ΑΝΩΤΕΡΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΣΧΟΛΕΣ
ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

# ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

**Χρήστου Ι. Πέππα**
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΩΝ ΑΔΣΕΝ/ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

# ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ

Α.Δ.Σ.Ε.Ν.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», προείδε ενωρίτατα και σχημάτισε τη βαθιά πεποίθηση ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο του έθνους αποτελεί η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας σε συνδυασμό προς την ηθική τους αγωγή.

Την πεποίθησή του αυτή την μετέτρεψε σε γενναία πράξη ευεργεσίας, όταν κληροδότησε σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, τον Φεβρουάριο του 1956 συνεστήθη το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου την διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Από τη στιγμή εκείνη άρχισαν πραγματοποιούμενοι οι σκοποί που οραματίσθηκε ο Ευγένιος Ευγενίδης και συγχρόνως η εκπλήρωση μιας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου. Το έργο του Ιδρύματος συνέχισε από το 1981 μέχρι το 2000 ο Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης· έκτοτε συνεχίζει αυτό ο κ. Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Κατά την κλιμάκωση των σκοπών του, το Ίδρυμα προέταξε την έκδοση τεχνικών βιβλίων τόσο για λόγους θεωρητικούς όσο και πρακτικούς. Διεπιστώθη πράγματι ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητών με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν ορθά θεμέλια στην παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό.

Ειδικότερα, όσον αφορά στα εκπαιδευτικά βιβλία των σπουδαστών των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα ανέλαβε τότε την έκδοσή τους σε πλήρη και στενή συνεργασία με τη Διεύθυνση Ναυτικής Εκπαιδεύσεως του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, υπό την εποπτεία του οποίου υπάγονται οι Σχολές αυτές. Η ανάθεση στο Ίδρυμα έγινε με την υπ' αριθ. 61288/5031, της 9ης Αυγούστου 1966, απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και συνεκροτήθη και η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων.

Αποτέλεσμα της συνεργασίας αυτής ήταν η έκδοση της Σειράς Βιβλιοθήκη του Ναυτικού, όπου εξεδόθησαν: α) Για τους μαθητές των Μέσων Ναυτικών Σχολών 30 τόμοι βιβλίων (1967 - 1979). β) Για τις ΑΔΣΕΝ (Ανώτερες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού) 54 τόμοι (1981 - 2001).

Κύριος σκοπός των εκδόσεων αυτών, των οποίων το περιεχόμενο είναι *σύμφωνο με τα εκάστοτε ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα του ΥΕΝ, ήταν η παροχή προς τους σπουδαστές των Ναυτικών Σχολών ΑΔΣΕΝ και Ναυτικών Λυκείων των αναγκαίων τότε εκπαιδευτικών κειμένων, τα οποία αντιστοιχούν προς τα μαθήματα που διδάσκονται στις Σχολές αυτές.*

*Επίσης ελήφθη ιδιαίτερη πρόνοια, ώστε τα βιβλία αυτά να είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία του κλάδου τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι επέρχεται μεταβολή στη στάθμη του περιεχομένου τους.*

*Με την υπ. αρ. 1168Β' /14.6.99 υπουργική απόφαση το Υπουργείο Εμπορικής Ναυτιλίας ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή και έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων των Ναυτικών Ακαδημιών· ήδη η επιτροπή εκδόσεων του Ιδρύματος, στην οποία μετέχει, όπως πάντα, και ο διευθυντής Ναυτικής Εκπαιδεύσεως του ΥΕΝ, προεκήρυξε συμφώνως προς απόφαση του ΥΕΝ την συγγραφή 15 βιβλίων προς κάλυψη επειγουσών αναγκών των σπουδαστών βάσει των ισχυόντων αναλυτικών προγραμμάτων. Τα βιβλία αυτά έχουν συγγραφεί ήδη και ευρίσκονται στο στάδιο της εκδόσεως.*

*Οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος εξακολουθούν να καταβάλλουν κάθε προσπάθεια, ώστε τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και τις δυνατότητες των σπουδαστών. Γι' αυτό έχουν προσεγμένη γλωσσική διατύπωση των κειμένων τους και η διαπραγμάτευση των θεμάτων είναι ανάλογη προς τη στάθμη της εκπαιδεύσεως, για την οποία προορίζονται.*

*Με την προσφορά στους καθηγητές, στους σπουδαστές της ναυτικής μας εκπαιδεύσεως και σε όλους τους αξιωματικούς του Ε.Ν. των εκδόσεών του, το Ίδρυμα συμβάλλει στην πραγματοποίηση του σκοπού του ιδρυτή του Ευγενίου Ευγενίδου.*




Ειδικός Επιστημονικός Σύμβουλος για το βιβλίο Σφαιρική Τριγωνομετρία ο κ. **Γ. Κολέτσος**, επίκουρος καθηγητής ΕΜΠ.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

# ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΧΡΗΣΤΟΥ Ι. ΠΕΠΠΑ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΩΝ ΑΔΣΕΝ ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

ΑΘΗΝΑ
2006

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

*Το βιβλίο αυτό, του οποίου το περιεχόμενο είναι σύμφωμο με το αναλυτικό πρόγραμμα των σχολών ΑΔΣΕΝ/πλοιάρχων, γράφτηκε για να προσφέρει στην Ελληνική βιβλιογραφία ένα εξειδικευμένο υλικό που αναφέρεται στο μάθημα της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Το μάθημα αυτό διδάσκω επί σειρά ετών στους πρωτοετείς και δευτεροετείς σπουδαστές των σχολών Πλοιάρχων των ΑΔΣΕΝ και από την αποκτηθείσα πείρα μου στο χώρο αυτό, διεπίστωσα την ανάγκη για την συγγραφή ενός βιβλίου Σφαιρικής Τριγωνομετρίας κατάλληλου γι' αυτούς που ασχολούνται με τις εφαρμογές της. Γιατί βέβαια το μάθημα αυτό έχει άπειρες εφαρμογές και ενδιαφέρει άμεσα όσους ταξιδεύουν αλλά και αυτούς που ασχολούνται με τη μελέτη της Αστρονομίας.*

*Επειδή ακόμη η Σφαιρική Τριγωνομετρία δεν περιλαμβάνεται στα προγράμματα των Γυμνασίων και Λυκείων μας, νομίζω ότι ήταν επιβεβλημένη μια παρόμοια έκδοση προσαρμοσμένη και στις ανάγκες των αποφοίτων των Λυκείων.*

*Στο βιβλίο αυτό ο ενδιαφερόμενος, εκτός του θεωρητικού μέρους, θα βρει πλήθος εφαρμογών τόσο στην Ναυτιλία όσο και στην Αστρονομία. Υπάρχουν λυμένες ασκήσεις για την κατανόηση της θεωρίας και των εφαρμογών της, καθώς και άλυτες για την εξάσκηση και εμπέδωση της ύλης.*

*Η θεωρία περί λογαρίθμων, επειδή περιλαμβάνεται σε όλα τα συγγράμματα της Επίπεδης Τριγωνομετρίας (σχολικά και μη), θεωρήθηκε περιττό να περιληφθεί και εδώ. Όμως στο τέλος του βιβλίου παραθέτομε ένα «πρόγραμμα» για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών με τη βοήθεια μικροϋπολογιστή τσέπης, αφού οι υπολογιστές έχουν πλέον κυριολεκτικά εισέλθει στην ζωή μας.*

*Με την πεποίθηση ότι προσφέρομε ένα σημαντικό βοήθημα, τόσο σ' αυτούς που ασχολούνται με την Αστρονομία, όσο και, κυρίως, στους Πλοιάρχους μας του Ε.Ν. και Π.Ν. που είτε ταξιδεύουν, είτε σπουδάζουν, είτε προετοιμάζονται για εξετάσεις για δίπλωμα ανωτέρας τάξεως, παραδίνομε το βιβλίο στο ελληνικό αναγνωστικό κοινό, έχοντας συγχρόνως και την ικανοποίηση ότι παράλληλα συμβάλλομε και εμείς ελάχιστα στην ανάπτυξη της μεγάλης Εμπορικής μας Ναυτιλίας.*

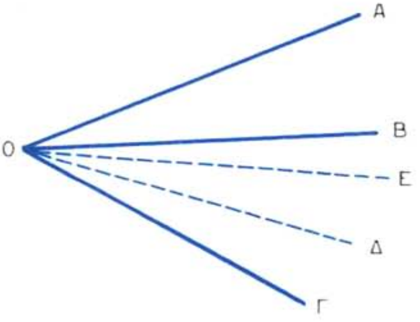
*Ο συγγραφέας*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

# ΣΤΕΡΕΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

## 1.1 Πολύεδρη στερεά γωνία.

***Ορισμός:*** Πολύεδρη στερεά γωνία (σχ. 1.1) λέγεται το σχήμα που δημιουργείται όταν τρία ή περισσότερα επίπεδα διέρχονται από το ίδιο σημείο, δεν διέρχονται ανά τρία από την ίδια ευθεία και καθένα από αυτά περατώνεται (τελειώνει) στην τομή αυτού με τα πλησίον του (παρακείμενα) δυο επίπεδα.

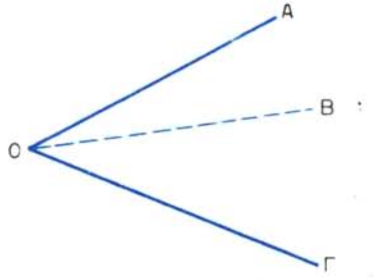



**Σχ. 1.1.**

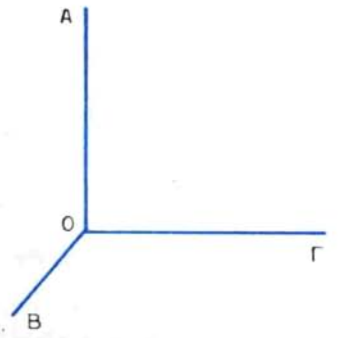
Τα επίπεδα που σχηματίζουν τη στερεά γωνία ονομάζονται ***έδρες*** αυτής, ενώ οι τομές τους (καθένα με τα δύο πλησίον του) λέγονται ***ακμές*** της στερεάς γωνίας. Το σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ακμές της στερεάς γωνίας λέγεται ***κορυφή*** της. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ακμές κάθε έδρας λέγονται και αυτές ***έδρες*** ή ***επίπεδες*** γωνίες της στερεάς γωνίας. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι έδρες που διέρχονται από κάθε ακμή λέγονται ***δίεδρες*** γωνίες της στερεάς γωνίας.

## 1.2 Τρίεδρη γωνία.

Η στερεά γωνία που έχει τρεις μόνο έδρες λέγεται ***τρίεδρη.*** Έτσι το σχήμα 1.2α παριστάνει μια τρίεδρη στερεά γωνία Ο.ΑΒΓ. Η τρίεδρη γωνία που έχει τις τρεις ακμές της κάθετες ανά δύο μεταξύ τους, έχει ορθές όλες τις διέδρες γωνίες της και λέγεται ***τρισορθογώνια στερεά γωνία*** (σχ. 1.2β).



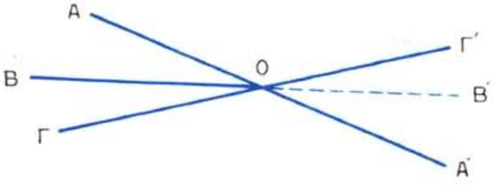

**Σχ. 1.2α.**




**Σχ. 1.2β.**

## 1.3 Συμμετρικές ή κατά κορυφή τρίεδρες.

Αν οι ακμές μιας τρίεδρης στερεάς γωνίας προεκταθούν όλες πέρα της κορυφής σχηματίζεται νέα τρίεδρη στερεά γωνία η οποία λέγεται ***συμμετρική*** ή ***κατά κορυφή τρίεδρη*** της πρώτης. Τέτοιες είναι οι τρίεδρες Ο.ΑΒΓ και Ο.Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 1.3) Οι κατά κορυφή τρίεδρες γωνίες δεν είναι ίσες αν και έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα.




**Σχ. 1.3.**

## 1.4 Ιδιότητες των τριέδρων στερεών γωνιών.

Από τη Στερεομετρία γνωρίζομε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων ενός επιπέδου τριγώνου και των στοιχείων μιας τρίεδρης. Η αντιστοιχία είναι η εξής:

| ***Τρίγωνο*** | ***Τρίεδρη στερεά γωνία*** |
|---|---|
| **Πλευρές α, β, γ τριγώνου**<br>Γωνίες Α,Β,Γ τριγώνου | Επίπεδες γωνίες α, β, γ τρίεδρης<br>**Δίεδρες γωνίες Α,Β,Γ τρίεδρης** |

Έτσι με την αντιστοιχία αυτή τα περισσότερα θεωρήματα που αφορούν το τρίγωνο ***μεταφέρονται*** στην τρίεδρη στερεά γωνία. Παρακάτω παρατηρούμε την αντιστοιχία μερικών τέτοιων θεωρημάτων:

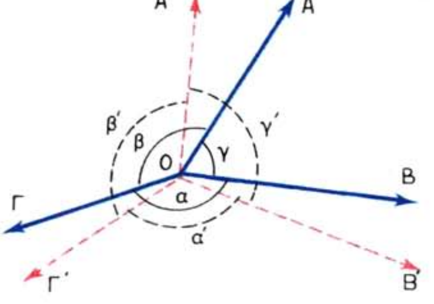
| ***Θεωρήματα τριγώνου*** | ***Θεωρήματα τρίεδρης*** |
|---|---|
| Θ. Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη της διαφοράς τους. | Θ. Σε κάθε τρίεδρη στερεά γωνία κάθε επίπεδη γωνία είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη της διαφοράς τους. |
| Θ. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα. | Θ. Σε κάθε τρίεδρη στερεά γωνία απέναντι από μεγαλύτερη επίπεδη γωνία βρίσκεται μεγαλύτερη δίεδρη και αντίστροφα. |
| Θ. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. | Θ. Αν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες έχουν τις επίπεδες γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσες (ή συμμετρικές). |

## 1.5 Παραπληρωματικές τρίεδρες.

Αν από την κορυφή μιας τρίεδρης στερεάς γωνίας φέρομε τις κάθετες ημιευθείες στις τρεις έδρες της και έτσι, ώστε κάθε μία από αυτές τις κάθετες ημιευθείες να βρίσκεται προς το αυτό μέρος του χώρου ως προς το επίπεδο της έδρας προς το οποίο βρίσκεται και η τρίτη ακμή, τότε η τρίεδρη γωνία που έχει ακμές τις τρεις αυτές κάθετες, λέγεται ***παραπληρωματική*** της αρχικής τρίεδρης.

Έστω δηλαδή ότι δίνεται η τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ (σχ. 1.5) που έχει έδρες α,β,γ και δίεδρες Α, Β, Γ. Από την κορυφή Ο της τρίεδρης φέρομε την $ΟΑ' \perp α$ προς το αυτό μέρος που βρίσκεται η ΟΑ, ομοίως στην $ΟΒ' \perp β$ προς το αυτό μέρος που βρίσκεται η ΟΒ και την $ΟΓ' \perp γ$ προς το αυτό μέρος που βρίσκεται η ΟΓ.

Σχηματίζεται τότε η τρίεδρη στερεά γωνία Ο.Α΄Β΄Γ΄ με έδρες α΄, β΄,γ΄ και με δίεδρες τις Α΄, Β΄, Γ΄ η οποία λέγεται ***παραπληρωματική*** της Ο.ΑΒΓ.




**Σχ. 1.5.**

Είναι γνωστό από τη Στερεομετρία το εξής θεώρημα:

Αν δυο τρίεδρες στερεές γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε οι επίπεδες γωνίες της μιας είναι παραπληρώματα των αντιστοίχων απέναντι διέδρων της άλλης και αντίστροφα.

Επομένως για τις παραπληρωματικές τρίεδρες Ο.ΑΒΓ και Ο.Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 1.5 θα ισχύουν:

| | | |
|---|---|---|
| $A + \alpha' = 2ορθ$ | | $A' + \alpha = 2ορθ$ |
| $B + \beta' = 2ορθ$ | και | $B' + \beta = 2ορθ$ |
| $\Gamma + \gamma' = 2ορθ$ | | $\Gamma' + \gamma = 2ορθ$ |

**Σημείωση:** Το παραπάνω θεώρημα είναι απαραίτητο να το θυμόμαστε καλά γιατί με αυτό κατανοούμε απόλυτα τα πολικά σφαιρικά τρίγωνα που θα συναντήσουμε παρακάτω.

### 1.6 Κριτήρια ισότητας τριέδρων στερεών γωνιών.

Αναφέρομε παρακάτω τις βασικές περιπτώσεις ισότητας των τριέδρων στερεών γωνιών χωρίς απόδειξη γιατί θεωρούνται γνωστές από τη Στερεομετρία.

***Θεώρημα 1ο.*** Αν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες έχουν μια δίεδρη γωνία ίση και τις έδρες που την περιέχουν ίσες, τότε θα έχουν και τα λοιπά στοιχεία τους ίσα και θα είναι ή ίσες ή κατά κορυφήν.

***Θεώρημα 2ο.*** Αν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες έχουν μία έδρα ίση και τις προσκείμενες σ' αυτή δίεδρες ίσες, θα έχουν και τα λοιπά στοιχεία τους ίσα και θα είναι ή ίσες ή κατά κορυφήν.

***Θεώρημα 3ο.*** Αν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες έχουν τις έδρες τους ανά μία ίσες, τότε θα έχουν ίσες και τις δίεδρες γωνίες τους που βρίσκονται απέναντι των ίσων εδρών και οι τρίεδρες θα είναι ίσες ή κατά κορυφήν.

***Θεώρημα 4ο.*** Αν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες έχουν τις διέδρες γωνίες τους ανά μία ίσες, θα έχουν ίσες και τις επίκεντρες γωνίες τους που βρίσκονται απέναντι των ίσων διέδρων γωνιών και οι τρίεδρες θα είναι ίσες ή κατά κορυφήν.

### 1.7 Ανισοτικές σχέσεις στις τρίεδρες στερεές γωνίες.

Στην τρίεδρη στερεά γωνία πρέπει να έχομε υπόψη μας ότι για τις δίεδρες γωνίες της Α, Β, Γ και τις έδρες της α,β,γ, ισχύει:

1) $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$, $|\gamma - \alpha| < \beta < \gamma + \alpha$, $|\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta$

2) $\alpha + \beta + \gamma < 4ορθ$.

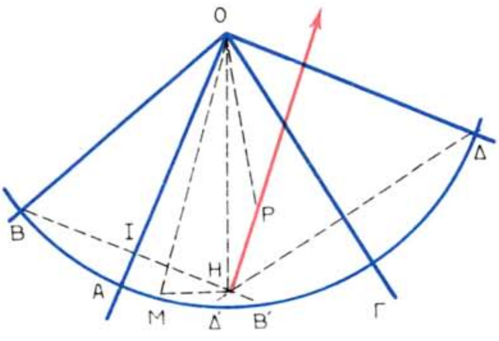
3) $2ορθ. < A + B + \Gamma < 6ορθ$

4) $B + \Gamma < A + 2ορθ$, $\quad \Gamma + A < B + 2ορθ$, $\quad A + B < \Gamma + 2ορθ$

## 1.8 Κατασκευή τρίεδρης στερεάς γωνίας από τις τρεις έδρες της.

Τις τρεις έδρες που μας δίνονται τις θέτομε σε ένα επίπεδο ώστε να είναι εφεξής μεταξύ τους και η μεγαλύτερη να βρίσκεται στη μέση. Έστω λοιπόν ότι οι έδρες είναι α, β, γ και β η μεγαλύτερη. Με την κοινή τους κορυφή σαν κέντρο γράφομε τυχόντα κύκλο ακτίνας R που τέμνει τις πλευρές τους στα σημεία Β, Α, Γ, Δ.

Έχομε $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma < 4\text{ορθ}$ άρα $\widehat{ΒΑ} + \widehat{ΑΓ} + \widehat{ΓΔ} < 4\text{ορθ}$. Φέρομε $ΒΒ' \perp ΟΑ$ και $ΔΔ' \perp ΟΓ$ (σχ. 1.8). Έχομε $\widehat{ΒΑ} = \widehat{ΑΒ'}$ και $\widehat{ΔΓ} = \widehat{ΓΔ'}$.




**Σχ. 1.8.**

Επειδή $\sphericalangle \beta < \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \gamma \Longrightarrow \widehat{ΑΓ} < \widehat{ΒΑ} + \widehat{ΓΔ} \Longrightarrow \widehat{ΑΓ} < \widehat{ΑΒ'} + \widehat{Δ'Γ}$. Άρα οι χορδές ΒΒ΄ και ΔΔ΄ τέμνονται εσωτερικώς του κύκλου, έστω στο σημείο Η. Φέρομε την ΟΗ και κατόπιν την $ΗΜ \perp ΟΗ$. Στο επίπεδο του κύκλου φέρομε κάθετο και επ' αυτής τμήμα $ΗΡ = ΗΜ$. Φέρομε την ΟΡ. Η τρίεδρη στερεά γωνία Ο.ΑΡΓ είναι η ζητούμενη, διότι:

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΗΡ και ΟΗΜ είναι ίσα (ΟΗ κοινή, $ΗΜ = ΗΡ$) άρα $ΟΡ = ΟΜ = R = ΟΒ$. (1)

β) Αν φέρομε την ΡΙ επειδή $ΡΗ \perp$ επίπεδο του κύκλου και $ΗΙ \perp ΟΑ \Longrightarrow ΡΙ \perp ΟΑ$ άρα το τρίγωνο ΟΙΡ ορθογώνιο στο Ι.

γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΙΡ και ΟΙΒ είναι ίσα (ΟΙ κοινή, $ΟΡ = ΟΒ$ από την (1) άρα $\sphericalangle ΡΟΙ = \sphericalangle ΡΟΑ = \sphericalangle ΙΟΒ = \alpha$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\sphericalangle ΡΟΓ = \sphericalangle \gamma$ και εκ κατασκευής έχομε ότι: $\sphericalangle ΑΟΓ = \sphericalangle \beta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

# ΣΦΑΙΡΑ

## 2.1 Ορισμοί.

***Σφαίρα*** λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που απέχουν από σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση R.

Το σταθερό σημείο Ο ονομάζεται ***κέντρο*** της σφαίρας. Η σταθερή απόσταση R λέγεται ***ακτίνα*** της σφαίρας.

***Παρατήρηση:*** Αν για ένα σημείο Μ του χώρου ισχύει $OM < R$, τότε το Μ βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας. Αν $OM > R$, τότε το Μ βρίσκεται στο εξωτερικό της σφαίρας.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου τα άκρα είναι σημεία της σφαίρας, καλείται ***χορδή*** της σφαίρας. Αν η χορδή διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας λέγεται ***διάμετρος*** αυτής.

Αν θεωρήσομε ένα ημικύκλιο περιστρεφόμενο γύρω από τη διάμετρο του τότε παράγεται σφαίρα.

## 2.2 Θέσεις επιπέδου και σφαίρας.

Έστω σφαίρα με ακτίνα R και δ η απόσταση του κέντρου της από ένα επίπεδο (Π).

Αν: 1) $\delta > R$ η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία.

2) $\delta = R$ η σφαίρα και το επίπεδο έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται).

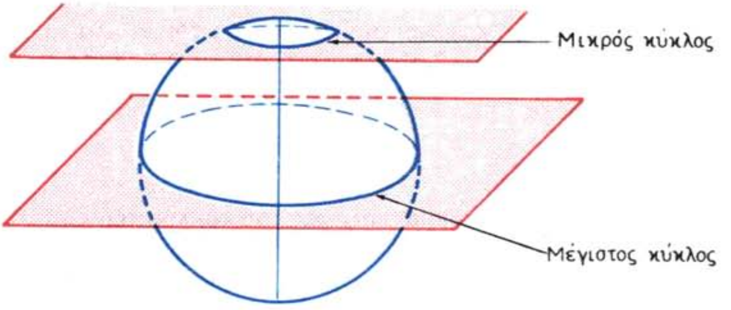
3) $\delta < R$ η σφαίρα και το επίπεδο τέμνονται.

Η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι κύκλος (σχ. 2.2α).

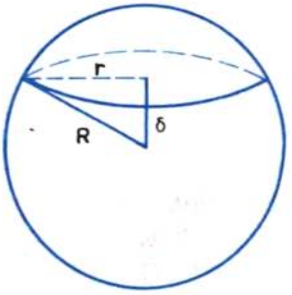
Αν α) $\delta < R$ και $\delta \neq 0$ ο κύκλος λέγεται ***μικρός.***

β) $\delta = 0$ ο κύκλος λέγεται ***μέγιστος.***

Αν r η ακτίνα του σχηματιζόμενου κύκλου, τότε $R^2 = \delta^2 + r^2$ (σχ. 2.2β).




Σχ. 2.2α.




Σχ. 2.2β.

## 2.3 Ιδιότητες των μέγιστων κύκλων σφαίρας.

1) Οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους.
2) Οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας διχοτομούν αλλήλους.
3) Η τομή δύο μέγιστων κύκλων της σφαίρας είναι κοινή διάμετρός τους.
4) Κάθε μέγιστος κύκλος διαιρεί τη σφαίρα σε δύο ίσα μέρη που ονομάζονται ***ημισφαίρια.***
5) Δια δύο σημείων μιας σφαίρας, τα οποία δεν είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου, διέρχεται ***ένας και μόνο*** μέγιστος κύκλος, ενώ αν τα σημεία αυτά είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου, τότε διέρχονται δι' αυτών άπειροι μέγιστοι κύκλοι.
6) Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων σφαίρας είναι το τόξο μέγιστου κύκλου, το οποίο ορίζεται από τα σημεία αυτά.

## 2.4 Ιδιότητες μικρών κύκλων.

α) Δύο μικροί κύκλοι σφαίρας που απέχουν εξίσου από το κέντρο της είναι ίσοι.
β) Δύο μικροί κύκλοι σφαίρας που απέχουν άνισα από το κέντρο της είναι άνισοι και μικρότερος είναι εκείνος που απέχει περισσότερο από το κέντρο της σφαίρας.
γ) Η ευθεία που ενώνει το κέντρο της σφαίρας με το κέντρο ενός μικρού κύκλου της είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.
Η θέση ενός μικρού κύκλου είναι ορισμένη, όταν δοθούν τρία σημεία της περιφέρειάς του επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

## 2.5 Παράλληλοι κύκλοι.

Παράλληλοι κύκλοι μιας σφαίρας λέγονται οι κύκλοι, των οποίων τα επίπεδα είναι παράλληλα.

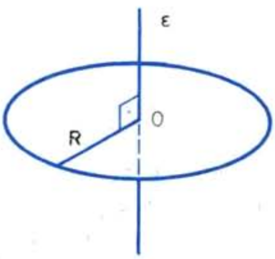
## 2.6 Άξονας κύκλου.

Άξονας κύκλου καλείται η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στο επίπεδό του. Στο σχήμα 2.6 άξονας του κύκλου OR είναι η ευθεία ε.

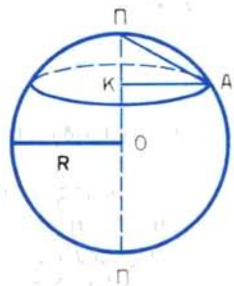
## 2.7 Πόλοι κύκλου σφαίρας.

Πόλοι κύκλου σφαίρας είναι τα σημεία στα οποία ο άξονας του κύκλου τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας.

Στο σχήμα 2.7 του κύκλου (Κ, ΚΑ) άξονας είναι η ευθεία ΠΠ΄ και πόλοι τα σημεία Π και Π΄.




Σχ. 2.6.




Σχ. 2.7.

## 2.8 Ιδιότητες των πόλων του κύκλου.

α) Κάθε πόλος τυχόντος κύκλου ισαπέχει από όλα τα σημεία του κύκλου αυτού.

β) Τα τόξα των μέγιστων κύκλων, που περιέχονται μεταξύ των πόλων ενός κύκλου σφαίρας και των σημείων του κύκλου αυτού, είναι ίσα.

## 2.9 Πολική απόσταση και σφαιρική ακτίνα κύκλου σφαίρας.

Η απόσταση κάθε σημείου ενός κύκλου σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου είναι σταθερή και λέγεται ***πολική απόσταση*** του κύκλου αυτού. Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει τον πόλο του κύκλου με το τυχόν σημείο του κύκλου αυτού, λέγεται ***σφαιρική ακτίνα*** του κύκλου. Π.χ. πολική απόσταση του κύκλου (Κ,ΚΑ) είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΠΑ (σχ. 2.7) και σφαιρική ακτίνα το τόξο ΠΑ του μέγιστου κύκλου ΠΑΠ΄.

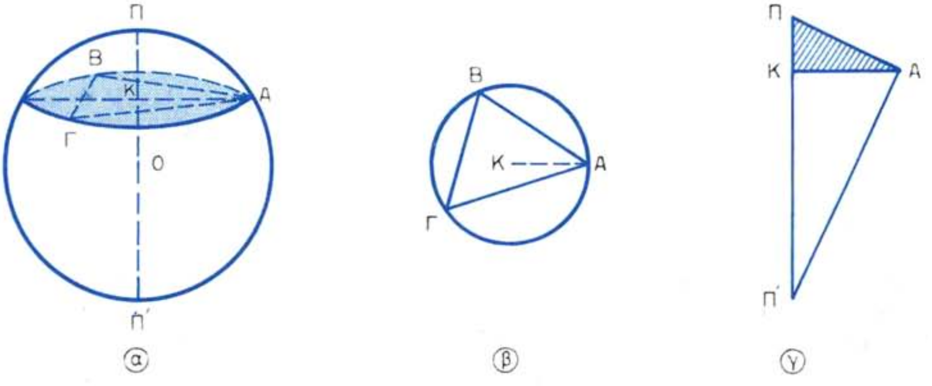
## 2.10 Σφαιρικός διαβήτης.

Για να χαράξομε επάνω στην επιφάνεια σφαίρας περιφέρειες κύκλου, χρησιμοποιούμε το ***σφαιρικό διαβήτη,*** ο οποίος είναι διαβήτης με καμπυλωμένα σκέλη.

## 2.11 Εύρεση της ακτίνας σφαίρας.

Έστω μια σφαίρα Ο [σχ. 2.11(α)] της οποίας θέλομε να υπολογίσομε την ακτίνα. Με πόλο τυχόν σημείο της Π και με ακτίνα (δηλαδή άνοιγμα του σφαιρικού διαβήτη) οποιαδήποτε γράφομε κύκλο επί της σφαίρας και επ' αυτού θεωρούμε τρία τυχαία σημεία, τα Α, Β, Γ. Ορίζομε με το διαβήτη τις αποστάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και με πλευρές τις αποστάσεις αυτές σχηματίζομε σε επίπεδο το τρίγωνο ΑΒΓ [σχ.211(β)].Στο τρίγωνο αυτό περιγράφομε κύκλο (άρα υπολογίζεται εύκολα η ακτίνα του). Ο κύκλος αυτός θα είναι ίσος με τον κύκλο ΑΒΓ της σφαίρας, άρα και οι ακτίνες των κύκλων αυτών θα είναι ίσες.

Ώστε του ορθογωνίου τριγώνου ΠΑΚ γνωρίζομε την ΠΑ (εκ κατασκευής) και την ΑΚ (ακτίνα του κύκλου). Κατασκευάζομε λοιπόν σε ένα επίπεδο ένα τρίγωνο ίσο με αυτό [σχ.211(γ)]και κατόπιν προεκτείνομε την ΠΚ ώσπου αυτή να τμήσει την εκ του Α κάθετη στην ΠΑ. Βλέπομε ότι αυτές τέμνονται στο Π΄. Η ΠΠ΄ θα είναι η διάμετρος της σφαίρας. Άρα το μισό της θα είναι η ζητούμενη ακτίνα της σφαίρας.




**Σχ. 2.11.**

## 2.12 Κατασκευή μέγιστου κύκλου από δύο σημεία.

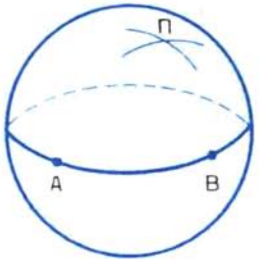
**Πρόβλημα.**

Να γραφεί στην επιφάνεια δεδομένης σφαίρας μέγιστος κύκλος που να διέρχεται από δύο γνωστά σημεία της, τα Α και Β.

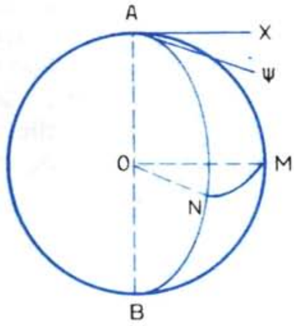
Με τα σημεία Α και Β ως πόλους και με ακτίνα ίση με τη χορδή ενός τεταρτημορίου ($R\sqrt{3}$ όπου R η ακτίνα της σφαίρας) γράφομε δυο μέγιστους κύκλους. Έστω Π το ένα από τα σημεία στα οποία τέμνονται οι κύκλοι αυτοί επί της σφαίρας. Με πόλο τώρα το σημείο Π και με ίδια ακτίνα γράφομε κύκλο, ο οποίος θα διέλθει από τα Α και Β (σχ. 2.12), γιατί οι ευθείες ΠΑ και ΠΒ είναι χορδές τεταρτημορίου.

## 2.13 Γωνία δύο τεμνόμενων τόξων. Σφαιρική γωνία.

Αν δύο τόξα ΑΜΒ και ΑΝΒ σφαίρας τέμνονται στα σημεία Α και Β και Αx και Αψ είναι οι εφαπτόμενες των τόξων στο Α, τότε η γωνία xΑψ λέγεται γωνία των δύο τεμνομένων τόξων (σχ. 2.13). Αν τα τόξα αυτά είναι τόξα μέγιστων κύκλων της σφαίρας, τότε η γωνία xΑψ λέγεται ***σφαιρική*** γωνία. Το σημείο Α λέγεται ***κορυφή*** της γωνίας και τα τόξα ΑΜΒ και ΑΝΒ ***πλευρές*** της γωνίας.




Σχ. 2.12.




Σχ. 2.13.

## 2.14 Ιδιότητες της σφαιρικής γωνίας.

α) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο δίεδρης γωνίας την οποία σχηματίζουν τα επίπεδα που περιέχουν τις πλευρές της.

β) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου μέγιστου κύκλου που περιλαμβάνεται μεταξύ των πλευρών της, όταν ο μέγιστος αυτός κύκλος έχει γραφεί με πόλο την κορυφή της (δηλαδή $\sphericalangle x A \psi = \overset{\frown}{MN}$, σχ. 2.13) και σφαιρική ακτίνα π/2.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

## ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

### 3.1 Ορισμός σφαιρικού τριγώνου.

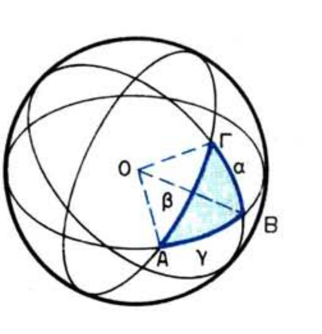
Θεωρούμε στην επιφάνεια σφαίρας τρία σημεία Α, Β, Γ, ευρισκόμενα στο ίδιο ημισφαίριο. Αν τα σημεία αυτά τα ενώσομε με τόξα ***μεγίστων*** κύκλων (που να βρίσκονται στο ίδιο ημισφαίριο), τότε το σχήμα που προκύπτει λέγεται ***σφαιρικό τρίγωνο.***

Το σφαιρικό τρίγωνο δηλαδή είναι το σχήμα, του οποίου οι τρείς πλευρές είναι τόξα μεγίστων κύκλων της ίδιας σφαίρας που βρίσκονται στο ίδιο ημισφαιριό της, δηλαδή είναι μικρότερα από 180°. Άρα μπορούμε να δώσομε τον εξής γενικό ορισμό:

Σφαιρικό τρίγωνο καλείται το μέρος της επιφάνειας σφαίρας, το οποίο περιέχεται μεταξύ τριών τόξων μεγίστων κύκλων της σφαίρας, εφόσον τα τόξα αυτά είναι μικρότερα από την ημιπεριφέρεια.

Επάνω στο σφαιρικό τρίγωνο θεμελιώνεται όλη η θεωρία της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας, της οποίας η γνώση είναι απαραίτητη, τόσο σε αυτούς που ασχολούνται με την Αστρονομία όσο και στους πλοίαρχους του εμπορικού και του πολεμικού Ναυτικού.

Στο σχήμα 3.1 παρατηρούμε τρεις μέγιστους κύκλους της σφαίρας, οι οποίοι τεμνόμενοι σχηματίζουν το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Αν την ακτίνα της σφαίρας αυτής τη θεωρήσομε ίση με τη μονάδα μήκους και ενώσομε το κέντρο Ο της σφαίρας με τα σημεία Α, Β, Γ, θα έχομε την τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ.




**Σχ. 3.1.**

Στην τρίεδρη αυτή γωνία λέμε ότι αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Πράγματι· οι ακμές και οι έδρες της τρίεδρης ορίζουν στην επιφάνεια της σφαίρας το παραπάνω σφαιρικό τρίγωνο. Οι πλευρές (ΑΒ) = γ, (ΒΓ) = α και (ΑΓ) = β του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ έχουν το ίδιο μέτρο γ,α,β αντίστοιχα με τις έδρες (επίπεδες γωνίες) (∢ ΑΟΒ) = γ, (∢ ΒΟΓ) = α και (∢ ΓΟΑ) = β της στερεάς γωνίας. Εδώ παρατηρούμε ότι ***οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου μετρούνται σε μοίρες.*** Οι γωνίες τώρα Α,Β,Γ του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ έχουν το ίδιο μέτρο αντίστοιχα με τις δίεδρες Γ-ΟΑ-Β, Α-ΟΒ-Γ και Β-ΟΓ-Α της τρίεδρης Ο.ΑΒΓ.

***Σημείωση:*** Επειδή βάσει του ορισμού οι πλευρές κάθε σφαιρικού τριγώνου είναι τόξα μεγίστων κύκλων της σφαίρας, αν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι τόξο μικρού κύκλου, τότε ασφαλώς δεν θα πρόκειται για σφαιρικό τρίγωνο.

## 3.2 Αντιστοιχίες των στοιχείων σφαιρικού τριγώνου και των στοιχείων μιας τρίεδρης γωνίας.

Με βάση τα παραπάνω παραθέτομε ***πίνακα αντιστοιχίας*** των ιδιοτήτων ενός σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ και των ιδιοτήτων της αντίστοιχης τρίεδρης στερεάς γωνίας Ο.ΑΒΓ (οι οποίες θεωρούνται γνωστές από τη Στερεομετρία, μερικές μάλιστα αναφέρονται στα προηγούμενα), εφόσον παραστήσομε με α,β,γ τα μέτρα των πλευρών του σφαιρικού τριγώνου και με Α, Β, Γ τα μέτρα των γωνιών του ∢Α, ∢Β, ∢Γ.

| **Τρίεδρη στερεά γωνία** | **Σφαιρικό τρίγωνο** |
|---|---|
| 1) Έδρα. | 1) Πλευρά. |
| 2) Δίεδρη. | 2) Γωνία. |
| 3) Κάθε έδρα είναι μικρότερη από 180°. | 3) $0 < \alpha < 180°$ (κυκλικά). |
| 4) Το άθροισμα των εδρών είναι μικρότερο από 360° (4 ορθές). | 4) Άθροισμα πλευρών τριγώνου μικρότερο από 360°: $\alpha + \beta + \gamma < 360°$. |
| 5) Κάθε έδρα είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων εδρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους. | 5) Κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους. |
| 6) Κάθε δίεδρη είναι μικρότερη από 180°. | 6) Κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180°. |
| 7) Το άθροισμα των διέδρων γωνιών περιέχεται μεταξύ των 180° και 540°. | 7) Το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου περιέχεται μεταξύ 180° και 540°. $180° < A + B + \Gamma < 540°$. |
| 8) Κάθε δίεδρη αν αυξηθεί κατά 180° είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων διέδρων. | 8) Κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου αν αυξηθεί κατά 180° γίνεται μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του $A + 180° > B + \Gamma$ (κυκλικά). |

| | |
|---|---|
| 9) Απέναντι της μεγαλύτερης έδρας βρίσκεται η μεγαλύτερη δίεδρη και αντίστροφα. | 9) Απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του σφαιρικού τριγώνου και αντίστροφα. |
| 10) Αν το ημιάθροισμα δύο εδρών είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 90°, τότε και το ημιάθροισμα των αντίστοιχων διέδρων είναι μεγαλύτερο η αντίστοιχα μικρότερο από 90°. | 10) Αν $\frac{\alpha+\beta}{2} > 90^\circ \Longrightarrow \frac{A+B}{2} > 90^\circ$ <br> $\frac{\alpha+\beta}{2} < 90^\circ \Longrightarrow \frac{A+B}{2} < 90^\circ$ |

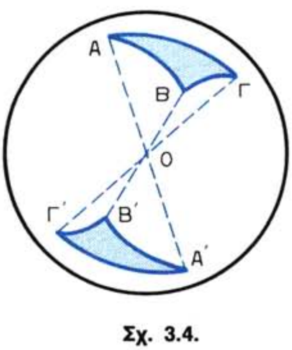
## 3.3 Κύρια στοιχεία σφαιρικού τριγώνου.

Κύρια στοιχεία σφαιρικού τριγώνου ονομάζομε τα μέτρα των τριών πλευρών του α, β, γ και τα μέτρα των τριών γωνιών του Α, Β, Γ. Τα έξι αυτά κύρια στοιχεία εκφράζονται όλα σε μοίρες ή όλα σε ακτίνια κλπ.

## 3.4 Συμμετρικά σφαιρικά τρίγωνα.

Δύο σφαιρικά τρίγωνα της ίδιας σφαίρας λέγονται ***συμμετρικά,*** όταν οι αντίστοιχες κορυφές τους είναι σημεία αντιδιαμετρικά της σφαίρας (σχ. 3.4). Τα συμμετρικά τρίγωνα έχουν αντίστοιχες τρίεδρες γωνίες κατά κορυφή.

Στα συμμετρικά σφαιρικά τρίγωνα οι αντίστοιχες πλευρές είναι ίσες καθώς και οι αντίστοιχες γωνίες, χωρίς γενικά τα τρίγωνα αυτά να είναι ίσα μεταξύ τους, γιατί δεν εφαρμόζουν (αφού οι αντίστοιχες τρίεδρές τους, ως κατά κορυφή δεν είναι ίσες).




Σχ. 3.4.

## 3.5 Ισότητα σφαιρικών τριγώνων.

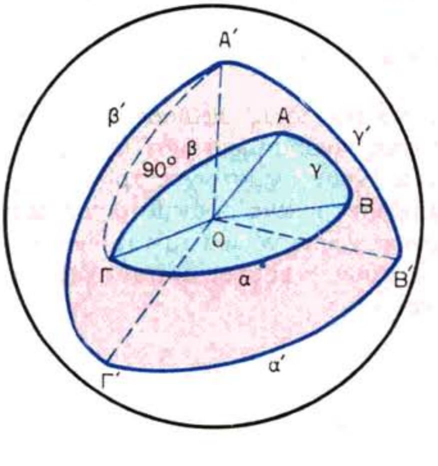
Και εδώ η ισότητα των σφαιρικών τριγώνων της ίδιας σφαίρας ανάγεται στην ισότητα στερεών τριέδρων γωνιών της οποίας οι αποδείξεις θεωρούνται γνωστές από τη Στερεομετρία.

Δύο σφαιρικά τρίγωνα της ίδιας σφαίρας (ή ίσων σφαιρών) είναι ίσα (ή συμμετρικά) όταν έχουν:

– Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες.
– Μία γωνία ίση και τις πλευρές που την περιέχουν ίσες.
– Και τις τρεις πλευρές ίσες.
– Και τις τρεις γωνίες ίσες.

### 3.6 Πολικά σφαιρικά τρίγωνα.

Θεωρούμε τις παραπληρωματικές τρίεδρες Ο.ΑΒΓ και Ο΄.Α΄Β΄Γ΄ (§ 1.5, σχ. 1.5) και έστω ότι η κορυφή τους Ο είναι το κέντρο σφαίρας ακτίνας R. Τότε οι ακμές τους ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟΓ΄ θα τέμνουν την επιφάνεια της σφαίρας αυτής έστω στα αντίστοιχα σημεία Α, Β, Γ, Α΄, Β΄ Γ΄. Ορίζονται έτσι τα σφαιρικά τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ τα οποία βεβαίως αντιστοιχούν στις παραπάνω τρίεδρες (σχ. 3.6). Τα τρίγωνα αυτά ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ που αντιστοιχούν στις παραπληρωματικές τρίεδρες Ο.ΑΒΓ και Ο.Α΄Β΄Γ΄ καλούνται ***πολικά τρίγωνα.***




**Σχ. 3.6.**

Είδαμε στα προηγούμενα ότι οι έδρες μιας τρίεδρης γωνίας αντιστοιχούν με τις πλευρές του αντίστοιχου σφαιρικού τριγώνου και οι δίεδρες της τρίεδρης με τις γωνίες του σφαιρικού τριγώνου. Επομένως αν α, β, γ, α΄, β΄, γ΄ είναι τα μέτρα των επίπεδων γωνιών (εδρών) των παραπάνω τριέδρων και Α, Β, Γ, Α΄, Β΄, Γ΄ τα μέτρα των διέδρων γωνιών τους, τότε α, β, γ, α΄, β΄, γ΄ θα είναι τα μέτρα των πλευρών και Α, Β, Γ, Α΄, Β΄, Γ΄ θα είναι τα μέτρα των γωνιών των αντίστοιχων σφαιρικών πολικών τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 3.6). Επειδή για τις παραπληρωματικές τρίεδρες ισχύουν οι σχέσεις του σχήματος 1.5 οι ίδιες σχέσεις θα ισχύουν και για τα πολικά τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ δηλαδή:

| | |
|---|---|
| Α + α΄ = 2 ορθές | Α΄ + α = 2 ορθές |
| Β + β΄ = 2 ορθές | Β΄ + β = 2 ορθές |
| Γ + γ΄ = 2 ορθές | Γ΄ + γ = 2 ορθές |

Άρα: Στα πολικά τρίγωνα οι πλευρές του ενός είναι παραπληρώματα των γωνιών του άλλου.

### 3.7 Κατασκευή πολικών τριγώνων.

Αν παρατηρήσομε το σχήμα 3.6 βλέπομε ότι την ΟΑ΄ την έχομε φέρει κάθετη στην έδρα ΒΟΓ. Άρα η ΟΑ΄ είναι ***άξονας*** του κύκλου που μέρος του είναι το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ} = α$. Το Α΄ λοιπόν είναι ***πόλος*** του $\overset{\frown}{ΒΓ} = α$. Είναι δε $\overset{\frown}{Α΄Γ} = \overset{\frown}{Α΄Β} = 90°$ δηλαδή τα τόξα $\overset{\frown}{Α΄Γ}$ και $\overset{\frown}{Α΄Β}$ είναι τεταρτοκύκλια, γιατί ο κύκλος, του οποίου μέρος είναι το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ} = α$ (πλευρά σφαιρικού τριγώνου) είναι μέγιστος κύκλος της σφαίρας.

Ομοίως το Γ΄ είναι πόλος του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ} = γ$ και το Β΄ πόλος του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ} = β$, συνεπώς και $\overset{\frown}{Γ΄Α} = \overset{\frown}{Γ΄Β} = 90°$ και $\overset{\frown}{Β΄Α} = \overset{\frown}{Β΄Γ} = 90°$.

Έτσι για να κατασκευάσομε το πολικό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, λαμβάνομε σφαιρική ακτίνα ίση με 90° και με πόλους τα Α, Β, Γ γράφομε τόξα, τα οποία τεμνόμενα μας δίνουν τα αντίστοιχα σημεία Α΄Β΄Γ΄.

### 3.8 Ιδιότητες πολικών τριγώνων.

Για τα πολικά σφαιρικά τρίγωνα ισχύουν οι εξής ιδιότητες (μερικές ήδη τις έχομε αναφέρει στα προηγούμενα).

1η. Αν ένα σφαιρικό τρίγωνο είναι πολικό ενός άλλου, τότε και το δεύτερο είναι πολικό του πρώτου.

2η. Στα πολικά τρίγωνα οι πλευρές του ενός είναι παραπληρώματα των γωνιών του άλλου.

3η. Οι τρίεδρες γωνίες που αντιστοιχούν σε δύο πολικά τρίγωνα είναι παραπληρωματικές.

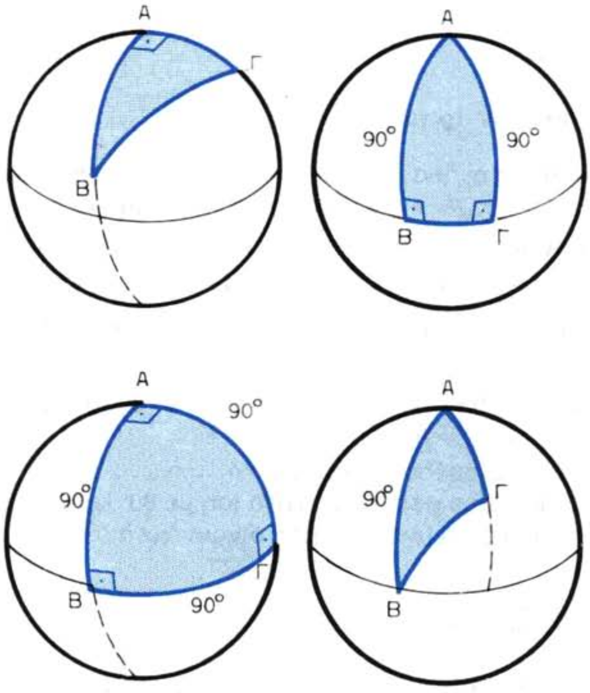
### 3.9 Είδη σφαιρικών τριγώνων.

Τα σφαιρικά τρίγωνα μπορεί να έχουν μία ή δύο ή τρεις γωνίες ορθές, οπότε λέγονται αντίστοιχα ***ορθογώνια*** ή ***δισορθογώνια*** ή ***τρισορθογώνια*** (σχ. 3.9α).

Το σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου μία πλευρά έχει μέτρο 90° ονομάζεται ***ορθόπλευρο.*** Αν το σφαιρικό τρίγωνο έχει δύο ή τρεις πλευρές με μέτρο 90°, τότε αυτό λέγεται αντίστοιχα ***δισορθόπλευρο*** ή ***τρισορθόπλευρο*** (σχ. 3.9α). Επίσης, όπως και στα επίπεδα τρίγωνα έτσι και στα σφαιρικά, έχομε ισόπλευρα (όλες οι πλευρές ίσες), ισοσκελή (δύο πλευρές ίσες) και σκαλινά σφαιρικά τρίγωνα. ***Τυχόν*** (ή ***πλάγιο*** ή ***κοινό***) σφαιρικό τρίγωνο λέγεται εκείνο που δεν έχει αναγκαστικά μία πλευρά ή μία γωνία μέτρου 90°.

#### *3.9.1 Εφαρμογή.*

Να δειχθεί ότι σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, όπου $\sphericalangle Α = 90°$, ισχύουν οι εξής 10 ***βασικοί τύποι*** του ορθογωνίου τριγώνου.




Σχ. 3.9α.

| | |
|---|---|
| 1) ημβ = ημΒημα | 6) ημγ = ημΓημα |
| 2) εφβ = εφΒημγ | 7) εφγ = εφΓημβ |
| 3) εφβ = συνΓεφα | 8) εφγ = συνΒεφα |
| 4) συνα = συνγσυνβ | 9) συνα = σφΒσφΓ |
| 5) συνΒ = ημΓσυνβ | 10) συνΓ = ημΒσυνγ |

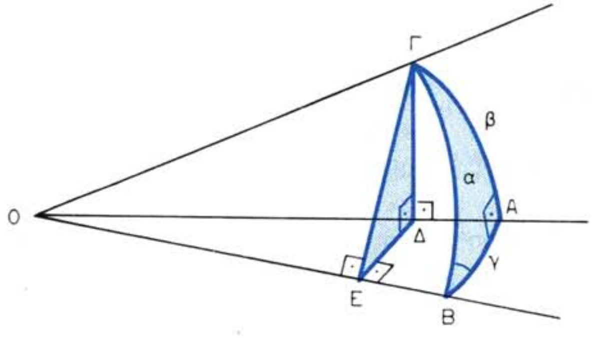
***Λύση.***

Θεωρούμε την αντίστοιχη τρίεδρη Ο.ΑΒΓ του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ με $\sphericalangle$Α = 90°. Έστω α < 90° και β < 90°.

Από την κορυφή Γ φέρομε ένα επίπεδο κάθετο στην ΟΒ που τέμνει την ΟΑ στο Δ και την ΟΒ στο Ε (σχ. 3.9β)

Επειδή ΟΕ$\perp$επιπ. ΓΔΕ $\Longrightarrow$ ΟΕ$\perp$ΕΓ και ΟΕ$\perp$ΕΔ. Άρα τα τρίγωνα ΓΕΟ και ΔΕΟ είναι ορθογώνια. Επίσης η γωνία ΓΕΔ είναι αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης Γ-ΟΒ-Α, άρα είναι ίση με το μέτρο της γωνίας Β του σφαιρικού τριγώνου. Επειδή το επίπεδο ΓΔΕ$\perp$ΟΕ $\Longrightarrow$ επιπ. ΓΔΕ$\perp$επιπ. ΟΒΑ (διότι περιέχει την ΟΕ). Τα επίπεδα ΟΓΑ και ΓΔΕ που είναι κάθετα στο επίπεδο ΟΒΑ τέμνονται κατά την ΓΔ.

Άρα ΓΔ $\perp$ ΟΒΑ. Επίσης τα τρίγωνα ΓΔΟ και ΓΔΕ είναι ορθογώνια στο Δ.




Σχ. 3.96.

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΔΟ, ΓΔΕ και ΓΕΟ έχομε:

$$ημβ = \frac{ΔΓ}{ΟΓ} = \frac{ΔΓ}{ΕΓ}\,\frac{ΕΓ}{ΟΓ} = ημΒημα \qquad (1)$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΔΟ, ΓΔΕ και ΕΕΟ:

$$εφβ = \frac{ΔΓ}{ΟΔ} = \frac{ΔΓ}{ΕΔ}\,\frac{ΕΔ}{ΟΔ} = εφΒημγ \qquad (2)$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΕΟ, ΔΕΟ και ΓΔΟ:

$$συνα = \frac{ΟΕ}{ΟΓ} = \frac{ΟΕ}{ΟΔ}\,\frac{ΟΔ}{ΟΓ} = συνγσυνβ \qquad (4)$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΟ, ΓΔΕ και ΓΕΟ:

$$εφγ = \frac{ΕΔ}{ΟΕ} = \frac{ΕΔ}{ΕΓ}\,\frac{ΕΓ}{ΟΕ} = συνΒεφα \qquad (8)$$

Αν φέρομε τώρα δια του Β ένα επίπεδο κάθετο στην ΟΓ και εργασθούμε ανάλογα, παίρνομε άλλο ένα σύνολο τεσσάρων τύπων που μπορούν να εξαχθούν και από τους παραπάνω εναλλάσσοντας το β με το γ και το Β με Γ.

Έτσι ο τύπος (1) δίνει τον (6), ο (2) τον (7) και ο (8) τον (3). Ο (4) δεν δίνει τίποτε.

Πολλαπλασιάζοντας τους (2) και (7) έχομε:

$$εφβεφγ = εφΒεφΓημβημγ \Longrightarrow \frac{ημβ}{συνβ}\,\frac{ημγ}{συνγ} = εφΒεφΓημβημγ$$

και λόγω του (4) $\Longrightarrow \quad \frac{1}{συνα} = εφΒεφΓ \quad \Longrightarrow \quad συνα = σφΒσφΓ$

ο οποίος είναι ο (9)

Πολλαπλασιάζοντας τους (6) και (8) έχομε:

$$ημγσυνBεφα = εφγημΓημα \implies$$

$$συνB = \frac{εφγημΓημα}{ημγεφα} = \frac{ημΓσυνα}{συνγ} = \frac{ημΓ(συνβσυνγ)}{συνγ}$$

$$\implies συνB = ημΓσυνβ$$

που είναι ο (5)

Πολλαπλασιάζοντας τους (1) και (3) με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ο (10).

