέ κατακόρυφη τροχιά μεταξύ, π.χ., τῶν σημείων E_1, E_2 καί μέ συχνότητα V_F, τότε ἡ σφαίρα Σ θά ἐκτελεῖ μιά ταλάντωση τῆς ὁποίας ἡ συχνότητα εἶναι V_F (δηλαδή τόση, ὅση εἶναι ἡ συχνότητα τῆς περιοδικῆς δυνάμεως πού ἀσκοῦμε μέ τό χέρι μας στό σύστημα ἐλατήριο-σφαίρα καί ὄχι μέ τήν ἰδιοσυχνότητά του (V_0).

Τήν ταλάντωση αὐτή τῆς σφαίρας (σχ. 4.11β) τήν ὀνομάζομε ἐξαναγκασμένη ταλάντωση.

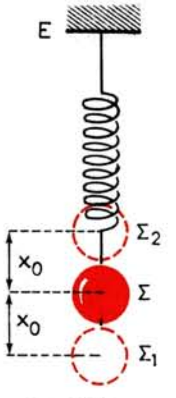
Γενικά, τήν ταλάντωση πού ἐκτελεῖ ἕνα σύστημα (π.χ. σφαίρα-ἐλατήριο), τό ὁποῖο μπορεῖ νά ταλαντώνεται ἐλεύθερα, ὅταν ἕνα ἄλλο σύστημα (π.χ. τό χέρι μας) ἀσκεῖ ἐπάνω του μιά περιοδική δύναμη, τήν ὀνομάζομε ἐξαναγκασμένη, ταλάντωση.

Τό σύστημα Α (στήν περίπτωσή μας: τό χέρι μας) πού ἀσκεῖ σέ ἕνα ἄλλο σύστημα Β (στήν περίπτωσή μας: ἐλατήριο-σφαίρα) τήν περιοδική δύναμη, ἡ ὁποία ἀναγκάζει τό Β νά ἐκτελεῖ ἐξαναγκασμένη ταλάντωση, ὀνομάζεται ***διεγέρτης***, ἐνῶ τό σύστημα Β πού ἐκτελεῖ τήν ἐξαναγκασμένη ταλάντωση ὀνομάζεται ***ταλαντωτής.***

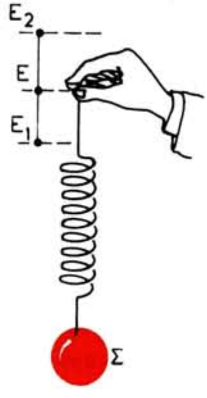
Ὅταν ὁ δίσκος Κ (διεγέρτης) τοῦ σχήματος 4.11γ περιστρέφεται μέ σταθερή συχνότητα, τότε ἡ σφαίρα Σ ἐκτελεῖ ἐξαναγκασμένη ταλάντωση, γιατί κατά τήν περιστροφή του ὁ δίσκος ἀσκεῖ (μέσω τοῦ ἐλατηρίου) ἐπάνω στή σφαίρα μιά περιοδική δύναμη τῆς ὁποίας ἡ συχνότητα εἶναι ὅση εἶναι ἡ συχνότητα περιστροφῆς τοῦ δίσκου.

Πραγματικά:

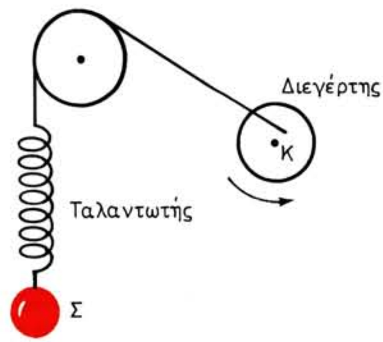
Ἄν περιστρέψομε τό δίσκο Κ (διεγέρτη) μέ συχνότητες V_1, V_2, V_3 ..., θά διαπιστώσομε ὅτι ἡ σφαί-



Σχ. 4.11α.



Σχ. 4.11β.



Σχ. 4.11γ.

ρα ταλαντώνεται μέ συχνότητες V_1, V_2, V_3 ... ἀντιστοίχως. Δηλαδή, ὅταν ὁ ταλαντωτής (π.χ. σφαίρα-ἐλατήριο) ἐκτελεῖ ἐξαναγκασμένη ταλάντωση, ταλαντώνεται μέ τή συχνότητα τοῦ διεγέρτη (δίσκου) καί ὄχι μέ τήν ἰδιοσυχνότητά του (V_0).

Συντονισμός.

Ἄν περιστρέψομε τό δίσκο Κ (σχ. 4.11γ) μέ συχνότητες V_1, V_2, V_3 ... θά διαπιστώσομε ὅτι ἡ σφαίρα ταλαντώνεται μέ πλάτη x_1, x_2, x_3 ... ἀντιστοίχως. Δηλαδή ὅταν ὁ ταλαντωτής (π.χ. σφαίρα-ἐλατήριο) ἐκτελεῖ ἐξαναγκασμένη ταλάντωση, ταλαντώνεται μέ πλάτος πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή συχνότητα τοῦ διεγέρτη (δίσκου).

Ἄν ἡ ἰδιοσυχνότητα τῆς σφαίρας-ἐλατηρίου εἶναι V_0 καί περιστρέψομε τό δίσκο μέ συχνότητες ... V_1, V_0, V_3 ... τέτοιες ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση ... $V_1 < V_0 < V_3$ ... τότε θά διαπιστώσομε ὅτι ἡ σφαίρα ταλαντώνεται μέ πλάτη: x_1, x_0, x_3 ... ἀντιστοίχως τέτοια πού νά ἰσχύει: ... x_1, x_3 .... $< x_0$.

Δηλαδή:

Ὅταν ἡ συχνότητα τοῦ διεγέρτη (π.χ. δίσκου) εἶναι ἴση μέ τήν ἰδιοσυχνότητα (V_0) τοῦ ταλαντωτῆ, τότε ὁ ταλαντωτής ταλαντώνεται μέ τό μεγαλύτερο πλάτος (x_0).

