ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ Ο.Α.Ε.Δ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ Β΄

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ
ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΕΩΣ ΕΡΓΑΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ Ο.Α.Ε.Δ.

1. *Νεοελληνικὰ Ἀναγνώσματα.*
2. *Μαθηματικά, Τόμ. Α΄, Β΄.*
3. *Φυσική.*
4. *Χημεία.*
5. *Πρόληψις Ἀτυχημάτων.*

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «Ἱδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισε τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν Ἱδρύματος, ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς Ἑλλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἵδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων, τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς.

Ἐκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Εἰδικώτερον, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰ βιβλία τῶν μαθητῶν τῶν ἐκπαιδευτικῶν μονάδων τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἀπασχολήσεως Ἐργατικοῦ Δυναμικοῦ, διὰ τοῦ ἀπὸ 7ης Ἰουλίου 1972 ὑπογραφέντος ἰδιωτικοῦ συμφωνητικοῦ, τὸ Ἵδρυμα ἀνέλαβε τὴν ἔκδοσίν των, ἐν πλήρει καὶ στενῇ συνεργασίᾳ μετὰ τῶν ἁρμοδίων ὑπηρεσιῶν τοῦ Ὀργανισμοῦ.

Ὁ Ὀργανισμὸς ὡς κύριος φορεὺς τῆς ἐφαρμογῆς τῆς πολιτικῆς ἀπασχολήσεως τοῦ Ἐργατικοῦ Δυναμικοῦ τῆς χώρας ἀκολουθεῖ εὐρὺ πρόγραμμα ἐκπαιδεύσεως τῶν νέων εἰς τὰ τεχνικὰ ἐπαγγέλματα, καλύπτον τὸ σύνολον σχεδὸν τῶν εἰδικοτήτων τοῦ τεχνικοῦ τομέως.

Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἤδη ἀπὸ τοῦ ἔτους 1953 ἐφαρμόζεται ἐντὸς τῶν κόλπων του τὸ σύστημα Τεχνικῆς καὶ Ἐπαγγελματικῆς Ἐκπαιδεύσεως *τῶν νέων διὰ τῆς Μαθητείας, κατὰ τὰ πρότυπα τῶν ἀνεπτυγμένων βιομηχανικῶς χωρῶν.*

Σήμερον λειτουργοῦν καθ' ἅπασαν τὴν χώραν 42 Κέντρα καὶ Σχολαὶ Μαθητείας, φοιτοῦν δὲ εἰς αὐτὰς περίπου 12.000 μαθητευόμενοι, οἱ ὁποῖοι ἐκπαιδεύονται εἰς 31 διαφόρους εἰδικότητας.

Διὰ τῆς ἐκδόσεως ταύτης ἀκριβῶς θὰ παρασχεθοῦν εἰς τοὺς μαθητὰς-τεχνίτας τῶν ὡς ἄνω Σχολῶν ἀναγκαῖα ἐκπαιδευτικὰ βοηθήματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ ἐν ταῖς Σχολαῖς διδασκόμενα μαθήματα καὶ τὰ ὁποῖα θὰ δύνανται νὰ συμβουλεύωνται καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ ἐπαγγελματικοῦ των βίου.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος καταβάλλουν κάθε προσπάθειαν, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῆ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμή των ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς ἀπόρους μαθητάς.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ἀλέξανδρος Ι. Παππᾶς, Ὁμ. Καθηγητὴς Ε.Μ.Π., Πρόεδρος.

Χρυσόστομος Φ. Καβουνίδης, Διπλ. Μηχ.-Ἠλ. Ε.Μ.Π., Ἀντιπρόεδρος.

Μιχαὴλ Γ. Ἀγγελόπουλος, Τακτικὸς Καθηγητὴς Ε.Μ.Π.

Ἀναστασία Σακελλαριάδη, Διευθύντρια Α΄, Ἐκπρόσωπος Ο.Α.Ε.Δ.

Φώτιος Παπαγεωργίου, Ἐκπρόσωπος Ο.Α.Ε.Δ.

Κωνσταντῖνος Α. Μανάφης, Μον. Ἐπικ. Καθηγητὴς Παν/μίου Ἀθηνῶν, Σύμβουλος ἐπὶ τῶν ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος.

Δημοσθένης Π. Μεγαρίτης, Γραμματεὺς τῆς Ἐπιτροπῆς.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ Ο.Α.Ε.Δ.

ΑΝΔΡΕΟΥ Φ. ΤΣΑΤΣΟΥΛΗ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΣΧΟΛΗΣ ΥΠΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΑΘΗΝΩΝ
ΔΙΠΛ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥ - ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ Ε.Μ.Π.
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ Β΄

ΑΘΗΝΑΙ
1976

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ βιβλίο αὐτὸ ἔχει γραφῆ γιὰ τοὺς μαθητὰς τῶν τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ Ο.Α.Ε.Δ. Ἀποβλέπει εἰς τὸ νὰ δώση τὶς βασικὲς καὶ ἀπαραίτητες γνώσεις, ὥστε οἱ μαθηταὶ νὰ καταστοῦν ἱκανοὶ νὰ λύνουν τὰ προβλήματα, ποὺ θὰ ἀντιμετωπίσουν τόσο σὰν μαθητευόμενοι, στὴν ἀρχή, ὅσο καὶ σὰν τεχνῖται ἀργότερα.

Κατὰ τὴν συγγραφὴ τοῦ βιβλίου ἐλήφθη ὑπ' ὄψι ὅτι οἱ μαθηταὶ ἔχουν ἀπὸ τὸ σχολεῖο ποὺ ἔρχονται τὶς βασικὲς γνώσεις γιὰ τοὺς ἀριθμούς, τὶς πράξεις μ' αὐτοὺς καὶ τὰ ἁπλᾶ γεωμετρικὰ σχήματα καὶ γι' αὐτὸ οἱ γνώσεις αὐτὲς δὲν ἀναπτύσσονται πολύ. Περιλαμβάνονται ὅμως σ' αὐτὸ ὅλες οἱ ἀπαραίτητες γνώσεις, ποὺ πρέπει νὰ μάθουν οἱ μαθηταὶ στὸ νέο τους σχολεῖο, μὲ κάθε λεπτομέρεια καὶ σὲ ὅση ἔκτασι προβλέπει τὸ ἀναλυτικὸ πρόγραμμα.

Ὅλο τὸ βιβλίο εἶναι γραμμένο μὲ ἐπαγωγικὸ τρόπο. Δίνεται σχεδὸν πάντα πρῶτα τὸ ἁπλὸ παράδειγμα, ποὺ εἶναι συνήθως πρόβλημα βγαλμένο ἀπὸ τὴν πρᾶξι καὶ ἀκολουθεῖ ἡ λύσι του· στὴν συνέχεια βγαίνει τὸ συμπέρασμα τῆς λύσεως καὶ διατυπώνεται ὁ κανών, ποὺ ἔχει γενικὴ ἐφαρμογή.

Στὸ βιβλίο αὐτὸ δὲν πρέπει νὰ ἀναζητηθοῦν θεωρητικὲς λύσεις τῶν προβλημάτων, μὲ αὐστηρὲς μαθηματικὲς ἀρχές. Ἀντὶ αὐτοῦ ἔχει εἰσαχθῆ ἡ ἀπόδειξι μὲ βάσι τὸν ἁπλὸ λογικὸ συλλογισμό, ποὺ εἶναι εὔκολα ἀντιληπτός. Τοῦτο δέ, γιατὶ πιστεύω ὅτι τὸν μαθητὴ ἐνδιαφέρει βασικὰ τὸ δικαιολογημένο, μὲ ἁπλὸ τρόπο, συμπέρασμα, ποὺ τοῦ παρέχει *τὴν μαθηματικὴ ἔννοια* ἁπλᾶ, αναλυτικὰ καὶ μὲ πρακτικὸ τρόπο.

Τὸ βιβλίο εἶναι πλουτισμένο μὲ ἁπλᾶ σχέδια, τὰ περισσότερα παρμένα ἀπὸ τὴν καθημερινὴ ζωὴ καὶ πρᾶξι.

Στὸ τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθενται πολλὲς ἀσκήσεις, παρμένες ὅλες ἀπὸ τὴν πρᾶξι, πολλὲς ἀπὸ τὶς ὁποῖες συνοδεύονται καὶ ἀπὸ κατάλληλα σχήματα. Σὲ κάθε μία δίνεται καὶ τὸ ἀποτέλεσμα, μέσα σὲ παρένθεσι, γιὰ νὰ ἐλέγχουν οἱ μαθηταὶ τὶς λύσεις ποὺ εὑρίσκουν.

Σκοπὸς τοῦ βιβλίου εἶναι νὰ ὁδηγήση τὸν μαθητὴ νὰ κατανοήση πλήρως τὶς βασικὲς μαθηματικὲς ἔννοιες, νὰ τὶς ἀφομοιώση καὶ ἔτσι νὰ μπορῆ νὰ τὶς χρησιμοποιήση, χωρὶς νὰ ἔχη ἀνάγκη ἀπὸ αὐστηρὲς μαθηματικὲς διατυπώσεις, θεωρητικὲς ἀποδείξεις, ἀκριβολόγους ἐκφράσεις, ποὺ ὁδηγοῦν τελικὰ σὲ «σύγχυσι». Ἀπὸ τὴν σύγχυσι αὐτὴ ὁ μαθητὴς καταφεύγει στὴν ἀποστήθισι ἐκφράσεων, ποὺ δὲν κατανοεῖ, καὶ οἱ ὁποῖες τοῦ δημιουργοῦν ἔντονη ἀντιπάθεια πρὸς τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὸν κάνουν νὰ πιστέψη, πὼς ποτέ του δὲν θὰ μπορέση νὰ γίνη ἱκανὸς νὰ λύνη μόνος του «τὰ φοβερὰ αὐτὰ προβλήματα τῶν μαθηματικῶν, ποὺ τελικῶς εἶναι καὶ ἄχρηστα στὴν πρᾶξι».

Ἂν ἡ διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν, στὰ τεχνικῆς κατευθύνσεως σχολεῖα μας ἀρχίση νὰ διαπνέεται ἔντονα ἀπὸ ἕνα ἀνάλογο πνεῦμα, πιστεύω πὼς τότε τὸ βιβλίο αὐτὸ θὰ ἐπιτύχη νὰ φέρη μία βελτίωσι στὴν μαθηματικὴ μόρφωσι

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

τῶν μικρῶν μαθητῶν, κι' αὐτὸ θὰ εἶναι ἡ καλύτερη ἀμοιβὴ γιὰ τὸν συγγραφέα.

Ὡς πρὸς τὴν κατανομὴ τῆς ὕλης καὶ τὴν ἀλληλουχία τῶν κεφαλαίων ἐκρίθη σκόπιμο νὰ ἐφαρμοσθῆ ἡ ἀκόλουθος ἀρχή: Τὰ Μαθηματικὰ πρέπει νὰ διδάσκωνται σὰν ἑνιαῖο σύνολο ἀπὸ *ἑνότητες* παρμένες ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική, τὴν Γεωμετρία, τὴν Ἄλγεβρα καὶ τὴν Τριγωνομετρία, χωρὶς νὰ ξεχωρίζωνται μεταξύ τους οἱ κλάδοι αὐτοὶ τῶν μαθηματικῶν. Ἀντίθετα πρέπει νὰ ἀλληλοεμπλέκωνται καὶ νὰ ἀλληλοβοηθοῦνται, ἔτσι δὲ πρέπει καὶ νὰ διδάσκωνται, ὥστε νὰ παρέχωνται στὸν μαθητὴ ὅλες οἱ εὐκαιρίες, ποὺ τόσο ἔχει ἀνάγκη, γιὰ νὰ βρῆ πολλὰ παραδείγματα ἀπὸ τὴν γεωμετρία καὶ ἀπὸ καθημερινὰ τεχνικὰ θέματα. Τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἀφομοιώνονται εὔκολα, ἀφοῦ εἶναι ζωντανὰ καθημερινὰ παραδείγματα, εὐχάριστα, ποὺ ἐξάπτουν καὶ ὀξύνουν τὴν φαντασία.

Χωρὶς πολλὲς ἢ ἴσως καὶ χωρὶς καθόλου θεωρητικὲς ἀποδείξεις — αὐτὲς ἂς μείνουν γιὰ ὅσους καταρτίζονται θεωρητικὰ — ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ ὁδηγῆται κατ' εὐθεῖαν στὸ γενικὸ συμπέρασμα, γιατὶ δὲν πρέπει νὰ τοῦ ζητᾶμε νὰ ἀφομοιώνη περισσότερα, ἀπὸ ὅσα τοῦ χρειάζονται ἢ ἀπὸ ὅσα πρέπει ἤ, καὶ πολλὲς φορές, ἀπὸ ὅσα μπορεῖ, γιατὶ τότε δὲν κάνομε τίποτε περισσότερο ἀπὸ τὸ νὰ «σπαταλοῦμε» τὸν χρόνο του.

Παρουσιάζοντας τὸ βιβλίο αὐτὸ στοὺς μαθητὰς καὶ καθηγητάς, γιὰ τὶς ἐντυπώσεις καὶ τὶς παρατηρήσεις τῶν ὁποίων θὰ ἤμουν εὐγνώμων, θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω τὴν Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου καὶ τὸν Ο.Α.Ε.Δ. γιὰ τὴν τιμὴ ποὺ μοῦ ἔκαμαν νὰ μοῦ ἀναθέσουν τὴν συγγραφὴ τοῦ βιβλίου, καθὼς καὶ γιὰ τὶς ἐν συνεχείᾳ συμβουλὲς καὶ ὑποδείξεις τους. Ἀκόμα εὐχαριστῶ τὸ ἐκδοτικὸ τμῆμα τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου γιὰ τὴν βοήθειά του, ὥστε τὸ βιβλίο νὰ γίνη ὅσο τὸ δυνατὸν καλύτερο.

Ὁ Συγγραφεὺς

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦ. 8 Μέτρησι ἐπιφανειῶν

ΚΕΦ. 9 Μέθοδος τῶν τριῶν — ποσοστὰ — ἀναλογίες

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΚΕΦ. 10 Γεωμετρικὰ σχήματα στὸν χῶρο

ΚΕΦ. 11 Ἡ ἐξίσωσι — οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΜΕΤΡΗΣΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

8 · 1 Μονάδες γιὰ τὴν μέτρησι τῶν ἐπιφανειῶν.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε μία ἐπιφάνεια, ἐξετάζομε πόσες φορὲς μία ἄλλη ἐπιφάνεια, ποὺ τὴν λέμε ***μονάδα***, χωράει στὴν ἀρχική. Ὁ ἀριθμός, ποὺ μετράει μία ἐπιφάνεια, ὀνομάζεται ***ἐμβαδὸν*** τῆς ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι δύσκολο νὰ προσπαθοῦμε κάθε φορὰ νὰ ταιριάσωμε τὸ σχῆμα τῆς μονάδος μετρήσεως μὲ τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας, ποὺ θέλομε νὰ μετρήσωμε, ἀλλὰ καὶ πέρα ἀπὸ αὐτό, ἐπειδὴ θὰ προέκυπτε ποικιλία σχημάτων, ποὺ θὰ ἔπρεπε νὰ λαμβάνωμε σὰν μονάδες καὶ θὰ προκαλοῦσε σύγχυσι, γι' αὐτὸ σὰν μονὰς ἐπιφανείας ὁρίστηκε τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τὸ ***τετράγωνο***.

Ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι 1 m, τότε λέμε ὅτι τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ***1 τετραγωνικὸ μέτρο***, καὶ τὸ συμβολίζομε $\boldsymbol{1\ m^2}$. Ἂν ἡ πλευρά του εἶναι τὸ ἑκατοστόμετρο, ἔχομε ἐμβαδὸν ***1 τετραγωνικὸ ἑκατοστόμετρο***, $\boldsymbol{1\ cm^2}$. Γιὰ τὶς μεγάλες ἐπιφάνειες ἔχομε τὸ ***τετραγωνικὸ χιλιόμετρο***, $\boldsymbol{1\ km^2}$.

8 · 2 Σχέσεις μονάδων. Ἐμβαδὸν τετραγώνου.

Ξέρομε ὅτι $1\ m = 10\ dm$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τετράγωνο μὲ πλευρὰ $1\ dm$ (σχ. 8 · 2) συγκρινόμενο μὲ τετράγωνο πλευρᾶς $1\ m = 10\ dm$ θὰ εἶναι:

$$10 \times 10 = 100 \text{ φορὲς μικρότερο.}$$

Ἑπομένως:

$$\boxed{1\ m^2 = 100\ dm^2}$$

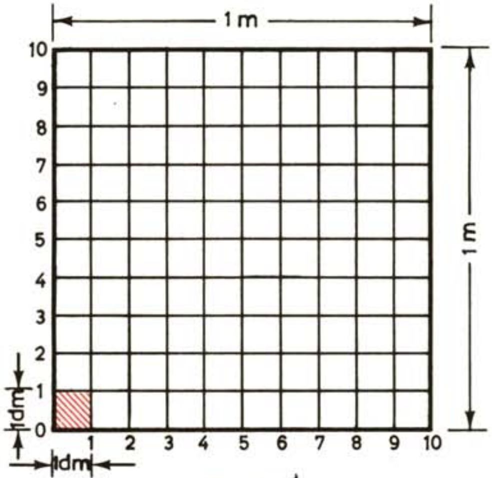
Αὐτὸ μᾶς κάνει νὰ σκεφθοῦμε ὅτι γιὰ τὶς ἄλλες μονάδες θὰ ἔχωμε:

$$1\ m^2 = 100 \times 100 = 10\,000\ cm^2$$
$$1\ km^2 = 1000 \times 1000 = 1\,000\,000\ m^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1\ m^2 &= 10\,000\ cm^2 \\ 1\ km^2 &= 1\,000\,000\ m^2 \end{aligned}}$$

καὶ ἀντιστρόφως:

$$1\ m^2 = 0{,}000\,001\ km^2$$
$$1\ dm^2 = 0{,}01 m^2$$
$$1\ cm^2 = 0{,}01\ dm^2 = 0{,}0001\ m^2$$



Σχ. 8·2.

Ἀπὸ αὐτὰ ἐξάγομε τὰ παρακάτω συμπεράσματα:

Συμπεράσματα.

α) Γιὰ νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν πλευρά του μὲ τὸν ἑαυτό της.

β) Κάθε μονὰς μετρήσεως ἐπιφανειῶν εἶναι 100 φορὲς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν μονάδα τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ 100 φορὲς μικροτέρα ἀπὸ τὴν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Προβλήματα.

1ο. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν Ε τετραγωνικοῦ δωματίου μὲ πλευρὰ 4,50 m.

Λύσι :

Μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ τετράγωνο ἔχει πλευρὰ 45 dm. Σύμφωνα μὲ τὸ πρῶτο συμπέρασμα θὰ ἔχωμε:

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

$$E = 45 \times 45 = 2025 \text{ dm}^2.$$

Σύμφωνα μὲ τὸ δεύτερο συμπέρασμα θὰ ἔχωμε:

$$2025 \text{ dm}^2 = 20{,}25 \text{ m}^2.$$

Ἑπομένως: $E = 20{,}25 \text{ m}^2.$

Ἔχομε ὅμως ὅτι: $4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}25.$

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι:

$$E = 4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}25 \text{ m}^2.$$

Δηλαδὴ τὸ πρῶτο ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν περίπτωσι, ποὺ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός.

2ο. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τετραγωνικοῦ τοίχου πλευρᾶς 2,15 m.

Λύσι :

Θὰ ἔχωμε πάλι:

$$E = 2{,}15 \times 2{,}15 = 4{,}6225 \text{ m}^2.$$

Ἐφ' ὅσον ἡ κάθε πλευρὰ εἶναι μετρημένη μὲ ἀκρίβεια ἑκατοστοῦ ἀκεραίας μονάδος, δηλαδὴ δύο δεκαδικῶν ψηφίων, τὸ ἐμβαδὸν θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπολογισθῆ μὲ ἀκρίβεια τεσσάρων δεκαδικῶν ψηφίων. Ὅμως, γιὰ νὰ μὴ γράφωμε δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς μὲ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, περιορίζομε τὴν ἀκρίβεια καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ στὰ δύο δεκαδικὰ ψηφία. Ἔτσι ἔχομε:

$$E = 4{,}62 \text{ m}^2 \text{ περίπου.}$$

3ο. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τετραγωνικῆς μαρμάρινης πλάκας μὲ πλευρὰ 0,35 m.

Λύσι :

Ἐπειδὴ τὸ μέτρο εἶναι μεγάλη μονὰς γιὰ τὴν πλάκα ποὺ θέλομε νὰ μετρήσωμε, γι' αὐτὸ χρησιμοποιοῦμε τὸ dm, δηλαδὴ τὴν παλάμη. Ἔτσι ἔχομε:

$$E = 3{,}5 \times 3{,}5 = 12{,}25 \text{ dm}^2.$$

Ἂν χρησιμοποιήσωμε τὸ cm, θὰ ἔχωμε:

$$E = 35 \times 35 = 1225 \text{ cm}^2.$$

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ἀπὸ αὐτὰ ποὺ εἴπαμε παραπάνω, βλέπομε ὅτι, ἂν θέλωμε νὰ ἐκφράσωμε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐξαγόμενο μὲ 100, διότι ἀπὸ 12,25 dm^2 εἴδαμε ὅτι ἔχομε 1225 cm^2.

Ἀντίθετα, ἂν θέλωμε νὰ ἐκφράσωμε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο μὲ 100, διότι ἀπὸ 1225 cm^2 εἴδαμε ὅτι ἔχομε 12,25 dm^2.

8 · 3 Ἄλλες μονάδες.

Γιὰ τὴν μέτρησι τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς χωραφιοῦ ἢ ἑνὸς γηπέδου, χρησιμοποιοῦμε τὶς παρακάτω μονάδες:

Τὸ ***στρέμμα***, ποὺ ἰσοῦται μὲ 1000 m^2.

Τὸ ***ἑκτάριο***, ποὺ ἰσοῦται μὲ 10 στρέμματα, δηλαδὴ μὲ 10 000 m^2.

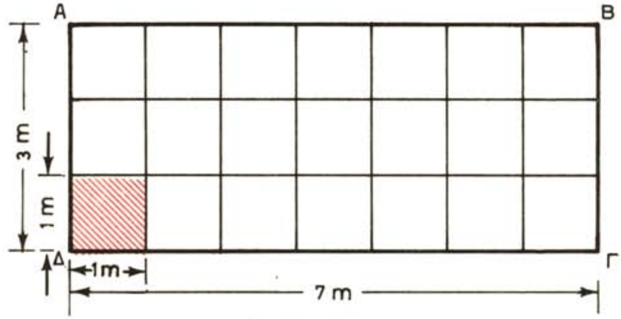
Τὸν ***τετραγωνικὸ τεκτονικὸ πῆχυ***, ποὺ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου μὲ πλευρὰ 0,75 m, δηλαδὴ 75 cm καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{9}{16}$ m^2 ἢ 0,5625 m^2.

Ἀκόμη στὸ ἀγγλοσαξωνικὸ σύστημα ὑπάρχουν: ἡ ***τετραγωνικὴ ἴντσα***, ποὺ εἶναι τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1 in, ὁ ***τετραγωνικὸς ποὺς (πόδι)*** κ.λπ.

8 · 4 Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ὀρθογωνίου τριγώνου, ρόμβου.

Προβλήματα.

1ο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου ὀρθογωνίου δωματίου πλάτους 3 m καὶ μήκους 7 m (σχ. 8 · 4 α).



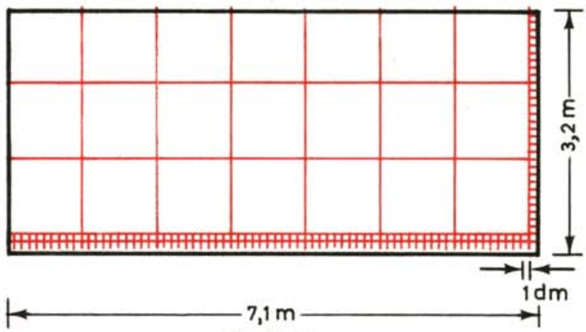
Σχ. 8·4 α.

Λύσι :

Γιὰ νὰ λυθῆ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὑρεθῆ πόσες φορὲς τὸ τετράγωνο πλευρᾶς 1 m χωράει στὸ ὀρθογώνιό μας. Βλέπομε ὅτι, διαιρώντας τὴν μικρὴ πλευρὰ ΑΔ σὲ τρία ἴσα μέρη τοῦ 1 m καὶ τὴν πλευρὰ ΔΓ σὲ 7 ἴσα μέρη τοῦ 1 m, μποροῦμε νὰ σχηματίσωμε ***τρεῖς*** σειρές, ποὺ κάθε μία νὰ ἔχη ***ἑπτὰ*** τετράγωνα πλευρᾶς 1 m. Δηλαδὴ σχηματίζονται συνολικὰ ***τρία ἐπὶ ἑπτά, ἴσον εἰκοσιένα*** τετράγωνα, ποὺ τὸ καθένα τους ἔχει ἐμβαδὸν 1 m², δηλαδή:

$$E_{\text{ορθ.}} = 3 \times 7 = 21 \text{ m}^2.$$

2ο. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου ἑνὸς ὀρθογωνίου δωματίου πλάτους 3,2 m καὶ μήκους 7,1 m (σχ. 8 · 4 β).



Σχ. 8·4 β.

Λύσι :

Ἐδῶ βλέπομε ὅτι οἱ διαστάσεις τοῦ δαπέδου τοῦ δωματίου εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί. Ἂν ὅμως ἀλλάξωμε μονάδες μετρήσεως, μποροῦμε νὰ ἔχωμε τὶς διαστάσεις αὐτὲς σὲ ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ξέρομε ὅτι:

$$3{,}2 \text{ m} = 32 \text{ dm} \qquad \text{καὶ} \qquad 7{,}1 \text{ m} = 71 \text{ dm}.$$

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου θὰ εἶναι:

$$E_{\text{ορθ.}} = 32 \times 71 = 2272 \text{ dm}^2.$$

Καὶ ἂν πᾶμε στὴν ἀμέσως ἀνωτέρα τάξι (διαιρώντας διὰ 100):

$$E_{\text{ορθ.}} = 22{,}72 \text{ m}^2.$$

Ὅμως βλέπομε ὅτι: $3{,}2 \times 7{,}1 = 22{,}72$.

Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ προβλήματα προκύπτει σὰν συμπέρασμα ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ γινόμενο τῶν δύο πλευρῶν του, ποὺ πρέπει νὰ εἶναι μετρημένες μὲ τὴν ἴδια μονάδα μήκους.

Ἀντίστροφο πρόβλημα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνικοῦ δαπέδου ἑνὸς δωματίου εἶναι 21 m². Ἂν ἡ μία του πλευρὰ εἶναι 7 m, πόση εἶναι ἡ ἄλλη;

Λύσι:

Τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς, ποὺ ζητοῦμε νὰ ὑπολογίσωμε, ἐπὶ τὸ μῆκος 7 m τῆς πλευρᾶς, ποὺ μᾶς δόθηκε, εἶναι 21 m². Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ζητούμενο μῆκος θὰ εὑρεθῆ ἀπὸ τὴν διαίρεσι τοῦ 21 διὰ τοῦ 7, δηλαδή:

$$21 : 7 = 3 \text{ m}.$$

Μερικὲς ἐφαρμογές.

1η. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς σὲ μερικὰ προφίλ:

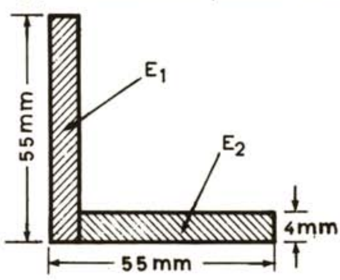
α) Τετραγώνου πλευρᾶς 30 mm:

$$E_{\tau\varepsilon\tau\rho.} = 30 \times 30 = 900 \text{ mm}^2.$$

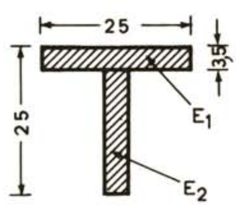
β) Ὀρθογωνίου πλευρῶν 35 mm × 25 mm:

$$E_{o\rho\theta.} = 35 \times 25 = 875 \text{ mm}^2.$$

γ) Ἰσοσκελοῦς γωνίας 55 mm × 55 mm × 4 mm (σχ. 8 · 4 γ).



Σχ. 8·4 γ.



Σχ. 8·4 δ.

Χωρίζομε τὴν γωνία σὲ δύο κομμάτια, E_1 καὶ E_2.

$$E_1 = 55 \times 4 = 220 \qquad E_1 = 220 \text{ mm}^2$$
$$E_2 = (55 - 4) \times 4 = 51 \times 4 = 204 \qquad E_2 = 204 \text{ mm}^2$$

Ἑπομένως: $E = E_1 + E_2 = 220 + 204$

$$E = 424 \text{ mm}^2.$$

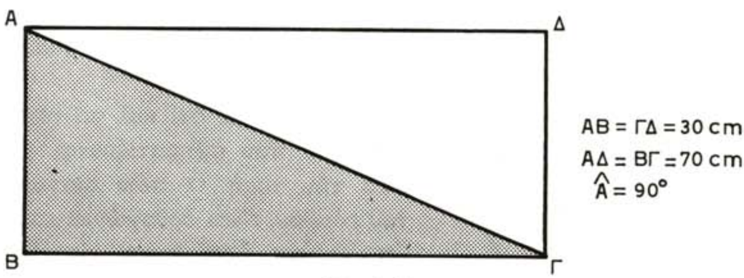
δ) Ἁπλοῦ Ταῦ $25 \times 25 \times 3{,}5$ mm (σχ. 8 · 4 δ).

Χωρίζομε τὸ ταῦ σὲ δύο κομμάτια E_1 καὶ E_2.

$$E_1 = 25 \times 3{,}5 = 87{,}5 \text{ mm}^2$$
$$E_2 = (25 - 3{,}5) \times 3{,}5 = 75{,}25 \text{ mm}^2$$

Ἑπομένως: $E = E_1 + E_2 = 162{,}75 \text{ mm}^2.$

2α. Πάρετε μία ὀρθογωνικὴ πλάκα 30 cm × 70 cm καὶ χωρίσετέ την στὰ δύο κατὰ τὴν μία διαγώνιό της (σχ. 8 · 4 ε). Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κάθε κομματιοῦ;



Σχ. 8·4 ε.

Ὅπως ξέρομε, γιὰ ὁλόκληρη τὴν πλάκα θὰ ἔχωμε ἐμβαδόν:

$$E_{\text{ορθ.}} = 30 \times 70 = 2100 \text{ cm}^2.$$

Ἀφοῦ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἔχουν τὶς τρεῖς πλευρές τους ἴσες μία πρὸς μία, εἶναι ἴσα καὶ ἀφοῦ $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 90°$, εἶναι καὶ ὀρθογώνια. Αὐτὸ σημαίνει πώς, ἂν τὰ βάλωμε τὸ ἕνα ἐπάνω στὸ ἄλλο, θὰ συμπέσουν.

Ἡ διαγώνιος λοιπὸν κάθε ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τὸ χωρίζει σὲ δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι:

$$\text{'Εμβαδὸν τριγ. ΑΒΓ} = \text{'Εμβαδὸν τριγ. ΑΔΓ},$$

κάθε δὲ τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

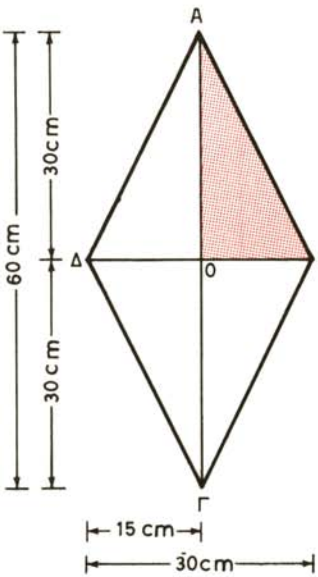
῾Επομένως:

$$\text{'Εμβ. 'Ορθ. Τριγ. ΑΒΓ} = \frac{30 \times 70}{2}$$

ἢ τελικῶς: $E_{\text{τριγ.}} = 1050\ \text{cm}^2$.

Συμπέρασμα.

Γιὰ νὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου πολλαπλασιάζομε τὰ μήκη τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του καὶ τὸ γινόμενό τους τὸ διαιροῦμε διὰ 2.



Σχ. 8·4 στ.

3η. Πάρετε μία πλάκα σὲ σχῆμα ρόμβου μὲ διαγωνίους 60 cm καὶ 30 cm. ῾Υπολογίσετε τὸ ἐμβαδό της (σχ. 8 · 4 στ).

Παρατηροῦμε ὅτι καὶ τὰ τέσσερα τρίγωνα, ποὺ σχηματίζονται γύρω ἀπὸ τὴν τομὴ Ο τῶν διαγωνίων τοῦ ρόμβου, εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἴσα μεταξύ τους, ἀφοῦ ἔχουν τὶς πλευρές τους ἴσες μία πρὸς μία.

Εὑρίσκοντας λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου, π.χ. τοῦ ΑΟΒ, καὶ πολλαπλασιάζοντάς το ἐπὶ 4, εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου.

῞Οπως ἐμάθαμε, γιὰ τὸ τρίγωνο ἔχομε:

$$\text{'Εμβ. ΑΟΒ} = \frac{15 \times 30}{2}.$$

Γιὰ τὸν ρόμβο: $\text{'Εμβ. ΑΒΓΔ} = 4 \times \text{'Εμβ. ΑΟΒ} = 4 \times \dfrac{15 \times 30}{2}$

ἢ $E_{\text{ρομβ.}} = \dfrac{4 \times 15 \times 30}{2} = \dfrac{2 \times 15 \times 30 \times 2}{2}$

ἢ $E_{\text{ρομβ.}} = \dfrac{(2 \times 15) \times (2 \times 30)}{2} = \dfrac{30 \times 60}{2}$

ἢ $E_{\text{ρομβ.}} = \dfrac{1800}{2} = 900 \text{ cm}^2.$

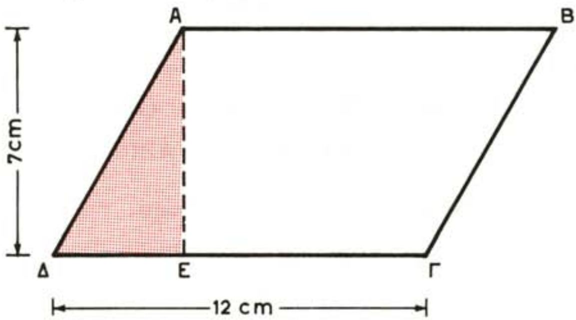
Δηλαδή:

Γιὰ νὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου πολλαπλασιάζομε τὰ μήκη τῶν δύο διαγωνίων του καὶ τὸ γινόμενό τους τὸ διαιροῦμε διὰ 2.

8 · 5 Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τριγώνου καὶ τραπεζίου.

Πρόβλημα.

Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ἐπίπλου ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου μὲ πλευρὰ μήκους 12 dm καὶ ὕψος 7 dm (σχ. 8 · 5 α). Νὰ εὑρεθῇ πόσους τετραγωνικοὺς πόντους φορμάικας χρειαζόμαστε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὴν ἐπιφάνεια αὐτή.

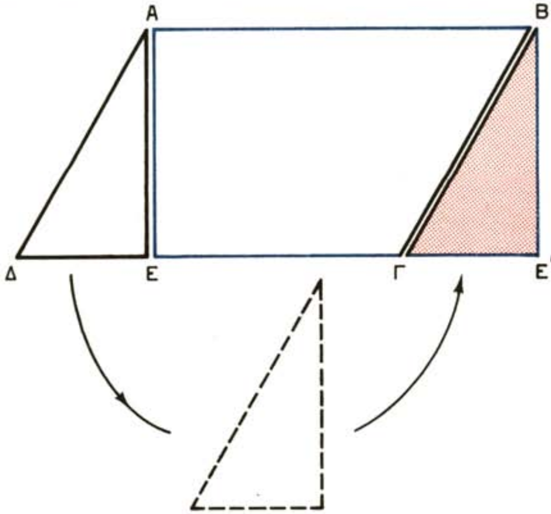


Σχ. 8·5 α.

Λύσι :

Πρὶν λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτό, ἀποτυπώνομε ὑπὸ κλίμακα τὴν ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου ἐπάνω σὲ ἕνα χαρτόνι. Κατόπιν ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α φέρομε τὸ ***ὕψος*** ΑΕ. Σχηματίζεται ἔτσι τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ, τὸ ὁποῖο κόβομε μὲ ἕνα ψαλίδι καὶ τὸ μεταφέρομε ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἔτσι, ὥστε νὰ σχηματισθῆ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΕΕ'Β (σχ. 8·5β). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνο ΑΕΔ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τρίγωνο ΒΕ'Γ, θὰ ἔχωμε:

Ἐμβ. παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ = Ἐμβ. ὀρθογ. παραλ. ΑΒΕ'Ε.



Σχ. 8·5 β.

Ξέρομε ὅτι:

$$\text{Ἐμβ. } ΑΒΕ'Ε = (ΑΒ) \times (ΑΕ).$$

Ἑπομένως στὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θὰ ἔχωμε:

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda.} = (ΑΒ) \times (ΑΕ) \quad \text{ἢ} \quad E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda.} = (ΓΔ) \times (ΑΕ)$$

καὶ γιὰ τὴν περίπτωσί μας:

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda.} = 12 \times 7 = 84 \text{ dm}^2 = 8400 \text{ cm}^2.$$

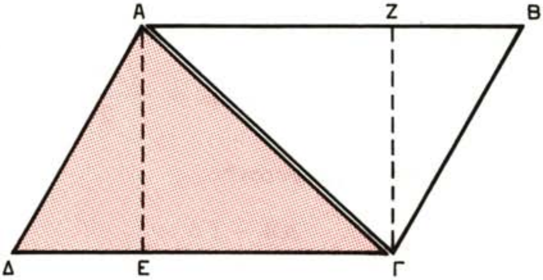
Δηλαδὴ θὰ χρειασθοῦμε συνολικὰ 8400 cm² φορμάικα.

Συμπέρασμα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐφαρμογὴ 1η.

Στὸ προηγούμενο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρομε τὴν διαγώνιο ΑΓ (σχ. 8 · 5 γ). Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ποὺ σχηματίζονται, εἶναι, ὅπως εὔκολα μποροῦμε νὰ δοῦμε, ἴσα μεταξύ τους.



Σχ. 8·5 γ.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καθενὸς ἀπὸ αὐτὰ θὰ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

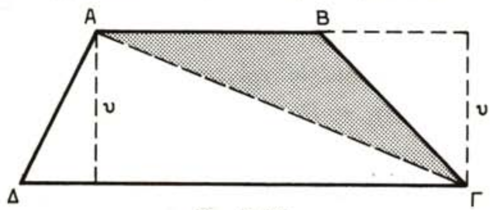
Ἑπομένως: Ἐμβ. τριγ. $\text{ΑΔΓ} = \dfrac{1}{2} \times (\text{ΔΓ}) \times (\text{ΑΕ})$.

Συμπέρασμα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐφαρμογὴ 2α.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμε τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ΑΒΓΔ (σχ. 8 · 5 δ).



Σχ. 8·5 δ.

Ἂν φέρωμε τὴν διαγώνιο ΑΓ, τὸ τραπέζιο χωρίζεται σὲ δύο τρίγωνα.

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ : $E_{ΑΒΓ} = \frac{(ΑΒ)}{2} \cdot υ.$

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΓ : $E_{ΑΔΓ} = \frac{(ΔΓ)}{2} \cdot υ.$

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ :

$$E_{τραπ.} = \frac{(ΑΒ)}{2} \cdot υ + \frac{(ΓΔ)}{2} \cdot υ.$$

Ἡ παραπάνω σχέσι γράφεται *:

$$E_{τραπ.} = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} \cdot υ$$

Ποὺ σημαίνει ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὸ μισὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν του.

8 · 6 Σχήματα μὲ μία λαμαρίνα.

α) Ἂς πάρωμε ἕνα λεπτὸ φύλλο λαμαρίνας σὲ σχῆμα τετραγώνου. Φέρομε τὶς διαγωνίους (σχ. 8 · 6 α) καὶ μετὰ τὸ κόβομε κατὰ μῆκος τῶν διαγωνίων του. Παίρνομε ἔτσι 4 ἄλλα τριγωνικὰ κομμάτια, ἴσα μεταξύ τους, μὲ τὰ ὁποῖα μποροῦμε νὰ φτιάξωμε ἕνα ἀπὸ τὰ παρακάτω σχήματα, ἀρκεῖ νὰ τὰ συγκολλήσωμε καταλλήλως:

— Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

— Ἁπλὸ παραλληλόγραμμο.

— Ἰσοσκελὲς τραπέζιο.

— Ὀρθογώνιο ἰσοσκελὲς τρίγωνο.

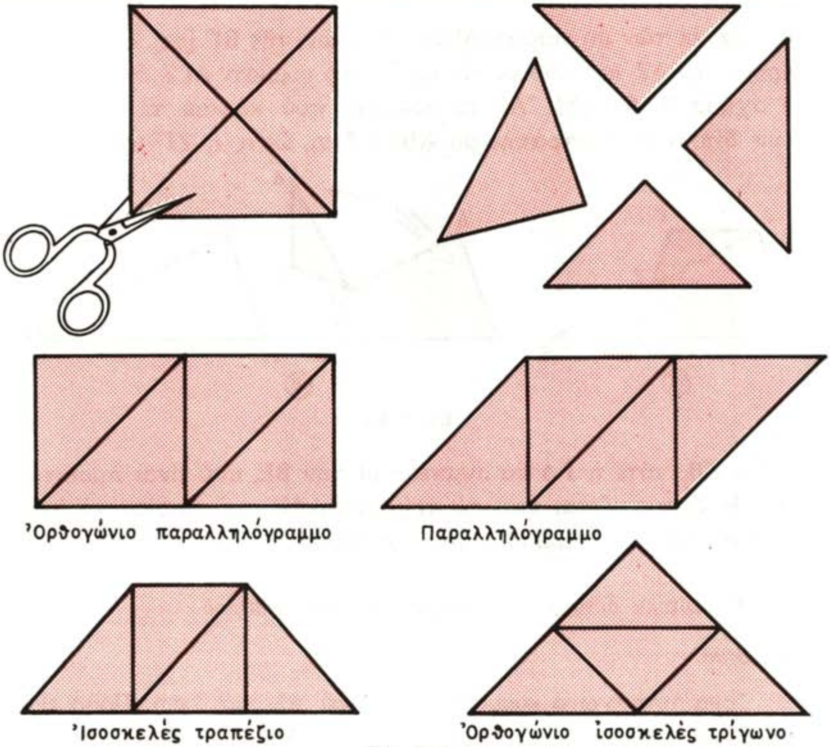
β) Κάνετε καὶ σεῖς τὸ ἴδιο καὶ μὲ ἕνα ρόμβο (σχ. 8 · 6 β).

Ποιά σχήματα νομίζετε ὅτι μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε;

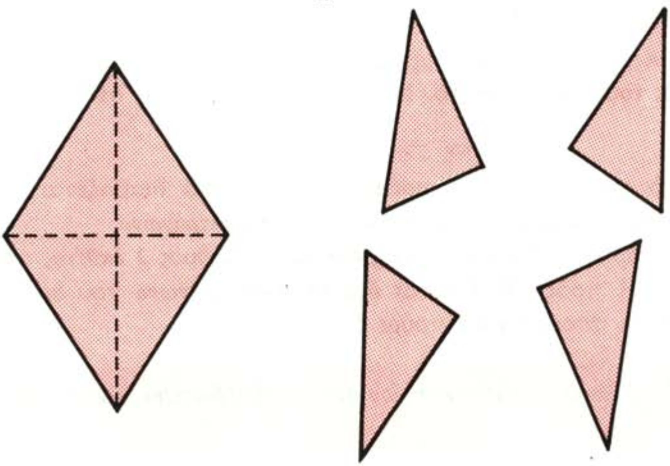
γ) Ἂς πάρωμε τέλος ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ. Ἔστω Ζ τὸ μέσον

* Παραλείπομε τὴν ἀπόδειξι αὐτῆς τῆς μαθηματικῆς ἰδιότητος.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



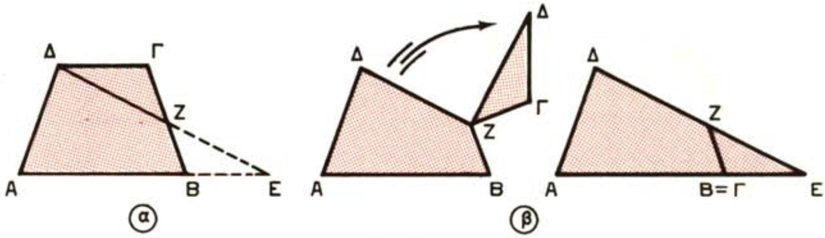
Σχ. 8·6 α.



Σχ. 8·6 β.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

τῆς μίας ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, τῆς ΒΓ [σχ. 8 · 6 γ (α)]. Φέρομε τὴν ΔΖ καὶ κόβομε τὸ τριγωνικὸ κομμάτι ΔΓΖ ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 8 · 6 γ (β). Ἂν τὸ κομμάτι ποὺ κόψαμε τὸ τοποθετήσωμε δίπλα στὸ τετράπλευρο ΑΒΖΔ ἔτσι, ὥστε ἡ ΖΓ νὰ συμπέση



Σχ. 8·6 γ.

μὲ τὴν ΖΒ, τότε ἡ ΓΔ θὰ συμπέση μὲ τὴν ΒΕ, ποὺ εἶναι προέκτασι τῆς ΑΒ. Σχηματίζεται ἔτσι τὸ τρίγωνο ΑΔΕ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ.

8 · 7 Ἡ δευτέρα δύναμι ἢ τὸ τετράγωνο ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Πρόβλημα.

Ἕνα τετράγωνο κομμάτι ξύλο ἔχει πλευρὰ 3 cm. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύσι :

Γνωρίζομε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι γινόμενο τῆς πλευρᾶς του (3 cm) ἐπὶ τὸν ἑαυτό της, ποὺ σημαίνει ὅτι:

$$E_{\tau\varepsilon\tau\rho.} = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2.$$

Τὸ γινόμενο 3×3 γράφεται καὶ 3^2 καὶ διαβάζεται ***δευτέρα δύναμι*** τοῦ ἀριθμοῦ 3 ἢ ἀλλοιῶς ***τρία στὸ τετράγωνο***.

Ὁ ἀριθμὸς ***3*** ὀνομάζεται ***βάσι*** καὶ ὁ ἀριθμὸς ***2 ἐκθέτης*** τῆς δυνάμεως. Ἡ πρᾶξι 3^2 λέγεται ***ὕψωσι στὸ τετράγωνο*** τοῦ ἀριθμοῦ 3.

Ἔτσι μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν δευτέρα δύναμι τῆς πλευρᾶς του.

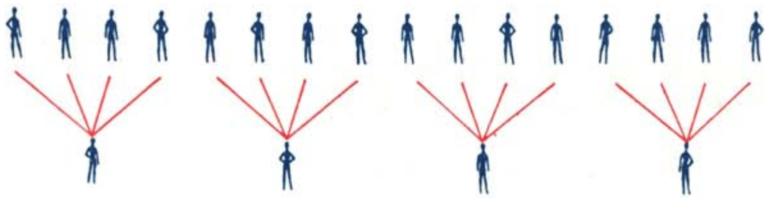
Προσοχή : Στοὺς συγκεκριμένους ἀριθμοὺς μαζὶ μὲ τὸν ἀριθμὸ ὑψώνεται στὸ τετράγωνο καὶ ἡ μονάς.

Παράδειγμα.

Σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμε:

$$4^2 = 16.$$

Στὸ σχῆμα 8 . 7 ἀπεικονίζεται παραστατικὰ ἡ παραπάνω ἀριθμητικὴ πρᾶξι.



Σχ. 8·7.

Ἐνδιαφέρουσα παρατήρησι .

Ἂς εὕρωμε τὴν δευτέρα δύναμι τῆς μονάδος.

Θὰ εἶναι: $1^2 = 1 \times 1 = 1.$

Ἑπομένως:

Ἡ δευτέρα δύναμι ἢ τὸ τετράγωνο τῆς μονάδος εἶναι ὁ ἑαυτός της.

8 · 8 Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα.

Πρόβλημα.

Ἕνα τετραγωνικὸ κομμάτι λαμαρίνα ἔχει ἐμβαδὸν 9 cm^2. Πόσο μῆκος ἔχει ἡ πλευρά του ;

Σχ. 8·8 α.

Λύσι :

Γνωρίζομε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτό της. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, γιὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος μὲ τὸν ἑαυτό του μᾶς δίνη τὸ 9. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ὀνομάζεται ***τετραγωνικὴ ρίζα*** τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ μᾶς δόθηκε.

Ὥστε:

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ ὀνομάζεται ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῆ μὲ τὸν ἑαυτό του, μᾶς δίνει τὸν ἀριθμὸ ποὺ μᾶς δόθηκε.

Ἢ μὲ ἄλλη διατύπωσι:

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἕνας ἄλλος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δόθηκε.

Στὸ πρόβλημά μας ὁ ἀριθμὸς ***3***, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος μὲ τὸν ἑαυτό του, 3×3, μᾶς δίνει τὸν 9, λέγεται ***τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 9***.

Ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ παραπάνω τετραγώνου ἔχει μῆκος 3 cm.

Σύμβολο τῆς τετραγωνικῆς ρίζας εἶναι τό: $\sqrt{}$, ποὺ λέγεται ***ριζικό***.

Γράφομε: $\sqrt{9} = 3$.

Ὁ ἀριθμὸς 9 λέγεται ***ὑπόρριζο***.

Μερικὰ ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

α) Ποιά εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 16;

Ξέρομε ὅτι $4 \times 4 = 16$.

Ἄρα: $\sqrt{16} = 4$.

β) Ποιό εἶναι τὸ μῆκος πλευρᾶς τετραγώνου μὲ ἐμβαδὸν 25 m^2;

Ξέρομε ὅτι: $5 \times 5 = 25$.

Ἄρα: $\sqrt{25} = 5$ καὶ ἐπειδὴ τὸ 25 μᾶς ἔχει δοθῆ σὲ m^2, τὸ μῆκος θὰ εὑρεθῆ σὲ m, δηλαδὴ ἡ ζητουμένη πλευρὰ εἶναι 5 m.

γ) Ποιά εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 1;

Ἀφοῦ $1 \times 1 = 1$, σημαίνει ὅτι: $\sqrt{1} = 1$.

Δηλαδή:

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς μονάδος εἶναι ὁ ἑαυτός της.

8 · 9 Πίνακες τετραγωνικῶν ριζῶν.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, χρειάζεται νὰ ἐκτελέσωμε μία πολύπλοκη πρᾶξι, τὴν ὁποία δὲν θὰ ἀναπτύξωμε.

Στὸν Πίνακα 8 · 9 · 1 δίνονται οἱ τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 μέχρι τὸ 100 (3η στήλη), ἐνῶ στὴν δευτέρα στήλη δίνονται τὰ τετράγωνα τῶν ἴδιων ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ 100. Στὸ τέλος τοῦ βιβλίου ὑπάρχει Πίναξ, ποὺ δίνει τὰ τετράγωνα καὶ τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ 1000.

Παρακάτω δίνομε μερικὰ παραδείγματα καὶ δείχνομε τρόπους ὑπολογισμοῦ τετραγωνικῶν ριζῶν μὲ τὴν βοήθεια τοῦ Πίνακος 8 · 9 · 1.

Παράδειγμα 1ο.

Ὑπολογίσετε τὴν $\sqrt{73}$

Στὴν πρώτη στήλη «Ἀριθμοὶ» ἀναζητοῦμε καὶ εὑρίσκομε τὸν ἀριθμὸ 73. Στὴν ἴδια γραμμή, ἀλλὰ στὴν τρίτη στήλη «Τετραγωνικὴ ρίζα», εὑρίσκομε τὸ ζητούμενο: $\sqrt{73} = 8{,}544.$

(Τὸ ἐξαγόμενο δίνεται μὲ προσέγγισι χιλιοστοῦ.)

Παράδειγμα 2ο.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 8281.

Πᾶμε πάλι στὸν Πίνακα 8 · 9 · 1. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δίνεται εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ 100, τὸν ἀναζητοῦμε στὴν δευτέρα στήλη, δηλαδὴ στὴν στήλη «Τετράγωνα».

Στὴν ἴδια σειρά, στὴν πρώτη στήλη εὑρίσκομε τὸν ζητούμενο:

$$\sqrt{8281} = 91.$$

Παράδειγμα 3ο.

Ποιά εἶναι ἡ $\sqrt{2535}$;

ΠΙΝΑΞ 8·9·1

'Αριθμός	Τετράγωνο	Τετραγων. ρίζα	'Αριθμός	Τετράγωνο	Τετραγων. ρίζα	'Αριθμός	Τετράγωνο	Τετραγων. ρίζα	'Αριθμός	Τετράγωνο	Τετραγων. ρίζα
α	α^2	$\sqrt{\alpha}$	α	α^2	$\sqrt{\alpha}$	α	α^2	$\sqrt{\alpha}$	α	α^2	$\sqrt{\alpha}$
1	1	1,000	26	676	5,099	51	2601	7,141	76	5776	8,718
2	4	1,414	27	729	5,196	52	2704	7,211	77	5929	8,775
3	9	1,732	28	784	5,291	53	2809	7,280	78	6084	8,832
4	16	2,000	29	841	5,385	54	2916	7,348	79	6241	8,888
5	25	2,236	30	900	5,477	55	3025	7,416	80	6400	8,944
6	36	2,449	31	961	5,568	56	3136	7,483	81	6561	9,000
7	49	2,646	32	1024	5,657	57	3249	7,550	82	6724	9,055
8	64	2,828	33	1089	5,745	58	3364	7,616	83	6889	9,110
9	81	3,000	34	1156	5,831	59	3481	7,681	84	7056	9,165
10	100	3,162	35	1225	5,916	60	3600	7,746	85	7225	9,219
11	121	3,317	36	1296	6,000	61	3721	7,810	86	7300	9,274
12	144	3,464	37	1369	6,083	62	3844	7,874	87	7569	9,327
13	169	3,605	38	1444	6,164	63	3969	7,937	88	7744	9,381
14	196	3,742	39	1521	6,245	64	4096	8,000	89	7921	9,434
15	225	3,873	40	1600	6,325	65	4225	8,062	90	8100	9,487
16	256	4,000	41	1681	6,403	66	4356	8,124	91	8281	9,539
17	289	4,123	42	1764	6,481	67	4489	8,185	92	8464	9,592
18	324	4,243	43	1849	6,557	68	4624	8,246	93	8649	9,644
19	361	4,359	44	1936	6,633	69	4761	8,307	94	8836	9,695
20	400	4,472	45	2025	6,708	70	4900	8,367	95	9025	9,747
21	441	4,583	46	2116	6,782	71	5041	8,426	96	9216	9,798
22	484	4,690	47	2209	6,856	72	5184	8,485	97	9409	9,849
23	529	4,796	48	2304	6,928	73	5329	8,544	98	9604	9,899
24	576	4,899	49	2401	7,000	74	5476	8,602	99	9801	9,950
25	625	5,000	50	2500	7,071	75	5625	8,660	100	10000	10,000

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Πᾶμε στὴν δευτέρα στήλη τοῦ πίνακος. Βλέπομε ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁ ἀριθμὸς 2535, ἀλλὰ ὑπάρχουν οἱ ἀριθμοὶ 2500 καὶ 2601, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔχομε:

$$\sqrt{2500} = 50 \qquad \sqrt{2601} = 51.$$

Ἄρα: $\sqrt{2535} \simeq 50$ μὲ προσέγγισι μονάδος πρὸς τὰ κάτω,

ἢ $\sqrt{2535} \simeq 51$ μὲ προσέγγισι μονάδος πρὸς τὰ ἄνω.

Παράδειγμα 4ο.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 32 400 cm^2.

Ἐδῶ, ὅπως καταλαβαίνομε, ζητοῦμε τὴν $\sqrt{32\,400}$. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ 10 000, δὲν ὑπάρχει σὲ καμμία στήλη στὸν Πίνακα 8 · 9 · 1.

Σκεπτόμαστε λοιπὸν ὡς ἑξῆς:

Ξέρομε ὅτι : $1\,dm^2 = 100\,cm^2$.

Ἄρα: $32\,400\,cm^2 = 324\,dm^2$.

Ὁ ἀριθμὸς 324 περιλαμβάνεται στὴν τρίτη στήλη τοῦ Πίνακος καὶ εἶναι:

$$\sqrt{324} = 18.$$

Ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι 18 dm ἢ 180 cm.

Ὥστε:

$$\sqrt{32\,400} = \sqrt{324 \times 100} = \sqrt{324} \times \sqrt{100} = 18 \times 10 = 180.$$

Ὥστε:

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τὸ 10 000, ποὺ μπορεῖ νὰ γραφῇ σὰν γινόμενο ἑνὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 10 000 ἐπὶ 100 ἢ ἐπὶ 10 000, εὑρίσκομε χωριστὰ τὶς δύο τετραγωνικὲς ρίζες καὶ τὶς πολλαπλασιάζομε. Τὸ γινόμενο αὐτὸ εἶναι ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ρίζα*.

* Σημείωσι: Δὲν ἐξετάζομε πιὸ ἀναλυτικὰ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα καὶ τοὺς ἀριθμοὺς πάνω ἀπὸ 10 000, οἱ ὁποῖοι μποροῦν νὰ γραφοῦν σὰν γινόμενα ἀκεραίου ἐπὶ τὸ 100 ἢ τὸ 10 000 κ.λπ., ἐπειδὴ ξεφεύγομε ἀπὸ τὸν προορισμὸ τοῦ βιβλίου μας.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Μερικὰ ἄλλα ἀριθμητικὰ παραδείγματα:

$$\sqrt{470\,000} = \sqrt{47} \times \sqrt{10\,000} = 6{,}856 \times 100 = 685{,}6.$$

$$\sqrt{34\,500} = \sqrt{345} \times \sqrt{100} \simeq 18 \times 10 \simeq 180.$$

$$\sqrt{82\,000} = \sqrt{820} \times \sqrt{100} \simeq 29 \times 10 \simeq 290.$$

Παράδειγμα 5ο.

Τί μῆκος ἔχει ἡ πλευρὰ τετραγώνου μὲ ἐμβαδὸν 0,37 m^2;

Μποροῦμε νὰ σκεφθοῦμε κατὰ τρόπο ἀνάλογο μὲ τὸ παράδειγμα 4 καὶ νὰ ποῦμε: $0{,}37\ m^2 = 37\ dm^2$.

Ἀλλὰ $\sqrt{37} = 6{,}083$.

Ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου θὰ ἔχη μῆκος:

6,083 dm ἢ 0,6083 m.

Δηλαδή:

$$\sqrt{0{,}37} = 0{,}6083.$$

Ὥστε:

$$\sqrt{0{,}37} = \sqrt{\frac{37}{100}} = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{100}} = \frac{6{,}083}{10} = 0{,}6083.$$

Ὥστε:

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, τὸν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν 100 ἢ τὸν 10 000* κ.λπ. καὶ ἀφοῦ βγάλωμε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ, κάνομε τὴν διαίρεσι ποὺ μᾶς δείχνει τὸ κλάσμα.

* Γιατὶ οἱ ρίζες τους βγαίνουν ἀκριβῶς ($\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10\,000} = 100$) ἀπὸ μνήμης καὶ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ δέκα, ἐνῶ τοῦ $\sqrt{1000} \simeq 32$ θέλει νὰ χρησιμοποιήσωμε πίνακες.

Μερικὰ ἀριθμητικὰ παραδείγματα:

$$\sqrt{0{,}325} = \sqrt{\frac{3250}{10\,000}} = \frac{\sqrt{3250}}{\sqrt{10\,000}} \simeq \frac{57}{100} \simeq 0{,}57.$$

$$\sqrt{0{,}07} = \sqrt{\frac{7}{100}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{100}} \simeq \frac{2{,}646}{10} \simeq 0{,}2646.$$

Συμπέρασμα.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος, εὑρίσκομε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ὅρων καὶ τὰ ἐξαγόμενα τὰ διαιροῦμε, ὅπως μᾶς λέει τὸ κλάσμα.

Π.χ.: $$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

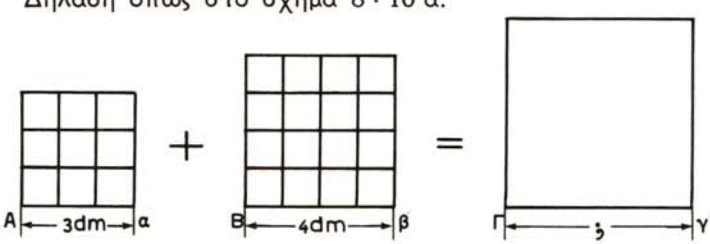
$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2{,}236}{2{,}646} \simeq 0{,}845.$$

8 · 10 Τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα ἢ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.

Πρόβλημα.

Ἔχομε δύο τετράγωνα κομμάτια λαμαρίνας. Τὸ ἕνα ἔχει πλευρὰ 3 dm καὶ τὸ ἄλλο 4 dm. Ζητοῦμε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς ἄλλου τετραγώνου κομματιοῦ λαμαρίνας, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο πρώτων τετραγώνων.

Δηλαδὴ ὅπως στὸ σχῆμα 8 · 10 α.



Σχ. 8·10 α.

Λύσι :

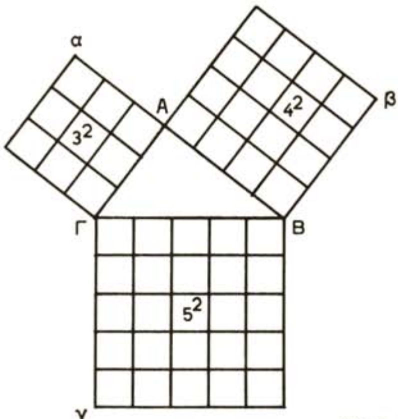
῞Ομως: $3^2\,dm^2 + 4^2\,dm^2 = 25\,dm^2$.

᾿Απὸ τὸν πίνακα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν εὑρίσκομε ὅτι:

$$\sqrt{25} = 5,$$

ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ ζητουμένη πλευρὰ εἶναι **5** dm.

῎Αν τώρα πάρωμε τὰ τρία αὐτὰ κομμάτια καὶ τὰ τοποθετήσωμε ἔτσι, ὥστε μὲ τὶς τρεῖς πλευρὲς Αα, Ββ καὶ Γγ, νὰ σχηματίσωμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, θὰ ἔχωμε (σχ. 8 · 10 β):



$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Σχ 8·10 β.

῎Αν μετρήσωμε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὴν γωνία Α, τὴν εὑρίσκομε 90°. Δηλαδὴ καταλήγομε στὸ συμπέρασμα ὅτι:

Σὲ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν.

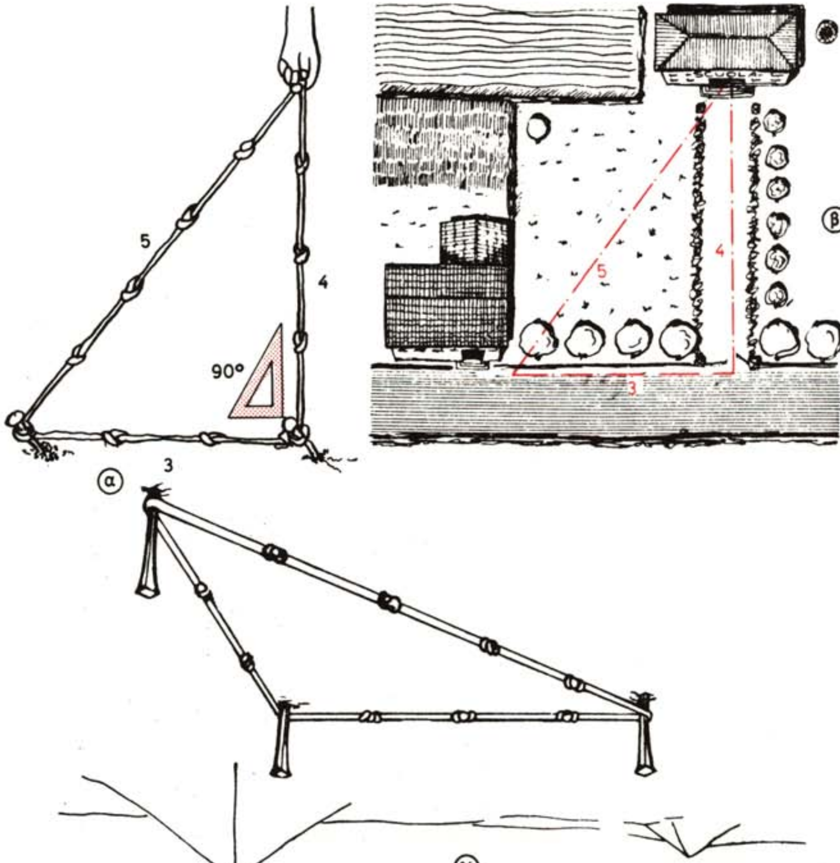
῾Η παραπάνω πρότασι εἶναι γνωστὴ σὰν ***Πυθαγόρειο θεώρημα**** καὶ εἶναι ἀπὸ τὶς σημαντικότερες στὰ Μαθηματικά.

---

* ᾿Απὸ τὸ ὄνομα τοῦ Πυθαγόρα, ποὺ τὸ διετύπωσε.

῾Ο Πυθαγόρας (580 π.Χ. - 500 π.Χ.), ποὺ καταγόταν ἀπὸ τὴν Σάμο, ὑπῆρξε μία ἀπὸ τὶς πλέον ἐξέχουσες φυσιογνωμίες τῆς Μαθηματικῆς ᾿Επιστήμης, ἱδρυτὴς τῆς περιφήμου ***Πυθαγορείου Φιλοσοφικῆς Σχολῆς***. ῾Ο Πυθαγόρας καὶ οἱ μαθητές του ἔδωσαν σπουδαία ὤθησι στὴν διαμόρφωσι καὶ ἀνάπτυξι τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας.

Οἱ ἀριθμοὶ 3, 4 καὶ 5, ποὺ ἐπαληθεύουν τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα καὶ μποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν σὰν πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, λέγονται ***Πυθαγόρειοι ἀριθμοί***. Μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς σὰν πλευρὲς τριγώνου μποροῦμε νὰ ἐλέγξωμε ἂν μία γωνία εἶναι ὀρθή (σχ. 8 · 10 γ).



Σχ. 8·10 γ.

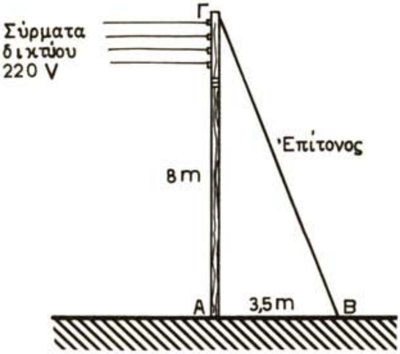
8 · 11 Μερικὲς ἐφαρμογὲς στὸ Πυθαγόρειο θεώρημα.

Προβλήματα.

1ο. Ζητοῦμε τὸ μῆκος τοῦ συρματοσχοίνου (γνωστοῦ ὡς ἐπι-

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

τόνου), τὸ ὁποῖο στηρίζει μία κολώνα (σχ. 8 · 11 α), ὅταν γνωρίζωμε τὸ ὕψος της μέχρι τὸ σημεῖο Γ, ποὺ εἶναι 8,0 m καὶ τὴν ἀπόστασι AB = 3,5 m.



Σχ. 8·11 α.

Λύσι :

Σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, τὸ μῆκος BΓ στὸ τετράγωνο θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα:

$$8{,}0^2 + 3{,}5^2 = 64{,}00 + 12{,}25 = 76{,}25 \text{ m}^2.$$

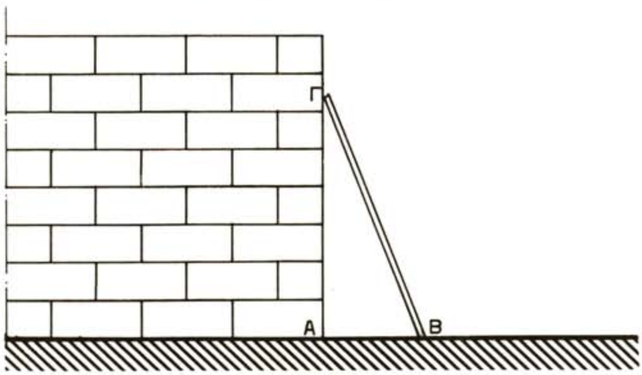
Ἑπομένως τὸ μῆκος:

$$B\Gamma = \sqrt{76{,}25} \text{ m}^2$$

Καὶ ἀπὸ τὸν Πίνακα 8 · 9 · 1 μὲ προσέγγισι πρὸς τὰ κάτω εὑρίσκομε:

$$B\Gamma = 6{,}7 \text{ m}.$$

2ο. Μία ἀνεμόσκαλα ἔχει μῆκος 8,5 m καὶ στηρίζεται ἐπάνω στὸν τοῖχο ἔτσι, ὥστε ἡ βάσι της νὰ ἀπέχη ἀπὸ τὴν βάσι τοῦ τοίχου



Σχ. 8·11 β.

2,5 m (σχ. 8 · 11 β). Σὲ ποιό ὕψος εὑρίσκεται ἡ ἄλλη ἄκρη τῆς σκάλας;

Λύσι :

Ἂν γνωρίζαμε τὸ ὕψος AΓ, τότε ἂν προσθέταμε τὸ τετράγωνό του στὸ τετράγωνο τοῦ 2,5, ποὺ εἶναι 6,25, θὰ μᾶς ἔδινε τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτεινούσης, ποὺ εἶναι $8{,}5^2 = 72{,}25$.

Ἄρα, τὸ τετράγωνο τῆς ΑΓ, θὰ εὑρεθῆ ἀπὸ τὴν παρακάτω ἀφαίρεσι:

$$8{,}5^2 - 2{,}5^2 = 72{,}25 - 6{,}25 = 66.$$

$$\text{Ἄρα:}\ \ \mathrm{A\Gamma} = \sqrt{66} = 8{,}124\ \mathrm{m}\,*.$$

Ἀφοῦ ὅμως ὅλα τὰ ἄλλα μήκη εἶναι μετρημένα μὲ προσέγγισι δεκάτου τοῦ μέτρου, θὰ ἔχωμε γιὰ τὴν ΑΓ:

$$\mathrm{A\Gamma} \simeq 8{,}1\ \mathrm{m}.$$

8 · 12 Μία ἀπόδειξι τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

Κόβομε ἀπὸ χαρτόνι δύο ἴσα τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ Α′Β′Γ′Δ′ [σχ. 8 · 12 (α) καὶ (β)]. Μὲ τὴν βοήθεια διαβήτη, στὶς πλευρὲς τοῦ Α′Β′Γ′Δ′ [σχ. 8 · 12 (β)] ὁρίζομε ἴσα τμήματα β ἔτσι, ὥστε, ὅταν χαράξωμε τὶς ὑποτείνουσες α, νὰ σχηματισθοῦν τέσσερα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα Τ [σχ. 8 · 12 (γ)] καὶ ἕνα τετράγωνο Ο.

Κόβομε τὰ τέσσερα αὐτὰ τρίγωνα [σχ. 8 · 12 (δ)] καὶ τὰ τοποθετοῦμε ἀνὰ δύο ἐπάνω στὸ ἄλλο τετράγωνο κομμάτι ΑΒΓΔ, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 8 · 12 ε. Βλέπομε ὅτι ἀπὸ τὰ ἀρχικά μας τετράγωνα, τὴν πρώτη φορὰ πήραμε:

– 4 τρίγωνα Τ καὶ 1 τετράγωνο Ο, τὸ ὁποῖο ἔχει πλευρὰ τὴν ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου Τ,

ἐνῶ τὴν δευτέρα φορὰ πήραμε:

– 4 τρίγωνα Τ καὶ 2 τετράγωνα O_1 καὶ O_2, τὰ ὁποῖα μάλιστα ἔχουν πλευρὲς τὶς κάθετες τοῦ τριγώνου Τ.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμε γιὰ τὰ ἐμβαδά [σχ. 8 · 12 (στ)]:

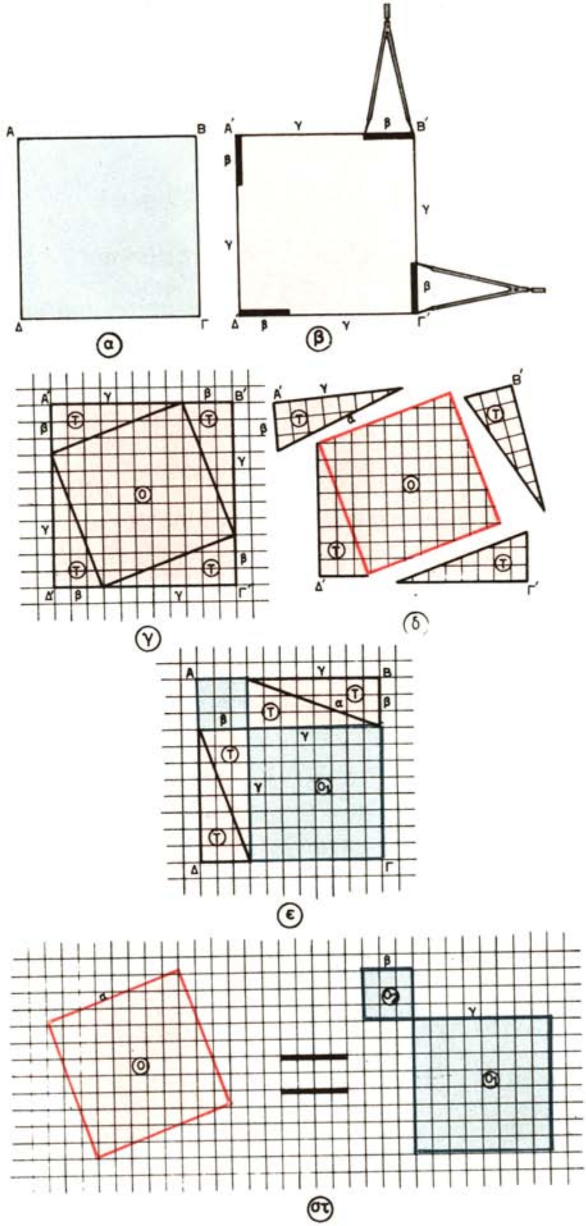
$$\text{Ἐμβ. τετρ. O} = \text{Ἐμβ. τετρ. } \mathrm{O}_1 + \text{Ἐμβ. τετρ. } \mathrm{O}_2$$

ἢ ἀλλοιῶς: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$

---

* Τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 66 τὴν εὑρίσκομε χρησιμοποιώντας τοὺς πίνακες.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



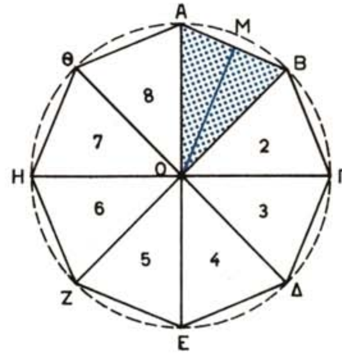
Σχ. 8·12.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

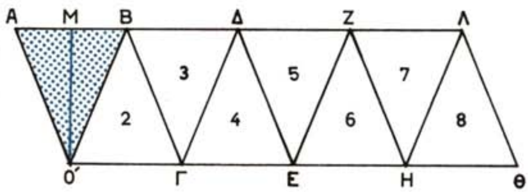
8 · 13 Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἂς πάρωμε ἕνα κομμάτι λαμαρίνας σὲ σχῆμα κανονικοῦ ὀκταγώνου (σχ. 8 · 13 α) καὶ ἂς ἀναζητήσωμε τρόπο ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ του.

Γνωρίζομε ὅτι, φέροντας ἀπὸ τὸ κέντρο Ο τοῦ πολυγώνου τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ..., ΟΘ, θὰ χωρίσωμε τὸ ὀκτάγωνο σὲ 8 ἴσα τρίγωνα. Τὰ 8 αὐτὰ τρίγωνα τὰ τοποθετοῦμε τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, κατὰ τὸν τρόπο ποὺ βλέπομε στὸ σχῆμα 8 · 13 β. Ἔτσι σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμο Ο΄ΑΛΘ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ κανονικοῦ μας ὀκταγώνου.



Σχ. 8·13 α.



Σχ. 8·13 β.

Δηλαδή:

Ε = ἐμβ. (ὀκταγώνου ΑΒΓΔΕΖΗΘΑ) = ἐμβ. (παραλληλ. Ο΄ΑΛΘ)

ἢ Ε = (βάσις Ο΄Θ) × (ὕψος Ο΄Μ).

Ἀλλὰ ἡ (Ο΄Θ) = 4 × (πλευρὰ ὀκταγώνου)

$$\text{ἢ } (\text{Ο΄Θ}) = \frac{8 \times (\text{πλευρὰ ὀκταγώνου})}{2}.$$

Ξέρομε ὅτι:

8 × (πλευρὰ ὀκταγώνου) = Περίμετρος ὀκταγώνου

καὶ ὅτι τὸ Ο΄Μ εἶναι τὸ ***ἀπόστημα*** τοῦ ὀκταγώνου (= ΟΜ).

Ἑπομένως:

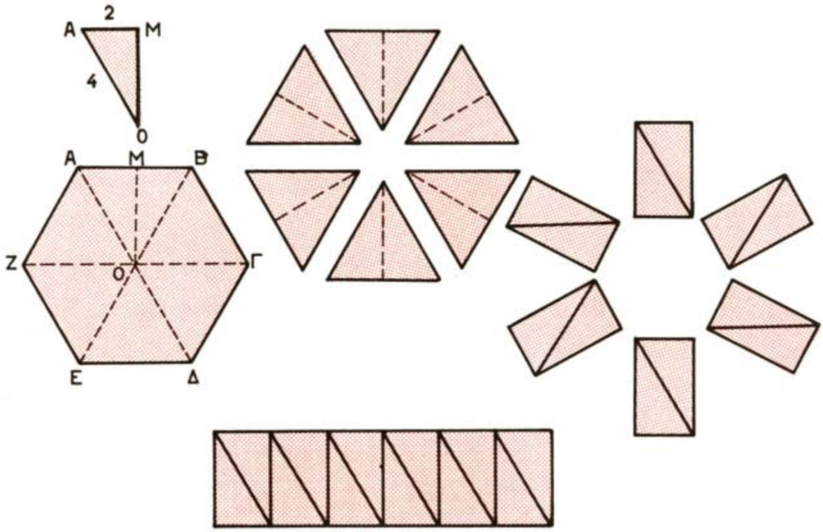
$$E = \frac{\textit{Περίμετρος} \times \textit{᾿Απόστημα}}{2}$$

Συμπέρασμα.

Τὸ ἐμβαδὸν κάθε κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ μισὸ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του.

᾿Αριθμητικὴ ἐφαρμογή.

᾿Εμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς 4 m (σχ. 8 · 13 γ).



Σχ. 8 · 13 γ.

Γνωρίζομε ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου. Ἄρα τὸ ἀπόστημα ΟΜ τοῦ ἑξαγώνου θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$(\mathrm{OM})^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \text{ m}^2.$$

$$\mathrm{OM} = \sqrt{12} \text{ m} \simeq 3{,}5 \text{ m}.$$

Ἑπομένως: Ἀπὸ τὴν παραπάνω σχέσι:

$$E = \frac{\text{Περίμετρος} \times \text{Ἀπόστημα}}{2}$$

προκύπτει: $$E = \frac{\overbrace{(4+4+4+4+4+4)}^{\text{Περίμετρος}} \times 3{,}5}{2}$$

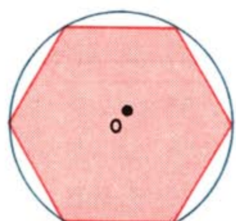
ἢ $$E = \frac{(6 \times 4) \times 3{,}5}{2}.$$

Μετὰ τὶς πράξεις: $E = 42\ m^2$.

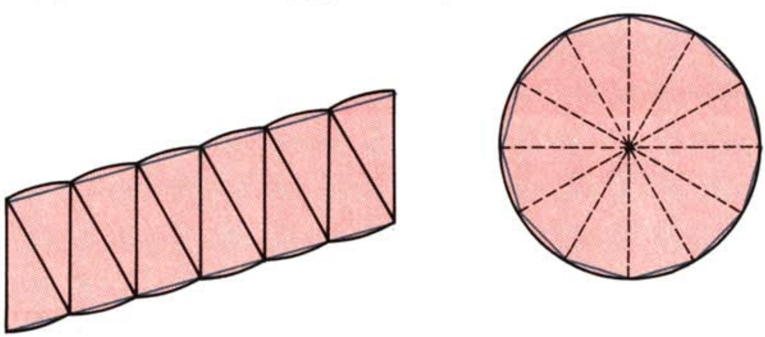
8 · 14 Ἐμβαδὸν κύκλου.

Ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ ἑξάγωνο τοῦ σχήματος 8 · 13 γ, ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο (σχ. 8 · 14 α), μποροῦμε, ὅπως ξέρομε, νὰ κατασκευάσωμε ἕνα δωδεκάγωνο (σχ. 8 · 14 β), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν θὰ ὑπολογίζεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὅπως τοῦ ὀκταγώνου. Συνεχίζοντας ἔτσι κατασκευάζομε ἕνα εἰκοσιτετράγωνο (σχ. 8 · 14 γ) κ.ο.κ., ὁπότε θὰ ἔλθη μία στιγμὴ πού:

— ἡ περίμετρος τοῦ νέου πολυγώνου θὰ εἶναι πρακτικὰ ἴση μὲ τὴν περίμετρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (σχ. 8 14 δ) καὶ

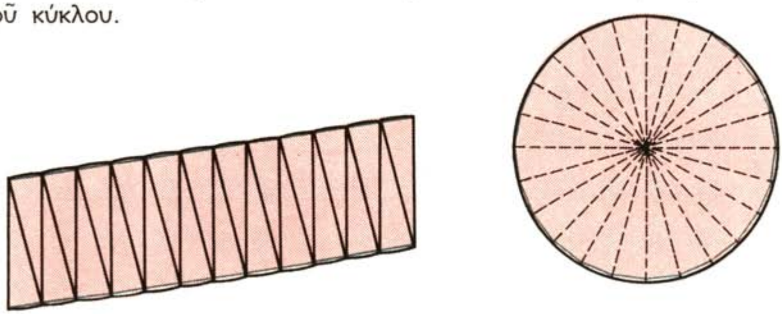


Σχ. 8·14 α.

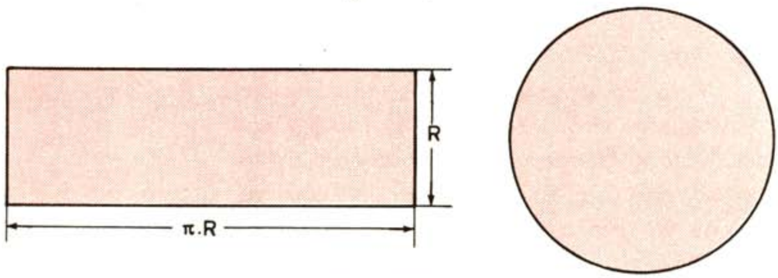


Σχ. 8·14 β.

— τὸ ἀπόστημα τοῦ νέου πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.



Σχ. 8·14 γ.



Σχ. 8·14 δ.

Λέμε τότε ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἐφαρμόζοντας τὸ ἴδιο μὲ τὰ πολύγωνα συμπέρασμα, ἔχομε:

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι γινόμενο τοῦ μισοῦ τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα.

Ἂν ἀκτὶς εἶναι ἡ R, θὰ ἔχωμε:

$$E = \frac{\Gamma \times R}{2}$$

ὅπου: Γ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου, ποὺ ἰσοῦται, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ γινόμενο: $\pi \times D = \pi \times 2 \times R$ (D = διάμετρος = $2 \times R$).

Ἄρα:

$$\boxed{E = \pi \times R^2}$$

Δηλαδὴ διά: $R = 4\,cm$ ἔχομε:

$E = 3{,}14 \times 4^2 = 3{,}14 \times 16\ cm$

ἢ τελικὰ $E = 50{,}24\ cm^2$.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ 3,14 ἐπὶ τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτῖνος του.

8 · 15 Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 8 · 1 ἕως 8 · 6.

1. Ἐκφράσετε σὲ cm^2 τὰ παρακάτω μεγέθη:

α) 2 dm^2	4,5 dm^2	39 dm^2
β) 4 m^2	7,25 m^2	325,1 m^2
γ) 328,3 mm^2	47 800 mm^2	39 mm^2.

2. Ἐκφράσατε σὲ m^2 τὰ παρακάτω μεγέθη:

α) 30 000 cm^2	29 800 cm^2	750 cm^2
β) 38900 dm^2	5930 dm^2	301 dm^2
γ) 0,005 km^2	0,000693 km^2	0,0000375 km^2.

3. Μία ἔκτασι 365 στρεμμάτων χωρίσθηκε σὲ ἴσα οἰκόπεδα, ποὺ τὸ καθένα τους εἶναι 1000 τετραγωνικοὶ τεκτονικοὶ πήχεις. Ἂν γιὰ δρόμους καὶ πλατεῖες ἔχουν διατεθῆ 83,75 στρέμματα, σὲ πόσα ἴσα οἰκόπεδα χωρίσθηκε ἡ ἔκτασι; *(500)*

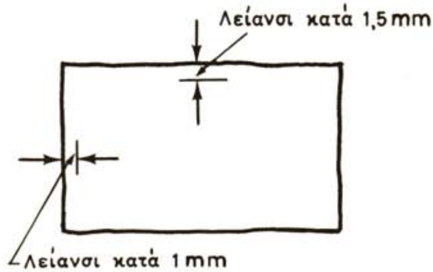
4. Ἕνα τετράγωνο κομμάτι φορμάικας ἔχει περίμετρο 28 dm. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδόν του. *(49 dm^2)*

5. Ἡ περίμετρος ἑνὸς τεμαχίου ξύλου ὀρθογωνικῆς διατομῆς εἶναι 20 cm. Ἂν ἡ μία διάστασις εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης, νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς. *(75 cm^2)*

6. Ὑπολογίσετε σὲ cm^2 τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας 5 in^2 (τὸ ἀποτέλεσμα μὲ ἀκρίβεια δευτέρου δεκαδικοῦ ψηφίου). *(32,26 cm^2)*

7. Ἕνα κομμάτι ἀπὸ ἀκατέργαστο χυτοσίδηρο (σχ. 8 · 15 α) εἶχε ὀρθογωνικὴ διατομὴ 43 mm × 37 mm. Μετὰ τὴν κατεργασία του κάθε μεγάλη πλευρὰ λειάνθηκε μέχρι βάθους 1,5 mm, ἐνῶ κάθε μικρὴ μέχρι βάθους 1 mm. Πόσο εἶναι ἡ νέα ἐλαττωμένη ἐπιφάνεια;

(1400 mm²)

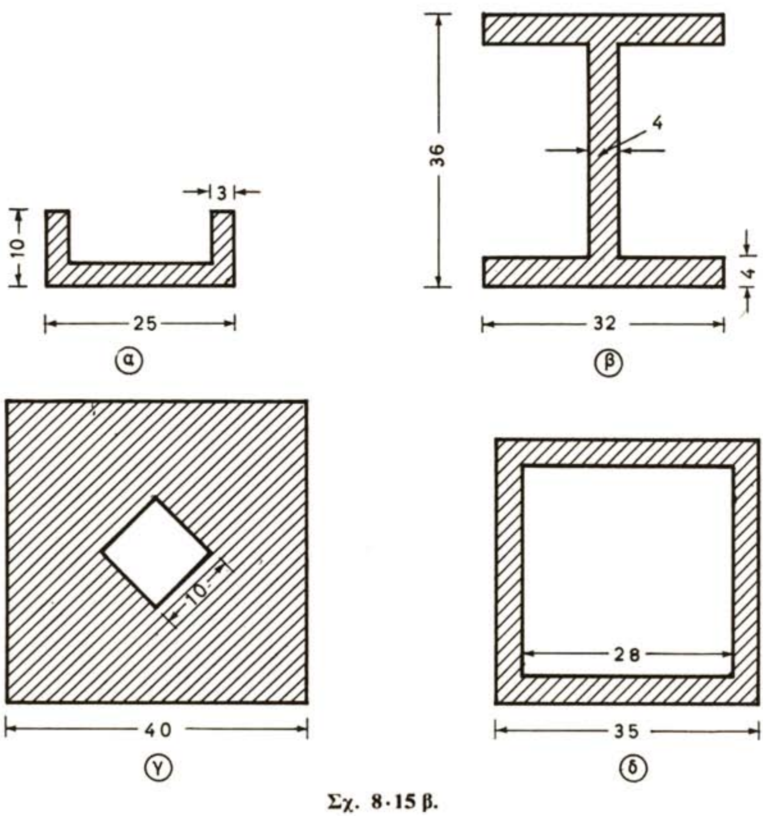


Σχ. 8·15 α.

8. Ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν παρακάτω προφὶλ (διαστάσεις σὲ mm) (σχ. 8 · 15 β).

(α: 117 mm², β: 368 mm², γ: 1500 mm², δ: 441 mm²)

9. Θέλομε νὰ σκεπάσωμε μὲ πλαστικὸ μία ἐπίπεδη σκεπὴ 4,80 m ×



Σχ. 8·15 β.

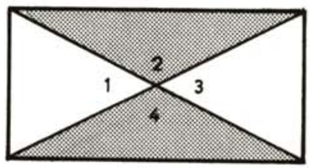
2,40 m. Ὑπάρχει δυνατότης νὰ χρησιμοποιήσωμε κομμάτια μήκους μὲν 1,20 m τὸ καθένα, ἀλλὰ πλάτους 0,80 m ἢ 0,60 m. Τὰ πρῶτα κοστίζουν 300 δρχ. τὸ μέτρο μήκους, ἐνῶ τὰ δεύτερα 235 δραχμὲς τὸ μέτρο μήκους. Μὲ ποιό ἀπὸ τὰ δύο πλαστικὰ θὰ σκεπάσωμε τὴν στέγη φθηνότερα καὶ πόσο; (Νὰ μὴ ληφθῆ ὑπ' ὄψι φύρα καὶ ἀπώλεια σὲ ἐπικάλυψι τῶν κομματιῶν μεταξύ τους γιὰ στεγανότητα τῆς σκεπῆς.)

(μὲ τὸ πρῶτο, 160 δρχ.)

10. Τετράγωνο οἰκόπεδο μὲ πλευρὰ 22 m πρόκειται νὰ ἀνταλλαγῆ μὲ ἄλλο ἴσου ἐμβαδοῦ ἀλλὰ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ποὺ ἡ μία του πλευρὰ εἶναι 25 m. Πόσο εἶναι ἡ ἄλλη του πλευρά; *(19,36 m)*

11. Ἡ μία πλευρὰ ὀρθογωνικοῦ φύλλου λαμαρίνας εἶναι 2,40 m καὶ ἡ ἄλλη 1,20 m. Τὴν κόβομε σὲ λουρίδες μήκους 1,20 m καὶ πλάτους 20 cm. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάθε λουρίδας; Πόσες τέτοιες λουρίδες μποροῦμε νὰ κόψωμε; Νὰ μὴ ληφθῆ ὑπ' ὄψι φύρα στὸ κόψιμο. *(0,24 m^2, λουρ. 12)*

12. Ὀρθογώνιο κομμάτι λαμαρίνας τὸ κόβομε σὲ 4 κομμάτια, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 8 · 15 γ. Μπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε, γιατί ὅλα ζυγίζουν τὸ ἴδιο; (Ἂν σᾶς διευκολύνει δώσετε τιμὲς στὶς δύο πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου).



Σχ. 8·15 γ.

13. Σὲ φύλλο φορμάικας σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία κάθετη πλευρὰ εἶναι 40 cm. Ἂν τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 150 cm^2, πόσο εἶναι ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά; *(7,5 cm)*

14. Ἕνα ἄλλο κομμάτι φορμάικας ἔχει σχῆμα τριγώνου μὲ ἐμβαδὸν 100 cm^2. Ἂν ἡ βάσι του εἶναι 200 mm, πόσο εἶναι τὸ ὕψος του σὲ mm;

(100 mm)

15. Ἡ μία διαγώνιος ρομβοειδοῦς σχήματος τζαμιοῦ εἶναι 16,4 cm καὶ ἡ ἄλλη 8,2 cm. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν του. *(67,24 cm^2)*

Σχ. 8·15 δ.

16. Ἕνα τραπέζι σχήματος ὀρθογωνίου, μὲ διαστάσεις 0,70 m × 1,20 m πρόκειται νὰ σκεπαστῆ μὲ δύο εἴδη καπλαμᾶ, μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα 8 · 15 δ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος καπλαμᾶ θὰ χρειασθοῦμε γιὰ 10 τέτοια τραπέζια;

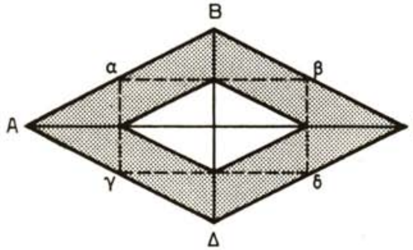
(4,20 m ἀπὸ τὸ καθένα)

17. Ζητοῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς φλάντζας, ποὺ φαίνεται στὸ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

σχῆμα 8 · 15 ε, ὅταν γνωρίζωμε ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος καὶ τὰ σημεῖα α, β, γ καὶ δ εἶναι μέσα τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν. Ἀκόμα ΑΓ = 12 cm καὶ ΒΔ = 8 cm.

(36 cm^2)



Σχ. 8·15 ε.

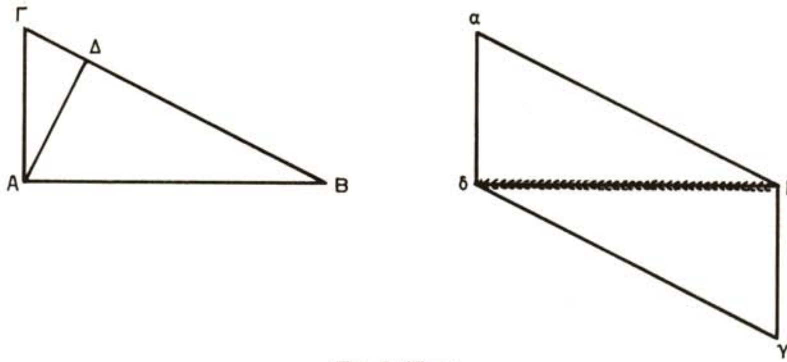
18. Διαθέτομε μία σειρὰ ἀπὸ ὀρθογωνικὰ τριγωνικὰ κομμάτια λαμαρίνας ΑΒΓ, ποὺ ἔχουν κάθετες πλευρὲς μήκους ΑΒ = 40 mm καὶ ΑΓ = 30 mm καὶ ὕψος ΑΔ = 24 mm.

Τὰ κομμάτια αὐτὰ τὰ ταιριάζομε ἀνὰ δύο συγκολλώντας τα κατὰ τὴν πλευρὰ ΑΒ, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 8 · 15 στ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ:

α) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου κομματιοῦ σὲ cm^2.

β) Τὸ μῆκος τῶν δύο πλευρῶν αβ καὶ γδ, ἀφοῦ προηγουμένως ἀποδείξωμε ὅτι τὸ τετράπλευρο αβγδ εἶναι παραλληλόγραμμο.

(α : 12 cm^2, β : 50 mm)



Σχ. 8·15 στ.

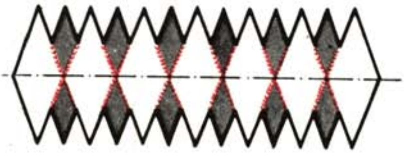
19. Σὲ ἄνοιγμα (τρύπα) τοίχου σχήματος τετραγώνου μετρήσαμε τὴν διαγώνιο ἴση μὲ 15 cm. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

(112,50 cm^2)

20. Μία σειρὰ ἀπὸ 10 κομμάτια λαμαρίνας σχήματος ρόμβου συγκολλοῦνται, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 8 · 15 ζ. Ἂν οἱ διαγώνιοί τους εἶναι 185 mm καὶ 45 mm, πόσα περίπου χιλιόγραμμα μπογιὰ θὰ χρειασθοῦμε γιὰ τὸ βάψιμο, ἂν γιὰ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο χρειαζώμαστε 1250 γραμμάρια;

($\simeq$ 0,104 kg)

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



Σχ. 8·15 ζ.

Διευκρίνισι :

1) Τὰ σκιασμένα κομμάτια προέκυψαν ἀπὸ τρία ὁλόκληρα.

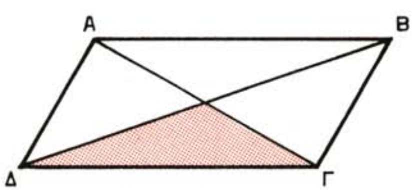
2) Θὰ βαφοῦν καὶ οἱ δύο ὄψεις.

21. Σὲ ἕνα παραλληλόγραμμο σχῆμα, ποὺ ἡ περίμετρός του εἶναι 4 m, ἡ μεγάλη πλευρὰ εἶναι τριπλασία τῆς μικρῆς. Ἂν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 45 dm², νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν δύο ὑψῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

(4,5 dm, 1,5 dm)

22. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ τέσσερα τρίγωνα, στὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 8 · 15 η) ἀπὸ τὶς δύο διαγώνιες ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι 45 cm². Μπορεῖτε νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου;

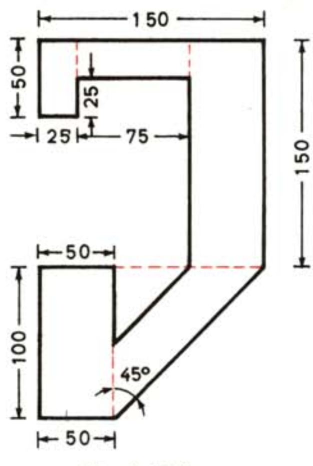
(180 cm²)



Σχ. 8·15 η.

23. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς λαμαρινοκατασκευῆς τοῦ σχήματος 8 · 15 θ. Ὅλες οἱ διαστάσεις εἶναι σὲ mm.

(19 375 mm² ≃ 194 cm²)



Σχ. 8·15 θ.

24. Νὰ κολλήσετε τρία κομμάτια λαμαρίνας σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κάθετες πλευρὲς 3 dm καὶ 4 dm, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιο τραπέζιο. Μετὰ νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ μὲ δύο τρόπους. *(18 dm²)*

25. Πάρετε τέσσερα κομμάτια λαμαρίνας σὲ σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ πλευρὲς 90 mm καὶ 120 mm καὶ κολλήσετέ τα ἔτσι, ὥστε νὰ σχηματίσετε:

α) Παραλληλόγραμμο.

β) Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

γ) Ρόμβο.

δ) Ἰσοσκελὲς τραπέζιο.

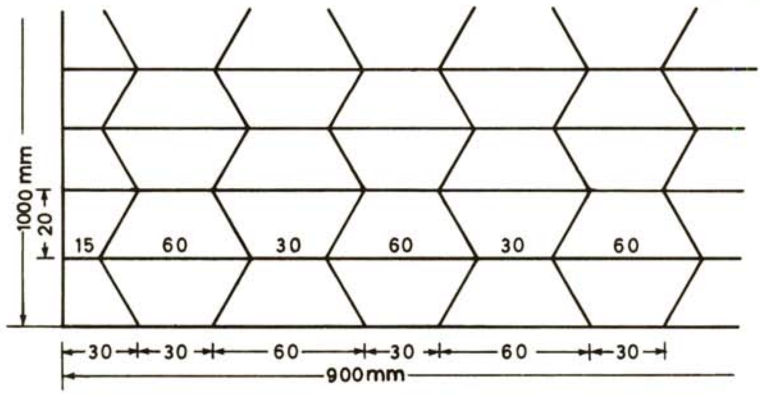
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Κατόπιν ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω σχήματα μὲ δύο τρόπους.

