ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Τυπωμένο
σέ χαρτί
ἀνακυκλωμένο

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ ΔΗΜΟΣΙΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

(Διὰ πλοιάρχους)

1.—Μαθηματικὰ
2.—Τριγωνομετρία
3.—Ναυτικὴ Τέχνη Α, Β
4.—Ναυτικὴ Γεωγραφία Α, Β
5.—Ναυτικὴ Ἀλληλογραφία
6.—Ναυτικὸν Δίκαιον
7.—Ναυτικὴ Οἰκονομία
8.—Ναυτικὴ Μετεωρολογία
9.—Ναυτικαὶ Μηχαναὶ
10.—Ναυτιλία Α, Β
11.—Ἀγγλικὰ
12.—Φυσικὴ
13.—Ναυτικὰ Ὄργανα
14.—Συνεννόησις
15.—Ἱστορία Ε.Ν.
16.—Ναυτικὴ Ὑγιεινὴ—Πρῶται βοήθειαι

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «Ἱδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισεν τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν Ἱδρύματος ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς Ἑλλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἵδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς. Ἐκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Εἰδικώτερον, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰ ἐκπαιδευτικὰ βιβλία τῶν μαθητῶν τῶν Δημοσίων Σχολῶν Ἐμπορικοῦ Ναυτικοῦ, τὸ Ἵδρυμα ἀνέλαβε τὴν ἔκδοσίν των ἐν πλήρει καὶ στενῇ συνεργασίᾳ μετὰ τῆς Διευθύνσεως Ναυτικῆς Ἐκπαιδεύσεως τοῦ Ὑπουργείου Ἐμπορικῆς Ναυτιλίας, ὑπὸ τὴν ἐποπτείαν τοῦ ὁποίου ὑπάγονται αἱ Σχολαὶ αὗται.

Ἡ ἀνάθεσις εἰς τὸ Ἵδρυμα ἐγένετο δυνάμει τῆς ὑπ' ἀριθ. 61288/5031, 9ης Αὐγούστου 1966, ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργοῦ Ἐμπορικῆς Ναυτιλίας δι' ἧς συνεκροτήθη καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων.

Κύριος σκοπὸς τῶν ἐκδόσεων αὐτῶν εἶναι ἡ παροχὴ πρὸς τοὺς μαθητὰς τῶν ναυτικῶν σχολῶν τῶν ἀναγκαίων ἐκπαιδευτικῶν κειμένων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ ἐν ταῖς Σχολαῖς διδασκόμενα μαθήματα.

Ἐν τούτοις ἐλήφθη πρόνοια, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι γενικώτερον χρήσιμα δι' ὅλους τοὺς ἀξιωματικοὺς τοῦ Ἐμπορικοῦ Ναυτικοῦ, τοὺς ἀσκοῦντας ἤδη τὸ ἐπάγγελμα καὶ ἐξελισσομένους εἰς τὴν ἱεραρχίαν τοῦ κλάδου των.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος κατέβαλον κάθε προσπάθειαν ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῆ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμὴ τῶν βιβλίων ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς πλέον ἀπόρους μαθητάς.

Οὕτω προσφέρονται εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν τῶν καθηγητῶν, τῶν μαθητῶν τῆς ναυτικῆς μας ἐκπαιδεύσεως καὶ ὅλους τοὺς ἀξιωματικοὺς τοῦ Ε.Ν. αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ
Β Ι Β Λ Ι Ο Θ Η Κ Η Τ Ο Υ Ν Α Υ Τ Ι Κ Ο Υ

ΗΛΙΑ Λ. ΚΟΝΤΟΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΔΗΜΟΣΙΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΕΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΑΘΗΝΑ
1995

Α' ΕΚΔΟΣΗ 1968

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ παρὼν τόμος προορίζεται διὰ τὰς Δημοσίας Σχολὰς Πλοιάρχων Ε.Ν. καὶ περιέχει ἐκ τῆς ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς τριγωνομετρίας ὅ,τι ἀκριβῶς χρειάζεται ὁ Ναυτιλλόμενος. Ἂν καὶ οἱ μαθηταὶ σήμερον εἶναι ἀπόφοιτοι Γυμνασίου, αἱ βασικαὶ ἔννοιαι ἐδόθησαν μὲ μεγάλην ἁπλότητα, διὰ νὰ καταστῇ τὸ βιβλίον εὔχρηστον καὶ ὑπὸ τῶν δοκίμων πλοιάρχων, οἱ ὁποῖοι ἐπ' ἀρκετὸν ἔχασαν τὴν ἐπαφήν των μὲ τὸ σχολεῖον.

Αἱ ἀσκήσεις τόσον τῆς Ἐπιπέδου Τριγωνομετρίας ὅσον καὶ τῆς Σφαιρικῆς ἅπτονται στενῶς τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ὁ μαθητὴς θὰ συναντήσῃ εἰς τὸ μάθημα τῆς Ναυτιλίας, καὶ βοηθοῦν εἰς τὴν καλυτέραν κατανόησιν τούτου.

Ὁ διὰ πρώτην φορὰν διδάσκων τὴν ὕλην τοῦ παρόντος τόμου εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξοικειωθῇ μὲ ὡρισμένας νέας ἐννοίας καὶ ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς αὐτόν. Οὕτω θὰ βοηθηθῇ πολὺ κατὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ μαθήματος.

Ὑπῆρξαν περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἐκρίθη σκόπιμον νὰ ἀναπτύξωμεν ὡρισμένας ἐννοίας κάπως περισσότερον, ἂν καὶ περιλαμβάνονται εἰς τὸ μάθημα τῆς Ναυτιλίας. Τοῦτο ἐπράξαμεν διὰ νὰ καταστῇ τὸ βιβλίον κατὰ τὸ δυνατὸν ἀνεξάρτητον.

Οἱ παρεμβαλλόμενοι Πίνακες ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς Ναυτικοὺς Πίνακες Norie's, διότι μὲ αὐτοὺς ἐσυνήθησαν οἱ Ἕλληνες ναυτικοὶ νὰ ἐργάζωνται.

Ἐπιθυμῶ νὰ ἐκφράσω τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς τὴν Ἐπιτροπὴν τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου διὰ τὴν συμπαράστασίν της ὡς καὶ διὰ τὰς ὑποδείξεις της κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος Τόμου.

Ὁ Συγγραφεύς

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

Εἰσαγωγή

Παράγρ. Σελὶς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

Τριγωνομετρικὸς κύκλος

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΟΥ Ἢ ΓΩΝΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

Περὶ λογαρίθμων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

Μέτρησις εὐθυγράμμων τριγώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος καὶ διαφορᾶς δύο τόξων

Παράγρ. Σέλις

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

Ἐπίλυσις παντὸς τριγώνου

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

Πλαγιογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα

Παράγρ. Σελίς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

Ὀρθογώνια καὶ ὀρθόπλευρα σφαιρικὰ τρίγωνα

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

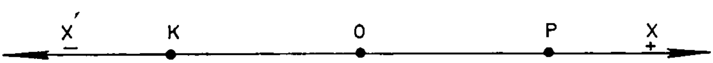
ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1·1 Ἄξονες.

Ἔστω χχ′ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Ο ἐπ᾽ αὐτοῦ. Συμφωνοῦμεν ὅτι ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ ἔχουν ἀρχὴν τὸ Ο καὶ εὑρίσκονται πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, δηλαδὴ πρὸς τὴν διεύθυνσιν Οχ, θὰ εἶναι θετικά, ἐνῶ ὅσα εὑρίσκονται πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ, δηλαδὴ πρὸς τὴν διεύθυνσιν Οχ′, θὰ εἶναι ἀρνητικά. Οὕτως εἰς τὸ σχῆμα 1·1α τὸ ΟΡ θὰ εἶναι θετικόν, ἐνῶ τὸ ΟΚ ἀρνητικόν. Ἐὰν δὲ τὸ ΟΡ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΟΚ, τότε τὰ μήκη αὐτῶν παρίστανται ὡς α καὶ — α.

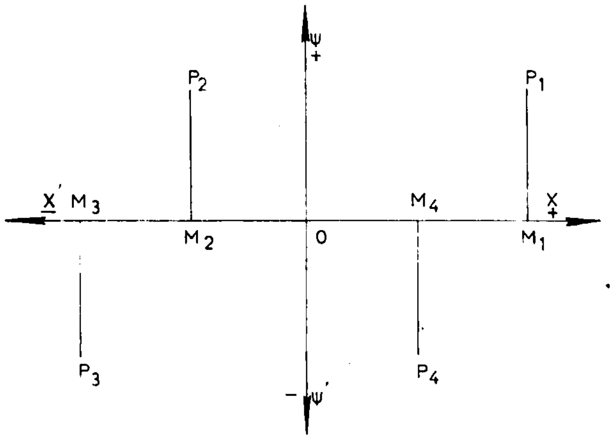


Σχ. 1·1α.

Εἰς τὸ εὐθύγραμμον λοιπὸν τμῆμα τοῦ σχήματος 1·1α ἔχομεν ὁρίσει: α) τὸ σημεῖον Ο ὡς ἀρχὴν καὶ β) τὴν θετικὴν καὶ ἀρνητικὴν φορὰν ἐπ᾽ αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ καθορίσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὸ εὐθύγραμμον αὐτὸ τμῆμα ὀνομάζομεν *ἄξονα.*

Ἐὰν λάβωμεν τὸν προηγούμενον ἄξονα χχ′, εἰς τὴν ἀρχὴν Ο τοῦ ὁποίου φέρομεν εὐθεῖαν κάθετον, τὴν ψψ′ (σχ. 1·1β), καὶ ὁρίσωμεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν Οψ, ἀρνητικὴν δὲ τὴν Οψ′, ὡς καὶ τὴν μονάδα ἐπ᾽ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν τώρα καὶ δεύτερον ἄξονα. Οἱ ἀνωτέρω δύο ἄξονες ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα καθέτων ἢ ὀρθογωνίων ἀξόνων.

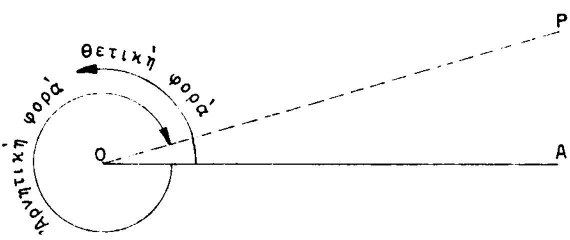
Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὰ τμήματα OM_1 καὶ OM_4 θὰ εἶναι θετικά, ἐνῶ τὰ OM_2 καὶ OM_3 ἀρνητικά. Ὁμοίως τὰ M_1P_1 καὶ M_2P_2 θετικά, τὰ δὲ M_3P_3 καὶ M_4P_4 ἀρνητικὰ (σχ. 1·1β).



Σχ. 1·1β.

1·2 Προσανατολισμέναι γωνίαι καὶ τόξα.

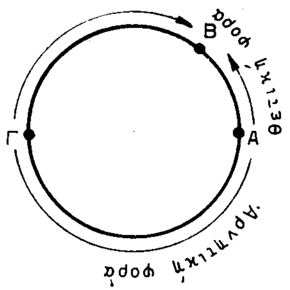
Ἔστω ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ (σχ. 1·2α), ἡ ὁποία στρέφεται περὶ



Σχ. 1·2α.

τὸ σημεῖον Ο, παραμένουσα πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ἡ ἡμιευθεῖα αὐτὴ εἶναι δυνατὸν νὰ κινηθῇ κατὰ δύο φοράς, μίαν κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, δηλαδὴ πρὸς τὰ ἀριστερά, τὴν ὁποίαν κατὰ συνθήκην ὀνομάζομεν *θετικὴν φοράν*, καὶ μίαν ἀντίθετον πρὸς τὴν προηγουμένην, δηλαδὴ πρὸς τὰ δεξιά, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *ἀρνητικὴν φοράν*. Ἐὰν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ στραφῇ περὶ τὸ σημεῖον Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἕως τὸ σημεῖον Ρ, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΡ σχηματίζουν μίαν γωνίαν, τὴν ΑΟΡ, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *θετικὴν γωνίαν*. Ἀντιθέτως ἡ γωνία ΑΟΡ, ἡ ὁποία γράφεται κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, ὀνομάζεται *γωνία ἀρνητική*.

Ἐὰν κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α περιφερείας (σχ. 1·2 β) καὶ διαγράψῃ τὸ τόξον ΑΒ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, λέγομεν ὅτι τὸ τόξον ΑΒ εἶναι θετικόν, ἐνῶ, ἂν ἀναχωρήσῃ ἀπὸ τὸ Α καὶ φθάσῃ εἰς τὸ Β (μέσω τοῦ Γ), δηλαδὴ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἀρνητικόν.



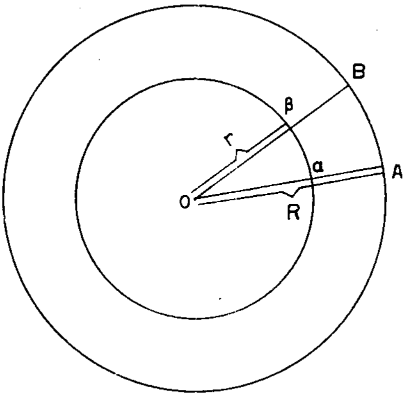
Σχ. 1·2 β.

1·3 Μονάδες τόξων καὶ γωνιῶν.

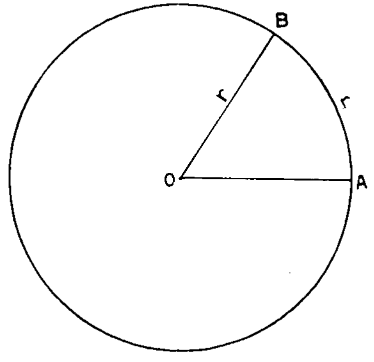
Μοῖρα: Ἔστω περιφέρεια (σχ. 1·3 α) μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα R. Ὁρίζομεν ὡς *τόξον μιᾶς μοίρας* τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/360 τῆς περιφερείας. Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου αὐτοῦ φέρωμεν τὴν ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΟΒ, λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἔχομεν γωνίαν μιᾶς μοίρας.

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν γράψωμεν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἑτερον κύκλον, π.χ. μικροτέρας ἀκτῖνος, r_1, τότε καὶ τὸ τόξον αβ θὰ εἶναι τόξον μιᾶς μοίρας.

Εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειωθῇ ὅτι δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς μοίρας.



Σχ. 1·3 α.



Σχ. 1·3 β.
Τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τόξον ἑνὸς ἀκτινίου (1 rad).

Εἰς τὸ σχῆμα 1·3 α τὰ τόξα ΑΒ καὶ αβ ὑποτίθεται ὅτι εἶναι ἀμφότερα τόξα μιᾶς μοίρας, δηλαδὴ 1/360 ἑκάστης περιφερείας, ἀλλὰ τὸ μῆκος αὐτῶν εἶναι διάφορον, ἐξαρτώμενον προφανῶς ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου. Τὰ μήκη ταῦτα εὑρίσκονται εἰς σχέσιν ἀναλογίας.

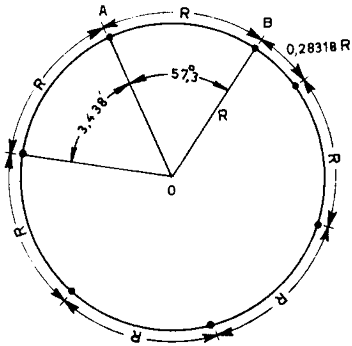
Δηλαδή, ἐὰν ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος Οα, τότε καὶ τὸ μῆκος τοῦ $\widehat{AB}$ θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ μήκους τοῦ $\widehat{\alpha\beta}$, ἢ $\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ ἢ $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{R}{r} = 2$.

Ἀκτίνιον: Ἔστω περιφέρεια μὲ κέντρον Ο (σχ. 1·3 β) καὶ τόξον ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος λαμβάνομεν ἴσον πρὸς τὸ μῆκος r τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου. Τὸ τόξον αὐτὸ ὁρίζομεν ὡς νέαν μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων καὶ τὸ ὀνομάζομεν *ἀκτίνιον* (radian) ἢ rad.

Ἀκτίνιον λοιπὸν εἶναι τὸ τόξον ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ θὰ καλῆται γωνία ἑνὸς ἀκτινίου.

Ἀριθμὸς ἀκτινίων περιφερείας: Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μήκους τῆς περιφερείας, δηλαδὴ $2\pi r$, πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος r, θὰ μᾶς δίδῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκτινίων τῆς περιφερείας, ἤτοι $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 6{,}28$ ἀκτίνια κατὰ προσέγγισιν (σχ. 1·3γ).



Σχ. 1·3γ.
Ἡ περιφέρεια κατανέμεται περίπου εἰς 6,28 ἀκτίνια.

Προκειμένου νὰ εὕρωμεν ποία γωνία εἰς μοίρας ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον ἑνὸς ἀκτινίου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς (σχ. 1·3γ):

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν 360° διὰ τοῦ 6,28 μᾶς δίδει προφανῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τόξον ἑνὸς ἀκτινίου. Δηλαδὴ $\frac{360^\circ}{6{,}28} = 57^\circ{,}3$ κατὰ προσέγγισιν ἢ 3438′.

Παράδειγμα 1.

Νὰ μετατραπῇ τόξον 15° εἰς ἀκτίνια.

Λύσις.

Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\begin{array}{lr} 1 \text{ ἀκτίνιον (rad)} & 57^\circ{,}3 \\ x & 15^\circ \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{15^\circ}{57^\circ{,}3} \text{ ἀκτίνια (rad).}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει:

Μοῖραι τόξου διὰ $57^\circ{,}3$ = Ἀκτίνια (rad).

Παράδειγμα 2.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 15°, ἐὰν ἀνήκῃ εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10 cm.

Λύσις.

$$\begin{array}{lr} 1 \text{ ἀκτίνιον (rad)} & 10 \text{ cm} \\ \dfrac{15^\circ}{57^\circ{,}3} & x \\ \hline \end{array}.$$

$$x = 10 \times \frac{15^\circ}{57^\circ{,}3} \text{ cm}$$

Δηλαδή: Μῆκος τόξου = (Ἀκτὶς) × (Ἀκτίνια).

Παράδειγμα 3.

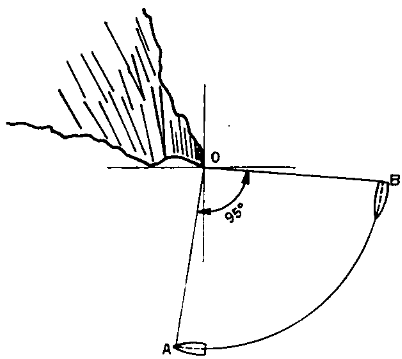
Ἕνα ἀκρωτήριον διοπτεύεται ὑπό τινος πλοίου κατὰ τὸ ἐγκάρσιον καὶ ἀπὸ ἀπόστασιν 5 μιλίων. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὑπὸ τοῦ πλοίου διανυθεῖσα ἀπόστασις μεταξὺ δύο διοπτεύσεων 100° καὶ 195° (ἀμφότεραι αἱ διοπτεύσεις κατὰ τὸ ἐγκάρσιον) (σχ. 1·3δ).

Λύσις.

Ἀκτὶς = 5 μίλια

$$\text{AOB} = 95^\circ \text{ ἢ } \frac{95^\circ}{57^\circ{,}3} \text{ ἀκτίνια (rad).}$$

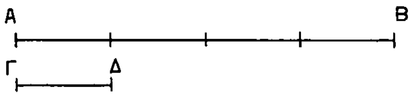
Μῆκος τόξου AB = (Ἀκτὶς) × (Ἀκτίνια) = $5 \times \dfrac{95^\circ}{57^\circ{,}3}$ μίλια = 8,3 μίλια.



Σχ. 1·3 δ.

1·4 Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.

Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν καλεῖται ὁ ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον (μέγεθος), διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον. Οὕτω ὁ λόγος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4, ἐφ' ὅσον τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ AB (σχ. 1·4 α).



Σχ. 1·4 α.

Ὁ λόγος τοῦ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ σημειοῦται: $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}$. Ὁ λόγος τοῦ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ AB σημειοῦται: $\dfrac{\Gamma\Delta}{AB}$. Εἶναι δὲ εἰς τὸ παράδειγμά μας $\dfrac{\Gamma\Delta}{AB} = \dfrac{1}{4}$. Ἂν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $\Gamma\Delta$ ληφθῇ ὡς μονάς, τότε ὁ ἀριθμὸς 4, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ λόγος τοῦ AB πρὸς ΓΔ, λέγεται *μῆκος* ἢ *μέτρον τοῦ AB*. Οὕτω, ἂν τὸ μῆκος ΓΔ ἰσοῦται πρὸς 1 m, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς AB εἶναι 4 m καὶ θὰ σημειώνωμεν (AB) = 4 m. Ἂν φυσικὰ τὸ ΓΔ ἐκφράζεται εἰς cm, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς AB εἶναι 4 cm.

1·5 Ἀσκήσεις.

1. Μετατρέψατε εἰς ἀκτίνια τὰς κάτωθι γωνίας:

137°, $59^\circ\ 51'$, $00^\circ\ 37'52''$.

2. Δίδονται: α) ἀκτὶς 15 in, μῆκος τόξου 32 in,
β) ὁμοίως ἀκτὶς 7,2 μίλια, μῆκος τόξου 3,73 μίλια,
γ) ὁμοίως, ἀκτὶς 120 πόδες, μῆκος τόξου 0,073 μίλια.

Ὑπολογίσατε τὰς ἀνωτέρω γωνίας εἰς ἀκτίνια.

3. Δύο κινητὰ κινοῦνται ἐπὶ περιφερειῶν δύο ὁμοκέντρων κύκλων μὲ ἀκτῖνας 20 καὶ 25 cm ἀντιστοίχως.

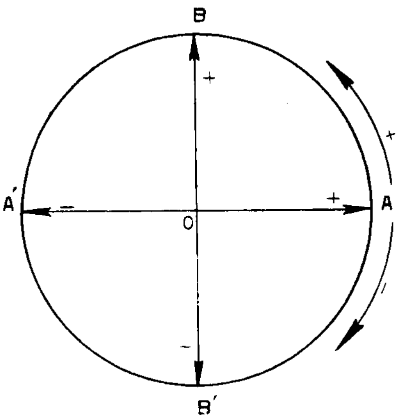
Ἐὰν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν διανύῃ τόξον 38° εἰς 3 sec, ὑπολογίσατε τὰς γραμμικάς των ταχύτητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

2·1 Ὁρισμός.

Ἐὰν λάβωμεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα ($r = 1$) γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ὁρίσωμεν δὲ ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων τὸ σημεῖον Α, τῆς τομῆς περιφερείας καὶ ἄξονος τῶν χ, καὶ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπ' αὐτῆς, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἕνα *τριγωνομετρικὸν κύκλον* (σχ. 2·1 α).



Σχ. 2·1 α.

Εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν πλέον κύκλον τὸν ἄξονα τῶν χ (ὁριζόντιον) ὀνομάζομεν *ἄξονα τῶν συνημιτόνων*, τῶν δὲ ψ (κατακόρυφον) *ἄξονα τῶν ἡμιτόνων*. Οἱ ἄξονες αὐτοὶ διαιροῦν τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον εἰς τέσσαρα τεταρτημόρια ἢ τεταρτοκύκλια, τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν λαμβανόμενα ὀνομάζονται 1ον, 2ον, 3ον, 4ον.

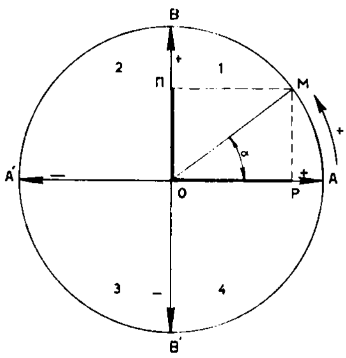
Σημειοῦμεν ὅτι ὅλα τὰ εὐθύγραμμα μεγέθη, ποὺ θὰ ὁρισθοῦν ἐν συνεχείᾳ εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον, θὰ συγκρίνωνται μὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΟΥ Ἢ ΓΩΝΙΑΣ

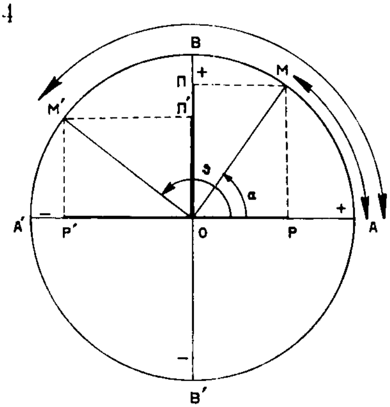
2·2 Ἡμίτονον (sin). Συνημίτονον (cos).

α) *Ἡμίτονον.*

Ἔστω ἕνα θετικὸν τόξον AM (σχ. 2·2α), τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον (AM) = α μοῖραι. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OM, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *τελικὴν ἀκτῖνα,* καὶ ἐκ τοῦ M τὴν κάθετον MΠ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων. Τὸν λόγον $\frac{\text{OΠ}}{\text{OA}} = (\text{OΠ}) \simeq \frac{3}{4}$ καλοῦμεν *ἡμίτονον* τοῦ τόξου AM ἢ τῆς ἀντιστοίχου γωνίας α. Παρίσταται δὲ οὕτω: $\eta\mu\alpha = \frac{\text{OΠ}}{\text{OA}} = (\text{OΠ}) \simeq \frac{3}{4}$.



Σχ. 2·2α.



Σχ. 2·2β.

β) *Συνημίτονον.*

Ἐπίσης ἐκ τοῦ M φέρομεν τὴν κάθετον MP ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Τὸν λόγον $\frac{\text{OP}}{\text{OA}} = (\text{OP}) \simeq \frac{4}{5}$ καλοῦμεν *συνημίτονον* τοῦ τόξου AM ἢ τῆς γωνίας α. Παρίσταται δὲ οὕτω: $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\text{OP}}{\text{OA}} = (\text{OP}) \simeq \frac{4}{5}$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας α ἐκφράζεται εἰς πραγματικοὺς ἀριθμούς.

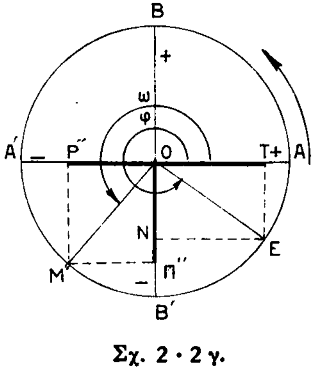
Ἔστω τώρα ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος (σχ. 2·2β) μὲ κέντρον Ο καὶ τὸ τόξον ΑΜ μέτρου α. Τότε τὸ ημα = +(ΟΠ), τὸ δὲ συνα = +(ΟΡ).

Ὥστε *εἰς τὸ 1ον τεταρτημόριον τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον εἶναι θετικά.*

Ἔστω τώρα ἕνα τόξον ΑΜ′, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον. Φέρομεν τὴν τελικὴν ἀκτῖνα ΟΜ′ καὶ ἐκ τοῦ Μ′ τὰς καθέτους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων Μ′Π′ καὶ Μ′Ρ′. Ἐὰν εἰς τὸ τόξον ΑΜ′ ἀντιστοιχῇ γωνία θ, θὰ ἔχωμεν $\eta\mu\theta = \frac{\text{Ρ}'\text{Μ}'}{\text{ΟΑ}} = (\text{Ρ}'\text{Μ}') \simeq 0{,}6$. Ἐνῶ $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\text{ΟΡ}'}{\text{ΟΑ}} = (\text{ΟΡ}') \simeq -0{,}8$.

Ὥστε *εἰς τὸ 2ον τεταρτημόριον τὸ ἡμίτονον εἶναι θετικὸν ἐνῶ τὸ συνημίτονον ἀρνητικόν.*

Ἔστω τώρα ἕνα τόξον ΑΜ″ (σχ. 2·2γ), τὸ ὁποῖον καταλή-



Σχ. 2·2 γ.

γει εἰς τὸ 3ον τεταρτημόριον καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ γωνία ω.

Κατὰ τὰ γνωστὰ ὁ λόγος ημω $= \dfrac{M''P''}{OA} = (M''P'') \simeq -0{,}7$ καὶ
συνω $= \dfrac{OP''}{OA} = (OP'') = -0{,}6$.

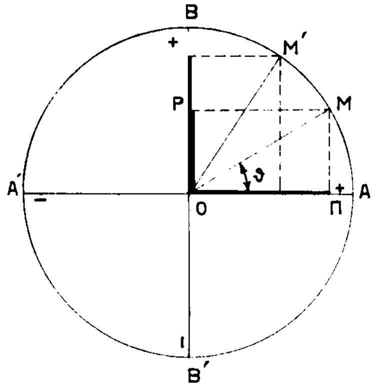
Ὥστε *εἰς τὸ 3ον τεταρτημόριον τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικά.*

Τέλος δὲ εἰς τὸ 4ον τεταρτημόριον τοῦ θετικοῦ τόξου ΑΕ ἢ τῆς ἀντιστοίχου γωνίας φ τὸ ημφ $= \dfrac{ON}{OA} = (ON) \simeq -0{,}6$ καὶ
συνφ $= \dfrac{OT}{OA} = (OT) \simeq 0{,}8$.

Ὥστε *εἰς τὸ 4ον τεταρτημόριον τὸ μὲν ἡμίτονον εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ συνημίτονον θετικόν.*

2·3 Μεταβολαὶ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου.

Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο (σχ. 2·3 α).

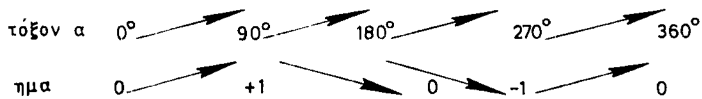


Σχ. 2·3 α.

α) *Ἡμίτονον.*

Προφανῶς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας θ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ΠΜ, διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΟΠΜΡ, ΠΜ = ΟΡ.

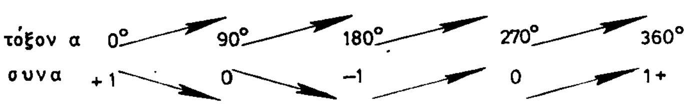
Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ γωνία εἶναι 0°, τότε καὶ τὸ ημ0° = 0. Καθὼς ὅμως τὸ τόξον αὐξάνει, αὐξάνει καὶ τὸ ἡμίτονον, ὅταν δὲ τὸ τόξον γίνῃ 90°, τότε τὸ ἡμίτονον γίνεται ἴσον πρὸς +1. Πέραν τῶν 90° τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται, εἰς δὲ τὰς 180° γίνεται πάλιν 0. Πέραν τῶν 180° τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται, δηλαδὴ γίνεται ἀρνητικὸς ἀριθμὸς καὶ εἰς τὰς 270° γίνεται ἴσον πρὸς τὴν ἀρνητικὴν μονάδα, —1. Ἀπὸ τὰς 270° ἕως τὰς 360° ἀρχίζει νὰ αὐξάνῃ καὶ εἰς τὰς 360° γίνεται πάλιν 0.



Σημειοῦμεν ὅτι εἰς τὸ 1ον τεταρτημόριον τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἀπὸ 0 ἕως + 1 καὶ ὅτι αἱ τιμαί του εἰς τὰ τέσσαρα τεταρτημόρια κυμαίνονται μεταξὺ + 1 καὶ — 1.

β) *Συνημίτονον.*

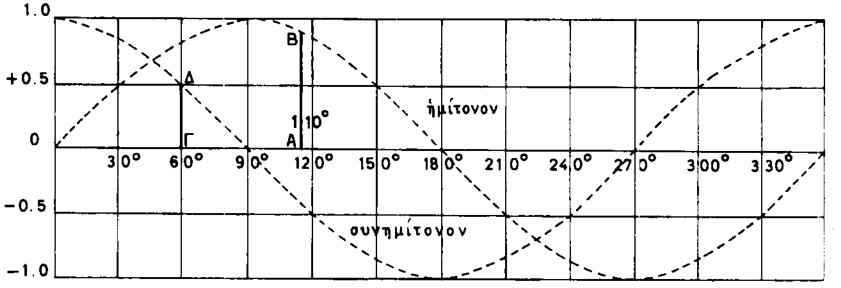
Τὸ συνημίτονον μεταβάλλεται ὡς ἑξῆς: Εἰς 0° ἰσοῦται πρὸς +1, αὐξανομένου τοῦ τόξου τὸ συνημίτονον *ἐλαττοῦται*, ἕως ὅτου εἰς τὰς 90° γίνεται 0. Πέραν τῶν 90° ἐλαττοῦται, εἰς δὲ τὰς 180° γίνεται —1. Ἐκεῖθεν ἀρχίζει νὰ αὐξάνῃ, εἰς δὲ τὰς 270° γίνεται 0. Τέλος δὲ βαίνει αὐξανόμενον, ἕως ὅτου εἰς τὰς 360° γίνῃ πάλιν +1.



Χαρακτηριστικὸν εἶναι ὅτι εἰς τὸ *1ον τεταρτημόριον* τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ, αἱ δὲ τιμαὶ αὐτοῦ κυμαίνονται μεταξὺ +1 καὶ —1.

Εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνη, αὐξάνει καὶ τὸ ἡμίτονον, ἐνῶ διὰ τὸ συνημίτονον, ὅταν αὐξάνη τὸ τόξον, τοῦτο ἐλαττοῦται.

Γραφικῶς ἡ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου ἐκφράζεται εἰς τὸ σχῆμα 2 · 3 β.



Σχ. 2·3 β.

Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τοῦ σχήματος 2 · 3 β, ἐὰν φέρωμεν κάθετον εἰς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα (ἄξων τῶν μοιρῶν) καὶ ἐπεκτείνωμεν αὐτήν, ἕως ὅτου τμήση τὰς ἀντιστοίχους καμπύλας (ἡμιτόνων - συνημιτόνων), τὸ μῆκος αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος μέχρι τῆς καμπύλης παριστᾶ τὸ ἡμίτονον ἢ τὸ συνημίτονον τῆς ἀντιστοίχου γωνίας.

Οὕτω τὸ μῆκος τῆς καθέτου ΑΒ θὰ εἶναι τὸ ἡμίτονον τῶν 110°, ἐνῶ τὸ μῆκος τῆς ΓΔ θὰ εἶναι τὸ συνημίτονον τῶν 60°.

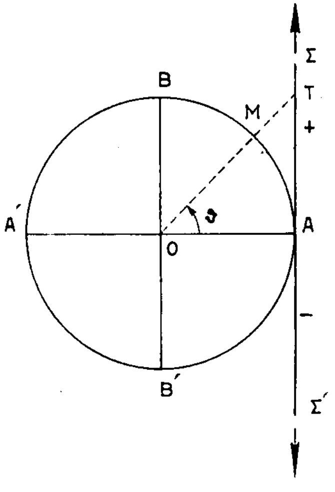
2 · 4 Ἐφαπτομένη (tan). Συνεφαπτομένη (cot).

α) *Ἐφαπτομένη.*

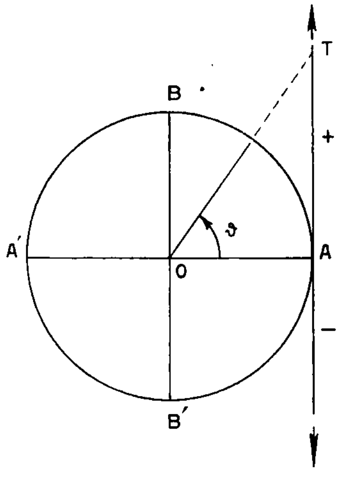
Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο καὶ οἱ ἄξονες τῶν συνημιτόνων καὶ ἡμιτόνων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Εἰς τὸ σημεῖον Α φέρομεν ἐφαπτομένην ΣΣ′, τῆς ὁποίας ὁρίζομεν τὴν φορὰν (σχ. 2 · 4 α).

Τὸν ἄξονα πλέον ΣΣ′ καλοῦμεν *ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων.*

Ἔστω ἡ γωνία θ. Προεκτείνομεν τὴν τελικὴν ἀκτῖνα ΟΜ, ἕως ὅτου τμήσῃ τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ σημεῖον Τ. Τότε



Σχ. 2·4 α.



Σχ. 2·4 β.

τὸν λόγον $\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = (\mathrm{AT}) \simeq +1{,}2$ ὀνομάζομεν *ἐφαπτομένην* τοῦ τόξου (ΑΜ) ἢ τῆς γωνίας θ, ἤτοι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = (\mathrm{AT}) \simeq +1{,}2$.

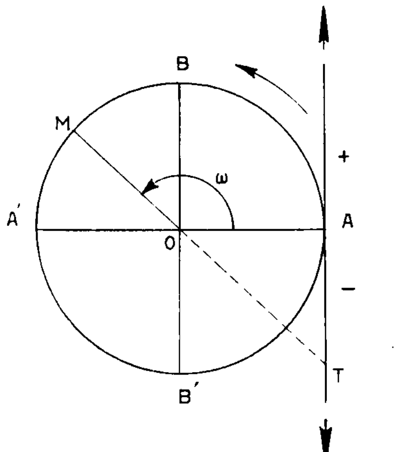
Ἡ ἐφαπτομένη τόξου (ΑΤ εἰς σχ. 2·4β εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος ἀκτῖνος τοῦ κύκλου). Ἡ ἐφαπτομένη τόξου λήγοντος εἰς τὸ 2ον τεταρτημόριον εἶναι ἀρνητικὴ (ΑΤ εἰς σχ. 2·4γ).

Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ 1ον καὶ 3ον τεταρτημόριον εἶναι θετική, ἐνῶ εἰς τὸ 2ον καὶ 4ον ἀρνητική.

β) *Συνεφαπτομένη.*

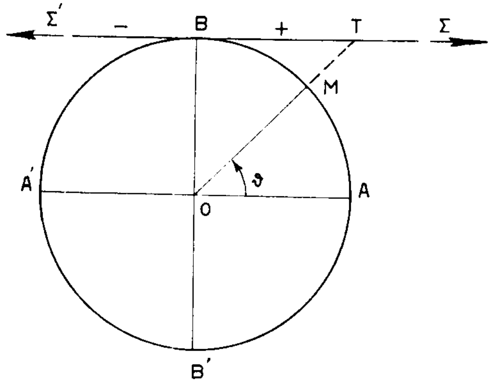
Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο. Εἰς τὸ σημεῖον Β φέρομεν ἐφαπτομένην, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁρίζομεν τὴν θετικὴν καὶ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν (σχ. 2·4δ).

Λαμβάνομεν μίαν γωνίαν θ καὶ φέρομεν τὴν τελικὴν ἀκτῖνα ΟΜ, τὴν ὁποίαν καὶ προεκτείνομεν, μέχρις ὅτου συναντήσῃ



Σχ. 2·4 γ.

τὸν ἄξονα ΣΣ΄ τῶν συνεφαπτομένων. Τὸν λόγον $\frac{BT}{OA} = (BT) \simeq$



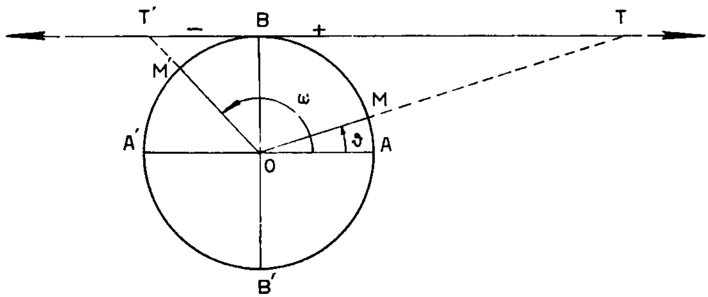
Σχ. 2·4 δ.

0,9 καλοῦμεν *συνεφαπτομένην* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας θ. Παρίσταται δὲ σφθ $= \frac{BT}{OA} = (BT) \simeq 0{,}9$.

Ἡ συνεφαπτομένη τῆς μικρᾶς γωνίας θ εἶναι πολὺ μεγάλη (σχ. 2·4ε), διότι: $\sigma\varphi\theta=\frac{\mathrm{B\Sigma}}{\mathrm{OA}}=(\mathrm{B\Sigma})\simeq 3{,}1.$

Εἰς τὸ σχῆμα (2·4ε) ἡ $\sigma\varphi\omega=\frac{\mathrm{BT'}}{\mathrm{OA}}=(\mathrm{BT'})-0{,}9$ εἶναι ἀρνητική.

Ὥστε *ἡ συνεφαπτομένη εἰς τὸ 1ον καὶ 3ον τεταρτημόριον εἶναι θετική, ἐνῶ εἰς τὸ 2ον καὶ 4ον ἀρνητική.*



Σχ. 2·4ε.

Ὅπως ἀνεφέραμεν προηγουμένως, ἀπὸ ἕνα τόξον ἢ μίαν γωνίαν ἐξαρτῶνται οἱ κάτωθι τέσσαρες ἀριθμοί:

τὸ ἡμίτονον (ημ ἢ sin), τὸ συνημίτονον (συν ἢ cos), ἡ ἐφαπτομένη (εφ ἢ tan) καὶ ἡ συνεφαπτομένη (σφ ἢ cot). Οὗτοι καλοῦνται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας. Εἰς τὰς παραγράφους 2·7 καὶ 2·8 θὰ συναντήσωμεν καὶ ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, δηλαδὴ *τέμνουσαν, συντέμνουσαν, παρημίτονον καὶ ἡμιπαρημίτονον.*

2·5 Σχέσεις μεταξὺ ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης παντὸς τόξου.

Ἔστω τὸ τόξον (AM) ἢ ἡ γωνία θ (σχ. 2·5α). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OPM ἔχομεν: $(\mathrm{OP})^2+(\mathrm{PM})^2=(\mathrm{OM})^2$.

Ἐπειδὴ $(\mathrm{PM})=\eta\mu\theta$, $(\mathrm{OP})=\sigma\upsilon\nu\theta$ καὶ $(\mathrm{OM})=1$, ἔχομεν:

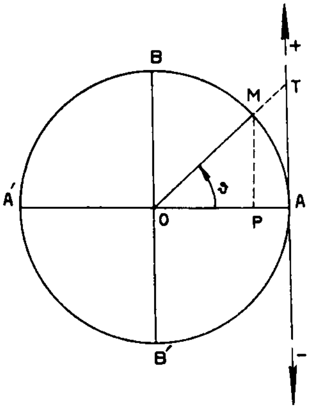
$$ημ^2θ + συν^2θ = 1. \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΜΡ καὶ ΟΤΑ ἔχομεν:

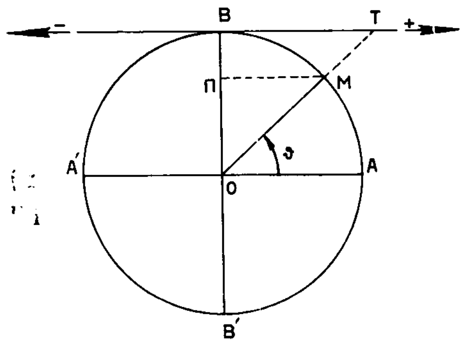
$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP} \text{ ἢ } \frac{(AT)}{(OA)} = \frac{(PM)}{(OP)}.$$

Ἐπειδὴ $(AT) = εφθ$, $(OA) = 1$, $(PM) = ημθ$, $(OP) = συνθ$, ἔχομεν: $\frac{εφθ}{1} = \frac{ημθ}{συνθ}$ ἢ

$$εφθ = \frac{ημθ}{συνθ}. \qquad (2)$$



Σχ. 2·5 α.



Σχ. 2·5 β.

Ἔστω τόξον (ΑΜ) ἢ γωνία θ (σχ. 2·5 β). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΤ καὶ ΟΠΜ ἔχομεν: $\frac{BT}{OB} = \frac{ΠM}{OΠ}$ ἢ $\frac{(BT)}{(OB)} = \frac{(ΠM)}{(OΠ)}$.

Ἐπειδὴ $(BT) = σφθ$, $(OB) = 1$, $(ΠM) = συνθ$, $(OΠ) = ημθ$, ἔχομεν: $\frac{σφθ}{1} = \frac{συνθ}{ημθ}$ ἢ

$$σφθ = \frac{συνθ}{ημθ}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (3) διὰ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτει ὁ ἑξῆς τύπος:

$$\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = 1. \tag{4}$$

Δηλαδὴ ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τόξου τινὸς ἢ γωνίας εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι, ἤτοι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{\sigma\varphi\theta} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}.$$

2·6 Τιμαὶ ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης.

$$\varepsilon\varphi\, 0^\circ = \frac{\eta\mu\, 0^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\varepsilon\varphi\, 90^\circ = \frac{\eta\mu\, 90^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\varepsilon\varphi\, 180^\circ = \frac{\eta\mu\, 180^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\varepsilon\varphi\, 270^\circ = \frac{\eta\mu\, 270^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 270^\circ} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$$\varepsilon\varphi\, 360^\circ = \frac{\eta\mu\, 360^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 360^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\varphi\, 0^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu\, 0^\circ}{\eta\mu\, 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\sigma\varphi\, 90^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu\, 90^\circ}{\eta\mu\, 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\varphi\, 180^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu\, 180^\circ}{\eta\mu\, 180^\circ} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$$\sigma\varphi\, 270^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu\, 270^\circ}{\eta\mu\, 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sigma\varphi\, 360^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu\, 360^\circ}{\eta\mu\, 360^\circ} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Εἰς τὸ ∞ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης δὲν ἀναγράφονται τὰ $\pm$, διότι μᾶλλον σύγχυσιν φέρουν εἰς τὸν ναυτιλλόμενον. Εἶναι ἐν τούτοις ἀναγκαῖον τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων 0°, 90°, 180°, 270°, 360° νὰ τὰς ἐνθυμῆται ἢ ταχέως νὰ δύναται νὰ τὰς ὑπολογίσῃ. Ἐπειδὴ δὲ χρησιμοποιεῖ συνηθέστατα γωνίας μέχρι 180°, τουλάχιστον νὰ ἐνθυμῆται καλῶς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν 0°, 90° καὶ 180°.

2·7 Τέμνουσα καὶ συντέμνουσα.

Καλοῦμεν *τέμνουσαν* γωνίας θ τὸ ἀντίστροφον τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς, *συντέμνουσαν* δὲ τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς. Ἤτοι:

$$\text{τεμ}\theta = \frac{1}{\text{συν}\theta} \qquad \text{στεμ}\theta = \frac{1}{\text{ημ}\,\theta}.$$

α) *Τιμαὶ τεμνούσης καὶ συντεμνούσης:*

$$\text{τεμ}\,0^\circ = \frac{1}{\text{συν}\,0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{τεμ}\,90^\circ = \frac{1}{\text{συν}\,90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{τεμ}\,180^\circ = \frac{1}{\text{συν}\,180^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{τεμ}\,270^\circ = \frac{1}{\text{συν}\,270^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{τεμ}\,360^\circ = \frac{1}{\text{συν}\,360^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{στεμ}\,0^\circ = \frac{1}{\text{ημ}\,0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

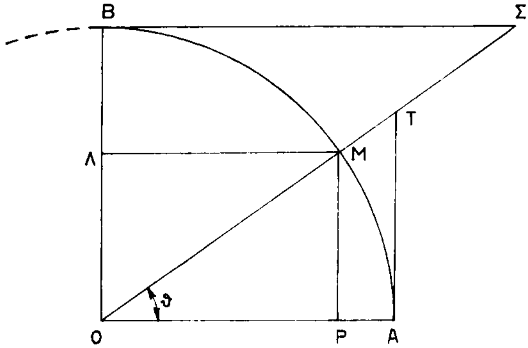
$$\text{στεμ}\,90^\circ = \frac{1}{\text{ημ}\,90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{στεμ}\,180^\circ = \frac{1}{\text{ημ}\,180^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{στεμ}\, 270^\circ = \frac{1}{\text{ημ}\, 270^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{στεμ}\, 360^\circ = \frac{1}{\text{ημ}\, 360^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \,.$$

Ἡ χρῆσις τῆς τεμνούσης καὶ τῆς συντεμνούσης εἰς τὴν ναυτιλίαν εἶναι λίαν χρήσιμος καὶ συνήθης, διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, μετατρέπει κατὰ τὴν λογαρίθμησιν τὴν ἀφαίρεσιν εἰς πρόσθεσιν, πρᾶγμα ποὺ ἐξυπηρετεῖ τὸν ναυτιλλόμενον.



Σχ. 2 · 7 α.

β) *Ἡ τέμνουσα καὶ ἡ συντέμνουσα ὡς γραμμαί.*

Εἰς τὸν ἀνωτέρω τριγωνομετρικὸν κύκλον (σχ. 2 · 7 α) τὰ τρίγωνα ΟΡΜ καὶ ΟΑΤ εἶναι ὅμοια. Συνεπῶς ἔχομεν:

$\frac{\text{ΟΤ}}{\text{ΟΜ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΡ}}$ ἢ $\frac{\text{ΟΤ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΟΜ}}{\text{ΟΡ}}$, $\frac{\text{ΟΤ}}{1} = \frac{1}{\text{συν}\theta}$, ἀλλὰ ὡς γνωστὸν $\frac{1}{\text{συν}\theta} = \text{τεμ}\theta$.

Συνεπῶς ἡ ΟΤ ὡς γραμμὴ θὰ παριστᾶ τὴν τέμνουσαν τῆς γωνίας θ.

Ὁμοίως ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΣ καὶ ΟΛΜ ἔχομεν:

$$\frac{\text{ΟΣ}}{\text{ΟΜ}} = \frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΛ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ΟΣ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{\text{ΟΜ}}{\text{ΟΛ}} \,.$$

$$\frac{ΟΣ}{1} = \frac{1}{ΟΛ} = \frac{1}{ημθ}, \text{ ἀλλὰ } \frac{1}{ημθ} = στεμθ.$$

Συνεπῶς ἡ ΟΣ ὡς γραμμὴ θὰ παριστᾶ τὴν συντέμνουσαν τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας θ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι:

Τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη ἐφάπτονται αὐτοῦ, ἐνῶ ἡ τέμνουσα καὶ ἡ συντέμνουσα τέμνουν αὐτόν.

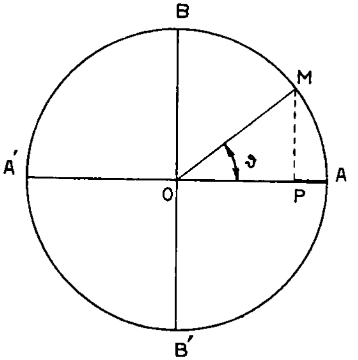
2·8 Τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς χρήσιμος εἰς τοὺς ναυτιλλομένους.

Τὴν παράστασιν 1 — συνθ καλοῦμεν *παρημίτονον* (versine) τῆς γωνίας θ, τὴν δὲ $\frac{1 - συνθ}{2}$ *ἡμιπαρημίτονον* (haversine).

Δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν:

$$παρμθ = 1 - συνθ \qquad ημπρθ = \frac{1 - συνθ}{2}.$$

Εἰς τὸ σχῆμα 2·8 α δίδεται ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ παρημιτόνου (ΡΑ).



Σχ. 2·8 α.
Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ παρημιτόνου ΡΑ.

Τιμαὶ ἡμιπαρημιτόνου.

$$\text{ημπρ}0^\circ = \frac{1-\text{συν}\,0^\circ}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{ημπρ}90^\circ = \frac{1-\text{συν}\,90^\circ}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ημπρ}180^\circ = \frac{1-\text{συν}\,180^\circ}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ημπρ}270^\circ = \frac{1-\text{συν}\,270^\circ}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ημπρ}360^\circ = \frac{1-\text{συν}\,360^\circ}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Ἐπειδὴ ὁ ναυτιλλόμενος, ὡς ἀνεφέρθη, χρησιμοποιεῖ συνήθως γωνίας ἀπὸ 0° ἕως 180°, καλὸν θὰ ἦτο νὰ γνωρίζῃ τὰ σημεῖα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων:

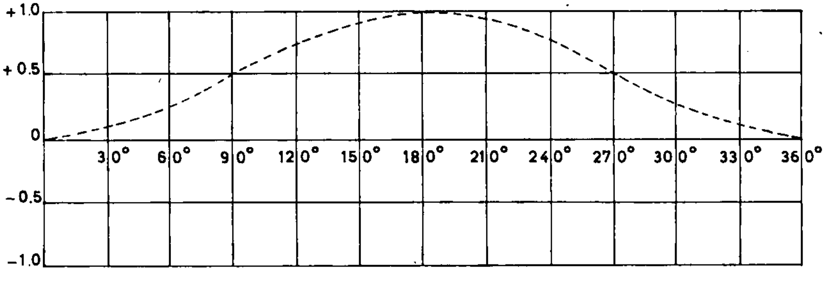
1ος *Ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἰς τὸ 1ον τεταρτημόριον εἶναι θετικοί.*

2ος *Εἰς τὸ 2ον τεταρτημόριον ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἀρνητικοὶ ἐκτὸς τοῦ ἡμιτόνου, συντεμνούσης καὶ ἡμιπαρημιτόνου, ποὺ εἶναι θετικά.*

Τὸ ἡμιπαρημίτονον εἶναι θετικὸν εἰς ὅλα τὰ τεταρτημόρια.

ΠΙΝΑΞ 1.

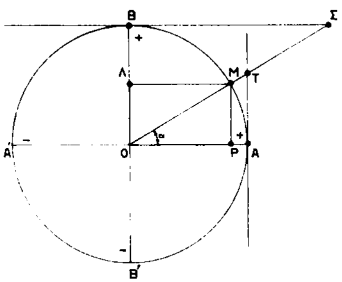
Καμπύλη τοῦ ἡμιπαρημιτόνου.



Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς γωνίας εἶναι οἱ ἑξῆς ὀκτώ:

(Παραπλεύρως εἰς τὴν ἑλληνικὴν δίδεται καὶ ἡ ὀνομασία των εἰς τὴν ἀγγλικήν, διότι ὁ ναυτιλλόμενος εἰς τὴν πρᾶξιν πρέπει νὰ τὴν γνωρίζη).

Ἡμίτονον	Sine	ἢ συντετμημένα		sin
Συνημίτονον	Cosine	»	»	cos
Ἐφαπτομένη	Tangent	»	»	tan
Συνεφαπτομένη	Cotangent	»	»	cot
Τέμνουσα	Secant	»	»	sec
Συντέμνουσα	Cosecant	»	»	cosec
Παρημίτονον	Versine	»	»	ver
Ἡμιπαρημίτονον	Haversine	»	»	hav



Σχ. 2·8 β.
Τριγωνομετρικαὶ γραμμαί.

Αἱ δὲ ἀντίστοιχοι τριγωνομετρικαὶ γραμμαί, αἱ ὁποῖαι παρίστανται εἰς τὸ σχῆμα 2·8 β, εἶναι αἱ ἑξῆς:

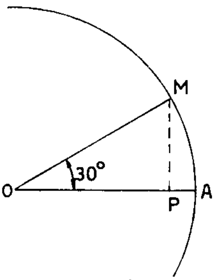
Ἡμίτονον	$= \mathrm{MP}$	Συνημίτονον	$= \mathrm{OP}$
Ἐφαπτομένη	$= \mathrm{AT}$	Συνεφαπτομένη	$= \mathrm{B\Sigma}$
Τέμνουσα	$= \mathrm{OT}$	Συντέμνουσα	$= \mathrm{O\Sigma}$
Ἡμιπαρημίτονον	$= \dfrac{\mathrm{PA}}{2}$	Παρημίτονον	$= \mathrm{PA}$.

2·9 Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνιῶν 30°, 45°, 60°.

α) Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 30°.

Ἔχομεν ἤδη μάθει ἢ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων 0°, 90°, 180°, 270°, 360°. Τώρα θὰ μάθωμεν πῶς νὰ ὑπολογίζωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων 30°, 45°, 60°.

Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο (σχ. 2·9 α). Στρέφομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ περὶ τὸ Ο καὶ σχηματίζομεν γωνίαν



Σχ. 2·9 α.

30°, δηλαδὴ $\widehat{AOM} = 30°$. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν κάθετον πρὸς τὴν ΟΑ, τὴν ΜΡ. Τὸ τρίγωνον ΟΜΡ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ δὲ ΜΡ ὡς κειμένη ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας τῶν 30° θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, δηλαδὴ $MP = \frac{OM}{2} = \frac{1}{2}$, $OM = 1$. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $(MP) = \eta\mu\, AOM$, ἤτοι:

$$\eta\mu\, 30° = (MP) = \frac{1}{2} = 0{,}5. \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς παραγράφου 2·5 δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς:
$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{1-\eta\mu^2\alpha}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\, 30° = \sqrt{1-\eta\mu^2 30°}$
ἢ $\sigma\upsilon\nu\, 30° = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\, 30° = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$, ἤτοι:

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

Εὐκόλως πλέον ὑπολογίζομεν τὴν εφ 30°, σφ 30°:

$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\eta\mu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ἢ}$$

$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{3}$$

Ὁμοίως ὑπολογίζομεν καὶ τὴν σφ 30° ὡς ἑξῆς:

$$\sigma\varphi 30^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}. \tag{4}$$

β) Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 45°.

Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο (σχ. 2·9β). Στρέφομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ περὶ τὸ Ο καὶ σχηματίζομεν γωνίαν 45°, δηλαδὴ $\widehat{AOM} = 45^\circ$. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ, τὴν ΜΡ. Τὸ τρίγωνον ΟΑΜ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἐκ δὲ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἔχομεν:

$$(OP)^2 + (MP)^2 = (OM)^2 \text{ ἢ } 2(MP)^2 = 1 \text{ ἢ } (MP)^2 = \frac{1}{2} \text{ ἢ}$$

$$(MP) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ἢ } (MP) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ἐπειδὴ (ΜΡ) = ημ 45°, ἔχομεν:

$$\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5}$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ (ΟΡ) = (ΡΜ), θὰ ἔχωμεν καί:

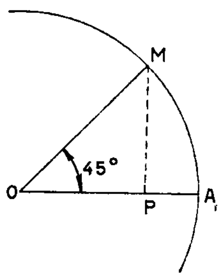
$$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{6}$$

$$\varepsilon\varphi 45^\circ = \frac{\eta\mu 45^\circ}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \acute{\eta}$$

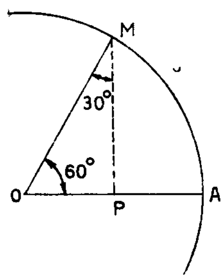
$$\varepsilon\varphi 45^\circ = 1 \tag{7}$$

$$\kappa\alpha\grave{\iota}\ \sigma\varphi 45^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \acute{\eta}$$

$$\sigma\varphi 45^\circ = 1. \tag{8}$$



Σχ. 2·9 β.



Σχ. 2·9 γ.

γ) Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 60°.

Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο (σχ. 2·9γ). Στρέφομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ περὶ τὸ Ο καὶ σχηματίζομεν γωνίαν 60°, δηλαδὴ $\widehat{AOM} = 60^\circ$.

Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν κάθετον πρὸς τὴν ΟΑ, τὴν ΜΡ. Προφανῶς τὸ συν60° = (ΟΡ). Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΜΡ ἡ ΟΡ κεῖται ἀπέναντι γωνίας 30°, ἄρα κατὰ γνωστὸν θεώρημα θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἤτοι:

$OP = \frac{OM}{2}$. Συνεπῶς τὸ $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = (OP) = \frac{OM}{2} = \frac{1}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) (παράγρ. 2·5) ἔχομεν:

$$ημ^2 60° + συν^2 60° = 1 \text{ ἢ } ημ\,60° = \sqrt{1 - συν^2 60°}$$

$$\text{ἢ } ημ60° = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ημ\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{10}$$

$$\text{καὶ } εφ60° = \frac{ημ60°}{συν60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$εφ\,60° = \sqrt{3} \tag{11}$$

$$\text{καὶ } σφ60° = \frac{συν60°}{ημ60°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$σφ60° = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{12}$$

ΠΙΝΑΞ 2

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξων 30°, 60° καὶ 45°.

$$ημ30° = συν60° = \frac{1}{2}$$

$$συν30° = ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ημ45° = συν45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$εφ30° = σφ60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$σφ30° = εφ60° = \sqrt{3}$$

$$εφ45° = σφ45° = 1.$$

2·10 Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνιῶν ἢ τόξων συμπληρωματικῶν, παραπληρωματικῶν, ἀντιθέτων, διαφερόντων κατὰ 180°.

α) *Τόξα ἢ γωνίαι συμπληρωματικαί.*

Δύο γωνίαι ἢ δύο τόξα λέγονται *συμπληρωματικά*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 90°. Π.χ. συμπληρωματικαὶ γωνίαι εἶναι ἡ α καὶ ἡ $(90° - \alpha)$.

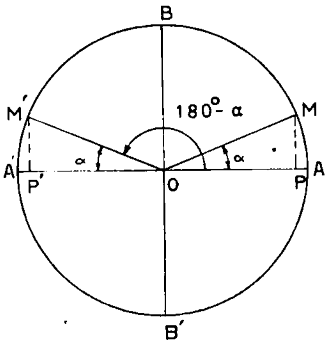
Ἐκ τοῦ Πίνακος 2 προκύπτει ὅτι ημ $30° =$ συν $60° = \frac{1}{2}$ καὶ συν $30° =$ ημ $60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ὁμοίως εφ $30° =$ σφ $60°$ καὶ σφ $30° =$ εφ $60°$.

Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τὰ συμπληρωματικὰ τόξα ἢ γωνίας, π.χ. τὰ α καὶ $(90° - \alpha)$, θὰ ἔχωμεν:

$$
\begin{array}{lll}
\text{ημ}\alpha = \text{συν}(90° - \alpha) & \text{π.χ.} & \text{ημ}(18° 36') = \text{συν}(71° 24') \\
\text{εφ}\alpha = \text{σφ}(90° - \alpha) & » & \text{εφ}(18° 36') = \text{σφ}(71° 24') \\
\text{τεμ}\alpha = \text{στεμ}(90° - \alpha) & » & \text{τεμ}(18° 36') = \text{στεμ}(71° 24').
\end{array}
$$

β) *Τόξα ἢ γωνίαι παραπληρωματικαί.*

Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο καὶ δύο τόξα



Σχ. 2·10 α.

παραπληρωματικὰ (σχ. 2·10 α), ἤτοι τόξα ἔχοντα ἄθροισμα 180°, τὸ (AM) $=\alpha$ καὶ τὸ (AM′) $=(180^\circ-\alpha)$. Προφανῶς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OMP καὶ OM′P′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ τὰς γωνίας $\alpha=\alpha'$ [διότι τόξ. (AM) = τόξ. (M′A′)].

Συνεπῶς αἱ πλευραὶ MP = M′P′ καὶ OP = OP′. Ἀλλὰ (MP) καὶ (M′P′) εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἡμίτονα τοῦ α καὶ $(180^\circ-\alpha)$, ἄρα εἶναι ἴσα. Τὰ δὲ (OP) καὶ (OP′) εἶναι τὰ συνημίτονα τῶν αὐτῶν γωνιῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι προφανῶς ἀντίθετα, ἤτοι:

$$\begin{aligned} \eta\mu(180^\circ-\alpha)&=\eta\mu\,\alpha\\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ-\alpha)&=-\sigma\upsilon\nu\,\alpha\\ \varepsilon\varphi(180^\circ-\alpha)&=-\varepsilon\varphi\,\alpha\\ \sigma\varphi(180^\circ-\alpha)&=-\sigma\varphi\,\alpha. \end{aligned}$$

Παράδειγμα.

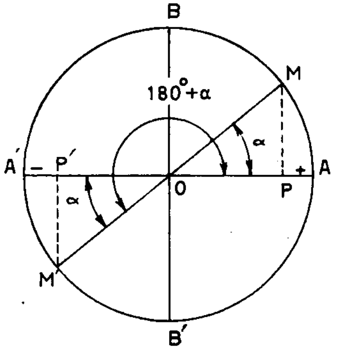
Ἔστω τόξον 30° καὶ τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ 150°. Κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \eta\mu\,150^\circ&=\eta\mu\,30^\circ=\frac{1}{2}\\ \sigma\upsilon\nu\,150^\circ&=-\sigma\upsilon\nu\,30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \varepsilon\varphi\,150^\circ&=-\varepsilon\varphi\,30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \sigma\varphi\,150^\circ&=-\sigma\varphi\,30^\circ=-\sqrt{3}. \end{aligned}$$

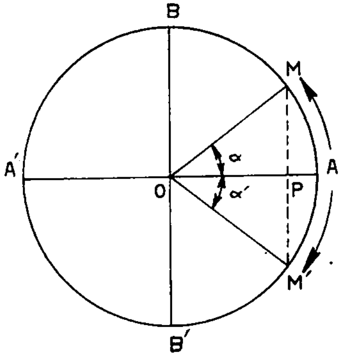
γ) *Τόξα διαφέροντα κατὰ 180°.*

Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον O καὶ δύο τόξα α καὶ $(180^\circ-\alpha)$ διαφέροντα κατὰ 180° (σχ. 2·10β). Τὰ τρίγωνα OMP καὶ OM′P′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας α καὶ α′ ἴσας.

Συνεπῶς ἔχουν τὰς πλευρὰς PM = P′M′ καὶ OP = OP′. Ἀλλὰ (OP) καὶ (OP′) εἶναι ἀντιστοίχως τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν α καὶ $(180^\circ + \alpha)$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίθετα, καὶ τὰ (PM)



Σχ. 2·10 β.



Σχ. 2·10 γ.

καὶ (P′M′) εἶναι τὰ ἡμίτονα τῶν α καὶ $(180^\circ - \alpha)$, τὰ ὁποῖα καὶ αὐτὰ φυσικὰ εἶναι ἀντίθετα, ἤτοι:

$$\eta\mu(180^\circ + \alpha) = -\eta\mu\,\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\,\alpha$$
$$\varepsilon\varphi(180^\circ + \alpha) = \varepsilon\varphi\,\alpha$$
$$\sigma\varphi(180^\circ + \alpha) = \sigma\varphi\,\alpha.$$

Αἱ ἐφαπτομέναι καὶ συνεφαπτομέναι εἶναι θετικαί, διότι $\frac{-\eta\mu\alpha}{-\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\,\alpha$ καὶ $\frac{-\sigma\upsilon\nu\alpha}{-\eta\mu\alpha} = \sigma\varphi\alpha$, ἀλλὰ καὶ διότι κεῖνται εἰς τὸ 3ον τεταρτημόριον (παράγρ. 2·4).

δ) *Τόξα ἀντίθετα.*

Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον Ο (σχ. 2·10γ) καὶ ἕνα τόξον $(AM) = \alpha^\circ$. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Μ′.

Προφανῶς τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι ἀντίθετα. Ἐπειδὴ ἡ ΟΡ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΜΜ′, τὸ Ρ θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΜ′, ἄρα: $PM = PM'$. Ἀλλὰ $(PM) = \eta\mu\alpha$ καὶ $(PM') = \eta\mu(-\alpha)$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίθετα, ἐνῶ τὸ (ΟΡ) εἶναι τὸ συνημίτονον καὶ τῶν δύο τόξων, ἤτοι ἔχομεν:

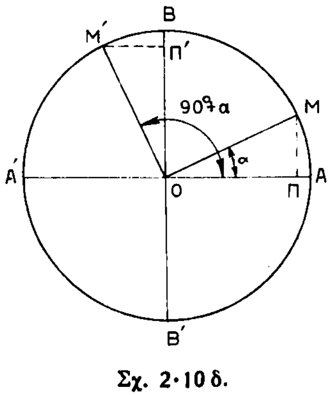
$$\eta\mu\alpha = -\eta\mu(-\alpha) \qquad \eta\mu(-\alpha) = -\eta\mu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(-\alpha) \qquad \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\alpha = -\varepsilon\varphi(-\alpha) \qquad \varepsilon\varphi(-\alpha) = -\varepsilon\varphi\alpha$$
$$\sigma\varphi\alpha = -\sigma\varphi(-\alpha). \qquad \sigma\varphi(-\alpha) = -\sigma\varphi\alpha$$

Παράδειγμα.

$$\eta\mu 25^\circ = -\eta\mu(-25^\circ) \qquad \eta\mu(-25^\circ) = -\eta\mu 25^\circ$$
$$\sigma\upsilon\nu 25^\circ = \sigma\upsilon\nu(-25^\circ) \qquad \sigma\upsilon\nu(-25^\circ) = \sigma\upsilon\nu 25^\circ$$
$$\varepsilon\varphi 25^\circ = -\varepsilon\varphi(-25^\circ) \qquad \varepsilon\varphi(-25^\circ) = -\varepsilon\varphi 25^\circ$$
$$\sigma\varphi 25^\circ = -\sigma\varphi(-25^\circ). \qquad \sigma\varphi(-25^\circ) = -\sigma\varphi 25^\circ$$

ε) *Τόξα διαφέροντα κατὰ 90°.*

Ἔστω ἕνα τόξον α καὶ ἕνα ἄλλο $(90^\circ + \alpha)$, δηλαδὴ τόξα τὰ ὁποῖα διαφέρουν κατὰ 90° (σχ. 2·10δ).



Σχ. 2·10δ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΠΜ καὶ ΟΜ′Π′ προκύπτει ὅτι (ΟΠ) = (ΟΠ′) καὶ (ΠΜ) = (Π′Μ′). Ἀλλὰ (ΟΠ) = συν α, (ΟΠ′) = ημ(90° + α), (ΠΜ) = ημα καὶ (Π′Μ′) = συν(90° + α). Ἔχομεν λοιπόν:

$$\eta\mu(90^\circ+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\,\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(90^\circ+\alpha)=-\eta\mu\,\alpha$$
$$\varepsilon\varphi(90^\circ+\alpha)=-\sigma\varphi\,\alpha$$
$$\sigma\varphi(90^\circ+\alpha)=-\varepsilon\varphi\,\alpha.$$

2·11 Ἀσκήσεις.

1) Ὑπολογίσατε τὴν τέμνουσαν, συντέμνουσαν καὶ ἡμιπαρημίτονον τῶν 45°.

2) Ὑπολογίσατε τὴν τέμνουσαν, συντέμνουσαν καὶ ἡμιπαρημίτονον τῶν 30°.

3) Ὑπολογίσατε τὴν τεμ, στεμ καὶ ημπρ τῶν 60°.

4) Ὑπολογίσατε τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν κάτωθι παραστάσεων:

α) $\eta\mu\,45^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu\,30^\circ\cdot\sigma\varphi\,60^\circ$

β) $\tau\varepsilon\mu\,30^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu\,60^\circ\cdot\varepsilon\varphi\,45^\circ$

γ) $\eta\mu^2 30^\circ\cdot\sigma\varphi^2 45^\circ\cdot\tau\varepsilon\mu^2 30^\circ$

δ) $3\varepsilon\varphi^2 30^\circ\cdot 2\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ\cdot 4\eta\mu^2 60^\circ$

ε) $2\sigma\tau\varepsilon\mu^2 45^\circ-3\tau\varepsilon\mu^2 30^\circ$

ζ) $3\tau\varepsilon\mu^2 30^\circ+4\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ+\varepsilon\varphi^2 60^\circ$

η) $\tau\varepsilon\mu^2 45^\circ-2\sigma\varphi^2 60^\circ+\frac{1}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu^2 60^\circ$

θ) $\sigma\upsilon\nu 60^\circ-\varepsilon\varphi^2 45^\circ+\frac{3}{4}\varepsilon\varphi^2 30^\circ+\sigma\upsilon\nu^2 30^\circ-\eta\mu 30^\circ.$

5) Δείξατε ὅτι:

α) $\eta\mu 120^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu\,330^\circ+\sigma\upsilon\nu(-300^\circ)\cdot\eta\mu(-330^\circ)=1$

β) $\sigma\upsilon\nu\,210^\circ\cdot\eta\mu\,150^\circ-\eta\mu\,330^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu\,150^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

γ) $\eta\mu\,150^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu\,240^\circ-\sigma\upsilon\nu\,300^\circ\cdot\eta\mu\,210^\circ=0$

δ) $\sigma\varphi\,120^\circ+\varepsilon\varphi\,210^\circ+\varepsilon\varphi\,240^\circ+\varepsilon\varphi\,300^\circ=0.$

6) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

α) $\eta\mu\,300^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu\,60^\circ+\sigma\upsilon\nu\,300^\circ\cdot\eta\mu\,60^\circ$

β) $\dfrac{\sigma\varphi\,240^\circ+\sigma\varphi\,60^\circ}{1-\sigma\varphi\,240^\circ\,\sigma\varphi\,60^\circ}.$

7) Ἀποδείξατε τὰς κάτωθι ταυτότητας.