Παρατήρηση:

Ὅταν ἡ συχνότητα τοῦ διεγέρτη (V_Δ) εἶναι ἴση μέ τήν ἰδιοσυχνότητα (V_0) τοῦ ταλαντωτῆ, τότε τό πλάτος ταλαντώσεως παίρνει τή μεγαλύτερή του τιμή. Τότε, λέμε, ὅτι τό σύστημα ***διεγέρτης-ταλαντωτής*** βρίσκεται σέ συντονισμό.

Σημείωση:

Τό σχῆμα 4.11δ δείχνει τή μεταβολή τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως σέ συνάρτηση μέ τή συχνότητα τοῦ διεγέρτη. Ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 4.11δ λέγεται καμπύλη συντονισμοῦ.

Σχ. 4.11δ.

Ἀπό τήν καμπύλη συντονισμοῦ φαίνεται ὅτι ὅσο πιό πολύ ἀπέχει ἡ συχνότητα τοῦ διεγέρτη (δίσκου) ἀπό τήν ἰδιοσυχνότητα (V_0) τοῦ ταλαντωτῆ (σφαίρα-ἐλατηρίου) τόσο πιό μικρό εἶναι τό πλάτος τῶν ἐξαναγκασμένων ταλαντώσεων τοῦ ταλαντωτῆ. Δηλαδή τό πλάτος μεγαλώνει, ὅταν ἡ συχνότητα τοῦ διεγέρτη πλησιάζει τήν ἰδιοσυχνότητα τοῦ ταλαντωτῆ.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

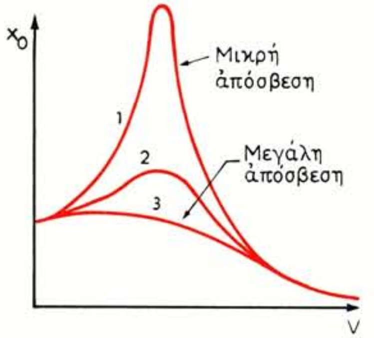
α) Τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ ταλαντωτῆ θά ἦταν ἄπειρο ($x_0 = \infty$), ἄν δέν ὑπῆρχαν ἀπώλειες ἐνέργειας (ἀποσβέσεις) στό σύστημα τοῦ ταλαντωτῆ.

β) Ὅσο οἱ ἀπώλειες ἐνέργειας (οἱ ἀποσβέσεις) στό σύστημα τοῦ ταλαντωτῆ εἶναι μικρότερες, τόσο τό πλάτος ταλαντώσεως εἶναι μεγαλύτερο. Τό σχῆμα 4.11ε δείχνει τίς καμπύλες συντονισμοῦ ταλαντωτῶν, πού ἔχουν τήν ἴδια ἰδιοσυχνότητα, ἀλλά διαφορετικές ἀπώλειες ἐνέργειας (ἀποσβέσεις).

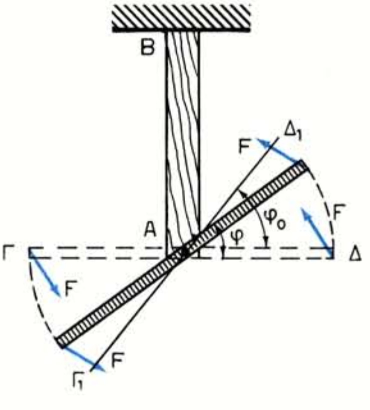
Σημείωση:

α) Ἄν θέλομε μιά κούνια νά αἰωρεῖται μέ τό μεγαλύτερό της πλάτος, πρέπει νά δίνομε περιοδικά στήν κούνια ὠθήσεις μέ συχνότητα ἴση μέ τήν ἰδιοσυχνότητα τῆς κούνιας (συντονισμός).

β) Ἐπάνω σέ γέφυρα ἀπαγορεύεται ὁ ρυθμικός βηματισμός μεγάλης ὁμάδας ἀνθρώπων, γιατί ἄν ἡ συχνότητα τῶν ὠθήσεων πού δέχεται ἡ γέφυρα μέ τό ρυθμικό βηματισμό συμπέσει μέ τήν ἰδιοσυχνότητα τῆς γέφυρας (συντονισμός), τότε ἡ γέφυρα θά ταλαντώνεται μέ τό μεγαλύτερο πλάτος της καί εἶναι δυνατόν νά καταστραφεῖ.



Σχ. 4.11ε.



Σχ. 4.12α.

4.12 Στροφική ἁρμονική ταλάντωση.

Γενικά.

Τό σχῆμα 4.12α παριστάνει ἕνα σύστημα πού ἀποτελεῖται:

α) Ἀπό ἕνα κυλινδρικό ἐλαστικό σῶμα ΑΒ πού τό ἕνα ἄκρο του Β εἶναι σταθερά στερεωμένο καί

β) ἀπό μιά ράβδο ΓΔ πού εἶναι στερεωμένη στό ἄκρο Α τοῦ κυλινδρικοῦ σώματος ΑΒ.

Ἔστω ὅτι τό σύστημα ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ ράβδος βρίσκεται στή θέση ΓΔ. Ἄν περιστρέψομε τή ράβδο κατά γωνία ϕ_0 καί τήν ἀφήσομε ἐλεύθερη, τότε ἐκτελεῖ στροφική ταλάντωση γύρω ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας της. Ἄν συμβεῖ ἡ γωνία φ τῆς περιστροφῆς τῆς ράβδου γύρω ἀπό τόν ἄξονα τοῦ σώματος ΑΒ νά μεταβάλλεται ἡμιτονοειδῶς σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο, δηλαδή ἄν ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{\phi = \phi_0 \, \text{ημ} \, \frac{2\pi t}{T}}$$

τότε λέμε ὅτι ἡ ράβδος ἐκτελεῖ ***στροφική ἁρμονική ταλάντωση***.