***Σημείωση:*** Εύκολα αποδεικνύονται τα παραπάνω όταν $α > 90°$ και $β > 90°$ ή όταν $α > 90°$ και $β < 90°$.

## 3.10 Σφαιρική υπεροχή.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο η διαφορά που βρίσκομε, αν αφαιρέσομε 180° από το άθροισμα των τριών γωνιών του, λέγεται ***σφαιρική υπεροχή*** του τριγώνου και παριστάνεται με 2S. Άρα:

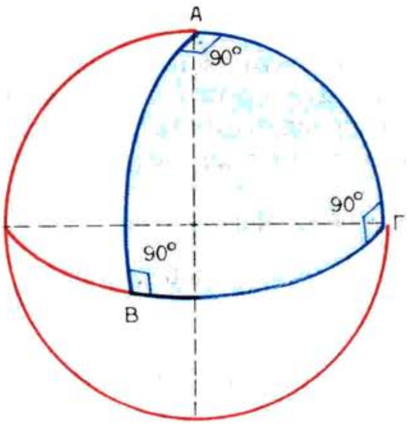
$$2S = A + B + Γ - 180° \qquad (1)$$

Θεωρούμε τώρα ένα τρισορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 3.10). Όπως είπαμε στα προηγούμενα, την ακτίνα της σφαίρας, στην οποία ανήκει ένα σφαιρικό τρίγωνο, τη θεωρούμε ίση με τη μονάδα.

Όπως εύκολα αντιλαμβανόμαστε και από το σχήμα 3.10 το εμβαδόν ενός τρισορθογώνιου τριγώνου είναι ίσο με το $^1/_8$ της επιφάνειας της σφαίρας (γιατί αυτή χωρίζεται σε 8 ίσα σφαιρικά τρισορθογώνια τρίγωνα).

Στο τρισορθογώνιο τρίγωνο λοιπόν έχομε $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle Γ = π/2$. Άρα η (1) γράφεται:

$$2S = \frac{π}{2} \qquad (2)$$




Σχ. 3.10.

Γνωρίζομε ότι η επιφάνεια της σφαίρας είναι $E = 4\pi r^2$, όπου r η ακτίνα της. Και επειδή θεωρούμε $r = 1$, η επιφάνεια της σφαίρας γράφεται:

$$E = 4\pi.1^2 = 4\pi \qquad (3)$$

Το εμβαδόν τότε του σφαιρικού τριγώνου θα είναι:

$$\frac{E}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

και λόγω των (2) και (4): $\quad \dfrac{E}{8} = 2S$

***Συνεπώς:*** Η σφαιρική υπεροχή κάθε σφαιρικού τριγώνου ισούται προς το εμβαδόν του, αν ως μονάδα επιφανειών θεωρηθεί το εμβαδόν τρισορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου.

Επειδή το τρισορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο που λαμβάνεται ως μονάδα μετρήσεως των επιφανειών είναι το $^1/_8$ της επιφάνειας της σφαίρας στην οποία ανήκει το τρίγωνο, συνάγομε το εξής:

***Πόρισμα:*** Το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου σε τετραγωνικά μέτρα, ισούται με το γινόμενο της σφαιρικής του υπεροχής επί το ένα όγδοο του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας.

Έτσι αν r είναι η ακτίνα της σφαίρας και Α, Β, Γ οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου σε ορθές γωνίες, τότε:

Εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου:

$$(A + B + \Gamma - 2)\, \frac{1}{8} 4\pi r^2 = \text{σφαιρική υπεροχή} \cdot \frac{1}{2} \pi r^2$$

### *3.10.1 Εφαρμογή.*

Οι γωνίες σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ είναι $\sphericalangle A = 110°$, $\sphericalangle B = 165°$, $\sphericalangle \Gamma = 60°$. Αν η ακτίνα της σφαίρας στην οποία ανήκει είναι 2m, να υπολογισθεί το εμβαδόν του.

***Λύση.***

Έχομε $\quad \sphericalangle A = \dfrac{110}{90}$ ορθ., $\quad \sphericalangle B = \dfrac{165}{90}$ ορθ., $\quad \sphericalangle \Gamma = \dfrac{60}{90}$ ορθ.

Η σφαιρική του υπεροχή θα είναι:

$$2S = \frac{110}{90} + \frac{165}{90} + \frac{60}{90} - 2 = \frac{155}{90} = \frac{31}{18}$$

και άρα:

$$\text{εμβ. σφαιρ. τριγ. ΑΒΓ} = \text{σφαιρ. υπερ} \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{31}{18} \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = \frac{31}{9} \pi = 10{,}821 \text{ m}^2$$

## 3.11 Ασκήσεις.

1) Να δείξετε ότι αν μία γωνία σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερη από 180°, τότε η απέναντι της πλευρά είναι επίσης μεγαλύτερη από 180° και αντιστρόφως.
2) Μπορεί να υφίσταται σφαιρικό τρίγωνο όταν οι πλευρές του είναι:
   α) (30°, 40°, 100°)
   β) (95°, 135°, 135°)
   γ) (110°, 123°, 128°)
   δ) (84°, 105°, 170°)
   ε) (50°, 70°, 100°)
   στ) (35°, 65°, 120°)
   ζ) (150°, 100°, 120°);
3) Μπορεί να υφίσταται σφαιρικό τρίγωνο όταν οι γωνίες του είναι:
   α) (50°, 60°, 65°)
   β) (55°, 65°, 65°)
   γ) (90°, 90°, 90°)
   δ) (120°, 120°, 120°)
   ε) (175°, 170°, 130°);
4) Είναι δυνατόν να υφίσταται σφαιρικό τρίγωνο όταν οι γωνίες του είναι:
   α) (60°, 70°, 90°)
   β) (60°, 115°, 145°)
   γ) (60°, 20°, 90°);
5) Αν ένα σφαιρικό τρίγωνο έχει πλεύρές (90°, 90°, 60°) να υπολογίσετε τις γωνίες του.
6) Αν ένα σφαιρικό τρίγωνο έχει γωνίες (90°, 90°, 90°) να υπολογίσετε τις πλευρές του.
7) Να δείξετε ότι το πολικό τρίγωνο ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου είναι ένα μονορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο και αντιστρόφως.
8) Να δείξετε ότι ένα τρισορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο είναι πολικό του εαυτού του (δηλαδή συμπίπτει με το πολικό του).
9) Να δείξετε ότι σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος δυο οποιωνδήποτε γωνιών και της τρίτης γωνίας είναι μικρότερη από 180° (π.χ. $A + B - \Gamma < 180°$).

   ***Υπόδειξη:*** Εφαρμόστε στις πλευρές του πολικού του το θεώρημα:
   «Το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε πλευρών σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά».
10) Να δείξετε ότι σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο το άθροισμα των δύο γωνιών του (εκτός της ορθής) είναι μικρότερο από 270°.
11) Να δείξετε ότι σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο η διαφορά των δύο γωνιών του (εκτός της ορθής) είναι μικρότερη από 90°.
12) Να υπολογίσετε τα κύρια στοιχεία του σφαιρικού τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ που είναι πολικό του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ για το οποίο έχομε:
    $\alpha = 43°\ 18'$, $\beta = 33°\ 49'$ και $\gamma = 46°\ 28'$
    $A = 67°\ 19'$, $B = 48°\ 29'$ και $\Gamma = 77°\ 17'$
13) Να δείξετε ότι κάθε μία από τις γωνίες σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το S (όπου 2S η σφαιρική υπεροχή του).
14) Αν 2τ είναι η περίμετρος και 2S η σφαιρική υπεροχή τυχόντος σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι ισχύει ο τύπος:

$$\sigma\varphi\,\frac{\tau}{2} = \sqrt{\sigma\varphi\,\frac{S}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{A-E}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B-E}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-E}{2}}$$

και δια πολώσεως ο τύπος:

$$\varepsilon\varphi\,\frac{S}{2} = \sqrt{\varepsilon\varphi\,\frac{\tau}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\tau-\alpha}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\tau-\beta}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\tau-\gamma}{2}}$$

15) Τί μέρος της επιφάνειας της σφαίρας καταλαμβάνει σφαιρικό τρίγωνο που έχει γωνίες 64°, 68° και 84°;
16) Να υπολογισθούν οι γωνίες της βάσεως ισοσκελούς σφαιρικού τριγώνου με γωνία κορυφής 54° που είναι ισοδύναμο με τα $^2/_3$ ενός τρισορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου της ίδιας σφαίρας.

## 3.12 Μερικές χρήσιμες ιδιότητες των σφαιρικών τριγώνων.

Αναφέρομε εδώ ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των σφαιρικών τριγώνων. Για όσους ενδιαφέρονται περισσότερο, παραθέτομε και τις σχετικές αποδείξεις αν και προϋποθέτουν βασικές γνώσεις από τη Στερεομετρία.

1) Τα ύψη κάθε σφαιρικού τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

***Λύση.***

Αν Η η τομή των δύο υψών ΑΔ και ΓΖ (σχ. 3.12α), τότε, επειδή ΑΔ ⊥ ΒΓ ⟹ επιπ. ΟΑΔ ⊥ επιπ. ΟΒΓ. Επίσης ΓΖ ⊥ ΑΒ ⟹ επιπ. ΟΓΖ ⊥ επιπ. ΟΑΒ. Τα επίπεδα ΟΑΔ και ΟΓΖ τέμνονται κατά την ΟΗ. Άρα και το επίπεδο ΟΒΕ που διέρχεται δια της ΟΗ θα είναι κάθετο στο επίπεδο ΟΑΓ (βάσει γνωστής ιδιότητας της Στερεομετρίας), δηλαδή το ΒΕ είναι ύψος και διέρχεται δια του Η.

2) Η κάθετος που άγεται από την κορυφή Α ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) διχοτομεί τη βάση ΒΓ και τη γωνία Α.

***Λύση.***

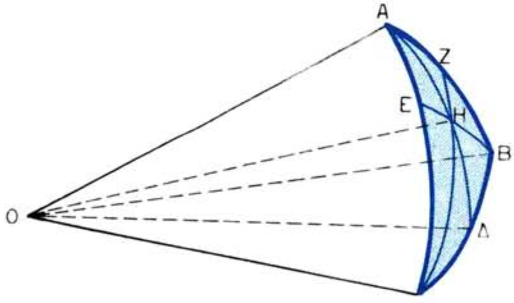
Αν Μ είναι το σημείο τομής της καθέτου αυτής με την πλευρά ΒΓ, τα ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΓΜ θα είναι ίσα.

3) Οι διάμεσοι κάθε σφαιρικού τριγώνου διέρχονται από το αυτό σημείο.

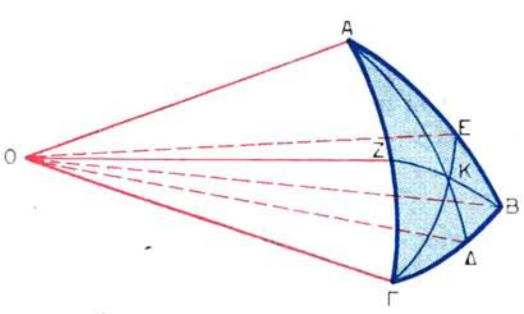
***Λύση.***

Έστω ότι οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΖ τέμνονται στο Κ και Ο το κέντρο της σφαίρας (σχ. 3.12β). Οι ΟΔ και ΟΖ θα είναι αντίστοιχα διχοτόμοι των γωνιών ΒΟΓ και ΑΟΓ. Τα επίπεδα ΟΑΔ και ΟΒΖ τέμνονται κατά την ΟΚ. Αλλά και το επίπεδο ΟΓΕ που ορίζεται από την ΟΓ και τη διχοτόμο ΟΕ της έδρας ΑΟΒ, διέρχεται από την ΟΚ.

Το επίπεδο ΟΓΚ ορίζει επάνω στο σφαιρικό τρίγωνο την τρίτη διάμεσο ΓΕ που διέρχεται από το Κ αφού αυτό βρίσκεται στο επίπεδο ΟΓΕ.




**Σχ. 3.12α.**




**Σχ. 3.12β.**

4) Οι διχοτόμοι των γωνιών σφαιρικού τριγώνου διέρχονται από το αυτό σημείο.

***Λύση.***

Αφού τα ημιεπίπεδα που διχοτομούν τις δίεδρες της αντίστοιχης τρίεδρης του σφαιρικού τριγώνου, διέρχονται από την ίδια ημιευθεία ΟΧ (που βρίσκεται στο εσωτερικό της τρίεδρης), τότε και τα ίχνη των ημιεπιπέδων αυτών στο σφαιρικό τρίγωνο (δηλαδή οι διχοτόμοι) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

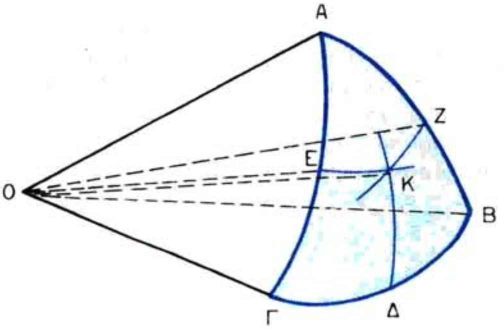
5) Οι μεσοκάθετες στις πλευρές σφαιρικού τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

***Λύση.***

Έστω Κ η τομή των δύο μεσοκαθέτων ΔΚ και ΕΚ (σχ. 3.12γ). Τότε η ΟΚ θα είναι η τομή των επιπέδων ΟΔΚ και ΟΕΚ που διέρχονται από τις διχοτόμους ΟΔ και ΟΕ των γωνιών ΒΟΓ και ΑΟΓ και αντίστοιχα καθέτων στα επίπεδα των γωνιών αυτών. Συνεπώς και το επίπεδο που διέρχεται από τη διχοτόμο ΟΖ της γωνίας ΑΟΒ και είναι κάθετο στο επίπεδο της γωνίας αυτής διέρχεται επίσης από την ΟΚ.

Άρα το επίπεδο ΟΖΚ είναι κάθετο στο επίπεδο ΟΑΒ. Άρα το τόξο ΖΚ (μέγιστου κύκλου) είναι κάθετο στην πλευρά ΑΒ.

Συνεπώς το ΖΚ είναι μεσοκάθετος στην πλευρά ΑΒ.




**Σχ. 3.12γ.**

## 3.13 Λυμένες ασκήσεις.

17) Αν οι δυο πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές, να δειχθεί ότι:

α) οι απέναντι τους γωνίες είναι παραπληρωματικές.

β) Η διάμεσος, που αντιστοιχεί στην τρίτη πλευρά, είναι $90^\circ$ και

γ) η διάμεσος αυτή διχοτομεί την γωνία των δύο άλλων (παραπληρωματικών) πλευρών.

***Λύση.***

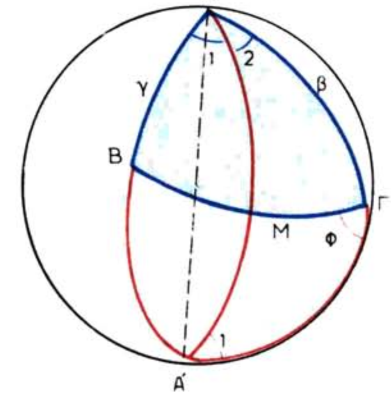
α) Έστω $\gamma + \beta = 2$ ορθ. Κάθε μέγιστος κύκλος που διέρχεται από το Α διέρχεται και από το αντιδιαμετρικό του Α΄. Άρα οι πλευρές β και γ προεκτεινόμενες θα διέλθουν από το Α΄ και θα έχομε $\widehat{ΓΑ'} + \widehat{ΓΑ} = 2$ορθ. (σχ. 3.13α).

Έχομε λοιπόν $\gamma = \widehat{A'\Gamma}$ και $\beta = \widehat{A'B}$ ως παραπληρωματικές του $\gamma$. Άρα τα σφαιρικά τρίγωνα ΑΒΓ και Α'ΒΓ έχουν ίσες μία προς μία τις πλευρές τους.

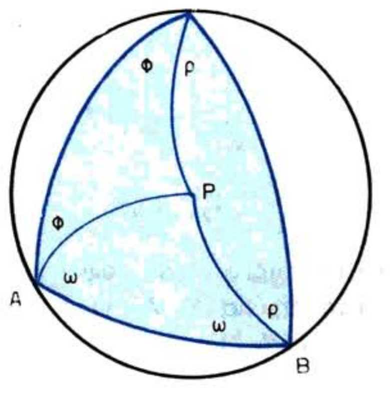
Άρα $\sphericalangle B = \varphi$. Αλλά $\varphi + \Gamma = 2$ ορθ. άρα και $B + \Gamma = 2$ ορθ.

β) Έστω Μ το μέσο της πλευράς α. Η διάμεσος $\widehat{AM}$, όταν προεκταθεί, διέρχεται από το Α'. Τα σφαιρικά τρίγωνα ΑΒΜ και Α'ΓΜ έχουν $\widehat{\Gamma M} = \widehat{BM}$, $\widehat{A'\Gamma} = \widehat{AB}$ και τις γωνίες $\varphi$ και Β ίσες. Άρα είναι ίσα και ΑΜ = ΜΑ' και επειδή $\widehat{AMA'}$ = ημιπεριφέρεια μέγιστου κύκλου, έπεται ότι $\widehat{AM} = 90^\circ$.

γ) Από τα ίσα σφαιρικά τρίγωνα ΑΒΜ και Α'ΓΜ έχομε ακόμα ότι $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_1$. Όμως $\sphericalangle A'_1 = \sphericalangle A_2$ (διότι η ΑΑ' είναι διάμετρος της σφαίρας και οι γωνίες αυτές σχηματίζονται από τους μέγιστους κύκλους ΑΜΑ' και ΑΓΑ'). Άρα $\sphericalangle A'_1 = \sphericalangle A_2$.




Σχ. 3.13α.




Σχ. 3.13β.

18) Σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε περιφέρεια και διατηρεί σταθερή τη βάση του ΑΒ, ενώ η κορυφή του Γ γράφει την περιφέρεια. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των γωνιών της βάσεως, ελαττωμένο κατά τη γωνία της κορυφής, παραμένει σταθερό.

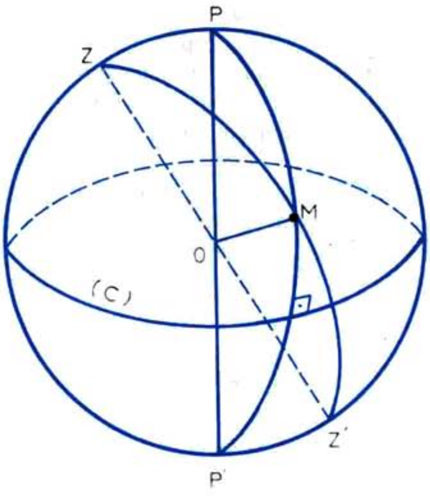
***Λύση.***

Από τον πόλο Ρ της περιγεγραμμένης περιφέρειας φέρομε τρία τόξα $\widehat{PA}$, $\widehat{PB}$, $\widehat{P\Gamma}$ μεγίστων κύκλων (σχ. 3.13β). Το τρίγωνο διαιρείται έτσι σε τρία ισοσκελή σφαιρικά τρίγωνα, διότι $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{P\Gamma}$ και άρα: $A + B - \Gamma = \omega + \varphi + \omega + \rho - \varphi - \rho = 2\omega =$ σταθερό.

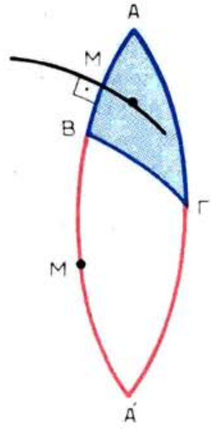
19) Από σημείο Μ, που δεν ταυτίζεται με τους πόλους περιφέρειας (c) μέγιστου κύκλου σφαίρας, διέρχεται μια μόνο περιφέρεια μέγιστου κύκλου κάθετη στη (c). Η περιφέρεια αυτή διέρχεται και από τον πόλο της (c).

***Λύση.***

Έστω Ρ και Ρ' οι πόλοι της περιφέρειας (c) και Μ ένα σημείο της σφαίρας (σχ. 3.13γ). Φέρω την ΟΜ που είναι πλάγια στο επίπεδο της (c). Ο μέγιστος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Ρ,Ρ' και Μ είναι κάθετος στον (c) γιατί τα επίπεδα τους είναι κάθετα. Έστω ότι υπάρχει και άλλος μέγιστος κύκλος ΖΜΖ' διερχόμενος δια του Μ και κάθετος στον (c). Το επίπεδο τότε ΖΜΖ' θα ήταν κάθετο στο επίπεδο του (c) και τότε από την ευθεία ΟΜ θα διέρχονταν δυο κάθετα επίπεδα επί τον (c). Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί η ΟΜ είναι πλάγια προς το επίπεδο (c).




Σχ. 3.13γ.




Σχ. 3.13δ.

20) Οι πλευρές β και γ σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Α΄. Αν Ο ο πόλος της περιγεγραμμένης περιφέρειας στο σφαιρικό τρίγωνο και Μ το μέσο του τόξου $\widehat{A'B}$, να δείξετε ότι $\widehat{MO} = 90^\circ$.

***Λύση.***

Ο μέγιστος κύκλος που διέρχεται από το Ο τέμνει την πλευρά γ κάθετα στο μέσο της Μ΄.
Ο μέγιστος κύκλος ΑΜ΄Α΄ περιέχει τον πόλο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Ο και Μ΄ (διότι οι δυο αυτοί μέγιστοι κύκλοι είναι κάθετοι) (σχ. 3.13δ).

Επειδή όμως $\widehat{MM'} = \dfrac{\widehat{AA'}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

συνάγεται ότι το Μ είναι πόλος του μέγιστου κύκλου ΝΟ και άρα $\widehat{MM'} = \widehat{MO} = 90^\circ$.

21) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\Gamma = 90^\circ$) είναι ισοσκελές ($\alpha = \beta$). Αν οι χορδές των πλευρών α, β, γ είναι αντίστοιχα χ, ψ, z και R είναι η ακτίνα της σφαίρας, να δειχθεί ότι:

$$z^2 = \psi^2 \left(2 - \frac{\psi^2}{2R^2}\right)$$

***Λύση.***

Από τα επίπεδα τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΑΒ και ΟΒΓ (σχ. 3.13ε) έχομε αντίστοιχα (βλ. τυπολόγιο επίπεδης τριγωνομετρίας):

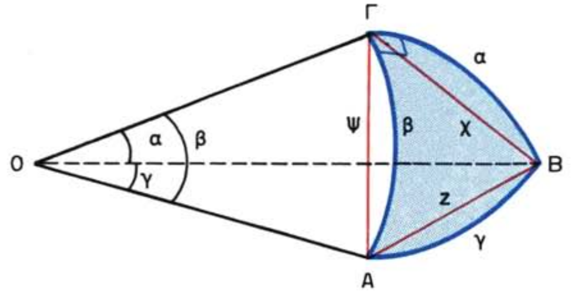
$$\psi^2 = R^2 + R^2 - 2 \,.\, R^2 \,\text{συν}\beta \tag{1}$$

$$z^2 = R^2 + R^2 - 2.\, R^2 \,\text{συν}\gamma \tag{2}$$

$$X^2 = R^2 + R^2 - 2.\, R^2 \,\text{συν}\alpha \tag{3}$$

Από το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ έχομε (κανόνες Napier):

$$\text{συν}\gamma = \text{συν}\beta\,\text{συν}\alpha \tag{4}$$




Σχ. 3.13ε.

Διαιρώντας τις (1) και (2): $\dfrac{\psi^2 - 2R^2}{z^2 - 2R^2} = \dfrac{\text{συν}\beta}{\text{συν}\gamma} = \dfrac{1}{\text{συν}\alpha}$ (λόγω 4)

και αντικαθιστώντας το συνα [από την (3)] με το ίσο του: $\dfrac{\psi^2 - 2R^2}{z^2 - 2R^2} = \dfrac{2R^2}{2R^2 - x^2}$

Αλλά αφού $\alpha = \beta \implies \chi = \psi$

άρα: $\dfrac{\psi^2 - 2R^2}{Z^2 - 2R^2} = \dfrac{2R^2}{2R^2 - \psi^2} \implies z^2 = \psi^2\left(2 - \dfrac{c^2}{2R^2}\right)$

### 3.14 Ασκήσεις για λύση.

22) Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο το άθροισμα των διαμέσων του είναι μικρότερο από την περίμετρο και μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρο.
23) Επάνω σε σφαίρα να χαραχθεί σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου μας δίνονται οι τρεις γωνίες.
24) Επάνω σε σφαίρα να χαραχθεί σφαιρικό τρίγωνο του οποίου μας δίνονται οι τρεις πλευρές.
25) Έστω σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ και το πολικό του Α΄Β΄Γ΄. Αν ο μέγιστος κύκλος που περιέχει την πλευρά α τέμνει τους μέγιστους κύκλους των πλευρών β΄ και γ΄ στα Ε και Ζ να δειχθεί ότι: α) $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{ΓZ}$. β) Η μεσοκάθετος της πλευράς α διέρχεται από το Α΄ και διχοτομεί τη γωνία των τόξων $\overset{\frown}{A'E}$ και $\overset{\frown}{A'Z}$.
26) Σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά α και $\beta + \gamma = 180°$. Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής του Γ είναι μέγιστος κύκλος.
27) Σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ η πλευρά γ είναι σταθερή καθώς και το εμβαδό του. Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής του Γ είναι μικρός κύκλος που διέρχεται από τα αντιδιαμετρικά σημεία Α΄ και Β΄ των κορυφών Α και Β αντίστοιχα.
28) Οι κορυφές Β και Γ ενός σφαιρικού τριγώνου μένουν σταθερές, ενώ η Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε ∢Α = ∢Β + ∢Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α.
29) Αν Α΄Β΄Γ΄ είναι το πολικό του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι αυτά έχουν το ίδιο σημείο τομής υψών που είναι πόλος ενός μέγιστου κύκλου, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία των αντίστοιχων πλευρών των δύο σφαιρικών τριγώνων.
30) Κάθε σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α σφαιρικού τριγώνου απέχει εξίσου (ίσες σφαιρικές αποστάσεις) από τις πλευρές β και γ.
31) Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των χορδών ΑΓ και ΑΒ του ορθογωνίου στο Α σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, δείξετε ότι:

$$\text{συν}\theta = \text{ημ}\,\frac{\beta}{2}\;\text{ημ}\,\frac{\gamma}{2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

# ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΩΝ ΤΥΧΟΝΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

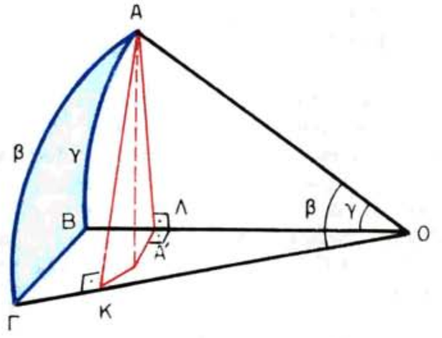
## 4.1 Τύποι των ημιτόνων.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι παρακάτω ***τύποι των ημιτόνων***

$$\frac{ημα}{ημA} = \frac{ημβ}{ημB} = \frac{ημγ}{ημΓ}$$

***Απόδειξη.***

Έστω το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και γωνίες Α, Β, Γ (σχ. 4.1α). Έστω Ο το κέντρο της σφαίρας (με ακτίνα ίση με τη μονάδα) στην οποία ανήκει και Ο.ΑΒΓ, η αντίστοιχή του δηλαδή τρίεδρη γωνία. Από την κορυφή Α φέρομε κάθετη ΑΑ΄ στην έδρα ΒΟΓ. Από το ίχνος Α΄ φέρομε τις κάθετες Α΄Λ και Α΄Κ αντίστοιχα προς τις ΟΒ και ΟΓ. Φέρομε τώρα τις ΑΛ και ΑΚ, οι οποίες, όπως είναι γνωστό από το θεώρημα των τριών καθέτων, θα είναι κάθετες προς τις ΟΒ και ΟΓ.




**Σχ. 4.1α.**

Έτσι οι γωνίες ΑΛΑ΄ και ΑΚΑ΄ θα είναι οι αντίστοιχες επίπεδες των δίεδρων ΟΒ και ΟΓ, δηλαδή θα είναι ίσες με τις σφαιρικές γωνίες των γωνιών Β και Γ, άρα θα έχουν το ίδιο μέτρο με αυτές.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΛ έχομε: $\etaμ\gamma = \dfrac{ΑΛ}{ΑΟ}$ (1)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΑ΄ έχομε: $\etaμ\Gamma = \dfrac{ΑΑ'}{ΑΚ}$ (2)

Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη: $\dfrac{\etaμ\gamma}{\etaμ\Gamma} = \dfrac{ΑΛ \cdot ΑΚ}{ΑΟ \cdot ΑΑ'}$ (3)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΚ έχομε: $\etaμ\beta = \dfrac{ΑΚ}{ΑΟ}$ (4)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΑ΄ έχομε: $\etaμΒ = \dfrac{ΑΑ'}{ΑΛ}$ (5)

Διαιρούμε τις (4) και (5) κατά μέλη: $\dfrac{\etaμ\beta}{\etaμΒ} = \dfrac{ΑΛ \cdot ΑΚ}{ΑΟ \cdot ΑΑ'}$ (6)

Από τις (3) και (6) παρατηρούμε ότι: $\dfrac{\etaμ\beta}{\etaμΒ} = \dfrac{\etaμ\gamma}{\etaμ\Gamma}$

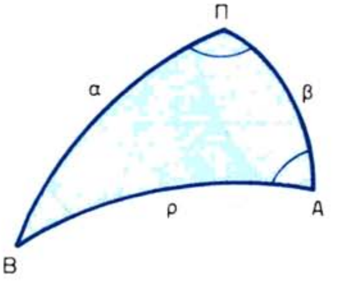
Αν από το σημείο Β φέρομε την κάθετη στην έδρα ΑΓΟ και εργασθούμε ομοίως θα προκύψει προφανώς:

$$\frac{\etaμ\alpha}{\etaμΑ} = \frac{\etaμ\beta}{\etaμΒ} = \frac{\etaμ\gamma}{\etaμ\Gamma}$$

***Παρατήρηση:*** Οι τύποι αυτοί των ημιτόνων είναι πολύ χρήσιμοι στην επίλυση των σφαιρικών τριγώνων, στις περιπτώσεις που μας δίνονται δύο πλευρές και μία αντικείμενη γωνία ή δύο γωνίες και μία αντικείμενη πλευρά. Επίσης έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι λογιστοί δια των λογαρίθμων.

### *4.1.1 Παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω τύπων.*

Στο τρίγωνο ΠΑΒ (σχ. 4.16) στο οποίο το Π είναι ο πόλος και Α, Β δύο σημεία του βόρειου ημισφαίριου, δίδονται ∢ Α = 68°, ΑΒ = 60° 30΄ και ∢ Π = 80° 16΄. Να υπολογισθεί το πλάτος του Β.




**Σχ. 4.16.**

***Λύση.***

Υπολογίζομε την πλευρά α και από τον τύπο των ημιτόνων.
Έχομε:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\rho}{\eta\mu \Pi} \qquad \begin{array}{rl} \lambda o\gamma\eta\mu\rho = & 9{,}93970 \\ \lambda o\gamma\eta\mu A = & 9{,}96717 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \eta\mu\alpha = \eta\mu\rho\,\eta\mu A\,\sigma\tau\varepsilon\mu \Pi \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rl} \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\Pi = & \underline{0{,}00630} \\ \eta\mu\alpha = & 9{,}91317 \end{array}$$

Απολογαριθμίζοντας έχομε α = 54° 58΄
Άρα πλάτος του Β = 35° 02΄ Ν

***Σημείωση:*** Επειδή ∢Π > ∢Α θα πρέπει και ρ > α, άρα πρέπει α < 90°. Γι' αυτό στην απολογαριθμοποίηση παίρνομε για το α μόνο την τιμή 54° 58΄ και όχι την 125° 02΄.

## 4.2 Τύποι των συνημιτόνων (θεμελιώδεις).

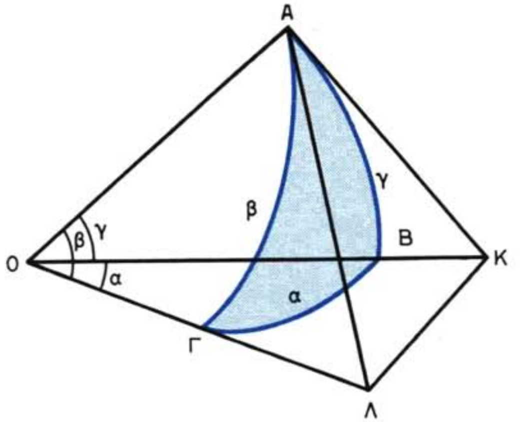
Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι εξής τύποι των συνημιτόνων (θεμελιώδεις).

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\alpha &= \sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \\ \sigma\upsilon\nu\beta &= \sigma\upsilon\nu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\gamma\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu B \\ \sigma\upsilon\nu\gamma &= \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu \Gamma \end{aligned}$$

***Απόδειξη.***

Έστω το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και γωνίες Α, Β, Γ (σχ. 4.2).

Έστω Ο το κέντρο της σφαίρας, στην οποία ανήκει και της οποίας την ακτίνα θεωρούμε ίση με τη μονάδα. Έστω Ο.ΑΒΓ η αντίστοιχη τρίεδρη γωνία του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ. Φέρομε στο Α τις εφαπτομένες στα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνουν τις προεκτάσεις των πλευρών ΟΒ και ΟΓ στα σημεία Κ και Λ.




Σχ. 4.2.

Το μέτρο της επίπεδης γωνίας ΚΑΛ είναι ίσο με το μέτρο της γωνίας Α του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ (σφαιρική γωνία).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ έχομε:

$$\varepsilon\varphi\gamma = \frac{AK}{OA} = \frac{AK}{1} \implies AK = \varepsilon\varphi\gamma \qquad (1)$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{OA}{OK} = \frac{1}{OK} \implies OK = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\gamma} \qquad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ έχομε:

$$\varepsilon\varphi\beta = \frac{A\Lambda}{OA} = \frac{A\Lambda}{1} \implies A\Lambda = \varepsilon\varphi\beta \qquad (3)$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{OA}{O\Lambda} = \frac{1}{O\Lambda} \implies O\Lambda = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\beta} \qquad (4)$$

Από την επίπεδη Τριγωνομετρία γνωρίζομε ότι σε τυχόν τρίγωνο ΑΚΛ ισχύει ο τύπος:

$$(K\Lambda)^2 = (AK)^2 + (A\Lambda)^2 - 2(AK)\,(A\Lambda)\,\sigma\upsilon\nu A \qquad (5)$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΟΚΛ ισχύει ο τύπος:

$$(K\Lambda)^2 = (OK)^2 + (O\Lambda)^2 - 2(OK)\,(O\Lambda)\,\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (6)$$

Από τις (5) και (6), επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα, πέρνομε:

$$(AK)^2 + (A\Lambda)^2 - 2(AK)(A\Lambda)\sigma\upsilon\nu A = (OK)^2 + (O\Lambda)^2 - 2(OK)(O\Lambda)\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (7)$$

Και λόγω των (1), (2), (3), (4) και (7):

$$\varepsilon\varphi^2\gamma + \varepsilon\varphi^2\beta - 2\varepsilon\varphi\gamma\varepsilon\varphi\beta\sigma\upsilon\nu A = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} - 2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\gamma}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\beta}\,\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (8)$$

$$\implies \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} - \frac{2\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} - \frac{\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma} - \frac{\eta\mu^2\gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma}$$

$$\implies \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} = \frac{1-\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} + \frac{1-\eta\mu^2\gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma}$$

$$\implies \frac{2(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma}$$

$$\implies \frac{2(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} = 2$$

$$\implies \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\eta\gamma\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\implies \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

Με όμοιο τρόπο κυκλικά αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

***Παρατήρηση:*** Οι τύποι αυτοί έχουν το μειονέκτημα ότι δεν είναι λογιστοί δια των λογαρίθμων.

### 4.3 Πολικοί τύποι των θεμελιωδών.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\text{συνΑ} &= \text{συνα ημΒ ημΓ} - \text{συνΒ συνΓ}\\
\text{συνΒ} &= \text{συνβ ημΓ ημΑ} - \text{συνΓ συνΑ}\\
\text{συνΓ} &= \text{συνγ ημΑ ημΒ} - \text{συνΑ συνΒ}
\end{aligned}$$

***Απόδειξη.***

Του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε το πολικό του Α΄Β΄Γ΄, του οποίου οι πλευρές έστω ότι είναι α΄, β΄, γ΄ και οι γωνίες του Α΄, Β΄, Γ΄. Μεταξύ των πλευρών και γωνιών δύο πολικών τριγώνων μάθαμε ότι ισχύουν οι σχέσεις της παραγράφου 3.6 από τις οποίες έχομε:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \pi - \text{Α} & \qquad & \text{Α}' = \pi - \alpha\\
\beta' &= \pi - \text{Β} & \text{και} \qquad & \text{Β}' = \pi - \beta\\
\gamma' &= \pi - \text{Γ} & \qquad & \text{Γ}' = \pi - \gamma
\end{aligned} \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας τον πρώτο τύπο από τους θεμελιώδεις στο πολικό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ θα έχομε:

$$\text{συν}\alpha' = \text{συν}\beta'\,\text{συν}\gamma' + \text{ημ}\beta'\,\text{ημ}\gamma'\,\text{συνΑ}'$$

ο τύπος αυτός λόγω των σχέσεων (1) γράφεται:

$$\begin{aligned}
\text{συν}(\pi - \text{Α}) &= \text{συν}(\pi - \text{Β})\,\text{συν}(\pi - \text{Γ}) + \text{ημ}(\pi - \text{Β})\,\text{ημ}(\pi - \text{Γ})\,\text{συν}(\pi - \alpha) && \Longrightarrow\\
-\text{συνΑ} &= (-\text{συνΒ})(-\text{συνΓ}) + \text{ημΒ ημΓ}(-\text{συν}\alpha) && \Longrightarrow\\
-\text{συνΑ} &= \text{συνΒ συνΓ} - \text{ημΒ ημΓ συν}\alpha && \Longrightarrow\\
\text{συνΑ} &= -\text{συνΒ συνΓ} + \text{ημΒ ημΓ συν}\alpha && \Longrightarrow\\
\text{συνΑ} &= \text{συν}\alpha\,\text{ημΒ ημΓ} - \text{συνΒ συνΓ}
\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο κυκλικά αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

Οι τύποι αυτοί λέγονται ***πολικοί*** των θεμελιωδών και η εργασία που κάναμε λέγεται ***πόλωση*** των θεμελιωδών τύπων.

Με τους πολικούς τύπους υπολογίζομε τις πλευρές α, β, γ σφαιρικού τριγώνου, όταν μας δίνονται οι γωνίες του Α, Β, Γ. Πράγματι αν τους λύσομε ως προς α, β, γ θα πάρομε:

$$\text{συν}\alpha = \frac{\text{συνΑ} + \text{συνΒ συνΓ}}{\text{ημΒ ημΓ}} \qquad \text{συν}\beta = \frac{\text{συνΒ} + \text{συνΑ συνΓ}}{\text{ημΑ ημΓ}}$$

$$\text{και} \qquad \text{συν}\gamma = \frac{\text{συνΓ} + \text{συνΑ συνΒ}}{\text{ημΑ ημΒ}}$$

***Παρατήρηση:*** Οι τύποι αυτοί έχουν το μειονέκτημα ότι δεν είναι λογιστοί δια των λογαρίθμων.

### 4.4 Τύποι των μισών γωνιών.

Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{k}{\eta\mu(\tau-\alpha)}\quad,\quad \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{k}{\eta\mu(\tau-\beta)}\quad,\quad \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{k}{\eta\mu(\tau-\gamma)}$$

όπου $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ και $k=\sqrt{\dfrac{\eta\mu(\tau-\alpha)\,\eta\mu(\tau-\beta)\,\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau}}$

***Απόδειξη.***

Από τον πρώτο τύπο των θεμελιωδών $\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A$

έχομε: $\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$

οπότε λαμβάνομε:

$$1-\sigma\upsilon\nu A=1-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=\frac{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma-\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=$$

$$=\frac{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma+\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=$$

$$=\frac{-2\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma+\alpha}{2}\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma-\alpha}{2}}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

Λαμβάνομε ακόμη:

$$1+\sigma\upsilon\nu A=1+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=\frac{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma+\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-(\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\beta\eta\mu\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}=$$

$$=\frac{-2\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\eta\mu\dfrac{\alpha-\beta-\gamma}{2}}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

οπότε από τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνομε:

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu A}{1+\sigma\upsilon\nu A}=\frac{-2\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma+\alpha}{2}\,\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma-\alpha}{2}}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}\cdot\frac{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}{-2\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\eta\mu\dfrac{\alpha-\beta-\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma+\alpha}{2}\;\eta\mu\dfrac{\beta-\gamma-\alpha}{2}}{\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\;\eta\mu\dfrac{\alpha-\beta-\gamma}{2}}=\left(\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\;\eta\mu\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2}=-\eta\mu\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right.$$

και $\quad ημ\dfrac{α-β-γ}{2} = -ημ\dfrac{β+γ-α}{2}$ γιατί τα αντίστοιχα τόξα είναι αντίθετα,

άρα έχουν αντίθετα ημίτονα) $= \dfrac{ημ\dfrac{α+β-γ}{2}\ ημ\dfrac{α+γ-β}{2}}{ημ\dfrac{α+β+γ}{2}\ ημ\dfrac{β+γ-α}{2}}$

Αν 2τ είναι η περίμετρος του τριγώνου, θα έχομε:

$$τ = \frac{α+β+γ}{2} \implies τ-γ = \frac{α+β+γ}{2} - γ \implies τ-γ = \frac{α+β-γ}{2}$$

και με όμοιο τρόπο: $\quad τ-β = \dfrac{α+γ-β}{2} \quad$ και $τ - α = \dfrac{β+γ-α}{2}$

Επομένως ο παραπάνω τύπος γράφεται: $\dfrac{1-συνA}{1+συνA} = \dfrac{ημ(τ-γ)\ ημ(τ-β)}{ημτημ(τ-α)}$

Από την επίπεδη Τριγωνομετρία γνωρίζομε ότι:

$$εφ\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-συνA}{1+συνA}}$$

Συνεπώς:

$$εφ\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-συνA}{1+συνA}} = \sqrt{\frac{ημ(τ-β)ημ(τ-γ)}{ημτημ(τ-α)}} \quad \frac{1}{ημ(τ-α)}\sqrt{\frac{ημ(τ-α)ημ(τ-β)ημ(τ}{ημτ}}$$

και αν θέσομε $\quad k = \sqrt{\dfrac{ημ(τ-α)ημ(τ-β)ημ(τ-γ)}{ημτ}}$

έχομε $\quad εφ\dfrac{A}{2} = \dfrac{k}{ημ(τ-α)}$

Με όμοιο τρόπο κυκλικά αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

**4.5 Τύποι των μισών πλευρών.**

Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$σφ\frac{α}{2} = \frac{K}{συν(T-A)}, \qquad σφ\frac{β}{2} = \frac{K}{συν(T-B)}, \qquad σφ\frac{γ}{2} = \frac{K}{συν(T-Γ)}$$

όπου: $T = \dfrac{A + B + \Gamma}{2}$ και $K = \sqrt{\dfrac{\sigma\upsilon\nu(T - A)\sigma\upsilon\nu(T - B)\sigma\upsilon\nu(T - \Gamma)}{-\sigma\upsilon\nu T}}$

$$\left(\text{ή} \quad K = \sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu(T - A)\sigma\upsilon\nu(T - B)\sigma\upsilon\nu(T - \Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(180 - T)}}\right)$$

***Απόδειξη.***

Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ.

Θέτομε $\tau' = \dfrac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{2}$ και $k' = \sqrt{\dfrac{\eta\mu(\tau' - \alpha')\eta\mu(\tau' - \beta')\eta\mu(\tau' - \gamma')}{\eta\mu\tau'}}$

(Βλέπε προηγούμενη παράγραφο)

Επειδή $\alpha' = 180 - A$ και $A' = 180 - \alpha$ κλπ., έχομε:

$$\tau' = \frac{(180 - A) + (180 - B) + (180 - \Gamma)}{2} = 270 - \frac{A + B + \Gamma}{2} = 270 - T$$

όπου: $T = \dfrac{A + B + \Gamma}{2}$

Οπότε: $\eta\mu\tau' = \eta\mu(270 - T) = -\sigma\upsilon\nu T$

$$\eta\mu(\tau' - \alpha') = \eta\mu[(270 - T) - (180 - A)] = \eta\mu[90 - (T - A)] = \sigma\upsilon\nu(T - A)$$

Ομοίως:
$$\eta\mu(\tau' - \beta') = \sigma\upsilon\nu(T - B)$$
$$\eta\mu(\tau' - \gamma') = \sigma\upsilon\nu(T - \Gamma)$$

Άρα $k' = \sqrt{\dfrac{\sigma\upsilon\nu(T - A)\sigma\upsilon\nu(T - B)\sigma\upsilon\nu(T - \Gamma)}{-\sigma\upsilon\nu T}} = K$

Βάσει των τύπων της προηγούμενης παραγράφου θα έχομε για το πολικό Α΄Β΄Γ΄:

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{k'}{\eta\mu(\tau' - \alpha')}$$

και επειδή $A' = 180 - \alpha$ ο τύπος αυτός γράφεται:

$$\varepsilon\varphi\frac{180 - \alpha}{2} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{K}{\sigma\upsilon\nu(T - A)}$$

Με όμοιο τρόπο κυκλικά αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

## 4.6 Αναλογικοί τύποι του Gauss (ή Delambre).

Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\dfrac{A + B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\gamma}{2}}, \qquad \frac{\eta\mu\dfrac{A - B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}} = \frac{\eta\mu\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\eta\mu\dfrac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{\text{συν}\dfrac{A+B}{2}}{\text{ημ}\dfrac{\Gamma}{2}} = \frac{\text{συν}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\text{συν}\dfrac{\gamma}{2}}, \qquad \frac{\text{συν}\dfrac{A-B}{2}}{\text{ημ}\dfrac{\Gamma}{2}} = \frac{\text{ημ}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\text{ημ}\dfrac{\gamma}{2}}$$

Οι άλλοι τύποι επιτυγχάνονται με κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων.

***Απόδειξη.***

Στην παράγραφο 4.4 έχομε βρει ότι:

$$1 - \text{συν}A = \frac{-2\text{ημ}\dfrac{\beta-\gamma+\alpha}{2}\ \text{ημ}\dfrac{\beta-\gamma-\alpha}{2}}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma} \qquad (1)$$

και

$$1 + \text{συν}A = \frac{-2\text{ημ}\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\ \text{ημ}\dfrac{\alpha-\beta-\gamma}{2}}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma} \qquad (2)$$

Επειδή $2\text{ημ}^2\dfrac{A}{2} = 1 - \text{συν}A$ η (1) γράφεται:

$$2\text{ημ}^2\frac{A}{2} = \frac{-2\text{ημ}\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\left(-\text{ημ}\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma} = \Bigg[\text{διότι}$$

$$\text{ημ}\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2} = \text{ημ}\left(-\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right) = -\text{ημ}\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\Bigg] =$$

$$= \frac{2\text{ημ}\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\ \text{ημ}\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma} \implies \text{ημ}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{ημ}\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\ \text{ημ}\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma}} \qquad (3)$$

Επειδή τώρα με $2\tau$ συμβολίζομε την περίμετρο του τριγώνου, θα έχομε:

$$2\tau = \alpha+\beta+\gamma \implies 2\tau - 2\gamma = \alpha+\beta+\gamma-2\gamma \implies 2(\tau-\gamma) = \alpha+\beta-\gamma$$

Με όμοιο τρόπο θα έχομε: $2(\tau-\beta) = \alpha-\beta+\gamma$, και αντικαθιστώντας στην (3) παίρνομε:

$$\text{ημ}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{ημ}(\tau-\beta)\text{ημ}(\tau-\gamma)}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma}} \qquad (4)$$

ομοίως επιτυγχάνομε: $$\text{ημ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\text{ημ}(\tau-\alpha)\text{ημ}(\tau-\gamma)}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\gamma}} \qquad (5)$$

και $$\text{ημ}\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\text{ημ}(\tau-\alpha)\text{ημ}(\tau-\beta)}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}} \qquad (6)$$

Επειδή τώρα $$1 + \sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2}$$

και $$\eta\mu \frac{\alpha-\beta-\gamma}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$$

αν αντικαταστήσομε στην (2) θα λάβομε:

$$2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \frac{-2\eta\mu\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\left(-\eta\mu\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

Επειδή από την

$$2\tau = \alpha+\beta+\gamma \implies 2\tau - 2\alpha = \alpha+\beta+\gamma-2\alpha \implies 2(\tau-\alpha) = \beta+\gamma-\alpha$$

θα έχομε: $$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}} \qquad (7)$$

Ομοίως επιτυγχάνομε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\gamma}} \qquad (8)$$

και $$\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}} \qquad (9)$$

Πολλαπλασιάζομε τώρα τις (4) και (8):

$$\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\beta)\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}}\sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\gamma}} = \frac{\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\gamma}\sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}} =$$

$$= \frac{\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \qquad (10)$$

Πολλαπλασιάζομε και τις (7) και (5):

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}}\sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\gamma}} = \frac{\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\gamma}\sqrt{\frac{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}} =$$

$$= \frac{\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \qquad (11)$$

Προσθέτομε τις (10) και (11):

$$\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2} = \frac{\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} + \frac{\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \qquad (12)$$

και επειδή: $$\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2} = \eta\mu\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \eta\mu\frac{A+B}{2}$$

η (12) γράφεται: $$\eta\mu\frac{A+B}{2} = \frac{\eta\mu(\tau-\alpha)+\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \qquad (13)$$

Επειδή ακόμη $$ημγ = 2ημ\frac{γ}{2}\,συν\frac{γ}{2}$$

και $$ημ(τ-α)+ημ(τ-β) = 2ημ\frac{(τ-α)+(τ-β)}{2}συν\frac{(τ-α)-(τ-β)}{2} =$$

$$= 2ημ\frac{2τ-α-β}{2}συν\,\frac{β-α}{2} =$$

$$= 2ημ\frac{α+β+γ-α-β}{2}συν\frac{β-α}{2} = 2ημ\,\frac{γ}{2}συν\frac{β-α}{2}$$

η (13) γράφεται:

$$ημ\frac{Α+Β}{2} = \frac{2ημ\,\frac{γ}{2}\;\;συν\,\frac{β-α}{2}}{2ημ\,\frac{γ}{2}\;\;συν\,\frac{γ}{2}}\;συν\frac{Γ}{2} = \frac{συν\,\frac{β-α}{2}}{συν\,\frac{γ}{2}}\;συν\frac{Γ}{2} \qquad (14)$$

και αφού $$συν\,\frac{β-α}{2} = συν\left(-\,\frac{β-α}{2}\right) = συν\,\frac{α-β}{2}$$

(τόξα αντίθετα έχουν ίδια συνημίτονα), η (14) γράφεται:

$$ημ\frac{Α+Β}{2} = \frac{συν\,\frac{α-β}{2}}{συν\,\frac{γ}{2}}\;συν\frac{Γ}{2} \implies \frac{ημ\,\frac{Α+Β}{2}}{συν\,\frac{Γ}{2}} = \frac{συν\,\frac{α-β}{2}}{συν\,\frac{Γ}{2}}$$

Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

## 4.7 Αναλογικοί τύποι του Napier.

Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{εφ\,\frac{Α-Β}{2}}{σφ\,\frac{Γ}{2}} = \frac{ημ\,\frac{α-β}{2}}{ημ\,\frac{α+β}{2}} \qquad\qquad \frac{εφ\,\frac{α-β}{2}}{εφ\,\frac{γ}{2}} = \frac{ημ\,\frac{Α-Β}{2}}{ημ\,\frac{Α+Β}{2}}$$

$$\frac{εφ\,\frac{Α+Β}{2}}{σφ\frac{Γ}{2}} = \frac{συν\,\frac{α-β}{2}}{συν\,\frac{α+β}{2}} \qquad\qquad \frac{εφ\,\frac{α+β}{2}}{εφ\frac{γ}{2}} = \frac{συν\,\frac{Α-Β}{2}}{συν\,\frac{Α+Β}{2}}$$

Οι υπόλοιποι τύποι επιτυγχάνονται με κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων.

***Απόδειξη.***

Από τους αναλογικούς τύπους του Gauss έχομε:

$$\eta\mu\frac{A-B}{2}=\frac{\eta\mu\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu\dfrac{\gamma}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\quad\text{και}\quad\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}=\frac{\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\eta\mu\dfrac{\gamma}{2}}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

Αν τους τύπους αυτούς τους διαιρέσομε κατά μέλη θα πάρομε:

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\eta\mu\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}\;\eta\mu\dfrac{\gamma}{2}}{\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}\;\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}\;\eta\mu\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\implies$$

$$\frac{\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}}{\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$ και ο πρώτος τύπος αποδείχθηκε.

Πάλι από τους αναλογικούς τύπους του Gauss έχομε:

$$\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\eta\mu\dfrac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}}\eta\mu\frac{\gamma}{2}\quad\text{και}\quad\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\eta\mu\dfrac{A+B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$$

Αν τους τύπους αυτούς τους διαιρέσομε κατά μέλη θα πάρομε:

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\eta\mu\dfrac{A-B}{2}\;\eta\mu\dfrac{\gamma}{2}\;\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\;\sigma\upsilon\nu\dfrac{\gamma}{2}\;\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\dfrac{A-B}{2}}{\eta\mu\dfrac{A+B}{2}}\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}\implies$$

$$\implies\quad\frac{\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\varepsilon\varphi\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\dfrac{A-B}{2}}{\eta\mu\dfrac{A+B}{2}}$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

***Παρατήρηση:*** Οι τύποι του Napier χρησιμοποιούνται όταν μας δίνονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (π.χ. α, β, και Γ) ή όταν μας δίνεται μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες (π.χ. γ, Α, Β). Έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι λογιστοί δια των λογαρίθμων και στη Ναυτιλία χρησιμεύουν για τον υπολογισμό της ορθοδρομικής αποστάσεως.

## 4.8 Τύποι των τεσσάρων συνεχών στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου.

Ισχύουν οι εξής τύποι που λέγονται τύποι των 4 συνεχών στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου:

$$
\begin{aligned}
σφα στεμΒ &= στεμγ σφΑ + σφγ σφΒ \\
σφα στεμΓ &= στεμβ σφΑ + σφβ σφΓ \\
σφβ στεμΓ &= στεμα σφΒ + σφα σφΓ \\
σφβ στεμΑ &= στεμγ σφΒ + σφγ σφΑ \\
σφγ στεμΑ &= στεμβ σφΓ + σφβ σφΑ \\
σφγ στεμΒ &= στεμα σφΓ + σφα σφΒ
\end{aligned}
$$

***Απόδειξη.***

Αποδεικνύομε τον πρώτο από αυτούς, οπότε με ανάλογο τρόπο γίνεται και η απόδειξη των υπολοίπων.

