ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΔΗΜΟΣΙΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

(Διὰ Μηχανικούς)

Μαθηματικὰ

Πυρηνικὴ Φυσικὴ

Ἀγγλικὰ

Τεχνικὴ Μηχανικὴ

Θερμοδυναμικὴ

Μεταλλογνωσία - Μεταλλοτεχνία

Λέβητες

Ἀτμομηχαναὶ (Παλινδρ. - Στρόβιλοι)

Μ.Ε.Κ.

Ἠλεκτροτεχνία

Μηχανήματα σκάφους

Ψυκτικαὶ ἐγκαταστάσεις

Στοιχεῖα Ναυπηγίας

Καύσιμα - Λιπαντικὰ

Τηλεκίνησις - Αὐτοματισμὸς συγχρόνων πλοίων

Ἠλεκτρονικὰ

Μηχανουργικὴ Τεχνολογία

Σχέδιον

Γενικαὶ ἐπαγγελματικαὶ γνώσεις

Τεχνικὴ ὀρολογία πλοίου

'Ο Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «'Ιδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισε τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν 'Ιδρύματος, ποὺ θὰ εἶχεν σκοπὸν νὰ συμβάλλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς 'Ελλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. 'Απὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποί, ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἵδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς. 'Εκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Εἰδικώτερον, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰ ἐκπαιδευτικὰ βιβλία τῶν μαθητῶν τῶν Δημοσίων Σχολῶν 'Εμπορικοῦ Ναυτικοῦ, τὸ Ἵδρυμα ἀνέλαβε τὴν ἔκδοσίν των ἐν πλήρει καὶ στενῇ συνεργασίᾳ μετὰ τῆς Διευθύνσεως Ναυτικῆς 'Εκπαιδεύσεως τοῦ 'Υπουργείου 'Εμπορικῆς Ναυτιλίας, ὑπὸ τὴν ἐποπτείαν τοῦ ὁποίου ὑπάγονται αἱ Σχολαὶ αὗται.

'Η ἀνάθεσις εἰς τὸ Ἵδρυμα ἐγένετο δυνάμει τῆς ὑπ' ἀριθ. 61288/5031, 9ης Αὐγούστου 1966, ἀποφάσεως τοῦ 'Υπουργοῦ 'Εμπορικῆς Ναυτιλίας δι' ἧς συνεκροτήθη καὶ ἡ 'Επιτροπὴ 'Εκδόσεων.

Κύριος σκοπὸς τῶν ἐκδόσεων αὐτῶν εἶναι ἡ παροχὴ πρὸς τοὺς μαθητὰς τῶν ναυτικῶν σχολῶν τῶν ἀναγκαίων ἐκπαιδευτικῶν κειμένων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ ἐν ταῖς Σχολαῖς διδασκόμενα μαθήματα.

Ἐν τούτοις ἐλήφθη πρόνοια, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι γενικώτερον χρήσιμα δι' ὅλους τοὺς ἀξιωματικοὺς τοῦ Ἐμπορικοῦ Ναυτικοῦ, τοὺς ἀσκοῦντας ἤδη τὸ ἐπάγγελμα καὶ ἐξελισσομένους εἰς τὴν ἱεραρχίαν τοῦ κλάδου των.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος κατέβαλον κάθε προσπάθειαν, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῆ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως διὰ τὴν ὁποίαν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμὴ τῶν βιβλίων ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς πλέον ἀπόρους μαθητάς.

Οὕτω προσφέρονται εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν τῶν καθηγητῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῆς ναυτικῆς μας ἐκπαιδεύσεως καὶ εἰς ὅλους τοὺς ἀξιωματικοὺς τοῦ Ε.Ν. αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ

Β Ι Β Λ Ι Ο Θ Η Κ Η   Τ Ο Υ   Ν Α Υ Τ Ι Κ Ο Υ

Dipl.-Ing. Dr. Techn.

HANS HIEDL

Καθηγητοῦ τοῦ Τεχνολογικοῦ Μουσείου Ἐπαγγελμάτων

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ Α΄

Μετάφρασις:

ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ ΑΛΕΞ. ΜΑΚΡΗ

Μηχανολόγου - Ἠλεκτρολόγου Ε.Μ.Π

Διδάκτορος Παν/μίου Stuttgart

Ἐμμ. Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑΙ

1974

Technische Mechanik

Ein Lehrbuch für höhere technische Lehranstalten

Band I

Von

Oberstudienrat

Dipl.-Ing. Dr. techn. HANS HIEDL

Professor am Technologischen Gewerbemuseum

Mit 170 Abbildungen

VERLAG R. OLDENBOURG · WIEN

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αἱ Δημόσιαι Σχολαὶ Ἐμπορικοῦ Ναυτικοῦ εἶχον ἐπείγουσαν ἀνάγκην βιβλίου Τεχνικῆς Μηχανικῆς. Τὰ ὑπάρχοντα ὅμως ἑλληνικὰ σχετικὰ τεχνικὰ βιβλία δὲν ἀνταπεκρίνοντο εἰς τὰς ἀνάγκας τῶν σχολῶν τούτων, ἰδίως ἀπὸ ἀπόψεως στάθμης. Καὶ δή, ἄλλα μὲν εἶναι ἀρκετὰ χαμηλοτέρας καὶ ἄλλα πανεπιστημιακῆς στάθμης. Ἀνεζητήθη λοιπὸν κατ' ἀνάγκην, λόγω τοῦ ἐπείγοντος, κατάλληλον σύγγραμμα ἐκ τῶν διδασκομένων εἰς ξένας Σχολὰς ἀντιστοίχου στάθμης. Μεταξὺ τούτων ὡς καταλληλότερον ἐκρίθη, τόσον ἀπὸ ἀπόψεως στάθμης ὅσον καὶ περιεχομένου, τὸ παρὸν διδακτικὸν βιβλίον τοῦ καθηγητοῦ Διδάκτορος Hans Hiedl, ἀνωτέρου ἐκπαιδευτικοῦ συμβούλου τῆς Αὐστρίας. Τοῦτο μετεφράσθη ἄριστα παρὰ τοῦ κ. Παναγιώτη Μακρῆ, Μηχανολόγου - Ἠλεκτρολόγου Ε.Μ.Π., Διδάκτορος Πανεπιστημίου Stuttgart καὶ Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

Αἱ δι' ἀστερίσκου σημειούμεναι παράγραφοι δύνανται νὰ μὴ διδαχθοῦν. Περιελήφθησαν ὅμως διὰ τὴν πληρότητα τῶν ἀναπτυσσομένων θεμάτων.

Τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου ὀφείλει νὰ ἐκφράσῃ τὰς εὐχαριστίας του πρὸς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον R. Oldenbourg τῆς Βιέννης καὶ πρὸς τὸν συγγραφέα διὰ τὴν προθύμως παρασχεθεῖσαν ἄδειαν ἐκδόσεως τοῦ βιβλίου εἰς τὴν ἑλληνικήν.

Τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ
ΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1
Δύναμις

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2
Ροπὴ δυνάμεως

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3
Γενικὰ περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως δυνάμεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4
Σύνθεσις δυνάμεων, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς τέμνονται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5
Ἀνάλυσις δυνάμεως

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

Σύνθεσις δυνάμεων, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς δὲν τέμνονται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

Παράλληλοι δυνάμεις καὶ ζεῦγος δυνάμεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

Ἰσορροπία δυνάμεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9

Προσδιορισμὸς κέντρου βάρους

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 10

Στατικὴ ἐπιπέδων δικτυωμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11

Τριβή

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 12

Βασικαὶ ἔννοιαι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13

Καταπόνησις εἰς κάμψιν

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΣΤΡΕΨΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 14

Στρεπτική καταπόνησις

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

(Κινηματική τοῦ ὑλικοῦ στοιχείου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15

Ὁμοιόμορφος κίνησις

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16

Ἀνομοιόμορφος κίνησις

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

(Δυναμική τοῦ ὑλικοῦ σημείου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 17

Θεμελιώδεις νόμοι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 18

Ἔργον καὶ ἰσχύς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 19

ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟΝ

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 20

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 21

Μετατροπὴ ἀριθμοῦ στροφῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 22

Μετατροπὴ δυνάμεων τύπου «μοχλοῦ»

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 23

Μετατροπὴ δυνάμεων τύπου «κεκλιμένου ἐπιπέδου»

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΣΤΑΤΙΚΗ

Ἀντικείμενον τῆς Στατικῆς ἀποτελοῦν αἱ σχέσεις μεταξὺ δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ σώματος, ποὺ ἠρεμεῖ καὶ ποὺ μαθηματικῶς θεωρεῖται στερεόν. Πρὸ τῆς ἐξετάσεως τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, πρέπει νὰ ἀναφερθοῦν μερικαὶ γενικαὶ παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς φύσεως τῆς δυνάμεως καὶ τῶν χαρακτηριστικῶν της, ὡς καὶ ὡρισμένοι θεμελιώδεις νόμοι, ποὺ διέπουν κάθε δύναμιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΔΥΝΑΜΙΣ

1·1 Ἔννοια τῆς δυνάμεως.

Ἀντίληψις τῆς δυνάμεως ἀποκτᾶται κατ' ἀρχὴν διὰ τῆς ἐπαφῆς.

Ἐὰν κατὰ τὴν ἐπαφὴν μὲ ἕνα σῶμα δημιουργηθῆ ἡ ἐντύπωσις εἰς παρατηρητὴν ὅτι ἡ δρᾶσις διευθύνεται πρὸς αὐτόν, τότε πρόκειται περὶ *θλιπτικῆς* δυνάμεως, ἐνῶ, ἐὰν διευθύνεται ἀντιθέτως, πρόκειται περὶ *ἐφελκυστικῆς* δυνάμεως. Καὶ ὁ παρατηρητὴς ὅμως δύναται νὰ ἐπενεργήσῃ διὰ τῶν μυικῶν του δυνάμεων ἐπὶ ἄλλων σωμάτων. Δύναται δηλαδὴ νὰ παραμορφώσῃ σῶμα (π.χ. νὰ τανύσῃ ἢ νὰ συμπιέσῃ ἐλατήριον, νὰ κάμψῃ ράβδον κ.λπ.), ἐπίσης νὰ θέσῃ σῶμα εἰς κίνησιν ἢ νὰ μεταβάλῃ τὴν κινητικήν του κατάστασιν. Παρόμοιαι δράσεις δυνατὸν νὰ προέλθουν καὶ ἀπὸ διαφόρους ἄλλας δυνάμεις, π.χ. ἀπὸ τὴν δύναμιν τῆς βαρύτητος (βάρος ἐπὶ ζυγοῦ δι' ἐλατηρίου, φορτίον ἐπὶ δοκοῦ, ἐπιτάχυνσις ἐλευθέρας πτώσεως, ἐπιβράδυνσις κατὰ τὴν ρῖψιν σώματος πρὸς τὰ ἄνω κ.λπ.). Ἔτσι δύναται νὰ διατυπωθῆ ὅτι :

Ἡ δρᾶσις δυνάμεως ἐπὶ σώματος προκαλεῖ παραμόρφωσιν ἢ μεταβολὴν τῆς κινητικῆς του καταστάσεως.

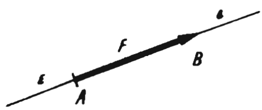
Αἱ δυνάμεις, βάσει κριτηρίων, διακρίνονται εἰς διαφόρους κατηγορίας. Ἔχομεν λοιπὸν δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀκολουθοῦν ἕνα ὡρισμένον νόμον (ὡς π.χ. ἡ δύναμις τῆς βαρύτητος) καὶ ἄλλας, ποὺ δὲν ἀκολουθοῦν κανένα νόμον. Ἄλλη σημαντικὴ διάκρισις βασίζεται εἰς τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ δυνάμεις δροῦν ἐπὶ σώματος. Αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ σώματος ἐξωτερικῶς (ἐξωτερικαὶ δυνάμεις) προκαλοῦν δυνάμεις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ (ἐσωτερικὰς δυνάμεις). Ὡς παράδειγμα ἀναφέρεται ἡ περίπτωσις τανύσεως ἐλατηρίου.

1·2 Χαρακτηριστικὰ δυνάμεως.

Κάθε δύναμιν (συμβολισμὸς F) χαρακτηρίζουν ἐπακριβῶς τὰ ἑξῆς:

Τὸ *μέτρον*, ἡ *κατεύθυνσις* καὶ τὸ *σημεῖον ἐφαρμογῆς*.

Ἡ δύναμις εἶναι λοιπὸν κατευθυνόμενον μέγεθος καὶ ὡς ἐκ τούτου δύναται νὰ παρασταθῇ, ὅπως ὅλα τὰ κατευθυνόμενα μεγέθη (διανύσματα) μὲ εὐθύγραμμον τμῆμα ὡρισμένου μήκους, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται αἰχμὴ βέλους ὁρίζουσα τὴν κατεύθυνσιν δράσεώς της (σχ. 1·2).



Σχ. 1·2.
Χαρακτηριστικὰ μιᾶς δυνάμεως F:
A σημεῖον ἐφαρμογῆς, AB μέτρον, ε εὐθεῖα ἐνεργείας τῆς δυνάμεως (φορεύς), → κατεύθυνσις.

Τὸ μέτρον δυνάμεως ἐκφράζεται εἰς μονάδας δυνάμεως.

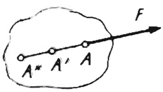
Ὡς τεχνικὴ μονὰς χρησιμοποιεῖται σήμερον τὸ χιλιόγραμμον δυνάμεως, τὸ κιλοπὸντ (kp). 1 kp εἶναι ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἡ μᾶζα ἑνὸς προτύπου χιλιογράμμου(*), εὑρισκομένη ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου βαρύτητος εἰς μέσον γεωγραφικὸν πλάτος καὶ εἰς τὸ ὑψόμετρον τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ἡ κατεύθυνσις τῆς δυνάμεως ὁρίζεται διὰ τοῦ φορέως της (δηλαδὴ τῆς εὐθείας, κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ ἡ δύναμις) καὶ διὰ τῆς αἰχμῆς τοῦ βέλους τοῦ

(*) Τὸ πρότυπον αὐτὸ χιλιόγραμμον φυλάσσεται εἰς τὸ Διεθνὲς Γραφεῖον Μέτρων καὶ Σταθμῶν εἰς Sèvres τῶν Παρισίων. Κατὰ προσέγγισιν 1 kp ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος ἑνὸς λίτρου ὕδατος.

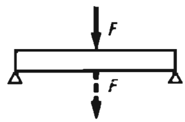
κειμένου ἐπ' αὐτοῦ. Εἰς τὴν πρᾶξιν μία δύναμις δρᾷ πάντοτε ἐπὶ ἐπιφανείας, χάριν ὅμως ἁπλουστεύσεως δεχόμεθα ὅτι δρᾷ μόνον ἐπὶ σημείου, τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της.

1·3 Μεταφορὰ δυνάμεως κατὰ μῆκος τοῦ φορέως της.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς Στατικῆς ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως ἐπὶ τοῦ φορέως της εἶναι δευτερευούσης σημασίας (τοῦτο διότι παραδεχόμεθα ὅτι τὰ ἐξεταζόμενα σώματα εἶναι ἀπολύτως στερεά). Εἰς τὸ σχῆμα 1·3 α, ἐὰν λ.χ. ἡ δύναμις ἐφαρμόζεται εἰς τὸ σημεῖον A ἢ A' ἢ A'', τοῦτο δὲν ἐπηρεάζει τὴν δρᾶσιν της. Ἐπίσης,



Σχ. 1·3 α.
Μεταφορὰ δυνάμεως κατὰ μῆκος τοῦ φορέως της.



Σχ. 1·3 β.
Μεταφορὰ δυνάμεως κατὰ μῆκος τοῦ φορέως της.

ἐὰν ἡ δύναμις ἐφαρμόζεται εἰς τὴν ἄνω ἢ τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τῆς δοκοῦ (σχ. 1·3β), τοῦτο δὲν ἔχει ἐπίδρασιν ἐπὶ τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐξ αἰτίας αὐτῆς ἀναπτύσσονται εἰς τὰς στηρίξεις τῆς δοκοῦ. Ὁμοίως, ἐὰν τὸ κινητήριον ὄχημα ἁμαξοστοιχίας ἕλκῃ ἢ ὠθῇ αὐτήν, τοῦτο δὲν ἐπηρεάζει τὴν κίνησιν τῆς ἁμαξοστοιχίας. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι, ἐνῷ κατὰ τὴν ἕλξιν καταπονοῦνται οἱ σύνδεσμοι τῶν ὀχημάτων (διὰ δυνάμεως ἑλκτικῆς), κατὰ τὴν ὦσιν τῆς ἁμαξοστοιχίας καταπονοῦνται τὰ ἐλατήρια παραλαβῆς κρούσεων (διὰ δυνάμεως συμπιέσεως). Εἰς περίπτωσιν ὅμως στερεᾶς συνδέσεως τῶν ὀχημάτων θὰ ἐξέλειπε καὶ ἡ διαφορὰ αὐτή.

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις ὁδηγοῦν εἰς τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα :

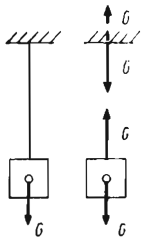
Δύναμις, ἡ ὁποία δρᾷ ἐπὶ στερεοῦ σώματος, ἐὰν μεταφερθῇ εἰς οἱανδήποτε θέσιν κατὰ μῆκος τοῦ φορέως της, οὐδόλως ἐπηρεάζει τὴν δρᾶσιν της ἐπὶ τοῦ σώματος.

1·4 Δρᾶσις καὶ ἀντίδρασις.

Εἰς τὴν φύσιν αἱ δυνάμεις ἐμφανίζονται πάντοτε κατὰ ζεύγη. Εἰς κάθε δύναμιν *(δρᾶσιν)* ἀντιστοιχεῖ μία ἴση καὶ ἀντίθετος δύναμις *(ἀντίδρασις)*. Τοῦτο ἐκφράζεται ἐν συντομίᾳ διὰ τῆς σχέσεως:

Δρᾶσις = Ἀντίδρασις

Εἰς τὴν δύναμιν, μὲ τὴν ὁποίαν σῶμα Α πιέζει ἕνα ἄλλο σῶμα Β, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἑδράζεται, ἀντιτίθεται ἴση δύναμις ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ σώματος Α ἐκ τοῦ πιεζομένου σώματος Β. Βάρος ἀνηρτημένον ἐκ νήματος προκαλεῖ ἐφελκυστικὴν δύναμιν ἐπὶ τοῦ νήματος διευθυνομένην πρὸς τὰ κάτω, ἐνῷ ταυτοχρόνως καὶ τὸ νῆμα ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ σώματος ἴσην ἐφελκυστικὴν δύναμιν, διευθυνομένην ὅμως πρὸς τὰ ἄνω (σχ. 1·4).



Σχ. 1·4.
Δρᾶσις καὶ ἀντίδρασις.

Κατὰ τὴν παραμόρφωσιν σώματος, λόγῳ δράσεως ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ἐμφανιζόμεναι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι πρὸς τὰς ἐξωτερικάς (π.χ. κατὰ τὴν τάνυσιν ἐλατηρίου).

Ἡ αὐτὴ σχέσις ἰσχύει ἐπίσης εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν σῶμα κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς. Ἡ δύναμις ἕλξεως τοῦ ὀχήματος, ποὺ κινεῖ τὴν ἁμαξοστοιχίαν, εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ἀντίστασιν, ποὺ προβάλλει ὁ συρμὸς κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεώς του.

1·5 Ἐπενέργειαι δυνάμεων ἐπὶ σωμάτων.

Αἱ διάφοροι ἐπενέργειαι τῶν δυνάμεων ἐπὶ τῶν σωμάτων ἐξετάζονται κεχωρισμένως εἰς τὰ διάφορα κεφάλαια τῆς *Μηχανικῆς*.

Εἰς τὴν *Στατικὴν* ἐξετάζεται ἡ ἐπίδρασις τῶν δυνάμεων ἐπὶ ἀπολύτως στερεῶν ἠρεμούντων σωμάτων.

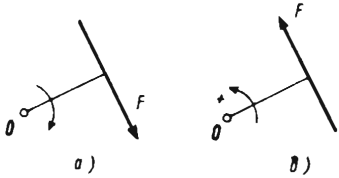
Ἡ δημιουργία ἐσωτερικῶν δυνάμεων (τάσεων) καὶ παραμορφώσεων, συνεπείᾳ ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἐξετάζεται εἰς τὴν Ἀντοχὴν τῶν Ὑλικῶν. Ἡ ἐπενέργεια δυνάμεων ἐπὶ κινουμένων στερεῶν σωμάτων ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τῆς Δυναμικῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ

2·1 Ὁρισμὸς τῆς ῥοπῆς δυνάμεως.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι μικρὰ δύναμις ἐπενεργοῦσα ἐπὶ μακροῦ βραχίονος δύναται νὰ ἐπιφέρῃ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ βραχίονος τὸ ἀποτέλεσμα, ποὺ θὰ ἐπιφέρῃ μεγάλη δύναμις, ποὺ ἐπενεργεῖ ἐπὶ μικροῦ μήκους βραχίονος. Τὸ ἀποτέλεσμα λοιπὸν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μέτρου (μεγέθους) τῆς δυνάμεως καὶ ἐκ τοῦ μήκους τοῦ βραχίονος. Τὸ μεγαλύτερον ἀποτέλεσμα ἐπιτυγχάνεται, ὅταν ἡ δύναμις εἶναι κάθετος πρὸς τὸν βραχίονα (σχ. 2·1α). Τὸ μέγεθος τοῦ ἀποτελέσματος, ὡς προκύπτει



Σχ. 2·1 α.
Ροπὴ δυνάμεως: α) Ἀρνητική. β) Θετική.

ἐκ τῆς ἐμπειρίας, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ γινομένου :

Δύναμις × κάθετον ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ βραχίονος.

Ἡ κάθετος ἀπόστασις ὀνομάζεται μοχλοβραχίων, ἐνῶ τὸ γινόμενον ὀνομάζεται ῥοπὴ (τῆς δυνάμεως) ὡς πρὸς τὸ σημεῖον ἀναφορᾶς (ἤτοι τὸ ἄκρον τοῦ βραχίονος). Συνεπῶς εἶναι :

$$\textit{Ροπή} = \textit{Δύναμις} \times \textit{Μοχλοβραχίονα}$$

$$\boxed{\mathrm{M} = \mathrm{F} \cdot l}$$

Ἡ χρῆσις τοῦ μέτρου, m, ὡς μονάδος μήκους ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἔκφρασιν τῆς ῥοπῆς εἰς kpm (εἰς τὴν Ἀντοχὴν Ὑλικῶν χρησιμοποιεῖται περισσότερον ἡ ἔκφρασις τῆς ῥοπῆς εἰς kpcm).

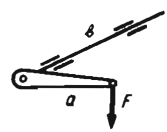
Ἐκτὸς τοῦ μεγέθους τῆς ῥοπῆς καὶ ἡ φορὰ περιστροφῆς αὐτῆς ἀποτελεῖ οὐσιῶδες στοιχεῖον. Συμφώνως πρὸς τὴν «μαθηματικὴν» ἔννοιαν τῆς φορᾶς περιστροφῆς διακρίνομεν (σχ. 2·1 α):

θετικὴν ροπὴν............ Στροφὴν κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου, *ἀριστερόστροφος φορά*.

ἀρνητικὴν ροπὴν......... Στροφὴν κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου, *δεξιόστροφος φορά*.

(Ἡ ροπὴ δύναται νὰ ληφθῇ ὡς θετικὴ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς δεξιοστρόφου φορᾶς, ἀρκεῖ μόνον νὰ διατηρηθῇ ἡ παραδοχὴ αὐτὴ καθ' ὅλας τὰς φάσεις τῆς ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος).

Ἡ ἰδία ροπή, κατὰ τὴν ἐπενέργειάν της ἐπὶ διαφόρων στοιχείων μηχανῶν, δυνατὸν νὰ προκαλέσῃ διαφόρους ἐπιδράσεις. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ἐπενέργεια ροπῆς μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως τὴν



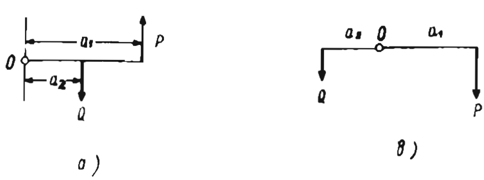
Σχ. 2·1 β.

Ροπὴ κάμψεως καὶ ροπὴ στρεπτική: α) Χειρομοχλός. β) Ἄτρακτος.

χειρολαβὴν στροφάλου (σχ. 2·1 β) προκαλεῖ εἰς μὲν τὸν χειρομοχλὸν κάμψιν (καμπτικὴν ροπήν), εἰς δὲ τὴν ἄτρακτον στρέψιν (στρεπτικὴν ροπήν).

2·2 Κανὼν τῶν μοχλῶν.

Ἐπειδὴ ἡ ροπὴ εἶναι γινόμενον δυνάμεως ἐπὶ μῆκος μοχλοβραχίονος, ἕπεται ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθῇ ἡ αὐτὴ ροπὴ διὰ συν-



Σχ. 2·2 α.

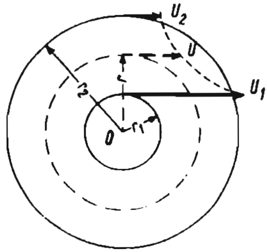
Μοχλός: α) Ἁπλοῦς. β) Διπλοῦς.

δυασμοῦ μεγάλης δυνάμεως καὶ μικροῦ μοχλοβραχίονος ἢ μικρᾶς δυνάμεως καὶ μεγάλου μοχλοβραχίονος. Μὲ χρῆσιν λοιπὸν τῶν συμβόλων τοῦ σχήματος 2·2 α διὰ δυνάμεις καὶ μοχλοβραχίονας προκύπτει :

$$\boxed{M = P \cdot \alpha_1 = Q \cdot \alpha_2} \quad ἢ \quad \boxed{\frac{P}{Q} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσχύει ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν πρόκειται περὶ ἁπλοῦ [σχ. 2·2 α (α)] ἢ περὶ διπλοῦ [σχ. 2·2 α (β)] μοχλοῦ.

Εἰς τὴν Μηχανολογίαν ἀπαντᾶται συχνὰ ἡ ροπή, ἡ ὁποία ἐξασκεῖ «περιφερικὴν» δύναμιν U ἐπὶ βραχίονος, δίσκου ἢ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ ἀκτῖνος r (στρεπτικὴ ροπὴ U · r). Προκειμένου περὶ δύο δί-



Σχ. 2·2 β.
Στρεπτικὴ ροπή.

σκων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος καὶ κατὰ συνέπειαν ὑπὸ τὴν αὐτὴν ροπήν, ἰσχύει (σχ. 2·2 β) :

$$\boxed{U_1 \cdot r_1 = U_2 \cdot r_2}$$

Παραδείγματα.

1. Ποίαν στρεπτικὴν ροπὴν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν δύο ἄνδρες, ὅταν ἕκαστος ἀσκῇ δύναμιν 15 kp ἐπὶ χειροστροφάλου ἀκτῖνος $r_1 = 35$ cm καὶ ποῖον τὸ βάρος Q, τὸ ὁποῖον δύνανται νὰ ἀνυψώσουν μὲ τύμπανον περιελίξεως σχοινίου διαμέτρου 500 mm ;

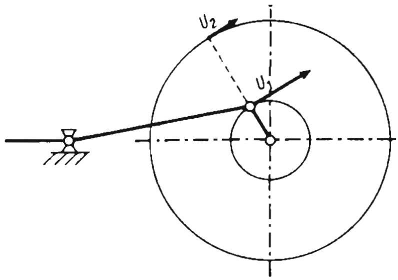
Λύσις :

$$M = 2P \cdot r_1 = 2 \times 15 \times 0{,}35 \text{ kpm} = 10{,}5 \text{ kpm}.$$

$$M = Q \cdot \frac{d_2}{2}, \qquad Q = \frac{2M}{d_2} = \frac{21}{0{,}5} \text{ kp} = 42 \text{ kp}.$$

2. Ποία ἡ διαθέσιμος περιφερικὴ δύναμις σφονδύλου ἐμβολοφόρου

μηχανῆς (σχ. 2·2 γ), ὅταν ἡ περιφερικὴ δύναμις εἰς τὸ κομβίον τοῦ στροφάλου ἰσοῦται πρὸς $U_1 = 2{,}4$ Mp [1 Mp (μεγαπὸντ) = 10^3 kp].



Σχ. 2·2 γ.
Στρεπτικὴ ροπή.

(Διάμετρος κύκλου τοῦ στροφάλου $d_1 = 0{,}3$ m, διάμετρος σφονδύλου $d_2 = 1{,}6$ m).

Λύσις :

$$U_1 \cdot r_1 = U_2 \cdot r_2, \quad U_2 = U_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} = 2{,}4 \times \frac{0{,}3}{16} \text{ Mp} = 0{,}45 \text{ Mp} = 450 \text{ kp}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΕΩΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Εἰς τὰ ἑπόμενα κεφάλαια ἐξετάζονται δύο βασικὰ προβλήματα τῆς Στατικῆς :

α) *Ἡ σύνθεσις* δυνάμεων εἰς μίαν μόνον δύναμιν ὀνομαζομένην *συνισταμένην*, ἡ δρᾶσις τῆς ὁποίας ἐπιφέρει ἐπὶ σώματος τὸ ἴδιον ἀκριβῶς ἀποτέλεσμα, ποὺ ἐπιφέρουν ὅλαι μαζὶ αἱ δυνάμεις ποὺ τὴν ἀποτελοῦν.

β) *Ἡ ἀνάλυσις* δυνάμεως εἰς δυνάμεις ὀνομαζομένας *συνιστώσας*, ποὺ τὸ συνολικὸν ἀποτέλεσμα δράσεώς των ἐπὶ σώματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα δράσεως τῆς ἀναλυθείσης δυνάμεως.

Τὰ δύο αὐτὰ προβλήματα δύνανται νὰ λυθοῦν γραφικῶς ἢ ἀναλυτικῶς. Ἡ μὲν γραφικὴ λύσις βασίζεται εἰς τὴν γεωμετρικὴν (διανυσματικὴν) ἄθροισιν τῶν δυνάμεων, ἡ δὲ ἀναλυτική, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἀκριβεστέρα, εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν ἄθροισιν τῶν προβολῶν τῶν δυνάμεων ἐπὶ τῶν ἀξόνων x καὶ y καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Ἐδῶ ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις τοῦ ἐπιπέδου συστήματος δυνάμεων, ὅπου δηλαδὴ αἱ δυνάμεις καὶ αἱ ῥοπαὶ των δροῦν ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

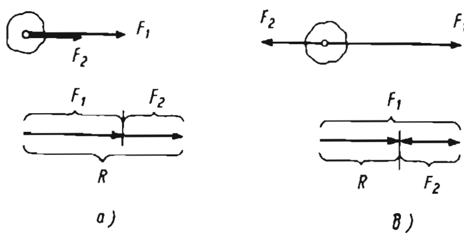
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΦΟΡΕΙΣ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΕΝΑ ΚΑΙ ΤΟ ΑΥΤΟ ΣΗΜΕΙΟΝ

4·1 Γραφικὴ λύσις.

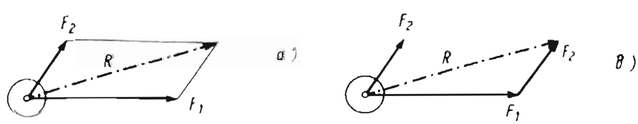
α) Δυνάμεις μὲ κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς.

Κατ' ἀρχὴν ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δυνάμεις ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς (σχ. 4·1 α καὶ 4·1 β), τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν φορέων των.



Σχ. 4·1 α.

Γραφικὴ σύνθεσις δύο δυνάμεων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως (ἀλγεβρικὴ πρόσθεσις): α) Τῆς αὐτῆς κατευθύνσεως. β) Ἀντιθέτων κατευθύνσεων.

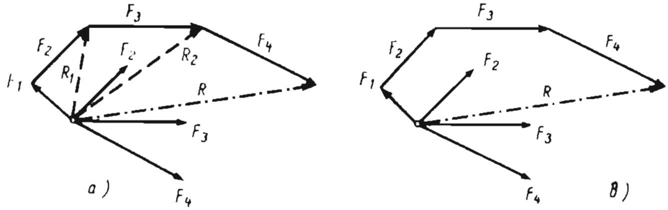


Σχ. 4·1 β.

Γραφικὴ σύνθεσις δύο δυνάμεων κειμένων ἐπὶ διαφορετικῶν φορέων (γεωμετρικὴ πρόσθεσις): α) Παραλληλόγραμμον δυνάμεων. β) Δυναμοτρίγωνον.

Ἐὰν δύο δυνάμεις δροῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως, ἡ συνισταμένη των ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν δυνάμεων (σχ. 4·1 α). Κατὰ τὴν σύνθεσιν δύο δυνάμεων διαφορετικῶν κατευθύνσεων γίνεται χρῆσις τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων [σχ. 4·1 β (α)] ἢ τοῦ δυναμοτριγώνου [σχ. 4·1 β (β)]. Τὸ δυναμοτρίγωνον ἀποτελεῖ προφανῶς τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου.

Πρὸς σύνθεσιν περισσοτέρων τῶν δύο δυνάμεων χρησιμοποιεῖται



Σχ. 4·1 γ.

Γραφικὴ σύνθεσις περισσοτέρων τῶν δύο δυνάμεων: α) Δυναμοτρίγωνα. β) Δυναμοπολύγωνον.

διαδοχικῶς καὶ δι' ὅλας τὰς δυνάμεις ἡ μέθοδος τοῦ δυναμοτριγώνου. Ἔτσι σχηματίζονται αἱ μερικαὶ συνισταμέναι [σχ. 4·1 γ (α)], δηλαδή :

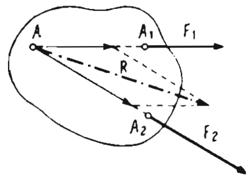
κατ' ἀρχὴν ἐκ τῆς F_1 καὶ F_2 ἡ R_1,
κατόπιν ἐκ τῆς R_1 καὶ F_3 ἡ R_2 καὶ
τελικῶς ἐκ τῆς R_2 καὶ F_4 ἡ R (συνολικὴ συνισταμένη).

Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα 4·1 γ (α) παραλειφθῇ ὁ σχηματισμὸς τῶν ἐπὶ μέρους συνισταμένων, εἶναι δυνατὸν διὰ γεωμετρικῆς ἀθροίσεως νὰ σχηματισθῇ ἀπ' εὐθείας ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ F_1, F_2, F_3, F_4 [σχ. 4·1 γ (β)], εἰς τὴν ὁποίαν ἡ σειρὰ τῶν δυνάμεων δὲν ἐπηρεάζει τὸ ἀποτέλεσμα. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, ποὺ ἑνώνει τὴν ἀρχὴν μὲ τὸ τέλος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, παριστᾶ τὴν συνισταμένην. Ἔτσι ἡ συνισταμένη συμπληρώνει τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν καὶ σχηματίζει μετ' αὐτῆς κλειστὸν πολύγωνον, ποὺ ὀνομάζεται *δυναμοπολύγωνον*. Ἡ κατεύθυνσις τῆς συνισταμένης εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς διαγραφῆς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, τῆς καθοριζομένης ὑπὸ τῶν βελῶν τῶν δυνάμεων.

β) Δυνάμεις μὲ διάφορα σημεῖα ἐφαρμογῆς.

Ἐὰν οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ ἑνὸς σώματος, τέμνωνται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τότε εἶναι δυνατόν, διὰ μεταφορᾶς τῶν δυνάμεων κατὰ μῆκος τῶν φορέων των μέχρι τοῦ σημείου τομῆς, νὰ ἀναχθῇ ἡ περίπτωσις αὐτὴ εἰς τὴν προηγουμένην (δυνάμεις μὲ κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς). Διὰ μεταφορᾶς τῶν δυνάμεων F_1 καὶ

F_2 (σχ. 4·1 δ) κατὰ μῆκος τῶν φορέων των μέχρι τοῦ σημείου τομῆς των, δύναται νὰ ληφθῇ ἡ συνισταμένη R κατὰ τὸν αὐτόν, ὡς καὶ προηγουμένως, τρόπον. Ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τομῆς ὅλων τῶν φορέων, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ φο-



Σχ. 4·1 δ.
Μεταφορὰ τῶν δυνάμεων κατὰ μῆκος τῶν φορέων των.

ρέως της. Ἡ μορφὴ τοῦ δυναμοπολυγώνου ἢ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων.

Ἐνῶ εἰς κάθε διάγραμμα, ποὺ παριστάνει τὰς σχετικὰς θέσεις τῶν δυνάμεων — διάγραμμα θέσεων —, δὲν εἶναι ἀπαραίτητος ἡ παράστασίς των ὑπὸ κλίμακα, ἀντιθέτως κατὰ τὴν χάραξιν τοῦ δυναμοπολυγώνου ἢ διαγράμματος δυνάμεων, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ σχεδιασθοῦν αἱ δυνάμεις ὄχι μόνον μὲ τὴν διεύθυνσίν των, ἀλλὰ καὶ μὲ τὸ ἀκριβὲς ὑπὸ κλίμακα μέτρον των. Πρὸς τοῦτο ἐκλέγεται *κλῖμαξ δυνάμεων* [1 μονὰς μήκους $\widehat{=}$ (παριστᾶ) κ μονάδας δυνάμεως, ἤτοι $\kappa =$ $= F\ kp/l\mathrm{cm}$]. Ἡ κλῖμαξ δίδει τὰ *μέτρα* τῶν δυνάμεων ὑπὸ μορφὴν μηκῶν l, τὰ ὁποῖα δύνανται ἐπακριβῶς νὰ μετρηθοῦν. Ἡ παράστασις τῶν δυνάμεων δι' εὐθυγράμμων τμημάτων ἀντιστοίχων μηκῶν ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν σχέσιν $l = F/\kappa$, ἡ δὲ ἀνάγνωσις τῶν μέτρων τῶν δυνάμεων ἐκ τοῦ διαγράμματος μὲ τὴν σχέσιν $F = l \cdot \kappa$.

4·2 Ἀναλυτικὴ λύσις.

α) Δυνάμεις μὲ κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς.

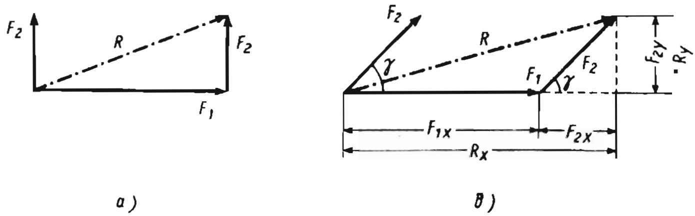
Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο δυνάμεις ἔχουν κοινὸν φορέα, ἡ συνισταμένη προσδιορίζεται διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τῶν συνιστωσῶν, ἤτοι:

$$R = F_1 \pm F_2.$$

Ἐὰν δύο δυνάμεις εἶναι κάθετοι μεταξύ των σχ. [4·2 α (α)], τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης ὑπολογίζεται διὰ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος, ἡ δὲ κατεύθυνσις διὰ μιᾶς τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.

Μέτρον: $$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\,.$$

Κατεύθυνσις : $\varepsilon\varphi\, \alpha = F_2/F_1$, $\eta\mu\, \alpha = F_2/R$, $\sigma\upsilon\nu\, \alpha = F_1/R$.



Σχ. 4·2 α.

Ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων. Αἱ δυνάμεις σχηματίζουν: α) Ὀρθὴν γωνίαν. β) Τυχοῦσαν γωνίαν γ. $\sphericalangle (F_1 R) = \alpha$.

Ἐὰν αἱ δύο δυνάμεις σχηματίζουν μεταξύ των μίαν οἱανδήποτε γωνίαν γ [σχ. 4·2 α (β)] τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

Διὰ συμπληρώσεως τοῦ τριγώνου εἰς ὀρθογώνιον λαμβάνεται διὰ τὴν ὑποτείνουσαν :

$$R^2 = (F_1 + F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma)^2 + (F_2 \cdot \eta\mu\gamma)^2,$$

$$R^2 = F_1^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + F_2^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\gamma + F_2^2 \cdot \eta\mu^2\gamma,$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2\,(\sigma\upsilon\nu^2\gamma + \eta\mu^2\gamma) + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$$

καὶ ἐξ αὐτοῦ:

$$\boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma}}\ (*)$$

Ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις τοῦ ἀνωτέρω τύπου λαμβάνονται αἱ προηγούμεναι σχέσεις, δηλαδή :

διὰ $\gamma = 90°$, $\sigma\upsilon\nu\gamma = 0$ $\quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

διὰ $\gamma = 0°,\ 180°$, $\sigma\upsilon\nu\gamma = \pm 1$ $\quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 \pm 2F_1 \cdot F_2} = F_1 \pm F_2$

(*) Ἡ σχέσις αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ «Θεώρημα τοῦ συνημιτόνου» τῆς Τριγωνομετρίας (ἐδῶ ἡ γωνία γ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου, δι' αὐτὸ καὶ τὸ πρόσημον τοῦ συνημιτόνου θετικόν).

Ἡ θέσις τῆς συνισταμένης προσδιορίζεται μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τῶν ἡμιτόνων (= ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀπέναντί των κειμένων γωνιῶν). Εἰς τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὴν δύναμιν F_1 καὶ τὴν συνισταμένην R [σχ. 4·2 α(β)] ἔχομεν :

$$\eta\mu\,\alpha = \frac{F_2}{R}\,\eta\mu\,\gamma.$$

Ἐὰν θεωρηθῇ ὅτι ἑκάστη τῶν δυνάμεων F_1, F_2 καὶ R εἶναι συνισταμένη δύο καθέτων μεταξύ των συνιστωσῶν (ὀρθογωνίων συνιστωσῶν), ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

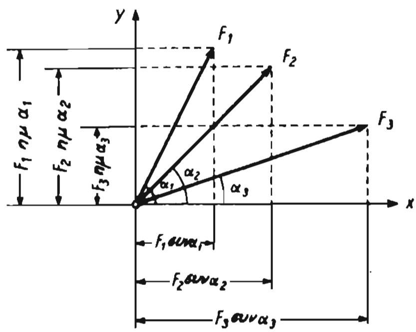
$$R_x = F_{1x} + F_{2x}$$

καὶ

$$R_y = F_{1y} + F_{2y}$$

καὶ γίνη ἐφαρμογὴ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος, λαμβάνεται τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης ἐκ τῆς σχέσεως :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



Σχ. 4·2 β.

Ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς συνισταμένης περισσοτέρων δυνάμεων δι' ἀναλύσεώς των εἰς συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων x καὶ y.

[εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 4·2 α (β) εἶναι $F_{1y} = 0$ καὶ $F_{1x} = F_1$]. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος συνιστᾶται εἰς τὴν περίπτωσιν συνθέσεως περισσοτέρων δυνάμεων (σχ. 4·2 β).

Ὁπότε ἰσχύει :

$$R_x = \Sigma F_x = \Sigma F\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha,$$

$$R_y = \Sigma F_y = \Sigma F\,\eta\mu\,\alpha.$$

Τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

καὶ ἡ διεύθυνσίς της :

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = R_y / R_x, \qquad \eta\mu\,\alpha = R_y / R, \qquad \sigma\upsilon\nu\,\alpha = R_x / R.$$

Εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι προφανές, ὅτι ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τομῆς τῶν φορέων τῶν συνιστωσῶν.

β) Δυνάμεις μὲ διάφορα σημεῖα ἐφαρμογῆς.

Ἐφ' ὅσον — ὡς προηγουμένως ὑπεθέσαμεν — οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων τέμνωνται εἰς κοινὸν σημεῖον, ἡ συνισταμένη ὑπολογίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπάρξεως κοινοῦ σημείου ἐφαρμογῆς. Ὁ δὲ φορεὺς τῆς συνισταμένης διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν φορέων τῶν δυνάμεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ

Μία δύναμις δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τὸ πολὺ δυνάμεις (συνιστώσας) καὶ τοῦτο ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις.

5·1 Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς δύο συνιστώσας.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν σύνθεσιν δύο δυνάμεων διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου ἢ τοῦ δυναμοτριγώνου, εἶναι δυνατὸν μία δύναμις, διὰ σχηματισμοῦ καὶ πάλιν τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων, νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πληροῦνται αἱ ἀκόλουθοι προϋποθέσεις :

α) Οἱ φορεῖς τῶν συνιστωσῶν νὰ τέμνωνται εἰς σημεῖον κείμενον ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς πρὸς ἀνάλυσιν δυνάμεως· τὸ σημεῖον τοῦτο δύναται ἐπίσης νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον (Κεφάλαιον 7, «Παράλληλοι δυνάμεις»).

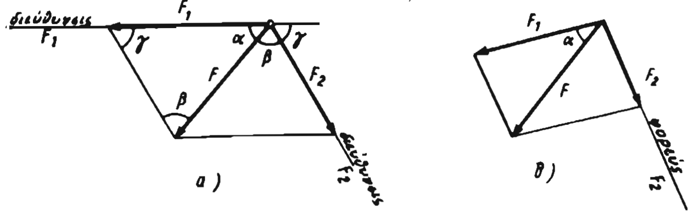
β) Ἐκ τῶν συνιστωσῶν νὰ εἶναι δεδομένα :

– αἱ διευθύνσεις ἀμφοτέρων τῶν συνιστωσῶν ἢ

– ἡ διεύθυνσις καὶ τὸ μέτρον μιᾶς τῶν συνιστωσῶν.

Γραφικὴ λύσις.

Ἡ γραφικὴ λύσις τῆς πρώτης περιπτώσεως δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 5·1 (α), τῆς δὲ δευτέρας εἰς τὸ σχῆμα 5·1 (β). Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ μέτρον καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο



Σχ. 5·1.

Ἀνάλυσις δυνάμεων εἰς δύο συνιστώσας: α) Δεδομέναι αἱ διευθύνσεις ἀμφοτέρων τῶν συνιστωσῶν. β) Δεδομένα τὸ μέτρον καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς μιᾶς τῶν συνιστωσῶν.

συνιστωσῶν προσδιορίζονται ἐκ τοῦ δυναμοτριγώνου, ἐνῶ ὁ φορεύς της διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν F καὶ F_1.

Ἀναλυτικὴ λύσις.

Ἐὰν δίδωνται *αἱ διευθύνσεις ἀμφοτέρων* τῶν συνιστωσῶν, τότε προσδιορίζεται ἡ γωνία α [σχ. 5·1 (α)] καὶ ἡ γωνία β ἐκ τῶν ($\sphericalangle F_1F$) καὶ ($\sphericalangle F_2F$) ἀντιστοίχως καὶ κατὰ συνέπειαν ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ δυναμοτριγώνου. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν F_1 καὶ F_2 γίνεται δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως τῶν ἡμιτόνων, δηλαδή :

$$F_1 = F\,\frac{\eta\mu\,\beta}{\eta\mu\,\gamma},$$

$$F_2 = F\,\frac{\eta\mu\,\alpha}{\eta\mu\,\gamma}.$$

[Ἡ εἰδικὴ περίπτωσις διὰ $\gamma = 90^\circ$ ἐχρησιμοποιήθη ἤδη εἰς προηγούμενον κεφάλαιον (παράγρ. 4·2 ἀναλυτικὴ λύσις)].

Ἐὰν δίδεται ἡ *διεύθυνσις* καὶ *τὸ μέτρον* τῆς μιᾶς συνιστώσης F_1, τότε εἶναι καθωρισμένη ἡ γωνία α ($\sphericalangle F_1F$) [σχ. 5·1 (β)] καὶ ἡ F_2 δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως :

$$F_2 = \sqrt{F^2 + F_1^2 - 2F \cdot F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha}\,.$$

Τὸ ἐντὸς τῆς ρίζης γινόμενον λαμβάνει ἀρνητικὸν πρόσημον, διότι ἐνταῦθα ἡ α δὲν εἶναι ἐξωτερική, ἀλλὰ ἐσωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου.

5·2 Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς τρεῖς συνιστώσας.

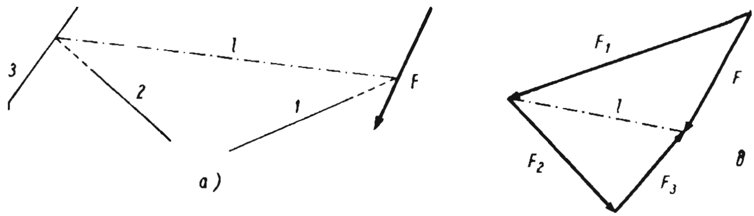
Ἡ ἀνάλυσις εἰς τρεῖς συνιστώσας ἔχει τότε μόνον πρακτικὴν ἐφαρμογήν, ὅταν δίδωνται μὲν οἱ φορεῖς των, ἀλλὰ δὲν τέμνωνται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἡ ἀνάλυσις εἰς 3 συνιστώσας εἶναι ἐπίσης ἀδύνατος, ὅταν δύο ἐκ τῶν φορέων τῶν συνιστωσῶν τέμνωνται ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς πρὸς ἀνάλυσιν δυνάμεως.

Ἡ ἀνάλυσις ἐπιτυγχάνεται γραφικῶς διὰ τῆς μεθόδου Culmann.

Ἔστωσαν F [σχ. 5·2 α (α)] ἡ πρὸς ἀνάλυσιν δύναμις, τῆς ὁποίας δίδονται ὁ φορεύς, τὸ μέτρον καὶ ἡ κατεύθυνσις, καὶ 1, 2, 3 οἱ τρεῖς φορεῖς τῶν ἀγνώστων συνιστωσῶν. Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς δυνάμεως F μὲ τὸν φορέα 1 καὶ τοῦ φορέως 2 μὲ τὸν φορέα 3.

Διὰ συνδέσεως τῶν σημείων τομῆς λαμβάνεται ἡ εὐθεῖα *l* (εὐθεῖα τοῦ Culmann), ἡ ὁποία θὰ ληφθῇ ὡς βοηθητικὸς φορεὺς δυνάμεως.

Κατ' ἀρχὴν ἡ δύναμις F ἀναλύεται κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν φορέων 1 καὶ l καὶ τελικῶς ἡ δύναμις ἐπὶ τοῦ φορέως l ἀναλύεται κατὰ τὰς



Σχ. 5·2 α.
'Ανάλυσις δυνάμεως εἰς 3 συνιστώσας κατὰ Culmann: α) Διάγραμμα θέσεων. β) Δυναμοπολύγωνον.

διευθύνσεις τῶν φορέων 2 καὶ 3 τῶν συνιστωσῶν. Τὸ σχῆμα 5·2 α (β) παριστᾶ τὸ δυναμοπολύγωνον τῆς F καὶ τῶν τριῶν συνιστωσῶν της.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὲς ὅτι δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις εἰς τρεῖς συνιστώσας, ὅταν οἱ φορεῖς τῶν τριῶν ἀγνώστων δυνάμεων τέμνωνται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Παραδείγματα.

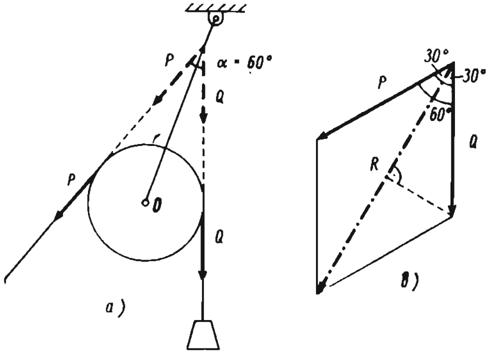
1. Βάρος Q ἀνυψοῦται τῇ βοηθείᾳ τροχαλίας ἀνηρτημένης ἐκ σταθεροῦ σημείου δι' ἀρθρωτοῦ βραχίονος. Τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σχοινίου, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπενεργεῖ ἡ ἑλκτικὴ δύναμις $P = Q = 400$ **kp** εὑρίσκεται ὑπὸ γωνίαν 60° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον [σχ. 5. 2β (α)]. Ποία δύναμις καταπονεῖ τὸν βραχίονα ;

Λύσις :

'Επὶ τοῦ βραχίονος ἐπενεργεῖ ἡ συνισταμένη R τῶν P καὶ Q, μὲ ἀποτέλεσμα ὁ βραχίων νὰ λαμβάνῃ τὴν διεύθυνσίν της. Τὸ μέγεθος καὶ ἡ θέσις τῆς R λαμβάνονται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος μεταφορᾶς τῶν δυνάμεων P καὶ Q κατὰ μῆκος τῶν φορέων των. Ἔτσι ἐπὶ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων [σχ. 5·2 β (β)] μετρεῖται ἡ τιμὴ τῆς συνισταμένης καὶ εὑρίσκεται ἴση πρὸς 700 **kp**. Ἡ γωνία της ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον προκύπτει ἴση πρὸς 30°.

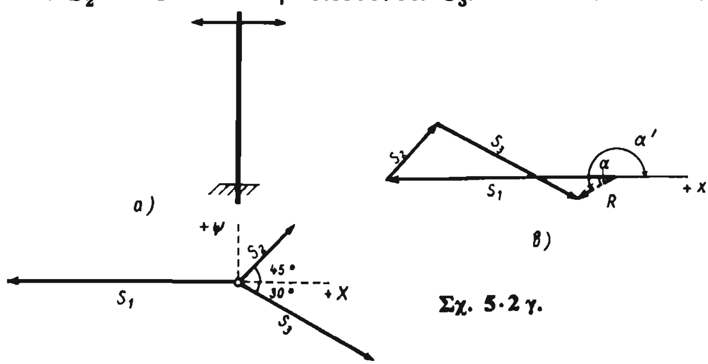
'Αναλυτικῶς λαμβάνεται ἡ τιμὴ τῆς συνισταμένης R ἐκ τῆς σχέσεως :

$$R = 2Q \cdot \text{συν}\ 30^\circ = 2 \times 400 \times 0{,}866\ \text{kp} = 693\ \text{kp}.$$



Σχ. 5·2 β.
Σύνθεσις δυνάμεων.

2. Ἐκ στύλου διανομῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας [σχ. 5·2 γ (α)] ἐκκινοῦν τὰ ἑξῆς καλώδια: 6 κατὰ τὴν διεύθυνσιν S_1, 2 κατὰ τὴν διεύθυνσιν S_2 καὶ 4 κατὰ τὴν διεύθυνσιν S_3. Ἐπὶ ἑκάστου καλωδίου



Σχ. 5·2 γ.

δρᾷ ἑλκτικὴ δύναμις 100 kp. Ποία ἡ συνισταμένη δύναμις, ἡ ὁποία δρᾷ ἐπὶ τοῦ στύλου;

Λύσις:

Γραφική [σχ. 5·2 γ (β)].

Εἰς ἐκλεγομένην κλίμακα σχεδιάσεως $\kappa = 100$ kp/cm (δηλαδὴ 1 cm $\triangleq$ 100 kp) κάθε δύναμις F ἀντιστοιχεῖ εἰς μῆκος F/cm, ἐπομένως:

$$S_1 = 600 \text{ kp} \;....\; 6 \text{ cm}$$
$$S_2 = 200 \text{ kp} \;....\; 2 \text{ cm}$$
$$S_3 = 400 \text{ kp} \;....\; 4 \text{ cm}.$$

'Εάν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ τιμαὶ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι κατευθύνσεις τῶν δυνάμεων, αἱ δυνάμεις αὐταὶ συντίθενται εἰς πολυγωνικὴν γραμμήν. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, διὰ τοῦ ὁποίου ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ κλείεται, δίδει τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης $R = \kappa \cdot 1{,}25\ \mathrm{cm} = 125\ \mathrm{kp}$. Ἡ γωνία τῆς διευθύνσεώς της πρὸς τὴν S_1 μετρεῖται καὶ εὑρίσκεται $\alpha = 30^\circ$ περίπου.

'Αναλυτική.

Εἰς τὰς δυνάμεις πρέπει νὰ τεθῇ τὸ πρόσημον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς κατευθύνσεις των, ἀφοῦ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ κατευθύνσεις ὧν ἀξόνων x καὶ y πρὸς καθορισμὸν τῶν θετικῶν φορῶν :

$$\begin{aligned} R_x &= -S_1 + S_2 \cdot \text{συν}\, 45^\circ + S_3 \cdot \text{συν}\, 30^\circ = \\ &= (-600 + 200 \times 0{,}707 + 400 \times 0{,}866)\ \mathrm{kp} = \\ &= (-600 + 141{,}5 + 346{,}5)\ \mathrm{kp} = -112\ \mathrm{kp}. \\ R_y &= 0 + S_2 \cdot \text{ημ}\, 45^\circ - S_3 \cdot \text{ημ}\, 30^\circ = \\ &= (200 \times 0{,}707 - 400 \times 0{,}5)\ \mathrm{kp} = -58{,}5\ \mathrm{kp}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{12\,544 + 3422}\ \mathrm{kp} = \\ &= \sqrt{15966}\ \mathrm{kp} = 126\ \mathrm{kp}. \end{aligned}$$

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-58{,}5}{-112} = +0{,}523.$$

$$\text{ημ}\,\alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{-58{,}5}{126} = -0{,}465.$$

Θετικὴ ἐφαπτομένη καὶ ἀρνητικὸν ἡμίτονον ὑποδηλοῦν ὅτι ἡ γωνία εὑρίσκεται εἰς τὸ τρίτον τεταρτημόριον τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου: $\alpha' = 180^\circ + \alpha^\circ = 180^\circ + 27^\circ\ 40'$.

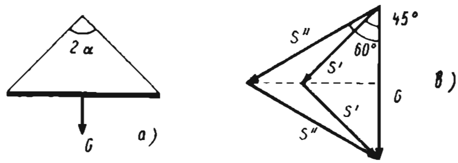
Ἄρα $\alpha^\circ = 27^\circ\ 40'$.

3. Εἰς τὸ ἄγκιστρον γερανοῦ ἀναρτᾶται διὰ διπλοῦ συρματοσχοίνου βάρος $G = 2\ \mathrm{Mp}$ [σχ. 5·2 δ (α)]. Ποία ἑλκτικὴ δύναμις ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ συρματοσχοίνου, ἐὰν ἡ μεταξὺ κλάδων γωνία 2α ἰσοῦται πρὸς 90° ἢ πρὸς 120°; Λύσις γραφικὴ καὶ ἀναλυτική.

Λύσις :

Γραφική.

Μετὰ τὴν ἐκλογὴν τῆς κλίμακος σχεδιάσεως, π.χ. $\kappa = 500\ \mathrm{kp/cm}$ σχεδιάζεται τὸ μῆκος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ βάρος G ($2000/500 = 4\ \mathrm{cm}$) καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ δυναμοτρίγωνον, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅταν $\alpha = 45°$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅταν $\alpha = 60°$ [σχ. 5·2 δ (β)]. Διὰ μετρήσεως τῶν μηκῶν λαμβάνεται S' (κ · 2,8 cm) = 1400 kp καὶ S'' (κ · 4 cm) = 2000 kp.



Σχ. 5·2 δ.
Φόρτισις διπλοῦ συρματοσχοίνου.

'Αναλυτική.

'Εκ τοῦ τριγώνου τῶν δυνάμεων λαμβάνονται :

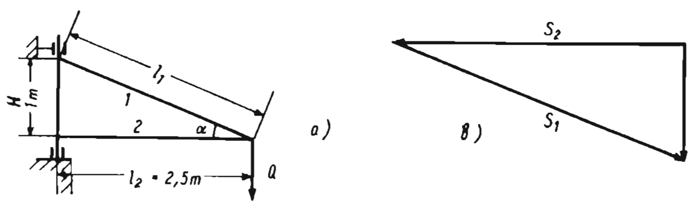
$$G = 2S \cdot \text{συν}\,\alpha, \qquad S = \frac{G}{2\text{συν}\,\alpha} = \frac{1000}{\text{συν}\,\alpha}\ \text{kp}.$$

'Εὰν $\alpha = 45°$, εἶναι συν $\alpha = 0{,}707$ καὶ S' = 1410 kp.

'Εὰν $\alpha = 60°$, εἶναι συν $\alpha = 0{,}50$ καὶ S'' = 2000 kp.

Ὅταν ἡ γωνία κλάδων εἶναι 120°, ἡ ἑλκτικὴ δύναμις εἰς τὸ συρματόσχοινον εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος. Ἂν ἡ γωνία αὐξηθῇ περαιτέρω, αὐξάνεται ἀκόμη περισσότερον καὶ ἡ φόρτισις τοῦ συρματοσχοίνου μέχρι τῆς τιμῆς $2\alpha = 180°$ (μόνον θεωρητικῶς δυνατόν), ὁπότε θὰ ἐγίνετο ἡ φόρτισις ἄπειρος.

4. Εἰς τὸ ἄκρον μικροῦ περιστρεφομένου γερανοῦ ἀναρτᾶται βάρος Q = 1,5 Mp. Ποῖαι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τῶν ράβδων 1 καὶ 2 [σχ. 5·2 ε (α)];



Σχ. 5·2 ε.
Προσδιορισμὸς τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τῶν ράβδων.

Λύσις :

Γραφική.

Τὸ δυναμοτρίγωνον Q, S_1 καὶ S_2 δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 5·2ε(β).

Μὲ κλίμακα σχεδιάσεως $\kappa = 0{,}5\ \mathrm{Mp/cm}$ λαμβάνεται διὰ τὰς δυνάμεις:

$$S_2\ (\kappa \cdot 7{,}5\ \mathrm{cm}) = 3{,}75\ \mathrm{Mp},$$

$$S_1\ (\kappa \cdot 8{,}1\ \mathrm{cm}) = 4{,}05\ \mathrm{Mp}.$$

Ἀναλυτική.

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν χρησιμοποιεῖται ἡ σχέσις ὁμοιότητος τῶν τριγώνων [σχ. 5·2 ε (α) καὶ (β)]. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνεται:

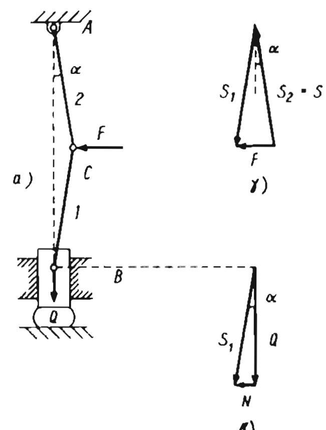
$$\varepsilon\varphi\,\alpha = 1/2{,}5 = 0{,}4, \qquad \alpha = 21^\circ\ 48', \qquad \eta\mu\,\alpha = 0{,}371.$$

$$\frac{S_1}{Q} = \frac{l_1}{H} = \frac{1}{\eta\mu\,\alpha} = 2{,}69, \quad S_1 = 2{,}69 \times 1{,}5\ \mathrm{Mp} = 4{,}04\ \mathrm{Mp}.$$

$$\frac{S_2}{Q} = \frac{l_2}{H} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\,\alpha} = 2{,}5, \qquad S_2 = 2{,}5 \times 1{,}5\ \mathrm{Mp} = 3{,}75\ \mathrm{Mp}.$$

Ὅπως βλέπομεν, αἱ δυνάμεις ἐπὶ τῶν ράβδων (συνιστῶσαι) εἶναι σημαντικῶς μεγαλύτεραι τοῦ βάρους.

5. Εἰς πιεστήριον διὰ μοχλῶν ἐξασκεῖται θλιπτικὴ δύναμις $Q = 600\ \mathrm{kp}$. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις F, ὅταν ἡ γωνία $\alpha = 10^\circ$;



Σχ. 5·2 στ.

Πιεστήριον διὰ μοχλῶν: α) Διάταξις. β) Δυναμοπολύγωνον φορτίου. γ) Δυναμοπολύγωνον δυνάμεως F.

Λύσις:

Γραφική [σχ. 5·2 στ (β) καὶ (γ)].

Κλῖμαξ σχεδιάσεως $\kappa = 200\ \mathrm{kp/cm}$.

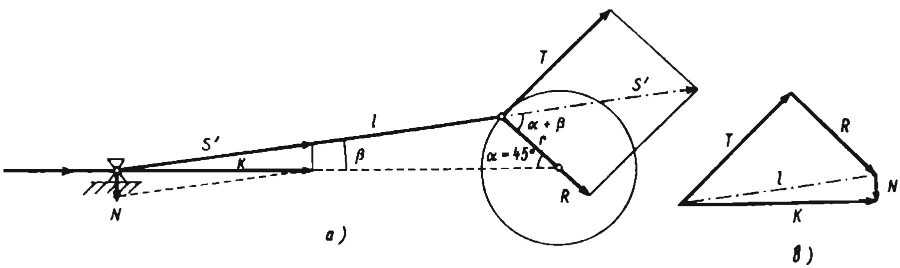
Τὸ δυναμοτρίγωνον:
διὰ τὸ σημεῖον B [σχ. 5·2 στ (β)] δίδει S_1 (κ·3,1 cm) = 620 kp,
διὰ τὸ σημεῖον C [σχ. 5·2 στ (γ)] δίδει F (κ·1,0 cm) = 200 kp.

(Ἡ ὁριζοντία δύναμις N παραλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ ὁδηγοῦ B).

Ἀναλυτική.

$$S = Q/\text{συν}\ 10^\circ = 600/0{,}985\ \text{kp} = 610\ \text{kp}.$$
$$F = 2S \cdot \text{ημ}\ 10^\circ = 1220 \times 0{,}174\ \text{kp} = 212\ \text{kp}.$$

6. Εἰς μηχανισμὸν στροφάλου-διωστῆρος-ἐμβόλου (σχ. 5·2 ζ) ἡ δύναμις τοῦ ἐμβόλου K ἀναλύεται εἰς τὴν δύναμιν S κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ διωστῆρος καὶ εἰς τὴν κάθετον δύναμιν N. Περαιτέρω, ἡ κατὰ



Σχ. 5·2 ζ.
Μηχανισμὸς στροφάλου-διωστῆρος-ἐμβόλου:
α) Διάταξις. β) Δυναμοπολύγωνον (Μέθοδος Culmann).

τὴν διεύθυνσιν τοῦ διωστῆρος δύναμις S ἀναλύεται, εἰς τὸ κομβίον τοῦ στροφάλου, εἰς τὴν ἀξονικὴν δύναμιν R καὶ εἰς τὴν ἐφαπτομενικὴν T. Ποῖαι αἱ τιμαὶ τῶν N, R καὶ T εἰς τὴν θέσιν τοῦ μηχανισμοῦ, ποὺ παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 5·2 ζ (Γωνία στροφάλου α = 45°), ἐὰν ἡ δύναμις τοῦ ἐμβόλου ἰσοῦται πρὸς 10 Mp καὶ ἡ σχέσις:

Μῆκος στροφάλου : Μῆκος διωστῆρος

ἔχει τὴν τιμὴν $r : l = 1{,}5$.

Λύσις :

Γραφική.

Αὐτὴ δύναται νὰ γίνῃ ἢ κεχωρισμένως διὰ τὸν σταυρὸν καὶ τὸ κομβίον τοῦ στροφάλου [σχ. 5·2 ζ (α)] ἢ διὰ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς τῆς μεθόδου τοῦ Culmann [σχ. 5·2 ζ (β)]. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα τοῦ Culmann συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ διωστῆρος, ἑνώνει τὰ σημεῖα τομῆς τῶν K καὶ N καὶ τῶν R καὶ T.

Εἰς κλίμακα δυνάμεων $\kappa = 2$ Mp/cm προκύπτει $K = 5$ cm. Διὰ τὰς συνιστώσας λαμβάνεται ἀντιστοίχως:

$$N = (\kappa \cdot 0{,}7 \text{ cm}) = 1{,}4 \text{ Mp},$$
$$R = (\kappa \cdot 3{,}0 \text{ cm}) = 6{,}0 \text{ Mp},$$
$$T = (\kappa \cdot 4{,}0 \text{ cm}) = 8{,}0 \text{ Mp}.$$

Ἀναλυτική.

Κατ' ἀρχὴν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ἡμιτόνων ὑπολογίζεται ἡ γωνία β:

$$\frac{\eta\mu\,\beta}{\eta\mu\,\alpha} = \frac{r}{l}, \quad \eta\mu\,\beta = \frac{1}{5}\,\eta\mu\,45^\circ = \frac{0{,}707}{5} = 0{,}1414, \quad \beta = 8^\circ\,8'.$$

Ὅταν $\varepsilon\varphi\,\beta = 0{,}1429$ καὶ ἀντιστοίχως $\sigma\upsilon\nu\,\beta = 0{,}99$, λαμβάνονται:

$$N = K \cdot \varepsilon\varphi\,\beta = 10 \times 0{,}1429 \text{ Mp} = 1{,}4 \text{ Mp},$$
$$S = K/\sigma\upsilon\nu\,\beta = 10/0{,}99 \text{ Mp} = 10{,}1 \text{ Mp}.$$

Ἡ μεταξὺ τῶν δυνάμεων S καὶ R σχηματιζομένη γωνία ἰσοῦται πρὸς $\alpha + \beta = 53^\circ\,8'$, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου. Ἔτσι ὑπολογίζονται αἱ:

$$R = S \cdot \sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta) = 10{,}1 \times 0{,}6 \text{ Mp} = 6{,}1 \text{ Mp},$$
$$T = S \cdot \eta\mu\,(\alpha + \beta) = 10{,}1 \times 0{,}8 \text{ Mp} = 8{,}1 \text{ Mp}.$$

Ἐκ τῶν προηγηθέντων παραδειγμάτων ἐμφαίνεται ὅτι ἡ γραφικὴ μέθοδος προσφέρει μὲν ὀλιγώτερον ἀκριβῆ, ἀλλὰ ἐποπτικὴν καὶ πολλάκις ταχυτέραν λύσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

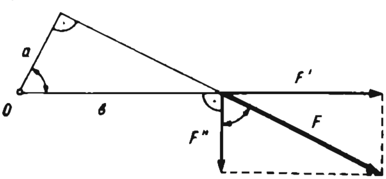
ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ, ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΦΟΡΕΙΣ ΔΕΝ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΕΝΑ ΚΑΙ ΤΟ ΑΥΤΟ ΣΗΜΕΙΟΝ

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ μεγέθους (μέτρου) καὶ τῆς διευθύνσεως τῆς συνισταμένης ἰσχύουν οἱ αὐτοί, ὡς εἰς τὸ Κεφάλαιον 4, κανόνες. Κατὰ τὸν καθορισμὸν ὅμως τῆς θέσεως τῆς συνισταμένης πρέπει νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν εἰδικαὶ συνθῆκαι. Ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπὶ μέρους δυνάμεων οὐδεὶς περιορισμὸς ὑφίσταται.

6·1 Θεώρημα τῶν ροπῶν.

Ἡ συνισταμένη τότε καὶ μόνον ἔχει πραγματικῶς τὴν αὐτὴν ἐπενέργειαν μὲ τὰς ἐπὶ μέρους δυνάμεις, ὅταν καὶ ἡ ροπή, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ αὐτὴ ἐπὶ τοῦ σώματος, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν ἐπὶ μέρους δυνάμεων. Πρέπει λοιπὸν νὰ πληροῦται καὶ ἡ ἑξῆς προϋπόθεσις (σχετικῶς μὲ τὴν ταυτότητα τῶν ἐπενεργειῶν μεταξὺ συνισταμένης καὶ συνιστωσῶν): *Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν, ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον O νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον* (Θεώρημα τῶν Ροπῶν).

Καὶ ἀντιστρόφως: *Ἡ ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν της ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*



Σχ. 6·1.
Ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν.

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν ἀποδεικνύεται εὐκόλως τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν. Ἐὰν π.χ. ἀναλύσωμεν τὴν δύναμιν F (σχ. 6·1) εἰς τὰς συνιστώσας της F′ καὶ F″ καὶ σχηματίσωμεν τὰς ροπὰς ὡς πρὸς τὸ ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς F′ κείμενον σημεῖον Ο, τότε ἡ συνιστῶσα F′ (μηδενικῆς καθέτου ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ σημείου Ο) ἔχει μηδενικὴν ροπήν. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν πρέπει νὰ ἰσχύῃ:

$$F \cdot \alpha = F' \cdot 0 + F'' \cdot \beta \quad \text{ἢ} \quad F \cdot \alpha = F'' \cdot \beta.$$

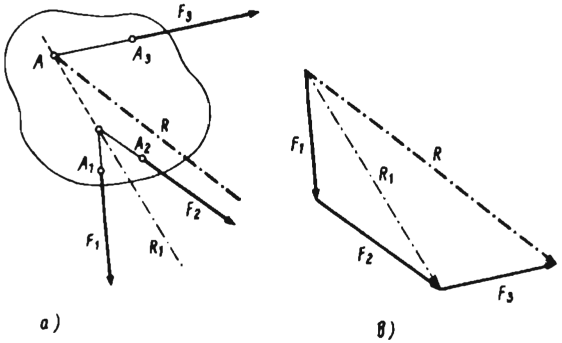
Ἀπόδειξις τῆς τελευταίας σχέσεως δίδεται διὰ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τοῦ σχήματος 6·1:

$$F : F'' = \beta : \alpha, \text{ ἑπομένως πράγματι } F \cdot \alpha = F'' \cdot \beta.$$

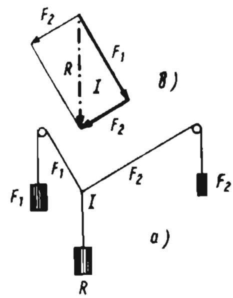
6·2 Γραφικὴ λύσις.

α) Μέγεθος καὶ κατεύθυνσις τῆς συνισταμένης.

Εἰς περίπτωσιν περισσοτέρων πρὸς σύνθεσιν δυνάμεων [αἱ θέσεις τῶν ὁποίων δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα 6·2 α (α)], ἡ γραφικὴ λύσις



Σχ. 6·2 α.
Σύνθεσις περισσοτέρων ἐπὶ μέρους δυνάμεων, μὲ διάφορα σημεῖα ἐφαρμογῆς:
α) Φορεῖς τῶν δυνάμεων. β) Δυναμοπολύγωνον.



Σχ. 6·2 β.
α) Φορτιζόμενον σχοινίον. β) Παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων.

γίνεται μὲ τὸ δυναμοπολύγωνον [σχ. 6·2 α (β)], ὅπου τὸ μέγεθος καὶ ἡ κατεύθυνσις τῆς συνισταμένης προκύπτουν κατὰ τὸν ἤδη περιγραφέντα τρόπον (παράγρ. 4·1).

β) Θέσις τῆς συνισταμένης.

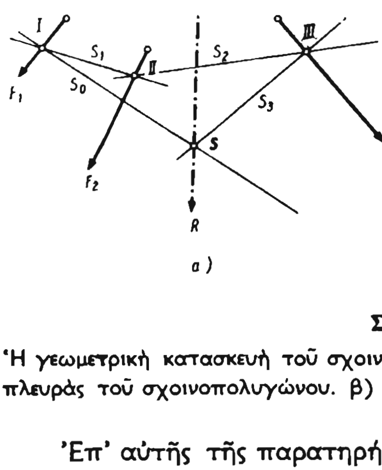
Ἡ θέσις τῆς συνισταμένης ἐν σχέσει πρὸς τὸ σῶμα ἢ ἀντιστοίχως ἡ θέσις τοῦ φορέως της εἰς τὸ διάγραμμα θέσεων δύναται νὰ προσδιορισθῇ καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον [σχ. 6·2 α (α)]:

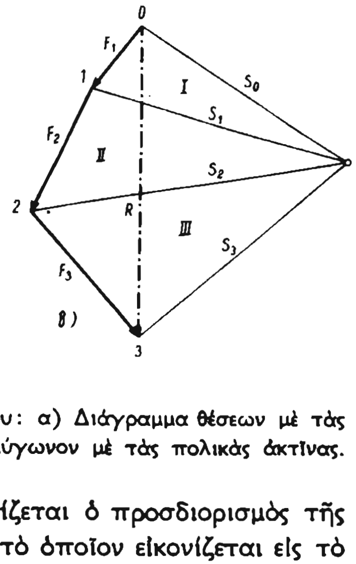
Προσδιορισμὸς τοῦ σημείου τομῆς τῶν φορέων F_1 καὶ F_2, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ ὁ φορεὺς τῆς R_1. Ἐν συνεχείᾳ εὕρεσις τοῦ σημείου τομῆς τῶν R_1 καὶ F_3, διὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ διέρχεται ὁ φορεὺς τῆς R.

Κατὰ τὴν ὡς ἄνω μέθοδον, ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς σύνθεσιν δυνάμεων, τόσον ὀλιγώτερον ἐποπτικὴ εἶναι ἡ λύσις. Δι' αὐτὸ περιγράφεται κατωτέρω μία ἄλλη μέθοδος γενικῆς ἐφαρμογῆς διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῆς συνισταμένης.

γ) Δυναμοπολύγωνον καὶ Σχοινοπολύγωνον.

Σχοινίον περιβάλλει δύο τροχαλίας καὶ φορτίζεται κατὰ τὸν εἰς τὸ σχῆμα 6·2 β (α) εἰκονιζόμενον τρόπον, διὰ τῶν βαρῶν F_1, F_2 καὶ R. Τὰ ἐπὶ μέρους τμήματα τοῦ σχοινίου λαμβάνουν τὰς αὐτὰς διευθύνσεις, ὅπως αἱ δυνάμεις εἰς παραλληλόγραμμον ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς δυνάμεις F_1, F_2 καὶ R [σχ. 6·2 β (β)]. Οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων, οἱ ὁποῖοι εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον σχηματίζουν τρίγωνον, τέμνονται εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχοινίου εἰς τὸ σημεῖον (I).





Σχ. 6·2 γ.

Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ σχοινοπολυγώνου: α) Διάγραμμα θέσεων μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ σχοινοπολυγώνου. β) Δυναμοπολύγωνον μὲ τὰς πολικὰς ἀκτῖνας.

Ἐπ' αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως βασίζεται ὁ προσδιορισμὸς τῆς συνισταμένης διὰ τοῦ *σχοινοπολυγώνου*, τὸ ὁποῖον εἰκονίζεται εἰς τὸ σχῆμα 6·2 γ (α).

Αἱ εἰς τὸ διάγραμμα θέσεων [σχ. 6·2 γ (α)] εἰκονιζόμεναι δυνάμεις F_1, F_2, F_3, συντιθέμεναι ἐν σειρᾷ εἰς δυναμοπολύγωνον [σχ. 6·2 γ (β)], δίδουν, κατὰ τὸν ἤδη ἐκτεθέντα τρόπον (παράγρ. 4·1), τὸ *μέγεθος* καὶ τὴν *διεύθυνσιν* τῆς συνισταμένης των R.

Ὅσον δὲ ἀφορᾷ εἰς τὴν θέσιν τῆς συνισταμένης, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Ἐκλέγεται τυχαῖον σημεῖον O ὀνομαζόμενον *πόλος* τοῦ δυναμοπολυγώνου καὶ φέρονται [σχ. 6·2 γ (β)] ἐξ αὐτοῦ αἱ ἀκτῖνες (πολικαὶ ἀκτῖνες) O0 (S_0), O1 (S_1), O2 (S_2), O3 (S_3), ἐνῷ εἰς τὸ διάγραμμα θέσεων τῶν φορέων [σχ. 6·2 γ (α)] φέρονται εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὰς πολικὰς ἀκτῖνας S_0, S_1, S_2, S_3, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται *πλευραὶ* τοῦ σχοινοπολυγώνου, κατὰ τὸν κάτωθι τρόπον: Ἡ πλευρὰ S_0 διέρχεται διὰ τοῦ αὐθαιρέτως λαμβανομένου σημείου I, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς δυνάμεως F_1. Διὰ τοῦ σημείου I διέρχεται ἡ S_1, ποὺ τέμνει τὴν F_2 εἰς τὸ σημεῖον II. Διὰ τοῦ σημείου II διέρχεται ἡ S_2, ποὺ τέμνει τὴν δύναμιν F_3 εἰς τὸ σημεῖον III. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῆς πρώτης μὲ τὴν τελευταίαν πλευρὰν (ἐδῶ S_0 καὶ S_1) διέρχεται ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης R. Ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης, ἡ ὁποία καθορίζεται ἐκ τοῦ δυναμοπολυγώνου.

Συμφώνως πρὸς τὰ προηγουμένως ἀναφερθέντα (σχ. 6·2 β) πρέπει αἱ πλευραί, τῶν ὁποίων αἱ παράλληλοι εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον σχηματίζουν μὲ μίαν δύναμιν τρίγωνον, νὰ τέμνωνται εἰς τὸ διάγραμμα θέσεων ἐπὶ τῆς αὐτῆς δυνάμεως. Εἰς τὰ τρίγωνα I, II, III τοῦ δυναμοπολυγώνου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ διάγραμμα θέσεων τὰ σημεῖα τομῆς I, II, III [σχ. 6·2 γ (α)]. Ἕνεκα τούτου πρέπει αἱ πλευραὶ S_0 καὶ S_3, αἱ ὁποῖαι εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον σχηματίζουν τρίγωνον μετὰ τῆς συνισταμένης, νὰ δίδουν διὰ τοῦ σημείου τομῆς των ἕνα σημεῖον τῆς συνισταμένης ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θέσεων.

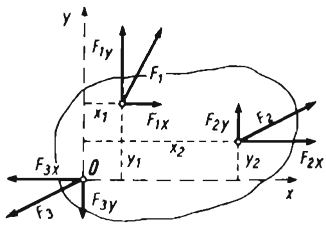
Ἡ μέθοδος τοῦ σχοινοπολυγώνου δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ δι' ὁσασδήποτε δυνάμεις, καθὼς ἐπίσης καὶ διὰ σύνθεσιν παραλλήλων δυνάμεων. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν τὸ δυναμοπολύγωνον καταντᾷ εὐθύγραμμον τμῆμα.

6·3 Ἀναλυτικὴ λύσις.

α) Μέγεθος καὶ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης.

Ὡς περιγράφεται εἰς τὴν παράγραφον 4·2, αἱ ἐπὶ μέρους δυνάμεις ἀναλύονται εἰς συνιστώσας κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀξόνων x καὶ y (σχ. 6·3 α), τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτῶν τῶν συνιστωσῶν δίδει τὰς κατὰ τοὺς αὐτοὺς ἄξονας συνιστώσας τῆς συνισταμένης, δηλαδὴ ἰσχύει:

$$R_x = \Sigma F_x = \Sigma F \cdot \text{συν}\,\alpha,$$
$$R_y = \Sigma F_y = \Sigma F \cdot \text{ημ}\,\alpha,$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$



Σχ. 6·3 α.

ʼΑναλυτικὸς προσδιορισμὸς τῆς συνισταμένης δι' ἀναλύσεως τῶν ἐπὶ μέρους δυνάμεων εἰς συνιστώσας κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y.

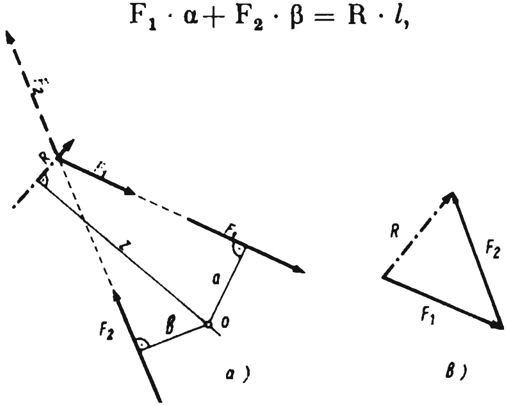
β) Θέσις τῆς συνισταμένης.

Τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν:

$$\boxed{M_R = \Sigma M_F}$$

δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῆς συνισταμένης. Ἔτσι, συμφώνως πρὸς τοὺς συμβολισμοὺς τοῦ σχήματος 6·3 β, πρέπει νὰ ἰσχύη ἡ σχέσις :

$$F_1 \cdot \alpha + F_2 \cdot \beta = R \cdot l,$$



Σχ. 6·3 β.

