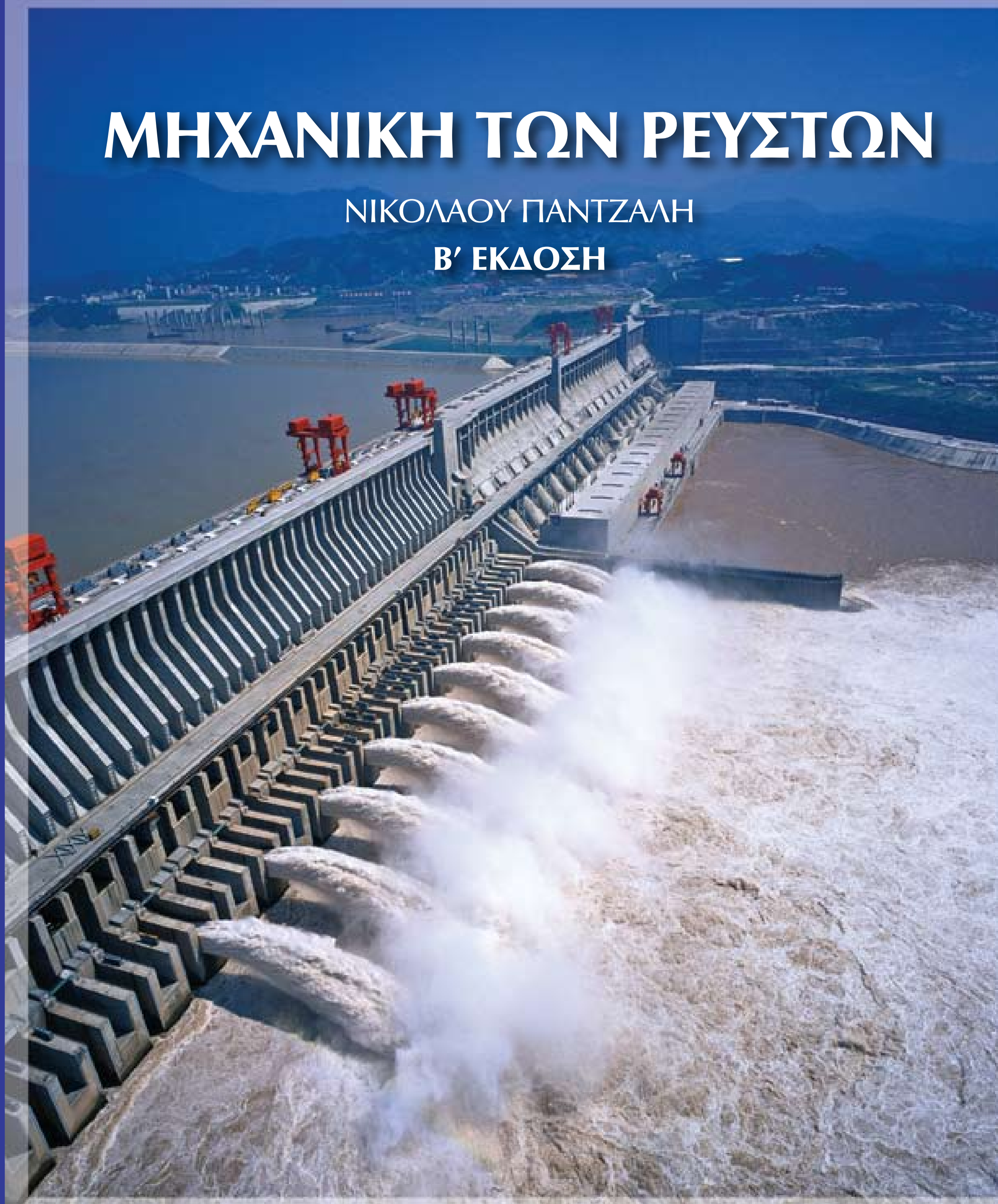
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΠΑΝΤΖΑΛΗ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ



ΑΘΗΝΑ 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο Τέταρτο
Διαστατική ανάλυση – Ομοιότητα

Κεφάλαιο Πέμπτο
Ροή ασυμπίεστων ρευστών σε σωλήνες

Κεφάλαιο Έκτο
Ορμή και δυνάμεις

Κεφάλαιο Έβδομο
Σωλήνες, εξαρτήματα, σύνδεση, δίκτυα σωληνώσεων και όργανα ελέγχου ροής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

Εισαγωγή στη Μηχανική των Ρευστών.

Η ***Μηχανική των Ρευστών*** ανήκει στην ευρύτερη ενότητα των Φυσικών επιστημών. Αναπτύχθηκε ως ανεξάρτητος τεχνικός κλάδος με σημαντικές εφαρμογές σε κάθε τομέα της παραγωγικής δραστηριότητας και ισχυρή διασύνδεση με άλλους επιστημονικούς κλάδους (π.χ. θερμοδυναμική, μετάδοση θερμότητας, υδρολογία, μετεωρολογία, ναυπηγία, ιατρική κ.ά.). Ασχολείται με τα φαινόμενα που συναντώνται στα ρευστά υλικά σώματα (και ως τέτοια εννοούμε τα υγρά και τα αέρια), όταν αυτά βρίσκονται σε μακροσκοπική ισορροπία (στατική των ρευστών) και, κυρίως, όταν αυτά ρέουν (δυναμική των ρευστών).

Η ***στατική των ρευστών***, μας επιτρέπει να κατανοήσομε σημαντικές ιδιότητες και φαινόμενα (όπως την ατμοσφαιρική και υδροστατική πίεση, την άνωση και τις δυνάμεις που ασκούν τα ρευστά), να αντιμετωπίσομε πρακτικά προβλήματα και να αξιοποιήσομε τα συμπεράσματά μας σε πολλές εφαρμογές όπως μανόμετρα, υδραυλικά πιεστήρια, διαχωριστές βαρύτητας κ.λπ.).

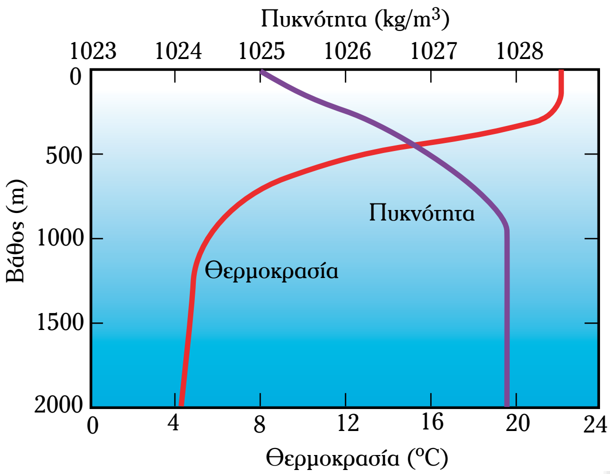
Η ***δυναμική των ρευστών***, αποτελεί τον πυρήνα των ζητημάτων που σχετίζονται με τη ***μεταφορά μάζας***. Η κατανόηση της συμπεριφοράς των ρευστών είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση προβλημάτων σχετικών με τη ροή τους στους αγωγούς, τη χρήση αντλιών, αεροσυμπιεστών και άλλου σχετικού εξοπλισμού διακινήσεως των ρευστών. Παράλληλα, μας διευκολύνει να κατανοήσομε τις διεργασίες διαχωρισμού που βασίζονται στη διάχυση και μεταφορά μάζας, στις αεροδυναμικές και υδροδυναμικές διεργασίες κατά την κίνηση στερεών μέσα σε ρευστά (πλοία, αυτοκίνητα, αεροπλάνα κ.λπ.), καθώς επίσης και τις διεργασίες που σχετίζονται με τη μετάδοση θερμότητας.

Το πεδίο της Μηχανικής των Ρευστών είναι ευρύτατο και αγγίζει σχεδόν κάθε ανθρώπινη προσπάθεια. Οι επιστήμες της μετεωρολογίας, της φυσικής ωκεανογραφίας και της υδρολογίας ασχολούνται με τις φυσικές ροές του νερού και του αέρα. Η ιατρική με τη ροή του αέρα (μελέτη του αναπνευστικού συστήματος), με την κυκλοφορία του αίματος (αιμοδυναμική) κ.ά.. Όλα τα προβλήματα μεταφορών περιλαμβάνουν την κίνηση ρευστών, με πολύ αναπτυγμένους ειδικούς κλάδους (αεροδυναμική αεροσκαφών και αυτοκινήτων, ναυτική υδροδυναμική κ.ά.). Σχεδόν όλη η παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας αξιοποιεί τη ροή είτε του νερού είτε του ατμού. Όλα τα προβλήματα καύσεως περιλαμβάνουν τη διακίνηση ρευστών, όπως επίσης τα πιο κλασικά προβλήματα της αρδεύσεως, του ελέγχου των πλημμυρών, της παροχής νερού, της στεγανώσεως, της διαθέσεως των λυμάτων, της διακινήσεως του πετρελαίου και του φυσικού αερίου.

Η σημασία των ρευστών για τον τομέα της ναυτιλίας είναι τεράστια. Εκτός από τα ζητήματα που σχετίζονται με την άνωση, την πλεύση και την κίνηση του πλοίου στη θάλασσα, το ίδιο το πλοίο αποτελεί μία σχετικά αυτόνομη παραγωγική μονάδα, στην οποία συναντάμε πολλά είδη ρευστών (νερό διαφόρων χρήσεων, καύσιμα, λάδια, υδρατμό, αέρα κ.λπ.). Οι σωληνώσεις και τα μηχανήματα διακινήσεως αυτών των ρευστών δεν περιορίζονται μόνο στο μηχανοστάσιο, αλλά εκτείνονται σε όλο το πλοίο. Η μελέτη και η κατανόηση επομένως της συμπεριφοράς των ρευστών είναι εξαιρετικά σημαντική για τον Μηχανικό.

1.1 Ορισμός ρευστών.

Εμπειρικά γνωρίζομε ότι ως ρευστά θεωρούνται σώματα χωρίς σταθερό σχήμα που έχουν τη δυνατότητα να ρέουν (σε αντίθεση με τα στερεά). Τέτοια σώματα είναι το νερό, ο αέρας και γενικότερα όλα τα ***υγρά*** και τα ***αέρια***. Αλλά εμπειρικά γνωρίζομε επίσης πως και λεπτόκοκκα στερεά (π.χ. άμμος, σιτάρι) «ρέουν». Από την άλλη, κάποια υγρά ευρισκόμενα σε χαμηλές θερμοκρασίες, σε αρκετές περιπτώσεις ρέουν με δυσκολία (παχύρρευστα υγρά). Ο εμπειρικός προσδιορισμός της έννοιας λοιπόν δεν αρκεί. Πρέπει να εξετάσομε και το αίτιο που προκαλεί τη ροή (πιο σωστά, την απώλεια της καταστάσεως ισορροπίας και τη μεταβολή της κινητικής καταστάσεως). Αν



Σχ. 1.2ε
Πυκνότητα του θαλασσινού νερού.