Παίρνομε τους δύο πρώτους από τους θεμελιώδεις:

$$συνα = συνΑ ημβ ημγ + συνβ συνγ \qquad (1)$$

$$συνβ = συνΒ ημγ ημα + συνγ συνα \qquad (2)$$

Από τους (1) και (2) συνεπάγεται:

$$συνα = συνΑ ημβ ημγ + (συνΒ ημγ ημα + συνγ συνα) συνγ \implies$$

$$συνα = συνΑ ημβ ημγ + συνΒ ημγ ημα συνγ + συν^2γ συνα \qquad (3)$$

Από τον τύπο $\dfrac{ημα}{ημΑ} = \dfrac{ημβ}{ημΒ} \implies ημβ = \dfrac{ημα ημΒ}{ημΑ}$ (4)

Από τους (3) και (4) συνεπάγεται:

$$συνα = συνΑ ημγ \frac{ημα ημΒ}{ημΑ} + συνΒ ημγ ημα συνγ + συν^2γ συνα \implies$$

$$συνα - συν^2γ συνα = σφΑ ημΒ ημα ημγ + συνΒ ημγ ημα συνγ \implies$$

$$συνα(1 - συν^2γ) = ημα ημγ (σφΑ ημΒ + συνΒ συνγ) \implies$$

$$\frac{συνα(1 - συν^2γ)}{ημα ημγ} = σφΑ ημΒ + συνΒ συνγ \implies$$

$$\frac{συνα ημ^2γ}{ημα ημγ} = σφΑ ημΒ + συνΒ συνγ \implies σφα ημγ = σφΑ ημΒ + συνΒ συνγ$$

διαιρούμε δια ημγημΒ:

$$\frac{σφα ημγ}{ημγ ημΒ} = \frac{σφΑ ημΒ}{ημγ ημΒ} + \frac{συνΒ συνγ}{ημγ ημΒ} \implies σφα στεμΒ = στεμγ σφΑ + σφγ σφΒ$$

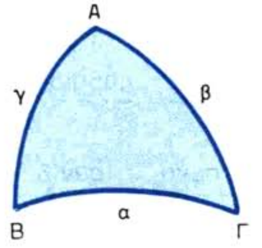
***Παρατηρήσεις.***

1) Ονομάζονται τύποι των τεσσάρων συνεχών στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου, γιατί κάθε τύπος αρχίζει από μία πλευρά (σχ. 4.8) προχωρεί κατά

4 συνεχή στοιχεία του τριγώνου, είτε από δεξιά είτε από αριστερά, και γυρίζει πίσω κατά δύο στοιχεία.

2) Οι τύποι αυτοί βρίσκουν άμεση εφαρμογή στην επίλυση του τριγώνου θέσεως (βλ. κεφ. 6, Εφαρμογές στη Ναυτιλία) καθώς και στη σύνταξη των πινάκων A, B, C.

3) Κάθε ένας από τους παραπάνω τύπους, έστω ο σφαστεμΓ = στεμβσφΑ + + σφβσφΓ, μπορεί με κατάλληλους απλούς μετασχηματισμούς να γραφεί και: σφαημβ = σφΑημΓ + συνβσυνΓ.




Σχ. 4.8.

## 4.9 Ορισμός παρημιτόνου (versine) και ημιπαρημιτόνου (haversine).

Τη διαφορά 1 – συνω καλούμε ***παρημίτονο*** (versine) του τόξου ω. Το μισό της διαφοράς αυτής $\frac{1-\text{συνω}}{2}$ καλούμε ***ημιπαρημίτονο*** (haversine) του τόξου ω.

Έτσι έχομε: ver ω = 1 – συνω

$$\text{hav}\,\omega = \frac{1-\text{συν}\omega}{2} \qquad \text{και επειδή} \qquad \frac{1-\text{συν}\omega}{2} = \text{ημ}^2\,\frac{\omega}{2}$$

έχομε:

$$\text{hav}\,\omega = \frac{1-\text{συν}\omega}{2} = \text{ημ}^2\,\frac{\omega}{2}$$

Η έννοια του ημιπαρημιτόνου καθιερώθηκε για να διευκολύνει τους ναυτικούς στις πράξεις τους, επειδή με τη χρήση του αποφεύγονται οι πράξεις με αρνητικούς αριθμούς, αφού το ημιπαρημίτονο είναι πάντα μη αρνητικό

$$\left(\text{πράγματι} \quad 1 \geqslant \text{συν}\omega \implies 1-\text{συν}\omega \geqslant 0 \quad \text{επίσης} \quad \text{ημ}^2\,\frac{\omega}{2} \geqslant 0\right).$$

## 4.10 Τύποι του ημιπαρημιτόνου.

Παραθέτομε διάφορους τύπους του παρημιτόνου χρήσιμους στην επίλυση σφαιρικών τριγώνων, οι οποίοι ισχύουν για κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ.

***α) ημιπαρημίτονα γωνιών.***

$$\text{ημπρ}A = \text{ημ}(τ-β)\,\text{ημ}(τ-γ)\,\text{στεμ}β\,\text{στεμ}γ$$
$$\text{ημπρ}B = \text{ημ}(τ-γ)\,\text{ημ}(τ-α)\,\text{στεμ}γ\,\text{στεμ}α$$
$$\text{ημπρ}Γ = \text{ημ}(τ-α)\,\text{ημ}(τ-β)\,\text{στεμ}α\,\text{στεμ}β$$

***Απόδειξη.***

Γνωρίζομε ότι:

$\text{συν}α = \text{συν}β\,\text{συν}γ + \text{ημ}β\,\text{ημ}γ\,\text{συν}A$ (τύποι των συνημιτ.)

$$\Longrightarrow \quad \text{συν}A = \frac{\text{συν}α - \text{συν}β\,\text{συν}γ}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ}$$

Αλλάζομε πρόσημα και προσθέτομε τη μονάδα:

$$1 - \text{συν}A = 1 - \frac{\text{συν}α - \text{συν}β\,\text{συν}γ}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ} = \frac{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ - \text{συν}α + \text{συν}β\,\text{συν}γ}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ} =$$

$$= \frac{(\text{συν}β\,\text{συν}γ + \text{ημ}β\,\text{ημ}γ) - \text{συν}α}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ} = \frac{\text{συν}(β-γ) - \text{συν}α}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ} = \left(\text{λόγω της σχέσεως}\right.$$

$$\left.\text{συν}A - \text{συν}B = -2\text{ημ}\frac{A+B}{2}\text{ημ}\frac{A-B}{2}\right) = -\frac{2\text{ημ}\dfrac{β-γ+α}{2}\;\text{ημ}\dfrac{β-γ-α}{2}}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ}$$

Επειδή δε ως γνωστόν: $\dfrac{1-\text{συν}A}{2} = \text{ημ}^2\dfrac{A}{2} = \text{ημπρ}A$

δηλαδή $\quad 1-\text{συν}A = 2\text{ημ}^2\dfrac{A}{2} = 2\text{ημπρ}A$

η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$1 - \text{συν}A = 2\text{ημπρ}A = \frac{\left(-2\text{ημ}\dfrac{α+β-γ}{2}\right)\cdot\left(\text{ημ}\dfrac{β-γ-α}{2}\right)}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ} \qquad \Longrightarrow$$

[επειδή $\quad \text{ημ}\dfrac{β-γ-α}{2} = \text{ημ}\left(-\dfrac{α-β+γ}{2}\right) = -\text{ημ}\dfrac{α-σ+γ}{2}$

δηλαδή τόξα αντίθετα έχουν αντίθετους τριγωνομετρικούς αριθμούς] $\quad \Longrightarrow$

$$2\text{ημπρ}A = \frac{2\left(-\text{ημ}\dfrac{α+β-γ}{2}\right)\cdot\left(-\text{ημ}\dfrac{α-β+γ}{2}\right)}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ} \qquad \Longrightarrow$$

$$\text{ημπρ}A = \frac{\text{ημ}\dfrac{α+β-γ}{2}\;\text{ημ}\dfrac{α-β+γ}{2}}{\text{ημ}β\,\text{ημ}γ} \qquad (1)$$

επειδή τώρα: $2τ = α + β + γ \implies 2τ - 2γ = α + β + γ - 2γ \implies$

$$2(τ - γ) = α + β - γ \implies τ - γ = \frac{α + β - γ}{2}$$

Ομοίως: $2τ - 2β = α + β + γ - 2β \implies 2(τ - β) = α - β + γ \implies τ - β = \frac{α - β + γ}{2}$

Η σχέση (1) γράφεται: $$ημπρA = \frac{ημ(τ - β)ημ(τ - γ)}{ημβημγ}$$

ή $$ημπρA = ημ(τ - β)ημ(τ - γ)στεμβστεμγ$$

Ομοίως με κυκλική εναλλαγή των στοιχείων αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

***Παρατήρηση:*** Πολλές φορές οι ναυτιλλόμενοι χρησιμοποιούν και τον εξής τύπο του ημιπαρημιτόνου γωνίας:

$$ημπρA = [ημπρα \sim ημπρ(β \sim γ)]στεμβστεμγ \qquad (1)$$

όπου το σύμβολο $\sim$ σημαίνει ότι τη διαφορά $β - γ$ την παίρνομε κατ' απόλυτη τιμή (δηλαδή πάντα θετική).

Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται ως εξής:

Από τους γνωστούς τύπους: $ημπρA = \frac{1 - συνA}{2}$, $\quad συνA = \frac{συνα - συνβ}{ημβημγ}$

και $$συν(β - γ) = ημβημγ + συνβσυνγ$$

έχομε: $$ημπρA = \frac{1}{2}(1 - συνA) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{συνα - συνβσυνγ}{ημβημγ}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{ημβημγ + συνβσυνγ - συνα}{ημβημγ} = \frac{1}{2}\frac{- συνα + συν(β - γ)}{ημβημγ} =$$ (προσθέτομε

και αφαιρούμε στον αριθμητή τη μονάδα) $= \frac{1}{2}\frac{1 - συνα - 1 + συν(β - γ)}{ημβημγ} =$

$$= \frac{1}{2}\left[(1 - συνα) - \left(1 - συν(β - γ)\right)\right] στεβστεμγ =$$

$$= \left[\frac{1 - συνα}{2} - \frac{1 - συν(β - γ)}{2}\right] στεμβστεμγ = \left[ημπρα - ημπρ(β - γ)\right] στεμβστεμγ$$

***β) Ημιπαρημίτονα πλευρών.***

$$ημπρα = ημπρ(β - γ) + ημβημγημπρA$$
$$ημπρβ = ημπρ(γ - α) + ημγημαημπρB$$
$$ημπργ = ημπρ(α - β) + ημαημβημπρΓ$$

***Απόδειξη.***

Γνωρίζομε ότι: $\quad \text{συν}\alpha = \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma + \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}A$ (τύποι των συνημιτόνων)

Αλλάζομε πρόσημα και προσθέτομε τη μονάδα:

$$1 - \text{συν}\alpha = 1 - \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma - \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}A = \left(\text{επειδή}\,\frac{1-\text{συν}A}{2} = \text{ημπρ}A \implies \right.$$

$$\begin{aligned} \implies \quad \left.\text{συν}A = 1 - 2\text{ημπρ}A\right) &= \\ &= 1 - \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma - \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma(1 - 2\text{ημπρ}A) = \\ &= 1 - \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma - \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma + 2\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημπρ}A = \\ &= 1 - (\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma + \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma) + 2\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημπρ}A = \\ &= 1 - \text{συν}(\beta - \gamma) + 2\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημπρ}A = \\ &= 2\text{ημπρ}(\beta - \gamma) + 2\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημπρ}A \end{aligned}$$

Αφού όμως $1 - \text{συν}\alpha = 2\text{ημπρ}\alpha$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$2\text{ημπρ}\alpha = 2\text{ημπρ}(\beta - \gamma) + 2\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημπρ}A$$

ή

$$\text{ημπρ}\alpha = \text{ημπρ}(\beta - \gamma) + \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημπρ}A$$

Ομοίως με κυκλική εναλλαγή των στοιχείων αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

***Παρατήρηση:*** Οι παραπάνω τύποι των ημιπαρημιτόνων χρησιμοποιούνται για την επίλυση σφαιρικών τριγώνων, όταν δίνονται και οι τρεις πλευρές ή όταν δίνονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη μεταξύ τους γωνία, καθώς και για την επίλυση πολικών τριγώνων.

## 4.11 Παραδείγματα εφαρμογών τύπων του κεφαλαίου 4.

***Παράδειγμα 1.***

32) Στο τρίγωνο ΠΖΧ (σχ. 4.11α) δίνονται $\sphericalangle\, \Pi = 50°$, $z = 70°45'$, $x = 62°60'$. Να υπολογισθεί η πλευρά $\rho$ και η γωνία Ζ (βλ. § 7.3, τρίγωνο θέσεως).

***Λύση.***

Έχομε $\text{ημπρ}\rho = \text{ημπρ}(z - x) + \text{ημ}z\,\text{ημ}x\,\text{ημπρ}\Pi$, όπου $z - x = 8°\ 35'$.

Θέτομε $\text{ημ}z\,\text{ημ}x\,\text{ημπρ}\Pi = \text{ημπρ}k$ (τον τρόπο αυτό θα τον συναντήσομε λεπτομεριακά στην 3η περίπτωση επιλύσεως τυχόντων σφαιρικών τριγώνων), οπότε έχομε:

$$\begin{array}{rcl} \text{λογημ}z &=& 9{,}97501 \\ \text{λογημ}x &=& 9{,}94660 \\ \text{λογημπρ}\Pi &=& 9{,}25190 \\ \hline \text{λογημπρ}k &=& 9{,}17351 \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{rcl} \text{ημπρ}k &=& 0{,}14911 \\ \text{ημπρ}(z-x) &=& 0{,}00560 \\ \hline \text{ημπρ}\rho &=& 0{,}15471 \\ \rho &=& 46°\ 19{,}5' \end{array}$$

Τώρα γνωρίζομε τρεις πλευρές. Θα πάρομε τον τύπο:

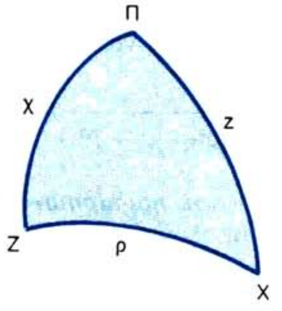
$$\eta\mu\pi\rho A = \eta\mu(\tau - \beta)\eta\mu(\tau - \gamma)\sigma\tau\epsilon\mu\beta\sigma\tau\epsilon\mu\gamma$$

και για το σχήμα μας θα έχομε: $\eta\mu\pi\rho Z = \eta\mu(\tau - x)\eta\mu(\tau - \rho)\sigma\tau\epsilon\mu x\sigma\tau\epsilon\mu\rho$

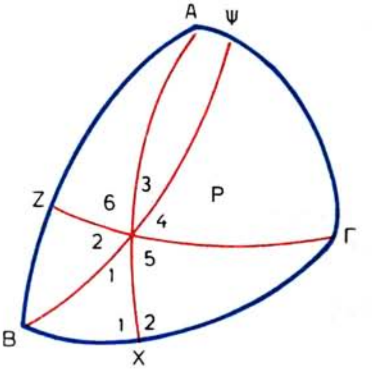
όπου $$\tau = \frac{x + z + \rho}{2} = 89^\circ\ 37{,}25'$$

$$\tau - x = 27^\circ\ 27{,}25'$$
$$\tau - \rho = 43^\circ\ 17{,}75'$$

Άρα
$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\eta\mu(\tau - x) &= 9{,}66374 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\ (\tau - \rho) &= 9{,}83618 \\ \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu x &= 0{,}05340 \\ \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\rho &= 0{,}14070 \\ \hline \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho Z &= 9{,}69402 \\ \Longrightarrow Z &= 89^\circ\ 21{,}23' \end{aligned}$$




Σχ. 4.11α.




Σχ. 4.11β.

***Παράδειγμα 2.***

33) Αν P είναι τυχόν σημείο εντός του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ και τα τόξα μεγίστων κύκλων που άγονται από τις κορυφές Α, Β και Γ δια του P τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα σημεία X, Ψ, Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu BX\eta\mu\Gamma\Psi\eta\mu AZ}{\eta\mu\Gamma X\eta\mu A\Psi\eta\mu BZ} = 1$$

***Λύση.***

Για τα σφαιρικά τρίγωνα BPX και ΓPX (σχ. 4.11β) έχομε:

$$\frac{\eta\mu BX}{\eta\mu BP} = \frac{\eta\mu P_1}{\eta\mu X_1} \qquad \text{και} \qquad \frac{\eta\mu\Gamma X}{\eta\mu\Gamma P} = \frac{\eta\mu P_5}{\eta\mu X_2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη (και επειδή οι γωνίες $X_1$ και $X_2$ παραπληρωματικές):

$$\frac{\eta\mu B X \eta\mu \Gamma P}{\eta\mu B P \eta\mu \Gamma X} = \frac{\eta\mu P_1}{\eta\mu P_5} \Longrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu B X}{\eta\mu \Gamma X} = \frac{\eta\mu P_1 \eta\mu B P}{\eta\mu P_5 \eta\mu \Gamma P} \qquad (1)$$

και κατ' αντιστοιχία:

$$\frac{\eta\mu \Gamma \Psi}{\eta\mu A \Psi} = \frac{\eta\mu P_4 \eta\mu \Gamma P}{\eta\mu P_3 \eta\mu A P} \qquad (2)$$

$$\frac{\eta\mu A Z}{\eta\mu B Z} = \frac{\eta\mu P_6 \eta\mu A P}{\eta\mu P_2 \eta\mu B P} \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) έχομε:

$$\frac{\eta\mu B X \eta\mu \Gamma \Psi \eta\mu A Z}{\eta\mu \Gamma X \eta\mu A \Psi \eta\mu B Z} = 1 \qquad (4)$$

***Παράδειγμα 3.***

34) Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδη τύπο των συνημιτόνων, να δείξετε ότι σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:

$$\eta\mu\pi\rho A = \sigma\tau\varepsilon\mu\beta\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma \sqrt{\eta\mu\pi\rho\,[\alpha + (\beta \sim \gamma)]\;\eta\mu\pi\rho\,[\alpha - (\beta \sim \gamma)]}$$

(στη ναυτιλία λέγεται τύπος του ***μισού λογαρίθμου του ημιπαρημιτόνου*** και παλαιότερα τον χρησιμοποιούσαν για διάφορους υπολογισμούς).

***Λύση.***

Γνωρίζομε ότι: $$\eta\mu\pi\rho A = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu A}{2} = \eta\mu^2 \frac{A}{2} \qquad (1)$$

Ο θεμελιώδης τύπος των συνημιτόνων:

συνα = συνβσυνγ + ημβημγσυνΑ γράφεται λόγω της (1)

συνα = συνβσυνγ + ημβημγ (1 − 2ημπρΑ)

$\Longrightarrow$ (λόγω του τύπου 4 της § 3, βλ. τυπολόγιο επίπεδης τριγωνομετρίας στο τέλος του βιβλίου)

συνα = συν(β ∼ γ) − 2ημβημγημπρΑ

$\Longrightarrow$ 2ημβημγημπρΑ = συν(β ∼ γ) − συνα

$\Longrightarrow$ (λόγω του τύπου 4 της § 6, βλ. τυπολόγιο επίπεδης τριγωνομετρίας στο τέλος του βιβλίου)

$$2\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\eta\mu\pi\rho A = 2\eta\mu\frac{\alpha + (\beta \sim \gamma)}{2}\eta\mu\frac{\alpha - (\beta \sim \gamma)}{2}$$

Επειδή ισχύει η (1) θα έχομε:

$$\eta\mu\frac{\alpha + (\beta \sim \gamma)}{2} = \sqrt{\eta\mu\pi\rho\,[\alpha + (\beta \sim \gamma)]}$$

$$\eta\mu\frac{\alpha - (\beta \sim \gamma)}{2} = \sqrt{\eta\mu\pi\rho\,[\alpha - (\beta \sim \gamma)]}$$

Άρα η (2) γράφεται:

$$\eta\mu\pi\rho A = \sigma\tau\varepsilon\mu\beta\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\sqrt{\eta\mu\pi\rho\,[\alpha + (\beta \sim \gamma)]\;\eta\mu\pi\rho\,[\alpha - (\beta \sim \gamma)]}$$

***Παράδειγμα 4.***

35) Για κάθε ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ($\alpha = \pi/2$) να δείξετε ότι ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{2} = \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

***Λύση.***

Το πρώτο μέλος γράφεται:

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}}{2} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

= (βάσει του τύπου 6 § 3, βλ. τυπολόγιο στο τέλος του βιβλίου)

$$= \frac{\varepsilon\varphi\dfrac{\beta+\gamma}{2} - 1}{1 + \varepsilon\varphi\dfrac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\varepsilon\varphi\dfrac{\beta+\gamma}{2} - 1}{\varepsilon\varphi\dfrac{\beta+\gamma}{2} + 1} =$$

$$= \frac{\eta\mu\dfrac{\beta+\gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\eta\mu\dfrac{\beta+\gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta+\gamma}{2}} \tag{1}$$

Επειδή τώρα από τους τύπους των μισών γωνιών έχομε:

$\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\eta\mu(\tau-\beta)\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\alpha)}}$ το δεύτερο μέλος γράφεται:

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\beta)}}\sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)\eta\mu(\tau-\beta)}{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau-\gamma)}} =$$

$$\frac{\eta\mu(\tau-\alpha)}{\eta\mu\tau} = \frac{\eta\mu\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} - \alpha\right)}{\eta\mu\left(\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\eta\mu\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\eta\mu\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\text{ημ}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\text{συν}\,\dfrac{\alpha}{2} - \text{συν}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\text{ημ}\,\dfrac{\alpha}{2}}{\text{ημ}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\text{συν}\,\dfrac{\alpha}{2} + \text{συν}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\text{ημ}\,\dfrac{\alpha}{2}} = \Bigg(\text{επειδή}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \text{ημ}\,\frac{\alpha}{2} = \text{συν}\,\frac{\alpha}{2}\Bigg) =$$

$$= \frac{\text{ημ}\dfrac{\beta+\gamma}{2} - \text{συν}\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\text{ημ}\dfrac{\beta+\gamma}{2} + \text{συν}\dfrac{\beta+\gamma}{2}} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) βλέπομε ότι η αποδεικτέα σχέση ισχύει.

***Παράδειγμα 5.***

36) Αν οι αντίστοιχες γωνίες σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ και του πολικού του Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσες, να δείξετε ότι:

$$\text{τεμ}^2\alpha + \text{τεμ}^2\beta + \text{τεμ}^2\gamma - 2\text{τεμ}\alpha\text{τεμ}\beta\text{τεμ}\gamma = 1$$

***Λύση.***

Αφού οι αντίστοιχες γωνίες των δύο τριγώνων είναι ίσες, θα έχομε:
$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ και $\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$.
Αλλά $A' = 180 - \alpha$, δηλαδή $A = 180 - \alpha$.
Λαμβάνοντας τώρα το θεμελιώδη τύπο των συνημιτόνων:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta\text{συν}\gamma + \text{ημ}\beta\text{ημ}\gamma\text{συν}A$$

έχομε:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta\text{συν}\gamma - \text{ημ}\beta\text{ημ}\gamma\text{συν}\alpha$$

και διαιρώντας δια συνβσυνγ:

$$\frac{\text{συν}\alpha}{\text{συν}\beta\text{συν}\gamma} = 1 - \text{εφ}\beta\text{εφ}\gamma\text{συν}\alpha \Longrightarrow$$

$$\text{εφ}\beta\text{εφ}\gamma = \frac{1}{\text{συν}\alpha} - \frac{1}{\text{συν}\beta\text{συν}\gamma} \Longrightarrow$$

$$\text{εφ}\beta\text{εφ}\gamma = \text{τεμ}\alpha - \text{τεμ}\beta\text{τεμ}\gamma$$

και υψώνοντας στο τετράγωνο

$$\text{εφ}^2\beta\text{εφ}^2\gamma = \text{τεμ}^2\alpha - 2\text{τεμ}\alpha\text{τεμ}\beta\text{τεμ}\gamma + \text{τεμ}^2\beta\text{τεμ}^2\gamma \Longrightarrow$$

(βλ. τυπολόγιο στο τέλος του βιβλίου) $\Longrightarrow$

$$(\text{τεμ}^2\beta - 1)(\text{τεμ}^2\gamma - 1) = \text{τεμ}^2\alpha - 2\text{τεμ}\alpha\text{τεμ}\beta\text{τεμ}\gamma + \text{τεμ}^2\beta\text{τεμ}^2\gamma \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -\text{τεμ}^2\gamma - \text{τεμ}^2\beta + 1 = \text{τεμ}^2\alpha - 2\text{τεμ}\alpha\text{τεμ}\beta\text{τεμ}\gamma$$

$$\Longrightarrow \text{τεμ}^2\alpha + \text{τεμ}^2\beta + \text{τεμ}^2\gamma - 2\text{τεμ}\alpha\text{τεμ}\beta\text{τεμ}\gamma = 1$$

***Παράδειγμα 6.***

37) Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) έχομε ότι Β + Γ = 180° 04΄. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 146° 02΄, να υπολογισθεί η υποτείνουσα α.

***Λύση.***

Από τους τύπους του Delambre έχομε:

$$\frac{\text{συν}\dfrac{B+\Gamma}{2}}{\text{ημ}\dfrac{A}{2}} = \frac{\text{συν}\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\text{συν}\dfrac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχομε:

$$\frac{\text{συν }54^\circ\ 02'}{\text{ημ}45^\circ} = \frac{\text{συν}\dfrac{2\tau-\alpha}{2}}{\text{συν}\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\text{συντσυν}\dfrac{\alpha}{2} + \text{ημτημ}\dfrac{\alpha}{2}}{\text{συν}\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \text{συντ} + \text{ημτεφ}\frac{\alpha}{2} = \text{συν}(73^\circ\ 01') + \text{ημ}(73^\circ\ 01')\text{εφ}\frac{\alpha}{2}$$

Από όπου παίρνομε:

$$\alpha = 58^\circ\ 46'$$

***Παράδειγμα 7.***

38) Σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ έχομε: $\sphericalangle B = 88^\circ$, $\sphericalangle \Gamma = 36^\circ$ και $\alpha + \beta + \gamma = 104^\circ$. Να υπολογισθεί η πλευρά α.

***Λύση.***

Από τους τύπους του Napier έχομε:

$$\text{εφ}\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\text{συν}\dfrac{B-\Gamma}{2}}{\text{συν}\dfrac{B+\Gamma}{2}}\text{εφ}\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

Όμως $\quad \dfrac{\beta+\gamma}{2} = 52^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$

Άρα από την (1): $\quad \text{εφ}\left(52^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\text{συν}26^\circ}{\text{συν}62^\circ}\,\text{εφ}\,\dfrac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow$

$$\frac{\varepsilon\varphi 52^\circ - \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \varepsilon\varphi 52^\circ\ \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu 26^\circ}{\sigma\upsilon\nu 62^\circ}\ \varepsilon\varphi\ \frac{\alpha}{2}$$

Λύνοντας ως προς $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$ βρίσκομε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$, από όπου τελικά παίρνομε $\alpha = 38^\circ$.

***Σημείωση:*** Είναι σπανιότατο να δοθούν έτσι τα δεδομένα. Απλώς εδώ γίνεται μια εφαρμογή των τύπων του Napier.

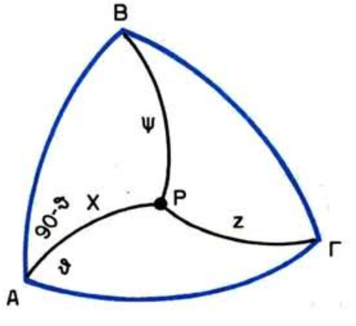
### *Παράδειγμα 8.*

39) Σφαιρικό τρίγωνο είναι τρισορθόπλευρο. Αν x, ψ, z είναι τα τόξα μεγίστων κύκλων που άγονται από ένα σημείο P εσωτερικό του τριγώνου προς τις κορυφές του, να δείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2\psi + \sigma\upsilon\nu^2 z = 1$$

### *Λύση.*

Αφού το τρίγωνο είναι τρισορθόπλευρο θα είναι και τρισορθογώνιο. Από το ορθόπλευρο τρίγωνο ΡΑΓ (σχ. 4.11γ) έχομε (κανόνες Napier):




**Σχ. 4.11γ.**

$$\sigma\upsilon\nu z = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu\theta \qquad (1)$$

Από το ορθόπλευρο τρίγωνο ΡΑΓ έχομε αντίστοιχα:

$$\sigma\upsilon\nu\psi = \eta\mu x \eta\mu\theta \qquad (2)$$

Υψώνοντας τις (1) και (2) στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη:

$$\sigma\upsilon\nu^2 z + \sigma\upsilon\nu^2\psi = \eta\mu^2 x(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu^2 z + \sigma\upsilon\nu^2\psi = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$$

Άρα:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2\psi + \sigma\upsilon\nu^2 z = 1$$

## 4.12 Ασκήσεις.

40) Να δειχθεί ότι αν σφαιρικό τρίγωνο έχει δυο πλευρές ίσες, θα έχει και τις απέναντι γωνίες ίσες.

41) Να δειχθεί ότι, αν σφαιρικό τρίγωνο είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ισόπλευρο, θα είναι και ισοσκελές και η άλλη πλευρά θα ισούται με την απέναντι γωνία.

42) Να δειχθεί ότι κάθε δισορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο είναι και δισορθόπλευρο και αντιστρόφως.

43) Να δειχθεί ότι: $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(\beta - \gamma)\,\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma)\,\eta\mu^2\dfrac{A}{2}$

44) Σε σφαιρικό τρίγωνο έχομε $A = B = \Gamma$ και $\alpha = \beta = \gamma$. Να δειχθεί ότι:
$2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2} = \sigma\tau\epsilon\mu\dfrac{A}{2}$.

45) Να δείξετε ότι, αν σφαιρικό τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($A = 90°$), τότε ισχύει η σχέση:

$$\eta\mu\pi\rho B = \frac{\eta\mu(\alpha - \gamma)}{2\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu\alpha}$$

46) Αν σφαιρικό τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Γ και 2S είναι η σφαιρική του υπεροχή, τότε $\epsilon\varphi S = \epsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}\,\epsilon\varphi\dfrac{\beta}{2}$.

47) Αν α, β, γ είναι οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ και α΄, β΄, γ΄ οι πλευρές του πολικού του, να δείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\alpha'}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\beta'}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\gamma'}{\eta\mu\gamma}$$

48) Δείξετε ότι αν $\alpha = A$, τότε οι Β και β καθώς και οι Γ και γ είναι ή ίσες ή παραπληρωματικές.

49) Αν το άθροισμα των πλευρών σφαιρικού τριγώνου είναι 180°, να δείξετε ότι: $\eta\mu\pi\rho A + \eta\mu\pi\rho B + \eta\mu\pi\rho\Gamma = 1$.

50) Αν Α είναι μια γωνία σφαιρικού τριγώνου και Α΄ η αντίστοιχη γωνία του πολικού του, να δείξετε ότι: $\eta\mu\pi\rho A\,\eta\mu\pi\rho A' = \eta\mu\pi\rho 60°$.

51) Αν σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, να δείξετε ότι: $\eta\mu\pi\rho\Gamma = \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta$.

52) Αν το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, να δειχθεί ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}$ β) $\tau\epsilon\mu\dfrac{\gamma}{2}\;\sigma\tau\epsilon\mu\dfrac{\Gamma}{2} = 2$

γ) $\epsilon\varphi^2\dfrac{\gamma}{2} = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\Gamma$ δ) $1 + 2\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi^2\dfrac{A}{2}$

53) Αν σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha + \gamma = 90^\circ$ τότε:

α) $\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu 2\gamma\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{B}{2}$

β) $(\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\gamma)\eta\mu B = 2\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{\beta}{2}\ \eta\mu\ (A + \Gamma)$.

54) Σε ορθόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ($\beta = 90^\circ$) φέρομε από την κορυφή Β τόξο μέγιστου κύκλου κάθετο στην πλευρά β, την οποία τέμνει στο σημείο Ν. Να δείξετε ότι: $\sigma\varphi^2 BN = \sigma\varphi^2 A + \sigma\varphi^2 \Gamma$.

55) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς α σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι:

$$2\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}\ \sigma\upsilon\nu AM = \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma.$$

56) Σε ορθογώνιο στο Α σφαιρικό τρίγωνο να δείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma) + \sigma\upsilon\nu(\beta - \gamma) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha$ β) $\varepsilon\varphi^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{\eta\mu(\alpha - \gamma)}{\eta\mu(\alpha + \gamma)}$

γ) $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\gamma\sigma\upsilon\nu^2\beta$ δ) $\varepsilon\varphi^2 \dfrac{\gamma}{2} = \varepsilon\varphi \dfrac{\alpha + \beta}{2} \varepsilon\varphi \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

57) Αν από την κορυφή Α σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ φέρομε τόξο μέγιστου κύκλου κάθετο στην πλευρά α, την οποία τέμνει στο Δ, να δείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi B\Delta}{\varepsilon\varphi \Gamma\Delta} = \frac{\varepsilon\varphi BA\Delta}{\varepsilon\varphi \Gamma A\Delta}$$

58) Σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά γ είναι ίση με τη γωνία Α. Να δείξετε ότι: $\eta\mu(B - \beta) = \eta\mu\beta\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A\sigma\varphi A$.

59) Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο να δείξετε ότι ισχύει:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2}$$

60) Για κάθε ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ($\alpha = 90^\circ$) να δείξετε ότι ισχύει:

$$\varepsilon\varphi \frac{\beta}{2} = \frac{\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}$$

61) Για κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να δείξετε ότι ισχύει:

α) $\eta\mu(\alpha - \beta) = \varepsilon\varphi\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\varepsilon\varphi \dfrac{\Gamma}{2}$

β) $2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \eta\mu\Gamma - \eta\mu\Gamma$.

62) Για κάθε ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ($\beta = \gamma$) να δείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu \dfrac{\alpha}{2}\ \sigma\varphi\Gamma = \tau\varepsilon\mu \dfrac{A}{2}$

β) $\eta\mu^2\Gamma\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{\alpha}{2}\ \eta\mu^2\gamma = \eta\mu^2\gamma - \eta\mu\pi\rho\alpha$.

63) Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{\eta\mu(B + \Gamma)}{\eta\mu A} = \sigma\tau\varepsilon\mu\alpha(\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu B\eta\mu\gamma).$$

64) Από το θεμελιώδη τύπο των συνημιτόνων, να δείξετε ότι:
$$\pi\alpha\rho\eta\mu\alpha = \pi\alpha\rho\eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\pi\alpha\rho\eta\mu A.$$

65) Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma}{1 - \sigma\upsilon\nu A} = \frac{\eta\mu(\beta + \gamma)}{\eta\mu\alpha}.$$

66) Αν Ν είναι το μέσο της πλευράς β σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu BN = \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \gamma}{2}\tau\epsilon\mu\frac{\beta}{2}$$

67) Αν σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu\tau = \dfrac{\eta\mu(\tau - \beta)\,\eta\mu(\tau - \gamma)}{\eta\mu(\tau - \alpha)}$, όπου

$\tau = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$, τότε αυτό είναι ορθογώνιο στο Α.

68) Σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Ν είναι το μέσο της πλευράς α. Να δειχθεί ότι:

$$PN = \frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta + \gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\beta - \gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}}$$

69) Το εμβαδό ορθόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ ($\gamma = 90^\circ$) είναι το $^1/_4$ του εμβαδού της σφαίρας στην οποία ανήκει. Να δείξετε ότι $2\sigma\varphi B = \epsilon\varphi A$.

70) Αν κ, λ, μ είναι οι κάθετες που άγονται από τις κορυφές σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα στις απέναντι πλευρές, να δείξετε ότι:

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu k = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}\ (\text{κυκλικά})$$

71) Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{\eta\mu(A - B)}{\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\pi\rho\gamma}.$$

72) Σε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta + \gamma = 60^\circ$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{2}\left(4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 3\right)\epsilon\varphi^2\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu(\beta - \gamma) - \sigma\upsilon\nu\alpha$$

73) Σε ορθογώνιο στο Α σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΑΒ = ΑΓ. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των χορδών ΑΒ και ΑΓ, να δείξετε ότι: $2\sigma\upsilon\nu\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu\beta$.

74) Να δείξετε ότι για κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\eta\mu A = \frac{2\sqrt{\eta\mu\tau\eta\mu(\tau - \alpha)\,\eta\mu(\tau - \beta)\,\eta\mu(\tau - \gamma)}}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

75) Με τη βοήθεια του θεμελιώδους τύπου του συνημιτόνου για την πλευρά β, να δείξετε ότι σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, έχομε:
$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\gamma - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

# ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Επίλυση σφαιρικού τριγώνου λέγεται ο υπολογισμός των κύριων στοιχείων του, όταν δίνονται ορισμένα από αυτά.

## 5.1 Επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.

Στην παράγραφο 3.9 είδαμε ότι ***ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο*** λέγεται εκείνο του οποίου μία γωνία είναι ορθή.

Σε ένα τέτοιο τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε συνήθως ως ορθή τη γωνία Α και ισχύουν γι' αυτό οι δέκα βασικοί τύποι, τους οποίους μελετήσαμε στην § 3.9.1.

Οι τύποι αυτοί μας βοηθούν να υπολογίσομε τα άγνωστα στοιχεία ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, όταν μας δοθούν δύο στοιχεία του (εκτός βέβαια της ορθής γωνίας).

Στην παράγραφο 5.3 περιέχονται μνημονικοί κανόνες (κανόνες Napier) που μας βοηθούν να βρίσκομε κάθε τύπο χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να τους απομνημονεύομε.

Η θεωρία του ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες που δεν τις συναντούμε στα επίπεδα ορθογώνια τρίγωνα, όπως π.χ. το πρόβλημα της εκλογής μεταξύ δύο γωνιών μικρότερων από 180° που αντιστοιχούν σε ένα ημίτονο και το ημίτονο αυτό είναι από τα ζητούμενα στοιχεία και το υπολογίζομε. Γι' αυτό παραθέτομε εδώ δύο βασικά θεωρήματα, τα λεγόμενα ***θεωρήματα των τεταρτημορίων,*** τα οποία μας βοηθούν να εκλέξομε π.χ. την οξεία ή την αμβλεία γωνία, οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα υπολογιζόμενο ημίτονο.

## 5.2 Θεωρήματα των τεταρτημορίων.

***Θεώρημα 1.***

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο μία γωνία (όχι βέβαια η ορθή) και η απέναντι της πλευρά ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

Έτσι η γωνία Β και η πλευρά β (και αντίστοιχα η γωνία Γ και η πλευρά γ) ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

***Απόδειξη.***

Ο πέμπτος τύπος από τους βασικούς μας δίνει:

$$ημΓ = \frac{συνB}{συνβ}$$

Επειδή $Γ < 180^\circ \implies ημΓ > 0$. Άρα τα συνβ και συνB είναι ή και τα δύο θετικά (οπότε β και B μικρότερα από 90°) ή και τα δύο αρνητικά (οπότε β και B μεγαλύτερα από 180°).

***Παρατήρηση:*** Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οποιαδήποτε πλευρά ή γωνία σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° συνεπώς ανήκει ή στο πρώτο ή στο δεύτερο τεταρτημόριο.

***Θεώρημα 2.***

Αν η υποτείνουσα ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο, τότε οι δύο άλλες πλευρές του (αντίστοιχα οι δύο άλλες γωνίες του) ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο και αντίστροφα.
Όταν όμως η υποτείνουσα ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο, τότε οι δύο άλλες πλευρές του (αντίστοιχα οι δύο άλλες γωνίες του) ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια και αντίστροφα.

Δηλαδή: Αν $α < 90^\circ \implies β < 90^\circ$ και $γ < 90^\circ$ (αντίστοιχα $B < 90^\circ$ και $Γ < 90^\circ$) ή $β > 90^\circ$ και $γ > 90^\circ$ (αντίστοιχα $B > 90^\circ$ και $Γ > 90^\circ$). Αν όμως $α > 90^\circ \implies$ $β > 90^\circ$ και $γ < 90^\circ$ (αντίστοιχα $B > 90^\circ$ και $Γ < 90^\circ$.

***Απόδειξη.***

Ο τέταρτος τύπος από τους βασικούς μας δίνει:

$$συνα = συνβσυνγ$$

α) Αν $α < 90^\circ \implies συνα > 0$ άρα τα συνβ και συνγ είναι ή και τα δύο θετικά (οπότε $β < 90^\circ$ και $γ < 90^\circ$) ή και τα δύο αρνητικά (οπότε $β > 90^\circ$ και $γ > 90^\circ$) δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις τα α και β ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

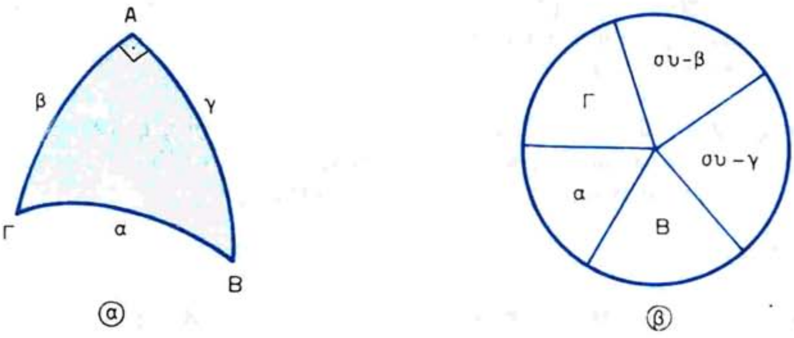
β) Αν $α > 90^\circ \implies συνα < 0$ άρα τα συνβ και συνγ έχουν διαφορετικά πρόσημα συνεπώς τα α και β ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

## 5.3 Κανόνες του Napier.

Επειδή η απομνημόνευση των δέκα βασικών τύπων των ορθογωνιών σφαιρικών τριγώνων είναι κάπως δύσκολη, ο Napier επενόησε ένα μνημονικό τέχνασμα, με το οποίο μπορούμε να βρίσκομε οποιονδήποτε από αυτούς και μάλιστα εκείνον ακριβώς ο οποίος μας χρειάζεται σε κάθε συγκεκριμένη επίλυση.

Το τέχνασμα αυτό αποτελείται από δύο κανόνες οι οποίοι ονομάζονται κανόνες του Napier. Για την εύκολη διατύπωση τους σχηματίζομε πρώτα ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο [σχ. 5.3(α)] ΑΒΓ και κατόπιν δίπλα του ένα κύκλο που τον διαιρούμε σε πέντε τομείς [(σχ. 5.3(β)].

Σε κάθε τομέα τοποθετούμε και από ένα στοιχείο του τριγώνου κατά τον ίδιο κυκλικό τρόπο, κατά τον οποίο τα στοιχεία αυτά αναγράφονται και στο




Σχ. 5.3.

τρίγωνο. Αγνοώντας εντελώς την ορθή γωνία A και αντί των προσκειμένων της πλευρών β και γ θέτομε τα σύμβολα συ-β και συ-γ, όπου συ-β σημαίνει 90° – β και συ-γ σημαίνει 90° – γ. Αυτό σημαίνει ότι αντί των β και γ λαμβάνομε τα συμπληρωματικά τους.

Αν τώρα θεωρήσομε οποιοδήποτε στοιχείο ενός τομέα, το οποίο ονομάζομε μεσαίο στοιχείο, τότε τα στοιχεία των τομέων που βρίσκονται εκατέρωθέν του τα ονομάζομε ***προσκείμενα*** στοιχεία του, ενώ τα στοιχεία των άλλων δύο τομέων, που δεν είναι εκατέρωθέν του, τα ονομάζομε ***απέναντι*** στοιχεία. Έτσι π.χ. του στοιχείου B [σχ. 5.3(β)] προσκείμενα στοιχεία είναι τα α και συ-γ, ενώ απέναντι στοιχεία του είναι τα Γ και συ-β. Το στοιχείο B όπως είπαμε το ονομάζομε μεσαίο.

Οι κανόνες του Napier είναι οι εξής:

***Κανόνας 1ος.***

Το συνημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου (μεσαίο) ισούται με το γινόμενο των συνεφαπτομένων των προσκειμένων στοιχείων.

***Κανόνας 2ος.***

Το συνημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου (μεσαίο) ισούται με το γινόμενο των ημιτόνων των απέναντι στοιχείων.

### 5.3.1 Παραδείγματα.

***Παράδειγμα 1.***

Αν λάβομε το στοιχείο α [σχ. 5.3(β)] ως τυχόν στοιχείο (μεσαίο), τότε προσκείμενα στοιχεία του είναι τα B και Γ και απέναντι τα συ-β, συ-γ.

Χρησιμοποιώντας τον 1ο κανόνα έχομε:

$$\text{συν}\alpha = \text{σφ}B\,\text{σφ}\Gamma \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας το 2ο κανόνα έχομε:

$$\text{συν}\alpha = \text{ημ}(\text{συ-}\beta)\,\text{ημ}(\text{συ-}\gamma) \implies$$

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma \tag{2}$$

***Παράδειγμα 2.***

Αν λάβομε το στοιχείο συ-γ ως τυχόν (μεσαίο), τότε προσκείμενα στοιχεία του είναι τα Β και συ-β και απέναντι τα α και Γ.

Από τον 1ο κανόνα έχομε:

$$\text{συν(συ-γ)} = \text{σφ(συ-β)σφΒ} \implies$$
$$\text{ημγ} = \text{εφβσφΒ} \qquad (3)$$

Από το 2ο κανόνα έχομε:

$$\text{συν(συ-γ)} = \text{ημαημΓ} \implies$$
$$\text{ημγ} = \text{ημαημΓ} \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ότι οι τύποι (1), (2), (3), (4) που προέκυψαν από τα παραδείγματα 1 και 2, είναι μερικοί από τους δέκα βασικούς τύπους ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων. Συνεπώς ενεργώντας όπως στα παραδείγματα αυτά για κάθε ένα στοιχείο (θεωρώντας το σαν μεσαίο) μπορούμε, με τους κανόνες του Napier, να βρούμε και τους δέκα βασικούς τύπους.

## 5.4 Γενικοί κανόνες για την επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.

Για να επιλυθεί ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, αρκεί να μας δοθούν δύο στοιχεία του, αφού η μία γωνία του είναι γνωστή (ορθή). Τα υπόλοιπα τρία στοιχεία μπορούν να υπολογισθούν με τη βοήθεια των δέκα βασικών τύπων των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.

Κατά την επίλυση οφείλομε να έχομε υπόψη μας τους παρακάτω κανόνες:

1) Σχεδιάζομε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο αναγράφοντας τα στοιχεία του και δίπλα σχεδιάζομε ένα κύκλο με τους πέντε τομείς βάζοντας μέσα τα στοιχεία του τριγώνου, όπως ακριβώς στα σχήματα [5.3(α)] και [5.3(β)].
2) Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα του Napier, εκλέγομε τρεις τύπους, από τους οποίους ο καθένας να περιέχει ένα από τα άγνωστα στοιχεία και δύο από τα γνωστά. Το μεσαίο μεταξύ των αγνώστων στοιχείων το υπολογίζομε τελευταίο.
3) Αποφεύγομε να χρησιμοποιούμε ένα στοιχείο που υπολογίσαμε, για τον υπολογισμό ενός άλλου στοιχείου.
4) Εκλέγομε ένα τύπο, ο οποίος να περιέχει τα τρία άγνωστα στοιχεία και ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί για την επαλήθευση του υπολογισμού που κάναμε (τύπος επαληθεύσεως).
5) Απευθυνόμαστε στα θεωρήματα των τεταρτημορίων ειδικά, όταν πρέπει να προσδιορίσομε ένα στοιχείο από το ημίτονο του.

Δίνομε παρακάτω ορισμένα παραδείγματα-ασκήσεις επιλύσεως ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων καθώς και τον τρόπο αναγραφής των πράξεων και αποτελεσμάτων στο φύλλο υπολογισμού.

***Παράδειγμα 1.***

76) Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται $β = 46° 12{,}3'$ και $α = 75° 48{,}6'$.

***Λύση.***

Σχηματίζομε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και τον αντίστοιχο κύκλο με τους πέντε τομείς (σχ. 5.4α).


(α) Σχ. 5.4α. (β)

***1) Υπολογισμός της Β.***

Πρέπει να συνδυάσομε τα γνωστά στοιχεία α και συ-β με το άγνωστο Β.

Βλέπομε από τους τομείς ότι το στοιχείο συ-β πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με απέναντι του στοιχεία τα α και Β. Άρα βάσει του 2ου κανόνα του Napier θα έχομε:

$$\text{συν(συ-β)} = \text{ημαημΒ} \implies$$
$$\text{ημβ} = \text{ημαημΒ}$$

και λύνοντας ως προς το άγνωστο στοιχείο Β παίρνομε: $\text{ημΒ} = \dfrac{\text{ημβ}}{\text{ημα}} \implies$

$$\text{ημΒ} = \text{ημβστεμα} \qquad (1)$$
$$\implies \text{λογημΒ} = \text{λογημβ} + \text{λογστεμα}$$

***2) Υπολογισμός της Γ.***

Πρέπει να συνδυάσομε τα γνωστά στοιχεία α και συ-β με το άγνωστο Γ. Βλέπομε από τους τομείς ότι το στοιχείο Γ πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με προσκείμενα του στοιχεία το α και συ-β. Άρα βάσει του 1ου κανόνα του Napier θα έχομε:

$$\text{συνΓ} = \text{σφασφ(συ-β)} \implies$$
$$\text{συνΓ} = \text{σφαεφβ} \qquad (2)$$
$$\implies \text{λογσυνΓ} = \text{λογσφα} + \text{λογεφβ} \qquad (2')$$

***3) Υπολογισμός της γ.***

Πρέπει να συνδυάσομε τα γνωστά στοιχεία α και συ-β με το άγνωστο γ.

Βλέπομε από τους τομείς ότι το στοιχείο α πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με απέναντι του στοιχεία τα συ-β και συ-γ. Άρα βάσει του 2ου κανόνα του Napier θα έχομε:

$$\text{συνα} = \text{ημ(συ-β)ημ(συ-γ)} \implies$$
$$\text{συνα} = \text{συνβσυνγ}$$

και λύνοντας ως προς το άγνωστο στοιχείο θα έχομε:

$$\text{συνγ} = \frac{\text{συνα}}{\text{συνβ}} \implies$$
$$\text{συνγ} = \text{συνατεμβ} \qquad (3)$$
$$\implies \text{λογ συνγ} = \text{λογσυνα} + \text{λογτεμβ} \qquad (3')$$

*4) Τύπος επαληθεύσεως.*

Για να βρούμε τον τύπο επαληθεύσεως συνδυάζομε τα τρία άγνωστα στοιχεία B, Γ, γ. Από τους τομείς παρατηρούμε ότι το στοιχείο Γ πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με απέναντι του στοιχεία τα B και συ-γ, οπότε βάσει του 2ου κανόνα του Napier θα έχομε:

$$\text{συν}\Gamma = \text{ημ}B\,\text{ημ}(\text{συ}\text{-}\gamma) \Longrightarrow$$

$$\text{συν}\Gamma = \text{ημ}B\,\text{συν}\gamma \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \text{λογσυν}\Gamma = \text{λογημ}B + \text{λογσυν}\gamma \tag{4'}$$

Η κατάταξη τώρα των πράξεων στο ***φύλλο υπολογισμού*** γίνεται όπως φαίνεται αμέσως παρακάτω. Σε πρώτη στήλη τοποθετούμε πρώτα τα γνωστά στοιχεία και κατόπιν τα άγνωστα. Σε επόμενες στήλες με επικεφαλίδες τα άγνωστα στοιχεία τοποθετούμε τους λογάριθμους των αντίστοιχων τριγωνομετρικών αριθμών που μας υποδεικνύουν οι τύποι (1), (2), (3) και (4) έτσι, ώστε προσθέτοντας και απολογαριθμίζοντας να βρίσκομε τα ζητούμενα.

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | B | γ | Γ |
|---|---|---|---|
| β = 46° 12,3′ | λογημβ = 9,85843 | λογτεμβ = 0,15984 | λογεφβ = 0,01827 |
| α = 75° 48,6′ | λογστεμα = 0,01346 | λογσυνα = 9,38941 | λογσφα = 9,40297 |
| B = 48° 7,2′ ← | λογημB = 9,87189 | | |
| γ = 69° 15,3′ ← | λογσυνγ = 9,54925 ← | λογσυνγ = 9,54925 | |
| Γ = 74° 42,5′ ← | λογσυν = 9,42114 ← | (έλεγχος) | λογσυνΓ = 9,42114 |

Μόνο η τιμή B = 48°7,2′ είναι αποδεκτή (και όχι η παραπληρωματική της) διότι τα β και B ανήκουν το ίδιο τεταρτημόριο.

***Παρατήρηση:*** Βλέπομε ότι η επαλήθευση γίνεται καθώς διαπιστώνομε ότι το άθροισμα των γραμμών της τελευταίας στήλης είναι ίδιο με το άθροισμα της τρίτης και τέταρτης γραμμής της δεύτερης στήλης.

***Παράδειγμα 2.***

77) Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου γνωρίζομε τη γωνία B = 65° και τη γωνία Γ = 118° (σχ. 5.4β).

***Λύση.***

***1) Υπολογισμός της β.***

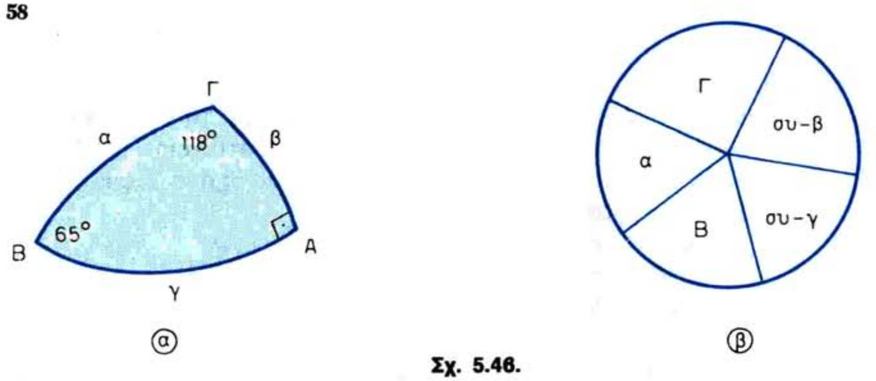
Εργαζόμαστε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Θεωρούμε τα στοιχεία συ-β, B, Γ. Μεσαίο είναι το B, άρα:

$$\text{συν}B = \text{ημ}\Gamma\,\text{ημ}(\text{συ}\text{-}\beta) \Longrightarrow$$

$$\text{συν}B = \text{ημ}\Gamma\,\text{συν}\beta$$

Λύνομε ως προς συνβ:

$$\text{συν}\beta = \frac{\text{συν}B}{\text{ημ}\Gamma} \Longrightarrow \text{συν}\beta = \text{συν}B\,\text{στεμ}\Gamma \tag{1}$$




**Σχ. 5.46.**

$$\Longrightarrow \text{λογσυνβ} = \text{λογσυνB} + \text{λογστεμΓ} \qquad (1')$$

***2) Υπολογισμός της γ.***

Θεωρούμε τα συ-γ, Β, Γ. Μεσαίο είναι το Γ και τα άλλα απέναντι, άρα:

$$\text{συνΓ} = \text{ημBημ(συ-γ)}$$
$$\Longrightarrow \text{συνΓ} = \text{ημBσυνγ}$$

Λύνομε ως προς συνγ:

$$\text{συνγ} = \frac{\text{συνΓ}}{\text{ημB}} \Longrightarrow \text{συνγ} = \text{συνΓστεμB} \qquad (2)$$
$$\Longrightarrow \text{λογσυνγ} = \text{λογσυνΓ} + \text{λογστεμB} \qquad (2')$$

***3) Υπολογισμός της α.***

Θεωρούμε τα στοιχεία α, Β, Γ. Μεσαίο είναι το α και τα άλλα προσκείμενα. Άρα:

$$\text{συνα} = \text{σφBσφΓ} \qquad (3)$$
$$\Longrightarrow \text{λογσυνα} = \text{λογσφB} + \text{λογσφΓ} \qquad (3')$$

***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

Συνδυάζομε τα τρία άγνωστα στοιχεία α, συ-β, συ-γ. Μεσαίο είναι το α και τα άλλα απέναντι, άρα:

$$\text{συνα} = \text{ημ(συ-β)ημ(συ-γ)} \Longrightarrow$$
$$\text{συνα} = \text{συνβσυνγ}$$

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | β | γ | α |
|---|---|---|---|
| B = 65° | λογσυνB = 9,62595 | λογστεμB = 0,04272 | λογσφB = 9,66867 |
| Γ = 118° | λογστεμΓ = 0,05407 | λογσυνΓ = 9,67161(–) | λογσφΓ = 9,72568(–) |
| β = 61°24,2′ | λογσυνβ = 9,68002 | | |
| γ = 121° 11′ ← | λογσυνγ = 9,71433(–) ← | λογσυνγ = 9,71433(–) | |
| α = 104° 21′ ← | λογσυνα = 9,39435(–) ← | (έλεγχος) ← | λογσυνα = 9,39435(–) |

***Παρατήρηση 1.*** Το σύμβολο (–) που παρατίθεται σε ένα λογάριθμο σημαίνει ότι ο αντιλογάριθμος είναι αρνητικός. Η απουσία αυτού του συμβόλου σημαίνει ότι ο αντιλογάριθμος είναι θετικός. Εδώ στο παράδειγμα μας από τον τύπο (1) παρατηρούμε ότι επειδή το συνΒ και η στεμΓ είναι θετικά, και το γινόμενο τους θα είναι θετικό, άρα και το συνβ είναι θετικό και συνεπώς $β < 90°$. Από τον τύπο (2) παρατηρούμε ότι το συνΓ είναι αρνητικό (διότι $Γ = 118° > 90°$), ενώ η στεμΒ είναι θετική, άρα το γινόμενο τους αρνητικό, συνεπώς και το συνγ είναι αρνητικό, άρα $γ > 0$.