(216 cm²)

26. Διάδρομος μὲ 9 m μῆκος καὶ 1 m πλάτος (σχ. 8 · 15 ι) πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ πλάκες σχήματος ἰσοσκελοῦς τραπεζίου μὲ παράλληλες πλευρὲς μήκους 30 cm καὶ 60 cm, ὕψους δὲ 20 cm. Πόσες τέτοιες πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

(100 τεμ.)



Σχ. 8·15 ι.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 8 · 7 ἕως 8 · 11.

1. Χρησιμοποιώντας τὸν πίνακα, ἂν σᾶς χρειάζεται, νὰ ὑπολογίσετε τὶς παρακάτω τετραγωνικὲς ρίζες:

α) $\sqrt{1000}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{0,64}$

$\sqrt{900}$, $\sqrt{40\,000}$, $\sqrt{3600}$, $\sqrt{0,0036}$.

β) $\sqrt{26,46}$, $\sqrt{40,96}$, $\sqrt{86,49}$

$\sqrt{7100}$, $\sqrt{1,44}$, $\sqrt{730}$.

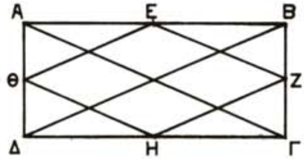
γ) $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{7}{9}}$, $\sqrt{\frac{32}{64}}$, $\sqrt{\frac{65}{105}}$.

2. Λαμαρίνα σχήματος ρόμβου ἔχει διαγώνιες μὲ μῆκος 12 dm καὶ 16 dm. Νὰ εὑρεθῆ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς της.

(10 dm)

3. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε σιδερένιο πλαίσιο, ὅμοιο μὲ αὐτό, ποὺ εἰκονίζεται στὸ σχῆμα 8 · 15 ια. Ἡ λάμα ποὺ θὰ χρησιμοποιήσωμε ἔχει βάρος 0,393 kg τὸ μέτρο μήκους. Πόσο θὰ ζυγίζῃ τὸ πλαίσιο:

(4,060 kg)



Τετράπλ. ΑΒΓΔ: ὀρθογώνιο.
Ε, Ζ, Η, Θ: μέσα τῶν πλευρῶν.
ΑΒ = 1,50 m, ΒΓ = 50 cm.

Σχ. 8·15 ια.

4. Ἀπὸ φύλλο λαμαρίνας διαστάσεων 2,40 m × 1,20 m θέλομε νὰ κόψωμε κομμάτια σὲ σχῆμα ρόμβου μὲ πλευρὰ 50 cm καὶ μία διαγώνιο (τὴν μικρή) 60 cm. Πόσα τέτοια κομμάτια μποροῦμε τὸ πολὺ νὰ κόψωμε; (Συγκολλώντας κομμάτια, μπορεῖτε νὰ κατασκευάζετε ἄλλα ὁλόκληρα).

Στὴν λύσι βοηθεῖ τὸ σχῆμα 8 · 15 ιβ, τὸ ὁποῖο δείχνει πῶς θὰ ἀρχίσετε τὸ κόψιμο.

(12 τεμ.)

Σχ. 8·15 ιβ.

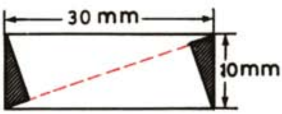
5. Ἔχομε τρία ἐλάσματα, σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου, κομμένα ἀπὸ τὴν ἴδια λαμαρίνα μὲ διαστάσεις:

	α	β	γ
Ὑποτείνουσα:	78 cm	77 cm	84 cm
Κάθετος πλευρά:	55 cm	50 cm	41 cm

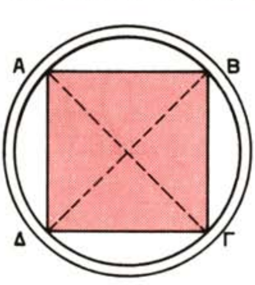
Ζητοῦμε ποιό θὰ εἶναι τὸ πιὸ βαρὺ καὶ γιατί;

6. Σὲ πρέσσα παράγομε ἐν σειρᾷ ἐλάσματα τοῦ σχήματος 8 · 15 ιγ, ἀπὸ ὀρθογωνικὰ κομμάτια 30 mm × 10 mm. Ζητοῦμε τὸ βάρος τους, ἂν γνωρίζωμε ὅτι τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ἡ λαμαρίνα ζυγίζει 8 kg (ἀκρίβεια ἑκατοστοῦ ἀκεραίας μονάδος).

(περίπου 2,140 g)



Σχ. 8·15 ιγ.



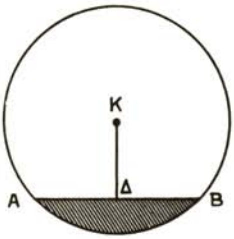
Σχ. 8·15 ιδ.

7. Μέσα σὲ τροχὸ μὲ ἐσωτερικὴ διάμετρο 4,5 cm πρόκειται νὰ ἐφαρμόσωμε τετράγωνο ἔλασμα, τὸ ὁποῖο θὰ κολληθῇ στὰ τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ. Ποιά θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ τοῦ τετραγωνικοῦ ἐλάσματος (σχ. 8 · 15 ιδ);

(περίπου 3,2 cm)

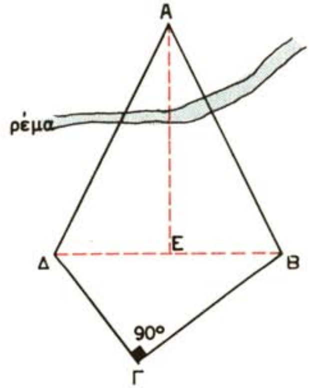
8. Στὸν τροχὸ ἀτμομηχανῆς μὲ διάμετρο 38 cm τοποθετοῦμε ἀντίβαρο, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 8·15 ιε σὲ ἀπόστασι 12 cm ἀπὸ τὸ κέντρο Κ. Μπορεῖτε νὰ εὕρετε τὸ μῆκος ΑΒ;

(περίπου 29,5 cm)



Σχ. 8·15 ιε.

9. Σὲ ἕνα χωράφι ἐκτάσεως 10 στρεμμάτων, σχήματος τετραπλεύρου, (σχ. 8·15 ιστ), μετρήσαμε:

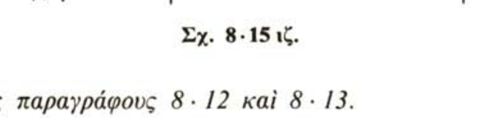


Σχ. 8·15 ιστ.

$$\mathrm{B\Gamma} = 120\ \mathrm{m}, \quad \Gamma\Delta = 90\ \mathrm{m} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\mathrm{B\Gamma\Delta}} = 90°.$$

Ἀκόμη ξέρομε ὅτι ΑΒ = ΑΔ, ὅμως δὲν μπορέσαμε νὰ μετρήσωμε τὰ μήκη αὐτά. Ὑπολογίσετέ τα ἐσεῖς. *(περίπου 97 m)*

10. Στὴν σιδερένια ράβδο τοῦ σχήματος 8·15 ιζ, διαμέτρου 30 mm, στὸ ἕνα ἄκρο της δίνομε τὸ σχῆμα ὀρθοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος καὶ στὸ ἄλλο τὸ σχῆμα ὀρθοῦ κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος. Πόσο εἶναι τὸ πλάτος α καὶ τὸ πλάτος β τοῦ κάθε πρίσματος; *(α: 21 mm, β: 26 mm)*



Σχ. 8·15 ιζ.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 8·12 καὶ 8·13.

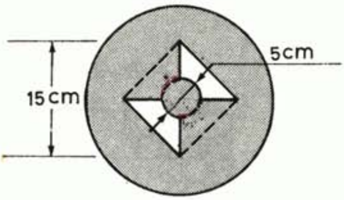
1. Ἀπὸ φύλλο λαμαρίνας 1,20 m × 3,00 m καὶ βάρους 23,55 kg/m² κόβομε κυκλικὰ κομμάτια μὲ διάμετρο 60 cm. Ζητοῦμε: α) Πόσα κομμάτια θὰ βγάλωμε, β) πόσο ζυγίζει τὸ κάθε τέτοιο κομμάτι, καὶ γ) πόση εἶναι ἡ συνολικὴ φύρα σὲ kg.

(α: 10 κομ. β: 6,7 kg γ: ≃ 17,8 kg)

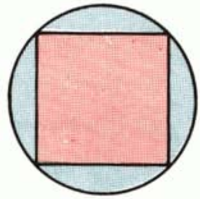
2. Σὲ σωλῆνα μὲ διάμετρο 3/4 in, βιδώνομε φλάντζα σχήματος τετραγώνου

μὲ πλευρὰ 35 mm. Πόσο εἶναι τὸ βάρος τῆς φλάντζας, ἂν ξέρωμε ὅτι κάθε m^2 ζυγίζει 8,250 kg; *(7,75 g)*

3. Διαθέτομε 200 κυκλικὰ κομμάτια διαμέτρου 25 cm, τὰ ὁποῖα μὲ τὴν βοήθεια πρέσσας τὰ διαμορφώνομε, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 8 · 15 ιη. Ὑπολογίσετε πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κάθε κομματιοῦ καὶ κατόπιν ὅλων μαζί. Μπορεῖτε νὰ ὑπολογίσετε τὸ βάρος τους, ὅταν γνωρίζετε ὅτι εἶναι κατασκευασμένα ἀπὸ ὑλικὸ βάρους 3,140 kg γιὰ κάθε m^2; *($\simeq$ 444 cm^2, $\simeq$ 8,9 m^2, $\simeq$ 28 kg)*



Σχ. 8·15 ιη.



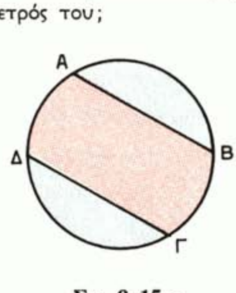
Σχ. 8·15 ιθ.

4. Ἕνα κυκλικὸ τραπέζι πρόκειται νὰ καλυφθῆ μὲ δύο χρώματα φορμάικας, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 8 · 15 ιθ. Ἂν ἡ διάμετρος τοῦ τραπεζιοῦ εἶναι 0,85 m, πόση φορμάικα θὰ χρειασθοῦμε ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος; *(κόκκ. 0,36 m^2, μπλέ: 0,21 m^2)*

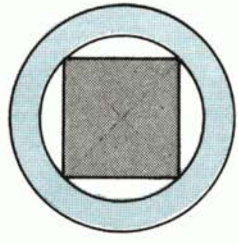
5. Ἕνα κυκλικὸ τραπέζι πρόκειται νὰ καλυφθῆ μὲ δύο χρώματα φορμάικας, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 8 · 15 κ, ὅπου τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ εἶναι κορυφὲς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐγγεγραμμένου μέσα στὸν κύκλο. Ἂν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 0,45 m, πόσο ἐμβαδὸν φορμάικας θὰ χρειασθοῦμε ἀπὸ κάθε εἶδος;

(κοκ. $\simeq$ 0,39 m^2, μπλὲ $\simeq$ 0,25 m^2)

6. Ἡ ἐπιφάνεια σὲ στρογγυλὸ τραπέζι ἔχει ἐμβαδὸν 28,26 cm^2. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός του; *(6 cm)*



Σχ. 8·15 κ.



Σχ. 8·15 κα.

7. Ἕνα τετράγωνο κομμάτι λαμαρίνας πλευρᾶς 6,3 cm πρόκειται νὰ κολληθῆ ἐσωτερικὰ σὲ δακτ. μὲ ἐξωτερικὴ ἀκτῖνα 6,0 cm (σχ. 8 · 15 κα). Ζητοῦμε τὴν ἐσωτερικὴ διάμετρο καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δακτυλίου *(ἐσ. διαμ. 8,9 cm, E $\simeq$ 51 cm^2)*

8. Ἔχομε χάλκινα μονόκλωνα καλώδια, ὅπως τοῦ σχήματος 8·15 κβ, διατομῆς 1,5 mm², 2,5 mm² καὶ 4,0 mm². Ποιά θὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ χαλκοῦ;

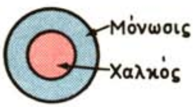
(1,38 - 1,78 - 2,26 mm)

9. Ἔχομε τὰ πολύκλωνα χάλκινα καλώδια, ποὺ τὸ καθένα τους ἔχει καὶ τὸν ἀντίστοιχο ἀριθμὸ κλώνων.

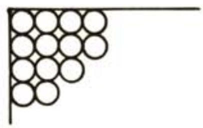
Διατομὴ χαλκοῦ:	16 mm²	25 mm²	50 mm²
Ἀριθμὸς κλώνων	1	7	19

Προσδιορίσετε τὴν διάμετρο τοῦ κάθε κλώνου.

(4,52 - 2,13 - 1,83 mm)



Σχ. 8·15 κβ.



Σχ. 8·15 κγ.

10. Ἀπὸ ὀρθογώνια λαμαρίνα διαστάσεων 1,20 m × 2,00 m κόβομε κυκλικοὺς δίσκους 6,28 cm² (σχ. 8·15 κγ). Πόσους τέτοιους κυκλικοὺς δίσκους μποροῦμε νὰ κόψωμε;

(2940 κομ.)

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ — ΠΟΣΟΣΤΑ — ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

9 · 1 Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν μὲ ποσὰ ἀνάλογα (ἢ εὐθεία μέθοδος τῶν τριῶν).

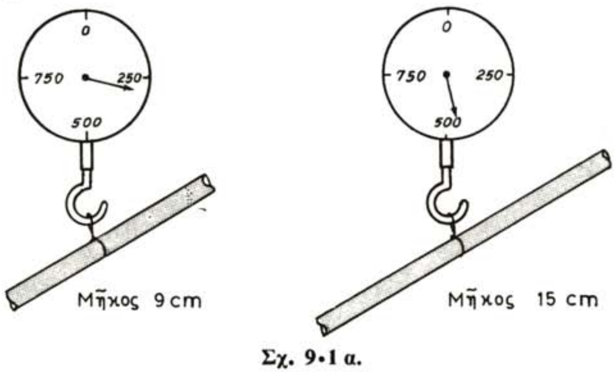
Πρόβλημα.

Ἀπὸ ράβδο κόβομε ἕνα κομμάτι 9 cm καὶ ἕνα ἄλλο 15 cm. Ἀπὸ αὐτὰ τὸ πρῶτο ζυγίζει 282 g. Πόσο ζυγίζει τὸ ἄλλο;

Λύσι :

1ος Τρόπος : Μὲ ζύγισμα.

Ἂν ζυγίσωμε τὴν δευτέρα ράβδο (σχ. 9 · 1 α), εὑρίσκομε βάρος 470 g.



Σχ. 9·1 α.

Ὅμως, ἡ μέθοδος αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόζεται πάντοτε, εἴτε γιατὶ δὲν διαθέτομε τὴν κατάλληλη ζυγαριά, εἴτε γιατὶ τὰ διάφορα ἀντικείμενα, τῶν ὁποίων ζητοῦμε τὸ βάρος, δὲν μετακινοῦνται πάντοτε εὔκολα.

2ος Τρόπος : Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα (μὲ δεκαδικούς).

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωσι κάνομε ἀναγωγὴ στὴν μονάδα, κατὰ τὰ γνωστά.

Γνωρίζομε ὅτι τὰ ***9 cm*** ράβδου ζυγίζουν ***282 g***
Ἑπομένως τὸ ***1 cm*** θὰ ζυγίζη 9 φορὲς
λιγότερο, δηλαδὴ ***282 : 9 = 31,33 g***
καὶ τὰ ***15 cm*** ράβδου θὰ ζυγίζουν
15 φορὲς παραπάνω ἀπὸ ὅσο
τὸ 1 cm, δηλαδὴ ***31,33 × 15 = 469,95 g***.

Παρατήρησι.

Συγκρίνοντας τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ζυγίσεως μὲ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ὑπολογισμῶν, παρατηροῦμε ὅτι τὰ δύο ἐξαγόμενα διαφέρουν ἐλάχιστα μεταξύ τους. Θὰ ἐξηγήσωμε πιὸ κάτω, ποῦ ὀφείλεται αὐτὴ ἡ διαφορά.

3ος Τρόπος : Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα (μὲ κλάσματα).

Μὲ τὴν βοήθεια τῶν κλασμάτων, τὸ πρόβλημα θὰ μᾶς ἔδινε τὰ παρακάτω ἀποτελέσματα:

Τὰ ***9 cm*** ράβδου ζυγίζουν 282 g

Τὸ ***1 cm*** ράβδου θὰ ζυγίζη $\frac{282}{9}$ g

καὶ τὰ ***15 cm*** ράβδου θὰ ζυγίζουν $\frac{282 \times 15}{9} = 470$ g

δηλαδὴ αὐτό, ποὺ δείχνει ἡ ζυγαριά.

Παρατήρησι. Τὸ ὅτι μὲ τὸν προηγούμενο τρόπο δὲν εὑρήκαμε τὸ σωστὸ ἀποτέλεσμα τῶν 470 g, ὀφείλεται στὴν περιορισμένη ἀκρίβεια τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως 282 : 9. Ἑπομένως συμφέρει ὁ 3ος τρόπος, δηλαδὴ μὲ τὰ κλάσματα.

4ος Τρόπος : Μέθοδος τῶν τριῶν.

Θὰ μποροῦσε ἀκόμη τὸ πρόβλημα νὰ λυθῆ ***χωρὶς τὸν ἐνδιάμεσο*** ὑπολογισμὸ τοῦ βάρους γιὰ τὸ 1 cm, μὲ τὴν παρακάτω κατάταξι:

Τὰ ***9 cm*** ράβδου ζυγίζουν ***282 g***
Τὰ ***15 cm*** ράβδου ζυγίζουν ***x ;***

Στὴν κατάταξι αὐτὴ σχηματίζεται ἕνα κλάσμα, τὸ $\frac{9}{15}$, ποὺ θὰ τὸ λέμε ***κλάσμα κατατάξεως***.

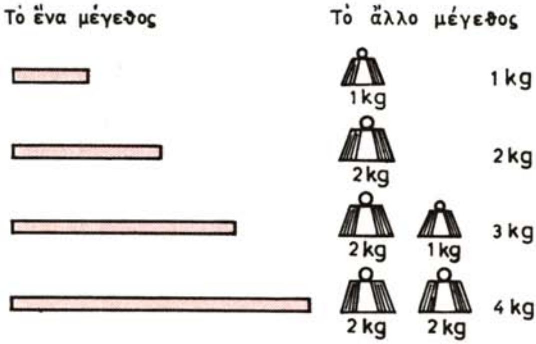
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, τὰ 15 cm ζυγίζουν:

$$x = 282 \times \frac{15}{9} = 470\ g.$$

Αὐτὴ ἡ πρᾶξι μᾶς δίνει καὶ τὴν ***λύσι τοῦ προβλήματος***. Παρατηροῦμε ὅτι, ***ὅταν τὸ ἕνα μέγεθος*** (τὸ μῆκος τῆς ράβδου) ***μεγαλώσῃ 2, 3, 4 . . . φορές, τότε καὶ τὸ ἄλλο μέγεθος (τὸ βάρος) γίνεται ἀντιστοίχως 2, 3, 4 . . . φορὲς μεγαλύτερο*** (σχ. 9 · 1 β). Τὰ δύο αὐτὰ μεγέθη τὰ λέμε ***ἀνάλογα***. Ἡ μέθοδος, ποὺ ἀκολουθήσαμε, γιὰ τὴν λύσι τοῦ προβλήματος, λέγεται ***ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν μὲ ποσὰ ἀνάλογα*** καὶ μᾶς λέει ὅτι:

Αὐτὸ ποὺ ζητοῦμε — δηλαδὴ ὁ ἄγνωστος x — ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὸ κλάσμα τῆς κατατάξεως ἀνεστραμμένο, ὅταν τὰ ποσὰ (ἢ μεγέθη) εἶναι ἀνάλογα.



Σχ. 9·1 β.

Βλέπομε ἐδῶ ὅτι ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι μία συντόμευσι τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα, καὶ προκύπτει ἀπὸ αὐτήν, ἂν παραλείψωμε τὸν ἐνδιάμεσο ὑπολογισμό.

9 · 2 Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν μὲ ποσὰ ἀντίστροφα (ἢ ἀντίστροφη μέθοδος τῶν τριῶν).

Πρόβλημα.

Ἡ διαλογὴ τῶν σκάρτων ἀντικειμένων σὲ ἕνα ἐργοστάσιο γίνεται ἀπὸ 8 τεχνῖτες. Μία παρτίδα ἀπὸ τέτοια ἀντικείμενα ἐλέγχθηκε

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

σὲ 45 min. Πόση ὥρα χρειάζεται γιὰ νὰ ἐλεγχθῆ ἡ ἴδια παρτίδα ἀπὸ 6 ἐργάτες;

Λύσι :

1ος τρόπος *:* Σκεπτόμαστε καὶ ἐδῶ ὅπως καὶ στὸν 2ο τρόπο τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα τῆς προηγουμένης παραγράφου:

Οἱ ***8*** ἐργάτες χρειάζονται	***45 min***
ὁ ***1*** ἐργάτης χρειάζεται 8 φορὲς περισσότερο χρόνο, δηλαδὴ	$45 \times 8 = 360$ ***min***
οἱ ***6*** ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν χρόνο 6 φορὲς λιγότερο ἀπὸ τὸν ἕνα, δηλαδὴ	$360 : 6 = 60$ ***min.***

2ος τρόπος *:* Μὲ τὴν βοήθεια τῶν κλασμάτων θὰ εὑρήσκαμε:

$$\frac{45 \times 8}{6} = 45 \times \frac{8}{6} = 60 \text{ min.}$$

3ος τρόπος *:* ***Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.***

Κάνομε τὴν ἴδια κατάταξι, ὅπως καὶ στὴν προηγουμένη παράγραφο:

Οἱ ***8 ἐργάτες*** χρειάζονται	***45 min***
οἱ ***6 ἐργάτες*** θὰ χρειασθοῦν	x;

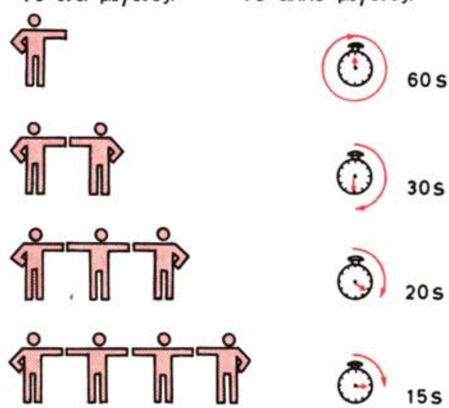
Ἡ λύσι, ὅπως εἴδαμε, δίνει: $x = 45 \times \dfrac{8}{6} = 60 \text{ min.}$

Παρατηροῦμε ὅτι, ***ὅταν τὸ ἕνα μέγεθος*** (οἱ ἐργάτες) ***μεγαλώνη 2, 3, 4 . . . φορές, τὸ ἄλλο μέγεθος*** (ὁ χρόνος) ***γίνεται 2, 3, 4, . . . φορὲς μικρότερο*** (σχ. 9 · 1 β). Τὰ δύο αὐτὰ μεγέθη τὰ λέμε ***ἀντίστροφα*** (ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα) καὶ ἡ μέθοδος, ποὺ ἀκολουθήσαμε γιὰ τὴν λύσι τοῦ προβλήματος, λέγεται ***ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν μὲ ποσὰ ἀντίστροφα.***

Ἀπὸ τὴν παραπάνω κατάταξι προκύπτει ὅτι:

Αὐτὸ ποὺ ζητοῦμε — δηλαδὴ ὁ ἄγνωστος x *— ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὸ κλάσμα τῆς κατατάξεως, ὅπως εἶναι, ὅταν τὰ ποσὰ (ἢ μεγέθη) εἶναι ἀντίστροφα.*

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



Σχ. 9·2 α.

Ἀνακεφαλαίωσι.

Στὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν αὐτὸ ποὺ ζητοῦμε, δηλαδὴ ὁ ἄγνωστος x, ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο ἐπὶ τὸ κλάσμα τῆς κατατάξεως:

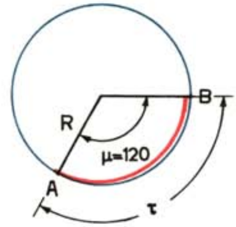
Ἀνεστραμμένο, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ***ἀνάλογα***.	***Ὅπως εἶναι*** (ὄχι ἀνεστραμμένο), ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ***ἀντίστροφα***.

9·3 Μῆκος τόξου περιφερείας.

Μία συνηθισμένη ἐφαρμογὴ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν μὲ ποσὰ ἀνάλογα εὑρίσκομε κατὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ τόξου μιᾶς περιφερείας.

Παράδειγμα.

Σὲ περιφέρεια ἀκτῖνος R = 30 cm ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ γωνία 120° (σχ. 9 · 3 α).



Σχ. 9·3 α.

Λύσι :

Σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Στὴν περιφέρεια ἀντιστοιχεῖ τόξο 360°, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος δίνεται ἀπὸ τὴν σχέσι:

$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot R.$$

Δηλαδή: $\Gamma = 2 \times 3{,}14 \times 30$ ἢ $\Gamma = 188{,}40$ cm.

Ἑπομένως:

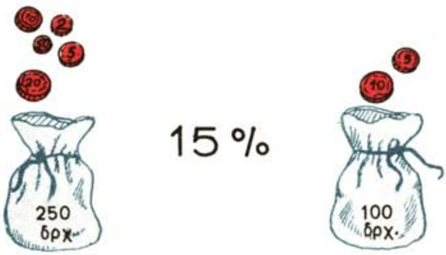
Γιὰ	360°	τόξο	ἔχομε	μῆκος	188,40 cm
γιὰ	120°	τόξο	ἔχομε	μῆκος	x;

$$x = 188{,}40 \times \frac{120}{360} = 188{,}40 \times \frac{1}{3} = \frac{188{,}40}{3} = \boldsymbol{62{,}80\ cm}.$$

9·4 Τὰ ποσοστά.

Πρόβλημα 1ο.

Κατὰ τὴν πρόσληψι τεχνιτῶν συμφωνήσαμε ἡμερομίσθιο 250 δραχμές, ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ συνολικὲς κρατήσεις, οἱ ὁποῖες ὑπολογίζονται ἀνάλογα μὲ τὸ ἡμερομίσθιο, εἶναι 37,50 δραχμές. Πόσο θὰ ἦταν οἱ κρατήσεις, ἂν τὸ ἡμερομίσθιο εἶχε συμφωνηθῆ νὰ εἶναι 100 δραχμές;



Σχ. 9·4 α.

Λύσι:

Τὸ πρόβλημα μπορεῖ εὔκολα νὰ λυθῆ μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.

Στὶς ***250*** δραχμὲς οἱ κρατήσεις εἶναι ***37,50*** δρχ.
στὶς ***100*** δραχμὲς οἱ κρατήσεις εἶναι ***x;***

Τὰ μεγέθη εἶναι ***ἀνάλογα***, ἑπομένως:

$$x = 37{,}50 \times \frac{100}{250} = 15 \text{ δραχμές}.$$

Συμβολίζομε τότε: *15 %*.

Διαβάζομε: ***Δέκα πέντε (ἐπὶ) τοῖς ἑκατό.***

Ὀνομάζομε: Τὸ ***15 % ποσοστὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατό*** (σχ. 9·4α).

Πρόβλημα 2ο.

Κατὰ τὴν κατασκευὴ κυκλικῶν δίσκων ἀπὸ φύλλα λαμαρίνας ἡ φύρα εἶναι 12 %. Ἂν τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας εἶναι 132 kg, πόσο θὰ εἶναι τὸ βάρος τῶν δίσκων;

Λύσι :

α) Κάνομε τὴν γνωστή μας πιὰ κατάταξι, ἀναλύοντας τὸ ποσοστὸ 12 %:

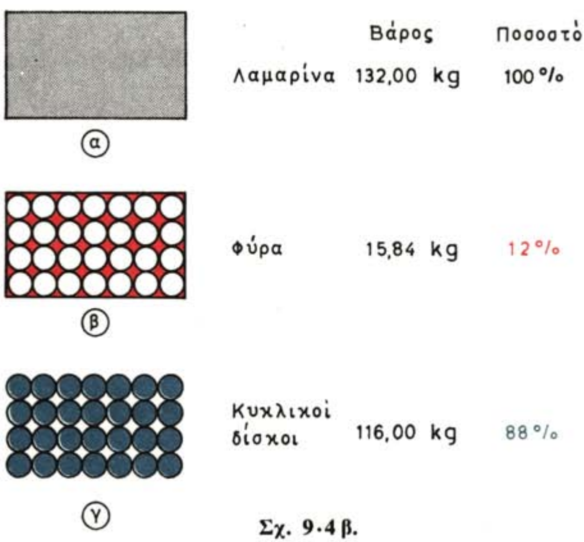
Στὰ	***100 kg***	ἡ φύρα εἶναι	***12 kg***
Στὰ	***132 kg***	ἡ φύρα εἶναι	x;

Τὰ μεγέθη εἶναι ***ἀνάλογα***, ἑπομένως:

$$x = 12 \times \frac{132}{100} = 15{,}84 \text{ kg}.$$

Ἄρα τὸ βάρος τῶν δίσκων θὰ εἶναι (σχ. 9·4β):

$$132 - 15{,}84 = \boldsymbol{116{,}16 \ kg}.$$



Σχ. 9·4β.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ *γνωρίζομε τὴν ἀρχικὴ τιμὴ* (δηλαδὴ τὸ βάρος 132 kg) ***καὶ τὸ ποσοστὸ*** (12% φύρα) ***καὶ ζητοῦμε τὴν τελικὴ τιμή.***

β) Τὸ ἴδιο πρόβλημα μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε μὲ κατάταξι, ἂν προηγουμένως κάνωμε τὴν ἑξῆς σκέψι: Ἀφοῦ ἡ φύρα εἶναι 12%, σημαίνει ὅτι ἀπὸ κάθε 100 kg λαμαρίνα θὰ χάνωμε 12 kg, ἄρα θὰ μένη γιὰ τοὺς δίσκους βάρος 100 − 12 = 88 kg.

Κατάταξι:

Ἀπὸ ***100 kg*** λαμαρίνας βγάζομε δίσκους βάρους ***88 kg***
ἀπὸ τὰ ***132 kg*** λαμαρίνας βγάζομε δίσκους βάρους ***x;***

Τὰ μεγέθη εἶναι ***ἀνάλογα.***

Ἑπομένως: $x = 88 \times \frac{132}{100} = \boldsymbol{116{,}16\ kg}$.

Πρόβλημα 3ο.

Ὅταν ἕνα ἄξονα τὸν βάλωμε στὸν τόρνο, χάνομε 5% ἀπὸ τὸ βάρος του. Ἂν ὁ ἄξων τορνιρισμένος εἶναι 19 kg, πόσο ζυγίζει ἀτορνίριστος;

Λύσι:

Ἀναλύοντας τὸ ποσοστὸ 5% λέμε:

Ὅταν ὁ ἄξων ἀτορνίριστος ζυγίζη 100 kg, τορνιρισμένος θὰ ζυγίζη:

$$100 - 5 = 95 \text{ kg}.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμε τὴν κατάταξι:

Σὲ βάρος τορνιρισμ. ἄξονος ***95 kg*** ἔχομε ἀτορνίριστο ***100 kg***
Σὲ βάρος τορνιρισμ. ἄξονος ***19 kg*** ἔχομε ἀτορνίριστο ***x;***

Τὰ μεγέθη εἶναι ***ἀνάλογα.***

Ἑπομένως: $x = 100 \times \frac{19}{95} = \boldsymbol{20\ kg}$.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ***ξέρομε τὸ ποσοστὸ*** (5%) ***καὶ τὴν τελικὴ τιμὴ*** (19 kg) ***καὶ ζητοῦμε τὴν ἀρχικὴ τιμὴ*** (ἄξων ἀτορνίριστος).

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

9·5 Δύο προβλήματα στὰ ποσοστά.

Πρόβλημα 1ο.

Τὸ ἡμερομίσθιο ἑνὸς τεχνίτη αὐξήθηκε ἀπὸ 200 δραχμὲς ἡμερησίως σὲ 250. Πόσο ἐπὶ % εἶναι ἡ αὔξησι;

Λύσι :

Ἡ αὔξησι ποὺ χορηγήθηκε, σὲ δραχμὲς εἶναι:

$$250 - 200 = 50.$$

Σὲ ποσοστὸ θὰ εἶναι:

$$\frac{50}{200} \times 100 = 25\%.$$

Πρόβλημα 2ο.

Ἀπὸ τὶς 250 δραχμὲς τοῦ ἡμερομισθίου του ἕνας τεχνίτης πληρώνεται στὸ χέρι καθαρὰ 200 δραχμὲς τὴν ἡμέρα. Πόσο ἐπὶ τοῖς % εἶναι οἱ κρατήσεις;

Λύσι.

Οἱ κρατήσεις σὲ δραχμὲς εἶναι:

$$250 - 200 = 50.$$

Σὲ ποσοστὸ θὰ εἶναι:

$$\frac{50}{250} \times 100 = 20\ \%.$$

Παρατήρησι.

Ἄξιο παρατηρήσεως στὰ δυὸ παραπάνω προβλήματα εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι, ἐνῶ δουλεύομε μὲ τοὺς ἴδιους ἀριθμούς, τὰ τελικὰ ἐξαγόμενα στὰ ποσοστὰ διαφέρουν μεταξύ τους· καὶ αὐτό, γιατὶ εἶναι διαφορετικὴ ἡ ***βάσι*** ἢ τὸ ***ποσὸν ἀναφορᾶς***, στὸ ὁποῖο ἀναφέρεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ποσοστοῦ (σχ. 9·5).

Στὸ πρῶτο πρόβλημα σὰν βάσι παίρνομε τὸ ποσὸν τῶν 200 δραχμῶν, γιατὶ ἐκεῖ ***βασιστήκαμε*** καὶ δώσαμε τὴν αὔξησι τοῦ ἡμερο-

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

μισθίου, ἐνῶ στὸ δεύτερο πρόβλημα σὰν βάσι παίρνομε τὸ ποσὸν τῶν 250 δραχμῶν, στὸ ὁποῖο ***βασιστήκαμε*** γιὰ νὰ κάνωμε τὶς κρατήσεις.

Σχ. 9·5.

Σὰν ***συμπέρασμα*** βγαίνει ὅτι:

Στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ποσοστοῦ κάθε φορὰ πρέπει νὰ προσέχωμε σὲ ποιά βάσι ἀναφερόμαστε,

γιατὶ ἡ ἴδια διαφορὰ σὲ δυὸ μεγέθη δίνει διαφορετικὰ ποσοστά, ὅταν ὑπολογίζεται μὲ διαφορετικὴ βάσι.

9·6 Ποσὰ ἢ μεγέθη ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα.

α) Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὴν παράγραφο 8·1 γιὰ τὰ ποσὰ ***μῆκος*** καὶ ***βάρος*** συμπεραίνομε ὅτι:

Δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅταν κάθε φορά, ποὺ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς γίνεται π.χ. 2, 3, 4, . . . φορὲς μεγαλυτέρα, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου γίνεται ἀντιστοίχως καὶ αὐτὴ 2, 3, 4, . . . φορὲς μεγαλυτέρα.

Πρόβλημα.

Κατὰ τὸ ζύγισμα μπουλονιῶν μηχανῆς εὑρήκαμε τὰ παρακάτω ἀποτελέσματα:

Ἀριθμὸς μπουλονιῶν :	10	20	30	50	100
Βάρος μπουλονιῶν σὲ kg:	7,5	15,0	22,5	37,5	75,0.

Οἱ τιμὲς 10 καὶ 7,5 ἢ 20 καὶ 15,0 ἢ 30 καὶ 22,5 κ.λπ. λέγονται ***ἀντίστοιχες***.

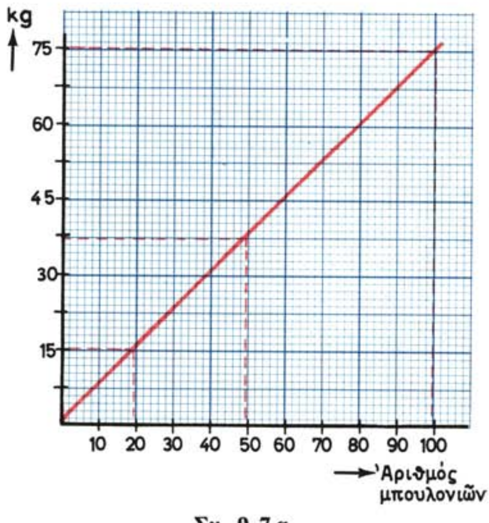
β) Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὴν παράγραφο 8 · 2 γιὰ τὰ ποσὰ ***ἐργάτες*** καὶ ***χρόνος***, συμπεραίνομε ὅτι:

Δύο ποσὰ ἢ μεγέθη λέγονται ἀντίστροφα, ὅταν κάθε φορά, ποὺ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς γίνεται π.χ. 2, 3, 4, . . . φορὲς μεγαλυτέρα, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου γίνεται ἀντιστοίχως 2, 3, 4, . . φορὲς μικροτέρα.

9 · 7 Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισι.

α) ***Σὲ ποσὰ ἀνάλογα*** (σχ. 9 · 7 α):

Ἀριθμὸς μπουλονιῶν :	10	20	30	50	100
Βάρος μπουλονιῶν σὲ kg :	7,5	15,0	22,5	37,5	75,0

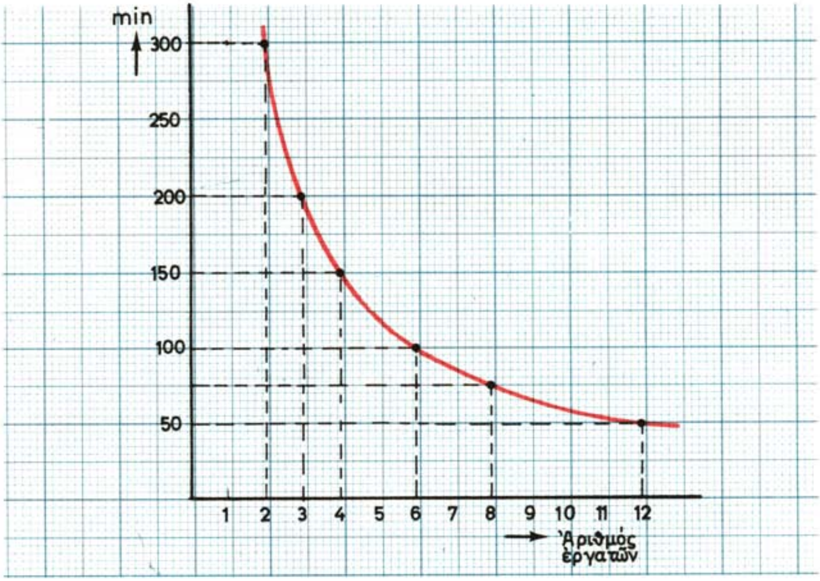


Σχ. 9·7 α.
Ποσὰ ἀνάλογα.

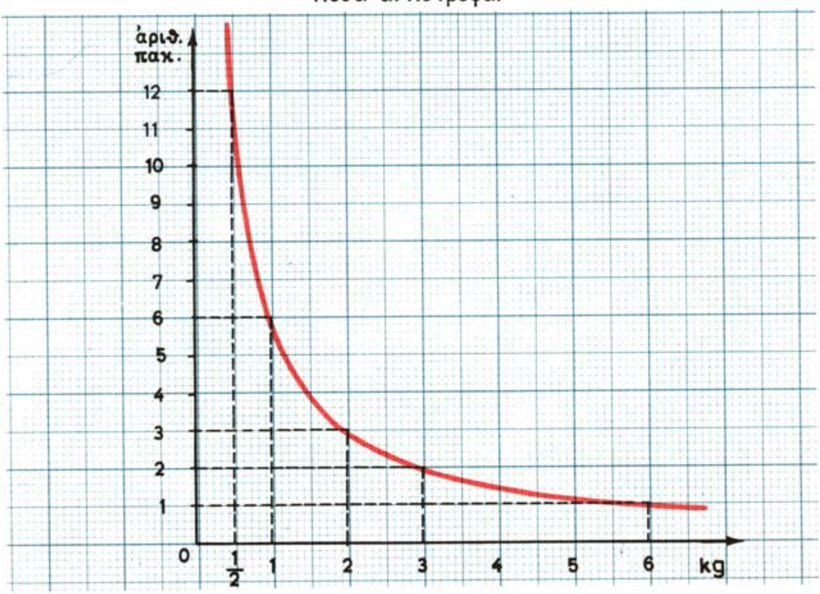
β) ***Σὲ ποσὰ ἀντίστροφα*** (σχ. 9 · 7 β):

Ἐργάτες :	2	3	4	6	8	12
Χρόνος ἐργασίας σὲ mm :	300	200	150	100	75	50

γιὰ τὸ τελείωμα ἑνὸς ἔργου.



Σχ. 9·7 β.
Ποσὰ ἀντίστροφα.



Σχ. 9·7 γ.

γ) ***Σὲ ποσὰ ἀντίστροφα*** (σχ. 9 · 7 γ):

Ἀριθμὸς πακέτων	:	1	2	3	6	12
Βάρος κάθε πακέτου σὲ kg:		6	3	2	1	$\frac{1}{2}$

9 · 8 Σύμβολα σὲ μεγέθη, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ δύο ἄλλα.

Πρόβλημα 1ο.

Τὰ 30 μπουλόνια ζυγίζουν 22,5 kg. Πόσο ζυγίζει τὸ 1 μπουλόνι;

Λύσι :

Προφανῶς τὸ κάθε μπουλόνι θὰ ζυγίζη:

$$\frac{22{,}5 \quad \text{kg}}{30 \ \text{Μπουλ.}} = \frac{22{,}5}{30} \ \frac{\text{kg}}{\text{Μπουλ.}} = 0{,}75 \ \frac{\text{kg}}{\text{Μπουλ.}}$$

ποὺ διαβάζεται ***κιλὰ ἀνὰ μπουλόνι.***

Ἄλλο τέτοιο μέγεθος.

$$\text{Ταχύτης} = \frac{\text{Διάστημα}}{\text{χρόνος}}, \ \text{δηλαδὴ} \ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{sec}} \ \text{ἢ} \ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{min}} \ \text{ἢ} \ \frac{\boldsymbol{km}}{\boldsymbol{h}} \ \text{κ.λπ.}$$

Πρόβλημα 2ο.

Δύναμι 12 kp μετακινεῖ ἕνα βάρος κατὰ τὴν διεύθυνσί της 5 m. Πόσο ἔργο παράγεται;

Λύσι :

Ὅπως ξέρομε ἀπὸ τὴν Φυσική, θὰ ἔχωμε:

Ἔργο = Δύναμι × Μετατόπισι

ἢ ***Ἔργο*** = (12 ***kp***) × (***5 m***) = 60 ***kp · m.***

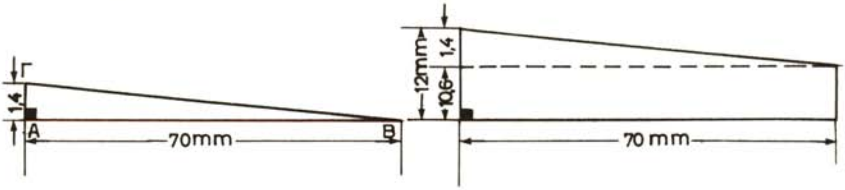
Ἀπὸ τὰ παραπάνω δύο προβλήματα βγάζομε τὸ συμπέρασμα ὅτι:

Ἡ μονὰς ἑνὸς μεγέθους, τὸ ὁποῖον (μέγεθος) εἶναι γινόμενο ἢ πηλίκον δύο ἄλλων μεγεθῶν, εἶναι καὶ αὐτὴ γινόμενο ἢ πηλίκον τῶν μονάδων τῶν μεγεθῶν αὐτῶν.

9·9 Ἡ κλίσι.

Πρόβλημα.

Δίνεται ἡ παρακάτω σφήνα. Πόσο θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ μία κάθετος πλευρά της, ὅταν γνωρίζωμε ὅτι ἡ ἄλλη θὰ γίνη 100 mm (σχ. 9 · 9);



Σχ. 9·9.

Λύσι :

Ὅπως δείχνουν τὰ δύο σχήματα, ζητοῦμε πόσο θὰ γίνη ἡ ΑΓ, ὅταν ἡ ΑΒ γίνη 100 mm.

Κατάταξι:	Στὰ	70 mm	ἡ	ΑΓ	εἶναι	1,4 mm
	Στὰ	100 mm	ἡ	ΑΓ	εἶναι	*x*;

$$x = 1{,}4 \times \frac{100}{70} = \frac{1{,}4}{70} \times 100 = 2\ \boldsymbol{mm}.$$

Δηλαδὴ στὰ 100 mm ἡ σφήνα προκαλεῖ ἀνύψωσι κατὰ 2 mm.

Τὸ πηλίκον τοῦ ὕψους (ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ὑψῶν) διὰ τοῦ μήκους (ὅταν ὅλα εἶναι μετρημένα μὲ τὴν ἴδια μονάδα), τὸ ὀνομάζομε κλίσι καὶ τὸ ἐκφράζομε σὲ ποσοστὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατό.

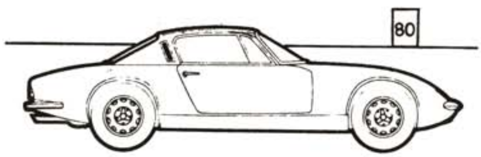
Ἔτσι ἐδῶ μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι ἡ κλίσι εἶναι **2%**.

9·10 Λίγα λόγια γιὰ τὴν ταχύτητα.

Προβλήματα.

1. Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι, ταξιδεύοντας μὲ ἕνα αὐτοκίνητο, κάθε φορὰ ποὺ περνᾶμε μπροστὰ ἀπὸ ἕνα χιλιομετρικὸ δείκτη (σχ. 9 · 10 α) σημειώνομε ἀκριβῶς τὴν ὥρα. Ἔτσι, προκύπτει ὁ ἀκόλουθος Πίναξ.

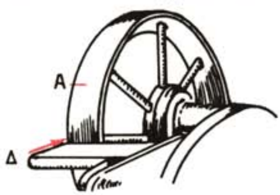
Ἔνδειξι χιλιομετρικοῦ δείκτη	Διαφορὰ	Ἀκριβὴς ὥρα	Διαφορὰ
77		10^h 20 min	
	1		1
78		10^h 21 min	
	1		1
79		10^h 22 min	
	1		1
80		10^h 23 min	
	1		1
81		10^h 24 min	
	1		1
82		10^h 25 min	



Σχ. 9·10 α.

Λύσι :

Παρατηροῦμε δηλαδὴ ὅτι σὲ ἴσους χρόνους διανύομε ἴσες ἀποστάσεις. Ὅπως ξέρομε, ἡ κίνησι αὐτὴ ὀνομάζεται ***ὁμαλὴ*** κίνησι. Ἐπειδὴ ὅμως στὴν πρᾶξι δύσκολα μποροῦμε νὰ ἐπιτύχωμε κάτι τέτοιο μὲ ἀπόλυτη ἀκρίβεια, γι' αὐτὸ μετροῦμε τὴν χρονικὴ διάρκεια ποὺ χρειαζόμαστε γιὰ νὰ διανύσωμε μία μεγάλη ἀπόστασι. Τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀποστάσεως, ποὺ διανύσαμε, διὰ τοῦ χρόνου, ποὺ μετρήσαμε, τὸ ὀνομάζομε ***μέση ταχύτητα***, ποὺ σημαίνει ὅτι τὴν ταχύτητα αὐτὴ θὰ εἶχε τὸ αὐτοκίνητο σὲ ὅλη του τὴν διαδρομή, ἂν μποροῦσε νὰ τὴν κρατήση σταθερὴ καὶ στὸν ἴσιο δρόμο καὶ στὸν ἀνήφορο καὶ σὲ στροφή.



Σχ. 9·10 β.

2. Τροχὸς ἔχει διάμετρο 500 mm καὶ περιστρέφεται μὲ 120 στρ/min. Ὑπολογίσετε τὴν ταχύτητα, ποὺ ἔχει τὸ σημεῖο Α τοῦ τροχοῦ (σχ. 9 · 10 β).

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Λύσι :

Ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ ἔχει μῆκος:

$\Gamma = 3{,}14 \times 500$ mm, $\Gamma = 1570$ mm.

Ἀφοῦ ὁ τροχὸς κάνη 120 στροφὲς τὸ λεπτό, σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖο Α θὰ περάση μπροστὰ ἀπὸ τὸν δείκτη Δ 120 φορὲς μέσα σὲ ἕνα λεπτό, ἄρα τὸ Α ***σὲ ἕνα λεπτὸ θὰ διανύση (διατρέξη) ἀπόστασι ἴση μέ :***

$$1570 \times 120 = 188\,400 \text{ mm},$$

$$\text{δηλαδὴ} \quad 188{,}40 \text{ m}.$$

Τὸ μέγεθος αὐτὸ τῶν $188{,}40 \dfrac{m}{min}$ τὸ ὀνομάζομε ***γραμμικὴ ταχύτητα***, ἐνῶ τὸ μέγεθος $120 \dfrac{\text{στροφὲς}}{min}$ τὸ ὀνομάζομε ***περιστροφικὴ ταχύτητα***.

Ἀπὸ τὸ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

α) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ στροφῶν ἀνὰ πρῶτο λεπτό.

β) Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸ στροφῶν ἀνὰ πρῶτο λεπτό.

9·11 Ἡ ἀναλογία.

Πρόβλημα.

15 ὅμοιες σιδερένιες μπάλλες ζυγίζουν 45 kg. Πόσο ζυγίζουν οἱ 6 μπάλλες;

Λύσι :

Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῆ μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξι:			
Οἱ	***15***	μπάλλες ζυγίζουν	***45*** kg
οἱ	***6***	μπάλλες ζυγίζουν	***x;***

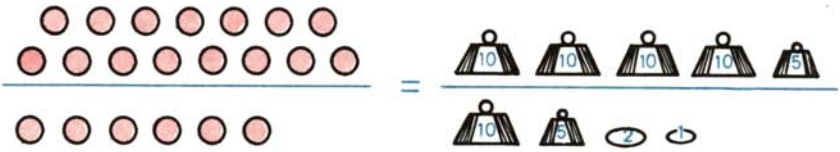
Τὰ μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, ἑπομένως: $x = 45 \times \dfrac{6}{15} = 18$ kg.

Δηλαδή:

Οἱ ***15*** μπάλλες ζυγίζουν ***45*** kg
οἱ ***6*** μπάλλες ζυγίζουν ***18*** kg.

Παρατηροῦμε ὅτι: $\frac{15}{6} = 2{,}5$ καὶ $\frac{45}{18} = 2{,}5$,

ποὺ σημαίνει ὅτι (σχ. 9·11 α): $\frac{15}{6} = \frac{45}{18}$·



Σχ. 9·11 α.

Ἐπειδὴ τὰ μεγέθη, ποὺ παίρνουν μέρος σ' αὐτὴ τὴν ἰσότητα εἶναι ἀνάλογα, ἡ σχέσι αὐτὴ ὀνομάζεται ***ἀναλογία***.

Τὸ πηλίκον $\frac{15}{6} = 2{,}5$ τῶν δύο πρώτων ***ὁμοειδῶν μεγεθῶν*** ἢ τὸ $\frac{45}{18} = 2{,}5$ τῶν δύο ἄλλων ἐπίσης ὁμοειδῶν μεταξύ τους μεγεθῶν, ποὺ ἐκφράζει πόσες φορὲς τὸ ἕνα στοιχεῖο εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλλο, παίρνει δὲ τὴν ἔκφρασι ἑνὸς ἁπλοῦ κλάσματος, τὸ ὀνομάζομε ***λόγο τῆς ἀναλογίας***, ἐνῶ τὰ μεγέθη 15 μπάλλες, 6 μπάλλες, 45 kg καὶ 18 kg ὀνομάζονται ***ὅροι τῆς ἀναλογίας***.

Ἀπὸ τοὺς ὅρους, ὁ πρῶτος, 15, καὶ ὁ τελευταῖος, 18, λέγονται ***ἄκροι ὅροι***, ἐνῶ ὁ δεύτερος, 6, καὶ ὁ τρίτος, 45, ὀνομάζονται ***μέσοι***. Ἑπομένως: ***Ἀναλογία εἶναι ἡ ἰσότης δύο λόγων***.

Κατὰ τὰ γνωστά, μποροῦμε νὰ γράψωμε γιὰ τὴν παραπάνω ἀναλογία: $15 : 6 = 45 : 18$.

Βασικὴ ἰδιότης (πρώτη).

Στὴν παραπάνω ἀναλογία, κάνομε κλάσματα ὁμώνυμα τοὺς δύο ἴσους λόγους.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Θὰ ἔχωμε: $\dfrac{15 \times 18}{108} = \dfrac{6 \times 45}{108}$, ποὺ σημαίνει ὅτι:

$$\boxed{15 \times 18 = 6 \times 45}$$

Ἄρα:

Σὲ μία ἀναλογία τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων ὅρων.

Μία ἄλλη ἰδιότης (δευτέρα).

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν δύο γινομένων $15 \times 18 = 6 \times 45$ μποροῦμε νὰ ἔχωμε μία ἄλλη ἰσότητα, ἂν διαιρέσωμε καὶ τὰ δύο μέρη μὲ τὸ γινόμενο δύο ὅρων, ποὺ τὸν ἕνα τὸν παίρνομε ἀπὸ τὸ ἕνα γινόμενο (ἐδῶ τὸν 18) καὶ τὸν ἄλλο ἀπὸ τὸ ἄλλο γινόμενο (ἐδῶ τὸν 6) δηλαδὴ μὲ τὸ 18×6:

$$\frac{15 \times 18}{18 \times 6} = \frac{6 \times 45}{18 \times 6} \quad \text{ἢ ἁπλοποιώντας} \quad \boxed{\frac{15}{6} = \frac{45}{18}}$$

Ἄρα:

Ἂν τὸ γινόμενο δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο δύο ἄλλων, τότε οἱ τέσσερεις αὐτοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζουν ἀναλογία.

Μία τρίτη ἰδιότης.

Ἀπὸ τὸ ἴδιο γινόμενο $15 \times 18 = 6 \times 45$, τῆς ἀρχικῆς ἀναλογίας $\dfrac{15}{6} = \dfrac{45}{18}$, διαιρώντας κατὰ μέλη μὲ τὸ γινόμενο 18×45 μποροῦμε νὰ ἔχωμε καὶ τὴν ἰσότητα:

$$\frac{15 \times 18}{18 \times 45} = \frac{6 \times 45}{18 \times 45}$$

ἀπὸ τὴν ὁποία, ἁπλοποιώντας, εὑρίσκομε: $\boxed{\dfrac{15}{45} = \dfrac{6}{18}}$

Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, διαιρώντας μὲ τὸ γινόμενο 15×6 εὑρίσκομε καὶ τὴν ἰσότητα:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{18}}{6} = \frac{45}{\boldsymbol{15}}}$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

Σὲ μία ἀναλογία μποροῦμε νὰ ἀλλάξωμε τὴν θέσι τῶν μεσαίων ὅρων μεταξύ τους ἢ τῶν ἄκρων ὅρων μεταξύ τους.

Μία σημαντικὴ ἰδιότης (τετάρτη).

Ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{18}{6} = \frac{45}{15}$ $(= 3)$ προσθέτοντας τοὺς ἀριθμητὰς χωριστὰ καὶ τοὺς παρονομαστὰς χωριστὰ προκύπτει ὁ λόγος $\frac{63}{21}$ $(= 3)$, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν λόγο τῆς παραπάνω ἀναλογίας, ποὺ σημαίνει ὅτι:

$$\boxed{\frac{18}{6} = \frac{45}{15} = \frac{18 + 45}{6 + 15}}$$

Δηλαδή:

Σὲ μία ἀναλογία μποροῦμε νὰ προσθέσωμε χωριστὰ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ χωριστὰ τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων, ποὺ ἐκφράζουν τὴν ἀναλογία, καὶ ὁ λόγος νὰ διατηρηθῇ.

Συνθήκη.

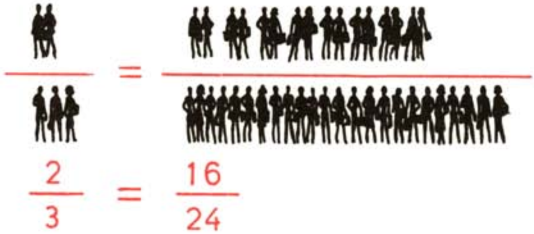
Τὴν ἀναλογία: $\frac{18}{6} = \frac{45}{15} = \frac{63}{21}$

μποροῦμε νὰ τὴν γράψωμε καὶ ὡς ἑξῆς:

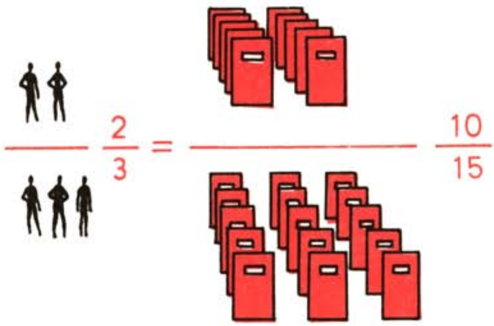
$$18 : 45 : 63 = 6 : 15 : 21.$$

Ἀπεικόνισι μιᾶς ἀναλογίας.

Στὸ σχῆμα 9 · 11 β δίδεται μία εἰκονογραφημένη ἀναλογία μεταξὺ ὁμοειδῶν μεγεθῶν, ἐνῶ στὸ σχῆμα 9 · 11 γ δίνεται μία ἐπίσης εἰκονογραφημένη ἀναλογία μεταξὺ ἑτεροειδῶν μεγεθῶν.



Σχ. 9·11 β.



Σχ. 9·11 γ.

9 · 12 Ἡ ἐξίσωσι.

Ξαναβλέποντας τὴν διάταξι τοῦ προβλήματος στὴν παραπάνω παράγραφο 9 · 11, καταλήγομε στὸ συμπέρασμα, πὼς μποροῦμε νὰ γράψωμε ἀντὶ τῆς ἀναλογίας:

$$\frac{15}{6} = \frac{45}{18}$$

τὴν ἀναλογία: $$\frac{15}{6} = \frac{45}{x}.$$

Ἐφαρμόζοντας τὴν βασικὴ (πρώτη) ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, λαμβάνομε τὴν σχέσι:

$$15 \cdot x = 45 \cdot 6.$$

Μία τέτοια σχέσι ὀνομάζεται ***ἐξίσωσι***. Τὸ γράμμα x, ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸ ζητούμενο μέγεθος, τοῦ ὁποίου δὲν ξέρομε τὴν τιμή, τὸ ὀνομάζομε ***ἄγνωστο***, ἐνῶ τὴν ἐργασία, ποὺ θὰ πρέπει νὰ κάνωμε στὴν συνέχεια γιὰ νὰ εὕρωμε μὲ τί ἰσοῦται τὸ x, τὴν λέμε ***ἐπίλυσι τῆς ἐξισώσεως***. Τὸ ἐξαγόμενο τῆς ἐπιλύσεως, ποὺ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ***συγκεκριμένος*** ἢ ***ἀφηρημένος***, δηλαδὴ τὸ 18 kg στὸ παράδειγμά μας, τὸ λέμε ***ἀριθμητικὴ τιμὴ*** τοῦ ἀγνώστου x ἢ ***λύσι τῆς ἐξισώσεως***.

Ὁ ἀριθμός, ποὺ εὑρίσκεται μπροστὰ ἀπὸ τὸν ἄγνωστο x, ὀνομάζεται ***συντελεστὴς*** τοῦ ἀγνώστου.

Ἡ παραπάνω ἐξίσωσι μᾶς λέει, ὅτι ὁ x εἶναι ἕνας ἀριθμός, ποὺ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ 15, θὰ μᾶς δώσῃ ἐξαγόμενο 270. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι γιὰ νὰ ἐπιλύσωμε τὴν παραπάνω ἐξίσωσι θὰ πρέπει νὰ εὕρωμε ἕνα ἀριθμὸ τέτοιο, ὥστε, ἂν τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸ 15, νὰ μᾶς δώσῃ γινόμενο 270. Ὅπως ὅμως ξέρομε, αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ***τὸ πηλίκον τοῦ 270 διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου 15.***

Δηλαδή: $x = \dfrac{270}{15}$ ἢ $x = 18$.

Ὁ ἀριθμὸς 18 εἶναι ἡ λύσι τῆς ἐξισώσεως.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βλέπομε ὅτι ἡ ἐξίσωσι, ἡ ὁποία στὴν πραγματικότητα εἶναι μία ἀναλογία, ἐκφράζει μὲ συντομία τὴν ἴδια πρᾶξι, ποὺ ἐκφράζει καὶ ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Μὲ ἄλλα λόγια, ἀνακεφαλαιώνοντας, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι:

— Ἡ ***ἁπλῆ μέθοδος*** τῶν τριῶν ἁπλοποιεῖ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα.

— Ἡ ***ἀναλογία*** συντομεύει τὴν κατάταξι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἡ ἐξίσωσι ἐκφράζει μία ἀναλογία, στὴν ὁποία ὁ ἕνας ὅρος, τὸ x, εἶναι ἄγνωστο καὶ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ.

Ἐφαρμογές.

α) Ἀπὸ ράβδο μήκους 3,75 m καὶ βάρους 125 kg κόβομε ἕνα κομμάτι μήκους 2,25 m. Πόσο θὰ ζυγίζῃ τὸ κομμάτι ποὺ κόψαμε;

Κατάταξι.

Τὰ	3,75 m	ζυγίζουν	125 kg
τὰ	2,25 m	ζυγίζουν	x;

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· ἄρα: $\dfrac{3,75}{2,25} = \dfrac{125}{x}$.

Θὰ ἔχωμε: $3,75 \cdot x = 2,25 \times 125$

ἢ $3,75 \cdot x = 281,25.$

Διαιροῦμε διὰ τοῦ ***συντελεστοῦ*** 3,75 τοῦ ἀγνώστου καὶ ἔχομε:

$$x = \frac{281,25}{3,75} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{x = 75\ kg}.$$

β) Ἕνα μηχάνημα, ὅταν λειτουργῆ ἐπὶ 15 min, παράγει 405 τεμάχια ἀπὸ ἕνα ἐξάρτημα. Πόση ὥρα πρέπει νὰ λειτουργήση γιὰ νὰ παράγη 1215 τεμάχια;

Κατάταξι.

Προχωροῦμε ἀπ' εὐθείας στὸ γράψιμο τῆς ἰσότητος τῶν δύο λόγων τῆς ἀναλογίας, ἀφοῦ, ὅπως βλέπομε, τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα:

$$\frac{15}{x} = \frac{405}{1215}.$$

Γιὰ νὰ τὸ κάνωμε αὐτό, ***ὀνομάσαμε τὸ ἄγνωστο μέγεθος x.***

Συνεχίζοντας ἔχομε:

$$15 \times 1215 = 405 \cdot x,$$

ποὺ γράφεται διαδοχικά:

$$405 \cdot x = 15 \times 1215$$

ἢ $405 \cdot x = 18\,225$

καὶ $\boldsymbol{x = 45\ min}.$

Παρατήρησι ἀξιοσημείωτη.

Ἂν προσέξωμε καλὰ τὶς ἐξισώσεις:

$15 \cdot x = 270,$ $3,75 \cdot x = 281.75$ καὶ $405 \cdot x = 18\,225,$

βλέπομε πὼς ἀποτελοῦνται στὸ ἀριστερὸ μέρος ἀπὸ τὸ γινόμενο ἑνὸς γνωστοῦ καὶ ἑνὸς ἀγνώστου ἀριθμοῦ, ἐνῶ στὸ δεξιὸ μέρος ἀπὸ ἕνα γνωστὸ ἀριθμό. Ἂν λοιπὸν θέλαμε νὰ γράψωμε τὶς ἐξισώσεις αὐτὲς μὲ γράμματα, θὰ γράφαμε:

$$\boxed{\alpha \cdot x = \gamma.}$$

Ἡ ἐπίλυσι αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως, σύμφωνα μὲ τὰ ὅσα εἴπαμε μέχρι τώρα, θὰ ἔδινε σὰν λύσι τὸ κλάσμα: $\frac{\gamma}{\alpha}$, δηλαδή:

$$\boxed{x = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

Συμπέρασμα.

Ἡ ἐπίλυσι τῆς ἐξισώσεως $\alpha \cdot x = \gamma$ δίνει σὰν λύσι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸ γνωστὸ μέρος τῆς ἐξισώσεως καὶ παρονομαστὴ τὸν συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου.

9·13 Ἄλλες ἀναλογίες.

Προβλήματα.

1. Σιδερένια ράβδος ἔχει μῆκος 3,5 m καὶ βάρος 5,25 kg. Πόσο βάρος θὰ ἔχῃ ἡ ἴδια ράβδος, ἂν τὸ μῆκος της γίνῃ 2,5 m;

Λύσι:

Κατάταξι.

Θὰ ἔχωμε: 3,5 m ράβδος ἔχει βάρος 5,25 kg
2,5 m ράβδος θὰ ἔχῃ βάρος x;

Τὰ μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, ἄρα: $x = 5{,}25 \times \frac{2{,}5}{3{,}5} = 3{,}75$ kg.

Ἑπομένως ἔχομε τὴν ἀναλογία: $\frac{3{,}5}{2{,}5} = \frac{5{,}25}{3{,}75}$.

2. Γιὰ νὰ τελειώσῃ ἕνα ἔργο σὲ 4 ἡμέρες χρειάσθηκε νὰ ἐργασθοῦν 60 ἐργάτες. Πόσοι ἐργάτες θὰ ἔπρεπε νὰ ἐργασθοῦν γιὰ νὰ τελείωνε τὸ ἔργο σὲ 16 ἡμέρες;

Λύσι :

Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῆ μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν. Τὰ μεγέθη στὴν κατάταξι, παρακάτω, εἶναι ἀντίστροφα.

Κατάταξι.

Γιὰ ***4*** ἡμέρες χρειάσθηκαν ***60*** ἐργάτες
γιὰ ***16*** ἡμέρες θὰ χρειασθοῦν ***x;***

Εὑρίσκομε: $$x = 60 \times \frac{4}{16} = 15 \text{ ἐργάτες.}$$

Δηλαδὴ ἔχομε ὅτι: γιὰ ***4*** ἡμ. χρειάζονται ***60*** ἐργ.
γιὰ ***16*** ἡμ. χρειάζονται ***15*** ἐργ.,

ποὺ μᾶς κάνει νὰ ποῦμε ὅτι:

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} \,(= 0{,}25) \quad \text{καὶ} \quad \frac{60}{15} = 4.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{4}{16}$ καὶ $\frac{60}{15}$ εἶναι ἀντίστροφοι. Ἑπομένως θὰ ἔχωμε:

$$\frac{4}{16} = \frac{15}{60}.$$

Δηλαδή:

Στὴν περίπτωσι ποὺ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, μποροῦμε νὰ φτιάξωμε ἀναλογία, ἂν τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο λόγους τὸν γράψωμε ἀντίστροφα.

Ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα, ἀφοῦ σχηματίσωμε τὴν ἀναλογία, ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες, ποὺ εἴπαμε στὶς προηγούμενες παραγράφους.

9·14 Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μὲ γράμματα.

α) Ὅταν κάναμε τὴν κατάταξι στὴν μέθοδο τῶν τριῶν καὶ στὴν ἐξίσωσι, τὸ ***ἄγνωστο*** μέγεθος, ποὺ θέλαμε νὰ ὑπολογίσωμε, τὸ συμβολίσαμε μὲ τὸ γράμμα x. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ κάνωμε καὶ σὲ ἄλλες περιπτώσεις, ὅταν δὲν ξέρωμε τὴν τιμὴ σὲ ἕνα μέγεθος.

Γιὰ νὰ ἀποφύγωμε τὸ μπέρδεμα τοῦ ἀγνώστου x μὲ τὸ σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ×, ἀντικαθιστοῦμε τὸ τελευταῖο μὲ μιὰ τελεία, ποὺ τὴν βάζομε στὴν μέση, ἀνάμεσα στοὺς δύο ὅρους τοῦ γινομένου.

Ἔτσι ἀντί: $8 \times x$ γράφομε: $8 \cdot x$

ἢ ἀντί: $3{,}75 \times 0{,}45$ γράφομε: $3{,}75 \cdot 0{,}45$ κ.λπ.

β) Πολλὲς φορὲς κουβεντιάζοντας μεταξύ μας λέμε:

«Ἃς ποῦμε πὼς αὐτὸ τὸ κομμάτι ἡ λαμαρίνα κοστίζει α δραχμὲς τὸ κιλό».

Ἔτσι στὴν θέσι τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ μᾶς δίνει τὴν ἀξία τοῦ χιλιογράμμου μιᾶς ποιότητος λαμαρίνας, βάζομε ἕνα γράμμα, τὸ ὁποῖο ***ἀντιπροσωπεύει*** τὴν τιμὴ αὐτή. Δηλαδὴ τὸ γράμμα αὐτὸ εἶναι στὴν πραγματικότητα ἕνας ἀριθμός. Συνήθως γιὰ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμε τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ὅπως π.χ.:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon \; \ldots\ldots$$

ἐνῶ γιὰ τοὺς ἀγνώστους ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμε τὰ τελευταῖα γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἢ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, ὅπως π.χ.:

$$x, \quad y, \quad z, \quad \varphi \;\text{ καὶ }\; \omega$$

Ἂν ἡ παραπάνω λαμαρίνα κοστίζῃ 9,5 δραχμὲς τὸ χιλιόγραμμο, γράφομε:

$$\alpha = 9{,}5\,\frac{\delta\rho\chi}{kg}.$$

Ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς 9,5 δρχ. ἀνὰ kg ὀνομάζεται ***ἀριθμητικὴ τιμὴ*** τοῦ α.

γ) Ἂς δοῦμε τώρα, τί γίνεται μὲ τὶς τέσσερεις πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, ὅταν ἀντὶ ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμε γράμματα ἢ ἀριθμοὺς καὶ γράμματα μαζί.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ι. Πρόσθεσι.

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ εὕρωμε τὸ συνολικὸ βάρος ἑνὸς δοχείου, τοῦ ὁποίου τὸ καθαρὸ περιεχόμενο ζυγίζει α kg καὶ τὸ ἀπόβαρο β kg.

Λύσι :

Θὰ πρέπει νὰ προσθέσωμε τὸ α καὶ τὸ β. Θὰ ἔχωμε:

$$\alpha + \beta = (\alpha + \beta)$$

ἀφοῦ κάθε τι, ποὺ περιέχεται μέσα σὲ παρένθεσι ἐκφράζει ὅτι ἔχει γίνει ἡ πρᾶξι.

ΙΙ. Ἀφαίρεσι.

Τὸ μικτὸ βάρος ἑνὸς γεμάτου δοχείου εἶναι α kg, ἐνῶ τὸ ἀπόβαρο εἶναι β kg. Ζητοῦμε τὸ καθαρὸ βάρος.

Λύσι :

Θὰ πρέπει ἀπὸ τὸ α νὰ ἀφαιρέσωμε τὸ β. Θὰ ἔχωμε, γιὰ τοὺς ἴδιους μὲ τὴν πρόσθεσι λόγους:

$$\alpha - \beta = (\alpha - \beta).$$

ΙΙΙ. Πολλαπλασιασμός.

Τὸ βάρος ἑνὸς δοχείου εἶναι α kg. Πόσο ζυγίζουν τὰ β δοχεῖα;

Λύσι :

Θὰ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ α ἐπὶ τὸ β. Γράφομε:

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \beta).$$

ΙV. Διαίρεσι.

Τὸ συνολικὸ βάρος β δοχείων εἶναι α kg. Πόσο ζυγίζει κάθε ἕνα χωριστά;

Λύσι :

Θὰ πρέπει νὰ διαιρέσωμε τὸ α διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δοχείων β, ὁπότε:

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}.$$

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Συμπέρασμα.

Οἱ πράξεις μεταξὺ ἀριθμῶν, ποὺ συμβολίζονται μὲ γράμματα, γίνονται μὲ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, μὲ τὴν παρεμβολὴ μεταξὺ δύο γραμμάτων τοῦ συμβόλου τῆς πράξεως, ποὺ πρόκειται νὰ ἐκτελέσωμε (δηλαδὴ τοῦ +, —, · ἢ :).

Περίπτωσι I.

Ἐφαρμογὴ μὲ ἀριθμοὺς καὶ γράμματα.

— Προσθέσατε τὸ 5 καὶ τὸ α.

Εὑρίσκομε ὅτι: $5 + \alpha = (5 + \alpha)$.

— Διαιρέσατε τὸ β διὰ τοῦ 6.

Εὑρίσκομε ὅτι: $\beta : 6 = \dfrac{\beta}{6}$.

— Διαιρέσατε τὸ 12 διὰ τοῦ α.

Εὑρίσκομε ὅτι: $12 : \alpha = \dfrac{12}{\alpha}$.

Περίπτωσι II.

Ἐφαρμογὴ μὲ τὸ 0.

— Προσθέσατε τὸ 0 καὶ τὸ 7.

Εὑρίσκομε ὅτι: $0 + 7 = (0 + 7) = +7$.

Ἐφ' ὅσον ὅμως ἡ πρᾶξι αὐτὴ μπορεῖ νὰ γίνη καὶ μὲ πρόσθεσι τοῦ 0 στὸ 7, θὰ ἔχωμε: $7 + 0 = 7$.

Ἑπομένως $7 = +7$, ποὺ σημαίνει ὅτι:

Κάθε ἀριθμός, πού, ὅπως εἶναι γραμμένος δὲν ἔχει τὸ σύμβολο τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως μπροστά του, μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὅτι ἔχει μπροστά του τὸ σημεῖο + τῆς προσθέσεως.

Ἔτσι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$3{,}25 = +3{,}25 \qquad 12 = +12 \qquad \dfrac{3}{5} = +\dfrac{3}{5}$ κ.ο.κ.

Τότε τὸ σύμβολο τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως, ποὺ εὑρίσκεται μπροστὰ ἀπὸ τὸν ἀριθμό, ὀνομάζεται ***πρόσημο***.

Περίπτωσι III.

Προσθέσατε τὸ α στὸν ἑαυτό του 5 φορές.

Θὰ ἔχωμε: $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha$, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα θὰ εὑρεθῆ, ἂν πάρωμε 5 φορὲς τὸν ἀριθμὸ α, δηλαδὴ ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 5 μὲ τὸν ἀριθμὸ α.

Ἔτσι:

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 5 \cdot \alpha = (5 \cdot \alpha).$$

Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ γιὰ τὴν περίπτωσι: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$.

Δηλαδή:

Ὁ ἀριθμός, ποὺ εὑρίσκεται μπροστὰ ἀπὸ ἕνα γράμμα ἢ τὸν ἄγνωστο x (συντελεστής), φανερώνει πόσες φορὲς πρέπει νὰ προσθέσωμε τὸ γράμμα αὐτὸ ἢ τὸν ἄγνωστο x μὲ τὸν ἑαυτό τους.

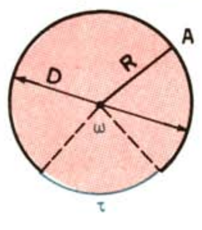
9·15 Οἱ τύποι.

Ἐφαρμόζοντας τὰ ὅσα εἴπαμε παραπάνω γιὰ τὴν χρησιμοποίησι τῶν γραμμάτων στὴν θέσι τῶν ἀριθμῶν, μποροῦμε νὰ σχηματίσωμε σχέσεις, οἱ ὁποῖες εἶναι γνωστὲς ***ὡς τύποι***. Μὲ τὴν βοήθεια κατόπιν αὐτῶν τῶν τύπων μποροῦμε, κάθε φορά, νὰ ὑπολογίζωμε διάφορα μεγέθη.

Ἔτσι:

α) Στὴν περιφέρεια.

Τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τὴν συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα ***R*** ἢ ***r***, τὴν διάμετρο μὲ τὸ γράμμα ***D*** ἢ ***d***, τὴν περίμετρο (κύκλου, τριγώνου κ.λπ.) μὲ τὸ γράμμα ***Γ***, τὸ τόξο μὲ τὸ γράμμα ***τ***, τὴν γωνία μὲ τὸ γράμμα ***ω*** καὶ τὸ ἐμβαδὸν μὲ τὸ γράμμα ***Ε***. Ἀπὸ ὅσα ἔχομε πεῖ μέχρι τώρα, προκύπτουν οἱ ἀκόλουθοι τύποι:

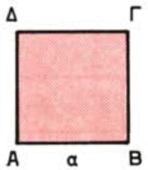


ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

$$D = 2 \cdot R \qquad \Gamma = 2 \cdot \pi \cdot R \qquad \tau = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{\omega}{360} \qquad E = \pi \cdot R^2$$

Ἂν ξέρωμε τὸ R πόσο εἶναι, εὑρίσκομε εὔκολα τὰ ἄλλα μεγέθη D, Γ καὶ E, ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς π εἶναι γνωστὸς καὶ ἴσος μὲ 3,14.

β) Στὸ τετράγωνο.

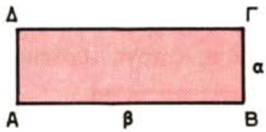


Συμβολίζομε τὴν πλευρὰ AB μὲ τὸ γράμμα α. Εὑρίσκομε τότε:

$$\Gamma = 4 \cdot \alpha \qquad E = \alpha^2$$

γ) Στὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Συμβολίζομε τὶς δύο πλευρὲς μὲ τὸ γράμμα α καὶ τὶς ἄλλες δύο μὲ τὸ γράμμα β. Εὑρίσκομε τότε:

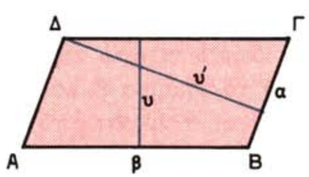


$$\Gamma = (2 \cdot \alpha) + (2 \cdot \beta) \qquad E = \alpha \cdot \beta$$

δ) Στὸ παραλληλόγραμμο.

Συμβολίζομε τὶς δύο παράλληλες πλευρὲς μὲ τὸ γράμμα β καὶ τὸ ἀντίστοιχο ὕψος μὲ τὸ γράμμα υ, ἐνῶ τὶς δύο ἄλλες παράλληλες πλευρὲς μὲ τὸ γράμμα α καὶ τὸ ἀντίστοιχο ὕψος μὲ τὸ γράμμα υ'.

Εὑρίσκομε τότε ὅτι:

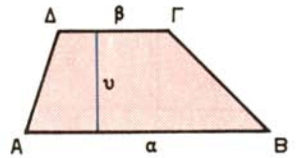


$$\Gamma = (2 \cdot \alpha) + (2 \cdot \beta)$$

$$E = \beta \cdot \upsilon \quad \text{ἢ} \quad E = \alpha \cdot \upsilon'$$

ε) Στὸ τραπέζιο.

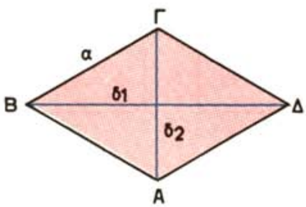
Συμβολίζομε τὶς παράλληλες πλευρὲς μὲ τὰ γράμματα β_1 καὶ β, καὶ τὸ ὕψος μὲ τὸ γράμμα υ, ὁπότε εὑρίσκομε ὅτι:



$$E = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2} \cdot \upsilon$$

στ) Στὸν ρόμβο.

Συμβολίζομε τὶς δύο διαγώνιες μὲ τὰ γράμματα δ_1 (τὴν μεγάλη) καὶ δ_2 (τὴν μικρὴ) καὶ μὲ τὸ γράμμα α τὴν πλευρά, ὁπότε εὑρίσκομε:

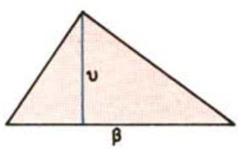


$$\Gamma = 4 \cdot \alpha$$

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

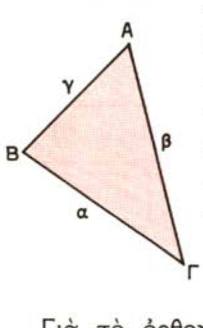
ζ) Στὸ τρίγωνο.

Συμβολίζομε τὴν βάσι του μὲ τὸ γράμμα β καὶ τὸ ὕψος μὲ τὸ γράμμα υ, ὁπότε εὑρίσκομε:



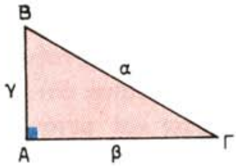
$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

Ἀκόμη μποροῦμε νὰ συμβολίσωμε τὶς τρεῖς πλευρὲς τοῦ τριγώνου μὲ τὰ γράμματα α, β καὶ γ ἔτσι, ὥστε γιὰ τὴν πλευρά, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν γωνία Α, νὰ χρησιμοποιηθῆ τὸ γράμμα α, γιὰ τὴν πλευρά, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν γωνία Β, νὰ χρησιμοποιηθῆ τὸ γράμμα β καὶ γιὰ τὴν τρίτη πλευρά, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν γωνία Γ, τὸ γράμμα γ. Εὑρίσκομε:



$$\Gamma = \alpha + \beta + \gamma$$

Γιὰ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο εἰδικῶς:



$$\boxed{E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}} \quad \text{καί:} \quad \boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$

(Πυθαγόρειο θεώρημα).

η) Στὴν γραμμικὴ ταχύτητα.

Ἐὰν υ ἡ γραμμικὴ ταχύτης σὲ m/min, D ἡ διάμετρος, σὲ m, τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς περιστροφῆς καὶ n οἱ στροφὲς ἀνὰ λεπτό, θὰ ἔχωμε:

$$\boxed{\upsilon = \Gamma \cdot n} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\upsilon = \pi \cdot D \cdot n}$$

Συμπεράσματα.

Ἀπὸ τὸν τρόπο, μὲ τὸν ὁποῖο γράψαμε παραπάνω τοὺς διαφόρους τύπους, μποροῦμε νὰ ποῦμε:

α) Γιὰ νὰ προσθέσωμε ἀριθμούς, ποὺ παριστάνονται μὲ γράμματα, γράφομε τὰ γράμματα, τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο χωρίζοντάς τα μὲ τὸ σύμβολο + (σὺν) τῆς προσθέσεως.

Π.χ. $\alpha + \beta + \gamma$.

Τὸ ἴδιο συμπέρασμα ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν ἀφαίρεσι, ἂν π.χ. ἀπὸ τὸ α θέλωμε νὰ ἀφαιρέσωμε τὸ β: $\alpha - \beta$, ποὺ σημαίνει ὅτι:

β) Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε δύο ἀριθμούς, ποὺ παριστάνονται μὲ γράμματα, χωρίζομε τὰ γράμματα μὲ τὸ σύμβολο — (πλὴν) τῆς ἀφαιρέσεως.

γ) Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀριθμούς, ποὺ παριστάνονται μὲ γράμματα, γράφομε τὰ γράμματα τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, χωρίζοντάς τα μὲ τὸ σύμβολο · (ἐπὶ) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν διαίρεσι.

Π.χ. $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ἤ $\alpha : \beta$.

Ὑπενθύμισι.

Πρέπει νὰ μὴ ξεχνοῦμε ποτέ, ὅτι ὅλες οἱ πράξεις μεταξὺ ἀριθμῶν, ποὺ περιλαμβάνονται μέσα σὲ παρενθέσεις, σημαίνει ὅτι ἔχουν γίνει ἢ τουλάχιστον ὅτι θὰ γίνουν πρῶτα αὐτὲς καὶ μετά, ἀφοῦ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα κάθε μιᾶς χωριστά, θὰ γίνουν οἱ ἄλλες πράξεις, ποὺ σημειώνονται ἔξω ἀπὸ τὶς παρενθέσεις.

Ἐφαρμογές.

α) Ὑπολογίσετε τὸ μῆκος ποὺ ἔχει ἡ λάμα, ποὺ βάζομε γύρω ἀπὸ μιὰ ρόδα ἀκτῖνος $R = 75$ cm (σχ. 9 · 15 α).

Σχ. 9·15 α.

Λύσι :

Ἐφαρμόζομε τὸν τύπο: $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot R$.

Εὑρίσκομε: $\Gamma = 2 \times 3{,}14 \times 75$ cm,

ἢ $\Gamma = \mathbf{471}$ cm ἢ $\Gamma = \mathbf{4{,}71\ m}$.

β) Θέλομε νὰ κατασκευάσωμε ἕνα καπάκι τετράγωνο ἀπὸ λαμαρίνα μὲ πλευρὰ $\alpha = 35$ cm (σχ. 9 · 15 β). Πόσο θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς λαμαρίνας, ποὺ θὰ χρησιμοποιήσωμε, καὶ πόσο θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς λάμας, ποὺ θὰ βάλωμε γύρω-γύρω;

Σχ. 9·15 β.

Λύσι :

Ἐφαρμόζομε τοὺς τύπους:

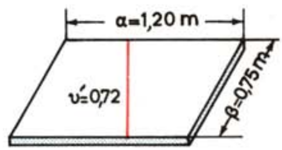
Γιὰ τὸ ἐμβαδόν: $E = \alpha^2$ ἢ $E = 35^2$ cm^2

ἄρα: $E =$ ***1225 cm^2***.

Γιὰ τὴν περίμετρο: $\Gamma = 4 \cdot \alpha$ ἢ $\Gamma = 4 \times 35$ cm

ἄρα: $\Gamma =$ ***140 cm***.

γ) Ἔχομε ἴσα κομμάτια κόντρα πλακὲ σχήματος παραλληλογράμμου μὲ πλευρὲς $\alpha = 1{,}20$ m καὶ $\beta = 75$ cm (σχ. 9·15γ). Τὸ ἀντίστοιχο ὕψος υ' πρὸς τὶς πλευρὲς α ἔχει μῆκος 72 cm. Ζητοῦμε τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ τὴν περίμετρο Γ τοῦ καθενός.



Σχ. 9·15 γ.

Λύσι :

Θὰ χρησιμοποιήσωμε τοὺς παρακάτω τύπους:

Γιὰ τὸ ἐμβαδόν: $E = \boldsymbol{\alpha \cdot \upsilon'}$.

Γιὰ τὴν περίμετρο: $\Gamma = (2 \cdot \alpha) + (2 \cdot \beta)$.

Πρὶν ὅμως τοὺς ἐφαρμόσωμε, μετατρέπομε ὅλα τὰ δοσμένα μεγέθη στὶς ἴδιες μονάδες μετρήσεως· ἔτσι θὰ ἔχωμε:

$\alpha = 1{,}20$ m, $\beta = 0{,}75$ m καὶ $\upsilon' = 0{,}72$ m.

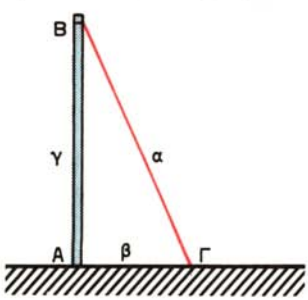
Ἐφαρμόζομε τώρα τοὺς τύπους:

$E = 1{,}20 \times 0{,}72$ m^2 ἢ $E = 0{,}864$ m^2

ἢ μὲ προσέγγισι πρὸς τὰ κάτω: $E =$ ***0,86 m^2*** καὶ

$\Gamma = (2 \times 1{,}20)$ m $+ (2 \times 0{,}75)$ m

ἢ $\Gamma = 2{,}40$ m $+ 1{,}50$ m $\Gamma =$ ***3,90 m***.



Σχ. 9·15 δ.

δ) Στὴν κολώνα τὸ μῆκος ΑΒ εἶναι $\gamma = 10{,}50$ m, ἐνῶ ἡ ἀπόστασι ΑΓ εἶναι $\beta = 5{,}25$ m (σχ. 9·15δ). Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐπιτόνου $B\Gamma = \alpha$;

Λύσι :

Θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο, ποὺ ἐκφράζει τὸ γνωστὸ Πυθαγόρειο θεώρημα γιὰ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Θὰ ἔχωμε:

$$\alpha^2 = 5{,}25^2 + 10{,}50^2$$

ἢ

$$\alpha^2 = 27{,}56 + 110{,}25$$

ἢ

$$\alpha^2 = 137{,}81 \text{ m}^2.$$

Καὶ μὲ τὴν βοήθεια τοῦ πίνακος, ποὺ δίνει τὶς τετραγωνικὲς ρίζες καὶ ἐφαρμόζοντας ὅσα εἴπαμε γιὰ τὸν τρόπο ποὺ εὑρίσκομε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, προκύπτει ὅτι:

$$\alpha \simeq \boldsymbol{11{,}70\ m}.$$

Γενικὴ παρατήρησι.

Οἱ παραπάνω πράξεις, ποὺ κάναμε στὶς ἐφαρμογὲς ἀπὸ α μέχρι δ, μᾶς ἐπέτρεψαν νὰ ὑπολογίζωμε τὴν ***ἀριθμητικὴ τιμὴ*** τοῦ ζητουμένου ***ἀγνώστου*** μεγέθους, ὅταν εἶναι δοσμένες οἱ ***ἀριθμητικὲς τιμὲς*** τῶν ἄλλων γραμμάτων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸν τύπο.

Ὥστε:

Ἀριθμητικὴ τιμὴ σὲ ἕνα τύπο εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ εὑρίσκομε, ἂν ἀντικαταστήσωμε τὰ γράμματα μὲ δοσμένους ἀριθμοὺς καὶ κάνωμε τὶς σημειωμένες πράξεις.

Προσοχή.

Σὲ κάθε τύπο, ἕνα γράμμα ἀντιπροσωπεύει πάντοτε τὸ ***ἄγνωστο*** *μέγεθος, τοῦ ὁποίου ζητοῦμε τὴν* ***ἀριθμητικὴ τιμή***.

9 · 16 *Ἡ μετάδοσι τῆς περιστροφικῆς κινήσεως.*

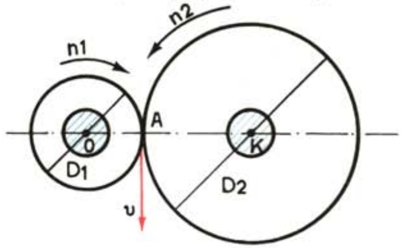
Γιὰ νὰ μεταδώσωμε τὴν περιστροφικὴ κίνησι ἀπὸ ἕνα ἄξονα σὲ ἕνα ἄλλο παράλληλο, ἀκολουθοῦμε τὶς παρακάτω μεθόδους:

α) Μὲ τὴν βοήθεια κυλίνδρων τριβῆς.

Μοντάρομε ἐπάνω σὲ δύο ἄξονες Ο καὶ Κ δύο κυλίνδρους καὶ τοὺς τοποθετοῦμε ἔτσι, ὥστε οἱ κύλινδροι αὐτοὶ νὰ ἐφάπτωνται μὲ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

κάποια πίεσι μεταξύ τους, σὲ ὅλο τους τὸ μῆκος (σχ. 9 · 16 α). Καθὼς περιστρέφεται ὁ ἄξων O, ὁ κύλινδρός του τρίβεται ἐπάνω στὸν κύλινδρο τοῦ ἄξονος K καὶ τὸν παρασύρει σὲ περιστροφή. Στὴν κανονικὴ μετάδοσι τῆς κινήσεως μὲ κυλίνδρους τριβῆς δὲν πρέπει νὰ παρουσιάζεται γλίστρημα τοῦ ἑνὸς κυλίνδρου ἐπάνω στὸν ἄλλο. (Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ γραμμικὴ ταχύτης υ τοῦ σημείου A καὶ στοὺς δύο κυλίνδρους εἶναι ἴδια).



Σχ. 9·16 α.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο τῆς παραγράφου 9 · 15 η θὰ ἔχωμε:

Γιὰ τὸν ἀριστερὸ κύλινδρο: $\upsilon = \pi \cdot D_1 \cdot n_1$ m/min

Γιὰ τὸν δεξιὸ κύλινδρο: $\upsilon = \pi \cdot D_2 \cdot n_2$ m/min.

Ἑπομένως:

$$\pi \cdot D_1 \cdot n_1 = \pi \cdot D_2 \cdot n_2$$

καὶ ἂν διαιρέσωμε μὲ τὸ π (ἁπλοποίησι):

$$D_1 \cdot n_1 = D_2 \cdot n_2,$$

ἀπὸ ὅπου, σύμφωνα μὲ μία ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, εὑρίσκομε:

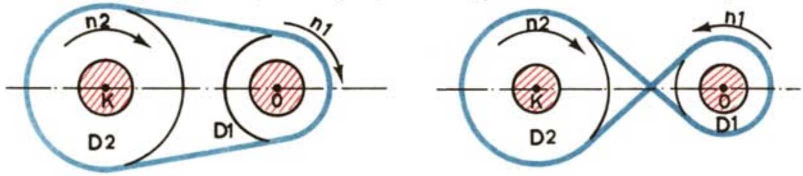
$$\boxed{\frac{D_1}{D_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Δηλαδή:

Οἱ διάμετροι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων (ἀριθμοῦ στροφῶν).

β) Μὲ τὴν βοήθεια τροχαλιῶν.

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωσι οἱ ἄξονες εὑρίσκονται μακριὰ ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ γι' αὐτὸ ἐκτὸς ἀπὸ τὶς τροχαλίες, γιὰ νὰ μεταφέρωμε τὴν κίνησι ἀπὸ τὸν ἕνα ἄξονα O στὸν ἄλλο K, χρησιμοποιοῦμε καὶ ἕνα λουρὶ (τὸν γνωστὸ ἱμάντα) (σχ. 9 · 16 β). Τὸ λουρὶ αὐτὸ τὸ τοποθετοῦμε κατὰ τοὺς δύο τρόπους, ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα 9 · 16 β. Ἂν τὸ λουρὶ δὲν γλιστρᾶ ἐπάνω στὶς δύο τροχαλίες, τότε κάνοντας τὶς ἴδιες σκέψεις, ὅπως καὶ πρίν, καταλήγομε στὸ ἴδιο συμπέρασμα.



Σχ. 9·16 β.

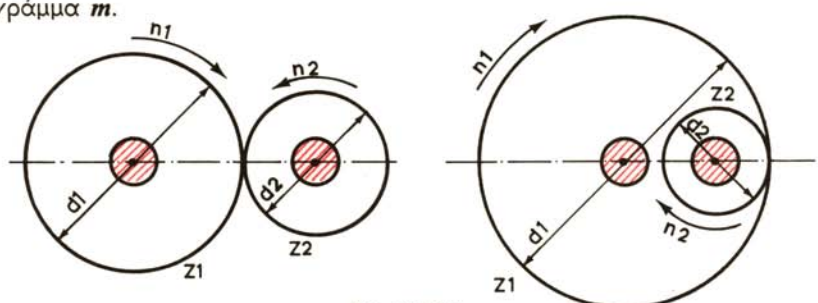
γ) Μὲ τὴν βοήθεια ὀδοντωτῶν τροχῶν (γραναζιῶν).

Ἂς πάρωμε δυὸ ὀδοντωτοὺς τροχούς, ποὺ νὰ μποροῦν νὰ συμπλεχθοῦν μεταξύ τους (σχ. 9 · 16 γ). Ἀπὸ ἄλλο μάθημα μαθαίνομε:

Ἂν d_1 καὶ d_2 οἱ διάμετροι καὶ z_1 καὶ z_2 ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδοντώσεων, γιὰ νὰ μποροῦν νὰ συμπλεχθοῦν αὐτοὶ οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ (γρανάζια), πρέπει:

$$\frac{d_1}{z_1} = \frac{d_2}{z_2}.$$

Τὸν λόγο αὐτὸ τὸν λέμε ***μοντοὺλ*** καὶ τὸν συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα $\boldsymbol{m}$.



Σχ. 9·16 γ.

α) Μετάδοσι μὲ ἐξωτερικὴ τοποθέτησι. β) Μετάδοσι μὲ ἐσωτερικὴ τοποθέτησι.

Ἂν σκεφτοῦμε ὅπως καὶ στὴν πρώτη περίπτωσι μὲ τοὺς κυλίνδρους, καταλήγομε στὸ συμπέρασμα ὅτι:

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἔκφρασι τοῦ μοντοὺλ ἔχομε:

$$\left.\begin{aligned} m = \frac{d_1}{z_1} \quad \text{δηλαδὴ} \quad d_1 = m \cdot z_1 \\ m = \frac{d_2}{z_2} \quad \text{δηλαδὴ} \quad d_2 = m \cdot z_2 \end{aligned}\right\}$$

Ἀπὸ ἐδῶ εὑρίσκομε, διαιρώντας:

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}} \qquad (2)$$

Καὶ ἔτσι ἀπὸ τὶς δύο σχέσεις (1) καὶ (2) καταλήγομε:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Δηλαδή:

Στοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδοντώσεων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων.

Ἐφαρμογὴ 1η.

Στὸ σύμπλεγμα τροχαλιῶν τοῦ σχήματος 9 · 16 δ γιὰ τὴν μετάδοσι τῆς κινήσεως ἀπὸ τὸν ἄξονα **Α** στὸν ἄξονα **Β** νὰ εὕρετε τὸν λόγο τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων.

Λύσι :

Ἐφαρμόζοντας διαδοχικὰ τὰ ὅσα εἴπαμε στὴν δευτέρα περίπτωσι, παραπάνω, ἔχομε:

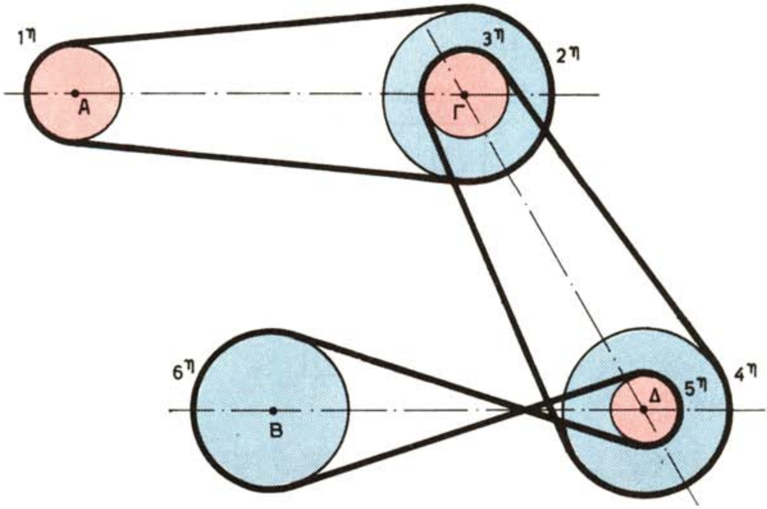
— Μετάδοσι κινήσεως ἀπὸ 1η πρὸς 2α τροχαλία: $\frac{n_A}{n_\Gamma} = \frac{D_2}{D_1}$.

— Ἡ 2α καὶ ἡ 3η εἶναι στὸν ἴδιο ἄξονα, ἄρα περιστρέφονται μὲ τὴν ἴδια περιστροφικὴ ταχύτητα n_Γ.

— Μετάδοσι κινήσεως ἀπὸ 3η πρὸς 4η τροχαλία: $\frac{n_\Gamma}{n_\Delta} = \frac{D_4}{D_3}$.

— Ἡ 4η καὶ ἡ 5η εἶναι στὸν ἴδιο ἄξονα, ἄρα περιστρέφονται μὲ περιστροφικὴ ταχύτητα $n_Δ$.

— Μετάδοσι κινήσεως ἀπὸ 5η πρὸς 6η τροχαλία: $\frac{n_Δ}{n_B} = \frac{D_6}{D_5}$.



Σχ. 9·16 δ.