α) $\frac{\text{τεμ}\alpha}{\text{στεμ}\alpha} = \text{εφ}\alpha$

β) $\text{ημ}\alpha \cdot \text{τεμ}\alpha = \text{εφ}\alpha$

γ) $\text{στεμ}^2\alpha = 1 + \text{σφ}^2\alpha$

δ) $\text{συν}\alpha \cdot \text{στεμ}\alpha = \text{σφ}\alpha$

ε) $\text{ημ}^2\alpha = (1 + \text{συν}\alpha)(1 - \text{συν}\alpha)$

ζ) $\sqrt{1 - \frac{1}{\text{στεμ}^2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{εφ}^2\theta}}$

η) $\text{στεμ}^2\theta + \text{τεμ}^2\theta = \text{στεμ}^2\theta \cdot \text{τεμ}^2\theta$

θ) $\text{εφ}\alpha + \text{σφ}\alpha = \text{στεμ}\alpha \cdot \text{τεμ}\alpha$

ι) $\text{σφ}^2\alpha - \text{συν}^2\alpha = \text{σφ}^2\alpha \cdot \text{συν}^2\alpha$

κ) $\frac{1}{\text{συν}^2\alpha} - \frac{1}{\text{σφ}^2\alpha} = 1$

λ) $\frac{\text{τεμ}\alpha}{\text{συν}\alpha} - \frac{\text{εφ}\alpha}{\text{σφ}\alpha} = 1$

μ) $\text{στεμ}^2\theta - \text{σφ}\theta \cdot \text{συν}\theta \cdot \text{στεμ}\theta = 1$

ν) $\frac{2\,\text{παρημ}\beta - \text{παρημ}^2\beta}{(1 - \text{παρημ}\beta)^2} = \text{εφ}^2\beta$

ξ) $\frac{\text{συν}^2(90^\circ - \alpha)}{\text{παρημ}\,\alpha} = 1 + \text{ημ}(90^\circ - \alpha)$

ο) $\text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha = \frac{1 - \text{εφ}^2\alpha}{1 + \text{εφ}^2\alpha}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

3·1 Τί καλεῖται λογάριθμος. Ὁρισμός.

Ἔστω ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν:

$$\begin{aligned} 0{,}001 &= \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \\ 0{,}01 &= \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \\ 0{,}1 &= \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1} \\ 1 &= 10^0 \\ 10 &= 10^1 \\ 100 &= 10^2 \\ 1000 &= 10^3. \end{aligned} \qquad (1)$$

Τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων τοῦ 10, δηλαδὴ τοὺς ἀριθμοὺς -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 καλοῦμεν ἀντιστοίχως *λογαρίθμους* τῶν ἀριθμῶν 0,001 0,01 0,1 1 10 100 καὶ 1 000 ὡς πρὸς βάσιν 10.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὁ κάτωθι ὁρισμὸς τοῦ λογαρίθμου:

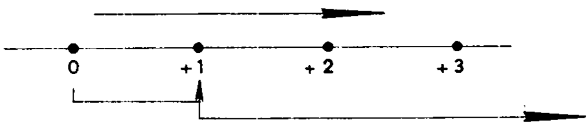
Καλοῦμεν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10, τὸν ἐκθέτην, εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις 10, διὰ νὰ μᾶς δώσῃ τὸν ἀριθμόν.

Κατὰ ταῦτα γράφομεν:

$$\begin{aligned} \text{λογ}\,0{,}001 &= -3 \\ \text{λογ}\,0{,}01 &= -2 \\ \text{λογ}\,0{,}1 &= -1 \\ \text{λογ}\,1 &= 0 \\ \text{λογ}\,10 &= 1 \\ \text{λογ}\,100 &= 2 \\ \text{λογ}\,1000 &= 3. \end{aligned} \qquad (2)$$

Γενικῶς γράφομεν λογ$x = y$, τὸ ὁποῖον σημαίνει $x = 10^y$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἱ εὑρισκόμενοι μεταξὺ 0 καὶ 1 (σχ. 3·1 α), ἔχουν ὡς λογαρίθμους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, ἐνῶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἔχουν ὡς λογαρίθμους θετικοὺς ἀριθμούς. Ὁ λογ$1 = 0$.



Σχ. 3·1 α.

Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ προφανῶς δὲν ἔχουν λογαρίθμους, διότι οὐδεμία δύναμις τοῦ 10 δίδει ἀρνητικὸν ἀποτέλεσμα. Οἱ ἀνωτέρω λογάριθμοι, ἐπειδὴ ἔχουν ὡς βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10, καλοῦνται *δεκαδικοὶ λογάριθμοι.*

3·2 Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5,5. Οὗτος προφανῶς περιέχεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 10. Δηλαδὴ $1 < 5{,}5 < 10$, ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ 5,5 θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ λογ τοῦ 1 καὶ τοῦ λογ τοῦ 10, ἀλλὰ ὁ λογ τοῦ 1 εἶναι 0, ὁ δὲ λογ τοῦ 10 εἶναι τὸ 1, δηλαδὴ ὁ λογάριθμος 5,5 ἰσοῦται πρὸς 0,............ καὶ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα καὶ λαμβάνομεν ἀπὸ εἰδικοὺς Πίνακας.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 52,5. Κατὰ τὸν προηγούμενον συλλογισμὸν ὁ λογάριθμος τοῦ 52,5 θὰ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ λογ τοῦ 10 καὶ τοῦ λογ τοῦ 100. Ἀλλὰ ὁ λογάριθμος τοῦ 10 εἶναι ἡ μονάς, τοῦ δὲ 100 τὸ δύο, συνεπῶς ὁ λογάριθμος τοῦ 52,5 θὰ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 2. Γράφομεν:

λογ 52,5 = 1,................

Κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν εὑρίσκομεν ὅτι:

λογ 328,4 = 2,................

Χαρακτηριστικὸν καλοῦμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Κανὼν πρακτικός.

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ψηφίων αὐτοῦ μεῖον 1.

Κατὰ ταῦτα:

$$\begin{aligned} λογ\,5 &= 0,\dots\dots \\ λογ\,57{,}2 &= 1,\dots\dots \\ λογ\,1842 &= 3,\dots\dots \\ λογ\,53446 &= 4,\dots\dots . \end{aligned}$$

3·3 Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ εὑρισκομένου μεταξὺ 0 καὶ 1.

Ἐκ τῆς παραγράφου 3·1 (2) προκύπτει ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ εὑρισκομένου μεταξὺ 0 καὶ 1 ἐκφράζεται μὲ ἀρνητικὰς μονάδας, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁποίων καθορίζεται ἑκάστοτε ἐκ τῆς θέσεως τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου αὐτοῦ μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

Παράδειγμα 1.

$$\begin{aligned} λογ\,0{,}005 &= \overline{3},\dots\dots \\ λογ\,0{,}64 &= \overline{1},\dots\dots \\ λογ\,0{,}08 &= \overline{2},\dots\dots . \end{aligned}$$

Κατὰ τὴν ἐργασίαν του ὁ ναυτιλλόμενος διευκολύνεται πολύ, ἐὰν εἰς τὸ ἡμιαρνητικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ προσθέτῃ 10 μονάδας, τὰς ὁποίας ὅμως εἰς τὸ τέλος τῶν πράξεων ὀφείλει νὰ ἀφαιρῇ πάλιν.

Οὕτω οἱ λογάριθμοι τοῦ παραδείγματος 1 γράφονται:

$$λογ\,0{,}005 = 7,\dots\dots$$
$$λογ\,0{,}64 = 9,\dots\dots$$
$$λογ\,0{,}08 = 8,\dots\dots.$$

Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ 10, 100, 1000 κλπ., ὁ λογάριθμός του ἀλλάσσει μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν, ἐνῶ τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ παραμένει τὸ ἴδιον.

Ἔστω ὅτι:

$$λογ\,525 = 2{,}72016.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου ἔχομεν:

$$10^{2,72016} = 525.$$

Ἂν τῆς ὡς ἄνω ἰσότητος διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ 10, λαμβάνομεν:

$$10^{2,72016} : 10 = 525 : 10 \quad ἢ$$
$$10^{1,72016} = 52{,}5$$

ἢ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου ἔχομεν:

$$λογ\,52{,}5 = 1{,}72016.$$

Παράδειγμα 2.

$$λογ\,525 = 2{,}72016$$
$$λογ\,52{,}5 = 1{,}72016$$
$$λογ\,5{,}25 = 0{,}72016$$
$$λογ\,0{,}525 = \overline{1}{,}72016 \quad ἢ \quad 9{,}72016 - 10.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, θὰ εὑρίσκωμεν πρῶτον τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ καὶ κατόπιν θὰ καταφεύγωμεν εἰς τοὺς Πίνακας διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ του μέρους,

$$π.χ.\ λογ\,45{,}2 = 1,\dots\dots.$$

Δηλαδὴ γράφομεν τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ κατόπιν θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν χωρὶς ὑποδιαστολήν, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐκ τῶν Πινάκων εὑρίσκομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος. Ἀλλὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι 65514, δηλαδή:

$$Ὁ\ λογ\,45{,}2 = 1{,}65514.$$

3·4 Ἡμιαρνητικοὶ ἀριθμοί.

Καλοῦμεν ἡμιαρνητικοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ἐκείνους, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἀκέραιον μέρος εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν θετικόν.

Π.χ. $\bar{1},24623$ ἢ $\bar{2},48514$.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἡμιαρνητικῶν ἀριθμῶν.

α) *Πρόσθεσις.*

$$\begin{array}{r} \bar{3},82416 \\ \bar{2},41107 \\ \hline \bar{4},23523 \end{array}+ \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 7,82416 \\ 8,41107 \\ \hline 16,23523\ (-20) \end{array}+ \qquad \begin{array}{r} \bar{2},43514 \\ \bar{1},87121 \\ \hline \bar{2},30635 \end{array}+ \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 8,43514 \\ 9,87121 \\ \hline 18,30635\ (-20) \end{array}+$$

β) *Ἀφαίρεσις.*

$$\begin{array}{r} \bar{2},46132 \\ \bar{1},21034 \\ \hline \bar{1},25098 \end{array}- \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 8,46132 \\ 9,21034 \\ \hline 9,25098\ (-10) \end{array}- \qquad \begin{array}{r} \bar{3},40142 \\ \bar{2},81503 \\ \hline \bar{2},58639 \end{array}- \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 7,40142 \\ 8,81503 \\ \hline 8,58639\ (-10) \end{array}-$$

γ) *Πολλαπλασιασμός.*

$$\begin{array}{r} \bar{2},31113 \\ 2 \\ \hline \bar{4},62226 \end{array}\times \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 8,31113 \\ 2 \\ \hline 16,62226\ (-20) \end{array}\times \qquad \begin{array}{r} \bar{3},81115 \\ 3 \\ \hline \bar{7},43345 \end{array}\times \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 7,81115 \\ 3 \\ \hline 23,43345\ (-30) \end{array}\times$$

δ) *Διαίρεσις.*

$$\begin{array}{r|l} \bar{2},61714 & 2 \\ \cline{2-2} & \bar{1},30857 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r|l} 8,61714 & 2 \\ \cline{2-2} & 9,30857 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \bar{3},{}^{1}67313 & 2 \\ \cline{2-2} & \bar{2},83856 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r|l} 7,67313 & 2 \\ \cline{2-2} & 8,83656 \end{array}$$

$$\bar{2},^{2}41309 \,\underline{|\;4\qquad}\quad ἢ \quad 8{,}41309 \,\underline{|\;4\qquad}.$$
$$\bar{1},60327 \qquad\qquad\qquad 9{,}60327$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς δύο τελευταίας διαιρέσεις μὲ ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν, προσθέτομεν εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ διαιρετέου τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσας χρειάζεται τοῦτο διὰ νὰ γίνῃ διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου. Τὰς μονάδας αὐτὰς ἐπαναδίδομεν εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος, ἀφοῦ τὰς σημειώσωμεν ὡς ἀνωτέρω.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι κατὰ τὴν διαίρεσιν προσθέτομεν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν 8, 7, 8 κλπ. δεκάδας κατὰ μίαν ὀλιγωτέραν τοῦ διαιρέτου.

Δηλαδὴ εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν λέγομεν τὸ 2 εἰς τὸ 18
» » δευτέραν » » τὸ 2 εἰς τὸ 17
» » τρίτην » » τὸ 4 εἰς τὸ 38.

3·5 Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

α) *Λογάριθμος γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.*

$$\text{Π.χ. } \text{λογ}(\alpha \times \beta) = \text{λογ}\alpha + \text{λογ}\beta \qquad (1)$$
$$\text{λογ}(35 \times 25) = \text{λογ}35 + \text{λογ}25.$$

β) *Λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ μεῖον τὸν λογάριθμον τοῦ παρονομαστοῦ.*

$$\text{Π.χ. } \text{λογ}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \text{λογ}\alpha - \text{λογ}\beta \qquad (2)$$
$$\text{λογ}\left(\frac{35}{25}\right) = \text{λογ}35 - \text{λογ}25.$$

γ) *Λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.*

$$\text{Π.χ. } \text{λογ}(\alpha^{\mu}) = \mu\text{λογ}\alpha \qquad (3)$$
$$\text{λογ}(6^{2}) = 2\text{λογ}6.$$

δ) *Λογάριθμος ῥίζης ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τῆς ὑπορρίζου ποσότητος διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.*

$$\text{Π.χ. } \log \sqrt[\mu]{A} = \frac{\log A}{\mu}$$
$$\log \sqrt[3]{25} = \frac{\log 25}{3}. \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων προκύπτει ὅτι:

Τὸ γινόμενον μετατρέπεται εἰς πρόσθεσιν, ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν, ἡ δύναμις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ ἡ ῥίζα εἰς πηλίκον. Οὕτω αἱ πράξεις διὰ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων ἁπλουστεύονται πολύ.

3·6 Ἀπόδειξις ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων.

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} 10^x = \alpha \rightarrow x = \log\alpha \\ 10^y = \beta \rightarrow y = \log\beta \end{array}\right\} \text{κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου.}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο πρώτας ἰσότητας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$10^x \cdot 10^y = \alpha \cdot \beta$ ἢ $10^{x+y} = \alpha \cdot \beta$. Ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγει, ὅτι ὁ

$$\log(\alpha \cdot \beta) = x + y \ \text{ ἢ } \ \log(\alpha \cdot \beta) = \log\alpha + \log\beta.$$

2. Ἔστω ὅτι ἔχομεν:

$$10^x = \alpha \rightarrow x = \log\alpha$$
$$10^y = \beta \rightarrow y = \log\beta.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς δύο ἰσότητας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$\dfrac{10^x}{10^y} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ἢ $10^{x-y} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Ἡ τελευταία ἰσότης λέγει ὅτι:

$$\log\frac{\alpha}{\beta} = x - y \ \text{ ἢ } \ \log\frac{\alpha}{\beta} = \log\alpha - \log\beta.$$

3. Ἔστω ὅτι ἔχομεν $10^x = \alpha$. Ἄρα $x = \log\alpha$. Ὑψοῦντες τὴν ἰσότητα εἰς τὴν μ δύναμιν, εὑρίσκομεν:

$$(10^x)^\mu = \alpha^\mu \ \text{ ἢ } \ 10^{x\mu} = \alpha^\mu,$$

$$\text{ἄρα } \log(\alpha^\mu) = \mu x, \text{ ἤτοι } \log(\alpha^\mu) = \mu\log\alpha.$$

4. Ἐπειδὴ $\sqrt[\mu]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\mu}}$, ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma \sqrt[\mu]{\alpha} = \lambda o\gamma \left(\alpha^{\frac{1}{\mu}}\right), \text{ ἄρα } \lambda o\gamma \sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{1}{\mu} \lambda o\gamma \alpha,$$

διότι τὸ δεύτερον μέλος εἶναι δύναμις καὶ κατὰ τὰ προηγούμενα ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸν δείκτην τῆς ρίζης.

3·7 Ὑπολογισμὸς παραστάσεως διὰ τῶν λογαρίθμων.

Παράδειγμα 1.

Ὑπολογίσατε τὴν κάτωθι παράστασιν διὰ τῶν λογαρίθμων:

$$89{,}46 \times 0{,}04137 \times 0{,}3214.$$

Λύσις.

Κατ' ἀρχὴν καλοῦμεν τὴν παράστασιν N καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος α (παράγρ. 3·5) λαμβάνομεν:

$$\lambda o\gamma N = \lambda o\gamma\, 89{,}46 + \lambda o\gamma\, 0{,}04137 + \lambda o\gamma\, 0{,}3214.$$

Πρὸ τῆς χρήσεως τῶν Πινάκων κατατάσσομεν ταύτην ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 89{,}46 &= \\ \lambda o\gamma\, 0{,}04137 &= \\ \lambda o\gamma\, 0{,}3214 &= \\ \hline \lambda o\gamma\, N &= \\ N &= \end{aligned}$$

Κατόπιν ὑπολογίζομεν τὰ χαρακτηριστικὰ καὶ τέλος χρησιμοποιοῦμεν τοὺς Πίνακας.

(Αος τρόπος)

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 89{,}46 &= 1{,}95163 \\ \lambda o\gamma 0{,}04137 &= \bar{2}{,}61669 \\ \lambda o\gamma 0{,}3214 &= \bar{1}{,}50705 \\ \hline \lambda o\gamma\, N &= 0{,}07537 \longrightarrow N = 1{,}1895. \end{aligned}$$

(Βος τρόπος)

$$
\begin{aligned}
\text{λογ}\,89{,}46 &= 1{,}95163\\
\text{λογ}\,0{,}04137 &= 8{,}61669\\
\text{λογ}\,0{,}3214 &= \underline{9{,}50705}\\
\text{λογ}\,\mathrm{N} &= 20{,}07537(-20) \longrightarrow \mathrm{N} = 1{,}1895.
\end{aligned}
$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀρνητικοῦ χαρακτηριστικοῦ ἀνωτέρω ἐγένετο διὰ δύο τρόπων.

Παράδειγμα 2.

Ὑπολογίσατε διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν παράστασιν:

$$\mathrm{N} = \frac{47{,}82}{815{,}1}.$$

Λύσις.

$$\text{λογ}\,\mathrm{N} = \text{λογ}\,47{,}82 - \text{λογ}\,815{,}1.$$

Ἀριθμοὶ	*Λογάριθμοι*
47,82	λογ47,82 = 1,67961
815,1	λογ815,1 = 2,91121.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δεύτερος λογάριθμος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ πρώτου. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸ $1{,}67961 \rightarrow 11{,}67961\,(-10)$ καὶ ἔχομεν:

$$
\begin{aligned}
\text{λογ}47{,}82 &= 11{,}67961\,(-10)\\
\text{λογ}815{,}1 &= \underline{2{,}91121}\\
\text{λογ}\mathrm{N} &= 8{,}76840\,(-10) \quad \text{ἢ} \quad \bar{2}{,}76840\\
\mathrm{N} &= 0{,}05867.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3.

Ὑπολογίσατε διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν παράστασιν:

$$\mathrm{N} = \frac{0{,}08942 \times 3{,}592}{105{,}2 \times 0{,}5127}.$$

Λύσις.

Ἂν εἶναι Α ὁ ἀριθμητὴς καὶ Β ὁ παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως, ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα, ἔχομεν:

$$\text{λογ}\, N = \text{λογ}\,\text{Ἀριθμ.} - \text{λογ}\,\text{Παρον.}$$

$\text{λογ}\, A = \text{λογ}\, 0{,}08942 + \text{λογ}\, 3{,}592$

$\text{λογ}\, B = \text{λογ}\, 105{,}2 + \text{λογ}\, 0{,}5127$

$$\begin{array}{rll}
\text{λογ}\, 0{,}08942 = & 8{,}95144\ (-10) & \\
\text{λογ}\, 3{,}592 = & \underline{0{,}55534} + & \\
\text{λογ}\, A = & 9{,}50678\ (-10) \longrightarrow & 19{,}50678\ (-20) \\
\text{λογ}\, 105{,}2 = & 2{,}02202 + & \\
\text{λογ}\, 0{,}5127 = & \underline{9{,}70986}\ (-10) & - \\
\text{λογ}\, B = & 11{,}73188\ (-10) \longrightarrow & \underline{11{,}73188}\ (-10) \\
\text{λογ}\, N = & \longrightarrow & 7{,}77490\ (-10) \\
\text{ἢ} & \bar{3}{,}77490 \longrightarrow & N = 0{,}005954.
\end{array}$$

Ὑπολογισμὸς μὲ χρῆσιν ἡμιαρνητικῶν ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{rll}
\text{λογ}\, 0{,}08942 = & \bar{2}{,}95144 & \\
\text{λογ}\, 3{,}592 = & \underline{0{,}55534} + & \\
\text{λογ}\, A = & \bar{1}{,}50678 \longrightarrow & \bar{1}{,}50678 \\
\text{λογ}\, 105{,}2 = & 2{,}02202 & - \\
\text{λογ}\, 0{,}5127 = & \underline{\bar{1}{,}70986} + & \\
\text{λογ}\, B = & 1{,}73188 \longrightarrow & \underline{1{,}73188} \\
\text{λογ}\, N = & \longrightarrow & \bar{3}{,}77490 \\
\text{καὶ}\ N = & \longrightarrow & 0{,}005954.
\end{array}$$

Παράδειγμα 4.

Ὑπολογίσατε διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν παράστασιν:

$$N = \sqrt[3]{0{,}1084} \times (0{,}4231)^5.$$

Λύσις.

Ἡ παράστασις λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\frac{\text{λογ}\,0{,}1084}{3} + 5\,\text{λογ}\,0{,}4231$$

$$\begin{array}{rll}
\dfrac{\text{λογ}\,0{,}1084}{3} & = 9{,}67834 & \\
5\,\text{λογ}\,0{,}4231 & = \underline{8{,}13220} & + \\
\text{λογ}\,\mathrm{N} & = 7{,}81056\,(-20), & \text{λογ}\,\mathrm{N} = \overline{3}{,}81054 \\
\mathrm{N} & = 0{,}0064642. &
\end{array}$$

Παράδειγμα 5.

Ὑπολογίσατε διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν παράστασιν:

$$\mathrm{N} = \frac{(0{,}04163)^3 \times \sqrt[5]{0{,}001574}}{(0{,}3157)^2 \times (5{,}123)}.$$

Λύσις.

$$\begin{array}{rlll}
3\,\text{λογ}\,0{,}04163 & = & 5{,}85823\,(-10) & \\
\dfrac{\text{λογ}\,0{,}001574}{5} & = & \underline{9{,}43940\,(-10)} & + \\
 & & 15{,}29763\,(-20) & \longrightarrow 15{,}29763\,(-20) \\
2\,\text{λογ}\,0{,}3157 & = & 8{,}99856\,(-10) & \\
\text{λογ}\,5{,}123 & = & \underline{10{,}70952\,(-10)} & + \qquad - \\
 & & 19{,}70808\,(-20) & \longrightarrow \underline{19{,}70808\,(-20)} \\
\text{λογ}\,\mathrm{N} & = & \longrightarrow & 5{,}58955\,(-10) \\
\mathrm{N} & = & \longrightarrow & 0{,}000038864.
\end{array}$$

Παράδειγμα 6.

Ὑπολογίσατε διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν παράστασιν:

$$\mathrm{N} = \frac{55{,}22\,\sqrt{6{,}26} - 4{,}2\,\sqrt{12{,}24}}{\sqrt{38} \times (3{,}15)^2}.$$

Λύσις.

Ἂς ὀνομάσωμεν Α τὸν μειωτέον καὶ Α΄ τὸν ἀφαιρετέον τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐνῶ μὲ Β ἄς παραστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν τῆς παραστάσεως. Ἔχομεν:

$$
\begin{array}{rll}
\text{λογ}\,55{,}22 & = 1{,}74210 & \\
\dfrac{\text{λογ}\,6{,}26}{2} & = \underline{0{,}39828}\;+ & \\
\text{λογ}\,A & = 2{,}14038 & A = \longrightarrow 138{,}161 \\
\text{λογ}\,4{,}2 & = 0{,}62325 & \\
\dfrac{\text{λογ}\,12{,}24}{2} & = \underline{0{,}54389}\;+ & \qquad - \\
\text{λογ}\,A' & = 1{,}16714 & A' = \longrightarrow \underline{14{,}694} \\
 & & \text{Ἀριθμητὴς} = \quad 123{,}467 \\
\dfrac{\text{λογ}\,38}{2} & = 0{,}78989 & \\
2\text{λογ}\,3{,}15 & = \underline{0{,}99662}\;+ & \\
\text{λογ}\,B & = 1{,}78651 & \text{Παρονομαστὴς} = \quad 61{,}165 \\
\text{λογ}\,123{,}467 & = 2{,}09155 & \\
\text{λογ}\,61{,}165 & = \underline{1{,}78650}\;- & \\
\text{λογ}\,N & = 0{,}30505 & N \longrightarrow = \quad 2{,}018.
\end{array}
$$

Παράδειγμα 7.

Ὑπολογίσατε διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν παράστασιν:

$$\Sigma = \sqrt[3]{0{,}825^2} \times 0{,}832^3 - \sqrt[3]{5{,}14} \times 4{,}4.$$

Λύσις.

Ἔστω Κ τὸ πρῶτον μέρος τῆς παραστάσεως καὶ Λ τὸ δεύτερον. Ἔχομεν:

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{2\text{λογ}\,0{,}825}{3} = \dfrac{2 \times 9{,}91645}{3} & = & 9{,}94430 \\
3\text{λογ}\,0{,}832 = \quad 9{,}92012 & = & \underline{9{,}76036} \\
\text{λογ}\,K & = & 9{,}70466 \\
\text{ἢ λογ}\,K & = & \bar{1}{,}70466 \qquad \text{καὶ } K = 0{,}50659
\end{array}
$$

$$\frac{\lambda o\gamma\, 5{,}14}{3} = \frac{10{,}71096}{3} = 10{,}23698 +$$

$$\lambda o\gamma\, 4{,}4 = \underline{10{,}64345} \qquad -$$

$$\lambda o\gamma\, \Lambda = 20{,}88043\ (-20)$$

$$\text{ἢ}\ \lambda o\gamma\, \Lambda = 0{,}88043 \qquad \Lambda = \longrightarrow \underline{7{,}59333}$$

$$\underline{\Sigma = -7{,}08674.}$$

Παράδειγμα 8.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:

$$\eta\mu\pi\rho\, A = [\,\eta\mu\pi\rho\alpha - \eta\mu\pi\rho\,(\beta \sim \gamma)\,]\cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\gamma.$$

Λύσις.

Ἂν $\alpha = 82^\circ \quad \beta = 55^\circ \quad \gamma = 44^\circ$

$$\alpha = 82^\circ\ \eta\mu\pi\rho\alpha = 0{,}43041 \quad -$$

$$(\beta \sim \gamma) = 11^\circ\ \eta\mu\pi\rho = \underline{0{,}00919}$$

$$\eta\mu\pi\rho K = 0{,}42122 \qquad \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K = 9{,}62450$$

$$\beta = 55^\circ \qquad \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\beta = 10{,}08664$$

$$\gamma = 44^\circ \qquad \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\gamma = \underline{10{,}15823}$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A = 9{,}86937$$

$$\underline{\text{καὶ}\ A = 118^\circ\, 43'}.$$

Παράδειγμα 9.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:

$$\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho\, A \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma + \eta\mu\pi\rho\,(\beta \sim \gamma).$$

Λύσις.

Ἂν $A = 100^\circ \quad \beta = 70^\circ \quad \gamma = 60^\circ$

$$A = 100^\circ \qquad \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A = 9{,}76851$$

$$\beta = 70^\circ \qquad \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\beta = 9{,}97299$$

$$\gamma = 60^\circ \qquad \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\gamma = \underline{9{,}93753}$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K = 9{,}67903 \longrightarrow \eta\mu\pi\rho K = 0{,}47754$$

$$(\beta \sim \gamma) = 10^\circ\ \eta\mu\pi\rho = \underline{0{,}00760}$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\alpha = 0{,}48514$$

$$\text{καὶ}\ \alpha = 88^\circ\, 18'.$$

3·8 Χρῆσις λογαριθμικῶν Πινάκων. Εὕρεσις λογαρίθμου ἀριθμοῦ μὲ τέσσαρα ψηφία.

Οἱ Πίνακες 3 καὶ 4 περιλαμβάνουν τοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους τῶν κοινῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος αὐτῶν ὑπάρχει ἡ μαύρη στήλη τῶν τριψηφίων ἀριθμῶν.

Εἰς τὸν Πίνακα 3 ὑπάρχουν οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 — 100 μὲ μαῦρα γράμματα, ἐνῶ δεξιὰ αὐτῶν ὑπάρχουν οἱ ἀντίστοιχοι λογάριθμοι.

ΠΙΝΑΞ 3

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

No. 1——100. Log. 0.00000——2.00000.

No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.
1	0·00000	**21**	1·32222	**41**	1·61278	**61**	1·78533	**81**	1·90849
2	0·30103	**22**	1·34242	**42**	1·62325	**62**	1·79239	**82**	1·91381
3	0·47712	**23**	1·36173	**43**	1·63347	**63**	1·79934	**83**	1·91908
4	0·60206	**24**	1·38021	**44**	1·64345	**64**	1·80618	**84**	1·92428
5	0·69897	**25**	1·39794	**45**	1·65321	**65**	1·81291	**85**	1·92942
6	0·77815	**26**	1·41497	**46**	1·66276	**66**	1·81954	**86**	1·93450
7	0·84510	**27**	1·43136	**47**	1·67210	**67**	1·82608	**87**	1·93952
8	0·90309	**28**	1·44716	**48**	1·68124	**68**	1·83251	**88**	1·94448
9	0·95424	**29**	1·46240	**49**	1·69020	**69**	1·83885	**89**	1·94939
10	1·00000	**30**	1·47712	**50**	1·69897	**70**	1·84510	**90**	1·95424
11	1·04139	**31**	1·49136	**51**	1·70757	**71**	1·85126	**91**	1·95904
12	1·07918	**32**	1·50515	**52**	1·71600	**72**	1·85733	**92**	1·96379
13	1·11394	**33**	1·51851	**53**	1·72428	**73**	1·86332	**93**	1·96848
14	1·14613	**34**	1·53148	**54**	1·73239	**74**	1·86923	**94**	1·97313
15	1·17609	**35**	1·54407	**55**	1·74036	**75**	1·87506	**95**	1·97772
16	1·20412	**36**	1·55630	**56**	1·74819	**76**	1·88081	**96**	1·98227
17	1·23045	**37**	1·56820	**57**	1·75588	**77**	1·88649	**97**	1·98677
18	1·25527	**38**	1·57978	**58**	1·76343	**78**	1·89210	**98**	1·99123
19	1·27875	**39**	1·59107	**59**	1·77085	**79**	1·89763	**99**	1·99564
20	1·30103	**40**	1·60206	**60**	1·77815	**80**	1·90309	**100**	2·00000

Ἐξαιρετικῶς ἀπὸ τὸ 1 — 100 ὑπάρχουν καὶ τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει μετὰ τὸ 100, διότι ὁ μαθητὴς εἶναι ὑποχρεωμένος κατὰ τὰ γνωστὰ νὰ ὑπολογίζῃ τὸ χαρακτηριστικόν.

Κατὰ ταῦτα:

α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 115.

Ἀπὸ τὸν Πίνακα 5 εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 115 (εἰς τὴν στήλην τῶν μαύρων γραμμάτων) καὶ γράφομεν:

$$\lambda o\gamma\ 115 = 2{,}06070.$$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

No. 9400——9999 Log. 97313——99996

Angles 2· ° ′	Angles 3· ° ′	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
15 40	*156 40*	**940**	97313	97317	97322	97327	97331	97336	97341	97345	97350	97354	5
15 41	*156 50*	**941**	97359	97364	97368	97373	97377	97382	97387	97391	97396	97401	5
15 42	*157 00*	**942**	97405	97410	97414	97419	97424	97428	97433	97437	97442	97447	5
15 43	*157 10*	**943**	97451	97456	97460	97465	97470	97474	97479	97483	97488	97493	5
15 44	*157 20*	**944**	97497	97502	97506	97511	97516	97520	97525	97529	97534	97539	5
15 45	*157 30*	**945**	97543	97548	97552	97557	97562	97566	97571	97575	97580	97585	5
15 46	*157 40*	**946**	97589	97594	97598	97603	97608	97612	97617	97621	97626	97630	5
15 47	*157 50*	**947**	97635	97640	97644	97649	97653	97658	97663	97667	97672	97676	5
15 48	*158 00*	**948**	97681	97685	97690	97695	97699	97704	97708	97713	97718	97722	5
15 49	*158 10*	**949**	97727	97731	97736	97740	97745	97750	97754	97759	97763	97768	5
15 50	*158 20*	**950**	97772	97777	97782	97786	97791	97795	97800	97804	97809	97814	5
15 51	*158 30*	**951**	97818	97823	97827	97832	97836	97841	97845	97850	97855	97859	5
15 52	*158 40*	**952**	97864	97868	97873	97877	97882	97887	97891	97896	97900	97905	5
15 53	*158 50*	**953**	97909	97914	97918	97923	97928	97932	97937	97941	97946	97950	5
15 54	*159 00*	**954**	97955	97959	97964	97969	97973	97978	97982	97987	97991	97996	5
15 55	*159 10*	**955**	98000	98005	98009	98014	98019	98023	98028	98032	98037	98041	5
15 56	*159 20*	**956**	98046	98050	98055	98059	98064	98069	98073	98078	98082	98087	5
15 57	*159 30*	**957**	98091	98096	98100	98105	98109	98114	98118	98123	98128	98132	5
15 58	*159 40*	**958**	98137	98141	98146	98150	98155	98159	98164	98168	98173	98177	5
15 59	*159 50*	**959**	98182	98186	98191	98195	98200	98205	98209	98214	98218	98223	5
16 00	*160 00*	**960**	98227	98232	98236	98241	98245	98250	98254	98259	98263	98268	5
16 01	*160 10*	**961**	98272	98277	98281	98286	98290	98295	98299	98304	98309	98313	5
16 02	*160 20*	**962**	98318	98322	98327	98331	98336	98340	98345	98349	98354	98358	5
16 03	*160 30*	**963**	98363	98367	98372	98376	98381	98385	98390	98394	98399	98403	5
16 04	*160 40*	**964**	98408	98412	98417	98421	98426	98430	98435	98439	98444	98448	5
16 05	*160 50*	**965**	98453	98457	98462	98466	98471	98475	98480	98484	98489	98493	5
16 06	*161 00*	**966**	98498	98502	98507	98511	98516	98520	98525	98529	98534	98538	5
16 07	*161 10*	**967**	98543	98547	98552	98556	98561	98565	98570	98574	98579	98583	5
16 08	*161 20*	**968**	98588	98592	98597	98601	98606	98610	98614	98619	98623	98628	5
16 09	*161 30*	**969**	98632	98637	98641	98646	98650	98655	98659	98664	98668	98673	5
16 10	*161 40*	**970**	98677	98682	98686	98691	98695	98700	98704	98709	98713	98717	5
16 11	*161 50*	**971**	98722	98726	98731	98735	98740	98744	98749	98753	98758	98762	5
16 12	*162 00*	**972**	98767	98771	98776	98780	98785	98789	98793	98798	98802	98807	5
16 13	*162 10*	**973**	98811	98816	98820	98825	98829	98834	98838	98843	98847	98851	5
16 14	*162 20*	**974**	98856	98860	98865	98869	98874	98878	98883	98887	98892	98896	5
16 15	*162 30*	**975**	98901	98905	98909	98914	98918	98923	98927	98932	98936	98941	5
16 16	*162 40*	**976**	98945	98949	98954	98958	98963	98967	98972	98976	98981	98985	4
16 17	*162 50*	**977**	98990	98994	98998	99003	99007	99012	99016	99021	99025	99029	4
16 18	*163 00*	**978**	99034	99038	99043	99047	99052	99056	99061	99065	99069	99074	4
16 19	*163 10*	**979**	99078	99083	99087	99092	99096	99100	99105	99109	99114	99118	4
16 20	*163 20*	**980**	99123	99127	99132	99136	99140	99145	99149	99154	99158	99163	4
16 21	*163 30*	**981**	99167	99171	99176	99180	99185	99189	99193	99198	99202	99207	4
16 22	*163 40*	**982**	99211	99216	99220	99224	99229	99233	99238	99242	99247	99251	4
16 23	*163 50*	**983**	99255	99260	99264	99269	99273	99277	99282	99286	99291	99295	4
16 24	*164 00*	**984**	99300	99304	99308	99313	99317	99322	99326	99330	99335	99339	4
16 25	*164 10*	**985**	99344	99348	99352	99357	99361	99366	99370	99375	99379	99383	4
16 26	*164 20*	**986**	99388	99392	99397	99401	99405	99410	99414	99419	99423	99427	4
16 27	*164 30*	**987**	99432	99436	99441	99445	99449	99454	99458	99463	99467	99471	4
16 28	*164 40*	**988**	99476	99480	99485	99489	99493	99498	99502	99506	99511	99515	4
16 29	*164 50*	**989**	99520	99524	99528	99533	99537	99542	99546	99550	99555	99559	4
16 30	*165 00*	**990**	99564	99568	99572	99577	99581	99585	99590	99594	99599	99603	4
16 31	*165 10*	**991**	99607	99612	99616	99621	99625	99629	99634	99638	99642	99647	4
16 32	*165 20*	**992**	99651	99656	99660	99664	99669	99673	99677	99682	99686	99690	4
16 33	*165 30*	**993**	99695	99699	99704	99708	99712	99717	99721	99726	99730	99734	4
16 34	*165 40*	**994**	99739	99743	99747	99752	99756	99761	99765	99769	99774	99778	4
16 35	*165 50*	**995**	99782	99787	99791	99795	99800	99804	99809	99813	99817	99822	4
16 36	*166 00*	**996**	99826	99830	99835	99839	99843	99848	99852	99856	99861	99865	4
16 37	*166 10*	**997**	99870	99874	99878	99883	99887	99891	99896	99900	99904	99909	4
16 38	*166 20*	**998**	99913	99917	99922	99926	99931	99935	99939	99944	99948	99952	4
16 39	*166 30*	**999**	99957	99961	99965	99970	99974	99978	99983	99987	99991	99996	4
Angles		No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

No. 1000——1599 Log. 00000——20385

Angles 2· ° ′	Angles 3· ° ′	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
1 40	16 40	100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389	43
1 41	16 50	101	00432	00475	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775	00817	43
1 42	17 00	102	00860	00903	00945	00988	01030	01072	01115	01157	01199	01242	42
1 43	17 10	103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662	42
1 44	17 20	104	01703	01745	01787	01828	01870	01912	01953	01995	02036	02078	42
1 45	17 30	105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02408	02449	02490	41
1 46	17 40	106	02531	02572	02612	02653	02694	02735	02776	02816	02857	02898	41
1 47	17 50	107	02938	02979	03020	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03302	40
1 48	18 00	108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	03623	03663	03703	40
1 49	18 10	109	03743	03783	03822	03862	03902	03941	03981	04021	04060	04100	40
1 50	18 20	110	04139	04179	04218	04258	04297	04336	04376	04415	04454	04493	39
1 51	18 30	111	04532	04571	04611	04650	04689	04728	04766	04805	04844	04883	39
1 52	18 40	112	04922	04961	04999	05038	05077	05115	05154	05192	05231	05269	39
1 53	18 50	113	05308	05346	05385	05423	05461	05500	05538	05576	05614	05652	38
1 54	19 00	114	05691	05729	05767	05805	05843	05881	05919	05956	05994	06032	38
1 55	19 10	115	06070	06108	06145	06183	06221	06258	06296	06333	06371	06408	38
1 56	19 20	116	06446	06483	06521	06558	06595	06633	06670	06707	06744	06781	37
1 57	18 30	117	06819	06856	06893	06930	06967	07004	07041	07078	07115	07151	37
1 58	19 40	118	07188	07225	07262	07299	07335	07372	07409	07445	07482	07518	37
1 59	19 50	119	07555	07591	07628	07664	07700	07737	07773	07809	07846	07882	36
2 00	20 00	120	07918	07954	07990	08027	08063	08099	08135	08171	08207	08243	36
2 01	20 10	121	08279	08314	08350	08386	08422	08458	08493	08529	08565	08600	36
2 02	20 20	122	08636	08672	08707	08743	08778	08814	08849	08885	08920	08955	36
2 03	20 30	123	08991	09026	09061	09096	09132	09167	09202	09237	09272	09307	35
2 04	20 40	124	09342	09377	09412	09447	09482	09517	09552	09587	09622	09656	35
2 05	20 50	125	09691	09726	09760	09795	09830	09864	09899	09934	09968	10003	35
2 06	21 00	126	10037	10072	10106	10140	10175	10209	10243	10278	10312	10346	34
2 07	21 10	127	10380	10415	10449	10483	10517	10551	10585	10619	10653	10687	34
2 08	21 20	128	10721	10755	10789	10823	10857	10890	10924	10958	10992	11025	34
2 09	21 30	129	11059	11093	11126	11160	11193	11227	11261	11294	11328	11361	34
2 10	21 40	130	11394	11428	11461	11494	11528	11561	11594	11628	11661	11694	33
2 11	21 50	131	11727	11760	11793	11827	11860	11893	11926	11959	11992	12025	33
2 12	22 00	132	12057	12090	12123	12156	12189	12222	12254	12287	12320	12353	33
2 13	22 10	133	12385	12418	12450	12483	12516	12548	12581	12613	12646	12678	33
2 14	22 20	134	12711	12743	12775	12808	12840	12872	12905	12937	12969	13001	32
2 15	22 30	135	13033	13066	13098	13130	13162	13194	13226	13258	13290	13322	32
2 16	22 40	136	13354	13386	13418	13450	13481	13513	13545	13577	13609	13640	32
2 17	22 50	137	13672	13704	13735	13767	13799	13830	13862	13893	13925	13956	32
2 18	23 00	138	13988	14019	14051	14082	14114	14145	14176	14208	14239	14270	31
2 19	23 10	139	14302	14333	14364	14395	14426	14457	14489	14520	14551	14582	31
2 20	23 20	140	14613	14644	14675	14706	14737	14768	14799	14829	14860	14891	31
2 21	23 30	141	14922	14953	14984	15014	15045	15076	15106	15137	15168	15198	31
2 22	23 40	142	15229	15259	15290	15321	15351	15382	15412	15442	15473	15503	31
2 23	23 50	143	15534	15564	15594	15625	15655	15685	15715	15746	15776	15806	30
2 24	24 00	144	15836	15866	15897	15927	15957	15987	16017	16047	16077	16107	30
2 25	24 10	145	16137	16167	16197	16227	16256	16286	16316	16346	16376	16406	30
2 26	24 20	146	16435	16465	16495	16524	16554	16584	16613	16643	16673	16702	30
2 27	24 30	147	16732	16761	16791	16820	16850	16879	16909	16938	16967	16997	30
2 28	24 40	148	17026	17056	17085	17114	17143	17173	17202	17231	17260	17290	29
2 29	24 50	149	17319	17348	17377	17406	17435	17464	17493	17522	17551	17580	29
2 30	25 00	150	17609	17638	17667	17696	17725	17754	17783	17811	17840	17869	29
2 31	25 10	151	17898	17926	17955	17984	18013	18041	18070	18099	18127	18156	29
2 32	25 20	152	18184	18213	18242	18270	18299	18327	18355	18384	18412	18441	29
2 33	25 30	153	18469	18498	18526	18554	18583	18611	18639	18667	18696	18724	28
2 34	25 40	154	18752	18780	18808	18837	18865	18893	18921	18949	18977	19005	28
2 35	25 50	155	19033	19061	19089	19117	19145	19173	19201	19229	19257	19285	28
2 36	26 00	156	19313	19340	19368	19396	19424	19451	19479	19507	19535	19562	28
2 37	26 10	157	19590	19618	19645	19673	19701	19728	19756	19783	19811	19838	28
2 38	26 20	158	19866	19893	19921	19948	19976	20003	20030	20058	20085	20112	27
2 39	26 30	159	20140	20167	20194	20222	20249	20276	20303	20331	20358	20385	27
Angles		No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος 1152.

Ὁ ἀριθμὸς ἔχει 4 ἀκέραια ψηφία (τετραψήφιος). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμόν του, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν τριῶν ψηφίων του ἐκ τῆς κατακορύφου στήλης, τὸ δὲ τέταρτον ψηφίον ἐκ τῆς ἄνω ἢ κάτω ὁριζοντίας στήλης, ὁπότε εἰς τὴν διασταύρωσιν αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον:

$$\lambda o\gamma\, 1152 = 3{,}06145.$$

3·9 Εὕρεσις λογαρίθμου ἀριθμοῦ μὲ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφία.

Ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον 25647. Κατ' ἀρχὴν εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ 4. Κατόπιν τὰ πέραν τῶν 4 ψηφίων τὰ καθιστῶμεν δεκαδικά, δηλαδὴ ἔχομεν: 2564,7. Βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 2564,7 δὲν ὑπάρχει εἰς τὸν Πίνακα 7. Οὗτος κεῖται ὅμως μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2564 καὶ 2565. Ἤδη δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{lr} \lambda o\gamma\, 2564 \rightarrow & 40892 \\ \lambda o\gamma\, 2564{,}7 \rightarrow & \\ \lambda o\gamma\, 2565 \rightarrow & \underline{40909} \\ \text{Διαφορὰ} & 17 \end{array}$$

Λέγομεν λοιπόν:

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξάνῃ κατὰ 1 μονάδα, δηλαδὴ ἀπὸ 2564 εἰς 2565, ὁ λογάριθμος αὐξάνει κατὰ 17 μονάδας τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως. Ὅταν αὐξάνῃ κατὰ 0,7, πόσον αὐξάνει ὁ λογάριθμος;

$$\begin{array}{cc} 1 & 17 \\ 0{,}7 & x \\ \hline \multicolumn{2}{c}{x = 17 \times 0{,}7 = 11{,}9 \text{ ἢ } 12} \end{array}$$

Τὴν διαφορὰν προσθέτομεν εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ μικροτέρου. Ἄρα ἔχομεν: $\lambda o\gamma\, 2564{,}7 = 4{,}40904$.

Ἡ ἀνωτέρω ὅμως ἐργασία εἶναι ἐπίπονος, πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν κάτωθι πρακτικωτέραν:

Εἰς τὸ δεξιὸν μέρος τῶν σελίδων τῶν Πινάκων ὑπάρχει ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, στήλη D. Εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν εὑρίσκεται καὶ ὁ ἀριθμὸς 17. Τῆς διαφορᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν τόσον μέρος, ὅσον ὁρίζουν τὰ δεκαδικὰ ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσίν μας 0,7. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὴν διαφορὰν $17 \times 0,7 = 11,9$ ἢ 12, τὴν ὁποίαν καὶ προσθέτομεν ὡς ἀνωτέρω.

Παράδειγμα.

$$\text{λογ}\, 967845 = 5,\ldots\ldots$$

Διαφορὰ λογαρίθμων διαδοχικῶν ἀριθμῶν 9678 καὶ 9679=5.

Λαμβάνομεν τὰ 0,45 τοῦ 5 καὶ ἔχομεν $5 \times 0,45 = 2,25 \simeq 2$, τὴν ὁποίαν καὶ προσθέτομεν εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ μικροτέρου, δηλαδὴ τοῦ 9678, ὁ ὁποῖος εἶναι $98579 + 2 = 98581$.

Ἄρα λογ $967845 = 5,98581$.

3·10 Εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

α) Ὁ λογάριθμος ὑπάρχει εἰς τοὺς Πίνακας.

Δίδεται ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ x ἴσος πρὸς 2,26505 καὶ ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς x. Ἀπὸ τὸν Πίνακα 6 ἀναζητοῦμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον καὶ κατόπιν ἀντιστρόφως διαβάζομεν 1841. Ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ 3 ἀκέραια ψηφία, δηλαδὴ θὰ εἶναι ὁ 184,1.

β) Ὁ λογάριθμος δὲν ὑπάρχει εἰς τοὺς Πίνακας.

Ἔστω ὁ λογ $x = 3,38083$. Ζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν x.

Ἀπὸ τὸν Πίνακα 7 παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν ὑπάρχει ἀκριβῶς, κεῖται ὅμως μεταξὺ τοῦ 38075 καὶ 38093.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Angles 2· ° ′	Angles 3· ° ′	No.	No. 1600—2199 Log. 20412—34223 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
2 40	26 40	160	20412	20439	20466	20493	20520	20548	20575	20602	20629	20656	27
2 41	26 50	161	20683	20710	20737	20763	20790	20817	20844	20871	20898	20925	27
2 42	27 00	162	20952	20978	21005	21032	21059	21085	21112	21139	21165	21192	27
2 43	27 10	163	21219	21245	21272	21299	21325	21352	21378	21405	21431	21458	27
2 44	27 20	164	21484	21511	21537	21564	21590	21617	21643	21669	21696	21722	26
2 45	27 30	165	21748	21775	21801	21827	21854	21880	21906	21932	21958	21985	26
2 46	27 40	166	22011	22037	22063	22089	22115	22141	22168	22194	22220	22246	26
2 47	27 50	167	22272	22298	22324	22350	22376	22402	22427	22453	22479	22505	26
2 48	28 00	168	22531	22557	22583	22608	22634	22660	22686	22712	22737	22763	26
2 49	28 10	169	22789	22814	22840	22866	22891	22917	22943	22968	22994	23019	26
2 50	28 20	170	23045	23070	23096	23122	23147	23172	23198	23223	23249	23274	26
2 51	28 30	171	23300	23325	23350	23376	23401	23426	23452	23477	23502	23528	25
2 52	28 40	172	23553	23578	23603	23629	23654	23679	23704	23729	23754	23780	25
2 53	28 50	173	23805	23830	23855	23880	23905	23930	23955	23980	24005	24030	25
2 54	29 00	174	24055	24080	24105	24130	24155	24180	24204	24229	24254	24279	25
2 55	29 10	175	24304	24329	24353	24378	24403	24428	24452	24477	24502	24527	25
2 56	29 20	176	24551	24576	24601	24625	24650	24675	24699	24724	24748	24773	25
2 57	29 30	177	24797	24822	24846	24871	24895	24920	24944	24969	24993	25018	25
2 58	29 40	178	25042	25066	25091	25115	25140	25164	25188	25213	25237	25261	24
2 59	29 50	179	25285	25310	25334	25358	25382	25406	25431	25455	25479	25503	24
3 00	30 00	180	25527	25551	25576	25600	25624	25648	25672	25696	25720	25744	24
3 01	30 10	181	25768	25792	25816	25840	25864	25888	25912	25936	25959	25983	24
3 02	30 20	182	26007	26031	26055	26079	26103	26126	26150	26174	26198	26221	24
3 03	30 30	183	26245	26269	26293	26316	26340	26364	26387	26411	26435	26458	24
3 04	30 40	184	26482	26505	26529	26553	26576	26600	26623	26647	26670	26694	24
3 05	30 50	185	26717	26741	26764	26788	26811	26834	26858	26881	26905	26928	23
3 06	31 00	186	26951	26975	26998	27021	27045	27068	27091	27114	27138	27161	23
3 07	31 10	187	27184	27207	27231	27254	27277	27300	27323	27346	27370	27393	23
3 08	31 20	188	27416	27439	27462	27485	27508	27531	27554	27577	27600	27623	23
3 09	31 30	189	27646	27669	27692	27715	27738	27761	27784	27807	27830	27853	23
3 10	31 40	190	27875	27898	27921	27944	27967	27990	28012	28035	28058	28081	23
3 11	31 50	191	28103	28126	28149	28172	28194	28217	28240	28262	28285	28308	23
3 12	32 00	192	28330	28353	28375	28398	28421	28443	28466	28488	28511	28533	23
3 13	32 10	193	28556	28578	28601	28623	28646	28668	28691	28713	28735	28758	23
3 14	32 20	194	28780	28803	28825	28847	28870	28892	28914	28937	28959	28981	22
3 15	32 30	195	29004	29026	29048	29070	29093	29115	29137	29159	29181	29203	22
3 16	32 40	196	29226	29248	29270	29292	29314	29336	29358	29380	29403	29425	22
3 17	32 50	197	29447	29469	29491	29513	29535	29557	29579	29601	29623	29645	22
3 18	33 00	198	29667	29688	29710	29732	29754	29776	29798	29820	29842	29864	22
3 19	33 10	199	29885	29907	29929	29951	29973	29994	30016	30038	30060	30081	22
3 20	33 20	200	30103	30125	30146	30168	30190	30211	30233	30255	30276	30298	22
3 21	33 30	201	30320	30341	30363	30384	30406	30428	30449	30471	30492	30514	22
3 22	33 40	202	30535	30557	30578	30600	30621	30643	30664	30685	30707	30728	22
3 23	33 50	203	30750	30771	30792	30814	30835	30856	30878	30899	30920	30942	21
3 24	34 00	204	30963	30984	31006	31027	31048	31069	31091	31112	31133	31154	21
3 25	34 10	205	31175	31197	31218	31239	31260	31281	31302	31323	31345	31366	21
3 26	34 20	206	31387	31408	31429	31450	31471	31492	31513	31534	31555	31576	21
3 27	34 30	207	31597	31618	31639	31660	31681	31702	31723	31744	31765	31785	21
3 28	34 40	208	31806	31827	31848	31869	31890	31911	31931	31952	31973	31994	21
3 29	34 50	209	32015	32035	32056	32077	32098	32118	32139	32160	32181	32201	21
3 30	35 00	210	32222	32243	32263	32284	32305	32325	32346	32367	32387	32408	21
3 31	35 10	211	32428	32449	32469	32490	32511	32531	32552	32572	32593	32613	21
3 32	35 20	212	32634	32654	32675	32695	32716	32736	32756	32777	32797	32818	20
3 33	35 30	213	32838	32858	32879	32899	32919	32940	32960	32981	33001	33021	20
3 34	35 40	214	33041	33062	33082	33102	33123	33143	33163	33183	33203	33224	20
3 35	35 50	215	33244	33264	33284	33304	33325	33345	33365	33385	33405	33425	20
3 36	36 00	216	33445	33466	33486	33506	33526	33546	33566	33586	33606	33626	20
3 37	36 10	217	33646	33666	33686	33706	33726	33746	33766	33786	33806	33826	20
3 38	36 20	218	33846	33866	33886	33905	33925	33945	33965	33985	34005	34025	20
3 39	36 30	219	34044	34064	34084	34104	34124	34144	34163	34183	34203	34223	20
Angles		No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Angles 2· ° ′	Angles 3· ° ′	No.	No. 2200——2799 Log. 34242——44700 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
3 40	36 40	220	34242	34262	34282	34301	34321	34341	34361	34380	34400	34420	20
3 41	36 50	221	34439	34459	34479	34498	34518	34537	34557	34577	34596	34616	20
3 42	37 00	222	34635	34655	34674	34694	34714	34733	34753	34772	34792	34811	20
3 43	37 10	223	34831	34850	34869	34889	34908	34928	34947	34967	34986	35005	19
3 44	37 20	224	35025	35044	35064	35083	35102	35122	35141	35160	35180	35199	19
3 45	37 30	225	35218	35238	35257	35276	35295	35315	35334	35353	35372	35392	19
3 46	37 40	226	35411	35430	35449	35469	35488	35507	35526	35545	35564	35583	19
3 47	37 50	227	35603	35622	35641	35660	35679	35698	35717	35736	35755	35774	19
3 48	38 00	228	35794	35813	35832	35851	35870	35889	35908	35927	35946	35965	19
3 49	38 10	229	35984	36003	36022	36040	36059	36078	36097	36116	36135	36154	19
3 50	38 20	230	36173	36192	36211	36229	36248	36267	36286	36305	36324	36342	19
3 51	38 30	231	36361	36380	36399	36418	36436	36455	36474	36493	36511	36530	19
3 52	38 40	232	36549	36568	36586	36605	36624	36642	36661	36680	36698	36717	19
3 53	38 50	233	36736	36754	36773	36792	36810	36829	36847	36866	36884	36903	19
3 54	39 00	234	36922	36940	36959	36977	36996	37014	37033	37051	37070	37088	19
3 55	39 10	235	37107	37125	37144	37162	37181	37199	37218	37236	37254	37273	18
3 56	39 20	236	37291	37310	37328	37346	37365	37383	37402	37420	37438	37457	18
3 57	39 30	237	37475	37493	37512	37530	37548	37566	37585	37603	37621	37639	18
3 58	39 40	238	37658	37676	37694	37712	37731	37749	37767	37785	37803	37822	18
3 59	39 50	239	37840	37858	37876	37894	37912	37931	37949	37967	37985	38003	18
4 00	40 00	240	38021	38039	38057	38075	38093	38112	38130	38148	38166	38184	18
4 01	40 10	241	38202	38220	38238	38256	38274	38292	38310	38328	38346	38364	18
4 02	40 20	242	38382	38400	38417	38435	38453	38471	38489	38507	38525	38543	18
4 03	40 30	243	38561	38579	38596	38614	38632	38650	38668	38686	38703	38721	18
4 04	40 40	244	38739	38757	38775	38792	38810	38828	38846	38863	38881	38899	18
4 05	40 50	245	38917	38934	38952	38970	38988	39005	39023	39041	39058	39076	18
4 06	41 00	246	39094	39111	39129	39146	39164	39182	39199	39217	39235	39252	18
4 07	41 10	247	39270	39287	39305	39322	39340	39358	39375	39393	39410	39428	18
4 08	41 20	248	39445	39463	39480	39498	39515	39533	39550	39568	39585	39603	18
4 09	41 30	249	39620	39637	39655	39672	39690	39707	39725	39742	39759	39777	17
4 10	41 40	250	39794	39811	39829	39846	39863	39881	39898	39915	39933	39950	17
4 11	41 50	251	39967	39985	40002	40019	40037	40054	40071	40088	40106	40123	17
4 12	42 00	252	40140	40157	40175	40192	40209	40226	40243	40261	40278	40295	17
4 13	42 10	253	40312	40329	40346	40364	40381	40398	40415	40432	40449	40466	17
4 14	42 20	254	40483	40501	40518	40535	40552	40569	40586	40603	40620	40637	17
4 15	42 30	255	40654	40671	40688	40705	40722	40739	40756	40773	40790	40807	17
4 16	42 40	256	40824	40841	40858	40875	40892	40909	40926	40943	40960	40976	17
4 17	42 50	257	40993	41010	41027	41044	41061	41078	41095	41111	41128	41145	17
4 18	43 00	258	41162	41179	41196	41212	41229	41246	41263	41280	41296	41313	17
4 19	43 10	259	41330	41347	41364	41380	41397	41414	41431	41447	41464	41481	17
4 20	43 20	260	41497	41514	41531	41547	41564	41581	41597	41614	41631	41647	17
4 21	43 30	261	41664	41681	41697	41714	41731	41747	41764	41780	41797	41814	17
4 22	43 40	262	41830	41847	41863	41880	41896	41913	41930	41946	41963	41979	17
4 23	43 50	263	41996	42012	42029	42045	42062	42078	42095	42111	42128	42144	17
4 24	44 00	264	42160	42177	42193	42210	42226	42243	42259	42275	42292	42308	16
4 25	44 10	265	42325	42341	42357	42374	42390	42406	42423	42439	42456	42472	16
4 26	44 20	266	42488	42505	42521	42537	42553	42570	42586	42602	42619	42635	16
4 27	44 30	267	42651	42667	42684	42700	42716	42732	42749	42765	42781	42797	16
4 28	44 40	268	42814	42830	42846	42862	42878	42894	42911	42927	42943	42959	16
4 29	44 50	269	42975	42991	43008	43024	43040	43056	43072	43088	43104	43120	16
4 30	45 00	270	43136	43153	43169	43185	43201	43217	43233	43249	43265	43281	16
4 31	45 10	271	43297	43313	43329	43345	43361	43377	43393	43409	43425	43441	16
4 32	45 20	272	43457	43473	43489	43505	43521	43537	43553	43569	43584	43600	16
4 33	45 30	273	43616	43632	43648	43664	43680	43696	43712	43728	43743	43759	16
4 34	45 40	274	43775	43791	43807	43823	43838	43854	43870	43886	43902	43918	16
4 35	45 50	275	43933	43949	43965	43981	43996	44012	44028	44044	44059	44075	16
4 36	46 00	276	44091	44107	44122	44138	44154	44170	44185	44201	44217	44232	16
4 37	46 10	277	44248	44264	44279	44295	44311	44326	44342	44358	44373	44389	16
4 38	46 20	278	44405	44420	44436	44451	44467	44483	44498	44514	44529	44545	16
4 39	46 30	279	44560	44576	44592	44607	44623	44638	44654	44669	44685	44700	16
Angles		No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

Γράφομεν λοιπόν:

$$\begin{array}{ccccc} 38075 & \longleftarrow & 38075 & \longrightarrow & 2403 \\ & & 38083 & \longrightarrow & \\ \underline{38093} & \longleftarrow & 38093 & \longrightarrow & \underline{2404} \\ 18 & & \text{Διαφορὰ} & & 1 \end{array}$$

Κατόπιν εὑρίσκομεν τοὺς ἀντιστοιχοῦντας ἀριθμοὺς εἰς τὸν 1ον καὶ 3ον καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὅταν ὁ λογάριθμος αὐξάνῃ κατὰ 18 μονάδας τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνει κατὰ 1 μονάδα. Ὅταν ὁ λογάριθμος αὐξάνῃ κατὰ 8 μονάδας τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως, πόσον αὐξάνει ὁ ἀριθμός;

$$\begin{array}{cc} 18 & 1 \\ 8 & x \\ \hline \end{array}$$

$$x = 1 \times \frac{8}{18} = 0,44$$

Τὸ εὑρεθὲν ποσόν, δηλαδὴ τὸ 0,44, *παρατίθεται* εἰς τὸν μικρότερον ἀριθμόν, δηλαδὴ εἰς τὸν 2403 καὶ γίνεται 240344, κατόπιν δὲ χωρίζομεν τὰ τέσσαρα ἀκέραια ψηφία καὶ ὁ ἀριθμὸς x εἶναι ὁ 2403,44.

Ἐπειδὴ ὁ ἀνωτέρω τρόπος εἶναι ἐπίπονος, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν ὑπαρχόντων εἰς τοὺς Πίνακας λογαρίθμων καὶ τὴν θέτομεν ὡς παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος. Ὡς ἀριθμητὴν θέτομεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ μικροτέρου ὑπάρχοντος εἰς τοὺς Πίνακας καὶ τοῦ ἰδικοῦ μας λογαρίθμου, κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τὸ *παραθέτομεν* ὡς ἀνωτέρω.

Ἡ εὕρεσις περισσοτέρων δεκαδικῶν ψηφίων κατὰ τὴν διαίρεσιν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, δηλαδὴ ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ συσταθῇ ὁ ἀριθμὸς (π.χ. 8 ἢ 10 ψηφία).

3·11 Ἑρμηνεία πινάκων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Ναυτικοὶ Πίνακες Norie's.

α) Πίνακες φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Οἱ φυσικοὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων ἢ γωνιῶν εἰς τοὺς Ναυτικοὺς Πίνακας Norie's (ἔκδ. 1965) εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν σελίδων 380—394 καὶ περιέχουν τόξα ἀπὸ 0° ἕως 90°.

Εἰς τὴν ἀριστερὰν στήλην ὑπάρχουν αἱ μοῖραι καὶ εἰς τὰς παραπλεύρως εὑρισκομένας στήλας ὑπάρχουν κατὰ σειρὰν τά: ἡμίτονον, συντέμνουσα, ἐφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα, συνημίτονον, ἀκτίνια (Radians). Π.χ. εἰς τὸν Πίνακα 8 ἔχομεν τοὺς φυσικοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 24° ἕως 30° καὶ ἀνὰ ἕνα δέκατον τῆς μοίρας.

Παράδειγμα.

Ζητεῖται τὸ $\eta\mu\, 24{,}2 = 0{,}4099$ ἢ
$\tau\epsilon\mu\, 29{,}7 = 1{,}1512$ κλπ.

Ἡ παρεμβολὴ δὲν ἀναφέρεται, διότι σπανίως οἱ Πίνακες χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τοῦ ναυτιλλομένου.

β) Πίνακες λογαρίθμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Εἰς τοὺς Πίνακας Norie's οἱ λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκονται εἰς τὰς σελίδας 178—299 καὶ ἀπὸ 0° ἕως 180°, ἐν συνεχείᾳ δὲ καὶ ἕως 360°. Εἰς τὴν ἀριστερὰν στήλην ὑπάρχουν αἱ μοῖραι, τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ τὰ δέκατα αὐτῶν ἀνὰ 2 δέκατα τοῦ πρώτου λεπτοῦ μέχρι καὶ τῶν 3° καὶ 60′. Πέραν τῶν 4° ἔχομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς μοίρας καὶ πρῶτα λεπτὰ ἀνὰ ἕνα πρῶτον λεπτόν,

π.χ. $\lambda o\gamma\eta\mu\,(12^\circ 5') = 9{,}32084$ ἢ
$\lambda o\gamma\epsilon\varphi\,(14^\circ 28') = 9{,}41162$ κλπ.

24° ΤΟ 30°	ΦΥΣΙΚΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ						
°	Sine	Cosec.	Tan.	Cotan.	Secant	Cosine	Radians
24·0	0·4067	2·4586	0·4452	2·2460	1·0946	0·9135	0·4189
·1	0·4083	2·4490	0·4473	2·2355	1·0955	0·9128	0·4206
·2	0·4099	2·4395	0·4494	2·2251	1·0963	0·9121	0·4224
·3	0·4115	2·4301	0·4515	2·2148	1·0972	0·9114	0·4241
·4	0·4131	2·4207	0·4536	2·2045	1·0981	0·9107	0·4259
24·5	0·4147	2·4114	0·4557	2·1943	1·0989	0·9100	0·4276
·6	0·4163	2·4022	0·4578	2·1842	1·0998	0·9092	0·4293
·7	0·4179	2·3931	0·4599	2·1742	1·1007	0·9085	0·4311
·8	0·4195	2·3841	0·4621	2·1642	1·1016	0·9078	0·4328
·9	0·4210	2·3751	0·4642	2·1543	1·1025	0·9070	0·4346
25·0	0·4226	2·3662	0·4663	2·1445	1·1034	0·9063	0·4363
·1	0·4242	2·3574	0·4684	2·1348	1·1043	0·9056	0·4381
·2	0·4258	2·3486	0·4706	2·1251	1·1052	0·9048	0·4398
·3	0·4274	2·3400	0·4727	2·1155	1·1061	0·9041	0·4416
·4	0·4289	2·3314	0·4748	2·1060	1·1070	0·9033	0·4433
25·5	0·4305	2·3228	0·4770	2·0965	1·1079	0·9026	0·4451
·6	0·4321	2·3144	0·4791	2·0872	1·1089	0·9018	0·4468
·7	0·4337	2·3060	0·4813	2·0778	1·1098	0·9011	0·4485
·8	0·4352	2·2976	0·4834	2·0686	1·1107	0·9003	0·4503
·9	0·4368	2·2894	0·4856	2·0594	1·1117	0·8996	0·4520
26·0	0·4384	2·2812	0·4877	2·0503	1·1126	0·8988	0·4538
·1	0·4399	2·2730	0·4899	2·0413	1·1136	0·8980	0·4555
·2	0·4415	2·2650	0·4921	2·0323	1·1145	0·8973	0·4573
·3	0·4431	2·2570	0·4942	2·0233	1·1155	0·8965	0·4590
·4	0·4446	2·2490	0·4964	2·0145	1·1164	0·8957	0·4608
26·5	0·4462	2·2412	0·4986	2·0057	1·1174	0·8949	0·4625
·6	0·4478	2·2333	0·5008	1·9970	1·1184	0·8942	0·4643
·7	0·4493	2·2256	0·5029	1·9883	1·1194	0·8934	0·4660
·8	0·4509	2·2179	0·5051	1·9797	1·1203	0·8926	0·4677
·9	0·4524	2·2103	0·5073	1·9711	1·1213	0·8918	0·4695
27·0	0·4540	2·2027	0·5095	1·9626	1·1223	0·8910	0·4712
·1	0·4555	2·1952	0·5117	1·9542	1·1233	0·8902	0·4730
·2	0·4571	2·1877	0·5139	1·9458	1·1243	0·8894	0·4747
·3	0·4587	2·1803	0·5161	1·9375	1·1253	0·8886	0·4765
·4	0·4602	2·1730	0·5184	1·9292	1·1264	0·8878	0·4782
27·5	0·4617	2·1657	0·5206	1·9210	1·1274	0·8870	0·4800
·6	0·4633	2·1584	0·5228	1·9128	1·1284	0·8862	0·4817
·7	0·4648	2·1513	0·5250	1·9047	1·1294	0·8854	0·4835
·8	0·4664	2·1441	0·5272	1·8967	1·1305	0·8846	0·4852
·9	0·4679	2·1371	0·5295	1·8887	1·1315	0·8838	0·4869
28·0	0·4695	2·1301	0·5317	1·8807	1·1326	0·8829	0·4887
·1	0·4710	2·1231	0·5340	1·8728	1·1336	0·8821	0·4904
·2	0·4726	2·1162	0·5362	1·8650	1·1347	0·8813	0·4922
·3	0·4741	2·1093	0·5384	1·8572	1·1357	0·8805	0·4939
·4	0·4756	2·1025	0·5407	1·8495	1·1368	0·8796	0·4957
28·5	0·4772	2·0957	0·5430	1·8418	1·1379	0·8788	0·4974
·6	0·4787	2·0890	0·5452	1·8341	1·1390	0·8780	0·4992
·7	0·4802	2·0824	0·5475	1·8265	1·1401	0·8771	0·5009
·8	0·4818	2·0757	0·5498	1·8190	1·1412	0·8763	0·5026
·9	0·4833	2·0692	0·5520	1·8115	1·1423	0·8755	0·5044
29·0	0·4848	2·0627	0·5543	1·8040	1·1434	0·8746	0·5061
·1	0·4863	2·0562	0·5566	1·7966	1·1445	0·8738	0·5079
·2	0·4879	2·0498	0·5589	1·7893	1·1456	0·8729	0·5096
·3	0·4894	2·0434	0·5612	1·7820	1·1467	0·8721	0·5114
·4	0·4909	2·0371	0·5635	1·7747	1·1478	0·8712	0·5131
29·5	0·4924	2·0308	0·5658	1·7675	1·1490	0·8704	0·5149
·6	0·4939	2·0245	0·5681	1·7603	1·1501	0·8695	0·5166
·7	0·4955	2·0183	0·5704	1·7532	1·1512	0·8686	0·5184
·8	0·4970	2·0122	0·5727	1·7461	1·1524	0·8678	0·5201
·9	0·4985	2·0061	0·5750	1·7391	1·1535	0·8669	0·5219
30·0	0·5000	2·0000	0·5774	1·7321	1·1547	0·8660	0·5236

Παράδειγμα 1.

Ζητοῦμεν τὸ λογημ(14° $1',2$).

Εἰς τὸν Πίνακα 9 ὑπάρχει τὸ ἡμίτονον τῶν 14° $1'$.

Διὰ τὰ 2 δέκατα τοῦ πρώτου λεπτοῦ εἰς τὴν στήλην τὴν εὑρισκομένην μεταξὺ ἡμιτόνου καὶ συντεμνούσης (Parts) εὑρίσκομεν ὅτι δι' αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ $0,1'$ ἔχομεν αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 5 μονάδας τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως. Ἄρα εἰς τὸ 9,38418, ποὺ εἶναι τὸ ἡμίτονον τῶν 14° $1'$, προσθέτομεν καὶ τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν 5 καὶ ἔχομεν:

$$\text{ημ}(14^\circ\ 1',2) = 9,38428.$$

Παράδειγμα 2.

Ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου τῶν 24° $22,6'$.

Εἰς τὸν Πίνακα 10 εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου τῶν 24° $22'$, εἶναι 9,95948. Κατόπιν ἀπὸ τὴν στήλην Parts, τὴν μεταξὺ συνημιτόνου καὶ τεμνούσης, εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰ $0,6'$ ἀντιστοιχεῖ διαφορὰ 3 μονάδων τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως, ἡ ὁποία ὅμως εἶναι *ἀφαιρετική*, ἄρα ἔχομεν:

$$\text{λογσυν}(24^\circ\ 22,6') = 9,95945.$$

Γενικὴ παρατήρησις:

Ἡ ἑκάστοτε εὑρισκομένη διαφορὰ τῶν δεκάτων τοῦ πρώτου λεπτοῦ θὰ εἶναι ***προσθετικὴ*** μὲν διὰ τὸ ἡμίτονον, ἐφαπτομένην καὶ τέμνουσαν, ***ἀφαιρετικὴ*** δὲ διὰ τὸ συνημίτονον, συνεφαπτομένην καὶ συντέμνουσαν. Καὶ τοῦτο διότι, ὅταν αὐξάνῃ τὸ τόξον, αὐξάνει καὶ τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα, ἐνῶ ἡ συνεφαπτομένη, ἡ συντέμνουσα καὶ τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦνται.