Γραφικὸς καὶ ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τῆς συνισταμένης : α) Διάγραμμα θέσεων. β) Δυναμοπολύγωνον.

διὰ τῆς ὁποίας ὑπολογίζεται ἡ ἀπόστασις l τῆς συνισταμένης ἀπὸ τοῦ σημείου ἀναφορᾶς τῶν ροπῶν (κέντρου ροπῶν). Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν δυνάμεων εἰς συνιστώσας κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς συνισταμένης διὰ τῶν συνιστωσῶν x_R καὶ y_R τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της.

Πρὸς μείωσιν τῆς ὑπολογιστικῆς ἐργασίας, λαμβάνεται ὡς κέντρον ροπῶν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς μιᾶς δυνάμεως, ὥστε ἡ ροπὴ αὐτῆς νὰ μηδενίζεται. Ἔτσι π.χ. διὰ χρήσεως τῶν συμβόλων τοῦ σχήματος 6·3 α λαμβάνεται :

$$y_1 \cdot F_{1x} + y_2 \cdot F_{2x} = y_R \cdot R_x$$

καὶ ἀντιστοίχως,

$$x_1 \cdot F_{1y} + x_2 \cdot F_{2y} = x_R \cdot R_y .$$

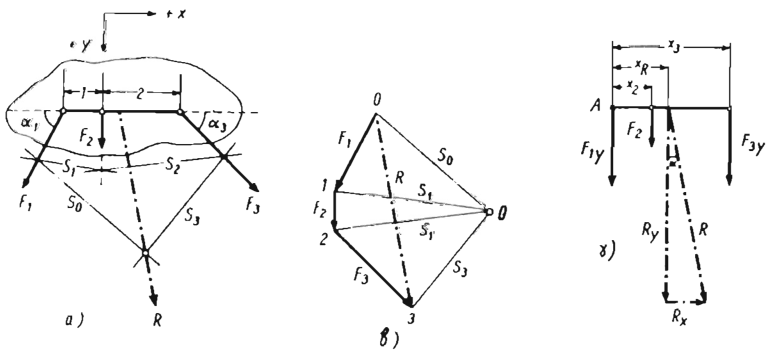
Γενικῶς ἰσχύει :

$$y_R \cdot R_x = \sum y \cdot F_x \quad \text{καὶ} \quad x_R \cdot R_y = \sum x \cdot F_y ,$$

ἐκ τῶν ὁποίων ὑπολογίζονται αἱ συντεταγμέναι x_R καὶ y_R.

Παράδειγμα.

Νὰ προσδιορισθῇ γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων [σχ. 6·3 γ (α)]. $F_1 = 224$ kp ($\alpha_1 = 63{,}5°$), $F_2 = 100$ kp ($\alpha_2 = 90°$), $F_3 = 283$ kp ($\alpha_3 = 45°$).



Σχ. 6·3 γ.

Γραφικὸς καὶ ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς συνισταμένης.

Λύσις :

Γραφική.

Μὲ κλίμακα $\kappa = 100$ kp/cm σχεδιάζεται τὸ δυναμοπολύγωνον [σχ. 6·3 γ (β)], ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται ἡ διεύθυνσις καὶ τὸ μέγεθος τῆς R. Ἡ θέσις της προσδιορίζεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχοινοπολυγώνου.

Ἀναλυτική.

Ἡ θετικὴ φορὰ καθορίζεται ἐκ τῆς διευθύνσεως τῶν ἀξόνων τοῦ σχήματος 6·3 γ (α):

$$R_x = \Sigma F_x = - F_1 \cdot \text{συν}\,\alpha_1 + 0 + F_3 \cdot \text{συν}\,\alpha_3,$$

$$R_x = (-224 \times 0{,}446 + 283 \times 0{,}707)\ \text{kp} = (-100 + 200)\ \text{kp} =$$
$$= +100\ \text{kp}.$$

$$R_y = \Sigma F_y = + F_1 \cdot \text{ημ}\,\alpha_1 + F_2 \cdot \text{ημ}\,\alpha_2 + F_3 \cdot \text{ημ}\,\alpha_3.$$

$$R_y = (224 \times 0{,}895 + 100 \times 1 + 283 \times 0{,}707)\ \text{kp} =$$
$$= (200 + 100 + 200)\ \text{kp} = 500\ \text{kp}.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{100^2 + 500^2}\ \text{kp} = 100\sqrt{26}\ \text{kp} = 510\ \text{kp}.$$

$$\text{Θέσις τῆς } R: \quad M_R = \Sigma M_F\,.$$

Μὲ κέντρον ροπῶν τὸ σημεῖον A [σχ. 6·3 γ (γ)] λαμβάνονται:

α) Αἱ ροπαὶ ὅλων τῶν κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x συνιστωσῶν, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον A, ποὺ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν.

β) Αἱ ροπαὶ τῶν κατὰ τὸν ἄξονα τῶν y συνιστωσῶν:

$$x_R \cdot R_y = F_2 \cdot x_2 + F_{3y} \cdot x_3,$$

$$x_R \cdot 500 = 100 \times 1 + 200 \times 3, \qquad x_R = \frac{700}{500} = 1{,}4.$$

Διὰ τοῦ x_R ὁρίζεται ἡ θέσις τῆς συνισταμένης. Ἡ κατεύθυνσίς της προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{R_x}{R_y} = \frac{100}{500} = 0{,}2, \qquad \alpha = 11' \,18'.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ συστήματος συνεπιπέδων δυνάμεων ἀποτελεῖ τὸ σύστημα παραλλήλων δυνάμεων.

7·1 Σύνθεσις παραλλήλων δυνάμεων.

Ἡ σύνθεσις ἐπιτελεῖται γραφικῶς ἢ καὶ ἀναλυτικῶς.

α) Γραφικὴ λύσις.

Ἡ σύνθεσις παραλλήλων δυνάμεων εἰς μίαν συνισταμένην ὡς καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῆς θέσεώς της, ἐπιτυγχάνεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ δυναμοπολυγώνου καὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου κατὰ τὸν ἤδη ἀναφερθέντα τρόπον (παράγρ. 6·2 γ). Τὸ δυναμοπολύγωνον εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν καταντᾶ μία εὐθεῖα. Ἡ θέσις τοῦ πόλου ἐκλέγεται κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ ἀποφεύγωνται ὅσον εἶναι δυνατὸν τομαὶ εὐθειῶν ὑπὸ ὀξεῖαν γωνίαν. (Προτιμοτέρα εἶναι π.χ. μία θέσις, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀμφότεραι αἱ ἐξωτερικαὶ πολικαὶ ἀκτῖνες σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν).

β) Ἀναλυτικὴ λύσις.

Ἡ συνισταμένη ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν:

$$R = \Sigma F.$$

Ἡ θέσις της προσδιορίζεται κατὰ τὰ γνωστά, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν:

$$\alpha_R \cdot R = \Sigma \alpha F.$$

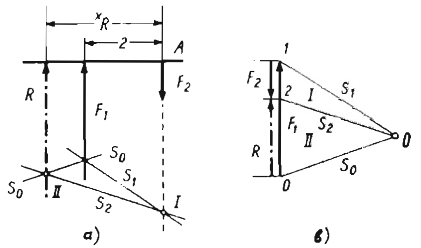
Παράδειγμα.

Νὰ προσδιορισθῇ γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $F_1 = +300$ kp καὶ $F_2 = -100$ kp [(σχ. 7·1 (α)]

Λύσις :

Γραφική ($\kappa = 100$ kp/cm).

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ παραλλήλων δυνάμεων, τὸ δυναμοπολύγωνον καταλήγει νὰ εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα [σχ. 7·1 (β)]. Τὸ τμῆμα 01 ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δύναμιν F_1, τὸ 12 πρὸς τὴν F_2



Σχ. 7·1.
Συνισταμένη παραλλήλων δυνάμεων.

καὶ τὸ 02 πρὸς τὴν συνισταμένην R. Αἱ εὐθεῖαι S_0 καὶ S_1 τέμνονται ἐπὶ τῆς F_1, αἱ δὲ S_2 καὶ S_1 ἐπὶ τῆς F_2 εἰς τὸ σημεῖον I. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν S_0 καὶ S_2 (II) διέρχεται ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης.

Ἀναλυτική.

Μέγεθος τῆς συνισταμένης (ἡ F_1 λαμβάνεται θετικῆς φορᾶς):

$$R = F_1 - F_2 = (300 - 100) \text{ kp} = +200 \text{ kp}.$$

Ἡ κατεύθυνσίς της R εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς F_1.

Θέσις τῆς συνισταμένης :

Ροπαὶ ὡς πρὸς A (ἡ ροπὴ τῆς F_1 λαμβάνεται θετική):

$$x_R \cdot R = F_1 \cdot 2, \qquad x_R = \frac{300 \times 2}{200} = 3.$$

Ἡ ροπὴ τῆς R εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἄρα ὁμόσημος πρὸς τὴν ροπὴν τῆς F_1.

Ἐκ τοῦ σχήματος 6·3 γ (γ) (y-συνιστῶσαι) καὶ ἐκ τοῦ σχήματος 7·1 συνάγεται ὅτι :

Ἡ συνισταμένη δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων κεῖται πάντοτε ἐντὸς τοῦ μεταξὺ τῶν δυνάμεων διαστήματος, ἐνῶ ἡ συνισταμένη δύο παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων κεῖται πάντοτε ἐκτὸς τοῦ μεταξὺ τῶν δυνάμεων διαστήματος.

7·2 Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς δύο παραλλήλους πρὸς αὐτὴν δυνάμεις μὲ δοθείσας εὐθείας ἐνεργείας.

α) Γραφικὴ λύσις.

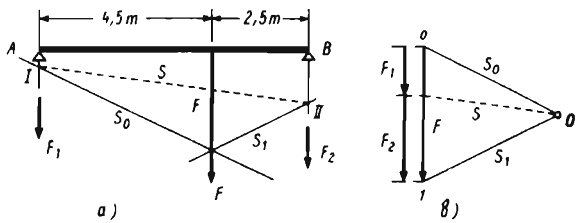
Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ μὲ τὸ δυναμοπολύγωνον καὶ τὸ σχοινοπολύγωνον. Ἡ παράλληλος πρὸς τὴν κλείουσαν τὸ σχοινοπολύγωνον πολικὴ ἀκτὶς τοῦ δυναμοπολυγώνου ἀναλύει τὴν δοθεῖσαν δύναμιν F εἰς τὰς δύο συνιστώσας της (βλέπε τὸ κατωτέρω παράδειγμα).

β) Ἀναλυτικὴ λύσις.

Εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος γίνεται ἐπίσης χρῆσις τοῦ θεωρήματος τῶν ῥοπῶν. Τὸ ἑπόμενον παράδειγμα συμβάλλει εἰς τὴν κατανόησιν τῆς μεθόδου.

Παράδειγμα.

Δοκὸς ἑδραζομένη διὰ τῶν ἄκρων της φορτίζεται μὲ δύναμιν $F = 700$ kp [σχ. 7·2 (α)]. Ζητοῦνται αἱ ὡς πρὸς τὴν F παράλληλοι δυνάμεις F_1 καὶ F_2, αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται ἐπὶ τῶν ἑδράσεων τῆς δοκοῦ.



Σχ 7·2.
Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς παραλλήλους πρὸς αὐτὴν συνιστώσας.

Λύσις :

Γραφική.

Σχεδιάζεται ἡ F κατὰ τὸ μέγεθος (μέτρον) καὶ τὴν διεύθυνσίν της [σχ. 7·2 (β)]. Ἐκ τοῦ ἐκλεγέντος ὡς πόλου σημείου O ἄγονται αἱ πολικαὶ ἀκτῖνες S_0 καὶ S_1 καθὼς καὶ αἱ ἀντιστοίχως παράλληλοι πλευραὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἐπὶ τῆς F. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς (I) τῆς S_0 μετὰ τοῦ φορέως τῆς F_1 καὶ τοῦ σημείου τομῆς (II) τῆς S_1 μετὰ τοῦ φορέως τῆς F_2 ὁρίζεται ἡ πλευρὰ S τοῦ σχοινοπολυγώνου, ἡ ὁποία, μεταφερομένη παραλλήλως ὡς πολικὴ ἀκτίς, χωρίζει τὴν ἀπόστασιν 01 τῆς F εἰς τὰ τμήματα F_1 καὶ F_2. Ἐδῶ ἡ F_1 κεῖται μεταξὺ τῶν πολικῶν ἀκτίνων S_0 καὶ S καὶ σχηματίζει μετ᾽ αὐτῶν τρίγωνον (διότι αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου τέμνονται ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς F_1). Ἀντιστοίχως ἡ F_2 εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν πολικῶν ἀκτίνων S καὶ S_1.

Ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν μηκῶν τῶν συνιστωσῶν προκύπτει:

$$F_1 = 250 \text{ kp}, \qquad F_2 = 650 \text{ kp}.$$

Ἀναλυτική.

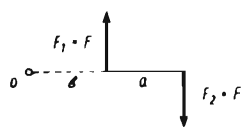
Μὲ κέντρον ροπῶν τὸ σημεῖον B λαμβάνεται:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \cdot 7 = F \cdot 2{,}5, \quad F_1 = \dfrac{2{,}5}{7} \times 700 \text{ kp} = 250 \text{ kp} \\ \text{Μὲ κέντρον ροπῶν τὸ σημεῖον A λαμβάνεται:} \\ F_2 \cdot 7 = F \cdot 4{,}5, \quad F_2 = \dfrac{4{,}5}{7} \times 700 \text{ kp} = 450 \text{ kp} \end{array}\right\} F_1 + F_2 = 700 \text{ kp}$$

7·3 Ζεῦγος δυνάμεων.

Τὸ ζεῦγος δυνάμεων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσας ἀλλὰ ἀντιθέτως κατευθυνομένας δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐπενεργοῦν ἐπὶ διαφορετικῶν σημείων ἑνὸς σώματος. Τὸ ζεῦγος προκαλεῖ ροπήν, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δυνάμεων ἐπὶ τὴν μεταξύ των κάθετον ἀπόστασιν. Ἡ σύνθεσις τῶν δυνάμεων ζεύγους εἰς μίαν συνισταμένην εἶναι ἀδύνατος.

Ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους δυνάμεων ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν ὡς πρὸς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δυνάμεων τοῦ



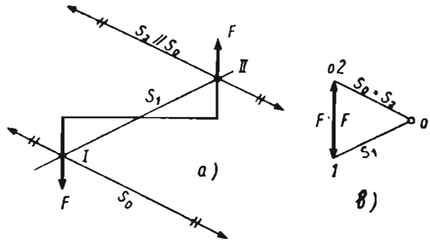
Σχ. 7·3 α.
Ζεῦγος δυνάμεων.

ζεύγους. Διὰ χρήσεως τῶν συμβόλων τοῦ σχήματος 7·3 α δίδεται ἡ ροπὴ τῶν ἴσων δυνάμεων F_1 καὶ F_2 ὡς πρὸς ἕνα τυχαῖον σημεῖον O ἀπὸ τῆς ἑξῆς σχέσιν:

$$M = F_2(\alpha + \beta) - F_1 \cdot \beta = F(\alpha + \beta - \beta) = F \cdot \alpha.$$

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἡ ἀπόστασις β ἀπαλείφεται, τὸ ζεῦγος δυνάμεων ἔχει ροπὴν τῆς αὐτῆς τιμῆς $(F \cdot \alpha)$ ὡς πρὸς τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του.

Ἰδιομορφίαν παρουσιάζουν ἐπίσης τὸ δυναμοπολύγωνον καὶ τὸ σχοινοπολύγωνον ζεύγους δυνάμεων (σχ. 7·3 β).



Σχ. 7·3 β.
Δυναμοπολύγωνον καὶ σχοινοπολύγωνον ζεύγους.

Τὸ δυναμοπολύγωνον [σχ. 7·3 β (β)] ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων ἀντιθέτως διευθυνομένων εὐθυγράμμων τμημάτων F (01 καὶ 12), τῶν ὁποίων ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας συμπίπτουν. Ἑπομένως τὸ δυναμοπολύγωνον εἶναι κλειστὸν καὶ δὲν δίδει συνισταμένην.

Ἂν σχεδιασθῇ τὸ σχοινοπολύγωνον [σχ. 7·3 β (α)] διαπιστοῦται ὅτι αἱ πλευραὶ S_2 καὶ S_0 εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, διότι συμπίπτουν αἱ ἀντίστοιχοι πολικαὶ ἀκτῖνες καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ σχοινοπολύγωνον δὲν *κλείει*. Τὸ χαρακτηριστικὸν λοιπὸν τοῦ ζεύγους δυνάμεων εἶναι : ***κλειστὸν δυναμοπολύγωνον ἀλλὰ ἀνοικτὸν σχοινοπολύγωνον.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ὅταν δὲν μεταβάλλεται ἡ κινητική του κατάστασις.

Εἰς τὴν Στατικήν, ὅπου ἐξετάζονται μόνον ἠρεμοῦντα σώματα, ἕνα σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὅταν εἶναι ἀκίνητον, ὅταν δηλαδὴ δὲν μετατοπίζεται, οὔτε περιστρέφεται.

Διὰ νὰ μὴ μετατοπίζεται ἕνα σῶμα, πρέπει τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν δυνάμεων, ποὺ δροῦν ἐπ' αὐτοῦ νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

$$\sum F = 0.$$

Διὰ νὰ μὴ περιστρέφεται ἕνα σῶμα, πρέπει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων, ποὺ δροῦν ἐπ' αὐτοῦ, ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον, νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν:

$$\sum M = 0.$$

Ἡ ὕπαρξις τῆς ἰσορροπίας διαπιστοῦται διὰ τῆς γραφικῆς ἢ διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου.

8·1 Γραφικαὶ συνθῆκαι ἰσορροπίας.

α) Ἰσορροπία δύο δυνάμεων.

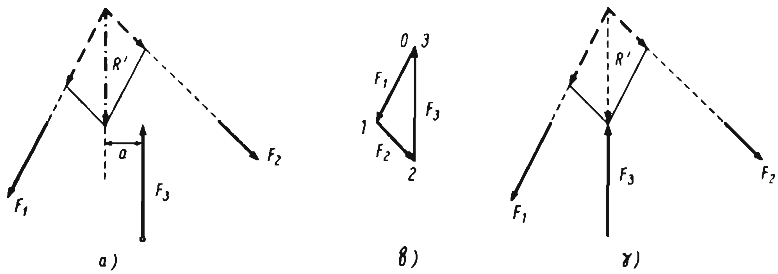
Δύο δυνάμεις εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, ὅταν εἶναι κατὰ μέγεθος ἴσαι, ἀλλὰ ἀντιθέτου κατευθύνσεως καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως. (Ἐὰν δὲν ἰσχύῃ ἡ τελευταία συνθήκη, τότε δημιουργεῖται ζεῦγος δυνάμεων).

β) Ἰσορροπία τριῶν δυνάμεων.

Τρεῖς δυνάμεις εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, ὅταν οἱ φορεῖς των τέμνωνται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἡ συνισταμένη των εἶναι μηδέν, δηλαδὴ τὸ δυναμοπολύγωνον εἶναι μὲ τὰς ὑπαρχούσας δυνάμεις κλειστόν.

Ἐὰν τριῶν δυνάμεων [σχ. 8·1 α (α)] οἱ φορεῖς δὲν τέμνωνται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ δύο ἐκ τῶν δυνάμεων (F_1 καὶ F_2)

δίδουν συνισταμένην R', τότε, διὰ νὰ εἶναι τὸ δυναμοπολύγωνον κλειστόν [σχ. 8·1 α (β)], πρέπει ἡ τρίτη δύναμις (F_3) νὰ εἶναι ἴση ἀλλὰ ἀντιθέτου κατευθύνσεως πρὸς τὴν συνισταμένην R' τῶν ἄλλων δύο δυνάμεων. Ἐὰν οἱ φορεῖς τῶν F_3 καὶ R' δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας [σχ. 8·1 α (α)], τότε σχηματίζεται ζεῦγος δυνάμεων, τὸ ὁποῖον θέτει τὸ σῶμα εἰς περιστροφήν.



Σχ. 8·1 α.
Γραφικαὶ συνθῆκαι ἰσορροπίας (τομὴ τῶν φορέων).

Ἄρα, διὰ νὰ ὑπάρχῃ πράγματι ἰσορροπία, πρέπει οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων F_3 καὶ R' νὰ συμπίπτουν [σχ. 8·1 α (γ)]. Τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι οἱ φορεῖς τῶν τριῶν δυνάμεων πρέπει νὰ τέμνωνται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Τὴν ἀνωτέρω χρησιμωτάτην εἰς τὴν τεχνικὴν συνθήκην ἰσορροπίας μεταξὺ τριῶν δυνάμεων διατυπώνομεν πάλιν ὡς ἑξῆς :

Οἱ φορεῖς τριῶν δυνάμεων εὑρισκομένων ἐν ἰσορροπίᾳ πρέπει νὰ τέμνωνται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ δὲ δυναπολύγωνόν των νὰ εἶναι κλειστόν.

γ) Ἰσορροπία περισσοτέρων τῶν τριῶν δυνάμεων.

Ἐδῶ διακρίνονται δύο περιπτώσεις, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων τέμνωνται εἰς ἕνα κοινὸν σημεῖον ἢ ὄχι.

Οἱ φορεῖς τέμνονται εἰς κοινὸν σημεῖον.

Ἐὰν αἱ δυνάμεις τέμνωνται εἰς κοινὸν σημεῖον, ἀποκλείεται προφανῶς ἡ δημιουργία ροπῆς καὶ συνεπῶς διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἰσορροπία ἐπαρκεῖ ἡ συνθήκη μὴ ὑπάρξεως συνισταμένης.

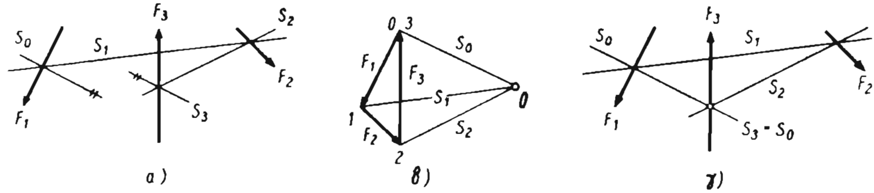
Ἡ γραφικὴ συνθήκη διατυποῦται ὡς ἑξῆς :

Τὸ δυναμοπολύγωνον πρέπει νὰ εἶναι κλειστόν.

Οἱ φορεῖς δὲν τέμνονται εἰς κοινὸν σημεῖον.

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἰσορροπία πρέπει νὰ πληροῦται ἡ πρόσθετος συνθήκη, δηλαδὴ ἡ συνθήκη μὴ ἐμφανίσεως ζεύγους δυνάμεων (τοῦ ὁποίου ἡ ῥοπὴ θὰ διετάρασσε τὴν ἰσορροπίαν).

Τὸ χαρακτηριστικὸν ζεύγους δυνάμεων εἶναι τὸ ἀνοικτὸν σχοινοπολύγωνον. Κατ' ἐπέκτασιν τὸ σχοινοπολύγωνον δυνάμεων δὲν κλείει, ὅταν αὐταὶ ἔχουν μηδενικὴν μὲν συνισταμένην δύναμιν, ἀλλὰ



Σχ. 8·1 β.

Γραφικὴ συνθήκη ἰσορροπίας (κλειστὸν σχοινοπολύγωνον):
α) Ἀνοικτὸν σχοινοπολύγωνον. β) καὶ γ) Κλειστὸν σχοινοπολύγωνον.

συντίθενται εἰς συνιστάμενον ζεῦγος. Ἔτσι τὰ σχήματα 8·1β (α) καὶ (γ) δεικνύουν τὰ σχοινοπολύγωνα διὰ τὰς θέσεις τῶν τριῶν δυνάμεων τῶν σχημάτων 8·1 α (α) καὶ (γ).

Αἱ γραφικαὶ συνθῆκαι ἰσορροπίας συνοψίζονται εἰς τὸ ὅτι:

Τὸ δυναμοπολύγωνον καὶ τὸ σχοινοπολύγωνον πρέπει νὰ εἶναι κλειστά.

8·2 Ἀναλυτικαὶ συνθῆκαι ἰσορροπίας.

Ὅπως κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον συνθέσεως δυνάμεων ἔτσι καὶ ἐδῶ αἱ δυνάμεις πρέπει νὰ ἀναλυθοῦν εἰς καθέτους μεταξύ των συνιστώσας, τῶν ὁποίων τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα διὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς δύο κατευθύνσεις νὰ εἶναι μηδέν. Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἤδη ἔχει αἰτιολογηθῆ, τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων σχετικῶς πρὸς τυχαῖον σημεῖον πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν, αἱ ἀναλυτικαὶ συνθῆκαι ἰσορροπίας ἐκφράζονται ὡς ἀκολούθως:

1. $\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0$

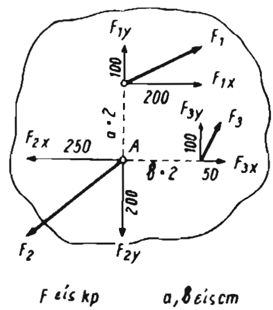
2. $\Sigma M = 0 \qquad (\text{ἢ}: \ \Sigma \overset{\frown}{M} = \Sigma \overset{\frown}{M})$*.

* Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν δεξιοστρόφων ῥοπῶν πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριστεροστρόφων ῥοπῶν.

Αἱ συνθῆκαι αὗται ἰσχύουν ἀνεξαρτήτως ἀριθμοῦ καὶ σχετικῆς θέσεως δυνάμεων καὶ κατὰ συνέπειαν παραλείπεται ἡ διάκρισις εἰς περιπτώσεις. Ἡ διάκρισις αὐτὴ εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν γραφικὴν διερεύνησιν τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας.

Παράδειγμα.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἀναλυτικῶς, ἂν εἰς τὸ σχῆμα 8·2 δυνάμεις εὑρίσκωνται ἐν ἰσορροπίᾳ.



Σχ. 8·2.
Ἀναλυτικαὶ συνθῆκαι ἰσορροπίας.

Λύσις :

Πρώτη συνθήκη :

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} - F_{2x} + F_{3x} = (200 - 250 + 50)\ \text{kp} = 0 \\ F_y &= F_{1y} - F_{2y} + F_{3y} = (100 - 200 + 100)\ \text{kp} = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{πληροῦται.}$$

Δευτέρα συνθήκη :

Κέντρον ροπῶν τὸ A:

$$\overset{\frown}{\Sigma M} = \quad F_{1x} \cdot a = \quad 200 \times 2\ \text{kpcm} = \quad 400\ \text{kpcm},$$

$$\overset{\frown}{\Sigma M} = -F_{3y} \cdot b = -100 \times 2\ \text{kpcm} = -200\ \text{kpcm}.$$

$$\overset{\frown}{\Sigma M} - \overset{\frown}{\Sigma M} \qquad\qquad = \quad 200\ \text{kpcm}.$$

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ τῶν ροπῶν παραμένει ὡς συνισταμένη ροπή.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ δευτέρα συνθήκη δὲν πληροῦται, ἄρα δὲν ὑφίσταται ἰσορροπία.

8·3 Παράλληλοι δυνάμεις.

Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν παραλλήλων δυνάμεων ἰσχύουν αἱ αὐταὶ συνθῆκαι ὡς καὶ κατὰ τὴν ἰσορροπίαν δυνάμεων, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς δὲν τέμνονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Αἱ παράλληλοι δυνάμεις ἀποτελοῦν λοιπὸν εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς παραγράφου 8·1 (γ), εἰς τὴν ὁποίαν τὸ δυναμοπολύγωνον συμπτύσσεται εἰς εὐθύγραμμον τμῆμα.

8·4 Ἰσορροπία δυνάμεων ἐπὶ στηριζομένης δοκοῦ.

Ἐκ τῶν συνηθεστέρων προβλημάτων τῆς Στατικῆς εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν δυνάμεων καὶ τῶν ροπῶν, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τῶν θέσεων ἐδράσεως ἢ στερεώσεως κατασκευῶν πρὸς ἐξισορρόπησιν τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων.

Αἱ δυνάμεις αὐταὶ ὀνομάζονται ἀντιδράσεις στηρίξεως ἢ ἁπλῶς ἀντιδράσεις, διατηροῦν δὲ τὴν ἰσορροπίαν δυνάμεων εἰς τὴν δοκόν, ὅταν αὐτὴ εὑρίσκεται ὑπὸ ἐξωτερικὸν φορτίον. Αἱ ἀντιδράσεις πρέπει νὰ παρίστανται πάντοτε κατὰ τὴν διεύθυνσιν, ποὺ δροῦν ἐπὶ τοῦ στηριζομένου σώματος.

α) Τρόποι στηρίξεως.

Κινηταὶ καὶ σταθεραὶ στηρίξεις.

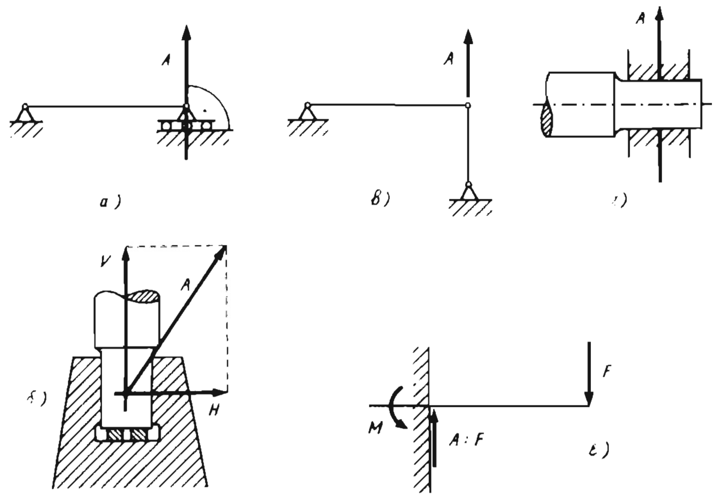
Ἐὰν ὁ φορεὺς τῆς ἀντιδράσεως ὁρίζεται μονοσημάντως ἐκ τῆς μορφῆς τῆς στηρίξεως, τότε ὁμιλοῦμεν περὶ ἁπλῆς ἐδράσεως. Αἱ στηρίξεις αὐτοῦ τοῦ τύπου ὀνομάζονται *κινηταὶ στηρίξεις* καὶ εἰς αὐτὰς ἀνήκουν π.χ. ἡ κύλισις [σχ. 8·4 α (α)], ἡ ἔδρασις δι' ἀμφιαρθρωτῆς ράβδου [σχ. 8·4 α (β)] καὶ ἡ ἔδρασις δι' ὀλισθήσεως [σχ. 8·4 α (γ)]. Ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὰς προηγουμένας στηρίξεις αἱ *σταθεραὶ στηρίξεις* εἰσάγουν δι' ἀρθρώσεως δύο συνιστώσας ἀντιδράσεις στηρίξεως [σχ. 8·4 α (δ)]. Ἕνα ἀκόμη εἶδος στηρίξεως εἶναι ἡ πάκτωσις, εἰς τὴν ὁποίαν πλὴν τῆς δυνάμεως στηρίξεως δρᾷ καὶ ροπὴ (*ροπὴ πακτώσεως*).

Στατικῶς ὡρισμένη καὶ στατικῶς ἀόριστος στήριξις.

Διὰ τῶν τριῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας τῆς Στατικῆς προσδιορί-

$$\Sigma Fx = 0, \qquad \Sigma Fy = 0, \qquad \Sigma M = 0.$$

ζονται μόνον τρεῖς ἀντιδράσεις στηρίξεως. Ἐὰν αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι ἰσορροπίας ἐπαρκοῦν πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως, τότε ἡ στήριξις λέγεται *στατικῶς ὡρισμένη*. Ἐὰν πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως δὲν ἀρκοῦν μόνον αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας, ἡ στήριξις ὀνομάζεται *στατικῶς ἀόριστος*.



Σχ. 8·4 α.

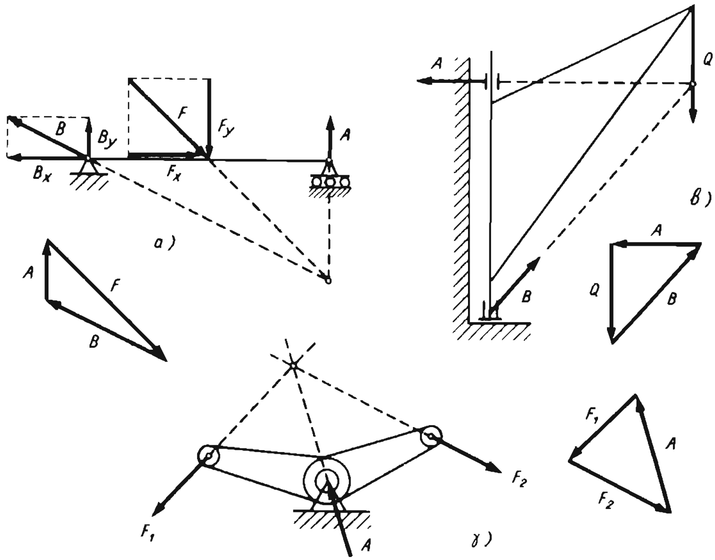
Τρόποι στηρίξεως:

Ἀπὸ α) ἕως γ) Ἁπλαῖ ἑδράσεις: α) Ἕδρανον κυλίσεως. β) Ἕδρασις δι' ἀμφιαρθρωτῆς ῥάβδου. γ) Ἕδρανον ὀλισθήσεως. δ) Σταθερὰ ἄρθρωσις. ε) Πάκτωσις.

Αἰτία αὐτῆς τῆς (*ἐξωτερικῆς*) ἀοριστίας εἶναι κατὰ κανόνα ἡ ὕπαρξις στηριγμάτων περισσοτέρων τῶν ἀπαραιτήτων (π.χ. φορεὺς ἐπὶ τριῶν στηριγμάτων). Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις αἱ ἀπαραίτητοι ἐξισώσεις λαμβάνονται, ὅταν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ παραμορφώσεις τῆς δοκοῦ (βλ. Τόμον Β).

β) Προσδιορισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως

Αἱ ἀντιδράσεις στατικῶς ὡρισμένων στηρίξεων ὑπολογίζονται εὐκόλως διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας ἡ προϋπόθεσις, ὅτι οἱ φορεῖς τριῶν ἐν ἰσορροπίᾳ δυνάμεων πρέπει νὰ τέμνωνται ἐπὶ ἑνὸς σημείου. Τὸ σχῆμα 8·4β (α) δεικνύει δοκόν, τῆς ὁποίας τὸ ἕνα ἄκρον φέρεται ἐπὶ κυλιομένου ἑδράνου Α, τὸ δὲ ἄλλο ἀρθροῦται εἰς τὸ Β. Ἐπειδὴ ἡ ἕδρασις κυλίσεως παραλαμβάνει δυνάμεις μόνον καθέτους πρὸς τὴν διεύθυνσιν κυλίσεως, καθορίζεται ἀμέσως ὁ φορεὺς τῆς ἀντιδράσεως στηρίξεως Α. Ὁ φορεὺς τῆς ἀντιδράσεως Β πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν φορέων F καὶ Α (συνθήκη ἰσορροπίας). Δεδομένου δὲ ὅτι αἱ κατευθύνσεις ὅλων τῶν δυνάμεων εἶναι ἤδη γνωσταί, δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν σχεδίασιν τοῦ δυναμοπολυγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτουν τὰ μεγέθη τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως Α καὶ Β δι' ἑκάστην δεδομένην δύναμιν F.



Σχ. 8·4 β.

Προσδιορισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως:
α) Δοκὸς μετ' ἀρθρώσεως καὶ κυλίσεως, Α κύλισις, Β ἄρθρωσις. β) Περιστροφικὸς γερανὸς τοίχου μετὰ κινητοῦ καὶ σταθεροῦ ἑδράνου. γ) Μοχλὸς μὲ δύο βραχίονας.

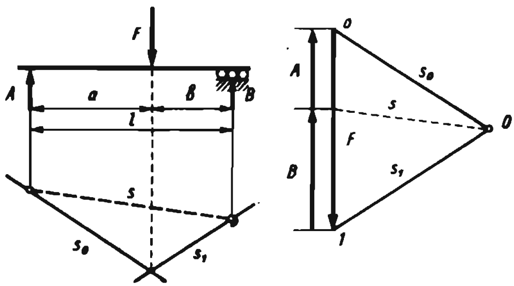
Τὸ σχῆμα 8·4 β (β) δεικνύει τὰς συνθήκας στηρίξεως εἰς περιστροφικὸν γερανὸν τοίχου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ γερανοῦ ἡ διεύθυνσις τῆς ἀντιδράσεως Α εἶναι ὡρισμένη, διότι ἡ ἄνω ἕδρασις (ἕδρανον ὀλισθήσεως) τῆς στήλης τοῦ γερανοῦ δύναται νὰ παραλαμβάνη μόνον ὁριζοντίας δυνάμεις. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν φορέων τῶν Α καὶ Q πρέπει νὰ διέρχεται καὶ ὁ φορεὺς τῆς Β. Οὕτω σχεδιάζεται τὸ πολύγωνον καὶ προσδιορίζονται τὰ μεγέθη Α καὶ Β.

Τὸ σχῆμα 8 4 β (γ) δεικνύει τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀντιδράσεως εἰς τὸ ὑπομόχλιον μοχλοῦ μὲ δύο βραχίονας, ὁ ὁποῖος φορτίζεται διὰ τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2. Ὁ φορεὺς τῆς ἀντιδράσεως A πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν φορέων τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2.

Μία ἰδιαιτέρως συνήθης περίπτωσις εἶναι αὐτὴ τῆς ὁριζοντίας δοκοῦ ὑπὸ κατακόρυφον φόρτισιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσονται μόνον κατακόρυφοι ἀντιδράσεις. Κατωτέρω θὰ περιγραφῇ συντόμως ὁ γραφικὸς καὶ ὁ ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως αὐτῆς τῆς δοκοῦ.

Γραφικὴ λύσις.

Αἱ πλευραὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου S_0 καὶ S_1 (σχ. 8·4 γ), αἱ ὁποῖαι ἤχθησαν ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πολικὰς ἀκτῖνας S_0 καὶ S_1, τέμνονται μὲν ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς F, τέμνουν ὅμως καὶ τοὺς φορεῖς τῶν πρὸς προσδιορισμὸν ἀντιδράσεων, A ἢ S_0 καὶ B ἢ S_1, εἰς δύο σημεῖα. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ὁρίζουν τὴν θέσιν τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία κλείει τὸ σχοινοπολύγωνον. Διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς τῆς εὐθείας αὐτῆς εἰς θέσιν πολικῆς ἀκτῖνος τοῦ δυναμοπολυγώνου προσδιορίζονται τὰ μεγέθη τῶν ἀντιδράσεων A καὶ B. Αἱ ἀντιδράσεις A καὶ B κατευθύνονται πρὸς τὰ ἄνω, διότι πρέπει τὰ βέλη των νὰ δεικνύουν πρὸς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον O τοῦ δυναμοπολυγώνου. Ἐπίσης πρέπει ἡ B μετὰ τῶν S καὶ S_1 νὰ σχηματίζῃ τρίγωνον, ἐπίσης δὲ καὶ ἡ A μετὰ τῶν S καὶ S_0.



Σχ. 8·4 γ.
Ὁριζοντία δοκὸς ὑπὸ κατακόρυφον φορτίον.

Παραδείγματα εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ Ἀντοχῆς Ὑλικῶν.

Ἀναλυτικὴ λύσις.

Αἱ ροπαὶ ὡς πρὸς τὰς στηρίξεις A καὶ B δίδουν:

$$\Sigma M_B = 0, \qquad A \cdot l - F \cdot \beta = 0, \qquad A = F \cdot \frac{\beta}{l},$$

$$\Sigma M_A = 0, \qquad B \cdot l - F \cdot \alpha = 0, \qquad B = F \cdot \frac{\alpha}{l}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

Θεωροῦμεν μᾶζαν διανεμημένην ὁμοιομόρφως ἐπὶ γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν ἐν συνεχείᾳ τεμαχίζομεν. Τὰ βάρη τῶν τεμαχίων, ποὺ προκύπτουν, ἀποτελοῦν παραλλήλους δυνάμεις, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς διέρχονται διὰ τῶν κέντρων βάρους των, ἡ δὲ συνισταμένη των διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους ὁλοκλήρου τῆς γραμμῆς ἢ ἀντιστοίχως ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ γραμμὴ ἢ ἡ ἐπιφάνεια τεμαχίζεται κατὰ τρόπον, ὥστε τὰ προκύπτοντα τεμάχια νὰ ἔχουν γνωστὰς θέσεις κέντρων βάρους (π.χ. εὐθύγραμμον τμῆμα, ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τρίγωνον, τραπέζιον).

Κατὰ τὴν διαίρεσιν εἰς δύο τεμάχια ἡ γραμμὴ συνδέσεως τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο τεμαχίων ἀποτελεῖ *κεντροβαρικὸν ἄξονα*. Ἐπὶ τῆς τομῆς δύο κεντροβαρικῶν ἀξόνων κεῖται τὸ κέντρον βάρους τοῦ συνόλου.

Ἐὰν ἀναρτήσωμεν ἕνα σῶμα ἐκ τοῦ κέντρου βάρους του, τοῦτο παραμένει ἐν ἠρεμίᾳ. Δὲν εἶναι ἀπαραίτητον τὸ κέντρον βάρους γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

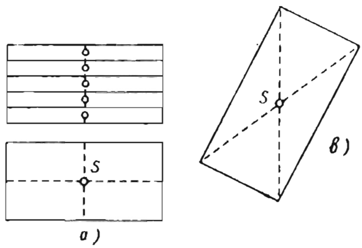
9·1 Ἁπλαῖ περιπτώσεις.

Κεντροβαρικὸς ἄξων εἶναι λοιπὸν κάθε εὐθεῖα, ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους. Εἰς τὰ βασικὰ γεωμετρικὰ σχήματα ὑπάρχουν κεντροβαρικοὶ ἄξονες, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν δι' ἁπλῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν (ὡς αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου, αἱ διάμεσοι τριγώνου κ.λπ.).

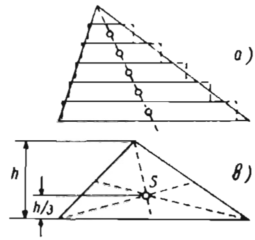
Εὐθύγραμμον τμῆμα. Τὸ κέντρον βάρους μάζης ὁμοιομόρφως κατανεμημένης ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον του [σχ. 9·1 α(α)].

Χαρακτηριστικοὶ κεντροβαρικοὶ ἄξονες εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν αἱ διὰ τοῦ κέντρου του ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς εὐθεῖαι, διότι αὗται συνδέουν τὰ κέντρα βάρους τῶν ἐπὶ μέρους ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων [σχ. 9·1 α (α)], ἀφ' ἑτέρου δὲ αἱ διαγώνιοι [σχ. 9·1 α (β)], διότι αὗται εἶναι χαρακτηριστικοὶ κεντροβαρικοὶ ἄξονες τῶν ἐπὶ μέρους τριγώνων (βλ. κατωτέρω).



Σχ. 9·1 α.



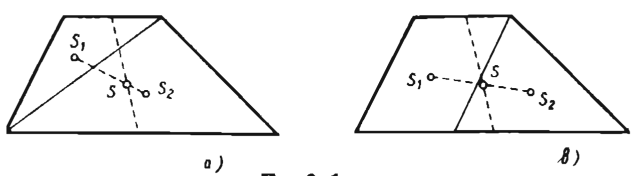
Σχ. 9·1 β.

Κέντρα βάρους ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.
α) Ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. β) Τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς ἄνω λόγους τὸ κέντρον βάρους παραλληλογράμμου εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαγωνίων του.

Τρίγωνον. Ἕνα τρίγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μικρὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἡ συνδετικὴ γραμμὴ τῶν κέντρων βάρους των δίδει ἕνα χαρακτηριστικὸν κεντροβαρικὸν ἄξονα τοῦ τριγώνου, ὁ ὁποῖος συνδέει τὸ μέσον τῆς μιᾶς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφήν. Τὸ σημεῖον τομῆς δύο κεντροβαρικῶν ἀξόνων δίδει τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου [σχ. 9·1 β (β)]. Τὸ κέντρον βάρους διαιρεῖ τοὺς χαρακτηριστικοὺς κεντροβαρικοὺς ἄξονας εἰς τμήματα λόγου 1:2 καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1/3 τοῦ ὕψους ὑπεράνω τῆς βάσεως.

Τραπέζιον. Ἕνας χαρακτηριστικὸς κεντροβαρικὸς ἄξων λαμβά-



Σχ. 9·1 γ.

Τραπέζιον: α) Ἀνάλυσις εἰς δύο τρίγωνα. β) Ἀνάλυσις εἰς τρίγωνον καὶ παραλληλόγραμμον.

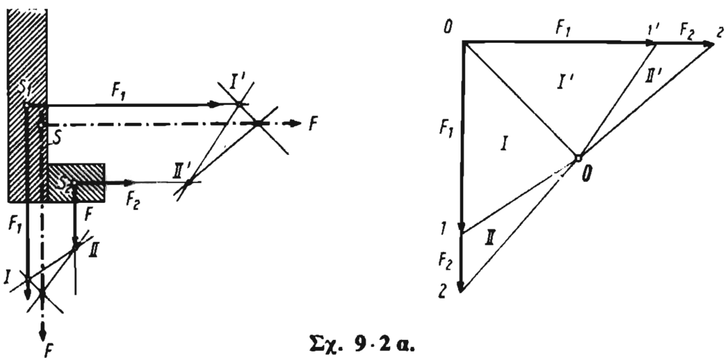
νεται, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τριγώνου, ἐκ τῆς εὐθείας, ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν. Ὁ κεντροβαρικὸς ἄξων προσδιορίζεται διὰ χωρισμοῦ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τραπεζίου εἰς δύο τρίγωνα καὶ διὰ συνδέσεως τῶν κέντρων βάρους S_1 καὶ S_2 αὐτῶν [σχ. 9·1 γ (α)]. Ἐξ ἄλλου εἶναι δυνατὴ ἡ διαίρεσις εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον καὶ εἰς ἕνα τρίγωνον. Μία ἀκόμη μέθοδος θὰ ἀναπτυχθῇ εἰς τὸν Β' Τόμον.

9·2 Γραμμαὶ καὶ σύνθετοι ἐπιφάνειαι.

α) Γραφικὸς προσδιορισμός.

Εἰς γραμμὰς καὶ συνθέτους ἐπιφανείας εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν φορέων τῶν συνισταμένων τῶν παραλλήλων δυνάμεων βάρους δι' ἐφαρμογῆς τοῦ σχοινοπολυγώνου καὶ τοῦ δυναμοπολυγώνου ὡς πρὸς δύο οἱασδήποτε διευθύνσεις (συνήθως καθέτους μεταξύ των). Ἐπὶ τοῦ σημείου τομῆς τῶν δύο φορέων εὑρίσκεται τὸ κέντρον βάρους.

Τὴν σχετικὴν ἐφαρμογὴν εἰς μίαν σύνθετον ἐπιφάνειαν δεικνύει τὸ σχῆμα 9·2 α. Ἡ ἐπιφάνεια διαιρεῖται εἰς τὰ τμήματα F_1 καὶ F_2.



Σχ. 9·2 α.
Κέντρον βάρους συνθέτου ἐπιφανείας.

Μετὰ τὴν ἐκλογὴν κλίμακος πρὸς παράστασιν ἐπιφανείας ὑπὸ μορφὴν εὐθυγράμμου τμήματος σχεδιάζεται ἕνα δυναμοπολύγωνον κατὰ τὴν ὁριζοντίαν καὶ ἕνα κατὰ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν, εἰς καθένα ἐκ τῶν ὁποίων συμμετέχουν μόνον αἱ F_1 καὶ F_2 (αἱ ὁποῖαι, ἐπειδὴ εἶναι παράλληλοι, συμπίπτουν εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον). Ἐκ τυχαίως ἐκλεγέντος πόλου O, ἄγονται αἱ πολικαὶ ἀκτῖνες καὶ παραλλήλως πρὸς αὐτὰς αἱ πλευραὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καθορίζονται, κατὰ τὴν ὁριζοντίαν καὶ κατακόρυφον διεύθυνσιν, οἱ φορεῖς (κεντροβαρικοὶ ἄξονες) τῶν συνισταμένων, τῶν ὁποίων τὸ σημεῖον τομῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ κέντρου βάρους.

β) Ἀναλυτικὸς προσδιορισμός.

Ὁ ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου βάρους γίνεται διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν συντεταγμένων (x_S, y_S) αὐτοῦ.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν $M_R = \Sigma M_F$. Ἔτσι λαμβάνεται σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων συντεταγμένων καὶ σχηματίζονται, ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, αἱ ροπαί:

Εἰς γραμμάς:

$x_S \cdot R = \Sigma\,(x \cdot S)$ ἀντιστοίχως $y_S \cdot R = \Sigma\,(y \cdot S)$.

Εἰς ἐπιφανείας:

$x_S \cdot R = \Sigma\,(x \cdot F)$ ἀντιστοίχως $y_S \cdot R = \Sigma\,(y \cdot F)$.

Ὅπου — ὡς κατὰ τὴν γραφικὴν μέθοδον — R τὸ συνολικὸν βάρος, S καὶ F τὰ βάρη τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὅτι δροῦν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν x καὶ y ἀντιστοίχως. (Δὲν γίνεται ἀνάλυσις εἰς x — καὶ y — συνιστώσας).

Ἐὰν ἡ γραμμὴ ἢ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς ἄξονα, τότε τὸ κέντρον βάρους της κεῖται ἐπ' αὐτοῦ, διότι ὁ ἄξων συμμετρίας εἶναι ταυτοχρόνως καὶ κεντροβαρικὸς ἄξων. Ἐὰν ὁ ἄξων συμμετρίας ληφθῇ ὡς ἕνας ἀπὸ τοὺς ἄξονας τοῦ ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, π.χ. ὁ ἄξων τῶν y, τότε ἔχομεν $x_S = 0$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπαιτεῖται ὁ προσδιορισμὸς μόνον τῆς συντεταγμένης y τοῦ κέντρου βάρους.

Τὰ κέντρα βάρους γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν δύνανται εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις νὰ προσδιορισθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν *κανόνων τοῦ Guldin*, οἱ ὁποῖοι κυρίως ἐφαρμόζονται πρὸς ὑπολογισμὸν ἐπιφανείας καὶ ὄγκου σωμάτων ἐκ περιστροφῆς. Οἱ κανόνες αὐτοὶ ἔχουν ὡς ἑξῆς:

1ος Κανών. Τὸ ἐμβαδὸν F ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους l τῆς γενετείρας γραμμῆς ἐπὶ τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον διατρέχει τὸ κέντρον βάρους της:

$$\boxed{F = l \cdot 2\pi \cdot r_S}$$

2ος Κανών. Ὁ ὄγκος V σώματος ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας A, διὰ περιστροφῆς τῆς ὁποίας δημιουργεῖται τὸ σῶμα, ἐπὶ τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον διατρέχει τὸ κέντρον βάρους της:

$$\boxed{V = A \cdot 2\pi \cdot r_S}$$

Εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς r_S εἶναι ἡ ἀπόστασις, ποὺ ὁρίζει τὴν θέσιν τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς.

Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια (ἢ ἀντιστοίχως ὁ ὄγκος) σώματος ἐκ περιστροφῆς δύναται νὰ ὑπολογισθῆ δι' ἄλλης ἁπλῆς μεθόδου καὶ εἶναι γνωστὸν τὸ μῆκος (ἢ ἀντιστοίχως ἡ ἐπιφάνεια) τῆς γενετείρας, ἡ ὁποία διὰ περιστροφῆς δημιουργεῖ τὸ σῶμα, τότε εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τοῦ κέντρου βάρους βάσει τῶν κανόνων τοῦ Guldin. (Ἐφαρμογὴ εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα 4).

(Εὕρεσις καὶ ἀπόδειξις τῶν κανόνων τοῦ Guldin περιγράφεται εἰς τὸν Β' Τόμον).

Παραδείγματα.

1. Νὰ προσδιορισθῆ γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς τὸ κέντρον βάρους τῆς εἰς τὸ σχῆμα 9·2 β (α) ἐπιφανείας.

Δεδομένου ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἕνα κατακόρυφον ἄξονα συμμετρίας, αὐτὸς εἶναι ταυτοχρόνως καὶ κεντροβαρικὸς ἄξων.

Ἄρα ἀπαιτεῖται νὰ προσδιορισθῆ μόνον ὁ ὁριζόντιος κεντροβαρικὸς ἄξων.

Λύσις:

Γραφική.

Ἡ ἐπιφάνεια διαιρεῖται εἰς δύο ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἄνω ἔχει ἐπιφάνειαν 5 cm^2 καὶ τὸ κάτω 4 cm^2. Εἰς τὸ κέντρον βάρους των ἐφαρμόζονται αἱ συνιστῶσαι των «δυνάμεις». Μὲ κλίμακα «δυνάμεων» $\kappa = 2\ cm^2/cm$ σχεδιάζεται τὸ δυναμοπολύγωνον, ἄγονται αἱ πολικαὶ ἀκτῖνες [σχ. 9·2 β (β)] καὶ αἱ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς αὐτὰς πλευραὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου [σχ. 9·2 β (α)]. Αἱ πλευραὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου S_0 καὶ S_2 δίδουν διὰ τοῦ σημείου τομῆς των ἕνα σημεῖον τοῦ κεντροβαρικοῦ ἄξονος. Τὸ σημεῖον τομῆς αὐτοῦ μὲ τὸν κατακόρυφον κεντροβαρικὸν ἄξονα εἶναι τὸ κέντρον βάρους τῆς συνθέτου ἐπιφανείας.

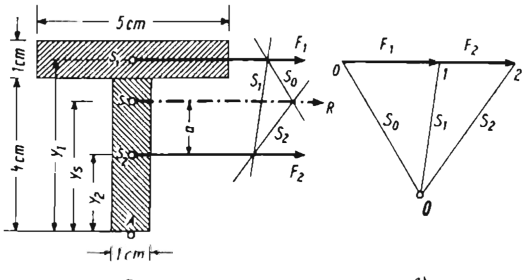
'Αναλυτική.

$$R = F_1 + F_2 = (5+4)\ cm^2 = 9\ cm^2.$$

"Αν τὸ σημεῖον A ληφθῇ ὡς κέντρον ροπῶν (σχ. 9·2 β), προκύπτει:

$$y_S \cdot R = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$$

$$y_S = \frac{5 \times 4{,}5 + 4 \times 2}{9}\ cm = \frac{30{,}5}{9}\ cm = 3{,}4\ cm.$$



Σχ. 9·2 β.

Προσδιορισμὸς κέντρου βάρους ἐπιφανείας συμμετρικῆς ὡς πρὸς ἄξονα: α) Διάταξις τῶν δυνάμεων καὶ σχοινοπολύγωνον. β) Δυναμοπολύγωνον.

'Εὰν ὡς κέντρον ροπῶν ληφθῇ τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς τῶν τμημάτων, π.χ. τὸ S_2, τότε μηδενίζεται ἡ ροπὴ τῆς F_2 καὶ προκύπτει:

$$\alpha \cdot R = F_1 \cdot 2{,}5 \qquad \alpha = \frac{5 \times 2{,}5}{9} = 1{,}4\ cm.$$

2. 'Εὰν ἡ διατομή, τῆς ὁποίας ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου βάρους, δὲν ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας, πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ περιγραφεῖσα εἰς τὴν παράγραφον 9·2(α) γενικὴ μέθοδος [σχ. 9·2(γ)].

Λύσις:

Γραφική.

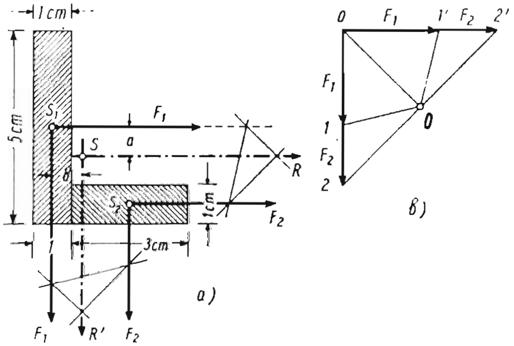
Εἰς τὸ σχῆμα 9·2 γ (α) ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῶν 8 cm^2 διαμοιράζεται εἰς δύο τμήματα, ἕνα 5 cm^2 καὶ ἕνα 3 cm^2. Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰς ἐπιφανείας ταύτας δυνάμεις τοποθετοῦνται εἰς ἕνα ὁριζόντιον καὶ ἕνα κατακόρυφον δυναμοπολύγωνον. Διὰ τῶν πλευρῶν τοῦ σχοινοπολυγώνου προσδιορίζεται ἡ θέσις μιᾶς ὁριζοντίας καὶ μιᾶς κατακορύφου συνισταμένης, δηλαδὴ τῶν δύο κεντροβαρικῶν ἀξόνων R καὶ R', διὰ τῆς τομῆς τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ὁλοκλήρου τῆς διατομῆς.

Ἀναλυτική. [Συμβολισμοὶ ὡς εἰς σχ. 9·2 γ (α)].

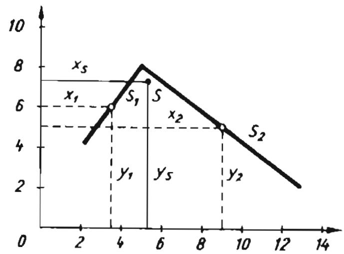
Κέντρον ῥοπῶν τὸ σημεῖον S_1: $\quad R = R' = 8\ cm^2$.

$$\alpha \cdot R = F_2 \cdot 2 \qquad \alpha = \frac{3 \times 2}{8}\ cm = 0{,}75\ cm,$$

$$\beta \cdot R = F_2 \cdot 2 \qquad \beta = \frac{3 \times 2}{8}\ cm = 0{,}75\ cm.$$



Σχ. 9·2 γ.
Προσδιορισμὸς κέντρου βάρους ἀσυμμέτρου ἐπιφανείας: α) Διάταξις τῶν δυνάμεων καὶ σχοινοπολύγωνον. β) Δυναμοπολύγωνον.



Σχ. 9·2 δ.
Προσδιορισμὸς κέντρου βάρους τεθλασμένης γραμμῆς.

3. Νὰ ὑπολογισθῇ ἀναλυτικῶς τὸ κέντρον βάρους τῆς εἰς τὸ σχῆμα 9·2 δ τεθλασμένης γραμμῆς.

Λύσις:

Βάσει τοῦ ἐκλεγέντος συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων συντεταγμένων λαμβάνεται:

$$\begin{array}{llll} \text{διὰ} & S_1 = \ \ 5\ cm & x_1 = 3{,}5\ cm & y_1 = 6\ cm \\ \text{»} & \underline{S_2 = 10\ cm} & x_2 = 9{,}0\ cm & y_2 = 5\ cm, \\ & S \ = 15\ cm & & \end{array}$$

ὁπότε προκύπτει: $\quad x_S \cdot R = \Sigma\,(y \cdot S)$,

$$x_S = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S} = \frac{6 \times 5 + 5 \times 10}{15}\ cm = 5{,}33\ cm.$$

$$y_S \cdot R = \Sigma\,(x \cdot S),$$

$$y_S = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S} = \frac{3{,}5 \times 5 + 9 \times 10}{15}\ cm = 7{,}17\ cm.$$

4. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ἡμικυκλικοῦ τόξου καὶ ἐπιφανείας ἡμικυκλίου, διὰ χρήσεως τῶν κανόνων τοῦ Guldin.

Λύσις:

α) Ἡμικυκλικὸν τόξον.

Ἐὰν περιστραφῇ ἡμικυκλικὸν τόξον ($l = \pi \cdot r$) περὶ τὴν διάμετρόν του, προκύπτει, ὡς ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ($F = 4\pi \cdot r^2$). Κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα λαμβάνεται:

$$F = l \cdot 2\pi \cdot r_S, \quad 4\pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot 2\pi \cdot r_S, \quad r_S = \frac{2}{\pi}\, r = 0{,}6366\, r.$$

β) Ἐπιφάνεια ἡμικυκλίου.

Ἡ περιστροφὴ ἐπιφανείας ἡμικυκλίου ($A = \pi/2 \cdot r^2$) δίδει ὡς σῶμα ἐκ περιστροφῆς σφαῖραν ($V = 4\pi/3 \cdot r^3$). Βάσει τοῦ δευτέρου κανόνος:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot r_S, \quad \frac{4\pi \cdot r^3}{3} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot 2\pi \cdot r_S, \quad r_S = \frac{4}{3\pi} \cdot r = 0{,}4244\, r.$$

Ἄρα διὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἡμικυλίου ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους της ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὰ δύο τρίτα τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἡμικυκλικοῦ τόξου ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

9·3 Κέντρον βάρους σώματος.

Τὸ κέντρον βάρους γεωμετρικῶν σωμάτων (στερεῶν) προσδιορίζεται ἄνευ ὑπολογισμῶν μόνον εἰς τὰς ἁπλουστέρας τῶν περιπτώσεων (π.χ. σφαῖρα, πρῖσμα, κύλινδρος). Τὰ κέντρα βάρους τῶν ἄλλων στερεῶν ὑπολογίζονται τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ (βλ. Τόμος Β′). Κατωτέρω δίδονται ἄνευ ὑπολογισμοῦ τὰ κέντρα βάρους ὡρισμένων στερεῶν.

Σφαῖρα.

Κάθε διάμετρος εἶναι καὶ κεντροβαρικὸς ἄξων. Τὸ κέντρον βάρους εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Πρῖσμα καὶ κύλινδρος μὲ παραλλήλους βάσεις.

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα βάρους τῶν βάσεων, εἶναι ἕνας κεντροβαρικὸς ἄξων τοῦ στερεοῦ. Τὸ μέσον τοῦ ἄξονος εἶναι καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ στερεοῦ.

Ἡμισφαίριον.

Ὁ γεωμετρικὸς ἄξων τοῦ ἡμισφαιρίου εἶναι καὶ ὁ κεντροβαρικός του ἄξων. Τὸ κέντρον βάρους ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου κατὰ $3/8\,R = 0{,}375\,R$.

Παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς (γενέτειρα ἡ δευτεροβάθμιος παραβολή).

Ὁ γεωμετρικὸς ἄξων εἶναι ἕνας κεντροβαρικὸς ἄξων. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ στερεοῦ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $h/3 = 0{,}333\,h$ ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως.

Πυραμὶς καὶ κῶνος.

Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὴν κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον βάρους τῆς βάσεως εἶναι κεντροβαρικὸς ἄξων. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ στερεοῦ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $h/4$ ὑπεράνω τῆς βάσεως.

Τὸ κέντρον βάρους στερεοῦ καὶ τὸ κέντρον βάρους μιᾶς διατομῆς, ποὺ περιέχει ἄξονα συμμετρίας, συμπίπτουν μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν σφαίρας, κυλίνδρου καὶ πρίσματος. Τοῦτο ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα ποὺ ἀκολουθεῖ, ὅπου ἀντιπαρατίθενται αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων βάρους ἐκ τῆς γραμμῆς βάσεως τῆς διατομῆς καὶ ἐκ τῆς βάσεως τοῦ στερεοῦ.

Διατομή	Στερεὸν σῶμα	Κέντρον βάρους διατομῆς	Κέντρον βάρους στερεοῦ σώματος
Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον	Κύλινδρος	0,5 h	0,5 h
Ἡμικύκλιον	Ἡμισφαίριον	0,424 h	0,375 h
Παραβολή	Παραβολοειδὲς	0,4 h	0,333 h
Τρίγωνον	Κῶνος	0,333 h	0,25 h

Προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου βάρους σώματος ἐπιτυγχάνεται ἐπίσης πειραματικῶς διὰ καθορισμοῦ δύο κεντροβαρικῶν ἀξόνων, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὁποίων δίδει τὴν θέσιν τοῦ κέντρου βάρους, ὡς τοῦτο θὰ δειχθῇ εἰς τὸ ἑπόμενον παράδειγμα.

Παράδειγμα.

Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τοῦ κέντρου βάρους ὀχήματος ἐκ τῶν φορτίων εἰς τοὺς ἄξονάς του (σχ. 9·3).

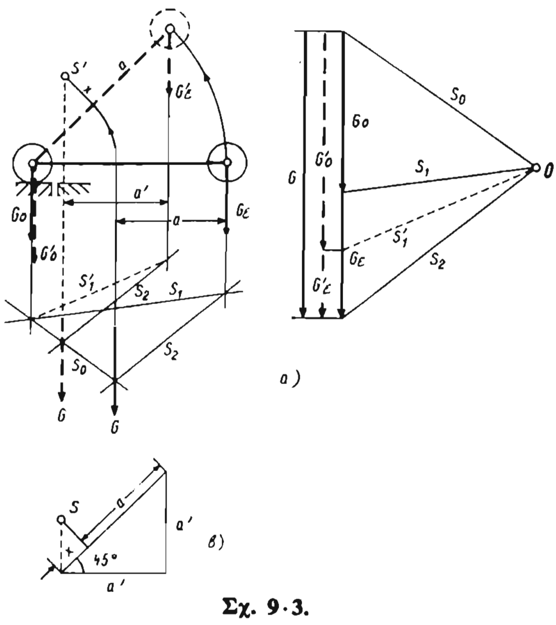
Αἱ διὰ γεφυροπλάστιγγος μετρηθεῖσαι φορτίσεις εἰς τοὺς ἄξονας ὀχήματος, ἀποστάσεως τροχῶν $l = 2{,}5$ m, ἦσαν κατὰ τὴν ὁριζοντίαν θέσιν τοῦ ὀχήματος:

Εἰς ὀπίσθιον ἄξονα $G_o = 850$ kp. Εἰς ἐμπρόσθιον ἄξονα $G_\varepsilon = 650$ kp. Δι' ἀνυψώσεως τοῦ ὀχήματος ἐκ τοῦ ἐμπροσθίου ἄξονος μέχρι τῆς κλίσεως τῶν 45°, ἡ G_o ἀνῆλθεν εἰς $G_o' = 1150$ kp. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὀχήματος γραφικῶς καὶ ἀναλυτικῶς.

Λύσις :

Γραφική.

Τὸ ἄθροισμα τῶν φορτίων εἰς τοὺς ἄξονας (δηλαδὴ ἡ συνισταμένη) ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὀχήματος. Σχεδιάζονται τὰ δυ-



Σχ. 9·3.

Προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου βάρους ὀχήματος:
α) Διὰ γραφικῆς λύσεως. β) Δι' ἀναλυτικῆς λύσεως.

ναμοπολύγωνα καὶ τὰ σχοινοπολύγωνα, μὲ G_o, G_ε διὰ τὴν ὁριζοντίαν καὶ G_ε', G_o' διὰ τὴν κεκλιμένην θέσιν καὶ λαμβάνεται ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης G κατὰ τὰς δύο θέσεις τοῦ ὀχήματος (ὅπου α, α' ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ προσθίου ἄξονος). Διὰ μεταφορᾶς τοῦ φορέως τῆς G ἐκ τῆς ὁριζοντίας εἰς τὴν κεκλιμένην θέσιν, λαμβάνεται τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὀχήματος, ὡς σημεῖον τομῆς τῶν δύο φορέων. Δι' ἀκριβοῦς ἀναγνώσεως ὑπὸ κλίμακα λαμβάνεται τὸ ὕψος x τοῦ κέντρου βάρους ὑπεράνω τοῦ ἄξονος, ἴσον πρὸς $x \approx 0{,}5$ m.

'Αναλυτική.

Μὲ βάρος ὀχήματος $G = (850 + 650)$ kp $= 1500$ kp, ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν λαμβάνεται :

$$G_o \cdot l = G \cdot \alpha, \qquad \alpha = \frac{G_o}{G} \cdot l = \frac{850}{1500} \times 2{,}5 \text{ m} = 1{,}42 \text{ m}.$$

$$G'_o \cdot l \cdot \eta\mu\, 45^o = G \cdot \alpha', \qquad \alpha' = \frac{1150}{1500} \times 2{,}5 \times 0{,}707 \text{ m} = 1{,}35 \text{ m}.$$

'Εκ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κάθετον τὴν α' καὶ ὑποτείνουσαν τὴν $\alpha + x$ [σχ. 9·3 (β)] λαμβάνεται ἡ σχέσις:

$$(\alpha + x)^2 = 2\alpha'^2 \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad \alpha + x = \alpha' \sqrt{2},$$

$$x = (1{,}35\sqrt{2} - 1{,}42) \text{ m} = (1{,}91 - 1{,}42) \text{ m} = 0{,}49 \text{ m}.$$

* 9·4 Εὐστάθεια καὶ ἀσφάλεια ἔναντι ἀνατροπῆς.

Εἰς ὑψίκορμα σώματα στηριζόμενα ἐπὶ ὁριζοντίας βάσεως διακρίνονται αἱ θέσεις *ὀρθὴ* καὶ *πλαγία* (ἐνῶ εἰς ἰσοδιάστατα σώματα, ὡς π.χ. ὁ κύβος, δὲν ὑπάρχει τοιαύτη διάκρισις). Καὶ αἱ δύο (ὀρθὴ καὶ πλαγία) εἶναι θέσεις εὐσταθοῦς ἰσορροπίας. Ἡ μεταξύ των διαφορὰ συνίσταται εἰς τὸ ὅτι τὸ σῶμα μεταβαίνει εὐκολώτερον ἐκ τῆς ὀρθίας εἰς τὴν πλαγίαν θέσιν παρὰ ἀντιστρόφως ἢ κατ' ἄλλην ἔκφρασιν: Ὄρθιον σῶμα δύναται νὰ ἀνατραπῇ περὶ μίαν ἀκμήν του.

'Απαραίτητος συνθήκη, διὰ νὰ μὴ ἀνατρέπεται σῶμα, εἶναι ἡ ἑξῆς : ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης ὅλων τῶν δυνάμεων, ποὺ ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ σώματος (μὴ συμπεριλαμβανομένων τῶν ἀντιδράσεων), νὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον στηρίξεως ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας στηρίξεως τοῦ σώματος, διότι ἔτσι δὲν ἐμφανίζεται ροπὴ δυναμένη νὰ ἀνασηκώσῃ τὸ σῶμα ἐκ τῆς στηρίξεώς του, εἰς τὴν ὁποίαν μεταφέρονται μόνον δυνάμεις θλίψεως.

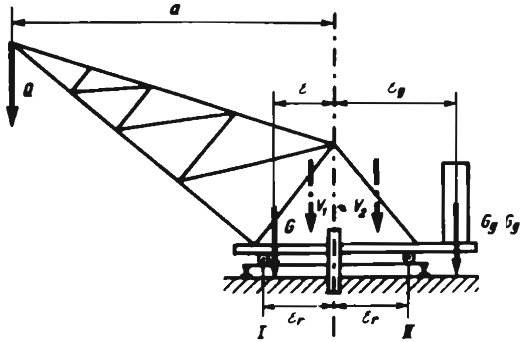
'Εὰν σῶμα δὲν στηρίζεται ἐπὶ μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν του, ἀλλὰ μόνον ἐπὶ ὡρισμένων σημείων (τριῶν ἢ τεσσάρων), τότε ἐπιφάνεια στηρίξεως ὀνομάζεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου τοῦ σχηματιζομένου διὰ συνδέσεως τῶν σημείων στηρίξεως.

Ἡ ἀντίστασις ὀρθίου σώματος ἔναντι ἀνατροπῆς ὀνομάζεται *εὐστάθεια*. Τόσον σταθερώτερον ἵσταται ἕνα σῶμα ὅσον χαμηλότερον εὑρίσκεται τὸ κέντρον βάρος του. (Διὰ τοῦτο τὸ κέντρον βάρους εἰς τὰ αὐτοκίνητα ἀγώνων εὑρίσκεται κατὰ πολὺ χαμηλότερον ἀπὸ ὅσον εἰς τὰ συνήθη ὀχήματα).

Μέτρον τῆς εὐσταθείας εἶναι *ἡ ἀσφάλεια ἔναντι ἀνατροπῆς*, ἡ ὁποία εἶναι ἡ σχέσις τῆς ροπῆς ἐπαναφορᾶς πρὸς τὴν ροπὴν ἀνατροπῆς.

Ὡς ροπὴ ἀνατροπῆς ὁρίζεται ἡ συνισταμένη ροπὴ τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι τείνουν νὰ ἀνατρέψουν τὸ σῶμα (περὶ τὴν ἀκμὴν ἀνατροπῆς). Ὡς ροπὴ ἐπαναφορᾶς ὁρίζεται ἡ ροπή, ἡ ὁποία δρᾶ ἀντιθέτως. Ἔτσι ἔχομεν:

$$\frac{\text{Ροπὴ ἐπαναφορᾶς}}{\text{Ροπὴ ἀνατροπῆς}} = \text{Ἀσφάλεια ἔναντι ἀνατροπῆς.}$$



Σχ. 9·4.
Προσδιορισμὸς ἀσφαλείας ἔναντι ἀνατροπῆς περιστροφικοῦ γερανοῦ.

Παράδειγμα.

Ζητεῖται νὰ ἐξετασθῆ ἡ εὐστάθεια καὶ ἡ ἀσφάλεια ἔναντι ἀνατροπῆς, γερανοῦ (μετὰ καὶ ἄνευ φορτίου) περιστρεφομένου ἐπὶ τεσσάρων τροχῶν καὶ μὲ τὰ ἑξῆς δεδομένα:

Δύναμις	Μοχλοβραχίων ὡς πρὸς τὸ μέσον τοῦ ἄξονος τοῦ γερανοῦ
Ὠφέλιμον φορτίον $Q = 10$ Mp	$\alpha = 16$ m
Ἴδιον βάρος $G = 20$ Mp	$\varepsilon = 3$ m
Ἀντίβαρον $G_g = 26$ Mp	$\varepsilon_g = 6$ m
Ἀκμαὶ ἀνατροπῆς I καὶ II	$\varepsilon_r = 3{,}6$ m

Εὐστάθεια:

Περίπτωσις φορτίσεως	Μετὰ φορτίου	Ἄνευ φορτίου
Κατακόρυφος συνισταμένη δύναμις	$V_1 = Q + G + G_g = 56$ Mp	$V_2 = G + G_g = 46$ Mp
$M_R = \Sigma M_F$	$V \cdot \varepsilon_1 = Q \cdot \alpha + G \cdot \varepsilon - G_g \cdot \varepsilon_g$	$V_2 \cdot \varepsilon_2 = G_g \cdot \varepsilon_g - G \cdot \varepsilon$
προκύπτει	$\varepsilon_1 = \dfrac{160 + 60 - 156}{56}$ m	$\varepsilon_2 = \dfrac{156 - 60}{46}$ m
	$\varepsilon_1 = 1{,}14$ m $< e_r$	$\varepsilon_2 = 2{,}09$ m $< e_r$

Ὑφίσταται εὐστάθεια, διότι αἱ δύο συνιστάμεναι κατακόρυφοι δυνάμεις V_1 καὶ V_2 ἐπενεργοῦν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας στηρίξεως, δηλαδὴ δροῦν εἰς τὸ μεταξὺ τῶν ἀκμῶν ἀνατροπῆς I καὶ II διάστημα.

Ἀσφάλεια ἔναντι ἀνατροπῆς:

Περίπτωσις φορτίσεως

Ἀκμὴ ἀνατροπῆς μετὰ φορτίου I	Ἄνευ φορτίου II
$S = \dfrac{G(\varepsilon_r - \varepsilon) + G_g(\varepsilon_g + \varepsilon_r)}{Q(\alpha - \varepsilon_r)} =$	$S = \dfrac{G(\varepsilon + \varepsilon_r)}{G_g(\varepsilon_g - \varepsilon_r)} =$
$= \dfrac{20 \times 0{,}6 + 26 \times 9{,}6}{10 \times 12{,}4} = 2{,}1$	$= \dfrac{20 \times 6{,}6}{26 \times 2{,}4} = 2{,}1$

Ἡ ἀσφάλεια ἀνατροπῆς εἶναι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις περίπου 2. Χάριν ἀκριβεστέρων ὑπολογισμῶν πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ λόγῳ πιέσεως τοῦ ἀνέμου προκαλουμένη δύναμις ἀνατροπῆς, ὁπότε εἶναι ἀνεκτὴ μικροτέρα ἀσφάλεια ἔναντι ἀνατροπῆς. Εἰς γερανοὺς καὶ παρομοίας κατασκευὰς καθορίζεται διὰ προδιαγραφῶν ἡ ἐλαχίστη τιμὴ ἀσφαλείας ἔναντι ἀνατροπῆς.

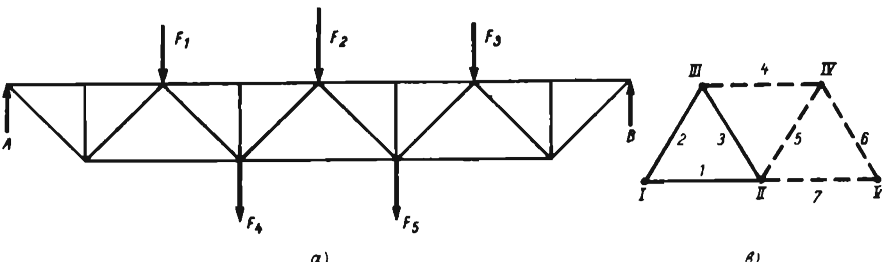
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 10

ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ

* 10·1 Γενικά.

Δοκοὶ μεγάλων ἀνοιγμάτων καὶ ὑψηλῶν φορτίων ἔχουν σημαντικὰς διαστάσεις καὶ ἀπαιτοῦν μεγάλην δαπάνην ὑλικοῦ. Εἰς αὐτὰς τὰς περιπτώσεις αἱ κατασκευαὶ γίνονται οἰκονομικώτεραι, ὅταν αἱ συμπαγεῖς δοκοὶ ἀντικατασταθοῦν διὰ δικτυωμάτων [σχ. 10·1 (α)].

Τὸ δικτύωμα ἀποτελεῖται ἐκ συστήματος στερεῶν ὁμοεπιπέδων ράβδων, ποὺ εἶναι κατὰ τὰ ἄκρα ἑνωμέναι μὲ κόμβους (ἢ ἀρθρώσεις). Πρὸς συμβολισμὸν τῶν ράβδων χρησιμοποιοῦνται συνήθως οἱ ἀραβικοὶ ἀριθμοί, ἐνῶ πρὸς συμβολισμὸν τῶν κόμβων οἱ λατινικοί.



Σχ. 10·1.
α) Δικτύωμα. β) Τριγωνικὸν δικτύωμα.

Ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων δικτυωμάτων (γερανοί, γέφυραι, στέγαι κ.λπ.) ὑπάρχουν τὰ δικτυώματα εἰς τὸν χῶρον (μεταλλικοὶ πύργοι, θόλοι κ.λπ.). Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὰ ἐπίπεδα δικτυώματα.

Αἱ εἰς τὰ ἑπόμενα ἀναπτυσσόμεναι μέθοδοι ὑπολογισμοῦ δικτυωμάτων ἐφαρμόζονται μόνον εἰς στατικῶς ὡρισμένα δικτυώματα, δηλαδὴ εἰς ἐκεῖνα, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας τῆς στατικῆς ἀρκοῦν τόσον πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως (ἐξωτερικῶς στατικῶς ὡρισμένα), ὅσον καὶ πρὸς προσδιορισμὸν τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων (ἐσωτερικῶς στατικῶς ὡρισμένα).

Περὶ τοῦ ἐξωτερικῶς στατικῶς ὡρισμένου τρόπου ἑδράσεως γίνεται λόγος εἰς τὴν παράγραφον 8·4 (α). Τὰ ἐσωτερικῶς στατικῶς ὡρισμένα δικτυώματα εἶναι κατεσκευασμένα ἔτσι, ὥστε, ὅταν κάμωμεν ἀρχὴν ἀπὸ ἕνα βασικὸν τρίγωνον (ἀποτελούμενον ἐκ τριῶν ράβδων καὶ τριῶν κόμβων), δι' ἑκάστοτε προσθέσεως δύο ράβδων νὰ προστίθεται ἕνας νέος κόμβος [τριγωνικὸν δικτύωμα, σχ. 10·1 (β)], ὁπότε, ὅταν ἔχωμεν κ συνολικῶς κόμβους καὶ s ράβδους, νὰ ἰσχύῃ:

$$s - 3 = 2\,(\kappa - 3) \qquad \text{ἢ} \qquad s = 2\kappa - 3.$$

(Ἀριθμητικὴ συνθήκη ἐσωτερικῶς στατικῶς ὡρισμένου δικτυώματος).

10·2 Ἰδεατὸν καὶ πραγματικὸν δικτύωμα.

Τὸ ἰδεατὸν δικτύωμα ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας:

1. Αἱ ράβδοι συνδέονται εἰς τοὺς κόμβους (ἀρθρώσεις) ἄνευ τριβῆς.
2. Οἱ ἄξονες τῶν ράβδων εἶναι εὐθύγραμμοι.
3. Οἱ ἄξονες ὅλων τῶν ράβδων ἑνὸς κόμβου τέμνονται ἐπὶ τοῦ σημείου τοῦ κόμβου (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς ἀρθρώσεως).
4. Ἡ φόρτισις ἀποτελεῖται ἐκ συγκεντρωμένων φορτίων, τὰ ὁποῖα δροῦν ἐπὶ τῶν κόμβων.

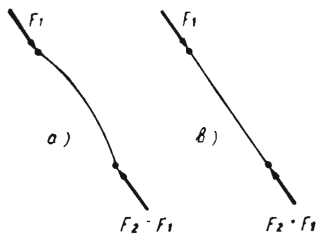
Εἰς τὸ ἰδεατὸν δικτύωμα αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τὰς ράβδους, εἶναι μόνον ἀξονικαὶ (ἐπομένως ἐφελκυστικαὶ καὶ θλιπτικαὶ) καὶ ὄχι ἐγκάρσιαι (τέμνουσαι) ἢ καμπτικαὶ ροπαί, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ἀκολούθου συλλογισμοῦ:

Αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ ἀρθρώσεως ἄνευ τριβῆς συντίθενται εἰς συνισταμένην δύναμιν, ἐνῶ συνισταμένη ροπὴ δὲν ὑφίσταται, διότι αἱ δρῶσαι δυνάμεις τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον.

Ἐξ ἄλλου, διὰ νὰ παραμείνῃ μία ἀβαρὴς ράβδος ἐν ἰσορροπίᾳ, πρέπει καὶ αἱ συνιστάμεναι δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν εἰς τὰ πέρατά της, νὰ εὑρίσκωνται ἐπίσης ἐν ἰσορροπίᾳ· ἐπομένως πρέπει νὰ εἶναι κατὰ μέτρον ἴσαι, ἀντιθέτου κατευθύνσεως καὶ νὰ συμπίπτουν οἱ φορεῖς των [σχ. 10·2 (α)].

Πρὸς τούτοις εἶναι καὶ ἡ ράβδος εὐθύγραμμος, ὁπότε ἀποκλείεται ἡ δημιουργία καμπτικῆς ροπῆς (ροπῆς λυγισμοῦ) ἐκ τῶν ἑκατέρωθεν συνισταμένων. Αἱ ἰδιότητες τοῦ πραγματικοῦ δικτυώματος διαφέρουν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἰδεατοῦ κυρίως εἰς τὰ σημεῖα 1 καὶ 4.