Τά σύμβολα τῆς σχέσεως παριστάνουν: φ, τή γωνία, τήν ὁποία σχηματίζει ἡ θέση πού ἔχει ἡ ράβδος μετά ἀπό χρόνο t, ἀπό τότε πού θά ἀφήσει τή θέση τῆς ἰσορροπίας της μέ τή θέση τῆς ἰσορροπίας της (ΓΔ), ϕ_0, τή γωνία πού σχηματίζει ἡ ἀκραία θέση $\Gamma_1\Delta_1$ τῆς ράβδου μέ τή θέση τῆς ἰσορροπίας (ΓΔ) δηλαδή τό πλάτος τῆς ταλαντώσεως καί T τήν περίοδο τῆς ταλαντώσεως.

Παρατήρηση.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν ἡ ταλάντωση τῆς ράβδου ΓΔ εἶναι στροφική ἁρμονική ταλάντωση, τότε σέ κάθε θέση τῆς ράβδου ἀσκεῖται ἐπάνω της μιά ροπή πού προκαλεῖ τήν κίνηση αὐτή καί πού εἶναι τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{M = -D^* . \phi}$$

ὅπου: D^* μιά σταθερά, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐλαστικότητα τοῦ σώματος AB καί λέγεται σταθερά στροφικῆς ἐπαναφορᾶς.

M ἡ ροπή πού ἀσκεῖται στή ράβδο, ὅταν αὐτή βρίσκεται στή θέση, ἡ ὁποία σχηματίζει μέ τή θέση ἰσορροπίας της γωνία φ. Τή ροπή M τήν ἀσκεῖ τό σῶμα AB ἐπάνω στή ράβδο (ΓΔ) λόγω τῶν παραμορφώσεών του.

Ὥστε, ἄν ἡ ράβδος (ΓΔ) ἐκτελεῖ στροφική ἁρμονική ταλάντωση γύρω ἀπό τόν ἄξονα τοῦ σώματος AB, τότε στή ράβδο ἀσκεῖται μιά ροπή M, ἡ ὁποία τείνει νά ἐπαναφέρει τή ράβδο στή θέση τῆς ἰσορροπίας της (ΓΔ) καί εἶναι ἀνάλογη πρός τή γωνία φ κατά τήν ὁποία ἔχει περιστραφεῖ ($M = -D^* \phi$).

Παρατήρηση.

α) Γενικά θά λέμε ὅτι ἕνα σῶμα ἐκτελεῖ, στροφική ἁρμονική ταλάντωση, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα καί ἡ γωνία στροφῆς φ μεταβάλλεται ἡμιτονοειδῶς μαζί μέ τό χρόνο, δηλαδή ὅταν ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\phi = \phi_0 \text{ ημ } \frac{2\pi t}{T}$$

β) Γενικά ἐπάνω σέ ἕνα σῶμα, πού ἐκτελεῖ στροφική ἁρμονική ταλάντωση, ἀσκεῖται μιά ροπή (ἡ ὁποία καί τήν προκαλεῖ), πού τείνει νά ἐπαναφέρει τό σῶμα στή θέση τῆς ἰσορροπίας του καί εἶναι ἀνάλογη πρός τή γωνία στροφῆς του, δηλαδή $M = -D^* \cdot \phi$.

Ἡ M λέγεται ροπή ἐπαναφορᾶς, γιατί τείνει νά ἐπαναφέρει τό σῶμα στή θέση ἰσορροπίας.

γ) Γιά ἕνα σῶμα πού ἐκτελεῖ στροφική ἁρμονική ταλάντωση ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\phi = \phi_0 . \text{ημ } \frac{2\pi t}{T} \qquad (1)$$

$$M = -D^* . \phi \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει ἡ σχέση:

$$M = -D^* \phi = -D^* . \phi_0 \text{ ημ } \frac{2\pi t}{T} \quad \text{καί} \quad \boxed{M = -D^* . \phi_0 \text{ ημ } \frac{2\pi t}{T}} \qquad (3)$$

Ἀπό τή σχέση (3) προκύπτει ὅτι: ***Ἄν σέ ἕνα σῶμα, πού μπορεῖ νά ἐκτελεῖ ταλαντώσεις γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, ἀσκεῖται μιά ροπή πού μεταβάλλεται ἡμιτονοειδῶς σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο, τότε τό σῶμα θά ἐκτελεῖ στροφική ἁρμονική ταλάντωση.***

Περίοδος στροφικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Ἡ περίοδος μιᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (1)$$

ὅπου: m εἶναι ἡ μάζα τοῦ κινητοῦ καί D εἶναι ἡ σταθερά ἐπαναφορᾶς τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεώς του.

Ἡ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση εἶναι μιά μεταφορική κίνηση.

Ἡ στροφική ἁρμονική ταλάντωση εἶναι μιά στροφική κίνηση.

Ἡ σχέση (1) πού ἰσχύει γιά μιά γραμμική ἁρμονική ταλάντωση ἰσχύει καί γιά μιά στροφική ἁρμονική ταλάντωση, ἄν σέ αὐτόν θέσομε ἀντί τοῦ m τό Θ καί ἀντί τοῦ D τό D*, δηλαδή ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}}$$

Σημείωση:

Συνήθως ἡ D* ὀνομάζεται καί κατευθύνουσα ροπή τοῦ σώματος, τό ὁποῖο ἀσκεῖ τή ροπή ἐπαναφορᾶς, στό σῶμα πού ἐκτελεῖ τή στροφική ἁρμονική ταλάντωση π.χ., στήν περίπτωση τοῦ συστήματος ***σῶμα ΑΒ-ράβδος ΓΔ,*** τό D* εἶναι ἡ κατεύθυνση ροπή τοῦ σώματος ΑΒ.