ρος από το άθροισμα των όγκων: $V \leq V_1 + V_2$.

Αν θεωρήσομε $V \cong V_1 + V_2$, μπορούμε να υπολογίσομε κατά προσέγγιση την πυκνότητα του διαλύματος. Ακριβής υπολογισμός της πυκνότητας των υγρών διαλυμάτων γίνεται με τη χρήση σχετικών πινάκων.

Την πυκνότητα των υγρών τη μετράμε χρησιμοποιώντας ειδικά όργανα, τα ***πυκνόμετρα***, τα οποία θα εξετάσομε στο επόμενο κεφάλαιο.

1.2.4 Σχετική πυκνότητα.

Συχνά αντί της πυκνότητας ενός σώματος, χρησιμοποιούμε τη ***σχετική πυκνότητα*** (specific gravity). Αυτή είναι καθαρός αριθμός που συγκρίνει την πυκνότητα του σώματος με την πυκνότητα άλλου που λαμβάνεται ως βάση συγκρίσεως:

$$\rho_{\sigma\chi} = {}^{\rho}\!/_{\rho_\beta} \qquad (1.4)$$

Για τα υγρά (και τα στερεά) ως βάση συγκρίσεως χρησιμοποιείται η πυκνότητα του καθαρού νερού σε 20°C: $\rho = 998{,}2\ \text{kg/m}^3$ (κατά προσέγγιση $1000\ \text{kg/m}^3$).

Για τα αέρια χρησιμοποιείται συνήθως η πυκνότητα του αέρα σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας και πιέσεως: $\rho_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha} = 1{,}205\ \text{kg/m}^3$ (για $T = 293°\ \text{K}$ και $p = 101{,}3\ \text{kPa}$).

Η σχετική πυκνότητα ισούται με το σχετικό ειδικό βάρος:

$$\gamma_{\sigma\chi} = \gamma/\gamma_\beta = (\rho \cdot g)/(\rho_\beta \cdot g) = \rho/\rho_\beta = \rho_{\sigma\chi}$$

Η σχετική πυκνότητα είναι ανεξάρτητη από τις χρησιμοποιούμενες μονάδες (είναι καθαρός αριθμός) και σ' αυτό το σημείο πλεονεκτεί έναντι της πυκνότητας (ή του ειδικού βάρους).

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθούν οι μάζες $10\ \text{m}^3$ πετρελαίου σε θερμοκρασίες 20°C και 40°C αν η πυκνότητά του στους 20°C είναι $845\ \text{kg/m}^3$ και ο συντελεστής κυβικής διαστολής είναι $\beta = 9 \cdot 10^{-4} \cdot \text{K}^{-1}$.

Λύση.

Στους 20°C:

$m_{20} = \rho_{20} \cdot V \Rightarrow m_{20} = 845\ \text{kg/m}^3 \cdot 10\ \text{m}^3 = 8450\ \text{kg}$

$m_{40} = \rho_{40} \cdot V_{40}$ ή $\rho_{40} = m_{20}/V_{40}$, $\quad V_{40} = V_{20} + \Delta V$

$\Delta V = V_{20} \cdot \beta \cdot \Delta T =$

$= (10\ \text{m}^3) \cdot (9 \cdot 10^{-4} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (20\ \text{K}) = 0{,}18\ \text{m}^3$

$V_{40} = 10\ \text{m}^3 + 0{,}18\ \text{m}^3 = 10{,}18\ \text{m}^3$

$\rho_{40} = 8450/10{,}18\ \text{kg/m}^3 = 830\ \text{kg/m}^3$

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθεί η μάζα 50 lt βενζίνης με σχετική πυκνότητα 0,745.

Λύση.

Υπολογισμός της πυκνότητας της βενζίνης:

$\rho_{\sigma\chi} = \rho_B/\rho_v \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_B = \rho_{\sigma\chi}\ \rho_v = 0{,}745 \cdot 1000\ \text{kg/m}^3 = 745\ \text{kg/m}^3$

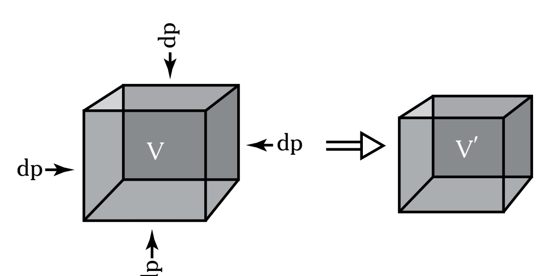
$V_B = 50\ \text{lt} = 50 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$

$\rho_B = m_B/V_B$ ή

$m_B = \rho_B \cdot V_B = (745\ \text{kg/m}^3) \cdot (50 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3) = 37{,}2\ \text{kg}$

1.2.5 Συμπιεστότητα (σχ. 1.2στ).

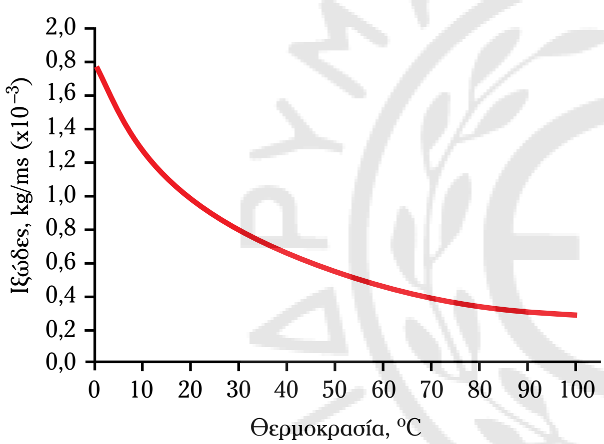
Ταξινομώντας τα ρευστά σε ασυμπίεστα (υγρά) και συμπιεστά (αέρια), διευκρινίσαμε ότι απόλυτα ασυμπίεστο υλικό δεν υπάρχει. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε έλλειψη οποιασδήποτε ελαστικότητας. Το γεγονός πως τα ηχητικά κύματα διαδίδονται μέσω των συνεκτικών στερεών και των υγρών, άμεσα αποδεικνύει πως τα σώματα αυτά έχουν κάποια ελαστικότητα.

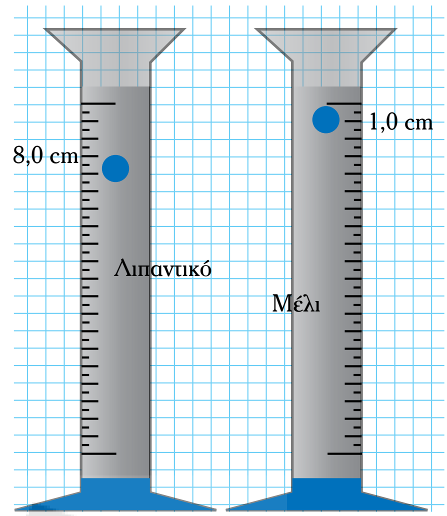


Σχ. 1.2στ
Συμπιεστότητα.

Πίνακας 1.2.3
Ιξώδες νερού (σε 1 atm) από 0°C ως 100°C.

T °C	**μ** 10^{-3}kg/ms	**ν** 10^{-6} m^2/s
0	1,792	1,792
10	1,307	1,307
20	1,003	1,005
30	0,803	0,806
40	0,655	0,660
50	0,551	0,557
60	0,470	0,478
70	0,407	0,416
80	0,357	0,367
90	0,317	0,328
100	0,284	0,296





Σχ. 1.2ιστ
Αρχή λειτουργίας ιξωδομέτρων.
Παρατήρησε τη θέση της μπίλιας για τον ίδιο χρόνο σε ρευστά διαφορετικής πυκνότητας.

Το ιξώδες των ρευστών το μετράμε με ειδικά όργανα τα ***ιξωδόμετρα***. Αυτά βασίζονται στο γεγονός πως ένα στερεό θα κινηθεί (υπό τις ίδιες συνθήκες) πιο αργά σε ρευστό με μεγαλύτερο ιξώδες (αλλά και το ρευστό μεγαλύτερου ιξώδους επί στερεάς επιφάνειας θα κινηθεί πιο αργά, όπως είδαμε στο παράδειγμα με τις σταγόνες). Η αρχή λειτουργίας τους παρουσιάζεται στο σχήμα 1.2ιστ.

1.2.8 Στοιχειώδης όγκος και πυκνότητα ρευστού.

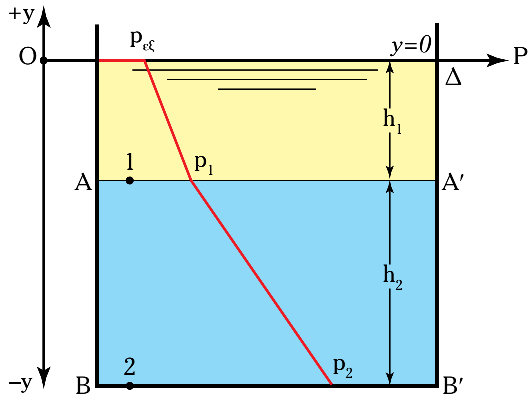
Όπως αναφέρθηκε, τα μόρια των ρευστών βρίσκονται διασκορπισμένα στον χώρο που αυτά καταλαμβάνουν. Τα μόρια δεν τακτοποιούνται σε ένα σταθερό πλέγμα (όπως στα στερεά) αλλά κινούνται ελεύθερα, συγκρουόμενα μεταξύ τους και με τα τοιχώματα που προσδιορίζουν τον όγκο τους (άτακτη μοριακή κίνηση). Η μέση απόσταση μεταξύ των μορίων των υγρών είναι πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη των αερίων (σ' αυτήν τη διαφορά οφείλεται η μεγάλη πυκνότητα των υγρών σε σχέση με τα αέρια). Και στα υγρά όμως, η μέση μοριακή απόσταση είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη διάμετρο των μορίων.

Λαμβάνοντας υπόψη την κινητική συμπεριφορά των μορίων ενός ρευστού, η πυκνότητά του, δηλαδή η μάζα του ανά μονάδα όγκου, φαίνεται να μην έχει ακριβή έννοια, αφού τα μόρια που καταλαμβάνουν έναν όγκο (που τον επιλέξαμε ως μονάδα) αλλάζουν συνεχώς. Αυτή η επίδραση όμως γίνεται ασήμαντη εάν ο όγκος είναι επαρκώς μεγάλος σε σχέση με τη μέση απόσταση των μορίων. Τότε ο αριθμός των μορίων που κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται μέσα στον όγκο θα παραμένει σχεδόν σταθερός (άρα και η μάζα), παρά τη συνεχή ανταλλαγή μορίων μεταξύ επιλεγμένου όγκου και περιβάλλοντος. Εξετάζοντας τον ***στοιχειώδη όγκο*** ρευστού δV διαπιστώνομε ότι η πυκνότητά του ισούται με:

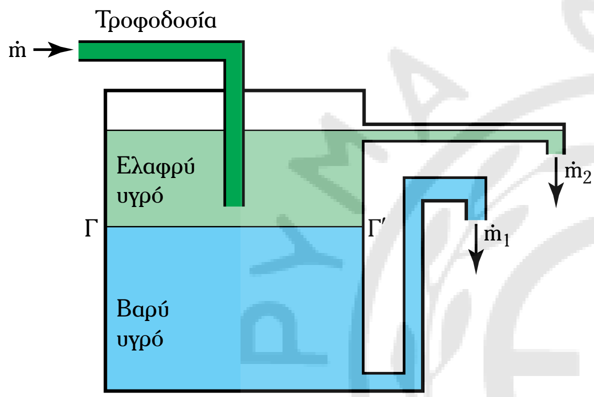
$$\rho = \delta m / \delta V$$

όπου: δm η μάζα των μορίων που βρίσκονται στον όγκο δV (αν δN ο αριθμός των μορίων και m_μ η μάζα του μορίου, τότε: $\delta m = \delta N \cdot m_\mu$).