Τὶς παραπάνω ἰσότητες τὶς πολλαπλασιάζομε μεταξύ τους (τὰ ἀριστερὰ μέλη ὅλα μαζὶ καὶ τὰ δεξιὰ τὸ ἴδιο):

Εὑρίσκομε: $$\frac{n_A}{n_Γ} \cdot \frac{n_Γ}{n_Δ} \cdot \frac{n_Δ}{n_B} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{D_4}{D_3} \cdot \frac{D_6}{D_5}.$$

Ἁπλοποιώντας: $$\frac{n_A}{n_B} = \frac{D_2 \cdot D_4 \cdot D_6}{D_1 \cdot D_3 \cdot D_5}.$$

Δηλαδή:

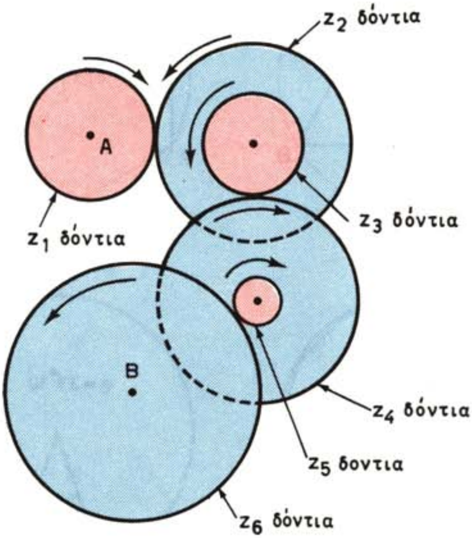
Ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων κινούσης πρὸς τὴν κινουμένη τροχαλία εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν λόγο τοῦ γινομένου τῶν διαμέτρων τῶν κινουμένων πρὸς τὸ γινόμενο τῶν διαμέτρων τῶν κινουσῶν τροχαλιῶν.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ἐφαρμογὴ 2α.

Κάνετε τὸ ἴδιο γιὰ γρανάζια, ποὺ εἶναι σὲ ἐμπλοκή, ὅπως στὸ σχῆμα 9 · 16 ε. Πρέπει τελικὰ νὰ εὕρετε:

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}.$$



Σχ. 9·16 ε.

9 · 17 Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 9 · 1 ἕως 9 · 3.

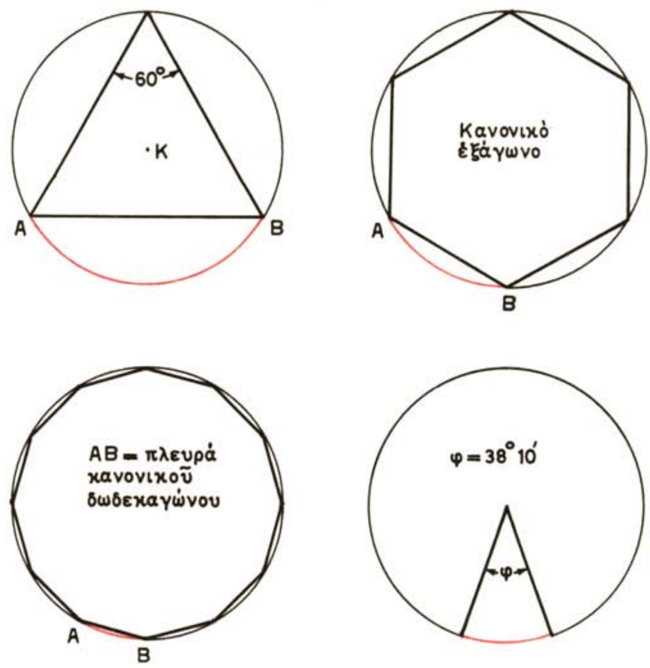
1. Γιὰ τὴν διαλογὴ 5000 κοχλιῶν στὸ ἀντίστοιχο τμῆμα ἑνὸς ἐργοστασίου ἀπασχολοῦνται 5 τεχνῖτες. Ἂν ἡ παραγωγὴ μειωθῆ κατὰ 1000 κομμάτια ἡμερησίως, πόσοι τεχνῖτες θὰ κάνουν τὴν διαλογή; *(4 τεχν.)*

2. Ἐπεξεργαζόμενοι μὲ σφυροκόπησι ἕνα σιδερένιο κομμάτι βάρους 6,8 kg, κατασκευάζομε ἄξονα μήκους 34 cm. Πόσο θὰ ζυγίζη τὸ κομμάτι, ἀπὸ τὸ ὁποῖο κάναμε ἄξονα τῆς ἴδιας διαμέτρου ἀλλὰ μήκους 48 cm; *(9,6 kg)*

3. Γιὰ νὰ τρυπήσωμε λαμαρίνα πάχους 2 mm χρησιμοποιοῦμε τρυπάνι, ποὺ κάνει 1800 στροφ./min, ἐνῶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος εἶναι 40 s. Ζητοῦμε νὰ μάθωμε:

α) Πόσα min θὰ κάνωμε μὲ τὸ ἴδιο τρυπάνι, γιὰ νὰ τρυπήσωμε λαμαρίνα πάχους 1,5 mm.

β) Πόσες στροφὲς θὰ πρέπει νὰ παίρνη τὸ τρυπάνι γιὰ νὰ τρυπήσωμε τὴν λαμαρίνα τῶν 2 mm σὲ χρόνο 20 s. *(0,5 min, 3600 στρ./min)*



Σχ. 9·17 α.

4. Φορτηγὸ αὐτοκίνητο φορτώνεται ἀπὸ 8 ἐργάτες σὲ 30 min. Πόσα πρῶτα λεπτὰ θὰ χρειασθοῦν οἱ 6 ἐργάτες, γιὰ νὰ φορτώσουν τὸ ἴδιο αὐτοκίνητο;

(40 min)

5. Μὲ ἠλεκτροδράπανο τῶν 3000 στρ/min μποροῦμε νὰ ἀνοίξωμε ἐπάνω σὲ φύλλο λαμαρίνας 40 τρύπες τὸ λεπτό. Ἂν οἱ στροφὲς τοῦ τρυπανιοῦ γίνουν 3600 τὸ λεπτό, ζητοῦμε πόσες τρύπες τὸ λεπτὸ μποροῦμε νὰ ἀνοίξωμε στὴν λαμαρίνα.

(48 τρύπ./min)

6. Γιὰ νὰ τυλίξωμε σὲ καρούλι ἕνα ψιλὸ σύρμα χρειαζόμαστε 25 min, ὅταν τὸ καρούλι κάνη 600 στρ/min. Μὲ πόσες στροφὲς πρέπει νὰ στρέφεται τὸ καρούλι, ὥστε ἡ ἴδια δουλειὰ νὰ γίνη σὲ ἕνα τέταρτο τῆς ὥρας;

(1000 στρ./min)

7. Φύλλο λαμαρίνας ἔχει διαστάσεις 3,00 m × 1,80 m. Τὸ κόβομε σὲ λωρίδες πλάτους 45 cm. Πόσο θὰ εἶναι τὸ μῆκος ὅλων τῶν κομματιῶν μαζί; *(12 m)*

8. Γιὰ νὰ παραχθῆ μία κουλούρα τσέρκι πλάτους 30 cm καὶ μήκους 20 m χρειάζονται 4 φύλλα λαμαρίνας πλάτους 1,20 m. Ποιό εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κάθε φύλλου λαμαρίνας; *(1,25 m)*

9. Ὑπολογίσετε τὰ παρακάτω τόξα περιφερείας ἀκτίνος R = 25 cm.

36°	45°	75°	90°
35°12′	60° 30′	135° 20′	270° 45′

(15,7, 19,625, 32,7, 39,25, 15,35, 26,38, 59,02, 118,08 cm)

10. Ὑπολογίσετε τὰ μήκη τῶν τόξων, ποὺ φαίνονται στὸ σχῆμα 9·17 α, ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ κάθε κύκλου εἶναι 90 mm.

(α: 188,4, β: 94,2, γ: 47,1, δ: 59,92 mm)

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 9·4 καὶ 9·5.

1. Σὲ ἕνα μηχανουργεῖο οἱ τορναδόροι εἶναι τὸ 15% τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν τεχνιτῶν. Ὅλοι οἱ τεχνῖτες εἶναι 20. Πόσοι εἶναι οἱ τορναδόροι;

(3 τορν.)

2. Τὸ ἀκαθάριστο ἡμερομίσθιο ἑνὸς τεχνίτη εἶναι 380 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς οἱ 20 δραχμὲς εἶναι ἔξοδα κινήσεως. Ἂν οἱ κρατήσεις γιὰ τὸ ὑπόλοιπο εἶναι 20%, πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ ἡμερομίσθιο; *(288 δρχ.)*

3. Ἡ τιμὴ τοῦ σιδήρου ἀπὸ 8 δραχμὲς τὸ kg αὐξήθηκε σὲ 8,8 δραχμές. Ποιό εἶναι τὸ ποσοστὸ αὐξήσεως; *(10%)*

4. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε ἐμπόρευμα ἀντὶ 540 000 δραχμῶν μὲ κέρδος 90 000. Ποιό εἶναι τὸ ποσοστὸ τοῦ κέρδους του; Ποιά ἡ ἀρχικὴ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος; *(20%, 450 000 δρχ.)*

5. Σὲ τετραγωνικὴ πλάκα πλευρᾶς 10 cm ἀνοίγομε τρύπα διαμέτρου 25 mm. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐλαττώσαμε τὴν ἐπιφάνεια τῆς πλάκας; *(4,9%)*

6. Τὸ βάρος σιδηροκατασκευῆς εἶναι 45,25 kg καὶ ἔχει κατασκευασθῆ μὲ ἔλασμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖο εἴχαμε φύρα 20%. Ἂν ἡ ἀξία τοῦ ἐλάσματος εἶναι 12 δραχμὲς τὸ kg, πόση εἶναι ἡ ἀξία τῆς σιδηροκατασκευῆς, γιὰ τὴν ὁποία πρέπει νὰ ὑπολογίσετε καὶ ἐργατικὰ 13,50 δραχμὲς κατὰ ἐπεξεργασμένο kg; *(1262,50 δρχ.)*

7. Κατὰ τὴν ἐπεξεργασία γιὰ τὴν κατασκευὴ ἑνὸς ἐξαρτήματος χάνομε τὰ 8,8% τοῦ ἀρχικοῦ ὑλικοῦ. Τὸ τελικὸ κομμάτι ἕτοιμο καὶ συσκευασμένο ἔχει μικτὸ βάρος 48 kg. Ἂν ἀπὸ τὸ βάρος αὐτὸ τὸ 5% εἶναι τὸ βάρος τοῦ πακέτου, πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀρχικοῦ ὑλικοῦ; *(50 kg)*

8. Χρησιμοποιώντας 2 ἐργάτες περισσοτέρους παράγομε 1,5% κοχλίες παραπάνω κάθε μέρα. Ἂν χρησιμοποιήσωμε 3 ἐργάτες περισσοτέρους ἐπὶ μία ἐργάσιμη ἑβδομάδα, δηλαδὴ 6 ἡμέρες, πόσα kg κοχλίες παραπάνω θὰ παράγωμε, ἂν ἡ ἡμερησία παραγωγὴ σὲ βάρος ἦταν 1800 kg; *(243 kg)*

9. Ὁμὰς ἐργατῶν ξεφορτώνει ἕνα πλοῖο σὲ 8 ἡμέρες. Πόσο ἐπὶ τοῖς % πρέπει νὰ αὐξηθῆ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν γιὰ νὰ τελειώση τὸ ξεφόρτωμα σὲ 6 ἡμέρες; Πόσο ἐπὶ τοῖς % μειώνεται ὁ χρόνος ἐκφορτώσεως; *(33,3%, 25%)*

10. Τὸ κόστος μιᾶς κατασκευῆς εἶναι 4500 δραχμὲς καὶ μοιράζεται ὡς ἑξῆς: Τὸ 25% ἀντιπροσωπεύει ἀξία ὑλικῶν, τὸ 35% εἶναι τὰ ἐργατικὰ καὶ τὸ 40% εἶναι γενικὰ ἔξοδα. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ παραπάνω ποσά.
(1125 δρχ., 1575 δρχ., 1800 δρχ.)

11. Γιὰ τὴν ἀγορὰ ἐργαλείων πρὸς ἐξοπλισμὸ ἑνὸς μικροῦ συνεργείου χρειάζονται συνολικῶς 225 000 δραχμές. Ἂν τὸ ποσὸν πληρωθῆ τοῖς μετρητοῖς, θὰ γίνη ἔκπτωσι 15%. Ἂν πληρωθῆ μὲ εὐκολίες, τότε πρέπει μὲ τὴν παραλαβὴ νὰ πληρωθῆ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας καὶ τὸ ὑπόλοιπο σὲ 5 ἴσες μηνιαῖες δόσεις μὲ ἐπιβάρυνσι 5% τὴν κάθε μία. Τί παραπάνω θὰ πληρωθῆ ἀπὸ τὸν πρῶτο τρόπο μὲ τὸν δεύτερο τρόπο πληρωμῆς; *(41 250 δρχ.)*

12. Ξυλουργὸς γιὰ νὰ κατασκευάση μία ντουλάπα χρειάστηκε 25 m² νοβοπὰν τῶν 275 δραχμῶν τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, μικροϋλικὰ ἀξίας συνολικῶς 870 δραχμῶν καὶ 45 ὧρες ἐργασίας πρὸς 70 δραχμὲς τὴν ὥρα. Ἂν τὰ γενικὰ ἔξοδα εἶναι 15% ἐπὶ τῆς συνολικῆς ἀξίας τῶν ὑλικῶν καὶ τὸ κέρδος του 20% τοῦ συνολικοῦ κόστους κατασκευῆς, ποιά πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ πωλήσεως τῆς ντουλάπας; *(14 468 δρχ.)*

13. Τὸ ὑλικὸ μιᾶς λαμαρίνας ἀπὸ ντουραλουμίνιο περιέχει 4% χαλκό, 0,5% μαγγάνιο, 0,6% πυρίτιο καὶ 0,8% μαγνήσιο. Πόσο εἶναι τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας, ἂν ξέρωμε ὅτι ὁ χαλκὸς ποὺ περιέχει ζυγίζει 4,5 kg καὶ πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα μέταλλα;
(λαμαρ. 112,5 kg, μαγγ. 0,56 kg, πυριτ. 0,67 kg, μαγνήσιο 0,89 kg)

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 9·6 ἕως 9·10.

1. Ἀφοῦ ἐξετάσετε πρῶτα τὰ μεγέθη, ποὺ δίνονται στὸ παρακάτω πρόβλημα, πῆτε ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα. Μετὰ λύσετε τὰ προβλήματα.

α) Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ 5 h διανύει ἀπόστασι 350 km. Πόση ὥρα θὰ χρειασθῆ γιὰ νὰ διανύση ἀπόστασι 490 km;

Συγκρινόμενα μεγέθη. Χρόνος - Ἀπόστασι. *(7 h)*

β) Αὐτοκίνητο τρέχει μὲ ταχύτητα 70 km/h καὶ κάνει 5 h γιὰ νὰ διανύση ἀπόστασι AB. Πόση ὥρα θὰ κάνη γιὰ νὰ διανύση τὴν ἴδια ἀπόστασι μὲ ταχύτητα 50 km/h;

Συγκρινόμενα μεγέθη. Ταχύτης - Χρόνος. *(7 h)* γ) Αὐτοκίνητο ποὺ τρέχει μὲ ταχύτητα 70 km/h διανύει ἀπόστασι 350 km. Μὲ ποιά ταχύτητα πρέπει νὰ τρέξη γιὰ νὰ διανύση στὸν ἴδιο χρόνο ἀπόστασι 600 km;

Συγκρινόμενα μεγέθη. Ταχύτης - Ἀπόστασι. *(120 km/h)*

δ) Τρεῖς ἐργάτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σὲ 10 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἴδιο ἔργο σὲ 5 ἡμέρες;

Συγκρινόμενα μεγέθη. Ἐργάτες - Χρόνος. *(6 ἐργάτες)*

ε) Ὁμὰς ἐργατῶν τελειώνει τὰ 5/8 ἔργου σὲ 15 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσουν τὰ 7/8;

Συγκρινόμενα μεγέθη. Ἔργο - Χρόνος. *(21 ἡμερ.)*

στ) Ἕνα κομμάτι λαμαρίνα 2,5 m × 1,5 m ζυγίζει 30 kg. Πόσο θὰ ζυγίζη ἕνα ἄλλο κομμάτι ἀπὸ τὴν ἴδια λαμαρίνα μὲ διαστάσεις 3,0 m × 1,2 m;

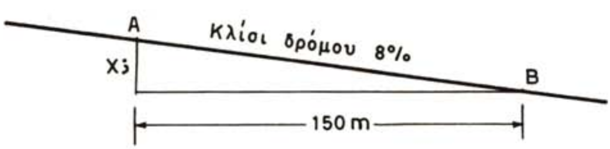
Συγκρινόμενα μεγέθη. Ἐμβαδὸν - Βάρος. *(28,8 kg)*

2. Δώσετε τὴν γραφικὴ ἀπεικόνισι στὶς παρακάτω μεταβολὲς μεγεθῶν:

α) Ἀπόστασι σὲ km	: 140 — 210 — 280 — 420 — 560 — 700
Χρόνος σὲ h	: 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 10.
β) Ταχύτης σὲ km/h	: 50 — 70 — 100 — 120
Χρόνος σὲ h	: 21 — 15 — 10,5 — 8,75.
γ) Ἐμβαδὸν λαμαρίνας σὲ m²	: 2 — 4 — 6 — 9 — 12
Βάρος λαμαρίνας σὲ kg	: 17 — 34 — 51 — 76,5 — 102.
δ) Ἐργάτες	: 3 — 5 — 7 — 9
Ἔργο	: $\frac{2}{5} - \frac{2}{3} - \frac{14}{15} - \frac{18}{15}$.

Γραφικά, ποῦ θὰ σταματήση ἡ κάθε γραφικὴ ἀπεικόνισι;

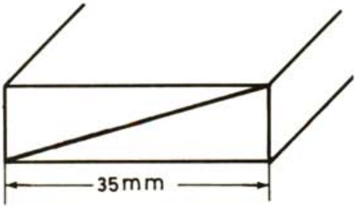
3. Σὲ δρόμο ἡ κλίσι εἶναι 8%. Ἂν διανύσωμε ἀπόστασι ΑΒ τέτοια, ὥστε ὁριζοντίως νὰ ἔχωμε μετακινηθῆ κατὰ 150 m, πόσο ἀνεβήκαμε σὲ ὑψόμετρο (σχ. 9·17β); *(12 m)*



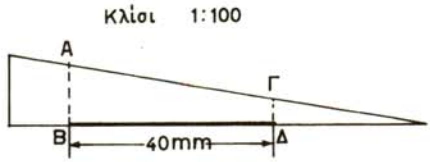
Σχ. 9·17β.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

4. Μὲ τί πάχος θὰ παραγγείλετε τὴν ὀρθογωνικὴ χαλύβδινη ράβδο τοῦ σχήματος 9 · 17 γ, ὥστε φέροντας τὴν διαγώνιο νὰ ἔχη κλίσι 10%, ὅταν τὸ μῆκος τῆς μεγάλης πλευρᾶς εἶναι 35 mm; *(3,5 mm)*



Σχ. 9·17 γ.



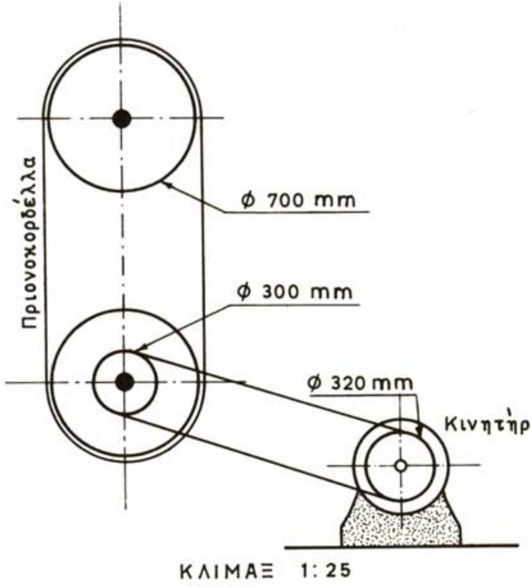
Σχ. 9·17 δ.

5. Σφήνα ἔχει κλίσι 1 : 100 (δηλαδὴ 1%). Ἂν τὴν κόψωμε σὲ δύο θέσεις, ποὺ νὰ ἀπέχουν μεταξύ τους 40 mm, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 9 · 17 δ, νὰ εὑρεθῆ πόσο εἶναι ἡ μικροτέρα πλευρὰ ΓΔ, ἂν ἡ μεγαλυτέρα ΑΒ εἶναι 18,8 mm.

(18,4 mm)

6. Τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο μιᾶς φρέζας χρειάζεται 3 s γιὰ νὰ κάνη μία ἁπλῆ διαδρομὴ μήκους 450 mm. Ποιά εἶναι ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐργαλείου σὲ m/min;

(9 m/min)



ΚΛΙΜΑΞ 1: 25

Σχ. 9·17 ε.

7. Κυλινδρικὸ κομμάτι ø 30 mm (δηλαδὴ μὲ διάμετρο 30 mm) περιστρέφεται

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ὁμοιόμορφα ἐπάνω στὸν τόρνο, ὅπου εἶναι ἐφαρμοσμένο γιὰ κατεργασία, μὲ περιστροφικὴ ταχύτητα 3 στρ./s. Ὑπολογίσετε τὴν γραμμικὴ ταχύτητα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κομματιοῦ (δηλαδὴ τὴν ταχύτητα κοπῆς τοῦ ἐργαλείου τοῦ τόρνου).

(282,6 mm/s = 16,956 m/min ≃ 17 m/min)

8. Πριονοκορδέλλα παίρνει κίνησι ἀπὸ κινητῆρα ποὺ κάνει 300 στρ./min (σχ. 9 · 17 ε). Ἡ ἀκτὶς τῆς τροχαλίας τοῦ κινητῆρος εἶναι 160 mm καὶ τοῦ κάτω τροχοῦ τῆς πριονοκορδέλλας 150 mm. Ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ, ἐπάνω στὸν ὁποῖο ἐφαρμόζει ἡ κορδέλλα, εἶναι 700 mm. Ποιά εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης της;

(11,72 m/s)

9. Βάρος ἀνυψώνεται ἀπὸ βαροῦλκο μὲ ταχύτητα ἀνυψώσεως 3,0 m/s. Ἡ διάμετρος τοῦ βαρούλκου εἶναι 300 mm. Ποιά εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ βαρούλκου; *(≃ 191 στρ./min)*

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 9 · 12 ἕως 9 · 15.

1. Ἐκτελέσετε τὶς πράξεις:

$$\alpha+\beta \qquad \alpha-\beta \qquad \gamma:\delta \qquad \gamma\cdot\varepsilon \qquad \alpha-\delta.$$

2. Γράψετε τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς μὲ πρόσημα:

$$5 \qquad 3{,}75 \qquad 6{,}97 \qquad \frac{3}{5} \qquad \alpha$$

$$\frac{\gamma}{\delta} \qquad (\alpha\cdot\beta) \qquad (\alpha+\beta) \qquad (\beta-\alpha).$$

3. Προσδιορίσετε τὰ πρόσημα ὅλων τῶν παρακάτω ἀριθμῶν:

$$5 \qquad 13-2{,}4 \qquad 27{,}50+6{,}32 \qquad \frac{3}{5}-\frac{6}{15}$$

$$47+6+9-7 \qquad \Big[(\alpha-\beta)+\gamma\Big] \qquad \Big[\alpha+\gamma-\beta-\delta\Big]$$

4. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

$$(\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha) - (\beta+\beta+\beta)$$

$$(\alpha+\alpha)-(\beta+\beta+\beta)$$

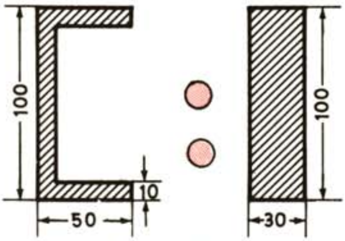
$$(\alpha+\alpha+\alpha+\alpha) - (\alpha+\alpha)$$

$$(25\alpha+12\alpha+7\alpha)-6\alpha$$

$$(32\alpha+6\alpha)-(27\alpha+3\alpha).$$

5. Κόβομε σιδερένια ράβδο σὲ τρία κομμάτια, ποὺ καθένα τους ἔχει ἀντιστοίχως μῆκος 5,00 m, 9,70 m καὶ 1,30 m.

Ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ μήκους κάθε κομματιοῦ πρὸς τὸ ἀρχικὸ μῆκος τῆς σιδερένιας ράβδου;



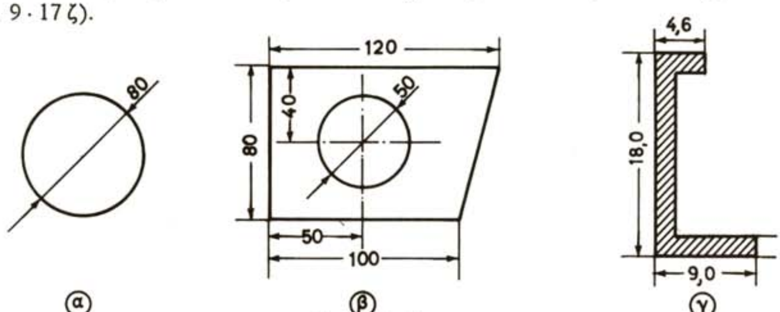
Σχ. 9·17 στ.

6. Νὰ εὕρετε τὸν λόγο τῆς διατομῆς (τοῦ ἐμβαδοῦ) τῶν δύο μορφοελασμάτων (προφίλ) σιδήρου τοῦ ἐμπορίου (σχ. 9 · 17 στ).

(3 : 5)

7. Ἔχομε δύο φύλλα κόντρα πλακὲ τοῦ ἴδιου πάχους. Τὸ ἕνα ἔχει σχῆμα τετραγώνου, πλευρᾶς 28 cm, ἐνῶ τὸ ἄλλο ἔχει σχῆμα κυκλικὸ διαμέτρου 30 cm. Ποιό ἔχει μεγαλύτερο ἐμβαδόν; *(Τὸ τετράγωνο)*.

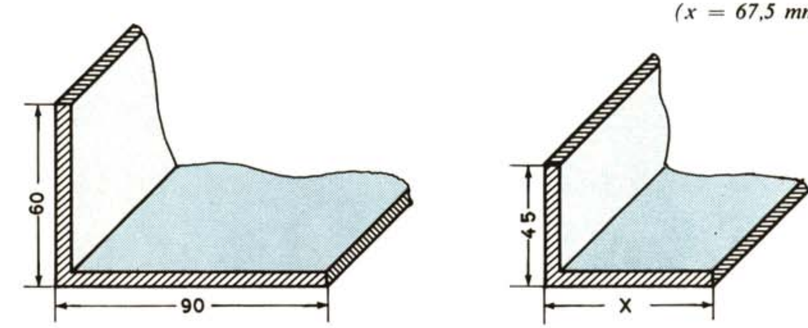
8. Νὰ εὕρετε μὲ ποιά κλίμακα εἶναι σχεδιασμένα τὰ παρακάτω κομμάτια (σχ. 9 · 17 ζ).



Σχ. 9·17 ζ.
Οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζουν χιλιοστόμετρα (mm).

9. Ξέροντας ὅτι οἱ δύο σιδηρογωνιὲς ἔχουν μήκη πλευρῶν, ποὺ εἶναι ἀνάλογα, νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς, ποὺ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα x (σχ. 9 · 17 η).

(x = 67,5 mm)



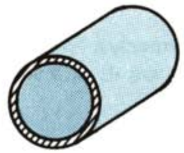
Σχ. 9·17 η.
Διαστάσεις σὲ mm.

10. Ὀδοντωτὸς τροχὸς διαμέτρου 45 mm παρασύρεται σὲ περιστροφὴ ἀπὸ ἕνα ἄλλον διαμέτρου d. Ἂν ὁ λόγος τῶν διαμέτρων εἶναι 5 : 2, πόση εἶναι ἡ διάμετρος d; *(d = 18 mm)*

11. Χάλκινη ράβδος ΑΒ χωρίζεται σὲ δύο κομμάτια, ποὺ ἔχουν λόγο μεταξύ τους $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{2}{3}$. Νὰ εὕρετε τί λόγο ἔχει κάθε κομμάτι πρὸς τὸ ὁλόκληρο.

Ἂν τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι 37,5 m, πόσο μῆκος θὰ ἔχῃ κάθε κομμάτι (σχ. 9·17 θ); *(Διὰ ΑΓ 2 : 5 — 15 m, ΒΓ 3 : 5 — 22,5 m)*

Σχ. 9·17 θ.



Σχ. 9·17 ι.

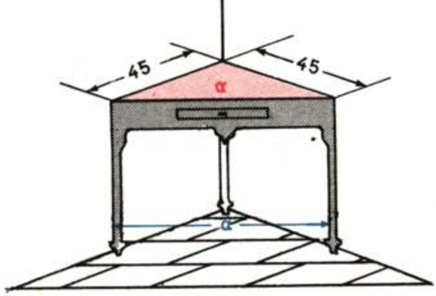
12. Ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τοῦ σωλῆνος εἶναι 25 mm καὶ ἡ ἐσωτερικὴ 22 mm. Ὑπολογίσετε τὴν διατομὴ τοῦ διαγραμμισμένου μέρους (σχ. 9·17 ι).

($\simeq$ 110,7 mm²)

13. Δύο ὀδοντωτοὶ τροχοὶ διαμέτρων d = 35 mm καὶ D = 75 mm περιστρέφονται εὑρισκόμενοι σὲ ἐμπλοκή. Ἂν ὁ μικρὸς τροχὸς κάνῃ 150 στροφὲς τὸ λεπτό, πόσες στροφὲς θὰ κάνῃ ὁ μεγάλος; *(75 στρ/min)*

14. Νὰ εὕρετε πόσο εἶναι ἡ πλευρὰ α ἑνὸς ξυλίνου τραπεζιοῦ τηλεφώνου, σχήματος ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου πλευρᾶς 45 cm (σχ. 9·17 ια).

($\simeq$ 63,5 cm)



Σχ. 9·17 ια.

15. Λύσετε τὶς ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

α) $27 \cdot x = 40{,}5$ ε) $\frac{x}{6{,}5} = \frac{3}{4}$ *(α : 1,5, ε : 4,875)*

β) $\frac{x}{1{,}75} = 5{,}10$ στ) $\frac{4}{x} = 0{,}75$ $\left(\beta : 8{,}925,\ \sigma\tau : 5\frac{1}{3}\right)$

γ) $(\alpha + \beta) \cdot x = \gamma$ ζ) $\alpha \cdot x = (\beta + \gamma)$

δ) $5 \cdot x = \alpha.$ η) $\frac{\alpha}{x} = \delta.$

16. Λαμαρίνα ὀρθογωνίου σχήματος ἔχει τὴν μία πλευρὰ $\alpha = 1{,}50$ m. Ἂν τὸ ἐμβαδόν της $E = 4{,}50$ m², πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς;

(3,0 m)

17. Ἕνα τραπεζάκι ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τραπεζίου μὲ παράλληλες πλευρὲς μήκους $\alpha = 25$ cm καὶ $\beta = 18$ cm. Ἂν τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσο μὲ 4,30 dm², πόσο ἀπέχουν οἱ δύο παράλληλες πλευρές; Ὑπολογίσετε τὶς ἄλλες δύο μὴ παράλληλες πλευρές. *(20 cm, 21,2 cm)*

18. Ἡ ἠλεκτρικὴ ἀντίστασι, ποὺ παρουσιάζουν οἱ ἀγωγοί, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρὸς τὴν διατομή τους. Νὰ εὕρετε τὴν ἀντίστασι, ποὺ θὰ παρουσιάση ἕνας ἀγωγὸς χαλκοῦ διαμέτρου 4,52 mm, ὅταν ἕνας ἄλλος ἀγωγὸς χαλκοῦ τοῦ ἴδιου μήκους καὶ διαμέτρου 2,26 mm ἔχη ἀντίστασι 18 Ohm (ὤμ).

(4,5 Ohm)

19. Δείξετε τὴν ἀλήθεια τοῦ τύπου: $\upsilon = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60}$, ἂν ἡ ταχύτης υ μετρῆται σὲ m/s, ἡ διάμετρος D σὲ m καὶ οἱ στροφὲς n ἀναφέρωνται ἀνὰ λεπτό.

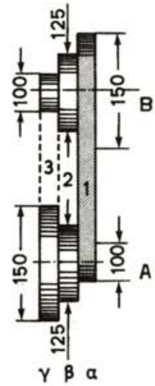
20. Δείξετε μὲ τὴν βοήθεια τοῦ παραπάνω τύπου ὅτι οἱ περιστροφικὲς ταχύτητες δύο τροχαλιῶν, ποὺ ἡ μία κινεῖ τὴν ἄλλη μὲ τὴν βοήθεια ἱμάντος, εἶναι μεγέθη ἀντίστροφα ὡς πρὸς τὶς διαμέτρους. Σὰν ἐφαρμογή, ὑπολογίσετε τὶς στροφὲς τοῦ ἄξονος **Β**, ὅταν ξέρετε ὅτι ὁ ἄξων **Α** περιστρέφεται μὲ 200 στρ/min καὶ ὁ ἱμὰς μπαίνει διαδοχικὰ στὶς θέσεις (α), (β) καὶ (γ) (σχ. 9 · 17 ιβ).

(α : ~ 133,33 β : 200 γ : 300 στρ/min)

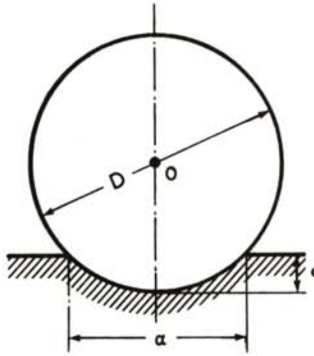
21. Ξέρομε ὅτι οἱ διαστάσεις α καὶ β τοῦ αὐλακιοῦ, ποὺ ἀνοίγει μία φρέζα μὲ διάμετρο D ἐπάνω σὲ ἕνα σιδερένιο κομμάτι, ἐπαληθεύουν τὴν σχέσι:

$$D = \frac{\alpha^2}{4 \cdot \beta} + \beta.$$

Νὰ εὕρετε τὴν διάμετρο D, ἂν ξέρετε ὅτι $\alpha = 2{,}4$ cm καὶ $\beta = 0{,}3$ cm (σχ. 9 · 17 ιγ). *(5,1 cm)*



Σχ. 9·17 ιβ.
Διαστάσεις σὲ mm.

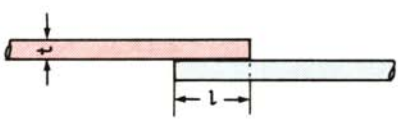


Σχ. 9·17 ιγ.

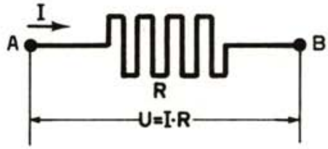
22. Γιὰ νὰ συγκολλήσωμε δύο λαμαρίνες πάχους t (σχ. 9 · 17 ιδ), τὶς βάζομε τὴν μία ἐπάνω στὴν ἄλλη κατὰ μία λουρίδα πλάτους $l = 10 \cdot \sqrt{t}$ mm. Νὰ εὕρετε τὸ l γιὰ τὰ παρακάτω πάχη λαμαρίνας:

0,75 mm   1,00 mm   1,25 mm   1,50 mm

(8,66 mm, 10,00 mm, 11,18 mm, 12,25 mm)



Σχ. 9·17 ιδ.



Σχ. 9·17 ιε.

23. Ὅπως ξέρομε, ἡ πτῶσι τάσεως U μεταξὺ τῶν ἄκρων A καὶ B μιᾶς ἀντιστάσεως R, ὅταν ἀπὸ αὐτὴν περνᾶ ρεῦμα ἐντάσεως I, δίνεται ἀπὸ τὴν σχέσι (σχ. 9 · 17 ιε):

U (σὲ βὸλτ) = I (σὲ Ἀμπὲρ) · R (σὲ Ὤμ).

α) Νὰ εὕρετε τὴν πτῶσι τάσεως U, ὅταν ἡ ἀντίστασι εἶναι 250 Ὤμ καὶ ἡ ἔντασι 60 μιλλιαμπὲρ (χιλιοστὰ τοῦ ἀμπέρ). *(15 Βὸλτ)*

β) Τὴν ἀντίστασι R, ὅταν ἡ πτῶσι τάσεως εἶναι 260 βόλτ καὶ ἡ ἔντασι 200 μιλλιαμπέρ. *(1300 Ὤμ)*

γ) Τὴν ἔντασι I, ὅταν ἡ ἀντίστασι εἶναι 11 Ὤμ καὶ ἀνήκη σὲ μία ἠλεκτρικὴ σόμπα, ποὺ παίρνει τάσι 220 βόλτ. *(20 Ἀμπὲρ)*

24. Ξέρομε ἀπὸ τὴν Ἠλεκτροτεχνία, πὼς ἡ ἰσχὺς N καὶ ἡ κατανάλωσι E δίνονται ἀπὸ τοὺς παρακάτω τύπους:

Ἰσχύς: N (σὲ βάττ) = U (σὲ βόλτ) · I (σὲ ἀμπέρ)

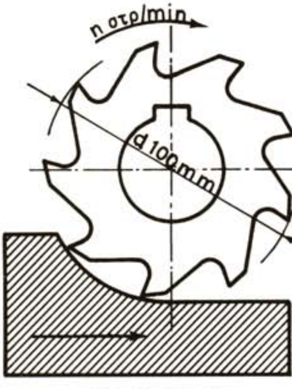
Ἐνέργεια E (σὲ κιλοβαττῶρες) = N′ (σὲ κιλοβάττ) · t (σὲ ὧρες),

ὅπου: U ἡ τάσι, I ἡ ἔντασι τοῦ ρεύματος, N καὶ N′ ἡ ἰσχὺς καὶ t ὁ χρόνος.

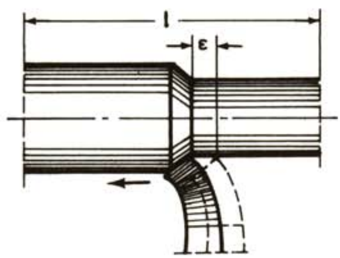
Ὑπολογίσετε πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμε, ἂν ἕνας ἠλεκτρικὸς θερμοσίφων τῶν 2,5 κιλοβάττ λειτουργήσῃ συνέχεια ἐπὶ 3 ὧρες στὸ δίκτυο τῶν 220 βόλτ. Ποιά θὰ εἶναι ἡ ἔντασι τοῦ ρεύματος; (Τιμὴ κιλοβαττώρας 2 δραχμές).

(15 δρχ. ≃ 11,37 A)

25) Ὑπολογίσετε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα, ποὺ πρέπει νὰ δώσωμε σὲ φρέζα (σχ. 9 · 17 ιστ) μὲ διάμετρο d = 100 mm γιὰ νὰ ἐπιτύχωμε ταχύτητα κοπῆς υ = 25 m/min. *(79,62 ≃ 80 στρ./min)*



Σχ. 9·17 ιστ.



Σχ. 9·17 ιζ.

26. Πόσος χρόνος t χρειάζεται γιὰ νὰ πάρωμε στὸν τόρνο, ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλινδρικοῦ κομματιοῦ πάσου μήκους l = 225 mm, ὅταν τὸ τσὸκ τοῦ τόρνου κάνῃ n = 300 στρ./min καὶ σὲ κάθε στροφὴ τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο προχωρῇ κατὰ ἕνα μῆκος ε = 0,15 mm (σχ. 9 · 17 ιζ). Μπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε τὸν τύπο: $t = \dfrac{l}{\varepsilon \cdot n}$ ποὺ ἐφαρμόζομε γιὰ τὴν λύσι; *(5 min)*

27. Δράπανο στρέφεται μὲ 600 στρ./min. Ποιά εἶναι ἡ πιὸ μεγάλη διάμετρος τρύπας, ποὺ μπορεῖτε νὰ ἀνοίξετε, ἂν ξέρετε πὼς ἡ μεγαλυτέρα περιφερειακὴ ταχύτης τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου δὲν πρέπει νὰ ξεπερνᾷ τὰ 32 m/min;

(16,9 mm)

28. Ποιά ἀκτῖνα ἔχει ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ τόξο τ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ γωνία ἐπίκεντρη 60°, ἔχει μῆκος 157 cm; *(150 cm)*

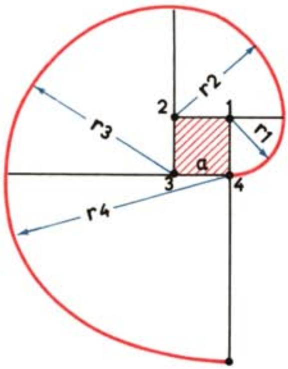
29. Ποιά ἀκτῖνα ἔχει ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ τόξο τ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἐγγεγραμμένη γωνία 168°, ἔχει μῆκος 250 cm ; *(≃ 85,3 cm)*

30. Ποιά εἶναι ἡ γωνία (α = ἐπίκεντρη, β = ἐγγεγραμμένη), ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σὲ τόξο μήκους 12,56 cm, ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου R = 18 cm ;

(40°, 20°)

31. Ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τόξου τῆς ἕλικος τοῦ σχήματος 9·17 ιη τῶν τεσσάρων κέντρων, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἔχη μῆκος α = 10 mm.

(157 mm)



$a = r_1$

Κλῖμαξ 2,5 : 1

Σχ. 9·17 ιη.

Ἀπὸ τὴν παράγραφο 9·16.

1. Δύο κύλινδροι τριβῆς ἔχουν διαμέτρους d_1 = 180 mm καὶ d_2 = 270 mm. Ἂν ὁ δεύτερος στρέφεται μὲ n_2 = 80 στροφὲς τὸ λεπτό, πόσες εἶναι οἱ στροφὲς τοῦ πρώτου; *(120 στρ./min)*

2. Ἡ κινητηρία τροχαλία D_1 στρέφεται μὲ n_1 = 150 στρ./min καὶ κινεῖ μία ἄλλη, ποὺ ἔχει διάμετρο D_2 = 80 mm καὶ περιστρέφεται μὲ n_2 = 450 στρ./min Πόση εἶναι ἡ διάμετρος D_1; *(240 mm)*

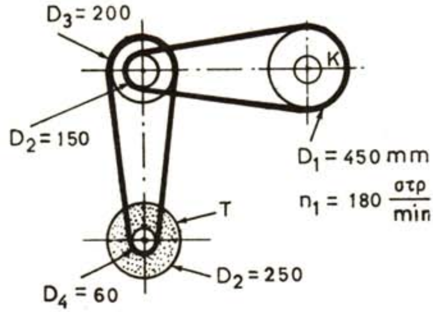
3. Ἠλεκτροκινητὴρ περιστρέφεται μὲ 1400 στρ./min καὶ κινεῖ μὲ τὴν βοήθεια λουριοῦ ἕνα ἄξονα, κάνοντάς τον νὰ στρέφεται μὲ 1540 στροφὲς τὸ λεπτό. Ἂν ἡ διάμετρος τῆς τροχαλίας, ποὺ εἶναι μονταρισμένη στὸν ἄξονα τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος, ἔχη διάμετρο 220 mm, πόση εἶναι ἡ διάμετρος τῆς τροχαλίας τοῦ ἄξονος; *(200 mm)*

4. Μὲ τὸ σύστημα τροχαλιῶν τοῦ σχήματος 9·17 ιθ δίνομε κίνησι ἀπὸ τὸν ἄξονα **K** στὸν τροχὸ **T** σὲ ἕνα μηχανουργεῖο. Ὑπολογίσετε τὰ παρακάτω:

α) Τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ τροχοῦ T.

β) Τὴν περιφερειακὴ ταχύτητα στὸν τροχό.

(α: 1800 στρ./min, β: 1413 m/min)



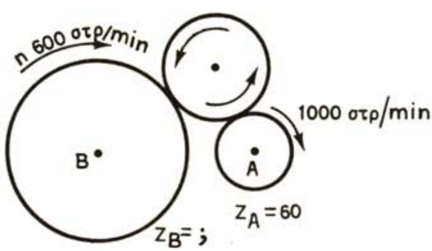
Σχ. 9·17 ιθ.

5. Δύο ὀδοντωτοὶ τροχοὶ εὑρίσκονται σὲ ἐμπλοκή. Ὁ ἕνας ἔχει $z_1 = 60$ καὶ ὁ ἄλλος $z_2 = 35$ δόντια. Ἂν ὁ δεύτερος κάνη $n_2 = 1440$ στρ./min, πόσες κάνει ὁ πρῶτος; *(840 στρ./min)*

6. Στὸ σχῆμα τῆς ἐφαρμογῆς 2 νὰ εὕρετε τὴν περιστροφικὴ ταχύτητα τοῦ ἄξονος **B**, ὅταν ξέρετε ὅτι ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ ἄξονος **A** εἶναι 600 στρ./min καὶ ὅτι ἔχομε: $z_1 = 50$ δόντια, $z_2 = 75$, $z_3 = 40$, $z_4 = 80$, $z_5 = 20$ καὶ $z_6 = 100$. *($n_B = 40$ στρ./min)*

7. Γιὰ νὰ μεταδώσωμε τὴν κίνησι ἀπὸ τὸν ἄξονα **A** στὸν ἄξονα **B** τοποθετοῦμε ἕνα ἐνδιάμεσο γρανάζι, τὸ ὁποῖο τὸ λέμε καὶ «τρελλό» (9 · 17 κ). Ἂν ὁ ἄξων **A** στρέφεται μὲ 1000 στρ./min καὶ τὸ γρανάζι του ἔχη 60 δόντια, νὰ εὕρετε τὰ δόντια ποὺ θὰ ἔχη τὸ γρανάζι **B**, ἂν ξέρετε ὅτι στρέφεται μὲ 600 στρ./min.

($z_B = 100$)

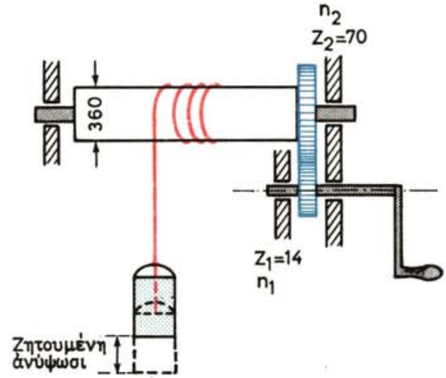


Σχ. 9·17 κ.

8. Δείξετε γενικὰ στὴν παραπάνω περίπτωσι ὅτι ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων τῶν ἀκραίων γραναζιῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸνἀριθμὸ τῶν ὀδοντώσεών τους. (Ὅπως εὔκολα μπορεῖ νὰ δῆ κανείς, τὸ «τρελλὸ» γρανάζι δὲν κάνει τίποτε ἄλλο ἀπὸ τὸ νὰ ἀντιστρέφη τὴν φορὰ περιστροφῆς τοῦ ἄξονος **B**).

9. Χειροκίνητο βαροῦλκο ἔχει τύμπανο μὲ διάμετρο 360 mm καὶ δύο γρανάζια τῶν 70 καὶ 14 δοντιῶν (σχ. 9·17 κα). Ἡ μανιβέλλα εἶναι μονταρισμένη στὸν ἄξονα τοῦ γραναζιοῦ μὲ τὰ 14 δόντια. Ζητοῦμε τὴν ἀνύψωσι τοῦ φορτίου τοῦ βαρούλκου σὲ μία στροφὴ τῆς μανιβέλλας.

(≃ 226 mm)



Σχ. 9·17 κα.

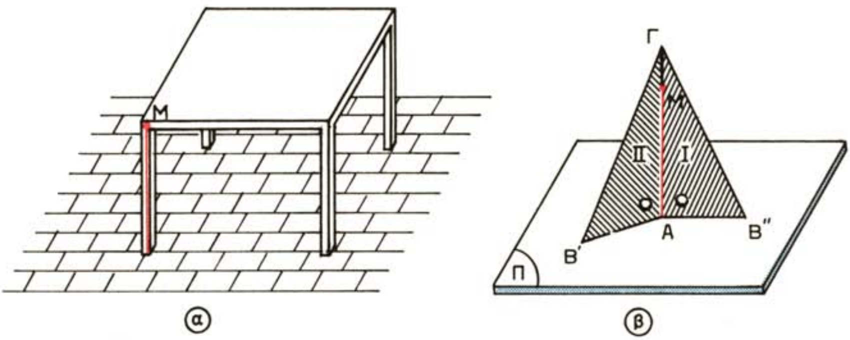
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

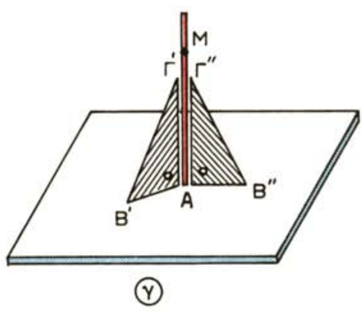
10 · 1 Ἀπόστασι σημείου ἀπὸ ἐπίπεδο.

Πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασι τοῦ σημείου Μ τοῦ τραπεζιοῦ (σχ. 10 · 1 α), ἀπὸ τὸ δάπεδο.



Λύσι :



Σχ. 10·1 α.

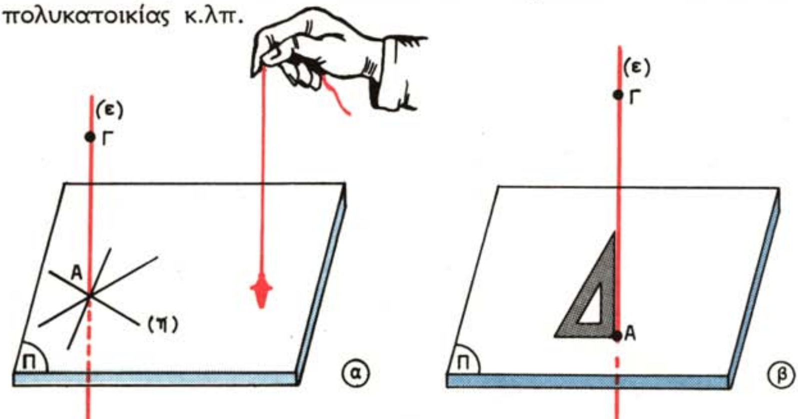
Ὅπως βλέπομε, πρόκειται γιὰ ἕνα πρόβλημα στὸν ***χῶρο***. Ζητοῦμε νὰ εὕρωμε τὴν ἀπόστασι ἑνὸς σημείου Μ ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδο Π.

Παίρνομε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα Ι καὶ ΙΙ καὶ τὰ τοποθετοῦμε κατὰ τρόπο, ὥστε οἱ κάθετες πλευρὲς ΑΒ΄ καὶ ΑΒ΄΄ νὰ εὑρεθοῦν ἐπάνω στὸ ἐπίπεδο, καὶ οἱ ἄλλες δύο κάθετες πλευρὲς ΑΓ΄ καὶ ΑΓ΄΄ νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ Μ καὶ νὰ εἶναι ἑνωμένες σὲ μία, τὴν ΑΓ. Τότε λέμε πὼς ἡ εὐθεία ΑΓ εἶναι ***κάθετος*** στὸ ἐπίπεδο Π, τὸ δὲ μῆκος ΜΑ εἶναι ἡ (ζητουμένη) ***ἀπόστασι*** τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο Π. Τὸ σημεῖο Α ὀνομάζεται ***ἴχνος*** τῆς εὐθείας ΓΑ στὸ ἐπίπεδο Π.

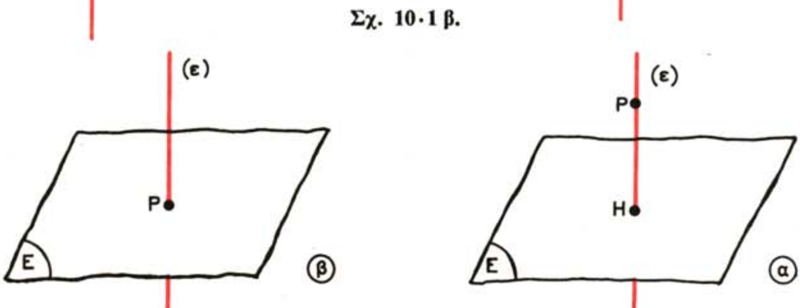
Εὔκολα ἐλέγχομε μὲ τὸ γνωστό μας ὀρθογώνιο τρίγωνο ὅτι σὲ κάθε εὐθεία η τοῦ ἐπιπέδου Π, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α, ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος [σχ. 10 · 1 β (β)]. Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε πὼς μία εὐθεία ε εἶναι κάθετος σὲ ἕνα ἐπίπεδο Π, ἀρκεῖ νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι εἶναι κάθετος σὲ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴχνος της.

Ἂν ἡ εὐθεία ε εἶναι τὸ νῆμα τῆς στάθμης (σχ. 10 · 1 γ), τότε τὸ ἐπίπεδο Ε λέμε ὅτι εἶναι ***ὁριζόντιο***. Κάθε εὐθεία κάθετος σὲ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο ὀνομάζεται ***κατακόρυφος***. Τέτοιες κατακόρυφες εἶναι οἱ κολῶνες τῆς Δ.Ε.Η., οἱ κολῶνες ποὺ στηρίζουν τὸ σκελετὸ μιᾶς πολυκατοικίας κ.λπ.



Σχ. 10·1 β.



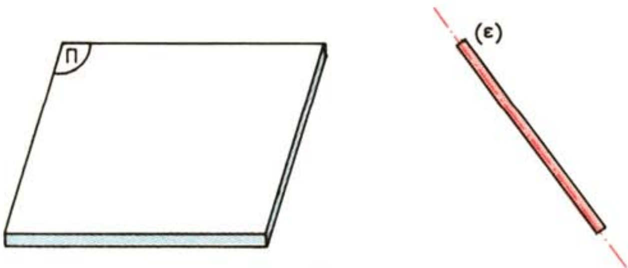
Σχ. 10·1 γ.

Ἡ εὐθεία ε ὑψώνεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Ρ κάθετος στὸ ἐπίπεδο Ε. α) Τὸ σημεῖο Ρ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε. β) Τὸ σημεῖο Ρ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Ε.

10 · 2 Θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου στὸν χῶρο.

Πρόβλημα.

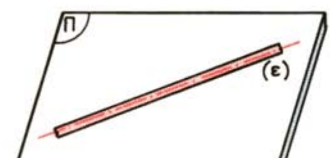
Ἔχομε ἕνα ἐπίπεδο φύλλο λαμαρίνας καὶ μία λάμα εὐθύγραμμη (σχ. 10 · 2 α). Νὰ εὕρετε ποιές θέσεις μπορεῖ νὰ πάρη ἡ λάμα ἐν σχέσει μὲ τὴν λαμαρίνα.



Σχ. 10·2 α.

Λύσι :

Οὐσιαστικὰ μὲ τὴν βοήθεια τῶν δύο παραπάνω σιδηροτεμαχίων θὰ λύσωμε τὸ γεωμετρικὸ πρόβλημα: ***Θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδο* Π *στὸν χῶρο.***

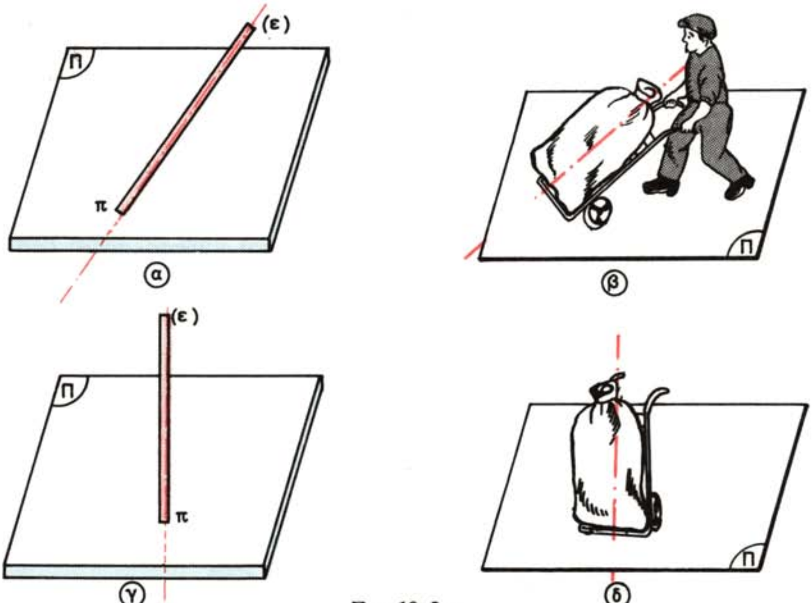


Σχ. 10·2 β.

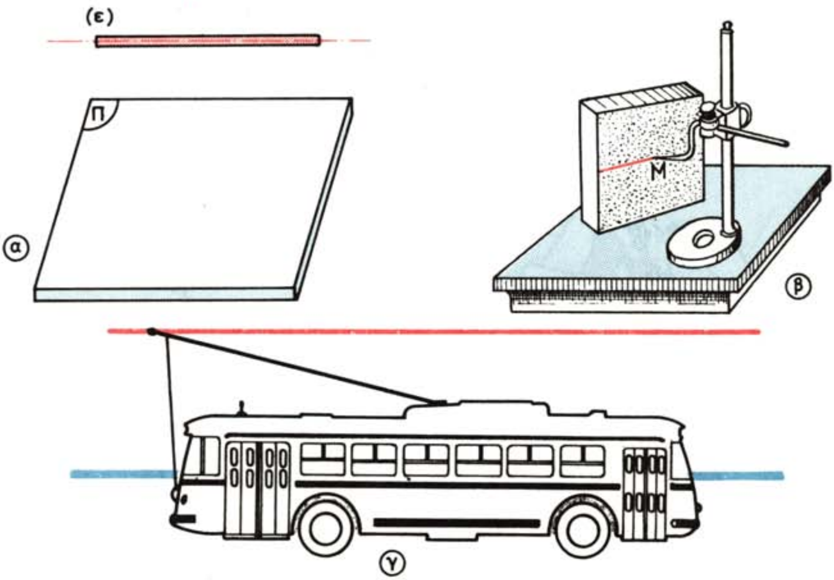
α) Ὁλόκληρη ἡ λάμα μπορεῖ νὰ τοποθετηθῆ ἐπάνω στὴν λαμαρίνα, ποὺ σημαίνει ὅτι ***ἡ εὐθεία*** ε ***κεῖται ἐπάνω στὸ ἐπίπεδο*** Π (σχ. 10 · 2 β).

β) Ἡ λάμα νὰ ἀκουμπᾶ ἐπάνω στὴν λαμαρίνα Π μὲ τὴν μία της ἄκρη. Τότε λέμε ὅτι ***ἡ εὐθεία*** ε ***κόβει τὸ ἐπίπεδο*** Π ***σὲ ἕνα σημεῖο*** π (σχ. 10 · 2 γ). Καί, ὅπως ξέρομε, ἡ ε ἢ θὰ εἶναι κάθετος στὸ ἐπίπεδο Π [σχ. 10 · 2 γ (γ)] ἢ ὄχι [σχ. 10 · 2 γ (α)]. Ἂν δὲν εἶναι κάθετος, τότε λέμε ὅτι εἶναι ***πλαγία.***

γ) Ἡ λάμα νὰ μὴ συναντᾶ καθόλου τὴν λαμαρίνα, ἔστω καὶ ἂν χρειασθῆ νὰ ἐπεκταθοῦν ἀπεριόριστα καὶ ἡ λάμα καὶ ἡ λαμαρίνα. Τότε λέμε ὅτι ***ἡ εὐθεία*** ε ***εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδο*** Π (σχ. 10 · 2 δ).



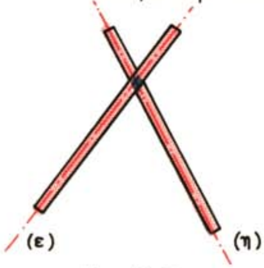
Σχ. 10·2 γ.



Σχ. 10·2 δ.

10 · 3 Θέσεις δύο εὐθειῶν στὸν χῶρο.

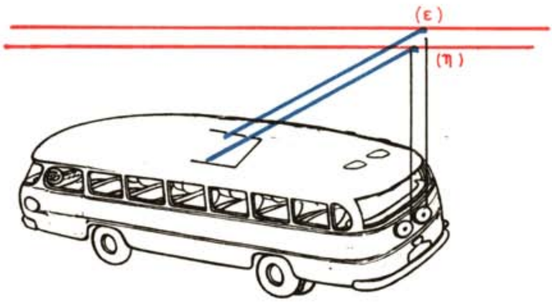
Κάνομε τὴν ἴδια ἐξέτασι, ὅπως καὶ στὴν προηγουμένη παράγραφο, μὲ δύο εὐθύγραμμα κομμάτια λάμας.



Σχ. 10·3 α.

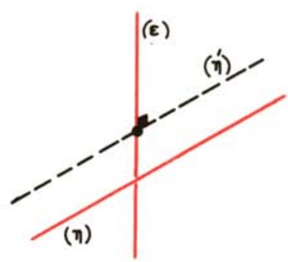
α) Ἑνώνομε τὶς δύο λάμες, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 10 · 3 α. Τότε λέμε ὅτι ***οἱ δύο εὐθεῖες*** ε καὶ η ***τέμνονται***. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωσι οἱ δύο εὐθεῖες ε καὶ η εὑρίσκονται ἐπάνω στὸ ἴδιο ἐπίπεδο.

β) Οἱ δύο λάμες δὲν συναντῶνται, ἔστω καὶ ἂν τὶς φαντασθοῦμε νὰ ἐπεκτείνωνται ἀπεριόριστα καὶ ἀπὸ τὶς δύο μεριές. Καὶ ἂν εὑρίσκωνται ἐπάνω στὴν ἴδια ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, τὶς λέμε ***παράλληλες*** (σχ. 10 · 3 β), ἂν ὄχι τὶς λέμε ***ἀσύμβατες*** (σχ. 10 · 3 γ).



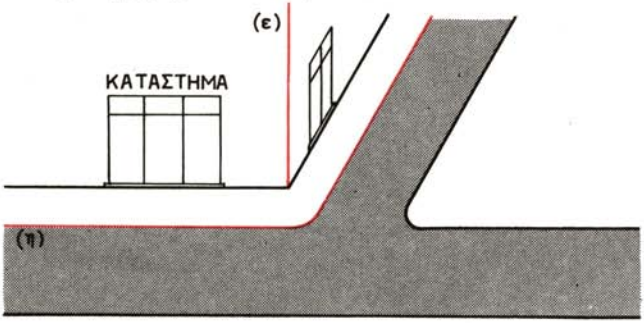
Σχ. 10·3 β.
Παράλληλες εὐθεῖες.

Σχ. 10·3 γ.
Ἀσύμβατες εὐθεῖες.

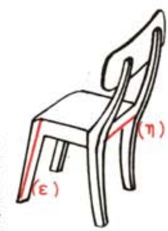


Σχ. 10·3 δ.

Ἂν ἡ εὐθεία ε εἶναι ἀσύμβατη πρὸς τὴν η, εἶναι δὲ κάθετος στὴν η΄ (σχ. 10·3 δ), ποὺ φέρομε ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς ε παράλληλα πρὸς τὴν η, τότε λέμε ὅτι οἱ εὐθεῖες ε καὶ η εἶναι ***ὀρθογώνιες***. Τέτοιες εὐθεῖες εἶναι π.χ. ἡ γωνία ε ἑνὸς τοίχου καὶ τὸ ρεῖθρο η τοῦ πεζοδρομίου (σχ. 10·3 ε), τὸ πόδι μιᾶς καρέκλας καὶ ἡ μία πλευρὰ τοῦ καθίσματος (σχ. 10·3 στ) κ.λπ.



Σχ. 10·3 ε.

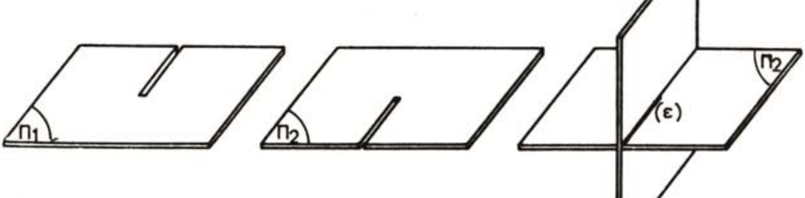


Σχ. 10·3 στ.

10·4 Θέσεις δύο ἐπιπέδων.

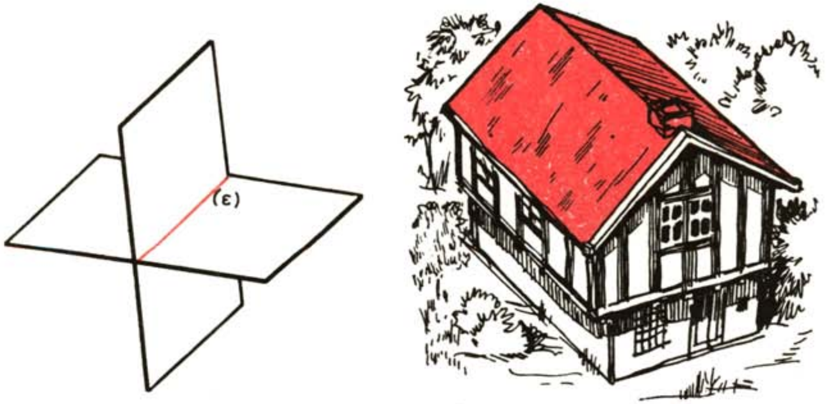
Ἂς·δοῦμε τώρα ποιές θέσεις μποροῦν νὰ πάρουν στὸν χῶρο δύο ἐπίπεδα κομμάτια λαμαρίνας.

Ἐξετάζομε δηλαδὴ τὸ γεωμετρικὸ πρόβλημα: ***Θέσεις δύο ἐπιπέδων στὸν χῶρο***.



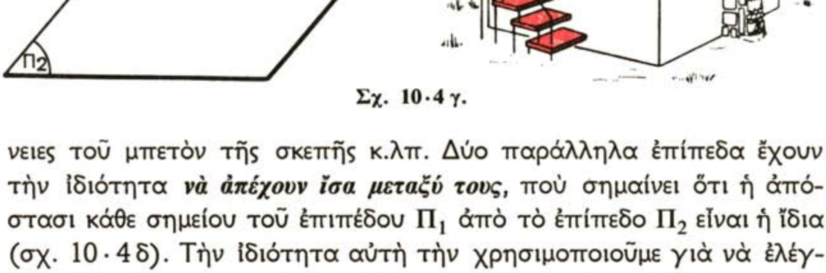
Σχ. 10·4 α.

α) Παίρνομε τὰ δύο ἐπίπεδα λαμαρινένια φύλλα Π_1 καὶ Π_2 καὶ τὰ βάζομε σὲ θέσι τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10·4 α. Τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα λέμε τότε ὅτι ***τέμνονται***, δηλαδὴ κόβονται σὲ μία εὐθεία ε, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐπάνω καὶ στὰ δύο ἐπίπεδα, δηλαδὴ εἶναι κοινή. Τέτοιες τομὲς ἐπιπέδων φαίνονται καὶ στὸ σχῆμα 10 · 4 β.



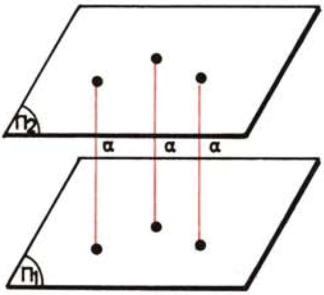
Σχ. 10·4 β.

β) Μία ἄλλη θέσι, ποὺ μποροῦν νὰ πάρουν τὰ δύο αὐτὰ λαμαρινένια φύλλα εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποία, ὅσο καὶ νὰ τὰ φαντασθοῦμε ὅτι ἐπεκτείνονται, δὲν συναντῶνται ποτέ. Τότε λέμε πὼς εἶναι ***παράλληλα***. Τέτοια θέσι ἔχουν τὰ σκαλοπάτια τοῦ σπιτιοῦ τοῦ σχήματος 10 · 4 γ, οἱ ἀπέναντι τοῖχοι, οἱ ἐπάνω καὶ οἱ κάτω ἐπιφά-

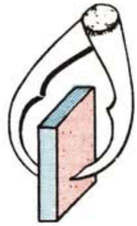


Σχ. 10·4 γ.

νειες τοῦ μπετὸν τῆς σκεπῆς κ.λπ. Δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἔχουν τὴν ἰδιότητα ***νὰ ἀπέχουν ἴσα μεταξύ τους***, ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ ἀπόστασι κάθε σημείου τοῦ ἐπιπέδου Π_1 ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο Π_2 εἶναι ἡ ἴδια (σχ. 10 · 4 δ). Τὴν ἰδιότητα αὐτὴ τὴν χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ ἐλέγξωμε ἂν τὸ πάχος π.χ. ἑνὸς φύλλου λαμαρίνας εἶναι τὸ ἴδιο παντοῦ. Αὐτὴ τὴν δουλειὰ τὴν κάνομε μὲ τὸ ***κομπάσο*** (σχ. 10 · 4 ε).



Σχ. 10·4 δ.



Σχ. 10·4 ε.
Ἔλεγχος τῆς παραλληλίας δύο ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν μὲ τὸ κομπάσο.

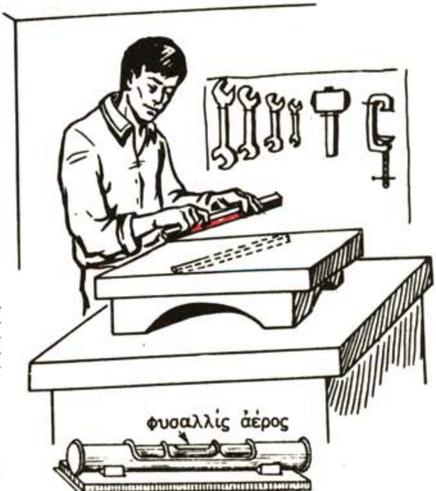
10 · 5 Τὸ νῆμα τῆς στάθμης. Τὸ ἀλφάδι.

Ὅπως εἴπαμε στὴν ἀρχὴ τοῦ κεφαλαίου, ὅταν τὸ νῆμα τῆς στάθμης εἶναι κάθετο σὲ μία ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, τότε ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέμε ὅτι εἶναι ***ὁριζοντία*** (σχ. 10 · 5 α). Τέτοιες ὁριζόντιες ἐπιφάνειες βλέπομε πάρα πολλὲς γύρω μας, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης, τοῦ ποτηριοῦ μὲ νερό, τοῦ πατώματος τοῦ σπιτιοῦ κ.λπ. (σχ. 10 · 5 β).

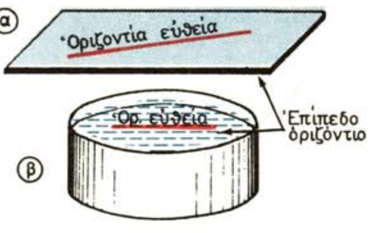
Σχ. 10·5 α.

Σχ. 10·5 β.

Τὸν ἔλεγχο τῆς ***ὁριζοντιότητος*** μιᾶς ἐπιφανείας τὸν κάνομε μὲ τὸ γνωστὸ ***ἀλφάδι*** (σχ. 10 · 5 γ).



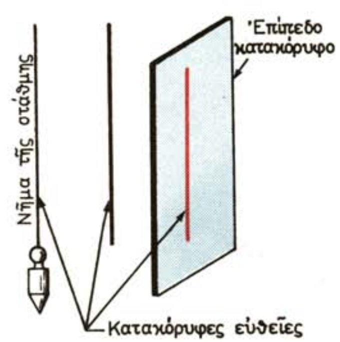
Σχ. 10·5 γ.



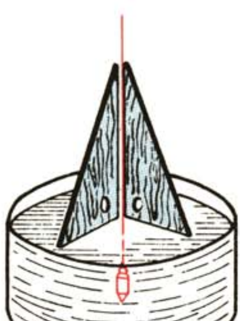
Σχ. 10·5 δ.

Κάθε εὐθεία γραμμή, ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω σὲ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο, τὴν λέμε ὁριζοντία (σχ. 10 · 5 δ).

Κάθε ἐπίπεδο, ποὺ περιέχει μία κατακόρυφη εὐθεία, τὸ λέμε κατακόρυφο (σχ. 10 · 5 ε).



Σχ. 10·5 ε.



Σχ. 10·5 στ.

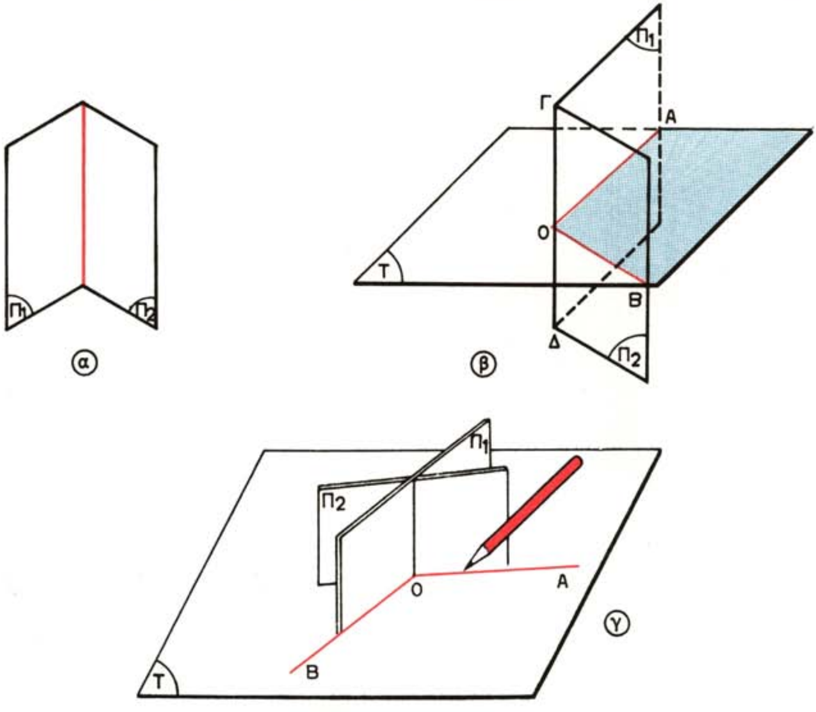
Κατακόρυφα ἐπίπεδα εἶναι οἱ τοῖχοι τῶν σπιτιῶν κ.λπ.

Συμπέρασμα.

Δύο κατακόρυφα ἐπίπεδα κόβονται σὲ μία εὐθεία, ποὺ εἶναι πάντοτε κατακόρυφος (σχ. 10 · 5 στ)

10 · 6 Ἡ δίεδρη γωνία.

α) Παίρνομε δύο ἐπίπεδα φύλλα λαμαρίνας Π_1 καὶ Π_2 καὶ τὰ κολλᾶμε μεταξύ τους, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10 · 6 α (α). Αὐτὸ ποὺ



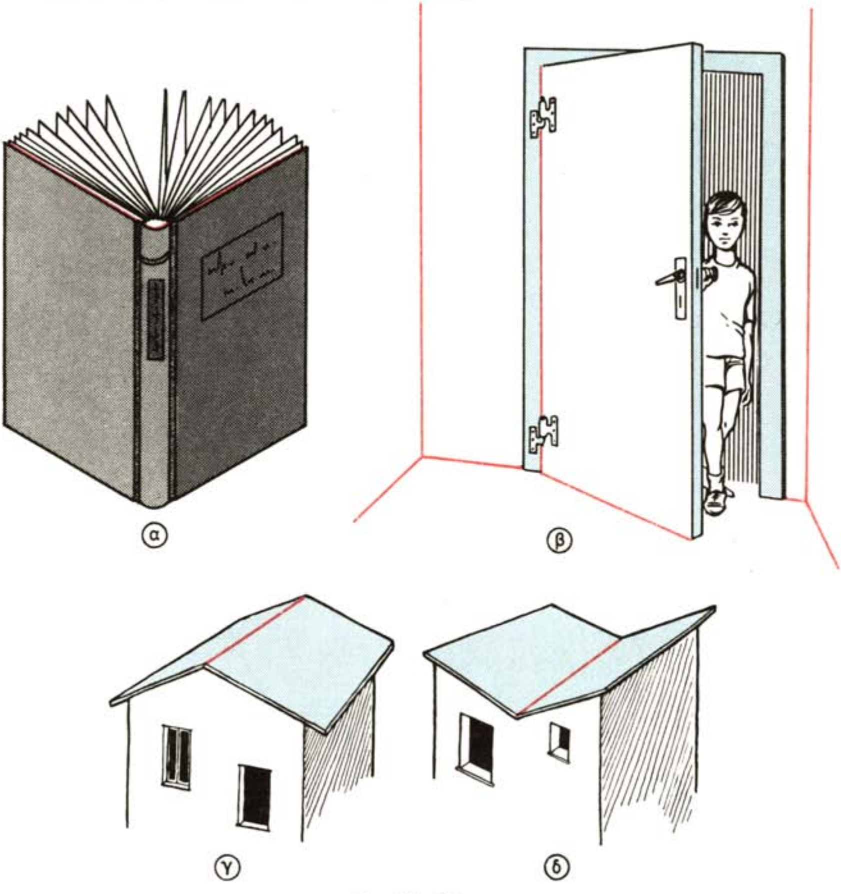
Σχ. 10·6 α.

σχηματίζεται τὸ ὀνομάζομε ***δίεδρη γωνία***. Τὰ δύο ἐπίπεδα Π_1 καὶ Π_2 τὰ λέμε ***ἕδρες***, ἐνῶ τὴν κοινὴ εὐθεία, τομὴ τῶν δύο ἑδρῶν, τὴν λέμε ***ἀκμή***. Τέτοιες δίεδρες γωνίες συναντοῦμε κάθε μέρα ὁλόγυρά μας· π.χ.

ἕνα ἀνοικτὸ βιβλίο, μία πόρτα ἀνοικτὴ μὲ τὸν διπλανό της τοῖχο, ἡ γωνία δύο τοίχων κ.λπ. εἶναι δίεδρες γωνίες (σχ. 10 · 6 β).

β) Ἐπάνω στὶς δύο ἕδρες $Π_1$ καὶ $Π_2$ τῆς δίεδρης γωνίας, ποὺ σχηματίσαμε μὲ τὶς λαμαρίνες, κολλᾶμε ἕνα ἐπίπεδο κομμάτι λαμαρίνας Τ ἔτσι, ὥστε ἡ ἀκμὴ ΓΔ τῆς δίεδρης γωνίας νὰ εἶναι κάθετη στὸ Τ [σχ. 10 · 6 α (β) καὶ (γ)].

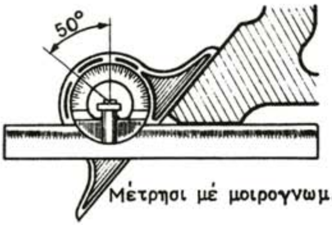
Τότε, ὅπως ξέρομε, οἱ τομὲς ΟΑ καὶ ΟΒ τοῦ Τ μὲ τὶς ἕδρες $Π_1$ καὶ $Π_2$ θὰ εἶναι κάθετες στὴν ἀκμὴ ΓΔ στὸ σημεῖο Ο. Ἡ ἐπίπεδη γωνία ΑΟΒ ὀνομάζεται ***μέτρο*** τῆς δίεδρης γωνίας καὶ εἶναι ἡ ἴδια σὲ ὅποια θέσι καὶ ἂν εὑρίσκεται τὸ Ο ἐπάνω στὴν ΓΔ.



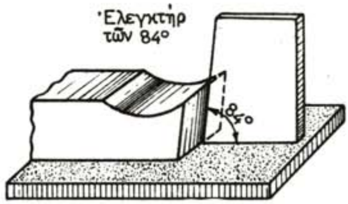
Σχ. 10 · 6 β.

Βλέπομε δηλαδὴ ὅτι:

Τὸ μέτρο μιᾶς δίεδρης γωνίας εἶναι μία ἐπίπεδη γωνία μὲ κορυφὴ ἐπάνω στὴν ἀκμὴ τῆς δίεδρης γωνίας καὶ πλευρές, ποὺ εὑρίσκονται ἀπὸ μία ἐπάνω σὲ κάθε ἕδρα καὶ εἶναι κάθετες στὴν ἀκμή.



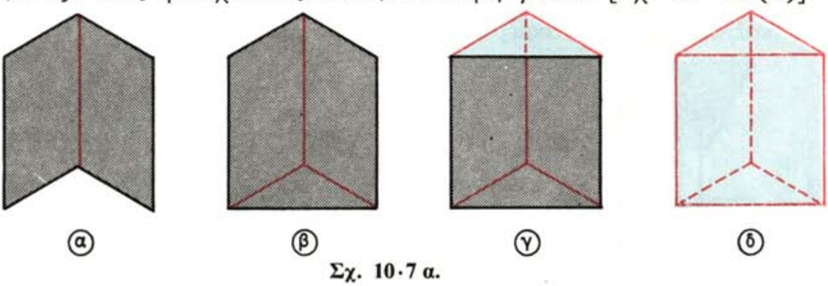
Σχ. 10·6 γ.



Σχ. 10·6 δ.

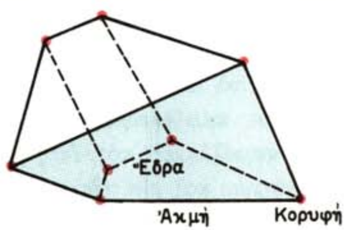
10 · 7 Τὸ πολύεδρο.

Παίρνομε στὴν ἀρχὴ δύο κομμάτια λαμαρίνα καὶ τὰ κολλᾶμε μεταξύ τους φτιάχνοντας ἔτσι μία δίεδρη γωνία [σχ. 10 · 7 α (α)].



Σχ. 10·7 α.

Μετὰ κολλᾶμε, ὅπως δείχνουν τὰ σχήματα 10 · 7 α, (β), (γ) καὶ (δ), κομμάτια λαμαρίνας ἔτσι, ὥστε νὰ κατασκευάσωμε διάφορα σχήματα μὲ 3, 4 καὶ 5 ἕδρες. Τὸ τελευταῖο σχῆμα, ποὺ εἶναι ἀπὸ ὅλες τὶς πλευρὲς κλειστό, τὸ λέμε ***πολύεδρο***, καί, ὅπως βλέπομε, εἶναι σχῆμα ***στερεό***. Ἕνα ἄλλο πολύεδρο εἶναι αὐτὸ ποὺ δείχνεται στὸ σχῆμα 10 · 7 β.



Σχ. 10·7 β.

Σὲ κάθε πολύεδρο διακρίνομε:

— Τὶς ***ἕδρες***, ποὺ εἶναι τὰ ἐπίπεδα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα σχηματίζεται τὸ πολύεδρο.

— Τὶς ***ἀκμές***, ποὺ εἶναι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, στὰ ὁποῖα κόβονται δύο-δύο οἱ ἕδρες.

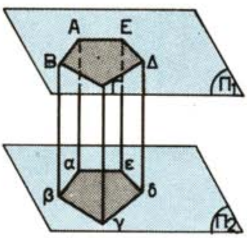
— Τὶς ***κορυφές***, ποὺ εἶναι τὰ σημεῖα, στὰ ὁποῖα κόβονται οἱ ἀκμές.

Παρακάτω θὰ ἐξετάσωμε μερικὰ χαρακτηριστικὰ πολύεδρα.

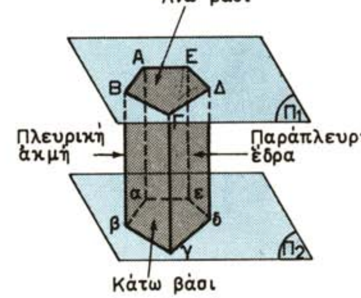
10 · 8 Τὸ πρίσμα.

Κατασκευή.

Παίρνομε δυὸ ἐπίπεδα φύλλα λαμαρίνας καὶ τὰ τοποθετοῦμε σὲ ἴση ἀπόσταση μεταξύ τους, ποὺ σημαίνει πὼς τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα (σχ. 10 · 8 α). Ἐπάνω στὸ ἕνα εἶναι σχεδιασμένο ἕνα πολύγωνο (σχ. 10 · 8 β), π.χ. ἕνα πεντάγωνο. Ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α, Β, Γ, Δ, Ε σύρομε παράλληλες κολῶνες ἀπὸ λάμα τὶς Αα, Ββ, Γγ, Δδ καὶ Εε. Σχηματίζεται ἔτσι στὸ κάτω ἐπίπεδο Π_2 ἕνα ἴσο πολύγωνο. Ἀκόμη ὅλα τὰ τετράπλευρα γύρω-γύρω, ἀνάμεσα στὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἔτσι, ἂν κολλήσωμε στὶς ἀκμὲς αὐτὲς



Σχ. 10·8 α.

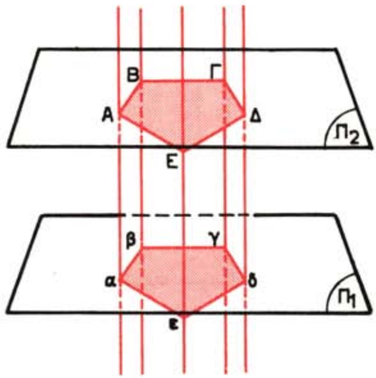


Σχ. 10·8 β.

ἄλλα φύλλα λαμαρίνας, κατασκευάζομε ἕνα στερεὸ κλειστό, ποὺ τὸ λέμε ***πρίσμα***. Τὸ ἐπίπεδο τμῆμα αβγδε τὸ λέμε ***κάτω βάσι***. Ἐνῶ τὸ ΑΒΓΔΕ τὸ λέμε ***ἄνω βάσι***. Τὶς ἕδρες τῆς πλευρᾶς, ὅπως τὴν ΑΒβα, τὶς λέμε ***παράπλευρες ἕδρες***. Τὶς ἀκμὲς Αα, Ββ, Γγ, Δδ καὶ Εε, ποὺ εἶναι ***παράλληλες*** καὶ ***ἴσες μεταξύ τους*** καὶ ἑνώνουν δυὸ κορυφές, μία τῆς ἐπάνω καὶ μία τῆς κάτω βάσεως, τὶς λέμε ***πλευρικὲς ἀκμές***. Τέλος τὴν ἀπόσταση, ποὺ ἔχουν τὰ δύο ἐπίπεδα, ποὺ εἶναι καὶ ἀπόσταση τῶν δύο βάσεων τοῦ πρίσματος, τὴν λέμε ***ὕψος*** τοῦ πρίσματος.

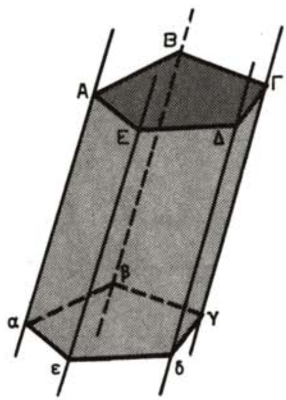
Παρατήρησι.

Ἂν συμβῆ μία πλευρικὴ ἀκμὴ νὰ εἶναι κάθετη στὶς βάσεις, ὁπότε καὶ ὅλες οἱ ἄλλες εἶναι κάθετες στὶς βάσεις (σχ. 10 · 8 γ), τότε τὸ πρίσμα τὸ λέμε ***ὀρθό***. Κάθε πρίσμα, ποὺ δὲν εἶναι ὀρθὸ τὸ λέμε ***πλάγιο*** (σχ. 10 · 8 δ). Στὴν περίπτωσι τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος (σχ.



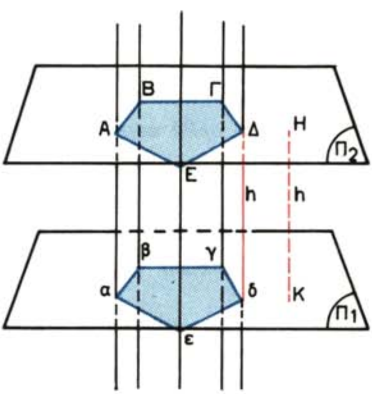
ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ

Σχ. 10·8 γ.



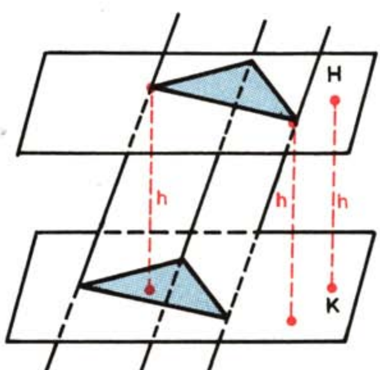
ΠΛΑΓΙΟ ΠΡΙΣΜΑ

Σχ. 10·8 δ.



ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ

Σχ. 10·8 ε.



ΠΛΑΓΙΟ ΠΡΙΣΜΑ

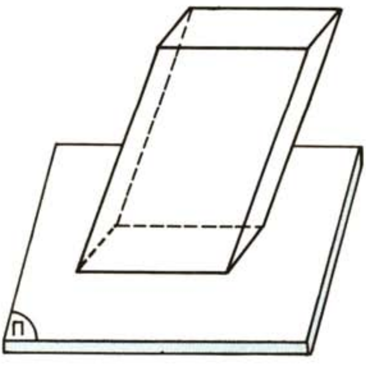
Σχ. 10·8 στ.

10 · 8 ε) ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος καὶ οἱ πλευρικὲς ἕδρες εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

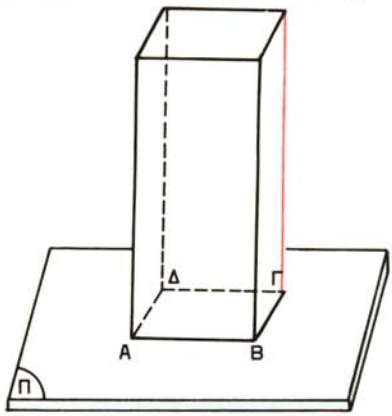
10 · 9 Τὸ παραλληλεπίπεδο.

Κατασκευή.

Κατασκευάζομε ἕνα πλάγιο πρίσμα μὲ βάσι παραλληλόγραμμο (σχ. 10 · 9 α). Τὸ πρίσμα αὐτό, στὸ ὁποῖο καὶ οἱ ἕδρες καὶ οἱ βά-

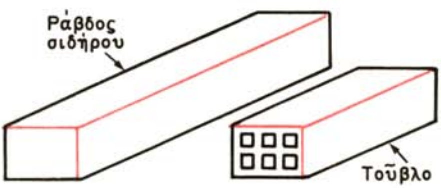


Σχ. 10·9 α.



Σχ. 10·9 β.

σεις εἶναι παραλληλόγραμμα, τὸ ὀνομάζομε ***παραλληλεπίπεδο***. Ἂν στὸ παραλληλεπίπεδο αὐτὸ μία ἀκμὴ εἶναι κάθετη στὶς βάσεις, ὁπότε καὶ οἱ ἄλλες θὰ εἶναι κάθετες στὶς βάσεις, τότε τὸ λέμε ***ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο*** (σχ. 10 · 9 β). Καὶ ἂν αὐτὸ τὸ ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο ἔχῃ βάσεις ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τότε τὸ λέμε ***ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο*** (σχ. 10 · 9 γ).



Σχ. 10·9 γ.

10 · 10 Ὁ κύβος.

Κατασκευή.

Κατασκευάζομε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ βάσεις καὶ παράπλευρες ἕδρες τετράγωνα. Τὸ στερεό, ποὺ θὰ προκύψῃ, τὸ λέμε ***κύβο*** (σχ. 10 · 10).

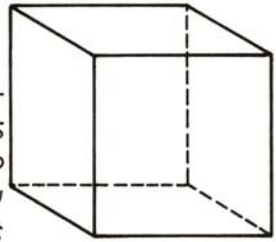
Στὸν κύβο ἔχομε ὅτι:

— Ὅλες οἱ ἀκμὲς εἶναι ἴσες,

— ὅλες οἱ δίεδρες γωνίες εἶναι ὀρθές,

— ὅλες οἱ ἕδρες εἶναι τετράγωνα καὶ ἐπομένως κάθε μία μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῆ σὰν κάτω βάσι.

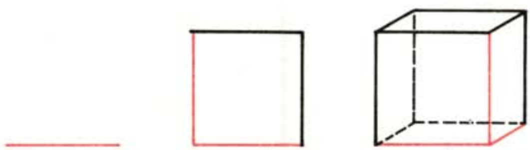
10 · 11 Μονάδες γιὰ τὴν μέτρησι τοῦ ὄγκου.



Σχ. 10·10.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὸν χῶρο, ποὺ καταλαμβάνει ἕνα στερεὸ σῶμα, ἐξετάζομε πόσες φορὲς χωρεῖ στὸ ἀρχικὸ ἕνα ἄλλο στερεὸ σῶμα, ποὺ τὸ λέμε ***μονάδα***. Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἐκφράζει αὐτὴ τὴν μέτρησι, λέγεται ***ὄγκος*** τοῦ στερεοῦ σώματος.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι δύσκολο κάθε φορὰ νὰ προσπαθοῦμε νὰ ταιριάσωμε τὸ στερεό, ποὺ χρησιμοποιοῦμε σὰν μονάδα, στὸ στερεό, ποὺ θέλομε νὰ μετρήσωμε, γι' αὐτὸ ἀναζητοῦμε τρόπους ὑπολογισμοῦ, ὅπως στὶς ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ εὑρίσκωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς δοσμένου στερεοῦ σώματος. Δημιουργοῦμε δηλαδὴ τύπους, τοὺς ὁποίους μποροῦμε νὰ ἐφαρμόζωμε σὲ κάθε παρουσιαζομένη περίπτωσι, ὅπως θὰ δοῦμε στὶς παρακάτω παραγράφους.



Σχ. 10·11 α.

Σὰν μονάδα γιὰ τὴν μέτρησι τῶν ὄγκων ὁρίζομε τὸν ***κύβο***, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 m (σχ. 10 · 11 α). Τότε λέμε, ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι ἕνα ***κυβικὸ μέτρο***, ποὺ σημαίνει: $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ καὶ τὸ ὁποῖο γράφεται σὰν δύναμι $\boldsymbol{1\ m^3}$. Ἐπειδὴ ὅμως ἕνας τέτοιος κύβος εἶναι μεγάλος σὲ ὄγκο, χρησιμοποιοῦμε κύβους μὲ μικροτέρα πλευρά, π.χ. τὸ δεκατόμετρο (dm) ἢ τὸ ἑκατοστόμετρο (cm). Ἔτσι προκύπτουν οἱ παρακάτω νέες μονάδες, ποὺ εἶναι ***ὑποπολλαπλάσια*** τοῦ κυβικοῦ μέτρου:

— Τὸ ***κυβικὸ δεκατόμετρο***, ποὺ εἶναι περισσότερο γνωστὸ σὰν ***λίτρο***, καὶ τὸ ὁποῖο εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου μὲ πλευρὰ 1 dm.

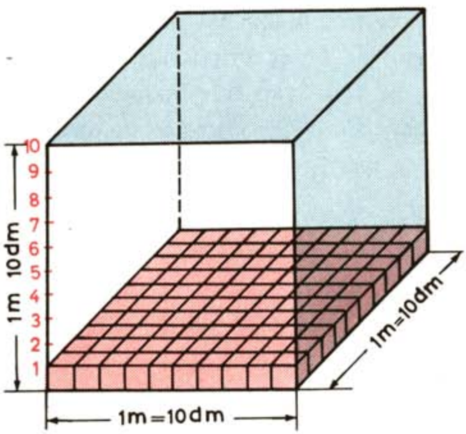
Συμβολίζομε: $\boxed{1\ dm^3 = 1\ lt}$

— Τὸ ***κυβικὸ ἑκατοστόμετρο***, ποὺ εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου μὲ πλευρὰ 1 cm.

Συμβολίζομε: $\boxed{1\ cm^3}$

Ἀπὸ τὴν γνωστὴ σχέσι: 1 m = 10 dm = 100 cm, μποροῦμε νὰ εὕρωμε πολὺ εὔκολα ὅτι (σχ. 10 · 11 β):

$$\boxed{\begin{aligned} 1\ m^3 &= 1000\ lt \\ 1\ lt &= 1000\ cm^3 \end{aligned}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\begin{aligned} 1\ lt &= 0{,}001\ m^3 \\ 1\ cm^3 &= 0{,}001\ lt \end{aligned}}$$



Σχ. 10 · 11 β.

ποὺ σημαίνει ὅτι:

Κάθε μονάδα μετρήσεως ὄγκου εἶναι 1000 φορὲς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν μονάδα τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ 1000 φορὲς μικροτέρα ἀπὸ τὴν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ἐφαρμογή.

Πόσα λίτρα εἶναι οἱ παρακάτω ὄγκοι:

1250 m³   17 600 cm³   295 dm³.

Ἔχομε ὅτι: $1250\ m^3 \triangleq 1250 \times 1000\ lt$.

Δηλαδή: $1250\ m^3 \triangleq 1\,250\,000\ lt$.

Ἐπίσης: $17\,600\ cm^3 \triangleq 17{,}6\ lt$.

Ἐπειδή: $1\ lt = 1\ dm^3$, θὰ εἶναι: $295\ dm^3 = 295\ lt$.

10 · 12 Τὸ εἰδικὸ βάρος.

Ἕνα σιδερένιο κομμάτι ἔχει ὄγκο 8 dm^3 καὶ ζυγίζει 62,88 kg, ἐνῶ ἕνα ἄλλο κομμάτι, ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικό, ποὺ ἔχει ὄγκο 5 dm^3, ζυγίζει 39,30 kg.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$62{,}88 : 8 = 7{,}86\ \frac{kg}{dm^3} \qquad 39{,}30 : 5 = 7{,}86\ \frac{kg}{dm^3}.$$

Τὸ μέγεθος αὐτό, ***ποὺ ἐκφράζει τὸ βάρος ἑνὸς σώματος στὴν μονάδα τοῦ ὄγκου, τὸ λέμε εἰδικὸ βάρος*** καὶ τὸ συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα γ.

Τὰ διάφορα τεχνικὰ βοηθήματα, τὰ «ἐγχειρίδια» ὅπως λέμε, πολλὲς φορὲς δίνουν τὸ εἰδικὸ βάρος γιὰ τά:

— Στερεὰ καὶ ὑγρὰ σώματα σέ: ton/m^3 ἢ kg/dm^3 ἢ g/cm^3

— Ἀέρια σώματα σέ : kg/m^3 ἢ g/dm^3.

Ἔτσι ἔχομε τὸν Πίνακα 10 · 12 · 1 γιὰ μερικὰ κύρια ὑλικά. Στὸν Πίνακα αὐτὸν τὸ εἰδικὸ βάρος δίνεται σὲ kg/dm^3.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω γιὰ τὸ εἰδικὸ βάρος προκύπτει ὁ τύπος:

$$\boxed{\gamma = \frac{G}{V}}$$

ὅπου: G εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος καὶ V ὁ ὄγκος του.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή.

Σῶμα χάλκινο, ποὺ ἔχει ὄγκο $V = 7{,}3\ dm^3$, ζυγίζει 60 kg. Νὰ εὕρετε τὸ εἰδικό του βάρος γ.