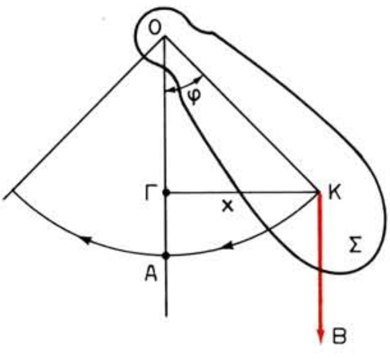
Γιά νά βροῦμε τή σταθερά ἐπαναφορᾶς (σχ. 4.12α) τῆς στροφικῆς κινήσεως πού κάνει π.χ. ἡ ράβδος ΓΔ φέρνομε τήν ράβδο στή θέση ἰσορροπίας της (ΓΔ) ἀσκοῦμε στή ράβδο μιά γνωστή ροπή M καί ἔστω ὅτι ἡ γωνία πού στρέφεται ἡ ράβδος εἶναι φ τήν ὁποία μετρᾶμε. Τό πηλίκο τοῦ μέτρου M καί φ δίνει τή D* τοῦ σώματος ΑΒ, δηλαδή:

$$\boxed{D^* = \frac{M}{\phi}}$$

Φυσικό ἐκκρεμές.

Φυσικό ἐκκρεμές ὀνομάζομε κάθε στερεό σῶμα τό ὁποῖο μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ἕνα ὁριζόντιο ἄξονα ὁ ὁποῖος ΔΕΝ περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους του.

Τό σχῆμα 4.12β παριστάνει ἕνα σῶμα Σ τό ὁποῖο μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα (Ο) δηλαδή παριστάνει ἕνα φυσικό ἐκκρεμές. Ἄν ἀπομακρύνομε τό σῶμα Σ κατά μία μικρή γωνία φ ἀπό τήν θέση τῆς ἰσορροπίας (ΟΑ), τότε τό Σ θά ἐκτελεῖ στροφική ἁρμονική ταλάντωση μέ μέση θέση τήν κατακόρυφη (ΟΑ).



Σχ. 4.12β.

Πραγματικά.

Ὅταν ἀπομακρύνομε τό σῶμα Σ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του ἔστω κατά γωνία φ, τότε ἐξασκεῖται ἐπάνω του ἡ ροπή:

$$M = Bx = mgx \qquad (1)$$

Ἐπειδή ἡ M τείνει νά ἐλαττώσει τό x ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$M = -\,mgx \qquad (2)$$

Ἀπό τό τρίγωνο ΟΓΚ παίρνομε: $x = (OK)\ \text{ημ}\phi \qquad (3)$

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) παίρνομε: $M = -\,mg\ (OK)\ \text{ημ}\phi \qquad (4)$

Ἄν ἡ μεγαλύτερη τιμή τήν ὁποία παίρνει ἡ γωνία φ εἶναι μικρότερη ἀπό 3° τότε μποροῦμε νά παίρνομε ἀντί τοῦ ημφ τήν ἴδια τήν γωνία (φ) σέ ἀκτίνια δηλαδή:

$$\etaμφ = φ \quad (5)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (4) καί (5) παίρνομε: $$M = -\, mg\,(OK)\,φ \quad (6)$$

Τά m, g καί (ΟΚ) εἶναι σταθερά μεγέθη. Ἀπό τή σχέση (6) προκύπτει ὅτι ἄν τό (Σ) ἐκτραπεῖ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας του (ΟΑ) καί ἀφεθεῖ ἐλεύθερο τότε ἐξασκεῖται ἐπάνω του μία ροπή Μ ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογη τῆς γωνίας (φ) καί ἡ ὁποία τείνει νά ἐλαττώσει τήν γωνία αὐτή, δηλαδή ἐξασκεῖται ἐπάνω του μία ροπή ἐπαναφορᾶς, ἄρα θά ἐκτελεῖ στροφική ἁρμονική ταλάντωση.

Περίοδος φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς.

Εἴδαμε ὅτι ἡ περίοδος Τ μιᾶς στροφικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$$

Ἄν θέσομε στή σχέση αὐτή $D^* = mg\,(OK)$ τότε γράφεται:

$$T_φ = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{m \,.\, g \,.\, (OK)}} \quad (7)$$

Σημείωση:

Βέβαια τό Θ εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ Σ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς (0) καί (ΟΚ) ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους ἀπό τόν ἄξονα (0).

Παρατήρηση:

Ἡ περίοδος Τ ἑνός ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8)$$

Ἡ περίοδος $T_φ$ ἑνός φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς δίνεται ἀπό τήν σχέση (7). Ἄν οἱ δύο περίοδοι εἶναι ἴσες τότε ἀπό τίς (8) καί (7) προκύπτει:

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{m \,.\, g \,.\, (OK)}}$$

$$\boxed{l = \frac{\Theta}{m\,(OK)}} \quad (9)$$

Ἀπό τή σχέση (9) προκύπτει ὅτι ἕνα φυσικό ἐκκρεμές ἔχει περίοδο ($T_φ$) ἴση μέ τήν περίοδο (Τ) ἑνός ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς τοῦ ὁποίου τό μῆκος εἶναι τόσο, ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση (9).

Σημείωση:

Τό ἁπλό ἐκκρεμές τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος εἶναι ἴση μέ τήν περίοδο ἑνός φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς ὀνομάζεται ἰσόχρονο αὐτοῦ.

Ε. ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΕΤΑΙ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

4.13 Εὕρεση τοῦ εἴδους τῆς κινήσεως.

Ἔχομε ἀναφέρει πολλές φορές γιά τήν κίνηση σφαίρας πού εἶναι στερεωμένη στήν ἄκρη ἐλατηρίου, ἀλλά εἶναι ὠφέλιμο νά ποῦμε καί τά ἀκόλουθα:

Ἔστω ὅτι ἡ σφαίρα ἰσορροπεῖ στή θέση Σ (σχ. 4.13). Τραβᾶμε τή σφαίρα πρός τά κάτω ἔστω μέχρι τό σημεῖο $Σ_1$ καί ὕστερα τήν ἀφήνομε ἐλεύθερη, ὁπότε ἡ σφαίρα ἀρχίζει νά ἐκτελεῖ ταλαντώσεις μέ θέση ἰσορροπίας τή θέση Σ.