(Ἴδε προσεκτικὰ τοὺς Πίνακας ἀπὸ 0° - 90°). Πέραν τῶν 90°, δηλαδὴ ἀπὸ 90° ἕως 180°, ἰσχύουν τὰ ἀντίστροφα. Πέραν τῶν 180° προσέχομεν τὴν πορείαν τῶν Πινάκων καὶ ἀναλόγως ἐργαζόμεθα.

14° 194°

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

	Sine	Parts	Cosec.	Tan.	Parts	Cotan.	Secant	Parts	Cosine	
00·0	9·38368		10·61632	9·39677		10·60323	10·01310		9·98690	60′
01·0	9·38418		10·61582	9·39731		10·60269	10·01313		9·98687	
02·0	9·38469	·1 5	10·61531	9·39785	·1 5	10·60215	10·01316	·1 0	9·98684	
03·0	9·38519	·2 10	10·61481	9·39838	·2 11	10·60162	10·01319	·2 1	9·98681	
04·0	9·38570	·3 15	10·61430	9·39892	·3 16	10·60108	10·01322	·3 1	9·98678	
05·0	9·38620		10·61380	9·39946		10·60055	10·01325		9·98675	55′
06·0	9·38670	·4 20	10·61330	9·39999	·4 21	10·60001	10·01329	·4 1	9·98671	
07·0	9·38721	·5 25	10·61279	9·40052	·5 27	10·59948	10·01332	·5 2	9·98668	
08·0	9·38771	·6 30	10·61229	9·40106	·6 32	10·59894	10·01335	·6 2	9·98665	
09·0	9·38821		10·61179	9·40159		10·59841	10·01338		9·98662	
10·0	9·38871	·7 35	10·61129	9·40212	·7 37	10·59788	10·01341	·7 2	9·98659	50′
11·0	9·38921	·8 40	10·61079	9·40266	·8 43	10·59734	10·01345	·8 3	9·98656	
12·0	9·38971	·9 45	10·61029	9·40319	·9 48	10·59681	10·01348	·9 3	9·98652	
13·0	9·39021		10·60979	9·40372		10·59628	10·01351		9·98649	
14·0	9·39071		10·60929	9·40425		10·59575	10·01354		9·98646	
15·0	9·39121		10·60879	9·40478		10·59522	10·01358		9·98643	45′
16·0	9·39170		10·60830	9·40531		10·59469	10·01361		9·98640	
17·0	9·39220	·1 5	10·60780	9·40584	·1 5	10·59416	10·01364	·1 0	9·98636	
18·0	9·39270	·2 10	10·60731	9·40636	·2 11	10·59364	10·01367	·2 1	9·98633	
19·0	9·39319	·3 15	10·60681	9·40689	·3 16	10·59311	10·01370	·3 1	9·98630	
20·0	9·39369		10·60632	9·40742		10·59258	10·01373		9·98627	40′
21·0	9·39418	·4 20	10·60582	9·40795	·4 21	10·59206	10·01377	·4 1	9·98623	
22·0	9·39467	·5 25	10·60533	9·40847	·5 26	10·59153	10·01380	·5 2	9·98620	
23·0	9·39517	·6 30	10·60483	9·40900	·6 32	10·59100	10·01383	·6 2	9·98617	
24·0	9·39566		10·60434	9·40952		10·59048	10·01386		9·98614	
25·0	9·39615	·7 34	10·60385	9·41005	·7 37	10·58996	10·01390	·7 2	9·98610	35′
26·0	9·39664	·8 39	10·60336	9·41057	·8 42	10·58943	10·01393	·8 3	9·98607	
27·0	9·39713	·9 44	10·60287	9·41109	·9 47	10·58891	10·01396	·9 3	9·98604	
28·0	9·39762		10·60238	9·41162		10·58839	10·01399		9·98601	
29·0	9·39811		10·60189	9·41214		10·58786	10·01403		9·98597	
30·0	9·39860		10·60140	9·41266		10·58734	10·01406		9·98594	30′
31·0	9·39909		10·60091	9·41318		10·58682	10·01409		9·98591	
32·0	9·39958	·1 5	10·60043	9·41370	·1 5	10·58630	10·01412	·1 0	9·98588	
33·0	9·40006	·2 10	10·59994	9·41422	·2 10	10·58578	10·01416	·2 1	9·98584	
34·0	9·40055	·3 15	10·59945	9·41474	·3 16	10·58526	10·01419	·3 1	9·98581	
35·0	9·40104		10·59897	9·41526		10·58474	10·01422		9·98578	25′
36·0	9·40152	·4 19	10·59848	9·41578	·4 21	10·58423	10·01426	·4 1	9·98575	
37·0	9·40201	·5 24	10·59800	9·41629	·5 26	10·58371	10·01429	·5 2	9·98571	
38·0	9·40249	·6 29	10·59751	9·41681	·6 31	10·58319	10·01432	·6 2	9·98568	
39·0	9·40297		10·59703	9·41733		10·58267	10·01435		9·98565	
40·0	9·40346	·7 34	10·59655	9·41784	·7 36	10·58216	10·01439	·7 2	9·98561	20′
41·0	9·40394	·8 39	10·59606	9·41836	·8 41	10·58164	10·01442	·8 3	9·98558	
42·0	9·40442	·9 44	10·59558	9·41887	·9 47	10·58113	10·01445	·9 3	9·98555	
43·0	9·40490		10·59510	9·41939		10·58061	10·01449		9·98551	
44·0	9·40538		10·59462	9·41990		10·58010	10·01452		9·98548	
45·0	9·40586		10·59414	9·42042		10·57959	10·01455		9·98545	15′
46·0	9·40634		10·59366	9·42093		10·57907	10·01459		9·98541	
47·0	9·40682	·1 5	10·59318	9·42144	·1 5	10·57856	10·01462	·1 0	9·98538	
48·0	9·40730	·2 10	10·59270	9·42195	·2 10	10·57805	10·01465	·2 1	9·98535	
49·0	9·40778	·3 14	10·59222	9·42246	·3 15	10·57754	10·01469	·3 1	9·98531	
50·0	9·40825		10·59175	9·42297		10·57703	10·01472		9·98528	10′
51·0	9·40873	·4 19	10·59127	9·42348	·4 20	10·57652	10·01475	·4 1	9·98525	
52·0	9·40921	·5 24	10·59079	9·42399	·5 25	10·57601	10·01479	·5 2	9·98521	
53·0	9·40968	·6 29	10·59032	9·42450	·6 31	10·57550	10·01482	·6 2	9·98518	
54·0	9·41016		10·58984	9·42501		10·57499	10·01485		9·98515	
55·0	9·41063	·7 33	10·58937	9·42552	·7 36	10·57448	10·01489	·7 2	9·98511	5′
56·0	9·41111	·8 38	10·58889	9·42603	·8 41	10·57397	10·01492	·8 3	9·98508	
57·0	9·41158	·9 43	10·58842	9·42653	·9 46	10·57347	10·01496	·9 3	9·98505	
58·0	9·41205		10·58795	9·42704		10·57296	10·01499		9·98501	
59·0	9·41252		10·58748	9·42755		10·57245	10·01502		9·98498	
60·0	9·41300		10·58700	9·42805		10·57195	10·01506		9·98494	0′

165°
345°

24° 204°

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

	Sine	Parts	Cosec.	Tan.	Parts	Cotan.	Secant	Parts	Cosine	
00·0	9·60931	′	10·39069	9·64858	′	10·35142	10·03927	′	9·96073	60′
01·0	9·60960		10·39040	9·64892		10·35108	10·03933		9·96067	
02·0	9·60988	·1 3	10·39012	9·64926	·1 3	10·35074	10·03938	·1 1	9·96062	
03·0	9·61016		10·38984	9·64960		10·35040	10·03944		9·96056	
04·0	9·61045		10·38955	9·64994		10·35006	10·03950		9·96051	
05·0	9·61073	·2 6	10·38927	9·65028	·2 7	10·34972	10·03955	·2 1	9·96045	55′
06·0	9·61101		10·38899	9·65062		10·34938	10·03961		9·96039	
07·0	9·61129		10·38871	9·65096		10·34904	10·03967		9·96034	
08·0	9·61158	·3 8	10·38842	9·65130	·3 10	10·34870	10·03972	·3 2	9·96028	
09·0	9·61186		10·38814	9·65164		10·34836	10·03978		9·96022	
10·0	9·61214		10·38786	9·65197		10·34803	10·03984		9·96017	50′
11·0	9·61242	·4 11	10·38758	9·65231	·4 13	10·34769	10·03989	·4 2	9·96011	
12·0	9·61270		10·38730	9·65265		10·34735	10·03995		9·96005	
13·0	9·61298		10·38702	9·65299		10·34701	10·04001		9·96000	
14·0	9·61326		10·38674	9·65333		10·34667	10·04006		9·95994	
15·0	9·61355	·5 14	10·38646	9·65366	·5 17	10·34634	10·04012	·5 3	9·95988	45′
16·0	9·61383		10·38618	9·65400		10·34600	10·04018		9·95983	
17·0	9·61411		10·38590	9·65434		10·34566	10·04023		9·95977	
18·0	9·61439	·6 17	10·38562	9·65467	·6 20	10·34533	10·04029	·6 3	9·95971	
19·0	9·61467		10·38534	9·65501		10·34499	10·04035		9·95965	
20·0	9·61494		10·38506	9·65535		10·34465	10·04040		9·95960	40′
21·0	9·61522	·7 20	10·38478	9·65568	·7 24	10·34432	10·04046	·7 4	9·95954	
22·0	9·61550		10·38450	9·65602		10·34398	10·04052		9·95948	
23·0	9·61578		10·38422	9·65636		10·34364	10·04058		9·95943	
24·0	9·61606	·8 22	10·38394	9·65669	·8 27	10·34331	10·04063	·8 5	9·95937	
25·0	9·61634		10·38366	9·65703		10·34297	10·04069		9·95931	35′
26·0	9·61662		10·38338	9·65736		10·34264	10·04075		9·95925	
27·0	9·61689	·9 25	10·38311	9·65770	·9 30	10·34230	10·04081	·9 5	9·95920	
28·0	9·61717		10·38283	9·65803		10·34197	10·04086		9·95914	
29·0	9·61745		10·38255	9·65837		10·34163	10·04092		9·95908	
30·0	9·61773		10·38227	9·65870		10·34130	10·04098		9·95902	30′
31·0	9·61800		10·38200	9·65904		10·34096	10·04104		9·95897	
32·0	9·61828	·1 3	10·38172	9·65937	·1 3	10·34063	10·04109	·1 1	9·95891	
33·0	9·61856		10·38144	9·65971		10·34029	10·04115		9·95885	
34·0	9·61883		10·38117	9·66004		10·33996	10·04121		9·95879	
35·0	9·61911	·2 5	10·38089	9·66038	·2 7	10·33962	10·04127	·2 1	9·95873	25′
36·0	9·61939		10·38061	9·66071		10·33929	10·04132		9·95868	
37·0	9·61966		10·38034	9·66104		10·33896	10·04138		9·95862	
38·0	9·61994	·3 8	10·38006	9·66138	·3 10	10·33862	10·04144	·3 2	9·95856	
39·0	9·62021		10·37979	9·66171		10·33829	10·04150		9·95850	
40·0	9·62049		10·37951	9·66204		10·33796	10·04156		9·95845	20′
41·0	9·62076	·4 11	10·37924	9·66238	·4 13	10·33762	10·04161	·4 2	9·95839	
42·0	9·62104		10·37896	9·66271		10·33729	10·04167		9·95833	
43·0	9·62131		10·37869	9·66304		10·33696	10·04173		9·95827	
44·0	9·62159		10·37841	9·66338		10·33663	10·04179		9·95821	
45·0	9·62186	·5 14	10·37814	9·66371	·5 17	10·33629	10·04185	·5 3	9·95815	15′
46·0	9·62214		10·37787	9·66404		10·33596	10·04190		9·95810	
47·0	9·62241		10·37759	9·66437		10·33563	10·04196		9·95804	
48·0	9·62268	·6 16	10·37732	9·66470	·6 20	10·33530	10·04202	·6 3	9·95798	
49·0	9·62296		10·37704	9·66504		10·33497	10·04208		9·95792	
50·0	9·62323		10·37677	9·66537		10·33463	10·04214		9·95786	10′
51·0	9·62350	·7 19	10·37650	9·66570	·7 23	10·33430	10·04220	·7 4	9·95780	
52·0	9·62377		10·37623	9·66603		10·33397	10·04225		9·95775	
53·0	9·62405		10·37595	9·66636		10·33364	10·04231		9·95769	
54·0	9·62432	·8 22	10·37568	9·66669	·8 27	10·33331	10·04237	·8 5	9·95763	
55·0	9·62459		10·37541	9·66702		10·33298	10·04243		9·95757	5′
56·0	9·62486		10·37514	9·66735		10·33265	10·04249		9·95751	
57·0	9·62514	·9 25	10·37487	9·66768	·9 30	10·33232	10·04255	·9 5	9·95745	
58·0	9·62541		10·37459	9·66801		10·33199	10·04261		9·95739	
59·0	9·62568		10·37432	9·66834		10·33166	10·04267		9·95734	
60·0	9·62595		10·37405	9·66867		10·33133	10·04272		9·95728	0′

155°
335°

Εἶναι ἐπίσης γνωστὸν ὅτι ὁ λογ 0,05632 θὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν $\overline{2}$,................ ἢ τοῦ 0,88437 τὸ χαρακτηριστικὸν θὰ εἶναι $\overline{1}$,.................. Εἰς τοὺς ναυτικοὺς Πίνακας τὸ χαρακτηριστικὸν 0 ἔχει ἀντικατασταθῆ διὰ τοῦ 10. Τὸ $\overline{2}$,................ τὸ εὑρίσκομεν ὡς 8,................ καὶ τὸ $\overline{1}$,................ ὡς 9,.................. .

Ἡ νέα αὐτὴ γραφὴ διευκολύνει τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ ναυτιλλομένου κατὰ πολύ, διότι ἀποφεύγονται οὕτως αἱ πράξεις μὲ τοὺς ἡμιαρνητικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι δυνατὸν νὰ ἐπιφέρουν σφάλματα. Ἐννοεῖται ὅτι ἡ προσθήκη τοῦ 10 πρέπει μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὅλων τῶν πράξεων νὰ ἀφαιρῆται, διότι τὸ μεγάλο χαρακτηριστικὸν μᾶς ὁδηγεῖ εἰς παρεξηγήσεις.

γ) *Ἀντίστροφον πρόβλημα.*

1) Δίδεται ὁ λογ ημx = 9,74943 καὶ ζητεῖται τὸ τόξον x.

Ἀπὸ τὸν Πίνακα 11 εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμιτόνων παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον αὐτὸν ἀντιστοιχεῖ τόξον 34° 10′, ἤτοι $x = 34°10'$.

2) Δίδεται ὁ λογ ημx = 9,84442 καὶ ζητεῖται τὸ τόξον x.

Εἰς τὸν Πίνακα 12 ὑπάρχει ὁ ἀριθμὸς 9,84437, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον 44° 20′. Μεταξὺ τοῦ ὑπάρχοντος εἰς τοὺς Πίνακας λογαρίθμου καὶ τοῦ δοθέντος ὑπάρχει διαφορὰ 5 μονάδων.

Ἀπὸ τὴν παραπλεύρως στήλην Parts καὶ εἰς τὸ δεξιὸν αὐτῆς διαβάζομεν ὅτι εἰς τὸ 5 ἀντιστοιχοῦν 0,4′. Ἄρα τὸ ζητούμενον τόξον εἶναι :

$$x = 44° \; 22{,}4'.$$

3) Δίδεται ὁ λογ συνx = 9,63673 καὶ ζητεῖται τὸ τόξον x.

Ἀπὸ τὸν Πίνακα 13 βλέπομεν ὅτι ὑπάρχει ὁ 9,63689 καὶ εἰς αὐτὸν ἀντιστοιχεῖ τόξον 64° 19′. Μεταξὺ τοῦ ὑπάρχοντος εἰς τοὺς Πίνακας καὶ τοῦ δεδομένου ὑπάρχει διαφορὰ 16 μονάδων. Ἀπὸ τὴν ἀριστερὰν στήλην τῶν Parts καὶ εἰς τὸ δεξιὸν μέρος

34° 214°

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

′	Sine	Parts	Cosec.	Tan.	Parts	Cotan.	Secant	Parts	Cosine	
00·0	9·74756		10·25244	9·82899		10·17101	10·08143		9·91857	60′
01·0	9·74775		10·25225	9·82926		10·17074	10·08151		9·91849	
02·0	9·74794	·1 2	10·25206	9·82953	·1 3	10·17047	10·08160	·1 1	9·91840	
03·0	9·74812		10·25188	9·82981		10·17020	10·08168		9·91832	
04·0	9·74831		10·25169	9·83008		10·16992	10·08177		9·91823	
05·0	9·74850	·2 4	10·25150	9·83035	·2 5	10·16965	10·08185	·2 2	9·91815	55′
06·0	9·74868		10·25132	9·83062		10·16938	10·08194		9·91806	
07·0	9·74887		10·25113	9·83089		10·16911	10·08202		9·91798	
08·0	9·74906	·3 6	10·25094	9·83117	·3 8	10·16884	10·08211	·3 3	9·91789	
09·0	9·74924		10·25076	9·83144		10·16856	10·08220		9·91781	
10·0	9·74943		10·25057	9·83171		10·16829	10·08228		9·91772	50′
11·0	9·74962	·4 7	10·25039	9·83198	·4 11	10·16802	10·08237	·4 3	9·91763	
12·0	9·74980		10·25020	9·83225		10·16775	10·08245		9·91755	
13·0	9·74999		10·25001	9·83253		10·16748	10·08254		9·91746	
14·0	9·75017	·5 9	10·24983	9·83280	·5 14	10·16720	10·08262	·5 4	9·91738	
15·0	9·75036		10·24964	9·83307		10·16693	10·08271		9·91729	45′
16·0	9·75054		10·24946	9·83334		10·16666	10·08280		9·91720	
17·0	9·75073		10·24927	9·83361		10·16639	10·08288		9·91712	
18·0	9·75091	·6 11	10·24909	9·83388	·6 16	10·16612	10·08297	·6 5	9·91703	
19·0	9·75110		10·24890	9·83415		10·16585	10·08305		9·91695	
20·0	9·75128		10·24872	9·83443		10·16558	10·08314		9·91686	40′
21·0	9·75147	·7 13	10·24853	9·83470	·7 19	10·16530	10·08323	·7 6	9·91677	
22·0	9·75165		10·24835	9·83497		10·16503	10·08331		9·91669	
23·0	9·75184		10·24816	9·83524		10·16476	10·08340		9·91660	
24·0	9·75202	·8 15	10·24798	9·83551	·8 22	10·16449	10·08349	·8 7	9·91651	
25·0	9·75221		10·24779	9·83578		10·16422	10·08357		9·91643	35′
26·0	9·75239		10·24761	9·83605		10·16395	10·08366		9·91634	
27·0	9·75258	·9 17	10·24742	9·83632	·9 24	10·16368	10·08375	·9 8	9·91625	
28·0	9·75276		10·24724	9·83659		10·16341	10·08383		9·91617	
29·0	9·75294		10·24706	9·83686		10·16314	10·08392		9·91608	
30·0	9·75313		10·24687	9·83713		10·16287	10·08401		9·91599	30′
31·0	9·75331		10·24669	9·83741		10·16260	10·08409		9·91591	
32·0	9·75350	·1 2	10·24651	9·83768	·1 3	10·16233	10·08418	·1 1	9·91582	
33·0	9·75368		10·24632	9·83795		10·16205	10·08427		9·91573	
34·0	9·75386		10·24614	9·83822		10·16178	10·08435		9·91565	
35·0	9·75405	·2 4	10·24595	9·83849	·2 5	10·16151	10·08444	·2 2	9·91556	25′
36·0	9·75423		10·24577	9·83876		10·16124	10·08453		9·91547	
37·0	9·75441		10·24559	9·83903		10·16097	10·08462		9·91539	
38·0	9·75460	·3 5	10·24541	9·83930	·3 8	10·16070	10·08470	·3 3	9·91530	
39·0	9·75478		10·24522	9·83957		10·16043	10·08479		9·91521	
40·0	9·75496		10·24504	9·83984		10·16016	10·08488		9·91512	20′
41·0	9·75514	·4 7	10·24486	9·84011	·4 11	10·15989	10·08497	·4 3	9·91504	
42·0	9·75533		10·24467	9·84038		10·15962	10·08505		9·91495	
43·0	9·75551		10·24449	9·84065		10·15935	10·08514		9·91486	
44·0	9·75569	·5 9	10·24431	9·84092	·5 14	10·15908	10·08523	·5 4	9·91477	
45·0	9·75587		10·24413	9·84119		10·15881	10·08532		9·91469	15′
46·0	9·75605		10·24395	9·84146		10·15854	10·08540		9·91460	
47·0	9·75624		10·24376	9·84173		10·15827	10·08549		9·91451	
48·0	9·75642	·6 11	10·24358	9·84200	·6 16	10·15800	10·08558	·6 5	9·91442	
49·0	9·75660		10·24340	9·84227		10·15773	10·08567		9·91433	
50·0	9·75678		10·24322	9·84254		10·15747	10·08575		9·91425	10′
51·0	9·75696	·7 13	10·24304	9·84281	·7 19	10·15720	10·08584	·7 6	9·91416	
52·0	9·75714		10·24286	9·84307		10·15693	10·08593		9·91407	
53·0	9·75733		10·24267	9·84334		10·15666	10·08602		9·91398	
54·0	9·75751	·8 15	10·24249	9·84361	·8 22	10·15639	10·08611	·8 7	9·91389	
55·0	9·75769		10·24231	9·84388		10·15612	10·08619		9·91381	5′
56·0	9·75787		10·24213	9·84415		10·15585	10·08628		9·91372	
57·0	9·75805	·9 16	10·24195	9·84442	·9 24	10·15558	10·08637	·9 8	9·91363	
58·0	9·75823		10·24177	9·84469		10·15531	10·08646		9·91354	
59·0	9·75841		10·24159	9·84496		10·15504	10·08655		9·91345	
60·0	9·75859		10·24141	9·84523		10·15477	10·08664		9·91337	0′

145°
325°

44°
224°

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

′ ·	Sine	Parts		Cosec.	Tan.	Parts		Cotan.	Secant	Parts		Cosine	
00·0	9·84177	′		10·15823	9·98484	′		10·01516	10·14307	′		9·85693	60′
01·0	9·84190			10·15810	9·98509			10·01491	10·14319			9·85681	
02·0	9·84203	·1	1	10·15797	9·98534	·1	3	10·01466	10·14331	·1	1	9·85669	
03·0	9·84216			10·15784	9·98560			10·01440	10·14343			9·85657	
04·0	9·84229			10·15771	9·98585			10·01415	10·14355			9·85645	
05·0	9·84242	·2	3	10·15758	9·98610	·2	5	10·01390	10·14368	·2	2	9·85632	55′
06·0	9·84256			10·15745	9·98635			10·01365	10·14380			9·85620	
07·0	9·84269			10·15732	9·98661			10·01339	10·14392			9·85608	
08·0	9·84282	·3	4	10·15719	9·98686	·3	8	10·01314	10·14404	·3	4	9·85596	
09·0	9·84295			10·15705	9·98711			10·01289	10·14417			9·85583	
10·0	9·84308			10·15692	9·98737			10·01264	10·14429			9·85571	50′
11·0	9·84321	·4	5	10·15679	9·98762	·4	10	10·01238	10·14441	·4	5	9·85559	
12·0	9·84334			10·15666	9·98787			10·01213	10·14454			9·85547	
13·0	9·84347			10·15653	9·98812			10·01188	10·14466			9·85534	
14·0	9·84360	·5	6	10·15641	9·98838	·5	13	10·01162	10·14478	·5	6	9·85522	
15·0	9·84373			10·15628	9·98863			10·01137	10·14490			9·85510	45′
16·0	9·84386			10·15615	9·98888			10·01112	10·14503			9·85497	
17·0	9·84398			10·15602	9·98913			10·01087	10·14515			9·85485	
18·0	9·84411	·6	8	10·15589	9·98939	·6	15	10·01061	10·14527	·6	7	9·85473	
19·0	9·84424			10·15576	9·98964			10·01036	10·14540			9·85460	
20·0	9·84437			10·15563	9·98989			10·01011	10·14552			9·85448	40′
21·0	9·84450	·7	9	10·15550	9·99015	·7	18	10·00986	10·14564	·7	9	9·85436	
22·0	9·84463			10·15537	9·99040			10·00960	10·14577			9·85423	
23·0	9·84476			10·15524	9·99065			10·00935	10·14589			9·85411	
24·0	9·84489	·8	10	10·15511	9·99090	·8	20	10·00910	10·14601	·8	10	9·85399	
25·0	9·84502			10·15498	9·99116			10·00884	10·14614			9·85386	35′
26·0	9·84515			10·15485	9·99141			10·00859	10·14626			9·85374	
27·0	9·84528	·9	12	10·15472	9·99166	·9	23	10·00834	10·14639	·9	11	9·85361	
28·0	9·84541			10·15460	9·99191			10·00809	10·14651			9·85349	
29·0	9·84553			10·15447	9·99217			10·00783	10·14663			9·85337	
30·0	9·84566			10·15434	9·99242			10·00758	10·14676			9·85324	30′
31·0	9·84579			10·15421	9·99267			10·00733	10·14688			9·85312	
32·0	9·84592	·1	1	10·15408	9·99293	·1	3	10·00708	10·14701	·1	1	9·85299	
33·0	9·84605			10·15395	9·99318			10·00682	10·14713			9·85287	
34·0	9·84618			10·15383	9·99343			10·00657	10·14726			9·85275	
35·0	9·84630	·2	3	10·15370	9·99368	·2	5	10·00632	10·14738	·2	3	9·85262	25′
36·0	9·84643			10·15357	9·99394			10·00606	10·14750			9·85250	
37·0	9·84656			10·15344	9·99419			10·00581	10·14763			9·85237	
38·0	9·84669	·3	4	10·15331	9·99444	·3	8	10·00556	10·14775	·3	4	9·85225	
39·0	9·84682			10·15318	9·99469			10·00531	10·14788			9·85212	
40·0	9·84694			10·15306	9·99495			10·00505	10·14800			9·85200	20′
41·0	9·84707	·4	5	10·15293	9·99520	·4	10	10·00480	10·14813	·4	5	9·85187	
42·0	9·84720			10·15280	9·99545			10·00455	10·14825			9·85175	
43·0	9·84733			10·15267	9·99571			10·00430	10·14838			9·85162	
44·0	9·84745	·5	6	10·15255	9·99596	·5	13	10·00404	10·14850	·5	6	9·85150	
45·0	9·84758			10·15242	9·99621			10·00379	10·14863			9·85137	15′
46·0	9·84771			10·15229	9·99646			10·00354	10·14875			9·85125	
47·0	9·84784			10·15216	9·99672			10·00329	10·14888			9·85112	
48·0	9·84796	·6	8	10·15204	9·99697	·6	15	10·00303	10·14900	·6	8	9·85100	
49·0	9·84809			10·15191	9·99722			10·00278	10·14913			9·85087	
50·0	9·84822			10·15178	9·99747			10·00253	10·14926			9·85075	10′
51·0	9·84835	·7	9	10·15166	9·99773	·7	18	10·00227	10·14938	·7	9	9·85062	
52·0	9·84847			10·15153	9·99798			10·00202	10·14951			9·85049	
53·0	9·84860			10·15140	9·99823			10·00177	10·14963			9·85037	
54·0	9·84873	·8	10	10·15127	9·99848	·8	20	10·00152	10·14976	·8	10	9·85024	
55 0	9 84885			10 15115	9·99874			10·00126	10·14988			9·85012	5′
56·0	9·84898			10·15102	9·99899			10·00101	10·15001			9·84999	
57·0	9·84911	·9	11	10·15089	9·99924	·9	23	10·00076	10·15014	·9	11	9·84986	
58·0	9·84923			10·15077	9·99950			10·00051	10·15026			9·84974	
59·0	9·84936			10·15064	9·99975			10·00025	10·15039			9·84961	
60·0	9·84949			10·15052	10·00000			10·00000	10·15052			9·84949	0′

135°
315°

64° 244° ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

'	Sine	Parts	Cosec.	Tan.	Parts	Cotan.	Secant	Parts	Cosine	
		'			'			'		
00·0	9·95366		10·04634	10·31182		9·68818	10·35816		9·64184	60'
01·0	9·95372		10·04628	10·31214		9·68786	10·35842		9·64158	
02·0	9·95378	·1 1	10·04622	10·31246	·1 3	9·68754	10·35868	·1 3	9·64132	
03·0	9·95385		10·04616	10·31278		9·68722	10·35894		9·64106	
04·0	9·95391		10·04609	10·31310		9·68690	10·35920		9·64080	
05·0	9·95397	·2 1	10·04603	10·31342	·2 6	9·68658	10·35946	·2 5	9·64054	55'
06·0	9·95403		10·04597	10·31375		9·68626	10·35972		9·64028	
07·0	9·95409		10·04591	10·31407		9·68593	10·35998		9·64002	
08·0	9·95415	·3 2	10·04585	10·31439	·3 10	9·68561	10·36024	·3 8	9·63976	
09·0	9·95421		10·04579	10·31471		9·68529	10·36050		9·63950	
10·0	9·95427		10·04573	10·31503		9·68497	10·36076		9·63924	50'
11·0	9·95434	·4 2	10·04567	10·31535	·4 13	9·68465	10·36102	·4 10	9·63898	
12·0	9·95440		10·04560	10·31568		9·68432	10·36128		9·63872	
13·0	9·95446		10·04554	10·31600		9·68400	10·36154		9·63846	
14·0	9·95452		10·04548	10·31632		9·68368	10·36180		9·63820	
15·0	9·95458	·5 3	10·04542	10·31664	·5 16	9·68336	10·36207	·5 13	9·63794	45'
16·0	9·95464		10·04536	10·31697		9·68303	10·36233		9·63767	
17·0	9·95470		10·04530	10·31729		9·68271	10·36259		9·63741	
18·0	9·95476	·6 4	10·04524	10·31761	·6 19	9·68239	10·36285	·6 16	9·63715	
19·0	9·95482		10·04518	10·31794		9·68206	10·36311		9·63689	
20·0	9·95488		10·04512	10·31826		9·68174	10·36338		9·63662	40'
21·0	9·95494	·7 4	10·04506	10·31858	·7 23	9·68142	10·36364	·7 18	9·63636	
22·0	9·95500		10·04500	10·31891		9·68109	10·36390		9·63610	
23·0	9·95507		10·04494	10·31923		9·68077	10·36417		9·63583	
24·0	9·95513	·8 5	10·04487	10·31956	·8 26	9·68044	10·36443	·8 21	9·63557	
25·0	9·95519		10·04481	10·31988		9·68012	10·36469		9·63531	35'
26·0	9·95525		10·04475	10·32021		9·67980	10·36496		9·63504	
27·0	9·95531	·9 5	10·04469	10·32053	·9 29	9·67947	10·36522	·9 24	9·63478	
28·0	9·95537		10·04463	10·32085		9·67915	10·36549		9·63451	
29·0	9·95543		10·04457	10·32118		9·67882	10·36575		9·63425	
30·0	9·95549		10·04451	10·32150		9·67850	10·36602		9·63398	30'
31·0	9·95555		10·04445	10·32183		9·67817	10·36628		9·63372	
32·0	9·95561	·1 1	10·04439	10·32215	·1 3	9·67785	10·36655	·1 3	9·63345	
33·0	9·95567		10·04433	10·32248		9·67752	10·36681		9·63319	
34·0	9·95573		10·04427	10·32281		9·67719	10·36708		9·63292	
35·0	9·95579	·2 1	10·04421	10·32313	·2 7	9·67687	10·36734	·2 5	9·63266	25'
36·0	9·95585		10·04415	10·32346		9·67654	10·36761		9·63239	
37·0	9·95591		10·04409	10·32378		9·67622	10·36788		9·63213	
38·0	9·95597	·3 2	10·04403	10·32411	·3 10	9·67589	10·36814	·3 8	9·63186	
39·0	9·95603		10·04397	10·32444		9·67556	10·36841		9·63159	
40·0	9·95609		10·04391	10·32476		9·67524	10·36867		9·63133	20'
41·0	9·95615	·4 2	10·04385	10·32509	·4 13	9·67491	10·36894	·4 11	9·63106	
42·0	9·95621		10·04379	10·32542		9·67458	10·36921		9·63079	
43·0	9·95627		10·04373	10·32574		9·67426	10·36948		9·63052	
44·0	9·95633		10·04367	10·32607		9·67393	10·36974		9·63026	
45·0	9·95639	·5 3	10·04361	10·32640	·5 16	9·67360	10·37001	·5 13	9·62999	15'
46·0	9·95645		10·04355	10·32673		9·67327	10·37028		9·62972	
47·0	9·95651		10·04349	10·32705		9·67295	10·37055		9·62945	
48·0	9·95657	·6 4	10·04343	10·32738	·6 20	9·67262	10·37082	·6 16	9·62919	
49·0	9·95663		10·04338	10·32771		9·67229	10·37108		9·62892	
50·0	9·95668		10·04332	10·32804		9·67196	10·37135		9·62865	10'
51·0	9·95674	·7 4	10·04326	10·32837	·7 23	9·67164	10·37162	·7 19	9·62838	
52·0	9·95680		10·04320	10·32869		9·67131	10·37189		9·62811	
53·0	9·95686		10·04314	10·32902		9·67098	10·37216		9·62784	
54·0	9·95692	·8 5	10·04308	10·32935	·8 26	9·67065	10·37243	·8 21	9·62757	
55·0	9·95698		10·04302	10·32968		9·67032	10·37270		9·62730	5'
56·0	9·95704		10·04296	10·33001		9·66999	10·37297		9·62703	
57·0	9·95710	·9 5	10·04290	10·33034	·9 29	9·66966	10·37324	·9 24	9·62676	
58·0	9·95716		10·04284	10·33067		9·66933	10·37351		9·62649	
59·0	9·95722		10·04278	10·33100		9·66900	10·37378		9·62622	
60·0	9·95728		10·04272	10·33133		9·66867	10·37405		9·62595	0'

115°
295°

αὐτῆς εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς 16 μονάδας διαφορᾶς λογαρίθμων, ἀντιστοιχεῖ διαφορὰ 0,6′. Ἄρα τὸ τόξον εἶναι:

$$x = 64^\circ\ 19{,}6'.$$

3·12 Πρακτικὸς κανών.

Ἐὰν εἰς τοὺς Πίνακας δὲν ὑπάρχῃ ὁ ζητούμενος λογάριθμος διὰ μὲν τὸ ημ, εφ, τεμ, ἀνατρέχομεν εἰς τὸν ἀμέσως *μικρότερον* τῶν Πινάκων, εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν αὐτοῦ καὶ τοῦ δοθέντος, καὶ ἐκ τῆς στήλης τῶν Parts εὑρίσκομεν τὰ δέκατα τῶν πρώτων λεπτῶν.

Ἐὰν ὅμως πρόκειται περὶ συν, σφ, στεμ, ἀνατρέχομεν εἰς τοὺς Πίνακας εἰς τὸν ἀμέσως *μεγαλύτερον* τοῦ δοθέντος, ὁπότε πάλιν εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν καὶ ἐκ τῶν Parts τὰ δέκατα τῶν πρώτων λεπτῶν.

Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ εὑρεθεῖσα διαφορὰ εἶναι προσθετική. Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν ἀπὸ 0° ἕως 90°, ὅπου καὶ συνήθως ἀναφέρονται αἱ πράξεις μας. Πέραν τῶν 90° πρέπει νὰ προσέχωμεν τὴν πορείαν τῶν Πινάκων καὶ ἀναλόγως νὰ ἐργαζώμεθα.

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned}
\text{λογημ}\ 1^\circ\ 38',7 &= 8,(45754 + \tfrac{88}{2}) = 8{,}45798\\
\text{λογεφ}\ 177^\circ\ 57',5 &= 8,(55240 - \tfrac{70}{2}) = 8{,}55205\\
\text{λογστεμ}\ 26^\circ\ 04',4 &= 10,(35712 - 10) = 10{,}35702\\
\text{λογτεμ}\ 333^\circ\ 25',3 &= 10,(04852 - 2) = 10{,}04850\\
\text{λογσυν}\ 138^\circ\ 17',6 &= 9,(87300 + 7) = 9{,}87307\\
\text{λογημ}\ 63^\circ\ 19',8 &= 9,(94720 + 5) = 9{,}94725\\
\text{λογεφ}\ 117^\circ\ 53',0 &= = 9{,}73354\\
\text{λογσυν}\ 83^\circ\ 15',3 &= 9,(07018 - 32) = 9{,}06986.
\end{aligned}$$

3·13 Πίνακες ἡμιπαρημιτόνων (Haversines).

Εἰς τοὺς Πίνακας Norie's τὰ ἡμιπαρημίτονα δίδονται εἰς

36°

ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΑ (ΦΥΣΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ)

↓ →	·0		·2		·4		·6		·8				
	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	
	8·/9·	0·	8·/9·	0·	8·/9·	0·	8·/9·	0·	8·/9·	0·	8·/9·	0·	
00	97997	09549	98004	09551	98012	09553	98020	09554	98028	09556	98035	09558	59
01	98035	09558	98043	09559	98051	09561	98059	09563	98066	09565	98074	09566	58
02	98074	09566	98082	09568	98090	09570	98097	09571	98105	09573	98113	09575	57
03	98113	09575	98121	09577	98129	09578	98136	09580	98144	09582	98152	09583	56
04	98152	09583	98160	09585	98167	09587	98175	09589	98183	09590	98191	09592	55
05	98191	09592	98198	09594	98206	09595	98214	09597	98222	09599	98229	09601	54
06	98229	09601	98237	09602	98245	09604	98253	09606	98260	09607	98268	09609	53
07	98268	09609	98276	09611	98284	09613	98291	09614	98299	09616	98307	09618	52
08	98307	09618	98315	09619	98322	09621	98330	09623	98338	09625	98346	09626	51
09	98346	09626	98353	09628	98361	09630	98369	09631	98377	09633	98384	09635	50
10	98384	09635	98392	09637	98400	09638	98408	09640	98415	09642	98423	09643	49
11	98423	09643	98431	09645	98438	09647	98446	09649	98454	09650	98462	09652	48
12	98462	09652	98469	09654	98477	09655	98485	09657	98493	09659	98500	09661	47
13	98500	09661	98508	09662	98516	09664	98524	09666	98531	09667	98539	09669	46
14	98539	09669	98547	09671	98554	09673	98562	09674	98570	09676	98578	09678	45
15	98578	09678	98585	09679	98593	09681	98601	09683	98608	09685	98616	09686	44
16	98616	09686	98624	09688	98632	09690	98639	09692	98647	09693	98655	09695	43
17	98655	09695	98662	09697	98670	09698	98678	09700	98685	09702	98693	09704	42
18	98693	09704	98701	09705	98709	09707	98716	09709	98724	09710	98732	09712	41
19	98732	09712	98739	09714	98747	09716	98755	09717	98763	09719	98770	09721	40
20	98770	09721	98778	09723	98786	09724	98793	09726	98801	09728	98809	09729	39
21	98809	09729	98816	09731	98824	09733	98832	09735	98840	09736	98847	09738	38
22	98847	09738	98855	09740	98863	09742	98870	09743	98878	09745	98886	09747	37
23	98886	09747	98893	09748	98901	09750	98909	09752	98916	09754	98924	09755	36
24	98924	09755	98932	09757	98940	09759	98947	09760	98955	09762	98963	09764	35
25	98963	09764	98970	09766	98978	09767	98986	09769	98993	09771	99001	09773	34
26	99001	09773	99009	09774	99016	09776	99024	09778	99032	09779	99039	09781	33
27	99039	09781	99047	09783	99055	09785	99062	09786	99070	09788	99078	09790	32
28	99078	09790	99085	09792	99093	09793	99101	09795	99108	09797	99116	09799	31
29	99116	09799	99124	09800	99131	09802	99139	09804	99147	09805	99154	09807	30
30	99154	09807	99162	09809	99170	09811	99177	09812	99185	09814	99193	09816	29
31	99193	09816	99200	09818	99208	09819	99216	09821	99223	09823	99231	09824	28
32	99231	09824	99238	09826	99246	09828	99254	09830	99262	09831	99269	09833	27
33	99269	09833	99277	09835	99284	09837	99292	09838	99300	09840	99307	09842	26
34	99307	09842	99315	09844	99323	09845	99330	09847	99338	09849	99346	09850	25
35	99346	09850	99353	09852	99361	09854	99369	09856	99376	09857	99384	09859	24
36	99384	09859	99391	09861	99399	09863	99407	09864	99414	09866	99422	09868	23
37	99422	09868	99430	09870	99437	09871	99445	09873	99453	09875	99460	09877	22
38	99460	09877	99468	09878	99475	09880	99483	09882	99491	09883	99498	09885	21
39	99498	09885	99506	09887	99514	09889	99521	09890	99529	09892	99536	09894	20
40	99536	09894	99544	09896	99552	09897	99559	09899	99567	09901	99575	09903	19
41	99575	09903	99582	09904	99590	09906	99598	09908	99605	09909	99613	09911	18
42	99613	09911	99620	09913	99628	09915	99636	09916	99643	09918	99651	09920	17
43	99651	09920	99658	09922	99666	09923	99674	09925	99681	09927	99689	09929	16
44	99689	09929	99696	09930	99704	09932	99712	09934	99719	09936	99727	09937	15
45	99727	09937	99734	09939	99742	09941	99750	09943	99757	09944	99765	09946	14
46	99765	09946	99773	09948	99780	09949	99788	09951	99795	09953	99803	09955	13
47	99803	09955	99811	09956	99818	09958	99826	09960	99833	09962	99841	09963	12
48	99841	09963	99848	09965	99856	09967	99864	09969	99871	09970	99879	09972	11
49	99879	09972	99886	09974	99894	09976	99902	09977	99909	09979	99917	09981	10
50	99917	09981	99924	09983	99932	09984	99940	09986	99947	09988	99955	09990	09
51	99955	09990	99962	09991	99970	09993	99977	09995	99985	09997	99993	09998	08
52	99993	09998	00000	10000	00008	10002	00015	10004	00023	10005	00031	10007	07
53	00031	10007	00038	10009	00046	10011	00053	10012	00061	10014	00068	10016	06
54	00068	10016	00076	10018	00084	10019	00091	10021	00099	10023	00106	10025	05
55	00106	10025	00114	10026	00121	10028	00129	10030	00137	10032	00144	10033	04
56	00144	10033	00152	10035	00159	10037	00167	10039	00174	10040	00182	10042	03
57	00182	10042	00190	10044	00197	10046	00205	10047	00212	10049	00220	10051	02
58	00220	10051	00227	10052	00235	10054	00242	10056	00250	10058	00258	10059	01
59	00258	10059	00265	10061	00273	10063	00280	10065	00288	10066	00295	10068	00
			·8		·6		·4		·2		·0 →		↑

323°

τὰς σελίδας 396 — 502. Χαρακτηρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι περιέχουν συγχρόνως τοὺς φυσικοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ παραπλεύρως τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν.

Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ μερικὰ παραδείγματα (διότι ἡ περιγραφή των θὰ ἦτο περιττή).

$$\text{λογημπρ}16^\circ\ 04' = 8{,}29070, \quad \text{φυσικὸς } 0{,}01953.$$

Προσοχή! Τὸ χαρακτηριστικόν, 8 εἰς τὴν περίπτωσίν μας, ἀνήκει εἰς ὁλόκληρον τὴν στήλην τοῦ ἡμιπαρημιτόνου, 16°, καὶ τὸ μηδὲν εἰς ὁλόκληρον τὴν ἀντίστοιχον στήλην τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν ἀλλάσσῃ, ὅπως π.χ. εἰς τὸν Πίνακα 14 ὅπου σημειοῦται 8/9, τότε ὁ δεύτερος ἀριθμός, τὸ 9 εἰς τὸ παράδειγμα, ὡς χαρακτηριστικὸν ἀνήκει εἰς τοὺς κάτω τῆς μαύρης γραμμῆς ἀριθμούς.

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned} &\text{λογημπρ}\,36^\circ\ 52' = 8{,}99993 \\ &\text{λογημπρ}\,36^\circ\ 53' = 9{,}00031 \end{aligned} \quad \text{ἐνῶ}$$

$$\begin{aligned} &\text{λογημπρ}\,36^\circ\ 32',2 = 8{,}90238 \\ &\text{λογημπρ}\,36^\circ\ 32',4 = 9{,}99246. \end{aligned} \quad \text{ἐνῶ}$$

Δηλαδὴ τὰ δέκατα ὑπάρχουν εἰς τὸ ἄνω μέρος τῶν στηλῶν
0 · 2 · 4 κλπ.

$$\begin{aligned} \text{λογημπρ}x &= 8{,}89179 \\ x &= 32^\circ\ 25{,}4' \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{λογημπρ}x &= 9{,}77100 \\ x &= 100^\circ\ 23{,}4' \end{aligned}\right\} (9{,}77094 \quad 100^\circ\ 23')$$

$$\left.\begin{aligned} \text{λογημπρ}x &= 9{,}75801 \\ x &= 98^\circ\ 22',4' \end{aligned}\right\} (9{,}75797 \quad 98^\circ\ 22').$$

3 · 14 Ἀσκήσεις.

Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις διὰ τῶν λογαρίθμων:

1) α) $\sqrt{6814}=$ (Ἀπάντ. $=82,54$)

β) $\dfrac{23^2 \times 16^3}{\sqrt{3880}}=$ (Ἀπάντ. $=34785,3$)

γ) $\dfrac{\sqrt[3]{182,7 \times 200,7}}{20\frac{4}{5}}=$ (Ἀπάντ. $=1,60015$)

δ) $\sqrt{\dfrac{0,16 \times 0,016 \times 0,0016}{25}}=$ (Ἀπάντ. $=0,0004048$)

ε) $\sqrt{\dfrac{0,9 \times 0,09 \times 0,009}{33}}=$ (Ἀπάντ. $=0,0047$)

ζ) $\sqrt[3]{\dfrac{0,000125}{5}}=$ (Ἀπάντ. $=0,02924$)

η) $\sqrt[3]{\dfrac{8496+345}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}}=$ (Ἀπάντ. $=11,612$)

2) α) $M=\dfrac{\sqrt{0,28} \times \sqrt{65,2} \times 7,82}{\sqrt[3]{742} \times \sqrt{671}}=$ (Ἀπάντ. $=0,14247$)

β) $\Pi=\dfrac{55,25 \times \sqrt{0,265}-7,32\sqrt{24,6}}{\sqrt[3]{72} \times \sqrt{48}}=$

(Ἀπάντ. $=-0,2744$)

γ) $K=\dfrac{\text{συν}\,18^\circ\,11' \cdot \text{ημ}\,73^\circ\,6',4-\text{τεμ}\,105^\circ\,11' \cdot \sqrt{3,12}}{\text{εφ}\,36^\circ \cdot \text{συν}\,23^\circ \cdot \text{τεμ}\,106^\circ}=$

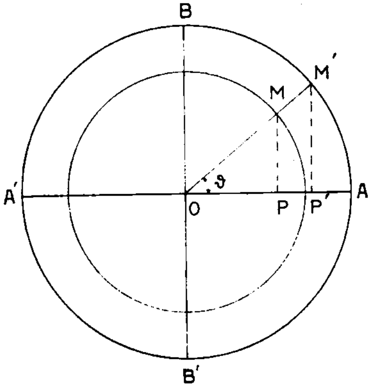
(Ἀπάντ. $=-3,154$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

4·1 Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΡ καὶ ΟΜ'Ρ' (σχ. 4·1α).



Σχ. 4·1 α.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα κατ' ἀρχὴν τὴν ΟΜ καὶ κατόπιν τὴν ΟΜ' γράφομεν περιφερείας κύκλων. Προφανῶς τὸ ημθ εἰς τὸν μικρὸν κύκλον θὰ εἶναι $\eta\mu\theta = \frac{MP}{OM}$, εἰς δὲ τὸν μεγάλον $\eta\mu\theta = \frac{M'P'}{OM'}$. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἀνωτέρω τριγώνων προκύπτει ἡ ἀναλογία:

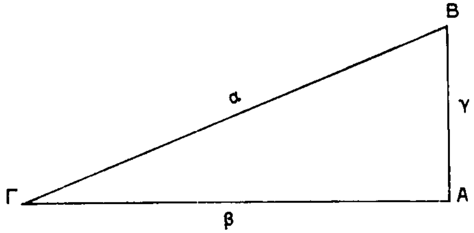
$$\frac{MP}{OM} = \frac{M'P'}{OM'} = \eta\mu\theta.$$

Ὥστε *εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας αὐτοῦ εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.*

Ἐξ ἄλλου τὸ $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OP}{OM}$, καὶ εἰς τὸν μεγάλον κύκλον εἶναι $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OP'}{OM'}$. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν ὅτι:

$$\frac{OP'}{OM'} = \frac{OP}{OM} = \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Ὥστε τὸ συνημίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ὁ λόγος τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.



Σχ. 4·1 β.

Ἀνακεφαλαιώνοντες (σχ. 4·1 β) ἔχομεν:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\text{ἀπέναντι κάθετος}}{\text{ὑποτείνουσα}} = \frac{\gamma}{\alpha}. \qquad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\text{προσκειμένη κάθετος}}{\text{ὑποτείνουσα}} = \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (2)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), θὰ ἔχωμεν:

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Ὥστε ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον, ἤτοι:

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\text{ἀπέναντι κάθετος}}{\text{προσκειμένη κάθετος}} = \frac{\gamma}{\beta}. \qquad (3)$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὴν (2) διὰ τῆς (1), ἔχομεν:

$$\sigma\varphi = \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ὥστε ἡ συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ὁ λόγος τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον, ἤτοι:

$$\sigma\varphi\Gamma = \frac{\text{προσκειμένη κάθετος}}{\text{ἀπέναντι κάθετος}} = \frac{\beta}{\gamma}. \tag{4}$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \eta\mu\Gamma &= \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \alpha\eta\mu\Gamma \\ \sigma\upsilon\nu\Gamma &= \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \beta = \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma \\ \varepsilon\varphi\Gamma &= \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \beta\varepsilon\varphi\Gamma \\ \sigma\varphi\Gamma &= \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \beta = \gamma\sigma\varphi\Gamma \end{aligned} \tag{5}$$

Αἱ ἰσότητες (5) διατυποῦνται εἰς τοὺς ἑξῆς δύο κανόνας:

1) *Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης.*

2) *Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης.*

Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζομεν, $\tau\varepsilon\mu = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu}$ καὶ $\sigma\tau\varepsilon\mu = \frac{1}{\eta\mu}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\tau\varepsilon\mu\Gamma = \frac{\alpha}{\beta} \text{ καὶ } \sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma = \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{6}$$

Δηλαδή:

$$\tau\varepsilon\mu\Gamma = \frac{\text{ὑποτείνουσα}}{\text{προσκειμένη κάθετος}}, \quad \sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma = \frac{\text{ὑποτείνουσα}}{\text{ἀπέναντι κάθετος}}.$$

Συνεπῶς ἔχομεν καὶ τοὺς ἑξῆς δύο κανόνας:

3) *Τέμνουσα ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι*

ὁ λόγος τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὴν προσκειμένην κάθετον.

4) *Συντέμνουσα ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ὁ λόγος τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὴν ἀπέναντι κάθετον.*

Ἐὰν τὴν ἰσότητα (6) λύσωμεν ὡς πρὸς α, ἔχομεν:

$$\alpha = \beta\,\text{τεμ}\Gamma \qquad \alpha = \gamma\,\text{στεμ}\Gamma.$$

Δηλαδή:

Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν τέμνουσαν τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας ἢ τὴν συντέμνουσαν τῆς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας.

4·2 Ἀσκήσεις.

1) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου $\widehat{A} = 90^\circ$, δείξατε ὅτι:

α) $\text{ημ}\Gamma = \dfrac{\text{σφ}\Gamma\cdot\text{εφ}\Gamma}{\text{στεμ}\Gamma}$. β) $\dfrac{\text{ημ}\Gamma}{\text{συν}\Gamma} + \dfrac{\text{τεμ}\Gamma}{\text{στεμ}\Gamma} = 2\text{εφ}\Gamma$.

γ) $\text{σφ}\Gamma = \dfrac{\text{ημ}\,\Gamma}{\text{συν}\,\Gamma\cdot\text{εφ}^2\,\Gamma}$. δ) $\text{ημ}^2\Gamma + \text{συν}^2\Gamma = 1$.

ε) $\text{στεμ}^2\,\Gamma = 1 + \text{σφ}^2\,\Gamma$. ζ) $\dfrac{\text{τεμ}\Gamma}{\text{ημ}\Gamma} = \dfrac{\text{στεμ}\Gamma}{\text{συν}\Gamma}$.

η) $\dfrac{1}{\text{συν}^2\Gamma} = \dfrac{1}{\text{σφ}^2\Gamma\cdot\text{ημ}^2\Gamma}$.

θ) $(\text{στεμ}\Gamma + \text{σφ}\Gamma)(\text{στεμ}\Gamma - \text{σφ}\Gamma) = 1$.

ι) $(\text{τεμ}\Gamma + \text{ημ}\Gamma)(\text{τεμ}\Gamma - \text{ημ}\Gamma) = \text{εφ}^2\Gamma + \text{συν}^2\Gamma$.

κ) $(\text{στεμ}\Gamma - \text{συν}\Gamma)(\text{στεμ}\Gamma + \text{συν}\Gamma) = \text{σφ}^2\Gamma + \text{ημ}^2\Gamma$.

λ) $(\text{εφ}\Gamma = \sqrt{(\text{τεμ}\Gamma + 1)(\text{τεμ}\Gamma - 1)}$.

μ) $\text{ημ}\Gamma = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \text{σφ}^2\Gamma}}$. ν) $\text{εφ}\Gamma = \sqrt{\dfrac{1}{\text{συν}^2\Gamma} - 1}$.

ξ) $\text{ημ}\Gamma\,\text{εφ}\,\Gamma = \dfrac{1 - \text{συν}^2\Gamma}{\text{συν}\,\Gamma}$. ο) $\text{εφ}\Gamma\cdot\text{σφ}\Gamma\cdot\text{τεμ}\Gamma = \dfrac{1}{\text{συν}\Gamma}$.

π) $\text{ημ}^2\Gamma\cdot\text{στεμ}\Gamma + \text{συν}^2\Gamma\cdot\text{τεμ}\Gamma = \text{ημ}\Gamma + \text{συν}\Gamma$.

2) Ὑπολογίσατε τὴν τέμνουσαν καὶ συντέμνουσαν τῶν 130°.

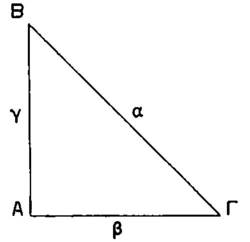
3) Δείξατε ὅτι $\text{εφ}\,135^\circ\cdot\text{ημ}\,120^\circ\cdot\text{τεμ}\,45^\circ = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

4·3 Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων.

Καλοῦμεν ἐπίλυσιν ὀρθογωνίου τριγώνου τὴν εὕρεσιν τῶν ἀγνώστων στοιχείων αὐτοῦ, ὅταν δοθοῦν ἐπαρκῆ ἄλλα στοιχεῖα. Πρὸς εὐκολίαν χωρίζομεν τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τέσσαρας περιπτώσεις.

1η Περίπτωσις.

Ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἔστω τῆς Β, νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ (σχ. 4·3α).



Σχ. 4·3 α.

Εὑρίσκομεν: $\Gamma = 90^\circ - B$, $\beta = \alpha\eta\mu B$, $\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B$.

Τὸ ἐμβαδὸν $E = \dfrac{\beta\cdot\gamma}{2} = \dfrac{\alpha\eta\mu B\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu B}{2} = \dfrac{\alpha^2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B}{2}$.

Ἐφαρμογή.

Ἔστω $\alpha = 159{,}8$ m καὶ $B = 32^\circ\ 18',5$.

1. Διὰ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν Πινάκων.

$$\Gamma = 90^\circ - (32^\circ\ 18',5) = 57^\circ\ 41',5$$
$$\eta\mu B = 0{,}53447 \qquad \sigma\upsilon\nu B = 0{,}84518$$
$$\beta = 159{,}8 \times 0{,}53447 = 85{,}408 \text{ m}$$
$$\gamma = 159{,}8 \times 0{,}84518 = 135{,}01 \text{ m.}$$

2. Διὰ τῶν λογαρίθμων.

$\Gamma = 57^\circ\ 41',5$

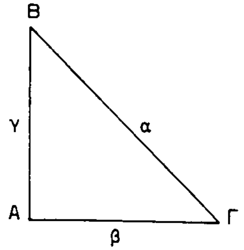
$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\eta\mu B \qquad \lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu B$

$$\alpha = 159{,}8 \quad \lambda o\gamma\alpha = 2{,}20358$$
$$B = 32^\circ\ 18'{,}5 \quad \lambda o\gamma\eta\mu B = 9{,}72793 \quad +$$
$$\lambda o\gamma\, \beta = 1{,}93151$$
$$\beta = 85{,}41\ \text{m}$$

$$\alpha = 159{,}8 \quad \lambda o\gamma = 2{,}20358$$
$$B = 32^\circ\ 18'{,}5 \quad \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu B = 9{,}92695 \quad +$$
$$\lambda o\gamma\, \gamma = 2{,}13053$$
$$\gamma = 135{,}06\ \text{m}.$$

2α Περίπτωσις.

Ἐκ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔστω τῆς β, καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἔστω τῆς Β, νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ (σχ. 4 · 3 β).



Σχ. 4·3 β.

Εὑρίσκομεν $\Gamma = 90^\circ - B$.

$$\beta = \alpha\eta\mu\Gamma, \quad \alpha = \beta\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \gamma = \beta\varepsilon\varphi B.$$

Ἐφαρμογή.

Ἔστω $\beta = 1592{,}8$ m καὶ $B = 63^\circ$.

1. Διὰ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν Πινάκων.

$$\Gamma = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ.$$
$$\alpha = \beta\sigma\tau\varepsilon\mu B = 1592{,}8 \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu 63^\circ = 1592{,}8 \times 1{,}12233 = 1787{,}6\ \text{m}.$$
$$\gamma = \beta\varepsilon\varphi B = 1592{,}8 \cdot \varepsilon\varphi\ 63^\circ = 1592{,}8 \times 0{,}50953 = 812{,}7\ \text{m}.$$

2. Διὰ τῶν λογαρίθμων.

$$\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu B.$$

(Ὅπως καὶ προηγουμένως ἀνεφέραμεν, ἡ χρῆσις τῆς συντεμνούσης εἶναι προτιμοτέρα, διότι ἀποφεύγομεν κατὰ τὴν λογαρίθμησιν τὴν ἀφαίρεσιν).

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\beta &= \ \ 3{,}20216 \\ \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu B &= \underline{10{,}05012} \ + \\ \lambda o\gamma\alpha &= 13{,}25228 \quad \text{ἢ} \\ \lambda o\gamma\alpha &= \ \ 3{,}25228 \\ \alpha &= 1787{,}62\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\Gamma$$

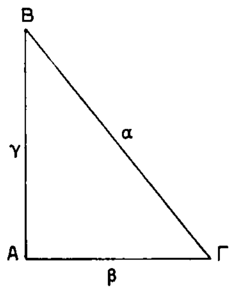
$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\gamma &= \ \ 3{,}20216 \\ \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\Gamma &= \ \ \underline{9{,}70717} \ + \\ \lambda o\gamma\gamma &= 12{,}90933\ (-10) \\ \gamma &= \ \ 812{,}7\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(Δηλαδὴ εἰς τὸ τέλος τὸ προστιθέμενον 10 πρέπει νὰ ἀφαιρῆται).

3η Περίπτωσις.

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ (σχ. 4·3γ).

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma},\ \Gamma = 90^\circ - B,\ \alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \beta\sigma\tau\varepsilon\mu B.$$



Σχ. 4·3γ.

Ἐφαρμογή.

Ἔστω $\beta = 128$ m καὶ $\gamma = 172$ m.

1) Διὰ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν Πινάκων.

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{128}{172} = 0{,}74418$$

$$B = 36^\circ\ 39',4 \quad \text{καὶ}$$
$$\Gamma = 53^\circ\ 20',6$$
$$\alpha = \beta\,\text{στεμ}B$$
$$\text{στεμ}B = 1,67513, \text{ ἄρα } \alpha = 128 \times 1,67513 = 214,42 \text{ m}.$$

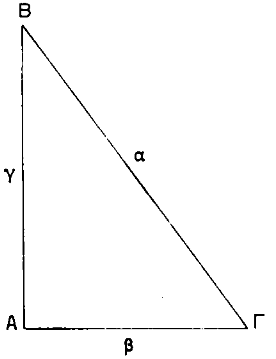
2) Διὰ τῶν λογαρίθμων.

$$\begin{array}{rl}
\text{λογεφ}B = & \text{λογ}\,\beta - \text{λογ}\,\gamma \\
\text{λογ}\beta = & 12,10721 \\
\text{λογ}\gamma = & 2,23553 \quad - \\
\hline
\text{λογεφ}B = & 9,87178 \\
B = & 36^\circ\ 39',4 \\
\Gamma = & 53^\circ\ 20',6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{λογ}\alpha = & \text{λογ}\beta + \text{λογστεμ}B \\
\text{λογ}\beta = & 2,10721 \\
\text{λογστεμ}B = & 10,22414 \quad + \\
\hline
\text{λογ}\alpha = & 2,33135 \\
\alpha = & 214,46 \text{ m} \\
E = & \dfrac{\beta \cdot \gamma}{2}.
\end{array}$$

4η Περίπτωσις.

Νὰ ἐπιλυθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης του α καὶ μιᾶς τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν, ἔστω τῆς β (σχ. 4·3 δ).



Σχ. 4·3 δ.

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}.$$

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}, \quad E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2} = \frac{\beta \cdot \sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}}{2}.$$

Ἐφαρμογή.

Ἔστω $\alpha = 24$ m καὶ $\beta = 9$ m.

1. Διὰ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν Πινάκων.

$$\gamma = \sqrt{33 \cdot 15} = 22{,}24 \text{ m}$$

$$\eta\mu B = \frac{9}{24} = 0{,}3750$$

$$B = 22^{\circ}\ 1',5 \quad \text{καὶ}$$

$$\Gamma = 67^{\circ}\ 58',6.$$

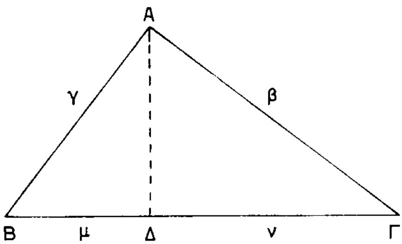
2. Διὰ τῶν λογαρίθμων.

$$\lambda o\gamma\gamma = \frac{1}{2}\,(\lambda o\gamma 15 + \lambda o\gamma 33) \qquad \lambda o\gamma\eta\mu B = \lambda o\gamma 9 - \lambda o\gamma 24$$

$$\begin{array}{rll} \lambda o\gamma 15 = & 1{,}17609 & \\ \lambda o\gamma 33 = & \underline{1{,}51851} & + \\ \lambda o\gamma\gamma = & 2{,}69450 & :2 \\ \lambda o\gamma\gamma = & 1{,}34725 & \\ \gamma = & 22{,}25\text{m} & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \lambda o\gamma\ 9 = & 10{,}95424 & \\ \lambda o\gamma\ 24 = & \underline{1{,}38021} & - \\ \lambda o\gamma\eta\mu B = & 9{,}57403 & \\ B = & 22^{\circ}\ 1',5 & \\ \Gamma = & 67^{\circ}\ 58',5. & \end{array}$$

5η Περίπτωσις.

Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν δύο τμημάτων μ καὶ ν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ὕψους (σχ. 4·3 ε).



Σχ. 4·3 ε.

Ἔστω τὸ ὕψος ΑΔ. Τότε ἔχομεν $\mu = (A\Delta)\sigma\varphi B$ καὶ $\nu = (A\Delta)\varepsilon\varphi B$.

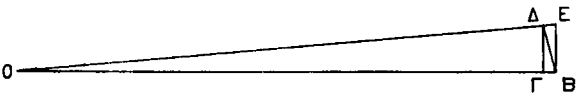
Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς δύο ἰσότητας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$\frac{(A\Delta)\,\varepsilon\varphi B}{(A\Delta)\,\sigma\varphi B} = \frac{\nu}{\mu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi\ B}{\dfrac{1}{\varepsilon\varphi B}} = \frac{\nu}{\mu} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi^2 B = \frac{\nu}{\mu} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi B = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν B καὶ δι' ἀφαιρέσεως τὴν $\widehat{\Gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ $\mu+\nu=\alpha$, ἔχομεν $\beta=\alpha\eta\mu B$ καὶ $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B$, ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζονται αἱ β καὶ γ.

4·4 Μικραὶ γωνίαι.

Ὅταν ἔχωμεν μικρὰς γωνίας, δηλαδὴ μέχρι 4° ἢ 5° ὡς ἐκ τοῦ σχήματος 4·4α φαίνεται, τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ τὸ τόξον (εἰς ἀκτίνια) ἔχουν *περίπου* τὸ αὐτὸ μῆκος.



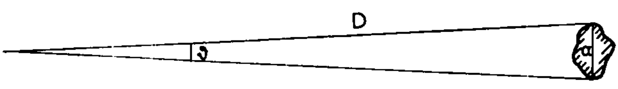
Σχ. 4·4α.

$$\frac{B\Delta}{OB}=BO\Delta\ (\text{ἀκτίνια})$$
$$\frac{BE}{OB}=\varepsilon\varphi\, BO\Delta$$
$$\frac{\Gamma\Delta}{OB}=\eta\mu\, BO\Delta.$$

Γνωρίζομεν ὅτι οἱ κάτωθι λόγοι ἰσχύουν, ἐὰν ἔχωμεν: $B\Delta=BE=\Gamma\Delta$, ὁπότε $\frac{B\Delta}{OB}=\frac{BE}{OB}=\frac{\Gamma\Delta}{OB}$, ἤτοι γωνία $\theta=\varepsilon\varphi\theta=\eta\mu\theta$.

Παράδειγμα 1.

Ἡ ὁριζοντία γωνία μεταξὺ δύο ἄκρων μιᾶς μικρᾶς νήσου



Σχ. 4·4β.

διαμέτρου 1,1 μιλ. εἶναι 5° 30′ (σχ. 4·4β). Ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν ἐξ αὐτῆς.

Λύσις.

$$\theta = 5^\circ\ 30' \text{ ἢ εἰς ἀκτίνια } \frac{5^\circ,5}{57^\circ,3} \text{ ἢ εἰς πρῶτα } \frac{330}{3438}$$

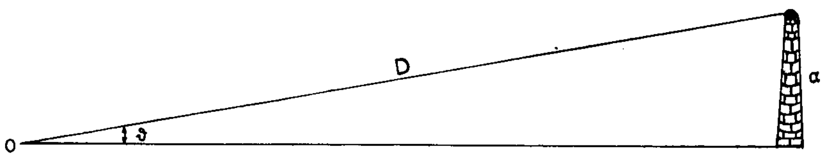
$\alpha = 1{,}1$ μιλ. (mile).

$$D = \frac{\alpha}{\theta} = 1{,}1 \times \frac{3438}{330} \simeq 11{,}46 \text{ μιλ.}$$

Ἀπάντησις: Ἡ ἀπόστασις εἶναι 11,46 μίλ. περίπου.

Παράδειγμα 2.

Ἕνας πύργος ὕψους 200 ποδῶν (ft) ὑποτείνει κατακόρυφον γωνίαν 01° 40′. Ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν ἐξ αὐτοῦ (σχ. 4·4 γ).



Σχ. 4·4 γ.

Λύσις.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$D = \frac{\alpha}{\theta} \text{ (θ εἰς ἀκτίνια).}$$

$$D = \frac{200 \times 3438}{3 \times 100} = 2292 \text{ γυάρδες (yd).}$$

Ἀπάντησις: Ἡ ἀπόστασις ἐκ τοῦ πύργου εἶναι 2 292 γυάρδες.

Ἐὰν τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἐλύετο τριγωνομετρικῶς μὲ τὴν βοήθειαν λογαρίθμων, θὰ εἴχομεν:

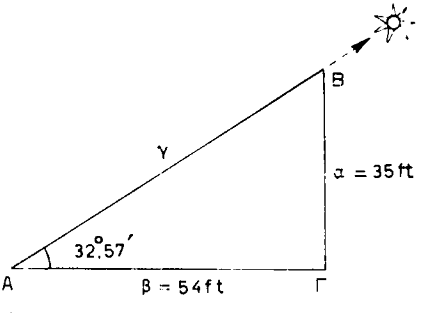
$$\frac{\alpha}{D} = \varepsilon\varphi\theta = \eta\mu\theta \qquad D = \frac{\alpha}{\eta\mu\theta} = \frac{200}{3 \times \eta\mu\, 1^\circ\ 40'} = \frac{66{,}66}{\eta\mu\, 1^\circ\ 40'}$$

$$
\begin{aligned}
\text{λογ}\, 66{,}66 &= 1{,}823908 \\
\text{λογημ}\, 1^\circ\, 40' &= \underline{8{,}463665}\ (-10) \\
\text{λογ}\, D &= 3{,}360243 \\
D &= 2292{,}1 \text{ γυάρδες (yd).}
\end{aligned}
$$

4·5 Προβλήματα λυόμενα διὰ τῆς ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων, χρήσιμα εἰς τοὺς ναυτιλλομένους.

1ον Πρόβλημα.

Ἕνας κατακόρυφος ἱστὸς σημαίας ὕψους 35 ποδῶν (ft) ρίπτει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σκιὰν ἡλίου μήκους 54 ποδῶν (ft). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου (σχ. 4·5 α).



Σχ. 4·5 α.

Λύσις.

$$\text{εφ}A = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \text{εφ}A = \text{λογ}\alpha - \text{λογ}\beta.$$

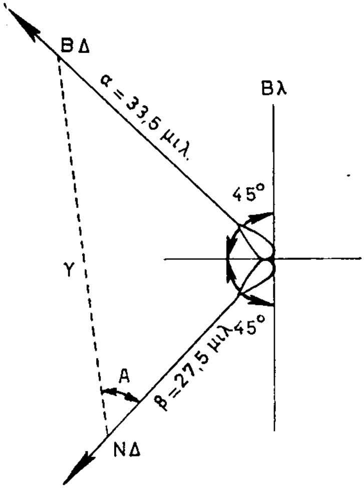
$$
\begin{aligned}
\alpha &= 35 \text{ ft} \quad \text{λογ}\, 35 = 11{,}54407 \ (\text{προσθέτομεν 10 μονάδας}) \\
\beta &= 54 \text{ ft} \quad \text{λογ}\, 54 = \underline{1{,}73239} -
\end{aligned}
$$

$$\text{λογ εφ}A = 9{,}81168 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{A} = 32^\circ 57'.$$

2ον Πρόβλημα.

Δύο πλοῖα Ο καὶ Θ ἐκκινοῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ Ο διευθύνεται πρὸς ΝΔ, τὸ δὲ Θ πρὸς ΒΔ (σχ. 4·5 β). Ἐὰν τὸ

Ο ἔπλευσεν 27,5 μίλια, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ Θ ἔπλευσεν 33,5 μίλια, νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις.



Σχ. 4·5 β.

Λύσις.

Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ δύο ἀνωτέρω διευθύνσεις σχηματίζουν γωνίαν 90°.

"Οθεν $\varepsilon\varphi A = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $\quad \lambda o\gamma\varepsilon\varphi A = \lambda o\gamma\alpha - \lambda o\gamma\beta$.

$$\begin{array}{ll} \alpha = 33{,}5 & \lambda o\gamma\alpha = 11{,}52505 \\ \beta = 27{,}5 & \lambda o\gamma\beta = \underline{\ \ 1{,}43933} \quad - \\ & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi A = 10{,}08572 \\ & \widehat{A} = 50^\circ\ 37'. \end{array}$$

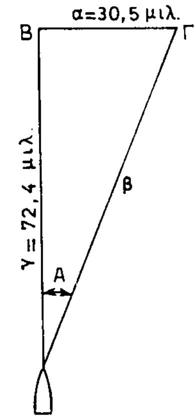
$$\tau\varepsilon\mu A = \frac{\gamma}{\beta} \text{ ἢ } \gamma = \beta\tau\varepsilon\mu A \text{ ἢ } \lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu A$$

$$\begin{array}{ll} \beta = 27{,}5 & \lambda o\gamma\beta = \ \ 1{,}43933 \\ A = 50^\circ\ 37' & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu A = \underline{10{,}19757} \quad + \\ & \lambda o\gamma\gamma = \ \ 1{,}63690 \end{array}$$

$\gamma = 43{,}34$ ναυτ. μίλια.