Από τον τύπο (3) παρατηρούμε ότι η σφ Β είναι θετική, ενώ η σφΓ είναι αρνητική, άρα το γινόμενο τους είναι αρνητικό, δηλαδή το $συνα < 0$ και άρα $α > 90°$.

***Παρατήρηση 2.*** Με την παραπάνω παρατήρηση 1 μπορούμε να έχομε υπόψη μας τον εξής ***πρακτικό κανόνα:*** «Αν στο φύλλο υπολογισμού και μόνο στα δεδομένα στοιχεία υπάρχει το σύμβολο (–) σε ένα απ' αυτά, ενώ στο άλλο δεν υπάρχει [άρα υποτίθεται ότι υπάρχει το (+)], τότε είναι σαν να λέμε (+) επί (–) ίσον (–). Στο αποτέλεσμα λοιπόν παραθέτομε δίπλα το (–) και η προς υπολογισμό γωνία (ή πλευρά) λαμβάνεται μεγαλύτερη από 90°».

Βέβαια αυτό δεν ισχύει όταν πρόκειται το άγνωστο στοιχείο να υπολογισθεί με ημίτονο (γιατί από 0° έως 180° υπάρχουν δυο γωνίες με το ίδιο ημίτονο).

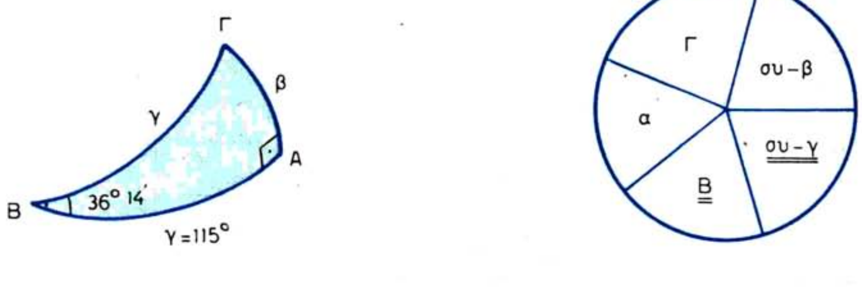
***Παρατήρηση 3.*** Μπορούμε γενικά να παρατηρήσομε ότι κατά τις επιλύσεις των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων, όταν ένα άγνωστο στοιχείο παρέχεται από συνημίτονο, εφαπτομένη ή συνεφαπτομένη, βρίσκομε μία μόνο τιμή του. Όταν όμως παρέχεται από ημίτονο, βρίσκομε δύο τιμές του.

***Παράδειγμα 3.***

78) Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, αν γνωρίζομε ότι: $B = 36°\ 14'$ και $γ = 115°$ (σχ. 5.4γ).

***Λύση.***

Εργαζόμαστε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα.




**Σχ. 5.4γ.**

***1) Υπολογισμός β.***

Θεωρούμε τα στοιχεία συ-β, συ-γ, Β. Μεσαίο είναι το συ-γ, άρα:

$$συν(συ\text{-}γ) = σφΒσφ(συ\text{-}β) \implies$$
$$ημγ = σφΒεφβ \implies$$

$$\text{εφβ} = \frac{\text{ημγ}}{\text{σφΒ}} \Longrightarrow \text{εφβ} = \text{ημγεφΒ} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \text{λογεφβ} = \text{λογημγ} + \text{λογεφΒ} \qquad (1')$$

*2) Υπολογισμός α.*

Θεωρούμε τα στοιχεία α, Β, συ-γ, όπου μεσαίο είναι το Β, άρα:

$$\begin{aligned} \text{συνΒ} &= \text{σφασφ(συ-γ)} \Longrightarrow \\ \text{συνΒ} &= \text{σφαεφγ} \Longrightarrow \\ \text{σφα} &= \text{συνΒσφγ} \Longrightarrow && (2) \\ \text{λογσφα} &= \text{λογσυνΒ} + \text{λογσφγ} && (2') \end{aligned}$$

*3) Υπολογισμός Γ.*

Θεωρούμε τα στοιχεία Γ, συ-γ, Β, όπου μεσαίο είναι το Γ και τα άλλα απέναντι, άρα:

$$\begin{aligned} \text{συνΓ} &= \text{ημΒημ(συ-γ)} \Longrightarrow \\ \text{συνΓ} &= \text{ημΒσυνγ} \Longrightarrow && (3) \\ \text{λογσυνΓ} &= \text{λογημΒ} + \text{λογσυνγ} && (3') \end{aligned}$$

*4) Τύπος επαληθεύσεως.*

Θεωρούμε τα τρία άγνωστα στοιχεία α, Γ, συ-β όπου μεσαίο είναι το Γ και τα άλλα προσκείμενα, άρα:

$$\begin{aligned} \text{συνΓ} &= \text{σφασφ(συ-β)} \Longrightarrow \\ \text{συνΓ} &= \text{σφαεφβ} \Longrightarrow && (4) \\ \text{λογσυνΓ} &= \text{λογσφα} + \text{λογεφβ} \end{aligned}$$

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

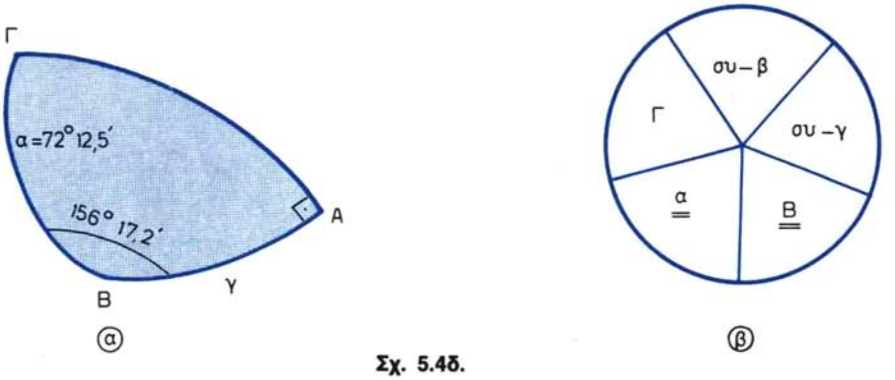
| | β | α | Γ |
|---|---|---|---|
| Β = 36° 14΄ | λογεφΒ = 9,86498 | λογσυνΒ = 9,90666 | λογημΒ = 9,77164 |
| γ = 115° | λογημγ = 9,95728 | λογσφγ = 9,66867(–) | λογσυνγ = 9,62595(–) |
| β = 33° 35,4΄ | λογεφβ = 9,82226 | | |
| α = 110° 37΄ (παραπλ) ← | λογσφα = 9,57533(–) → | ← λογσφα = 9,57533(–) | |
| Γ = 104° 28΄ (παραπλ) ← | ——— 9,39759(–) ← | ——— (έλεγχος) ← | ← ——— 9,39759(–) |

***Παράδειγμα 4.***

79) Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο από τα στοιχεία Β = 156° 17,2΄ και α = 72° 12,5΄ (σχ. 5.4δ).

***Λύση.***

Εργαζόμενοι όπως στα προηγούμενα, συντομεύομε τις επεξηγήσεις και παραλείπομε τις λογαριθμίσεις των τύπων που βρίσκομε:




Σχ. 5.4δ.

***1) Υπολογισμός γ.***

Με Β μεσαίο στοιχείο και α, συ-γ προσκειμενά του, έχομε:

$$\text{συν}B = \text{σφασφ}(\text{συ-}\gamma) \implies$$
$$\text{συν}B = \text{σφαεφ}\gamma \implies$$
$$\text{εφ}\gamma = \text{συν}B\text{εφ}\alpha \qquad (1)$$

***2) Υπολογισμός Γ.***

Με α μεσαίο και Β Γ προσκείμενα στοιχεία του έχομε:

$$\text{συν}\alpha = \text{σφ}B\text{σφ}\Gamma \implies$$
$$\text{σφ}\Gamma = \text{συναεφ}B \qquad (2)$$

***3) Υπολογισμός β.***

Με συ-β μεσαίο στοιχείο και α, Β απέναντι του στοιχεία έχομε:

$$\text{συν}(\text{συ-}\beta) = \text{ημαημ}B \implies$$
$$\text{ημ}\beta = \text{ημαημ}B \qquad (3)$$

***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

Τον σχηματίζομε με τα τρία άγνωστα στοιχεία Γ, συ-β, συ-γ, όπου το συ-β είναι μεσαίο και τα άλλα προσκείμενα:

$$\text{συν}(\text{συ-}\beta) = \text{σφ}\Gamma\text{σφ}(\text{συ-}\gamma) \implies$$
$$\text{ημ}\beta = \text{εφγσφ}\Gamma \qquad (4)$$

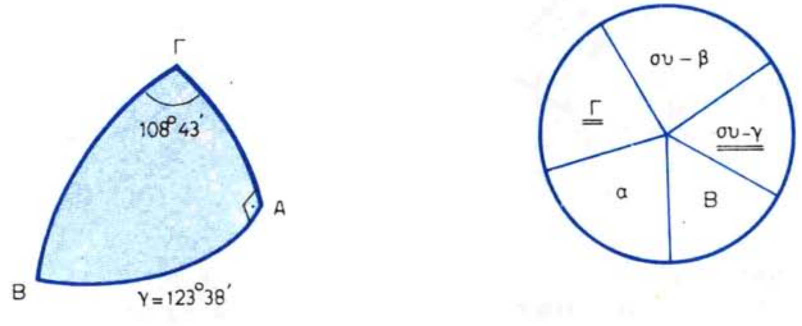
**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | γ | Γ | β |
|---|---|---|---|
| Β = 156°17,2΄ | λογσυνΒ = 9,96169(–) | λογεφΒ = 9,64271(–) | λογημΒ = 9,60440 |
| α = 72°12,5΄ | λογεφα = 0,49362 | λογσυνα = 9,48509 | λογημα = 9,97872 |
| γ = 109°19΄ (παραπλ.) | λογεφγ = 0,45531(–) | | |
| Γ = 97°38,7΄( » ) ← | λογσφΓ = 9,12780(–) ← | λογσφΓ = 9,12780(–) | |
| β = 157°29,1΄( » ) ← | λογημβ = 9,58312 ← | | λογημβ = 9,58312 |

***Παρατήρηση:*** Επειδή δίνεται $B > 90°$ έπεται ότι θα πρέπει και $\beta > 90°$. Γι' αυτό από τις δυο τιμές της β που προκύπτουν από την λογημβ = 9,58312, παίρνομε την τιμή συνβ = 157° 29,1΄ > 90°.

***Παράδειγμα 5.***

80) Ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου δίνονται $Γ = 108°43'$, $γ = 123°\ 38'$ (σχ. 5.4ε). Να επιλυθεί.




**Σχ. 5.4ε.**

***1) Υπολογισμός Β.***

Με Γ μεσαίο και Β, συ-γ απέναντι έχομε:

$$συνΓ = ημΒημ(συ\text{-}γ)$$
$$\Longrightarrow συνΓ = ημΒσυνγ$$
$$\Longrightarrow ημΒ = \frac{συνΓ}{συνγ} \quad \Longrightarrow \quad ημΒ = συνΓτεμγ \qquad (1)$$

***2) Υπολογισμός α.***

Με συ-γ μεσαίο και α, Γ απέναντι έχομε:

$$συν(συ\text{-}γ) = ημαημΓ$$
$$ημγ = ημαημΓ$$
$$ημα = \frac{ημγ}{ημΓ} \quad \Longrightarrow \quad ημα = ημγστεμΓ \qquad (2)$$

***3) Υπολογισμός β.***

Με συ-β μεσαίο και Γ, συ-γ προσκείμενα έχομε:

$$συν(συ\text{-}β) = σφΓσφ(συ\text{-}γ)$$
$$ημβ = σφΓεφγ \qquad (3)$$

***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

Άγνωστα στοιχεία είναι τα α, Β, συ-β. Με συ-β μεσαίο και τα άλλα απέναντι έχομε:

$$συν(συ\text{-}β) = ημαημΒ$$
$$\Longrightarrow \quad ημβ = ημαημΒ \qquad (4)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι κάθε ζητούμενο στοιχείο παρέχεται από το ημίτονο του. Γι' αυτό θα παίρνομε δύο τιμές για κάθε ένα στοιχείο.

## ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

| | B | α | β |
|---|---|---|---|
| $\gamma = 123^\circ\ 38'$ | $\lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu\gamma = 0{,}25659(-)$ | $\lambda o\gamma\eta\mu\gamma = 9{,}92044$ | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\gamma = 0{,}17703(-)$ |
| $\Gamma = 108^\circ\ 43'$ | $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = 9{,}50635(-)$ | $\lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu\Gamma = 0{,}02360$ | $\lambda o\gamma\sigma\varphi\Gamma = 9{,}52995(-)$ |
| $B_1 = 35^\circ\ 24{,}3'$<br>$B_2 = 144^\circ\ 35{,}7'$ | ← $\lambda o\gamma\eta\mu B = \overline{9{,}76294}$ | | |
| $\alpha_1 = 61^\circ\ 32'$<br>$\alpha_2 = 118^\circ\ 28'$ | ← $\lambda o\gamma\eta\mu\alpha = 9{,}94404$ | ← $\lambda o\gamma\eta\mu\alpha = \overline{9{,}94404}$ | |
| $\beta_1 = 30^\circ\ 37{,}9$<br>$\beta_2 = 149^\circ\ 22{,}1$ | ← $\lambda o\gamma\eta\mu\beta = \overline{9{,}70698}$ | ← έλεγχος | $\lambda o\gamma\eta\mu\beta = \overline{9{,}70698}$ |

Επειδή έχομε $\gamma > 90^\circ$, αν πάρομε την τιμή $\beta_1$ που είναι $< 90^\circ$ θα πρέπει να πάρομε και την τιμή $B_1$ που είναι $< 90^\circ$. Άρα η υποτείνουσα πρέπει να είναι $> 90^\circ$ (όλα αυτά βάσει των θεωρημάτων 1 και 2). Συνεπώς θα διαλέξομε την τιμή α που είναι $> 90^\circ$.

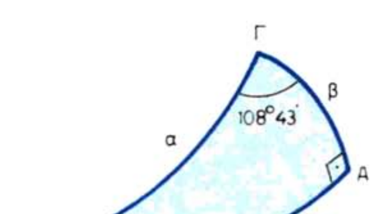
Ομοίως, επειδή $\gamma > 90^\circ$, αν πάρομε την τιμή $\beta_2$ που είναι $> 90^\circ$, πρέπει να πάρομε και την τιμή $B_2$ που είναι $> 90^\circ$. Άρα η υποτείνουσα πρέπει να είναι $< 90^\circ$ οπότε παίρνομε την τιμή $\alpha_1$ που είναι $< 90^\circ$.

Έχομε λοιπόν δύο λύσεις, τις εξής:

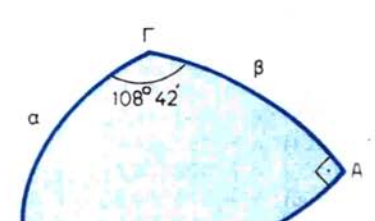
1) $B = 35^\circ\ 24{,}3'$ $\quad \beta = 30^\circ\ 37{,}9'$ $\quad \alpha = 118^\circ\ 28'$

2) $B = 144^\circ\ 35{,}7'$ $\quad \beta = 149^\circ\ 23'$ $\quad \alpha = 61^\circ\ 33'$

Στα παρακάτω σχήματα 5.4στ και 5.4ζ φαίνονται οι δύο αυτές λύσεις.




Σχ. 5.4στ.




Σχ. 5.4ζ.

### *5.4.1 Ασκήσεις.*

81) Να αποδείξετε ότι μία πλευρά και η υποτείνουσα ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο εφόσον η γωνία που σχηματίζουν είναι μικρότερη από 90°. Αν όμως η γωνία αυτή είναι μεγαλύτερη από 90°, τότε οι παραπάνω πλευρές ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

82) Να δείξετε ότι αν η υποτείνουσα ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου είναι 90°, τότε: α) Μία από τις πλευρές του θα είναι επίσης 90°. β) Η γωνία που είναι απέναντι αυτής της πλευράς θα είναι και αυτή 90°.

83) Να δείξετε ότι σε ένα ορθογώνιο ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο ισχύει:

$$\text{συν}\alpha = \text{συν}^2\beta = \text{σφ}^2\text{Β}$$

84) Να δείξετε ότι, αν η υποτείνουσα ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο, τότε κάθε μία από τις άλλες πλευρές είναι μικρότερη ή ίση με την υποτείνουσα, ή μεγαλύτερη ή ίση με το συμπληρωμά της (της υποτείνουσας). Αν όμως η υποτείνουσα ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο, τότε κάθε μια από τις άλλες πλευρές είναι μεγαλύτερη ή ίση με την υποτείνουσα, ή μικρότερη ή ίση με το συμπλήρωμά της.

85) Να δείξετε ότι δεν μπορεί να υφίσταται ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, για το οποίο να αληθεύουν οι σχέσεις: α) $\text{Β} + \Gamma < 90°$, β) $\text{Β} + \Gamma > 270°$, γ) $\text{Β} - \Gamma > 90°$, δ) $\text{ημ}\beta > \text{ημ}\alpha$ ή $\text{ημ}\gamma > \text{ημ}\alpha$.

86) Να δείξετε ότι μπορούμε να προσδιορίσομε δύο ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, όταν τα β και Β (ή τα γ και Γ) είναι και τα δύο μικρότερα από 90° ή και τα δύο μεγαλύτερα από 90°.

87) Να δείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο μη ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο το πλήθος των πλευρών που ανήκουν στο πρώτο τεταρτημόριο, είναι ή 3 ή 1.

88) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha < \beta < 90°$.

Να επιλυθούν τα παρακάτω ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα ΑΒΓ, για τα οποία Α = 90°.

| | | |
|---|---|---|
| 89) | β = 35° 34,6΄, | α = 45° 48,2΄. |
| 90) | α = 70° 25,2΄, | Β = 52° 54,8΄. |
| 91) | β = 30° 45,3΄, | Γ = 135° 24,4΄. |
| 92) | β = 68° 24΄, | γ = 132° 17,1΄. |
| 93) | Β = 73° 3΄, | Γ = 42° 26΄. |
| 94) | Β = 38° 22΄, | γ = 118°. |
| 95) | Γ = 111° 6΄, | γ = 128° 14΄. |
| 96) | β = 28° 16΄, | γ = 48° 24΄. |
| 97) | β = 18° 51΄, | Β = 31° 15΄. |
| 98) | α = 135° 18΄, | β = 48° 15΄. |
| 99) | α = 142° 38΄, | Β = 65° 26΄. |
| 100) | Β = 51° 9΄, | Γ = 98° 37΄. |
| 101) | γ = 128° 42΄, | Γ = 106° 30΄. |
| 102) | β = 46° 46,4΄, | Β = 57° 28,3΄. |
| 103) | β = 40° 44,6΄, | γ = 64° 48,3΄. |
| 104) | α = 152° 24,4΄, | Γ = 68° 38,2΄. |
| 105) | α = 122° 36,7΄, | γ = 158° 22,4΄. |
| 106) | Β = 33° 50,5΄, | Γ = 72° 24,2΄. |
| 107) | γ = 162° 53,4, | Γ = 138° 14,9΄. |

## 5.5 Επίλυση ορθόπλευρων σφαιρικών τριγώνων.

Στα προηγούμενα είδαμε ότι ***ορθόπλευρο*** σφαιρικό τρίγωνο καλείται εκείνο, του οποίου μία πλευρά έχει μέτρο 90°.

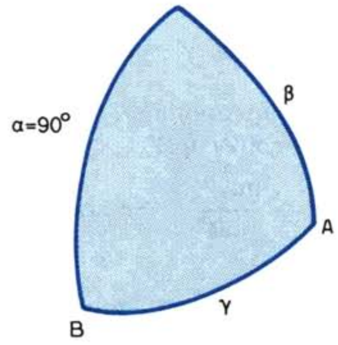
Σε ένα τέτοιο τρίγωνο θεωρούμε συνήθως ως ορθή πλευρά την πλευρά α, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5α.

Αν θεωρήσομε τώρα το πολικό τρίγωνο ενός ορθόπλευρου τριγώνου, θα παρατηρήσομε ότι αυτό είναι ορθογώνιο.

Πράγματι, αν $α = 90°$, τότε με τους τύπους της § 3.6, από τη σχέση $A' + α = 180°$ συνεπάγεται ότι $A' = 90°$.

Όταν λοιπόν έχομε να επιλύσομε ένα ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο, αρκεί να επιλύσομε το πολικό του, που θα είναι ορθογώνιο, με τους γνωστούς τρόπους.

Κατόπιν από τους τύπους της § 3.6 βρίσκομε τα στοιχεία του δοθέντος ορθόπλευρου τριγώνου.




**Σχ. 5.5α.**

***Παράδειγμα.***

108) Να επιλυθεί ορθόπλευρο ($α = 90°$) σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζομε $β = 115°\ 24{,}6'$, $γ = 60°\ 18{,}4'$.

***Λύση.***

Του δοθέντος ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου θεωρούμε το πολικό του Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 5.5β), το οποίο έχει (τύποι § 3.6).

$A' = 180° - α = 90°$, $B' = 180° - β = 64°\ 35{,}4'$ και $Γ' = 180° - γ = 119°\ 41{,}6'$

Επιλύομε λοιπόν το πολικό του δοθέντος ορθόπλευρου που είναι ορθογώνιο.


**Σχ. 5.5β.**

**1) *Υπολογισμός β'.***

Με το Β' μεσαίο και Γ', συ-β' απέναντι στοιχεία, έχομε:

$$\text{συν}B' = \text{ημ}(\text{συ-}\beta')\,\text{ημ}\Gamma' \implies$$
$$\text{συν}B' = \text{συν}\beta'\,\text{ημ}\Gamma' \implies$$
$$\text{συν}\beta' = \frac{\text{συν}B'}{\text{ημ}\Gamma'} \implies \text{συν}\beta' = \text{συν}B'\,\text{στεμ}\Gamma' \qquad (1)$$

**2) *Υπολογισμός γ'.***

Με το Γ' μεσαίο στοιχείο και συ-γ' και Β' απέναντι του, έχομε:

$$\text{συν}\Gamma' = \text{ημ}(\text{συ-}\gamma')\,\text{ημ}B' \implies$$
$$\text{συν}\Gamma' = \text{συν}\gamma'\,\text{ημ}B' \implies$$
$$\text{συν}\gamma' = \frac{\text{συν}\Gamma'}{\text{ημ}B'} \implies \text{συν}\gamma' = \text{συν}\Gamma'\,\text{στεμ}B' \qquad (2)$$

**3) *Υπολογισμός α'.***

Με α' μεσαίο και Β', Γ' προσκείμενα στοιχεία του, έχομε:

$$\text{συν}\alpha' = \text{σφ}B'\,\text{σφ}\Gamma'$$

**4) *Τύπος επαληθεύσεως.***

Θεωρώντας τα άγνωστα στοιχεία α', συ-β' και συ-γ' με α' μεσαίο και τα άλλα απέναντι του, έχομε:

$$\text{συν}\alpha' = \text{ημ}(\text{συ-}\beta')\,\text{ημ}(\text{συ-}\gamma') \implies$$
$$\text{συν}\alpha' = \text{συν}\beta'\,\text{συν}\gamma'$$

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | β' | γ' | α' |
|---|---|---|---|
| Β' = 64° 35,4' | λογσυνΒ' = 9,63255 | λογστεμΒ' = 0,04419 | λογσφΒ' = 9,67674 |
| Γ' = 119° 41,6' | λογστεμΓ' = 0,06113 | λογσυνΓ' = 9,69492(–) | λογσφΓ' = 9,75605(–) |
| β' = 60° 24' | λογσυνβ' = 9,69368 | | |
| γ' = 123° 15,5' (παραπλ.) | λογσυνγ' = 9,73911(–) | λογσυνγ' = 9,73911(–) | |
| α' = 105° 43' (παραπλ.) | λογσυνα' = 9,43279 | (έλεγχος) | λογσυνα' = 9,43279(– |

Τα ζητούμενα λοιπόν στοιχεία Α, Β, Γ του ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου θα είναι:

$A = 180° - \alpha' = 74°\ 17'$, $B = 180° - \beta' = 119°\ 36'$, $\Gamma = 180° - \gamma' = 56°\ 44{,}5'$

### *5.5.1 Ασκήσεις.*

109) Αν σφαιρικό τρίγωνο είναι ορθόπλευρο ($\alpha = 90°$), να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:
α) $ημB = ημAημβ$ β) $συνA = -συνBσυνΓ$ γ) $εφB = -εφAσυνγ$
δ) $εφΓ = ημBεφγ$ ε) $συνA = -σφβσφγ$

Να επιλυθούν τα παρακάτω ορθόπλευρα σφαιρικά τρίγωνα, για τα οποία $\alpha = 90°$.

110) $\beta = 141°\ 2{,}8'$ $\Gamma = 167°\ 43{,}3'$.
111) $\beta = 109°\ 15{,}8'$ $\Gamma = 38°\ 45{,}4'$.
112) $B = 32°\ 53{,}6'$ $\Gamma = 115°\ 24{,}9'$.
113) $A = 100°\ 50'$ $B = 73°\ 10'$.
114) $\beta = 60°\ 34{,}9'$ $\Gamma = 122°\ 18{,}8'$.
115) $A = 73°\ 01'$ $\beta = 47°\ 47'$.
116) $\beta = 69°\ 15{,}2'$ $B = 56°\ 45{,}4'$.
117) $\beta = 56°\ 18$ $\gamma = 141°\ 23'$.
118) $\beta = 78°\ 14'$ $\gamma = 49°\ 08'$.
119) Να επιλυθεί το ορθόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ($\alpha = 90°$), του οποίου δίνονται: $\beta = 131°\ 22'$ και $\Gamma = 167°\ 30'$

## 5.6 Επίλυση ισοσκελών σφαιρικών τριγώνων.

Είδαμε ότι ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο είναι εκείνο, το οποίο έχει δύο πλευρές ίσες.

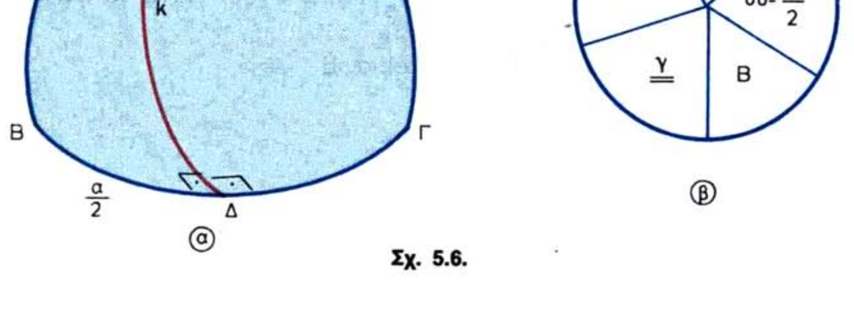
Η επίλυση ενός τέτοιου τριγώνου πραγματοποείται όταν το χωρίσομε σε δύο ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

### *Παράδειγμα.*

120) Να επιλυθεί ισοσκλές σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου γνωρίζομε τις ίσες πλευρές $\beta = \gamma = 54°\ 28{,}4'$ και την περιεχομένη γωνία $A = 112°\ 36{,}2'$.

### Λύση.

Θεωρούμε το μέγιστο κύκλο που διέρχεται από την κορυφή Α (σχ. 5.6) και είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ, την οποία τέμνει στο σημείο Δ.




**Σχ. 5.6.**

Θεωρούμε το ορθογώνιο (στο Δ) σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΔ, το οποίο και επιλύομε κατά τα γνωστά.

*1) Υπολογισμός Β.*

Θεωρώντας το στοιχείο γ ως μεσαίο, τα Β και $\frac{A}{2}$ είναι προσκείμενα του.

Άρα:

$$\text{συν}\gamma = \text{σφ}\frac{A}{2}\ \text{σφ}B$$

$$\Longrightarrow \text{σφ}B = \text{συν}\gamma\,\text{εφ}\frac{A}{2} \tag{1}$$

*2) Υπολογισμός $\frac{\alpha}{2}$.*

Με $\text{συ-}\frac{\alpha}{2}$ μεσαίο στοιχείο, τα $\frac{A}{2}$ και γ είναι απέναντι του, έχομε:

$$\text{συν}\left(\text{συ-}\frac{\alpha}{2}\right) = \text{ημ}\frac{A}{2}\text{ημ}\gamma$$

$$\Longrightarrow \text{ημ}\frac{\alpha}{2} = \text{ημ}\frac{A}{2}\text{ημ}\gamma \tag{2}$$

*3) Υπολογισμός k.*

Με $\frac{A}{2}$ μεσαίο, τα συ-k και γ είναι προσκείμενα. Έτσι:

$$\text{συν}\frac{A}{2} = \text{σφ(συ-}k)\text{σφ}\gamma$$

$$\Longrightarrow \text{συν}\frac{A}{2} = \text{εφ}k\,\text{σφ}\gamma$$

$$\Longrightarrow \text{εφ}\ k = \text{συν}\frac{A}{2}\ \text{εφ}\gamma \tag{3}$$

*4) Τύπος επαληθεύσεως.*

Θεωρώντας τα άγνωστα συ-k, $\text{συ-}\frac{\alpha}{2}$ και Β έχομε κατά τα γνωστά:

$$\text{συν}\left(\text{συ-}\frac{\alpha}{2}\right) = \text{σφ(συ-}k)\text{σφ}B \Longrightarrow$$

$$\text{ημ}\frac{\alpha}{2} = \text{εφ}k\,\text{σφ}B \tag{4}$$

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | B | k | $\frac{\alpha}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{A}{2} = 56°\ 18{,}1'$ | λογεφ $\frac{A}{2} = 0{,}17596$ | λογσυν $\frac{A}{2} = 9{,}74415$ | λογημ $\frac{A}{2} = 9{,}92011$ |
| $\gamma = 54°\ 28{,}4'$ | λογσυνγ $= 9{,}76424$ | λογεφγ $= 0{,}14630$ | λογημγ $= 9{,}91054$ |
| $B = 48°\ 55{,}9'$ | λογσφB $= 9{,}94020$ | | |
| $k = 37°\ 50{,}9'$ | λογεφk $= 9{,}89045$ | λογεφk $= 9{,}89045$ | |
| $\frac{\alpha}{2} = 42°\ 37'$ | λογημ $\frac{\alpha}{2} = 9{,}83065$ | (έλεγχος) | λογημ $\frac{\alpha}{2} = 9{,}83065$ |

Τα ζητούμενα λοιπόν στοιχεία του ισοσκελούς σφαιρικού τριγώνου θα είναι:

$\alpha = 85°\ 14'$ και $B = \Gamma = 48°\ 55{,}9'$

### *5.6.1 Ασκήσεις.*

Να επιλυθεί κάθε ένα από τα παρακάτω ισοσκελή σφαιρικά τρίγωνα ΑΒΓ, όταν είναι γνωστά:

121) $\alpha = \beta = 78°\ 23{,}5'$ και $\Gamma = 118°\ 54{,}6'$.

122) $B = \Gamma = 38°\ 52{,}5'$ και $\alpha = 132°\ 15'$.

## 5.7 Επίλυση τυχόντων σφαιρικών τριγώνων.

Για την επίλυση τυχόντος σφαιρικού τριγώνου αρκεί να μας δοθούν τρία στοιχεία του, οπότε υπολογίζομε τα υπόλοιπα τρία.

Σε κάθε επίλυση χρησιμοποιούμε ανάλογα με την περίπτωση τους τύπους των σφαιρικών τριγώνων που μάθαμε έως τώρα, καθώς και διάφορες μεθόδους, οι οποίες θα αναφερθούν παρακάτω.

Οι διάφορες δυνατές περιπτώσεις επιλύσεως τυχόντος σφαιρικού τριγώνου, που μπορεί να εμφανισθούν, είναι οι εξής έξι:

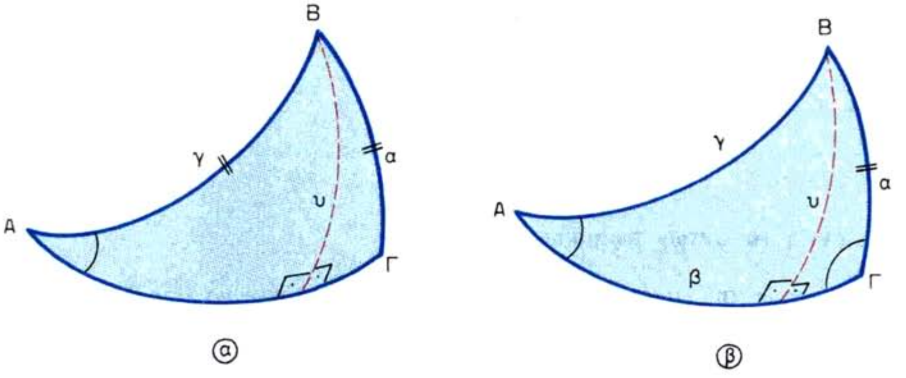
Περίπτωση I: Δίνονται τρεις πλευρές.
Περίπτωση II: Δίνονται τρεις γωνίες.
Περίπτωση III: Δίνονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία.
Περίπτωση IV: Δίνονται μια πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες.
Περίπτωση V: Δίνονται δυο πλευρές και η απέναντι σε μια από αυτές γωνία.
Περίπτωση VI: Δίνονται δυο γωνίες και η απέναντι σε μια από αυτές πλευρά.

Σε ορισμένες από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε, όπως θα δούμε σε παραδείγματα, να χρησιμοποιήσομε τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων. Κατά τη μέθοδο αυτή φέρομε από μια κορυφή του τριγώνου ένα μέγιστο κύκλο καθέτως προς την απέναντί της πλευρά και έτσι διαιρούμε το αρχικό τρίγωνο σε δυο ορθογώνια τρίγωνα, τα οποία επιλύομε κατά τα γνωστά. Η συνένωση των λύσεών τους μας δίνει την επίλυση του αρχικού τριγώνου.

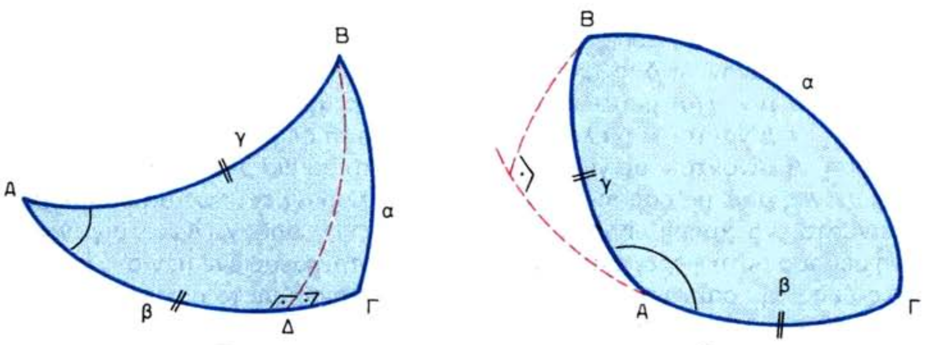
Σε γενικές γραμμές η επίλυση με τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων μπορεί να γίνει ως εξής:

α) Δίνονται δυο πλευρές και μια γωνία ή δυο γωνίες και μια πλευρά. Τότε φέρομε από την κορυφή Β (σχ. 5.7α) μέγιστο κύκλο κάθετο στην απέναντι πλευρά ή στην προέκτασή της. Από τα σχηματιζόμενα δυο ορθογώνια τρίγωνα επιλύομε πρώτα εκείνο που έχει δυο στοιχεία γνωστά και κατόπιν επιλύομε το άλλο. Όταν δυο από τα στοιχεία είναι απέναντι, μπορεί να υπάρχουν δυο λύσεις.

β) Δίνονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία. Τότε φέρομε από οποιαδήποτε κορυφή γωνίας που δεν έχει δοθεί, μέγιστο κύκλο κάθετο στην απέναντι πλευρά (σχ. 5.7β).
Στο σχήμα 5.7β αν έχουν δοθεί β, γ και Α, τότε η κάθετη μπορεί να αχθεί από τη Β ή τη Γ. Αν αχθεί από την κορυφή Β πρώτα επιλύομε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ υπολογίζοντας τα υ, ΔΑ και γωνία ΑΒΔ.
Αν η Α$<90°$ και η ΑΔ$<$β, τότε η ΑΔ αφαιρείται από τη β για να δώσει τη ΔΓ.
Αν Α$>90°$ επιλύομε πρώτα το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ υπολογίζοντας τα υ, ΑΔ και γωνία ΑΒΔ (γνωρίζοντας τα γ και γωνία ΒΑΔ παραπληρωματική της Α).




Σχ. 5.7α.




Σχ. 5.7β.

Μετά επιλύομε το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ υπολογίζοντας τα α, Γ και γωνία ΔΒΓ (γνωρίζοντας τα υ και ΓΔ).

### *5.7.1 Ασκήσεις.*

123) Με τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων να επιλυθεί το πλάγιο σφαιρικό τρίγωνο για το οποίο έχομε $\alpha = 72° \; 8'$, $\beta = 86° \; 14'$ και $\Gamma = 61° \; 34'$.

124) Τυχόντος σφαιρικού τριγώνου γνωρίζομε τα εξής στοιχεία: $\gamma = 108° \; 53'$, $A = 41° \; 27$ και $B = 52° \; 36'$. Να επιλυθεί με τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων.

Εξετάζομε τώρα κάθε μία από τις έξι περιπτώσεις επιλύσεως τυχόντος σφαιρικού τριγώνου, με σχετικά παραδείγματα και μεθόδους επιλύσεως κατά περίπτωση.

### *5.7.2 Περίπτωση Ι.*

***Δίνονται τρεις πλευρές.***

***Παράδειγμα.***

124α) Να επιλυθεί τυχόν σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου γνωρίζομε τις τρεις πλευρές $\alpha = 109°$, $\beta = 57°$ και $\gamma = 65°$.

***Λύση.***

***1ος τρόπος.***

Εφαρμόζομε τους τύπους των μισών γωνιών:

Έχομε:
$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{109° + 57° + 65°}{2} = 115° \; 30'$$

$$\begin{aligned} \tau - \alpha &= 115° \; 30' - 109° = 6° \; 30' \\ \tau - \beta &= 115° \; 30' - 57° = 58° \; 30' \\ \tau - \gamma &= 115° \; 30' - 65° = 50° \; 30' \end{aligned}$$

Επίσης οι σχέσεις $\varepsilon\varphi \dfrac{A}{2} = \dfrac{k}{\eta\mu(\tau - \alpha)}$, κλπ. γράφονται και

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = k\sigma\tau\varepsilon\mu(\tau - \alpha) \text{ κλπ.}$$

Κάνομε τώρα το εξής φύλλο υπολογισμού.

## ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

| | A | B | Γ |
|---|---|---|---|
| λογημ(τ − α)= 9,05386 | λογστεμ (τ − α)=0,94614 | | |
| λογημ(τ − β)= 9,93077 | | λογστεμ(τ − β)= 0,06923 | |
| λογημ(τ − γ)= 9,88741 | | | λογστεμ(τ − γ)=0,11259 |
| λογστεμτ = 0,04451 | | | |
| 2λογk = 28,91655 | | | |
| λογk = 9,45827 | λογk = 9,45827 | λογk = 9,45827 | λογk = 9,45827 |
| $\frac{A}{2}$ = 68° 29,5′ | λογεφ $\frac{A}{2}$ = 0,40441 | | |
| A = 136°59′ | | | |
| $\frac{B}{2}$ = 18°37,1′ | | λογεφ $\frac{B}{2}$ = 9,52750 | |
| B = 37°14,2′ | | | |
| $\frac{\Gamma}{2}$ = 20°25,13′ | | | λογεφ $\frac{\Gamma}{2}$ = 9,57086 |
| Γ = 40°50,35′ | | | |

Επεξηγήσεις για το φύλλο υπολογισμού:

1) Το άθροισμα των τεσσάρων γραμμών της πρώτης στήλης μας δίνει στην πέμπτη γραμμή το 2λογk, γιατί ο τύπος που δίνει το k της § 4.4 έχει ρίζα, οπότε λογαριθμίζοντας θα έχομε 2λογk = κλπ. Έτσι στην έκτη γραμμή έχομε λογk = 28,91655 : 2 = 9,45827.

2) Η δεύτερη στήλη μας δίνει το λογεφ $\frac{A}{2}$ λόγω του τύπου:

$$\text{εφ}\,\frac{A}{2} = k\,\text{στεμ}(\tau - \alpha)$$

οπότε

$$\text{λογεφ}\,\frac{A}{2} = \text{λογ}k + \text{λογστεμ}(\tau - \alpha)$$

3) Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και στην τρίτη και τέταρτη στήλη.

***Παρατήρηση:***

Για τον έλεγχο στην περίπτωση 1 χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\text{ημ}\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\text{ημ}\gamma}{\text{ημ}\Gamma} \quad \text{απ' όπου παίρνομε:}$$

$$\text{ημ}\alpha\,\text{στεμ}A = \text{ημ}\beta\,\text{στε}B = \text{ημ}\gamma\,\text{στεμ}\Gamma \implies$$

$$\text{λογημ}\alpha + \text{λογστεμ}A = \text{λογημ}\beta + \text{λογστεμ}B = \text{λογημ}\gamma + \text{λογστεμ}\Gamma$$

Έτσι στο παράδειγμά μας εδώ θα έχομε:

| | | |
|---|---|---|
| λογημα = 9,97567 + | λογημβ = 9,92359 + | λογημγ = 9,95727 + |
| λογστεμΑ = 0,16608 | λογστεμΒ = 0,21816 | λογστεμΓ = 0,18448 |
| 0,14175 | 0,14175 | 0,14175 |

***2ος τρόπος.***

Μπορούμε να εφαρμόσομε τους τύπους των ημιπαρημιτόνων γωνιών, οι οποίοι είναι και λογιστοί δια των λογαρίθμων. Όλα τα απαιτούμενα στοιχεία τα έχομε υπολογίσει στον πρώτο τρόπο. Έτσι έχομε το εξής φύλλο υπολογισμού:

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | Α | Β | Γ |
|---|---|---|---|
| α = 109° | | λογστεμα = 0,02433 | λογστεμα = 0,02433 |
| β = 57° | λογστεμβ = 0,07641 | | λογστεμβ = 0,07641 |
| γ = 65° | λογστεμγ = 0,04272 | λογστεμγ = 0,04272 | |
| τ − α = 6°30′ | | λογημ(τ − α) = 9,05386 | λογημ(τ − α) = 9,05386 |
| τ − β = 58°30′ | λογημ(τ − β) = 9,93077 | | λογημ(τ − β) = 9,93077 |
| τ − γ = 50°30 | λογημ(τ − γ) = 9,99741 | λογημ(τ − γ) = 9,88741 | |
| Α = 136°59′ ← | λογημπαρΑ = 9,93731 | | |
| Β = 37°14,2′ ← | | λογημπαρΒ = 9,00832 | |
| Γ = 40°50,25′ ← | | | λογημπαρΓ = 9,08537 |

***Διερεύνηση της περιπτώσεως Ι.***

Πρέπει άθροισμα πλευρών α + β + γ < 360° και καμιά από τις πλευρές να μην είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων.

***5.7.3 Περίπτωση ΙΙ.***
***Δίνονται τρεις γωνίες.***

***Παράδειγμα.***

125) Να επιλυθεί τυχόν σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου δίνονται: Α = 117° 22,8′, Β = 72° 38,6′ και Γ = 58° 21,2′.

***Λύση.***

***1ος τρόπος.***

Εφαρμόζομε τους τύπους των μισών πλευρών γράφοντας τις σχέσεις:

$$\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{K}{\sigma\upsilon\nu(T - A)} \text{κλπ. ως εξής: } \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = K\tau\varepsilon\mu(T - A) \text{ κλπ.}$$

και για τιμή του Κ προτιμάμε την:

$$K = \sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu(T - A)\sigma\upsilon\nu(T - B)\sigma\upsilon\nu(T - \Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(180 - T)}}$$

(οπότε λογαριθμίζοντας θα έχομε:

$$2\lambda o\gamma\, K = \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(T - A) + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(T - B) + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(T - \Gamma) + \lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu(180 - T)$$

Βάσει των δοθέντων θα έχομε:

$$T = \frac{A + B + \Gamma}{2} = 124^\circ\ 11{,}3'$$

$T - A = 6^\circ\ 48{,}5'$, $T - B = 51^\circ\ 32{,}7'$, $T - \Gamma = 65^\circ\ 50{,}1'$, $180 - T = 55^\circ\ 48{,}7'$
Συντάσομε τώρα το εξής φύλλο υπολογισμού.

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | α | β | γ |
|---|---|---|---|
| λογσυν(Τ − Α) = 9,99692 | λογτεμ(Τ − Α) = 0,00308 | | |
| λογσυν(Τ − Β) = 9,79372 | | λογτεμ(Τ − Β) = 0,20628 | |
| λογσυν(Τ − Γ) = 9,61211 | | | λογτεμ(Τ − Γ) = 0,38789 |
| λογτεμΤ = 0,25033 | | | |
| 2λογΚ = 29,65308 | | | |
| λογΚ = 9,82654 → | → λογΚ = 9,82654 → | → λογΚ = 9,82654 → | → λογΚ = 9,82654 |
| $\frac{\alpha}{2} = 55^\circ\ 57{,}7'$ ← | ← λογσφ $\frac{\alpha}{2} = 9{,}82962$ | | |
| $\alpha = 111^\circ\ 55{,}4'$ | | | |
| $\frac{\beta}{2} = 42^\circ\ 50{,}2'$ ← | ← | ← λογσφ $\frac{\beta}{2} = 0{,}03282$ | |
| $\beta = 85^\circ\ 40{,}4'$ | | | |
| $\frac{\gamma}{2} = 31^\circ\ 23{,}8'$ ← | ← | ← | ← λογσφ $\frac{\gamma}{2} = 0{,}21443$ |
| $\gamma = 62^\circ\ 47{,}6'$ | | | |

Οι επεξηγήσεις του φύλλου υπολογισμού είναι ανάλογες με το παράδειγμα της περιπτώσεως 1.

***Παρατήρηση.***

Για να κάνομε τον έλεγχο στην περίπτωση II χρησιμοποιούμε και πάλι το Νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

Έτσι στο παράδειγμα μας εδώ θα έχομε:

| | | |
|---|---|---|
| λογημα = 9,96740 + | λογημβ = 9,99876 + | λογημγ = 9,94908 + |
| λογστεμΑ = 0,05160 | λογστεμΒ = 0,02024 | λογστεμΓ = 0,06992 |
| 0,01900 | 0,01900 | 0,01900 |

***2ος τρόπος:***

Εργαζόμαστε με πολικό τρίγωνο. Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ του δοθέντος για το οποίο έχομε α΄ = 180° – Α = 62° 37,2΄, β΄ = 180° – Β = 107° 21,4΄ και γ΄ = 180° – Γ = 121° 38,8΄. Του πολικού λοιπόν γνωρίζομε τρεις πλευρές, άρα μπορούμε να το επιλύσομε (περίπτωση Ι). Χρησιμοποιούμε το δεύτερο τρόπο της περιπτώσεως Ι με τα ημιπαρημίτονα.

Έχομε: $$\tau' = \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{2} = 145°48{,}7'$$

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | Α΄ | Β΄ | Γ΄ |
|---|---|---|---|
| α΄ = 62° 37,2΄ | | λογστεμα΄ = 0,05160 | λογστεμα΄ = 0,05160 |
| β΄ = 107° 21,4΄ | λογστεμβ΄ = 0,02024 | | λογστεμβ΄ = 0,02024 |
| γ΄ = 121° 38,8΄ | λογστεμγ΄ = 0,06992 | λογστεμγ΄ = 0,06992 | |
| τ΄ – α΄ = 83° 11,5΄ | | λογημ (τ΄ – α΄) = 9,99693 | λογημ (τ΄ – α΄) = 9,99693 |
| τ΄ – β΄ = 38° 27,3΄ | λογημ(τ΄ – β΄) = 9,79372 | | λογημ(τ΄ – β΄) = 9,79372 |
| τ΄ – γ΄ = 24° 9,9΄ | λογημ(τ΄ – γ΄) = 9,61211 | λογημ(τ΄ – γ΄) = 9,61211 | |
| Α΄ = 68° 4,6΄ | ← λογημπαρΑ΄ = 9,49599 | | |
| Β΄ = 94° 19,6΄ | ← | λογημπαρΒ΄ = 9,73056 | |
| Γ΄ = 117° 12,4΄ | ← | | λογημπαρΓ΄ = 9,86249 |

***Έλεγχος.***

Με τον νόμο των ημιτόνων: $$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

| | | |
|---|---|---|
| λογημα΄ = 9,94840 | λογημβ΄ = 9,97976 | λογημγ΄ = 9,93008 |
| λογστεμΑ΄ = 0,03260 | λογστεμΒ΄ = 0,00124 | λογστεμΓ΄ = 0,05092 |
| 9,98100 | 9,98100 | 9,98100 |

Άρα: α = 180° – Α΄ = 111° 55,4΄  β = 180° – Β΄ = 85° 40,4΄
γ = 180° – Γ΄ = 62° 47,6΄.

***Διερεύνηση της περιπτώσεως ΙΙ.***

Μπορεί να γίνει βάσει της περιπτώσεως Ι θεωρώντας το πολικό Α΄Β΄Γ΄ του ΑΒΓ. Αν π.χ. δίνονται Α = 76°, Β = 103° και Γ = 164°, για το πολικό θα έχομε α΄ = 104°, β΄ = 77° και γ΄ = 16°. Το τρίγωνο όμως δεν είναι κατασκευάσιμο, γιατί 104° > 77° + 16° δηλαδή α΄ > β΄ + γ΄.

### *5.7.4 Περίπτωση III.*
### *Δίνονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία.*

Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται περισσότερο από κάθε άλλη στα προβλήματα της Ναυτιλίας και της Αστρονομίας, γι' αυτό καλό είναι να γνωρίζομε καλά όλους τους τρόπους επιλύσεώς της.

***Παράδειγμα.***

126) Να επιλυθεί τυχόν σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου γνωρίζομε τα εξής στοιχεία: $\alpha = 103^\circ\ 30'$, $6 = 42^\circ\ 40'$ και $\Gamma = 48^\circ\ 20'$.

***1ος τρόπος.***

Χρησιμοποιούμε τους αναλογικούς τύπους του Napier.

Για τον υπολογισμό των γωνιών Α και Β διαλέγομε τους τύπους:

$$\text{εφ}\,\frac{A+B}{2} = \text{συν}\frac{\alpha-6}{2}\ \text{τεμ}\frac{\alpha+6}{2}\ \text{σφ}\,\frac{\Gamma}{2}$$

$$\text{εφ}\,\frac{A-B}{2} = \text{ημ}\frac{\alpha-6}{2}\text{στεμ}\frac{\alpha+6}{2}\ \text{σφ}\,\frac{\Gamma}{2}$$

Με βάση αυτούς υπολογίζομε το άθροισμα $\frac{A+B}{2}$ και τη διαφορά $\frac{A-B}{2}$ και από αυτούς λύνοντας το σύστημά τους, βρίσκομε τα Α και Β.

Για τον υπολογισμό της πλευράς γ επιλέγομε τον τύπο:

$$\text{εφ}\frac{\gamma}{2} = \text{εφ}\,\frac{\alpha-6}{2}\ \text{ημ}\,\frac{A+B}{2}\text{στεμ}\,\frac{A-B}{2}$$

Για τον έλεγχο χρησιμοποιούμε και πάλι το νόμο των ημιτόνων.

$$\frac{\text{ημα}}{\text{ημA}} = \frac{\text{ημ6}}{\text{ημB}} = \frac{\text{ημγ}}{\text{ημΓ}}$$

τον οποίο μετασχηματίζομε ως εξής:

$$\text{ημαστεμA} = \text{ημ6στεμB} = \text{ημγστεμΓ}$$

και αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες τιμές πρέπει να επαληθεύεται.

Βάσει των παραπάνω συντάσομε το εξής φύλλο υπολογισμού, στη διαμόρφωση του οποίου μας οδηγούν οι επιλεγέντες τύποι.

## ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

| | $\frac{A+B}{2}$ | $\frac{A-B}{2}$ | $\frac{\gamma}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\alpha-\beta}{2} = 30°\ 25'$ | $\text{λογσυν}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}93569$ | $\text{λογημ}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}70439$ | $\text{λογεφ}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}76870$ |
| $\frac{\alpha+\beta}{2} = 73°\ 5'$ | $\text{λογτεμ}\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{,}53614$ | $\text{λογστεμ}\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{,}01921$ | |
| $\frac{\Gamma}{2} = 24°\ 10'$ | $\text{λογσφ}\frac{\Gamma}{2} = 0{,}34803$ | $\text{λογσφ}\frac{\Gamma}{2} = 0{,}34803$ | |
| $\frac{A+B}{2} = 81°\ 23{,}4'$ | $\text{λογεφ}\frac{A+B}{2} = \overline{0{,}81986}$ | | $\text{λογημ}\frac{A+B}{2} = 9{,}99508$ |
| $\frac{A-B}{2} = 49°\ 42{,}2'$ | | $\text{λογεφ}\frac{A-B}{2} = \overline{0{,}07163}$ | $\text{λογστεμ}\frac{A-B}{2} = 0{,}11764$ |
| $A = 131°\ 5{,}6'$ | | | |
| $B = 31°\ 41{,}2'$ | | | |
| $\frac{\gamma}{2} = 37°\ 16{,}4'$ | | | $\text{λογεφ}\frac{\gamma}{2} = \overline{9{,}88142}$ |
| $\gamma = 74°\ 32{,}8'$ | | | |

***Έλεγχος.***

| | | |
|---|---|---|
| λογημα = 9,98783 | λογημβ = 9,83106 | λογημγ = 9,98401 |
| λογστεμΑ = 0,12284 | λογστεμΒ = 0,27961 | λογστεμΓ = 0,12666 |
| 0,11067 | 0,11067 | 0,11067 |

***2ος τρόπος.***

Αν χρησιμοποιήσομε τον τρίτο από τους τύπους των ημιπαρημιτόνων πλευρών, μπορούμε να υπολογίσομε αμέσως την πλευρά γ ως εξής:

$$\text{ημπργ} = \text{ημπρ}(\alpha-\beta) + \text{ημαημβημπρΓ} \qquad (1)$$

Αν θέσομε $\quad \text{ημπρX} = \text{ημαημβημπρΓ} \qquad (2)$

ο (1) γράφεται: $\quad \text{ημπργ} = \text{ημπρ}(\alpha-\beta) + \text{ημπρX} \qquad (3)$

Λογαριθμίζοντας τη (2) έχομε:

$$\text{λογημπρX} = \text{λογημα} + \text{λογημβ} + \text{λογημπρΓ}$$

Έτσι έχομε την εξής κατάταξη για τον υπολογισμό του ημπρX και κατόπιν του ημπργ:

λογημα = 9,98783
λογημβ = 9,83106
λογημπρΓ = 9,22428
λογημπρX = 9,04317 $\Longrightarrow$ ημπρX = 0,11045

και επειδή βρίσκομε ημπρ(α – β) = ημπρ(60° 50΄) = 0,25632 η (3) γράφεται:

$$
\begin{aligned}
&\text{ημπργ} = 0{,}25632 + 0{,}11045\\
\Longrightarrow\ &\text{ημπργ} = 0{,}36677\\
\Longrightarrow\ &\gamma = 74^\circ\ 32{,}8'
\end{aligned}
$$

Ο υπολογισμός τώρα των υπολοίπων στοιχείων Α και Β μπορεί να γίνει με το νόμο των ημιτόνων ή με τους τύπους των ημιπαρημιτόνων γωνιών

$$\text{ημπρA} = \text{ημ}(\tau - \beta)\text{ημ}(\tau - \gamma)\text{στεμβστεμγ (κυκλικά)}$$

Σ' αυτή την περίπτωση έχομε, εφόσον $\tau = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 110^\circ\ 21{,}4'$, το εξής φύλλο υπολογισμού.