Ἀπὸ τὸν τύπο εὑρίσκομε:

$$\gamma = \frac{60}{7{,}3} \simeq 8{,}20 \frac{kg}{dm^3}.$$

Π Ι Ν Α Ξ 10 · 12 · 1

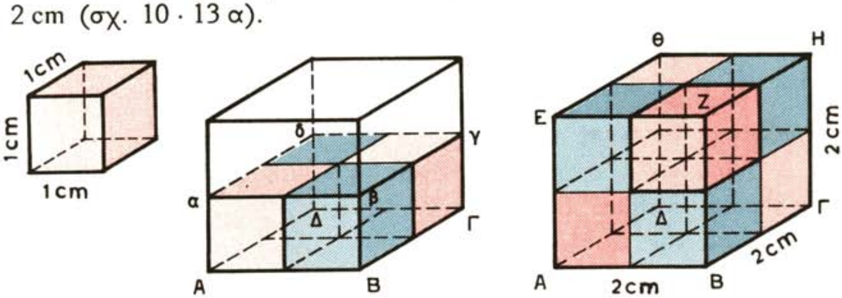
Εἰδικῶν βαρῶν εἰς kg/dm³

Ἀτσάλι	7,85	Ξύλο: ὀξυὰ	0,80 ἕως 0,95
Ἀλουμίνιο	2,70	πίτσπάιν	0,75 ἕως 0,85
Ἀλουμίνιο χυτὸ	2,60	δρῦς	0,85 ἕως 1,00
Ἄργυρος	10,50	Ὀρείχαλκος	8,45 ἕως 8,75
Βενζίνη	0,68 ἕως 0,74	Πετρέλαιο (ντῆζελ)	0,85
Γαιάνθρακες (διάφορα		Πετρέλαιο (μαζοὺτ)	0,95
εἴδη ὀρυκτὸ κάρβουνο)	1,20 ἕως 1,70	Πλατίνα	21,40
Θαλασσινὸ νερὸ	1,02	Πέτρα σκληρὴ	2,10 ἕως 2,50
Κασσίτερος (καλάι)	7,40	Σίδηρος	7,85
Κολοφώνιο	1,07	Τοῦβλο (συμπαγὲς)	1,85
Λιγνίτης	1,20 ἕως 1,50	Τοῦβλο (πυρίμαχο)	2,70
Λινέλαιο	0,94	Τσιμέντο	1,25 ἕως 1,95
Μαντέμι (χυτοσίδηρος)	7,25	Τσίγκος (ψευδάργυρος)	7,15
Μάρμαρο	1,95 ἕως 2,80	Ὕαλος (γυαλὶ)	2,50
Μόλυβδος (μολύβι)	11,30	Ὕδωρ (νερὸ)	1,00
Μπροῦντζος	8,80	Φελλὸς	0,25
Μπετὸν	1,80 ἕως 2,80	Χαλκὸς (φωσφοροῦχος)	8,80
Νικέλιο	8,35	Χαλκὸς (χυτὸς)	8,20
Νικελιοχάλυψ	8,15	Χαλκὸς (ἠλεκτρολυτικὸς)	8,92
Ντουραλουμίνιο	2,70	Χαλκὸς	8,95
Ξύλο: ἔλατο	0,35 ἕως 0,75	Χρυσὸς	19,33
καρυδιὰ	0,45 ἕως 0,65	Χῶμα	1,80 ἕως 1,90
μαόνι	0,55 ἕως 1,05		

10 · 13 Ὄγκος κύβου — Τύποι γιὰ τὸν κύβο.

Πρόβλημα 1ο.

Νὰ εὑρεθῆ ὁ ὄγκος V ἑνὸς κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 2 cm (σχ. 10 · 13 α).



Σχ. 10·13 α.

Λύσι :

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, θὰ πάρωμε ἕνα κύβο μὲ ἀκμὴ 1 cm καὶ θὰ ἐξετάσωμε πόσες φορὲς χωρεῖ στὸν κύβο μὲ ἀκμὴ 2 cm. Εὑρίσκομε ὅτι γιὰ νὰ καλύψωμε τὴν βάσι χρειαζόμαστε συνολικὰ $2 \times 2 = 4$ κύβους ἀκμῆς 1 cm, αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ τὸ κάνωμε *2* φορὲς γιὰ νὰ γεμίση ὁλόκληρος ὁ κύβος. Δηλαδὴ χρειαζόμαστε συνολικά: $2 \times 2 \times 2 = 8$ ***κύβους***.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ ὄγκος V τοῦ κύβου μας εἶναι γινόμενο τῆς ***ἀκμῆς*** ἐπὶ τὸν ἑαυτό της τρεῖς φορές, δηλαδή:

$$V = 2 \times 2 \times 2 = 8\ cm^3$$

ἢ

$$V = 2^3 = 8\ cm^3.$$

Πρόβλημα 2ο.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος V κύβου μὲ ἀκμὴ 0,5 dm.

Λύσι :

Μποροῦμε νὰ ἐκφράσωμε τὴν ἀκμὴ ἀπὸ 0,5 dm, σὲ 5 cm. Σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο πρόβλημα ὁ ὄγκος V θὰ εἶναι:

$$V = 5 \times 5 \times 5 = 125\ cm^3.$$

Αὐτὸ ποὺ εὑρίσκομε, τὸ 125 cm^3, τὸ τρέπομε σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως παραπάνω τάξεως, δηλαδὴ σὲ dm^3, ὁπότε θὰ ἔχωμε:

$$V = 0{,}125\ dm^3.$$

Τὸ ἴδιο ὅμως εὑρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε:

$$0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5^3 = 0{,}125$$

ἄρα:

$$V = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125\ dm^3$$

ἢ

$$V = 0{,}5^3 = 0{,}125\ dm^3.$$

Συμπέρασμα.

Σὲ κάθε περίπτωσι γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν ἀκμή του μὲ τὸν ἑαυτό της καὶ τὸ ἐξαγόμενο νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἀκόμη μία φορὰ μὲ τὴν ἀκμή.

Δηλαδὴ σὲ ἕνα κύβο μὲ ἀκμὴ μήκους α ὁ ὄγκος V δίνεται ἀπὸ τὸν παρακάτω τύπο:

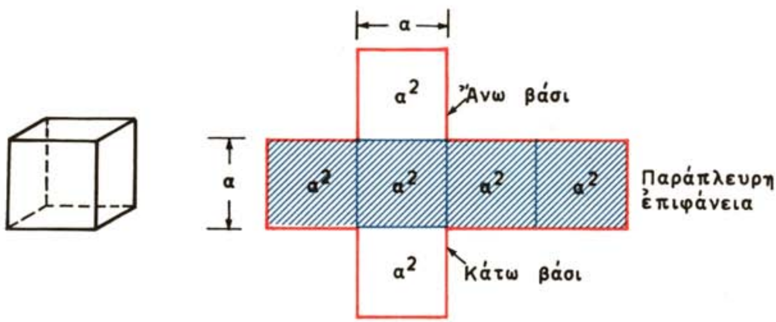
$$\boxed{V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{V = \alpha^3}$$

Γιὰ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κύβου εὑρίσκομε (σχ. 10 · 13 β):

$$\boxed{E_\pi = 4 \cdot \alpha^2}$$

ἐνῶ γιὰ τὴν συνολικὴ ἐπιφάνεια E_o θὰ ἔχωμε, ἂν προσθέσωμε καὶ τὶς δύο βάσεις:

$$\boxed{E_o = 6 \cdot \alpha^2}$$



Σχ. 10·13 β.

10 · 14 Ἡ τρίτη δύναμι ἢ ὁ κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ α.

Λύσι:

Κατὰ τὰ γνωστά, θὰ ἔχωμε ὅτι ὁ ὄγκος V δίνεται ἀπὸ τὸ γινόμενο:

$$V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$$

πού, ὅπως εἴδαμε στὴν ἀρχή, ὅταν ὁρίσαμε τὸ κυβικὸ μέτρο, τὸ γράφομε συμβολικὰ καί: $V = \alpha^3$.

Τὴν ἔκφρασι α^3 καὶ κάθε ἄλλη ὅμοια, π.χ. r^2, ω^4 κ.λπ. τὴν ὀνομάσαμε ***δύναμι***.

Στὴν περίπτωσί μας λέμε ὅτι ἔχομε τὴν ***τρίτη δύναμι*** τοῦ ἀριθμοῦ α ($α^3$) ἢ ἀλλοιῶς τὸν ***κύβο*** τοῦ ἀριθμοῦ α. Ἡ πρᾶξι λέγεται ***ὕψωσι στὸν κύβο***.

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

α) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

β) $0{,}5^3 = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$.

γ) $3{,}1^3 = 3{,}1 \times 3{,}1 \times 3{,}1 = 29{,}791$ καὶ ἂν πρόκειται γιὰ 3,1 cm, τότε ὁ κύβος θὰ εἶναι ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς 29,791 cm^3 ἢ γιὰ νὰ τηρήσωμε καὶ ἐδῶ τὴν ἴδια ἀκρίβεια μετρήσεως στὸ ἐξαγόμενο:

$$3{,}1 \text{ cm} \times 3{,}1 \text{ cm} \times 3{,}1 \text{ cm} \simeq 29{,}8 \text{ cm}^3.$$

Ἔτσι, ἐπιβεβαιώνοντας τὰ ὅσα ἀρχικὰ εἴπαμε γιὰ τὶς μονάδες μετρήσεως τοῦ ὄγκου, εὑρίσκομε ὅτι:

Ὅταν ὑψώνωμε στὸν κύβο ἕνα συγκεκριμένο ἀριθμό, ὑψώνομε στὴν ἴδια δύναμι καὶ τὴν μονάδα μετρήσεως.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου ἰσοῦται μὲ τὴν κυβικὴ δύναμι τῆς ἀκμῆς του.

10 · 15 Ἡ κυβικὴ ρίζα.

Πρόβλημα.

Ἕνας κύβος ἔχει ὄγκο 27 cm^3. Ζητοῦμε νὰ εὕρωμε τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του.

Λύσι:

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἀντίστροφο τοῦ προβλήματος τῆς προηγουμένης παραγράφου. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εὕρωμε ἕνα ἀριθμό, ποὺ ἂν τὸν πολλαπλασιάσωμε μὲ τὸν ἑαυτό του τρεῖς φορές, δηλαδὴ ἂν τὸν ὑψώσωμε στὴν τρίτη δύναμι, νὰ μᾶς δώση τὸν ἀριθμὸ 27. Ἕνας τέτοιος ἀριθμὸς ὀνομάζεται ***κυβικὴ ρίζα***. Ἡ πρᾶξι ποὺ κάνομε γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν κυβικὴ ρίζα, λέγεται ***ἐξαγωγὴ κυβικῆς ρίζας***.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ὥστε:

Κυβικὴ ρίζα ἑνὸς δοθέντος ἀριθμοῦ ὀνομάζεται ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν ὑψωθῆ στὸν κύβο (δηλαδὴ πολλαπλασιασθῆ μὲ τὸν ἑαυτό του τρεῖς φορές), μᾶς δίνει σὰν γινόμενο τὸν δοθέντα ἀριθμό.

Στὸ παραπάνω πρόβλημα ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ἡ ***κυβικὴ ρίζα*** τοῦ 27, ἀφοῦ:

$$3 \times 3 \times 3 = 27.$$

Σύμβολα τῆς κυβικῆς ρίζας εἶναι τά: $\sqrt[3]{}$ ἢ $\sqrt[3]{}$

Γράφομε δέ: $\sqrt[3]{27} = 3$.

Ὁ ἀριθμὸς 27 ὀνομάζεται καὶ ἐδῶ ***ὑπόρριζο***.

Ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

α) Ποιά εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 8;

Ξέρομε ὅτι: $2 \times 2 = 4$ καὶ $4 \times 2 = 8$.

Δηλαδή: $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Ἄρα: $\sqrt[3]{8} = 2$.

β) Ποιό εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς κύβου μὲ ὄγκο 64 m^3;

Ἐπειδή: $4 \times 4 = 16$ καὶ $16 \times 4 = 64$ σημαίνει ὅτι: $\sqrt[3]{64} = 4$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ 64 δίνεται σὲ m^3, ἡ ἀκμὴ θὰ εὑρεθῆ σὲ m.

Ἄρα: $\alpha = 4$ m, ἂν μὲ α συμβολίσωμε γενικὰ τὴν ἀκμὴ τοῦ κύβου.

γ) Ποιά εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 1;

Ἀφοῦ: $1 \times 1 \times 1 = 1$, σημαίνει ὅτι:

$$\boxed{\sqrt[3]{1} = 1}$$

10 · 16 Πίνακες κυβικῶν ριζῶν.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ πρέπει νὰ ἐκτελέσωμε μία πολύπλοκη πρᾶξι, τὴν ὁποία ὅμως δὲν θὰ ἀναπτύξωμε ἐδῶ. Στὸ τέλος τοῦ βιβλίου ὑπάρχει πίνακας, ὁ ὁποῖος δίνει σὲ μία στήλη τοὺς κύβους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ 1000 καὶ σὲ μία ἄλλη στήλη τὶς κυβικὲς ρίζες.

ΠΙΝΑΞ 10·16·1

Κύβος καὶ κυβικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100

'Αριθμός	Κύβος	Κυβική Ρίζα	'Αριθμός	Κύβος	Κυβική Ρίζα	'Αριθμός	Κύβος	Κυβική Ρίζα	'Αριθμός	Κύβος	Κυβική Ρίζα
α	α^3	$\sqrt[3]{\alpha}$	α	α^3	$\sqrt[3]{\alpha}$	α	α^3	$\sqrt[3]{\alpha}$	α	α^3	$\sqrt[3]{\alpha}$
1	1	1,000	26	17 576	2,962	51	132 651	3,708	76	438 976	4,236
2	8	1,260	27	19 683	3,000	52	140 608	3,732	77	456 533	4,254
3	27	1,442	28	21 952	3,037	53	148 877	3,756	78	474 552	4,273
4	64	1,587	29	24 389	3,072	54	157 464	3,780	79	493 039	4,291
5	125	1,710	30	27 000	3,107	55	166 375	3,803	80	512 000	4,309
6	216	1,817	31	29 791	3,141	56	175 616	3,826	81	531 441	4,327
7	343	1,913	32	32 768	3,175	57	185 193	3,848	82	551 368	4,344
8	512	2,000	33	35 937	3,207	58	195 112	3,871	83	571 787	4,362
9	729	2,080	34	39 304	3,240	59	205 379	3,893	84	592 704	4,379
10	1 000	2,154	35	42 875	3,271	60	216 000	3,915	85	614 125	4,397
11	1 331	2,224	36	46 656	3,302	61	226 981	3,936	86	636 056	4,414
12	1 728	2,289	37	50 653	3,332	62	238 328	3,958	87	658 503	4,431
13	2 197	2,351	38	54 872	3,362	63	250 047	3,979	88	681 472	4,448
14	2 744	2,410	39	59 319	3,391	64	262 144	4,000	89	704 969	4,465
15	3 375	2,466	40	64 000	3,420	65	274 625	4,021	90	729 000	4,481
16	4 096	2,520	41	68 921	3,448	66	287 496	4,041	91	753 571	4,498
17	4 913	2,571	42	74 088	3,476	67	300 763	4,062	92	778 688	4,514
18	5 832	2,621	43	79 507	3,503	68	314 432	4,082	93	804 357	4,531
19	6 859	2,668	44	85 184	3,530	69	328 509	4,101	94	830 584	4,547
20	8 000	2,714	45	91 125	3,557	70	343 000	4,121	95	857 375	4,563
21	9 261	2,759	46	97 336	3,583	71	357 911	4,141	96	884 736	4,579
22	10 648	2,802	47	103 823	3,609	72	373 248	4,160	97	912 673	4,595
23	12 167	2,844	48	110 592	3,634	73	389 017	4,179	98	941 192	4,610
24	13 824	2,884	49	117 649	3,659	74	405 224	4,198	99	970 299	4,626
25	15 625	2,924	50	125 000	3,684	75	421 875	4,217	100	1 000 000	4,641

Στὰ παρακάτω παραδείγματα δείχνομε τρόπους ὑπολογισμοῦ κυβικῶν ριζῶν μὲ τὴν βοήθεια τοῦ Πίνακος αὐτοῦ.

Παράδειγμα 1ο.

Ὑπολογίσετε τὴν $\sqrt[3]{628}$.

Στὴν πρώτη στήλη «Ἀριθμός» εὑρίσκομε τὸν ἀριθμὸ 628. Στὴν ἴδια γραμμὴ στὴν στήλη «*Κυβικὴ ρίζα*» εὑρίσκομε τὸ ζητούμενο: $\sqrt[3]{628} = 8{,}563$ (τὸ ἐξαγόμενο δίνεται μὲ προσέγγισι χιλιοστοῦ).

Παράδειγμα 2ο.

Εὕρετε τὴν κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 9261.

Πᾶμε πάλι στὸν πίνακα.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ 1000, τὸν ἀναζητοῦμε στὴν στήλη «*Κύβος*». Στὴν ἴδια σειρὰ στὴν πρώτη στήλη, εὑρίσκομε τὸ ζητούμενο:

$$\sqrt[3]{9261} = 21.$$

Παράδειγμα 3ο.

Εὕρετε τὴν $\sqrt[3]{37\,890}$.

Πᾶμε στὴν στήλη «*Κύβος*» τοῦ Πίνακος. Βλέπομε ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁ ἀριθμὸς 37 890, ἀλλὰ ὁ μικρότερός του 35 937 καὶ ὁ μεγαλύτερός του 39 304, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔχομε:

$$\sqrt[3]{35\,937} = 33 \qquad \sqrt[3]{39\,304} = 34.$$

Ἄρα: $\sqrt[3]{37\,890} \simeq 33$ μὲ προσέγγισι μονάδος πρὸς τὰ κάτω

ἢ $\sqrt[3]{37\,890} \simeq 34$ μὲ προσέγγισι μονάδος πρὸς τὰ ἄνω.

Παράδειγμα 4ο.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς κύβου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι $0{,}515\ m^3$.

Κάνομε τὸ μέγεθος, ποὺ δίνεται, ἀκέραιο ἀριθμό, ἀλλάζοντας μονάδες μετρήσεως.

Ἔτσι ἔχομε: $0{,}515\ m^3 = 515\ dm^3$.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Εὑρίσκομε τώρα ὅτι τὸ μῆκος α τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου θὰ εἶναι:

$$\alpha = \sqrt[3]{515} = 8{,}0156 \text{ dm}.$$

Καὶ μὲ προσέγγισι ἑκατοστοῦ: $\alpha = 8{,}02$ dm.

Ἄρα ἡ πλευρὰ σὲ μέτρα θὰ ἔχη μῆκος:

$$\alpha = 0{,}802 \text{ m}.$$

Δηλαδή:

$$\sqrt[3]{0{,}515} = 0{,}802.$$

Ὥστε:

$$\sqrt[3]{0{,}515} = \sqrt[3]{\frac{515}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{515}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{8{,}02}{10} = 0{,}802.$$

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν κυβικὴ ρίζα ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, τὸν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ 1000 ἢ 1 000 000 καὶ ἀφοῦ βγάλωμε τὶς κυβικὲς ρίζες ἀριθμητῆ καὶ παρονομαστῆ, κάνομε τὴν διαίρεσι.

Συμπέρασμα.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν κυβικὴ ρίζα ἑνὸς κλάσματος εὑρίσκομε τὶς κυβικὲς ρίζες τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος καὶ μετὰ κάνομε τὴν διαίρεσι, ποὺ φανερώνει τὸ κλάσμα.

Π.χ. $$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{16}} \simeq \frac{1{,}9129}{2{,}5198} \simeq 0{,}76.$$

Παράδειγμα 5ο.

Νὰ εὑρεθῆ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 3570 μὲ ἀκρίβεια δεκάτου ἀκεραίας μονάδος.

Αὐτὸ σημαίνει πὼς ζητοῦμε νὰ εὕρωμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμό, μὲ ἕνα μόνο δεκαδικὸ ψηφίο, ὁ ὁποῖος, ἂν πολλαπλασιασθῆ μὲ τὸν ἑαυτό του τρεῖς φορές, δηλαδὴ ὑψωθῆ στὸν κύβο, θὰ μᾶς δώση τὸν ἀριθμὸ 3570. Μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$\sqrt[3]{3570} = \sqrt[3]{\frac{3\,570\,000}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{3\,570\,000}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{3\,570\,000}}{10}$$

Ἀπὸ τοὺς Πίνακες στὴν στήλη «*Κύβος*» εὑρίσκομε:

$$\sqrt[3]{3\,511\,808} = 152$$

$$\sqrt[3]{3\,581\,577} = 153.$$

Ἔτσι, παίρνοντας τὸν δεύτερο, ποὺ εἶναι πιὸ κοντὰ στὸν δοθέντα ἀριθμό, εὑρίσκομε:

$$\sqrt[3]{3570} = \frac{\sqrt[3]{3\,570\,0000}}{10} = \frac{153}{10} = 15{,}3.$$

Ἄρα: $\sqrt[3]{3570} = 15{,}3.$

10 · 17 Τὸ ὀρθογώνιο καὶ τὸ ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο. Τὸ ὀρθὸ πρίσμα.

Κατασκευή.

Παίρνομε κύβους μὲ ἀκμὴ 1 m καὶ τοὺς τοποθετοῦμε, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10 · 17 α, τὸν ἕνα δίπλα καὶ ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄλλο.

Χρησιμοποιώντας 24 τέτοιους κύβους φτιάχνομε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΕΖΗΘ, ποὺ ἔχει ἀκμές (σχ. 10 · 17 α):

ΑΒ = 3 m, ΒΓ = 2 m καὶ ΑΕ = 4 m.

Τὶς ἀκμὲς αὐτὲς τὶς ὀνομάζομε ***διαστάσεις***. Ἀπὸ αὐτὲς ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΒΓ λέγονται ***πλάτος*** καὶ ***μῆκος*** ἢ ***βάθος***, ἐνῶ ἡ ΑΕ ὀνομάζεται ***ὕψος*** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ὄγκος.

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὄγκου σκεφτόμαστε, ὅτι αὐτὸς θὰ εἶναι 24 φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ ἀρχικοῦ κύβου (ἀφοῦ χρησιμοποιήσαμε 24 τέτοιους κύβους μὲ ὄγκο 1 m^3).

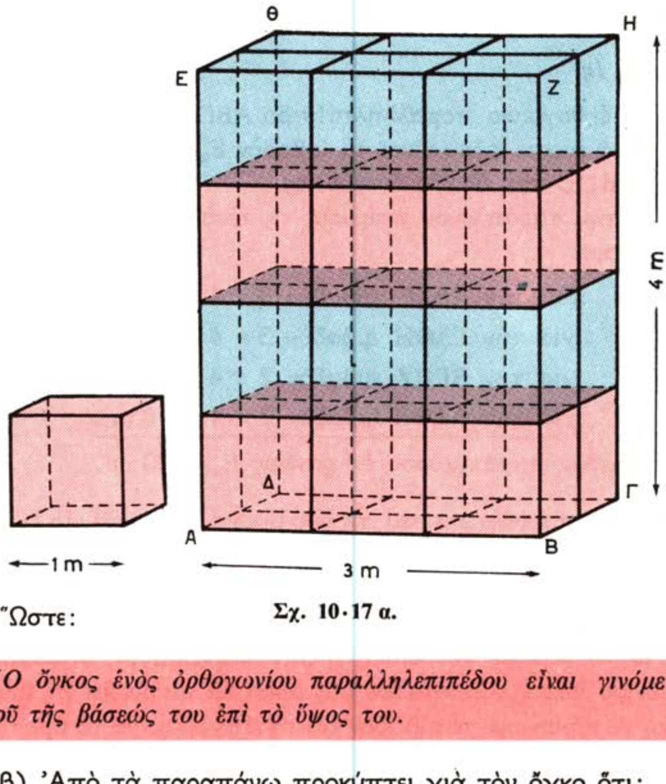
Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέ-

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

δου εἶναι $V = 24\ m^3$. Ὅμως στὸ ἴδιο συμπέρασμα καταλήγομε καὶ ὡς ἑξῆς:

α) Ἡ βάσι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μας εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν $E_\beta = 3 \times 2 = 6\ m^2$. Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ μὲ τὸ ὕψος, εὑρίσκομε:

$$V = 6 \times 4 = 24\ m^3.$$



Ὥστε:

Σχ. 10·17 α.

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

β) Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει γιὰ τὸν ὄγκο ὅτι:

$$V = 3 \times 2 \times 4 = 24\ m^3,$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενο τῶν τριῶν διαστάσεών του.

Τὰ δύο παραπάνω συμπεράσματα μὲ τύπους παίρνουν τὴν μορφή:

$$\boxed{V = E_\beta \times h} \qquad \boxed{V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$$

ὅπου: E_β εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, h τὸ ὕψος καὶ α, β, γ, οἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἐπιφάνεια.

Ἐφαρμογὴ 1η.

Στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΕΖΗΘ τοῦ σχήματος 10 · 17 α νὰ εὕρετε πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν E_π τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ E_o τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας.

Γιὰ τὴν παράπλευρο παίρνομε τὶς τέσσερεις κατακόρυφες ἕδρες καὶ εὑρίσκομε:

Γιὰ τὴν ΑΒΖΕ ἐμβαδὸν $3 \times 4 = 12\ m^2$,
γιὰ τὴν ΓΔΘΗ ἐμβαδὸν $3 \times 4 = 12\ m^2$,
γιὰ τὴν ΒΓΗΖ ἐμβαδὸν $2 \times 4 = 8\ m^2$
καὶ γιὰ τὴν ΑΔΘΕ ἐμβαδὸν $2 \times 4 = 8\ m^2$.

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας $E_\pi = 40\ m^2$.

Καὶ ἂν προσθέσωμε καὶ τὶς δύο βάσεις, ποὺ κάθε μία ἔχει ἐμβαδὸν 2×3, θὰ ἔχωμε:

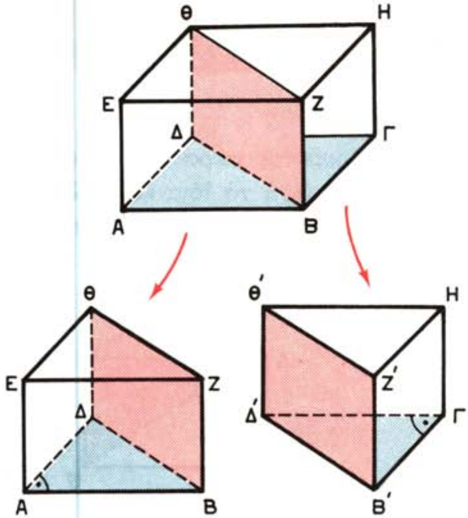
$$E_o = (2 \times 3) + (2 \times 3) + 40 = 52\ m^2.$$

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν ὁλικὴ ἢ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μᾶς ἀρκεῖ νὰ παίρνωμε τὶς ἕδρες του μία-μία, νὰ εὑρίσκωμε τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὰ ἐξαγόμενα νὰ τὰ προσθέτομε.

Ἐφαρμογὴ 2α.

Κόβομε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΘΕΖΗ μὲ τὴν βοήθεια τοῦ ἐπιπέδου ΒΖΘΔ σὲ δύο κομμάτια (σχ. 10 · 17 β).

Τὰ στερεά, ποὺ προκύπτουν, εἶναι τὸ ὀρθὸ πρίσμα ΑΒΔΘΕΖ, μὲ βάσι τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ καὶ τὸ ὀρθὸ πρίσμα Β΄ΓΔ΄Θ΄Ζ΄Η μὲ βάσι τὸ ἐπίσης ὀρθογώνιο τρίγωνο Β΄ΓΔ΄. Οἱ βάσεις τῶν ὀρθῶν αὐτῶν πρισμάτων εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ κάθε μία ἴση μὲ τὸ μισὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Τὰ ὕψη τους εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ὥστε θὰ μπορούσαμε νὰ κάνωμε τὰ δυὸ πρίσματα νὰ συμπέσουν. Ἄρα, τὰ πρίσματα αὐτὰ εἶναι ***ἴσα μεταξύ τους*** καὶ καθένα τους εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΘΕΖΗ, ἀπὸ τὸ ὁποῖο προέκυψαν.



Σχ. 10·17 β.

Ὄγκος.

Ὁ ὄγκος τώρα, καθενὸς ὀρθοῦ πρίσματος ἀπὸ αὐτὰ θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν μισὸ ὄγκο τοῦ ἀρχικοῦ στερεοῦ (ΑΒΓΔΘΕΖΗ).

Παράδειγμα.

Ἔστω ὅτι ἡ βάσι τοῦ ἀρχικοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει πλευρές:

$$\mathrm{AB} = 6 \text{ m} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{A\Delta} = 3{,}5 \text{ m}$$

ἐνῶ τὸ ὕψος εἶναι ΑΕ = 5 m. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι:

$$V = 6 \times 3{,}5 \times 5 = 105{,}0 \text{ m}^3.$$

Ἑπομένως τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος θὰ εἶναι:

$$V = \frac{6 \times 3{,}5 \times 5}{2} = 52{,}5 \text{ m}^3.$$

Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γραφῆ: $V = \dfrac{6 \times 3{,}5}{2} \times 5.$

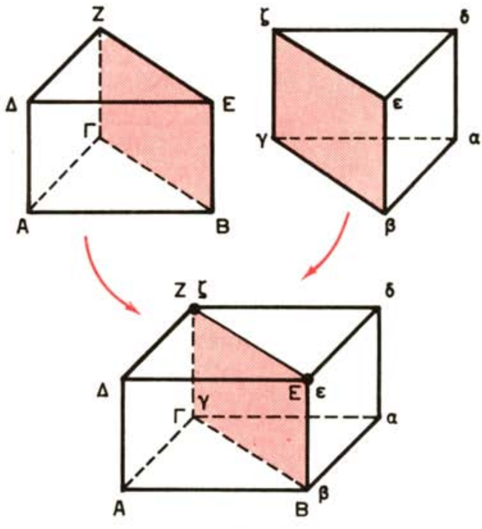
Ὅμως τὸ $\dfrac{6 \times 3{,}5}{2}$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ.

Ὥστε:

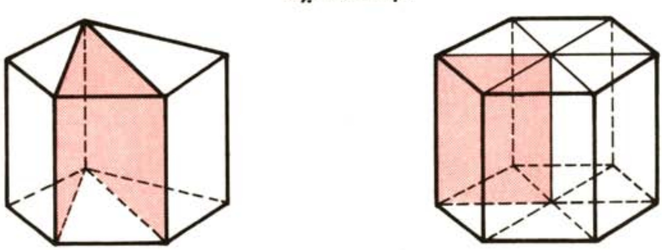
Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἐφαρμογὴ 3η.

Παίρνοντας τώρα δύο ὀρθὰ πρίσματα, μὲ βάσεις ἴσες καὶ τριγωνικὲς καὶ ὕψη τὰ ἴδια καὶ ἑνώνοντάς τα, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10 · 17 γ, φτιάχνομε ἕνα ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο.



Σχ. 10 · 17 γ.



Πρίσματα μὲ βάσι

Ὁποιοδήποτε πολύγωνο Κανονικὸ ἑξάγωνο

Σχ. 10 · 17 δ.

Πολὺ εὔκολα μποροῦμε νὰ δοῦμε ὅτι:

Στὸ ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο ὁ ὄγκος εἶναι γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἐφαρμογὴ 4η.

Ἂς πάρουμε τώρα ἕνα ὀρθὸ πρίσμα μὲ βάσι πολύγωνο (κανονικὸ ἢ τυχαῖο). Μποροῦμε νὰ τὸ χωρίσωμε σὲ ἄλλα τριγωνικὰ πρίσματα ὀρθὰ καί, ὅπως εἴπαμε παραπάνω, νὰ καταλήξωμε στὸ συμπέρασμα ὅτι (σχ. 10 · 17 δ):

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐφαρμογὴ 5η.

Ἔχομε 23 ὀρθογώνια κομμάτια ξύλου πάχους h′mm.

Τὰ κομμάτια αὐτὰ μποροῦμε νὰ τὰ τοποθετήσωμε, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10 · 17 ε, εἴτε κατὰ τὴν διάταξι α, ὁπότε σχηματίζομε

Σχ. 10 · 17 ε.

ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, εἴτε κατὰ τὴν διάταξι β, ὁπότε σχηματίζομε ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο μὲ βάσι ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ὁ ὄγκος τώρα καὶ τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν εἶναι ὁ ἴδιος. Τὰ στερεὰ αὐτὰ ἔχουν ἐπίσης τὴν ἴδια βάσι καὶ ὕψη h ἴσα. Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ γενικὸ συμπέρασμα ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος εἶναι γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Στὸ ἴδιο συμπέρασμα θὰ καταλήγαμε ἂν σὰν βάσι εἴχαμε ἕνα ὁποιοδήποτε παραλληλόγραμμο ἢ γενικότερα ὁποιοδήποτε πολύγωνο.

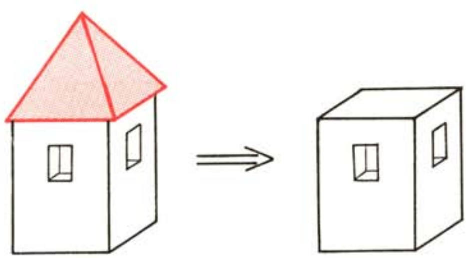
Γενικὸ συμπέρασμα.

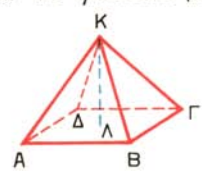
Σὲ κάθε πρίσμα ἢ σὲ κάθε παραλληλεπίπεδο ὁ ὄγκος εἶναι γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

10 · 18 Ἡ πυραμίς.

Κατασκευή.

Ἂν ἀποσπάσωμε τὴν ὀροφὴ ἀπὸ μία οἰκοδομὴ (σχ. 10 · 18 α), σχηματίζονται δύο στερεὰ σχήματα. Τὸ ἕνα εἶναι τὸ γνωστό μας



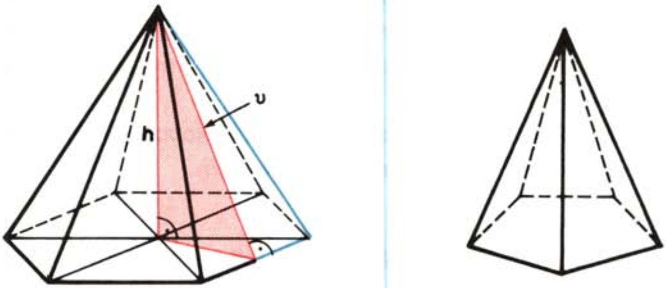


Σχ. 10·18 α.

ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο (τῆς οἰκοδομῆς). Τὸ ἄλλο εἶναι ἕνα καινούργιο στερεὸ σχῆμα, ποὺ τὸ λέμε ***πυραμίδα***. Στὸ στερεὸ αὐτὸ διακρίνομε:

Τὴν ***βάσι*** ΑΒΓΔ, ἡ ὁποία συνδέεται μὲ τὴν ***κορυφὴ*** Κ μὲ τὶς ***πλευρικὲς ἀκμὲς*** ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καὶ ΚΔ. Ἔτσι σχηματίζονται οἱ ***πλευρικὲς ἕδρες*** ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ καὶ ΚΔΑ, οἱ ὁποῖες εἶναι ὅλες τρίγωνα. Ἡ ἀπόστασι ΚΛ τῆς κορυφῆς Κ ἀπὸ τὴν βάσι ΑΒΓΔ ὀνομάζεται ***ὕψος*** τῆς πυραμίδος.

Ἂν ἡ βάσι τῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸ πολύγωνο καὶ τὸ ὕψος της ΚΛ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ πολυγώνου, τότε ἡ πυραμὶς λέγεται ***κανονική*** (σχ. 10 · 18 β).

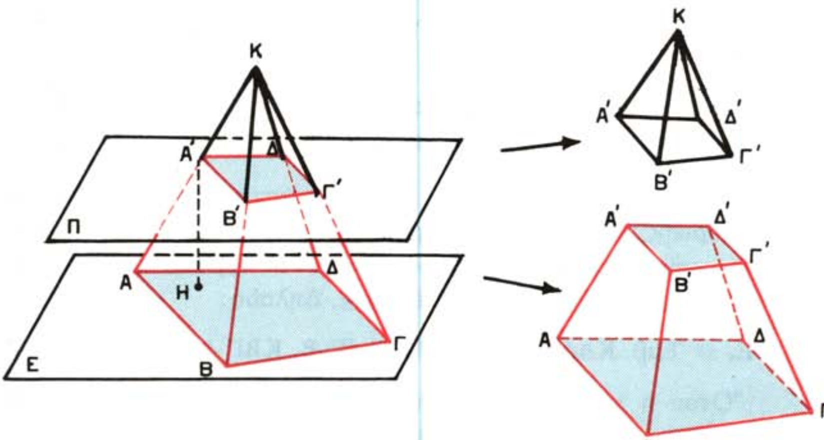


Σχ. 10·18 β.

Εὔκολα μπορεῖ νὰ δῆ κανεὶς ὅτι:

Σὲ κάθε κανονικὴ πυραμίδα οἱ πλευρικὲς ἕδρες εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

Ἂν ὁποιαδήποτε πυραμίδα τὴν κόψωμε σὲ δύο κομμάτια μὲ ἕνα ἐπίπεδο Π (σχ. 10 · 18 γ) παράλληλο πρὸς τὸ ἐπίπεδο Ε τῆς



Σχ. 10·18 γ.

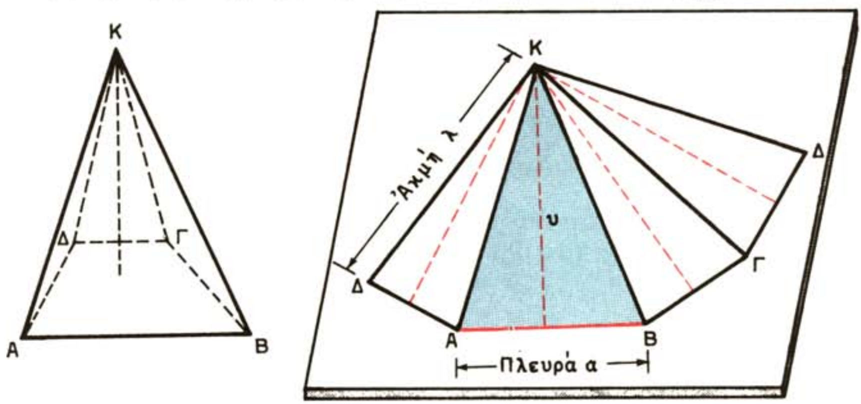
βάσεώς της, λαμβάνομε δύο ἄλλα στερεά. Τὸ ἕνα, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο Π συνεχίζει νὰ ἔχη τὸ σχῆμα πυραμίδος. Τὸ ἄλλο, ἐπειδὴ δὲν ἔχει πιὰ κορυφή, τὸ λέμε ***κόλουρη πυραμίδα***.

Στὴν πυραμίδα αὐτὴ οἱ πλευρικὲς ἕδρες εἶναι τραπέζια καὶ ἡ κορυφὴ ἀντικαθίσταται μὲ ἕνα πολύγωνο, ποὺ τὸ λέμε ***ἄνω βάσι*** (Α'Β'Γ'Δ') γιὰ νὰ τὸ ξεχωρίζωμε ἀπὸ τὴν ἄλλη, ποὺ τὴν λέμε ***κάτω βάσι*** (ΑΒΓΔ) (σχ. 10 · 18 γ).

Ἂν ἡ κόλουρη πυραμὶς προέρχεται ἀπὸ κανονικὴ πυραμίδα, τότε οἱ πλευρικὲς ἕδρες εἶναι τραπέζια ἰσοσκελῆ.

Ἐπιφάνεια.

Ἂν σχίσωμε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς πυραμίδος κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς της, π.χ. τῆς ΚΔ, καὶ τὴν ξεδιπλώσωμε (σχ. 10 · 18 δ)



Σχ. 10 · 18 δ.

ἐπάνω σὲ ἕνα ἐπίπεδο, τὸ σχῆμα ποὺ προκύπτει εἶναι τὸ ***ἀνάπτυγμα*** τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. Τὸ ἐμβαδὸν E_π τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας εὑρίσκεται, ἂν προσθέσωμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, ποὺ ἀποτελοῦν τὶς πλευρικὲς ἕδρες. Δηλαδή:

$$E_\pi = \text{'Εμβ. ΚΔΑ} + \text{'Εμβ. ΚΑΒ} + \text{'Εμβ. ΚΒΓ} + \text{'Εμβ. ΚΓΔ.}$$

Ὅταν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, ὅλα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα μεταξύ τους, ἄρα τὸ E_π θὰ εὑρεθῆ ἀπὸ τὴν σχέσι:

$$E_\pi = 4 \cdot \text{'Εμβ. ΚΑΒ} = \frac{4 \cdot (\text{ΑΒ}) \cdot \upsilon}{2}$$

Ἀλλὰ $4 \cdot (AB) = \Gamma$, ὅπου Γ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ποὺ στὴν περίπτωσί μας εἶναι τετράγωνο.

Ἄρα:

$$\boxed{E_\pi = \frac{\Gamma \cdot \upsilon}{2}}$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

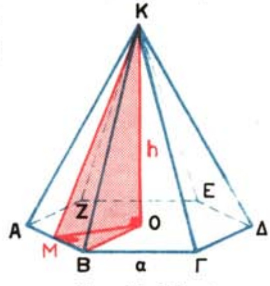
Σὲ μία κανονικὴ πυραμίδα τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ὕψος (τοῦ τριγώνου) μιᾶς ἕδρας.

Ἐφαρμογή.

Ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρικῆς καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσι κανονικὸ ἑξάγωνο πλευρᾶς 9 cm καὶ ὕψους ἕδρας 12 cm (σχ. 10·18 ε).

Δηλαδή: $(AB) = 9\text{ cm}$ καὶ
$(KM) = 12\text{ cm}$

ἢ $\alpha = 9\text{ cm}$ καὶ
$\upsilon = 12\text{ cm}$.



Σχ. 10·18 ε.

ὅπου: α ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως.

Εὑρίσκομε:

$$E_\pi = \frac{\Gamma \cdot \upsilon}{2} = \frac{6 \cdot \alpha \cdot \upsilon}{2} = \frac{6 \times 9 \times 12}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$E_\pi = 324\ cm^2.$$

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας θὰ πρέπει νὰ προσθέσωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι κανονικὸ ἑξάγωνο. Εὑρίσκομε κατὰ τὰ γνωστά:

$$\text{Ἐμβ. } (AB\Gamma\Delta EZA) = 6 \cdot \frac{(AB) \cdot (OM)}{2}.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΜΒ, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα, εἶναι:

$$(\mathrm{OB})^2 = (\mathrm{OM})^2 + (\mathrm{MB})^2,$$

ποὺ σημαίνει ὅτι: $(\mathrm{OM})^2 = 6^2 - 3^2,$

ἀφοῦ $(\mathrm{OB}) = 6\text{ cm}$ καὶ $(\mathrm{MB}) = \frac{(\mathrm{AB})}{2} = 3\text{ cm}.$

Δηλαδή:

$(\mathrm{OM})^2 = 36 - 9 = 27$ καὶ $\mathrm{OM} = \sqrt{27} \simeq 5{,}2\text{ cm}.$

Ὁπότε:

$$\text{Ἐμβ. } (\mathrm{AB\Gamma\Delta EZA}) = 6 \times \frac{6 \times 5{,}2}{2} = 93{,}6\text{ cm}^2.$$

Τελικῶς εὑρίσκομε γιὰ τὸ ὁλικὸ ἐμβαδὸν E_o:

$$\boxed{E_o = E_\pi + E_B}$$

ὅτι: $E_o = 324 + 93{,}6$ ἢ $\boldsymbol{E_o = 417{,}6\ cm^2}$.

Ὄγκος.

Παίρνομε ἕνα δοχεῖο σὲ σχῆμα πυραμίδος μὲ βάσι ἑξάγωνο. Τὸ γεμίζομε μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε ὑγρό, π.χ. νερό (σχ. 10 · 18 στ) καὶ μετὰ τὸ ἀδειάζομε σὲ ἕνα δοχεῖο, ποὺ ἔχει σχῆμα πρίσματος μὲ βάσι τὸ ἴδιο ἑξάγωνο τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὸ ὕψος της. Βλέπομε τότε ὅτι γιὰ νὰ γεμίσωμε τὸ πρίσμα θὰ χρειασθοῦμε τὸ περιεχόμενο τριῶν τέτοιων πυραμίδων, ποὺ σημαίνει ὅτι:

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἕνα τρίτο τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος της.

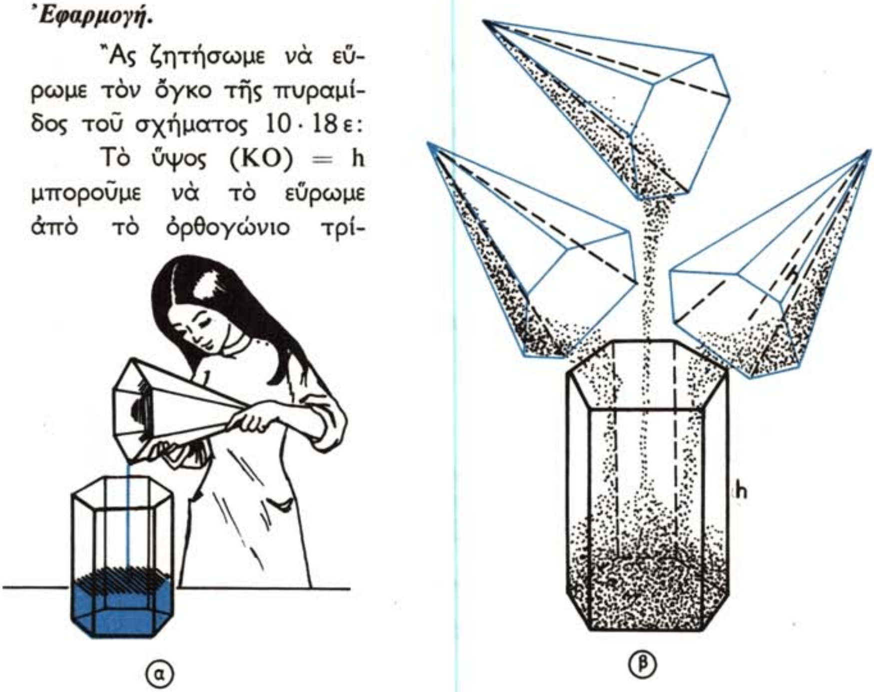
Ἂν λοιπὸν E_B εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ h τὸ ὕψος πυραμίδος, ὁ ὄγκος της V θὰ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσι:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot E_B \cdot h}$$

Ἐφαρμογή.

Ἂς ζητήσωμε νὰ εὕρωμε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδος τοῦ σχήματος 10 · 18 ε:

Τὸ ὕψος (KO) = h μποροῦμε νὰ τὸ εὕρωμε ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρί-



Σχ. 10·18 στ.

γωνο KOM, ἐφαρμόζοντας τὸ γνωστὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα:

$$(KM)^2 = (KO)^2 + (OM)^2 \quad \text{ἢ} \quad (KO)^2 = (KM)^2 - (OM)^2,$$

$$(KO)^2 = 12^2 - 5{,}2^2 = 144 - 27 = 117,$$

ἄρα: $KO = \sqrt{117}$ ἢ $h \simeq 10{,}8\ \text{cm}$.

Ἑπομένως:

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_B \cdot h = \frac{1}{3}\ 93{,}6 \times 10{,}8.$$

Τελικῶς: $V \simeq 1010{,}9\ \text{cm}^3$

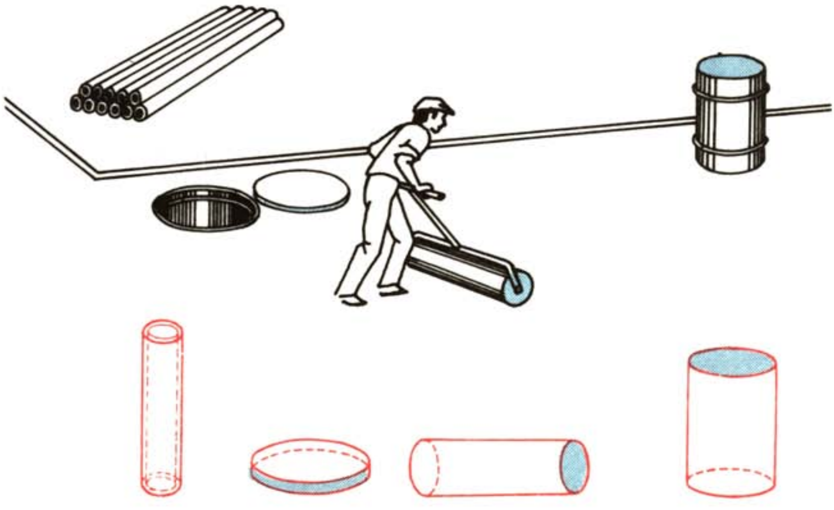
ἢ $V \simeq 1{,}01\ \text{lt}$.

Παρατήρησι.

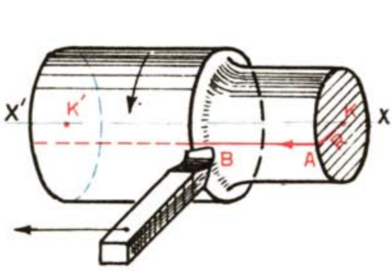
Γιὰ τὴν περίπτωσι τῆς κόλουρης πυραμίδος ἡ παράπλευρη καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εὑρίσκονται πάλι μὲ τὸν ἴδιο τρόπο. Προσθέτομε δηλαδὴ ἕνα-ἕνα τὰ ἐμβαδὰ τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν γιὰ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια. Γιὰ τὸ ὁλικὸ ἐμβαδὸν προσθέτομε στὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων.

10 · 19 Ὁ κύλινδρος.

α) Ἕνα βαρέλι, τὸ καπάκι τοῦ ὀχετοῦ, ἕνας σωλήν, ἕνας



Σχ. 10 · 19 α.

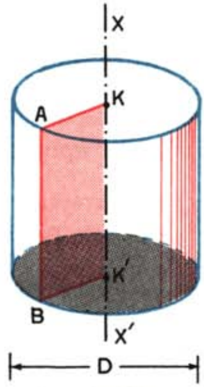


Σχ. 10 · 19 β.

στρωτήρ, ὅπως φαίνονται στὸ σχῆμα 10 · 19 α, λέμε ὅτι ἔχουν τὸ σχῆμα ***κυλίνδρου***.

Ἕνα τέτοιο στερεὸ προκύπτει καὶ ἀπὸ τὸ τορνίρισμα ἑνὸς κομματιοῦ Λ, ὅταν περιστρέφεται γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα XX′, ἐνῶ τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο τοῦ τόρνου (σχ. 10 · 19 β), μετακινεῖται παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα XX′ καὶ σὲ μία ἀπόστασι R ἀπὸ αὐτόν. Ὁ ἄξων XX′ λέγεται ***ἄξων τοῦ κυλίνδρου*** καὶ ἡ γραμμὴ AB, ποὺ εἶναι ἡ πορεία τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου τοῦ τόρνου (καὶ ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα XX′) λέγεται ***γενέτειρα***. Οἱ δύο κύκλοι K καὶ K′ εἶναι οἱ ***βάσεις***.

Ἂν ὁ ἄξων XX′ (ἢ ἡ KK′) εἶναι κάθετος στὶς βάσεις, τότε ὁ κύλινδρος λέγεται ***ὀρθός***. Ὁπότε ἡ KK′, ποὺ εἶναι ἴση μὲ τὴν γενέτειρα AB, θὰ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ κυλίνδρου (σχ. 10·19γ).

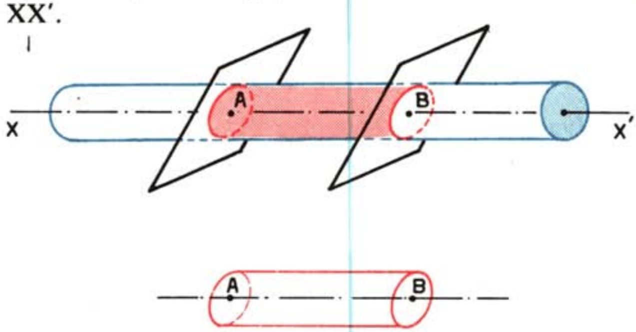


Σχ. 10·19γ.

Ὥστε:

Σὲ κάθε ὀρθὸ κύλινδρο τὸ ὕψος εἶναι ἴσο μὲ τὴν γενέτειρα.

Τὸν ἄξονα τοῦ σχήματος 10·19δ, ποὺ ἔχει τὸ σχῆμα ὀρθοῦ κυλίνδρου, τὸν κόβομε λοξὰ σὲ δύο θέσεις, A καὶ B, μὲ ἕνα πριόνι ἔτσι, ὥστε τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο βάσεων A καὶ B νὰ εἶναι μὲν παράλληλα μεταξύ τους, χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι κάθετα πρὸς τὸν ἄξονα XX′.



Σχ. 10·19δ.

Τὸ στερεό, ποὺ προκύπτει, εἶναι ἕνας ***πλάγιος κύλινδρος***.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα, ὅτι στὸν κύλινδρο, ὅταν εἶναι:

Ὀρθός:

α) Ἡ γενέτειρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος.

β) Ἡ γενέτειρα εἶναι παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα.

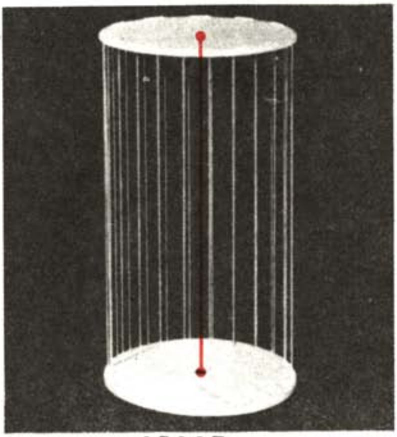
γ) Ἡ γενέτειρα εἶναι κάθετη στὶς βάσεις.

Πλάγιος:

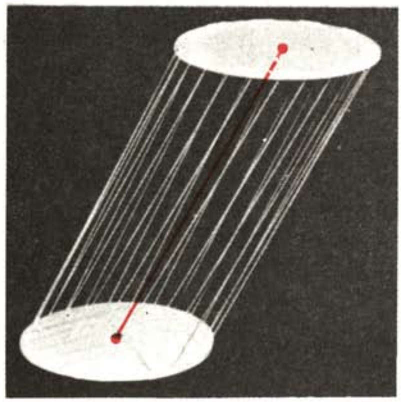
α) Ἡ γενέτειρα εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ ὕψος.

β) Ἡ γενέτειρα εἶναι παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα.

γ) Ἡ γενέτειρα εἶναι πλαγία στὶς βάσεις.



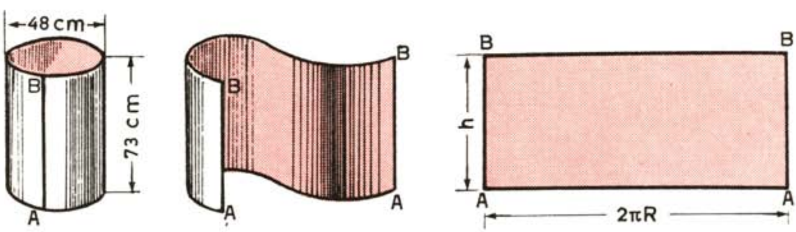
ΟΡΘΟΣ



ΠΛΑΓΙΟΣ

Ἐπιφάνεια.

Ἀπὸ ἕνα βαρέλι ἀπὸ λαμαρίνα (σχ. 10·19 ε) ἀφαιροῦμε τὰ δύο στεφάνια καὶ τὴν ἐπάνω καὶ κάτω βάσι καὶ τὸ σχίζομε κατὰ



Σχ. 10·19 ε.

μῆκος μιᾶς γενετείρας ΑΒ. Τὸ ἀνάπτυγμα, ποὺ παίρνομε, εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ἡ μία διάστασί του εἶναι ἴση μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, δηλαδή:

$$3{,}14 \times 48 \text{ cm} = 150{,}72 \text{ cm},$$

ἐνῶ ἡ ἄλλη εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, δηλαδὴ 73 cm.

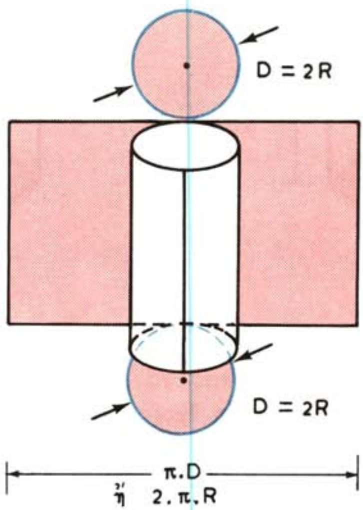
Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα ὅτι: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ γινόμενο:

$$150{,}72 \times 73 = 11\,002{,}56 \text{ cm}^2.$$

Δηλαδή:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἂν τώρα στὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας προσθέ-



Σχ. 10·19 στ.

σωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου, θὰ εὕρωμε τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου (σχ. 10 · 19 στ).

Ἔχομε ἐπομένως τοὺς παρακάτω τύπους:

$$\boxed{E_\pi = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h}$$

$$\boxed{E_o = E_\pi + 2 \cdot E_B} \quad ἢ \quad \boxed{E_o = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot R^2}$$

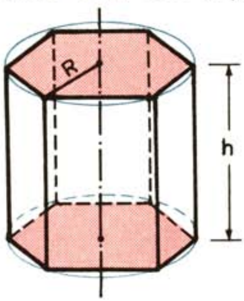
ὅπου: E_B εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως.

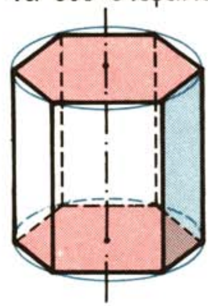
Ὁ τελευταῖος τύπος γράφεται καὶ μὲ τὴν μορφή:

$$\boxed{E_o = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (h + R)}$$

Ὄγκος.

Γύρω ἀπὸ ἕνα σιδερένιο ὀρθὸ ἑξαγωνικὸ πρίσμα τοποθετοῦμε δύο στεφάνια, ποὺ περικλείουν τὶς δύο βάσεις (σχ. 10 · 19 ζ). Τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα, ποὺ εἶναι οἱ βάσεις τοῦ πρίσματος, εἶναι ἐγγεγραμμένα μέσα στὶς δύο περιφέρειες, ποὺ εἶναι τὰ δύο στεφάνια. Ἂν





Σχ. 10 · 19 ζ.

κολλήσωμε λαμαρίνα γύρω ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ στεφάνια, θὰ ἔχωμε ἕνα κύλινδρο, μέσα στὸν ὁποῖο ἔχομε βάλει ἕνα ὀρθὸ πρίσμα, ποὺ οἱ ἀκμές του εἶναι γενέτειρες τοῦ κυλίνδρου. Ἂν τώρα φαντασθοῦμε ὅτι κάνομε τὴν ἴδια δουλειὰ μὲ ἄλλα πρίσματα, ποὺ ἔχουν βάσεις κανονικὸ 12γωνο, ἢ 24γωνο κ.λπ., ἀρκεῖ νὰ μὴ ἀλλάζῃ ἡ ἀκτὶς στὰ στεφάνια, καταλήγομε στὸ συμπέρασμα, ὅτι κάποια στιγμὴ ὁ κύλινδρος καὶ τὸ ὀρθὸ πρίσμα δὲν θὰ διαφέρουν πρακτικά. Δηλαδὴ θὰ ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο, ποὺ σημαίνει ὅτι:

Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

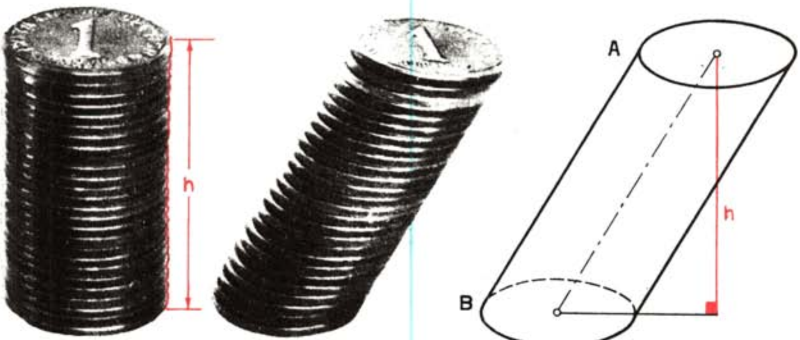
Δηλαδή:

$$\boxed{V = E_B \cdot h}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως E_B, εἶναι ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ παραπάνω τύπος παίρνει τὴν ἔκφρασι:

$$\boxed{V = \pi \cdot R^2 \cdot h}$$

Στὸν πλάγιο κύλινδρο θὰ ἔχωμε τὸν ἴδιο κανόνα, ποὺ σὰν τύπος γράφεται ὅπως καὶ στὸν ὀρθό, μόνο ποὺ τὸ ὕψος h εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴν γενέτειρα AB (σχ. 10 · 19 η).



Σχ. 10·19 η.

Ἐφαρμογές.

α) Ὑπολογίσετε τὸ βάρος, ποὺ ἔχει κάθε μέτρο (τρέχον μέτρο) ἑνὸς στρογγυλοῦ σιδήρου μὲ διάμετρο 38 mm (σχ. 10 · 19 θ).

Τὸ σχῆμα τοῦ σιδήρου ποὺ μᾶς δίνουν εἶναι ἕνας ὀρθὸς κύλινδρος μὲ ἀκτῖνα βάσεως 19 mm, δηλαδὴ 0,19 dm. Ἑπομένως ὁ ὄγκος, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε, θὰ εἶναι γιὰ μῆκος ἄξονος 1 m = 10 dm:

$$V = 3{,}14 \times 0{,}19^2 \times 10 \text{ dm}^3$$

ἤ

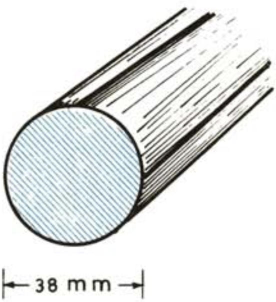
$$V \simeq 1{,}13 \text{ dm}^3.$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,80 kg/dm^3, σημαίνει ὅτι τὸ βάρος $G = 7{,}80 \times 1{,}13 = 8{,}81$ kg.

Ὥστε:

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εὑρίσκομε τὸν ὄγκο του καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σώματος.

β) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς λαμαρίνας ποὺ θὰ χρειασθῆτε γιὰ νὰ φτιάξετε 100 κουτιὰ κονσέρβας μὲ διάμετρο 7,50 cm καὶ ὕψος 10,00 cm (σχ. 10 · 19 ι).



Σχ. 10 · 19 θ.

Σχ. 10 · 19 ι.

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια θὰ εὑρεθῆ ὡς ἑξῆς:

Παράπλευρος ἐπιφάνεια: $3{,}14 \times 7{,}50 \times 10{,}00 = 235{,}50$ cm^2

Ἐπιφάνεια δύο βάσεων: $2 \times 3{,}14 \times 3{,}75^2 \simeq 88{,}30$ cm^2

Ἐπιφάνεια ὁλικὴ κομματιοῦ: 323,80 cm^2

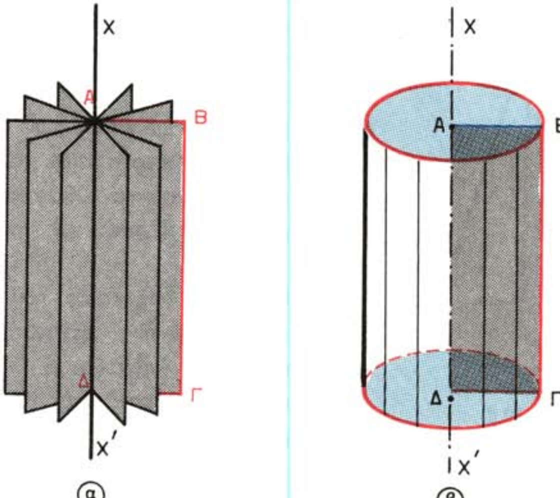
Ἑπομένως γιὰ τὰ 100 κουτιὰ κονσέρβας θὰ χρειασθοῦν:

$323{,}80 \times 100 = 32\,380$ cm^2 λαμαρίνας, δηλαδὴ περίπου 3,24 m^2.

Πῶς φτιάχνεται ἕνας κύλινδρος.

Γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα XX′ περιστρέφομε τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ (σχ. 10 · 19 ια).

Τότε ἡ ΒΓ σχηματίζει τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἀκτῖνες τῶν κύκλων τῶν βάσεών του καὶ ὁ ἄξων XX′ περιστροφῆς, ἄξων τοῦ κυλίνδρου. Τὰ σχήματα αὐτά, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ περιστροφὴ γύρω ἀπὸ ἕνα ἄξονα, τὰ λέμε σχήματα ***ἐκ περιστροφῆς***.



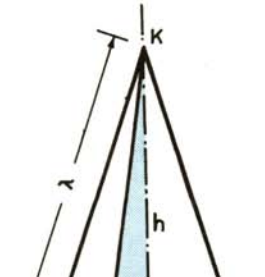
Σχ. 10·19 ια.

10 · 20 Ὁ κῶνος.

Ἂν ἀποσπάσωμε τὴν ὀροφὴ ἀπὸ ἕνα κυλινδρικὸ πύργο, ὅπως τοῦ σχήματος 10 · 20 α, σχηματίζονται δύο στερεὰ σχήματα. Τὸ

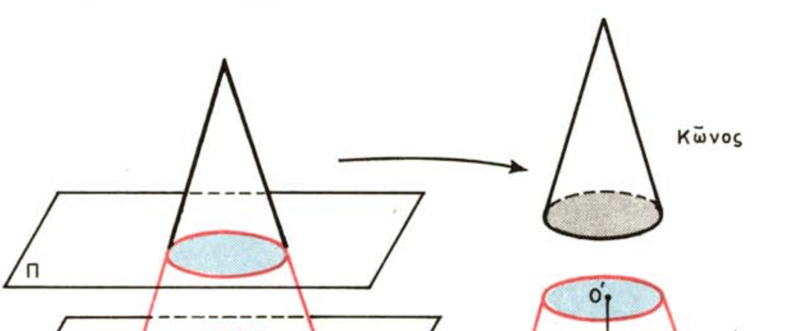
Σχ. 10·20 α.

ἕνα εἶναι ὁ γνωστός μας ὀρθὸς κύλινδρος. Τὸ ἄλλο εἶναι ἕνα καινούργιο στερεὸ σχῆμα, ποὺ τὸ ὀνομάζομε ***ὀρθὸ κῶνο***. Σ' αὐτὸ διακρίνομε: τὴν ***βάσι***, ποὺ εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου (Ο · ΑΒΓ)· τὶς ***γενέτειρες***, ποὺ εἶναι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν τὴν ***κορυφὴ*** Κ τοῦ κώνου μὲ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τῆς βάσεως· καὶ τὸ ***ὕψος*** ΚΟ, ποὺ εἶναι ἡ ἀπόστασι τῆς κορυφῆς Κ ἀπὸ τὴν βάσι τοῦ κώνου (σχ. 10 · 20 β). Στὴν περίπτωσι τοῦ ὀρθοῦ κώνου τὸ ὕψος εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, ποὺ ἑνώνει τὴν κορυφὴ μὲ τὸ κέντρο τῆς βάσεως.



Σχ. 10·20 β.

Ἂν τώρα ἕνα κῶνο τὸν κόψωμε σὲ δύο κομμάτια μὲ ἕνα ἐπίπεδο Π παράλληλο πρὸς τὸ ἐπίπεδο Ε τῆς βάσεως, ἀποκτοῦμε δύο στερεά (σχ. 10 · 20 γ). Τὸ ἕνα, ποὺ εἶναι ἀπὸ ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο Π, ἔχει τὸ σχῆμα τοῦ γνωστοῦ μας κώνου, ἐνῶ τὸ ἄλλο εἶναι ἕνα καινούργιο στερεὸ σχῆμα, ποὺ τὸ λέμε ***κόλουρο κῶνο***. Ὁ κόλουρος



Σχ. 10·20 γ.

κῶνος ἔχει γιὰ βάσεις δύο κύκλους, ἕνα μεγαλύτερο καὶ ἕνα μικρότερο, ὕψος του δὲ εἶναι ἡ ἀπόστασι τῶν δύο βάσεων.

Ἐπιφάνεια.

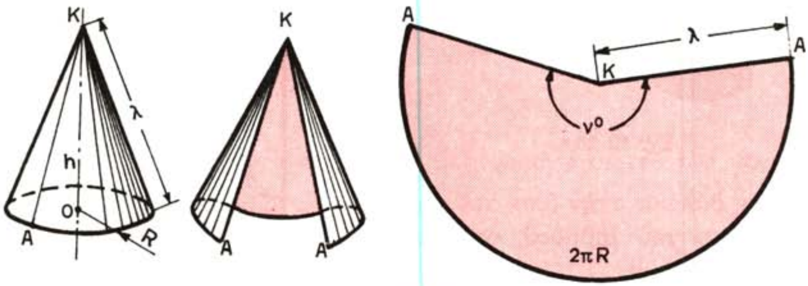
Σχίζομε τὴν πλευρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας ΚΑ καὶ ἐφαρμόζοντας τὸν τύπο, ποὺ εὑρήκαμε στὴν περίπτωσι τῆς κανονικῆς πυραμίδος, εὑρίσκομε (σχ. 10·20 δ):

— Γιὰ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια:

$$\boxed{E_\pi = \frac{\text{περίμετρος βάσεως} \times \text{ἀκμὴ}}{2}}$$

Δηλαδή:

$$\boxed{E_\pi = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \lambda}{2}} \quad \text{ἢ τελικῶς} \quad \boxed{E_\pi = \pi \cdot R \cdot \lambda}$$



Σχ. 10·20 δ.

— Γιὰ τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια:

$$\boxed{E_o = E_\pi + E_B}$$

ἀπὸ τὴν ὁποία εὑρίσκομε:

$$\boxed{E_o = \pi \cdot R \cdot \lambda + \pi \cdot R^2}$$

Ὁ τελευταῖος τύπος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

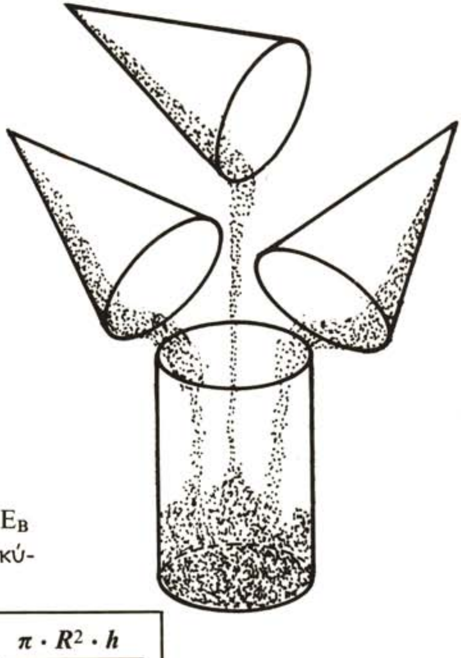
$$\boxed{E_o = \pi \cdot R \cdot (\lambda + R)}$$

Ὄγκος.

Ὅπως καὶ στὴν πυραμίδα, ἔτσι καὶ στὸν κῶνο, τὸν ὄγκο του τὸν εὑρίσκομε μὲ τὴν βοήθεια τοῦ τύπου (σχ. 10 · 20 ε):

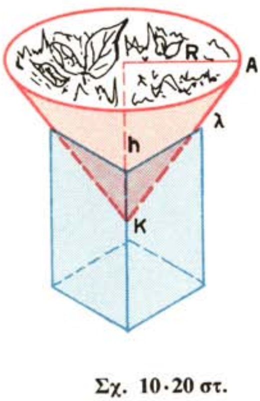
$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot E_B \cdot h}$$

Σχ. 10·20 ε.



καὶ ἂν βάλωμε στὴν θέσι τοῦ E_B τὸν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου θὰ εὕρωμε:

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}}$$



Σχ. 10·20 στ.

Ἐφαρμογή.

Ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν ὄγκο ἑνὸς κωνικοῦ ἀνθοδοχείου μὲ ὕψος $h = 32$ cm καὶ γενέτειρα $\lambda = 40$ cm (σχ. 10 · 20 στ).

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα θὰ ἔχωμε:

$$\lambda^2 = R^2 + h^2$$

ἢ μὲ τὰ δεδομένα:

$$40^2 = R^2 + 32^2$$

$$1600 = R^2 + 1024$$

Ἑπομένως: $R^2 = 1600 - 1024$ καὶ $R = \sqrt{576}.$

Ἀπὸ τοὺς πίνακες εὑρίσκομε: $R \simeq 24$ cm.

Ἐφαρμόζομε τώρα τοὺς τύπους:

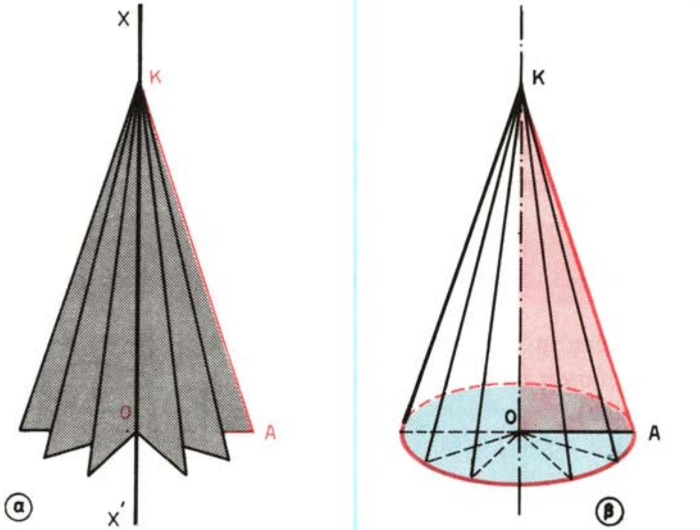
$E_\pi = \pi \cdot R \cdot \lambda = \pi \times 24 \times 40$ $\qquad E_\pi \simeq 3014\ \text{cm}^2$

$E_o = \pi \cdot R \cdot (\lambda + R) = \pi \times 24 \times (40 + 24)$ $\qquad E_o \simeq 4823\ \text{cm}^2$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \times 24^2 \times 32}{3} \qquad V \simeq 19\,292\ \text{cm}^3 \quad \text{ἤ} \quad V \simeq 19{,}3\ \text{dm}^3.$$

Πῶς κατασκευάζεται ἕνας κῶνος.

Γύρω ἀπὸ ἄξονα ΧΧ′ περιστρέφομε τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΚΟΑ. Τότε ἡ ΚΑ κατασκευάζει τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου (σχ. 10 · 20 ζ), ἐνῶ ἡ πλευρὰ ΟΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῆς βά-



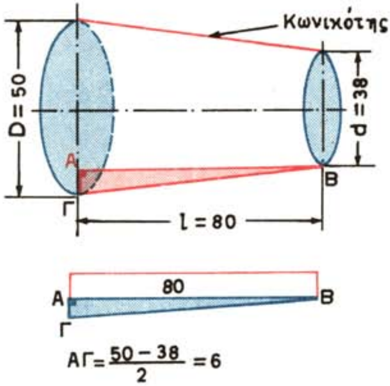
Σχ. 10·20 ζ.

σεως. Καὶ ἀφοῦ τὸ σχῆμα αὐτό, ὁ κῶνος, κατασκευάζεται ἀπὸ περιστροφὴ γύρω ἀπὸ ἄξονα ἑνὸς ἄλλου γεωμετρικοῦ σχήματος (ἑνὸς τριγώνου) ὁ κῶνος ποὺ προκύπτει, ὅπως καὶ στὸν κύλινδρο, λέγεται σχῆμα ***ἐκ περιστροφῆς***.

10 · 21 Περὶ κωνικότητος.

Πρόβλημα.

Ὑπολογίσετε τὴν κλίσι ἐπὶ τοῖς %, ποὺ ἔχει ἡ ἀκμὴ στὸ στερεὸ τοῦ σχήματος 10 · 21 α, ποὺ ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου.



Σχ. 10·21 α.

Λύσι :

Ὅπως βλέπομε, στὰ 80 mm ὕψος τοῦ κολούρου κώνου τοῦ σχήματος, οἱ ἀκτῖνες διαφέρουν κατὰ 6 mm $\left(\frac{50-38}{2} = 6\right)$, ποὺ σημαίνει ὅτι γιὰ ὕψος 100 mm, ποὺ ζητοῦμε, στὸν κόλουρο κῶνο ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων θὰ εἶναι:

$$6 \times \frac{100}{80} = 7{,}5 \text{ mm}.$$

Δηλαδὴ ἡ κλίσι τῆς γενετείρας εἶναι 7,5 %. Τὸ διπλάσιο αὐτοῦ τὸ λέμε ***κωνικότητα***. Βλέπομε λοιπὸν ὅτι:

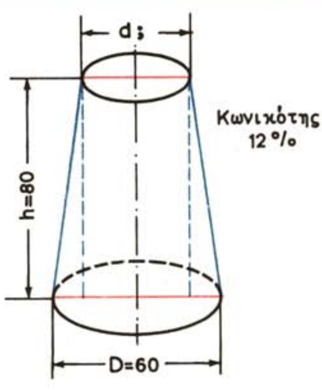
Ἡ κωνικότης εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο διαμέτρων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ἂν τὸ ὕψος του θεωρηθῇ ὅτι γίνεται ἴσο μὲ 100.

(mm, cm, dm, m ἀνάλογα μὲ τὶς μονάδες μετρήσεως τῶν διαμέτρων τῶν δύο βάσεων).

Ἐφαρμογή.

Ἡ κωνικότης ἑνὸς στερεοῦ κοματιοῦ εἶναι 12 %. Ἡ μεγάλη διάμετρος εἶναι 60 mm καὶ τὸ ὕψος 80 mm. Πόσο εἶναι ἡ ἄλλη διάμετρος (σχ. 10 · 21 β);

Ἡ λύσι, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, εἶναι εὔκολη, ἀρκεῖ νὰ ποῦμε:



Σχ. 10·21 β.

Γιὰ διαφορὰ διαμέτρων	12 mm	τὸ ὕψος εἶναι 100 mm
Γιὰ διαφορὰ διαμέτρων	x	τὸ ὕψος εἶναι 80 mm,

ὁπότε προκύπτει ὅτι:

$$x = 12 \times \frac{80}{100} = 9{,}6 \text{ mm}.$$

Ἡ ζητουμένη ἑπομένως μικρὴ διάμετρος τοῦ κώνου θὰ εἶναι:

$$d = 60 - 9{,}6 = 50{,}4 \text{ mm}.$$

Τύπος.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε μέχρι τώρα γιὰ τὴν κωνικότητα K, προκύπτει ὁ ἀκόλουθος τύπος:

$$\boldsymbol{K = \frac{D - d}{h} \cdot 100}$$

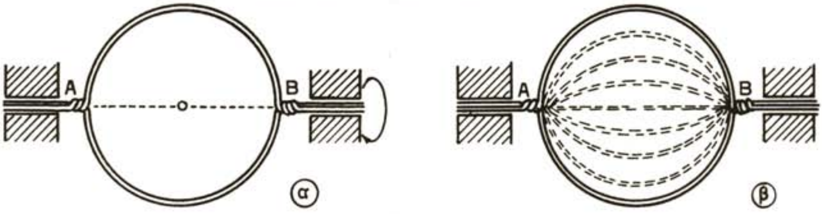
10 · 22 Ἡ σφαίρα.

Τὸ σχῆμα τῆς μπάλλας, οἱ μπίλιες τοῦ ρουλεμάν, οἱ φυσαλλίδες τοῦ παιγνιδιοῦ τοῦ σχήματος 10 · 22 α, λέμε ὅτι ἔχουν τὸ σχῆμα τῆς ***σφαίρας***.

Σχ. 10·22 α.

Πῶς φτιάχνεται μία σφαίρα.

Παίρνομε ἕνα ἄξονα, στὸν ὁποῖο προσαρμόζομε ἕνα κυκλικὸ κομμάτι λαμαρίνας, χαρτονιοῦ ἢ κόντρα πλακὲ (σχ. 10 · 22 β) καὶ τὸ γυρίζομε παρὰ πολὺ γρήγορα. Τότε ἡ περιστροφὴ αὐτὴ μᾶς δημιουργεῖ τὴν ἐντύπωσι, ὅτι ἐπάνω στὸν ἄξονα εἶναι τοποθετημένα πολλὰ τέτοια ὅμοια κομμάτια τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο καὶ ὅλα μαζὶ σχηματίζουν ἕνα στερεό, ποὺ δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ αὐτὸ ποὺ ὀνομάσαμε παραπάνω ***σφαίρα***.

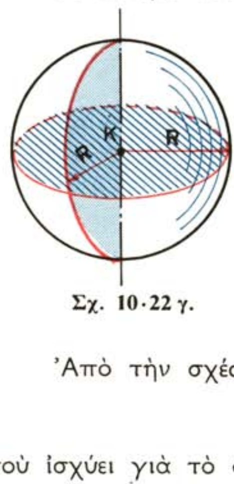


Σχ. 10·22 β.

Ὥστε:

Σφαίρα εἶναι τὸ στερεό, ποὺ γεννιέται ἀπὸ τὴν περιστροφὴ ἑνὸς κύκλου γύρω ἀπὸ μία του διάμετρο.

Τὸ κέντρο τοῦ κύκλου τὸ λέμε καὶ ***κέντρο*** τῆς σφαίρας καὶ τὴν ἀκτῖνα του ***ἀκτῖνα*** τῆς σφαίρας (σχ. 10·22 γ).



Σχ. 10·22 γ.

Ἂν τώρα μὲ ἕνα ἐπίπεδο κόψωμε τὴν σφαίρα σὲ δύο κομμάτια, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10·22 δ, τότε βλέπομε πὼς ἡ τομὴ εἶναι ***κύκλος*** μὲ ἀκτῖνα r, ποὺ τὴν ὑπολογίζομε, ἂν ξέρωμε τὴν ἀπόστασι h τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο Π τῆς τομῆς. Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὴν ἀκτῖνα r θυμόμαστε τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα.

Ἀπὸ τὴν σχέσι:

$$R^2 = r^2 + h^2$$

ποὺ ἰσχύει γιὰ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΚΟΑ, εὑρίσκομε:

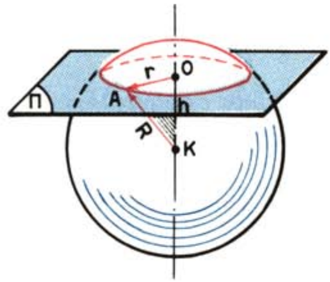
$$r^2 = R^2 - h^2$$

καὶ τελικῶς τὸν τύπο:

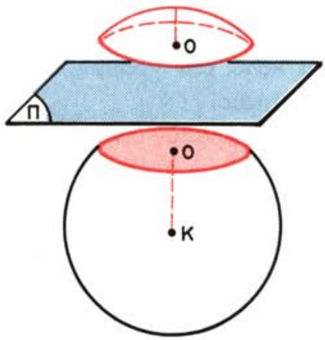
$$\boxed{r = \sqrt{R^2 - h^2}}$$

Ἂν τὸ ἐπίπεδο Π περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο Κ τῆς σφαίρας (σχ. 10·22 ε), τότε ἡ ἀπόστασι $h = 0$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ τομὴ εἶναι κύκλος μὲ ἀκτῖνα ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Τὸν κύκλο αὐτὸν

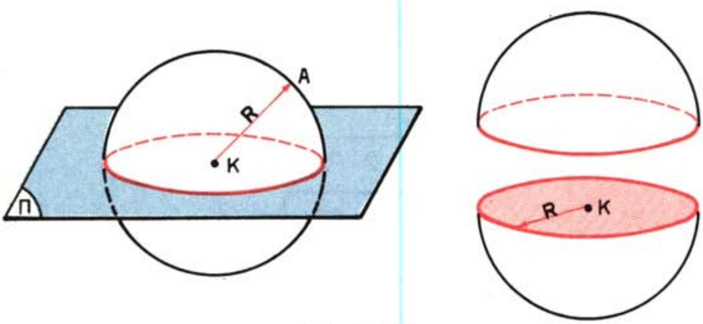
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



τὸν λέμε ***μεγάλο κύκλο***, ἐνῶ κάθε ἄλλο κύκλο τὸν λέμε ***μικρὸ κύκλο***. Τὰ δύο μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίσθηκε ἡ σφαίρα ἀπὸ τὸν μεγάλο κύκλο, ἂν τὰ ζυγίσωμε, βλέπομε πὼς ἔχουν τὸ ἴδιο βάρος (ἀρκεῖ νὰ εἶναι κατασκευασμένα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὑλικὸ καὶ μὲ τὴν ἴδια πυκνότητα), ποὺ σημαίνει ὅτι εἶναι ἴσα. Αὐτὰ τὰ κομμάτια τὰ λέμε ***ἡμισφαίρια***.



Σχ. 10·22 δ.



Σχ. 10·22 ε.

Συμπεράσματα.

α) ***Μεγάλος κύκλος*** μιᾶς σφαίρας λέγεται κάθε κύκλος, ποὺ εἶναι τομὴ τῆς σφαίρας μὲ ἐπίπεδο, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας. ***Κέντρο*** κάθε μεγάλου κύκλου εἶναι τὸ κέντρο τῆς σφαίρας καὶ ἡ ***ἀκτὶς*** του εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

β) ***Ἡμισφαίριο*** λέγεται κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ δύο κομμάτια, στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ σφαίρα ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδο, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας.

γ) ***Μικρὸς κύκλος*** (ἢ ἁπλῶς κύκλος) μιᾶς σφαίρας λέγεται κάθε κύκλος, ποὺ εἶναι τομὴ τῆς σφαίρας μὲ ἐπίπεδο, ποὺ δὲν περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο της.

Ἐπιφάνεια.

Τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δὲν μποροῦμε νὰ τὴν ἀναπτύξωμε, ὅπως κάναμε μὲ τὸν κύλινδρο καὶ τὸν κῶνο. Δηλαδὴ ἀφοῦ τὴν σχίσωμε κατὰ μία γραμμή, δὲν μποροῦμε νὰ τὴν ἁπλώσωμε ἐπάνω σὲ ἕνα ἐπίπεδο.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅμως E τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα R μᾶς τὸ δίνει ὁ ἀκόλουθος τύπος:

$$\boxed{E = 4 \cdot \pi \cdot R^2}$$

ἤ, ἂν ξέρωμε τὴν διάμετρο $D = 2 \cdot R$:

$$\boxed{E = \pi \cdot D^2}$$

Ὄγκος.

Τὸν ὄγκο V μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα R μᾶς τὸν δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

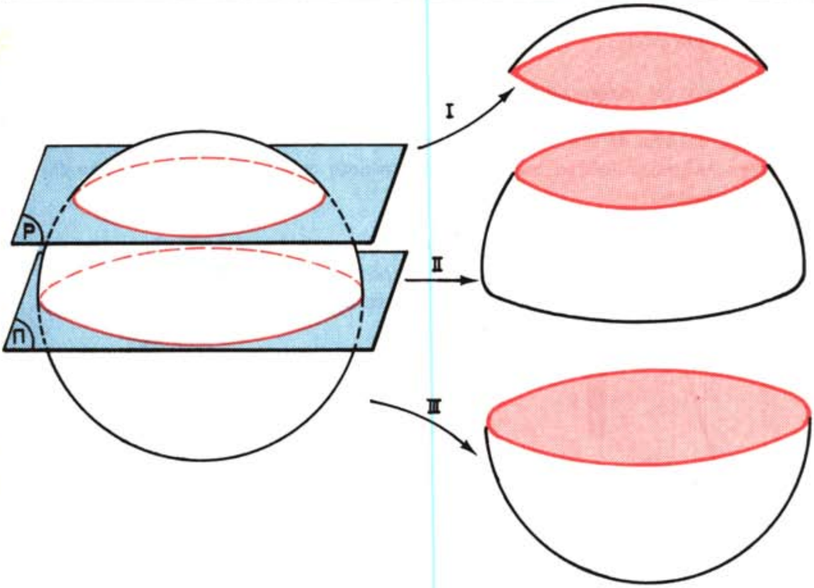
ἤ, ἂν ξέρωμε τὴν διάμετρο $D = 2 \cdot R$:

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot D^3}{6}}$$

10 · 23 Τομὲς σφαίρας καὶ ἐπιπέδου.

Κόβομε μία σφαίρα σὲ τρία κομμάτια, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 10 · 23 α προσέχοντας, ὥστε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ νὰ εἶναι μεταξύ τους παράλληλα. Τὰ κομμάτια, ποὺ προκύπτουν, τὰ ὀνομάζομε ***σφαιρικὰ τμήματα***. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ I καὶ III λέμε ὅτι εἶναι μὲ ***μία βάσι***, ἐνῶ τὸ II ὅτι εἶναι μὲ ***δύο βάσεις***. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ II ὀνομάζεται ***σφαιρικὴ ζώνη***.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

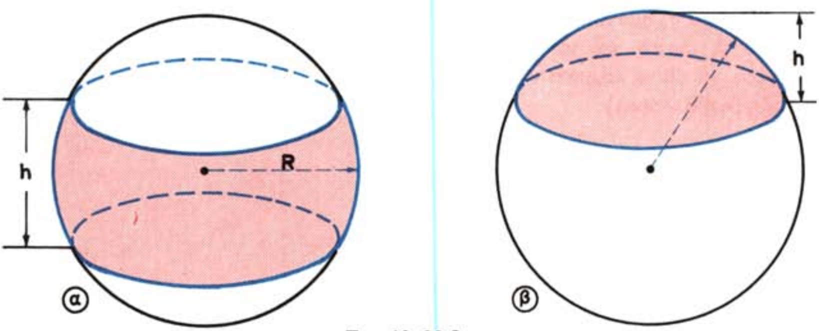


Σχ. 10·23 α.

Τύποι :

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης [σχ. 10 · 23 β (α)]:

$$\boxed{E = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h}$$



Σχ. 10·23 β.

Γιὰ τὸν ὄγκο σφαιρικοῦ τμήματος :

Μόνο γιὰ τὸ σφαιρικὸ τμῆμα μὲ μία βάσι [σχ. 10 · 23 β (β)]:

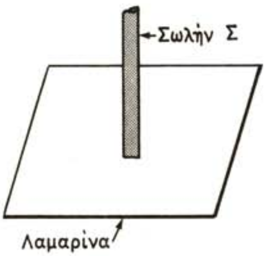
$$\boxed{V_1 = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3 \cdot R - h)}$$

10 · 24 Ἀσκήσεις.

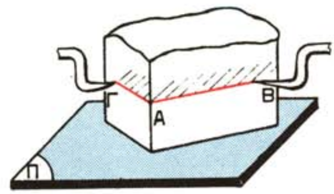
Ἀπὸ τὶς παραγράφους 10 · 1 ἕως 10 · 16.

1. Ἐπάνω σὲ ἕνα κομμάτι λαμαρίνας, ὅπως τοῦ σχήματος 10 · 24 α, θέλομε νὰ συγκολλήσωμε κάθετα σωλῆνα Σ. Μὲ ποιούς τρόπους θὰ κάνωμε τὸν ἔλεγχο τῆς καθετότητος;

2. Μὲ ποιό τρόπο θὰ ἐργασθοῦμε, ὥστε νὰ ἐπιτύχωμε τομὴ παράλληλη πρὸς τὴν βάσι Π, ἐπάνω στὴν ὁποία κάθεται τὸ κομμάτι Α (σχ. 10 · 24 β);



Σχ. 10 · 24 α.

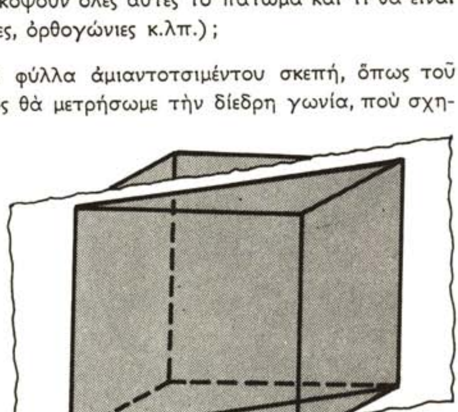


Σχ. 10 · 24 β.

3. Ἀπὸ τὸ ταβάνι μιᾶς αἴθουσας κρέμονται 4 φωτιστικὰ σώματα. Ἂν μακρύνωμε τὶς ἁλυσίδες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες κρέμονται τὰ σώματα, μέχρι νὰ φτάσουν στὸ πάτωμα, μπορεῖτε νὰ πῆτε πῶς θὰ κόψουν ὅλες αὐτὲς τὸ πάτωμα καὶ τί θὰ εἶναι μεταξύ τους (παράλληλες, ἀσύμβατες, ὀρθογώνιες κ.λπ.);

4. Ἔχομε νὰ σκεπάσωμε μὲ φύλλα ἀμιαντοτσιμέντου σκεπή, ὅπως τοῦ σπιτιοῦ τοῦ σχήματος 10 · 24 γ. Πῶς θὰ μετρήσωμε τὴν δίεδρη γωνία, ποὺ σχηματίζει ἡ σκεπή, γιὰ νὰ παραγγείλωμε τὸ εἰδικὸ κομμάτι τῆς κορυφῆς (καβαλλάρης);

Σχ. 10 · 24 γ.



Σχ. 10 · 24 δ.

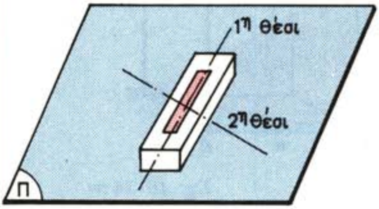
5. Τὸ κοπτικὸ ἐργαλεῖο πλάνης καθὼς κινεῖται, φτιάχνει ἐπάνω σὲ ἕνα κομμάτι μία ἐπίπεδη ἐπιφάνεια. Ἂν ξέρωμε πὼς τὸ ἐπίπεδο ἐφαρμογῆς τῆς πλάνης εἶναι καλὰ ἀλφαδιασμένο (ὁριζόντιο), τί θὰ εἶναι τὸ ἐπίπεδο, ποὺ θὰ φτιάξη τὸ ἐργαλεῖο τῆς πλάνης;

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

6. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου. Ποιό εἶναι τὸ στερεὸ σχῆμα τοῦ δωματίου;

7. Ἕνα κύβο τὸν χωρίζομε σὲ δύο κομμάτια (σχ. 10·24 δ). Τί στερεὰ θὰ προκύψουν;

8. Θέλομε νὰ ἐλέγξωμε, ἂν τὰ σκαλοπάτια μιᾶς σκάλας (π.χ. ὅπως ἐκείνης τοῦ σχήματος 10·4 γ) εἶναι μεταξύ τους παράλληλα. Πῶς θὰ τὸ κάνωμε, ἂν διαθέτωμε μόνο ἕνα ξύλινο μέτρο;



Σχ. 10·24 ε.

9. Ὅταν θέλωμε νὰ ἀλφαδιάσωμε μία ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, γιατί βάζομε τὸ ἀλφάδι μας τουλάχιστον σὲ δύο θέσεις, σταυρωτά (σχ. 10·24 ε);

10. Ὅταν θέλωμε νὰ ἐλέγξωμε ἂν μία πόρτα (ἢ γενικότερα ἕνα ἐπίπεδο) εἶναι κατακόρυφη, χρησιμοποιοῦμε τὸ νῆμα τῆς στάθμης. Μπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε γιατί;

11. Μετατρέψετε σὲ λίτρα τοὺς παρακάτω ὄγκους:

0,45 m^3	4,03 m^3	0,02 m^3
475 dm^3	0,32 dm^3	2,75 dm^3
87,5 cm^3	1253 cm^3	1003 cm^3.

12. Ἡ ἀκμὴ δοχείου σχήματος κύβου εἶναι 12,3 cm. Νὰ εὕρετε: Τὸν ὄγκο του σὲ λίτρα καὶ τὴν ὁλικὴ του ἐπιφάνεια. Ἂν τὸ δοχεῖο εἶναι κατασκευασμένο ἀπὸ λαμαρίνα βάρους 3,5 kg ἀνὰ m^2, πόσο θὰ ζυγίζῃ ὁλόκληρο;

($V \simeq 1{,}86\ lt$, $E_o = 907{,}7\ cm^2$, $G = 317{,}7\ g$)

13. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κουτιοῦ μὲ σχῆμα κύβου εἶναι 140 dm^3. Νὰ εὕρετε σὲ χιλιοστόμετρα τὴν ἀκμή του. Μετὰ νὰ ὑπολογίσετε τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

($a = 519\ mm$, $E_o = 161{,}6\ dm^2$)

14. Νὰ εὕρετε τὴν κυβικὴ ρίζα τῶν παρακάτω ἀριθμῶν:

175 879 647 2197 9261 32 768 8000 27 5832.

15. Νὰ εὕρετε τὴν κυβικὴ ρίζα (μὲ ἀκρίβεια δεκάτου ἀκεραίας μονάδος) τῶν παρακάτω ἀριθμῶν:

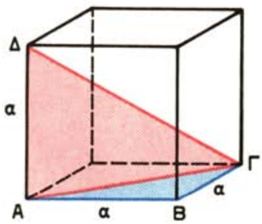
1950 2500 2617 93 105 45 000 12 615 39 000.

16. Νὰ εὕρετε μὲ τί ἰσοῦται ἡ τρίτη δύναμι τῶν παρακάτω ἀριθμῶν:

0,1 1 10 8,1 2,2 cm 4,1 dm 0,51 m.

17. Πόσο ζυγίζει χάλκινος κύβος πλήρης, ἀκμῆς $\alpha = 15$ cm; (Εἰδικὸ βάρος χαλκοῦ 8,9 kg/dm^3). *(30 g)*

18. Ἡ διαγώνιος σιδερένιου κύβου εἶναι 17,3 mm (σχ. 10 · 24 στ). Ποιό εἶναι τὸ βάρος του, ὅταν ξέρωμε ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 kg/dm^3; *(7,8 g)*



$AB^2 + B\Gamma^2 = A\Gamma^2$

$A\Gamma^2 + A\Delta^2 = \Gamma\Delta^2$

ἄρα $3 \cdot \alpha^2 = \Gamma\Delta^2$

δηλαδὴ $\alpha^2 = \frac{\Gamma\Delta^2}{3}$

Σχ. 10·24 στ.

19. Νὰ εὕρετε τὸ εἰδικὸ βάρος κύβου, ὁ ὁποῖος ζυγίζει 0,568 kg καὶ ἔχει ἀκμὴ 4,3 cm. *(≃ 7,14 kg/dm^3)*

20. Τὸ βάρος σώματος εἶναι 61,6 g, ἐνῶ τὸ εἰδικὸ βάρος του εἶναι 8,8 kg/dm^3. Ζητοῦμε τὸν ὄγκο τοῦ σώματος καθὼς καὶ τὸ μῆκος α τῆς ἀκμῆς ἑνὸς κύβου μὲ τὸ ἴδιο βάρος καὶ ὑλικό. *(V = 7 cm^3, a = 1,9 cm)*

21. Κυβικὴ δεξαμενὴ ἀκμῆς 2,5 m εἶναι γεμάτη πετρέλαιο ντῆζελ. Πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ πετρελαίου; (Εἰδικὸ βάρος πετρελαίου ντῆζελ 0,82 kg/dm^3). *(≃ 12,8 t)*

Ἀπὸ τὴν παράγραφο 10 · 17.