Εἰς τὸ 1: Αἱ ράβδοι συνδέονται εἰς τὴν πρᾶξιν διὰ κομβοελασμάτων (καὶ ὄχι δι' ἀρθρώσεων). Ὡς ἐκ τούτου εἰς τὰς ράβδους ἑνὸς πραγματικοῦ δικτυώματος ἐμφανίζονται — ἐκτὸς τῶν δυνάμεων τοῦ ἰδεατοῦ δικτυώματος — καὶ ροπαὶ κάμψεως. Αἱ δευτερεύουσαι ὅμως αὗται τάσεις εἶναι μικραὶ καὶ εἰς τὴν πρᾶξιν παραλείπονται.



Σχ. 10·2.
Ράβδος: α) Καμπύλου ἄξονος. β) Εὐθυγράμμου ἄξονος.

Εἰς τὸ 4: Αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῶν κόμβων, ἀνάγονται εἰς αὐτοὺς (δηλ. ἀναλύονται εἰς παραλλήλους συνιστώσας, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς διέρχονται διὰ τῶν κόμβων). Ἐπίσης τὸ βάρος τῶν ράβδων ἀντικαθίσταται διὰ μεμονωμένων φορτίων εἰς τοὺς κόμβους.

* 10·3 Προσδιορισμὸς τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων.

Πρὶν ἀντιμετωπισθῇ ὁ προσδιορισμὸς τῶν δυνάμεων (ἢ τάσεων) τῶν ράβδων, πρέπει νὰ εἶναι ἤδη γνωσταὶ ὅλαι αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι διατηροῦν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ δικτυώματος ὡς συνόλου. Ἔτσι, τὸ πρῶτον στάδιον εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως, ὁ ὁποῖος εἶναι δυνατὸν νὰ γίνεται κατὰ τὰς γνωστὰς γραφικὰς ἢ ἀναλυτικὰς μεθόδους. Ἐν συνεχείᾳ αἱ δυνάμεις τῶν ράβδων ὑπολογίζονται γραφικῶς ἢ ἀναλυτικῶς κατὰ τὰς κατωτέρω περιγραφομένας τρεῖς μεθόδους. Ἡ ἐκλογὴ μιᾶς ἐκ τῶν τριῶν μεθόδων γίνεται ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ζητοῦνται ὡρισμέναι μόνον ἐκ τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων ἢ ὅλαι.

α) Προσδιορισμὸς μεμονωμένων δυνάμεων ράβδων.

Ὁ προσδιορισμὸς μεμονωμένων δυνάμεων ράβδων ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον τοῦ Ritter ἢ κατὰ τὴν γραφικὴν μέθοδον τοῦ Culmann.

1) Μέθοδος Ritter (ἀναλυτική).

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως, διαιρεῖται τὸ δικτύωμα εἰς δύο τμήματα διὰ μιᾶς τομῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὸ πολὺ τρεῖς ράβδους. Ἕκαστον τμῆμα τοῦ δικτυώματος, ὡς ἐλεύθερον σῶμα, πρέπει νὰ ἰσορροπῇ. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἐκλέγεται τὸ τμῆμα ἐκεῖνο, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δροῦν αἱ ὀλιγώτεραι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις.

Εἰς τὸ ἐκλεγὲν τμῆμα αἱ ἄγνωστοι δυνάμεις εἰς τὰς τμηθείσας ράβδους λαμβάνονται ὡς ἐξωτερικαὶ δυνάμεις. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ κατευθύνσεις τῶν ζητουμένων δυνάμεων δὲν εἶναι ἐκ τῶν προτέρων γνωσταί, γίνεται δεκτὸν ὅτι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τοῦ λαμβανομένου τμήματος τοῦ δικτυώματος, εἶναι ἐφελκυστικαί.

Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζεται εἰς τὸ ἐκλεγὲν τμῆμα τοῦ δικτυώματος ἡ συνθήκη ἰσορροπίας: $\sum M = 0$. Σημεῖον ἀναφορᾶς τῶν ροπῶν ἐκλέγεται τὸ σημεῖον τομῆς δύο ράβδων, τῶν ὁποίων δὲν ζητοῦνται αἱ δυνάμεις. Τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν πρέπει νὰ κεῖται κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ ἐκλεγὲν τμῆμα τοῦ δικτυώματος. Ἐπειδὴ αἱ ροπαὶ τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς των εἶναι μηδενικαί, ἐμφανίζεται πάντοτε μία μόνον ἄγνωστος δύναμις εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν ροπῶν, ἡ ὁποία ἀρχικῶς λαμβάνεται ὡς ἐφελκυστική. Ἐὰν ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν προκύψῃ θετικὸν πρόσημον εἰς τὴν ὑπ' ὄψιν δύναμιν, τότε πράγματι πρόκειται περὶ ἐφελκυομένης ράβδου, ἄλλως πρόκειται περὶ θλιβομένης ράβδου (σημειωτέον ὅτι ἡ μέθοδος Ritter δὲν ἐφαρμόζεται, ὅταν διὰ τῆς τομῆς τέμνωνται δύο ράβδοι, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των).

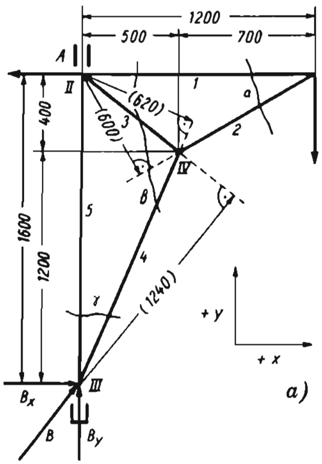
Ἡ μέθοδος γίνεται περισσότερον κατανοητὴ διὰ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

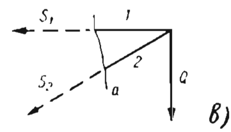
Παράδειγμα.

Τὸ δικτύωμα ἁπλοῦ γερανοῦ περιστρεφομένης στήλης [(σχ. 10·3 α (α)] φορτίζεται δι' ὠφελίμου φορτίου $Q = 3$ Mp. Πρὸς παραλαβὴν τῆς ροπῆς τοῦ φορτίου συνεργάζεται τὸ ἕδρανον A (ποὺ παραλαμβάνει μόνον ὁριζοντίας δυνάμεις) μετὰ τοῦ σταθεροῦ ἑδράνου B (ποὺ δύναται νὰ παραλάβῃ ὁριζοντίας καὶ κατακορύφους δυνάμεις, τῶν ὁποίων ἡ συνισταμένη παριστᾷ τὴν ἀντίδρασιν εἰς τὸ B). Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν δυνάμεων εἰς τὰς ράβδους μεταφέρονται αἱ ἀντιδράσεις ἐκ τῶν στηρίξεων εἰς τοὺς παρακειμένους κόμβους.

'Αντιδράσεις στηρίξεως.

Αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως τοῦ δικτυώματος πρέπει νὰ κατευθύνωνται κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ ῥοπή των νὰ ἰσορροπῇ τὴν ῥοπὴν τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων. 'Εὰν τὸ σημεῖον A ἦτο ἐλεύθερον, ὁ γερανὸς θὰ ἀνετρέπετο πρὸς τὰ δεξιά, ἐπομένως ἡ ἀντίδρασις εἰς τὸ A πρέπει νὰ





Σχ. 10·3 α.
Προσδιορισμὸς τῶν δυνάμεων εἰς τὰς ράβδους κατὰ τὴν μέθοδον Ritter: α) Δικτύωμα. β) Τμῆμα τοῦ δικτυώματος (κόμβος I).

ἔχῃ κατεύθυνσιν πρὸς τὰ ἀριστερά. 'Εὰν τώρα τὸ σημεῖον B ἦτο ἐλεύθερον, θὰ ἀνετρέπετο ὁ γερανὸς πρὸς τὰ ἀριστερά· ἄρα ἡ ἀντίδρασις εἰς τὸ B πρέπει νὰ ἔχῃ κατεύθυνσιν πρὸς τὰ δεξιά, μάλιστα δὲ καὶ πρὸς τὰ ἄνω, διότι ἐκεῖ εὑρίσκεται ἡ ἕδρασις τῆς στήλης.

Αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν ἀντιδράσεων λαμβάνονται ἢ ἐκ τῶν γραφικῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας (Κεφάλ. 8·1) ἢ προκύπτουν ἐκ τῶν ἀναλυτικῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας ὡς ἀκολούθως :

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M = 0.$$

Διὰ χρήσεως τῶν συμβολισμῶν τοῦ σχήματος 10·3 α προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad -A + B_x = 0 \qquad B_x = A$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad B_y - Q = 0 \qquad B_y = Q = 3000 \text{ kp}$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad Q \cdot 1{,}2 - B_x \cdot 1{,}6 = 0 \qquad B_x = \frac{300 \times 1{,}2}{1{,}6} \text{ kp} =$$

$$= 2250 \text{ kp} = A.$$

$$B = \sqrt{2250^2 + 3000^2} \text{ kp} = 100 \times \sqrt{1405} \text{ kp} = 3750 \text{ kp}.$$

Δυνάμεις ἐπὶ τῶν ῥάβδων.

Τὸ δικτύωμα τέμνεται δι' ἀλλεπαλλήλων τομῶν [α, β, γ, σχ. 10·3 α (α)] καὶ αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τῶν ράβδων, λαμβάνονται ὡς ἐφελκυστικαί, δηλαδὴ κατευθυνόμεναι ἐκ τοῦ ὑπ' ὄψιν τμήματος τοῦ δικτυώματος πρὸς τὰ ἔξω [σχ. 10·3 α (β)]. Δι' ἐκλογῆς καταλλήλου σημείου ἀναφορᾶς τῶν ροπῶν εἶναι δυνατός, δι' ἐφαρμογῆς τῆς συνθήκης ἰσορροπίας $\Sigma M = 0$, ὁ ἑκάστοτε προσδιορισμός, μιᾶς δυνάμεως ράβδου μετὰ τοῦ προσήμου της ($+ =$ ἐφελκυσμὸς καὶ $- =$ θλῖψις). Ἐὰν αἱ κάθετοι ἀποστάσεις τῶν δυνάμεων ἀπὸ τοῦ σημείου ἀναφορᾶς δὲν εἶναι δεδομέναι, δύνανται νὰ λαμβάνωνται ἐκ τοῦ ὑπὸ κλίμακα σχεδίου. Τὴν διεξαγωγὴν τῶν ὑπολογισμῶν δεικνύει ὁ Πίναξ 10·3·1.

* *2) Μέθοδος Culmann (γραφική).*

Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα 5·2 α (β) ἀντιστραφοῦν αἱ φοραὶ τῶν βελῶν τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3, δημιουργεῖται δυναμοπολύγωνον τῆς αὐτῆς φορᾶς, καὶ ἡ δύναμις F εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ πρὸς τὰς ἄλλας τρεῖς δυνάμεις.

Ἄρα δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς εὐθείας τοῦ Culmann εἶναι ἐπίσης δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος ἐξισορροπήσεως μιᾶς δυνάμεως διὰ τριῶν ἄλλων, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς εἶναι δεδομένοι καὶ δὲν τέμνονται εἰς κοινὸν σημεῖον.

Τὴν καλυτέραν κατανόησιν τῆς μεθόδου αὐτῆς βοηθεῖ τὸ σχῆμα 10·3 β, εἰς τὸ ὁποῖον F εἶναι ἡ δεδομένη δύναμις καὶ 1, 2, 3 οἱ φορεῖς τῶν τριῶν κατὰ φορὰν καὶ μέτρον ἀγνώστων δυνάμεων. Οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων φέρονται εἰς τομὴν διὰ προεκτάσεως, π.χ. ὁ τῆς F μετὰ τοῦ 1 (εἰς τὸ Α) καὶ ὁ τῆς 2 μετὰ τῆς 3 (εἰς τὸ Β). Ἡ διὰ τῶν σημείων τομῆς Α, Β ἀγομένη εὐθεῖα l εἶναι πάλιν ἡ *εὐθεῖα Culmann*, ἡ ὁποία δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς βοηθητικὴ δύναμις.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ δυναμοπολυγώνου ἐξισορροπεῖται ἡ F διὰ τῶν F_1 καὶ l καὶ κατόπιν αὐτοῦ ἀναλύεται ἡ l εἰς τὰς συνιστώσας F_2 καὶ F_3 [σχ. 10·3 β (β)]. Ἔτσι, διὰ τῆς F μετὰ τῶν F_1, F_3 καὶ F_2 σχηματίζεται κλειστὸν δυναμοπολύγωνον συνεχοῦς φορᾶς διαδρομῆς, ἤτοι αἱ τέσσαρες δυνάμεις εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ.

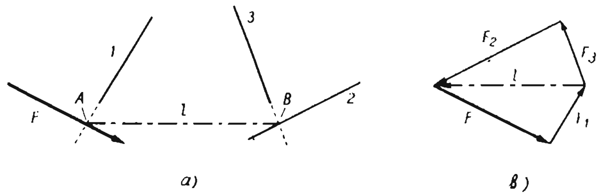
Διὰ νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ μέθοδος Culmann πρὸς εὕρεσιν τῶν δυνάμεων εἰς τὰς ράβδους δικτυώματος, τέμνεται τοῦτο εἰς δύο μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἡ τομὴ δὲν πρέπει

Πίναξ 10·3·1.

Τομή / Τμῆμα	Σημεῖον ἀναφορᾶς		+ . . . . δεξιόστροφος
α / δεξιόν	IV	$Q \cdot 0{,}7 - S_1 \cdot 0{,}4 = 0$	$S_1 = + \frac{3000 \times 0{,}7}{0{,}4}$ kp $= + 5250$ kp (ἐφελκυσμός)
	II	$Q \cdot 1{,}2 + S_2 \cdot 0{,}60^* = 0$	$S_2 = - \frac{3000 \times 1{,}2}{0{,}6}$ kp $= - 6000$ kp (θλῖψις)
β / δεξιόν	III	$Q \cdot 1{,}2 - S_1 \cdot 1{,}6 - S_3 \cdot 1{,}24^* = 0$	$S_3 = \frac{3000 \times 1{,}2 - 5250 \times 1{,}6}{1{,}24}$ kp $= - \frac{4800}{1{,}24}$ kp $= - 3880$ kp (θλῖψις)
	II	$Q \cdot 1{,}2 + S_4 \cdot 0{,}62^* = 0$	$S_4 = - \frac{3000 \times 1{,}2}{0{,}62}$ kp $= - 5800$ kp (θλῖψις)
γ / ἄνω	IV	$Q \cdot 0{,}7 - A \cdot 0{,}4 - S_5 \cdot 0{,}5 = 0$	$S_5 = \frac{3000 \times 0{,}7 - 2250 \times 0{,}4}{0{,}5}$ kp $= + \frac{1200}{0{,}5}$ kp $= + 2400$ kp (ἐφελκυσμός)
ἤ			
γ / ἄνω	IV	$- B_x \cdot 1{,}2 + B_y \cdot 0{,}5 + S_5 \cdot 0{,}5 = 0$	$S_5 = \frac{2250 \times 1{,}2 - 3000 \times 0{,}5}{0{,}5}$ kp $= + \frac{1200}{0{,}5}$ kp $= + 2400$ kp (ἐφελκυσμός)

* Ἐμετρήθη ἀπὸ τὸ σχῆμα.

νὰ συναντᾶ περισσοτέρας τῶν τριῶν ράβδων. Εἰς ἕνα ἐκ τῶν δύο τμημάτων τοῦ δικτυώματος πρέπει νὰ τεθῇ ἐν ἰσορροπίᾳ ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις (ἢ ἀντιστοίχως ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἀντιδράσεων) πρὸς τὰς δυνάμεις τῶν τμηθεισῶν ράβδων.



Σχ. 10·3 β.
Ἡ μέθοδος Culmann πρὸς ἐπίλυσιν προβλημάτων στατικῆς ἰσορροπίας.

Αἱ δυνάμεις τῶν ράβδων λαμβάνονται ἐκ τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ δυναμοπολυγώνου, αἱ δὲ κατευθύνσεις τῶν βελῶν μεταφερόμεναι εἰς τὸ δικτύωμα, ἀποδίδουν τὸ εἶδος τῆς καταπονήσεως. Ἐὰν τὸ βέλος τῆς δυνάμεως κατευθύνεται πρὸς τὰ ἔξω τοῦ ὑπ' ὄψιν τμήματος τοῦ δικτυώματος, τότε πρόκειται περὶ ἐφελκυομένης ράβδου, ἐνῶ ἐὰν κατευθύνεται πρὸς τὸ ὑπ' ὄψιν τμῆμα, τότε πρόκειται περὶ θλιβομένης ράβδου.

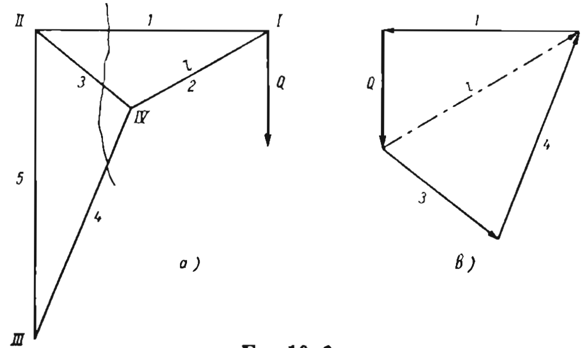
Ἡ μέθοδος αὐτὴ θὰ ἐπεξηγηθῇ ἐπίσης διὰ παραδείγματος.

Παράδειγμα.

Ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν διὰ τῆς μεθόδου Culmann αἱ δυνάμεις τῶν ράβδων 1, 3, 4 τοῦ δικτυώματος, ποὺ ἐξητάσθη εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Τὸ σχῆμα 10·3 γ (α) παριστᾶ πάλιν τὸ δικτύωμα ὑπὸ κλίμακα καὶ μάλιστα χωρισμένον εἰς δύο μέρη διὰ τομῆς, ποὺ συναντᾶ τὰς ράβδους, τῶν ὁποίων ζητοῦνται αἱ δυνάμεις.

Ἐὰν ἐξετάσωμεν π.χ. τὸ δεξιὰ τῆς τομῆς τμῆμα τοῦ δικτυώματος, ἡ Q πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ πρὸς τὰς δυνάμεις τῶν ράβδων 1, 3 καὶ 4. Ὁ φορεὺς τῆς Q καὶ ἡ δύναμις τῆς ράβδου 1 τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον I. Οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων 3 καὶ 4 τέμνονται εἰς τὸ IV. Ἡ εὐθεῖα l τοῦ Culmann εἶναι τὸ συνδετικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα I IV [σχ. 10·3 γ (α)] καὶ συμπίπτει (εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα) πρὸς τὴν ράβδον 2.

Μετὰ τὴν ἐκλογὴν κλίμακος δυνάμεων (π.χ. $\kappa = 1$ Mp/cm) τίθεται ἐν ἰσορροπίᾳ ἡ Q πρὸς τὴν βοηθητικὴν δύναμιν l καὶ τὴν δύναμιν τῆς ράβδου 1 καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀναλύεται ἡ l εἰς δυνάμεις κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν ράβδων 3 καὶ 4 [σχ. 10·3 γ (β)].



Σχ. 10·3 γ.

Προσδιορισμὸς τῶν δυνάμεων εἰς τὰς ράβδους κατὰ Culmann.

Κατόπιν αὐτῶν προσδιορίζονται αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τῶν ράβδων, ὡς καὶ τὸ εἶδος ἐπιβαρύνσεώς των:

δύναμις ράβδου 1 . . . 5200 kp (ἐφελκ.)		Σύγκρισις τῶν ἀποτελεσμάτων κατὰ Ritter (Πίναξ 10·3·1).
» » 3 . . . 3900 kp (θλῖψις)		
» » 4 . . . 5800 kp (θλῖψις)		

Εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα ἐπὶ τοῦ ἐξετασθέντος τμήματος τοῦ δικτυώματος ἀσκεῖται μόνον μία ἐξωτερικὴ δύναμις, ἡ Q. Ἐὰν αἱ δρῶσαι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις (συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἀντιδράσεων) εἶναι περισσότεραι τῆς μιᾶς, πρέπει νὰ σχηματισθῇ, ὡς προανεφέρθη, ἡ συνισταμένη των. [Βλέπε σχετικῶς τὸ 5ον παράδειγμα προσδιορισμοῦ τῶν δυνάμεων ὅλων τῶν ράβδων, παράγρ. 10·3 (β), εἰς τὸ ὁποῖον καθίσταται ἐμφανέστερον τὸ πλεονέκτημα τῆς μεθόδου Culmann, δηλαδὴ ἡ δυνατότης προσδιορισμοῦ ὡρισμένων δυνάμεων ράβδων ἄνευ ὑπολογισμοῦ τῶν δυνάμεων εἰς τὰς γειτονικάς των ράβδους].

* *β) Προσδιορισμὸς τῶν δυνάμεων ὅλων τῶν ράβδων.*

Μέθοδος Cremona (Διάγραμμα Cremona).

Ἐφ' ὅσον ὁλόκληρον τὸ δικτύωμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, πρέπει ἐπίσης ἕκαστον τμῆμα του καὶ ἕκαστος κόμβος του νὰ ἰσορροπῇ. Ἑπομένως δύναται νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ τῶν γραφικῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας εἰς τοὺς κόμβους τοῦ δικτυώματος. Συμφώνως πρὸς αὐτάς, τὸ δυναμοπολύγωνον ὅλων τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν εἰς ἕνα κόμβον (ἐξωτερικαὶ δυνάμεις καὶ δυνάμεις ράβδων) πρέπει νὰ εἶναι κλειστὸν καὶ ἑνιαίας φορᾶς διαγραφῆς (δηλαδὴ δεξιόστροφον ἢ ἀριστερόστροφον).

Κατὰ τὴν παράθεσιν τῶν δυνάμεων εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον ἐκλέγεται μία μόνον φορὰ περιφορᾶς, ἡ ὁποία διατηρεῖται τόσον εἰς τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις ὁλοκλήρου τοῦ δικτυώματος, ὅσον καὶ εἰς τὰς δυνάμεις ἑνὸς ἑκάστου κόμβου.

Σημειωτέον ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις εἰς τὸ διάγραμμα θέσεων τῶν δυνάμεων σχεδιάζονται, ὥστε νὰ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ δικτυώματος καὶ νὰ ἐνεργοῦνται ἐπὶ τῶν κόμβων. Γενικῶς αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, ποὺ ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῶν ἄνω κόμβων, ἐμφανίζονται ἄνωθεν τοῦ δικτυώματος εἰς τὴν θέσιν τοῦ κόμβου, ἐνῶ αὐταί, ποὺ ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῶν κάτω κόμβων, ἐμφανίζονται ἀκριβῶς κάτωθεν τοῦ κόμβου μὲ ἀρχὴν αὐτόν. Ἐπίσης αἱ ἀντιδράσεις δὲν σχεδιάζονται μεταξὺ τῶν ράβδων, ἀλλ' ἐκτὸς αὐτῶν (σχ. 10·1 α ὡς καὶ τὸ ἑπόμενον 1ον παράδειγμα, σχ. 10·3 δ).

Παραδείγματα.

1. Νὰ προσδιορισθοῦν γραφικῶς αἱ δυνάμεις ράβδων εἰς τὸν περιστροφικὸν γερανὸν τοίχου τοῦ σχήματος 10·3 δ.

Ὡς φορὰ περιφορᾶς περὶ τὸ δικτύωμα ἐκλέγεται ἡ τῶν δεικτῶν ὡρολογίου (δεξιόστροφος) καὶ κατ' αὐτὴν λαμβάνονται κατὰ πρῶτον αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις πρὸς σύνθεσίν των. Αἱ θέσεις τῆς Q (κατακορύφου) καὶ τῆς A (ὁριζοντίας) εἶναι δεδομέναι. Ἡ συνθήκη ὅτι τρεῖς ἐν ἰσορροπίᾳ εὑρισκόμεναι δυνάμεις πρέπει νὰ τέμνωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐπαρκεῖ πρὸς καθορισμὸν τῆς κατευθύνσεως τῆς B [σχ. 10·3 δ (α)]. Τὰ μέτρα τῶν δυνάμεων A καὶ B προκύπτουν ἐκ τοῦ δυναμοπολυγώνου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς τῶν κατευθύνσεων τῶν φορέων των εἰς τὰ πέρατα τῆς Q.

Τὴν Q ἀκολουθεῖ ἡ B καὶ τὴν B ἡ A [σχ. 10·3 δ (α)].

Κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν θὰ γίνεται καὶ ἡ περὶ τοὺς κόμβους περιφορά, πρὸς καθορισμὸν τῆς σειρᾶς, κατὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνονται αἱ δυνάμεις.

Κόμβος I:

Τὴν Q ἀκολουθεῖ ἡ 2 καὶ αὐτὴν ἡ 1 [σχ. 10·3 δ (β)].

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προκύπτουν ὄχι μόνον τὰ μέτρα τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων 1 καὶ 2, ἀλλὰ καὶ αἱ κατευθύνσεις των:

ἡ 2 κατευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον, ἄρα θλιπτικὴ δύναμις.

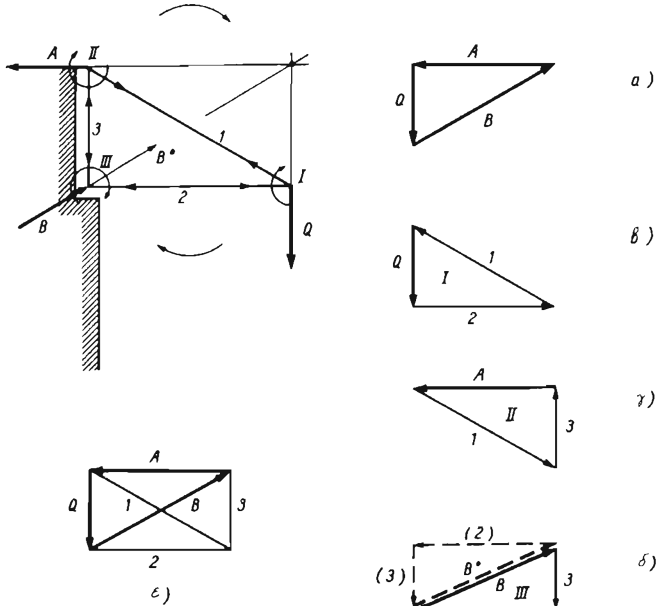
ἡ 1 κατευθύνεται ἀπὸ τοῦ κόμβου πρὸς τὰ ἔξω, ἄρα ἐφελκυστικὴ δύναμις.

Κόμβος II:

Τὴν Α ἀκολουθεῖ ἡ 1 καὶ τὴν 1 ἡ 3 [σχ. 10·3 δ (γ)].

Ἡ 1 κατευθύνεται ἀπὸ τὸν κόμβον πρὸς τὰ ἔξω, ἄρα ἐφελκυστικὴ δύναμις.

Ἡ 3 κατευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον, ἄρα θλιπτικὴ δύναμις.



Σχ. 10·3 δ.

Προσδιορισμὸς δυνάμεων ράβδων κατὰ τὴν μέθοδον Cremona:
α) Ἐξωτερικαὶ δυνάμεις. β) Κόμβος I. γ) Κόμβος II. δ) Κόμβος III.
ε) Διάγραμμα Cremona.

Κόμβος III:

Τὴν Β ἀκολουθεῖ ἡ 3 καὶ τὴν 3 ἡ 2 [σχ. 10·3 δ (δ)].

Ἡ 3 κατευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον, ἄρα θλιπτικὴ δύναμις.

Ἡ 2 κατευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον, ἄρα θλιπτικὴ δύναμις.

Τὰ δυναμοπολύγωνα [σχ. 10·3 δ (α, β, γ, δ)] συντίθενται εἰς ἕνα διάγραμμα (διάγραμμα Cremona) [σχ. 10·3 δ (ε)], εἰς τὸ ὁποῖον ἑκάστη δύναμις ράβδου καὶ ἑκάστη ἐξωτερικὴ δύναμις ἐμφανίζεται μίαν μόνον φοράν. Εἰς τὸ διάγραμμα αὐτὸ αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις καὶ αἱ ἀντιδράσεις σχηματίζουν κλειστὸν δυναμοπολύγωνον.

Παρατήρησις :

Ἐάν, προκειμένου περὶ τῆς ἀντιδράσεως Β, εἶχε θεωρηθῆ ὅτι αὐτὴ εὑρίσκεται ὄχι ἐκτὸς ἀλλὰ ἐντὸς τοῦ δικτυώματος (θέσις Β* διὰ διακεκομμένης γραμμῆς), τότε ἡ σειρὰ τῶν δυνάμεων θὰ ἦτο Β* .... (2)..... (3) καὶ τὸ δυναμοπολύγωνον ὡς πρὸς τὸν κόμβον ΙΙΙ θὰ εἶχε τὴν εἰς τὸ σχῆμα 10·3 δ (δ) σχεδιαζομένην διὰ διακεκομμένης γραμμῆς μορφήν. Κατὰ τὴν σύνθεσιν εἰς τὸ συνολικὸν διάγραμμα δυνάμεων θὰ συνέπιπτε ἡ 2 ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ 3 ἐπὶ τῆς Q, αἱ δυνάμεις ράβδων 2 καὶ 3 θὰ παρουσιάζοντο 2 φοράς, γεγονὸς τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν φύσιν τοῦ διαγράμματος Cremona.

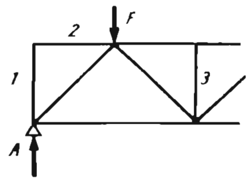
Ἐπειδὴ — ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὰ σχήματα 10·3 δ (β), (γ), (δ) — ἡ φορὰ τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων ἀπὸ κόμβου εἰς κόμβον ἀντιστρέφεται (διότι, ὡς γνωστόν, μία θλιπτικὴ δύναμις κατευθύνεται πάντοτε πρὸς τὸν κόμβον, ἐνῶ ἡ ἐφελκυστικὴ κατευθύνεται πάντοτε ἐκ τοῦ κόμβου πρὸς τὰ ἔξω), σχεδιάζονται εἰς τὸ συνολικὸν διάγραμμα μόνον αἱ φοραὶ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι παραμένουν ἀμετάβλητοι. Τὴν μεταβαλλομένην φορὰν τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων χαρακτηρίζομεν δι' ἀντιστοίχων βελῶν πλησίον τῶν κόμβων τοῦ δικτυώματος. Πρὸς χάραξιν τοῦ διαγράμματος Cremona ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Κατ' ἀρχὴν χαράσσεται τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων (δηλαδὴ φορτίων καὶ ἀντιδράσεων στηρίξεως).

Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν δυνάμεων ράβδων γίνεται ἔναρξις ἀπὸ κόμβου, εἰς τὸν ὁποῖον δὲν ὑπάρχουν περισσότεραι τῶν δύο ἄγνωστοι δυνάμεις καὶ ἐν συνεχείᾳ λαμβάνονται οἱ κόμβοι, τῶν ὁποίων αἱ ἄγνωστοι δυνάμεις ἔχουν περιορισθῆ εἰς δύο τὸ πολύ.

Εἰς δικτύωμα πιθανὸν νὰ ὑπάρχουν ἀφόρτιστοι ράβδοι. Εἰς αὐτὰς ἀνήκουν π.χ. ράβδοι ὡς ἡ 3 τοῦ δικτυώματος τοῦ σχήματος 10·3 ε. Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα αἱ ράβδοι 1 καὶ 2 εἶναι ἐπίσης ἀφόρτιστοι. Παρὰ ταῦτα δύναται νὰ ἀρχίσῃ τὸ διάγραμμα Cremona ἀπὸ τὸν κόμβον Α, διότι ἐκ τῶν τριῶν συντρεχουσῶν εἰς αὐτὸν δυνάμεων μόνον δύο εἶναι ἄγνωστοι.

(Σχετικῶς πρὸς τὰς ἀφορτίστους ράβδους βλέπε ἐπίσης τὴν παρατήρησιν, ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ τὸ 3ον παράδειγμα τῆς παραγράφου αὐτῆς καὶ τὴν ράβδον 7 εἰς τὸ 4ον παράδειγμα.).



Σχ. 10·3 ε.
Ἀφόρτιστοι ράβδοι δικτυώματος.

Διάγραμμα Cremona διὰ τὸ σχῆμα 10·2 δ.

Μὲ τὴν ἐκλεγεῖσαν φορὰν λήψεως τῶν δυνάμεων πρὸς σύνθεσιν, συντίθενται κατ' ἀρχὴν αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις Q, B, A.

Κόμβος I:

Αἱ δυνάμεις τῶν ράβδων τοῦ κόμβου I συντίθενται ἀπ' εὐθείας μὲ τὴν Q.

Τὴν Q ἀκολουθεῖ ἡ 2 (πρὸς κόμβον, θλιπτικὴ δύναμις), τὴν 2 ἀκολουθεῖ ἡ 1 (ἐκ τοῦ κόμβου, ἐφελκυστικὴ δύναμις), τὴν 1 ἀκολουθεῖ πάλιν ἡ Q. Αἱ φοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων 1 καὶ 2 σημειώνονται μὲ βέλη παρὰ τὸν κόμβον I, ἐνῶ συγχρόνως δύναται νὰ σημειωθῆ ἡ φορὰ τῆς 1 παρὰ τὸν κόμβον II καὶ τῆς 2 παρὰ τὸν κόμβον III, ὅπου βεβαίως πρέπει νὰ δοθῆ ἡ ἀπαραίτητος προσοχὴ εἰς τὴν ἀλλαγὴν τῆς διευθύνσεως τοῦ βέλους ἐν σχέσει πρὸς τὸν κόμβον I.

Κόμβος II:

Τὴν A ἀκολουθεῖ ἡ 1 (ἐκ τοῦ κόμβου), αὐτὴν ἀκολουθεῖ ἡ 3 καὶ ἐν συνεχεία ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς A. Ἡ δύναμις 3 κατευθύνεται πρὸς τὸν κόμβον, ἄρα εἶναι θλιπτικὴ δύναμις καὶ σχεδιάζεται εἰς τὸν κόμβον III μὲ ἀντίθετον φορὰν βέλους.

Κατόπιν τούτων τὸ διάγραμμα Cremona ἔχει ἤδη χαραχθῆ.

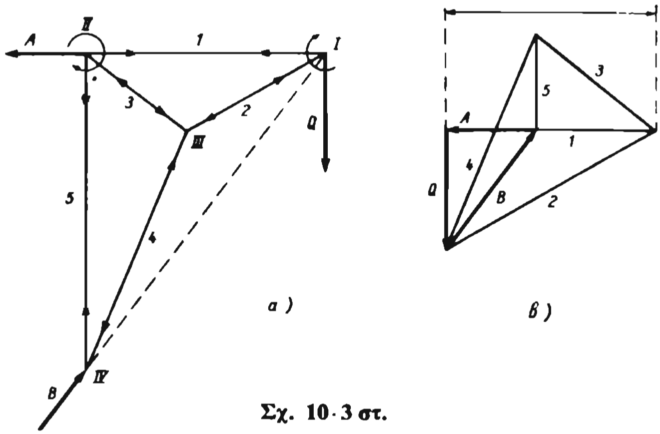
Πρὸς ἔλεγχον δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ:

Κόμβος III:

Τὴν B ἀκολουθεῖ ἡ 3, αὐτὴν ἀκολουθεῖ ἡ 2 καὶ τελικῶς ἡ 2 ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς B.

2. Ζητεῖται νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα Cremona διὰ τὸ δικτύωμα τῶν παραδειγμάτων τοῦ προσδιορισμοῦ μεμονωμένων δυνάμεων ράβδων (μέθοδος Ritter καὶ μέθοδος Culmann, παράγρ. 10·3) καὶ νὰ προσδιορισθοῦν αἱ δυνάμεις τῶν ράβδων.

Κατ' ἀρχὴν σχεδιάζεται πάλιν τὸ δικτύωμα ὑπὸ κλίμακα [(σχ. 10·3 στ (α)], διότι αἱ δυνάμεις τῶν ράβδων πρέπει νὰ κεῖνται παραλλήλως πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν ράβδων. Ἐν συνεχείᾳ ἐκλέγεται κλῖμαξ δυνάμεων (ἐνταῦθα π.χ. κ = 1 Mp/cm).



Σχ. 10·3 στ.
Περιστροφικὸς γερανὸς περιστρεφομένης στήλης:
α) Δικτύωμα. β) Διάγραμμα Cremona.

Συμφώνως πρὸς τὴν συνθήκην ὅτι αἱ Q, A καὶ B πρέπει νὰ τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον, ὁρίζεται ἡ διεύθυνσις τῆς B καὶ ἐν συνεχείᾳ δύναται νὰ σχεδιασθῇ τὸ τρίγωνον τῶν *ἐξωτερικῶν δυνάμεων*.

Ἀκολουθεῖ ὁ προσδιορισμὸς τῶν δυνάμεων τῶν ράβδων. Ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ κόμβου I ἔχομεν:

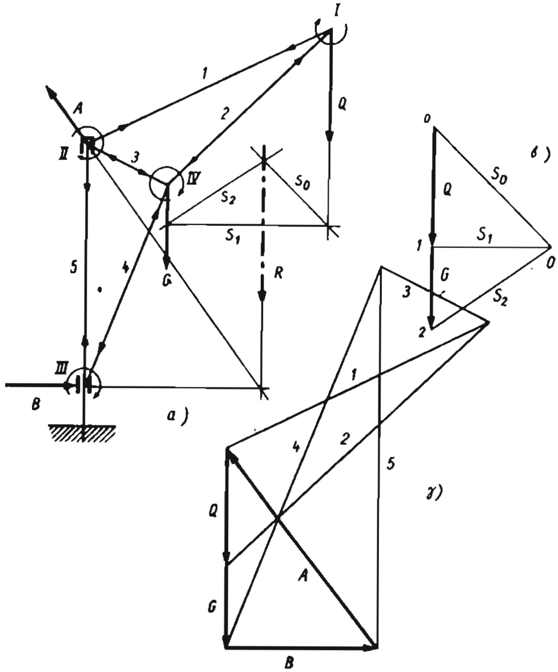
Κόμβος I Q ... 2 (−) ... 1 (+) ... (Q)
Κόμβος II A ... 1 (+) ... 3 (−) ... 5 (+) ... (A)
Κόμβος IV B ... 5 (+) ... 4 (−) ... (B)
[Κόμβος III 4 (−) ... 3 (−) ... 2 (−) ... (4) ἔλεγχος]

Τὸ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον χαραχθὲν διάγραμμα Cremona δεικνύει τὸ σχῆμα 10·3 στ (β). Διὰ μετρήσεως τῶν ληφθέντων τμημάτων καὶ πολλαπλασιασμοῦ των ἐπὶ τὴν ἐκλεγεῖσαν κλίμακα δυνάμεων προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις ράβδων:

Ράβδος	Ἐφελκυσμὸς kp	Θλῖψις kp
1	5200	—
2	—	6000
3	—	3900
4	—	5800
5	2400	—

Τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ πρέπει νὰ συμφωνοῦν κατὰ προσέγγισιν πρὸς τὰ τοῦ παραδείγματος τῆς μεθόδου Ritter (παράγρ. 10·3), τὸ ὁποῖον εἶχεν ὡς ἀντικείμενον τὸν ἀναλυτικὸν προσδιορισμὸν τῶν δυνάμεων ράβδων τοῦ αὐτοῦ δικτυώματος.

3. Ζητεῖται ἡ χάραξις τοῦ διαγράμματος Cremona εἰς τὸ δικτύωμα τοῦ εἰς τὸ σχῆμα 10·3 ζ (α) παρισταμένου ἁπλοῦ περιστροφικοῦ γερανοῦ σταθερᾶς στήλης. Τὸ ὠφέλιμον φορτίον Q = 3 Mp



Σχ. 10·3 ζ.

Περιστροφικὸς γερανὸς σταθερᾶς στήλης:

α) Δικτύωμα. β) Δυνσμοπολύγωνον. γ) Διάγραμμα Cremona.

καὶ τὸ ἴδιον βάρος $G = 2$ Mp (θεωρούμενον ὡς φορτίζον τὸν κόμβον IV) δίδουν τὴν συνισταμένην $R = 5$ Mp.

Ἐνταῦθα ἡ ἄνω ἕδρασις τῆς στήλης εἶναι ἄρθρωσις ἐπιτρέπουσα τὴν περιστροφήν, ἐνῶ τὸ κάτω ἕδρανον παραλαμβάνει μόνον ὁριζόντια φορτία. Συνεπῶς ἡ δύναμις B ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ δικτυώματος ἔχουσα ὁριζοντίαν κατεύθυνσιν, ἐνῶ ὁ φορεὺς τῆς A διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῆς B καὶ τῆς R.

Ἡ σύνθεσις τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καὶ ἡ χάραξις τοῦ διαγράμματος Cremona γίνονται κατὰ τὰ ἤδη γνωστά. Τὰ ἀποτελέσματα ἐμφαίνονται εἰς τὸ σχῆμα 10·3ζ (γ).

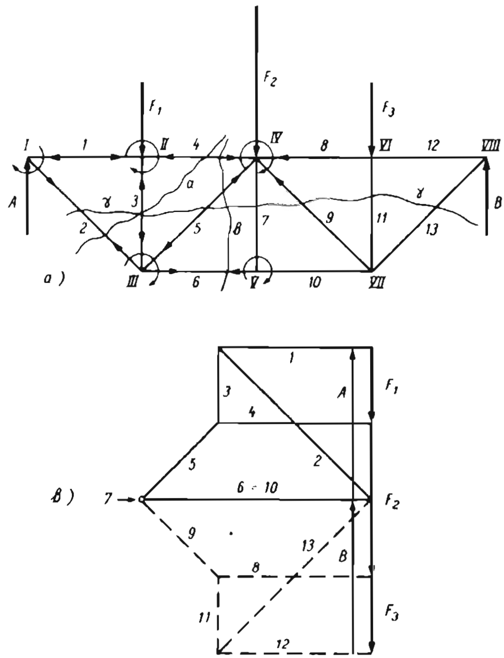
Αἱ δυνάμεις ράβδων:

Ράβδος	Ἐφελκυσμὸς kp	Θλῖψις kp
1	7200	–
2	–	8900
3	–	3000
4	–	10200
5	9500	–

Ὡς ἤδη παρετηρήθη, εἰς ἕνα δικτύωμα δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν ράβδοι, αἱ ὁποῖαι δὲν παραλαμβάνουν φορτία. Ἐὰν εἰς αὐτὸ ἢ τὸ προηγούμενον παράδειγμα αἱ ράβδοι 2 καὶ 4 ἔκειντο ἐπ' εὐθείας, τότε εἰς τὸ διάγραμμα Cremona θὰ ἔλειπε τὸ τμῆμα 3 καὶ ἡ ράβδος 3 θὰ ἦτο ἀφόρτιστος.

4. Τὸ σχῆμα 10·3η (α) παριστᾶ δικτύωμα φορτιζόμενον διὰ τῶν δυνάμεων $F_1 = 2$ Mp, $F_2 = 4$ Mp καὶ $F_3 = 2$ Mp.

Λόγω τοῦ συμμετρικοῦ τῆς φορτίσεως, αἱ ἀντιδράσεις τῶν στηρίξεων εἶναι ἴσαι $(A = B)$. Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ συστήματος παραλλήλων δυνάμεων, τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων γίνεται εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἐὰν ἐκλεγῇ πάλιν ἡ φορὰ τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ὡς φορὰ περιφορᾶς περὶ τὸ δικτύωμα, τότε αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις διαδέχονται ἡ μία τὴν ἄλλην ὡς ἑξῆς: F_1, F_2, F_3, B, A καὶ πάλιν F_1. Ἡ αὐτὴ φορὰ περιφορᾶς ἀκολουθεῖται καὶ διὰ τὴν σειρὰν τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπὶ τῶν κόμβων. Λόγω πλήρους συμμετρίας τοῦ συστήματος ἀρκεῖ νὰ χαραχθῇ τὸ διάγραμμα Cremona μόνον μέχρι καὶ τῆς ράβδου 6, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπον, δύναται νὰ χωρισθῆ κατοπτρικῶς ὡς πρὸς τὴν ράβδον αὐτὴν [σχ. 10·3 η (β)].



Σχ. 10·3 η.
Δικτυωτὸς φορεύς:
α) Δικτύωμα. β) Διάγραμμα Cremona.

Προκειμένου περὶ τῶν δυνάμεων ράβδων λαμβάνονται αἱ ἀκόλουθοι ἀριθμητικαὶ τιμαί:

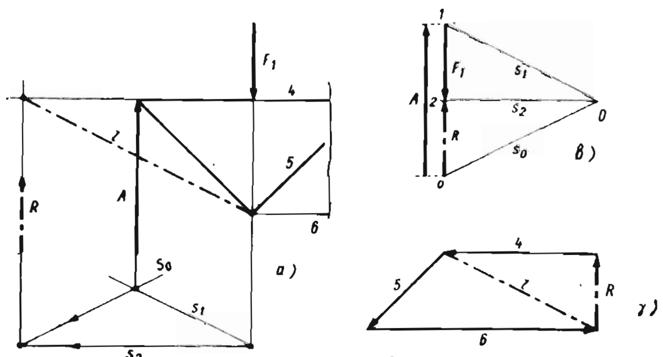
Ράβδος	Ἐφελκυσμὸς kp	Θλῖψις kp
1	—	4000
2	5600	—
3	—	2000
4	—	4000
5	—	2800
6	6000	—
7	— άφόρτιστος	—
8	—	4000
9	—	2800
10	6000	—
11	—	2000
12	—	4000
13	5600	—

Παρατήρησις: Πρὸς ἔλεγχον τοῦ διαγράμματος Cremona, ποὺ ἐχαράχθη διὰ μεταβάσεως ἀπὸ κόμβου εἰς κόμβον, δύναται νὰ ληφθῆ ὑπ' ὄψιν τὸ ὅτι ἕκαστον τμῆμα τοῦ δικτυώματος, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται δι' οἱασδήποτε τομῆς, πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ· δηλαδή — διὰ τὴν αὐτὴν φορὰν περιφορᾶς — πρέπει τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καὶ τῶν δυνάμεων ράβδων τοῦ τμήματος τοῦ δικτυώματος νὰ εἶναι κλειστόν.

Οὕτως ἐπὶ παραδείγματι:

Τομὴ	Δυναμοπολύγωνον
α	A F_1 4 3 2 (A) ἢ F_2 F_3 B 2 3 4 (F_2)
β	A F_1 4 5 6 (A) ἢ F_2 F_3 B 6 5 4 (A)
γ	A F_1 F_2 F_3 B 13 11 9 7 5 3 2 (A) ἢ 2 3 5 7 9 11 13 (2)

5. Νὰ ἐλεγχθοῦν αἱ ράβδοι 4, 5, 6 τοῦ προηγουμένου παραδείγματος διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Culmann (σχ. 10·3 θ).



Σχ. 10·3 θ.
Δικτυωτὸς φορεύς: Ἔλεγχος κατὰ Culmann.

Διὰ τομῆς, ποὺ συναντᾶ τὰς ράβδους 4, 5, 6, ἀποχωρίζεται τὸ τμῆμα δικτυώματος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἀσκοῦνται αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις A καὶ F_1, αἱ ὁποῖαι καὶ συντίθενται κατ' ἀρχὴν εἰς μίαν συνισταμένην. Τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης εἶναι $R = A - F_1$, ἡ δὲ θέσις της δύναται νὰ ληφθῇ κατὰ τὰ γνωστὰ [ἀναλυτικῶς ἢ τῇ βοηθείᾳ τοῦ δυναμοπολυγώνου καὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου, σχ. 10·3 θ (α) καὶ (β)]. Ἡ συνισταμένη R τίθεται εἰς ἰσορροπίαν πρὸς τὰς δυνάμεις τῶν ράβδων 4, 5, 6. Ἡ εὐθεῖα τοῦ Culmann διέρχεται διὰ τῶν σημείων τομῆς (R μὲ 4) καὶ (5 μὲ 6). Ἤδη ἡ R τίθεται εἰς ἰσορροπίαν πρὸς τὴν δύναμιν τῆς ράβδου 4 καὶ τὴν βοηθητικὴν δύναμιν *l*, ἡ ὁποία ἀναλυομένη κατὰ τὰς κατευθύνσεις τῶν ράβδων 5 καὶ 6 [σχ. 10·3 θ (γ)] συμπληρώνει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

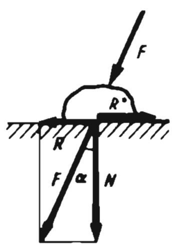
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11

ΤΡΙΒΗ

11·1 Γενικά.

Κατὰ τὴν σχετικὴν μετατόπισιν σωμάτων ἐν ἐπαφῇ ἐμφανίζεται ἀντίστασις, ἡ ὁποία εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον τραχύτεραι εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι ἐπαφῆς καὶ ὅσον μεγαλυτέρα ἡ δύναμις ἡ πιέζουσα τὸ ἕνα σῶμα ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἡ ἐμφανιζομένη ἀντίστασις ὀνομάζεται *ἀντίστασις τριβῆς* ἢ *δύναμις τριβῆς* (R). Ἡ R ἀσκεῖται τόσον ἐπὶ τοῦ σώματος ὅσον καὶ ἐπὶ τῆς ἑδράσεώς του, ἀλλὰ πάντοτε κατ' ἀντιθέτους ἐπ' αὐτῶν



Σχ. 11·1.
Τρόπος ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως τριβῆς:
R ἐπὶ τῆς ἑδράσεως, R* ἐπὶ τοῦ σώματος.

διευθύνσεις (π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 11·1 πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐπὶ τῆς ἑδράσεως καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπὶ τοῦ σώματος).

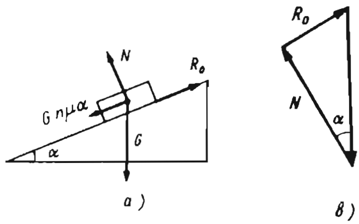
Ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι ἐπαφῆς εἶναι τελείως λεῖαι, τότε ἡ δύναμις τριβῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν καὶ εἰς περίπτωσιν ἰσορροπίας μόνον κάθετος δύναμις δύναται νὰ ἀσκῆται μεταξὺ τῶν σωμάτων. Ἡ δύναμις, ἡ ὁποία δρᾶ καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἐπαφῆς ἢ πρὸς τὸ κοινὸν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (προκειμένου περὶ καμπύλων ἐπιφανειῶν) ὀνομάζεται *κάθετος δύναμις (N)*.

Ἐὰν εἰς τὴν θέσιν ἐπαφῆς τὰ σώματα ἠρεμοῦν, ἔχομεν τριβὴν ἠρεμίας (ἢ πρόσφυσιν), ἐνῶ τριβὴν κινήσεως ἔχομεν, ὅταν τὰ σώματα κινοῦνται, τὸ ἕνα σχετικῶς πρὸς τὸ ἄλλο, εἰς τὴν θέσιν ἐπαφῆς των. Ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς σχετικῆς κινήσεως διακρίνομεν *τριβὴν ὀλισθήσεως* καὶ *τριβὴν κυλίσεως*.

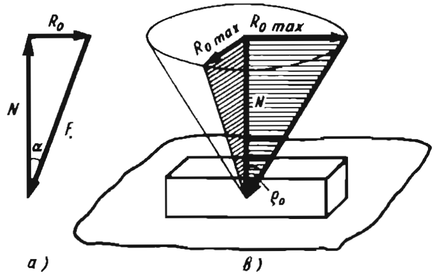
Τὸ εἶδος τῆς σχετικῆς κινήσεως ἐξαρτᾶται ἐκ διαφόρων συνθηκῶν. Ἐὰν τὰ σώματα ἐφάπτωνται κατ' ἐπιφάνειαν*, ἡ ἐμφανιζομένη τριβὴ δύναται νὰ εἶναι μόνον ὀλισθήσεως. Ἐὰν ἡ ἐπαφὴ γίνεται κατὰ σημεῖον ἢ κατὰ μῆκος μιᾶς γραμμῆς, ἡ σχετικὴ κίνησις δύναται νὰ εἶναι εἴτε ὀλίσθησις εἴτε κύλισις.

11·2 Τριβὴ κατὰ τὴν ἠρεμίαν (πρόσφυσις).

Ἐὰν σῶμα τοποθετηθῇ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως α [σχ. 11·2 α (α)] καὶ ἐν συνεχείᾳ αὐξηθῇ ἡ γωνία κλίσεώς του, διαπιστοῦται ὅτι τὸ σῶμα δὲν ὀλισθαίνει, ἐφ' ὅσον ἡ γωνία α παραμένη μικροτέρα μιᾶς ὡρισμένης τιμῆς ρ_0 (ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ σειρᾶς παραγόντων, ποὺ ἐξετάζονται εἰς τὰ ἑπόμενα). Ἐφ' ὅσον



Σχ. 11·2 α.
Πρόσφυσις ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου: α) Διάταξις. β) Δυναμοπολύγωνον.



Σχ. 11·2 β.
Πρόσφυσις ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου: α) Δυναμοπολύγωνον. β) Κῶνος τριβῆς.

λοιπὸν $\alpha < \rho_0$, ἐμποδίζεται ἡ ὀλίσθησις τοῦ σώματος, προφανῶς ὑπὸ ἀντιστάσεως R_0 λόγω τριβῆς. Ἡ ἀντίστασις αὐτή, ἀντιτιθεμένη πρὸς τὴν συνιστῶσαν τοῦ βάρους $G \cdot \eta\mu\alpha$ δύναται νὰ λάβῃ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς R_{0max} διὰ γωνίαν κλίσεως ρ_0. Ἡ γωνία ρ_0 ὀνομάζεται *γωνία τριβῆς*, ἡ δὲ συνθήκη

$$\alpha \leqq \rho_0$$

ἀποτελεῖ τὴν συνθήκην προσφύσεως.

Ἂν αἱ τρεῖς δυνάμεις (*Βάρος* G, *δύναμις προσφύσεως* R_0 καὶ *κάθετος δύναμις* N) κατὰ τὸν τρόπον ποὺ αὐταὶ ἰσορροποῦν ἐπὶ τοῦ

---

* Ἐνταῦθα ἀναφέρεται γενικῶς *ἐπιφάνεια*, διότι τριβὴ ἐμφανίζεται καὶ μεταξὺ μὴ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

σώματος, συντεθοῦν εἰς δυναμοπολύγωνον, τοῦτο θὰ παρουσιάση ἑνιαίαν φορὰν διαγραφῆς [σχ. 11·2 α (β)]. Ἐκ τοῦ δυναμοπολυγώνου αὐτοῦ λαμβάνεται:

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{R_0}{N}.$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἀνάγεται, προκειμένου περὶ τῆς συνθήκης προσφύσεως, εἰς:

$$\varepsilon\varphi\,\alpha \lesseqgtr \varepsilon\varphi\,\rho_0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{R_0}{N} \leqslant \mu_0,$$

ὅπου: διὰ τῆς $\varepsilon\varphi\,\rho_0 = \mu_0$ χαρακτηρίζεται ὁ *συντελεστὴς προσφύσεως*.

Συνοψίζοντες ἔχομεν:

Ἡ δύναμις προσφύσεως ἢ τριβῆς κατὰ τὴν ἠρεμίαν εἶναι ἡ ἀντίστασις, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ἐπὶ ἐπιχειρουμένης κινήσεως μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ματαίωσίν της. Ἡ κατεύθυνσίς της εἶναι πάντοτε ἀντίθετος τῆς κατευθύνσεως τῆς ἐπιχειρουμένης κινήσεως καὶ τὸ μέτρον της κυμαίνεται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τῆς μεγίστης τιμῆς:

$$R_{0max} = \mu_0 N.$$

Ἐὰν ἐπὶ ἠρεμοῦντος σώματος, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀσκηθῇ δύναμις F (σχ. 11·1 καὶ 11·2 β), ἡ ὁριζοντία της συνιστῶσα δύναται νὰ ἀνέλθη μέχρι τῆς τιμῆς $R_0 = F\eta\mu\,\alpha = N\varepsilon\varphi\,\alpha$ [σχ. 11·2 β (α)], χωρὶς νὰ σημειωθῇ μετατόπισις τοῦ σώματος. Τὸ τρίγωνον τῶν ἰσορροπουσῶν ἐπὶ τοῦ σώματος δυνάμεων ἀπεικονίζεται εἰς τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν R_{0max} εἰς τὸ σχῆμα 11·2 β (β). Ὅταν μεταβάλλεται ἡ διεύθυνσις ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως εἰς τὸν χῶρον, στρέφεται τὸ τρίγωνον τῶν δυνάμεων περὶ τὸν ἄξονα N. Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου γράφει κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸν μανδύαν κώνου, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται *κῶνος τριβῆς* [σχ. 11·2 β (β)]. Τὸ σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἐφ' ὅσον ἡ δύναμις F (ἢ ἡ συνισταμένη τῶν ἐπενεργουσῶν δυνάμεων) εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κώνου τριβῆς (δηλαδὴ $\alpha \lesseqgtr \rho_0$).

11·3 Τριβὴ ὀλισθήσεως.

Ἂν ἡ γωνία κλίσεως α τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου (σχ. 11·2 α) αὐξηθῇ καὶ ὑπερβῇ τὴν τιμὴν τῆς γωνίας τριβῆς ρ_0, ἐπέρχεται *ὀλίσθησις* τοῦ σώματος.

Ἡ *δύναμις τριβῆς ὀλισθήσεως* R (ποὺ ἐν συντομίᾳ ὀνομάζεται *ἀντίστασις τριβῆς*) συνδέεται μετὰ τοῦ *συντελεστοῦ τριβῆς ὀλισθήσεως* μ (*συντελεστοῦ τριβῆς*) διὰ τῆς σχέσεως:

$$\boxed{R = \mu \cdot N}$$

Πειραματικῶς ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι διὰ νὰ κινηθῆ σῶμα ἀπὸ τῆς καταστάσεως ἠρεμίας ἀπαιτεῖται δύναμις μεγαλυτέρα ἐκείνης διὰ νὰ διατηρηθῆ τοῦτο ἐν κινήσει, δηλαδή:

$$R < R_{0max} \quad \text{καὶ ἀντιστοίχως} \quad \mu < \mu_0.$$

Τοῦτο διαπιστώνομεν κατὰ τὴν μετακίνησιν π.χ. ἐπίπλου, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ἑπομένης παρατηρήσεως: Ἡ ἑλκτικὴ δύναμις ἀτμομηχανῆς μεταφέρεται ἐκ τῶν τροχῶν ἕλξεως ἐπὶ τῶν σιδηροτροχιῶν διὰ τῆς δυνάμεως προσφύσεως. Ὅταν ὅμως οἱ τροχοὶ ἀρχίζουν νὰ ὀλισθαίνουν ἐπὶ ὑγρῶν σιδηροτροχιῶν, ἀντικαθιστᾶ ἡ (μικροτέρα) τριβὴ ὀλισθήσεως τὴν πρόσφυσιν καὶ συνεπῶς ἐλαττοῦται ἡ ἑλκτικὴ δύναμις.

11·4 Συντελεσταὶ τριβῆς.

Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἀποτελεῖ ἐμπειρικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἑκάστοτε συνθήκας.

Κατ' ἀρχὴν ὑφίσταται πολὺ σημαντικὴ διαφορά, ἂν τὰ δύο σώματα ἐφάπτωνται ἀπ' εὐθείας ἢ ἂν μεταξύ των μεσολαβῆ στρῶμα ὑγροῦ (λιπαντικοῦ). Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν τὴν *ξηρὰν τριβήν*, εἰς τὴν δευτέραν (κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ στρώματα τοῦ ὑγροῦ τρίβονται μεταξύ των) τὴν *ὑγρὰν τριβήν*. Ἐνδιάμεσον κατάστασιν ἀποτελεῖ ἡ *μικτὴ τριβή*, κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει μὲν λιπαντικὸν μέσον, ἀλλὰ δὲν δημιουργεῖται συνεκτικὸν λιπαντικὸν ἐνδιάμεσον στρῶμα.

Εἰς τὴν *ξηρὰν τριβὴν* ὁ συντελεστὴς τριβῆς μ ἐξαρτᾶται κυρίως ἀπὸ τοὺς ἑξῆς παράγοντας:

α) Ὑλικὸν τῶν τριβομένων σωμάτων (σκληρόν, μαλακόν).

β) Κατάστασις τῆς ἐπιφανείας (λεία, τραχεῖα).

Κατὰ τὰ ἄλλα, διὰ τὴν πλήρως ξηρὰν τριβὴν ἰσχύει κατὰ προσέγγισιν ὁ νόμος τοῦ Coulomb, $\mu =$ σταθερόν. Βάσει τοῦ νόμου αὐτοῦ ὁ συντελεστὴς τριβῆς μ ἔπρεπε νὰ ἦτο ἀνεξάρτητος τοῦ μεγέθους τῶν ἐπιφανειῶν (συνεπῶς καὶ τῆς ἐπιφανειακῆς πιέσεως) καὶ ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος ὀλισθήσεως. Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως ὁ συντελεστὴς μ δὲν εἶναι τελείως ἀνεξάρτητος τῶν μεγεθῶν αὐτῶν.

Εἰς τὴν *ὑγρὰν τριβὴν* ὁ μ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ ἑξῆς:

1. Ἰδιότητες τοῦ λιπαντικοῦ.
2. Πίεσις ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν μεταξὺ τῶν σωμάτων.
3. Ταχύτης ὀλισθήσεως.

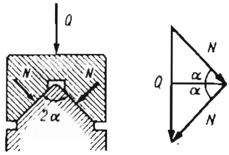
Αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν τριβῆς μ_0 καὶ μ διὰ ξηρᾶς καὶ λιπανθείσας (μικτῆς τριβῆς) ἐπιφανείας ἀναφέρονται εἰς τὸν Πίνακα 11·4. Αἱ τιμαὶ συντελεστῶν ὑγρᾶς τριβῆς εἰς ἕδρανα μὲ δακτυλίους λιπάνσεως καὶ εἰς περιπτώσεις λιπάνσεως διὰ πεπιεσμένου ἐλαίου κυμαίνονται εἰς ὅρια σημαντικῶς χαμηλότερα τῶν προηγουμένων (μεταξὺ $\mu = 0{,}002$ καὶ 0,02).

ΠΙΝΑΞ 11·4

Ὑλικὸν τῶν ἐν ἐπαφῇ σωμάτων	μ_0 ξηρὰ	μ_0 λιπασμένη	μ ξηρὰ	μ λιπασμένη
Χάλυψ ἐπὶ χάλυβος	0,15...0,25	0,1	0,1 ...0,15	0,01...0,05
Χάλυψ ἐπὶ χυτοσιδήρου ἢ ὀρειχάλκου	0,19	0,1	0,16...0,18	0,01...0,05
Χυτοσίδηρος ἐπὶ χυτοσιδήρου		0,16		0,01...0,15
Μέταλλον ἐπὶ ξύλου	0,5... 0,7	0,1...0,25	0,25...0,5	0,1 ...0,12
Ξύλον ἐπὶ ξύλου	0,4...0,65	0,16...0,2	0,2 ...0,4	0,04...0,16
Δερμάτινοι ἱμάντες ἐπὶ χυτοσιδήρου	(πλευρὰ κρέατος)	0,22		0,2 ...0,7
Δερμάτινοι ἱμάντες ἐπὶ χυτοσιδήρου	(ἑτέρα πλευρά)	0,33		0,3...1,1
Ἐλαστικοὶ ἱμάντες ἐπὶ χυτοσιδήρου			0,4 ...0,5	
Ἱμάντες ἐξ ὑφάσματος ἐπὶ χυτοσιδήρου			0,3 ...0,5	0,3 ...0,5
Φερμουὶ ἐπὶ χάλυβος			0,5 ...0,6	0,3 ...0,5
Δερμάτινον στεγανοποιητικὸν ἐπὶ μετάλλου	0,6	0,2...0,25	0,2...0,25	0,12

* 11·5 Τριβὴ εἰς σφηναύλακας.

Εἰς σφηναύλακας (ὅπως π.χ. οἱ πρισματικοὶ ὁδηγοὶ εἰς τὰς ἐργαλειομηχανὰς) ἐμφανίζεται τριβὴ καὶ εἰς τὰς δύο κεκλιμένας ἐπιφανείας (σχ. 11·5 α).



Σχ. 11·5 α.
Τριβὴ εἰς σφηναύλακα.

Τὸ φορτίον Q ἀναλύεται εἰς δύο ἴσας, καθέτους πρὸς τὰς κεκλιμένας ἐπιφανείας, συνιστώσας δυνάμεις N. Τὰ μέτρα τῶν δυνάμεων (βλ. δυναμοπολύγωνον) λαμβάνονται ἐκ τῶν σχέσεων:

$$Q = 2\,N\eta\mu\,\alpha, \qquad 2\,N = \frac{Q}{\eta\mu\,\alpha}.$$

Ἡ δύναμις τριβῆς, ποὺ ἐμφανίζεται συνολικῶς ἐπὶ τῶν δύο ὁδηγῶν ἐπιφανειῶν κατὰ τὴν κατὰ μῆκος κίνησιν, ἰσοῦται πρός:

$$R = \mu \cdot 2N = \frac{\mu}{\eta\mu\,\alpha} \cdot Q = \mu' \cdot Q.$$

Εἰς τὴν σφηναύλακα φαίνεται λοιπὸν ὅτι αὐξάνεται ὁ συντελεστὴς τριβῆς μ μέχρι τοῦ *συντελεστοῦ τριβῆς σφηνός*:

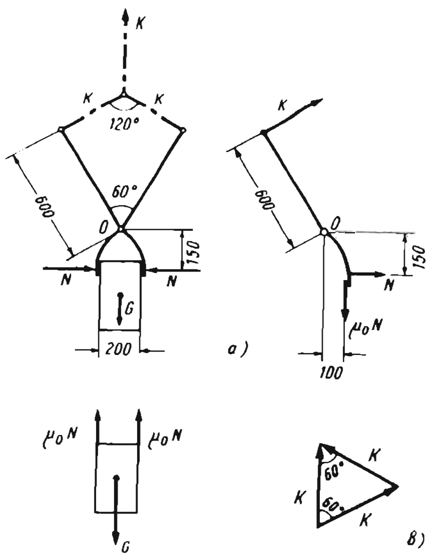
$$\mu' = \frac{\mu}{\eta\mu\,\alpha}.$$

Τοῦτο ἐξηγεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων δυνάμεων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ γεωμετρικοῦ των ἀθροίσματος, δηλαδὴ τοῦ φορτίου Q (βλ. ἀνωτέρω $2N = Q/\eta\mu\,\alpha > Q$).

Παραδείγματα.

1. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς μ_0 μεταξὺ μεταφερομένου σώματος καὶ ἁρπάγης [σχ. 11·5 β (α)], ὥστε τὸ φορτίον νὰ συγκρατῆται διὰ τῆς τριβῆς;

Θεωροῦμεν τὸ βάρος τῆς ἁρπάγης ἀσήμαντον, ὁπότε ἡ δύναμις K τῆς ἁλύσεως πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ φορτίον Q, διότι πλὴν τοῦ φορτίου δὲν δροῦν ἄλλαι κατακόρυφοι δυνάμεις. Ἐπειδὴ κάθε ἄλυσις συνδέσεως τῶν βραχιόνων τῆς ἁρπάγης σχηματίζει γωνίαν 60° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον, αἱ τρεῖς δυνάμεις τῶν ἀλύσεων σχηματίζουν ἰσόπλευρον δυναμοτρίγωνον [σχ. 11·5 β (β)], ἄρα καὶ αἱ τρεῖς ἰσοῦνται πρὸς G. Ἐξ ἄλλου, ἐφ᾽ ὅσον τὸ σῶμα πρέπει νὰ συγκρατῆται διὰ τῆς τριβῆς, πρέπει νὰ ἰσχύῃ $G = 2\,R_0 = 2\,\mu_0 N$ (συνθῆκαι ἰσορροπίας διὰ τὸ σῶμα).



Σχ. 11·5 β.
Διὰ δυνάμεων προσφύσεως συγκράτησις φορτίου ὑπὸ ἁρπάγης.

Αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας διὰ τοὺς βραχίονας τῆς ἁρπάγης εἶναι:

$$\Sigma M = 0, \qquad K \cdot 0{,}6 + \mu_0 N \cdot 0{,}1 - N \cdot 0{,}15 = 0.$$

Διὰ $K = G$ καὶ $N = G/2\mu_0$ λαμβάνεται:

$$G \cdot 0{,}6 + \frac{G}{2} \cdot 0{,}1 - \frac{G}{2\mu_0} \cdot 0{,}15 = 0,$$

$$0{,}6 + 0{,}05 - \frac{0{,}075}{\mu_0} = 0, \qquad \mu_0 = \frac{0{,}075}{0{,}65} = 0{,}115.$$

2. Ἡ μεγίστη προωθητικὴ δύναμις F ὡς καὶ ἡ μεγίστη δύναμις πεδήσεως F′ ὀχήματος εἶναι ἀνάλογοι τοῦ βάρους του (δηλαδὴ τῆς καθέτου δυνάμεως):

$$F = \mu \cdot K \cdot G, \qquad F' = \mu \cdot K' \cdot G,$$

ὅπου αἱ τιμαὶ τῶν K καὶ K′ ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ εἴδους τῆς κινήσεως (κίνησις εἰς τοὺς ἐμπροσθίους, εἰς τοὺς ὀπισθίους ἢ εἰς ὅλους τοὺς τροχοὺς) καὶ ἀντιστοίχως ἐκ τοῦ εἴδους τῆς πεδήσεως (πέδησις ἐμπροσθίων, ὀπισθίων ἢ ἐφ' ὅλων τῶν τροχῶν).

Ποῖαι π.χ. αἱ τιμαὶ τῶν μεγίστων δυνάμεων πεδήσεως ὀχήματος βάρους $G = 1500$ kp, διὰ πέδησιν ἐφ' ὅλων τῶν τροχῶν ($K' = 1$), ἐάν:

α) ὁ συντελεστὴς προσφύσεως μεταξὺ τροχοῦ καὶ ἐδάφους μ_0 ἐπιφέρῃ τὴν πέδησιν;

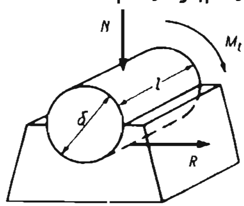
β) ἡ πέδησις εἰς τοὺς ἄξονας τῶν τροχῶν εἶναι τόσον ἰσχυρά, ὥστε οἱ τροχοὶ νὰ ὀλισθαίνουν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, μὲ ἀποτέλεσμα ὁ μ_0 νὰ ἐλαττοῦται μέχρι τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς ὀλισθήσεως $\mu = 0{,}4$;

α) $F_1' = \mu_0 \cdot K' \cdot G = 0{,}6 \times 1 \times 1500 \text{ kp} = 900 \text{ kp}.$

β) $\dfrac{F_2'}{F_1'} = \dfrac{\mu \cdot K' \cdot G}{\mu_0 \cdot K' \cdot G} = \dfrac{\mu}{\mu_0} = \dfrac{0{,}4}{0{,}6} = \dfrac{2}{3}, \quad F_2' = 600 \text{ kp}.$

11·6 Τριβὴ στροφέως (τριβὴ μεταξὺ καμπύλων ἐπιφανειῶν).

Ἔστω στροφεὺς (σχ. 11·6 α), ὁ ὁποῖος περιστρέφεται ἐντὸς κυλινδρικοῦ ἐδράνου — ὑπὸ συνθήκας ξηρᾶς ἢ μικτῆς (ὄχι ὑγρᾶς)



Σχ. 11·6 α.
Κυλινδρικὸς στροφεύς.

τριβῆς — μὲ διάμετρον $\delta = 2r$. Ὁ στροφεὺς εὑρίσκεται ὑπὸ φορτίον N ἢ ἀντιστοίχως F (σχ. 11·6 β). Ἡ ἐφαπτομενικῶς δρῶσα δύναμις τριβῆς ὑπολογιζομένη εἰς ἑκάστην θέσιν (σχ. 11·6 β), μέσω τοῦ συνήθους συντελεστοῦ τριβῆς ὀλισθήσεως

$$\mu = \text{εφ}\, \rho,$$

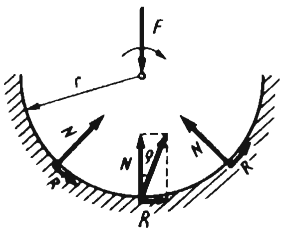
ἰσοῦται πρὸς $R = \mu \cdot N$.

Ἡ ῥοπὴ τῶν δυνάμεων τριβῆς (M_R) περὶ τὸν ἄξονα τοῦ στροφέως εἶναι:

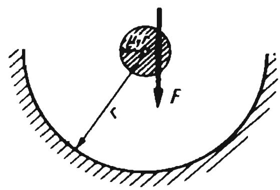
$$M_R = \Sigma (R \cdot r) = r \cdot \Sigma (\mu \cdot N) = \mu \cdot r \cdot \Sigma N = r \cdot \mu_1 \cdot F.$$

Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μ_1 τοῦ στροφέως εἶναι μεγαλύτερος τοῦ συνήθους μ, διότι $\sum N > F$.

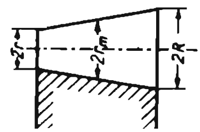
Ὁ κύκλος ἀκτῖνος $\mu_1 r$ (σχ. 11·6 γ) ὀνομάζεται *κύκλος τριβῆς*. Ἐὰν δύναμις F′ ἐπενεργῇ μὲν ἐκκέντρως, ἀλλ' ὁ φορεύς της τέμνη



Σχ. 11·6 β.
Τριβὴ στροφέως.



Σχ. 11·6 γ.
Ὁ κύκλος τριβῆς.



Σχ. 11·6 δ.
Κωνικὸς στροφεύς.

τὸν κύκλον τριβῆς, ὁ στροφεὺς δὲν περιστρέφεται, διότι ἡ ἐφαρμοζομένη ροπὴ τῆς δυνάμεως F′ μὲ μοχλοβραχίονα μικρότερον τοῦ $\mu_1 r$ εἶναι μικροτέρα τῆς ροπῆς τριβῆς M_R. Εἰς κωνικὸν στροφέα (σχ. 11·6 δ) πρέπει νὰ λαμβάνεται κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς ὡς r ἡ μέση ἀκτὶς $r_m = (R + r)/2$.

* 11·7 Πέδη σιαγόνος.

Αἱ πέδαι χρησιμοποιοῦνται πρὸς ἀπορρόφησιν κινητικῆς ἐνεργείας διὰ τριβῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πέδης σιαγόνος, ἡ τριβὴ δρᾷ διὰ τῆς συμπιέσεως τῆς σιαγόνος ἐπὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ τυμπάνου τῆς πέδης. Μεταξὺ σιαγόνος καὶ τυμπάνου ἐμφανίζεται ἀντίστασις τριβῆς $R = \mu \cdot N$, ἡ ὁποία δημιουργεῖ ροπὴν τριβῆς. Διὰ καταλλήλου ἐπικαλύψεως τοῦ τυμπάνου ἐπιτυγχάνονται ὑψηλοὶ συντελεσταὶ τριβῆς.

Ἐνταῦθα θὰ ἐξετασθῇ μόνον ἡ ἁπλῆ πέδη σιαγόνος, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται εἰς μικρὰς διατάξεις [σχ. 11·7 (α, β, γ)]. Εἰς τὰ σχήματα αὐτὰ ἡ κάθετος δύναμις καὶ ἡ δύναμις τριβῆς μεταξὺ τυμπάνου καὶ σιαγόνος εἶναι πάντοτε σχεδιασμέναι οὕτως, ὥστε νὰ δροῦν ἐπὶ τῆς σιαγόνος. Ὡς ἐκ τούτου ἡ R δρᾷ πάντοτε κατὰ τὴν φορὰν περιστροφῆς τοῦ τυμπάνου.

Τὰ σχήματα 11·7 (α), (β), (γ) διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν θέσιν τοῦ σημείου ἀρθρώσεως Γ τοῦ μοχλοῦ τῆς πέδης, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι στερεωμένη ἡ σιαγών. Ὡς ἐκ τούτου προκύπτουν καὶ διαφορετικαὶ ἐξισώσεις ροπῶν:

Σχῆμα 11·7(α).

Περιστροφὴ κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν ὡρολογίου (δεξιόστροφος):

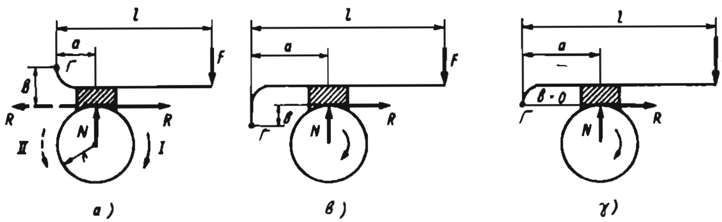
$$F \cdot l - N \cdot \alpha - R \cdot \beta = 0,$$

Περιστροφὴ ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῶν δεικτῶν ὡρολογίου (ἀριστερόστροφος):

$$F \cdot l - N \cdot \alpha + R \cdot \beta = 0.$$

Διὰ $R = \mu \cdot N$ λαμβάνεται:

$$F = \frac{N}{l}(\alpha \pm \mu \cdot \beta) \qquad \begin{array}{l} + \text{ Δεξιόστροφος (I),} \\ - \text{ Ἀριστερόστροφος (II).} \end{array}$$



Σχ. 11·7.
Ἁπλῆ πέδη σιαγόνος μὲ διαφόρους διατάξεις τῆς ἀρθρώσεως Γ τοῦ μοχλοῦ τῆς σιαγόνος.

Ἡ ἐπὶ τοῦ μοχλοῦ ἀσκουμένη δύναμις F, πρὸς ἐπίτευξιν τῆς αὐτῆς *ροπῆς πεδήσεως*, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φορᾶς περιστροφῆς. Διὰ $\alpha = \mu \cdot \beta$ καὶ ἀριστερόστροφον φορὰν περιστροφῆς, ἡ ἀπαιτουμένη πρὸς πέδησιν δύναμις μηδενίζεται καὶ ἡ πέδη ἐνεργεῖ ἀφ' ἑαυτῆς. Μηχανισμὸς τοιούτου εἴδους (φράκτης τριβῆς) ἐπιτρέπει μίαν μόνον φορὰν περιστροφῆς καὶ ἀποκλείει τὴν ἄλλην (εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν τὴν δεξιόστροφον).

Σχῆμα 11·7(β).

Εἰς τὴν ἐδῶ παριστωμένην διάταξιν τοῦ σημείου ἀρθρώσεως, ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως τριβῆς δρᾷ κατ' ἀντίθετον φορὰν ἀπὸ προηγουμένως. Ἕνεκα τούτου εἶναι :

$$F = \frac{N}{l}(\alpha \mp \mu \cdot \beta) \qquad \begin{array}{l} - \text{ Δεξιόστροφος,} \\ + \text{ Ἀριστερόστροφος.} \end{array}$$

Διὰ $\alpha = \mu \cdot \beta$ φράσσεται ἡ δεξιόστροφος φορὰ περιστροφῆς τοῦ τυμπάνου.

Ἡ διαφορὰ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν ροπῶν μεταξὺ δεξιοστρόφου καὶ ἀριστεροστρόφου φορᾶς περιστροφῆς ὀφείλεται μόνον εἰς τὴν ροπὴν τῆς δυνάμεως τριβῆς R. Ἐὰν ἡ ἄρθρωσις κεῖται ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς R [σχ. 11·7 (γ)], ἡ ἐξίσωσις τῶν ροπῶν γράφεται:

$$F \cdot l - N \cdot \alpha = 0 \quad \text{ἢ} \quad F = N \frac{\alpha}{l},$$

καὶ μάλιστα καὶ διὰ τὰς δύο φορὰς περιστροφῆς.

Ἡ ροπὴ πεδήσεως τῆς ἁπλῆς πέδης διὰ σιαγόνος εἶναι εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις:

$$M_R = R \cdot r = \mu \cdot N \cdot r.$$

Παράδειγμα.

Εἰς τὴν πέδην σιαγόνος τοῦ σχήματος 11·7 (α) ($d = 2r = 200$ mm) ἐπὶ τῆς χειρολαβῆς τοῦ μοχλοῦ ἐπενεργεῖ δύναμις $F = 20$ kp (συντελεστὴς τριβῆς $\mu = 0{,}3$).

$$\alpha = 180 \text{ mm}, \quad \beta = 120 \text{ mm}, \quad l = 680 \text{ mm}.$$

α) Ποία ἡ ροπὴ πεδήσεως $M_R = R \cdot r = \mu \cdot N \cdot r$ διὰ φορὰν περιστροφῆς τοῦ τυμπάνου τὴν I καὶ τὴν II;

β) Ποία ἡ ροπὴ πεδήσεως εἰς τύπον πέδης ὡς σχ. 11·7 (γ);

γ) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάστασις β εἰς πέδησιν κατὰ τὴν ἀριστερόστροφον φορὰν περιστροφῆς, διὰ νὰ δρᾷ ἡ πέδη ἀφ' ἑαυτῆς, ἄνευ ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως χειρὸς F;

Λύσις:

α) $$F = \frac{N}{l}(\alpha \pm \mu \cdot \beta), \quad N = \frac{F \cdot l}{\alpha \pm \mu \cdot \beta} \begin{cases} + \ldots \text{I} \\ - \ldots \text{II.} \end{cases}$$

$$N = \frac{20 \times 68}{18 \pm 0{,}3 \times 12} \text{kp} = \frac{1360}{18 \pm 3{,}6} \text{kp}, \quad M_R = \mu \cdot N \cdot r$$

$$N_I = 63 \text{ kp}, \quad R_I = \mu \cdot N_I = 18{,}9 \text{ kp}, \quad M_{RI} = 1{,}89 \text{ kpm},$$

$$N_{II} = 94{,}4 \text{ kp}, \quad R_{II} = \mu \cdot N_{II} = 28{,}3 \text{ kp}, \quad M_{RII} = 2{,}83 \text{ kpm}.$$

β) $$F = N \frac{\alpha}{l}, \quad N = F \frac{l}{\alpha} = 20 \times \frac{68}{18} \text{ kp} \doteq 75{,}5 \text{ kp}$$

$$R \doteq \mu \cdot N = 22{,}7 \text{ kp}, \quad M_R = 2{,}27 \text{ kpm}.$$

γ) $$\alpha = \mu \cdot \beta \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{18}{0{,}3} \text{ cm} = 60 \text{ cm}.$$

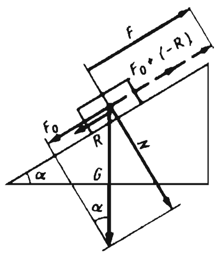
* 11·8 Τριβὴ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Εἰς τὰς παραγράφους 11·2 καὶ 11·3 ἀνεφέρθημεν ἐν συντομίᾳ εἰς τὴν συμπεριφορὰν σώματος τραχείας ἐπιφανείας ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τοῦ βάρους του G. Ἐδῶ θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν F, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐπενεργήσῃ ἐπὶ τοῦ σώματος, διὰ νὰ κινηθῇ τοῦτο, ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα, ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω. Διακρίνονται δύο βασικαὶ περιπτώσεις :

Κατεύθυνσις τῆς δυνάμεως παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν του.

α) Κατεύθυνσις τῆς δυνάμεως παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

Τὸ βάρος G τοῦ σώματος ἀναλύεται (κατὰ τὸ σχῆμα 11·8 α) εἰς τὴν *κινοῦσαν* συνισταμένην $F_0 = G \cdot \eta\mu\,\alpha$ καὶ τὴν κάθετον δύναμιν $N = G \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha$.