Στατιστικά, η κατανομή των μορίων είναι ομαλή, επομένως αν στον στοιχειώδη όγκο υπάρχει πολύ μεγάλος αριθμός μορίων, οι ανταλλαγές με το περιβάλλον δεν θα τον επηρεάσουν, άρα η πυκνότητα θα έχει συγκεκριμένη τιμή. Στο σχήμα 1.2ιζ(α) παρατηρούμε πως υπάρχει μια ελάχιστη τιμή του όγκου, για την οποία σταθεροποιείται ο λόγος $\delta m/\delta V$. Ο ελάχιστος



Σχ. 2.2θ
Κατανομή πιέσεων.



Σχ. 2.2ι
Διαχωριστής βαρύτητας.

υγρών πρέπει οι πυκνότητές τους να έχουν σημαντική διαφορά, η δεξαμενή να έχει μεγάλες διαστάσεις και οι παροχές να είναι μικρές. Αυτά αποτελούν συνήθως κρίσιμα μειονεκτήματα του διαχωριστή βαρύτητας, ο οποίος όμως διαθέτει το πλεονέκτημα του ελάχιστου κόστους λειτουργίας.

Η ίδια διάταξη χρησιμοποιείται για την κατακάθιση αιωρουμένων στερεών σε ένα υγρό (***δεξαμενές καθιζήσεως***).

6) Υδραυλικό πιεστήριο.

Όπως προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής, η εξωτερική πίεση μεταδίδεται σε κάθε σημείο εντός της μάζας του υγρού. Από τον ορισμό της πιέσεως γνωρίζομε πως αυτή η πίεση έχει δημιουργηθεί από την άσκηση κάθετης δυνάμεως (όχι κατ' ανάγκη δυνάμεως βαρύτητας) επί της επιφάνειας του υγρού. Αν το υγρό βρισκόταν εκτός πεδίου βαρύτητας, τότε $g = 0$ και $p = p_{εξ}$, δηλαδή όλα τα σημεία του ρευστού θα είχαν ίδια πίεση, ίση με την $p_{εξ}$.

Ας υποθέσομε σύστημα δύο συνδυασμένων κυλίνδρων διαφορετικών διατομών A_1 και A_2 με $A_1 < A_2$, στεγανοποιημένο με έμβολα αντιστοίχων διατομών (σχ. 2.2ια). Ο χώρος που περικλείεται μεταξύ των δύο εμβόλων είναι πληρωμένος με υγρό.

Για την επιφάνεια A_1 του εμβόλου ισχύει:

$$P = F_1/A_1 \tag{1}$$

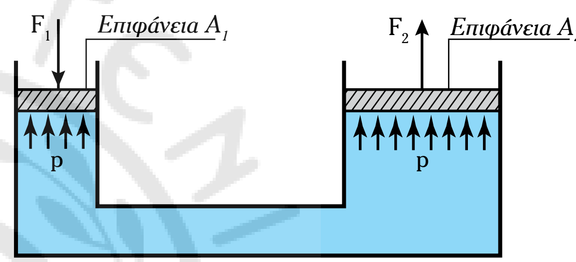
Για την επιφάνεια A_2 του εμβόλου ισχύει:

$$P = F_2/A_2 \tag{2}$$

$$\text{ή } F_1/A_1 = F_2/A_2 \text{ ή } F_1/F_2 = A_1/A_2 \tag{3}$$

$$\text{ή } F_2 = (A_2/A_1) \cdot F_1 \tag{4}$$

Η διάταξη αυτή χρησιμοποιείται στα ***συστήματα υδραυλικής υποβοηθήσεως***.



Σχ. 2.2ια

2.2.3 Υδροστατική ισορροπία σε πεδία δυνάμεων.

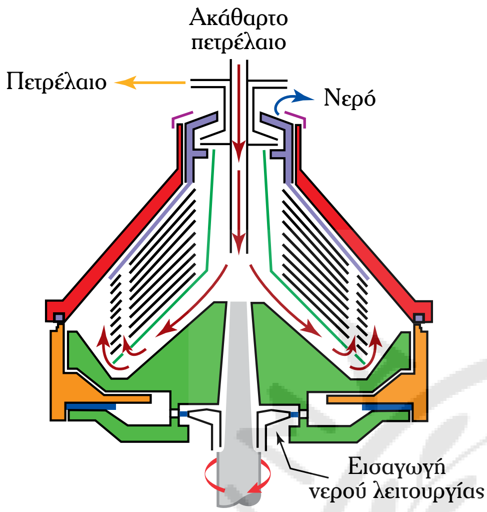
1) Υδροστατική ισορροπία σε οριζόντια επιταχυνόμενο σύστημα.

Ας εξετάσομε ένα υγρό που βρίσκεται σε δεξαμενή ακίνητου πλοίου. Οι στοιχειώδεις όγκοι του υγρού υφίστανται μόνο τη δύναμη βαρύτητας και όπως είδαμε, το υγρό βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Κάποια στιγμή το πλοίο ξεκινά και για ορισμένο χρονικό διάστημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση α. Το υγρό της δεξαμενής κινείται μαζί με το πλοίο ως ενιαίο σώμα, συνεχίζοντας να βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Οι στοιχειώδεις όγκοι του υγρού, υφίστανται τώρα, εκτός από τη δύναμη βαρύτητας Β και τη δύναμη επιταχύνσεως F. Τα δύο πεδία δυνάμεων καθορίζονται από τα ανύσματα των επιταχύνσεων g και α:

$$\vec{g} = \vec{B}/m \qquad \vec{α} = \vec{F}/m$$

Παρατηρητής όρθιος επί του πλοίου, θα νοιώσει δύναμη ίση και αντίθετη της επιταχύνουσας δυνάμεως να τον ωθεί προς την αντίθετη με την επιτάχυνση φορά. Η δύναμη αυτή καλείται στη φυσική ***δύναμη αδράνειας***. Για να μην ανατραπεί από τη ροπή που βαρύτητας g), επιτυγχάνεται πολύ ταχύτερος και καλύτερος διαχωρισμός υγρών (ακόμη και για μικρές διαφορές πυκνοτήτων), καθώς και αιωρουμένων στερεών, χωρίς σημαντικούς περιορισμούς στις παροχές.

Στο σχήμα 2.2ιη βλέπομε την τομή ενός βιομηχανικού φυγοκεντρικού διαχωριστή (του εργοστασίου de Laval).



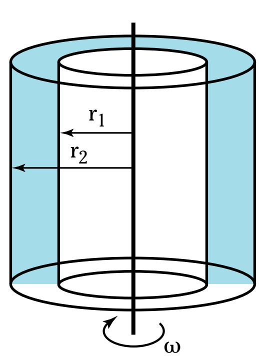
Σχ. 2.2ιη
Βιομηχανικός φυγοκεντρικός διαχωριστής.

Παράδειγμα 4

Να υπολογισθεί: α) Η μέγιστη και η ελάχιστη επιτάχυνση του φυγοκεντρικού πεδίου που δημιουργεί κυλινδρική φυγοκεντρική συσκευή ακτίνας 0,2 m αν ο όγκος του υγρού ισούται με το 50% του όγκου του κυλίνδρου και η συσκευή περιστρέφεται στις 8000 rpm (σχ. 2.2ιθ) και β) πόση θα είναι η μέγιστη πίεση αν η πυκνότητα του υγρού είναι 850 kg/m^3;

Λύση.

α) Το υγρό καταλαμβάνει τον δακτύλιο μεταξύ των ακτίνων r_1 και r_2. Ο όγκος του κυλίνδρου ισούται με $V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h$ και ο όγκος του κυλινδρικού χώρου που δεν υπάρχει υγρό $V' = \pi \cdot r_1^2 \cdot h$



Σχ. 2.2ιθ

Σύμφωνα με την εκφώνηση:

$$V'_1/V_2 = 1-0{,}5 = 0{,}5 \quad \text{ή} \quad \frac{V_1}{V_2} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{r_1^2}{r_2^2} = 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = \sqrt{0{,}5}\cdot r_2 \Rightarrow r_1 = 0{,}1414\,\text{m}$$

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot (8000/60\,\text{s}^{-1}) = 837{,}7\,\text{s}^{-1}$$

$$\alpha_1 = \omega^2 \cdot r_1 = 99.226\,\text{m/s}^2 \;\text{ή}\; \alpha_1 = 10.115 \cdot g$$

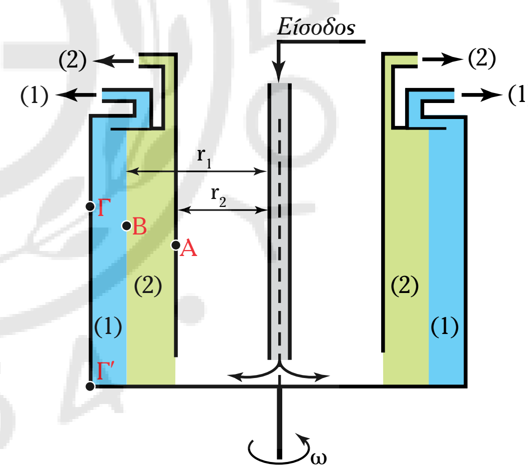
$$\alpha_2 = \omega^2 \cdot r_2 = 140.348\,\text{m/s}^2 \;\text{ή}\; \alpha_2 = 14.307 \cdot g$$

β) Η μέγιστη πίεση αναπτύσσεται στη μέγιστη απομάκρυνση απ' τον άξονα (r_2). Για $r_2 = 0{,}2$ m, $r_0 = 0{,}1414$ m.

από (2.10) $\Rightarrow p_{abs} - p_{atm} = Pg_{max} = 5964{,}8\,\text{kPa}$

Παράδειγμα 5

Ο φυγοκεντρικός διαχωριστής του σχήματος 2.2κ περιέχει νερό (1) και λάδι πυκνότητας 850 kg/m^3 (2). Αν η εσωτερική διάμετρος της συσκευής είναι 60 cm, το πάχος του στρώματος νερού 5 cm, του λαδιού 10 cm και ω = 5000 rpm, να υπολογισθεί η στατική πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών και η μέγιστη πίεση που αναπτύσσεται στη συσκευή.



