



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ Ο.Α.Ε.Δ.  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΤΟΜΟΣ Α΄

# ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ

ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΕΩΣ ΕΡΓΑΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ Ο.Α.Ε.Δ.

1. *Νεοελληνικά Ἀναγνώσματα.*
2. *Μαθηματικά, Τόμ. Α΄, Β΄.*
3. *Φυσική.*
4. *Χημεία.*
5. *Πρόληψις Ἀτυχημάτων.*

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἰδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «Ίδρύματος Εὐγενίδου» προείδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισε τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἡθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν Ἰδρύματος, ποῦ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς Ἑλλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἰδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιοῦμενοι οἱ σκοποὶ ποῦ ὠραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

\* \* \*

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἰδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων, τόσον διὰ λόγους θεωρητικoὺς ὅσον καὶ πρακτικούς.

Ἐκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Εἰδικώτερον, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰ βιβλία τῶν μαθητῶν τῶν ἐκπαιδευτικῶν μονάδων τοῦ Ὁργανισμοῦ Ἀπασχολήσεως Ἑργατικοῦ Δυναμικοῦ, διὰ τοῦ ἀπὸ 7ης Ἰουλίου 1972 ὑπογραφέντος ἰδιωτικοῦ συμφωνητικοῦ, τὸ Ἰδρυμα ἀνέλαβε τὴν ἔκδοσίν των, ἐν πλήρει καὶ στενῇ συνεργασίᾳ μετὰ τῶν ἀρμοδίων ὑπηρεσιῶν τοῦ Ὁργανισμοῦ.

Ὁ Ὁργανισμὸς ὡς κύριος φορεὺς τῆς ἐφαρμογῆς τῆς πολιτικῆς ἀπασχολήσεως τοῦ Ἑργατικοῦ Δυναμικοῦ τῆς χώρας ἀκολουθεῖ εὐρὺ πρόγραμμα ἐκπαιδεύσεως τῶν νέων εἰς τὰ τεχνικὰ ἐπαγγέλματα, καλύπτον τὸ σύνολον σχεδὸν τῶν εἰδικότητων τοῦ τεχνικοῦ τομέως.

Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἥδη ἀπὸ τοῦ ἔτους 1953 ἐφαρμόζεται ἐντὸς τῶν κόλπων του τὸ σύστημα Τεχνικῆς καὶ Ἐπαγγελματικῆς Ἐκπαιδεύσεως



τῶν νέων διὰ τῆς Μαθητείας, κατὰ τὰ πρότυπα τῶν ἀνεπτυγμένων βιομηχανικῶς χωρῶν.

Σήμερον λειτουργοῦν καθ' ἅπασαν τὴν χώραν 42 Κέντρα καὶ Σχολαὶ Μαθητείας, φοιτοῦν δὲ εἰς αὐτὰς περίπου 12.000 μαθητεούμενοι, οἱ ὅποιοι ἐκπαιδεύονται εἰς 31 διαφοροὺς εἰδικότητας.

Διὰ τῆς ἐκδόσεως ταύτης ἀκριβῶς θὰ παρασχεθοῦν εἰς τοὺς μαθητὰς-τεχνίτας τῶν ὡς ἄνω Σχολῶν ἀναγκαῖα ἐκπαιδευτικὰ βοηθήματα, τὰ ὅποια ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ ἐν ταῖς Σχολαῖς διδασκόμενα μαθήματα καὶ τὰ ὅποια θὰ δύνανται νὰ συμβουλευῶνται καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ ἐπαγγελματικοῦ των βίου.

\* \* \*

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἰδρύματος καταβάλλουν κάθε προσπάθειαν, ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῇ εἰς ἀπλὴν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἐκάστη σειρά τῶν βιβλίων. Ἡ τιμὴ των ὠρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς ἀπόρους μαθητὰς.

## ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

**Ἀλέξανδρος Ι. Παπᾶς**, Ὁμ. Καθηγητῆς Ε.Μ.Π., Πρόεδρος.

**Χρυσόστομος Φ. Καβουνίδης**, Διπλ. Μηχ.-Ἡλ. Ε.Μ.Π., Ἀντιπρόεδρος.

**Μιχαὴλ Γ. Ἀγγελόπουλος**, Τακτικὸς Καθηγητῆς Ε.Μ.Π.

**Ἀναστασία Σακελλαριάδη**, Διευθύντρια Α', Ἐκπρόσωπος Ο.Α.Ε.Δ.

**Φώτιος Παπαγεωργίου**, Ἐκπρόσωπος Ο.Α.Ε.Δ.

**Κωνσταντῖνος Α. Μανᾶφης**, Μον. Ἐπικ. Καθηγητῆς Παν/μίου Ἀθηνῶν, Σύμβουλος ἐπὶ τῶν ἐκδόσεων τοῦ Ἰδρύματος.

**Δημοσθένης Π. Μεγαρίτης**, Γραμματεὺς τῆς Ἐπιτροπῆς.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΧΟΛΩΝ ΜΑΘΗΤΕΙΑΣ Ο.Α.Ε.Δ.

---

ΑΝΔΡΕΟΥ Φ. ΤΣΑΤΣΟΥΛΗ  
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΣΧΟΛΗΣ ΥΠΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΑΘΗΝΩΝ  
ΔΙΠΛ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥ - ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ Ε.Μ.Π.  
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ Α'

ΑΘΗΝΑΙ  
1975



## Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τò βιβλίο αυτό έχει γραφή γιά τούς μαθητάς τῶν τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ Ο.Α.Ε.Δ. Ἀποβλέπει εἰς τò νά δώσῃ τίς βασικές καί ἀπαραίτητες γνώσεις, ὥστε οἱ μαθηταί νά καταστοῦν ἱκανοί νά λύνουν τὰ προβλήματα, πού θά ἀντιμετωπίσουν τόσο σάν μαθητευόμενοι, στήν ἀρχή, ὅσο καί σάν τεχνῖται ἀργότερα.

Κατά τήν συγγραφή τοῦ βιβλίου ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ μαθηταί ἔχουν ἀπό τò σχολεῖο πού ἔρχονται τίς βασικές γνώσεις γιά τούς ἀριθμούς, τίς πράξεις μ' αὐτούς καί τὰ ἀπλά γεωμετρικά σχήματα καί γι' αὐτό οἱ γνώσεις αὐτές δέν ἀναπτύσσονται πολύ. Περιλαμβάνονται ὁμως σ' αὐτό ὅλες οἱ ἀπαραίτητες γνώσεις, πού πρέπει νά μάθουν οἱ μαθηταί στό νέο τους σχολεῖο, μέ κάθε λεπτομέρεια καί σέ ὅση ἑκτασί προβλέπει τò ἀναλυτικό πρόγραμμα.

Ὅλο τò βιβλίο εἶναι γραμμένο μέ ἐπαγωγικό τρόπο. Δίνεται σχεδόν πάντα πρῶτα τò ἀπλό παράδειγμα, πού εἶναι συνήθως πρόβλημα βγαλμένο ἀπό τήν πράξι καί ἀκολουθεῖ ἡ λύσι του· στήν συνέχεια βγαίνει τò συμπέρασμα τῆς λύσεως καί διατυπώνεται ὁ κανών, πού ἔχει γενική ἐφαρμογή.

Στό βιβλίο αὐτό δέν πρέπει νά ἀναζητηθοῦν θεωρητικές λύσεις τῶν προβλημάτων, μέ αὐστηρές μαθηματικές ἀρχές. Ἀντί αὐτοῦ ἔχει εἰσαχθῇ ἡ ἀπόδειξι μέ βάσι τόν ἀπλό λογικό συλλογισμό, πού εἶναι εὐκόλα ἀντιληπτός. Τοῦτο δέ, γιατί πιστεύω ὅτι τὸν μαθητὴ ἐνδιαφέρει βασικά τò δικαιολογημένο, μέ ἀπλό τρόπο, συμπέρασμα, πού τοῦ παρέχει *τὴν μαθηματικὴ ἔννοια* ἀπλᾶ, ἀναλυτικά καί μέ πρακτικό τρόπο.

Τò βιβλίο εἶναι πλουτισμένο μέ ἀπλᾶ σχέδια, τὰ περισσότερα παρμένα ἀπό τήν καθημερινή ζωὴ καί πράξι.

Στό τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθενται πολλές ἀσκήσεις, παρμένες ὅλες ἀπό τήν πράξι, πολλές ἀπό τίς ὁποῖες συνοδεύονται καί ἀπό κατάλληλα σχήματα. Σέ κάθε μία δίνεται καί τò ἀποτέλεσμα, μέσα σέ παρένθεσι, γιά νά ἐλέγχουν οἱ μαθηταί τίς λύσεις πού εὐρίσκουν.

Σκοπὸς τοῦ βιβλίου εἶναι νά ὀδηγήσῃ τὸν μαθητὴ νά κατανοήσῃ πλήρως τίς βασικές μαθηματικές ἔννοιες, νά τίς ἀφομοιώσῃ καί ἔτσι νά μπορῇ νά τίς χρησιμοποιήσῃ, χωρὶς νά ἔχῃ ἀνάγκη ἀπὸ αὐστηρές μαθηματικές διατυπώσεις, θεωρητικές ἀποδείξεις, ἀκριβολόγους ἐκφράσεις, πού ὀδηγοῦν τελικά σέ « σύγχυσι ». Ἀπὸ τήν σύγχυσι αὐτὴ ὁ μαθητὴς καταφεύγει στήν ἀποστήθισι ἐκφράσεων, πού δέν κατανοεῖ, καί οἱ ὁποῖες τοῦ δημιουργοῦν ἔντονη ἀντιπάθεια πρὸς τὰ Μαθηματικά καί τὸν κάνουν νά πιστέψῃ, πὼς ποτέ του δέν θά μπορέσῃ νά γίνῃ ἱκανὸς νά λύνῃ μόνος του « τὰ φοβερά αὐτά προβλήματα τῶν μαθηματικῶν, πού τελικῶς εἶναι καί ἀχρηστα στήν πράξι ».

Ἄν ἡ διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν, στὰ τεχνικῆς κατευθύνσεως σχολεῖα μας ἀρχίσῃ νά διαπνέεται ἔντονα ἀπὸ ἓνα ἀνάλογο πνεῦμα, πιστεύω πὼς τότε τò βιβλίο αὐτό θά ἐπιτύχῃ νά φέρῃ μία βελτίωσι στήν μαθηματικὴ μὀρφωσι

τῶν μικρῶν μαθητῶν, κι' αὐτό θά εἶναι ἡ καλύτερη ἀμοιβή γιά τόν συγγραφέα.

Ὡς πρὸς τὴν κατανομή τῆς ὕλης καὶ τὴν ἀλληλουχία τῶν κεφαλαίων ἐκρίθη σκόπιμο νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ ἀκόλουθος ἀρχή: Τὰ Μαθηματικά πρέπει νὰ διδάσκωνται σὰν ἐνιαῖο σύνολο ἀπὸ ἐνότητες παρμένες ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική, τὴν Γεωμετρία, τὴν Ἀλγεβρα καὶ τὴν Τριγωνομετρία, χωρὶς νὰ ξεχωρίζωνται μεταξύ τους οἱ κλάδοι αὐτοὶ τῶν μαθηματικῶν. Ἀντίθετα πρέπει νὰ ἀλληλοεμπλέκωνται καὶ νὰ ἀλληλοβοηθοῦνται, ἔτσι δὲ πρέπει καὶ νὰ διδάσκωνται, ὥστε νὰ παρέχωνται στὸν μαθητὴ ὅλες οἱ εὐκαιρίες, ποὺ τόσο ἔχει ἀνάγκη, γιὰ νὰ βρῇ πολλὰ παραδείγματα ἀπὸ τὴν γεωμετρία καὶ ἀπὸ καθημερινὰ τεχνικὰ θέματα. Τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἀφομοιώνονται εὐκόλα, ἀφοῦ εἶναι ζωντανὰ καθημερινὰ παραδείγματα, εὐχάριστα, ποὺ ἐξάπτουν καὶ ὀξύνουν τὴν φαντασία.

Χωρὶς πολλές ἢ ἴσως καὶ χωρὶς καθόλου θεωρητικὲς ἀποδείξεις—αὐτὲς ἂς μείνουν γιὰ ὅσους καταρτίζονται θεωρητικὰ—ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ ὀδηγῇ κατ' εὐθείαν στὸ γενικὸ συμπέρασμα, γιατί δὲν πρέπει νὰ τοῦ ζητᾶμε νὰ ἀφομοιώνη περισσότερα, ἀπὸ ὅσα τοῦ χρειάζονται ἢ ἀπὸ ὅσα πρέπει ἢ, καὶ πολλές φορές, ἀπὸ ὅσα μπορεῖ, γιατί τότε δὲν κάνομε τίποτε περισσότερο ἀπὸ τὸ νὰ «σπαταλοῦμε» τὸν χρόνο του.

Παρουσιάζοντας τὸ βιβλίο αὐτὸ στοὺς μαθητὰς καὶ καθηγητὰς, γιὰ τὶς ἐντυπώσεις καὶ τὶς παρατηρήσεις τῶν ὁποίων θὰ ἤμουν εὐγνώμων, θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω τὴν Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἰδρύματος Εὐγενίδου καὶ τὸν Ο.Α.Ε.Δ. γιὰ τὴν τιμὴ ποὺ μοῦ ἔκαμαν νὰ μοῦ ἀναθέσουν τὴν συγγραφὴ τοῦ βιβλίου, καθὼς καὶ γιὰ τὶς ἐν συνεχείᾳ συμβουλὲς καὶ ὑποδείξεις τους. Ἀκόμα εὐχαριστῶ τὸ ἐκδοτικὸ τμήμα τοῦ Ἰδρύματος Εὐγενίδου γιὰ τὴν βοήθειά του, ὥστε τὸ βιβλίο νὰ γίνῃ ὅσο τὸ δυνατόν καλύτερο.

Ὁ Συγγραφεὺς

# Π Ι Ν Α Ξ Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Ω Ν

## Κ Ε Φ. 1 Οί αριθμοὶ καὶ τὸ Μέτρο

| Παράγρ. |                                                         | Σελίς |
|---------|---------------------------------------------------------|-------|
| 1 - 1   | Ἡ ἀρίθμησις .....                                       | 1     |
| 1 - 2   | Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ .....                               | 1     |
| 1 - 3   | Πῶς γράφονται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ .....                 | 2     |
| 1 - 4   | Πῶς διαβάζονται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ .....               | 3     |
| 1 - 5   | Τὸ μηδὲν μπροστὰ καὶ πίσω ἀπὸ ἓνα ἀκέραιο ἀριθμὸν ..... | 4     |
| 1 - 6   | Σύγκρισις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν .....                    | 6     |
| 1 - 7   | Ἡ εὐθεία γραμμὴ .....                                   | 7     |
| 1 - 8   | Ἄλλες γραμμές .....                                     | 9     |
| 1 - 9   | Ἀριθμοὶ πάνω σὲ μιὰ εὐθεία. Τὸ μέτρο .....              | 10    |
| 1 - 10  | Ἄλλες μονάδες μήκους .....                              | 11    |
| 1 - 11  | Γραφὴ τοῦ μήκους .....                                  | 13    |
| 1 - 12  | Ἰσα εὐθύγραμμα τμήματα .....                            | 14    |
| 1 - 13  | Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς .....                               | 15    |
| 1 - 14  | Ἡ γραφὴ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ .....                     | 16    |
| 1 - 15  | Πῶς διαβάζονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ .....              | 17    |
| 1 - 16  | Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν .....                   | 17    |
| 1 - 17  | Μέτρησις τοῦ μήκους .....                               | 19    |
| 1 - 18  | Μέτρησις ἀκριβείας .....                                | 21    |
| 1 - 19  | Συγκεκριμένοι καὶ ἀφηρημένοι ἀριθμοὶ .....              | 23    |
| 1 - 20  | Μονάδες βάρους .....                                    | 23    |
| 1 - 21  | Ἀσκήσεις .....                                          | 25    |

## Κ Ε Φ. 2 Οἱ τέσσερις πράξεις μὲ ἀκεραίους καὶ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς

|        |                                                  |    |
|--------|--------------------------------------------------|----|
| 2 - 1  | Ἡ πρόσθεσις .....                                | 32 |
| 2 - 2  | Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως .....                   | 34 |
| 2 - 3  | Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως .....                      | 35 |
| 2 - 4  | Μέτρησις μὲ πρόσθεσις .....                      | 36 |
| 2 - 5  | Πρόσθεσις μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς .....       | 36 |
| 2 - 6  | Ἡ ἀφαίρεσις .....                                | 37 |
| 2 - 7  | Ἰδιότητες ἀφαιρέσεως. Δοκιμὴς .....              | 38 |
| 2 - 8  | Μέτρησις μήκους μὲ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ..... | 39 |
| 2 - 9  | Ἀφαίρεσις μὲ συγκεκριμένους ἀριθμοὺς .....       | 40 |
| 2 - 10 | Ὁ πολλαπλασιασμός .....                          | 40 |

|        |                                                          |    |
|--------|----------------------------------------------------------|----|
| 2 - 11 | Ὁ πίναξ τοῦ Πυθαγόρα (Πυθαγόρειος Πίναξ).....            | 41 |
| 2 - 12 | Ἄλλοι πολλαπλασιασμοί .....                              | 42 |
| 2 - 13 | Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ .....                      | 45 |
| 2 - 14 | Πολλαπλασιασμός με 10, 100, 1000 κ.λπ. ....              | 46 |
| 2 - 15 | Συμπέρασμα .....                                         | 48 |
| 2 - 16 | Δοκιμές στὸν πολλαπλασιασμό .....                        | 49 |
| 2 - 17 | Ἀποστάσεις πάνω στὸ ἔδαφος .....                         | 50 |
| 2 - 18 | Ἡ διαίρεσις .....                                        | 53 |
| 2 - 19 | Ἐκτέλεσι τῆς διαιρέσεως .....                            | 55 |
| 2 - 20 | Ἄλλες διαιρέσεις. Ἐπέκτασι μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως ..... | 56 |
| 2 - 21 | Ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις .....                         | 60 |
| 2 - 22 | Διαίρεσι με 10, 100, 1000 κ.λπ. ....                     | 60 |
| 2 - 23 | Διαίρεσι με 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001.....                      | 62 |
| 2 - 24 | Δοκιμές στὴν διαίρεσις .....                             | 62 |
| 2 - 25 | Ἀξιοσημείωτες διαιρέσεις .....                           | 63 |
| 2 - 26 | Μέτρησι με διαίρεσις .....                               | 65 |
| 2 - 27 | Ὁ μέσος ὅρος .....                                       | 66 |
| 2 - 28 | Πράξεις ἀντίστροφες .....                                | 68 |
| 2 - 29 | Ἀσκήσεις .....                                           | 69 |

### Κ Ε Φ. 3 Οἱ γωνίες καὶ οἱ παράλληλες εὐθεῖες

|        |                                                        |     |
|--------|--------------------------------------------------------|-----|
| 3 - 1  | Ἡ ἡμιευθεία καὶ τὸ ἐπίπεδο .....                       | 78  |
| 3 - 2  | Ἡ γωνία .....                                          | 80  |
| 3 - 3  | Ἡ περιφέρεια κύκλου .....                              | 82  |
| 3 - 4  | Ἰσες γωνίες .....                                      | 84  |
| 3 - 5  | Ἐπίκεντρος γωνίες .....                                | 85  |
| 3 - 6  | Σχεδιάσι ἴσων γωνιῶν .....                             | 87  |
| 3 - 7  | Ἡ διχοτόμος .....                                      | 88  |
| 3 - 8  | Ἡ ὀρθή γωνία .....                                     | 89  |
| 3 - 9  | Ἄλλες γωνίες .....                                     | 93  |
| 3 - 10 | Μονάδες μετρήσεως γωνιῶν .....                         | 94  |
| 3 - 11 | Μέτρησι περιφερείας .....                              | 97  |
| 3 - 12 | Ὁ ἀριθμὸς π .....                                      | 98  |
| 3 - 13 | Ἡ μεσοκάθετος .....                                    | 98  |
| 3 - 14 | Χάραξι μεσοκαθέτου .....                               | 100 |
| 3 - 15 | Χάραξι καθέτων .....                                   | 103 |
| 3 - 16 | Ἡ ἐφαπτομένη .....                                     | 104 |
| 3 - 17 | Παράλληλες εὐθεῖες .....                               | 105 |
| 3 - 18 | Παράλληλες εὐθεῖες, ποὺ τέμνονται ἀπὸ μία εὐθεία ..... | 108 |
| 3 - 19 | Ἰδιότητες .....                                        | 110 |
| 3 - 20 | Μερικὲς κατασκευές .....                               | 112 |
| 3 - 21 | Ἀσκήσεις .....                                         | 115 |

## ΚΕΦ. 4

## Τὰ κλάσματα

|        |                                                          |     |
|--------|----------------------------------------------------------|-----|
| 4 - 1  | Ἡ κλασματική μονάς .....                                 | 122 |
| 4 - 2  | Τὸ κλάσμα .....                                          | 123 |
| 4 - 3  | Μερικὲς περιπτώσεις .....                                | 125 |
| 4 - 4  | Ἀπλοποίησι κλασμάτων .....                               | 130 |
| 4 - 5  | Ὁμώνυμα καὶ ἑτερόνυμα κλάσματα. Ἀνισότης κλασμάτων ..... | 133 |
| 4 - 6  | Πρόσθεσι κλασμάτων .....                                 | 136 |
| 4 - 7  | Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογὲς στὴν πρόσθεσι .....                | 137 |
| 4 - 8  | Ἀφαίρεσι κλασμάτων .....                                 | 142 |
| 4 - 9  | Ἡ ἴντσα .....                                            | 144 |
| 4 - 10 | Πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεσι κλάσματος με ἀκέραιο .....  | 144 |
| 4 - 11 | Πολλαπλασιασμός ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα .....                 | 147 |
| 4 - 12 | Ἄλλοι πολλαπλασιασμοί .....                              | 150 |
| 4 - 13 | Ἀντίστροφοι ἀριθμοί. Ἀντίστροφες πράξεις .....           | 152 |
| 4 - 14 | Διαίρεσι διὰ κλάσματος .....                             | 152 |
| 4 - 15 | Γινόμενο πολλῶν παραγόντων .....                         | 154 |
| 4 - 16 | Δύο ἐφαρμογὲς στὸν πολλαπλασιασμό καὶ τὴν διαίρεσι ..... | 156 |
| 4 - 17 | Ἡ ἀναγωγή στὴν μονάδα .....                              | 158 |
| 4 - 18 | Κλίμακες σχεδιάσεων .....                                | 161 |
| 4 - 19 | Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισι .....                               | 165 |
| 4 - 20 | Ἀσκήσεις .....                                           | 169 |

## ΚΕΦ. 5

## Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί

|        |                                                                 |     |
|--------|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 5 - 1  | Ὁ συμμιγὴς ἀριθμός .....                                        | 187 |
| 5 - 2  | Ἡ μέτρησι τοῦ χρόνου .....                                      | 187 |
| 5 - 3  | Μονάδες μήκους στὸ ἀγγλικὸ σύστημα .....                        | 190 |
| 5 - 4  | Μετατροπὲς στοὺς συμμιγεῖς .....                                | 191 |
| 5 - 5  | Πρόσθεσι με συμμιγεῖς .....                                     | 192 |
| 5 - 6  | Ἀφαίρεσι με συμμιγεῖς .....                                     | 194 |
| 5 - 7  | Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιο .....                     | 195 |
| 5 - 8  | Διαίρεσι συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου .....                           | 197 |
| 5 - 9  | Πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεσι συμμιγοῦς με ἄλλους ἀριθμούς ..... | 199 |
| 5 - 10 | Κλασματικὲς καὶ δεκαδικὲς ἐκφράσεις .....                       | 201 |
| 5 - 11 | Ἀσκήσεις .....                                                  | 201 |

## ΚΕΦ. 6 Δύο γεωμετρικὰ σχήματα στὸ ἐπίπεδο.

## Τὸ τρίγωνο — Τὸ τετράπλευρο

|       |                                           |     |
|-------|-------------------------------------------|-----|
| 6 - 1 | Τὸ τρίγωνο .....                          | 205 |
| 6 - 2 | Ἀξιοσημείωτες εὐθεῖες σὲ ἓν τρίγωνο ..... | 207 |
| 6 - 3 | Εἶδη τριγώνων .....                       | 212 |



|        |                                                                            |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6 - 4  | Σχεδιάσι και ισότης τριγώνων .....                                         | 216 |
| 6 - 5  | Μερικὲς ἐφαρμογές. ....                                                    | 224 |
| 6 - 6  | Ἰδιότητες πλαγίων .....                                                    | 230 |
| 6 - 7  | Τὸ τετράπλευρο .....                                                       | 233 |
| 6 - 8  | Ἀνακεφαλαίωσι στὰ τετράπλευρα .....                                        | 239 |
| 6 - 9  | Βασικὲς ἰδιότητες στὰ παραλληλόγραμμα καὶ ἀντίστροφες προ-<br>τάσεις ..... | 241 |
| 6 - 10 | Μία ἰδιότης στὰ τρίγωνα .....                                              | 242 |
| 6 - 11 | Ἀσκήσεις .....                                                             | 243 |

## Κ Ε Φ. 7 Ἡ περιφέρεια καὶ τὰ κανονικὰ πολύγωνα

|       |                                             |     |
|-------|---------------------------------------------|-----|
| 7 - 1 | Θέσεις δύο περιφερειῶν μεταξύ τους .....    | 254 |
| 7 - 2 | Τόξα ἀνάμεσα σὲ δύο παράλληλες χορδές ..... | 256 |
| 7 - 3 | Γωνίες ἐγγεγραμμένες σὲ κύκλο .....         | 258 |
| 7 - 4 | Μερικὲς ἐφαρμογές .....                     | 261 |
| 7 - 5 | Διαιρέσι περιφερείας σὲ δύο ἴσα μέρη .....  | 265 |
| 7 - 6 | Κανονικὰ πολύγωνα .....                     | 271 |
| 7 - 7 | Ἀσκήσεις .....                              | 280 |
|       | Εὐρετήριον .....                            | 291 |

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1

### ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ

#### 1 · 1 Ἡ ἀρίθμηση.

Σὲ ἓνα ἄδειο κουτί βάζομε καρφιά, τὰ ὅποια παίρνομε ἕνα-ἕνα ἀπὸ τὸ κιβώτιο, ποὺ τὰ περιέχει. Πρὶν ἀρχίσωμε τὴν δουλειὰ αὐτή, λέμε ὅτι τὸ κουτί περιέχει *μηδὲν* καρφιά. Μετά, καθὼς τὰ βάζομε ἕνα-ἕνα στὸ κουτί, λέμε:

*ἓνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτώ, ἑννέα.*

Ἡ πρᾶξι αὐτὴ ὀνομάζεται *ἀρίθμηση* καὶ οἱ λέξεις, ποὺ χρησιμοποιοῦμε κάθε φορά, ὀνομάζονται *ἀριθμοί*. Γιὰ νὰ γράψωμε τοὺς ἀριθμούς, χρησιμοποιοῦμε σύμβολα, τὰ ὅποια ὀνομάζομε *ἀριθμητικὰ ψηφία* ἢ ἀπλῶς *ψηφία*.

Ἔτσι ἡ ἀντιστοιχία τῶν παραπάνω λέξεων (ἀριθμῶν) μὲ τὰ σύμβολα (ψηφία) εἶναι ἡ ἑξῆς:

*0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9....*

#### 1 · 2 Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Κάθε καρφί ποὺ βάζομε μέσα στὸ κουτί, τὸ ὀνομάζομε *ἀκεραία μονάδα*. Ὅπως παρατηροῦμε, κάθε ἀριθμὸς ἀπὸ τοὺς παραπάνω σχηματίζεται ἀπὸ μία *ἀκεραία μονάδα*, ἂν τὴν πάρωμε πολλές φορές, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ *μηδέν*, ποὺ φανερώνει ὅτι στὸ κουτί δὲν ὑπάρχει κανένα καρφί, δηλαδὴ ὅτι ἀπὸ τὸ κουτί *λείπει κάθε ἀκεραία μονάδα*.

Οἱ παραπάνω ἀριθμοί, ἐπειδὴ γράφονται μόνο μὲ ἓνα ψηφίο, ὀνομάζονται *μονοψήφιοι*. Ὅπως βλέπομε, τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοὺς δὲν ξεπερνᾷ τὴς ἑννέα (9).

Ἄν τώρα στὸ κουτί, ποὺ περιέχει ἑννέα καρφιά, ρίξωμε ἄλλο ἓνα καρφί, σχηματίζομε τὸν ἀριθμὸ *δέκα* (10). Οἱ *δέκα* αὐτὲς μονάδες μαζὶ σχηματίζουν *μία δεκάδα*.

Στὴν περίπτωσι τοῦ ἀριθμοῦ δέκα ἔχομε *μία* δεκάδα καὶ *μηδέν* ἀπλὲς μονάδες. Ὁ ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ψηφία, γι' αὐτὸ καὶ

λέγεται *διψήφιος*. Τὸ πρῶτο δεξιά ψηφίο (τὸ μηδέν) λέγεται ψηφίο τῶν *ἀπλῶν μονάδων* ἢ *μονάδων πρώτης τάξεως*, γιατί δείχνει ἀπὸ πόσες ἀπλές μονάδες ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμός, ἐνῶ τὸ ἀμέσως ἀριστερὰ εἶναι τὸ ψηφίο τῶν *δεκάδων* ἢ *μονάδων δευτέρας τάξεως*, γιατί δείχνει ἀπὸ πόσες δεκάδες ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμός. Ἔτσι γράφομε:

$$10 = \text{Δέκα.}$$

Μαζεύοντας τώρα ἀνὰ δέκα τὰ καρφιὰ μποροῦμε νὰ συνθέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς *εἴκοσι (20)*, *τριάντα (30)*, κ.λπ. μέχρι τὸ *ενενήντα (90)*. Ἄν, μαζεύοντας τὶς ἀπλές μονάδες, φτιάξωμε π.χ. 8 δεκάδες καὶ περισσέψουν 5 καρφιὰ-μονάδες, τότε λέμε ὅτι σχηματίσαμε τὸν διψήφιο ἀριθμὸ 85. Διψήφιοι ἀριθμοὶ εἶναι ὅλοι, ὅσοι εὐρίσκονται μεταξύ 10 καὶ 99.

Κάνοντας τὶς ἴδιες σκέψεις, μποροῦμε, μαζεύοντας τὶς δεκάδες ἀνὰ δέκα (ἢ τὶς μονάδες ἀνὰ ἑκατό), νὰ σχηματίσωμε *ἐκατοντάδες* ἢ *μονάδες τρίτης τάξεως*. Ἔτσι, ὁ ἀριθμός πού θὰ προέλθῃ θὰ ἔχῃ τρία ψηφία καὶ θὰ ὀνομασθῇ *τριψήφιος*. Ἄν λοιπὸν παίρνοντας ἀπὸ τὸ κιβώτιο καρφιὰ σχηματίσωμε 3 ἐκατοντάδες, 5 δεκάδες καὶ 8 μονάδες θὰ ἔχωμε πάρεϊ *τριακόσια πενήντα ὀκτὼ* καρφιὰ, θὰ ἔχωμε δηλαδὴ σχηματίσει τὸν ἀριθμὸ 358 ἢ ἀναλύοντας:

| Ἐκατοντάδες | Δεκάδες | Μονάδες |
|-------------|---------|---------|
| 3           | 5       | 8       |

Συνεχίζοντας, μποροῦμε νὰ σχηματίσωμε ἀριθμοὺς μὲ 4, 5, 6 κ.λπ. ψηφία, τοὺς ὁποίους ὀνομάζωμε *τετραψηφίους*, *πενταψηφίους*, *ἑξαψηφίους* κ.λπ. ἢ γενικὰ *πολυψηφίους*. Μετὰ τὶς ἐκατοντάδες καὶ πάντοτε πρὸς τὰ ἀριστερὰ γράφονται οἱ *χιλιάδες Χ* ἢ *μονάδες 4ης τάξεως*, οἱ *δεκάδες χιλιάδων ΔΧ* ἢ *μονάδες 5ης τάξεως*, οἱ *ἐκατοντάδες χιλιάδων ΕΧ* ἢ *μονάδες 6ης τάξεως* κ.λπ.

Γιὰ τοὺς πολυψηφίους λοιπὸν ἀριθμοὺς ἔχομε ὅτι:

*Κάθε ψηφίο πού εἶναι γραμμένο ἀριστερὰ ἀπὸ ἓνα ἄλλο παριστάνει μονάδες δέκα φορές μεγαλύτερες.*

Ὅλοι οἱ παραπάνω ἀριθμοὶ ὀνομάζονται *ἀκέραιοι*.

1·3 Πῶς γράφονται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Γιὰ νὰ γράψωμε μὲ ψηφία ἓνα ἀκέραιο ἀριθμὸ, τοῦ ὁποίου γνω-

ρίζομε τὶς ἀπλὲς μονάδες (π.χ. 37594 ἀπλὲς μονάδες), ἐργαζόμεστε ὡς ἑξῆς: Μαζεύομε τὶς μονάδες ἀνὰ δέκα καὶ σχηματίζομε δεκάδες (9), ἐνῶ οἱ μονάδες, ποὺ περισσεύουν καὶ δὲν σχηματίζουν δεκάδες, θὰ εἶναι τὸ πολὺ μέχρι ἑννέα (ἐδῶ εἶναι 4). Μετὰ τὶς δεκάδες καὶ κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο σχηματίζομε τὶς ἑκατοντάδες (5), τὶς χιλιάδες (7) κ.ο.κ., ὥσπου νὰ τελειώσωμε. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ χωρίζομε τὸν ἀριθμὸ σὲ μονάδες διαφόρων τάξεων, ποὺ κάθε μία εἶναι ἓνας μονοψήφιος ἀριθμὸς. Στὸ παραπάνω παράδειγμα μπορούμε νὰ φτιάξωμε 3 δεκάδες χιλιάδων, 7 χιλιάδες, 5 ἑκατοντάδες, 9 δεκάδες καὶ 4 μονάδες. Τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ μετὰ τὴν παραπάνω τακτοποίησι τὸν γράφομε ὡς ἑξῆς:

| ΔΧ | Χ | Ε | Δ | Μ |
|----|---|---|---|---|
| 3  | 7 | 5 | 9 | 4 |

Γράφομε δηλαδὴ πρῶτα τὸ ψηφίο τῆς πιὸ μεγάλης τάξεως καὶ μετὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ ἓνα δίπλα στὸ ἄλλο τὰ ψηφία τῶν πιὸ μικρῶν τάξεων μὲ τὴν σειρά.

Στὴν περίπτωσι, ποὺ λείπει τὸ ψηφίο μιᾶς τάξεως, στὴν θέσι του βάζομε τὸ μηδέν. \*Ἐτσι ὁ ἀριθμὸς, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 δεκάδες χιλιάδων, 5 ἑκατοντάδες, 4 μονάδες θὰ γραφῇ:

| ΔΧ | Χ | Ε | Δ | Μ |
|----|---|---|---|---|
| 3  | 0 | 5 | 0 | 4 |

#### 1.4 Πώς διαβάζονται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

\*Ἐστω ὅτι ἔχομε τὸν πολυψήφιο ἀριθμὸ:

935742186

Ἀρχίζοντας ἀπὸ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ χωρίζομε τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ σὲ τριψήφια κομμάτια, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ὀνομάζομε **κλάσι**.

\*Ἐτσι ἔχομε:

|                |            |                 |
|----------------|------------|-----------------|
| <b>935</b>     | <b>742</b> | <b>186</b>      |
| 3η κλάσι       | 2α κλάσι   | 1η κλάσι        |
| (ἐκατομμυρίων) | (χιλιάδων) | (ἀπλῶν μονάδων) |

Ἐν συνεχείᾳ, ἀρχίζοντας ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ διαβάζομε τὸ κάθε κομμάτι, λέγοντας καὶ τὴν κλάσι του. \*Ἐτσι, ὁ παραπάνω ἀριθμὸς διαβάζεται:

*Ἐννιακόσια τριάντα πέντε ἑκατομμύρια, ἑπτακόσιες σαράντα δύο χιλιάδες, ἑκατὸν ὀγδόντα ἑξ (μονάδες).*

**Π Ι Ν Α Ξ 1 · 4**  
**Κ λ ᾶ σ ι ς ἄ ρ ι θ μ ῶ ν**

| Τάξι | Όνομασία               | Συμβ. | Γραφή       | Κλάσι                                |
|------|------------------------|-------|-------------|--------------------------------------|
| 1η   | Μονάς                  | M     | 1           | 1η κλάσι ἢ<br>κλάσι ἀπλῶν<br>μονάδων |
| 2α   | Δεκάς                  | Δ     | 10          |                                      |
| 3η   | Ἑκατοντάς              | E     | 100         |                                      |
| 4η   | Χιλιάς                 | X     | 1 000       | 2α κλάσι ἢ<br>κλάσι<br>χιλιάδων      |
| 5η   | Δεκάς Χιλιάδων         | ΔX    | 10 000      |                                      |
| 6η   | Ἑκατοντάς Χιλιάδων     | EX    | 100 000     |                                      |
| 7η   | Ἑκατομμύριο            | ME    | 1 000 000   | 3η κλάσι ἢ<br>κλάσι<br>ἑκατομμυρίων  |
| 8η   | Δεκάς Ἑκατομμυρίων     | ΔE    | 10 000 000  |                                      |
| 9η   | Ἑκατοντάς Ἑκατομμυρίων | EE    | 100 000 000 |                                      |

Ἐς δοῦμε μερικὰ ἄλλα παραδείγματα:

α) *Νὰ διαβασθῇ ὁ ἀριθμὸς 28732.*

Τὸν χωρίζομε σὲ κλάσεις καὶ βλέπομε ὅτι ἡ κλάσι τῶν χιλιάδων (δεύτερο κομμάτι) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἑνα διψήφιο ἀριθμό. Ἐχομε δη-  
λαδὴ 28 732.

Διαβάζομε: *Εἴκοσι ὀκτὼ χιλιάδες, ἑπτακόσια τριάντα δύο.*

β) *Νὰ διαβασθῇ ὁ ἀριθμὸς 3809034.*

Τὸν χωρίζομε σὲ κλάσεις: 3 809 034.

Διαβάζομε: *Τρία ἑκατομμύρια, ὀκτακόσιες ἑννέα χιλιάδες, τριάντα τέσσερα.*

γ) *Νὰ διαβασθῇ ὁ ἀριθμὸς 50000608.*

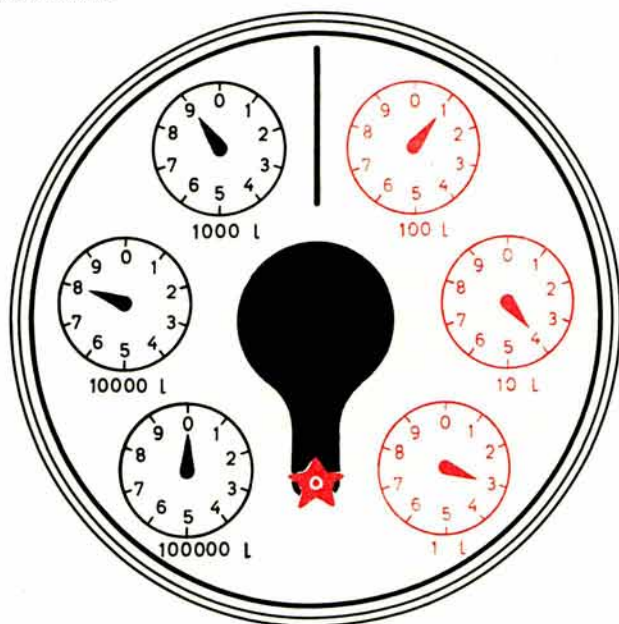
Τὸν χωρίζομε σὲ κλάσεις: 50 000 608.

Διαβάζομε: *Πενήντα ἑκατομμύρια, ἑξακόσια ὀκτώ.*

1 · 5 Τὸ μηδὲν μπροστὰ καὶ πίσω ἀπὸ ἑνα ἀκέραιο ἀριθμό.

α) Ὁ μετρητὴς τοῦ νεροῦ, ποὺ καταναλώνεται σὲ ἑνα ἐργοτάξιο, παρίσταται στὸ σχῆμα 1 · 5 α. Ζητεῖται νὰ διαβασθῇ ἡ ἔνδειξι του.

Γιὰ νὰ καταλάβωμε τὸ παράδειγμα, ἐξηγοῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοί, ποὺ εὐρίσκονται κάτω ἀπὸ τὰ κυκλάκια, μᾶς φανερώουν ὅτι ὁ δείκτης σὲ κάθε κυκλάκι τοῦ μετρητῆ μᾶς δείχνει μὲ τὴν σειρά: τὸ *1*, τὸν ἀριθμὸ *τῶν μονάδων*, τὸ *10* τὸν ἀριθμὸν *τῶν δεκάδων*, τὸ *100* τῶν *ἐκατοντάδων* κ.λπ.



Σχ. 1.5 α.

Ἔτσι μποροῦμε νὰ γράψωμε:

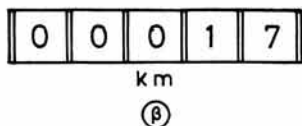
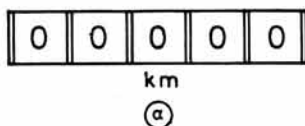
|    |    |   |   |   |   |
|----|----|---|---|---|---|
| ΕΧ | ΔΧ | Χ | Ε | Δ | Μ |
| 0  | 8  | 9 | 1 | 4 | 3 |

Ἄς ἐξετάσωμε τώρα τί ἀξία ἔχει τὸ *μηδὲν* μπροστὰ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ *89 143*.

Ἄν θυμηθοῦμε ὅτι σὲ ἓνα πολυψήφιο ἀριθμὸ τὸ κάθε ψηφίο, ποὺ εἶναι γραμμένο ἀριστερὰ ἀπὸ ἓνα ἄλλο, φανερώνει μονάδες, ποὺ εἶναι δέκα φορές μεγαλύτερες, συμπεραίνομε ὅτι τὸ *μηδὲν στὴν ἀρχὴ* ἑνὸς *ἀκεραίου ἀριθμοῦ* *δὲν ἔχει καμμία ἀξία*. Ἄρα ἡ ἔνδειξι τοῦ μετρητῆ εἶναι: *89 143*.



β) Ἄλλο ἐπίσης παράδειγμα, γιὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε τὴν ἀξία ποὺ ἔχει τὸ μηδέν, ὅταν γράφεται ἀριστερὰ ἀπὸ ἀκέραιο ἀριθμὸ, εἶναι ὁ μετρητὴς χιλιομέτρων ἑνὸς αὐτοκινήτου. Ὄταν τὸ αὐτοκίνητο βγαίνει ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιο καινούργιο, ὁ μετρητὴς του εὐρίσκεται στὴν θέσι *μηδέν* [σχ. 1·5 β (α)]. Μετὰ τὴν δοκιμὴ του ἔστω ὅτι τὸ αὐτοκίνητο ἔχει διανύσει 17 χιλιόμετρα [σχ. 1·5 β (β)]. Τότε ὁ μετρητὴς του θὰ ἔχη γράψει 00017, ποὺ σημαίνει 17 χιλιόμετρα.



Σχ. 1·5 β.

α) Ἀρχικὴ θέσι. β) Μετὰ ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ κυκλοφορία.

Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιο στὴν περίπτωσι ποὺ τὸ μηδέν γράφεται δεξιὰ ἀπὸ ἕνα ἀκέραιο ἀριθμὸ, γιατί τότε ὁ ἀριθμὸς ἀλλάσσει καὶ μάλιστα γίνεται *δέκα φορές μεγαλύτερος*. Ὁ ἀριθμὸς 20 π.χ., ποὺ ἔχει ἕνα μηδέν δεξιὰ τοῦ 2, εἶναι δέκα φορές μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 2. Τὸ ἴδιο συμβαίνει μὲ τὸν ἀριθμὸ 320, ὁ ὁποῖος εἶναι δέκα φορές μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 32.

Ἄν μετὰ ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸ ἀκολουθήσουν δύο μηδέν, τότε ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἑκατὸ φορές μεγαλύτερος. Ἐτσι ὁ ἀριθμὸς 800 εἶναι 100 φορές μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 8.

#### 1·6 Σύγκρισι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ὅπως εἶδαμε στὴν ἀρχή, κατὰ τὴν ἀρίθμησι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ 0 καὶ συνεχίζονται ὡς ἑξῆς:

0, 1, 2, . . . , 9, 10, 11, . . . , 97, 98, 99, 100, 101, . . . , 998, 999, 1000, 1001 κ.ο.κ.

Δηλαδή ἡ ἀρίθμησι δὲν τελειώνει, γιατί ἂν ὑποθέσωμε ὅτι αὐτὴ ἢ *φυσικὴ σειρὰ* τῶν ἀριθμῶν τελειώνει κάπου, ἔστω στὸν ἀριθμὸ 9 999 995, τότε ἂν πάρωμε ἄλλη μία μονάδα, π.χ. ἀπὸ τὸν σωρὸ τῶν καρφιῶν ἄλλο ἕνα καρφί, θὰ ἔχωμε τὸν ἀριθμὸ 9 999 996, ὁ ὁποῖος ἀκολουθεῖ στὸν προηγούμενο.

Βλέπομε λοιπὸν πῶς:

Ἀπὸ δύο τυχαίους ἀριθμούς τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν, ἐκεῖνος ποὺ ἀκολουθεῖ, ἔχει περισσότερες ἀπλὲς μονάδες ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ προηγείται.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 999 ἔχει περισσότερες ἀπλὲς μονάδες ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς 998, 997, 996, . . ., 851, 850, . . ., 185, . . ., 5, 4, 3, 2, 1, ποὺ προηγούνται στὴν φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν. Τότε λέμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 999 εἶναι **μεγαλύτερος** ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 998 καὶ ὅλους τοὺς ἄλλους, ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 998 εἶναι **μικρότερος** ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 999, καὶ συμβολίζουμε:

$$\begin{array}{lcl} & 999 > 998 & \text{καὶ} \quad 999 > 158 \\ \text{ἢ} & 998 < 999 & 158 < 999 \end{array}$$

Τὸ σύμβολο  $>$  σημαίνει **μεγαλύτερος - ο**.

Τὸ σύμβολο  $<$  σημαίνει **μικρότερος - ο**.

Οἱ σχέσεις αὐτὲς λέγονται **ἀνισότητες** καὶ οἱ ἀριθμοὶ **ἄνισοι**.

Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ στοὺς συμπεράσματα ὅτι θὰ ὑπάρχουν καὶ ἀριθμοὶ **ἴσοι**, ποὺ δὲν εἶναι ἄλλοι ἀπὸ ἐκείνους, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἀπλῶν μονάδων.

Ἔτσι γράφουμε:

$$37 \text{ δεκάδες} = 370 \text{ μονάδες.}$$

(ἴσον)

Ἄν ἔχουμε δύο ἀνίσους ἀριθμούς, ἀλλὰ χωρὶς νὰ μᾶς ἐνδιαφέρει ποιὸς εἶναι μεγαλύτερος καὶ ποιὸς μικρότερος, μποροῦμε νὰ γράψουμε:

$$999 \neq 158,$$

Τὸ σύμβολο  $\neq$  σημαίνει **διάφορος - ο**

ἢ ὅτι δὲν εἶναι ἴσο.

### 1.7 Ἡ εὐθεία γραμμὴ.

Μὲ τὴν βοήθεια μιᾶς πόντας κάνουμε ἓνα σημάδι πάνω σὲ μία μεταλλικὴ ἐπιφάνεια. Τὸ σημάδι αὐτό, Α, τὸ ὀνομάζουμε **σημεῖο** (σχ. 1.7 α). Τέτοια σημεῖα μποροῦμε νὰ κάνουμε ὅσα θέλουμε.

Ἄς πάρουμε τώρα μία ἐπίπεδη ἐπιφάνεια (π.χ. ἓνα φύλλο



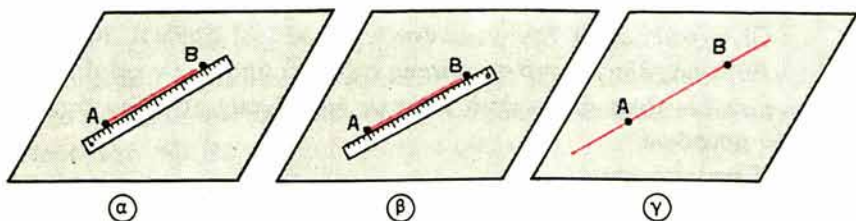
λαμαρίνας ἢ ἓνα κόντρα πλακέ) καὶ ὅς σημειώσωμε πάνω σ' αὐτὴν δύο σημεία, τὰ Α καὶ Β.



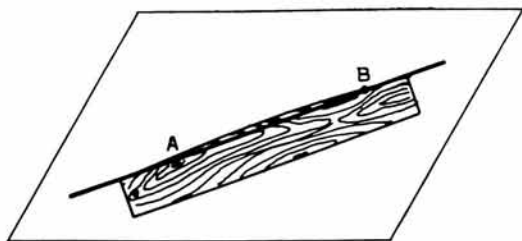
Σχ. 1·7 α.

Μετά, μὲ ἓνα χάρακα ἢ μὲ ἓνα μολύβι, ἐνώνομε τὰ δύο αὐτὰ σημεία μὲ μία γραμμὴ, ποὺ ὀνομάζεται *εὐθεΐα* [σχ. 1·7 β (α)]. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ μπορεῖ νὰ ἐπεκταθῇ δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ ὅσο θέλομε, ἀρκεῖ ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη [σχ. 1·7 β (γ)]. Τὸ κομμάτι ΑΒ τῆς εὐθείας γραμμῆς τὸ ὀνομάζομε *εὐθύγραμμο τμήμα*.

Γιὰ νὰ εἴμαστε βέβαιοι ὅτι ἡ γραμμὴ ποὺ χαράξαμε εἶναι εὐθεΐα, κάνομε τὸν ἑξῆς ἔλεγχο: Στρέφομε τὸν χάρακα κατὰ μισὴ στροφὴ καὶ χαράσσομε πάλι τὴν εὐθεΐα ποὺ περνάει ἀπὸ τὰ σημεία Α καὶ Β [σχ. 1·7 β (β)]. Κανονικὰ ἡ νέα γραμμὴ *πρέπει* νὰ συμπίπτει μὲ τὴν πρώτη.



Σχ. 1·7 β.

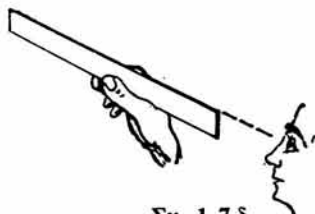


Σχ. 1·7 γ.

Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται *ἔλεγχος εὐθυγραμμίας*.

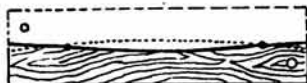
Ἄν ὅμως συμβῇ ἡ νέα γραμμὴ νὰ μὴ συμπίπτει μὲ τὴν πρώτη (σχ. 1·7 γ), τότε λέμε ὅτι στὴν περίπτωσι αὐτὴ φταίει ἡ αὐτὸς ποὺ χαράξε τὴν πρώτη γραμμὴ ἢ ὁ ἴδιος ὁ χάρακάς μας, ὁπότε πρέπει νὰ

τόν αλλάζουμε. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ ἄλλωστε ἐλέγχουμε τὸν χάρακά μας ἂν εἶναι πράγματι εὐθύς (σχ. 1.7 δ καὶ 1.7 ε).



Σχ. 1.7 δ.

Ὁ ξυλουργὸς ἐλέγχει τὴν εὐθυγραμμία τοῦ χάρακα.



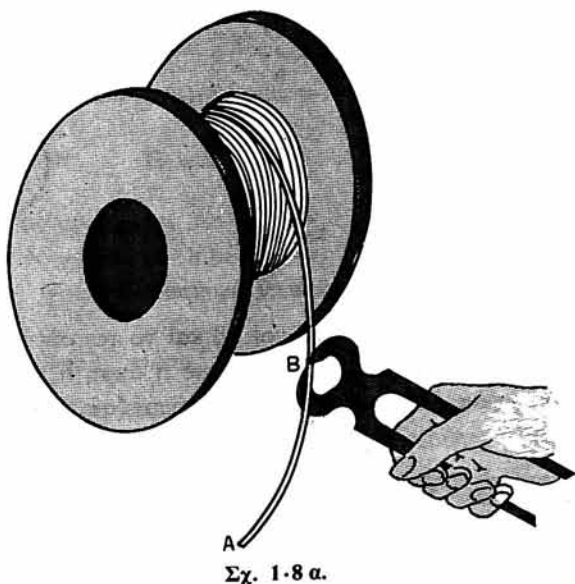
Σχ. 1.7 ε.