Ἔστω ὅτι κατά κάποια χρονική στιγμή ἡ σφαίρα βρίσκεται στή θέση $Σ_2$, δηλαδή ἀπέχει ἀπό τή θέση ἰσορροπίας της ἀπόσταση x. Ὅταν ἡ σφαίρα βρίσκεται στήν τυχαία θέση $Σ_2$ ἐξασκοῦνται ἐπάνω της δύο δυνάμεις: Τό βάρος της $\vec{B}$ καί ἡ δύναμη $\vec{T}$ (τήν $\vec{T}$ τήν ἐξασκεῖ τό ἐλατήριο ἐπάνω στή σφαίρα).

Δηλαδή ἐπάνω στή σφαίρα ὅταν αὐτή βρίσκεται στήν τυχαία θέση $Σσ_2$ ἐξασκεῖται ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν δύο δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$:

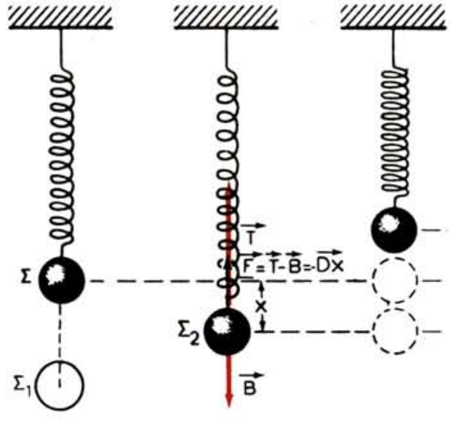
$$\boxed{\vec{F} = \vec{T} - \vec{B}} \tag{1}$$

Ἐπομένως ἡ κίνηση τήν ὁποία θά κάνει ἡ σφαίρα ὀφείλεται στή δύναμη $\vec{F}$.

Ἄν θέλομε νά κρατήσομε τή σφαίρα στή θέση $Σ_2$ θά πρέπει νά ἐξασκήσομε ἐπάνω της μία δύναμη $\vec{F}_1$ ἀντίθετη τῆς $\vec{F}$, δηλαδή $\vec{F}_1 = -\vec{F}$. (2)

Ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\vec{F}_1 = D \cdot \vec{x} \qquad \text{(νόμος τοῦ Hooke)} \tag{3}$$



Σχ. 4.13.

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) προκύπτει:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F} = D\vec{x} \text{ καί}$$

$$\boxed{\vec{F} = -D\vec{x}} \tag{4}$$

Ἀπό τή σχέση (4) προκύπτει ὅτι ἄν ἀπομακρύνομε τή σφαίρα ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας της καί τήν ἀφήσομε ἐλεύθερη, θά ἐκτελεῖ γραμμική ἁρμονική ταλάντωση, διότι, ὅπως ἔχομε ἀναφέρει, ἡ (4) ἀποτελεῖ τή συνθήκη τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

Σημείωση:

Ὑπενθυμίζομε ὅτι:

α) Ἡ D εἶναι μία σταθερά, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση καί τίς διαστάσεις τοῦ ἐλατηρίου καί ὀνομάζονται ἐλαστική σταθερά τοῦ ἐλατηρίου ἤ κατευθύνουσα δύναμη αὐτοῦ καί

β) τή δύναμη $\vec{F}$ τήν ὀνομάζομε δύναμη ἐπαναφορᾶς, γιατί τείνει νά φέρει τή σφαίρα στή θέση ἰσορροπίας της.

ΣΤ. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

4.14 Ἐξίσωση τοῦ Einstein.

Ἕνα ἀπό τά συμπεράσματα τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας εἶναι ἡ ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας μάζας καί ἐνέργειας, πού ὁρίζει τά ἑξῆς:

Ἄν μάζα m γίνει ἐνέργεια, δηλαδή ἄν πάψει νά ὑπάρχει ὡς ὕλη, τότε στή θέση αὐτῆς τῆς μάζας θά παρουσιασθεῖ ἐνέργεια E τόση, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\boxed{E = m \cdot C_0^2} \quad (1)$$

ὅπου $C_0 = 3 \cdot 10^8$ m . sec^{-1}, εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός στό κενό.

Ἡ ἐξίσωση (1) λέγεται ἐξίσωση τῆς ἰσοδυναμίας μάζας καί ἐνέργειας, καθώς ἐπίσης καί ἐξίσωση τοῦ Einstein.

Ἡ ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας μάζας καί ἐνέργειας ἰσχύει καί ἀντίστροφα. Δηλαδή:

Ἄν μιά ποσότητα ἐνέργειας E ἐξαφανισθεῖ, δηλαδή ἄν πάψει νά ὑπάρχει ὡς ἐνέργεια, τότε στή θέση αὐτῆς τῆς ποσότητας ἐνέργειας θά παρουσιασθεῖ μιά μάζα m τόση, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\boxed{m = \frac{E}{C_0^2}} \quad (2)$$

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι ***ἡ ὕλη μπορεῖ νά μετατρέπεται σέ ἐνέργεια καί, ἀντίστροφα, ἡ ἐνέργεια μπορεῖ νά μετατρέπεται σέ ὕλη.***

Ζ. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ

4.15 Σχέση μάζας καί ταχύτητας ἑνός σώματος.

Ἕνα ἀπό τά συμπεράσματα τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας εἶναι καί τό ἑξῆς:

Ἡ μάζα ἑνός σώματος ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ταχύτητά του. Δηλαδή, ὅταν τό σῶμα ἔχει ὁρισμένη ταχύτητα, τότε ἔχει καί ὁρισμένη μάζα· ἄν ἀλλάξει ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος, θά ἀλλάξει καί ἡ μάζα του.

Ἡ σχέση μεταξύ τῆς μάζας ἑνός σώματος καί τῆς ταχύτητάς του εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{C_0^2}}}} \quad (1)$$

ὅπου: m ἡ μάζα, πού ἔχει τό σῶμα ὅταν ἔχει ταχύτητα υ.

m_0 ἡ μάζα πού ἔχει τό σῶμα, ὅταν ἡ ταχύτητά του εἶναι μηδέν (ἡ μάζα m_0 λέγεται καί μάζα ἠρεμίας τοῦ σώματος).