Σχ. 11·8 α.
Δύναμις παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

Ἡ δύναμις F, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἕλξιν τοῦ σώματος πρὸς τὰ ἄνω, θὰ ἔπρεπε, εἰς κίνησιν ἄνευ τριβῆς, νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν δύναμιν F_0. Ἐὰν ὅμως ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ τριβή, πρέπει νὰ ὑπερνικηθῇ καὶ ἡ ἀντίστασις $\mu \cdot N = \mu \cdot G \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha$.

Ἔτσι: $F = F_0 + R = G \cdot \eta\mu\,\alpha + \mu \cdot G \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha = G\,(\eta\mu\,\alpha + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha)$.

Διὰ νὰ ὀλισθαίνῃ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἰσοταχῶς πρὸς τὰ κάτω, ἡ δύναμις, ἡ ὁποία χρειάζεται διὰ νὰ τὸ συγκρατῇ, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$F' = F_0 - R = G\,(\eta\mu\,\alpha - \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha).$$

Εἰς τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν $F' = 0$, λαμβάνεται:

$$\eta\mu\,\alpha = \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha, \quad \frac{\eta\mu\,\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\alpha} = \mu \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\,\alpha = \varepsilon\varphi\,\rho.$$

Εἰς αὐτὴν τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν ἀντιστοιχεῖ $\alpha = \rho$.

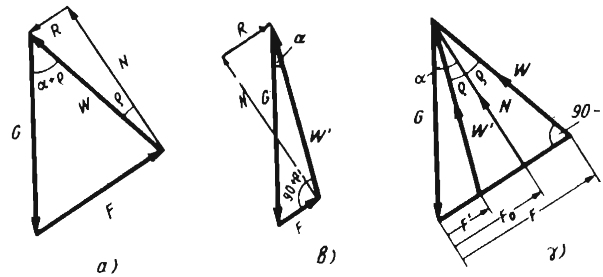
Συνοπτικῶς:

$$\boxed{F = G\,(\eta\mu\,\alpha \pm \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha)}$$

$+$ (σὺν) διὰ τὴν ἄνοδον καὶ $-$ (πλὴν) διὰ τὴν κάθοδον τοῦ σώματος.

Αὐτοσυγκράτησις ἐπέρχεται, ὅταν $\alpha \leqq \rho$.

Τὸ σχῆμα 11·8 β παριστᾶ τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν ἐπὶ τοῦ σώματος ἀσκουμένων δυνάμεων, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰς γραφικὰς συνθήκας ἰσορροπίας. Αἱ δυνάμεις G, F καὶ ἡ ἀντίστασις



Σχ. 11·8 β.

Δυναμοπολύγωνα: α) Πρὸς ἕλξιν. β) Πρὸς συγκράτησιν κατὰ τὴν κίνησίν του πρὸς τὰ ἄνω. γ) Σύνθετον δυναμοπολύγωνον.

W (συνισταμένη τῆς καθέτου δυνάμεως N καὶ τῆς τριβῆς R) εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Τὸ σχῆμα 11·8 β (α) δεικνύει τὴν περίπτωσιν τῆς ἕλξεως τοῦ σώματος πρὸς τὰ ἄνω, ἐνῶ τὸ σχῆμα 11·8 β (β) τὴν κίνησιν αὐτοῦ πρὸς τὰ κάτω. Ἡ δύναμις R ἐπενεργεῖ πάντοτε κατὰ διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κινήσεως, ἐξ οὗ καὶ εἰς τὸ σχῆμα 11 · 8 β (α) κατευθύνεται πρὸς τὰ κάτω, ἐνῶ εἰς τὸ σχῆμα 11·8 β (β) πρὸς τὰ ἄνω.

Σύνθεσιν τῶν σχημάτων 11 · 8 β (α) καὶ 11 · 8 β (β) εἰς ἕνα δεικνύει τὸ σχῆμα 11·8 β (γ), εἰς τὸ ὁποῖον ἐπίσης ἐμφανίζεται καὶ ἡ ἄνευ τριβῆς περίπτωσις (F_0). Ἀπὸ τὸ σχῆμα αὐτὸ δύναται νὰ γραφῇ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ νόμου τῶν ἡμιτόνων, ἡ σχέσις:

$$\frac{F}{G} = \frac{\eta\mu\,(\alpha \pm \rho)}{\eta\mu\,(90^\circ \mp \rho)} = \frac{\eta\mu\,(\alpha \pm \rho)}{\sigma\upsilon\nu\,\rho}.$$

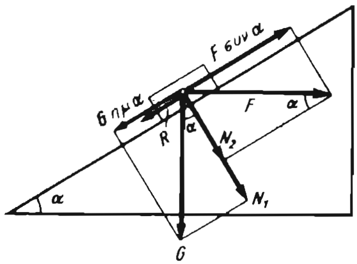
Ἐξ αὐτῆς προκύπτει πάλιν (ὅταν $\varepsilon\varphi\,\rho = \mu$):

$$\frac{F}{G} = \frac{\eta\mu\,\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\,\rho \pm \sigma\upsilon\nu\,\alpha \cdot \eta\mu\,\rho}{\sigma\upsilon\nu\,\rho} = \eta\mu\,\alpha \pm \varepsilon\varphi\,\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \eta\mu\,\alpha \pm \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha.$$

(Εἰς ἄνευ τριβῆς κίνησιν θὰ ἦτο $R=0$, ἀντιστοίχως δὲ $\rho=0$ καὶ $\mu=0$ καὶ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν θὰ προέκυπτε $F_0=G\cdot \eta\mu\,\alpha$).

β) Κατεύθυνσις τῆς δυνάμεως παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν.

Τὸ βάρος τοῦ σώματος ἀναλύεται (σχ. 11·8 γ) εἰς τὴν $G\cdot\eta\mu\,\alpha$ καὶ τὴν κάθετον δύναμιν $N_1=G\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha$. Ἡ δύναμις F ἀναλύεται εἰς τὴν $F\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha$ καὶ τὴν $N_2=F\cdot\eta\mu\,\alpha$.



Σχ. 11·8 γ.
Δύναμις παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Εἰς τὴν ἄνευ τριβῆς κίνησιν ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου θὰ ἔπρεπε ἡ $F_0\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha$ νὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν συνιστῶσαν τοῦ βάρους $G\cdot\eta\mu\,\alpha$. Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν ὅμως πρέπει νὰ ὑπερνικηθῇ καὶ ἡ ἀντίστασις τριβῆς:

$$R=\mu\,(N_1+N_2)=\mu\,(G\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha+F\cdot\eta\mu\,\alpha).$$

Ἑπομένως εἶναι:

$$F\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha=G\cdot\eta\mu\,\alpha+\mu\,(G\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha+F\cdot\eta\mu\,\alpha).$$

Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνεται:

$$F\,(\sigma\upsilon\nu\,\alpha-\mu\cdot\eta\mu\,\alpha)=G\,(\eta\mu\,\alpha+\mu\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha),$$

$$F=G\,\frac{\eta\mu\,\alpha+\mu\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\alpha-\mu\cdot\eta\mu\,\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\,\alpha+\mu}{1-\mu\cdot\varepsilon\varphi\,\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\,\alpha+\varepsilon\varphi\,\rho}{1-\varepsilon\varphi\,\alpha\cdot\varepsilon\varphi\,\rho}.$$

Διὰ χρήσεως τοῦ τύπου τοῦ ἀναπτύγματος τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἀθροίσματος δύο γωνιῶν λαμβάνεται τελικῶς:

$$F=G\cdot\varepsilon\varphi\,(\alpha+\rho).$$

Κατὰ τὴν ὀλίσθησιν πρὸς τὰ κάτω ἀντιστρέφεται ἡ διεύθυνσις τῆς ἀντιστάσεως τριβῆς R καὶ ὅλοι οἱ ὅροι μὲ παράγοντα τὸν μ ἀλλάσσουν πρόσημον. Τοῦτο δίδει:

$$F'=G\,\frac{\varepsilon\varphi\,\alpha-\varepsilon\varphi\,\rho}{1+\varepsilon\varphi\,\alpha\cdot\varepsilon\varphi\,\rho}=G\cdot\varepsilon\varphi\,(\alpha-\rho).$$

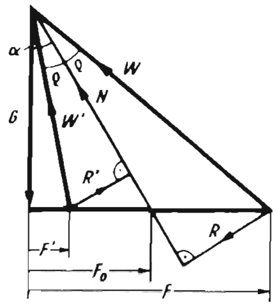
Συνοπτικῶς:

$$\boxed{F = G \cdot \text{εφ}\,(\alpha \pm \rho)}\,,$$

+ διὰ τὴν ἕλξιν καὶ — διὰ τὴν ὀλίσθησιν (ὑπὸ συγκράτησιν).

Αὐτοσυγκράτησις, ὅταν $\alpha \leqq \rho$.

Τὸ σχῆμα 11·8 δ δεικνύει τὸ δυναμοπολύγωνον μὲ ἑνιαίαν φορὰν διαγραφῆς διὰ τὴν ἰσορροπίαν τῶν ἐπὶ τοῦ σώματος ἀσκουμένων



Σχ. 11·8 δ.
Δυναμοπολύγωνον.

δυνάμεων G, W, F καὶ G', W', F'. Ἐκ τῶν δυναμοπολυγώνων δι' ἀπ' εὐθείας ἀναγνώσεως λαμβάνεται:

$$\text{εφ}\,(\alpha \pm \rho) = \frac{F}{G}.$$

(Εἰς τὴν ἄνευ τριβῆς κίνησιν θὰ ἦτο $R = 0$, ἀντιστοίχως δὲ $\rho = 0$ καὶ ἐξ αὐτοῦ $F_0 = G \cdot \text{εφ}\,\alpha$).

Παραδείγματα.

1. Κατὰ μίαν φάσιν συναρμολογήσεως τεμάχιον βάρους $Q = 2$Mp πρέπει νὰ μετακινηθῇ ἐπὶ δοκοῦ-ὁδηγοῦ (συντελεστοῦ τριβῆς $\mu = 0{,}2$) κλίσεως 1:2 διὰ βαρούλκου ἐργαζομένου παραλλήλως πρὸς τὴν δοκόν. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις, ὅταν τὸ τεμάχιον: α) ἕλκεται, β) ἀφίνωμεν νὰ ὀλισθήσῃ;

Ἡ κλίσις ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας α:

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{1}{2} = 0{,}5, \quad \alpha = 26^\circ 34', \quad \text{ημ}\,\alpha = 0{,}447, \quad \text{συν}\,\alpha = 0{,}894.$$

$$\alpha)\ F = Q \cdot (\eta\mu\,\alpha + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha) = 2\,(0{,}447 + 0{,}2 \times 894)\ \text{Mp} =$$
$$= 2 \times 0{,}626\ \text{Mp} = 1252\ \text{kp}.$$

$$\beta)\ F = Q \cdot (\eta\mu\,\alpha - \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha) = 2\,(0{,}447 - 0{,}2 \times 0{,}894)\ \text{Mp} =$$
$$= 2 \times 0{,}268\ \text{Mp} = 536\ \text{kp}.$$

ἢ

$\varepsilon\varphi\,\alpha = 0{,}5,$ $\quad\alpha = 26^\circ 34',$ $\quad$ ὡς ἀνωτέρω,

$\varepsilon\varphi\,\rho = \mu = 0{,}2$ $\quad\rho = 11^\circ 18'$ $\quad\sigma\upsilon\nu\,\rho = 0{,}9806$

$\alpha + \rho = 37^\circ 52',$ $\quad\eta\mu\,(\alpha + \rho) = 0{,}6138,$

$\alpha - \rho = 15^\circ 16',$ $\quad\eta\mu\,(\alpha - \rho) = 0{,}2633.$

Ἐκ τῆς σχέσεως $\quad F = G\,\dfrac{\eta\mu\,(\alpha \pm \rho)}{\sigma\upsilon\nu\,\rho}\quad$ λαμβάνεται

$$F_1 = 2 \times \frac{0{,}6138}{0{,}9806}\ \text{Mp} = 1{,}252\ \text{Mp} = 1252\ \text{kp} \quad \text{καὶ}$$

$$F_2 = 2 \times \frac{0{,}2633}{0{,}9806}\ \text{Mp} = 0{,}536\ \text{Mp} = 536\ \text{kp}.$$

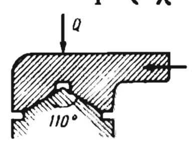
2. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως 30° συγκρατεῖται φορτίον 200 kp διὰ δυνάμεως ὁριζοντίας. Ἐντὸς ποίων ὁρίων πρέπει νὰ εὑρίσκεται τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως, διὰ νὰ διατηρῆται τὸ σῶμα ἀκίνητον; $(\mu = 0{,}2)$.

$$\varepsilon\varphi\,\rho = \mu = 0{,}20, \qquad \rho = 11^\circ 19'.$$

Ὅρια:

$$F\ = G \cdot \varepsilon\varphi(\alpha \pm \rho) = 200\ \varepsilon\varphi\ (30^\circ \pm 11^\circ 19')\ \text{kp}$$
$$F_1 = 200\,\varepsilon\varphi\ 41^\circ 19' = 200 \times 0{,}879\ \text{kp} = 175{,}8\ \text{kp}$$
$$F_2 = 200\,\varepsilon\varphi\ 18^\circ 41' = 200 \times 0{,}338\ \text{kp} = 67{,}6\ \text{kp}.$$

3. Ἡ τράπεζα πλάνης φορτίζει κατακορύφως τὸν πρισματικὸν ὁδηγόν της διὰ φορτίου 2500 kp (σχ. 11·8 ε). Ποία ἡ μεγίστη



Σχ. 11·8 ε.
Σφηνοδηγὸς πλάνης (πρισματικὸς ὁδηγός).

ἐπιτρεπομένη ὁριζοντία δύναμις F (προερχομένη π.χ. ἐκ πιέσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου ἐπὶ τεμαχίου ὑπὸ κατεργασίαν), τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παραλάβη ἡ τράπεζα, χωρὶς νὰ ἐξέλθη τοῦ ὁδηγοῦ της; ($\mu = 0{,}07$).

Διὰ γωνίαν κλίσεως τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου $\alpha = 90^\circ - 110^\circ/2 = 35^\circ$ καὶ γωνίαν τριβῆς $\rho = 4^\circ$ (ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς $\text{εφ}\,\rho = 0{,}07$) λαμβάνεται:

$$F = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + \rho) = 2500\ \text{εφ}\,39^\circ\ \text{kp} = 2500 \times 0{,}81\ \text{kp} = 2025\ \text{kp}.$$

11·9 Ἀντίστασις κυλίσεως.

Ἡ κύλισις τροχοῦ ἐπὶ σταθερᾶς τροχιᾶς εἶναι δυνατὴ μόνον συνεπείᾳ τῆς προσφύσεως μεταξὺ τροχοῦ καὶ τροχιᾶς. Ὁ τροχὸς ἀντιτάσσει εἰς τὴν κύλισιν δύναμιν, ἡ ὁποία ἀποδίδεται εἰς παραμόρφωσιν τοῦ τροχοῦ ἢ τῆς τροχιᾶς. Ἐν γένει ὁ τροχὸς θεωρεῖται σκληρότερος (εἰς τροχοὺς μὲ ἀεροθάλαμον, ἰσχύει τὸ ἀντίθετον). Ἡ πρώτη περίπτωσις (σκληρότερος ὁ τροχὸς) γίνεται περισσότερον καταληπτὴ διὰ τοῦ ἀκολούθου παραδείγματος (σχ. 11·9 α):

Ὁ τροχὸς φορτιζόμενος μὲ κατακόρυφον φορτίον Q συμπιέζει τὴν τροχιάν του καὶ πρέπει συνεχῶς νὰ ὑπερπηδᾷ τὴν ἀκμὴν K, ἡ ὁποία, λόγω παραμορφώσεώς της, σχηματίζεται ἔμπροσθέν του.

Εἰς τὴν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας ἡ ροπὴ τοῦ φορτίου τοῦ τροχοῦ ($Q \cdot f$) ἰσοῦται πρὸς τὴν ροπὴν τῆς ἀσκουμένης ἐπὶ τοῦ τροχοῦ δυνάμεως ($P \cdot x \approx P \cdot R$).

Ἡ ἀπόστασις f χαρακτηρίζεται ὡς *ὁ μοχλοβραχίων τῆς τριβῆς κυλίσεως*. Αὐτὸς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὑλικοῦ τοῦ τροχοῦ καὶ τοῦ ὑποστρώματος. (Π.χ. ἅμαξα συρομένη εὐκόλως ἐπὶ ὁδοῦ ἐκ μπετὸν ἀπαιτεῖ σημαντικῶς μεγαλυτέραν δύναμιν ἕλξεως ἐπὶ μαλακοῦ χωματοδρόμου).

Συνήθεις τιμαὶ f :

Ὑλικὸν		Μοχλοβραχίων f εἰς cm
Τροχοῦ	Τροχιᾶς	
Ξύλον	Ξύλον	0,5
Χυτοσίδηρος	Χυτοσίδηρος	0,05
Χάλυψ	Χάλυψ	0,05
Τριβεὺς ὀλισθήσεως		0,001 ... 0,01
Ἔνσφαιρος τριβεὺς		0,0005...0,001

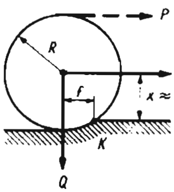
'Εκ τῶν τιμῶν αὐτῶν ὑπολογίζεται ἡ ἀντίστασις κυλίσεως καὶ ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις πρὸς ὑπερνίκησίν της:

$$P = Q \cdot \frac{f}{R}.$$

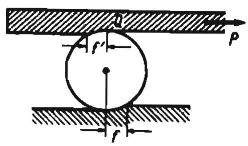
'Ο λόγος f/R (ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς μετροῦνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους) εἶναι ἀδιάστατον μέγεθος, ὅπως ὁ συντελεστὴς τριβῆς μ.

'Εὰν ἡ δύναμις δὲν ἀσκῆται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἀλλὰ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ (σχ. 11·9 α), προκύπτει ἡ σχέσις:

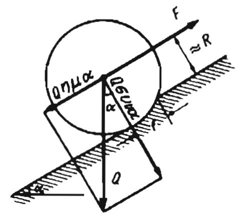
$$P = Q \cdot \frac{f}{2R} = Q \cdot \frac{f}{d}.$$



Σχ. 11·9α.
Τροχὸς ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.



Σχ. 11·9β.
Μεταφορὰ ἐπὶ κυλίνδρων.



Σχ. 11·9γ.
Τροχὸς ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Εἰς πλάκα, ἡ ὁποία κινεῖται ἐπὶ κυλίνδρων (σχ. 11·9 β) παρατηροῦμεν ὅτι οἱ κύλινδροι συμπιέζουν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν τροχιάν των (μοχλοβραχίων f), ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν πλάκα (μοχλοβραχίων f'). Διὰ τὴν πρὸς ὑπερνίκησιν ἀντίστασιν κυλίσεως δίδεται ἡ σχέσις:

$$P = Q \cdot \frac{f + f'}{2R} \quad \text{ἢ} \quad \text{διὰ } f \approx f' \quad \text{πάλιν} \quad P = Q \cdot \frac{f}{R}.$$

'Εὰν ὁ τροχὸς κυλίεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὰ ἄνω (σχ. 11·9 γ), προκύπτει διὰ τὴν ἀντίστασιν κυλίσεως ἡ σχέσις:

$$P_r \cdot R = Q \cdot \text{συν}\,\alpha \cdot f \quad \text{καὶ συνεπῶς} \quad P_r = Q \cdot \frac{f}{R} \cdot \text{συν}\,\alpha.$$

'Εκτὸς τῆς ἀντιστάσεως κυλίσεως πρέπει νὰ ἀντιμετωπισθῆ καὶ ἡ κινοῦσα συνιστῶσα τοῦ βάρους $Q \cdot \text{ημ}\,\alpha$. Συνεπῶς ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις εἶναι: $F = Q \cdot \text{ημ}\,\alpha + P_r$

ἢ

$$\boxed{F = Q\left(\text{ημ}\,\alpha + \frac{f}{R}\,\text{συν}\,\alpha\right)}$$

ἐπομένως ἀνάλογος τῆς δυνάμεως $F = Q\,(\eta\mu\,\alpha + \mu \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha)$, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται πρὸς ἕλξιν πρὸς τὰ ἄνω φορτίου Q ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ ὑπὸ συνθήκας τριβῆς ὀλισθήσεως.

Ἐπειδὴ $f/R \ll \mu$, ἕπεται ὅτι κατὰ τὴν τριβὴν κυλίσεως ἐμφανίζεται ἀντίστασις πολὺ μικροτέρα ἀπὸ αὐτήν, ποὺ ἐμφανίζεται κατὰ τὴν τριβὴν ὀλισθήσεως (συγκριτικῶς ἀναφέρεται ὁ συντελεστὴς τριβῆς τῶν ἐνσφαίρων τριβέων 0,001 . . . 0,002 ἔναντι τοῦ συντελεστοῦ τῶν τριβέων ὀλισθήσεως 0,002 . . . 0,020).

Παραδείγματα.

1. Τὸ σύστημα ἄξονος μετὰ τῶν δύο τροχῶν βαγονίου σιδηροδρόμου ἔχει βάρος $G = 1{,}15$ Mp καὶ διάμετρον τροχῶν 1 m. Ποία ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ παραλλήλως πρὸς τὰς σιδηροτροχιὰς δύναμις, ὥστε:

α) τὸ σύστημα νὰ κινῆται ὁριζοντίως,

β) τὸ σύστημα νὰ κινῆται ἐπὶ ἀνωφερείας κλίσεως 10 %.

γ) Εἰς ποίαν κλίσιν κατωφερείας τὸ σύστημα κινεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ ὁμοιομόρφως;

$$F = G\left(\eta\mu\,\alpha + \frac{f}{R}\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha\right),$$

$f = 0{,}05$ cm (χάλυψ ἐπὶ χάλυβος), $\dfrac{f}{R} = \dfrac{0{,}05}{50} = 0{,}001.$

α) $\alpha = 0^\circ$, $\eta\mu\,\alpha = 0$, $\sigma\upsilon\nu\,\alpha = 1$,

$$F = G \cdot \frac{f}{R} = 1150 \times 0{,}001\ \text{kp} = 1{,}15\ \text{kp}.$$

β) $\varepsilon\varphi\,\alpha \approx \eta\mu\,\dfrac{10}{1000} = 0{,}01$, $\sigma\upsilon\nu\,\alpha = 0{,}99995 \approx 1$,

$$F = 1150\,(0{,}01 + 0{,}001)\ \text{kp} = 12{,}65\ \text{kp}.$$

γ) Ἐδῶ ἡ ἀντίστασις τριβῆς πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν κινοῦσαν συνιστῶσαν τοῦ βάρους:

$$G \cdot \frac{f}{R} \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha = G \cdot \eta\mu\,\alpha, \quad \varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{f}{R}.$$

(Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὑπάρχει πάλιν ἀναλογία πρὸς τὴν σχέσιν $\varepsilon\varphi\,\alpha = \mu$, ἡ ὁποία ἰσχύει κατὰ τὴν ἐλευθέραν ὀλίσθησιν ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου):

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{f}{R} = 0{,}001, \quad \text{Κλίσις } 1:1000\ (1\,‰).$$

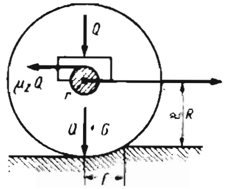
(Κατὰ τὴν ὀλίσθησιν μὲ $\mu = 0{,}1$ θὰ ἦτο $\varepsilon\varphi\,\alpha = 0{,}1$, ἤτοι κλίσις 1:10 ἢ 10%).

2. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις πρὸς κύλισιν πλακὸς βάρους 3 Mp ἐπὶ κυλίνδρων διαμέτρου 500 mm (σχ. 11·9 β) διὰ $f = 0{,}2$ cm καὶ $f' = 0{,}05$ cm;

$$F = Q \cdot \frac{f + f'}{2R} = 3000 \times \frac{0{,}2 + 0{,}05}{100}\ \text{kp} = 7{,}5\ \text{kp}.$$

11·10 Ἀντίστασις κατὰ τὴν κίνησιν ὀχήματος.

Κατὰ τὴν κίνησιν ὀχήματος, ἐκτὸς τῆς ἀντιστάσεως κυλίσεως τῶν τροχῶν, πρέπει νὰ ὑπερνικηθῇ καὶ ἡ ἀντίστασις τριβῆς εἰς τὰ ἕδρανά των. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀντιστάσεων δίδει τὴν ἀντίστασιν κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος. Ἡ ἀπαιτουμένη ἑλκτικὴ δύναμις πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς ἀντιστάσεως αὐτῆς ἀσκεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ ἄξονος (σχ. 11·10). Πρὸς ἐπίτευξιν ἰσορροπίας, ἡ ῥοπὴ τῆς ἑλκτικῆς



Σχ. 11·10.
Ἀντίστασις κινήσεως ὀχήματος.

δυνάμεως πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ῥοπῆς τῆς ἀντιστάσεως κυλίσεως καὶ τῆς ῥοπῆς τριβῆς εἰς τὰ ἀκραξόνια. Ἐὰν ἡ φόρτισις τῶν ἀκραξονίων εἶναι Q, ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς τροχιᾶς δύναμις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς φορτίσεως τῶν ἀκραξονίων κατὰ τὸ βάρος τοῦ τροχοῦ G, ἡ δὲ πρὸς ἀντιμετώπισιν ῥοπὴ εἶναι:

Ῥοπὴ ἀντιστάσεως κινήσεως = Ῥοπὴ τριβῆς ἀκραξονίων + Ῥοπὴ ἀντιστάσεως κυλίσεως

$$F \cdot R = \mu_z \cdot Q \cdot r + (G + Q) \cdot f$$

Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἡ ἀντίστασις κινήσεως:

$$\boxed{F = \mu_z \cdot Q \cdot \frac{r}{R} + (G + Q) \cdot \frac{f}{R}}$$

Ἐὰν τὸ βάρος τοῦ τροχοῦ εἶναι μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὸ φορτίον τῶν ἀκραξονίων, ἡ ἄνω σχέσις, διὰ $\overline{Q} = G + Q$, ἁπλουστεύεται εἰς τήν:

$$F = \frac{\overline{Q}}{R} \cdot (\mu_z \cdot r + f) = \frac{\mu_z \cdot r + f}{R} \cdot \overline{Q} = \mu_F \cdot \overline{Q}.$$

Ὁ λόγος $(\mu_z \cdot r + f)/R$ (ὅπου ὅλα τὰ μεγέθη μετροῦνται διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος μήκους) ἐπέχει θέσιν ἑνὸς συντελεστοῦ τριβῆς μ_F. Εἶναι ἕνα ἐμπειρικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ βάρος τοῦ ὀχήματος δίδει τὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως κατὰ τὴν κίνησίν του. (Τὸ 1000πλάσιον τῆς τιμῆς τοῦ μεγέθους αὐτοῦ εἶναι ἡ ἀντίστασις κινήσεως W τοῦ ὀχήματος, ποὺ ἔχει ἀναχθῆ εἰς τὸ Mp βάρους τοῦ ὀχήματος).

Παραδείγματα συντελεστῶν τριβῆς μ_F καὶ ἀνηγμένων ἀντιστάσεων κινήσεως W:

Ὀχήματα ἐπὶ γραμμῶν	$\mu_F = 0{,}002\ldots0{,}003$	$W = 2\ldots3$ kp/t
Παλαιότεροι τύποι ὀχημάτων (γραμμῶν)	$= 0{,}004\ldots0{,}005$	$4\ldots5$ kp/t
Ὀχήματα ἐπὶ μεταθετῶν γραμμῶν	$\approx 0{,}01$	≈ 10 kp/t
Γερανογέφυραι (διὰ τὰ φορεῖα των, ὀλιγώτερον)	$\approx 0{,}01$	≈ 10 kp/t
Αὐτοκίνητα		
ἀναλόγως ὁδοστρώματος	$= 0{,}01\ldots0{,}03$	$10\ldots30$ kp/t
εἰς ἀμμόδρομον	$= 0{,}1\ldots0{,}3$	$100\ldots300$ kp/t

Παράδειγμα.

Ἁμαξοστοιχία ἀποτελεῖται ἐκ δέκα ὀχημάτων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει βάρος 50 Mp. Ποία ἡ ἀντίστασις κινήσεως τῆς ἁμαξοστοιχίας ἢ ἀντιστοίχως ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑλκτικὴ δύναμις τῆς ἀτμομηχανῆς δι' ὁμοιόμορφον κίνησιν, ἐὰν $\mu_F = 0{,}003$;

Λύσις:

$$N = 10 \times 50 = 500 \text{ Mp},$$

$$R = \mu_F \cdot N = 0{,}003 \times 500 \text{ Mp} = 1{,}5 \text{ Mp}.$$

Ἐπειδὴ ἕκαστον ὄχημα τῆς ἁμαξοστοιχίας ἔχει 80 θέσεις ἐπιβατῶν, τὸ συνολικὸν ἐξ ἐπιβατῶν φορτίον ὑπολογίζεται εἰς 6 Mp, δηλαδὴ μόνον 12 % περίπου τοῦ βάρους τοῦ ὀχήματος. Ἑπομένως ἡ ἀντίστασις κινήσεως τοῦ συρμοῦ ἐπηρεάζεται πολὺ περισσότερον ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀχημάτων παρὰ ἐκ τοῦ ἂν ἡ ἁμαξοστοιχία εἶναι κενὴ ἢ πλήρης.

Εἰς ὀχήματα μεγαλυτέρας ταχύτητος ἡ ἀντίστασις κινήσεως αὐξάνεται ἐπιπλέον λόγω τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος. Εἰς ἠλεκτρικὸν συρμὸν τῶν Αὐστριακῶν σιδηροδρόμων ἐμετρήθησαν:

διὰ	$U = 20$	40	60	80	100	120	140	km/h
	$W = 2$	2,2	2,8	3,5	4,5	5,5	7	kp/t.

Συνεπῶς εἰς μεγάλας ταχύτητας ἡ αὔξησις εἶναι σημαντική. Κατὰ πολὺ περισσότερον ὅμως ἐπηρεάζεται ἡ ἀναγκαία δύναμις ἕλξεως ἐκ τῆς ἀντιστάσεως λόγω ἀνωφερείας. Ὡς παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον δύναμις, εἶναι:

$$F = G\,(\eta\mu\,\alpha + \mu_F \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha).$$

Εἰς τὴν κλίσιν τῶν $30\,^0/_{00}$ εἶναι:

$$\eta\mu\,\alpha \approx \varepsilon\varphi\,\alpha = 0{,}03, \qquad \sigma\upsilon\nu\,\alpha \approx 1$$

καὶ εἰς τὴν ὑπ' ὄψιν ἁμαξοστοιχίαν ἡ ἀπαιτουμένη ἑλκτικὴ δύναμις θὰ εἶναι:

$$F = 500\,(0{,}03 + 0{,}003) = 500 \times 0{,}033 = 16{,}5\ \mathrm{Mp},$$

δηλαδὴ τὸ ἑνδεκαπλάσιον τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται κατὰ τὴν ἐπίπεδον διαδρομήν.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ

Γενικά.

Αἱ ἀπόψεις τῆς Στατικῆς ἐβασίζοντο ἐπὶ τῆς παραδοχῆς τοῦ «ἀπολύτως στερεοῦ» σώματος. Εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν ὑπάρχει ἀπολύτως στερεὸν σῶμα. Πᾶν σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὑφίσταται — ἔστω καὶ ἐλαχίστην — παραμόρφωσιν. Ὅταν τοιοῦτον σῶμα φορτίζεται μὲ ἐξωτερικὰς δυνάμεις, δημιουργοῦνται ἐσωτερικαὶ ἀντιδράσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ ἀντικείμενον τῆς Ἀντοχῆς Ὑλικῶν. Πρὸς κατανόησιν τῆς φύσεως τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων, φανταζόμεθα τὸ σῶμα τετμημένον καὶ εἰς τὴν τομήν του τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι συνεκράτουν τὰ δύο τμήματα μεταξύ των.

Ὡς ἤδη εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ Κεφαλαίου «Στατική» ἀνεφέρθη, (παράγρ. 1·2), εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ δύναμις δὲν δρᾷ εἰς σημεῖον, ἀλλ' εὑρίσκεται κατανεμημένη ἐπὶ ἐπιφανείας. Κατ' ἀνάλογον τρόπον αἱ δυνάμεις ἐπὶ ἑκάστου ἐπιπέδου τομῆς εἶναι κατανεμημέναι ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ ἐπιπέδου τομῆς. Τὸ μέρος τῆς δυνάμεως, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μονάδα τῆς πρὸ τῆς ἐμφανίσεως τῆς παραμορφώσεως διατομῆς, ὀνομάζομεν τάσιν. Εἶναι συνεπῶς:

$$\text{Τάσις} = \frac{\text{Δύναμις}}{\text{Ἐπιφάνεια}}\,.$$

Ἡ τάσις δίδεται συνήθως εἰς kp/cm^2 ἢ kp/mm^2.

Ἡ Ἀντοχὴ Ὑλικῶν ἔχει ἀντικείμενον τὴν ἔρευναν τῆς ἐπιδράσεως τῶν δυνάμεων ἐπὶ τῶν ὑλικῶν κατασκευῆς, τὸν προσδιορισμὸν τῶν καταπονήσεων, ποὺ ἐμφανίζονται εἰς αὐτά, καὶ τὴν ὀρθὴν ἐκλογὴν διαστάσεων τῶν κατασκευῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 12

ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Κατ' ἀρχὴν θὰ ἐξετασθοῦν ὡρισμέναι βασικαὶ ἔννοιαι τῆς ἀντοχῆς, αἱ ὁποῖαι θὰ χρησιμοποιοῦνται συνεχῶς εἰς τὰ ἑπόμενα.

12·1 Εἴδη καταπονήσεων.

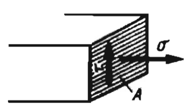
Ἀναλόγως τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ἐνεργοῦν ἐπὶ σώματος, προκαλοῦν ἀπ' αὐτοῦ καὶ διάφορα εἴδη καταπονήσεων, ποὺ διακρίνονται εἰς:

Ἐφελκυσμὸν
Θλῖψιν
Διάτμησιν
Κάμψιν
Στρέψιν
Λυγισμόν.

Τὰ εἴδη αὐτὰ τῶν καταπονήσεων παριστῶνται εἰς τὸ σχῆμα 12·1. (Κατὰ τὸν λυγισμὸν ἐμφανίζεται μία δευτέρα κατάστασις ἰσορροπίας εἰς τὴν ἤδη λυγισμένην ράβδον).

12·2 Εἴδη τάσεων.

Τὰ διάφορα εἴδη καταπονήσεων προκαλοῦν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σώματος ἐντατικὰς καταστάσεις, κατὰ τὰς ὁποίας δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν δύο εἴδη τάσεων: τάσεις, αἱ ὁποῖαι δροῦν καθέτως

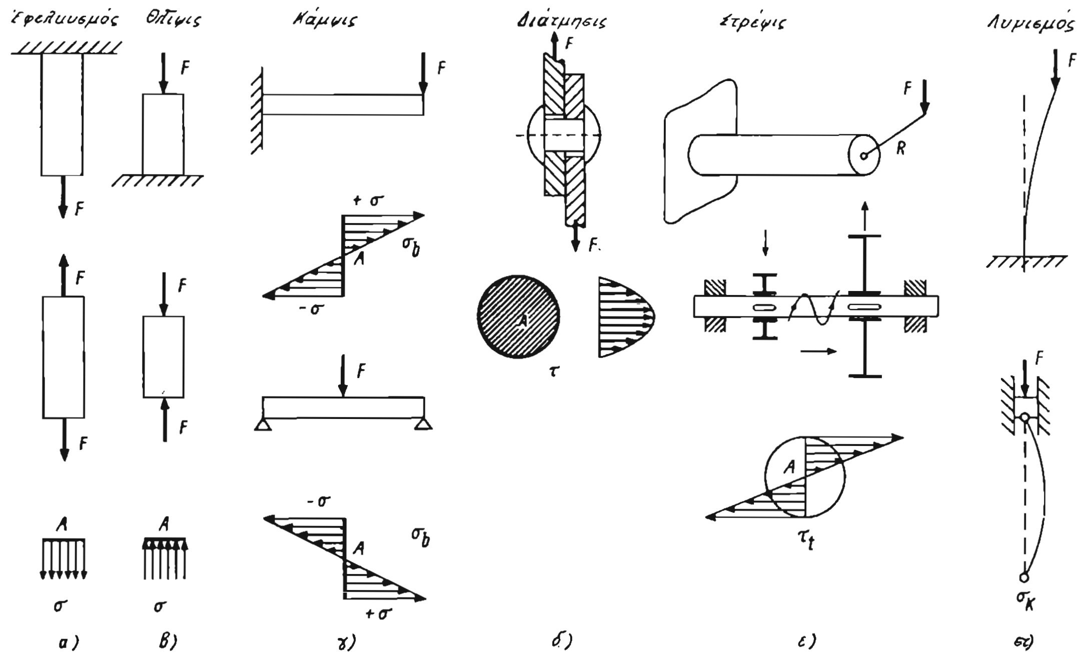


Σχ. 12·2.
Ὀρθαὶ καὶ διατμητικαὶ τάσεις.

πρὸς τὴν καταπονουμένην διατομὴν *(ὀρθαὶ ἢ κάθετοι τάσεις)* καὶ τάσεις, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπ' αὐτῆς *(διατμητικαὶ τάσεις)* (σχ. 12·2).

Ὀρθαὶ (ἢ κάθετοι) τάσεις.

Συμβολίζονται διὰ τοῦ σ, εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς διατομῆς A καὶ προέρχονται ἐξ ἐφελκυσμοῦ, θλίψεως, κάμψεως ἢ λυγισμοῦ.



Σχ. 12·1.

Εἴδη καταπονήσεων καὶ κατανομαὶ τάσεων:

α) Ἐφελκυσμός. β) Θλῖψις. γ) Κάμψις. δ) Διάτμησις. ε) Στρέψις. στ) Λυγισμός.

Διατμητικαὶ τάσεις.

Συμβολίζονται διὰ τοῦ τ, κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς διατομῆς A καὶ προέρχονται ἐκ διατμήσεως ἢ στρέψεως.

12·3 Κατανομὴ τῶν τάσεων.

Λαμβάνεται φορτιζομένη ράβδος, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπία. Ἐὰν μὲ μίαν τομὴν ἀπομονώσωμεν ἕνα τμῆμα της, τότε πρὸς ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας πρέπει νὰ ἐφαρμοσθοῦν ἐπὶ τῆς τομῆς αἱ ἀντίστοιχοι δυνάμεις ἢ τάσεις (σχ. 12·2).

Κατὰ τὸν ἐφελκυσμὸν καὶ τὴν θλῖψιν (συμβολισμὸς τάσεως σ) κάθε μονὰς ἐπιφανείας τῆς διατομῆς παραλαμβάνει τὸ αὐτὸ ποσοστὸν τοῦ φορτίου καὶ συνεπῶς ἡ τάσις κατανέμεται ὁμοιομόρφως ἐπὶ τῆς διατομῆς [σχ. 12·1 (α) (β)].

Κατὰ τὴν κάμψιν (συμβολισμὸς τάσεως σ_b) ἐμφανίζονται ἐφελκυστικαὶ (+σ) καὶ θλιπτικαὶ (−σ) τάσεις, αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν κατανέμονται ὁμοιομόρφως ἐπὶ τῆς διατομῆς [σχ. 12·1 (γ)]. Αἱ τάσεις αὐταὶ λαμβάνουν τὰς μεγίστας των τιμὰς εἰς τὰς περιοχάς, ποὺ ἀπέχουν περισσότερον ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς διατομῆς, ἐνῶ ἐλαττοῦνται γραμμικῶς ὅσον πλησιάζουν πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς διατομῆς. Εἰς συμμετρικὰς διατομὰς (ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ράβδος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἶνας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μήκους της) ἡ ἳς μὲ μηδενικὴν τάσιν ($\sigma = 0$) εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς διατομῆς. Γενικῶς ἡ ἳς αὐτὴ εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον βάρους τῆς διατομῆς.

Αἱ διατμητικαὶ τάσεις οὐδέποτε κατανέμονται ὁμοιομόρφως ἐπὶ τῆς διατομῆς.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν διατμητικῶν τάσεων [σχ. 12·1 (δ) συμβολισμὸς τάσεως τ] εἰς ράβδους μικροῦ μήκους (ὡς π.χ. πείρους, ἥλους), αἱ τάσεις αὐταὶ θεωροῦνται ὡς ὁμοιομόρφως κατανεμημέναι. Ἡ πραγματικὴ ὅμως μεγίστη διατμητικὴ τάσις εἶναι:

— εἰς μὲν τὴν κυκλικὴν διατομὴν κατὰ 33,3 %

— εἰς δὲ τὴν ὀρθογωνικὴν διατομὴν κατὰ 50 %

μεγαλυτέρα ἐκείνης, ποὺ θὰ προέκυπτε, ἐὰν ἡ κατανομὴ τῆς τάσεως ἦτο ὁμοιόμορφος.

Κατὰ τὴν καταπόνησιν στρέψεως ράβδων κυκλικῆς διατομῆς [σχ. 12·1 (ε) συμβολισμὸς τάσεως τ_t] αἱ διατμητικαὶ τάσεις, αἱ ὁποῖαι εἰς τὸ κέντρον τῆς κυκλικῆς διατομῆς ἔχουν μηδενικὴν τιμήν, αὐξάνονται γραμμικῶς μέχρι τῆς περιφερείας, ὅπου λαμβάνουν τὴν μεγίστην των τιμήν. Ὁ λυγισμός, δηλαδὴ ἡ περίπτωσις παραμορφώσεως, ποὺ δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 12·1 (στ), πρέπει νὰ ἀποφεύγεται ὁπωσδήποτε εἰς τὴν πρᾶξιν. Ἡ πρὸ τοῦ λυγισμοῦ τῆς ράβδου καταπόνησις ἔχει τὰ αὐτὰ χαρακτηριστικὰ μὲ τὴν θλῖψιν.

12·4 Ὑπολογισμὸς τάσεως ὑπὸ ἁπλᾶς καταπονήσεις.

Πρὸς σύντομον ἐπεξήγησιν τοῦ ὑπολογισμοῦ τάσεων ἐφελκυσμοῦ, θλίψεως καὶ διατμήσεως παρατίθενται τὰ ἑπόμενα παραδείγματα. Τὸ πρόβλημα ἔγκειται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν μιᾶς κατασκευῆς ἢ τὸν ἔλεγχον μιᾶς ἑτοίμης. Πρὸς ὑπολογισμὸν ζητεῖται ἡ τάσις, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὴν δύναμιν F, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὁμοιομόρφου κατανομῆς της ἐπὶ τῆς διατομῆς A.

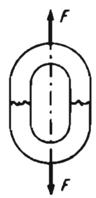
α) Καταπόνησις εἰς ἐφελκυσμόν.

Ἡ τάσις ἐφελκυσμοῦ εἶναι:

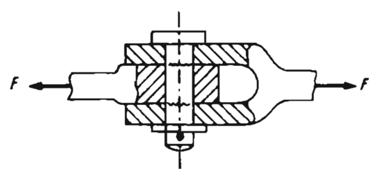
$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A}}$$

Παράδειγμα.

Ἅλυσις μὲ κρίκους ἐκ στρογγύλου ραβδοσιδήρου διαμέτρου 19 mm (σχ. 12·4 α) χρησιμοποιεῖται πρὸς ἀνύψωσιν φορτίου 3500 kp. Ποία ἡ ἐμφανιζομένη εἰς αὐτὴν ἐφελκυστικὴ τάσις;



Σχ. 12·4 α.
Κρίκος ἁλύσεως καταπονούμενος εἰς ἐφελκυσμόν.



Σχ. 12·4 β.
Καταπόνησις πείρου εἰς διάτμησιν.

Λύσις:

$$\sigma = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{3500}{2 \times \frac{1{,}9^2 \pi}{4}} \text{ kp/cm}^2 = \frac{3500}{5{,}65} \text{ kp/cm}^2 =$$

$$= 620 \text{ kp/cm}^2.$$

β) Καταπόνησις εἰς θλῖψιν.

Ἡ τάσις θλίψεως εἶναι:

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A}}$$

Παράδειγμα.

Διατρητὴρ 50 mm ∅ φορτίζεται διὰ 40 Mp. Ποία ἡ θλιπτικὴ τάσις εἰς αὐτόν;

Λύσις :

$$\sigma = \frac{40\,000}{5^2\,\pi/4}\ \text{kp/cm}^2 = 2040\ \text{kp/cm}^2.$$

γ) Καταπόνησις εἰς διάτμησιν.

Εἰς ράβδον ὑποκειμένην εἰς διάτμησιν πρέπει νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν φορτίζωνται μία ἢ περισσότεραι διατομαὶ (μονότμητος ἢ πολύτμητος διάτμησις). Ἐὰν n εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν φορτιζομένων διατομῶν, ἀντικαθίσταται ἡ ἐπιφάνεια διατομῆς διὰ τοῦ n-πλασίου της κατὰ τὸν ὑπολογισμόν. Ἡ μέση διατμητικὴ τάσις ἰσοῦται πρός :

$$\boxed{\tau = \frac{F}{A}}$$

Παράδειγμα.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διατμητικὴ τάσις, ἡ ὁποία προκαλεῖται δι' ἐφελκυστικῆς δυνάμεως 4000 kp εἰς πεῖρον 20 mm ∅ τοῦ σχήματος 12·4 β.

Λύσις :

Ὁ πεῖρος φορτίζεται εἰς δύο διατομάς του (δίτμητος φόρτισις). Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει:

$$\tau = \frac{F}{2A}, \qquad \tau = \frac{4000}{2 \times \dfrac{2^2\pi}{4}}\ \text{kp/cm}^2 = 635\ \text{kp/cm}^2.$$

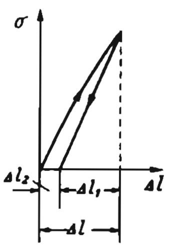
12·5 Ἐλαστικότης. Νόμος τοῦ Hooke. Καμπύλη τάσεως-μηκύνσεως.

α) Ἐλαστικότης.

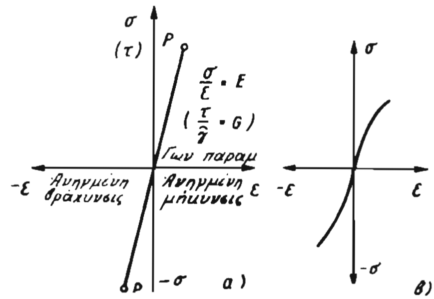
Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη, πᾶν σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς δυνάμεως ὑφίσταται — ἔστω καὶ ἐλαχίστην — παραμόρφωσιν.

Ράβδος ἀρχικοῦ μήκους l τείνεται δι' ἀξονικῆς δυνάμεως ἐφελκυσμοῦ (ἢ συμπιέζεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἀξονικῆς θλίψεως) καὶ αὐξάνεται (ἢ μειοῦται) τὸ ἀρχικόν της μῆκος κατὰ Δl. Μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ φορτίου, διαπιστοῦται ὅτι ἡ προκληθεῖσα μεταβολὴ τοῦ μήκους της δὲν ἐξηλείφθη πλήρως.

Τὸ ποσὸν τῆς παραμορφώσεως Δl_1, τὸ ὁποῖον ἐξηλείφθη μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ φορτίου, ὀνομάζεται *ἐλαστικὴ μήκυνσις*, ἡ δὲ παραμόρφωσις, ἡ ὁποία παρέμεινε, ὀνομάζεται *παραμένουσα* ἢ *πλαστικὴ* ἢ *μόνιμος μήκυνσις* (σχ. 12·5 α).



Σχ. 12·5 α.
Ἐλαστικὴ καὶ
παραμένουσα μήκυνσις.



Σχ. 12·5 β.
Τάσις καὶ ἀνηγμένη μήκυνσις (βράχυνσις):
α) Γραμμική. β) Μὴ γραμμικὴ σχέσις.

Ἡ σχέσις μεταβολῆς μήκους πρὸς τὸ ἀρχικὸν μῆκος τῆς ῥάβδου l_0, ἤτοι ὁ λόγος:

$$\frac{\text{Μεταβολὴ μήκους}}{\text{Ἀρχικὸν μῆκος}} = \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon,$$

ὀνομάζεται εἰς μὲν τὸν ἐφελκυσμὸν *ἀνηγμένη μήκυνσις* ἢ *εἰδικὴ μήκυνσις*, εἰς δὲ τὴν θλῖψιν *ἀνηγμένη βράχυνσις* ἢ *εἰδικὴ βράχυνσις* (σχ. 12·5 β).

Τὸ ε εἶναι λοιπὸν σχετικὸν μέγεθος, συνεπῶς ἀδιάστατος ἀριθμὸς (καὶ συνήθως ἐκφράζεται ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν %).

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐφελκυσμοῦ ὁρίζεται:

$\dfrac{\Delta l_1}{l_0}$ ὡς ἐλαστικὴ ἀνηγμένη μήκυνσις, καὶ

$\dfrac{\Delta l_2}{l_0}$ ὡς παραμένουσα ἢ μόνιμος ἢ πλαστικὴ ἀνηγμένη μήκυνσις.

Εἰς μικρὰς φορτίσεις ἡ παραμένουσα (ἢ πλαστικὴ) ἀνηγμένη μήκυνσις $\Delta l_2/l_0$ εἶναι πολὺ μικρὰ ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν $\Delta l_1/l_0$. Ἡ τάσις ἐκείνη, μέχρι τῆς ὁποίας ἡ παραμένουσα ἀνηγμένη μήκυνσις εἶναι ἀσήμαντος, ὀνομάζεται *ὅριον ἐλαστικότητος* σ_E. Αὐτὴ ὁρίζεται ὡς ἡ τάσις, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ παραμένουσα ἀνηγμένη μήκυνσις ἰσοῦται πρὸς 0,005% ἢ 0,01% τοῦ ἀρχικοῦ μήκους. Ὁσάκις ἀναφέρεται τὸ ὅριον ἐλαστικότητος, πρέπει νὰ ἀναφέρεται ἐπίσης καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς παραμενούσης ἀνηγμένης μηκύνσεως, βάσει τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ τοῦτο. Συνεπῶς δὲν ἀρκεῖ νὰ δίδεται ἁπλῶς ὡς σ_E, ἀλλὰ ὡς π.χ. $\sigma_{E\,0,005}$ ἢ $\sigma_{E\,0,01}$.

β) Νόμος τοῦ Hooke (Μέτρον ἐλαστικότητος καὶ διατμήσεως).

Μέχρις ἑνὸς ὁρίου, ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ὑλικόν, ἡ μήκυνσις (βράχυνσις) αὐξάνεται ἀναλόγως τῆς τάσεως. Ἡ τάσις, μέχρι τῆς ὁποίας ἰσχύει ὁ νόμος ἀναλογικῆς ἐξαρτήσεως (ὁ Νόμος τοῦ Hooke), ὀνομάζεται *ὅριον ἀναλογίας* σ_A.

1) *Ὀρθαὶ ἢ κάθετοι τάσεις.*

Θεωρεῖται πάλιν ἡ περίπτωσις τῆς καταπονήσεως δι' ἐφελκυσμοῦ. Ὁ νόμος τῆς ἀναλογίας, *μήκυνσις ἀνάλογος τῆς τάσεως*, ἐκφράζεται ἐνταῦθα ὡς $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$. Ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας α ὀνομάζεται *συντελεστὴς διατενείας*.

Ἡ ἀπεικόνισις τῆς σχέσεως τάσεως-ἀνηγμένης μηκύνσεως ἐντὸς τῆς περιοχῆς ἀναλογίας δίδει μίαν εὐθεῖαν [σχ. 12·5 β (α)]. Ἡ κλίσις της, ἄρα ἡ σχέσις σ/ε, ὀνομάζεται *μέτρον ἐλαστικότητος Ε* καὶ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ συντελεστοῦ διατενείας ($E = 1/\alpha$). Ἐπομένως:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E}}$$

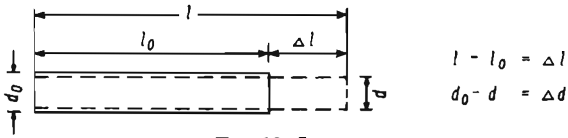
Ἡ τελευταία σχέσις ἀποτελεῖ τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου τοῦ Hooke διὰ τὰς ὀρθὰς τάσεις.

Εἰς τὴν θλιπτικὴν καταπόνησιν ἡ σχέσις $\Delta l/l_0 = \varepsilon$ ὁρίζεται ὡς εἰδικὴ ἢ ἀνηγμένη βράχυνσις. Ἐδῶ ὑφίσταται ἐπίσης περιοχὴ ἀναλογίας μεταξὺ τῆς θλιπτικῆς τάσεως σ καὶ τῆς βραχύνσεως ε, τῶν ὁποίων ὁ λόγος $\sigma/\varepsilon = E$ ἰσοῦται ἐπίσης πρὸς τὸ μέτρον ἐλαστικότητος ἢ *μέτρον τοῦ Young* [σχ. 12·5β (α)]. Ἐπειδὴ ἡ ἀνηγμένη μήκυνσις (ἢ βράχυνσις) ὡς σχετικὸν μέγεθος εἶναι ἀδιάστατος ἀριθμός, τὸ μέτρον ἐλαστικότητος ἔχει τὰς αὐτάς, ὡς ἡ τάσις σ, διαστάσεις.

Τιμαὶ τοῦ E εἰς kp/cm^2:

Ἀπολύτως στερεὸν σῶμα	∞
Χάλυψ	2 100 000
Χυτοσίδηρος	1 000 000
Κράματα ἀλουμινίου	700 000
Κράματα μαγνησίου	450 000
Ξύλον	100 000
Ἐλαστικὸν	2. . .8

Ταυτοχρόνως πρὸς τὴν ἀνηγμένην μήκυνσιν ε, ἡ ὁποία λαμβάνει χώραν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, ἐμφανίζεται ἡ ἀνη-



Σχ. 12·5 γ.

Μήκυνσις καὶ ἐγκαρσία συστολή.

γμένη ἐγκαρσία συστολὴ ε_q. Ἐὰν π.χ. εἰς κυλινδρικὴν ράβδον (σχ. 12·5 γ) ἡ ἀρχικὴ διάμετρος d_0 ἐλαττωθῇ μέχρι τῆς τιμῆς d, ἡ ἐγκαρσία συστολή, διὰ $\Delta d = d_0 - d$, ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}.$$

Ἡ σχέσις $\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = \mu$ καλεῖται *λόγος ἐγκαρσίας συστολῆς* ἢ *λόγος τοῦ Poisson*, τὸ ἀντίστροφον δὲ $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \frac{1}{\mu} = m$ καλεῖται *συντελεστὴς* ἢ *σταθερὰ τοῦ Poisson*.

Εἰς τὰ μέταλλα ἰσχύει περίπου $m = \frac{10}{3}$ καὶ $\mu = 0{,}3$.

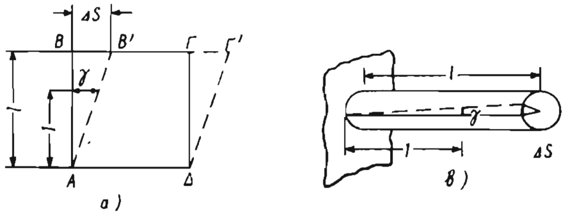
Ὡρισμένα ὑλικά, ὅπως π.χ. ὁ χυτοσίδηρος, δὲν ἀκολουθοῦν τὸν νόμον τοῦ Hooke. Ἀκόμη καὶ κατὰ τὰς πολὺ μικρὰς μηκύνσεις ἢ βραχύνσεις δὲν ὑφίσταται ἀναλογία μεταξὺ σ καὶ ε [σχ. 12·5 β (β)]. Εἰς αὐτὰς τὰς περιπτώσεις συνήθως οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται μὲ μίαν μέσην τιμὴν τοῦ E.

2) *Διατμητικαὶ τάσεις.*

Ἐνταῦθα ἐξετάζονται αἱ διατμητικαὶ τάσεις, ὅπως ἐμφανίζονται κατὰ τὰς καταπονήσεις εἰς διάτμησιν καὶ στρέψιν [σχ. 12·5 δ (α) καὶ (β)].

Εἰς τὴν ἀνηγμένην μήκυνσιν ε (αὔξησις μήκους τῆς μονάδος μήκους) ἀντιστοιχεῖ ἡ *γωνιακὴ παραμόρφωσις* γ.

Ἡ γωνιακὴ παραμόρφωσις ὑπολογιζομένη ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου



Σχ. 12·5 δ.

Διατμητικαὶ τάσεις :

α) Καταπόνησις εἰς διάτμησιν. β) Καταπόνησις εἰς στρέψιν.

κύκλου (δηλαδὴ κύκλου ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν μονάδα μήκους) προκύπτει, δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως:

μῆκος τόξου = ἐπίκεντρος γωνία τοῦ τόξου × ἀκτῖνα

ὡς δηλαδή :

$$\Delta s = \gamma \cdot l \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \frac{\Delta s}{l}.$$

Ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς τάσις-γωνιακὴ παραμόρφωσις, τ/γ, μέχρι τοῦ ὁρίου ἀναλογίας [σχ. 12·5 β (α), ἡ ἐντὸς παρενθέσεως τιμὴ] καλεῖται *μέτρον διατμήσεως G*. Ἡ ἀντίστροφος τιμὴ τοῦ μέτρου διατμήσεως $1/G = \beta$ καλεῖται *συντελεστὴς διατμήσεως*. Κατὰ συνέπειαν :

$$\frac{\tau}{\gamma} = G \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\gamma = \frac{\Delta s}{l} = \frac{\tau}{G}}$$

Ἡ τελευταία σχέσις ἀποτελεῖ τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τοῦ νόμου τοῦ Hooke διὰ διατμητικὰς τάσεις.

Τὸ μέτρον ἐλαστικότητος καὶ τὸ μέτρον διατμήσεως συνδέονται μετὰ τοῦ λόγου τοῦ Poisson μ διὰ τῆς σχέσεως:

$$E = 2\,(1 + \mu) \cdot G \quad \text{ἢ} \quad E = 2\,\frac{m + 1}{m}\,G.$$

Ὅταν $\mu = 0{,}3$, λαμβάνεται: $E = \frac{26}{10}\,G = 2{,}6\,G$ ἢ $G = 0{,}385E$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτουν τιμαὶ τοῦ G:

— διὰ χυτοσίδηρον (φαιόν) 385 000 kp/cm²

— διὰ χάλυβα 810 000 kp/cm².

Παραδείγματα.

1. Χαλύβδινον σύρμα ($E = 2{,}1 \times 10^6$ kp/cm²) τῶν 3 mm ⌀ καὶ μήκους 10 m φορτίζεται διὰ δυνάμεως ἐφελκυσμοῦ 150 kp. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἐλαστικῆς αὐξήσεως μήκους καὶ τῆς ἐγκαρσίας συστολῆς;

Ἡ τάσις τοῦ σύρματος εἶναι:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{150}{0{,}3^2 \cdot \pi/4} = 2110 \text{ kp/cm}^2.$$

Ἐκ τῆς $\dfrac{\Delta l}{l_0} = \dfrac{\sigma}{E}$ λαμβάνεται $\Delta l = l_0 \dfrac{\sigma}{E}$, ἑπομένως:

$$\Delta l = 1000 \times \frac{2110}{2\,100\,000} \text{ cm} \approx 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}.$$

Ἡ ἀνηγμένη μήκυνσις προκύπτει ἴση πρός:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{10}{10\,000} = 0{,}001 = 0{,}1\,\%,$$

καὶ ἡ ἐγκαρσία συστολή:

$$\varepsilon_q = \mu \cdot \varepsilon = 0{,}3 \times 0{,}001 = 0{,}03\,\%.$$

Ἡ ὑπολογισθεῖσα ἐγκαρσία συστολὴ εἶναι ἀσήμαντος καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν λαμβάνεται πρακτικῶς ὑπ' ὄψιν.

2. Στεφάνη ἐσωτερικῆς διαμέτρου 849 mm προσαρμόζεται ἐν θερμῷ πέριξ τροχοῦ, θεωρουμένου ὡς ἀπολύτως στερεοῦ, διαμέτρου 850 mm. Ζητεῖται ἡ τάσις ἐφελκυσμοῦ εἰς τὴν στεφάνην μετὰ τὴν ἐπάνοδόν της εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος.

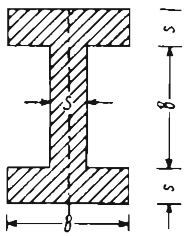
$$(E = 2{,}1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2)$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\pi \cdot \Delta d}{\pi \cdot d_0} = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{1}{849} = 0{,}00118.$$

$$\sigma = 0{,}00118 \times 2{,}1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2 = 2480 \text{ kp/cm}^2.$$

3. Ὁ διωστὴρ ντηζελομηχανῆς διατομῆς I (σχ. 12·5 ε), $\beta = 50$ mm, $S = 15$ mm καὶ μήκους 520 mm παραλαμβάνει κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναφλέξεως θλιπτικὴν δύναμιν 19 Mp. Ποία ἡ βράχυνσις αὐτοῦ;

$$(E = 2{,}1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2).$$



Σχ. 12·5 ε.
Ἡ διατομὴ τοῦ διωστῆρος.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς διατομῆς τοῦ διωστῆρος εἶναι:

$$A = 3\beta \cdot S = 3 \times 5 \times 1{,}5 \text{ cm} = 22{,}5 \text{ cm}^2.$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ θλιπτικὴ τάσις:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{19\,000}{22{,}5} \text{ kp/cm}^2 = 844 \text{ kp/cm}^2.$$

Ἐν συνεχείᾳ προκύπτει ἡ βράχυνσις:

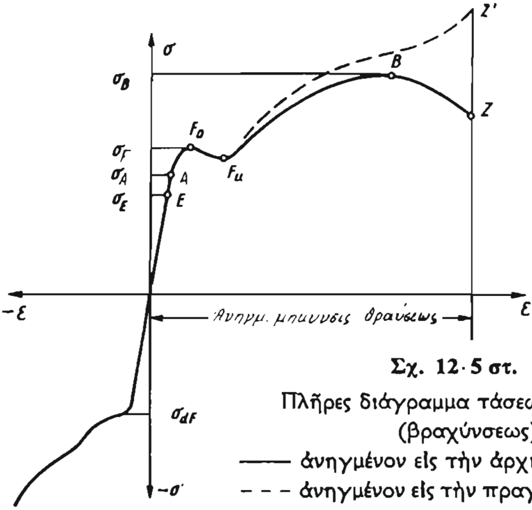
$$\Delta l = l\,\frac{\sigma}{E} = 52 \times \frac{844}{2\,100\,000} \text{ cm} \approx 0{,}021 \text{ cm} \approx 0{,}21 \text{ mm}.$$

γ) Ἡ καμπύλη τάσεως-μηκύνσεως.

Ἡ μέχρι τώρα ἐπισκόπησις τῆς σχέσεως μεταξὺ τάσεως καὶ μεταβολῆς μήκους ἔφθασε μόνον μέχρι τοῦ ὁρίου ἀναλογίας, συνεπῶς μόνον εἰς τὴν περιοχὴν ἰσχύος τοῦ νόμου τοῦ Hooke. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἐξετασθῇ ἡ μορφὴ τῆς καμπύλης τάσεως-μηκύνσεως κατὰ τὴν περαιτέρω αὔξησιν τῆς φορτίσεως (δηλαδὴ πέρα τοῦ ὁρίου ἀναλογίας).

1) *Δοκιμὴ εἰς ἐφελκυσμόν.*

Πρὸς δοκιμὴν εἰς ἐφελκυσμόν, δοκίμιον διατομῆς A_0 προσδένεται ἐπὶ μηχανῆς δοκιμῆς (εἰς ἐφελκυσμὸν) καὶ τείνεται βραδέως μέχρι θραύσεως, ὑπὸ ταυτόχρονον παρατήρησιν τῆς ἐνεργούσης δυνάμεως. Χαράσσοντες τὴν τάσιν $\sigma = F/A_0$, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ φορτίου καὶ τῆς ἀρχικῆς διατομῆς, ἔναντι τῆς ἀνηγμένης μηκύνσεως ε (σχ. 12·5 στ) ἐπὶ διαγράμματος, διακρίνομεν τὰ ἑξῆς:



Σχ. 12·5 στ.

Πλῆρες διάγραμμα τάσεως-μηκύνσεως (βραχύνσεως):

—— ἀνηγμένον εἰς τὴν ἀρχικὴν διατομήν.

– – – ἀνηγμένον εἰς τὴν πραγματικὴν διατομήν.

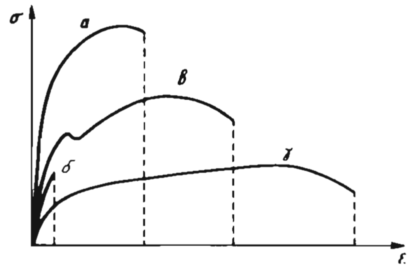
Ἡ μήκυνσις καὶ ἡ τάσις αὐξάνονται ἀναλόγως μέχρι τοῦ ὁρίου ἀναλογίας σ_A (περιοχὴ ἰσχύος τοῦ νόμου τοῦ Hooke). Κατὰ τὴν περαιτέρω αὔξησιν τοῦ φορτίου ἡ μήκυνσις αὐξάνεται περισσότερον τῆς τάσεως μέχρι τοῦ *ὁρίου διαρροῆς*.

Ἀπὸ τῆς τάσεως αὐτῆς δοκίμια ἐκ μαλακοῦ χάλυβος ἀρχίζουν νὰ «διαρρέουν». Εἰς τὴν περιοχὴν «διαρροῆς» τὸ δοκίμιον ἐπιμηκύνεται ἐντόνως, ἐνῶ ἡ καταπόνησις κυμαίνεται μεταξὺ τῶν τιμῶν F_{Fo} καὶ F_{Fu}. Εἰς ὑλικά, ποὺ ἐμφανίζουν διαρροήν, ὡς ὅριον διαρροῆς ὁρίζεται ἐκείνη ἡ τάσις, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς δυνάμεως διαρροῆς F_F καὶ τῆς ἀρχικῆς διατομῆς:

$$\sigma_F = \frac{F_F}{A_0} \quad (\textit{ὅριον διαρροῆς}).$$

Οἱ σκληροὶ χάλυβες εἴτε ἐμφανίζουν ὀλίγον διακρινόμενον ὅριον διαρροῆς εἴτε δὲν ἐμφανίζουν καθόλου (σχ. 12·5 ζ, καμπύλη α). Εἰς αὐτούς, ὡς ὅριον διαρροῆς λαμβάνεται ἡ τάσις, ἡ ὁποία προκαλεῖ, παραμένουσαν ἀνηγμένην μήκυνσιν ἴσην πρὸς 0,2%. Ἡ τάσις αὐτὴ συμβολίζεται διὰ τοῦ $\sigma_{0,2}$.

Κατὰ τὴν περαιτέρω φόρτισιν τοῦ δοκιμίου πέρα τοῦ ὁρίου διαρροῆς αὐξάνεται ἡ τάσις ἀκόμη περισσότερον ὑπὸ ταυτόχρονον σημαντικὴν μήκυνσιν. Ὑπὸ τὴν μεγίστην τάσιν (σημεῖον Β) τὸ δοκίμιον ἐμφανίζει τοπικῶς στένωσιν (λαιμὸν) καὶ εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τῆς στενώσεως ἐπέρχεται τελικῶς ἡ θραῦσις (σημεῖον Ζ). Τὸ σημεῖον Ζ εἶναι τὸ σημεῖον μεγίστης ἐφαρμοζομένης δυνάμεως. Ἡ δύναμις



Σχ. 12·5 ζ.

Καμπύλαι τάσεως-μηκύνσεως διαφόρων ὑλικῶν: α) Σκληρὸς χάλυψ. β) Μαλακὸς χάλυψ (μὲ ἐμφανὲς ὅριον διαρροῆς). γ) Μαλακὸς χαλκός. δ) Χυτοσίδηρος.

αὐτὴ καλεῖται *φορτίον θραύσεως*. Ὁ λόγος τοῦ φορτίου θραύσεως πρὸς τὴν ἀρχικὴν διατομὴν A_0 δίδει τὴν (στατικὴν) *ἀντοχὴν εἰς ἐφελκυσμόν*:

$$\sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

Ἡ ἀντοχὴ αὐτή, εἰς kp/mm², εἶναι ἡ ἀναφερομένη εἰς τὴν ὀνομασίαν τῶν συνήθων χαλύβων (π.χ. St 42, St 60, κ.ο.κ. σημαίνει χάλυβα ἀντοχῆς 42 kp/mm², 60 kp/mm², κ.ο.κ.).

Εἰς τὸ σχῆμα 12·5 στ ἡ διακεκομμένη γραμμὴ παριστᾶ τὴν καμπύλην τάσεως-μηκύνσεως ἀνηγμένην εἰς τὴν πραγματικὴν διατομὴν τοῦ δοκιμίου (λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς τοπικῆς στενώσεως). Προφανὴς εἶναι ἡ αὔξησις τῆς τάσεως μέχρι τοῦ σημείου θραύσεως τῆς ράβδου (σημεῖον Ζ').

Ἡ σχέσις μεταξὺ τελικῆς μηκύνσεως δοκιμίου (μετρουμένη ἐπὶ τοῦ θραυσθέντος δοκιμίου) $l_z - l_0$ καὶ τοῦ ἀρχικοῦ μήκους αὐτοῦ l_0 καλεῖται *μήκυνσις θραύσεως:*

$$\delta = \frac{l_z - l_0}{l_0}.$$

Ἐκ διαφόρων ὑλικῶν προκύπτουν προφανῶς καὶ διάφοροι μορφαὶ καμπυλῶν τάσεως-μηκύνσεως (σχ. 12·5 ζ).

Κατὰ τὴν σύγκρισιν διαφόρων διαγραμμάτων τάσεως-μηκύνσεως εἶναι προφανές, ὅτι ἡ μήκυνσις θραύσεως παριστᾶ τὴν ὀλκιμότητα, δηλαδὴ τὴν ἱκανότητα τῶν ὑλικῶν πρὸς παραμόρφωσιν (εἰς τὴν πλαστικήν των περιοχήν).

2) *Δοκιμὴ εἰς θλῖψιν.*

Κατὰ τὴν δοκιμὴν εἰς θλῖψιν λαμβάνεται ἡ ἐξάρτησις μεταξὺ τάσεως καὶ βραχύνσεως (σχ. 12·5 στ).

Κατὰ τὴν δοκιμὴν τῶν μετάλλων εἰς θλῖψιν χρησιμοποιοῦνται κατὰ κανόνα κυλινδρικὰ δοκίμια (ὕψους ἴσου πρὸς τὴν διάμετρόν των), τὰ ὁποῖα συμπιέζονται μεταξὺ δύο μεταλλικῶν πλακῶν. Ἐὰν ὑφίσταται ὅριον διαρροῆς τοῦ ὑλικοῦ, ἡ ἀντίστοιχος τάσις ὀνομάζεται *ὅριον διαρροῆς εἰς θλῖψιν* καὶ ὁρίζεται διὰ τοῦ τύπου:

$$\sigma_{dF} = \frac{F_F}{A_0}.$$

Θραῦσις ἐμφανίζεται μόνον εἰς ψαθυρὰ (μὴ συνεκτικὰ) ὑλικά. Ἐκ τοῦ φορτίου θραύσεως F_{max} καὶ τῆς ἀρχικῆς διατομῆς A_0 προσδιορίζεται ἡ *ἀντοχὴ εἰς θλῖψιν:*

$$\sigma_{dB} = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

Συνεκτικὰ (ὄλκιμα) ὑλικὰ δὲν καταστρέφονται ἐκ τῆς θλίψεως, ἀλλὰ ἐξακολουθοῦν νὰ παραμορφώνωνται. Εἰς αὐτὰ ἡ μεγίστη θεωρητικῶς δυνατὴ τιμὴ τῆς ἀνηγμένης βραχύνσεως ἰσοῦται πρὸς 1,0.

12·6 Περιπτώσεις φορτίσεων καὶ εἴδη ἀντοχῆς.

Διὰ τῆς δοκιμῆς εἰς ἐφελκυσμὸν μὲ βραδέως αὐξανόμενον φορτίον προσδιορίζονται τὰ χαρακτηριστικὰ μεγέθη στατικῆς ἀντοχῆς ἑνὸς ὑλικοῦ. Τὰ διάφορα στοιχεῖα μηχανῶν ὑφίστανται ὅμως διάφορα εἴδη φορτίσεων, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ὑπαχθοῦν εἰς τὰς ἀκολούθους τρεῖς κατηγορίας:

Περίπτωσις φορτίσεως I [*μόνιμος* στατικὴ φόρτισις, σχ. 12·6 (α)]:

Τὸ φορτίον ἐπιφέρεται βραδέως μέχρι τῆς μεγίστης τιμῆς του καὶ ἐν συνεχείᾳ παραμένει ἐπὶ μακρὸν σταθερόν.

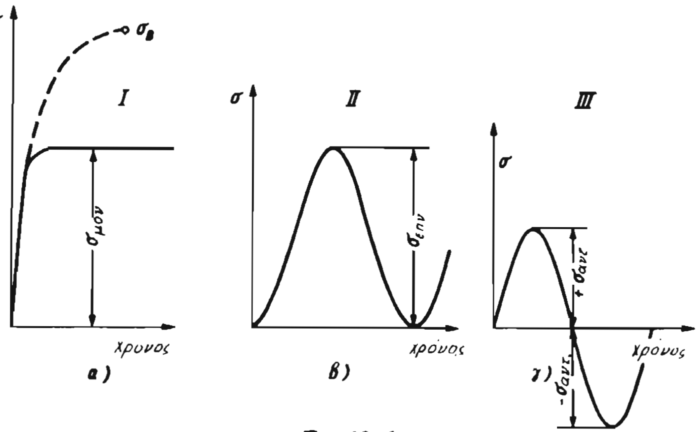
Περίπτωσις φορτίσεως II [*ἐπαναλαμβανομένη* φόρτισις, σχ. 12·6 (β)]:

Ἡ φόρτισις κυμαίνεται διαρκῶς μεταξὺ τῆς μηδενικῆς καὶ τῆς μεγίστης τιμῆς της.

Περίπτωσις φορτίσεως III [*ἀντιστρεφομένη* φόρτισις, σχ. 12·6(γ)]:

Ἡ φόρτισις κυμαίνεται διαρκῶς μεταξὺ μιᾶς μεγίστης θετικῆς καὶ μιᾶς, ἴσης κατὰ μέγεθος, ἀρνητικῆς τιμῆς.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν διαρκῆ διὰ κυμαινομένων φορτίσεων καταπόνησιν ἑνὸς στοιχείου μηχανῆς, ἡ θραῦσις λαμβάνει χώραν ὑπὸ φορτίον σημαντικῶς χαμηλότερον, ἀπὸ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θὰ ἐπέφερε τὴν



Σχ. 12·6.

Εἴδη φορτίσεων: α) Μόνιμος στατική. β) Ἐπαναλαμβανομένη. γ) Ἀντιστρεφομένη φόρτισις.

θραῦσιν διὰ μιᾶς μόνον φορτίσεως, ἕπεται ὅτι ἄλλα μεγέθη πρέπει νὰ εἶναι καταλληλότερα ἀπὸ τὰ προσδιοριζόμενα ἐκ τῆς στατικῆς δοκιμῆς σ_B καὶ τ_B. Τὰ ἀπαιτούμενα μεγέθη εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι μεγέθη ἀντοχῆς διαρκείας (χαρακτηριζόμενα γενικῶς διὰ τοῦ σ_D), τὰ ὁποῖα διακρίνονται εἰς τὰς ἀκολούθους τρεῖς κατηγορίας:

I. Ἀντοχὴ εἰς μόνιμον στατικὴν φόρτισιν $\sigma_{\mu o \nu}$

Εἶναι ἡ ὁριακὴ ἠρεμοῦσα τάσις, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ὑφίσταται τὸ ὑλικὸν ἐπὶ ἀπεριόριστον χρόνον ἄνευ θραύσεως. Εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 20° C ὡς ἀντοχὴ τῆς κατηγορίας αὐτῆς λαμβάνεται τὸ ὅριον εἰς ἐφελκυσμὸν ἢ θλῖψιν τοῦ ὑλικοῦ (σ_F, σ_{dF}, τ_F), διότι, ὡς γνωστόν, αἱ πλαστικαὶ παραμορφώσεις πρέπει γενικῶς νὰ ἀποφεύγωνται εἰς τὰς κατασκευάς.

II. Ἀντοχὴ εἰς ἐπαναλαμβανομένην φόρτισιν $\sigma_{\epsilon\pi\nu}$

Εἶναι ἡ ὁριακὴ τάσις, τὴν ὁποίαν τὸ ὑλικὸν δύναται νὰ ὑφίσταται ἐπαναληπτικῶς ἐπὶ ἀπεριόριστον χρόνον ἄνευ θραύσεως.

III. Ἀντοχὴ εἰς ἀντιστρεφομένην φόρτισιν $\sigma_{\alpha\nu\tau}$ *(ἢ παλμικὴ ἀντοχή).*

Εἶναι ἡ μεγίστη τάσις ἐκ τῆς ἀντιστρεφομένης φορτίσεως, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παραλαμβάνῃ τὸ ὑλικὸν ἐπὶ ἀπεριόριστον χρόνον ἄνευ θραύσεως.

Αἱ δύο τελευταῖαι περιπτώσεις δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τοῦ *ὁρίου κοπώσεως* σ_D.

Αἱ ὡς ἄνω τιμαὶ ἀντοχῆς διαρκείας προσδιορίζονται ἐπὶ μηχανῶν κοπώσεως. Ἔτσι π.χ. ἡ ἀντοχὴ εἰς ἀντιστρεφομένην φόρτισιν προσδιορίζεται ἐπὶ τῇ βάσει πειραμάτων ἀντιστρεφομένης φορτίσεως, κατὰ τὰ ὁποῖα μετρεῖται ὁ ἀριθμὸς περιόδων φορτίσεως μέχρι τῆς θραύσεως. Ὅσον ἡ καταπόνησις κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος διατηρεῖται χαμηλοτέρα, τόσον περισσότεραι ἐπαναλήψεις φορτίσεως ἀπαιτοῦνται πρὸς θραῦσιν τοῦ δοκιμίου. Ἡ ὁριακὴ τάσις, τὴν ὁποίαν τὸ δοκίμιον ἄνευ θραύσεως παραλαμβάνει δι' ὁσασδήποτε ἐπαναλήψεις τῆς φορτίσεως, εἶναι τὸ *ὅριον κοπώσεως* σ_D.

Αἱ τιμαὶ ἀντοχῆς διαρκείας ἑκάστου εἴδους καταπονήσεως συμβολίζονται διὰ προσθήκης τῶν ἀντιστοίχων χαρακτηριστικῶν γραμμάτων, π.χ.:

— Ἀντοχὴ εἰς ἐπαναλαμβανομένην κάμψιν: $\sigma_{b\,\epsilon\pi\nu}$

— Ἀντοχὴ εἰς παλμικὴν στρέψιν: $\tau_{t\,\alpha\nu\tau}$

12·7 Συντελεστὴς ἀσφαλείας καὶ ἐπιτρεπομένη καταπόνησις.

Πρὸς κατασκευὴν στοιχείου μηχανῆς δὲν λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ ὁριακὴ τάσις, ἀλλὰ μία ἄλλη θεωρουμένη ὡς «ἐπιτρεπομένη» καὶ ἡ ὁποία μὲ «ἀσφάλειαν» εἶναι μικροτέρα τῆς ὁριακῆς τάσεως. Συνεπῶς ὁ *συντελεστὴς ἀσφαλείας* εἶναι ἡ σχέσις τῆς κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν ὁριακῆς τάσεως (ἀντοχῆς εἰς ἐπαναλαμβανομένην ἢ π.χ. ἀντιστρεφομένην φόρτισιν) πρὸς τὴν τάσιν $\sigma_{\upsilon\pi\alpha\rho}$ ποὺ ὑπάρχει εἰς τὸ στοιχεῖον μηχανῆς:

$$\boxed{\nu = \frac{\sigma_D}{\sigma_{\upsilon\pi\alpha\rho}}}$$

Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, π.χ. πρὸς ὑπολογισμὸν συρματοσχοίνου γερανοῦ, ὡς ὁριακὴ τάσις λαμβάνεται ἡ στατικὴ ἀντοχὴ εἰς ἐφελκυσμὸν καὶ μετ' αὐτῆς σχετίζεται ὁ συντελεστὴς ἀσφαλείας:

$$\nu = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\upsilon\pi\alpha\rho\chi}}.$$

Προφανῶς ἡ συσχέτισις τῆς ὁριακῆς πρὸς τὴν ὑπάρχουσαν τάσιν πρέπει νὰ γίνεται, ὅταν καὶ αἱ δύο ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν κατηγορίαν φορτίσεων καὶ ὑφίστανται τὸ αὐτὸ εἶδος καταπονήσεως. Ὁ συντελεστὴς ἀσφαλείας πρέπει νὰ λαμβάνεται τόσον μεγαλύτερος:

α) Ὅσον ὀλιγώτερον βέβαιος εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς τάσεως.

β) Ὅσον σημαντικώτερος εἶναι ὁ ρόλος τοῦ στοιχείου εἰς τὸ σύνολον τῆς μηχανῆς καὶ

γ) ὅσον σημαντικώτεραι εἶναι αἱ ζημίαι, αἱ ὁποῖαι πιθανὸν νὰ προκύψουν λόγω θραύσεως τοῦ τεμαχίου.

Ἐνταῦθα πρέπει νὰ ἀναφερθῇ ὅτι ἡ ἀντοχὴ ἑνὸς στοιχείου ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ τοῦ ὑλικοῦ του καὶ ἐκ τῆς περιπτώσεως φορτίσεώς του, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς μορφῆς του, διότι ὀπαί, ἀλλαγαὶ διαμέτρων κ.ἄ., δημιουργοῦν εἰς τὴν κρίσιμον διατομὴν συγκεντρώσεις τάσεων. Εἰς αὐτὰς θὰ ἀναφερθῶμεν εἰς τὸν Τόμον Β'.

Τιμαὶ τοῦ $\sigma_{\epsilon\pi}$ διαφόρων ὑλικῶν διὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις φορτίσεως περιέχονται εἰς τοὺς πίνακας, ὅπου ἔχει ληφθῆ ἤδη ὑπ' ὄψιν συντελεστὴς ἀσφαλείας ἐπαρκὴς προκειμένου περὶ τῶν συνήθων περιπτώσεων (πίναξ συμπληρώματος). Ὡς συνάγεται ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν διαφόρων περιπτώσεων φορτίσεως, αἱ ἐπιτρεπόμεναι τάσεις κατὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις φορτίσεως I, II καὶ III ἔχουν λόγον ὡς οἱ ἀριθμοὶ 4 : 3 : 2.

Τὸ εἶδος τῆς ἐπιτρεπομένης τάσεως συμβολίζεται διὰ χρήσεως τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου:

ἐπιτρεπομένη τάσις ἐφελκυσμοῦ	$\sigma_{\epsilon\pi}$
ἐπιτρεπομένη τάσις θλίψεως	$\sigma_{\epsilon\pi}$
ἐπιτρεπομένη τάσις κάμψεως	$\sigma_{b\epsilon\pi}$
ἐπιτρεπομένη τάσις διατμήσεως	$\tau_{\epsilon\pi}$
ἐπιτρεπομένη τάσις στρέψεως	$\tau_{t\epsilon\pi}$

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀπαιτουμένης διατομῆς ἐπιτυγχάνεται:

Εἰς ἐφελκυσμὸν ἐκ τῆς σχέσεως:	Εἰς θλῖψιν ἐκ τῆς σχέσεως:	Εἰς διάτμησιν ἐκ τῆς σχέσεως:
$A = \frac{F}{\sigma_{\epsilon\pi}}$	$A = \frac{F}{\sigma_{\epsilon\pi}}$	$A = \frac{F}{\tau_{\epsilon\pi}}$

Παραδείγματα.