Ἐστὶ ὁ σχεδιαστὴς ἐλέγχει τὴν εὐθυγραμμία τοῦ χάρακα.

### 1.8 Ἄλλες γραμμές.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν εὐθεία ἔχομε καὶ τὶς παρακάτω γραμμές:

α) Τὴν **καμπύλη** γραμμή, ἥ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ ἓνα κομμάτι καλῶδιο κομμένο ἀπὸ μία κουλούρα, ὅπως π.χ. τὸ AB (σχ.

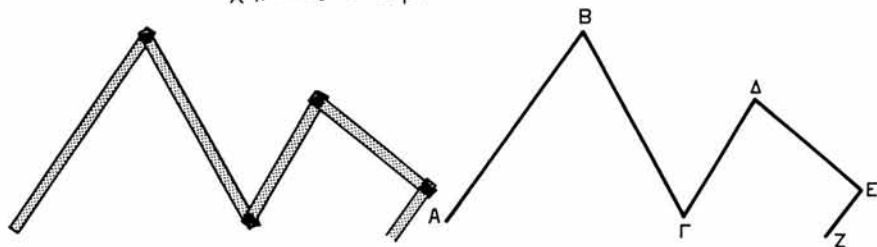


Σχ. 1.8 α.

1.8 α). Στὴν γραμμή αὕτη κανένα κομμάτι, ὅσο μικρὸ καὶ ἂν εἶναι, δὲν εἶναι εὐθύγραμμο τμήμα.

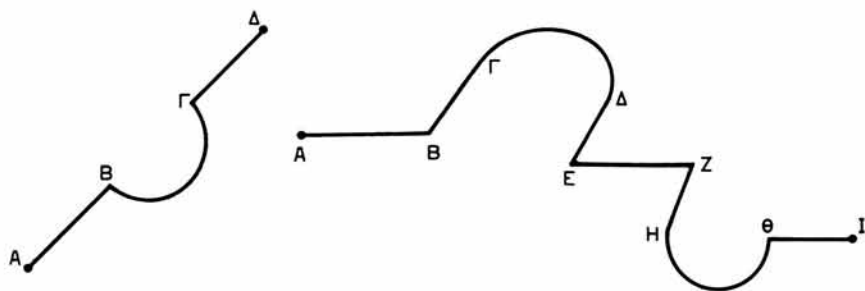
β) Τὴν **τεθλασμένη** γραμμή, ἥ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ εὐ-

θύγραμμα τμήματα ἑνωμένα μεταξύ τους, ὅπως π.χ. ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχήματος 1·8 β.



Σχ. 1·8 β.

γ) Τὴν *μικτὴ* γραμμὴ, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν κομμάτια ἀπὸ εὐθεῖες καὶ καμπύλες, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 1·8 γ.



Σχ. 1·8 γ.

1·9 Ἀριθμοὶ πάνω σὲ μία εὐθεία. Τὸ μέτρο.

Παίρνομε ἓνα κομμάτι σωλήνος αβ καὶ τὸ τοποθετοῦμε πάνω σὲ ἓνα ἄλλο μεγάλο σωλήνα ΟΛ ἔτσι, ὥστε ἡ ἄκρη α τοῦ μικροῦ νὰ συμπίπτει μὲ τὴν ἄκρη Ο τοῦ μεγάλου σωλήνος (σχ. 1·9 α). Ἐκεῖ ποὺ

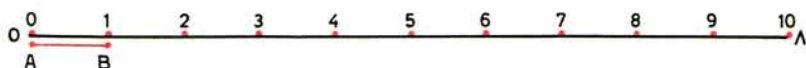


Σχ. 1·9 α.

θὰ εὐρεθῇ ἡ ἄκρη β τοῦ μικροῦ σωλήνος, γράφομε τὸν ἀριθμὸ 1 πάνω στὸν σωλήνα ΟΛ. Μετὰ κάνομε τὴν ἴδια δουλειά, βάζοντας τώρα τὴν ἄκρη α τοῦ μικροῦ σωλήνος στὸ σημεῖο 1. Ἐκεῖ ποὺ θὰ εὐρεθῇ ἡ ἄκρη β γράφομε τὸν ἀριθμὸ 2. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο συνεχίζομε μέχρι

τὴν ἄλλη ἄκρη  $\Lambda$  τοῦ μεγάλου σωληνός  $ΟΛ$ . Ἄν χρειασθῇ νὰ κά-  
νωμε αὐτὴ τὴν δουλειὰ *δέκα* φορές, τότε στὴν ἄκρη  $\Lambda$  τοῦ σωληνός  
θὰ γράψωμε τὸν ἀριθμὸ *10*.

Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται *μέτρησι* καὶ τὸ μικρὸ κομμάτι  $αβ$  τὸ  
ὀνομάζομε *μονάδα μετρήσεως (μήκους)*. Ὁ ἀριθμὸς 10, ποὺ φανερώνει  
πόσες φορές πρέπει νὰ πάρωμε τὸ κομμάτι  $αβ$ , γιὰ νὰ σχηματίσωμε  
ἓνα κομμάτι σὰν τὸ  $ΟΛ$ , ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ  $ΟΛ$ , ἢ ἄλλοιῶς τὴν  
ἀπόστασι τῶν ἄκρων  $Ο$  καὶ  $\Lambda$ .



Σχ. 1·9 β.

Μποροῦμε νὰ κάνωμε τὴν ἴδια δουλειὰ καὶ πάνω στὸ χαρτί  
μὲ δύο εὐθύγραμμα τμήματα, τὸ  $ΑΒ$  καὶ τὸ  $ΟΛ$  (σχ. 1·9 β).



Σχ. 1·9 γ.

Τὸ ἀρχέτυπο τοῦ μέτρου.

Ὡς μονὰς μετρήσεως τοῦ μήκους ἔχει ὀρισθῇ τὸ *μέτρο* \* καὶ ὡς  
σύμβολό του τὸ γράμμα *m*, ποὺ εἶναι τὸ ἀρχικὸ γράμμα τῆς γαλλικῆς  
λέξεως *mètre*, ποὺ σημαίνει μέτρο (σχ. 1·9 γ).

### 1·10 Ἄλλες μονάδες μήκους.

Ἐπειδὴ πολλές φορές ἔχομε νὰ μετρήσωμε μήκη μικρότερα ἀπὸ  
τὸ μέτρο, ὀρίσαμε καὶ μικρότερες μονάδες ἀπὸ αὐτὸ ἢ ὑποδιαίρεσεις  
τοῦ μέτρου, ὅπως εἶναι:

\* Μέτρο εἶναι τὸ μῆκος σὲ θερμοκρασία  $0^{\circ}$ , ἐνὸς διεθνoῦς ἀρχετύπου  
(σχ. 1·9 γ) κατασκευασμένου ἀπὸ ἓνα κράμα πλατίνης.

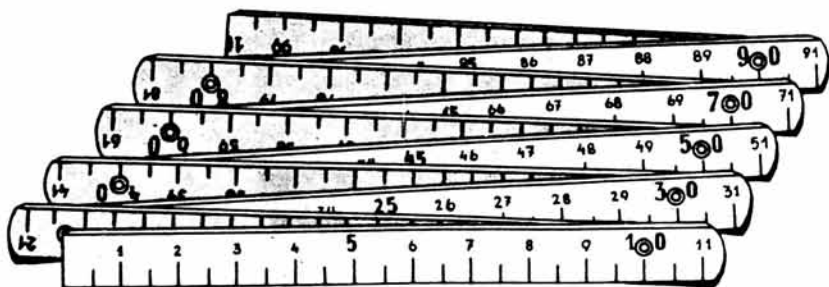
Τὸ ἀρχέτυπο αὐτὸ φυλάσσεται στὸ Διεθνὲς Γραφεῖο Βαρῶν καὶ Μέτρων  
στὴν πόλι *Sèvres* κοντὰ στὸ Παρίσι.

Τὸ μέτρο χωρεῖ περίπου σαράντα ἑκατομύρια φορές στὸ μῆκος ἐνὸς  
μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.

α) Ἡ *παλάμη* ἢ *δεκατόμετρο*, πού συμβολίζεται μὲ τὰ γράμματα *dm*\*. Κάθε μέτρο ἔχει 10 παλάμες.

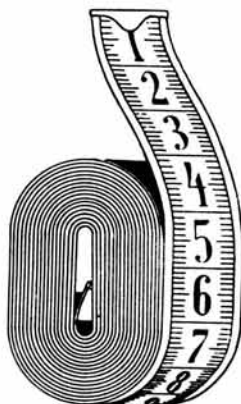
\*Ἀρα:

$$1\text{ m} = 10\text{ dm}$$



Σχ. 1-10 α.

\*Ένα ξύλινο μέτρο.



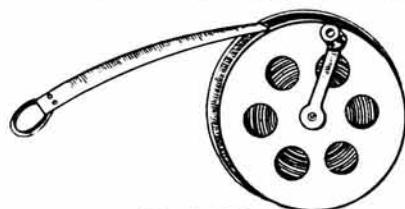
Σχ. 1-10 γ.

Μεζούρα μοδίστρας.



Σχ. 1-10 β.

Μεταλλικό (άτσαλένιο) μέτρο, περιτυλίξιμο.



Σχ. 1-10 δ.

Μετροταινία τῶν 10 m.

β) Ὁ *πόντος* ἢ *ἐκατοστόμετρο*, πού συμβολίζεται μὲ τὰ γράμματα *cm*\*\*. Κάθε μέτρο ἔχει 100 ἐκατοστόμετρα (πόντους).

\* Τὸ dm προέρχεται ἀπὸ τὴν γαλλικὴ λέξι *decimètre*, πού σημαίνει ἕνα δέκατο τοῦ μέτρου, δηλαδή μονὰς δέκα φορές μικρότερα τοῦ μέτρου.

\*\* Τὸ cm προέρχεται ἀπὸ τὴν γαλλικὴ λέξι *centimètre*, πού σημαίνει ἕνα ἑκατοστό τοῦ μέτρου, δηλαδή μονὰς ἑκατὸ φορές μικρότερα τοῦ μέτρου.

\*Αρα:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

γ) Το *χιλιοστόμετρο*, που συμβολίζεται με τὰ γράμματα *mm* \*. Κάθε μέτρο έχει 1000 χιλιοστόμετρα ή, όπως συνήθως λέμε, 1000 χιλιοστά.

\*Αρα:

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

\*Από τὰ παραπάνω προκύπτει ότι:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

Το σύστημα αυτό μετρήσεως του μήκους, που βασίζεται στο μέτρο, λέγεται *μετρικό σύστημα*.

δ) Για την μέτρηση πολύ μεγάλων αποστάσεων, που αν χρησιμοποιούσαμε το μέτρο θα είχαμε πολύ μεγάλους αριθμούς, χρησιμοποιούμε το *χιλιόμετρο*, που το συμβολίζουμε με τὰ γράμματα *km* \*\*. Έχουμε δέ:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

ε) Για παρά πολύ μικρά μήκη (ή πάχη) χρησιμοποιούμε το *μικρόν*, που συμβολίζουμε με τὸ γράμμα *μ*. Κάθε μέτρο έχει 1 000 000 μ.

\*Αρα έχουμε:

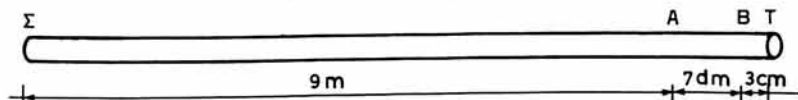
$$1 \text{ m} = 1\,000\,000 \text{ μ}$$

καί

$$1 \text{ mm} = 1000 \text{ μ}$$

### 1·11 Γραφή του μήκους.

\*Ας υποθέσουμε ότι για νὰ υπολογίσουμε τὸ μήκος τοῦ σωλήνος



Σχ. 1·11.

ΣΤ, μετρήσαμε τὸ κομμάτι ΣΑ καὶ τὸ εὐρήκαμε 9 m, τὸ κομμάτι ΑΒ καὶ τὸ εὐρήκαμε 7 dm καὶ τέλος τὸ υπόλοιπο ΒΤ 3 cm (σχ. 1·11).

\* Τὸ mm προέρχεται ἀπὸ τὴν γαλλικὴ λέξι *millimètre*, πού σημαίνει ἓνα χιλιοστὸ τοῦ μέτρου, δηλαδὴ μονὰς χίλιες φορές μικροτέρα τοῦ μέτρου.

\*\* Τὸ km προέρχεται ἀπὸ τὴν γαλλικὴ λέξι *kilomètre*, πού σημαίνει χίλιες φορές τὸ μέτρο, δηλαδὴ μονὰς χίλιες φορές μεγαλυτέρα τοῦ μέτρου.



Τότε τὸ μήκος ΣΤ τοῦ σωλήνος θὰ εἶναι:

**9 m 7 dm** καὶ **3 cm**

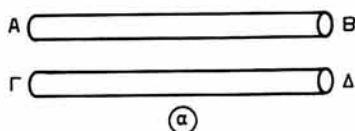
ἢ σὲ ἑκατοστά: **973 cm.**

Ἀκόμη μπορούμε νὰ ποῦμε ὅτι ὁ σωλήν ἔχει μήκος:

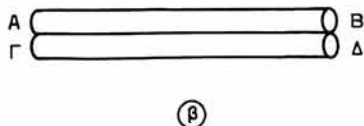
**9 m** καὶ **73 cm.**

1 · 12 Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.

Παίρνομε δύο κομμάτια σωλήνων, τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ [σχ. 1 · 12 α (α)], καὶ τοποθετοῦμε δίπλα-δίπλα τὰ ἄκρα τους Α καὶ Γ. Ἄν συμβῇ



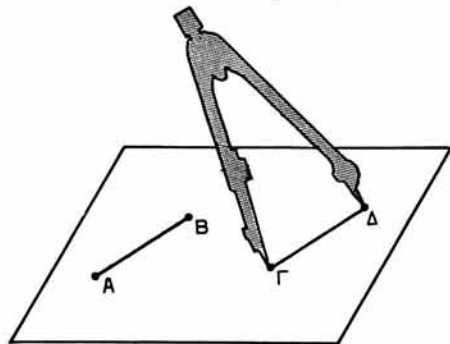
Σχ. 1 · 12 α.



νὰ συμπέσουν καὶ τὰ ἄκρα τους Β καὶ Δ [σχ. 1 · 12 α (β)], τότε λέμε ὅτι τὰ δύο αὐτὰ κομμάτια εἶναι **ἴσα** μεταξύ τους, δηλαδή:

$$AB = \Gamma\Delta.$$

Ἄν αὐτὸ δὲν συμβαίνει, τότε τὰ δύο αὐτὰ κομμάτια εἶναι **ἄνισα**, δηλαδή **διαφέρουν** μεταξύ τους ( $AB \neq \Gamma\Delta$ ).



Σχ. 1 · 12 β.

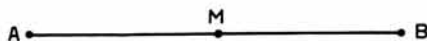
Τὸ ἴδιο μπορούμε νὰ κάνουμε καὶ μὲ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ χαραγμένα στὸ χαρτί, στὸν πίνακα ἢ πάνω σὲ φύλλο κόντρα πλακέ. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ συγκρίνομε τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ΓΔ στὸ ΑΒ μὲ τὴν βοήθεια ἐνὸς διαβήτη ὡς ἑξῆς (σχ. 1 · 12 β):

Ἀνοίγομε τὸν διαβήτη ὅσο εἶναι τὸ τμήμα ΓΔ, δηλαδή ἕως ὅτου τὰ ἄκρα του νὰ πέσουν πάνω στὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (σχ. 1 · 12 β). Ἄν μετὰ τοποθετήσωμε τὸν διαβήτη μας μὲ τὸ ἓνα ἄκρο στὸ Α, καὶ συμβῇ τὸ ἄλλο νὰ πέσῃ πάνω στὸ Β,

θὰ ἔχωμε:  **$AB = \Gamma\Delta$ .**

ἄλλοιῶς:  **$AB \neq \Gamma\Delta$ .**

Ἄν ἐπίσης τὸ σημεῖο  $M$  (σχ. 1 · 12 γ) χωρίζη τὸ τμήμα  $AB$



Σχ. 1 · 12 γ.

σὲ δύο ἴσα κομμάτια, τότε λέμε ὅτι τὸ  $M$  εἶναι *μέσον* τοῦ  $AB$  καὶ γράφουμε:

$$AM = MB.$$

### 1 · 13 Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς.

Ἄς ὑποθέσωμε ὅτι τὸ μήκος ἑνὸς σωλήνος εἶναι  $2\text{ m}$  καὶ  $1\text{ dm}$ . Ὅπως εἶδαμε παραπάνω, μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$$2\text{ m } 1\text{ dm} \quad \eta \quad 21\text{ dm}.$$

Ἄν ὁμως θελήσωμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ἀποκλειστικὰ τὸ μέτρο σὰν μονάδα μετρήσεως, *δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμὸς*, ποὺ νὰ μπορῇ νὰ μᾶς ἐξυπηρετήσῃ, γιατί, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ δύο ὁλόκληρα μέτρα, περισσεύει καὶ ἓνα κομμάτι μήκους  $1\text{ dm}$ , ποὺ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα. Πρέπει λοιπὸν νὰ καθορίσωμε ἓνα τρόπο γραφῆς καὶ γιὰ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ φανερώνουν *μεγέθη μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα*.

Θυμόμαστε τὸν κανόνα τῆς παραγράφου 1 · 2, ποὺ μᾶς λέει ὅτι σὲ πολυψήφιο ἀριθμὸ κάθε ψηφίο, ποὺ εἶναι γραμμένο ἀριστερὰ ἀπὸ ἓνα ἄλλο, παριστάνει μονάδες 10 φορές μεγαλύτερες. Ἐπομένως, ψηφίο ποὺ εἶναι γραμμένο δεξιὰ ἀπὸ ἓνα ἄλλο, φανερώνει μονάδες 10 φορές μικρότερες. Μποροῦμε λοιπὸν τὸ *μὴ ἀκέραιο* κομμάτι τοῦ παραπάνω μήκους νὰ τὸ γράψωμε δεξιὰ ἀπὸ τὸ ἀκέραιο καὶ γιὰ νὰ τὸ ξεχωρίσωμε νὰ τοποθετήσωμε ἀνάμεσά τους ἓνα *κόμμα* ἢ, ὅπως ἀλλοιῶς λέγεται, μία *ὑποδιαστολή*.

Ἔτσι γράφουμε  $2,1\text{ m}$ .

Ὁ νέος ἀριθμὸς ὀνομάζεται *δεκαδικός*.

Ὅπως ξέρομε,  $1\text{ m} = 10\text{ dm}$ . Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ  $1\text{ dm}$  εἶναι δέκα φορές μικρότερο ἀπὸ τὸ  $1\text{ m}$ , ἄρα εἶναι τὸ *δέκατο* τοῦ μέτρου καὶ γράφεται  $0,1\text{ m}$ . Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ  $1\text{ m}$  ἔχει  $100\text{ cm}$ , τὸ  $1\text{ cm}$  εἶναι 100 φορές μικρότερο ἀπὸ τὸ μέτρο καὶ γράφεται  $0,01\text{ m}$  καὶ τὸ  $1\text{ mm}$ , ποὺ εἶναι χίλιες φορές μικρότερο ἀπὸ τὸ μέτρο, γράφεται  $0,001\text{ m}$  κ.λπ. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὀνομάζονται *δεκαδικὲς μονάδες*.



1 · 14 Ἡ γραφή τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Ὅπως εἶδαμε, ἓνας δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, τὸ ἀκέραιο καὶ τὸ δεκαδικό, πού τὰ χωρίζει *κόμμα* ἢ *ὑποδιαστολή*.

Γιὰ τὸ ἀκέραιο μέρος ἔχομε μιλήσει. Τώρα θὰ μιλήσωμε γιὰ τὸ κομμάτι, πού ὀνομάσαμε δεκαδικὸ καὶ πού τὸ συναντᾶμε γιὰ πρώτη φορά. Ὅπως εἶπαμε στὴν προηγούμενη παράγραφο, στοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἔχομε τὶς διαφορὲς *δεκαδικὲς μονάδες*, πού γιὰ νὰ τὶς διακρίνομε ἀπὸ τὶς ἀκέραιες, πολλὲς φορὲς τὶς λέμε καὶ *δεκαδικὲς κλασματικὲς μονάδες*.

Ἔτσι ἔχομε γιὰ ἓνα τυχόντα δεκαδικὸ ἀριθμό:

ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ , ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ  
1 3 2 , 8 7 1

Τὸ πρῶτο μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴ δεξιὰ ψηφίο φανερώνει τὰ *δέκατα* δ, τὸ δεύτερο τὰ *ἐκατοστὰ* ε, τὸ τρίτο τὰ *χιλιοστὰ* χ κ.ο.κ.

### ΠΙΝΑΞ ΨΗΦΙΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

| ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ |                  |          |             |         |         | ,     | ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ |          |          |                |                    |                |      |
|---------------|------------------|----------|-------------|---------|---------|-------|----------------|----------|----------|----------------|--------------------|----------------|------|
| κ. λ. π.      | ΔΧ               | Χ        | Ε           | Δ       | Μ       | ,     | δ              | ε        | χ        | δχ             | εχ                 | εκ             | κ.λπ |
| κ. λ. π.      | Δεκάδες Χιλιάδες | Χιλιάδες | Ἐκατοντάδες | Δεκάδες | Μονάδες | Κόμμα | δέκατα         | ἑκατοστά | χιλιοστά | δεκάς χιλιοστά | ἑκατοντάς χιλιοστά | ἑκατομμυριοστά | κ.λπ |

Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἀκέραια μονὰς ἔχει 10 *δέκατα* ἢ 100 *ἐκατοστὰ* ἢ 1000 *χιλιοστὰ* κ.λπ.

Σύμφωνα μὲ αὐτά, τὸ μέτρο μποροῦμε νὰ τὸ ἐκφράσωμε μὲ δεκαδικὲς κλασματικὲς μονάδες ὡς ἑξῆς:

$$1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm} = 0,01 \text{ dm} = 0,001 \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm} = 0,01 \text{ m}$$

$$1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$$

Επίσης:

$$1 \mu (\text{μικρόν}) = 0,001 \text{ mm} = 0,000 1 \text{ cm} = 0,000 001 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$$

1.15 Πώς διαβάζονται οί δεκαδικοί αριθμοί.

Ας δοῦμε πῶς διαβάζεται ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 132,871.

Στὴν ἀρχὴ διαβάζομε τὸ ἀκέραιο μέρος, στὴν συνέχεια λέμε **ἀκέραιος** ἢ **κόμμα** καὶ κατόπιν διαβάζομε τὸ δεκαδικὸ μέρος, σὰν νὰ πρόκειται πάλι γιὰ ἀκέραιο ἀριθμὸ, μόνο ποὺ στὸ τέλος λέμε τὴν **τάξι** **τῆς δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδος τοῦ τελευταίου ψηφίου**.

Ἔτσι γιὰ τὸν παραπάνω ἀριθμὸ λέμε:

Ἑκατὸν τριάντα δύο ἀκέραιος, ὀκτακόσια ἐβδομήντα ἓνα χιλιοστὰ ἢ ἑκατὸν τριάντα δύο, κόμμα, ὀκτακόσια ἐβδομήντα ἓνα χιλιοστὰ.

Παραδείγματα :

82,047: Ὀγδόντα δύο ἀκέραιος, σαράντα ἑπτὰ χιλιοστὰ ἢ ὀγδόντα δύο (ἀκέραιος), κόμμα, μηδέν, σαράντα ἑπτὰ χιλιοστὰ.

1730,03901: Χίλια ἑπτακόσια τριάντα ἀκέραιος, τρεῖς χιλιάδες ἑννιακόσια ἓνα ἑκατοντάκις χιλιοστὰ.

0,000701: Μηδέν ἀκέραιος, ἑπτακόσια ἓνα ἑκατομμυριοστὰ.

1.16 Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

α) Ἐνα ἀκέραιο ἀριθμὸ μπορούμε νὰ τὸν γράψωμε σὰν δεκαδικό, ἂν βάλωμε κόμμα μετὰ τίς μονάδες του καὶ τοῦ προσθέσωμε ὅσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ὅμως ὅλα νὰ εἶναι μηδέν.

Τὸν ἀριθμὸ π.χ. 15 μπορούμε νὰ τὸν γράψωμε:

$$15 = 15,0 = 15,00 = 15,000 \text{ κ.λπ.}$$

Ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ 15 δὲν ἀλλάσσει, ἀφοῦ στὴν πραγματικότητα δὲν ὑπάρχουν δεκαδικές μονάδες.

β) Ἄν σὲ ἓνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ μετὰ τὶς δεκαδικές του μονάδες γράψουμε ἓνα ἢ περισσότερα μηδέν, ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἀλλάσσει.

Ἔτσι τὸν ἀριθμὸ 15,75 μπορούμε νὰ τὸν γράψουμε:

$$15,75 = 15,750 = 15,7500 \text{ κ.λπ.}$$

γ) Ἄν σὲ ἓνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ μεταθέσουμε τὴν ὑποδιαστολὴ (κόμμα) μία, δύο, τρεῖς κ.λπ. θέσεις δεξιὰ, ὁ ἀριθμὸς γίνεται 10, 100, 1000 κ.λπ. φορές μεγαλύτερος· ἂν πάλι τὴν μεταθέσουμε μία, δύο, τρεῖς κ.λπ. θέσεις ἀριστερά, τότε ὁ ἀριθμὸς γίνεται 10, 100, 1000 κ.λπ. φορές μικρότερος.

Ἔτσι ἔχομε:

**Μετάθεσι ὑποδιαστολῆς δεξιὰ:**

|        |                       |
|--------|-----------------------|
| 17,491 | ὁ ἀριθμὸς γίνεται :   |
| 174,91 | 10 φορές μεγαλύτερος  |
| 1749,1 | 100 φορές μεγαλύτερος |

**Μετάθεσι ὑποδιαστολῆς ἀριστερά:**

|        |                      |
|--------|----------------------|
| 1749,1 | ὁ ἀριθμὸς γίνεται :  |
| 174,91 | 10 φορές μικρότερος  |
| 17,491 | 100 φορές μικρότερος |

**Συμπέρασμα:** Ἀπὸ ὅλα τὰ παραπάνω ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα πῶς, ἂν κατὰ τὴν μετακίνησι τῆς ὑποδιαστολῆς ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ τὰ ἀριστερά (γιὰ νὰ τὸν κάνουμε 10, 100, 1000 κ.λπ. φορές μεγαλύτερο ἢ μικρότερο) ἐξαντλήσουμε ὅλα τὰ ὑπάρχοντα ψηφία, μπορούμε νὰ συνεχίσουμε τὴν μετακίνησι τῆς ὑποδιαστολῆς, ἀρκεῖ νὰ βάλουμε μηδενικά στὶς ἄδειες θέσεις.

Ἔτσι, ἂν θέλουμε στὸν ἀριθμὸ 17,49 νὰ μεταφέρουμε τὴν ὑποδιαστολὴ 3 θέσεις δεξιὰ, νὰ τὸν κάνουμε δηλαδὴ 1000 φορές μεγαλύτερο, θὰ γράψουμε πρῶτα:

17,4900, ὁπότε, μετὰ τὴν μεταφορά, θὰ ἔχωμε 17490,0.

Ἄν στὸν ἴδιο ἀριθμὸ θέλωμε νὰ μεταφέρωμε τὴν ὑποδιαστολὴ 3 θέσεις ἀριστερά, νὰ τὸν κάνωμε δηλαδὴ 1000 φορές μικρότερο, γράφομε 0017,49, ὅποτε μετὰ τὴν μεταφορὰ ἔχομε 0,01749.

### 1·17 Μέτρησι τοῦ μήκους.

Καθὼς γνωρίζομε, πάνω σὲ κάθε μέτρο ὑπάρχουν 100 χαραγές, πού κάθε μία τους ἀντιστοιχεῖ σὲ ἓνα ἀριθμὸ, ὁ ὁποῖος φανερώνει ἑκατοστόμετρα ἢ ἑκατοστά (cm). Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ στὰ *ὑποδεκάμετρα*, πού ἔχουν μήκος 20 cm ἢ 30 cm (σχ. 1·17 α).



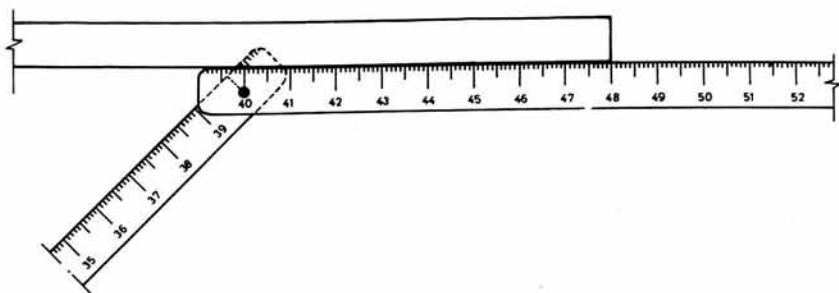
Σχ. 1·17 α.

Ὑποδεκάμετρο βαθμολογημένο σὲ ἑκατοστά τοῦ μέτρου.

Τὸ διάστημα μεταξύ δύο ἀριθμημένων χαραγῶν χωρίζεται μὲ ἄλλες μικρότερες χαραγές σὲ 10 ἴσα κομμάτια, τὰ *χιλιοστόμετρα* (mm).

Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἓνα σωλῆνα, ἓνα καλώδιο κ.λπ., χρησιμοποιοῦμε τὸ μέτρο, βάζοντας στὴν ἑνδειξί του *μηδὲν* τὴν μία ἄκρη π.χ. τοῦ σωλῆνος. Ἡ ἄλλη ἄκρη τοῦ σωλῆνος τότε μπορεῖ νὰ βρεθῇ στὶς παρακάτω θέσεις:

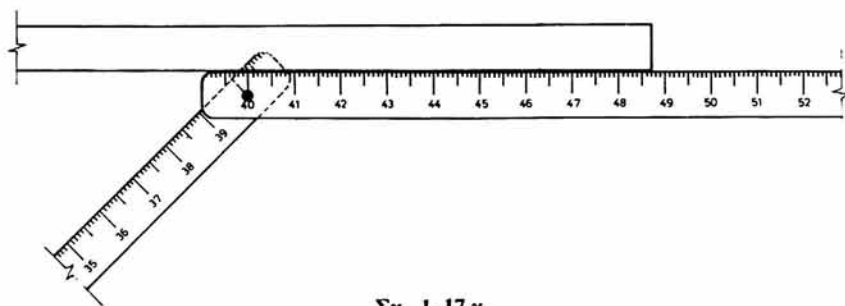
α) Ἀκριβῶς πάνω σὲ μία ἀριθμημένη γραμμὴ, πού φανερώνει ἑκατοστόμετρα ἢ cm, ὅπως στὸ σχῆμα 1·17 β. Τότε λέμε ὅτι ὁ σωλὴν ἔχει μήκος 48 cm ἢ 0,48 m.



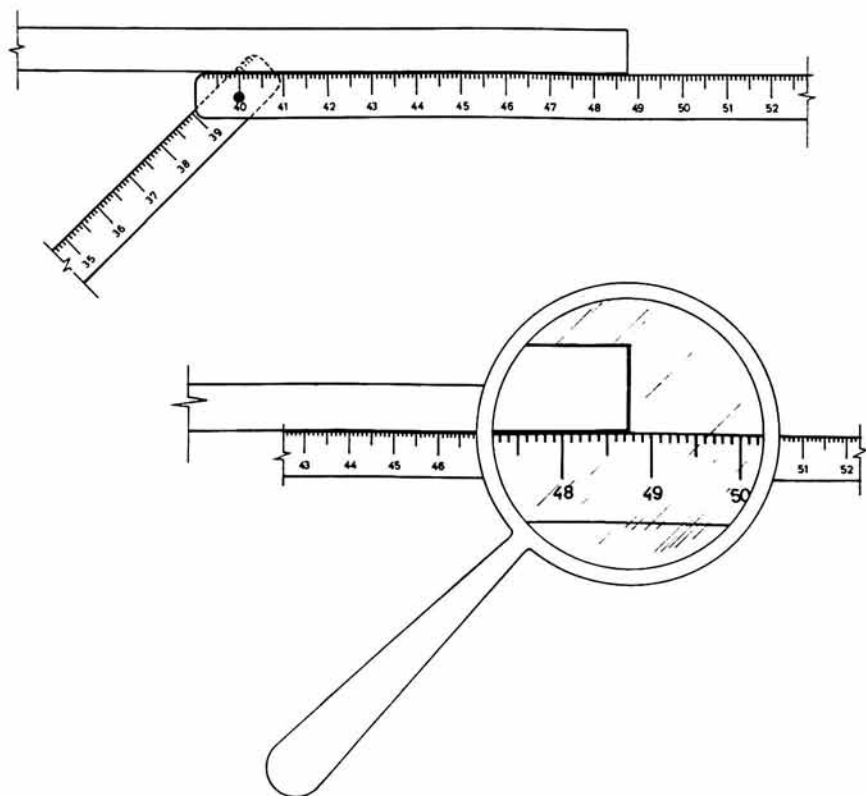
Σχ. 1·17 β.

β) Ἀκριβῶς πάνω σὲ μία γραμμὴ, πού φανερώνει χιλιοστόμετρα ἢ mm, ὅπως στὸ σχῆμα 1·17 γ.

Τότε λέμε ὅτι ὁ σωλὴν ἔχει μῆκος 48 cm καὶ 7 mm ἢ 487 mm ἢ 48,7 cm ἢ 0,487 m.



Σχ. 1·17 γ.



Σχ. 1·17 δ.



γ) Ἀνάμεσα σὲ δύο γραμμές, ποὺ φανερώνουν χιλιοστόμετρα, ὅπως στὸ σχῆμα 1 · 17 δ.

Τότε λέμε ὅτι ὁ σωλὴν ἔχει μῆκος *κατὰ προσέγγισι ἀκεραίου χιλιοστομέτρου* 487 mm πρὸς τὰ κάτω ἢ 488 mm πρὸς τὰ πάνω.

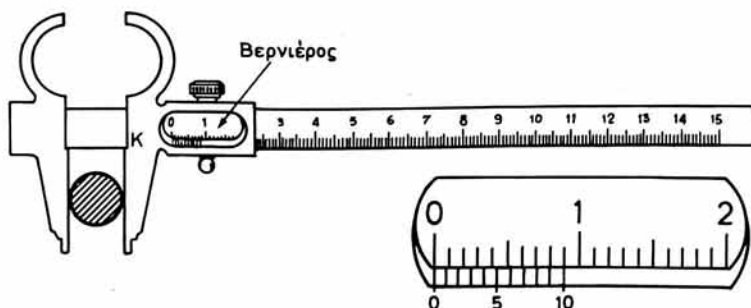
Τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα γράφεται: 0,487 m ἢ 0,488 m.

### 1 · 18 Μέτρησι ἀκριβείας.

Σὲ περίπτωσι ποὺ μᾶς ζητεῖται μεγαλυτέρα ἀκρίβεια στὴν μέτρησι, χρησιμοποιοῦμε εἰδικὰ ὄργανα ἀκριβείας.

α) *Μέτρησι μὲ προσέγγισι δεκάτου τοῦ χιλιοστομέτρου. Τὸ παχύμετρο..*

Τὸ ἀκίνητο στέλεχος τοῦ *παχυμέτρου* εἶναι διαιρεμένο μὲ χαραγές σὲ cm καὶ mm, ἐνῶ τὸ κινητὸ του στέλεχος φέρει ὑποδιαιρέ-



Σχ. 1 · 18 α.

Παχύμετρο μὲ βερνιέρο.

σεις, μὲ τίς ὁποῖες μπορούμε νὰ μετρήσωμε μὲ ἀκρίβεια ἴση μὲ δέκατο τοῦ χιλιοστοῦ τοῦ μέτρου. Πάνω στὸ κινητὸ στέλεχος παίρνομε ἓνα μῆκος 9 mm καὶ τὸ χωρίζομε σὲ 10 ἴσα μέρη. Αὐτὴ ἡ διαίρεσι τοῦ κινητοῦ στελέχους λέγεται *βερνιέρος* \*. Τὸ τμήμα αὐτὸ τὸ παίρνομε σὲ τέτοια θέσι, ὥστε τὸ μηδὲν τοῦ βερνιέρου νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος τοῦ ἀκινήτου στελέχους καὶ τὸ 10 τοῦ βερνιέρου νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ 9 τοῦ ἀκινήτου στελέχους. Ὄταν θέλωμε νὰ διαβάσωμε τὸ ἐξαγόμενο ἀπὸ μία μέτρησι, διαβάζομε πρῶτα στὸ ἀκίνητο

\* Ὁ βερνιέρος ἐπενοήθη τὸ 1631 ἀπὸ τὸν Γάλλο γεωμέτρη Βερνιέ (Vernier), καὶ πρὸς τιμὴν του ἔλαβε τὸ ὄνομά του.

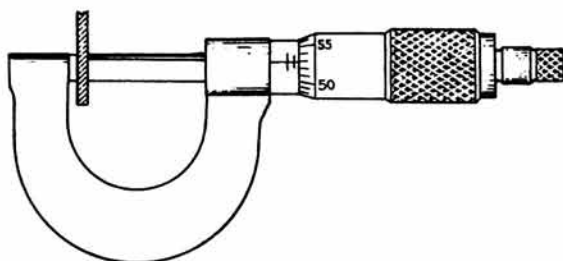
στέλεχος τὴν χαραγὴ, στὴν ὁποία εὐρίσκεται τὸ 0 τοῦ βερνιέρου μὲ προσέγγισι χιλιοστοῦ τοῦ μέτρου πρὸς τὰ κάτω. Μετὰ διαβάζομε πάνω στὸν βερνιέρο τὴν χαραγὴ, ποὺ συμπίπτει μὲ ὁποιαδήποτε χαραγὴ τοῦ ἀκινήτου στελέχους. Αὕτῃ δίνει τὰ δέκατα τοῦ mm.

\*Εἴτσι γιὰ ἓνα μῆκος μετροῦμε π.χ. στὸ στέλεχος 14 mm καὶ στὸν βερνιέρο ὅτι ἡ 4ῃ γραμμὴ συμπίπτει μὲ μία γραμμὴ τοῦ στελέχους, ποὺ σημαίνει μῆκος **0,4 mm**. Ἐπομένως τὸ μετρούμενο μῆκος εἶναι **14,4 mm**.

β) *Μέτρησι μὲ προσέγγισι ἑκατοστοῦ τοῦ χιλιοστομέτρου. Τὸ μικρόμετρο.*

Καὶ ἐδῶ τὸ στέλεχος εἶναι χαραγμένο μὲ γραμμές, ποὺ κάθε μία φανερώνει μῆκος σὲ mm, ἐνῶ ὁ βερνιέρος (τύμπανο) \* εἶναι χωρισμένος μὲ 100 χαραγές σὲ ἴσα μέρη (σχ. 1 · 18 β).

\*Εἴτσι πάνω στὸ στέλεχος διαβάζομε τὰ mm μὲ προσέγγισι



Σχ. 1 · 18 β.

Μικρόμετρο.

πρὸς τὰ κάτω (π.χ. 1 mm), ἐνῶ στὸν βερνιέρο, ἀπέναντι στὴν χαραγὴ τοῦ στελέχους, τὰ ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστομέτρου (π.χ. 53). Τὸ πάχος, π.χ. τῆς λαμαρίνας, ποὺ μετροῦμε θὰ εἶναι:

**1,53 mm**

γ) Ἀπὸ τὰ παραπάνω φαίνεται πὼς ἡ γραφὴ **1,53 mm** ἐνὸς μήκους φανερώνει ὅτι τὸ μῆκος αὐτὸ ἔχει μετρηθῇ μὲ *προσέγγισι ἑκατοστοῦ ἀκεραίας μονάδος*.

---

\* Σὲ μία πλήρη περιστροφή τοῦ τυμπάνου τὸ στέλεχος προχωρεῖ κατὰ 1 mm ἢ, σὲ μερικὰ μικρόμετρα, κατὰ 1/2 mm.

Έπομένως ή διαφορά μεταξύ των συγκεκριμένων αριθμών:

$$15\text{ mm και } 15,0\text{ mm}$$

Είναι ότι το μέν πρώτο μήκος έχει μετρηθῇ με προσέγγισι άκεραίου mm, ένώ το δεύτερο έχει μετρηθῇ με προσέγγισι δεκάτου του mm.

1·19 Συγκεκριμένοι και άφηρημένοι αριθμοί.

Πολλές φορές, όταν διαβάζωμε ένα αριθμό, τον συνοδεύομε και με ένα όνομα. Λέμε π.χ. 5 αυτοκίνητα · 12 μαθητές · 48 θρανία · 4,7 μέτρα κ.λπ. Οί αριθμοί αυτοί, έπειδή αναφέρονται σε ένα **συγκεκριμένο** μέγεθος, ονομάζονται **συγκεκριμένοι αριθμοί**.

\*Άλλες φορές πάλι διαβάζομε μόνο αριθμούς, χωρίς νά λέμε, ποῦ αναφέρονται. Έτσι λέμε 38· 27· 596· 37, 75 κ.λπ. Αυτούς τους αριθμούς τους ονομάζομε **άφηρημένους αριθμούς**.

Οί αριθμητικές πράξεις που θα μάθωμε άμέσως παρακάτω θα γίνονται σάν νά πρόκειται για άφηρημένους αριθμούς και στο τέλος (όπου χρειάζεται) θα προσδιορίζεται και το μέγεθος, στο όποιο αναφέρονται, ώστε και το εξαγόμενο νά γίνεται συγκεκριμένος αριθμός.

1·20 Μονάδες βάρους.

α) Για νά μετροῦμε την μάζα των σωμάτων χρησιμοποιούμε στην Φυσική σάν μονάδα το **χιλιόγραμμο**, που το συμβολίζομε με τα γράμματα **kg** ή την μικρότερα μονάδα το **γραμμάριο**, που το συμβολίζομε με τα γράμματα **gr** ή απλώς **g**.

Είναι δέ:

και

$$1\text{ kg} = 1000\text{ g}$$

$$1\text{ g} = 0,001\text{ kg}$$

Στήν πράξι τις ίδιες ονομασίες χρησιμοποιούμε και για την μέτρηση του **βάρους**.

\*Όμως τί είναι το βάρος; Ή Φυσική μάς το έξηγεῖ ως έξης:

*Βάρος ένός σώματος είναι ή δύναμι, με την όποία ή γῆ έλκει (δηλαδή τραβάει) το σώμα προς την επιφάνειά της.*

\*Έτσι, όταν είμαστε πάνω στην γῆ και πάρωμε ένα σώμα με



μάζα 1 kg, τὸ σῶμα αὐτὸ θὰ ἔχη βάρος *1 χιλιόγραμμα (βάρους)*, ἢ ὅπως ἀλλοιῶς τὸ λέμε *1 κιλοπόντ*. Τὸ κιλοπόντ συμβολίζεται μὲ τὰ γράμματα *kp*.

Ἄν ἡ μάζα τοῦ σώματος εἶναι 1 g, τὸ βάρος του θὰ εἶναι *1 γραμμάριο* (βάρους) ἢ *1 πόντ* καὶ τὸ συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα *p*.

Ἔχομε:

καὶ

$$1 \text{ kp} = 1000 \text{ p}$$

$$1 \text{ p} = 0,001 \text{ kp}$$

β) Ἄς πάρωμε τώρα ἓνα σῶμα μάζας 5 kg, ἄρα βάρους 5 kp, καὶ ἄς τὸ βάλωμε σὲ ἓνα διαστημόπλοιο. Ὅσο τὸ διαστημόπλοιο ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν γῆ, τόσο τὸ σῶμα γίνεται ἐλαφρότερο. Κι' αὐτό, γιατί ἡ δύναμι, μὲ τὴν ὁποία ἡ γῆ ἔλκει τὸ σῶμα, συνεχῶς μικραίνει. Ἡ μάζα ὅμως τοῦ σώματος δὲν ἔχει στὸ μεταξύ μεταβληθῇ.

Αὐτὸ μᾶς κάνει νὰ σκεφθοῦμε πῶς, ἐνῶ ἡ μάζα σὲ ἓνα σῶμα εἶναι σταθερὴ καὶ πάντα ἡ ἴδια, τὸ βάρος τοῦ σώματος ἀλλάσσει, συγκεκριμένως μικραίνει, ὅσο ἀπομακρυνόμαστε ἀπὸ τὴν γῆ. Ἄν λοιπὸν καὶ ἐμεῖς εὔρεθοῦμε σὲ πολὺ μεγάλη ἀπόστασι ἀπὸ τὴν γῆ μέσα στὸ κενό, τὸ βάρος μας θὰ γίνῃ μηδέν\* (γιατί δὲν θὰ ἐπηρεαζώμαστε ἀπὸ τὴν ἔλξι τῆς γῆς), πράγμα ποὺ σημαίνει πῶς μὲ κανένα φυσικὸ τρόπο δὲν θὰ μπορούμε νὰ γυρίσωμε στὴν γῆ, ἢ ὁποία ἔπαψε πιά νὰ *μᾶς ἔλκη*.

γ) Γιὰ μεγάλα βάρη χρησιμοποιοῦμε τὸν τόννο, ποὺ συμβολίζομε μὲ *t* ἢ *ton*. Αὐτὸς εἶναι χίλιες φορές μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ kp.

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kp}$$

$$1 \text{ kp} = 0,001 \text{ t}$$

Οἱ χρυσοχόοι καὶ οἱ φαρμακοποιοὶ χρησιμοποιοῦν καὶ τὸ χιλιοστὸ τοῦ γραμμαρίου, τὸ γνωστὸ *μिलлиграмμάριο* ἢ *μिलлиγράμ* (βάρους) ἢ *μिलλιπόντ*.

\* Δὲν ἐξετάζομε τί θὰ γίνῃ μὲ τὴν ἔλξι, ποὺ θὰ ἐξασκήσουν πάνω μας τὰ ἄλλα οὐράνια σώματα, ἂν εὔρεθοῦμε κοντὰ τους.

Για το βάρος αυτό έχουμε:

$$1 \text{ mp} = 0,001 \text{ p}$$

$$1 \text{ p} = 1000 \text{ mp}$$

### 1-21 Άσκήσεις.

Από τις παραγράφους 1-1 έως 1-6.

1. Διαβάσετε τους αριθμούς:

|         |          |         |           |
|---------|----------|---------|-----------|
| 47      | 305      | 697     | 8940      |
| 92300   | 67054    | 20405   | 80001     |
| 70105   | 95003    | 60073   | 501678    |
| 500607  | 800003   | 803007  | 3005007   |
| 3150015 | 7252100  | 1250019 | 8702020   |
| 3010507 | 60001020 | 2005    | 10031906. |

2. Χωρίσετε σε κλάσεις τους αριθμούς:

|            |         |           |
|------------|---------|-----------|
| 765002007  | 8500307 | 100154901 |
| 3000000006 | 6010007 | 80100359  |
| 40010      | 6009560 | 28539     |

καί μετά διαβάσετε τον αριθμό, που αντιστοιχεί στην κλάσι των χιλιάδων.

3. α) Πόσες εκατοντάδες έχουν οι εξής αριθμοί:

|      |       |       |      |
|------|-------|-------|------|
| 3002 | 8765  | 69007 | 107  |
| 320  | 67935 | 4756  | 3001 |
| 501  | 903   | 47    | 8.   |

- β) Πόσες χιλιάδες έχουν οι εξής αριθμοί:

|        |        |        |
|--------|--------|--------|
| 69753  | 39654  | 893540 |
| 900002 | 221002 | 307001 |
| 8001   | 50040  | 658.   |

4. Γράψετε με ψηφία τους αριθμούς, που αποτελούνται από:

α) 5 χιλιάδες, 7 εκατοντάδες, 3 δεκάδες, 2 μονάδες / 9 δεκάδες χιλιάδων, 6 εκατοντάδες, 2 μονάδες / 7 εκατοντάδες χιλιάδων, 4 δεκάδες χιλιάδων, 3 εκατοντάδες / 4 εκατοντάδες χιλιάδων, 9 μονάδες / 8 εκατομμύρια, 5 δεκάδες χιλιάδων, 4 δεκάδες / 9 εκατομμύρια, 6 χιλιάδες, 1 μονάδα / 3 χιλιάδες, 2 μονάδες.

β) 5 δεκάδες, 3 χιλιάδες / 7 εκατοντάδες, 4 μονάδες, 8 δεκάδες χιλιάδων / 4 εκατοντάδες, 5 μονάδες, 6 χιλιάδες, 3 εκατομμύρια, 8 δεκάδες χιλιάδων.

γ) 32 εκατοντάδες και 30 μονάδες / 52 χιλιάδες και 48 δεκάδες / 82 δεκάδες χιλιάδων και 27 μονάδες / 573 εκατοντάδες χιλιάδων και 126 δεκάδες.

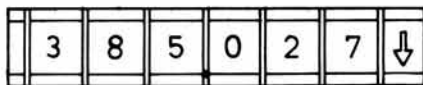
Μετά διαβάσετε όλους τους παραπάνω αριθμούς.

5. Γράψετε με ψηφία τους αριθμούς:

Τριάντα χιλιάδες οκτακόσια δέκα πέντε / Τρεις χιλιάδες διακόσια ένα / Πέντε χιλιάδες πέντε / Έξη χιλιάδες δέκα / Πενήντα χιλιάδες έπτά / Έκατο χιλιά-

δες τριάντα ἑνέα / Ἑκατὸν δέκα χιλιάδες ἑβδομήντα / Τρία ἑκατομμύρια ἑβδομήντα χιλιάδες σαράντα ἕνα / Ἐξη ἑκατομμύρια τριάντα χιλιάδες δέκα / Ἑννέα ἑκατομμύρια ἑπτὰ χιλιάδες / Ὀκτὼ ἑκατομμύρια δύο.

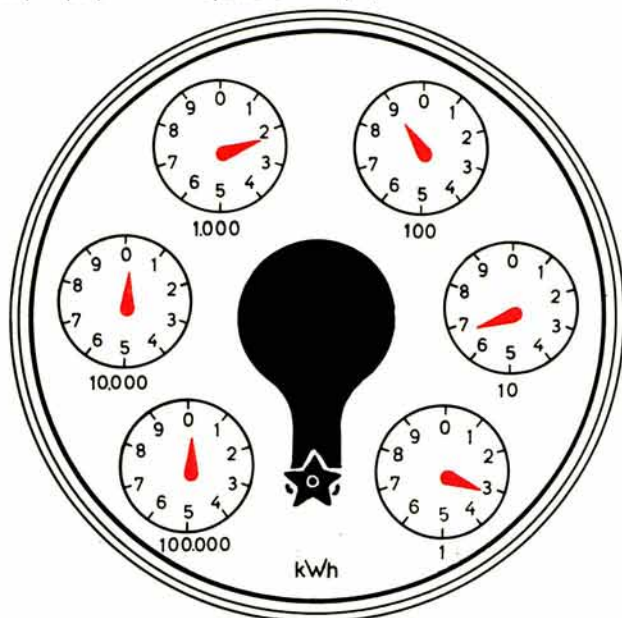
6. Ὁ μετρητὴς πετρελαίου σὲ ἕνα βυτιοφόρο αὐτοκίνητο ἔχει σταματῆση στὴν ἔνδειξί πού δείχνει τὸ σχῆμα 1·21 α.



Σχ. 1·21 α.

Γράψετε καὶ διαβάσετε τοὺς ἀριθμούς, πού σχηματίζονται ἀπὸ τὰ ψηφία, πού εὐρίσκονται κάτω καὶ πάνω ἀπὸ τὰ ψηφία τῆς ἔνδειξως.

7. Ὁ μετρητὴς ρεύματος σὲ μία πολυκατοικία δείχνει τὴν ἔνδειξι τοῦ σχήματος 1·21 β. Γράψετε καὶ διαβάσετε τὸν ἀριθμὸ.



Σχ. 1·21 β.