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | Α | Β |
|---|---|---|
| α = 103° 30΄ | | λογστεμα = 0,01217 |
| β = 42° 40΄ | λογστεμβ = 0,16894 | |
| γ = 74° 32,8΄ | λογστεμγ = 0,01599 | λογστεμγ = 0,01599 |
| τ – α = 6° 51,4΄ | | λογημ(τ – α) = 9,07695 |
| τ – β = 67° 41,4΄ | λογημ(τ – β) = 9,96621 | |
| τ – γ = 35° 48,6΄ | λογημ(τ – γ) = 9,76723 | λογημ(τ – γ) = 9,76723 |
| Α = 131° 5,6΄ | λογημπρΑ = 9,91837 | |
| Β = 31° 41,2΄ | | λογημπρΒ = 8,87234 |

***3ος τρόπος.***

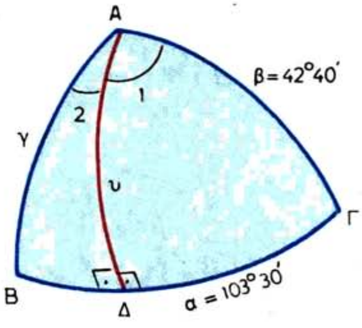
Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων. Αναλύομε το δοθέν τρίγωνο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα, όπως περιγράφομε στη § 5.7 φέροντας από την κορυφή Α μέγιστο κύκλο κάθετο στην πλευρά ΒΓ (σχ. 5.7γ).

Επιλύομε λοιπόν πρώτα το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΔΓ, του οποίου, αφού γνωρίζομε τα στοιχεία β, Γ, θα υπολογίσομε τα υ, ΓΔ, και γωνία $A_1$. Σχηματίζομε λοιπόν για το τρίγωνο αυτό τον κατάλληλο κύκλο με τους πέντε τομείς, προκειμένου να προκύψουν κατά τα γνωστά οι απαιτούμενοι τύποι για την επίλυση του.

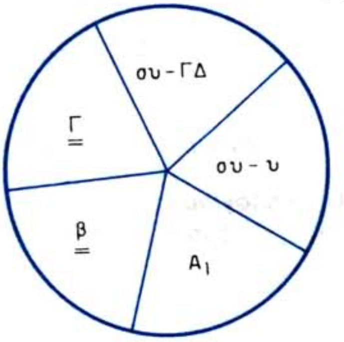
***1) Υπολογισμός ΓΔ.***

Με Γ μεσαίο και β, συ-ΓΔ προσκείμενα στοιχεία έχομε (σχ. 5.7δ).

$$
\begin{aligned}
&\text{συνΓ} = \text{σφ(συ-ΓΔ)σφβ}\\
\Longrightarrow\ &\text{συνΓ} = \text{εφΓΔσφβ}\\
\Longrightarrow\ &\text{εφΓΔ} = \text{συνΓεφβ} \qquad (1)
\end{aligned}
$$




**Σχ. 5.7γ.**




**Σχ. 5.7δ.**

***2) Υπολογισμός $A_1$.***

Με β μεσαίο και $A_1$, Γ προσκείμενα στοιχεία έχομε:

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\varphi A_1 \sigma\varphi\Gamma$$
$$\Longrightarrow \quad \sigma\varphi A_1 = \sigma\upsilon\nu\beta\varepsilon\varphi\Gamma \qquad (2)$$

***3) Υπολογισμός υ:***

Με το στοιχείο συ-υ μεσαίο και απέναντι τα β και Γ έχομε:

$$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\text{-}\upsilon) = \eta\mu\beta\eta\mu\Gamma$$
$$\Longrightarrow \quad \eta\mu\upsilon = \eta\mu\beta\eta\mu\Gamma \qquad (3)$$

***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

Με συ-υ μεσαίο και $A_1$, συ-ΓΔ προσκείμενα στοιχεία, έχομε:

$$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\text{-}\upsilon) = \sigma\varphi A_1 \sigma\varphi(\sigma\upsilon\text{-}\Gamma\Delta)$$
$$\Longrightarrow \quad \eta\mu\upsilon = \sigma\varphi A_1 \varepsilon\varphi\Gamma\Delta$$

**1ο ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | ΓΔ | $A_1$ | υ |
|---|---|---|---|
| β = 42° 40΄ | λογεφβ = 9,96459 | λογσυνβ = 9,86647 | λογημβ = 9,83106 |
| Γ = 48° 20΄ | λογσυνΓ = 9,82269 | λογεφΓ = 0,05065 | λογημΓ = 9,87334 |
| ΓΔ = 31° 29,8΄ ← | λογεφΓΔ = 9,78728 | | |
| $A_1$ = 50° 26΄ ← | λογσφ$A_1$ = 9,91712 | λογσφ$A_1$ = 9,91712 | |
| $υ_1$ = 30° 25΄ | ← λογημυ = 9,70440 | (έλεγχος) ← | λογημυ = 9,70440 |
| $υ_2$ = 180° −(30° 25΄) | | | |

***Παρατήρηση.*** Η τιμή $υ_2$ ως μεγαλύτερη από 90° απορρίπτεται, γιατί η απέναντι της υ γωνία Γ είναι < 90°.

Τώρα στο δεύτερο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΔ (σχ. 5.7γ) έχομε:

$$ΒΔ = α - ΓΔ = (103^\circ\ 30') - (31^\circ\ 29{,}8') \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ ΒΔ = 72^\circ\ 0{,}2'$$

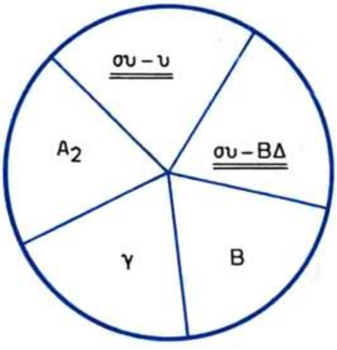
Άρα έχομε γι' αυτό το τρίγωνο (σχ. 5.7ε).

***1) Υπολογισμός γ.***

Με γ μεσαίο και συ-υ, συ-ΒΔ απέναντι στοιχεία, έχομε:

$$συνγ = ημ(συ\text{-}υ)ημ(συ\text{-}ΒΔ)$$

$$συνγ = συνυσυνΒΔ \qquad (1)$$




**Σχ. 5.7ε.**

***2) Υπολογισμός Β:***

Με συ-ΒΔ μεσαίο στοιχείο και Β, συ-υ προσκείμενα έχομε:

$$συν(συ\text{-}ΒΔ) = σφ(συ\text{-}υ)σφΒ$$

$$\Longrightarrow \quad ημΒΔ = εφυσφΒ$$

$$\Longrightarrow \quad σφΒ = ημΒΔσφυ \qquad (2)$$

***3) Υπολογισμός $A_2$.***

Με συ-υ μεσαίο και προσκείμενα τα $A_2$, συ-ΒΔ, έχομε:

$$συν(συ\text{-}υ) = σφA_2σφ(συ\text{-}ΒΔ)$$

$$\Longrightarrow \quad ημυ = σφA_2εφΒΔ$$

$$σφA_2 = ημυσφΒΔ \qquad (3)$$

***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

Θεωρούμε τα άγνωστα στοιχεία γ, Β, $A_2$ με γ μεσαίο και $A_2$, Β προσκείμενα του, άρα:

$$συνγ = σφA_2σφΒ \qquad (4)$$

Συντάσσομε τώρα το 2ο φύλλο υπολογισμού.

**2ο ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | Β | $A_2$ | γ |
|---|---|---|---|
| $u = 30° \ 25'$ | λογσφu = 0,23130 | λογημu = 9,70439 | λογσυνu = 9,33570 |
| $ΒΔ = 72° \ 0{,}2'$ | λογημΒΔ = 9,97821 | λογσφΒΔ = 9,51178 | λογσυνΒΔ = 9,48998 |
| $Β = 31° \ 41{,}2'$ | ← λογσφΒ = 0,20951 | | |
| $A_2 = 81° \ 39{,}6'$ | ← λογσφ$A_2$ = 9,21617 | ← λογσφ$A_2$ = 9,21617 | |
| $γ = 74° \ 32{,}8'$ | ← λογσυνγ = 9,42568 | ← (έλεγχος) ← | λογσυνγ = 9,42568 |

Έτσι λοιπόν βρίσκομε για τα άγνωστα στοιχεία του προς επίλυση τριγώνου ΑΒΓ:

$$\gamma = 74° \ 32{,}8'$$
$$B = 31° \ 41{,}2'$$
και
$$A = A_1 + A_2 = (50° \ 26') + (80° \ 39{,}6') = 131° \ 5{,}6'$$

***4ος τρόπος.***

Επειδή ο τρόπος αυτός είναι κάπως σύνθετος, απλώς τον περιγράφομε: Μπορούμε να χρησιμοποιήσομε κατάλληλα τον τύπους του Gauss. Έτσι από την εξίσωση:

$$\eta\mu \frac{A - B}{2} = \frac{\eta\mu \dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\eta\mu \dfrac{\gamma}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$$

συνεπάγεται
$$\lambda o\gamma \left(\eta\mu \frac{\gamma}{2} \eta\mu \frac{A - B}{2}\right) = \lambda o\gamma\eta\mu \frac{\alpha - \beta}{2} + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \qquad (1)$$

όπου το δεύτερο μέλος υπολογίζεται αφού α, β, Γ δίνονται.

Από την εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2} = \frac{\eta\mu \dfrac{\alpha + \beta}{2}}{\eta\mu \dfrac{\gamma}{2}} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$$

συνεπάγεται
$$\lambda o\gamma \left(\eta\mu \frac{\gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2}\right) = \lambda o\gamma\eta\mu \frac{\alpha + \beta}{2} + \lambda o\gamma\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \qquad (2)$$

όπου το δεύτερο μέλος υπολογίζεται, αφού α, β, Γ δίνονται.

Αφαιρούμε από την εξίσωση (1) την εξίσωση (2):

$$\lambda o\gamma \left(\eta\mu \frac{\gamma}{2} \eta\mu \frac{A - B}{2}\right) - \lambda o\gamma \left(\eta\mu \frac{\gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2}\right) = k \ \text{ όπου } k \text{ γνωστό}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{λογεφ}\frac{A-B}{2} = k$$

από όπου υπολογίζεται η διαφορά Α – Β.

Ομοίως εργαζόμεθα με τους τύπους:

$$\eta\mu\frac{A+B}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\gamma}{2}}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\gamma}{2}}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

υπολογίζοντας και το άθροισμα Α + Β.

Αφού υπολογίσαμε το Α + Β και το Α – Β βρίσκομε κατά τα γνωστά τα Α και Β.

Από την εξίσωση (1) τώρα, αντικαθιστώντας τα Α και Β, μπορούμε να υπολογίσομε τον λογημ $\frac{\gamma}{2}$ άρα και το γ.

***Διερεύνηση της περιπτώσεως ΙΙΙ.***

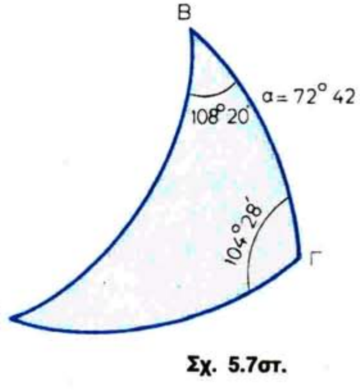
Στην περίπτωση αυτή που δίνονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία, το τρίγωνο είναι πάντοτε κατασκευάσιμο.

### *5.7.5 Περίπτωση IV.*

***Δίνονται μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες.***

***Παράδειγμα.***

127) Να επιλυθεί τυχόν σφαιρικό τρίγωνο του οποίου δίνονται: $B = 108°\ 20'$, $\Gamma = 104°\ 28'$, $\alpha = 72°\ 42'$ (σχ. 5.7στ).




**Σχ. 5.7στ.**

*1ος τρόπος.*

Χρησιμοποιούμε τους αναλογικούς τύπους του Napier. Για τον υπολογισμό των πλευρών β και γ επιλέγομε τους τύπους

$$εφ\frac{β+γ}{2} = συν\frac{B-Γ}{2}\ τεμ\frac{B+Γ}{2}\ εφ\frac{α}{2}$$

και
$$εφ\frac{β-γ}{2} = ημ\frac{B-Γ}{2}\ στεμ\frac{B+Γ}{2}\ εφ\frac{α}{2}$$

οπότε από αυτούς υπολογίζομε το άθροισμα $\frac{β+γ}{2}$ και τη διαφορά $\frac{β-γ}{2}$ και από αυτούς (λύνοντας το σύστημά τους) βρίσκομε τα β και γ. Για τον υπολογισμό της γωνίας Α διαλέγομε τον τύπο:

$$σφ\frac{A}{2} = ημ\frac{β+γ}{2}\ στεμ\frac{β-γ}{2}\ εφ\frac{B-Γ}{2}$$

Για τον έλεγχο χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{ημα}{ημA} = \frac{ημβ}{ημB} = \frac{ημγ}{ημΓ}$$

Βάσει των παραπάνω συνθέτομε το εξής φύλλο υπολογισμού.

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | $\frac{β+γ}{2}$ | $\frac{β-γ}{2}$ | $\frac{A}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{B-Γ}{2} = 1°\ 56'$ | $λογσυν\frac{B-Γ}{2} = 9{,}99975$ | $λογημ\frac{B-Γ}{2} = 8{,}52810$ | $λογεφ\frac{B-Γ}{2} = 8{,}52835$ |
| $\frac{B+Γ}{2} = 106°\ 24'$ | $λογτεμ\frac{B+Γ}{2} = 0{,}54923(-)$ | $λογστεμ\frac{B+Γ}{2} = 0{,}01804$ | |
| $\frac{α}{2} = 36°\ 21'$ | $λογεφ\frac{α}{2} = 9{,}86683$ | $λογεφ\frac{α}{2} = 9{,}86683$ | |
| $\frac{β+γ}{2} = 111°$ | $λογεφ\frac{β+γ}{2} = \overline{0{,}41581(-)}$ | | $λογημ\frac{β+γ}{2} = 9{,}97015$ |
| $\frac{β-γ}{2} = 1°\ 29'$ | | $λογεφ\frac{β-γ}{2} = \overline{8{,}41297}$ | $λογστεμ\frac{β-γ}{2} = 1{,}58693$ |
| $β = 112°\ 29'$ | | | |
| $γ = 109°\ 31'$ | | | |
| $\frac{A}{2} = 39°\ 24'$ | | | $λογσφ\frac{A}{2} = \overline{0{,}08543}$ |
| $A = 78°\ 48'$ | | | |

***Έλεγχος.***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| λογημα | = 9,97989 | λογημβ | = 9,96567 | λογημγ | = 9,97430 |
| λογστεμΑ | = 0,00835 | λογστεμΒ | = 0,02262 | λογστεμΓ | = 0,01399 |
| | 9,98824 | | 9,98829 | | 9,98829 |

***2ος τρόπος.***

Εργαζόμαστε με πολικό τρίγωνο. Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ του δοθέντος, για το οποίο έχομε:

$$A' = 180^\circ - \alpha = 107^\circ\ 18'$$
$$\beta' = 180^\circ - B = 71^\circ\ 40'$$
$$\gamma' = 180^\circ - \Gamma = 75^\circ\ 32'$$

Του πολικού λοιπόν γνωρίζομε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία, άρα μπορούμε να το επιλύσομε (περίπτωση ΙΙΙ.). Θα εφαρμόσομε τον πρώτο τρόπο της περιπτώσεως ΙΙΙ χρησιμοποιώντας τους εξής τύπους από τους αναλογικούς του Napier:

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma' + B'}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma' - \beta'}{2}\ \tau\varepsilon\mu\frac{\gamma' + \beta'}{2}\ \sigma\varphi\frac{A'}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma' - B'}{2} = \eta\mu\frac{\gamma' - \beta'}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\gamma' + \beta'}{2}\ \sigma\varphi\frac{A'}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\gamma' - \beta'}{2}\ \eta\mu\frac{\Gamma' + B'}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\Gamma' - B'}{2}$$

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | $\frac{\Gamma' + B'}{2}$ | $\frac{\Gamma' - B'}{2}$ | $\frac{\alpha'}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\gamma' - \beta'}{2} = 1^\circ\ 56'$ | $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma' - \beta'}{2} = 9{,}99975$ | $\lambda o\gamma\eta\mu\frac{\gamma' - \beta'}{2} = 8{,}52810$ | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\gamma' - \beta'}{2} = 8{,}52835$ |
| $\frac{\gamma' + \beta'}{2} = 73^\circ\ 36'$ | $\lambda o\gamma\tau\varepsilon\mu\frac{\gamma' + \beta'}{2} = 0{,}54923$ | $\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\gamma' + \beta'}{2} = 0{,}01804$ | |
| $\frac{A}{2} = 53^\circ\ 39'$ | $\lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{A}{2} = 9{,}86683$ | $\lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{A'}{2} = 9{,}86683$ | |
| $\frac{\Gamma' + B'}{2} = 69^\circ$ | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma' + B'}{2} = 0{,}41581$ | | $\lambda o\gamma\eta\mu\frac{\Gamma' + B'}{2} = 9{,}97015$ |
| $\frac{\Gamma' - B'}{2} = 1^\circ\ 29'$ | | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma' - B'}{2} = 8{,}41297$ | $\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\Gamma' - B'}{2} = 1{,}58693$ |
| $\Gamma' = 70^\circ\ 29'$ | | | |
| $B' = 67^\circ\ 31'$ | | | |
| $\frac{\alpha'}{2} = 50^\circ\ 36'$ | | | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\alpha'}{2} = 0.08543$ |
| $\alpha' = 101^\circ\ 12'$ | | | |

Θα έχομε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \beta &= 180^\circ - B' = 180^\circ - (67^\circ\ 31') = 112^\circ\ 29' \\ \gamma &= 180^\circ - \Gamma' = 180^\circ - (70^\circ\ 29') = 109^\circ\ 31' \\ A &= 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - (101^\circ\ 12') = 78^\circ\ 48' \end{aligned}$$

***3ος τρόπος.***

Χρησιμοποιούμε έναν από τους τύπους των τεσσάρων συνεχών στοιχείων: Πράγματι διαλέγοντας από τους τύπους αυτούς τον:

$$\sigma\varphi\beta\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha\sigma\varphi B + \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\Gamma$$

και λύνοντας ως προς σφβ έχομε:

$$\sigma\varphi\beta = \eta\mu\Gamma(\sigma\tau\epsilon\mu\alpha\sigma\varphi B + \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\Gamma\ )$$

Παρατηρούμε ότι η πλευρά β μπορεί να υπολογισθεί, γιατί όλα τα στοιχεία του δεύτερου μέλους του τύπου δίνονται.

Ένα σοβαρό μειονέκτημα στην περίπτωση αυτή είναι ότι ο τύπος δεν είναι λογιστός δια των λογαρίθμων, οπότε πρέπει να υπολογισθεί χωριστά κάθε όρος του αθροίσματος.

Εφόσον υπολογισθεί η β, κατόπιν υπεραπλουστεύεται η εύρεση των υπολοίπων στοιχείων A και γ.

***4ος τρόπος.***

Με τους τύπους του Gauss. Εργαζόμαστε όπως περιγράφεται στην προηγούμενη περίπτωση III (τρόπος 4ος).

***Διερεύνηση της περιπτώσεως IV.***

Και στην περίπτωση αυτή, κατά την οποία δίνονται μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες, το τρίγωνο είναι πάντοτε κατασκευάσιμο.

### *5.7.6 Περίπτωση V.*

### *Δίνονται 2 πλευρές και η γωνία η απέναντι σε μία από αυτές.*

***Παράδειγμα 1.***

128) Τυχόντος σφαιρικού τριγώνου γνωρίζομε τις πλευρές $\alpha = 43^\circ\ 40'$ και τη γωνία $\beta = 34^\circ\ 30'$ και τη γωνία $B = 32^\circ\ 20'$. Να επιλυθεί.

***1ος τρόπος.***

Χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων σε συνδυασμό με τους αναλογικούς τύπους του Napier. Έτσι έχομε:

Για την A:
$$\eta\mu A = \frac{\eta\mu\alpha\eta\mu B}{\eta\mu\beta} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \eta\mu A = \eta\mu\alpha\eta\mu B\sigma\tau\epsilon\mu\beta \tag{1}$$

Για τη Γ:
$$\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\epsilon\varphi\frac{A-B}{2}\ \sigma\tau\epsilon\mu\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2}$$

Για τη γ: $$εφ\frac{γ}{2} = ημ\frac{A+B}{2}εφ\frac{α-β}{2}\,στεμ\frac{A-B}{2} \qquad (3)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) έχομε:

$$\begin{array}{lll}
α &= 43°\ 40' & λογημα = 9{,}83914 \\
β &= 34°\ 30' & λογστεμβ = 0{,}24687 \\
B &= 32°\ 20 & λογημB = 9{,}72823 \\
\left.\begin{array}{l} A_1 = 40°\ 41{,}5' \\ A_2 = 134°\ 18{,}5' \end{array}\right\} & \Longleftarrow & λογημA = 9{,}81424
\end{array}$$

Επειδή $α > β \implies A > B$ άρα δεκτές και οι δύο τιμές $A_1$ και $A_2$ συνεπώς έχομε δύο λύσεις.

Για τον υπολογισμό τώρα των γ και Γ κάνομε το εξής φύλλο υπολογισμού:

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | $Γ_1$ | $γ_1$ | $Γ_2$ | $γ_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{A_1+B}{2} = 36°\ 30{,}7'$ | | $λογημ\frac{A_1+B}{2} = 9{,}77451$ | | |
| $\frac{A_1-B}{2} = 4°\ 10{,}7'$ | $λογεφ\frac{A_1-B}{2} = 8{,}86365$ | $λογστεμ\frac{A_1-B}{2} = 1{,}13750$ | | |
| $\frac{α+β}{2} = 39°\ 5'$ | $λογημ\frac{α+β}{2} = 9{,}79965$ | | $λογημ\frac{α+β}{2} = 9{,}79965$ | |
| $\frac{α-β}{2} = 4°\ 35'$ | $λογστεμ\frac{α-β}{2} = 1{,}09740$ | $λογεφ\frac{α-β}{2} = 8{,}90399$ | $λογστεμ\frac{α-β}{2} = 1{,}09740$ | $λογεφ\frac{α-β}{2} = 8{,}90399$ |
| $\frac{Γ_1}{2} = 60°\ 2{,}5'$ | $λογσφ\frac{Γ_1}{2} = 9{,}76070$ | | | |
| $Γ_1 = 120°\ 5'$ | | | | |
| $\frac{γ_1}{2} = 33°\ 12{,}5'$ ← | ← | $λογεφ\frac{γ_1}{2} = 9{,}81600$ | | |
| $γ_1 = 66°\ 25'$ | | | | |
| $\frac{A_2+B}{2} = 85°\ 49{,}2'$ ← | ← | ← | ← | $λογημ\frac{A_2+B}{2} = 9{,}99884$ |
| $\frac{A_2-B}{2} = 53°\ 29{,}2'$ ← | ← | ← | $λογεφ\frac{A_2-B}{2} = 0{,}13058$ | $λογστεμ\frac{A_2-B}{2} = 0{,}09490$ |
| $\frac{Γ_2}{2} = 5°\ 21{,}6'$ ← | ← | ← | $λογσφ\frac{Γ_2}{2} = 1{,}02763$ | |
| $Γ_2 = 10°\ 43{,}2'$ | | | | |
| $\frac{γ_2}{2} = 5°\ 41'$ ← | ← | ← | ← | $λογεφ\frac{γ_2}{2} = 8{,}99773$ |
| $γ_2 = 11°\ 22'$ | | | | |

***Έλεγχος.***

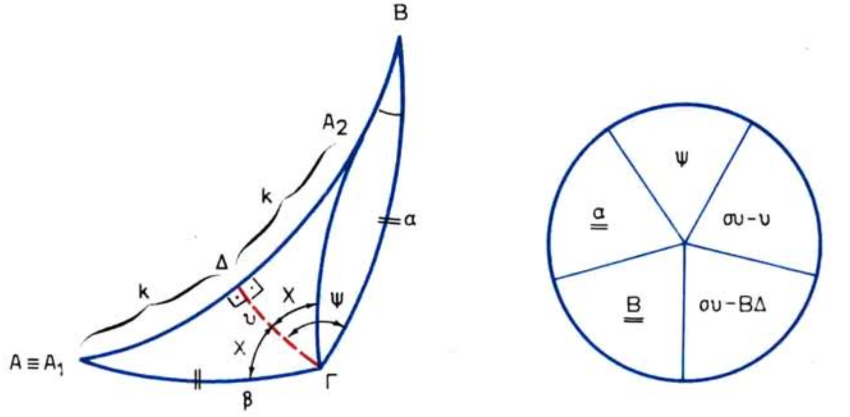
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| λογημΑ | = 9,81424 | λογημΒ | = 9,72823 | λογημΓ | = 9,93717 | λογημΓ | = 9,26953 |
| λογστεμα | = 0,16086 | λογστεμβ | = 0,24687 | λογστεμγ | = 0,03788 | λογστεμγ | = 0,70534 |
| | 9,97510 | | 9,97510 | | 9,97505 | | 9,97487 |

Έχομε λοιπόν τις εξής δύο λύσεις:

$$\begin{aligned} A &= 40^\circ\ 41{,}5' \\ \Gamma &= 120^\circ\ 5' \\ \gamma &= 66^\circ\ 25' \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} A_2 &= 139^\circ\ 18{,}5' \\ \Gamma_2 &= 10^\circ\ 43{,}2' \\ \gamma_2 &= 11^\circ\ 22' \end{aligned}$$

***2ος τρόπος.***

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων. Φέρομε από την κορυφή Γ μέγιστο κύκλο κάθετο στην πλευρά ΑΒ. Έστω Δ η τομή. Το τρίγωνο χωρίζεται στα δύο ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΓΔ (σχ. 5.7ζ), τα οποία και επιλύομε.




**Σχ. 5.7ζ.**

***α) Επίλυση σφαιρικού τριγώνου ΒΓΔ.***

***1) Υπολογισμός ΒΔ.***

$$\text{συνB} = \text{σφασφ(συ-ΒΔ)} \implies \text{συνB} = \text{σφαεφΒΔ}$$

$$\implies \text{εφΒΔ} = \text{συνΒεφα} \qquad (1)$$

***2) Υπολογισμός Ψ.***

$$\text{συνα} = \text{σφΨσφΒ} \implies \text{σφΨ} = \text{συναεφΒ} \qquad (2)$$

***3) Υπολογισμός υ:***

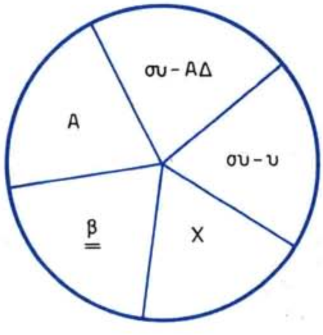
$$\text{συν(συ - υ)} = \text{ημαημΒ} \implies \text{ημυ} = \text{ημαημΒ} \qquad (3)$$

**1ο ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | ΒΔ | ψ | υ |
|---|---|---|---|
| α = 43° 40′ | λογεφα = 9,97978 | λογσυνα = 9,85936 | λογημα = 9,83914 |
| Β = 32° 20′ | λογσυνΒ = 9,92683 | λογεφΒ = 9,80140 | λογημΒ = 9,72823 |
| ΒΔ = 38° 53,2′ ← | λογεφΒΔ = 9,90661 | | |
| ψ = 65° 23,8′ ← | λογσφψ = 9,66076 ← | λογσφψ = 9,66076 | |
| υ = 21° 40,3′ ← | λογημυ = 9,56737 ← | (έλεγχος) ← | λογημυ = 9,56737 |

### *β) Επίλυση σφαιρικού τριγώνου ΓΑΔ.*

Του σφαιρικού τριγώνου ΓΑΔ γνωρίζομε τώρα, από την προηγούμενη επίλυση, την πλευρά υ και την πλευρά β, την οποία έχομε δεδομένη. Θα είναι λοιπόν (σχ. 5.7η).




**Σχ. 5.7η.**

***1) Υπολογισμός Α:***

συν(συ-υ) = ημΑημβ

⟹ ημυ = ημΑημβ

⟹ ημΑ = ημυστεμβ

***2) Υπολογισμός ΑΔ:***

συνβ = ημ(συ-ΑΔ)ημ(συ-υ)

⟹ συνβ = συνΑΔσυνυ

⟹ συνΑΔ = συνβτεμυ

***3) Υπολογισμός Χ:***

συνΧ = σφβσφ(συ-υ) ⟹ συνΧ = σφβεφυ

***4) Τύπος επαληθεύσεως:***

συνΧ = ημΑημ(συ-ΑΔ)

συνΧ = ημΑσυνΑΔ

## 2ο ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

| | Α | ΑΔ | Χ |
|---|---|---|---|
| $\beta = 34°30'$ | λογστεμβ $= 0{,}24687$ | λογσυνβ $= 9{,}91599$ | λογσφβ $= 0{,}16286$ |
| $\upsilon = 21°40{,}3'$ | λογημυ $= 9{,}56736$ | λογτεμυ $= 0{,}03184$ | λογεφυ $= 9{,}59920$ |
| $A_1 = 40°41{,}5'$<br>$A_2 = 139°18{,}5'$ ← | λογημΑ $= 9{,}81423$ | | |
| $ΑΔ = 27°31{,}5'$ ← | λογσυνΑΔ $=94783$ ← | λογσυνΑΔ $=9{,}94783$ | |
| $Χ = 54°40{,}6'$ ← | λογσυνΧ $=9{,}76206$ | ← | λογσυνΧ $=9{,}76206$ |

***Σημείωση:*** Εδώ, στο τρίγωνο που επιλύομε, επειδή $\upsilon<90° \Longrightarrow A<90°$. Επομένως δεκτή η τιμή $A_1 = 40°\ 41{,}5'$.

Έχομε λοιπόν δυο λύσεις: Το τρίγωνο $Α_1ΒΓ$ και το τρίγωνο $Α_2ΒΓ$. Τα ζητούμενα στοιχεία κάθε τριγώνου είναι:

Τρίγωνο $Α_1ΒΓ$:

$A_1 = 40°\ 41{,}5'$, $Γ_1 = Χ+Ψ = 120°\ 4{,}4'$ και $\gamma_1 = ΒΔ+ΔΑ = 66°\ 24{,}7'$

Τρίγωνο $Α_2ΒΓ$:

$A_2 = 180 - A_1 = 139°\ 18{,}5'$, $Γ_2 = Ψ - Χ = 10°\ 43{,}2'$ και $\gamma_2 = ΒΔ - ΑΔ = 11°\ 21{,}7'$

***Παράδειγμα 2.***

129) Να επιλυθεί τυχόν σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου δίνονται:
$\alpha = 124°$, $\gamma = 42°$ και $A = 52°$.

***Λύση.***

Παρατηρούμε ότι από το νόμο των ημιτόνων μπορούμε να υπολογίσομε τη γωνία Γ. Πράγματι:

$$\frac{ημα}{ημΑ} = \frac{ημγ}{ημΓ} \Longrightarrow ημΓ = \frac{ημΑημγ}{ημα} \Longrightarrow$$

$$ημΓ = ημΑημγστεμα \qquad (1)$$

Λογαριθμίζοντας:

$$λογημΓ = λογημΑ + λογημγ + λογστεμα$$

Άρα έχομε:

$$\begin{aligned} λογημΑ &= 9{,}89653 \\ λογημγ &= 9{,}97821 \\ λογστεμα &= 0{,}08143 \\ \hline λογημΓ &= 9{,}95617 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $Γ = 64°\ 41{,}3'$ ή $Γ' = 180° - Γ = 115°\ 18{,}7'$

Παρατηρούμε όμως ότι επειδή $\alpha > \gamma$ θα πρέπει και $A > \Gamma$ το οποίο όμως εδώ δεν ισχύει. Άρα δεν υπάρχει λύση.

***Διερεύνηση της περιπτώσεως V.***

Πρέπει να έχομε υπόψη μας την ιδιότητα:

«Εάν δυο πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι άνισες, οι απέναντι γωνίες είναι άνισες και η μεγαλύτερη γωνία κείται απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά».

### *5.7.7 Περίπτωση VI.*
### *Δίνονται δυο γωνίες και η πλευρά η απέναντι σε μια από αυτές.*

***Παράδειγμα.***

130) Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου γνωρίζομε τις γωνίες $A = 86°$, $\Gamma = 14°$ και την πλευρά $\alpha = 24°$.

***1ος τρόπος.***

Χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων σε συνδυασμό με τους αναλογικούς τύπους του Napier.

Για τον υπολογισμό της γ: $\quad \eta\mu\gamma = \eta\mu\Gamma\sigma\tau\epsilon\mu A\eta\mu\alpha \quad (1)$

Για τον υπολογισμό των β και Β διαλέγομε τους τύπους:

$$\epsilon\varphi\frac{\beta}{2} = \eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}\,\sigma\tau\epsilon\mu\frac{A-\Gamma}{2}\,\epsilon\varphi\frac{\alpha-\gamma}{2} \qquad (2)$$

$$\sigma\varphi\frac{B}{2} = \eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}\,\sigma\tau\epsilon\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}\,\epsilon\varphi\frac{A-\Gamma}{2} \qquad (3)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) έχομε:

$$\begin{array}{lll} \Gamma = 14° & & \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = 9{,}38368 \\ A = 86° & & \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu A = 0{,}00106 \\ \alpha = 24° & & \lambda o\gamma\eta\mu\alpha = \underline{9{,}60931} \\ \left.\begin{array}{l}\gamma_1 = 5°39{,}6' \\ \gamma_2 = 174°20{,}4'\end{array}\right\} & \Longleftarrow & \lambda o\gamma\eta\mu\gamma = 8{,}99405 \end{array}$$

Επειδή $\Gamma < A$ τότε πρέπει $\gamma < \alpha$ άρα η δεύτερη τιμή $\gamma_2$ απορρίπτεται. Άρα στο πρόβλημα υπάρχει μια λύση.

Για τον υπολογισμό τώρα των β και Β συντάσσομε το εξής φύλλο υπολογισμού:

## ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

| | β | B |
|---|---|---|
| $\frac{\alpha+\gamma}{2}=14°49{,}8'$ | | $\lambda o\gamma\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}=9{,}40816$ |
| $\frac{\alpha-\gamma}{2}=9°10{,}2'$ | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\alpha-\gamma}{2}=9{,}20798$ | $\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha-\gamma}{2}=0{,}79761$ |
| $\frac{A+\Gamma}{2}=50°$ | $\lambda o\gamma\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}=9{,}88425$ | |
| $\frac{A-\Gamma}{2}=36°$ | $\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{A-\Gamma}{2}=0{,}23078$ | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{A-\Gamma}{2}=9{,}86126$ |
| $\frac{\beta}{2}=11°52{,}8'$ | $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=9{,}32301$ | |
| $\beta=23°45{,}6'$ | | |
| $\frac{B}{2}=40°35{,}8'$ | | $\lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{B}{2}=0{,}06703$ |
| $B=81°11{,}6'$ | | |

***Έλεγχος*** (με το νόμο των ημιτόνων).

| | | |
|---|---|---|
| λογημA = 9,99894 | λογημB = 9,99485 | λογημΓ = 9,38368 |
| λογστεμα = 0,39069 | λογστεμβ = 0,39479 | λογστεμγ = 1,00600 |
| 0,38963 | 0,38964 | 0,38968 |

***2ος τρόπος.***

Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ του δοθέντος. Τότε θα έχομε: $\alpha' = 180° - A = 94°$, $\gamma' = 180° - 14° = 166°$ και $A' = 180° - \alpha = 156°$. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για την περίπτωση V. Μπορούμε λοιπόν να επιλύσομε το πολικό Α΄Β΄Γ΄ βάσει της περιπτώσεως V και κατόπιν να αντικαταστήσομε κατά τα γνωστά.

***Διερεύνηση της περιπτώσεως VI.***

Πρέπει να έχομε υπόψη μας την ιδιότητα:

«Αν δυο γωνίες σφαιρικού τριγώνου είναι άνισες, οι απέναντι πλευρές είναι άνισες και η μεγαλύτερη πλευρά κείται απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία».

### 5.8 Ασκήσεις.

131) Να επιλυθεί ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α και ίσες πλευρές τις $\beta = \gamma = 158°\ 26'$.

Να επιλυθούν τα παρακάτω τυχόντα σφαιρικά τρίγωνα, όταν δίνονται τα εξής στοιχεία τους:

132) α = 112°, β = 61°, γ = 68°.

133) α = 52° 26′, β = 78° 30′, γ = 34° 10′.

134) α = 163° 49′, β = 69° 34′, γ = 128° 16′.

135) α = 56° 22,3′, β = 65° 54,9′, γ = 78° 27,4′.

136) α = 108° 56,4′, β = 58° 04,8′, γ = 122° 15,6′.

137) α = 126° 29,6′, β = 128° 01,6′, γ = 30° 46,6′.

138) α = 59° 09,4′, β = 101° 53,9°, γ = 98° 47,7′.

139) Α = 129°, Β = 42°, Γ = 78° 20′.

140) Α = 75° 43′, Β = 110° 28′, Γ = 130° 33′.

141) Α = 102° 14,2′, Β = 54° 32,4′, Γ = 89° 05,76′.

142) Α = 51° 44,4′, Β = 59° 31,8′, Γ = 76° 20,2′.

143) Α = 134° 35,4′, Β = 108° 13,6′, Γ = 79° 57′.

144) Α = 116° 01,8′, Β = 103° 17,6′, Γ = 94° 21,2′.

145) Α = 71° 02,8′, Β = 119° 25,2′, Γ = 60° 45,6′.

146) Α = 138° 40,7′, Β = 67° 23,8′, Γ = 101° 50,4′.

Να επιλυθούν τα ακόλουθα τυχόντα σφαιρικά τρίγωνα, για τα οποία γνωρίζομε ότι:

147) β = 47° 30′, α = 105° 10′, Γ = 51° 20′.

148) α = 136° 02,9′, γ = 21° 46,3′, Β = 75° 31,4′.

149) α = 71° 10′, β = 35° 20′, Γ = 60° 30′.

150) β = 86° 45,2′, γ = 108° 36,8′, Α = 67° 40,2′.

151) α = 61° 51,7′, γ = 67° 55,4′, Β = 111° 57,9′.

152) α = 74° 32′, Β = 104° 10′, Γ = 101° 14′.

153) Α = 47° 13,3′, Β = 120° 09,9′, γ = 123° 31,6′.

154) Α = 88° 24,5′, β = 98° 10′, γ = 100° 09′.

155) Α = 54° 01′, Β = 121° 25′, γ = 55° 14′.

156) Α = 76° 10′, Β = 41° 20′, γ = 148° 30′.

157) α = 56° 06,4′, Β = 104° 30,7′, Γ = 62° 52,1′.

158) α = 67° 22′, Β = 170° 32′, Γ = 132° 09′.

Να επιλυθούν τα παρακάτω τυχόντα σφαιρικά τρίγωνα, για τα οποία έχομε:

159) α = 44° 52′, β = 35° 10′, Β = 33° 30′.

160) α = 98° 53,2′, γ = 64° 35,8′, Α = 95° 23,4′.

161) β = 163° 14′, γ = 72° 06′, Β = 128° 47′.

162) α = 80° 05,3′, β = 82° 04′, Α = 83° 34,2′.

163) α = 48° 20′, γ = 26° 10′, Α = 62° 30′.

164) Α = 117° 54,4′, Γ = 45° 08,6′, α = 76° 37,5′.

165) Α = 96° 12,8′, Γ = 45° 34,4′, γ = 27° 20,3′.

166) α = 37° 10′, Α = 52° 40′, Β = 22° 30′.

167) γ = 26° 12′, Α = 65° 27′, Γ = 38° 34′.

168) Α = 104° 40′, Β = 80° 13,6′, α = 126° 50,4′.

169) Β = 33° 14′, β = 80° 05′, γ = 70° 12′.

## 5.9 Θεώρημα του Legendre.

Αν οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι πολύ μικρές, συγκρινόμενες με την ακτίνα της σφαίρας στην οποία ανήκει, τότε κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου υπερβαίνει κατά το $^1/_3$ της σφαιρικής υπεροχής, την αντίστοιχη γωνία του επίπεδου τριγώνου, του οποίου οι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος με τις αντίστοιχες του σφαιρικού τριγώνου.

***Απόδειξη.***

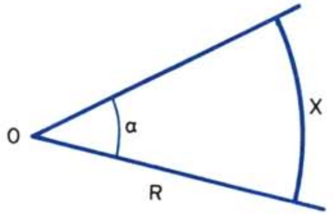
Αν θ εκφράζεται σε ακτίνια, γνωρίζομε ότι:

$$\eta\mu\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

και
$$\sigma\upsilon\nu\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots$$

Έστω λοιπόν ότι Α,Β,Γ είναι οι γωνίες και α,β,γ οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου, εκφρασμένες σε ακτίνια. Έστω R η ακτίνα της σφαίρας και x,ψ,z τα μήκη των τόξων που σχηματίζουν τις πλευρές αντίστοιχα.

Γνωρίζομε ότι: α = x/R (σχ. 5.9), όπου α η επίκεντρη γωνία Ο αλλά και η πλευρά του σφαιρικού τριγώνου.




**Σχ. 5.9.**

Άρα αντί α,β,γ μπορούμε να γράψομε αντίστοιχα $\frac{x}{R}$, $\frac{\psi}{R}$, $\frac{z}{R}$

Έτσι:
$$\eta\mu\alpha = \frac{x}{R} - \frac{x^3}{6R^3} + \ldots.$$

και
$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - \frac{x^2}{2R^2} + \frac{x^4}{24R^4} \ldots.$$

Ομοίως εκφράζονται τα συνβ, ημβ, συνγ και ημγ.

Από το θεμελιώδη τύπο των συνημιτόνων έχομε:

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

και αντικαθιστώντας (αφού παραλείψομε όλες τις δυνάμεις πάνω από 4) έχομε:

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{1 - \frac{x^2}{2R^2} + \frac{x^4}{24R^4} \left(1 - \frac{\psi^2}{2R^2} + \frac{\psi^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2R^2} + \frac{z^4}{24R^4}\right)}{\frac{\psi z}{R^2}\left(1 - \frac{\psi^2}{6R^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{6R^2}\right)} =$$

(εκτελώντας πράξεις και παραλείποντας όλες τις δυνάμεις πάνω από 4) $=$

$$= \frac{\frac{1}{2R^2}\left(\psi^2 + z^2 - x^2\right) + \frac{1}{24R^4}\left(x^4 - \psi^4 - z^4 - 6\psi^2 z^2\right)}{\frac{\psi z}{R^2}\left(1 - \frac{\psi^2 + z^2}{6R^2}\right)} =$$

(αφού ψ και z είναι πολύ μικρά και το $\psi^2+z^2$ είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με το $R^2$) =

$$\frac{1}{2\psi z}\left[\psi^2+z^2-x^2+\frac{1}{12R^2}(x^4-\psi^4-z^4-6\psi^2z^2)\right]\left[1+\frac{\psi^2+z^2}{6R^2}\right]=$$

(και πάλι εκτελώντας πράξεις και παραλείποντας τις δυνάμεις πάνω από 4) =

$$=\frac{\psi^2+z^2-x^2}{2\psi z}+\frac{x^4+\psi^4+z^4-2\psi^2z^2-2z^2x^2-2x^2\psi^2}{24\psi zR^2} \qquad (1)$$

Έστω τώρα $A_1$, $B_1$, $\Gamma_1$ οι γωνίες του επίπεδου τριγώνου, του οποίου οι πλευρές είναι x, ψ, z αντίστοιχα·

τότε $\quad \sigma\upsilon\nu A_1=\dfrac{\psi^2+z^2-x^2}{2\psi z}$ (από τύπο 8(γ) του τυπολογίου της επίπεδης τριγωνομετρίας στο τέλος του βιβλίου)

και $\quad x^4+\psi^4+z^4-2\psi^2z^2-2z^2x^2-2x^2\psi^2=-4\psi^2z^2\sigma\upsilon\nu^2A_1$

Έτσι αντικαθιστώντας στην (1) έχομε:

$$\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu A_1-\frac{\psi z\sigma\upsilon\nu^2A_1}{6R^2} \qquad (2)$$

Έστω τώρα A = $A_1$=k όπου k πολύ μικρό.

Τότε $\quad \sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu(A_1+k)=\sigma\upsilon\nu A_1-k\sigma\upsilon\nu A_1$ (περίπου) $\qquad$ (3)

και έτσι από τις (2) και (3):

$$k\eta\mu A_1=\frac{\psi z\eta\mu^2A_1}{6R^2}$$

$$k=\frac{\psi z\eta\mu A_1}{6R^2}$$

και αν $S_1$ = εμβαδό επιπέδου τριγώνου έχομε:

$$S_1=\frac{1}{2}\psi z\eta\mu A_1$$

και $\quad k=\dfrac{S_1}{3R^2}\quad$ άρα $\quad A=A_1+\dfrac{S_1}{3R^2}$

ομοίως

$$B=B_1+\frac{S_1}{3R^2} \qquad (4)$$

$$\Gamma=\Gamma_1+\frac{S_1}{3R_2}$$

Προσθέτοντας $A+B+\Gamma = A_1+B_1+\Gamma_1+S_1/R_2$ προσεγγιστικά

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_1}{R^2} = (A+B+\Gamma) - (A_1+B_1+\Gamma_1)$$

Αλλά η διαφορά $(A+B+\Gamma) - (A_1+B_1+\Gamma_1) = (A+B+\Gamma) - \pi$ είναι η σφαιρική υπεροχή του σφαιρικού τριγώνου.

Άρα το $S_1/R^2$ είναι η σφαιρική υπεροχή, δηλαδή το εμβαδό του σφαιρικού τριγώνου (με μονάδα επιφανειών το τρισορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο).

Οι τύποι (4) λοιπόν γράφονται:

$$A = A_1 + \frac{1}{3} \cdot (\text{σφαιρική υπεροχή})$$

$$B = B_1 + \frac{1}{3} \cdot (\text{σφαιρική υπεροχή})$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \frac{1}{3} \cdot (\text{σφαιρική υπεροχή})$$

### 5.10 Διαφορικοί τύποι.

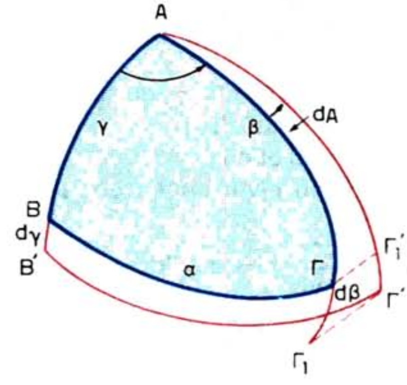
Πολλές φορές αντιμετωπίζομε το πρόβλημα του υπολογισμού της μεταβολής ενός στοιχείου του σφαιρικού τριγώνου, η οποία προκύπτει από τη μεταβολή μερικών (και όχι όλων) στοιχείων του τριγώνου αυτού.

Έστω το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Δίνομε μια μικρή αύξηση $BB' = d\gamma$ στην πλευρά γ και ακολούθως μια μικρή αύξηση $\Gamma\Gamma_1 = d\beta$ στην πλευρά β. Τέλος αυξάνομε και τη γωνία Α κατά dA. Το σημείο τότε $\Gamma_1$ έρχεται στο Γ΄.

Ενώνομε τα σημεία Β΄ και Γ΄ με ένα τόξο μέγιστου κύκλου (σχ. 5.10α). Έχομε τότε ένα νέο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒ΄Γ΄. Αρκεί να υπολογίσομε τότε τη διαφορά $\Delta\alpha = B'\Gamma' - B\Gamma$ συναρτήσει των dβ, dγ και dA.

Έχομε λοιπόν τη συνάρτηση $\alpha = f(\beta,\gamma,A)$ οπότε:

$$\Delta\alpha = \Delta f(\beta,\gamma,A) = f(\beta+d\beta,\ \gamma+d\gamma,\ A+dA) - f(\beta,\gamma,A)$$




**Σχ. 5.10α.**

Όταν τα β,γ,Α αυξάνουν κατά dβ, dγ, dA, κάθε μία από αυτές τις αυξήσεις προξενεί στο α μεταβολές $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ υπολογιζόμενες αντίστοιχα από τις:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_1 &= f\,(\beta + d\beta,\ \gamma,\ A) - f\,(\beta,\gamma,A)\\ \Delta\alpha_2 &= f\,(\beta,\ \gamma + d\gamma,\ A) - f\,(\beta,\gamma,A)\\ \Delta\alpha_3 &= f\,(\beta,\ \gamma,\ A + dA) - f\,(\beta,\gamma,A)\end{aligned}$$

Αν τα dβ, dγ, dA είναι αρκετά μικρά, μπορούμε να αντικαταστήσομε τα $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ με τα αντίστοιχα διαφορικά και να τα υπολογίσομε από τους τύπους:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_1 &\approx d\alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial \beta}\,d\beta\\ \Delta\alpha_2 &\approx d\alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial \gamma}\,d\gamma\\ \Delta\alpha_3 &\approx d\alpha_3 = \frac{\partial f}{\partial A}\,dA\end{aligned}$$

από όπου τελικά θα προκύψει:

$$\Delta\alpha \approx (\beta,\gamma,A) = \frac{\partial f}{\partial \beta}\,d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\,d\gamma + \frac{\partial f}{\partial A}\,dA = d\alpha_1 + d\alpha_2 + d\alpha_3$$

Μελετώντας την επίδραση επί του α της κάθε αυξήσεως και προσθέτοντας τα μερικά αποτελέσματα, επιτυγχάνομε μια προσεγγιστική έκφραση του Δα με ένα τύπο του ολικού διαφορικού του α.

***α) Υπολογισμός του $d\alpha_1$.***

Αυξάνομε κατά dβ την πλευρά β και το σημείο Γ έρχεται στο Γ΄. Ενώνομε το σημείο Β με το Γ΄ με ένα τόξο μέγιστου κύκλου. Προβάλλομε το σημείο Γ επάνω στο τόξο ΒΓ΄ και έστω Η η προβολή του (σχ. 5.10β).

Στο απειροστό ορθογώνιο τρίγωνο ΓΗΓ΄ η πλευρά ΗΓ΄ = $d\alpha_1$ παριστάνει την αύξηση της πλευράς ΒΓ που αντιστοιχεί σε μια αύξηση dβ της πλευράς β.

Έχομε λοιπόν ΒΓ = ΒΗ = α και Η = 90°. Επειδή οι αυξήσεις είναι πολύ μικρές, θεωρούμε το τρίγωνο ΓΗΓ΄ επίπεδο.

Συμβολίζοντας με dΓ τη διαφορά Γ΄– Γ έχομε:

$d\alpha_1 = d\beta\,\text{συν}\Gamma'$.

Άρα: $H\Gamma' = d\alpha_1 = d\beta\,\text{συν}\,(\Gamma + d\Gamma) = d\beta\,[\text{συν}\Gamma\,\text{συν}d\Gamma - \text{ημ}\Gamma\,\text{ημ}d\Gamma\,]$

$\Longrightarrow\ d\alpha_1 = d\beta\,[\text{συν}\Gamma \cdot 1 - \text{ημ}\Gamma \cdot d\Gamma\,]$

$\Longrightarrow\ d\alpha_1 = \text{συν}\Gamma\,d\beta - \text{ημ}\Gamma\,d\Gamma\,d\beta$

και επειδή ο όρος $\text{ημ}\Gamma \cdot d\Gamma \cdot d\beta$ είναι αμελητέος μπορούμε να γράψομε:

$$d\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}\,d\gamma = \text{συν}\Gamma\,d\beta$$

***β) Υπολογισμός του $d\alpha_2$.***

Η αύξηση κατά dγ της πλευράς γ, επιφέρει αύξηση κατά $d\alpha_2$ της πλευράς α. Άρα μπορεί να υπολογισθεί όπως και η $d\alpha_1$. Αρκεί λοιπόν να εναλλάξομε τα β με γ και Γ με Β. Άρα:

$$da_2 = \frac{\partial a}{\partial \gamma} d\gamma = \text{συν}B d\gamma$$

***γ) Υπολογισμός του $da_3$.***

Τώρα στο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ δίνομε στη γωνία Α μια μικρή αύξηση dA. Το σημείο Γ τότε έρχεται στο Γ΄. Ενώνομε το Β με το Γ΄ με τόξο μέγιστου κύκλου και σ' αυτόν προβάλλομε το Γ (σχ. 5.10γ).

Έστω Κ η προβολή του. Στο απειροστό τρίγωνο ΓΚΓ΄, η ΚΓ΄ = $da_3$ παριστάνει την αύξηση της ΒΓ που αντιστοιχεί στην αύξηση της Α κατά dA.

Θέτομε ∢ ΓΓ΄Κ = x και ∢ ΚΓ΄Α = ψ και υπολογίζομε την $da_3$:

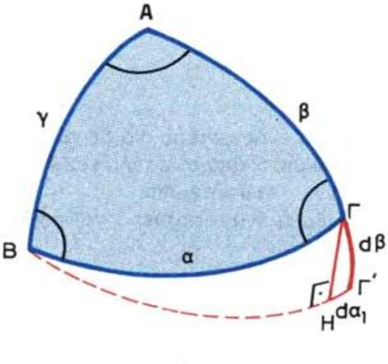
$$da_3 = \text{ΚΓ}' = \text{ΓΓ}' \,\text{συν}x = \text{ΓΓ}'\text{ημ}\psi$$

και επειδή η γωνία ψ ισούται με Γ + $d\Gamma_1$, έχομε:

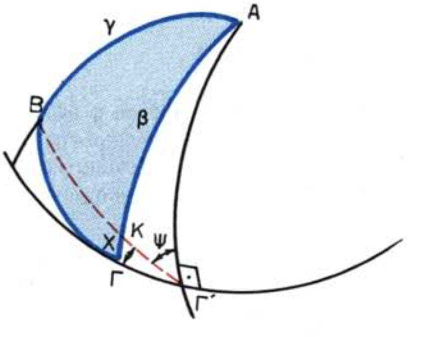
$$da_3 = \text{ΓΓ}' \,\text{ημ}(\Gamma + d\Gamma_1) \approx \text{ΓΓ}'\text{ημ}\Gamma$$

Αλλά επειδή στο τρίγωνο ΑΓΓ΄ η πλευρά ΓΓ΄ είναι τόξο μικρού κύκλου, έχομε: ΓΓ΄ = dAημβ, από όπου:

$$da_3 = \frac{\partial a}{\partial A} dA = \text{ημ}\beta\,\text{ημ}\Gamma\, dA$$




Σχ. 5.10β.




Σχ. 5.10γ.

***Παράδειγμα.***

170) Να μελετηθεί η επίδραση μιας μεταβολής dφ του πλάτος φ, στο αζιμούθ $A_z$ ενός αστέρα Γ κατά τη δύση του.