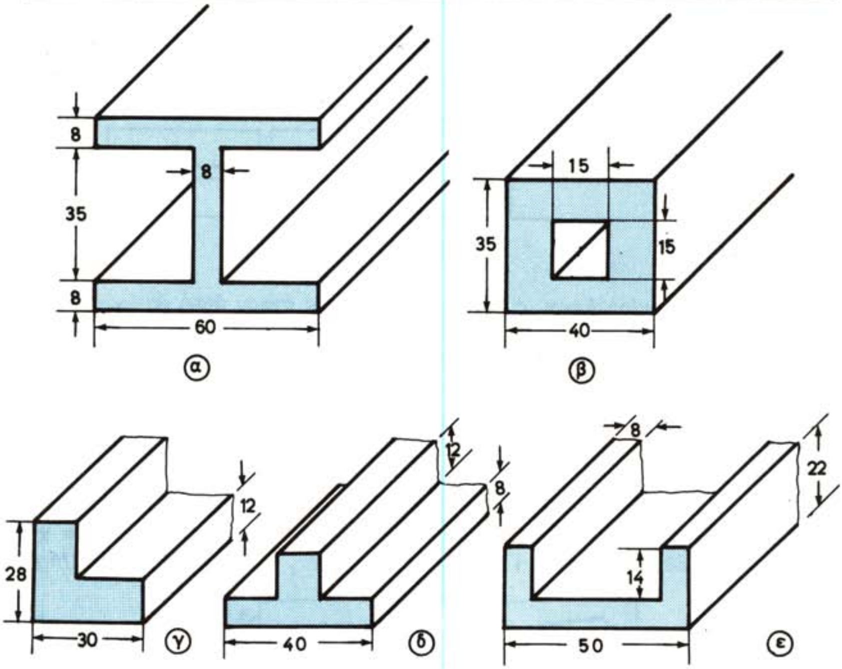
1. Ὀρθογωνικὴ δεξαμενὴ ἔχει βάσι ὀρθογώνιο μὲ πλευρὲς $\alpha = 1{,}20$ m καὶ $\beta = 1{,}00$ m. Ζητοῦμε νὰ εὕρωμε: α) Τὴν χωρητικότητα σὲ λίτρα γιὰ κάθε cm ὕψους τῆς δεξαμενῆς. β) Τὴν συνολικὴ χωρητικότητα σὲ λίτρα, ἂν τὸ ἀντίστοιχο ὕψος εἶναι 2,5 m. *(α: 12 lt/cm, β: 3000 lt)*

2. Γιὰ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο βαφῆς τῶν τοίχων ἑνὸς δωματίου πληρώνομε 50 δραχμές. Ἂν οἱ διαστάσεις τοῦ δωματίου εἶναι 3,50 m καὶ 4,25 m καὶ τὸ ὕψος 2,95 m, πόσα χρήματα θὰ πληρωθοῦν (πόρτες, παράθυρα δὲν ἀφαιροῦνται); *(≃ 2286 δρχ.)*

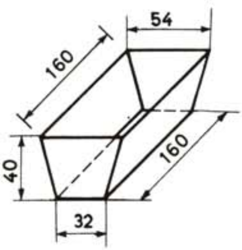
3. Τὰ μορφοελάσματα τοῦ σχήματος 10 · 24 ζ εἶναι κατασκευασμένα ἀπὸ σίδηρο εἰδικοῦ βάρους 7,5 kg/dm^3 καὶ ἔχουν σὲ mm τὶς διαστάσεις ποὺ σημειώνονται. Νὰ εὕρετε τὸ βάρος καθενὸς γιὰ μῆκος 1,00 m. *(α: 9,3 kg, β: 8,8 kg, γ: 4,14 kg, δ: 3,48 kg, ε: 4,68 kg)*

4. Νὰ εὕρετε τὸν ὄγκο τῆς σκάφης τοῦ σχήματος 10 · 24 η. Κατόπιν νὰ εὕρετε τὸ βάρος τοῦ μπετόν, ποὺ περιλαμβάνεται μέσα στὴν σκάφη, ἂν ξέρετε ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ μπετὸν εἶναι 2,35 kg/dm^3. (Διαστάσεις σὲ cm). *(0,275 m^3, 647 kg)*

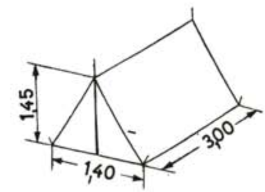
5. Νὰ εὕρετε τὸν ὄγκο τῆς σκηνῆς τοῦ σχήματος 10 · 24 θ καὶ τὸ ὕφασμα ποὺ θέλετε γιὰ νὰ τὴν φτιάξετε. Φύρα ὑφάσματος μέχρι 8% κατὰ μέγιστο. *(≃ 3 m^3, 12,8 m^2)*



Σχ. 10·24 ζ.



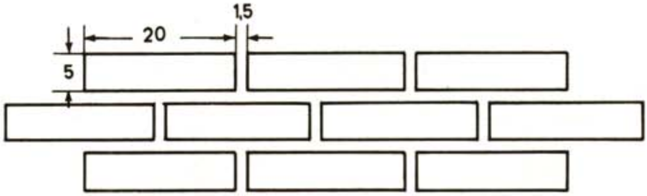
Σχ. 10·24 η.



Σχ. 10·24 θ.

6. Ἀπὸ μία κάνουλα στάζει κάθε δευτερόλεπτο μία σταγόνα νερό, ποὺ ἔχει ὄγκο 0,03 cm³. Πόσα λίτρα νερὸ θὰ ἔχουν χυθῆ σὲ 24 ὧρες; *(2,6 lt)*

7. Πρόκειται νὰ κτίσωμε ἕνα τοῖχο δρομικό (δηλαδὴ τὸ ἕνα τοῦβλο δίπλα στὸ ἄλλο), διαστάσεων 3,50 m × 4,20 m (σχ. 10 · 24 ι). Τὸ πάχος τῆς λάσπης μεταξὺ δύο τούβλων εἶναι 1,5 cm. Πόσα τοῦβλα θὰ χρειασθοῦμε; Καὶ ἐπειδὴ ἡ παραγγελία τῶν τούβλων γίνεται πάντοτε σὲ m³, πόσα m³ θὰ παραγγείλωμε; (Νὰ προσθέσετε στὴν παραγγελία φύρα 10%). Διαστάσεις τούβλων 5 cm × 20 cm × 10 cm. *(1,155 m³ ≃ 1,2 m³)*

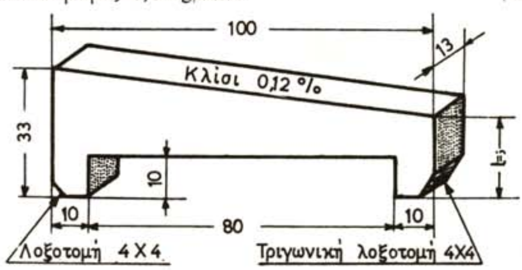


Σχ. 10·24 ι.

8. Μὲ δύο μέρη ὄγκου ἀσβέστη καὶ ἕνα μέρος ὄγκου ἄμμο φτιάχνομε δυόμισυ μέρη ἀσβεστοκονίαμα. Μετά, χρησιμοποιώντας δύο μέρη ἀπὸ τὸ ἀσβεστοκονίαμα αὐτὸ καὶ τρία μέρη χαλίκι, φτιάχνομε τέσσερα μέρη σκυροκονίαμα μὲ ἀσβέστη. Ὑπολογίσετε πόσος ὄγκος ἀπὸ κάθε ὑλικὸ χρειάζεται γιὰ νὰ φτιάξωμε 25,0 m^3 ἀπὸ τὸ παραπάνω σκυροκονίαμα.

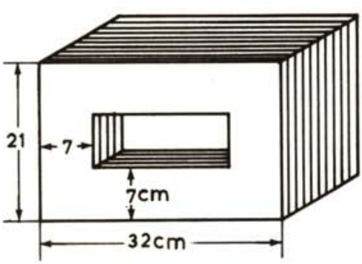
(10 m^3 ἀσβ., 5 m^3 ἄμμος, 18,75 m^3 χαλ., 12,5 m^3 ἀσβεστ.)

9. Ὑπολογίσετε πρῶτα τὸν ὄγκο καὶ μετὰ τὸ βάρος τῆς ἀσφαλιστικῆς σφήνας τοῦ σχήματος 10 · 24 ια, ὅταν ξέρετε ὅτι εἶναι κατασκευασμένη ἀπὸ χυτοχάλυβα μὲ εἰδικὸ βάρος 8,8 kg/dm^3. *(24,5 cm^3, 216 g)*



Σχ. 10·24 ια.

10. Γιὰ νὰ ἀντικαταστήσωμε τὸν χαλασμένο πυρῆνα τοῦ μετασχηματιστῆ τοῦ σχήματος 10 · 24 ιβ τοποθετοῦμε, τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, 200 χαλύβδινα φύλλα, πάχους 0,3 mm. Νὰ εὕρετε τὸν ὄγκο τοῦ πυρῆνος. *($\simeq$ 3,74 dm^3)*



Σχ. 10·24 ιβ.

11. Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει διαστάσεις 15 cm, 8 cm καὶ 2 cm. Ὑπολογίσετε τὴν ἀκμὴ κύβου, ποὺ ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ τὸ παραπάνω παραλληλεπίπεδο. Μετὰ ὑπολογίσετε τὶς ὁλικὲς ἐπιφάνειες τῶν δύο στερεῶν.

($a = 6{,}2$ cm, E_o παρα $= 332$ cm^2, E_o κυβ $\simeq 231$ cm^2)

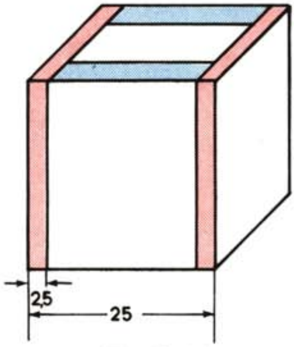
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

12. Κύβος εἶναι κατασκευασμένος ἀπὸ λαμαρίνα πάχους 2,5 mm (σχ. 10 · 24 ιγ). Ἡ ἐξωτερική του ἀκμὴ εἶναι 25 mm. Μπορεῖτε νὰ εὕρετε τὸ βάρος του, ὅταν ξέρετε ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος τῆς λαμαρίνας εἶναι 8,05 kg/dm³;

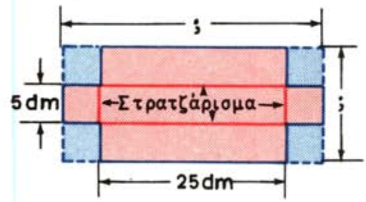
(61,4 g)

13. Τὸ σχῆμα 10 · 24 ιδ προκύπτει ἀπὸ κουτὶ ὄγκου 600 dm³ χωρὶς καπάκι, ἂν ἀνοίξωμε ὅλες τὶς πλευρές του. Μπορεῖτε νὰ εὕρετε ἀπὸ τί κομμάτι λαμαρίνας θὰ τὸ κατασκευάσωμε;

(1,46 . 3,46 m)



Σχ. 10·24 ιγ.

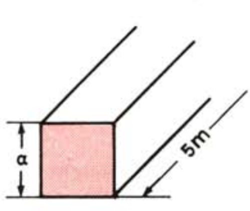


Σχ. 10·24 ιδ.

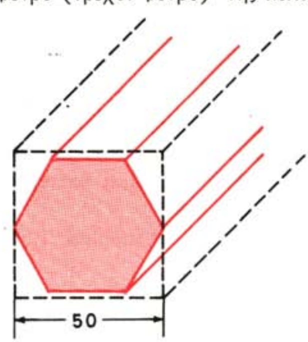
14. Γνωρίζοντας ὅτι τὰ 5 m μιᾶς ἀτσαλένιας κολώνας μὲ τετράγωνη διατομὴ ζυγίζουν 60,0 kg, ὑπολογίσετε τὴν πλευρὰ α τῆς τετράγωνης διατομῆς τοῦ σχήματος 10 · 24 ιε. (Εἰδικὸ βάρος 7,5 kg/dm³). *(≃ 4 cm)*

15. Κολώνα ἀπὸ ξύλο καρυδιᾶς ἔχει βάσι κανονικὸ ἑξάγωνο μὲ πλευρὰ α = 25 mm (σχ. 10 · 24 ιστ). Ἂν τὸ εἰδικὸ βάρος τῆς καρυδιᾶς εἶναι 0,50 kg/dm³, νὰ εὕρετε πόσο ζυγίζει τὸ κάθε μέτρο (τρέχον μέτρο) τῆς κολώνας ἕτοιμης. Ἂν ἡ κολώνα αὐτὴ βγῆκε ἀπὸ μία ἄλλη τετράγωνη μὲ πλευρὰ 50 mm, πόσο εἶναι ἡ φύρα ἐπὶ τοῖς %;

(0,812 kg, 35%)



Σχ. 10·24 ιε.



Σχ. 10·24 ιστ.

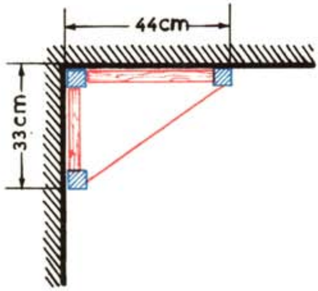
16. Στὴν γωνία ἑνὸς δωματίου πρόκειται νὰ φτιάξωμε ξύλινη βιτρίνα ἀπὸ νοβοπὰν πάχους 3 mm. Αὐτὴ ἡ βιτρίνα θὰ εἶναι μπροστὰ κλειστὴ μὲ κρύσταλλο, θὰ ἔχη ὕψος 3,10 m καὶ θὰ ἐνισχύεται ἀπὸ τρία ξύλινα δοκάρια (μπόγια)

2,5 cm × 2,5 cm (σχ. 10 · 24 ιζ). Πόσο νοβοπὰν θὰ χρειαστοῦμε; Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῶν τριῶν δοκαριῶν μαζί; Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς βιτρίνας;

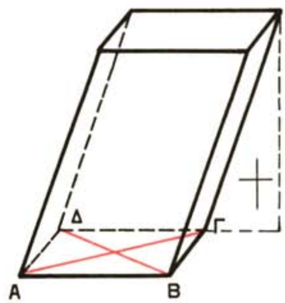
(Νοβοπὰν 2,08 m², 5,8 dm³, 0,225 m³)

17. Σιδερένια ράβδο μὲ τετράγωνη διατομὴ πλευρᾶς 30 mm καὶ μῆκος 2 m τὴν ὑποβάλλομε σὲ τράβηγμα περνώντας την ἀπὸ μία ὀρθογωνικὴ τρύπα μὲ πλευρὲς 36 mm × 20 mm. Ποιό θὰ εἶναι τὸ καινούργιο μῆκος της;

(2,5 m)



Σχ. 10·24 ιζ.



Σχ. 10·24 ιη.

18. Γιὰ νὰ γαλβανίσωμε καὶ ἀπὸ τὶς δύο ὄψεις λαμαρίνα σχήματος ὀρθογωνίου 30 cm × 50 cm χρησιμοποιήσαμε τσίγκο βάρους 0,8 kg. Γνωρίζοντας ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ τσίγκου εἶναι 7,2 kg/dm³, νὰ εὕρετε τὸ πάχος, ποὺ ἔχει ἡ στρῶσι τοῦ τσίγκου. *(≃ 0,37 mm)*

19. Μία τσιμεντοκολώνα πρόκειται νὰ τὴν σκεπάσωμε μὲ ξύλινη ἐπένδυσι, χρησιμοποιώντας νοβοπάν. Ἡ κολώνα εἶναι πλαγία μὲ κλίσι 10%. Ἡ ἐπένδυσι ἔχει σχῆμα πλαγίου πρίσματος μὲ βάσι ρόμβο μὲ διαγώνιες 10 cm καὶ 20 cm (σχ. 10 · 24 ιη). Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι 30 dm³. Ποιό εἶναι τὸ ὕψος;

(3 m)

20. Γιὰ τὴν κατασκευὴ κιγκλιδώματος προϋπολογίζομε πὼς θὰ μᾶς χρειασθοῦν τὰ παρακάτω ὑλικά:

— 25 σιδηρολάμες διατομῆς 40 mm × 2 mm καὶ μήκους 5,50 m. Τιμὴ 18 δραχμὲς κατὰ kg.

— 5 φύλλα λαμαρίνας 1,50 m × 0,75 m καὶ πάχους 2 mm. Τιμὴ 14 δραχμὲς κατὰ kg.

— 250 λαμαρινόκαρφα συνολικοῦ βάρους 1,10 kg τὰ 100 τεμάχια. Τιμὴ 35 δραχμὲς κατὰ kg.

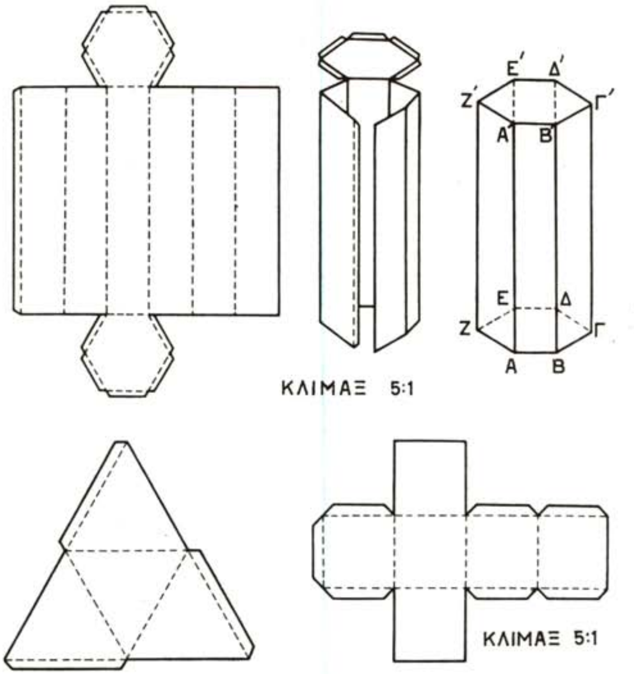
— 80 μπουλόνια πρὸς 205 δραχμὲς τὰ 100 τεμάχια.

Τὰ δύο πρῶτα ὑλικὰ ἔχουν εἰδικὸ βάρος 7,8 kg/dm³.

Τὰ ἐργατικὰ κοστίζουν 30 δρχ./ὥρ. ὁ τεχνίτης καὶ 15 δρχ./ὥρ. ὁ βοηθός. Συνολικὰ χρειάζονται 75 ὧρες ἐργασίας γιὰ τὸν τεχνίτη καὶ 60 ὧρες γιὰ τὸν βοηθό. Τὰ ἄλλα ἔξοδα προϋπολογίζονται 30% ἐπὶ τοῦ κόστους τῶν ἐργατικῶν σὺν 10%

ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ὑλικῶν. Τὸ κέρδος προβλέπεται σὲ 20% ἐπὶ ὅλου τοῦ προϋπολογισμοῦ τοῦ κόστους. Πόσο προϋπολογίζεται ἡ ἀξία; *(8917 δρχ.)*

21. Μὲ κλίμακα αὐτὴ ποὺ σημειώνεται σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ σχήματα 10 · 24 ιθ (α, β καὶ γ), ποὺ ἐκφράζουν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας στερεῶν σχημάτων, σχεδιάσετε τὰ σχήματα ἐπάνω σὲ χαρτόνι καὶ μετὰ κατασκευάσετε τὰ στερεά.

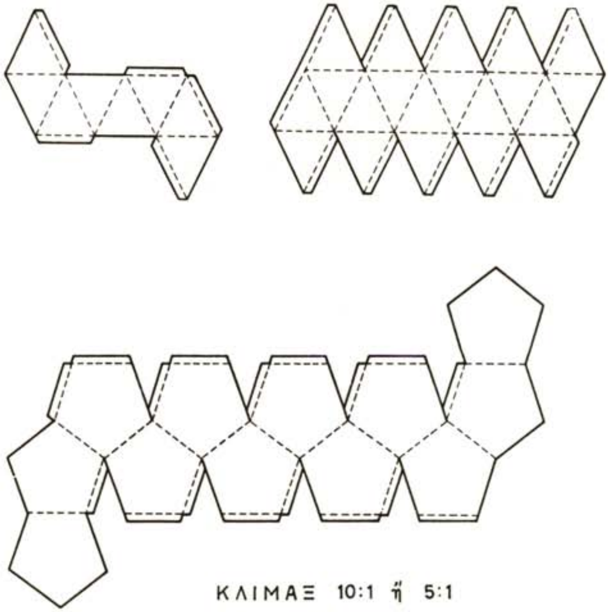


Σχ. 10·24 ιθ (α).

Ἀπὸ τὴν παράγραφο 10 · 18.

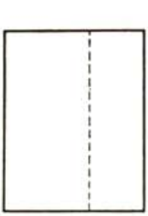
1. Τὰ δύο σχήματα 10 · 24 κ εἶναι σχήματα καμινάδας. Θὰ κατασκευασθοῦν, τὸ ἐπάνω μέρος, ποὺ ἔχει σχῆμα πυραμίδος, ἀπὸ λαμαρίνα, τὸ ἄλλο, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου πρίσματος, ἀπὸ σιδηροσίτα καὶ οἱ ἀκμὲς ἀπὸ γωνία 20 × 20 × 3 mm. Ζητοῦμε γιὰ τὸ καθένα νὰ εὕρωμε: α) Πόσα m² λαμαρίνα θὰ χρειασθοῦμε. β) Πόσα m² σίτα θὰ χρειασθοῦμε. γ) Πόσα m σιδηρογωνιᾶς θὰ χρειασθοῦμε καὶ δ) πόσο ζυγίζει κάθε κομμάτι, ἂν τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας εἶναι 15 kg/m², τῆς σίτας 7 kg/m² καὶ τῆς σιδηρογωνιᾶς 1,15 kg/m (κιλὰ ἀνὰ τρέχον μέτρο). (Δὲν θὰ λάβετε ὑπ' ὄψι σας ὅτι γιὰ νὰ βγοῦν τὰ κομμάτια θὰ προκύψουν ρετάλια).

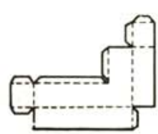
(α) α: 0,19 m², β: 0,40 m², γ: 5,2 m, δ: 11,63 kg
β) α: 0,86 m², β: 0,64 m², γ = 7,60 m, δ = 26,1 kg)



ΚΛΙΜΑΞ 10:1 ἤ 5:1

Σχ. 10·24 ιθ (β).

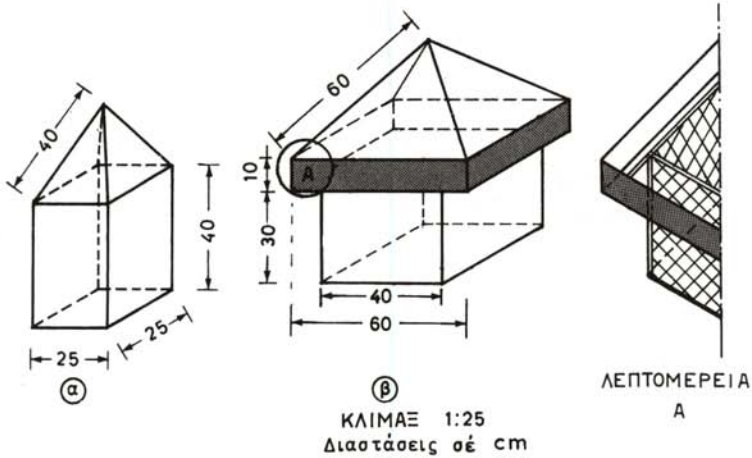




ΚΛΙΜΑΞ 10:1

Σχ. 10·24 ιθ (γ).

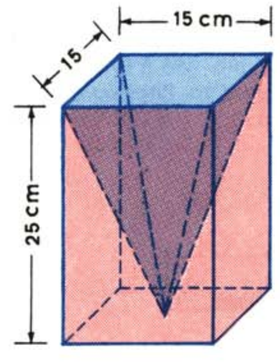
2. Νὰ εὕρετε τὸν ὄγκο καθενὸς ἀπὸ τὰ σχήματα 10 · 24 κ. *(32,5 dm³, 135 dm³)*



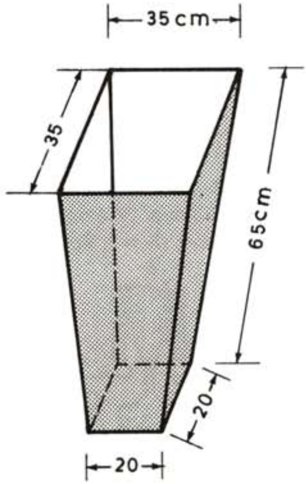
Σχ. 10·24 κ.

3. Τὸ σχῆμα 10 · 24 κα εἶναι σιδερένιο βάζο, μὲ εἰδικὸ βάρος 7,25 kg/dm³. Πόσο ζυγίζει; Γιὰ τὴν ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερική του ἐπινικέλωσι πόση ἐπιφάνεια πρέπει νὰ ὑπολογίσωμε; *(27,2 kg, 25,05 dm²)*

4. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε σὲ «παραγωγὴ σειρᾶς» δοχεῖα ἀχρήστων σὰν αὐτὸ τοῦ σχήματος 10 · 24 κβ. Νὰ εὕρετε γιὰ κάθε 100 κομμάτια πόση λαμαρίνα θὰ χρειασθοῦμε, ἂν στὴν κατασκευὴ ἔχωμε φύρα 1,5 %. *(76,1 cm²)*



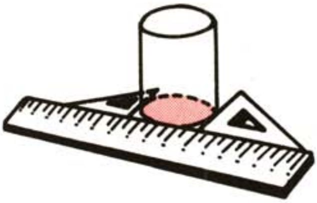
Σχ. 10·24 κα.



Σχ. 10·24 κβ.

Ἀπὸ τὴν παράγραφο 10 · 19.

1. Τὸ σχῆμα 10 · 24 κγ δείχνει τὸν τρόπο, μὲ τὸν ὁποῖο μποροῦμε νὰ μετρήσωμε τὴν διάμετρο ἑνὸς ὀρθοῦ κυλίνδρου. Κάνετε μόνοι σας μία τέτοια μέτρησι καὶ μετὰ εὕρετε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου, ποὺ μετρήσατε γιὰ ἕνα μῆκος 1 m.

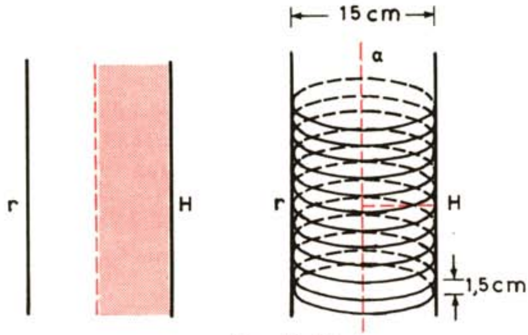


Σχ. 10·24 κγ.

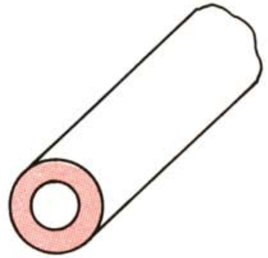
2. Στὸ κυλινδρικὸ πλέγμα τοῦ σχήματος 10 · 24 κδ ἡ διάμετρος εἶναι 15 cm. Νὰ εὕρετε τὸν ὄγκο, ποὺ καταλαμβάνει ἕνα τέτοιο πλέγμα, ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ 40 δακτυλίδια· δίνεται ὅτι ἡ ἀπόστασι ἀνάμεσα σὲ δύο δακτυλίδια εἶναι 1,5 cm.

(10332,5 cm³ = 10,3 dm³)

3. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε κοῖλο ἄξονα μὲ ἐξωτερικὴ διάμετρο 25 cm καὶ ἐσωτερικὴ 12 cm (σχ. 10 · 24 κε). Ὁ ἄξων ἔχει βάρος 283 kg καὶ εἶναι ἀπὸ σίδηρο (μὲ εἰδικὸ βάρος 7,5 kg/dm³). Νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος. *(≃ 1 m)*

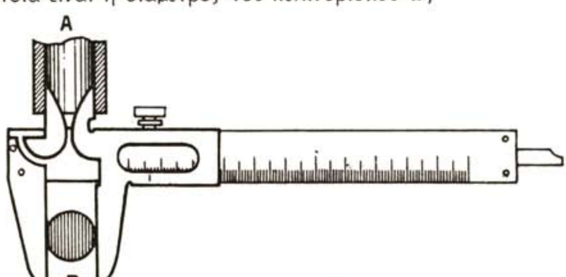


Σχ. 10·24 κδ.



Σχ. 10·24 κε.

4. Μὲ τὴν βοήθεια παχυμέτρου μετροῦμε τὴν ἐσωτερικὴ διάμετρο τοῦ κυλινδρίσκου A (σχ. 10 · 24 κστ) καὶ τὴν εὑρίσκομε 17,3 mm, ἐνῶ ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος εἶναι 25 mm. Ἂν τὰ δύο κομμάτια A καὶ B ἔχουν τὸ ἴδιο βάρος γιὰ τὸ ἴδιο μῆκος, ποιά εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κυλινδρίσκου B; *(≃ 18 mm)*



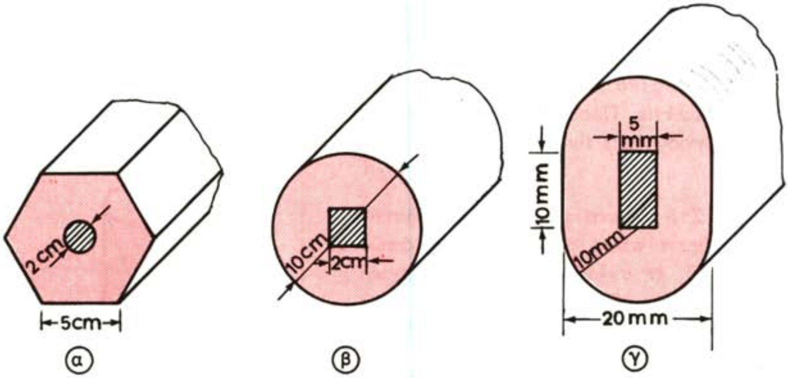
Σχ. 10·24 κστ.

5. Νὰ εὑρεθῇ μὲ ἀκρίβεια ἑκατοστοῦ τὸ μῆκος τῆς γενετείρας ὀρθοῦ κυλίνδρου μὲ ἐμβαδὸν βάσεως 55 m^2 καὶ ὄγκο ἴσο μὲ τὸν ὄγκο κυβικῆς δεξαμενῆς μὲ μῆκος ἀκμῆς 8,5 m. *($\simeq$ 11,17 m)*

6. Ἔχομε ἕνα φύλλο λαμαρίνας 1,5 m $\times$ 1,80 m. Πῶς συμφέρει νὰ τὸ τυλίξωμε, ὥστε νὰ τὸ κάνωμε ὀρθὸ κύλινδρο μὲ τὸν μεγαλύτερο δυνατὸ ὄγκο· χρησιμοποιώντας σὰν γενέτειρα τὴν διάστασι 1,5 m ἢ 1,8 m; (Οἱ βάσεις θὰ γίνουν ἀπὸ ἄλλα ρετάλια λαμαρίνας).

7. Ἕνας κύλινδρος ἔχει διάμετρο βάσεως 5 cm καὶ ὕψος 4,5 cm. Ἀπὸ ἕνα κομμάτι λαμαρίνας 30 cm $\times$ 16 cm, ποὺ διαθέτομε, πόσους τέτοιους κυλίνδρους μποροῦμε νὰ βγάλωμε; Οἱ κύλινδροι θεωροῦνται ἀνοικτοὶ καὶ ἀπὸ τὶς δύο βάσεις. Πόση εἶναι ἡ φύρα %; *(6 τεμ., 11,7 %)*

8. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε 1000 κομμάτια ροδέλλες πάχους 2 mm, διαμέτρου ἐξωτερικῆς 20 mm καὶ ἐσωτερικῆς 8 mm. Τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ ὑλικοῦ, ἀπὸ τὸ ὁποῖο κατασκευάζομε τὶς ροδέλλες, εἶναι 7,8 kg/dm^3. Τὰ γρέζια ζυγίζουν 0,100 kg συνολικά. Πόσο ζυγίζει ὁ κοῖλος ἄξων, ἀπὸ τὸν ὁποῖο θὰ κατασκευάσωμε τὶς ροδέλλες αὐτές; Πόσο ζυγίζει ἡ κάθε ροδέλλα; *($\simeq$ 4,2 kg, 4,1 g)*



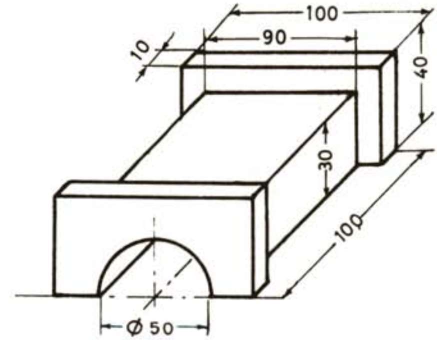
Σχ. 10·24 κζ.

9. Νὰ εὕρετε τὸ βάρος ἀνὰ τρέχον μέτρο τῶν μορφοελασμάτων τοῦ σχήματος 10 · 24 κζ γενικῆς χρήσεως. Ὑλικὸ εἰδικοῦ βάρους: (α) καὶ (β) 8,0 kg/dm^3, (γ) 2,70 kg/dm^3. *(α: 49,6 kg/m, β: 59,6 kg, γ: 1,25 kg)*

10. Ποιό ὕψος πρέπει νὰ δώσετε σὲ κυλινδρικὸ δοχεῖο μὲ ἐσωτερικὴ διάμετρο 80 cm, γιὰ νὰ ἔχῃ χωρητικότητα 500 λίτρα; *(995,2 mm $\simeq$ 1 m)*

11. Στὸ στερεὸ τοῦ σχήματος 10 · 24 κη ὑπολογίσετε τὸ βάρος, ὅταν οἱ διαστάσεις, ποὺ δίδονται, εἶναι σὲ mm καὶ τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ ὑλικοῦ εἶναι 8,4 kg/dm^3. *(1,68 kg)*

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



Σχ. 10·24 κη.

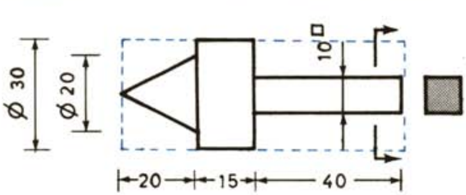
12. Ὑπολογίσετε τὴν διατομὴ ἑνὸς χαλκίνου σύρματος βάρους 1,76 kg ἀνὰ τρέχον μέτρο, ὅταν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,8 kg/dm³. *(≃ 200 mm²)*

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 10 · 20 καὶ 10 · 21.

1. Νὰ εὕρετε τὸ βάρος τοῦ σχήματος 10 · 24 κθ, ὅταν ξέρετε ὅτι εἶναι κατασκευασμένο ἀπὸ ὑλικὸ μὲ εἰδικὸ βάρος 8,0 kg/dm³. *(133.7 g)*

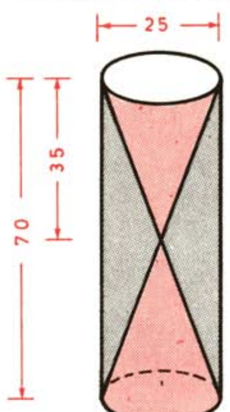
2. Ἀπὸ τὸ κυλινδρικὸ κομμάτι τοῦ σχήματος 10 · 24 λ ἀφαιρέσαμε δύο κωνικὰ κομμάτια. Πόσο θὰ ζυγίζη τὸ κομμάτι ποὺ ἔμεινε, ἂν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ ὑλικοῦ (μπροῦτζος) εἶναι 8,45 kg/dm³. *(193,5 g)*

3. Στὸ κομμάτι τῆς παραπάνω ἀσκήσεως 2 εὕρετε πόσο τοῖς % εἶναι οἱ ἀπώλειες ὑλικοῦ, ἐν σχέσει: α) Πρὸς τὸ ἀρχικὸ συνολικὸ βάρος. β) Πρὸς τὸ κομμάτι ποὺ ἀπέμεινε. *(α: ≃ 33%. β: 50%)*



(Διαστάσεις σὲ mm)

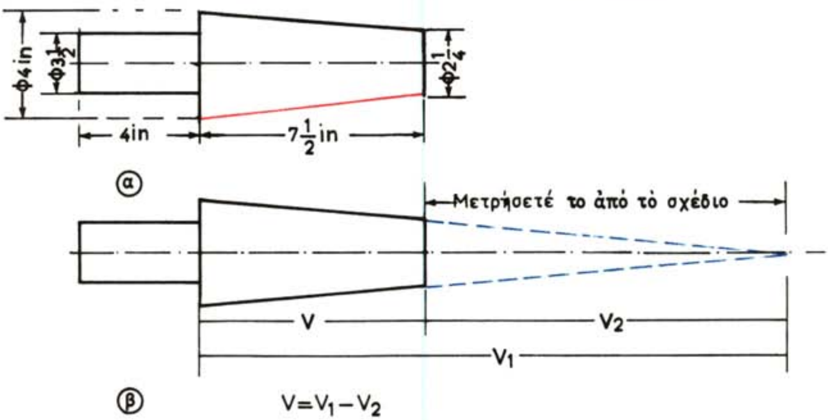
Σχ. 10·24 κθ.



(Διαστάσεις σὲ mm)

Σχ. 10·24 λ.

5. Ὑπολογίσετε τὴν κωνικότητα τοῦ κομματιοῦ τοῦ σχήματος 10 · 24 λα. Μετὰ σχεδιάσετέ το μὲ κλίμακα καὶ προσδιορίσετε τὸν ὄγκο του βοηθούμενοι ἀπὸ τὴν ὑπόδειξι τοῦ σχήματος (β). Ὁ ὄγκος νὰ εὑρεθῇ σὲ in³. *(23,3%)*

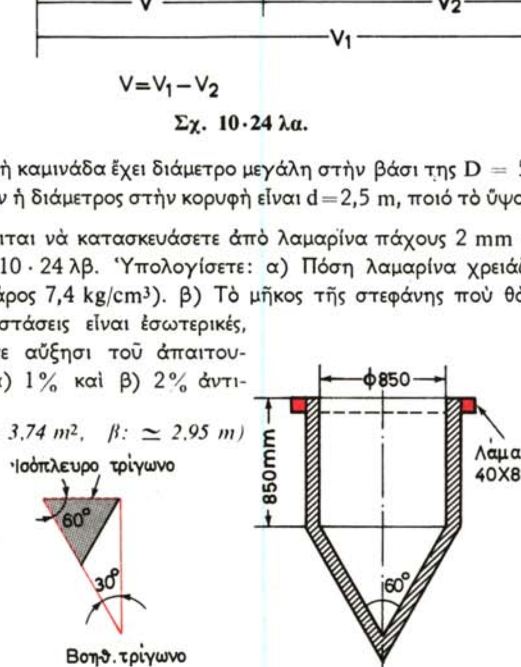


Σχ. 10·24 λα.

6. Κωνικὴ καμινάδα ἔχει διάμετρο μεγάλη στὴν βάσι της D = 5,0 m καὶ κωνικότητα 5%. Ἂν ἡ διάμετρος στὴν κορυφὴ εἶναι d = 2,5 m, ποιὸ τὸ ὕψος της; *(50 m)*

7. Πρόκειται νὰ κατασκευάσετε ἀπὸ λαμαρίνα πάχους 2 mm τὸ ντεπόζιτο τοῦ σχήματος 10 · 24 λβ. Ὑπολογίσετε: α) Πόση λαμαρίνα χρειάζεσθε (σὲ m² ἢ σὲ kg· εἰδ. βάρος 7,4 kg/cm³). β) Τὸ μῆκος τῆς στεφάνης ποὺ θὰ χρειασθῆτε. (Ἐπειδὴ οἱ διαστάσεις εἶναι ἐσωτερικές, νὰ παραδεχθῆτε αὔξησι τοῦ ἀπαιτουμένου ὑλικοῦ α) 1% καὶ β) 2% ἀντιστοίχως).

(α: ≃ 3,74 m², β: ≃ 2,95 m)



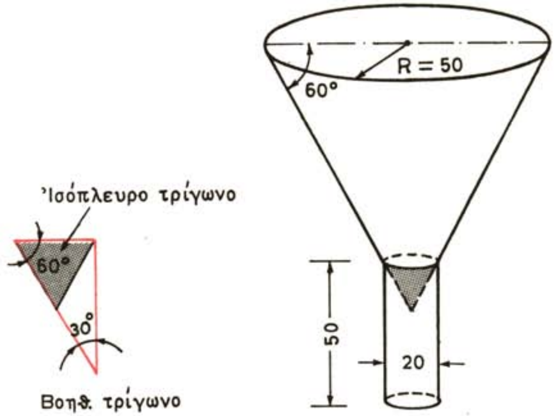
Σχ. 10·24 λβ.

8. Ὑπολογίσετε πόση λαμαρίνα χρειάζεσθε γιὰ νὰ κατασκευάσετε τὴν χοάνη (σχ. 10 · 24 λγ). Τὸ γραμμοσκιασμένο κομμάτι ἀποτελεῖ τὴν φύρα ποὺ ἔχετε. Πόσο τοῖς % εἶναι ἡ φύρα; (Διαστάσεις σὲ cm). *(≃ 3,33 m², 3,63%)*

Ἀπὸ τὴν παράγραφο 10 · 22.

1. Ὑπολογίσετε πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἡμισφαιρικῆς κουτάλας μὲ διάμετρο 20 cm. *(628 cm²)*

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

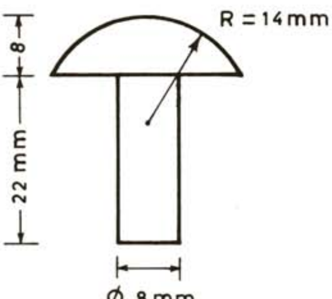


Σχ. 10·24 λγ.

2. Ὑπολογίσετε τὴν χωρητικότητα τῆς ἴδιας κουτάλας. *(2,1 dm³)*

3. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε σὲ παραγωγὴ σειρᾶς ξύλινες σφαῖρες, ποὺ κάθε μία θὰ ἔχη διάμετρο 10 cm. Κάθε σφαίρα θὰ βγαίνη ἀπὸ κύβο μὲ πλευρὰ 12 cm. Μπορεῖτε νὰ εὕρετε πόσο θὰ ζυγίζη τὸ μέρος τοῦ κύβου, ποὺ θὰ χάνετε, ἂν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,75 kg/dm³; Ἐκφράσετε τὴν ἀπώλεια αὐτὴ σὲ ποσοστὸ τῆς ἀρχικῆς ποσότητος ξύλου.

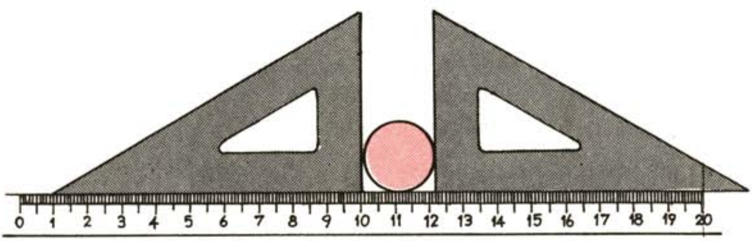
(≃ 904 kg, ≃ 70%)



Σχ. 10·24 λδ.

4. Ὑπολογίσετε τὸ βάρος τοῦ πιρτσινιοῦ (σχ. 10·24 λδ), ὅταν ξέρετε πὼς εἶναι κατασκευασμένο ἀπὸ ὑλικὸ εἰδικοῦ βάρους 2,85 kg/dm³. *(9,7 g)*

5. Χρησιμοποιώντας ἕνα κανόνα καὶ δύο τρίγωνα μετροῦμε τὴν διάμετρο σφαίρας, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10·24 λε. Ἂν οἱ δύο ἐνδείξεις τοῦ κανόνος εἶναι



Σχ. 10·24 λε.

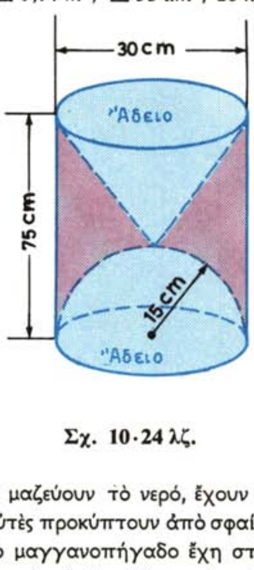
10,0 cm καὶ 12,2 cm, ὑπολογίσετε τὴν ἐπιφάνεια καὶ τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας.
(15,2 cm², 5,57 cm³)

6. Ἀδειάζοντας τὸ περιεχόμενο τοῦ χωνιοῦ τοῦ σχήματος 10 · 24 λστ μέσα σὲ ἡμισφαιρικὸ δοχεῖο ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ χωνιοῦ, δηλαδὴ 10 cm, διαπιστώνομε ὅτι καὶ τὰ δύο ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο. Μπορεῖτε νὰ εὕρετε τὸ ὕψος τοῦ κώνου; *(≃ 20 cm)*

7. Ὑπολογίσετε τὴν ὁλικὴ ἐπιφάνεια, τὸν ὄγκο ποὺ καταλαμβάνει καὶ τὸ βάρος ποὺ ζυγίζει, τὸ μπρούτζινο ἀνθοδοχεῖο τοῦ σχήματος 10 · 24 **λζ**. **Δίνεται εἰδικὸ** βάρος 17,6 **kg/m²**.

(≃ 1,14 m², ≃ 53 dm³, 20 kg)

Σχ. 10·24 λστ.



Σχ. 10·24 λζ.

8. Σὲ ἕνα μαγγανοπήγαδο οἱ κουτάλες, ποὺ μαζεύουν τὸ νερό, ἔχουν τὸ σχῆμα σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μία βάσι. Οἱ κουτάλες αὐτὲς προκύπτουν ἀπὸ σφαίρα μὲ ἀκτῖνα 20 cm καὶ κάθε μία ἔχει ὕψος 8 cm. Ἂν τὸ μαγγανοπήγαδο ἔχη στὴν διάμετρό του 20 τέτοιες κουτάλες καὶ κάθε μία γεμίζη κατὰ τὰ $^3/_4$ κάθε φορά, πόσο νερὸ βγάζει τὴν ὥρα, ἂν στρέφεται μὲ 25 στροφὲς τὸ λεπτό;

(≃ 78,4 m³/h)

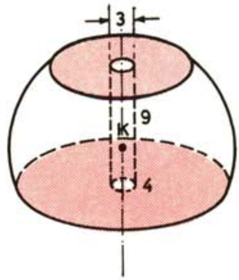
9. Γιὰ νὰ ντύσωμε μὲ λαμαρίνα ξύλινες σφαῖρες χρειαζόμαστε 1 dm² γιὰ κάθε μία. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος κάθε σφαίρας;

(93,9 cm³)

10. Μὲ τὴν φρέζα κόβομε σιδερένια σφαίρα διαμέτρου 30 cm σὲ τρία κομμάτια, κατὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα. Ἂν τὸ κέντρο τῆς σφαίρας εὑρίσκεται σὲ

ἀπόστασι 4 cm καὶ 9 cm ἀπὸ τὶς δύο τομὲς καὶ εἶναι τρυπημένη, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 10 · 24 λη, νὰ εὕρετε τὸν ὄγκο τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος μὲ δύο βάσεις. Τέτοια κομμάτια τρυπημένα κατὰ τὸν ἄξονα τοῦ τμήματος, πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε 50. Πόσο θὰ ζυγίζουν συνολικά; (Θὰ χρειασθῆ νὰ ὑπολογίσετε τοὺς ὄγκους τῶν σφαιρικῶν τμημάτων μιᾶς βάσεως). Εἰδ. βάρος 7,85 kg/dm^3.

(~ 8,25 dm^3, 3240 kg)



Σχ. 10·24 λη.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 11

Η ΕΞΙΣΩΣΙ — ΟΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

11 · 1 Παράστασι μὲ γράμματα καὶ ἡ ἀριθμητική της τιμή.

Παράδειγμα.

Ἂς πάρωμε τὴν ἰσότητα:

$$5 + 3 = 8$$

καὶ ἂς προσθέσωμε, ἀφαιρέσωμε, πολλαπλασιάσωμε ἢ διαιρέσωμε καὶ τὰ δύο μέρη της μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό:

Πρόσθεσι :

$$\underbrace{(5+3)+2}_{\downarrow \atop 10} = \underbrace{8+2}_{\downarrow \atop 10}$$

Ἀφαίρεσι :

$$\underbrace{(5+3)-2}_{\downarrow \atop 6} = \underbrace{8-2}_{\downarrow \atop 6}$$

Πολλαπλασιασμός :

$$\underbrace{(5+3)\times 2}_{\downarrow \atop 16} = \underbrace{8\times 2}_{\downarrow \atop 16}$$

Διαίρεσι :

$$\underbrace{(5+3):2}_{\downarrow \atop 4} = \underbrace{8:2}_{\downarrow \atop 4}$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

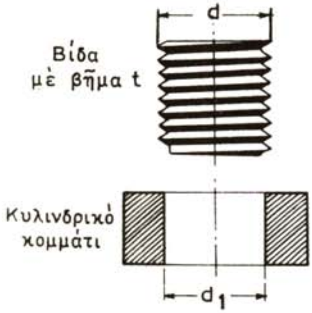
Σὲ μία ἰσότητα μποροῦμε νὰ προσθέσωμε ἢ νὰ ἀφαιρέσωμε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη της τὸν ἴδιο ἀριθμό. Ἡ ἰσότης δὲν ἀλλάζει.

Καὶ ὅτι:

Σὲ μία ἰσότητα μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἢ νὰ διαιρέσωμε καὶ τὰ δύο μέρη της μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό. Ἡ ἰσότης δὲν ἀλλάζει.

Πρόβλημα.

Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε παξιμάδια μὲ διάμετρο τρύπας d_1 τέτοια, ὥστε νὰ μποροῦν νὰ ταιριάζουν σὲ βίδες ὀνομαστικῆς διαμέτρου $d = 8{,}00$ mm καὶ βήματος $t = 1{,}25$ mm (σχ. 11·1). Νὰ εὕρετε τὴν διάμετρο d_1. (Τύπος: $d_1 + t = d$).



Σχ. 11·1.

Λύσι :

Σύμφωνα μὲ ὅσα ἔχομε μάθει μέχρι τώρα, στὸν τύπο:

$$d_1 + t = d$$

τὰ δοσμένα μεγέθη εἶναι τά:

$$d = 8{,}00 \text{ mm} \quad \text{καὶ} \quad t = 1{,}25 \text{ mm}$$

καὶ ἄγνωστη ἡ διάμετρος d_1 πού, ὅπως ξέρομε, τὴν συμβολίζομε μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, συνήθως μὲ τὸ γράμμα x.

Ἔτσι ὁ παραπάνω τύπος θὰ πάρη τὴν μορφή:

$$\boldsymbol{x + 1{,}25 = 8{,}00.}$$

Ἡ σχέσι αὐτὴ εἶναι μία ἐξίσωσι, στὴν ὁποία τὸ γράμμα x, ποὺ εἶναι τὸ ***ἄγνωστο***, ἔχει μία ***ἀριθμητικὴ τιμή***, τὴν ὁποία ὀνομάσαμε ***λύσι τῆς ἐξισώσεως***. Ὅπως βλέπομε, ὁ x ἔχει μία τέτοια ἀριθμητικὴ τιμή, ὥστε, ἂν αὐξηθῆ κατὰ 1,25, θὰ γίνη ἴση μὲ 8,00, ποὺ σημαίνει πὼς εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ 8,00 κατὰ 1,25. Ἄρα γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν x πρέπει ἀπὸ τὸ 8,00 νὰ ἀφαιρέσωμε τὸ 1,25. Ἑπομένως, ἂν στὴν ἀρχικὴ ἐξίσωσι ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρέσωμε τὸ 1,25, ἡ ἰσότης δὲν ἀλλάζει, δηλαδὴ θὰ ἔχωμε:

$$(x + 1{,}25) - 1{,}25 = 8 - 1{,}25 \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{6{,}75.}$$

Στὴν ἐξίσωσι $x + 1{,}25 = 8{,}00$ ὀνομάζομε: ***πρῶτο μέρος***, αὐτὸ ποὺ εὑρίσκεται ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ ἴσον καὶ ***δεύτερο μέρος***, αὐτὸ ποὺ εὑρίσκεται δεξιὰ ἀπὸ τὸ ἴσον.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Συμπέρασμα.

Σὲ μία ἐξίσωσι ἐπιτρέπεται νὰ μεταφέρωμε ἕνα ὅρο ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος στὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμε τὸ σημεῖο τῆς πράξεως, ποὺ σημειώνεται πρὶν ἀπὸ τὴν μεταφορὰ μπροστὰ ἀπὸ τὸν μεταφερόμενο ὅρο.

Γενίκευσι.

Γενικεύοντας τὰ ἀνωτέρω, γράφομε ὅτι ἡ ἐξίσωσι:

$$x + \beta = \gamma$$

ἔχει σὰν λύσι της τὴν τιμή: $x = \gamma - \beta$.

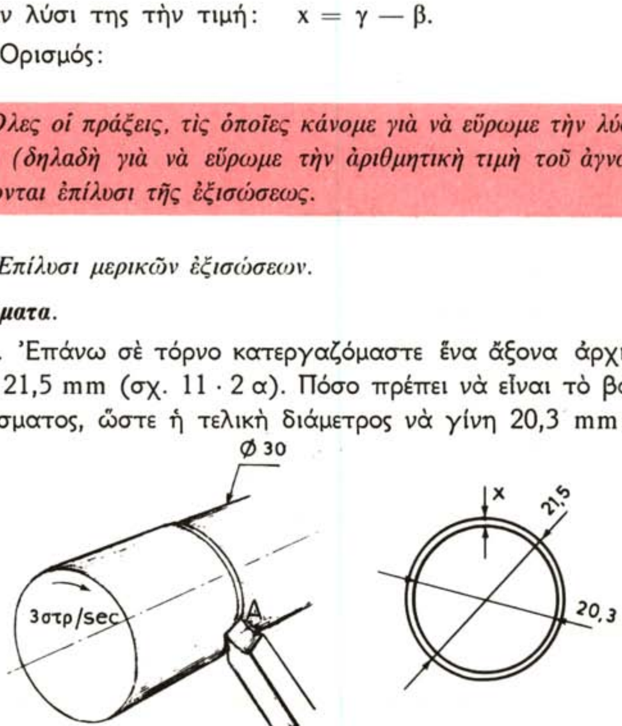
Ὁρισμός:

Ὅλες οἱ πράξεις, τὶς ὁποῖες κάνομε γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν λύσι σὲ μία ἐξίσωσι (δηλαδὴ γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου x) ὀνομάζονται ἐπίλυσι τῆς ἐξισώσεως.

11 · 2 Ἐπίλυσι μερικῶν ἐξισώσεων.

Προβλήματα.

1. Ἐπάνω σὲ τόρνο κατεργαζόμαστε ἕνα ἄξονα ἀρχικῆς διαμέτρου 21,5 mm (σχ. 11 · 2 α). Πόσο πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάθος τοῦ τορνιρίσματος, ὥστε ἡ τελικὴ διάμετρος νὰ γίνη 20,3 mm;



Σχ. 11·2 α.

Λύσι :

Ἂν ὀνομάσωμε x τὸ βάθος τῆς ζητουμένης κατεργασίας τορνιρίσματος, τότε θὰ πρέπει:

1ος Τρόπος:

(κατατάξεως)

$$2 \cdot x + 20,3 = 21,5$$

ἢ $2 \cdot x = 21,5 - 20,3$

ἢ $2 \cdot x = 1,2$

2ος Τρόπος:

(κατατάξεως)

$$21,5 - 2 \cdot x = 20,3$$

ἢ $21,5 = 20,3 + 2\,x$

ποὺ γράφεται καί:

$$20,3 + 2 \cdot x = 21,5$$

ἢ $2 \cdot x = 21,5 - 20,3$

ἢ $2 \cdot x = 1,2$

καὶ ἂν θυμηθοῦμε ὅσα εἴπαμε γιὰ τὴν λύσι τῆς ἐξισώσεως (παράγρ. 9 · 12):

$$\alpha \cdot x = \gamma$$

εὑρίσκομε ὅτι: $x = \dfrac{1,2}{2}$,

ποὺ σημαίνει ὅτι: $x = 0,6$ *mm*.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βλέπομε ὅτι γιὰ τὴν ἐπίλυσι:

α) Ἀπομονώσαμε τὸν ὅρο ποὺ ἔχει τὸν ἄγνωστο x, ἤ, ὅπως λέμε, ***χωρίσαμε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους***.

β) Κάναμε κατόπιν τὶς σημειωμένες πράξεις.

γ) Στὴν συνέχεια διαιρέσαμε μὲ τὸν συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου τὸ δεύτερο μέρος. Αὐτὸ ποὺ εὑρήκαμε, εἶναι ἡ λύσι τῆς ἐξισώσεως.

Αὐτὸ τὸ τελευταῖο μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα, ὅτι μποροῦμε νὰ κάνωμε τὶς ἑξῆς διαδοχικὲς πράξεις:

$$\alpha \cdot x = \gamma \quad , \quad \frac{\alpha \cdot x}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad , \quad x = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot$$

Δηλαδή:

Σὲ μία ἐξίσωσι μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε καὶ τὰ δύο μέρη μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, χωρὶς ἡ λύσι τῆς ἐξισώσεως νὰ ἀλλάξῃ.

Ἂν προσέξωμε καλὰ τὶς δύο προηγούμενες κατατάξεις, βλέπομε ὅτι καταλήγομε στὴν ἐπίλυσι τῆς ἐξισώσεως, ποὺ ἔχει τὴν ***γενικὴ μορφή***: $\alpha \cdot \chi + \beta = \gamma$.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Κανόνας.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὴν γενικὴ μορφὴ ἐξισώσεως πρῶτα χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους καὶ μετὰ διαιροῦμε καὶ τὰ δύο μέρη μὲ τὸν συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου.

Δηλαδή:

$$\boxed{\alpha \cdot x + \beta = \gamma} \qquad \boxed{\alpha \cdot x = \gamma - \beta} \qquad \boxed{\frac{\alpha \cdot x}{\alpha} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}}$$

Ἄρα ἡ λύσι τῆς παραπάνω γενικῆς μορφῆς ἐξισώσεως ἔχει τὴν ἔκφρασι:

$$\boxed{x = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}}$$

2. Μετὰ ἀπὸ μία σειρὰ πράξεων καὶ μετρήσεων καταλήξαμε ὅτι γιὰ νὰ εὕρωμε μία διάστασι σὲ ἕνα ἐξάρτημα πρέπει νὰ λύσωμε τὴν ἐξίσωσι:

$$\frac{x}{4} - 5 = \frac{3}{8}.$$

Λύσι :

Πρὶν λύσωμε τὴν ἐξίσωσι, θὰ πρέπει νὰ βγάλωμε τοὺς παρονομαστὲς ἀπὸ τὰ κλάσματα (νὰ κάνωμε ἁπλοποίησι κλασμάτων).

Γράφομε: $\dfrac{x}{4} - \dfrac{5}{1} = \dfrac{3}{8}.$

Κάνομε ὅλα τὰ κλάσματα ὁμώνυμα:

$$\overset{\overset{2}{\smile}}{\frac{x}{4}} - \overset{\overset{8}{\smile}}{\frac{5}{1}} = \overset{\overset{1}{\smile}}{\frac{3}{8}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2 \cdot x}{8} - \frac{8 \cdot 5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{2 \cdot x - 8 \cdot 5}{8} = \frac{3}{8}$$

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμε καὶ τὰ δύο μέρη μὲ τὸν ἀριθμὸ 8:

$$2 \cdot x - 8 \cdot 5 = 3.$$

Ἡ παραπάνω πρᾶξι λέγεται ***ἀπαλειφὴ παρονομαστῶν*** τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ λύσι τώρα εἶναι εὔκολη:

$$2 \cdot x - 40 = 3$$

ἢ

$$2 \cdot x = 3 + 40$$

$$2 \cdot x = 43$$

$$x = \frac{43}{2} \quad \text{ἤτοι:} \quad x = 21{,}5.$$

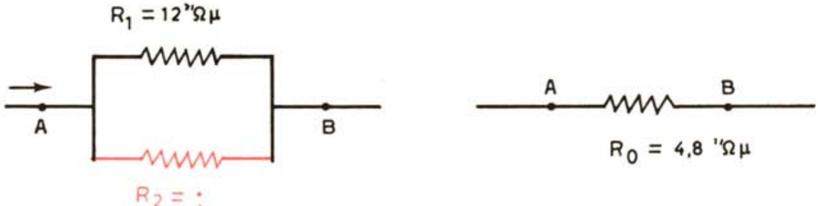
Δηλαδή:

Ἂν σὲ μία ἐξίσωσι ὑπάρχουν κλασματικοὶ ὅροι, πρῶτα ἀπαλείφομε τοὺς παρονομαστὲς καὶ μετὰ προχωροῦμε στὴν ἐπίλυσι, κατὰ τὰ γνωστά.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὴν λύσι τοῦ 2ου προβλήματος προκύπτει πώς:

Γιὰ νὰ ἀπαλείψωμε τοὺς παρονομαστὲς σὲ μία ἐξίσωσι, κάνομε ὅλους τοὺς ὅρους ὁμώνυμα κλάσματα καὶ μετὰ (ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμε καὶ τὰ δύο μέρη τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸν κοινὸ παρονομαστὴ καὶ κάνωμε τὴν ἁπλοποίησι) ἔχομε μία νέα ἐξίσωσι μόνο μὲ τοὺς ἀριθμητές.

3. Στὴν συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 11 · 2 β ἔχομε δύο ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 συνδεδεμένες παράλληλα, ὥστε οὐσιαστικὰ νὰ εἶναι



Σχ. 11·2 β.

τὸ ἴδιο, σὰν νὰ ἔχωμε στὸ κύκλωμα μία ***ἰσοδύναμη*** ἀντίστασι: R_0. Νὰ εὕρετε τὴν R_2, ἂν ξέρετε ὅτι: $R_1 = 12{,}0$ Ohms καὶ $R_0 = 4{,}8$ Ohms.

Λύσι :

Στὸν τύπο τῆς Φυσικῆς:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ἀντικαθιστοῦμε τοὺς δοσμένους ἀριθμούς:

$$\frac{1}{4{,}8} = \frac{1}{12{,}0} + \frac{1}{R_2}.$$

Ὀνομάζομε τὸ $R_2 = x$:

$$\frac{1}{4{,}8} = \frac{1}{12{,}0} + \frac{1}{x}.$$

Ἀπαλείφομε τοὺς παρονομαστές:

$$\overbrace{\frac{1}{4{,}8}}^{12{,}0 \cdot x} = \overbrace{\frac{1}{12{,}0}}^{4{,}8 \cdot x} + \overbrace{\frac{1}{x}}^{4{,}8 \cdot 12{,}0}$$

$$\frac{12{,}0 \cdot x}{4{,}8 \cdot 12{,}0 \cdot x} = \frac{4{,}8 \cdot x}{12{,}0 \cdot 4{,}8 \cdot x} + \frac{4{,}8 \cdot 12{,}0}{x \cdot 4{,}8 \cdot 12{,}0}.$$

Ἐν συνεχείᾳ λύνομε κατὰ τὰ γνωστά:

$$12{,}0 \cdot x - 4{,}8 \cdot x = 4{,}8 \cdot 12{,}0 \qquad 7{,}2 \cdot x = 57{,}6$$

$$x = \frac{57{,}6}{7{,}2} \qquad \text{ἄρα} \qquad x = 8$$

ἢ ἐπειδὴ $x = R_2$, $R_2 = 8$ Ohms (Ὤμ).

11 · 3 Ἡ ἐπαλήθευσι στὴν ἐξίσωσι.

α) Μὲ τὴν ἐπίλυσι τῶν ἐξισώσεων, ὅπως εἴδαμε στὶς προηγούμενες παραγράφους, εὑρίσκομε γιὰ τὸν ἄγνωστο x μία ἀριθμητικὴ τιμή, ἡ ὁποία μᾶς λύνει, ὅπως λέμε, τὸ πρόβλημα. Αὐτὸ σημαίνει, ὅτι ἂν στὴν ἐξίσωσί μας ἀντὶ γιὰ x βάλωμε τὴν ἀριθμητική του τιμή, θὰ πρέπει τὸ πρῶτο μέρος της νὰ εὑρεθῇ ἴσο μὲ τὸ δεύτερο.

Ἐφαρμογὴ 1η.

Ἐξίσωσι : $2 \cdot x + 20{,}3 = 21{,}5.$

Λύσι :

$$x = 0{,}6$$

Ἐφαρμόζομε ὅσα εἴπαμε παραπάνω:

Πρῶτο μέρος :		***Δεύτερο μέρος :***
$2 \cdot 0{,}6 + 20{,}3$		$21{,}5$
$1{,}2 + 20{,}3$		
$21{,}5$	$=$	$21{,}5.$

Ἡ πρᾶξι, κατὰ τὴν ὁποία ἀντικαθιστοῦμε σὲ μία ἐξίσωσι τὸν ἄγνωστο x μὲ τὴν ἀριθμητική του τιμὴ καὶ διαπιστώνομε ὅτι τὰ δύο μέρη τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσα, λέγεται ἐπαλήθευσι.

Ἐφαρμογὴ 2α.

Ἐξίσωσι: $\dfrac{x}{4} - 5 = \dfrac{3}{8}.$

Λύσι :

$$x = \frac{43}{2} \qquad \text{ἢ} \qquad x = 21{,}5.$$

Ἐπαλήθευσι:

$$\frac{21{,}5}{4} - 5 \qquad\qquad \frac{3}{8}$$

$$5{,}375 - 5$$

$$0{,}375$$

$$\frac{375}{1000}$$

$$\frac{375 : 125}{1000 : 125}$$

$$\frac{3}{8} \qquad = \qquad \frac{3}{8}.$$

β) Ἕνας ἄλλος τρόπος γιὰ νὰ κάνωμε τὴν ἐπαλήθευσι εἶναι νὰ ***ἀντικαταστήσωμε*** τὸν ἄγνωστο μὲ τὴν ἀριθμητική του τιμή, νὰ κάνωμε πράξεις μὲ τὴν ἰσότητα ποὺ θὰ ἔχωμε, σὰν νὰ ἦταν ἐξίσωσι, μέχρι νὰ καταλήξωμε σὲ μία ἄλλη ἰσότητα, ποὺ νὰ φαίνεται μόνη της ὅτι εἶναι ἀληθινή, ὅπως π.χ. ἡ παραπάνω ἰσότης: $\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$.

Ἐφαρμογή.

Ἐξίσωσι: $\frac{1}{4{,}8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{x}$ *Λύσι:* $x = 8$.

Ἐπαλήθευσι:

$$\underbrace{\frac{1}{4{,}8}}^{12\times 8} = \underbrace{\frac{1}{12}}^{4{,}8\times 8} + \underbrace{\frac{1}{8}}^{4{,}8\times 12}.$$

Ἀπαλειφὴ παρονομαστῶν:

$$12 \times 8 \times 1 = 4{,}8 \times 8 \times 1 + 4{,}8 \times 12 \times 1$$

$$96 = 38{,}4 + 57{,}6$$

$$96 = 96{,}0.$$

Ἡ ἰσότης ποὺ εὑρήκαμε:

$$96 = 96$$

εἶναι ἀληθινή. Πράγμα ποὺ σημαίνει, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ x, ποὺ βάλαμε στὴν ἀρχικὴ ἐξίσωσι, εἶναι ἡ ***σωστή***.

11 · 4 Οἱ παρενθέσεις.

Ὑπενθύμισι.

Ξέρομε ἀπὸ προηγούμενα μαθήματα, ὅτι πράξεις σημειωμένες καὶ κλεισμένες μέσα σὲ παρένθεσι θεωροῦνται ὅτι ἔχουν ἐκτελεσθῆ. Ἔτσι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$5 + 7 = \boldsymbol{(5 + 7)}$, ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ $5 + 7 = \boldsymbol{12}$.

$12 - 9 = \boldsymbol{(12 - 9)}$, » » » » » $12 - 9 = \boldsymbol{3}$.

Ἑπομένως, μὲ γράμματα, γενικῶς, θὰ ἔχωμε:

$$\alpha + \beta = (\alpha + \beta)$$

$$\alpha - \beta = (\alpha - \beta).$$

Α. Πρόσθεσι ἑνὸς ἀθροίσματος.

Πρόβλημα.

Σὲ δεξαμενὴ πετρελαίου, ποὺ περιέχει 250 λίτρα, βάζομε διαδοχικὰ τὶς παρακάτω ποσότητες πετρελαίου: 75 λίτρα, 105 λίτρα καὶ 95 λίτρα. Ζητοῦμε νὰ εὕρωμε πόσο πετρέλαιο περιέχει συνολικὰ ἡ δεξαμενή;

Λύσι:

Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι τὸ πρόβλημα λύνεται, ἂν προσθέσωμε στὸ 250 τοὺς ἀριθμοὺς 75, 105 καὶ 95. Ἡ πρόσθεσι αὐτὴ μπορεῖ νὰ γίνη μὲ τοὺς παρακάτω δύο τρόπους:

1ος Τρόπος.

Εὑρίσκομε πρῶτα πόσο εἶναι οἱ ποσότητες τοῦ πετρελαίου, ποὺ προσθέσαμε στὴν δεξαμενή. Ἔτσι ἔχομε: 75 + 105 + 95 = 275. Αὐτὸ τὸ προσθέτομε στὰ 250 λίτρα καὶ ἔχομε: 250 + 275 = 525.

Ὅμως στὴν θέσι τοῦ 275 μποροῦμε νὰ βάλωμε τὸ ἴσο του, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν προηγουμένων ποσοτήτων, ἀφοῦ προηγουμένως τὰ κλείσωμε μέσα σὲ παρένθεσι. Γιατί, ὅπως ξέρομε, πράξεις μὲ ἀριθμοὺς κλεισμένους σὲ παρένθεσι θεωροῦνται ὅτι ἔχουν ἐκτελεσθῆ.

Ἔτσι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$250 + (75 + 105 + 95) = 525.$$

2ος Τρόπος.

Στὰ 250 λίτρα προσθέτομε μὲ τὴν σειρὰ τὰ 75 λίτρα, 105 λίτρα καὶ 95 λίτρα. Ἔτσι θὰ ἔχωμε:

$$250 + 75 + 105 + 95 = 525.$$

Συγκρίνοντες τοὺς δύο τρόπους, μὲ τοὺς ὁποίους λύσαμε τὸ πρόβλημα, βλέπομε ὅτι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$250 + (75 + 105 + 95) = 250 + 75 + 105 + 95.$$

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

$$47{,}5 + (32{,}3 + 27{,}5) = 47{,}5 + 32{,}3 + 27{,}5 = 107{,}3$$

$$(25 + 62) + 19 = 25 + 62 + 19 = 106.$$

Γενικά.

Οἱ ἴδιες πράξεις μὲ γράμματα γράφονται:

$$\boldsymbol{\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma.}$$

Β. Πρόσθεσι μιᾶς διαφορᾶς.

Πρόβλημα.

Σὲ δεξαμενὴ πετρελαίου, ποὺ περιέχει 250 λίτρα βάζομε 275 λίτρα. Μετὰ βγάζομε 145 λίτρα. Πόσα λίτρα ἔμειναν μέσα στὴν δεξαμενή;

Λύσι :

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύνεται μὲ μία πρόσθεσι καὶ μία ἀφαίρεσι, ὅπως δίνεται στοὺς δύο παρακάτω τρόπους λύσεως:

1ος Τρόπος.

Ἀφοῦ βάλαμε 275 λίτρα καὶ μετὰ βγάλαμε 145, σημαίνει ὅτι στὴν πραγματικότητα βάλαμε μόνο:

$$275 - 145 = 130$$

λίτρα, τὰ ὁποῖα προσθέτομε στὰ 250 λίτρα τῆς δεξαμενῆς:

$$250 + 130 = 380\ lt.$$

Ἂν κάνωμε καὶ ἐδῶ τὴν ἀντικατάστασι τοῦ 130, θὰ ἔχωμε:

$$\boldsymbol{250 + (275 - 145) = 380.}$$

2ος Τρόπος.

Στὰ 250 λίτρα προσθέτομε τὰ 275 λίτρα, ποὺ βάλαμε, καὶ ἔχομε:

$$250 + 275 = 525.$$

Μετὰ βγάζομε τὰ 145 λίτρα, ποὺ σημαίνει:

$$525 - 145 = 380.$$

Ἀντικαθιστοῦμε τὸ 525 καὶ ἔχομε:

$$(250 + 275) - 145 = 380.$$

Ὅμως ξέρομε ὅτι:

$$(\alpha + \beta) = \alpha + \beta,$$

ἑπομένως θὰ ἔχωμε:

$$\boldsymbol{250 + 275 - 145 = 380.}$$

Συγκρίνοντες τοὺς δύο τρόπους, μὲ τοὺς ὁποίους λύσαμε τὸ πρόβλημα, βλέπομε ὅτι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$250 + (275 - 145) = 250 + 275 - 145$$

καί: $$250 + (275 - 145) = (250 + 275) - 145.$$

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

$$315 + (175 - 49) = 315 + 175 - 49 = 490 - 49 = 441.$$

$$62{,}7 + \underbrace{(\boldsymbol{17{,}3 - 25{,}0})}_{\text{(Ἡ ἀφαίρεσι δὲν γίνεται).}} = (62{,}7 + 17{,}3) - 25{,}0 = 80{,}0 - 25{,}0 = 55{,}0.$$

Γενικά.

Οἱ ἴδιες πράξεις μὲ γράμματα γράφονται:

$$\alpha + (\beta - \gamma) = \alpha + \beta - \gamma$$

$$\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma.$$

Γ. Ἀφαίρεσι ἑνὸς ἀθροίσματος.

Πρόβλημα.

Ἀπὸ δεξαμενὴ πετρελαίου, ποὺ περιέχει 250 λίτρα, βγάζομε στὴν ἀρχὴ 45 λίτρα καὶ μετὰ ἄλλα 75 λίτρα. Πόσα λίτρα ἔμειναν μέσα στὴν δεξαμενή;

Λύσι :

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ τὸ λύσωμε μὲ δύο τρόπους, ὅπως κάναμε καὶ στὰ ἄλλα δύο προβλήματα.

1ος Τρόπος.

Ἀφοῦ στὴν ἀρχὴ βγάλαμε 45 λίτρα καὶ στὴν συνέχεια ἄλλα 75, σημαίνει ὅτι συνολικὰ βγάλαμε:

$$45 + 75 = 120$$

λίτρα, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὰ 250 λίτρα τῆς δεξαμενῆς:

$$250 - 120 = 130.$$

Καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμε τὸ 120 μὲ τὸ ἴσο του, θὰ ἔχωμε:

$$\boldsymbol{250 - (45 + 75) = 130.}$$

2ος Τρόπος.

Ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὰ 250 λίτρα τὰ 45, ποὺ βγάλαμε πρῶτα.

Μᾶς μένουν: $250 - 45 = 205.$

Μετὰ ἀφαιροῦμε καὶ τὰ 75 λίτρα, ποὺ βγάλαμε στὴν συνέχεια.

Ἔχομε: $205 - 75 = 130.$

Ἀντικαθιστοῦμε τὸ 205: $(250 - 45) - 75 = 130.$

Ὅμως ξέρομε, ὅτι:

$$(\alpha - \beta) = \alpha - \beta.$$

Ἑπομένως:

$$\boldsymbol{250 - 45 - 75 = 130.}$$

Συγκρίνοντες τοὺς δύο τρόπους, μὲ τοὺς ὁποίους λύσαμε τὸ πρόβλημα, βλέπομε ὅτι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$250 - (45 + 75) = 250 - 45 - 75$$

$$250 - (45 + 75) = (250 - 45) - 75.$$

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

$195 - (27 + 18) = 195 - 27 - 18 = 168 - 18 = 150.$

$43{,}7 - (12{,}5 + 6{,}9) = (43{,}7 - 12{,}5) - 6{,}9 = 31{,}2 - 6{,}9 = 24{,}3.$

Γενικά.

Οἱ ἴδιες πράξεις μὲ γράμματα γράφονται:

$$\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$$

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$$

Δ. Ἀφαίρεσι μιᾶς διαφορᾶς.

Πρόβλημα.

Ἀπὸ δεξαμενὴ πετρελαίου, ποὺ περιέχει 250 λίτρα, βγάζομε 100 λίτρα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ γεμίσωμε τὸ ρεζερβουὰρ αὐτοκινήτου. Τελικὰ μᾶς περίσσεψαν 32 λίτρα, τὰ ὁποῖα ἐπιστρέψαμε στὴν δεξαμενή μας. Πόσο πετρέλαιο περιέχει ἡ δεξαμενή;

Λύσι:

Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ τὸ λύσωμε μὲ δύο τρόπους.

1ος Τρόπος.

Ἀπὸ τὰ 100 λίτρα, ποὺ ἀρχικὰ βγάλαμε, τελικὰ ἐπιστρέψαμε στὴν δεξαμενὴ 32 λίτρα. Ἑπομένως στὴν πραγματικότητα βγάλαμε μόνο:

$$100 - 32 = 68$$

λίτρα. Δηλαδὴ μέσα στὴν δεξαμενὴ ἔμειναν τελικά:

$$250 - 68 = 182$$

λίτρα. Καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμε τὸ 68, θὰ ἔχωμε:

$$\mathbf{250 - (100 - 32) = 182.}$$

2ος Τρόπος.

Ἀπὸ τὰ 250 λίτρα βγάζομε τὰ 100 λίτρα καὶ ἔχομε:

$$250 - 100 = 150.$$

Μετὰ προσθέτομε τὴν ἐπιστροφὴ τῶν 32 λίτρων:

$$150 + 32 = 182.$$

Ἀντικαθιστοῦμε τὸ 150: $(250 - 100) + 32 = 182$

ἢ ἀφοῦ $(\alpha - \beta) = \alpha - \beta$:

$$\boldsymbol{250 - 100 + 32 = 182.}$$

Συγκρίνοντες τοὺς δύο τρόπους, μὲ τοὺς ὁποίους λύσαμε τὸ πρόβλημα, βλέπομε ὅτι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$250 - (100 - 32) = 250 - 100 + 32$$
$$250 - (100 - 32) = (250 - 100) + 32.$$

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

$$96{,}6 - (36{,}5 - 8{,}5) = 96{,}5 - 36{,}5 + 8{,}5 = 60{,}0 + 8{,}5 = 68{,}5.$$
$$215 - (69 - 15) = (215 - 69) + 15 = 146 + 15 = 161.$$

Μία ἀξιοσημείωτη ἐπέκτασι:

$$315 - \underbrace{(169 - 405)}_{\substack{\text{(Ἡ ἀφαίρεσι αὐτὴ}\\ \text{δὲν γίνεται μόνη της)}}} = 315 - 169 + 405 = 146 + 405 = 551.$$

Μία ἄλλη ἀξιοσημείωτη ἐπέκτασι:

$$75 - (165 - 105) = (75 - 165) + 105 = 105 + (75 - 165) =$$
$$= 105 + 75 - 165 = 180 - 165 = 15.$$

Γενικά.

Οἱ ἴδιες πράξεις μὲ γράμματα γράφονται:

$$\boldsymbol{\alpha - (\beta - \gamma) = \alpha - \beta + \gamma}$$
$$\boldsymbol{\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma}$$

Ε. Κανόνες τῶν παρενθέσεων.

Ἀπὸ τὴν λύσι τῶν προβλημάτων τῶν Α καὶ Β περιπτώσεων βγαίνει ὁ κανών:

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Μποροῦμε νὰ ἀπαλείψωμε μία παρένθεσι, ποὺ ἔχει μπροστά της τὸ σύμβολο + (τῆς προσθέσεως), χωρὶς νὰ ἀλλάξωμε τὰ πρόσημα, ποὺ ἔχουν μπροστά τους οἱ ὅροι, ποὺ εὑρίσκονται μέσα σ' αὐτήν.

Ἀπὸ τὴν λύσι τῶν προβλημάτων τῶν Γ καὶ Δ περιπτώσεων βγαίνει ὁ κανών:

Μποροῦμε νὰ ἀπαλείψωμε μία παρένθεσι, ποὺ ἔχει μπροστά της τὸ σύμβολο − (τῆς ἀφαιρέσεως), ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμε τὰ πρόσημα, ποὺ ἔχουν μπροστά τους οἱ ὅροι, ποὺ εὑρίσκονται μέσα σ' αὐτήν.

11 · 5 Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσι στὶς παραστάσεις μὲ παρενθέσεις.

Α. Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀθροίσματος μὲ ἕνα ἀριθμό.

Πρόβλημα.

Ἕνα κιβώτιο περιέχει 125 τεμάχια ἀπὸ ἕνα εἶδος, ἐνῶ ἕνα ἄλλο περιέχει 200. Ἂν κάθε τεμάχιο κοστίζη 5 δραχμές, πόσα χρήματα δώσαμε καὶ γιὰ τὰ δύο κιβώτια;

Λύσι :

Ὅπως καὶ στὴν προηγουμένη παράγραφο, θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ δύο τρόπους.

1ος Τρόπος.

Στὴν ἀρχὴ προσθέτομε τὸ 125 μὲ τὸ 200 γιὰ νὰ εὕρωμε τὰ συνολικὰ τεμάχια:

$$125 + 200 = 325.$$

Μετὰ πολλαπλασιάζομε τὸ ἐξαγόμενο μὲ τὸ 5 καὶ ἔχομε:

$$325 \times 5 = 1625$$

δραχμές. Ὅμως τὸ 325 μποροῦμε νὰ τὸ ἀντικαταστήσωμε, κατὰ τὰ γνωστά, καὶ ἔχομε:

$$\boldsymbol{(125 + 200) \times 5 = 1625.}$$

2ος Τρόπος.

Εὑρίσκομε πόσο δώσαμε γιὰ τὸ πρῶτο κιβώτιο:

$$125 \times 5 = 625$$

δραχμὲς καὶ μετὰ γιὰ τὸ δεύτερο κιβώτιο:

$$200 \times 5 = 1000.$$

Προσθέτομε τὰ δύο ἐξαγόμενα:

$$625 + 1000 = 1625.$$

Μποροῦμε ὅμως νὰ γράψωμε καί:

$$\boldsymbol{125 \times 5 + 200 \times 5 = 1625.}$$

Συγκρίνοντας τὰ δύο ἀποτελέσματα ἔχομε:

$$\boldsymbol{(125 + 200) \times 5 = 125 \times 5 + 200 \times 5.}$$

Συμπέρασμα.

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα ἄθροισμα μὲ ἕνα ἀριθμὸ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε κάθε ὅρο τοῦ ἀθροίσματος μὲ τὸν ἀριθμό.

᾿Αριθμητικὰ παραδείγματα.

$(6{,}7 + 3{,}2) \times 0{,}2 = 6{,}7 \times 0{,}2 + 3{,}2 \times 0{,}2 = 1{,}98$
$(0{,}25 + 1{,}75 + 3{,}15) \times 1{,}5 = 0{,}25 \times 1{,}5 + 1{,}75 \times 1{,}5 +$
$+ 3{,}15 \times 1{,}5 = 7{,}725.$

Γενικά.

Οἱ ἴδιες πράξεις μὲ γράμματα γράφονται:

$$\boldsymbol{(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma}$$

᾿Αξιοσημείωτη παρατήρησι.

῞Ας δοῦμε, πῶς ἀλλοιῶς μποροῦμε νὰ κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμό: $(25 + 12) \times 6$.

Γράφομε: $\boldsymbol{(25 + 12) \times 6} = 37 \times 6 = 6 \times 37 = \boldsymbol{6 \times (25 + 12)}.$

Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ ποῦμε καὶ μὲ κάθε ἄλλο ἀριθμό, δεκαδικὸ ἢ κλασματικό, ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμὸ δίνει τὸ ἴδιο ἐξαγόμενο μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα.

Γενικά.

Μὲ γράμματα μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha + \beta)$$

Β. Πολλαπλασιασμὸς μιᾶς διαφορᾶς μὲ ἕνα ἀριθμό.

Πρόβλημα.

Ἕνα κιβώτιο περιέχει 250 τεμάχια ἀπὸ ἕνα εἶδος, τὸ ὁποῖο τιμᾶται 8 δραχμὲς τὸ ἕνα. Ἂν πωλήσωμε τὰ 75, τὰ ὑπόλοιπα ποιά ἀξία πωλήσεως ἔχουν;

Λύσι :

Κάνοντας τὴν ἴδια σκέψι ὅπως μέχρι τώρα, προχωροῦμε στὴν λύσι τοῦ προβλήματός μας μὲ τοὺς παρακάτω δύο τρόπους:

1ος Τρόπος.

Μέσα στὸ κιβώτιο παραμένουν τελικά:

$250 - 75 = 175$ κομμάτια, ποὺ συνολικὰ ἀξίζουν δραχμές:

$$175 \times 8 = 1400.$$

Τὸν παραπάνω πολλαπλασιασμὸ τὸν γράφομε ὡς ἑξῆς:

$$(250 - 75) \times 8 = 1400.$$

2ος Τρόπος.

Τὸ πρῶτο κιβώτιο ἀξίζει: $250 \times 8 = 2000.$

Τὸ δεύτερο κιβώτιο ἀξίζει: $75 \times 8 = 600$

δραχμές. Ἄρα μέσα στὸ κιβώτιο μένουν συνολικὰ τεμάχια ἀξίας:

$$2000 - 600 = 1400 \quad \text{δραχμῶν.}$$

Γράφομε:

$$250 \times 8 - 75 \times 8 = 1400.$$

Συγκρίνοντες τὰ δύο ἀποτελέσματα ἔχομε:

$$(250 - 75) \times 8 = 250 \times 8 - 75 \times 8.$$

Συμπέρασμα.

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μία διαφορὰ ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε κάθε ὅρο τῆς διαφορᾶς μὲ τὸν ἀριθμό.

Ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

$$(47{,}12 - 9{,}35) \times 0{,}2 = 47{,}12 \times 0{,}2 - 9{,}35 \times 0{,}2 = 7{,}554.$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \times 6 = \frac{2}{3} \times 6 - \frac{1}{4} \times 6 = 4 - 1{,}5 = 2{,}5.$$

Γενικά.

Οἱ ἴδιες πράξεις μὲ γράμματα γράφονται:

$$(\alpha - \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma$$

Ἀξιοσημείωτη παρατήρησι.

Ἂς δοῦμε, πῶς ἀλλοιῶς μποροῦμε νὰ κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ $(25 - 12) \times 6$.

Λύσι :

Γράφομε: $(25 - 12) \times 6 = 13 \times 6 = 6 \times 13 = 6 \times (25 - 12)$.

Τὰ ἴδια μποροῦμε νὰ κάνωμε καὶ μὲ κάθε ἄλλο ἀριθμὸ δεκαδικὸ ἢ κλασματικό, ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μιᾶς διαφορᾶς μὲ ἕνα ἀριθμὸ δίνει τὸ ἴδιο ἐξαγόμενο μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν διαφορά.

Γενικά.

Μὲ γράμματα μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$(\alpha - \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha - \beta).$$

Γ. Διαίρεσι μὲ ἕνα ἀριθμό.

Ἐφαρμογές.

α) Νὰ γίνη ἡ διαίρεσι: $(28 - 6) : 2$.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Λύσι :

$$(28-6):2 = 22:2 = 22\times\frac{1}{2} = (28-6)\times\frac{1}{2} = \frac{28}{2}-\frac{6}{2}.$$

β) Νὰ γίνη ἡ διαίρεσι:

$$(28+6):0{,}2.$$

Λύσι :

$$(28+6):0{,}2 = 34:0{,}2 = \frac{34}{0{,}2} = \frac{28+6}{0{,}2} = \frac{28}{0{,}2}+\frac{6}{0{,}2}.$$

γ) Νὰ γίνη ἡ διαίρεσι:

$$(25-7):\frac{3}{4}.$$

Λύσι :

$$(25-7):\frac{3}{4} = 18:\frac{3}{4} = 18\times\frac{4}{3} = (25-7)\times\frac{4}{3}.$$

δ) Νὰ γίνη ἡ διαίρεσι:

$$(25+7):\frac{3}{4}.$$

Λύσι :

$$(25+7):\frac{3}{4} = 32:\frac{3}{4} = 32\times\frac{4}{3} = (25+7)\times\frac{4}{3}.$$

Συμπεράσματα.

α) Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕνα ἄθροισμα ἢ μία διαφορὰ μὲ ἕνα ἀριθμό, διαιροῦμε κάθε ἕνα ὅρο τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς μὲ τὸν ἀριθμό.

β) Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕνα ἄθροισμα ἢ μία διαφορὰ μὲ ἕνα κλάσμα ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου (κλασματικοῦ διαιρέτου) καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.

Γενικά.

Μὲ γράμματα ἔχομε:

$$(\alpha + \beta) : \gamma = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}$$

$$(\alpha - \beta) : \gamma = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}$$

$$(\alpha + \beta) : \frac{\gamma}{\delta} = (\alpha + \beta) \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

$$(\alpha - \beta) : \frac{\gamma}{\delta} = (\alpha - \beta) \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

Προσοχή.

Στὴν διαίρεσι δὲν ἰσχύουν οἱ δύο ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις, ποὺ κάναμε γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ στὶς δυὸ παραπάνω Α καὶ Β περιπτώσεις.

Δηλαδή:

$$(\alpha + \beta) : \gamma \neq \gamma : (\alpha + \beta)$$

(Θυμόμαστε ὅτι τὸ σύμβολο $\neq$ σημαίνει διαφορετικό).

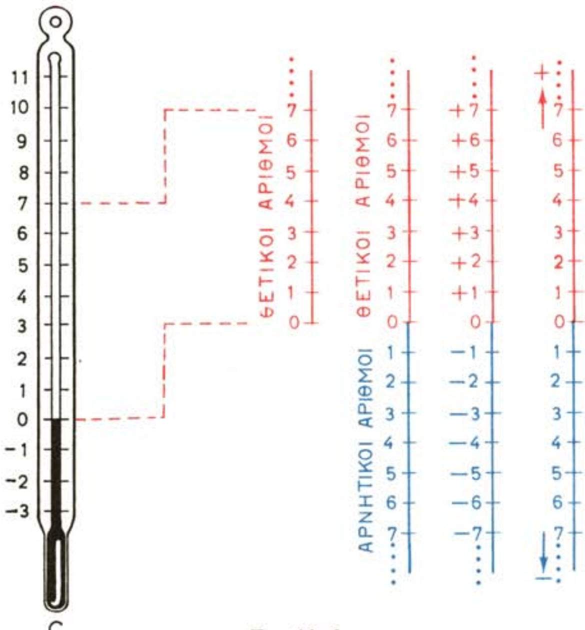
ἢ $$(\alpha - \beta) : \frac{\gamma}{\delta} \neq \frac{\gamma}{\delta} : (\alpha - \beta)$$

11 · 6 Ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

Πολλὲς φορές, τὸν χειμῶνα, ἀκοῦμε ἀπὸ τὸ ραδιόφωνο στὸ μετεωρολογικὸ δελτίο νὰ ἀναφέρεται: «. . . ἡ δὲ θερμοκρασία θὰ κυμανθῆ μεταξὺ ἐλαχίστης 5 βαθμῶν Κελσίου ὑπὸ τὸ μηδὲν καὶ 3 βαθμῶν Κελσίου ἄνω τοῦ μηδενός . . .». Αὐτὸ μᾶς κάνει νὰ συμπεράνωμε ὅτι ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς γνωστούς μας ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3 , . . ., ποὺ ἔχουν σὰν ἀρχὴ τὸ μηδὲν καὶ συνεχῶς αὐξάνουν, ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, μὲ τοὺς ὁποίους μετροῦμε διάφορα μεγέθη ***μικρότερα*** ἀπὸ τὸ μηδέν.

Αὐτὸ σημαίνει, πὼς ὑπάρχουν δύο ὁμάδες ἀριθμῶν. Ἡ μία ὁμάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι ***μεγαλύτεροι*** ἀπὸ τὸ μηδὲν καὶ ὀνομάζονται ***θετικοὶ*** ἀριθμοί. Ἡ δευτέρα ὁμάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι ***μικρότεροι*** ἀπὸ τὸ μηδὲν καὶ ὀνομάζονται ***ἀρνητικοὶ*** ἀριθμοί. Καὶ οἱ δύο μαζὶ ὀνομάζονται ***ἀλγεβρικοὶ*** ἀριθμοὶ καὶ αὐτό, γιατὶ μαζί τους ἀσχολεῖται ἕνας ἄλλος κλάδος τῶν μαθηματικῶν, ποὺ λέγεται ***ἄλγεβρα***.

Ἂς πάρωμε τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων καὶ ἂς βάλωμε τὴν ἀρχή του, ποὺ εἶναι τὸ ***μηδέν***. Ὅπως ξέρομε, παίρνοντας ἐπάνω ἀπὸ τὸ μηδὲν ἴσα διαστήματα μποροῦμε νὰ γράψωμε τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2,



Σχ. 11·6.

3, . . . Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ποὺ εἴπαμε παραπάνω, οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι οἱ ***θετικοὶ*** ἀριθμοί. Ἂν τώρα ἐπεκτείνωμε τὸν ἄξονα πρὸς τὰ κάτω, μποροῦμε νὰ κάνωμε τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τοὺς ***ἀρνητικοὺς*** ἀριθμούς. Ἔτσι ἔχομε τὸν ἄξονα χωρισμένο σὲ δύο μέρη: Τὸ ἕνα ἔχει τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, ποὺ τοὺς συμβολίζομε μὲ τὸ σύμβολο + καὶ τὸ ἄλλο ἔχει τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, ποὺ τοὺς συμβολίζομε μὲ τὸ σύμβολο —.

Ἔτσι ἔχομε:

Θετικοὶ ἀριθμοί : $+5 \quad +7 \quad +32 \quad +45{,}7 \ldots$

Ἀρνητικοὶ ἀριθμοί: $-6 \quad -12 \quad -29{,}5 \quad -38{,}75 \ldots$

Τὸ σύμβολο + ἢ — μπροστὰ ἀπὸ κάθε ἀλγεβρικὸ ἀριθμὸ ὀνομάζεται ***ἀλγεβρικὸ πρόσημο*** ἢ ἁπλῶς ***πρόσημο***.

Ὁ ἀριθμὸς +1 ὀνομάζεται ***ἀκεραία θετικὴ μονάς***, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς —1 ὀνομάζεται ***ἀκεραία ἀρνητικὴ μονάς***.

Ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο πρόσημο, λέγονται ***ὁμόσημοι***, ἐνῶ ὅταν ἔχουν διαφορετικὸ πρόσημο λέγονται ***ἑτερόσημοι***.

Ὁμόσημοι ἀριθμοί : $+5 \quad +9$ ἢ $-3{,}75 \quad -0{,}8$

Ἑτερόσημοι ἀριθμοί : $+8 \quad -3$ ἢ $+7{,}5 \quad -\dfrac{3}{5}$

Ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς, ποὺ προκύπτει, ἂν ἕνα ἀλγεβρικὸ ἀριθμὸ τὸν γράψωμε χωρὶς τὸ πρόσημό του, λέγεται ***ἀπόλυτος τιμὴ*** τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.

Δύο ἀριθμοὶ ἑτερόσημοι μὲ τὴν ἴδια ἀπόλυτο τιμὴ λέγονται ***ἀντίθετοι***, π.χ. οἱ +5 καὶ —5.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω καὶ ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ τοποθετήσαμε τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς ἐπάνω στὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων, βγαίνουν τὰ παρακάτω συμπεράσματα:

Κάθε ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη ἀλγεβρικὴ μονάδα, ἂν τὴν πάρωμε πολλὲς φορές.

Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸ ἀριθμό.

Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἄλλο θετικὸ ἀριθμό, ποὺ ἔχει μικρότερο ἀριθμὸ θετικῶν μονάδων.

Κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἄλλο ἀρνητικὸ ἀριθμό, ποὺ ἔχει μεγαλύτερο ἀριθμὸ μονάδων.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ἔτσι μποροῦμε νὰ ἔχωμε:

$$(+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) = +5$$

$$(-1) + (-1) + (-1) = -3$$

$$(+0{,}1) + (+0{,}1) + (0{,}1) = +0{,}3$$

$$(-0{,}1) + (-0{,}1) + (-0{,}1) = -0{,}3$$

$$+27 > -59 \qquad +27 > -7 \qquad +3 > -9{,}5$$

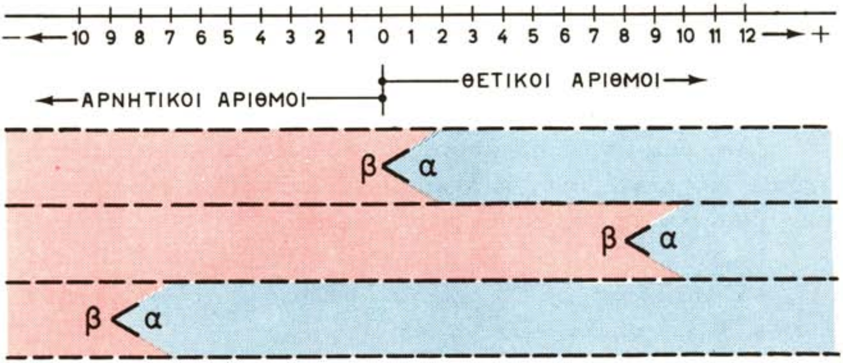
$$+8 > +3 \qquad +35 > +27 \qquad +315 > -27$$

$$-8 < -3 \qquad -35 < -27 \qquad -315 < -27.$$

11 · 7 Ἡ πρακτικὴ ἀξία τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.

Μετὰ ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὴν προηγουμένη παράγραφο, εὔκολα κανεὶς ἀναρωτιέται, γιατί νὰ ὑπάρχουν οἱ δύο νέοι αὐτοὶ ἀριθμοί.

Παρακάτω δίνομε μερικὰ στοιχειώδη παραδείγματα, στὰ ὁποῖα φαίνεται καθαρὰ ἡ χρησιμότης αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 11·7 α.

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ α, ποὺ εὑρίσκονται μέσα στὴν μπλὲ ζώνη, εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς β, ποὺ εὑρίσκονται μέσα στὴν κόκκινη ζώνη.

α) ***Τὸ θερμόμετρο.***

Ἂς πάρωμε ἕνα θερμόμετρο (σχ. 11 · 6), μὲ τὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ μετροῦμε τὴν θερμοκρασία ὄχι μόνο τῶν θερμῶν ἀλλὰ καὶ τῶν ψυχρῶν σωμάτων. Ἡ Φυσικὴ μᾶς ὁρίζει τὴν θερμοκρασία μηδὲν σὰν ἀρχὴ τῶν μετρήσεων. Ὅλα τὰ πιὸ ζεστὰ σώματα λέμε ὅτι

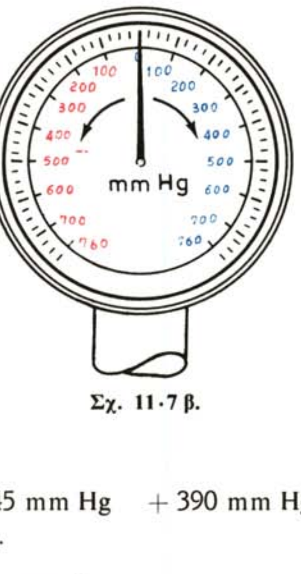
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ἔχουν θερμοκρασία ***ἐπάνω ἀπὸ τὸ μηδέν***, δηλαδὴ ***θετική***, καὶ ὅλα τὰ πιὸ κρύα λέμε ὅτι ἔχουν θερμοκρασία ***κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν***, δηλαδὴ ***ἀρνητική***.

Ἔτσι λέμε θερμοκρασία: $+25^\circ$ C, $+18^\circ$ C, $+75^\circ$ C, ἢ -6° C -9° C, -15° C.

β) ***Τὸ θλιβόμετρο.***

Ἕνα ὄργανο, ποὺ μετράει τὴν σχετικὴ πίεσι, ὅπως γνωρίζομε ἀπὸ τὴν Φυσική, εἶναι τὸ θλιβόμετρο (σχ. 11 · 7 β). Γιὰ τὶς πιέσεις ἐπάνω ἀπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴ χρησιμοποιοῦμε θετικοὺς ἀριθμούς, ἐνῶ γιὰ τὶς πιέσεις κάτω ἀπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴ χρησιμοποιοῦμε ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.



Σχ. 11·7 β.

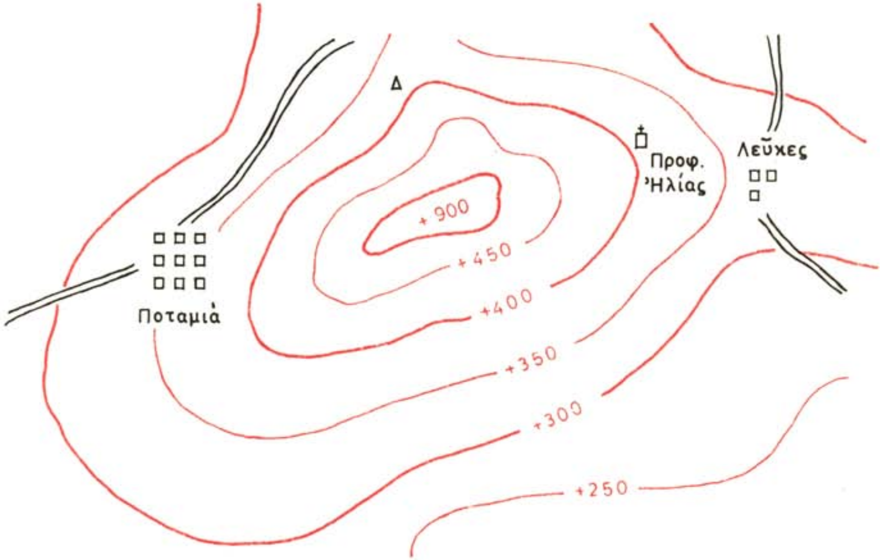
Ἔτσι λέμε:

$+75$ mm Hg $+145$ mm Hg $+390$ mm Hg ἢ -32 mm Hg -48 mm Hg κ.λπ.