'Απάντησις: 'Απόστασις πλοίων 43,34 ναυτ. μίλια.

3. Ἕνα πλοῖον πλέει 72,4 μίλια πρὸς βορρᾶν καὶ κατόπιν 30,5 μίλια πρὸς Ἀπηλιώτην (σχ. 4·5γ). Ζητεῖται ἡ πορεία, τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ ἀκολουθήσῃ, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν προορισμόν του, ὡς καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς.



Σχ. 4·5γ.

Λύσις.

α) Εὕρεσις τῆς γωνίας Α.

$$\varepsilon\varphi A = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma\varepsilon\varphi A = \lambda o\gamma\alpha - \lambda o\gamma\gamma.$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 30{,}5 & \lambda o\gamma\alpha = 1{,}48430 \\ \gamma = 72{,}4 & \lambda o\gamma\gamma = \underline{1{,}85974} \; - \\ & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi A = 9{,}62456 \\ & \widehat{A} = 22^\circ\, 50',5. \end{array}$$

β) Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς β.

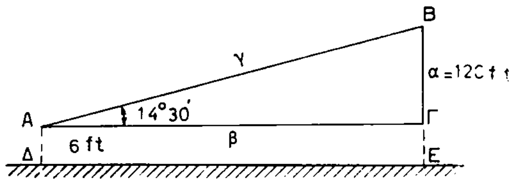
$$\sigma\tau\varepsilon\mu A = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \alpha\sigma\tau\varepsilon\mu A \qquad \lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu A.$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 30{,}5 & \lambda o\gamma\alpha = 1{,}48430 \\ A = 22^\circ 50',5 & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu A = \underline{10{,}41096} \; + \\ & \lambda o\gamma\beta = 1{,}89526 \\ & \beta = 78{,}57 \text{ ναυτ. μίλια.} \end{array}$$

Ἡ πρόσθεσις τοῦ 10 εἰς τὸ ἑξῆς, ὅπου εἶναι ἀναγκαία, θὰ νοῆται ἀφ' ἑαυτῆς.

Ἀπάντησις: Πορεία: $\widehat{\text{B}}$ 22° 50′,5Α (δηλ. Βορρᾶς πρὸς Ἀπηλιώτην). Ἀπόστασις: 78,57 ναυτ. μίλια.

4. Ἡ γωνία ἀνυψώσεως τῆς κορυφῆς ἱστοῦ ἑνὸς πλοίου, ὁ ὁποῖος ἀπέχει 126 ft ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, παρατηρουμένη ἐκ μιᾶς λέμβου σχηματίζει γωνίαν 14° 30′ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ (σχ. 4·5δ). Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τῆς θαλάσσης εἶναι 6 ft, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς του ἐκ τοῦ πλοίου.



Σχ. 4·5 δ.

Λύσις.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω Α ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ καὶ ἡ γωνία Α = 14° 30′. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος τῆς κορυφῆς τοῦ ἱστοῦ ἄνωθεν τῆς θαλάσσης εἶναι 126 ft καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ ἄνωθεν τῆς θαλάσσης 6 ft, ἡ κορυφὴ τοῦ ἱστοῦ πρέπει νὰ εἶναι 120 ft ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ. Ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἱστοῦ.

Ἤδη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ΑΓ.

$$\sigma\varphi A = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{ἢ} \qquad \beta = \alpha\sigma\varphi A$$

$$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\sigma\varphi A.$$

$$\begin{array}{lrl} \alpha = 120 & \lambda o\gamma\alpha = & 2{,}07918 \\ A = 14^\circ\ 30' & \lambda o\gamma\sigma\varphi A = & \underline{10{,}58734} \; + \\ & \lambda o\gamma B = & 2{,}66652 \\ & \beta = & 464\ \text{ft}. \end{array}$$

Ἀπάντησις : Ἀπόστασις παρατηρητοῦ ἀπὸ τὸ πλοῖον 464 ft.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρουσιάζεται συχνὰ εἰς τὴν Ναυτιλίαν. Διὰ τοῦτο ἡ λύσις του δίδεται διὰ Πινάκων. Ἐὰν ὁ ναυτιλλόμενος ἀναγνωρίσῃ ἕνα φάρον ἢ διακεκριμένον ὕψωμα, καταφεύγει εἰς τὸν χάρτην ἢ τὸν πλοηγὸν καὶ ἀμέσως ἀναγιγνώσκει τὸ ὕψος τοῦ φάρου. Κατόπιν διὰ τοῦ ἑξάντος μετρεῖ τὴν κατακόρυφον γωνίαν καὶ ἀνατρέχει εἰς τοὺς Πίνακας, π.χ. Norie's, ὁπότε ἀναγιγνώσκει τὴν ἀπόστασιν. Ἀκολούθως παραθέτομεν δύο παραδείγματα λυόμενα διὰ τῆς χρήσεως τῶν Πινάκων Norie's (Distance by vertical angle).

Παράδειγμα 1.

Τὸ ὕψος ἑνὸς φάρου εἶναι 150 ft καὶ ἡ κατακόρυφος γωνία 13° 52′. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἀκτῆς.

Εἰς τὴν σελίδα 111 τῶν Πινάκων Norie's εὑρίσκομεν ὁριζοντίως καὶ ἄνω τὸ 150 ft, κάτωθεν δὲ αὐτοῦ τὸ 13° 52′, ἀριστερὰ δὲ ἀναγιγνώσκομεν 0 μίλια, 1 στάδιον (1 στάδιον = 1/10 ναυτικοῦ μιλίου = 185,2 m).

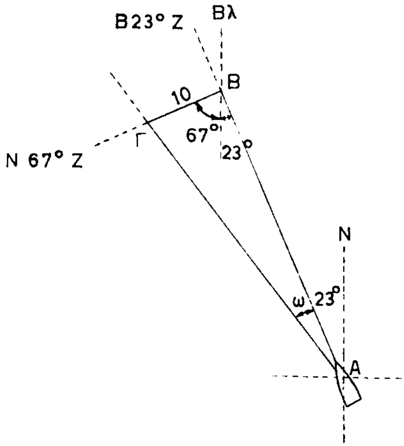
Παράδειγμα 2.

Δίδεται σημεῖον κείμενον 500 ft ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης καὶ ζητεῖται ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν πρέπει διὰ τοῦ ἑξάντος νὰ παρατηρῶμεν τὸ σημεῖον, διὰ νὰ διέλθωμεν εἰς ἀπόστασιν 4 ναυτ. μιλίων ἀπὸ τὴν ἀκτήν.

Εἰς τοὺς αὐτοὺς Πίνακας καὶ εἰς τὴν ἀριστερὰν στήλην εὑρίσκομεν τὰ 4 μίλια. Εἰς δὲ τὴν ἄνω στήλην ὁριζοντίως εὑρίσκομεν τὸ ὕψος, 500 ft. Εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν ἀναγιγνώσκομεν 1° 11′. Ὁ ἑξᾶς πρέπει νὰ τεθῇ ὑπὸ γωνίαν 1° 11′.

5. Ἕνα πλοῖον ἔχει πορείαν Β 23° Ζ καὶ πλέει ἐπὶ 4 ὥρας μὲ ταχύτητα 9,5 κόμβων ἐντὸς ρεύματος διευθύνσεως Ν 67° Ζ

καὶ ταχύτητος 2,5 κόμβων (σχ. 4·5ε). Νὰ εὑρεθῇ ἡ πραγματικὴ πορεία (δηλ. τὸ ὡς πρὸς τὸν βυθὸν ἴχνος) καὶ ἡ ἀπόστασις.



Σχ. 4·5ε.

Λύσις.

Ἔστω ΑΝ ἡ διεύθυνσις τοῦ Βορρᾶ, $\widehat{NAB} = 23°$, ΑΒ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν θὰ διήνυε τὸ πλοῖον ἄνευ ρεύματος ἐπὶ 4 ὥρας, ἤτοι 38 μίλια, καὶ ΒΓ ἡ ἐπίδρασις τοῦ ρεύματος (ἄνευ τῆς ἐνεργείας τῶν μηχανῶν) ἐπὶ 4 ὥρας, ἤτοι 10 μίλια. Φέρομεν τὴν ΑΓ, ὁπότε ἡ $\widehat{NA\Gamma}$ εἶναι ἡ πραγματικὴ πορεία καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις.

α) $\sigma\varphi\omega = \dfrac{AB}{\Gamma B} = \dfrac{38}{10} = 3{,}8$

$\sigma\varphi\omega = 3{,}8$ καὶ $\omega = 14° \; 44',5$.

Ἐπειδὴ $\widehat{NAB} = B \; 23° \; Z$, θὰ ἔχωμεν:

$$\widehat{NA\Gamma} = B \; 37° \; 44',5 \, Z.$$

β) Ὑπολογισμὸς ΑΓ.

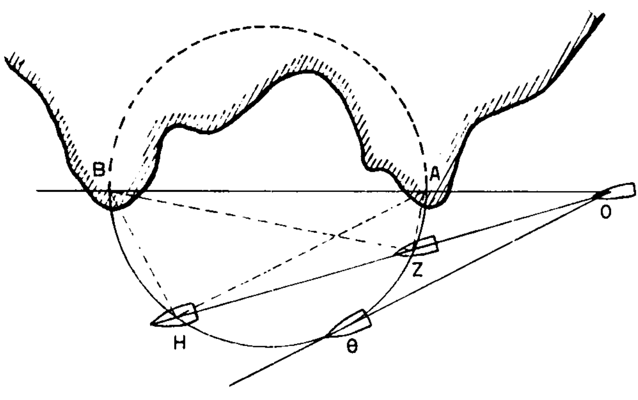
$\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \sigma\tau\epsilon\mu\omega$ ἢ $A\Gamma = B\Gamma\sigma\tau\epsilon\mu\omega$

$$ΑΓ = 10\text{στεμ}(14^\circ\ 44',5)$$
$$ΑΓ = 10 \times 3,93 = 39,3 \text{ ναυτ. μίλια.}$$

Ἀπάντησις: Πορεία Β 37° 44',5 Ζ. Ἀπόστασις 39,3 ναυτ. μίλια.

Σημείωσις: Πρὸς κατανόησιν τοῦ ἑπομένου προβλήματος 6 παραθέτομεν τὸ κατωτέρω πρόβλημα χρήσιμον εἰς τὴν Ἀκτοπλοΐαν.

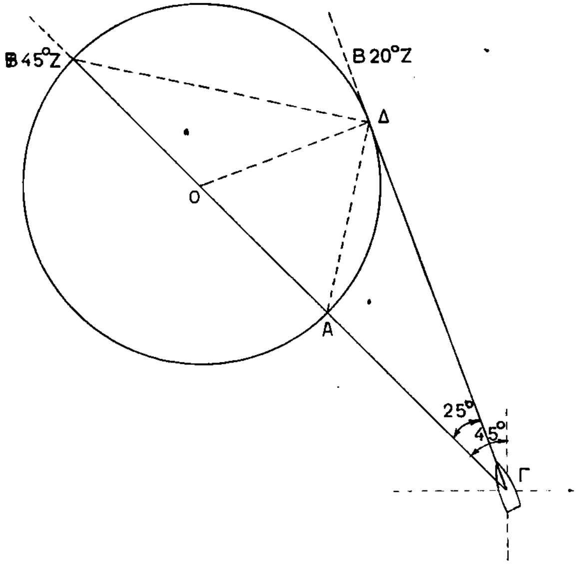
Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα ἐκ τοῦ Ο διοπτεύονται ὑπὸ τοῦ σκάφους κατά τινα στιγμὴν ἐν εὐθυγραμμίσει (σχ. 4·5ζ). Κατόπιν τὸ πλοῖον πλέει κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΖΗ. Ὡς



Σχ. 4·5ζ.

εὐκόλως ἀντιλαμβάνεται κανείς, τὰ σημεῖα θὰ διοπτεύωνται ὑπὸ τοῦ σκάφους ὑπὸ γωνίαν, ἡ ὁποία διαρκῶς θὰ αὐξάνη. Ἐὰν ἡ γωνία αὕτη γίνη 90°, τότε εὐκόλως συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σκάφος εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ. Ἐὰν συνεχίσωμεν τὴν πορείαν μας, καὶ διὰ δευτέραν φορὰν διοπτεύσωμεν τὰ Α καὶ Β ὑπὸ γωνίαν 90°, συμπεραίνομεν ὅτι εὑρισκόμεθα πάλιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνουσα εἰς ἡμιπεριφέρειαν), ἤτοι ἡ πορεία μας τέμνει τὴν ὡς ἄνω περιφέρειαν. Ἐὰν ὅμως ἀκολουθήσωμεν τοιαύτην πορείαν, ὥστε νὰ διοπτεύσωμεν μίαν φορὰν τὰ Α καὶ Β ὑπὸ γωνίαν 90° (ἀπὸ σημεῖον Θ), αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ πορεία μας εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἀνωτέρω περιφερείας.

6. Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου διοπτεύονται πρὸς Β 45° Ζ ὑπὸ πλοίου πλέοντος πρὸς Β 20° Ζ μὲ ταχύτητα 10 κόμβων (σχ. 4·5 η). Μετὰ 1 ὥραν τὰ



Σχ. 4·5 η.

Α καὶ Β ὑποτείνουν τὴν μεγίστην ὁριζόντιον γωνίαν τῶν 90°. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

Λύσις.

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δύο σημεῖα, Γ τὸ σημεῖον προεκτάσεως τῆς ΑΒ, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκετο τὸ πλοῖον κατὰ τὴν πρώτην διόπτευσιν, καὶ ΓΔ ἡ πλεῦσις τοῦ πλοίου, ἤτοι:

$$\text{ΑΓΔ} = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ.$$

Ἐπίσης Ο τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ ΟΔ ⊥ ΓΔ.

Ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΔΟΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ΓΔ = 10 μίλια καὶ τὴν ΟΓΔ = 25°.

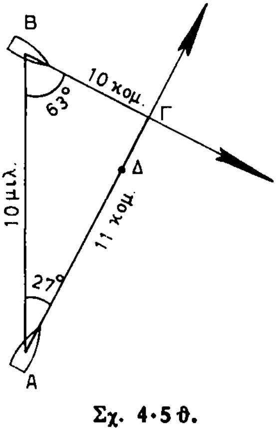
$$\frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΓΔ}} = \text{εφΟΓΔ} \text{ ἢ } \text{ΟΔ} = \text{ΓΔεφ}\widehat{\text{ΟΓΔ}} \quad \text{λογΟΔ} = \text{λογΓΔ} + \text{λογεφ}\widehat{\text{ΟΓΔ}}$$

$$\text{ΓΔ} = 10 \text{ μίλια} \quad \text{Γ} = 25^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{λογΓΔ} &= 1{,}00000 \\ \text{λογεφΓ} &= \underline{9{,}66867} \; + \\ \text{λογΟΔ} &= 0{,}66867 \\ \text{ΟΔ} &= 4{,}663 \\ \text{ΑΒ} &= 2(\text{ΟΔ}) = 2 \times 4{,}66 = 9{,}3\dot{6}2 \text{ ναυτ. μίλια.} \end{aligned}$$

7. Ἕνα πλοῖον Α εὑρίσκεται 10 μίλια πρὸς νότον ἄλλου πλοίου Β. Τὸ Α πλέει πρὸς Β 27° Α μὲ ταχύτητα 11 κόμβων καὶ τὸ Β πλέει πρὸς Ν 63° Α μὲ ταχύτητα 10 κόμβων (σχ. 4·5 θ).

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἕνα θὰ διέλθῃ πρώραθεν τοῦ ἄλλου.



Σχ. 4·5 θ.

Λύσις.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ θέσεις τῶν δύο πλοίων ἔνθα ΑΒ = 10 μίλια (ΑΒ Βορρᾶς - Νότος) καὶ ΒΓ καὶ ΑΓ αἱ πλεύσεις ἀντιστοίχως τῶν Β καὶ Γ, ἤτοι $\widehat{B} = 63^\circ$ καὶ $\widehat{A} = 27^\circ$. Ἐπιλύομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΑ.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς ΒΓ:

$$\eta\mu A = \frac{B\Gamma}{AB} \text{ καὶ } B\Gamma = AB\eta\mu A.$$

$B\Gamma = 10 \cdot \eta\mu\, 27^\circ$ ἢ $B\Gamma = 10 \times 0{,}454 = 4{,}54$ μίλια

$A\Gamma = 10\, \sigma\upsilon\nu\, 27^\circ$

$A\Gamma = 10 \times 0{,}891 = 8{,}91$ μίλια.

Διὰ νὰ μεταβῇ τὸ πλοῖον Β εἰς τὸ Γ, δηλαδὴ διὰ νὰ διανύσῃ 4,54 μίλια μὲ ταχύτητα 10 κόμβων χρειάζεται χρόνον:

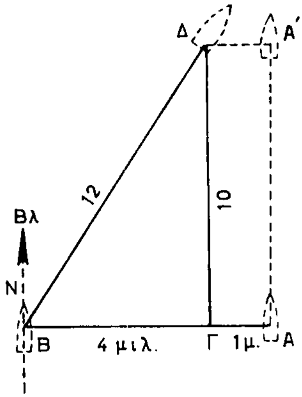
$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{4{,}54}{10} = 0{,}454 \text{ ὥρας.}$$

Κατὰ τὸν χρόνον ὅμως αὐτὸν τῶν 0,454 ὡρῶν τὸ Α μὲ 11 κόμβους θὰ διήνυσε διάστημα $s = \upsilon t = 11 \times 0{,}454 = 4{,}99$ μίλια. Ἄρα ἀπόστασις $A\Delta = 4{,}99$ καὶ $\Gamma\Delta = A\Gamma - A\Delta = 8{,}91 - 4{,}99 = 3{,}92$ μίλια, ἤτοι 3,92 ναυτ. μίλια διῆλθε τὸ Β πρώραθεν τοῦ Α.

8. Δύο πλοῖα Α καὶ Β πλέουν πρὸς βορρᾶν μὲ ταχύτητα 10 κόμβων. Τὸ πλοῖον Β, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται 5 μίλια πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, διατάσσεται νὰ αὐξήσῃ τὴν ταχύτητά του εἰς 12 κόμβους καὶ νὰ πλησιάσῃ τὸ Α εἰς ἀπόστασιν 1 μιλίου ἀπὸ τῆς ἀριστερᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ (σχ. 4·5 ι). Νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα πορεία τοῦ Β καὶ τὸ χρονικὸν διάστημα, κατὰ τὸ ὁποῖον θὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν ζητουμένην θέσιν.

Λύσις.

Ἔστωσαν Β καὶ Α αἱ θέσεις τῶν δύο πλοίων, ἔνθα $AB = 5$ μίλια, ΑΑ′ ἡ πορεία τοῦ Α καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ Βορρᾶ, ΒΔ ἡ ζητουμένη πορεία τοῦ πλοίου καὶ Β καὶ Δ ἡ θέσις τοῦ Β μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαταγῆς. Συνεπῶς $\Delta A' = 1$ μίλιον. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΑ′, τὴν ΔΓ, καὶ ἐπιλύομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν $\text{ΓΒ} = \text{ΑΒ} - \text{ΑΓ} = 5 - 1 = 4$ μίλια. Ἐπειδὴ τὰ διαστήματα ΓΔ καὶ ΒΔ διη-



Σχ. 4·5 ι.

νύθησαν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, εἶναι ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων, ἤτοι:

$$\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{10}{12} \text{ ἢ } \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}} = 1{,}2.$$

α) Εὕρεσις τῆς γωνίας Δ ἢ τῆς $\widehat{\text{ΝΒΔ}}$.

$$\text{τεμ}\,\Delta = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}} = 1{,}2 \text{ καὶ } \Delta = \widehat{\text{ΝΒΔ}} = 33^\circ\ 33',5.$$

β) Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς ΒΔ.

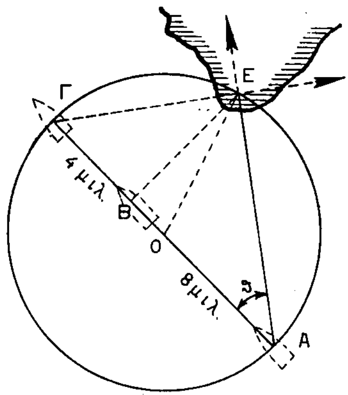
$$\text{στεμ}\Delta = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}} \text{ ἢ } \text{ΒΔ} = \text{ΒΓ}\,\text{στεμ}\Delta \text{ καὶ } \text{λογΒΔ} = \text{λογΒΓ} + \text{λογστεμ}\Delta.$$

$$\begin{array}{lrl} \text{ΒΓ} = 4 & \text{λογΒΓ} = & 0{,}60206 \\ \Delta = 33^\circ\ 33',5 & \text{λογστεμ}\Delta = & \underline{10{,}25744} \\ & \text{λογΒΔ} = & 0{,}85950 \\ & \text{ΒΔ} = & 7{,}236 \text{ μίλια.} \end{array}$$

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{7{,}236}{12} = 36',18'.$$

Ἀπάντησις: Πορεία Β 33° 33',5 Α καὶ χρόνος t = 36',18'.

9. Εἰς ὥραν 01.00 ἕνα πλοῖον παρατηρεῖ φάρον εἰς διόπτευσιν βορρᾶς. Εἰς ὥραν 01.40 διοπτεύει τοῦτον εἰς τὸ ἐγκάρσιον (τὸν παραλλάσσει) καὶ εἰς 02.00 τὸν διοπτεύει πρὸς Ἀπηλιώτην



Σχ. 4·5 κ.

(σχ. 4 · 5 κ). Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου ἦτο 12 κόμβοι, νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία του καὶ ἡ ἀπόστασις παραλλάξεως.

Λύσις.

Ἔστωσαν Α καὶ Γ αἱ θέσεις τοῦ πλοίου εἰς χρόνον ἀντιστοίχως 1ω καὶ 2ω, ἤτοι ΑΓ = 12 μίλια. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β (θέσις ὅπου παραλλάσσει τὸν φάρον) ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε (Ε = θέσις τοῦ φάρου). Προφανῶς τὸ τρίγωνον ΓΕΑ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ε.

Γνωρίζομεν [παράγρ. 4 · 3(5)] ὅτι:

$$\varepsilon\varphi^2\theta = \frac{\Gamma B}{BA} = \frac{4}{8} \qquad \text{καὶ}$$

$2\,\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\theta = \lambda o\gamma 4 - \lambda o\gamma 8 = 10{,}60206 - 0{,}90309 = 9{,}69897$ ἢ
$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\theta = 9{,}84948$ καὶ $\theta = 35^\circ\ 16'$.

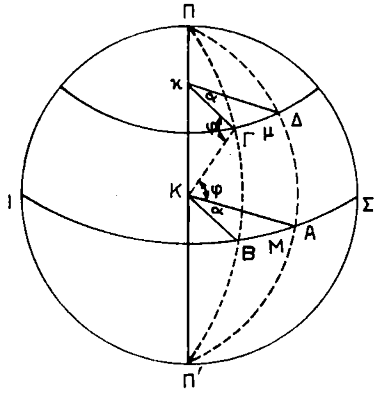
Ὑπολογισμὸς τῆς ΒΕ.

Ἐκ πορίσματος τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἔχομεν:
$(\mathrm{BE})^2 = 4 \times 8 = \sqrt{32}$ ἢ $\mathrm{BE} = 32 = 5{,}657$.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ΒΕ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ καὶ δι' ἐπιλύσεως ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΕΒ ἢ ΕΒΑ.

Ἀπάντησις: Πορεία Β 35° 16′ Ζ. Ἀπόστασις παραλλάξεως 5,657 ναυτ. μίλια.

10. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τοῦ μήκους τόξου παραλλήλου καὶ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τοῦ Ἰσημερινοῦ (σχ. 4·5λ).



Σχ. 4·5λ.

Λύσις.

Εἰς τὸ σχῆμα 4·5λ: Π = Πόλος, ΠΠ′ = ἄξων τῆς Γῆς, Κ = τὸ κέντρον τῆς γῆς, ΙΣ = Ἰσημερινός, ΑΒ = ἕνα τόξον τοῦ Ἰσημερινοῦ, ΔΓ = ἀντίστοιχον τόξον παραλλήλου πλάτους φ, κ τὸ κέντρον τοῦ παραλλήλου φ, καὶ κΓ = r ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ κύκλου.

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν: $\widehat{\mathrm{K}\kappa\Gamma} = 90^\circ$, $\mathrm{KB} = \mathrm{R}$, δηλαδὴ ἡ ἀκτὶς τοῦ Ἰσημερινοῦ καὶ συνεπῶς τῆς Γῆς, ἤτοι $\mathrm{KB} = \mathrm{K\Gamma} = \mathrm{K\Pi} = \mathrm{R}$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚκΓ ἔχομεν:

$\kappa\Gamma = \mathrm{K}\Gamma\sigma\upsilon\nu\varphi$ ἢ $\mathrm{r} = \mathrm{R}\sigma\upsilon\nu\varphi$ ἢ $\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}} = \sigma\upsilon\nu\varphi$ καὶ ἐπειδὴ $\dfrac{\mu}{\mathrm{M}} = \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}} = \sigma\upsilon\nu\varphi$, ἄρα ἔχομεν: $\mu = \mathrm{M}\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ἤτοι *τὸ μῆκος τόξου παραλλήλου τινὸς ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τοῦ Ἰσημερινοῦ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τοῦ πλάτους τοῦ παραλλήλου.*

Ἐὰν ἐκ τοῦ μήκους τόξου τοῦ παραλλήλου θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τοῦ Ἰσημερινοῦ, χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον:

$$\mathrm{M} = \mu\tau\varepsilon\mu\varphi.$$

Ἤτοι *τὸ μῆκος τόξου Ἰσημερινοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τόξου παραλλήλου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν τέμνουσαν τοῦ πλάτους τοῦ παραλλήλου.*

Σημείωσις: Τὸ μῆκος τόξου 1′ τοῦ Ἰσημερινοῦ εἶναι 1 ναυτικὸν μίλιον.

11. Ἐκ τοῦ ποδὸς ἑνὸς πύργου ἡ γωνία ἀνυψώσεως τῆς κορυφῆς (κατακόρυφος γωνία) μιᾶς στήλης εἶναι 60°. Ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ πύργου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 50 ft, ἡ γωνία ἀνυψώσεως (κατακόρυφος) εἶναι 30° (σχ. 4·5 μ). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς στήλης.

Λύσις.

Ἔστωσαν ΑΒ ἡ στήλη καὶ ΓΔ ὁ πύργος. Φέρομεν τὴν ΓΕ // ΔΒ. Ἔστω $\mathrm{AB}=x$, ὁπότε $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}-\mathrm{BE}=x-50$, καὶ ἔστω $\Delta\mathrm{B}=\Gamma\mathrm{E}=y$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν:

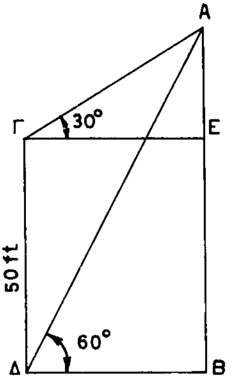
$$y = x\sigma\varphi 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΕ ἔχομεν:

$$y = (x-50)\sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}\,(x-50).$$

Ἑπομένως $\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(x-50)$

$$x = 3(x-50) \text{ καὶ } x = 75.$$

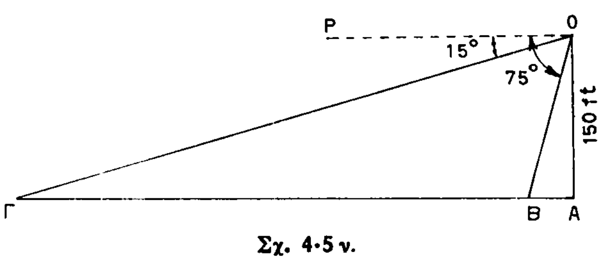


Σχ. 4·5 μ.

Ἀπάντησις: Τὸ ὕψος τῆς στήλης εἶναι 75 ft.

12. Ἐκ τῆς κορυφῆς ἑνὸς κρημνοῦ ὕψους 150 ποδῶν αἱ γωνίαι βάθους δύο λέμβων νοτίως τοῦ παρατηρητοῦ εἶναι 15° καὶ 75°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς των (σχ. 4·5 ν) δεδομένων τῶν:

$$\sigma\varphi 15^\circ = 2+\sqrt{3} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\varphi 75^\circ = 2-\sqrt{3}.$$



Σχ. 4·5 ν.

Λύσις.

Ἔστωσαν ΟΑ ὁ κρημνός, Β καὶ Γ αἱ λέμβοι καὶ ΟΡ ἡ διὰ τοῦ Ο ὁριζόντιος γραμμή, ὁπότε:

$\widehat{\text{ΡΟΓ}} = 15^\circ$ καὶ $\widehat{\text{ΡΟΒ}} = 75^\circ$ καὶ ἑπομένως $\widehat{\text{ΟΓΑ}} = 15^\circ$ καὶ $\widehat{\text{ΟΒΑ}} = 75^\circ$.

Ἐπίσης ἔστωσαν: $ΓΒ = x$, $ΑΒ = y$, ὁπότε $ΓΑ = x + y$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΑ ἔχομεν:

$$y = 150σφ75^\circ = 150(2 - \sqrt{3}) = 300 - 150\sqrt{3}.$$

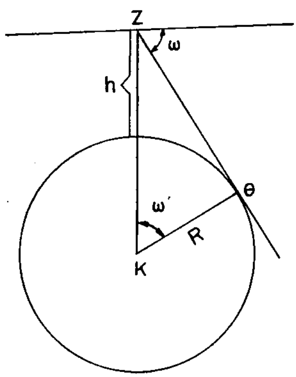
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΑ.

$$x + y = 150σφ15^\circ = 150(2 + \sqrt{3}) = 300 + 150\sqrt{3}$$

καὶ δι' ἀφαιρέσεως $x = 300\sqrt{3} = 519{,}6$.

Ἀπάντησις: Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι 519,6 ft.

13. Ἔστω Κ ἡ Γῆ καὶ h τὸ ὕψος τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ (σχ. 4·5 ξ). Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ γωνία ω (ἤτοι τὸ βάθος



Σχ. 4·5 ξ.

τοῦ ὁρίζοντος) καὶ β) τὸ ὕψος τοῦ παρατηρητοῦ, ἂν δίδεται ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς R καὶ ἡ γωνία ω.

Λύσις.

α) Ἐκ τοῦ σχήματος 4·5 ξ ἡ γωνία $ω = ω'$, ὡς συμπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΘΚ ἔχομεν:

$$συνω = \frac{ΚΘ}{ΚΖ} = \frac{R}{R + h}. \qquad (1)$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\omega(R+h)=R \quad \kappa\alpha\iota$$

$$R\sigma\upsilon\nu\omega+h\sigma\upsilon\nu\omega=R \quad \eta \quad h\sigma\upsilon\nu\omega=R-R\sigma\upsilon\nu\omega \quad \kappa\alpha\iota$$

$$h=\frac{R-R\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=R\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \;\; \eta \;\; \frac{h}{2}=\frac{R}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}.$$

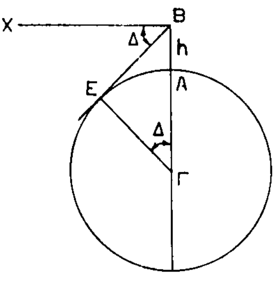
Ἀλλὰ $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}=\eta\mu\pi\rho\omega$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$\frac{h}{2}=R\cdot\tau\epsilon\mu\omega\cdot\eta\mu\pi\rho\omega. \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) δύναται νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων.

Ὁμοίως, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος τοῦ παρατηρητοῦ καὶ τὸ βάθος τοῦ ὁρίζοντος, ὑπολογίζομεν τὴν ἀκτῖνα R τῆς γῆς.

14. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ὁρίζοντος τῆς θαλάσσης (σχ. 4·5 ο).



Σχ. 4·5 ο.

Λύσις.

Ἔστω (BX) τὸ ἐπίπεδον τοῦ φαινομένου ὁρίζοντος, BE=τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁρατοῦ ὁρίζοντος, ὁπότε $\widehat{XBE}$ = τὸ βάθος = Δ, $\widehat{AB}$ τὸ ὕψος τοῦ ὀφθαλμοῦ = h, ΑΓ ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς = R = ΓΕ.

Τὸ h συγκρινόμενον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς γῆς εἶναι μικρὸν καὶ ἑπομένως τὸ τόξον ΑΕ εἶναι μικρὸν καὶ περίπου ἰσοῦται πρὸς ΒΕ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ ἔχομεν ὅτι:

$(\mathrm{BE})^2 = (\mathrm{B\Gamma})^2 - (\mathrm{\Gamma E})^2$

$(\mathrm{BE})^2 = (\mathrm{R} + \mathrm{h})^2 - \mathrm{r}^2$

$(\mathrm{BE})^2 = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{Rh} + \mathrm{h}^2 - \mathrm{R}^2$

$(\mathrm{BE})^2 = 2\mathrm{Rh} + \mathrm{h}^2$ καὶ ἐπειδὴ τὸ h εἶναι μικρόν, δύναται τὸ h^2 νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀμελητέον, ὁπότε $(\mathrm{BE})^2 = 2\mathrm{Rh}$ περίπου. Ἤτοι ἔχομεν:

$$\mathrm{BE} = \sqrt{2\mathrm{Rh}}\,.$$

Ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου $BE = \sqrt{2Rh}$.

Ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν τοῦ ὁρίζοντος τῆς θαλάσσης δι' ὕψος ὀφθαλμοῦ 100 ft καὶ δι' ἀκτῖνα τῆς γῆς 20888761 ft.

Λύσις.

Ἀπόστασις $\mathrm{BE} = \sqrt{2 \times 20888761 \times 100} = \sqrt{4177752200}$ ft, ὁπότε λογαριθμικῶς ἔχομεν:

$$\text{λογ ἀποστάσεως BE} = \frac{1}{2}\ 9{,}62094 = 4{,}81047$$

καὶ πρὸς μετατροπὴν τῆς ἀποστάσεως εἰς μίλια ἔχομεν:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{2\mathrm{Rh}} & \text{λογ}\ \sqrt{2\mathrm{Rh}} = 4{,}81047 & \\ 6080\ \text{ft} & \text{λογ}\ 6080 = 3{,}78390 & \\ & \text{λογ BE} = 1{,}02657 & \text{καὶ BE} = 10{,}6\ \text{μίλια.} \end{array}$$

Ἀπάντησις. Ἀπόστασις BE = 10,6 μίλια.

Ἡ ὑπολογισθεῖσα αὐτὴ ἀπόστασις δὲν περιλαμβάνει καὶ τὸ ἀβέβαιον ἀποτέλεσμα τῆς διαθλάσεως, τὸ ὁποῖον αὐξάνει τὴν ἀπόστασιν κατὰ ποσὸν ποικιλοτρόπως ἐκτιμώμενον ἀπὸ 1/10 ἕως 1/15 αὐτῆς. Οὕτως, ἐὰν προσθέσωμεν τὸ 1/12 τῶν 10,6 μιλ., ἔχομεν ὅτι $0{,}88 + 10{,}6 = 11{,}48$ μιλ. = ἀπόστασις ὁρίζοντος θαλάσσης. Τοῦτο συμφωνεῖ περίπου καὶ πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ κατωτέρω τύπου:

$$\text{Ἀπόστασις} = 1{,}15\sqrt{\text{ὕψος ὀφθαλμοῦ}} = 1{,}15\sqrt{100} = 1{,}15 \times 10 = 11{,}5\ \text{μίλ.}$$

15. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος τοῦ παρατηρητοῦ καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς γῆς, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία βάθους (σχ. 4·5 π).

Αἱ γωνίαι ΧΒΕ = βάθος καὶ $\widehat{\mathrm{B\Gamma E}}$ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους. Ἔστω δὲ $\widehat{\mathrm{B\Gamma E}} = \widehat{\Delta}$.

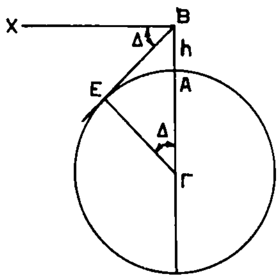
Συνεπῶς ἔχομεν ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\widehat{\Delta} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{\sqrt{2\mathrm{Rh}}}{\mathrm{R}}.$$

Ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi\widehat{\Delta} = \dfrac{\sqrt{2Rh}}{R}$.

Ζητεῖται ἡ γωνία βάθους δι' ὕψος 100 ft.

Ἡ ἀκτὶς R τῆς γῆς θεωρεῖται ἴση πρὸς 20888761 ft = 3956 ναυτ. μίλια.



Σχ. 4·5 π.

Ἐπιλύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ἔχομεν:

$2\mathrm{Rh} = 2 \times 20888761 \times 100 = 4177752200$, καὶ $\lambda o\gamma 2\mathrm{Rh} = 9{,}62094$,

ἤτοι $\lambda o\gamma\sqrt{2\mathrm{Rh}} = 4{,}81047 \; (+10)$

$$\lambda o\gamma \mathrm{R} = \underline{7{,}31982}$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\Delta = 7{,}49065 \text{ καὶ } \Delta = 10'38'' = \text{βάθος}.$$

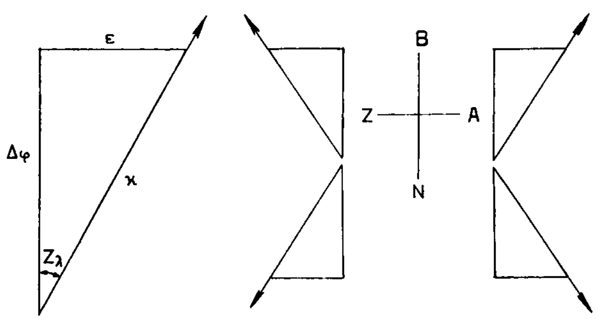
Ἀπὸ τὸ ὑπολογισθὲν ποσὸν βάθους πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ, λόγω τοῦ ἀβεβαίου ἀποτελέσματος τῆς διαθλάσεως, περίπου τὸ 1/12, ἤτοι:

$$\begin{aligned} \Delta &= 10'38'' \\ \text{᾿Αφαίρεσις} &= \underline{\quad 53''} \\ \text{Βάθος διὰ } 100\text{ft} &= \ \ 9'45''. \end{aligned}$$

Οἱ πίνακες Norie's δι' ὕψος 100 ft δίδουν βάθος $= 9'48''$. Ἡ γωνία τοῦ βάθους δύναται κατὰ προσέγγισιν νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τύπου $0{,}98\sqrt{\text{ὕψος ὀφθαλμοῦ}}$.

4·6 Τρίγωνον πλεύσεως.

Τὸ τρίγωνον πλεύσεως εἶναι ἕνα ἐπίπεδον ὀρθογώνιον τρίγωνον προσανατολισμένον, μὲ καθέτους πλευρὰς τὴν ἀποχώρησιν (ε) καὶ τὴν διαφορὰν πλάτους ($\Delta\varphi$) καὶ μὲ ὑποτείνουσαν τὸ δίαρμα ($\varkappa$). Ἡ μία δὲ ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ παριστᾷ τὴν πορείαν (πλεῦσιν) μας (Z_λ) κατὰ τὸν λοξοδρομικὸν πλοῦν (σχ. 4·6 α).



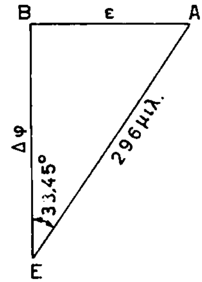
Σχ. 4·6 α.

1η Περίπτωσις.

Δίδεται ἡ ἀληθὴς πορεία (Z_λ) καὶ ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις καὶ ζητοῦνται ἡ διαφορὰ πλάτους καὶ ἡ ἀποχώρησις (ε).

Παράδειγμα.

Ἕνα πλοῖον ἐκ μιᾶς θέσεως πλάτους (φ_ε) $= 48^\circ 40'$Β πλέει πρὸς Β 33°45΄Α 296 μίλια (σχ. 4·6 β). Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλάτος ἀφίξεως καὶ ἡ ἀποχώρησις.



Σχ. 4·6 β.

Λύσις.

Ἔστω Ε τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως καὶ Α τὸ σημεῖον ἀφίξεως, ἤτοι ΕΑ = 296 μίλια, ΕΒ ὁ μεσημβρινὸς τοῦ Ε, ὁπότε $\widehat{BEA} =$ 33°45΄, καὶ ΑΒ ὁ παράλληλος τοῦ Β, ὁπότε ΑΒ = ε καὶ ΒΕ = Δφ.

α) Εὕρεσις τῆς ἀποχωρήσεως (ε).

ε = διανυθεῖσα ἀπόστασις × ημZ_λ = 296 × ημ(33°45΄).

$$\lambda o\gamma \varepsilon = \lambda o\gamma\, 296 + \lambda o\gamma \eta\mu\,(33^\circ 45')$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 296 &= 2,47129 \\ \lambda o\gamma \eta\mu\ 33^\circ 45' &= \underline{9,74474} \quad + \\ \lambda o\gamma \varepsilon &= 2,21603 \\ \varepsilon &= 164,4 \text{ ναυτ. μίλια.} \end{aligned}$$

β) Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς πλάτους (Δφ).

(Δφ) = διανυθεῖσα ἀπόστασις × συν πορείας = 296 × (33°45΄).

$$\lambda o\gamma\,(\Delta\varphi)'\lambda o\gamma\, 296 + \lambda o\gamma \sigma\upsilon\nu(33^\circ 45').$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 296 &= 2,47129 \\ \lambda o\gamma \sigma\upsilon\nu 33^\circ 45' &= \underline{9,91985} \quad + \\ \lambda o\gamma\, \Delta\varphi &= 2,39114 \\ \Delta\varphi &= 246,1' \quad \text{ἢ } 246,1 \text{ ναυτ. μίλια.} \end{aligned}$$

γ) Εὕρεσις πλάτους ἀφίξεως.

$$\begin{array}{r} \varphi_\varepsilon = 48^\circ\ 40'\mathrm{B} \\ \Delta\varphi = 246',1 \text{ ἢ } \underline{\ 4^\circ\ \ 6'\ } \\ \varphi_\alpha = 52^\circ\ 46' \end{array} +$$

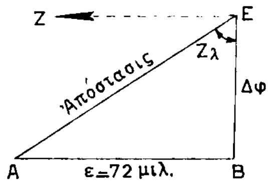
Ἀπάντησις. $\varphi_\alpha = 52^\circ\ 46'\mathrm{B}$ καὶ $\varepsilon = 164{,}4$ μίλια.

2α Περίπτωσις.

Δίδεται ἡ διαφορὰ πλάτους καὶ ἡ ἀποχώρησις καὶ ζητεῖται ἡ ἀληθὴς πορεία καὶ ἡ ἀπόστασις.

Παράδειγμα.

Ἕνα πλοῖον ἐκ μιᾶς θέσεως πλάτους $\varphi_\varepsilon = 32^\circ\,38'$ B πλέει ἐπὶ μιᾶς πορείας μεταξὺ Νότου καὶ Ζεφύρου, ἕως ὅτου φθάνῃ εἰς εὑρεθὲν διὰ παρατηρήσεως $\varphi_\alpha = 31^\circ\ 13'$B (σχ. 4·6γ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς πορεία του καὶ ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις, ἐὰν ἡ ἀποχώρησις εἶναι $\varepsilon = 72$ μίλια.



Σχ. 4·6γ.

Λύσις.

Ἔστω E τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως, A τὸ σημεῖον ἀφίξεως, EB ὁ μεσημβρινὸς τοῦ E καὶ AB ὁ παράλληλος τοῦ A, ὁπότε $\widehat{\mathrm{AEB}} = \mathrm{Z}_\lambda$, EA = ἀπόστασις, EB = Δφ καὶ AB = 72 μίλια.

α) Εὕρεσις τῆς Δφ.

$$\begin{array}{l} \varphi_\varepsilon = 32^\circ\ \ 38'\mathrm{B} \\ \underline{\varphi_\alpha = 31^\circ\ \ 13'\mathrm{B}} \\ \Delta\varphi = 1^\circ\ \ 25' \quad \text{ἢ 85 ναυτ. μίλια.} \end{array}$$

β) Εὕρεσις τῆς πορείας.

$$\varepsilon\varphi Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta\varphi} \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma \varepsilon\varphi Z_\lambda = \lambda o\gamma \varepsilon - \lambda o\gamma \Delta\varphi.$$

$$\begin{array}{lrl} \varepsilon = 72 & \lambda o\gamma 75 = & 11{,}85733 \\ \Delta\varphi = 85 & \lambda o\gamma 85 = & \underline{\ 1{,}92942} \; - \\ & \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, Z_\lambda = & \ 9{,}92791 \\ & Z_\lambda = & \text{N } 40^\circ\ 16'\text{Z}. \end{array}$$

γ) Εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως.

$$\text{Ἀπόστασις} = \Delta\varphi \tau\varepsilon\mu\, Z_\lambda$$

$$\lambda o\gamma\ \text{Ἀποστάσεως} = \lambda o\gamma \Delta\varphi + \lambda o\gamma \tau\varepsilon\mu\, Z_\lambda\,.$$

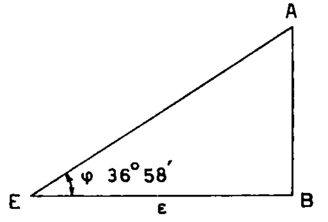
$$\begin{array}{lrl} \Delta\varphi = 85 & \lambda o\gamma 85 = & 1{,}92942 \\ Z_\lambda = 40^\circ\ 16' & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu 40^\circ\ 16' = & \underline{10{,}11745} \; + \\ & \lambda o\gamma\ \text{ἀποστ.} = & 12{,}04687\ (-10) \end{array}$$

ἡ ἀπόστασις $= 111{,}4$ μίλια.

Ἀπάντησις: $Z_\lambda = \text{N } 40^\circ\ 16'\text{Z}$ καὶ ἀπόστασις $= 111{,}4$ ναυτ. μίλια.

3η Περίπτωσις.

Δίδεται διαφορὰ μήκους (Δ_λ) μεταξὺ δύο θέσεων, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου, καὶ ζητεῖται ἡ ἀπόστασίς των.



Σχ. 4·6 δ.

Παράδειγμα.

Ἕνα πλοῖον ἐκ $\varphi_\varepsilon = 36^\circ\ 58'$Β καὶ $\lambda_\varepsilon = 20^\circ\ 25'$Δ πλέει πρὸς μίαν νῆσον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου καὶ εἰς $\lambda_\alpha = 25^\circ\ 13'$Δ (σχ. 4·6δ).

Ποίαν ἀπόστασιν πρέπει νὰ διανύσῃ, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν νῆσον;

Λύσις.

α) Εὕρεσις τῆς Δ_λ.

$$\begin{array}{l} \lambda_\varepsilon = 20^\circ\ 25'\Delta \\ \underline{\lambda_\alpha = 25^\circ\ 13'\Delta} \\ \Delta_\lambda = 04^\circ\ 48' = 288'. \end{array}$$

Ἔστω Ε τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως καὶ Β τὸ σημεῖον ἀφίξεως, ὁπότε ΕΑ $= \Delta_\lambda$ εἰς τὸ $\varphi_\varepsilon = 36^\circ 58'$ καὶ ΕΒ εὐθεῖα σχηματίζουσα γωνίαν μὲ τὴν ΕΑ ἴσην πρὸς τὸ $\varphi_\varepsilon = 36^\circ\ 58'$.

Ἐπίσης ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΒ, ὁπότε ΕΒ $=$ ε.

β) Εὕρεσις τῆς ε.

$$\varepsilon = \Delta_\lambda\ \text{συνφ}.$$

$$\text{λογ}\varepsilon = \text{λογ}\Delta_\lambda + \text{λογσυνφ}$$

$$\begin{array}{lr} \Delta_\lambda = 280 & \text{λογ}\,28^\circ = 2{,}45939 \\ \varphi = 36^\circ 58' & \text{λογσυν}36^\circ\ 58' = \underline{9{,}90254} \\ & \text{λογ}\varepsilon = 2{,}36193 \\ & \varepsilon = 230{,}1\ \text{ναυτ. μίλια.} \end{array} +$$

Ἀπάντησις: Διανυθεῖσα ἀπόστασις $= 230{,}1$ ναυτ. μίλια.

4η Περίπτωσις.

Δίδεται ἡ ἀληθὴς πορεία (Z_λ) καὶ ἡ διαφορὰ πλάτους καὶ ζητεῖται ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις καὶ ἡ ἀποχώρησις.

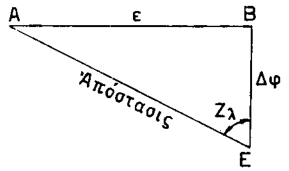
Παράδειγμα.

Ἕνα πλοῖον ἐκ πλάτους $\varphi_\varepsilon = 3^\circ\ 54'$Ν ἔπλευσεν πρὸς Β $53^\circ\ 26',3$Ζ καὶ ἔφθασεν εἰς $\varphi_\alpha = 2^\circ\ 14'$Β (σχ. 4·6 ε). Νὰ εὑρεθῇ ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις καὶ ἡ ἀποχώρησις.

Λύσις.

α) Εὕρεσις Δφ.

$$\begin{array}{l} \varphi_\alpha = 2^\circ\ 14'B \\ \underline{\varphi_\varepsilon = 3^\circ\ 54'B} \ + \\ \Delta_\varphi = 6^\circ\ 08' \quad \text{ἢ } 368 \text{ ναυτ. μίλια.} \end{array}$$



Σχ. 4·6 ε.

β) Ἀπόστασις $=$ ΔφτεμΖ$_\lambda$.

$$\begin{array}{lrl} \Delta\varphi = 368 & \lambda o\gamma 368 = & 2{,}56585 \\ Z_\lambda = 53^\circ\, 26',3 & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu 53^\circ\ 26',3 = & \underline{10{,}22501} \ + \\ & \lambda o\gamma\acute{\alpha}\pi o\sigma\tau. = & 12{,}79086\,(-10) \\ & \acute{\alpha}\pi o\sigma\tau. = & 617{,}8 \text{ ναυτ. μίλια.} \end{array}$$

γ) Εὕρεσις ἀποχωρήσεως (ε).

$$\varepsilon = \Delta\varphi\varepsilon\varphi\ Z_\lambda \text{ καὶ } \lambda o\gamma\varepsilon = \lambda o\gamma\Delta\varphi + \lambda o\gamma\varepsilon\varphi Z_\lambda\,.$$

$$\begin{array}{lrl} \Delta\varphi = 368 & \lambda o\gamma 368 = & 2{,}56585 \\ Z_\lambda = 53^\circ\ 26',3 & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\, 53^\circ\ 26',3 = & \underline{10{,}12981} \ + \\ & \lambda o\gamma\ \varepsilon = & 12{,}69566\ (-10) \\ & \varepsilon = & 496{,}2 \text{ μίλια.} \end{array}$$

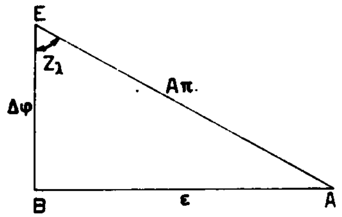
Ἀπάντησις: Ἀπόστασις 617,8 ναυτ. μίλια καὶ ἀποχώρησις 496,2 ναυτ. μίλια.

5η Περίπτωσις.

Δίδεται ἡ ἀληθὴς πορεία καὶ ἡ ἀποχώρησις καὶ ζητεῖται ἡ διαφορὰ πλάτους καὶ ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις.

Παράδειγμα.

Ἕνα πλοῖον ἐκ πλάτους $\varphi_\varepsilon = 15^\circ\ 55'$ N πλέει πρὸς N 61°



Σχ. 4·6 ζ.

52′,5, A, ἕως ὅτου ἡ ἀποχώρησίς του ἦτο 115 μίλια (σχ. 4·6 ζ).

Ζητεῖται τὸ πλάτος ἀφίξεως καὶ ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις.

Λύσις.

α) Εὕρεσις τῆς Δφ.

$$\Delta\varphi = \varepsilon\,\sigma\varphi\, Z_\lambda\,.$$

$$\lambda o\gamma\, \Delta\varphi = \lambda o\gamma\, \varepsilon + \lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, Z_\lambda$$

$$\begin{array}{lrl} \varepsilon = 115 & \lambda o\gamma 115 = & 2{,}06070 \\ Z_\lambda = 61^\circ 52',5 & \lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, 61^\circ 52',5 = & \underline{9{,}72796}\ + \\ & \lambda o\gamma\, \Delta\varphi = & 11{,}78866\ (-10) \\ & \Delta\varphi = & 26^\circ 1',8 \\ & \Delta\varphi = & 1^\circ 1',8. \end{array}$$

β) Εὕρεσις Ἀποστάσεως.

$$\text{Ἀπόστασις} = \varepsilon\,\sigma\tau\mu Z_\lambda$$

$$\lambda o\gamma\ \text{ἀποστάσεως} = \lambda o\gamma \varepsilon + \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu Z_\lambda\,.$$

$$\begin{array}{lrl} \varepsilon = 115 & \lambda o\gamma\, 115 = & 2{,}06070 \\ Z_\lambda = 61^\circ 52',5 & \lambda o\gamma\, \sigma\tau\varepsilon\mu\, 61^\circ 52',5 = & \underline{10{,}05457}\ + \\ & \lambda o\gamma\ \text{ἀποστ.} = & 12{,}11527\ (-10) \\ & \text{ἀποστ.} = & 1304\ \text{ναυτ. μίλια,} \end{array}$$

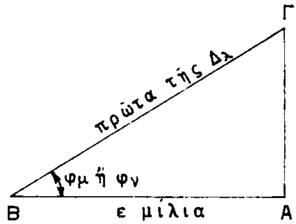
Ἀπάντησις: Πλάτος ἀφίξεως 1° 1′,8 καὶ ἀπόστασις 1304 ναυτ. μίλια.

4·7 Τρίγωνον μέσου πλάτους.

Καλεῖται *τρίγωνον μέσου πλάτους τὸ ἐπίπεδον ὀρθογώνιον* τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΒ ἐκφράζει τὰ μίλια τῆς ἀποχωρήσεως ε, ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ τὰ πρῶτα λεπτὰ τῆς Δ_λ καὶ ἡ γωνία Β τὸ μέσον πλάτος φ_μ ἢ φ_ν (μέσον πλάτος ἀναγωγῆς) (σχ. 4·7 α) Ἤτοι:.

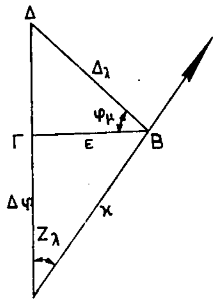
$$\varepsilon = \Delta_\lambda \text{συν}\varphi_\mu \qquad \text{ἢ} \qquad \varepsilon = \Delta_\lambda \text{συν}\varphi_\nu$$

Ἀποχώρησις = διαφορὰ μήκους × συνημίτονον μέσου πλάτους.



Σχ. 4·7 α.

$\Delta_\lambda = \varepsilon \cdot \text{τεμ}\varphi_\mu \cdot$ Διαφορὰ μήκους = Ἀποχώρησις × τέμνουσα μέσου πλάτους ἢ μέσου πλάτους ἀναγωγῆς.



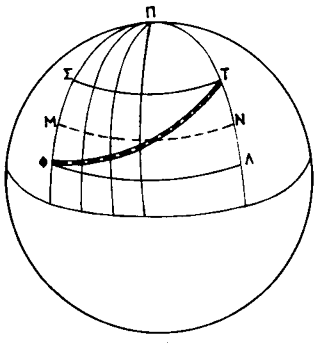
Σχ. 4·7 β.

Εἰς τὸ σχῆμα 4·7 β εἰκονίζεται συνδυασμὸς τῶν τριγώνων μέσου πλάτους καὶ τριγώνου πλεύσεως.

4·8 Λοξοδρομία (Rhumb line).

Ἕνας τρόπος πλεύσεως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης εἶναι ἡ λοξοδρομία, δηλαδὴ ἡ πλεῦσις ἐπὶ μιᾶς καμπύλης, ἡ ὁποία τέμνει τοὺς μεσημβρινοὺς ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἐάν τις πλέῃ ἐπὶ παραλλήλου κύκλου, θὰ πρέπῃ νὰ πλέῃ λοξοδρομικῶς, διότι τέμνει τοὺς μεσημβρινοὺς ὑπὸ τὴν σταθερὰν γωνίαν τῶν 90°. Τὸ αὐτὸ φυσικὰ ἰσχύει, ὅταν πλέωμεν ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ἢ ἐπὶ οἱουδήποτε μεσημβρινοῦ.

Εἰς τὸ σχῆμα 4·8α ἡ καμπύλη ΦΤ παριστᾶ μίαν λοξοδρομίαν μὲ σημεῖον ἐκκινήσεως τὸ Φ καὶ ἀφίξεως τὸ Τ.



Σχ. 4·8α.

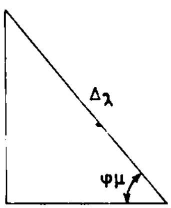
Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκκινεῖ τις ἐκ τοῦ μεσημβρινοῦ ΠΦ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Φ καὶ θέλει νὰ πλεύσῃ ἐπὶ τοῦ παραλλήλου τοῦ Φ, ἕως ὅτου φθάσῃ εἰς τὸν μεσημβρινὸν ΠΤ, τότε εἶναι προφανὲς ὅτι θὰ διανύσῃ τὸ μῆκος τοῦ παραλλήλου ΦΛ. Ὁμοίως, ἐὰν πλεύσῃ ἐπὶ τοῦ παραλλήλου τοῦ σημείου ἀφίξεως καὶ ἐκ τοῦ Σ πρὸς τὸ Τ, θὰ διανύσῃ τὸ τόξον ΣΤ. Ἤδη ἂς ἔλθωμεν εἰς τὴν λοξοδρομικήν μας πλεῦσιν ἐκ τοῦ σημείου Φ εἰς τὸ Τ. Τότε ἡ μετατόπισις, τὴν ὁποίαν ὑφιστάμεθα π.χ. πρὸς Ἀπηλιώτην, δὲν θὰ εἶναι οὔτε τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΦΛ οὔτε τοῦ ΣΤ, ἀλλὰ θὰ εἶναι ἕνα τόξον, τὸ μῆκος τοῦ ὁποίου θὰ κυμαίνεται μεταξὺ αὐτῶν τῶν δύο. Τὸ τόξον αὐτὸ δυνάμεθα μὲ ἀρκετὴν ἀκρίβειαν νὰ τὸ τοποθετήσωμεν (ἐφ' ὅσον ὁ πλοῦς μας δὲν ὑπερβαίνει τὰ 600 μίλια) ἐπὶ ἑνὸς παραλλήλου, τοῦ ΜΝ, ὁ ὁποῖος κεῖται μεταξὺ τῶν ΦΛ καὶ ΣΤ, καὶ εἰς τὸ μέσον πλάτος αὐτῶν (μέση τιμὴ τοῦ πλάτους των).

Τὴν μετατόπισιν πρὸς Ἀπηλιώτην ἢ Ζέφυρον (εἰς τὴν περίπτωσίν μας πρὸς Ἀπηλιώτην) κατὰ τὸν λοξοδρομικόν μας πλοῦν ὀνομάζομεν *ἀποχώρησιν* (Departure) καὶ τὴν παριστῶμεν διὰ τοῦ Ἑλληνικοῦ γράμματος ε.

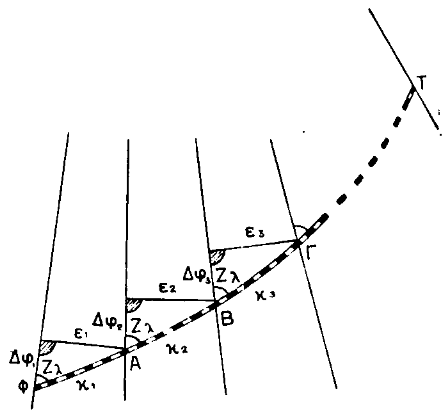
Τρίγωνον μέσου πλάτους.

Ἡ ἀποχώρησις ε ὡς τόξον παραλλήλου κύκλου, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ συνδέεται διὰ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τοῦ ἰσημερινοῦ, δηλαδὴ τῆς διαφορᾶς μήκους τῶν σημείων ἐκκινήσεως καὶ ἀφίξεως διὰ τῆς γνωστῆς σχέσεως : $\varepsilon = \Delta_\lambda \sigma\upsilon\nu\varphi_\mu$, ὅπου $\varphi_\mu =$ μέσον πλάτος.

Ἡ ἀνωτέρω τριγωνομετρικὴ σχέσις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδοθῇ δι' ἑνὸς ὀρθογωνίου ἐπιπέδου τριγώνου, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 4·8 β, ὅπου ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἐκπροσωπεῖ τὴν ἀποχώρησιν ε εἰς μίλια, ἡ ὑποτείνουσα τὴν διαφορὰν μήκους Δ_λ εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ ἡ φ_μ τὴν μεταξύ των ὀξεῖαν γωνίαν τοῦ τριγώνου. Τὸ τρίγωνον αὐτὸ ὀνομάζομεν *τρίγωνον μέσου πλάτους.*



Σχ. 4·8 β.



Σχ. 4·8 γ.

Τρίγωνον πλεύσεως.

Ἂς ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὴν λοξοδρομίαν ΦΤ (σχ. 4·8 γ). Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κ.λ.π. εἶναι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα, ὅπου αὕτη τέμνει διαφόρους μεσημβρινούς. Ἐὰν ἐκ τῶν Α,Β,Γ κ.λ.π. φέρωμεν τοὺς ἀντιστοίχους παραλλήλους, τότε λόγω τοῦ μικροῦ τῶν ἀποστάσεων εἶναι δυνατὸν τὰ τόξα αὐτὰ νὰ τὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀποχωρήσεις, ἀλλὰ ἐκ τῶν σχηματιζομένων μικρῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἔχομεν :

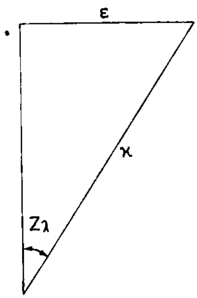
$$\varepsilon_1 = \kappa_1 \eta\mu Z_\lambda$$
$$\varepsilon_2 = \kappa_2 \eta\mu Z_\lambda$$
$$\varepsilon_3 = \kappa_3 \eta\mu Z_\lambda$$

» καὶ διὰ προσθέσεως

» κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$\varepsilon = \kappa \eta\mu Z_\lambda,$$

ὅπου τὸ ε παριστᾶ τὴν ὁλικὴν ἀποχώρησιν κατὰ τὸν λοξοδρομικὸν πλοῦν ἐκ τοῦ Φ πρὸς τὸ Τ, τὸ κ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων, δηλαδὴ τὸ μῆκος τοῦ λοξοδρομικοῦ πλοῦ καὶ τὸ Z_λ τὴν σταθεράν μας πλεῦσιν.



Σχ. 4·8 δ.

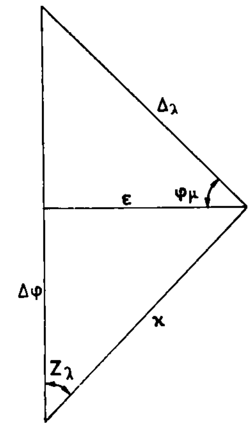
Ἡ ἀνωτέρω σχέσις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδοθῇ εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 4·8 δ, μὲ κάθετον πλευρὰν τὴν ἀποχώρησιν, μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ἀπόστασιν (δίαρμα) κατὰ τὸν λοξοδρομικὸν πλοῦν καὶ μὲ ὀξεῖαν γωνίαν τὴν σταθερὰν πλεῦσιν Z_λ. Τὸ τρίγωνον τοῦτο ὀνομάζομεν *τρίγωνον πλεύσεως*.

Ὁμοίως, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 4·8 γ, ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰς καθέτους πλευρὰς $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_3$, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\varepsilon_1 = \Delta\varphi_1 \varepsilon\varphi Z_\lambda$$
$$\varepsilon_2 = \Delta\varphi_2 \varepsilon\varphi Z_\lambda$$
$$\varepsilon_3 = \Delta\varphi_3 \varepsilon\varphi Z_\lambda$$
$$\cdot \quad \ldots$$
$$\cdot \quad \ldots$$
$$\cdot \quad \ldots \qquad \text{ἢ δι' ἀθροίσεως}$$

$$\varepsilon = \Delta\varphi \varepsilon\varphi Z_\lambda\ ,$$

ὅπου ε ἡ ἀναχώρησις, Δφ ἡ διαφορὰ πλάτους τῶν σημείων ἐκκινήσεως καὶ ἀφίξεως καὶ Z_λ ἡ σταθερά μας πλεῦσις.



Σχ. 4·8 ε.

Τὰ δύο τρίγωνα πλεύσεως καὶ μέσου πλάτους συνδυαζόμενα μᾶς δίδουν τὸ σχῆμα 4·8 ε.

4·9 Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

1. Ἕνα πλοῖον μὲ πορείαν Β 39° Ζ φθάνει εἰς ἕνα σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἔφθανε τὸ πλοῖον, ἐὰν ἔπλεε 113 μίλια πρὸς Δυσμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις.

(*Ἀπάντ.* 179,6' μίλια)

2. Ἕνα πλοῖον διὰ νὰ πλεύσῃ ἐκ σημείου Α εἰς Β πρέπει νὰ πλεύσῃ 107 μίλια πρὸς Βορρᾶν καὶ 132,1 μίλια πρὸς Ἀπηλιώτην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

(*Ἀπάντ.* Πορεία Β 51° Α. Ἀπόστασις 170 μίλια)

3. Ἕνα σημεῖον ἀκτῆς διοπτεύεται πρὸς Β 40° Α ἐξ ἀποστάσεως 15 μιλίων. Ἐὰν τὸ πλοῖον πλεύσῃ πρὸς Βορρᾶν μὲ ταχύτητα 9 κόμβων, εἰς ποῖον χρόνον τὸ πλοῖον θὰ εὑρεθῇ ἐν παραλλάξει;

(*Ἀπάντ.* Χρόνος 1^{ω} $16{,}6^{\lambda}$. Ἀπόστασις 9,64 μίλια)

4. Ἕνα σημεῖον Β εὑρίσκεται 9 μίλια Ἀνατολικῶς τοῦ Α καὶ τὸ

σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται Νοτίως τοῦ Β, ἀπέχει 16 μίλια ἐκ τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Β καὶ Γ.

(*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις ΒΓ = 13,23 μίλια)

5. Ὑπολογίσατε τὸ γραμμικὸν μῆκος τοῦ παραλλήλου πλάτους 35°. (*Ἀπάντ.* 17692,3 μίλια)

6. Μὲ ποίαν ταχύτητα περιφέρεται σημεῖον κείμενον ἐπὶ παραλλήλου πλάτους 60°; (*Ἀπάντ.* = 450 μίλια/ὥραν)

7. Ἕνα πλοῖον πλέει ἐπὶ 12 ὥρας καὶ μὲ ταχύτητα 10 κόμβων (μηχανῶν) πρὸς Ἀπηλιώτην καὶ ἐπὶ παραλλήλου πλάτους 50° 10′ Ν. Ὑπολογίσατε τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ρεύματος, ἐὰν ἡ μεταβολὴ τοῦ μήκους τοῦ (Δ_λ) ἦτο 03° 24′.

(*Ἀπάντ.* υ = 0,88 μίλια πρὸς Ἀπηλιώτην)

8) Ἕνα πλοῖον ἐκκινεῖ ἐκ μιᾶς θέσεως πλάτους 40° 30′ Β καὶ μήκους 16° 00′ Δ καὶ ἀκολουθεῖ τὰς κάτωθι πορείας:

α) 300 μίλια πρὸς Ἀπηλιώτην

β) 300 μίλια πρὸς Βορρᾶν

γ) 300 μίλια πρὸς Ζέφυρον

δ) 300 μίλια πρὸς Νότον.

Ὑπολογίσατε τὴν τελικήν του θέσιν.

(*Ἀπάντ.* λ = 16° 33′,5 Δφ = 40° 30′ Β)

9. Ἕνα πλοῖον ἐκκινεῖ ἐκ μιᾶς θέσεως πλάτους 30°00 Ν καὶ μήκους 178° 05′ Α καὶ πλέει 200 μίλια πρὸς Ἀπηλιώτην. Ὑπολογίσατε τὸ τελικὸν μῆκος. (*Ἀπάντ.* 178° 4′,1 Δ)

10. Ἕνα πλοῖον ἐκκινεῖ ἐκ θέσεως πλάτους 20° 00′ Ν καὶ μήκους 18° 00′ Α καὶ πλέει Νοτίως 120 μίλια, ὁπότε εὑρέθη ὅτι ἡ θέσις του ἦτο: πλάτος 22° 00′ Ν καὶ μῆκος 18° 12′ Α. Ὑπολογίσατε τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος καὶ τὴν ἔκπτωσιν ποὺ ὑπέστη.

(*Ἀπάντ.* Ρεῦμα πρὸς 90°, ἔκπτωσις 11,1 μίλια)

11. Ἕνα πλοῖον πλέει 040° (πορεία ἐπιφανείας) καὶ διοπτεύει σημεῖον τῆς ξηρᾶς πρὸς 355°. Μετὰ πλεῦσιν 10 μιλίων τὸ σημεῖον ἦτο εἰς τὸ ἐγκάρσιον..Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις παραλλάξεως, ἐὰν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πλοῦ ὑφίστατο τὴν ἐπίδρασιν ρεύματος διευθύνσεως 090° καὶ ἐὰν ὑπέστη συνολικὴν ἔκπτωσιν 3 μιλίων. (*Ἀπάντ.* 14,227 μίλια)

12. Φάρος πρὸς Νότον ρίπτει φωτεινὰς ἀκτῖνας ἐκτεινομένας ἀπὸ

τὰ Ν.Δ. ἕως τὰ Ν.Α. Πλοῖον μὲ πορείαν ἀπὸ Ζέφυρον πρὸς Ἀπηλιώτην εἰσέρχεται ἐντὸς τῆς φωτιζομένης περιοχῆς, ὅταν εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 5 μιλίων ἀπὸ τοῦ φάρου, καὶ ἐξέρχεται ταύτης μετὰ 1/2 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου. (*Ἀπάντ.* 14,142 μίλια)

13. Πλοῖον κινούμενον ἐπὶ περιφερείας παραλλήλου κύκλου γεωγραφικοῦ πλάτους 30°, ἔφθασεν ἀπὸ τῆς θέσεως Α εἰς τὴν θέσιν Β. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ναυτικὰ μίλια διήνυσε τὸ πλοῖον, ὅταν τὰ γεωγραφικὰ μήκη τῶν Α καὶ Β διαφέρουν κατὰ 1° 50′,5. (*Ἀπάντ.* 95,69 μίλια)

14. Ἱστάμεθα ἐπὶ τῆς κορυφῆς λόφου σφαιρικοῦ, ἀκτῖνος 50 m. Ποίαν γωνίαν βάθους ἔχει τὸ πλέον μακρινὸν σημεῖον τοῦ λόφου, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν, ὅταν τὸ ὕψος τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῶν ὀφθαλμῶν μας εἶναι 1,50 m; (*Ἀπάντ.* 13° 52′)

15. Πλοῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τῆς θέσεως Α βορείου πλάτους 32° καὶ δυτικοῦ μήκους 58° καὶ φθάνει εἰς τὴν θέσιν Β βορείου πλάτους 35° καὶ δυτικοῦ μήκους 54°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία τοῦ πλοίου.
(*Ἀπάντ.* Β 48°2′Α)

16. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Β 78° Α καὶ διοπτεύει ἕνα φάρον πρὸς Β 40° Α. Μετὰ πλεῦσιν 5 μιλίων τὸν διοπτεύει πρὸς τὸ ἐγκάρσιον (τὸν παραλλάσσει). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις παραλλάξεως.
(*Ἀπάντ.* 3,9 μίλια)

17. Ἕνα σημεῖον διωπτεύθη ἐκ πλοίου πρὸς Β 56° Α. Μετὰ πλεῦσιν τοῦ πλοίου 7 μιλίων πρὸς Ν 34° Α διωπτεύθη ἐκ νέου πρὸς Βορρᾶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις κατὰ τὴν δευτέραν διόπτευσιν.
(*Ἀπάντ.* 8,44 μίλια)

18. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Βορρᾶν καὶ παρατηρεῖ δύο σημαντῆρας εἰς τὴν πλευρὰν πρὸς διόπτευσιν Ἀπηλιώτης. Μετὰ πλεῦσιν 3 μιλίων ὁ πλησιέστερος σημαντὴρ διοπτεύεται πρὸς Ν 45° Α καὶ ἡ ὁριζόντιος γωνία μεταξὺ αὐτῶν εἶναι 18°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημαντήρων. (*Ἀπάντ.* 2,89 μίλια)

19. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Νότον μὲ ταχύτητα 10 κόμβων καὶ διοπτεύει ἕνα φάρον πρὸς Ν 54° Α, μετὰ δὲ πλεῦσιν 36 λεπτῶν τὸν διοπτεύει κατὰ τὸ ἐγκάρσιον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις, ὅταν θὰ διοπτευθῇ 4 ρόμβους (1 ρόμβος 11° 15′) πρύμνηθεν τοῦ ἐγκαρσίου.
(*Ἀπάντ.* 8,25 μίλια εἰς τὸ ἐγκάρσιον καὶ 11,7 μίλια εἰς τὸ ἰσχίον τοῦ πλοίου)

20. Ἕνα πλοῖον εἶναι ἠγκυροβολημένον ἐντὸς τριγώνου σχηματιζομένου ὑπὸ τριῶν σημαντήρων ΑΒΓ. Ἕκαστος σημαντὴρ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 2 μιλίων ἀπὸ τοῦ ἄλλου καὶ τὸ πλοῖον εἶναι εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε αἱ ὁριζόντιαι γωνίαι μεταξὺ ἑνὸς ἑκάστου ζεύγους σημαντήρων εἶναι ἡ αὐτή. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ τοῦ σημαντῆρος Γ. (*Ἀπάντ.* 1,155 μίλια)

21. Ἕνα πλοῖον πρόκειται νὰ προσδεθῇ εἰς ἕνα σημαντῆρα 8 μίλια πρὸς βορρᾶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τηρήσῃ, καὶ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν θὰ διανύσῃ, ἐὰν πρόκειται νὰ ἀντιμετωπίσῃ παλίρροιαν διευθυνομένην πρὸς Ἀπηλιώτην ταχύτητος 2 μιλίων. Ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου εἶναι 10 κόμβοι.