1. Ἀντηρίς, πρὸς παραλαβὴν ἐφελκυστικῆς δυνάμεως 40 Mp, πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ἐκ δύο χαλυβδίνων ἐλασμάτων προτύπου διατομῆς ⊏ (σχ. 12·7 α). Ποία διατομὴ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ,

Σχ. 12·7 α.
Διατομὴ τῆς ἐφελκυομένης ἀντηρίδος.

ἐὰν ἡ ἐπιτρεπομένη τάσις εἰς ἐφελκυσμὸν τοῦ χρησιμοποιουμένου χάλυβος ἀνέρχεται εἰς $\sigma_{\varepsilon\pi} = 900$ kp/cm²;

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{40\,000}{900}\ \mathrm{cm^2} = 44{,}4\ \mathrm{cm^2} = 2 \times 22\ \mathrm{cm^2}.$$

Ἑκάστη ράβδος προτύπου διατομῆς ⊏ πρέπει νὰ διαθέτη ἐμβαδὸν διατομῆς τουλάχιστον 22 cm². Ἐκ πίνακος προτύπων ἐλασμάτων εὑρίσκεται τὸ NP ⊏ 16, τὸ ὁποῖον ἔχει διατομὴν 24 cm², ἤτοι τὴν πλησιεστέραν πρὸς τὴν ἀπαιτουμένην.

2. Πρόκειται νὰ ἐκλέξωμεν συρματόσχοινον γερανοῦ διὰ φορτίον 9 Mp. Τὰ συρματίδια, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται τὸ συρματόσχοινον, ἔχουν τάσιν θραύσεως εἰς ἐφελκυσμὸν 180 kp/mm². Ὅταν ὁ συντελεστὴς ἀσφαλείας εἶναι ἴσος πρὸς 5, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεταλλικὴ διατομὴ τοῦ συρματοσχοίνου καὶ ποία ἡ διάμετρός του d, ἐὰν ἡ σχέσις μεταλλικῆς διατομῆς πρὸς τὴν διατομὴν τοῦ καλωδίου εἶναι $\varphi = 0{,}45$;

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_B}{\nu} = \frac{18\,000}{5}\ \mathrm{kp/cm^2} = 3600\ \mathrm{kp/cm^2}.$$

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{9000}{3600}\ \mathrm{cm^2} = 2{,}5\ \mathrm{cm^2}.$$

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{A}{\varphi} = \frac{2{,}5}{0{,}45}\ \mathrm{cm^2} = 5{,}55\ \mathrm{cm^2}, \quad d = 2{,}66\ \mathrm{cm}.$$

Τὰ συρματόσχοινα εἶναι τυποποιημένα καὶ ὡς ἐκ τούτου αἱ διαστάσεις των λαμβάνονται ἐκ τῶν πινάκων συρματοσχοίνων.

3. Χαμηλός χυτοσιδηροῦς στῦλος διατομῆς σωλῆνος ἐξωτερικῆς διαμέτρου $d_\alpha = 200$ mm φέρει φορτίον 40 Mp. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος d_i, ἐὰν ἡ ἐπιτρεπομένη τάσις εἰς θλῖψιν ἰσοῦται πρὸς 400 kp/cm²;

$$A = \frac{F}{\sigma_{\epsilon\pi}} = \frac{40\,000}{400}\ \mathrm{cm^2} = 100\ \mathrm{cm^2}.$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left(d_\alpha^2 - d_i^2\right), \qquad d_i^2 = d_\alpha^2 - \frac{4}{\pi}A = \left[20^2 - \frac{4}{\pi}100\right]\mathrm{cm^2} =$$

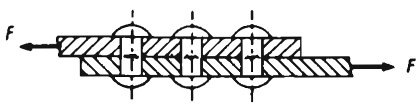
$$= [400 - 127{,}5]\ \mathrm{cm^2} = 272{,}5\ \mathrm{cm^2}$$

$$d_i = 16{,}5\ \mathrm{cm} = 165\ \mathrm{mm}.$$

Παρατήρησις:

Ὁ ἁπλοῦς ὑπολογισμὸς εἰς θλῖψιν ἐπιτρέπεται μόνον εἰς τὰς περιπτώσεις ράβδων μικροῦ μήκους. Μακρότεραι ράβδοι, ὀρθοστάται, στῦλοι κ.λπ. πρέπει νὰ ἐλέγχωνται εἰς λυγισμόν [περίπτωσις καταπονήσεως σχ. 12·1 (στ), βλ. τόμον Β'].

4. Δύο μεταλλικαὶ πλάκες, αἱ ὁποῖαι φορτίζονται διὰ δυνάμεως 3000 kp, πρέπει νὰ συνδεθοῦν διὰ τριῶν ἥλων (σχ. 12·7 β). Ποία ἡ διάμετρος τῶν ἥλων, ἐὰν τὸ ὑλικόν των ἔχῃ $\tau_{\epsilon\pi} = 600$ kp/cm²;



Σχ. 12·7 β.
Σύνδεσις δι' ἥλων.

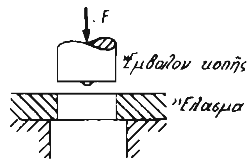
Ἐφ' ἑκάστου τῶν τριῶν μονοτμήτως φορτιζομένων ἥλων δρᾷ διατμητικὴ δύναμις 1000 kp. Ἑπομένως:

$$A = \frac{F}{\tau_{\epsilon\pi}} = \frac{1000}{600} = 1{,}66\ \mathrm{cm^2}, \qquad \text{καὶ} \qquad d = 1{,}46\ \mathrm{cm}$$

(ἡ διάμετρος τῶν 15 mm ⌀ εἶναι τυποποιημένη).

5. Ἐὰν πρόκειται νὰ γίνῃ κοπὴ ἢ διαχωρισμὸς σώματος, λαμβάνεται ἡ ἀντοχὴ τοῦ ὑλικοῦ ὡς βάσις διὰ τὸν ὑπολογισμόν. Π.χ. προκειμένου περὶ κοπῆς λαμβάνεται ἡ ἀντοχὴ εἰς διάτμησιν τ_B. Ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις εἶναι $F_{max} = A \cdot \tau_B$.

Εἰς ἔλασμα πάχους $s = 6{,}5$ mm πρόκειται νὰ κοποῦν ὀπαὶ διαμέτρου $d = 20$ mm $\varnothing$ (σχ. 12·7 γ). Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ δύναμις F_{max} τοῦ ἐμβόλου κοπῆς, ἐὰν ἡ ἀντοχὴ εἰς διάτμησιν τοῦ ὑλικοῦ τοῦ ἐλάσματος εἶναι $\tau_B = 4000$ kp/cm²; Ποία ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα θλιπτικὴ καταπόνησις σ εἰς τὸ ἔμβολον;



Σχ. 12·7 γ.
Κοπὴ ὀπῶν.

Ἡ πρὸς κοπὴν ἐπιφάνεια εἶναι κυλινδρικὸς μανδύας:

$$A = \pi \cdot d \cdot s, \qquad A = 2\,\pi \cdot 0{,}65\ \text{cm}^2 = 4{,}08\ \text{cm}^2.$$

Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει:

$$F_{max} = 4{,}08 \times 4000\ \text{kp} = 16\,320\ \text{kp}.$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς θλιπτικῆς καταπονήσεως λαμβάνεται ἡ ἐπιφάνεια:

$$A' = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \text{καὶ}$$

$$\sigma = \frac{F_{max}}{A'}, \qquad \sigma = \frac{16\,320}{\frac{2^2\pi}{4}}\ \text{kp/cm}^2 = 5200\ \text{kp/cm}^2.$$

Πρὸς παραλαβὴν τοῦ ὑψηλοῦ αὐτοῦ θλιπτικοῦ φορτίου πρέπει τὸ ἔμβολον νὰ εἶναι κατεσκευασμένον ἐξ ὑλικοῦ ἐξαιρετικῆς ἀντοχῆς. Γενικῶς διὰ δεδομένας τιμὰς τ_B τοῦ ἐλάσματος καὶ $\sigma_{\varepsilon\pi}$ τοῦ ἐμβόλου δύναται νὰ διατυπωθῇ σχέσις μεταξὺ διαμέτρου ὀπῆς d καὶ πάχους ἐλάσματος s, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ θλιπτικὴ καταπόνησις τοῦ ἐμβόλου εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν ἐπιτρεπομένων ὁρίων:

$$A \cdot \tau_B = A' \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}, \qquad \pi \cdot d \cdot s \cdot \tau_B = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}, \qquad \frac{d}{s} = 4\,\frac{\tau_B}{\sigma_{\varepsilon\pi}}\,.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13

ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΙΣ ΕΙΣ ΚΑΜΨΙΝ

Ἐὰν ἐπὶ ράβδου, μήκους σημαντικῶς μεγαλυτέρου τῶν ἄλλων διαστάσεών της, ἐπενεργοῦν δυνάμεις μὲ φορεῖς καθέτους πρὸς τὸν ἄξονά της (ἐγκάρσιαι δυνάμεις), τότε ἡ ράβδος *καταπονεῖται εἰς κάμψιν*. Κατωτέρω θὰ ἐξετασθοῦν μόνον αἱ ἁπλαῖ περιπτώσεις τῆς κάμψεως, δηλαδὴ ἡ καλουμένη *ἁπλῆ κάμψις*.

Κατὰ τὴν ἁπλῆν κάμψιν προϋποτίθεται ὅτι ὅλαι αἱ δυνάμεις δροῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, δηλαδὴ τοῦ ὀνομαζομένου ἐπιπέδου φορτίσεως. Ἐπειδὴ οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων πρέπει νὰ τέμνουν τὸν ἄξονα τῆς ράβδου, ἕπεται ὅτι καὶ ὁ ἄξων τῆς ράβδου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φορτίσεως. Συμπληρωματικῶς προϋποτίθεται ὅτι ἡ διατομὴ τῆς ράβδου ἔχει ἄξονα συμμετρίας, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φορτίσεως ἢ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτό.

Ἐὰν οἱ φορεῖς τῶν δυνάμεων δὲν τέμνουν τὸν ἄξονα τῆς ράβδου, τότε ἡ ράβδος καταπονεῖται καὶ εἰς κάμψιν καὶ εἰς στρέψιν. Ἐὰν δὲν ἰσχύῃ ἡ προϋπόθεσις, ὅτι ὁ ἄξων συμμετρίας τῆς διατομῆς ἢ ὁ κάθετος πρὸ αὐτὸν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φορτίσεως, τότε ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τῆς *λοξῆς κάμψεως*.

Σχεδὸν πάντοτε, ἡ καμπτικὴ καταπόνησις εἶναι σημαντικῶς μεγαλυτέρα τῆς ἐξ ἐγκαρσίων δυνάμεων προερχομένης καταπονήσεως εἰς διάτμησιν.

13·1 Γενικά.

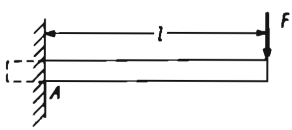
α) Ροπὴ κάμψεως καὶ ροπὴ ἀντιστάσεως.

Ἐκ τῆς πείρας εἶναι γνωστόν, ὅτι ὅσον ἀπομεμακρυσμένον εἶναι τὸ σημεῖον πακτώσεως ράβδου (δηλ. προβόλου) ἀπὸ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως, τόσον εὐκολώτερον θραύεται ἡ ράβδος. Ἐξ αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως συνάγεται ὅτι ἡ καμπτικὴ καταπόνησις εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς δυνάμεως ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της ἀπὸ τῆς πακτώσεως, δηλαδὴ ἐκ τοῦ γινομένου: *δυνάμεως* × *ἀπόστασιν*. Ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Στατικῆς, τὸ γινόμενον τοῦτο ὀνομάζεται *ῥοπὴ δυνάμεως*. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ ῥοπὴ αὐτὴ προκαλεῖ καμπτικὴν καταπόνησιν, καλεῖται *καμπτικὴ ῥοπὴ* καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ M_b.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον προβόλου (σχ. 13·1 α) ἐφαρμόζεται δύναμις, ἡ ἐξ αἰτίας αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον πακτώσεως A προκαλουμένη καμπτικὴ ῥοπὴ (= ῥοπὴ κάμψεως) ἔχει τὴν τιμήν :

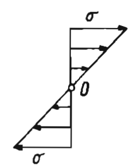
$$\boxed{M_{bA} = F \cdot l}$$

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως τῆς ἐκ τῆς ῥοπῆς κάμψεως προκαλουμένης παραμορφώσεως τῆς ῥάβδου — ἡ ὁποία, χάριν ἐποπτείας, παρι-



Σχ. 13·1 α.
Πρόβολος στερεὸς (δηλ. ἄκαμπτος).

Σχ. 13·1 β.
Πρόβολος ἐν παραμορφώσει. 0 . . . 0 οὐδετέρα στρῶσις ἰνῶν.



Σχ. 13·1 γ.
Κατανομὴ τάσεως ὑπὸ καμπτικὴν καταπόνησιν.

στάνεται μὲ δυσανάλογον μεγέθυνσιν εἰς τὸ σχῆμα 13·1 β — συνάγονται τὰ ἀκόλουθα:

Αἱ ἄνω ἶνες τοῦ προβόλου ἐπιμηκύνονται, συνεπῶς ἐφελκύονται, ἐνῶ αἱ κάτω ἐπιβραχύνονται, ἄρα θλίβονται. Μεταξὺ τῶν ἄνω καὶ κάτω ἰνῶν εὑρίσκονται ἶνες, αἱ ὁποῖαι οὔτε ἐφελκύονται, οὔτε θλίβονται. Αἱ ἶνες αὗται ἀποτελοῦν τὴν ὀνομαζομένην *οὐδετέραν στρῶσιν*. 0. . .0, ἡ ὁποία διέρχεται πάντοτε διὰ τοῦ κέντρου βάρους τῆς καταπονουμένης διατομῆς.

Ὅσον περισσότερον ἀπέχει μία ἲς ἀπὸ τὴν οὐδετέραν στρῶσιν, τόσον περισσότερον τείνεται ἢ θλίβεται, δηλαδὴ τόσον περισσότερον καταπονεῖται εἰς ἐφελκυσμὸν ἢ εἰς θλῖψιν. Ἐπειδὴ ἡ μήκυνσις καὶ ἡ βράχυνσις αὐξάνονται γραμμικῶς μετὰ τῆς ἀποστάσεως, τὸ αὐτὸ πρέπει νὰ ἰσχύῃ, βάσει τοῦ νόμου τοῦ Hooke, καὶ διὰ τὰς τάσεις (σχ. 13·1 γ).

Αἱ μέγισται τιμαὶ τῶν καμπτικῶν τάσεων ἐμφανίζονται εἰς τὰς ὁριακὰς ἶνας, περὶ τῶν ὁποίων καὶ μόνον γίνεται ὁ ὑπολογισμός.

'Ενῶ εἰς τὰς ἐφελκυστικάς, θλιπτικὰς καὶ διατμητικὰς καταπονήσεις ἡ τάσις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς διατομῆς ($\sigma = F/A$, $\tau = F/A$), εἰς τὴν καμπτικὴν καταπόνησιν ἡ τάσις τῆς ἐξωτερικῆς ἰνὸς ἐξαρτᾶται ἐκ μιᾶς συναρτήσεως τῆς διατομῆς, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *ροπὴ ἀντιστάσεως*. 'Ενῶ εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ καμφθῇ ἕνα ταῦ σχεδιάσεως κατὰ τὴν μίαν κατεύθυνσιν, κατὰ τὴν κάθετον πρὸς αὐτὴν κατεύθυνσιν ἡ κάμψις εἶναι δυσκολωτάτη, παρ' ὅλον ὅτι πρόκειται περὶ τῆς αὐτῆς διατομῆς. Ἡ ἀντίστασις ἔναντι κάμψεως ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς διατομῆς ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἄξονος τῆς διατομῆς, περὶ τὸν ὁποῖον ἐνεργεῖται ἡ κάμψις.

Ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως ἀναφέρεται εἰς ἐκεῖνον τὸν κεντροβαρικὸν ἄξονα τῆς διατομῆς, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος πρὸς τὰς κατευθύνσεις τῶν δυνάμεων. 'Επειδὴ δὲ ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως λαμβάνεται περὶ ἄξονα, δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ καὶ ὡς *ἀξονικὴ ροπὴ ἀντιστάσεως*.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς καμπτικῆς καταπονήσεως ἐμφανίζεται:

εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως F ἡ ροπὴ κάμψεως M_b,
» » » τῆς ἐπιφανείας τῆς διατομῆς A ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως W καὶ
» » » τοῦ λόγου F/A, ὁ λόγος M_b/W.

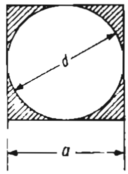
Δεδομένου ὅτι κατὰ τὴν καμπτικὴν καταπόνησιν ἐμφανίζονται ἐφελκυστικαὶ καὶ θλιπτικαὶ τάσεις, δηλαδὴ ὀρθαὶ τάσεις, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κάμψεως ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad \text{ἢ} \quad M_b = W \cdot \sigma_b}$$

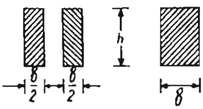
'Εὰν τεθῇ εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ἡ σ_b εἰς kp/cm^2 καὶ ἀντιστοίχως ἡ ροπὴ M_b εἰς $kp \cdot cm$, λαμβάνεται διὰ τὴν ροπὴν ἀντιστάσεως W ἡ διάστασις cm^3.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀξονικῶν ροπῶν ἀντιστάσεως διαφόρων διατομῶν θὰ ἐξετασθῇ εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς 'Αντοχῆς Ὑλικῶν. 'Ενταῦθα θὰ διατυπωθοῦν μόνον ὡρισμένα βασικὰ συμπεράσματα.

'Επειδὴ ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως — ὡς ἤδη ἀνεφέρθη — ἔχει τὴν διάστασιν τοῦ μήκους εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, ἕπεται ὅτι εἰς πλήρως συμμετρικὰς διατομὰς (κύκλος καὶ τετράγωνον) ἡ διάμετρος ἢ ἀντιστοίχως ἡ πλευρὰ ἐμφανίζονται εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν. Εἰς τετράγωνον π.χ. μὲ ἐντὸς αὐτοῦ ἐγγεγραμμένον κύκλον (σχ. 13·1 δ), εἶναι ἐμφανὲς ὅτι ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως τοῦ κύκλου (διαμέτρου d) εἶναι μικροτέρα τῆς ροπῆς ἀντιστάσεως τοῦ τετραγώνου (πλευρᾶς $\alpha = d$), διότι εἰς τὴν κυκλικὴν ράβδον ἀπουσιάζουν αἱ ἶνες, αἱ ὁποῖαι εἰς τὸ



Σχ. 13·1 δ.
Τετραγωνικὴ καὶ κυκλικὴ διατομή.



Σχ. 13·1 ε.
Διὰ τὴν ροπὴν ἀντιστάσεως ὀρθογωνικῆς διατομῆς.

τετράγωνον παραλαμβάνουν τὴν μεγαλυτέραν φόρτισιν. Πράγματι εἶναι:

$$W_{\bigcirc} \approx \frac{d^3}{10}, \qquad W_{\square} = \frac{\alpha^3}{6}.$$

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἡ μία διάστασίς του ἐμφανίζεται εἰς τὴν πρώτην, ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Ἐπειδὴ μία δοκὸς διπλοῦ πλάτους (σχ. 13·1 ε) δύναται νὰ παραλάβη προφανῶς μόνον τὸ διπλάσιον φορτίον, ἕπεται ὅτι τὸ β ἐμφανίζεται εἰς τὴν πρώτην καὶ τὸ h εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν:

$$W_{\square} = \frac{\beta \cdot h^2}{6}.$$

Πίναξ τῶν ἀξονικῶν καὶ τῶν (βραδύτερον ἐξετασθησομένων) πολικῶν ροπῶν ἀντιστάσεως ἁπλῶν διατομῶν εὑρίσκεται εἰς τὸν πίνακα Συμπληρώματος. Περὶ τῶν ροπῶν ἀντιστάσεως ἄλλων διατομῶν ([I κ.λπ.) βλέπε εἰς τοὺς πίνακας τεχνικῶν ἐγχειριδίων.

β) Εἴδη φορτίσεων φορέων.

Εἰς τὰ ἑπόμενα ἐξετάζονται περιπτώσεις καμπτικῶν καταπονήσεων ραβδομόρφων φορέων. Εἰς αὐτοὺς ἀνήκουν αἱ δοκοί, αἱ ἄτρακτοι καὶ οἱ ἄξονες. Ἡ φόρτισις τῶν φορέων αὐτῶν δύναται νὰ προέρχεται ἐξ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων συγκεντρωμένων φορτίων, ἀλλὰ καὶ ἐξ ὁμοιομόρφως κατανεμημένης συνεχοῦς φορτίσεως. Ἂν ἡ φόρτισις ἐκτείνεται ἐπὶ ὅλης τῆς δοκοῦ, χαρακτηρίζεται ὡς *καθολικὴ* φόρτισις, ἂν δὲ φορτίζη μόνον τμήματα τῆς δοκοῦ, ὡς *τμηματική*.

γ) Ροπὴ κάμψεως καὶ τέμνουσα δύναμις.

Ἡ ροπὴ κάμψεως M_b, ἡ ὁποία δρᾷ ἐπὶ τῆς διατομῆς τοῦ φορέως, εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τῆς διατομῆς αὐτῆς. Ἐπειδὴ διὰ τὴν ἐκλογὴν διαστάσεων φορέως σταθερᾶς διατομῆς, τὸ μέγεθος τῆς μεγίστης ἐμφανιζομένης εἰς τὸν φορέα ροπῆς κάμψεως M_{bmax} εἶναι τὸ ἀποφασιστικὸν μέγεθος, πρέπει τοῦτο νὰ ὁρίζεται κάθε φορὰν ἀριθμητικῶς. Τὴν ἀναζήτησιν τῆς θέσεως ἐμφανίσεως τῆς μεγίστης καμπτικῆς ροπῆς, δηλαδὴ τὴν ἀναζήτησιν τῆς *ἐπικινδύνου διατομῆς*, διευκολύνει εἰς πολλὰς περιπτώσεις ὁ προσδιορισμὸς τῆς κατανομῆς τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων.

Ὡς τέμνουσα δύναμις Q χαρακτηρίζεται τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δοκοῦ δυνάμεων, ποὺ ἐνεργοῦν δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τῆς ἐν λόγῳ διατομῆς. Ἡ τέμνουσα δύναμις Q, μὲ τὴν δρᾶσιν της ἐπὶ διατομῆς, τὴν ἀναγκάζει νὰ ὀλισθήσῃ ὡς πρὸς τὴν ἀμέσως γειτονικήν της.

(Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ των ἀθροίσματος συνιστοῦν τὴν Q, δὲν διέρχεται διὰ τῆς ὑπ' ὄψιν διατομῆς).

Μεταξὺ τῆς τεμνούσης δυνάμεως (ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἐξ ἀριστερῶν ἢ ἐκ δεξιῶν δυνάμεων) καὶ τῆς ροπῆς κάμψεως (ἀθροίσματος τῶν ροπῶν αὐτῶν τῶν δυνάμεων) ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον (δηλαδὴ ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους τῆς αὐτῆς διατομῆς) ὑφίσταται σχέσις, τὴν ὁποίαν θὰ ἐξετάσωμεν βραδύτερον.

13·2 Πρόβολος ἢ πακτωμένη δοκός.

Δοκὸς πακτωμένη εἰς τὸ ἕνα ἄκρον ὀνομάζεται, ὡς εἴδομεν (σχ. 13·1 α), *πρόβολος*.

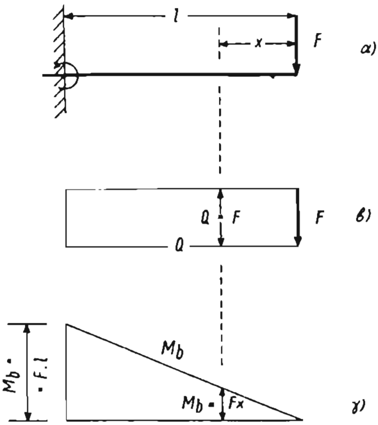
1) Πρόβολος μὲ συγκεντρωμένον φορτίον.

Εἰς τὸ σχῆμα 13·2 α εἰκονίζεται πρόβολος μὲ συγκεντρωμένον φορτίον εἰς τὸ ἄκρον του.

α) Τέμνουσαι δυνάμεις.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 13·2 α ἡ τέμνουσα δύναμις Q ἐφ' ὅλου τοῦ μήκους l τῆς δοκοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν συγκεντρωμένην δύναμιν F, ἐπομένως, ἐφ' ὅλου τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ ἰσχύει $Q = F$.

Τοῦτο παρίσταται διὰ τοῦ εἰς τὸ σχῆμα 13·2 α (β) *διαγράμματος τεμνουσῶν δυνάμεων*, ὅπου ἀπὸ ἕνα ἄξονα, παράλληλον πρὸς τὴν δοκόν, ἄγεται ὡς τεταγμένη ἡ τιμὴ τῆς τεμνούσης δυνάμεως, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑκάστην διατομήν.



Σχ. 13·2 α.

Πρόβολος μὲ συγκεντρωμένον φορτίον εἰς τὸ ἄκρον: α) Διάταξις. β) Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων. γ) Διάγραμμα ροπῶν.

β) Ροπαὶ κάμψεως.

Εἰς τυχοῦσαν θέσιν ἐπὶ προβόλου ἀπέχουσαν κατὰ x ἀπὸ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως, ἡ ροπὴ κάμψεως ἰσοῦται πρός:

$$M_{bx} = F \cdot x.$$

Ἡ ροπὴ αὐτὴ αὐξάνεται γραμμικῶς μετὰ τοῦ x. Εἰς τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως ἰσοῦται πρὸς μηδέν, ἐνῷ τὴν μεγίστην τιμήν της λαμβάνει εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως, ἤτοι:

$$\boxed{M_b = F \cdot l}$$

Συνεπῶς ἡ *ἐπικίνδυνος διατομὴ* εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως καὶ βάσει αὐτῆς προσδιορίζονται αἱ διαστάσεις τοῦ φορέως. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν δράσεως καὶ ἀντιδράσεως, πρέπει εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως νὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τῆς δοκοῦ ἐκ μέρους τῆς πακτώσεως ἴση ροπὴ (ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς), ὡς δεικνύεται καὶ εἰς τὸ σχῆμα 13·2 α (α). Ἡ ροπὴ αὐτὴ καλεῖται *ροπὴ πακτώσεως* καὶ ἀναπτύσσεται εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως μαζὶ μὲ τὴν δύναμιν ἀντιδράσεως

F. Ἡ κατανομὴ τῶν ροπῶν κάμψεως δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς κατὰ ἁπλοῦν τρόπον [σχ. 13·2 α (γ)]. Εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ λαμβάνεται ἡ καμπτικὴ ροπὴ 0, ἐνῷ εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως $x = l$ ἄγεται ἀπὸ τοῦ ἄξονος καθέτως ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπὴ $M_b = F \cdot l$. Ἔτσι διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, ποὺ συνδέει τὰ μεγέθη τῶν ροπῶν, ὁρίζεται ἡ γενικῶς καλουμένη *καμπύλη τῶν ροπῶν* ἢ τὸ *διάγραμμα τῶν ροπῶν*. Ἡ εὕρεσις τῆς ροπῆς κάμψεως $F \cdot x$ εἰς τυχοῦσαν θέσιν τοῦ προβόλου δύναται νὰ γίνῃ δι' ἀναγνώσεως ἐκ τοῦ διαγράμματος ροπῶν.

2) Πρόβολος μὲ περισσότερα συγκεντρωμένα φορτία.

Εἰς τὰ σχήματα 13·2 β καὶ 13·2 γ δεικνύονται πρόβολοι μὲ τρία συγκεντρωμένα φορτία. Εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα αἱ τρεῖς δυνάμεις εἶναι ὁμόρροποι, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον ἡ μία εἶναι ἀντίρροπος τῶν ἄλλων δύο.

α) Τέμνουσαι δυνάμεις.

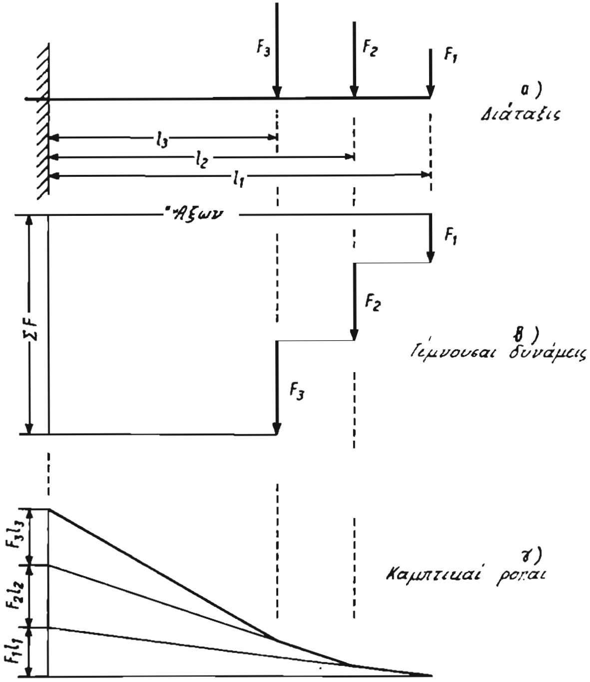
Ἡ τέμνουσα δύναμις λαμβάνει εἰς τὴν θέσιν τῆς πακτώσεως τὴν τιμὴν $Q = \sum F$ (ἀντίδρασις στηρίξεως) καὶ μεταβάλλεται μόνον εἰς τὰς θέσεις ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων κατὰ ποσόν, ποὺ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἐκεῖ ἐφαρμοζομένην δύναμιν. Ἡ χάραξις τοῦ διαγράμματος τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων γίνεται εὐχερεστέρα, ἐάν, μὲ ἀρχὴν τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ προβόλου, λαμβάνεται ἑκάστη δύναμις κατὰ σειρὰν καὶ συντίθεται βάσει τοῦ μέτρου καὶ τῆς διευθύνσεώς της.

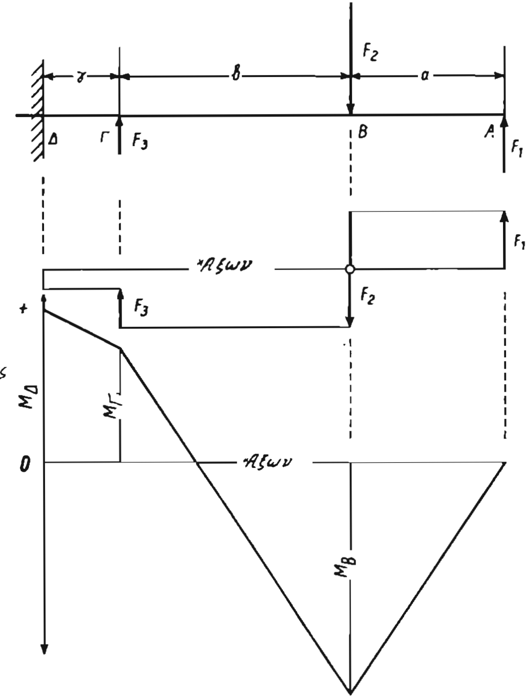
β) Ροπαὶ κάμψεως.

Ἐὰν ὅλαι αἱ ροπαὶ εἶναι ὁμόσημοι (σχ. 13·2 β), ἡ μεγίστη ροπὴ εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως προκύπτει ὡς ἄθροισμα τῶν μερικῶν ροπῶν:

$$M_b = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3.$$

Κατὰ τὴν σχεδίασιν τοῦ διαγράμματος ροπῶν, αἱ καμπτικαὶ ροπαί, αἱ ὁποῖαι παράγονται ὑπὸ ἑκάστης τῶν δυνάμεων, λαμβάνονται κατὰ σειράν. Ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως F_1 αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ προβόλου μέχρι τῆς θέσεως πακτώσεως, ὅπου φθάνει τὴν μεγίστην της τιμὴν $F_1 \cdot l_1$. Ἀπὸ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F_2 αὐξάνεται ἡ κλίσις τοῦ διαγράμματος ροπῶν λόγω προσθέσεως καὶ τῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως F_2 (ἡ ὁποία εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως λαμβάνει τὴν τιμὴν $F_2 \cdot l_2$). Ἡ κλίσις τοῦ διαγράμματος ροπῶν αὐξάνεται περαιτέρω ἀπὸ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνά-





Σχ. 13·2 β.

Σχ. 13·2 γ.

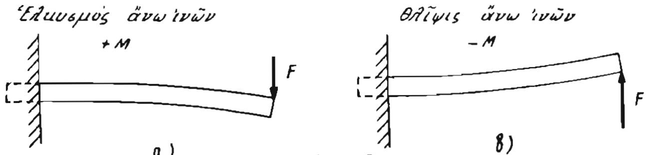
Πρόβολος φορτιζόμενος διὰ φορτίων διαφόρων κατευθύνσεων:

Πρόβολος φορτιζόμενος δι' ὁμορρόπων συγκεντρωμένων φορτίων.

Πρόβολος μὲ περισσότερα συγκεντρωμένα ἀντίρροπα φορτία.

μεως F_3 (ἡ ροπὴ τῆς ὁποίας εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως ἰσοῦται πρὸς $F_3 \cdot l_3$).

Ἐὰν αἱ ἐκ τῶν ροπῶν προκαλούμεναι κάμψεις ἔχουν διαφόρους κατευθύνσεις [σχ. 13·2 δ (α)], μία τῶν κατευθύνσεων πρέπει νὰ ληφθῇ ὡς θετική. Πρὸς χαρακτηρισμὸν τοῦ θετικοῦ ἢ τοῦ ἀρνητικοῦ μιᾶς κατευθύνσεως συνιστᾶται ἡ χρῆσις τοῦ ἀκολούθου μνημοτεχνικοῦ κανόνος: «Ἐὰν ἡ ροπὴ ἐφελκύῃ τὰς ἄνω ἶνας [σχ. 13·2 δ (α)],



Σχ. 13·2 δ.
Ἡ ἐκλογὴ τοῦ προσήμου ροπῆς.

θεωρεῖται θετική, τὸ μέγεθός της δὲ εἰς τὸ διάγραμμα ἄγεται ἐκ τοῦ ἄξονος πρὸς τὰ ἄνω. Αἱ ροπαί, δι' ἐπιδράσεως τῶν ὁποίων θλίβονται αἱ ἄνω ἶνες, θεωροῦνται ἀρνητικαὶ(*) καὶ ἄγονται εἰς τὸ διάγραμμα ἐκ τοῦ ἄξονος πρὸς τὰ κάτω.

Εἰς παρομοίας περιπτώσεις δὲν συναντᾶται κατ' ἀνάγκην ἡ μεγίστη ροπὴ εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως. Δυνατὸν ὅμως νὰ ὑφίσταται τὸ μέγιστον τῆς ροπῆς εἰς τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F_2 ἢ τῆς F_3. Διὰ τοῦ ἑπομένου συλλογισμοῦ θὰ δείξωμεν, ὅτι δὲν εἶναι ἀπαραίτητος ὁ ὑπολογισμὸς ὅλων τῶν ροπῶν. Τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων [σχ. 13·2 γ (β)] ἔχει καθ' ὅλον τὸ διάστημα α τὴν τιμὴν τῆς δυνάμεως F_1 καὶ κεῖται ὁριζοντίως ὑπεράνω τοῦ ἄξονος. Εἰς τὸ διάστημα β τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ ἄξονος (διότι $|F_2| > |F_1|$), εἰς δὲ τὸ διάστημα γ ἀνυψοῦται τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν κατὰ τὸ μέτρον τῆς F_3, ἀλλὰ παραμένει πάντοτε κάτω τοῦ ἄξονος.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τοῦ ἀναφερομένου εἰς τὸ πρόσημον τῶν ροπῶν, προκύπτει ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως F_1 ἀρνητική, τῆς F_2 θετικὴ καὶ τῆς F_3 ἀρνητική. Ἐπὶ τοῦ διαστήματος α τὸ διάγραμμα τῶν ροπῶν κατέρχεται εὐθυγράμμως, παρέχει δὲ εἰς ἑκάστην θέσιν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς ἐκ τῆς δυνάμεως F_1 προκαλουμένης ἀρνητικῆς ροπῆς. Ἐὰν ἦτο $|F_2| < |F_1|$, τὸ διάγραμμα τῶν ροπῶν θὰ

---

* Ὁ κανὼν αὐτὸς ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ πρόσημον διὰ τὰς ροπάς, ὡς καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς (βλ. Τόμον Β').

συνέχιζε τὴν κάθοδόν του πρὸς μεγαλυτέρας ἀρνητικὰς τιμάς, μὲ κλίσιν μικροτέραν τῆς προηγουμένης. Ἐὰν ἦτο $|F_2| = |F_1|$, θὰ παρέμενεν ἡ εἰς τὸ σημεῖον B ροπὴ σταθερὰ καθ' ὅλον τὸ διάστημα β. Ἐπειδὴ ὅμως $|F_2| > |F_1|$ καὶ συνεπῶς ὑπερισχύει ἡ ἐκ τῆς δυνάμεως F_2 παραγομένη θετικὴ ροπή, τὸ διάγραμμα ροπῶν ἀνέρχεται πρὸς θετικὰς τιμάς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνεται ὅτι: Ἐφ' ὅσον ἡ καμπύλη τοῦ διαγράμματος τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων (ἐπειδὴ $|F_2| > |F_1|$), διέρχεται διὰ τοῦ μηδενός, ἕπεται ὅτι εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἡ ροπὴ ἔχει *μέγιστον*, δηλαδὴ τὴν μεγίστην της τιμὴν ἐν σχέσει πρὸς τὰς τιμάς της εἰς γειτονικὰς θέσεις. Ἐὰν τὸ διάγραμμα τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων διέρχεται περισσοτέρας φορὰς διὰ τοῦ μηδενός (καὶ ἡ θέσις πακτώσεως δύναται νὰ ληφθῇ ὡς θέσις διόδου διὰ τοῦ μηδενός), πρέπει νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ροπαὶ εἰς τὰς θέσεις αὐτὰς — εἴτε θετικαὶ εἶναι εἴτε ἀρνητικαὶ — καὶ ἐξ αὐτῶν, δηλαδὴ τῶν «σχετικῶν» μεγίστων τιμῶν, ἡ ἀπολύτως μεγαλυτέρα νὰ ληφθῇ ὡς βάσις διὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν διαστάσεων τῆς δοκοῦ. Ἑπομένως εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἀρκεῖ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ροπῶν εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως καὶ εἰς τὸ σημεῖον B διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς μεγίστης καμπτικῆς ροπῆς.

Ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ διαγράμματος τῶν ροπῶν διαφαίνεται ὅτι τὰ «μέγιστα» τῶν ροπῶν ἐμφανίζονται μόνον εἰς τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συγκεντρωμένων δυνάμεων καὶ οὐδέποτε εἰς τὸ μεταξύ των διάστημα.

Ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς τῶν ροπῶν διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 13·2 γ δεικνύεται εἰς τὸ παράδειγμα 5 τῆς ἑπομένης παραγράφου.

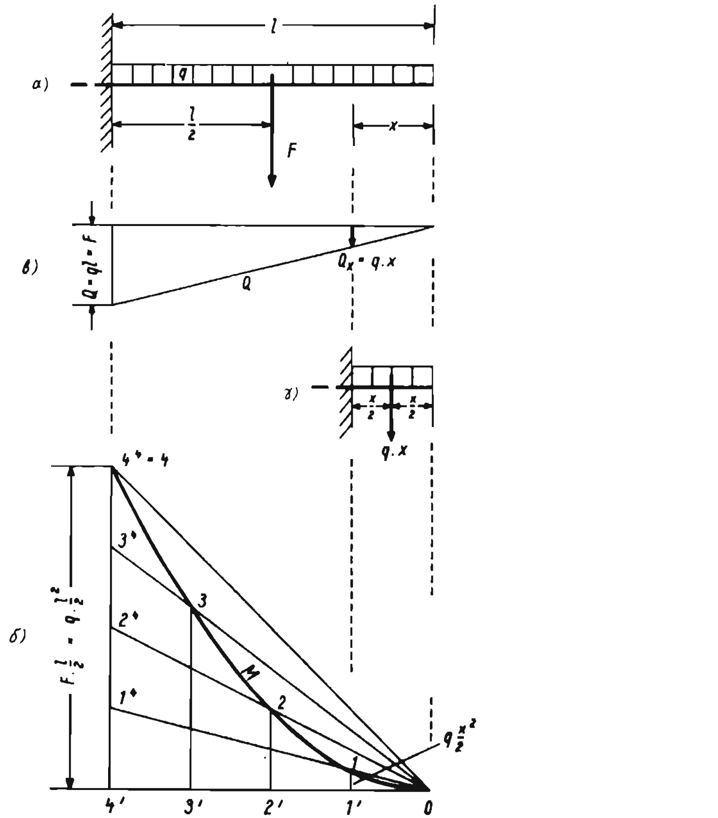
3) Πρόβολος μὲ συνεχὲς ὁμοιόμορφον φορτίον.

Ἐνταῦθα θὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ φόρτισις δὲν προέρχεται ἐκ συγκεντρωμένων φορτίων, ἀλλὰ ἐκ συνεχῶς καὶ ὁμοιομόρφως κατανεμημένου φορτίου (σχ. 13·2 ε). Ἐὰν τὸ φορτίον ἰσοῦται πρὸς q kp ἀνὰ ἑκατοστὸν μήκους, ἡ συνολικὴ φόρτισις F εἰς kp δίδεται, διὰ μῆκος φορέως l εἰς cm, ἐκ τῆς σχέσεως:

$$F = q \cdot l.$$

α) Τέμνουσαι δυνάμεις.

Εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ φορέως ἡ τέμνουσα δύναμις εἶναι $Q = 0$. Ὅταν αὐξάνεται ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ φορέως, αὐξάνεται καὶ ἡ τιμὴ τῆς τεμνούσης δυνάμεως ἀναλόγως πρὸς τὴν ἀπόστασιν. Ἔτσι, εἰς ἀπόστασιν x λαμβάνει τὴν τιμὴν $q \cdot x$,



Σχ. 13·2 ε.

Πρόβολος φορτιζόμενος διὰ συνεχοῦς ὁμοιομόρφου φορτίου:
α) Διάταξις. β) Τέμνουσαι δυνάμεις. γ) Τμῆμα τῆς δοκοῦ. δ) Ροπαὶ κάμψεως.

ἐνῶ εἰς τὸ σημεῖον πακτώσεως ἔχει τὴν τιμὴν $q \cdot l$. Ἄρα ἡ τέμνουσα δύναμις κατανέμεται γραμμικῶς [σχ. 13·2 ε (β)].

β) Ροπαὶ κάμψεως.

Προφανῶς ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπὴ ἐμφανίζεται εἰς τὸ σημεῖον πακτώσεως. Ἐὰν τὸ συνολικὸν φορτίον $F = q \cdot l$ θεωρηθῆ ὡς συνισταμένη δύναμις, ἡ ὁποία δρᾶ εἰς τὸ μέσον τοῦ φορέως, ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς τὸ σημεῖον πακτώσεως δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\boxed{M_b = F \cdot \frac{l}{2} = q \cdot \frac{l^2}{2}}$$

Πῶς κατανέμεται ὅμως ἡ ροπὴ κάμψεως κατὰ μῆκος τοῦ φορέως;

Ἤδη ἐκ τοῦ σχήματος 13·2 β διαφαίνεται ὅτι ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ τοῦ διαγράμματος τῶν ροπῶν ἐξελίσσεται εἰς καμπύλην, ὅταν πυκνώνωνται τὰ συγκεντρωμένα φορτία. Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ δοκὸς τοῦ σχήματος 13·2 ε (α) πακτώνεται εἰς μίαν διατομὴν ἀπέχουσαν x ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου της, τότε δημιουργεῖται πάλιν ἕνας πρόβολος [σχ. 13·2 ε (γ)] συνολικοῦ φορτίου $q \cdot x$ Ἡ συνισταμένη τοῦ φορτίου τοῦ προβόλου αὐτοῦ δρᾶ εἰς ἀπόστασιν $x/2$ ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου του. Συνεπῶς ἡ καμπτικὴ ροπὴ εἰς τὴν θέσιν x εἶναι:

$$M_x = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = q \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Ἡ ροπὴ κάμψεως αὐξάνεται λοιπὸν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῆς διατομῆς ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ προβόλου καὶ τὸ διάγραμμα τῶν ροπῶν εἶναι τετραγωνικὴ παραβολὴ (δηλ. παραβολὴ δευτέρου βαθμοῦ). Ἡ χάραξίς της ἐπιτυγχάνεται ἢ δι' ὑπολογισμοῦ τῆς ροπῆς ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον ἢ διὰ τῆς εἰς τὸ σχῆμα 13·2 ε (δ) δεικνυομένης γεωμετρικῆς κατασκευῆς. Τὸ μῆκος τοῦ φορέως καὶ τὸ μῆκος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ροπὴν εἰς τὸ σημεῖον πακτώσεως, διανέμονται εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, φέρονται αἱ ἀκτῖνες 01'', 02'' κ.ο.κ. εἰς τομὴν μὲ τὰς ἀντιστοίχους κατακορύφους ἐκ τῶν σημείων 1', 2' κ.ο.κ. Τὰ σημεῖα τομῆς εἶναι καὶ σημεῖα τῆς ζητουμένης παραβολῆς, διότι π.χ. ἡ ροπὴ εἰς τὸ μέσον τοῦ φορέως $(l/2)$ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ μῆκος 2'2, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς 1/2 (4' 2'') = 1/4 (4' 4), δηλαδὴ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον (1/4) τῆς ροπῆς πακτώσεως.

13·3 Δοκὸς ἀμφιέρειστος.

Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαστάσεων ἀμφιερείστου δοκοῦ εἰς πρώτην φάσιν γίνεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως, διότι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ροπῶν κάμψεως ἀπαιτεῖται γνῶσις ὅλων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως, ἐπιτρέπεται ἡ ἀντικατάστασις συγκεντρωμένων δυνάμεων διὰ τῆς συνισταμένης των. Τοῦτο ὅμως δὲν ἐπιτρέπεται κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν καμπτικῶν ροπῶν.

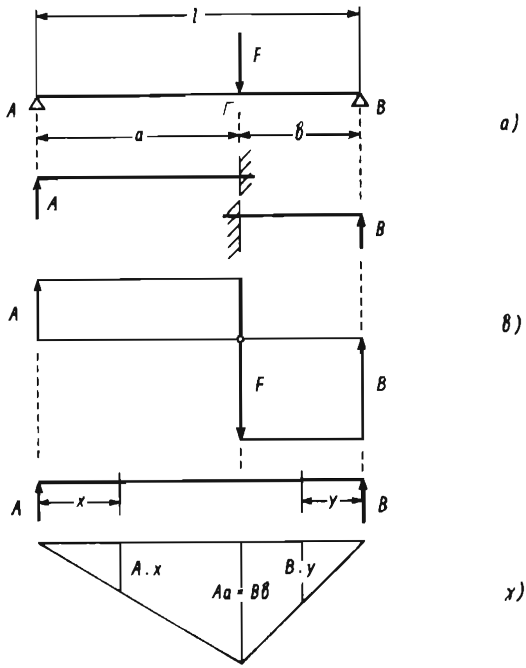
1) Δοκὸς μὲ συγκεντρωμένον φορτίον.

Αἱ ἀντιδράσεις στηριγμάτων εἰς δοκὸν μὲ συγκεντρωμένον φορτίον (σχ. 13·3 α) (ὡς ἤδη εἰς τὴν Στατικὴν ἐξητάσθη) εἶναι:

$$A = F \cdot \frac{b}{l} \qquad B = F \cdot \frac{a}{l}.$$

α) Τέμνουσαι δυνάμεις.

Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι εἰς τὴν θέσιν ἐφαρμογῆς τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως (σημεῖον Γ) ἡ δοκὸς εἶναι πακτωμένη καὶ ὅτι φορτίζεται



Σχ. 13·3 α.

Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ συγκεντρωμένον φορτίον: α) Διάταξις. β) Τέμνουσαι δυνάμεις. γ) Ροπαὶ κάμψεως.

διὰ τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως A καὶ B, τότε ἕκαστον τμῆμα της δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀνεξάρτητος πρόβολος [σχ. 13·3 α (α)]. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι ἀριστερὰ τοῦ φορτίου F ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίδρασιν A, ἐνῶ δεξιὰ τοῦ φορτίου ἡ τέμνουσα δύναμις ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίδρασιν B. Εἰς τὸ σημεῖον Γ θὰ πρέπει νὰ ὑφίσταται ἅλμα μεγέθους F εἰς τὴν τέμνουσαν δύναμιν, διὰ νὰ μεταβῆ αὐτὴ ἐκ τῆς τιμῆς A εἰς τὴν B. Ἔτσι προκύπτει ἡ μορφὴ τοῦ διαγράμματος τεμνουσῶν δυνάμεων [σχ. 13·3 α (β)].

β) Ροπαὶ κάμψεως.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ροπῆς κάμψεως φανταζόμεθα ἐπίσης ὅτι ἡ δοκὸς εἶναι πακτωμένη εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Κατόπιν λαμβάνεται ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς τὸ σημεῖον Γ ἴση πρὸς $A \cdot \alpha$ (διὰ τὸ ἀριστερὸν τμῆμα τῆς δοκοῦ) ἢ $B \cdot \beta$ (διὰ τὸ δεξιὸν τμῆμα αὐτῆς). Θέτοντες εἰς τὰς ροπὰς τὰς ἐκφράσεις διὰ τὰς ἀντιδράσεις A καὶ B λαμβάνομεν:

$$A \cdot \alpha = F \cdot \frac{\beta}{l} \cdot \alpha \qquad \text{καὶ} \qquad B \cdot \beta = F \cdot \frac{\alpha}{l} \cdot \beta$$

συνεπῶς: $$A \cdot \alpha = B \cdot \beta.$$

Εἶναι λοιπὸν ἀδιάφορον ποῖον ἐκ τῶν δύο τμημάτων λαμβάνεται πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ροπῆς κάμψεως. Αἱ ροπαὶ $A \cdot \alpha$ καὶ $B \cdot \beta$ προξενοῦν καὶ αἱ δύο θλῖψιν τῆς ἄνω ἰνὸς καὶ κατὰ συνέπειαν, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος, ἄγονται ἀπὸ τοῦ ἄξονος πρὸς τὰ κάτω.

Τὸ διάγραμμα τῶν ροπῶν [σχ. 13·3 α (γ)] σχηματίζει τρίγωνον. Ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς μίαν τυχοῦσαν ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς ἑδράσεως A εἶναι $M_{bx} = A \cdot x$. Εἰς ἀπόστασιν δὲ y ἀπὸ τῆς ἑδράσεως B κατ' ἀναλογίαν εἶναι $M_{by} = B \cdot y$. Ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως ἐμφανίζεται εἰς τὴν θέσιν ἐφαρμογῆς τοῦ φορτίου καὶ ἰσοῦται ὡς ἤδη ὡρίσθη, πρός:

$$M_{bmax} = A \cdot \alpha = B \cdot \beta = F \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{l}.$$

Ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπὴ καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ἐπικίνδυνος διατομὴ εὑρίσκεται εἰς ἐκεῖνο τὸ σημεῖον, ὅπου ἡ καμπύλη τεμνούσης δυνάμεως διέρχεται διὰ τοῦ μηδενός.

Ἐὰν τὸ συγκεντρωμένον φορτίον δρᾶ εἰς τὸ μέσον τοῦ φορέως, τότε $A = B = F/2$ καὶ ἡ μεγίστη ροπὴ ἰσοῦται πρὸς $A \cdot l/2$ ἤ:

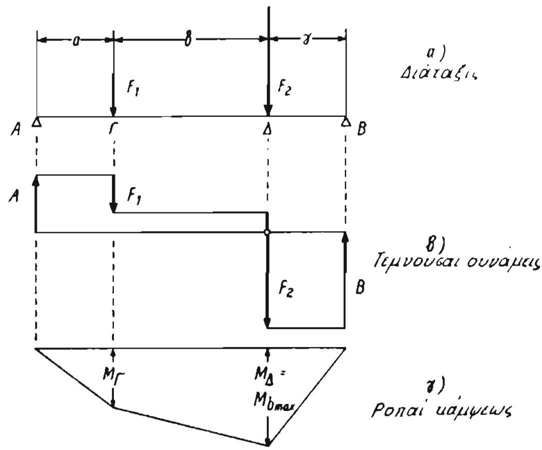
$$\boxed{M_{bmax} = \frac{F \cdot l}{4}}$$

2) Δοκὸς μὲ περισσότερα συγκεντρωμένα φορτία.

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν δυνάμεων στηρίξεως, φανταζόμεθα πάλιν ὅτι ἡ δοκὸς εἶναι πακτωμένη εἰς τὰς θέσεις ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (σχ. 13·3 β) διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς καμπτικὰς ροπάς.

α) Τέμνουσαι δυνάμεις.

Διὰ τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματος τεμνουσῶν δυνάμεων, ἀρχίζομεν π.χ. μὲ τὴν ἀντίδρασιν στηρίξεως Α. Μέχρι τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς ἑπομένης δυνάμεως παραμένει $Q = A$. Ἀπὸ τοῦ σημείου



Σχ. 13·3 β.

Ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ περισσότερα συγκεντρωμένα στοιχεῖα.

Γ ἐλαττοῦται εἰς $A - F_1$ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἰς $A - F_1 - F_2$. Ἡ τελευταία ὅμως αὐτὴ τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίδρασιν στηρίξεως Β καὶ δι' αὐτῆς κλείει τὸ διάγραμμα τῶν τεμνουσῶν. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ τέμνουσα ἐμφανίζει μίαν μόνον μηδενικὴν θέσιν, εἰς τὸ σημεῖον Δ [σχ. 13·3 β' (β)], εἰς τὴν ὁποίαν καὶ ἀναμένεται ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπή.

β) Ροπαὶ κάμψεως.

Ἡ ροπὴ κάμψεως εἶναι [σχ. 13·3 β (γ)]:

εἰς τὸ σημεῖον Γ . . . $M_Γ = A \cdot α$.

εἰς τὸ σημεῖον Δ . . . $M_Δ = A(α+β) - F_1 \cdot β = A \cdot α + (A - F_1)β$

ἢ $M_Δ = M_Γ + (A - F_1)\,β$.

Ἐὰν εἶναι, ὅπως ἐδῶ, $F_1 < A$, τότε θὰ ἰσχύῃ $M_\Delta > M_\Gamma$, ὅπου ταυτοχρόνως εἰς τὴν θέσιν Δ ἡ τέμνουσα Q διέρχεται διὰ τοῦ μηδενός. Ἐὰν ἦτο $F_1 > A$, θὰ ἦτο καὶ $M_\Delta < M_\Gamma$, ἡ δὲ μηδενικὴ θέσις τῆς Q θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ σημεῖον Γ.

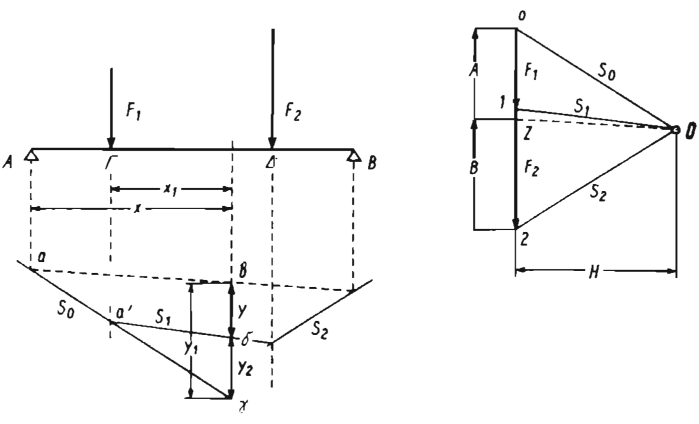
Ἰσχύει ἑπομένως καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὁ κανών, ὅτι εἰς τὴν θέσιν μηδενισμοῦ τῆς τεμνούσης, ἡ ῥοπὴ κάμψεως ἔχει μέγιστον.

γ) Γραφικὸς προσδιορισμὸς τῶν καμπτικῶν ῥοπῶν.

Μίαν ἁπλῆν μέθοδον γραφικοῦ προσδιορισμοῦ τῶν καμπτικῶν ῥοπῶν παρέχει τὸ μελετηθὲν εἰς τὴν Στατικὴν σχοινοπολύγωνον.

Ἡ ῥοπὴ κάμψεως τῆς δοκοῦ τοῦ σχήματος 13·3 γ εἰς θέσιν ἀπέχουσαν κατὰ x ἀπὸ τοῦ στηρίγματος A, ἰσοῦται πρός:

$$M_x = A \cdot x - F_1 \cdot x_1.$$



Σχ. 13·3 γ.
Γραφικὸς προσδιορισμὸς τοῦ διαγράμματος ῥοπῶν.

Κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον ἐσχεδιάσθησαν, διὰ τὸ σύστημα τῶν ἐπὶ τῆς δοκοῦ δυνάμεων, τὸ δυναμοπολύγωνον, αἱ πολικαὶ ἀκτῖνες (μὲ πόλον εἰς ἀπόστασιν H) καὶ τὸ σχοινοπολύγωνον. Διὰ τὴν θέσιν x τῆς δοκοῦ καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων αβγ (εἰς τὸ σχοινοπολύγωνον) καὶ oOZ (σχηματιζόμενον ἐκ τῆς δυνάμεως A καὶ τῶν πολικῶν ἀκτίνων της) λαμβάνεται:

$$\frac{y_1}{x} = \frac{A}{H} \quad ἢ \quad A \cdot x = y_1 \cdot H.$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον λαμβάνεται ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων α'δγ καὶ ο1Ο:

$$\frac{y_2}{x_1} = \frac{F_1}{H} \quad \text{ἢ} \quad F_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot H.$$

Ἐὰν αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ εἰσαχθοῦν εἰς τὴν ἔκφρασιν τῆς ροπῆς M_x, λαμβάνεται:

$$M_x = A_x - F_1 \cdot x_1 = y_1 \cdot H - y_2 \cdot H = (y_1 - y_2) \cdot H, \quad \text{ἤτοι:}$$

$$\boxed{M_x = y \cdot H}$$

Συνεπῶς ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς τὴν θέσιν x λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς τεταγμένης y τοῦ σχοινοπολυγώνου εἰς τὴν θέσιν ἐκείνην, ἐπὶ τὴν «πολικὴν ἀπόστασιν» Η. Ἐνταῦθα ἡ ἀπόστασις y μετρεῖται ὑπὸ τὴν κλίμακα μηκῶν ΚΜ, ἐνῶ ἡ πολικὴ ἀπόστασις ὑπὸ τὴν κλίμακα δυνάμεων ΚΔ. Ἐὰν εἰς τὴν κλίμακα μηκῶν ΚΜ 1 cm = λ m, εἰς δὲ τὴν κλίμακα δυνάμεων 1 cm = κ kp, διὰ τὴν ροπὴν M_x εἰς kpm προκύπτει:

$$M_x = \lambda \cdot y \cdot \kappa \cdot H = (\kappa \cdot \lambda \cdot H)\, y \left[\frac{kp}{cm}\, \frac{m}{cm} \cdot cm \cdot cm = kpm \right].$$

Τὸ γινόμενον κ · λ · Η [kpm/cm] παριστᾶ τὴν *κλίμακα τῶν ροπῶν*, ἐπὶ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ y, διὰ νὰ ληφθῇ ἡ ροπὴ Μ.

3) Προέχουσα δοκός.

Ἐὰν ἡ δοκὸς προεξέχῃ πέρα τοῦ ἑνὸς ἢ καὶ τῶν δύο στηριγμάτων της (Α καὶ Β), εἰς δὲ τὰ προεξέχοντα ἄκρα της φέρῃ φορτίον, τότε πρέπει κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς καμπύλης ροπῶν νὰ δοθῇ προσοχὴ εἰς τὸ ἑξῆς:

Ἡ κλείουσα τὸ σχοινοπολύγωνον δὲν ἐκτείνεται μεταξὺ τῶν φορέων τῶν ἀκραίων δυνάμεων, ἀλλὰ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ y πρέπει νὰ μετρῶνται μὲ ἀφετηρίαν τὴν κλείουσαν τὸ σχοινοπολύγωνον (βλ. σχ. 13·3 ιστ καὶ 13·3 ιζ).

4) Δοκὸς μὲ ὁμοιόμορφον φορτίον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς τοῦ φορτίου καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ (σχ. 13·3 δ) ἰσχύει $q = F/l$ καὶ διὰ τὰς ἀντιδράσεις, λόγω τῆς συμμετρίας:

$$A = B = \frac{F}{2} = \frac{ql}{2}.$$

Τὸ διάγραμμα τῶν τεμνουσῶν ἀρχίζει εἰς τὴν θέσιν A μὲ τὴν τιμὴν $Q = A = F/2$, ἐλαττοῦται γραμμικῶς μέχρι τῆς τιμῆς $Q = 0$, τὴν ὁποίαν λαμβάνει εἰς τὸ μέσον τοῦ φορέως, καὶ περατοῦται εἰς τὴν θέσιν B μὲ τὴν τιμὴν $Q = B = F/2$.

Ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς τυχοῦσαν διατομὴν ἀπέχουσαν κατὰ x ἀπὸ τοῦ A ἰσοῦται (διὰ $F_x = F/l \cdot x$):

$$M_x = A \cdot x - F_x \cdot \frac{x}{2} = \frac{F}{2} \cdot x - \frac{F}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{F}{2} \cdot x - \frac{F}{l} \cdot \frac{x^2}{2},$$

$$M_x = \frac{F}{2}\left(x - \frac{x^2}{l}\right) = \frac{q}{2}(x \cdot l - x^2).$$

Τὸ διάγραμμα τῶν ροπῶν εἶναι παραβολὴ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία εἰς τὴν θέσιν $x = 0$ καὶ $x = l$ μηδενίζεται. Ἡ μεγίστη ροπὴ κάμψεως πρέπει, λόγω συμμετρίας, νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον, δηλαδὴ εἰς τὴν θέσιν $x = l/2$. Ἰσοῦται δὲ πρός:

$$\boxed{M_{bmax} = \frac{F \cdot l}{8} = \frac{q \cdot l^2}{8}}$$

δηλαδὴ ἀκριβῶς πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς μεγίστης ροπῆς δοκοῦ μὲ συγκεντρωμένον φορτίον εἰς τὸ μέσον της.

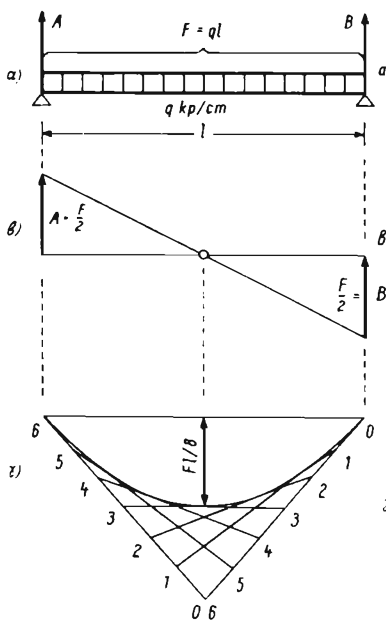
Ἔτσι προκύπτει πάλιν μία ἁπλῆ κατασκευὴ τῆς παραβολικῆς καμπύλης ροπῶν, ἡ ὁποία δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 13·3 δ.

5) Δοκὸς φορτιζομένη τμηματικῶς διὰ συνεχοῦς ὁμοιομόρφου φορτίου.

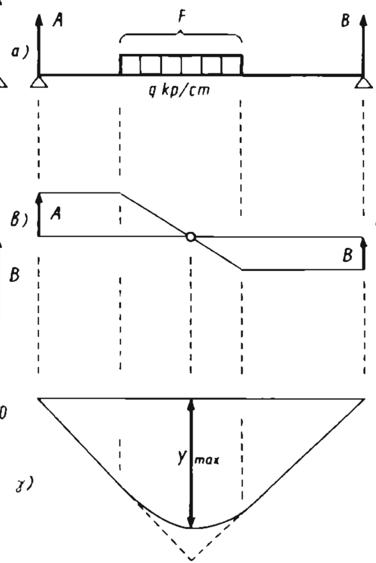
Ἐὰν τὸ συνεχὲς φορτίον καλύπτη μόνον τμῆμα τῆς δοκοῦ, ὁμιλοῦμεν περὶ τμηματικῆς φορτίσεως. Κάτωθεν τοῦ συνεχοῦς φορτίου τὸ διάγραμμα τῶν τεμνουσῶν εἶναι κεκλιμένη εὐθεῖα, δηλαδὴ ἡ τέμνουσα μεταβάλλεται γραμμικῶς, αἱ δὲ καμπτικαὶ ροπαὶ διανέμονται κατὰ παραβολικὸν νόμον (σχ. 13·3 ε).

6) Δοκὸς μὲ σύνθετον φόρτισιν.

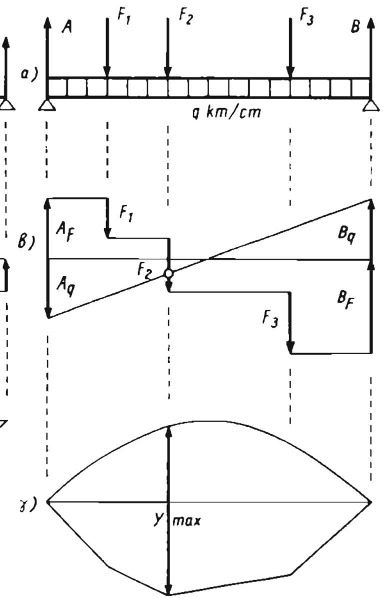
Τὰ εἴδη φορτίσεων, ποὺ ἐξητάσαμεν προηγουμένως, εἶναι δυνατὸν νὰ συνυπάρχουν ἐπὶ τῆς αὐτῆς δοκοῦ.



Σχ. 13·3 δ.
Μὲ συνεχὲς ὁμοιόμορφον φορτίον.



Σχ. 13·3 ε.
Μὲ τμηματικὴν συνεχῆ φόρτισιν.



Σχ. 13·3 στ.
Μὲ συνεχὲς ὁμοιόμορφον φορτίον καὶ συγκεντρωμένα φορτία.

Σχ. 13·3 δ ἕως στ. Ἀμφιέρειστοι δοκοί.

Τὸ σχῆμα 13·3στ δεικνύει δοκὸν φορτιζομένην διὰ συνεχοῦς φορτίου ὡς καὶ διὰ συγκεντρωμένων φορτίων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ διαγράμματα τεμνουσῶν δυνάμεων καὶ ροπῶν κάμψεως λαμβάνονται ἐκ τῆς ἐπαλληλίας τῶν διαγραμμάτων τεμνουσῶν δυνάμεων καὶ ροπῶν κάμψεως, τὰ ὁποῖα ἰσχύουν ἀντιστοίχως διὰ τὰ συγκεντρωμένα φορτία καὶ τὸ συνεχὲς φορτίον.

Διὰ τὴν ὑπέρθεσιν αὐτὴν τῶν διαγραμμάτων συνιστᾶται ἡ χάραξίς των κατ' ἀντίθετον κατεύθυνσιν οὕτως, ὥστε ἀμέσως νὰ ἐμφανίζεται τὸ ἄθροισμά των. Ἂν τὸ διάγραμμα ροπῶν ἐκ συγκεντρωμένων δυνάμεων ἔχῃ κατασκευασθῆ διὰ σχοινοπολυγώνου, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ σχεδιασθῆ ἐκ νέου, ὥστε ἡ κλείουσά του νὰ εἶναι ὁριζοντία.

Αἱ τιμαὶ τῶν y τοῦ ἀρχικῶς ληφθέντος διαγράμματος ροπῶν ἐκ συγκεντρωμένων δυνάμεων ἄγονται ἐκ τῆς ὁριζοντίας χορδῆς τῆς παραβολῆς, μὲ κατεύθυνσιν πρὸς τὰ κάτω (σχ. 13·3 στ).

Τὸ ἄθροισμα τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν, ἐκεῖ ὅπου τὰ δύο διαγράμματα τεμνουσῶν δυνάμεων τέμνονται. Εἰς αὐτὴν τὴν θέσιν ἐμφανίζονται M_{max} ἢ y_{max} εἰς τὸ διάγραμμα ροπῶν.

Παραδείγματα.

1. Πρόβολος μήκους 1 m φορτίζεται εἰς τὸ ἄκρον του διὰ συγκεντρωμένου φορτίου 1 Mp. Ποῖαι αἱ ἀπαραίτητοι διαστάσεις τοῦ προβόλου, ἐὰν αὐτὸς εἶναι κυκλικῆς, τετραγωνικῆς, ὀρθογωνικῆς (μὲ $h = 2b$), **[** ἢ **I** διατομῆς καὶ ἡ ἐπιτρεπομένη τάσις εἰς κάμψιν τοῦ ὑλικοῦ του εἶναι $\sigma_{b\varepsilon\pi} = 1000\ \text{kp/cm}^2$;

$$M_b = F \cdot l = 1000 \times 100\ \text{kpcm} = 100\,000\ \text{kpcm}.$$

$$W = \frac{M_b}{\sigma_{b\varepsilon\pi}} = \frac{100\,000}{1000}\ \text{cm}^3 = 100\ \text{cm}^3.$$

Κύκλος :

$$W = 0{,}1 \cdot d^3, \qquad d = \sqrt[3]{\frac{100}{0{,}1}}\ \text{cm} = 10\ \text{cm} = 100\ \text{mm}.$$

Τετράγωνον :

$$W = \frac{\alpha^3}{6}, \qquad \alpha = \sqrt[3]{600}\ \text{cm} = 8{,}5\ \text{cm} = 85\ \text{mm}.$$

Ὀρθογώνιον :

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W}{2}}, \qquad b = \sqrt[3]{\frac{3 \times 100}{2}}\ \text{cm} = 5{,}3\ \text{cm},\ b \approx 55\ \text{mm},\ h \approx 110\ \text{mm}.$$

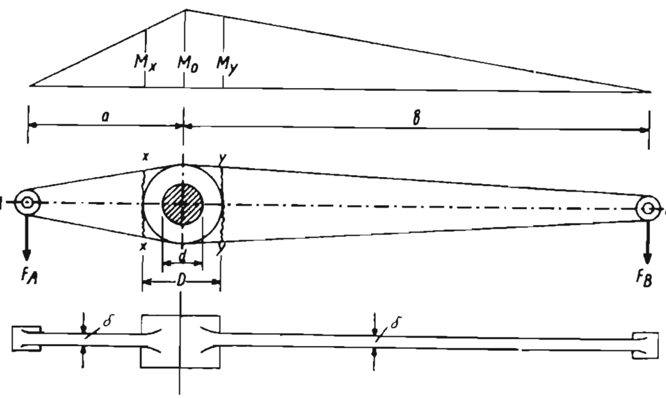
Ἐκ τῶν πινάκων λαμβάνομεν διὰ χαλυβδίνας ράβδους προτύπου διατομῆς **I** καὶ **[** :

I 16 (Ὕψους 16 cm) μὲ $W_x = 117\ \text{cm}^3$,

[16 (Ὕψους 16 cm) μὲ $W_x = 116\ \text{cm}^3$.

2. Ὁ εἰς τὸ σχῆμα 13·3 ζ παριστάμενος μοχλὸς μὲ δύο βραχίονας διὰ τὸ ἄνοιγμα καὶ κλείσιμον τῶν βαλβίδων, μὲ ἄξονα περιστροφῆς τὸ σημεῖον O (μὲ μήκη βραχιόνων $\alpha = 48$ mm καὶ $\beta = 180$ mm) καὶ διάμετρον ἄξονος $d = 12$ mm, κατεσκευάσθη ὡς ἀκολούθως :

Διάμετρος πλήμνης $D = 2d = 24$ mm, μῆκος πλήμνης $l = 1{,}5d = 18$ mm, πάχος βραχιόνων $\delta = d/2 = 6$ mm. Ζητεῖται νὰ ὑπολογι-



Σχ. 13·3 ζ.
Μοχλὸς βαλβίδων.

σθῆ, ἐὰν εἰς τὰς ὀρθογωνικὰς διατομὰς x...x καὶ y...y δὲν γίνεται ὑπέρβασις τῆς ἐπιτρεπομένης τάσεως κάμψεως τοῦ ὑλικοῦ ($\sigma_{b\epsilon\pi} = 500$ kp/cm²), ὅταν εἰς τὸ σημεῖον Α τοῦ μοχλοῦ δρᾶ δύναμις $F_A = 60$ kp.

Ἀφοῦ σχεδιασθῆ τὸ διάγραμμα τῶν καμπτικῶν ροπῶν, γίνεται ἀμέσως ἀντιληπτόν, ὅτι ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς τὴν θέσιν y...y εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ ὅση εἶναι εἰς τὴν θέσιν x...x. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς δυνάμεως F_B, ἡ ὁποία δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$F_B \cdot \beta = F_A \cdot \alpha, \quad F_B = F_A \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 60 \times \frac{4{,}8}{18}\ \mathrm{kp} \approx 16\ \mathrm{kp}.$$

Ἡ ῥοπὴ εἰς τὴν θέσιν y...y εἶναι:

$$M_y = F_B \cdot \left(\beta - \frac{D}{2}\right) = 16 \times (18 - 1{,}2)\ \mathrm{kpcm} \approx 270\ \mathrm{kpcm}$$

καὶ ἡ εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν διαθέσιμος ῥοπὴ ἀντιστάσεως εἶναι (δεδομένου ὅτι $h \approx D = 2{,}4$ cm καὶ $\delta = d/2 = 0{,}6$ cm):

$$W = \frac{\delta \cdot h^2}{6} = \frac{0{,}6 \times 2{,}4^2}{6}\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}58\ \mathrm{cm}^3.$$

Καὶ ἐξ αὐτοῦ προκύπτει:

$$\sigma_b = \frac{M_y}{W} = \frac{270}{0{,}58}\ \mathrm{kp/cm}^2 = 465\ \mathrm{kp/cm}^2.$$

3. Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη, ῥάβδος (ἢ δοκός), τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι μεγάλο ἐν σχέσει πρὸς τὰς ἄλλας διαστάσεις της, ὑφίσταται λόγω τῆς τεμνούσης δυνάμεως διατμητικὰς καταπονήσεις σημαντικῶς μικροτέρας τῶν καμπτικῶν καταπονήσεων.

Εἰς μίαν δοκόν, π.χ. τετραγωνικῆς διατομῆς, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ σχέσις τοῦ μήκους της l πρὸς τὴν πλευράν της α, ὥστε ἡ καταπόνησις εἰς διάτμησιν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν καταπόνησιν εἰς κάμψιν;

Ἐκ τοῦ πίνακος τῶν ἐπιτρεπομένων τάσεων διὰ μηχανολογικὰς κατασκευὰς (πίναξ Συμπληρώματος) ἐμφαίνεται ὅτι διὰ χάλυβα ἰσχύει $\tau \approx 0{,}8 \cdot \sigma_b$. Συνεπῶς:

$$\frac{F}{A} = 0{,}8 \cdot \frac{M_b}{W}, \quad \frac{F}{\alpha^2} = 0{,}8 \cdot \frac{F \cdot l}{\alpha^3/6}, \quad 1 = 4{,}8 \cdot \frac{l}{\alpha}, \quad \frac{l}{\alpha} \approx 0{,}2.$$

Ἐπομένως, μόνον ἂν τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ ἦτο $l \approx \alpha/5$, θὰ ἔπρεπε νὰ γίνῃ ἔλεγχος εἰς διάτμησιν.

(Διὰ ξύλον, τὸ τ εἶναι σημαντικῶς μικρότερον ἔναντι τοῦ σ_b).

4. Δοκὸς ὁμοία πρὸς αὐτὴν τοῦ σχήματος 13·2 β φορτίζεται διὰ τῶν ἀκολούθων δυνάμεων:

$$F_1 = 250\ \mathrm{kp}, \quad F_2 = 400\ \mathrm{kp}, \quad F_3 = 500\ \mathrm{kp}.$$

Αἱ ἀποστάσεις εἶναι:

$$l_1 = 100\ \mathrm{cm}, \quad l_2 = 80\ \mathrm{cm}, \quad l_3 = 60\ \mathrm{cm}.$$

Ἡ δοκὸς πρέπει νὰ γίνῃ ἀπὸ δύο ράβδους διατομῆς [, τῶν ὁποίων τὸ ὑλικὸν ἔχει $\sigma_{b\epsilon\pi} = 750$ kp/cm^2. Ποία πρότυπος διατομὴ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ;

Ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπὴ (εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως) εἶναι

$$M_b = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3 = [250 \times 100 + 400 \times 80 + 500 \times 60]\ \text{kpcm} =$$
$$= [25 + 32 + 30] \times 10^3\ \text{kpcm} = 87\,000\ \text{kpcm}.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνεται :

$$W = \frac{M_b}{\sigma_{b\epsilon\pi}} = \frac{87\,000}{750} = 116\ \text{cm}^3.$$

Ἀπαιτοῦνται συνεπῶς δύο [ἐκ χάλυβος, ἑκάστη μὲ $W_x = 58$ cm^3. Συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα, τὴν ἀπαίτησιν αὐτὴν ἱκανοποιοῦν δύο ράβδοι προτύπου διατομῆς [12 (μὲ $W_x = 60{,}7$ cm^3 ἑκάστη).

5. Διὰ τὸν εἰς τὸ σχῆμα 13·2 γ εἰκονιζόμενον πρόβολον νὰ ἐκλεγοῦν αἱ διαστάσεις, συμφώνως πρὸς τὰ ἀκόλουθα δεδομένα:

$$F_1 = 300\ \text{kp}, \quad F_2 = 600\ \text{kp}, \quad F_3 = 200\ \text{kp}$$
$$\alpha = 40\ \text{cm}, \quad \beta = 60\ \text{cm}, \quad \gamma = 20\ \text{cm}.$$

Ἡ διατομὴ πρέπει νὰ εἶναι τῆς μορφῆς ⊢ (πλαγίως τοποθετημένη δοκὸς **I**). Ἡ $\sigma_{b\epsilon\pi}$ ἰσοῦται πρὸς 1000 kp/cm^2.

Κατ' ἀρχὴν χαράσσεται τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ διάστημα α ἔχει τὴν τιμὴν 300 kp ἄνωθεν τοῦ ἄξονος. Εἰς τὸ διάστημα β ἔχει πάλιν τὴν τιμὴν 300 kp, ἀλλὰ εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ ἄξονος καὶ τέλος εἰς τὸ διάστημα γ ἰσοῦται πρὸς 100 kp κάτωθεν τοῦ ἄξονος. Τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων διέρχεται συνεπῶς διὰ τοῦ μηδενὸς εἰς τὴν θέσιν B.

Ὑπολογισμὸς τῶν ροπῶν εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ καὶ Δ:

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὸ πρόσημον τῶν ροπῶν, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως F_2 εἶναι θετικὴ (ἐφελκυσμὸς ἄνω ἰνῶν) καὶ τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_3 ἀρνητικὴ (θλῖψις ἄνω ἰνῶν).

$$M_A = 0.$$
$$M_B = -F_1 \cdot \alpha = -300 \times 40\ \text{kpcm} = -12\ \text{Mpcm}.$$
$$M_\Gamma = -F_1(\alpha + \beta) + F_2 \cdot \beta = -300 \times 100 + 600 \times 60\ \text{kpcm} =$$
$$= +6\ \text{Mpcm}.$$
$$M_\Delta = -F_1(\alpha + \beta + \gamma) + F_2(\beta + \gamma) - F_3 \cdot \gamma =$$
$$= [-300 \times 120 + 600 \times 80 - 200 \times 20]\ \text{kpcm} =$$
$$= [-36 + 48 - 4]\ \text{Mpcm} = +8\ \text{Mpcm}.$$

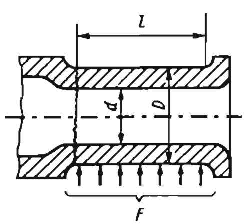
Εἰς τὸ σχῆμα 13·2 γ ἐλήφθησαν αἱ ἄνω ροπαὶ καὶ συνεδέθησαν μεταξύ των πρὸς σχηματισμὸν τοῦ διαγράμματος ροπῶν. Ἐπὶ τοῦ διαστήματος α αὐξάνεται γραμμικῶς ἡ ἀρνητικὴ ροπὴ τῆς δυνάμεως ἀπὸ 0. . .—12 Mpcm. Ἐπὶ τοῦ διαστήματος β ἐμφανίζεται συνεχῶς περισσότερον ἡ ἐπίδρασις τῆς θετικῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως F_2. Ἡ ἐπίδρασίς της ἐμφανίζεται πλήρως εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἐπὶ τοῦ διαστήματος γ ἄρχεται ἡ ἐπίδρασις τῆς ἀρνητικῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως F_3.

Ὡς ἤδη εἰς τὴν παράγραφον περὶ ροπῆς κάμψεως [13·2 (β)] ἐτονίσθη, θὰ ἤρκει ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ροπῶν εἰς τὴν θέσιν μηδενισμοῦ τῆς τεμνούσης δυνάμεως (M_B) καὶ εἰς τὴν θέσιν πακτώσεως (M_Δ). Διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτοῦ θὰ προέκυπτεν ἡ ἀπολύτως μεγίστη καὶ ἤδη γνωστὴ τιμὴ τῆς ροπῆς εἰς τὴν θέσιν B, $M_b = 12$ Mp. Διὰ τὴν μεγίστην αὐτὴν ροπὴν προσδιορίζεται ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως:

$$W = \frac{M_b}{\sigma_{b\varepsilon\pi}} = \frac{12\,000}{1000}\ \mathrm{cm}^3 = 12\ \mathrm{cm}^3.$$

Διὰ πλαγίως τοποθετημένην δοκὸν **I** ἡ κατάλληλος πρὸς σύγκρισιν τιμὴ δὲν εἶναι ἡ W_x, ἀλλὰ ἡ W_y. Ἐκ τοῦ πίνακος τῶν χαλυβδίνων δοκῶν προτύπου διατομῆς προσδιορίζεται ὡς κατάλληλος ἡ δοκὸς **I** 16 μὲ $W_y = 14{,}8\ \mathrm{cm}^3$.

6. Τὸ ἀκραξόνιον κοίλου ἄξονος (σχ. 13·3η) φορτίζεται δι' ὁμοιομόρφως κατανεμημένης δυνάμεως ἑδράσεως 8000 kp.



Σχ. 13·3 η.

Ἀκραξόνιον κοίλου ἄξονος.