γ) ***Οἱ ἰσοϋψεῖς καμπύλες.***

Βασικὰ πρόκειται γιὰ ἐφαρμογὴ τῆς Τοπογραφίας καὶ τὶς συναντοῦμε σὲ πάρα πολλοὺς χάρτες, κυρίως τοπογραφικούς. Μὲ τὶς καμπύλες αὐτὲς δείχνομε ἐπάνω στὸν χάρτη τὰ διάφορα σημεῖα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται στὸ ἴδιο ὕψος ἐπάνω ἀπὸ τὴν θάλασσα.

Τὰ ***ὑψόμετρα*** αὐτὰ τὰ ἐκφράζομε μὲ ἕνα θετικὸ ἀριθμὸ (σχ. 11 · 7 γ), ἐνῶ τὰ βάθη τῶν σημείων, ποὺ εἶναι πιὸ κάτω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης καὶ στὴν ἴδια στάθμη, τὰ ἐκφράζομε μὲ ἕνα ἀρνητικὸ ἀριθμό.



ΚΛΙΜΑΞ 1:5000

Σχ. 11·7 γ.

Ἔτσι λέμε ***Στάθμη*** : + 295 m, + 389 m, + 1475 m ἢ — 69 m, — 135 m κ.λπ. Προφανῶς οἱ ἀρνητικὲς τιμὲς ἀναφέρονται σὲ βάθη.

Ἂν ποῦμε ὅμως τὴν λέξι ***βάθος***, τότε αὐτομάτως ἡ ἀριθμητικὴ ἔκφρασι θὰ εἶναι ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς, δηλαδὴ χωρὶς πρόσημο.

Στάθμη :	— 32 m	— 45 m	— 25 m
Βάθος :	32 m	45 m	25 m.

Σημείωσι : Ὁ ἀριθμὸς — 32 m διαβάζεται «βάθος 32 m ***ὑπὸ*** τὴν ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης».

Βέβαια μὲ τὰ τρία αὐτὰ ἁπλᾶ παραδείγματα δὲν ἐξαντλεῖται τὸ θέμα, ὅμως αὐτὰ μᾶς δίνουν μία εἰκόνα τῶν ἐφαρμογῶν, ποὺ ἔχουν οἱ ἀλγεβρικοὶ καὶ εἰδικότερα οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

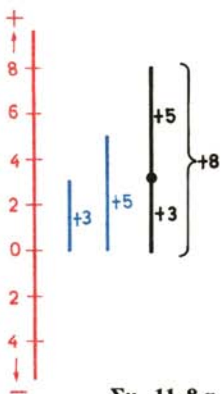
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

11 · 8 Οἱ τέσσερεις πράξεις στοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.*

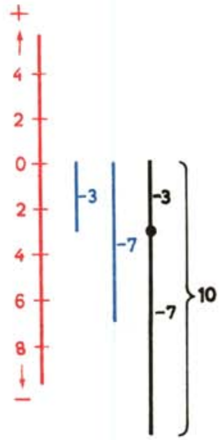
α) Πρόσθεσι μὲ ὁμοσήμους ἀριθμούς.

Πρόβλημα.

Ἀπὸ τὴν στάθμη $+3$ m μεταφέραμε ἕνα βάρος κατὰ $+5$ m (σχ. 11 · 8 α). Σὲ ποιά στάθμη θὰ εὑρεθῆ τὸ σῶμα;



Σχ. 11·8 α.



Σχ. 11·8 β.

Λύσι :

Πρόκειται οὐσιαστικὰ γιὰ τὴν πρόσθεσι $(+3)+(+5)$, ἡ ὁποία εὑρίσκεται, ἂν θυμηθοῦμε, πῶς σχηματίζονται οἱ ἀριθμοὶ $+3$ καὶ $+5$.

Ἔτσι ἔχομε:

$$(+3)+(+5) = \underbrace{(+1)+(+1)+(+1)}_{(+3)} + \underbrace{(+1)+(+1)+(+1)+(+1)+(+1)}_{(+5)} = +8$$

---

* Στὴν παράγραφο αὐτὴ θὰ δώσωμε μερικὰ παραδείγματα μὲ τὶς 4 πράξεις, ὅπως γίνονται μὲ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ θὰ βγάλωμε μερικοὺς κανόνες, χωρὶς νὰ προχωρήσωμε σὲ βαθύτερη ἐξέτασι, μιὰ καὶ δὲν εἶναι αὐτὸς ὁ σκοπός μας. Ἀπὸ τὴν παράγραφο αὐτὴ ὁ διδάσκων μπορεῖ νὰ διαλέξη ὅσα κατὰ τὴν κρίσι του θεωροῦνται ἀπαραίτητα γιὰ τὴν διδασκαλία τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ***ποὺ δίνονται σὲ ἰδιαίτερο κεφάλαιο.***

Ἐπέκτασι τῆς προσθέσεως σὲ

δεκαδικούς : $(+0,3) + (+0,5) = +0,8.$

κλάσματα : $\left(+\frac{1}{12}\right) + \left(+\frac{3}{12}\right) = +\frac{4}{12} = +\frac{1}{3}$

$$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{4}{12}\right) + \left(+\frac{3}{12}\right) = +\frac{7}{12}.$$

ἀρνητικούς (σχ. 11 · 8 β): $(-3) + (-7) = -10,$

$(-0,4) + (-0,7) = -1,1$

Κανών.

Γιὰ νὰ προσθέσωμε ὁμοσήμους ἀριθμοὺς προσθέτομε τὶς ἀπόλυτες τιμές τους καὶ πρόσημο βάζομε τὸ ἴδιο.

Ἔτσι τὸ ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντα θετικὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ ἄθροισμα ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντα ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Παρατήρησι.

Ἡ ἄλγεβρα μᾶς λέει ὅτι ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ χωρὶς τὸ πρόσημό του +, τὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ παραλείψωμε.

Ἔτσι:

ἀντὶ	$+5$	γράφομε	5
ἀντὶ	$+8,73$	γράφομε	$8,73$
ἀντὶ	$+(-7)$	γράφομε	(-7)

ἤ, τὸ ἀντίθετο, σὲ κάθε ἀριθμό, ποὺ δὲν ἔχει πρόσημο, μποροῦμε νὰ βάλωμε μπροστά του τὸ +.

Ἀπὸ τὸ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα πώς, ἂν μπροστὰ ἀπὸ μία παρένθεσι ὑπάρχη τὸ πρόσημο +, τότε αὐτὸ μπορεῖ νὰ παραληφθῆ.

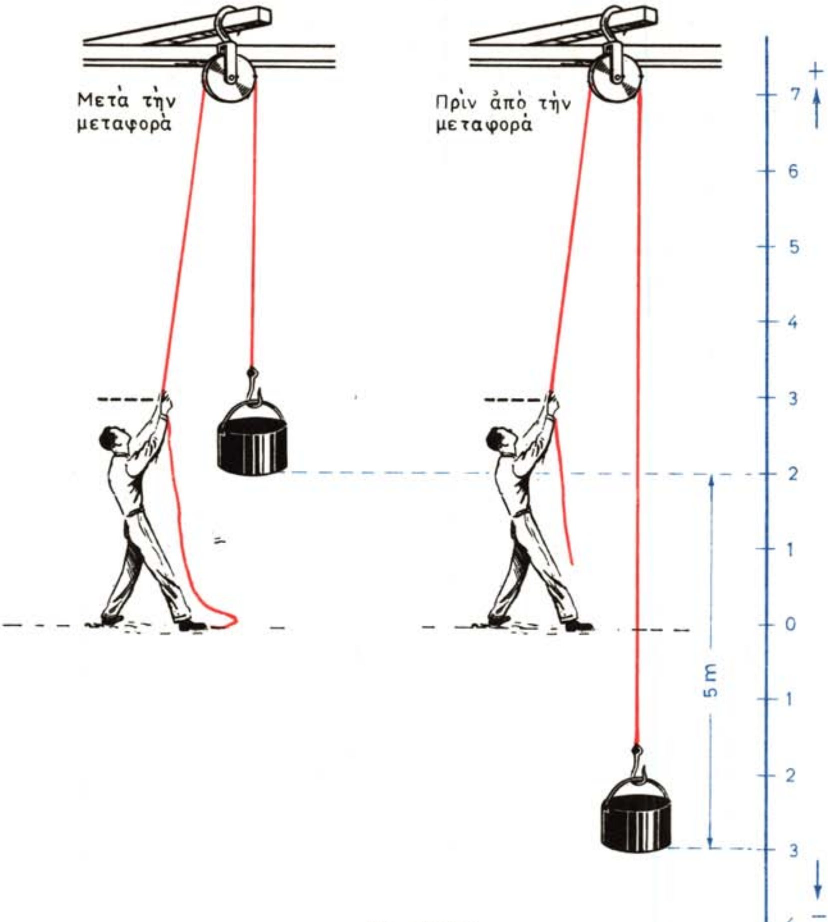
β) Πρόσθεσι μὲ ἑτεροσήμους ἀριθμούς.

Πρόβλημα 1ο.

Μετακινοῦμε ἕνα βάρος ἀπὸ τὴ στάθμη −3 m κατὰ +5 m. Σὲ ποιά στάθμη θὰ εὑρεθῆ τελικὰ τὸ βάρος (σχ. 11 · 8 γ);

Λύσι :

Οὐσιαστικὰ πρόκειται γιὰ τὴν πρόσθεσι (–3) + (+5).



Σχ. 11·8 γ.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 11 · 8 γ, τὸ σῶμα θὰ φθάση στὴν στάθμη (+2), ποὺ σημαίνει ὅτι: (–3) + (+5) = +2.

Ἀπὸ ἐδῶ βλέπομε ὅτι καὶ (+5) + (–3) = +2.

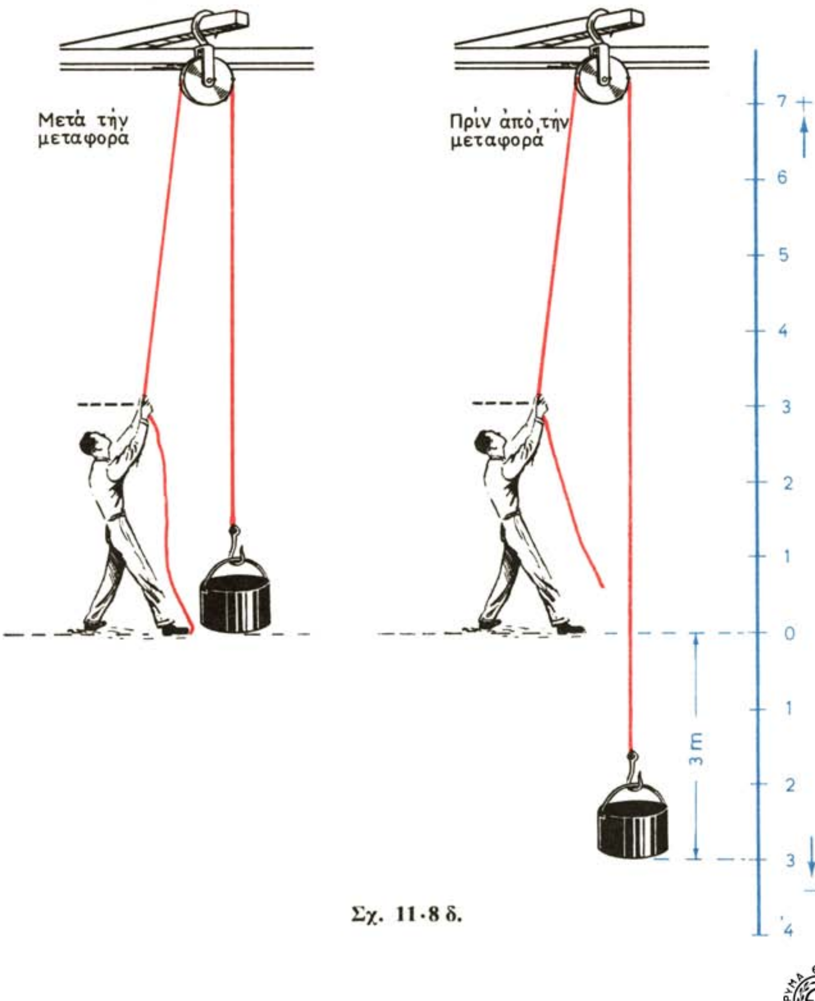
Δηλαδὴ στὴν πρόσθεσι τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νὰ ἀλλάξωμε τὴν θέσι τῶν προσθετέων.

Κανών.

Γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἑτεροσήμους ἀριθμοὺς ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμε τὶς ἀπόλυτες τιμὲς καὶ σὰν πρόσημο νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸ πρόσημο αὐτοῦ, ποὺ ἔχει τὴν μεγαλυτέρα ἀπόλυτη τιμή.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή.

$$(+5)+(-3)+(-9)+(+14{,}75)+(-0{,}75)=$$
$$(+19{,}75)+(-12{,}75)=+7{,}00.$$



Σχ. 11·8 δ.

Πρόβλημα 2ο.

Μεταφέρομε ἕνα βάρος ἀπὸ τὴν στάθμη — 3 m κατὰ + 3 m. Σὲ ποιά στάθμη θὰ εὑρεθῆ τελικὰ τὸ βάρος (σχ. 11 · 8 δ);

Λύσι :

Οὐσιαστικὰ πρόκειται γιὰ τὴν πρόσθεσι (— 3) + (+ 3), δηλ.

$$(-3) + (+3) = 0,$$

πρᾶγμα ποὺ ἐπαληθεύεται καὶ ἀπὸ τὸ σχῆμα 11 · 8 δ.

Συμπέρασμα.

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μὲ τὸ μηδέν.

Ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

$$(-3) + (+3) = 0,\ (-2{,}1) + (+2{,}1) = 0,\ \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = 0.$$

γ) Ἀφαίρεσι.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή (σχ. 11 · 8 ε).

Νὰ γίνη ἡ ἀφαίρεσι: (+ 5) — (+ 3).

Ἂν θυμηθοῦμε τὴν ἰδιότητα, ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει ἀπὸ τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς νὰ βγάζωμε τὸ πρόσημο, εὑρίσκομε ὅτι:

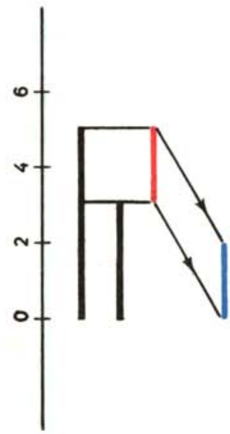
$$(+5) - (+3) = 5 - 3 = 2 = (+2).$$

Ἄλλες ἐφαρμογές.

$$\left.\begin{array}{l}(+5) - (+3) = (+2)\\ (+5) + (-3) = (+2)\end{array}\right\}$$

Ἄρα: $-(+3) = +(-3)$.

Ἀπὸ ἐδῶ βγαίνει ἕνας πολὺ σημαντικὸς κανών:



Σχ. 11·8 ε.

Ἂν μπροστὰ ἀπὸ μία παρένθεσι ὑπάρχη τὸ πρόσημο — (πλήν), τότε αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνη + (σύν), ἂν ἀλλάξη τὸ πρόσημο τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ εἶναι μέσα στὴν παρένθεσι.

$$(+5)+(-7)+(+4)-(+6)=(+5)+(-7)+(+4)+(-6)$$
$$=\underbrace{(+5)+(+4)}_{\textit{θετικοί}}+\underbrace{(-7)+(-6)}_{\textit{ἀρνητικοί}}=(+9)+(-13)=-4$$

$$(-5)-(+3)=(-5)+(-3)=-8.$$

Κανών.

Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς ἀρκεῖ στὸν μειωτέο νὰ προσθέσωμε τὸν ἀντίθετο τοῦ ἀφαιρετέου.

Π.χ. $(+32)-(+27)=(+32)+(-27)$
$(-12)-(+9)=(-12)+(-9)$
$(-5)-(-4)=(-5)+(+4)$
$(+6{,}3)-(-7{,}5)=(+6{,}3)+(+7{,}5)$.

δ) Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ +1 ἢ ἐπὶ —1.

Ἀπὸ τὴν ἄλγεβρα πάλι δανειζόμαστε τὰ δύο παρακάτω συμπεράσματα: Ὅτι ὁ:

Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν θετικὴ ἀκεραία μονάδα, +1, μᾶς δίνει ἐξαγόμενο τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Δηλαδὴ $(+1)\cdot(+8)=+8$
$(+1)\cdot(-3{,}75)=-3{,}75.$

$(+1)\cdot\alpha=+\alpha=\alpha$
$(+1)\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}=+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}.$

Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴ ἀκεραία μονάδα, —1, μᾶς δίνει ἐξαγόμενο τὸν ἀντίθετο ἀριθμό.

Δηλαδὴ $(-1)\cdot(+8)=-8$
$(-1)\cdot(-3{,}75)=+3{,}75.$

$(-1)\cdot\alpha=-\alpha$
$(-1)\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}=-\dfrac{\alpha}{\beta}.$

ε) Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Ἂν ἐπεκτείνωμε τοὺς παραπάνω κανόνες καὶ στὸν πολλαπλασιασμὸ ὁποιωνδήποτε ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμε:

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

$(+5)\cdot(+7) = +35 \qquad (-6)\cdot(+2) = -12$

$(+5)\cdot(-7) = -35 \qquad (-1{,}1)\cdot(-9) = +9{,}9.$

Δηλαδὴ τὸ ἐξαγόμενο εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ τῶν ἀριθμῶν ὅπως στὴν ἀριθμητική, μόνο ποὺ πρέπει νὰ προσέξωμε τὸ πρόσημο, γιὰ τὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι:

+	ἐπὶ	+	ἴσον	+	ἢ		$(+)\cdot(+) = +$
—	ἐπὶ	—	ἴσον	+	ἢ		$(-)\cdot(-) = +$
+	ἐπὶ	—	ἴσον	—	ἢ		$(+)\cdot(-) = -$
—	ἐπὶ	+	ἴσον	—	ἢ		$(-)\cdot(+) = -$

δηλαδή:

Γινόμενο ***ὁμοσήμων,*** *δίνει ἐξαγόμενο* ***θετικό,*** *ἐνῶ γινόμενο ἑτεροσήμων δίνει ἐξαγόμενο* ***ἀρνητικό.***

στ) Διαίρεσι.

Ὅπως ξέρομε καὶ ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική, ἡ διαίρεσι εἶναι πρᾶξι ***ἀντίστροφη*** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ποὺ σημαίνει ὅτι:

ἡ διαίρεσι τοῦ $\qquad 12 : 2 = 6,$

μπορεῖ νὰ γίνη καὶ ὡς πολλαπλασιασμὸς τοῦ 12 μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ 2, ποὺ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$12 : 2 = 12 \cdot \frac{1}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Αὐτὸ μᾶς κάνει νὰ σκεφθοῦμε, πὼς ἡ διαίρεσι δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν $\alpha : \beta$, γίνεται ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

Ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

$$(+6) : (+3) = (+6)\cdot\left(+\frac{1}{3}\right) = +2$$

$$(+9{,}9) : (-3) = (+9{,}9)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -3{,}3$$

$$(-8):(-2{,}5)=(-8)\cdot\left(-\frac{1}{2{,}5}\right)=(-8)\cdot\left(-\frac{10}{25}\right)=+3{,}2.$$

Δηλαδὴ τὸ ἐξαγόμενο εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν διαίρεσι τῶν ἀριθμῶν ὅπως στὴν Ἀριθμητική, μόνο ποὺ πρέπει νὰ προσέξωμε τὸ πρόσημο, γιὰ τὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι ἔχομε:

+	διὰ	+	ἴσον	+	ἢ	$(+):(+)=+$
—	διὰ	—	ἴσον	+	ἢ	$(-):(-)=+$
+	διὰ	—	ἴσον	—	ἢ	$(+):(-)=-$
—	διὰ	+	ἴσον	—	ἢ	$(-):(+)=-$

δηλαδή:

Διαίρεσι ***ὁμοσήμων*** *δίνει πηλίκον* ***θετικό,*** *ἐνῶ διαίρεσι ἑτεροσήμων δίνει πηλίκον* ***ἀρνητικό.***

11.9 Τὸ πρόβλημα τῶν παρενθέσεων.

Τὸ πρόβλημα τῶν παρενθέσεων, ὅπως τὸ ξέρομε καὶ ἀπὸ τὶς παραπάνω παραγράφους 4 καὶ 5, δὲν ἀλλάζει, ὅταν ἔχωμε νὰ κάνωμε πράξεις μὲ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς. Ἰσχύουν ἀκριβῶς οἱ ἴδιοι κανόνες. Δὲν πρέπει νὰ ξεχνοῦμε βέβαια, ὅσα εἴπαμε στὴν προηγουμένη παράγραφο γιὰ τὸ πρόσημο + ἢ —, ὅταν εὑρίσκεται μπροστὰ ἀπὸ παρένθεσι, ποὺ μέσα της εἶναι κλεισμένος ἕνας ἀριθμός· μόνο ποὺ ἐδῶ ἔχομε μέσα στὴν παρένθεσι κλεισμένους δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς.

Ἂς δοῦμε μερικὰ τέτοια παραδείγματα:

$$+[(+8)+(-3)]=+(+8)+(-3)=(+8)+(-3)=$$
$$=8-3=5=(+5)$$

$$+[(-5)-(+6)+(+17)]=(-5)-(+6)+(+17)=$$
$$=(-5)+(-6)+(17)=17-11=(+6).$$

Καὶ γιὰ νὰ ἀποφύγωμε νὰ γράψωμε ὁλόκληρο τὸ πρῶτο μέρος τὸ συμβολίζομε μὲ ἕνα γράμμα, συνήθως k καὶ ἔχομε:

$k=[(+8)+(-3)]$ γιὰ τὸ ὁποῖο εὑρήκαμε : $k=+5$.

ἢ $k=[(-5)-(+6)+(+17)]=(+6)$.

Οἱ παραπάνω παραστάσεις λέγονται ***ἀλγεβρικὲς παραστάσεις***.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές.

α) $k_1 = [(+6) + (-8)] + [(-1,75) - (+3,15) - (+9,15)]$

ἢ $k_1 = (+6) + (-8) + (-1,75) - (+3,15) - (+9,15)$

ἢ $k_1 = +6 - 8 - 1,75 - 3,35 - 9,15 = 6 - 22,25$

ἢ $k_1 = -16,25.$

β) $k_2 = 5 \cdot [(-3) - (+7,1)] - (-6) \cdot [(+12) - (-8)]$

ἢ $k_2 = [5 \cdot (-3) - 5 \cdot (+7,1)] - [(-6) \cdot (+12) - (-6) \cdot (-8)]$

ἢ $k_2 = [(-15) - (+35,5)] - [(-72) - (+48)]$

ἢ $k_2 = (-15 - 35,5) - (-72 - 48)$

ἢ $k_2 = \underbrace{-15 - 35,5}_{\text{ἀρνητικοί}} + \underbrace{72 + 48}_{\text{θετικοί}} = -50,5 + 120$

$k_2 = +69,5.$

11 · 10 Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Ἄσκησι.

Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παρακάτω παραστάσεως:

$k = \alpha \cdot (\beta - \gamma) + \beta \cdot (\gamma - \alpha) + \gamma \cdot (\alpha - \beta) + \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

ὅταν $\alpha = +2$, $\beta = -3$ καὶ $\gamma = -2,5$.

Λύσι :

Στὴν ἀρχὴ κάνομε πράξεις μὲ τὰ γράμματα καὶ εὑρίσκομε:

$k = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma - \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha - \gamma \cdot \beta + \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

ἢ $k = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = (+2) \cdot (-3) \cdot (-2,5)$

καὶ εὑρίσκομε: $k = (-6) \cdot (-2,5) = +15.$

11 · 11 Ἡ ἐξίσωσι μὲ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

Ὅσα εἴπαμε γιὰ τὸν τρόπο, ποὺ λύνομε μία ἐξίσωσι μὲ ἀριθμοὺς τῆς Ἀριθμητικῆς, ἀκριβῶς τὰ ἴδια ἰσχύουν καὶ στὴν περίπτωσι τῆς ἐξισώσεως μὲ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο.

Νὰ λυθῆ ἡ ἐξίσωσι:

$$(+7) \cdot x - (-3) = x - (-6).$$

Λύσι :

Αὐτή, ἂν ἀφαιρέσωμε τὶς παρενθέσεις, γράφεται:

$$7x + 3 = x + 6.$$

Χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους:

$$7x - x = 6 - 3 \qquad ἢ \qquad 6x = 3$$

Διαιροῦμε μὲ τὸν συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου, τὸν 6, καὶ τὰ δύο μέλη, ὁπότε:

$$\frac{6x}{6} = \frac{3}{6}, \text{ καὶ ἁπλοποιοῦντες } x = \frac{1}{2} \qquad ἢ \qquad x = 0{,}5$$

καὶ μὲ ἀλγεβρικὴ μορφή: $\boldsymbol{x = +0{,}5}$.

Παράδειγμα 2ο.

Νὰ λυθῆ ἡ ἐξίσωσι:

$$8x - [5 - (2x - 3)] = 57 - [3x - (x - 5)].$$

Λύσι :

Πρῶτα ἀφαιροῦμε τὶς παρενθέσεις:

$$8x - [5 - 2x + 3] = 57 - [3x - x + 5].$$

Μετὰ ἀφαιροῦμε τὶς ἀγκύλες (ποὺ εἶναι ὅπως οἱ παρενθέσεις):

$$8x - 5 + 2x - 3 = 57 - 3x + x - 5.$$

Χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους:

$$8x + 2x + 3x - x = 57 - 5 + 5 + 3.$$

Κάνομε τὶς πράξεις στὸ πρῶτο καὶ στὸ δεύτερο μέρος χωριστά:

$$13x - x = 65 - 5$$

ἢ $12x = 60$ ἢ $x = \dfrac{60}{12}$.

Ἑπομένως : $x = 5$ ἢ ἀλγεβρικῶς $\boldsymbol{x = +5}$.

Παράδειγμα 3ο.

Νὰ λυθῆ ἡ ἐξίσωσι:

$$\frac{2x + 3}{1 - x} = \frac{-3}{4}.$$

Λύσι :

Μὲ βάσι τὴν ἀρχὴ τῶν ἀναλογιῶν, ποὺ λέει, ὅτι ἂν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, πρέπει $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$, θὰ ἔχωμε:

$(2\,x + 3) \cdot (+4) = (-3) \cdot (1 - x)$

Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις:

$(+4) \cdot 2\,x + (+4) \cdot 3 = (-3) \cdot 1 - (-3) \cdot x.$

$(+8\,x) + (+12) = (-3) - (-3\,x)$

$8\,x + 12 = -3 + 3\,x.$

Χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους:

$8\,x - 3\,x = -3 - 12$

$5\,x = -15 \quad , \qquad \frac{5\,x}{5} = \frac{-15}{5}.$

Ἑπομένως $\qquad \boldsymbol{x = -3}.$

Παράδειγμα 4ο.

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσι: $\qquad 3\,x - 15 = 15\,x + 9.$

Λύσι :

Χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους:

$$3\,x - 15\,x = 9 + 15.$$

Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις : $-12\,x = 24.$

Διαιροῦμε μὲ τὸν συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου:

$$\frac{-12\,x}{-12} = \frac{24}{-12} \qquad x = \frac{+24}{-12} \qquad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{x = -2}.$$

11 · 12 Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 11 · 1 ἕως 11 · 3.

1. Ἐπιλύσετε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις:

α) $x + 7 = 32.$ β) $4 + 2\,x = 12.$ γ) $5\,x - 9 = 6.$

δ) $38\,x - 9 = 105.$ ε) $37 - 8\,x = 5.$ στ) $5 + 4\,x = 7.$

ζ) $5\,x - 8 = 3\,x.$ η) $9\,x - 7 = 4\,x + 3.$ θ) $6\,x + 1 = 4\,x + 9.$

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ι) $\frac{5}{12} = \frac{x}{60}$ ια) $\frac{4}{5} = \frac{x}{375}$ ιβ) $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} = 2.$

ιγ) $\frac{5}{2} - \frac{x}{2} = \frac{7x}{2} - \frac{3}{2}\cdot$ ιδ) $\frac{x}{3} + \frac{4}{5} = 1\frac{7}{15}\cdot$ ιε) $\frac{x}{5} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3}\cdot$

ιστ) $\frac{1}{36} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\cdot$ ιζ) $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot$ ιη) $\frac{7}{8} - \left(\frac{x}{4}\cdot\frac{8}{9}\right) = \frac{5}{24}\cdot$

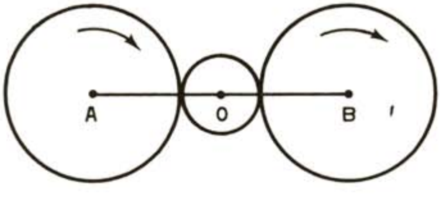
ιθ) $\left(\frac{2}{3} : \frac{4}{9}\right) - \frac{x}{2} = 1.$

(α : 25, β : 4, γ : 3, δ : 3, ε : 4, στ : 0,5
ζ : 4, η : 2, θ : 4, ι : 25, ια : 300, ιβ : 7, ιγ : 1,
ιδ : 2, ιε : 4, ιστ : 72, ιζ : 1, ιη : 3, ιθ : 1)

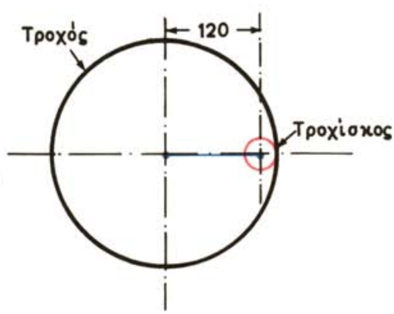
2. Ποιό εἶναι τὸ ὕψος δοχείου, τὸ ὁποῖο χωράει 113,04 λίτρα νερὸ καὶ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ βάσι 12 dm^2; *(0,942 dm)*

3. Κοῖλος ἄξων ἔχει ἐξωτερικὴ διάμετρο διπλασία ἀπὸ τὴν ἐσωτερική. Ἂν ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος εἶναι 12 cm καὶ τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ ὑλικοῦ, ἀπὸ τὸ ὁποῖο εἶναι κατασκευασμένος, 7 kg/dm^3, ποιό θὰ εἶναι τὸ ὕψος του γιὰ κάθε kg; *(5,9346 dm $\simeq$ 59,4 cm)*

4. Ὁ ἄξων Α (σχ. 11 · 12 α) μεταφέρει τὴν κίνησί του στὸν ἄξονα Β μὲ τὴν βοήθεια ὀδοντωτῶν τροχῶν. Ἂν ἡ διάμετρος τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν Α καὶ Β εἶναι 125 mm καὶ ἡ ἀπόστασι τῶν ἀξόνων ἴση μὲ 175 mm, νὰ εὕρετε τὴν διάμετρο τοῦ μεσαίου τροχοῦ. *(50 mm)*



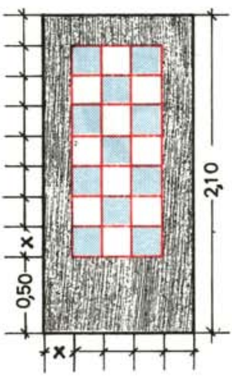
Σχ. 11·12 α.



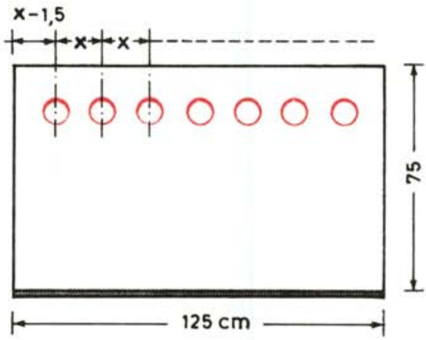
Σχ. 11·12 β.

5. Ὑπολογίσετε τὴν διάμετρο τοῦ τροχίσκου, ὅταν ξέρετε ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ εἶναι 300 mm καὶ ἡ ἀπόστασι τῶν δύο ἀξόνων 120 cm (σχ. 11 · 12 β). *(60 cm)*

6. Στὴν πόρτα τοῦ σχήματος 11 · 12 γ ὑπολογίσετε τὸ πλάτος της, ὅταν στὸ παράθυρό της πρόκειται νὰ βάλετε σιδεριὰ μὲ τετραγωνικὰ ἀνοίγματα πλευρᾶς x. Ὑπολογίσετε αὐτὴ τὴν πλευρά. Πόσο μῆκος λάμας θὰ χρειασθῆτε γι' αὐτὴ τὴν κατασκευή, ἂν ξέρετε ὅτι ἡ πόρτα εἶναι ξύλινη καὶ ἐπομένως σᾶς χρειάζεται τὸ κατάλληλο πλαίσιο; *(Πλάτος 1,00 m, Λάμα 10,40 m)*



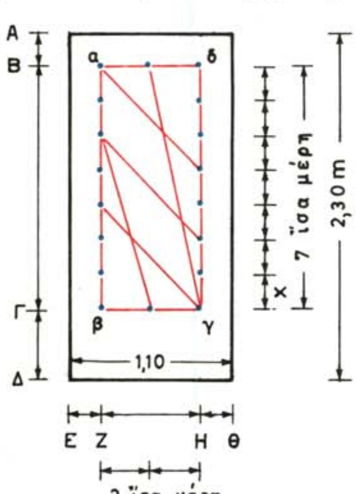
Σχ. 11·12 γ.



Σχ. 11·12 δ.

7. Στὸ κομμάτι ξυλοτὲξ τοῦ σχήματος 11 · 12 δ θέλομε νὰ ἀνοίξωμε 7 τρύπες, ποὺ ὅλες νὰ ἀπέχουν ἴσα μεταξύ τους καὶ οἱ δύο τελευταῖες νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὶς πλευρὲς κατὰ 1,5 cm λιγότερο. Νὰ εὕρετε τὶς ἀποστάσεις αὐτές. *(16 cm)*

8. Σιδηρουργὸς πῆρε παραγγελία νὰ φτιάξη τὴν πόρτα, ποὺ φαίνεται στὸ σχῆμα 11 · 12 ε, στὴν ὁποία τὸ ὕψος ΓΔ εἶναι διπλάσιο τοῦ AB καὶ τὸ ΒΓ ἑπταπλάσιο τοῦ AB. Ἀκόμη τὰ ὀρθοπλευρικὰ τῆς πόρτας θὰ ἔχουν πλάτος ΕΖ καὶ ΗΘ ἴσα μὲ τὸ AB. Νὰ εὕρετε τὶς διαστάσεις τοῦ πλαισίου α β γ δ καθὼς καὶ τὸ μῆκος τῆς λάμας, ποὺ θὰ χρειασθῆτε γιὰ νὰ φτιάξετε τὸ ἐσωτερικὸ κιγκλίδωμα τῆς πόρτας, ὅταν ξέρετε ὅτι αὐτὸ θὰ γίνη μὲ πλαίσιο καὶ θὰ τοποθετηθῆ στὴν ἕτοιμη πόρτα. Ὑπολογίσετε ἀκόμη πόση λαμαρίνα χρειάζεστε γιὰ νὰ σκεπάσετε



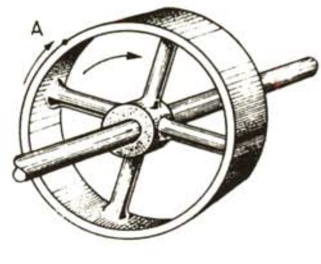
Σχ. 11·12 ε.

ἐμπρὸς - πίσω τὸ ὑπόλοιπο κομμάτι τῆς πόρτας, ποὺ μένει γύρω ἀπὸ τὸ πλαίσιο. (Γιὰ τὴν λύσι καλέσατε, AB = x καὶ κάνετε τὴν ἐξίσωσι.)

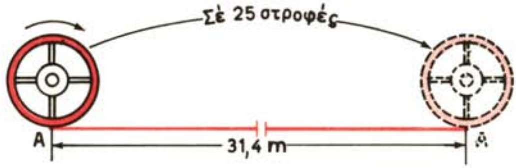
(αβ = 161 cm, βγ = 64 cm)

(μῆκος λάμας: 9,52 m, λαμαρίνα: $\simeq$ 3,00 m²)

9. Τροχαλία ἔχει διάμετρο τέτοια, ὥστε γιὰ νὰ διατρέξη τὸ σημεῖο A τῆς περιφερείας της 31,4 m, ὅταν ἀφεθῆ ἐλεύθερη νὰ κινηθῆ ἐπάνω στὸ ἔδαφος, πρέπει νὰ κάνη συνολικὰ 25 στροφές (σχ. 11 · 12 στ). Νὰ εὕρετε τὴν διάμετρο τῆς τροχαλίας. *(0,4 m)*



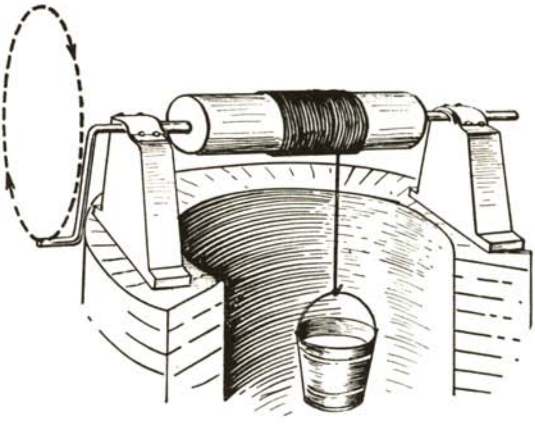
10. Μὲ ποιά περιστροφικὴ ταχύτητα (στροφὲς/min) πρέπει νὰ στρέφεται



Σχ. 11 · 12 στ.

τὸ βαροῦλκο (σχ. 11 · 12 ζ), ὥστε τὸ φορτίο του νὰ ἀνυψώνεται μὲ ταχύτητα 75,36 m/min, ὅταν ξέρετε πὼς τὸ τύμπανο ἔχει διάμετρο 24 cm;

(100 στρ./min)



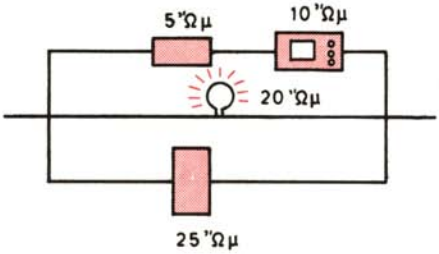
Σχ. 11 · 12 ζ.

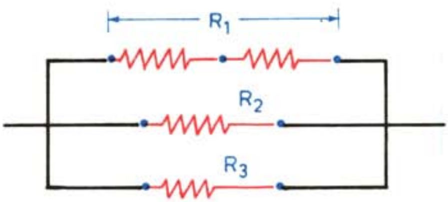
11. Μία ξυλόβιδα ἔχει βῆμα 5,0 mm. Πόσες στροφὲς θὰ πρέπει νὰ κάνῃ γιὰ νὰ μετακινηθῇ (νὰ βιδωθῇ ἢ ξεβιδωθῇ) κατὰ 30 mm; *(6 στροφὲς)*

12. Νὰ εὕρετε τὴν συνολικὴ ἀντίστασι στὴν ἠλεκτρικὴ συνδεσμολογία τοῦ σχήματος 11 · 12 η, ὅταν ξέρετε τὶς ἠλεκτρικὲς ἀντιστάσεις κάθε μιᾶς συσκευῆς.

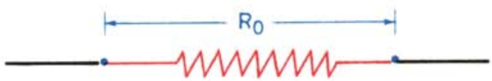
(Νὰ ἐφαρμόσετε τὸν τύπο τῆς Φυσικῆς: $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.)

(περίπου 6,38 Ohm)





Ἰσοδύναμο σχέδιο κυκλώματος



Ἰσοδύναμο ἠλεκτρικὸ κύκλωμα μὲ μία ἀντίστασι R_0 ἴση μὲ τὴν συνολικὴ τῶν τριῶν ἀντιστάσεων

Σχ. 11·12 η.

13. Ἐπιλύσετε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις καὶ μετὰ κάνετε τὴν ἐπαλήθευσι:

$23{,}5 - x = 7$ $\qquad 7 + x = 18{,}5 + 3$ $\qquad$ *(16,5 — 14,5)*

$35{,}5 = 98 - x$ $\qquad x - 0{,}75 = 1{,}45$ $\qquad$ *(62,5 — 2,20)*

$7x - 7 = 3$ $\qquad 9x + 45 = 270$ $\qquad 4{,}5x = 13{,}5$

$\left(1\frac{3}{7},\ 25{,}3\right)$

$$\frac{x}{3,5} = 7,4 \qquad \frac{5x}{7} - \frac{2}{7} = 4 \quad 3x = \frac{45}{2} - 4,5\,x \quad \mathit{(25,90,\ 6,\ 3)}$$

$$\frac{4,5}{1,5 \cdot x} = 2,5 \qquad \frac{3}{0,2} - 10 \cdot x = \frac{1}{5}. \qquad \left(1\frac{1}{5},\ 1,48\right)$$

Ἀπὸ τὴν παράγραφο 11 · 4.

1. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις μὲ ἀπαλειφὴ τῶν παρενθέσεων:

α) $7 + (8 - 5)$. β) $13 + (13 + 6)$. γ) $39 - (27 - 5)$.

δ) $\left(5 + \frac{4}{15}\right) - \left(1 + \frac{4}{15}\right)$ ε) $\frac{5}{6} - \left[\left(7 - \frac{5}{12}\right) - \left(7 + \frac{1}{12}\right)\right]$.

στ) $\left[\left(5 + \frac{7}{8}\right) - \left(2 + \frac{3}{4}\right)\right] - \left[\left(4 + \frac{3}{4}\right) - \left(2 + \frac{1}{8}\right)\right]$.

$$\left(\alpha : +10,\ \beta : 32,\ \gamma : +17,\ \delta : 4,\ \varepsilon : \frac{1}{2},\ \ \sigma\tau : \frac{1}{2}\right)$$

2. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις, ἀφοῦ προηγουμένως ἐκτελέσετε κάθε δυνατὴ ἁπλοποίησι:

α) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right) - \frac{1}{2}$. β) $\frac{7}{8} - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}\right)$.

γ) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8}\right)$. δ) $\left(\frac{11}{15} \cdot \frac{25}{44}\right) - \left(\frac{7}{15} \cdot \frac{9}{14}\right)$.

$$\left(\alpha : \frac{1}{4},\quad \beta : \frac{5}{24},\quad \gamma : \frac{7}{30},\quad \delta : \frac{7}{60}\right)$$

3. Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

α) $3x - (8 - 7x) = 12$ β) $21 - (3x - 9) = 3x$

γ) $(2x - 3) + (3x - 1) = 2 + (x + 4)$ δ) $(3x - 4) - (x + 8) - (4 - 6x) = 0$

ε) $8x - (5 - 2x) = 10$,

καὶ κατόπιν νὰ γίνη ἡ ἐπαλήθευσι.

(α : 2 β : 5 γ : 2,5 δ : 2 ε : 1,5)

4. Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

α) $0,5 \cdot x - 0,8 = 0,3 \cdot x$. β) $0,7x + 1,2 = x$.

γ) $\frac{4}{5} \cdot x - \left(\frac{x}{5} - 1\right) = 10$ δ) $\frac{3}{8} + \left(\frac{3}{40} - \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{20}$

(α : 4, β : 4, γ : 15, δ : 1,8)

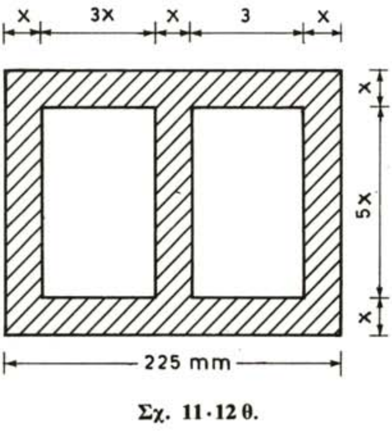
5. Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

$x - \alpha = \beta.$ $\qquad \alpha + x - \gamma = \alpha + \beta.$ $\qquad \alpha \cdot x = 5 \cdot \alpha.$

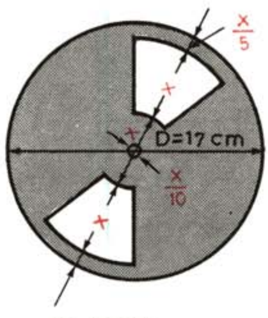
$\alpha \cdot x = \beta - \gamma.$ $\qquad (\alpha + x) - (\alpha - x) = (\alpha + \beta).$ $\qquad \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x} = 1$

$\dfrac{x}{\alpha} = \beta.$ $\qquad \dfrac{x}{\beta} = (\alpha - \gamma).$ $\qquad \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{x}{\alpha \cdot \beta}.$

6. Σύμφωνα μὲ τοὺς ὑπολογισμούς μας, τὰ ἐλάσματα τοῦ πυρῆνος ἑνὸς μετασχηματιστῆ (σχ. 11 · 12 θ) μήκους 225 mm πρέπει νὰ ἔχουν τὶς διαστάσεις ποὺ σημειώνονται στὸ σχῆμα. Νὰ εὕρετε αὐτὲς τὶς διαστάσεις καθὼς καὶ τὸ συνολικὸ πλάτος τοῦ ἐλάσματος. *($x = 25$ mm)*



Σχ. 11·12 θ.



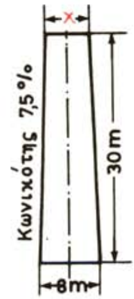
Σχ. 11·12 ι.

7. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε σὲ παραγωγὴ σειρᾶς πλαστικοὺς δίσκους (σχ. 11 · 12 ι) κατάλληλους γιὰ μαγνητοταινία. Νὰ εὕρετε τὶς ἐπὶ μέρους διαστάσεις σὲ mm, προκειμένου νὰ παραγγείλετε τὰ καλούπια, ὅταν ξέρετε ὅτι ἡ διάμετρος D = 170 mm. *($x = 50$ mm)*

8. Πρόκειται νὰ κοστολογήσετε ἕνα προϊόν, ποὺ θὰ πωληθῆ στὴν χονδρικὴ πώλησι καὶ θὰ ἀφίση κέρδος ἴσο μὲ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κόστους του. Ἂν ἡ τιμὴ πωλήσεως στὴν χονδρικὴ πώλησι εἶναι 350 δραχμὲς τὸ τεμάχιο, πόσο κοστίζει ἡ κατασκευή του; *(250 δρχ.)*

9. Ἡ καπνοδόχος τοῦ σχήματος 11 · 12 ια ἔχει διάμετρο βάσεως 8 m καὶ ὕψος 30 m. Ἂν x εἶναι ἡ διάμετρος στὴν κορυφή, ὑπολογίσετέ την, ὅταν ξέρετε ὅτι ἡ κωνικότης τῆς καπνοδόχου εἶναι 7,5%. *(5,75 m)*

10. Στὸν ἄξονα τοῦ σχήματος 11 · 12 ιβ χρειάσθηκε νὰ τορνίρωμε τὸ ἕνα κομμάτι, ποὺ ἔχει διάμετρο 60 mm, σὲ βάθος 3,0 mm. Ἂν ἡ διάμετρος α τοῦ ἄλλου κομματιοῦ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς μεγάλης διαμέτρου, νὰ εὕρετε τὴν νέα διάμετρο x τοῦ μικροῦ κομματιοῦ μετὰ τὸ τορνίρισμα σὲ βάθος τέτοιο, ὥστε αὐτὴ νὰ γίνη ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς μεγάλης μετὰ τὸ τορνίρισμα. Ποιό τὸ βάθος τορνιρίσματος; *(x = 36 mm, βάθος: 2 mm)*



Σχ. 11·12 ια.

Σχ. 11·12 ιβ.

Ἀπὸ τὴν παράγραφο 11 · 5.

1. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις ἀφοῦ πρῶτα βγοῦν οἱ παρενθέσεις:

$(25 - 7) \cdot 4$ $\quad (67,3 - 10,9) \cdot 0,1$ $\quad 5,2 \cdot (6,0 - 3,1)$

$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5}{9} + \frac{7}{12}\right)$ $\quad 6 \cdot (\alpha + \beta)$ $\quad (\alpha - \beta) \cdot 5$ $\quad (\alpha - 5) \cdot \beta.$

2. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις ἀφοῦ πρῶτα βγοῦν οἱ παρενθέσεις:

$5 \cdot (6,2 + 16,3) + (3 - 1,5) \cdot 4$ $\quad 9 \cdot (5 - 4,2) + (0,7 - 0,2) \cdot 3$

(118,5 8,7)

$(4,2 - 0,6) \cdot 1,5 - (8 + 7,4) \cdot 0,2$ $\quad (15 + 9) \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)$

$\left(8,48 \quad 14\ \frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{1}{13} + \frac{6}{91}\right) \cdot 7 - \left(\frac{7}{15} - \frac{4}{9}\right)\ 45$ *(0)*

$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{8}{11} + \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{13}.$ $\left(\frac{5}{8}\right)$

3. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις ἀφοῦ πρῶτα βγοῦν οἱ παρενθέσεις:

$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) : \frac{11}{15}$ $\quad \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{27}\right) : \frac{19}{9}$ $\quad \left(2 \quad \frac{5}{12}\right)$

$\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right) : \frac{7}{8}$ *(0)*

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right):\frac{9}{10} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}:\frac{4}{9}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}:\frac{9}{16}\right)-\frac{1}{3}. \qquad (2)$$

4. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

α) $8\,(x+4)=5\,(x+7)$ γ) $4\,(3x+5)=2\,(9x+6)$

β) $9\,(x-6)=4\,(x-1)$ δ) $5\,(4x+1)=9\,(3x-8)$

ε) $3\cdot(4x-3)+2\cdot(3-2)x=1+x$

στ) $7x-3\,(x+4)=9-2\cdot(3+x)$

ζ) $5-2\cdot(8x-5)=4\cdot(2x-7)+2.$

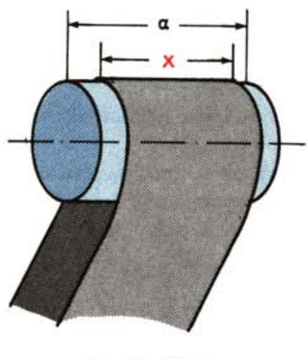
$$\left(\alpha: 1, \quad \beta: 10, \quad \gamma: \frac{4}{3}=1\,\frac{1}{3}\right.$$
$$\left.\delta: 11, \quad \varepsilon: \frac{4}{7}, \quad \sigma\tau: 2{,}5 \quad \zeta: \frac{41}{24}\right)$$

5. Τὸ πλάτος x σὲ mm τοῦ ἱμάντος τροχαλίας καὶ τὸ πλάτος της α σὲ mm (σχ. 11 · 12 ιγ) συνδέονται μὲ τὸν τύπο:

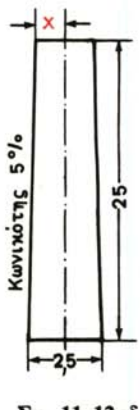
$$\alpha = 1{,}125\cdot(x+10).$$

Ἂν ἡ τροχαλία ἔχῃ πλάτος 225 mm, πόσο εἶναι τὸ πλάτος τοῦ ἱμάντος;

(190 mm)



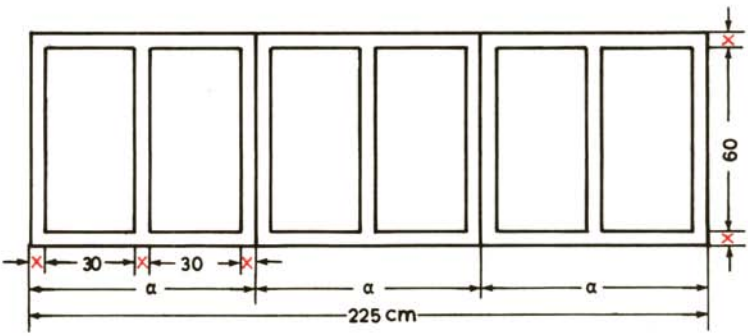
Σχ. 11·12 ιγ.



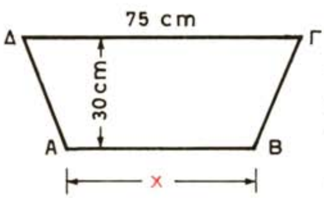
Σχ. 11·12 ιδ.

6. Στὸ σχῆμα 11 · 12 ιδ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε τὴν ἀκτῖνα τῆς καπνοδόχου στὴν κορυφή της, ὅταν ξέρωμε τὸ ὕψος της 25 m, τὴν κωνικότητά της 5% καὶ τὴν διάμετρο τῆς βάσεώς της 2,5 m. *(0,625 m)*

7. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμε τὴν τζαμαρία τοῦ σχήματος 11 · 12 ιε, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ἴσα κομμάτια, κολλημένα δίπλα-δίπλα. Ὑπολογίσετε τὸ πλάτος x τῶν καδρονιῶν καὶ τὸ ὕψος της. *(5 cm, 70 cm)*



Σχ. 11 · 12 ιε.



Σχ. 11 · 12 ιστ.

8. Ἡ μία πλευρὰ τῆς σκάφης τοῦ κτίστη (σχ. 11 · 12 ιστ) ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ μεγάλη βάσι ΔΓ = 75 cm καὶ ὕψος 30 cm. Ἂν εἶναι φτιαγμένη ἀπὸ λαμαρίνα βάρους 4,0 kg ἀνὰ τετραγωνικὸ μέτρο, νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς μικρῆς βάσεως AB = x σὲ cm, ὅταν ξέρετε ὅτι τὸ βάρος τῆς πλευρᾶς εἶναι 0,75 kg. *(x = 50 cm)*

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 11 · 6 ἕως 11 · 11.

1. Ἐκφράσετε μὲ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς τὰ παρακάτω γεγονότα:

α) Ἡ μεγίστη θερμοκρασία τῆς 15 Ἰανουαρίου 1935 σὲ μία περιοχὴ ἦταν 3 βαθμοὶ ὑπὸ τὸ μηδέν.

β) Ἡ πίεσι σήμερα εἶναι 2 mm Hg πιὸ κάτω ἀπὸ τὴν «κανονική».

γ) Σὲ ὑψόμετρο 35 m ἐπάνω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης ἡ ἐλαχίστη θερμοκρασία τῆς 29 Δεκεμβρίου ἦταν 8 βαθμοὶ ὑπὸ τὸ μηδέν, ἐνῶ ἡ πίεσι 3 mm Hg κάτω ἀπὸ τὴν «κανονική».

δ) Τὸ βάθος τῆς θαλάσσης εἶναι 17 m.

ε) Τὸ κέρδος ἑνὸς ἐμπόρου ἦταν μία μέρα 4850 δραχμές, ἐνῶ ἡ ζημία του μίαν ἄλλη ἦταν 3612 δραχμές.

στ) Στὶς παρακάτω χρονολογίες ἀντικαταστήσατε τὸ π.Χ. καὶ μ.Χ. μὲ ἀλγεβρικὰ σύμβολα (δηλαδὴ σὺν ἢ πλήν):

38 π.Χ.	915 π.Χ.	67 μ.Χ.	104 μ.Χ.
395 μ.Χ.	1615 π.Χ.	1974 μ.Χ.	

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

2. Στοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ποὺ δίνονται, νὰ εὕρετε τοὺς ἀντιθέτους, τοὺς ἀντιστρόφους καὶ τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀντιθέτων:

$$+2 \qquad -5 \qquad -\frac{2}{3} \qquad +0{,}2$$

$$+0{,}5 \qquad +\alpha \qquad \beta \qquad -\frac{\gamma}{\delta}.$$

3. Μεταξὺ τῶν παρακάτω ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν νὰ βάλετε τὰ σωστὰ σημεῖα ἀνισότητος:

$$+8 \quad +7{,}9 \quad , \quad -0{,}5 \quad -0{,}3$$

$$-1{,}8 \quad +0{,}05 \quad , \quad 62 \quad -385$$

$$-27 \quad -47 \quad , \quad +47{,}6 \quad -46{,}7.$$

4. Νὰ εὕρετε τὴν ἀπόλυτη τιμὴ τῶν παρακάτω ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν:

α) $-5 \qquad -9{,}3 \qquad +\frac{4}{5} \qquad +0{,}07 \qquad -0{,}12$

β) $-(+9{,}9) \qquad +(-15{,}6) \qquad +\left(+\frac{4}{9}\right) \quad -\left(-\frac{8}{15}\right).$

γ) $+\alpha \qquad +(-\alpha) \qquad -(+\beta) \qquad +\frac{\alpha}{\beta} \qquad -\frac{\alpha}{\beta},$

ὅταν $\alpha = +8$ καὶ $\beta = -2.$

5. Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα στὶς παρακάτω ἀλγεβρικὲς παραστάσεις:

α) $(+4) - (-2) =$ $\qquad (-4{,}1) - (+2{,}7) =$

$(-3) - (-5) =$ $\qquad (+21) - (-8) =$

β) $(+6{,}3) - (+6{,}5) - (-1{,}7) =$ $\qquad$ *(+ 1,5)*

$(-8{,}9) - (-1{,}1) - (+10{,}0) =$ $\qquad$ *(— 17,8)*

γ) $\left(+\frac{1}{8}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right) =$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{2}{18}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) =$ $\qquad \left(-1\frac{1}{18}\right)$

6. Νὰ βάλετε τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς στὴν σειρά, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸν μικρότερο καὶ πηγαίνοντας πρὸς τὸν μεγαλύτερο:

α) $(+7) \qquad +\left(-\frac{30}{5}\right) \qquad \left(\frac{-6}{3}\right) \qquad -(-15)$

$+\left(+\frac{27}{9}\right) \qquad (-19) \qquad (-14) \qquad +25.$

β) $+(+7{,}3)$ $\quad +(-4{,}5)$ $\quad -(-9)$ $\quad -(+9{,}5)$

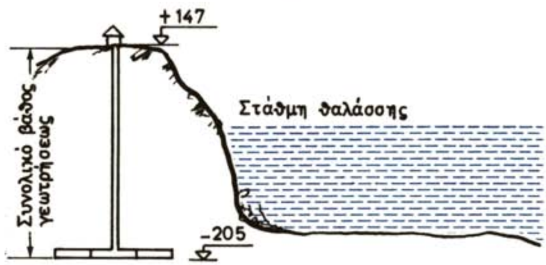
$+(+2{,}9)$ $\quad -(-4)$ $\quad -5{,}7$ $\quad +7{,}5$

$-7{,}5$ $\quad -4$ $\quad -2{,}9$ $\quad +(-9).$

γ) $\frac{1}{3}$ $\quad -\frac{1}{3}$ $\quad +\frac{1}{5}$ $\quad +\left(-\frac{1}{5}\right)$

$-\frac{1}{8}$ $\quad -\left(-\frac{1}{8}\right)$ $\quad \frac{2}{5}$ $\quad \frac{-2}{+5}.$

7. Στὴν γεώτρησι ποὺ φαίνεται στὸ σχῆμα 11 · 12 ιζ, νὰ εὕρετε τὸ συνολικὸ βάθος σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα τοῦ σχεδίου. *(352 m)*



Σχ. 11·12 ιζ.

8. Στὸ σχῆμα 11 · 12 ιζ τὸ συνολικὸ βάθος μιᾶς ἄλλης γεωτρήσεως, ποὺ ἄρχισε ἀπὸ ὑψόμετρο +182 m, εἶναι 497 m. Πόσο εἶναι τὸ βάθος της ἀπὸ τὴν στάθμη + 0 τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης (στάθμη πυθμένος γεωτρήσεως);

(—315 m)

9. Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα στὶς παρακάτω ἀλγεβρικὲς παραστάσεις:

α) $(+2)\cdot(+8) =$

$(+6)\cdot(-4) =$

$(-7)\cdot(-5) =$

$(-8)\cdot(+9) =$

β) $\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{8}\right) =$

$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{5}{7}\right) =$

$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right) =$

γ) $(+0{,}2)\cdot(+0{,}7) =$

$(+0{,}3)\cdot(-0{,}4) =$

$(-0{,}2)\cdot(-0{,}6) =$

$(-0{,}6)\cdot(+0{,}4) =$

δ) $\left(-\frac{3}{8}\right)^2 =$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 =$

$\left(+\frac{2}{3}\right)^2 =$

ε) $(+5)\cdot(+2)\cdot(+7)\cdot(-1) =$

$(-8)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot(+10) =$

$(+2)\cdot(-0{,}1)\cdot(+0{,}4)\cdot(-7) =$

$\left(+3\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+2\frac{1}{2}\right) =$

στ) $(-4)\cdot(+2)+(-3)\cdot(-7) =$ *(+ 13)*

$(+8)\cdot(-9)-(-3)\cdot(-2) =$ *(— 78)*

$(+2{,}5)\cdot(+2)-(-3)\cdot(+6)+(-5)\cdot(+0{,}3) =$ *(+ 21,5)*

$(-0{,}8)\cdot(-4)+(+0{,}7)\cdot(-2)-(-4) =$ *(+ 5,8)*

ζ) $(+8):(+2) =$

$(+16):(-4) =$

$(-12):(-4) =$

η) $(+9{,}12):(-2{,}4) =$

$(-9{,}8):(-0{,}7) =$

$(-6{,}48):(+5{,}4) =$

θ) $\frac{-6}{3} =$ $\quad\frac{-6}{-3} =$ $\quad\frac{6}{-3} =$ $\quad\frac{+6}{+3} =$

$\frac{-5}{-25} =$ $\quad\frac{12}{-72} =$ $\quad\frac{-15}{90} =$ $\quad\frac{-4}{-32} =$

ι) $\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{1}{15}\right) =$ $\qquad\left(\frac{2}{-5}\right):\left(\frac{-8}{9}\right) =$

$\left(\frac{-28}{-25}\right):\left(\frac{14}{-5}\right) =$ $\qquad\left(\frac{6}{-7}\right):\left(\frac{3}{-35}\right) =$

ια) $(-25):(+5)+(+2):\left(-\frac{1}{3}\right)-(18):(-6) =$ *(— 8)*

$(-28):(-7)-(-32):(+8)-(-10) =$ *(+ 18)*

10. Ἐφαρμόζοντας τὰ γνωστὰ περὶ παρενθέσεων, νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα:

α) $\frac{4}{5}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]$ $\left(\frac{13}{60}\right)$

β) $\left[\left(+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{5}\right]\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)$ $\left(-\frac{1}{20}\right)$

γ) $\frac{5}{6}-\left[\frac{4}{5}-6\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\frac{5}{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

11. Νὰ εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀλγεβρικὲς παραστάσεις (πολυώνυμα):

α) $3\alpha - 3\beta - 3\gamma + \delta =$ *(— 2)*

$3{,}5\,\alpha - 1{,}7\,\beta - 0{,}8\,\gamma - 1{,}1\,\delta =$ *(+ 11,3)*

$1{,}7\,\alpha - 1{,}3\,\beta - 0{,}4\,\gamma + 5\,\delta =$ *(— 39,7)*

ὅταν $\alpha = +1$, $\beta = +2$, $\gamma = -3$ καὶ $\delta = -8$.

β) $3\alpha + 5\beta - (\alpha + 2\beta) =$ *(— 0,4)*

$8\alpha - 3\beta - (5\alpha + \beta) =$ *(+ 1,1)*

$6\alpha - 5\beta - (3\beta - 7\alpha) =$ *(+ 2,9)*

ὅταν $\alpha = +0{,}1$ καὶ $\beta = -0{,}2$.

γ) $(5\alpha + 3\beta)\cdot(-6) + (6\alpha + \beta)\cdot(+2) =$ *(+ 9,6)*

$(\alpha - 4\beta)\cdot(-5) + (\beta - 3\alpha)\cdot(-6) =$ $\left(-6\,\frac{17}{30}\right)$

ὅταν $\alpha = -\dfrac{2}{3}$ καὶ $\beta = +\dfrac{3}{20}\cdot$

12. Ἐπιλύσετε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις:

$3x - (5 - 2x) = 10$ *(x = 3)*

$9x - (5x + 3) = 4x + 7 - (3x + 4)$ *(x = 2)*

$8(x + 4) = 5x + 5$ *(x = — 9)*

$4\cdot(2x - 3) = -3x + 15$ $\left(x = 2\frac{5}{11}\right)$

$3\cdot(4x - 3) - 2\cdot(2 - x) = 4\cdot(x - 2)$ *(x = 0,5)*

$2x + 3\cdot(10 - 4x) = 56 - 2\cdot(3x - 9)$. *(x = — 11)*

13. Ἐπιλύσετε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις, ἐφαρμόζοντας τὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ποὺ λέει ὅτι, ἄν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha\cdot\delta = \beta\cdot\gamma$.

$$\frac{x}{8} = \frac{x-2}{5} \qquad \frac{4x-1}{8x-3} = \frac{9}{19} \qquad \frac{5x-1}{15x-2} = \frac{3}{4}$$

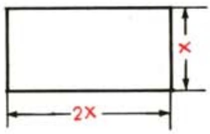
$\left(x = 5\,\frac{1}{3}\right)$ *(x = — 2)* $\left(x = \frac{2}{25}\right)$

$$\frac{3x-2}{11+9x} = \frac{1}{2} \qquad 5 + 3x = \frac{x}{2}$$

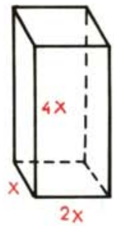
(x = — 5) *(x — 2)*

14. Αἴθουσα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ τὴν μία πλευρὰ διπλασία ἀπὸ τὴν ἄλλη (σχ. 11 · 12 ιη). Ἂν ὁ συνολικὸς ἀριθμὸς τῶν σοβατεπιῶν, ποὺ χρειαζόμαστε, εἶναι 108 τεμάχια τῶν 30 cm μήκους τὸ καθένα, νὰ εὕρετε τὶς διαστάσεις τοῦ δωματίου. Μετὰ νὰ εὕρετε πόσες πλάκες 30 cm × 60 cm θὰ χρειασθῆτε γιὰ νὰ στρώσετε τὸ δάπεδο.

(5,4 m × 10,8 m, 324 πλάκες)



11·12 ιη.

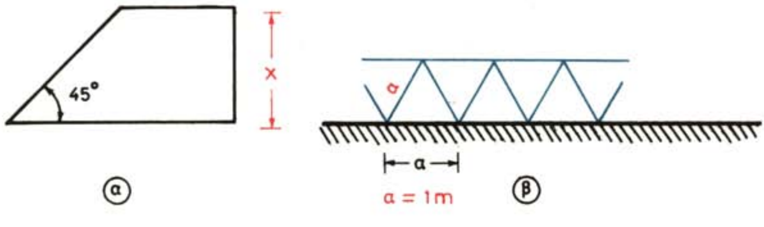


Σχ. 11·12 ιθ.

15. Σὲ μία δεξαμενὴ μὲ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 11 · 12 ιθ) ἡ κάθε διάστασι εἶναι διπλασία τῆς προηγουμένης. Ἂν τὸ συνολικὸ μῆκος τῆς σιδηρογωνιᾶς, ποὺ χρησιμοποιήθηκε γιὰ τὶς ἀκμές της, εἶναι 42 m, νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας. Ἀκόμα, ἂν εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ πάχος τῆς λαμαρίνας, ἀπὸ τὴν ὁποία εἶναι κατασκευασμένο τὸ δοχεῖο, εἶναι 1 mm, νὰ εὕρετε τὸν ὄγκο καὶ τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας, ἂν ξέρετε ὅτι τὸ εἰδικὸ βάρος εἶναι 7,2 kg/dm^3.

(63 m^2, 63 dm^3, 453,6 kg)

16. Οἰκόπεδο ἔχει περίμετρο 270,7 m καὶ ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ μία γωνία 45°, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 11 · 12 κ (α). Θέλομε νὰ τὸ περιφράξωμε μὲ φράχτη, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 11 · 12 κ (β), ὅπου τὰ ὁριζόντια κομμάτια εἶναι σιδερένια λάμα, ἐνῶ τὰ πλάγια εἶναι στρογγυλὴ σιδερένια ράβδος. Νὰ εὕρετε τὰ μήκη τῶν σιδηροελασμάτων, τὶς διαστάσεις (μήκη πλευρῶν) τοῦ οἰκοπέδου καὶ τὸ ἐμβαδόν του. *(270,7 m, 541,4 m, x ≃ 50 m, 3750 m^2)*



Σχ. 11·12 κ.

17. Σὲ ἕνα ἔρανο στὸ σχολεῖο πρέπει νὰ μαζευτοῦν: α) 1600, β) 2200, γ) 2400, δ) 3000 δραχμές. Ἂν τὰ ἀγόρια ἔδωσαν συνολικὰ 200 δραχμὲς περισσότερες ἀπὸ ὅσες τὰ κορίτσια, τότε πόσα χρήματα ἔδωσαν τὰ ἀγόρια καὶ πόσα τὰ κορίτσια; *(α: 900 — 700 β: 1200 — 1000 γ: 1300 — 1100 — δ: 1600 — 1400 δρχ.)*

18. Σὲ ἕνα κουτὶ ὑπάρχουν συνολικὰ 300 βίδες τῆς 1'' καὶ $1\frac{1''}{4}$. Ἂν οἱ βίδες τῆς 1'' εἶναι κατὰ 40 τεμ. λιγότερες ἀπὸ τὶς ἄλλες, τότε πόσες εἶναι οἱ βίδες τῆς 1'' καὶ πόσες τῆς $1\frac{1''}{4}$;

(1'' : 130 τεμ., $1\frac{1''}{4}$: 170 τεμ.)

19. Τὸ βάρος ἑνὸς κιβωτίου εἶναι συνολικὰ 44 κιλά. Ἂν τὸ καθαρὸ βάρος τοῦ περιεχομένου εἶναι κατὰ 32 κιλὰ περισσότερο ἀπὸ ὅσο τὸ βάρος τοῦ ἀποβάρου, πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου καὶ πόσο τοῦ ἀποβάρου;

(6 kg περιεχ., 38 kg ἀποβ.)

20. Γιὰ σοβατεπιὰ σὲ μία οἰκοδομὴ χρειασθήκαμε συνολικὰ 120 m μαρμάρινα καὶ ξύλινα σοβατεπιὰ τοῦ ἐμπορίου. Ἂν τὰ μαρμάρινα σοβατεπιὰ εἶναι τριπλάσια σὲ μῆκος ἀπὸ τὰ ξύλινα, νὰ εὕρετε τὸ μῆκος κάθε εἴδους.

(ξύλινα 30 m, μάρμ. 90 m)

21. Γιὰ νὰ κάνωμε τὸν κατ' ἀρχὴ ὑπολογισμὸ τῆς κεντρικῆς θερμάνσεως σὲ μία πολυκατοικία σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς: Στὶς θερμίδες τοῦ ἰσογείου προσθέτομε 5% καὶ εὑρίσκομε τὶς θερμίδες τοῦ 1ου ὀρόφου, 10% καὶ εὑρίσκομε τὶς θερμίδες τοῦ 2ου ὀρόφου, 15% καὶ εὑρίσκομε τὶς θερμίδες τοῦ 3ου ὀρόφου, 23% καὶ εὑρίσκομε τὶς θερμίδες τοῦ 1ου ρετιρὲ καὶ 27% καὶ εὑρίσκομε τὶς θερμίδες τοῦ δευτέρου ρετιρέ. Μετὰ προσθέτομε καὶ ἄλλες 46 000 θερμίδες καὶ εὑρίσκομε τὶς θερμίδες τοῦ λέβητος, οἱ ὁποῖες συνολικὰ εἶναι στὴν περίπτωσί μας 250 000. Πόσες εἶναι οἱ θερμίδες, ποὺ χρειάζεται κάθε ὄροφος;

(Ἰσογ. 30 000, 1ος 31 500, 2ος 33 000, 3ος 34 500
1ο Ρετ. 36 900 2ο Ρετ. 38 100)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

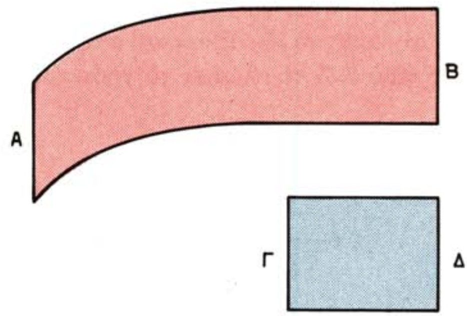
ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΠΑΝΩ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

12 · 1 Ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.

Πρόβλημα.

Ἔχομε ἕνα κομμάτι τσέρκι ΑΒ (σχ. 12 · 1 α) καὶ θέλομε νὰ δοῦμε πόσα κομμάτια, ἴσα μὲ ἕνα ἄλλο κομμάτι τσέρκι ΓΔ μποροῦμε νὰ κόψωμε ἀπὸ αὐτό.

Λύσι :



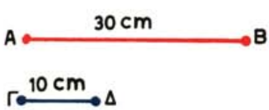
Σχ. 12·1 α.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ***διαιρέσωμε*** τὸ κομμάτι ΑΒ σὲ ἄλλα ἴσα, ποὺ τὸ καθένα θὰ ἔχη μῆκος ΓΔ. Ὅπως γνωρίζομε, κάθε διαίρεσι μποροῦμε νὰ τὴν γράψωμε σὰν ***κλάσμα***. Ἔτσι τὴν διαίρεσι τοῦ κομματιοῦ ΑΒ σὲ ἴσα κομμάτια ΓΔ τὴν γράφομε:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}}.$$

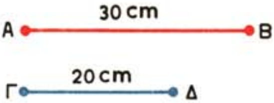
Ὅπως βλέπομε, ***συγκρίνομε*** τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, παίρνοντας τὸ ΓΔ σὰν μονάδα συγκρίσεως. Ὁ ἀριθμός, ποὺ προκύπτει ἀπὸ αὐτὴ τὴν σύγκρισι, δηλαδὴ τὸ ἐξαγόμενο τῆς διαιρέσεως ΑΒ διὰ ΓΔ, ὀνομάζεται ***λόγος*** τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ καὶ συμβολίζεται μὲ ἕνα κλάσμα.

Ἔτσι μποροῦμε νὰ ἔχωμε τοὺς παρακάτω λόγους:

α) 

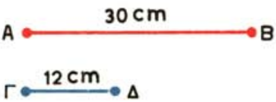
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{30}{10} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = 3,$$

ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ ΑΒ διαιρεῖται ἢ κόβεται σὲ ἀκέραιο ἀριθμὸ κομματιῶν ἴσων πρὸς τὸ ΓΔ.

β) 

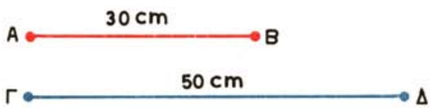
$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{30}{20} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{2},$$

ποὺ σημαίνει ὅτι ἀπὸ τὴν διαίρεσι τοῦ AB σὲ κομμάτια ἴσα μὲ τὸ ΓΔ στὸ τέλος περισσεύει ἕνα κομμάτι, ποὺ εἶναι κλάσμα ἢ μέρος τοῦ ΓΔ.

γ) 

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{30}{12} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{\Gamma\Delta} = 2{,}5,$$

ποὺ σημαίνει τὸ ἴδιο ὅπως καὶ στὴν ἀμέσως προηγουμένη περίπτωσι, μόνο ποὺ ἐδῶ τὸ κλάσμα τὸ γράψαμε μὲ μορφὴ δεκαδική.

δ) 

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{30}{50} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ τὸ ἀρχικὸ κομμάτι AB εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ΓΔ, ποὺ χρησιμοποιεῖται σὰν μονάδα συγκρίσεως, ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ θὰ ἐκφράζῃ πόσο μέρος ἢ πόσο τμῆμα τοῦ ΓΔ εἶναι τὸ AB.

Ὅπως βλέπομε, στοὺς παραπάνω ***λόγους*** τὰ μεγέθη εἶναι καὶ τὰ δύο ***μήκη*** ἢ ὅπως ἀλλοιῶς λέμε ***ὁμοειδῆ*** (ὅμοια) καὶ ὅτι ὁ λόγος εἶναι ἀριθμὸς ***ἀφηρημένος***, δηλαδὴ δὲν εἶναι συγκεκριμένος (ἢ μὲ ἄλλα λόγια δὲν ἔχει μονάδες).

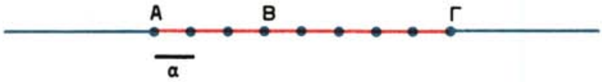
Ὅσα εἴπαμε παραπάνω θὰ τὰ ἐφαρμόσωμε στὶς ἑπόμενες κατασκευὲς γιὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε καὶ τὴν πρακτική τους ἀξία.

Κατασκευὴ 1η.

Ἀπὸ ἕνα εὐθύγραμμο χάρακα κόψετε δυὸ κομμάτια AB καὶ BΓ τέτοια, ὥστε νὰ ἔχουν λόγο: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{5}$.

Λύσι :

Παίρνομε ἕνα εὐθύγραμμο κομμάτι α (σχ. 12 · 1 β). Κρατώντας



Σχ. 12·1 β.

τὸν διαβήτη μας ἀνοικτὸ σταθερὰ σ' αὐτὸ τὸ μῆκος α, παίρνομε ἐπάνω στὸν χάρακα τὰ συνεχόμενα κομμάτια.

$$\left.\begin{aligned} AB &= 3 \text{ φορὲς τὸ } \alpha = 3\cdot\alpha \\ B\Gamma &= 5 \text{ φορὲς τὸ } \alpha = 5\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3\cdot\alpha}{5\cdot\alpha} = \frac{3}{5}.$$

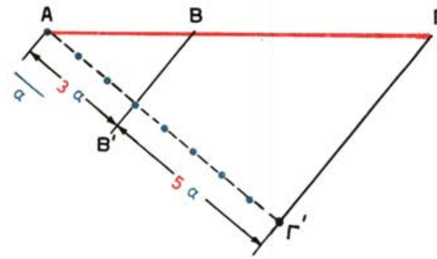
Γιὰ νὰ πάρωμε τὰ δύο κομμάτια AB καὶ BΓ χρειάσθηκε ἀπὸ τὸν χάρακα νὰ κόψωμε συνολικὰ ἕνα κομμάτι AΓ ἴσο μέ:

$$A\Gamma = AB + B\Gamma = 3\cdot\alpha + 5\cdot\alpha = 8\cdot\alpha.$$

Δηλαδὴ χρειάσθηκε ἕνα κομμάτι 8 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ α, ποὺ ἀρχικὰ ὁρίσαμε σὰν μονάδα μετρήσεως γιὰ τὰ μήκη. Ὁ ἀριθμὸς 8 ἀντιπροσωπεύει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος, ποὺ ἐκφράζει τὸν λόγο ποὺ μᾶς δίνεται γιὰ τὰ δύο κομμάτια AB καὶ BΓ.

Κατασκευὴ 2α.

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AΓ (σχ. 12 · 1 γ) νὰ τὸ χωρίσετε σὲ δύο ἄλλα AB καὶ BΓ, ὥστε νὰ ἔχουν λόγο $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{5}$.



Σχ. 12·1 γ.

Λύσι :

Τὸ πρόβλημα εἶναι τὸ ἴδιο μὲ αὐτὸ τῆς παραγράφου 3 · 20 τοῦ Α' τόμου.

Φέρομε τὴν ἡμιευθεία ε, ἐπάνω στὴν ὁποία παίρνομε τὰ κομμάτια:

$$AB' = 3\cdot\alpha \qquad \text{καὶ} \qquad B'\Gamma' = 5\cdot\alpha,$$

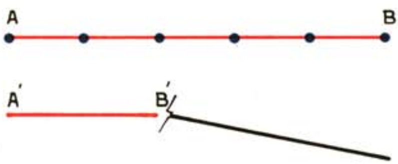
ποὺ σημαίνει, ὅτι $A\Gamma' = 8\cdot\alpha$.

Φέρομε τὴν ΓΓ′ καὶ ἀπὸ τὸ Β′ τὴν Β′Β // ΓΓ′. Τότε ξέρομε ὅτι τὸ τμῆμα ΑΓ χωρίζεται σὲ 8 ἴσα μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ τρία σχηματίζουν τὸ ΑΒ καὶ τὰ ἄλλα πέντε τὸ ΒΓ, δηλαδή:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{5}.$$

Κατασκευὴ 3η.

Δίνεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ (σχ. 12·1 δ). Σχεδιάσετέ το ἐπάνω στὸ χαρτί σας μὲ κλίμακα 1 : 2,5.



Σχ. 12·1 δ.

Λύσι :

Γιὰ νὰ σχεδιάσωμε ἕνα εὐθύγραμμο κομμάτι Α′Β′ 2,5 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ πραγματικὸ ΑΒ, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ Α′Β′ θὰ εἶναι τέτοιο, ὥστε νὰ ἔχωμε:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2,5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5},$$

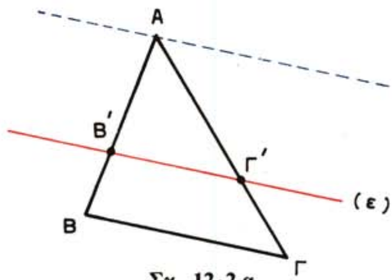
πρέπει νὰ χωρίσωμε τὸ ΑΒ σὲ 5 ἴσα κομμάτια κατὰ τὰ γνωστά.

Ἀπὸ αὐτὰ θὰ κρατήσωμε τὰ δύο (Α′Β′), τὰ ὁποῖα καὶ θὰ σχεδιάσωμε ἐπάνω στὸ χαρτὶ μὲ τὸ πραγματικό τους μῆκος. Τὸ μῆκος Α′Β′ θὰ εἶναι 2,5 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ ΑΒ, ἀφοῦ πήραμε: $A'B' = 2 \cdot \frac{AB}{5}$, τὸ ὁποῖο σὰν ἀναλογία γράφεται:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{5} = \frac{1}{2,5}.$$

12·2 Τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὴν 2α κατασκευὴ τῆς προηγουμένης παραγράφου βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι, ἂν μία εὐθεία ε εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου, κόβει τὶς ἄλλες δύο σὲ μέρη ἀνάλογα. Δηλαδὴ στὸ τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 12·2 α) ἡ ε, ποὺ εἶναι παράλληλη στὴν ΒΓ καὶ κόβει τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ στὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′, χωρίζει τὶς πλευρὲς αὐτὲς σὲ μέρη ἀνάλογα.



Σχ. 12·2 α.

Ἑπομένως:

$$\boxed{\frac{AB}{AB'}=\frac{A\Gamma}{A\Gamma'}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\frac{AB'}{B'B}=\frac{A\Gamma'}{\Gamma'\Gamma}}$$

Ἂν τὶς ἀναλογίες αὐτὲς τὶς πολλαπλασιάσωμε κατὰ μέλη, ἔχομε:

$$\boxed{\frac{AB}{B'B}=\frac{A\Gamma}{\Gamma'\Gamma}}$$

Οἱ παραπάνω ἀναλογίες εἶναι γνωστὲς σὰν ***θεώρημα τοῦ Θαλῆ***.

Ἐφαρμογή.

Ἀπὸ τρία δοσμένα εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ νὰ προσδιορίσετε ἕνα τέταρτο x, τέτοιο, ὥστε ὅλα μαζὶ νὰ σχηματίζουν ἀναλογία.

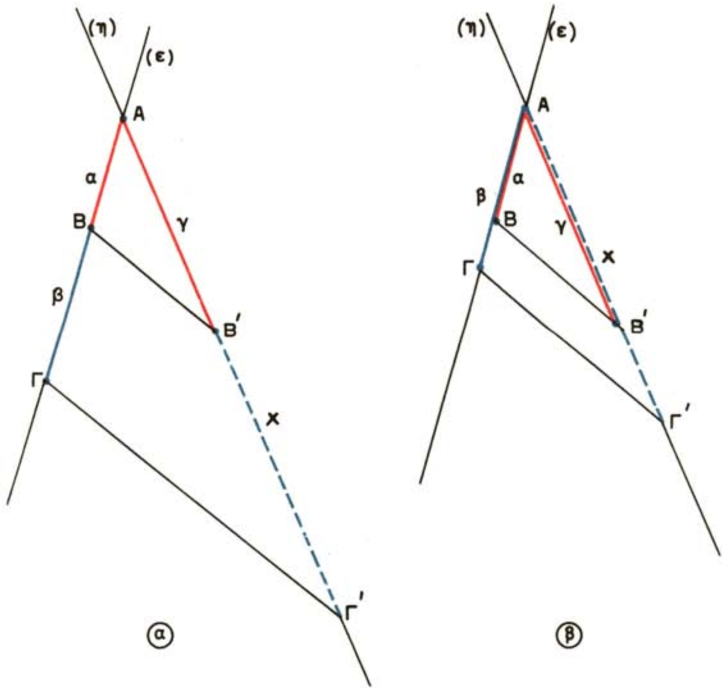
α β γ x

Θέλομε νὰ ἔχωμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}.$$

Σὲ δύο εὐθεῖες ε καὶ η, ποὺ τέμνονται σὲ ἕνα σημεῖο Α, παίρνομε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα:

$AB = \alpha$	$AB = \alpha$
$B\Gamma = \beta$	$A\Gamma = \beta$
$AB' = \gamma'$	$AB' = \gamma'$
[σχ. 12 · 2 β (α)]	[σχ. 12 · 2 β (β)],



Σχ. 12·2 β.

καὶ φέρομε τὴν BB'. Ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ φέρομε τὴν ΓΓ' // BB' [σχ. 12 · 2 β (α) καὶ (β)]. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω τὸ κομμάτι:

B'Γ' [σχ. 12 · 2 β (α)]   ἢ   AΓ' [σχ. 12 · 2 β (β)].

εἶναι τὸ ζητούμενο x, ἀφοῦ ἔχωμε:

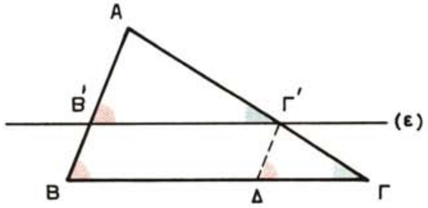
$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB'}{B'\Gamma'} \qquad\qquad \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AB'}{A\Gamma'}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{B'\Gamma'} \qquad\qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{A\Gamma'}.$$

Βλέπομε ὅτι ἡ δευτέρα μέθοδος [σχ. 12 · 2 β (β)] παρουσιάζει τὸ πλεονέκτημα νὰ χρειάζεται μικρότερο χῶρο.

12 · 3 Όμοια τρίγωνα.

Φέρομε μία εὐθεία ε, ἡ ὁποία κόβει τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 12 · 3 α) στὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ θὰ ἔχωμε:



Σχ. 12·3 α.

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'}.$$

Ἀπὸ τὸ Γ′ φέρομε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα Γ′Δ // ΑΒ. Σύμφωνα πάλι μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ὅμως γιὰ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν κόβωνται οἱ πλευρές του ἀπὸ τὴν Γ′Δ, θὰ ἔχωμε:

$$\frac{\Gamma B}{\Delta B} = \frac{\Gamma A}{\Gamma' A} \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τετράπλευρο ΒΒ′Γ′Δ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι παράλληλες, σημαίνει ὅτι: ΒΔ = Β′Γ′, ἐπομένως:

$$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'}.$$

Ἀπὸ τὶς δύο παραπάνω ἀναλογίες βγαίνει ἡ ἀναλογία:

$$\boxed{\frac{AB}{AB'} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}}$$

Ἀκόμη γιὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ′ ἔχομε ὅτι:

$$\widehat{A} = \text{κοινὴ} \qquad \widehat{B} = \widehat{B'} \qquad \text{καὶ} \qquad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}.$$

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Τὰ τρίγωνα αὐτὰ τὰ λέμε ***ὅμοια***, τὸν δὲ λόγο τῶν πλευρῶν τους ***λόγο ὁμοιότητος***. Οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΒ′, ΑΓ καὶ ΑΓ′, ΒΓ καὶ Β′Γ′ λέγονται ***ὁμόλογες***.

Ὅπως βλέπομε, μεταξὺ ὁμολόγων πλευρῶν περιλαμβάνονται ἴσες γωνίες. Τὸ σύμβολο τῆς ὁμοιότητος εἶναι: $\approx$.

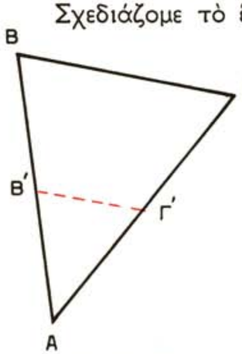
Ἐφαρμογή.

Ἐπάνω στὸ χαρτὶ σχεδιάσεως νὰ ἀπεικονίσετε μὲ κλίμακες 1 : 25 καὶ 1 : 50 τὸ σχῆμα μιᾶς τριγωνικῆς λαμαρίνας μὲ πραγματικὲς διαστάσεις 1,25 m, 1,00 m, καὶ 1,50 m.

Ἀπὸ ὅσα ξέρομε, ἐπάνω στὸ χαρτί μας οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου, ποὺ ἔχει τὸ σχῆμα τῆς λαμαρίνας, πρέπει νὰ ἔχουν τὰ παρακάτω μήκη:

Στὴν κλίμακα 1 : 25	*Στὴν κλίμακα 1 : 50*
$AB = 1250 : 25 = 50$ mm	$A'B' = 1250 : 50 = 25$ mm
$B\Gamma = 1000 : 25 = 40$ mm	$B'\Gamma' = 1000 : 50 = 20$ mm
$A\Gamma = 1500 : 25 = 60$ mm	$A'\Gamma' = 1500 : 50 = 30$ mm.

Σχεδιάζομε τὸ ἕνα τρίγωνο, τὸ ΑΒΓ (σχ. 12 · 3 β). Τὸ ἄλλο θὰ προκύψη ἀμέσως, ἂν ἐπάνω στὴν ΑΒ πάρωμε τμῆμα $AB' = 25$ mm καὶ φέρωμε τὴν $B'\Gamma' \parallel B\Gamma$



Σχ. 12·3 β.

Διότι: τρίγ. $AB'\Gamma' \approx$ τρίγ. $AB\Gamma$

ἄρα: $$\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}$$

ἢ $$\frac{25}{50} = \frac{A\Gamma'}{60} = \frac{B'\Gamma'}{40}.$$

Ἀπὸ ἐδῶ ἔχομε: $A\Gamma' = 60 \cdot \frac{25}{50}$ καὶ $A\Gamma' = 30$ mm

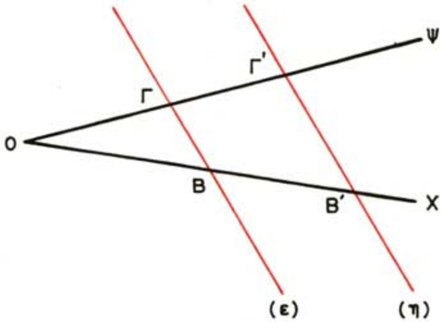
$B'\Gamma' = 40 \cdot \frac{25}{50}$ καὶ $B'\Gamma' = 20$ mm.

Γενικότερα :

Ἂν μιᾶς γωνίας ΧΟΨ (σχ. 12 · 3 γ) κόψωμε τὶς πλευρὲς μὲ δυὸ παράλληλες μεταξύ τους εὐθεῖες ε καὶ η, τότε προκύπτουν δύο τρίγωνα ὅμοια μεταξύ τους.

Δηλαδή: Ἂν ε // η,

τότε: τριγ. ΟΒΓ $\approx$ Τρίγ. ΟΒ′Γ′.



Σχ. 12·3 γ.

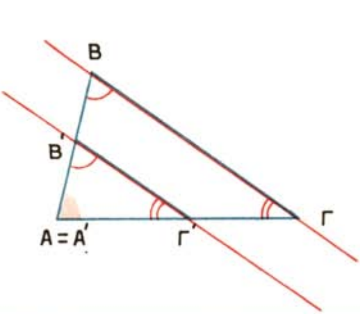
Συμπεράσματα :

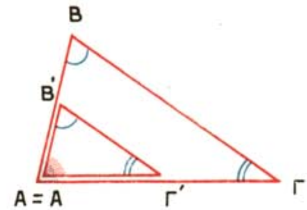
1. Σὲ δύο ὅμοια τρίγωνα οἱ γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους μία πρὸς μία.	*1. Ἂν σὲ δύο τρίγωνα οἱ γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους μία πρὸς μία, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.*
2. Σὲ δύο ὅμοια τρίγωνα οἱ πλευρὲς εἶναι ἀνάλογες.	*2. Ἂν σὲ δύο τρίγωνα οἱ πλευρὲς εἶναι ἀνάλογες, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.*

3. Μεταξὺ ὁμολόγων πλευρῶν εὑρίσκονται ἴσες γωνίες.

4. Ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν κεῖνται ὁμόλογες πλευρές.

Σημείωσι : Τὰ συμπεράσματα τῆς μιᾶς στήλης εἶναι ἀντίστροφες προτάσεις τῶν συμπερασμάτων τῆς ἄλλης στήλης.





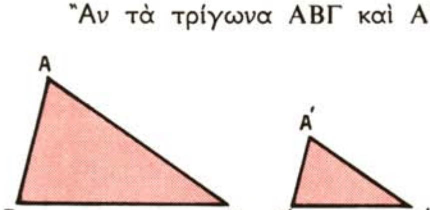
Ἂν : *Τριγ.* $AB\Gamma \approx$ *τριγ.* $A'B'\Gamma'$	***Ἂν*** : $\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$
τότε : $B\Gamma \parallel B'\Gamma'$	***ἢ*** $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$
$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$	***τότε*** : *τριγ.* $AB\Gamma \approx$ *τριγ.* $A'B'\Gamma'$
$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$	καί: $B\Gamma \parallel B'\Gamma'$

Ἐφαρμογή.

Δείξετε ὅτι σὲ δύο ὅμοια τρίγωνα ὁ λόγος ὁμοιότητος ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο τῶν περιμέτρων τους.

Λύσι :

Ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμε:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma' A'}.$$

Σχ. 12·3 δ.

Ἐφαρμόζοντας τὴν σημαντική, ὅπως τὴν ὀνομάσαμε, ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, θὰ ἔχωμε (σχ. 12 · 3 δ):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma' A'} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma A}{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma' A'}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{περίμετρος τριγ. } AB\Gamma}{\text{περίμετρος τριγ. } A'B'\Gamma'}.$$

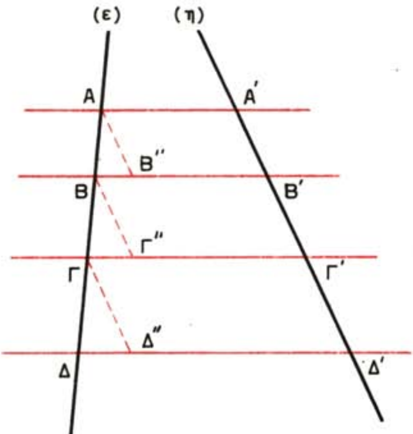
Ὥστε:

Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο ὁμοιότητός τους.

12 · 4 Ἰδιότητες παραλλήλων εὐθειῶν.

Ἂν πάρωμε δύο εὐθεῖες ε καὶ η (σχ. 12 · 4), ποὺ νὰ κόβωνται ἀπὸ παράλληλες εὐθεῖες, καὶ ἐφαρμόσωμε τὰ παραπάνω συμπεράσματα στὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΒ'', ΒΓΓ'' καὶ ΓΔΔ'', εὑρίσκομε:

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{B\Gamma}{B\Gamma''} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta''} \quad \text{ἤ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'},$$



Φέρομε τίς:	Προκύπτει ὅτι:
ΑΒ''//Α'Β'	ΑΒ''=Α'Β'
ΒΓ''//Β'Γ'	ΒΓ''=Β'Γ'
ΓΔ''//Γ'Δ'	ΓΔ''=Γ'Δ'

Σχ. 12·4.

ἡ ὁποία ἀναλογία, ὅπως ξέρομε, γράφεται καὶ ὡς:

$$AB : B\Gamma : \Gamma\Delta = A'B' : B'\Gamma' : \Gamma'\Delta'.$$

Δηλαδή:

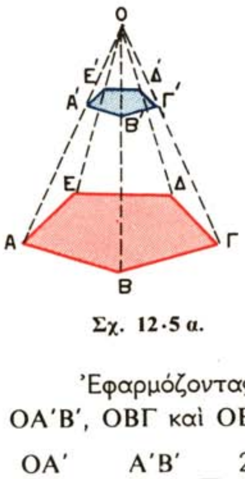
Ὅταν δύο εὐθεῖες κόβωνται ἀπὸ ἄλλες παράλληλες, κόβονται καὶ σὲ μέρη ἀνάλογα.

Γιὰ τὸ παραπάνω σχῆμα μποροῦμε ἀκόμα νὰ γράψωμε:

$$AB : B\Gamma : \Gamma\Delta : A\Gamma : A\Delta : B\Delta = A'B' : B'\Gamma' : \Gamma'\Delta' : A'\Gamma' : A'\Delta' : B'\Delta'.$$

12 · 5 Ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα.

Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου φέρομε πρὸς τὸ πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ καὶ ΟΕ. Κατόπιν ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α′ τῆς ΟΑ τέτοιο, ὥστε:



Σχ. 12·5 α.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{2}{5} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{OA'}{A'A} = \frac{2}{3},$$

φέρομε τὴν Α′Β′ // ΑΒ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὶς Β′Γ′ // ΒΓ, Γ′Δ′ // ΓΔ καὶ Δ′Ε′ // ΔΕ. Τὸ πεντάγωνο, ποὺ σχηματίζεται κατ᾽ αὐτὸ τὸν τρόπο, δηλαδὴ τὸ Α′Β′Γ′Δ′Ε′, λέμε ὅτι εἶναι ὅμοιο πρὸς τὸ ἀρχικὸ ΑΒΓΔΕ.

Ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ στὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ′Β′, ΟΒΓ καὶ ΟΒ′Γ′ κ.λπ., εὑρίσκομε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{2}{5} \\[2ex] \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \dfrac{2}{5} \\[2ex] \dfrac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \dfrac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \dfrac{2}{5} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \text{ἄρα:} \quad \begin{array}{l} \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \dfrac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \\[2ex] \quad = \dfrac{\Delta'E'}{\Delta E} = \dfrac{E'A'}{EA}. \end{array}$$

Καὶ ἀκόμα ὅτι οἱ γωνίες τῶν δύο πενταγώνων εἶναι ἴσες, δηλαδή:

$$\widehat{A'} = \widehat{A}\ ,\ \widehat{B'} = \widehat{B}\ ,\ \widehat{\Gamma'} = \widehat{\Gamma}\ ,\ \widehat{\Delta'} = \widehat{\Delta} \ \text{ καὶ } \ \widehat{E'} = \widehat{E}$$

*Συμπεράσματα * :*

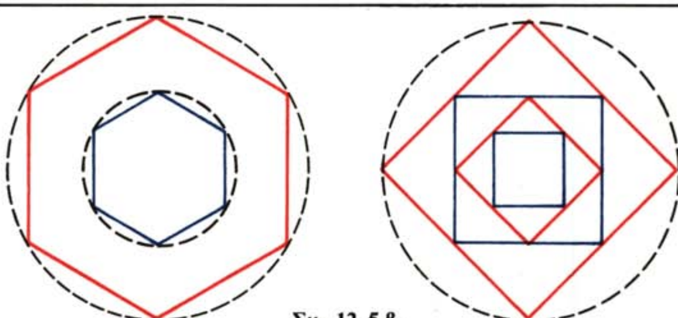
1. Ὅταν δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια μεταξύ τους, τότε οἱ γωνίες τους εἶναι ἴσες, μία πρὸς μία καὶ οἱ ὁμόλογες πλευρές τους ἀνάλογες.