C_0 ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός στό κενό.

Ἀπό τή σχέση (1) προκύπτουν τά ἑξῆς:

1) Ὅσο μεγαλώνει ἡ ταχύτητα (υ) τοῦ σώματος, τόσο καί ἡ μάζα (m) τοῦ σώματος μεγαλώνει.

Λέγοντας αὐξάνει ἡ μάζα ἑνός σώματος ὅταν αὐξάνει ἡ ταχύτητά του, δέν ἐννοοῦμε ὅτι αὐξάνει ἡ ὕλη τοῦ σώματος, ἀλλά ὅτι αὐξάνει τό πηλίκο:

$$\frac{F}{\gamma} = m$$

2) Κανένα ὑλικό σῶμα δέν μπορεῖ νά ἀποκτήσει ταχύτητα ἴση μέ τήν ταχύτητα C_0 τοῦ φωτός, γιατί ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος γίνει ἴση μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός (C_0), τότε ἡ μάζα (m) τοῦ σώματος γίνεται ἄπειρη (πάρα πολύ μεγάλη).

Παρατήρηση:

Οἱ συνηθισμένες ταχύτητες τῶν σωμάτων εἶναι πολύ πιό μικρές ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φωτός (C_0). Ἄρα τό κλάσμα (u^2/C_0^2) εἶναι πάρα πολύ μικρό μπροστά στή μονάδα καί μπορεῖ νά παραλειφθεῖ ἔναντί της. Ἄρα ἀπό τήν ἐξίσωση (1) παίρνομε:

$$m = m_0 \quad (2)$$

Ἀπό τή σχέση (2) προκύπτει ὅτι: ἡ μάζα m ἑνός σώματος εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ταχύτητά του, ὅταν αὐτή εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φωτός C_0, πράγμα πού γίνεται σέ ὅλες τίς συνηθισμένες ταχύτητες τῶν σωμάτων.

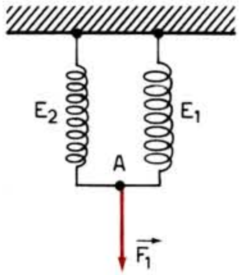
4.16 Ἀσκήσεις.

1. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση μεταξύ γῆς καί ἡλίου, ἄν ἡ ταχύτητα διαδόσεως τοῦ φωτός μέσα στό κενό καί τόν ἀέρα εἶναι 300.000.000 m/sec καί τό φῶς γιά νά διατρέξει τήν ἀπόσταση αὐτή χρειάζεται 8 min καί 20 sec;
2. Ἕνα αὐτοκίνητο πάει ἀπό τήν πόλη Α στήν πόλη Β μέ ταχύτητα $υ_1 = 50$ km/h καί ἐπιστρέφει μέ ταχύτητα $υ_2$. Ἄν ἡ μέση ταχύτητα μέ τήν ὁποία τό αὐτοκίνητο διέτρεξε τήν ἀπόσταση (ΑΒΑ) εἶναι $υ =$ km/h, πόση εἶναι ἡ ταχύτητα $υ_2$ μέ τήν ὁποία διέτρεξε τήν ἀπόσταση ΒΑ;
3. Δύο αὐτοκίνητα ξεκινοῦν τήν ἴδια ὥρα ἀπό δύο πολεις Α καί Β, οἱ ὁποῖες ἀπέχουν ἀπόσταση $s = 60$ km. Τά δύο αὐτοκίνητα συναντῶνται μετά ἀπό χρόνο $t = 20$ min ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκκινήσεώς τους σέ μία ἐνδιάμεση πόλη Γ. Ἄν τό αὐτοκίνητο πού ξεκίνησε ἀπό τήν πόλη Α ἔτρεχε μέ μέση ταχύτητα 70 km/h νά βρεθεῖ μέ πόση μέση ταχύτητα ἔτρεχε τό αὐτοκίνητο πού ξεκίνησε ἀπό τήν πόλη Β.
4. Ἕνα κινητό κινεῖται εὐθύγραμμα ὁμαλά καί μέ ταχύτητα $υ = 12$ m/sec. Ἀπότομα ἀρχίζει νά κινεῖται μέ κίνηση εὐθύγραμμη καί ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη μέ ἐπιτάχυνση γ. Ἀπό τή στιγμή αὐτή τό κινητό διανύει σέ χρόνο $t = 6$ sec διάστημα $s = 80$ m. Νά βρεθεῖ πόση ταχύτητα ἔχει στό τέλος τοῦ ἕκτου δευτερολέπτου καί πόση εἶναι ἡ γ.
5. Ἕνα κινητό πού κινήθηκε μέ ἐπιβράδυνση $γ = 3$ m/sec διέτρεξε μέγιστο διάστημα $s_μ = 900$ m. Νά βρεῖτε: α) Πόση ἦταν ἡ ἀρχική ταχύτητα ($υ_0$) τοῦ κινητοῦ καί β) πόσο χρόνο κινήθηκε ($t_μ$) μέχρι νά σταματήσει.
6. Ἕνα κινητό διέτρεξε μέ σταθερή ἐπιτάχυνση διάστημα $s = 1300$ m καί στό τέλος τοῦ διαστήματος αὐτοῦ εἶχε ταχύτητα $υ = 60$ m/sec. Ἄν ἡ ἀρχική ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ἦταν $υ_0 = 4$ m/sec, νά βρεθεῖ: α) Ἡ ἐπιτάχυνση μέ τήν ὁποία κινήθηκε τό κινητό, καί β) τό διάστημα πού διέτρεξε τό κινητό στά τρία τελευταῖα δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του.
7. Ἕνα κινητό κινεῖται μέ σταθερή ἐπιτάχυνση $γ = 2$ m/sec^2 ἐπί χρόνο t_1, στή συνέχεια κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα ἐπί χρόνο t_2 καί μετά κινεῖται μέ σταθερή ἐπιβράδυνση $γ_2 = 2$ m/sec^2 μέχρι νά σταματήσει. Ἄν ὁ συνολικός χρόνος πού κινήθηκε τό κινητό εἶναι $t_{ολ} = 30$ sec καί τό συνολικό διάστημα τό ὁποῖο διέτρεξε εἶναι $s = 90$ m, νά βρεθεῖ ὁ χρόνος πού κινήθηκε τό κινητό μέ σταθερή ταχύτητα.
8. Βλῆμα πού ἐκτοξεύθηκε κατακόρυφα πρός τά ἐπάνω ἔφθασε σέ ὕψος $h = 2500$ m. Νά βρεθοῦν α) Ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία ἐκτοξεύθηκε καί β) ὁ χρόνος πού μεσολάβησε ἀπό τή στιγμή τῆς ἐκτοξεύσεως μέχρι τή στιγμή πού τό βλῆμα ἐπανῆλθε στό σημεῖο ἐκτοξεύσεως.
9. Ἕνα σῶμα ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά ἐπάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 20$ m/sec. Ταυτόχρονα ἀφήνεται νά πέσει ἐλεύθερα ἕνα ἄλλο σῶμα ἀπό ὕψος $h = 25$ m. Νά βρεθεῖ σέ ποιό ὕψος θά συναντηθοῦν τά δύο σώματα.
10. Ἕνα σῶμα ἐκτοξεύεται ὁριζόντια ἀπό ὕψος $h = 200$ m μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 60$ m/sec. Νά βρεθεῖ: α) Ἡ ταχύτητα τήν ὁποία θά ἔχει τό σῶμα ὅταν φθάσει στό ἔδαφος καί β) σέ πόση ἀπόσταση ἀπό τήν κατακόρυφο τῆς θέσεως ἐκτοξεύσεως θά συναντήσει τό ἔδαφος.
11. Τό σημεῖο ἑνός τροχοῦ ἀπέχει ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς του ἀπόσταση $r = 40$ cm. Ἄν ὁ τροχός στρέφεται μέ γωνιακή ταχύτητα $ω = 15$ rad/sec, νά βρεθοῦν: α) Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση τοῦ σημείου αὐτοῦ καί β) ἡ περίοδος τῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ.
12. Μία δύναμη $F = 160$ N ἀναλύεται σέ δύο συνιστῶσες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ οἱ ὁποῖες σχηματίζουν μέ τή F γωνίες 30° καί 60° ἀντίστοιχα. Νά βρεθοῦν τά μέτρα τῶν $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.
13. Στά ἄκρα μιᾶς ὁμογενοῦς ράβδου κρέμονται δύο $B_1 = 25$ kp καί $B_2 = 30$ kp. Ἡ ράβδος ἔχει μῆκος $l = 6$ m καί ὅταν ὑποβαστάζεται ἀπό ὑποστήριγμα τό ὁποῖο ἀπέχει ἀπό τό B_1 ἀπόσταση $l_1 = 3{,}30$ m ἰσορροπεῖ σέ ὁριζόντια θέση. Νά βρεθεῖ τό βάρος τῆς ράβδου.
14. Μιά δύναμη $F = 150$ N ἀναλύεται σέ δύο συνιστῶσες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Ἄν τό μέτρο τῆς $\vec{F}_1$ εἶναι $F_1 = 80$ N καί ἡ $\vec{F}_2$ σχηματίζει μέ τή $\vec{F}$ γωνία 60°, νά βρεθεῖ τό μέτρο τῆς $\vec{F}_2$.
15. Μιά ράβδος πού ἔχει ἀσήμαντο βάρος διέρχεται ἀπό τά κέντρα τριῶν σφαιρῶν $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$, πού ἔχουν μάζες $m_1 = 2$kg, $m_2 = 3$ kg $m_3 = 4$ kg ἀντίστοιχα. Ἄν οἱ σφαῖρες $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ ἀπέχουν ἀπό τό ἕνα ἄκρο Α τῆς ράβδου ἀποστάσεις 2m, 4m καί 6m ἀντίστοιχα, νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ κέν-

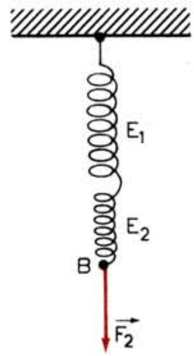
τρου βάρους τοῦ συστήματος τῶν τριῶν σφαιρῶν ἀπό τό ἄκρο Α τῆς ράβδου.

16. Σέ ἕνα σῶμα ἀσκεῖται μία δύναμη $F = 15$ kp καί τό σῶμα ὀλισθαίνει μέ σταθερή ταχύτητα ἐπάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἄν ἡ δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία φ μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι $n = 0{,}2$ καί τό βάρος τοῦ σώματος εἶναι $B = 60$ kp, νά βρεθεῖ ἡ γωνία φ.

17. Δύο ἐλατήρια E_1 καί E_2 πού οἱ κατευθύνουσες δυνάμεις τους εἶναι $D_1 = 25$ N/cm καί D_2=40N/cm συνδέονται ὅπως δείχνει τό σχῆμα (1). Στό σημεῖο Α ἀσκεῖται ἡ δύναμη F_1 καί τό Α μετατοπίζεται κατά $L = 5$ cm. Νά βρεθεῖ τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ (νά συγκριθεῖ τό ἀποτέλεσμα μέ τό ἀποτέλεσμα τῆς ἑπόμενης ἀσκήσεως).



1



2

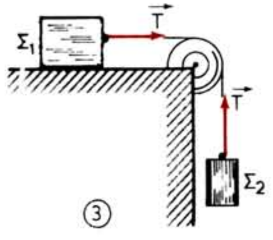
18. Δύο ἐλατήρια E_1 καί E_2 πού οἱ κατευθύνουσες δυνάμεις τους εἶναι $D_1 = 25$ N/cm καί $D_2 =$ N/cm συνδέονται ὅπως δείχνει τό σχῆμα (2). Στό σημεῖο Β ἀσκεῖται ἡ δύναμη $\vec{F}_2$ καί τό Β μετατοπίζεται κατά $l = 5$ cm. Νά βρεθεῖ τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}_2$.