8. Ποιές ἀπὸ τὶς παρακάτω σχέσεις εἶναι ἀληθινές;

|                   |                 |               |
|-------------------|-----------------|---------------|
| $45 < 54$         | $3003 > 3003$   | $4321 > 4312$ |
| $9008 < 8009$     | $80007 > 70008$ | $69 < 96$     |
| $405102 = 405201$ | $80088 = 80808$ | $07 = 70$     |
| $11 < 101$        | $803 > 308$     | $101 + 110.$  |

9. α) Βάλετε τούς παρακάτω αριθμούς στην φυσική τους σειρά:

|         |         |       |       |      |
|---------|---------|-------|-------|------|
| 48      | 52      | 305   | 1006  | 39   |
| 209     | 2005    | 205   | 8007  | 7008 |
| 12607   | 12067   | 10267 | 12670 | 1803 |
| 1006005 | 1000605 | 875   | 785   | 4.   |

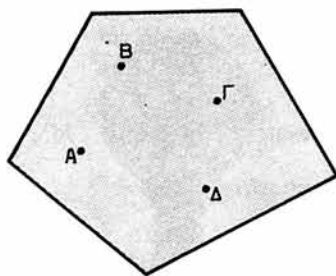
β) Άπό τούς παραπάνω αριθμούς, ποιοί προηγούνται και ποιοί ακολουθούν τόν αριθμό 2050;

10. Βάλετε τά σωστά σημεία ισότητας ή ανισότητας, ανάμεσα στά ζεύγη τών αριθμών πού ακολουθούν.

|         |         |   |       |       |
|---------|---------|---|-------|-------|
| 32      | 89      | , | 63    | 50    |
| 808     | 707     | , | 1001  | 1010  |
| 1006005 | 1000605 | , | 12607 | 12607 |
| 609     | 906     | , | 303   | 303   |
| 404     | 4004    | , | 123   | 123.  |

Άπό τίς παραγράφους 1 · 7 έως 1 · 12.

1. Άπό δύο σημεία Α και Β πόσες ευθείες γραμμές μπορούν νά περάσουν;
2. Τί γραμμή γράφει ένα σώμα, όταν τò άφίσωμε νά πέση στό έδαφος;
3. Τί γραμμή σχηματίζει ή όδοντωτή πλευρά ένòς ξυλοπρίονου;
4. Άν πάνω σέ ένα φύλλο κόντρα πλακέ σημειώσωμε τά σημεία Α, Β, Γ και Δ (σχ. 1 · 21 γ), μπορείτε νά βρήτε πόσα εύθύγραμμα τμήματα μπορούμε νά χαράξωμε;



Σχ. 1 · 21 γ.

5. Άπό τά κεφαλαία γράμματα τού άλφαβήτου, ποιά σχηματίζουν μικτή γραμμή;
6. Συρματόσχοινο έχει μήκος: 48 m 3 dm και 8 cm.  
Γράψετε τò μήκος αυτό: α) σέ cm και β) σέ mm.
7. Άναλύστε σέ μονάδες τού μετρικού συστήματος (m, dm, cm και mm) τά παρακάτω μήκη:

|                                 |          |        |          |
|---------------------------------|----------|--------|----------|
| 5869 mm                         | 35679 mm | 18 cm  | 12009 mm |
| 3867 cm                         | 875 dm   | 6004 m | 675 dm   |
| (π.χ. 132 mm = 1 dm 3 cm 2 mm). |          |        |          |

8. Τὰ μήκη 386 cm, 5004 cm καὶ 204 cm νὰ γραφοῦν σὲ m καὶ cm.

9. Πάνω σὲ μία εὐθεία γραμμὴ νὰ σημειωθοῦν μετὰ τὴν βοήθεια τοῦ διαβήτη τὰ σημεία A, B, Γ, Δ, E καὶ Z ἔτσι, ὥστε:

$$AB = BG = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ.$$

α) Ποιὰ ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AΓ, BE, ΓΔ καὶ ΔZ εἶναι ἴσα μεταξὺ τους καὶ ποιοὶ εἶναι τὸ μεγαλύτερο;

β) Πόσες φορές τὸ εὐθύγραμμο τμήμα AΓ χωράει στὸ BZ;

10. Νὰ μετατραποῦν σὲ cm τὰ ἀκόλουθα μήκη:

|      |      |      |   |       |       |   |       |
|------|------|------|---|-------|-------|---|-------|
| 2 m  | 6 dm | 4 cm | , | 301 m | 60 cm | , | 69 cm |
| 6 m  | 7 dm |      | , | 47 m  | 28 cm | , | 8 dm. |
| 59 m | 4 dm |      | , | 2 m   | 7 cm  |   |       |

11. Μετατρέψετε σὲ m τὰ παρακάτω μήκη:

|       |       |   |       |      |   |        |
|-------|-------|---|-------|------|---|--------|
| 27 km | 201 m | , | 12 km | 3 m  | , | 38 km  |
| 60 km | 101 m | , | 3 km  | 5 m  | , | 3 km   |
| 20 km | 7 m   | , | 9 km  | 15 m | , | 13 km. |

12. Ἀπὸ τὰ παρακάτω κομμάτια σωλῆνων, ποὺ ὑπάρχουν στὴν ἀποθήκη, ποιὸ θὰ εἶναι καταλλήλότερο γιὰ νὰ δοθῇ σὲ ἓνα πελάτη, ποὺ ζητεῖ ἓνα κομμάτι σωλῆνος μήκους περίπου 2 m;

|     |      |      |   |     |       |   |       |        |
|-----|------|------|---|-----|-------|---|-------|--------|
| 1 m | 8 dm | 8 cm | , | 1 m | 99 cm | , | 1 m   | 97 cm, |
| 1 m | 9 dm | 7 cm | , | 1 m | 9 dm  | , | 8 cm. |        |

Ἀπὸ τίς παραγράφους 1 · 13 ἕως 1 · 16.

1. Διαβάσετε τοὺς παρακάτω ἀριθμούς:

|          |          |        |
|----------|----------|--------|
| 47,25    | 303,02   | 300,07 |
| 600,007  | 3,0105   | 0,889  |
| 0,070    | 0,00073  | 3,0080 |
| 4,000009 | 600,0005 | 0,003. |

2. Γράψετε μετὰ ψηφία τοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ:

α) 5 δεκάδες, 6 μονάδες, 9 δέκατα, 7 ἑκατοστά 4 χιλιοστά, / 4 ἑκατοντάδες, 6 χιλιοστά / 6 δεκάδες, 5 ἑκατοστά, 4 δεκάκις χιλιοστά / 0 μονάδες, 4 χιλιοστά, 3 ἑκατοντάκις χιλιοστά / 5 ἑκατοντάκις χιλιοστά, 4 χιλιοστά, 9 ἑκατομμυριοστά.

β) 5 δεκάδες, 7 χιλιοστά, 3 δέκατα, 6 ἑκατοστά / 9 ἑκατοντάδες, 5 δεκάκις χιλιοστά, 4 ἑκατοστά, 1 χιλιοστό / 6 χιλιοστά, 7 δέκατα, 5 δεκάκις χιλιοστά.

Μετὰ διαβάσετε ὅλους τοὺς παραπάνω ἀριθμούς.

3. Γράψετε στην τύχη είκοσι δεκαδικούς αριθμούς και κατόπιν διαβάστε τους.

4. Πέστε ένα αριθμό δεκαδικό και μετά γράψτε τον με ψηφία. Να γίνει το ίδιο για 10 διαφορετικούς δεκαδικούς αριθμούς.

5. Να γραφούν με ψηφία οι παρακάτω αριθμοί:

Είκοσι πέντε άκεραιος, τριάντα έπτά έκατοστά.

Τρεις χιλιάδες δώδεκα άκεραιος, ένενήντα τρία δεκάκις χιλιοστά.

Μηδέν άκεραιος, έξήντα έκατοστά.

Έπτά άκεραιος, διακόσια έννέα δεκάκις χιλιοστά.

Τριάντα χιλιάδες άκεραιος, όκτακόσια ένα έκατομμυριοστά.

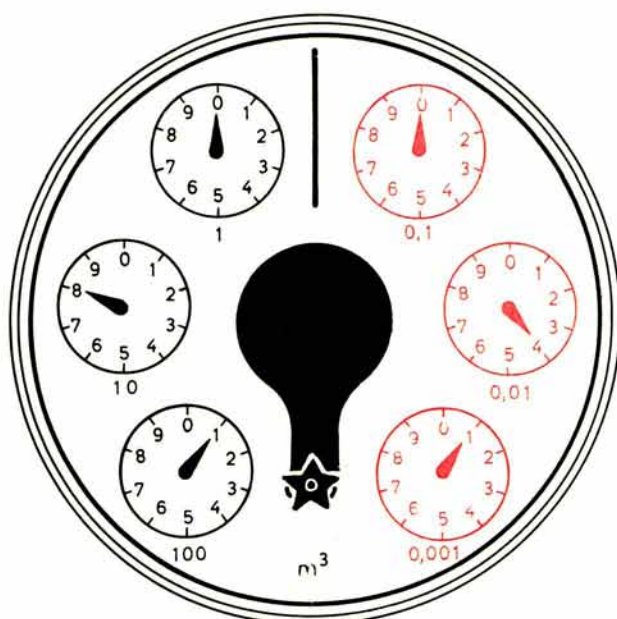
Μηδέν άκεραιος, ένα έκατομμυριοστό.

Μηδέν άκεραιος, όγδόντα δεκάκις χιλιοστά.

Τριάντα πέντε χιλιοστά.

Έβδομήντα έννέα δεκάκις χιλιοστά.

Σαράντα πέντε έκατομμυριοστά.



Σχ. 1.21 δ.

6. Να γράψετε και να διαβάσετε την ένδειξη του παραπάνω μετρητή (σχ. 1.21 δ).

7. Ποιές από τις σχέσεις που δίδονται είναι αληθινές;



|                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| $0,45 < 1,3$         | $0,45 < 0,405$     |
| $0,001 < 0,1$        | $5,27 > 5,207$     |
| $0,005 = 0,0050$     | $3,9002 > 3,902$   |
| $500,0007 < 500,007$ | $0,609 > 0,6090$   |
| $0,7070 > 0,70070$   | $10,001 = 100,01.$ |
| $0,003 = 0,00300$    |                    |

8. Νά βάλετε τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς στὴν φυσικὴ τους σειρά.

|        |        |        |          |
|--------|--------|--------|----------|
| 1,01   | 1,001  | 3,005  | 0,05     |
| 0,007  | 0,1001 | 5,0030 | 18,003   |
| 5,0031 | 3,0103 | 3,0013 | 4,01     |
| 1,04   | 4,10   | 1,432  | 2,00001. |

9. Νά γραφοῦν σὲ μέτρα τὰ παρακάτω μήκη:

|            |         |          |                    |
|------------|---------|----------|--------------------|
| α) 3790 cm | 305 cm  | 7005 cm  |                    |
| 1935 mm    | 6007 mm | 875 mm   |                    |
| 39 dm      | 4 dm    | 82 dm.   |                    |
| β) 5 m     | 9 dm    | 7 cm     | , 6 dm 7 mm , 6 mm |
| 8 m        | 9 dm    |          | , 8 cm 5 mm ,      |
| 3 m        | 2 cm    |          | , 4 cm .           |
| γ) 12 dm   | 73 mm   | , 60 cm  | 45 mm              |
| 45 cm      | 3 mm    | , 32 dm. |                    |

10. Γράψετε τὰ παρακάτω μήκη μὲ μονάδα τὸ km.

|            |         |         |         |
|------------|---------|---------|---------|
| α) 38 m    | 807 m   | 3 m     | 40759 m |
| 6007 m     | 80 m    | 400 m   |         |
| β) 308,5 m | 605,0 m | 300,1 m |         |
| 52,7 m     | 60,02 m | 7,9 m.  |         |

11. Ἀπὸ τὰ παρακάτω μήκη σωλήνων, ποιοὺ θεωρεῖτε καταλληλότερο γιὰ νὰ τὸ δώσετε σὲ ἓνα πελάτη, ποὺ θέλει ἓνα κομμάτι ἴσο ἢ λίγο μεγαλύτερο ἀπὸ 1 m καὶ 32 cm.

|         |          |          |
|---------|----------|----------|
| 1,032 m | 1,302 m  | 1,3002 m |
| 1,038 m | 1,385 m  | 1,327 m  |
| 1,307 m | 1,372 m. |          |

12. Διορθώστε τοὺς παρακάτω ἀριθμούς, ὥστε νὰ εἶναι σωστά γραμμένοι:

|         |          |            |
|---------|----------|------------|
| 2,812 m | 4 m,75   | 25 kms.    |
| 35,067  | 65,007,3 | 038,50     |
| 63,16 m | 3 m,     | 62 cm 7 mm |



13. Οι παρακάτω αριθμοί φανερώνουν μήκη. Συμπληρώστε τους με μονάδες τέτοιες, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{array}{rclclcl}
 15 \dots\dots & = & 150 \dots\dots & 4,8 & = & 48 \dots\dots \\
 156 & = & 15,6 \dots\dots & 7 \dots\dots & = & 7000 \dots\dots \\
 1 \dots\dots & = & 1000 \text{ } 000 \dots\dots & 0,9 \dots\dots & = & 9 \dots\dots \\
 1,2 \dots\dots & = & 120 \dots\dots & & & 
 \end{array}$$

Από τις παραγράφους 1·17 έως 1·20.

1. Να προσδιορίσετε την προσέγγισι που έγινε, για να εύρεθῇ τὸ ἀποτέλεσμα στήν κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω μετρήσεις:

$$\begin{array}{rclcl}
 0,030 & 0,1531 & 0,007 & 805,3 \\
 807,03 & 657,120 & 3,900 & 6,575 \\
 8000,0 & 3257,1 & 13,257 & 67.
 \end{array}$$

2. Να μετατραποῦν σὲ kp τὰ ἑξῆς βάρη:

$$\begin{array}{rclcl}
 5 \text{ t} & 3 \text{ kp} & , & 8 \text{ t} & 5 \text{ kp} \\
 3 \text{ kp} & 257 \text{ p} & , & 6 \text{ kp} & 67 \text{ p} \\
 201 \text{ kp} & 130 \text{ p} & , & 6 \text{ kp} & 50 \text{ p}.
 \end{array}$$

3. Να συγκριθοῦν καὶ νὰ μποῦν στήν σειρά κατὰ μέγεθος τὰ παρακάτω βάρη:

$$\begin{array}{rclclcl}
 5 \text{ kp} & 63 \text{ p} & , & 5062 \text{ p} & , & 795 \text{ p} & , & 3,65 \text{ kp} \\
 3 \text{ kp} & 201 \text{ p} & , & 3210 \text{ p} & , & 3021 \text{ p} & , & 0,5 \text{ t}.
 \end{array}$$

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

### ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

2 · 1 'Η πρόσθεσι.

Παραδείγματα.

1. Έχουμε δύο κουτιά με βίδες, από τὰ ὅποια τὸ ἓνα περιέχει 25 καὶ τὸ ἄλλο 48 βίδες. Θέλομε νὰ μάθωμε πόσες βίδες ἔχουμε συνολικά.

Λύσι :

Γιὰ νὰ εὐρεθῇ αὐτό, θὰ κάνωμε, ὅπως ξέρομε, *πρόσθεσι*. Ένεργοῦμε λοιπὸν κατὰ τὸν ἓνα ἀπὸ τοὺς παρακάτω τρόπους:

α) Ἀδειάζομε τὰ δύο κουτιά σὲ ἓνα μεγαλύτερο καὶ κατόπιν παίρνοντας μία-μία τὶς βίδες τὶς μετράμε ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 1, ἢ

β) παίρνομε βίδες ἀπὸ τὸ πρῶτο κουτί καὶ τὶς βάζομε, μετρώντας τὶς, στὸ δεύτερο κουτί. Ἀφοῦ ὁμως ξέρομε ὅτι τὸ δεύτερο κουτί ἔχει 48 βίδες, ἀρχίζομε τὸ μέτρημα ἀπὸ τὸ 49, ἢ

γ) κάνομε τὸ ἴδιο παίρνοντας βίδες ἀπὸ τὸ δεύτερο κουτί, ὅποτε τὸ μέτρημα τὸ ἀρχίζομε ἀπὸ τὸ 26, ἀφοῦ τὸ πρῶτο κουτί ἔχει ἤδη 25 βίδες.

Ἀλλὰ ὁμως καὶ οἱ τρεῖς παραπάνω τρόποι δὲν μᾶς δίνουν γρήγορα ἀποτελέσματα, γι' αὐτό:

δ) Γράφομε τοὺς δύο ἀριθμοὺς τὸν ἓνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο ἔτσι, ὥστε τὰ *ὁμοτάξια* ψηφία νὰ εὐρίσκωνται στὴν ἴδια στήλη. Μετὰ τραβάμε μία γραμμὴ κάτω ἀπὸ τὸν δεύτερο ἀριθμὸ καὶ ἀρχίζομε τὴν πρόσθεσι: Λέμε: 5 *σὺν* 8 μᾶς κάνουν 13. Γράφομε τὸ 3 στὴν στήλη τῶν μονάδων καὶ κρατᾶμε στὸ

25

48

+

73

Μετὰ λέμε: 1 τὸ *κρατούμενο* (δηλαδή ἡ δεκάς) καὶ 2 μᾶς κάνουν 3, σὺν 4 μᾶς κάνουν 7, τὰ ὅποια γράφομε στὴν στήλη τῶν δεκάδων.

Ὁ ἀριθμὸς 73, ποὺ εὐρήκαμε, λέγεται *ἄθροισμα* τῶν ἀριθμῶν 25 καὶ 48, οἱ ὅποιοι λέγονται *προσθετέοι*. Τὸ σύμβολο τῆς προσθέ-

σεως είναι ένας μικρός σταυρός (+) που διαβάζεται, όπως είδαμε, *σύν*. Ο τρόπος, που γράψαμε τους αριθμούς για να τους προσθέσουμε, λέγεται *κατάταξι*. Μπορούμε επίσης να έχουμε και την παρακάτω κατάταξι:

$$25 + 48 = 73.$$

2. Σὲ πέντε διαφορετικά κουτιά υπάρχουν 25, 48, 32, 7 και 109 βίδες. Ζητούμε πόσες είναι όλες οι βίδες μαζί.

*Λύσι :*

α) Ένας τρόπος για να εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπάνω ἀριθμῶν είναι νὰ προσθέσωμε τοὺς δύο πρώτους καὶ στὸ ἄθροισμά τους νὰ προσθέσωμε τὸν τρίτο. Μετά, στὸ νέο ἄθροισμα, νὰ προσθέσωμε τὸν τέταρτο καὶ στὴν συνέχεια νὰ προσθέσωμε καὶ τὸν πέμπτο. Ἔτσι θὰ ἔχωμε τὶς κατατάξεις:

$$\begin{array}{r} + \quad 25 \\ \quad 48 \\ \hline \quad 73 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \quad 73 \\ \quad 32 \\ \hline \quad 105 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \quad 105 \\ \quad 7 \\ \hline \quad 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \quad 112 \\ \quad 109 \\ \hline \quad 221 \end{array}$$

β) Ένας ἄλλος γρήγορος τρόπος είναι νὰ κάνωμε τὴν κατάταξι τῆς προσθέσεως γιὰ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μαζί καὶ νὰ τοὺς προσθέσωμε, ὅπως στὴν περίπτωσι μὲ τοὺς δύο προσθετέους.

3. Ἐστω ὅτι θέλωμε νὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς: 25,37· 302,15· 125 καὶ 97,001.

$$\begin{array}{r} 25 \\ + \quad 48 \\ \quad 32 \\ \quad 7 \\ \hline 109 \\ \hline 221 \end{array}$$

*Λύσι :*

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ ἐργαζόμαστε ὅπως στὸ παράδειγμα 2, μόνο πού προσέχομε, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ νὰ γραφοῦν ἔτσι, ὥστε οἱ ὑποδιαστολὲς ὅλες νὰ εὐρίσκωνται στὴν ἴδια στήλῃ. Μετά συμπληρώνομε μηδενικά στὰ δεξιὰ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν προσθετέων, γιὰ νὰ ἀποκτήσουν ὅλοι τὸν ἴδιο ἀριθμὸ δεκαδικῶν ψηφίων καὶ

$$\begin{array}{r} 25,37 \quad + \quad 25,370 \\ 302,15 \quad + \quad 302,150 \\ 125 \quad \eta \quad 125,000 \\ 97,001 \quad + \quad 97,001 \\ \hline 549,521 \end{array}$$

προσθέτουμε όπως στην περίπτωση των άκεραίων, προσέχοντας να βάλουμε το κόμμα στην σωστή θέση.

Όρισμός:

Πρόσθεσι αριθμών είναι ή πράξι, με την οποία εύρίσκομε ένα νέο αριθμό, ο οποίος περιέχει όλες τις μονάδες (άκεραιες και δεκαδικές) των αριθμών που μας δόθηκαν και μόνο αυτές.

## 2.2 Ιδιότητες της προσθέσεως.

α) Σε μία πρόσθεσι μπορούμε να αλλάζουμε την θέση των προσθετέων (χωρίς το άθροισμα να αλλάξει).

$$\begin{array}{l} \text{Π.χ.} \quad 25 + 48 + 32 = 105, \quad 25 + 32 + 48 = 105 \\ \quad \quad \eta \quad 48 + 25 + 32 = 105, \quad 32 + 48 + 25 = 105. \end{array}$$

β) Σε μία πρόσθεσι με πολλούς προσθετέους μπορούμε να αντικαταστήσουμε δύο ή περισσότερους από αυτούς με το άθροισμά τους (χωρίς το τελικό έξαγόμενο να αλλάξει).

$$\begin{array}{l} \text{Π.χ.} \quad (3 + 9 + 12 + 21) = (3 + 9 + 12) + 21 = 24 + 21 = 45 \\ \quad \eta \text{ άλλο παράδειγμα:} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20,32 \\ 57,03 \\ 615,00 \\ 29,30 \\ 35,75 \\ + \quad 7,20 \\ \hline 764,60 \end{array} \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{array}{r} 692,35 \\ 29,30 \\ 35,75 \\ + \quad 7,20 \\ \hline 764,60 \end{array} \quad \xrightarrow{\eta} \quad \begin{array}{r} 692,35 \\ 29,30 \\ 35,75 \\ + \quad 7,20 \\ \hline 764,60 \end{array}$$

Αυτή ή ιδιότης εύκολύνει τις πράξεις, στην περίπτωση που οι προσθετέοι είναι πολλοί.

Όπως είδαμε:

Πρόσθεσι αριθμών κλεισμένων σε παρένθεση σημαίνει πράξι, που θα πρέπει να γίνει πριν από τις άλλες πράξεις.

Καί γενικότερα:

Θὰ γίνωνται πρῶτα οἱ πράξεις, ποὺ σημειώνονται μέσα στὴν παρένθεσι, θὰ γίνεται ἀντικατάστασι ὁλόκληρης τῆς παρενθέσεως μὲ τὸ ἀποτέλεσμά της καὶ μετὰ θὰ γίνωνται οἱ ἄλλες πράξεις.

### 2.3 Δοκιμὲς τῆς προσθέσεως.

Γιὰ νὰ ἐλέγχωμε ἂν μία πρόσθεσι ἔχη γίνῃ σωστά, ἔχομε τοὺς παρακάτω τρόπους δοκιμῆς:

α) Ἀλλάσσομε τὴν θέσι τῶν προσθετέων. Σύμφωνα μὲ τὴν πρώτη ιδιότητα, τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο:

$$\begin{array}{r} 28,3 \\ + 12,0 \\ \hline 9,1 \\ 49,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12,0 \\ + 28,3 \\ \hline 9,1 \\ 49,4 \end{array}$$

β) Ἀντικαθιστοῦμε μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά τους.

$$19 + 7 + 15 + 31 = 72$$

$$(19 + 7 + 15) + 31 = 41 + 31 = 72.$$

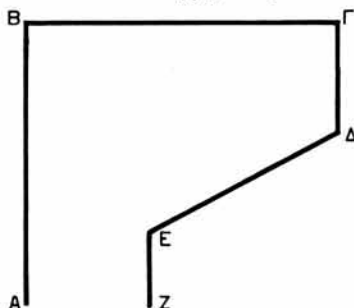
Σύμφωνα μὲ τὴν δεύτερη ιδιότητα τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο.

γ) Κάνομε τὴν πρόσθεσι κατὰ στήλες ἀρχίζοντας τὴν πρώτη φορά ἀπὸ πάνω πρὸς τὰ κάτω (βέλος 1), ἐνῶ τὴν δεύτερη φορά ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ πάνω (βέλος 2). Καὶ τὶς δύο φορές πρέπει νὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἄθροισμα.

$$\begin{array}{r} 327,25 \\ 492,40 \\ 568,00 \\ 12,68 \\ 301,50 \\ \hline 1701,83 \end{array} \quad \begin{array}{c} (1) \\ \downarrow \uparrow \\ (2) \end{array}$$

## 2.4 Μέτρηση με πρόσθεση.

α) Για να υπολογίσουμε το μήκος μιᾶς *τεθλασμένης γραμμής*, μετράμε χωριστά κάθε ευθύγραμμο τμήμα της και μετά προσθέτουμε τὰ μήκη που προκύπτουν. Έτσι για τὴν τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχήματος 2.4 α ἔχουμε:



Σχ. 2.4 α.

$$AB = 37,3 \text{ mm}$$

$$B\Gamma = 41,2 \text{ mm}$$

$$\Gamma\Delta = 15,0 \text{ mm}$$

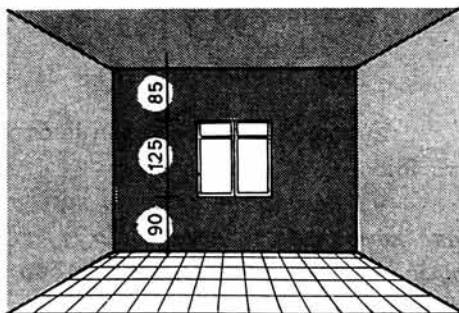
$$\Delta E = 27,8 \text{ mm}$$

$$EZ = 9,8 \text{ mm}$$

$$\text{Συνολικό μήκος} = 131,1 \text{ mm}$$

Τὸ ὅτι δίπλα στὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 15 ἔχουμε γράψει τὸ δεκαδικὸ μέρος 0, σημαίνει ὅτι ἡ μέτρηση τοῦ μήκους ΓΔ ἔχει γίνει με προσέγγιση ἐνὸς δεκάτου τοῦ mm.

β) Σὲ πολλές περιπτώσεις, γιὰ νὰ μετρήσουμε ἓνα μήκος τὸ χωρίζουμε σὲ κομμάτια καὶ ἀφοῦ τὰ μετρήσουμε, προσθέτουμε τὰ μήκη τους, εὐρίσκοντας ἔτσι τὸ συνολικὸ μήκος. Αὐτὸ π.χ. μπορούμε νὰ τὸ κάνουμε γιὰ νὰ μετρήσουμε τὸ ὕψος ἐνὸς δωματίου (σχ. 2.4 β).



Σχ. 2.4 β.

Εὐρίσκομε λοιπόν:  $90 \text{ cm} + 125 \text{ cm} + 85 \text{ cm} = 300 \text{ cm}$ .

## 2.5 Πρόσθεση με συγκεκριμένους αριθμούς.

Θὰ πρέπει νὰ ἔχουμε ὑπ' ὄψιν μας ὅτι, ὅταν ἔχουμε νὰ προσθέσουμε συγκεκριμένους ἀριθμούς, αὐτοὶ πρέπει νὰ φανερώνουν τὸ *ἴδιο μέγεθος*, γιατί ἄλλοιῶς δὲν μπορούν νὰ προστεθοῦν.

Ἀσφαλῶς ποτέ δὲν θὰ μπορούσε νὰ σκεφθῇ κανεὶς νὰ προσθέσῃ βίδες μὲ σωλῆνες ἢ κιλὰ στόκο μὲ μέτρα καλωδίου.

## 2·6 Ἡ ἀφαίρεσι.

### Παραδείγματα.

1. Ἀπὸ ἓνα κουτί, πού ἔχει 144 βίδες, χρησιμοποίησαμε σὲ μία ἐργασία 87. Πόσες βίδες ἔμειναν στὸ κουτί;

Λύσι :

Ὅπως ξέρομε, γιὰ νὰ εὐρεθῇ πόσες βίδες ἔμειναν, θὰ κάνωμε *ἀφαίρεσι*. Θὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸν μεγαλύτερο ἀριθμό, τὸν 144, πού λέγεται *μειωτέος*, τὸν μικρότερο ἀριθμό, τὸν 87, πού λέγεται *ἀφαιρετέος*, κάνοντας τὴν γνωστή μας ἀπὸ τὴν πρόσθεσι κατὰταξι, βάζοντας ἐδῶ τὸν μεγαλύτερο ἀριθμὸ ἐπάνω καὶ τὸν μικρότερο κάτω. Ὡς σύμβολο τῆς ἀφαιρέσεως χρησιμοποιοῦμε μία παῦλα (—), πού τὴν λέμε *μεῖον* ἢ *πλὴν*.

Καθὼς ἀρχίζομε τὴν ἀφαίρεσι, λέμε: 7 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαιρεῖται, *δανειζόμαστε μία δεκάδα* καὶ λέμε 7 ἀπὸ 14 ἀφίνει *ὑπόλοιπο* 7. Ὑστερα τὴν δανεικὴ δεκάδα, πού λέγεται, ὅπως καὶ στὴν πρόσθεσι, *κρατοῦμενο*, τὴν προσθέτομε στὶς δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου καὶ λέμε 8 καὶ 1 τὸ κρατοῦμενο μᾶς κάνουν 9· 9 ἀπὸ 14 ἀφίνει *ὑπόλοιπο* 5. Ἐπομένως τὸ *ὑπόλοιπο* ἢ *ἡ διαφορά* τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς 57, δηλαδή:

$$144 - 87 = 57 \text{ βίδες.}$$

2. Ἀπὸ μία κουλούρα καλῶδιο τῶν 50 m κόψαμε τὰ 23,45 m. Ζητοῦμε νὰ μάθωμε πόσα μέτρα καλῶδιο μᾶς ἔμεινε.

Λύσι :

Γράφομε πάλι τὴν γνωστή μας κατὰταξι:

$$\begin{array}{r} \text{—} \quad 50 \quad \text{m} \qquad \qquad \text{ἢ} \qquad \text{—} \quad 50,00 \text{ m} \\ \quad 23,45 \text{ m} \qquad \qquad \qquad \quad 23,45 \text{ m} \\ \hline \quad 26,55 \text{ m} \qquad \qquad \qquad \quad 26,55 \text{ m} \end{array}$$

Μετὰ ἀφαιροῦμε κανονικὰ σὰν νὰ πρόκειται γιὰ ἀκεραίους ἀριθμούς, προσέχοντας στὸ *ὑπόλοιπο* νὰ βάλωμε τὴν ὑποδιαστολὴ (ἢ κόμμα) στὴν θέσι του.



Άλλες αφαιρέσεις :

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} \text{—} \quad 427,32 \\ \quad 159,675 \\ \hline \end{array} & \eta & \begin{array}{r} \text{—} \quad 427,320 \\ \quad 159,675 \\ \hline 267,645 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{r} \text{—} \quad 216,275 \\ \quad \quad 48 \\ \hline \end{array} & \eta & \begin{array}{r} \text{—} \quad 216,275 \\ \quad \quad 48,000 \\ \hline 168,275. \end{array}
 \end{array}$$

Περιορισμός:

Για να μπορή να γίνη μία αφαίρεσι, πρέπει ό μειωτέος να είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος με τόν αφαιρετέο.

Όρισμός:

Αφαίρεσι είναι ή πράξι κατά την όποία ένας αριθμός ελαττώνεται κατά τόσες μονάδες, όσες είναι οί μονάδες ενός άλλου αριθμού.

2 · 7 Ίδιότητες αφαιρέσεως. Δοκιμές.

α) "Αν στόν αφαιρετέο προσθέσωμε τó υπόλοιπο, εύρίσκομε τόν μειωτέο.

Πράγματι, άφοϋ:  $144 - 87 = 57$   
εύρίσκομε:  $87 + 57 = 144$ .

β) "Αν από τόν μειωτέο αφαιρέσωμε τó υπόλοιπο, εύρίσκομε τόν αφαιρετέο.

Πράγματι, άφοϋ:  $144 - 87 = 57$   
εύρίσκομε:  $144 - 57 = 87$ .

γ) "Αν στόν μειωτέο και στόν αφαιρετέο προσθέσωμε τόν ίδιο αριθμό, τó υπόλοιπο δέν αλλάσσει.

Ἔτσι, ἂν κάνουμε πάλι τὴν προηγουμένη ἀφαίρεσι:  $144 - 87 = 57$  ἔχοντας προσθέσει καὶ στὸν μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ἀριθμὸ, ἔστω τὸν 25, τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται:

$$\begin{array}{r} 144 + 25 = 169 \\ - \quad 87 + 25 = 112 \\ \hline 57 \qquad \qquad 57 \end{array} \quad -$$

Καὶ ἀκόμη:

$$\begin{array}{r} 212 + 10 = 222 \\ - \quad 65 + 10 = 75 \\ \hline 147 \qquad \qquad 147 \end{array} \quad -$$

Ἀπὸ τὶς παραπάνω τρεῖς ιδιότητες, ἡ *πρώτη* καὶ ἡ *δευτέρα* ἀποτελοῦν δύο τρόπους δοκιμῆς (ἐλέγχου) τῆς ἀφαιρέσεως, ἐνῶ ἡ *τρίτη* δικαιολογεῖ στὴν κατάταξί μας, γιατί:

*Ἔχομε δικαίωμα νὰ δανειζώμαστε προσωρινὰ μονάδα τῆς μεγαλύτερας τάξεως, ὅταν ἡ ἀφαίρεσι ἢ δὲν μπορῇ νὰ ἀρχίσῃ ἢ δὲν μπορῇ νὰ συνεχισθῇ.*

## 2·8 Μέτρησι μήκους με πρόσθεσι καὶ ἀφαίρεσι.

Πάνω σὲ ἓνα σχέδιο εἶναι σημειωμένες ἐκεῖνες ἀπὸ τὶς διαστάσεις, ποὺ εἶναι ἀπαραίτητες γιὰ τὴν κατασκευή, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες μποροῦν νὰ εὑρεθοῦν μετὰ ἀπὸ πράξεις. Ἔτσι στὸ σχέδιο τῆς λαμαρινοκατασκευῆς ὁ τεχνίτης, ποὺ φτιάχνει τὸ καλούπι γιὰ τὴν πρέσσα, μετράει τὶς διαστάσεις ἀπὸ τὸ σχέδιο καὶ τὶς ἐλέγχει μὲ ὑπολογισμό. Ἔτσι εὕρσκει:

$$\alpha) 50 - 8 = 42$$

$$\alpha = 42 \text{ mm}$$

$$\beta) 82 - (35 + 29) = 82 - 64$$

$$\beta = 18 \text{ mm}$$

$$\gamma) 82 - 65 = 17$$

$$\gamma = 17 \text{ mm}$$

$$\delta) 82 - 48 = 34$$

$$\delta = 34 \text{ mm}$$

$$\epsilon) 82 - 32 = 50$$

$$\epsilon = 50 \text{ mm}$$



|             |                                                                |
|-------------|----------------------------------------------------------------|
| 175         | Μετὰ πολλαπλασιάζομε μὲ τὶς 5 δεκάδες καὶ ἔχομε                |
| $\times 53$ | $175 \times 5 = 875$ <i>δεκάδες</i> . Γράφομε τὰ δύο ἐξαγόμενα |
| 525         | ἔτσι, ὥστε τὸ πρῶτο νὰ ἔχη τὸ τελευταῖο τοῦ ψηφίο              |
| 875         | στὴν στήλη τῶν μονάδων καὶ τὸ δεύτερο τὸ τελευ-                |
| 9275        | ταῖο τοῦ ψηφίο στὴν στήλη τῶν δεκάδων. Προσθέ-                 |
|             | τομε τὰ δύο ἐξαγόμενα καὶ εὐρίσκομε τελικὰ 9275 kg.            |

Ὁ ἀριθμὸς 175 λέγεται *πολλαπλασιαστής*, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς 53 λέγεται *πολλαπλασιαστής*. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται *γινόμενο*. Οἱ ἀριθμοὶ 175 καὶ 53 λέγονται *παράγοντες* ἢ *ὄροι τοῦ γινομένου*. Ὡς σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιοῦμε τὸ  $\times$ , ποὺ τὸ διαβάζομε *ἐπὶ*. Ὅπως θὰ δοῦμε στὸν δεύτερο τόμο, ὡς σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε καὶ τὴν τελεία ( $\cdot$ ), ποὺ τὴν τοποθετοῦμε μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν καὶ σὲ μέσο ὕψος:

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 8 = 40 \\ 9 \cdot 11 = 99 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 5 \cdot 8 = 40 \\ 9 \cdot 11 = 99 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ὁρθή} \\ \text{γραφὴ} \end{array} \quad \begin{array}{l} 5.8 = 40 \\ 9.11 = 99 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 5.8 = 40 \\ 9.11 = 99 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Λανθασμένη τοπο-} \\ \text{θέτησι τῆς τελείας} \end{array}$$

## 2.11 Ὁ πίναξ τοῦ Πυθαγόρα (ἢ Πυθαγόρειος Πίναξ).

Ὁ πίναξ αὐτὸς περιέχει ὅλα τὰ γινόμενα, ποὺ σχηματίζουν μεταξὺ τους οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοί, πρέπει δὲ νὰ τὸν ξέρωμε ἀπ' ἑξῶ πολὺ καλά, γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ κάνωμε σωστὰ τὶς πράξεις.

Ἄν π.χ. ζητοῦμε τὸ γινόμενο  $7 \times 5$ , κοιτάζομε στὸν πίνακα σὲ ποιό τετραγωνάκι ἡ ὀριζοντία σειρὰ τοῦ 5 συναντᾷ τὴν κατακόρυφο στήλη τοῦ 7. Βλέπομε ὅτι συναντῶνται στὸ τετράγωνο μὲ τὸν ἀριθμὸ 35, ποὺ σημαίνει ὅτι:

$$7 \times 5 = 35.$$

Τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα βλέπομε καὶ ἂν κοιτάξωμε στὴν θέσι ποὺ συναντῶνται ἡ ὀριζοντία στήλη τοῦ 7 καὶ ἡ κατακόρυφος στήλη τοῦ 5, δηλαδὴ  $5 \times 7 = 35$ , ποὺ σημαίνει ὅτι:

*Τὸ γινόμενο δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀλλάξωμε τὴν θέσι τῶν παραγόντων.*

\*Αρα τόν Πυθαγόρειο πίνακα μπορούμε νά τόν περιορίσωμε μέσα στά πλαίσια, πού δείχνει τó σκιασμένο κομμάτι τοῦ πίνακος.

|   | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1 | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 2 | 0 | 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 0 | 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 0 | 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Όρισμός:

*Πολλαπλασιασμός είναι ή πράξι, στην οποία, από δύο αριθμούς πού μᾶς δίνονται, επαναλαμβάνομε τόν ἕνα τόσες φορές, ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἄλλος.*

2 · 12 \*Άλλοι πολλαπλασιασμοί.

α) Γινόμενο δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

1η Περίπτωση:  $27,25 \times 3,5$ .

Κάνομε τήν κατάταξι τῶν ἀριθμῶν καί μετὰ τοὺς πολλαπλασιάζομε σάν νά εἶναι οἱ ἀκέραιοι: 2725 καί 35. Τό γινόμενο, πού εὐρίσκομε, εἶναι 95375. Σ' αὐτό χωρίζομε κατόπιν μέ μέτρημα ἀπό δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά), ὅσα ἔχουν καί οἱ δύο παράγοντες τοῦ γινομένου μαζί· στοῦ παραδείγματός μας ἔχουν 3.

$$\begin{array}{r}
 27,25 \\
 \times \quad 3,5 \\
 \hline
 13625 \\
 8175 \\
 \hline
 95,375
 \end{array}$$

\*Αρα:  $27,25 \times 3,5 = 95,375$ .



2α Περίπτωση :  $0,0215 \times 0,037$ .

Έργαζόμαστε πάλι με κατάταξι όπως και στην πρώτη περίπτωση, κάνοντας τον πολλαπλασιασμό, σαν να πρόκειται για άκεραίους αριθμούς. Έπειδή μπροστά από τους άκεραίους αριθμούς το μηδέν δεν έχει καμμία αξία, μπορούμε να έχουμε και την κατάταξι (β):

| (α)            | (β)              |
|----------------|------------------|
| 0,0215         | 215              |
| $\times$ 0,037 | $\times$ 37      |
| <u>01505</u>   | <u>1505</u>      |
| 00645          | 645              |
| 00000          | <u>0,0007955</u> |
| <u>00000</u>   |                  |
| 0,0007955      |                  |

Όπως παρατηρούμε, το εξαγόμενο στην δεύτερα κατάταξι έχει λιγότερα ψηφία, από όσα δεκαδικά ψηφία έχουν και οι δύο μαζί παράγοντες του γινομένου, γι' αυτό, όταν χωρίζουμε τα δεκαδικά ψηφία στο εξαγόμενο (αρχίζοντας πάντοτε το μέτρημα από τα δεξιά προς τα αριστερά), συμπληρώνουμε τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων μπροστά από το άκεραιο μέρος με μηδενικά.

Στο παράδειγμά μας λοιπόν θα χωρίσωμε  $4 + 3 = 7$  δεκαδικά ψηφία. Έπειδή όμως το γινόμενο είναι αριθμός τετραψήφιος, θα συμπληρώσωμε τα υπόλοιπα τρία ψηφία μπροστά με μηδενικά. Έτσι εύρισκομε ότι:

$$0,0215 \times 0,037 = 0,0007955.$$

β) Γινόμενο πολλών αριθμών (παραγόντων).

$$25,3 \times 17 \times 15,1.$$

Κάνομε δύο κατατάξεις.

Στην πρώτη πολλαπλασιάζομε το 25,3 επί το 17 και το γινόμενό τους (430,1) το χρησιμοποιούμε ως πολλαπλασιαστέο στην δεύτερα κατάταξι, με πολλαπλασιαστή το 15,1 ( $430,1 \times 15,1$ ), όποτε έχουμε:

| 1η Κατάταξι                                                                                        | 2η Κατάταξι                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 25,3 \\ \times 17 \\ \hline 1771 \\ 253 \phantom{0} \\ \hline 430,1 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 430,1 \\ \times 15,1 \\ \hline 4301 \\ 21505 \phantom{0} \\ \hline 4301 \phantom{00} \\ \hline 6494,51 \end{array}$ |

Δηλαδή:

$$25,3 \times 17 = 430,1$$

$$430,1 \times 15,1 = 6494,51$$

ἢ ἀντὶ τοῦ 430,1 γράφοντας τὸ γινόμενο  $25,3 \times 17$  ἐντὸς παρενθέσεως ἔχομε:

$$(25,3 \times 17) \times 15,1 = 6494,51.$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βλέπομε ὅτι:

$$25,3 \times 17 \times 15,1 = (25,3 \times 17) \times 15,1 = 430,1 \times 15,1.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι:

*Ἀριθμοί, ποὺ εἶναι κλεισμένοι μέσα σὲ παρένθεσι, φανερόνουν πὼς θὰ γίνουν πρῶτα οἱ μεταξὺ τους πράξεις καί, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμε αὐτὲς μὲ τὸ ἐξαγόμενό τους, τότε θὰ συνεχίσωμε γιὰ τὶς ὑπόλοιπες πράξεις.*

γ) Ἄλλες περιπτώσεις:

$$32 \times (8 + 7 + 13) = 32 \times 28.$$

$$(47 + 12,3 + 6,5) \times 12 = 65,8 \times 12.$$

$$17 \times (6 - 4,2) = 17 \times 1,8.$$

$$(3 + 5 + 6,2) \times (5 - 0,3) = 14,2 \times 4,7.$$

$$(3 \times 5) \times 7 \times (8 + 9) \times 6 = 15 \times 7 \times 17 \times 6.$$

Στοὺς παραπάνω δηλαδή πολλαπλασιασμοὺς κάνομε, σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα, πρῶτα τὶς πράξεις μέσα στὶς παρενθέσεις καὶ μετὰ κάνομε τὸν πολλαπλασιασμό.



## 2.13. Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.

\*Εστω ότι από ένα σωρό βίδες παίρνουμε 15 βίδες μία φορά. Τότε θα έχουμε στα χέρια μας 15 βίδες, που σημαίνει ότι:

$$15 \times 1 = 15 \text{ βίδες.}$$

\*Αν πάρουμε τις 15 βίδες δύο φορές, τότε, θα έχουμε 30 βίδες,  $(15 + 15 = 30)$ , που σημαίνει ότι:

$$15 \times 2 = 30 \text{ βίδες.}$$

Και αν πάρουμε τις 15 βίδες *0 φορές*, σημαίνει ότι *δεν θα πάρουμε βίδες από τον σωρό*, δηλαδή θα έχουμε στα χέρια μας *μηδέν βίδες*, άρα:

$$15 \times 0 = 0 \text{ βίδες.}$$

\*Από αυτά μπορούμε να βγάλουμε σαν συμπίερασμα τις παρακάτω ιδιότητες:

α) *Ο πολλαπλασιασμός οποιουδήποτε αριθμού με την μονάδα, δίνει ως γινόμενο τον ίδιο τον αριθμό.*

Αυτό το βλέπουμε και από τον Πυθαγόρειο Πίνακα.

β) *Ο πολλαπλασιασμός οποιουδήποτε αριθμού με το μηδέν, δίνει ως γινόμενον πάλι μηδέν.*

Κι' αυτό το βλέπουμε εύκολα από τον Πυθαγόρειο Πίνακα.

γ) *Το γινόμενο συγκεκριμένου αριθμού με ένα αφηρημένο αριθμό, δίνει αριθμό συγκεκριμένο.*

Αυτό το είδαμε επίσης και στο πρώτο παράδειγμα πολλαπλασιασμού (παράγρ. 2.10), όταν πολλαπλασιάσαμε:

$$175 \text{ kg} \times 53.$$

Στην πραγματικότητα ο αριθμός 53 είναι ένας αφηρημένος αριθμός, που φανερώνει πόσες φορές πρέπει να πάρουμε σαν προσθετέο τον συγκεκριμένο αριθμό 175 kg για να μάθουμε το συνολικό βάρος, κάνοντας πρόσθεσι.

δ) Τὸ γινόμενο ἑνὸς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ μὲ ἓνα ἄλλο συγκεκριμένο δίνει πάλι ἀριθμὸ συγκεκριμένο.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν συγκεκριμένο ἀριθμὸ 3 kg ἐπὶ τὸν συγκεκριμένο ἐπίσης ἀριθμὸ 8 m. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ 3 ἐπὶ τὸ 8, σὰν νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἀφηρημένοι, δηλαδή θὰ ἔχωμε:

$$3 \times 8 = 24.$$

Τώρα ὅμως τὸ 24 δὲν εἶναι οὔτε kg οὔτε m, ἀλλὰ ἓνας ἄλλος συγκεκριμένος ἀριθμός, γιὰ τὸν ὁποῖο θὰ μᾶς μιλήσουν ἡ Φυσικὴ καὶ ἡ Μηχανικὴ. Τέτοιες περιπτώσεις θὰ συναντήσωμε καὶ σὲ ἄλλα μαθήματα ὅπως στὴν Χημεία, στὸν Ἡλεκτρισμὸ κ.λπ. Ἐκεῖνο, ποὺ αὐτὴ τὴν στιγμή ἔχει γιὰ μᾶς σημασία, εἶναι νὰ θυμώμαστε αὐτὴ τὴν ιδιότητα γιὰ νὰ μπορέσωμε νὰ τὴν χρησιμοποιήσωμε.

ε) Σὲ ἓνα πολλαπλασιασμὸ ἐπιτρέπεται νὰ ἀλλάξωμε τὴν θέσι τῶν παραγόντων.

Αὐτὸ τὸ εἶδαμε στὸν Πυθαγόρειο πίνακα. Ἄν ὁ ἓνας ἀριθμὸς εἶναι συγκεκριμένος, πάλι μπορούμε νὰ ἐφαρμόσωμε τὴν ιδιότητα αὐτή, ἀφοῦ ξέρομε ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται ὅπως μὲ τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμούς.

Π.χ.  $175 \text{ kg} \times 53 = 175 \times 53 = 53 \times 175 = 9275 \text{ kg}.$

Τὸ ἴδιο ἰσχύει, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι εἶναι συγκεκριμένοι.

στ) Σὲ ἓνα πολλαπλασιασμὸ μὲ πολλοὺς παράγοντες (ἀφηρημένους) ἐπιτρέπεται νὰ ἀντικαταστήσωμε δύο ἢ περισσοτέρους μὲ τὸ γινόμενό τους (χωρὶς φυσικὰ τὸ τελικὸ ἐξαγόμενο νὰ ἀλλάξη).

Π.χ.  $5 \times 7 \times 4 = (5 \times 7) \times 4 = 35 \times 4 = 140 = 5 \times 28 = 5 \times (7 \times 4).$

2·14 Πολλαπλασιασμὸς μὲ 10, 100, 1000 κ.λπ.

α) Στοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ἄς κάνωμε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

$$576 \times 10$$

$$576 \times 100$$

$$576 \times 1000$$

με την γνωστή μας μέθοδο (δηλαδή με κατάταξι):

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 576 \\
 \quad 10 \\
 \hline
 000 \\
 576 \\
 \hline
 5760
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \times \quad 576 \\
 \quad 100 \\
 \hline
 000 \\
 000 \\
 576 \\
 \hline
 57600
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \times \quad 576 \\
 \quad 1000 \\
 \hline
 000 \\
 000 \\
 000 \\
 576 \\
 \hline
 576000
 \end{array}$$

Βλέπουμε ότι, αν βάζαμε στον πολλαπλασιαστέο τὰ μηδέν του 10, του 100, του 1000 κ.λπ., δηλαδή του πολλαπλασιαστή, ή πράξι θα γινόταν χωρίς κατάταξι. Δηλαδή βλέπουμε ότι:

*Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἓνα ἀκέραιο ἀριθμὸ με 10, 100, 1000 κ.λπ., ἀρκεῖ νὰ γράψωμε δεξιὰ του ἓνα, δύο, τρία κ.λπ. μηδενικὰ ἀντιστοιχῶς.*

β) Στους δεκαδικούς αριθμούς.

Ἄς κάνωμε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

$$5,76 \times 10 \qquad 5,76 \times 100 \qquad 5,76 \times 1000$$

με κατάταξι:

$$\begin{array}{r}
 5,76 \\
 10 \\
 \hline
 0\ 00 \\
 5\ 76 \\
 \hline
 57,60
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5,76 \\
 100 \\
 \hline
 000 \\
 000 \\
 576 \\
 \hline
 576,00
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5,76 \\
 1000 \\
 \hline
 000 \\
 000 \\
 000 \\
 576 \\
 \hline
 5760,00
 \end{array}$$

$\downarrow$   
57,6

$\downarrow$   
576

$\downarrow$   
5760

\*Αρα:

Για να πολλαπλασιάσωμε ένα οποιοδήποτε δεκαδικό αριθμό με το 10, 100, 1000 κ.λπ., άρκει να μεταφέρωμε την υποδιαστολή πρὸς τὰ δεξιά κατὰ μία, δύο, τρεῖς κ.λπ. θέσεις αντίστοιχως. \*Αν δὲν φθάνουν τὰ δεκαδικὰ ψηφία (τοῦ πολλαπλασιαστέου), συμπληρώνομε με μηδενικά, πὸν τὰ γράφομε πρὸς τὰ δεξιά.

2 · 15 Συμπέρασμα.

α) \*Εχομε :

$$\begin{aligned} 300 \times 210 &= (3 \times 100) \times (21 \times 10) \\ &= 3 \times 100 \times 21 \times 10 \\ &= 3 \times 21 \times 100 \times 10 \\ &= (3 \times 21) \times (100 \times 10) \\ &= 63 \times 1000 \\ &= 63\,000. \end{aligned}$$

\*Επομένως:  $300 \times 210 = (3 \times 21) \times 1000 = 63\,000$ .

\*Ωστε:

\*Όταν ὁ ένας ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες σὲ ένα πολλαπλασιασμό τελειώνουν σὲ μηδέν, μπορούμε νὰ κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμό χωρὶς τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα γράφομε μετὰ τὴν πρᾶξι στὰ δεξιά τοῦ γινομένου πὸν θὰ προκύψη.

Π.χ.  $130 \times 600 = 78\,000$   
 $20 \times 900 = 18\,000$  κ.λπ.