(*Ἀπάντ.* Πορεία Β 11°32′, 1/4 Ζ. Ἀπόστασις = 8,17 μίλια)

22. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Β 50° Α καὶ διοπτεύει ἕνα φάρον πρὸς Β 20° Α. Μετὰ πλεῦσιν 4 μιλίων, σημειωθεῖσαν ὑπὸ μηχανικοῦ δρομομέτρου, ὁ φάρος διωπτεύθη εἰς τὸ ἐγκάρσιον καὶ εἰς ἀπόστασιν 1,8 μιλίων. Ἐὰν ἕνα ρεῦμα διευθύνεται πρὸς Β 40° Ζ, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασίς του, δεδομένου ὅτι τὸ πλοῖον πλέει μὲ ταχύτητα 12 κόμβων.

(*Ἀπάντ.* Ἔντασις ρεύματος 1,53 κόμβων)

23. Τὸ ὕψος τοῦ πρώτου κατὰ σειρὰν ἐκ δύο φάρων καθοδηγήσεως εἶναι 82 ft. Ὁ δεύτερος φάρος εἶναι 60 ft κατ' εὐθεῖαν ὄπισθεν τοῦ πρώτου. Ἕνας παρατηρητὴς 120 ft ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου φάρου παρατηρεῖ τὰς κορυφὰς ἀμφοτέρων ἐν εὐθυγραμμίσει. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου φάρου. (*Ἀπάντ.* 123 ft)

24. Ζητεῖται ἡ κατακόρυφος γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τοῦ ἑξᾶντος ἕνα φάρον ὕψους 208 ft, διὰ νὰ διέλθωμεν 5 στάδια ἀνοικτὰ μιᾶς ὑφάλου, ἡ ὁποία εὑρίσκεται 6 στάδια ἔμπροσθεν τῆς βάσεως τοῦ φάρου. (*Ἀπάντ.* Γωνία 1° 46′,9)

25. Ἡ γωνία ἀνυψώσεως (κατακόρυφος γωνία) τῆς κορυφῆς μιᾶς καπνοδόχου ἐξ ἀποστάσεως 300 ft εἶναι 30°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος της.

(*Ἀπάντ.* 173,2 ft)

26. Ἐκ τοῦ ἱστοῦ ἑνὸς πλοίου ὕψους 160 ft ἡ γωνία βάθους μιᾶς λέμβου εἶναι 30°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τοῦ πλοίου.

(*Ἀπάντ.* 277,12 ft)

27. Δύο ἱστοὶ ἔχουν ὕψος 60 καὶ 40 ft ἀντιστοίχως, ἡ δὲ συνδέουσα τὰς κορυφὰς αὐτῶν εὐθεῖα σχηματίζει γωνίαν 33° 41′ μὲ τὸν ὁρίζοντα.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις (δεδομένης τῆς σφ $41^\circ\ 18' = 1{,}5$).
(*Ἀπάντ.* 30 ft)

28. Ἕνα πλοῖον ἐκ πλάτους $\varphi = 28^\circ$ Β πλέει 486 μίλια πρὸς ΒΑ καὶ εὑρίσκει διὰ παρατηρήσεως ὅτι εὑρίσκεται εἰς $\varphi_a = 32^\circ\ 17'$ Β. Ποία εἶναι ἡ Z_λ καὶ ἡ ε;
(*Ἀπάντ.* $Z_\lambda =$ Β $58^\circ\ 4',6$ Α καὶ ε $= 412{,}5$ ναυτ. μίλια)

29. Εἰς τὰς 9 π.μ. ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς διεύθυνσιν Ν 53° Α μὲ ταχύτητα 8 μιλίων ὡριαίως καὶ παρατηρεῖ ἕνα φρούριον εἰς διεύθυνσιν 37° Βορειο-Ἀνατολικῶς. Εἰς τὰς 11 π.μ. τὸ φρούριον παρατηρεῖται πρὸς διόπτευσιν Β 20° Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ τοῦ φρουρίου εἰς ἑκάστην παρατήρησιν.
(*Ἀπάντ.* 10,39 ναυτ. μίλια καὶ περίπου 19,08 ναυτ. μίλια)

30. Πλοῖον πλέον πρὸς Ἀνατολὰς παρατηρεῖ δύο ἠγκυροβολημένα πλοῖα πρὸς Νότον. Μετὰ πλεῦσιν 3 μιλίων τὰ πλοῖα διοπτεύονται πρὸς 60° καὶ 30° ΝΔ. Πόσον ἀπέχει τὸ πλοῖον ἐξ αὐτῶν;
(*Ἀπάντ.* 3,464 ναυτ. μίλια καὶ 6 ναυτ. μίλια)

31. Δύο πλοῖα ἀναχωροῦν ἐκ λιμένος τὴν μεσημβρίαν μὲ διεύθυνσιν Ζ 28° Ν καὶ Α 62° Ν καὶ ταχύτητα 10 καὶ 10 1/2 κόμβων ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς των εἰς τὰς 2 μ.μ.
(*Ἀπάντ.* 29 ναυτ. μίλια)

32. Ἕνας φάρος παρατηρούμενος ἐκ Βορρᾶ ἐκπέμπει ἀκτῖνα ἐκτεινομένην ἀπὸ ΒΑ ἕως ΝΔ. Ἕνα ἀτμόπλοιον πλέον πρὸς Δυσμὰς παρατηρεῖ τὸν φάρον διὰ πρώτην φορὰν ἐξ ἀποστάσεως 5 μιλίων καὶ συνεχίζει νὰ τὸν βλέπῃ ἐπὶ $30\sqrt{2}$ λεπτά. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἀτμοπλοίου;
(*Ἀπάντ.* 10 ναυτ. μίλια ὡριαίως)

33. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Νότον καὶ παρατηρεῖ δύο φάρους ἐν εὐθυγραμμίσει ἀκριβῶς πρὸς Δυσμάς. Μετὰ πλεῦσιν 10 μιλίων αὐτοὶ εὑρίσκονται πρὸς ΒΔ καὶ Β. ΒΔ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς των ἐκ τοῦ πλοίου κατὰ τὴν πρώτην παρατήρησιν.
(*Ἀπάντ.* 10 ναυτ. μίλια καὶ 4,14 ναυτ.)

34. Δύο πλοῖα ἐκκινοῦν ἐκ λιμένος πρὸς Β 35° Ζ καὶ Ν 55° Ζ μὲ ταχύτητα 8 καὶ $8\sqrt{3}$ μιλίων ὡριαίως ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς των μετὰ 1 ὥραν καὶ ἡ διόπτευσις τοῦ δευτέρου πλοίου ἀπὸ τοῦ πρώτου.
(*Ἀπάντ.* 16 ναυτ. μίλια καὶ Ν 25° Ζ)

35. Ἕνα πλοῖον πλέον πρὸς Ν. ΝΔ παρατηρεῖται τὴν μεσημβρίαν ἀπὸ ἕνα φάρον 4 μίλια Α. ΝΑ. Εἰς τὴν 1 μ.μ. τὸ πλοῖον εἶναι Νοτίως τοῦ φάρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου, δεδομένου ὅτι εφ67 1/2° = 2,414. (*Ἀπάντ.* 9,656 κόμβοι)

36. Α, Β καὶ Γ εἶναι τρεῖς θέσεις τοιαῦται, ὥστε ἐκ τῆς Α ἡ διόπτευσις τῆς Γ εἶναι Β 10° Ζ καὶ τῆς Β εἶναι Β 50° Α. Ἐκ τῆς Β ἡ διόπτευσις τῆς Γ εἶναι Β 40° Ζ. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν Β καὶ Γ εἶναι 10 μίλια, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀποστάσεις τῶν Β καὶ Γ ἐκ τῆς Α.
(*Ἀπάντ.* 5,77 καὶ 11,54 ναυτ. μίλια)

37. Τὴν 10ην ὥραν πρωϊνὴν ἕνα ἀκτοπλοϊκὸν παρατηρεῖται ἐξ ἑνὸς φάρου 9 μίλια ΒΑ νὰ τηρῇ πορείαν Νότιο-Ἀνατολικήν. Τὴν 1 μ.μ. ἡ διόπτευσις τοῦ ἀκτοπλοϊκοῦ εἶναι Ν 75° Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἀκτοπλοϊκοῦ καὶ ἡ ἀπόστασίς του ἐκ τοῦ φάρου κατὰ τὴν δευτέραν παρατήρησιν. (*Ἀπάντ.* 5196 κόμβοι καὶ 18 ναυτ. μίλια)

38. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο φάρων Α καὶ Β εἶναι 12 μίλια καὶ ἡ γραμμὴ ἡ συνδέουσα αὐτοὺς ἔχει διεύθυνσιν Ν 75° Α. Τὴν 24ην ὥραν ἕνα πλοῖον πλέον πρὸς Β 15° Α μὲ ταχύτητα 10 μιλίων ὡριαίως εὑρίσκεται ΝΑ τοῦ Α καὶ ΝΔ τοῦ Β. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον τὸ πλοῖον θὰ διασταυρώσῃ τὴν γραμμὴν τὴν συνδέουσαν τοὺς δύο φάρους.
(*Ἀπάντ.* 31 λεπτὰ μετὰ μεσονύκτιον)

39. Τὴν μεσημβρίαν ἕνα πλοῖον, τὸ ὁποῖον πλέει ἀκριβῶς πρὸς Δυσμὰς μὲ ταχύτητα 10 κόμβων, παρατηρεῖ ἕνα φάρον Β 58°Ζ. Τὴν 1.30 μ.μ. ὁ φάρος διοπτεύεται πρὸς Β 32° Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ φάρου ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας θέσεως τοῦ πλοίου.
(*Ἀπάντ.* 9,9 ναυτ. μίλια)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ

5·1 Εὕρεσις ημ(α + β).

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ (σχ. 5·1 α) ἔχομεν:

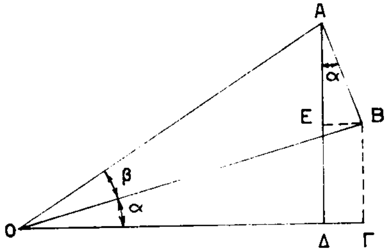
$$ημ(α+β)=\frac{ΑΔ}{ΟΑ}=\frac{ΕΔ+ΑΕ}{ΟΑ}=\frac{ΒΓ+ΑΕ}{ΟΑ}=\frac{ΒΓ}{ΟΑ}+\frac{ΑΕ}{ΟΑ}.$$

Πολλαπλασιάζομεν τὸ α΄ κλάσμα ἐπὶ $\frac{ΟΒ}{ΟΒ}$ καὶ τὸ β΄ ἐπὶ $\frac{ΑΒ}{ΑΒ}$

καὶ ἔχομεν: $\frac{ΒΓ\times ΟΒ}{ΟΑ\times ΟΒ}+\frac{ΑΕ\times ΑΒ}{ΟΑ\times ΑΒ}=ημασυνβ+συναημβ,$

διότι: $\frac{ΒΓ}{ΟΒ}=ημα,\ \frac{ΟΒ}{ΟΑ}=συνβ,\ \frac{ΑΕ}{ΑΒ}=συνα,\ \frac{ΑΒ}{ΟΑ}=ημβ.$

Ἤτοι: $$ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ.$$



Σχ. 5·1 α.

5·2 Εὕρεσις συν(α + β).

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ (σχ. 5·1 α) ἔχομεν:

$$συν(α+β)=\frac{ΟΔ}{ΟΑ}=\frac{ΟΓ-ΓΔ}{ΟΑ}=\frac{ΟΓ-ΕΒ}{ΟΑ}=\frac{ΟΓ}{ΟΑ}-\frac{ΕΒ}{ΟΑ}.$$

Πολλαπλασιάζομεν τὸ α΄ κλάσμα ἐπὶ $\frac{ΟΒ}{ΟΒ}$ καὶ τὸ β΄ ἐπὶ $\frac{ΑΒ}{ΑΒ}$

καὶ ἔχομεν: $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΒ}} \times \frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΑ}} - \frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΟΑ}} \times \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}} = \text{συνασυνβ} - \text{ημαημβ}$,

διότι: $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΒ}} = \text{συνα}$, $\frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΑ}} = \text{συνβ}$, $\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΑΒ}} = \text{ημα}$, $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΟΑ}} = \text{ημβ}$.

Ἤτοι: $\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συνασυνβ} - \text{ημαημβ}$.

5·3 Εὕρεσις εφ(α + β).

$\text{εφ}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ημ}(\alpha + \beta)}{\text{συν}(\alpha + \beta)} = \frac{\text{ημασυνβ} + \text{συναημβ}}{\text{συνασυν}\,\beta - \text{ημαημβ}}$. Διαιροῦμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ συνασυνβ, ὁπότε ἔχομεν:

$$\frac{\dfrac{\text{ημασυνβ} + \text{συναημβ}}{\text{συνασυνβ}}}{\dfrac{\text{συνασυνβ} - \text{ημαημβ}}{\text{συνασυνβ}}} = \frac{\dfrac{\text{ημασυνβ}}{\text{συνασυνβ}} + \dfrac{\text{συναημβ}}{\text{συνασυνβ}}}{\dfrac{\text{συνασυνβ}}{\text{συνασυνβ}} - \dfrac{\text{ημαημβ}}{\text{συνασυνβ}}} =$$

$$= \frac{\text{εφα} + \text{εφβ}}{1 - \text{εφα εφβ}}.$$

Ἤτοι: $\text{εφ}(\alpha + \beta) = \frac{\text{εφα} + \text{εφβ}}{1 - \text{εφαεφβ}}$.

5·4 Εὕρεσις τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου ἢ γωνίας (α–β).

Τὸ ημ(α — β) γράφεται:

$\text{ημ}[\alpha + (-\beta)] = \text{ημασυν}(-\beta) + \text{συναημ}(-\beta) = \text{ημασυνβ} -$ συναημβ, διότι τὸ $\text{συν}(-\beta) = \text{συνβ}$ καὶ $\text{ημ}(-\beta) = -\text{ημβ}$ ὡς ἀντίθετα τόξα.

Ἤτοι: $\text{ημ}(\alpha - \beta) = \text{ημασυνβ} - \text{συναημβ}$.

Τὸ $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}[\alpha + (\beta) -] = \text{συνασυν}(-\beta) - \text{ημαημ}(-\beta)$ $= \text{συνασυνβ} + \text{ημαημβ}$.

Ἤτοι: $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συνασυνβ} + \text{ημαημβ}$,

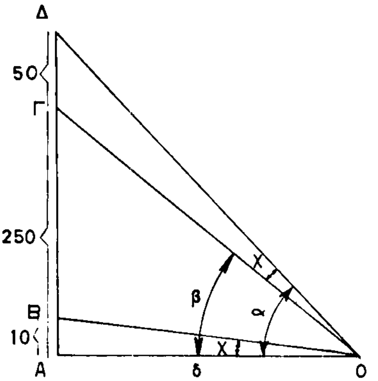
ὅπου τὸ $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}(\beta - \alpha)$. Αὐτὸ σημειώνεται $(\alpha \sim \beta)$, δηλαδὴ τὸ ~ (ἀδιαφόρως) σημαίνει ὅτι θὰ ἀφαιροῦμεν πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου.

Εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τήν:

$$\text{εφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta}{1+\text{εφ}\alpha\ \text{εφ}\beta}.$$

Ἐφαρμογή.

Ἕνας κατακόρυφος κρημνὸς ὕψους 250 ft φέρει ἐπὶ τῆς κορυφῆς του ἱστὸν 50 ft (σχ. 5·4α). Δι' ἕνα παρατηρητὴν ἐπὶ



Σχ. 5·4 α.

τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως τοῦ κρημνοῦ ὁ ἱστὸς ὑποτείνει τὴν ἰδίαν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ὑποτείνει ἕνα σημεῖον 10 ft ἄνωθεν τῆς βάσεως τοῦ κρημνοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ παρατηρητοῦ ἐκ τῆς βάσεως τοῦ κρημνοῦ.

Λύσις.

Ἔστωσαν $AB=10$ ft, $A\Gamma=250$ ft, $A\Delta=300$ ft, $\widehat{AOB}=\widehat{\Delta O\Gamma}=x^\circ$ καὶ Ο ἡ θέσις τοῦ παρατηρητοῦ, ὁπότε $AO=\delta$ ἡ ἀπόστασις. Ἐπίσης ἔστω $\widehat{AO\Delta}=\alpha$, $\beta=\widehat{AO\Gamma}$, ὁπότε $\widehat{\Delta O\Gamma}=(\alpha-\beta)=x$. Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι:

$$εφx = εφ(α - β) = \frac{εφα - εφβ}{1 + εφαεφβ} \quad καὶ$$

$$εφA = \frac{\frac{AΔ}{δ} - \frac{AΓ}{δ}}{1 + \frac{AΔ}{δ} \cdot \frac{AΓ}{δ}} \quad καὶ \quad εφA = \frac{\frac{300}{δ} - \frac{250}{δ}}{1 + \frac{300 \times 250}{δ^2}} \quad καὶ$$

$$εφA = \frac{AB}{δ} = \frac{10}{δ} = \frac{50δ}{δ^2 + 75000} \quad καὶ \; 5δ^2 = δ^2 + 75\,000.$$

Συνεπῶς $δ = \sqrt{\frac{75000}{4}} = 136{,}93$. Ἤτοι: $δ = 136{,}93$.

5·5 Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ $ημ(α - β)$ καὶ $συν(α - β)$, ἐὰν $α = 15^\circ$ καὶ $β = 8^\circ$.

2) Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ $εφ(α + β)$ καὶ $εφ(α - β)$, ἐὰν $α = 28^\circ$ καὶ $β = 13^\circ$.

5·6 Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ διπλασίου τόξου (2α).

α) *ημ2α.*

Γνωρίζομεν ὅτι $ημ2α = ημ(α + α) = ημασυνα + συναημα = 2ημασυνα$.

Ἤτοι: $$ημ2α = 2ημασυνα.$$

β) *συν2α.*

$$συν2α = συν(α + α) = συνασυνα - ημαημα = συν^2α - ημ^2α.$$

Ἤτοι: $$συν2α = συν^2α - ημ^2α \qquad ἤ$$

$$συν2α = συν^2α - (1 - συν^2α) = συν^2α - 1 + συν^2α = 2συν^2α - 1 \quad ἤ$$

$$συν2α = 1 - ημ^2α - ημ^2α = 1 - 2ημ^2α.$$

Εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους τὸ συνημίτονον 2α ἐκφράζεται ἀφ' ἑνὸς μὲν συναρτήσει τοῦ συνημιτόνου τοῦ α, ἀφ' ἑτέρου δὲ συναρτήσει τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α.

γ) *εφ2α.*

$$εφ2α = εφ(α + α) = \frac{εφα + εφα}{1 - εφαεφα} = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}.$$

Ἤτοι: $$εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}.$$

δ) *Εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου ω ἐκ τοῦ* $\frac{ω}{2}$.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι $ημ2α = 2ημασυνα$ καί, ἂν θέσωμεν ὅπου $2α = ω$ καὶ συνεπῶς ὅπου $α = \frac{ω}{2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$ημω = 2ημ\frac{ω}{2}συν\frac{ω}{2}.$$

Ἐπίσης εἰς τὸν τύπον $συν2α = συν^2α - ημ^2α$ μὲ τὴν αὐτὴν ὡς ἀνωτέρω ἀντικατάστασιν θὰ ἔχωμεν:

$$συνω = συν^2\frac{ω}{2} - ημ^2\frac{ω}{2}.$$

Ἐπίσης εἰς τὸν τύπον $συν2α = 1 - 2ημ^2α$ θὰ ἔχωμεν: $συνω = 1 - 2ημ^2\frac{ω}{2}$ καί, ἂν λύσωμεν τοῦτον ὡς πρὸς $2ημ^2\frac{ω}{2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$2ημ^2\frac{ω}{1} = 1 - συνω \quad ἢ \quad ημ^2\frac{ω}{2} = \frac{1 - συνω}{2} \quad ἢ$$

$$ημπρω = ημ^2\frac{ω}{2} = \frac{1 - συνω}{2}.$$

Οὕτω ὁ τύπος $\frac{1 - συνω}{2}$ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων.

5·7 Μετατροπὴ παραστάσεων εἰς γινόμενα.

Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} ημ(α + β) &= ημασυνβ + συναημβ \\ ημ(α - β) &= ημασυνβ - συναημβ \end{aligned}\right\}$$ Προσθέτομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$ημ(α + β) + ημ(α - β) = 2ημασυνβ. \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν: $\alpha+\beta=A$ καὶ $\alpha-\beta=B$, διὰ προσθέσεως ἔχομεν:

$$2\alpha=A+B \quad \text{ἢ} \quad \alpha=\frac{A+B}{2}$$

$$2\beta=A-B \quad \text{ἢ} \quad \beta=\frac{A-B}{2}$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν:

$$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}.$$

Ἐπίσης:

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu(\alpha+\beta) &= \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \\ -\eta\mu(\alpha-\beta) &= -\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \end{aligned}\right\}\ \text{προσθέτομεν κατὰ μέλη}$$

$$\eta\mu(\alpha+\beta)-\eta\mu(\alpha-\beta)=2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \qquad \text{ἢ}$$

$$\eta\mu A-\eta\mu B=2\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\,\frac{A-B}{2}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \end{aligned}\right\}\ \text{προσθέτομεν κατὰ μέλη}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \qquad (2)$$

καί, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ὡς ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν:

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \\ -\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) &= -\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \end{aligned}\right\}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=-2\,\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \qquad \text{ἢ}$$

$$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=-2\,\eta\mu\,\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\,\frac{A-B}{2}=$$

$$=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{B-A}{2}.$$

Χρήσιμος μετατροπή.

Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις: $\dfrac{\eta\mu A - \eta\mu B}{\eta\mu A + \eta\mu B}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος γράφονται:

$$\frac{\eta\mu A - \eta\mu B}{\eta\mu A + \eta\mu B} = \frac{2\,\eta\mu\dfrac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}}{2\,\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}} =$$

$$\sigma\varphi\frac{A+B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}.$$

Καί, ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}}$, ἔχομεν:

$$\frac{\eta\mu A - \eta\mu B}{\eta\mu A + \eta\mu B} = \frac{\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}}.$$

5·8 Χρῆσις βοηθητικῆς γωνίας.

α) *Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις α + β.*

$\alpha + \beta = \alpha\left(1 + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$. Θέτομεν ὅπου $\dfrac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi^2\omega$ καὶ ἔχομεν:

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + \varepsilon\varphi^2\omega) = \alpha\left(1 + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\right) = \alpha\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}.$$

Ἐὰν ὅμως $\alpha > \beta$, τότε θέτομεν $\dfrac{\beta}{\alpha} =$ συνω καὶ ἔχομεν:

$$\alpha + \beta = (1 + \sigma\upsilon\nu\omega) = 2\,\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}.$$

β) *Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις α − β.*

$\alpha - \beta = \alpha\left(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ ὅπου, ἐὰν $\alpha > \beta$, θέτομεν $\dfrac{\beta}{\alpha} =$ συνω, ὁπότε ἔχομεν:

$$\alpha-\beta=\alpha\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)=2\alpha\eta\mu^2\frac{\omega}{2}.$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν τὸ $\frac{\beta}{\alpha}=\eta\mu^2\omega$, ἐφ' ὅσον $\alpha>\beta$, ἔχομεν:

$$\alpha-\beta=\alpha(1-\eta\mu^2\omega)=\alpha\sigma\upsilon\nu^2\omega.$$

γ) *Μετατροπὴ παραστάσεων μορφῆς $\alpha\eta\mu x\pm\beta\sigma\upsilon\nu x$.*

Ἐξάγοντες τὸν α ἐκ τῆς παρενθέσεως ἔχομεν:

$$\alpha\eta\mu x\pm\beta\sigma\upsilon\nu x=\alpha\left(\eta\mu x\pm\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu x\right)=\alpha\left(\eta\mu x\pm\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$=\alpha\left(\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\omega\pm\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)=\alpha\frac{\eta\mu(x\pm\omega)}{\sigma\upsilon\nu\ \omega}.$$

δ) *Παραστάσεις μορφῆς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.*

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\alpha^2\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}=\sqrt{\alpha^2(1+\varepsilon\varphi^2\omega)}.\ \text{Θέτομεν ὅπου}\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$=\varepsilon\varphi^2\omega=\sqrt{\alpha^2\left(1+\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\right)}=\sqrt{\alpha^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\right)}=$$

$$\alpha\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

ε) *Παραστάσεις μορφῆς $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.*

$$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{\alpha^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}=\alpha\sqrt{\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega)}=\sqrt{\alpha^2\eta\mu^2\omega}=\alpha\eta\mu\omega.$$

5·9 Ἀσκήσεις.

Δείξατε ὅτι:

1. $\eta\mu(45^\circ+\alpha)=\dfrac{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}.$
2. $\eta\mu(60^\circ+\alpha)-\eta\mu(60^\circ-\alpha)=\eta\mu\alpha.$
3. $\sigma\upsilon\nu(30^\circ+\alpha)-\sigma\upsilon\nu(30^\circ-\alpha)=-\eta\mu\alpha.$

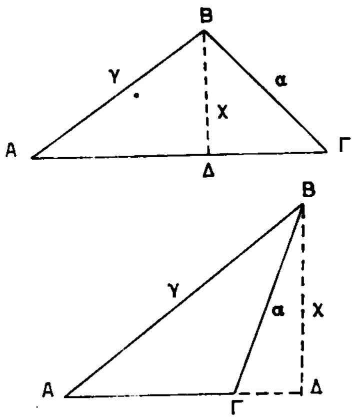
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΠΑΝΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

6·1 Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου.

α) *Τύπος ἡμιτόνων.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 6·1α). Ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΔ ἢ τὴν x. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΒΔΓ ἔχομεν:



Σχ. 6·1 α.

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma\,\eta\mu \mathrm{A} \\ \text{καὶ}\ x &= \alpha\,\eta\mu \Gamma \end{aligned}\right\}\ \text{ἄρα}\ \gamma\,\eta\mu \mathrm{A} = \alpha\,\eta\mu \Gamma \qquad \text{ἢ}$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\eta\mu \mathrm{A}}{\eta\mu \Gamma}.$$

Ὥστε ὁ λόγος δύο πλευρῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀπέναντι γωνιῶν των.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σχέσις ἐπεκτείνεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = K$$ *(Τύπος τῶν ἡμιτόνων).*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται ἀντιληπτὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν ἕνα οἱονδήποτε τρίγωνον, ὅταν γνωρίζωμεν:

α) μίαν πλευρὰν καὶ δύο γωνίας, καὶ

β) δύο πλευρὰς καὶ μίαν γωνίαν κειμένην ἔναντι δοθείσης πλευρᾶς.

Παράδειγμα 1.

α) ***Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν.***

Ἑνὸς τριγώνου ἡ πλευρὰ $\gamma = 8,2$ μίλια, ἡ $\widehat{A} = 30^\circ$ καὶ ἡ $\widehat{B} = 100^\circ$ (σχ. 6·1β). Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ.

Λύσις.

α) Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας.

Γνωρίζομεν ὅτι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ ἢ $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

β) Ὑπολογισμὸς τῆς α.

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \gamma\eta\mu A\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma.$$

Λογαριθμίζοντες δὲ ἔχομεν:

$\gamma = 8,2$	$\lambda o\gamma\gamma = 0,91381$
$A = 30^\circ$	$\lambda o\gamma\eta\mu A = 9,69897$
$B = 100^\circ$	$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B = 0,00665$
	$\lambda o\gamma\alpha = 0,61943$
	$\alpha = 4,163$ ναυτ. μίλια.

γ) Ὑπολογισμὸς τῆς β.

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω τύπου ἔχομεν:

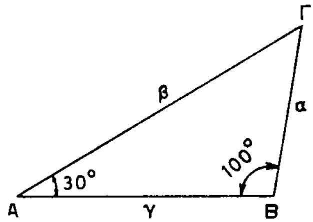
$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{ἢ}$$

$$\beta = \gamma\eta\mu B\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma.$$

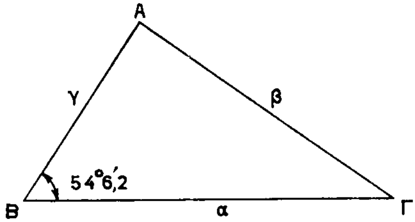
Λογαριθμίζοντες ἔχομεν:

$$\begin{array}{lrl} \gamma = 8{,}2 & \lambda o\gamma\gamma = & 0{,}91381 \\ B = 100^0 & \lambda o\gamma\eta\mu B = & 9{,}99335 \\ \Gamma = 50^0 & \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = & \underline{10{,}11575} \\ & \lambda o\gamma\beta = & 1{,}02291 \\ & \beta = & 10{,}054 \text{ ναυτ. μίλια.} \end{array}$$

β) *Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν καὶ μιᾶς γωνίας ἔναντι δοθείσης πλευρᾶς.*



Σχ. 6·1 β.



Σχ. 6·1 γ.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δύναται ἀναλόγως τῶν δεδομένων νὰ ἔχῃ μίαν, δύο ἢ καμμίαν λύσιν.

1η Περίπτωσις.

Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται:

$$\beta = 124\,\text{m} \qquad \gamma = 40\,\text{m} \qquad \widehat{B} = 54^{\circ}\,6',2 \;\; (\text{σχ. } 6 \cdot 1\,\gamma).$$

Λύσις.

α) Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \text{ ἢ δι᾿ ἀντιστροφῆς } \frac{\eta\mu\Gamma}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\beta} \quad \text{ἢ}$$

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma\eta\mu B}{\beta}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = \lambda o\gamma\gamma + \lambda o\gamma\eta\mu B - \lambda o\gamma\beta$$

$$
\begin{array}{ll}
\gamma = 40\,\text{m} & \lambda o\gamma\gamma = 1{,}60206 \quad + \\
\widehat{B} = 54^\circ\ 6',2 & \lambda o\gamma\eta\mu B = \underline{9{,}90853} \\
 & \qquad 1{,}51059 \quad - \\
\beta = 124\,\text{m} & \lambda o\gamma\beta = \underline{2{,}09342} \\
 & \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = 9{,}41717 \\
 & \widehat{\Gamma} = 15^\circ\,8',9
\end{array}
$$

$$\text{ἢ}\ \widehat{\Gamma} = 180^\circ - 15^\circ\,8',9 = 164^\circ\,51',1.$$

Ἡ λύσις ὅμως αὕτη ἀπορρίπτεται, διότι τὸ ἄθροισμα τῆς $\widehat{\Gamma} = 164^\circ\,51',1$ καὶ τῆς $\widehat{B} = 54^\circ\,6',2$ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 180°.

β) Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Α.

Ἔχομεν $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$. Ὁπότε $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = 180^\circ - 69^\circ\,15,1 = 110^\circ\ 44,9$.

γ) Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς α.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \beta\eta\mu A\sigma\tau\epsilon\mu B.$$

$$\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\eta\mu A + \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B$$

$$
\begin{array}{ll}
\beta = 124\,\text{m} & \lambda o\gamma\beta = \ 2{,}09342 \\
\widehat{A} = 110^0\ 44,9 & \lambda o\gamma\eta\mu A = \ 9{,}97088 \\
\widehat{B} = 50^0\ 6',2 & \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B = \underline{10{,}09147} \\
 & \lambda o\gamma\alpha = \ 2{,}15577 \\
 & \alpha = 143{,}14\,\text{m}.
\end{array}
$$

2α Περίπτωσις.

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν δίδωνται $\alpha = 25\text{m}$, $\beta = 31\text{m}$ καὶ $\widehat{A} = 32^\circ$ (σχ. 6·1 δ).

Λύσις.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \text{ ἢ δι' ἀντιστροφῆς } \frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\alpha} \text{ ἢ}$$

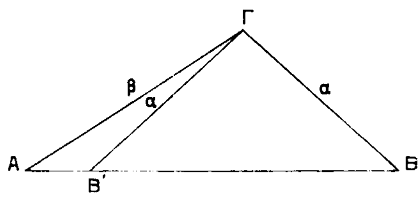
$$\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu B = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\eta\mu A - \lambda o\gamma\alpha.$$

$\beta = 31$ m	$\lambda o\gamma\beta = 1{,}49136$ +
$\widehat{A} = 32^0$	$\lambda o\gamma\eta\mu A = 9{,}72421$
$\alpha = 25$ m	$1{,}21557$ −
	$\lambda o\gamma\alpha = 1{,}39794$
	$\lambda o\gamma\eta\mu B = 9{,}81763$

$$\widehat{B} = 41^0\ 4',7$$

$$\text{ἢ } \widehat{B} = 180^0 - 41^0\ 4',7 = 138^0\ 55',3.$$



Σχ. 6·1 δ.

Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν προκύπτει ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, μὲ ἑκάστην τῶν ὁποίων θὰ ἀσχοληθῶμεν εὐθὺς ἀμέσως.

Α' *Λύσις.*

Ὅταν ἡ γωνία $\widehat{B} = 41^\circ\ 4',7$

α) Εὕρεσις τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \qquad \widehat{\Gamma} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \qquad \widehat{\Gamma} = 106^\circ\ 55',3.$$

β) Εὕρεσις πλευρᾶς γ.

$$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\alpha}{\eta\mu A} \quad \text{ἢ} \quad \gamma=\alpha\eta\mu\Gamma\sigma\tau\epsilon\mu A.$$

$$\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma+\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu A$$

$\alpha=25\,m$	$\lambda o\gamma\alpha=\ \ 1,39794$
$\widehat{\Gamma}=106^\circ\ 55',3$	$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma=\ \ 9,98078$
$\widehat{A}=32^\circ$	$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu A=10,27579$
	$\lambda o\gamma\gamma=\ \ 1,65451$
	$\gamma=\ \ 45,134\,m.$

B′ *Λύσις.*

Ὅταν ἡ γωνία $B=138^\circ\ 55',3$.

α) Εὕρεσις γωνίας Γ.

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^\circ \qquad \widehat{\Gamma}=180^\circ-(\widehat{A}+\widehat{B})=9^\circ\ 4',7.$$

β) Εὕρεσις πλευρᾶς γ.

$$\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma\sigma\tau\epsilon\mu A.$$

$$\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma+\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu A$$

$\alpha=25\,m$	$\lambda o\gamma\alpha=\ \ 1,39794$
$\widehat{\Gamma}=9^\circ\ 4',7$	$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma=\ \ 9,19806$
$\widehat{A}=32^\circ$	$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu A=10,27579$
	$\lambda o\gamma\gamma=10,87179$
	$\gamma=\ \ 7,4436\,m.$

3η Περίπτωσις.

Τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται $\gamma=70\,m$, $\beta=55\,m$ καὶ $\widehat{B}=54^\circ\ 6',2$ (σχ. 6·1ε).

Λύσις.

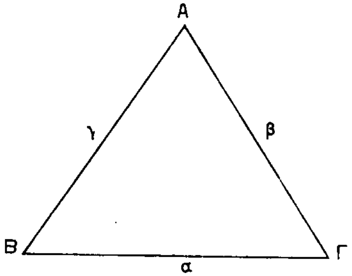
Εὕρεσις γωνίας Γ.

$$\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{ἢ δι' ἀντιστροφῆς} \quad \frac{\eta\mu B}{\beta}=\frac{\eta\mu\Gamma}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\Gamma=\frac{\gamma\eta\mu B}{\beta}.$$

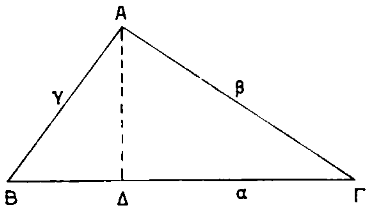
$$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = \lambda o\gamma\gamma + \lambda o\gamma\eta\mu B - \lambda o\gamma\beta$$

$\gamma = 70\ \mathrm{m}$	$\lambda o\gamma\gamma =$	$1{,}84510$
$\widehat{B} = 54^\circ\ 6',2$	$\lambda o\gamma\eta\mu B =$	$9{,}90853$ (+)
		$1{,}75363$
$\beta = 55\ \mathrm{m}$	$\lambda o\gamma\beta =$	$1{,}74036$ (−)
	$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma =$	$10{,}01327.$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\dfrac{\gamma\eta\mu B}{\beta} > 1$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.



Σχ. 6·1 ε.



Σχ. 6·1 ζ.

β) *Τύπος συνημιτόνων.*

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον, ἐὰν $\widehat{\Gamma} < 90^\circ$, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha(\Delta\Gamma). \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ (σχ. 6 · 1 ζ) ἔχομεν ὅτι:

$$\Delta\Gamma = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma,$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1), ἔχομεν:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma, \quad \text{ἄρα} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι δὲν μεταβάλλονται, καὶ ἐὰν ἡ Γ εἶναι ἀμβλεῖα (σχ. 6 · 1 η), διότι:

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha(\Delta\Gamma)$ καί, ἐπειδὴ $\Delta\Gamma = \beta\sigma\upsilon\nu x$, δι' ἀντικαταστάσεως ἔχομεν:

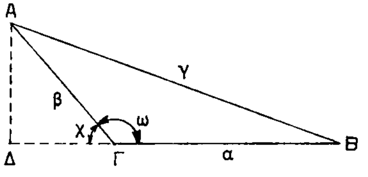
$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu x$ καί, ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\omega$, ἔχομεν:

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\omega$ καὶ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma.$

Ἐὰν ἕνα ἐκ τῶν τύπων αὐτῶν ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς τὸ συνΓ καὶ γενικῶς ὡς πρὸς τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας, θὰ ἔχωμεν:

$$συνΓ = \frac{α^2 + β^2 - γ^2}{2αβ}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, *ὅταν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας αὐτοῦ*. Π.χ. τριγώνου τινὸς ΑΒΓ αἱ πλευραὶ α, β καὶ γ εἶναι ἀντιστοίχως 8, 4 καὶ 5 m. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.



Σχ. 6·1 η.

Ὑπολογισμὸς τῆς $\widehat{B}$.

$$συνB = \frac{α^2 + γ^2 - β^2}{2αγ} = \frac{64 + 25 - 16}{80} = \frac{89 - 15}{80} = \frac{73}{80}$$

καὶ συνB = 0,91250 καὶ $\widehat{B} = 24^\circ\ 8',8$.

Ὁμοίως ὑπολογίζομεν καὶ τὰς $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{Γ}$.

Οἱ ἀνωτέρω τύποι ἔχουν τὸ μειονέκτημα ὅτι δὲν δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν λογαριθμικῶς, δι' αὐτὸ δὲν εἶναι εὔχρηστοι εἰς τὸν ναυτιλλόμενον ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖ εἰς εὐρεῖαν κλίμακα τὸ *ἡμιπαρημίτονον*.

Διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίζωμεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους διὰ τῶν λογαρίθμων, χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον τῶν *ἡμιπαρημιτόνων*, ὁ ὁποῖος προκύπτει ὡς ἑξῆς:

$$συνA = \frac{β^2 + γ^2 - α^2}{2βγ} \quad ἤ$$

$$1 - συνA = 1 - \frac{β^2 + γ^2 - α^2}{2βγ} \quad ἤ$$

$$\frac{1-\text{συν}A}{2}=\frac{1-\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{1-\text{συν}A}{2}=\frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{4\beta\gamma} \quad \text{καὶ}$$

$$\text{ημπρ}A=\frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{4\beta\gamma}=\frac{\alpha^2-(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)}{4\beta\gamma}=$$

$$\frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{4\beta\gamma}=\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{4\beta\gamma}=$$

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-2\beta)}{4\beta\gamma} \quad \text{καὶ θέτοντες} \quad \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\tau$$

$$\text{λαμβάνομεν} \quad \frac{(2\tau-2\beta)(2\tau-2\gamma)}{4\beta\gamma}=\frac{4(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{4\beta\gamma}.$$

Ἤτοι:

$$\text{ημπρ}A=\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \text{ημπρ}B=\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}$$

$$\text{καὶ} \quad \text{ημπρ}\Gamma=\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}.$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι δύνανται νὰ μᾶς προσδιορίσουν τὰς γωνίας ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, δηλαδὴ μᾶς ἐπιλύουν ἕνα τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του. Καλοῦνται δὲ τύποι τοῦ *ἡμιπαρημιτόνου.*

Παράδειγμα.

Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν $\alpha=154$ m, $\beta=140{,}6$ m καὶ $\gamma=110{,}7$ m.

Λύσις.

$$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{154+140{,}6+110{,}7}{2}=202{,}65 \quad \text{καὶ}$$

$$(\tau-\alpha)=48{,}65 \quad (\tau-\beta)=62{,}05 \quad (\tau-\gamma)=91{,}95.$$

α) Εὕρεσις γωνίας Α.

$$\eta\mu\pi\rho A = \frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A = \lambda o\gamma(\tau-\beta) + \lambda o\gamma(\tau-\gamma) - (\lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\gamma).$$

$$\begin{array}{llr}
(\tau-\beta) = 62{,}05 & \lambda o\gamma(\tau-\beta) = & 1{,}79274 \\
(\tau-\gamma) = 91{,}95 & \lambda o\gamma(\tau-\gamma) = & \underline{1{,}96355} \;+ \\
 & & 3{,}75629
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
\beta = 140{,}6 & \lambda o\gamma\beta = 2{,}14799 & \\
\gamma = 110{,}7 & \lambda o\gamma\gamma = \underline{2{,}04415} \;+ & - \\
 & 4{,}19214 \longrightarrow & \underline{4{,}19214} \\
 & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A = & 9{,}56415
\end{array}$$

$$\widehat{A} = 74^{o}\,31',3.$$

β) Εὕρεσις γωνίας Β.

$$\eta\mu\pi\rho B = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho B = \lambda o\gamma(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma(\tau-\gamma) - (\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\gamma).$$

$$\begin{array}{llr}
(\tau-\alpha) = 48{,}65 & \lambda o\gamma(\tau-\alpha) = & 1{,}68708 \\
(\tau-\gamma) = 91{,}95 & \lambda o\gamma(\tau-\gamma) = & \underline{1{,}96355} \;+ \\
 & & 3{,}65063
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
\alpha = 154 & \lambda o\gamma\alpha = 2{,}18752 & \\
\gamma = 110{,}7 & \lambda o\gamma\gamma = \underline{2{,}04415} \;+ & - \\
 & 4{,}23167 \longrightarrow & \underline{4{,}23167} \\
 & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho B = & 9{,}41896
\end{array}$$

$$\widehat{B} = 61^{o}\,37',6.$$

γ) Εὕρεσις γωνίας Γ.

$$\eta\mu\pi\rho \Gamma = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho \Gamma = \lambda o\gamma(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma(\tau-\beta) - (\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta)$$

$$\begin{array}{llr}
(\tau-\alpha) = 48{,}65 & \lambda o\gamma(\tau-\alpha) = & 1{,}68708 \\
(\tau-\beta) = 62{,}05 & \lambda o\gamma(\tau-\beta) = & \underline{1{,}79274} \;+ \\
 & & 3{,}47982
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
\alpha = 154 & \lambda o\gamma\alpha = 2{,}18752 & & \\
\beta = 140{,}6 & \lambda o\gamma\beta = \underline{2{,}14799} + & & \\
 & \quad 4{,}33551 & \longrightarrow & \underline{4{,}33551} \\
 & & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\Gamma = & 9{,}14431 \\
 & & \widehat{\Gamma} = & 43^\circ\, 50',9.
\end{array}
$$

Ἔλεγχος πράξεων

$$
\begin{array}{r}
74^\circ\ 31',3 \\
61^\circ\ 37',6 \\
\underline{43^\circ\ 50',9} \\
178^\circ\ 119',8.
\end{array}
$$

Αἱ γωνίαι πρέπει νὰ ὑπολογίζωνται καὶ αἱ τρεῖς, διότι ἔτσι γίνεται καὶ ἔλεγχος τῶν πράξεων.

γ) *Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας (ἢ τύπος ἐφαπτομένων).*

Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = K$ λαμβάνομεν τὰς $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = K.$

Προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἔχομεν $\dfrac{\alpha+\beta}{\eta\mu A+\eta\mu B} = K$. Κατόπιν ἀφαιροῦμεν καὶ ἔχομεν $\dfrac{\alpha-\beta}{\eta\mu A-\eta\mu B} = K$, ὁπότε:

$$\frac{\alpha+\beta}{\eta\mu A+\eta\mu B} = \frac{\alpha-\beta}{\eta\mu A-\eta\mu B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}.$$

Ὁ τύπος αὐτὸς (παράγρ. 5 · 7) ἰσοῦται πρός:

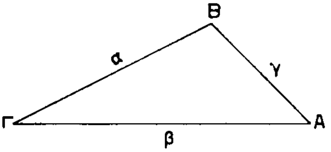
$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\,\dfrac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\,\dfrac{A+B}{2}}, \ \text{ἄρα:}$$

$$\varepsilon\varphi\,\frac{A-B}{2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2}.$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος (*τύπος ἐφαπτομένων*) ἐπιλύει ἕνα τρίγωνον ἐκ τῶν δύο πλευρῶν του καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Παράδειγμα.

Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ γ καὶ β εἶναι ἀντιστοίχως 104 m καὶ 892 m. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ, ὅταν ἡ γωνία $A = 45^\circ\ 16',3$ (σχ. 6·1 θ).



Σχ. 6·1 θ.

Λύσις.

$$\text{εφ}\,\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\text{σφ}\,\frac{A}{2}.$$

$$\text{λογεφ}\,\frac{B-\Gamma}{2} = \text{λογ}(\beta-\gamma) + \text{λογσφ}\,\frac{A}{2} - \text{λογ}(\beta+\gamma).$$

$\beta-\gamma = 788$ $\qquad$ $\text{λογ}(\beta-\gamma) = 2,89653$ $+$

$\dfrac{\widehat{A}}{2} = 22^\circ\ 38',2$ $\qquad$ $\text{λογσφ}\,\dfrac{A}{2} = 10,37988$

$13,27641$

$\beta+\gamma = 996$ $\qquad$ $\text{λογ}(\beta+\gamma) = 2,99826$ $-$

$$\text{λογεφ}\,\frac{B-\Gamma}{2} = 10,27815$$

$$\frac{B-\Gamma}{2} = 62^\circ\ 12,5$$

$$B-\Gamma = 124^\circ\ 25'.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma} = 180^\circ$, ἔχομεν $\widehat{B}+\widehat{\Gamma} = 180^\circ - \widehat{A}$

ἢ $\widehat{B}+\widehat{\Gamma} = 134^\circ\ 43',7.$

Ἑπομένως ἔχομεν:

$$\begin{array}{rl} \widehat{B}+\widehat{\Gamma}=134^\circ\ 43',7 & \\ \widehat{B}-\widehat{\Gamma}=124^\circ\ 25' & + \\ \hline 2\widehat{B}=258^\circ\ 68',7 & \\ \widehat{B}=129^\circ\ 34',3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \widehat{B}+\widehat{\Gamma}=134^\circ\ 43',7 & \\ \widehat{B}=129^\circ\ 34',3 & - \\ \hline \widehat{\Gamma}=5^\circ\ 9',4. & \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς α.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B} \ \text{ἢ}\ \alpha=\frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B} \ \text{ἢ}\ \alpha=\beta\eta\mu A\sigma\tau\varepsilon\mu B.$$

$$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\eta\mu A+\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu B$$

$\beta=892\,m$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\beta=\ 2{,}95037$

$\widehat{A}=45^\circ\ 16',3$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\eta\mu A=\ 9{,}85154$

$\widehat{B}=129^\circ\ 34',3$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu B=10{,}11304$

$\lambda o\gamma\alpha=\ 2{,}91495$

$\alpha=822{,}13\,m.$

6·2 Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν πλαγιογωνίων τριγώνων.

1. Ἕνας φάρος διοπτεύεται πρὸς Β 12° Ζ καὶ ἐξ ἀποστάσεως 5 μιλ. ὑπὸ πλοίου, τὸ ὁποῖον ἐν συνεχείᾳ διανύει 8 μίλια πρὸς Δυσμάς, ὁπότε ὁ φάρος ἀπέχει 7,2 μίλια (σχ. 6·2α). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑπὸ τοῦ πλοίου τηρηθεῖσα πορεία καὶ ἡ δευτέρα διόπτευσις. (Τὸ πλοῖον Νοτίως τοῦ φάρου).

Λύσις.

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδονται αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ ζητοῦνται αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

$$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{8+7{,}2+5}{2}=\frac{20{,}2}{2}=10{,}1\ \text{μίλια}\quad \text{καὶ}$$

$$(\tau-\alpha)=10{,}1-\ \ 8=2{,}1$$
$$(\tau-\beta)=10{,}1-7{,}2=2{,}9$$
$$(\tau-\gamma)=10{,}1-\ \ 5=5{,}1$$

$$\eta\mu\pi\rho B=\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho B=\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)-(\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\gamma).$$

$(\tau-\alpha)=2{,}1$ $\qquad$ $\lambda o\gamma(\tau-\alpha)=0{,}32222$ $+$

$(\tau-\gamma)=5{,}1$ $\qquad$ $\lambda o\gamma(\tau-\gamma)=0{,}70757$

$\qquad\qquad 1{,}02979$

$\alpha=8$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\alpha=0{,}90309$ $+$ $\qquad$ $-$

$\gamma=5$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\gamma=0{,}69897$

$1{,}60206 \longrightarrow 1{,}60206$

$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho B=9{,}42773$

$$\widehat{B}=62^\circ\,19',3.$$

Ἄρα πορεία $(Z_\lambda)=62^\circ\,19',3+12^\circ$, ἤτοι

πορεία Β $74^\circ\,19',3$ Ζ

$$\eta\mu\pi\rho A=\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A=\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)-(\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\gamma)$$

$(\tau-\beta)=2{,}9$ $\qquad$ $\lambda o\gamma(\tau-\beta)=0{,}46240$ $+$

$(\tau-\gamma)=5{,}1$ $\qquad$ $\lambda o\gamma(\tau-\gamma)=0{,}70757$

$\qquad\qquad 1{,}16997$

$\beta=7{,}2$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\beta=0{,}85733$ $+$ $\qquad$ $-$

$\gamma=5$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\gamma=0{,}69897$

$1{,}55630 \longrightarrow 1{,}55630$

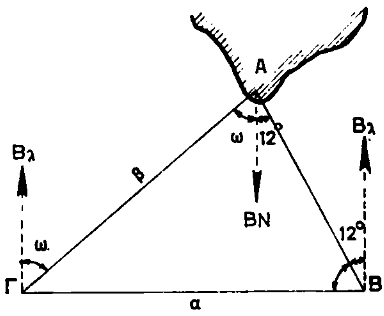
$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A=9{,}61367$

$$\widehat{A}=79^\circ\,43',7.$$

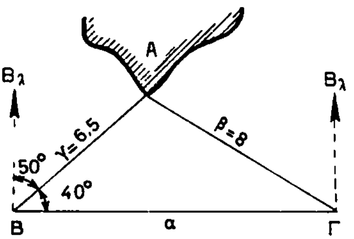
Ἐκ τοῦ σχήματος $6\cdot2\alpha$ $\widehat{\omega}=\widehat{\omega}'$, ἀλλὰ $\widehat{\omega}=79^\circ\,43',7-12^\circ$ $=67^\circ\,43'7$. Ἄρα δευτέρα διόπτευσις $=$ Β $67^\circ\,43',7$ Α.

2. Ἕνα σημεῖον τῆς ξηρᾶς διωπτεύθη πρὸς Β 50° Α ἐξ ἀποστάσεως 6,5 μιλίων ὑπὸ πλοίου πλέοντος πρὸς Ἀπηλιώτην (σχ. $6\cdot2\beta$). Μετὰ πάροδον 1 1/4 ὥρας τὸ σημεῖον ἀπεῖχεν 8 μίλια.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις κατὰ τὴν δευτέραν θέσιν τοῦ πλοίου καὶ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου.



Σχ. 6·2 α.



Σχ. 6·2 β.

Λύσις.

Ἐκ τοῦ σχήματος 6 · 2 β καὶ ἐκ τῶν δεδομένων γνωρίζομεν δύο πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὴν γωνίαν Β = 40°. Ἑπομένως θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τῶν ἡμιτόνων:

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \text{ ἢ δι' ἀντιστροφῆς } \frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu\Gamma}{\gamma} \text{ ἢ } \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma\eta\mu B}{\beta}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = \lambda o\gamma\gamma + \lambda o\gamma\eta\mu B - \lambda o\gamma\beta$$

$$\begin{array}{ll}
\gamma = 6{,}5 & \lambda o\gamma\gamma = 0{,}81291 \\
\widehat{B} = 40^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu B = \underline{2{,}80807} \;+ \\
 & \qquad 10{,}62098 \\
\beta = 8 & \lambda o\gamma B = \underline{0{,}90309} \;- \\
 & \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = 9{,}71789 \\
 & \widehat{\Gamma} = 31^\circ\ 29'.
\end{array}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη δευτέρα διόπτευσις θὰ εἶναι:

$$89^\circ\ 60' - 31^\circ\ 29' = 58^\circ\ 31',\ \text{ἤτοι}$$

διόπτευσις Β 58° 31′ Ζ.

α) Εὕρεσις γωνίας Α.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ,\ \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = 180^\circ - 71^\circ\ 29' = 108^\circ\ 31'.$$

β) Εὕρεσις πλευρᾶς α.

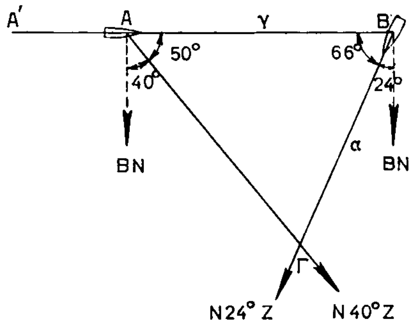
$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \text{ καὶ } \alpha = \frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B} \text{ ἢ } \alpha = \beta\eta\mu A\sigma\tau\epsilon\mu B.$$

$$\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\eta\mu A + \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B$$

$$\begin{array}{ll} \beta = 8 & \lambda o\gamma\beta = 0{,}90309 \\ \widehat{A} = 108^\circ\ 31' & \lambda o\gamma\eta\mu A = 9{,}97691 + \\ \widehat{B} = 40^\circ & \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B = 10{,}19193 \\ \hline & \lambda o\gamma\alpha = 1{,}07193 \\ & \alpha = 11{,}8 \text{ ναυτ. μίλ.} \end{array}$$

$$\text{Ταχύτης } \upsilon = \frac{s}{t} = \frac{11{,}8}{1{,}25} = 9{,}44 \text{ κόμβοι.}$$

3. Α καὶ Β εἶναι δύο πλοῖα. Τὸ Α πλέον πρὸς Ἀπηλιώτην



Σχ. 6·2 γ.

παρατηρεῖ τὸ Β πρὸς πρῶραν νὰ διασταυρώνῃ τὴν πορείαν του καὶ νὰ πλέῃ πρὸς Ν 24° Ζ (σχ. 6·2 γ). Δέκα λεπτὰ ἀργότερα τὸ Β διοπτεύεται πρὸς Ν 40° Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν πλοίων κατὰ τὴν δευτέραν διόπτευσιν, ὅταν εἶναι γνωστὸν ὅτι καὶ τὰ δύο πλοῖα πλέουν μὲ ταχύτητα 12 κόμβων.

Λύσις.

Ἕως ὅτου τὸ πλοῖον Α μεταβῇ ἀπὸ Α′ εἰς Α, παρῆλθον 10 min. Εἰς τὸν χρόνον αὐτὸν τὸ Β φθάνει εἰς τὴν θέσιν Γ, ἄρα (ΒΓ) = 2 ναυτ. μίλια.

α) Εὕρεσις γωνίας Γ.

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^\circ,\ \widehat{\Gamma}=180^\circ-(\widehat{A}+\widehat{B})=180^\circ-(50^\circ+66^\circ)=64^\circ.$$

β) Εὕρεσις πλευρᾶς β.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B} \text{ καὶ } \beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A} \text{ ἢ } \beta=\alpha\eta\mu B\sigma\tau\epsilon\mu A.$$

$$\lambda o\gamma\beta=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu B+\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu A$$

$$\begin{array}{llrl} \alpha= & 2 & \lambda o\gamma\alpha= & 0,30103 \\ \widehat{B}= & 66^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu B= & 9,96073+ \\ \widehat{A}= & 50^\circ & \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu A= & \underline{10,11575} \\ & & \lambda o\gamma\beta= & 0,37751 \end{array}$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις $\beta=$ 2,381 ναυτ. μίλια.

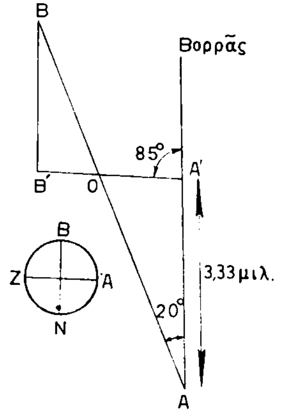
4. Ἕνα πλοῖον Α πλέει πρὸς βορρᾶν μὲ ταχύτητα 10 κόμβων καὶ παρατηρεῖ ἕνα ἄλλο πλοῖον Β 20° Ζ εἰς τὴν ἀριστερὰν πλευρὰν αὐτοῦ νὰ πλέῃ πρὸς Νότον (σχ. 6·2δ). Μετὰ πάροδον 20 min τὸ Β διοπτεύεται πρὸς Β 85° Ζ καὶ ἀπέχει τοῦ Α 2 μίλια. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου Β.

Λύσις.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ ἀρχικαὶ θέσεις τῶν δύο πλοίων καὶ Α′ καὶ Β′ αἱ θέσεις των μετὰ 20 min. Γωνία ΟΑ′Α = 180° − 85° = 95°.

Γωνία Α′ΟΑ = 180° − (95° + 20°) = 65°.

$$\frac{(A'O)}{\eta\mu A} = \frac{(AA')}{\eta\mu O} \text{ ἢ } (A'O) = \frac{(AA')\eta\mu A}{\eta\mu O} \text{ ἢ } (A'O) =$$
$(AA')\eta\mu A \sigma\tau\epsilon\mu O$.



Σχ. 6·2 δ.

$$\lambda o\gamma (A'O) = \lambda o\gamma (AA') + \lambda o\gamma\eta\mu A + \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu O$$

$AA' = 3{,}33$	$\lambda o\gamma (AA') = 0{,}52244$
$\widehat{A} = 20^\circ$	$\lambda o\gamma\eta\mu A = 9{,}53405 +$
$\widehat{O} = 65^\circ$	$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu O = 10{,}04272$
	$\lambda o\gamma (A'O) = 0{,}09921$
	$(A'O) = 1{,}256$ ναυτ. μίλια.

Ἄρα $B\widehat{B'}O = 20^\circ$, $B'\widehat{O}B = 65^\circ$ καὶ $B\widehat{B'}O = 95^\circ$.

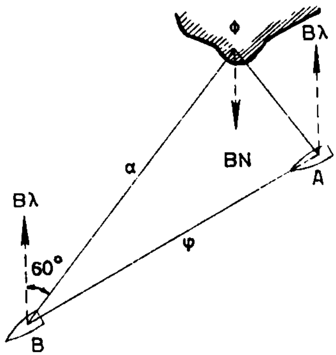
Εὕρεσις BB'.

$$(BB') = (B'O)\eta\mu O\sigma\tau\epsilon\mu B.$$
$$\lambda o\gamma (BB') = \lambda o\gamma (B'O) + \lambda o\gamma\eta\mu O + \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B$$

$B'O = 0{,}744$	$\lambda o\gamma (B'O) = 9{,}87157$
$\widehat{O} = 64^\circ$	$\lambda o\gamma\eta\mu O = 9{,}95728 +$
$\widehat{B} = 20^\circ$	$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B = 10{,}46595$
	$\lambda o\gamma (BB') = 0{,}29480$
	$(BB') = 1{,}9715$ ναυτ. μίλια.

Ἄρα ταχύτης πλοίου $= 1{,}9715 \times 3 = 5{,}914$ κόμβοι.

5. Ἕνα πλοῖον πλέον κατὰ μῆκος ἀκτῆς μὲ ταχύτητα 12 κόμβων, παρατηρεῖ ἕνα φάρον πρὸς διόπτευσιν Β 16° Ζ καὶ εἰς από-



Σχ. 6·2 ε.

στασιν 3 μιλίων. Μετὰ πλεῦσιν 40 min ὁ φάρος διοπτεύεται πρὸς Β 60° Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία τοῦ πλοίου.

Λύσις.

$$\widehat{\Phi} = 60^\circ + 16^\circ = 76^\circ.$$

α) Εὕρεσις γωνίας Β.

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\varphi}{\eta\mu\Phi} \text{ ἢ δ' ἀντιστροφῆς } \frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu\Phi}{\varphi} \text{ καὶ } \eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu\Phi}{\varphi}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu B = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\eta\mu\Phi - \lambda o\gamma\varphi$$

$$\begin{array}{lrr} \beta = 3 & \lambda o\gamma\, 3 = & 0{,}47712 \\ \widehat{\Phi} = 76^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu\Phi = & 9{,}98690 \; + \\ \hline & & 10{,}46402 \\ \varphi = 8 & \lambda o\gamma\varphi = & 0{,}90309 \\ \hline & \lambda o\gamma\eta\mu B = & 9{,}56093 \end{array}$$

$$\widehat{B} = 21^\circ\, 20',2.$$

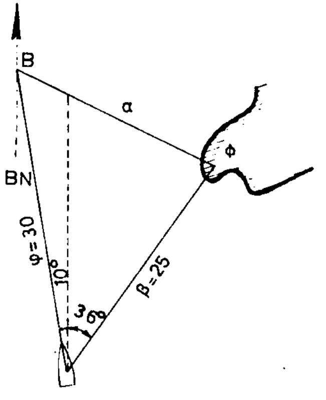
β) Εὕρεσις γωνίας Α.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = 82^\circ\, 39',8.$$

Ὁπότε $82^\circ\ 39',8 + 16^\circ = 98^\circ\ 39',8$ ἢ
$179^\circ\ 60' - 98^\circ\ 39',8 = 81^\circ\ 20',2$.

Ἄρα πορεία $=$ N $81^\circ\ 20',2$ Z.

6. Ἕνα πλοῖον παρατηρεῖ ἕνα φάρον πρὸς διόπτευσιν B 36° A καὶ εἰς ἀπόστασιν 25 μιλ. Ἀκολούθως πλέει πρὸς B 10° Z ἐπὶ 2,1/2 h μὲ ταχύτητα 12 κόμβων (σχ. 6·2ζ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις τοῦ φάρου καὶ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τοῦ πλοίου κατὰ τὸ τέλος τοῦ ὡς ἄνω χρόνου.



Σχ. 6·2ζ.

Λύσις.

$$\varepsilon\varphi \frac{\Phi - B}{2} = \frac{\varphi - \beta}{\varphi + \beta}\,\sigma\varphi \frac{A}{2}.$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi \frac{\Phi - B}{2} = \lambda o\gamma(\varphi - \beta) + \lambda o\gamma\sigma\varphi \frac{A}{2} - \lambda o\gamma(\varphi + \beta)$$

$\varphi - \beta = 5$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\ 5 = 0,69897$

$\dfrac{\widehat{A}}{2} = 23^\circ$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\sigma\varphi \dfrac{A}{2} = 10,37215$ $+$

$1,07112$

$\varphi + \beta = 55$ $\qquad$ $\lambda o\gamma(\varphi + \beta) = 1,74036$ $-$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi \dfrac{\Phi - B}{2} = 9,33076$

$$\frac{\Phi - B}{2} = 12^\circ\ 5',3$$

$$\Phi - B = 24^\circ\ 10',6$$

$$\Phi + B = 134^\circ$$

$$\Phi - B = 24^\circ\ 10',6$$

$$2\widehat{\Phi} = 158^\circ\ 10',6$$

$$\widehat{\Phi} = 79^\circ\ 5',3.$$

Εὕρεσις γωνίας Β.

$$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{\Phi} + \widehat{A}) = 180^\circ - (79^\circ\ 5,3 + 46^\circ) = 54^\circ\ 4',7.$$

Ὁπότε $54^\circ\ 54',7 + 10^\circ = 64^\circ\ 54',7$.

Ἄρα διόπτευσις Β $64^\circ\ 54',7$ Α.

Σημείωσις.

Ἀπόστασις $(AB') = 2,5 \times 12 = 30$ ναυτ. μίλια.

Ὑπολογισμὸς τῆς ἀποστάσεως $B\Phi = \alpha$:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \ \text{ἢ}\ \alpha = \frac{\beta\eta\mu A}{\beta\eta\mu A} \ \text{ἢ}\ \alpha = \beta\eta\mu A\sigma\tau\epsilon\mu B.$$

$$\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\eta\mu A + \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B$$

$\beta = 25$	$\lambda o\gamma\beta = 1,39794$
$\widehat{A} = 46^\circ$	$\lambda o\gamma\eta\mu A = 9,85693 +$
$\widehat{B} = 54^\circ\ 54',7$	$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu B = 10,08710$
	$\lambda o\gamma\alpha = 1,34197$

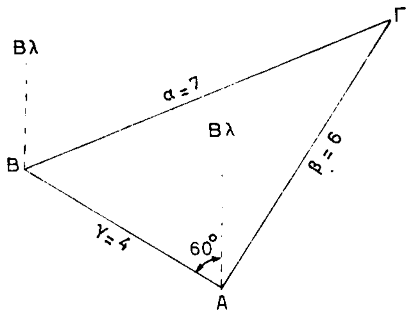
Ἄρα ἡ ἀπόστασις $\alpha = 21,98$ ναυτ. μίλια.

7. Σημαντὴρ Α διοπτεύεται πρὸς Β 60° Ζ καὶ εἰς ἀπόστασιν 4 μιλίων ἐξ ἄλλου σημαντῆρος Β. Ἐκ πλοίου πλέοντος πρὸς Ἀπηλιώτην, εὑρίσκεται διὰ τοῦ ἑξᾶντος ὅτι τοῦτο ἀπέχει 6 μίλια ἀπὸ τὸν Α καὶ 7 μίλια ἀπὸ τὸν Β (σχ. 6 · 2 η). Νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις τοῦ πλοίου ἐκ τοῦ σημαντῆρος Β.

Λύσις.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του:

$$2\tau = 4 + 6 + 7 = 17 \quad \text{καὶ} \quad \tau = 8{,}5$$
$$(\tau - \alpha) = 8{,}5 - 7 = 1{,}5$$
$$(\tau - \gamma) = 8{,}5 - 4 = 4{,}5.$$



Σχ. 6·2 η.

Εὕρεσις γωνίας Β.

$$\eta\mu\pi\rho B = \frac{(\tau - \alpha)(\tau - \gamma)}{\alpha\gamma}.$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho B = \lambda o\gamma(\tau - \alpha) + \lambda o\gamma(\tau - \gamma) - (\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\gamma)$$

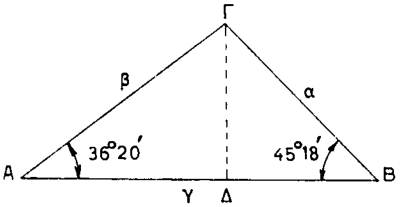
$$\begin{array}{llr}
(\tau - \alpha) = 1{,}5 & & \lambda o\gamma\,(\tau - \alpha) = 0{,}17609 \\
(\tau - \gamma) = 4{,}5 & & \lambda o\gamma\,(\tau - \gamma) = \underline{0{,}65321} \;+ \\
 & & 0{,}82930 \\
\alpha = 4 & \lambda o\gamma\, 4 = 0{,}60206 & \\
\gamma = 7 & \lambda o\gamma\, 7 = \underline{0{,}84510} \;+ & - \\
 & 1{,}44716 \longrightarrow & \underline{1{,}44716} \\
 & & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho B = 9{,}38214 \\
 & & \widehat{B} = 58^\circ\ 48',7.
\end{array}$$

Ὁπότε $180^\circ - (58^\circ\ 48',7 + 60^\circ) = 61^\circ\ 11',3$.

Ἄρα διόπτευσις Β $61^\circ 11',3$ Α.

8. Δύο σταθμοὶ Α καὶ Β ἀπέχοντες 6 000 ft παρατηροῦν ἕνα ἀερόστατον ἀκριβῶς ἄνωθεν τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία τοὺς ἑνώ-

νει. Τὸ ὕψος του ἐκ τοῦ Α εἶναι 36° 20′ καὶ ἐκ τοῦ Β 45° 18′ (σχ. 6·2θ). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου εἰς ft.



Σχ. 6·2θ.

Λύσις.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν:

$$\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \beta=\frac{\gamma\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} \quad \tilde{\eta} \quad \beta=\gamma\eta\mu B\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma.$$

$$\lambda o\gamma\beta=\lambda o\gamma\gamma+\lambda o\gamma\eta\mu B+\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma.$$

$$\begin{array}{lrl}
\gamma=6\,000 \text{ ft} & \lambda o\gamma\gamma= & 3{,}77815 \\
\widehat{B}=45^\circ\ 18' & \lambda o\gamma\eta\mu B= & 9{,}85175 \ + \\
\widehat{\Gamma}=98^\circ\ 22' & \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma= & 10{,}00465 \\
\hline
 & \lambda o\gamma\beta= & 3{,}63455 \\
 & \beta= & 4310{,}7.
\end{array}$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν:

$$(\Gamma\Delta)=\beta\eta\mu A$$

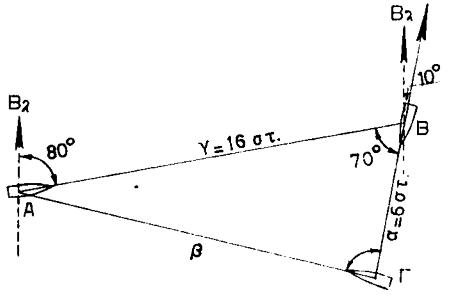
$$\lambda o\gamma\,(\Gamma\Delta)=\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\eta\mu A.$$

$$\begin{array}{lrl}
\beta=4310{,}7 & \lambda o\gamma\beta= & 3{,}63455 \\
\widehat{A}=36^\circ\ 20' & \lambda o\gamma\eta\mu A= & 9{,}77268 \ + \\
\hline
 & \lambda o\gamma\,(\Gamma\Delta)= & 13{,}40723\ (-10) \\
 & \lambda o\gamma\,(\Gamma\Delta)= & 3{,}40723
\end{array}$$

Ἄρα ὕψος ἀεροστάτου (ΓΔ) = 2554,1 ft.