2. Ὅταν δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια μεταξύ τους, ὁ λόγος ὁμοιότητός τους ἰσοῦται καὶ μὲ τὸ λόγο τῶν περιμέτρων τους.

3. Ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ γωνιῶν, εἶναι ὅμοια μεταξύ τους (σχ. 12 · 5 β).

4. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο ὁμοιότητός τους.

5. Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο περιφερειῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο τῶν ἀκτίνων τους.



Σχ. 12·5 β.
Ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἴσο ἀριθμὸ πλευρῶν εἶναι ὅμοια.

12 · 6 Κατασκευὴ ὁμοίων σχημάτων.

Μετὰ ἀπὸ ὅσα ἐμάθαμε μέχρι τώρα, ἂς δοῦμε τρεῖς τρόπους, ποὺ μὲ τὴν βοήθειά τους μποροῦμε νὰ σχεδιάσωμε ὅμοια σχήματα.

Βασικὰ παίρνομε ἕνα σχῆμα σὰν πρότυπο. Θὰ δοῦμε λοιπὸν πῶς μποροῦμε νὰ σχεδιάσωμε ἕνα ἄλλο ὅμοιο μὲ αὐτό, ἀλλὰ μεγαλύτερο ἢ μικρότερο.

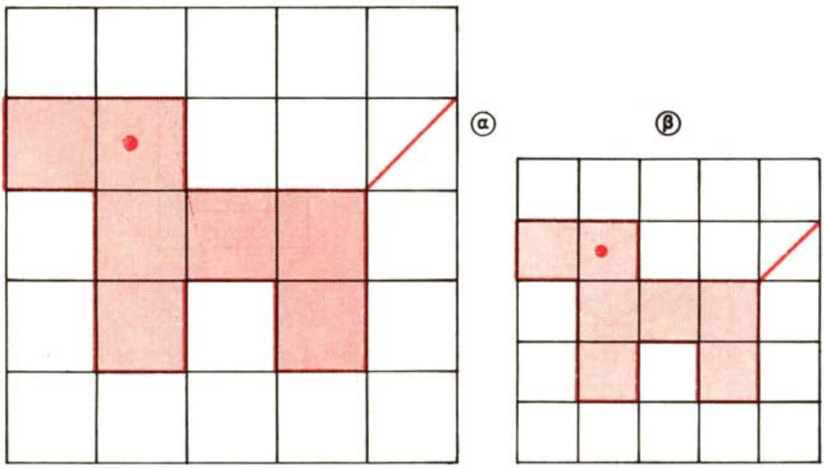
1ος Τρόπος.

Μὲ τὴν χρησιμοποίησι χαρτιοῦ μιλλιμετρὲ (τετραγωνισμένου).

Γιὰ νὰ σχεδιάσωμε τὸ ὅμοιο σχῆμα τοῦ σχήματος 12 · 6 α (α)

* Ἡ ἀπόδειξι τῶν συμπερασμάτων αὐτῶν μπορεῖ νὰ δοθῆ ἀπὸ τὸν διδάσκοντα ὡς ἄσκησι.

μὲ λόγο ὁμοιότητος $\frac{2}{3}$, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Τετραγωνίζομε τὸ χαρτὶ τοῦ σχήματος 12·6 α (α) χαράζοντας παράλληλες καὶ κάθετες εὐθεῖες σὲ ἴσες ἀποστάσεις μεταξύ τους, ἔστω π.χ. 12 mm. Ἔτσι καλύπτομε τὸ σχέδιο μὲ ἕνα πλέγμα ἀπὸ τετραγωνάκια μὲ πλευρὰ 12 mm. Μετά, τὸ ἴδιο πλέγμα τὸ σχεδιάζομε πάλι μὲ τετραγωνάκια ἀλλὰ μὲ πλευρὰ ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀρχικῆς, δηλαδὴ ἴσης μὲ $\frac{2}{3} \times 12\ \text{mm} = 8\ \text{mm}$. Ἔπειτα, μεταφέρομε τὸ σχέδιο τοῦ σχήματος 12·6 α(α) στὸ νέο πλέγμα (β), ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα

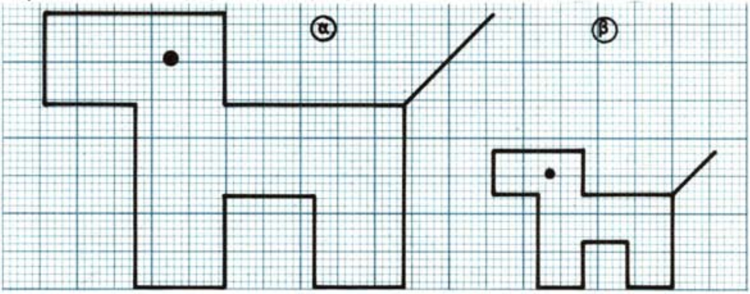


Σχ. 12·6 α.

12·6 α (β). Τώρα καθὼς σχεδιάζομε κάθε μῆκος, τὸ μῆκος αὐτὸ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ πρότυπο κατὰ $\frac{2}{3}$.

Βασικὰ δὲν κάναμε τίποτε περισσότερο ἀπὸ τὸ νὰ σχεδιάσωμε τὸ ἀρχικὸ σχέδιο ***ὑπὸ κλίμακα*** $\frac{2}{3}$. Ἐπειδή, ὅπως εἴπαμε, οἱ κλίμακες ποὺ χρησιμοποιοῦμε εἶναι ὁρισμένες, γιὰ εὐκολία μας χρησιμοποιοῦμε γιὰ σχεδίασι σχημάτων ὑπὸ σμίκρυνσι χαρτὶ χαραγμένο σὲ ὑποδιαιρέσεις τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, δηλαδὴ σὲ cm καὶ mm.

Στὸ σχῆμα 12 · 6 β φαίνεται ἡ σχεδίασι ἑνὸς σχήματος μὲ κλίμακα 1 : 2, δηλαδὴ μὲ λόγο ὁμοιότητος $\frac{1}{2}$ ἐπάνω στὸ χαρτὶ αὐτὸ ποὺ εἶναι γνωστὸ σὰν ***χαρτὶ μιλλιμετρέ***.



Σχ. 12·6 β.

2ος Τρόπος.

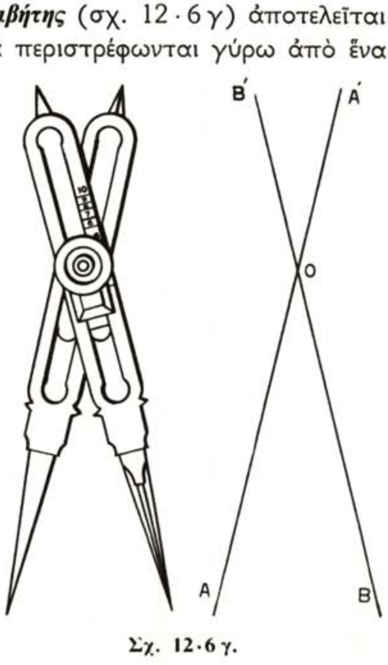
Μὲ τὴν βοήθεια ἑνὸς κομπάσου (ἀναλογικοῦ διαβήτη).

Τὸ ***κομπάσο*** ἢ ***ἀναλογικὸς διαβήτης*** (σχ. 12 · 6 γ) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο στελέχη, ποὺ μποροῦν νὰ περιστρέφωνται γύρω ἀπὸ ἕνα ἄξονα O.

Ὁ ἄξων αὐτὸς μπορεῖ νὰ μετακινῆται μέσα στὶς ἐγκοπές, ποὺ ἔχουν τὰ στελέχη. Γιὰ νὰ σχεδιάσωμε ἕνα σχέδιο μὲ κλίμακα π.χ. 1:2,5, μετακινοῦμε τὸν ἄξονα O καὶ τὸν φέρομε σὲ τέτοια θέσι, ὥστε:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2{,}5}.$$

Μετά, τὸ πρωτότυπο σχέδιο τὸ ξεσηκώνομε μὲ τὸ ἄνοιγμα A, O, B καὶ τὸ ξανασχεδιάζομε μὲ τὸ ἄνοιγμα A′, O, B′. Ἀκριβῶς τὸ ἀντίθετο γίνεται, ἂν θέλωμε νὰ σχεδιάσωμε ἕνα σχέδιο μὲ κλίμακα 2,5 : 1.



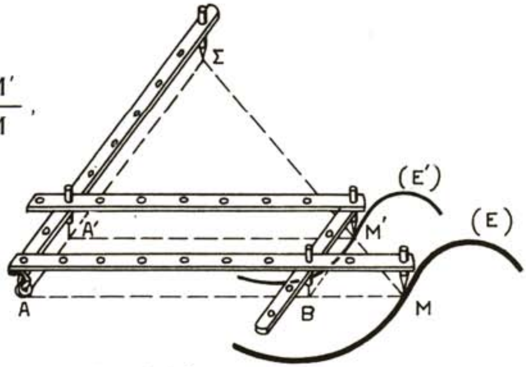
Σχ. 12·6 γ.

3ος Τρόπος.

Μὲ τὴν βοήθεια τοῦ παντογράφου *(σχ. 12·6 δ).*

Τὸ ὄργανο βασικὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 στελέχη. Τὰ στελέχη αὐτὰ ἀρθρώνονται κατὰ τρόπο, ὥστε τὸ τετράπλευρο ΑΒΜ'Α' ποὺ σχηματίζεται, νὰ εἶναι καὶ νὰ παραμένη παραλληλόγραμμο καὶ ἀκόμα:

$$\frac{ΣΑ'}{ΣΑ} = \frac{ΣΜ'}{ΣΜ},$$



Σχ. 12·6 δ.

ὅπου: Σ τὸ σταθερὸ σημεῖο τοῦ ὀργάνου καὶ Μ καὶ Μ' οἱ γραφίδες ἢ ἀκίδες του. Ἔτσι, γιὰ νὰ σχεδιάσωμε ἕνα σχέδιο μὲ κλίμακα 3 : 4 ρυθμίζομε τὶς ἀρθρώσεις Α' καὶ Β ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχωμε:

$$\frac{ΣΑ'}{ΣΑ} = \frac{3}{4}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ΒΜ' εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν ΣΑ (ἀφοῦ τὸ ΑΒΜ'Α' διατηρεῖται παραλληλόγραμμο), θὰ ἔχωμε:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΜ} = \frac{ΣΜ'}{ΣΜ} = \frac{ΣΑ'}{ΣΑ} = \frac{3}{4},$$

ἄρα στὸ Μ' θὰ τοποθετηθῆ ἡ γραφὶς καὶ στὸ Μ ἡ ἀκίς. Μετακινώντας τώρα τὴν ἀκίδα σιγὰ ἐπάνω στὸ σχῆμα, ἡ γραφὶς θὰ γράφη ἕνα ὅμοιο ἀκριβῶς σχῆμα, ὅπως τὸ ἀρχικό. Βλέπομε δηλαδὴ ὅτι ὁ παντογράφος εἶναι ὄργανο, μὲ τὴν βοήθεια τοῦ ὁποίου γράφομε ἕνα ὅμοιο σχῆμα (ὄχι σημεῖο πρὸς σημεῖο, ὅπως μὲ τὰ ἄλλα ὄργανα) ἀλλὰ ***μὲ συνεχῆ χάραξι.***

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

12 · 7 Ἀσκήσεις.

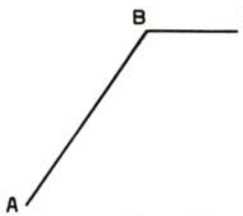
1. Σχεδιάσετε ἐπάνω στὸ χαρτὶ μία τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓ (σχ. 12 · 7 α), τῆς ὁποίας τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ νὰ ἔχουν λόγο:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{7}{3}.$$

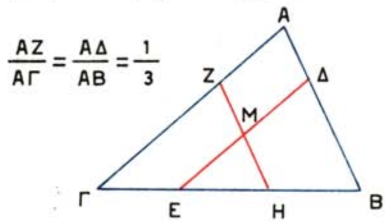
Κατόπιν προσδιορίσετε τὸ μῆκος της, ἂν ξέρετε ὅτι ἡ $B\Gamma = 2{,}4$ cm στὸ σχέδιο καὶ ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι χαραγμένη μὲ κλίμακα 1 : 50.

(400 cm)

2. Δίνεται τριγωνικὸ κομμάτι λαμαρίνας ΑΒΓ (σχ. 12 · 7 β), τὸ ὁποῖο τὸ



Σχ. 12·7 α.

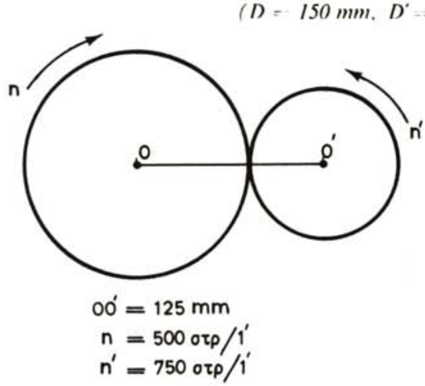


Σχ. 12·7 β.

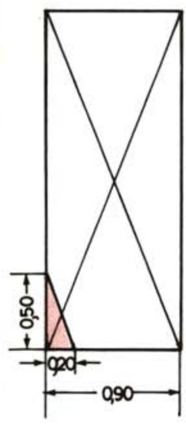
χωρίζομε σὲ τέσσερα μέρη φέροντας μὲ τὸ τεμπεσίρι ἀπὸ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Δ παράλληλες εὐθεῖες πρὸς τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Δείξετε ὅτι τὸ μικρὸ τρίγωνο ΕΜΗ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ ΓΑΒ μὲ λόγο ὁμοιότητος $\frac{1}{3}$.

3. Στοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς τοῦ σχήματος 12 · 7 γ ὑπολογίσετε τὶς διαμέτρους D καὶ D′, ὅταν γνωρίζετε πὼς οἱ διάμετροι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὶς στροφές.

(D = 150 mm, D′ = 100 mm)



Σχ. 12·7 γ.



Σχ. 12·7 δ.

4. Ἡ σιδηροκατασκευὴ τοῦ σχήματος 12 · 7 δ εἶναι ἔτσι τοποθετημένη σὲ

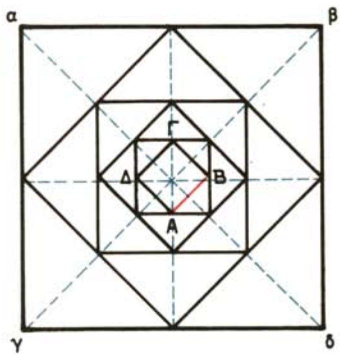
μία πόρτα, ὥστε τὸ μόνο ποὺ μποροῦμε νὰ μετρήσωμε εἶναι τὸ πλάτος της 0,90 m καὶ τὶς διαστάσεις τῆς λαπάτσας. Ἡ λαπάτσα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κάθετες πλευρὲς 0,20 m καὶ 0,50 m καὶ ἡ ὑποτείνουσά της εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν μία διαγώνιο. Ὑπολογίσετε τὶς διαστάσεις τῆς πόρτας καὶ τὸ συνολικὸ μῆκος τοῦ μορφοελάσματος ποὺ χρειάστηκε γιὰ τὴν κατασκευή της.

(Ὕψος 2,25 m, Συνολ. μῆκος ἐλάσμ. 11,14 m)

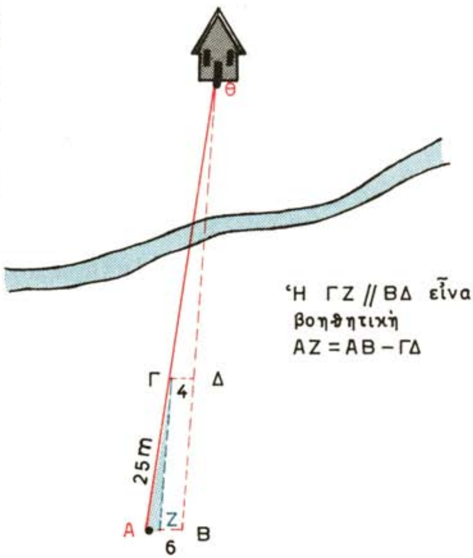
5. Τὸ σχῆμα 12 · 7 ε δείχνει μία τετράγωνη αἴθουσα μὲ κλίμακα 1 : 200. Ἐπειδὴ ἡ αἴθουσα εἶναι γεμάτη ἔπιπλα, τὴν μόνη διάστασι ποὺ μπορέσαμε καὶ μετρήσαμε εἶναι ἡ ΑΒ, ποὺ τὴν εὑρήκαμε 1,5 m. Ἂν ξέρωμε ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο:

α) Σχεδιάσετε τὸ σχῆμα μὲ κλίμακα τῆς ἐκλογῆς σας, β) εὕρετε τὶς διαστάσεις τοῦ δωματίου καὶ γ) ὑπολογίσετε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν φιλέτων, ποὺ θὰ χρειασθῆτε γιὰ νὰ κατασκευάσετε τὸ σχέδιο στὴν πραγματικότητα, χωρὶς νὰ περιλάβετε σ' αὐτὸ τὴν ἐξωτερικὴ περίμετρο αβγδ.

(β $\simeq$ 8,49 m, γ = 67,44 m)



Σχ. 12·7 ε.

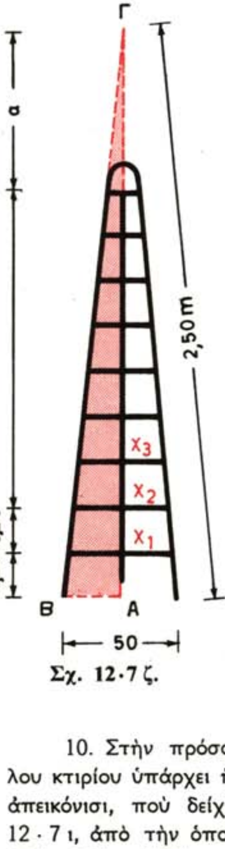


Σχ. 12·7 στ.

6. Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὴν ἀπόστασι ΑΘ (σχ. 12 · 7 στ), χωρὶς νὰ περάσωμε τὸ ποτάμι, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

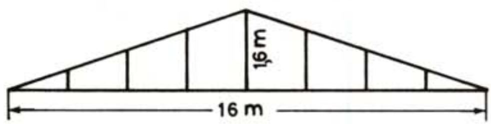
Ἀπὸ τὸ Α μὲ τὴν διόπτρα βάζομε στόχο τὸ Θ. Σὲ ἀπόστασι 25 m ἀπὸ τὸ Α τώρα σημειώνομε τὸ σημεῖο Γ στὴν νοητὴ εὐθεία ΑΘ. Μετὰ πηγαίνομε 6 m δεξιὰ τοῦ Α καὶ σημειώνομε τὸ σημεῖο Β. Ἀπὸ τὸ νέο αὐτὸ σημεῖο σημαδεύομε τὸ Θ καὶ κατόπιν φέρομε τὴν ΓΔ // ΑΒ. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ προσδιορίζομε τὸ σημεῖο Δ στὴν νοητὴ εὐθεία ΒΘ. Μετροῦμε τὴν ΓΔ καὶ τὴν εὑρίσκομε 4 m. Νὰ εὕρετε τὸ μῆκος ΑΘ. *(ΑΘ = 75 m)*

7. Ἡ σκάλα τοῦ σχήματος 12 · 7 ζ κατασκευάσθηκε ἀπὸ ξύλα μήκους 2,50 m, ἀπὸ τὰ ὁποῖα κόψαμε τὰ κομμάτια ποὺ περίσσεψαν. Ἡ σκάλα ἔχει 9 σκαλοπάτια μὲ βῆμα 20 cm καὶ τὸ πλάτος στὸ δάπεδο, κάτω ἀπὸ τὸ τελευταῖο σκαλοπάτι, εἶναι 50 cm. Νὰ εὕρετε τὸ πλάτος καθενὸς ἀπὸ τὰ 9 σκαλοπάτια. *($x_1 = 460$ $x_2 = 420$ $x_3 = 379$ $x_4 = 339$ $x_5 = 299$ $x_6 = 259$ $x_7 = 218$ $x_8 = 178$ $x_9 = 138$ mm)*



Σχ. 12·7 ζ.

8. Ὑπολογίσετε τὰ ὕψη, ποὺ ἔχουν οἱ ὀρθοστάτες τοῦ ζευκτοῦ τοῦ σχήματος 12 · 7 η. Μετὰ εὕρετε τὸ συνολικὸ μῆκος τοῦ μορφοελάσματος, ποὺ χρειαζόμαστε γιὰ τὴν κατασκευή του. *(Ὀρθοστάτες: 0,40-0,80-1,20, συνολ. ἔλασμ: 38,70 m)*



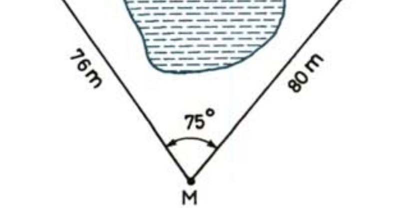
Σχ. 12·7 η.

9. Νὰ εὕρετε τὴν εὐθύγραμμη ἀπόστασι AB τῶν δύο σπιτιῶν A καὶ B. Σᾶς δίνεται ἡ δυνατότης νὰ μετρήσετε τὶς ἀποστάσεις MA = 76 m καὶ MB = 80 m καὶ τὴν γωνία AMB = 75° (σχ. 12 · 7 θ). (Νὰ λυθῆ γραφικὰ μὲ τὴν σχεδίασι ὁμοίου τριγώνου πρὸς τὸ AMB ὑπὸ κλίμακα 1 : 100).

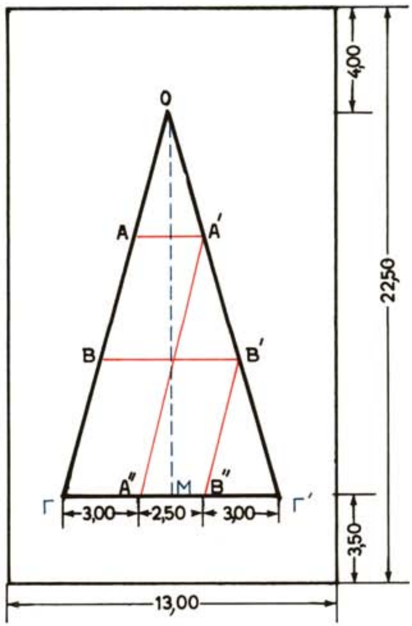
10. Στὴν πρόσοψι ἑνὸς μεγάλου κτιρίου ὑπάρχει ἡ ἀρχιτεκτονικὴ ἀπεικόνισι, ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα 12 · 7 ι, ἀπὸ τὴν ὁποία τὰ κομμάτια AA′, BB′, A′A″ καὶ B′B″ ἔχουν καταστραφῆ. Θέλομε νὰ ὑπολογίσωμε τὰ μήκη τους, προκειμένου νὰ κάνωμε ἕνα προϋπολογισμὸ κόστους.

(Τὸ πρόβλημα νὰ λυθῆ μὲ δύο τρόπους: Ὁ ἕνας εἶναι ἡ σχεδίασι μὲ κλίμακα 1 : 100. Ὁ ἄλλος εἶναι μὲ ὑπολογισμὸ τοῦ μήκους τῆς ΟΓ = ΟΓ′ στὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΟΓΓ′).

(AA′ = 3,00 m, BB′ = 5,50 m, A′A″ = 10,08 m, B′B″ = 5,50 m)

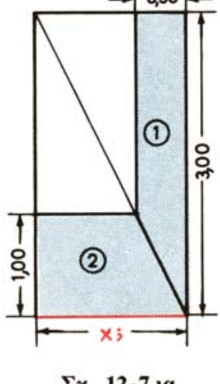


Σχ. 12·7 θ.

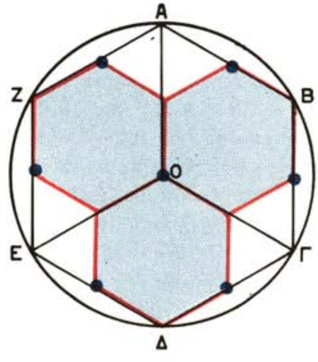


Σχ. 12·7 ι.

11. Ποιό πρέπει νὰ εἶναι τὸ πλάτος τῆς λαμαρίνας γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ κόβωμε ἀπὸ τὴν κάθε μία κομμάτια ὅπως τὸ 1 καὶ τὸ 2 (σχ. 12 · 7 ια); (Λύσετε τὸ πρόβλημα γραφικὰ καὶ ὑπολογιστικά). *(1,50 m)*



Σχ. 12·7 ια.



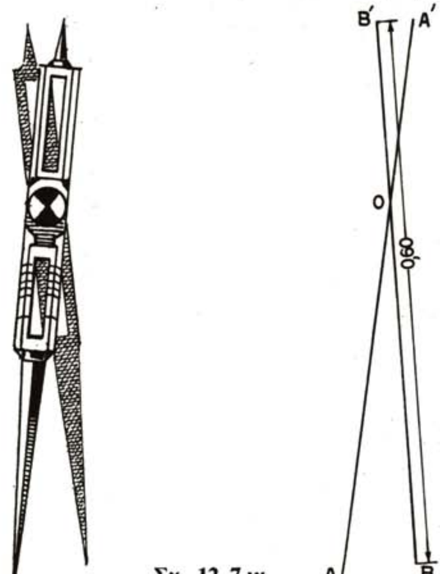
Σχ. 12·7 ιβ.

12. Θέλετε νὰ σχεδιάσετε στὸ χαρτί σας ἕνα σχέδιο μὲ ἐξωτερικὲς διαστάσεις σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πλάτους 25 m καὶ μήκους 15 m. Τὸ χαρτί σας εἶναι τετράγωνο μὲ πλευρὰ 40 cm. Μὲ ποιά κλίμακα θὰ τὸ σχεδιάσετε καὶ ποιός θὰ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο σχημάτων, ὥστε στὸ χαρτὶ νὰ σχεδιασθῇ τὸ μεγαλύτερο δυνατὸ σχῆμα; Μετὰ προσαρμοσθῆτε σὲ μιὰ τυποποιημένη κλίμακα.

13. Σὲ κύκλο μὲ κέντρο O γράψετε ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Μετὰ πάρετε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τὰ μέσα τῶν ἀκτίνων OA, OΓ καὶ OE καὶ σχηματίσετε τὰ τρία ἑξάγωνα, ποὺ φαίνονται στὸ σχῆμα 12 · 7 ιβ. Νὰ δείξετε ὅτι αὐτὰ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ ἀρχικὸ ΑΒΓΔΕΖ καὶ νὰ εὕρετε τὸν λόγο ὁμοιότητος.

14. Τὰ στελέχη AA' καὶ BB' ἑνὸς ξύλινου ἀναλογικοῦ διαβήτη ἔχουν μῆκος 60 cm. Προσδιορίσετε τὶς θέσεις, ποὺ θὰ πρέπει νὰ ἀνοίξωμε τὶς τρύπες, ὥστε νὰ μποροῦμε μὲ αὐτὸν τὸν διαβήτη νὰ μικραίνωμε ἕνα σχέδιο μὲ λόγους 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 καὶ 1 : 5 (σχ. 12 · 7 ιγ).

(A'O = 20 cm, 15 cm, 12 cm, 10 cm)

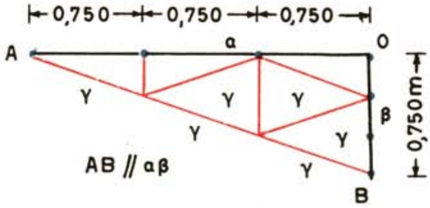


Σχ. 12·7 ιγ.

15. Χρησιμοποιώντας τὸν ἀναλογικὸ διαβήτη μικραίνομε 2,5 φορὲς ἕνα κύκλο O διαμέτρου 50,0 cm. Νὰ εὕρετε τὴν νέα διάμετρο καὶ κατόπιν πόσο θὰ εἶναι τὸ τόξο $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου O, ὅταν τὸ ἀντίστοιχο $\widehat{A'B'}$ στὸν μικρὸ κύκλο ἔχη μῆκος 18,0 cm.

(20 cm, 45 cm)

16. Στὴν κονσόλα τοῦ σχήματος 12 · 7 ιδ ὑπολογίσετε τὶς διαστάσεις τῶν διαφόρων τεμαχίων, προκειμένου νὰ τὴν κατασκευάσετε.



Σχ. 12·7 ιδ.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

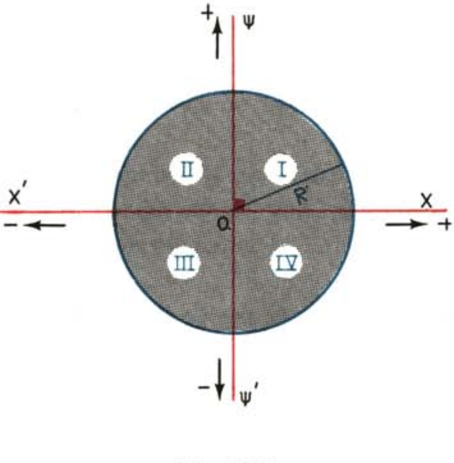
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

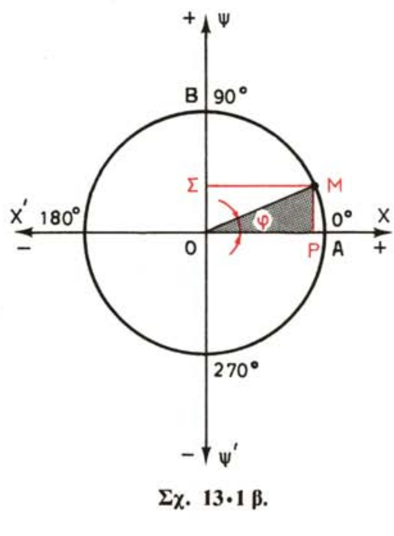
13 · 1 Ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος.

Παίρνομε τυχόντα κύκλο (σχ. 13 · 1 α) μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτῖνα R. Τὸν κύκλο αὐτὸν χωρίζομε σὲ 4 ἴσα μέρη, φέροντας δύο διαμέτρους του κάθετα. Τὶς διαμέτρους προεκτείνομε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τους, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν οἱ εὐθεῖες XX′ καὶ ΨΨ′. Τώρα ὁ κύκλος ἔχει διαιρεθῆ σὲ τέσσερα ἴσα κομμάτια, τὰ ***τεταρτημόρια I, II, III*** καὶ ***IV***.

Τὴν εὐθεία XX′ ὀνομάζομε ***ἄξονα τετμημένων*** καὶ τὴν ***ΨΨ′ ἄξονα τεταγμένων***, τὸ δὲ σημεῖο τομῆς τους Ο ***ἀρχὴ συντεταγμένων***. Τώρα ὁρίζομε ὅτι ἐπάνω στὶς εὐθεῖες ΟΧ καὶ ΟΨ ἐκφράζονται μόνον θετικοὶ ἀριθμοί, ἐνῶ στὶς εὐθεῖες ΟΧ′ καὶ ΟΨ′ ἐκφράζονται μόνον ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.



Σχ. 13·1 α.



Σχ. 13·1 β.

Τὸν κύκλο αὐτὸν ἄς τὸν διαιρέσωμε σὲ 360°, ἀρχίζοντας τὶς 0° ἀπὸ ἐκεῖ ποὺ ὁ ἄξων ΟΧ τέμνεται μὲ τὴν περιφέρεια (σχ. 13 · 1 β), δηλαδὴ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α. Τότε τυχὸν σημεῖο Μ, ποὺ παίρνομε στὴν περιφέρεια, ἀναλόγως στὸ ποιό ἀπὸ τὰ τέσσαρα τόξα τῆς περιφερείας (ἢ ποιὸ τεταρτημόριο) εὑρίσκεται καὶ στὸ μῆκος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ ποὺ ὁρίζει ἀπὸ τὶς 0°, μπορεῖ νὰ πέφτη στό:

I τεταρτημόριο: Ὅταν τὸ τόξο $\overset{\frown}{AM}$ ἔχη μέτρο ἀπὸ 0° ἕως 90°

II τεταρτημόριο: Ὅταν τὸ τόξο $\overset{\frown}{AM}$ ἔχη μέτρο ἀπὸ 90° ἕως 180°

III τεταρτημόριο: Ὅταν τὸ τόξο $\overset{\frown}{AM}$ ἔχη μέτρο ἀπὸ 180° ἕως 270°

IV τεταρτημόριο: Ὅταν τὸ τόξο $\overset{\frown}{AM}$ ἔχη μέτρο ἀπὸ 270° ἕως 360°.

Ἂν φέρωμε τὴν ἀκτῖνα ΟΜ, σχηματίζεται μία ἐπίκεντρη γωνία ΑΟΜ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ τόξο ΑΜ. Τὴν γωνία αὐτὴ τὴν συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα φ. Ἀπὸ τὸ πόσων μοιρῶν γωνία εἶναι αὐτὴ μποροῦμε νὰ καθορίσωμε καὶ σὲ ποιό τεταρτημόριο εὑρίσκεται τὸ σημεῖο Μ.

Στὰ παραπάνω δεχθήκαμε ὅτι τὸ σημεῖο Μ κινεῖται ἐπάνω στὴν περιφέρεια κατὰ τρόπο, ὥστε ἡ ἀκτὶς ΟΜ νὰ περιστρέφεται κατὰ φορὰ ἀντίθετα ἀπὸ τὴν περιστροφὴ ποὺ κάνουν οἱ δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ.

Τὴν φορὰ αὐτὴ καθορίζομε σὰν ***θετικὴ φορὰ*** περιστροφῆς.

Τότε ἡ ἐπίκεντρη γωνία ΑΟΜ = φ, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὶς ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΟΜ, γιὰ κάθε θέσι τοῦ Μ ἐπάνω στὴν περιφέρεια, ὀνομάζεται ***θετικὴ γωνία***.

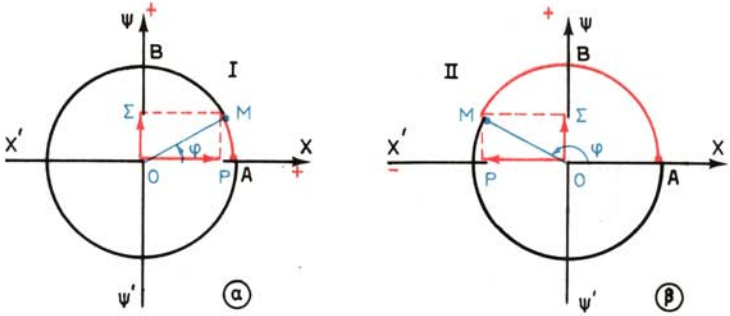
Ἀπὸ τὸ σημεῖο Μ φέρομε καθέτους ἐπάνω στοὺς ἄξονες ΧΧ′ καὶ ΨΨ′, τὶς ΜΡ καὶ ΜΣ.

Ὅπως ξέρομε, τὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ ὀνομάζονται ***προβολὲς*** τοῦ σημείου Μ ἐπάνω στοὺς ἄξονες τῶν συντεταγμένων. Ὀνομάζομε τὰ μήκη ΟΡ καὶ ΟΣ ***προβολὲς*** τοῦ (εὐθυγράμμου τμήματος) ΟΜ ἐπάνω στοὺς ἴδιους ἄξονες.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, ἂν τὸ σημεῖο Μ εὑρίσκεται (σχ. 13 · 1 γ):

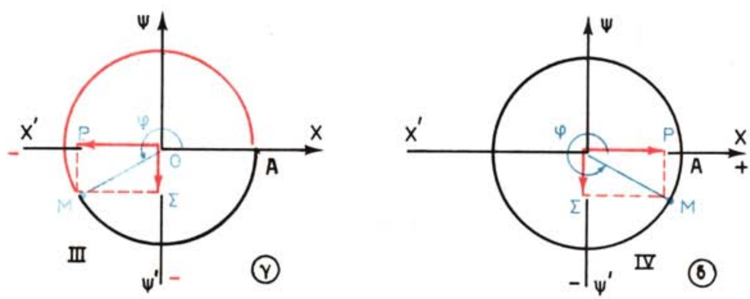
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

στὸ I τεταρτημόριο οἱ προβολὲς ΟΡ καὶ ΟΣ ἐκφράζονται μὲ θετικοὺς ἀριθμούς [σχ. 13·1 γ (α)],



Σχ. 13·1 γ.

στὸ II τεταρτημόριο, ἡ προβολὴ ΟΡ ἐκφράζεται μὲ ἀρνητικὸ ἀριθμὸ καὶ ἡ ΟΣ μὲ θετικό [σχ. 13·1 γ (β)],
στὸ III τεταρτημόριο, οἱ προβολὲς ΟΡ καὶ ΟΣ ἐκφράζονται μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς [σχ. 13·1 δ (α)] καὶ



Σχ. 13·1 δ.

στὸ IV τεταρτημόριο, ἡ προβολὴ ΟΡ ἐκφράζεται μὲ θετικὸ ἀριθμὸ καὶ ἡ ΟΣ μὲ ἀρνητικό [σχ. 13·1 δ (β)].

Ἂν σὰν μονάδα μήκους γιὰ τὴν μέτρησι τῶν παραπάνω προβολῶν ΟΡ καὶ ΟΣ πάρωμε τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (τὴν ὁποία θεωροῦμε ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα μήκους), τότε ὁ κύκλος ὀνομάζεται ***τριγωνομετρικὸς κύκλος***. Εὔκολα βλέπει κανεὶς τότε, ὅτι τόσο τὸ μῆκος τοῦ ΟΡ ὅσον καὶ τὸ μῆκος τοῦ ΟΣ θὰ εἶναι ἀριθμοὶ μικρότεροι ἢ ἴσοι τοῦ $+1$ καὶ μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι τοῦ -1, δηλαδὴ ἀριθμοὶ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

μὲ ἀπόλυτη τιμὴ ***ἴση*** ἢ ***μικροτέρα τῆς ἀκεραίας μονάδος*** (σχ. 13 · 1 ε). Καὶ αὐτό, γιατὶ τὸ μῆκος π.χ. τοῦ ΟΡ (ἢ ΟΣ) θὰ τείνη νὰ γίνη μονάς, ὅταν γίνη ἴσο μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ (ἢ ΟΒ). Τὸ μῆκος ΟΡ (ἢ ΟΣ) θὰ

Σχ. 13·1 ε.

εὑρίσκεται σὲ σχέσι μὲ τὴν ἀκτῖνα, ὅσες φορὲς τὸ ΟΑ = ΟΒ = R χωράει στὸ ΟΡ (ἢ ΟΣ), δηλαδὴ θὰ ἔχωμε τὴν ἔκφρασι τῆς ἀναλογίας:

$$(\text{μέτρο τοῦ ΟΡ}) = \frac{OP}{OA} = \frac{OP}{R}$$

$$(\text{μέτρο τοῦ ΟΣ}) = \frac{O\Sigma}{OB} = \frac{O\Sigma}{R}.$$

13 · 2 Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὀξείας γωνίας.

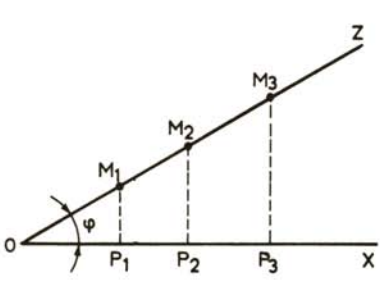
α) ***Τὸ συνημίτονο.***

Παίρνομε μία ὀξεία γωνία ΧΟΖ = φ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, . . . τῆς πλευρᾶς της ΟΖ φέρομε καθέτους ἐπάνω στὴν ἄλλη πλευρὰ ΟΧ (σχ. 13 · 2 α). Παρατηροῦμε ὅτι σχηματίζονται τὰ ὅμοια τρίγωνα:

$$\text{τριγ. } OP_1M_1 \approx \text{τριγ. } OP_2M_2 \approx \text{τριγ. } OP_3M_3 .$$

γιὰ τὰ ὁποῖα ἔχομε:

$$\frac{OP_1}{OM_1} = \frac{OP_2}{OM_2} = \frac{OP_3}{OM_3} = \ldots$$



Σχ. 13·2 α.

Μετροῦμε τὴν γωνία φ, τὴν ὁποία εὑρίσκομε ἴση μὲ 32°. Μετὰ μετροῦμε τὰ μήκη OP_1 καὶ OM_1, OP_2 καὶ OM_2, OP_3 καὶ OM_3, . . . καὶ εὑρίσκομε ὅτι ὁ λόγος τους εἶναι ὁ ἴδιος καὶ ἴσος μὲ 0,848.

Ἂν στὴν γωνία φ δώσωμε διάφορες τιμές (τὴν μεγαλώσωμε ἢ τὴν μικρύνωμε), εὑρίσκομε:

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

— διὰ $\varphi = 30°$ [σχ. 13 · 2 β (α)],

$$\frac{OP_1}{OM_1} = \frac{OP_2}{OM_2} = \frac{OP_3}{OM_3} = 0{,}866$$

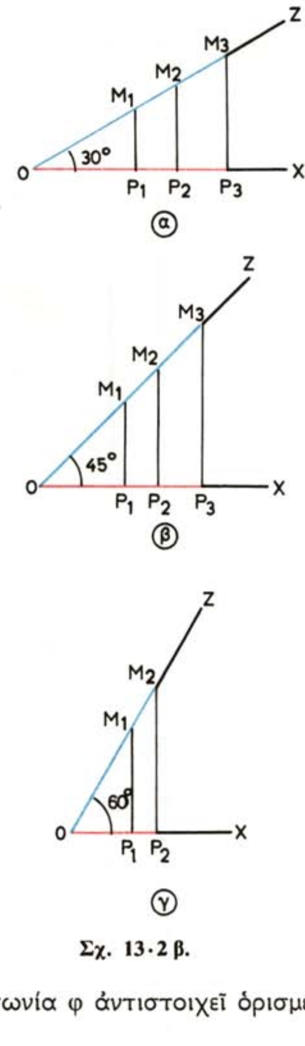
— διὰ $\varphi = 45°$ [σχ. 13 · 2 β (β)],

$$\frac{OP_1}{OM_1} = 0{,}707$$

καὶ

— διὰ $\varphi = 60°$ [σχ. 13 · 2 β (γ)],

$$\frac{OP_1}{OM_1} = 0{,}500.$$

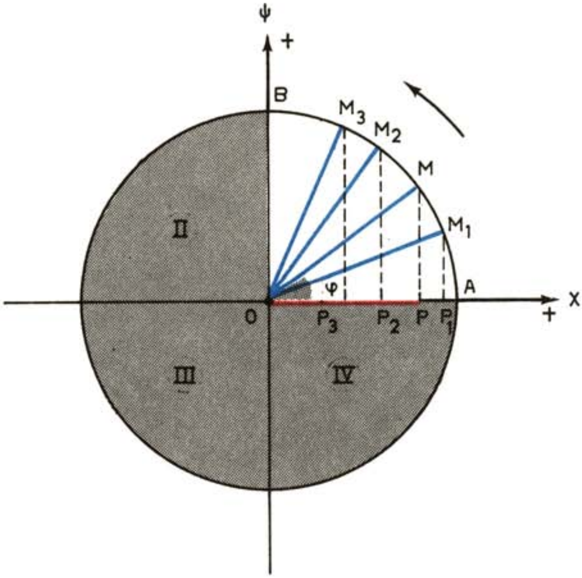


Σχ. 13·2 β.

Δηλαδὴ βλέπομε, ὅτι γιὰ κάθε γωνία φ ἀντιστοιχεῖ ὁρισμένη τιμὴ τοῦ λόγου $\dfrac{OP}{OM}$.

Τὴν μεταβολὴ αὐτὴ τῆς γωνίας φ ἂς τὴν παρακολουθήσωμε στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο, στὸν ὁποῖο ἡ πλευρὰ OX τῆς γωνίας θὰ ληφθῆ σὰν ἄξονας τῶν τετμημένων (σχ. 13 · 2 γ). Ἡ OM, ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, θὰ ληφθῆ, ὅπως εἴπαμε, ἴση μὲ 1, ὁπότε ὁ λόγος

$\frac{OP}{OM}$ θὰ ἐκφράζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ποὺ ἐκφράζεται τὸ μῆκος OP.



Σχ. 13·2 γ.

Τὸν σταθερὸ λόγο $\frac{OP}{OM}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν γωνία φ, τὸν λέμε ***συνημίτονο*** τῆς γωνίας φ καὶ τὸν συμβολίζομε μὲ ***συν φ*** ἢ ***cos φ***.

Ἔτσι, παρακολουθώντας τὸ σημεῖο M στὶς διάφορες θέσεις του M_1, M_2, M_3 . . . κ.λπ. ἐπάνω στὸ τόξο τοῦ I τεταρτημορίου, εὑρίσκομε:

— διὰ $\varphi = 0°$ $\frac{OP}{OM} = \frac{\text{συν}\,0°}{1} = \frac{1{,}000}{1}$ δηλαδὴ συν $0° = 1{,}000$

— διὰ $\varphi = 30°$ $\frac{OP}{OM} = \frac{\text{συν}\,30°}{1} = \frac{0{,}866}{1}$ » συν $30° = 0{,}866$

— διὰ $\varphi = 45°$ $\frac{OP}{OM} = \frac{\text{συν}\,45°}{1} = \frac{0{,}707}{1}$ » συν $45° = 0{,}707$

— διὰ $\varphi = 60°$ $\frac{OP}{OM} = \frac{\text{συν}\,60°}{1} = \frac{0{,}500}{1}$ » συν $60° = 0{,}500$

— διὰ $\varphi = 90°$ $\dfrac{OP}{OM} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, 90°}{1} = \dfrac{0{,}000}{1}$ δηλαδὴ συν $90° = 0{,}000$

(διότι $OP = 0{,}000$).

Συμπέρασμα.

Ὅταν ἡ (ὀξεία) γωνία φ μεγαλώνη, τότε τὸ συνημίτονό της μικραίνει.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ συνημίτονο μιᾶς γωνίας χρησιμοποιοῦμε τοὺς «Πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν», οἱ ὁποῖοι μᾶς δίνουν τὸ συνημίτονο γιὰ κάθε γωνία ἀπὸ 0° ἕως 90° μὲ προσέγγισι 3 ἕως 5 ἢ καὶ περισσοτέρων, ἂν θέλωμε, δεκαδικῶν ψηφίων. Γιὰ τοὺς πίνακες αὐτοὺς θὰ μιλήσωμε στὴν παράγραφο 13 · 5.

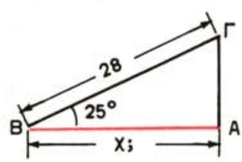
Ἔτσι εὑρίσκομε:

$$\sigma\upsilon\nu\ 36° = 0{,}809$$
$$\sigma\upsilon\nu\ 40°\ 20' = 0{,}762$$
$$\sigma\upsilon\nu\ 72°\ 30' = 0{,}301.$$

Ἐφαρμογή.

Σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ μία ὀξεία γωνία εἶναι $B = 25°$ καὶ ἡ ὑποτείνουσα $B\Gamma = 28$ cm. Νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς κάθετης πλευρᾶς ΑΒ (σχ. 13 · 2 δ).

(Δίνεται ὅτι: συν $25° = 0{,}906$).



Σχ. 13·2 δ.

Λύσι :

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, θὰ ἔχωμε ὅτι: $\sigma\upsilon\nu\, \widehat{B} = \dfrac{BA}{B\Gamma}$.

Ἀντικαθιστοῦμε καὶ εὑρίσκομε: $\sigma\upsilon\nu\, 25° = \dfrac{BA}{28}$ ἢ $0{,}906 = \dfrac{x}{28}$,

ὅπου μὲ x συμβολίσαμε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΑ. Λύνομε τὴν ἐξίσωσι αὐτὴ ὡς πρὸς x καὶ εὑρίσκομε:

$$x = 0{,}906 \times 28 \qquad \text{ἢ} \qquad x \simeq 25{,}4\ \text{cm}.$$

Κανών.

Ἀπὸ τὴν σχέσι $συν\widehat{B} = \dfrac{BA}{B\Gamma}$ εὑρίσκομε ὅτι $BA = B\Gamma\, συν\widehat{B}$, ποὺ μᾶς λέει ὅτι:

Τὸ μῆκος μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ συνημίτονο τῆς περιεχομένης γωνίας (δηλαδὴ αὐτῆς ποὺ σχηματίζει ἡ κάθετος αὐτὴ μὲ τὴν ὑποτείνουσα).

Τὸν ἄξονα Ox τὸν ὀνομάζομε ***ἄξονα τῶν συνημιτόνων***.

β) ***Τὸ ἡμίτονο.***

Στὴν γωνία XOZ τοῦ σχήματος 13 · 2 α παίρνομε ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OP_1M_1, OP_2M_2, $OP_3M_3, \ldots$ τοὺς λόγους:

$$\frac{P_1M_1}{OM_1} = \frac{P_2M_2}{OM_2} = \frac{P_3M_3}{OM_3} = \ldots$$

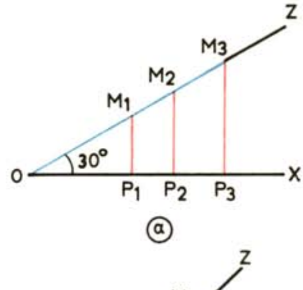
Εὑρίσκομε πάλι ὅτι ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι ὁ ἴδιος γιὰ κάθε γωνία φ καὶ μεγαλώνει ἢ μικραίνει, ὅσο ἡ γωνία φ μεγαλώνει ἢ μικραίνει. Ἔτσι ἔχομε:

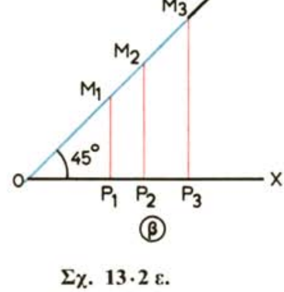
— διὰ $φ = 30°$ [σχ. 13 · 2 ε (α)]

$$\frac{P_1M_1}{OM_1} = 0{,}500,$$

— διὰ $φ = 45°$ [σχ. 13 · 2 ε (β)]

$$\frac{P_1M_1}{OM_1} = 0{,}707,$$

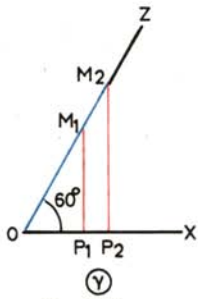




Σχ. 13·2 ε.

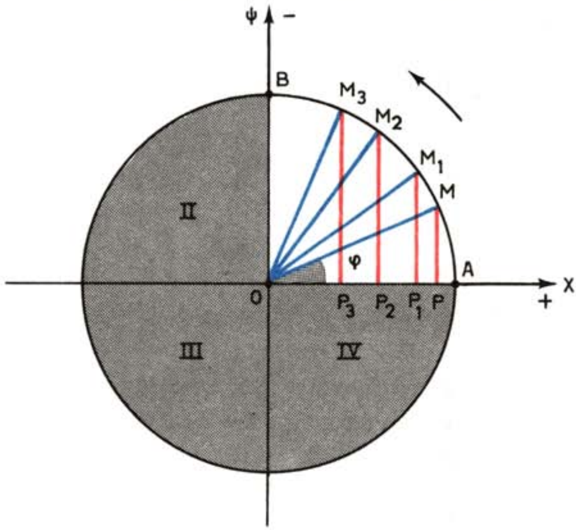
— διὰ $\varphi = 60^\circ$ [σχ. 13·2ε (γ),

$$\frac{P_1M_1}{OM_1} = 0{,}866.$$



Σχ. 13·2 ε.

Τὴν μεταβολὴ αὐτὴ τῆς γωνίας φ μποροῦμε νὰ τὴν παρακολουθήσωμε στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο (σχ. 13·2 στ), ὅπου πάλι ἡ



Σχ. 13·2 στ.

πλευρὰ ΟΧ θὰ ληφθῆ σὰν ἄξων τῶν τετμημένων. Τότε, ἀφοῦ ἡ ἀκτὶς $(OM) = 1$, ὁ λόγος $\frac{PM}{OM}$ θὰ ἐκφράζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ποὺ ἐκφράζεται καὶ τὸ μῆκος PM.

Τὸν σταθερὸ λόγο $\frac{PM}{OM}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν γωνία φ, τὸν λέμε ***ἡμίτονο*** τῆς γωνίας φ καὶ τὸν συμβολίζομε μὲ ***ημ φ*** ἢ ***sin φ***.

Ἔτσι παρακολουθώντας τὸ σημεῖο Μ στὶς διάφορες θέσεις του ἐπάνω στὸ τόξο τοῦ I τεταρτημορίου εὑρίσκομε:

— διὰ $\varphi = 0$ $\quad \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\eta\mu\, 0^\circ}{1} = \dfrac{0{,}000}{1}$ δηλαδὴ $\eta\mu\, 0^\circ = 0{,}000$

(διότι $PM = 0$),

— διὰ $\varphi = 30^\circ$ $\quad \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\eta\mu\, 30^\circ}{1} = \dfrac{0{,}500}{1}$ » $\eta\mu\, 30^\circ = 0{,}500$

— διὰ $\varphi = 45^\circ$ $\quad \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\eta\mu\, 45^\circ}{1} = \dfrac{0{,}707}{1}$ » $\eta\mu\, 45^\circ = 0{,}707$

— διὰ $\varphi = 60^\circ$ $\quad \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\eta\mu\, 60^\circ}{1} = \dfrac{0{,}866}{1}$ » $\eta\mu\, 60^\circ = 0{,}866$

— διὰ $\varphi = 90^\circ$ $\quad \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\eta\mu\, 90^\circ}{1} = \dfrac{1}{1}$ » $\eta\mu\, 90^\circ = 1{,}000$.

Συμπέρασμα.

Ὅταν ἡ (ὀξεία) γωνία φ μεγαλώνη, τότε τὸ ἡμίτονό της μεγαλώνει.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἡμίτονο μιᾶς γωνίας χρησιμοποιοῦμε τοὺς ἴδιους «Πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν», γιὰ τοὺς ὁποίους μιλᾶμε στὴν παράγραφο 13 · 5.

Ἔτσι εὑρίσκομε:

$$\eta\mu\, 36^\circ = 0{,}588$$
$$\eta\mu\, 40^\circ\, 20' = 0{,}647$$
$$\eta\mu\, 72^\circ\, 30' = 0{,}954.$$

Ἐφαρμογή.

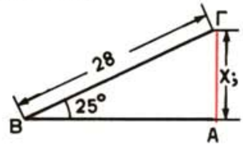
Σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ μία γωνία $B = 25^\circ$ καὶ ἡ ὑποτείνουσα $B\Gamma = 28$ cm. Νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς κάθετης πλευρᾶς ΑΓ (σχ. 13 · 2 ζ). (Δίνεται ὅτι $\eta\mu\, 25^\circ = 0{,}423$).

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Λύσι :

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, προκύπτει ὅτι:

$$\eta\mu\,\widehat{B} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}\,.$$



Σχ. 13·2 ζ.

Ἀντικαθιστοῦμε καὶ εὑρίσκομε:

$$\eta\mu\,25^\circ = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \qquad \text{ἢ} \qquad 0{,}423 = \frac{x}{28}\,,$$

ὅπου μὲ x συμβολίσαμε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

Ἀπὸ τὴν παραπάνω ἐξίσωσι εὑρίσκομε:

$$x = 0{,}423 \times 28 \qquad \text{ἢ} \qquad x \simeq 11{,}8 \text{ cm}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσι $\eta\mu\,\widehat{B} = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$ εὑρίσκομε ὅτι $A\Gamma = B\Gamma \cdot \eta\mu\,\widehat{B}$,

ἡ ὁποία ποὺ μᾶς λέει ὅτι:

Τὸ μῆκος μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονο τῆς γωνίας, ποὺ εὑρίσκεται ἀπέναντί της (στὸ τρίγωνο).

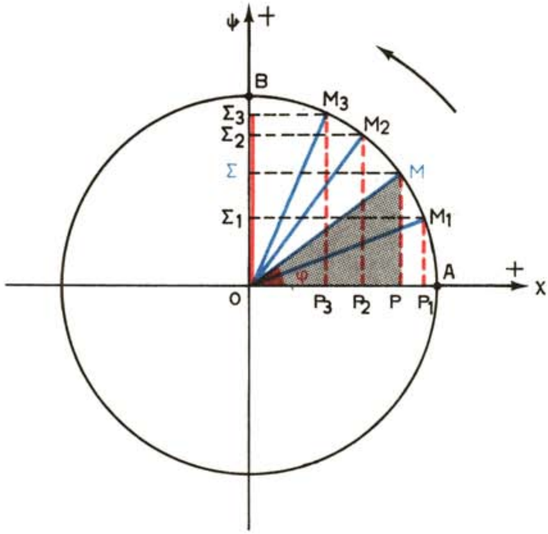
Παρατήρησι.

Ἂς ξαναγυρίσωμε στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο. Ἐπάνω στὸ τόξο τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, παίρνομε ἕνα τυχαῖο σημεῖο Μ καὶ φέρομε τὴν ΟΜ. Μετὰ φέρομε τὴν $PM \perp OX$ καὶ τὴν $M\Sigma \perp O\Psi$.

Ξέρομε ὅτι:
$$\frac{PM}{OM} = \eta\mu\,\varphi.$$

Ἐπειδὴ $PM = O\Sigma$, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ ἡμίτονο τῆς γωνίας φ θὰ ἐκφράζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ποὺ ἐκφράζεται καὶ τὸ μῆκος τοῦ ΟΣ, ποὺ εἶναι ἐπάνω στὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων. Τὸν ἄξονα αὐτὸν τὸν ὀνομάζομε ***ἄξονα τῶν ἡμιτόνων*** (σχ. 13 · 2 η).

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



Σχ. 13·2 η.

γ) ***Ἡ ἐφαπτομένη.***

Γιὰ νὰ προσδιορίσωμε τὴν ἐφαπτομένη θὰ χρησιμοποιήσωμε ἀπ' εὐθείας τὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο (σχ. 13 · 2 θ). Στὸ σημεῖο Α, ἀρχὴ τοῦ πρώτου τεταρτημορίου καὶ τομὴ τοῦ ἡμιάξονος Οx τῶν συνημιτόνων μὲ τὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο, φέρομε τὴν zAz' ἐφαπτομένη στὸν κύκλο. Μετὰ παίρνομε ἕνα σημεῖο Μ ἐπάνω στὸ τόξο τοῦ πρώτου τεταρτημορίου καὶ φέρομε τὴν ΟΜ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν Οx γωνία φ καί, ὅταν ἐπεκταθῆ, κόβει τὴν Az σὲ ἕνα σημεῖο Τ. Τὸν σταθερὸ λόγο $\frac{AT}{OA}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν γωνία φ, τὸν ὀνομάζομε ***ἐφαπτομένη*** τῆς γωνίας φ καὶ τὸν συμβολίζομε μὲ ***εφ φ*** ἢ ***tg φ***.

Ἀφοῦ ὅμως τὸ $OA = 1$, σημαίνει ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας φ θὰ ἐκφράζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ποὺ ἐκφράζεται καὶ τὸ μῆκος ΑΤ. Τὴν εὐθεία zAz', τὴν ὀνομάζομε ***ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων***.

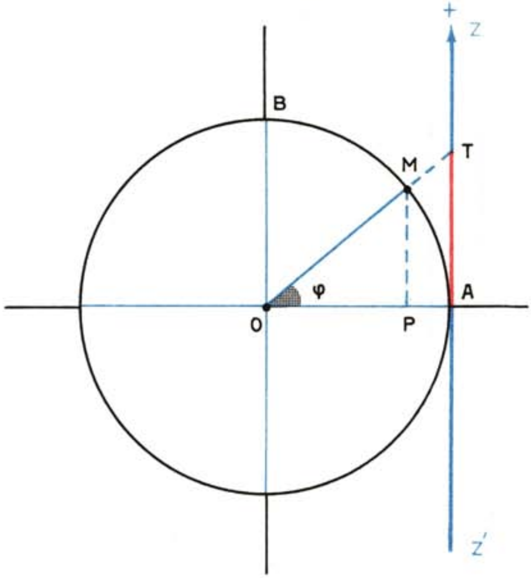
Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΡΜ καὶ ΟΑΤ (σχ. 13 · 2 θ) ἔχομε:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

καὶ ἐπειδή: $AT = \varepsilon\varphi\,\varphi$, $OA = 1$, $PM = \eta\mu\,\varphi$ καὶ $OP = \sigma\upsilon\nu\,\varphi$,

ἡ παραπάνω σχέσι παίρνει τὴν μορφή: $\dfrac{\varepsilon\varphi\,\varphi}{1} = \dfrac{\eta\mu\,\varphi}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}$ ἢ

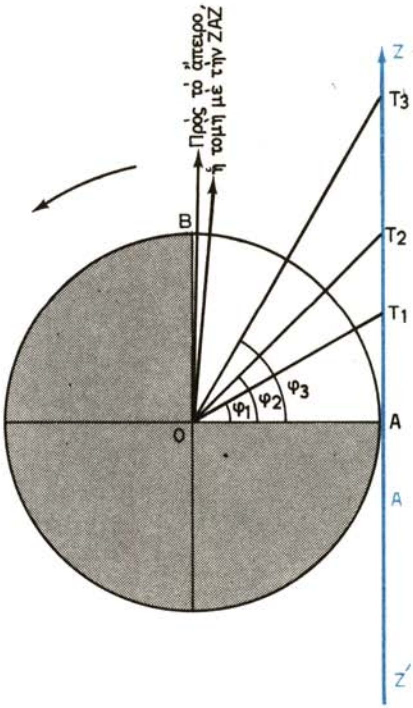
$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\eta\mu\,\varphi}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}.$$



Σχ. 13·2 θ.

Παρακολουθώντας τὸ σημεῖο M στὶς διάφορες θέσεις ποὺ παίρνει ἐπάνω στὸ τόξο τοῦ I τεταρτημορίου (σχ. 13 · 2 ι), βλέπομε, ὅτι καθὼς ἡ γωνία φ μεγαλώνει καὶ τὸ AT μεγαλώνει. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι καὶ ἡ τιμὴ τῆς εφ φ μεγαλώνει. Καὶ ἀκόμη, καθὼς τὸ M πλησιάζει πρὸς τὸ σημεῖο B (σημεῖο τομῆς τοῦ ἡμιάξονος Oψ μὲ τὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο), ὁπότε ἡ γωνία φ πλησιάζει νὰ γίνη ἴση μὲ 90°, τὸ σημεῖο T ἀπομακρύνεται παρὰ πολὺ ἀπὸ τὸ A ἐπάνω στὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων, ὥσπου τελικὰ χάνεται στὸ ἄπειρο. Τότε λέμε ὅτι τὸ AT γίνεται ἴσο μὲ τὸ ἄπειρο ἤ:

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = +\infty \qquad \text{(ὅπου } \infty \text{ σημαίνει ἄπειρο).}$$



Σχ. 13·2 ι.

Ἔτσι παρακολουθώντας τὸ σημεῖο Μ στὶς διάφορες θέσεις του ἐπάνω στὸ τόξο τοῦ Ι τεταρτημορίου εὑρίσκομε:

— διὰ $\varphi = 0^\circ$ $\quad \varepsilon\varphi\, 0^\circ = \dfrac{\eta\mu\, 0^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 0^\circ} = \dfrac{0{,}000}{1{,}000}$ $\quad$ δηλαδὴ $\varepsilon\varphi\, 0^\circ = 000$

— διὰ $\varphi = 30^\circ$ $\quad \varepsilon\varphi\, 30^\circ = \dfrac{\eta\mu\, 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 30^\circ} = \dfrac{0{,}500}{0{,}866}$ $\quad$ » $\varepsilon\varphi\, 30^\circ = 0{,}577$

— διὰ $\varphi = 45^\circ$ $\quad \varepsilon\varphi\, 45^\circ = \dfrac{\eta\mu\, 45^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 45^\circ} = \dfrac{0{,}707}{0{,}707}$ $\quad$ » $\varepsilon\varphi\, 45^\circ = 1$

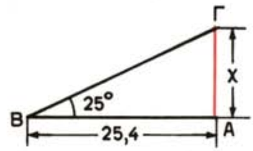
— διὰ $\varphi = 60^\circ$ $\quad \varepsilon\varphi\, 60^\circ = \dfrac{\eta\mu\, 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 60^\circ} = \dfrac{0{,}866}{0{,}500}$ $\quad$ » $\varepsilon\varphi\, 60^\circ = 1{,}732$

— διὰ φ = 90° $\text{εφ}\, 90° = \dfrac{\text{ημ}\, 90°}{\text{συν}\, 90°} = \dfrac{1{,}000}{0{,}000}$ » $\text{εφ}\, 90° = +\infty$.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τοὺς «Πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν».

Ἔτσι εὑρίσκομε:

$$\text{εφ}\, φ\ 30° = 0{,}577$$
$$\text{εφ}\, φ\ 40°\, 20' = 0{,}849$$
$$\text{εφ}\, φ\ 72°\, 30' = 3{,}172.$$



Ἐφαρμογή.

Σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ μία γωνία εἶναι Β = 25° καὶ ἡ μία κάθετη πλευρὰ ΑΒ = 25,4 cm (σχ. 13·2 ια). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης κάθετης πλευρᾶς.

(Δίνεται ὅτι: εφ 25° = 0,466).

Λύσι :

Σχ. 13·2 ια.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, θὰ ἔχωμε:

$$\text{εφ}\, \widehat{B} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}\cdot$$

Ἀντικαθιστοῦμε:

$$\text{εφ}\, 25° = \frac{x}{25{,}4} \quad \text{ἢ} \quad 0{,}466 = \frac{x}{25{,}4}\cdot$$

ἀπὸ ὅπου εὑρίσκομε ὅτι: $x \simeq 11{,}8$ cm.

Κανών.

Ἀπὸ τὴν παραπάνω σχέσι $\text{εφ}\, \widehat{B} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$ εὑρίσκομε ὅτι

ΑΓ = ΑΒ · εφ $\widehat{B}$, ποὺ μᾶς λέει ὅτι:

Τὸ μῆκος μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἀπέναντι γωνίας ἐπὶ τὴν ἄλλη κάθετο πλευρά.

Ἀπὸ τὴν παραπάνω σχέσι εὑρίσκομε ἀκόμα ὅτι $AB = \dfrac{A\Gamma}{\varepsilon\varphi\,\widehat{B}}$ ποὺ μᾶς λέει ὅτι:

Τὸ μῆκος μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς διὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἀπέναντι γωνίας.

δ) ***Ἀνακεφαλαίωσι.***

Τὸ ἡμίτονο, τὸ συνημίτονο καὶ ἡ ἐφαπτομένη ὀνομάζονται ***τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί.***

Ἀνακεφαλαιώνοντας τὰ παραπάνω προκύπτουν τὰ σχήματα 13 · 2 ιβ (α) καὶ (β), ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ (α) μᾶς δίνει τοὺς ἄξονες ἡμιτόνου, συνημιτόνου καὶ ἐφαπτομένης, καὶ τὸ (β) τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς ὀξείας γωνίας φ ἢ τοῦ τόξου ΑΜ, τοῦ πρώτου τεταρτημορίου. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΡΜ ἔχομε, σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο Θεώρημα, ὅτι:

$$OP^2 + PM^2 = OM^2 \quad \text{ἢ} \quad OP^2 + O\Sigma^2 = OA^2$$

(γιατὶ $OA = OM =$ ἀκτὶς καὶ $PM = O\Sigma$).

Ἀλλά: $OP = \text{συν}\,\varphi$, $O\Sigma = \text{ημ}\,\varphi$ καὶ $OA = 1$, ὁπότε ἀντικαθιστώντας εὑρίσκομε ὅτι:

$$\text{συν}^2\,\varphi + \text{ημ}^2\,\varphi = 1.$$

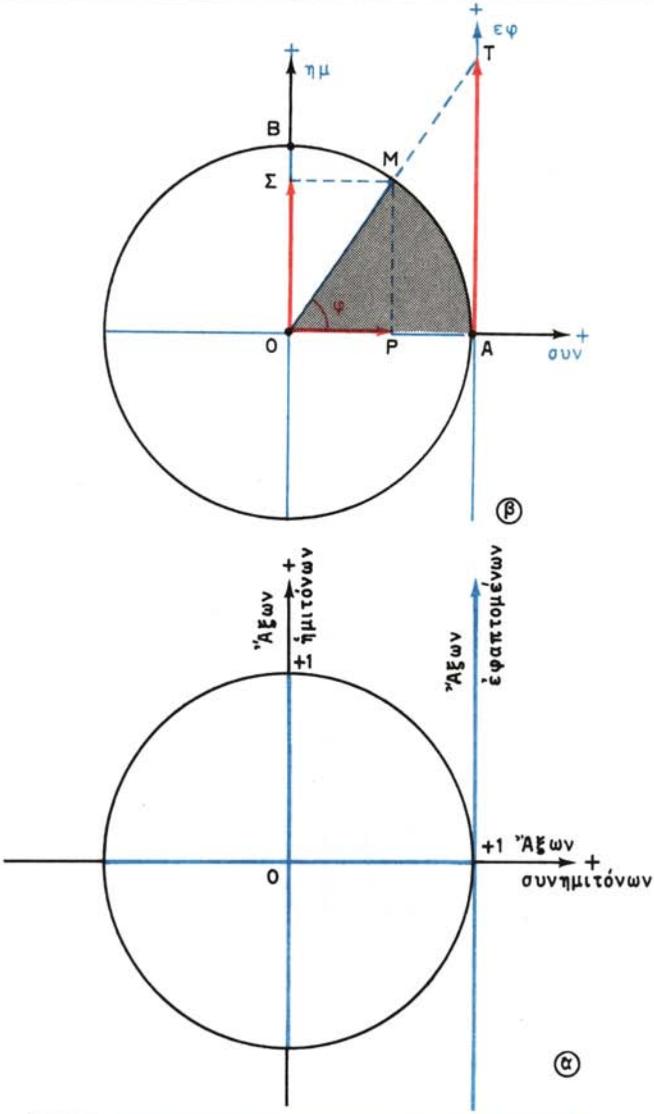
13 · 3 Ἐπέκτασι στὰ ἄλλα τεταρτημόρια (*).

Στὴν παράγραφο 13 · 2 παρακολουθήσαμε πῶς αὐξάνονται ἢ ἐλαττώνονται οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ στὸ Ι τεταρτημόριο, ὅπου ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ὅπως εἴπαμε, εἶναι θετικοί.

Ἂς δοῦμε τώρα τί θὰ συμβῇ, ἂν τὸ σημεῖο Μ, καθὼς κινεῖται ἐπάνω στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο, ξεπεράση τὸ σημεῖο Β καὶ εὑρεθῇ στὸ δεύτερο, καὶ ἐν συνεχείᾳ

* Ἡ παράγραφος αὐτὴ παρατίθεται ἁπλῶς καὶ μόνον γιὰ νὰ πληροφορηθῇ ὁ μαθητὴς ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δὲν περιορίζονται στὸ πρῶτο τεταρτημόριο, ἀλλὰ ἐπεκτείνονται καὶ στὰ ἄλλα τρία. Δὲν θὰ γίνη ὅμως περαιτέρω ἀνάπτυξι τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τους, ἐπειδὴ δὲν περιλαμβάνεται στὴν διδακτέα ὕλη.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954



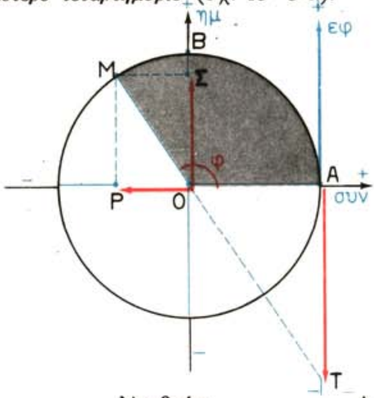
	Ἀριθμός:	Διὰ φ = 56°
OP = συν φ	Θετικός	συν 56° = 0,559
OΣ = ημ φ	Θετικός	ημ 56° = 0,829
AT = εφ φ	Θετικός	εφ 56° = 1,483

Σχ. 13·2 ιβ.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

στὸ τρίτο καὶ τέταρτο τεταρτημόρια, ὁπότε ἡ γωνία φ παύει νὰ εἶναι ὀξεία. Τὴν ἐπέκτασι αὐτὴ θὰ τὴν δώσωμε μόνο σὲ σχήματα.

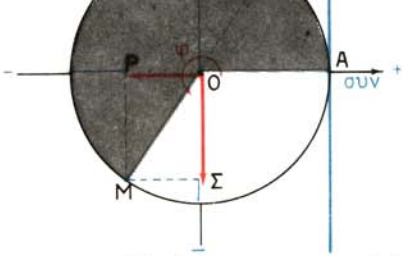
I. Ἐπέκτασι στὸ δεύτερο τεταρτημόριο (σχ. 13 · 3 α).



	Ἀριθμός:	Διὰ φ = 124°
		(124° = 180° − 56°)
ΟΡ = συν φ	Ἀρνητικὸς	συν 124° = − 0,559
ΟΣ = ημ φ	Θετικὸς	ημ 124° = 0,829
ΑΤ = εφ φ	Ἀρνητικὸς	εφ 124° = − 1,483

Σχ. 13·3 α.

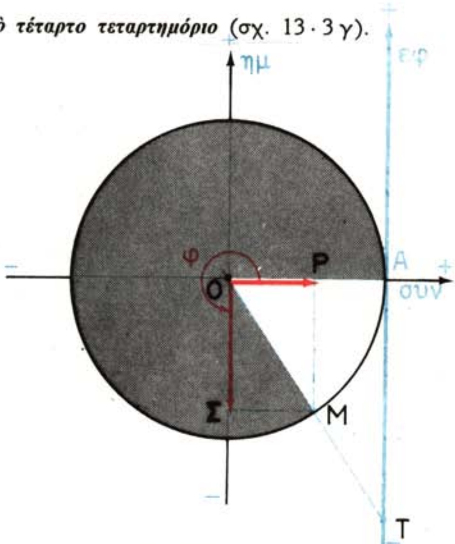
II. Ἐπέκτασι στὸ τρίτο τεταρτημόριο (σχ. 13 · 3 β).



	Ἀριθμός:	Διὰ φ = 236°
		(236° = 180° + 56°)
ΟΡ = συν φ	Ἀρνητικὸς	συν 236° = − 0,559
ΟΣ = ημ φ	Ἀρνητικὸς	ημ 236° = − 0,829
ΑΤ = εφ φ	Θετικὸς	εφ 236° = 1,483

Σχ. 13·3 β.

III. 'Επέκτασι στὸ τέταρτο τεταρτημόριο (σχ. 13 · 3 γ).



'Αριθμός:		Διὰ φ = 304°
		(304° = 360° − 56°)
OP = συν φ	Θετικὸς	συν 304° = 0,559
ΟΣ = ημ φ	'Αρνητικὸς	ημ 304° = − 0,829
AT = εφ φ	'Αρνητικὸς	εφ 304° = − 1,483

Σχ. 13·3 γ.

*13 · 4 Σχέσεὶς τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν.**

Ἂς ξαναγυρίσωμε στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο [σχ. 13 · 4 (α)]. Στὸ πρῶτο τεταρτημόριο παίρνομε τὴν γωνία AOM = 25°. Κόβομε τὸ πρῶτο τεταρτημόριο [σχ. 13 · 4 (β)] καὶ τὸ διπλώνομε ἔτσι, ὥστε ἡ ἀκτὶς OA νὰ πέση ἐπάνω στὴν OB. Τὸ τρίγωνο OPM θὰ πάρη τὴν θέσι OP′M′ [σχ. 13 · 4 (γ)], ποὺ σημαίνει ὅτι:

$$OP = OP' \quad \text{καὶ} \quad PM = P'M'$$

'Απὸ τὸ σχῆμα 13 · 4 (δ) προκύπτει ὅτι:

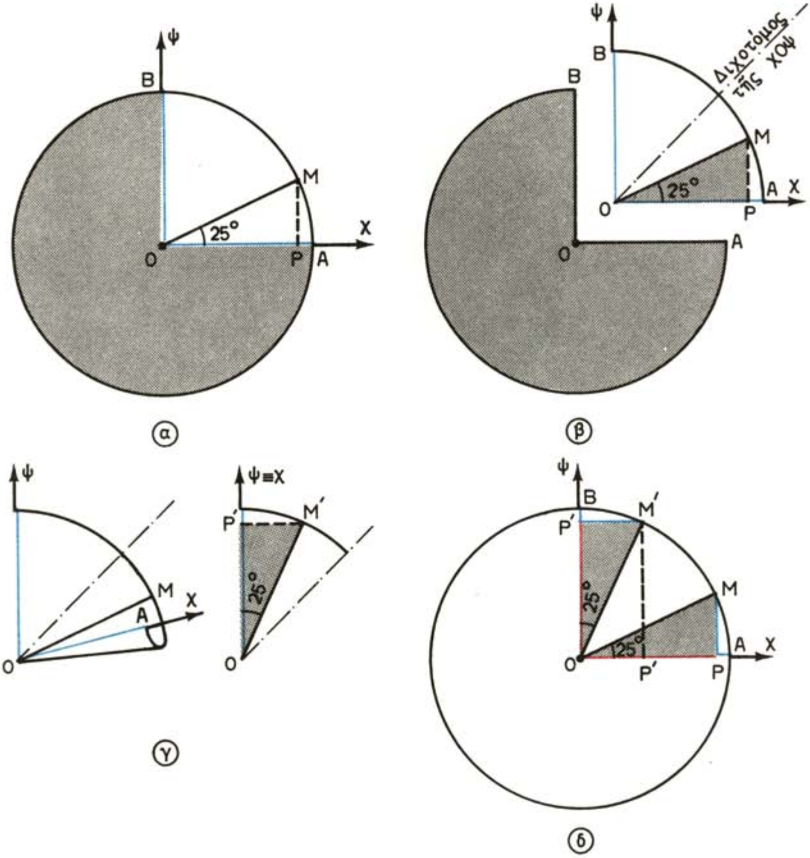
$$\widehat{AOM'} = 90° - 25° = 65°.$$

Καὶ ἀκόμη ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} OP &= \text{συν}\, 25° \\ OP' &= \text{ημ}\;\; 65° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \text{συν}\, 25° = \text{ημ}\, (90° - 25°) = \text{ημ}\, 65°$$

$$\left.\begin{aligned} PM &= \text{ημ}\;\; 25° \\ P'M' &= \text{συν}\, 65° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \text{ημ}\, 25° = \text{συν}\, (90° - 25°) = \text{συν}\, 65°.$$

* Ἡ παράγραφος αὐτὴ ἂν καὶ δὲν περιλαμβάνεται στὴν ὕλη τοῦ προγράμματος, δίνεται, γιατὶ τὰ συμπεράσματά της εἶναι πολὺ χρήσιμα.



Σχ. 13·4.

$\widehat{AOM} = 25^\circ$	$\widehat{AOM'} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$
$\widehat{AOM} + \widehat{AOM'} = 90^\circ$	(Γωνίες συμπληρωματικὲς)
OP = συν 25°	OP′ = ημ (90° — 25°) = ημ 65°
PM = ημ 25°	P′M′ = συν (90° — 25°) = συν 65°

Συμπέρασμα 1ο.

Σὲ δύο συμπληρωματικὲς γωνίες τὸ ἡμίτονο τῆς μιᾶς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονο τῆς ἄλλης.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή.

Δίνεται ὅτι ημ 38° = 0,616. Νὰ εὕρετε τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας τῶν 38° καθὼς καὶ τῆς συμπληρωματικῆς της (τῶν 52°).

Λύσι :

Γιὰ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας τῶν 38° σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς:

$$\eta\mu^2 38^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 38^\circ = 1$$

ἢ

$$0{,}616^2 + \sigma\upsilon\nu^2 38^\circ = 1$$

$$0{,}379 + \sigma\upsilon\nu^2 38^\circ = 1 \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu^2 38^\circ = 1 - 0{,}379$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 38^\circ = 0{,}621 \ (*)$$

$$\sigma\upsilon\nu\, 38^\circ = \sqrt{0{,}621}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\, 38^\circ = 0{,}788}$$

$$\varepsilon\varphi\, 38^\circ = \frac{\eta\mu\, 38^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 38^\circ}$$

$$\varepsilon\varphi\, 38^\circ = \frac{0{,}616}{0{,}788} = 0{,}781 \qquad \boxed{\varepsilon\varphi\, 38^\circ = 0{,}781}$$

Γιὰ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας, 90° — 38° = τῶν 52°, θὰ ἔχωμε:

$$\eta\mu\, 52^\circ = \sigma\upsilon\nu\, 38^\circ = 0{,}788 \qquad \sigma\upsilon\nu\, 52^\circ = \eta\mu\, 38^\circ = 0{,}616$$

$$\varepsilon\varphi\, 52^\circ = \frac{\eta\mu\, 52^\circ}{\sigma\upsilon\nu\, 52^\circ} = \frac{0{,}788}{0{,}616} \qquad \boxed{\varepsilon\varphi\, 52^\circ = 1{,}280}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ εφ 38° καὶ ἡ εφ 52° εἶναι ἀριθμοὶ ***ἀντίστροφοι***, διότι:

$$\varepsilon\varphi\, 38^\circ \cdot \varepsilon\varphi\, 52^\circ = \frac{\overset{1}{\cancel{0{,}616}}}{\cancel{0{,}788}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{0{,}788}}}{\cancel{0{,}616}} \qquad \varepsilon\varphi\, 38^\circ = \frac{1}{\varepsilon\varphi\, 52^\circ}$$

Συμπέρασμα 2ο.

Σὲ δύο συμπληρωματικὲς γωνίες ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς εἶναι ἀριθμὸς ἀντίστροφος τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἄλλης, δηλαδὴ ἰσοῦται μὲ τὴν συνεφαπτομένη τῆς ἄλλης **.

---

* Ἡ σχέσι αὐτὴ εἶναι μερικὴ περίπτωσι μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, τὴν ὁποία δὲν πρόκειται νὰ ἐξετάσωμε στὸν παρόντα τόμο, ἀφοῦ δὲν περιλαμβάνεται στὴν διδακτέα ὕλη. Δίνεται ὅμως ἐδῶ ὁ τρόπος τῆς λύσεώς της, ποὺ οὐσιαστικὰ εἶναι μία ἁπλῆ εὕρεσι τετραγωνικῆς ρίζας.

** Τὸ κλάσμα $\frac{1}{\varepsilon\varphi\, 52^\circ}$ ὀνομάζεται συνεφαπτομένη. Συμβολίζεται μὲ σφ ἢ cot.

13 · 5 Πίνακες τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Γιὰ νὰ εὑρίσκωμε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, δηλαδὴ τῶν γωνιῶν τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, χρησιμοποιοῦμε τοὺς ***Πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν***, ποὺ δίνονται στὸ τέλος τοῦ βιβλίου. Οἱ πίνακες αὐτοὶ περιλαμβάνουν τὸ ημ, τὸ συν καὶ τὴν εφ τῶν γωνιῶν ἀπὸ 0° ἕως 90° ἀνὰ 10′.

Παρακάτω δίνονται μερικὰ παραδείγματα γιὰ τὸν τρόπο χρησιμοποιήσεως αὐτῶν τῶν πινάκων.

Παραδείγματα.

1. Νὰ εὕρετε τὸ ημ 25°.

Ἀπὸ τοὺς πίνακες τοῦ ἡμιτόνου εὑρίσκομε στὴν στήλη «Μοῖρες» τὸν ἀριθμὸ 25 καὶ στὴν διπλανὴ ὁριζοντία στήλη «0′» διαβάζομε τὸν ἀριθμὸ 0,423. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ ημ 25°.

Δηλαδή: ημ 25° = 0,423.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
....	....	....	....			
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467
...	....	....	....			

2. Νὰ εὕρετε τὸ ημ 26° 40′.

Πάλι ἀπὸ τοὺς ἴδιους πίνακες στὴν στήλη «Μοῖρες» εὑρίσκομε τὸ 26. Μετὰ διαβάζομε στὴν στήλη «40′» τὸν ἀριθμὸ 0,449, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ὁριζοντία γραμμὴ 26. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ ημ (26° 40′).

Ἑπομένως: ημ (26° 40′) = 0,449.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

3. Νὰ εὕρετε τὸ ημ (24° 35′).

Βλέπομε ἐδῶ ὅτι δὲν ὑπάρχει στήλη 35′. Ὑπάρχουν ὅμως οἱ στῆλες 30′ καὶ 40′, ἀνάμεσα στὶς ὁποῖες περιλαμβάνεται ἡ στήλη 35′.

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωσι σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu\,(24°\ 40') = 0{,}417 \\ \eta\mu\,(24°\ 30') = 0{,}415 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} \text{Διαφορὰ} \\ 0{,}002 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrr} & 24° & 40' \\ & 24° & 30' \\ \hline \text{Διαφορὰ} & & 10' \end{array} \qquad \begin{array}{lrr} & 24° & 35' \\ & 24° & 30' \\ \hline \text{Διαφορὰ} & & 5' \end{array}$$

Γιὰ αὔξησι γωνίας 10′ αὔξησι ἡμιτόνου 0,002

» » » 5′ αὔξησι ἡμιτόνου x;

$$x = 0{,}002 \times \frac{5}{10} = 0{,}001$$

Ἑπομένως $\eta\mu\,(24°\ 35') = 0{,}415 + 0{,}001$

$$\eta\mu\,(24°\ 35') = 0{,}416.$$

4. Νὰ εὕρετε τὸ συν (38° 20′).

Πάλι ἀπὸ τοὺς πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ γιὰ τὸ συνημίτονο αὐτὴ τὴν φορά. Ἐργαζόμαστε ὅπως στὴν περίπτωσι τοῦ ἡμιτόνου (παράδειγμα 2) καὶ εὑρίσκομε:

$$\sigma\upsilon\nu\,(38°\ 20') = 0{,}784.$$

5. Νὰ εὕρετε τὸ συν (68° 35′).

Ἐργαζόμαστε ὅπως στὸ παράδειγμα 3 καὶ εὑρίσκομε:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\,(68°\ 40') = 0{,}364 \\ \sigma\upsilon\nu\,(68°\ 30') = 0{,}367 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \text{Διαφορὰ} \\ 0{,}003 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrr} & 68° & 40' \\ & 68° & 30' \\ \hline \text{Διαφορὰ} & & 10' \end{array} \qquad \begin{array}{lrr} & 68° & 35' \\ & 68° & 30' \\ \hline \text{Διαφορὰ} & & 5' \end{array}$$

Γιὰ αὔξησι γωνίας 10′ ἔχομε μείωσι* συνημιτόνου 0,003
» » » 5′ ἔχομε μείωσι συνημιτόνου x;

$$x = 0{,}003 \times \frac{5}{10} = 0{,}0015$$

Ἑπομένως: συν (68° 35′) = 0,369 − 0,0015
συν (68° 35′) = 0,3675.

6. Νὰ εὕρετε τὴν εφ (48° 20′).

Ἐργαζόμαστε ὅπως στὴν περίπτωσι τοῦ παραδείγματος 2 καὶ εὑρίσκομε ἀπὸ τοὺς πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γιὰ τὴν ἐφαπτομένη:

εφ (48° 20′) = 1,124.

7. Νὰ εὕρετε τὴν γωνία φ, ἂν ξέρετε ὅτι ημ φ = 0,464.

Στὸν πίνακα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γιὰ τὸ ἡμίτονο ἀναζητοῦμε τὸν ἀριθμὸ 0,464. Βλέπομε ὅτι ἀντιστοιχεῖ στὴν ὁριζοντία

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
...	....	....	....			
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467
...	....	....	....			

* Ἐνῶ τὸ ἡμίτονο ὅσο τὸ σημεῖο Μ πλησιάζει πρὸς τὶς 90° αὐξάνει καὶ τείνει νὰ φθάση τὴν μονάδα (ὅση ἡ ἀκτίς), τὸ συνημίτονο ὅσο τὸ σημεῖο Μ πλησιάζει πρὸς τὶς 90°, μειώνεται καὶ τείνει νὰ γίνη 0 (μηδέν). Γι' αὐτὸ στὴν ἄσκησι μιλοῦμε γιὰ μείωσι.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

γραμμὴ τῶν 27° καὶ στὴν στήλη 40′. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ:

$$\widehat{\varphi} = 27^\circ\ 40'.$$

8. Νὰ εὕρετε τὴν γωνία φ, ἂν ξέρετε ὅτι συν φ = 0,570.

Στὸν πίνακα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γιὰ τὸ συνημίτονο διαπιστώνομε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0,570 εὑρίσκεται ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμοὺς 0,571 καὶ 0,569, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔχομε:

Στὸν	0,569	ἀντιστοιχεῖ γωνία	$\varphi = 55^\circ\ 20'$
Στὸν	0,571	ἀντιστοιχεῖ γωνία	$\varphi = 55^\circ\ 10'$
αὔξησι	0,002	μείωσι	$10'$

$$0{,}570 - 0{,}569 = 0{,}001.$$

Σὲ αὔξησι τοῦ συνημιτόνου κατὰ 0,002 ἡ γωνία μειώνεται κατὰ 10′
Σὲ αὔξησι τοῦ συνημιτόνου κατὰ 0,001 ἡ γωνία μειώνεται κατὰ x;

$$x = 10 \times \frac{0{,}001}{0{,}002} = 5'.$$

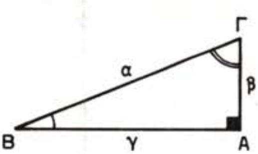
Ἑπομένως ἡ γωνία φ, ποὺ ζητοῦμε, θὰ εἶναι:

$$\widehat{\varphi} = (55^\circ\ 20') - 5'$$

$$\widehat{\varphi} = 55^\circ\ 15'.$$

13 · 6 Ἐπίλυσι ὀρθογωνίων τριγώνων.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὶς προηγούμενες παραγράφους γιὰ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, προκύπτουν σὰν συμπέρασμα οἱ ἀκόλουθοι τύποι γιὰ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ σχήματος 13 · 6 α. Παριστάνομε τὶς πλευρές: ΑΒ = γ, ΒΓ = α καὶ ΑΓ = β, δηλαδὴ ἐκφράζομε κάθε πλευρὰ μὲ τὸ πεζό (μικρὸ) γράμμα τῆς ἀπέναντί της γωνίας.



Σχ. 13·6 α.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Τότε:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	*(Πυθαγόρειο θεώρημα)*
$\dfrac{\beta}{\alpha} = \eta\mu\,\widehat{B}$	$\dfrac{\gamma}{\alpha} = \eta\mu\,\widehat{\Gamma}$
$\dfrac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\widehat{\Gamma}$	$\dfrac{\gamma}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\widehat{B}$
$\dfrac{\beta}{\gamma} = \varepsilon\varphi\,\widehat{B}$	$\dfrac{\gamma}{\beta} = \varepsilon\varphi\,\widehat{\Gamma}.$

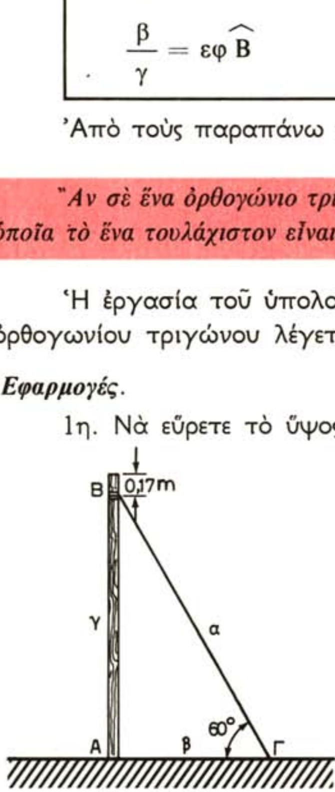
Ἀπὸ τοὺς παραπάνω τύπους βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι:

Ἂν σὲ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μᾶς δοθοῦν δύο στοιχεῖα του, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα τουλάχιστον εἶναι πλευρά, μποροῦμε νὰ εὕρωμε ὅλα τὰ ἄλλα.

Ἡ ἐργασία τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ὑπολοίπων στοιχείων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ***ἐπίλυσι***.

Ἐφαρμογές.

1η. Νὰ εὕρετε τὸ ὕψος ἑνὸς στυλίσκου, ὁ ὁποῖος στηρίζεται μὲ ἕνα ἐπίτονο ΒΓ, ποὺ σχηματίζει γωνία 60° μὲ τὸ ἔδαφος καὶ τὸ σημεῖο στηρίξεώς του Γ ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α σημεῖο στηρίξεως τοῦ στυλίσκου ΑΓ = 2,5 m (σχ. 13·6β). Δίνεται ὅτι τὸ κολλάρο Β εἶναι τοποθετημένο 17 cm κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή του.



Σχ. 13·6 β.

Λύσι :

Σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα ἔχομε:

$\beta = 2{,}5\ \text{m}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = 60°.$

Ἀπὸ τοὺς τύπους χρησιμοποιοῦμε τόν:

$\dfrac{\gamma}{\beta} = \varepsilon\varphi\,\widehat{\Gamma},$ ποὺ γράφεται: $\gamma = \beta \cdot \varepsilon\varphi\,\widehat{\Gamma}.$

Ἀντικαθιστοῦμε: $\gamma = 2{,}5 \cdot \text{εφ}\ 60°$ ἀλλὰ $\text{εφ}\ 60° = 1{,}732$,

ἑπομένως: $\gamma = 2{,}5 \times 1{,}732 = 4{,}33$ m.

Τὸ ὕψος λοιπὸν μέχρι τὸ κολλάρο εἶναι 4,33 m.

Ἄρα τὸ συνολικὸ ὕψος τοῦ στυλίσκου θὰ εἶναι:

$$4{,}33 + 0{,}17 = 4{,}50 \text{ m}.$$

2α. Στὴν παραπάνω ἐφαρμογὴ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τοῦ συρματοσχοίνου (μὲ δύο τρόπους τουλάχιστον).

Α΄ τρόπος.

Ἀφοῦ ξέρομε ὅτι $\gamma = 4{,}33$ m, σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα θὰ ἔχωμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 2{,}5^2 + 4{,}33^2$$

$$\alpha^2 = 6{,}25 + 18{,}75 = 25^*$$

$$\alpha = \sqrt{25} \quad \text{δηλαδὴ} \quad \alpha = 5 \text{ m}.$$

Β΄ τρόπος.

Ἀπὸ τὸν τύπο: $\dfrac{\beta}{\alpha} = \text{ημ}\ \widehat{B}$, εὑρίσκομε ὅτι: $\alpha = \dfrac{\beta}{\text{ημ}\ \widehat{B}}$.

Ἀντικαθιστοῦμε: $\alpha = \dfrac{2{,}5}{\text{ημ}\ 60°} = \dfrac{2{,}5}{0{,}500}$,

διότι $\text{ημ}\ 60° = 0{,}500$.

Ἄρα $\alpha = 5$ m.

3η. Ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ σχήματος 13 · 6 γ.

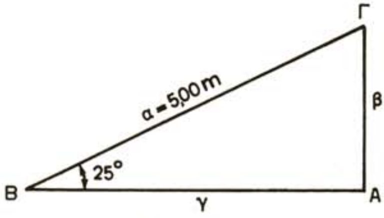
Γνωρίζομε ὅτι: $E_{\text{τρ.}} = \dfrac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon$ ἢ στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο

ποὺ μᾶς δίνεται: $E_{\text{τρ.}} = \dfrac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma$.

---

* Ἡ σχέσι αὐτὴ εἶναι μερικὴ περίπτωσι μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, γιὰ τὴν ὁποία δὲν μιλήσαμε. Ὅμως ἡ ἐπίλυσι εἶναι ἁπλῆ εὕρεσι τετραγωνικῆς ρίζας.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδόν, ποὺ μᾶς ζητεῖ τὸ πρόβλημα, θὰ πρέπει νὰ γνωρίζωμε τὶς πλευρὲς β καὶ γ.



Σχ. 13·6 γ.

Αὐτὲς τὶς εὑρίσκομε ὡς ἑξῆς:
Ἡ πλευρὰ β εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \eta\mu\ \widehat{B}, \quad \text{ποὺ γράφεται:}$$

$$\beta = \alpha \cdot \eta\mu\ \widehat{B}.$$

Ἀντικαθιστώντας εὑρίσκομε:

$$\beta = 5 \cdot \eta\mu\ 25^\circ \cdot \quad \text{ἀλλὰ} \quad \eta\mu\ 25^\circ = 0{,}423$$

ἄρα $\beta = 5 \times 0{,}423$ ἢ $\boldsymbol{\beta = 2{,}115\ m}$.

Ἡ πλευρὰ γ εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\ \widehat{B} \qquad \text{ἢ} \qquad \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\ \widehat{B}.$$

Ἀντικαθιστώντας εὑρίσκομε: $\gamma = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\ 25^\circ$

$\gamma = 5 \times 0{,}906$ ἢ $\boldsymbol{\gamma = 4{,}53\ m}$.

Ἑπομένως:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \times 2{,}11 \times 4{,}53$$

καὶ μετὰ τὶς πράξεις: $\boldsymbol{E = 4{,}78\ m^2}$.

13 · 7 Ἀσκήσεις *.

1. Χρησιμοποιώντας τοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακες νὰ εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν:

25°	37°	59°	65°	88°
17° 10′	27° 40′	39° 40′	41° 20′	69° 50′
45° 25′	62° 35′	40°	25′	55′

* Ὅσες ἀσκήσεις σημειώνονται μὲ * ἀναφέρονται σὲ ὕλη τῶν παραγράφων 13 · 3 καὶ 13 · 4.

2. Ἀπὸ τοὺς παρακάτω τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς νὰ εὕρετε τὶς ἀντίστοιχες γωνίες:

α)	ημ φ = 0,199	συν φ = 0,602	εφ φ = 0,114
	ημ φ = 0,590	συν φ = 0,216	εφ φ = 0,700
	ημ φ = 0,812	συν φ = 0,819	εφ φ = 5,976
	ημ φ = 0,976	συν φ = 0,996	εφ φ = 1,030
β)	ημ φ = 0,165	συν φ = 0,964	εφ φ = 0,240
	ημ φ = 0,688	συν φ = 0,688	εφ φ = 1,018
	ημ φ = 0,824	συν φ = 0,216	εφ φ = 114,60.

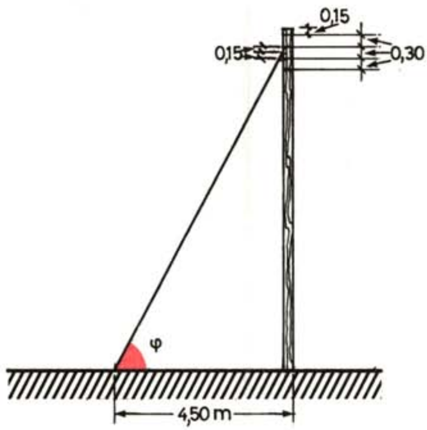
3*. Νὰ εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας τῆς γωνίας φ, ὅταν ξέρετε ὅτι: ημ φ = 0,342.

α) Μὲ τὴν βοήθεια τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.

β) Μὲ τὴν βοήθεια τῶν τριγωνομετρικῶν τύπων.

γ) Γραφικῶς, μὲ τὴν βοήθεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (α' τεταρτημόριο) ἀκτῖνος 1 dm (= 100 mm).

(ημ (90° — φ) = 0,940
συν (90° — φ) = 0,342
εφ (90° — φ) = 2,747)



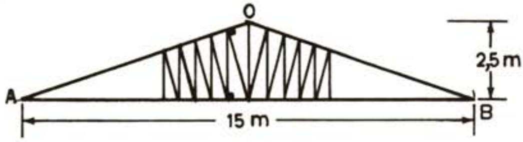
Σχ. 13·7 α.

4. Ὑπολογίσετε τὴν γωνία κλίσεως φ τοῦ ἐπιτόνου τῆς κολώνας τοῦ σχήματος 13 · 7 α, ὅταν ξέρετε ὅτι τὸ ὕψος της εἶναι 9 m.