Σχ. 2.2κ

Λύση.

Δεδομένα: $\rho_v = 1000\,\text{kg/m}^3$, $\rho_\lambda = 850\,\text{kg/m}^3$,
$p_A = 101{,}3\,\text{kPa}$, $n = 5000\,\text{rpm}$,
$R_\Gamma = 0{,}30\,\text{m}$
$R_\Gamma - R_B = 0{,}05\,\text{m} \Rightarrow R_B = 0{,}25\,\text{m}$
$R_B - R_A = 0{,}10\,\text{m} \Rightarrow R_A = 0{,}15\,\text{m}$

Ζητούμενα: p_B, p_Γ

Για την υδροστατική πίεση σε φυγοκεντρικό πεδίο ισχύει η εξίσωση (2.10):

$$p = p_{\varepsilon\xi} + 1/2\,\rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_o^2)$$

ντια συντεταγμένη του κέντρου πιέσεως σε συνάρτηση με την οριζόντια συντεταγμένη του κεντροειδούς:

$$\mathbf{x_P - x_C = -\rho \cdot g \cdot \frac{I_{xyc}}{p_c \cdot A}} \qquad (2.20)$$

όπου: $I_{xcy} = \int x \cdot y \cdot dA$ το γινόμενο αδράνειας της επιφάνειας ως προς άξονες x, y διερχόμενους από το κεντροειδές της.

Σημειώνομε πως όταν μία επιφάνεια έχει συμμετρία ως προς έναν απ' τους δύο άξονες, $I_{XY} = 0$ και επομένως: $x_p = x_C$.

Ροπές αδράνειας επιφανειών δίνονται στον πίνακα 3 του Παραρτήματος.

4) Δύναμη πιέσεως υγρού σε πλάγια επιφάνεια.

Έστω επίπεδη επιφάνεια που σχηματίζει γωνία θ ως προς την οριζόντια (σχ. 2.5δ). Στη στοιχειώδη επιφάνεια dA ασκείται δύναμη πιέσεως:

$$dF = p \cdot dA$$

η οποία αναλύεται σε συνιστώσες dF_o και dF_κ (οριζόντια και κατακόρυφη αντίστοιχα). Είναι:

$$dF_o = dF \cdot \sin\theta = p \cdot dA \cdot \sin\theta$$

Αλλά

$$dA \cdot \sin\theta = dA_\kappa$$

η κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας dA. Άρα:

$$dF_o = p \cdot dA_\kappa$$

και εφαρμόζοντας για την οριζόντια προβολή την εξίσωση (2.17) και για την κατακόρυφη την εξίσωση (2.18) προκύπτει:

$$F_o = p_c \cdot A_\kappa \qquad (2.21\alpha)$$

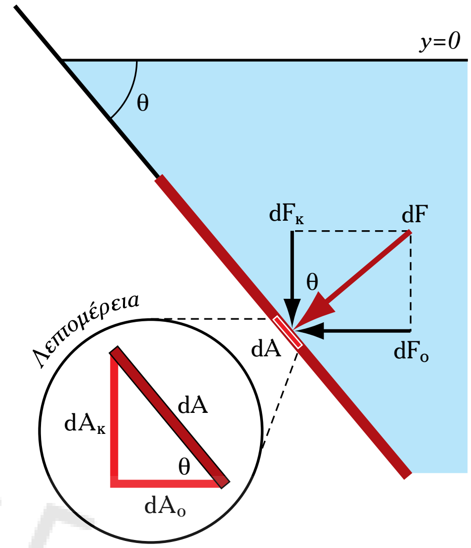
$$F_\kappa = p_c \cdot A_o \qquad (2.21\beta)$$

Άρα: ***Σε πλάγια επιφάνεια βυθισμένη σε ρευστό, η δύναμη πιέσεως αναλύεται σε οριζόντια συνιστώσα, ίση με τη δύναμη που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη προβολή της επιφάνειας, και κατακόρυφη συνιστώσα ίση με τη δύναμη που αντιστοιχεί στην οριζόντια προβολή της επιφάνειας.***

Η F_K ισούται με το βάρος του ρευστού που βρίσκεται πάνω απ' την επιφάνεια Α αυξημένο κατά την εξωτερική δύναμη πιέσεως που αντιστοιχεί στην A_o.

Η συνισταμένη δύναμη πιέσεως έχει μέτρο:

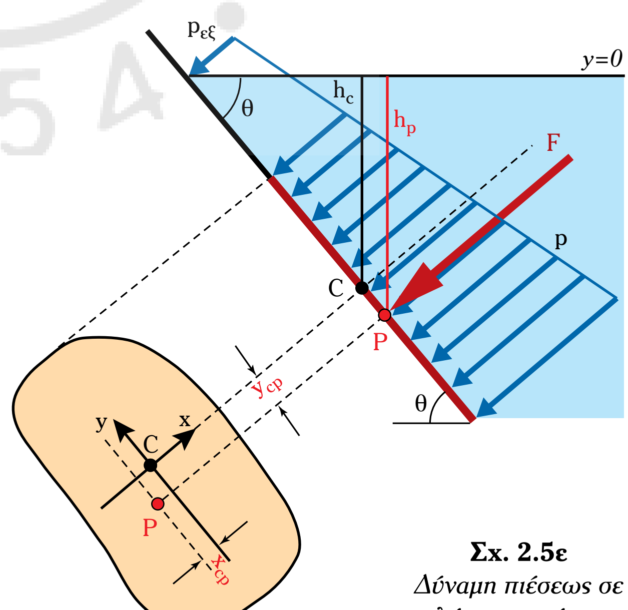
$$F = \sqrt{F_o^2 + F_\kappa^2} = p_c \cdot \sqrt{A_o^2 + A_\kappa^2} \Rightarrow \mathbf{F = p_c \cdot A} \qquad (2.21)$$



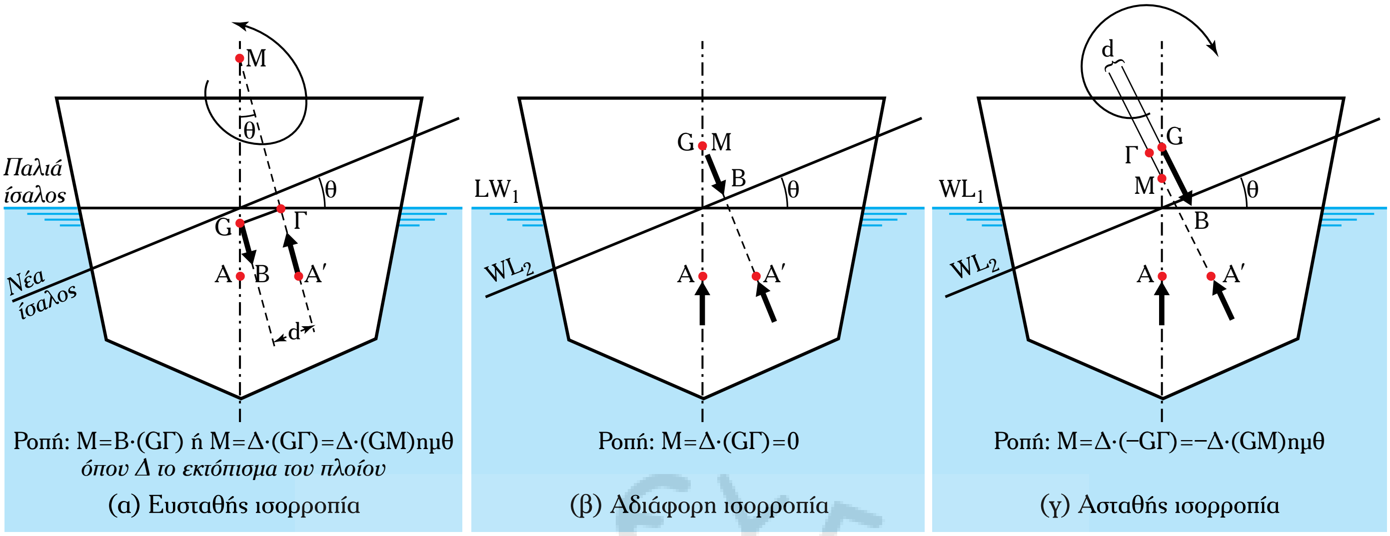
Σχ. 2.5δ
Δύναμη πιέσεως σε πλάγια επιφάνεια.

Δηλαδή το μέτρο της δυνάμεως πιέσεως και στην περίπτωση της πλάγιας επίπεδης επιφάνειας, ισούται με το γινόμενο της πιέσεως που επικρατεί στο κεντροειδές, επί το εμβαδόν της επιφάνειας. Το κεντροειδές της επιφάνειας C βρίσκεται σε βάθος h_C (το οποίο υπολογίζεται από τη γεωμετρία του σχήματος).

Για να προσδιορίσομε το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως F (κέντρο πιέσεως P), τοποθετούμε σύστημα καθέτων αξόνων x και y, διερχομένων από το κεντροειδές C, με τον y να σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 2.5ε).



Σχ. 2.5ε
Δύναμη πιέσεως σε πλάγια επιφάνεια.



Σχ. 2.7β

Επειδή τόσο το βάρος, όσο και η άνωση έχουν κατακόρυφη διεύθυνση, για να ισχύει η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma M = 0$) πρέπει να βρίσκονται (άνωση και βάρος) στον ίδιο κατακόρυφο άξονα.

Τι θα συμβεί όμως αν, λόγω κάποιας παροδικής οριζόντιας δυνάμεως, η ισορροπία διαταραχθεί;

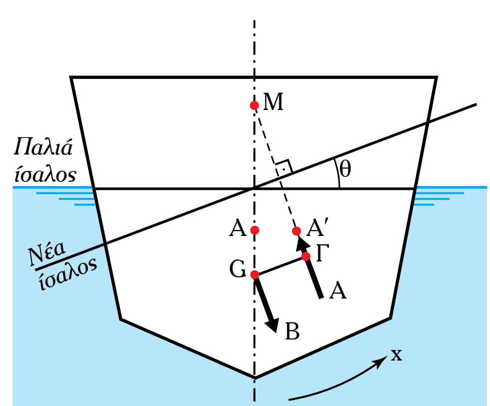
Παρατηρούμε [σχ. 2.7β(α) και 2.7γ] πως αν και το κέντρο βάρους δεν μετατοπίζεται, λόγω μετατοπίσεως του κέντρου ανώσεως το βάρος και η άνωση δεν βρίσκονται πλέον στον ίδιο κατακόρυφο άξονα, αλλά απέχουν απόσταση d. Κατά συνέπεια, δημιουργείται ζεύγος δυνάμεων (Β, Α) με αποτέλεσμα η ροπή $M = B \cdot d$ να τείνει να περιστρέψει το σώμα. Το ερώτημα είναι αν η ροπή θα επαναφέρει το σώμα στην προηγούμενη θέση του ή αν θα το στρέψει προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό κρίνεται από τη θέση του κέντρου βάρους του σώματος σε σχέση με το μετάκεντρο. Ως ***μετάκεντρο Μ*** (metacenter) ορίζεται το σημείο τομής της διευθύνσεως της ανώσεως στην τυχαία θέση αποκλίσεως, με τον άξονα του σώματος που ορίζει η διεύθυνση της ανώσεως στην θέση ισορροπίας.