9. Ἕνα ἁλιευτικὸν σκάφος πλέει ἐξ ἑνὸς σημαντῆρος πρὸς Β 80° Α 16 στάδια καὶ ποντίζει τὸ δίκτυόν του, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς μίαν διεύθυνσιν Β 10° Α καὶ Ν 10° Ζ μήκους 6 σταδίων (1 στάδιον = 1/10 μίλια = 185,2 m). Ἀκολούθως πλέει ἐκ τοῦ

ΝΔ ἄκρου τοῦ δικτύου πρὸς τὸν σημαντῆρα (σχ. 6·2ι). Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνολικῶς διανυθεῖσα ἀπόστασις.



Σχ. 6·2ι.

Λύσις.

Ἔστωσαν Α ὁ σημαντήρ, Β ἡ θέσις τοῦ πλοίου μετὰ τὸν πλοῦν τῶν 16 σταδίων, ΒΓ ἡ διεύθυνσις καὶ τὸ μῆκος τοῦ δικτύου καὶ ΓΑ ἡ πορεία καὶ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν διήνυσε, διὰ νὰ φθάσῃ ἐκ νέου εἰς τὸν σημαντῆρα.

Ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν:

$$\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma-\mathrm{A}}{2}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}\,\sigma\varphi\frac{\mathrm{B}}{2}.$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma-\mathrm{A}}{2}=\lambda o\gamma(\gamma-\alpha)+\lambda o\gamma\sigma\varphi\,\frac{\mathrm{B}}{2}-\lambda o\gamma(\gamma+\alpha)$$

$$(\gamma-\alpha)=10 \qquad \lambda o\gamma(\gamma-\alpha)=\ 1{,}00000$$

$$\frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}=35^\circ \qquad \lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{\mathrm{B}}{2}=10{,}15477 \quad +$$

$$11{,}15477$$

$$(\gamma+\alpha)=22 \qquad \lambda o\gamma(\gamma+\alpha)=\ 1{,}34242 \quad -$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma-\mathrm{A}}{2}=\ 9{,}81235$$

$$\frac{\Gamma - A}{2} = 32^\circ\, 59',4$$

$$\begin{aligned} \Gamma - A &= 65^\circ\, 58',8 \\ \Gamma + A &= 110^\circ \\ \hline 2\Gamma &= 175^\circ\, 58',8 \\ \widehat{\Gamma} &= 87^\circ\, 59',4. \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς $A\Gamma = \beta$.

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \beta = \frac{\gamma\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} \quad \tilde{\eta} \quad \beta = \gamma\eta\mu B \sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma.$$

$$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\gamma + \lambda o\gamma\eta\mu B + \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma$$

$$\begin{array}{ll} \gamma = 16 & \lambda o\gamma 16 = 1{,}20412 \\ \widehat{B} = 70^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu B = 9{,}97299 + \\ \widehat{\Gamma} = 87^\circ\, 59',4 & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma = 10{,}00027 \\ \hline & \lambda o\gamma\beta = 1{,}17738 \\ & \beta = 15{,}04 \ \sigma\tau\acute{\alpha}\delta\iota\alpha. \end{array}$$

Συνολικῶς διανυθεῖσα ἀπόστασις $= 16 + 15{,}04 + 6 = 37{,}04$ στάδια.

10. Δύο πλοῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ. Τὸ Β εἶναι 10 μίλια βορειότερον τοῦ Α. Τὸ Β πλέει πρὸς 148° μὲ ταχύτητα 15 κόμβων καὶ τὸ Α πρὸς 018° μὲ ταχύτητα 13 κόμβων (σχ. 6·2κ). Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν Α καὶ Β, ὅταν τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν θὰ διέλθῃ πρώραθεν τοῦ ἄλλου.

Λύσις.

α) Ὑπολογισμὸς γωνίας Γ.

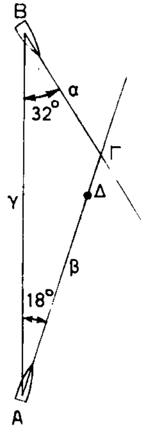
$$\widehat{\Gamma} = 180^\circ - (32^\circ + 18^\circ) = 130^\circ.$$

β) Ὑπολογισμὸς τῆς ΒΓ.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \tilde{\eta} \quad \alpha = \gamma\eta\mu A \sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma.$$

$$\lambda o\gamma \alpha = \lambda o\gamma \gamma + \lambda o\gamma \eta\mu A + \lambda o\gamma \sigma\tau\epsilon\mu \Gamma.$$

$\gamma = 10$	$\lambda o\gamma \gamma =$	$1,00000$
$\widehat{A} = 18^\circ$	$\lambda o\gamma \eta\mu A =$	$9,48948$
$\widehat{\Gamma} = 130^\circ$	$\lambda o\gamma \sigma\tau\epsilon\mu \Gamma =$	$10,11575$ +
	$\lambda o\gamma \alpha =$	$0,60523$
	$\alpha =$	$4,0292.$



Σχ. 6·2 κ.

γ) Ὑπολογισμὸς τῆς ΑΓ.

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \beta = \gamma \eta\mu B \sigma\tau\epsilon\mu \Gamma.$$

$\gamma = 10$	$\lambda o\gamma \gamma =$	$1,00000$
$\widehat{B} = 32^\circ$	$\lambda o\gamma \eta\mu B =$	$9,72421$
$\widehat{\Gamma} = 50^\circ$	$\lambda o\gamma \sigma\tau\epsilon\mu \Gamma =$	$10,11575$ +
	$\lambda o\gamma \beta =$	$0,83996$
	$\beta =$	$6,918.$

Χρόνος μεταβάσεως τοῦ Β εἰς Γ, $t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{4,029}{15} = 0,268\text{h}$ $= 16,08$ min.

Ὅταν τὸ Β εὑρίσκετο εἰς Γ, τὸ Α εὑρίσκετο εἰς Δ, δηλαδὴ

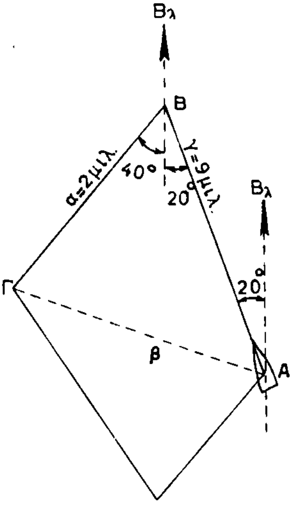
τὸ Δ εἰς 60′ διανύει 13 μίλια
» Δ » 16,08′ » x »

$$x = 13 \times \frac{16,08}{60} = 13 \times 0,268 = 3,484 \text{ μίλια. Ἄρα:}$$

$$ΓΔ = ΑΓ - ΔΑ = 6,918 - 3,484 = 3,434 \text{ μίλια.}$$

Ἄρα τὸ Β θὰ διέλθῃ πρώραθεν τοῦ Γ κατὰ 3,434 μίλια.

11. Ἕνα πλοῖον μὲ πορείαν Β 20° Ζ καὶ ταχύτητα 9 κόμ-



Σχ. 6·2λ.

βων ἀντιμετωπίζει ρεῦμα διευθύνσεως Ν 40° Ζ καὶ ἐντάσεως 2 μιλίων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διανυομένη ὡς πρὸς τὸν βυθὸν ταχύτης εἰς 1 ὥραν (σχ. 6·2λ).

Λύσις.

Εἰς τὸ σχῆμα 6·2λ, ΑΒ θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἡ πορεία του ἄνευ τῆς ἐπιδράσεως τοῦ ρεύματος καὶ ΒΓ ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. Τὸ πλοῖον, ὡς γνωστόν, ἀκολουθεῖ τὴν συνισταμένην, δηλαδὴ τὴν ΑΓ.

Ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΓΒΑ.

$$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma - \mathrm{A}}{2} = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma + \alpha}\, \sigma\varphi \frac{\mathrm{B}}{2}.$$

$$\begin{array}{lrl}
\gamma - \alpha = 7 & \lambda o\gamma(\gamma - \alpha) = & 0{,}84510 \quad + \\
\dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2} = 30^\circ & \lambda o\gamma\sigma\varphi \dfrac{\mathrm{B}}{2} = & 10{,}23856 \\
 & & \overline{1{,}08366} \quad - \\
\gamma + \alpha = 11 & \lambda o\gamma(\gamma + \alpha) = & \underline{1{,}04139} \\
 & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi \dfrac{\Gamma - \mathrm{A}}{2} = & 10{,}04227 \\
 & \dfrac{\Gamma - \mathrm{A}}{2} = & 47^\circ\ 47'.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\widehat{\Gamma} - \widehat{\mathrm{A}} = & 95^\circ\ 34' \quad + \\
\widehat{\Gamma} + \widehat{\mathrm{A}} = & \underline{120^\circ} \\
2\Gamma = & 215^\circ\ 34' \\
\widehat{\Gamma} = & 107^\circ\ 47'.
\end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς ΓΑ.

$$\frac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \beta = \gamma\eta\mu\mathrm{B}\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma.$$

$$\begin{array}{lrl}
\gamma = 9 & \lambda o\gamma\gamma = & 0{,}95424 \\
\widehat{\mathrm{B}} = 60^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu\mathrm{B} = & 9{,}93753 + \\
\widehat{\Gamma} = 72^\circ\ 17' & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma = & \underline{0{,}21127} \\
 & \lambda o\gamma\beta = & 1{,}10304 \\
 & \beta = & 12{,}677.
\end{array}$$

Ἄρα ἡ ταχύτης ὡς πρὸς τὸν βυθὸν εἶναι 12,677 κόμβοι.

6·3 Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν.

1. Ἕνας σημαντὴρ Β διοπτεύεται πρὸς Β 60° Ζ καὶ εἰς ἀπό-

στασιν 4 μιλίων ἐξ ἑνὸς σημαντῆρος Α. Ἕνα πλοῖον, ποὺ προχωρεῖ πρὸς Ἀνατολάς, εὑρίσκει διὰ μετρήσεως γωνιῶν ὑπὸ τοῦ ἑξᾶντος ὅτι ἀπέχει 6 μίλια ἀπὸ τὸν Α καὶ 7 μίλια ἀπὸ τὸν Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις τοῦ πλοίου ἐκ τοῦ σημαντῆρος Β. (Τὸ πλοῖον βορείως τοῦ σημαντῆρος). (*Ἀπάντ.* Β 61° 12′ Α)

2. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Ἀπηλιώτην μὲ ταχύτητα 10 κόμβων καὶ παρατηρεῖ φάρον εἰς ἀπόστασιν 4,5 μιλίων. Μετὰ πλεῦσιν ἡμισείας ὥρας ὁ αὐτὸς φάρος εἶναι εἰς ἀπόστασιν 6 μιλίων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις τοῦ φάρου κατὰ τὴν δευτέραν παρατήρησιν, ὅταν τὸ πλοῖον εὑρίσκεται Νοτίως αὐτοῦ. (*Ἀπάντ.* Β 42° 46′,7 Ζ)

3. Τρεῖς σημαντῆρες προσδιορίζουν μίαν κατὰ τρίγωνον πορείαν. Ὁ Β ἀπέχει 8 μίλια ἀπὸ τὸν Α καὶ 9 μίλια ἀπὸ τὸν Γ, καὶ ὁ Γ εὑρίσκεται 7 μίλια πρὸς Ἀνατολὰς τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Β διοπτεύεται πρὸς Β 10° Α ἐκ τοῦ Α, νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις τοῦ Γ ἐκ τοῦ Α.
(*Ἀπάντ.* Γωνία 73° 24′, Διόπτευσις Β 83° 24′ Α)

4. Ἡ περίμετρος μιᾶς κατὰ τρίγωνον πορείας θαλαμηγῶν (γιὼτ) εἶναι 33 μίλια. Αἱ πλευραὶ εἶναι 14, 10 καὶ 9 μίλια. Ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ εἶναι πρὸς ΒΔ καὶ ΝΑ διεύθυνσιν. Ποῖαι αἱ πορεῖαι πηδαλιουχήσεως οὕτως, ὥστε νὰ περιπλεύσωμεν τὴν κατὰ τρίγωνον πορείαν δεξιόθεν. (*Ἀπάντ.* Αἱ πορεῖαι εἶναι: Β 45° Ζ, 14 μιλίων,
Ν 84° 50′Α, 10 μιλίων, Ν 0° 23′Ζ 9 μιλίων)

5. Ἕνα πλοῖον πρόκειται νὰ ἀγκυροβολήσῃ εἰς θέσιν ἰσαπέχουσαν τριῶν σημαντήρων Α, Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία καὶ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ διανύσῃ ἐκ τοῦ Α, διὰ νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν θέσιν αὐτήν, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ Α εὑρίσκεται πρὸς Ἀπηλιώτην καὶ εἰς ἀπόστασιν 6 μιλίων ἀπὸ τοῦ Β καὶ ὁ Γ ἀπέχει 7 μίλια ἀπὸ τοῦ Β καὶ 8 μίλια ἀπὸ τοῦ Α.
(*Ἀπάντ.* Πορεία Ν 46° 34′Ζ. Ἀπόστασις 4,13 μίλ.)

6. Ἕνα σημεῖον διωπτεύθη πρὸς Β 15° Α ὑπὸ πλοίου, τὸ ὁποῖον μετὰ πλεῦσιν 5 μιλίων πρὸς Β 60° Ζ διώπτευσε τὸ σημεῖον πρὸς Β 28° Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἐκ τοῦ σημείου κατὰ τὴν δευτέραν διόπτευσιν. (*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις 21,47 μίλια)

7. Ἐπὶ πορείας Ν 40° Α ἕνα σημεῖον διωπτεύθη πρὸς Β 60° Α καὶ μετὰ πλεῦσιν 8 μιλίων ἐπὶ τῆς αὐτῆς πορείας διωπτεύθη πρὸς Β

10° Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἐκ τοῦ σημείου κατὰ τὴν δευτέραν διόπτευσιν. (*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις 8,384 μίλια)

8. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Ν 57° Α καὶ παρατηρεῖ ἕνα σημεῖον πρὸς διόπτευσιν Β 69° Α. Μετὰ πλεῦσιν 9 μιλίων τὸ διοπτεύει πρὸς Β 8° Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς του ἐκ τοῦ σημείου κατὰ τὴν δευτέραν διόπτευσιν. (*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις 7,473 μίλια)

9. Ἕνας φάρος διοπτεύεται πρὸς Ν 18° Ζ ἐξ ἑνὸς πλοίου, τὸ ὁποῖον μετὰ πλεῦσιν 6 μιλίων πρὸς Ν 84° Ζ διώπτευσεν αὐτὸν πρὸς Β 34° Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἐκ τοῦ φάρου κατὰ τὴν 2αν διόπτευσιν. (*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις 7,448 μίλια)

10. Ἕνα πλοῖον ταχύτητος 12 κόμβων πλέει κατὰ μῆκος ἀκτογραμμῆς καὶ διοπτεύει φανὸν πρὸς Β 16° Ζ καὶ εἰς ἀπόστασιν 3 μιλίων. Μετὰ πλεῦσιν 40 λεπτῶν ὁ φανὸς διωπτεύθη πρὸς Β 60° Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τηρηθεῖσα μεταξὺ τῶν δύο διοπτεύσεων πορεία.
(*Ἀπάντ.* Γωνία 21° 20′. Πορεία Ν 81° 20′ Ζ)

11. Δύο σημαντῆρες διοπτεύονται ἐν εὐθυγραμμίσει πρὸς Β 50° Ζ καὶ μετὰ πλεῦσιν 10 λεπτῶν πρὸς Ἀπηλιώτην. Δύο ἄλλοι σημαντῆρες διωπτεύθησαν ἐν εὐθυγραμμίσει ἐπὶ τῆς αὐτῆς διοπτεύσεως. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ζευγῶν σημαντήρων εἶναι 1 μίλιον καὶ ἡ πορεία, διὰ νὰ διανύσωμεν τὴν ἀπόστασιν αὐτήν, εἶναι Β 36° Α, νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου. (*Ἀπάντ.* Ταχύτης 9,312 κόμβοι)

12. Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Ἀπηλιώτην κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκτογραμμῆς καὶ παρατηρεῖ ἕνα βράχον πρὸς διόπτευσιν Β 46° Α. Μετὰ πλεῦσιν 7 μιλίων ὁ αὐτὸς βράχος διωπτεύθη πρὸς Β 18° Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ βράχου κατὰ τὸν χρόνον τῆς λήψεως τῆς δευτέρας διοπτεύσεως. (*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις 4,41 μίλια)

13. Ἕνα πλοῖον εἶναι ἠγκυροβολημένον ἐντὸς τριῶν σημαντήρων Α, Β καὶ Γ, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 2 μίλια. Ὁ Α καὶ ὁ Β ὑποτείνουν (σχηματίζουν) γωνίαν 90° ἐκ τῆς θέσεως τοῦ πλοίου. Ὁ Β καὶ ὁ Γ ὑποτείνουν τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ὑποτείνουν ὁ Α καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ τοῦ σημαντῆρος Γ.
(*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις 0,732 μίλια ἢ 7,32 στάδια)

14. Δύο ἠγκυροβολημένα πλοῖα Α καὶ Β ἀπέχουν ἀντιστοίχως 7 καὶ 5 μίλια ἐξ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον διοπτεύεται ἐξ αὐτῶν πρὸς Β

10° Α καὶ Β 81° Ν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Β ἐκ τοῦ Α. (*Ἀπάντ.* Διόπτευσις Β 31° 21′ Ζ. Ἀπόστασις 7,15 μίλ.).

15. Ἕνα πλοῖον εἶναι ἠγκυροβολημένον πρὸς Ν 70° Ζ καὶ εἰς ἀπόστασιν 2,5 μιλίων ἐξ ἑνὸς φάρου. Κατόπιν προχωρεῖ πρὸς ἄλλο ἀγκυροβόλιον πρὸς Ν 12° Α καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 μιλίου ἀπὸ τοῦ φάρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τηρηθεῖσα πορεία καὶ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν διήνυσε.

(*Ἀπάντ.* Πορεία Ν 87° 14′ Α. Ἀποστ. 2,56 μίλια)

16) Ἕνα πλοῖον πλέει πρὸς Ἀνατολὰς καὶ παρατηρεῖ ἕνα φάρον πρὸς διόπτευσιν Β 30° Α καὶ εἰς ἀπόστασιν 9 μιλίων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τηρήσῃ, διὰ νὰ διέλθῃ μακρὰν τοῦ φάρου 6 μίλια καὶ νὰ τὸν διοπτεύῃ πρὸς Β 30° Ζ.

(*Ἀπάντ.* Πορεία Β 70° 53′,5 Α)

17. Δύο πλοῖα ἐκκινοῦν ἐκ τῆς αὐτῆς θέσεως, τὸ Α πρὸς Β 80° Α μὲ ταχύτητα 9 κόμβων καὶ τὸ Β πρὸς Ν 40° Α μὲ ταχύτητα 10 κόμβων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασίς των μετὰ 1 ὥραν καὶ ἡ διόπτευσις τοῦ Α ἐκ τοῦ Β.

(*Ἀπάντ.* Διόπτευσις Β 14° 47′,2 Α′. Ἀπόστ. 9,54 μίλ.)

18. Δύο πλοῖα Α καὶ Β διοπτεύονται ἐξ ἑνὸς ἀκρωτηρίου Γ πρὸς Β 17° Α καὶ Ν 30° Α καὶ εἰς ἀπόστασιν 5 καὶ 7 μιλίων ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διόπτευσις καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Β ἐκ τοῦ Α.

(*Ἀπάντ.* Διόπτευσις Ν 10° 38′,5 Α. Ἀπόστασις 11 μίλια)

19. Δύο πλοῖα ἐκκινοῦντα ἐκ τῆς αὐτῆς θέσεως προχωροῦν ἐπὶ διαφορετικῶν πορειῶν. Τὸ ἕνα πλέει πρὸς Β 49° Ζ μὲ ταχύτητα 12 κόμβων καὶ τὸ ἄλλο πρὸς Ν 11° Ζ μὲ ταχύτητα 14 κόμβων. Ζητεῖται ἡ μεταξύ των ἀπόστασις μετὰ 3 ὥρας, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ διόπτευσις τοῦ βορειοτέρου πλοίου ἐκ τοῦ ἑτέρου.

(*Ἀπάντ.* Ἀπόστασις 62,72 μιλ. Διόπτ. Β 16° 27′,4 Ζ)

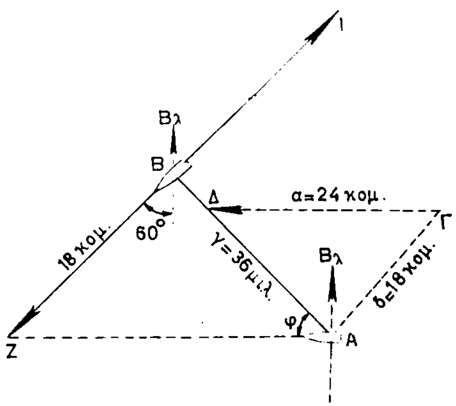
20. Ἕνα πλοῖον εὑρίσκεται πρὸς Ν 10° Ζ σημείου ξηρᾶς καὶ εἰς ἀπόστασιν 25 μίλ. καὶ πλέει πρὸς Β 19° Ζ ἐπὶ 3 ὥρας μὲ ταχύτητα 11 κόμβων. Ζητεῖται ἡ διόπτευσις τοῦ σημείου τῆς ξηρᾶς κατὰ τὸ τέλος αὐτοῦ τοῦ χρόνου, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ ἀπόστασις ἐξ αὐτοῦ.

(*Ἀπάντ.* Διόπτευσις Ν 66° 25′, 7 Α. Ἀπόστασις 16,46 μίλια)

6·4 Προβλήματα σχετικῆς κινήσεως λυόμενα τριγωνομετρικῶς.

Εἰς τὰ προβλήματα σχετικῆς κινήσεως θεωροῦμεν τὸ ἕτερον τῶν πλοίων ὡς ἀκίνητον, δηλαδὴ ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτὸ ἄνυσμα ἴσον καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν ταχύτητά του. Διὰ νὰ μὴ μεταβάλωμεν ὅμως τὴν σχετικὴν κίνησιν, ἐφαρμόζομεν καὶ εἰς τὸ ἰδικόν μας πλοῖον τὸ ἴδιον ἄνυσμα, ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ προηγουμένου. Εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα διὰ τῶν σχημάτων θὰ ἐπεξηγηθοῦν τὰ ἀνωτέρω καλύτερον.

1. Ἕνα καταδρομικὸν πληροφορεῖται ὅτι σκάφος πρὸς διόπτευσιν ΒΔ αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 36 μιλίων πλέει πρὸς Ν 60° Ζ μὲ ταχύτητα 18 κόμβων (σχ. 6·4 α). Ποίαν πορείαν πρέπει νὰ τηρήσῃ τὸ καταδρομικόν, διὰ νὰ παρεμποδίσῃ τοῦτο εἰς ὅσον δυνατὸν συντομώτερον χρόνον καὶ μετὰ πόσον χρόνον θὰ τὸ ἐπιτύχῃ, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ καταδρομικοῦ εἶναι 24 κόμβοι.



Σχ. 6·4 α.

Λύσις.

Ἔστω Α ἡ θέσις τοῦ καταδρομικοῦ, ὅταν τὸ Β εὑρίσκεται ΒΔ αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 36 μιλίων, ἤτοι ΑΒ = 36 μίλια. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀκινητοποιοῦμεν τὸ σκάφος Β, δηλαδὴ ἐφαρμόζομεν ἕνα ἄνυσμα ΒΙ ἴσον καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν ταχύτητά του, τῶν 18 μιλίων. Διὰ νὰ μὴ μεταβάλωμεν τὴν σχετικὴν κίνησιν, ἐφαρμόζομεν καὶ εἰς τὸ πλοῖον Α τὸ ἄνυσμα ΒΙ. Κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ταχύτητα τοῦ καταδρομικοῦ, ἤτοι 24 μίλια, γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Δ.

Τότε ἡ ΑΔ μᾶς δίδει τὴν ταχύτητα συμπλησιάσεως ἢ τὴν σχετικὴν ταχύτητα, ἡ δὲ ΓΔ τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ ἀκολουθήσῃ τὸ καταδρομικόν.

Ἐκ τοῦ σχήματος 6·4 α ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΑΓΔ:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\delta}{\eta\mu\Delta} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\Delta = \frac{\delta\eta\mu A}{\alpha}.$$

$$\begin{array}{ll} \delta = 18 & \lambda o\gamma\delta = 1{,}25527 \\ \widehat{A} = 105^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu A = \underline{9{,}98494} \; + \\ & \qquad 1{,}24021 \\ \alpha = 24 & \lambda o\gamma\alpha = 1{,}38021 \\ & \lambda o\gamma\eta\mu\Delta = 9{,}86000 \\ & \widehat{\Delta} = 46^\circ\ 25',3. \end{array}$$

Ἀλλὰ $\widehat{\Delta} = \widehat{\varphi}$, διότι ἡ ΑΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἑπομένως ἡ πορεία, τὴν ὁποίαν θὰ ἀκολουθήσῃ τὸ καταδρομικόν, θὰ εἶναι:

Πορεία $= 45^\circ + (46^\circ\ 25',3) = 91^\circ\ 25',3$

N $88^\circ\ 34',7$ Z.

Ταχύτης συμπλησιάσεως:

Γωνία $\Gamma = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{\Delta}) = 180^\circ - (105^\circ + 46^\circ\ 25',3) = 28^\circ\ 34,'7$.

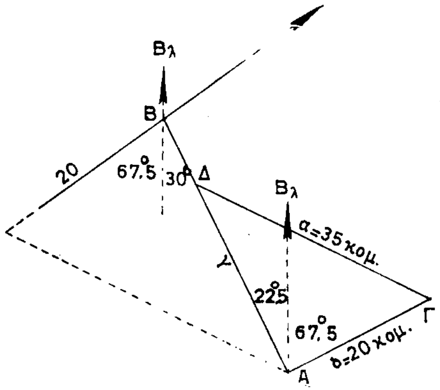
$$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 24 & \lambda o\gamma\alpha = 1{,}38021 \\ \widehat{\Gamma} = 28^\circ\ 34',7 & \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = \underline{9{,}67975} \; + \\ & \qquad 1{,}05996 \\ \widehat{A} = 150^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu A = \underline{9{,}98494} \; - \\ & \lambda o\gamma\gamma = 1{,}07502 \\ & \gamma = 11{,}89. \end{array}$$

Ταχύτης συμπλησιάσεως = 11,89 κόμβοι

Χρόνος $t = 36 : 11{,}89 = 2\text{h}\ 3\ \text{min}\ 41\ \text{sec}.$

2. Πολεμικὸν πλοῖον Α πληροφορεῖται ὅτι ἐχθρικὸν σκάφος Β πλέον πρὸς 247° $\frac{1}{2}$ μὲ ταχύτητα 20 κόμβων εὑρίσκεται πρὸς διόπτευσιν Β.ΒΔ καὶ εἰς ἀπόστασιν 30 μιλίων (σχ. 6·4β). Ἐὰν ἡ μεγίστη ταχύτης τοῦ πλοίου Α εἶναι 35 κόμβοι, νὰ εὑρεθῇ τὸ



Σχ. 6·4 β.

ἀπαιτούμενον χρονικὸν διάστημα καὶ ἡ πορεία, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τηρήσῃ, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ Β.

Λύσις.

Εἰς τὸ σχῆμα 6·4β τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

$$\eta\mu\Delta = \frac{\delta}{\alpha}$$

$\delta = 20$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\delta = 1{,}30103$

$\alpha = 35$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\alpha = \underline{1{,}54407}$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\Delta = 9{,}75696$$

$$\widehat{\Delta} = 34^\circ\ 51'$$

Πορεία $34^\circ\ 51' + 22^\circ{,}5 = \text{Β}\ 57^\circ\ 21'\ \text{Ζ}$.

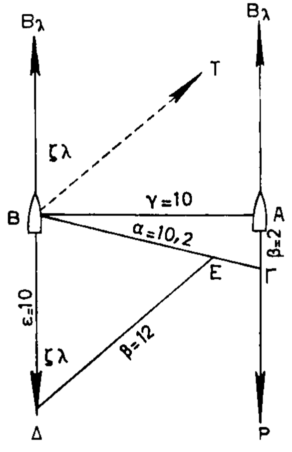
Εὕρεσις ΑΔ = γ ἢ ταχύτητος συμπλησιάσεως:

$$\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu\Delta.$$

$$\alpha = 35 \qquad \lambda o\gamma \alpha = 1{,}54407$$
$$\widehat{\Delta} = 34^\circ\ 51' \qquad \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\Delta = \underline{9{,}91416} \ +$$
$$\lambda o\gamma\gamma = 1{,}45823$$
$$\gamma = 28{,}72.$$

Ταχύτης συμπλησιάσεως = 28,7 κόμβοι.
Χρόνος t = 30 : 28,72 = 1 h 2 min 34 sec.

3. Δύο πλοῖα Α καὶ Β ἐν περιπολίᾳ πλέουν πρὸς Βορρᾶν μὲ ταχύτητα 10 κόμβων. Τὸ πλοῖον Β, εὑρισκόμενον 1 μίλιον (10 στάδια) εἰς τὴν ἀριστερὰν πλευρὰν τοῦ Α, διατάσσεται νὰ αὐξήσῃ τὴν ταχύτητά του εἰς 12 κόμβους καὶ νὰ εὑρεθῇ 2 στάδια πρύμνηθεν τοῦ Α (σχ. 6·4γ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία καὶ ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν ζητουμένην θέσιν.



Σχ. 6·4 γ.

Λύσις.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ ἀρχικαὶ θέσεις τῶν πλοίων. Τότε τὸ Β κινούμενον σχετικῶς πρὸς τὸ Α πρέπει νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν θέσιν Γ, ἤτοι 2 στάδια πρύμνηθεν τοῦ Α. Κατὰ τὰ γνωστὰ ἀκινητοποιοῦμεν τὸ Α καὶ εἰς τὸ Β ἐφαρμόζομεν ἄνυσμα ΑΔ ἴσον καὶ ἀντίρροπον πρὸς τὸ ΑΡ. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ηὐξημένην ταχύτητα τοῦ Β, ἤτοι 12 κόμβους, γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε.

Ἐπιλύομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἢ $\widehat{B}$.

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$$

$\beta = 2$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\beta = 0,30103$ $-$

$\gamma = 10$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\gamma = 1,00000$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $9,30103$

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma B A} = 11^\circ\ 18',6.$$

$$\text{Ἄρα } \widehat{\Gamma} = 89^\circ\ 60' - 11^\circ\ 18',6 = 78^\circ\ 41',4.$$

$$\text{ἤτοι } \widehat{\Gamma} = 78^\circ\ 41',4.$$

Εὕρεσις $B\Gamma = \alpha$.

$\alpha = \gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma$

$\gamma = 10$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\gamma = 1,00000$ $+$

$\widehat{\Gamma} = 78^\circ\ 41',4$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu = 10,00853$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\alpha = 1,00853$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\alpha = 10,2$ στάδια.

Ὑπολογισμὸς τῆς $\widehat{B E \Delta}$ ἢ $\widehat{E}$ καὶ τῆς ταχύτητος συμπλησιάσεως $BE = \delta$.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΔΕ ἔχομεν:

$$\frac{\varepsilon}{\eta\mu E} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu E = \frac{\varepsilon\eta\mu B}{\beta}.$$

$\varepsilon = 10$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\varepsilon = 1,00000$ $+$

$B = 78^\circ\ 41',4$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\eta\mu B = 9,99148$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $0,99148$ $-$

$\beta = 12$ $\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\beta = 1,07918$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\lambda o\gamma\eta\mu E = 9,91230$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\widehat{E} = 54^\circ\ 48'.$

$\widehat{\Delta} = 180^\circ - (54^\circ\, 48' + 78^\circ\, 41',4) = 180^\circ - (133^\circ\, 29',4) = 46^\circ\, 30',6.$

Ταχύτης συμπλησιάσεως ΒΕ = δ.

$$\frac{\delta}{\eta\mu B} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \qquad \delta = \frac{B\eta\mu\Delta}{\eta\mu B}$$

$\beta = 12$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\beta = 1{,}07918$ +

$\widehat{\Delta} = 46^\circ\, 30',6$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\eta\mu\Delta = 9{,}86063$

$\qquad\qquad\qquad 0{,}93981$ −

$\widehat{B} = 78^\circ\, 41',4$ $\qquad$ $\lambda o\gamma\eta\mu B = 9{,}99143$

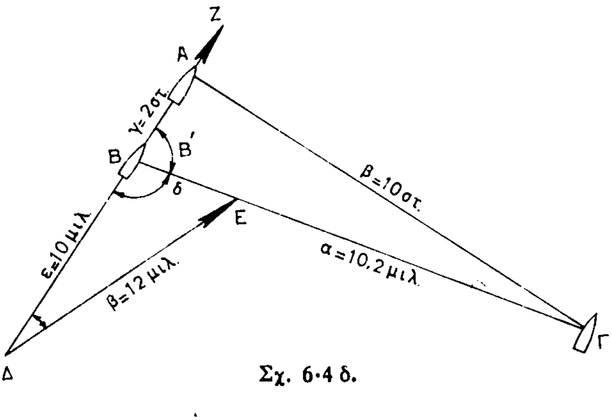
$\qquad\qquad\qquad 0{,}94833$

$\qquad\qquad\qquad \delta = 8{,}898.$

Ταχύτης συμπλησιάσεως = 8,878 κόμβοι.

Χρόνος $t = \dfrac{10 \times 0{,}2}{8{,}88} = 6\ \text{min}\ 54\ \text{sec}.$

4. Δύο πλοῖα Α καὶ Β πλέουν ἐπὶ τῆς ἰδίας πορείας. Τὸ Β εὑρισκόμενον δύο στάδια πρύμνηθεν τοῦ Α διατάσσεται νὰ αὐξήσῃ τὴν ταχύτητά του εἰς 12 κόμβους καὶ νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς μιλίου ἀπὸ τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς τοῦ Α, τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης εἶναι 10 κόμβοι (σχ. 6·4 δ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς πορείας τοῦ Β καὶ ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν διαταχθεῖσαν θέσιν.



Σχ. 6·4 δ.

Λύσις.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ ἀρχικαὶ θέσεις τῶν πλοίων καὶ Γ ἡ θέσις τοῦ Β μετὰ τὴν διαταγήν. Ἐπειδὴ τὸ Β θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς τοῦ Α εἰς τὸ ἐγκάρσιον, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ Α ἕνα ἄνυσμα $AZ = 10$ μίλια, ὅσον καὶ ἡ ταχύτης του, διὰ νὰ ἀκινητοποιηθῇ, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὸ Β τὸ ἄνυσμα $B\Delta = 10$ μίλια, ὅσον δηλαδὴ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ Α, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ σχετικὴ κίνησις.

α) Ἐπιλύομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ.

$$\varepsilon\varphi B' = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\begin{array}{ll} \beta = 10 & \lambda o\gamma\beta = 1{,}00000 \\ \gamma = 2 & \lambda o\gamma\gamma = \underline{0{,}30103} \; - \\ & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi B' = 0{,}69897 \\ & \widehat{B'} = 78^\circ\, 41',4. \end{array}$$

Ἄρα $\widehat{B} = 180^\circ - (78^\circ\, 41',4) = 101^\circ\, 18',6.$

β) Ὑπολογισμὸς τῆς $B\Gamma = \alpha$.

$$\begin{array}{ll} \alpha = \gamma\tau\varepsilon\mu B' & \\ \gamma = 2 & \lambda o\gamma\gamma = 0{,}30103 \\ B' = 101^\circ\, 18',6 & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu B' = \underline{10{,}70748} \; + \\ & \lambda o\gamma\alpha = 1{,}00851 \\ & \alpha = 10{,}2 \text{ στάδια.} \end{array}$$

γ) Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΒΕ.

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu E = \frac{\varepsilon\eta\mu B}{\beta}.$$

$$\begin{array}{ll} \varepsilon = 10 & \lambda o\gamma\varepsilon = 1{,}00000 \\ \widehat{B} = 101^\circ\, 18',6 & \lambda o\gamma\eta\mu B = \underline{9{,}99148} \; + \\ & 0{,}99148 \\ \beta = 12 & \lambda o\gamma\beta = \underline{1{,}07918} \; - \\ & \lambda o\gamma\eta\mu E = 9{,}91230 \\ & E = 54^\circ\, 48'. \end{array}$$

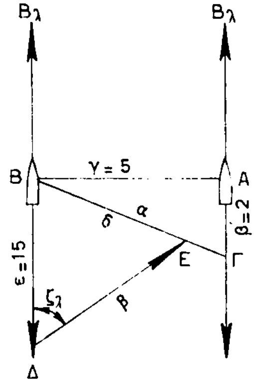
Μεταβολὴ πορείας: $\widehat{\Delta} = 180^\circ - (101^\circ\ 18',6 + 54^\circ\ 48') = 23^\circ\ 53',4.$
Ταχύτης συμπλησιάσεως $BE = \delta$.

$$\frac{\delta}{\eta\mu\Delta} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} \quad \text{καὶ} \quad \delta = \frac{\varepsilon\eta\mu\Delta}{\eta\mu E}.$$

$\varepsilon = 10$	$\lambda o\gamma\varepsilon = 1,00000$ +
$\widehat{\Delta} = 23^\circ\ 53',4$	$\lambda o\gamma\eta\mu\Delta = 0,60743$
	$1,60743$
$\widehat{E} = 54^\circ\ 48'$	$\lambda o\gamma\eta\mu E = 9,91230$ −
	$\lambda o\gamma\delta = 1,69513$
	$\delta = 49,56$ μίλια.

$$\text{Ἄρα Χρόνος } t = \frac{10,2}{49,56} = 0h\ 12min\ 18\ sec.$$

5. Α καὶ Β εἶναι δύο καταδρομικά, τὰ ὁποῖα πλέουν πρὸς Βορρᾶν μὲ ταχύτητα 15 κόμβων. Τὸ Β, εὑρισκόμενον εἰς ἀπό-



Σχ. 6·4 ε.

στασιν 5 μιλίων εἰς τὴν ἀριστερὰν πλευρὰν τοῦ Α, διατάσσεται νὰ λάβῃ μίαν θέσιν πρύμνηθεν τοῦ Α εἰς ἀπόστασιν 2 μιλίων καὶ εἰς χρόνον 15 min. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν πορείαν πρέπει νὰ τηρήσῃ τὸ Β, ὡς καὶ ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὴν διαταγήν.

Λύσις.

α) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 6·4ε), ἔχομεν:

$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta'}$.

$\gamma = 5 \qquad \lambda o\gamma\gamma = 0{,}69897$

$\beta' = 2 \qquad \lambda o\gamma\beta' = 0{,}30103 \; -$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\Gamma = 0{,}39794$

$\widehat{\Gamma} = 68^\circ\ 11',9.$

β) Ὑπολογισμὸς ΒΓ = α.

$\alpha = \beta'\tau\varepsilon\mu\Gamma$

$\beta' = 2 \qquad \lambda o\gamma\beta' = 0{,}30103$

$\widehat{\Gamma} = 68^\circ\ 11',9 \qquad \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu\Gamma = 10{,}43017 \; +$

$\left(\frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ ὥρας}\right) \qquad \lambda o\gamma\alpha = 0{,}73120$

$\alpha = 5{,}385$ μίλια.

$$(\text{σχετικὴ ταχύτης})\ \upsilon = \frac{s}{t} = \frac{5{,}385}{\frac{1}{4}} = 21{,}54.$$

γ) Ὑπολογισμὸς πορείας.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΕΔ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{B} = 68^\circ\ 11',9$.

$$\varepsilon\varphi\frac{\Delta - E}{2} = \frac{\delta - \varepsilon}{\delta + \varepsilon}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$$

$\delta - \varepsilon = 6{,}54 \qquad \lambda o\gamma(\delta - \varepsilon) = 0{,}81558$

$\frac{\widehat{B}}{2} = 34^\circ\ 6' \qquad \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = 10{,}16940 \; +$

$0{,}98498$

$\delta + \varepsilon = 36{,}54 \qquad \lambda o\gamma(\delta + \varepsilon) = 1{,}56277 \; -$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Delta - E}{2} = 9{,}42221$

$$\frac{\Delta - \mathrm{E}}{2} = 14^\circ\, 48',5$$

$$\begin{aligned} \Delta - \mathrm{E} &= 29^\circ\, 37' \\ \Delta + \mathrm{E} &= 111^\circ\, 48',1 \quad + \\ \hline 2\Delta &= 141^\circ\, 25',1 \\ \widehat{\Delta} &= 70^\circ\, 42',5. \end{aligned}$$

Πορεία : Β $70^\circ\, 42',5$ Α.

δ) Εὕρεσις ταχύτητος $\Delta\mathrm{E} = \beta$.

$$\frac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} + \frac{\delta}{\eta\mu\Delta} \qquad \beta = \frac{\delta\eta\mu \mathrm{B}}{\eta\mu\Delta}.$$

$$\begin{aligned} \delta &= 21,54 & \lambda o\gamma\delta &= 1,33325 \\ \widehat{\mathrm{B}} &= 68^\circ\, 11',9 & \lambda o\gamma\eta\mu \mathrm{B} &= 9,96777 \quad + \\ & & & \overline{1,30102} \\ \widehat{\Delta} &= 70^\circ\, 42',5 & \lambda o\gamma\eta\mu\Delta &= 9,97490 \quad - \\ & & \lambda o\gamma\beta &= 1,32612 \\ & & \beta &= 21,19. \end{aligned}$$

Ἄρα : Ταχύτης πλοίου $\upsilon = 21,19$ κόμβοι. Πορεία Β $70^\circ\, 43',5$ Α.

6·5 Προβλήματα πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν.

1. Ἱστὸς ὕψους 60 ft ἐπὶ τῆς κορυφῆς ἑνὸς κρημνοῦ ὑποτείνει πρὸς ἕνα παρατηρητήν, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται 200 ft ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ κρημνοῦ, τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ὑποτείνει ἕνα δένδρον ὕψους 12 ft ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ κρημνοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ κρημνοῦ.
(*Ἀπάντ.* Ὕψος 371 ft)

2. Ἕνας κρημνὸς ἔχει ὕψος 420 ft. Ἕνα εὐδιάκριτον ἀντικείμενον ὕψους 18 ft ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κρημνοῦ ὑποτείνει ἐκ μιᾶς λέμβου γωνίαν x°. Μετὰ προσέγγισιν 180 ft πρὸς τὸν κρημνὸν τὸ ἀντικείμενον ὑποτείνει τὴν αὐτὴν γωνία x°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ κρημνοῦ εἰς ἑκάστην παρατήρησιν.
(*Ἀπάντ.* 542 ft καὶ 362 ft)

3. Παρατηρητὴς ἐπὶ τῆς γεφύρας ἑνὸς πλοίου Α (ὕψος ὀφθαλμοῦ 40 ft) παρατηρεῖ τὴν κατακόρυφον γωνίαν τοῦ ἱστοῦ ἑνὸς πλοίου Β,

ἀπὸ τὸ ἐπίμηλον μέχρι τῆς ἰσάλου γραμμῆς, ἡ ὁποία εἶναι 11° 18',36. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο πλοίων.

(*Ἀπάντ.* 605,3 ft)

4. Ἡ κατακόρυφος γωνία μπαλλονίου εὑρισκομένου πρὸς Νότον εὑρέθη ἴση πρὸς 45° 35', ἐκ μιᾶς ἄλλης δὲ θέσεως Δυτικῶς τῆς πρώτης εὑρέθη ἴση πρὸς 40° 22'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ μπαλλονίου.

(*Ἀπάντ.* 1113 ft)

5. Ἐξ ἑνὸς πλοίου ἕνα ὄρος διωπτεύθη πρὸς 000° καὶ ἡ κατακόρυφος γωνία ἦτο 15° 20'. Τὸ πλοῖον ἀκολούθως ἔπλευσε 5 μίλια πρὸς Ἀπηλιώτην καὶ ἡ κατακόρυφος γωνία του ἦτο 11° 25'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὄρους. (*Ἀπάντ.* Ὕψος = 1,493 ναυτ. μίλια)

6. Ἕνα πλοῖον παρατηρεῖ σημεῖον ξηρᾶς κατὰ τὸ ἐγκάρσιον, ἐνῶ κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἡ ὁριζοντία γωνία μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ φάρου τινὸς εἶναι 42°. Μετὰ πλεῦσιν 3 μιλίων ἡ ὁριζοντία γωνία εἶναι ἀκόμη 42° καὶ μετὰ πλεῦσιν 4 μιλίων ἐπὶ πλέον ὁ φάρος εἶναι κατὰ τὸ ἐγκάρσιον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τοῦ φάρου.

(*Ἀπάντ.* 7,87 μίλια)

7. Ἕνα σκάφος πλέει μὲ ὁμαλὴν ταχύτητα καὶ παρατηρεῖται ἐκ τῆς ἀκτῆς πρὸς διόπτευσιν Β 25° Α. Μετὰ χρονικὸν διάστημα 15 min διοπτεύεται Β 10° Ζ καὶ μετὰ μεγαλύτερον διάστημα 20 min διοπτεύεται πρὸς Β 80° Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία του.

(*Ἀπάντ.* Πορεία Ν 58° Ζ)

8. Δύο ἀτμόπλοια Α καὶ Β ἐν νηοπομπῇ πλέουν πρὸς Β.ΒΔ μὲ ταχύτητα 10 κόμβων. Τὸ Β εὑρίσκεται 2 μίλια ἐπὶ τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς τοῦ Α, ὁπότε διατάσσεται νὰ λάβῃ μίαν θέσιν 1 μίλιον πρώραθεν τοῦ Α, αὐξάνον τὴν ταχύτητά του εἰς 12 κόμβους. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν πορείαν πρέπει νὰ πηδαλιουχήσῃ τὸ Β καὶ ποῖος ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, διὰ νὰ εὑρεθῇ τοῦτο εἰς τὴν νέαν του θέσιν (πρώραθεν τοῦ Α).

(*Ἀπάντ.* Πορεία Β 37° 44',7 Ζ. Χρόνος 38 min)

9. Δύο σκάφη πλέουν Β 22° Ζ μὲ ταχύτητα 12 κόμβων. Τὸ Β εὑρίσκεται 1 μίλιον ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ ἰσχίου τοῦ Α καὶ διατάσσεται νὰ αὐξήσῃ τὴν ταχύτητά του εἰς 16 κόμβους καὶ νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀπόστασιν 1 μιλίου ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ ἰσχύου τοῦ Α. Ζητεῖται ἡ πορεία τοῦ Β καὶ ἡ ταχύτης συμπλησιάσεως.

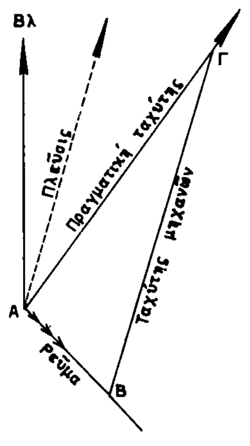
(*Ἀπάντ.* Πορεία Β 19° 25''25,4' Α,
Ταχύτης συμπλησιάσεως 10,6 κόμβοι).

6·6 Λύσις προβλημάτων χρησίμων εἰς τοὺς ναυτιλλομένους.

1. Ἡ πορεία μεταξὺ δύο τόπων ἐπὶ τοῦ χάρτου εἶναι Β 35° Α καὶ ἡ ἀπόστασίς των 85 μίλια. Τὸ ρεῦμα διευθύνεται πρὸς Ν 55° Α μὲ ταχύτητα 3 κόμβων (σχ. 6·6α). Νὰ εὑρεθῇ ποίαν πορείαν πρέπει νὰ τηρήσωμεν διὰ νὰ ἀντισταθμίσωμεν τὸ ρεῦμα, ποία ἡ πραγματικὴ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ποία ἡ διάρκεια τοῦ πλοῦ, δοθέντος ὅτι ἡ ταχύτης τῶν μηχανῶν του εἶναι 12 κόμβοι.

Λύσις.

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς πορείας Α χαράσσομεν τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΒ = 3 μίλια ὡς πρὸς μίαν κλίμακα. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ταχύτητα



Σχ. 6·6α.

τῶν μηχανῶν τοῦ πλοίου γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πορείαν εἰς τὸ Γ. Ἑνώνομεν τὰ Β καὶ Γ διὰ τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία παριστᾷ τὴν ἀντισταθμισμένην πορείαν, δηλαδὴ τὴν φαινομένην πορείαν, τὴν ὁποίαν θὰ ἀκολουθήσωμεν οὕτως, ὥστε ὑποκείμενοι εἰς τὸ ρεῦμα νὰ τηρηθῶμεν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

α) Εὕρεσις γωνίας Γ.

$$\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma}.$$

$$\begin{array}{ll} AB = 3 & \lambda o\gamma AB = 0{,}47712 \\ B\Gamma = 12 & \lambda o\gamma B\Gamma = 1{,}07918 \\ & \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = 9{,}39794 \\ & \widehat{\Gamma} = 14^\circ\, 28',6. \end{array}$$

$$\text{Ἄρα } \widehat{\Gamma} = \widehat{\omega} = 14^\circ\, 28',6.$$

β) Εὕρεσις φαινομένης πορείας.

$$Z_\lambda = \text{B } 35^\circ\, 00' \text{ A}$$

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\omega} = 14^\circ\, 28',6.$$

Φαινομ Z_λ = Β 20° 31′,6 Α, ἤτοι πρέπει νὰ πλεύσωμεν Β 20° 31′,6 Α, ὥστε ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ρεύματος νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν προορισμόν μας.

γ) Εὕρεσις πραγματικῆς ταχύτητος (ΑΓ).

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad A\Gamma = B\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

$$\begin{array}{ll} B\Gamma = 12 & \lambda o\gamma B\Gamma = 1{,}07918 \\ \widehat{\Gamma} = 14^\circ\, 28',6 & \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = 9{,}98599 \\ & \lambda o\gamma A\Gamma = 1{,}06517 \\ & A\Gamma = 11{,}619. \end{array}$$

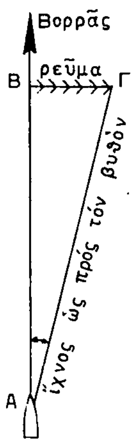
$$\text{Διάρκεια πλοῦ } t = \frac{s}{\upsilon_{\pi\rho\alpha\gamma\mu.}} = \frac{85}{11{,}619}.$$

$t = 7{,}3$ ὧραι.

2. Πλέομεν πρὸς Βορρᾶν μὲ ταχύτητα 12 κόμβων, ὑποκείμενοι εἰς ρεῦμα διευθύνσεως πρὸς Ἀπηλιώτην καὶ ταχύτητος 3 κόμβων (σχ. 6·6β). Νὰ εὑρεθῇ ἡ διεύθυνσις τοῦ ἴχνους τοῦ πλοίου ὡς πρὸς τὸν βυθὸν καὶ ἡ πραγματικὴ ταχύτης αὐτοῦ.

Λύσις.

Ἐὰν δὲν ὑπῆρχε ρεῦμα, τὸ πλοῖον εἰς 1 ὥραν θὰ διήνυε 12 μίλια, καὶ ἔστω ὅτι $AB = 12$ μίλια. Ἐπίσης, ἐὰν ἐπ' αὐτοῦ ἐνερ-



Σχ. 6·6 β.

γοῦσε μόνον τὸ ρεῦμα, τότε εἰς μίαν ὥραν θὰ μετεκινεῖτο κατὰ 3 μίλια πρὸς Ἀπηλιώτην καὶ ἔστω ὅτι $B\Gamma = 3$ μίλια. Τὸ πλοῖον λοιπὸν κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῶν δύο τούτων δυνάμεων, δηλαδὴ τῶν μηχανῶν του καὶ τοῦ ρεύματος. Ἑπομένως, ἐνῶ ἡ πορεία του εἶναι Βορρᾶς, τοῦτο θὰ διευθύνεται ὡς πρὸς τὸν βυθὸν κατὰ τὴν συνισταμένην τῶν δύο δυνάμεων, δηλαδὴ τὴν $A\Gamma$.

α) Ὑπολογισμὸς γωνίας Α.

$$\varepsilon\varphi A = \frac{B\Gamma}{AB}.$$

$$\begin{array}{ll} B\Gamma = 3 & \lambda o\gamma B\Gamma = 0{,}47712 \\ AB = 12 & \lambda o\gamma AB = 1{,}07918 \;\; - \\ \hline & \lambda o\gamma \varepsilon\varphi A = 9{,}39794 \\ & \widehat{A} = 14^{\circ}\, 2',2. \end{array}$$

β) Ὑπολογισμὸς πραγματικῆς ταχύτητος.

$$A\Gamma = AB\,\tau\epsilon\mu A.$$

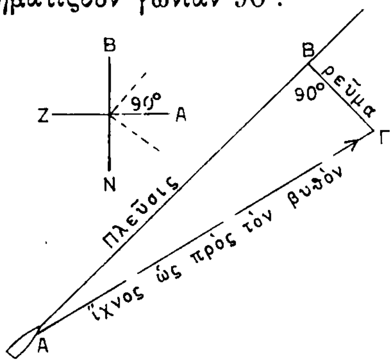
$$\begin{array}{ll} AB = 12 & \lambda o\gamma AB = 1{,}07918 \\ A = 14^\circ & \lambda o\gamma \tau\epsilon\mu A = \underline{0{,}01317} \; + \\ & \lambda o\gamma A\Gamma = 1{,}09235 \\ & A\Gamma = 12{,}37 \text{ μίλια.} \end{array}$$

Πραγματικὴ ταχύτης πλοίου $\upsilon = 12{,}37$ κόμβοι.

3. Πλέομεν πρὸς Β 30° Α μὲ ταχύτητα 15 κόμβων ὑποκείμενοι εἰς ρεῦμα διευθύνσεως Ν 60° Α καὶ ταχύτητος 4 κόμβων (σχ. 6·6 γ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ διεύθυνσις τοῦ ἴχνους τοῦ πλοίου ὡς πρὸς τὸν βυθὸν καὶ ἡ πραγματικὴ ταχύτης του.

Λύσις.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ πορεία τοῦ πλοίου καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ ρεύματος σχηματίζουν γωνίαν 90°.



Σχ. 6·6 γ.

α) Εὕρεσις γωνίας Α.

$$\epsilon\varphi A = \frac{B\Gamma}{AB}.$$

$$\begin{array}{ll} B\Gamma = 4 & \lambda o\gamma B\Gamma = 0{,}60206 \\ AB = 5 & \lambda o\gamma AB = \underline{1{,}17609} \; - \\ & \lambda o\gamma \epsilon\varphi A = 9{,}42597 \\ & \widehat{A} = 14^\circ\, 55',9. \end{array}$$

β) Εὕρεσις ΑΓ.

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = τεμΑ \text{ καὶ } ΑΓ = ΑΒτεμΑ.$$

$$\begin{array}{ll} ΑΒ = 15 & λογΑΒ = \quad 1{,}17609 \\ \widehat{Α} = 14^{\circ}\,55',9 & λογτεμΑ = \underline{10{,}01491} \; + \\ & λογΑΓ = \quad 1{,}19100 \\ & ΑΓ = 15{,}52 \text{ κόμβοι.} \end{array}$$

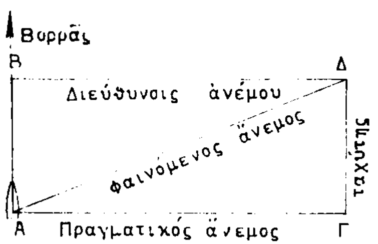
Πραγματικὴ ταχύτης υ = 15,52 κόμβοι.

γ) Εὕρεσις διευθύνσεως.

$$\begin{array}{r} Β\ 30^{\circ}\ 00'\ Α \\ \underline{14^{\circ}\ 55',9} \; + \\ \text{Διεύθ. ἴχν. } 44^{\circ}\ 55',9. \end{array}$$

Διεύθυνσις ἴχνους = Β 44° 55',9 Α.

4. Ὁ πραγματικὸς ἄνεμος εἶναι διευθύνσεως πρὸς Ἀπηλιώτην καὶ ταχύτητος 35 κόμβων (σχ. 6·6 δ). Ποῖον φαινόμενον



Σχ. 6·5 δ.

ἄνεμον θὰ ἔχωμεν, ἐὰν πλεύσωμεν πρὸς Βορρᾶν μὲ ταχύτητα 14 κόμβων.

Λύσις.

Ἔστω ΑΒ = 14 κόμβοι (= ταχύτης τοῦ πλοίου) καὶ ΑΓ = 35 κόμβοι (= ταχύτης ἀνέμου).

α) Ὑπολογισμὸς γωνίας ω.

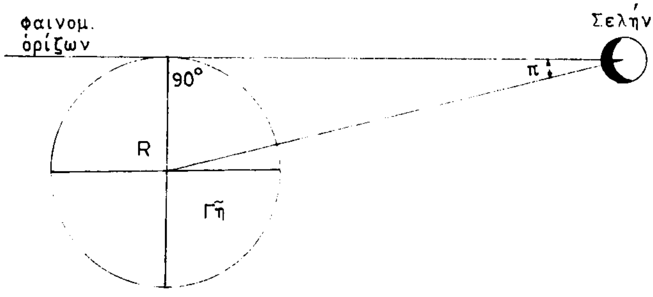
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\Delta B}{AB}.$$

$$\begin{array}{lrl} \Delta B = 35 & \lambda o\gamma AB = & 2{,}54407 \\ AB = 14 & \lambda o\gamma AB = & \underline{2{,}14613} \\ & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\omega = & 10{,}39794 \\ & \widehat{\omega} = & 68^\circ\ 12'. \end{array}$$

β) Εὕρεσις φαινομένου ἀνέμου.

$$\begin{array}{rl} \Delta/\nu\sigma\iota\varsigma\ AB = & B\ 00^\circ 00'\ A \\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \omega = & 68^\circ\ 12' \\ \varphi\alpha\iota\nu o\mu.\ \delta/\sigma\iota\varsigma\ \acute{\alpha}\nu\varepsilon\mu. = & B\ 68^\circ 12'\ A. \end{array}$$

5. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς Σελήνης ἀπὸ τὴν Γῆν, δοθέντος ὅτι ἡ ὁριζοντία παράλλαξις τῆς Σελήνης εἶναι 00°57′ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι 6366 km (σχ. 6·6 ε).



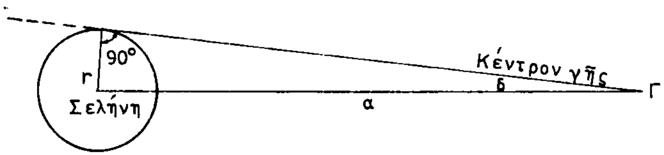
Σχ. 6·6 ε.

Λύσις.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\alpha}{R} = \sigma\tau\varepsilon\mu\pi & \kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha = R\sigma\tau\varepsilon\mu\pi \\ R = 6366 & \lambda o\gamma R = \ \ 3{,}80387 \\ \pi = 57' & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\pi = \underline{11{,}78042} + \\ & \lambda o\gamma\alpha = \ \ 5{,}58429 \\ & \alpha = 383964\ \text{km}. \end{array}$$

Ἄρα ἀπόστασις Σελήνης = 383964 km.

6. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς Σελήνης ἀπὸ τὴν Γῆν, δοθέντος ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Σελήνης εἶναι τὰ 3/11 τῆς ἀκτῖνος τῆς Γῆς καὶ ὅτι ἡ φαινομένη ἡμιδιάμετρος τῆς Σελήνης εἶναι 15′ 48″ (σχ. 6 · 6 ζ).



Σχ. 6·6 ζ.

Λύσις.

$$\frac{\alpha}{r} = \text{στεμ}\delta \qquad \alpha = r\,\text{στεμ}\delta \qquad \alpha = \frac{r}{\text{ημ}\delta} = \frac{\frac{3}{11}}{\text{ημ}\,15'\,48''}$$

$$\text{ἢ}\ \alpha = \frac{3}{11 \cdot \text{ημ}\,15'\,48''}.$$

$$\begin{aligned} \text{λογ}\ 11 &= 1{,}04139 \quad + \\ \text{λογημ}15'\,48'' &= 7{,}66238 \\ \text{λογ παρονομαστοῦ} &= 8{,}70377 \\ \text{λογ}3 &= 0{,}47712 \quad - \\ \text{λογ}\cdot\text{παρονομαστοῦ} &= 8{,}70377 \\ \text{λογ}\alpha &= 1{,}77335 \end{aligned}$$

Ἀπόστασις Σελήνης $\alpha = 59{,}34$ ἀκτῖνες γῆς.

7. Δύο πλοῖα διοπτεύονται ἐξ ἑνὸς φάρου ἐν εὐθυγραμμίσει πρὸς Ἀπηλιώτην. Ἀπὸ τὸν φάρον ἐμετρήθη τὸ γωνιακὸν βάθος τῶν πλοίων καὶ εὑρέθη τοῦ μὲν ἑνὸς 25° τοῦ δὲ ἄλλου 40°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πλοίων, δοθέντος ὅτι τὸ γραμμικὸν ὕψος τοῦ φάρου εἶναι 300 ft (σχ. 6 · 6 η).

Λύσις.

α) Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἔχομεν:

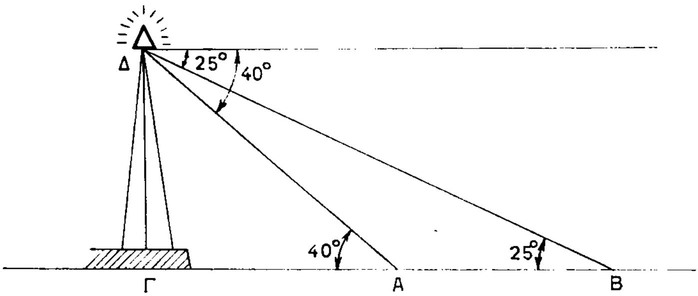
$$\frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta} = \text{σφ}B \quad \text{καὶ}\ \Gamma B = \Gamma\Delta\,\text{σφ}B.$$

β) Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἔχομεν:

$$\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = σφΑ \text{ καὶ } \frac{ΑΓ = ΓΔ\,σφΑ}{ΓΒ - ΑΓ = ΓΔ(σφΒ - σφΑ)}$$

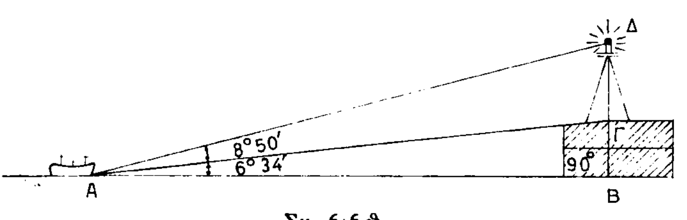
$ΑΒ = ΒΓ - ΑΓ = ΓΔ\,(σφΒ - σφΑ) = 300\,(σφ25° - σφ40°) =$ $300\,(2{,}14451 - 1{,}19175) = 300 \times 0{,}95276.$

Ἄρα ἀπόστασις τῶν δύο πλοίων ΑΒ = 285,83 ft.



Σχ. 6·6 η.

8. Τὸ γραμμικὸν ὕψος τῆς στήλης ἑνὸς φάρου εἶναι 97 ft. Ἀπὸ πλοῖον ἠγκυροβολημένον πρὸ τοῦ φάρου ἐμετρήθη τὸ γωνιακὸν ὕψος τῆς κορυφῆς τοῦ φάρου ἀπὸ τὴν ἴσαλον τοῦ πλοίου καὶ εὑρέθη ἴσον πρὸς 8° 50′. Ταυτοχρόνως ἐμετρήθη καὶ τὸ γωνιακὸν ὕψος τῆς βάσεως τοῦ φάρου ἀπὸ τὴν ἴσαλον καὶ εὑρέθη ἴσον πρὸς 6° 34′ (σχ. 6 · 6 θ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου



Σχ. 6·6 θ.

ἀπὸ τὸν φάρον, καθὼς καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως τοῦ φάρου ἀπὸ τὴν ἴσαλον.

Λύσις.

α) Ὑπολογισμὸς ΑΒ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν:

$$\frac{\Delta B}{AB} = \varepsilon\varphi \Delta AB = \varepsilon\varphi 8^\circ 50' \text{ ἢ } \Delta B = AB\varepsilon\varphi 8^\circ 50 .$$

β) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν:

$$\frac{\Gamma B}{AB} = \varepsilon\varphi \Gamma AB = \varepsilon\varphi 6^\circ 34' \text{ ἢ } \Gamma B = AB\varepsilon\varphi 6^\circ 34'.$$

$$\Gamma\Delta = \Delta B - \Gamma B = AB\,(\varepsilon\varphi 8^\circ 50' - \varepsilon\varphi 6^\circ 34')$$

$$\text{ἢ } AB = \frac{\Gamma\Delta}{\varepsilon\varphi 8^\circ 50' - \varepsilon\varphi 6^\circ 34'} = \frac{97}{\varepsilon\varphi 8^\circ 50' - \varepsilon\varphi 6^\circ 34'}.$$

$$AB = \frac{97}{0{,}04029}.$$

$\varepsilon\varphi\ 8^\circ 50' = 0{,}15540$	$\lambda o\gamma AB = \lambda o\gamma 97 - \lambda o\gamma\ 0{,}04029$
	$\lambda o\gamma 97 = 1{,}98677$
$\varepsilon\varphi\ 6^\circ 34' = 0{,}11511$	$\lambda o\gamma\ 0{,}04029 = 8{,}60520\ (-10)$
$\Delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha} = 0{,}04029$	$\lambda o\gamma AB = 3{,}38157$

Ἀπόστασις πλοίου ἀπὸ φάρον $AB = 2407{,}5$ ft.

γ) Εὕρεσις τῆς ΓΒ.

$$\Gamma B = AB\varepsilon\varphi 6^\circ 34'$$

$$\lambda o\gamma 2407{,}5 = 3{,}38157$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi 6^\circ 34' = 9{,}06213$$

$$\lambda o\gamma \Gamma B = 2{,}44270$$

Ἀπόστασις βάσεως φάρου ἀπὸ ἴσαλον $\Gamma B = 277{,}16$ ft.

9. Ἕνα πλοῖον ἠγκυροβολημένον πρὸ ἑνὸς φάρου γραμμικοῦ ὕψους ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς πλήμμης τῆς παλιρροίας 180 ft, ἐμέτρησεν κατὰ τὴν πλήμμην τὸ γωνιακὸν ὕψος τοῦ φάρου ἴσον πρὸς $5^\circ 42'$, κατὰ δὲ τὴν ρηχίαν ἴσον πρὸς $6^\circ 38'$ (σχ. 6·6ι). Νὰ εὑρεθῇ τὸ εὖρος τῆς παλιρροίας.

Λύσις.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ ἔχομεν:

$$\frac{ΑΔ}{ΕΔ} = σφΑ$$

$$ΑΔ = ΕΔ σφΑ$$

$$ΑΔ = 180 σφ\, 5^\circ 42'$$

$$λογ\, 180 = 2{,}25527$$

$$λογσφ\, 5^\circ 42' = 1{,}00081 \quad +$$

$$λογΑΔ = 3{,}25608$$

$$ΑΔ = 1803{,}3 \text{ ft.}$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΕ ἔχομεν:

$$\frac{ΓΕ}{ΓΒ} = εφΒ$$

$$ΓΕ = ΓΒ\, εφ\, Β$$

$$ΓΕ = 1803{,}3 εφ\, 6^\circ 38'$$

$$λογ\, 1803{,}3 = 3{,}25608$$

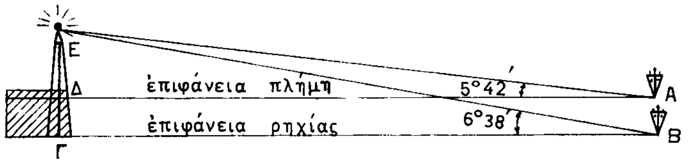
$$λογεφ\, 6^\circ 38' = 9{,}06556$$

$$λογΓΕ = 2{,}32164$$

$$ΓΕ = 204{,}72.$$

$$ΓΔ = ΓΕ - ΔΕ = 204{,}72 - 180 = 29{,}72 \text{ ft}, \text{ ἤτοι}$$

εὖρος παλιρροίας $= 29{,}72$ ft.



Σχ. 6·5 ι.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

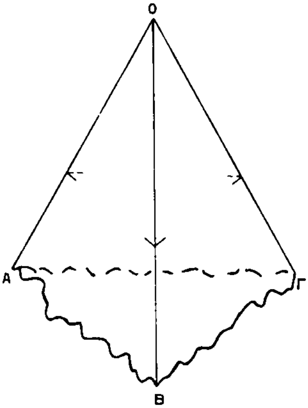
ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

7·1 Ἰδιότητες τριέδρων στερεῶν γωνιῶν.

1) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν διέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν.

2) Ἑκάστη ἕδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καί μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.



Σχ. 7·1 α.

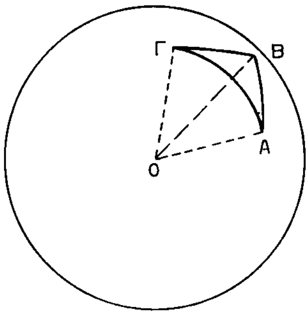
3) Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῶν 2 ὀρθῶν (ἢ 180°) καὶ μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν (ἢ 540°).

4) Ἑκάστη δίεδρος τριέδρου στερεᾶς γωνίας αὐξηθεῖσα κατὰ 2 ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων (σχ. 7 · 1 α).

5) Ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας ἕδρας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα δίεδρος, καὶ ἀντιστρόφως.

7 · 2 Σφαιρικὸν τρίγωνον.

Καλοῦμεν σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σχηματιζόμενον τρίγωνον διὰ τῆς τομῆς τριῶν μεγίστων κύκλων αὐτῆς ἀνὰ δύο (σχ. 7 · 2 α).



Σχ. 7·2 α.

Ἐὰν λάβωμεν μίαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν καὶ τοποθετήσωμεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον μιᾶς σφαίρας, τότε αἱ ἀκμαὶ αὐτῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας θὰ ὁρίσουν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον προφανῶς θὰ εἶναι σφαιρικόν.

Τότε αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας θὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, αἱ δὲ δίεδροι πρὸς τὰς γωνίας αὐτοῦ. Συνεπῶς αἱ μὲν ἰδιότητες τῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας θὰ εἶναι καὶ ἰδιότητες τῶν πλευρῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, αἱ δὲ τῶν διέδρων θὰ εἶναι καὶ ἰδιότητες τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἤτοι:

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν ἢ τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου.

Ἑκάστη πλευρὰ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν 2 ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν 180° καὶ μικρότερον τῶν 540°.

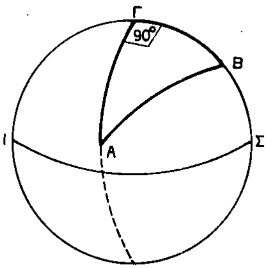
Ἑκάστη γωνία σφαιρικοῦ τριγώνου αὐξηθεῖσα κατὰ 2 ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς κεῖται μεγαλυτέρα γωνία καὶ ἀντιστρόφως.

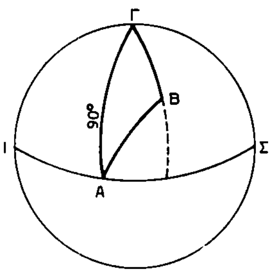
Τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα διαιροῦνται εἰς τὰς ἑξῆς 5 κατηγορίας:

1) *Μονορθογώνια* (σχ. 7·2β).

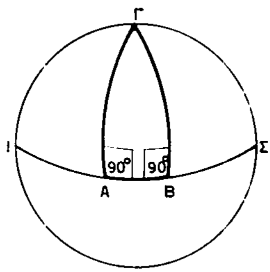
2) *Μονορθόπλευρα* (σχ. 7·2γ).



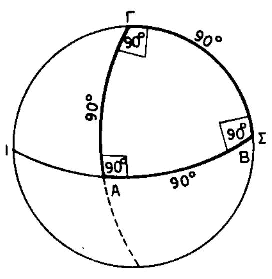
Σχ. 7·2β



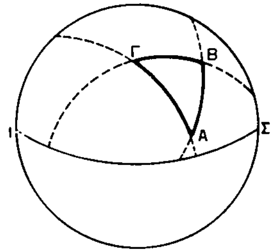
Σχ. 7·2γ



Σχ. 7·2δ



Σχ. 7·2ε.



Σχ. 7·2ζ.

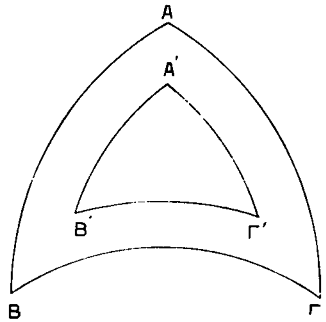
3) *Δισορθόπλευρα καὶ δισορθογώνια* (σχ. 7·2δ).