Ἡ σχέσις d/D πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς 0,6, τὸ δὲ μῆκος ἑδράσεως $l = 1{,}5 \cdot D$. Ποῖαι αἱ διαστάσεις τοῦ ἀκραξονίου, ἐὰν ὁ ἄξων ἀποτελῆται ἐξ ὑλικοῦ ἐπιτρεπομένης τάσεως κάμψεως $\sigma_{b\varepsilon\pi} = 500\ \mathrm{kp/cm^2}$;

Ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπὴ (ὅταν τὸ ἀκραξόνιον θεωρῆται ὡς πρόβολος ὑπὸ σταθερὸν συνεχὲς φορτίον) εἶναι ἐνταῦθα:

$$M_b = F \cdot \frac{l}{2} = 8000 \times \frac{1{,}5 \cdot D}{2} = 6000\ D.$$

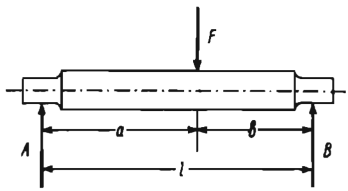
Ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως διατομῆς κυκλικοῦ δακτυλίου εἶναι $W \approx 0{,}1 \cdot (D^4 - d^4)/D$ (πίναξ II, Συμπλήρωμα). Διὰ $d = 0{,}6 \cdot D$ λαμβάνεται:

$$W \approx 0{,}1 \cdot \frac{D^4 - 0{,}6^4 \cdot D^4}{D} = \frac{1 - 0{,}1296}{10} \cdot D^3 = 0{,}087 \cdot D^3.$$

Τίθεται ἡ ἄνω τιμὴ εἰς τὸν τύπον κάμψεως $M_b = \sigma_b W$ καὶ ἐξ αὐτοῦ προκύπτουν: $6000\ D = 500 \times 0{,}087 \cdot D^3$, $D^2 = 138\ cm^2$

ὁπότε $D \approx 120$ mm, $d \approx 70$ mm, $l \approx 180$ mm.

7. Ἄξων (σχ. 13·3 θ) διαστάσεων $\alpha = 0{,}7$ m, $\beta = 0{,}5$ m φορτίζεται διὰ δυνάμεως $F = 1$ Mp. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη διάμετρός του



Σχ. 13·3 θ.
Ἄξων.

δι' ἐπιτρεπομένην τάσιν εἰς κάμψιν $\sigma_{b\epsilon\pi} = 600\ kp/cm^2$;

$$A = F \cdot \frac{\beta}{l} = 1000 \times \frac{50}{120}\ kp = 417\ kp.$$

$$M_b = A \cdot \alpha = 417 \times 70\ kpcm = 29\,190\ kpcm.$$

$$W = \frac{M_b}{\sigma_{b\epsilon\pi}} = \frac{29\,190}{600}\ cm^3 = 48{,}65\ cm^3.$$

$$W = 0{,}1 \cdot d^3, \quad d = \sqrt[3]{10 \cdot W} = \sqrt[3]{486{,}5}\ cm = 7{,}85\ cm,$$

$$d = 80\ mm.$$

8. Ζητοῦνται αἱ διαστάσεις (τραβέρσας) ἀγκίστρου γερανοῦ [σχ. 13.3 ι (α)] δι' ἄγκιστρον ἀνυψωτικῆς ἱκανότητος $Q = 10$ Mp ($\sigma_{b\epsilon\pi} = 600\ kp/cm^2$). Τὰ ἄγκιστρα εἶναι τυποποιημένα. Ἡ διάμετρος ἄξονος ἀγκίστρου 10 Mp εἶναι 72 mm. Ἡ ὀπὴ τοῦ φορέως τοῦ ἀγκίστρου προβλέπεται $d = 80$ mm.

Λοιπαὶ διαστάσεις (σχ. 13 · 3 ι): $\beta > 2d = 180$ mm, $l = 250$ mm.

α) Ἀκραξόνιον φορέως ἀγκίστρου (θεωρούμενον ὡς πρόβολος):

$$M_b = A \cdot \alpha = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l-\beta}{2} = \frac{Q}{4} \cdot (l-\beta) = 2500 \times (25-18) \text{ kpcm} =$$

$$= 17\,500 \text{ kpcm}.$$

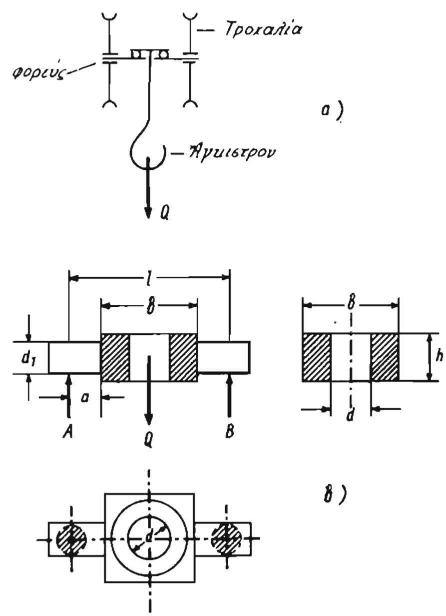
$$W = 0{,}1 \cdot d^3 = \frac{M_b}{\sigma_{b\varepsilon\pi}} = \frac{17\,500}{600} \text{ cm}^3 = 29 \text{ cm}^3,$$

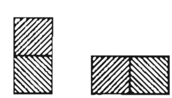
$$d_1 = \sqrt[3]{290} \text{ cm} = 6{,}6 \text{ cm}.$$

β) Τὸ ἐνδιάμεσον τμῆμα θεωρεῖται ἀμφιέρειστος δοκὸς μὲ φορτίον εἰς τὸ μέσον:

$$M_b = Q \cdot \frac{l}{4} = 10\,000 \times \frac{25}{4} \text{ kpm} = 62\,500 \text{ kpm}.$$

$$W = (b-d)\,\frac{h^2}{6} = \frac{M_b}{\sigma_{b\varepsilon\pi}}$$





Σχ. 13·3ι.
Φορεὺς ἀγκίστρου:
α) Ἀνάρτησις ἀγκίστρου. β) Φορεύς.

Σχ. 13·3ια.
Φέρουσα ἱκανότης
δύο δοκῶν.

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot M_b}{(b-d)\,\sigma_{b\varepsilon\pi}}} = \sqrt{\frac{6 \times 62\,500}{(18-8)\times 600}}\ \mathrm{cm} = \sqrt{62{,}5}\ \mathrm{cm} \approx 8\ \mathrm{cm}.$$

γ) Ἀποτελέσματα:

$$d_1 = 65\ \mathrm{mm}, \qquad h = 80\ \mathrm{mm}.$$

9. Κατὰ πόσον μειοῦται ἡ φέρουσα ἱκανότης, ἤτοι ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως δοκοῦ ὀρθογωνικῆς διατομῆς $b \cdot h$, ἐὰν δι' ὁριζοντίας τομῆς χωρίσωμεν αὐτὴν εἰς δύο ἀνεξαρτήτους φορεῖς τοῦ ἡμίσεος ὕψους;

Πλήρης δοκός:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Τεμαχισμένη δοκός:

$$W' = 2 \cdot \frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^2}{6} = \frac{b \cdot h^2}{12} = \frac{1}{2} W.$$

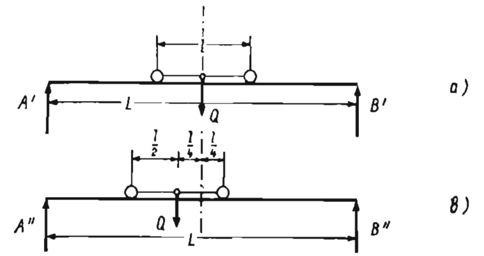
Ἑπομένως τὰ δύο τεμάχια τῆς δοκοῦ, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν κεῖνται τὸ ἕνα ὑπεράνω τοῦ ἄλλου, δὲν ἔχουν μεγαλυτέραν φέρουσαν ἱκανότητα ἀπὸ αὐτήν, ποὺ παρουσιάζεται εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν κεῖνται τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου (σχ. 13·

Σχ. 13·3 ιβ.
Παραμόρφωσις δύο δοκῶν.

3 ια). Τοῦτο ἐπίσης ἐξηγεῖται, ἐὰν παρατηρήσωμεν τὴν κάμψιν των (σχ. 13·3 ιβ). Ἕκαστον τεμάχιον τοῦ φορέως κάμπτεται ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄλλου, ὅπως ἐὰν ἔκειντο τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου.

10. Ἡ ἀπόστασις ἀξόνων τροχῶν φορείου γερανογεφύρας εἶναι $l = 2{,}4$ m, ἕκαστος δὲ φορτίζεται μὲ $F = 8$ Mp. Τὸ ἄνοιγμα τῆς γερανογεφύρας εἶναι $L = 8$ m (σχ. 13·3 ιγ).

Ποία ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπή, ὅταν τὸ φορεῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς γερανογεφύρας [σχ. 13·3 ιγ (α)], καὶ ποία ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπή, ὅταν τὸ φορεῖον ἀπέχῃ κατὰ $l/4 = 0{,}6$ m ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς γερανογεφύρας [σχ. 13·3 ιγ (β)];



Σχ. 13·3 ιγ.

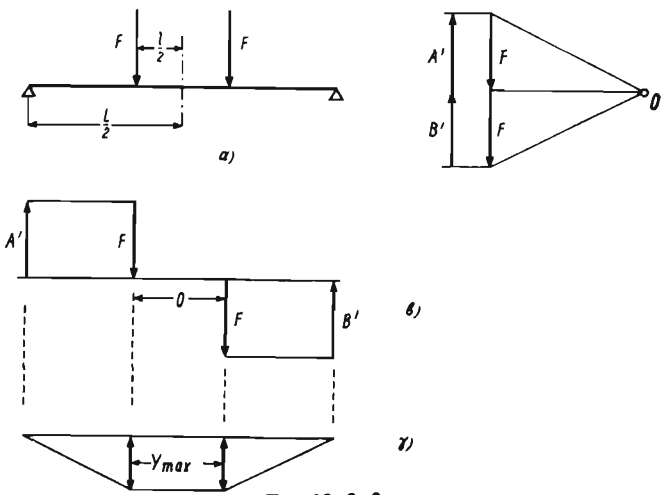
Γερανογέφυρα: α) Φορεῖον εἰς τὸ μέσον τοῦ ἀνοίγματος. β) Φορεῖον εἰς ἀπόστασιν $l/4$ ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ ἀνοίγματος.

Λύσις ἀναλυτικὴ καὶ γραφική.

α) Θέσις τοῦ φορείου εἰς τὸ μέσον τῆς γερανογεφύρας (σχ. 13·3 ιδ):

$A' = 2F - B' = 8000$ kp· ἐξ αὐτοῦ προκύπτει τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

$$M' = A' \cdot \frac{L}{2} - F \cdot \frac{l}{2} = A' \cdot \frac{L-l}{2} = 8000 \times 2{,}8 \, \text{kpm} = 22{,}4 \, \text{Mpm}.$$



Σχ. 13·3 ιδ.

Γερανογέφυρα μὲ τὸ φορεῖον εἰς τὸ μέσον:
α) Διάταξις. β) Τέμνουσαι δυνάμεις. γ) Ροπαὶ κάμψεως.

Διὰ τοῦ σχοινοπολυγώνου, ὑπὸ τὰς ληφθείσας κλίμακας μηκῶν $\lambda = 1$ m/cm, δυνάμεων $\kappa = 4$ Mp/cm καὶ διὰ πολικὴν ἀπόστασιν

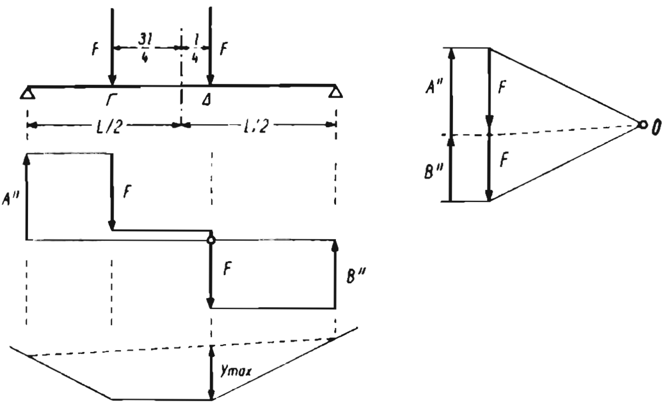
$H = 4$ cm, προκύπτει ἡ μεγίστη τεταγμένη $y_{max} = 1{,}4$ cm. Εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ μεγίστη ροπή:

$$M_{bmax} = \kappa \cdot \lambda \cdot H \cdot y_{max} = 4 \times 1 \times 4 \times 1{,}4 \text{ Mpm} = 22{,}4 \text{ Mpm}.$$

β) Θέσις τοῦ φορείου εἰς ἀπόστασιν 0,6 m ἀπὸ τὸ μέσον τῆς γερανογεφύρας (σχ. 13·3 ιε):

$$A'' \cdot L = F\left(\frac{L}{2} + \frac{3}{4}\,l\right) + F\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{4}\right) = F\left(L + \frac{l}{2}\right),$$

$$A'' = \frac{8\,(8 + 1{,}2)}{8} \text{ Mp} = 9{,}2 \text{ Mp}. \qquad B'' = (16 - 9{,}2) \text{ Mp} = 6{,}8 \text{ Mp}.$$



Σχ. 13·3 ιε.
Γερανογέφυρα μὲ τὸ φορεῖον της εἰς ἔκκεντρον θέσιν.

Ἐκ τῆς καμπύλης τεμνουσῶν δυνάμεων δεικνύεται ὅτι M_{max} πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Δ.

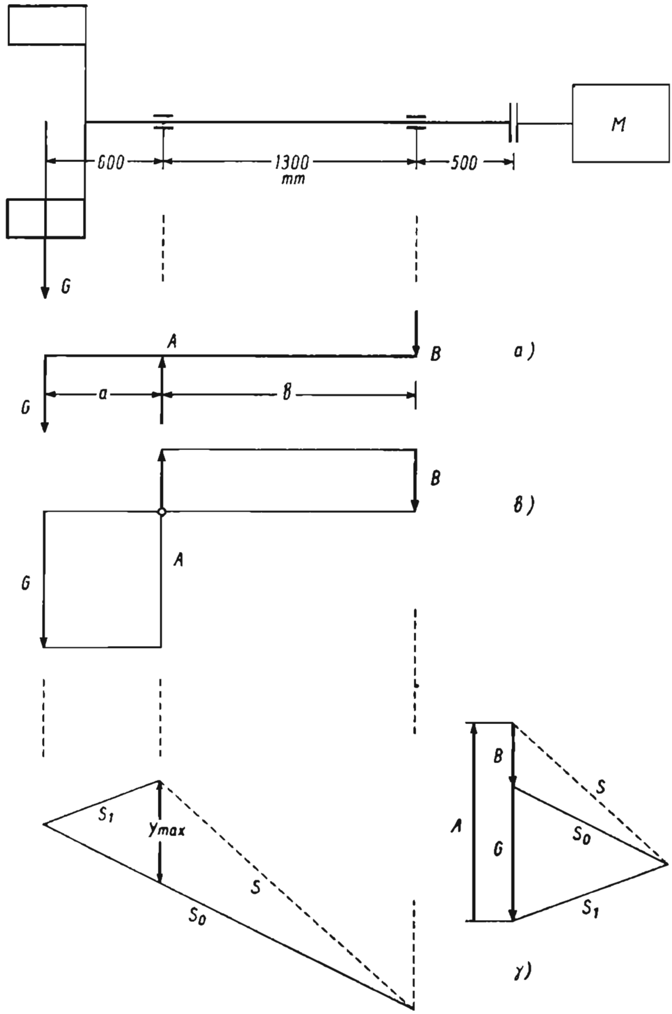
$$M_\Gamma = A''\left(\frac{L}{2} - \frac{3}{4}\,l\right) = 9{,}2\ (4 - 1{,}8) = 20{,}2 \text{ Mpm},$$

$$M_\Delta = B''\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{4}\right) = 6{,}8\ (4 - 0{,}6) = 23{,}1 \text{ Mpm}.$$

Συνεπῶς κατὰ τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ φορείου ἐμφανίζεται μεγαλυτέρα καμπτικὴ ροπὴ ἀπὸ ὅσον κατὰ τὴν συμμετρικὴν θέσιν. Τοῦτο φαίνεται καὶ κατὰ τὸν γραφικὸν προσδιορισμὸν τῶν καμπτικῶν ροπῶν. Ἐδῶ εἶναι $y_{max} = 1{,}45$ cm καὶ ἐξ αὐτοῦ:

$$M_{bmax} = \kappa \cdot \lambda \cdot H \cdot y_{max} = 4 \times 1 \times 4 \times 1{,}45 \text{ Mpm} = 23{,}1 \text{ Mpm}.$$

11. Ὁ ἄξων κινήσεως θραυστῆρος γαιανθράκων φέρει ἐν προβόλῳ τροχὸν βάρους 7 Mp (σχ. 13·3 ιστ). Ποῖαι αἱ ἀντιδράσεις στηρίξεως καὶ ποία ἡ μεγίστη καμπτικὴ ῥοπή;



Σχ. 13·3ιστ.
Ἄξων θραυστῆρος γαιανθράκων: α) Διάταξις. β) Τέμνουσαι δυνάμεις. γ) Ροπαὶ κάμψεως.

Προσδιορισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως.

α) Ἀναλυτικῶς :

Κέντρον ῥοπῶν τὸ B: $G\,(\alpha+\beta)-A\beta=0.$

$$A=G\,\frac{\alpha+\beta}{\beta}=7\times\frac{1900}{1300}\,\mathrm{Mp}=10{,}2\ \mathrm{Mp},$$

$$A+B=G,\quad B=G-A=[7-10{,}2]\ \mathrm{Mp}=-3{,}2\ \mathrm{Mp}.$$

Ἄρα ἡ ἀντίδρασις στηρίξεως B κατευθύνεται πρὸς τὰ κάτω.

β) Γραφικῶς :

Μετὰ τὴν χάραξιν τῆς G ἄγονται αἱ πολικαὶ ἀκτῖνες S_0 καὶ S_1 καὶ πρὸς αὐτὰς αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ σχοινοπολυγώνου. Ἡ δι' ἐστιγμένης κλείουσα τὸ σχοινοπολύγωνον, μεταφερομένη ὡς πολικὴ ἀκτίς, τέμνει τὴν κατεύθυνσιν τῆς δυνάμεως ἐπάνω ἀπὸ τὸ G. Ἔτσι αἱ S καὶ S_1 μετὰ τῆς A καὶ αἱ S καὶ S_0 μετὰ τῆς B πρέπει νὰ σχηματίζουν τρίγωνα. Συνεπῶς ἐδῶ προκύπτει ἐπίσης ὅτι $A>G$ καὶ ὅτι ἡ B διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω, ἐνῶ ἡ A πρὸς τὰ ἄνω.

Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων δεικνύει τὸ σχῆμα 13·3 ιστ (β).

Προσδιορισμὸς τῆς μεγίστης ῥοπῆς:

Ἐπειδὴ τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων εἰς τὸ σημεῖον A διέρχεται διὰ τοῦ μηδενός, πρέπει εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον νὰ ἐμφανίζεται ἡ μεγίστη ῥοπὴ κάμψεως.

α) Ἀναλυτικῶς :

$$M_A=G\cdot\alpha=7\times0{,}6\ \mathrm{Mpm}=4{,}2\ \mathrm{Mpm}.$$

β) Γραφικῶς :

$$\lambda=0{,}2\ \mathrm{m/cm},\qquad \kappa=2\ \mathrm{Mp/cm},\qquad H=4\ \mathrm{cm}$$

$$y_{max}=2{,}6\ \mathrm{cm},\ M_A=\kappa\cdot\lambda\cdot H\cdot y_{max}=2\times0{,}2\times4\times2{,}6\ \mathrm{Mpm}=4{,}2\ \mathrm{Mpm}.$$

12. Ἄξων φέρει δύο ὀδοντωτοὺς τροχούς, τὸν ἕνα ἐκτὸς καὶ τὸν ἄλλον μεταξὺ τῶν ἑδράνων του (σχ. 13·3 ιζ). Αἱ δυνάμεις εἰς τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς εἶναι $F_1=100$ kp καὶ $F_2=300$ kp. Ποία ἡ μεγίστη καμπτικὴ ῥοπή, ἡ ὁποία λαμβάνεται ὡς βάσις κατὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν διαστάσεων τοῦ ἄξονος καὶ ποία ἡ διάμετρος αὐτοῦ; ($\sigma_{b\varepsilon\pi}=600\ \mathrm{kp/cm^2}$).

Αἱ ροπαὶ ὡς πρὸς Β:

$$A \cdot 0{,}7 - F_1 \cdot 0{,}8 - F_2 \cdot 0{,}5 = 0,$$

$$A = \frac{100 \times 0{,}8 + 300 \times 0{,}5}{0{,}7}\ \mathrm{kp} = \frac{80 + 150}{0{,}7}\ \mathrm{kp} = 328\ \mathrm{kp}.$$

$$B = F_1 + F_2 - A = [400 - 328]\ \mathrm{kp} = +\,72\ \mathrm{kp},$$

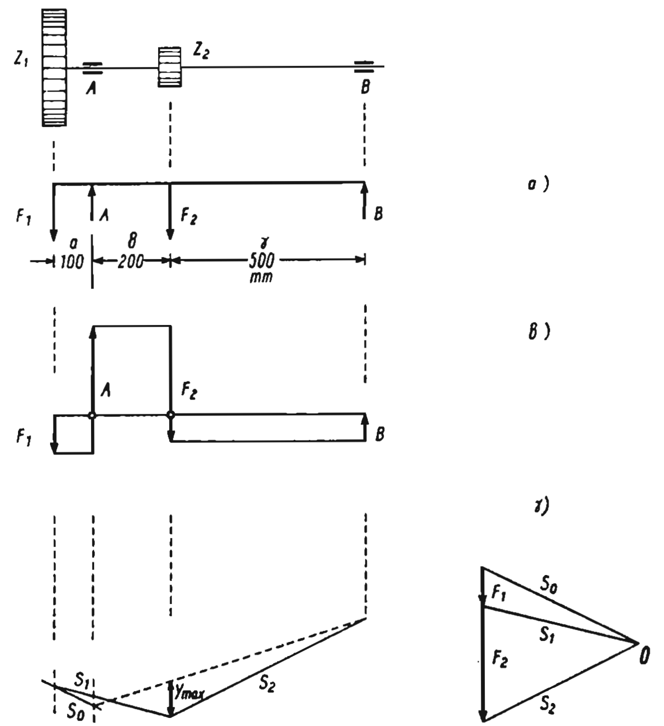
ἄρα ἡ Β διευθύνεται ἐπίσης πρὸς τὰ ἄνω.

Πρὸς ἔλεγχον λαμβάνονται αἱ ροπαὶ ὡς πρὸς Α:

$$B \cdot 0{,}7 + F_1 \cdot 0{,}1 - F_2 \cdot 0{,}2 = 0,$$

$$B = \frac{300 \times 0{,}2 - 100 \times 0{,}1}{0{,}7}\ \mathrm{kp} = \frac{50}{0{,}7}\ \mathrm{kp} = +\,72\ \mathrm{kp}.$$

Τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων [σχ. 13·3 ζ (β)] ἔχει μηδενικὰς θέσεις εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Z_2.



Σχ. 13·3 ιζ.

Ἄξων μὲ ὀδοντωτοὺς τροχούς: α) Διάταξις. β) Τέμνουσαι δυνάμεις. γ) Καμπτικαὶ ροπαί.

'Εκ τοῦ διαγράμματος τῶν ροπῶν [σχ. 13·3 ζ (γ)] ἐμφαίνεται ὅτι τὸ μέγιστον εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Z_2.

(Γραφικὸς προσδιορισμὸς τῶν ἀντιδράσεων στηρίξεως δὲν εἶναι ἀπαραίτητος).

Γραφικῶς :

$$\lambda = 0{,}1 \text{ m/cm}, \quad \kappa = 0{,}1 \text{ Mp/cm}, \quad H = 4 \text{ cm}, \quad y_{max} = 0{,}9 \text{ cm}.$$

$$M_{bmax} = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 4 \times 0{,}9 \text{ Mpm} = 0{,}036 \text{ Mpm} = 36 \text{ kpm}.$$

'Αναλυτικῶς:

$$M_{bmax} = B \cdot \gamma = 72 \times 0{,}5 \text{ kpm} = 36 \text{ kpm}.$$

Διάμετρος ἄξονος:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{bmax}}{0{,}1 \cdot \sigma_{be\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{3600}{60}} \text{ cm} = \sqrt[3]{60} \text{ cm},$$

$$d = 3{,}91 \text{ cm} \approx 40 \text{ mm}.$$

13. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄξων τροχοῦ γερανοῦ, ὑπὸ τὴν παραδοχὴν ὅτι τὸ φορτίον τοῦ τροχοῦ 10 Mp κατανέμεται ὁμοιομόρφως καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῶν 200 mm τῆς πλήμνης ($\sigma_{be\pi} = 600 \text{ kp/cm}^2$).

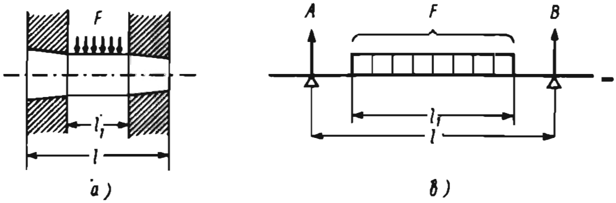
$$M_{bmax} = \frac{F \cdot l}{8} = \frac{10\,000 \times 20}{8} \text{ kpcm} = 25\,000 \text{ kpcm}.$$

$$W = \frac{M_b}{\sigma_{be\pi}}, \quad 0{,}1 \cdot d^3 = \frac{25\,000}{600} \text{ cm}^3.$$

$$d = \sqrt[3]{416} \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm} = 75 \text{ mm}.$$

14. 'Ο πεῖρος ζυγώματος [σχ. 13·3 ιη (α)], διαστάσεων $l_1 = 160$ mm, $l = 240$ mm, φορτίζεται διὰ δυνάμεως $F = 20\,000$ kp.

Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ πείρου, ἐὰν ἡ ἐπιτρεπομένη τάσις κάμψεως εἶναι $\sigma_{be\pi} = 600 \text{ kp/cm}^2$;



Σχ. 13·3 ιη.

Πεῖρος ζυγώματος : α) Πεῖρος. β) Διάταξις φορτίσεως.

Ἡ δύναμις F κατανέμεται ὁμοιομόρφως ἐπὶ τοῦ μήκους l, τοῦ πείρου [ὁμοιόμορφος τμηματικὴ φόρτισις κατὰ τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος 13·3 ιη (β)]. Ἡ μεγίστη καμπτικὴ ροπὴ ἐμφανίζεται εἰς τὸ μέσον τοῦ πείρου, λόγῳ τῆς συμμετρίας τῆς φορτίσεως καὶ ὑπολογίζεται ὡς διαφορὰ τῆς ροπῆς τῆς ἀντιδράσεως στηρίξεως ἀπὸ τὴν ροπὴν τοῦ ἡμίσεος τοῦ κατανεμημένου φορτίου (τὸ φορτίον θεωρεῖται συγκεντρωμένον εἰς ἀπόστασιν $l_1/4$ ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ πείρου).

Συμφώνως πρὸς τὴν διάταξιν φορτίσεως τοῦ σχήματος 13·3 ιη (β) εἶναι:

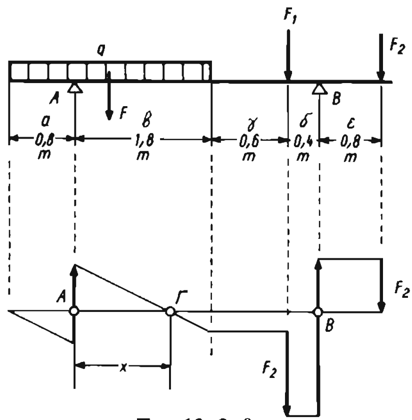
$$M_{bmax} = A\,\frac{l}{2} - \frac{F}{2}\cdot\frac{l_1}{4} = \frac{F}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{l_1}{4}\right),$$

$$M_{bmax} = 10\,000 \times \left(\frac{24}{2} - \frac{16}{4}\right)\ \text{kpcm} = 80\,000\ \text{kpcm}.$$

$$0{,}1\cdot d^3 = \frac{M}{\sigma_{b\epsilon\pi}} = \frac{80\,000}{600}\ \text{cm}^3, \quad d = \sqrt[3]{1330}\ \text{cm} = 11\ \text{cm}.$$

15. Ἀμφιπροέχουσα δοκὸς (σχ. 13·3 ιθ) φορτίζεται διὰ τμήματος συνεχοῦς φορτίου καὶ διὰ συγκεντρωμένων φορτίων:

$$q = 5\ \text{kp/cm}, \qquad F_1 = 1100\ \text{kp}, \qquad F_2 = 700\ \text{kp}.$$



Σχ. 13·3 ιθ.
Ἀμφιπροέχουσα δοκός.

Ποία ἡ προβλεπομένη πρότυπος διατομὴ **I**, ἐὰν $\sigma_{b\epsilon\pi} = 1000$ kp/cm²;

Ἀντιδράσεις στηρίξεως:

$$A + B = F + F_1 + F_2.$$

Μὲ $F = q \cdot l = 5 \times 260 = 1300$ kp, $F_1 = 1100$ kp, $F_2 = 700$ kp
διὰ
$$\Sigma M_B = 0,$$
λαμβάνεται:
$$A \cdot 2{,}8 - F \cdot 2{,}3 - F_1 \cdot 0{,}4 + F_2 \cdot 0{,}8 = 0,$$
$$A = \frac{1}{2{,}8}\,[1300 \times 2{,}3 + 1100 \times 0{,}4 - 700 \times 0{,}8]\ \text{kp} =$$
$$= \frac{1}{2{,}8}\,[2990 + 440 - 560]\ \text{kp} = \frac{2870}{2{,}8}\ \text{kp} = 1025\ \text{kp}.$$
$$B = F + F_1 + F_2 - A = (3100 - 1025)\ \text{kp} = 2075\ \text{kp}.$$

Διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων:

Ἡ τέμνουσα δύναμις (ἀγομένη πρὸς τὰ κάτω καὶ γραμμικῶς μεταβαλλομένη ἀπὸ τιμῆς μηδενικῆς εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον) κάτωθεν τῆς στηρίξεως Α, ἰσοῦται πρὸς τὸ συνεχὲς φορτίον, ποὺ εὑρίσκεται μεταξὺ ἐλευθέρου ἄκρου καὶ σημείου Α, ἤτοι πρὸς 5×80 kp $= 400$ kp. Ἡ Α ἄγεται πρὸς τὰ ἄνω καὶ συνεπῶς δίδει $1025 - 400 = 625$ kp ἄνω τοῦ ἄξονος. Ἐν συνεχεία ἀκολουθεῖ τὸ συνεχὲς φορτίον $5 \times 180 = 900$ kp — ἀγόμενον πάλιν μὲ κατεύθυνσιν πρὸς τὰ κάτω — καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ συνεχοῦς φορτίου ἡ τέμνουσα δύναμις ἔχει τὴν τιμὴν 275 kp κάτωθεν τοῦ ἄξονος. Ἐν συνεχεία ἀκολουθοῦν μόνον συγκεντρωμένα φορτία, μεταξὺ τῶν ὁποίων τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν ἀποτελεῖται ἐξ ὁριζοντίων τμημάτων. Ἡ F_1 ἄγεται πρὸς τὰ κάτω, ἡ Β πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἡ F_2 πάλιν πρὸς τὰ κάτω, ἄγουσα τελικῶς εἰς μηδενικὴν τιμὴν τῆς τεμνούσης.

Τὸ διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων ἔχει τρεῖς θέσεις μηδενισμοῦ, δύο εἰς τὰ σημεῖα στηρίξεως καὶ τὴν τρίτην εἰς τὸ σημεῖον Γ. Εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων αὐτῶν δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται ἡ μεγίστη καμπτικὴ ῥοπή. Αἱ τιμαὶ εἶναι:
$$M_A = q \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha}{2} = 5 \times 80 \times 0{,}4\ \text{kpm} = 160\ \text{kpm}.$$
$$M_B = F_2 \cdot \varepsilon = 700 \times 0{,}8\ \text{kpm} = 560\ \text{kpm}.$$

Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς M_Γ εἶναι ἀπαραίτητος ἡ γνῶσις τῆς θέσεως τοῦ σημείου Γ. Τοῦτο εὑρίσκεται ἐκεῖ, ὅπου ἐξουδετεροῦται διὰ τοῦ συνεχοῦς φορτίου ἡ ἄνω τοῦ ἄξονος τέμνουσα δύναμις, ἡ ὁποία παρουσιάζεται εἰς τὸ σημεῖον Α:
$$q \cdot x = 625\ \text{kp}, \quad x = \frac{625}{5}\ \text{cm} = 125\ \text{cm} = 1{,}25\ \text{m}.$$

Φανταζόμεθα τὸν φορέα πακτωμένον εἰς τὴν θέσιν Γ. Ἐὰν σχηματισθοῦν αἱ ῥοπαὶ τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος τοῦ φορέως, τὸ συνεχὲς φορτίον ἐμφανίζεται νὰ ἐπενεργῇ μόνον κατὰ τὸ μῆκος τῶν $(80 + x)$ cm $= 205$ cm ἢ ἀντιστοίχως κατὰ τὸ φορτίον $F' = 1025$ kp.

$$M_\Gamma = F' \cdot \frac{80 + x}{2} - Ax = [1025 \times 1{,}025 - 1025 \times 1{,}25] \text{ kpm},$$

$$M_\Gamma = (1051 - 1281) \text{ kpm} = -230 \text{ kpm}.$$

Διὰ τὴν μεγίστην ῥοπὴν $M_B = 560$ kpm $= 56\,000$ kpcm προκύπτει:

$$W = \frac{M_b}{\sigma_{b\varepsilon\pi}} = \frac{56\,000}{1000} \text{ cm}^3 = 56 \text{ cm}^3.$$

Ἡ ῥοπὴ ἀντιστάσεως τῆς διατομῆς **I** 12 μόλις ὑπερβαίνει τὴν ὡς ἄνω τιμήν.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

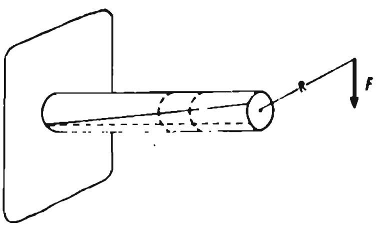
ΣΤΡΕΨΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 14

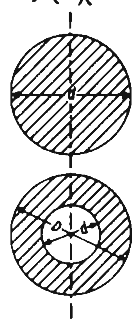
ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΙΣ

14·1 Ροπὴ στρέψεως.

Ἡ ροπή, ἡ ὁποία διὰ τῆς ἐπενεργείας της κατὰ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα ράβδου, καταπονεῖ τὴν ράβδον εἰς στρέψιν, ὀνομάζεται *στρεπτικὴ ροπὴ* καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ M_t . Προφανῶς διὰ τὴν διατήρησιν τῆς ἰσορροπίας πρέπει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ράβδου νὰ ἐπενεργῇ ἴση στρεπτικὴ ροπὴ ἀλλὰ ἀντιθέτου φορᾶς. Ἐὰν εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον πακτωμένου κυλινδρικοῦ ἄξονος (σχ. 14·1) ἐπενερ-



Σχ. 14·1.
Στρεπτικὴ καταπόνησις ράβδου.



Σχ. 14·2.
Διατομὴ πλήρους καὶ κοίλου ἄξονος.

γῇ δύναμις F εἰς ἀπόστασιν R ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ἢ ζεῦγος δυνάμεων καθέτως πρὸς αὐτόν, τότε ὁ ἄξων πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἔναντι στρέψεως. Ἡ καταπονοῦσα ροπὴ στρέψεως εἶναι ἐδῶ:

$$M_t = F \cdot R.$$

14·2 Πολικὴ ροπὴ ἀντιστάσεως.

Κατὰ τὴν στρεπτικὴν καταπόνησιν κυλινδρικῆς ράβδου, κάθε διατομή της τείνει νὰ περιστραφῇ ὡς πρὸς τὴν γειτονικήν της.

Αἱ ἀντιστάσεις ἔναντι στρέψεως ἐμφανίζονται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν τῶν διατμητικῶν τάσεων τ. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ροπῶν τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων αὐτῶν, ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς διατομῆς, πρέπει νὰ εἶναι ἴσον καὶ ἀντίρροπον πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν ροπὴν (σχ. 14·1). Ὅπως ὑπὸ καμπτικὴν καταπόνησιν ἔτσι καὶ ὑπὸ στρεπτικήν, ἡ τάσις ἀκραίας ἰνὸς ἐξαρτᾶται ἐκ μιᾶς συναρτήσεως τῆς διατομῆς, ἡ ὁποία ἐνταῦθα ὀνομάζεται *πολικὴ ροπὴ ἀντιστάσεως* W_p.

Ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν καμπτικὴν καταπόνησιν, ἐμφανίζεται ἐδῶ εἰς τὴν θέσιν τῆς καμπτικῆς ροπῆς M_b ἡ στρεπτικὴ ροπὴ M_t καὶ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀξονικῆς ροπῆς ἀντιστάσεως W ἡ πολικὴ W_p, μὲ ἀποτέλεσμα ἡ στρεπτικὴ τάσις, ἡ ὁποία ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της εἶναι διατμητικὴ τάσις (κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν καμπτικὴν τάσιν $\sigma_b = M/W$), νὰ δίδεται ἐκ τοῦ τύπου *στρέψεως:*

$$\boxed{\tau_t = \frac{M_t}{W_p} \quad \text{ἤ} \quad M_t = W_p \cdot \tau_t}$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν τεθῇ τὸ τ_t εἰς kq/cm^2 καὶ ἀντιστοίχως τὸ M_t εἰς kpcm, τότε πρέπει καὶ ἡ πολικὴ ροπὴ ἀντιστάσεως νὰ ἔχῃ τὴν διάστασιν cm^3.

Εἰς τὴν πρᾶξιν οἱ ὑπολογισμοὶ ἔναντι στρέψεως ἀναφέρονται σχεδὸν πάντοτε εἰς ἄξονας (κυκλικὴ διατομὴ) ἢ κοίλους ἄξονας (διατομὴ δακτυλίου). Εἰς τὰς δύο αὐτὰς διατομὰς (σχ. 14·2) αἱ ἐκφράσεις τῶν πολικῶν ροπῶν εἶναι:

πλήρης ἄξων — κοῖλος ἄξων

$$W_p \approx 0{,}2 \cdot d^3, \qquad W_p \approx 0{,}2 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Εἰς τὴν κυκλικὴν διατομὴν καὶ τὴν διατομὴν κυκλικοῦ δακτυλίου (καὶ μόνον εἰς αὐτὰς τὰς δύο) ἰσχύει $W_p = 2W$. Πολικαὶ ροπαὶ ἀντιστάσεως σχετικαὶ πρὸς ἄλλας μορφὰς διατομῶν περιέχονται εἰς τὸν πίνακα II τοῦ Συμπληρώματος. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ τύπος, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν ὀρθογωνικὴν διατομήν, δὲν παριστᾶ πολικὴν ροπὴν ἀντιστάσεως ἀλλὰ ἕνα μέγεθος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν πολικὴν ροπὴν ἀντιστάσεως τοῦ κύκλου (βλ. ἐπίσης Τόμον Β).

Παραδείγματα.

1 Ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς διαμέτρου τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ στροβίλου τύπου Kaplan, ἰσχύος 40 000 PS εἰς τὰς 68 στροφὰς min, διὰ $\tau_{t\varepsilon\pi} = 300$ kp/cm². Πῶς μεταβάλλεται ἡ τιμὴ τῆς τ_t, ἐὰν χρησιμοποιηθῇ κοῖλος ἄξων πρὸς σύνδεσιν μετὰ τοῦ συστήματος (τῶν ράβδων) ἀλλαγῆς κατευθύνσεως τῶν πτερυγίων;

$$M_t = 716{,}2 \cdot \frac{N}{n} = 716{,}2 \times \frac{40\,000}{68} = 422\,000 \text{ kpm}$$

$$W_p = \frac{M_t}{\tau_{t\varepsilon\pi}} = \frac{422 \times 10^5}{300} \text{ cm}^3 = 1{,}41 \times 10^5 \text{ cm}^3.$$

α) Πλήρης ἄξων:

$$W_p = 0{,}2 \cdot d^3, \quad d = \sqrt[3]{5W_p} = \sqrt[3]{0{,}705 \times 10^6} \text{ cm} = 89 \text{ cm} \approx 900 \text{ mm}$$

(ἀντιστοίχως $\tau_t = 293$ kp/cm²).

β) Κοῖλος ἄξων:

$$W_p = 0{,}2 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}, \qquad D = 900 \text{ mm}, \qquad d = 350 \text{ mm}.$$

$$W_p = 0{,}2 \times \frac{90^4 - 35^4}{90} \text{ cm}^3 = 0{,}2 \times \frac{6561 - 151}{90} 10^4 \text{ cm}^3 =$$
$$= 1{,}425 \times 10^5 \text{ cm}^3.$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p} = \frac{422 \times 10^5}{1{,}425 \times 10^5} \text{ kp/cm}^2 = 296 \text{ kp/cm}^2.$$

Λόγω τῆς ὀπῆς ἀνέρχεται ἡ τάσις στρέψεως, ἀλλὰ εἰς πολὺ μικρὸν βαθμόν.

2. Κατὰ πόσον μικροτέρα εἶναι ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως καὶ τὸ βάρος ἑνὸς κοίλου ἄξονος ἐν συγκρίσει πρὸς τὰ τοῦ πλήρους ἄξονος, διὰ $d/D = 0{,}5$ καὶ $d/D = 0{,}75$;

$$\left.\begin{aligned} W_p &= 0{,}2 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \\ W'_p &= 0{,}2 \cdot D^3 \end{aligned}\right\} \quad \frac{W_p}{W'_p} = \frac{D^4 - d^4}{D^4} = 1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4$$

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot L \\ G' &= \frac{\pi}{4} D^2 \cdot L \end{aligned}\right\} \quad \frac{G}{G'} = \frac{D^2 - d^2}{D^2} = 1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Ἡ ἀπώλεια εἰς ροπὴν ἀντιστάσεως $(d/D)^4$ εἶναι λοιπὸν σημαντικῶς μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἐλάττωσιν βάρους $(d/D)^2$. Εἰς τὰς περιπτώσεις τοῦ παραδείγματος ἰσχύει:

Ἐλάττωσις	$d/D = 0{,}5$	$d/D = 0{,}75$
τοῦ W_p	$0{,}5^4 = 0{,}0625$ ($\approx 6\%$)	$0{,}75^4 = 0{,}316$ ($\approx 32\%$)
τοῦ G	$0{,}5^2 = 0{,}25$ (25%)	$0{,}75^2 = 0{,}5625$ ($\approx 56\%$)

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

(Κινηματική τοῦ ὑλικοῦ σημείου)

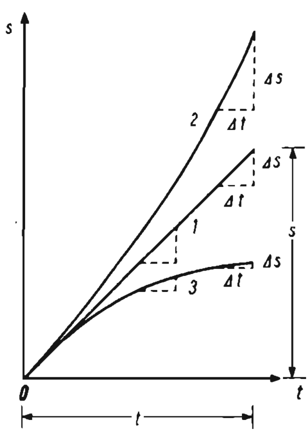
Εἰσαγωγή.

Εἰς τὴν Κινηματικὴν ἐξετάζονται ἀποκλειστικῶς αἱ κινήσεις (ἀλλαγαὶ θέσεως) σώματος ἀδιαφόρως τῶν αἰτίων, ποὺ τὰς προκαλλοῦν.

Ἐδῶ θὰ ἐξετάσωμεν τὴν κινηματικὴν τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Θεωρεῖται δηλαδὴ ὅτι ἡ μᾶζα σώματος εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον βάρους του καὶ ἐξετάζονται μόνον αἱ κινήσεις τοῦ σημείου αὐτοῦ.

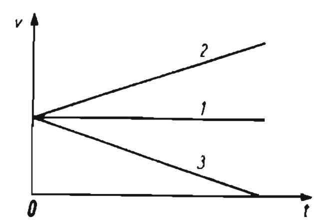
Ὅταν τὸ ὑλικὸν σημεῖον διανύῃ εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα ἴσας ἀποστάσεις, ἡ κίνησις θεωρεῖται *ὁμοιόμορφος*. Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις, ποὺ διανύονται εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα εἶναι ἄνισοι, ἡ κίνησις ὀνομάζεται *ἀνομοιόμορφος*.

Διὰ τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἔχομεν καλυτέραν ἐποπτείαν



Σχ. 15·α.

Καμπύλη διαστήματος-χρόνου:
1 ὁμοιόμορφος, 2 ἐπιταχυνομένη,
3 ἐπιβραδυνομένη κίνησις.



Σχ. 15·β.

Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου:
1 ὁμοιόμορφος, 2 ἐπιταχυνομένη,
3 ἐπιβραδυνομένη κίνησις.

τῶν διαφόρων κινήσεων. Μὲ τετμημένην τὸν χρόνον t καὶ τεταγμένην τὸ διάστημα s χαράσσεται ἡ καμπύλη «διαστήματος-χρόνου» (καμπύλη $s-t$) τῆς κινήσεως (σχ. 15·α). Ἡ εὐθεῖα 1 ἰσχύουσα προκειμένου περὶ ἴσων ἀποστάσεων εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, παριστᾶ τὴν *ὁμοιόμορφον* (ἢ *ὁμαλὴν*) κίνησιν, ἡ καμπύλη 2 τὴν *ἐπιταχυνομένην* καὶ ἡ καμπύλη 3 τὴν *ἐπιβραδυνομένην* κίνησιν. Τὸ σχῆμα 15·β παριστᾶ τὰς ἀντιστοίχους καμπύλας «ταχύτητος-χρόνου» (καμπύλη $\upsilon-t$).

Ἐκ τῶν σχημάτων αὐτῶν συνάγεται εὐκόλως, ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης διαστήματος-χρόνου εἶναι μέτρον τῆς ταχύτητος. Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει καὶ ὁ ὁρισμός της:

$$\text{Ταχύτης} = \frac{\text{Αὔξησις τῆς ἀποστάσεως κατὰ χρονικὸν διάστημα}}{\text{Χρονικὸν διάστημα}}$$

ἢ μαθηματικῶς:

$$\boxed{\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΚΙΝΗΣΙΣ

15·1 Εὐθύγραμμος κίνησις.

Ὅπως φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ σχήματος 15·α, διὰ τὴν καμπύλην $\upsilon - t$ 1 (ὁμοιόμορφος κίνησις) ὁ λόγος $\Delta s/\Delta t$ δὲν εἶναι μόνον καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερός, ἀλλὰ καὶ ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον διηνύθη μέχρι τυχούσης χρονικῆς στιγμῆς, διὰ τοῦ μέχρις ἐκείνης τῆς στιγμῆς διαρρεύσαντος χρόνου ($\Delta s/\Delta t = s/t$). Ἄρα, κατὰ τὴν ὁμοιόμορφον κίνησιν ἰσχύει:

$$\boxed{\upsilon = \frac{s}{t}}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ἐξίσωσις μεγεθῶν, δι' αὐτὸ καὶ δὲν συνδέεται μὲ ὡρισμένας μονάδας.

Ἔτσι μὲ χρῆσιν τῶν βασικῶν μονάδων μέτρου καὶ δευτερολέπτου, λαμβάνεται:

$$\frac{s}{t}\,\frac{m}{s} = \upsilon \quad m/s.$$

Αἱ μικραὶ ταχύτητες (π.χ. ταχύτης κοπῆς ἐργαλειομηχανῶν, ταχύτης ἀνυψώσεως ἢ μετακινήσεως ἀνυψωτικῶν μηχανῶν) συνήθως ἐκφράζονται εἰς:

$$\frac{s}{t}\,\frac{m}{min} = \upsilon \quad m/min.$$

Αἱ μεγάλαι ταχύτητες (π.χ. αὐτοκινήτων καὶ ἀεροπλάνων) ἐκφράζονται συνήθως εἰς:

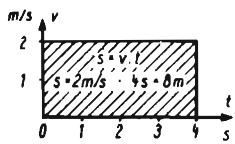
$$\frac{s}{t}\,\frac{km}{h} = \upsilon \quad km/h,$$

αἱ δὲ ἰδιαιτέρως ὑψηλαὶ (π.χ. ταχύτης τεχνητοῦ δορυφόρου) εἰς km/s. Εἰς τὴν ναυσιπλοΐαν χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς ἀποστάσεως τὸ ναυτικὸν μίλιον (1 ν.μ. = 1852 m) καὶ ὡς μονὰς ταχύτητος ὁ κόμβος (ἕνα ναυτικὸν μίλιον ἀνὰ ὥραν), ἤτοι:

$$\frac{s}{t}\,\frac{\nu.\mu.}{h} = \upsilon \quad \nu.\mu./h \; (= kn).$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\upsilon = s/t$ καὶ μὲ δύο δεδομένα μεγέθη δύναται νὰ προσδιορισθῇ τὸ τρίτον. Ἔτσι λαμβάνεται ὁ χρόνος $t = \frac{s}{\upsilon}$ καὶ τὸ διάστημα $s = \upsilon \cdot t$.

Ἡ τελευταία σχέσις ὑποδηλοῖ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τὴν καμπύλην ταχύτητος χρόνου παριστᾶ διάστημα (σχ. 15·1 α).



Σχ. 15·1 α.

Ἡ δι' ἐπιφανείας παράστασις διαστήματος.

Παραδείγματα.

1. Νὰ μετατραπῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου (330 m/s) εἰς km/h. Ἐπειδὴ 1 m/s = 3600 m/h = 3,6 km/h, ἕπεται:

$$\upsilon \; km/h = 3{,}6 \; \upsilon \; m/s$$

καὶ $\quad \upsilon = 3{,}6 \times 330 \; km/h = 1188 \; km/h \approx 1200 \; km/h.$

2. Ὑπερωκεάνειον ταξιδεύει μὲ ταχύτητα 22,7 κόμβων. Ποία ἡ ταχύτης του εἰς m/s καὶ km/h; Εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ πλοῖον 3680 ναυτικὰ μίλια;

$$22{,}7\ \frac{\text{ν.μ.}}{\text{h}} = 22{,}7 \times \frac{1852}{3600}\ \text{m/s} = 11{,}7\ \text{m/s} = 42\ \text{km/h}$$

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{3680}{22{,}7} = 162\ \text{h} = 6\ \text{ἡμέραι καὶ}\ 18\ \text{ὧραι}.$$

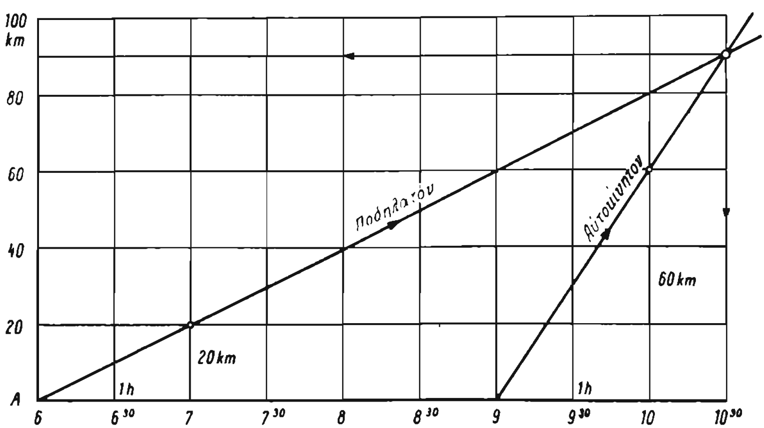
3. Ἐκ τόπου Α ἐκκινεῖ εἰς τὰς 6^{00} ποδηλάτης μὲ ταχύτητα $\upsilon_1 = 20$ km/h. Εἰς τὰς 9^{00} ἐκκινεῖ αὐτοκίνητον μὲ ταχύτητα $\upsilon_2 = 60$ km/h. Πότε καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ φθάσῃ τὸ αὐτοκίνητον τὸν ποδηλάτην;

Λύσις ἀναλυτικὴ καὶ γραφική.

Αἱ ἀποστάσεις, ποὺ θὰ διανύσουν τὰ δύο κινητὰ θὰ εἶναι ἴσαι. Ὁ χρόνος διαδρομῆς τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι κατὰ 3 ὥρας συντομώτερος τοῦ χρόνου διαδρομῆς τοῦ ποδηλάτου.

$$s_1 = s_2, \quad \upsilon_1 \cdot t_1 = \upsilon_2 \cdot t_2, \quad t_2 = t_1 - 3$$

$$\upsilon_1 \cdot t_1 = \upsilon_2 (t_1 - 3),\ 20\,t_1 = 60\,(t_1 - 3),\ 4t_1 = 18\ \text{h},\ t_1 = 4{,}5\ \text{h}.$$



Σχ. 15·1 β.

Καμπύλαι ἀποστάσεως-χρόνου τοῦ παραδείγματος 3.

Συνεπῶς τὸ αὐτοκίνητον προσπερνᾷ τὸν ποδηλάτην εἰς τὰς 10^{30}.

$$s = \upsilon_1 \cdot t_1 = 20 \times 4{,}5\ \text{km} = 90\ \text{km ἀπὸ τοῦ τόπου Α}.$$

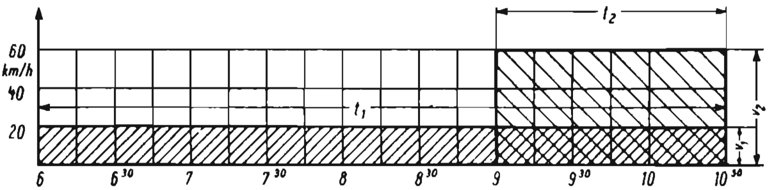
Γραφική λύσις τῇ βοηθεία τῆς καμπύλης ἀποστάσεως χρόνου (σχ. 15·1 β).

Καμπύλη ἀποστάσεως-χρόνου τοῦ ποδηλάτου 20 km /h ἀπὸ 6^{00},

Καμπύλη ἀποστάσεως-χρόνου τοῦ αὐτοκινήτου 60 km /h ἀπὸ 9^{00}.

Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι τὸ σημεῖον συναντήσεως. Ἐπὶ τῶν τετμημένων ἀναγινώσκεται ὁ χρόνος 10^{30} καὶ ἐπὶ τῶν τεταγμένων ἡ ἀπόστασις 90 km ἀπὸ τοῦ Α.

Ἐὰν τεθοῦν εἰς διάγραμμα αἱ ταχύτητες ὡς πρὸς τοὺς ἀντι-



Σχ. 15·1 γ.

Καμπύλαι ταχύτητος-χρόνου καὶ παράστασις ἀποστάσεως δι' ἐπιφανείας εἰς τὸ παράδειγμα 3.

στοίχους χρόνους (καμπύλαι $\upsilon - t$, σχ. 15·1γ) τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχηματιζομένων ὀρθογωνίων παρέχουν τὰς διανυθείσας ἀποστάσεις.

4. Ἀπὸ σημεῖον Α ἐκκινεῖ φορτηγὸν αὐτοκίνητον μὲ ταχύτητα 50 km /h καὶ προορισμὸν τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 182 km ἀπὸ τοῦ σημείου Α. Συγχρόνως ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἐκκινεῖ ἐπιβατηγὸν αὐτοκίνητον μὲ ταχύτητα 80 km /h καὶ κατεύθυνσιν τὸ σημεῖον Α. Πότε θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο αὐτοκίνητα;

Οἱ χρόνοι πορείας τῶν δύο αὐτοκινήτων μέχρι τοῦ σημείου συναντήσεώς των εἶναι ἴσοι καὶ ἔτσι:

$$t_1 = t_2 \qquad \frac{s_1}{\upsilon_1} = \frac{s_2}{\upsilon_2}, \qquad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ἡ συνολικὴ διαδρομὴ εἶναι $s_1 + s_2 = 182$ km, ἔπεται:

$$\frac{s_1}{182 - s_1} = \frac{50}{80}, \qquad 80 \cdot s_1 = 9100 - 50 \cdot s_1,$$

$$s_1 = \frac{9100}{130}\ \text{km} = 70\ \text{km}, \qquad s_2 = 112\ \text{km}.$$

$$t_1 = \frac{s_1}{\upsilon_1} = \frac{70}{50}\ \text{h} = 1{,}4\ \text{h}, \qquad t_2 = \frac{s_2}{\upsilon_2} = \frac{112}{80}\ \text{h} = 1{,}4\ \text{h}.$$

Ἄρα τὰ αὐτοκίνητα συναντῶνται 1 ὥραν καὶ 24′ μετὰ τὴν ἐκκίνησιν.

15·2 Κυκλικὴ κίνησις.

α) Περιφερικὴ καὶ γωνιακὴ ταχύτης.

Ἡ ταχύτης σημείου P, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ περιφερείας δίσκου διαμέτρου d καὶ περιστρέφεται ὑπὸ σταθερὸν ἀριθμὸν στροφῶν, εἶναι ἐπίσης σταθερὰ (*περιφερικὴ ταχύτης*). Ἡ κίνησις τοῦ σημείου P εἶναι *ὁμοιόμορφος κυκλικὴ κίνησις.*

Διὰ μίαν περιστροφὴν ὁ ὑπὸ τοῦ σημείου διανυόμενος δρόμος εἶναι $s = \pi \cdot d$. Διὰ n περιστροφὰς εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου εἶναι:

$$\frac{s}{t} = \pi \cdot d \cdot n \qquad \text{ἢ} \qquad \upsilon = \pi \cdot d \cdot n.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ἐξίσωσις μεγεθῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐκλογὴ τῶν μονάδων εἶναι ἐλευθέρα. Θέτομεν d εἰς m καὶ n εἰς στρ/s, ὁπότε προκύπτει ἡ ταχύτης υ εἰς m/s. Ἐὰν τεθῇ n εἰς στρ/min, λαμβάνεται υ εἰς m/min. Ἡ τελευταία ἔκφρασις εἶναι συνήθης π.χ. διὰ τὰς ἐργαλειομηχανάς, τὰς ἀνυψωτικὰς μηχανάς, τὰς μηχανὰς κατεργασίας χάρτου κ.ἄ. Συνήθως εἰς τὴν μηχανολογίαν ὁ ἀριθμὸς στροφῶν δίδεται εἰς στρ/min, ἀλλὰ ἡ περιφερικὴ ταχύτης ἐκφράζεται εἰς m/s. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις νὰ μετατραπῇ. Λαμβάνει δὲ τὴν ἑξῆς μορφήν:

$$\boxed{u = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60}}$$

ὅπου u εἶναι ἡ περιφερικὴ ταχύτης.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δὲν εἶναι πλέον ἐξίσωσις μεγεθῶν. Διὰ νὰ ληφθῇ ἡ u εἰς m/s, πρέπει νὰ τεθῇ ἡ d εἰς m καὶ ὁ n εἰς στρ/min. Παρόμοιαι ἐξισώσεις ὀνομάζονται ἐξισώσεις ἀριθμητικῶν τιμῶν.

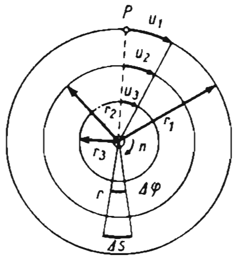
Ἐὰν ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος (σχ. 15·2 α) εἶναι στερεωμένοι δίσκοι διαφόρων διαμέτρων, οἱ δίσκοι αὐτοὶ ἔχουν τὰς ἀκολούθους περιφερικὰς ταχύτητας:

$$u_1 = \frac{\pi \cdot d_1 \cdot n}{60} = r_1 \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ m/s},$$

$$u_2 = \frac{\pi \cdot d_2 \cdot n}{60} = r_2 \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ m/s},$$

$$u_3 = \frac{\pi \cdot d_3 \cdot n}{60} = r_3 \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ m/s}.$$

Ἡ περιφερικὴ ταχύτης ἰσοῦται λοιπὸν πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν συντελεστὴν $\pi \cdot n/30$, ὁ ὁποῖος διὰ δοθέντα ἀριθμὸν



Σχ. 15·2 α.
Περιφερικὴ ταχύτης.

στροφῶν εἶναι σταθερός. Ὁ συντελεστὴς αὐτὸς ὀνομάζεται *γωνιακὴ ταχύτης* ω καὶ ἔχει διάστασιν $1/t$. Διὰ n [στρ/min] καὶ ω [1/s] ἡ γωνιακὴ ταχύτης προκύπτει:

$$\boxed{\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}}$$

Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ταχύτητα υ, ὅπου χρησιμοποιοῦνται τὰ m/s, m/min ἢ km/h, ἡ γωνιακὴ ταχύτης δίδεται πάντοτε ἀνηγμένη εἰς ἕνα δευτερόλεπτον.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, ἡ περιφερικὴ ταχύτης συνδέεται μὲ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα διὰ τῆς σχέσεως:

$$\boxed{u = r \cdot \omega}$$

Ὅπως εἰς τὴν περιφερικὴν ταχύτητα u ἀντιστοιχεῖ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω, ἔτσι εἰς τὴν περιφερικὴν διαδρομὴν s ἀντιστοιχεῖ ἡ γωνία στροφῆς φ (εἰς ἀκτίνια). Εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς ταχύτητος $\upsilon = \Delta s/\Delta t$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ὁρισμὸς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$, ἤτοι:

$$\omega = \frac{\text{Μεταβολὴ τῆς γωνίας στροφῆς } \Delta\varphi}{\text{Χρονικὸν διάστημα } \Delta t}, \qquad \boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

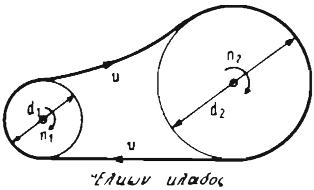
(Εἰς τὴν ὁμοιόμορφον περιστροφὴν ἡ τιμὴ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τῆς διαγραφείσης γωνίας εἰς ἀκτίνια κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἑνὸς δευτερολέπτου).

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς τελευταίας ἐκφράσεως ἐπὶ r, προκύπτει (ἐφ' ὅσον συμφωνεῖ πρὸς τὸ σχῆμα 15·2α, $r \cdot \Delta\varphi = \Delta s$), ἐκ τῆς

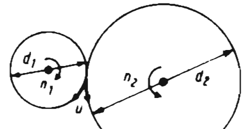
$$r \cdot \omega = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \text{πάλιν:} \qquad \boxed{u = r \cdot \omega}$$

β) Μετάδοσις κινήσεως.

Ὅταν δύο δίσκοι κινούμενοι ἐπὶ διαφορετικῶν ἀξόνων συνδέωνται δι' ἱμάντος (ἐκ δέρματος ἢ ὑφάσματος) διὰ σχοινίου ἢ συρματοσχοίνου (σχ. 15·2 β) ἢ δι' ὀδοντωτῶν τροχῶν (σχ. 15·2 γ), ἡ περι-



Σχ. 15·2 β.
Μετάδοσις κινήσεως δι' ἱμάντος.



Σχ. 15·2 γ.
Μετάδοσις κινήσεως δι' ὀδοντωτῶν τροχῶν.

φερικὴ ταχύτης τῶν δίσκων ἢ ἀντιστοίχως τῶν τροχῶν πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτή.

Ἐκ τῆς ἁπλοποιήσεως τοῦ παράγοντος $\pi/60$ λαμβάνεται:

$$u = d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2 \qquad \text{ἢ} \qquad r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2.$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ σχέσις μεταξὺ ἀριθμῶν στροφῶν:

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i}$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ὀνομάζεται *σχέσις μεταδόσεως* καὶ λαμβάνεται κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ροῆς τῶν δυνάμεων:

$$i = \frac{\text{ἀριθμὸς στροφῶν τοῦ κινητηρίου τροχοῦ}}{\text{ἀριθμὸς στροφῶν τοῦ κινουμένου τροχοῦ}}.$$

Ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς σχέσις διαμέτρων λέγεται *σχέσις τροχῶν*.

Συνοπτικῶς:

Δίσκοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα· δίσκοι συνεργαζόμενοι μέσω ἱμάντων ἢ τροχῶν ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφερικὴν ταχύτητα.

Μία κινηματικὴ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μεταδόσεως κινήσεως μέσω ἱμάντων καὶ τῆς μέσω ὀδοντωτῶν τροχῶν εἶναι, ὅτι δι' ἱμάντων αἱ τροχαλίαι περιστρέφονται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἐνῶ εἰς τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς ἕκαστος ἔχει φορὰν ἀντίθετον ἀπὸ τὴν φορὰν τοῦ μετ' αὐτοῦ συνεργαζομένου. Ἡ φορὰ περιστροφῆς χαρακτηρίζεται διὰ τῆς φορᾶς περιστροφῆς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καὶ διὰ τῆς ἀντιστρόφου αὐτῆς, πρέπει δὲ κάθε φορὰν νὰ δίδεται καὶ ἡ πρὸς τὸν παρατηρητὴν ὄψις.

Παραδείγματα.

1. Ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς τελευταίας σειρᾶς πτερυγίων ἀτμοστροβίλου 3000 στροφῶν εἶναι $D = 2{,}6$ m. Ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ στροφέως τοῦ στροβίλου καὶ ποία ἡ περιφερικὴ ταχύτης τῶν ἄκρων τῶν πτερυγίων; Εἰς πόσον χρόνον ἡ διανυομένη ὑπ' αὐτῶν ἀπόστασις θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς γῆς;

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 3000}{30}\ s^{-1} = 100\,\pi \quad s^{-1} = 314\ s^{-1}$$

$$u = r \cdot \omega = 130\ \pi \quad m/s = 410\ m/s = 1480\ km/h$$

$$t = \frac{s}{u} = \frac{40\,000\ km}{1480\ km/h} = 27\ h.$$

2. Ἄξων διαμέτρου 150 mm πρόκειται νὰ ὑποστῇ κατεργασίαν εἰς τόρνον. Ἡ ταχύτης κοπῆς πρέπει νὰ εἶναι 20 m/min. Ποῖος ὁ κατάλληλος ἀριθμὸς στροφῶν τοῦ τόρνου;

Μὲ τὴν περιφερικὴν ταχύτητα ἀνὰ λεπτόν:

$$u = \pi \cdot D \cdot n$$

λαμβάνεται:

$$n = \frac{u}{\pi \cdot D} = \frac{20}{0{,}15 \cdot \pi}\ \sigma\tau\rho/min = 42{,}5\ \sigma\tau\rho/min.$$

3. Ἡ ταχύτης ἑνὸς τεχνητοῦ δορυφόρου τῆς γῆς εἶναι περίπου 8 km/s. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ δορυφόρος ἐκτελεῖ κυκλικὴν τροχιὰν εἰς ἀπόστασιν $\alpha = 200$ km ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς,

ζητεῖται ἡ διάρκεια μιᾶς πλήρους περιφορᾶς του περὶ αὐτήν. (Μέση ἀκτὶς γηίνης σφαίρας $r = 6370\,km$).

$$s = 2\pi\,(r + \alpha) = 2 \times 6570 \cdot \pi\ km = 41\,200\ km.$$

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{41\,200}{8\,km/s} = 5150\ s = 86\ min$$

ἢ ἄλλως :

Ἀριθμὸς περιφορῶν :

$$n = \frac{60 \cdot u}{\pi \cdot D} = \frac{60 \times 8}{\pi \cdot 13\,140}\ \sigma\tau\rho/min = 0{,}0116\ \sigma\tau\rho/min.$$

Διάρκεια περιφορᾶς :

$$t = \frac{1}{n} = \frac{1}{0{,}0116}\ min = 86\ min.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16

ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΚΙΝΗΣΙΣ

Εἰς τὴν ἀνομοιόμορφον κίνησιν αἱ εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα διανυόμεναι ἀποστάσεις εἶναι ἐν γένει ἄνισοι.

16·1 Μέση ταχύτης.

Ἀνομοιόμορφοι κινήσεις δύνανται κατὰ προσέγγισιν ν' ἀντικατασταθοῦν δι' ὁμοιομόρφων, ἐὰν ληφθῇ ἡ μέση ταχύτης $\upsilon_m = \Delta s/\Delta t$. Ἡ προσέγγισις εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μικρότερα εἶναι τὰ χρονικὰ διαστήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δύναται νὰ ὑποδιαιρεθῇ ἡ κίνησις.

Ὡς παράδειγμα ἐξετάζεται ἡ διαδρομὴ σιδηροδρόμου ἐπὶ μεγάλης ἀποστάσεως. Ἐὰν διαιρεθῇ ἡ συνολικὴ ἀπόστασις διὰ τοῦ συνολικοῦ χρόνου διαδρομῆς, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν χρόνων στάσεως, λαμβάνεται ἡ μέση ταχύτης διαδρομῆς εἰς ὁλόκληρον τὴν ἀπόστασιν. Αἱ μέσαι ταχύτητες μεταξὺ στάσεων ἀποκλίνουν συνήθως σημαντικῶς ἀπὸ τῆς συνολικῶς λαμβανομένης μέσης ταχύτητος. Αἱ μέσαι ταχύτητες μεταξὺ στάσεων ἀποκλίνουν ἐπίσης μεταξύ των, διότι μεταξὺ στάσεων ὑπάρχουν διαδρομαὶ μικρῶν καὶ μεγάλων ταχυτήτων.

Παραδείγματα.

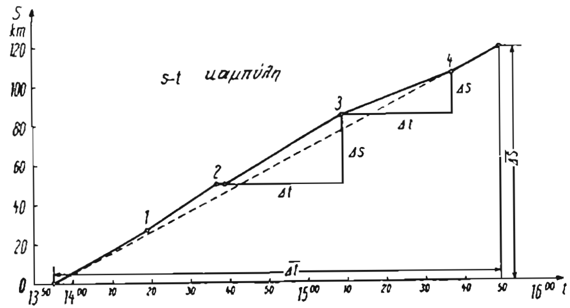
1. Ἐκ τοῦ δρομολογίου ταχείας ἁμαξοστοιχίας ζητοῦνται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μέσαι ταχύτητες μεταξὺ τῶν στάσεων καὶ ἡ ἐμπορικὴ ταχύτης.

Εἶναι προφανὴς ἡ ἐκ τῆς ἀνωφερικῆς διαδρομῆς μείωσις τῆς μέσης ταχύτητος, ὡς ἡ διαδρομὴ ἀπὸ Δ εἰς Ε (βλέπε πίνακα δρομολογίων).

Ἡ μέση ἐμπορικὴ ταχύτης κατὰ τὴν διαδρομὴν ἀπὸ Α εἰς ΣΤ, συμπεριλαμβανομένης τῆς στάσεως εἰς Γ, εἶναι:

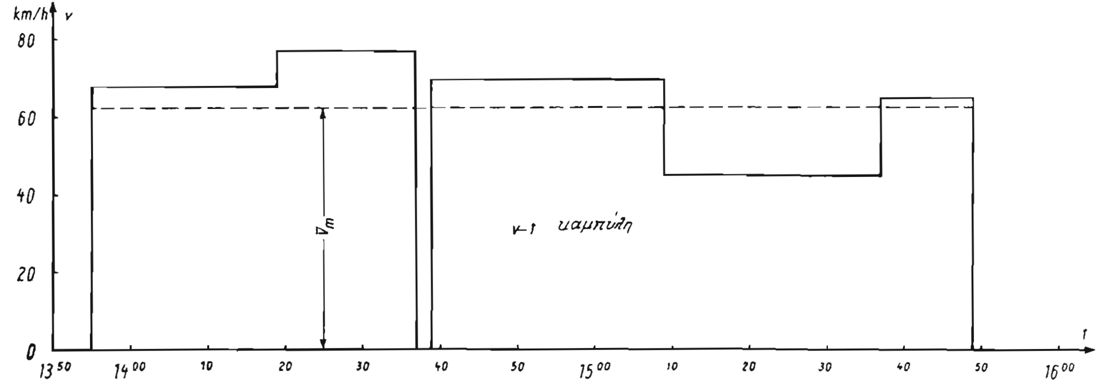
$$\overline{\upsilon} = \frac{\overline{\Delta s}}{\overline{\Delta t}} = \frac{119\,\text{km}}{114\,\text{min}} = 1{,}044\ \text{km/min} = 62{,}6\ \text{km/h}.$$

Τὸ σχῆμα 16·1 α δεικνύει τὴν καμπύλην $s-t$, τὸ δὲ σχῆμα 16·1 β τὴν καμπύλην $\upsilon - t$ αὐτῆς τῆς κινήσεως.



Σχ. 16·1 α.

Καμπύλη ἀποστάσεως-χρόνου τοῦ παραδείγματος 1 (παράγρ. 16·1).



Σχ. 16·1 β.

Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου τοῦ παραδείγματος 1 (παράγρ. 16·1).

Πίναξ δρομολογίων ταχείας ἁμαξοστοιχίας

		km	Ὥρα	Δs/Δt km/min	υ km/min	υ km/h
0	Τόπος Α	0	13^{55}			
				27/24	1,13	67,8
1	» Β	27	14^{19}			
				23/18	1,28	76,8
2	» Γ	50	14^{37}-14^{39}			
				35/30	1,17	70,2
3	» Δ	85	15^{09}			
				21/28	0,75	45,0
4	» Ε	106	15^{37}			
				13/12	1,08	65
5	» ΣΤ	119	15^{49}			

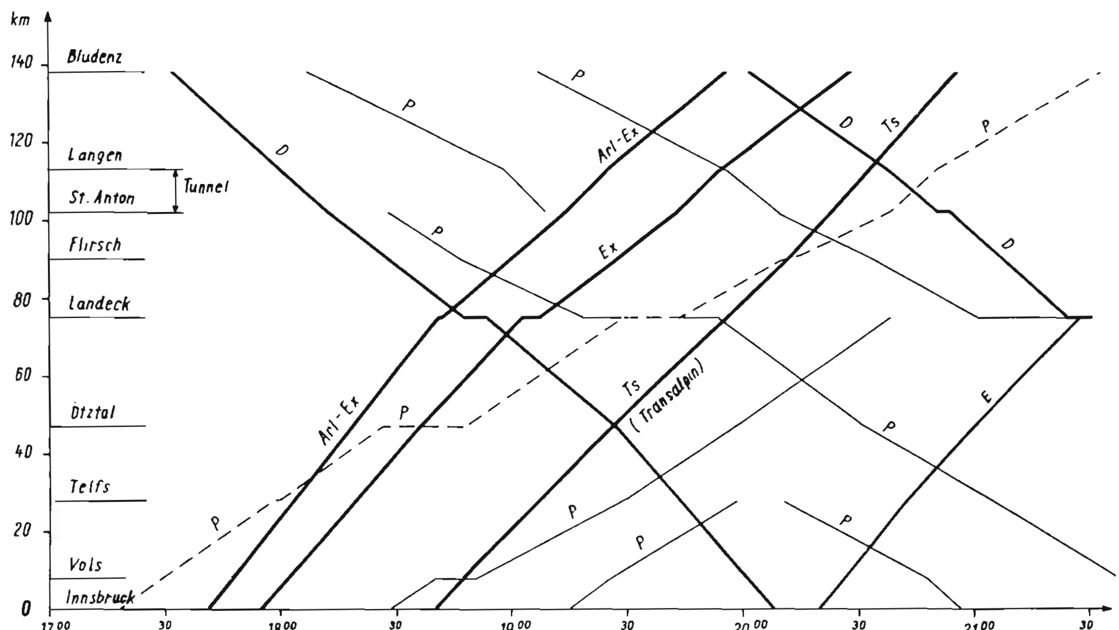
Ἐκ τῶν σχημάτων 15·1β καὶ 16·1 α εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ἀποστάσεως-χρόνου Δs/Δt ἀποτελεῖ κριτήριον τῆς ταχύτητος. (Εἰς τὸ σχῆμα 15·1 β ἡ καμπύλη s—t τοῦ αὐτοκινήτου ἔχει κλίσιν σημαντικῶς μεγαλυτέραν ἀπὸ αὐτήν, ποὺ ἔχει ἡ καμπύλη τοῦ ποδηλάτου, εἰς δὲ τὸ σχῆμα 16·1 α τὴν μικροτέραν κλίσιν ἔχει τὸ τμῆμα ΔΕ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀνωφερικὴν διαδρομήν).

2. Ἡ ἀναφερθεῖσα γραφικὴ παράστασις τῆς κινήσεως χρησιμοποιεῖται διὰ τὰ δρομολόγια ἁμαξοστοιχιῶν. Τὸ οὕτω προκῦπτον «γραφικὸν δρομολόγιον» εἶναι πολὺ ἐποπτικώτερον τοῦ δρομολογίου-πίνακος. Τὸ σχῆμα 16·1 γ δεικνύει ὡρισμένας ὥρας διακινήσεως ἐπιβατῶν ἐπὶ τῆς διαδρομῆς Arlberg (Αὐστρίας).

Ἐκ τοῦ διαγράμματος ἐμφαίνεται ὅτι αἱ ἐπιβατηγαὶ ἁμαξοστοιχίαι P διανύουν τὴν σήραγγα Arlberg μὲ μεγαλυτέραν ταχύτητα ἀπὸ τὰς ἄλλας ἀποστάσεις.

Ἐπίσης δύναται νὰ παρακολουθηθῇ καλῶς ἡ διαδρομὴ ἁμαξοστοιχιῶν μικρῶν διαδρομῶν, ὡς π.χ. τῆς ἁμαξοστοιχίας, ἡ ὁποία κινεῖται κατὰ τὰς βραδυνὰς ὥρας μεταξὺ Innsbruck καὶ Telfs, παραμένει ἐκεῖ 13 min καὶ ἐπιστρέφει εἰς Innsbruck.

Τὸ σημαντικώτερον πλεονέκτημα τῶν γραφικῶν δρομολογίων εἶναι ἡ ἐποπτεία ἐπὶ τῶν διασταυρώσεων καὶ τῶν προσπερασμάτων. Ἔτσι, τὴν ἐπιβατηγὸν ἁμαξοστοιχίαν, ἡ ὁποία ἐκκινεῖ ἐξ Innsbruck εἰς τὰς 17^{18} (παριστωμένην διὰ διακεκομμένης γραμμῆς) προσπερνοῦν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς διαδρομῆς της δύο ὑπερταχεῖαι (Express) (Ex)



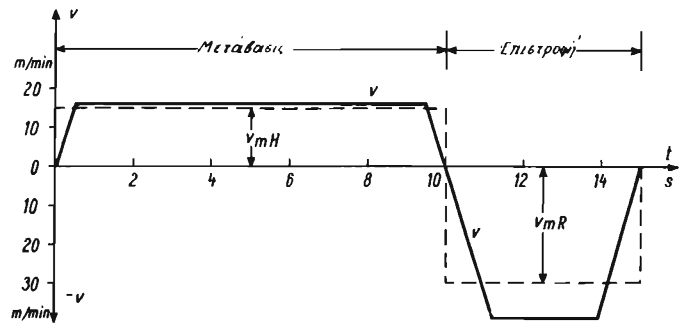
Σχ. 16·1 γ.

Γραφική παράστασις δρομολογίων.

καὶ μία ἁμαξοστοιχία TS (TS = Transalpin). Ἐὰν μία ἀπὸ τὰς ἁμαξοστοιχίας ἔχη καθυστέρησιν, ἡ καμπύλη ἀποστάσεως-χρόνου αὐτῆς μεταφέρεται πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι δυνατόν, μόνον τῇ βοηθείᾳ τοῦ γραφικοῦ δρομολογίου, νὰ γίνη ταχὺς ἐντοπισμὸς τῶν νέων θέσεων προσπεράσματος.

Εἰς τὸ διάγραμμα δὲν παρίστανται διαδρομαὶ φορτηγῶν ἁμαξοστοιχιῶν, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν προσπερασμάτων εἶναι ἀκόμη μεγαλύτερος.

Ἐπίσης εἰς ἐργαλειομηχανὰς μὲ κίνησιν ἐργασίας παλινδρομικὴν δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ταχύτης. Εἰς μίαν πλάνην π.χ. ἡ τράπεζα ἐπιταχύνεται κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διαδρομῆς της, ἐν συνεχείᾳ κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα καὶ ὀλίγον πρὸ τοῦ τέλους τῆς



Σχ. 16 1 δ.

Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου πλάνης.

διαδρομῆς της ἐπιβραδύνεται, διὰ νὰ ἐπιταχυνθῇ κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν. Κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν μετὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν ἀποκτᾷ σταθερὰν ταχύτητα, μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ταχύτητα τῆς μεταβάσεως καὶ τελικῶς ἐπιβραδύνεται διὰ νὰ ἀλλάξη διεύθυνσιν καὶ νὰ ἐπιταχυνθῇ πάλιν. Τὸ διάγραμμα $v-t$, τῆς κινήσεως αὐτῆς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 16·1 δ. Ἐπειδὴ αἱ διαδρομαὶ κατ' ἀμφοτέρας τὰς διευθύνσεις εἶναι ἴσαι, πρέπει καὶ αἱ δύο ἐπιφάνειαι τοῦ διαγράμματος νὰ εἶναι ἴσαι.

3. Χυτοσιδηρᾶ πλὰξ μήκους 2,4 m καὶ πλάτους 1,2 m πρόκειται νὰ ὑποστῇ κατεργασίαν ἐπὶ πλάνης. Πλάτος ἀποτορνεύματος 1,2 mm, μέση ταχύτης κοπῆς 15 m/min καὶ μέση ταχύτης ἐπανόδου κοπτικοῦ ἐργαλείου διπλασία ἀπὸ τὴν ταχύτητα τῆς κοπῆς. Ἡ δια-

δρομὴ τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου πρέπει νὰ ἐκτείνεται κατὰ 50 mm ἑκατέρωθεν τῶν πλευρῶν τῆς πλακός. Ποία ἡ διάρκεια τῆς κατεργασίας καὶ ποία ἡ συνολικῶς ὑπὸ τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου διανυομένη ἀπόστασις;

Διάρκεια κοπῆς (ἁπλῆ διαδρομή):

$$t_1 = \frac{2{,}5\ \mathrm{m}}{15\ \mathrm{m/min}} = 0{,}167\ \mathrm{min} = 10\ \mathrm{s}$$

Διάρκεια ἐπιστροφῆς:

$$t_2 = t_1/2 \qquad = \underline{0{,}083\ \mathrm{min} = \ 5\ \mathrm{s}}$$

Διάρκεια μιᾶς φάσεως ἐργασίας:

$$t \qquad = 0{,}250\ \mathrm{min} = 15\ \mathrm{s}$$

Ἀριθμὸς ἁπλῶν διαδρομῶν:

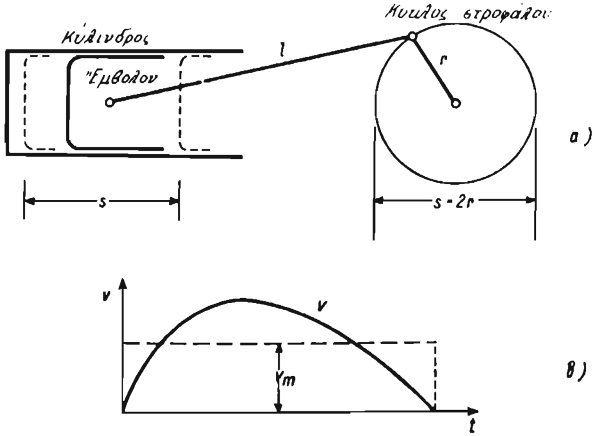
$$z = \frac{1200\ \mathrm{mm}}{1{,}2\ \mathrm{mm}} = 1000.$$

Διάρκεια ἐργασίας:

$$T = z \cdot t = 1000 \times 0{,}25\ \mathrm{min} = 250\ \mathrm{min} = 4\ \mathrm{h}\ 10\ \mathrm{min}.$$

Συνολικὴ διαδρομὴ ἐργαλείου:

$$2z\,(2{,}4 + 2 \times 0{,}05)\ \mathrm{m} = 2000 \times 2{,}5\ \mathrm{m} = 5000\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{km}.$$



Σχ. 16·1 ε.

Διαδρομὴ ἐμβόλου: α) Μηχανισμὸς στροφάλου-διωστῆρος-βάκτρου. β) Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου.

Ἐπίσης ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβόλου ἐμβολοφόρου μηχανῆς κυμαίνεται μεταξὺ τῶν τιμῶν 0, εἰς τὰ νεκρὰ σημεῖα, καὶ μιᾶς μεγίστης τιμῆς ἐγγὺς τοῦ μέσου τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβόλου [σχ. 16·1ε(β)]. Ἐνταῦθα δὲν ἐμφανίζεται τμῆμα διαδρομῆς σταθερᾶς ταχύτητος.