β) \*Ας πολλαπλασιάσωμε τοὺς ἀριθμούς:  $1134 \times 207$ .  
 Κάνομε τὶς κατατάξεις:

1η Κατάταξι:

$$\begin{array}{r} 1134 \\ \times 207 \\ \hline 7938 \\ 0000 \\ 2268 \\ \hline 234738 \end{array}$$

2α Κατάταξι:

$$\begin{array}{r} 1134 \\ \times 207 \\ \hline 7938 \\ 2268 \\ \hline 234738 \end{array}$$

Βλέπουμε ότι:

Όταν ο πολλαπλασιαστής έχει ενδιάμεσα ένα ή περισσότερα μηδέν, τότε, για συντομία, παραλείπουμε τον πολλαπλασιασμό με τα μηδέν αυτά, προσέχουμε όμως, ώστε τα γινόμενα των άλλων ψηφίων του πολλαπλασιαστή με τον πολλαπλασιαστέο να γράφονται στην σωστή τους θέση, δηλαδή να αρχίζουν από δεξιά και κάτω από την στήλη του πρώτου ψηφίου, με το οποίο πολλαπλασιάζουμε τον πολλαπλασιαστέο.

2·16 Δοκιμές στον πολλαπλασιασμό.

α) 1ος τρόπος δοκιμής (αλλαγή της σειράς των παραγόντων).

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγράφου 2·13. Δηλαδή αλλιάσσουμε την σειρά των παραγόντων και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό. Ο πολλαπλασιασμός μας θα είναι σωστός, αν καταλήξουμε στο ίδιο ξαγόμενο:

$$\begin{array}{r}
 \text{π.χ.} \quad 375,3 \\
 \times \quad 1,26 \\
 \hline
 22\ 518 \\
 75\ 06 \\
 375\ 3 \\
 \hline
 472,878
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1,26 \\
 \times \quad 375,3 \\
 \hline
 378 \\
 6\ 30 \\
 88\ 2 \\
 378 \\
 \hline
 472,878
 \end{array}$$

β) 2ος τρόπος δοκιμής (δοκιμή με το σταυρό).

Ας δοῦμε πῶς θά ἐλέγξουμε τὸν πολλαπλασιασμό με τὸν τρόπο αὐτό.

Ἐστω λοιπὸν ὁ πολλαπλασιασμός:

$$\begin{array}{r}
 5403 \\
 \times \quad 347 \\
 \hline
 37821 \\
 21612 \\
 16209 \\
 \hline
 1874841
 \end{array}$$

Diagram illustrating the cross-check (δοκιμή με το σταυρό) for the multiplication of 5403 by 347. The diagram shows the partial products and the final result, with arrows indicating the steps of the calculation and the final result.



Προσθέτουμε τα ψηφία των όρων του γινομένου, μέχρις ότου καταλήξουμε σε μονοψηφίους αριθμούς:

$$5403 (5 + 4 + 3) = 12, \quad 12 (1 + 2) = 3$$

$$347 (3 + 4 + 7) = 14, \quad 14 (1 + 4) = 5.$$

Λέμε τότε ότι **μικραίνουμε** τους όρους του γινομένου, μέχρι που να καταλήξουμε σε μονοψηφίους αριθμούς.

Τους δύο αυτούς μονοψηφίους αριθμούς τοποθετούμε τον ένα στην μία γωνία και τον άλλο στην άλλη γωνία στο επάνω μέρος ενός σταυρού.

Μετά πολλαπλασιάζουμε τα δύο αυτά εξαγόμενα και προσθέτουμε τα ψηφία του γινομένου τους, μέχρι που να καταλήξουμε σε μονοψήφιο αριθμό:

$$3 \times 5 = 15, \quad 15 = (1 + 5) = 6.$$

Τον αριθμό αυτό τον γράφουμε στην κάτω άριστερή γωνία του σταυρού.

Ύστερα μικραίνουμε τα ψηφία του γινομένου 1874841 με τον ίδιο, όπως προηγουμένως, τρόπο:

$$1 + 8 + 7 + 4 + 8 + 4 + 1 = 33, \quad 33 = (3 + 3) = 6.$$

Το νέο εξαγόμενο το γράφουμε στην κάτω δεξιά γωνία, του σταυρού.

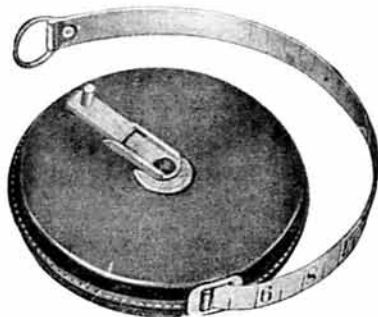
Αν ο πολλαπλασιασμός που ελέγχουμε είναι σωστός, πρέπει οι δύο αριθμοί, που γράφονται στις κάτω γωνίες του σταυρού να είναι **ίσοι**. Στην περίπτωση μας είναι σωστός, γιατί εύρισκομε 6 και 6.

## 2 · 17 Απόστάσεις πάνω στο έδαφος.

α) Για να μετρήσουμε μία απόστασι πάνω στο έδαφος, χρησιμοποιούμε την **μετροταινία** ή **κορδέλλα** (σχ. 2 · 17 α), που το μήκος της μπορεί να είναι αναλόγως 1 m, 15 m, 20 m ή και 30 m.

Έτσι για να μετρήσουμε την απόστασι του σχολείου από το σημείο Β μέχρι την στάσι του λεωφορείου στο σημείο Α (σχ. 2 · 17 β) χρειάστηκε να τοποθετήσουμε 4 φορές πάνω στο έδαφος την μετροταινία των 30 m και να μετρήσουμε μία ακόμη φορά (την 5η) 24 m. Αυτό σημαίνει πως η απόστασι ΑΒ εύρίσκεται με ένα **πολλαπλασιασμό**,  $30 \times 4 = 120$  m, και μία **πρόσθεσι**,  $120 + 24 = 144$  m, δηλαδή:

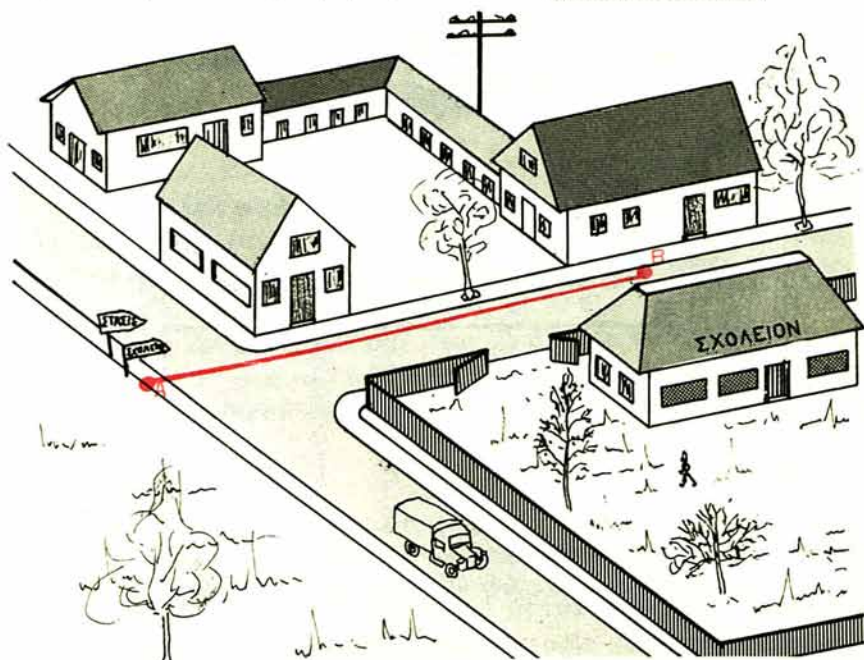
$$AB = (30 \times 4) + 24, \quad AB = 120 + 24 = 144 \text{ m.}$$



Σχ. 2.17 α.

Έπομένως μπορούμε δίπλα στην πινακίδα της στάσεως να βάλουμε άλλη πινακίδα, που να γράφη:

β) Τέτοιες πινακίδες, που φανερώνουν την απόστασι σέ χιλιόμετρα τών διαφόρων πόλεων, συναντάμε στους Έθνικούς δρόμους και

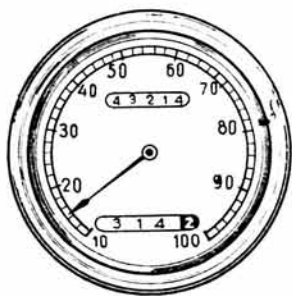


Σχ. 2.17 β.



στις σιδηροδρομικές γραμμές κατά διαστήματα ενός χιλιομέτρου.

Οί διάφορες απόστάσεις καταγράφονται στα αυτοκίνητα από ένα όργανο, που λέγεται **χιλιομετρικός μετρητής**, τὸ γνωστό μας **κοντέρ**. Πάνω σ' αυτό μπορούμε και διαβάζουμε:



Σχ. 2·17 γ.

— Τὴν **ταχύτητα** τοῦ αυτοκινήτου σὲ χιλιόμετρα τὴν ὥρα (δείκτης).

— Τὰ **χιλιόμετρα**, μὲ ἀκρίβεια δεκάτου, πὺ ἔκανε τὸ αυτοκίνητο ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς τελευταίας του διαδρομῆς (κάτω ἐνδείκτης).

— Τὰ **χιλιόμετρα**, μὲ ἀκρίβεια ἀκεραίας μονάδος, πὺ ἔχει διατρέξει συνολικὰ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς κυκλοφορίας του (ἄνω ἐνδείκτης).

Ὁ χιλιομετρικός μετρητής (σχ. 2·17 γ), πὺ καταγράφει τὰ χιλιόμετρα πὺ διάνυσε συνολικὰ τὸ αυτοκίνητο, ἔχει θέσεις γιὰ πέντε ψηφία (ἄνω ἐνδείκτης). Αὐτὸ σημαίνει, πῶς, ὅταν τὸ αυτοκίνητο ἔχη διανύσει 99 999 km καὶ προχωρεῖ γιὰ τὸ



Σχ. 2·17 δ.

Μέτρηση ἐνδεκα βημάτων γιὰ κτύπημα «πέναλτυ».

ἐπόμενο, ὁ μετρητής, ἐπειδὴ δὲν μπορεῖ νὰ δείξη 100 000 km γιὰτὶ γράφει, ὅπως εἴπαμε, μόνο πενταψηφίους ἀριθμούς, θὰ δείξη 00 000 km. Δὲν θὰ δείξη δηλαδὴ τὸ 1, τὸ ἕκτο ψηφίο — τὶς ἑκατοντάδες χιλιάδες.

Τότε λέμε ὅτι τὸ κοντέρ *γύρισε*, δηλαδή πέρασε τὴν πρώτη ἑκατοντάδα χιλιάδων.

Ἔτσι, ἂν ἓνα αὐτοκίνητο ἔχη διανύσει συνολικὰ 147 915 km, ὁ χιλιομετρικὸς μετρητής του θὰ δείχνῃ 47 915 km. Ἄν λοιπὸν στὸν χιλιομετρικὸ μετρητὴ ἑνὸς αὐτοκινήτου διαβάσωμε 47 915 km, γιὰ νὰ γνωρίζωμε πόσα χιλιόμετρα ἔχει κάνει συνολικὰ τὸ αὐτοκίνητο, πρέπει νὰ μάθωμε πόσες φορές «γύρισε» τὸ κοντέρ.



Σχ. 2.17 ε.

γ) Πολλὲς φορές τὶς ἀποστάσεις πάνω στὸ ἔδαφος τὶς μετροῦμε καὶ μὲ βήματα (σχ. 2.17 δ), ὅμως αὐτὸ γίνεται σὲ περιπτώσεις, πού κάνομε πρόχειρες μετρήσεις, ἀφοῦ, ὅπως καταλαβαίνομε, κάθε ἄνθρωπος ἔχει καὶ δικό του βῆμα (σχ. 2.17 ε).

Ἔτσι, ἂν μία ἀπόστασι εἶναι 35 βήματα καὶ ξέρωμε ὅτι τὸ βῆμα μας εἶναι περίπου 0,70 m ἢ 70 cm, ἡ ἀπόστασι θὰ εἶναι  $35 \times 0,70 = 24,50$  m.

## 2.18 Ἡ διαίρεσι.

### Παράδειγμα.

Ἔχομε ἓνα σωρὸ ἀπὸ 1835 βίδες, πού θέλομε νὰ τὶς μοιράσωμε σὲ 12 κουτιά. Πόσες βίδες θὰ βάλωμε στὸ κάθε κουτί;

Λύσι :

Γιὰ νὰ λύσωμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς:

‘Από τόν σωρό μέ τις 1835 βίδες *άφαιρούμε* 12 καί τις *μοιράζουμε* στά κουτιά βάζοντας άπό μία στό καθένα. Μᾶς περισσεύουν έπομένως  $1835 - 12 = 1823$  βίδες. ‘Αφαιρούμε πάλι 12 καί τις μοιράζουμε στά κουτιά άπό μία, έπομένως περισσεύουν  $1823 - 12 = 1811$  καί συνεχίζουμε έτσι, μέχρι πού νά μᾶς μείνη υπόλοιπο αριθμός μικρότερος τοῦ 12, πού σημαίνει ότι δέν ἔχομε αρκετές βίδες καί γιά τά 12 κουτιά. Τελειώνοντας τήν έργασία αὐτή, βλέπομε ότι χρειάσθηκε νά κάνωμε συνολικά 152 άφαιρέσεις τοῦ 12 καί ότι τό τελευταίο μας υπόλοιπο είναι 11 βίδες.

‘Όπως εύκολα καταλαβαίνωμε, ό τρόπος αὐτός μέ τις *συνεχεῖς άφαιρέσεις* παίρνει πολὺ χρόνο καί είναι κουραστικός. Γι’ αὐτό άκολουθοῦμε ἄλλο τρόπο πολὺ πιό σύντομο κάνοντας *διαιρέσι*. Για νά διαιρέσωμε τόν αριθμό 1835 διά τοῦ 12 συμβολίζωμε:

$$1835 : 12$$

$$\begin{array}{r|l} \eta & \mu\epsilon \text{ κατ\acute{α}ταξ\iota} : \quad 1835 \quad | \quad 12 \\ & \hline & \text{ΠΗΛΙΚΟΝ} \end{array}$$

Τό σύμβολο τῆς διαιρέσεως είναι οί δύο τελείες (:) καί διαβάζεται *διά*. ‘Ο αριθμός 1835, πού διαιρεῖται, λέγεται *διαιρετέος*, ἐνῶ ό αριθμός 12, πού διαιρεῖ τόν διαιρετέο, λέγεται *διαιρέτης*. ‘Ο αριθμός 152, πού φανερώνει πόσες φορές μπορεῖ νά *χωρέσῃ* ό διαιρέτης μέσα στόν διαιρετέο, λέγεται *πηλίκον*, ἐνῶ ό αριθμός 11, πού περισσεύει, λέγεται *υπόλοιπο*.

‘Από όσα εἶπαμε παραπάνω προκύπτει ότι, ἂν πολλαπλασιάσωμε τό  $12 \times 152$  καί στό γινόμενό τους προσθέσωμε τό 11, εὐρίσκομε τό 1835, δηλαδή:

$$1835 = (12 \times 152) + 11.$$

‘Επομένως:

*‘Ο διαιρετέος ἰσοῦται μέ τό ἐξαγόμενο πού εὐρίσκομε, ἂν στό γινόμενο τοῦ διαιρέτη ἐπὶ τό πηλίκον προσθέσωμε τό υπόλοιπο.*

Αὐτό γράφεται:

$$\text{Διαιρετέος} = (\text{Διαιρέτης} \times \text{Πηλίκον}) + \text{‘Υπόλοιπο}$$

Ὅταν μία διαίρεσι ἀφίνη ὑπόλοιπο, ὅπως παραπάνω, λέγεται *ἀτελής*, ἐνῶ ὅταν δὲν ἀφίνη, λέγεται *τελεία*. Στὴν τελευταία περίπτωσηι ἔχομε:

$$\text{Διαιρετέος} = \text{Διαιρέτης} \times \text{Πηλίκο}$$

Ὅρισμός:

*Διαίρεσι εἶναι ἡ πρᾶξι, μετὰ τὴν ὁποία εὐρίσκομε πόσες φορές ἕνα ἀριθμὸς χωράει σὲ ἕνα ἄλλο.*

## 2·19 Ἐκτέλεσι τῆς διαιρέσεως.

Στὴν παράγραφο αὐτὴ θὰ ὑπενθυμίσωμε τὸν τρόπο, μετὰ τὸν ὁποῖο ἐκτελοῦμε τὴν διαίρεσι μετὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν. Σὰν παράδειγμα θὰ χρησιμοποιήσωμε τὸ παράδειγμα τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Κάνομε τὴν γνωστὴ κατὰταξι. Στὴν ἀρχὴ χωρίζομε ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης. Ἄν τὸ κομμάτι ποὺ προκύπτει εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτη, τότε χωρίζομε ἀπὸ τὸν διαιρετέο ἕνα ἀκόμη ψηφίον, ἔτσι, ὥστε τελικῶς νὰ ἔχωμε χωρίσει ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ ἕνα ψηφίον παραπάνω ἀπὸ ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης. Στὸ παράδειγμά μας ὁ διαιρέτης ἔχει δύο ψηφία. Χωρίζομε ἀπὸ τὸν διαιρετέο μετὰ ἕνα τόνον δύο ψηφία, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὰ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Διαιρετέος} \rightarrow & \begin{array}{r} 18'3'5' \\ - 12 \\ \hline 63 \\ - 60 \\ \hline 35 \\ - 24 \\ \hline 11 \end{array} & \begin{array}{l} | 12 \\ 152 \\ \leftarrow \text{Διαιρέτης} \\ \leftarrow \text{Πηλίκον} \end{array}
 \end{array}$$

← Ὑπόλοιπο

ἀριστερά. Τὸ κομμάτι ποὺ προκύπτει, εἶναι ὁ ἀριθμὸς 18, ποὺ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν διαιρέτη 12. Λέμε τότε ὅτι τὸ 12 στὸ 18 χωράει 1 φορά. Τὸ 1 εἶναι τὸ πρῶτο ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γράφομε στὴν θέσι ποὺ μᾶς λέει ἡ κατὰταξι (παράγρ. 2·18). Μετὰ λέμε  $1 \times 12 = 12$ · αὐτὸ τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 18 καὶ κάνομε τὴν ἀφαίρεσι  $18 - 12 = 6$ .

Στήν συνέχεια κατεβάζομε τὸ ἐπόμενο ψηφίο τοῦ διαιρετέου, τὸ 3, καὶ τὸ γράφομε δίπλα στὸ 6, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ὁ ἀριθμὸς 63. Λέμε πάλι τὸ 12 στὸ 63 χωράει 5 φορές. Τὸ 5 εἶναι τὸ δεύτερο ψηφίο τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γράφομε *δεξιά* τοῦ 1. Μετὰ λέμε  $5 \times 12 = 60$ . Αὐτὸ τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 63 καὶ ἀφαιρώντας ἔχομε  $63 - 60 = 3$ . Κατεβάζομε καὶ τὸ τελευταῖο ψηφίο τοῦ διαιρετέου, τὸ 5, γράφοντας το δὲ δίπλα στὸ 3 σχηματίζομε τὸν ἀριθμὸ 35, καὶ λέμε, τὸ 12 στὸ 35 χωράει 2 φορές. Τὸ ψηφίο αὐτὸ εἶναι τὸ τρίτο ψηφίο τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γράφομε δεξιά στὰ δύο προηγούμενα. Τελειώνομε λέγοντας  $2 \times 12 = 24$ , πού τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 35 καὶ τὸ ἀφαιροῦμε:  $35 - 24 = 11$ . Ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει ἄλλο ψηφίο τοῦ διαιρετέου γιὰ νὰ τὸ κατεβάσωμε, ἡ διαίρεσι ἔχει τελειώσῃ ἐδῶ.

Βλέπομε ὅτι στήν διαίρεσι:

$$1835 : 12$$

τὸ πηλίκον *με προσέγγισι ἀκεραίας μονάδος πρὸς τὰ κάτω* εἶναι ὁ ἀριθμὸς **152**, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπο εἶναι ὁ ἀριθμὸς **11**.

2 · 20 Ἄλλες διαίρεσεις. Ἐπέκτασι μιᾶς ἀτελοῦς διαίρεσεως.

α) Ἄς δοῦμε πῶς θὰ διαιρέσωμε τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ 1235,83 σὲ 15 ἴσα μέρη.

Κάνομε τὴν γνωστὴ μας κατὰταξι τῆς διαίρεσεως καὶ διαιροῦμε, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ ἀκέραιο μέρος 1235 τοῦ ἀριθμοῦ μας μετὰ τὸ 15. Ἔτσι εὐρίσκομε τὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ πηλίκου, πού εἶναι 82, καὶ τὸ ἀκέραιο ὑπόλοιπο, πού εἶναι ὁ ἀριθμὸς 5.

$$\begin{array}{r|l}
 123'5',8'3' & 15 \\
 \hline
 120 & 82,38 \\
 \hline
 35 & \\
 30 & \\
 \hline
 58 & \\
 45 & \\
 \hline
 133 & \\
 120 & \\
 \hline
 13 &
 \end{array}$$





Έπειδή ό πολλαπλασιασμός του διαιρέτη με τὰ μηδενικά ψηφία του πηλίκου δίνει κάθε φορά έξαγόμενο μηδέν και ή άφαίρεσι μäs άφίνει πάντοτε σάν υπόλοιπο τόν άριθμό, πού άποτελείται άπό τὰ ψηφία του διαιρετέου πού κατεβάζομε, μπορούμε στην έκτέλεσι τής διαιρέσεως νά συντομεύσωμε τīs πράξεις λέγοντας, τὸ 125 στὸ 4 δέν χωράει, γράφομε μηδέν εἰς τὸ πηλίκον. Κατεβάζομε, βάζοντας τόνο, τὸ 8, καὶ υποδιαστολή στὸ πηλίκον. Τὸ 125 στὸ 48 δέν χωράει, μηδέν εἰς τὸ πηλίκον, πού τὸ γράφομε δεξιὰ τής υποδιαστολῆς. Κατεβάζομε, βάζοντας τόνο, καὶ τὸ 6, καὶ λέμε τὸ 125 στὸ 486 χωράει 3 φορές καὶ συνεχίζομε μετὰ κατὰ τὰ γνωστά.

Έτσι ἔχομε τὴν δεξιὰ κατάταξι, πού εἶναι καὶ πιὸ σύντομη.

γ) Ἐν, ἀντὶ νά σταματήσωμε στὸ τρίτο δεκαδικὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου, θέλωμε νά συνεχίσωμε, βάζομε δεξιὰ στὸν διαιρετέο μετὰ τὸ 2 τόσα μηδέν, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία παραπάνω θέλωμε νά ἔχωμε στὸ πηλίκον. Έτσι γιὰ πηλίκον μὲ προσέγγισι ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ (δηλαδή 5ου δεκαδικοῦ ψηφίου) προσθέτομε μετὰ τὸ 2 δύο μηδέν καὶ κάνομε τὴν διαίρεσι:

$$4,86200 : 125$$

ἢ μὲ τὴν κατάταξι:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 4,86'2'0'0 \\
 - 375 \\
 \hline
 111\ 2 \\
 - 100\ 0 \\
 \hline
 1120 \\
 - 1000 \\
 \hline
 1200 \\
 - 1125 \\
 \hline
 75
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 125 \\
 \hline
 0,03889
 \end{array}
 \end{array}$$

Εύρίσκομε τὸ πηλίκον 0,03889 μὲ προσέγγισι ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ καὶ υπόλοιπο 0,00075.

Ἡ ἔργασία αὐτὴ λέγεται *ἐπέκτασι τής διαιρέσεως*.

δ) Στὴν περίπτωσι διαιρέσεως δύο άκεραίων άριθμῶν (ὅπως στὸ παράδειγμα τής παραγράφου 2·20) μπορούμε νά εὔρωμε πηλίκον μὲ προσέγγισι δεκαδικοῦ ψηφίου, ἀρκεῖ τὸν άκέραιο διαιρετέο



νὰ τὸν γράψωμε μὲ δεκαδικὴ μορφή. Ἔτσι, ἂν θέλωμε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως  $1835 : 12$  μὲ προσέγγισι χιλιοστοῦ, γράφομε:

$$1835,000 : 12$$

καὶ μετὰ διαιροῦμε ὅπως στὴν περίπτωσι γ.

ε) Τέλος ἔστω ὅτι ἔχομε νὰ διαιρέσωμε δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, π.χ. τοὺς:

$$837,253 : 7,24.$$

Μεταφέρομε δεξιὰ τὶς ὑποδιαστολές, τόσο στὸν διαιρετέο ὅσο καὶ στὸν διαιρέτη κατὰ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὥστε ὁ διαιρέτης νὰ γίνη ἀκέραιος.

Ἔτσι θὰ ἔχωμε γιὰ τὴν παραπάνω διαίρεσι:

$$\text{ἀντὶ } 837,253 : 7,24 \quad \text{τὴν } 83725,3 : 724.$$

Κάνομε τὴν διαίρεσι μὲ κατὰταξι καὶ εὐρίσκομε πηλίκον 115,6 καὶ ὑπόλοιπον: 30,9.

$$\begin{array}{r|l} 837'2'5,3 & 724 \\ - 724 & 115,6 \\ \hline 1132 & \\ - 724 & \\ \hline 4085 & \\ - 3620 & \\ \hline 4653 & \\ - 4344 & \\ \hline 309 & \end{array}$$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὰ σωστὰ δεκαδικὰ ψηφία στὸ ὑπόλοιπο, μεταφέρομε τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ τόσες θέσεις ἀριστερά, ὅσες θέσεις δεξιὰ τὴν μεταφέραμε στὴν ἀρχὴ (στὸ παράδειγμά μας δύο θέσεις ἀριστερά) καὶ εὐρίσκομε ὑπόλοιπο 0,309.

Ὡστε στὴν διαίρεσι  $837,253 : 7,24$  εὐρίσκομε πηλίκον 115,6 καὶ ὑπόλοιπο 0,309.

στ) Στὴν περίπτωσι διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου μὲ ἓνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ, ἢ προσθέτομε στὸν ἀκέραιο διαιρετέο τόσα μηδέν, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης καὶ ἀφαιρώντας τὴν ὑποδιαστολὴν (ἀπὸ

τόν διαιρέτη), κάνουμε κανονικά διαίρεσι δύο άκεραίων αριθμών:

π.χ. αντί  $153 : 27,4$  γράφουμε :  $1530 : 274$

ή γράφουμε τόν άκεραίο με δεκαδική μορφή και έχομε νά διαιρέσωμε δύο δεκαδικούς αριθμούς:

π.χ. αντί  $153 : 27,4$  γράφουμε :  $153,0 : 27,4$ .

2 · 21 Άξιοσημείωτες παρατηρήσεις.

Άπό τά όσα μέχρι τώρα είπαμε παρατηρούμε ότι:

α) Σε μία διαίρεσι δέν μπορεί διαιρέτης νά είναι ό αριθμός μηδέν.

π.χ. διαίρεσι  $9 : 0$  δέν ύπάρχει.

β) Σε μία διαίρεσι με διαιρετέο μηδέν, πηλίκον και υπόλοιπο είναι μηδέν.

π.χ.  $0 : 3 = 0$ .

γ) Σε διαίρεσι με διαιρέτη τήν μονάδα τό πηλίκον ίσοῦται με τόν διαιρετέο και τό υπόλοιπο είναι μηδέν.

π.χ.  $8 : 1 = 8$ .

δ) Σε διαίρεσι με διαιρέτη ίσο με τόν διαιρετέο, τό πηλίκον είναι μονάς και τό υπόλοιπο μηδέν.

π.χ.  $43,6 : 43,6 = 1$ .

2 · 22 Διαίρεσι με 10, 100, 1000 κ.λπ.

Άς κάνωμε τίς παρακάτω διαιρέσεις:

|             |              |               |
|-------------|--------------|---------------|
| $37 : 10$   | $37 : 100$   | $37 : 1000$   |
| $26,8 : 10$ | $26,8 : 100$ | $26,8 : 1000$ |

μέχρι νά εύρεθῇ υπόλοιπο μηδέν.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{array}{r|l}
 37 & 10 \\
 \hline
 30 & 3,7 \\
 \hline
 70 & \\
 - 70 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 37 & 100 \\
 \hline
 300 & 0,37 \\
 \hline
 700 & \\
 - 700 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 37 & 1000 \\
 \hline
 3000 & 0,037 \\
 \hline
 7000 & \\
 - 7000 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 26,8 & 10 \\
 \hline
 20 & 2,68 \\
 \hline
 68 & \\
 - 60 & \\
 \hline
 80 & \\
 - 80 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 26,8 & 100 \\
 \hline
 200 & 0,268 \\
 \hline
 680 & \\
 - 600 & \\
 \hline
 800 & \\
 - 800 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 26,8 & 1000 \\
 \hline
 2680 & 0,0268 \\
 \hline
 6800 & \\
 - 6000 & \\
 \hline
 8000 & \\
 - 8000 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Από τις παραπάνω διαιρέσεις παρατηρούμε ότι:

Για να διαιρέσουμε ένα αριθμό ακέραιο ή δεκαδικό με 10, 100, 1000 κ.λπ., αν είναι ακέραιος, τον κάνουμε δεκαδικό και μετά μεταφέρουμε την υποδιαστολή του τόσες θέσεις αριστερά, όσα είναι τα μηδενικά του διαιρέτου. Αν τα άκεραία ψηφία του (διαιρετέου) αριθμού δεν φθάνουν, τότε συμπληρώνουμε με τόσα μηδενικά (που τα γράφουμε αριστερά του διαιρετέου), όσα χρειάζονται, για να μπορή να γίνη αυτή η μεταφορά.

Άλλα παραδείγματα:

$$38 : 10000 = 00038 : 10000 = 0,0038.$$

$$8947 : 100 = 89,47.$$

$$8750 : 10 = 875,0 = 875.$$

$$38,2 : 1000 = 0038,2 : 1000 = 0,0382.$$

$$0,65 : 100 = 000,65 : 100 = 0,0065.$$

$$874,5 : 100000 = 000874,5 : 100000 = 0,008745.$$

2 · 23 Διαίρεσι με 0,1 ή 0,01 ή 0,001.

“Ας κάνωμε. τίς διαιρέσεις:

$$2,6 : 0,1 \quad 2,6 : 0,01 \quad 2,6 : 0,001.$$

Σύμφωνα με τὰ ὅσα εἶπαμε στὴν παράγραφο 2 · 19 (ε), μεταφέρουμε τὴν ὑποδιαστολὴ καὶ στὸν διαιρετέο καὶ στὸν διαιρέτη τόσα ψηφία δεξιά, ὅσα χρειάζονται γιὰ νὰ γίνη ὁ διαιρέτης ἀκέραιος.

Θὰ ἔχωμε τότε:

|                           |                             |                                                |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------|
| $26 : 1$                  | $260 : 1$                   | $2600 : 1$                                     |
| (μεταφέρουμε<br>μία θέσι) | (μεταφέρουμε<br>δύο θέσεις) | (μεταφέρουμε τρεῖς θέσεις<br>τὴν ὑποδιαστολὴ), |

ποὺ δίνουν ἀντιστοιχῶς, σύμφωνα με τὴν παρατήρησι τῆς παραγράφου 2 · 20 (γ), πηλίκον:

$$26 \qquad 260 \qquad 2600.$$

Βλέπομε ὅτι:

$$26 = 2,6 \times 10 \qquad 260 = 2,6 \times 100 \qquad 2600 = 2,6 \times 1000.$$

\*Αρα:

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἓνα ἀριθμὸ με 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001 κ.λπ., ἀρκεῖ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμε ἀντιστοιχῶς με 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.λπ.

2 · 24 Δοκιμὲς στὴν διαίρεσι.

Γιὰ νὰ ἐλέγξωμε μία διαίρεσι ἂν εἶναι σωστή, χρησιμοποιοῦμε δύο τρόπους. Θὰ τοὺς ἐφαρμόσωμε στὴν διαίρεσι  $1235,83 : 15$ , στὴν ὁποία τὸ πηλίκον εἶναι 82,38 καὶ τὸ ὑπόλοιπο 0,13.

1ος τρόπος :

Ἐφαρμόζοντας τὸ συμπέρασμα τῆς παραγράφου 2 · 18, θὰ πρέπει ὁ διαιρετέος 1235,83 νὰ ἰσοῦται με τὸ ἐξαγόμενο ποὺ εὐρίσκομε, ἂν στὸ γινόμενο τοῦ διαιρέτου 15 με τὸ πηλίκον 82,38 (= 1235,70) προσθέσωμε τὸ ὑπόλοιπο 0,13, δηλαδή:

$$15 \times 82,38 = 1235,70.$$

$$1235,70 + 0,13 = 1235,83,$$

ἢ σὲ μία κατάταξι:  $(15 \times 82,38) + 0,13 = 1235,83.$

2ος τρόπος (ή μέθοδος του σταυρού):

Κάνουμε την κατάταξι της διαιρέσεως όπως στην παράγραφο 2 · 20 (α). Κατόπιν όπως και στον σταυρό του πολλαπλασιασμού, μικραίνουμε, προσθέτοντας τα ψηφία, το πηλίκον και τον διαιρέτη και τα εξαγόμενα τα γράφουμε στις δύο επάνω γωνίες του σταυρού:

$$82,38 (8 + 2 + 3 + 8) = 21, \quad 21 (2 + 1) = 3$$

$$15 (1 + 5) = 6.$$

Μετά μικραίνουμε τον διαιρέτεο και το εξαγόμενο το γράφουμε στην κάτω δεξιά γωνία του σταυρού.

|         |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1235,83 | 15    | <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: left;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;">3</div> <div style="border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;">6</div> <div style="border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;">4</div> <div style="border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;">4</div> </div> </div> |
| 120     | 82,38 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 35      |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 30      |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 58      |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 45      |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 133     |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 120     |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 13      |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

$$1235,83 (1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 3) = 22, \quad 22 (2 + 2) = 4.$$

Πολλαπλασιάζουμε κατόπιν τα ψηφία, που είναι γραμμένα στις δύο επάνω γωνίες του σταυρού,  $3 \times 6 = 18$ , και το γινόμενό τους το γράφουμε δίπλα στο υπόλοιπο 13. Τον νέο αριθμό που προκύπτει, 1318, τον μικραίνουμε:  $1 + 3 + 1 + 8 = 13$ ,  $1 + 3 = 4$  και το εξαγόμενο το γράφουμε στην κάτω αριστερή γωνία του σταυρού.

Αν η διαίρεση που ελέγχουμε έχει γίνει σωστά, οι δύο αριθμοί, που γράφονται στις κάτω γωνίες του σταυρού, είναι ίσοι.

Στο παράδειγμά μας είναι σωστή, γιατί εύρισκομε 4 και 4.

## 2 · 25 Άξιοσημείωτες διαιρέσεις.

Δίνουμε παρακάτω μερικές αξιοσημείωτες περιπτώσεις τελείων διαιρέσεων άκεραίων πολυψηφίων αριθμών με μονοψηφίους αριθμούς (και μία περίπτωση με διψήφιο).

α) Διαιρείσι διὰ 2.

Ένας άκέραιος άριθμός διαιρείται άκριβώς διὰ 2, όταν τὸ τελευταῖο του ψηφίο εἶναι μηδέν ἢ άριθμός πού διαιρείται διὰ 2.

π.χ.  $8430 : 2 = 4215$ ,  $64 : 2 = 32$ ,  $7098 : 2 = 3549$  κ.λπ.

β) Διαιρείσι διὰ 5.

Ένας άκέραιος άριθμός διαιρείται άκριβώς διὰ 5, όταν τελειώνη σὲ 0 ἢ 5.

π.χ.  $125 : 5 = 25$ ,  $305 : 5 = 61$ ,  $20 : 5 = 4$  κ.λπ.

γ) Διαιρείσι διὰ 3 ἢ 9.

Ένας άκέραιος άριθμός διαιρείται άκριβώς διὰ 3 ἢ 9, όταν τὸ άθροισμα τῶν ψηφίων του αποτελεῖ άριθμό, πού διαιρείται διὰ 3 ἢ 9.

π.χ.  $2786541$  άθροισμα ψηφίων = 33 διαιρείται διὰ 3  
 $7358211$  » » = 27 » » 3 καί 9  
 $69$  » » = 15 » » 3

δ) Διαιρείσι διὰ 6.

Ένας άκέραιος άριθμός διαιρείται άκριβώς διὰ 6, όταν διαιρῆται άκριβώς διὰ 2 καί 3.

π.χ.  $81054$  διαιρείται διὰ 2 καί 3, επομένως:

$81054 : 6 = 13509$  κ.λπ.

ε) Διαιρείσι διὰ 4 ἢ 25.

Ένας άκέραιος άριθμός διαιρείται άκριβώς διὰ 4 ἢ 25, όταν τὰ δύο τελευταῖα του ψηφία αποτελοῦν άριθμό, πού διαιρείται άκριβώς διὰ 4 ἢ 25.

π.χ.  $80075 : 25 = 3203$   $67936 : 4 = 16984$  κ.λπ.



## 2·26 Μέτρησι με διαίρεσι.

Με τὴν βοήθεια ἑνὸς διαβήτη μποροῦμε νὰ λάβωμε πάνω σὲ μία εὐθεῖα 8 ἴσα κομμάτια, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ Α καὶ τελειώνοντας στὸ Ι (σχ. 2·26 α).

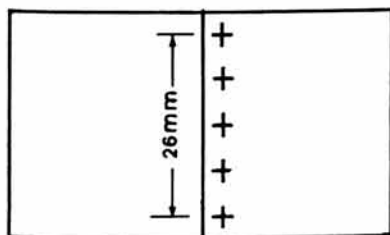


Σχ. 2·26 α.

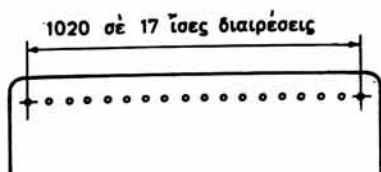
Γιὰ νὰ εἶναι τὰ διάφορα κομμάτια ἴσα, πρέπει νὰ κρατήσωμε τὸ ἀνοιγμα τοῦ διαβήτη μας σταθερό. Μετὰ μετροῦμε τὸ μήκος ΑΙ μὲ ἓνα ὑποδεκάμετρο καὶ ἔστω ὅτι  $AI = 71 \text{ mm}$ . Τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα, τότε, θὰ εἶναι:

$$71 : 8 = 8,875 \text{ mm.}$$

Εἶναι φανερό ὅτι τὸ μήκος κάθε εὐθυγράμμου τμήματος ὑπολογίζεται ἔτσι μὲ ἀκρίβεια χιλιοστοῦ τοῦ mm, πράγμα πού δὲν θὰ μπορούσε νὰ γίνη με μέτρησι με ὑποδεκάμετρο. Τὸν τρόπο αὐτὸ μετρήσεως τὸν χρησιμοποιοῦμε π.χ. ὅταν θέλωμε νὰ προσδιορίσωμε τίς



α

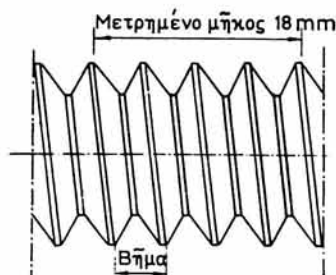


β

Σχ. 2·26 β.

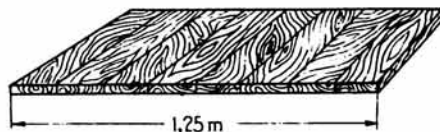
Ὑπολογισμὸς τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο διαδοχικῶν καρφιών.

Ἰσες ἀποστάσεις τῶν καρφιών (σχ. 2·26 β) σὲ μία καρφωτὴ κατασκευὴ (λέβητες, δεξαμενὲς κ.λπ.). Μὲ τὸν ἴδιο πάλι τρόπο μποροῦμε νὰ μετρήσωμε τὸ βῆμα ἑνὸς κοχλίου, τὸ πλάτος τῶν σανίδων ἑνὸς πατώματος, τὸ βῆμα ἑνὸς ἐλατηρίου, τὸ ὕψος τοῦ σκαλοπατιοῦ μιᾶς σκάλας κ.λπ.



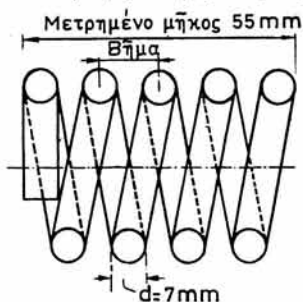
Σχ. 2-26 γ.

Υπολογισμός του βήματος ενός κοχλία.



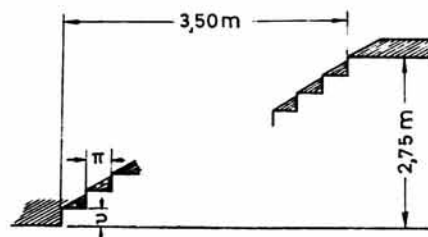
Σχ. 2-26 δ.

Υπολογισμός του πλάτους μίας λουρίδας.



Σχ. 2-26 ε.

Έλατήριο.



Σχ. 2-26 στ.

Σκάλα.

2 · 27    Ο μέσος όρος.

Πρόβλημα.

Από το συσκευαστήριο ενός εργοστασίου βγήκαν τα παρακάτω συσκευασμένα κιβώτια:

|    |       |         |     |
|----|-------|---------|-----|
| 1η | ημέρα | κιβώτια | 185 |
| 2η | »     | »       | 187 |
| 3η | »     | »       | 279 |
| 4η | »     | »       | 240 |
| 5η | »     | »       | 284 |

Ζητείται να εύρεθῇ ἡ μέση ἡμερησία παραγωγή τοῦ συσκευαστηρίου.

Λύσι :

Το πρόβλημα αὐτὸ μᾶς ζητεῖ νὰ εὐρώμε πόσα κιβώτια πρέπει

νὰ βγαίνουν κάθε ἡμέρα ἀπὸ τὸ συσκευαστήριον, ὥστε νὰ μπορούμε νὰ ἐλέγχουμε τὴν παραγωγή μας καὶ νὰ μὴ ἔχουμε διαφορὲς παραγωγῆς ἀπὸ μέρα σὲ μέρα. Σκεφτόμαστε λοιπὸν ὡς ἑξῆς:

Στὶς πέντε ἡμέρες τὰ συσκευασμένα κιβώτια εἶναι:

$$185 + 187 + 279 + 240 + 284 = 1175.$$

Γιὰ νὰ ἔχουμε κάθε ἡμέρα τὴν ἴδια παραγωγή, θὰ πρέπει νὰ συσκευάζωνται ἀντιστοίχως:

$$1175 : 5 = 235 \text{ κιβώτια κατὰ μέσο ὅρο τὴν ἡμέρα.}$$

Στὴν τεχνική, ἡ ἀξία τοῦ μέσου ὁρου εἶναι μεγάλη, γιατί πολλές φορές εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τὸ πραγματικὸ μέτρο (π.χ. μήκος, βάρος κ.λπ.) ἐνὸς μεγέθους μὲ μία μόνο μέτρησι. Στὶς περιπτώσεις αὐτὲς κάνομε πολλές μετρήσεις καὶ μετὰ εὐρίσκομε τὸν μέσο ὅρο.

Ὅσο περισσότερες εἶναι οἱ μετρήσεις, τόσο ἡ τιμὴ τοῦ μέσου ὁρου πλησιάζει στὴν πραγματικότητα.

Ὅρισμός:

*Μέσος ὅρος ἐνὸς πλήθους ἀριθμῶν (μετρήσεων κ.λπ.) εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει, ἂν προσθέσωμε τοὺς ἐπὶ μέρους ἀριθμοὺς καὶ τὸ ἄθροισμά τους τὸ διαιρέσωμε μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.*

Π.χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν κατωτέρω 5 ἀριθμῶν:

$$15 \quad 27 \quad 3,2 \quad 46,5 \quad 25$$

εὐρίσκεται, ἂν προσθέσωμε τοὺς πέντε ἀριθμοὺς ποὺ μᾶς δόθηκαν, ὡς ἑξῆς:

$$15 + 27 + 3,2 + 46,5 + 25 = 116,7$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ διαιρέσωμε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν μὲ τὸ πλῆθος τους, ποὺ εἶναι 5.

$$116,7 : 5 = 23,34.$$

Ἐφαρμογές.

α) Ζητοῦμε νὰ εὕρωμε τὸ πάχος ἐνὸς φύλλου λαμαρίνας.

Μὲ ἓνα *παχύμετρο* μετροῦμε τὸ πάχος τῆς λαμαρίνας σὲ διά-

φορες θέσεις. Για τόν σκοπό αυτό μπορούμε νά κάνουμε διάφορες μετρήσεις δύο και τρεις φορές στην ίδια θέση. Έτσι εύρίσκομε:

|         |          |         |         |
|---------|----------|---------|---------|
| 2,98 mm | 2,96 mm  | 3,01 mm | 3,02 mm |
| 2,98 mm | 2,99 mm  | 3,01 mm | 3,00 mm |
| 3,03 mm | 2,99 mm. |         |         |

Προσθέτομε τὰ εξαγόμενα τῶν μετρήσεων:

$$2,98 + 2,96 + 3,01 + 3,02 + 2,98 + 2,99 + 3,01 + 3,00 + 3,03 + 2,99 = 29,97.$$

Διαιρούμε μετὰ διὰ 10, ὅσες εἶναι οἱ μετρήσεις, καὶ εύρίσκομε:

$$29,97 : 10 = 2,997 \text{ mm.}$$

Ὡστε τὸ πάχος τῆς λαμαρίνας εἶναι κατὰ μέσο ὄρο 2,99 mm με προσέγγισι πρὸς τὰ κάτω ἢ 3,00 mm με προσέγγισι πρὸς τὰ ἐπάνω ἑκατοστοῦ τοῦ mm.

β) Νὰ εύρεθῇ ὁ μέσος ὄρος τῶν ἀριθμῶν:

$$29,7 \quad 32,5 \quad 29,2 \quad 30,1 \quad 31,7.$$

Πρῶτα εύρίσκομε τὸ ἄθροισμά τους:

$$29,7 + 32,5 + 29,2 + 30,1 + 31,7 = 153,2.$$

Μέσος ὄρος :  $153,2 : 5 = 30,64$ .

γ) Νὰ εύρεθῇ ὁ μέσος ὄρος με προσέγγισι ἑκατοστοῦ τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν:

$$37,00 \quad 45,90 \quad 39,15 \quad 38,85.$$

Έχομε:  $37,00 + 45,90 + 39,15 + 38,85 = 160,90$ .

Μέσος ὄρος:  $160,90 : 4 = 40,22$ .

## 2 · 28 Πράξεις αντίστροφες.

α) Ἐάν ἓνας ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 ἢ 7 ἢ 15, διαπιστώνομε ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γίνεται ἀντιστοιχῶς 5 ἢ 7 ἢ 15 φορές μεγαλύτερος. π.χ.

$$6 \times 5 = 30$$

$$6 \times 7 = 42$$

$$6 \times 15 = 90.$$

β) "Αν ένας αριθμός διαιρεθῇ διὰ 5 ἢ 7 ἢ 15, διαπιστώνομε ὅτι ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἀντιστοίχως 5 ἢ 7 ἢ 15 φορές μικρότερος.

$$\begin{aligned}\text{π.χ.} \quad & 105 : 5 = 21 \\ & 105 : 7 = 15 \\ & 105 : 15 = 7.\end{aligned}$$

γ) "Αν ένας ἀριθμὸς πρῶτα πολλαπλασιασθῇ καὶ μετὰ διαιρεθῇ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ, διαπιστώνομε ὅτι ὁ ἀριθμὸς μένει ὁ ἴδιος.

$$\begin{aligned}\text{π.χ.} \quad & (27 \times 5) : 5 = 135 : 5 = 27 \\ & (9 \times 7) : 7 = 63 : 7 = 9.\end{aligned}$$

Οἱ πράξεις πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαίρεσις ὀνομάζονται *ἀντίστροφες* πράξεις.

## 2 · 29 Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 2 · 1 ἕως 2 · 5.

1. Νὰ γίνουν οἱ προσθέσεις:

|    |            |    |            |    |                |
|----|------------|----|------------|----|----------------|
| α) | 836        | β) | 2818       | γ) | 235 628        |
|    | 527        |    | 3937       |    | 116 237        |
| +  | 685        | +  | 8653       | +  | 623 312        |
|    | <u>715</u> |    | <u>494</u> |    | <u>264 863</u> |

|    |               |    |             |              |
|----|---------------|----|-------------|--------------|
| δ) | 582 kg        | ε) | 5 kp        | 82 p         |
|    | 2780 kg       |    | 3 kp        | 7 p          |
| +  | 39 kg         | +  | 8 kp        | 297 p        |
|    | 6954 kg       |    | <u>6 kp</u> | <u>875 p</u> |
|    | <u>623 kg</u> |    |             |              |

|     |            |             |      |    |                |
|-----|------------|-------------|------|----|----------------|
| στ) | 4 m        | 6 dm        | 6 cm | ζ) | 12,856 m       |
|     |            | 7 dm        | 9 cm |    | 4,730 m        |
| +   | 8 m        | 2 dm        | 5 cm | +  | 0,528 m        |
|     | 3 m        |             | 4 cm |    | 53,940 m       |
|     | <u>1 m</u> | <u>3 dm</u> |      |    | <u>4,382 m</u> |

$$\begin{aligned}(\alpha = 2763, \beta = 15\,902, \gamma = 1\,240\,040, \delta = 10\,978\,kg, \\ \epsilon = 23\,kp\,261\,p, \sigma\tau = 18\,m\,4\,cm, \zeta = 76.436\,m)\end{aligned}$$

2. Να εύρεθούν τὰ συνολικά μήκη:

α)  $5\text{ dm } 7\text{ cm} + 1\text{ dm } 8\text{ cm} + 3\text{ m } 5\text{ dm } 2\text{ cm}$

β)  $8\text{ m } 65\text{ cm} + 3\text{ m } 1\text{ dm } 9\text{ cm} + 39\text{ cm} + 12\text{ dm}$

γ)  $35\text{ m} + 67\text{ m } 25\text{ cm} + 8\text{ m } 49\text{ cm} + 48\text{ m } 1\text{ dm} + 6\text{ cm}$

$$(a = 4\text{ m } 2\text{ dm } 7\text{ cm}, \quad \beta = 13\text{ m } 4\text{ dm } 3\text{ cm}, \\ \gamma = 158\text{ m } 9\text{ dm})$$

3. Να γίνουν οι προσθέσεις, οριζοντίως και καθέτως:

|    |      |   |      |   |      |   |      |   |
|----|------|---|------|---|------|---|------|---|
| α) | 237  | + | 4171 | + | 817  | + | 3146 | = |
|    | 2418 | + | 3026 | + | 2315 | + | 2037 | = |
|    | 6437 | + | 7251 | + | 618  | + | 5217 | = |
|    | 159  | + | 8079 | + | 7002 | + | 18   | = |
|    |      | + |      | + |      | + |      | = |

|    |       |   |       |   |       |   |       |   |
|----|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|
| β) | 0,384 | + | 2,5   | + | 4,813 | + | 7,824 | = |
|    | 1,072 | + | 4,18  | + | 0,691 | + | 0,639 | = |
|    | 0,453 | + | 1,709 | + | 6,3   | + | 2,15  | = |
|    | 9,981 | + | 0,001 | + | 0,705 | + | 4,8   | = |
|    | 5,48  | + | 1,09  | + | 0,17  | + | 9,44  | = |
|    |       | + |       | + |       | + |       | = |

$$(a \ 52\ 948, \ \beta \ 64.382)$$

4. Ἡ τσιμεντένια βάσι, πάνω στὴν ὁποία θὰ τοποθετήσωμε μία ἐργαλειο-μηχανή, ἔχει τὴν μία πλευρά της  $1\text{ m } 30\text{ cm}$  καὶ τὴν ἄλλη  $95\text{ cm}$ . Ζητεῖται τὸ συνολικὸ μήκος σὲ μέτρα τῆς σιδηρογωνιάς, ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ προστατευθῇ γύρω-γύρω ἡ βάσι.

$$(4\text{ m } 50\text{ cm})$$

5. Τὸ δωμάτιο ἐνὸς μηχανουργείου ἔχει τέσσερις ἄνισες πλευρές, ποὺ ἡ κάθε μία τους ἔχει μήκος:  $6\text{ m } 15\text{ cm}$ ,  $5\text{ m } 1\text{ dm}$ ,  $4\text{ m } 95\text{ cm}$  καὶ  $5\text{ m } 3\text{ dm } 5\text{ cm}$ . Ποιὸ θὰ εἶναι τὸ μήκος τῆς γυφογωνιάς, ποὺ θέλομε νὰ βάλωμε γύρω-γύρω στοὺς τοίχους, στὸ ὕψος τοῦ ταβανιοῦ;

$$(21\text{ m } 55\text{ cm})$$

6. Να γίνη ἡ πρόσθεσις:

|      |      |      |
|------|------|------|
| 5 m  | 7 dm | 6 cm |
| 9 m  | 4 dm | 8 cm |
| 12 m | 3 dm | 1 cm |

$$(27\text{ m } 5\text{ dm } 5\text{ cm})$$

7. Να γίνουν οἱ προσθέσεις καὶ οἱ δοκιμές:

α)  $683,91 + 836,43 + 707,67 + 952,46$ .