Αν το κέντρο βάρους του σώματος βρίσκεται πάνω από το μετάκεντρο Μ, το ζεύγος δυνάμεων απομακρύνει οριστικά το σώμα από την προηγούμενη θέση ισορροπίας. Η πλεύση του σώματος είναι ***ασταθής*** [σχ. 2.7β(γ)].

Αν το κέντρο βάρους του σώματος βρίσκεται κάτω από το μετάκεντρο Μ, το ζεύγος δυνάμεων δημιουργεί ροπή επαναφοράς και το σώμα επανέρχεται (ταλαντευόμενο) στην προηγούμενη θέση ισορροπίας. Η πλεύση του σώματος είναι ***ευσταθής*** (σχ. 2.7γ).

Παρατηρούμε πως όσο χαμηλότερα είναι το κέντρο βάρους του σώματος, τόσο ευνοείται η ευσταθής πλεύση. ***Γενικά, όταν το κέντρο ανώσεως βρίσκεται υψηλότερα απ' το κέντρο βάρους, η πλεύση είναι ευσταθής.***

Η θέση του μετάκεντρου ως προς το κέντρο βάρους ορίζει και τις καταστάσεις ισορροπίας του πλοίου ή ενός πλέοντος σώματος, δηλαδή όταν το $GM > 0$, το κέντρο βάρους (G) βρίσκεται κάτω από το μετάκεντρο (Μ), η ισορροπία είναι ευσταθής [σχ. 2.7β(α)], όταν το $GM = 0$, το μετάκεντρο και το κέντρο βάρους ταυτίζονται. Η ισορροπία είναι αδιάφορη και το πλοίο παραμένει στην θέση με κλίση θ [σχ. 2.7β(β)], όταν το $GM < 0$, το μετάκεντρο είναι χαμηλότερα από το κέντρο βάρους, τότε η ισορροπία είναι ασταθής. Η γωνία κλίσεως τείνει να μεγαλώσει λόγω της δημιουργούμενης ροπής [σχ. 2.7β(γ)].

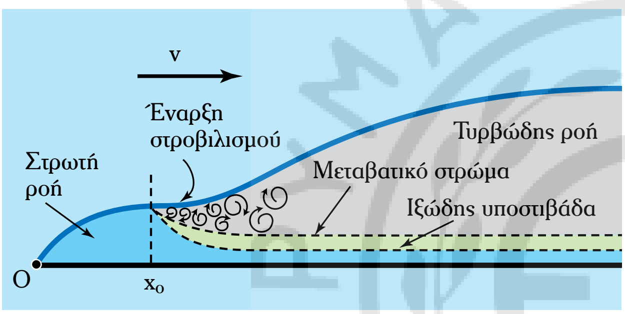


Σχ. 2.7γ

δης. Αυτό θα συμβεί όταν ο αριθμός Reynolds του ρεύματος πάνω από την πλάκα θα υπερβεί την κρίσιμη τιμή ($Re > 5 \cdot 10^5$). Επειδή χαρακτηριστικό γεωμετρικό μέγεθος είναι η απόσταση από την ακμή εισόδου, ο αριθμός Reynolds ξεκινά από την τιμή 0 (για $x = 0$) και αυξάνεται με την αύξηση του x. Η έναρξη του στροβιλισμού θα γίνει σε κάποια απόσταση x_o από την ακμή (σχ. 3.1ιβ) για την οποία θα ισχύει:

$$\frac{\mathbf{v \cdot x}}{\nu} = \mathbf{5 \cdot 10^5}$$

Για το τμήμα της πλάκας που βρίσκεται πριν το x_o, η ροή είναι στρωτή. Η περιοχή αμέσως μετά το x_o καθίσταται η έδρα δημιουργίας στροβίλων, οι οποίοι παρασύρονται συνεχώς προς τα πίσω (κατά τη διεύθυνση της ροής).

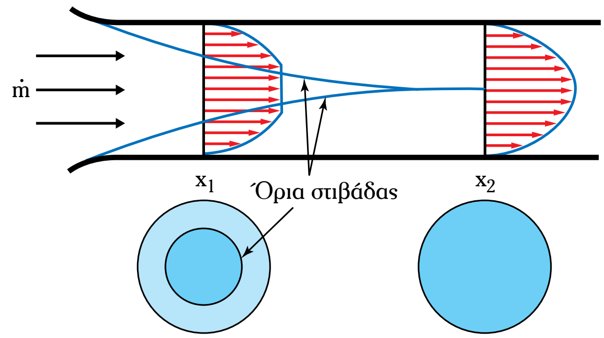


Σχ. 3.1ιβ
Οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα (τυρβώδης ροή).

Η έναρξη στροβιλισμού έχει ως αποτέλεσμα την απότομη και σημαντική αύξηση του πάχους του οριακού στρώματος. Υπολογισμοί και πειραματικές μετρήσεις έδειξαν ότι στο τμήμα πριν την έναρξη του στροβιλισμού, το πάχος της στιβάδας είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας της αποστάσεως από την ακμή εισόδου ($x^{1/2}$). Αμέσως μετά την έναρξη του στροβιλισμού και για μικρό διάστημα, καθίσταται ανάλογο του $(x^{1/2})^3 = x^{3/2}$. Αυτή η απότομη διεύρυνση του οριακού στρώματος οφείλεται στην εγκάρσια κίνηση που συνεπάγεται ο σχηματισμός στροβίλων.

2) Ροή σε σωλήνα.

Όταν το ρευστό εισέρχεται σε κυλινδρικό αγωγό (σωλήνα) διαμορφώνεται, κατά παρόμοιον τρόπο, οριακό στρώμα. Λόγω της γεωμετρίας του αγωγού, το οριακό στρώμα διαμορφώνεται περιμετρικά, όπως φαίνεται στις προβολές των διατομών του σχήματος 3.1ιγ. Το πάχος του είναι μικρό κοντά στην είσοδο (διατομή σε απόσταση x_1 από την είσοδο), αλλά σε κάποια απόσταση απ' αυτήν, όταν πλέον η ροή στο



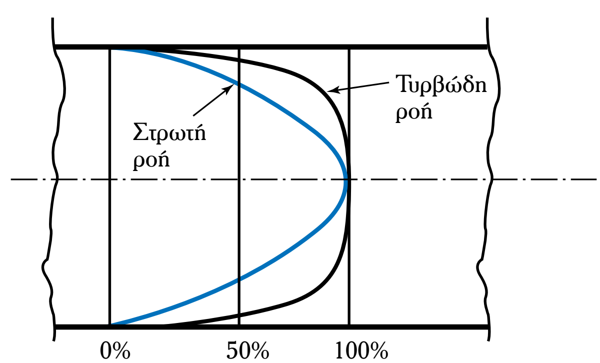
Σχ. 3.1ιγ
Οριακό στρώμα σε σωλήνα.

σωλήνα έχει αναπτυχθεί πλήρως, το οριακό στρώμα καλύπτει όλο τον αγωγό (διατομή στο x_2). Στη θέση αυτή το πάχος του οριακού στρώματος ισούται με την ακτίνα του σωλήνα ($y_o = d/2$) και δεν γίνεται να επεκταθεί άλλο. Πειραματικές μετρήσεις έδειξαν ότι σε απόσταση μεγαλύτερη από το x_2, η κατανομή ταχυτήτων παραμένει αμετάβλητη.

Η περιοχή του σωλήνα από την είσοδο ως το x_2, στο οποίο ολοκληρώνεται και σταθεροποιείται το οριακό στρώμα, καλείται ***μεταβατική περιοχή***.

Αν ο αριθμός Reynolds είναι μικρότερος της κρίσιμης τιμής ($Re < 2100$), η ροή στο σωλήνα είναι στρωτή. Για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds ($Re > 4000$), η ροή είναι τυρβώδης. Στην πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνα (δηλ. σε απόσταση από την είσοδο μεγαλύτερη του x_2), η κατανομή ταχυτήτων σε συνάρτηση με την απόσταση απ' το τοίχωμα, είναι διαφορετική στη στρωτή και στην τυρβώδη ροή.

Το σχήμα 3.1ιδ παριστάνει γραφικά την τιμή της τοπικής ταχύτητας σαν ποσοστό της μέγιστης για τη στρωτή και την τυρβώδη ροή. Παρατηρούμε πως στη στρωτή ροή, η κατανομή ταχυτήτων είναι πιο ομαλή από την αντίστοιχη κατανομή στην τυρβώδη. Στη στρωτή ροή, η ύπαρξη μόνο των διατμητικών δυνά-



Σχ. 3.1ιδ
Κατανομή ταχυτήτων.

και δίνοντας το κατάλληλο σχήμα, κυρίως στο πίσω μέρος στερεών σωμάτων που περιρρέει το ρευστό (***ρευστοδυναμικό σχήμα***).

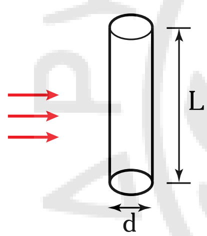
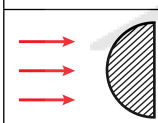
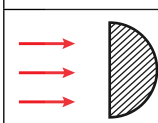
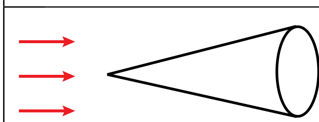
Η οπισθέλκουσα δύναμη είναι ίση και αντίθετη με την αντίσταση του σώματος στη ροή. Το μέτρο της είναι ανάλογο του εμβαδού προβολής του σώματος σε επιφάνεια κάθετη στη ροή, της πυκνότητας του ρευστού και του τετραγώνου της σχετικής ταχύτητας:

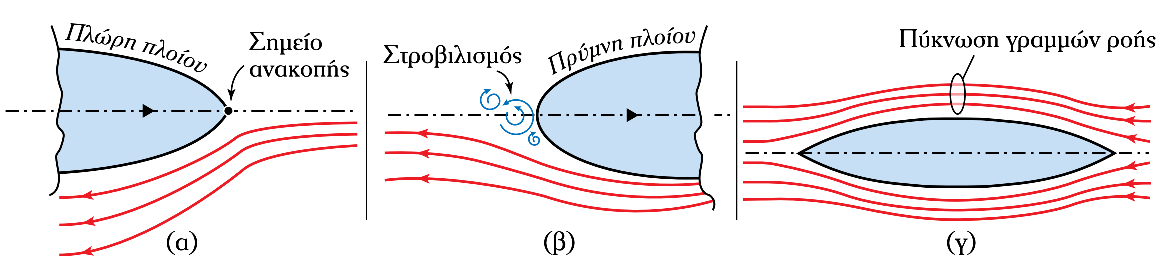
$$\mathbf{F_D = C_D \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \cdot A} \qquad (3.7)$$

Ο C_D καλείται ***συντελεστής οπισθέλκουσας*** και εξαρτάται απ' το σχήμα του σώματος [όσο πιο ρευστοδυναμικό είναι το σχήμα, τόσο μικρότερος είναι ο C_D (πίν. 3.1)], αλλά και απ' τον αριθμό Reynolds. Πιο συγκεκριμένα στην περιοχή της στρωτής ροής ο συντελεστής οπισθέλκουσας ενός σώματος μειώνεται με την αύξηση του Re, στην περιοχή της τυρβώδους παρουσιάζεται σχετικά σταθερός (κι αυτήν την τιμή καταγράφουν οι σχετικοί πίνακες). Αλλά για πολύ μεγάλες τιμές του Re, ο C_D παρουσιάζει απότομη πτώση.