***Λύση.***

Το σφαιρικό τρίγωνο ΠΖΓ είναι ορθόπλευρο, διότι ΖΓ = 90° (σχ. 5.10δ), και το σφαιρικό τρίγωνο ΠΝΓ είναι ορθογώνιο στο Ν και έχει πλευρές φ, ρ και 180° – Az. Εφαρμόζομε το διαφορικό τύπο στην πλευρά ΠΓ = ρ του τριγώνου συμβολίζοντας με Ω την ωρική του γωνία τη στιγμή της δύσεως.

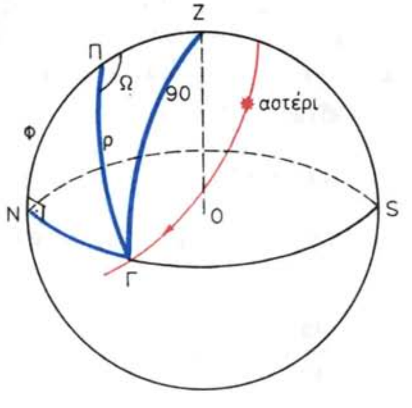
Έχομε:

$$\Delta\rho \approx d\rho = \text{συν}\Gamma d(180^\circ - A_z) + \text{συν}(180^\circ - \Omega)d\varphi + \text{ημ}(180^\circ - \Omega)\text{ημ}\varphi dN$$

Επειδή $\measuredangle N = 90^\circ \Longrightarrow dN = 0$ και επειδή η πολική απόσταση ρ του αστέρα δεν μεταβάλλεται $\Longrightarrow d\rho = 0$.

Άρα $$0 = -\text{συν}\Gamma d(A_z) - \text{συν}\Omega d\varphi \Longrightarrow -\delta(A_z) = \frac{\text{συν}\Omega}{\text{συν}\Gamma} d\varphi$$

[Τα συνΩ, συνΓ βρίσκονται αμέσως συναρτήσει των $A_z$, φ και δ (ή ρ)].




**Σχ. 5.10δ.**

## 5.10.2 Ασκήσεις.

171) Αν δίνονται το πλάτος φ ενός τόπου και η απόκλιση δ ενός αστέρα, να δειχθεί ότι το σφάλμα στον υπολογισμό της Ωρικής γωνίας, που προκύπτει από το σφάλμα dz κατά τον προσδιορισμό της ζενιθιακής αποστάσεως, είναι: $d\Omega = \text{τεμφ}\text{τεμ}A dz$

172) Αν Σ είναι η παραλακτική γωνία αστέρα, τα δε φ και δ παραμένουν σταθερά, να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \text{συνφσυν}A\text{τεμ}z$$

173) Να δειχθεί ότι η γωνιακή ταχύτητα με την οποία ένας αστέρας ανέρχεται υπεράνω του ορίζοντα ενός τόπου πλάτους φ, εξαρτάται μόνο από το Αζιμούθ του.

174) Σε ποια θέση πρέπει να παρατηρηθεί ένας αστέρας Σ, ώστε το σφάλμα στον προσδιορισμό του χρόνου να είναι ελάχιστο (δίνονται η ορθή αναφορά και η κλίση του αστέρα).

175) Ποια είναι η πιο κατάλληλη θέση για τον προσδιορισμό του χρόνου; (Υπόδειξη: Αρκεί να βρούμε σε ποια θέση έχομε το ελάχιστο σφάλμα dΩ).

176) Ποια είναι η πιο κατάλληλη θέση για τον προσδιορισμό του Αζιμούθ ενός αστέρα;

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ**

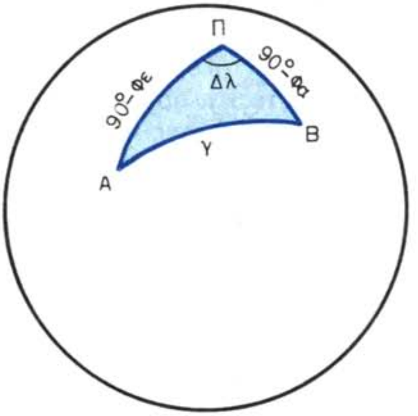
# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΝΑΥΤΙΛΙΑ

## 6.1 Τρίγωνο ορθοδρομίας (ή γήινο τρίγωνο).

Η θεωρία της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας έχει άμεση εφαρμογή σε προβλήματα της γήινης σφαίρας καθώς και της ουράνιας.

Μια πρώτη εφαρμογή της είναι στο λεγόμενο ***τρίγωνο ορθοδρομίας (ή γήινο τρίγωνο).***

***Τρίγωνο ορθοδρομίας (ή γήινο τρίγωνο)*** είναι το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ (σχ. 6.1), το οποίο βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια της γης και σχηματίζεται μεταξύ του τόπου εκκινήσεως Α ενός πλοίου, του τόπου αφίξεως Β και του πόλου Π της γης ο οποίος είναι ομώνυμος προς το πλάτος εκκινήσεως.




**Σχ. 6.1.**

Οι πλευρές του τριγώνου ορθοδρομίας πρέπει βεβαίως να είναι τόξα μεγίστων κύκλων και επειδή οι πλευρές του ΠΑ και ΠΒ ως τόξα των μεσημβρινών των αντιστοίχων τόπων Α και Β, είναι τόξα μεγίστων κύκλων, για να είναι και η πλευρά ΑΒ τόξο μεγίστου κύκλου θα πρέπει ο πλούς να είναι ορθοδρομικός (§ 6.2).

Στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας είναι λοιπόν τα εξής:

***Πλευρές.***

α) Το τόξο ΠΑ του μεσημβρινού του τόπου εκκινήσεως, το οποίο ισούται με $90°- φ_ε$ (όπου $φ_ε$ το πλάτος του τόπου εκκινήσεως Α).

β) Το τόξο ΠΒ του μεσημβρινού του τόπου αφίξεως, που ισούται με $90°- φ_α$ (όπου $φ_α$ το πλάτος του τόπου αφίξεως Β), αν τα $φ_ε$ και $φ_α$ είναι ***ομώνυμα*** και με $90° + φ_α$ αν $φ_ε$ και $φ_α$ είναι ***ετερώνυμα.***

γ) Η ορθοδρομική απόσταση γ (§ 6.2) των δύο τόπων.

***Γωνίες.***

α) Η γωνία Π, η οποία ισούται με τη διαφορά μηκών $Δ_λ$ μεταξύ των τόπων Α και Β.

β) Η γωνία Α, που αποτελεί την αρχική πλεύση.

γ) Η γωνία Β, από την οποία βρίσκεται η τελική πλεύση. (Η τελική πλεύση είναι στοιχείο άχρηστο στην πράξη και σπάνια χρησιμοποιείται από τους ναυτικούς).

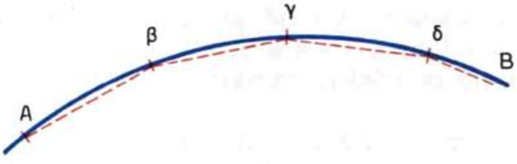
## 6.2 Ορθοδρομία (Great circle sailing).

Λέγεται το μικρότερο από 180° τόξο του μέγιστου κύκλου, που συνδέει δυο τόπους (σημεία).

Όπως γνωρίζομε από τη Σφαιρική Τριγωνομετρία, το τόξο αυτό του μέγιστου κύκλου είναι το ελάχιστο από τα άπειρα τόξα που συνδέουν τους δυο αυτούς τόπους. Η ορθοδρομία λοιπόν αποτελεί τη συντομότερη απόσταση μεταξύ δυο τόπων επάνω στην επιφάνεια της γης. Το τόξο αυτό λέγεται και ***ορθοδρομικό τόξο*** και κατά την ορθοδρομική πλεύση προσπαθούμε να κινηθούμε όσο το δυνατό επάνω σ' αυτό.

Το μέτρο του ορθοδρομικού τόξου σε πρώτα μοίρας μας δίνει την ***ορθοδρομική απόσταση*** σε ναυτικά μίλια. Χαρακτηριστικό της ορθοδρομίας είναι ότι στρέφει το κυρτό της προς τους πόλους και το κοίλο της προς τον ισημερινό.

Επειδή οι μεσημβρινοί της γης δεν είναι παράλληλοι μεταξύ τους, αλλά συγκλίνουν και τέμνονται στους πόλους, η ορθοδρομία τους τέμνει με διαρκώς μεταβαλλόμενη γωνία (κάθε μια από αυτές αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη ***ορθοδρομική πλεύση***). Επομένως, για να ακολουθήσομε ορθοδρομική πλεύση, πρέπει να μεταβάλλομε συνεχώς την πορεία του πλοίου. Επειδή όμως αυτό στην πράξη είναι αδύνατο, ακολουθούμε μια τεθλασμένη γραμμή που εγγράφομε στο ορθοδρομικό τόξο (σχ. 6.2). Φυσικά όσο περισσότερες είναι οι πλευρές της τεθλασμένης γραμμής, τόσο περισσότερο αυτή προσεγγίζει το ορθοδρομικό τόξο. Ο πλούς επάνω στην τεθλασμένη αυτή γραμμή, κοντά στο ορθοδρομικό τόξο, λέγεται ***ορθοδρομικός πλούς.***




**Σχ. 6.2.**

### *6.3 Λοξοδρομία (Rhumbline).*

Λέγεται η καμπύλη που συνδέει δυο τόπους (σημεία) της γήινης επιφάνειας και τέμνει τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία. Χαρακτηριστικό της είναι ότι ανέρχεται σπειροειδώς σε υψηλότερα πλάτη, χωρίς ποτέ να φθάνει στους πόλους, γιατί παραμένει ασύμπτωτη προς αυτούς. Θεωρητικά έχει αποδειχθεί ότι μεταξύ δυο σημείων της γης διέρχονται άπειρες λοξοδρομίες. Όταν η απόσταση δυο τόπων μετρείται επί της λοξοδρομικής καμπύλης, ονομάζεται ***λοξοδρομική απόσταση*** των τόπων αυτών. Η σταθερή γωνία, με την οποία τέμνονται οι μεσημβρινοί από την καμπύλη αυτή, λέγεται ***λοξοδρομική ή μερκατορική πορεία.***

Επειδή η λοξοδρομία δεν είναι τόξο μέγιστου κύκλου, οι υπολογισμοί σχετικά με αυτήν δεν απασχολούν τη Σφαιρική Τριγωνομετρία.

### 6.4 Υπολογισμός ορθοδρομικής αποστάσεως ΑΒ και αρχικής πλεύσεως $Z_{\lambda\varepsilon}$.

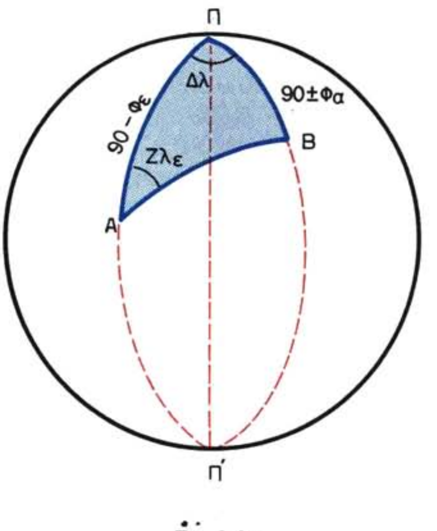
Έστω δυο τόποι Α και Β επάνω στη γη, από τους οποίους ο Α είναι το σημείο εκκινήσεως με συντεταγμένες $\varphi_\varepsilon$ και $\lambda_\varepsilon$ και ο Β το σημείο αφίξεως με συντεταγμένες $\varphi_\alpha$ και $\lambda_\alpha$. Αν θέλομε να υπολογίσομε την ορθοδρομική απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β καθώς και την αρχική πλεύση $Z_{\lambda\varepsilon}$, στο σχηματιζόμενο τρίγωνο ορθοδρομίας ΠΑΒ (σχ. 6.4α) γνωρίζομε:

α) Την πλευρά ΠΑ ίση με $90^\circ - \varphi_\varepsilon$.

β) Την πλευρά ΠΒ ίση με $90^\circ - \varphi_\alpha$ αν $\varphi_\varepsilon$ και $\varphi_\alpha$ είναι ομώνυμα ή με $90^\circ + \varphi_\alpha$ αν $\varphi_\alpha$ και $\varphi_\varepsilon$ είναι ετερώνυμα.

γ) Τη γωνία $\Delta_\lambda$ ίση με τη διαφορά μήκους των δυο τόπων.

Επομένως μας δίνονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (περίπτωση ΙΙΙ), οπότε επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ υπολογίζομε τα ζητούμενα στοιχεία.




**Σχ. 6.4α.**

***Παράδειγμα.***

177) Να ευρεθεί η ορθοδρομική απόσταση και η αρχική πλεύση από τη Χονολουλού (πλάτος $\varphi_\varepsilon = 21° \ 18{,}3'$ Β, μήκος $\lambda_\varepsilon = 157° \ 52{,}3'$ Δ) στο Σαν Φραντζίσκο (πλάτος $\varphi_\alpha = 37° \ 47{,}5'$ Β μήκος $\lambda_\alpha = 122° \ 25{,}7'$ Δ).

***Λύση.***

***1ος τρόπος.***

Στο σχήμα 6.4β έστω ότι στο Α βρίσκεται η Χονολουλού και στο Β το Σαν Φραντζίσκο.

Έχομε:

$$\alpha = 90° - 37° \ 47{,}5' = 52° \ 12{,}5' \ (^*)$$
$$\beta = 90° - 21° \ 18{,}3' = 68° \ 41{,}7'$$

και $\quad \Gamma = \Delta_\lambda = 157° \ 52{,}3' - 122° \ 25{,}7' = 35° 26{,}6'$

Εφαρμόζοντας τους τύπους των ημιπαρημιτόνων πλευρών και εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση ΙΙΙ (§ 5.7.4, 2ος τρόπος) υπολογίζομε αμέσως την πλευρά γ, δηλαδή την ορθοδρομική απόσταση. Έχομε:

$$\eta\mu\pi\rho\gamma = \eta\mu\pi\rho(\alpha - \beta) + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\pi\rho\Gamma \qquad (1)$$

όπου τα α, β, Γ είναι γνωστά.

Θέτομε: $\quad \eta\mu\pi\rho X = \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\pi\rho\Gamma \qquad (2)$

οπότε $\quad \eta\mu\pi\rho\gamma = \eta\mu\pi\rho(\alpha - \beta) + \eta\mu\pi\rho X \qquad (3)$

Από την (2) $\implies \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho X = \lambda o\gamma\eta\mu\alpha + \lambda o\gamma\eta\mu\beta + \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\Gamma$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\eta\mu\alpha &= 9{,}89776 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\beta &= 9{,}96926 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho\Gamma &= \underline{8{,}96687} \\ \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho X &= 8{,}83389 \implies \eta\mu\pi\rho X = 0{,}06822 \end{aligned}$$

και επειδή βρίσκομε:

$$\eta\mu\pi\rho \ (\alpha \sim \beta) = \eta\mu\pi\rho \ (16° \ 29{,}2') = 0{,}02056$$

η (3) γράφεται:

$$\begin{aligned} \eta\mu\pi\rho\gamma &= 0{,}020506 + 0{,}06822 \\ \implies \eta\mu\pi\rho\gamma &= 0{,}08878 \\ \implies \gamma &= 34° \ 40{,}2' \end{aligned}$$

Για την αρχική πλεύση θα πάρομε τον τύπο:

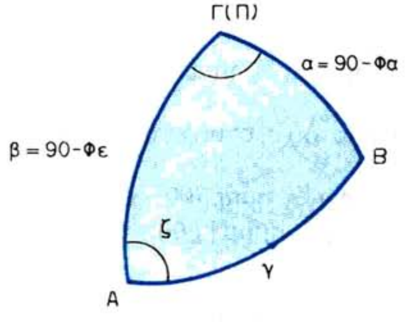
$$\eta\mu\pi\rho A = \eta\mu(\tau - \beta)\eta\mu(\tau - \gamma)\sigma\tau\epsilon\mu\beta\sigma\tau\epsilon\mu\gamma$$

$$\text{όπου } \tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 77° \ 47{,}2'$$

Άρα

$$\begin{aligned} \tau - \beta &= 9° \ 5{,}5' \implies \lambda o\gamma\eta\mu(\tau - \beta) = 9{,}19870 \\ \tau - \gamma &= 43° \ 7' \implies \lambda o\gamma\eta\mu(\tau - \gamma) = 9{,}83473 \\ \beta &= 68° \ 41{,}7' \implies \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\beta = 0{,}03074 \\ \gamma &= 34° \ 40{,}2' \implies \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\gamma = \underline{0{,}24500} \\ & \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A = 9{,}30917 \\ & \implies A = 53° 40{,}2' \end{aligned}$$

*(*) Χρησιμοποιήσαμε (–) γιατί τα πλάτη $\Phi_\varepsilon$ $\Phi_\alpha$ είναι ομώνυμα.*




Σχ. 6.46.

***2ος τρόπος.***

Το δεύτερο αυτόν τρόπο εφαρμόζουν συνήθως οι ναυτιλλόμενοι σε τέτοιες περιπτώσεις. Είναι μια πιο τυποποιημένη μέθοδος, όπου για μεν την εύρεση της ορθοδρομικής αποστάσεως εργαζόμαστε όπως ακριβώς στον προηγούμενο τρόπο, για δε την εύρεση της αρχικής πλεύσεως χρησιμοποιούμε τον τύπο του ημιπαρημιτόνου γωνίας, όπως μας δίνεται στην παρατήρηση της § 4.10.

Έτσι θέτομε (σχ. 6.46) στους αντίστοιχους τύπους, όπου $A = \zeta$, $\alpha = 90 \pm \varphi_\alpha$ [το + για πλάτη ετερώνυμα, το – (πλην) για πλάτη ομώνυμα] και το $\beta = 90 - \varphi_\varepsilon$, $\Gamma = \Delta_\lambda$, $\gamma = AB$ και έχομε:

***1) Εύρεση ορθοδρομικής αποστάσεως γ.***

Θεωρούμε τον τύπο:

$$\text{ημπργ} = \text{ημπρ}(\alpha \sim \beta) + \text{ημπρΓημαημβ}$$

και αντικαθιστώντας παίρνομε:

$$\text{ημπργ} = \text{ημπρ}[(90-\varphi_\alpha) \sim (90-\varphi_\varepsilon)] + \text{ημπρ}\Delta_\lambda \text{ημ}(90-\varphi_\alpha)\text{ημ}(90-\varphi_\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{ημπργ} = \text{ημπρ}(\varphi_\varepsilon \sim \varphi_\alpha) + \text{ημπρ}\Delta_\lambda \text{συν}\varphi_\alpha \text{συν}\varphi_\varepsilon \qquad (1)$$

Θέτομε: $$\text{ημπρ}X = \text{ημπρ}\Delta_\lambda \text{συν}\varphi_\alpha \text{συν}\varphi_\varepsilon \qquad (2)$$

οπότε $$\text{ημπργ} = \text{ημπρ}(\varphi_\varepsilon \sim \varphi_\alpha) + \text{ημπρ}X \qquad (3)$$

από τη (2) $$\Longrightarrow \text{λογημπρ}X = \text{λογημπρ}\Delta_\lambda + \text{λογσυν}\varphi_\alpha + \text{λογσυν}\varphi_\varepsilon$$

Άρα:

$$\Delta_\lambda = 35°26{,}6' \Longrightarrow \text{λογημπρ}\Delta_\lambda = 8{,}96687$$
$$\text{λογσυν}\varphi_\alpha = 9{,}89776$$
$$\text{λογσυν}\varphi_\varepsilon = 9{,}96926$$
$$\text{λογημπρ}X = 8{,}83389 \Longrightarrow \text{ημπρ}X = 0{,}06822$$

και επειδή βρίσκομε:

$$\text{ημπρ}(\varphi_\varepsilon \sim \varphi_\alpha) = \text{ημπρ}(16°\ 29{,}2') = 0{,}02056$$

η (3) γράφεται:

$$\text{ημπργ} = 0{,}02056 + 0{,}06822$$
$$\Longrightarrow \text{ημπργ} = 0{,}08878$$
$$\Longrightarrow \gamma = 34°\ 40{,}2' = 2080{,}2' = 2080{,}2 \text{ μίλια.}$$

*2) Εύρεση αρχικής πλεύσεως.*

Θεωρούμε τον τύπο:

$$ημπρA = [ημπρα \sim ημπρ(β \sim γ)]\ στεμβστεμγ$$

στον οποίο θέτομε τα αντίστοιχα στοιχεία, οπότε αυτός γράφεται:

$$ημπρζ = [ημπρ(90 - φ_α) \sim ημπρ[(90 - φ_ε) - γ]στεμ(90 - φ_ε)στεμγ$$

$$\Longrightarrow \quad ημπρζ = [ημπρ(90 - φ_α) \sim ημπρ\,[\,(90 - φ_ε) - γ]\,]\ τεμφ_ε στεμγ \quad (1)$$

θέτομε:

$$ημπρX = ημπρ(90 - φ_α) \sim ημπρ[(90 - φ_ε) - γ] \qquad (2)$$

Επειδή $90 - φ_α = 52° \ 12{,}5'$ και $ημπρ\ 52°\ 12{,}5' = 0{,}19360$

$90 - φ_ε = 68°\ 41{,}7'$

$(90 - φ_ε) - γ = 34°\ 1{,}5'$ και $ημπρ\ 34°\ 1{,}5' = 0{,}08560$

η (2) γράφεται:

$$ημπρX = ημπρ(52°\ 12{,}5') \sim ημπρ34°\ 1{,}5'$$

$$\Longrightarrow \quad ημπρX = 0{,}19360 - 0{,}08560 = 0{,}10800$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$ημπρζ = ημπρXτεμφ_ε\, στεμγ \quad \Longrightarrow \qquad (3)$$

$$λογημπρζ = λογημπρX + λογτεμφ_ε + λογστεμγ \qquad (4)$$

Άρα:

$$ημπρX = 0{,}10800 \Longrightarrow λογημπρX = 9{,}03343$$

$$λογτεμφ_ε = 0{,}03074$$

$$λογστεμγ = \underline{0{,}24500}$$

$$λογημπρζ = 9{,}30917$$

$$\Longrightarrow ζ = 53°\ 40{,}2'$$

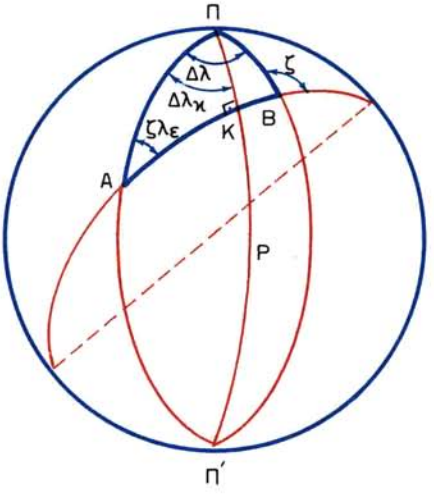
**6.5 Κορυφαίο σημείο ορθοδρομίας (vertex).**

Έστω το τρίγωνο ορθοδρομίας ΠΑΒ (σχ. 6.5). Αν θεωρήσομε το μέγιστο κύκλο ΠΚΠ΄, που διέρχεται από τον πόλο Π και είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο ΑΒ, το σημείο τομής Κ ονομάζεται ***κορυφαίο*** (vertex) του ορθοδρομικού τόξου. Το σημείο Κ απέχει φυσικά τη μικρότερη απόσταση ΠΚ από τον πόλο Π, άρα τη μεγαλύτερη απόσταση ΚΡ από τον ισημερινό. Επομένως, από όλα τα σημεία του ορθοδρομικού τόξου, το Κ έχει το μεγαλύτερο γεωγραφικό πλάτος. (Ανάλογα βέβαια με το άνοιγμα των γωνιών Α και Β μπορεί το Κ να βρίσκεται και στην προέκταση του ΑΒ).

Ο υπολογισμός των συντεταγμένων του κορυφαίου σημείου Κ της ορθοδρομίας είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των ενδιάμεσων σημείων, ώστε να χαράξομε το ορθοδρομικό τόξο.

**6.6 Υπολογισμός των συντεταγμένων ($φ_κ$, $λ_κ$) του κορυφαίου σημείου:**

Επειδή ο μεσημβρινός ΠΚΠ΄ είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο, το σφαιρικό τρίγωνο ΠΚΑ (σχ. 6.5) είναι ορθογώνιο. Του τριγώνου αυτού γνωρίζομε την πλευρά ΠΑ = 90°– $φ_ε$ και τη γωνία Α = ζ (αρχική πλεύση). Αν το



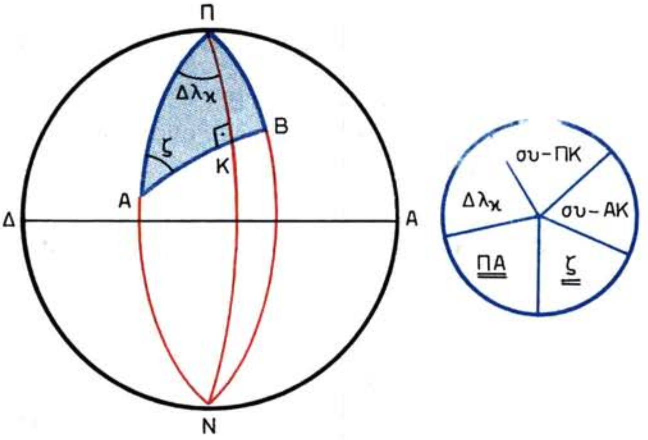

**Σχ. 6.5.**

επιλύσομε, υπολογίζομε την πλευρά ΠΚ και τη γωνία ΑΠΚ, που ισούται με τη διαφορά μήκους $\Delta\lambda_\kappa$ μεταξύ του σημείου εκκινήσεως Α και του κορυφαίου Κ.

Επομένως, αν αφαιρέσομε από 90° την πλευρά ΠΚ, βρίσκομε το πλάτος $\varphi_\kappa$ του κορυφαίου, ενώ αν προσθέσομε (ή αφαιρέσομε) στο μήκος $\lambda_\varepsilon$ του σημείου εκκινήσεως τη $\Delta\lambda_\kappa$, βρίσκομε το μήκος $\lambda_\kappa$ του κορυφαίου.

***Παράδειγμα.***

178) Ένα πλοίο πλέει από Α (πλάτος 41° 30΄ Β, μήκος 65° 40΄ Δ) στο Β (πλάτος 52° 18΄ Β, μήκος 4° 8΄ Δ) εκτελώντας ορθοδρομικό πλού. Αν η αρχική πλεύση είναι Β 53° 23΄ Α, να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του κορυφαίου σημείου της ορθοδρομίας (σχ. 6.6).




**Σχ. 6.6.**

***Λύση.***

***1ος τρόπος.***

Του ορθογωνίου τριγώνου ΑΠΚ γνωρίζομε τη γωνία Α = ζ= 53° 23′ και την πλευρά ΠΑ = 90°– $\varphi_\varepsilon$ = 48° 30′.

Το επιλύομε κατά τα γνωστά. Εδώ βέβαια τα στοιχεία που μας ενδιαφέρουν είναι η γωνία $\Delta\lambda_\kappa$ και η πλευρά ΠΚ.

***1) Υπολογισμός $\Delta\lambda_\kappa$.***

$$\text{συνΠΑ} = \text{σφ}\Delta\lambda_\kappa\text{σφ}\zeta \implies$$
$$\text{σφ}\Delta\lambda_\kappa = \text{συνΠΑσφ}\zeta \qquad (1)$$

***2) Υπολογισμός ΑΚ.***

$$\text{συν}\zeta = \text{σφΠΑσφ(συ} - \text{ΑΚ)}$$
$$\implies \text{συν}\zeta = \text{σφΠΑεφΑΚ}$$
$$\implies \text{εφΑΚ} = \text{συν}\zeta\text{εφΠΑ} \qquad (2)$$

***3) Υπολογισμός ΠΚ.***

$$\text{συν(συ} - \text{ΠΚ)} = \text{ημΠΑημ}\zeta$$
$$\implies \text{ημΠΚ} = \text{ημΠΑημ}\zeta \qquad (3)$$

***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

$$\text{συν(συ} - \text{ΠΚ)} = \text{σφ}\Delta\lambda_\kappa\text{(συ} - \text{ΑΚ)} \implies \text{ημΠΚ} = \text{σφ}\Delta\lambda_\kappa\text{εφΑΚ}$$

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | $\Delta\lambda_\kappa$ | ΑΚ | ΠΚ |
|---|---|---|---|
| ζ =53°23′ | λογεφζ =0,12894 | λογσυνζ =9,77558 | λογημζ =9,90452 |
| ΠΑ =48°30′ | λογσυνΠΑ =9,82126 | λογεφΠΑ =0,05319 | λογημΠΑ=9,87445 |
| $\Delta\lambda_\kappa$ =48°16,7′ | λογσφ$\Delta\lambda_\kappa$ =9,95020 | | |
| ΑΚ =33°59,2′ | λογεφΑΚ =9,82877 | λογεφΑΚ =9,82877 | |
| ΠΚ =36°57′ | λογημΠΚ =9,77897 | | λογημΠΚ =9,77897 |

Άρα πλάτος στο Κ = 90° – (36° 57′) = 53° 3′Β

Επειδή το μήκος στο Α είναι 65° 40′Δ και το Κ είναι ανατολικά του Α, άρα το μήκος στο Κ = (65° 40′) – (48° 16,7′) = 17° 23,3′Δ.

***2ος τρόπος.***

Οι ναυτιλλόμενοι χρησιμοποιούν και εδώ μια πιο τυποποιημένη μέθοδο υπολογισμού των συντεταγμένων του κορυφαίου, εφαρμόζοντας απευθείας τους εξής τύπους:

1) Για την εύρεση του πλάτους:

$$\text{συν}\varphi_\kappa = \text{συν}\varphi_\varepsilon\text{ημ}\zeta \qquad (1)$$

2) Για την εύρεση της $\Delta\lambda_\kappa$ (διαφορά μήκους αρχικού στίγματος και κορυφαίου):

$$\text{σφ}\Delta\lambda_\kappa = \text{ημ}\varphi_\varepsilon\text{εφ}\zeta \qquad (2)$$

Έτσι αντικαθιστώντας έχομε:
Από τον τύπο (1):

$$\begin{aligned}
\text{λογσυνφ}_\kappa &= \text{λογσυνφ}_\varepsilon + \text{λογημζ} \\
\text{λογσυνφ}_\varepsilon &= \text{λογσυν } 41^\circ\ 30' = 9{,}87446 \\
\text{λογημζ} &= \text{λογημ } 53^\circ\ 23' = \underline{9{,}90452} \\
&\qquad \text{λογσυνφ}_\kappa = 9{,}77898 \\
\Longrightarrow \quad \varphi_\kappa &= 53^\circ\ 3'
\end{aligned}$$

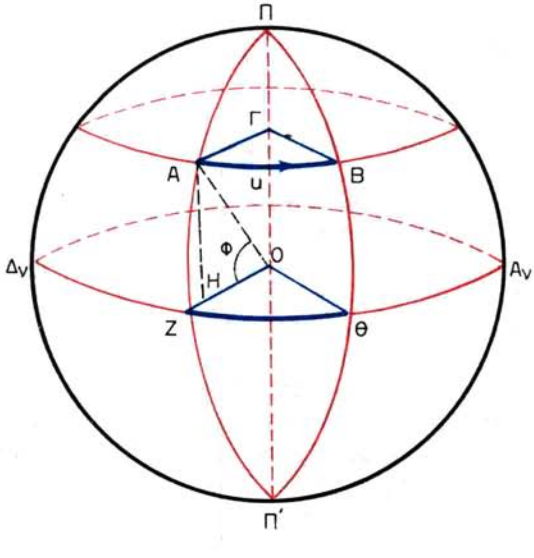
Από τον τύπο (2):

$$\begin{aligned}
\text{λογσφ}\Delta\lambda_\kappa &= \text{λογημφ}_\varepsilon + \text{λογεφζ} \\
\text{λογημφ} &= \text{λογημ } 41^\circ\ 30' = 9{,}82126 \\
\text{λογεφζ} &= \text{λογεφ } 53^\circ\ 23' = \underline{0{,}12894} \\
&\qquad \text{λογσφ}\Delta\lambda_\kappa = 9{,}95020 \\
\Longrightarrow \quad \Delta\lambda_\kappa &= 48^\circ\ 16{,}7'
\end{aligned}$$

Άρα βρήκαμε: Πλάτος στο Κ = $53^\circ\ 3'$Β
Μήκος στο Α = $(65^\circ\ 40') - (48^\circ\ 16{,}7') = 17^\circ\ 23{,}3'$Δ

## 6.7 Πλούς επί παραλλήλου.

Όταν το πλοίο εκτελεί πλού επάνω στον ίδιο παράλληλο, από τον τόπο Α στον τόπο Β (σχ. 6.7) οι δυο τόποι έχουν το ίδιο πλάτος φ του παραλλήλου και διαφορετικά μήκη $\lambda_1$ και $\lambda_2$ και η πορεία του πλοίου είναι σταθερή ή προς Ανατολή ή προς Δύση.




Σχ. 6.7.

Έστω u η απόσταση από A σε B σε μίλια. Ενώνομε τα A και B με το κέντρο Γ του μικρού κύκλου (παράλληλου πλάτους) και τα Z, Θ, A με το κέντρο O της γης.

Φέρομε από το A την κάθετη AH στην OZ. Η γωνία AOZ είναι φ, δηλαδή ίση με το πλάτος των A και B.

Επειδή $\sphericalangle$ ZOΘ = $\sphericalangle$ AΓB τα τόξα ZΘ και AB είναι ανάλογα με τις ακτίνες τους.

Άρα:

$$\frac{\text{τόξο } Z\Theta}{\text{τόξο } AB} = \frac{OZ}{\Gamma A} = \frac{OA}{OH} = \text{τεμ}\varphi \Longrightarrow$$

τόξο ZΘ = (τόξο AB) τεμφ δηλαδή $\Delta\lambda = u\,\text{τεμ}\varphi$ (1)

και $u = \Delta\lambda\,\text{συν}\varphi$ (2)

Δηλαδή ***το μήκος τόξου ενός παράλληλου ισούται με το γινόμενο του αντίστοιχου τόξου του Ισημερινού επί το συνημίτονο του πλάτους του παράλληλου.***

Ο τύπος (1) μπορεί να γραφεί και έτσι:

***Διαφορά μήκους (πρώτα λεπτά) = Μήκος τόξου (σε μίλια) × τέμνουσα πλάτους***

***Παράδειγμα.***

179) Ένα πλοίο που βρίσκεται σε πλάτος 44° 33'B, πλέει κατά 55 μίλια Ανατολικά (επάνω στον ίδιο παράλληλο). Να ευρεθεί η αλλαγή μήκους που προκύπτει.

***Λύση.***

Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο, έχομε:

$\Delta\lambda = 55 \,.\, \text{τεμ}44°\ 33' = 55 \,.\, 1{,}4032 = 77{,}1$ μίλια Ανατολ. = 77,1' A

δηλαδή 1° 17,1'A

## 6.8 Παράλληλος ασφαλείας (Limiting parallel).

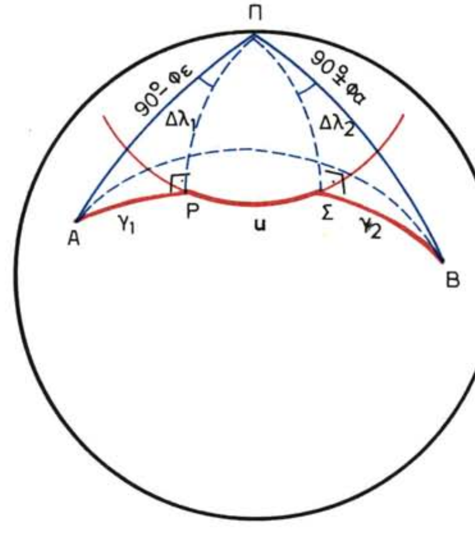
Ο πλούς (στις πολικές κυρίως περιοχές) πολλές φορές γίνεται επικίνδυνος, λόγω δυσμενών καιρικών συνθηκών και λόγω της πιθανότητας προσκρούσεως σε επιπλέοντα παγόβουνα ή σε ξηρά. Γι' αυτό υπάρχουν ειδικοί χάρτες που αναφέρουν από ποιο σημείο και πέρα ο πλούς είναι επικίνδυνος. Ο παράλληλος πλάτους που διέρχεται από το σημείο αυτό λέγεται ***παράλληλος ασφαλείας*** (Limiting parallel).

Αν λοιπόν πλέομε ορθοδρομικά και πρόκειται να διέλθομε από το κορυφαίο σημείο K, πρέπει να ελέγξομε, αν το σημείο αυτό, που το πλάτος του είναι το μεγαλύτερο της ορθοδρομίας, βρίσκεται πέρα από αυτόν τον παράλληλο ασφαλείας. Στην περίπτωση αυτή δεν ακολουθούμε ορθοδρομικό πλού, αλλά εκτελούμε τον λεγόμενο ***μικτό πλού.***

## 6.9 Μικτός πλούς.

Πολλές φορές διάφορες τοπικές ή καιρικές συνθήκες δεν επιτρέπουν να υπερβούμε τον προκαθορισμένο παράλληλο ασφαλείας, ενώ συγχρόνως θέλομε να πλεύσομε από τη συντομότερη οδό. Ακολουθούμε τότε τον λεγόμενο ***μικτό πλού.***

Έτσι, αν θέλομε να πλεύσομε από τον τόπο Α στον τόπο Β και ΡΣ είναι ο παράλληλος ασφαλείας (σχ. 6.9α) φέρομε από τα Α και Β τόξα μεγίστων κύκλων εφαπτόμενα στον παράλληλο ασφαλείας στα σημεία Ρ και Σ ***(σημεία επαφής).*** Έτσι ο μικτός πλούς αποτελείται από τρεις κλάδους: Από τα δυο ορθοδρομικά τόξα $ΑΡ = \gamma_1$ και $ΒΔ = \gamma_2$ και από το μεταξύ τους τμήμα $ΡΣ = u$ του παράλληλου ασφαλείας. Δηλαδή πλέομε από το Α στο Ρ ορθοδρομικά, από το Ρ στο Σ λοξοδρομικά και από το Σ στο Β ορθοδρομικά.




**Σχ. 6.9α.**

### *6.9.1 Υπολογισμός των στοιχείων του μικτού πλού.*

Αν μας δίνονται το μήκος $\varphi_\varepsilon$ και το πλάτος $\lambda_\varepsilon$ του σημείου εκκινήσεως Α, το μήκος $\varphi_\alpha$ και το πλάτος $\lambda_\alpha$ του σημείου αφίξεως καθώς και το πλάτος $\varphi_\sigma$ του παράλληλου ασφαλείας, τότε υπολογίζομε:

***1ο. Την ορθοδρομική απόσταση $\gamma_1$.*** Επιλύομε το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΡ που είναι ορθογ. στο Ρ και του οποίου γνωρίζομε τις πλευρές $ΠΑ = 90° - \varphi_\varepsilon$ και $ΠΡ = 90° - \varphi_\sigma$.

***2ο. Την ορθοδρομική απόσταση $\gamma_2$.*** Επιλύομε τώρα το ορθογώνιο στο Σ σφαιρικό τρίγωνο ΠΒΣ, του οποίου γνωρίζομε τις πλευρές $ΠΒ = 90° \pm \varphi_\alpha$ (+ για ετερώνυμα, – για ομώνυμα πλάτη $\varphi_\varepsilon$, $\varphi_\alpha$) και $ΠΣ = 90° - \varphi_\sigma$.

***3ο. Τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Ρ και Σ.*** Κατ' αρχήν το πλάτος των Ρ και Σ είναι $\varphi_\sigma$ ίσο με το πλάτος του παράλληλου ασφαλείας. Για το μήκος υπολογίζομε πρώτα τα $\Delta\lambda_1$ και $\Delta\lambda_2$, που είναι οι διαφορές μήκους μεταξύ των σημείων εκκινήσεως και αφίξεως και των σημείων επαφής αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός τους προκύπτει από την επίλυση των παραπάνω ορθογωνίων τριγώνων ΠΑΡ και ΠΒΣ. Από αυτά η $\Delta\lambda_1$ είναι Α ή Δ ανάλογα αν το Β βρίσκεται ανατολικότερα ή δυτικότερα του Α. Στο $\lambda_\varepsilon$ λοιπόν επιθέτομε το Δλ που βρίσκομε και παίρνομε το μήκος του Ρ. Ομοίως από το τρίγωνο ΠΒΣ βρίσκομε το μήκος του Σ.

***4ο. Τη λοξοδρομική απόσταση u σε μίλια.*** Έχομε $u = \Delta\lambda'$συν$\varphi_\sigma$, όπου Δλ΄ είναι η διαφορά μήκους μεταξύ των σημείων Ρ και Σ.

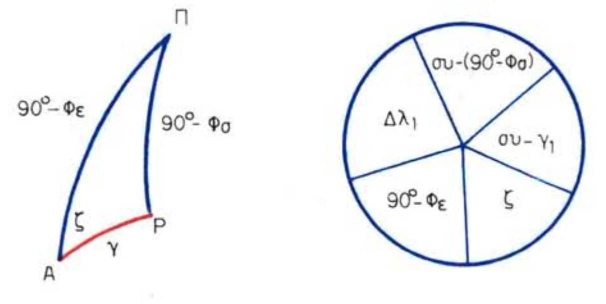
***5ο. Την αρχική πλεύση ζ.*** Και αυτή προκύπτει, όπως είναι φανερό, από την επίλυση του ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου ΠΑΡ με τα ίδια γνωστά στοιχεία.

***Παράδειγμα.***

180) Δίνονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες $\varphi_\varepsilon = 33°\ 10'$N και $\lambda_\varepsilon = 71°\ 45'$Δ του σημείου αναχωρήσεως Α και $\varphi_\alpha = 41°\ 58'$N, $\lambda_\alpha = 174°\ 57'$A του σημείου αφίξεως Β. Δίνεται και το πλάτος $\varphi_\sigma = 50°$ N του παράλληλου ασφαλείας. Ζητείται η επίλυση του μικτού πλού.

***Λύση.***

Αφού από τα σημεία Α και Β φέρομε τα εφαπτόμενα στον παράλληλο ασφαλείας τόξα ΑΡ και ΒΣ (σχ. 6.9α) εργαζόμαστε ως εξής:




**Σχ. 6.96.**

***1ος τρόπος.***

***α) Επιλύομε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΡ*** (σχ. 6.96).

***1) Υπολογισμός ζ.***

$$\begin{aligned} \text{συν}[\text{συ} - (90 - \varphi_\sigma)] &= \text{ημ}(90 - \varphi_\varepsilon)\text{ημ}\zeta \\ \Longrightarrow \quad \text{ημ}(90 - \varphi_\sigma) &= \text{συν}\varphi_\varepsilon\text{ημ}\zeta \\ \Longrightarrow \quad \text{συν}\varphi_\sigma &= \text{συν}\varphi_\varepsilon\text{ημ}\zeta \\ \Longrightarrow \quad \text{ημ}\zeta &= \text{συν}\varphi_\sigma\text{τεμ}\varphi_\varepsilon \qquad (1) \end{aligned}$$

***2) Υπολογισμός $\gamma_1$.***

$$\begin{aligned} \text{συν}(90 - \varphi_\varepsilon) &= \text{ημ}[\text{συ} - (90 - \varphi_\sigma)]\text{ημ}(\text{συ} - \gamma_1) \\ \Longrightarrow \quad \text{ημ}\varphi_\varepsilon &= \text{συν}(90 - \varphi_\sigma)\text{συν}\gamma_1 \\ \Longrightarrow \quad \text{ημ}\varphi_\varepsilon &= \text{ημ}\varphi_\sigma\text{συν}\gamma_1 \\ \Longrightarrow \quad \text{συν}\gamma_1 &= \text{ημ}\varphi_\varepsilon\text{στεμ}\varphi_\sigma \qquad (2) \end{aligned}$$

***3) Υπολογισμός Δλ₁.***

$$\text{συν}\Delta\lambda_1 = \text{σφ}(90-\varphi_\varepsilon)\text{σφ}[\text{συ}-(90-\varphi_\sigma)]$$
$$\Longrightarrow \text{συν}\Delta\lambda_1 = \text{εφ}\varphi_\varepsilon\text{εφ}(90-\varphi_\sigma)$$
$$\Longrightarrow \text{συν}\Delta\lambda_1 = \text{εφ}\varphi_\varepsilon\text{σφ}\varphi_\sigma \qquad (3)$$

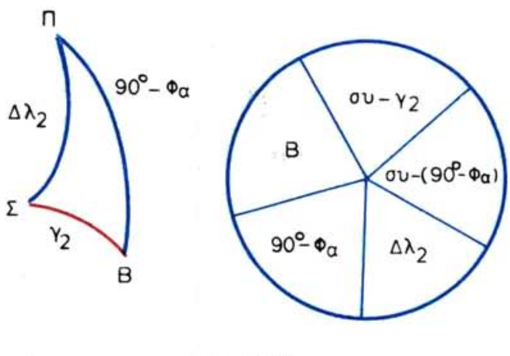
***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

$$\text{συν}\Delta\lambda_1 = \text{ημ}\zeta\text{ημ}(\text{συ}-\gamma_1)$$
$$\Longrightarrow \text{συν}\Delta\lambda_1 = \text{ημ}\zeta\text{συν}\gamma_1 \qquad (4)$$

## 1ο ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

| | $\zeta$ | $\gamma_1$ | $\Delta\lambda_1$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi_\varepsilon = 33°10'$ | λογτεμ$\varphi_\varepsilon$ =0,07723 | λογημ$\varphi_\varepsilon$ =9,73805 | λογεφ$\varphi_\varepsilon$ =9,81528 |
| $\varphi_\sigma = 50°$ | λογσυν$\varphi_\sigma$ =9,80807 | λογστεμ$\varphi_\sigma$ =0,11575 | λογσφ$\varphi_\sigma$ =9,92382 |
| $\zeta = 53°9{,}9'$ | ← λογημζ =9,88530 | | |
| $\gamma_1 = 44°25{,}5' =$ | ← λογσυν$\gamma_1$ =9,85380 | λογσυν$\gamma_1$ =9,85380 | |
| =2,665,5 ν. μιλ. | | | |
| $\Delta\lambda_1 = 56°44{,}3'$ | ← λογσυν$\Delta\lambda_1$ =9,73910 | (έλεγχος) ← | λογσυν$\Delta\lambda_1$ =9,73910 |

***β) Επιλύομε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΠΒΣ*** (σχ. 6.9γ).
Επειδή τα πλάτη είναι ομώνυμα βάζομε ΠΒ = $90-\varphi_\alpha$ και όχι $90+\varphi_\alpha$.




**Σχ. 6.9γ.**

***1) Υπολογισμός Β*** (αν και η γωνία Β δεν χρειάζεται).

$$\text{συν}[\text{συ}-(90-\varphi_\sigma)] = \text{ημ}B\text{ημ}(90-\varphi_\alpha)$$
$$\Longrightarrow \text{ημ}(90-\varphi_\sigma) = \text{ημ}B\text{συν}\varphi_\alpha \Longrightarrow \text{συν}\varphi_\sigma = \text{ημ}B\text{συν}\varphi_\alpha$$
$$\Longrightarrow \text{ημ}B = \text{συν}\varphi_\sigma\text{τεμ}\varphi_\alpha \qquad (1')$$

***2) Υπολογισμός $γ_2$.***

$$
\begin{aligned}
συν(90-φ_α) &= ημ(συ-γ_2)ημ[συ-(90-φ_σ)] \\
\Longrightarrow \quad ημφ_α &= συνγ_2συν(90-φ_σ) \\
\Longrightarrow \quad ημφ_α &= συνγ_2ημφ_σ \\
\Longrightarrow \quad συνγ_2 &= ημφ_αστεμφ_σ \qquad (2')
\end{aligned}
$$

***3) Υπολογισμός $Δλ_2$.***

$$
\begin{aligned}
συνΔλ_2 &= σφ(90-φ_α)σφ[συ-(90-φ_σ)] \\
\Longrightarrow \quad συνΔλ_2 &= εφφ_αεφ(90-φ_σ) \\
\Longrightarrow \quad συνΔλ_2 &= εφφ_ασφφ_σ \qquad (3')
\end{aligned}
$$

***4) Τύπος επαληθεύσεως.***

$$
\begin{aligned}
συνΔλ_2 &= ημΒσυν(συ-γ_2) \\
\Longrightarrow \quad συνΔλ_2 &= ημΒημγ_2 \qquad (4')
\end{aligned}
$$

## 2ο ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

| | B | $γ_2$ | $Δλ_2$ |
|---|---|---|---|
| $φ_α$ =41°48′ | $λογτεμφ_α$ =0,12870 | $λογημφ_α$ =9,82523 | $λογεφφ_α$ =9,95393 |
| $φ_σ$ =50° | $λογσυνφ_σ$ =9,80807 | $λογστεμφ_σ$ =0,11575 | $λογσφφ_σ$ =9,92382 |
| B =59°49,6′ ← | ← λογημB =9,93677 | | |
| $γ_2$ =29°12′= ← | ← $λογσυνγ_2$ =9,94098 ← | ← $λογσυνγ_2$ =9,94098 | |
| =1752 ν.μιλ. | | | |
| $Δλ_2$ =41° ← | ← $λογσυνΔλ_2$ =9,87775 ← | ← (έλεγχος) ← | ← $λογσυνΔλ_2$ =9,87775 |

Έτσι από τα στοιχεία που πήραμε από την επίλυση των δυο ορθογωνίων τριγώνων ΠΑΡ και ΠΒΣ έχομε ή υπολογίζομε από αυτά τα εξής:

***1ο. Ορθοδρομική απόσταση $γ_1$*** = 44°35,5′ = 2675,5 ν. μίλια.

***2ο. Ορθοδρομική απόσταση $γ_2$*** = 29°12′ = 1752 ν. μίλια.

***3ο. Συντεταγμένες σημείων επαφής.***

Συντεταγμένες Ρ

Βρήκαμε $Δλ_1$ = 56° 44,3′ που είναι Δυτικό

Άρα: $Δλ_1$ = 56° 44,3′ Δ
$λ_ε$ = 71° 45′ Δ

$λ_Ρ$ =128° 29,3′ Δ

και βέβαια $Φ_Ρ$ = 50° Ν

Συντεταγμένες Σ

Βρήκαμε $Δλ_2$ = 41° που είναι Ανατολικό

Άρα: $Δλ_2$ = 41° Α
$λ_α$ =174° 57′ Α

$λ_Σ$ =215° 57′ Α
$\Longrightarrow$ $λ_Σ$ =360° − 215° 57′ = 144° 3′ Δ

και $φ_Σ$ = 50° Ν

*4ο. Λοξοδρομική απόσταση u.*

Έχομε $u = \Delta\lambda'\,\sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma$ (1)

όπου $\Delta\lambda' = \lambda_\Sigma - \lambda_P = (144^\circ\ 3') - (128^\circ\ 29{,}3') = 15^\circ\ 33{,}7' = 933{,}7'$

Λογαριθμίζομε την (1):

$$\lambda o\gamma u = \lambda o\gamma\Delta\lambda' + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\lambda o\gamma\Delta\lambda' &= 2{,}97021\\ \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma &= \underline{9{,}80807}\\ \lambda o\gamma u &= 2{,}77828 \implies u = 600{,}2 \text{ ν. μίλια}\end{aligned}$$

*5ο. Αρχική πλεύση ζ.*

Ήδη έχει υπολογισθεί από το 1ο φύλλο υπολογισμού.

Είναι $\zeta = N\ 53^\circ\ 9{,}9'\Delta$.

Έτσι η απόσταση του μικτού πλού είναι το άθροισμα:

$$\gamma_1 + u + \gamma_2 = 2665{,}5 + 600{,}2 + 1752 = 5017{,}7 \text{ ν. μίλια.}$$

*2ος τρόπος.*

Με την μέθοδο των ναυτιλλομένων. Χρησιμοποιείται και εδώ τυπολόγιο που μας δίνει απευθείας τα ζητούμενα στοιχεία. Βέβαια, οι τρόποι αυτοί υπολογισμού των ναυτιλλομένων είναι πιο απλουστευμένοι, αφού είναι τυποποιημένοι, αλλά παρουσιάζουν το μειονέκτημα της ανάγκης απομνημονεύσεως όλων αυτών των τύπων.

Έτσι υπολογίζομε τα:

*1ο. Ορθοδρομική απόσταση $\gamma_1$.*

Από τον τύπο: $\sigma\upsilon\nu\gamma_1 = \eta\mu\varphi_\varepsilon\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi_\sigma$

$\implies \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\gamma_1 = \lambda o\gamma\eta\mu\varphi_\varepsilon + \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi_\sigma$

*2ο. Ορθοδρομική απόσταση $\gamma_2$.*

Από τον τύπο: $\sigma\upsilon\nu\gamma_2 = \eta\mu\varphi_\alpha\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi_\alpha$

Λογαριθμίζομε κλπ.

*3ο. Συντεταγμένες σημείων επαφής.*

Από τους τύπους: $\sigma\upsilon\nu\Delta\lambda_1 = \varepsilon\varphi\varphi_\varepsilon\sigma\varphi\varphi_\sigma$

και $\sigma\upsilon\nu\Delta\lambda_2 = \varepsilon\varphi\varphi_\alpha\sigma\varphi\varphi_\sigma$

*4ο. Λοξοδρομική απόσταση u.*

Από τον τύπο: $u = \Delta\lambda'\sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma$

όπου $\Delta\lambda' = \lambda_\Sigma - \lambda_P$

*5ο. Αρχική πλεύση ζ.*

Από τον τύπο: $\eta\mu\zeta = \tau\varepsilon\mu\varphi_\varepsilon\sigma\upsilon\nu\varphi_\sigma$

Λογαριθμίζομε κλπ.

**6.10 Ασκήσεις στη γήινη σφαίρα.**

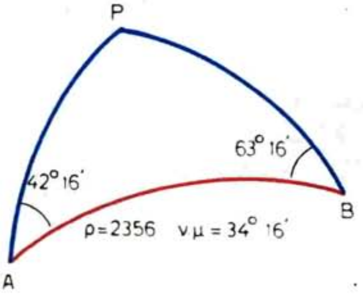
181) Ένα πλοίο κινείται ορθοδρομικά από τον τόπο Α στον τόπο Β. Η αρχική

πλεύση ήταν 42° 16′ και η τελική 116° 44′. Η ορθοδρομική απόσταση είναι 2356 ν.μ. Αν το γεωγραφικό μήκος του Α είναι 2° 16′ Ε, να ευρεθεί το πλάτος και το μήκος του τόπου Β.

***Λύση.***

Μας δίνονται δυο γωνίες και η περιεχόμενη πλευρά. Για το πολικό τρίγωνο θα έχομε (σχ. 6.10α).:

$$α' = 180° - A = 137°\ 44'$$
$$β' = 180° - B = 116°\ 44'$$
$$P' = 180° - ρ = 140°\ 44'$$




**Σχ. 6.10α.**

Του πολικού λοιπόν γνωρίζομε δυο πλευρές και την περιεχομένη γωνία (περίπτωση ΙΙΙ).

Άρα:

$$ημπρρ' = ημπρP'ημα'ημβ' + ημπρ(α' \sim β') \Longrightarrow ρ' = 97°\ 36'$$

Άρα:

$$P = 180° - ρ' = 82°\ 24'$$

Συνεπώς μήκος του Β = (2° 16′) + (82° 24′) = 84° 40′Ε

Τώρα:

$$ημπρA' = \frac{ημπρα' - ημπρ(β' \sim ρ')}{ημβ'ημρ'}$$

$$A' = 154°\ 34' \qquad \text{και άρα} \qquad α = 25°\ 26'$$

Συνεπώς, μήκος του Β = 90° − (25° 26′) = 64° 34′Ν.

182) Ένα αεροπλάνο πετά ορθοδρομικώς από ένα τόπο Α πλάτους 49° 30′ Ν, προς ένα τόπο Β, των οποίων η ορθοδρομική απόσταση είναι 1440 ν.μ. Στο Α η πορεία είναι Νθ°Ε και στο Β είναι Ν2θ°Ε. Να υπολογισθεί η αρχική πλεύση και το πλάτος του τόπου Β.