β)  $7,49 + 4,001 + 23,4 + 8,984 + 0,075$ .

γ)  $5\text{ kp } 516\text{ p} + 80\text{ kp } 7\text{ p} + 6\text{ kp } 148\text{ p} + 15\text{ kp } 892\text{ p}$ .

$$(a = 3180,47, \ \beta = 43,95, \ \gamma = 107\text{ kp } 563\text{ p})$$



8. Να εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα μὲ προσέγγισι δεκάτου τοῦ mm πρὸς τὰ κάτω ἢ πρὸς τὰ πάνω κατὰ τὴν κρίσι σας:

α)  $31,27 \text{ mm} + 22,01 \text{ mm} + 0,32 \text{ mm}$ .

β)  $26,04 \text{ mm} + 52,19 \text{ mm} + 6,70 \text{ mm} + 2,06 \text{ mm}$ .

$(\alpha = 53,6 \text{ mm} \text{ καὶ } \beta = 87,0 \text{ mm})$

9. Στὴν ἀποθήκη ἐνὸς καταστήματος ὑπάρχουν τὰ παρακάτω ἀντικείμενα: 1 πακέτο μὲ 18 βίδες καὶ 127 παξιμάδια, 35,2 kg στόκος, 45,32 kg ὠχρα, ἓνα ἄλλο πακέτο μὲ 75 βίδες καὶ 39 παξιμάδια, ἓνα τσουβάλι ὠχρα τῶν 50 kg, 32 λίμες, 5 kg πρόκες καὶ στὸ ὑπόγειο 75 kg στόκος, 220 λίμες, 150 kg πρόκες καὶ 250 m συρματόσχοινο.

Ζητοῦμε τὶς συνολικὲς ποσότητες ὑλικῶν, ποὺ πρέπει ὁ καταστηματάρχης νὰ γράψῃ στὸ δελτίο ἀπογραφῆς.

$(93 \text{ βίδες, } 166 \text{ παξιμάδια, } 110,2 \text{ kg στόκος, } 95,32 \text{ kg ὠχρα, } 252 \text{ λίμες, } 155 \text{ kg πρόκες καὶ } 250 \text{ m συρματόσχοινο})$

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 2·6 ἕως 2·9.

1. Νὰ γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις:

|    |                                                        |    |                                                                 |    |                                                            |
|----|--------------------------------------------------------|----|-----------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------|
| α) | $\begin{array}{r} 3853 \\ - 518 \\ \hline \end{array}$ | β) | $\begin{array}{r} 367\,042 \\ - 128\,357 \\ \hline \end{array}$ | γ) | $\begin{array}{r} 181,25 \\ - 29,52 \\ \hline \end{array}$ |
|----|--------------------------------------------------------|----|-----------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------|

|    |                                                          |    |                                                             |     |                                                              |
|----|----------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------------------|
| δ) | $\begin{array}{r} 378 \\ - 135,65 \\ \hline \end{array}$ | ε) | $\begin{array}{r} 58,74 \\ - 15,7356 \\ \hline \end{array}$ | στ) | $\begin{array}{r} 0,0062 \\ - 0,00597 \\ \hline \end{array}$ |
|----|----------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------------------|

|    |                                                                  |    |                                                                |
|----|------------------------------------------------------------------|----|----------------------------------------------------------------|
| ζ) | $\begin{array}{r} 0,0009716 \\ - 0,000527 \\ \hline \end{array}$ | η) | $\begin{array}{r} 1000,001 \\ - 417,091 \\ \hline \end{array}$ |
|----|------------------------------------------------------------------|----|----------------------------------------------------------------|

2. Νὰ εύρεθoῦν τὰ ὑπόλοιπα σὲ m ἢ kp:

|    |                                                                                                     |    |                                                                                                                                 |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| α) | $\begin{array}{r} 8 \text{ m } 25 \text{ cm} \\ - 4 \text{ m } 87 \text{ cm} \\ \hline \end{array}$ | β) | $\begin{array}{r} 15 \text{ m } 32 \text{ cm } 2 \text{ mm} \\ - 9 \text{ m } 5 \text{ cm } 8 \text{ mm} \\ \hline \end{array}$ |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|    |                                                                                                        |    |                                                                                                                     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| γ) | $\begin{array}{r} 12 \text{ kp } 503 \text{ p} \\ - 8 \text{ kp } 895 \text{ p} \\ \hline \end{array}$ | δ) | $\begin{array}{r} 5 \text{ t } 67 \text{ kp } 305 \text{ p} \\ 509 \text{ kp } 817 \text{ p} \\ \hline \end{array}$ |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$(\alpha = 3,38 \text{ m, } \beta = 6,264 \text{ m, } \gamma = 3,608 \text{ kp, } \delta = 4557,488 \text{ kp})$

3. Νὰ εύρεθoῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

α)  $0,702 + 5,61 - 1,069 + 21,6561 - 12,0805 + 5,17$

β)  $104,05 - (229,03 - 179,916) - (6,75 + 11,893)$

$(\alpha = 19,9886, \beta = 36,293)$

4. Να εύρεθῇ ὁ μειωτέος ἢ ἀφαιρετέος στὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

|                                                                                           |                                                                                       |                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} \text{α) } 5586 \\ - \dots \\ \hline 2378 \end{array}$                  | $\begin{array}{r} \text{β) } 86,609 \\ - \dots \\ \hline 79,301 \end{array}$          | $\begin{array}{r} \text{γ) } 343,6 \\ - \dots \\ \hline 278,199 \end{array}$ |
| $\begin{array}{r} \text{δ) } \dots\dots\dots \\ - 508,903 \\ \hline 2192,471 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \text{ε) } \dots\dots\dots \\ - 53,91 \\ \hline 173,48 \end{array}$ |                                                                              |

5. Να εύρεθῇ ὁ ἀριθμός, ποὺ σημειώνεται μὲ τὸν ἀστερίσκο:

α)  $3009 - 617 - 1783 - * = 438$   
 β)  $52,17 - 29,38 - 7,09 - * = 5,71.$

6. Να προσδιορισθοῦν τὰ ψηφία ποὺ λείπουν:

|                                                                                               |                                                                                                    |                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} \text{α) } 758*4 \\ 1*92* \\ 68*57 \\ + *0443 \\ \hline 200000 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \text{β) } 3*2,84 \\ *38,25 \\ 839,2* \\ + 47*,71 \\ \hline 2087,06 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \text{γ) } **93 \\ + 60** \\ \hline 14877 \end{array}$       |
| $\begin{array}{r} \text{δ) } 28*6 \\ 4*75 \\ *386 \\ + 3921 \\ \hline 1753* \end{array}$      | $\begin{array}{r} \text{ε) } 34,28 \\ 1*,36 \\ 20,1* \\ + *3,27 \\ \hline 112,*6 \end{array}$      | $\begin{array}{r} \text{στ) } 58,*** \\ - **,735 \\ \hline 42,339 \end{array}$ |
|                                                                                               |                                                                                                    | $\begin{array}{r} \text{ζ) } 5*9* \\ - *9*5 \\ \hline 2357 \end{array}$        |

7. Να ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α)  $(65,38 - 31,69) + (72,65 - 3,78) = \dots\dots$   
 β)  $(82 - 6,18) - (65,7 - 34,27) = \dots\dots$

( $a = 102,56, \beta = 44,39$ )

8. Δεξαμενὴ ἐργοστασίου περιέχει  $5097 \text{ dm}^3$  καυσίμου, ἀπὸ τὸ ὁποῖο μέσα σὲ 10 ἡμέρες καταναλώθηκαν τὰ  $3683,75 \text{ dm}^3$ . Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ποσότης τοῦ καυσίμου, ποὺ εἶναι ἀναγκαῖα γιὰ νὰ γεμίση ἡ δεξαμενὴ, ὅταν ἔχη ὠφέλιμη χωρητικότητα  $8000 \text{ dm}^3$ .

( $6586,75 \text{ dm}^3$ )

9. Σὲ μία ἀποθήκη μὲ 302 κιβώτια συσκευασμένων ὑλικῶν παρατηρήθη ἡ παρακάτω κίνηση:

| 1η ἡμέρα | Παραδόσεις: | κιβώτια | 35 | Παραλαβαί: | κιβώτια | 27 |
|----------|-------------|---------|----|------------|---------|----|
| 2α »     | »           | »       | 49 | »          | »       | 62 |
| 3η »     | »           | »       | 39 | »          | »       | 12 |
| 4η »     | »           | »       | 87 | »          | »       | 63 |
| 5η »     | »           | »       | 23 | »          | »       | 61 |

Ζητείται να εύρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κιβωτίων, ποὺ πρέπει νὰ παραλάβῃ ἡ ἀποθήκη τὴν 6η ἡμέρα, κατὰ τὴν ὁποία δὲν γίνεται παράδοσι ὑλικοῦ, προκειμένου τὸ ἀπόθεμά της νὰ εἶναι 1000 κιβώτια.

(706)

10. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις ὀριζοντίως καὶ καθέτως:

$$\alpha) \quad \begin{array}{r} 873,25 - 409,48 = \\ - 325,12 - 178,96 = \\ \hline \end{array}$$

$$\beta) \quad \begin{array}{r} 607,45 + 1007,03 = \\ 109,99 + 299,19 = \\ \hline \end{array}$$

(α = 317,61. β = 1205,30)

11. Σὲ ἓνα εἰδικὸ καρούλι εἶναι τυλιγμένο σὲ τρεῖς σειρὲς ἓνα συρματόσχοινο. Σὲ κάθε σειρὰ τοῦ καρουλιοῦ τυλίσσεται συρματόσχοινο μήκους 94,20 m γιὰ τὴν πρώτη σειρὰ, 100,48 m γιὰ τὴν δεύτερη σειρὰ καὶ 106,76 m γιὰ τὴν τρίτη σειρὰ.

Ἄν τὸ ἀτύλικτο κομμάτι συρματόσχοινο ἔχῃ μήκος 1,63 m, πόσο εἶναι τὸ συνολικὸ μήκος του;

(303,07 m)

Ἀπὸ τίς παράγραφους 2 · 10 ἕως 2 · 17.

1. Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

$$\alpha) \quad \begin{array}{lll} 583 \times 462 & 1265 \times 8247 & (269346, 10432455) \\ 879 \times 102 & 3721 \times 300 & (89658, 1116300) \\ 97,5 \times 270 & 5046 \times 4090 & (26325, 20638140) \\ 278,53 \times 27,40 & 0,045 \times 0,0180 & (7631,722, 0.00081) \end{array}$$

$$\beta) \quad \begin{array}{ll} 383 \times 100 & 87,6 \times 1000 \\ 68,5 \times 1000 & 0,597 \times 10000 \\ 0,7 \times 1000 & 0,00005 \times 100 \end{array}$$

$$\gamma) \quad \begin{array}{ll} 28,3 \times 47,1 \times 0,03 & (39,9879) \\ 501 \times 200 \times 0,07 \times 0,02 & (140,28) \\ 300 \times 0,07 \times 25,6 \times 0,8 & (430,08) \\ 0,01 \times 1000 \times 0,001 \times 100 & (1) \end{array}$$

Νὰ γίνουν οἱ δοκιμὲς (μὲ τὸ σταυρὸ) στὶς περιπτώσεις (α) καὶ (γ).

2. Δύο τεχνίτες ἐργάσθηκαν 25 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὥρες ἡμερησίως, γιὰ νὰ τελειώσουν τὴν ἐγκατάστασι δικτύου σωληνώσεων. Ὑπολογίσθηκε ὅτι καθένας τους κάθε ὥρα τοποθετοῦσε 3,5 m σωλῆνος. Πόσα μέτρα σωλῆνος τοποθέτησαν στὶς 25 ἡμέρες ὁ καθένας καὶ πόσα καὶ οἱ δύο μαζί;

(700. 1400)

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\begin{array}{r} \alpha) \quad 25,1 \times 12,1 \times 0,03 = \\ \quad \quad 0,2 \times 0,8 \times 1,3 = \\ + \quad 11,0 \times 0,1 \times 3,45 = \\ \hline \quad \cdot \times \quad \cdot \times \quad \cdot = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \beta) \quad 8,35 \times 47,62 \times 0,058 = \\ - \quad 3,19 \times 29,78 \times 0,039 = \\ \hline \quad \cdot \times \quad \cdot \times \quad \cdot = \end{array}$$

Να κάνετε την σύγκριση με την πρόσθεση και με την βοήθεια αυτής να προσπαθήσετε να βγάλετε συμπέρασμα.

4. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί και μετά οι δοκιμές με τόν σταυρό:

$$\begin{array}{r} 391,5 \times 48,07 = \quad \quad \quad (18819,405) \\ 0,015 \times 0,79 = \quad \quad \quad (0,01185 \text{ ή } 0,012) \\ 639,3 \times 0,041 = \quad \quad \quad (26,2113 \text{ ή } 26,212) \end{array}$$

Τα έξαγόμενα που θα εύρεθούν να τα γράψετε με προέγγισι χιλιοστού προς τα πάνω.

5. 'Ο χιλιομετρικός μετρητής φορτηγού αυτοκινήτου, που είναι νοικιασμένο με τὸ μήνα σὲ μία εταιρία, δείχνει 95 973 km. Τὸ ἐνοίκιο ἔχει συμφωνηθῇ 145,50 δραχμὲς γιὰ κάθε ἐργάσιμη ἡμέρα καὶ 5,35 δραχμὲς γιὰ κάθε χιλιόμετρο. Μετὰ ἀπὸ τρεῖς μῆνες ὁ μετρητὴς δείχνει 649 km. Ζητοῦνται τὰ χιλιόμετρα, πού ἔκανε τὸ φορτηγὸ καὶ τὰ χρήματα πού θὰ πληρωθοῦν ἀπὸ τὴν εταιρία. (Γιὰ κάθε μῆνα ὑπολογίζονται 25 ἐργάσιμες ἡμέρες. 'Ο μετρητὴς γράφει μόνο πενταψηφίους ἀριθμούς).

$$(4676 \text{ km}, 35929,1 \text{ δραχ.})$$

6. Τὸ βῆμα ἐνὸς κοχλίας εἶναι 1,1 mm καὶ ἐνὸς ἄλλου 0,8 mm. \*Αν οἱ κοχλίες εἶναι ἀντίθετα τοποθετημένοι καὶ ἀπέχουν 3,25 mm, πόσο θὰ ἀπέχουν, ὅταν ὁ δεῦτερος ξεβιδωθῇ 25 στροφές καὶ ὁ πρῶτος βιδωθῇ 15 στροφές;

$$(6,75 \text{ mm})$$

\*Απὸ τίς παραγράφους 2·18 ἕως 2·26.

1. Να ἐκτελεστοῦν οἱ διαιρέσεις:

$$\begin{array}{r} \alpha) \quad 2784 : 2 \quad 3670 : 5 \quad 808512 : 8 \quad 894 : 3 \quad 8058 : 6 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (1392, 734, 101064, 298, 1343) \\ \quad \quad 6365475 : 9 \quad 644 : 4 \quad 67403 : 7 \quad (707275, 161, 9629) \end{array}$$

$$\beta) \quad 60495 : 109 \quad 7818090 : 177 \quad 677586 : 714 \quad 4175838 : 834$$

$$(555, 44170, 949, 5007)$$

|     |                 |               |                |                                             |
|-----|-----------------|---------------|----------------|---------------------------------------------|
| γ)  | 109,85 : 13     | 42,592 : 22   | 48,013 : 19    | 759,036 : 86<br>(8,45, 1,936, 2,527, 8,826) |
| δ)  | 0,102 : 408     | 2,401 : 70    |                | (0,00025, 0,0343)                           |
|     | 1,834 : 524     | 0,343 : 70    |                | (0,0035, 0,0049)                            |
| ε)  | 2,86 : 1,1      | 5,29 : 2,3    | 1,285 : 0,514  | (2,6, 2,3, 2,5)                             |
|     | 3,38 : 1,3      | 2,175 : 0,29  | 17,276 : 617   | (2,6, 7,5, 0,028)                           |
| στ) | 0,05994 : 0,081 | 0,3021 : 0,53 | 0,03534 : 0,62 | (0,74, 0,57, 0,057)                         |
|     | 0,3195 : 4,5    |               |                | (0,071)                                     |

Στήν περίπτωση (β) και (ε) να κάνετε τις επαληθεύσεις με το σταυρό, ενώ στις (α) και (στ) να τις κάνετε με όποιο τρόπο θέλετε.

2. Να γίνουν οι διαιρέσεις με την προσέγγιση των δεκαδικών ψηφίων, που γράφονται δίπλα στην κάθε περίπτωση:

|                         |                       |                  |
|-------------------------|-----------------------|------------------|
| 70,78 : 3,5 (2 ψηφ.)    | 5,012 : 24,9 (4 ψηφ.) | (20,22, 0,2012)  |
| 137,48 : 7,19 (2 ψηφ.)  | 9,807 : 0,6 (3 ψηφ.)  | (19,12, 16,345)  |
| 72,678 : 9,013 (4 ψηφ.) | 1,171 : 40,9 (4 ψηφ.) | (8,0636, 0,0286) |

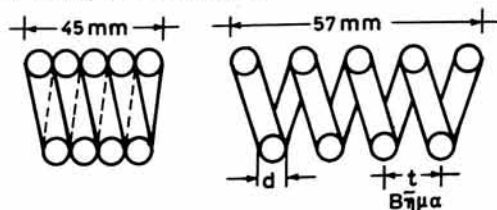
3. Διαιρέστε από μνήμης:

|                |                    |
|----------------|--------------------|
| 37,287 : 10 =  | 45,1 : 100 =       |
| 675,03 : 100 = | 168,07 : 1000 =    |
| 0,79 : 0,1 =   | 59007,1 : 0,001 =  |
| 0,3 : 0,01 =   | 60000,2 : 0,0001 = |

4. Ποιοι από τους αριθμούς 2, 3, 4 και 9 διαιρούν τον καθένα από τους παρακάτω αριθμούς;

7215   3090   168744   201   3009   3900   27025   102

5. Όταν το ελατήριο του σχήματος 2-29 α είναι τελείως συμπιεσμένο, έχει



Σχ. 2-29 α.

συνολικό μήκος 45 mm, ενώ, όταν είναι ελεύθερο, έχει μήκος 57 mm. Ζητείται η διάμετρος  $d$  του συρματιδίου του ελατηρίου και το βήμα του  $t$ .

(Διάμετρος = 9 mm, Βήμα = 12 mm)

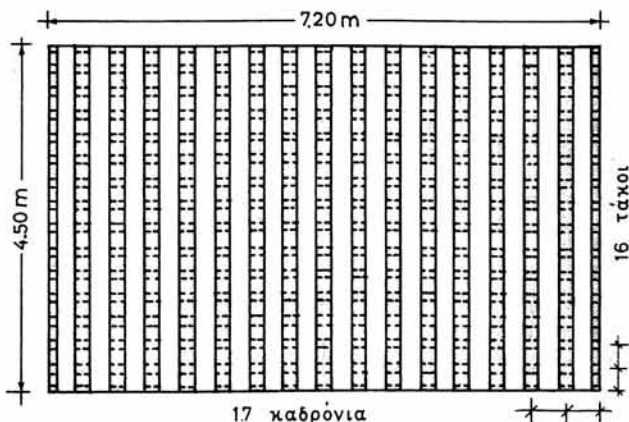
6. Στον τοίχο δωματίου μήκους 9,12 m θέλουμε να καρφώσουμε 5 στηρίγματα,

που νά απέχουν ίσα, τόσο μεταξύ τους όσο και από τους πλαϊνούς τοίχους του δωματίου. Πόσο πρέπει νά απέχουν μεταξύ τους τα στηρίγματα αυτά; (1,52 m)

7. Τα 7 στηρίγματα, που στηρίζουν σωλήνα μήκους 11,05 m, απέχουν ίσα μεταξύ τους, ενώ τα άκραια στηρίγματα απέχουν από τα άκρα του σωλήνος 1,25 m το καθένα. Πόση είναι ή ίση απόστασι των στηριγμάτων σε mm; (1425 mm)

8. Στο πάτωμα του σχήματος 2 · 29 β, τοποθετήθηκαν κατά παραγγελία 17 καδρόνια, το καθένα επάνω σε 16 τάκους. Ζητούμε τις αποστάσεις μεταξύ των άξόνων των καδρονιών και των τάκων (Σημείωσι: Στις άκρες του πατώματος, στους τοίχους τοποθετούνται καδρόνια και τάκοι με μισό πάχος.

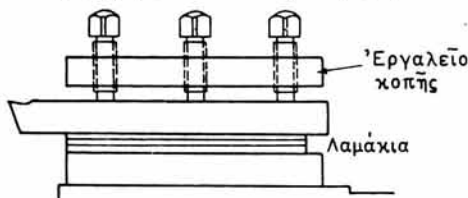
(απόστασι καδρονιών: 0,45 m και τάκων 0,30 m)



Σχ. 2-29 β.

9. Στην λιανική πώλησι ένα κουτί βίδες των 5 τεμαχίων πωλείται 18 δραχμές, ενώ ένα κουτί παξιμάδια των 25 τεμαχίων πωλείται 21,50 δραχμές. \*Αν αγοράσω χύμα βίδες και παξιμάδια, πληρώνω 25 δραχμές για κάθε 5 ζευγάρια. Πόσα λεπτά χάνω, αν αγοράσω χύμα 100 ζευγάρια; (54 δραχ.)

10. Για νά ρυθμίσω το ύψος στο έργαλειο κοπής σε ένα τόρνο (σχ. 2 · 29 γ) χρησιμοποιούμε προσθήκες (λαμάκια) ακριβείας. \*Αν θέλω να σηκώσω το έργαλειο κατά 27 mm, ποιές από τις έξις προσθήκες νομίζετε σαν πιο κατάλληλες;



Σχ. 2-29 γ.

Ρύθμισι του ύψους του εργαλείου κοπής ενός τόρνου.

|           |                 |
|-----------|-----------------|
| του 1 mm  | υπάρχουν 3 τεμ. |
| των 2 mm  | » 2 τεμ.        |
| των 5 mm  | » 2 τεμ.        |
| των 10 mm | » 1 τεμ.        |

Τό ίδιο και για την περίπτωσι 18 mm, 13 mm και 7 mm.

11. Προκειμένου να ντύσουμε ένα τοίχο με κόντρα πλακέ σε λουρίδες, χρειαζόμαστε 25 λουρίδες. Τις λουρίδες αυτές τις κόβουμε από 5 φύλλα, που το καθένα τους έχει πλάτος 1,20 cm. Κατά το κόψιμο στην κορδέλλα χάνουμε κατά πλάτος 1 cm για κάθε κόψιμο. Ζητούμε το πλάτος κάθε λουρίδας. (23,2 cm)

12. Πρόκειται να αγοράσουμε 50 φύλλα λαμαρίνας, που το καθένα τους ζυγίζει περίπου 28,25 kg. Κατά την αγορά ζυγίζουμε τα φύλλα ανά δέκα και για κάθε δεκάδα εύρισκομε βάρος 282,35 kg. Ζητούμε να βρούμε πόσα kg είναι το συνολικό λάθος, που θα κάναμε με το χωριστό ζύγισμα κάθε φύλλου λαμαρίνας, και πόσα λεπτά θα πληρώναμε περισσότερα, αν γνωρίζουμε πώς η λαμαρίνα κοστίζει 10 000 δραχμές ο τόνος. (0,750 kg, 750 δραχ.)

13. Η βοηθητική σκάλα σε μία πολυκατοικία με 5 όρόφους μετά από κάθε 18 σκαλοπάτια έχει ένα πλατύσκαλο. Αν το συνολικό ύψος της πολυκατοικίας είναι 18,36 m, πόσο είναι το ύψος του κάθε σκαλοπατιού σε cm; (0,17 m)

Από τις παραγράφους 2·26 και 2·27.

1. Για την παραγωγή ενός προϊόντος μετρήθησαν οι παρακάτω παραδόσεις:

|                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| 1η ημέρα 497 κομμάτια | 2α ημέρα 504 κομμάτια |
| 3η ημέρα 395 κομμάτια | 4η ημέρα 500 κομμάτια |

Ζητούμε τον μέσο όρο της ημερησίας παραδόσεως του προϊόντος. (474 ημερησ.)

2. Μετρήθησαν οι παρακάτω χρόνοι «για έν σειρά» παραγωγή:

Για 25 κομμάτια 75 min, για 40 κομμάτια 115 min, για 80 κομμάτια 216 m. Ζητούμε: Τον μέσο όρο του χρόνου παραγωγής για το ένα κομμάτι. (2,8 min)

3. Κατά την διάρκεια της εβδομάδος ένας τεχνίτης λαμβάνει τα ακόλουθα ποσά:

| ΔΕΥΤ.  | ΤΡΙΤΗ  | ΤΕΤΑΡ. | ΠΕΜΠ.  | ΠΑΡΑΣ. | ΣΑΒ.   |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 195,00 | 225,50 | 189,60 | 205,00 | 219,40 | 198,50 |

Νά εξετασθῇ ἂν συμφέρη στὸν τεχνίτη νὰ προσληφθῇ μόνιμος μὲ μισθὸ 5130 δραχμὲς καὶ γιὰ 25 ἐργασίμες ἡμέρες τὸν μῆνα.

4. Μετρήσαμε με ένα παχύμετρο το μήκος ενός άξονίσκου και εύρήκαμε:

|         |         |         |         |          |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| 2,57 cm | 2,58 cm | 2,56 cm | 2,58 cm | 2,56 cm. |
|---------|---------|---------|---------|----------|

Ποιό είναι το μήκος του άξονίσκου; (2,57 cm)

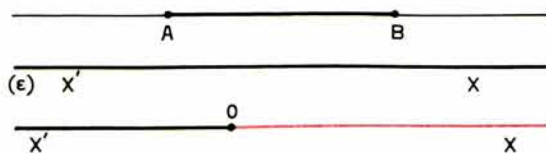


## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

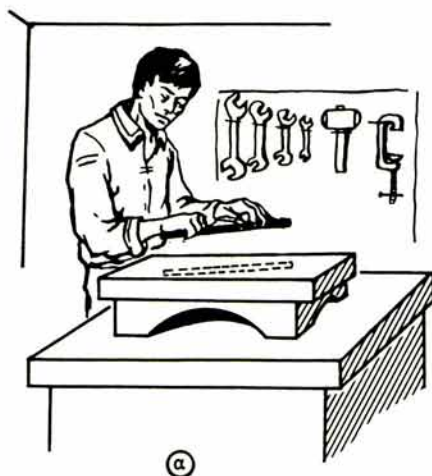
### ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

3·1 Ἡ ἡμιευθεία καὶ τὸ ἐπίπεδο.

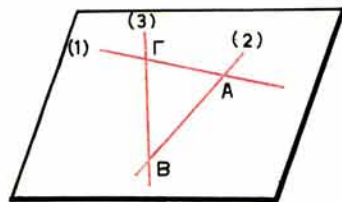
α) Εἶδαμε στὰ προηγούμενα (παράγρ. 1·8), ὅτι ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα  $AB$  μπορούμε νὰ τὸ προεκτείνουμε ὅσο θέλομε· αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ  $\epsilon$ , ἢ  $X'X$  *δὲν τελειώνει ποτέ*, εἶναι δηλαδή μίᾱ ἀπέραντη γραμμὴ. Ἐν πάνω σ' αὐτὴ τὴν εὐθεῖα γραμμὴ  $X'X$  σημειώσωμε ἓνα σημεῖο  $O$ , αὐτὸ χωρίζει τὴν εὐθεῖα  $X'X$  σὲ δύο μέρη,  $X'O$  καὶ  $OX$ , ποὺ τὸ καθένα ὀνομάζεται *ἡμιευθεία*.



Σχ. 3·1 α.



(α)



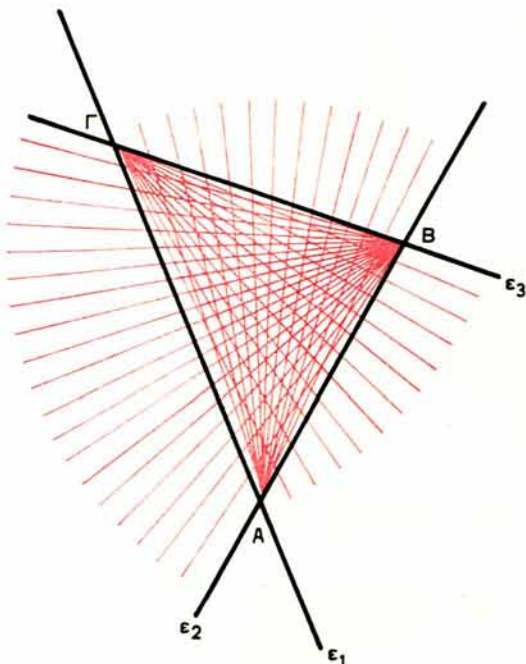
(β)

Σχ. 3·1 β.

β) Ἐς πάρωμε τὸν χάρακα καὶ ἄς τὸν τοποθετήσωμε πάνω στὴν πλάκα τοῦ ἐφαρμοστή [σχ. 3·1 β (α)]. Παρατηροῦμε ὅτι ὅπως

καὶ νὰ τὸν τοποθετήσωμε, ἐφαρμόζει ὁλόκληρος πάνω στὴν πλάκα. Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ στοῦ συμπέρασμα ὅτι καὶ οἱ εὐθεῖες, ποὺ θὰ χαράξωμε στὴν ἐπιφάνεια ποὺ ἀκουμπᾷ ὁ χάρακας (στὴν πλάκα), θὰ εὐρίσκωνται καὶ αὐτὲς ὁλόκληρες πάνω στὴν πλάκα. Ἀπὸ τὸ σχῆμα 3.1 β (β) βλέπομε ὅτι ἀπὸ τρεῖς τέτοιες εὐθεῖες, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς τρεῖς θέσεις 1, 2 καὶ 3 τοῦ χάρακα, ὀρίζονται τρία διαφορετικὰ σημεῖα A, B καὶ Γ.

γ) Τρία σημεῖα A, B καὶ Γ, ποὺ δὲν εὐρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία, τὰ ἐνώνομε μεταξύ τους μὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB, BG καὶ AG (σχ. 3.1 γ). Τὰ σημεῖα τομῆς A, B καὶ Γ τῶν εὐθειῶν  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  καὶ  $\epsilon_3$  τὰ ἐνώνομε μὲ τὰ σημεῖα τῶν ἀπέναντι εὐθυγράμμων τμημάτων, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα. Σχηματίσαμε ἔτσι ἓνα **πλέγμα**, ποὺ μπορεῖ νὰ πυκνώσῃ ὅσο θέλομε. Ὅταν τὸ πλέγμα πυκνώσῃ τόσο, ὥστε νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα ἐντε-



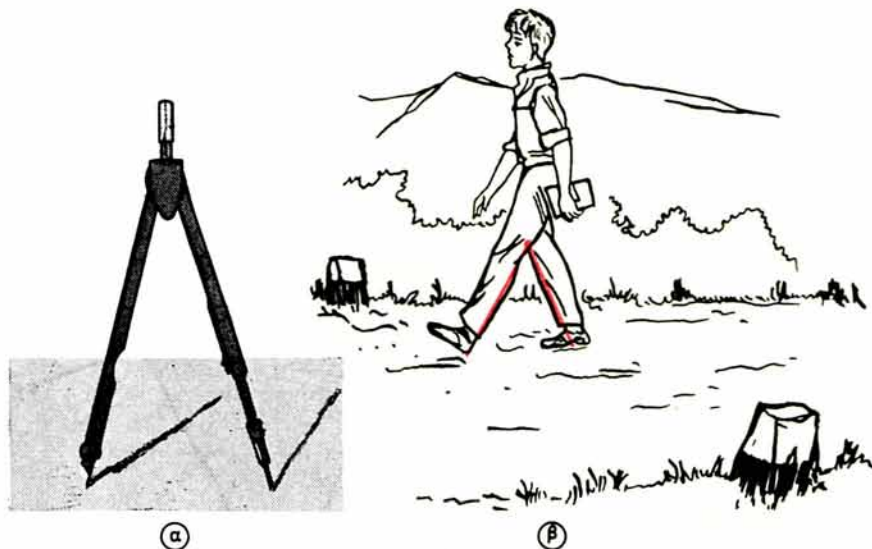
Σχ. 3.1 γ.

λῶς κολλημένα τὸ ἓνα μὲ τὸ ἄλλο, σχηματίζεται ἓνα νέο σχῆμα, ποὺ λέγεται **ἐπίπεδο σχῆμα**. Ἄν τώρα ἐπεκτείνωμε ὅλα αὐτὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ πρὸς τὶς δύο πλευρές, θὰ σχηματίσωμε μία **ἐπίπεδη ἐπιφάνεια**, ποὺ ἐπεκτείνεται ὅσο θέλομε καὶ ποὺ τὴν ὀνομάζομε **ἐπίπεδο**. Τέτοια ἐπίπεδα εἶναι ἡ πλάκα τοῦ ἐφαρμοστή, ἡ μαρμάρινη πλάκα τοῦ ἐργαστηρίου, ἡ πινακίδα ἢ τὸ σχεδιαστήριον τοῦ σχεδιαστῆ κ.λπ.

Κάθε σχῆμα, ποὺ εἶναι σχεδιασμένο πάνω σὲ ἓνα ἐπίπεδο, λέγεται **ἐπίπεδο σχῆμα**.

## 3.2 Ἡ γωνία.

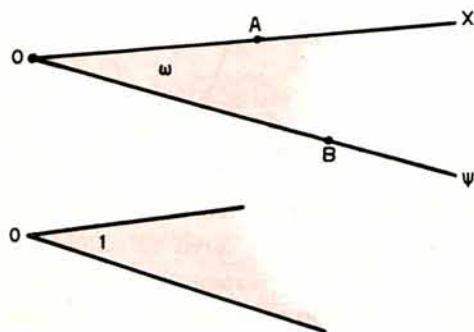
α) Ὅλοι μας γνωρίζομε τὸ σχῆμα ἑνὸς διαβήτη. Τὰ σκέλη ἑνὸς ἀνοικτοῦ διαβήτη [σχ. 3.2 α (α)] δίνουν τὸ σχῆμα μιᾶς γωνίας



Σχ. 3.2 α.

Ἕνας ἄνθρωπος, πού περπατάει, καθὼς ἀνοίγει τὰ πόδια του στὸ βηματισμό [σχ. 3.2 α(β)], σχηματίζει γωνία.

Ἐπομένως:



Σχ. 3.2 β.

*Γωνία εἶναι τὸ σχῆμα πού σχηματίζουν δύο ἡμιευθεῖες, οἱ ὁποῖες ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο καὶ ἔχουν διαφορετικές κατευθύνσεις.*

Τὸ κοινὸ σημεῖο ὀνομάζεται **κορυφή**, ἐνῶ οἱ δύο ἡμιευθεῖες ὀνομάζονται **πλευρὲς** τῆς γωνίας (σχ. 3.2 β). Γιὰ νὰ συμβολίσωμε τὶς γωνίες χρησιμοποιοῦμε τὸ σύμβολο  $\angle$ . Π.χ.

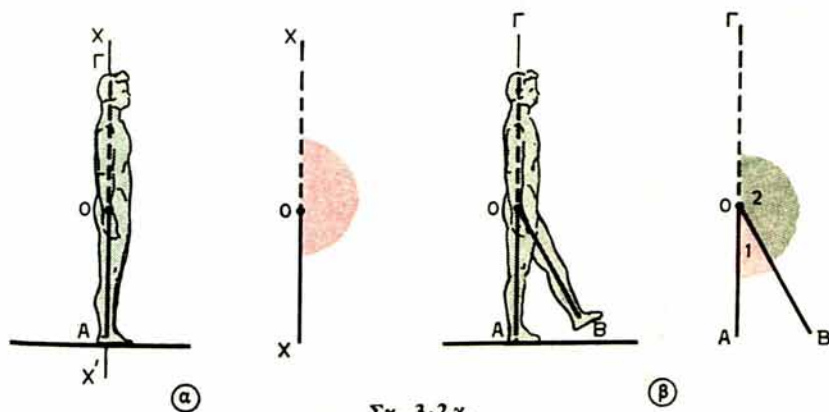
$\widehat{XO\Psi}$  ἢ  $\widehat{AOB}$  ἢ  $\widehat{\omega}$  ἢ  $\widehat{O_1}$  ἢ  $\widehat{O}$

ὅπου: τὰ Α καὶ Β εἶναι δύο τυχαῖα σημεῖα πάνω στὶς δύο πλευρές.

Ὅταν ὅμως λέμε, ἡ γωνία  $XO\Psi$  ἢ ἡ γωνία  $\omega$ , δὲν βάζουμε ποτὲ τὸ συμβολο  $\wedge$ .

Τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας γράφεται πάντοτε στὴν μέση.

\* Ἄν, ὅπως στεκόμαστε σὲ στάσι προσοχῆς [σχ. 3.2 γ (α)], σηκώσουμε τὸ ἓνα μας πόδι τεντωμένο, σχηματίζουμε μία γωνία, τὴν  $\widehat{AOB}$  [σχ. 3.2 γ (β)], τῆς ὁποίας πλευρὲς εἶναι τὰ δύο μας πόδια.



Σχ. 3.2 γ.

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι ὁ κορμός μας μαζί μὲ τὸ ἓνα μας πόδι, αὐτὸ ποὺ σηκώσαμε, σχηματίζουν μία ἄλλη γωνία, τὴν  $\widehat{GOB}$ . Ἄν ἀρχίσουμε νὰ κατεβάζουμε τὸ πόδι μας, ἡ πλευρὰ OB πλησιάζει πρὸς τὴν OA καὶ ὅταν ἐπανέλθουμε στὴν στάσι τῆς προσοχῆς, οἱ δύο ἡμιευθεῖες OA καὶ OB ἔχουν συμπίψει. Τότε ἡ γωνία GOB [σχ. 3.2 γ (β)] συμπίπτει μὲ τὴν γωνία GOA [σχ. 3.2 γ (α)], στὴν ὁποία οἱ δύο πλευρὲς OG καὶ OA εἶναι οἱ δύο ἡμιευθεῖες τῆς εὐθείας XX'. Μία τέτοια γωνία, ποὺ οἱ πλευρὲς της εἶναι οἱ δύο ἡμιευθεῖες μιᾶς εὐθείας, λέγεται **εὐθεία γωνία** (ἡ γωνία  $180^\circ$ ). Μὲ ἄλλα λόγια, ἂν μία ἡμιευθεῖα OX τὴν ἐπεκτεῖνομε πρὸς τὸ μέρος τοῦ O, ἡ γωνία XOX', ποὺ σχηματίζεται, εἶναι μία εὐθεία γωνία.

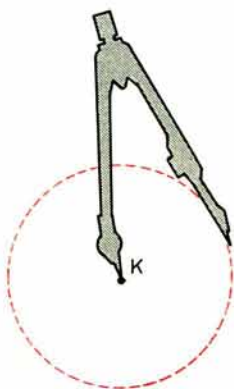


## 3 · 3 Ἡ περιφέρεια κύκλου.

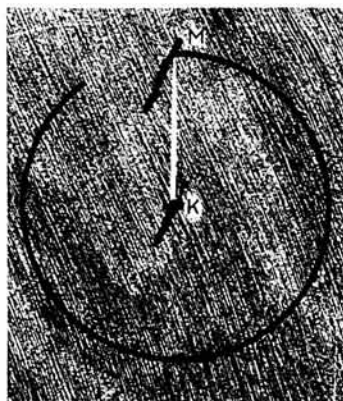
Πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο σημειώνομε τυχαῖο σημεῖο  $K$  καί μέ τήν βοήθεια ἑνός διαβήτη, τοῦ ὁποίου κρατᾶμε σταθερό τὸ ἄνοιγμα, γράφομε μία κλειστή καμπύλη γραμμὴ [σχ. 3 · 3 α (α)]. Τὴν γραμμὴ αὐτὴ τὴν ὀνομάζομε *περιφέρεια* κύκλου καί τὸ σημεῖο  $K$  *κέντρο* τῆς περιφερείας.

Ὡστε:

*Περιφέρεια κύκλου εἶναι μία ἐπίπεδη, κλειστὴ καμπύλη γραμμὴ, πὺν ὅλα τῆς τὰ σημεῖα εὐρίσκονται στὴν ἴδια ἀπόστασι ἀπὸ ἑνα σημεῖο, πὺν τὸ λέμε κέντρο.*



α



β

Σχ. 3·3 α.

α) Πῶς χαράσσομε τὴν περιφέρεια κύκλου. β) Πρακτικὸς τρόπος χαράξεως περιφερείας κύκλου πάνω στὸ ἔδαφος.

Τὴν ἀπόστασι κάθε σημείου  $M$  τῆς περιφερείας ἀπὸ τὸ κέντρο  $K$  τὴν ὀνομάζομε *ἀκτίνα* [σχ. 3 · 3 β (α)]. Κάθε εὐθύγραμμο τμήμα, πὺν ἑνώνει δύο σημεῖα  $A$  καί  $B$  τῆς περιφερείας καί δὲν περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς  $K$ , ὀνομάζεται *χορδὴ* [σχ. 3 · 3 β (β)], ἐνῶ ὅταν περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρο, ὅπως τὸ εὐθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$ , ὀνομάζεται *διάμετρος*.

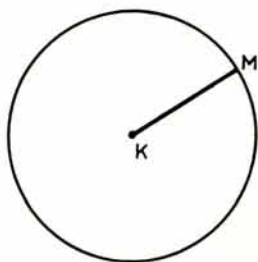
Ὡστε:

*Διάμετρος μιᾶς περιφερείας εἶναι ἡ χορδὴ, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς περιφερείας.*

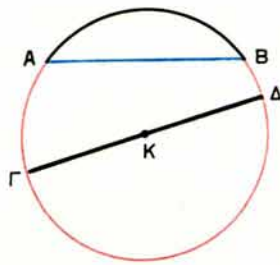
Τὸ κομμάτι  $AB$  τῆς περιφερείας (ἢ τὸ  $AG$  ἢ τὸ  $BD$  κ.λπ.) ὀνομάζεται **τόξο** καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του πάντα ἐπάνω στὴν περιφέρεια.

*Σὲ κάθε χορδῇ ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα.*

Τὸ μικρότερο ὀνομάζεται **κύριο**, ἐνῶ τὸ ἄλλο **δευτερεῦον**. Ἔτσι στὴν χορδῇ  $AB$  τὸ τόξο  $AGDB$  εἶναι τὸ δευτερεῦον.



α



β

Σχ. 3.3 β.

Ἄν αὐτὰ τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου εἶναι καὶ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, ὅπως π.χ. στὸ τόξο  $ΓΔ$ , τότε τὸ τόξο ὀνομάζεται καὶ **ἡμιπεριφέρεια**.

Ἀντὶ νὰ γράψωμε τόξο  $AG$ , γράφομε συμβολικὰ  $\widehat{AG}$ .

Τὸ κομμάτι ἐκεῖνο τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖο μένει κλεισμένο μέσα στὴν περιφέρεια τὸ ὀνομάζομε **κύκλο**.

Ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ ὀρίσαμε τὴν περιφέρεια, βγάζομε τὸ συμπέρασμα ὅτι:

*Δύο περιφέρειες εἶναι ἴσες, ἂν ἔχουν ἴσες ἀκτῖνες.*

Στὸ σχῆμα 3.3 γ βλέπομε διαφόρους διαβήτη. Ἔτσι:

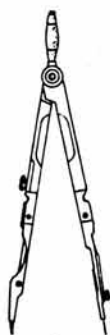
α) Ὁ διαβήτη τοῦ σχεδιαστή, ἔχει τὸ ἕνα σκέλος μυτερό γιὰ νὰ συγκρατῆται στὸ κέντρο τοῦ κύκλου, ἐνῶ στὸ ἄλλο ἔχει θέσι γιὰ

γραφίδα, γιά νά μπορῇ νά γράφῃ τήν περιφέρεια, καθώς θά στρέφεται.

β) Ὁ διαβήτης τοῦ ἐφαρμοστῆ, ἔχει καί στά δύο σκέλη μύτη.

Τέτοιους διαβήτες χρησιμοποιοῦν καί οί σχεδιαστές, γιά νά μεταφέρουν (ξεσήκωμα) μήκη καί τοὺς ὀνομάζουν **διαστημό-μετρα**.

γ) Ὁ διαβήτης τῶν λεβη-τοποιῶν ἢ γενικότερα διαβήτης



α



β



γ

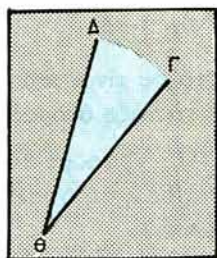
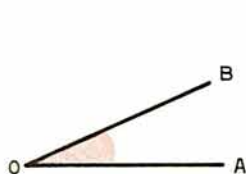
Σχ. 3·3 γ.

α) Διαβήτης σχεδιαστῆ. β) Διαβήτης ἐφαρμοστῆ. γ) Διαβήτης σέ κανόνα.

τῶν μεγάλων ἀκτίνων ἢ διαβήτης μέ κανόνα, ἔχει μυτερὰ σκληρὰ σκέλη γιά νά χαράσσουν περιφέρειες πάνω σέ σκληρές ἐπιφάνειες.

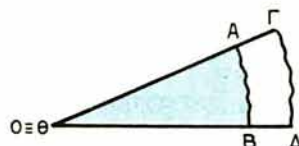
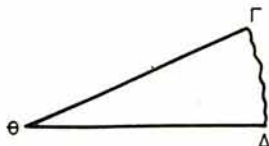
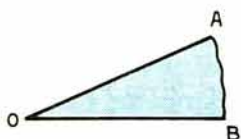
### 3·4 ἴσες γωνίες.

Γιά νά δοῦμε ἂν οί γωνίες  $\text{AOB}$  καί  $\text{ΓΘΔ}$  εἶναι ἴσες μεταξύ τους



Σχ. 3·4 α.

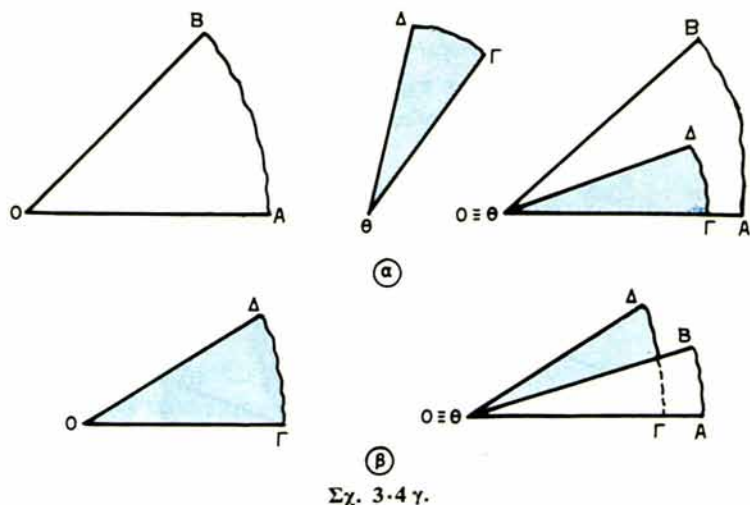
(σχ. 3·4 α), παίρνομε ἓνα διαφανές χαρτί καί ἀντι-γράφομε τήν γωνία  $\text{ΓΘΔ}$ . Μετά βάζομε τήν κορυφή  $\Theta$  πάνω στήν κορυφή  $\text{Ο}$  καί τήν πλευρά  $\text{ΘΓ}$  πάνω στήν πλευρά  $\text{ΟΑ}$ . Ἄν καί ἡ πλευρά  $\text{ΘΔ}$  συμπίπτῃ μέ τήν πλευρά  $\text{ΟΒ}$ , οί δύο γωνίες λέμε ὅτι εἶναι ἴσες



Σχ. 3·4 β.



(σχ. 3.4 β). Ἄν ὄχι, τότε λέμε ὅτι εἶναι ἄνισες (σχ. 3.4 γ).



Ὡστε:

*Δύο γωνίες εἶναι ἴσες, ἂν βάζοντας τὴν μία πάνω στὴν ἄλλη συμπίπτουν.*

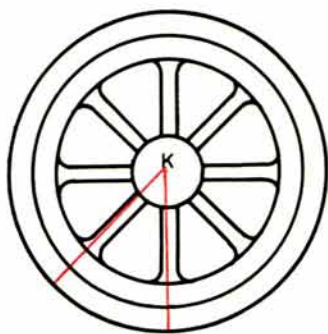
Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

*Ὅλες οἱ ἐνθεῖες γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους.*

### 3.5 Ἐπίκεντρες γωνίες.

Στὸ σχῆμα 3.5 α βλέπομε ἓνα τροχό, ποὺ ἔχει 8 ἀκτίνες. Σχηματίζονται ἔτσι γύρω ἀπὸ τὸν ἀξονά του 8 γωνίες, ποὺ κάθε μία ἔχει σὰν κορυφή τὸ κέντρο K τοῦ ἀξονος καὶ πλευρές τὶς ἀκτίνες τοῦ τροχοῦ, ποὺ εἶναι καὶ ἀκτίνες τοῦ κύκλου.

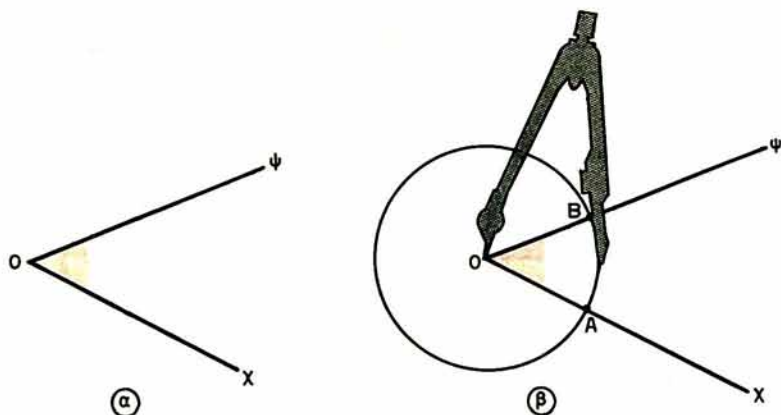
Κάθε γωνία, ποὺ ἔχει κορυφή τῆς τὸ κέντρο μιᾶς περιφερείας καὶ



Σχ. 3.5 α.

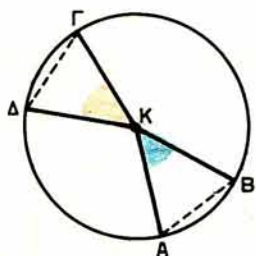
πλευρές δύο ἀκτίνες τῆς περιφερείας, ὀνομάζεται *ἐπίκεντρος* γωνία.

Στὸ σχῆμα 3.5 β βλέπομε ὅτι ὁποιαδήποτε γωνία, ἔστω ἡ  $\widehat{XO\Psi}$  [σχ. 3.5 β (α)], μπορεῖ νὰ γίνη ἐπίκεντρος, ἀρκεῖ μὲ κέντρο τὴν κορυφή της νὰ γράψωμε περιφέρεια [σχ. 3.5 β (β)] καὶ νὰ σημειώσωμε τὶς τομὲς τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας μὲ τὴν περιφέρεια.



Σχ. 3.5 β.