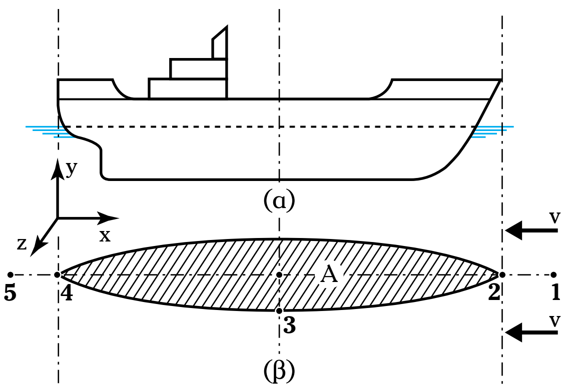
Στο σχήμα 3.1ιστ φαίνονται οι γραμμές ροής του θαλασσινού νερού στην πλώρη, στην πρύμνη και γύρω από την ίσαλο επιφάνεια πλοίου. Με τις μορ-

Πίνακας 3.1
Συντελεστές οπισθέλκουσας για διάφορα σώματα.

Σώμα	***Εμβαδόν***	***Αναλογία διαστάσεων***	C_D
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	L/d = 1 L/d = 2 L/d = 4	0,91 0,85 0,87
	d · L	L/d = 1 L/d = 2 L/d = 5 L/d = 10 L/d = 40	0,65 0,68 0,74 0,82 0,98
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$		0,34
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$		1,33
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	α = 60° α = 30°	0,51 0,34



Σχ. 3.1ιστ



Σχ. 3.6β

β) Το νερό μακριά του πλοίου κινούμενο με ταχύτητα v.

γ) Την ταχύτητα του νερού στα πλευρά του πλοίου v_w.

3. Σε πλοίο που διαπλέει την διώρυγα (ή ποτάμι) του σχήματος 3.6γ:

α) Εφαρμόστε στην εξίσωση Bernoulli στην γραμμή ροής 1, 2, 3.

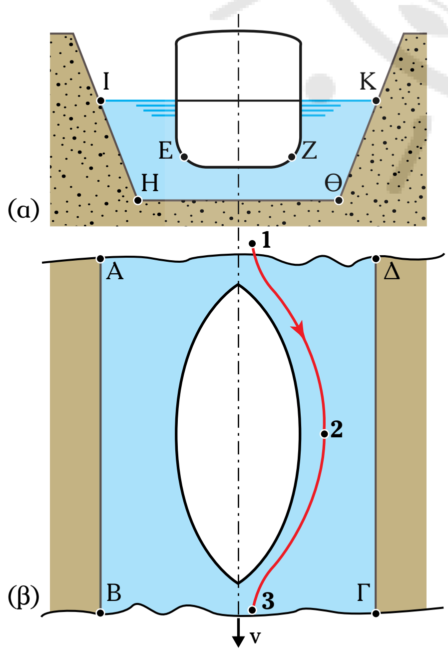
β) Τι θα συμβεί αν το πλοίο πλησιάζει την μία από τις δύο πλευρές της διώρυγας;

γ) Καθώς το πλοίο θα αρχίσει να κινείται τι θα συμβεί με το βύθισμά του;

δ) Ο διάπλους πρέπει να γίνει με μικρή ή μεγάλη ταχύτητα;

ε) Όλες οι απαντήσεις να δικαιολογηθούν.

στ) Να περιγράψετε το οριακό στρώμα στις πλευρές του πλοίου και στα τοιχώματα της διώρυγας.



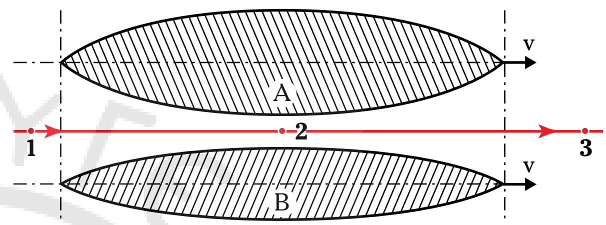
Σχ. 3.6γ

4. Δύο πλοία (σχ. 3.6δ) κινούνται σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους:

α) Να εφαρμοσθεί η εξίσωση Bernoulli στην γραμμή ροής 1, 2, 3. Τα σημεία 1, 3 να θεωρηθούν μακριά από τις ισάλους επιφάνειες Α, Β.

β) Ποιος είναι ο κίνδυνος για μια τέτοια παράλληλη πλεύση;

γ) Να εκτιμηθεί η ταχύτητα v_2 του νερού στην επιφάνεια στο σημείο 2, αν αυτή θεωρηθεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους 2 m και βάθος 5 m, σε σχέση με την ταχύτητα v_3 στο σημείο 3.



Σχ. 3.6δ

5. Νερό θερμοκρασίας 10°C που ρέει με ταχύτητα 1 m/s, συναντά επίπεδη πλάκα τοποθετημένη παράλληλα με τη διεύθυνση της ροής. Αν το μήκος της πλάκας (κατά τη διεύθυνση της ροής) είναι 60 cm, η ροή επί του οριακού στρώματος θα είναι τυρβώδης;

[όχι : $x_a = 0{,}68$ m > 0,60 m]

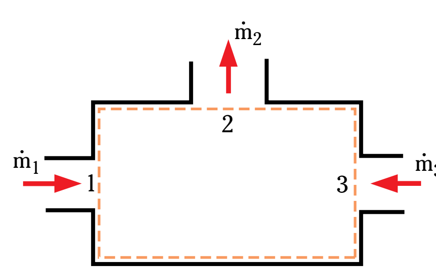
6. Σε σωλήνα διαμέτρου 8 cm ρέει λάδι ιξώδους $150 \cdot 10^{-3}$ kg/ms και πυκνότητας 900 kg/m^3. Μέχρι ποια τιμή παροχής παραμένει η ροή στρωτή; Ποια θα ήταν η αντίστοιχη οριακή παροχή αν αντί για λάδι έρεε νερό 20°C;

[79 m^3/h, 0,48 m^3/h]

7. Σωλήνας 6 in καταλήγει σε ακροφύσιο με τελική διάμετρο 1,5 in. Αν η παροχή νερού στο σωλήνα είναι 90 m^3/h, να υπολογισθούν οι ταχύτητες και ο αριθμός Reynolds στην είσοδο και στην έξοδο του ακροφυσίου. Είναι η ροή στρωτή ή τυρβώδης;

[1,37 m/s – $2{,}1 \cdot 10^5$, 21,9 m/s – $8{,}3 \cdot 10^5$]

8. Στον όγκο ελέγχου του σχήματος 3.6ε ρέει υγρό πυκνότητας 800 kg/m^3. Η ροή είναι σταθερή και δεν υπάρχει

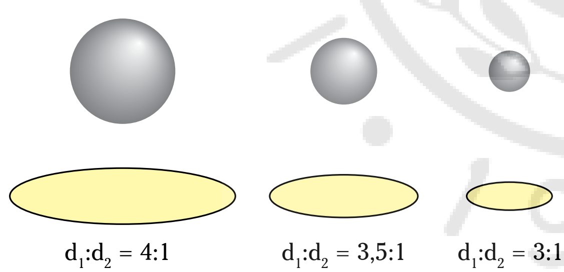


Σχ. 3.6ε

10^{o}. ***Στη γεωμετρική ομοιότητα οι γωνίες μοντέλου και ομοιώματος είναι ίσες.***

Θα μπορούσαμε να παρομοιάσομε την όλη διαδικασία δημιουργίας μοντέλου γεωμετρικά όμοιου με το πρωτότυπο, με την επιθυμητή σμίκρυνση φωτογραφίας του πρωτοτύπου. Πρέπει όμως να συμπληρώσομε με κάποια επί πλέον σημαντικά για τη Μηχανική των Ρευστών γεωμετρικής φύσεως στοιχεία που δεν είναι δυνατόν να τα αντιληφθούμε από το σχήμα. ***Η τραχύτητα της επιφάνειας του μοντέλου πρέπει να διατηρεί την κλίμακα, άρα να ισούται με το 1:10 της τραχύτητας του πρωτοτύπου. Επίσης, πρέπει να διατηρείται η κλίμακα στους συνδέσμους (ηλώσεις) κ.λπ.. Κάθε απομάκρυνση από αυτές τις λεπτομέρειες, παραβιάζει τη γεωμετρική ομοιότητα και καθιστά την πειραματική διαδικασία επισφαλή.***

Σημειώνομε πως μοντέλα που μακροσκοπικά φαίνονται όμοια, ίσως να παραβιάζουν τις παραπάνω αρχές της γεωμετρικής ομοιότητας με το πρωτότυπο και κατά συνέπεια να μην είναι συγκρίσιμα μ' αυτό. Στο σχήμα 4.2β, οι σφαίρες είναι γεωμετρικά όμοιες, με κλίμακα ίση με το λόγο των ακτίνων τους. Κατά συνέπεια μπορούμε να προχωρήσομε εξετάζοντας και τις άλλες απαιτήσεις ομοιότητας. Όμως τα ελλειψοειδή, αν και φαίνονται γεωμετρικά όμοια, στην πραγματικότητα δεν είναι, αφού οι λόγοι της μεγάλης προς τη μικρή διάμετρό τους είναι διαφορετικοί.



Σχ. 4.2β
Γεωμετρικά όμοιες σφαίρες και ανόμοια ελειψοειδή.

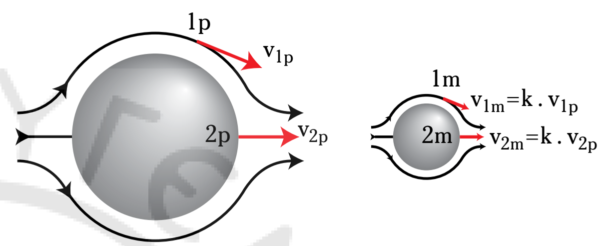
4.2.3 Κινηματική ομοιότητα.

Για να υπάρχει κινηματική ομοιότητα μεταξύ μοντέλου και πρωτοτύπου, απαιτείται εκτός από τη σταθερή αναλογία μηκών (δηλ. τη γεωμετρική ομοιότητα) και σταθερή αναλογία χρόνων, άρα και ταχυτήτων. Κατά αντιστοιχία με τα ομόλογα χωρικά, έχομε και τα ***ομόλογα χρονικά σημεία***.