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὡς χαρακτηριστικὴ τιμὴ εἰσήχθη ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐμβόλου, ἡ ὁποία παριστᾶ τὴν εἰκονικὴν σταθερὰν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν θὰ εἶχε τὸ ἔμβολον κατὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν τοῦ στροφάλου.

Ἐὰν s εἶναι ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου τῆς μηχανῆς εἰς m, τότε ἡ ὁλικὴ διαδρομὴ αὐτοῦ εἰς 1 πλήρη περιστροφὴν εἶναι 2 s m, καὶ εἰς 1 πρῶτον λεπτὸν (μὲ n στρ/min): 2 s·n m/min. Ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐμβόλου εἰς m/s εἶναι ἑπομένως:

$$\boxed{\upsilon_m = \frac{2\,s\cdot n}{60} = \frac{s\cdot n}{30}}$$

4. Οἱ πετρελαιοκινητῆρες τῶν δηζελαμαξῶν σιδηροδρόμων περιστρέφονται μὲ 1350 στρ/min καὶ ἔχουν διαδρομὴν ἐμβόλου 190 mm. Ποία ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐμβόλου ;

$$\upsilon_m = \frac{s\cdot n}{30} = \frac{0{,}19\times 1350}{30}\ \text{m/s} \approx 7{,}6\ \text{m/s}.$$

Εἰς τὰ δύο τελευταῖα παραδείγματα ὑπεδείχθησαν ἤδη ἐπιταχυνόμεναι καὶ ἐπιβραδυνόμεναι κινήσεις· μάλιστα δὲ εἰς τὸ παράδειγμα 3 ἡ κίνησις ἦτο ἐναλλὰξ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ ἐπιβραδυνομένη, ἐνῶ εἰς τὸ παράδειγμα 4 ἐπρόκειτο περὶ μὴ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης καὶ ἐπιβραδυνομένης κινήσεως. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἐξετασθῆ ἡ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ ἡ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη κίνησις.

16·2 Ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις.

Ὡς *ἐπιτάχυνσις* γ χαρακτηρίζεται ὁ λόγος τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος, κατὰ τὴν διάρκειαν ὡρισμένου χρονικοῦ διαστήματος, πρὸς αὐτὸ τὸ χρονικὸν διάστημα. Συντόμως δὲ δύναται νὰ ὁρισθῆ ὡς ἡ σχέσις τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος Δυ πρὸς τὴν μεταβολὴν τοῦ χρόνου Δt.

Συνεπῶς:

$$\boxed{\gamma = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}}$$

Ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη λέγεται ἡ κίνησις, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης αὐξάνεται εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα κατὰ τὸ αὐτὸ ποσόν, ἄρα ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι σταθερά.

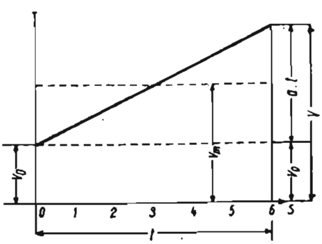
Ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος t δευτερολέπτων ἡ (ἀρχικὴ) ταχύτης εἶναι υ_0, εἰς δὲ τὸ τέλος ἡ (τελικὴ) ταχύτης γίνη υ (καὶ αἱ δύο ταχύτητες εἰς m/s), τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν τὰ ἑξῆς:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \cdot \frac{m/s}{s} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \cdot m/s^2.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ὑπολογίζεται, διὰ δεδομένην ἀρχικὴν ταχύτητα καὶ ἐπιτάχυνσιν, ἡ τελικὴ ταχύτης:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot t}$$

Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης αὐξάνεται ἐντὸς t δευτερολέπτων κατὰ τὴν τιμὴν γ·t, ἕπεται ὅτι ἡ καμπύλη ταχύτητος-χρόνου ἐμφανίζεται ὡς εὐθεῖα μὲ τεταγμένην υ_0 εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ θετικὴν κλίσιν (σχ. 16·2).



Σχ. 16·2.
Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως.

Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν εἶναι δυνατὴ καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἐννοίας τῆς μέσης ταχύτητος, διὰ τῆς ὁποίας ὑπολογίζεται καὶ τὸ διανυόμενον διάστημα $s = \upsilon_m t$:

$$\upsilon_m = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}, \qquad s = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} \cdot t.$$

Ἡ αὐτὴ ἔκφρασις λαμβάνεται ἐπίσης ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κάτωθεν τῆς καμπύλης υ – t.

Ἐὰν ληφθῇ ἡ ἐπιφάνεια ὡς ἐπιφάνεια τραπεζίου, ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος λαμβάνεται:

$$\boxed{s = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} \cdot t}$$

Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ληφθῇ ὡς ἄθροισμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ($\upsilon_0 t$) καὶ τριγώνου ($\gamma \cdot t \cdot t / 2$), προκύπτει:

$$\boxed{s = \upsilon_0 t + \frac{\gamma}{2} \cdot t^2}$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ποὺ $\upsilon_0 = 0$, ὁπότε ἔχομεν ἐπιτάχυνσιν ἐκ τῆς ἠρεμίας, προκύπτει:

$$\boxed{\upsilon = \gamma \cdot t, \qquad s = \frac{\upsilon}{2} \cdot t, \qquad s = \frac{\gamma}{2} \cdot t^2}$$

Συνεπῶς ἡ ταχύτης εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου καὶ τὸ διάστημα ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τοῦ χρόνου. Τὴν καμπύλην $s - t$ μιᾶς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως δεικνύει τὸ σχῆμα 16·3 β (α). Ἡ καμπύλη αὐτὴ ἔχει εἰς τὴν ἀρχήν της ἐφαπτομένην ὁριζοντίαν.

Παραδείγματα.

1. Τροχιοδρομικὸν ὄχημα 8 δευτερόλεπτα μετὰ τὴν ἐκκίνησίν του ἀποκτᾶ ταχύτητα 20 km/h. Ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσίς του καὶ ἡ κατὰ τὰ 8 πρῶτα δευτερόλεπτα διανυθεῖσα ἀπόστασις.

$$\upsilon = \frac{20}{3{,}6} = 5{,}6 \text{ m/s}, \qquad \gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{5{,}6}{8} = 0{,}7 \text{ m/s}^2,$$

$$s = \frac{\upsilon}{2} \cdot t = \frac{5{,}6}{2} \times 8 \text{ m} = 22{,}4 \text{ m} \quad \text{ἢ ἄλλως}$$

$$s = \frac{\gamma}{2} \cdot t^2 = \frac{0{,}7}{2} \times 64 \text{ m} = 22{,}4 \text{ m}.$$

2. Συρμὸς ἀπὸ τῆς ταχύτητος τῶν 18 km/h ἐπιταχύνεται ἐντὸς διαδρομῆς 120 m μέχρι τῆς ταχύτητος τῶν 54 km/h. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ πόσος ὁ ἀπαιτηθεὶς χρόνος;

$$\upsilon_0 = \frac{18}{3{,}6} = 5 \text{ m/s} \qquad \upsilon = \frac{54}{3{,}6} = 15 \text{ m/s}$$

$$s = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \cdot t, \qquad t = \frac{2s}{\upsilon_0 + \upsilon} = \frac{2 \times 120}{20} \cdot s = 12\,s,$$

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{15 - 5}{12}\ m/s^2 = 0{,}833\ m/s^2.$$

Ἔλεγχος:

$$s = \upsilon_0 t + \frac{\gamma}{2} \cdot t^2, \qquad 120 = 5 \times 12 + \frac{0{,}833}{2} \times 12^2 = 60 + 60 = 120.$$

Πρὸς σύγκρισιν παρατίθενται συνήθεις τιμαὶ ἐπιταχύνσεων, αἱ ὁποῖαι ἀπαντοῦν εἰς συγκοινωνιακὰ καὶ μεταφορικὰ μέσα:

Ὀχήματα ἐπὶ τροχιῶν

Ὀχήματα ἕλξεως (μόνα των)		1 ...1,5 m/s^2
Ἁμαξοστοιχίαι		0,5...1,0 m/s^2
Ἠλεκτρικοὶ συρμοὶ		0,2...0,5 m/s^2
Ἀτμοκίνητοι συρμοὶ		0,1 m/s^2

Αὐτοκίνητα

Ἐπιβατηγὰ	περίπου	1,5 m/s^2
Φορτηγὰ	»	1 m/s^2

Μεταφορικαὶ ἐγκαταστάσεις

Ἀνελκυστῆρες	
Φορτίου/Προσώπων	0,8...1,2/0,5...0,8 m/s^2

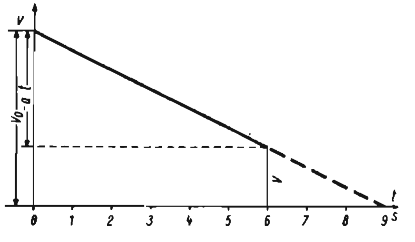
Ἐναέριοι σιδηρόδρομοι

Προσώπων (δι' ἀνηρτημένων ὀχημάτων)	0,25...0,3 m/s^2
Φορτίου (συνεχοῦς περιφορᾶς) μικροὶ/μεγάλοι	0,2/0,1 m/s^2

16·3 Ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη κίνησις.

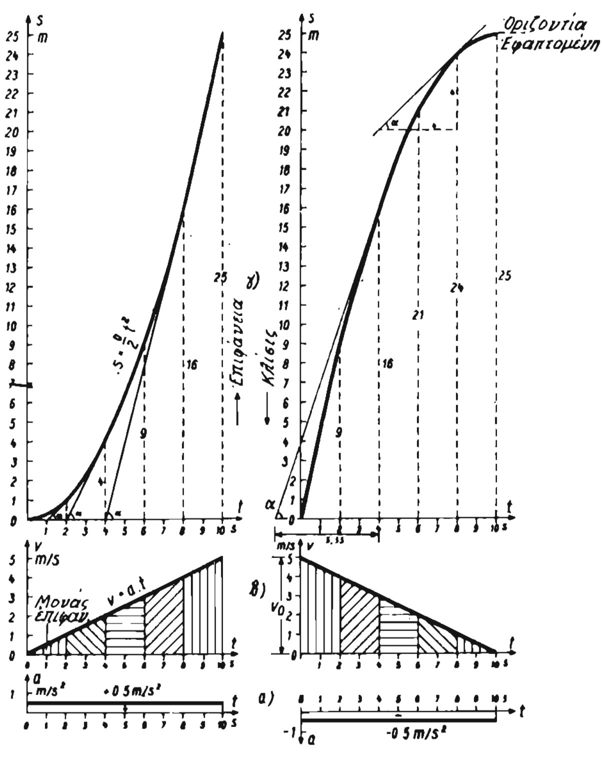
Ἐὰν ἡ ταχύτης εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα μειοῦται κατὰ ἴσα ποσά, τότε πρόκειται περὶ *ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης* κινήσεως. Ἡ *ἐπιβράδυνσις* δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ *ἀρνητικὴ ἐπιτάχυνσις*. Ἔτσι εἰς τὰς προηγουμένως γραφείσας σχέσεις τίθεται καὶ πάλιν ἡ γ, ἀλλὰ μὲ ἀρνητικὸν πρόσημον.

Τὸ σχῆμα 16·3 α δεικνύει τὴν καμπύλην ταχύτητος-χρόνου ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως.



Σχ. 16·3 α.

Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως.



Ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις. Ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη κίνησις.

Σχ. 16·3 β.

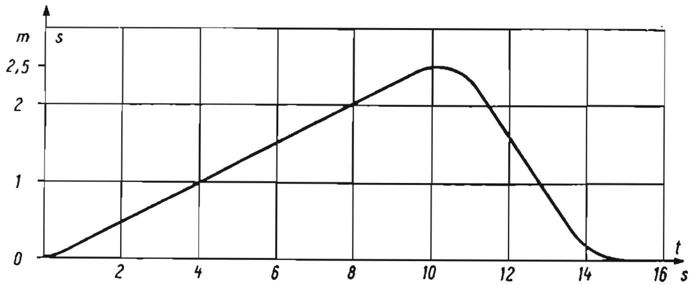
α) Καμπύλη ἐπιταχύνσεως-χρόνου. β) Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου.
γ) Καμπύλη διαστήματος-χρόνου.

Ἐὰν ἡ καμπύλη $\upsilon - t$ τέμνη τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων, θὰ ἰσχύη $\upsilon = 0$, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἠρεμίαν. Κατόπιν αὐτῶν εἶναι:

$$0 = \upsilon_0 - \gamma \cdot t, \qquad \upsilon_0 = \gamma \cdot t.$$

Τὴν καμπύλην $s - t$ μιᾶς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως δεικνύει τὸ σχῆμα 16·3 β (β). Εἰς τὸ τελευταῖον σημεῖον της ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ὁριζοντία. Ἐφ' ὅσον $\upsilon > 0$, αὐξάνεται τὸ διανυόμενον διάστημα, ἐνῶ διὰ $\upsilon < 0$ ἡ κίνησις εἶναι ἀνάστροφος καὶ τὸ s ἐλαττοῦται πάλιν. (Ἐπιβραδυνομένη κίνησις ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος δὲν εἶναι δυνατή).

Εἰς τὸ σχῆμα 16·3 γ δεικνύεται ἡ καμπύλη διαστήματος-χρόνου,



Σχ. 16·3 γ.

Καμπύλη διαστήματος-χρόνου μιᾶς πλάνης.

ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν καμπύλην $\upsilon - t$, τοῦ σχήματος 16·1 δ. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιταχύνσεως ἢ τῆς ἐπιβραδύνσεως ἡ ἐξάρτησις διαδρομῆς-χρόνου εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, ἐνῶ εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ὁμοιομόρφου κινήσεως ἡ ἐξάρτησις εἶναι γραμμική.

Παραδείγματα.

1. Ἀνελκυστὴρ φρέατος κατέρχεται ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας μέχρι βάθους 500 m. Ἡ ἐκκίνησις πρέπει νὰ γίνεται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν $\gamma_1 = 0{,}8\ m/s^2$, ἐνῶ ὁ τερματισμὸς νὰ πραγματοποιῆται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιβράδυνσιν $\gamma_3 = 1\ m/s^2$. Ἡ ταχύτης κατὰ τὴν ὁμοιομόρφως διανυομένην διαδρομὴν ($\gamma_2 = 0$) εἶναι $\upsilon = 14\ m/s$ ἢ χάριν συγκρίσεως $\upsilon' = 20\ m/s$.

Ζητοῦνται: Διάρκεια τῶν φάσεων ἐπιταχύνσεως, ἐπιβραδύνσεως, ὁμοιομόρφου διαδρομῆς, συνολικῆς διαδρομῆς ὡς καὶ τὰ ὕψη τὰ διανυόμενα κατὰ τὰς τρεῖς φάσεις τῆς κινήσεως.

$$t_1 = \frac{\upsilon}{\gamma_1} = \frac{14}{0{,}8}\ \mathrm{s} = 17{,}5\ \mathrm{s}, \qquad t_1' = 25\ \mathrm{s},$$

$$t_3 = \frac{\upsilon}{\gamma_3} = \frac{14}{1}\ \mathrm{s} = 14\ \mathrm{s}, \qquad t_3' = 20\ \mathrm{s}.$$

$$s_1 = \frac{\upsilon}{2}\cdot t_1 = 7 \times 17{,}5\ \mathrm{m} = 122\ \mathrm{m}, \quad s_1' = 10 \times 25\ \mathrm{m} = 250\ \mathrm{m},$$

$$s_3 = \frac{\upsilon}{2}\cdot t_3 = 7 \times 14\ \mathrm{m} = 98\ \mathrm{m}, \quad s_3' = 10 \times 20\ \mathrm{m} = 200\ \mathrm{m},$$

$$s_1 + s_3 = 220\ \mathrm{m}, \qquad s_1' + s_3' = 450\ \mathrm{m},$$

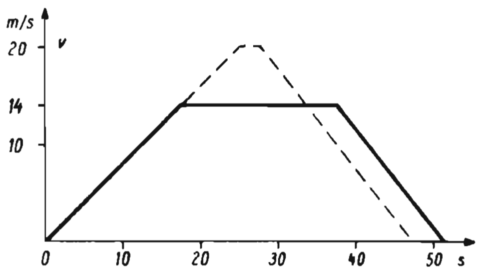
$$s = 500\ \mathrm{m}, \qquad s = 500\ \mathrm{m}.$$

$$s_2 = s - (s_1 + s_2) = 280\ \mathrm{m}, \qquad s_2' = 50\ \mathrm{m},$$

$$t_2 = \frac{s_2}{\upsilon} = \frac{280}{14}\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{s}, \qquad t_2' = \frac{50}{20}\ \mathrm{s} + 2{,}5\ \mathrm{s},$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \qquad t' = (25 + 2{,}5 + 20)\ \mathrm{s} =$$

$$= (17{,}5 + 20 + 14)\ \mathrm{s} = 51{,}5\ \mathrm{s}, \qquad = 47{,}5\ \mathrm{s}.$$



Σχ. 16·3 δ.
Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου ἐγκαταστάσεως ἀνελκυστῆρος.

Ἐὰν ἡ ταχύτης αὐξηθῇ περίπου κατὰ 43%, ἡ οἰκονομία χρόνου ἀνέρχεται μόνον εἰς 8% περίπου, διότι ἡ μεγαλυτέρα ταχύτης ἐμφανίζεται ἐπὶ σύντομον χρονικὸν διάστημα (σχ. 16·3 δ).

2 Ὄχημα διανύει τὴν ἐκ 40 m διαδρομὴν πεδήσεως (μέχρις ἠρεμίας) ὑπὸ σταθερὰν ἐπιβράδυνσιν 2 m/s². Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ὀχήματος εἰς km/h κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς πεδήσεως;

Ἐπειδὴ ἐδῶ ὁ χρόνος οὔτε δίδεται οὔτε ζητεῖται, δυνάμεθα νὰ τὸν ἀπαλείψωμεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων:

$$\upsilon_0 = \gamma \cdot t, \quad s = \frac{\upsilon_0}{2} \cdot t \qquad \text{καὶ νὰ λάβωμεν:}$$

$$\frac{\upsilon_0}{\gamma} = \frac{2s}{\upsilon_0}, \quad \upsilon_0 = \sqrt{2\gamma s} = \sqrt{2 \times 2 \times 40}\ \mathrm{m/s} =$$

$$= 12{,}6\ \mathrm{m/s} \approx 45\ \mathrm{km/h}.$$

3. Σχετικῶς πρὸς τὴν τήρησιν ἀποστάσεως κατὰ τὴν κυκλοφορίαν αὐτοκινήτων, καὶ ὑπὸ συνήθεις συνθήκας πεδήσεως, ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος ἐμπειρικὸς κανών: Ἡ διαδρομὴ πεδήσεως εἰς m ἰσοῦται περίπου πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ὀχήματος εἰς km/h εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ διαστήματος πεδήσεως. Ἐπὶ ποίας ἐπιβραδύνσεως πεδήσεως βασίζεται ὁ ἀνωτέρω κανών;

Ἐκ τῆς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα χρησιμοποιηθείσης σχέσεως $\upsilon_0/\gamma = 2s/\upsilon_0$ προκύπτει $\gamma = \upsilon_0^2/2s$, ὅπου υ_0 τίθεται εἰς m/s, ἐὰν γ πρέπει νὰ ληφθῇ εἰς $\mathrm{m/s^2}$. Ἐὰν δίδεται $\bar{\upsilon}_0$ εἰς km/h, τότε $\gamma = \bar{\upsilon}_0^2/3{,}6^2 \times 1/2s = \bar{\upsilon}_0/26$ διὰ ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν $\bar{\upsilon}_0$ καὶ s.

Ἑπομένως εἶναι:

$$\gamma\ \mathrm{m/s^2} = \frac{1}{26}\ \bar{\upsilon}_0\ \mathrm{km/h}.$$

Συνεπῶς ὁ κανὼν αὐτὸς προϋποθέτει διαφορετικὴν ἐπιβράδυνσιν εἰς ἑκάστην ταχύτητα καί, ὡς ἐκ τούτου ἔχει μόνον διὰ μίαν μέσην περιοχὴν ταχυτήτων πρακτικὴν σκοπιμότητα. (Ἄλλως ἡ πρακτικῶς μεγίστη ἐπιβράδυνσις τῶν 4 $\mathrm{m/s^2}$ θὰ ἀντιστοιχοῦσε εἰς ταχύτητα περίπου 100 km/h).

16·4 Ἐλευθέρα πτῶσις καὶ κατακόρυφος ρῖψις.

Ἰδιαιτέρως σημαντικὸν παράδειγμα ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης καὶ ἐπιβραδυνομένης κινήσεως ἀποτελοῦν ἡ *ἐλευθέρα πτῶσις* καὶ ἡ *κατακόρυφος ρῖψις.*

α) Ἐλευθέρα πτῶσις.

Αἰτία πτώσεως τῶν σωμάτων εἶναι ἡ δύναμις ἕλξεως τῆς γῆς, ἡ ὁποία ἐξασκεῖ ἐπὶ τῶν σωμάτων τὴν *ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος.* Ἡ τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος εἰς τοὺς πόλους τῆς γῆς εἶναι μεγαλυτέρα καὶ εἰς τὸν ἰσημερινὸν μικροτέρα τῆς διὰ συμφωνίας καθορισθείσης $g_n = 9{,}80665\ m/s^2$ (ἡ ὁποία π.χ. ὑφίσταται εἰς τὴν Ζυρίχην). Διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς λαμβάνεται ἡ τιμὴ $g = 9{,}81\ m/s^2$ (ἐνίοτε $10\ m/s^2$).

Κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν σώματος ἡ ἀρχική του ταχύτης εἶναι $\upsilon_0 = 0$, ἡ δὲ διαδρομή του μέχρι τοῦ σημείου προσκρούσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καλεῖται *ὕψος πτώσεως* h. Ἐκ τῶν σχέσεων τῆς προηγουμένως ἐξετασθείσης ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ γ διὰ τοῦ g καὶ τοῦ s διὰ τοῦ h λαμβάνονται οἱ νόμοι τῆς ἐλευθέρας πτώσεως:

$$\boxed{\upsilon = g \cdot t, \quad h = \frac{\upsilon}{2}\, t \qquad h = \frac{g}{2}\, t^2}$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν, ὡς καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 2 (παραγρ. 16·3):

$$\frac{\upsilon}{g} = \frac{2h}{\upsilon}, \qquad \upsilon^2 = 2gh$$

καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν τελικὴν ταχύτητα τῆς ἐλευθέρας πτώσεως:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gh}}$$

Τὸ ὕψος πτώσεως εἶναι:

$$\boxed{h = \frac{\upsilon^2}{2g}}$$

Παραδείγματα.

1. Ποία ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ ὕδατος ὑδατοπτώσεως ὕψους 48 m; (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{19{,}62 \times 48}\ m/s = \sqrt{942}\ m/s = 30{,}7\ m/s.$$

2. Ὁ κριὸς μηχανικῆς σφύρας συναντᾷ τὸν ἄκμονα ὑπὸ τελικὴν ταχύτητα 4,9 m/s. Ποῖον τὸ ὕψος πτώσεώς της;

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{24}{19{,}62}\ m = 1{,}22\ m.$$

3. Ἀπὸ τὸ στόμιον βαθέος φρέατος ἀφίνομεν λίθον νὰ πέσῃ ἐλευθέρως εἰς αὐτὸ καὶ μετὰ παρέλευσιν 2 δευτερολέπτων ἀκούομεν τὴν πρόσκρουσιν τοῦ λίθου ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ποῖον τὸ βάθος τοῦ φρέατος;

$$h = \frac{g}{2} t^2 = \frac{9{,}81}{2} \times 4 \text{ m} = 19{,}62 \approx 20 \text{ m}.$$

β) Κατακόρυφος ῥῖψις πρὸς τὰ κάτω.

Κατὰ τὴν ῥῖψιν πρὸς τὰ κάτω τὸ σῶμα λαμβάνει τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 καὶ κατὰ τοὺς νόμους τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + gt \qquad \text{καὶ} \qquad h = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} t.$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου λαμβάνεται:

$$\frac{\upsilon - \upsilon_0}{g} = \frac{2h}{\upsilon + \upsilon_0} \qquad \text{καὶ} \qquad h = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2g}.$$

Ἡ τελικὴ ταχύτης προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}$$

Συνεπῶς κατὰ τὴν ῥῖψιν πρὸς τὰ κάτω ἡ τελικὴ ταχύτης δὲν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος (υ_0) καὶ τῆς ἐκ τῆς ἐλευθέρας πτώσεως τελικῆς ταχύτητος ($\sqrt{2gh}$).

Παράδειγμα.

Ἂν, εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἡ διάρκεια πτώσεως τοῦ λίθου ἐντὸς τοῦ φρέατος βάθους 20 m πρέπει νὰ μειωθῇ ἀπὸ 2 s εἰς 1 s, ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ λίθος ($g = 10 \text{ m/s}^2$);

Λύσις:

$$h = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} t, \qquad \upsilon + \upsilon_0 = \frac{2h}{t} = \frac{2 \times 20}{1} \text{ m/s} = 40 \text{ m/s}$$

$$h = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2g}, \qquad \upsilon - \upsilon_0 = \frac{2gh}{\upsilon + \upsilon_0} = \frac{20 \times 20}{40} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι: $2\upsilon = 50 \text{ m/s}$, $\upsilon = 25 \text{ m/s}$ καὶ

$2\upsilon_0 = 30 \text{ m/s}$, $\upsilon_0 = 15 \text{ m/s}$.

γ) Κατακόρυφος ρῖψις πρὸς τὰ ἄνω.

Ἐὰν ριφθῇ σῶμα κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, ἡ κίνησίς του ὑπάγεται εἰς τοὺς νόμους τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως μὲ ἐπιβράδυνσιν g m/s^2. Ἰσχύει λοιπόν:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t, \qquad h = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}\, t, \qquad h = \upsilon_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

Εἰς τὸ ὑψηλότερον σημεῖον $\upsilon = 0$.

Ἐκ τῆς συνθήκης αὐτῆς προσδιορίζεται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ:

$$T = \frac{\upsilon_0}{g} \ldots \textit{διάρκεια ἀνυψώσεως}$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων, τό:

$$\frac{\upsilon_0}{g} = \frac{2H}{\upsilon_0}, \qquad H = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \ldots \textit{μέγιστον ὕψος.}$$

Συνεπῶς, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, ἡ ἀρχικὴ ταχύτης κατακορύφου ρίψεως σώματος πρὸς τὰ ἄνω πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν τελικὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν θὰ ἀπέκτα τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν του ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Εἰς ὕψος $h < H$, ἡ ταχύτης εἶναι (ὑπὸ ἀρνητικὴν ἐπιτάχυνσιν) $-g$:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh.}$$

Παραδείγματα.

1. Ἡ ὑδατίνη δέσμη τοῦ μεγαλυτέρου πίδακος εἰς τὸν κόσμον (ἐν Γενεύῃ) φθάνει εἰς μέγιστον ὕψος 130 m. Ποία ἡ ταχύτης ἐξόδου τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ αὐλοῦ καὶ ποία ἡ διάρκεια ἀνόδου μιᾶς σταγόνος (ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν ὑπολογίζεται);

$$\upsilon_0 = \sqrt{2hH} = \sqrt{19{,}62 \times 130}\ \text{m/s} = \sqrt{2550}\ \text{m/s} = 50{,}5\ \text{m/s}.$$

$$T = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{50{,}5}{9{,}81}\ \text{s} = 5{,}15\ \text{s} \qquad \text{ἤ}$$

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{260}{9{,}81}}\ \text{s} = \sqrt{26{,}5}\ \text{s} = 5{,}15\ \text{s}.$$

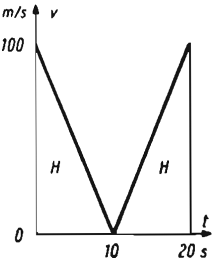
2. Σῶμα ἐκσφενδονίζεται μὲ ταχύτητα $\upsilon_0 = 100$ m/s πρὸς τὰ ἄνω. Εἰς ποῖον ὕψος θὰ ἀνέλθῃ καὶ μετὰ πάροδον πόσου χρόνου θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν γῆν ($g = 10$ m/s^2);

Ποία ἡ μορφὴ τῆς καμπύλης υ — t τῆς κινήσεως αὐτῆς;

$$H = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{10\,000}{20}\ m = 500\ m,$$

$$2T = 2\ \frac{\upsilon_0}{g} = 2 \times \frac{100}{10}\ s = 20\ s.$$

Ἡ καμπύλη υ — t τῆς κινήσεως εἰκονίζεται εἰς τὸ σχῆμα 16·4.



Σχ. 16·4.

Καμπύλη ταχύτητος-χρόνου κατακορύφου ρίψεως πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐλευθέρας πτώσεως.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς καμπύλης πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν διανυθέντα δρόμον, δηλαδὴ ἐδῶ πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους:

$$2H = 2 \cdot \frac{\upsilon_0 T}{2} = \upsilon_0 T = 100 \times 10 = 1000\ m, \qquad H = 500\ m.$$

16·5 Ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη (ἐπιβραδυνομένη) κυκλικὴ κίνησις.

Κατὰ τὴν ἐκκίνησιν καὶ τὴν στάσιν περιστρεφομένων μηχανῶν (ἢ τεμαχίων μηχανῶν) ἐμφανίζονται ἐπιταχυνόμεναι καὶ ἐπιβραδυνόμεναι περιστροφικαὶ κινήσεις, ἐκ τῶν ὁποίων θὰ ἐξετασθοῦν πάλιν αἱ ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμεναι καὶ ἐπιβραδυνόμεναι.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς *περιφερικῆς* ἢ *ἐπιτροχίου ἐπιταχύνσεως* $\gamma = \Delta\upsilon / \Delta t$ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς *γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως*.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

καὶ εἰς τὴν σχέσιν $\upsilon = r \cdot \omega$ ἀντιστοιχεῖ ἡ:

$$\boxed{\gamma = r \cdot \varepsilon}$$

Ἐὰν υ_0 ἡ περιφερικὴ καὶ ω_0 ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἰς τὴν ἀρχὴν περιόδου ἐπιταχύνσεως διαρκείας t, καὶ ἐὰν υ, ω αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ εἰς τὸ τέλος αὐτῆς, τότε δυνάμεθα κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν περιφερικὴν κίνησιν νὰ γράψωμεν:

Περίοδος ἐπιταχύνσεως:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}, \qquad \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}.$$

Περίοδος ἐπιβραδύνσεως:

$$\gamma = \frac{\upsilon_0 - \upsilon}{t}, \qquad \varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t}.$$

Ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ γ καὶ ε εἶναι ἡ αὐτή, ὡς ἡ μεταξὺ τῶν υ καὶ ω, ἐμφαίνεται ἐκ τῆς γραφῆς τῶν σχέσεων:

$$r \cdot \varepsilon = \frac{r\omega - r\omega_0}{t} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \gamma \quad \text{ἐπομένως} \quad \gamma = r \cdot \varepsilon,$$

ὡς ἤδη ἀνεφέρθη ἀνωτέρω.

Ἐνίοτε ἐνδιαφέρει ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν, τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ μηχανὴ κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἐπιταχύνσεως ἢ τῆς ἐπιβραδύνσεώς της.

Ἐὰν n_0 εἶναι ὁ ἀριθμὸς στροφῶν ἀνὰ λεπτὸν εἰς τὴν ἀρχὴν περιόδου ἐπιταχύνσεως (ἢ ἐπιβραδύνσεως) διαρκείας t δευτερολέπτων, n ὁ ἀριθμὸς στροφῶν εἰς τὸ τέλος τῆς περιόδου καὶ $\bar{n}$ ὁ ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν (ὄχι στρ/min) κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου t, τότε ἡ ἐφαρμογὴ τῆς σχέσεως:

$$s = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}\, t \quad \text{ἐπὶ περιφερείας δίδει :}$$

$$\pi \cdot d \cdot \bar{n} = \left(\frac{\pi \cdot d \cdot n_0}{60} + \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60}\right)\frac{t}{2}, \qquad \bar{n} = \frac{n_0 + n}{120}\, t.$$

Παραδείγματα.

1. Ἠλεκτροκινητὴρ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ μέχρι λειτουργίας ὑπὸ τὰς πλήρης στροφάς του (1450 στρ/min) ἀπαιτεῖ 7 δευτερόλεπτα. Ποία ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις καὶ πόσαι περιστροφαὶ ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν φάσιν τῆς ἐκκινήσεώς του;

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\omega}{t}, \quad \omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{1450\pi}{30}\ s^{-1} = 152\ s^{-1}.$$

$$\varepsilon = \frac{152}{7}\ s^{-2} = 21{,}7\ s^{-2},$$

$$\bar{n} = \frac{n + n_0}{120}\ t = \frac{n}{120}\ t = \frac{1450}{120} \times 7\ \sigma\tau\rho = 84{,}5\ \text{περιστροφαί}.$$

2. Εἰς ἐγκατάστασιν ἀνελκυστῆρος ὀρυχείου ἡ φάσις τῆς ἐπιταχύνσεως ἀπὸ 10 m/s εἰς 14 m/s διαρκεῖ 10 δευτερόλεπτα. Ποία ἡ περιφερικὴ καὶ ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις τῆς κινητηρίας τροχαλίας (διαμέτρου 7,5 m);

Ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου τῆς ἐπιταχύνσεως;

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{14 - 10}{10}\ m/s^2 = 0{,}4\ m/s^2$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{r} = \frac{0{,}4}{3{,}75}\ s^{-2} = 0{,}107\ s^{-2}.$$

$$n = \frac{60\upsilon}{\pi \cdot D}, \quad n_0 = \frac{60 \times 10}{7{,}5\pi}\ \sigma\tau\rho/\min = 25{,}2\ \sigma\tau\rho/\min,$$

$$n = \frac{60 \times 14}{7{,}5\pi}\ \sigma\tau\rho/\min = 35{,}2\ \sigma\tau\rho/\min$$

$$\bar{n} = \frac{n_0 + n}{120}\ t = \frac{25{,}5 + 35{,}2}{120} \times 10\ \sigma\tau\rho = \frac{60{,}4}{12}\ \sigma\tau\rho =$$

$$= 5{,}03\ \text{περιστροφαί}.$$

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

(Δυναμική τοῦ ὑλικοῦ σημείου)

Αἱ μέχρι τώρα παρατηρήσεις τῶν φάσεων κινήσεων περιωρίζοντο μόνον εἰς τὰ μεγέθη: χρόνος, ἀπόστασις, ταχύτης καὶ ἐπιτάχυνσις (Κινηματική). Ἡ περιγραφὴ τῶν κινήσεων, ἐφ' ὅσον ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ δυνάμεις ποὺ τὰς προκαλοῦν, ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς Δυναμικῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 17

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΝΟΜΟΙ

Αἱ παρατηρήσεις ποὺ ἀκολουθοῦν βασίζονται ἐπὶ ὡρισμένων νόμων προερχομένων ἐκ τῆς ἐμπειρίας, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται «ἀξιώματα».

17·1 Ὁ νόμος τῆς ἀδρανείας.

Σῶμα ἐλεύθερον ἐξωτερικῶν ἐπιδράσεων διατηρεῖ τὴν κινητικήν του κατάστασιν.

Ἔτσι, ἐὰν τὸ σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, παραμένει ἐν ἠρεμίᾳ, ἐὰν δὲ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς, παραμένει εἰς τὴν ἰδίαν κινητικὴν κατάστασιν. Ἀλλαγαὶ αὐτῶν τῶν κινητικῶν καταστάσεων δύνανται νὰ προκληθοῦν μόνον μὲ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν, ὡς πρὸς τὸ σῶμα, δυνάμεων.

17·2 Θεμελιώδεις νόμοι τῆς δυναμικῆς (δύναμις καὶ μᾶζα).

Ἐὰν ἐπὶ ἐλευθέρως κινουμένου σώματος ἐπενεργῇ διαρκῶς δύναμις F, αὐτὴ τοῦ προσδίδει ἐπιτάχυνσιν γ.

Ἐὰν ἡ δύναμις παραμένῃ κατὰ μέτρον καὶ κατεύθυνσιν σταθερά, τὸ σῶμα ἐκτελεῖ εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν. Ἐὰν ἡ σταθερὰ αὐτὴ δύναμις ἔχῃ κατεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τοῦ σώματος, ὡς π.χ. ἡ δύναμις τριβῆς, τότε τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον προηγουμένως ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ἐκτελεῖ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν.

Ὅπως εἶναι ἐκ τῆς πείρας γνωστόν, ὁ διπλασιασμὸς τῆς δυνάμεως διπλασιάζει καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν, δηλαδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀνάλογος τοῦ μεγέθους τῆς δυνάμεως, ποὺ προκαλεῖ τὴν ἐπιτάχυνσιν. Ἑπομένως ἰσχύει:

$$F_1 : F_2 = \gamma_1 : \gamma_2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \text{σταθερόν}.$$

Συνεπῶς ὁ λόγος F/γ εἶναι δι' ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα μία σταθερά, δηλαδὴ ἕνα χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ μέγεθος. Ἡ σταθερὰ αὐτὴ φέρει τὸ ὄνομα *μᾶζα* (συμβολισμὸς m).

Ἡ προκύψασα σχέσις $F/\gamma = m$ διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

$$\text{Δύναμις} = \text{Μᾶζα} \times \text{Ἐπιτάχυνσιν}$$

$$\boxed{F = m \cdot \gamma}$$

Εἰς τὸ Διεθνὲς Μετρικὸν Σύστημα θεωρεῖται ἡ μᾶζα ὡς βασικὸν μέγεθος μὲ μονάδα τὸ kg, ἡ δύναμις ὡς παράγωγον μέγεθος μὲ μονάδα τὸ Νιοῦτον* (N).

Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων ἡ δύναμις εἶναι βασικὸν μέγεθος μὲ μονάδα τὸ κιλοπὸντ (kp), ἡ μᾶζα εἶναι παράγωγον μέγεθος μὲ μονάδα τὴν τεχνικὴν μονάδα μάζης (TMM)

Ἐπειδὴ πρὸς τὸ παρὸν τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς τεχνικῆς βιβλιογραφίας χρησιμοποιεῖ τὸ τεχνικὸν σύστημα μονάδων (Τ.Σ.), οἱ περισσότεροι δὲ πίνακες τιμῶν ἔχουν συνταχθῆ βάσει αὐτοῦ τοῦ συστήματος μονάδων, εἰς τὰς γερμανοφώνους χώρας συμπεριελήφθη εἰς τὸ διεθνὲς σύστημα μονάδων Δ.Σ., ὡς δευτέρα μονὰς δυνάμεως, ἡ μονὰς δυνάμεως τοῦ Τ.Σ., δηλαδὴ τὸ kp, καὶ ὡρίσθη ὡς μὴ δεκαδικὸν πολλαπλάσιον τοῦ N (Νιοῦτον).

Ἡ μᾶζα ἑνὸς kg ἀποκτᾶ:

ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν 1 N ἐπιτάχυνσιν 1 m/s^2, ἤτοι 1 N = 1 kgm/s^2

ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν 1 kp ἐπιτάχυνσιν 9,81 m/s^2, ἤτοι 1 kp = 9,81 kgm/s^2.

---

* Ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ ἄγγλου φυσικοῦ Ἰσαὰκ Νεύτωνος (Newton).

Ἑπομένως εἶναι:

$$1\ \mathrm{kp} = 9{,}81\ \mathrm{N} \qquad \text{καὶ} \qquad 1\ \mathrm{TMM} = 9{,}81\ \mathrm{kg} \qquad \text{ἢ}$$

$$1\ \mathrm{N} = 0{,}102\ \mathrm{kp} \qquad \text{καὶ} \qquad 1\ \mathrm{kg} = 0{,}102\ \mathrm{TMM}.$$

Χάριν ἀριθμητικῶς ὀρθῶν ἐφαρμογῶν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ λαμβάνωνται αἱ μονάδες ἀπὸ ἓν καὶ μόνον σύστημα. Πρέπει νὰ μὴ λησμονοῦμεν ὅτι τὸ kg καὶ τὸ N ἀνήκουν εἰς ἕνα σύστημα, ἐνῷ τὸ kp καὶ ἡ τεχνικὴ μονὰς μάζης TMM ἀνήκουν εἰς ἄλλο σύστημα μονάδων. Ἔτσι ἡ ἀνεξάρτητος τοῦ συστήματος μονάδων ἐξίσωσις $F = m \cdot \gamma$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἐξίσωσις μονάδων:

εἰς τὸ Δ.Σ.	εἰς τὸ Τ.Σ.
$F = m \cdot \gamma$	$F = m \cdot \gamma.$
$\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$	$\mathrm{kp} = \mathrm{TMM} \cdot \mathrm{m/s^2}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων προκύπτουν οἱ ἀκόλουθοι ἁπλοῖ κανόνες: Ἐὰν οἱ ὑπολογισμοὶ γίνωνται κατὰ τὸ Δ.Σ., τότε πρέπει ὅσαι δυνάμεις δίδονται εἰς kp νὰ μετατρέπωνται εἰς N, ἤτοι νὰ πολλαπλασιάζωνται ἐπὶ 9,81. Ἐὰν κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς ἐκλέγεται τὸ Τ.Σ., τότε πρέπει ὅλαι αἱ εἰς kg διδόμεναι μᾶζαι νὰ μετατρέπωνται εἰς TMM, ἤτοι νὰ διαιροῦνται διὰ 9,81.

Παραδείγματα.

1. Πόσον ἐπιταχύνεται μᾶζα 1 t (= 1000 kg *) ὑπὸ δυνάμεως 100 kp;

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν μεγεθῶν $\gamma = F/m$ πρέπει νὰ τεθοῦν μονάδες, ποὺ νὰ ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα. Ἔτσι ἔχομεν:

εἰς τὸ Δ.Σ.	εἰς τὸ Τ.Σ.
$F = 9{,}81 \times (100\ \mathrm{kp}) = 981\ \mathrm{N},$	$m = \dfrac{1000\ \mathrm{kp}}{9{,}81} = 102\ \mathrm{TMM},$
$\gamma = \dfrac{981}{1000}\ \mathrm{m/s^2} = 0{,}981\ \mathrm{m/s^2}.$	$\gamma = \dfrac{100}{102}\ \mathrm{m/s^2} = 0{,}981\ \mathrm{m/s^2}.$

Ἡ ἐπιτάχυνσις δίδεται εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἴση πρὸς $\gamma = 0{,}981\ \mathrm{m/s^2}$. Ὡς βλέπομεν, ὁ ὑπολογισμὸς κατὰ τὸ Δ.Σ. δὲν εἶναι πολυπλοκώτερος τοῦ κατὰ τὸ Τ.Σ.

---

* Μᾶζα : 10^3 kg = 1t (1 τόννος).
Δύναμις : 10^3 kp = 1 Mp (1 Μεγαπόντ).

2. Σιδηροδρομικὸν ὄχημα συνολικῆς μάζης 180 t πρέπει ἐντὸς ἑνὸς λεπτοῦ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του νὰ φθάση τὴν ταχύτητα τῶν 60 km/h. Ποία ἡ πρὸς τοῦτο ἀπαιτουμένη δύναμις, ἐὰν ἡ ἐκκίνησις λάβη χώραν ὡς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις;

Κατ' ἀρχὴν πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς m/s^2:

$$\upsilon = \frac{60}{3{,}6} = 16{,}7 \text{ m/s} \qquad \gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{16{,}7}{60} = 0{,}28 \text{ m/s}^2.$$

Ἀκολούθως θὰ γίνουν οἱ ὑπολογισμοὶ εἰς ἀμφότερα τὰ συστήματα μονάδων:

Δ.Σ.

$$\underset{\text{N}}{F} = \underset{\text{kg}}{180\,000} \times \underset{\text{m/s}^2}{0{,}28} = 50\,400 \text{ N},$$

ἢ $$\frac{50\,400}{9{,}81} = 5140 \text{ kp}.$$

Τ.Σ.

$$\frac{180\,000}{9{,}81} = 18\,350 \text{ TMM}$$

$$\underset{\text{kp}}{F} = \underset{\text{TMM}}{18\,350} \times \underset{\text{m/s}^2}{0{,}28} = 5140 \text{ kp}.$$

ἢ $$5140 \times 9{,}81 = 50\,400 \text{ N}.$$

Προφανῶς ὁ ὑπολογισμὸς κατὰ τὰ δύο συστήματα μονάδων δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἁπλούστερον. Ἐὰν π.χ. τὸ ἀποτέλεσμα πρέπει νὰ ληφθῇ εἰς kp, δύναται νὰ γίνῃ κατ' εὐθεῖαν ἡ διαίρεσις διὰ 9,81 καὶ μάλιστα κατὰ τὸ Δ.Σ. πρὸς μετατροπὴν τῶν N εἰς kp ἢ κατὰ τὸ Τ.Σ. πρὸς μετατροπὴν τῶν kg εἰς TMM. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἰσχύει:

$$\underset{\text{kp}}{F} = \frac{180\,000 \times 0{,}28}{9{,}81} = 5140 \text{ kp}.$$

17·3 Βαρύτης.

Ἡ εἰς τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς πτώσεως $\gamma = g$ ἀντιστοιχοῦσα δύναμις ὀνομάζεται *δύναμις τῆς βαρύτητος* ἢ *βάρος* G τοῦ σώματος:

$$\boxed{G = m \cdot g}$$

Τὸ βάρος εἶναι ταυτόσημον πρὸς τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἀσκεῖ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἑδράσεώς του.

Ἡ μᾶζα σώματος παραμένει πάντοτε ἡ ἰδία, ὅπου καὶ ἂν εὑρίσκεται τὸ σῶμα, ἐνῷ τὸ βάρος του μεταβάλλεται, π.χ. ἕνεκα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος, ἡ τιμὴ τῆς ὁποίας εἶναι ἐξάρτησις τοῦ τόπου. Ὅταν δὲν ὑπάρχῃ βαρύτης, ὅπως π.χ. εἰς τὸ διάστημα, τὸ βάρος τῶν ἀστροναυτῶν καὶ ὅλων τῶν ἀντικειμένων ἐντὸς τοῦ διαστημοπλοίου εἶναι μηδέν, ἡ μᾶζα των ὅμως παραμένει ἀμετάβλητος. Δι' αὐτὸ εἶναι ὀρθότερον νὰ ἐκλέγεται μία ἀμετάβλητος ποσότης, ὡς ἡ μᾶζα (καὶ ὄχι μία μεταβλητή, ὅπως τὸ βάρος), ὡς μέτρον τῆς ἐπίσης ἀμεταβλήτου ποσότητος τῆς ὕλης καὶ αὐτὴ νὰ τίθεται ὡς βασικὸν μέγεθος τοῦ συστήματος μονάδων.

Τοῦτο ἰσχύει διὰ τὸ Διεθνὲς Σύστημα Μονάδων, ἐνῷ διὰ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ὡς ἤδη ἀνεφέρθη, ἡ δύναμις εἶναι τὸ βασικὸν μέγεθος καὶ ἡ μᾶζα ἐμφανίζεται ὡς παράγωγον.

Ἐπειδὴ ἡ μᾶζα ἑνὸς χιλιογράμμου δίδεται διὰ τῆς δυνάμεως 1 kp διαιρουμένης διὰ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος, ἕπεται ὅτι τὸ kp εἶναι τὸ βάρος τοῦ kg μάζης.

Ἡ μᾶζα 1 kg ἔχει βάρος ἑνὸς kp.

Συνεπῶς οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὸ βάρος εἰς kp καὶ τὴν μᾶζαν εἰς kg, εἶναι ἴσοι.

Εἰς ποίας περιπτώσεις πρέπει νὰ χρησιμοποιῆται τὸ kp καὶ εἰς ποίας τὸ kg θὰ ἐπεξηγηθῇ διὰ τῶν παραδειγμάτων ποὺ ἀκολουθοῦν.

Ὁ καταναλωτὴς ποσότητος ὑλικοῦ δὲν ἐνδιαφέρεται διὰ τὸ βάρος, ἀλλὰ διὰ τὴν μᾶζαν, βάσει τῆς ὁποίας ἄλλωστε ρυθμίζεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ὑλικοῦ. Προφανῶς εἰς τὴν κατάστασιν ἐλλείψεως βαρύτητος ἡ ἀξία τοῦ ὑλικοῦ δὲν θὰ ἦτο κατ' οὐδένα τρόπον μηδενική. Ἔτσι λοιπὸν θὰ ἐξακολουθῇ — ὀρθῶς — ἡ προσφορὰ πρὸς πώλησιν καὶ ἡ ἀγορὰ ὑλικῶν εἰς kg (καὶ ὄχι εἰς kp).

Ἐφ' ὅσον τὰ καύσιμα καίονται καὶ ὑπὸ ἔλλειψιν βαρύτητος, δὲν καίεται τὸ βάρος, ἀλλὰ ἡ μᾶζα των. Ἐξ οὗ καὶ ὁ ἄνθραξ διατίθεται εἰς τὸ ἐμπόριον ἀνὰ τόννον (καὶ ὄχι ἀνὰ Mp). Τὰ διὰ μέσου σωλήνων ρέοντα ὑλικὰ εἶναι μᾶζαι (π.χ. ὕδωρ ἢ ἀτμοί). Εἰς αὐτὰ ἐπίσης ἀναφέρεται ἡ ἀνὰ μονάδα χρόνου μέσω τῶν σωλήνων ρέουσα ποσότης εἰς t/s ἢ t/h (καὶ ὄχι εἰς Mp/s ἢ Mp/h). Ἡ ὅλη θεωρία ἐπὶ τῶν ταλαντώσεων χρησιμοποιεῖ ὡς βασικὸν μέγεθος τὴν μᾶζαν.

Ἀντιθέτως τὰ μεγέθη, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς δυνάμεις καὶ τὰς ἐπιδράσεις των, δὲν ἐκφράζονται εἰς kg ἢ τόννους. Αἱ δυνάμεις αὐταὶ εἶναι πολλῶν εἰδῶν (π.χ. βάρη, φορτία κ.λπ.), αἱ ὁποῖαι δίδονται ἂν ὄχι εἰς N, εἰς kp ἢ Mp. Αἱ πιέσεις, τάσεις, δεδομένα φορτίσεως καὶ ἀντοχῆς (συνήθως ἀκόμη καὶ σήμερον) ἐκφράζονται εἰς kp ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας.

Εἰς τὴν τεχνικὴν τῆς μορφοποιήσεως, ἐκεῖ ὅπου τὸ ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς δράσεως μαζῶν (π.χ. μηχανικὴ σφῦρα) τὰ δεδομένα ἐκφράζονται εἰς t, ἐνῶ ἀντιθέτως, ὅταν πρόκειται περὶ δράσεων δυνάμεων (χειροκίνητον ἢ ὑδραυλικὸν πιεστήριον) χρησιμοποιεῖται τὸ Mp.

Εἰς τὰς κατασκευὰς γερανῶν σημασίαν ἔχει ὁ ἐφελκυσμὸς τοῦ συρματοσχοίνου ἕλξεως, εἰς τὰς μεταφορὰς φορτίων ἡ πίεσις αὐτῶν ἐπὶ τῶν βάσεών των. Συνεπῶς καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ βάρος παίζει τὸν πρωτεύοντα ρόλον. Ἐν τούτοις θὰ ἦτο, ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις, δυνατὴ καὶ ἡ ἔκφρασις τῶν στοιχείων βάσει τῶν μαζῶν. Ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ γερανοῦ 50 t, φανταζόμεθα ὅτι ὁ γερανὸς εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀλλάξῃ θέσιν μάζης 50 t, ὅταν ὅμως ὁμιλοῦμεν διὰ τὸ ὠφέλιμον φορτίον γερανοῦ, τότε πρέπει νὰ χαρακτηρίσωμεν αὐτὸ διὰ τῶν 50 Mp.

Εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὴν συνήθειαν νὰ ἐκφράζωνται αἱ μᾶζαι εἰς kg καὶ αἱ δυνάμεις εἰς kp. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ μᾶς διαφεύγῃ ὅτι εἰς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Δυναμικῆς ἡ κατάλληλος μονὰς εἶναι τὸ N, τὸ ὁποῖον ἐν συνεχείᾳ μετατρέπεται εἰς kp.

17·4 Βαρύτης καὶ κατακορύφως ἐπιταχύνουσαι δυνάμεις.

Ὅταν ἐξ ἐπιδράσεως κατακορύφων δυνάμεων μεταβληθῇ ἡ κίνησις φορτίου ἐξαρτωμένου ἀπὸ ἕνα νῆμα, μεταβάλλεται καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος, ἀναλόγως πρὸς τὰς ἐμφανιζομένας δυνάμεις ἐπιταχύνσεως (σχ. 17·4 α).

Ὑπὸ ἠρεμίαν ἢ ὁμαλὴν κίνησιν εἶναι $F = G$,

ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν κατευθυνομένην πρὸς τὰ ἄνω $F_1 = G + m \cdot \gamma$,

ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν κατευθυνομένην πρὸς τὰ κάτω $F_2 = G - m \cdot \gamma$.

Τὰ ἀνωτέρω λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαφόρων μεταφορικῶν μηχανῶν (ἀνελκυστήρων, ἀναβατήρων κ.λπ.).

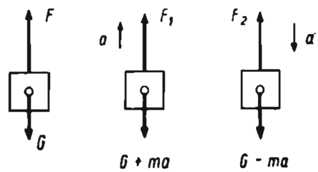
Παραδείγματα.

1. Κατὰ ποῖον ποσοστὸν αὐξάνεται ἡ καταπόνησις συρματοσχοίνου γερανοῦ, ἐὰν τὸ εἰς αὐτὸ ἀνηρτημένον φορτίον ἀνυψωθῇ ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν $1{,}5 \text{ m/s}^2$;

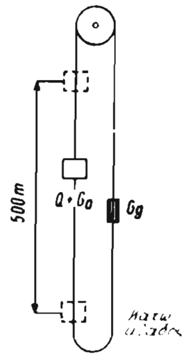
Ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν μόνον ἐξισώσεις μεγεθῶν:

Δύναμις είς συρματόσχοινον λόγω βάρους (ἐν ἠρεμία): $G = m \cdot g$.
Πρόσθετος καταπόνησις λόγω δυνάμεως ἐπιταχύνσεως: $F = m \cdot \gamma$.
Ποσοστιαία αὔξησις τῆς καταπονήσεως:

$$\frac{m \cdot \gamma}{m \cdot g} = \frac{1{,}5}{9{,}81} = 0{,}153 = 15{,}3\%.$$



Σχ. 17·4 α.
Δυνάμεις κατὰ τὴν ὁμοιόμορφον καὶ ἐπιταχυνομένην κατακόρυφον κίνησιν.



Σχ. 17·4 β.
Ἀνελκυστὴρ φορτίου.

2. Φορτίον βάρους 800 kp πρέπει νὰ ἐπιταχυνθῇ ὁμαλῶς πρὸς τὰ ἄνω δι' ἁλύσεως. Δι' ἐπιτάχυνσιν 1,25 m/s^2 ποία ἡ δύναμις S εἰς τὴν ἄλυσιν εἰς kp;

Ἡ δύναμις εἰς τὴν ἄλυσιν δίδεται ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ βάρους G καὶ τῆς δυνάμεως ἐπιταχύνσεως, δηλαδὴ $F = m \cdot \gamma$, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἐκφράζει τὴν μᾶζαν εἰς kg ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος εἰς kp, δηλαδή:

$$\underset{N}{F} = \underset{kg}{800} \times \underset{m/s^2}{1{,}25} = 1000 \;\; N = 102 \; kp.$$

Ἡ συνολικὴ δύναμις εἰς τὴν ἄλυσιν εἶναι $S = [800 + 102]$ kp $= 902$ kp. Ἐπὶ μεγαλυτέρων φορτίων, οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται σκοπίμως εἰς τὰ χιλιαπλάσια μεγέθη t, Mp, kN.

3. Εἰς ἀνυψωτικὴν ἐγκατάστασιν κινουμένην διὰ τροχαλίας τὸ βάθος καθόδου εἶναι 500 m (σχ. 17·4 β), τὸ ὠφέλιμον φορτίον $Q = 21$ Mp, τὸ βάρος ἄνευ φορτίου $G_0 = 19$ Mp, τὸ δὲ ἀντίβαρον ἐκλέγεται οὕτως, ὥστε κατὰ τὴν μετὰ φορτίου καὶ ἄνευ φορτίου λειτουργίαν νὰ ἐμφανίζεται ἡ αὐτὴ διαφορὰ βαρῶν εἰς τοὺς κλάδους

τοῦ συρματοσχοίνου. Τὸ βάρος τοῦ συρματοσχοίνου ἰσοῦται πρὸς $G_s = 21{,}5$ Mp καὶ ἰσορροπεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ (σχ. 17·4 β). Ποία ἡ φόρτισις S_1 τοῦ συρματοσχοίνου δι' ὁμοιόμορφον κίνησιν καὶ ποία ἡ φόρτισις S_2 αὐτοῦ κατὰ τὴν ὑπὸ φορτίον ἐκκίνησιν μὲ ἐπιτάχυνσιν 1 m/s² (ἡ φόρτισις εἰς Mp).

Τὸ ἀντίβαρον προκύπτει ἐκ τῆς συνθήκης ἰσότητος διαφορᾶς φορτίων:

$$Q + Q_0 - G_g = G_g - G_0 \quad \text{ἤτοι} \quad 2G_g = 2G_0 + Q$$

$$\text{ἢ} \quad G_g = G_0 + Q/2 = 29{,}5 \text{ Mp}.$$

Κατὰ τὴν ὁμοιόμορφον διαδρομὴν ἡ δύναμις εἰς τὸ συρματόσχοινον εἶναι μόνον:

$$S_1 = Q + G_0 - G_g = Q - \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2} = 10{,}5 \text{ Mp},$$

διότι τὸ ἴδιον βάρος τοῦ συρματοσχοίνου ἐξισορροπεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Κατὰ τὴν ἐκκίνησιν προστίθενται ἡ δύναμις, ποὺ ἐπιταχύνει τὰς μάζας τοῦ ὠφελίμου φορτίου, τοῦ ἐν κενῷ βάρους, τοῦ ἀντιβάρου καὶ τοῦ συρματοσχοίνου. Αἱ μᾶζαι ἐκφράζονται ἀπ' εὐθείας εἰς t, ἐφ' ὅσον καὶ τὰ βάρη των ἐκφράζονται εἰς Mp:

$$G = Q + G_0 + G_g + G_s = 21 + 19 + 29{,}5 + 21{,}5 \text{ Mp} = 91 \text{ Mp},$$

$$m = 91 \text{ t}.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνεται ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις:

$$F = m \cdot \gamma = 91 \times 1 \text{ kN} = 91 \text{ kN} \approx 9{,}3 \text{ Mp}.$$

Ἡ δύναμις εἰς τὸ συρματόσχοινον κατὰ τὴν ἐκκίνησιν εἶναι:

$$S_2 = S_1 + F = 10{,}5 + 9{,}3 \text{ Mp} = 19{,}8 \text{ Mp}.$$

Συνεπῶς εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ καταπόνησις τοῦ συρματοσχοίνου κατὰ τὴν ἐκκίνησιν εἶναι περίπου διπλασία τῆς ὑπὸ συνθήκας ὁμοιομόρφου κινήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 18

ΕΡΓΟΝ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ

18·1 Μηχανικὸν ἔργον.

Μὲ τὸν ὅρον *μηχανικὸν ἔργον* (σύμβολον A) ὁρίζεται τὸ γινόμενον μιᾶς δυνάμεως F ἐπὶ τὴν διαδρομὴν s τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν κατεύθυνσίν της. Τὸ χρονικὸν διάστημα, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ὁποίου ἐπιτελεῖται τὸ ἔργον, οὐδεμίαν ἀσκεῖ ἐπίδρασιν. Συνεπῶς τὸ ἔργον εἶναι ἔννοια ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου.

Ἀναλυτικῶς ἡ σχέσις ἐκφράζεται :

$$\boxed{A = F \cdot s}$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν προϋποτίθεται ὅτι ἡ δύναμις κατὰ μῆκος τῆς διαδρομῆς s παραμένει σταθερὰ ἢ ὅτι τὸ F παριστᾶ τὴν μέσην τιμὴν τῆς δυνάμεως κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου s.

Μονὰς ἔργου εἰς τὸ Διεθνὲς Σύστημα Μονάδων εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐπιτελεῖ δύναμις 1 N ἐπὶ διαδρομῆς 1 m, ἐπομένως $1\,\mathrm{N} \cdot 1\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Nm}$ ἢ 1 Joule * (συντομογραφικῶς J).

Μονὰς ἔργου: $1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{J}$ **

Διὰ τῆς χρήσεως τῆς μονάδος δυνάμεως kp λαμβάνεται ὡς μονὰς ἔργου : $1\,\mathrm{kp} \times 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{kpm}$.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο μονάδων προκύπτει ἀπὸ τὴν σχέσιν μεταξὺ N καὶ kp :

$$1\ \mathrm{kpm} = 9{,}81\ \mathrm{Nm} = 9{,}81\ \mathrm{Joule}.$$

Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $A = F \cdot s$, τὸ αὐτὸ ἔργον δύναται νὰ ληφθῇ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ μεγάλης δυνάμεως ἐπὶ μικρὰν ἀπόστασιν ἢ μικρᾶς δυνάμεως ἐπὶ μεγάλην ἀπόστασιν. Ἡ διαπίστωσις αὐτὴ χρησιμοποιεῖται κατὰ τὴν μεταφορὰν δυνάμεως. (Περισσότεραι λεπτομέρειαι δίδονται εἰς τὸ τελευταῖον κεφάλαιον). Ὅπως διακρίνον-

* Ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ γαλλικῆς καταγωγῆς ἄγγλου φυσικοῦ J. P. Joule.

** Πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως πρὸς τὴν ὁμοδιάστατον ῥοπὴν Nm, θὰ χρησιμοποιῆται εἰς τὰ ἑπόμενα διὰ τὴν μονάδα ἔργου τοῦ Δ.Σ. πάντοτε ἡ ὀνομασία J.

ται τὰ διάφορα εἴδη δυνάμεων, ἔτσι διακρίνονται καὶ αἱ διάφοροι μορφαὶ ἔργου, π.χ.:

Ἔργον ἐπιταχύνσεως (πρὸς ἐπιτάχυνσιν μάζης).

Ἔργον ἀνυψώσεως (πρὸς ἀνύψωσιν βάρους ἀντιθέτως πρὸς τὴν βαρύτητα).

Ἔργον τριβῆς (πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς ἀντιστάσεως τριβῆς).

Ἔργον τανύσεως (πρὸς τάνυσιν ἐλατηρίου).

Ἔργον συμπιέσεως (πρὸς συμπίεσιν ἀερίου).

Ὡρισμένα ἐξ αὐτῶν θὰ ἀναπτυχθοῦν συντόμως κατωτέρω:

α) Ἔργον ἐπιταχύνσεως.

Τὸ ἔργον ἐπιταχύνσεως παράγεται, ὅταν ἓν σῶμα ἀχθῇ ἀπὸ τῆς ταχύτητος υ_0 εἰς τὴν ταχύτητα υ κατὰ τὴν διάρκειαν διαδρομῆς s αὐτοῦ. Διὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν τὸ διάστημα δίδεται ἐκ τοῦ τύπου $s = (\upsilon + \upsilon_0)/2 \cdot t$ καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις ἐκ τοῦ τύπου $\gamma = (\upsilon - \upsilon_0)/t$ καὶ συνεπῶς τὸ ἔργον εἶναι:

$$A = F \cdot s = m \cdot \gamma \cdot s = m \cdot \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \times \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \cdot t = \frac{m}{2}(\upsilon^2 - \upsilon_0^2).$$

Παράδειγμα.

Ὄχημα σιδηροδρόμου βάρους 600 Mp πρέπει ἐντὸς ἡμίσεος λεπτοῦ ἀπὸ τῆς ταχύτητος τῶν 15 km/h νὰ φθάσῃ εἰς τὴν ταχύτητα τῶν 75 km/h. Ποῖον τὸ ἔργον ἐπιταχύνσεως;

Λύσις: $\upsilon_0 = \frac{15}{3,6} = 4,16 \text{ m/s}, \qquad \upsilon = \frac{75}{3,6} = 20,8 \text{ m/s}.$

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{20,8 - 4,16}{30} \text{ m/s}^2 = \frac{16,64}{30} \text{ m/s}^2 = 0,555 \text{ m/s}^2,$$

$$F = m \cdot \gamma = 600 \times 0,555 \text{ kN} = 333 \text{ kN} = 34 \text{ Mp},$$

$$s = (\upsilon + \upsilon_0)\frac{t}{2} = \frac{75 + 15}{3,6} \times \frac{30}{2} \text{ m} = \frac{90 \times 30}{7,2} \text{ m} = 375 \text{ m},$$

$$A = F \cdot s = 333 \times 10^3 \times 375 \text{ J} = 125 \times 10^6 \text{ J}$$

$$= 34 \times 10^3 \times 375 \text{ kpm} = 12,75 \times 10^6 \text{ kpm}.$$

ἢ :

$$A = \frac{m}{2}(\upsilon^2 - \upsilon_0^2) = \frac{600 \times 10^3}{2}(20,8^2 - 4,16^2) \text{ J} =$$

$$= 300 \times 10^3 (433 - 17) \text{ J} = 125 \times 10^6 \text{ J} = 12,75 \times 10^6 \text{ kpm}.$$

β) Ἔργον ἀνυψώσεως.

Ἐπειδὴ ἡ πρὸς ἀνύψωσιν σώματος ἀπαιτουμένη δύναμις ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος του, τὸ ἔργον ἀνυψώσεως εἰς ὕψος h εἶναι:

$$\boxed{A = G \cdot h}$$

Παράδειγμα.

Ποῖον εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον καταναλίσκει ὀρειβάτης, ὅταν ἀνέλθῃ ὑψομετρικὴν διαφορὰν 1000 m;

Λύσις:

Προκειμένου περὶ ὀρειβάτου βάρους 75 kp (μέσον βάρος ἀνθρωπίνου σώματος) καταναλίσκεται ἔργον:

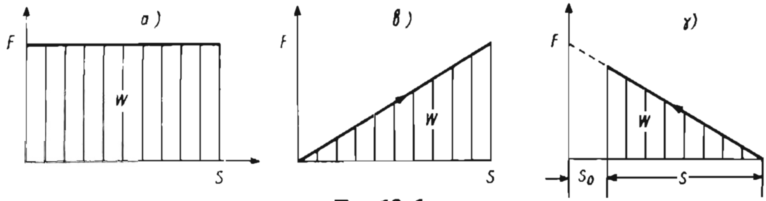
$$A = G \cdot h = 75 \times 1000 \text{ kpm} = 75\,000 \text{ kpm} = 75 \text{ Mpm}.$$

Πρὸς ἐπεξήγησιν ἑνὸς παρομοίου ἔργου ἐπιχειρεῖται συχνὰ ἡ ἐξίσωσίς του πρὸς τὸ ἔργον τῆς ἀνυψώσεως ἑνὸς γιγαντιαίου βάρους εἰς μικρὸν ὕψος. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν π.χ. τὸ ἔργον ἀνυψώσεως 75 Mpm θὰ ἐξισοῦτο πρὸς τὸ ἔργον ἀνυψώσεως 75 Mp (περίπου ἑνὸς βαρέος σιδηροδρομικοῦ ὀχήματος) εἰς ὕψος 1 m. Ἡ σύγκρισις ὅμως αὐτὴ εἶναι ἐκτὸς πραγματικότητος, διότι ἡ ἀνθρωπίνη δύναμις δὲν ἐπαρκεῖ διὰ τὴν ἀνύψωσιν 75 Mp.

Αἱ μέχρι τοῦδε ἐξετασθεῖσαι περιπτώσεις προϋπέθετον σταθερὰν δύναμιν. Ἐὰν χαραχθῇ εἰς διάγραμμα ἡ δύναμις ὡς πρὸς τὸν δρόμον, προκύπτει ὀρθογώνιον [σχ. 18·1 α (α)], τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖ μέτρον τοῦ ἔργου. Ἐὰν δὲν παραμένῃ σταθερὰ ἡ δύναμις κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δρόμου, ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἔργον, λαμβάνει μορφὴν διάφορον τῆς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση τιμὴ τῆς δυνάμεως. Δύο ἀνάλογοι περιπτώσεις θὰ ἐξετασθοῦν κατωτέρω.

γ) Ἔργον ἐλατηρίου.

Κατὰ τὴν τάνυσιν ἢ τὴν συμπίεσιν ἐλατηρίου ἡ δύναμις αὐξάνεται κατ' εὐθεῖαν ἀναλογίαν πρὸς τὴν διαδρομὴν τοῦ ἄκρου του. Ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία παριστᾷ τὸ ἔργον εἶναι τριγωνικὴ (*Διάγραμμα ἐλατηρίου*). Τὸ διάγραμμα ἐλατηρίου ἕλξεως δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 18·1 α (β), ἑνὸς δὲ ἐλατηρίου συμπιέσεως δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 18·1 α (γ). Τὸ ὅριον τῆς συμπιεστότητος ἐλατηρίου συμπιέσεως εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν, ὅπου ἑκάστη σπεῖρα ἐφάπτεται πρὸς τὰς γειτονικάς της (s_0).



Σχ. 18·1 α.

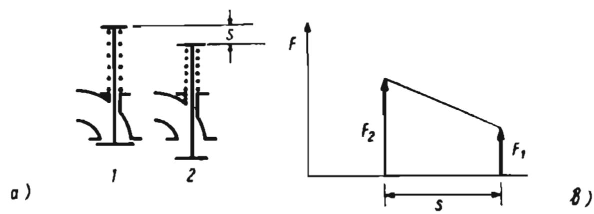
Ἡ διὰ ἐπιφανείας παράστασις ἔργου ($A = F \cdot s$): α) Σταθερὰ δύναμις. β) Ἐλατήριον ἕλξεως. γ) Ἐλατήριον συμπιέσεως.

Τὸ ἔργον τανύσεως εἶναι:

$$A = F_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} \cdot s = \frac{1}{2} F_{max} \cdot s.$$

Παράδειγμα.

Ἐλατήριον βαλβῖδος, ποὺ λειτουργεῖ ὡς ἐλατήριον συμπιέσεως [σχ. 18·1 β (α)] εἶναι ἐγκατεστημένον μὲ προένταδιν $F_1 = 4$ kp καὶ



Σχ. 18·1 β.

Ἐλατήριον βαλβῖδος: α) Διάταξις. β) Διάγραμμα ἐλατηρίου.

κατὰ τὸ ἄνοιγμα τῆς βαλβῖδος συμπιέζεται ἐπὶ πλέον κατὰ $s = 1{,}5$ cm, ἐνῶ ἡ δύναμις συμπιέσεώς του ἀνέρχεται εἰς $F_2 = 8$ kp. Ποῖον τὸ ἀπαιτούμενον ἔργον διὰ τὸ ἄνοιγμα τῆς βαλβῖδος;

Λύσις:

Τὸ διάγραμμα ἔργου τοῦ ἐλατηρίου ἐμφανίζεται ὡς τραπέζιον [σχ. 18·1 β (β)], τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἔργον συμπιέσεως:

$$A = \frac{F_2 + F_1}{2} \cdot s = \frac{8 + 4}{2} \times 1{,}5 \text{ kpcm} = 9 \text{ kpcm}.$$

18·2 Ἰσχύς.

Ὅταν ὑπολογισθῇ καὶ ὁ χρόνος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου παρήχθη ἢ κατηναλώθη ἔργον, λαμβάνεται ἡ ἔννοια τῆς *ἰσχύος* (σύμβολον P). Ὅσον συντομώτερος εἶναι ὁ χρόνος, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἰσχὺς (π.χ. βραδεῖα καὶ ταχεῖα ἄνοδος κλίμακος). Συνεπῶς ἡ ἰσχὺς ὁρίζεται διὰ τοῦ λόγου:

$$\text{Ἰσχὺς } P = \frac{\text{Ἔργον } A}{\text{Διάρκεια ἔργου } t}$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$\boxed{P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t}}$$

Ἕνας ἐκ τῶν δύο παραγόντων F καὶ s δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸν χρόνον, οὕτω δὲ ἐμφανίζονται δύο ἀκόμη ὁρισμοὶ τῆς ἰσχύος ὑπὸ ὁμαλὴν κίνησιν:

α) $P = F \cdot \frac{s}{t} = F \cdot \upsilon$ (δύναμις $\times$ ταχύτητα).

β) $P = \frac{G}{t} \cdot h = G_s \cdot H$ (βάρος ἀνὰ μονάδα χρόνου $\times$ ὕψος).

Ἡ τελευταία σχέσις βοηθεῖ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἰσχύος ὑδατοπτώσεων (H = ὕψος ὑδατοπτώσεως) καὶ ἀντλιῶν (H = ὕψος παροχῆς).

Ἡ μονὰς τῆς ἰσχύος βάσει τῶν μονάδων τοῦ Δ.Σ. (Newton καὶ Joule) εἶναι:

$$1\ \text{Nm/s} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{Watt (W)}^{*}\ 1\ \text{Βάττ}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ μονὰς αὐτὴ εἶναι εἰς τὴν πρᾶξιν πολὺ μικρά, συνήθως λαμβάνεται εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τὸ 10^3 Watt = 1 kW ἀντιστοίχως πρὸς τὴν δύναμιν 10^3 N = 1 kN.

Ἑπομένως:

$$\boxed{P = F \cdot \upsilon}$$

$$\text{kW} = \underbrace{\text{kN} \cdot \text{m/s}}_{\text{kJ/s}}$$

* Ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ ἄγγλου φυσικοῦ J. Watt.

Διὰ χρήσεως τῆς μονάδος δυνάμεως kp, ἡ ἰσχὺς λαμβάνεται εἰς kpm/s.

Εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς μηχανολογίας λαμβάνεται μία ἀκόμη μεγαλυτέρα μονάς, ἤτοι 75 kpm/s = 1 ἵππος (PS).

Αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων μονάδων ἰσχύος εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

$$1\ \mathrm{N} = 0{,}102\ \mathrm{kp}$$

συνεπῶς $1\ \mathrm{Nm/s} = 0{,}102\ \mathrm{kpm/s} = 1\ \mathrm{W}$

ἢ $1\ \mathrm{kNm/s} = 102\ \mathrm{kpm/s} = 1\ \mathrm{kW}$

ἀντιστοίχως $75\ \mathrm{kpm/s} = 1\ \mathrm{PS}$

$$\left.\begin{array}{r} 1\ \mathrm{kNm/s} = 102\ \mathrm{kpm/s} = 1\ \mathrm{kW} \\ 75\ \mathrm{kpm/s} = 1\ \mathrm{PS} \end{array}\right\}\ 1\ \mathrm{kW} = 1{,}36\ \mathrm{PS}.$$

Ἀντιπαραβολὴ μονάδων ἔργου καὶ ἰσχύος προερχομένων ἐκ τῶν δύο μονάδων δυνάμεως

	Νιοῦτον	Κιλοπόντ
Δύναμις	1 N	1 kp = 9,81 N
Ἔργον	1 Nm = 1 J	1 kpm = 9,81 J
Ἰσχὺς	1 Nm/s = 1 J/s = 1 W	1 kpm/s = 9,81 W
Μεγαλύτεραι μονάδες:		
Δύναμις	102 kp	= 1 kW
Ἔργον	102 kpm	= 1 kJ
Ἰσχὺς	102 kpm/s	= 1 kW
	(75 kpm/s = 0,736 kW = 1 PS)	

Ὅπως ἀπὸ τὸ ἔργον προκύπτει ἡ ἰσχύς, δύναται ἀντιστρόφως καὶ τὸ ἔργον νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῆς ἰσχύος. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἡ ἰσχὺς ἐπὶ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον συνετελέσθη τὸ ἔργον. Ἤτοι:

$$\boxed{A = P \cdot t}$$

Ἀντιστοίχως δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῆς μονάδος ἔργου εἰς:

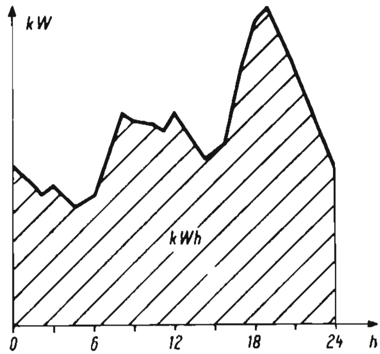
1 J = Ws (Βάττ-δευτερόλεπτον)

Εἰς τὴν Τεχνικὴν λαμβάνονται μεγαλύτεραι μονάδες κατὰ τὸν ὑπολογισμόν, δηλαδὴ ἡ kWh (κιλοβαττώρα) καὶ ὁ PSh (ὡριαῖος ἵππος):

$$1 \text{ kWh} = 3600 \times 10^3 \text{ Ws} = 3{,}6 \times 10^6 \text{ J} = 3600 \times 102 \text{ kpm} =$$
$$= 367\,200 \text{ kpm}$$

$$1 \text{ PSh} = 3600 \times 736 \text{ Ws} = 2{,}65 \times 10^6 \text{ J} = 3600 \times 75 \text{ kpm} =$$
$$= 270\,000 \text{ kpm}.$$

Ἐὰν χαραχθῇ εἰς διάγραμμα ἡ ἰσχὺς συναρτήσει τοῦ χρόνου, τὸ ὑπὸ τὴν καμπύλην P - t ἐμβαδὸν παριστᾷ ἔργον. Τὸ σχῆμα 18·2



Σχ. 18·2.
Ἡ δι' ἐμβαδοῦ ἐπιφανείας παράστασις ἔργου: (A = P · t).

παριστᾷ τὸ ἡμερήσιον διάγραμμα ἰσχύος ἠλεκτροπαραγωγοῦ μονάδος, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ὑπὸ τὴν καμπύλην ἐμβαδὸν ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ ἠλεκτρικὸν ἔργον εἰς kWh, ποὺ παρήχθη κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας.

Ἡ σχέσις $P = F \cdot \upsilon$ μᾶς δεικνύει ὅτι ἡ αὐτὴ ἡ ἰσχὺς δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ μικρᾶς δυνάμεως καὶ μεγάλης ταχύτητος ἢ μεγάλης δυνάμεως καὶ μικρᾶς ταχύτητος.

Παραδείγματα.

1. Ἠλεκτροκίνητον σιδηροδρομικὸν ὄχημα ἕλξεως ἔχει ἰσχὺν κινητῆρος περίπου 4000 kW. Ποίαν ἑλκτικὴν δύναμιν ἀναπτύσσει ὑπὸ ταχύτητα 100 km/h; Ποίας μορφῆς εἶναι ἡ συνάρτησις $F = f(\upsilon)$;

Ὅταν $P = 4000$ kW καὶ $\upsilon = 27{,}8$ m/s, λαμβάνεται ἡ δύναμις εἰς kN:

$$F = \frac{P}{\upsilon}, \quad \frac{4000\ kW}{27{,}8\ m/s} = 144\ kN = 14{,}7\ Mp\,*.$$

Διὰ σταθερὰν ἰσχὺν $P = 4000$ kW, εἶναι $F \cdot \upsilon =$ σταθερόν. Ἡ σχέσις παρίσταται δι' ὑπερβολῆς (ὑπερβολὴ ἕλξεως).

2. Ἀνυψωτικὴ μηχανὴ ὀρυχείου ἀνυψώνει φορτίον 11 Mp ὑπὸ ταχύτητα 20 m/s. Ποία ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς;

$$P = G \cdot \upsilon = 11\,000\ kp \cdot 20\ m/s = 220\,000\ kpm/s =$$
$$= 2940\ PS = 2160\ kW.$$

Ἢ μὲ F εἰς kN:

$$P = F \cdot \upsilon = 9{,}81 \times 11 \times 20\ kW = 2160\ kW.$$

3. Ποίαν ἰσχὺν ἀναπτύσσει ὁ ἄνθρωπος;

α) Κατὰ τὴν περιστροφὴν χειροστροφάλου ἀκτῖνος 400 mm διὰ δυνάμεως 15 kp καὶ 30 στρ/min;

β) Κατὰ τὴν ἀναρρίχησιν διαφορᾶς ὑψομέτρου 1000 m εἰς 2,5 ὥρας;

γ) Κατὰ τὴν ταχεῖαν ἄνοδον κλίμακος, ἐὰν κατὰ δευτερόλεπτον διανύωνται ἓξ σκαλοπάτια, ποὺ τὸ καθένα ἔχει ὕψος 17 cm (βάρος σώματος 75 kp);

α) $$u = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60} = \frac{0{,}8\pi \cdot 30}{60}\ m/s = 0{,}4\,\pi\ \ m/s = 1{,}26\ m/s,$$

$$P = F \cdot u = 15 \times 1{,}26\ kpm/s = 18{,}9\ kpm/s = 0{,}25\ PS.$$

β) $$P = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{75 \times 1000}{2{,}5 \times 3600}\ kpm/s = 8{,}33\ kpm/s = 0{,}11\ PS.$$

γ) $$P = G \cdot \upsilon = 75\ (6 \times 17)\ kpm/s = 76{,}5\ kpm/s \approx 1\ PS.$$

Τὸ τελευταῖον ἐρώτημα (γ) ἀνταποκρίνεται εἰς μίαν μεγίστην τιμήν, ποὺ ἰσχύει διὰ μικρὰν χρονικὴν διάρκειαν. Προκειμένου περὶ μακροτέρου χρόνου ὁ ἄνθρωπος δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ περίπου τὰ ἑξῆς:

Δύναμιν ἐπὶ χειροστροφάλου	περίπου	10 ... 15 kp,
ἑλκτικὴν δύναμιν ἐπὶ ἁλύσεως	περίπου	20 ... 25 kp,
ἰσχὺν	περίπου	0,1 ... 0,2 PS $\approx$ 0,1 kW.

* Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τῆς ἑλκτικῆς δυνάμεως πρὸς τὴν εἰς τὸ παράδειγμα τῆς παραγράφου 11·10 ὑπολογισθεῖσαν ἀντίστασιν κινήσεως ταχείας ἁμαξοστοιχίας (1,5 Mp), εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ δύναμις ἕλξεως τοῦ κινητηρίου ὀχήματος οὐδέποτε ἀξιοποιεῖται πλήρως κατὰ τὴν ὁριζοντίαν πορείαν, ἀλλὰ μόνον κατὰ τὴν ἀνωφερικὴν κίνησιν.

18·3 Ροπὴ στρέψεως καὶ ἰσχύς.

Κατὰ τὴν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν ἡ περιφερικὴ ταχύτης εἶναι:

$$u = r \cdot \omega.$$

Ἐὰν τεθῇ ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσχύος, λαμβάνεται

$$P = F \cdot u = F \cdot r \cdot \omega = M \cdot \omega,$$

διότι $F \cdot r = M$ εἶναι ἡ *ροπὴ στρέψεως*.

Διὰ τὴν μονάδα δυνάμεως N ἢ kN εἶναι:

$$\boxed{P = M \cdot \omega}$$

$$kW = kNm \cdot s^{-1}$$

Διὰ τὴν μονάδα δυνάμεως kp λαμβάνεται:

$$P = M \cdot \omega \text{ kpm/s} \quad \text{ἢ} \quad \frac{M \cdot \omega}{75} \text{ PS} \quad \text{ἢ} \quad \frac{M \cdot \omega}{102} \text{ kW}.$$

Εἰς τὴν μηχανολογίαν χρησιμοποιεῖται συνήθως μία σχέσις συνδέουσα τὴν ροπὴν στρέψεως, τὴν ἰσχὺν καὶ τὸν ἀριθμὸν στροφῶν.