***Λύση.***

Από τον τύπο των 4 συνεχών στοιχείων έχομε (σχ. 6.10β).:

$$σφPAημAB = σφ(180° - 2θ)ημθ + συνθσυνAB$$

και θέτοντας $k = σφPAημAB$ έχομε:

$$k = -\sigma\varphi 2\theta \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu 24^\circ$$

$$\Longrightarrow \; k = \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu 24^\circ - \eta\mu\theta\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta}{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}$$

(βλ. τυπολόγιο επίπεδης τριγωνομετρίας)

$$\Longrightarrow \; k = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2\theta\sigma\upsilon\nu 24^\circ - \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

από όπου τελικά παίρνομε: $\theta = 25^\circ\ 36'$

Άρα η αρχική πλεύση = N 25° 36′ E

Από τον τύπο τώρα των ημιτόνων, έχομε:

$$\frac{\eta\mu PB}{\eta\mu 25^\circ\ 26'} = \frac{\eta\mu 40^\circ\ 30'}{\eta\mu 128^\circ\ 48'} \quad \Longrightarrow$$

$$PB = 111^\circ\ 06'$$

άρα πλάτος του B = 68° 54′.

183) Ένα πλοίο εκτελεί ορθοδρομικό πλού από ένα τόπο A πλάτους 47° 25′S και μήκους 6° 10′E, προς ένα τόπο B πλάτους 18° 30′S και μήκους 63° 16′E. Να υπολογισθεί το πλάτος του πλοίου στο σημείο Γ του ορθοδρομικού τόξου, στο οποίο το μήκος του έχει γίνει ίσο με το μισό της διαφοράς μήκους μεταξύ των δυο θέσεων A και B.

***Λύση.***

Έχομε (63° 16′) – (06° 10′) = 57° 6′

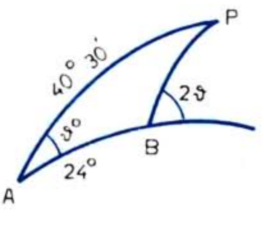
(57° 6′) : 2 = 28° 33′

Έτσι για το σημείο Γ θα έχομε (σχ. 6.10γ).:

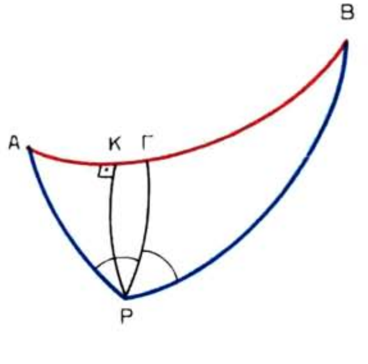
$$\sphericalangle A P \Gamma = \sphericalangle B P \Gamma = 28^\circ\ 33'$$

Φέρομε από το P το τόξο μέγιστου κύκλου PK κάθετο στην AB.

Στο σφαιρικό τρίγωνο PAB έχομε γνωστές δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.




Σχ. 6.10β.




Σχ. 6.10γ.

Άρα:

$$\eta\mu\pi\rho AB + \eta\mu\pi\rho P\eta\mu PA\eta\mu PB + \eta\mu\pi\rho\ (PA \sim PB)$$

από όπου $AB = 54°\ 21'$

και πάλι:

$$\eta\mu\pi\rho B = \frac{\eta\mu\pi\rho PA - \eta\mu\pi\rho(PB \sim AB)}{\eta\mu PB\eta\mu AB}$$

από όπου $\sphericalangle B = 44°\ 19{,}7'$

Στο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο PKB, από τους κανόνες του Napier, έχομε:

$$\eta\mu PK = \eta\mu B\eta\mu PB \implies PK = 41°\ 30{,}5'$$

και $\quad \sigma\upsilon\nu PB = \sigma\varphi BPK\sigma\varphi B \implies \sphericalangle BPK = 72°\ 47'$

Άρα:

$$\sphericalangle \Gamma PK = 44°\ 14'$$

Στο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΓΡΚ, έχομε:

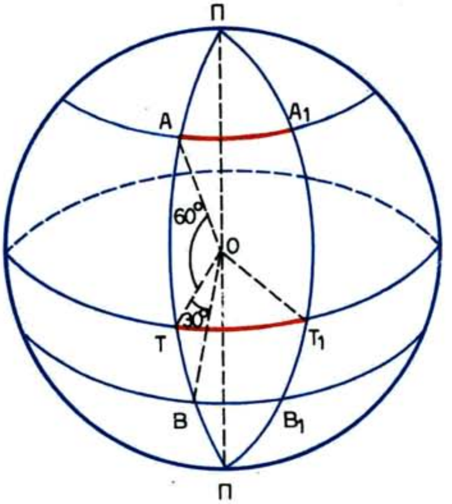
$$\sigma\upsilon\nu\Gamma PK = \varepsilon\varphi PK\sigma\varphi P\Gamma \implies$$

$$P\Gamma = 51°\ 0{,}5' \text{ άρα πλάτος στο } \Gamma = 38°\ 59{,}5'\ S$$

184) Δυο πλοία πλέουν κατά μήκος των παραλλήλων πλάτους 60°N και 30°S αντίστοιχα έτσι, ώστε σε κάθε στιγμή τα δυο πλοία να βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό. Αν η ταχύτητα του Α είναι $12\sqrt{3}$ μίλια ανά ώρα, να υπολογισθεί η ταχύτητα του Β.

***Λύση.***

Τα δυο πλοία, καθώς κινούνται επάνω στους παράλληλους πλάτους 60°N και 30°S, θα διανύουν σε μια ώρα τα τόξα $AA_1$ και $BB_1$ και θα έχομε (σχ. 6.10δ.):




**Σχ. 6.10δ.**

$$(\widehat{AA_1}) = (\widehat{TT_1})\ \text{συν}60^\circ$$

$$(\widehat{BB_1}) = (\widehat{TT_1})\ \text{συν}30^\circ$$

Άρα:

$$\frac{(\widehat{AA_1})}{(\widehat{BB_1})} = \frac{\text{συν}60^\circ}{\text{συν}30^\circ} \qquad (1)$$

Το πλοίο όμως Α διατρέχει το διάστημα $(\widehat{AA_1})$ σε μια ώρα, άρα το $\widehat{AA_1}$ παριστάνει την ταχύτητα του Α.

Από την (1) $\Longrightarrow$ $(\widehat{BB_1}) = (\widehat{AA_1}) \cdot \dfrac{\text{συν}30^\circ}{\text{συν}60^\circ} = 12\sqrt{3}.\sqrt{3} = 12.3 = 36$ μίλια ανά ώρα

## 6.11 Ασκήσεις.

185) Ένα πλοίο αναχωρεί ορθοδρομικά από ένα λιμάνι πλάτους 35° 40΄N και μήκους 141°E. Αν η αρχική πλεύση είναι 60° 30΄, να υπολογισθεί το πλάτος του κορυφαίου της ορθοδρομίας.

186) Μια ορθοδρομία εκτελείται προς τα δυτικά από ένα λιμάνι πλάτους 49° 07΄S και μήκους 75° 50΄ W και έχει το κορυφαίο της σε πλάτος 55° S. Να υπολογισθεί η αρχική πλεύση και η απόσταση του κορυφαίου.

187) Ποια είναι η συντομότερη απόσταση στην επιφάνεια της γης από ένα τόπο Α 42°N, 72°W προς ένα τόπο Β 3200 ν.μ. κατευθείαν ανατολικά του Α;

188) Να βρείτε την απόσταση, την αρχική πλεύση και το πλάτος και το μήκος του κορυφαίου της ορθοδρομίας πλέοντας από ένα σημείο πλάτους 41° 13΄N και μήκους 72° 34΄W σε ένα σημείο πλάτους 39° 16΄N και μήκους 27° 9΄W.

189) Από ένα πλοίο Α σε νότιο πλάτος, ένας ραδιοσταθμός Β βρίσκεται ότι έχει διόπτευση 84° Αλήθ. σε απόσταση 5400 ν.μ. Αν ο Β είναι σε πλάτος 5° 10΄N να υπολογισθεί το πλάτος του Α.

190) Η ορθοδρομική απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β, που βρίσκονται στον ίδιο παράλληλο πλάτους, είναι 1000 ν.μ. και το πλάτος του κορυφαίου της ορθοδρομίας είναι 41° S. Να υπολογισθεί το πλάτος των Α και Β.

191) Να υπολογίσετε τη συντομότερη απόσταση μεταξύ των παρακάτω δυο θέσεων και τις διοπτεύσεις της κάθε μιας από την άλλη:
Νέα Υόρκη 40° 43΄N, 74°W και Ρίο ντε Ζανέιρο 22° 54΄S, 43° 10΄W.

192) Να υπολογισθεί: α΄) Η ορθοδρομική απόσταση από το λιμάνι Α (25° 7΄S, 130° 20΄ W) στο λιμάνι Β (25° 07΄S, 152° 54΄E). β΄) Το πλάτος του κορυφαίου της ορθοδρομίας.

193) Ένα πλοίο πρόκειται να πλεύσει από ένα τόπο πλάτους 47° 48΄N και μήκους 125° 24΄W, σε ένα τόπο πλάτους 34° 40΄N και μήκους 139° 45΄E. Η ορθοδρομική πλεύση ανάμεσα σ' αυτούς τους τόπους θα έφερνε το πλοίο σε μεγάλα πλάτη. Εκτελώντας μικτό πλού με τον 50ο παράλληλο, σαν οριακό βόρειο παράλληλο ασφαλείας, ποιο θα ήταν το μήκος, στο οποίο αυτός ο παράλληλος πλησιάζεται και το μήκος στο οποίο απομακρύνεται και ποια είναι η απόσταση που έχει διανυθεί κατά μήκος κάθε μέρους του ταξιδιού;

194) Ένα πλοίο κινείται Ανατολικά σε μέγιστο κύκλο από μια θέση 58°S, 55°E, προς μια θέση 25°S. Να υπολογισθεί το πλάτος αφίξεως, η τελική πλεύση και η διανυθείσα απόσταση.

195) Ένα πλοίο φεύγει από τη Νέα Υόρκη (πλάτος 40° 48,6΄N, μήκος 73° 55,75΄W) ακολουθώντας ορθοδρομική πορεία με αρχική πλεύση 36°. Να βρεθεί:
α΄) Το πλάτος και μήκος της θέσεως του Α όταν έχει διανύσει 500 ν. μίλια.
β΄) Το βορειότερο σημείο της πορείας του.

196) Ένα πλοίο πλέει τελείως Ανατολικά για 200 μίλια κατά μήκος του παράλληλου πλάτους 42°N. Ποιο είναι το μήκος του σημείου αφίξεως του όταν: α΄) Ξεκινά από μήκος 125°W. β΄) Ξεκινά από μήκος 160°E;

197) Να υπολογισθεί η συντομότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη (πλάτος 40° 43΄N μήκος 74°W) ως το Ρίο ντε Ζανέιρο (πλάτος 22° 54΄S, μήκος 43° 11΄W).

198) Να υπολογισθεί η ορθοδρομική απόσταση, η αρχική και η τελική πλεύση από Ουάσιγκτον (πλάτος 38° 55΄N, μήκος 37° 4΄W) στη Μόσχα (πλάτος 55° 45΄N, μήκος 37° 34΄E).

199) Να ευρεθεί η ορθοδρομική απόσταση, η αρχική και η τελική πλεύση από Καλκούτα (πλάτος 22° 35΄N, μήκος 88° 27΄E) προς Μελβούρνη (πλάτος 37° 48΄S, μήκος 144° 58΄E). Κατόπιν να προσδιορισθεί η θέση του πλοίου, όταν αυτό διασχίζει τον Ισημερινό και να υπολογισθεί τότε η απόσταση του από την Καλκούτα.

200) Ένα πλοίο βρίσκεται σε πλάτος 32° 12΄N, μήκος 68° 40΄W και παίρνει μια ραδιοδιόπτευση των 42,5° ενός άγνωστου πομπού, που έδωσε το πλάτος του σε 52° 33΄N αλλά του οποίου το μήκος χάθηκε στην ατμόσφαιρα. Να υπολογισθεί το χαμένο μήκος του πομπού.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ

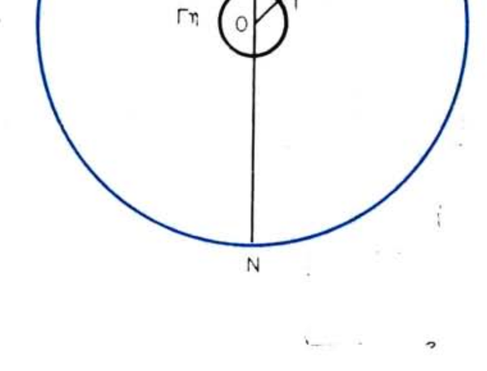
### 7.1 Γη και ουράνια σφαίρα.

Ουράνια σφαίρα ονομάζομε τη σφαίρα επάνω στην οποία φαίνονται καθηλωμένα τα άστρα και η οποία περιβάλλει τη γη. Κέντρο αυτής της σφαίρας είναι το κέντρο Ο της γης. Επειδή όμως η ακτίνα της ουράνιας σφαίρας μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει άπειρο μήκος, γι' αυτό η ακτίνα της γήινης σφαίρας θεωρείται αμελητέα και το τυχόν σημείο Τ της επιφάνειας της γης, όπου μπορεί να βρίσκεται ένας παρατηρητής, μπορεί να ληφθεί ως κέντρο της ουράνιας σφαίρας. Ο παρατηρητής αυτός βλέπει όλα τα ουράνια σώματα να κινούνται από την Ανατολή προς τη Δύση.

Η ουράνια σφαίρα ονομάζεται επίσης ***ουράνιος θόλος*** ή ***ουρανός.*** Το μπλέ χρώμα του ουρανού οφείλεται κυρίως στη διάχυση της μπλέ ακτινοβολίας του ηλιακού φωτός από τα μόρια της γήινης ατμόσφαιρας.

### 7.2 Στοιχεία της ουράνιας σφαίρας.

***Κατακόρυφος τόπου*** (ή ***γραμμή κατακορύφου)*** ενός τόπου λέγεται η διεύθυνση της βαρύτητας στον τόπο αυτόν. Ως κατακόρυφος του τόπου Τ ορίζεται και η διεύθυνση της γήινης ακτίνας που διέρχεται από αυτόν (σχ. 7.2α).




**Σχ. 7.2α.**

Αν προεκτείνομε νοερά την κατακόρυφο ενός τόπου προς τα επάνω, αυτή συναντά την ουράνια σφαίρα στο σημείο Ζ, που ονομάζεται ***Ζενίθ*** του τόπου. Εάν την προεκτείνομε προς τα κάτω, συναντά την ουράνια σφαίρα στο σημείο Ν, εκ διαμέτρου αντίθετο του Ζ, που ονομάζεται ***Ναδίρ*** του τόπου.

***Κατακόρυφα επίπεδα*** ονομάζονται τα άπειρα επίπεδα που διέρχονται από την κατακόρυφο ενός τόπου. Κάθε ένα από τα επίπεδα αυτά τέμνει την ουράνια σφαίρα κατά ένα μέγιστο κύκλο, που ονομάζεται ***κατακόρυφος κύκλος*** ή ***κάθετος κύκλος*** (vertical circle).

***Πρώτος κάθετος*** (prime vertical) ονομάζεται ο κάθετος, του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο προς το επίπεδο του μεσημβρινού του τόπου.

***Ορίζοντες:*** Κάθε επίπεδο κάθετο προς την κατακόρυφο ονομάζεται ***ορίζοντας.*** Ο ορίζοντας που διέρχεται από το κοινό κέντρο γης και ουράνιας σφαίρας ονομάζεται ***Αληθής*** ή ***Ουράνιος*** ή ***Μαθηματικός*** ορίζοντας (celestial horizon).

***Ορατός*** ή ***θαλάσσιος ορίζοντας*** (visible horizon) είναι ο ορίζοντας, που βλέπει γύρω του ο ναυτιλλόμενος (εκεί δηλαδή που η ουράνια σφαίρα φαίνεται να συναντά την θάλασσα).

***Φαινόμενος ορίζοντας*** (apparent horizon) είναι αυτός που το επίπεδό του διέρχεται από τον οφθαλμό του παρατηρητή.

***Αισθητός ορίζοντας*** (sensible horizon) είναι αυτός που το επίπεδο του εφάπτεται στη γήινη επιφάνεια στο στίγμα του παρατηρητή.

***Βάθος ορατού ορίζοντα*** (dip of horizon) ονομάζεται η γωνία που έχει κορυφή τον οφθαλμό του παρατηρητή και σχηματίζεται από τη διεύθυνση του ορατού ορίζοντα και τη διεύθυνση του φαινομένου.

***Άξονας του κόσμου*** (celestial axis) ονομάζεται ο άξονας της γης, όταν θεωρηθεί ότι προεκτείνεται έως ότου συναντήσει την ουράνια σφαίρα.

***Πόλοι του άξονα του κόσμου*** ή ***ουράνιοι πόλοι*** (celestial poles) είναι τα σημεία στα οποία ο άξονας του κόσμου συναντά την ουράνια σφαίρα.

***Βόρειο πόλο Π*** της ουράνιας σφαίρας ονομάζομε τον αντίστοιχο του γήινου βόρειου πόλου (ή τον ευρισκόμενο κοντά στον πολικό αστέρα).

***Νότιο πόλο Π΄*** της ουράνιας σφαίρας ονομάζομε τον αντίστοιχο του γήινου νότιου πόλου.

***Ουράνιος Ισημερινός*** (celestial equator) ονομάζεται ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που προκύπτει από την τομή της με το επίπεδο του ισημερινού της γης.

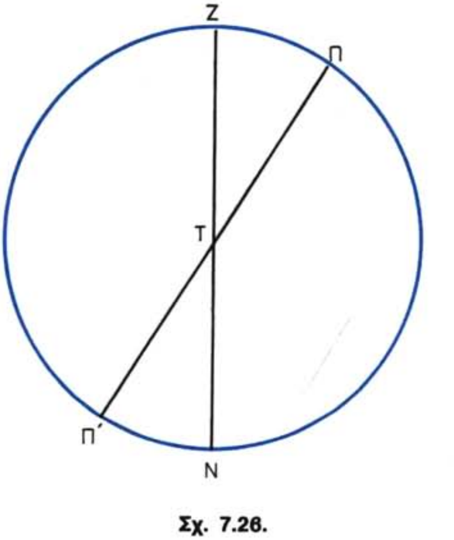
***Ουράνιοι μεσημβρινοί*** (celestial meridians) λέγονται οι μέγιστοι κύκλοι της ουράνιας σφαίρας που διέρχονται από τους ουράνιους πόλους. Αυτοί αποτελούν προεκτάσεις των γήινων μεσημβρινών.

***Ωρικοί*** ή ***ωριαίοι κύκλοι*** καλούνται οι μέγιστοι κύκλοι της ουράνιας σφαίρας, που έχουν για διάμετρό τους τον άξονα του κόσμου.

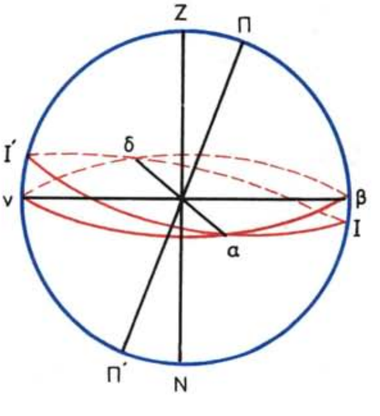
***Παρατήρηση.***
Οι ουράνιοι μεσημβρινοί, όπως και οι ωρικοί κύκλοι, είναι μέγιστοι κύκλοι της ουράνιας σφαίρας διερχόμενοι από τους πόλους. Η διαφορά τους είναι ότι οι μέν ουράνιοι μεσημβρινοί αποτελούν προεκτάσεις των γήινων μεσημβρινών, διατηρούν σταθερή τη θέση τους ως προς τη γη και παρακολουθούν την περιστροφή της, ενώ οι ωρικοί κύκλοι παρακολουθούν την ουράνια σφαίρα, στην οποία βέβαια ανήκουν, κατά τη φαινόμενη περιστροφή της.

***Μεσημβρινός του τόπου Τ*** (observer's meridian) ή ***ουράνιος μεσημβρινός*** καλείται ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που ορίζεται από την τομή αυτής με το επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα του κόσμου ΠΠ΄ και της κατακορύφου ΖΝ του τόπου Τ (σχ. 7.2β.).

***Μεσημβρινή γραμμή*** ονομάζεται η γραμμή βν (σχ. 7.2γ), που ορίζεται από την τομή του επιπέδου του ορίζοντα και του μεσημβρινού του τόπου και μας δείχνει την κατεύθυνση Βορρά-Νότου του τόπου.



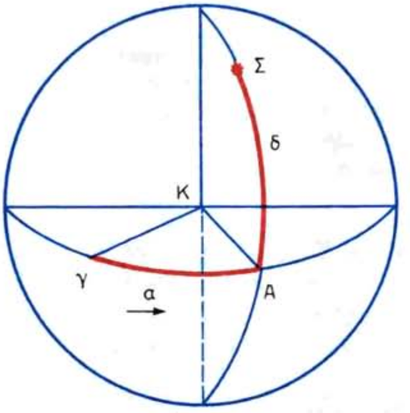

**Σχ. 7.2β.**




**Σχ. 7.2γ.**

***Παρατήρηση.***
Η κάθετη αδ προς τη μεσημβρινή γραμμή βν είναι κοινή διάμετρος του ισημερινού και του ορίζοντα και ονομάζεται ***γραμμή του πρώτου καθέτου*** ή ***άξονας του μεσημβρινού*** (σχ. 7.2γ). Τα άκρα της αποτελούν τον Απηλιώτη (δεξιά του Βορρά) και τον Ζέφυρο (αριστερά του Βορρά).

***Κλίση*** (declination) ενός σημείου ή ενός αστέρα Σ είναι η γωνιώδης απόστασή του από τον ουράνιο ισημερινό δηλαδή το τόξο ΑΣ (σε μοίρες από 0° έως 90°) του ωρικού του κύκλου που περιλαμβάνεται μεταξύ ισημερινού και του αστεριού Σ (σχ. 7.2δ). Η δ χαρακτηρίζεται ως βόρεια ή νότια ανάλογα με τη θέση του αστέρα προς Β ή προς Ν του ουράνιου ισημερινού.




Σχ. 7.2δ.

***Ορθή αναφορά*** (right ascencion) ενός σημείου ή ενός αστέρα Σ της ουράνιας σφαίρας είναι η δίεδρη γωνία, που σχηματίζει ο ωρικός κύκλος του με τον ωριαίο του σημείου γ (εαρινό σημείο)˙ δηλαδή το τόξο γΑ του ουράνιου ισημερινού που περιλαμβάνεται μεταξύ του γ και του σημείου Α (σχ. 7.2δ), όπου ο ωρικός κύκλος του αστεριού Σ τέμνει τον Ισημερινό.

Η ορθή αναφορά μετρείται από 0° έως 360° επι του Ισημερινού με αφετηρία το εαρινό σημείο γ (Aries) και κατά την ορθή φορά (δηλαδή εκ δυσμών προς ανατολάς).

***Ωρική*** ή ***Ωριαία γωνία ΗΑ*** (hour angle) είναι η δίεδρη γωνία που σχηματίζει ο ωρικός (ή ωριαίος) κύκλος του αστέρα με τον μεσημβρινό του τόπου, όπου βρισκόμαστε. Μετρείται πάντοτε επί τόξου του Ισημερινού κατά την ανάδρομη, συνήθως, φορά με αρχή ένα ορισμένο μεσημβρινό της γης από 0°-360°.

***Ισημερινές*** ή ***Ουρανογραφικές συντεταγμένες*** (celestial equator system of coordinates) ονομάζονται η κλίση (ή απόκλιση) δ και η ορθή αναφορά α ενός σημείου επάνω στην ουράνια σφαίρα.

***Παρατήρηση 1.***

Οι Ισημερινές ή Ουρανογραφικές συντεταγμένες παρουσιάζουν μια σχεδόν πλήρη αντιστοιχία με τις γεωγραφικές συντεταγμένες. Πράγματι η μεν κλίση είναι εντελώς αντίστοιχη προς το γεωγραφικό πλάτος, η δε ορθή αναφορά είναι ανάλογη προς το γεωγραφικό μήκος.

***Παρατήρηση 2.***

Με τις συντεταγμένες αυτές μπορεί να καθορισθεί εντελώς η θέση ενός αστέρα Σ στην ουράνια σφαίρα, γιατί αυτές είναι ανεξάρτητες και από τον τόπο παρατηρήσεως και από τον χρόνο.

***Ύψος*** ή ***αληθές ύψος*** $H_\lambda$ (altitude) ενός σημείου ή ενός αστέρα ονομάζεται η γωνιώδης απόστασή του από τον αληθή ορίζοντα του τόπου στον οποίο βρισκόμαστε, δηλαδή το τόξο του κάθετου κύκλου του αστέρα, που περιλαμβάνεται μεταξύ αυτού και του αληθούς ορίζοντα. Το $H_\lambda$ μετρείται από 0° έως 90° με αρχή μετρήσεως τον ορίζοντα.

***Αληθές αζιμούθ*** $\boldsymbol{Αζ_{\lambda}}$ (azimuth) είναι το τόξο του ορίζοντα που περιλαμβάνεται μεταξύ του μεσημβρινού του παρατηρητή και του κάθετου κύκλου του αστέρα. Το $Αζ_{\lambda}$ μετρείται:

α΄) Από 0°-360° με αρχή μετρήσεως τον Βορρά κατά την ανάδρομη φορά.

β΄) Από 0°-180° εκ του Β ή Ν (ανάλογα με τον άνω πόλο του παρατηρητή) προς Α ή Ζ.

γ΄) Από 0°-90° από Β ή Ν προς Α ή Ζ.

***Οριζόντιες*** ή ***τοπικές συντεταγμένες*** (horizon system of corrdinates) είναι το αληθές ύψος και το αληθές αζιμούθ.

## 7.3 Τρίγωνο θέσεως ή *Αστρονομικό τρίγωνο.*

Αν θεωρήσομε επάνω στην ουράνια σφαίρα (σχ. 7.3α) το σφαιρικό τρίγωνο που σχηματίζεται με κορυφές: α) Το ***ζενίθ*** του παρατηρητή. β) Τον ***άνω πόλο*** του παρατηρητή και γ) τη ***θέση ενός αστέρα*** στην ουράνια σφαίρα, τότε το σφαιρικό αυτό τρίγωνο λέγεται ***τρίγωνο θέσεως*** (ή αστρονομικό τρίγωνο).

Το αντίστοιχό του επάνω στην επιφάνεια της γης είναι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις τομές με τη γήινη σφαίρα των τριών ακτίνων που συνδέουν το κέντρο της γης με τις κορυφές του τριγώνου θέσεως.

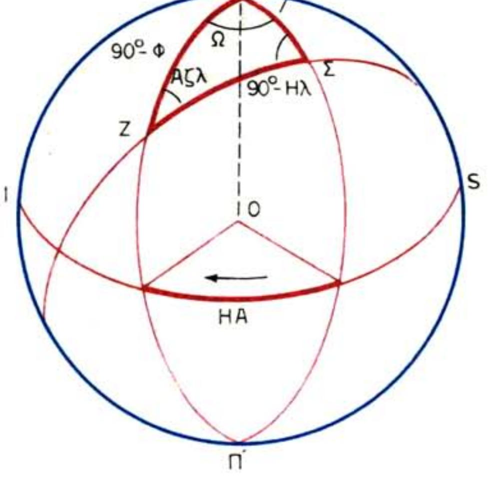
Τα κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσεως είναι:

***Πλευρές.***

α) Η ΠΖ που καλείται ***πολοζενιθιακή*** απόσταση και μετράει την απόσταση του τόπου, επάνω στον μεσημβρινό, από τον άνω πόλο. Ισούται με το σύμπλατος $90 - \varphi$.

β) Η ΠΣ καλείται ***πολική*** απόσταση Ρ και μετράει την απόσταση του αστέρα επάνω στον ωρικό κύκλο, από τον άνω πόλο. Είναι $Ρ = 90° \pm \delta$ [το + για ετερώνυμα φ και δ και το – (πλην) για ομώνυμα φ και δ].

γ) Η ΖΣ που καλείται ***ζενιθιακή*** απόσταση $Ζ_{\lambda}$ και μετράει την απόσταση του αστέρα από το ζενίθ, επάνω στον κάθε κύκλο του. Είναι $Ζ_{\lambda} = 90 - Η_{\lambda}$.




Σχ. 7.3α.

*Γωνιες.*

α) Η γωνία Ζ που καλείται ***αζιμούθ*** $Αζ_λ$ του αστέρα.

β) Η γωνία Σ με κορυφή τον αστέρα, που ονομάζεται ***παραλλακτική*** γωνία ή γωνία θέσεως (δεν ενδιαφέρει το ναυτιλλόμενο).

γ) Η γωνία Ω με κορυφή τον πόλο Π και πλευρές το μεσημβρινό του τόπου και τον ωρικό κύκλο του αστέρα), που ονομάζεται ***ωρική γωνία*** HA (hour angle) του αστέρα.

***Παρατήρηση.***

Η ωρική γωνία μετρείται με αρχή ορισμένο μεσημβρινό της προς τον ωρικό κύκλο του αστέρα από 0°-360° προς ανατολάς (ανατολική ωρική γωνία) ή προς δυσμάς (δυτική ωρική γωνία).

Σήμερα χρησιμοποιείται σε όλα τα προβλήματα της ναυτιλίας η δυτική ωρική γωνία. Αν ενός ουράνιου σώματος θεωρήσομε τη δυτική ωρική του γωνία, αυτή λαμβάνεται με αρχή το μεσημβρινό του τόπου και καλείται ***τοπική δυτική ωρική γωνία LHA*** (local hour angle). Αν ως αρχή μετρήσεως λαμβάνεται ο μεσημβρινός του Greenwich, τότε καλείται ***δυτική ωρική γωνία Greenwich GHA*** (Greenwich hour angle). Προφανώς ισχύει LHA ~ GHA = λ, όπου λ το μήκος του τόπου.

Η δυτική ωρική γωνία του κέντρου του ηλίου, όταν εκφράζεται σε ώρες (h), πρώτα λεπτά (min) και δευτερόλεπτα (sec), αντιστοιχεί στον αληθή χρόνο A.T. (apparent time). Αν ο αληθής χρόνος αναφέρεται στο μεσημβρινό του τόπου, ονομάζεται ***αληθής τοπικός χρόνος LAT*** (local apparent time). Αν αναφέρεται στο μεσημβρινό του Greenwich, ονομάζεται ***αληθής χρόνος Greenwich GAT*** (Greenwich apparent time).

Επειδή η αληθής ημέρα αρχίζει κατά την κάτω μεσημβρινή διάβαση του ηλίου, δηλαδή το μεσονύκτιο όπου υπάρχει ελάχιστη ανθρώπινη δραστηριότητα, ο αληθής ηλιακός χρόνος θα διαφέρει από την αντίστοιχη δυτική ωρική γωνία του ηλίου κατά 12 ώρες ή 180°.

Άρα για τυχόντα μεσημβρινό θα έχομε:

$$LAT = LHA \pm 180°$$

όπου (+) όταν η LHA, δηλαδή η Ω, είναι μικρότερη από 180° ή 12 ώρες και (–) όταν είναι μεγαλύτερη.

Επίσης μπορούμε να πούμε ότι ο αληθής τοπικός χρόνος του παρατηρητή σε μια οποιαδήποτε στιγμή είναι ίση με $12^h - Ω$ (του τριγώνου θέσεως), όταν ο ήλιος βρίσκεται στο Ανατολικό ως προς εμάς ημισφαίριο ή $12^h - Ω$ (του τριγώνου θέσεως), όταν ο ήλιος βρίσκεται στο Δυτικό ως προς εμάς ημισφαίριο).

Αν η δυτική ωρική γωνία αναφέρεται στο εαρινό σημείο γ (Aries), τότε μετράει ***αστρικό χρόνο*** (sideral time). Αν αναφέρεται στον ήλιο μετράει ***ηλιακό χρόνο*** (solar time).

Ο χρόνος κατά συνέπεια είναι τοπικός (local time) ή Greenwich, αν αντίστοιχα ως αρχή μετρήσεως λαμβάνεται ο μεσημβρινός του τόπου ή του Greenwich.

Τα συνηθέστερα προβλήματα που εμφανίζονται στο τρίγωνο θέσεως είναι τα εξής:

α) Δίνεται το πλάτος, η κλίση και η ωρική γωνία και ζητούνται το ύψος και το αζιμούθ του αστέρα (ευθείες θέσεως).

β) Δίνεται το πλάτος, το ύψος και το αζιμούθ και ζητείται η κλίση και η ωρική γωνία (αναγνώριση αστέρα).

γ) Δίνεται η ωρική γωνία, η κλίση και το ύψος και ζητείται το αζιμούθ (παραλλαγή).

δ) Δίνεται το ύψος, η κλίση και η ωρική γωνία και ζητείται το πλάτος.

### *7.3.1 Παραδείγματα.*

***Παράδειγμα 1.***

201) Το πλάτος του Σαν Φραντζίσκο είναι 37° 48΄N (βόρειο). Μια προμεσημβρινή

παρατήρηση δείχνει ύψος ηλίου 22° 30′. Αν η κλίση του ηλίου είναι 12° 40′Ν (βόρειο), ποιος είναι ο χρόνος παρατηρήσεως;

***Λύση.***

Στο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ (σχ. 7.36) έχομε:

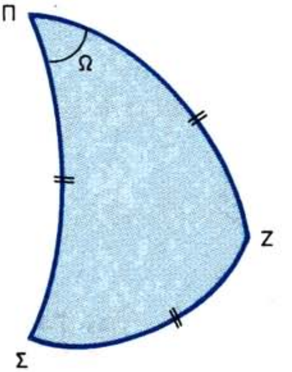
ΠΣ = 90° − δ = 90°− (12° 40′) = 77° 20′ [βάζομε − (πλην) γιατί φ και δ ομώνυμα].

ΠΖ = 90° − φ = 90°− (37° 48′) = 52° 12′

ΖΣ = 90° − $H_\lambda$ = 90°− (22° 30′) = 67° 30′

Εδώ γνωρίζομε και τις τρεις πλευρές (περίπτωση Ι επιλύσεως τυχόντων τριγώνων) και μας ενδιαφέρει να υπολογίσομε μόνο τη γωνία Ω. Εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην περίπτωση Ι, 1ος τρόπος, συντάσσοντας το εξής φύλλο υπολογισμού, με

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 98^\circ\ 31'$$




Σχ. 7.36.

**ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

| | Ω |
|---|---|
| τ–α = 31° 1′ : λογημ(τ–α) = 9,71205 | λογστεμ(31° 1′) = 0,28795 |
| τ–β = 21° 11′ : λογημ(τ–β) = 9,55793 | |
| τ–γ = 46° 19′ : λογημ(τ–γ) = 9,85924 | |
| τ = 98° 31′ : λογστεμτ = 0,00482 | |
| 2λογk = 29,13404 | |
| λογk = 9,56702 → | λογk = 9,56702 |
| $\frac{\Omega}{2}$ = 35° 36,36′ ← | λογεφ $\frac{\Omega}{2}$ = 9,85497 |
| Ω = 71° 12,7′ | |

΄Αρα, αφού βρήκαμε $\Omega = 71^\circ\ 12{,}7'$, διαιρούμε δια 15 (κάθε γωνία 15° παριστά χρόνο 1 ώρας)

και έχομε: $4^h\ 44^{min}\ 51^{sec}$

΄Αρα ο χρόνος παρατηρήσεως είναι:

$$12{:}00 - 4^h\ 44^{min}\ 51^{sec} = 7^h\ 15^{min}\ 9^{sec}$$

***Παράδειγμα 2.***

202) Να βρεθεί το πλάτος ενός παρατηρητή που βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίρο, αν κατά τη φαινόμενη τοπική ώρα $10^h\ 25^{min}\ 36^{sec}$ το ύψος του ηλίου είναι $40^\circ\ 10'$ και η κλίση $15^\circ\ 38'$Ν (βόρεια).

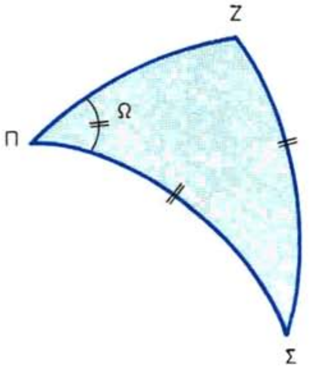
***Λύση.***

Στο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ (σχ. 7.3γ) έχομε:

$$Z\Sigma = \alpha = 90^\circ - H_\lambda = 90^\circ - (40^\circ\ 10') = 49^\circ\ 50'$$

$$\Pi\Sigma = \beta = 90^\circ - \delta = 90^\circ - (15^\circ\ 38') = 74^\circ\ 22'$$

και γωνία $\Omega = 12^h - 10^h\ 25^{min}\ 36^{sec} = 1^h\ 34^{min}\ 24^{sec} = 23^\circ\ 36'$.




**Σχ. 7.3γ.**

΄Αρα έχομε προς επίλυση ένα τρίγωνο της περιπτώσεως V, στο οποίο μας ενδιαφέρει μόνο η πλευρά $\gamma = \Pi Z$.

Η πλευρά $\gamma = \Pi Z$ δίνεται από τον τύπο (βλ. 1ο τρόπο περιπτώσεως V):

$$\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} = \eta\mu\frac{\Omega+Z}{2}\varepsilon\varphi\frac{\beta-\alpha}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\Omega-Z}{2} \qquad (1)$$

όπου όλα δίνονται εκτός από τη γωνία Ζ, που υπολογίζεται από τον τύπο (νόμος ημιτόνων):

$$\eta\mu Z = \eta\mu\beta\eta\mu\Omega\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha \qquad (2)$$

Για να μη συντάξομε εδώ φύλλο υπολογισμου, γιατί δεν μας ενδιαφέρουν όλα τα στοιχεία του τριγώνου, υπολογίζομε από τον τύπο (2) την γωνία Ζ:

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\eta\mu\beta &= 9{,}98363 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\Omega &= 9{,}60244 \\ \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha &= \underline{0{,}11681} \\ \lambda o\gamma\eta\mu Z &= 9{,}70288 \implies Z = 30^\circ\ 18' \end{aligned}$$

Επειδή όμως ο παρατηρητής βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίριο θα πάρομε:

$$Z = 180° - 30°\ 18'$$

άρα

$$Z = 149°\ 42'$$

Αντικαθιστούμε τώρα στον τύπο (1):

$$\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} = \eta\mu(86°\ 39')\ \varepsilon\varphi(12°\ 16')\ \sigma\tau\varepsilon\mu(63°\ 3')$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\eta\mu 86°\ 39' &= 9{,}99926 \\ \lambda o\gamma\varepsilon\varphi 12°\ 16' &= 9{,}33731 \\ \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu 63°\ 3' &= \underline{0{,}04993} \\ \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} &= 9{,}38650 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\gamma}{2} = 13°\ 41{,}1' \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \Pi Z = 27°\ 22{,}2'$$

Άρα πλάτος παρατηρητή:

$$\varphi = 90° - \Pi Z = 62°\ 37{,}8'\ \text{Βόρειο.}$$

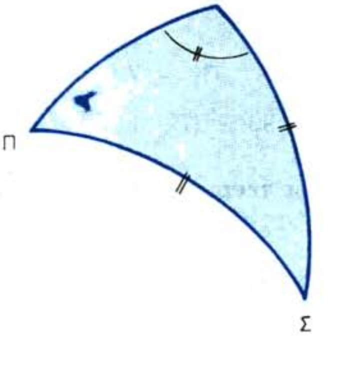
***Παράδειγμα 3.***

203) Να υπολογισθεί το πλάτος παρατηρητή, που βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίριο, όταν το ύψος του ηλίου είναι 54° 28΄, η κλίση 15° 42΄S (Νότιο) και το αζιμούθ 200° 10΄.

***Λύση.***

Στο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ (σχ. 7.3δ) έχομε:

$$Z\Sigma = 90° - H_\lambda = 90° - (54°\ 28') = 35°\ 32'$$
$$\Pi\Sigma = 90° + \delta = 90° + (15°\ 42') = 105°\ 42'$$




**Σχ. 7.3δ.**

(βάζομε + γιατί φ και δ ετερώνυμα).

Γωνία $AZ_\lambda$ = 360° – (200° 10΄) = 159° 50΄ γιατί ο ήλιος βρίσκεται στο δυτικό ημισφαίριο.

Εδώ έχομε πάλι για επίλυση ένα τρίγωνο της V περιπτώσεως, στο οποίο μας ενδιαφέρει η πλευρά γ = ΠΖ που δίνεται από τον τύπο:

(βλ. 1ο τρόπο περιπτώσεως V):

$$\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} = \eta\mu\frac{Z+\Omega}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{Z-\Omega}{2}\varepsilon\varphi\frac{\beta-\alpha}{2} \qquad (1)$$

όπου όλα δίνονται, εκτός από τη γωνία Ω, που υπολογίζεται από τον τύπο (νόμος των ημιτόνων):

$$\eta\mu\Omega = \eta\mu Z\Sigma\eta\mu A\zeta_\lambda\sigma\tau\varepsilon\mu\Pi\Sigma \qquad (2)$$

Για να μη συντάξομε εδώ φύλλο υπολογισμού, γιατί δεν μας ενδιαφέρουν όλα τα στοιχεία του τριγώνου, υπολογίζομε από τη (2) τη γωνία Ω:

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\eta\mu Z\Sigma &= 9{,}76431\\
\lambda o\gamma\eta\mu A\zeta_\lambda &= 9{,}53751\\
\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\Pi\Sigma &= \underline{0{,}01651}\\
\lambda o\gamma\eta\mu\Omega &= 9{,}31833 \implies \Omega = 12^\circ\ 0{,}8'
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της Ω στη σχέση (1) και λογαριθμίζοντας θα έχομε:

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\eta\mu\frac{Z+\Omega}{2} &= \lambda o\gamma\eta\mu 85^\circ\ 55{,}4' = 9{,}99890\\
\lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{Z-\Omega}{2} &= \lambda o\gamma\sigma\tau\varepsilon\mu 73^\circ\ 54{,}6' = 0{,}01736\\
\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\beta-\alpha}{2} &= \lambda o\gamma\varepsilon\varphi 35^\circ\ 5' = \underline{9{,}84657}\\
\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} &= \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Pi Z}{2} = 9{,}86283\\
&\implies \Pi Z = 72^\circ\ 11{,}8'
\end{aligned}$$

Άρα το πλάτος είναι φ = 90° – (72° 11,8΄) = 17° 48,2΄Ν (βόρειο).

## 7.4 Εφαρμογή των τύπων των τεσσάρων συνεχών στοιχείων στην επίλυση του τριγώνου θέσεως.

Αν λάβομε ένα οποιοδήποτε από τους τύπους των 4 συνεχών στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου, έστω τον:

$$\sigma\varphi\beta\sigma\tau\varepsilon\mu A = \sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\sigma\varphi B + \sigma\varphi\gamma\sigma\varphi A$$

και τον εφαρμόσομε στο τρίγωνο θέσεως, θα έχομε:

$$\sigma\varphi(90^\circ \pm \delta)\sigma\tau\varepsilon\mu\Omega = \sigma\tau\varepsilon\mu(90^\circ - \varphi)\sigma\varphi A\zeta_\lambda + \sigma\varphi(90^\circ - \varphi)\sigma\varphi\Omega \qquad (1)$$

όπου αντί για γωνίες Α, Β θέσαμε αντίστοιχα Ω, $A\zeta_\lambda$ και αντί για πλευρές β και γ θέσαμε αντίστοιχα $90^\circ \pm \delta$ και $90^\circ - \varphi$.

Ο (1) γράφεται:

$$\sigma\varphi(90^\circ \pm \delta)\sigma\tau\varepsilon\mu\Omega = \tau\varepsilon\mu\varphi\sigma\varphi A\zeta_\lambda + \varepsilon\varphi\varphi\sigma\varphi\Omega$$

και λύνοντας ως προς $A\zeta_\lambda$:

$$\sigma\varphi A\zeta_\lambda = \left[-\ \varepsilon\varphi\varphi\sigma\varphi\Omega + \frac{\sigma\varphi(90^\circ \pm \delta)}{\eta\mu\Omega}\right]\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma\varphi A\zeta_\lambda = \left[-\ \frac{\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\Omega} + \frac{\sigma\varphi(90^\circ \pm \delta)}{\eta\mu\Omega}\right]\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (2)$$

Αν θέσομε στον (2) όπου:

$$-\ \frac{\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\Omega} = A, \quad \frac{\sigma\varphi(90^\circ \pm \delta)}{\eta\mu\Omega} = B$$

και όπου $A \pm B = C$, ο (2) γράφεται:

$$\sigma\varphi A\zeta_\lambda = (A + B)\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \sigma\varphi A\zeta_\lambda = C\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Με βάση τα παραπάνω έχουν συνταχθεί οι πίνακες Α, Β, C, από όπου μπορούμε να υπολογίζομε απευθείας π.χ. το αζιμούθ, όταν δίνονται τα φ, δ, Ω.

Πράγματι, για να βρούμε το Α εισερχόμαστε στους πίνακες Α από τα φ και Ω. Το Α, που βρίσκομε, θα έχει την επωνυμία του φ, εφόσον εισήλθαμε με Ω εκ των κάτω. Αλλιώς θα έχει επωνυμία αντίθετη του φ. Για να βρούμε το Β, εισερχόμαστε στους πίνακες Β από τα δ και Ω. Το Β, που βρίσκομε, έχει πάντα την επωνυμία του δ.

Το αλγεβρικό άθροισμα $A \pm B$ δίνει το C, το οποίο θα έχει την ίδια επωνυμία των Α και Β, εφόσον αυτά είναι ομώνυμα· διαφορετικά θα έχει την επωνυμία του απόλυτα μεγαλύτερου.

Για να βρούμε τώρα το $A\zeta_\lambda$ εισερχόμαστε στους πίνακες C από τα C και φ.

### 7.5 Εφαρμογές στην επίλυση ορθογώνιου τριγώνου θέσεως.

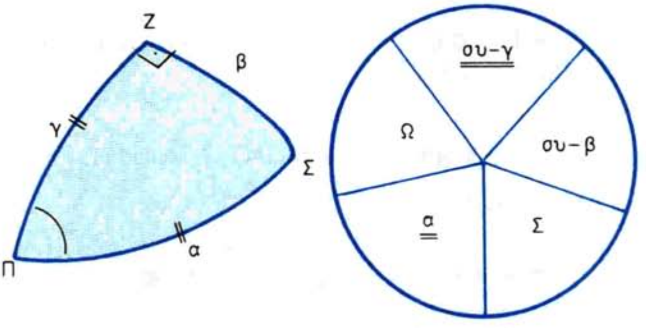
***Εφαρμογή 1η.***

204) Να υπολογισθεί η ωρική γωνία Ω ενός αστέρα Σ, του οποίου η απόκλιση είναι $\delta = 47^\circ\ 50'$ N (Βόρειο), σε ένα τόπο πλάτους $\varphi = 50^\circ\ 38'$N (Βόρειο) τη στιγμή που ο αστέρας διέρχεται από τον πρώτο κάθετο.

***Λύση.***

Όταν ο αστέρας βρίσκεται στον πρώτο κάθετο, τότε το σχηματιζόμενο τρίγωνο θέσεως είναι ορθογώνιο στο Ζ και άρα $A\zeta_\lambda = 90^\circ$ (σχ. 7.5α). Επομένως στο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ του αστέρα γνωρίζομε:

Τη γωνία $Z = A\zeta_\lambda = 90^\circ$, την πλευρά $\Pi Z = \gamma = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - (50^\circ\ 38') = 39^\circ\ 22'$ και την πλευρά $\Pi\Sigma = \alpha = 90^\circ - \delta = 90^\circ - (47^\circ\ 50') = 42^\circ\ 10'$. Ζητείται η γωνία $\Pi = \Omega$. Για να υπολογίσομε την Ω εργαζόμαστε όπως έχομε μάθει στα




Σχ. 7.5α.

ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα. Από τους πέντε τομείς έχομε, θεωρώντας το Ω ως μεσαίο στοιχείο και προκείμενα του τα α και συ-γ:

$$\begin{aligned} \text{συν}\Omega &= \text{σφασφ}(\text{συ} - \gamma) \quad \Longrightarrow \\ \text{συν}\Omega &= \text{σφαεφ}\gamma \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad \text{λογσυν}\Omega &= \text{λογσφ}\alpha + \text{λογεφ}\gamma \\ \Longrightarrow \quad \text{λογσυν}\Omega &= \text{λογσφ}(42^\circ\ 10') + \text{λογεφ}(39^\circ\ 22') \\ \Longrightarrow \quad \text{λογσυν}\Omega &= 0{,}04302 + 9{,}91404 \\ \Longrightarrow \quad \text{λογσυν}\Omega &= 9{,}95706 \\ \Longrightarrow \quad \Omega &= 25^\circ\ 3{,}7' \end{aligned}$$

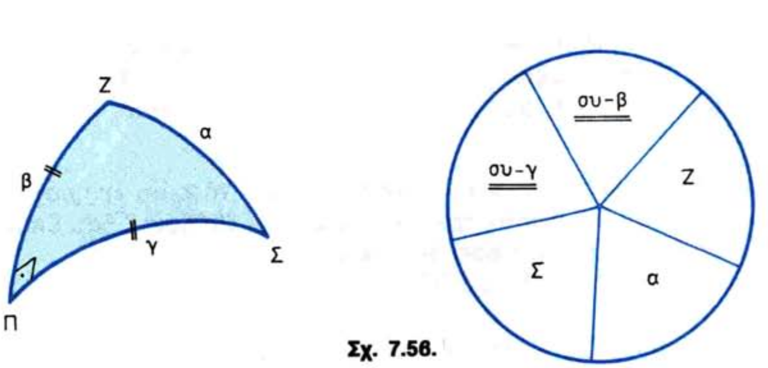
***Εφαρμογή 2η.***

205) Να υπολογισθεί το ύψος αστέρα με κλίση δ = 18° 48΄Ν (Βόρειο), σε τόπο πλάτους φ = 36° 48΄Ν (Βόρειο), όταν η ωρική γωνία του αστέρα είναι $6^h$.

***Λύση.***

Επειδή η γωνία Ω είναι $6^h = 90^\circ$, το σχηματιζόμενο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ θα είναι ορθογώνιο (σχ. 7.5β).

Άρα εδώ θα έχομε:




Σχ. 7.5β.

Πλευρά ΠΖ $= \beta = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - (36^\circ\ 48') = 53^\circ\ 12'$

ΠΣ $= \gamma = 90^\circ - \delta = 90^\circ - (18^\circ\ 48') = 71^\circ\ 12'$

Θα υπολογίσομε την πλευρά $\alpha = ΖΣ$. Με α μεσαίο στοιχείο, τα συ-β, συ-γ είναι αντικείμενά του. Άρα:

$$
\begin{aligned}
& \text{συνα} = \text{ημ(συ-β) ημ(συ-γ)} \\
\Longrightarrow\ & \text{λογσυνα} = \text{λογσυνβ} + \text{λογσυνγ} \\
\Longrightarrow\ & \text{λογσυνα} = \text{λογσυν}(53^\circ\ 12') + \text{λογσυν}(71^\circ\ 12') \\
\Longrightarrow\ & \text{λογσυνα} = 9{,}77744 + 9{,}50821 \\
\Longrightarrow\ & \text{λογσυνα} = 9{,}28565 \\
\Longrightarrow\ & \alpha = 78^\circ\ 52{,}2'
\end{aligned}
$$

Άρα $H_\lambda = 90^\circ - ΖΣ = 90^\circ - \alpha = 11^\circ\ 7{,}8'$

## 7.6 Εφαρμογές στην επίλυση ορθόπλευρου τριγώνου θέσεως.

***Εφαρμογή 1η.***

206) Να υπολογισθεί η ωρική γωνία Ω ενός αστέρα τη στιγμή που ανατέλλει και του οποίου η απόκλιση είναι $\delta = 18^\circ\ 48'$S (Νότιο), σε ένα τόπο πλάτους $\varphi = 37^\circ\ 35'$N (Βόρειο).

***Λύση.***

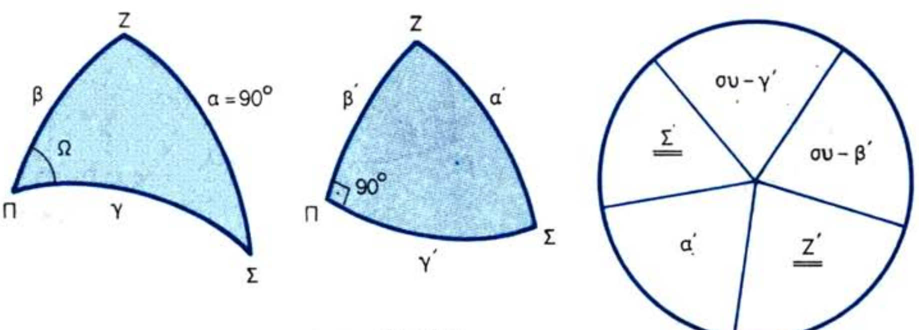
Όταν ένας αστέρας ανατέλλει ή δύει σε ένα τόπο, το ύψος του $H_\lambda$ είναι μηδέν, γιατί τότε διέρχεται από τον ορίζοντα. Άρα η ζενιθιακή του απόσταση ΖΣ είναι 90°. Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο θέσεως του είναι ορθόπλευρο (σχ. 7.6α).

Εδώ λοιπόν έχομε $\gamma = ΠΣ = 90^\circ + \delta = 90^\circ + (18^\circ\ 48') = 108^\circ\ 48'$ (βάλαμε + γιατί φ και δ ετερώνυμα).

$$
\begin{aligned}
\beta &= ΠΖ = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - (37^\circ\ 35') = 52^\circ\ 25' \\
\alpha &= ΖΣ = 90^\circ
\end{aligned}
$$

και αφού το τρίγωνο είναι ορθόπλευρο, θεωρούμε το πολικό του Π΄ Ζ΄ Σ΄ για το οποίο θα έχομε:

$$
\begin{aligned}
\text{Γωνία } Π' &= 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ &&= 90^\circ \\
\text{Γωνία } Ζ' &= 180^\circ - \gamma = 180^\circ - (108^\circ\ 48') &&= 71^\circ\ 12' \\
\text{Γωνία } Σ' &= 180^\circ - \beta = 180^\circ - (52^\circ\ 25') &&= 127^\circ\ 35'
\end{aligned}
$$




**Σχ. 7.6α.**

Το πολικό λοιπόν είναι ορθογώνιο. Αν αυτού υπολογίσομε την πλευρά α΄, μπορούμε να υπολογίσομε τη γωνία Ω από τη σχέση $Ω = 180° - α'$.

Με α΄ λοιπόν ως μεσαίο στοιχείο και τα στοιχεία Ζ΄ και Σ΄ ως προσκείμενά του έχομε:

$$
\begin{aligned}
& συνα' = σφΣ'\ σφΖ' \\
\Longrightarrow\ & λογσυνα' = λογσφΣ' + λογσφΖ' \\
\Longrightarrow\ & λογσυνα' = λογσφ(127°\ 35') + λογσφ(71°\ 12') \\
\Longrightarrow\ & λογσυνα' = \underset{(-)}{9{,}88629} + \underset{(+)}{9{,}53202} \\
\Longrightarrow\ & λογσυνα' = 9{,}41831\ (-) \\
\Longrightarrow\ & α' = 105°\ 11{,}4'
\end{aligned}
$$

Αρα $\quad$ γωνία $Ω = 180° - α' \Longrightarrow Ω = 74°\ 48{,}6'$

***Εφαρμογή 2η.***

207) Να ευρεθεί η αληθής τοπική ώρα και το αζιμούθ του ηλίου κατά την ανατολή και τη δύση του στο Ρεϋκγιάβικ της Ισλανδίας [φ = 64° 9,0΄Ν (Βόρειο)], όταν η κλίση του ηλίου είναι 15° 45΄Ν (Βόρειο).