4) *Τρισορθογώνια καὶ τρισορθόπλευρα* (σχ. 7·2ε).

5) *Κοινὰ* (σχ. 7·2ζ).

7·3 Πολικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.

Ἔστω σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 7·3 α). Ἐὰν μὲ κέντρον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ σφαιρικὴν ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $\frac{\pi}{2}$ γράψωμεν περιφερείας κύκλου, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον καλοῦμεν *πολικὸν* τοῦ δοθέντος, ἤτοι τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον Α′Β′Γ′ εἶναι πολικὸν τοῦ δοθέντος ΑΒΓ.



Σχ. 7·3 α.

7·4 Ἰδιότητες τῶν πολικῶν τριγώνων.

1) Ἐὰν τὸ Α′Β′Γ′ εἶναι πολικὸν τοῦ ΑΒΓ, τότε καὶ τὸ ΑΒΓ εἶναι πολικὸν τοῦ Α′Β′Γ′.

2) Τὸ ἄθροισμα ἑκάστης γωνίας τοῦ ἑνὸς καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τοῦ ἄλλου εἶναι 180°, ἤτοι $\widehat{A}' + \overset{\frown}{B\Gamma} = 180^\circ$.

7·5 Ἀσκήσεις.

1. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι 59°, 83° καὶ 121°. Ὑπολογίσατε τὰς γωνίας τοῦ πολικοῦ του.

2. Αἱ γωνίαι ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι 72°, 69° καὶ 54°. Ὑπολογίσατε τὰς πλευρὰς τοῦ πολικοῦ του.

3. Ὑπολογίσατε εἰς μίλια τόξον μεγίστου κύκλου 25° μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος 4000 μιλίων.

4. Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει γωνίας Α=65°, Β=85° καὶ Γ=75°.

Ἕνα ἄλλο Α'Β'Γ' τῆς αὐτῆς σφαίρας ἔχει γωνίας $A' = 50^o$, $B' = 45^o$ καὶ $\Gamma' = 105^o$. Ποῖον ἐκ τῶν δύο ἔχει μεγαλύτερον ἐμβαδόν;

7 • 6 Σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν πλαγιογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων (κοινῶν).

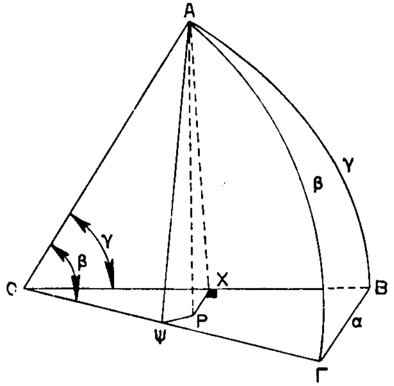
α) Τύπος τῶν Ἡμιτόνων.

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Ἤτοι τὰ ἡμίτονα τῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν σφαιρικὸν τρίγωνον καὶ α, β, γ ἀντιστοίχως αἱ πλευραὶ αὐτοῦ. Ἔστω δὲ Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει (σχ. 7 • 6 α).



Σχ. 7·6 α.

Σχηματίζομεν τὴν ἀντίστοιχον τρίεδρον στερεὰν γωνίαν Ο. ΑΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν κάθετον ΑΡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΟΒ, ἐκ δὲ τοῦ ποδὸς Ρ φέρομεν καθέτους πρὸς τὴν ΟΓ καὶ ΟΒ, τὰς ΡΨ καὶ ΡΧ ἀντιστοίχως. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΑΨ καὶ ΑΧ, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων θὰ εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς ΟΓ καὶ ΟΒ. Ἤτοι αἱ γωνίαι ΑΨΡ καὶ ΑΧΡ θὰ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων ΟΓ καὶ ΟΒ. Δηλαδὴ ἑκάστη θὰ μετρῇ τὰς σφαιρικὰς γωνίας Γ καὶ Β.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΨ ἔχομεν: $\eta\mu\beta = \dfrac{\text{ΑΨ}}{\text{ΟΑ}}$,

ἐκ δὲ τοῦ ΑΧΡ ἔχομεν $\eta\mu \text{Β} = \dfrac{\text{ΑΡ}}{\text{ΑΧ}}$.

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu \text{Β}} = \frac{\text{ΑΨ}}{\text{ΟΑ}} \times \frac{\text{ΑΧ}}{\text{ΑΡ}}. \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν ΑΟΧ καὶ ΑΨΡ ἔχομεν:

$$\eta\mu\gamma = \frac{\text{ΑΧ}}{\text{ΟΑ}}, \qquad \eta\mu \Gamma = \frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΑΨ}}.$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\text{ΑΧ}}{\text{ΟΑ}} \times \frac{\text{ΑΨ}}{\text{ΑΡ}}. \qquad (2)$$

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰς (1) καὶ (2), παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν κοινὸν λόγον, ἄρα:

$$\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu \text{Β}} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Ἐὰν τέλος φέρωμεν ἐκ τοῦ Γ κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ, εὐκόλως ἡ ἀναλογία γίνεται:

$$\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu \text{Β}} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu \text{Α}}. \qquad (3)$$

Παράδειγμα.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, $\widehat{\text{Α}} = 30°$, $\beta = 100°$ καὶ $\alpha = 40°$ (σχ. 7·6β). Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν Β.

Λύσις.

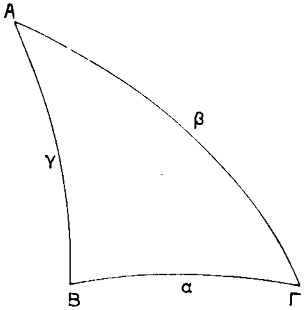
$$\frac{\eta\mu \text{Β}}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu \text{Α}}{\eta\mu\alpha}.$$

$$
\begin{aligned}
\eta\mu B &= \eta\mu A \eta\mu \beta \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \\
\lambda o\gamma \eta\mu A &= 9{,}69897 \\
\lambda o\gamma \eta\mu \beta &= 9{,}99335 \\
\lambda o\gamma \sigma\tau\epsilon\mu\alpha &= 10{,}19193 \\
\hline
\lambda o\gamma \eta\mu B &= 9{,}88425
\end{aligned}
$$

$\widehat{B} = 180^\circ - 50^\circ$ (ἐλάβομεν τὴν παραπληρωματικήν, διότι ἡ πλευρὰ β εἶναι ἀμβλεῖα).

$\widehat{B} = 130^\circ$.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν ἦτο ἀναγκαῖον νὰ προσδιορίσωμεν τὴν πραγματικὴν τιμὴν τῆς γωνίας, διότι προέκυψαν αἱ



Σχ. 7·6 β.

τιμαὶ 50° καὶ 130°. Ἕνα πρῶτον γνώρισμα εἶναι τὸ νὰ ἐφαρμόζωμεν τὴν ἰδιότητα «ἀπέναντι ἀμβλείας πλευρᾶς κεῖται ἀμβλεῖα γωνία καὶ ἀντιστρόφως». Ἡ ἰδιότης ὅμως αὐτὴ δὲν λύει πάντοτε τὸ πρόβλημα, διότι τὸ λάθος γίνεται περὶ τὴν γωνίαν τῶν 90°. Ἐπειδὴ εἰς τὴν πρᾶξιν αἱ μὲν γωνίαι τοῦ τριγώνου θέσεως θὰ ἀντιπροσωπεύουν Ἀζιμοὺθ καὶ Ὡρικὴν γωνίαν, αἱ δὲ πλευραὶ θὰ ἀντιπροσωπεύουν πλάτος, κλίσιν, τὰ συμπληρώματα αὐτῶν καὶ ζενιθιακὴν ἀπόστασιν, ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου στοιχείου θὰ μᾶς δίδεται ἐκ τῶν πραγμάτων (π.χ. ἐὰν πρόκειται περὶ Ἀζιμούθ, μία πρόχειρος παρατήρησις αὐτοῦ λύει τὴν ἀμφιβολίαν).

Ἀσκήσεις.

1. Δίδονται $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 39^\circ\ 11'$ καὶ $\widehat{A} = 40^\circ\ 09'$. Ὑπολογίσατε τὴν $\widehat{B}$.

2. Δίδονται $\alpha = 82^\circ\ 16'$, $\gamma = 114^\circ\ 30'$ καὶ $\widehat{A} = 75^\circ\ 15'$. Ὑπολογίσατε τὴν $\widehat{\Gamma}$.

3. Δίδονται $\widehat{B} = 67^\circ\ 05'$, $\widehat{\Gamma} = 48^\circ\ 40'$ καὶ $\beta = 25^\circ\ 45'$. Ὑπολογίσατε τὴν γ.

4. Δίδονται $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 50^\circ$ καὶ $\widehat{A} = 65^\circ$. Ὑπολογίσατε τὰς δυνατὰς τιμὰς τῆς $\widehat{B}$.

β) *Τύπος τῶν Συνημιτόνων.*

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu A\, \eta\mu\beta\, \eta\mu\gamma + \sigma\upsilon\nu\beta\, \sigma\upsilon\nu\gamma.$$

Ἤτοι τὸ συνημίτονον πλευρᾶς σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν πλευρῶν, ποὺ τὴν περιέχουν, ηὐξημένον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν συνημιτόνων τῶν ἰδίων πλευρῶν.

Ἀπόδειξις.

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει (σχ. 7·6 γ).

Εἰς τὸ σημεῖον Α φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι προφανῶς κεῖνται εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν τόξων.

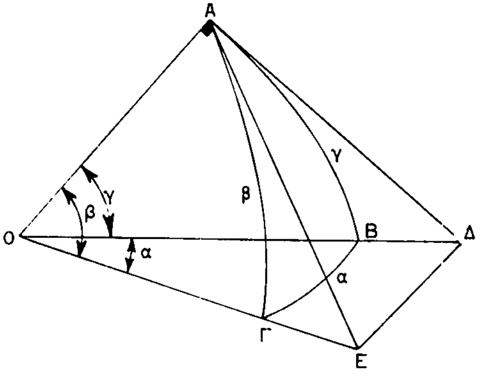
Ἔστωσαν ἐπίσης Ε καὶ Δ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐφαπτομέναι τέμνουν τὰς προεκτάσεις τῶν ΟΓ καὶ ΟΒ ἀντιστοίχως. Φέρομεν ἐπίσης καὶ τὴν ΔΕ. Ἐπειδὴ αἱ ΑΔ καὶ ΑΕ εἶναι ἐφαπτομέναι, ἡ ἐπίπεδος γωνία ΔΑΕ μετρεῖ τὴν σφαιρικὴν γωνίαν ΒΑΓ, αἱ δὲ γωνίαι ΟΑΕ καὶ ΟΑΔ εἶναι ὀρθαί.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΕΟΔ καὶ ἐκ τοῦ τύπου τῶν συνημιτόνων τῆς Ἐπιπέδου Τριγωνομετρίας ἔχομεν :

$$(\mathrm{\Delta E})^2 = (\mathrm{O\Delta})^2 + (\mathrm{OE})^2 - 2(\mathrm{O\Delta})(\mathrm{\Delta E})\text{συν}\alpha.$$

Ἐκ τοῦ ΑΕΔ:

$$(\mathrm{\Delta E})^2 = (\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{AE}) - 2(\mathrm{A\Delta})(\mathrm{AE})\text{συν}\mathrm{A}.$$



Σχ. 7·6 γ.

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$(\mathrm{\Delta E})^2 - (\mathrm{\Delta E})^2 = (\mathrm{O\Delta})^2 + (\mathrm{OE})^2 - 2(\mathrm{O\Delta})(\mathrm{OE})\text{συν}\alpha - [(\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{AE})^2 - 2(\mathrm{A\Delta})(\mathrm{AE})\text{συν}\mathrm{A}].$$

$$0 = (\mathrm{O\Delta})^2 + (\mathrm{OE})^2 - 2(\mathrm{O\Delta})(\mathrm{\Delta E})\text{συν}\alpha - (\mathrm{A\Delta})^2 - (\mathrm{AE})^2 + 2(\mathrm{A\Delta})(\mathrm{AE})\ \text{συν}\mathrm{A}.$$

Ἐπειδὴ $\begin{array}{l|} (\mathrm{O\Delta})^2 - (\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{OA})^2 \\ (\mathrm{OE})^2 - (\mathrm{AE})^2 = (\mathrm{OA})^2 \end{array}$ Ἔχομεν:

$$0 = 2(\mathrm{OA})^2 - 2(\mathrm{O\Delta})(\mathrm{OE})\text{συν}\alpha + 2(\mathrm{A\Delta})(\mathrm{AE})\text{συν}\mathrm{A} \qquad \text{ἢ}$$

$$2(\mathrm{A\Delta})(\mathrm{AE})\text{συν}\mathrm{A} = 2(\mathrm{O\Delta})(\mathrm{OE})\text{συν}\alpha - 2(\mathrm{OA})^2 \qquad \text{ἢ}$$

$$\text{συν}\mathrm{A} = \frac{(\mathrm{O\Delta})(\mathrm{OE})\text{συν}\alpha - (\mathrm{OA})^2}{(\mathrm{A\Delta})(\mathrm{AE})}.$$

Καί, ἐὰν διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ (ΟΔ)(ΟΕ), ἔχομεν:

$$\text{συν}\mathrm{A} = \frac{\text{συν}\alpha - \text{συν}\beta\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\text{ημ}\gamma}, \qquad (4)$$

ἤ, ἂν λύσωμεν ὡς πρὸς συνα, λαμβάνομεν:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}\mathrm{A}\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημ}\beta + \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma.$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος ἔχει τὰ ἑξῆς μειονεκτήματα:

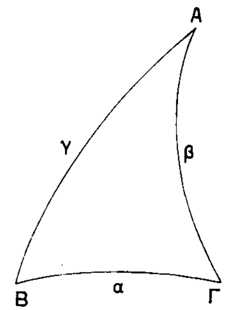
1) Δὲν δύναται νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων.

2) Τὸ συνημίτονον εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ὡς ἐκ τούτου δημιουργοῦνται λάθη.

Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν ἀνωτέρω μετατρέπομεν τὸν τύπον τῶν συνημιτόνων εἰς τὸν τύπον τῶν ἡμιπαρημιτόνων.

γ) *Τύπος τῶν Ἡμιπαρημιτόνων.*

Ἔστω σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 7·6δ).



Σχ. 7·6 δ.

Ἐκ τῆς ἐπιπέδου τριγωνομετρίας γνωρίζομεν ὅτι:

$$\text{ημπρ}A = \frac{1}{2}(1 - \text{συν}A).$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου (4) τῶν συνημιτόνων ἔχομεν:

$$\text{συν}A = \frac{\text{συν}\alpha - \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma}.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον τὴν τιμὴν τοῦ συνA, λαμβάνομεν:

$$\text{ημπρ}A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\text{συν}\alpha - \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma - \text{συν}\alpha + \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma}\right).$$

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu\beta\eta\mu\gamma + \sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu(\beta \sim \gamma)$, ἔχομεν:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\beta\sim\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha-1+\sigma\upsilon\nu(\beta\sim\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}\right).$$

Προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὴν μονάδα, ὁπότε ἔχομεν:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{[1-\sigma\upsilon\nu\alpha]-[1-\sigma\upsilon\nu(\beta\sim\gamma)]}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}\right)=$$

$$=\frac{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}-\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(\beta\sim\gamma)}{2}}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}=\frac{\eta\mu\pi\rho\alpha-\eta\mu\pi\rho(\beta\sim\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} \quad \text{ἢ}$$

$$\eta\mu\pi\rho A=\frac{\eta\mu\pi\rho\alpha-\eta\mu\pi\rho(\beta\sim\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

καί, ἐὰν θέσωμεν $\frac{1}{\eta\mu\beta}=\sigma\tau\epsilon\mu\beta$ καὶ $\frac{1}{\eta\mu\gamma}=\sigma\tau\epsilon\mu\gamma$, λαμβάνομεν

$$\eta\mu\pi\rho A=[\eta\mu\pi\rho\alpha-\eta\mu\pi\rho(\beta\sim\gamma)]\sigma\tau\epsilon\mu\beta\sigma\tau\epsilon\mu\gamma. \qquad (5)$$

Ἐὰν ἐξ ἄλλου τὸν ἀνωτέρω τύπον (5) τὸν ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς ημπρα, λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi\rho\alpha=\eta\mu\pi\rho A\eta\mu\beta\eta\mu\gamma+\eta\mu\pi\rho(\beta\sim\gamma). \qquad (6)$$

Ὥστε τὸ *ἡμιπαρημίτονον πλευρᾶς σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιπαρημίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ηὐξημένον κατὰ τὸ ἡμιπαρημίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν ἰδίων πλευρῶν.*

Κατὰ τὴν λογαρίθμησιν θέτομεν ὅπου $\eta\mu\pi\rho A\eta\mu\beta\eta\mu\gamma = \eta\mu\pi\rho K$, ὁπότε ἔχομεν $\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho K + \eta\mu\pi\rho(\beta\sim\gamma)$.

Παράδειγμα 1.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ καὶ $\gamma = 100°$ (7·6 ε). Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν Α.

$$\alpha=50°,\ \beta=60°,\ \gamma=100°,\ \gamma\sim\beta=30°.$$

Λύσις.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\eta\mu\pi\rho A = [\eta\mu\pi\rho\alpha - \eta\mu\pi\rho(\beta \sim \gamma)]\sigma\tau\epsilon\mu\beta\sigma\tau\epsilon\mu\gamma$ θέσωμεν $\eta\mu\pi\rho K = \eta\mu\pi\rho\alpha - \eta\mu\pi\rho(\beta \sim \gamma)$, λαμβάνομεν:

Σχ. 7·6 ε.

$$\eta\mu\pi\rho A = \eta\mu\pi\rho K \sigma\tau\epsilon\mu\beta\sigma\tau\epsilon\mu\gamma$$

$$\eta\mu\pi\rho\alpha = 0{,}17861$$

$$\eta\mu\pi\rho(\beta \sim \gamma) = 0{,}11698$$

$$\eta\mu\pi\rho K = 0{,}06163 \longrightarrow \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K = 8{,}78978$$

$$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\beta = 10{,}06247$$

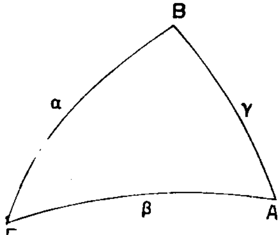
$$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\gamma = 10{,}00665$$

$$\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A = 8{,}85890$$

$$\widehat{A} = 31^\circ\ 11'\ \frac{1}{4}.$$

Παράδειγμα 2.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, $\widehat{A} = 40^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ καὶ $\beta = 80^\circ$



Σχ. 7·6 ζ.

(σχ. 7·6 ζ). Ὑπολογίσατε τὴν πλευρὰν α.

$$\widehat{A} = 40^\circ,\ \gamma = 30^\circ,\ \beta = 80^\circ,\ (\beta \sim \gamma) = 50^\circ.$$

Λύσις.

Εἰς τὸν τύπον $\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho A \eta\mu\beta\eta\mu\gamma + \eta\mu\pi\rho(\beta \sim \gamma)$ θέτομεν $\eta\mu\pi\rho K = \eta\mu\pi\rho A\eta\mu\beta\eta\mu\gamma$ καὶ ἔχομεν $\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho K + \eta\mu\pi\rho(\beta \sim \gamma)$.

$$
\begin{aligned}
\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A &= 9{,}06810 \\
\lambda o\gamma\eta\mu\beta &= 9{,}99335 \\
\lambda o\gamma\eta\mu\gamma &= 9{,}69897 \\
\hline
\lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K &= 8{,}76042 \longrightarrow \quad \eta\mu\pi\rho K = 0{,}05760 \\
&\qquad\qquad\qquad \eta\mu\pi\rho(\beta\sim\gamma) = 0{,}17861 \\
&\qquad\qquad\qquad \eta\mu\pi\rho\alpha = 0{,}23621 \\
&\qquad\qquad\qquad \alpha = 58^\circ\, 09'\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Ἀσκήσεις.

1. Δίδονται $\widehat{A} = 19^\circ\, 45'$, $\beta = 29^\circ\, 18'$ καὶ $\gamma = 67^\circ\, 23'$. Ὑπολογίσατε τὴν α.

2. Διὰ τοῦ τύπου τῶν ἡμιπαρημιτόνων ὑπολογίσατε τὴν τρίτην πλευρὰν τῶν τριγώνων:

α) $\widehat{A} = 57^\circ$, $\beta = 43^\circ\, 18'$, $\gamma = 59^\circ\, 30'$.

β) $\alpha = 63^\circ\, 09'$, $\beta = 101^\circ\, 28'$, $\widehat{\Gamma} = 39^\circ\, 30'$.

γ) $\widehat{B} = 112^\circ\, 10'$, $\gamma = 72^\circ\, 13'$, $\alpha = 35^\circ\, 03'$.

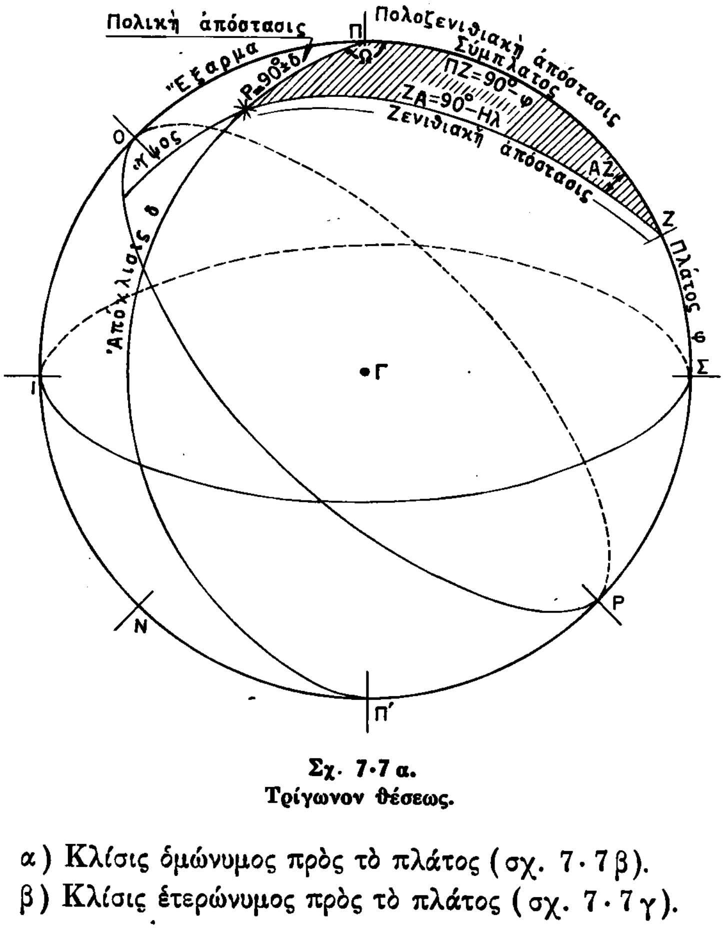
3. Αἱ πλευραὶ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι $122^\circ\, 42'$, $83^\circ\, 24'$, $66^\circ\, 16'$. Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν τὴν ἔναντι τῆς μικροτέρας πλευρᾶς.

4. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν τὴν κειμένην ἔναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

7·7 Τρίγωνον θέσεως.

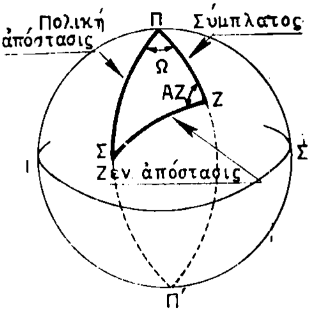
Καλοῦμεν *τρίγωνον θέσεως* (σχ. 7·7 α) τὸ ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας σφαιρικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὸν ὁμώνυμον πρὸς τὸ πλάτος τοῦ παρατηρητοῦ ἄνω πόλον Π, τὸ Ζενὶθ Ζ τοῦ παρατηρητοῦ καὶ τὸ ἴχνος τοῦ ἀστέρος Σ. Γωνίας δέ, τὴν μικροτέραν τῶν 180° τοπικὴν Ὡρικὴν γωνίαν, τὴν μέχρι 180° ἡμικυκλικὴν τιμὴν τοῦ ᾿Αζιμοὺθ καὶ τὴν γωνίαν θέσεως ἢ παραλλακτικὴν γωνίαν, ἡ ὁποία καὶ δὲν χρησιμοποιεῖται.

Τὸ τρίγωνον θέσεως ἀναλόγως τῆς θέσεως παρατηρητοῦ καὶ ἀστέρος δύναται νὰ λάβῃ τὰς ἀκολούθους μορφάς:

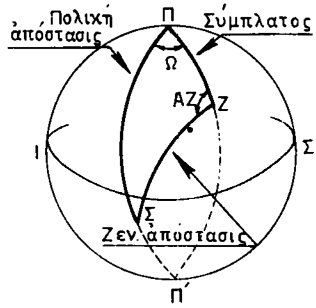


Σχ. 7·7 α.
Τρίγωνον θέσεως.

α) Κλίσις ὁμώνυμος πρὸς τὸ πλάτος (σχ. 7·7 β).
β) Κλίσις ἑτερώνυμος πρὸς τὸ πλάτος (σχ. 7·7 γ).



Σχ. 7·7β.



Σχ. 7·7γ.

7·8 Ἀντικατάστασις τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου θέσεως εἰς τοὺς εὑρεθέντας τύπους.

Εὕρεσις τῆς ζενιθιακῆς ἀποστάσεως.

Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἡμιπαρημιτόνου πλευρᾶς (6) ἔχομεν:

$$\text{ημπρ}\alpha = \text{ημπρ}A\,\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma + \text{ημπρ}(\beta \sim \gamma).$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου θέσεως, λαμβάνομεν:

$$\text{ημπρ}Z_A = \text{ημπρ}\Omega(\text{ημ}\,90^\circ - \varphi)\text{ημ}(90^\circ \pm \delta) + \text{ημπρ}[(90^\circ - \varphi) \sim (90^\circ \pm \delta)].$$

$$\text{ημπρ}Z_A = \text{ημπρ}\Omega\,\text{συν}\varphi\,\text{συν}\delta + \text{ημπρ}(\varphi \pm \delta).$$

Ὁπότε θέτομεν $+$, ἐὰν ἡ κλίσις εἶναι ἑτερώνυμος πρὸς τὸ πλάτος, $-$ δέ, ἐὰν εἶναι ὁμώνυμος πρὸς τὸ πλάτος.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον θέσωμεν:

$$\text{ημπρ}K = \text{ημπρ}\Omega\,\text{συν}\varphi\,\text{συν}\delta,$$

λαμβάνομεν τὸν ἁπλούστερον τύπον:

$$\text{ημπρ}Z_A = \text{ημπρ}K + \text{ημπρ}(\varphi \pm \delta)$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος εἶναι ὁ σπουδαιότερος διὰ τοὺς ναυτιλλομένους, διότι δι' αὐτοῦ εὑρίσκεται ἡ εὐθεῖα θέσεως κατὰ τὴν μέθοδον Marc.

Παράδειγμα 1.

Δίδονται $\Omega = 66^\circ\ 49'$, $\varphi = 31^\circ\ 10'$ B καὶ $\delta = 19^\circ\ 25'$ B. Ὑπολογίσατε τὴν ζενιθιακὴν ἀπόστασιν.

Λύσις.

$$\begin{array}{rll} \text{λογημπρ}\Omega = 9{,}48168 & & \\ \text{λογσυν}\varphi = 9{,}93230 & & \\ \underline{\text{λογσυν}\delta = 9{,}97457} & & \\ \text{λογημπρK} = 9{,}38855 & \longrightarrow & \text{ημπρK} = 0{,}24465 \\ (\varphi \sim \delta) = 11^\circ\ 45' & & \underline{\text{ημπρ}\ (\varphi \sim \delta) = 0{,}01048} \end{array}$$

$(\varphi \sim \delta)$, διότι φ καὶ δ ὁμώνυμα

$$\text{ημπρ}Z_A = 0{,}25513.$$

$$Z_A = 60^\circ\ 40',5.$$

Παράδειγμα 2.

Δίδονται τοπικὴ Ὡρικὴ γωνία $\Omega = 68^\circ\ 36'$, πλάτος $\varphi = 24^\circ\ 15'$B καὶ κλίσις ἀστέρος $\delta = 10^\circ\ 18'$ N. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ζενιθιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀστέρος.

Λύσις.

Ἐκ τοῦ τύπου $\text{ημπρ}Z_A = \text{ημπρ}\Omega\text{συν}\varphi\text{συν}\delta + \text{ημπρ}(\varphi \pm \delta)$

$$\begin{array}{rll} \text{λογημπρ}\Omega = \text{λογημπρ}\ 68^\circ\ 36' = 9{,}50183 & & \\ \text{λογσυν}\delta = \text{λογσυν}\ 10^\circ\ 18' = 9{,}95988 & & \\ \underline{\text{λογσυν}\varphi = \text{λογσυν}\ 24^\circ\ 15' = 9{,}99294} & & \\ \text{λογημπρK} = 9{,}45465 & \longrightarrow & \text{ημπρK} = 0{,}28488 \\ & & \underline{\text{ημπρ}(\varphi + \delta) = 0{,}08818} \\ & & \text{ημπρ}Z_A = 0{,}37306 \end{array}$$

$(\varphi + \delta)$, διότι φ, δ ἑτερώνυμα

$$Z_A = 75^\circ\ 17{,}5'.$$

7·9 Εὕρεσις τῆς Ὡρικῆς γωνίας.

Ἐὰν λάβωμεν τὸν τύπον (5) ἡμιπαρημιτόνου γωνίας καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸν τὰ στοιχεῖα τριγώνου θέσεως, λαμβάνομεν :

$$ημπρA = [ημπρα - ημπρ(β \sim γ)]στεμβστεμγ.$$

$$ημπρΩ = [ημπρZ_A - ημπρ[(90° \pm δ) \sim (90° - φ)]]στεμ(90° \pm δ)στεμ(90° - φ)$$

$$ημπρΩ = [ημπρZ_A - ημπρ(90° \pm δ) \sim (90° + φ)]στεμ(90° \pm δ)στεμ(90° - φ)$$

$$ημπρΩ = [ημπρZ_A - ημπρ(φ \pm δ)]τεμφτεμδ.$$

Ἐὰν θέσωμεν $ημπρK = ημπρZ_A - ημπρ(φ \pm δ)$, λαμβάνομεν:

$$ημπρΩ = ημπρKτεμφτεμδ.$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος εἶναι ἐπίσης σπουδαῖος διὰ τοὺς ναυτιλλομένους, διότι δι' αὐτοῦ προσδιορίζεται ἡ τοπικὴ Ὡρικὴ γωνία ἑνὸς ἀστέρος, ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ μῆκος μας.

Παράδειγμα.

Δίδονται $φ = 41°\ 22'$ B, $δ = 9°\ 34'$N καὶ $Hλ = 26°\ 14'$. Ὑπολογίσατε τὴν Ὡρικὴν γωνίαν.

Λύσις.

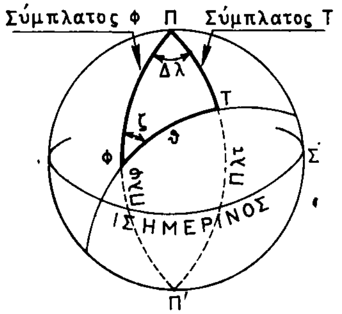
$$\begin{array}{rl}
ημπρZ_A = ημπρ63°\ 46' = & 0,27899 \\
\underline{ημπρ(φ+δ) = ημπρ50°\ 56' =} & \underline{0,18489} \\
ημπρK = & 0,09410 \longrightarrow λογημπρK = 8,97357 \\
 & λογτεμδ = λογτεμ\ 9°\ 34' = 0,00608 \\
 & \underline{λογτεμφ = λογτεμ\ 41°\ 22' = 0,12465} \\
(φ+δ),\ \text{διότι}\ φ,\ δ\ \text{ἑτερώνυμα} & λογημπρΩ = 9,10430 \\
 & Ω = 41°\ 46,8'.
\end{array}$$

Ἄσκησις.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τοπικὴ Ὡρικὴ γωνία τοῦ ἀστέρος, ἐὰν τὸ πλάτος ἑνὸς τόπου $φ = 40°\ 20'$ B, ἡ κλίσις $δ = 19°\ 34'$ B καὶ τὸ ἀληθὲς ὕψος $Hλ = 26°\ 14'$.

7·10 Ὑπολογισμὸς ὀρθοδρομικοῦ τόξου καὶ ἀρχικῆς πλεύσεως.

Ἐὰν ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὴν πλευρὰν σφαιρικοῦ τριγώνου, ἐφαρμοσθῇ εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον ἐπὶ τῆς γῆς, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι ὁ τόπος ἐκκινήσεως, ὁ πλησιέστερος πρὸς τοῦτον πόλος καὶ ὁ τόπος ἀφίξεως (σχ. 7·10α), λαμβάνομεν τύπον,



Σχ. 7·10 α.

διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὀρθοδρομικὴν ἀπόστασιν τῶν δύο τόπων ὡς καὶ τὴν ἀρχικήν μας πλεῦσιν:

$$\Pi.\chi.\ \eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho A \eta\mu\beta\eta\mu\gamma + \eta\mu\pi\rho(\beta \sim \gamma).$$

$$\text{Ἤτοι: } \eta\mu\pi\rho\theta = \eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda\, \eta\mu(90^\circ - \varphi)\, \eta\mu(90^\circ \pm \varphi') +$$

$$\eta\mu\pi\rho\,[(90^\circ - \varphi) \sim (90^\circ \pm \varphi')].$$

$$\eta\mu\pi\rho\theta = \eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi' + \eta\mu\pi\rho\Delta\varphi.$$

Ἐὰν θέσωμεν ὅπου $\eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi' = \eta\mu\pi\rho K$, λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi\rho\theta = \eta\mu\pi\rho K + \eta\mu\pi\rho\Delta\varphi.$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος μᾶς δίδει τὴν ὀρθοδρομικὴν ἀπόστασιν θ καὶ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν τύπον τοῦ Marc. Ἐὰν ἐξ ἄλλου ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ ἡμιπαρημιτόνου γωνίας εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον, λαμβάνομεν (σχ. 7·10β):

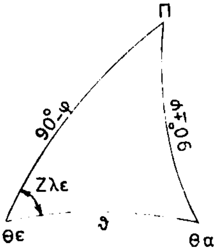
$$\eta\mu\pi\rho\zeta = [\,\eta\mu\pi\rho\,(90^\circ \pm \varphi') - \eta\mu\pi\rho\,[\,\theta - (90^\circ - \varphi)\,]\,]\,\sigma\tau\epsilon\mu\,(90^\circ - \varphi)\,\sigma\tau\epsilon\mu\theta$$

$$\text{ἢ } \eta\mu\pi\rho\zeta = [\,\eta\mu\pi\rho\,(90^\circ \pm \varphi') - \eta\mu\pi\rho\,[\,\theta \sim (90^\circ - \varphi)\,]\,]\,\tau\epsilon\mu\varphi\sigma\tau\epsilon\mu\theta.$$

Θέτομεν ὅπου $[\,\theta \sim (90^\circ - \varphi)\,] = \alpha$ καὶ $[\,\eta\mu\pi\rho\,(90^\circ \pm \varphi') - \eta\mu\pi\rho\alpha\,] = \eta\mu\pi\rho K$, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi\rho\zeta = \eta\mu\pi\rho K \tau\epsilon\mu\varphi\sigma\tau\epsilon\mu\theta.$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος μᾶς προσδιορίζει τὴν ἀρχικὴν πλεῦσιν κατὰ τὸν ὀρθοδρομικὸν πλοῦν.



Σχ. 7·10 β.

Ὁ ἴδιος τύπος εἶναι δυνατὸν νὰ μᾶς προσδιορίσῃ τὸ Ἀζιμοὺθ εἰς τὸ τρίγωνον θέσεως:

$$\text{ημπρ}AZ = \text{ημπρ}K\text{τεμ}\varphi\text{τεμ}H\lambda,$$

ἔνθα $\text{ημπρ}K = \text{ημπρ}\,(90^\circ \pm \delta) - \text{ημπρ}\,(\varphi \sim H\lambda)$.

Ὁ τύπος αὐτὸς ὅμως δὲν χρησιμοποιεῖται σήμερον εἰς τὴν πρᾶξιν. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Ἀζιμοὺθ χρησιμοποιοῦμεν τοὺς πίνακας A. B. C.

Τέλος ὁ ἴδιος τύπος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τελικῆς πλεύσεως ὀρθοδρομίας, ἀλλὰ καὶ αὐτὸς οὐδεμίαν ἐφαρμογὴν ἔχει εἰς τὴν πρᾶξιν.

7·11 Γενικὰ προβλήματα.

1. Ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ ἀστέρος Πολυδεύκους εἶναι $7^{\omega}42^{\lambda}$ καὶ ἡ κλίσις του εἶναι 28° 10′ Β. Ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ παρατηρητοῦ εἶναι $4^{\omega}12^{\lambda}$. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ Πολυδεύκους εἶναι 19° 45′, ὑπολογίσατε τὸ Ἀζιμούθ.

Λύσις.

Ὀρθὴ ἀναφορὰ Πολυδεύκους	$= 07^{\omega}42^{\lambda}$
Ὀρθὴ ἀναφορὰ μεσημβρινοῦ παρατηρητοῦ	$= 04^{\omega}12^{\lambda}$
Τοπικὴ ὡρικὴ γωνία	$= 03^{\omega}30^{\lambda}$ ἢ 52° 30′.

Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ἡμιτόνων ἔχομεν (σχ. 7·11 α):

$$\frac{\eta\mu(90^\circ+\delta)}{\eta\mu AZ}=\frac{\eta\mu(90^\circ-H\lambda)}{\eta\mu\Omega} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\delta}{\eta\mu AZ}=\frac{\sigma\upsilon\nu H\lambda}{\eta\mu\Omega} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\delta}{\eta\mu AZ}=\frac{\sigma\upsilon\nu H\lambda}{\eta\mu\Omega}.$$

$$\eta\mu AZ=\eta\mu\Omega\sigma\upsilon\nu\delta\tau\epsilon\mu H\lambda.$$

$\Omega=52^\circ\ 30'$	$\lambda o\gamma\eta\mu\Omega=\ \ 9{,}89945$
$\delta=28^\circ\ 10'$	$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\delta=\ \ 9{,}94526$
$H\lambda=19^\circ\ 45'$	$\lambda o\gamma\tau\epsilon\mu H\lambda=10{,}02633$
	$\lambda o\gamma\eta\mu AZ=\ \ 9{,}87104$
Ἄρα Ἀζιμοὺθ	$AZ=48^\circ$.

2. Εἰς ὡρισμένον χρόνον τὸ ὕψος τοῦ Betelgeuse (α, Ὠρίωνος) εἶναι 31° 33′ καὶ ἡ τοπικὴ ὡρικὴ γωνία, ἡ ὁποία διευθύνεται πρὸς ΝΔ κατεύθυνσιν, εὑρέθη ἀπὸ τὸ Ἀλμανὰκ ἴση πρὸς 29° 18′. Ἐὰν ἡ κλίσις του εἶναι 7° 24′ Β, ποῖον εἶναι τὸ Ἀζιμούθ;

Λύσις.

Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ἡμιτόνων ἔχομεν (σχ. 7·11 β):

$$\frac{\eta\mu AZ}{\eta\mu(90^\circ\pm\delta)}=\frac{\eta\mu\Omega}{\eta\mu(90^\circ-H\lambda)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\eta\mu AZ}{\sigma\upsilon\nu\delta}=\frac{\eta\mu\Omega}{\sigma\upsilon\nu H\lambda}.$$

$$\eta\mu AZ=\eta\mu\Omega\sigma\upsilon\nu\delta\tau\epsilon\mu H\lambda$$

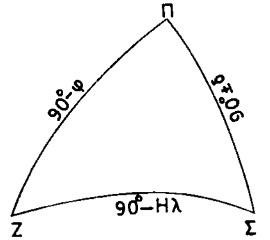
$\Omega=29^\circ\ 18'$	$\lambda o\gamma\eta\mu\Omega=\ \ 9{,}68965$
$\delta=07^\circ\ 24'$	$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\delta=\ \ 9{,}99637$
$H\lambda=31^\circ\ 33'$	$\lambda o\gamma\tau\epsilon\mu H\lambda=10{,}06947$
	$\lambda o\gamma\eta\mu AZ=\ \ 9{,}75549$
	$AZ=34^\circ\ 42',9$
Ἄρα Ἀζιμοὺθ	$AZ=B\ 34^\circ\ 43'\ Z$.

3. Ἕνα σημεῖον Β εὑρίσκεται εἰς $\varphi=47^\circ\ 12'$ Β, καὶ ἕνα ἄλλο Γ εἰς $\varphi=50^\circ\ 00$ Β. Ἡ ἀρχικὴ πλεῦσις ἀπὸ Γ πρὸς Β εἶναι 263°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ πλεῦσις, ἐὰν πρόκειται νὰ πλεύσωμεν ἀπὸ Β πρὸς Γ (σχ. 7·11 γ).

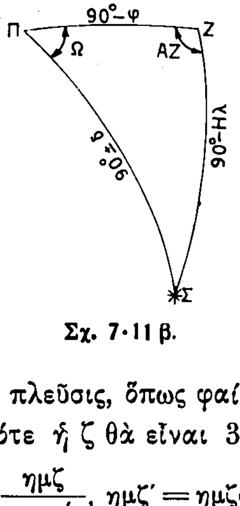
Λύσις.

Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΒΠΓ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τῶν ἡμιτόνων, λαμβάνομεν:

$$\frac{\eta\mu\zeta'}{\eta\mu(90^\circ-\varphi)}=\frac{\eta\mu\zeta}{\eta\mu(90^\circ-\varphi')}.$$



Σχ 7·11 α.



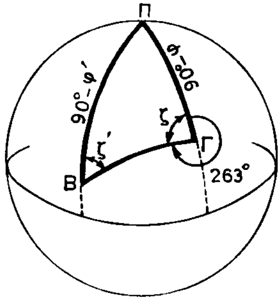
Σχ. 7·11 β.

Ἐπειδὴ ἡ ἀρχικὴ πλεῦσις, ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχῆμα 7·11γ, εἶναι 263°, τότε ἡ ζ θὰ εἶναι 360° — 263° = 97°.

$$\frac{\eta\mu\zeta'}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{\eta\mu\zeta}{\sigma\upsilon\nu\varphi'},\quad \eta\mu\zeta'=\eta\mu\zeta\sigma\upsilon\nu\varphi\tau\epsilon\mu\varphi'.$$

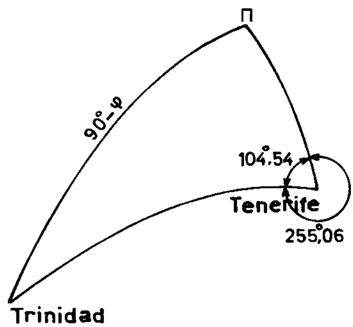
$\zeta=97^\circ$	$\lambda o\gamma\eta\mu 97^\circ=\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 7^\circ=\ \ 9{,}99675$
$\varphi=50^\circ$	$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi=\ \ 9{,}80807$
$\varphi'=47^\circ\ 12'$	$\lambda o\gamma\tau\epsilon\mu\varphi'=10{,}16785$
	$\lambda o\gamma\eta\mu\zeta'=\ \ 9{,}97267$
	$\zeta'=69^\circ\ 53'.$

Ἀρχικὴ πλεῦσις ἀπὸ Β πρὸς Γ = Β 69° 53′ Α.



Σχ. 7·11 γ.

4. Τὸ Trinidad εὑρίσκεται εἰς $\varphi = 10°\ 30'$ Β, τὸ δὲ πλάτος τῆς Tenerife εἶναι $\varphi' = 28°\ 30'$ Β. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ πλεῦσις ἀπὸ τὴν Tenerife πρὸς Trinidad εἶναι 255° 06, ποία ἡ ἀρχικὴ πλεῦσις ἀπὸ Trinidad πρὸς Tenerife (σχ. 7 · 11 δ);



Σχ. 7·11 δ.

Λύσις.

Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ἡμιτόνων ἔχομεν:

$$\frac{\eta\mu\zeta'}{\eta\mu\,(90° - \varphi')} = \frac{\eta\mu\zeta}{\eta\mu\,(90° - \varphi)}.$$

$$\eta\mu\zeta' = \eta\mu\zeta\sigma\upsilon\nu\varphi'\tau\epsilon\mu\varphi.$$

$$\eta\mu(104^\circ\ 54') = \eta\mu(90^\circ + 14^\circ\ 54') = \sigma\upsilon\nu\, 14^\circ\ 54'$$

$$\begin{array}{lr} \zeta = 104^\circ\ 54' & \lambda o\gamma\eta\mu\zeta = \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 14^\circ\ 54' = 9{,}98515 \\ \varphi' = 28^\circ\ 30' & \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi' = 9{,}94390 \\ \varphi = 10^\circ\ 30' & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu\varphi = 10{,}00733 \\ \hline & \lambda o\gamma\eta\mu\zeta' = 9{,}93638 \end{array}$$

Ἀρχικὴ πλεῦσις ἀπὸ Tri.-Tener. B 59° 44',5 A.

5. Σκάφος πλέει ἐξ ἑνὸς σημείου $\varphi = 31^\circ\ 15'$ B καὶ $\lambda = 130^\circ\ 52'$ A εἰς $\varphi' = 12^\circ\ 28'$ B καὶ $\lambda' = 32^\circ\ 19'$ A. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ ὀρθοδρομικὴ ἀπόστασις θ καὶ ἡ ἀρχικὴ πλεῦσις ζ.

Λύσις.

$$\begin{array}{rl} \varphi = 31^\circ\ 15'\ \text{B} \\ \varphi' = 12^\circ\ 28'\ \text{B} \\ \hline \Delta\varphi = 18^\circ\ 47' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lambda = 130^\circ\ 52'\ \text{A} \\ \lambda' = 32^\circ\ 19'\ \text{A} \\ \hline \Delta_\lambda = 98^\circ\ 33'\ \Delta \end{array}$$

α) Ὑπολογισμὸς θ.

Τύπος ἐφαρμογῆς: $\eta\mu\pi\rho\theta = \eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi' + \eta\mu\pi\rho\Delta\varphi$.

Ἐὰν θέσωμεν $\eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi' = \eta\mu\pi\rho K$, λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi\rho\theta = \eta\mu\pi\rho K + \eta\mu\pi\rho\Delta\varphi.$$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi = 9{,}93192 & \\ \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi' = 9{,}98964 & \\ \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda = 9{,}75917 & \\ \hline \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K = 9{,}68073 & \longrightarrow \quad \eta\mu\pi\rho K = 0{,}47944 \\ & \eta\mu\pi\rho\Delta\varphi = 0{,}02663 \\ \cline{2-2} & \eta\mu\pi\rho\theta = 0{,}50607 \end{array}$$

Ἄρα $\theta = 90^\circ\ 41',8$ ἢ 5441,8 μίλια.

β) Ὑπολογισμὸς ζ.

Τύπος ἐφαρμογῆς:

$$\eta\mu\pi\rho\zeta = [\,\eta\mu\pi\rho(90^\circ \pm \varphi') - \eta\mu\pi\rho\,[\theta \sim (90^\circ - \varphi)]\,]\ \tau\varepsilon\mu\varphi\sigma\tau\varepsilon\mu\theta.$$

Ἐὰν θέσωμεν $\theta \sim (90^\circ - \varphi) = \alpha$ καὶ $\eta\mu\pi\rho(90^\circ \pm \varphi') - \eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho K$, λαμβάνομεν:

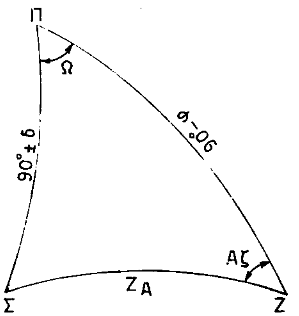
$$\eta\mu\pi\rho\zeta = \eta\mu\pi\rho K \tau\varepsilon\mu\varphi \sigma\tau\varepsilon\mu\theta.$$

$$\begin{array}{rr}
90^\circ\ 00' & 90^\circ\ 00 \\
\varphi' = 12^\circ\ 28' & \varphi = 31^\circ\ 15' \\
\hline
90^\circ - \varphi' = 77^\circ\ 32' & 90^\circ - \varphi = 58^\circ\ 45' \\
 & \theta = 90^\circ\ 41',8 \\
 & \alpha = 31^\circ\ 56',8
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\eta\mu\pi\rho\,(90^\circ - \varphi') = 0{,}39206 & \\
\eta\mu\pi\rho\alpha = 0{,}07572 & \\
\hline
\eta\mu\pi\rho K = 0{,}31634 & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K = 9{,}50016 \\
 & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = 10{,}00003 \\
 & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu\varphi = 10{,}06808 \\
\hline
 & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\zeta = 9{,}56827
\end{array}$$

Ἄρα $\zeta = B\ 74^\circ\ 56',3\ Z$.

6. Τὸ ἐξ ἀναμετρήσεως πλάτος ἑνὸς πλοίου ἦτο $\varphi = 55^\circ\ 30'$ B, ὅταν ἐμετρήσαμεν τὸ ὕψος τοῦ Capella (α. Ἡνιόχου). Ἡ τοπικὴ Ὡρικὴ γωνία τοῦ Capella ἦτο $255^\circ\ 40'$, ἡ δὲ κλίσις του $45^\circ\ 56'$ B. Ἐὰν τὸ φ ἀναμετρήσεως εἶναι ἀκριβές, ποῖον τὸ μετρηθὲν ὕψος καὶ τὸ Ἀζιμοὺθ (σχ. 7 · 11 ε);



Σχ. 7·11 ε.

Λύσις.

α) Ὑπολογισμὸς Z_A.

Ἐκ τοῦ τύπου ἡμιπαρημιτόνου πλευρᾶς ἔχομεν:

$$\text{ημπρ}Z_A = \text{ημπρ}\Omega\,\text{συν}\varphi\,\text{συν}\delta + \text{ημπρ}(\varphi \pm \delta).$$

$(\varphi \sim \delta)$, διότι φ καὶ δ ὁμώνυμα.

$$\begin{array}{lr}
\Omega = 360^\circ - 255^\circ\,40' = 104^\circ\,20' & \text{λογημπρ}\Omega = 9{,}79503 \\
\varphi = \;\; 55^\circ\,30' & \text{λογσυν}\varphi = 9{,}75313 \\
\delta = \;\; 45^\circ\,56' & \text{λογσυν}\delta = 9{,}84229 \\
\hline
 & \text{λογημπρ}K = 9{,}39045
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
 & \rightarrow \quad \text{ημπρ}K = 0{,}24573 \\
(\varphi \sim \delta) = 9^\circ\,34' & \text{ημπρ}(\varphi \sim \delta) = 0{,}00695 \\
\hline
 & \text{ημπρ}Z_A = 0{,}25268 \\
 & Z_A = 60^\circ\,21{,}3
\end{array}$$

Ἄρα $H = 90^\circ - Z_A = 29^\circ\;38',7.$

β) Ὑπολογισμὸς Ἀζιμούθ.

$$\text{ημπρ}AZ = [\,\text{ημπρ}(90^\circ - \delta) - \text{ημπρ}(\varphi \sim H\lambda)\,]\,\text{τεμ}\varphi\,\text{τεμ}Z_A \text{ ἢ } \text{στεμ}H\lambda.$$

$$\begin{array}{lr}
90^\circ - \delta = 44^\circ\,04' & \text{ημπρ}(90^\circ - \delta) = 0{,}14073 \\
\varphi \sim H\lambda = 25^\circ\,51', & 3\text{ημπρ}(\varphi \sim H\lambda) = 0{,}05005 \\
\hline
 & \text{ημπρ}K = 0{,}09078
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\text{ημπρ}K = 0{,}09078 & \text{λογημπρ}K = \;\; 8{,}95751 \\
\varphi = 55^\circ\,30' & \text{λογτεμ}\varphi = 10{,}24687 \\
Z_A = 60^\circ\,21',3 & \text{λογστεμ}\varphi' = 10{,}06093 \\
\hline
 & \text{λογημπρ}AZ = \;\; 9{,}26531
\end{array}$$

Ἄρα $AZ = B\;50^\circ\;50'\;A.$

(Ἡ ὀνομασία τοῦ Ἀζιμοὺθ ἐλήφθη ἐκ τοῦ πλάτους καὶ τῆς Ὡρικῆς γωνίας).

7. Ἡ θέσις τοῦ Λὸς Ἄντζελες εἶναι $\varphi = 34^\circ\;00$ B, $\lambda = 118^\circ\;12'$ καὶ ἡ θέσις τῆς Χονολουλοῦ εἶναι $\varphi' = 21^\circ\;30'$ B. Δεδομένου ὅτι αὐτὴ ἀπέχει 2177 μίλια ἀπὸ τοῦ Λὸς Ἄντζελες, ποῖον εἶναι τὸ μῆκος της;

Λύσις.

Τύπος ὀρθοδρομικῆς ἀποστάσεως θ:

$$\text{ημπρ}\theta = \text{ημπρ}\Delta_\lambda\,\text{συν}\varphi\,\text{συν}\varphi' + \text{ημπρ}\Delta\varphi \text{ ἢ}$$

$$\eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda = [\,\eta\mu\pi\rho\theta - \eta\mu\pi\rho\Delta\varphi\,]\ \tau\epsilon\mu\varphi\tau\epsilon\mu\varphi'.$$

Ἐὰν μετατρέψωμεν τὰ 2177 μίλια, θὰ ἔχωμεν $= 36^\circ\ 17'$.

$$\begin{array}{rl}
\varphi = & 34^\circ\ 00\ \mathrm{B} \\
\varphi' = & \underline{21^\circ\ 30'\ \mathrm{B}} \\
\Delta\varphi = & 12^\circ\ 30'
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\theta = 36^\circ\ 17' & \eta\mu\pi\rho\theta = 0{,}09695 & \\
\Delta\varphi = 12^\circ\ 30' & \eta\mu\pi\rho\Delta\varphi = \underline{0{,}01185} & \\
& \eta\mu\pi\rho K = 0{,}08510 \longrightarrow & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K = 8{,}92990 \\
& \varphi = 34^\circ\ 00 & \lambda o\gamma\tau\epsilon\mu\varphi = 10{,}08143 \\
& \varphi' = 21^\circ\ 30' & \lambda o\gamma\tau\epsilon\mu\ \varphi' = \underline{10{,}03132} \\
& & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\Delta_\lambda = 9{,}04265 \\
& & \Delta_\lambda = 38^\circ\ 47',8\ \Delta \\
& & \lambda = \underline{118^\circ\ 12',0\ \Delta} \\
& & \lambda' = 156^\circ\ 59',8\ \Delta
\end{array}$$

Ἄρα Μῆκος Χονολουλοῦ $= 157^\circ$ Δ.

7·12 Τύπος παραμεσημβρινῶν.

Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ναυτιλίας ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ πλάτους, ζενιθιακῆς ἀποστάσεως καὶ κλίσεως κατὰ τὴν διάβασιν ἑνὸς ἀστέρος ἐκ τοῦ Ἄνω μεσημβρινοῦ ἑνὸς τόπου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\mathrm{M.Z.A} = \varphi \pm \delta,$$

ὅπου Μ. Ζ. Α. σημαίνει *μεσημβρινὴ ζενιθιακὴ ἀπόστασις*. Ἔστω λοιπὸν ἀστὴρ Χ ὀλίγον πρὸ τῆς μεσημβρινῆς αὐτοῦ διαβάσεως καὶ ΠΖΧ τὸ τρίγωνον θέσεως κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτὴν (σχ. 7·12α). Ἐὰν εἰς τὸν τύπον ἡμιπαρημιτόνου πλευρᾶς θέσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου θέσεως, λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho\,(\beta \sim \gamma) + \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\eta\mu\pi\rho A$$

$$\eta\mu\pi\rho ZX = \eta\mu\pi\rho\,(\Pi X \sim \Pi Z) + \eta\mu\pi\rho\Pi\eta\mu\Pi X\eta\mu\Pi Z$$

$$\eta\mu\pi\rho Z_A = \eta\mu\pi\rho[(90^\circ \pm \delta) \sim (90^\circ + \varphi)] + \eta\mu(90^\circ \pm \delta)\eta\mu\,(90^\circ - \varphi)\ \eta\mu\pi\rho\Omega$$

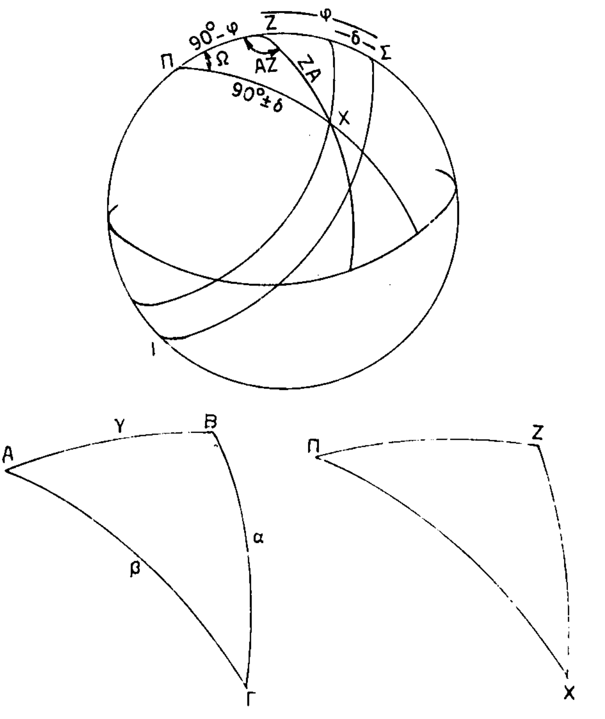
$$\eta\mu\pi\rho Z = \eta\mu\pi\rho\,(\varphi \pm \delta) + \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta\eta\mu\pi\rho\Omega.$$

Ἀλλά, ὡς ἀνωτέρω ἀνεφέρθη, $\varphi \pm \delta = \text{M.Z.A.}$, ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi\rho Z_A = \eta\mu\pi\rho \text{M.Z.A.} + \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta\eta\mu\pi\rho\Omega \quad \text{ἢ}$$

$$\eta\mu\pi\rho \text{M.Z.A.} = \eta\mu\pi\rho Z_A - \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta\eta\mu\pi\rho\Omega,$$

ὅπου Z_A = συμπλήρωμα τοῦ ὕψους, φ = πλάτος ἀναμετρήσεως, δ = κλίσις καὶ Ω = Τοπικὴ Ὡρικὴ γωνία.



Σχ. 7·12 α.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τὰ Z_A, φ, δ καὶ Ω τοῦ δευτέρου μέλους δίδονται ἢ εὐκόλως προσδιορίζονται, εὑρίσκομεν τὴν M.Z.A., καὶ ἐκ ταύτης τὸ πλάτος τοῦ τόπου:

$$\varphi = \text{M.Z.A.} \pm \delta.$$

Παράδειγμα πλάτους διὰ Παραμεσημβρινῶν.

Δίδονται $\Omega = 355^\circ\ 57'$, $\varphi_{\alpha\nu} = 48^\circ\ 12'$ B, $\lambda_{\alpha\nu} = 12^\circ\ 37'$ Δ

$\delta = 12^\circ\ 14'$ N, $H\lambda = 29^\circ\ 38'$ Νοτίως τοῦ παρατηρητοῦ

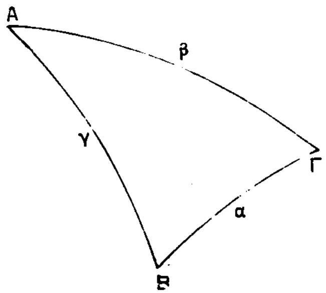
$Z_A = 60^\circ\ 22'$ $\quad$ $\eta\mu\pi\rho A = 0{,}25278$

$$\begin{array}{rl}
\Omega = 355^\circ\ 57' & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\Omega = 7{,}09642 \\
\varphi_{\alpha\nu} = \ \ 48^\circ\ 12' & \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi_{\alpha\nu} = 9{,}82382 \\
\delta = \ \ 12^\circ\ 14' & \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\delta = 9{,}99003 \\
\hline
& \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho K = 6{,}91027
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
& \eta\mu\pi\rho K = 0{,}00081 \quad - \\
\hline
\eta\mu\pi\rho & M.Z.A. = 0{,}25197 \\
& M.Z.A. = 60^\circ\ 15',5 \\
& \delta = 12^\circ\ 14' \\
\hline
& \varphi = 48^\circ\ 01',5B.
\end{array}$$

7·13 Τύπος τῶν τεσσάρων συνεχῶν στοιχείων.

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Θὰ εὕρωμεν σχέσιν, ἡ ὁποία θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ συνδέσῃ τέσσαρα συνεχῆ στοιχεῖα αὐτοῦ.



Σχ. 7·13 α.

Π.χ. β, Α, γ καὶ Β (σχ. 7·13 α). Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῶν συνημιτόνων ἔχομεν τοὺς κάτωθι:

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\alpha\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma \qquad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma. \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ἡμιτόνων λαμβάνομεν:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu\beta\eta\mu A}{\eta\mu B}.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὸ ημα, συνα, δηλαδὴ τὸν τύπον (2), λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu B \frac{\eta\mu\beta\eta\mu A}{\eta\mu B} + \sigma\upsilon\nu\gamma\,(\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma).$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις.

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\gamma\sigma\varphi B\,\eta\mu\beta\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu^2\gamma\sigma\upsilon\nu\beta \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\gamma\sigma\varphi B\,\eta\mu\beta\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος:

$$\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\,(\sigma\varphi B\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu A) \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta\,(1 - \sigma\upsilon\nu^2\gamma) = \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\,(\sigma\varphi B\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu A).$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu^2\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} = \frac{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\,(\sigma\varphi B\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu A)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma},$$

(Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ ημβημγ)

$$\frac{\sigma\varphi\beta\eta\mu\gamma}{\eta\mu A\eta\mu\gamma} = \frac{\sigma\varphi B\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A\eta\mu\gamma}$$

(Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ ημΑημγ)

$$\frac{\sigma\varphi\beta\eta\mu\gamma}{\eta\mu A\eta\mu\gamma} = \frac{\sigma\varphi B\eta\mu A}{\eta\mu A\eta\mu\gamma} + \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A\eta\mu\gamma} \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma\varphi\beta\sigma\tau\epsilon\mu A = \sigma\varphi B\sigma\tau\epsilon\mu\gamma + \sigma\varphi\gamma\sigma\varphi A \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma\varphi B\sigma\tau\epsilon\mu\gamma = \sigma\varphi\beta\sigma\tau\epsilon\mu A - \sigma\varphi\gamma\sigma\varphi A.$$

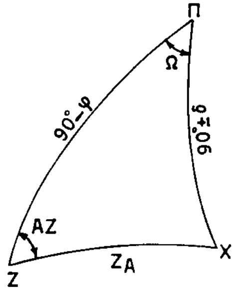
7·14 Ἀντικατάστασις τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου θέσεως εἰς τὸν τύπον τῶν τεσσάρων συνεχῶν στοιχείων.

Ἔστω ὁ εὑρεθεὶς τύπος τῶν τεσσάρων συνεχῶν στοιχείων σφΒστεμγ = σφβ στεμΑ — σφγσφΑ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὸν τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου θέσεως ΠΖΧ (σχ. 7 · 14 α) καὶ λαμβάνομεν:

$$\sigma\varphi AZ\,\sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ - \varphi) = \sigma\varphi(90^\circ \pm \delta)\,\sigma\tau\epsilon\mu\Omega - \sigma\varphi(90^\circ - \varphi)\,\sigma\varphi\Omega.$$

$$\sigma\varphi AZ\,\tau\epsilon\mu\varphi = \pm\,\epsilon\varphi\delta\,\sigma\tau\epsilon\mu\Omega - \epsilon\varphi\varphi\sigma\varphi\Omega.$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὸ Ἀζιμοὺθ ἑνὸς ἀστέρος ἐκ τοῦ πλάτους φ, τῆς κλίσεως αὐτοῦ δ καὶ τῆς ὡρικῆς του γωνίας Ω. Ὁ ναυτιλλόμενος ὅμως δὲν ἀσχολεῖται μὲ τὴν λογιστικὴν αὐτοῦ ἐπίλυσιν.



Σχ. 7·14 α.

7·15 Μετατροπὴ τοῦ ἀνωτέρω τύπου εἰς ἄλλον καταλληλότερον διὰ τὴν χρῆσιν τῶν πινάκων A.B.C.

Ἐὰν λάβωμεν τὸν τύπον τοῦ Ἀζιμοὺθ :

$$\text{σφAZτεμφ} = \pm\, \text{εφδστεμΩ} - \text{εφφσφΩ},$$

ἐπειδὴ $\text{τεμφ} = \dfrac{1}{\text{συνφ}}$ $\text{στεμΩ} = \dfrac{1}{\text{ημΩ}}$ καὶ $\text{σφΩ} = \dfrac{1}{\text{εφΩ}}$, τότε

$$\frac{\text{σφAZ}}{\text{συνφ}} = \frac{\pm\,\text{εφδ}}{\text{ημΩ}} - \frac{\text{εφφ}}{\text{εφΩ}}.$$

$$\text{σφAZ} = \left[\frac{\text{σφ}\,(90^\circ \pm \delta)}{\text{ημΩ}} - \frac{\text{εφφ}}{\text{εφΩ}}\right] \text{συνφ} \qquad \text{ἤ}$$

$$\text{σφAZ} = \left[-\frac{\text{εφφ}}{\text{εφΩ}} + \frac{\text{σφ}\,(90^\circ \pm \delta)}{\text{ημΩ}}\right] \text{συνφ}.$$

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἔχουν συνταχθῆ οἱ Πίνακες A.B.C., ὅπου τὸ $-\dfrac{\text{εφφ}}{\text{εφΩ}} = \text{A}$, τὸ $\dfrac{\text{σφ}\,(90^\circ \pm \delta)}{\text{ημΩ}} = \text{B}$,
τὸ $\text{A} + \text{B} = \text{C}$ (ἀλγεβρικῶς)
καὶ τὸ $\text{Cσυνφ} = \text{σφAZ}$.

Παράδειγμα εὑρέσεως τοῦ Ἀζιμοὺθ διὰ τῶν Πινάκων A.B.C. (Πίνακες 15, 16 καὶ 17).

Δίδονται $\Omega = 48^\circ$, $\varphi = 52^\circ$ B καὶ $\delta = 15^\circ$ B καὶ ζητεῖται τὸ Ἀζιμούθ.

Πίναξ A	$\varphi = 52^\circ$ B $\Omega = 48^\circ$	A = 1,15 N ἐπωνυμία ἀντίθετος τοῦ φ
Πίναξ B	$\delta = 15^\circ$ B $\Omega = 48^\circ$	B = 0,36 B ἐπωνυμία ὁμώνυμος πάντοτε πρὸς τὴν κλίσιν
		C = A — B = 0,79 N
Πίναξ C	$\varphi = 52^\circ$ B C = 0,79 N	*Ἀπάντ.* Ἀζιμοὺθ = N 64° Z.

Παρατηρήσεις.

Τὸ Ἀζιμοὺθ λαμβάνει τὴν πρώτην ἐπωνυμίαν ἐκ τοῦ C, ὡς δευτέραν δὲ λαμβάνει τὴν ἰδίαν μὲ τὴν μικροτέραν τῶν 180° Ὡρικὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου θέσεως (δηλ. Ἀνατολικὴ ἢ Δυτική). Ἐὰν πρόκειται περὶ Ἡλίου π.μ. ἢ μ.μ. οἱ Πίνακες A.B.C. δίδουν τὴν τεταρτοκυκλικὴν τιμὴν τοῦ Ἀζιμούθ.

7·16 Τύπος ἀναγνωρίσεως ἀστέρος.

Διὰ νὰ ἀναγνωρίσωμεν ἕνα ἀστέρα εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὴν L.H.A. αὐτοῦ (τοπικὴν Ὡρικὴν γωνίαν) καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν S.H.A. αὐτοῦ (ἀστρικὴν Ὡρικὴν γωνίαν).