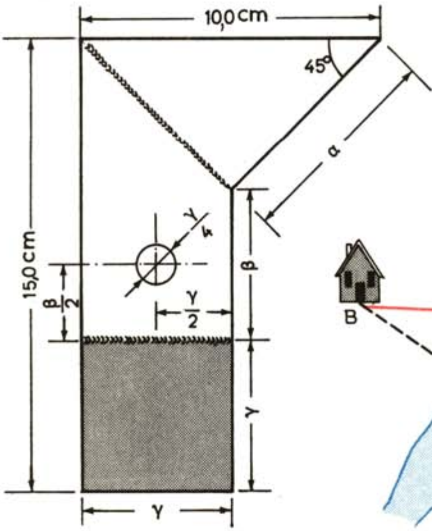
(φ = 61° 50')

5. Ὑπολογίσετε τὴν γωνία Ο τῆς κορυφῆς τοῦ ζευκτοῦ καὶ μετά, τὸ συνολικὸ μῆκος τοῦ ἀπαιτουμένου γιὰ τὴν κατασκευή του μορφοελάσματος (σχ. 13 · 7 β). *(143°, ~ 70,00 m)*

6. Στὸ ἔλασμα τοῦ σχήματος 13 · 7 γ ὑπολογίσετε τὶς σημειωμένες διαστάσεις α, β, καὶ γ. *(α ≃ 7,1 cm, β = 5,0 cm, γ = 5,0 cm)*

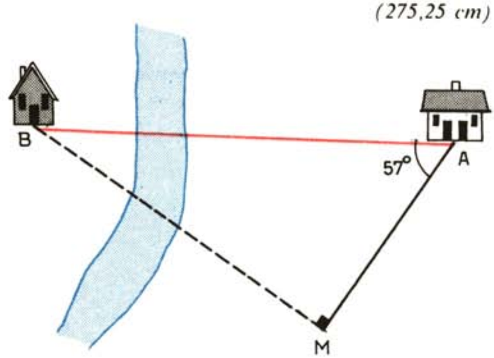


Σχ. 13·7 β.



7. Ὑπολογίσετε τὴν ἀπόστασι AB, ὅταν ξέρετε ὅτι γωνία BAM = 57° καὶ AM = 150 m. Ἐπίσης ὅτι ἡ θέσι M ἔχει προσδιορισθῆ ἔτσι, ὥστε ἡ γωνία AMB = 90° (σχ. 13 · 7 δ).

(275,25 cm)



Σχ. 13·7 γ.

Σχ. 13·7 δ.

8 *. Χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσετε τοὺς πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἀποδείξετε τὴν ἀλήθεια τῶν παραστάσεων:

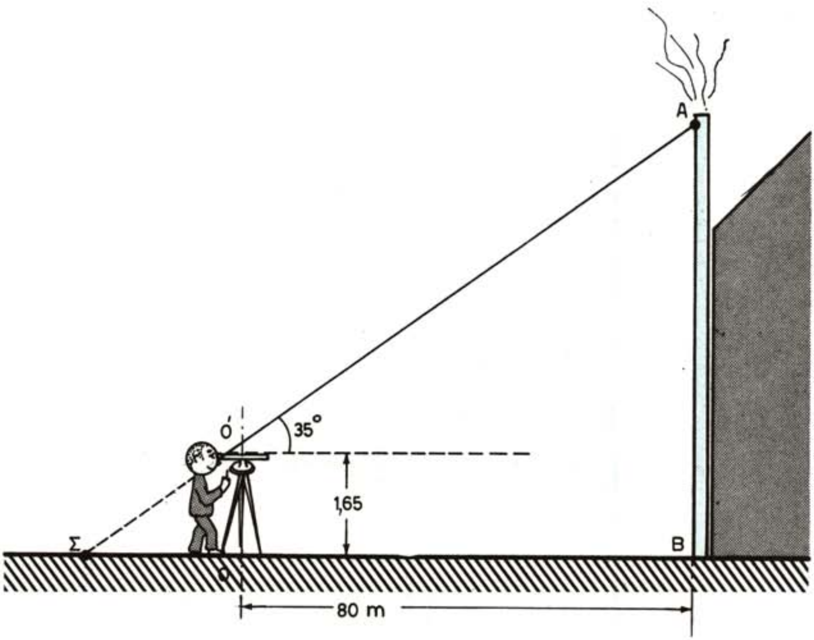
α) ημ 25° · συν 65° + ημ 65° · συν 25° = 1.

β) $\dfrac{\text{ημ } 28^\circ}{\text{ημ } 62^\circ} = \dfrac{\text{συν } 62^\circ}{\text{συν } 28^\circ}$.

γ) εφ 47° · εφ 43° = 1.

(Ἐφαρμόσετε τὶς σχέσεις, ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν).

9) Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὸ ὕψος AB τῆς καπνοδόχου (σχ. 13 · 7 ε), σταθήκαμε 80 m μακριὰ καὶ μὲ μία διόπτρα μετρήσαμε τὴν γωνία ΑΣΒ, τὴν ὁποία εὑρήκαμε 35°. Ἔχοντας ὑπ' ὄψι τὶς διαστάσεις τοῦ σχήματος, ὑπολογίσετε τὸ ὕψος τῆς καπνοδόχου. *(57,65 m)*



Σχ. 13·7 ε.

10. Ἂν στὸ σπείρωμα, ποὺ δίνεται, τὸ βῆμα β = 2,0 mm, νὰ εὕρετε τὸ θεωρητικὸ βάθος H τοῦ σπειρώματος, καθὼς καὶ τὸ πραγματικὸ h (σχ. 13 · 7 στ).
(H ≃ 1,73 mm, h ≃ 1,3 mm)

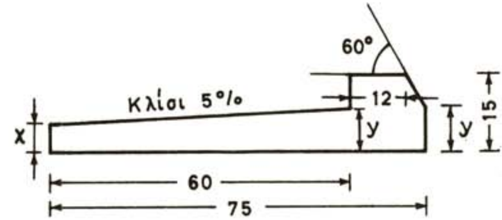
11. Ἕνα κλειδὶ γιὰ ἐξαγωνικὰ παξιμάδια ἔχει τρύπα σὲ σχῆμα κανονικοῦ ἐξαγώνου, ποὺ οἱ ἀπέναντι παράλληλες πλευρὲς ἀπέχουν μεταξύ τους 30 mm. Ὑπολογίσετε τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος μπορεῖ νὰ περιγραφῆ στὸ ἐξάγωνο. *(34,6 mm)*

Σχ. 13·7 στ.

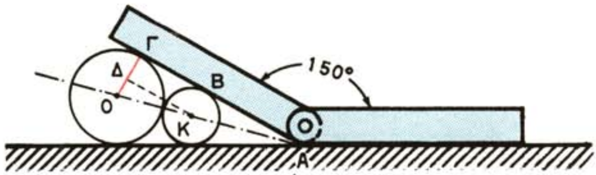
12. Ὑπολογίσετε τὶς διαστάσεις x καὶ y τῆς σφήνας ποὺ δίνεται στὸ σχῆμα 13·7ζ (διαστάσεις εἰς mm). *(x = 6,8 mm, y = 9, 8 mm)*

13. Γιὰ νὰ ρυθμίσωμε τὴν φαλτσογωνιὰ στὶς 150° χρησιμοποιοῦμε δύο ἐλεγκτῆρες (σχ. 13 · 7 η). Ἂν τοῦ μικροῦ ἡ ἀκτὶς εἶναι 10 mm, ποιά εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγάλου ἐλεγκτῆρος;

(Νὰ ἐργασθῆτε πρῶτα μὲ τὸ τρίγωνο **KBA** καὶ μετὰ μὲ τὰ τρίγωνα **ABK** καὶ **ΟΔΚ**. Νὰ ὀνομάσετε τὴν ἀκτῖνα **ΟΓ** = x). *(≃ 17 mm)*



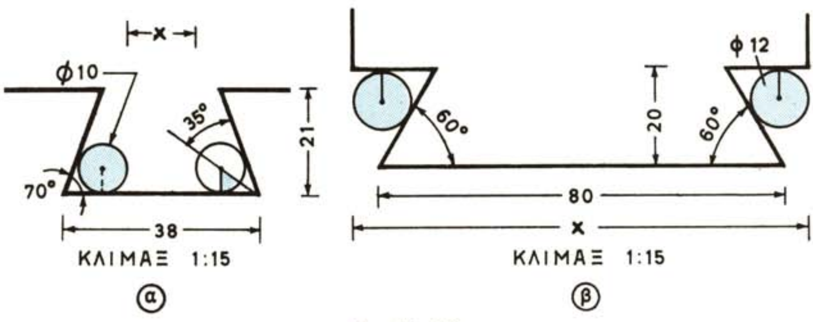
Σχ. 13·7 ζ.



Σχ. 13·7 η.

14. Ὑπολογίσετε στὶς δύο χελιδονοουρές, α) καὶ β), τὴν διάστασι x, μὲ τὴν ὁποία ἐλέγχομε τὴν μέτρησι ποὺ κάνομε γιὰ τὸ x μὲ τὸ παχύμετρο (σχ. 13 · 7 θ).

(α) x = 13,72 mm, β) x = 122,6 mm)

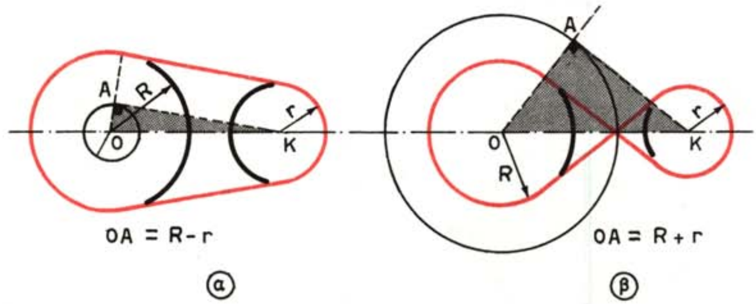


Σχ. 13·7 θ.

15. Στὸ σχῆμα 13 · 7 ι ἡ μεγάλη τροχαλία ἔχει ἀκτῖνα R = 200 mm καὶ ἡ μικρὴ r = 100 mm. Ἂν ἡ ἀπόστασι τῶν κέντρων τῶν δύο τροχαλιῶν εἶναι 500 mm, νὰ εὕρετε τὰ μήκη τῶν ἱμάντων τους.

(Ἐπιλύσετε τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο, προσδιορίζοντας τὶς γωνίες σὲ ἀκέραιες μοῖρες, γιὰ νὰ εὕρετε στὴν συνέχεια τὰ τόξα ἐπαφῆς).

(α = 1964 mm, β = 2185 mm)

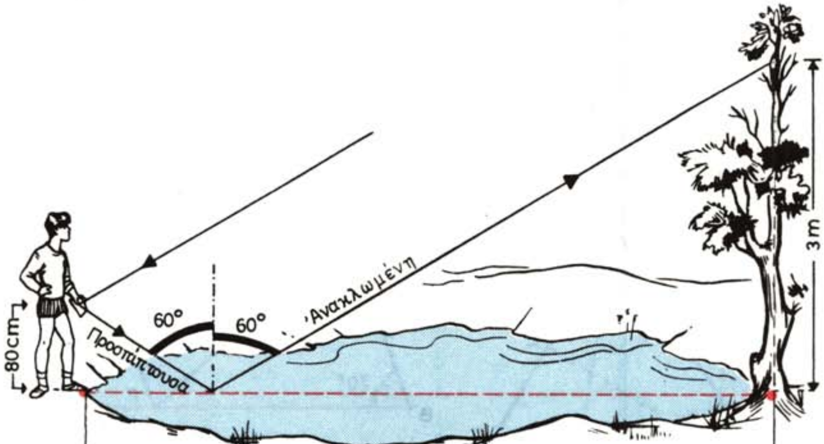


Σχ. 13·7 ι.

16. Στὸ σχῆμα 13 · 7 ια νὰ εὕρετε τὴν ἀπόστασι τοῦ παιδιοῦ ἀπὸ τὸ δένδρο, ὅταν ὁ καθρέπτης ποὺ κρατάει στὰ χέρια του εὑρίσκεται σὲ ὕψος 80 cm ἀπὸ τὸ ἔδαφος καὶ τὸ δένδρο ἔχῃ ὕψος 3,00 m.

Ἡ γωνία τῆς προσπιπτούσης μὲ τὴν ἀνακλωμένη ἀκτῖνα εἶναι 120°.

(≃ 6,58 m)

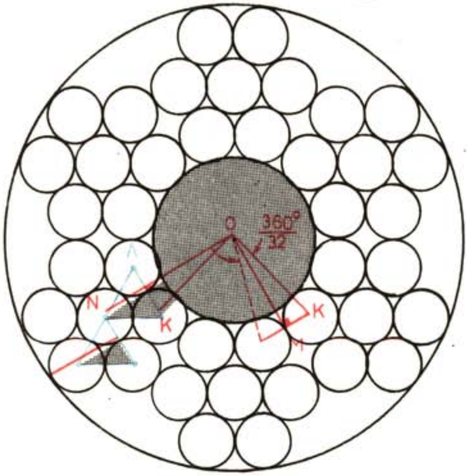


Σχ. 13·7 ια.

17. Τὸ συρματόσχοινο τοῦ σχήματος 13 · 7 ιβ ἀποτελεῖται ἀπὸ μία ψυχή, ποὺ γύρω της εὑρίσκονται 6 κλάδοι ἀπὸ συρματάκια διαμέτρου 0,9 mm. Κάθε τέτοιος κλάδος ἔχει συνολικὰ 7 συρματάκια.

Ὑπολογίσετε:

α) Τὴν διάμετρο καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς χαλύβδινης ψυχῆς.



Σχ. 13·7 ιβ.

β) Τὴν διάμετρο τοῦ χαλύβδινου περιβλήματος.

(Θὰ σᾶς βοηθήση ὁ ὑπολογισμὸς τῆς OK, τῆς OM καὶ μετὰ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΚΛΝ).

(α = 5,14 mm, 20,74 mm²
β = 7,38 mm)

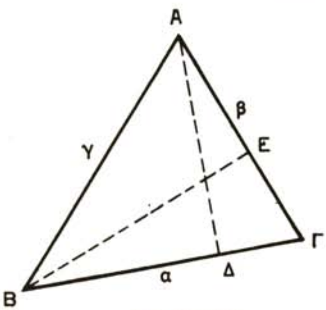
18. α) Μὲ τὴν βοήθεια τοῦ ὕψους ΑΔ (σχ. 13·7 ιγ) δείξετε ὅτι στὸ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσι:

$$\frac{\beta}{\eta\mu\,\widehat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\,\widehat{\Gamma}}$$

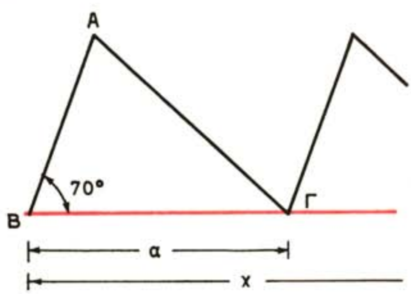
β) Μετά, μὲ τὴν βοήθεια τοῦ ὕψους ΒΕ (σχ. 13·7 ιγ), δείξετε ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\,A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\,\Gamma}.$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω θὰ προκύψη ἡ σχέσι: $\frac{\alpha}{\eta\mu\,A} = \frac{\beta}{\eta\mu\,B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\,\Gamma}$, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ὡς ***νόμος τοῦ ἡμιτόνου***.



Σχ. 13·7 ιγ.



Σχ. 13·7 ιδ.

19. Στὴν πριονωτὴ διάταξι τῆς ὀροφῆς ἑνὸς ἐργοστασίου (σχ. 13·7 ιδ), ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 ἀνοίγματα μήκους α μετροῦμε: ΑΒ = 2,50 m καὶ ΑΓ = 3,50 m, ἐνῶ $\widehat{AB\Gamma}$ = 70°.

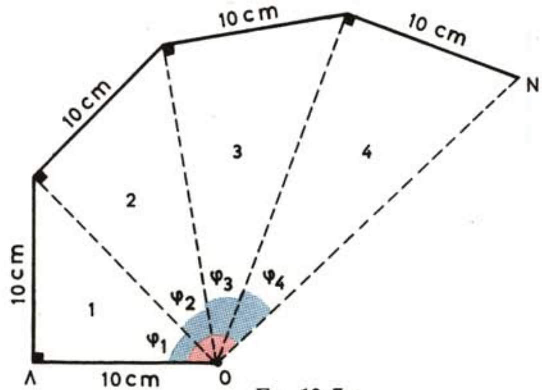
Ὑπολογίσετε τὸ μῆκος x τοῦ ἐργοστασίου.

(Θὰ σᾶς βοηθήση ἡ χρησιμοποίησι τοῦ παραπάνω νόμου τοῦ ἡμιτόνου).

(α = 3,45 m, x = 34,50 m)

20. Τὸ σχῆμα 13 · 7 ιε ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀρθογώνια τριγωνικὰ κομμάτια. Νὰ εὕρετε τὴν γωνία ΛΟΝ.

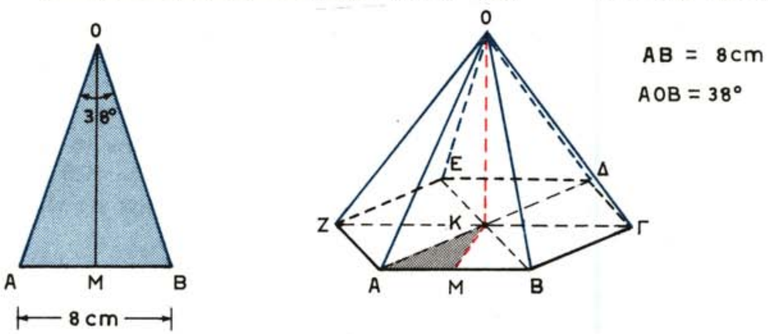
($\widehat{ΛΟΝ} \simeq 136° \; 50'$)



Σχ. 13·7 ιε.

21. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας μιᾶς πυραμίδος σχήματος ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ βάσι AB = 8 cm καὶ γωνία κορυφῆς AOB = 38° (σχ. 13 · 7 ιστ). Μετὰ νὰ εὕρετε τὸ βάρος τῆς πυραμίδος, ὅταν ξέρετε ὅτι ἡ βάσι της εἶναι κανονικὸ ἑξάγωνο καὶ ὅτι εἶναι κατασκευασμένη ἀπὸ ὑλικὸ εἰδικοῦ βάρους 8,80 kg/dm³.

(Στοὺς ὑπολογισμοὺς τὰ μήκη μὲ ἀκρίβεια mm). *(46,5 cm², 4,55 kg)*



Σχ. 13·7 ιστ.

22. Ἔχετε ἕνα μεταλλικὸ ἀντικείμενο σὲ σχῆμα πυραμίδος μὲ βάσι καὶ παράπλευρες ἕδρες ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς $\alpha = 5$ cm.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κάθε κομματιοῦ καθὼς καὶ τὸ ὑλικό, ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ φτιάξετε 1000 τέτοια κομμάτια.

Εἰδικὸ βάρος ὑλικοῦ 7,2 kg/dm³.

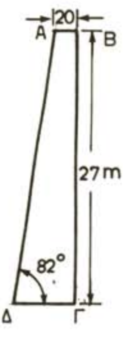
(Νὰ λυθῇ μὲ τὴν βοήθεια τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν).

(ὄγκος = 14,6 cm³, ὑλικὸ 105 kg 120 g)

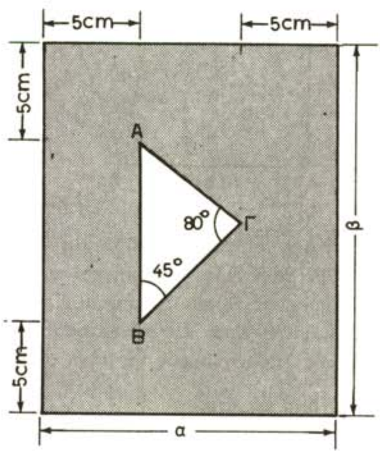
23. Σὲ οἰκοδομὴ μία κολώνα ἔχει τὴν μία πλευρά της κεκλιμένη ὡς πρὸς τὸ ἔδαφος, μὲ τὸ ὁποῖο σχηματίζει γωνία 82°. Ὑπολογίσετε τὸ μῆκος ΑΔ μὲ ἀκρίβεια cm (σχ. 13 · 7 ιζ). *(27,27 m)*

24. Ὑπολογίσετε τὶς διαστάσεις α καὶ β τῆς λαμαρίνας τοῦ σχήματος 13 · 7 ιη, ὅταν ἡ τριγωνικὴ τρύπα ΑΒΓ ἔχη πλευρὰ ΒΓ = 8 cm, γωνία Β = 45° καὶ $\widehat{\Gamma}$ = 80°. Ὕστερα νὰ εὕρετε τὸ βάρος τῆς λαμαρίνας πρὶν καὶ μετὰ τὸ ἄνοιγμα τῆς τρύπας, ὅταν τὸ πάχος εἶναι 2 mm καὶ τὸ εἰδικὸ βάρος της 7,85 kg/dm³.

(α = 15,66 cm β = 19,62 cm)



Σχ. 13·7 ιζ.



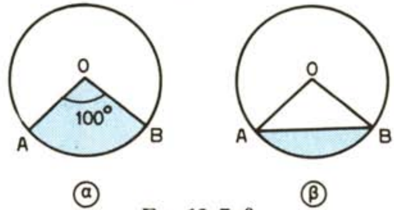
Σχ. 13·7 ιη.

25. α) Ἐφαρμόζοντας τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως τοῦ σχήματος 13 · 7 ιθ (α), ὅταν ἡ ἀκτὶς ΟΑ = 10,0 cm.

β) Διατυπώσετε ἕνα τύπο γιὰ τὸ ἐμβαδὸν αὐτό, ὅπως κάναμε γιὰ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ.

γ) Ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος ποὺ προκύπτει, ἂν ἀπὸ τὸν κυκλικὸ τομέα ἀφαιρέσετε τὸ τρίγωνο ΟΑΒ.

(Ἀκρίβεια πρώτου δεκαδικοῦ ψηφίου). *(α = 87,2 cm², γ : 37,9 cm²)*



Σχ. 13·7 ιθ.

1—100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
0	—	—	—	—					
1	1	1	1,0000	1,0000	51	2 601	132 651	7,1414	3,7084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	2 704	140 608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	2 809	148 877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	2 916	157 464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	3 025	166 375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	3 136	175 616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	3 249	185 193	7,5498	3,8485
8	64	512	2,8284	2,0000	58	3 364	195 112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	3 481	205 379	7,6811	3,8930
10	100	1 000	3,1623	2,1544	**60**	3 600	216 000	7,7460	3,9149
11	121	1 331	3,3166	2,2240	61	3 721	226 981	7,8102	3,9365
12	144	1 728	3,4641	2,2894	62	3 844	238 328	7,8740	3,9579
13	169	2 197	3,6056	2,3513	63	3 969	250 047	7,9373	3,9791
14	196	2 744	3,7417	2,4101	64	4 096	262 144	8,0000	4,0000
15	225	3 375	3,8730	2,4662	65	4 225	274 625	8,0623	4,0207
16	256	4 096	4,0000	2,5198	66	4 356	287 496	8,1240	4,0412
17	289	4 913	4,1231	2,5713	67	4 489	300 763	8,1854	4,0615
18	324	5 832	4,2426	2,6207	68	4 624	314 432	8,2462	4,0817
19	361	6 859	4,3589	2,6684	69	4 761	328 509	8,3066	4,1016
20	400	8 000	4,4721	2,7144	**70**	4 900	343 000	8,3666	4,1213
21	441	9 261	4,5826	2,7589	71	5 041	357 911	8,4261	4,1408
22	484	10 648	4,6904	2,8020	72	5 184	373 248	8,4853	4,1602
23	529	12 167	4,7958	2,8439	73	5 329	389 017	8,5440	4,1793
24	576	13 824	4,8990	2,8845	74	5 476	405 224	8,6023	4,1983
25	625	15 625	5,0000	2,9240	75	5 625	421 875	8,6603	4,2172
26	676	17 576	5,0990	2,9625	76	5 776	438 976	8,7178	4,2358
27	729	19 683	5,1962	3,0000	77	5 929	456 533	8,7750	4,2543
28	784	21 952	5,2915	3,0366	78	6 084	474 552	8,8318	4,2727
29	841	24 389	5,3852	3,0723	79	6 241	493 039	8,8882	4,2908
30	900	27 000	5,4772	3,1072	**80**	6 400	512 000	8,9443	4,3089
31	961	29 791	5,5678	3,1414	81	6 561	531 441	9,0000	4,3267
32	1 024	32 768	5,6569	3,1748	82	6 724	551 368	9,0554	4,3445
33	1 089	35 937	5,7446	3,2075	83	6 889	571 787	9,1104	4,3621
34	1 156	39 304	5,8310	3,2396	84	7 056	592 704	9,1652	4,3795
35	1 225	42 875	5,9161	3,2711	85	7 225	614 125	9,2195	4,3968
36	1 296	46 656	6,0000	3,3019	86	7 396	636 056	9,2736	4,4140
37	1 369	50 653	6,0828	3,3322	87	7 569	658 503	9,3274	4,4310
38	1 444	54 872	6,1644	3,3620	88	7 744	681 472	9,3808	4,4480
39	1 521	59 319	6,2450	3,3912	89	7 921	704 969	9,4340	4,4647
40	1 600	64 000	6,3246	3,4200	**90**	8 100	729 000	9,4868	4,4814
41	1 681	68 921	6,4031	3,4482	91	8 281	753 571	9,5394	4,4979
42	1 764	74 088	6,4807	3,4760	92	8 464	778 688	9,5917	4,5144
43	1 849	79 507	6,5574	3,5034	93	8 649	804 357	9,6437	4,5307
44	1 936	85 184	6,6332	3,5303	94	8 836	830 584	9,6954	4,5468
45	2 025	91 125	6,7082	3,5569	95	9 025	857 375	9,7468	4,5629
46	2 116	97 336	6,7823	3,5830	96	9 216	884 736	9,7980	4,5789
47	2 209	103 823	6,8557	3,6088	97	9 409	912 673	9,8489	4,5947
48	2 304	110 592	6,9282	3,6342	98	9 604	941 192	9,8995	4,6104
49	2 401	117 649	7,0000	3,6593	99	9 801	970 299	9,9499	4,6261
50	2 500	125 000	7,0711	3,6840	**100**	10 000	1 000 000	10,0000	4,6416

101—200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
101	10 201	1 030 301	10,0499	4,6570	151	22 801	3 442 951	12,2882	5,3251
102	10 404	1 061 208	10,0995	4,6723	152	23 104	3 511 808	12,3288	5,3368
103	10 609	1 092 727	10,1489	4,6875	153	23 409	3 581 577	12,3693	5,3485
104	10 816	1 124 864	10,1980	4,7027	154	23 716	3 652 264	12,4097	5,3601
105	11 025	1 157 625	10,2470	4,7177	155	24 025	3 723 875	12,4499	5,3717
106	11 236	1 191 016	10,2956	4,7326	156	24 336	3 796 416	12,4900	5,3832
107	11 449	1 225 043	10,3441	4,7475	157	24 649	3 869 893	12,5300	5,3947
108	11 664	1 259 712	10,3923	4,7622	158	24 964	3 944 312	12,5698	5,4061
109	11 881	1 295 029	10,4403	4,7769	159	25 281	4 019 679	12,6095	5,4175
110	12 100	1 331 000	10,4881	4,7914	**160**	25 600	4 096 000	12,6491	5,4288
111	12 321	1 367 631	10,5357	4,8059	161	25 921	4 173 281	12,6886	5,4401
112	12 544	1 404 928	10,5830	4,8203	162	26 244	4 251 528	12,7279	5,4514
113	12 769	1 442 897	10,6301	4,8346	163	26 569	4 330 747	12,7671	5,4626
114	12 996	1 481 544	10,6771	4,8488	164	26 896	4 410 944	12,8062	5,4737
115	13 225	1 520 875	10,7238	4,8629	165	27 225	4 492 125	12,8452	5,4848
116	13 456	1 560 896	10,7703	4,8770	166	27 556	4 574 296	12,8841	5,4959
117	13 689	1 601 613	10,8167	4,8910	167	27 889	4 657 463	12,9228	5,5069
118	13 924	1 643 032	10,8628	4,9049	168	28 224	4 741 632	12,9615	5,5178
119	14 161	1 685 159	10,9087	4,9187	169	28 561	4 826 809	13,0000	5,5288
120	14 400	1 728 000	10,9545	4,9324	**170**	28 900	4 913 000	13,0384	5,5397
121	14 641	1 771 561	11,0000	4,9461	171	29 241	5 000 211	13,0767	5,5505
122	14 884	1 815 848	11,0454	4,9597	172	29 584	5 088 448	13,1149	5,5613
123	15 129	1 860 867	11,0905	4,9732	173	29 929	5 177 717	13,1529	5,5721
124	15 376	1 906 624	11,1355	4,9866	174	30 276	5 268 024	13,1909	5,5828
125	15 625	1 953 125	11,1803	5,0000	175	30 625	5 359 375	13,2288	5,5934
126	15 876	2 000 376	11,2250	5,0133	176	30 976	5 451 776	13,2665	5,6041
127	16 129	2 048 383	11,2694	5,0265	177	31 329	5 545 233	13,3041	5,6147
128	16 384	2 097 152	11,3137	5,0397	178	31 684	5 639 752	13,3417	5,6252
129	16 641	2 146 689	11,3578	5,0528	179	32 041	5 735 339	13,3791	5,6357
130	16 900	2 197 000	11,4018	5,0658	**180**	32 400	5 832 000	13,4164	5,6462
131	17 161	2 248 091	11,4455	5,0788	181	32 761	5 929 741	13,4536	5,6567
132	17 424	2 299 968	11,4891	5,0916	182	33 124	6 028 568	13,4907	5,6671
133	17 689	2 352 637	11,5326	5,1045	183	33 489	6 128 487	13,5277	5,6774
134	17 956	2 406 104	11,5758	5,1172	184	33 856	6 229 504	13,5647	5,6877
135	18 225	2 460 375	11,6190	5,1299	185	34 225	6 331 625	13,6015	5,6980
136	18 496	2 515 456	11,6619	5,1426	186	34 596	6 434 856	13,6382	5,7083
137	18 769	2 571 353	11,7047	5,1551	187	34 969	6 539 203	13,6748	5,7185
138	19 044	2 628 072	11,7473	5,1676	188	35 344	6 644 672	13,7113	5,7287
139	19 321	2 685 619	11,7898	5,1801	189	35 721	6 751 269	13,7477	5,7388
140	19 600	2 744 000	11,8322	5,1925	**190**	36 100	6 859 000	13,7840	5,7489
141	19 881	2 803 221	11,8743	5,2048	191	36 481	6 967 871	13,8203	5,7590
142	20 164	2 863 288	11,9164	5,2171	192	36 864	7 077 888	13,8564	5,7690
143	20 449	2 924 207	11,9583	5,2293	193	37 249	7 189 057	13,8924	5,7790
144	20 736	2 985 984	12,0000	5,2415	194	37 636	7 301 384	13,9284	5,7890
145	21 025	3 048 625	12,0416	5,2536	195	38 025	7 414 875	13,9642	5,7989
146	21 316	3 112 136	12,0830	5,2656	196	38 416	7 529 536	14,0000	5,8088
147	21 609	3 176 523	12,1244	5,2776	197	38 809	7 645 373	14,0357	5,8186
148	21 904	3 241 792	12,1655	5,2896	198	39 204	7 762 392	14,0712	5,8285
149	22 201	3 307 949	12,2066	5,3015	199	39 601	7 880 599	14,1067	5,8383
150	22 500	3 375 000	12,2474	5,3133	**200**	40 000	8 000 000	14,1421	5,8480

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

201—300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
201	40 401	8 120 601	14,1774	5,8578	251	63 001	15 813 251	15,8430	6,3080
202	40 804	8 242 408	14,2127	5,8675	252	63 504	16 003 008	15,8745	6,3164
203	41 209	8 365 427	14,2478	5,8771	253	64 009	16 194 277	15,9060	6,3247
204	41 616	8 489 664	14,2829	5,8868	254	64 516	16 387 064	15,9374	6,3330
205	42 025	8 615 125	14,3178	5,8964	255	65 025	16 581 375	15,9687	6,3413
206	42 436	8 741 816	14,3527	5,9059	256	65 536	16 777 216	16,0000	6,3496
207	42 849	8 869 743	14,3875	5,9155	257	66 049	16 974 593	16,0312	6,3579
208	43 264	8 998 912	14,4222	5,9250	258	66 564	17 173 512	16,0624	6,3661
209	43 681	9 129 329	14,4568	5,9345	259	67 081	17 373 979	16,0935	6,3743
210	44 100	9 261 000	14,4914	5,9439	260	67 600	17 576 000	16,1245	6,3825
211	44 521	9 393 931	14,5258	5,9533	261	68 121	17 779 581	16,1555	6,3907
212	44 944	9 528 128	14,5602	5,9627	262	68 644	17 984 728	16,1864	6,3988
213	45 369	9 663 597	14,5945	5,9721	263	69 169	18 191 447	16,2173	6,4070
214	45 796	9 800 344	14,6287	5,9814	264	69 696	18 399 744	16,2481	6,4151
215	46 225	9 938 375	14,6629	5,9907	265	70 225	18 609 625	16,2788	6,4232
216	46 656	10 077 696	14,6969	6,0000	266	70 756	18 821 096	16,3095	6,4312
217	47 089	10 218 313	14,7309	6,0092	267	71 289	19 034 163	16,3401	6,4393
218	47 524	10 360 232	14,7648	6,0185	268	71 824	19 248 832	16,3707	6,4473
219	47 961	10 503 459	14,7986	6,0277	269	72 361	19 465 109	16,4012	6,4553
220	48 400	10 648 000	14,8324	6,0368	270	72 900	19 683 000	16,4317	6,4633
221	48 841	10 793 861	14,8661	6,0459	271	73 441	19 902 511	16,4621	6,4713
222	49 284	10 941 048	14,8997	6,0550	272	73 984	20 123 648	16,4924	6,4792
223	49 729	11 089 567	14,9332	6,0641	273	74 529	20 346 417	16,5227	6,4872
224	50 176	11 239 424	14,9666	6,0732	274	75 076	20 570 824	16,5529	6,4951
225	50 625	11 390 625	15,0000	6,0822	275	75 625	20 796 875	16,5831	6,5030
226	51 076	11 543 176	15,0333	6,0912	276	76 176	21 024 576	16,6132	6,5108
227	51 529	11 697 083	15,0665	6,1002	277	76 729	21 253 933	16,6433	6,5187
228	51 984	11 852 352	15,0997	6,1091	278	77 284	21 484 952	16,6733	6,5265
229	52 441	12 008 989	15,1327	6,1180	279	77 841	21 717 639	16,7033	6,5343
230	52 900	12 167 000	15,1658	6,1269	280	78 400	21 952 000	16,7332	6,5421
231	53 361	12 326 391	15,1987	6,1358	281	78 961	22 188 041	16,7631	6,5499
232	53 824	12 487 168	15,2315	6,1446	282	79 524	22 425 768	16,7929	6,5577
233	54 289	12 649 337	15,2643	6,1534	283	80 089	22 665 187	16,8226	6,5654
234	54 756	12 812 904	15,2971	6,1622	284	80 656	22 906 304	16,8523	6,5731
235	55 225	12 977 875	15,3297	6,1710	285	81 225	23 149 125	16,8819	6,5808
236	55 696	13 144 256	15,3623	6,1797	286	81 796	23 393 656	16,9115	6,5885
237	56 169	13 312 053	15,3948	6,1885	287	82 369	23 639 903	16,9411	6,5962
238	56 644	13 481 272	15,4272	6,1972	288	82 944	23 887 872	16,9706	6,6039
239	57 121	13 651 919	15,4596	6,2058	289	83 521	24 137 569	17,0000	6,6115
240	57 600	13 824 000	15,4919	6,2145	290	84 100	24 389 000	17,0294	6,6191
241	58 081	13 997 521	15,5242	6,2231	291	84 681	24 642 171	17,0587	6,6267
242	58 564	14 172 488	15,5563	6,2317	292	85 264	24 897 088	17,0880	6,6343
243	59 049	14 348 907	15,5885	6,2403	293	85 849	25 153 757	17,1172	6,6419
244	59 536	14 526 784	15,6205	6,2488	294	86 436	25 412 184	17,1464	6,6494
245	60 025	14 706 125	15,6525	6,2573	295	87 025	25 672 375	17,1756	6,6569
246	60 516	14 886 936	15,6844	6,2658	296	87 616	25 934 336	17,2047	6,6644
247	61 009	15 069 223	15,7162	6,2743	297	88 209	26 198 073	17,2337	6,6719
248	61 504	15 252 992	15,7480	6,2828	298	88 804	26 463 592	17,2627	6,6794
249	62 001	15 438 249	15,7797	6,2912	299	89 401	26 730 899	17,2916	6,6869
250	62 500	15 625 000	15,8114	6,2996	300	90 000	27 000 000	17,3205	6,6943

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

301—400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
301	90 601	27 270 901	17,3494	6,7018	351	123 201	43 243 551	18,7350	7,0540
302	91 204	27 543 608	17,3781	6,7092	352	123 904	43 614 208	18,7617	7,0607
303	91 809	27 818 127	17,4069	6,7166	353	124 609	43 986 977	18,7883	7,0674
304	92 416	28 094 464	17,4356	6,7240	354	125 316	44 361 864	18,8149	7,0740
305	93 025	28 372 625	17,4642	6,7313	355	126 025	44 738 875	18,8414	7,0807
306	93 636	28 652 616	17,4929	6,7387	356	126 736	45 118 016	18,8680	7,0873
307	94 249	28 934 443	17,5214	6,7460	357	127 449	45 499 293	18,8944	7,0940
308	94 864	29 218 112	17,5499	6,7533	358	128 164	45 882 712	18,9209	7,1006
309	95 481	29 503 629	17,5784	6,7606	359	128 881	46 268 279	18,9473	7,1072
310	96 100	29 791 000	17,6068	6,7679	**360**	129 600	46 656 000	18,9737	7,1138
311	96 721	30 080 231	17,6352	6,7752	361	130 321	47 045 881	19,0000	7,1204
312	97 344	30 371 328	17,6635	6,7824	362	131 044	47 437 928	19,0263	7,1269
313	97 969	30 664 297	17,6918	6,7897	363	131 769	47 832 147	19,0526	7,1335
314	98 596	30 959 144	17,7200	6,7969	364	132 496	48 228 544	19,0788	7,1400
315	99 225	31 255 875	17,7482	6,8041	365	133 225	48 627 125	19,1050	7,1466
316	99 856	31 554 496	17,7764	6,8113	366	133 956	49 027 896	19,1311	7,1531
317	100 489	31 855 013	17,8045	6,8185	367	134 689	49 430 863	19,1572	7,1596
318	101 124	32 157 432	17,8326	6,8256	368	135 424	49 836 032	19,1833	7,1661
319	101 761	32 461 759	17,8606	6,8328	369	136 161	50 243 409	19,2094	7,1726
320	102 400	32 768 000	17,8885	6,8399	**370**	136 900	50 653 000	19,2354	7,1791
321	103 041	33 076 161	17,9165	6,8470	371	137 641	51 064 811	19,2614	7,1855
322	103 684	33 386 248	17,9444	6,8541	372	138 384	51 478 848	19,2873	7,1920
323	104 329	33 698 267	17,9722	6,8612	373	139 129	51 895 117	19,3132	7,1984
324	104 976	34 012 224	18,0000	6,8683	374	139 876	52 313 624	19,3391	7,2048
325	105 625	34 328 125	18,0278	6,8753	375	140 625	52 734 375	19,3649	7,2112
326	106 276	34 645 976	18,0555	6,8824	376	141 376	53 157 376	19,3907	7,2177
327	106 929	34 965 783	18,0831	6,8894	377	142 129	53 582 633	19,4165	7,2240
328	107 584	35 287 552	18,1108	6,8964	378	142 884	54 010 152	19,4422	7,2304
329	108 241	35 611 289	18,1384	6,9034	379	143 641	54 439 939	19,4679	7,2368
330	108 900	35 937 000	18,1659	6,9104	**380**	144 400	54 872 000	19,4936	7,2432
331	109 561	36 264 691	18,1934	6,9174	381	145 161	55 306 341	19,5192	7,2495
332	110 224	36 594 368	18,2209	6,9244	382	145 924	55 742 968	19,5448	7,2558
333	110 889	36 926 037	18,2483	6,9313	383	146 689	56 181 887	19,5704	7,2622
334	111 556	37 259 704	18,2757	6,9382	384	147 456	56 623 104	19,5959	7,2685
335	112 225	37 595 375	18,3030	6,9451	385	148 225	57 066 625	19,6214	7,2748
336	112 896	37 933 056	18,3303	6,9521	386	148 996	57 512 456	19,6469	7,2811
337	113 569	38 272 753	18,3576	6,9589	387	149 769	57 960 603	19,6723	7,2874
338	114 244	38 614 472	18,3848	6,9658	388	150 544	58 411 072	19,6977	7,2936
339	114 921	38 958 219	18,4120	6,9727	389	151 321	58 863 869	19,7231	7,2999
340	115 600	39 304 000	18,4391	6,9795	**390**	152 100	59 319 000	19,7484	7,3061
341	116 281	39 651 821	18,4662	6,9864	391	152 881	59 776 471	19,7737	7,3124
342	116 964	40 001 688	18,4932	6,9932	392	153 664	60 236 288	19,7990	7,3186
343	117 649	40 353 607	18,5203	7,0000	393	154 449	60 698 457	19,8242	7,3248
344	118 336	40 707 584	18,5472	7,0068	394	155 236	61 162 984	19,8494	7,3310
345	119 025	41 063 625	18,5742	7,0136	395	156 025	61 629 875	19,8746	7,3372
346	119 716	41 421 736	18,6011	7,0203	396	156 816	62 099 136	19,8997	7,3434
347	120 409	41 781 923	18,6279	7,0271	397	157 609	62 570 773	19,9249	7,3496
348	121 104	42 144 192	18,6548	7,0338	398	158 404	63 044 792	19,9499	7,3558
349	121 801	42 508 549	18,6815	7,0406	399	159 201	63 521 199	19,9750	7,3619
350	122 500	42 875 000	18,7083	7,0473	**400**	160 000	64 000 000	20,0000	7,3681

401—500

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
401	160 801	64 481 201	20,0250	7,3742	451	203 401	91 733 851	21,2368	7,6688
402	161 604	64 964 808	20,0499	7,3803	452	204 304	92 345 408	21,2603	7,6744
403	162 409	65 450 827	20,0749	7,3864	453	205 209	92 959 677	21,2838	7,6801
404	163 216	65 939 264	20,0998	7,3925	454	206 116	93 576 664	21,3073	7,6857
405	164 025	66 430 125	20,1246	7,3986	455	207 025	94 196 375	21,3307	7,6914
406	164 836	66 923 416	20,1494	7,4047	456	207 936	94 818 816	21,3542	7,6970
407	165 649	67 419 143	20,1742	7,4108	457	208 849	95 443 993	21,3776	7,7026
408	166 464	67 917 312	20,1990	7,4169	458	209 764	96 071 912	21,4009	7,7082
409	167 281	68 417 929	20,2237	7,4229	459	210 681	96 702 579	21,4243	7,7138
410	168 100	68 921 000	20,2485	7,4290	**460**	211 600	97 336 000	21,4476	7,7194
411	168 921	69 426 531	20,2731	7,4350	461	212 521	97 972 181	21,4709	7,7250
412	169 744	69 934 528	20,2978	7,4410	462	213 444	98 611 128	21,4942	7,7306
413	170 569	70 444 997	20,3224	7,4470	463	214 369	99 252 847	21,5174	7,7362
414	171 396	70 957 944	20,3470	7,4530	464	215 296	99 897 344	21,5407	7,7418
415	172 225	71 473 375	20,3715	7,4590	465	216 225	100 544 625	21,5639	7,7473
416	173 056	71 991 296	20,3961	7,4650	466	217 156	101 194 696	21,5870	7,7529
417	173 889	72 511 713	20,4206	7,4710	467	218 089	101 847 563	21,6102	7,7584
418	174 724	73 034 632	20,4450	7,4770	468	219 024	102 503 232	21,6333	7,7639
419	175 561	73 560 059	20,4695	7,4829	469	219 961	103 161 709	21,6564	7,7695
420	176 400	74 088 000	20,4939	7,4889	**470**	220 900	103 823 000	21,6795	7,7750
421	177 241	74 618 461	20,5183	7,4948	471	221 841	104 487 111	21,7025	7,7805
422	178 084	75 151 448	20,5426	7,5007	472	222 784	105 154 048	21,7256	7,7860
423	178 929	75 686 967	20,5670	7,5067	473	223 729	105 823 817	21,7486	7,7915
424	179 776	76 225 024	20,5913	7,5126	474	224 676	106 496 424	21,7715	7,7970
425	180 625	76 765 625	20,6155	7,5185	475	225 625	107 171 875	21,7945	7,8025
426	181 476	77 308 776	20,6398	7,5244	476	226 576	107 850 176	21,8174	7,8079
427	182 329	77 854 483	20,6640	7,5302	477	227 529	108 531 333	21,8403	7,8134
428	183 184	78 402 752	20,6882	7,5361	478	228 484	109 215 352	21,8632	7,8188
429	184 041	78 953 589	20,7123	7,5420	479	229 441	109 902 239	21,8861	7,8243
430	184 900	79 507 000	20,7364	7,5478	**480**	230 400	110 592 000	21,9089	7,8297
431	185 761	80 062 991	20,7605	7,5537	481	231 361	111 284 641	21,9317	7,8352
432	186 624	80 621 568	20,7846	7,5595	482	232 324	111 980 168	21,9545	7,8406
433	187 489	81 182 737	20,8087	7,5654	483	233 289	112 678 587	21,9773	7,8460
434	188 356	81 746 504	20,8327	7,5712	484	234 256	113 379 904	22,0000	7,8514
435	189 225	82 312 875	20,8567	7,5770	485	235 225	114 084 125	22,0227	7,8568
436	190 096	82 881 856	20,8806	7,5828	486	236 196	114 791 256	22,0454	7,8622
437	190 969	83 453 453	20,9045	7,5886	487	237 169	115 501 303	22,0681	7,8676
438	191 844	84 027 672	20,9284	7,5944	488	238 144	116 214 272	22,0907	7,8730
439	192 721	84 604 519	20,9523	7,6001	489	239 121	116 930 169	22,1133	7,8784
440	193 600	85 184 000	20,9762	7,6059	**490**	240 100	117 649 000	22,1359	7,8837
441	194 481	85 766 121	21,0000	7,6117	491	241 081	118 370 771	22,1585	7,8891
442	195 364	86 350 888	21,0238	7,6174	492	242 064	119 095 488	22,1811	7,8944
443	196 249	86 938 307	21,0476	7,6232	493	243 049	119 823 157	22,2036	7,8998
444	197 136	87 528 384	21,0713	7,6289	494	244 036	120 553 784	22,2261	7,9051
445	198 025	88 121 125	21,0950	7,6346	495	245 025	121 287 375	22,2486	7,9105
446	198 916	88 716 536	21,1187	7,6403	496	246 016	122 023 936	22,2711	7,9158
447	199 809	89 314 623	21,1424	7,6460	497	247 009	122 763 473	22,2935	7,9211
448	200 704	89 915 392	21,1660	7,6517	498	248 004	123 505 992	22,3159	7,9264
449	201 601	90 518 849	21,1896	7,6574	499	249 001	124 251 499	22,3383	7,9317
450	202 500	91 125 000	21,2132	7,6631	**500**	250 000	125 000 000	22,3607	7,9370

501—600

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
501	251 001	125 751 501	22,3830	7,9423	551	303 601	167 284 151	23,4734	8,1982
502	252 004	126 506 008	22,4054	7,9476	552	304 704	168 196 608	23,4947	8,2031
503	253 009	127 263 527	22,4277	7,9528	553	305 809	169 112 377	23,5160	8,2081
504	254 016	128 024 064	22,4499	7,9581	554	306 916	170 031 464	23,5372	8,2130
505	255 025	128 787 625	22,4722	7,9634	555	308 025	170 953 875	23,5584	8,2180
506	256 036	129 554 216	22,4944	7,9686	556	309 136	171 879 616	23,5797	8,2229
507	257 049	130 323 843	22,5167	7,9739	557	310 249	172 808 693	23,6008	8,2278
508	258 064	131 096 512	22,5389	7,9791	558	311 364	173 741 112	23,6220	8,2327
509	259 081	131 872 229	22,5610	7,9843	559	312 481	174 676 879	23,6432	8,2377
510	260 100	132 651 000	22,5832	7,9896	**560**	313 600	175 616 000	23,6643	8,2426
511	261 121	133 432 831	22,6053	7,9948	561	314 721	176 558 481	23,6854	8,2475
512	262 144	134 217 728	22,6274	8,0000	562	315 844	177 504 328	23,7065	8,2524
513	263 169	135 005 697	22,6495	8,0052	563	316 969	178 453 547	23,7276	8,2573
514	264 196	135 796 744	22,6716	8,0104	564	318 096	179 406 144	23,7487	8,2621
515	265 225	136 590 875	22,6936	8,0156	565	319 225	180 362 125	23,7697	8,2670
516	266 256	137 388 096	22,7156	8,0208	566	320 356	181 321 496	23,7908	8,2719
517	267 289	138 188 413	22,7376	8,0260	567	321 489	182 284 263	23,8118	8,2768
518	268 324	138 991 832	22,7596	8,0311	568	322 624	183 250 432	23,8328	8,2816
519	269 361	139 798 359	22,7816	8,0363	569	323 761	184 220 009	23,8537	8,2865
520	270 400	140 608 000	22,8035	8,0415	**570**	324 900	185 193 000	23,8747	8,2913
521	271 441	141 420 761	22,8254	8,0466	571	326 041	186 169 411	23,8956	8,2962
522	272 484	142 236 648	22,8473	8,0517	572	327 184	187 149 248	23,9165	8,3010
523	273 529	143 055 667	22,8692	8,0569	573	328 329	188 132 517	23,9374	8,3059
524	274 576	143 877 824	22,8910	8,0620	574	329 476	189 119 224	23,9583	8,3107
525	275 625	144 703 125	22,9129	8,0671	575	330 625	190 109 375	23,9792	8,3155
526	276 676	145 531 576	22,9347	8,0723	576	331 776	191 102 976	24,0000	8,3203
527	277 729	146 363 183	22,9565	8,0774	577	332 929	192 100 033	24,0208	8,3251
528	278 784	147 197 952	22,9783	8,0825	578	334 084	193 100 552	24,0416	8,3300
529	279 841	148 035 889	23,0000	8,0876	579	335 241	194 104 539	24,0624	8,3348
530	280 900	148 877 000	23,0217	8,0927	**580**	336 400	195 112 000	24,0832	8,3396
531	281 961	149 721 291	23,0434	8,0978	581	337 561	196 122 941	24,1039	8,3443
532	283 024	150 568 768	23,0651	8,1028	582	338 724	197 137 368	24,1247	8,3491
533	284 089	151 419 437	23,0868	8,1079	583	339 889	198 155 287	24,1454	8,3539
534	285 156	152 273 304	23,1084	8,1130	584	341 056	199 176 704	24,1661	8,3587
535	286 225	153 130 375	23,1301	8,1180	585	342 225	200 201 625	24,1868	8,3634
536	287 296	153 990 656	23,1517	8,1231	586	343 396	201 230 056	24,2074	8,3682
537	288 369	154 854 153	23,1733	8,1281	587	344 569	202 262 003	24,2281	8,3730
538	289 444	155 720 872	23,1948	8,1332	588	345 744	203 297 472	24,2487	8,3777
539	290 521	156 590 819	23,2164	8,1382	589	346 921	204 336 469	24,2693	8,3825
540	291 600	157 464 000	23,2379	8,1433	**590**	348 100	205 279 000	24,2899	8,3872
541	292 681	158 340 421	23,2594	8,1483	591	349 281	206 425 071	24,3105	8,3919
542	293 764	159 220 088	23,2809	8,1533	592	350 464	207 474 688	24,3311	8,3967
543	294 849	160 103 007	23,3024	8,1583	593	351 649	208 527 857	24,3516	8,4014
544	295 936	160 989 184	23,3238	8,1633	594	352 836	209 584 584	24,3721	8,4061
545	297 025	161 878 625	23,3452	8,1683	595	354 025	210 644 875	24,3926	8,4108
546	298 116	162 771 336	23,3666	8,1733	596	355 216	211 708 736	24,4131	8,4155
547	299 209	163 667 323	23,3880	8,1783	597	356 409	212 776 173	24,4336	8,4202
548	300 304	164 566 592	23,4094	8,1833	598	357 604	213 847 192	24.4540	8,4249
549	301 401	165 469 149	23,4307	8,1882	599	358 801	214 921 799	24,4745	8,4296
550	302 500	166 375 000	23,4521	8,1932	**600**	360 000	216 000 000	24,4949	8,4343

601—700

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
601	361 201	217 081 801	24,5153	8,4390	651	423 801	275 894 451	25,5147	8,6668
602	362 404	218 167 208	24,5357	8,4437	652	425 104	277 167 808	25,5343	8,6713
603	363 609	219 256 227	24,5561	8,4484	653	426 409	278 445 077	25,5539	8,6757
604	364 816	220 348 864	24,5764	8,4530	654	427 716	279 726 264	25,5734	8,6801
605	366 025	221 445 125	24,5967	8,4577	655	429 025	281 011 375	25,5930	8,6845
606	367 236	222 545 016	24,6171	8,4623	656	430 336	282 300 416	25,6125	8,6890
607	368 449	223 648 543	24,6374	8,4670	657	431 649	283 593 393	25,6320	8,6934
608	369 664	224 755 712	24,6577	8,4716	658	432 964	284 890 312	25,6515	8,6978
609	370 881	225 866 529	24,6779	8,4763	659	434 281	286 191 179	25,6710	8,7022
610	372 100	226 981 000	24,6982	8,4809	660	435 600	287 496 000	25,6905	8,7066
611	373 321	228 099 131	24,7184	8,4856	661	436 921	288 804 781	25,7099	8,7110
612	374 544	229 220 928	24,7386	8,4902	662	438 244	290 117 528	25,7294	8,7154
613	375 769	230 346 397	24,7588	8,4948	663	439 569	291 434 247	25,7488	8,7198
614	376 996	231 475 544	24,7790	8,4994	664	440 896	292 754 944	25,7682	8,7241
615	378 225	232 608 375	24,7992	8,5040	665	442 225	294 079 625	25,7876	8,7285
616	379 456	233 744 896	24,8193	8,5086	666	443 556	295 408 296	25,8070	8,7329
617	380 689	234 885 113	24,8395	8,5132	667	444 889	296 740 963	25,8263	8,7373
618	381 924	236 029 032	24,8596	8,5178	668	446 224	298 077 632	25,8457	8,7416
619	383 161	237 176 659	24,8797	8,5224	669	447 561	299 418 309	25,8650	8,7460
620	384 400	238 328 000	24,8998	8,5270	670	448 900	300 763 000	25,8844	8,7503
621	385 641	239 483 061	24,9199	8,5316	671	450 241	302 111 711	25,9037	8,7547
622	386 884	240 641 848	24,9399	8,5362	672	451 584	303 464 448	25,9230	8,7590
623	388 129	241 804 367	24,9600	8,5408	673	452 929	304 821 217	25,9422	8,7634
624	389 376	242 970 624	24,9800	8,5453	674	454 276	306 182 024	25,9615	8,7677
625	390 625	244 140 625	25,0000	8,5499	675	455 625	307 546 875	25,9808	8,7721
626	391 876	245 314 376	25,0200	8,5544	676	456 976	308 915 776	26,0000	8,7764
627	393 129	246 491 883	25,0400	8,5590	677	458 329	310 288 733	26,0192	8,7807
628	394 384	247 673 152	25,0599	8,5635	678	459 684	311 665 752	26,0384	8,7850
629	395 641	248 858 189	25,0799	8,5681	679	461 041	313 046 839	26,0576	8,7893
630	396 900	250 047 000	25,0998	8,5726	680	462 400	314 432 000	26,0768	8,7937
631	398 161	251 239 591	25,1197	8,5772	681	463 761	315 821 241	26,0960	8,7980
632	399 424	252 435 968	25,1396	8,5817	682	465 124	317 214 568	26,1151	8,8023
633	400 689	253 636 137	25,1595	8,5862	683	466 489	318 611 987	26,1343	8,8066
634	401 956	254 840 104	25,1794	8,5907	684	467 856	320 013 504	26,1534	8,8109
635	403 225	256 047 875	25,1992	8,5952	685	469 225	321 419 125	26,1725	8,8152
636	404 496	257 259 456	25,2190	8,5997	686	470 596	322 828 856	26,1916	8,8194
637	405 769	258 474 853	25,2389	8,6043	687	471 969	324 242 703	26,2107	8,8237
638	407 044	259 694 072	25,2587	8,6088	688	473 344	325 660 672	26,2298	8,8280
639	408 321	260 917 119	25,2784	8,6132	689	474 721	327 082 769	26,2488	8,8323
640	409 600	262 144 000	25,2982	8,6177	690	476 100	328 509 000	26,2679	8,8366
641	410 881	263 374 721	25,3180	8,6222	691	477 481	329 939 371	26,2869	8,8408
642	412 164	264 609 288	25,3377	8,6267	692	478 864	331 373 888	26,3059	8,8451
643	413 449	265 847 707	25,3574	8,6312	693	480 249	332 812 557	26,3249	8,8493
644	414 736	267 089 984	25,3772	8,6357	694	481 636	334 255 384	26,3439	8,8536
645	416 025	268 336 125	25,3969	8,6401	695	483 025	335 702 375	26,3629	8,8578
646	417 316	269 586 136	25,4165	8,6446	696	484 416	337 153 536	26,3818	8,8621
647	418 609	270 840 023	25,4362	8,6490	697	485 809	338 608 873	26,4008	8,8663
648	419 904	272 097 792	25,4558	8,6535	698	487 204	340 068 392	26,4197	8,8706
649	421 201	273 359 449	25,4755	8,6579	699	488 601	341 532 099	26,4386	8,8748
650	422 500	274 625 000	25,4951	8,6624	700	490 000	343 000 000	26,4575	8,8790

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

701—800

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
701	491 401	344 472 101	26,4764	8,8833	751	564 001	423 564 751	27,4044	9,0896
702	492 804	345 948 408	26,4953	8,8875	752	565 504	425 259 008	27,4226	9,0937
703	494 209	347 428 927	26,5141	8,8917	753	567 009	426 957 777	27,4408	9,0977
704	495 616	348 913 664	26,5330	8,8959	754	568 516	428 661 064	27,4591	9,1017
705	497 025	350 402 625	26,5518	8,9001	755	570 025	430 368 875	27,4773	9,1057
706	498 436	351 895 816	26,5707	8,9043	756	571 536	432 081 216	27,4955	9,1098
707	499 849	353 393 243	26,5895	8,9085	757	573 049	433 798 093	27,5136	9,1138
708	501 264	354 894 912	26,6083	8,9127	758	574 564	435 519 512	27,5318	9,1178
709	502 681	356 400 829	26,6271	8,9169	759	576 081	437 245 479	27,5500	9,1218
710	504 100	357 911 000	26,6458	8,9211	**760**	577 600	438 976 000	27,5681	9,1258
711	505 521	359 425 431	26,6646	8,9253	761	579 121	440 711 081	27,5862	9,1298
712	506 944	360 944 128	26,6833	8,9295	762	580 644	442 450 728	27,6043	9,1338
713	508 369	362 467 097	26,7021	8,9337	763	582 169	444 194 947	27,6225	9,1378
714	509 796	363 994 344	26,7208	8,9378	764	583 696	445 943 744	27,6405	9,1418
715	511 225	365 525 875	26,7395	8,9420	765	585 225	447 697 125	27,6586	9,1458
716	512 656	367 061 696	26,7582	8,9462	766	586 756	449 455 096	27,6767	9,1498
717	514 089	368 601 813	26,7769	8,9503	767	588 289	451 217 663	27,6948	9,1537
718	515 524	370 146 232	26,7955	8,9545	768	589 824	452 984 832	27,7128	9,1577
719	516 961	371 694 959	26,8142	8,9587	769	591 361	454 756 609	27,7308	9,1617
720	518 400	373 248 000	26,8328	8,9628	**770**	592 900	456 533 000	27,7489	9,1657
721	519 841	374 805 361	26,8514	8,9670	771	594 441	458 314 011	27,7669	9,1696
722	521 284	376 367 048	26,8701	8,9711	772	595 984	460 099 648	27,7849	9,1736
723	522 729	377 933 067	26,8887	8,9752	773	597 529	461 889 917	27,8029	9,1775
724	524 176	379 503 424	26,9072	8,9794	774	599 076	463 684 824	27,8209	9,1815
725	525 625	381 078 125	26,9258	8,9835	775	600 625	465 484 375	27,8388	9,1855
726	527 076	382 657 176	26,9444	8,9876	776	602 176	467 288 576	27,8568	9,1894
727	528 529	384 240 583	26,9629	8,9918	777	603 729	469 097 433	27,8747	9,1933
728	529 984	385 828 352	26,9815	8,9959	778	605 284	470 910 952	27,8927	9,1973
729	531 441	387 420 489	27,0000	9,0000	779	606 841	472 729 139	27,9106	9,2012
730	532 900	389 017 000	27,0185	9,0041	**780**	608 400	474 552 000	27,9285	9,2052
731	534 361	390 617 891	27,0370	9,0082	781	609 961	476 379 541	27,9464	9,2091
732	535 824	392 223 168	27,0555	9,0123	782	611 524	478 211 768	27,9643	9,2130
733	537 289	393 832 837	27,0740	9,0164	783	613 089	480 048 687	27,9821	9,2170
734	538 756	395 446 904	27,0924	9,0205	784	614 656	481 890 304	28,0000	9,2209
735	540 225	397 065 375	27,1109	9,0246	785	616 225	483 736 625	28,0179	9,2248
736	541 696	398 688 256	27,1293	9,0287	786	617 796	485 587 656	28,0357	9,2287
737	543 169	400 315 553	27,1477	9,0328	787	619 369	487 443 403	28,0535	9,2326
738	544 644	401 947 272	27,1662	9,0369	788	620 944	489 303 872	28,0713	9,2365
739	546 121	403 583 419	27,1846	9,0410	789	622 521	491 169 069	28,0891	9,2404
740	547 600	405 224 000	27,2029	9,0450	**790**	624 100	493 039 000	28,1069	9,2443
741	549 081	406 869 021	27,2213	9,0491	791	625 681	494 913 671	28,1247	9,2482
742	550 564	408 518 488	27,2397	9,0532	792	627 264	496 793 088	28,1425	9,2521
743	552 049	410 172 407	27,2580	9,0572	793	628 849	498 677 257	28,1603	9,2560
744	553 536	411 830 784	27,2764	9,0613	794	630 436	500 566 184	28,1780	9,2599
745	555 025	413 493 625	27,2947	9,0654	795	632 025	502 459 875	28,1957	9,2638
746	556 516	415 160 936	27,3130	9,0694	796	633 616	504 358 336	28,2135	9,2677
747	558 009	416 832 723	27,3313	9,0735	797	635 209	506 261 573	28,2312	9,2716
748	559 504	418 508 992	27,3496	9,0775	798	636 304	508 169 592	28,2489	9,2754
749	561 001	420 189 749	27,3679	9,0816	799	638 401	510 082 399	28,2666	9,2793
750	562 500	421 875 000	27,3861	9,0853	**800**	640 000	512 000 000	28,2843	9,2832

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

801—900

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
801	641 601	513 922 401	28,3019	9,2870	851	724 201	616 295 051	29,1719	9,4764
802	643 204	515 849 608	28,3196	9,2909	852	725 904	618 470 208	29,1890	9,4801
803	644 809	517 781 627	28,3373	9,2948	853	727 609	620 650 477	29,2062	9,4838
804	646 416	519 718 464	28,3549	9,2986	854	729 316	622 835 864	29,2233	9,4875
805	648 025	521 660 125	28,3725	9,3025	855	731 025	625 026 375	29,2404	9,4912
806	649 636	523 606 616	28,3901	9,3063	856	732 736	627 222 016	29,2575	9,4949
807	651 249	525 557 943	28,4077	9,3102	857	734 449	629 422 793	29,2746	9,4986
808	652 864	527 514 112	28,4253	9,3140	858	736 164	631 628 712	29,2916	9,5023
809	654 481	529 475 129	28,4429	9,3179	859	737 881	633 839 779	29,3087	9,5060
810	656 100	531 441 000	28,4605	9,3217	**860**	739 600	636 056 000	29,3258	9,5097
811	657 721	533 411 731	28,4781	9,3255	861	741 321	638 277 381	29,3428	9,5134
812	659 344	535 387 328	28,4956	9,3294	862	743 044	640 503 928	29,3598	9,5171
813	660 969	537 367 797	28,5132	9,3332	863	744 769	642 735 647	29,3769	9,5207
814	662 596	539 353 144	28,5307	9,3370	864	746 496	644 972 544	29,3939	9,5244
815	664 225	541 343 375	28,5482	9,3408	865	748 225	647 214 625	29,4109	9,5281
816	665 856	543 338 496	28,5657	9,3447	866	749 956	649 461 896	29,4279	9,5317
817	667 489	545 338 513	28,5832	9,3485	867	751 689	651 714 363	29,4449	9,5354
818	669 124	547 343 432	28,6007	9,3523	868	753 424	653 972 032	29,4618	9,5391
819	670 761	549 353 259	28,6182	9,3561	869	755 161	656 234 909	29,4788	9,5427
820	672 400	551 368 000	28,6356	9,3599	**870**	756 900	658 503 000	29,4958	9,5464
821	674 041	553 387 661	28,6531	9,3637	871	758 641	660 776 311	29,5127	9,5501
822	675 684	555 412 248	28,6705	9,3675	872	760 384	663 054 848	29,5296	9,5537
823	677 329	557 441 767	28,6880	9,3713	873	762 129	665 338 617	29,5466	9,5574
824	678 976	559 476 224	28,7054	9,3751	874	763 876	667 627 624	29,5635	9,5610
825	680 625	561 515 625	28,7228	9,3789	875	765 625	669 921 875	29,5804	9,5647
826	682 276	563 559 976	28,7402	9,3827	876	767 376	672 221 376	29,5973	9,5683
827	683 929	565 609 283	28,7576	9,3865	877	769 129	674 526 133	29,6142	9,5719
828	685 584	567 663 552	28,7750	9,3902	878	770 884	676 836 152	29,6311	9,5756
829	687 241	569 722 789	28,7924	9,3940	879	772 641	679 151 439	29,6479	9,5792
830	688 900	571 787 000	28,8097	9,3978	**880**	774 400	681 472 000	29,6648	9,5828
831	690 561	573 856 191	28,8271	9,4016	881	776 161	683 797 841	29,6816	9,5865
832	692 224	575 930 368	28,8444	9,4053	882	777 924	686 128 968	29,6985	9,5901
833	693 889	578 009 537	28,8617	9,4091	883	779 689	688 465 387	29,7153	9,5937
834	695 556	580 093 704	28,8791	9,4129	884	781 456	690 807 104	29,7321	9,5973
835	697 225	582 182 875	28,8964	9,4166	885	783 225	693 154 125	29,7489	9,6010
836	698 896	584 277 056	28,9137	9,4204	886	784 996	695 506 456	29,7658	9,6046
837	700 569	586 376 253	28,9310	9,4241	887	786 769	697 864 103	29,7825	9,6082
838	702 244	588 480 472	28,9482	9,4279	888	788 544	700 227 072	29,7993	9,6118
839	703 921	590 589 719	28,9655	9,4316	889	790 321	702 595 369	29,8161	9,6154
840	705 600	592 704 000	28,9828	9,4354	**890**	792 100	704 969 000	29,8329	9,6190
841	707 281	594 823 321	29,0000	9,4391	891	793 881	707 347 971	29,8496	9,6226
842	708 964	596 947 688	29,0172	9,4429	892	795 664	709 732 288	29,8664	9,6262
843	710 649	599 077 107	29,0345	9,4466	893	797 449	712 121 957	29,8831	9,6298
844	712 336	601 211 584	29,0517	9,4503	894	799 236	714 516 984	29,8998	9,6334
845	714 025	603 351 125	29,0689	9,4541	895	801 025	716 917 375	29,9166	9,6370
846	715 716	605 495 736	29,0861	9,4578	896	802 816	719 323 136	29,9333	9,6406
847	717 409	607 645 423	29,1033	9,4615	897	804 609	721 734 273	29,9500	9,6442
848	719 104	609 800 192	29,1204	9,4652	898	806 404	724 150 792	29,9666	9,6477
849	720 801	611 960 049	29,1376	9,4690	899	808 201	726 572 699	29,9833	9,6513
850	722 500	614 125 000	29,1548	9,4727	**900**	810 000	729 000 000	30,0000	9,6549

901—1000

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
901	811 801	731 432 701	30,0167	9,6585	951	904 401	860 085 351	30,8383	9,8339
902	813 604	733 870 808	30,0333	9,6620	952	906 304	862 801 408	30,8545	9,8374
903	815 409	736 314 327	30,0500	9,6656	953	908 209	865 523 177	30,8707	9,8408
904	817 216	738 763 264	30,0666	9,6692	954	910 116	868 250 664	30,8869	9,8443
905	819 025	741 217 625	30,0832	9,6727	955	912 025	870 983 875	30,9031	9,8477
906	820 836	743 677 416	30,0998	9,6763	956	913 936	873 722 816	30,9192	9,8511
907	822 649	746 142 643	30,1164	9,6799	957	915 849	876 467 493	30,9354	9,8546
908	824 464	748 613 312	30,1330	9,6834	958	917 764	879 217 912	30,9516	9,8580
909	826 281	751 089 429	30,1496	9,6870	959	919 681	881 974 079	30,9677	9,8614
910	828 100	753 571 000	30,1662	9,6905	**960**	921 600	884 736 000	30,9839	9,8648
911	829 921	756 058 031	30,1828	9,6941	961	923 521	887 503 681	31,0000	9,8683
912	831 744	758 550 528	30,1993	9,6976	962	925 444	890 277 128	31,0161	9,8717
913	833 569	761 048 497	30,2159	9,7012	963	927 369	893 056 347	31,0322	9,8751
914	835 396	763 551 944	30,2324	9,7047	964	929 296	895 841 344	31,0483	9,8785
915	837 225	766 060 875	30,2490	9,7082	965	931 225	898 632 125	31,0644	9,8819
916	839 056	768 575 296	30,2655	9,7118	966	933 156	901 428 696	31,0805	9,8854
917	840 889	771 095 213	30,2820	9,7153	967	935 089	904 231 063	31,0966	9,8888
918	842 724	773 620 632	30,2985	9,7188	968	937 024	907 039 232	31,1127	9,8922
919	844 561	776 151 559	30,3150	9,7224	969	938 961	909 853 209	31,1288	9,8956
920	846 400	778 688 000	30,3315	9,7259	**970**	940 900	912 673 000	31,1448	9,8990
921	848 241	781 229 961	30,3480	9,7294	971	942 841	915 498 611	31,1609	9,9024
922	850 084	783 777 448	30,3645	9,7329	972	944 784	918 330 048	31,1769	9,9058
923	851 929	786 330 467	30,3809	9,7364	973	946 729	921 167 317	31,1929	9,9092
924	853 776	788 889 024	30,3974	9,7400	974	948 676	924 010 424	31,2090	9,9126
925	855 625	791 453 125	30,4138	9,7435	975	950 625	926 859 375	31,2250	9,9160
926	857 476	794 022 776	30,4302	9,7470	976	952 576	929 714 176	31,2410	9,9194
927	859 329	796 597 983	30,4467	9,7505	977	954 529	932 574 833	31,2570	9,9227
928	861 184	799 178 752	30,4631	9,7540	978	956 484	935 441 352	31,2730	9,9261
929	863 041	801 765 089	30,4795	9,7575	979	958 441	938 313 739	31,2890	9,9295
930	864 900	804 357 000	30,4959	9,7610	**980**	960 400	941 192 000	31,3050	9,9329
931	866 761	806 954 491	30,5123	9,7645	981	962 361	944 076 141	31,3209	9,9363
932	868 624	809 557 568	30,5287	9,7680	982	964 324	946 966 168	31,3369	9,9396
933	870 489	812 166 237	30,5450	9,7715	983	966 289	949 862 087	31,3528	9,9430
934	872 356	814 780 504	30,5614	9,7750	984	968 256	952 763 904	31,3688	9,9464
935	874 225	817 400 375	30,5778	9,7785	985	970 225	955 671 625	31,3847	9,9497
936	876 096	820 025 856	30,5941	9,7819	986	972 196	958 585 256	31,4006	9,9531
937	877 969	822 656 953	30,6105	9,7854	987	974 169	961 504 803	31,4166	9,9565
938	879 844	825 293 672	30,6268	9,7889	988	976 144	964 430 272	31,4325	9,9598
939	881 721	827 936 019	30,6431	9,7924	989	978 121	967 361 669	31,4484	9,9632
940	883 600	830 584 000	30,6594	9,7959	**990**	980 100	970 299 000	31,4643	9,9666
941	885 481	833 237 621	30,6757	9,7993	991	982 081	973 242 271	31,4802	9,9699
942	887 364	835 896 888	30,6920	9,8028	992	984 064	976 191 488	31,4960	9,9733
943	889 249	838 561 807	30,7083	9,8063	993	986 049	979 146 657	31,5119	9,9766
944	891 136	841 232 384	30,7246	9,8097	994	988 036	982 107 784	31,5278	9,9800
945	893 025	843 908 625	30,7409	9,8132	995	990 025	985 074 875	31,5436	9,9833
946	894 916	846 590 536	30,7571	9,8167	996	992 016	988 047 936	31,5595	9,9866
947	896 809	849 278 123	30,7734	9,8201	997	994 009	991 026 973	31,5753	9,9900
948	898 704	851 971 392	30,7896	9,8236	998	996 004	994 011 992	31,5911	9,9933
949	900 601	854 670 349	30,8058	9,8270	999	998 001	997 002 999	31,6070	9,9967
950	902 500	857 375 000	30,8221	9,8305	**1000**	1 000 000	1 000 000 000	31,6228	10,0000

Πίναξ 2.

Τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις

Μοῖρ.	Ἡμίτονο 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ Συνημίτονο	Μοῖρ.

Μοῖρ.	Συνημίτονο 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ Ἡμίτονο	Μοῖρ.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Μοίρ.	Ἐφαπτομένη							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Μοίρ.
	Συνεφαπτομένη							

Μοῖρ.	Συνεφαπτομένη							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Μοῖρ.
	Ἐφαπτομένη							

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΑΝΑΛΟΓΙΑ:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \\ \dfrac{\delta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{array}$$

$$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha' : \beta' : \gamma' : \delta' : \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ: Ἰσχύουν γιὰ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τοὺς ἀλγεβρικούς.

$\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma.$

$\alpha + (\beta - \gamma) = \alpha + \beta - \gamma$

$\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$

$\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$

$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$

$\alpha - (\beta - \gamma) = \alpha - \beta + \gamma$

$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma$

$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha + \beta)$

$(\alpha - \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma$

$(\alpha - \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha - \beta).$

$(\alpha + \beta) : \gamma = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\gamma}$

$(\alpha - \beta) : \gamma = \dfrac{\alpha}{\gamma} - \dfrac{\beta}{\gamma}$

$(\alpha + \beta) : \dfrac{\gamma}{\delta} = (\alpha + \beta) \cdot \dfrac{\delta}{\gamma}$

$(\alpha - \beta) : \dfrac{\gamma}{\delta} = (\alpha - \beta) \cdot \dfrac{\delta}{\gamma}$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

$(\alpha + \beta) : \gamma \neq \gamma : (\alpha + \beta)$

$(\alpha - \beta) : \gamma \neq \gamma : (\alpha - \beta)$

ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ:

$$(+\alpha)+(-\alpha)=0$$
$$\alpha\cdot(+1)=\alpha.$$
$$\alpha\cdot(-1)=-\alpha$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ:

$+$ ἐπὶ $+$ ἴσον $+$ ἤ $(+)\cdot(+)=+$
$+$ ἐπὶ $-$ ἴσον $-$ ἤ $(+)\cdot(-)=-$
$-$ ἐπὶ $+$ ἴσον $-$ ἤ $(-)\cdot(+)=-$
$-$ ἐπὶ $-$ ἴσον $+$ ἤ $(-)\cdot(-)=+$

ΔΙΑΙΡΕΣΙ ΣΗΜΕΙΩΝ:

$+$ διὰ $+$ ἴσον $+$ ἤ $(+):(+)=+$
$+$ διὰ $-$ ἴσον $-$ ἤ $(+):(-)=-$
$-$ διὰ $+$ ἴσον $-$ ἤ $(-):(+)=-$
$-$ διὰ $-$ ἴσον $+$ ἤ $(-):(-)=+$

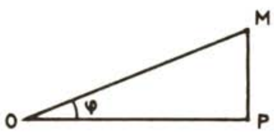
ΕΞΙΣΩΣΙ:

$x+\beta=\gamma$ λύσι: $x=\gamma-\beta$

$\alpha\cdot x+\beta=\gamma$ λύσι: $x=\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}$

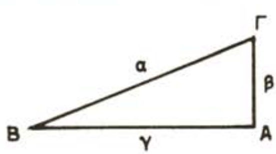
$\alpha\cdot x=\gamma$ λύσι: $x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ:



$$\frac{OP}{OM}=\text{συν}\,\varphi$$
$$\frac{PM}{OM}=\text{ημ}\,\varphi$$
$$\frac{PM}{OP}=\text{εφ}\,\varphi$$
$$\frac{OP}{PM}=\text{σφ}\,\varphi$$
$$\text{ημ}^2\,\varphi+\text{συν}\,\varphi^2=1$$
$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{ημ}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi}&=\text{εφ}\,\varphi\\ \frac{1}{\text{εφ}\,\varphi}&=\text{σφ}\,\varphi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \text{εφ}\,\varphi\cdot\text{σφ}\,\varphi=1$$

ΕΠΙΛΥΣΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ:



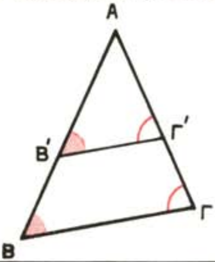
$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

$\beta=\alpha\cdot\text{ημ}\,\widehat{B}$ $\gamma=\alpha\cdot\text{ημ}\,\widehat{\Gamma}$

$\beta=\alpha\cdot\text{συν}\,\widehat{\Gamma}$ $\gamma=\alpha\cdot\text{συν}\,\widehat{B}$

$\beta=\gamma\cdot\text{εφ}\,\widehat{B}$ $\gamma=\beta\cdot\text{εφ}\,\widehat{\Gamma}$

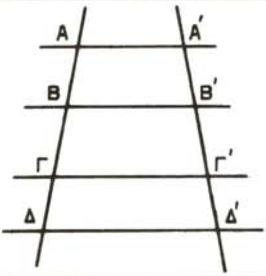
ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ (ΤΡΙΓΩΝΑ):



Ἂν ΒΓ // Β΄Γ΄ τότε $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{A\Gamma}{A\Gamma'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$

καὶ $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$

Ἂν $\left.\begin{array}{l}\widehat{B} = \widehat{B'} \\ \text{ἢ } \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}\end{array}\right\}$ τότε $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{A\Gamma}{A\Gamma'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$

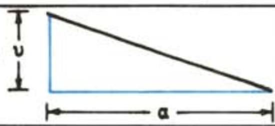


Ἂν: ΑΑ΄ // ΒΒ΄ // ΓΓ΄ // ΔΔ΄

τότε: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} =$

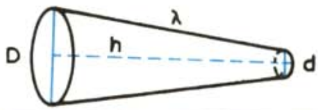
$= \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \dfrac{A\Delta}{A'\Delta'} = \dfrac{B\Delta}{B'\Delta'}$

ΚΛΙΣΙ:



Κλίσι $K\,\% = \dfrac{\upsilon}{\alpha} \cdot 100$

ΚΩΝΙΚΟΤΗΣ:



Κωνικότης $K\% = \dfrac{D - d}{h} \cdot 100$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΣ:

$\upsilon = \pi \cdot D \cdot n$

ὅπου:

υ ἡ γραμμικὴ ταχύτης (m/min)

D ἡ διάμετρος περιστροφῆς (m)

n ὁ ἀριθμὸς στροφῶν (στρ/min)

ΕΙΔΙΚΟ ΒΑΡΟΣ:

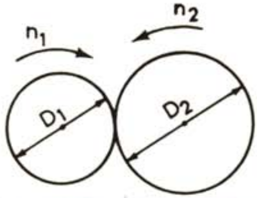
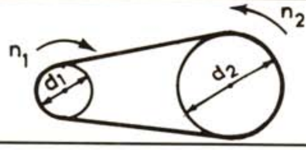
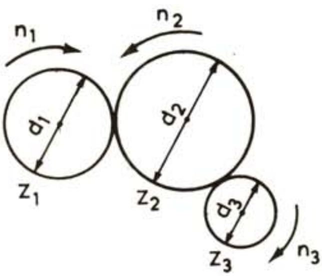
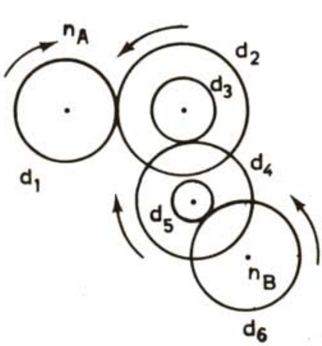
$\gamma = \dfrac{G}{V}$

ὅπου:

G τὸ βάρος (kg)

V ὁ ὄγκος (m^3 ἢ dm^3)

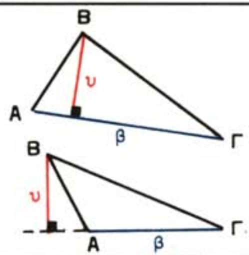
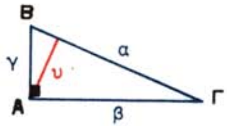
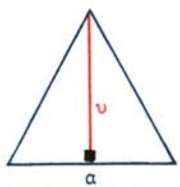
γ τὸ εἰδικὸν βάρος (kg/m^3 ἢ kg/dm^3).

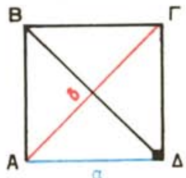
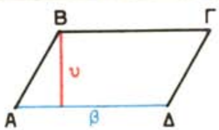
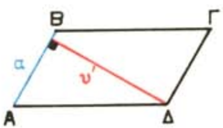
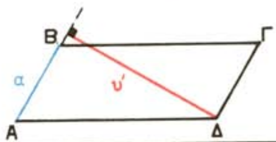
ΜΕΤΑΔΟΣΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦ. ΚΙΝΗΣΕΩΣ:	
	$n_1 \cdot D_1 = n_2 \cdot D_2$ $\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}$
	$n_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot d_2$ $\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$
	$\frac{d_1}{z_1} = \frac{d_2}{z_2} = \frac{d_3}{z_3} = m$ $n_1 \cdot z_1 = n_2 \cdot z_2 = n_3 \cdot z_3$
	$\frac{n_A}{n_B} = \frac{d_2 \cdot d_4 \cdot d_6}{d_1 \cdot d_3 \cdot d_5}$ $\frac{n_A}{n_B} = \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}$

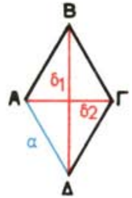
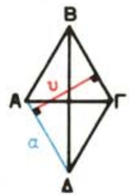
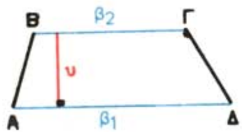
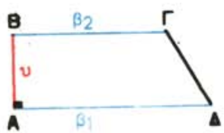
Σύμβολα :

D, d διάμετροι (m ἢ dm ἢ cm)	z ἀριθμὸς ὀδόντων
n στροφὲς ἀνὰ min	m μοντούλ

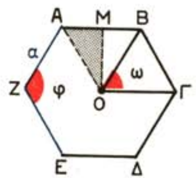
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

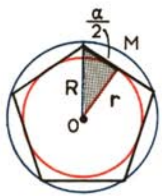
		ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ	ΤΥΠΟΣ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΤΡΙΓΩΝΟ	ΟΙΟΔΗΠΟΤΕ		***Γιὰ κάθε τρίγωνο:*** $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^\circ$ $\Gamma=(\alpha+\beta+\gamma)$ $E=\dfrac{\beta\cdot\upsilon}{2}$	
	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ		***Γιὰ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο:*** $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=90^\circ \quad \begin{cases}\widehat{B}=90^\circ-\widehat{\Gamma}\\ \widehat{\Gamma}=90^\circ-\widehat{B}\end{cases}$ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \quad \begin{cases}\beta^2=\alpha^2-\gamma^2\\ \gamma^2=\alpha^2-\beta^2\end{cases}$ $\Gamma=(\alpha+\beta+\gamma)$ $E=\dfrac{\beta\cdot\gamma}{2} \qquad E=\dfrac{\alpha\cdot\upsilon}{2}$	
	ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ		***Γιὰ τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο:*** $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=60^\circ$ $\Gamma=3\cdot\alpha$ $E=\dfrac{\alpha\cdot\upsilon}{2}$ $E=0{,}433\cdot\alpha^2$ (*)	— Μὲ α συμβολίζομε κάθε πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. — Τὸ ὕψος υ συνδέεται μὲ τὴν πλευρὰ α μὲ τὴν σχέσι: $\upsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\alpha=0{,}865\cdot\alpha.$ (*) — Ὁ τύπος προκύπτει ἀπὸ τὸν γενικό, ἂν ἀντικαταστήσωμε τὸ υ μὲ τὸ ἴσο του καὶ λάβωμε ὑπ' ὄψι μας ὅτι: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0{,}433$

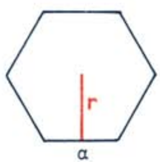
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	 	$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta$ $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ $A\Gamma \perp B\Delta$ $\delta = 1,41 \cdot \alpha$ (*) $\Gamma = 4 \cdot \alpha$ $E = \alpha^2 \qquad E = \frac{\delta^2}{2}$	(*)—Ὁ τύπος προκύπτει ἀπὸ ἐφαρμογὴ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος στὸ τρίγωνο ΑΔΓ ἢ τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἂν λάβωμε ὑπ' ὄψι μας ὅτι: $\sqrt{2} = 1,41$
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ	 	$AB = // \Gamma\Delta \qquad A\Delta = // B\Gamma$ $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (*) $\Gamma = (2 \cdot \alpha) + (2 \cdot \beta)$ (**) $E = \alpha \cdot \beta$	(*)—Αὐτὸς ὁ τύπος γράφεται: $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (**)—Αὐτὸς ὁ τύπος γράφεται καί: $\Gamma = 2 \cdot (\alpha + \beta)$
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	   	$AB = // \Gamma\Delta \qquad A\Delta = // B\Gamma$ $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} \qquad \widehat{B} = \widehat{\Delta}$ $\Gamma = (2 \cdot \alpha) + (2 \cdot \beta)$ (*) $E = \beta \cdot \upsilon$ $E = \alpha \cdot \upsilon'$	(*)—Αὐτὸς ὁ τύπος γράφεται: $\Gamma = 2 \cdot (\alpha + \beta)$

ΡΟΜΒΟΣ	 	$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ $AB \parallel \Gamma\Delta \qquad B\Gamma \parallel A\Delta$ $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} \qquad \widehat{B} = \widehat{\Delta}$ $A\Gamma \perp B\Delta$ $\Gamma = 4 \cdot \alpha$ $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$ $E = \frac{\alpha \cdot \upsilon}{2}$	— Μὲ α συμβολίζομε κάθε πλευρὰ τοῦ ρόμβου
ΤΡΑΠΕΖΙΟ	 	$A\Delta \parallel B\Gamma$ $\Gamma = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$ $E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \upsilon$	

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ







$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \ldots\ldots = \alpha$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \ldots = \widehat{\varphi}$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta} = \ldots = \widehat{\omega}$$

$$\widehat{\omega} = \frac{360^\circ}{(\text{ἀριθμὸς πλευρῶν})}$$

$$\widehat{\varphi} = 180^\circ - \widehat{\omega}$$

$$\text{ἢ } \widehat{\varphi} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{(\text{ἀριθμὸς πλευρῶν})}$$

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\text{ἢ } R^2 = r^2 + 0{,}25 \cdot \alpha^2$$

$$\Gamma = (\text{ἀριθμὸς πλευρῶν}) \cdot \alpha$$

$$E = \frac{(\text{περίμετρος}) \times (\text{ἀπόστημα})}{2}$$

$$E = \frac{\Gamma \cdot r}{2}$$

$$E = \frac{(\text{ἀριθμὸς πλευρῶν}) \cdot \alpha \cdot r}{2}$$

Ο: κέντρο περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλων

ΟΑ = R ἀκτὶς περιγεγραμμένου κύκλου

ΟΜ = r ἀκτὶς ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου

α = πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου

ΚΥΚΛΟΣ

$D = 2 \cdot R$ $\quad$ $E = \pi \cdot R^2$

$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot R$ $\quad$ $E = \frac{\Gamma}{2} \cdot R$

$\Gamma = \pi \cdot D$ $\quad$ $E = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$

$\tau = \Gamma \cdot \frac{\omega}{360^\circ}$

$\tau = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{\omega}{360^\circ}$

Ὁ τύπος γράφεται:

$\tau = \pi \cdot R \cdot \frac{\omega}{180^\circ}$

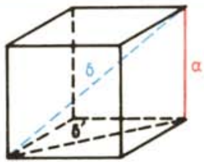
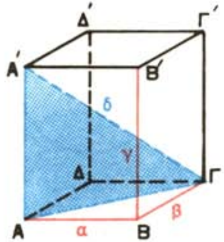
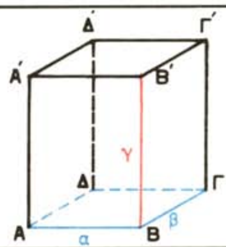
$\varepsilon = E \cdot \frac{\omega}{360^\circ}$

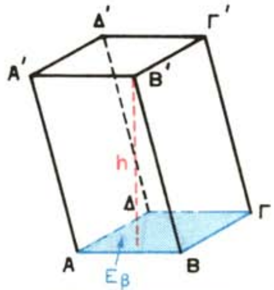
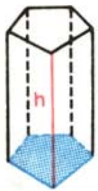
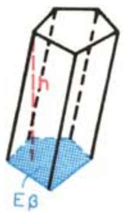
$\varepsilon = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\omega}{360^\circ}$

ΕΠΕΞΗΓΗΣΙ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

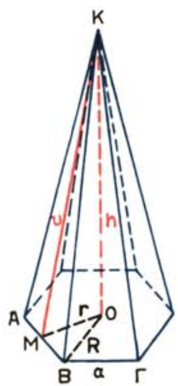
Γ = περίμετρος
E = Ἐμβαδὸν
υ, υ' = ὕψος
$\delta, \delta_1, \delta_2$ = διαγώνιος

D = διάμετρος κύκλου
R = ἀκτὶς κύκλου περιγεγραμμένου
r = ἀκτὶς κύκλου ἐγγεγραμμένου καὶ ἀπόστημα
Γ = μῆκος περιφερείας
τ = μῆκος τόξου κύκλου
$\widehat{\omega}$ = γωνία
ε = ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως

		ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΕΡΕΑ	ΤΥΠΟΣ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΚΥΒΟΣ		 	$\delta = 1{,}732 \cdot \alpha$ $\delta^2 = \alpha^2 + \delta'^2$ $E_\pi = 4 \cdot \alpha^2$ $E_o = 6 \cdot \alpha^2$ $V = \alpha^3$	$(1{,}732 = \sqrt{3})$ α = πλευρὰ κύβου
ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ	 	***Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο:*** παράπλευρες ἕδρες = ὀρθογώνια τετράπλευρο ΑΒΓΔ = ὀρθογώνιο $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ $E_\pi = (2 \cdot \alpha \cdot \gamma) + (2 \cdot \beta \cdot \gamma)$ (*) $E_o = E_\pi + 2 \cdot E_\beta$ $E_o = (2 \cdot \alpha \cdot \beta) + (2 \cdot \beta \cdot \gamma) + (2 \cdot \gamma \cdot \alpha)$ (**) $V = E_\beta \cdot h$ $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$	(*) ὁ τύπος γράφεται: $E_\pi = 2 \cdot (\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma)$ (**) ὁ τύπος γράφεται: $E_o = 2(\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \gamma \cdot \alpha)$ ἂν $E_\beta = \alpha \cdot \beta$ τότε $h = \gamma$ » $E_\beta = \beta \cdot \gamma$ τότε $h = \alpha$ » $E_\beta = \gamma \cdot \alpha$ τότε $h = \beta$
	ΟΡΘΟ	 	***Ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο:*** παράπλευρες ἕδρες = ὀρθογώνια τετράπλ. ΑΒΓΔ = παραλληλόγραμμο $E_\pi = (2 \cdot \alpha \cdot \gamma) + (2 \cdot \beta \cdot \gamma)$ $E_o = E_\pi + 2 \cdot E_\beta$ $V = E_\beta \cdot \gamma$	Ὁ τύπος αὐτὸς γράφεται καί: $E_\pi = 2 \cdot (\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma)$

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ	ΠΛΑΓΙΟ		***Πλάγιο παραλληλεπίπεδο:*** (ἢ πλάγιο πρίσμα μὲ βάσι παραλληλόγραμμο) παράπλευρες ἕδρες = παραλληλόγραμμα τετράπλ. ΑΒΓΔ = παραλληλόγραμμο $E_\pi = 2 \cdot E\,(ABB'A') + 2 \cdot E\,(BB'\Gamma'\Gamma)$ $E_o = E_\pi + 2 \cdot E\,(AB\Gamma\Delta)$ $E_o = E_\pi + 2 \cdot E_\beta$. $V = E_\beta \cdot h$	
ΠΡΙΣΜΑ	ΟΡΘΟ		***Ὀρθὸ πρίσμα:*** παράπλευρες ἕδρες = ὀρθογώνια $E_\pi =$ (περίμετρος βάσεως) $\cdot\, h$ $E_\pi = \Gamma \cdot h$ $E_o = E_\pi + 2E_\beta$ $V = E_\beta \cdot h$	
	ΠΛΑΓΙΟ		***Πλάγιο πρίσμα:*** παράπλευρες ἕδρες = παραλληλόγραμμα $E_\pi = \left(\begin{array}{c}\text{Ἄθροισμα ἐμβαδῶν} \\ \text{παραπλεύρων ἑδρῶν}\end{array}\right)$ $E_o = E_\pi + 2E_\beta$ $V = E_\beta \cdot h$	

(ΟΡΘΗ) ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ



(Ὀρθὴ) κανονικὴ πυραμίς:

$AM = BM = \frac{\alpha}{2}$

$KM^2 = KO^2 + OM^2$

ἢ $\upsilon^2 = h^2 + r^2$

$KM^2 = KO^2 + OB^2 - BM^2$

ἢ $\upsilon^2 = h^2 + R^2 - \frac{\alpha^2}{4}$

$\Gamma = (\text{ἀριθμὸς πλευρῶν}) \cdot \alpha$

$E_\pi = \frac{\Gamma \cdot \upsilon}{2}$

$E_o = E_\pi + E_\beta$

$E_o = \frac{\Gamma}{2} \cdot (\upsilon + r)$

$V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot h$

$V = \frac{1}{6} \cdot \Gamma \cdot r \cdot h$

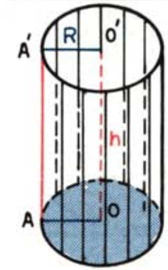
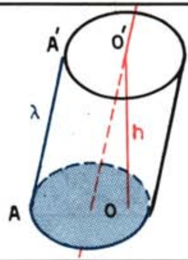
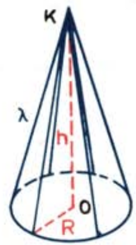
KO = h ὕψος πυραμίδος

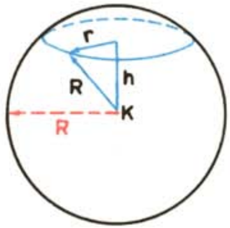
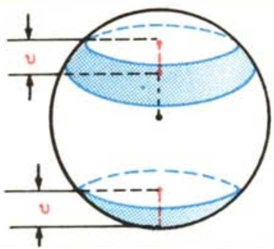
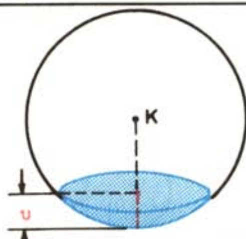
OB = R ἀκτὶς περιγεγρ. κύκλου σὲ κανονικὸ πολύγωνο τῆς βάσεως

OM = r ἀκτὶς ἐγγεγραμμένου κύκλου στὸ κανονικὸ πολύγωνο τῆς βάσεως

AB = BΓ = . . . = α = πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως

KM = υ · ὕψος παραπλεύρου ἕδρας

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ	ΟΡΘΟΣ		***Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος:*** Βάσεις = κύκλοι ἀκτῖνος R $AA' = h$ $E_\pi = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $E_o = E_\pi + 2 \cdot E_\beta$ $E_o = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (h + R)$ $V = E_\beta \cdot h$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	AA' = γενέτειρα λ OO' = h ὕψος $OO' = AA'$ ἢ $h = \lambda$
	ΠΛΑΓΙΟΣ		***Πλάγιος κυκλικὸς κύλινδρος:*** Βάσεις = κύκλοι ἀκτῖνος R $\lambda > h$ $V = E_\beta \cdot h$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	$AA' = \lambda$ γενέτειρα
ΚΥΚΛΙΚΟΣ	ΚΩΝΟΣ		***Ὀρθὸς κῶνος:*** $\lambda^2 = R^2 + h^2$ $E_\pi = \pi \cdot R \cdot \lambda$ $E_o = E_\pi + E_\beta$ $E_o = \pi \cdot R \cdot (\lambda + R)$ $V = 1/3 \cdot E_\beta \cdot h$ $V = 1/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$	

ΣΦΑΙΡΑ	ΣΦΑΙΡΑ		*Σφαίρα:* $D = 2 \cdot R$ $R^2 = h^2 + r^2$ $\begin{cases} h^2 = R^2 - r^2 \\ r^2 = R^2 - h^2 \end{cases}$ $E = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ $E = \pi \cdot D^2$ $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ $V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3$	D = διάμετρος σφαίρας R = ἀκτὶς σφαίρας r = ἀκτὶς μικροῦ κύκλου σφαίρας h = ἀπόστασις κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπίπεδο μικροῦ κύκλου
	ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΖΩΝΗ		*Σφαιρικὴ ζώνη:* $E_\zeta = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \upsilon$	R = ἀκτὶς σφαίρας (ὁ τύπος ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν σφαιρικὴ ζώνη μιᾶς βάσεως) υ = ὕψος σφαιρικοῦ τμήματος
	ΣΦΑΙΡ. ΤΜΗΜΑ		*Σφαιρικὸ τμῆμα μιᾶς βάσεως:* $V_\tau = \frac{\pi \cdot \upsilon^2}{3} \cdot (3 \cdot R - \upsilon)$	

ΕΠΕΞΗΓΗΣΙ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

δ = διαγώνιος

h = ὕψος στερεοῦ σχήματος, ἀπόστασι κέντρου σφαίρας ἀπὸ μικρὸ κύκλο

υ = ὕψος παραπλεύρου ἕδρας, ὕψος σφαιρικοῦ τμήματος

R = ἀκτὶς κύκλου, ἀκτὶς σφαίρας

D = διάμετρος κύκλου, διάμετρος σφαίρας

r = ἀκτὶς ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου βάσεως, ἀκτὶς μικροῦ κύκλου σφαίρας

α = πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου βάσεως

λ = γενέτειρα

E_π = ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας στερεοῦ

E_β = ἐμβαδὸν βάσεως στερεοῦ

E_o = ἐμβαδὸν βάσεως ὁλικῆς ἐπιφανείας στερεοῦ

E = ἐμβαδὸν σφαίρας

E_ζ = ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης

V = ὄγκος στερεοῦ

V_τ = ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος

Γ = μῆκος περιφερείας (περίμετρος περιφερείας).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

(Οἱ ἀριθμοὶ ἀναφέρονται σὲ σελίδες τοῦ βιβλίου)

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

COPYRIGHT ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ "ΑΣΠΙΩΤΗ - ΕΛΚΑ" Α. Ε.