Ένας περιεκτικός ορισμός της κινηματικής ομοιότητας, είναι ο ακόλουθος: ***Δύο συστήματα είναι κινηματικά όμοια, αν ομόλογες στοιχειώδεις μάζες βρίσκονται σε ομόλογες θέσεις σε ομόλογους χρόνους.***

Η γεωμετρική ομοιότητα προκύπτει σχετικά εύκολα από την κλίμακα των μηκών. Όμως η αναλογία χρόνου μεταξύ μοντέλου και πρωτοτύπου, συνήθως απαιτεί επί πλέον μέτρα και εκτιμήσεις.

Μία απλή αλλά ιδανική περίπτωση είναι η ατριβής ροή χωρίς την ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας (σχ. 4.2γ). Τέτοιες ροές είναι κινηματικά όμοιες με ανεξάρτητες κλίμακες μήκους και χρόνου.



Σχ. 4.2γ
Κινηματική ομοιότητα: Ατριβής ροή χωρίς την ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας.

Αν όμως στην ατριβή ροή υπάρχει και ελεύθερη επιφάνεια, απαιτείται εκτός από τη γεωμετρική ομοιότητα, το πρωτότυπο και το μοντέλο να έχουν τον ίδιο αριθμό Froude (ο οποίος περιλαμβάνει μόνο διαστάσεις μήκους και χρόνου, δηλ. είναι μια καθαρά κινηματική παράμετρος που καθορίζει τη σχέση μεταξύ μήκους και χρόνου):

$$\mathbf{Fr_p = \frac{v_p^2}{L_p \cdot g} = \frac{v_m^2}{L_m \cdot g} = Fr_m} \qquad (4.11)$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει σχέση μεταξύ της κλίμακας μήκους και της κλίμακας ταχύτητας. Πιο συγκεκριμένα, αν η κλίμακα μήκους είναι:

$$L_m / L_p = \alpha \qquad (4.11\alpha)$$

η παραπάνω εξίσωση δίνει για την κλίμακα της ταχύτητας:

$$\frac{v_m}{v_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2} = \sqrt{\alpha} \qquad (4.11\beta)$$

και την κλίμακα του χρόνου:

$$\frac{T_m}{T_p} = \frac{L_m / v_m}{L_p / v_p} = \sqrt{\alpha} \qquad (4.11\gamma)$$

Αν η ροή δεν είναι ατριβής, δηλαδή το ιξώδες, η επιφανειακή τάση και η συμπιεστότητα είναι σημαντικά, η επίτευξη κινηματικής ομοιότητας εξαρτάται από την επίτευξη δυναμικής ομοιότητας.

ρως αποδεκτό και χρησιμοποιείται από τους μηχανικούς για τον γρήγορο υπολογισμό του συντελεστή τριβής f. Πρόκειται ουσιαστικά για μία σχέση με τη μορφή διαγράμματος που εκφράζει τον συντελεστή τριβής f (άξονας τεταγμένων) σε συνάρτηση με τον αριθμό Reynolds (άξονας τετμημένων) και τη σχετική τραχύτητα ε/d (καμπύλες)[6]:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}\left(\mathbf{Re} = \frac{\mathbf{v \cdot d}}{\boldsymbol{\nu}}, \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{d}}\right) \tag{5.23}$$

Η τυπική χρήση του διαγράμματος φαίνεται στο σχήμα 5.4η:

1) Υπολογίζομε τη σχετική τραχύτητα ε/d και εντοπίζομε την αντίστοιχη καμπύλη στο διάγραμμα (π.χ. $\varepsilon/d = 0{,}0020$).

2) Υπολογίζομε τον αριθμό Reynolds (π.χ. $Re = 8 \cdot 10^4$).

3) Βρίσκομε το σημείο τομής της καμπύλης ε/d και της τετμημένης Re.

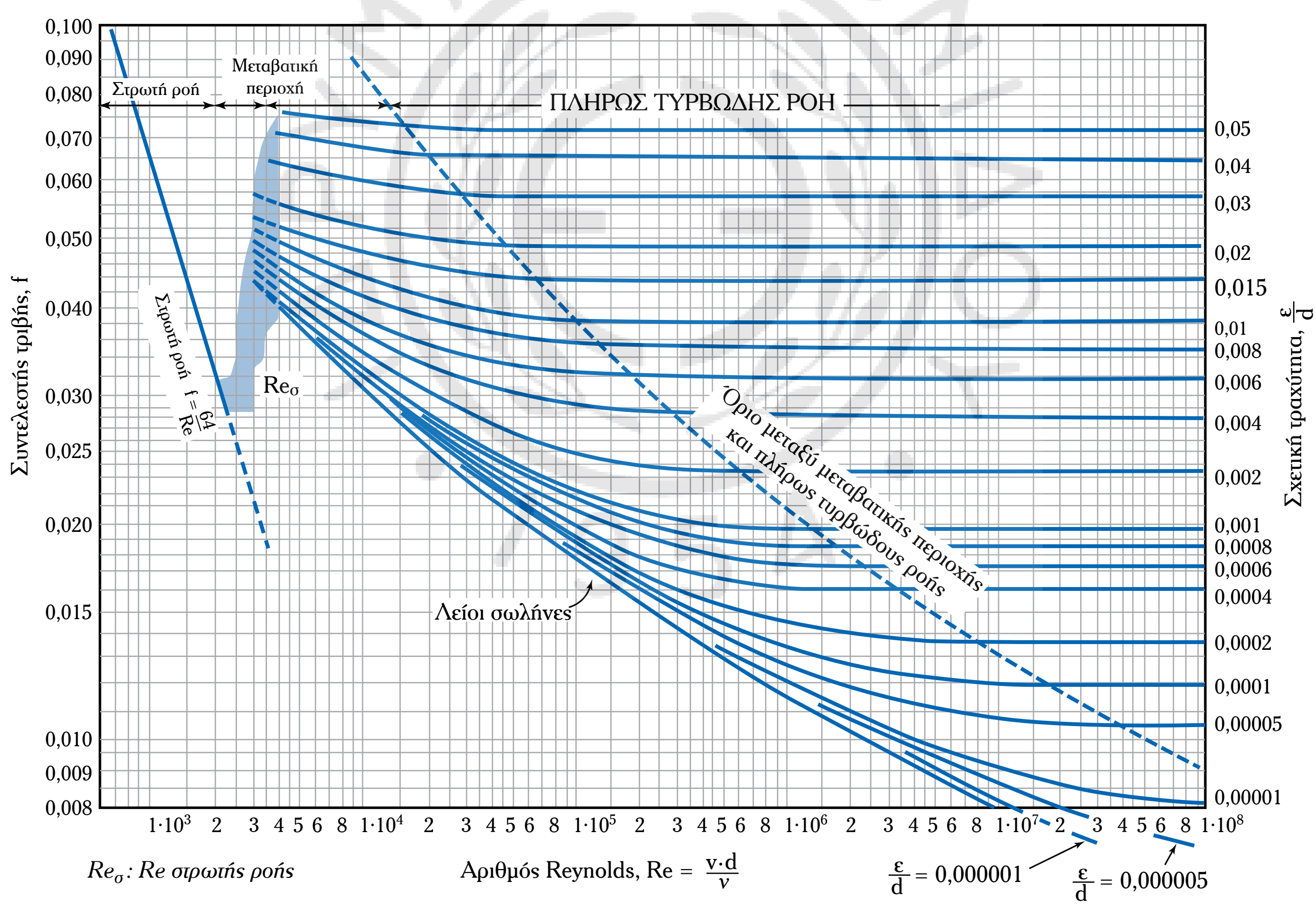
4) Διαβάζομε στο διάγραμμα την τιμή του συντελεστή τριβής που αντιστοιχεί στο σημείο τομής ($f = 0{,}026$) (σχ. 5.4θ).

Ευδιάκριτες είναι τρεις περιοχές του διαγράμματος Moody:

1) ***Περιοχή στρωτής ροής (α)*** [περιοχή (α) (σχ. 5.4θ)]. Η τιμή του συντελεστή τριβής εξαρτάται μόνο απ' τον αριθμό Reynolds ($f = 64/Re$).

Μεταξύ της πρώτης και δεύτερης περιοχής, για τιμές του αριθμού Reynolds από 2100 ως περίπου 4000, υπάρχει όπως είδαμε, η ***κρίσιμη περιοχή***, στην οποία η στρωτή ροή μετατρέπεται σταδιακά σε τυρβώδη.

2) ***Μεταβατική περιοχή (β)*** [περιοχή (β), (σχ. 5.4θ)]. Σ' αυτήν, η ροή είναι τυρβώδης, αλλά όχι



Σχ. 5.4η
Διάγραμμα Moody.

[6] Το f είναι συνάρτηση των Re, $\frac{e}{d}$.

θέση της ροπής προκύπτει το διάνυσμα της στροφορμής [σχ. 6.6α(γ)] με μέτρο:

$$L = r \cdot (m \cdot v) \cdot \sin\theta \qquad (6.21\beta)$$

Αρχή διατηρήσεως της στροφορμής: Σε αντιστοιχία με την αρχή διατηρήσεως της ορμής, έχομε την αρχή διατηρήσεως της στροφορμής.

Κατά την περιστροφική κίνηση ενός σώματος (ή συστήματος), αν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών που ασκούνται σ' αυτό ισούται με μηδέν, η στροφορμή του παραμένει σταθερή.