Ἐκ τοῦ τριγώνου θέσεως ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ὕψος τοῦ ἀστέρος, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ Ἀζιμούθ του. Γνωρίζομεν ὅμως καὶ τὸ φ. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ Ἀζιμοὺθ διὰ τῶν τεσσάρων συνεχῶν στοιχείων ἀντικαταστήσωμεν τὸ Ω διὰ τοῦ Ἀζιμοὺθ καὶ τὸ Ἀζιμοὺθ διὰ τοῦ Ω, τὸ δὲ δ διὰ τοῦ Ηλ, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

ΠΙΝΑΞ 15 A — Ὡριαία γωνία

Lat.	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	Lat.
°	315°	314°	313°	312°	311°	310°	309°	308°	307°	306°	305°	304°	303°	302°	301°	300°	°
0	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	0
1	·02	·02	·02	·02	·02	·01	·01	·01	·01	·01	·01	·01	·01	·01	·01	·01	1
2	·03	·03	·03	·03	·03	·03	·03	·03	·03	·03	·02	·02	·02	·02	·02	·02	2
3	·05	·05	·05	·05	·05	·04	·04	·04	·04	·04	·04	·04	·03	·03	·03	·03	3
4	·07	·07	·07	·06	·06	·06	·06	·05	·05	·05	·05	·05	·05	·04	·04	·04	4
5	·09	·08	·08	·08	·08	·07	·07	·07	·07	·06	·06	·06	·06	·05	·05	·05	5
6	·11	·10	·10	·09	·09	·09	·09	·08	·08	·08	·07	·07	·07	·07	·06	·06	6
7	·12	·12	·11	·11	·11	·10	·10	·10	·09	·09	·09	·08	·08	·08	·07	·07	7
8	·14	·14	·13	·13	·12	·12	·11	·11	·11	·10	·10	·09	·09	·09	·08	·08	8
9	·16	·15	·15	·14	·14	·13	·13	·12	·12	·12	·11	·11	·10	·10	·10	·09	9
10	·18	·17	·16	·16	·15	·15	·14	·14	·13	·13	·12	·12	·11	·11	·11	·10	10
11	·19	·19	·18	·18	·17	·16	·16	·15	·15	·14	·14	·13	·13	·12	·12	·11	11
12	·21	·21	·20	·19	·18	·18	·17	·17	·16	·15	·15	·14	·14	·13	·13	·12	12
13	·23	·22	·22	·21	·20	·19	·19	·18	·17	·17	·16	·16	·15	·14	·14	·13	13
14	·25	·24	·23	·22	·22	·21	·20	·19	·19	·18	·17	·17	·16	·16	·15	·14	14
15	·27	·26	·25	·24	·23	·22	·22	·21	·20	·19	·19	·18	·17	·17	·16	·15	15
16	·29	·28	·27	·26	·25	·24	·23	·22	·22	·21	·20	·19	·19	·18	·17	·17	16
17	·31	·30	·29	·28	·27	·26	·25	·24	·23	·22	·21	·21	·20	·19	·18	·18	17
18	·32	·31	·30	·29	·28	·27	·26	·25	·24	·24	·23	·22	·21	·20	·20	·19	18
19	·34	·33	·32	·31	·30	·29	·28	·27	·26	·25	·24	·23	·22	·22	·21	·20	19
20	·36	·35	·34	·33	·32	·31	·29	·28	·27	·26	·25	·25	·24	·23	·22	·21	20
21	·38	·37	·36	·35	·33	·32	·31	·30	·29	·28	·27	·26	·25	·24	·23	·22	21
22	·40	·39	·38	·36	·35	·34	·33	·32	·30	·29	·28	·27	·26	·25	·24	·23	22
23	·42	·41	·40	·38	·37	·36	·34	·33	·32	·31	·30	·29	·28	·27	·26	·25	23
24	·45	·43	·42	·40	·39	·37	·36	·35	·34	·32	·31	·30	·29	·28	·27	·26	24
25	·47	·45	·44	·42	·41	·39	·38	·36	·35	·34	·33	·31	·30	·29	·28	·27	25
26	·49	·47	·46	·44	·42	·41	·39	·38	·37	·35	·34	·33	·32	·30	·29	·28	26
27	·51	·49	·48	·46	·44	·43	·41	·40	·38	·37	·36	·34	·33	·32	·31	·29	27
28	·53	·51	·50	·48	·46	·45	·43	·42	·40	·39	·37	·36	·35	·33	·32	·31	28
29	·55	·54	·52	·50	·48	·47	·45	·43	·42	·40	·39	·37	·36	·35	·33	·32	29
30	·58	·56	·54	·52	·50	·48	·47	·45	·44	·42	·40	·39	·37	·36	·35	·33	30
31	·60	·58	·56	·54	·52	·50	·49	·47	·45	·44	·42	·40	·39	·38	·36	·35	31
32	·62	·60	·58	·56	·54	·52	·51	·49	·47	·45	·44	·42	·41	·39	·38	·36	32
33	·65	·63	·61	·58	·56	·55	·53	·51	·49	·47	·45	·44	·42	·41	·39	·37	33
34	·67	·65	·63	·61	·59	·57	·55	·53	·51	·49	·47	·46	·44	·42	·41	·39	34
35	·70	·68	·65	·63	·61	·59	·57	·55	·53	·51	·49	·47	·45	·44	·42	·40	35
36	·73	·70	·68	·65	·63	·61	·59	·57	·55	·53	·51	·49	·47	·45	·44	·42	36
37	·75	·73	·70	·68	·66	·63	·61	·59	·57	·55	·53	·51	·49	·47	·45	·44	37
38	·78	·75	·73	·70	·68	·66	·63	·61	·59	·57	·55	·53	·51	·49	·47	·45	38
39	·81	·78	·76	·73	·70	·68	·66	·63	·61	·59	·57	·55	·53	·51	·49	·47	39
40	·84	·81	·78	·76	·73	·70	·68	·66	·63	·61	·59	·57	·55	·52	·50	·48	40
41	·87	·84	·81	·78	·76	·73	·70	·68	·66	·63	·61	·59	·56	·54	·52	·50	41
42	·90	·87	·84	·81	·78	·76	·73	·70	·68	·65	·63	·61	·58	·56	·54	·52	42
43	·93	·90	·87	·84	·81	·78	·76	·73	·70	·68	·65	·63	·61	·58	·56	·54	43
44	·97	·93	·90	·87	·84	·81	·78	·75	·73	·70	·68	·65	·63	·60	·58	·56	44
45	1·00	·97	·93	·90	·87	·84	·81	·78	·75	·73	·70	·68	·65	·63	·60	·58	45
46	1·04	1·00	·97	·93	·90	·87	·84	·81	·78	·75	·73	·70	·67	·65	·62	·60	46
47	1·07	1·04	1·00	·97	·93	·90	·87	·84	·81	·78	·75	·72	·70	·67	·64	·62	47
48	1·11	1·07	1·04	1·00	·97	·93	·90	·87	·84	·81	·78	·75	·72	·69	·67	·64	48
49	1·15	1·11	1·07	1·04	1·00	·97	·93	·90	·87	·84	·81	·78	·75	·72	·69	·66	49
50	1·19	1 15	1·11	1·07	1·04	1·00	·97	·93	·90	·87	·83	·80	·77	·75	·72	·69	50
51	1·23	1·19	1·15	1·11	1·07	1·04	1·00	·97	·93	·90	·86	·83	·80	·77	·74	·71	51
52	1·28	1·24	1·19	1·15	1·11	1·07	1·04	1·00	·96	·93	·90	·86	·83	·80	·77	·74	52
53	1·33	1·28	1·24	1·19	1·15	1·11	1·07	1·04	1·00	·96	·93	·90	·86	·83	·80	·77	53
54	1·38	1·33	1·28	1·24	1·20	1·15	1·11	1·08	1·04	1·00	·96	·93	·89	·86	·83	·79	54
55	1·43	1·38	1·33	1·29	1·24	1·20	1·16	1·12	1·08	1·04	1·00	·96	·93	·89	·86	·82	55
56	1·48	1·43	1·38	1·34	1·29	1·24	1·20	1·16	1·12	1·08	1·04	1·00	·96	·93	·89	·86	56
57	1·54	1·49	1·44	1·39	1·34	1·29	1·25	1·20	1·16	1·12	1·08	1·04	1·00	·96	·93	·89	57
58	1·60	1·55	1·49	1·44	1·39	1·34	1·30	1·25	1·21	1·16	1·12	1·08	1·04	1·00	·96	·92	58
59	1·56	1·61	1·55	1·50	1·45	1·40	1·35	1·30	1·25	1·21	1·17	1·12	1·08	1·04	1·00	·96	59
60	1·73	1·67	1·62	1·56	1·51	1·45	1·40	1·35	1·31	1·26	1·21	1·17	1·12	1·08	1·04	1·00	60
Lat.	135°	134°	133°	132°	131°	130°	129°	128°	127°	126°	125°	124°	123°	122°	121°	120°	Lat.
	225°	226°	227°	228°	229°	230°	231°	232°	233°	234°	235°	236°	237°	238°	239°	240°	

Ὡριαία γωνία

ΠΙΝΑΞ 16 **B** — Ὡριαία γωνία

Dec.	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	Dec.
°	315°	314°	313°	312°	311°	310°	309°	308°	307°	306°	305°	304°	303°	302°	301°	300°	°
0	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	**0**
1	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	·02	**1**
2	·05	·05	·05	·05	·05	·05	·04	·04	·04	·04	·04	·04	·04	·04	·04	·04	**2**
3	·07	·07	·07	·07	·07	·07	·07	·07	·07	·06	·06	·06	·06	·06	·06	·06	**3**
4	·10	·10	·10	·09	·09	·09	·09	·09	·09	·09	·09	·08	·08	·08	·08	·08	**4**
5	·12	·12	·12	·12	·12	·11	·11	·11	·11	·11	·11	·11	·10	·10	·10	·10	**5**
6	·15	·15	·14	·14	·14	·14	·14	·13	·13	·13	·13	·13	·13	·12	·12	·12	**6**
7	·17	·17	·17	·17	·16	·16	·16	·16	·15	·15	·15	·15	·15	·14	·14	·14	**7**
8	·20	·20	·19	·19	·19	·18	·18	·18	·18	·17	·17	·17	·17	·17	·16	·16	**8**
9	·22	·22	·22	·21	·21	·21	·20	·20	·20	·20	·19	·19	·19	·19	·18	·18	**9**
10	·25	·25	·24	·24	·23	·23	·23	·22	·22	·22	·22	·21	·21	·21	·21	·20	**10**
11	·27	·27	·27	·26	·26	·25	·25	·25	·24	·24	·24	·23	·23	·23	·23	·22	**11**
12	·30	·30	·29	·29	·28	·28	·27	·27	·27	·26	·26	·26	·25	·25	·25	·25	**12**
13	·33	·32	·32	·31	·31	·30	·30	·29	·29	·29	·28	·28	·28	·27	·27	·27	**13**
14	·35	·35	·34	·34	·33	·33	·32	·32	·31	·31	·30	·30	·30	·29	·29	·29	**14**
15	·38	·37	·37	·36	·36	·35	·34	·34	·34	·33	·33	·32	·32	·32	·31	·31	**15**
16	·41	·40	·39	·39	·38	·37	·37	·36	·36	·35	·35	·35	·34	·34	·33	·33	**16**
17	·43	·43	·42	·41	·41	·40	·39	·39	·38	·38	·37	·37	·36	·36	·36	·35	**17**
18	·46	·45	·44	·44	·43	·42	·42	·41	·41	·40	·40	·39	·39	·38	·38	·38	**18**
19	·49	·48	·47	·46	·46	·45	·44	·44	·43	·43	·42	·42	·41	·41	·40	·40	**19**
20	·51	·51	·50	·49	·48	·48	·47	·46	·46	·45	·44	·44	·43	·43	·42	·42	**20**
21	·54	·53	·52	·52	·51	·50	·49	·49	·48	·47	·47	·46	·46	·45	·45	·44	**21**
22	·57	·56	·55	·54	·54	·53	·52	·51	·51	·50	·49	·49	·48	·48	·47	·47	**22**
23	·60	·59	·58	·57	·56	·55	·55	·54	·53	·52	·52	·51	·51	·50	·50	·49	**23**
24	·63	·62	·61	·60	·59	·58	·57	·57	·56	·55	·54	·54	·53	·53	·52	·51	**24**
25	·66	·65	·64	·63	·62	·61	·60	·59	·58	·58	·57	·56	·56	·55	·54	·54	**25**
26	·69	·68	·67	·66	·65	·64	·63	·62	·61	·60	·60	·59	·58	·58	·57	·56	**26**
27	·72	·71	·70	·69	·68	·67	·66	·65	·64	·63	·62	·61	·61	·60	·59	·59	**27**
28	·75	·74	·73	·72	·70	·69	·68	·67	·67	·66	·65	·64	·63	·63	·62	·61	**28**
29	·78	·77	·76	·75	·73	·72	·71	·70	·69	·69	·68	·67	·66	·65	·65	·64	**29**
30	·82	·80	·79	·78	·76	·75	·74	·73	·72	·71	·70	·70	·69	·68	·67	·67	**30**
31	·85	·84	·82	·81	·80	·78	·77	·76	·75	·74	·73	·72	·72	·71	·70	·69	**31**
32	·88	·87	·85	·84	·83	·82	·80	·79	·78	·77	·76	·75	·75	·74	·73	·72	**32**
33	·92	·90	·89	·87	·86	·85	·84	·82	·81	·80	·79	·78	·77	·77	·76	·75	**33**
34	·96	·94	·92	·91	·89	·88	·87	·86	·84	·83	·82	·81	·80	·80	·79	·78	**34**
35	·99	·97	·96	·94	·93	·91	·90	·89	·88	·87	·85	·84	·83	·83	·82	·81	**35**
36	1·03	1·01	·99	·98	·96	·95	·93	·92	·91	·90	·89	·88	·87	·86	·85	·84	**36**
37	1·07	1·05	1·03	1·01	1·00	·98	·97	·96	·94	·93	·92	·91	·90	·89	·88	·87	**37**
38	1·11	1·09	1·07	1·05	1·04	1·02	1·00	·99	·98	·97	·95	·94	·93	·92	·91	·90	**38**
39	1·15	1·13	1·11	1·09	1·07	1·06	1·04	1·03	1·01	1·00	·99	·98	·97	·95	·94	·94	**39**
40	1·19	1·17	1·15	1·13	1·11	1·10	1·08	1·06	1·05	1·04	1·02	1·01	1·00	·99	·98	·97	**40**
41	1·23	1·21	1·19	1·17	1·15	1·13	1·12	1·10	1·09	1·07	1·06	1·05	1·04	1·03	1·01	1·00	**41**
42	1·28	1·25	1·23	1·21	1·19	1·18	1·16	1·14	1·13	1·11	1·10	1·09	1·07	1·06	1·05	1·04	**42**
43	1·32	1·30	1·28	1·25	1·24	1·22	1·20	1·18	1·17	1·15	1·14	1·12	1·11	1·10	1·09	1·08	**43**
44	1·37	1·34	1·32	1·30	1·28	1·26	1·24	1·23	1·21	1·19	1·18	1·16	1·15	1·14	1·13	1·12	**44**
45	1·41	1·39	1·37	1·35	1·33	1·31	1·29	1·27	1·25	1·24	1·22	1·21	1·19	1·18	1·17	1·15	**45**
46	1·47	1·44	1·42	1·39	1·37	1·35	1·33	1·31	1·30	1·28	1·26	1·25	1·23	1·22	1·21	1·20	**46**
47	1·52	1·49	1·47	1·44	1·42	1·40	1·38	1·36	1·34	1·33	1·31	1·29	1·28	1·26	1·25	1·24	**47**
48	1·57	1·54	1·52	1·49	1·47	1·45	1·43	1·41	1·39	1·37	1·36	1·34	1·32	1·31	1·30	1·28	**48**
49	1·63	1·60	1·57	1·55	1·52	1·50	1·48	1·46	1·44	1·42	1·40	1·39	1·37	1·36	1·34	1·33	**49**
50	1·69	1·66	1·63	1·60	1·58	1·56	1·53	1·51	1·49	1·47	1·45	1·44	1·42	1·41	1·39	1·38	**50**
51	1·75	1·72	1·69	1·66	1·64	1·61	1·59	1·57	1·55	1·53	1·51	1·49	1·47	1·46	1·44	1·43	**51**
52	1·81	1·78	1·75	1·72	1·70	1·67	1·65	1·62	1·60	1·58	1·56	1·54	1·53	1·51	1·49	1·48	**52**
53	1·88	1·84	1·81	1·79	1·76	1·73	1·71	1·68	1·66	1·64	1·62	1·60	1·58	1·56	1·55	1·53	**53**
54	1·95	1·91	1·88	1·85	1·82	1·80	1·77	1·75	1·72	1·70	1·68	1·66	1·64	1·62	1·61	1·59	**54**
55	2·02	1·99	1·95	1·92	1·89	1·86	1·84	1·81	1·79	1·77	1·74	1·72	1·70	1·68	1·67	1·65	**55**
56	2·10	2·06	2·03	2·00	1·96	1·94	1·91	1·88	1·86	1·83	1·81	1·79	1·77	1·75	1·73	1·71	**56**
57	2·18	2·14	2·11	2·07	2·04	2·01	1·98	1·95	1·93	1·90	1·88	1·86	1·84	1·82	1·80	1·78	**57**
58	2·27	2·22	2·19	2·15	2·12	2·09	2·06	2·03	2·00	1·98	1·95	1·93	1·91	1·89	1·87	1·85	**58**
59	2·36	2·31	2·28	2·24	2·21	2·17	2·14	2·11	2·08	2·06	2·03	2·01	1·98	1·96	1·94	1·92	**59**
60	2·45	2·41	2·37	2·33	2·29	2·26	2·23	2·20	2·17	2·14	2·11	2·09	2·07	2·04	2·02	2·00	**60**
Dec.	135°	134°	133°	132°	131°	130°	129°	128°	127°	126°	125°	124°	123°	122°	121°	120°	Dec.
	225°	226°	227°	228°	229°	230°	231°	232°	233°	234°	235°	236°	237°	238°	239°	240°	

Ὡριαία γωνία

ΠΙΝΑΞ 17 C

Lat.	A ± B = ·60'	·62'	·64'	·66'	·68'	·70'	·72' (A & B CORRECTION)	·74'	·76'	·78'	·80'	·82'	·84'	·86'	·88'	·90' = A ± B	Lat.
°	°	°	°	°	°	°	° AZIMUTHS.	°	°	°	°	°	°	°	°	°	°
0	59·0	58·2	57·4	56·6	55·8	55·0	54·2	53·5	52·8	52·0	51·3	50·6	50·0	49·3	48·7	48·0	0
5	59·1	58·3	57·5	56·7	55·9	55·1	54·3	53·6	52·9	52·2	51·5	50·8	50·1	49·4	48·8	48·1	5
10	59·4	58·6	57·8	57·0	56·2	55·4	54·7	53·9	53·2	52·5	51·8	51·1	50·4	49·7	49·1	48·4	10
14	59·8	59·0	58·2	57·4	56·6	55·8	55·1	54·3	53·6	52·9	52·2	51·5	50·8	50·2	49·5	48·9	14
18	60·3	59·5	58·7	57·9	57·1	56·3	55·6	54·9	54·1	53·4	52·7	52·1	51·4	50·7	50·1	49·4	18
20	60·6	59·8	59·0	58·2	57·4	56·7	55·9	55·2	54·5	53·8	53·1	52·4	51·7	51·1	50·4	49·8	20
22	60·9	60·1	59·3	58·5	57·8	57·0	56·3	55·5	54·8	54·1	53·4	52·8	52·1	51·4	50·8	50·2	22
24	61·3	60·5	59·7	58·9	58·2	57·4	56·7	55·9	55·2	54·5	53·8	53·2	52·5	51·8	51·2	50·6	24
26	61·7	60·9	60·1	59·3	58·6	57·8	57·1	56·4	55·7	55·0	54·3	53·6	52·9	52·3	51·7	51·0	26
28	62·1	61·3	60·5	59·8	59·0	58·3	57·6	56·8	56·1	55·4	54·8	54·1	53·4	52·8	52·2	51·5	28
30	62·5	61·8	61·0	60·2	59·5	58·8	58·1	57·3	56·6	56·0	55·3	54·6	54·0	53·3	52·7	52·1	30
31	62·8	62·0	61·3	60·5	59·8	59·0	58·3	57·6	56·9	56·2	55·6	54·9	54·2	53·6	53·0	52·4	31
32	63·0	62·3	61·5	60·8	60·0	59·3	58·6	57·9	57·2	56·5	55·8	55·2	54·5	53·9	53·3	52·7	32
33	63·3	62·5	61·8	61·0	60·3	59·6	58·9	58·2	57·5	56·8	56·1	55·5	54·8	54·2	53·6	53·0	33
34	63·6	62·8	62·1	61·3	60·6	59·9	59·2	58·5	57·8	57·1	56·4	55·8	55·1	54·5	53·9	53·3	34
35	63·8	63·1	62·3	61·6	60·9	60·2	59·5	58·8	58·1	57·4	56·8	56·1	55·5	54·8	54·2	53·6	35
36	64·1	63·4	62·6	61·9	61·2	60·5	59·8	59·1	58·4	57·7	57·1	56·4	55·8	55·2	54·6	53·9	36
37	64·4	63·7	62·9	62·2	61·5	60·8	60·1	59·4	58·7	58·1	57·4	56·8	56·1	55·5	54·9	54·3	37
38	64·7	64·0	63·2	62·5	61·8	61·1	60·4	59·8	59·1	58·4	57·8	57·1	56·5	55·9	55·3	54·7	38
39	65·0	64·3	63·6	62·8	62·1	61·5	60·8	60·1	59·4	58·8	58·1	57·5	56·9	56·2	55·6	55·0	39
40	65·3	64·6	63·9	63·2	62·5	61·8	61·1	60·5	59·8	59·1	58·5	57·9	57·2	56·6	56·0	55·4	40
41	65·6	64·9	64·2	63·5	62·8	62·2	61·5	60·8	60·2	59·5	58·9	58·2	57·6	57·0	56·4	55·8	41
42	66·0	65·3	64·6	63·9	63·2	62·5	61·9	61·2	60·5	59·9	59·3	58·6	58·0	57·4	56·8	56·2	42
43	66·3	65·6	64·9	64·2	63·6	62·9	62·2	61·6	60·9	60·3	59·7	59·0	58·4	57·8	57·2	56·6	43
44	66·7	66·0	65·3	64·6	63·9	63·3	62·6	62·0	61·3	60·7	60·1	59·5	58·9	58·3	57·7	57·1	44
45	67·0	66·3	65·7	65·0	64·3	63·7	63·0	62·4	61·7	61·1	60·5	59·9	59·3	58·7	58·1	57·6	45
46	67·4	66·7	66·0	65·4	64·7	64·1	63·4	62·8	62·2	61·5	60·9	60·3	59·7	59·1	58·6	58·0	46
47	67·7	67·1	66·4	65·8	65·1	64·5	63·8	63·2	62·6	62·0	61·4	60·8	60·2	59·6	59·0	58·5	47
48	68·1	67·5	66·8	66·2	65·5	64·9	64·3	63·7	63·0	62·4	61·8	61·2	60·7	60·1	59·5	58·9	48
49	68·5	67·9	67·2	66·6	66·0	65·3	64·7	64·1	63·5	62·9	62·3	61·7	61·1	60·6	60·0	59·4	49
50	68·9	68·3	67·6	67·0	66·4	65·8	65·2	64·6	64·0	63·4	62·8	62·2	61·6	61·1	60·5	60·0	50
51	69·3	68·7	68·1	67·4	66·8	66·2	65·6	65·0	64·4	63·9	63·3	62·7	62·1	61·6	61·0	60·5	51
52	69·7	69·1	68·5	67·9	67·3	66·7	66·1	65·5	64·9	64·4	63·8	63·2	62·7	62·1	61·6	61·0	52
53	70·1	69·5	68·9	68·3	67·7	67·2	66·6	66·0	65·4	64·9	64·3	63·7	63·2	62·6	62·1	61·6	53
54	70·6	70·0	69·4	68·8	68·2	67·6	67·1	66·5	65·9	65·4	64·8	64·3	63·7	63·2	62·6	62·1	54
55	71·0	70·4	69·8	69·3	68·7	68·1	67·6	67·0	66·4	65·9	65·4	64·8	64·3	63·7	63·2	62·7	55
56	71·5	70·9	70·3	69·7	69·2	68·6	68·1	67·5	67·0	66·4	65·9	65·4	64·9	64·3	63·8	63·3	56
57	71·9	71·3	70·8	70·2	69·7	69·1	68·6	68·0	67·5	67·0	66·5	65·9	65·4	64·9	64·4	63·9	57
58	72·4	71·8	71·3	70·7	70·2	69·6	69·1	68·6	68·1	67·5	67·0	66·5	66·0	65·5	65·0	64·5	58
59	72·8	72·3	71·8	71·2	70·7	70·2	69·7	69·1	68·6	68·1	67·6	67·1	66·6	66·1	65·6	65·1	59
60	73·3	72·8	72·3	71·7	71·2	70·7	70·2	69·7	69·2	68·7	68·2	67·7	67·2	66·7	66·3	65·8	60
61	73·8	73·3	72·8	72·3	71·8	71·3	70·8	70·3	69·8	69·3	68·8	68·3	67·8	67·4	66·9	66·4	61
62	74·3	73·8	73·3	72·8	72·3	71·8	71·3	70·8	70·4	69·9	69·4	68·9	68·5	68·0	67·6	67·1	62
63	74·8	74·3	73·8	73·3	72·8	72·4	71·9	71·4	71·0	70·5	70·0	69·6	69·1	68·7	68·2	67·8	63
64	75·3	74·8	74·3	73·9	73·4	72·9	72·5	72·0	71·6	71·1	70·7	70·2	69·8	69·3	68·9	68·5	64
65	75·8	75·3	74·9	74·4	74·0	73·5	73·1	72·6	72·2	71·8	71·3	70·9	70·5	70·0	69·6	69·2	65
66	76·3	75·8	75·4	75·0	74·5	74·1	73·7	73·2	72·8	72·4	72·0	71·6	71·1	70·7	70·3	69·9	66
67	76·8	76·4	76·0	75·5	75·1	74·7	74·3	73·9	73·5	73·1	72·6	72·2	71·8	71·4	71·0	70·6	67
68	77·3	76·9	76·5	76·1	75·7	75·3	74·9	74·5	74·1	73·7	73·3	72·9	72·5	72·1	71·8	71·4	68
Lat.							AZIMUTHS.										Lat.
	A ± B = ·60'	·62'	·64'	·66'	·68'	·70'	·72'	·74'	·76'	·78'	·80'	·82'	·84'	·86'	·88'	·90' = A ± B	

$$σφΩ = \left[- \frac{εφφ}{εφAZ} + \frac{εφHλ}{ημAZ} \right] συνφ,$$

διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν L.H.A. τοῦ ἀστέρος. Ἐν συνεχείᾳ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τὴν κλίσιν δ τοῦ ἀστέρος. Ἄρα δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν εἰς τὸ Ἀλμανάκ, ἀφοῦ προηγουμένως μετατρέψωμεν τὴν L.H.A. εἰς S.H.A. καὶ ἀναγνωρίσωμεν τὸν ἀστέρα.

7·17 Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ 7ου κεφαλαίου.

1. Δύο ραδιοφάροι Α καὶ Β εὑρίσκονται εἰς πλάτος 31° 18′ Β καὶ 47° 14′ Β ἀντιστοίχως. Ὁ Β εὑρίσκεται 110° 30′ πρὸς Ἀνατολὰς τοῦ Α. Ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν σταθμῶν καὶ ἐπίσης μὲ προσέγγισιν μοίρας τὰς κατευθύνσεις, πρὸς τὰς ὁποίας ἡ ἐκπομπὴ θὰ πρέπει νὰ σταλῇ ἀπὸ τὸν Α, ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς τὸν Β καὶ ἀπὸ τὸν Β εἰς τὸν Α.

2. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο πλοίων, τῶν ὁποίων αἱ θέσεις εἶναι 12° 20′ Ν, 150° 10′ Δ καὶ 16° 05′ Β, 112° 08′ Δ;

3. Ἕνας παρατηρητὴς ὑποθέτει ὅτι εὑρίσκεται εἰς πλάτος 15° Β καὶ εἰς ἀνάλογον μῆκος, ὥστε ἡ ἀνατολικὴ Ὡρικὴ γωνία τοῦ Spica (α τῆς Παρθένου) νὰ εἶναι Ωα θ = 58°. Ἐὰν ἡ κλίσις τοῦ Spica εἶναι 10° 58′ Ν, ὑπολογίσατε τὸ ὕψος καὶ τὸ Ἀζιμοὺθ τοῦ Spica.

4. Τὸ ὕψος τοῦ Σειρίου (α μεγ. κυνὸς) εἶναι εἰς μίαν παρατήρησιν 19° 33′. Τὸ ἐξ ἀναμετρήσεως πλάτος τοῦ παρατηρητοῦ εἶναι 48° Β. Ἡ κλίσις τοῦ Σειρίου εἶναι 16° 38′ Ν. Ἐὰν ἡ τοπικὴ Ὡρικὴ γωνία τοῦ Σειρίου (ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἀναμετρήσεως) εἶναι 31° 30′, συγκρίνατε τὸ ὑπολογισθὲν ὕψος πρὸς τὸ ὕψος τῆς παρατηρήσεως.

5. Ἡ θέσις τῆς Zanzibar εἶναι 6° 09′ Ν καὶ 39° 18 Α. Ἡ θέσις τοῦ Kolombo εἶναι 7° 01 Β καὶ 79° 58′ Α. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ πλεῦσις τοῦ Kolombo ἀπὸ τὴν Zanzibar εἶναι 72° 47′, ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν δύο τόπων.

6. Αἱ πλευραὶ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι 34° 1′, 47° 11′ καὶ 28° 19′. Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν τὴν ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

7. Ναυτιλλόμενος εἰς πλάτος 18° 14′Ν παρατηρεῖ τὸν Regulus

(α Λέοντος). Ἡ κλίσις τοῦ Regulus εἶναι 12° 15'Β. Ἡ τοπικὴ Ὡρικὴ γωνία κατὰ τὸν χρόνον τῆς παρατηρήσεως εἶναι 25° 30'. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος καὶ τὸ Ἀζιμοὺθ τοῦ Regulus.

8. Ἀπὸ θέσιν πλάτους 5° 31'Ν τὸ ὕψος τοῦ Altair (α Ἀετοῦ) ἦτο 21° 15' (κλίσις 8° 43'Β). Ἡ δυτικὴ Ὡρικὴ γωνία τοῦ Altair ἀπὸ τὸ Γκρήνουϊτς (C.H.A.) κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως ἦτο 42° 15'. Ἐὰν τὸ κατὰ προσέγγισιν μῆκος ἦτο 110° Δ', ποῖον τὸ ἀληθὲς μῆκος;

9. Μὲ τὸν τύπον τῶν ἡμιπαρημιτόνων ὑπολογίσατε τὸ μῆκος τόξου μεγίστου κύκλου ἀπὸ τὸ Γιβραλτὰρ (36° 10'Β, 5° 20'Δ) μέχρι τῶν Βερμούδων (32° 20'Β καὶ 65° 00Δ).

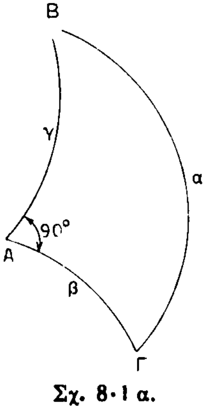
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

8·1 Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ἕνα ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ἕνα κοινὸν τρίγωνον καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἀναλόγως τῶν δεδομένων ἕνα ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν τύπων, π.χ. ἡμιτόνων, συνημιτόνων ἢ τὸν τύπον τῶν τεσσάρων συνεχῶν στοιχείων, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ημ$90°=1$, συν$90°=0$.

Π.χ. ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, $\widehat{A}=90°$, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ κάθετοι πλευραὶ β καὶ γ (σχ. 8·1α). Ζητεῖται ἡ ἐπίλυσίς του.



Σχ. 8·1 α.

α) Ὑπολογισμὸς α.

Ἐκ τοῦ τύπου τῶν συνημιτόνων ἔχομεν:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}A\,\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma + \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma.$$

Ἐπειδὴ $\widehat{A}=90°$ καὶ συν$A=$ συν$90°=0$, λαμβάνομεν:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma.$$

β) Ὑπολογισμὸς $\widehat{B}$.

Ἐκ τοῦ τύπου τῶν τεσσάρων συνεχῶν στοιχείων ἔχομεν:

$$\sigma\varphi B \sigma\tau\epsilon\mu\gamma = \sigma\varphi\beta\sigma\tau\epsilon\mu A - \sigma\varphi\gamma\sigma\varphi A.$$

Ἐπειδὴ $\widehat{A} = 90^\circ$, $\sigma\varphi 90^\circ = 0$ καὶ $\sigma\tau\epsilon\mu A = 1$, λαμβάνομεν:

$$\sigma\varphi B \sigma\tau\epsilon\mu\gamma = \sigma\varphi\beta$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\sigma\varphi\beta}{\sigma\tau\epsilon\mu\gamma} = \sigma\varphi\beta\eta\mu\gamma.$$

Ὁμοίως ὑπολογίζομεν καὶ τὴν γωνίαν Γ.

Εἶναι ὅμως προφανὲς ὅτι ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἑκάστοτε καταλλήλου τύπου τῶν πλαγιογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι ἔργον ἐπίπονον. Ἀντ' αὐτοῦ ἐφαρμόζομεν τοὺς μνημονικοὺς κανόνες τοῦ Napier (Νέπερ).

Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἕνα κύκλον εἰς πέντε τομεῖς καὶ ἐντὸς αὐτῶν γράφομεν κατὰ μίαν φοράν, π.χ. τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ἢ τὴν ἀντίστροφον, διαδοχικῶς τὰ στοιχεῖα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου *παραλείποντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν*.

Ἀντὶ ὅμως τῶν καθέτων πλευρῶν γράφομεν τὰ συμπληρώματά των, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐφαρμόζομεν τοὺς κάτωθι κανόνας:

1) *Τὸ συνημίτονον ἑνὸς στοιχείου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν συνεφαπτομένων τῶν προσκειμένων (γειτονικῶν) στοιχείων.*

2) *Τὸ συνημίτονον ἑνὸς στοιχείου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀντικειμένων στοιχείων.*

Παράδειγμα 1.

Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 8·1 β), ὅταν δίδωνται: $\widehat{A} = 90^\circ$, $\alpha = 74^\circ\ 16'$ καὶ $\gamma = 119^\circ\ 55'$.

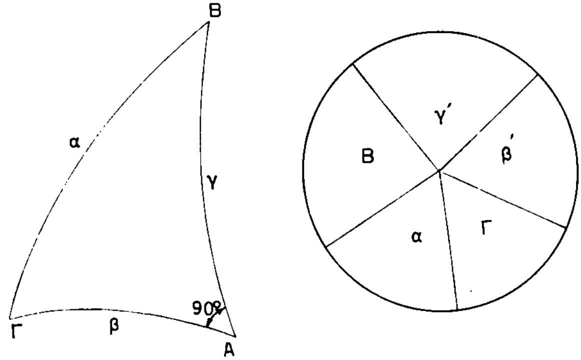
Λύσις.

$\sigma\upsilon\nu B = \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\gamma'$ ἢ $\quad$ διότι γ καὶ γ′ θεωροῦνται ὡς τόξα συμπληρωματικὰ

$\sigma\upsilon\nu B = \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\gamma$,

$$
\begin{array}{llll}
\alpha = \ \ 74^\circ\ 16' & \text{λογσφ}\alpha = & 9{,}44981 & (+) \\
\gamma = 119^\circ\ 55' & \text{λογεφ}\gamma = & \underline{10{,}24002} & (-) \\
 & \text{λογσυν}B = & 9{,}68983 & (-)
\end{array}
$$

$$\widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ\ 41',3 = 119^\circ\ 28',7.$$



Σχ. 8·1 β.
Τὰ β′, γ′ παριστοῦν τὰ συμπληρώματα τῶν καθέτων πλευρῶν.

Πρὸς καθορισμὸν τῆς πραγματικῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου στοιχείου θὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ σημεῖα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν καί, ἐὰν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι (—), τότε θὰ λαμβάνωμεν τὸ παραπληρωματικὸν τόξον, ἐὰν δὲ (+), θὰ λαμβάνωμεν αὐτὸ τοῦτο τὸ τόξον.

α) Ὑπολογισμὸς πλευρᾶς β.

$\text{συν}\alpha = \text{ημ}\gamma'\text{ημ}\beta'$

$\text{συν}\alpha = \text{συν}\gamma\text{συν}\beta$

$\text{συν}\beta = \text{συν}\alpha\text{τεμ}\gamma$

$$
\begin{array}{llll}
\alpha = \ \ 74^\circ\ 16' & \text{λογσυν}\alpha = & 9{,}43323 & (+) \\
\gamma = 119^\circ\ 55' & \text{λογτεμ}\gamma = & \underline{10{,}30213} & (-) \\
 & \text{λογσυν}\beta = & 9{,}73536 & (-)
\end{array}
$$

$$\beta = 180^\circ - 57^\circ\ 04'$$

$$\beta = 122^\circ\ 56'.$$

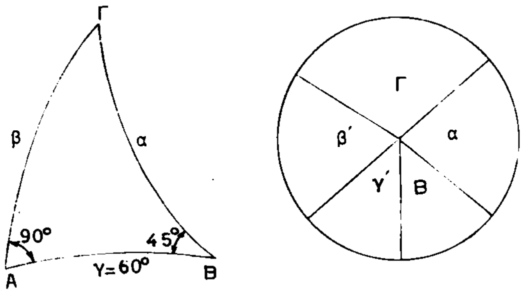
β) Ὑπολογισμὸς γωνίας Γ.

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\gamma' &= \eta\mu\alpha\eta\mu\Gamma \\ \eta\mu\gamma &= \eta\mu\alpha\eta\mu\Gamma \\ \eta\mu\Gamma &= \eta\mu\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlrll} \alpha = & 74^\circ\ 16' & \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\alpha = & 10{,}01658 & (+) \\ \gamma = & 119^\circ\ 55' & \lambda o\gamma\eta\mu\gamma = & \underline{9{,}93790} & (+) \\ & & \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = & 9{,}93448 & (+) \\ & & \widehat{\Gamma} = & 64^\circ\ 13{,}5'. & \end{array}$$

Παράδειγμα 2.

Σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$ καὶ $\gamma = 60^\circ$ (σχ. 8·1 γ). Ὑπολογίσατε τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.



Σχ. 8·1 γ.

Λύσις.

α) Ὑπολογισμὸς τῆς β.

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\gamma' &= \sigma\varphi\beta'\sigma\varphi B \\ \eta\mu\gamma &= \epsilon\varphi\beta\sigma\varphi B \\ \epsilon\varphi\beta &= \eta\mu\gamma\epsilon\varphi B \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlrll} \gamma = & 60^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu\gamma = & 9{,}93753 & (+) \\ \widehat{B} = & 45^\circ & \lambda o\gamma\epsilon\varphi B = & \underline{10{,}00000} & (+) \\ & & \lambda o\gamma\epsilon\varphi\beta = & 9{,}93753 & (+) \\ & & \beta = & 40^\circ\ 53',6. & \end{array}$$

β) Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\text{συν}\Gamma = \text{ημ}\gamma'\text{ημ}B$$
$$\text{συν}\Gamma = \text{συν}\gamma\,\text{ημ}B \qquad \gamma = 60^\circ \qquad \text{λογσυν}\gamma = 9{,}69897 \quad (+)$$
$$\widehat{B} = 45^\circ \qquad \text{λογημ}B = 9{,}84949 \quad (+)$$
$$\text{λογσυν}\Gamma = 9{,}54846 \quad (+)$$
$$\widehat{\Gamma} = 69^\circ\, 17',6.$$

γ) Ὑπολογισμὸς τῆς α.

$$\text{συν}B = \text{σφ}\gamma'\text{σφ}\alpha$$
$$\text{συν}B = \text{εφ}\gamma\,\text{σφ}\alpha$$
$$\text{σφ}\alpha = \text{συν}B\,\text{σφ}\gamma \qquad B = 45^\circ \qquad \text{λογσυν}B = 9{,}84949 \quad (+)$$
$$\gamma = 60^\circ \qquad \text{λογσφ}\gamma = 9{,}76144 \quad (+)$$
$$\text{λογσφ}\alpha = 9{,}61093 \quad (+)$$
$$\alpha = 67^\circ\, 47',5.$$

Ἀκολούθως δίδονται οἱ τύποι ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων ἀναλόγως τῶν περιπτώσεων.

Ἐὰν εἰς ἕνα ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τὸ Α, ἐφαρμόσωμεν τοὺς κανόνας τοῦ Νέπερ, θὰ ἔχωμεν τοὺς κάτωθι τύπους:

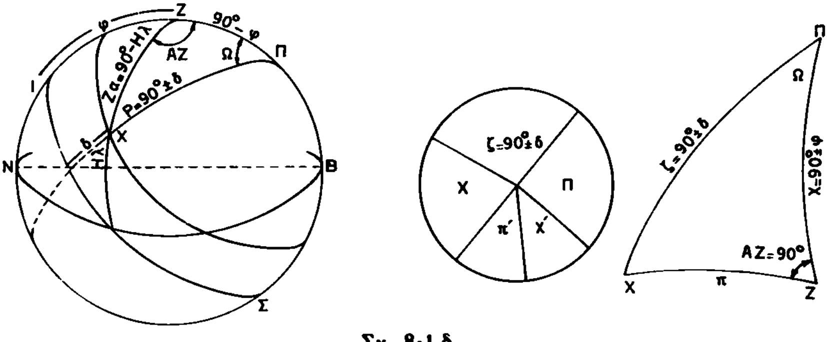
Δίδονται: α, β	ημΒ = ημβστεμα συνΓ = σφαεφβ συνγ = συνατεμβ
α, Β	ημβ = ημαημΒ εφγ = εφασυνΒ σφΓ = συναεφΒ
β, γ	εφΒ = εφβστεμΓ εφΓ = εφγστεμβ συνα = συνβσυνγ

Β, Γ	συνα = σφΒσφΓ συνβ = συνΒστεμΓ συνΓ = συνΓστεμΒ
β, Γ	συνΒ = συνβημΓ εφγ = ημβεφΓ εφα = εφβτεμΓ
β, Β	ημΓ = συνΒτεμβ ημα = ημβστεμΒ ημγ = εφβσφΒ

Ἐφαρμογαί.

Α. ***Εὕρεσις ὥρας καὶ ὕψους κατὰ τὴν διάβασιν ἐκ τοῦ Πρώτου Καθέτου.***

1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὥρα καὶ τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου κατὰ τὴν διάβασίν του ἐκ τοῦ πρώτου καθέτου, ἐὰν τὸ πλάτος τοῦ τόπου εἶναι φ = 40° 12′ Β καὶ ἡ κλίσις τοῦ Ἡλίου δ = 22° 10′ Β (σχ. 8·1δ).



Σχ. 8·1 δ.

Λύσις.

α) Ὑπολογισμὸς ὥρας διαβάσεως.

Ἐπειδὴ ὁ Ἥλιος διέρχεται διὰ τοῦ πρώτου καθέτου, τὸ Ἀζιμοὺθ αὐτοῦ θὰ εἶναι 90°· συνεπῶς τὸ τρίγωνον θέσεως ΖΧΠ θὰ εἶναι μονορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον μὲ τὴν ὀρθὴν σφαιρικὴν γωνίαν εἰς τὸ Ζ. Ἐὰν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Νέπερ τοποθετήσωμεν τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν:

$\text{συν}\Pi = \text{σφ}X'\text{σφ}\zeta$ ἢ $\text{συν}\Pi = \text{εφ}X\text{σφ}\zeta$

ἢ $\text{συν}\Omega = \text{εφ}(90^\circ - \varphi)\text{σφ}(90^\circ - \delta) = \text{σφ}\varphi\text{εφ}\delta$, ἐπειδὴ φ, δ ὁμώνυμα,

$$\text{συν}\Omega = \text{σφ}\varphi\text{εφ}\delta.$$

$$\begin{array}{lrl} \varphi = 40^\circ\ 12' & \text{λογσφ}\varphi = 10{,}07311 & (+) \\ \delta = 22^\circ\ 10' & \text{λογεφ}\delta = \underline{\ \ 9{,}61004} & (+) \\ & \text{λογσυν}\Omega = \ \ 9{,}68315 & (+) \\ & \Omega = 4^\omega\, 4^\lambda\, 42^\delta. & \end{array}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ὥρας εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἀφαιροῦμεν ἐκ τῶν 12^ω:

$$12^\omega - 4^\omega\ 4^\lambda\ 42^\delta = 7^\omega\ 55^\lambda\ 18^\delta \ \text{π.μ.}$$

β) Ὑπολογισμὸς ὕψους.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὕψους λαμβάνομεν:

$\text{συν}\zeta = \text{ημ}\Pi'\text{ημ}X'$ ἢ $\text{συν}\zeta = \text{συν}\Pi\text{συν}X$

ἢ $\text{συν}\Pi = \text{συν}(90^\circ - \delta)\text{τεμ}(90^\circ - \varphi)$ ἢ

$$\text{συν}Z_A = \text{ημ}\delta\text{τεμ}\varphi.$$

$$\begin{array}{lrl} \delta = 22^\circ\ 10' & \text{λογημ}\delta = \ \ 9{,}57669 & (+) \\ \varphi = 40^\circ\ 12' & \text{λογτεμ}\varphi = \underline{10{,}19013} & (+) \\ & \text{λογσυν}Z_A = \ \ 9{,}76682 & (+) \\ & Z_A = 54^\circ\ 13{,}7' & \\ & \text{Ὕψος } H\lambda = 35^\circ\ 46{,}3'. & \end{array}$$

2. Εἰς $\varphi = 40^\circ\ 30'$ Ν ἡ κλίσις τοῦ ἡλίου εἶναι $\delta = 15^\circ\ 27'$ Ν. Ὑπολογίσατε τὴν Ω τοῦ ἡλίου, ὅταν διέρχεται ἐκ τοῦ πρώτου καθέτου.

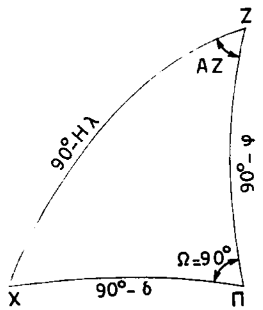
Λύσις.

Ἐκ τοῦ τύπου $\text{συν}\Omega = \text{σφφεφδ}$

$\varphi = 40^\circ\ 30'$ N	$\text{λογσφφ} = 10{,}06850\ (+)$
$\delta = 15^\circ\ 27'$	$\text{λογεφδ} = 9{,}44151\ (+)$
	$\text{λογσυν}\Omega = 9{,}51001$
	$\Omega\alpha = 71^\circ\ 7{,}2'$.

Παρατήρησις. Ἡ τιμὴ τῆς Ὡρικῆς γωνίας ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου παρατηρήσεως.

3. Εἰς τὰς $06^\omega\ 00^\lambda\ 00^\delta$ μ.μ. τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου ἦτο $18^\circ 45'$, ἡ δὲ κλίσις αὐτοῦ $20^\circ\ 4'$Β (σχ. 8·1 ε). Ὑπολογίσατε τὸ πλάτος τοῦ παρατηρητοῦ.



Σχ. 8·1 ε.

Λύσις.

Ἐκ τῶν δεδομένων προκύπτει ὅτι $\Omega = 90^\circ$, διότι ὁ χρόνος παρατηρήσεως εἶναι 06^ω.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον ΠΖΧ ἐκ τοῦ κανόνος τοῦ Νέπερ ἔχομεν:

$$\text{συν}ZX = \text{ημ}(X\Pi')\text{ημ}(Z\Pi')$$

$$\text{συν}ZX = \text{συν}(\Pi X)\text{συν}(Z\Pi)$$

$$\text{συν}(90^\circ - H\lambda) = \text{συν}(90^\circ - \delta)\text{συν}(90^\circ - \varphi).$$

Ἀντὶ τῶν καθέτων πλευρῶν λαμβάνομεν κατὰ κανόνα τὰ συμπληρώματα αὐτῶν ΖΠ′ καὶ ΧΠ′.

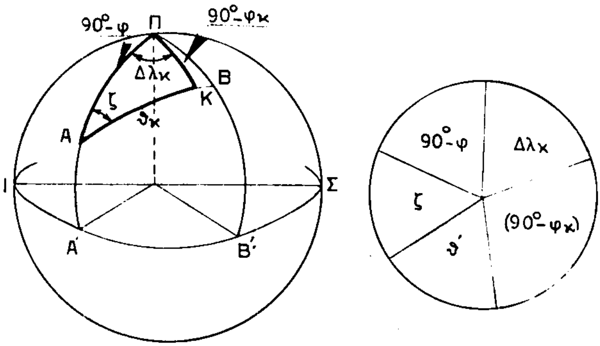
$$\eta\mu H\lambda = \eta\mu\delta\eta\mu\varphi$$

$$\eta\mu\varphi = \eta\mu H\lambda\sigma\tau\epsilon\mu\delta$$

$H\lambda = 18^\circ\,45'$		$\lambda o\gamma\eta\mu H\lambda =$	9,50710
$\delta = 20^\circ\,4'$		$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\delta =$	10,46456
		$\lambda o\gamma\eta\mu\varphi =$	9,97166
	Παρατηρητὴς εἰς πλάτος	$\varphi =$	$69^\circ\,31{,}5$ Β.

Β. *Κορυφαῖον ὀρθοδρομίας.*

Τὸ σημεῖον Κ τοῦ ὀρθοδρομικοῦ τόξου ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τὴν μεγίστην ἀπόστασιν ἐκ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ συνεπῶς τὴν ἐλαχίστην ἐκ τοῦ πόλου Π (σχ. 8·1ζ), ὀνομάζομεν *κορυφαῖον* τῆς ὀρθοδρομίας. Ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν τὰ Π καὶ Κ διὰ μεγίστου κύκλου, ὁ κύκλος αὐτὸς θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ σημεῖον Κ καὶ ἐπὶ τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΒ. Αὐτοῦ τοῦ σημείου Κ θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς συντεταγμένας φ καὶ λ.



Σχ. 8·1 ζ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΠΚ ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \varphi_\kappa) = \eta\mu\zeta\eta\mu(90^\circ - \varphi)$$

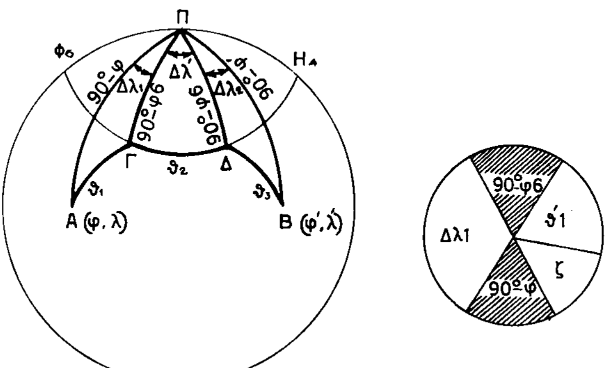
$$\eta\mu(90^\circ - \varphi_\kappa) = \eta\mu\zeta\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_\kappa = \eta\mu\zeta\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

$$\text{συν}(90^\circ - \varphi) = \text{σφ}\Delta\lambda_\kappa \text{σφ}\zeta$$
$$\eta\mu\varphi = \text{σφ}\Delta\lambda_\kappa \text{σφ}\zeta$$
$$\text{σφ}\Delta\lambda_\kappa = \frac{\eta\mu\varphi}{\text{σφ}\zeta}$$
$$\text{σφ}\Delta\lambda_\kappa = \eta\mu\varphi\varepsilon\varphi\zeta.$$

Γ. *Μικτὸς πλοῦς.*

Ἐὰν θέλωμεν νὰ πλεύσωμεν ἐκ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ Β ἐπὶ τόξου μεγίστου κύκλου (ὀρθοδρομικῶς) καὶ τὸ τόξον τῆς ὀρθοδρομίας εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ παραλλήλου ἀσφαλείας, εἰς περιοχὴν δηλαδὴ τὴν ὁποίαν πρέπει διὰ διαφόρους λόγους νὰ ἀποφύγωμεν, τότε πλέομεν κατὰ τὸν λεγόμενον *μικτὸν πλοῦν*. Δηλαδὴ ἐκ τοῦ Α φέρομεν τόξον μεγίστου κύκλου ἐφαπτόμενον τοῦ παραλλήλου ἀσφαλείας φ_σ· ὁμοίως καὶ ἐκ τοῦ Β. Τότε πλέομεν ἀπὸ Α ἕως Γ ὀρθοδρομικῶς, ἀπὸ Γ ἕως Δ ἐπὶ τόξου μικροῦ κύκλου (λοξοδρομικῶς) καὶ τέλος ἀπὸ Δ ἕως τὸ Β πάλιν ὀρθοδρομικῶς (σχ. 8·1 η).



Σχ. 8·1 η.

Δίδονται	Ζητοῦνται
φ, λ φ' λ' φ_σ	ζ, $\Delta_{\lambda 1}$, $\Delta_{\lambda 2}$, ζ', θ_1, θ_2, θ_3

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου ΠΓΑ καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τοῦ Νέπερ ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\Delta\lambda_1 = \sigma\varphi\varphi_\sigma\varepsilon\varphi\varphi \qquad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \eta\mu\varphi\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi_\sigma \qquad (2)$$

$$\eta\mu\zeta = \sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi. \qquad (3)$$

Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους ἀντικαταστήσωμεν τὸ φ διὰ τοῦ φ', ἔχομεν τὰ $\Delta_{\lambda 2}$, θ_3 καὶ ζ'.

$$\sigma\upsilon\nu\Delta_{\lambda 2} = \varepsilon\varphi\varphi'\sigma\varphi\varphi_\sigma \qquad (4)$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_3 = \eta\mu\varphi'\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi_\sigma \qquad (5)$$

$$\eta\mu\zeta = \sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi'. \qquad (6)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ θ_2 ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ μήκους τόξου μικροῦ κύκλου, ἤτοι:

$$\theta_2 = \Delta\lambda'\sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma.$$

Παρατήρησις.

Τὸ τρίγωνον ΠΓΔ δὲν εἶναι σφαιρικόν, διότι ἡ πλευρά του ΓΔ δὲν εἶναι τόξον μεγίστου κύκλου.

Ἀσκήσεις.

1. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τὸ Α.

α)	β = 132° 20′	γ = 15° 17′
β)	β = 26° 14′	Β = 58° 20′
γ)	γ = 109° 16′	Β = 110° 18′
δ)	Γ = 45° 19,5′	α = 54° 20,2′
ε)	γ = 80° 20,2′	β = 82° 13,4′
ζ)	α = 81° 34′	β = 30° 28,6′.

2. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ λόξωσις τῆς ἐκλειπτικῆς εἶναι 23° 27′, ὑπολογίσατε τὴν ὀρθὴν ἀναφορὰν τοῦ Ἡλίου, ὅταν ἡ κλίσις του εἶναι δ = 18° 30′Β. (*Ἀπάντ.* Ὀρθὴ ἀναφορὰ = $3^{\omega}\, 21^{\lambda}\, 54^{\delta}$)

3. Εἰς πλάτος 50° 48′ Α δύο ἀστέρες Χ καὶ Ψ παρατηρούμενοι

καὶ οἱ δύο πρὸς Ἀπηλιώτην ἔχουν ἀντιστοίχως ὕψη 20° καὶ 40°. Ὑπολογίσατε τὴν διαφορὰν τῶν ὡρικῶν των γωνιῶν.

(*Ἀπάντ.* $0^{\omega} 59^{\lambda} 59^{\delta}$)

4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις καὶ ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ Ἡλίου, ὅταν τὸ ἐκλειπτικόν του μῆκος εἶναι 68′20′.

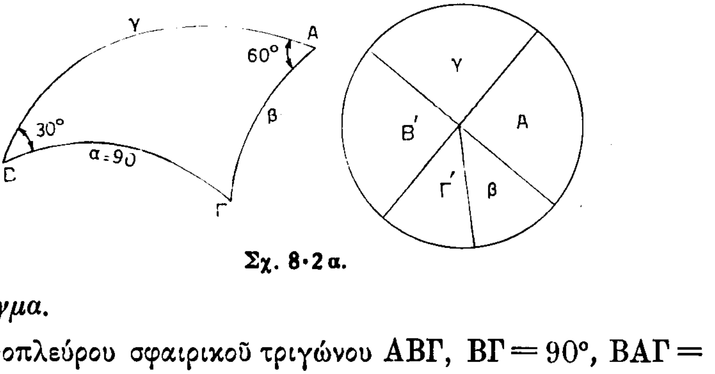
(*Ἀπάντ.* $\delta = 21^{\circ}\, 42'$N, ὀρθὴ ἀναφορὰ $= 66^{\circ}\, 35'$)

8 · 2 Ἐπίλυσις ὀρθοπλεύρων σφαιρικῶν τριγώνων.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ἕνα ὀρθόπλευρον σφαιρικὸν τρίγωνον ἢ ἐπιλύομεν τὸ πολικὸν αὐτοῦ (τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον) καὶ κατόπιν προσδιορίζομεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ δοθέντος ἤ, ἁπλούστερα, ἐφαρμόζομεν τοὺς κανόνας τοῦ Νέπερ μὲ μερικὰς ἀλλαγάς:

Τὸ συνημίτονον ἑνὸς στοιχείου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν συνεφαπτομένων τῶν προσκειμένων στοιχείων ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀντικειμένων στοιχείων, ἐάν, ἀντὶ τῶν εἰς τὴν ὀρθὴν πλευρὰν προσκειμένων γωνιῶν, λάβωμεν τὰ συμπληρώματα αὐτῶν.

Καὶ πάλιν τοποθετοῦμεν τὰ στοιχεῖα εἰς πέντε τομεῖς κύκλου παραλείποντες τὴν ὀρθὴν πλευράν, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ ὀρθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα.



Σχ. 8·2 α.

Παράδειγμα.

Ὀρθοπλεύρου σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ΒΓ = 90°, ΒΑΓ = 60° καὶ ΑΒΓ = 30° (σχ. 8 · 2 α). Ὑπολογίσατε τὴν ΑΓΒ.

Λύσις.

$\sigma\upsilon\nu A = \eta\mu B'\eta\mu\Gamma'$	$\widehat{A} = 60^\circ$	$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu A = \ \ 9{,}69897\ (+)$
$\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$	$\widehat{B} = 30^\circ$	$\lambda o\gamma\tau\epsilon\mu B = \underline{10{,}06247}\ (+)$
$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu A\tau\epsilon\mu B$		$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \ \ 9{,}76144\ (+)(-)$

$$\widehat{\Gamma} = 180^\circ - 54^\circ\ 44' = 125^\circ\ 16'.$$

Πρὸς καθορισμὸν τῆς πραγματικῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου στοιχείου ἐφαρμόζομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα:

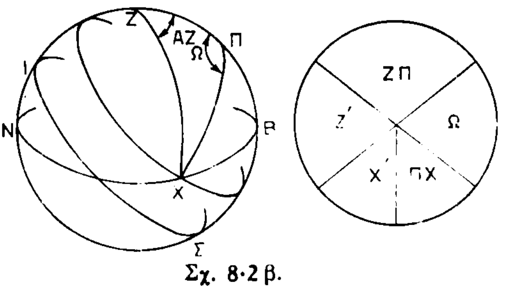
Ἀλλάσσομεν τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὑρεθὲν σημεῖον καὶ κατόπιν ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ ὀρθογώνια.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σημεῖον εἶναι τὸ (+) καὶ τὸ μετατρέπομεν εἰς (—). Συνεπῶς πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν, ἤτοι τὴν $125^\circ\ 16'$.

Ἐφαρμογή.

Εὕρεσις ὥρας Ἀνατολῆς Ἡλίου καὶ τοῦ Ἀζιμοὺθ.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὥρα Ἀνατολῆς τοῦ Ἡλίου καὶ τὸ Ἀζιμοὺθ αὐτοῦ, ἐὰν $\varphi = 40^\circ\ 20'$ B καὶ $\delta = 20^\circ\ 30'$ B (σχ. 8·2β).



Σχ. 8·2β.

Λύσις.

Αἱ γωνίαι Z′ καὶ X′ εἶναι τὰ συμπληρώματα τῶν γωνιῶν τῶν προσκειμένων εἰς τὴν ὀρθὴν πλευρὰν ZX.

Ὅταν ὁ Ἥλιος ἀνατέλλῃ, προφανῶς τὸ ὕψος του εἶναι 0°, συνεπῶς ἡ ζενιθιακή του ἀπόστασις θὰ εἶναι 90° καὶ τὸ τρίγωνον θέσεως ὀρθόπλευρον.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τοὺς κανόνας τοῦ Νέπερ, ἔχομεν:

α) Ὡρικὴ Γωνία.

$$\text{συν}\Omega = \text{σφ}(\text{ΖΠ})\,\text{σφ}(\text{ΠΧ})$$
$$\text{συν}\Omega = \text{σφ}(90^\circ - \varphi)\,\text{σφ}(90^\circ - \delta)$$
$$\text{συν}\Omega = \text{εφ}\varphi\,\text{εφ}\delta.$$

$$\begin{array}{lrl} \varphi = 40^\circ\ 20' & \text{λογεφ}\varphi = 9{,}92894 & (+) \\ \delta = 20^\circ\ 30' & \text{λογεφ}\delta = \underline{9{,}57274} & (+) \\ & \text{λογσυν}\Omega = 9{,}50168 & (+) \text{ γίνεται } (-) \end{array}$$

$$\widehat{\Omega} = 180^\circ - 71^\circ\ 30'$$
$$\widehat{\Omega} = 108^\circ\ 30'$$
$$\widehat{\Omega} = 07^{\omega}\ 14^{\lambda}$$
$$12^{\omega} - 07^{\omega}\ 14^{\lambda}$$

ὥρα ἀνατολῆς ἡλίου $= \boldsymbol{04^{\omega}\ 46^{\lambda}}$.

β) Ἀζιμούθ.

$$\begin{array}{lrl} & \text{συν}AZ = \text{ημ}\delta\,\text{τεμ}\varphi & \\ \delta = 20^\circ\ 30' & \text{λογημ}\delta = 9{,}54433 & (+) \\ \varphi = 40^\circ\ 20' & \text{λογτεμ}\varphi = \underline{0{,}11788} & (+) \\ & \text{λογσυν}AZ = 9{,}66221 & (+) \text{ γίνεται } (-) \\ & \text{καὶ } AZ = 62^\circ\ 39' & \\ & \text{ἢ } AZ = 117^\circ\ 21' & \end{array}$$

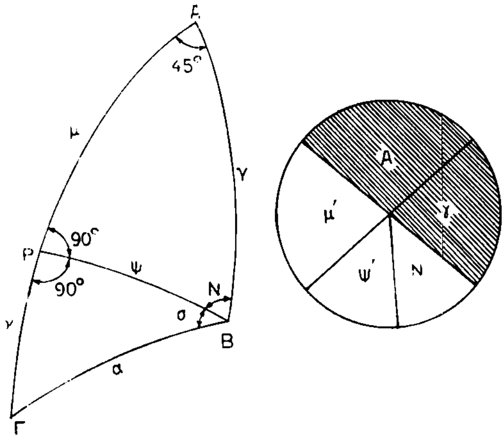
καὶ διὰ τῶν πινάκων Amplitudes εἰσερχόμεθα μὲ δ ὁριζοντίως καὶ μὲ φ καθέτως καὶ ἔχομεν τὸ Amp $= 27^\circ{,}4$.

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ 90°,

ἤτοι: $90^\circ - 27^\circ{,}4 = 62^\circ{,}6$, ἔχομεν $AZ = 62^\circ\ 36'$.

8·3 Ταχεῖα μέθοδος ἐπιλύσεως σφαιρικοῦ τριγώνου.

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 8·3α). Φέρομεν ἐκ τοῦ Β τόξον μεγίστου κύκλου κάθετον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἔστω Ρ τὸ σημεῖον, ὅπου αὐτὸ συναντᾶ τὴν πλευρὰν ΑΓ. Καλοῦμεν τὴν ΒΡ = Ψ καὶ τὰς ΑΡ = μ καὶ ΡΓ = κ. Προφανῶς



Σχ. 8·3α.

τὸ δοθὲν τρίγωνον ἐχωρίσθη εἰς δύο ὀρθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα καὶ ἐπιλύομεν διὰ τῶν κανόνων τοῦ Νέπερ.

Παράδειγμα.

Ἐὰν $\gamma = 41°$, $\beta = 61° 10'$ καὶ $\widehat{A} = 45°$, ὑπολογίσατε τὴν ΒΓ (α).

Λύσις.

Ἐπιλύομεν κατ' ἀρχὴν τὸ ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΡΒ (σχ. 8·3β).

α) Ὑπολογισμὸς Ψ.

συνψ' = ημΑημγ	Α = 45°	λογημΑ = 9,84949	(+)
ημψ = ημΑημγ	γ = 41°	λογημγ = 9,81694	(+)
		λογημψ = 9,66643	(+)

$$\Psi = 27° \ 38'.$$

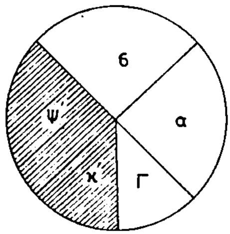
β) Ὑπολογισμὸς μ.

συνA = σφμ΄σφγ	$\widehat{A} = 45°$	λογσυνA = 9,84949	(+)
συνA = εφμσφγ	$γ = 41°$	λογεφγ = 9,93916	(+)
εφμ = συνAεφγ		λογεφμ = 9,78865	(+)

$μ = 31° \, 35'$.

Συνεπῶς $κ = β - μ = 61° 10' - 31° 35' = 29° 35'$,
$κ = 29° 35'$.

Ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύομεν τὸ ΡΒΓ.



Σχ. 8·3 β.

συνα = ημψ΄ημκ΄
συνα = συνψσυνκ

$ψ = 27° 38'$	λογσυνψ = 9,94740	(+)
$κ = 29° 35'$	λογσυνκ = 9,93934	(+)
	λογσυνα = 9,88674	(+)

Ἄρα ΒΓ (α) = 39° 36΄.

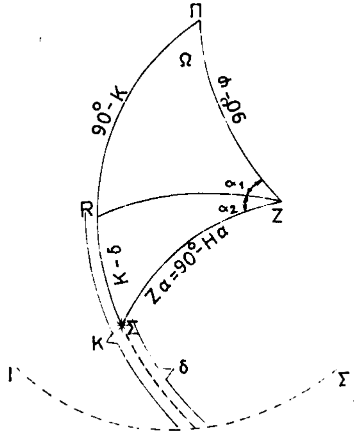
Ἐφαρμογή.

Ἐπίλυσις σφαιρικοῦ τριγώνου διὰ διαιρέσεως αὐτοῦ εἰς δύο ὀρθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα. Πίνακες Α.Κ.

Δίδονται

φ = 58° 19΄ Ν	G.H.A. = 333° 23΄
λ = 23° 13΄ Δ	Spec. Long = 23° 23΄
Ηλ = 28° 41΄,5	
G.H.A. = 333° 23΄	L.H.A. = 310° 00
δ = 10° 01΄,2 Β	(360° − 310°) = 50° Α
	L.H.A. = Ω.

Ἔστω τὸ τρίγωνον θέσεως ΠΖΣ καὶ ΙΣ ὁ Ἰσημερινὸς (σχ. 8·3γ).

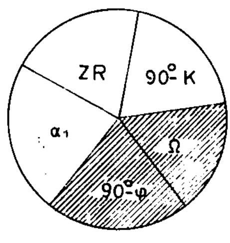


Σχ. 8·3γ.

Ἐκ τοῦ Ζ (Ζενὶθ) φέρομεν τόξον μεγίστου κύκλου κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΠΣ. Ἔστω δὲ R ὁ ποὺς τοῦ τόξου αὐτοῦ. Καλοῦμεν Κ τὴν ἀπόστασιν τοῦ R ἀπὸ τοῦ Ἰσημερινοῦ.

Ἐὰν εἰς τὸ ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον ΠRΖ ἐφαρμόσωμεν τοὺς κανόνας τοῦ Νέπερ, λαμβάνομεν (σχ. 8·3δ):

α) σφΚ = συνΩσφφ.



Σχ. 8·3 δ.

$$\Omega = 50^\circ \qquad \lambda o\gamma \sigma \upsilon \nu \Omega = 9{,}80807$$
$$\varphi = 58^\circ \qquad \lambda o\gamma \sigma \varphi \varphi = 9{,}79579 \; +$$
$$\lambda o\gamma \sigma \varphi K = 9{,}60386$$
$$K = 68^\circ\ 7'.$$

β) $\sigma\varphi\alpha_1 = \eta\mu\varphi\varepsilon\varphi\Omega$ ἢ δι' ἀντιστροφῆς $\varepsilon\varphi\alpha_1 = \sigma\tau\acute{\varepsilon}\mu\varphi\sigma\varphi\Omega$.

$$\begin{array}{lrl} \varphi = 58^\circ & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi = & 10{,}07158 \\ \Omega = 50^\circ & \lambda o\gamma\sigma\varphi\Omega = & \underline{9{,}92381} \; + \\ & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\alpha_1 = & 9{,}99539 \\ & \alpha_1 = & 44^\circ \; 41',7. \end{array}$$

γ) $\eta\mu\, ZR = \sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\Omega$.

$$\begin{array}{lrl} \varphi = 58^\circ & \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi = & 9{,}72421 \\ \Omega = 50^\circ & \lambda o\gamma\eta\mu\Omega = & \underline{9{,}88425} \; + \\ & \lambda o\gamma\eta\mu ZR = & 9{,}60846 \\ & ZR = & 23^\circ \; 57'. \end{array}$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ZRΣ *καὶ* δι' ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τοῦ Νέπερ, ἔχομεν:

δ) $\eta\mu H_\alpha = \sigma\upsilon\nu ZR\,\sigma\upsilon\nu(K - \delta) \rightarrow$ ἢ δι' ἀντιστροφῆς

$$\sigma\tau\varepsilon\mu H\alpha = \tau\varepsilon\mu ZR\tau\varepsilon\mu(K - \delta) \qquad (1)$$

ε) $\sigma\varphi\alpha_2 = \eta\mu ZR\sigma\varphi(K - \delta) \rightarrow$ ἢ δι' ἀντιστροφῆς

$$\varepsilon\varphi\alpha_2 = \sigma\tau\varepsilon\mu ZR\varepsilon\varphi(K - \delta). \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $K = 68^\circ \; 7'$ → ὡς εὑρέθη ἀνωτέρω

$\underline{\delta = 10^\circ \; 1',2}$ → δεδομένον

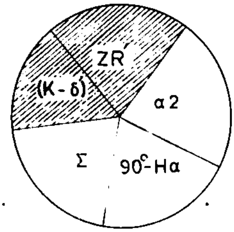
$K - \delta = 58^\circ \; 5',8.$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$\begin{array}{lrl} ZR = 23^\circ \; 57' & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu ZR = & 10{,}03910 \\ K - \delta = 58^\circ \; 5',8 & \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu(K - \delta) = & \underline{10{,}27696} \; + \\ & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu H\alpha = & 10{,}31606 \\ & H\alpha = & 28^\circ \; 53'. \end{array}$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν:

$$\begin{array}{lrl} ZR = 23^\circ \; 57' & \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu ZR = & 10{,}39154 \\ K - \delta = 58^\circ \; 5',8 & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi(K - \delta) = & \underline{10{,}20585} \; + \\ & \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\alpha_2 = & 10{,}59739 \\ & \alpha_2 = & 75^\circ \; 49',1. \end{array}$$



Σχ. 8·3 ε.

Συμπέρασμα:

Ἀζιμοὺθ $\alpha_1 + \alpha_2 = 44^\circ\,41{,}7' + 75^\circ\,49{,}1' = 120^\circ\,30{,}8'$.
$\Delta H = H_\alpha - H_\lambda = 28\,53' - 28^\circ\,41',5 = 11'5$.

Αἱ ἀνωτέρω πράξεις ἀποφεύγονται, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς Πίνακας A, K (Norie's σελ. 300 — 372), ὁπότε ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀνευρίσκομεν εἰς τοὺς Πίνακας τὸ πλάτος $\varphi = 58^\circ$ (σελ. 358 Πινάκων) καὶ $\Omega = h = 50^\circ$, ὁπότε λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ κάτωθι:

K	A	N	α_1
$68^\circ\,07'$	0,03910	0,39154	$44^\circ\,42'$
$\delta = 10^\circ\,1{,}2$	$+$	$+$	
$K - \delta = 58^\circ\,5',8 \rightarrow$	λογτεμ10,27696	λογεφ = 10,20585	$+$
$H_\alpha = 28^\circ\,52',9 \leftarrow$	λογτεμH_α = 10,31606	λογεφα_2 = 10,59738 $\rightarrow$	
$-$		$\rightarrow \alpha_2 = 75^\circ\,50'$	
$H_\lambda = 28^\circ\,41{,}5$		Ἀζιμοὺθ = $120^\circ\,32'$	
$\Delta H = 11{,}4$			

Τὸ A ἐκπροσωπεῖ τὸν λογτεμZR, τὸ δὲ N τὸν λογστεμZR [ἰδὲ ἀνωτέρω ἐπίλυσιν, τύπους (1) καὶ (2)].

Τὰ ἀνωτέρω ἀποτελοῦν μίαν μόνον περίπτωσιν. Αἱ λοιπαὶ περιπτώσεις ἀναφέρονται λεπτομερῶς εἰς τὸ μάθημα τῆς Ναυτιλίας.

8·4 Γενικαὶ ἀσκήσεις.

1. Εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ καὶ $\beta = 70^\circ$. Ὑπολογίσατε τὴν Α διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ τριγώνου εἰς δύο ὀρθ. σφαιρικὰ τρίγωνα.

2. Εἰς μίαν ὡρισμένην ἡμερομηνίαν ὁ Aldebaran (α Ταύρου) εὑρίσκεται εἰς τὸν Μεσημβρινὸν τοῦ Γκρήνουϊτς εἰς τὰς 18^{ω} 10^{λ} 30^{δ}. Ἡ κλίσις τοῦ Aldebaran εἶναι 16° 24′3. Ἐὰν τὸ πλάτος τοῦ Γκρήνουϊτς εἶναι 51° 29′ Β, ὑπολογίσατε τὸν κατὰ προσέγγισιν χρόνον δύσεως τοῦ Aldebaran.

3. Ὁ Altair (α Ἀετοῦ) εὑρίσκεται εἰς τὸν μεσημβρινὸν ἑνὸς παρατηρητοῦ εἰς τὰς 16^{ω} 44^{λ} G.M.T. Τὸ πλάτος τοῦ παρατηρητοῦ εἶναι 20° Β. Ἡ κλίσις τοῦ Altair εἶναι 8° 43′ Β. Ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν τὸ G.M.T. τῆς Δύσεως τοῦ Altair.

4. Ἡ λόξωσις τῆς ἐκλειπτικῆς πρὸς τὸν Ἰσημερινὸν εἶναι 23° 27′. Ὑπολογίσατε τὴν ὀρθὴν ἀναφορὰν καὶ τὴν κλίσιν τοῦ Ἡλίου, ἐὰν τὸ ἐκλειπτικόν του μῆκος εἶναι 130°.

5. Ἡ Διάβασις τοῦ Rigel (β Ὠρίωνος) ἐκ τοῦ μεσημβρινοῦ ἑνὸς τόπου λαμβάνει χώραν εἰς τὰς 22^{ω} 5^{λ}. Ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν τὸν χρόνον δύσεως αὐτοῦ διὰ παρατηρητήν, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς πλάτος 40° Β (κλίσιςRigel 8° 16′ Ν).

6. Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, $\alpha = 57^\circ$, $\beta = 83$ καὶ $\widehat{\Gamma} = 34^\circ$. Ὑπολογίσατε τὴν γ, ἐὰν φέρετε κάθετον ἀπὸ τὸ Β εἰς τὴν ΑΓ.

7. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ $\gamma = 90^\circ$, ἡ $\alpha = 110^\circ$ 22′ καὶ ἡ $\widehat{B} = 125^\circ$ 30′. Ὑπολογίσατε τὰ λοιπά του στοιχεῖα.

8. Εἰς πλάτος 40° 30 Ν ἡ κλίσις τοῦ Ἡλίου εἶναι 15° 27′ Ν. Ὑπολογίσατε τὴν Ὡρικὴν γωνίαν τοῦ Ἡλίου, ὅταν οὗτος εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ πρώτου καθέτου (Ἀνατολή).

9. Δίδεται πλάτος 44° Β καὶ κλίσις Ἡλίου 22° Ν. Ὑπολογίσατε τὸν χρόνον Δύσεως καὶ τὸ Ἀζιμούθ.

10. Σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ, Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐὰν $\widehat{B\Gamma} = 67^\circ$ 30′, $\widehat{A\Delta} = 57^\circ$ 15′ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma} = 73^\circ$ 10′, ὑπολογίσατε τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

11. Ὑπολογίσατε τὴν διάρκειαν τῆς μεγίστης ἡμέρας εἰς τόπον Βορείου πλάτους 38°.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

(Οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται εἰς σελίδας)