Στὸ σχῆμα 3.5 γ ἔχομε νὰ συγκρίνωμε τὶς δύο ἐπίκεντρος γωνίες  $\angle AKB$  καὶ  $\angle GKD$ . Χρησιμοποιώντας πάλι διαφανὲς χαρτί, ξεσηκώνομε τὴν γωνία  $\angle GKD$ . Μὲ μία καρφίτσα στερεώνομε τὸ χαρτί στὸ κέντρο K καὶ τὸ περιστρέφομε, ὥστε τὸ σημεῖο Γ νὰ πέσῃ πάνω στὸ Α. Τότε καὶ ἡ ἀκτίς ΚΓ θὰ συμπίσῃ μὲ τὴν ἀκτίνα ΚΑ. Ἄν συμβῇ καὶ τὸ σημεῖο Δ νὰ συμπίσῃ μὲ τὸ σημεῖο Β, ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ ἀκτίς ΚΔ θὰ συμπίσῃ μὲ τὴν ΚΒ, τότε οἱ ἐπίκεντρος γωνίες  $\angle AKB$  καὶ  $\angle GKD$  θὰ εἶναι ἴσες. Ἀλλὰ τότε καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι ἴσα, καθὼς καὶ οἱ χορδὲς ΑΒ καὶ ΓΔ.



Σχ. 3.5 γ.

Γράφομε λοιπόν:  $\widehat{AKB} = \widehat{GKD}$      $\widehat{AB} = \widehat{GD}$      $AB = GD$ .

Ὡστε:

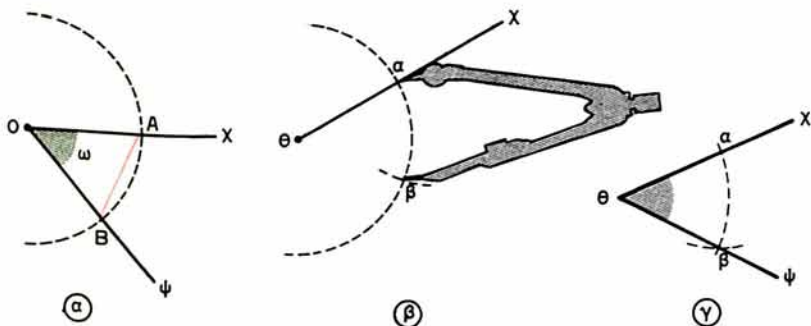
*Στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες, ἀντιστοιχοῦν σὲ ἴσα τόξα ἴσες ἐπίκεντρος γωνίες καὶ ἴσες χορδές.*

Καὶ ἀντιστρόφως:

*Στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες ἀντιστοιχοῦν σὲ ἴσες ἐπίκεντρος γωνίες ἴσα τόξα καὶ ἴσες χορδές.*

### 3.6 Σχεδίασι ἰσων γωνιῶν.

Τὴν ιδιότητα τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ χρησιμοποιήσωμε, γιὰ νὰ σχεδιάσωμε μίαν γωνίαν ἴση με μίαν ἄλλην, ποὺ μᾶς ἔχει δοθῇ, ἢ γιὰ νὰ ἐλέγξωμε ἂν δύο γωνίες εἶναι ἴσες. Ἐστω ὅτι θέλομε νὰ σχεδιάσωμε μίαν γωνίαν ἴση με τὴν  $\hat{\omega}$  [σχ. 3.6 α (α)], ποὺ νὰ ἔχῃ κέντρο τὸ σημεῖο  $\Theta$  καὶ μίαν πλευρὰ τὴν ἡμιευθείαν  $\Theta X$  [σχ. 3.6 α (β)]. Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα  $O$  καὶ  $\Theta$  γράφομε δύο ἴσες περιφέρειες.



Σχ. 3.6 α.

Μετὰ μεταφέρουμε τὸ τόξο  $AB$  ἢ τὴν χορδὴ  $AB$  ἀπὸ τὴν περιφέρεια  $O$  στὴν περιφέρεια  $\Theta$ . Αὐτὸ γίνεται, ἂν μὲ κέντρο τὸ  $\alpha$  καὶ ἀκτῖνα  $AB$ , γράψωμε μικρὸ τόξο, ποὺ νὰ κόβῃ τὴν περιφέρεια  $\Theta$  στὸ σημεῖο  $\beta$  [σχ. 3.6 α (β)]. Φέρομε τὴν ἀκτῖνα  $\Theta\beta$ , τὴν ὁποία καὶ προεκτείνουμε [σχ. 3.6 α (γ)]. Ἡ γωνία  $X\Theta\Psi$  ἢ  $\alpha\Theta\beta$  εἶναι ἴση με τὴν  $\hat{\omega}$ , σύμφωνα με ὅσα εἶπαμε στὴν προηγουμένη παράγραφο.

## 3.7 Ἡ διχοτόμος.

Παίρνουμε μία περιφέρεια με κέντρο  $K$ . Κρατώντας τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη σταθερὸ σημειώνουμε τὰ σημεία  $A, B$  καὶ  $\Gamma$  πάνω στὴν περιφέρεια. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ χορδὲς  $AB$  καὶ  $B\Gamma$  εἶναι ἴσες. Σύμφωνα μετὰ τὴν ιδιότητα τῆς παραγράφου 3.5, ἂν φέρουμε τὶς ἀκτίνες  $KA, KB$  καὶ  $K\Gamma$  θὰ ἔχωμε:

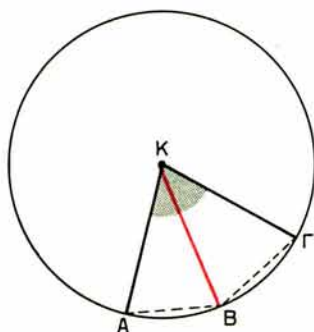
$$\widehat{AKB} = \widehat{BK\Gamma}.$$

Δηλαδή ἡ γωνία  $AK\Gamma$  χωρίζεται ἀπὸ τὴν ἀκτὴν  $KB$  σὲ δύο ἴσες γωνίες.

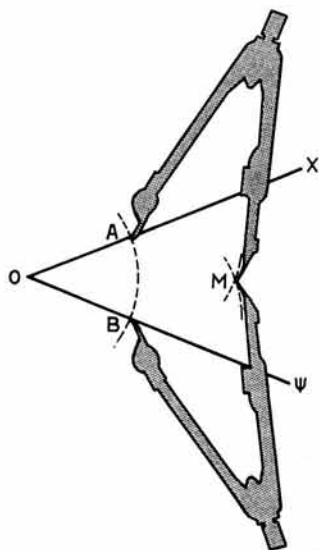
Ἡ  $KB$  λέγεται **διχοτόμος** τῆς γωνίας  $AK\Gamma$ .

Γιὰ νὰ χαράξουμε τὴν διχοτόμο μιᾶς ὁποιασδήποτε γωνίας  $XO\Psi$ , γράφουμε με κέντρο τὴν κορυφὴ  $O$  καὶ ἀκτὴν ὁποιαδήποτε ἓνα τόξο περιφερείας, τὸ ὁποῖο κόβει τὶς πλευρὲς  $OX$  καὶ  $O\Psi$  τῆς γωνίας  $XO\Psi$  στὰ σημεία  $A$  καὶ  $B$  (σχ. 3.7 β). Ὑστερα με κέντρα τὰ  $A$  καὶ  $B$  καὶ ἴδια ἀκτὴν (ἢ μιὰ ἄλλη ἀλλὰ μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ μισὸ τῆς χορδῆς  $AB$ ) γράφουμε δύο τόξα, τὰ ὁποῖα κόβονται σὲ ἓνα σημεῖο  $M$ . Ἡ  $OM$ , ποὺ φέρομε, **εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας  $XO\Psi$** .

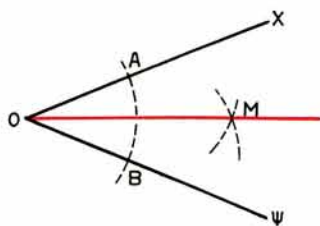
Στὸ σχῆμα 3.7 γ βλέπομε διχοτόμους μερικῶν γωνιῶν.

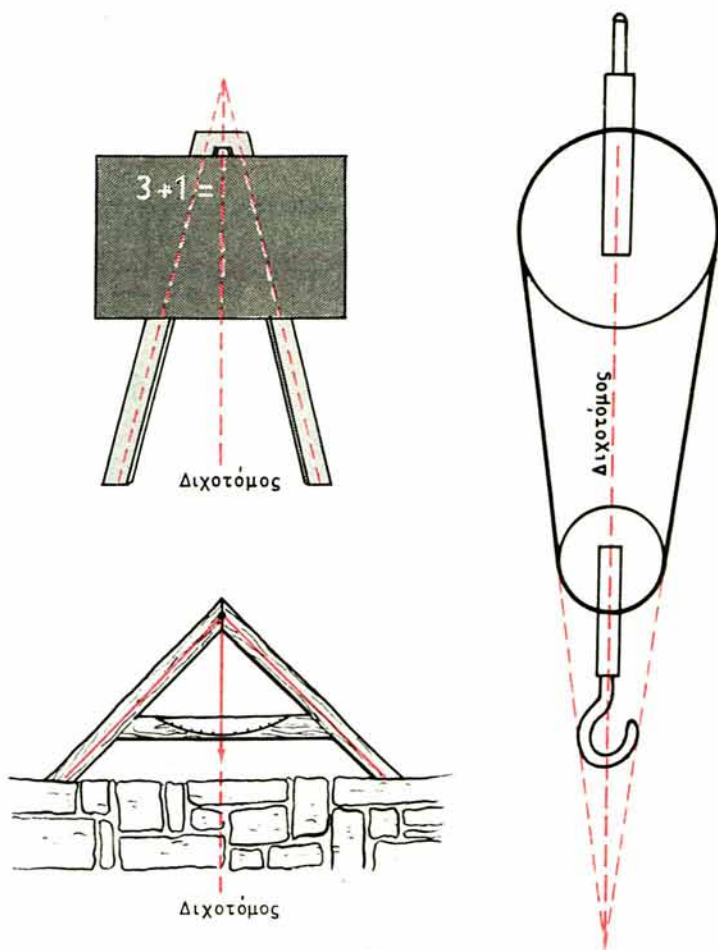


Σχ. 3.7 α.



Σχ. 3.7 β.





Σχ. 3.7 γ.

## 3.8 Ἡ ὀρθή γωνία.

Παίρνομε ἓνα κομμάτι χαρτόνι, πάνω στοῦ ὁποῖο φέρομε μία εὐθεία γραμμὴ  $AB$ , ὅπως φαίνεται στοῦ σχῆμα 3.8 α (α). Μετὰ κόβομε μὲ τὸ ψαλίδι τὸ χαρτόνι κατὰ μῆκος μέχρι τὸ σημεῖο  $O$  καὶ διπλώνομε τὸ ἓνα (τὸ ἐπάνω) κομμάτι, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα, ἔτσι, ὥστε ἡ  $AO$  νὰ συμπίπτει μὲ τὴν  $BO$ .

Βλέπομε ὅτι ἀπὸ τὴν εὐθεία γωνία  $AOB$  σχηματίσθηκαν δύο

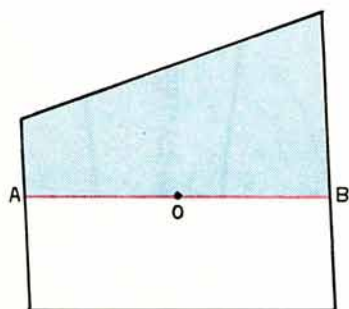


ἴσες γωνίες, ἡ  $\widehat{ΑΟΓ}$  καὶ ἡ  $\widehat{ΒΟΓ}$ , ποὺ ἡ κάθε μία τους λέγεται *ὀρθή γωνία*.  
 Ὡστε:

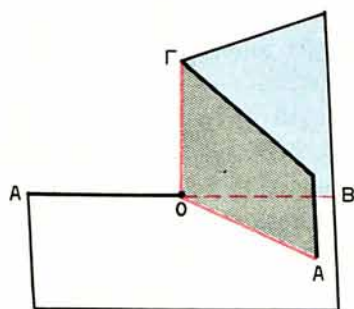
*Ὁρθή γωνία εἶναι τὸ μισὸ μιᾶς εὐθείας γωνίας.*

Καὶ ἀφοῦ ὅλες οἱ εὐθεΐες γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους, καὶ

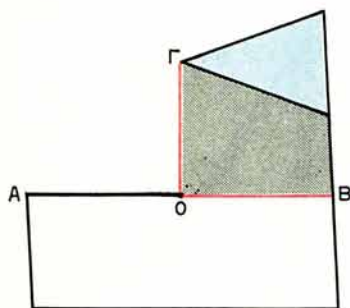
*Ὅλες οἱ ὀρθές γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους.*



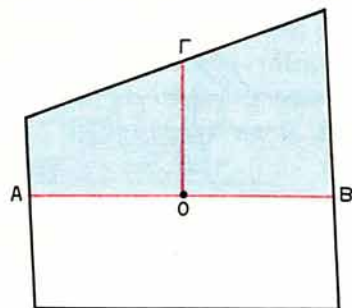
(α)



(β)



(γ)



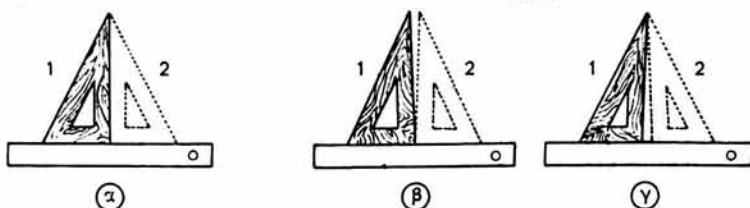
(δ)

Σχ. 3-8 α.

Γιὰ νὰ σχεδιάσωμε μία ὀρθή γωνία ἢ γιὰ νὰ ἐλέγξωμε, ἂν μία γωνία εἶναι ὀρθή, χρησιμοποιοῦμε ἓνα εἰδικὸ ὄργανο, ποὺ λέγεται *ὀρθογώνιο τρίγωνο*. Πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε ἓνα ἄλλο ὄργανο, ποὺ λέγεται *γωνιά*.

Γιὰ νὰ ἐλέγξωμε ἂν ἓνα τρίγωνο εἶναι σωστὸ, παίρνομε ἓνα χά-

ρακα, πού ἐλέγξαμε καί γνωρίζομε ὅτι εἶναι σωστός, καί τοῦ ἐφαρμόζομε τὸ τρίγωνο, πρῶτα στὴν θέσι 1 (σχ. 3·8 β), ὕστερα στὴν θέσι 2. Σὲ καθεμιά ἀπὸ αὐτὲς τὶς δύο θέσεις χαράσσομε μίαν εὐθεία



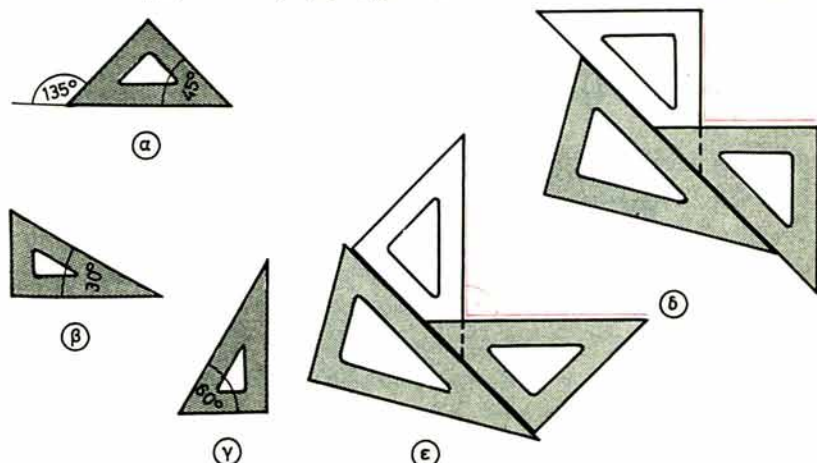
Σχ. 3·8 β.

α) Τρίγωνο σωστό. β) καὶ γ) Τρίγωνα ὄχι σωστά.

ἀκολουθώντας τὴν πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας, πού δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἀκμὴ τοῦ χάρακα. Ἄν οἱ δύο εὐθεῖες πού χαράξαμε δὲν συμπίπτουν, τότε τὸ τρίγωνο δὲν εἶναι σωστό, γιατί οἱ γωνίες, πού θὰ σχεδιάζαμε μὲ αὐτό, δὲν εἶναι ἴσες μὲ τὸ μισό μιᾶς εὐθείας γωνίας καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι ὀρθές.

Ἄν οἱ δύο εὐθεῖες πού χαράξαμε συμπίπτουν, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι σωστό.

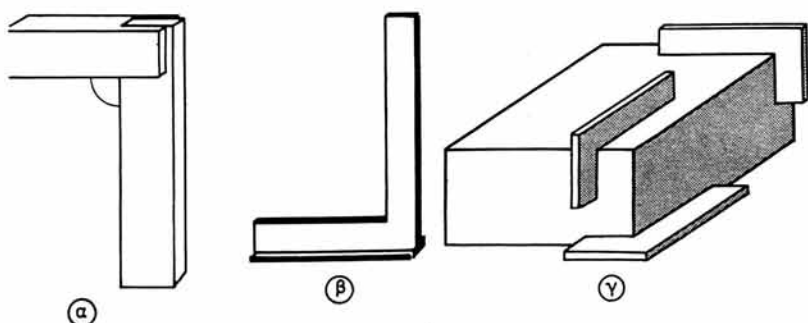
Στὸ σχῆμα 3·8 γ (α), (β), (γ) βλέπομε τρίγωνα σχεδιαστῇ



Σχ. 3·8 γ.

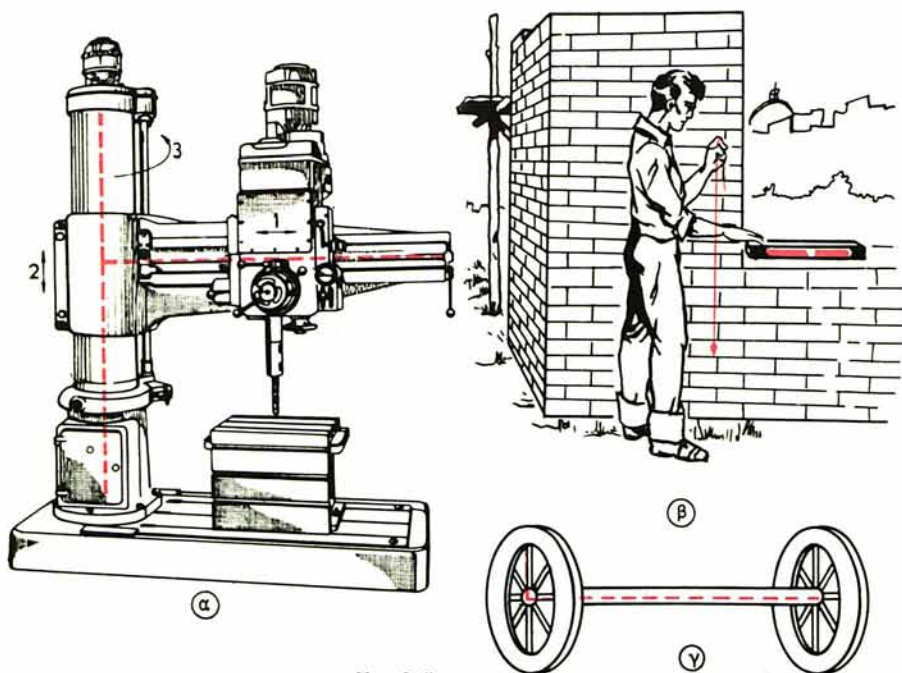


και δίπλα (δ) και (ε) πώς γίνεται ο έλεγχος και ή χάραξι μιās ὀρθῆς γωνίας με τὰ τρίγωνα αὐτά. Στὸ σχῆμα 3·8 δ βλέπομε τὴν



Σχ. 3·8 δ.

α) Γωνιά ξυλουργοῦ. β) Γωνιά ἐφαρμοστή. γ) Έλεγχος γωνίας ἀντικειμένου.



Σχ. 3·8 ε.

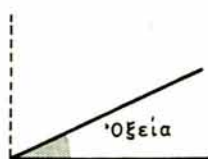
γωνιά τοῦ ξυλουργοῦ καὶ τὴν γωνιά τοῦ ἐφαρμοστή. Δίπλα φαίνε-  
ται ὁ τρόπος ἐλέγχου τῆς γωνίας ἐνὸς ἀντικειμένου [σχ. 3·8 δ (γ)].

Οι δύο πλευρές μιᾶς ὀρθῆς γωνίας λέγονται *κάθετες πλευρές*.

Στὸ σχῆμα 3.8 εἰδονται ἀπὸ τὴν πρᾶξι τρεῖς περιπτώσεις ὀρθῶν γωνιῶν.

### 3.9 Ἄλλες γωνίες.

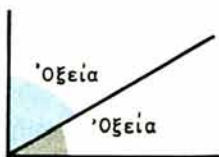
**Ὁξεία** λέγεται μία γωνία, ὅταν εἶναι μικρότερα ἀπὸ μία ὀρθή [σχ. 3.9 α (α)].



(α)



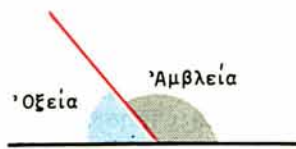
(α)



(β)

Σχ. 3.9 α.

Συμπληρωματικές γωνίες.



(β)

Σχ. 3.9 β.

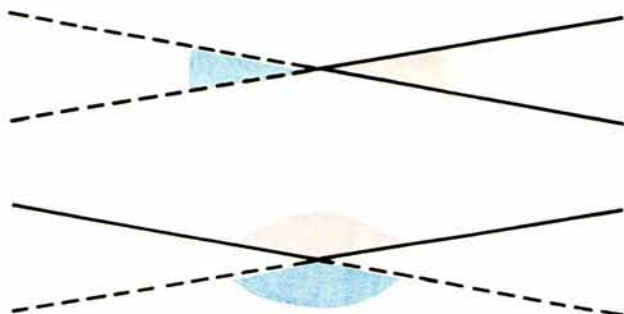
Παραπληρωματικές γωνίες.

**Ἀμβλεία** λέγεται μία γωνία, ὅταν εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ μία ὀρθή [σχ. 3.9 β (α)].

**Συμπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες, ποὺ ἔχουν ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς. Στὴν περίπτωσηι αὐτὴ καὶ οἱ δύο γωνίες εἶναι ὀξείες καὶ ἢ μία λέγεται *συμπλήρωμα* τῆς ἄλλης [σχ. 3.9 α (β)].

**Παραπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες, ποὺ ἔχουν ἄθροισμα μιᾶς εὐθείας γωνίας (ἢ δύο ὀρθῶν). Στὴν περίπτωσηι αὐτὴ ἢ μία γωνία εἶναι ὀξεία καὶ ἢ ἄλλη ἀμβλεία (ἢ καὶ οἱ δύο εἶναι ὀρθές) καὶ κάθε μία ἀπὸ αὐτὲς λέγεται *παραπλήρωμα* τῆς ἄλλης [σχ. 3.9 β(β)].

**Κατακορυφήν** λέγονται δύο γωνίες, ποὺ ἔχουν κοινὴ κορυφὴ καὶ οἱ πλευρές τῆς μιᾶς προέρχονται (ἢ προκύπτουν) ἀπὸ τὴν προέκτασι τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης (σχ. 3.9 γ).



Σχ. 3.9 γ.

Κατακορυφήν γωνίες.

“Αν συγκρίνουμε δύο κατακορυφήν γωνίες, με τὸν τρόπο ποὺ μάθαμε (χρησιμοποιώντας δηλαδή διαφανές χαρτί), βλέπουμε ὅτι:

*Δύο κατακορυφήν γωνίες εἶναι μεταξύ τους ἴσες.*

### 3.10 Μονάδες μετρήσεως γωνιῶν.

Γιὰ νὰ μετρήσουμε τίς γωνίες, μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τὴν ὀρθή γωνία. Ὅμως ἡ μονὰς αὐτὴ μειονεκτεῖ στὸ ὅτι μᾶς δίνει σὰν μέτρο τῶν γωνιῶν ἀριθμοὺς δεκαδικοὺς καὶ μόνο γιὰ τὴν εὐθεία γωνία καὶ τὴν ὀρθή γωνία μᾶς δίνει ἀκεραίους ἀριθμοὺς.

Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ χωρίσαμε τὴν ὀρθή γωνία σὲ 90 ἴσες γωνίες καὶ τὴν γωνία, ποὺ εἶναι 90 φορές μικροτέρα ἀπὸ τὴν ὀρθή, τὴν ὀνομάσαμε *γωνία μίας μοίρας*.

Ἔτσι λέμε:

1 ὀρθή = 90 μοῖρες

ἢ συμβολικὰ  $1^{\circ} = 90'$ .

Γιὰ μεγαλυτέρα ἀκρίβεια στὶς μετρήσεις διαιρέσαμε τὴν γωνία  $1^{\circ}$  σὲ 60 ἴσα κομμάτια, τὰ *πρῶτα λεπτά*.

$$1^{\circ} = 60'.$$

Στὴν συνέχεια κάθε γωνία  $1'$  τὴν διαιρέσαμε σὲ 60 ἴσα κομμάτια, τὰ *δεύτερα λεπτά*.

$$1' = 60''.$$

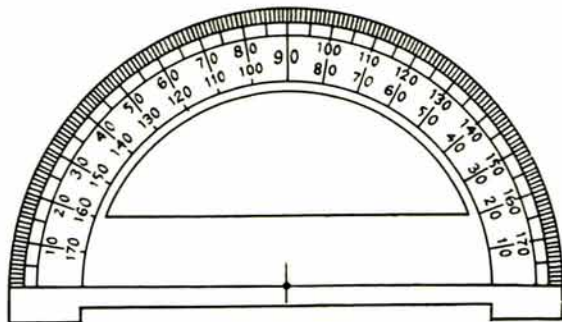
Ὡστε:

$$1^{\circ} = 90'$$

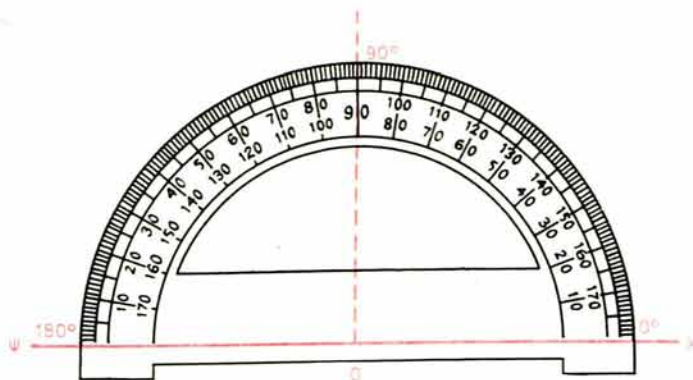
$$1^{\circ} = 60''$$

$$1' = 60''$$

Γιὰ νὰ μετρήσωμε μία γωνία χρησιμοποιοῦμε ἓνα ὄργανο, τὸ ὁποῖο λέγεται *μοιρογνωμόνιο* (σχ. 3 · 10 α). Στὴν βάση του τὸ μοιρο-



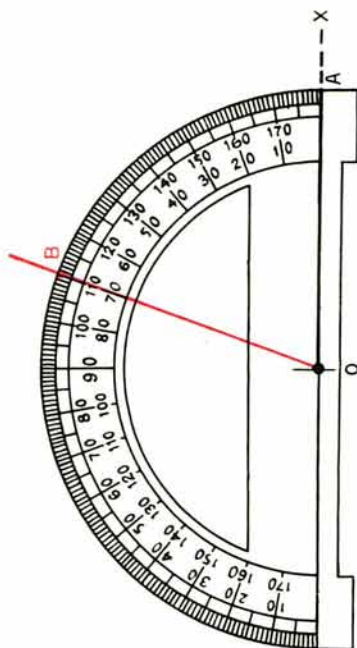
Σχ. 3 · 10 α.



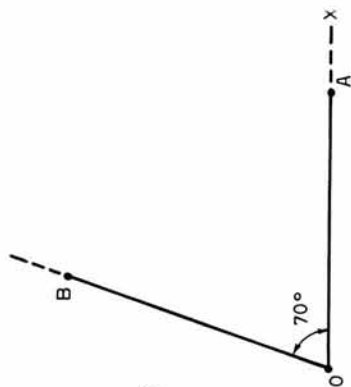
Σχ. 3 · 10 β.

γνωμόνιο ἀποτελεῖται ἀπὸ μία εὐθεία γωνία ΧΟΨ (σχ. 3 · 10 β), ποὺ ἔχει διαιρεθῇ σὲ δύο ὀρθές. Κάθε ὀρθή πάλι ἔχει διαιρεθῇ σὲ  $90^{\circ}$  καὶ ἡ εὐθεία γωνία σὲ  $180^{\circ}$ .

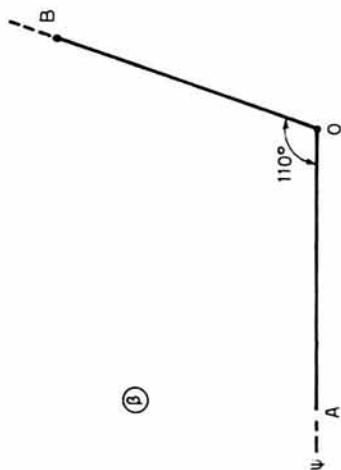
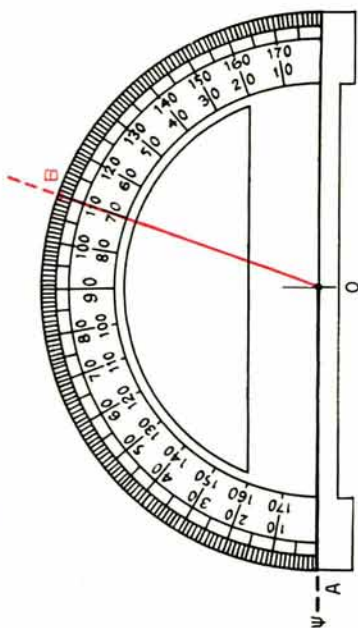
Γιὰ νὰ κάνωμε τὴν μέτρησι τοποθετοῦμε τὸ σημεῖο Ο τοῦ μοιρογνωμονίου πάνω στὴν κορυφή τῆς γωνίας, ποὺ θέλομε νὰ μετρήσωμε (σχ. 3 · 10 γ), καὶ τὴν μία πλευρά του ΟΧ ἢ ΟΨ πάνω στὴν μία πλευρά τῆς γωνίας αὐτῆς ἔτσι, ὥστε ἡ ἄλλη πλευρά της νὰ πέσει



α)



β)



Σχ. 3.10 γ.

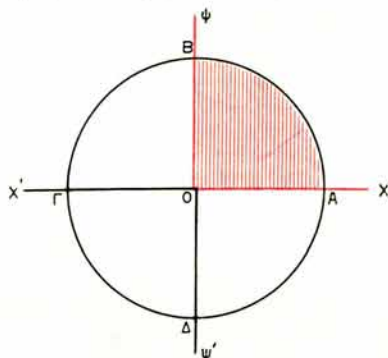


μέσα στο μοιρογνωμόνιο. Μετά διαβάζουμε την ένδειξη στο μοιρογνωμόνιο, ή όποια θα πρέπει να είναι αριθμός μικρότερος του 90 για τις όξεις γωνίες [σχ. 3 · 10 γ (α)] και μεγαλύτερος του 90 για τις αμβλείες γωνίες [σχ. 3 · 10 γ (β)].

Για την μέτρηση των γωνιών με το νέο αυτό αριθμό, που δεν είναι δεκαδικός και για τον τρόπο, που θα κάνουμε πράξεις με ένα τέτοιο αριθμό, μιλούμε στο κεφάλαιο περί *συμμιγών αριθμών*.

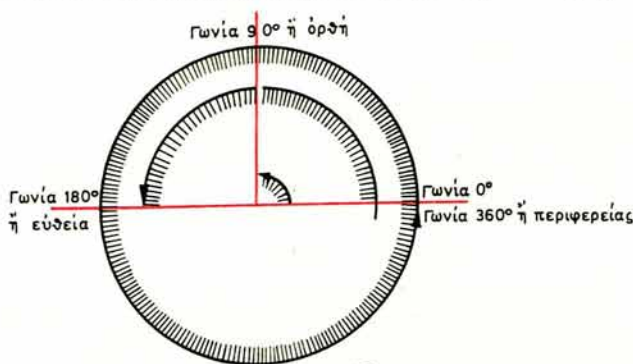
### 3 · 11 Μέτρηση περιφέρειας.

Μία όρθη γωνία ΧΟΨ την κάνουμε *ἐπίκεντρο* γράφοντας, περιφέρεια κύκλου με κέντρο Ο, την κορυφή της (σχ. 3 · 11 α). Τότε στην γωνία ΧΟΨ αντιστοιχεί το τόξο ΑΒ, του οποίου το μέτρο σε μοίρες είναι όσο και της αντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας, δηλαδή  $90^\circ$ . Αυτό σημαίνει πώς μπορούμε να μετρούμε τα τόξα σε μία περιφέρεια με το ίδιο μέτρο, που μετρούμε και τις αντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες.



Σχ. 3 · 11 α.

Αν προεκτείνωμε από την κορυφή Ο τις πλευρές ΟΧ και ΟΨ της γωνίας, σχηματίζομε 4 ίσες γωνίες. Δηλαδή  $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ . Έπομένως *κάθε περιφέρεια έχει τόξο  $360^\circ$*  (σχ. 3 · 11 β).



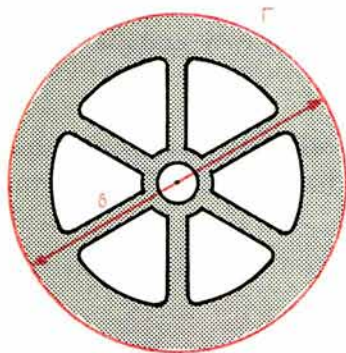
Σχ. 3 · 11 β.



3 · 12 Ὁ ἀριθμὸς  $\pi$ .

Μιάς ἐπίπεδης τροχαλίας (σχ. 3 · 12) μέ διάμετρο  $D = 1$  cm μετροῦμε τὸ μήκος τῆς περιμέτρου (δηλαδή τοῦ τόξου τῆς τῶν  $360^\circ$ ) καί εὐρίσκομε μήκος  $\Gamma = 3,1$  cm περίπου.

Παίρνομε μία ἄλλη τροχαλία μέ διάμετρο  $D = 5$  cm. Τὸ μήκος τῆς περιμέτρου τῆς εὐρίσκεται ἴσο μέ  $\Gamma = 15,70$  cm. Ἄν διαιρέσωμε τὸ μήκος αὐτὸ μέ τὴν διάμετρο, εὐρίσκομε:  $15,70 : 5 = 3,14$  cm. Ἔχομε δηλαδή στὸ μέτρημά μας μεγαλύτερα ἀκρίβεια. Καὶ ἂν πάρωμε διάμετρο  $\delta = 10$  cm, εὐρίσκομε ὅτι τὸ μήκος τῆς περιμέτρου τῆς περιφέρειας εἶναι  $\Gamma = 31,41$  cm. Διαιρώντας τὸ μήκος αὐτὸ τῆς περιμέτρου διὰ τῆς διαμέτρου εὐρίσκομε:  $31,41 : 10 = 3,141$ . Τὸν σταθερὸ αὐτὸ ἀριθμὸ τὸν συμβολίζομε μέ τὸ γράμμα  $\pi$ . Μετὰ τὶς παραπάνω πράξεις μποροῦμε νὰ συμπεράνωμε ὅτι:



Σχ. 3 · 12.

Ἄν διαιρέσωμε τὸ μήκος περιφέρειας μέ τὸ μήκος τῆς διαμέτρου τῆς, εὐρίσκομε πάντοτε πηλίκον  $\pi = 3,14159^* \dots$

Ἔχομε δηλαδή:

$$\Gamma : D = \pi$$

ἢ

$$\Gamma = D \cdot \pi$$

## 3 · 13 Ἡ μεσοκάθετος.

α) Ἄς πάρωμε πάλι τὴν ὀρθή γωνία τοῦ σχήματος 3 · 11 α. Ὅπως ξέρομε, ἡ πλευρὰ  $OA$  εἶναι κάθετος στὴν  $OB$ , ποὺ συμβολίζεται  $OA \perp OB$ . ἑπομένως καὶ  $X'X \perp \Psi\Psi'$ , δηλαδή οἱ εὐθεῖες  $X'X$  καὶ  $\Psi'\Psi$  τέμνονται καθέτως. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία  $AOB$  εἶναι ὀρθή, λέμε ὅτι:

\* Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων στὴν διαίρεσι αὐτῇ,  $\Gamma : D$ , δὲν τελειώνει. Ἀνάλογα μέ τὴν ἀκρίβεια ποὺ θέλομε, γράφομε καὶ τὰ δεκαδικὰ ψηφία. Ἔτσι μποροῦμε νὰ ἔχωμε 3,14, 3,141, 3,1415, 3,14159 κ.λπ.

Δύο εὐθεῖες τέμνονται καθέτως, ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὶς 4 γωνίες, ποὺ σχηματίζονται γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο τομῆς, εἶναι ὀρθή.

Ἀκόμη μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι:

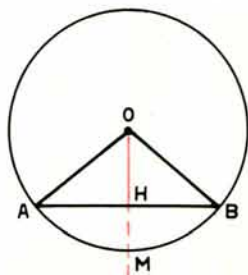
Δύο εὐθεῖες τέμνονται καθέτως, ὅταν οἱ τέσσερις γωνίες, ποὺ σχηματίζονται γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο τομῆς τους, εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

Κι' αὐτό, γιατί, ἂν τὶς κάνουμε ἐπίκεντρες γωνίες, θὰ ἔχουμε:

$$360^\circ : 4 = 90^\circ \quad \eta \quad 1^\circ.$$

Ἐπειδὴ ὁμως  $OA = OB$ , ἀφοῦ εἶναι ἀκτίνες τῆς ἴδιας περιφέρειας, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ  $OB$  εἶναι κάθετος στὸ μέσον τῆς  $AB$ . Τότε ἡ  $OB$  λέγεται **μεσοκάθετος** τῆς  $AB$ .

β) Ἄς πάρουμε στὴν περιφέρεια, μὲ κέντρο τὸ σημεῖο  $O$ , μία χορδὴ  $AB$  (σχ. 3.13 α). Φέρομε τὴν ἀκτῖνα  $OM$ , ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ μέσον  $M$  τοῦ τόξου  $AB$ . Μετροῦμε τὰ κομμάτια  $AH$  καὶ  $BH$ , στὰ ὁποῖα διαίρεσε ἡ  $OM$  τὴν χορδὴ  $AB$  καὶ εὐρίσκουμε ὅτι  $AH = HB$ .



Σχ. 3.13 α.

Ἀκόμη, ἂν μετρήσουμε καὶ τὶς γωνίες  $OHA$  καὶ  $OHB$ , βλέπουμε ὅτι εἶναι ἴσες καὶ κάθε μία εἶναι  $1^\circ$  ἢ  $90^\circ$ . Ἀπὸ τὸ παραπάνω ἐξάγουμε τὰ συμπεράσματα:

Ἡ ἀκτίς, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ μέσον  $M$  ἐνὸς τόξου  $AB$ , εἶναι μεσοκάθετος στὴν χορδὴ  $AB$ .

Ἡ ἀκτίς, ποὺ εἶναι κάθετος σὲ χορδὴ  $AB$ , περνᾷ ἀπὸ τὸ μέσον  $H$  τῆς χορδῆς καὶ τὸ μέσον  $M$  τοῦ τόξου  $AB$ .

Τὸ εὐθύγραμμο τμήμα  $OH$  τὸ ὀνομάζουμε **ἀπόστασι** τοῦ κέντρου  $O$  ἀπὸ τὴν χορδὴ  $AB$  ἢ ἄλλοιῶς **ἀπόστημα**.

**Παρατήρησι:** Στὰ ἴδια συμπεράσματα καταλήγουμε, ἂν κατασκευάζοντας ἀπὸ χαρτόνι τὸν κύκλο  $O$  κόψουμε μὲ τὸ ψαλίδι τὴν ἀκτῖνα  $AO$  καὶ τσακίσουμε μετὰ τὸ κομμάτι τοῦ κύκλου  $AOM$  (μπλὲ χρῶμα), μέχρις ὅτου τὸ  $A$  συμπίπτει μὲ τὸ  $B$  (σχ. 3.13 β).

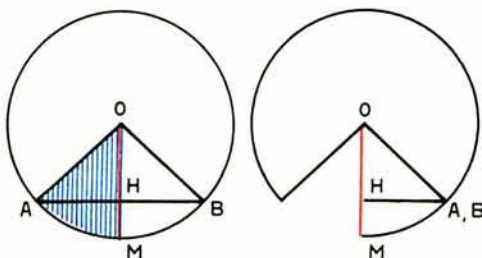
γ) Ἐάν πάνω στήν μεσοκάθετο  $XX'$  ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος  $AB$  (σχ. 3·13 γ) πάρωμε τὰ σημεία  $\Lambda$ ,  $N$  καὶ  $P$  καὶ φέρωμε τὶς  $\Lambda A$ ,  $\Lambda B$ ,  $NA$ ,  $NB$ ,  $PA$  καὶ  $PB$ , εὐρίσκομε ὅτι:

$$\Lambda A = \Lambda B$$

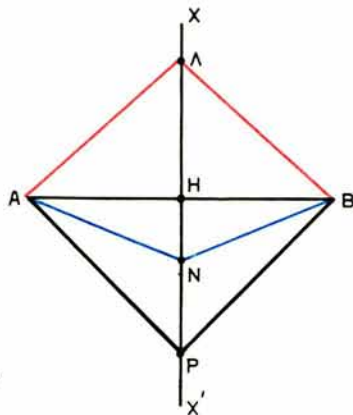
$$NA = NB$$

$$PA = PB$$

πού σημαίνει ὅτι:



Σχ. 3·13 β.



Σχ. 3·13 γ.

*Κάθε σημείο τῆς μεσοκάθετου ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος.*

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα  $\Lambda H$ ,  $NH$  καὶ  $PH$  θὰ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων  $\Lambda$ ,  $N$  καὶ  $P$  ἀντιστοίχως ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμο τμήμα  $AB$ .

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι:

*Ἡ μεσοκάθετος σὲ μία χορδὴ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου.*

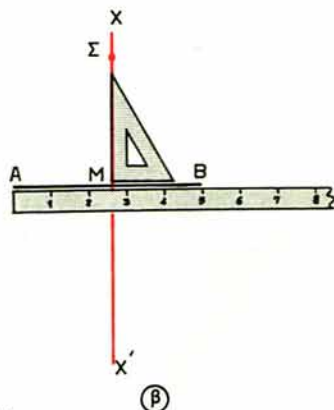
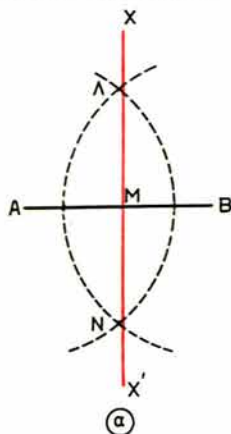
### 3·14 Χάραξι μεσοκάθετου.

Ἄς δοῦμε πῶς θὰ χαράξωμε τὴν μεσοκάθετο στὸ εὐθύγραμμο τμήμα  $AB$ .

α) Μὲ κέντρο πρῶτα τὸ  $A$  καὶ μετὰ τὸ  $B$  καὶ μὲ τὴν ἴδια ἀκτῖνα γράφωμε δύο τόξα περιφερείας, τὰ ὁποῖα κόβονται στὰ σημεία  $\Lambda$  καὶ  $N$  [σχ. 3·14 α (α)]. Ἡ εὐθεΐα  $XX'$ , πού περνᾷ ἀπὸ τὰ ση-

μεία  $\Lambda$  και  $N$ , κόβει την  $AB$  στο μέσον  $M$ . αυτή είναι ή ζητούμένη μεσοκάθετος \*.

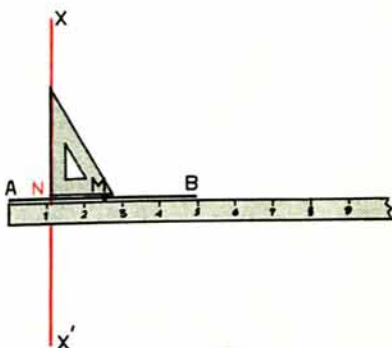
β) Ένας άλλος εύκολος τρόπος, αλλά όχι τόσο ακριβής, είναι ό παρακάτω: Με την βοήθεια ενός κανόνος (χάρακα) μετρούμε τὸ μήκος  $AB$  και εύρισκομε μετὰ τὸ μέσον του  $M$  [σχ. 3.14 α (β)].



Σχ. 3.14 α.

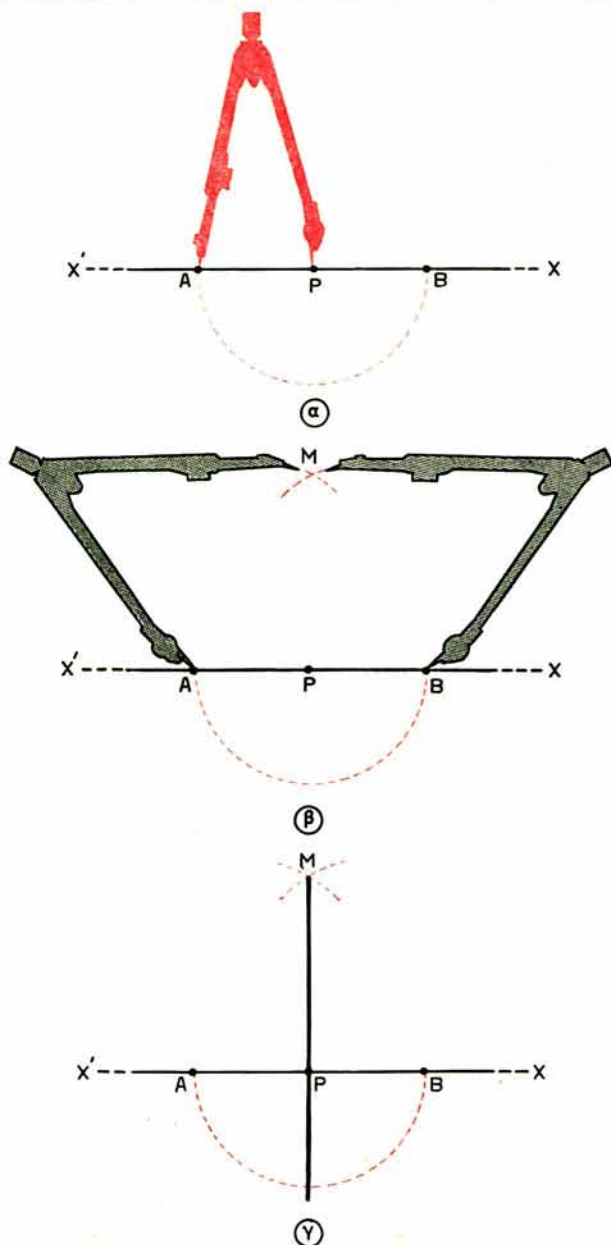
Κατόπιν με τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού τὸ βάζομε ἐπάνω στὸν κανόνα με τὴν μία κάθετο πλευρὰ καὶ ἔτσι, ὥστε ή κορυφή τῆς ὀρθῆς νὰ πέση στὸ σημεῖο  $M$ , γράφομε τὴν  $M\Sigma$ , τὴν ὁποία μετὰ ἐπεκτείνουμε πρὸς τὰ πάνω καὶ πρὸς τὰ κάτω.

γ) Ἄν τὸ τρίγωνο τὸ βάλωμε ἐπάνω στὴν  $AB$ , ἀλλὰ σὲ τέτοια θέσι, ὥστε ή κορυφή του νὰ μὴ πέση ἐπάνω στὸ μέσον  $M$  ἀλλὰ σὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο, ἔστω τὸ  $N$  (σχ. 3.14 β), τότε γράφομε μία εὐθεία κάθετη στὸ τμήμα  $AB$ .



Σχ. 3.14 β.

\* Ἀπόδειξι: Ἀφοῦ τὰ τόξα πού γράψαμε με κέντρα τὰ σημεῖα  $A$  καὶ  $B$  ἔχουν τὶς ἴδιες ἀκτίνες, θὰ εἶναι:  $LA = LB$  καὶ  $NA = NB$ , πού σημαίνει ὅτι στὴν εὐθεία  $X'X$  ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἴσα ἀπὸ τὰ ἄκρα  $AB$ , ἄρα ή  $X'X$  εἶναι κάθετος στὸ μέσον.



Σχ. 3-15 α.



## 3.15 Χάραξι καθέτων.

**Προβλήματα.**

1ο. Ἀπὸ σημεῖο P μιᾶς εὐθείας  $X'X$  νὰ ὑψώσετε κάθετο σ' αὐτή (μὲ τὴν βοήθεια διαβήτη καὶ χάρακα μόνο).

Λύσι:

Στὴν ἀρχὴ μὲ κέντρο P καὶ ἀκτῖνα ὁποιαδήποτε ὀρίζομε πάνω στὴν εὐθεία  $X'X$  δύο σημεία A καὶ B, ὥστε  $AP = BP$  [σχ. 3.15 α (α)]. Τώρα δὲν μένει παρὰ νὰ φέρω-  
με τὴν μεσοκάθετο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB τῆς  $X'X$  [σχ. 3.15 α (β), (γ)].

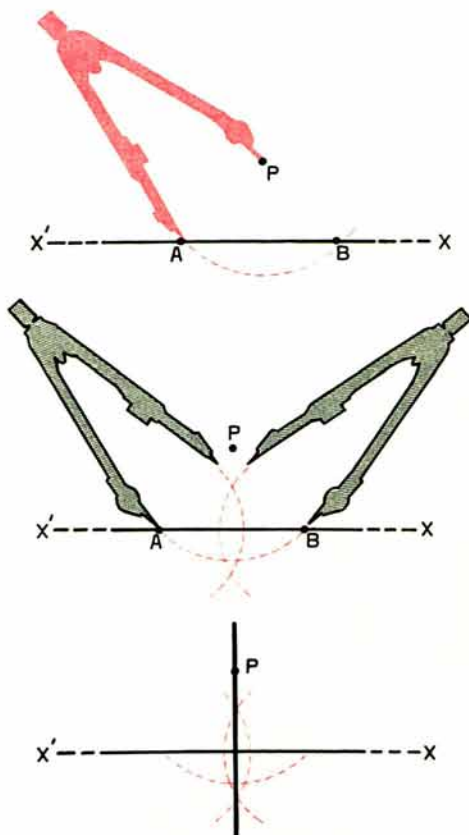
2ο. Ἀπὸ σημεῖο P, ποὺ εὐρίσκεται ἐκτὸς τῆς εὐθείας  $X'X$  νὰ φέρετε κάθετο πρὸς τὴν  $X'X$  (τὴ νὰ χαράξετε τὴν ἀπόστασι τοῦ P ἀπὸ τὴν  $X'X$ ).

(Καὶ ἐδῶ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ λυθῇ μὲ κανόνα καὶ διαβήτη).

Λύσι :

Στὴν ἀρχὴ μὲ κέντρο τὸ P γράφομε μία περιφέρεια τέτοια, ποὺ νὰ κόβῃ τὴν εὐθεία  $X'X$  σὲ δύο σημεία, A καὶ B. Τώρα δὲν μένει παρὰ νὰ χαράξωμε τὴν μεσοκάθετο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB.

3ο. Νὰ γράψετε περιφέρεια, ποὺ νὰ περνᾷ ἀπὸ τρία σημεία A, B καὶ Γ, ποὺ δὲν εὐρίσκονται ἐπάνω στὴν ἴδια εὐθεία.



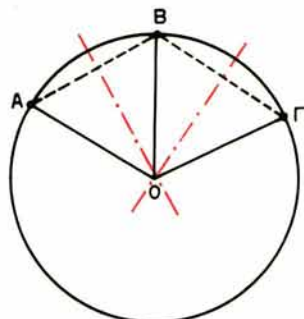
Σχ. 3.15 β.

Κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας στὸ σημεῖο P.



Λύσι :

Τὸ πρόβλημα λύνεται εὐκόλα. Ξέρομε πὼς τὸ κέντρο τῆς περιφερείας αὐτῆς πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσα καὶ ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα, ἄρα θὰ εὐρίσκεται στὴν τομὴ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων  $AB$  καὶ  $BΓ$  (σχ. 3 · 15 γ).



Σχ. 3 · 15 γ.

3 · 16 Ὁ ἐφαπτομένη.