Εξίσωση της στροφορμής: Ο Δεύτερος Νόμος του Newton, εφαρμοζόμενος στην περιστροφική κίνηση ενός συστήματος, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ***αίτιο της μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, αποτελεί η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών*** που ασκούνται σ' αυτό:

$$\Sigma\vec{M} = \frac{d\left[\vec{r}\times(m\cdot\vec{v})\right]}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{\mathbf{L}}_2 - \vec{\mathbf{L}}_1 = \int_1^2 \Sigma\vec{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{dt} \qquad (6.22)$$

Εφαρμόζοντας αυτήν τη σχέση σε όγκο ελέγχου ρευστού που εκτελεί περιστροφική κίνηση και εργαζόμενοι κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν της παραγράφου 6.2, καταλήγομε στην εξίσωση:

$$\Sigma\vec{\mathbf{M}} = \sum\nolimits_{\varepsilon\xi} \dot{\mathbf{m}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_i - \sum\nolimits_{\varepsilon\iota\sigma} \dot{\mathbf{m}}_j \cdot \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_j \qquad (6.23)$$

Για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού:

$$\dot{m}_i = \rho\cdot\dot{V}_i,\quad \dot{m}_j = \rho\cdot\dot{V}_j \quad \text{και} \quad \sum\nolimits_{\varepsilon\xi}\dot{V}_i = \sum\nolimits_{\varepsilon\iota\sigma}\dot{V}_i$$

Αν ο όγκος ελέγχου έχει μία είσοδο και μία έξοδο:

$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho\cdot\dot{V}$ και η σχέση γίνεται:

$$\Sigma\dot{M} = \rho\cdot\dot{V}\cdot(\dot{r}_2\times\dot{v}_2 - r_1\times\dot{v}_1) \qquad (6.24)$$

Τα μεγέθη που εισάγει η εξίσωση της στροφορμής, αντιμετωπίζονται στον τρισδιάστατο χώρο. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας τις προβολές των διανυσμάτων της αποστάσεως και της ταχύτητας στο επίπεδο xy, προκύπτει η προβολή της ροπής στον άξονα z. Κατ' αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν οι προβολές της ροπής κατά τους άξονες x και y:

$$\Sigma M_z = \rho\cdot\dot{V}\cdot(\dot{r}_{2xy}\times\dot{v}_{2xy} - \dot{r}_{1xy}\times v_{1xy}) \qquad (6.24\alpha)$$

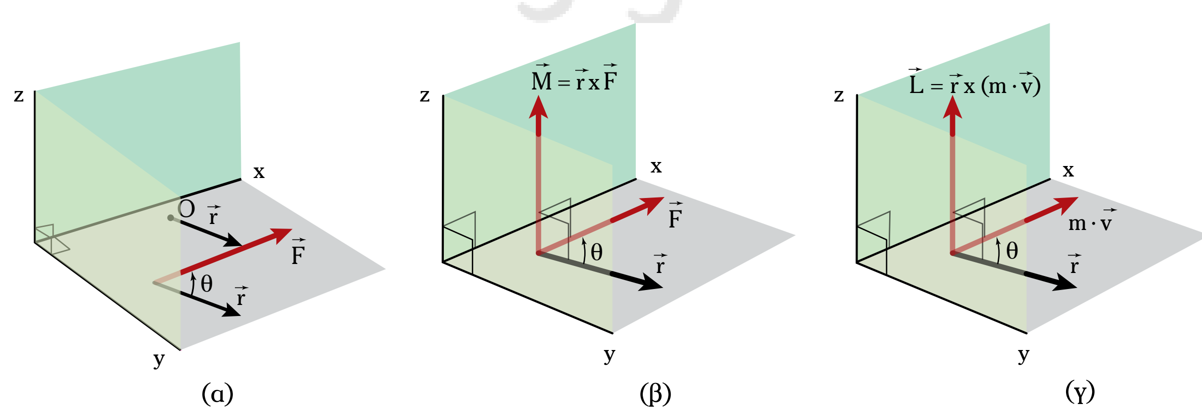
$$\Sigma M_y = \rho\cdot\dot{V}\cdot(\dot{r}_{2xz}\times\dot{v}_{2xz} - \dot{r}_{1xz}\times\dot{v}_{1xz}) \qquad (6.24\beta)$$

$$\Sigma M_x = \rho\cdot\dot{V}\cdot(\dot{r}_{2yz}\times\dot{v}_{2yz} - \dot{r}_{1yz}\times\dot{v}_{1yz}) \qquad (6.24\gamma)$$

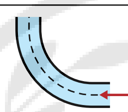
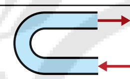
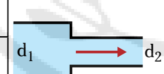
Είναι προφανές ότι μας συμφέρει (όταν είναι δυνατόν) να επιλέγομε έτσι τους άξονες συντεταγμένων, ώστε η διεύθυνση του διανύσματος της συνισταμένης ροπής να συμπίπτει με τον έναν από αυτούς, συνήθως τον z. Σ' αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση (6.24α) είναι επαρκής για τον υπολογισμό της συνισταμένης ροπής.

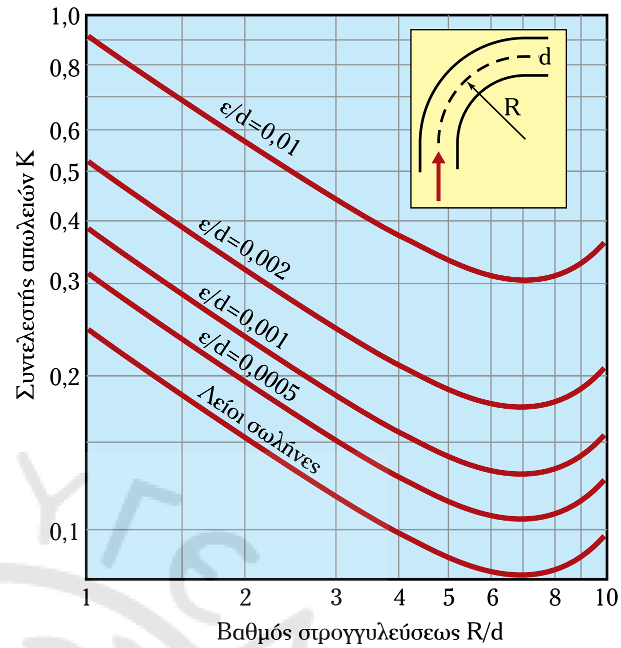
Στα προβλήματα στροφορμής πρέπει να υπολογίζομε προσεκτικά τη ροπή όλων των εξωτερικών δυνάμεων. Επίσης, τις εισερχόμενες και εξερχόμενες ροές ορμής, φροντίζοντας να προσημαίνομε σωστά τα μεγέθη.

Με τη βοήθεια της εξισώσεως της στροφορμής, επιλύονται και προβλήματα αντιμετωπίσεως ροπών, οι οποίες οφείλονται στις δυνάμεις πιέσεως που αναπτύσσονται κατά τη ροή. Όπως θα διαπιστώσομε με το ακόλουθο παράδειγμα, η μεθοδολογία που ακολουθούμε για τον υπολογισμό των ροπών, είναι ανάλογη με τη μεθοδολογία υπολογισμού δυνάμεων.

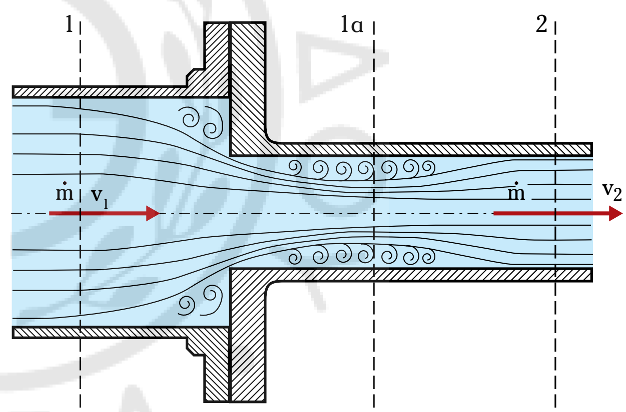


Σχ. 6.6α
Η ροπή και η στροφορμή ως εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων.

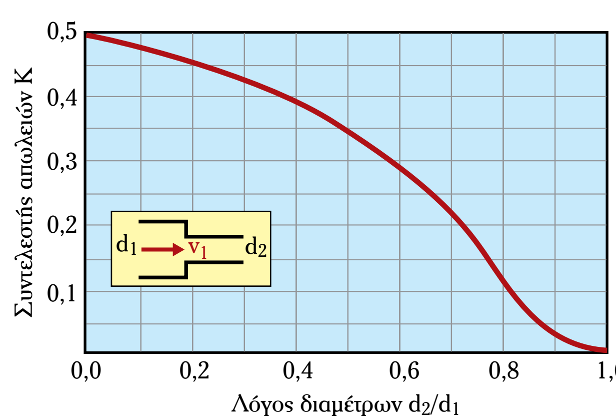
	Περιγραφή αιτίου τοπικής απώλειας	K_i	
	Αλλαγή διευθύνσεως		
	Καμπύλες γωνίες 90° (βλ. και σχ. Π.1β)	0,2 – 0,7	
	Καμπύλες γωνίες 180°	2,0	
4.	**Μεταβολή διαμέτρου**		
	Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0{,}2$	0,45	
	Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0{,}4$ (βλ. σχ. Π.1γ και Π.1δ)	0,4	
	Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0{,}6$ (βλ. σχ. Π.1γ και Π.1δ)	0,3	
	Απότομη στένωση με $d_2/d_1 = 0{,}8$ (βλ. σχ. Π.1γ και Π.1δ)	0,13	



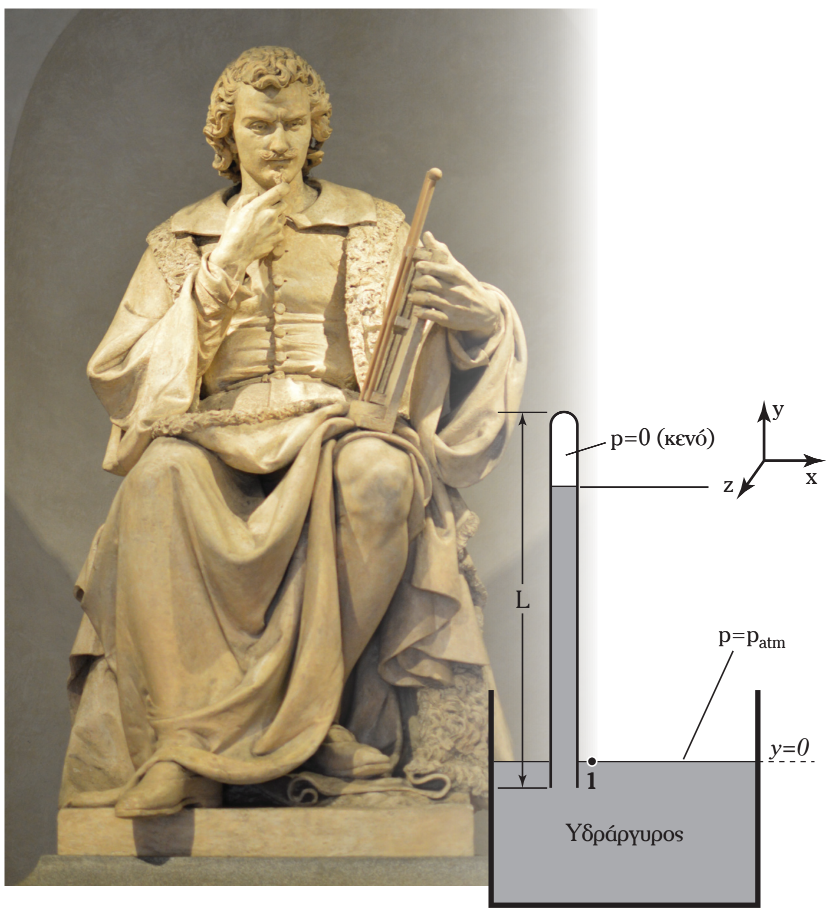
Σχ. Π.1β
Στρογγυλεμένη γωνία 90°.



Σχ. Π.1γ
Απότομη στένωση διατομής.



Σχ. Π.1δ
Διάγραμμα απότομης στενώσεως διατομής.



Εβαντζελίστα Τορικέλι (1608 - 1647),
Ιταλός φυσικός και μαθηματικός, γνωστός για
την εφεύρεση του υδραργυρικού βαρόμετρου.
Μουσείο Φυσικής Ιστορίας της Φλωρεντίας.

ISBN 978-960-337-132-8