***Λύση.***

Επειδή κατά την ανατολή και τη δύση του ο ήλιος βρίσκεται στον ορίζοντα θα έχομε ΖΣ = 90° άρα το τρίγωνο θέσεως είναι ορθόπλευρο (σχ. 7.6β). Έχομε:

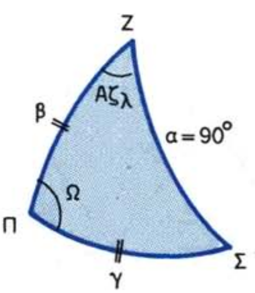
$$
\begin{aligned}
γ &= ΠΣ = 90° - δ = 90° - (15°\ 45') = 74°\ 15' \\
β &= ΠΖ = 90° - φ = 90° - (64°\ 9') = 25°\ 51'
\end{aligned}
$$

Το πολικό του τρίγωνου Π΄Ζ΄Σ΄ θα είναι ορθογώνιο (σχ. 7.6γ).

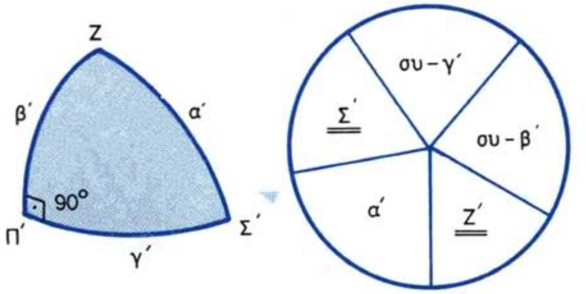
Για το πολικό έχομε:

$$
\text{Γωνία } Π' = 90°,\ \text{Γωνία } Ζ' = 180° - (74°\ 15') = 105°\ 45'
$$
$$
\text{και γωνία } Σ' = 180° - (25°\ 51') = 154°\ 9'.
$$

Αρκεί στο πολικό να υπολογίσουμε τις πλευρές α΄ και γ΄. Έχομε κατά τα γνωστά (Napier):




Σχ. 7.6β.




Σχ. 7.6γ.

$$
\begin{aligned}
&& \text{συν}\alpha' &= \text{σφ}\Sigma'\text{εφ}Z' \\
&\Longrightarrow & \text{λογσυν}\alpha' &= \text{λογσφ}\Sigma' + \text{λογσφ}Z' \\
&\Longrightarrow & \text{λογσυν}\alpha' &= \underset{(-)}{0{,}31471} + \underset{(-)}{9{,}45029} \\
&\Longrightarrow & \text{λογσυν}\alpha' &= 9{,}76500 \qquad \Longrightarrow \quad \alpha' = 54^\circ\ 24{,}1'
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&& \text{συν}Z' &= \text{ημ}\Sigma'\text{ημ}(\text{συ} - \gamma') \\
&\Longrightarrow & \text{συν}Z' &= \text{ημ}\Sigma'\text{συν}\gamma' \\
&\Longrightarrow & \text{συν}\gamma' &= \text{συν}Z'\text{στεμ}\Sigma' \\
&\Longrightarrow & \text{λογσυν}\gamma' &= \text{λογσυν}Z' + \text{λογστεμ}\Sigma' \\
&\Longrightarrow & \text{λογσυν}\gamma' &= \underset{(-)}{9{,}43367} + 0{,}36050 \\
&\Longrightarrow & \text{λογσυν}\gamma' &= 9{,}79417\ (-) \qquad \Longrightarrow \quad \gamma' = 128^\circ\ 30{,}1'
\end{aligned}
$$

Άρα γωνία $\Omega = 180^\circ - \alpha' = 125^\circ\ 35{,}9' = 8^h\ 22^{min}\ 24^{sec}$
και γωνία $\quad A\zeta_\lambda = 180^\circ - 128^\circ\ 30{,}1' = 51^\circ\ 29{,}9'$.

Επομένως στην ανατολή του ηλίου η φαινόμενη τοπική ώρα είναι:

$$12^h - (8^h\ 22^{min}\ 24^{sec}) = 3^h\ 37^{min}\ 36^{sec}$$

και το αζιμούθ του ηλίου είναι $51^\circ\ 29{,}9'$.

Στη δύση του ηλίου η φαινομένη τοπική ώρα είναι:

$$12^h + (8^h\ 22^{min}\ 24^{sec}) = 20^h\ 22^{min}\ 24^{sec}$$

και το αζιμούθ του ηλίου είναι $360^\circ - (51'\ 29{,}9') = 308^\circ\ 30{,}1'$.

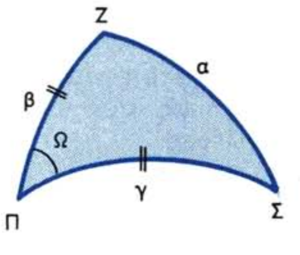
***Εφαρμογή 3η.***

208) Ποιος είναι ο χρόνος δύσεως του ηλίου στη Νέα Υόρκη [$\varphi = 40^\circ\ 43'$N (Βόρειο)], όταν η κλίση του είναι $18^\circ\ 30'$N (Βόρειο);

***Λύση.***

Εργαζόμαστε όπως στα προηγούμενα. Όταν ο ήλιος δύει έχομε $Z\Sigma = 90^\circ$, συνεπως το τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ είναι ορθόπλευρο και αυτού γνωστά έχομε (σχ. 7.6δ):

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \Pi\Sigma = 90^\circ - \delta = 71^\circ\ 30' \\
\beta &= \Pi Z = 90^\circ - \varphi = 49^\circ\ 17'
\end{aligned}
$$




**Σχ. 7.6δ.**

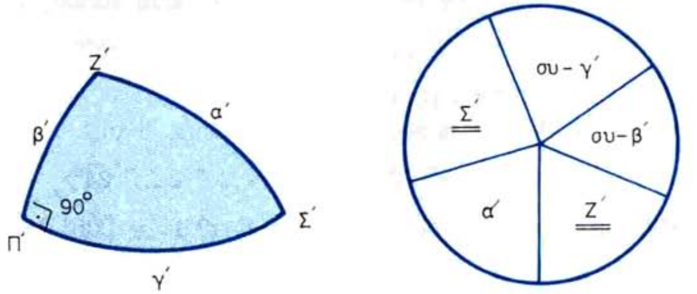
Το πολικό του Π΄ Σ΄ Ζ΄ θα είναι ορθογώνιο και αυτού γνωστά έχομε (σχ. 7.6ε):

$$\text{Γωνία } Π' = 90^\circ$$
$$\text{Γωνία } Ζ' = 180^\circ - (71^\circ\ 30') = 108^\circ\ 30'$$
$$\text{Γωνία } Σ' = 180^\circ - (49^\circ\ 17') = 130^\circ\ 43'$$

Αρκεί να υπολογίσομε την πλευρά α΄. Έχομε κατά τα γνωστά:

$$συνα' = σφΣ'σφΖ'$$
$$\Longrightarrow λογσυνα' = λογσφΣ' + λογσφΖ'$$
$$\Longrightarrow λογσυνα' = \underset{(-)}{9{,}93482} + \underset{(-)}{9{,}52452}$$
$$\Longrightarrow λογσυνα' = 9{,}45934$$
$$\Longrightarrow α' = 73^\circ\ 15{,}8'$$

Άρα γωνία $Ω = 180^\circ - α' = 106^\circ\ 44{,}2' = 7^h\ 6^{min}\ 57^{sec}$
Άρα ο ήλιος δύει στις $7^h\ 6^{min}\ 57^{sec}$ μ.μ.




**Σχ. 7.6ε.**

## 7.7 Λυμένες ασκήσεις στην ουράνια σφαίρα.

***Άσκηση 1.***

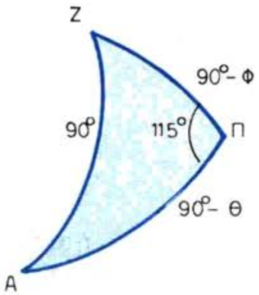
209) Σε μια ορισμένη θέση στο Νότιο ημισφαίριο, όταν η κλίση του ηλίου είναι θ, η διάρκεια της ημέρας ήταν $15^h\ 20^{min}$. Όταν η κλίση ήταν θ/2, η διάρκεια της ημέρας ήταν $13^h\ 36^{min}$. Να υπολογισθεί το πλάτος της θέσεως και η κλίση κατά τη μικρότερη ημέρα.

***Λύση.***

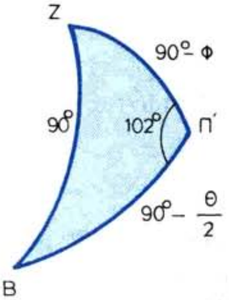
Αφού η διάρκεια της ημέρας ήταν $15^h\ 20^{min}$ όταν η κλίση ήταν θ, σημαίνει ότι ο ήλιος μεσουρανεί άνω $7^h\ 40^{min}$ μετά την ανατολή του στο σημείο Α. Άρα η γωνία ΖΠ΄Α θα είναι 115° και, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7α, το σφαιρικό τρίγωνο ΖΠ΄Α θα είναι ορθόπλευρο.

Από αυτό κατά τα γνωστά θα έχομε:

$$συνΖΠ'Α = -σφΠ'ΖσφΠ'Α$$
$$\Longrightarrow συν115^\circ = -σφ(90^\circ - φ)σφ(90^\circ - θ)$$
$$\Longrightarrow -σφ(90^\circ - φ) = συν115^\circ εφ(90^\circ - θ)$$
$$\Longrightarrow -σφ(90^\circ - φ) = συν115^\circ σφθ \qquad (1)$$




Σχ. 7.7α.




Σχ. 7.7β.

Όταν τώρα η κλίση του ήλιου ήταν θ/2, η διάρκεια της ημέρας ήταν $13^h\ 36^{min}$ άρα ο ήλιος μεσουρανούσε άνω $6^h\ 48^{min}$ μετά την ανατολή του στο σημείο Β. Άρα η γωνία ΖΠ΄Β είναι 102° και, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7β, από το ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ΖΠ΄Β θα έχομε:

$$\text{συν}Z\Pi'B = -\text{σφ}\Pi'Z\,\text{σφ}\Pi'B$$

$$\Longrightarrow \quad \text{συν}102^\circ = -\text{σφ}(90^\circ - \varphi)\,\text{σφ}\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad -\text{σφ}(90^\circ - \varphi) = \text{συν}102^\circ\,\text{εφ}\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad -\text{σφ}(90^\circ - \varphi) = \text{συν}102^\circ\,\text{σφ}\,\frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (1) και (2):

$$\text{συν}115^\circ\text{σφ}\theta = \text{συν}102^\circ\text{σφ}\frac{\theta}{2}$$

$$\Longrightarrow \text{συν}115^\circ\text{εφ}\frac{\theta}{2} = \text{συν}102^\circ\text{εφ}\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \text{εφ}\theta\frac{1}{\text{εφ}\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\text{συν}115^\circ}{\text{συν}102^\circ} \qquad (3)$$

και επειδή $\text{εφ}\theta = \dfrac{2\text{εφ}\,\dfrac{\theta}{2}}{1 - \text{εφ}^2\dfrac{\theta}{2}}$, αν θέσομε όπου $\text{εφ}\dfrac{\theta}{2} = k$ η (3) γράφεται:

$$\frac{2k}{1-k^2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{\text{συν}115^\circ}{\text{συν}102^\circ} \qquad (4)$$

Αν επιλύσομε την (4) βρίσκομε: $k^2 = 0{,}5$

δηλαδή $$\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2} = 0{,}5$$

από όπου $\theta/2 = 7°\ 13{,}5' =$ κλίση κατά τη μικρότερη ημέρα.

Αντικαθιστώντας στη (2) παίρνομε τελικά:

$$\text{πλάτος } \varphi = 58°\ 37{,}5'\text{S}$$

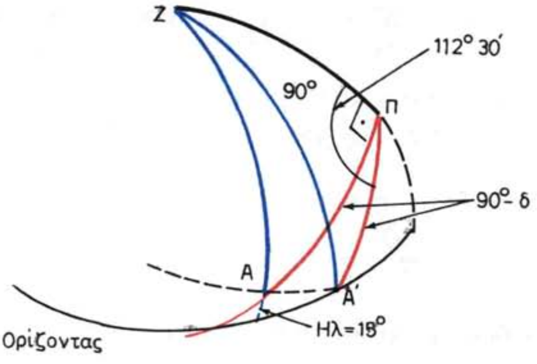
***Άσκηση 2.***

210) Ακριβώς $1^h\ 30^{min}$ μετά την ανατολή, η ωρική γωνία του ηλίου ήταν $6^h$ και το ύψος του 15°. Να υπολογισθεί το πλάτος της θέσεως και η κλίση του ηλίου (υποθέτομε ότι είμαστε στο Βόρειο ημισφαίριο).

***Λύση.***

Όταν η ωρική γωνία είναι $6^h$ δηλαδή 90° το σφαιρικό τρίγωνο ΠΖΑ είναι βέβαια ορθογώνιο (σχ. 7.7γ).

Στο τρίγωνο αυτό έχομε $ZA = 90° - H_\lambda = 90° - 15° = 75°$ και θα ισχύει κατά τα γνωστά:




**Σχ. 7.7γ.**

$$\begin{aligned} \text{συν}ZA &= \text{συν}\Pi Z\,\text{συν}PA \\ \Longrightarrow\quad \text{συν}75° &= \text{συν}(90° - \varphi)\text{συν}(90° - \delta) \\ \Longrightarrow\quad \text{συν}75° &= \text{ημ}\varphi\,\text{ημ}\delta \qquad (1) \end{aligned}$$

Όταν ο ήλιος ανέτειλε η ωρική του γωνία ήταν 112° 30΄ (δηλαδή $6^h + 1{,}5^h = 7{,}5^h = 112°\ 30'$). Τότε το σφαιρικό τρίγωνο ΠΖΑ΄ είναι ορθόπλευρο (σχ. 7.7γ) και θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$\begin{aligned} \text{συν}Z\Pi A' &= -\text{σφ}\Pi Z\,\text{σφ}PA' \\ \Longrightarrow\quad \text{συν}(112°\ 30') &= -\text{σφ}(90° - \varphi)\text{σφ}(90° - \delta) \\ \Longrightarrow\quad \text{ημ}67°\ 30' &= -\varepsilon\varphi\varphi\,\varepsilon\varphi\delta \\ \Longrightarrow\quad -\text{ημ}67°\ 30° &= \varepsilon\varphi\varphi\,\varepsilon\varphi\delta \qquad (2) \end{aligned}$$

Διαιρώντας τη (2) δια της (1):

$$(2):(1) \Longrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\delta}{\eta\mu\varphi\eta\mu\delta} = -\frac{\eta\mu(67^\circ\ 30')}{\sigma\upsilon\nu 75^\circ}$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta = -\frac{\sigma\upsilon\nu 75^\circ}{\eta\mu(67^\circ\ 30')} \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (3):

$$\eta\mu\varphi\eta\mu\delta + \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta = \sigma\upsilon\nu 75^\circ - \frac{\sigma\upsilon\nu 75^\circ}{\eta\mu 67{,}5^\circ}$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu(\varphi-\delta) = \sigma\upsilon\nu 75^\circ - \frac{\sigma\upsilon\nu 75^\circ}{\eta\mu 67{,}5^\circ} \qquad (4)$$

Αφαιρώντας από την (3) την (1):

$$\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta - \eta\mu\varphi\eta\mu\delta = -\frac{\sigma\upsilon\nu 75^\circ}{\eta\mu 67{,}5^\circ} - \sigma\upsilon\nu 75^\circ$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu(\varphi+\delta) = -\frac{\sigma\upsilon\nu 75^\circ}{\eta\mu 67{,}5^\circ} - \sigma\upsilon\nu 75^\circ \qquad (5)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (4) και (5) βρίσκομε τελικά:

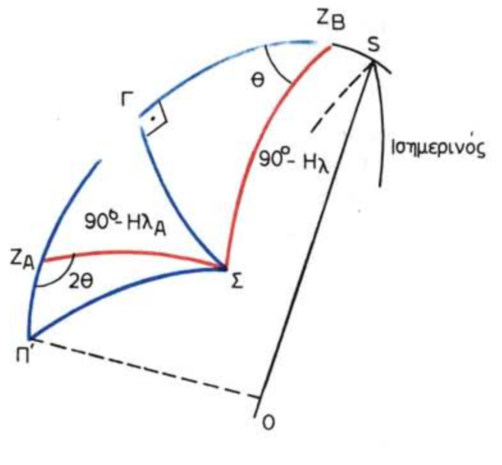
πλάτος $\varphi = 43^\circ\ 1{,}5'N$
κλίση $\delta = 22^\circ\ 17{,}5'N$

***Άσκηση 3.***

211) Δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε δυο τόπους Α και Β στον ίδιο μεσημβρινό παρατηρούν το ύψος αστέρα την ίδια στιγμή. Στον Α το ύψος είναι 41° 09΄ και στον Β είναι 30° 59΄. Ο τόπος Β βρίσκεται σε πλάτος 20° S. Να υπολογισθεί το πλάτος του Α, αν το αζιμούθ του αστέρα είναι θ στον τόπο Β και 2θ στον τόπο Α.

***Λύση.***

Έστω Σ ο αστέρας. Εφόσον το αζιμούθ μετρείται από τον υπερ τον ορίζοντα πόλο, ο Α πρέπει να είναι προς νότια του Β (σχ. 7.7δ).




**Σχ. 7.7δ.**

Έχομε:

$$Z_B\Sigma = 59^\circ\ 01',\ Z_A\Sigma = 48^\circ\ 51' \text{ και } Z_BS = 20^\circ$$

Στο σφαιρικό τρίγωνο $Z_AZ_B\Sigma$ εφαρμόζομε το νόμο των ημιτόνων και έχομε:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ - 2\theta)}{\eta\mu Z_B\Sigma} = \frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu Z_A\Sigma}$$

απ' όπου και λαμβάνομε $\theta = 55^\circ\ 18'$.

Φέρομε τώρα από το Σ μέγιστο κύκλο κάθετο στον $Z_AZ_B$ που τον τέμνει στο Γ. Επιλύοντας κατά τα γνωστά τα 2 ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα που σχηματίζονται, βρίσκομε $Z_B\Gamma = 43^\circ\ 28{,}4'$ και $Z_A\Gamma = 21^\circ\ 55{,}8'$.

Άρα το πλάτος του Α θα είναι ίσο με $Z_BS + Z_B\Gamma + Z_A\Gamma = 85^\circ\ 24{,}2'S$.

***Άσκηση 4.***

212) Ένας αστέρας διέρχεται από το ζενίθ τόπου γεωγραφικού πλάτους $\varphi = 48^\circ\ 35'N$. Ποια είναι η κλίση του αστέρα και το ύψος του κατά την κάτω μεσουράνησή του;

***Λύση.***

Αν θεωρήσομε το τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ, όταν ο αστέρας διέρχεται από το Ζ του τόπου, η ζενιθιακή του απόσταση θα είναι Ο.

Για την πολική του απόσταση ρ που θα είναι η ΠΖ θα έχομε $\rho = 90^\circ - \varphi$ αλλά επειδή $\rho = 90^\circ - \delta \Longrightarrow \varphi = \delta = 48\ \ 35'$.

Κατά τη στιγμή τώρα της κάτω μεσουρανήσεώς του η ωρική του γωνία θα είναι 180°, οπότε από τον τύπο:

$$\begin{aligned}
& \sigma\upsilon\nu H_\lambda = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \varphi)\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \delta) + \eta\mu(90^\circ - \varphi)\eta\mu(90^\circ - \delta)\sigma\upsilon\nu\Omega \\
\Longrightarrow\ & \sigma\upsilon\nu H_\lambda = \eta\mu\varphi\eta\mu\delta + \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta\sigma\upsilon\nu 180^\circ \\
\Longrightarrow\ & \sigma\upsilon\nu H_\lambda = \eta\mu\varphi\eta\mu\delta - \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\delta \\
\Longrightarrow\ & \sigma\upsilon\nu(180^\circ - H_\lambda) = \sigma\upsilon\nu(\varphi + \delta) \Longrightarrow 180^\circ - H_\lambda = \varphi + \delta
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow H_\lambda = 82^\circ\ 50'$$

***Άσκηση 5.***

213) Να υπολογισθεί το ύψος δένδρου που βρίσκεται σε γεωγραφικό πλάτος 40°N, το μεσημέρι που η κλίση του ηλίου είναι 10° και ρίχνει σκιά $2\sqrt{3}$ m.

***Λύση.***

Έστω (AB) = h το ύψος του δένδρου που ρίχνει σκιά (OA) = $2\sqrt{3}$ m το μεσημέρι που ο ήλιος έχει $\delta = 0$ και ύψος $H_\lambda$ (σχ. 7.7ε).

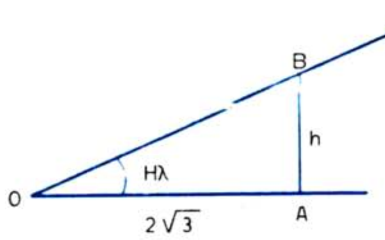
Το ύψος του ηλίου το μεσημέρι, αφού αυτός μεσουρανεί άνω θα είναι:

$$H_\lambda = (90^\circ - \varphi) + \delta = (90^\circ - 40^\circ) + 10^\circ = 60^\circ$$

Από το επίπεδο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχομε:

$$\varepsilon\varphi H_\lambda = \frac{h}{2\sqrt{3}} \Longrightarrow h = 2\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi 60^\circ = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6\text{m}$$

Άρα το ύψος του δένδρου είναι 6 m.




Σχ. 7.7ε.

## 7.8 Ασκήσεις στην ουράνια σφαίρα.

214) Ένας αστέρας είναι σε ουράνιο πλάτος 4° 14,8΄Ν και μήκος 48° 37,5΄. Να υπολογισθεί η ορθή αναφορά του και η κλίση του.

215) Η ορθή αναφορά ενός ουράνιου σώματος είναι 16h 14min 4sec και η κλίση του είναι 25° 51΄N. Να υπολογισθεί το ουράνιο πλάτος και το μήκος του.

216) Όταν ένα ουράνιο σώμα έχει LHA 270°, το ύψος του είναι 18° 44΄ και η κλίση του 21° 55΄N. Να υπολογισθεί το πλάτος του παρατηρητή.

217) Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε πλάτος 50° 45΄N και η κλίση του φεγγαριού είναι 23° 42΄N όταν η LHA του είναι 90°. Να υπολογισθεί το ύψος του και το αζιμούθ.

218) Ο ήλιος παρατηρείται από την ανατολή του διοπτευμένος S 80°E από έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε πλάτος 49° 49΄N. Να υπολογισθεί η LHA του.

219) Το ύψος αστέρα όταν αυτός κινείται προς δυσμάς ήταν 20° 02΄ και η διόπτευση κατά τη δύση του 281° 15΄. Ποιο το πλάτος του παρατηρητή;

220) Η κλίση ενός σώματος είναι 38° 18,5΄N και η ορθή αναφορά του 1h 26m 11s. Να υπολογισθεί το ουράνιο πλάτος και μήκος του.

221) Όταν η LHA του ηλίου ήταν 90° το ύψος του ήταν 15° 02΄ και μετά 1h 29min έδυσε. Να υπολογισθεί το πλάτος του παρατηρητή και η κλίση του ηλίου.

222) Το ύψος του μεσημβρινού του ηλίου ήταν 55° 51΄, όταν η ωρική του γωνία κατά τη δύση ήταν 105° 12΄. Να υπολογισθεί το πλάτος της θέσεως.

223) Το μεσημέρι της πιο μικρής ημέρας η σκιά που ρίχνει μια κάθετη ράβδος ήταν οκτώ φορές μακρύτερη από τη σκιά που ρίχνει η ίδια ράβδος το μεσημέρι της πιο μεγάλης ημέρας. Να υπολογισθεί το πλάτος, όταν η κλίση κατά τη μεγαλύτερη ημέρα είναι 23° 28΄S.

224) Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε πλάτος 20° 06΄N και η κλίση του ηλίου είναι 23° 20΄N. Να βρεθεί το μέγιστο αζιμούθ του και ο χρόνος που αυτό εμφανίζεται το πρωί.

225) Μια παραμεσημβρινή παρατήρηση έδωσε ύψος ηλίου 28° 10΄. Αν η κλίση του ηλίου ήταν 18° 40΄N τι ώρα έγινε η παρατήρηση;

226) Το πλάτος στην Ουάσιγκτον είναι 38° 54΄N. Ποιος είναι ο LAT (Local Apparent Time) όταν ο ήλιος είναι στη δυτική πλευρά σε ύψος 21° 14΄ και η κλίση του είναι 19° 30΄;

227) Ποιος είναι ο χρόνος ανατολής στη Βοστώνη (πλάτος 42° 21΄N) όταν η κλίση του ηλίου είναι 20° 15΄N;

228) Αν οι μεγαλύτερες και μικρότερες ημέρες εμφανίζονται όταν ο ήλιος έχει τη μέγιστή του βόρεια και νότια κλίση, ανάλογα, στις 23° 29΄, ποια είναι τα μήκη των μεγαλύτερων και μικρότερων ημερών του έτους στη Νέα Υόρκη (πλάτος 40° 43΄N);

229) Για έναν ακίνητο παρατηρητή, το μήκος της ημέρας, όταν η κλίση του ηλίου είναι 12° 15΄S, είναι τριπλάσιο του μήκους εκείνης της ημέρας, κατά την οποία η κλίση είναι 23° 28΄N. Να υπολογισθεί το πλάτος του παρατηρητή.

230) Αν ο ήλιος παρατηρείται να δύει ταυτόχρονα στο Μπέλφαστ (54° 41΄N, 5° 44΄W) και στο Ρεσίφε (08° 03΄S, 34° 52΄W), να υπολογισθεί η κλίση του ηλίου.

231) Το ύψος του μεσημβρινού του ηλίου με διόπτευση προς S ήταν 61° 46΄ και το ύψος του στις 6 μ.μ. LAT ήταν 15° 42΄. Να υπολογισθεί το πλάτος παρατηρήσεως και η κλίση του ηλίου.

232) Ο ήλιος ανέτειλε με ωρική γωνία 113° 50΄E στις 6 π.μ. LAT. Το ύψος του ήταν 14° 44΄. Να υπολογισθεί η κλίση του.

233) Για έναν ακίνητο παρατηρητή, ο ήλιος έδυσε στον αληθή ορίζοντα με LHA 103° 45΄, όταν η διαφορά μεταξύ της κλίσεως του και του πλάτους του παρατηρητή ήταν 24° 16΄. Να υπολογισθεί το πλάτος και η κλίση.

234) Από μια θέση σε νότιο πλάτος δυο αστέρες, ο Σείριος και ο Ρέγκουλους, παρατηρήθηκαν να δύουν ταυτόχρονα στον αληθή ορίζοντα. Να υπολογισθεί το πλάτος του παρατηρητή.

(Σείριος: Κλίση 19° 39,5΄S, SHA 259° 10΄)
(Ρέγκουλους: Κλίση 12° 10΄N, SHA 208° 27΄)

235) Ένας αστέρας Ζ έχει κλίση 21° 28΄N και βρίσκεται στο μέγιστο κύκλο που διέρχεται από δυο άλλους αστέρες Χ (κλίση 42° 48΄N, ορθή αναφορά 12h 55min) και Υ (κλίση 56° 12΄N, ορθή αναφορά 14h 12min). Να υπολογισθεί η ορθή αναφορά του Ζ, που είναι προς τα δυτικά του Χ.

236) Ένας αστέρας, του οποίου η κλίση είναι 15° 55΄S, αλλάζει την ωρική του γωνία κατά 60° 10΄ μεταξύ της διαβάσεώς του από τον πρώτο κάθετο και το μεσημβρινό του παρατηρητή. Να υπολογισθεί το πλάτος του παρατηρητή.

237) Ένας αστέρας, του οποίου η κλίση είναι 19° 24΄N, αλλάζει το αζιμούθ του κατά 38° 10΄, μεταξύ της διαβάσεως του πρώτου κάθετου και της δύσεως του. Να υπολογισθεί το πλάτος του παρατηρητή.

238) Να βρεθεί το πλάτος ενός τόπου, στον οποίο ένας αστέρας έχει $\delta = k$, $A_z = \lambda$ και ωρική γωνία 6 h.

239) Οι ζενιθιακές αποστάσεις ενός αστέρα κατά την άνω και κάτω μεσουράνησή του σε ένα τόπο είναι 11° 35΄ και 73° 14΄ αντίστοιχα. Ποια είναι η πολοζενιθιακή απόσταση του τόπου.

240) Κατά ποια αστρική ώρα δύει αστέρας, του οποίου η ορθή αναφορά είναι $\alpha$ = 9h 43 min 12,5sec, όταν ανατέλει στις 4h 35min;

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Παραθέτομε εδώ ένα τυπολόγιο επίπεδης Τριγωνομετρίας με επιλογή εκείνων των τύπων, που θεωρούνται οι πιο απαραίτητοι για τη μελέτη και τις εφαρμογές της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας.

***1) Βασικές σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών ενός τόξου ω.***

$$\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$$

$$\text{εφ}\omega = \frac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega} \qquad \text{σφ}\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}$$

$$\text{εφ}\omega\,\text{σφ}\omega = 1$$

$$\text{τεμ}\omega = \frac{1}{\text{συν}\omega} \qquad \text{στεμ}\omega = \frac{1}{\text{ημ}\omega}$$

***2) Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών.***

***α) Δύο τόξων αντιθέτων ω και –ω.***

$$\text{ημ}(-\omega) = -\text{ημ}\omega \qquad \text{εφ}(-\omega) = -\text{εφ}\omega$$

$$\text{συν}(-\omega) = \text{συν}\omega \qquad \text{σφ}(-\omega) = -\text{σφ}\omega$$

***β) Δυο τόξων παραπληρωματικών ω και 180°– ω.***

$$\text{ημ}(180^\circ - \omega) = \text{ημ}\omega \qquad \text{εφ}(180^\circ - \omega) = -\text{εφ}\omega$$

$$\text{συν}(180^\circ - \omega) = -\text{συν}\omega \qquad \text{σφ}(180^\circ - \omega) = -\text{σφ}\omega$$

***γ) Δύο τόξων συμπληρωματικών ω και 90°– ω.***

$$\text{ημ}(90^\circ - \omega) = \text{συν}\omega \qquad \text{εφ}(90^\circ - \omega) = \text{σφ}\omega$$

$$\text{συν}(90^\circ - \omega) = \text{ημ}\omega \qquad \text{σφ}(90^\circ - \omega) = \text{εφ}\omega$$

***3) Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς δυο τόξων α και β.***

$$\text{ημ}(\alpha + \beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

$$\text{ημ}(\alpha - \beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

$$\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$

$$\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$

$$\text{εφ}(\alpha + \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1 - \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}$$

$$\text{εφ}(\alpha - \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha - \text{εφ}\beta}{1 + \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}$$

***4) Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων πολλαπλασίων του τόξου ω, συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών του ω.***

$$ημ2ω = 2ημωσυνω$$

$$συν2ω = συν^2ω - ημ^2ω$$

$$εφ2ω = \frac{2εφω}{1 - εφ^2ω}$$

$$ημ3ω = 3ημω - 4ημ^3ω$$

$$συν3ω = 4συν^3ω - 3συνω$$

$$εφ3ω = \frac{3εφω - εφ^3ω}{1 - 3εφ^3ω}$$

***5) Έκφραση των ημ $\frac{ω}{2}$ και συν $\frac{ω}{2}$ συναρτήσει του συνω.***

$$2ημ^2\frac{ω}{2} = 1 - συνω \quad ή \quad 2ημπρω = 1 - συνω$$

$$2συν^2\frac{ω}{2} = 1 + συνω$$

***6) Μετασχηματισμός αθροισμάτων σε γινόμενα.***

$$ημΑ + ημΒ = 2ημ\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2}$$

$$ημΑ - ημΒ = 2ημ\frac{Α-Β}{2}συν\frac{Α+Β}{2}$$

$$συνΑ + συνΒ = 2συν\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2}$$

$$συνΑ - συνΒ = 2ημ\frac{Α+Β}{2}ημ\frac{Β-Α}{2}$$

***7) Μετασχηματισμός γινομένων σε αθροίσματα.***

$$2ημΑημΒ = συν(Α-Β) - συν(Α+Β) = ημ(Α+Β) + ημ(Α-Β)$$

$$2συνΑσυνΒ = συν(Α+Β) + συν(Α-Β)$$

***8) Σχέσεις μεταξύ των πλευρών α, β, γ και των γωνιών Α, Β, Γ τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ.***

**α)** $Α+Β+Γ = 180°$

**β)** $\frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ}$ (νόμος ημιτόνων)

**γ)** $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ$ (κυκλικά)

***9) Εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ.***

$$Ε = \frac{1}{2}\ βγημΑ \qquad (κυκλικά)$$

$$Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} \qquad όπου \qquad τ = \frac{α+β+γ}{2}$$

***10) Αν το τόξο θ εκφράζεται σε ακτίνια, τότε.***

$$ημθ = θ - \frac{θ^3}{3!} + \frac{θ^5}{5!} - ....$$

$$συνθ = 1 - \frac{θ^2}{2!} + \frac{θ^4}{4!} - ....$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ ΤΣΕΠΗΣ (CALCULATOR)

Με την εμφάνιση πριν λίγα μόλις χρόνια στην αγορά, των υπολογιστών τσέπης (calculators), υπεραπλουστεύθηκε ο υπολογισμός των διαφόρων στοιχείων στην Τριγωνομετρία, καθώς ουσιαστικά καταργήθηκε η χρήση των κάθε φύσεως βιβλίων με πίνακες και διάφορα άλλα δεδομένα. Η πρόοδος στον τομέα της έρευνας και των υπολογισμών υπήρξε σημαντικότατη.

Για τη χρήση των υπολογιστών αυτών κρίναμε απαραίτητο να παραθέσομε το παρακάτω πρόγραμμα που αφορά ένα επιστημονικό calculator και όπως θα διαπιστώσει ο αναγνώστης η εκμάθηση του προγράμματος αυτού είναι ευκολότατη αρκεί να εκτελεστούν μερικά παραδείγματα για την απόκτηση σχετικής πείρας.

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ

**1) Από γωνία ⟶ τριγωνομετρικός αριθμός.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ημίτονο | : | sin | $\boxed{\theta}$ | $\boxed{\sin}$ | | ⟶ X |
| συνημίτονο | : | cos | $\boxed{\theta}$ | $\boxed{\cos}$ | | ⟶ X |
| εφαπτομένη | : | tan | $\boxed{\theta}$ | $\boxed{\tan}$ | | ⟶ X |
| συνεφαπτομένη | : | cotan | $\boxed{\theta}$ | $\boxed{\tan}$ | $\boxed{1/X}$ | ⟶ X |
| τέμνουσα | : | sec | $\boxed{\theta}$ | $\boxed{\cos}$ | $\boxed{1/X}$ | ⟶ X |
| συντέμνουσα | : | cosec | $\boxed{\theta}$ | $\boxed{\sin}$ | $\boxed{1/X}$ | ⟶ X |

**2) Από τριγωνομετρικό αριθμό ⟶ γωνία.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{X}$ | $\boxed{INV}$ | $\boxed{\sin^{-1}}$ | | ⟶ θ |
| $\boxed{X}$ | $\boxed{INV}$ | $\boxed{\cos^{-1}}$ | | ⟶ θ |
| $\boxed{X}$ | $\boxed{INV}$ | $\boxed{\tan^{-1}}$ | | ⟶ θ |
| $\boxed{X}$ | $\boxed{1/X}$ | $\boxed{INV}$ | $\boxed{\tan^{-1}}$ | ⟶ θ |
| $\boxed{X}$ | $\boxed{1/X}$ | $\boxed{INV}$ | $\boxed{\cos^{-1}}$ | ⟶ θ |
| $\boxed{X}$ | $\boxed{1/X}$ | $\boxed{INV}$ | $\boxed{\sin^{-1}}$ | ⟶ θ |

**3) Από γωνία ⟶ λογάριθμος τριγωνομετρικού αριθμού.**

λογημθ: $\boxed{\theta}\ \boxed{\sin}\ \boxed{\log}\ \boxed{+}\ \boxed{10} \longrightarrow X$

λογσυνθ: $\boxed{\theta}\ \boxed{\cos}\ \boxed{\log}\ \boxed{+}\ \boxed{10} \longrightarrow X$

λογεφθ: $\boxed{\theta}\ \boxed{\tan}\ \boxed{\log}\ \boxed{+}\ \boxed{10} \longrightarrow X$

λογσφθ: $\boxed{\theta}\ \boxed{\tan}\ \boxed{1/X}\ \boxed{\log}\ \boxed{+}\ \boxed{10} \longrightarrow X$

λογτεμθ: $\boxed{\theta}\ \boxed{\cos}\ \boxed{1/X}\ \boxed{\log}\ \boxed{+}\ \boxed{10} \longrightarrow X$

λογστεμθ: $\boxed{\theta}\ \boxed{\sin}\ \boxed{1/X}\ \boxed{\log}\ \boxed{+}\ \boxed{10} \longrightarrow X$

**4) Από λογάριθμο τριγωνομετρικού αριθμού ⟶ γωνία.**

ημ: $\boxed{X}\boxed{-}\boxed{10}\ \boxed{=}\ \boxed{INV}\ \boxed{10^x}\ \boxed{INV}\ \boxed{\sin}\ \boxed{INV}\ \boxed{.\ ,,,} \longrightarrow \theta$

συν: $\boxed{X}\boxed{-}\boxed{10}\ \boxed{=}\ \boxed{INV}\ \boxed{10^x}\ \boxed{INV}\ \boxed{\cos}\ \boxed{INV}\ \boxed{.\ ,,,} \longrightarrow \theta$

εφ: $\boxed{X}\boxed{-}\boxed{10}\ \boxed{=}\ \boxed{INV}\ \boxed{10^x}\ \boxed{INV}\ \boxed{\tan}\ \boxed{INV}\ \boxed{.\ ,,,} \longrightarrow \theta$

εφ: $\boxed{X}\boxed{-}\boxed{10}\ \boxed{=}\ \boxed{INV}\ \boxed{10^x}\ \boxed{1/X}\ \boxed{INV}\ \boxed{\tan}\ \boxed{INV}\ \boxed{.\ ,,,} \longrightarrow \theta$

τεμ: $\boxed{X}\boxed{-}\boxed{10}\ \boxed{=}\ \boxed{INV}\ \boxed{10^x}\ \boxed{1/X}\ \boxed{INV}\ \boxed{\cos}\ \boxed{INV}\ \boxed{.\ ,,,} \longrightarrow \theta$

στεμ: $\boxed{X}\boxed{-}\boxed{10}\ \boxed{=}\ \boxed{INV}\ \boxed{10^x}\ \boxed{1/X}\ \boxed{INV}\ \boxed{\sin}\ \boxed{INV}\ \boxed{.\ ,,,} \longrightarrow \theta$

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΩΝ

Από γωνία ⟶ φυσικό ημιπαρ. $\boxed{:}\boxed{[(}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{\theta}\boxed{\cos}\boxed{)]}\boxed{:}\boxed{2} \longrightarrow \psi$

Από φυσ. ημιπαρ. ⟶ γωνία $\boxed{:}\boxed{[(}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{X}\ \boxed{\psi}\ \boxed{)]}\ \boxed{INV}\ \boxed{\cos^{-1}} \longrightarrow \theta$

Από γωνία ⟶ λογ. ημιπαρ. $\boxed{:}\boxed{[(}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{\theta}\ \boxed{\cos}\boxed{)]}\boxed{:}\boxed{2}\boxed{)]}\boxed{\log}\boxed{+}\boxed{10} \longrightarrow z$

Από λογ. ημιπαρ. ⟶ γωνία $\boxed{:}\boxed{[(}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\boxed{[(}\boxed{z}\boxed{-}\boxed{10}\ \boxed{)]}\ \boxed{INV}\boxed{10^x}\boxed{X}\boxed{2}\boxed{)]}\ \boxed{INV}\ \boxed{\cos^{-1}} \longrightarrow \theta$

Από λογ. ημιπαρ. ⟶ φυσ. ημπρ. $\boxed{:}\boxed{[(}\ \boxed{z}\ \boxed{-}\ \boxed{10}\boxed{)]}\ \boxed{INV}\boxed{10^x} \longrightarrow \psi$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

### *ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ*

2) Πρέπει το άθροισμα των πλευρών σφαιρικού τριγώνου να είναι μικρότερο των 360°.
3) Πρέπει το άθροισμα των γωνιών σφαιρικού τριγώνου να είναι μεταξύ 180° και 540°.
4) Όπως ασκ. 3.
5) Σχεδιάστε το σφαιρικό τρίγωνο επάνω σε μια σφαίρα κέντρου Ο και παρατηρείστε το σχήμα.
6) Κάθε κορυφή είναι ο πόλος μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τις άλλες δυο κορυφές.
7) Παρατηρείστε τη σχέση πλευρών-γωνιών σφαιρικού τριγώνου και του πολικού του.
8) Όπως ασκ. 7.
10) Παρατηρείστε το συμπέρασμα της ασκήσεως 9.
11) Παρατηρείστε το συμπέρασμα της ασκήσεως 9.
12) $\alpha' = 112'\ 41'$, $\beta' = 131'\ 31'$, $\gamma' = 102°\ 43'$ $A = 136°\ 42'$, $B' = 146°\ 11'$, $\Gamma' = 133°\ 32'$
13) Από τη σχέση $A + 180° > B + \Gamma \Longrightarrow 2A + 180° > A + B + \Gamma \Longrightarrow 2A > A + B + \Gamma - 180° \Longrightarrow 2A > 2S \Longrightarrow A > S$.
15) Αρκεί να βρούμε το λόγο Ε/Σ όπου Ε είναι το εμβαδό του σφαιρικού τριγώνου και Σ το εμβαδό της σφαίρας. Θα αντικαταστήσομε στον τύπο $E = \frac{\Sigma}{8}(A + B + \Gamma - 2)$ όπου οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου εκφράζονται σε ορθές. Άρα
$$E = \frac{\Sigma}{8}\left(\frac{64}{90} + \frac{68}{90} + \frac{84}{90}\right)$$
16) Έστω x κάθε γωνία της βάσεως. Θα έχομε εξ υποθέσεως $E = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Sigma}{8}$.
Αλλά $E = \frac{\Sigma}{8}\left(\frac{54}{30} \cdot x + x - 2o\rho\theta\right)$. Οπότε εξισώνωντας τα δεύτερα μέλη των παραπάνω εξισώσεων, υπολογίζομε το x.
27) Έστω $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle \Gamma' - 2o\rho\theta = \kappa$ (σταθ). Αρκεί $\sphericalangle A' + \sphericalangle B' - \sphericalangle \Gamma$ να είναι σταθερό (γιατί τότε ο Γ.Τ. της κορυφής Γ θα είναι μικρός κύκλος Α'Β'Γ).
Επειδή $\sphericalangle A + \sphericalangle A' = 180°$ και $\sphericalangle B + \sphericalangle B' = 180°$ θα έχομε:
$2o\rho\theta - A' + 2o\rho\theta. - \sphericalangle B + \sphericalangle \Gamma - 2o\rho\theta = k \Longrightarrow \sphericalangle A' + \sphericalangle B' - \sphericalangle \Gamma = 2o\rho\theta - k =$ σταθ.

### *ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ*

40) Στον τύπο των ημιτόνων, αν τεθεί $\alpha = \beta$ προκύπτει εύκολα ότι $A = B$.
41) Στον τύπο των συνημιτόνων αν τεθεί $\alpha = A = 90°$ προκύπτει συνβ.συνγ = 0 δηλαδή ή συν β = 0 ή συνγ = 0 οπότε $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ (τρισορθογώνιο και τρισορθοπλευρο).
Αν συνβ = 0 και συνγ ≠ 0 τότε β = 90° και συνγ = συν Γ ⟹ γ = Γ.
42) Χρησιμοποιούμε τους τύπους:
$$\text{συν } B = \text{συνβημ ΓημΑ} - \text{συνΓ συν Α}$$
και
$$\text{συν } \Gamma = \text{συνγ ημΑημΒ} - \text{συνΑσυνΒ}.$$
Αν $B = \Gamma = 90°$ τότε συν β = συνγ = 0 ⟹ β = γ = 90°.
Το αντίστροφο προκύπτει από τους τύπους.
συνβ = συνα συγ + ημαημγσυνΒ
συνγ = κλπ.
43) Από το νόμο των συνημιτόνων:
συνα = συνβσυνγ + ημβημγ συνΑ συνεπάγεται
$$\text{συνα} = \text{συνβ συγ}\left(\text{ημ}^2\frac{A}{2} + \text{συν}^2\frac{B}{2}\right) + \text{ημβημγ}\left(\text{συν}^2\frac{A}{2} - \text{ημ}^2\frac{A}{2}\right)$$

44) Στο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ (που είναι και διχοτόμος και διάμεσος) και να εφαρμόσετε το νόμο των ημιτόνων.

45) Από το δεύτερο μέλος έχομε:

$$\frac{ημ\,(α-γ)}{2συνγ\;ημα} = \frac{ημα\;συνγ}{2συνγημα} - \frac{ημγσυνα}{2συνγημα} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\;\frac{συνα\;ημγ}{συνγημα}$$

Κατόπιν χρησιμοποιείστε τον τύπο των τεσσάρων στοιχείων.

47) Χρησιμοποιείστε το νόμο των ημιτόνων και τις σχέσεις πλευρών-γωνιών σφαιρικού τριγώνου και πολικού του.

48) Από το νόμο των ημιτόνων.

## *ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ*

81) Χρησιμοποιείστε τα δυο θεωρήματα των τεταρτημορίων.

82) Χρησιμοποιείστε τον τέταρτο από τους δέκα βασικούς τύπους του ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου.

83) Χρησιμοποιείστε τον τέταρτο και ένατο από τους πιο πάνω δέκα βασικούς τύπους.

84) Χρησιμοποιείστε τον τύπο $ημα = ημγημΑ$ για να βρεθεί η ανισότητα $ημα \leqslant ημγ$.

85) Από τον πέμπτο τύπο από τους 10 βασικούς, έχομε:

$$συνβ = \frac{συνΒ}{ημΓ} = \frac{ημ(90-Β)}{ημΓ}$$

Όταν $Β + Γ < 90° \Longrightarrow 90 - Β > Γ \Longrightarrow ημ\,(90-Β) > ημΓ \Longrightarrow συνβ > 1$ που είναι άτοπο. Άρα δεν μπορεί να υφίσταται τρίγωνο. Ομοίως εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

86) Από τον πρώτο τύπο από τους 10 βασικούς έχομε $ημα = ημβ/ημΒ$.
Όταν $ημβ < ημΒ \Longrightarrow ημα < 1$ άρα προσδιορίζονται δυο τιμές του α, η μία $< 90°$ και η άλλη $> 90°$. Τα θεωρήματα των τεταρτημορίων μας λένε ότι όταν το τρίγωνο έχει $α < 90°$, τα γ και Γ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο με τα β και Β, ενώ όταν $α > 90°$ τα β και γ (αντιστοίχως τα Β και Γ) ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

87) Αποδεικνύεται με το δεύτερο θεώρημα των τεταρτημορίων.

88) Χρησιμοποιείστε τον τύπο $συνα = συνβσυνγ$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 89) | $Β = 54°\ 14{,}4'$, | $Γ = 45°\ 55{,}8'$, | $γ = 31°\ 0{,}4'$ |
| 90) | $β = 48°\ 43{,}7'$, | $γ = 59°\ 28'$, | $Γ = 66°\ 5{,}5'$ |
| 91) | $Β = 52°\ 53{,}4'$, | $γ = 153°\ 14{,}7'$, | $α = 140°\ 7'$ |
| 92) | $Γ = 130°\ 13{,}1'$, | $Β = 73°\ 40'$, | $α = 104°\ 21'$ |
| 93) | $α = 70°\ 32'$, | $γ = 39°\ 30'$ | |
| 94) | $α = 112°\ 38'$, | $β = 34°\ 57'$, | $Γ = 106°\ 57'$ |
| 95) | $α_1 = 122°\ 39'$, | $β_1 = 29°\ 20'$, | $Β_1 = 35°\ 34'$ |
| | $α_2 = 57°\ 21'$, | $β_2 = 150°\ 40'$, | $Β_2 = 144°\ 26'$ |
| 96) | $α = 54°\ 13'$, | $Β = 35°\ 43'$, | $Γ = 67°\ 12'$ |
| 97) | $α_1 = 38°\ 31'$, | $γ_1 = 34°\ 14'$, | $Γ_1 = 64°\ 36'$ |
| | $α_2 = 141°\ 29'$, | $γ_2 = 145°\ 46'$, | $Γ_2 = 115°\ 24'$ |
| 102) | $α_1 = 59°\ 47{,}7'$, | $γ_1 = 42°\ 43{,}6'$, | $Γ_1 = 51°\ 43{,}8'$ |
| | $α_2 = 120°\ 12{,}3'$, | $γ_2 = 137°\ 16{,}4'$, | $Γ_2 = 128°\ 16{,}2'$ |
| 103) | $α = 71°\ 11{,}1'$, | $Β = 43°\ 35{,}5'$, | $Γ = 72°\ 55{,}8'$ |
| 104) | $β = 169°\ 13{,}2'$, | $γ = 25°\ 33{,}2'$, | $Β = 156°\ 11{,}1'$ |
| 105) | $β = 54°\ 34'$, | $Β = 75°\ 18{,}3'$, | $Γ = 154°\ 3{,}2'$ |
| 106) | $α = 61°\ 46{,}2'$, | $β = 29°\ 23{,}1'$, | $γ = 57°\ 7{,}3'$ |
| 107) | $α_1 = 153°\ 46{,}8'$, | $β_1 = 20°\ 10{,}4'$, | $Β_1 = 51°\ 18{,}8'$ |
| | $α_2 = 26°\ 13{,}2'$, | $β_2 = 159°\ 49{,}6'$, | $Β_2 = 128°\ 41{,}2'$ |

109) α) Από το νόμο των ημιτόνων επειδή $ημα = 1$ (γιατί $α = 90°$)
Ομοίως και οι άλλοι τύποι αποδεικνύονται με κατάλληλη επιλογή τύπου και με την προϋπόθεση ότι $α = 90°$.

111) α = 105° 14,7′, γ = 37° 9,3′, Β = 101° 55,1′
112) β = 35° 36,3′, γ = 104° 28,2′, Α = 68° 52,7′
113) β = 77° 2′, γ = 50° 46′, Γ = 49° 32′
114) γ = 117° 45′, Β = 56° 17,3′, Α = 72° 44,5′
115) γ = 107° 51′, Β = 45° 06′, Γ = 114° 26,5′
116) $\gamma_1$ = 40° 15,3′, $A_1$ = 116° 34,5′, $\Gamma_1$ = 35° 18,2′
$\gamma_2$ = 139° 44,7′, $A_2$ = 63° 25,5′, $\Gamma_2$ = 144° 41,8′
118) Α = 100° 23′, Β = 74° 21′
119) γ = 137° 7′, Α = 161° 27′, Β = 166° 11′
133) Α = 35° 51′, Β = 133° 32, Γ = 24° 33′
135) Α = 58° 8,4′, Β = 68° 37,8′, Γ = 91° 57,2′
136) Α = 93° 40,8′ Β = 64° 12,4′, Γ = 116° 51′
137) Α = 99° 20,9′, Β = 104° 47,7′, Γ = 38° 54,4′
138) Α = 60° 9,7′, Β = 98° 39,7′, Γ = 93° 13,2′
141) α = 104° 25,1′, β = 53° 49,4′, γ = 97° 44,3′
142) α = 28° 4′, β = 31° 6′, γ = 35° 36,5′
143) α = 143° 59,9′, β = 128° 22,3′, γ = 54° 22,2′
144) α = 115° 44,2′, β = 102° 40,6′, γ = 88° 21,8′
145) α = 83° 35,4′, β = 113° 45,8′, γ = 66° 28′
146) α = 156° 42,2′, β = 33° 34,4′, γ = 144° 6,6′
148) β = 127° 10,4′, Α = 122° 30,1′, Γ = 26° 47,3′
149) γ = 57° 48′, Α = 103° 13′, Β = 36° 30′
150) α = 70° 2,2′, Β = 79° 17,1′, Γ = 111° 8,7′
151) β = 97° 37,5′, Α = 55° 36′, Γ = 60° 7,3′
152) β = 107° 16′, γ = 104° 59′, Α = 78° 5′
153) α = 37° 43,7′, β = 133° 52,9′, Γ = 90° 31,8′
154) α = 87° 1′, Β = 97° 46′
157) β = 88° 20,8′, γ = 66° 46′, Α = 53° 30,4′
158) β = 168° 54′, γ = 119° 48′, Α = 127° 57′
160) β = 99° 29,6′, Β = 96° 21′, Γ = 65° 32,3′
162) $\gamma_1$ = 52° 27,2′, $B_1$ = 87° 34,5′, $\Gamma_1$ = 53° 6,6′
$\gamma_2$ = 25° 12′, $B_2$ = 92° 25,5′, $\Gamma_2$ = 25° 26,2′
163) β = 56° 32′, Β = 97° 53′, Γ = 31° 35′
164) β = 41° 4,6′, γ = 51° 17,9′, Β = 36° 38,8′
165) $\alpha_1$ = 140° 15,7′, $\beta_1$ = 146° 36′, $B_1$ = 121° 7,6′
$\alpha_2$ = 39° 44,3′, $\beta_2$ = 26° 59,6′, $B_2$ = 44° 53,8′
167) α = 40° 17′, β = 45° 9′, Β = 85° 54′
168) $\beta_1$ = 54° 36,8′, $\gamma_1$ = 147° 36,8′, $\Gamma_1$ = 139° 39′
$\beta_2$ = 125° 23,2′, $\gamma_2$ = 6° 51,2′, $\Gamma_2$ = 8° 17,6′

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

185) Πλάτος 45° Ν.
186) 241° 12′, 1358 μίλια.
187) Η συντομότερη απόσταση μπορεί να είναι 3200 μίλια κατά μήκος του παράλληλου πλάτους 42° Ν.
189) Πλάτος 30° 31′ S′.
190) Πλάτος 40° 28,5′ S′.
192) α) 4105 μίλια. β′) Πλάτος 30° 53′ S′.
195) α) Πλάτος του Β: 47° 20,4′ Ν. Μήκος: 66° 44,2′ W.
β) Πλάτος 63° 35,1 Ν Μήκος: 9° 21,5′ W.

196) α) 120° 30,9΄ W,
β) 164° 29,1΄ E.
197) 4186,2 μίλια.
198) 4219,6 μίλια 32° 54,6΄ . 131° 18,8΄.
199) 4822,6 μίλια. 221° 56,7΄ . 231° 21,5.
Μήκος 107° 29,4 E . 1752,8 μίλια.
200) Μήκος 29° 14΄ W ή 19° 51΄ E.
214) 02h 59min 37sec. Κλίση: 21° 27,8΄ N.
215) 46° 6,7΄ N . 234° 34,7΄.
216) 59° 22° N.
217) 18° 8΄ N 74° 29΄ W.
218) LHA 262° 21΄.
219) 29° 40΄ N.
220) Πλάτος 27° N, μήκος 35°.
221) Πλάτος 42° 05΄ Κλίση: 22° 48,5΄.
222) Πλάτος 47° 37΄.
223) Πλάτος 34° 58΄ S΄ ή 55° 2΄ S.
224) N 77° 54΄ E . 9h 52 min 8 sec.
225) 4.32 μ.μ.
226) 5.12 μ.μ.
228) Μεγαλύτερη ημέρα: 14h 55min 40sec.
Μικρότερη ημέρα: 9h 4 min 20 sec.
229) 61 14΄ S.
230) 17° 35΄ N.
231) Πλάτος: 49° 11΄ Κλίση: 20° 57΄.
232) Πλάτος: 47° 56΄ Κλίση: 20° 2΄.
233) Πλάτος: 40° 4΄ Κλίση: 15° 46΄.
234) 58° 55΄ S΄.
235) 11h 53min 50sec.
239) 42° 24,5΄.
240) 14h 51min 25sec.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

### ΣΤΕΡΕΕΣ ΓΩΝΙΕΣ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΣΦΑΙΡΑ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

### ΣΦΑΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

### ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΩΝ ΤΥΧΟΝΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

### ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΝΑΥΤΙΛΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