**Πρόβλημα.**

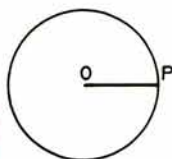
Νὰ χαράξετε τὴν εὐθεία, ποὺ εἶναι κάθετη στὸ ἄκρο  $P$  ἀκτίνος  $OP$  μιᾶς περιφερείας μὲ κέντρο  $O$ .

Λύσι :

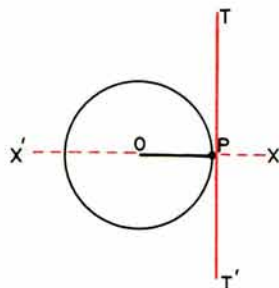
Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπλό. Ἄν ἐπεκτείνωμε τὴν  $OP$ , θὰ ἔχωμε νὰ ὑψώσωμε ἐπάνω στὴν εὐθεία  $X'X$  κάθετο στὸ σημεῖο  $P$  (σχ. 3 · 16 α). Ἔστω ὅτι εἶναι ἡ εὐθεία  $T'T$ , ἡ ὁποία παρατηροῦμε ὅτι συναντᾷ σὲ ἓνα μόνον σημεῖο τὴν περιφέρεια. Ἡ εὐθεία αὕτῃ λέγεται **ἐφαπτομένη** τῆς περιφερείας  $O$  στὸ σημεῖο  $P$ .

Ὡστε:

*Μία εὐθεία λέγεται ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας, ὅταν τὴν συναντᾷ μόνον σὲ ἓνα σημεῖο.*

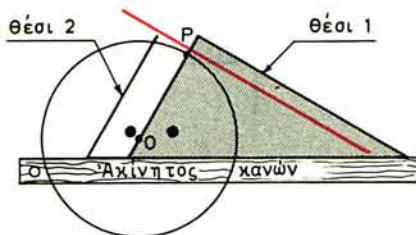


(α)



(β)

Σχ. 3 · 16 α.



Σχ. 3 · 16 β.

Ἡ ἴδια κατασκευή μπορούσε νὰ γίνη μὲ χάρακα καὶ ὀρθογώνιο τρίγωνο. Βάζομε στὴν ἀρχὴ τὸ τρίγωνο ἔτσι, ὥστε ἡ μία του κάθετη πλευρὰ νὰ πέσῃ ἐπάνω στὴν ἀκτῖνα  $OP$  (θέσι 1, σχ. 3 · 16 β), τὴν ὁποία χαράσσομε.

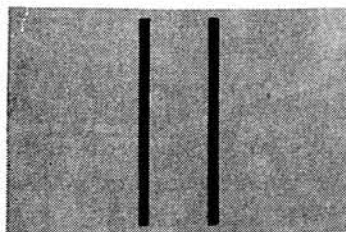
Μετά βάζομε τὸν χάρακα κάτω ἀπὸ τὴν μεγάλη πλευρὰ τοῦ τριγώνου (τὴν ὁποία λέμε *ὑποτείνουσα*) καὶ τὸν κρατοῦμε ἀκίνητο. Μετακινοῦμε κατόπιν τὸ τρίγωνο ἐπάνω στὸν χάρακα, ὥσπου ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ νὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖο P (θέσι 2, σχ. 3·16 β). Τότε χαράσσομε τὴν εὐθεῖα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ αὐτὴ τὴν κάθετο πλευρὰ· αὐτὴ εἶναι ἡ *ἐφαπτομένη* τῆς περιφερείας O στὸ σημεῖο P.

### 3·17 Παράλληλες εὐθεῖες.

Ἄν σταθοῦμε μπροστὰ σὲ μία σιδηροδρομικὴ γραμμὴ μὲ εὐθύγραμμες τροχιές καὶ κοιτάξωμε μπροστὰ μας, βλέπομε ὅτι οἱ δύο σιδηροτροχιές *ἀπέχουν μεταξύ τους ἴση πάντοτε ἀπόστασι καὶ δὲν συναντῶνται ποτὲ* (σχ. 3·17 α).

Ὅταν σταθοῦμε ἀνάμεσα στὶς δύο σιδηροτροχιές καὶ τίς βλέπομε νὰ ἀπομακρύνωνται, μᾶς φαίνεται σὰν νὰ συναντῶνται κάποτε (σχ. 3·17 β).

Ἄν ὅμως προχωρήσωμε πρὸς τὸ νοητὸ σημεῖο συναντήσεώς τους, βλέπομε ὅτι, ὅσο πλησιάζομε,



Σχ. 3·17 α.



Σχ. 3·17 β.

ζομε, αὐτὸ ἀπομακρύνεται καὶ ποτὲ δὲν τὸ φτάνομε ἢ, ὅπως ἀλλοιῶς λέμε, τὸ σημεῖο αὐτὸ *χάνεται στὸ ἄπειρο*. Δύο τέτοιες εὐθεῖες λέγονται *παράλληλες* (σχ. 3·16 γ καὶ ε).

Συμβολίζονται δὲ μὲ //

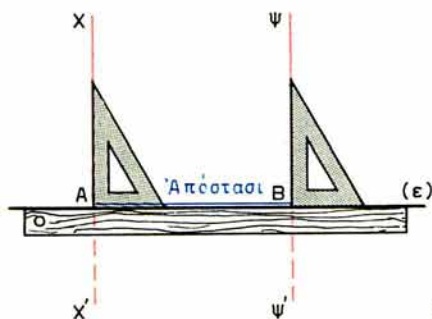
“Ωστε:

Δύο εὐθεΐες (ἐνὸς ἐπιπέδου) εἶναι παράλληλες, ὅταν, ὅσο κι’ ἂν προεκτείνωνται δὲν συναντῶνται ποτέ.

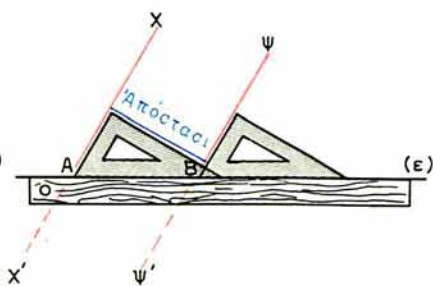
“Ἡ ἀλλοιῶς:

Δύο εὐθεΐες, ποὺ εὐρίσκονται σὲ ὅλο τους τὸ μῆκος στὴν ἴδια ἀπόστασι ἢ μία ἀπὸ τὴν ἄλλη, εἶναι παράλληλες.

Μποροῦμε νὰ χαράξωμε δύο παράλληλες εὐθεΐες μὲ τὴν βοήθεια τοῦ (ὀρθογωνίου) τριγώνου, ὅπως δείχνεται στὰ σχήματα 3 · 17 γ καὶ 3 · 17 δ.



Σχ. 3 · 17 γ.



Σχ. 3 · 17 δ.

Οί εὐθεΐες  $X'X$  καὶ  $\Psi'\Psi$  στὸ σχῆμα 3 · 17 γ εἶναι κάθετες στὴν εὐθεία  $\epsilon$ . Ἐπομένως σὲ ὅλο τους τὸ μῆκος θὰ εὐρίσκωνται στὴν ἴδια ἀπόστασι ἢ μία ἀπὸ τὴν ἄλλη, δηλαδή θὰ εἶναι παράλληλες (σχ. 3 · 17 ε).

Συμπέρασμα:

“Ὅταν δύο εὐθεΐες εἶναι κάθετες σὲ μία τρίτη εὐθεία, τότε εἶναι μεταξύ τους παράλληλες.

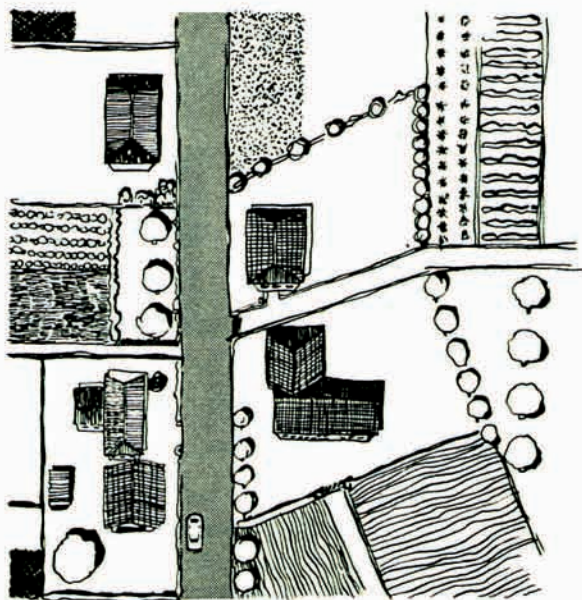
Ἀλλὰ καὶ οἱ εὐθεῖες  $X'X$  καὶ  $\Psi'\Psi$  τοῦ σχήματος 3.17 δ ὅσο καὶ ἂν ἐπεκταθοῦν, δὲν συναντῶνται ποτέ. Ἄν μετρήσωμε τὴν ἀπόστασί τους, τὴν εὐρίσκομε παντοῦ ἴδια, γι' αὐτὸ εἶναι παράλληλες.

Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ μὲ τὶς ἄκρες (ρεῖθρα) τῶν πεζοδρομίων τῶν δρόμων, ὅταν βέβαια οἱ δρόμοι δὲν στενεύουν καὶ εἶναι ἴσοι, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 3.17 στ.

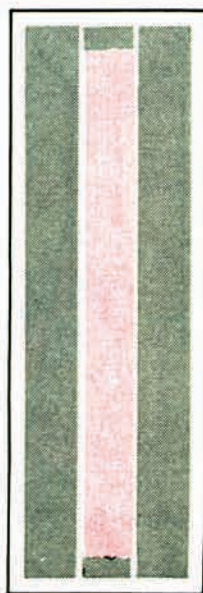
Στὰ σχήματα 3.17 ζ καὶ 3.17 η δίνονται δύο πρακτικοὶ τρόποι χαράξεως παραλλήλων.

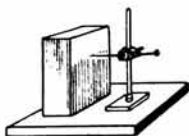


Σχ. 3.17 ε.

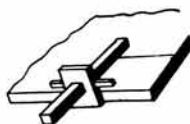


Σχ. 3.17 στ.





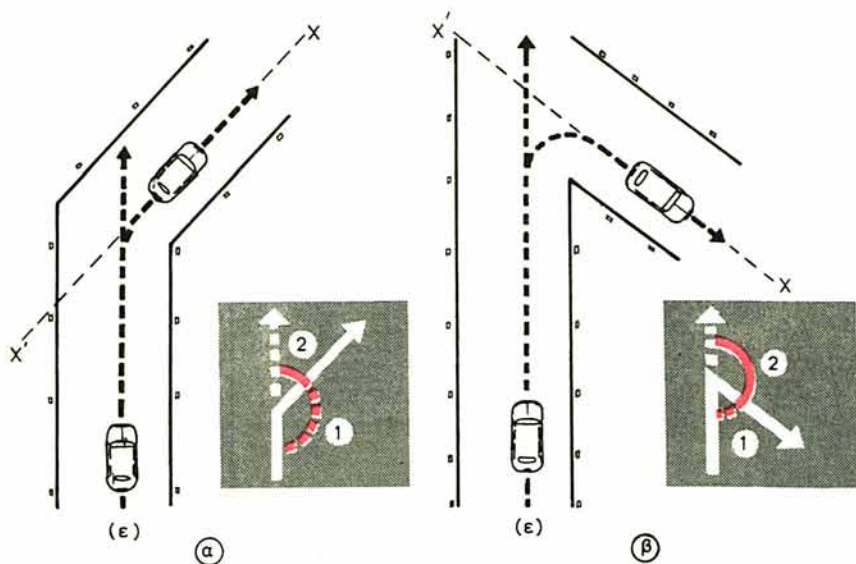
Σχ. 3·17 ζ.



Σχ. 3·17 η.

### 3·18 Παράλληλες εὐθεΐες, πού τέμνονται ἀπὸ μία εὐθεία.

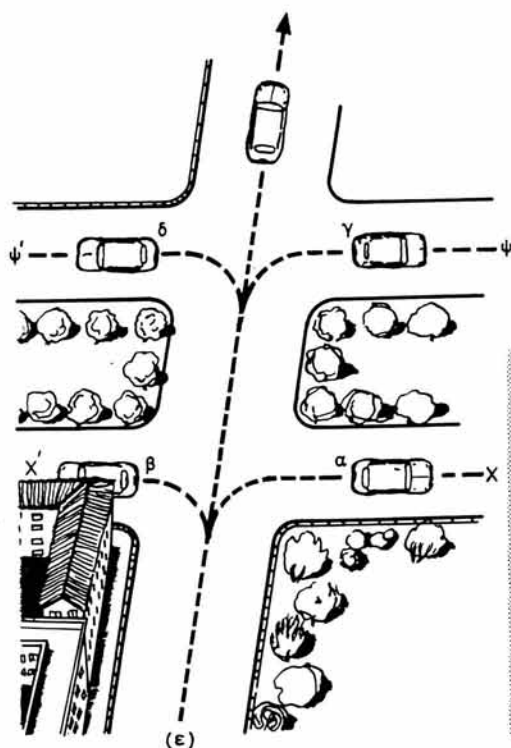
Στὸ σχῆμα 3·18 α ἡ πορεία τῶν αὐτοκινήτων ἀλλάσσει. Καὶ στὴν μὲν περίπτωσηι (α) ἡ νέα πορεία τοῦ αὐτοκινήτου σχηματίζει γωνία ἀμβλεία μετὴν παλαιά, ἐνῶ στὴν περίπτωσηι (β) σχηματίζει ὀξεία γωνία. Πάντως καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ἡ γωνία 1 εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας 2.



Σχ. 3·18 α.

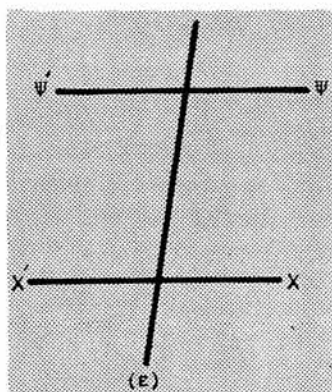
Στὸ σχῆμα 3·18 β (α) τὰ αὐτοκίνητα (α) καὶ (β) κινοῦνται πάνω στὴν εὐθεία  $X'X$ , τὰ (γ) καὶ (δ) κινοῦνται πάνω στὴν εὐθεία  $\Psi'\Psi$ , ἐνῶ τὸ τελευταῖο συνεχίζει τὴν πορεία του πάνω στὴν εὐθεία  $\epsilon$ . Ἔχομε δηλαδή τις δύο παράλληλες εὐθεΐες  $X'X$  καὶ  $\Psi'\Psi$  νὰ κόβονται ἀπὸ μιὰ τρίτη εὐθεία  $\epsilon$ , πού τὴν λέμε **τέμνουσα** [σχ. 3·18 β (β)].





Ⓐ

Σχ. 3.18 β.



Β

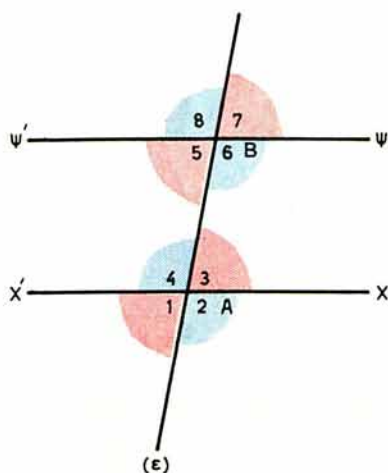
Δηλαδή:  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3 = \widehat{B}_5 = \widehat{B}_7$

και  $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_4 = \widehat{B}_6 = \widehat{B}_8$ .

Ή ακόμη, αν πάρουμε μία οποιαδήποτε από τις όξείες γωνίες (π.χ. την  $\widehat{A}_3$ ) και την προσθέσουμε με μία οποιαδήποτε από τις άμβλείες γωνίες (π.χ. την  $\widehat{B}_8$ ), το άθροισμά τους θα είναι δύο όρθές, δηλαδή μία ευθεία γωνία:

$$\widehat{A}_3 + \widehat{B}_8 = 180^\circ$$

$$\eta \quad \widehat{A}_3 + \widehat{B}_8 = 2^\circ$$



Σχ. 3.18 γ.



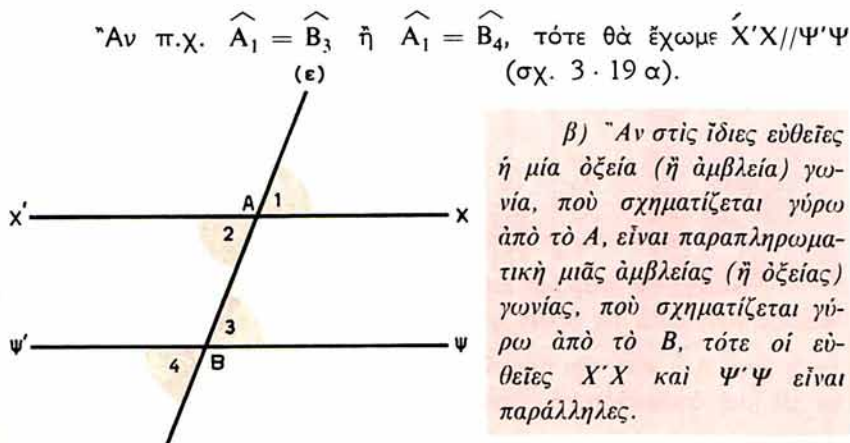
“Ωστε:

α) Σὲ δύο παράλληλες εὐθεΐες, πού τέμνονται ἀπὸ μία τρίτη, ὅλες οἱ ὀξείες (ἢ ἀμβλείες) γωνίες, πού σχηματίζονται, εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

β) Σὲ δύο παράλληλες εὐθεΐες, πού τέμνονται ἀπὸ μία τρίτη, τὸ ἄθροισμα μιᾶς ὀξείας καὶ μιᾶς ἀμβλείας γωνίας εἶναι πάντοτε μία εὐθεία γωνία, δηλαδή  $180^\circ$  ἢ  $2^\circ$ .

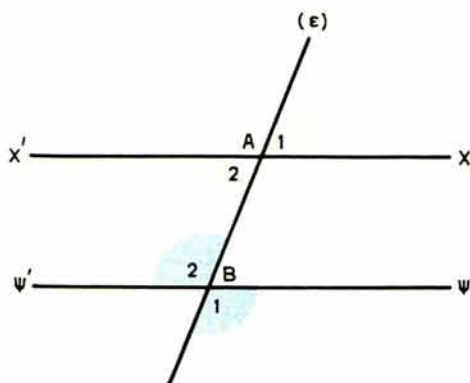
### 3 · 19 Ἰδιότητες.

α) “Αν σὲ δύο εὐθεΐες  $X'X$  καὶ  $\Psi'\Psi$ , πού τέμνονται ἀπὸ μία ἄλλη εὐθεία  $\epsilon$ , ἡ μία ὀξεία (ἢ ἀμβλεία) γωνία, ἀπὸ τὶς δύο πού σχηματίζονται στὸ ἓνα σημεῖο τῆς τομῆς, εἶναι ἴση μὲ τὴν μία ὀξεία (ἢ ἀμβλεία) γωνία, ἀπὸ τὶς δύο πού σχηματίζονται στὸ ἄλλο σημεῖο τῆς τομῆς, οἱ δύο εὐθεΐες  $X'X$  καὶ  $\Psi'\Psi$  εἶναι παράλληλες.

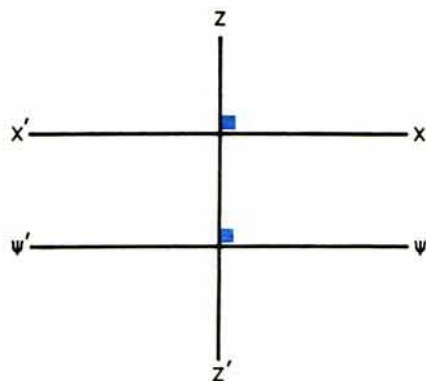


Σχ. 3 · 19 α.

“Αν π.χ.  $\widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 180^\circ$  ἢ  $\widehat{A_2} + \widehat{B_3} = 180^\circ$ , τότε θὰ ἔχωμε:  $X'X // \Psi'\Psi$  (σχ. 3 · 19 β).



Σχ. 3.19 β.



Σχ. 3.19 γ.

γ) "Αν δύο ευθείες  $X'X$  και  $\Psi'\Psi$  είναι κάθετες σὲ μία τρίτη ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

"Αν

$$X'X \perp Z'Z$$

και

$$\Psi'\Psi \perp Z'Z$$

τότε (σχ. 3.19 γ) θὰ ἔχουμε:

$$X'X \parallel \Psi'\Psi$$

συμπέρασμα, πού τὸ ξέρομε καὶ ἀπὸ τὴν παράγραφο 3.17.

δ) "Αν μία ευθεία είναι κάθετη σὲ μία ἄλλη, τότε θὰ είναι κάθετη καὶ στὴν παράλληλό της.

"Αν δηλαδή:

$$Z'Z \perp X'X$$

και

$$\Psi'\Psi \parallel X'X$$

τότε (σχ. 3.19 γ) θὰ ἔχουμε:

$$\Psi'\Psi \perp Z'Z$$

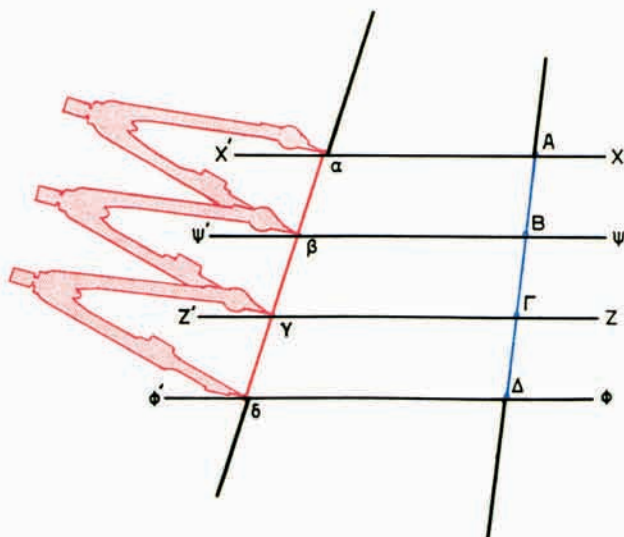
ε) "Αν ἀπὸ τὶς δύο τέμνουσες πολλῶν παραλλήλων ευθειῶν ἡ μία χωρίζεται σὲ ἴσα κομμάτια, τότε καὶ ἡ ἄλλη θὰ χωρίζεται σὲ ἴσα κομμάτια.

"Αν δηλαδή ἔχουμε:

$$X'X \parallel \Psi'\Psi \parallel Z'Z \parallel \Phi'\Phi \quad \text{καὶ} \quad \alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta,$$

τότε (σχ. 3.19 δ), ἂν μετρήσωμε τὰ ἀντίστοιχα μήκη, πάνω στὴν ἄλλη ευθεία θὰ ἔχουμε καί:

$$AB = BG = \Gamma\Delta.$$



Σχ. 3·19 δ.

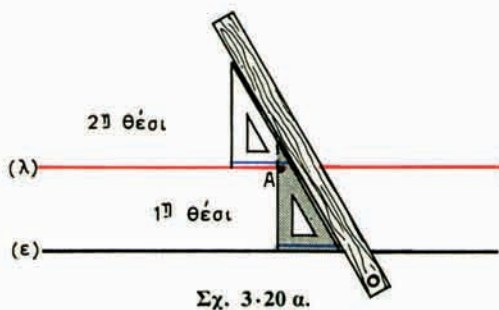
## 3·20 Μερικὲς κατασκευές.

## Πρόβλημα.

1ο. Ἐὰν δοῦμε, πῶς ἀπὸ ἑνὸς σημείου Α θὰ χαράξωμε μία εὐθεΐα λ παράλληλη σὲ μία ἄλλη εὐθεΐα ε.

Λύσι :

α) Τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε νὰ σκεπάζη τὸ σημεῖο Α καὶ ἡ μία κάθετη πλευρὰ του νὰ πέφτῃ ἐπάνω



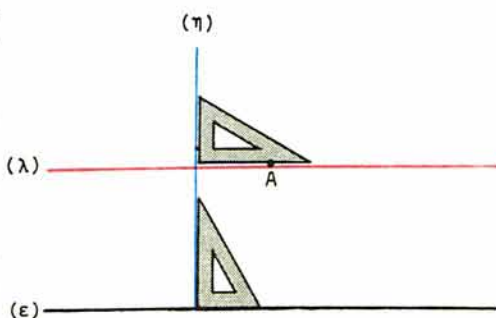
Σχ. 3·20 α.

στὴν εὐθεΐα ε, ὅπως στὸ σχῆμα 3·20 α. Μετὰ κρατᾶμε σταθερὸ τὸν χάρακά μας κάτω ἀπὸ τὴν μεγάλη πλευρὰ (ὑποτείνουσα) τοῦ τριγώνου, τὸ ὅποιο μετακινούμε πάνω στὸν χάρακα κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ κάθετη πλευρὰ νὰ πέσῃ πάνω στὸ Α.

Γράφωμε τὴν εὐθεΐα λ, ποὺ εἶναι καὶ ἡ ζητούμενη.

Ἐπειδὴ ὁμως ἡ λύσις αὐτὴ δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ, ἀφοῦ μπορεῖ νὰ συμβαίη τὸ τρίγωνό μας νὰ μὴ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο γιὰ νὰ σκεπάζῃ τὸ σημεῖο  $A$ , γι' αὐτὸ ἀκολουθοῦμε στὴν χάραξι τῆς  $\lambda$  καὶ τὴν παρακάτω μέθοδο.

β) Τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ μία ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς του νὰ πέσῃ ἐπάνω στὴν εὐθεῖα  $\epsilon$ , ποὺ μᾶς δίνεται (σχ. 3·20 β). Γράφομε μίαν εὐθεῖαν  $\eta$  κάθετην στὴν  $\epsilon$ . Μετὰ τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο κατὰ τὸν ἴδιο ὅπως προηγουμένως τρόπο, δηλαδὴ ἡ μία κάθετη πλευρὰ νὰ εὐρίσκεται πάνω στὴν εὐθεῖαν  $\eta$ , προσέχον-



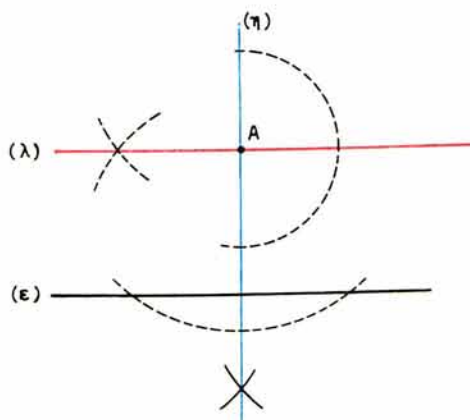
Σχ. 3·20 β.

τας ὁμως ἡ ἄλλη κάθετη πλευρὰ νὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ  $A$ . Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ ἐπιτύχωμε, ἂν χαράξωμε τὴν  $\eta$  νὰ περνᾷ κοντὰ ἀπὸ τὸ  $A$ .

Γράφομε τὴν εὐθεῖαν  $\lambda$ . Αὕτὴ εἶναι παράλληλη στὴν  $\epsilon$ , ἀφοῦ καὶ οἱ δύο εἶναι κάθετες στὴν  $\eta$ .

γ) Ἕνας ἄλλος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς (σχ. 3·20 γ):

Νὰ φέρωμε ἀπὸ τὸ  $A$  μίαν κάθετον στὴν  $\epsilon$ , ὅπως μάθαμε στὴν παράγραφο 3·15 (Πρόβλημα 2ο). Ἐστω ὅτι αὕτὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα  $\eta$ . Μετὰ νὰ ὑψώσωμε πάνω στὴν  $\eta$  καὶ στὸ σημεῖο  $A$  κάθετο, ὅπως μάθαμε στὴν παράγραφο 3·15 (Πρόβλημα 1ο).



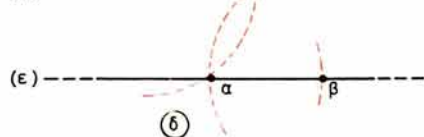
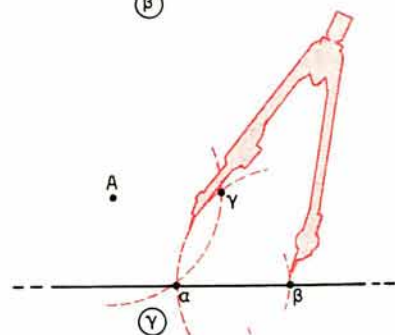
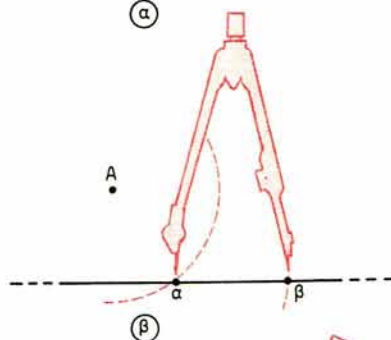
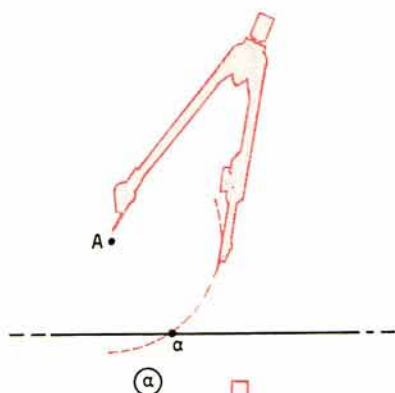
Σχ. 3·20 γ.

δ) Ἕνας τέταρτος τρό-

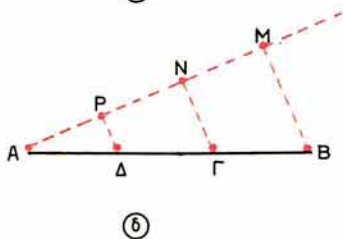
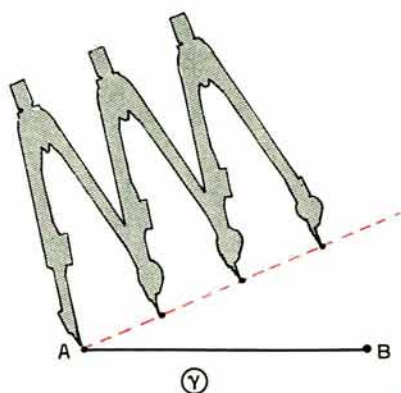
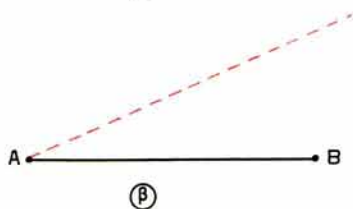
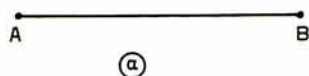
πος εἶναι αὐτὸς ποὺ φαίνεται στὸ σχῆμα 3·20 δ.

#### Πρόβλημα 2ο.

Ἄς ἐξετάσωμε πῶς θὰ διαιρέσωμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα  $AB$  σὲ ἴσα μέρη (π.χ. σὲ 3).



Σχ. 3·20 δ.



Σχ. 3·20 ε.

Λύσι :

Ἀπὸ τὴν μία ἄκρη Α τοῦ ΑΒ (σχ. 3·20 ε) γράφομε μία βοηθητική ἡμιευθεία καὶ πάνω σ' αὐτὴ μὲ τὴν βοήθεια τοῦ διαβήτη παίρνομε διαδοχικὰ 3 ἴσα κομμάτια ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ Α, τὰ ΑΡ, ΡΝ καὶ ΝΜ. Μετὰ χαράσσομε τὴν ΒΜ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀπὸ τὰ σημεῖα Ν καὶ Ρ φέρομε παράλληλες πρὸς τὴν ΒΜ, ποὺ κόβουν τὸ ΑΒ στὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Σύμφωνα μὲ τὴν τρίτη ιδιότητα τῆς παραγράφου 3·19 θὰ ἔχωμε:

$$ΑΔ = ΔΓ = ΓΒ.$$

### 3·21 Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 3·1 ἕως 3·16.

1. Γύρω ἀπὸ ἓνα σημεῖο Ο σχεδιάσετε τέσσερις ἡμιευθεῖες. Διαβάσετε τὶς τέσσερις διαδοχικὰς γωνίες καὶ μετρεῖτε τὶς μὲ τὸ μοιρογνῶμόνιο. Μετὰ νὰ εὐρεθοῦν τὰ συμπληρώματα τῶν ὀξείων καὶ τὰ παραπληρώματα τῶν ἀμβλείων γωνιῶν.

2. Πάνω σὲ μία περιφέρεια πάρετε τέσσερα διαδοχικὰ σημεῖα, Α, Β, Γ καὶ Δ, τέτοια, ὥστε  $ΑΓ = ΒΔ$ . Δείξτε κατόπιν ὅτι οἱ χορδὲς ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσες.

3. α) Σχεδιάσετε δύο συμπληρωματικὰς γωνίες μὲ χωριστὰς κορυφές. β) Σχεδιάσετε δύο παραπληρωματικὰς γωνίες μὲ χωριστὰς κορυφές. γ) Σχεδιάσετε δύο ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες.

4. Μὲ τὴν βοήθεια ἐνὸς μοιρογνῶμονίου σχεδιάσετε:

α) Τὶς γωνίες:  $60^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $95^\circ$ ,  $130^\circ$ . β) Τὰ τόξα:  $35^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $115^\circ$ ,  $225^\circ$  σὲ μία περιφέρεια ἀκτίνος 5 cm.

5. Χωρίσετε σὲ τέσσερα ἴσα μέρη: α) Ἐνα τόξο περιφερείας. β) Μία γωνία.

6. Γράψτε δύο περιφέρειες, ποὺ νὰ ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο καὶ διαφορετικὰς ἀκτίνες. Μετὰ χαράξτε μία χορδὴ στὴν ἐξωτερικὴ περιφέρεια, ποὺ νὰ ἐφάπτεται στὴν μέσα περιφέρεια.

7. α) Νὰ γράψτε μία περιφέρεια καὶ νὰ τὴν χωρίσετε σὲ 8 ἴσα μέρη. β) Νὰ εὐρεθῇ τὸ μῆκος (περίμετρος) μιᾶς περιφερείας, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 15 cm. γ) Τί μῆκος τόξου ἀντιστοιχεῖ σὲ ἐπίκεντρη γωνία  $60^\circ$ , περιφερείας ἀκτίνος 10 cm; δ) Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου μιᾶς περιφερείας μὲ μῆκος περιμέτρου 15,70 cm;

(94,2 cm, 10,46 cm, 5 cm)

8. Θέλομε νὰ στρατζάρωμε λαμαρίνες, γιὰ νὰ φτιάξωμε σωλῆνες διαμέτρου 35 mm. Ποιὸ θὰ εἶναι τὸ πλάτος τοῦ φύλλου τῆς λαμαρίνας, ποὺ θὰ χρησιμοποιή-



σωμε, ἂν ἡ λαμαρίνα ὅταν γίνεταί σωλὴν κολλιέται σόκορα\* καὶ ἔχει φύρα στὴν πλευρὰ πού κολλιέται ἀπὸ τὸ λιμάρισμα 0,1 mm; (110 mm)

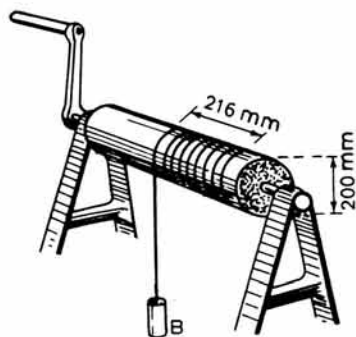
9. Τροχὸς αὐτοκινήτου διάνυσε 62,80 m κάνοντας 100 στροφές. Ζητοῦμε τὴν ἀκτίνα του. (0,1 m)

10. Τροχὸς διαμέτρου 5 dm διανύει μῆκος 94,2 m. Ζητοῦμε τὸν ἀριθμὸ στροφῶν τοῦ τροχοῦ. (60 στροφές)

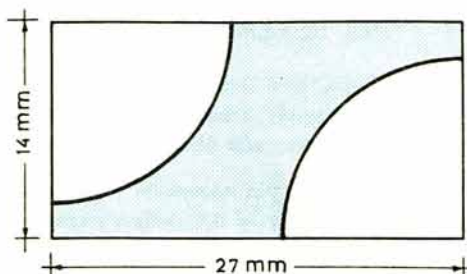
11. Στὴν βάσι λέβητος βάζομε περιφερειακῶς καὶ σὲ διάμετρο 2 m συνολικὰ 100 καρφιὰ. Κάθε πόσα mm μῆκους τόξου βάλामε τὰ καρφιὰ; (62,8 mm)

12. Τὸ τύμπανο ἀνυψωτικοῦ μηχανήματος ἔχει διάμετρο 200 mm. Ἄν τὸ συρματόσχοινο διαμέτρου 8 mm περιτυλιχθῇ, μὲ τὰ τυλίγματα ἐν ἐπαφῇ, σὲ μῆκος 216 mm, πόσο ἔχει ἀνυψωθῇ τὸ βάρος B (σχ. 3·21 α);

(176,34,24 mm  $\approx$  17,6 m)



Σχ. 3·21 α.



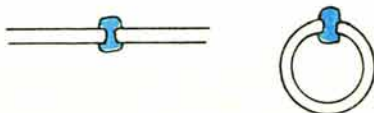
Σχ. 3·21 β.

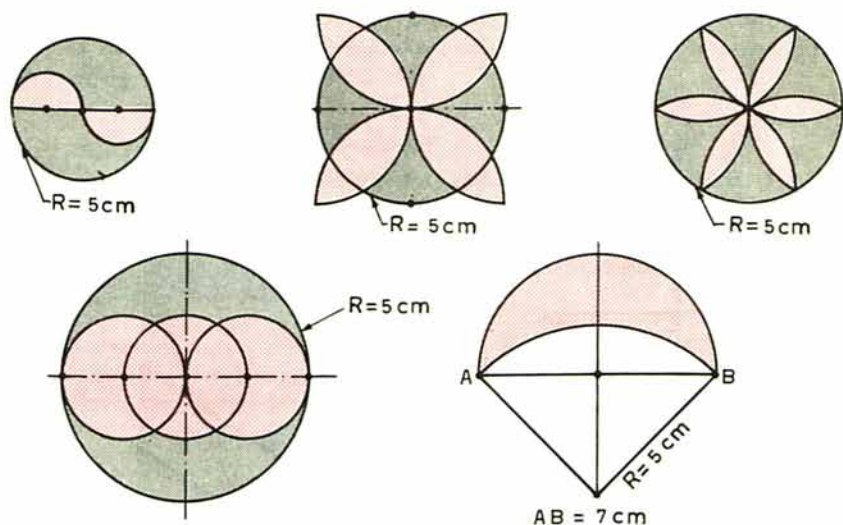
13. Θέλομε νὰ σχεδιάσωμε ἓνα πλακάκι τοίχου, ὅπως στὸ σχῆμα 3·21 β, μὲ τὴν διαφορὰ τὰ δύο τόξα, πού ἔχουν κέντρα δύο ἀπέναντι κορυφές, νὰ ἐφάπτονται στὸ εὐθύγραμμο τμήμα, πού ἐνώνει τίς δύο ἄλλες ἀπέναντι κορυφές.

14. Σχεδιάσετε τὰ σχήματα 3·21 γ, ὅταν ἡ ἀκτίς τῆς περιφέρειας εἶναι 5 cm.

15. Τὸ κουτί, πού βάζομε στὸν τοῖχο γιὰ νὰ τοποθετήσωμε ἓνα διακόπτη ἢ μία πρίζα, ἔχει διάμετρο περίπου 5 cm, ἐνῶ τὸ πλαστικὸ κάλυμμα εἶναι τετράγωνο μὲ πλάτος καὶ μῆκος 7,5 cm. Σὲ πόση ἀπόστασι θὰ βάλετε τὰ κουτιά (κέντρο μὲ κέντρο), ὥστε μετὰ τὴν τοποθέτησι τοῦ καλύμματος, οἱ διακόπτες νὰ εἶναι ὁ ἓνας κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ τὰ καλύμματα νὰ ἐφάπτονται; (7,5 cm)

\* Κόλλησι σόκορα σημαίνει χεῖλος μὲ χεῖλος χωρὶς ἐπικάλυψι.

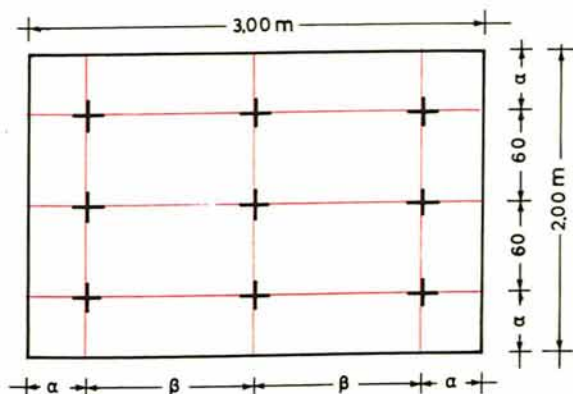




Σχ. 3.21 γ.

16. Σε μία ξύλινη ψευδοροφή, όπως στο σχήμα 3.21 δ, πρόκειται να τοποθετήσω 8 χωνευτά φώτα. Μπορείτε να εντοπίσετε τις θέσεις, όπου θα ανοίξω τις τρύπες, αν όλες οι αποστάσεις από τους τοίχους είναι ίσες μεταξύ τους;

( $a = 40 \text{ cm}$ ,  $\beta = 1,10 \text{ m}$ )



Σχ. 3.21 δ.

17. Σχεδιάσετε την σιδερένια πόρτα του σχήματος 3.21 ε με κλίμακα 1 : 10 και υπολογίστε πόσο μήκος λάμας θέλετε για να την φτιάξετε, όταν τα πλάγια

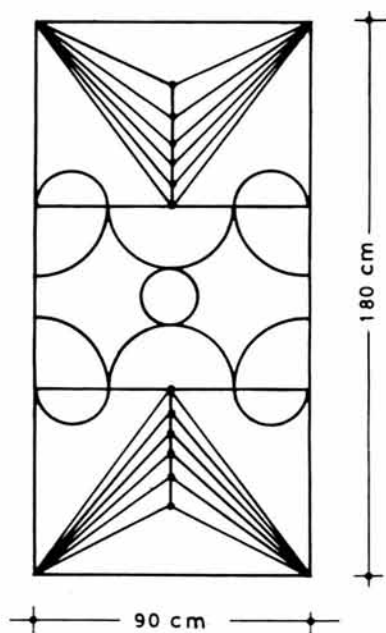
εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν μήκος 50 cm, 55 cm, 60 cm, 65 cm, 70 cm καὶ 75 cm. Ἡ πόρτα μετὰ τίς δύο ὀριζόντιες λάμες εἶναι χωρισμένη σὲ τρία ἴσα κομμάτια.

(περίπου 2771 cm ἢ 27,71 m)

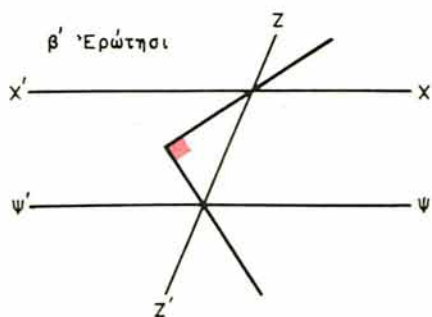
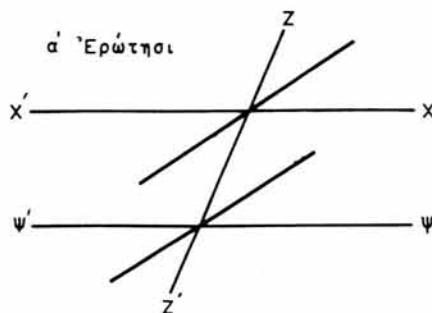
Ἀπὸ τίς παραγράφους 3·17 ἕως 3·20.

1. Σὲ μία σελίδα τοῦ τετραδίου σας, καὶ σὲ ἴσες ἀποστάσεις νὰ χαράξετε εὐθεῖες παράλληλες μεταξύ τους, κάθετες στὴν χαράκωσι τοῦ τετραδίου.

2. Πάρετε δύο εὐθεῖες παράλληλες  $X'X$  καὶ  $\Psi'\Psi$ , ποὺ νὰ κόβονται ἀπὸ μία τρίτη  $Z'Z$ , ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 3·21 στ.



Σχ. 3·21 ε.



Σχ. 3·21 στ.

α) Νὰ διχοτομήσετε τίς ὀξείες (ἢ τίς ἀμβλείες) γωνίες καὶ νὰ δείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τους εἶναι παράλληλες. β) Νὰ διχοτομήσετε μία ὀξεία καὶ μία ἀμβλεία γωνία καὶ νὰ δείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τους εἶναι κάθετες.

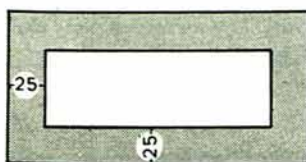
3. Σὲ ἓνα κομμάτι λαμαρίνας 200 mm  $\times$  100 mm πρόκειται νὰ ἀνοίξωμε μία τρύπα, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 3·21 ζ. Σχεδιάσετε τὸ σχῆμα.

4. Νὰ χωρισθῇ τὸ φύλλο λαμαρίνας τοῦ σχήματος 3·21 η σὲ 5 ἴσα κομμάτια.

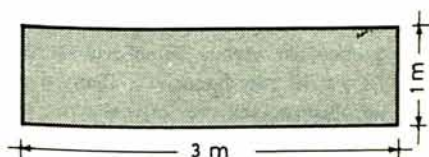
5. Σχεδιάσετε (σχ. 3·21 θ) μία σκάλα μετὰ πλάτος 40 cm καὶ 7 σκαλοπάτια, μαζί με τὸ κεφαλόσκαλο. Τὰ σκαλοπάτια ἀπέχουν μεταξύ τους 15 cm καὶ τὸ κε-

φαλόσκαλο από το επάνω μέρος της σκάλας 25 cm. Ποιό είναι το ύψος της σκάλας; Πόσο είναι το ύψος των πλαϊνών ξύλων; (1,33 m, 1,10 m)

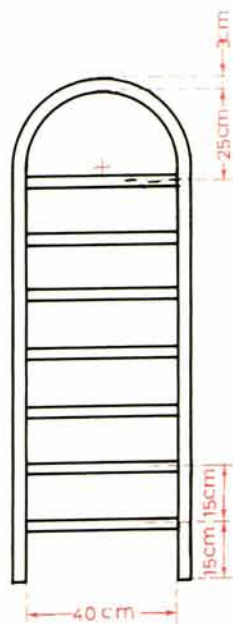
6. Από ένα φύλλο λαμαρίνας  $1,50 \text{ m} \times 2,25 \text{ m}$  πόσα κομμάτια  $25 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  μπορούμε να βγάλουμε; (90 τεμ.)



Σχ. 3.21 ζ.

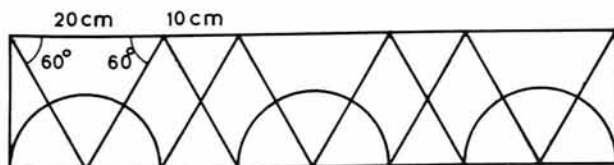


Σχ. 3.21 η.

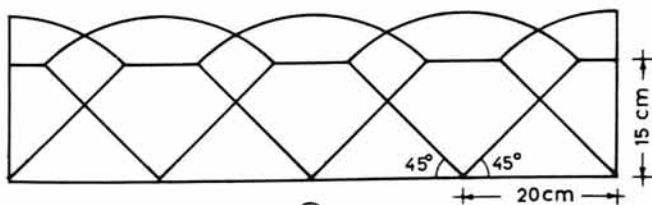


Σχ. 3.21 θ.

7. Θέλουμε να φτιάξουμε τα παρακάτω κιγκλιδώματα (σχ. 3.21 ι). Σχεδιάσετέ τα.



α

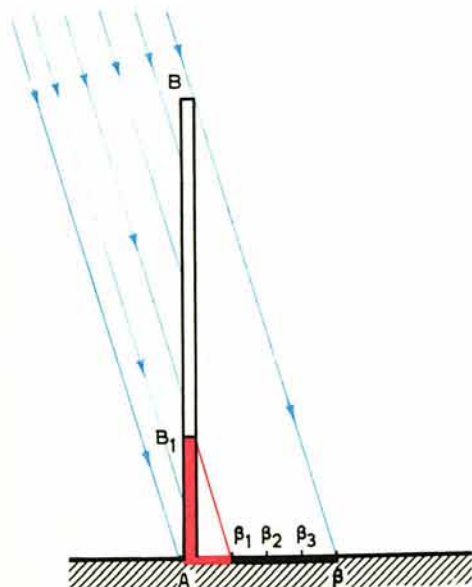


β

Σχ. 3.21 ι.

8. Για νά μετρήσωμε τὸ ὕψος μιᾶς κολώνας AB (σχ. 3·21 α) μετροῦμε τὴν σκιά της AB καὶ τὴν εὐρίσκομε 80 cm. Κατόπιν τὴν σκιά αὐτὴ τὴν χωρίζομε σὲ 4 ἴσα κομμάτια μήκους 20 cm καὶ τοποθετώντας δίπλα στὴν κολώνα διαφόρους ράβδους προσπαθοῦμε νά πετύχωμε ἐκείνη, ποὺ ἡ σκιά της ἔχει μήκος ἴσο μὲ τὸ πρῶτο κομμάτι AB<sub>1</sub> τῆς σκιάς AB τῆς κολώνας. Τὴν μετροῦμε καὶ εὐρίσκομε ὅτι ἔχει ὕψος AB<sub>1</sub> = 1,5 m. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος τῆς κολώνας;

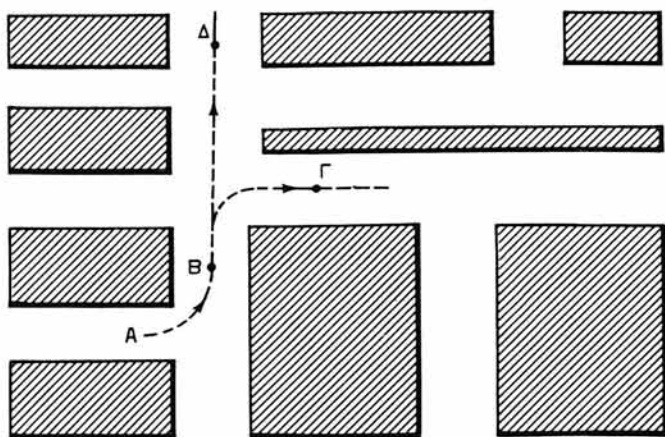
(6,0 m)



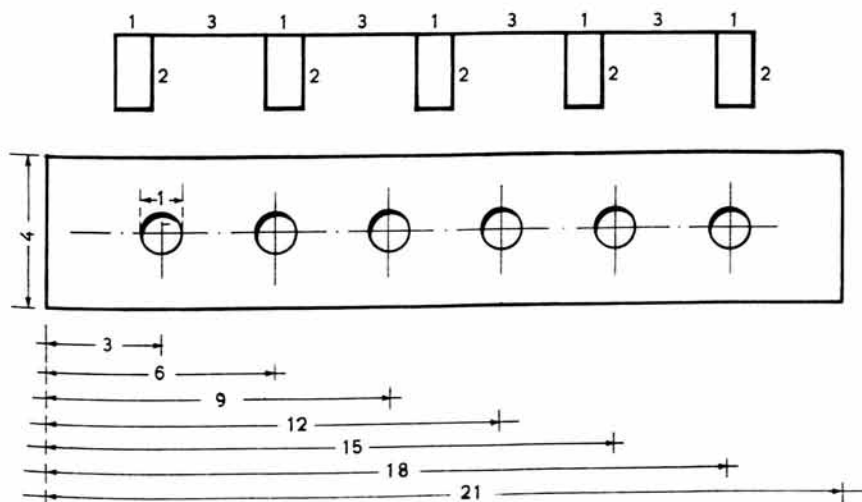
Σχ. 3·21 α.

9. Σχεδιάσετε τὸ παρακάτω σχέδιο σὲ ἓνα φύλλο χαρτί καὶ χάραξτε τὶς διαδρομὲς BΓ καὶ AΒΔ δύο αὐτοκινήτων (σχ. 3·21 β). Οἱ στροφὲς θὰ γίνουιν σὲ τόξα μὲ κέντρα τὶς γωνίες τῶν δρόμων. (Ὅλοι εἶναι μονόδρομοι καὶ τὰ αὐτοκίνητα κινουῦνται στὴν μέση κάθε δρόμου).