19. Σέ ἕνα σῶμα πού ἠρεμεῖ ἀσκεῖται ἀπότομα μιά δύναμη $F = 5000$ Nt καί τοῦ προσδίνει ἐπιτάχυνση $\gamma = 0{,}4$ m/sec^2. Πόση εἶναι ἡ μάζα τοῦ σώματος καί πόσο διάστημα θά διατρέξει τό σῶμα αὐτό στά σαράντα πρῶτα δευτερόλεπτα τῆς ἐπενέργειας τῆς δυνάμεως;

20. Ἕνα σῶμα βάρους $B = 4$ kp κινεῖται ἐπάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ ἀρχική ταχύτητα u_0 καί διατρέχει ἀπόσταση $s = 7$ m μέχρι νά σταματήσει τελείως. Ἄν ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $n = 0{,}3$, νά βρεθεῖ ἡ ἀρχική ταχύτητα u_0.

21. Τά δύο σώματα (σχῆμα 3) Σ_1 καί Σ_2 ἔχουν μάζες $m_1 = 40$ kg καί $m_2 = 12$ kg. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιτάχυνση μέ τήν ὁποία κινοῦνται τά δύο σώματα. Οἱ τριβές, ἡ μάζα τῆς τροχαλίας καί ἡ μάζα τοῦ σχοινιοῦ δέν λαμβάνονται ὑπόψη.

22. Ἕνα δοχεῖο γεμάτο νερό δένεται στό ἄκρο ἑνός σχοινιοῦ μήκους 1,5 m. Μέ τή βοήθεια τοῦ σχοινιοῦ περιστρέφομε τό δοχεῖο ἔτσι ὥστε νά γράφει κυκλική κατακόρυφη τροχιά. Πόση εἶναι ἡ μικρότερη ταχύτητα τήν ὁποία πρέπει νά ἔχει τό δοχεῖο στό ἀνώτατο σημεῖο τῆς τροχιᾶς του γιά νά μή χύνεται τό νερό;



3

23. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα $m = 20$ kg καί κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $u_0 =$ m/sec. Ἀπότομα ἐπάνω στό σῶμα αὐτό ἀσκεῖται μία δύναμη $\vec{F}$, πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ταχύτητας $\vec{u}_0$. Ἄν ἡ σταθερή δύναμη $\vec{F}$ εἶναι τέτοια ὥστε μέσα σέ χρόνο $t = 40$ sec νά μεταβάλλει τήν ταχύτητα τοῦ σώματος ἀπό $u_0 = 8$ m/sec σέ $u = 45$ m/sec, νά βρεθεῖ: α) Τό ἔργο πού παρήγαγε ἡ δύναμη $\vec{F}$ μέσα στό χρόνο αὐτό καί β) ἡ ἰσχύς τῆς δυνάμεως αὐτῆς.
24. Ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα $m = 22$ kg ἀφήνεται νά πέσει ἀπό ὕψος $h = 110$ m. Πόση κινητική καί πόση δυναμική ἐνέργεια θά ἔχει, ὅταν ἔχει πέσει κατά h_1 20 m καί πόση μόλις φθάσει στό ἔδαφος;
25. Μία δύναμη F τεντώνει ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο κατά $x = 25$ m. Ἄν τό ἔργο πού παρήγαγε ἡ δύναμη $\vec{F}$ γιά τήν ἐπιμήκυνση αὐτή εἶναι $A = 30$ Joule, νά βρεθεῖ ἡ σταθερά τοῦ ἐλατηρίου.
26. Πόση εἶναι ἡ μάζα m_π ἑνός πυροβόλου ὅπλου τό ὁποῖο ἐκσφενδονίζει βλῆμα μάζας $m_\beta = 300$ g μέ ταχύτητα u_β 900 m/sec, ὅταν ἡ ταχύτητα ἀνακρούσεώς του εἶναι $u_\pi = 35$ m/sec;
27. Δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 πού ἔχουν μάζες $m_1 = 50$ g καί $m_2 = 100$g καί ἴσες ἀκτίνες κινοῦνται ἐπάνω στήν ἴδια εὐθεία καί κατά τήν ἴδια φορά μέ ταχύτητες $u_1 = 30$ m/sec καί $u_2 = 20$ m/sec. Ἡ Σ_1 προλαβαίνει τήν Σ_2 καί συγκρούονται. Ἄν μετά τή σύγκρουση οἱ δύο σφαῖρες ἐνσωματώνονται, νά βρεθεῖ ἡ κοινή ταχύτητα μέ τήν ὁποία θά κινοῦνται.
28. Δύο σφαῖρες Σ_1 καί Σ_2 πού ἔχουν μάζες $m_1 = 3$ kg καί $m_2 = 6$ kg κινοῦνται ἀντίθετα ἐπάνω στήν ἴδια εὐθεία μέ ταχύτητες $u_1 = 8$ m/sec καί 4 m/sec. Ἄν οἱ σφαῖρες αὐτές εἶναι ἀπολύτως ἐλαστικές, νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα πού θά ἔχει καθεμιά τους μετά τή σύγκρουση.
29. Ἕνας τροχός πού ἔχει ἀκτίνα $R = 60$ m καί μάζα $m = 15$ kg περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονά του. Ἄν ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ τροχοῦ ὡς πρός τόν ἄξονά του εἶναι $\theta = m.r/2$ καί ἡ κινητική του ἐνέργεια εἶναι $E_\kappa = 5000$ Joule, νά βρεθεῖ ἡ συχνότητα περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Β. ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Γ. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Β. ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Γ. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Α. ΤΡΙΒΗ

Β. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Γ. ΕΞΟΔΟΣ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

Δ. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ε. ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΕΤΑΙ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

ΣΤ. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ζ. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