Μὲ μονάδα δυνάμεως kN, μονάδα ἰσχύος kW καὶ ἀριθμὸν στροφῶν n στρ/min λαμβάνονται:

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{\pi \cdot n}{30}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot \frac{P}{n} \left(\approx 10 \frac{P}{n} \right).$$

Ἐὰν τεθῇ ἡ ροπὴ M εἰς kpm ἀντὶ εἰς kNm, προκύπτει:

$$M = 102 \times 9{,}55 \cdot \frac{P}{n} = 973{,}5 \cdot \frac{P}{n} \left(\approx 1000 \frac{P}{n} \right).$$

Θέτοντες τελικῶς τὴν ἰσχὺν P εἰς PS ἀντὶ kW, λαμβάνομεν τὴν εὐρείας χρήσεως σχέσιν:

$$M = \frac{973{,}5}{1{,}36} \cdot \frac{P}{n} = 716{,}2 \frac{P}{n},$$

ἢ διὰ χρήσεως τοῦ ἐπίσης συνήθους συμβόλου N διὰ τὴν ἰσχύν:

$$M = 716{,}2 \, N/n$$

$$\text{kpm} \qquad \text{PS/min}^{-1}$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ροπῆς στρέψεως εἶναι ἀναγκαῖος, διότι βάσει αὐτῆς προσδιορίζονται αἱ διαστάσεις ἀξόνων, συνδέσμων κ.ἄ., ὡς χαρακτηριστικὰ δὲ ἑκάστης μηχανῆς δίδονται συνήθως ἡ ἰσχὺς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν της.

Παράδειγμα.

Διὰ ποίαν ροπὴν στρέψεως πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ σύνδεσμος συγκροτήματος ἀτμοστροβίλου (ἀτμοστρόβιλος + γεννήτρια), ὁ ὁποῖος μεταφέρει τὴν ἰσχὺν $P = 20\,000$ kW ὑπὸ $n = 3000$ στρ/min;

Λύσις:

Εἴτε:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3000\,\pi}{30}\ s^{-1} = 100\,\pi \cdot s^{-1},$$

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{20\,000}{100\,\pi}\ \text{kNm} = 63{,}7\ \text{kNm} = 6{,}5\ \text{Mpm}.$$

Εἴτε:

$$M = 9{,}55 \cdot \frac{P}{n} = 9{,}55 \times \frac{20\,000}{3000}\ \text{kNm} = 63{,}7\ \text{kNm} = 6{,}5\ \text{Mpm}$$

ἢ

$$M = 716{,}2 \times \frac{1{,}36 \times 20\,000}{3000}\ \text{kpm} = 6500\ \text{kpm} = 6{,}5\ \text{Mpm}.$$

18·4 Ροπή, ἔργον καὶ ἰσχὺς τριβῆς.

α) Ροπὴ τριβῆς.

Διὰ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν εἶναι προτιμότερον νὰ γίνεται ὁ ὑπολογισμὸς μὲ τὴν ροπὴν τριβῆς $M_R = R \cdot r$, ἀντὶ τῆς δυνάμεως τριβῆς R. Τοῦτο θὰ δειχθῇ εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα.

1. Ὁ συμπλέκτης συγκροτήματος ἀτμοστροβίλου (στροβίλου + γεννητρίας) πρέπει νὰ μεταφέρῃ ἰσχὺν $P = 110$ MW ὑπὸ 3000 στρ/min. Τὰ ἡμίση τοῦ συμπλέκτου συμπιέζονται μεταξύ των, διὰ δώδεκα κοχλιῶν, ἐπὶ διαμέτρου $d_L = 490$ mm κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ περιφερικὴ δύναμις νὰ παραλαμβάνεται διὰ τῆς προσφύσεως ($\mu_0 = 0{,}25$), χωρὶς νὰ καταπονοῦνται οἱ κοχλίαι εἰς διάτμησιν. Ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ παραλαμβάνῃ ἕκαστος κοχλίας; (Χάριν ἀσφαλείας λαμβάνεται ἡ ροπὴ τριβῆς 50% μεγαλυτέρα τῆς πρὸς μεταφορὰν ροπῆς):

$$M_{R0} = 1{,}5\ M_t \qquad R_0 = \frac{M_{R0}}{r}, \qquad N = \frac{R_0}{\mu_0} = \frac{M_{R0}}{\mu_0 r}$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3000\,\pi}{30}\ s^{-1} = 314\ s^{-1}$$

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{110\ 000}{314}\ \text{kNm} = 350\ \text{kNm} = 35\ 700\ \text{kpm}.$$

$$(\text{ἤ} : M_t = 9{,}55\,\frac{P}{n} = 9{,}55 \times \frac{110\ 000}{3000}\ \text{kNm} = 350\ \text{kNm},$$

$$\text{ἤ} : M_t = 973{,}5\,\frac{P}{n} = 973{,}5 \times \frac{110\ 000}{3000}\ \text{kpm} = 35\ 700\ \text{kpm}),$$

$$M_{R0} = 1{,}5 \cdot M_t = 53\ 550\ \text{kpm}, \quad N = \frac{53\ 550}{0{,}25 \times 0{,}245} = 874\ 000\ \text{kp}.$$

Εἰς ἕκαστον κοχλίαν ἀντιστοιχεῖ φορτίον 874 000/12 ≈ 73 000 kp. Οἱ χρησιμοποιούμενοι κοχλίαι εἶναι ἐκ χάλυβος ὑψηλῆς ἀντοχῆς, διαμέτρου περίπου 70 mm.

2. Οἱ κινητήριοι τροχοὶ τετραξονικοῦ ἠλεκτροκινήτου ὀχήματος ἕλξεως (ἀξονικοῦ φορτίου 20 Mp) ἔχουν διάμετρον 1250 mm. Ποίαν ῥοπὴν τριβῆς δύνανται νὰ μεταφέρουν ὑπὸ ταχύτητα 100 km/h, ἐὰν διὰ τὸν συντελεστὴν μ_0 ἰσχύῃ ἡ ἀκόλουθος σχέσις:

$$\mu_0 = 0{,}161 + \frac{2{,}08\ m/s}{1{,}22\ m/s + \upsilon}.$$

Ποία ἡ σχέσις αὐτῆς τῆς ῥοπῆς τριβῆς ὡς πρὸς τὴν ῥοπὴν τοῦ κινητῆρος (ἰσχὺς κινητῆρος περίπου 4000 kW);

$$\upsilon = \frac{100}{3{,}6}\ m/s = 27{,}8\ m/s, \qquad \mu_0 = 0{,}161 + \frac{2{,}08}{29{,}02} =$$
$$= 0{,}161 + 0{,}072 = 0{,}233.$$

Διὰ τοὺς τέσσαρας ἄξονας μαζὶ εἶναι:

$$R_0 = \mu_0 N = 0{,}233 \times 80\ \text{Mp} = 18{,}64\ \text{Mp}.$$

$$M_{R0} = R_0\frac{D}{2} = 18\ 640 \times \frac{1{,}25}{2}\ \text{kpm} = 11\ 650\ \text{kpm},$$

$$M_t = \frac{P}{\omega}, \qquad \omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{27{,}8}{0{,}625}\ s^{-1} = 44{,}5\ s^{-1},$$

$$M_t = \frac{4000}{44{,}5} \approx 90\ \text{kNm} = 9180\ \text{kpm}.$$

Ἡ διὰ τῆς τριβῆς δυναμένη νὰ μεταφερθῆ ροπὴ στρέψεως εἶναι περίπου 25% μεγαλυτέρα τῆς ροπῆς στρέψεως τοῦ κινητῆρος, οὕτω δὲ ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας δὲν γίνεται ὑπέρβασις τοῦ ὁρίου ὀλισθήσεως.

β) Ἔργον καὶ ἰσχὺς τριβῆς.

Ὑπὸ τὴν παρουσίαν τριβῆς ὀλισθήσεως ἡ ἀντίστασις τριβῆς καταναλίσκει κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου s ἔργον ἢ ὑπὸ ταχύτητα υ ἰσχύν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ προσδοθῆ (ἀπὸ ἄλλην πηγήν):

Ἔργον τριβῆς $\quad A_R = R \cdot s,$

Ἰσχὺς τριβῆς $\quad P_R = R \cdot \upsilon = M_R \cdot \omega.$

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν θεωρεῖται ἡ ταχύτης υ ἢ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω σταθερά. Ὑπὸ μεταβαλλομένας υ καὶ ω λαμβάνονται αἱ μέσαι τιμαὶ υ_m καὶ ω_m.

Ἡ ἰσχὺς τριβῆς ἀποτελεῖ πηγὴν «μηχανικῶν» ἀπωλειῶν τῶν μηχανῶν (τριβὴ τῶν ἐλατηρίων ἐμβόλου καὶ τοῦ ζυγώματος, τριβὴ ἑδράνων καὶ τοῦ συστήματος διευθύνσεως), αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται διὰ τοῦ μηχανικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως.

Παράδειγμα.

Τὰ ἀκραξόνια ἄξονος περιστρεφομένου μὲ 90 στρ/min φορτίζονται διὰ δυνάμεως $A = 2800$ kp καὶ $B = 4200$ kp. Αἱ διάμετροί των εἶναι $d_A = 160$ mm καὶ $d_B = 200$ mm. Ποῖαι αἱ ἀπώλειαι τριβῆς εἰς τὰ ἕδρανα, ὅταν $\mu_Z = 0{,}08$;

Λύσις:

Εἴτε:

$$P_R = R_A \cdot u_A + R_B \cdot u_B \quad \text{ἢ} \quad P_R = (M_{RA} + M_{RB}) \cdot \omega.$$

Εἴτε ὅταν:

$$u = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \quad \text{καὶ} \quad R = \mu_Z N:$$

$$u_A = \frac{0{,}16\pi \cdot 90}{60}\ \text{m/s} = 0{,}75\ \text{m/s}, \quad u_B = \frac{0{,}2}{0{,}16}\, u_A = 0{,}94\ \text{m/s},$$

$$P_R = \mu_Z\,(A \cdot u_A + B \cdot u_B) = 0{,}08\,(2800 \times 0{,}75 + 4200 \times 0{,}94)\ \text{kpm/s},$$

$$P_R = 0{,}08\,(2100 + 3950)\ \text{kpm/s} = 484\ \text{kpm/s},$$

ἢ ὅταν:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{90\,\pi}{30}\ s^{-1} = 9{,}42\ s^{-1} \qquad \text{καὶ} \qquad M_R = \mu_Z\, N \cdot r :$$

$$r_A = d_A / 2$$

$$P_R = \mu_Z\ (A \cdot r_A + B \cdot r_B)\ \omega =$$

$$= 0{,}08 \times (2800 \times 0{,}08 + 4200 \times 0{,}1) \times 9{,}42\ \text{kpm/s},$$

$$P_R = 0{,}08\ (224 + 420) \times 9{,}42\ \text{kpm/s} = 485\ \text{kpm/s}.$$

Συνεπῶς ἡ ἰσχὺς τριβῆς ἰσοῦται πρός:

$$P_R = 6{,}5\ \text{PS} = 4{,}8\ \text{kW}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 19

ΒΑΘΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΕΩΣ

Κατὰ τὴν μεταφορὰν δυνάμεων, ἔργου καὶ ἰσχύος ἐμφανίζονται πάντοτε ἀπώλειαι (μηχανικαί, ἠλεκτρικαί, θερμότητος κ.ἄ.). Ἑπομένως μόνον μέρος τῆς εἰς μηχανὴν προσδιδομένης ἐνεργείας ἀποδίδεται ὡς ὠφέλιμος ἐνέργεια, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπον δαπανᾶται πρὸς κάλυψιν τῶν ἀπωλειῶν. Συνεπῶς εἶναι:

Προσδιδομένη ἐνέργεια = ὠφέλιμος ἐνέργεια + ἀπώλειαι ἐνεργείας.

Μία μηχανὴ εἶναι τόσον καλυτέρα, ὅσον μικροτέρας ἀπωλείας ἔχει ἢ ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ σχέσις τῆς ὠφελίμου ἐνεργείας πρὸς τὴν προσδιδομένην ἐνέργειαν. Ἡ σχέσις αὐτὴ ὀνομάζεται *βαθμὸς ἀποδόσεως* (σύμβολον η). Γενικῶς ὁρίζεται:

$$\boxed{\text{Βαθμὸς ἀποδόσεως } \eta = \frac{\text{Ὠφέλιμος ἐνέργεια}}{\text{προσδιδομένη ἐνέργεια}}}$$

Εἰδικαὶ περιπτώσεις π.χ.:

$$\eta = \frac{\text{Ὠφέλιμος δύναμις}}{\text{προσδιδομένη δύναμις}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{Ὠφέλιμον ἔργον}}{\text{προσδιδόμενον ἔργον}}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\text{Ὠφέλιμος ἰσχὺς}}{\text{προσδιδομένη ἰσχὺς}}.$$

Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις τὸ η δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς:

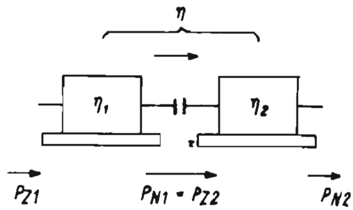
$$\eta = \frac{\text{Ὠφέλιμος ἰσχὺς}}{\text{θεωρητικὴ ἰσχύς}}.$$

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις εἶναι πάντοτε $\eta < 1$.

Ἐὰν περισσότεραι μηχαναὶ συνδέωνται ἐν σειρᾷ, ὁ συνολικὸς βαθμὸς ἀποδόσεως τῆς ἐγκαταστάσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μερικῶν βαθμῶν ἀποδόσεως:

$$\boxed{\eta_{\text{ὁλ}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdots}$$

Τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῆ εὐκόλως βάσει τοῦ σχήματος 19. Ἡ εἰς τὴν πρώτην μηχανὴν προσδιδομένη ἰσχὺς εἶναι P_{Z1}, ἡ ὠφέλιμος ἰσχύς της εἶναι P_{N1} καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν εἰς τὴν δευτέραν μηχανὴν προσδιδομένην ἰσχὺν P_{Z2}. Ἡ ἐκ τῆς δευτέρας μηχανῆς προερχομένη ὠφέλιμος ἰσχὺς εἶναι P_{N2}.



Σχ. 19.

Σύνδεσις μηχανῶν ἐν σειρᾷ.

Τὸ κλάσμα:

$$\frac{P_{N2}}{P_{Z1}} \qquad \text{διὰ} \qquad P_{Z2} = P_{N1}$$

δύναται νὰ γραφῆ:

$$\frac{P_{N2}}{P_{Z1}} = \frac{P_{N2}}{P_{Z2}} \cdot \frac{P_{N1}}{P_{Z1}} \qquad \text{ἄρα} \qquad \eta = \eta_2 \cdot \eta_1.$$

Παραδείγματα.

1. Ἠλεκτροπαραγωγὸς μονάς, ἡ ὁποία εἰς τὴν ἔξοδόν της ἔχει ἰσχὺν 20 000 kW ἀπαιτεῖ διὰ τὴν λειτουργίαν της μηχανικὴν ἰσχὺν (ἰσχὺς εἰς τὸν συμπλέκτην) 28 300 PS. Ποῖος ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τῆς ἠλεκτροπαραγωγοῦ μονάδος;

Ἐπειδὴ ἀμφότεραι αἱ ἰσχύες πρέπει νὰ ἐκφράζωνται διὰ τῶν αὐτῶν μονάδων, ἡ ἰσχὺς εἰς τὸν συμπλέκτην μετατρέπεται εἰς kW.

$$P_{\sigma\upsilon\mu\pi\lambda.} = \frac{28\,300}{1{,}36}\ \text{kW} = 20\,800\ \text{kW},$$

$$\eta = \frac{P_{\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho.}}{P_{\sigma\upsilon\mu\pi\lambda.}} = \frac{20\,000}{20\,800} \approx 0{,}96.$$

2. Ὁ ὑδροστρόβιλος ὑδροηλεκτρικοῦ σταθμοῦ παράγει ὠφέλιμον ἰσχὺν $P_N = 83\,200$ PS, ὑπὸ παροχὴν ὕδατος $Q = 8{,}4\ m^3/s$ καὶ ὕψος ὑδατοπτώσεως $H = 845$ m. Ποῖος ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ ὑδροστροβίλου;

Ἡ θεωρητικὴ ἰσχὺς ἐκ τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι διὰ $G_S = 8.4$

$Mp/s = 82,4\ kN/s$ καὶ συμφώνως πρὸς τὰ εἰς τὴν παράγραφον 18·2:

$$P_{θεωρ.} = G_S \cdot H = 82,4 \times 845\ kW = 69\,630\ kW,$$

$$η = \frac{P_N}{P_{θεωρ}} = \frac{83\,200/1,36}{69\,630} = 0,88.$$

3. Ὁ ὑδροστρόβιλος ὑδροηλεκτρικοῦ σταθμοῦ παράγει ὠφέλιμον ἰσχὺν 43 900 PS δι' ὕψος ὑδατοπτώσεως $H = 10,6$ m καὶ ὑπὸ βαθμὸν ἀποδόσεως 89%. Ποία ἡ διατιθεμένη παροχὴ ὕδατος;

Ἐκ τοῦ $P_N = P_{θεωρ} \cdot η = G_S \cdot H \cdot η$ προκύπτει:

$$G_S = \frac{P_N}{H \cdot η},$$

$$P_N = 43\,900\ PS = 32\,280\ kW.$$

$$G_S = \frac{32\,280}{10,6 \times 0,88}\ kN/s = 3470\ kN/s = 350\ Mp/s,$$

$$Q = 350\ m^3/s.$$

Βαθμὸς ἀποδόσεως στροβίλων περὶ τὰ 90% ἐπιτυγχάνεται μόνον εἰς μεγάλους στροβίλους, ἐνῶ διὰ στροβίλους μικροτέρας ἰσχύος ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως κυμαίνεται ἀπὸ 80 ἕως 85%.

Εἰς τοὺς στροβίλους ἡ μεγίστη ἀποδιδομένη ὠφέλιμος ἰσχὺς ($P = G_S \cdot H \cdot η$) εἶναι μικροτέρα τῆς θεωρητικῆς, ποὺ προσδίδεται ἀπὸ τὸ ὕδωρ.

Εἰς τὰς ἀντλίας ἡ ἀναγκαία προσδιδομένη ἰσχὺς κινήσεως ($P = G_S \cdot H/η$) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θεωρητικῆς ἰσχύος τῆς ἀντλίας.

4. Ἀντλία ὕδατος παροχῆς 450 m^3/h καὶ μανομετρικοῦ ὕψους 14 m ἔχει βαθμὸν ἀποδόσεως 75%. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη ἰσχὺς κινήσεώς της;

$$Q = \frac{450}{3600}\ m^3/s = 0,125\ m^3/s,$$

$$G_S = 0,125\ Mp/s = 1,23\ kN/s,$$

$$P = \frac{G_S H}{η} = \frac{1,23 \times 14}{0,75}\ kW = 23\ kW \approx 31\ PS.$$

5. Ἐπὶ τόρνου ὑφίσταται κατεργασίαν ἄξων διαμέτρου 250 mm. Ἡ κοπτικὴ δύναμις ἀνέρχεται εἰς 1,6 Mp καὶ ἡ ταχύτης εἰς 12 στρ/min. Ποίαν ἰσχὺν ἀπορροφεῖ ὁ ἠλεκτροκινητὴρ τοῦ τόρνου ἀπὸ τὸ δίκτυον, ἐὰν ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων ἀνέρ-

χεται εἰς $\eta_1 = 0{,}85$ καὶ τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἰς $\eta_2 = 0{,}90$;

Ἐὰν ἡ ἰσχὺς εἰς τὸ ὑπὸ κατεργασίαν τεμάχιον εἶναι $P_{\alpha\xi} = F \cdot \upsilon$, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἀπωλειῶν κιβωτίου ταχυτήτων καὶ ἠλεκτροκινητῆρος, ἡ παραλαβὴ ἰσχύος ἐκ τοῦ δικτύου θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς $P_{\alpha\xi}$, ἤτοι $P_\delta = P_{\alpha\xi} / \eta_1 \cdot \eta_2$.

Δύναμις κοπῆς:

$$F = 9{,}81 \times 1{,}6 \text{ kN} = 15{,}7 \text{ kN},$$

$$\upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{0{,}25\,\pi \cdot 12}{60} \text{ m/s} = 0{,}157 \text{ m/s},$$

$$P_\delta = \frac{F \cdot \upsilon}{\eta_1 \cdot \eta_2} = \frac{15{,}7 \times 0{,}157}{0{,}85 \times 0{,}9} \text{ kW} \approx 3{,}2 \text{ kW}.$$

6. Τὸ βαροῦλκον γερανοῦ ἀνυψωτικῆς δυνάμεως 50 Mp πρέπει νὰ ἀνυψώσῃ τὸ φορτίον τοῦτο μὲ ταχύτητα 3 m/min. Ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, ἐὰν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν οἱ ἀκόλουθοι βαθμοὶ ἀποδόσεως:

Πολυσπάστου 90%, τυμπάνου συρματοσχοίνου 96%, τριῶν κιβωτίων ταχυτήτων ἑκάστου 96%.

$$\eta_{o\lambda} = 0{,}9 \times 0{,}96 \times 0{,}96^3 = 0{,}76,$$

$$G = 50 \text{ Mp} = 491 \text{ kN},$$

$$\upsilon = 3 \text{ m/min} = 0{,}05 \text{ m/s}.$$

$$P = \frac{G \cdot \upsilon}{\eta_{o\lambda}} = \frac{491 \times 0{,}05}{0{,}76} \text{ kW} = 32{,}3 \text{ kW}.$$

ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟΝ

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΣ

Διὰ τὴν μετατροπὴν κινήσεως καὶ δυνάμεως χρησιμοποιοῦνται διάφοροι μηχανισμοί. Μὲ τὸν ὅρον αὐτὸν ἐννοοῦμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν κάθε διάταξιν πρὸς μετατροπὴν ἑνὸς ἀριθμοῦ στροφῶν εἰς ἕνα ἄλλον (μετάδοσις κινήσεως), ἀφ' ἑτέρου δὲ κάθε διάταξιν πρὸς δημιουργίαν ἐπιθυμητῆς σχέσεως μεταξὺ «δυνάμεως» καὶ «φορτίου» (μεταφορὰ δυνάμεως· εἰς τὴν Φυσικὴν αἱ διατάξεις αὐταὶ χαρακτηρίζονται καὶ ὡς ἁπλαῖ μηχαναί). Συνδυασμὸς καὶ τῶν δύο εἰδῶν εἶναι πολὺ συνήθης.

Ἡ *μετάδοσις κινήσεως* [παραγρ. 15·2 (β)] ἤτοι ἡ σχέσις στροφῶν λαμβανομένη κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ροῆς τῶν δυνάμεων:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ βαθμοῦ ἀποδόσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 20

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΡΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΡΟΦΩΝ

Μὲ τὴν μεταβολὴν ἀριθμοῦ στροφῶν διὰ τῆς μεταδόσεως κινήσεως εἶναι συνδεδεμένη πάντοτε μεταβολὴ τῶν ροπῶν, ἡ ὁποία ὅμως δὲν εἶναι πλέον ἀνεξάρτητος τοῦ βαθμοῦ ἀποδόσεως.

Ἐὰν προϋποτεθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχουν τριβαί, ἡ ἰσχὺς $P = M_t \cdot \omega$ θὰ μεταφερθῇ ἀμετάβλητος:

$$P = M_{t1}\,\omega_1 = M_{t2}\,\omega_2 \qquad \text{καὶ}$$

$$\frac{M_{t1}}{M_{t2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{i}.$$

Ἡ ροπὴ μεταβάλλεται ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὴν σχέσιν μεταδόσεως. Ὁ ἄξων μὲ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν στροφῶν μεταφέρει τὴν μεγαλυτέραν ροπήν, ἐπομένως εἶναι καὶ ὁ ἰσχυρότερος.

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ συνεπείᾳ ἀπωλειῶν τριβῆς βαθμοῦ ἀποδόσεως, προκύπτει ὅτι ἡ πραγματικὴ ροπὴ κινήσεως πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θεωρητικῆς:

$$\frac{M_{t1}}{M_{t2}} = \frac{1}{i \cdot \eta}, \quad \text{ἤτοι} \quad \boxed{\frac{\text{Ροπὴ δυνάμεως}}{\text{Ροπὴ φορτίου}} = \frac{1}{i \cdot \eta}}$$

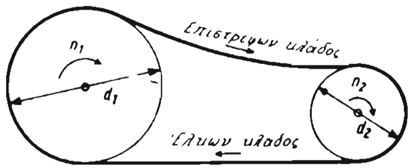
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 21

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΡΟΦΩΝ

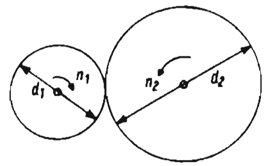
Σκοπὸς τῆς μετατροπῆς ἀριθμοῦ στροφῶν εἶναι ἡ μεταφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ στροφῶν «κινούσης» ἀτράκτου ἐπὶ ἄλλης «κινουμένης» ὑπὸ σχέσιν μεγαλυτέραν ἢ μικροτέραν τῆς μονάδος. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἀφ' ἑνὸς μὲν δι' ἱμάντων, ἁλύσεων καὶ σχοινίων, ἀφ' ἑτέρου δὲ δι' ὀδοντωτῶν τροχῶν καὶ δίσκων τριβῆς (βλ. Κινηματικὴν σελ. 160).

α) Κίνησις δι' ἱμάντων.

Εἰς τοὺς ἱμάντας (σχ. 21·α) ἀπαντᾶται ἡ λεγομένη *ὀλίσθησις* (2...3% τοῦ ἀριθμοῦ στροφῶν), κατὰ συνέπειαν ἡ σχέσις d_2/d_1 εἶναι κατ' αὐτὸ τὸ ποσοστὸν μικροτέρα τοῦ λόγου n_2/n_1.



Σχ. 21·α.
Κίνησις δι' ἱμάντων.



Σχ. 21·β.
Κίνησις δι' ὀδοντωτῶν τροχῶν.

Παράδειγμα.

Μέσω κινήσεως δι' ἱμάντων πρέπει ὁ ἀριθμὸς στροφῶν 1450 στρ/min τῆς κινούσης τροχαλίας ($d_1 = 125$ mm) νὰ μετατραπῇ εἰς 250 στρ/min εἰς τὴν κινουμένην τροχαλίαν. Ποία ἡ διάμετρος d_2 τῆς κινουμένης τροχαλίας, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὀλίσθησις 3%;

Λύσις:

$$\frac{d_2}{d_1} = 0{,}97 \cdot \frac{n_1}{n_2}, \qquad d_2 = 0{,}97 \cdot d_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} = 0{,}97 \times 125 \times \frac{1450}{250} \text{ mm} =$$

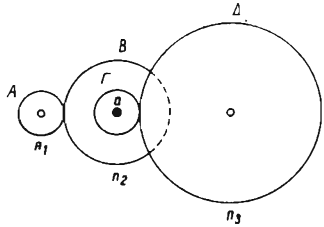
$$= 725 \text{ mm.}$$

β) Κίνησις δι' ὀδοντωτῶν τροχῶν.

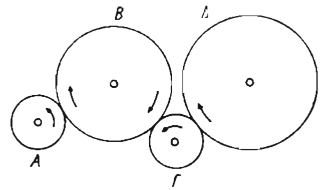
Εἰς τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς ἡ περιφερικὴ δύναμις μεταφέρεται διὰ τῶν ἐν ἐμπλοκῇ εὑρισκομένων ὀδόντων. Οἱ ἀριθμοὶ ὀδόντων z πρέπει νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν σχέσιν ὡς αἱ διάμετροι τῶν τροχῶν, συνεπῶς πρέπει νὰ εἶναι:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{n_1}{n_2} = i.$$

Προκειμένου περὶ μικρῶν σχέσεων μεταδόσεως χρησιμοποιεῖται ἕνα ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν (σχ. 21·β), ἐνῶ εἰς τὰς μεγαλυτέρας σχέσεις χρησιμοποιοῦνται περισσότερα τοῦ ἑνὸς ζεύγη. Διὰ συνδέσεως, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 21·γ, δύο ζευγῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν ἐν σειρᾷ,



Σχ. 21·γ.
Πολυβάθμιος μείωσις
δι' ὀδοντωτῶν τροχῶν.



Σχ. 21·δ.
Σύστημα μειώσεως
δι' ἐνδιαμέσων ὀδοντωτῶν τροχῶν.

ἤτοι τῶν (Α, Β) καὶ (Γ, Δ), ὅπου οἱ Β καὶ Γ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος α, δημιουργεῖται ἕνας διβάθμιος μειωτήρ, τοῦ ὁποίου ἡ συνολικὴ σχέσις μεταδόσεως ἔχει ὡς ἀκολούθως:

$$i = \frac{n_1}{n_2}, \qquad i_2 = \frac{n_2}{n_3}, \qquad i = \frac{n_1}{n_3} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} = i_1 \cdot i_2.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον λαμβάνεται διὰ n ζεύγη:

$$i = \frac{n_1}{n_n} = i_1 \cdot i_2 \ldots i_n .$$

Ἡ συνολικὴ σχέσις μεταδόσεως εἶναι:

$$\frac{\text{Ἀριθμὸς στροφῶν τοῦ πρώτου κινοῦντος τροχοῦ}}{\text{Ἀριθμὸς στροφῶν τοῦ τελευταίου κινουμένου τροχοῦ}} = \text{Γινόμενον τῶν μερικῶν σχέσεων μεταδόσεως}$$

Ἐὰν οἱ τροχοὶ Β καὶ Γ (σχ. 21·δ) δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, τότε ἕκαστος τροχὸς περιστρέφεται κατὰ τὸ αὐτὸ τόξον ὡς ὁ προηγούμενός του. Συνεπῶς ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἀπ' εὐθείας συμπλοκὴν τοῦ ὀδοντωτοῦ Α μετὰ τοῦ Δ. Οἱ ἐνδιάμεσοι τροχοὶ Β καὶ Γ οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχουν ἐπὶ τῆς σχέσεως μεταδόσεως, ἀλλὰ μόνον δύνανται νὰ ἐπηρεάσουν τὴν φορὰν περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ Δ.

Παράδειγμα.

Ἀτμοστρόβιλος 16 000 στροφῶν περιστρέφει γεννήτριαν 1000 στροφῶν διὰ διβαθμίου μειωτῆρος ὀδοντωτῶν τροχῶν. Ποῖον τὸ μέγεθος τῶν ἐνδιαμέσων σχέσεων μεταδόσεως (δι' ἰσοκατανομὴν αὐτῶν) καὶ ποία ἡ διάμετρος καὶ ὁ ἀριθμὸς ὀδόντων τοῦ δευτέρου τροχοῦ, ἂν ὁ πρῶτος ἔχῃ διάμετρον 120 mm καὶ 35 ὀδόντας;

Λύσις :

$$i = 16, \quad i = i_1 \cdot i_2, \quad i_1 = i_2 = \sqrt{i} = 4,$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} = i_1, \quad z_2 = i_1 \cdot z_1 = 4 \times 35 = 140 \text{ ὀδόντες.}$$

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{n_1}{n_2} = i_1, \quad d_2 = i_1 \cdot d_1 = 4 \times 120 \text{ mm} = 480 \text{ mm.}$$

Ποία ἡ ροπὴ περιστροφῆς τοῦ μειωτῆρος, ἐὰν ἡ ἰσχὺς τοῦ στροβίλου εἶναι 3000 PS καὶ ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ μειωτῆρος $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0{,}97 \times 0{,}97 = 0{,}94$;

Στρεπτικὴ ροπὴ στροβίλου :

$$M_{\sigma\tau\rho} = 716{,}2 \times \frac{3000}{16\,000} \text{ kpm} = 134 \text{ kpm.}$$

Ροπὴ περιστροφῆς μειωτῆρος ἐκ τῆς :

$$\frac{M_{\sigma\tau\rho}}{M_{\mu\epsilon\iota\omega\tau}} = \frac{1}{i \cdot \eta} = \frac{1}{16 \times 0{,}94} \approx \frac{1}{15}$$

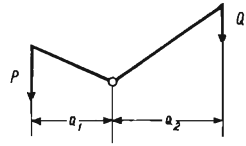
προκύπτει :

$$M_{\mu\epsilon\iota\omega\tau} = 15 \cdot M_{\sigma\tau\rho} = 15 \times 134 = 2010 \text{ kpm.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 22

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΥΠΟΥ «ΜΟΧΛΟΥ»

Πᾶν στερεὸν σῶμα στρεπτὸν περὶ τὸν ἄξονα στηρίξεως αὐτοῦ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δροῦν δυνάμεις τείνουσαι νὰ τὸ περιστρέψουν περὶ τὸν σταθερὸν ἄξονα, καλεῖται μοχλὸς (παράγρ. 2·2). Ὡς βραχίονες

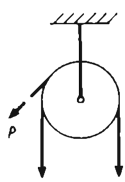


Σχ. 22·1 α.
Γωνιακὸς μοχλός.

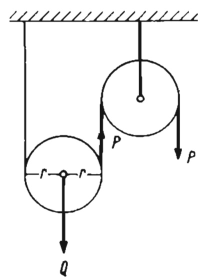
δυνάμεως καὶ φορτίου λαμβάνονται αἱ κάθετοι ἀποστάσεις τῶν δυνάμεων ἢ φορτίων ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς (γωνιακὸς μοχλὸς σχ. 22 α).

22·1 Τροχαλίαι καὶ πολύσπαστα.

Τα πολύσπαστα ἀποτελοῦνται ἀπὸ συνδυασμὸν ἴσου ἀριθμοῦ παγίων τροχαλιῶν (διβραχιονίων μοχλῶν, σχ. 22·1α) καὶ ἐλευθέ-

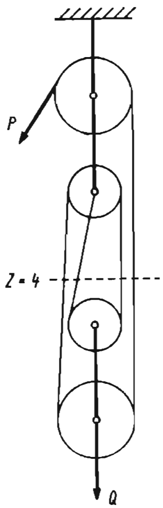


Σχ. 22·1 α.
Παγία τροχαλία.

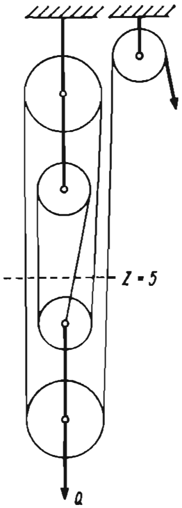


Σχ. 22·1 β.
Ἐλευθέρα τροχαλία.

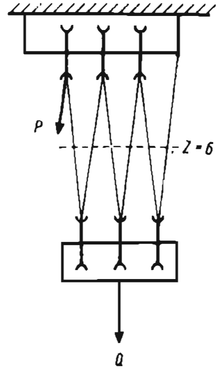
ρων τροχαλιῶν (μονοβραχιόνων μοχλῶν, σχ. 22·1 β). Ἕκαστον εἶδος τροχαλιῶν εὑρίσκεται ἐπὶ κοινοῦ περιβλήματος, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸν ἄξονα ἑδράσεώς των. Αἱ τροχαλίαι τοποθετοῦνται ἢ ἡ μία ὑπεράνω τῆς ἄλλης (σχ. 22·1 γ καὶ 22·1 δ) ἢ ἡ μία πλησίον τῆς ἄλλης (σχ. 22·1ε). Εἰς παρόμοια πολύσπαστα τὸ φορτίον διαμοιράζεται εἰς περισσοτέρους κλάδους τοῦ σχοινίου.



Σχ. 22·1 γ.

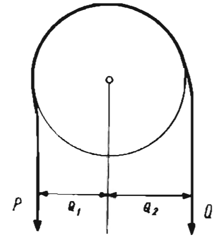


Σχ. 22·1 δ.



Σχ. 22·1 ε.

Πολύσπαστα διὰ 4, 5 καὶ 6 φερόντων κλάδων.



Σχ. 22·1 στ.
Ἐπίδρασις τῆς ἀκαμψίας τοῦ σχοινίου.

Ἡ δύναμις P πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ φορτίου Q, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ βαθμοῦ ἀποδόσεως, εἶναι:

$$P = \frac{Q}{z \cdot \eta},$$

ὅπου: z εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κλάδων, εἰς τοὺς ὁποίους διαμοιράζεται τὸ φορτίον Q, συνεπῶς π.χ.:

	διὰ παγίαν τροχαλίαν	ἐλευθέραν τροχαλίαν	πολύσπαστα		
σχῆμα	22·1α	22·1β	22·1γ,	22·1δ,	22·1ε
z	1	2	4	5	6

Ἡ διαδρομὴ τῆς δυνάμεως εἶναι z φορὰς ἡ διαδρομὴ τοῦ φορτίου, ἤτοι z φορὰς ἡ ἀνύψωσις.

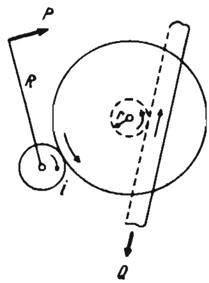
Ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως πολυσπάστου δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν τριβῶν εἰς τὰ ἕδρανα, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ἀκαμψίας τοῦ σχοινίου, ἡ ὁποία αὐξάνει τὸν μοχλοβραχίονα τοῦ φορτίου καὶ μειώνει τὸν μοχλοβραχίονα τῆς δυνάμεως (σχ. 22·1 στ).

22·2 Βαροῦλκα.

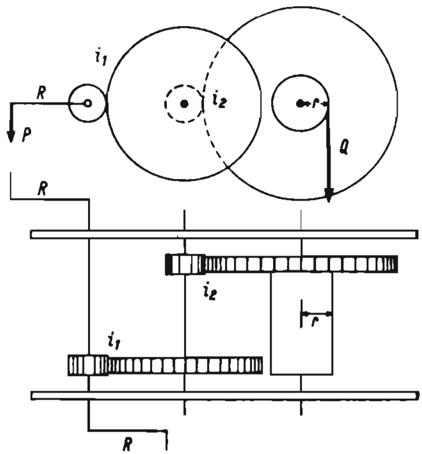
Τὰ βαροῦλκα (δι' ὀδοντωτοῦ κανόνος ἢ τυμπάνου) συνδυάζονται συνήθως μὲ σύστημα ὀδοντωτῶν τροχῶν, οἱ ὁποῖοι εἰς περίπτωσιν ἠλεκτροκινήσεως χρησιμοποιοῦνται ὡς μειωτῆρες στροφῶν, εἰς περίπτωσιν δὲ χειροκινήσεως σκοπὸν ἔχουν τὴν μείωσιν τῆς δυνάμεως.

Παραδείγματα.

1. Ὑδατοφράκτης μικρᾶς ὑδροηλεκτρικῆς μονάδος ἀνυψοῦται, μέσω ὀδοντωτοῦ κανόνος καὶ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ διαμέτρου 100 mm, διὰ δυνάμεως 600 kp, ποὺ ἐφαρμόζεται εἰς τὸν ὀδοντωτὸν κανόνα



Σχ. 22·2 α.
Βαροῦλκον δι' ὀδοντωτοῦ κανόνος καὶ μειωτῆρος.



Σχ. 22·2 β.
Βαροῦλκον διὰ τυμπάνου καὶ μειωτῆρος.

(σχ. 22·2 α). Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ σχέσις μεταδόσεως, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνύψωσις τοῦ φράκτου μέσω χειροστροφάλου ἀκτῖνος 400 mm διὰ δύναμιν χειρὸς 15 kp ($\eta = 0{,}80$);

$$P \cdot R = \frac{Q \cdot r}{i \cdot \eta}, \qquad i = \frac{Q \cdot r}{P \cdot R} \cdot \frac{1}{\eta}, \qquad i = \frac{600 \times 50}{15 \times 400} \times \frac{1}{0{,}8} = 6{,}25.$$

2. Βαροῦλκον (σχ. 22·2 β) μὲ ἱκανότητα ἕλξεως 1 Mp καὶ διάμετρον τυμπάνου 400 mm χειρίζεται ὑπὸ δύο ἀνδρῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων διὰ δυνάμεως 10 kp περιστρέφει χειροστρόφαλον ἀκτῖ-

νος 350 mm. Ποία ἡ συνολικὴ σχέσις μεταδόσεως καὶ ποῖαι αἱ περίπου ἴσαι μερικαὶ μεταδόσεις διὰ διβάθμιον καὶ τριβάθμιον μείωσιν (βαθμὸς ἀποδόσεως ἑκάστης μειώσεως $\eta' = 0{,}93$); Ποῖαι αἱ ροπαὶ εἰς ἕκαστον τῶν ἀξόνων τοῦ μειωτῆρος;

Σχέσις μεταδόσεως:

$$P \cdot R = \frac{Q \cdot r}{i \cdot \eta}, \quad i = \frac{Q \cdot r}{P \cdot R} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{1000 \times 200}{20 \times 350} \cdot \frac{1}{\eta} = 28{,}6/\eta.$$

Διβάθμιος μείωσις:

$$\eta = 0{,}93^2 = 0{,}865,$$

$$i = \frac{28{,}6}{0{,}865} = 33, \quad \text{π.χ.} \quad i = i_1 \cdot i_2 = 5{,}5 \times 6.$$

Τριβάθμιος μείωσις:

$$\eta = 0{,}93^3 = 0{,}80$$

$$i = \frac{28{,}6}{0{,}8} = 35{,}7, \quad \text{π.χ.} \quad i = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 = 3 \times 3 \times 4.$$

Ροπαί:

Μείωσις	διβάθμιος	τριβάθμιος
$M_1 = M_k = P \cdot R$	7 kpm	7 kpm
$M_2 = M_1 \cdot i_1 \cdot \eta_1$	36 kpm	19,5 kpm
$M_3 = M_2 \cdot i_2 \cdot \eta_2$	200 kpm ($= M_L$)	54 kpm
$M_4 = M_3 \cdot i_3 \cdot \eta_3$	—	200 kpm($= M_L$)

M_k .... Ροπὴ δυνάμεως, M_L .... Ροπὴ φορτίου

Συγκρίνατε πρὸς αὐτὰ τὴν μικρὰν μείωσιν τοῦ ἁπλοῦ βαρούλκου τοῦ παραδείγματος 1 (παράγρ. 2·2).

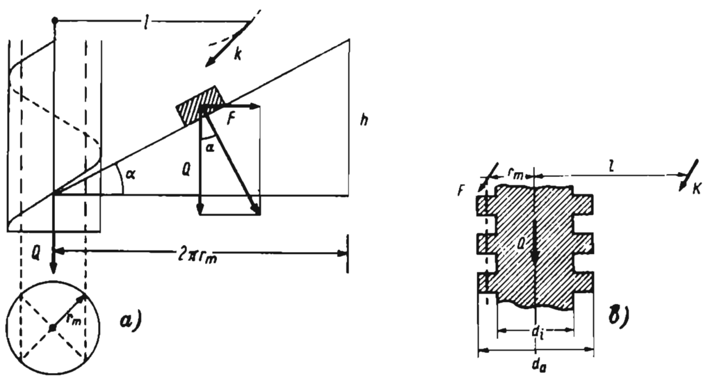
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 23

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΥΠΟΥ «ΚΕΚΛΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ»

Αἱ σχέσεις δυνάμεων εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐξητάσθησαν εἰς τὴν παράγραφον 11·8. Εἰς τὰ ἑπόμενα ἐξετάζονται αἱ ἐφαρμογαί του, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ κοχλίου, τοῦ ἀτέρμονος τροχοῦ καὶ τοῦ σφηνός.

23·1 Κοχλίας.

Ὅπως τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἕλικος παριστᾶ κεκλιμένην εὐθεῖαν, ἔτσι τὸ ἀνάπτυγμα ἑλικοειδοῦς ἐπιφανείας (δηλαδὴ τῆς ἐπιφανείας



Σχ. 23·1 α.
Σπείρωμα κοχλίου: α) Διάταξις. β) Τομὴ κατὰ μῆκος τοῦ κοχλίου.

τῆς σπείρας τοῦ κοχλίου) παριστᾶ κεκλιμένον ἐπίπεδον. Εἰς τὸ σχῆμα 23·1 α παρίστανται διὰ τῶν:

- α ἡ γωνία τῆς ἕλικος,
- h τὸ βῆμα (τοῦ σπειρώματος) τῆς ἕλικος,
- r_m ἡ μέση ἀκτὶς τοῦ σπειρώματος (ἑλικώσεως),
- l ὁ μοχλοβραχίων,
- Q τὸ πρὸς ἀνύψωσιν φορτίον,
- F ἡ περιφερικὴ δύναμις εἰς τὴν ἀκτῖνα σπειρώματος r_m,
- K ἡ περιφερικὴ δύναμις εἰς τὸν μοχλοβραχίονα l.

α) Τραπεζοειδὴς κοχλίας (κινήσεως).

Ἐὰν κοχλίας χρησιμοποιῆται ὡς *ἀνυψωτικὸς* κοχλίας*, δηλαδὴ διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου, πρέπει τὸ περικόχλιον νὰ εἶναι σταθερόν. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ κοχλίου πρὸς τὰ ἄνω τὸ σπείρωμα αὐτοῦ ὀλισθαίνει ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ σπειρώματος τοῦ περικοχλίου, ἐνῶ τὸ φορτίον Q, ἀνέρχεται, ὡς ἐὰν ἐσύρετο ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, πρὸς τὰ ἄνω. Ταυτοχρόνως ἡ περιφερικὴ δύναμις F ἐπενεργεῖ ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κοχλίου, ἤτοι διευθύνεται ὁριζοντίως. Συνεπῶς ἡ διάταξις αὐτὴ ὑπάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν «κατεύθυνσις δυνάμεως παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου» καὶ εἶναι:

θεωρητικῶς $F_0 = Q \cdot \text{εφ}\,\alpha$

πραγματικῶς $F = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + \rho)$.

Ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ κοχλίου (λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν μόνον τῆς τριβῆς μεταξὺ κοχλίου καὶ περικοχλίου) εἶναι:

$$\eta_s = \frac{\text{εφ}\,\alpha}{\text{εφ}\,(\alpha + \rho)}.$$

Ἐὰν δὲν δίδεται ἡ γωνία κλίσεως τῆς ἕλικος καὶ ἀντ' αὐτῆς δίδεται ἡ διάμετρός της καὶ τὸ βῆμα, προκύπτει:

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{h}{2\pi \cdot r_m}.$$

Συνεπῶς ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ κοχλίου βελτιοῦται, ὅσον αὐξάνεται ἡ γωνία κλίσεως τῆς ἕλικος διὰ δεδομένην γωνίαν τριβῆς. Διὰ $\mu = \text{εφ}\,\rho = 0{,}07$ $(\rho = 4^\circ)$ λαμβάνεται:

διὰ $\alpha =$	4°	8°	12°	16°	20°
$\alpha + \rho =$	8°	12°	16°	20°	24°
$\eta_s = \frac{\text{εφ}\,\alpha}{\text{εφ}\,(\alpha + \rho)} =$	0,5	0,66	0,74	0,79	0,82

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ὁ κοχλίας δὲν πρέπει νὰ εἶναι «ἀφ' ἑαυτοῦ σταθερός», λαμβάνεται ἡ γωνία τῆς ἕλικος μεγαλυτέρα καὶ διαμορφοῦται, ἐὰν τοῦτο ἀπαιτηθῆ, ὡς κοχλίας περισσοτέρων ἀρχῶν (δηλ. ἀνεξαρτήτων παραλλήλων σπειρωμάτων).

Ἀλλ' ἐὰν $\alpha < \rho$, τὰ σπειρώματα τοῦ κοχλίου δὲν δύνανται νὰ ὀλισθήσουν πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ τῶν σπειρωμάτων τοῦ περικοχλίου

* Ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὸν κοχλίαν συσφίγξεως [παράγρ. 23·1 (β)].

ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ φορτίου. Τότε ἀκριβῶς ὁ κοχλίας καλεῖται «ἀφ' ἑαυτοῦ σταθερός». Διὰ τοῦ φορτίου του δὲ αὐτασφαλίζεται ἔναντι ἀποκοχλιώσεως. Αὐτὴ ἡ ἰδιότης καθιστᾷ τὴν χρῆσιν πέδης, εἰς ἀνυψωτῆρας διὰ κοχλίου, περιττήν.

Μειονέκτημα εἶναι ὁ κακὸς βαθμὸς ἀποδόσεως. Διὰ $\alpha = \rho$, ἑπομένως εἰς μικρὰν γωνίαν ἕλικος, ἰσχύει :

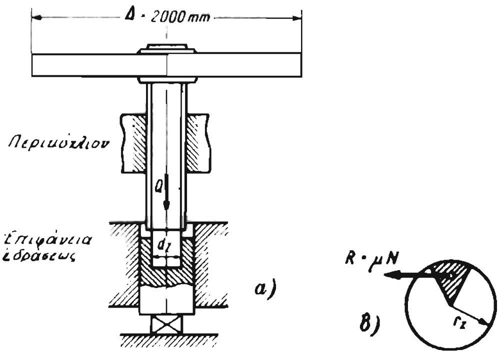
$$\eta_s = \frac{\varepsilon\varphi\,\alpha}{\varepsilon\varphi\,(2\alpha)} \approx \frac{\varepsilon\varphi\,\alpha}{2\,\varepsilon\varphi\,\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Εἰς τοὺς «ἀφ' ἑαυτῶν σταθεροὺς» κοχλίας ἰσχύει $\eta \leqq 0{,}5$, δηλαδὴ τουλάχιστον τὸ ἥμισυ τοῦ προσδιδομένου ἔργου ἀπορροφεῖται ἀπὸ τὰς τριβάς.

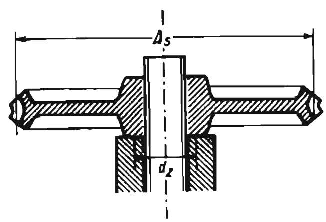
Σχετικῶς πρὸς τὴν κάθοδον τοῦ φορτίου εἰς τοὺς «ἀφ' ἑαυτῶν σταθεροὺς» κοχλίας ἡ πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς ἀπαιτουμένη δύναμις (ἐπειδὴ $\alpha < \rho$) εἶναι :

$$F' = Q \cdot \varepsilon\varphi\,(\rho - \alpha).$$

Ἐκτὸς τῆς τριβῆς τῶν σπειρωμάτων (ἡ ὁποία θεωρεῖται ὅτι ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς μέσης ἀκτῖνος σπειρώματος) ἐμφανίζεται ἡ πρόσθετος δύναμις τριβῆς τῆς μετωπικῆς ἐπιφανείας τοῦ κάτω πέρατος τοῦ κοχλίου (ἐφαρμοζομένη εἰς ἀπόστασιν $2/3\,r_z$ ἐπὶ τῆς ἑδράσεώς του) [σχ. 23·1 β (α) καὶ (β)]. Εἰς κατ' ἄλλον τρόπον διαμορφωμέ-



Σχ. 23·1 β.
Πιεστήριον διὰ κοχλίου (θλιπτικὸς κοχλίας):
α) Διάταξις. β) Ἐπιφάνεια ἑδράσεως.



Σχ. 23·1 γ.
Μηχανὴ ἐφελκυσμοῦ
(ἐφελκυστικὸς κοχλίας).

νον σύστημα κοχλίου ἐμφανίζεται (σχ. 23·1 γ) τριβὴ μεταξὺ τοῦ περικοχλίου καὶ τῆς ἑδράσεώς του (θεωρουμένη ὅτι ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς μέσης διαμέτρου τῆς μετωπικῆς ἐπιφανείας τριβῆς d_z, σχ. 23·1 γ).

Ἐκ τῆς σχέσεως:

Ροπὴ βραχίονος = Ροπὴ κοχλίου + πρόσθετος ροπὴ τριβῶν

λαμβάνεται ἡ δύναμις K εἰς τὸν βραχίονα.

Ἐκ τῆς σχέσεως ἔργων κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς περιστροφῆς λαμβάνεται ὁ συνολικὸς βαθμὸς ἀποδόσεως:

$$\eta_{o\lambda} = \frac{\text{Ἔργον φορτίου}}{\text{Ἔργον δυνάμεως}} = \frac{K \cdot 2\pi \cdot l}{Q \cdot h}.$$

Ἐὰν αἱ ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσαι πρόσθετοι ἀπώλειαι τριβῶν ἐκφρασθοῦν δι' ἑνὸς συντελεστοῦ ἀποδόσεως η', τότε ἰσχύει:

$$\eta_{o\lambda} = \eta_s \cdot \eta'.$$

Ἡ πορεία ὑπολογισμῶν ἐπεξηγεῖται διὰ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

Παράδειγμα.

Ὁ κοχλίας πιεστηρίου [σχ. 23·1·β (α)] εἶναι τραπεζοειδὴς τριῶν ἀρχῶν, ἐξωτερικῆς διαμέτρου 180 mm, πυρῆνος 150 mm καὶ βήματος 100 mm. Ἡ κίνησις ἐπιτυγχάνεται μὲ δίσκον διαμέτρου 2000 mm. Ἡ πίεσις μεταφέρεται μέσω τῆς ἐπιφανείας ἑδράσεως τοῦ κοχλίου, διαμέτρου 140 mm. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς σχετικῶς πρὸς τὸν κοχλίαν καὶ τὴν ἕδρασίν του εἶναι $\mu = 0{,}08$. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη περιφερικὴ δύναμις εἰς τὸν δίσκον, ἵνα ἀναπτυχθῇ δύναμις συμπιέσεως 7,5 Mp; Ποῖος ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ πιεστηρίου καὶ ποῖος τοῦ κοχλίου μετὰ τῆς ἑδράσεώς του μόνον;

Λύσις:

Δύναμις κοχλίου $F = Q \cdot \varepsilon\varphi\,(\alpha + \rho)$

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{h}{\pi \cdot d_m} = \frac{100}{165\,\pi} = 0{,}193, \qquad \alpha = 10^\circ\,56',$$

$\varepsilon\varphi\,\rho = \mu = 0{,}08, \qquad \rho = 4^\circ\,35'$

$\alpha + \rho = 15^\circ\,31', \qquad \varepsilon\varphi\,(\alpha + \rho) = 0{,}278,$

$F = 7500 \times 0{,}278 \text{ kp} = 2085 \text{ kp}.$

Ροπὴ εἰς τὸν κοχλίαν $Fr_m = 2085 \times 0{,}0825 \text{ kpm} = 172 \text{ kpm}.$

Ροπὴ ἑδράσεως $\mu \cdot Q \cdot \frac{2}{3} r_z = 0{,}08 \times 7500 \times \frac{2}{3} \times 0{,}07 = 28 \text{ kpm}.$

Συνολικὴ ροπὴ $M_t = [172 + 28] \text{ kpm} = 200 \text{ kpm}.$

Περιφερική δύναμις $K = \dfrac{M_t}{D/2} = \dfrac{200}{2/2} = 200$ kp.

Βαθμὸς ἀποδόσεως $\eta_{o\lambda} = \dfrac{Q \cdot h}{K \cdot \pi \cdot D} = \dfrac{7500 \times 100}{200 \times 2000 \cdot \pi} = 0{,}6.$

Βαθμὸς ἀποδόσεως (μόνον) κοχλίου:

$$\eta_{\kappa o\chi} = \frac{\varepsilon\varphi\, \alpha}{\varepsilon\varphi\, (\alpha + \rho)} = \frac{0{,}913}{0{,}278} = 0{,}7.$$

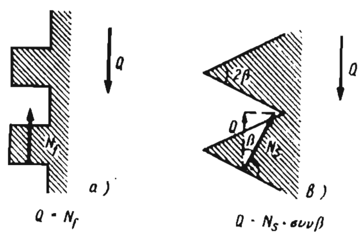
Βαθμὸς ἀποδόσεως λόγω τριβῆς ἑδράσεως:

$$\eta' = \frac{\eta_{o\lambda}}{\eta_{\kappa o\chi}} = \frac{0{,}6}{0{,}7} = 0{,}86.$$

β) Κοχλίαι συσφίγξεως.

Ἐὰν N_f εἶναι ἡ κάθετος δύναμις ἐπὶ τῶν σπειρωμάτων τραπεζοειδοῦς κοχλίου [σχ. 23·1 δ (α)], εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσορροπίας ἰσχύει $N_f = Q$.

Εἰς τοὺς κοχλίας σπειρώματος τριγωνικῆς κατατομῆς [σχ. 23·1 δ (β)], ἡ κάθετος δύναμις ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κατατομῆς εὑρίσκεται ὑπὸ γωνίαν β ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (2β = γωνία κατατομῆς)



Σχ. 23·1 δ.
Σπειρώματα κοχλιῶν: α) Τραπεζοειδῆ. β) Τριγωνικά.

καὶ ἡ ἀξονικὴ συνιστῶσα της $N_s \cdot$ συν β διατηρεῖ τὴν ἰσορροπίαν ἔναντι τοῦ φορτίου Q. Συνεπῶς:

$$N_s = \frac{Q}{\sigma\upsilon\nu\, \beta} = \frac{N_f}{\sigma\upsilon\nu\, \beta}$$

ὁπότε: $N_s > N_f$

Διὰ τὴν δύναμιν τριβῆς ἰσχύει:

$$R = \mu \cdot N_s = \frac{\mu \cdot Q}{\sigma\upsilon\nu\, \beta} = \frac{\mu}{\sigma\upsilon\nu\, \beta} \cdot Q = \mu' \cdot Q.$$

(Σπείρωμα) 'Ελίκωσις	Withworth	Μετρικὸν
2β	55°	60°
β	$27{,}5^\circ$	30°
συν β	0,887	0,866
$\mu' = \dfrac{\mu}{\text{συν}\,\beta}$	$\sim 1{,}13\,\mu$	$\sim 1{,}15\,\mu$
εφ ρ	1,13 εφ ρ	1,15 εφ ρ

Εἰς τὸν κοχλίαν τριγωνικοῦ σπειρώματος ἰσχύει :

$$F = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + \rho'), \qquad \eta_s = \frac{\text{εφ}\,\alpha}{\text{εφ}\,(\alpha + \rho')}.$$

Παράδειγμα.

Περικόχλιον κοχλίου τριγωνικοῦ σπειρώματος Μ 72×4 ($d_\alpha =$ $= 72$ mm $=$ ἐξωτερικὴ διάμετρος σπειρώματος, $h = 4$ mm $=$ βῆμα) πρέπει νὰ συσφιγχθῇ διὰ κλειδὸς μήκους $l = 700$ mm. Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἄκρον τῆς κλειδός, ὥστε νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς τὸν κορμὸν τοῦ κοχλίου ἀξονικὴ δύναμις $Q = 3000$ kp, ἐὰν ἡ τριβὴ εἰς τὸ σπείρωμα καὶ τὴν ἐν εἴδει δακτυλίου ἕδρασιν τοῦ περικοχλίου χαρακτηρίζεται διὰ τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς $\mu = \text{εφ}\,\rho = 0{,}15$; Ποῖος ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ κοχλίου μόνον καὶ ποῖος ὁ συνολικός ;

Λύσις :

'Η μέση διάμετρος τοῦ σπειρώματος εἶναι :

$$dm = \frac{d_\alpha + d_1}{2} = \frac{72 + 66{,}8}{2} = 69{,}4 \text{ mm} \quad \text{καὶ}$$

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{h}{\pi \cdot d_m} = \frac{4}{69{,}4\,\pi} = 0{,}0184, \qquad \alpha = 1^\circ\,3',$$

$$\text{εφ}\,\rho' = 1{,}15\,\text{εφ}\,\rho = 1{,}15 \times 0{,}15 = 0{,}1725, \qquad \rho' = 9^\circ\ 48',$$

$$\text{εφ}\,(\alpha + \rho') = \text{εφ}\,10^\circ\,51' = 0{,}1917,$$

ἢ :

$$\text{εφ}\,(\alpha + \rho') = \frac{\text{εφ}\,\alpha + \text{εφ}\,\rho'}{1 - \text{εφ}\,\alpha \cdot \text{εφ}\,\rho'} = \frac{0{,}01835 + 0{,}1725}{1 - 0{,}0032} =$$

$$= \frac{0{,}1909}{0{,}9968} = 0{,}1917.$$

Ἡ ἀκτίς, εἰς τὴν ὁποίαν θεωρεῖται ὅτι ἐφαρμόζεται ἡ ἀντίστασις τριβῆς εἰς τὸ περικόχλιον, εἶναι περίπου $r_z \approx 45$ mm· ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ δύναμις εἰς τὸ ἄκρον τῆς κλειδὸς (μήκη εἰς cm):

$$K \cdot 70 = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + \rho') + \mu \cdot Q \cdot r_z = Q\,[\text{εφ}\,(\alpha + \rho') + \mu \cdot r_z\,],$$

$$K = \frac{3000}{70} \cdot [0{,}1917 + 0{,}15 \times 4{,}5]\ \text{kp} = 42{,}9 \times 0{,}867\ \text{kp} \approx 37\ \text{kp}.$$

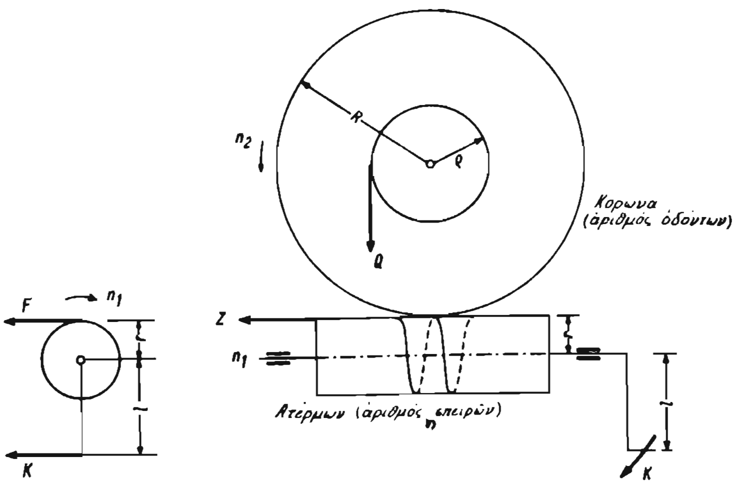
Βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ κοχλίου μόνον:

$$\eta_{\kappa o\chi\lambda} = \frac{\text{εφ}\,\alpha}{\text{εφ}\,(\alpha + \rho')} = \frac{0{,}0184}{0{,}1917} = 0{,}096 = 9{,}6\,\% \quad \text{(ἀφ' ἑαυτοῦ σταθερός)}$$

$$\eta_{o\lambda} = \frac{\text{Ὠφέλιμον ἔργον}}{\text{Προσδιδόμενον ἔργον}} = \frac{Q \cdot h}{K \cdot 2\pi \cdot l} = \frac{3000 \times 4}{37 \times 2\pi \times 700} =$$
$$= 0{,}074 = 7{,}4\,\%.$$

23·2 Ἀτέρμων κοχλίας.

Τὸ σύστημα ἀτέρμονος κοχλίου ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ *ἀτέρμονος κοχλίου* καὶ ἐκ τῆς *κορώνας* (σχ. 23·2).



Σχ. 23·2.
Σύστημα ἀτέρμονος κοχλίου-κορώνας.

Ὁ ἀτέρμων κοχλίας εἶναι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους του σταθερός, ἡ δὲ κορώνα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τμῆμα κινητοῦ περικοχλίου.

Εἰς μίαν περιστροφὴν τοῦ ἀτέρμονος κοχλίου περιστρέφεται ἡ κορώνα κατὰ ἕνα ὀδόντα, ἐὰν ὁ κοχλίας εἶναι μιᾶς ἀρχῆς. Διὰ κοχλίαν n ἀρχῶν, εἰς μίαν περιστροφὴν αὐτοῦ περιστρέφεται ἡ κορώνα κατὰ n ὀδόντας.

Ἡ σχέσις μεταδόσεως συστήματος ἀτέρμονος κοχλίου-κορώνας εἶναι $n_1/n_2 = z_2/z_1$. Εἰς τὸ σύστημα ἀτέρμονος-κορώνας, z_1 εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἀρχῶν n τοῦ κοχλίου καὶ z_2 ὁ ἀριθμὸς ὀδόντων τῆς κορώνας z.

Ἐνταῦθα ἡ σχέσις μεταδόσεως εἶναι:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z}{n} = i.$$

Εἰς τὸ σχῆμα 23·2 (βαροῦλκον τυμπάνου μετὰ συστήματος ἀτέρμονος-κορώνας) συμβολίζεται διά:

Q τὸ πρὸς ἀνύψωσιν φορτίον εἰς ἀκτῖνα ρ,

Z ἡ (περιφερική) δύναμις εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ἀκτῖνος R τῆς κορώνας,

F ἡ περιφερικὴ δύναμις εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ἀκτῖνος r τοῦ κοχλίου,

K ἡ περιφερικὴ δύναμις εἰς τὸν χειροστρόφαλον l,

r ἡ μέση ἀκτὶς σπειρώματος.

Μεταξὺ τῆς ροπῆς φορτίου =

= ροπὴ εἰς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ $M_R = Q \cdot \rho \quad (= Z \cdot R)$

καὶ τῆς ροπῆς δυνάμεως =

= ροπὴ εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ἀτέρμονος $M_S = K \cdot l \quad (= F \cdot r)$

ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{\text{Ροπὴ δυνάμεως}}{\text{Ροπὴ φορτίου}} = \frac{M_S}{M_R} = \frac{1}{i \cdot \eta_{\text{ολ}}} = \frac{n}{z} \cdot \frac{1}{\eta_{\text{ολ}}},$$

ὅπου τὸ $\eta_{\text{ολ}}$ ὁρίζεται ἐκ τοῦ βαθμοῦ ἀποδόσεως τοῦ συστήματος ἀτέρμονος κοχλίου-τροχοῦ καὶ τῶν ἀπωλειῶν τριβῆς εἰς τὰ ἕδρανα.

Παράδειγμα.

Βαροῦλκον γερανοῦ διαμέτρου τυμπάνου 300 mm πρέπει νὰ ἀνυψώνῃ φορτίον 3 Mp ὑπὸ ταχύτητα 0,5 m/s. Ἡ κίνησις λαμβάνεται μέσω ἠλεκτροκινητῆρος 1450 στρ/min. Ποία ἡ σχέσις μεταδόσεως τοῦ μειωτῆρος ἀτέρμονος-τροχοῦ καὶ ποῖος ὁ ἀριθμὸς ὀδόντων τῆς κορώνας εἰς ἀτέρμονα κοχλίαν δύο ἀρχῶν; Ποία ἡ ροπὴ εἰς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ, εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ἀτέρμονος καὶ ποίας ἰσχύος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἠλεκτροκινητήρ, ἐὰν ὁ ὁλικὸς βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ μειωτῆρος ἀτέρμονος-τροχοῦ εἶναι $\eta_{ολ} = 0{,}60$;

Λύσις:

Ἀριθμὸς στροφῶν ἄξονος τυμπάνου (ἄξονος κορώνας):

$$n_2 = \frac{60\,u}{\pi \cdot d} = \frac{60 \times 0{,}5}{0{,}3 \cdot \pi}\ στρ/\text{min} = 31{,}8\ στρ/\text{min} \approx 32\ στρ/\text{min}.$$

Ἀριθμὸς στροφῶν ἄξονος κινητῆρος (ἄξονος ἀτέρμονος):

$$n_1 = 1450\ στρ/\text{min}.$$

Σχέσις μεταδόσεως:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1450}{32} = 45{,}3 \approx 45.$$

Ἀριθμὸς ὀδόντων z τῆς κορώνας:

$$i = \frac{z}{n}, \qquad z = n \cdot i = 2 \times 45 = 90.$$

Ροπὴ εἰς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ:

$$M_R = Q \cdot \rho = 3000 \times 0{,}3\ \text{kpm} = 900\ \text{kpm}.$$

Ροπὴ εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ἀτέρμονος:

$$M_S = \frac{M_R}{i \cdot \eta_{ολ}} = \frac{900}{90 \times 0{,}6}\ \text{kpm} = 16{,}7\ \text{kpm}.$$

Ἰσχὺς τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος:

$$P = M_S \cdot \omega = 16{,}7 \times \frac{1450 \cdot \pi}{30 \times 102}\ \text{kW} = 24{,}8\ \text{kW},$$

ἤ:

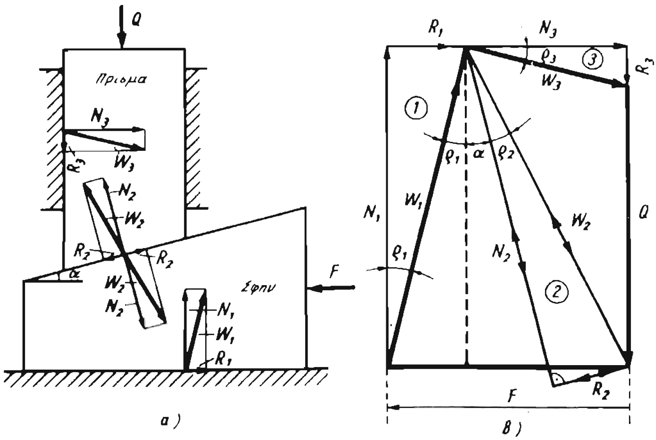
$$P = \frac{Q \cdot \upsilon}{\eta_{ολ}} = \frac{3000 \times 0{,}5}{0{,}6 \times 102}\ \text{kW} = 24{,}5\ \text{kW}.$$

Ἡ μικρὰ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀποτελεσμάτων ὀφείλεται εἰς τὴν στρογγύλευσιν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν n_2 καὶ i.

23·3 Σφήν.

Ὁ σφὴν παριστᾶ σαφῆ περίπτωσιν μετατροπέως δυνάμεως, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατὴ ἀνύψωσις μεγάλου φορτίου Q διὰ μικρᾶς ὁριζοντίας δυνάμεως. Πρόκειται δηλαδὴ ἐδῶ περὶ τῆς βασικῆς περιπτώσεως κεκλιμένου ἐπιπέδου μὲ ἐπενέργειαν δυνάμεως παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του.

Ἐκτὸς τῆς τριβῆς ἐπὶ τοῦ ἰδίου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐμφανίζεται ἐπίσης τριβὴ [σχ. 23·3 α (α)] ἀφ' ἑνὸς μὲν μεταξὺ τοῦ σφηνὸς



Σχ. 23·3 α.

Κίνησις διὰ σφηνός: α) Διάταξις. β) Δυναπολύγωνον.

καὶ τῆς βάσεώς του, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὸν ὁδηγὸν τοῦ φορτιζομένου πρίσματος.

Εἰς τὸ σχῆμα, ἐκτὸς τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ φορτίου, παριστῶνται αἱ ἐμφανιζόμεναι κάθετοι δυνάμεις N, αἱ δυνάμεις τριβῆς R καὶ ἡ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσα συνισταμένη W εἰς τὴν βάσιν (δείκτης 1), εἰς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον (δείκτης 2) καὶ εἰς τὸν ὁδηγὸν (δείκτης 3). Ἐκ τῶν ἐπενεργουσῶν δυνάμεων δύνανται νὰ χαραχθοῦν εἰς ἑκάστην θέσιν τριβῆς τὰ ἀκόλουθα δυναμοπολύγωνα [σχ. 23·3 α (β)]:

$$\begin{array}{c} \text{Δυναμοπολύγωνον 1} \\ \text{(Σφήν)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R_1 \text{ ὁριζοντία} \\ N_1 \text{ κάθετος} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{συνιστῶσα } W_1 \\ \sphericalangle (N_1 W_1) = \rho_1. \end{array}$$

$$\text{Δυναμοπολύγωνον 2} \left\{ \begin{array}{l} R_2 \text{ παράλληλος πρὸς} \\ \quad \text{κεκλιμένον ἐπίπεδον} \\ N_2 \text{ κάθετος πρὸς κεκλι-} \\ \quad \text{κλιμένον ἐπίπεδον} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{συνιστῶσα } W_2\text{*}, \\ \sphericalangle (N_2 W_2) = \rho_2. \end{array}$$

* Εἰς τὸ δυναμοπολύγωνον τοῦτο τὰ λευκὰ βέλη ἰσχύουν διὰ τὸν σφῆνα, τὰ ἄλλα δὲ διὰ τὸ πρῖσμα.

Δυναμοπολύγωνον 3 (πρῖσμα)	N_3 ὁριζοντία, R_3 κάθετος	συνιστῶσα W_3, $\sphericalangle (N_3 W_3) = \rho_3$.

Διὰ τὴν ἰσορροπίαν πρέπει νὰ ἰσχύῃ:

$$\Sigma F_x = 0: \quad F = R_1 + N_3, \quad \Sigma F_y = 0: \quad N_1 = R_3 + Q.$$

Πρὸς ἰσορροπίαν μεταξὺ σφηνὸς καὶ πρίσματος, πρέπει τὰ κλειστὰ δυναμοπολύγωνα νὰ ἔχουν ἑνιαίαν φορὰν διαγραφῆς:

Σφὴν $\quad F \quad W_1 \quad W_2 \quad (F)$,

Πρῖσμα $\quad Q \quad W_2 \quad W_3 \quad (Q)$.

Εἰς τὸ σύστημα σφηνὸς-πρίσματος (ὡς συνόλου) ἡ δύναμις W_2 ἀποτελεῖ ἐσωτερικὴν δύναμιν καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ δυναμοπολύγωνον:

$$F \quad W_1 \; W_3 \; Q \;\; (F)$$

εἶναι κλειστόν.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία μεταξὺ N_2 καὶ κατακορύφου ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν κλίσεως α, ἡ γωνία μεταξὺ τῶν W_1 καὶ W_2 εἶναι: $\alpha + \rho_1 + \rho_2$. Ἐκ τοῦ τριγώνου $W_1 W_2 F$ τῇ βοηθείᾳ τοῦ νόμου τῶν ἡμιτόνων λαμβάνεται:

$$\frac{F}{W_2} = \frac{\text{ημ}\,(\alpha + \rho_1 + \rho_2)}{\text{ημ}\,(90^\circ - \rho_1)} = \frac{\text{ημ}\,(\alpha + \rho_1 + \rho_2)}{\text{συν}\,\rho_1}.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $W_2 W_3 Q$ λαμβάνεται ὁμοίως:

$$\frac{W_2}{Q} = \frac{\text{ημ}\,(90^\circ + \rho_3)}{\text{ημ}\,[90^\circ - (\alpha + \rho_2 + \rho_3)]} = \frac{\text{συν}\,\rho_3}{\text{συν}\,(\alpha + \rho_2 + \rho_3)}.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη ἀμφοτέρων τῶν ἐκφράσεων προκύπτει:

$$\frac{F}{Q} = \frac{\text{συν}\,\rho_3}{\text{συν}\,\rho_1} \cdot \frac{\text{ημ}\,(\alpha + \rho_1 + \rho_2)}{\text{συν}\,(\alpha + \rho_2 + \rho_3)}.$$

Ἐπὶ ἴσων συντελεστῶν τριβῆς ἢ γωνιῶν τριβῆς $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις ἁπλοποιεῖται εἰς τήν:

$$F = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + 2\rho).$$

Ἐὰν δὲν ἐλαμβάνετο ὑπ' ὄψιν ἡ τριβὴ εἰς τὴν βάσιν καὶ τὸν ὁδηγὸν ἀλλ' ἁπλῶς μόνον ἡ τριβὴ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, θὰ ἦτο $F = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + \rho)$. Διὰ πλήρη ἔλλειψιν τριβῆς $F_0 = Q \cdot \text{εφ}\,\alpha$. Συνεπῶς ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως τοῦ σφηνὸς εἶναι:

$$\eta = \frac{F_0}{F} = \frac{\text{εφ}\,\alpha}{\text{εφ}\,(\alpha + 2\rho)}.$$

Παράδειγμα.

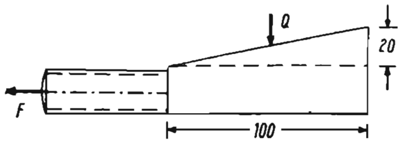
Ποία θὰ ἦτο ἡ καταβαλλομένη ἐπὶ ρυθμιστικοῦ σφηνὸς δύναμις F διὰ φορτίον Q = 4000 kp;

α) Ἄνευ τριβῆς γενικῶς.

β) Μὲ τριβὴν μόνον ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου,

γ) θεωρουμένων καὶ τῶν τριβῶν ἐπὶ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὁδηγοῦ, ἐὰν $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0{,}07$.

Ποῖος ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως εἰς τὰς περιπτώσεις β καὶ γ;



Σχ. 23·3 β.
Ρυθμιστικὸς σφήν.

Λύσις :

Ἐκ τοῦ σχήματος 23·3 β, εἰς τὸ ὁποῖον παρίσταται μόνον ὁ σφήν, λαμβάνεται:

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{20}{100} = 0{,}2, \qquad \alpha = 11^\circ\,18'$$

$$\text{εφ}\,\rho = \mu = 0{,}07 \qquad \rho = 4^\circ\,0'.$$

$$\alpha + \rho = 15^\circ\,18', \qquad \text{εφ}\,(\alpha + \rho) = 0{,}274$$

$$\alpha + 2\rho = 19^\circ\,18', \qquad \text{εφ}\,(\alpha + 2\rho) = 0{,}350.$$

$$F_0 = Q \cdot \text{εφ}\,\alpha = 4000 \times 0{,}2\ \text{kp} = 800\ \text{kp}$$

$$F_1 = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + \rho) = 4000 \times 0{,}274\ \text{kp} = 1096\ \text{kp},$$

$$F_2 = Q \cdot \text{εφ}\,(\alpha + 2\rho) = 4000 \times 0{,}35\ \text{kp} = 1400\ \text{kp}.$$

$$\eta_1 = \frac{F_0}{F_1} = \frac{800}{1096} = 0{,}73, \qquad \eta_2 = \frac{F_0}{F_2} = \frac{800}{1400} = 0{,}57.$$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

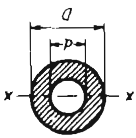
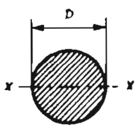
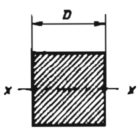
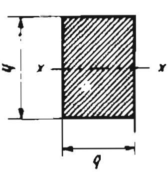
Πῖναξ 1. Ἐπιτρεπόμεναι καταπονήσεις μηχανολ. κατασκευῶν εἰς kp/cm²

Ὑλικόν		Χάλυβες μηχανῶν			Εὐγενεῖς χάλυβες		Χυτοχάλυψ	Χυτοσίδηροι συνήθους	Χυτοσίδηροι ὑψηλῆς ἀντοχῆς
		St 37	St 50	St 70	25 Cr Mo 4	42 Cr Mo 4	Stg 45 (GS45)	Ge 14 (GG14)	Ge 26 (GG26)
Ἐφελκυσμός $\sigma_{\epsilon\pi}$	I	1000	1400	2100	2300	3500	1000	350	650
	II	650	900	1350	1550	2250	650	270	500
	III	450	650	900	1000	1600	450	200	350
Θλῖψις $\sigma_{\epsilon\pi}$	I	1000	1400	2100	2100	3500	1100	850	1600
	II	650	900	1350	1600	2250	700	550	1000
	III	450	650	900	1050	1600	450	200	350
Κάμψις $\sigma_{b\epsilon\pi}$	I	1100	1500	2300	2500	3850	1100	500	* 1000
	II	700	1000	1500	1700	2450	750	350	* 650
	III	500	700	1050	1250	1750	500	250	* 400
Στρέψις $\tau_{t\epsilon\pi}$	I	1650	850	1250	1450	2100	650	400	** 750
	II	400	550	800	1000	1650	400	300	** 550
	III	300	400	600	800	1000	300	200	** 350
Εἰς ἰδιαιτέρως εὐνοϊκάς περιπτώσεις		+ 50%			+ 80%		+ 50%	+ 30 . . . 40%	

* Διά τήν ὀρθογωνικήν διατομήν ** Διά κυκλικήν διατομήν

Καταπόνησις : I Μόνιμος στατική, II Ἐπαναλαμβανομένη, III Ἀντιστρεφομένη

Πίναξ ΙΙ. Ροπαὶ ἀντιστάσεως ἁπλῶν διατομῶν

Διατομή		Ἀξονική Ροπὴ ἀντιστάσεως ὡς πρὸς ἄξονα x...x cm^3	Πολική ὡς πρὸς κέντρον cm^3
Ὀρθογώνιον		$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$	$W_p \approx \frac{2}{9}\, b^2 \cdot h$
Τετράγωνον		$W = \frac{\alpha^3}{6}$	$W_p \approx 0{,}21\, \alpha^3$
Κύκλος		$W = \frac{\pi}{32} d^3 \approx 0{,}1\, d^3$	$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \approx 0{,}2\, d^3$
Δακτύλιος		$W \approx 0{,}1 \frac{D^4 - d^4}{D}$	$W_p \approx 0{,}2 \frac{D^4 - d^4}{D}$

ΠΙΝΑΞ ΙΙΙ. ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Κύρια σύμβολα (συμπληρωματικὰ σύμβολα)

Σύμβολον	Ὀνομασία	
A (F, q)	Ἐπιφάνεια Ἐξωτ. ἐπιφάνεια Διατομή	
γ, a (b)	Ἐπιτάχυνσις	γ ἀντικαθιστᾶ a, b
d (D)	Διάμετρος	
F $(P, K \ldots)$	Δύναμις	
G	Βάρος	
g	Ἐπιτάχυνσις βαρύτητος	
i	Ἀκτὶς ἀδρανείας	
I	Ροπὴ ἀδρανείας μαζῶν	
J	Ροπὴ ἀδρανείας ἐπιφανειῶν	
M	Ροπὴ (περιστροφῆς)	
m	Μᾶζα	
n	Ἀριθμὸς στροφῶν	
P (N)	Ἰσχὺς	
p	Πίεσις	
r	Ἀκτὶς	
s	Διαδρομή	
T (Θ)	Ἀπόλυτος θερμοκρασία	
t (θ)	Θερμοκρασία μετρουμένη ἀπὸ °C	
T	Περίοδος	
t	Χρόνος	
υ (w)	Ταχύτης	
W	Ροπὴ ἀντιστάσεως	
W	Ἐνέργεια	
W (A)	Ἔργον	
α $(\beta, \gamma, \ldots)$	Ἐπίπεδος γωνία	
α	Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς	
α, ε (β)	Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις	ε ἀντικαθιστᾶ α, β
γ	Εἰδικὸν βάρος	
γ	Γωνιακὴ παραμόρφωσις	
ε	Εἰδικὴ ἐπιμήκυνσις	
η	Βαθμὸς ἀποδόσεως	
ρ	Πυκνότης	
σ	Ὀρθὴ τάσις	
τ	Διατμητικὴ τάσις	
ω	Γωνιακὴ ταχύτης	

Τυποποιηθέντα προθέματα μονάδων καὶ ἡ συνοπτικὴ γραφή των

Πρόθεμα		Σύμβολον	Σημασία		
Τερα-	(Tera)	T	10^{12}-πλάσιον	τῆς	μονάδος
Γιγα-	(Giga)	G	10^{9}	»	»
Μεγα-	(Mega)	M	10^{6}	»	»
Χιλιο-	(Kilo)	k	10^{3}	»	»
Ἑκατο-	(Hekto)	h	10^{2}	»	»
Δεκα-	(Deka)	da	10	»	»
Δεκατο-	(Dezi)	d	10^{-1}	»	»
Ἑκατοστο-	(Zenti)	c	10^{-2}	»	»
Χιλιοστὸ	(Milli)	m	10^{-3}	»	»
Μικρο-	(Mikro)	μ	10^{-6}	»	»
Νανο-	(Nano)	n	10^{-9}	»	»
Πικο	(Pico)	p	10^{-12}	»	»

Τὰ προθέματα μονάδων χρησιμοποιοῦνται πάντοτε εἰς τὴν συνοπτικὴν γραφήν των ἀμέσως (χωρὶς ἐνδιάμεσον διάστημα) πρὸ τῶν συμβόλων τῶν μονάδων.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

(Οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται εἰς σελίδας)

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Α/ΦΩΝ Γ. ΡΟΔΗ - ΑΜΑΡΟΥΣΙΟΥ 59 - ΑΜΑΡΟΥΣΙΟΝ