10. Χρησιμοποιώντας χάρακα καὶ διαβήτη, σχεδιάσετε τὰ σχέδια τοῦ σχήματος 3·21 γ.



Σχ. 3·21 β.



Σχ. 3.21 τυ.

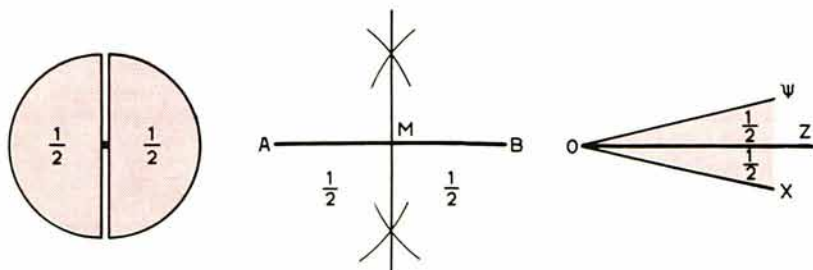


## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4

### Τ Α Κ Λ Α Σ Μ Α Τ Α

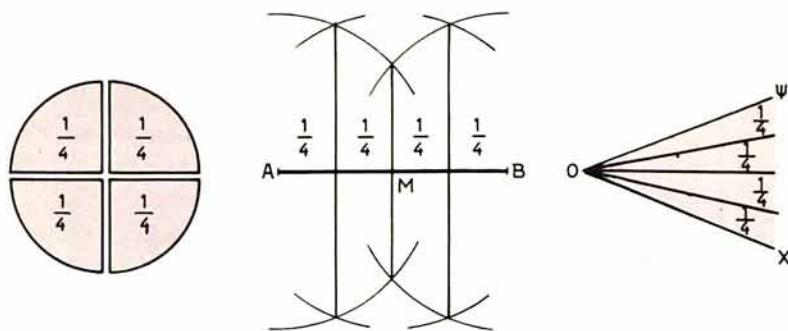
#### 4 · 1 Ἡ κλασματική μονάς.

Ὅπως εἶδαμε, μία διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρεια, ἄρα καὶ τὸν κύκλο, σὲ δύο μισὰ κομμάτια. Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ μὲ τὴν μεσοκάθετο σὲ ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα  $AB$  ἢ τὴν διχοτόμο  $OZ$  σὲ μία γωνία  $XO\Psi$  (σχ. 4 · 1 α).



Σχ. 4 · 1 α.

Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο τὰ ἴδια σχήματα μποροῦν νὰ *διαιρεθοῦν* σὲ τέσσερα ἴσα κομμάτια (σχ. 4 · 1 β). Τότε τὸ καθένα ἀπὸ τὰ κομ-



Σχ. 4 · 1 β.

μάτια αὐτὰ εἶναι μέρος ἢ, ὅπως λέγεται, *κλάσμα* τοῦ κύκλου, τοῦ τμήματος  $AB$  ἢ τῆς γωνίας  $XO\Psi$ .

Κάθε κλάσμα εκφράζεται με δύο ἀριθμούς, πού γράφονται ὁ ἓνας πάνω καὶ ὁ ἄλλος κάτω ἀπὸ μία μικρὴ γραμμὴ (—), πού τοὺς χωρίζει, καὶ πού λέγεται *γραμμὴ κλάσματος*. Ὁ ἀριθμός, πού γράφεται κάτω ἀπὸ τὴν γραμμὴ, φανερώνει σὲ πόσα κομμάτια διαιρέσαμε (ἢ χωρίσαμε) τὸ «ὁλόκληρο», δηλαδὴ τὴν *ἀκεραία μονάδα*. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς λέγεται *παρονομαστής*.

Γιὰ τὸ κάθε κομμάτι τῶν προηγουμένων ἀκεραίων μονάδων ἔχουμε τὰ κλάσματα:

$$\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{4}$$

πού τὸ καθένα τους εἶναι καὶ μία καινούργια μονάδα, πού τὴν λέμε *κλασματικὴ μονάδα*. Τέτοιες κλασματικὲς μονάδες μπορούμε νὰ ἔχουμε ὅσες θέλουμε, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάζουμε κάθε φορὰ στὸ κλάσμα τὸν παρονομαστή του, δηλαδὴ νὰ διαιροῦμε τὴν ἀκεραία μονάδα σὲ διαφορετικὰ μέρη.

\*Εἰς παραγόμε τις παρακάτω κλασματικὲς μονάδες:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{38}, \quad \frac{1}{53} \quad \text{κ.λπ.}$$

Οἱ κλασματικὲς αὐτὲς μονάδες εἶναι *διαφορετικὲς μεταξύ τους*, ἀφοῦ κάθε μία προκύπτει ἀπὸ διαιρέσει τῆς ἀκεραίας μονάδος σὲ διαφορετικὸ ἀριθμὸ μερῶν.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα πὼς μία κλασματικὴ μονάς, ὅπως εἶναι γραμμένη, φανερώνει *διαιρέσει* τοῦ ἀριθμητῆ διὰ τοῦ παρονομαστή.

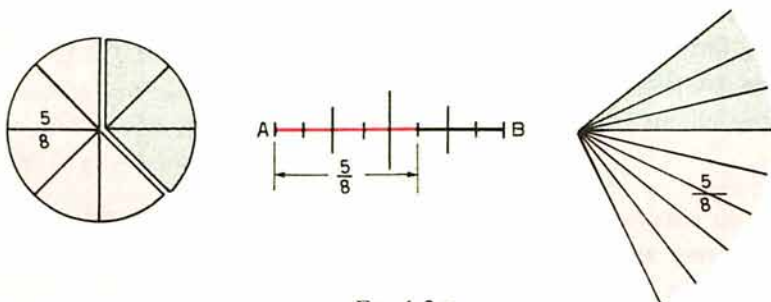
#### 4 · 2 Τὸ κλάσμα.

\*Ἀς πάρουμε ἓνα κύκλο καὶ ἄς τὸν διαιρέσωμε σὲ 8 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ αὐτὰ ἄς πάρουμε τὰ 5 (σχ. 4 · 2 α). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι παίρνομε πέντε φορές τὴν κλασματικὴ μονάδα  $\frac{1}{8}$ .

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ σχηματίσωμε ἓνα κλάσμα, στὸ ὁποῖο πάνω ἀπὸ τὴν γραμμὴ ἀντὶ τοῦ 1 νὰ βάλωμε τὸν ἀριθμὸ 5, πού φανερώνει πόσα κομμάτια πήραμε ἀπὸ τὰ 8, στὰ ὁποῖα διαιρέσαμε τὴν ἀκεραία

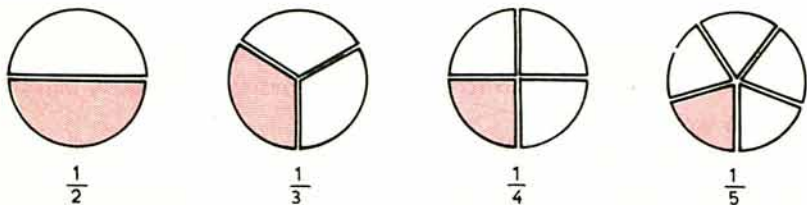
μονάδα. Θὰ ἔχουμε δηλαδή τὸ κλάσμα  $\frac{5}{8}$ . Ὁ ἀριθμὸς 5 ὀνομάζεται *ἀριθμητής*.

Ὁ ἀριθμητής καὶ ὁ παρονομαστής μαζί ὀνομάζονται *ὅροι τοῦ κλάσματος*.



Σχ. 4.2 α.

Ἀπὸ ἐδῶ βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι κάθε κλασματική μονὰς εἶναι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸ 1. Στὸ σχῆμα 4.2 β δίδεται σχηματικὴ ἀπεικόνισι τῶν κλασματικῶν μονάδων  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  καὶ  $\frac{1}{5}$ .



Σχ. 4.2 β.

Ἄν θυμηθοῦμε πῶς σχηματίσαμε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι *κάθε δεκαδικὸς ἀριθμὸς γράφεται σὰν κλάσμα*, πού, ἐπειδὴ ἔχει παρονομαστή ἓνα ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς 10, 100, 1000 κ.λπ., λέγεται *δεκαδικὸ κλάσμα*.

$$\text{Ἔτσι ἔχουμε: } 0,3 = \frac{3}{10}, \quad 0,7 = \frac{7}{10}, \quad 0,05 = \frac{5}{100},$$

$$0,004 = \frac{4}{1000}, \quad 0,305 = \frac{305}{1000} \quad \text{κ.λπ.}$$

$$\text{Ἐπίσης ἔχομε: } 1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m}, \quad 1 \text{ cm} = \frac{1}{10} \text{ dm} = \frac{1}{100} \text{ m},$$

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{10} \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ dm} = \frac{1}{1000} \text{ m}.$$

#### 4.3 Μερικές περιπτώσεις.

**Ἑρώτησι 1η.** Τί φανερώνει ἓνα κλάσμα, ποῦ ἔχει ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τὸν ἴδιο ἀριθμό;

Θέλομε δηλαδὴ νὰ ἐξετάσωμε τί φανερώνουν τὰ κλάσματα:

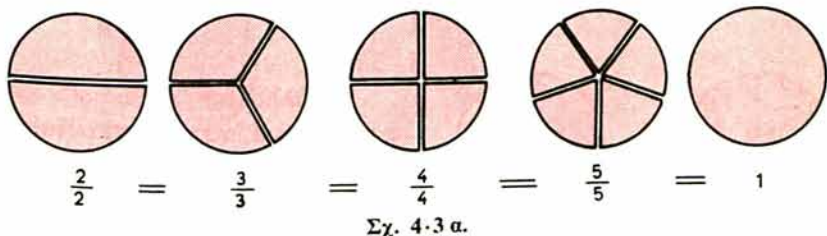
$$\frac{3}{3}, \quad \frac{5}{5}, \quad \frac{8}{8}, \quad \frac{37}{37}, \quad \frac{63}{63} \quad \text{κ.λπ.}$$

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἶπαμε στὴν ἀρχὴ τῆς παραγράφου 4.2, τὰ κλάσματα αὐτὰ φανερώνουν ὅτι κάθε ὁλόκληρο ἢ ἀκέραιο κομμάτι (δηλαδὴ κάθε ἀκεραία μονάς) διαιρέθηκε σὲ 3, 5, 8, 37, 63 κ.λπ. κομμάτια, ἀπὸ τὰ ὁποῖα πήραμε ἀντιστοίχως τὰ 3, 5, 8, 37, 63 κ.λπ. κομμάτια, δηλαδὴ τὰ πήραμε ὅλα. Ἄρα:

*Κάθε κλάσμα\* μὲ ἴδιους ὅρους (δηλαδὴ ἴδιο ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ) ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα,*

δηλαδὴ (σχ. 4.3α).

$$\frac{2}{2} = 1, \quad \frac{3}{3} = 1, \quad \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{5}{5} = 1, \quad \frac{8}{8} = 1, \quad \frac{37}{37} = 1, \quad \frac{63}{63} = 1 \quad \text{κ.λπ.}$$



**Ἑρώτησι 2α.** Τί φανερώνει ἓνα κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸ μηδέν;

\* Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσι τῶν κλασμάτων, ποῦ ἔχουν παρονομαστὴ μηδέν, γιὰ τὰ ὁποῖα δὲν θὰ μιλήσουμε.

Ἀπὸ ὅσα εἶπαμε ἀμέσως παραπάνω, τὰ κλάσματα  $\frac{0}{3}$ ,  $\frac{0}{5}$ ,  $\frac{0}{8}$ ,  $\frac{0}{37}$ ,  $\frac{0}{63}$  κ.λπ. φανερώνουν ὅτι ἀπὸ τὰ κομμάτια ποῦ διαιρέθηκε ἡ **ἀκεραία μονάδα**, δὲν παίρνομε κανένα, δηλαδή παίρνομε μηδέν κομμάτι. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι:

$$\frac{0}{3} = 0, \quad \frac{0}{5} = 0, \quad \frac{0}{8} = 0, \quad \frac{0}{37} = 0, \quad \frac{0}{63} = 0 \quad \text{κ.λπ.}$$

Ὡστε:

*Κάθε κλάσμα, ποῦ ἔχει ἀριθμητὴ τὸ μηδέν, ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν.*

**Ἑρώτησι 3η.** Τί φανερώνει ἓνα κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ μεγάλυτερο ἀπὸ τὸν παρονομαστή;

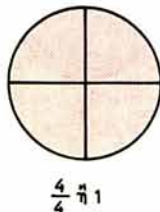
Θέλομε δηλαδή νὰ δοῦμε τί ἐκφράζει ἓνα κλάσμα, ὅπως τὸ  $\frac{7}{4}$ .

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἶπαμε πιὸ πάνω:

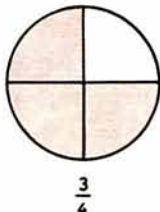
$$\frac{7}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ἀλλὰ } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ (ἡ μονάς),}$$

$$\text{ὁπότε καὶ } \frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{4} \text{ (σχ. 4·3 β).}$$



$$\frac{3}{4} \approx 1$$



$$\frac{1}{4}$$

Σχ. 4·3 β.

Ἡ ἀλλοιῶς: Ὅς διαιρέσωμε ἓνα κύκλο σὲ 4 ἴσα κομμάτια. Παίρνοντας καὶ τὰ 4 κομμάτια, βλέπομε πὼς μᾶς χρειάζονται ἀκόμη τρία γιὰ νὰ μπορέσωμε νὰ πάρωμε συνολικὰ ὅσα μᾶς λείει ὁ ἀριθμητής, δηλαδή ὁ 7. Γι' αὐτὸ θὰ χρειασθῇ νὰ πάρωμε **ἀκόμη ἓνα ὁλόκληρο**

**κύκλο**, νὰ τὸν χωρίσωμε σὲ τέσσερα ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ αὐτὰ νὰ πάρωμε

ρωμε τὰ τρία. Καὶ ἐπειδὴ κάθε κύκλος εἶναι καὶ μία ἀκεραία μονάς, καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα, ὅτι γιὰ νὰ σχηματίσουμε τὸ κλάσμα  $\frac{7}{4}$  χρειαστήκαμε 1 ἀκεραία μονάς καὶ  $\frac{3}{4}$  ἀπὸ μία ἄλλη.

$$\text{Δηλαδή: } \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} \quad \text{ἢ} \quad \frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4}$$

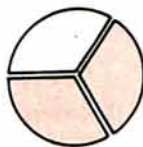
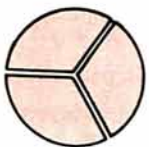
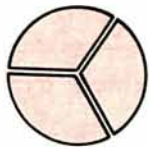
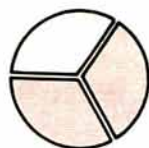
Ὁ νέος ἀριθμός, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιο καὶ ἀπὸ κλασματικό κομμάτι, ὀνομάζεται **μικτός**.

Ἄν τώρα ἐκτελέσουμε διαίρεσι τοῦ 7 διὰ τοῦ 4, εὐρίσκομε πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 3, πράγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἓνα κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν παρονομαστή εἶναι ἓνας μικτὸς ἀριθμός, ποὺ ἔχει ἀκέραιο μέρος τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ διὰ τοῦ παρονομαστή καὶ κλασματικὸ μέρος τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ὡς ἀριθμητὴ καὶ τὸν διαιρέτη ὡς παρονομαστή.

\*Ἐτσι ἔχομε γιὰ τὸν μικτὸ  $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$  (σχ. 4.3 γ).

\*Ἄλλοι μικτοί:

$$\frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}, \quad \frac{17}{5} = 3 \frac{2}{5}, \quad \frac{19}{8} = 2 \frac{3}{8} \text{ κ.λπ.}$$



$$\frac{8}{3}$$

=

$$2$$

+

$$\frac{2}{3}$$

Σχ. 4.3 γ.



*Συμπεράσματα.*

Ἀπὸ αὐτὰ ποὺ εἶπαμε μέχρι τώρα, βγαίνουν τὰ παρακάτω συμπεράσματα:

α) Κάθε κλάσμα φανερώνει διαίρεσι τοῦ ἀριθμητῆ διὰ τοῦ παρονομαστῆ.

β) Κάθε διαίρεσι μπορούμε νὰ τὴν γράψωμε σὰν κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸν διαιρετέο καὶ παρονομαστὴ τὸν διαιρέτη.

$$\begin{array}{ll} \text{Π.χ.} & 8 : 5 \text{ γράφεται } \frac{8}{5} \\ & 4 : 9 \quad \gg \quad \frac{4}{9} \quad \text{κ.λπ.} \end{array}$$

γ) Κάθε κλάσμα μπορεῖ νὰ γράφῃ σὰν δεκαδικὸς \* ἀριθμὸς, ἀρκεῖ νὰ κάνωμε τὴν διαίρεσι τοῦ ἀριθμητῆ διὰ τοῦ παρονομαστῆ.

$$\begin{array}{ll} \text{Π.χ.} & \frac{4}{5} = 0,8, \quad \text{γιατὶ} \quad 4,0 \overline{) 5} \\ & \frac{1}{4} = 0,25, \quad \text{γιατὶ} \quad 1,0 : 4 = 0,25. \end{array}$$

**Ἑρώτησι 4η.** Τί φανερώνει ἓνα κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὴν μονάδα;

Ἐστω τὸ κλάσμα  $\frac{5}{1}$ . Σύμφωνα μὲ ὅσα εἶπαμε στὴν ἐρώτησι 3, θὰ πρέπει νὰ κάνωμε τὴν διαίρεσι τοῦ 5 διὰ τοῦ 1. Ἐχομε λοιπὸν πηλίκον 5, ὑπόλοιπο μηδέν, ἄρα:

$$\frac{5}{1} = 5 \frac{0}{1} \quad \eta \quad \frac{5}{1} = 5.$$

\* Δὲν ἐπεκτείνωμαστε στὶς περιπτώσεις διαιρέσεων, ποὺ δὲν τελειώνουν ποτέ, ὅπως π.χ.  $\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$  κ.λπ., ποὺ λέγονται *περιοδικοὶ ἀριθμοί*.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πώς:

*Κάθε άκέραιος αριθμός μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα με παρονομαστή την μονάδα*

ή ότι:

*Κάθε κλάσμα με παρονομαστή την μονάδα ισούται με άκέραιο αριθμό, ίσο με τον αριθμητή του κλάσματος.*

**Εφαρμογές.**

α) Να γραφεί το κλάσμα  $\frac{7}{4}$  σαν δεκαδικός αριθμός.

Κάνουμε την διαίρεση μέχρι να βρούμε υπόλοιπο μηδέν. Έτσι έχουμε:  $\frac{7}{4} = 1,75$ .

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και με άλλα κλάσματα, όπως:

$$\frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{1}{5} = 0,2, \quad \frac{8}{5} = 1,6 \quad \text{κ.λπ.}$$

β) Να γραφεί υπό μορφή μικτού αριθμού το κλάσμα  $\frac{26}{7}$ .

Κάνουμε την διαίρεση και εύρισκουμε πηλίκον 3 και υπόλοιπο 5.

$$\text{Έπομένως: } \frac{26}{7} = 3 \frac{5}{7}.$$

Έδω πρέπει να έχουμε υπ' όψιν μας ότι ή διαίρεση πρέπει να σταματά, μόλις εύρεθή και το τελευταίο άκέραιο ψηφίο του πηλίκου.

Γι' αυτό, σ' αυτές τις περιπτώσεις, πολλές φορές, λέμε:

*Να βγούν οι άκέραιες μονάδες από το κλάσμα.*

Αν εργασθούμε κατά τον ίδιο τρόπο, εύρισκουμε:

$$\frac{189}{5} = 37 \frac{4}{5}, \quad \frac{48}{7} = 6 \frac{6}{7} \quad \text{κ.λπ.}$$

γ) Νὰ ἐκφρασθοῦν σὲ κλάσμα ὀρθῆς γωνίας οἱ γωνίες  $17^\circ$  καὶ  $143^\circ$ .

Ἀφοῦ ἡ ὀρθή γωνία ἔχει  $90^\circ$ , σημαίνει ὅτι γιὰ τὴν γωνία τῶν  $17^\circ$  θὰ διαιρέσωμε τὴν ὀρθή γωνία σὲ 90 κομμάτια καὶ θὰ πάρωμε τὰ 17. Ἐπομένως ἔχομε  $\frac{17}{90}$ .

Γιὰ τὴν γωνία τῶν  $143^\circ$ , θὰ θυμηθοῦμε ὅσα εἶπαμε στὴν παραπάνω περίπτωση τῆς ἐρωτήσεως 3, καὶ θὰ γράψωμε:

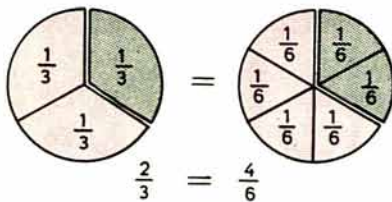
$$143^\circ = \frac{143}{90} = 1 \frac{53}{90}.$$

#### 4.4 Ἀπλοποίηση κλασμάτων.

Παίρνομε πάλι ἓνα κύκλο καὶ τὸν διαιροῦμε σὲ τρία κομμάτια.

Ἄν πάρωμε τὰ 2 ἀπὸ αὐτά, σχηματίζομε τὸ κλάσμα  $\frac{2}{3}$ . Χωρίζομε

κατόπιν τὸ κάθε κομμάτι σὲ δύο ἴσα κομμάτια ἔτσι, ὥστε ὁ κύκλος νὰ χωρισθῇ τελικὰ σὲ 6 ἴσα κομμάτια. Βλέπομε ὅτι παίρνοντας τὰ 4, ἔχομε τὸ κλάσμα  $\frac{4}{6}$ .



Σχ. 4.4 α.

Ἐπίσης εἶναι:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \eta \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}.$$

$$\text{Καὶ ἀκόμη: } \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6} \quad \eta \quad \frac{4}{6} = \frac{4 : 2}{6 : 2} = \frac{2}{3},$$

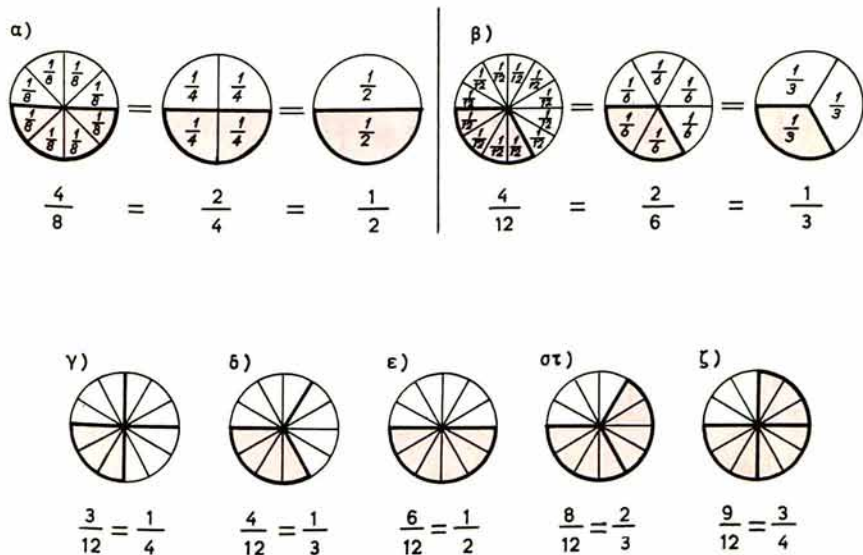
πού σημαίνει ὅτι:

*Ἄν πολλαπλασιάσωμε ἢ διαιρέσωμε τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ, τὸ κλάσμα πού προκύπτει, εἶναι ἴσο μὲ τὸ πρῶτο.*

Θὰ πρέπει ὁμως νὰ ἔχομε ὑπ' ὄψιν μας ὅτι ἡ διαίρεσι τῶν ὁρῶν τοῦ κλάσματος πρέπει νὰ γίνεται μὲ ἀριθμὸ, πού διαιρεῖ *τέλεια* καὶ τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστή.

Αυτή η ιδιότητα της διαιρέσεως τῶν ὁρῶν ἐνὸς κλάσματος μετὸν ἴδιο ἀριθμό, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ *ἀπλοποιῶμε* τὸ κλάσμα, νὰ μικραίνουμε δηλαδὴ τοὺς ὁρούς του.

Στὸ σχῆμα 4.4 β δίνονται ἀπλὲς περιπτώσεις ἀπλοποιήσεως κλασμάτων.



Σχ. 4.4 β.

\*Αριθμητικές εφαρμογές.

Νὰ ἀπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

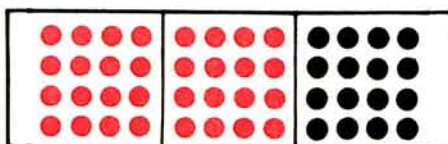
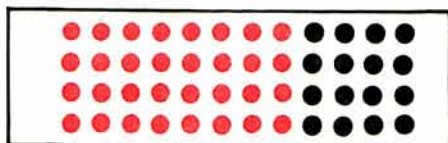
α)  $\frac{28}{49} = \frac{4 \times 7}{7 \times 7} = \frac{4}{7}$ .

β)  $\frac{45}{180} = \frac{9 \times 5}{36 \times 5} = \frac{9}{36} = \frac{1 \times 9}{4 \times 9} = \frac{1}{4}$ .

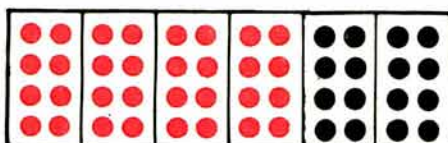
γ)  $\frac{300}{1620} = \frac{30 \times 10}{162 \times 10} = \frac{30}{162} = \frac{10 \times 3}{54 \times 3} = \frac{10}{54} = \frac{5 \times 2}{27 \times 2} = \frac{5}{27}$ .

Τὰ κλάσματα  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{5}{27}$  δὲν ἀπλοποιοῦνται ἄλλο.

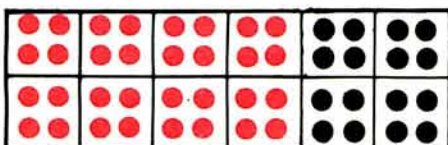
*Τὰ κλάσματα πὸν δὲν ἀπλοποιοῦνται ἄλλο, λέγονται ἀνάγωγα.*



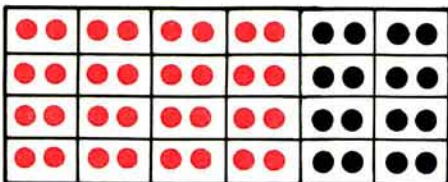
$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$$



$$\frac{6}{8} = \frac{4 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$$



$$\frac{16}{24} = \frac{8 \times 2}{12 \times 2} = \frac{4 \times 4}{6 \times 4} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24} = \dots\dots\dots$$

Σχ. 4.4 γ.

**Πρόβλημα.**

Νὰ εὑρεθοῦν κλάσματα ἴσα μὲ τὸ  $\frac{25}{75}$ .



Λύσι :

α) 'Απλοποιώντας:

$$\frac{25}{75} = \frac{5 \times 5}{15 \times 5} = \frac{5}{15} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{1}{3}.$$

β) Πολλαπλασιάζοντας τούς όρους:

$$\frac{25}{75} = \frac{25 \times 2}{75 \times 2} = \frac{50}{150}, \quad \frac{25}{75} = \frac{25 \times 3}{75 \times 3} = \frac{75}{225} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Στο σχήμα 4.4 γ φαίνεται καθαρά ή ισότης κλασμάτων, που προκύπτουν από ένα βασικό, με πολλαπλασιασμό τών όρων του με τόν ίδιο αριθμό.

4.5 Όμώνυμα και έτερόνυμα κλάσματα. Άνισότης κλασμάτων.

Πρόβλημα.

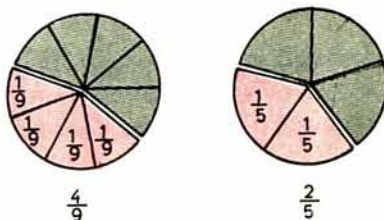
Έχομε δύο ίσα κυλινδρικά δοχεία έντελώς γεμάτα βενζίνη. Από τò πρώτο χρησιμοποιούμε τὰ  $\frac{4}{9}$  του περιεχομένου του καί από τò δεύτερο τὰ  $\frac{2}{5}$ . Από ποιό δοχείο πήραμε τήν περισσότερη βενζίνη;

Λύσι :

Γνωρίζοντας τί φανερώνει κάθε κλάσμα, βλέπομε ότι τò πρώτο δοχείο χωρίστηκε σέ 9 κομμάτια ίσα μεταξύ τους, ένω τò δεύτερο σέ 5 ίσα κομμάτια. Από τò καθένα χρησιμοποιήθηκε διαφορετικός αριθμός κομματιών, πράγμα που μās έμποδίζει νά δοῦμε ποιό κλάσμα είναι μεγαλύτερο.

Καί αυτό, γιατί κάθε κλάσμα έχει προκύψει από διαφορετική

κλασματική μονάδα. Έτσι, για τò κλάσμα  $\frac{4}{9}$  χρειάστηκε νά έπαναλάβωμε 4 φορές τήν κλασματική μονάδα  $\frac{1}{9}$ , ένω για τò κλάσμα  $\frac{2}{5}$



Σχ. 4.5 α.



χρειάστηκε νὰ ἐπαναλάβωμε 2 φορές τὴν κλασματικὴ μονάδα  $\frac{1}{5}$ .

Μποροῦμε ὅμως νὰ κάνωμε τὰ κλάσματα νὰ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, ἀφοῦ ξέρομε πῶς σὲ κάθε κλάσμα ἐπιτρέπεται νὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους του μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό. Γιὰ τὸ πρῶτο, τὸ  $\frac{4}{9}$ , διαλέγωμε τὸ 5, ποὺ εἶναι παρονομαστής στὸ δεύτερο· γιὰ τὸ δεύτερο, τὸ  $\frac{2}{5}$ , διαλέγωμε τὸ 9 ποὺ εἶναι παρονομαστής τοῦ πρώτου.

Ἔτσι θὰ ἔχωμε:

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \times 5}{9 \times 5} = \frac{20}{45}, \quad \frac{2}{5} = \frac{2 \times 9}{5 \times 9} = \frac{18}{45}.$$

Ἔτσι, τὰ δύο ἀρχικὰ κλάσματα τὰ μετατρέψαμε σὲ δύο ἄλλα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, τὸν ἀριθμὸ 45.

Κλάσματα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, λέγονται *ὁμώνυμα*, ἐνῶ ἐκεῖνα ποὺ ἔχουν διαφορετικούς παρονομαστές, λέγονται *ἐτερόνυμα*.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

*Γιὰ νὰ μετατρέψωμε δύο ἐτερόνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς μὲ τὸν παρονομαστή τοῦ ἄλλου.*

Συγκρίνοντας τώρα τὰ δύο ὁμώνυμα κλάσματα  $\frac{20}{45}$  καὶ  $\frac{18}{45}$  βλέπομε ὅτι *μεγαλύτερο* εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει *μεγαλύτερο ἀριθμητή*.

$$\text{Θὰ ἔχωμε ὅτι: } \frac{20}{45} > \frac{18}{45},$$

ποὺ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα ὅτι:  $\frac{4}{9} > \frac{2}{5}$ .

Στὸ σχῆμα 4.5 β ἐξετάζομε τρεῖς περιπτώσεις συγκρίσεως κλασμάτων:

- α) Σύγκρισι δύο ὁμώνυμων κλασμάτων.  
 β) Σύγκρισι δύο ἑτερόνυμων κλασμάτων.  
 γ) Σύγκρισι δύο ἑτερόνυμων κλασμάτων με ἴσους ἀριθμητάς.



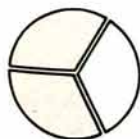
$$\frac{8}{10}$$

&gt;



$$\frac{7}{10}$$

α)



$$\frac{2}{3}$$

=



$$\frac{10}{15}$$

&gt;



$$\frac{3}{5}$$

=



$$\frac{9}{15}$$

β)



$$\frac{7}{8}$$

&gt;



$$\frac{7}{9}$$

γ)

Σχ. 4.5 β.

Ἀπὸ τὸ τρίτο παράδειγμα βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι ἀπὸ δύο ἑτερόνυμα κλάσματα με ἴσους ἀριθμητάς μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μικρότερο παρονομαστή.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή.

Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερόνυμα κλάσματα:

$$\frac{1}{3},$$

$$\frac{8}{14}$$

καὶ

$$\frac{3}{8}.$$

Γιὰ νὰ εὐκολύνουμε τίς πράξεις μας, κάνομε ὅλα τὰ κλάσματα ἀνάγωγα. Ἔτσι ἔχομε:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{4}{7}$  καὶ  $\frac{3}{8}$ . Μετὰ τὰ μετατρέπομε

σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζοντας τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος μὲ ἓνα ἀριθμό, τέτοιο γιὰ κάθε κλάσμα, ὥστε στὸ τέλος καὶ τὰ τρία νὰ εὑρεθοῦν μὲ τὸν ἴδιο παρονομαστή.

$$\begin{array}{l} \text{Κατάταξι:} \quad \frac{\overbrace{7 \times 8}^{\quad}}{\underset{3}{1}} \quad , \quad \frac{\overbrace{3 \times 8}^{\quad}}{\underset{7}{4}} \quad , \quad \frac{\overbrace{3 \times 7}^{\quad}}{\underset{8}{3}} \\ \\ \frac{1 \times 7 \times 8}{3 \times 7 \times 8} \quad , \quad \frac{4 \times 3 \times 8}{3 \times 7 \times 8} \quad , \quad \frac{3 \times 3 \times 7}{3 \times 7 \times 8} \\ \\ \text{ἢ} \quad \frac{56}{168} \quad , \quad \frac{96}{168} \quad , \quad \frac{63}{168} \end{array}$$

Κανών:

*Γιὰ νὰ τρέψουμε ἑτερόνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πρῶτα τὰ κάνουμε ἀνάγωγα καὶ μετὰ πολλαπλασιάζουμε τοὺς ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.*

#### 4 · 6 Πρόσθεσι κλασμάτων.

**Πρόβλημα.**

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ συνολικὸ μῆκος τριῶν σωλήνων, ποὺ ὁ καθένας τους ἔχει μῆκος:  $\frac{3}{5}$  m,  $\frac{1}{3}$  m καὶ  $\frac{1}{7}$  m.

*Λύσι :*

Παρὰ τὸ ὅτι καὶ στὶς τρεῖς περιπτώσεις τὸ μῆκος ἐκφράζεται μὲ τὴν ἴδια μονάδα, δηλαδὴ μὲ τὸ μέτρο m, ἡ κλασματικὴ μονὰς εἶναι γιὰ κάθε μέτρησι διαφορετικὴ. Γι' αὐτὸ τὰ κλάσματα, γιὰ νὰ μποροῦν νὰ προστεθοῦν, πρέπει πρῶτα νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα.

$$\begin{array}{l} \text{Κατάταξι:} \quad \frac{\overbrace{3 \times 7}^{\quad}}{\underset{5}{3}} \quad , \quad \frac{\overbrace{5 \times 7}^{\quad}}{\underset{3}{1}} \quad , \quad \frac{\overbrace{5 \times 3}^{\quad}}{\underset{7}{1}} \end{array}$$

$$\frac{3 \times 7 \times 3}{5 \times 3 \times 7}, \quad \frac{5 \times 7 \times 1}{5 \times 3 \times 7}, \quad \frac{5 \times 3 \times 1}{5 \times 3 \times 7}$$

$$\frac{63}{105}, \quad \frac{35}{105}, \quad \frac{15}{105}.$$

Τώρα μπορούμε να προσθέσουμε τα κλάσματα, γιατί όλα μᾶς μιλοῦν για κομμάτια ἀπὸ μία καὶ τὴν αὐτὴ κλασματικὴ μονάδα. Εὐρίσκομε λοιπόν:

$$\frac{63}{105} \text{ m}, \quad \frac{35}{105} \text{ m} \quad \text{καὶ} \quad \frac{15}{105} \text{ m}.$$

$$A = \frac{63}{105} + \frac{35}{105} + \frac{15}{105} = \frac{63 + 35 + 15}{105} = \frac{113}{105}$$

ἢ, ἂν βγάλωμε τις ἀκέραιες μονάδες:  $A = 1 \frac{8}{105} \text{ m}.$

Ὡστε:

*Γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ περισσότερα κλάσματα, τὰ κάνομε ὁμόνυμα καὶ μετὰ προσθέτομε τοὺς ἀριθμητὰς τους, ἐνῶ παρονομαστή ἀφίνομε τὸν ἴδιο.*

**Παράδειγμα.**

Στὸ σχῆμα 4.6 δίνεται μὲ τὴν βοήθεια τῶν κύκλων ὁ τρόπος προσθέσεως τῶν κλασμάτων  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$  καὶ  $\frac{5}{6}$ .

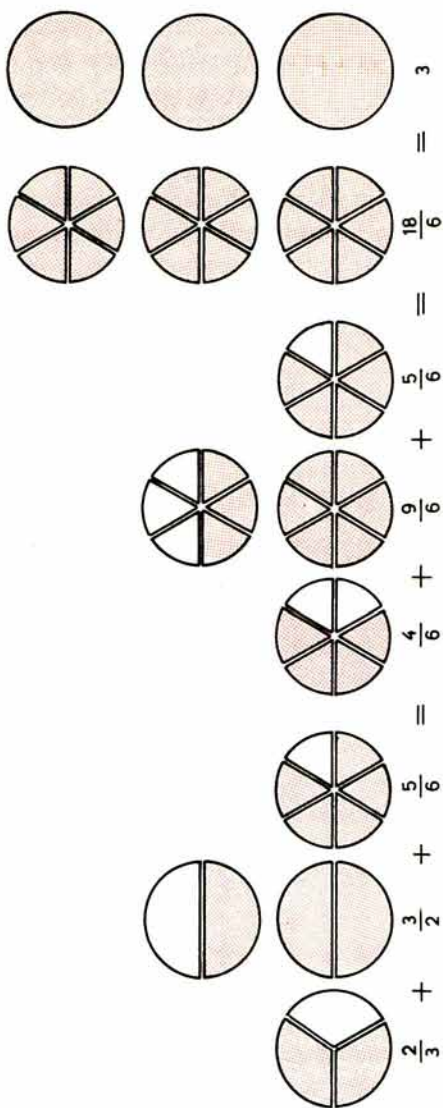
4.7 Ἀριθμητικές εφαρμογές στὴν πρόσθεσι.

**Ἐφαρμογὴ 1η.**

Νὰ γίνη ἡ πρόσθεσι:

$$A = \frac{3}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}.$$

Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ποὺ εἶπαμε στὴν παραπάνω παράγραφο, θὰ πρέπει πρῶτα νὰ κάνωμε τὰ κλάσματα ὁμώνυμα καὶ μετὰ νὰ τὰ



Σχ. 4.6.

προσθέσωμε. Θά ἔχωμε λοιπὸν σὰν κοινὸ παρονομαστή τῶν κλασμάτων τὸ γινόμενο:

$$\Gamma = 8 \times 5 \times 4 \times 5.$$

Γιὰ εὐκολία μας ὁμως, μποροῦμε νὰ προσθέσωμε πρῶτα τὰ δύο ὁμώνυμα κλάσματα καὶ τότε θά ἔχωμε:  $A = \frac{3}{8} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ ,

ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ γινόμενο θά εἶναι:  $\Gamma = 8 \times 5 \times 4$ .

Αὐτὸ τὸ νέο, ἀπλοποιημένο, γινόμενο μποροῦμε νὰ τὸ χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης ἀπὸ τὴν ἀρχὴ καὶ νὰ ἔχωμε τὴν κατάταξι:

$$A = \frac{\overbrace{5 \times 4}^{\quad}}{\frac{3}{8}} + \frac{\overbrace{8 \times 4}^{\quad}}{\frac{1}{5}} + \frac{\overbrace{8 \times 5}^{\quad}}{\frac{1}{4}} + \frac{\overbrace{8 \times 4}^{\quad}}{\frac{2}{5}} \quad \boxed{\Gamma = 8 \times 5 \times 4}$$

Τὸ γινόμενο αὐτὸ  $\Gamma$  σχηματίζεται ἀπὸ ὅλους τοὺς μὴ ἴσους μεταξύ τοὺς παρονομαστές. Ἄν συμβῇ ἓνας παρονομαστής νὰ περιλαμβάνεται πάνω ἀπὸ μία φορά, τότε στὸ γινόμενο  $\Gamma$  θά τὸν πάρωμε μόνο μία φορά.

Ἔτσι, ὅπως βλέπομε, στὴν κατάταξι τῆς προσθέσεως, πάνω ἀπὸ κάθε κλάσμα βάζομε τὸ γινόμενο τῶν ὑπολοίπων ὄρων τοῦ  $\Gamma$ , ἀφοῦ διαγράψωμε τὸν παράγοντα ἐκεῖνο, ποὺ εἶναι ἴδιος μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.

Ὡστε:

$$A = \frac{3 \times 5 \times 4}{8 \times 5 \times 4} + \frac{1 \times 8 \times 4}{5 \times 8 \times 4} + \frac{1 \times 8 \times 5}{4 \times 8 \times 5} + \frac{2 \times 8 \times 4}{5 \times 8 \times 4}$$

$$A = \frac{60 + 32 + 40 \times 64}{160}$$

Προσθέτομε τοὺς ἀριθμητές:

$$A = \frac{196}{160} = 1 \frac{36}{160}.$$

Ἀπλοποιοῦμε τὸ κλασματικὸ μέρος μόνο:

$$A = 1 \frac{9}{40}.$$



## Ἐφαρμογή 2η.

Νὰ διατυπώσετε τὸν κανόνα, μὲ τὸν ὁποῖο ἓνας μικτὸς ἀριθμὸς γράφεται μὲ μορφή κλάσματος.

$$\text{Ἄς πάρωμε τὸν μικτό: } A = 8 \frac{3}{5}.$$

$$\text{Θυμόμαστε πάλι ὅτι: } A = 8 + \frac{3}{5}.$$

Γράφομε τὸ 8 σὰν κλάσμα μὲ παρονομαστή τὸ 1 καὶ κάνομε τὴν πρόσθεσι:

$$A = \frac{8}{1} + \frac{3}{5} \qquad \Gamma = 1 \times 5$$

$$A = \frac{(8 \times 5) + 3 \times 1}{5} = \frac{(8 \times 5) + 3}{5} = \frac{43}{5}.$$

Ὡστε:

Γιὰ νὰ τρέψωμε ἓνα μικτὸ ἀριθμὸ σὲ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ μὲ τὸν παρονομαστή καὶ στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος· τὸ ἐξαγόμενον τὸ γράφομε ὡς ἀριθμητὴ τοῦ ζητουμένου κλάσματος, ἐνῶ παρονομαστή ἀφίνομε τὸν ἴδιον.

## Ἐφαρμογή 3η.

Στρέψαμε ἓνα τροχὸ κατὰ  $2 \frac{1}{5}$  τῆς στροφῆς, μετὰ κατὰ  $1 \frac{1}{4}$

καὶ ἐν συνεχείᾳ κατὰ  $\frac{2}{5}$  καὶ  $\frac{3}{8}$ , πάντοτε πρὸς τὴν ἴδια φορά. Πόσες στροφὲς ἔκαμε ὁ τροχὸς συνολικὰ ;

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, θὰ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ἄθροισμα:

$$A = 2 \frac{1}{5} + 1 \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8}.$$

$$\text{Θυμόμαστε ὅτι: } 2 \frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{5} \quad \text{καὶ} \quad 1 \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Έπομένως } A = 2 + \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8}.$$

Καί προχωρούμε ως εξής:

$$A = 2 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8}.$$

Προσθέτουμε χωριστά τούς άκεραίους και χωριστά τὰ κλάσματα και εύρίσκομε:

$$A = 3 + \frac{196}{160}.$$

$$A = 3 + 1 \frac{36}{160} = 3 + 1 + \frac{36}{160}.$$

$$A = 4 \frac{36}{160} \quad \eta \quad A = 4 \frac{9}{40}.$$

Συντόμευσι τῆς πράξεως:

$$\text{Κατάταξι: } A = 2 \frac{\overbrace{4 \times 8}^{\quad}}{5} + 1 \frac{\overbrace{5 \times 8}^{\quad}}{4} + \frac{\overbrace{4 \times 8}^{\quad}}{5} + \frac{\overbrace{4 \times 5}^{\quad}}{8} \quad \boxed{\Gamma = 4 \times 5 \times 8}$$

Τρέπουμε τὰ κλασματικά μέρη τῶν μικτῶν και τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα:

$$A = 2 \frac{32}{160} + 1 \frac{40}{160} + \frac{64}{160} + \frac{60}{160}.$$

$$A = 3 \frac{196}{160}.$$

$$A = 3 + 1 \frac{36}{160} = 4 \frac{36}{160}.$$

Ἀπλοποιούμε τὸ κλασματικὸ μέρος:

$$A = 4 \frac{9}{40}.$$

Ένας άλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα:

$$2 \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \qquad 1 \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Θὰ ἔχωμε: } A = \frac{11}{5} + \frac{5}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8}$$

καὶ συνεχίζομε ὅπως στὴν ἐφαρμογὴ 1 μὲ τὴν πρόσθεσι κλασμάτων.

$$\text{Εὐρίσκομε: } A = \frac{169}{40}.$$

$$\text{Ἐξάγομε τὶς ἀκέραιες μονάδες: } A = 4 \frac{9}{40}.$$

4 · 8 Ἀφαίρεσι κλασμάτων.

**Πρόβλημα.**

Τὸ τιμόνι ἑνὸς αὐτοκινήτου στρέφεται στὴν ἀρχὴ κατὰ  $\frac{3}{5}$  τῆς στροφῆς δεξιὰ καὶ μετὰ κατὰ  $\frac{2}{7}$  ἀριστερά. Κατὰ ποιά φορὰ στρέφεται περισσότερο καὶ πόσο;

Λύσι :

Βέβαια ἡ λύσι θὰ δοθῇ μὲ μία ἀφαίρεσι. Γιὰ νὰ εὐρεθῇ ὁμως ποιὸς θὰ εἶναι ὁ μειωτέος καὶ ποιὸς ὁ ἀφαιρετέος, θὰ πρέπει νὰ κάνομε τὰ κλάσματα **ὁμώνυμα**, ὥστε νὰμποροῦμε νὰ τὰ συγκρίνωμε:

|              |                 |                 |            |
|--------------|-----------------|-----------------|------------|
|              | $\overbrace{7}$ | $\overbrace{5}$ |            |
|              | $\frac{3}{5}$   | $\frac{2}{7}$   |            |
|              | ↓               | ↓               |            |
|              | $\frac{21}{35}$ | $\frac{10}{35}$ |            |
| 1η Κατάταξι: | ↑               | ↑               |            |
| Μειωτέος     |                 |                 | Ἀφαιρετέος |

$\Gamma = 5 \times 7$

$$2\eta \text{ Κατάταξι: } \Delta = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{21-10}{35} \quad \Delta = \frac{11}{35}.$$

Ἐπομένως ὁ τροχὸς στρέφεται περισσότερο δεξιὰ κατὰ  $\frac{11}{35}$  τῆς στροφῆς.

### Ἐφαρμογή.

Ἕνα δοχεῖο ἔχει μικτὸ βάρος  $2\frac{1}{8}$  kg, ἐνῶ τὸ ἀπόβαρό του εἶναι  $\frac{1}{5}$  kg. Ζητοῦμε τὸ καθαρὸ του βάρος.

Πρέπει νὰ κάνωμε ἀφαίρεσι γιὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ.

**Πρῶτος τρόπος.** Κάνομε πρῶτα τὶς πράξεις τῶν κλασμάτων καὶ μετὰ τῶν ἀκεραίων, ἂν ὑπάρχουν:

$$\Delta = 2\frac{1}{8} - \frac{1}{5} \quad \Delta = 2\frac{5}{40} - \frac{8}{40}.$$

Ἐπειδὴ τὰ κλασματικὰ μέρη δὲν ἀφαιροῦνται, δανειζόμαστε μία ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸν μειωτέο καί, ἀφοῦ τὴν κάνωμε κλάσμα, τὴν ἐπιστρέφουμε προσθέτοντάς την στὸ κλασματικὸ μέρος του· ἔτσι ἔχομε:

$$\Delta = 1 + \underbrace{\frac{40}{40}}_2 + \frac{5}{40} - \frac{8}{40} \quad \eta \quad \Delta = 1\frac{45}{40} - \frac{8}{40}$$

$$\text{καὶ } \Delta = 1\frac{37}{40}.$$

Ἄρα τὸ καθαρὸ βάρος τοῦ δοχείου εἶναι  $1\frac{37}{40}$  kg.

**Δεύτερος τρόπος:** Μετατρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμε τὰ κλάσματα:

$$\Delta = 2\frac{1}{8} - \frac{1}{5}, \quad \Delta = \frac{17}{8} - \frac{1}{5}$$

$$\Delta = \frac{85}{40} - \frac{8}{40}, \quad \Delta = \frac{77}{40} = 1\frac{37}{40}.$$

## 4 · 9 Ἡ ἴντσα.

Στὸ ἀγγλικὸ σύστημα μετρήσεων σὰν μονάδα γιὰ τὴν μέτρησι τοῦ μήκους χρησιμοποιεῖται ἡ ἴντσα, τῆς ὁποίας τὸ μήκος εἶναι ἴσο μὲ 25,4 mm. Σὰν σύμβολό της χρησιμοποιοῦνται τὰ δύο πρῶτα γράμματα in τῆς ἀγγλικῆς λέξεως inch, ποὺ σημαίνει ἴντσα\*. Οἱ ὑποδιαίρεσεις τῆς ἴντσας προκύπτουν μὲ τὴν διαίρεσι τοῦ μήκους  $AB = 1$  in σὲ δύο ἴσα μέρη, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ χωρίζομε πάλι σὲ δύο ἴσα μέρη καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἔτσι θὰ ἔχωμε ὡς ὑποδιαίρεσεις τῆς ἴντσας κλάσματα μὲ παρονομαστὰς τοὺς ἀριθμούς:

$$2, 4, 8, 16, 32 \text{ κ.λπ.}$$

Δηλαδή:

$$\frac{5}{8} \text{ in, } \frac{7}{16} \text{ in, } \frac{5}{32} \text{ in}$$

ποτὲ ὁμως:

$$\frac{4}{9} \text{ in } \quad \eta \quad \frac{7}{25} \text{ in } \quad \eta \quad \frac{3}{7} \text{ in } \quad \text{κ.λπ.}$$

## 4 · 10 Πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεσι κλάσματος μὲ ἀκέραιο.

**Πρόβλημα.**

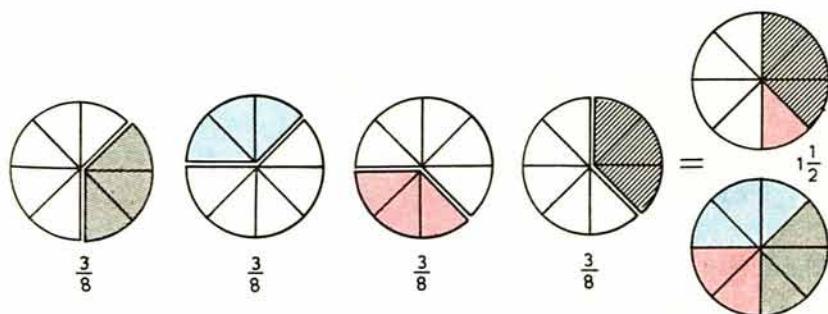
Ζητοῦμε τὸ συνολικὸ μήκος 4 κομματιῶν, ποὺ καθένα τους ἔχει μήκος  $\frac{3}{8}$  in.

Λύσι :

Τὸ πρόβλημα λύνεται μὲ πρόσθεσι (σχ. 4 · 10 α). Δηλαδή ἔχομε:

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3+3+3+3}{8} = \frac{3 \times 4}{8}.$$

\* Σὰν σύμβολο χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης καὶ οἱ δύο τόνοι, ὅπως π.χ. 5'', 3'', 1'' κ.λπ. Τὸν συμβολισμό ὁμως αὐτὸ θὰ τὸν ἀποφύγωμε, γιατί ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως μὲ τὰ δευτερόλεπτα τῆς μοίρας, ποὺ ἐκφράζουν γωνία, ἢ τὰ δευτερόλεπτα τῆς ὥρας.



Σχ. 4.10 α.

Από εδώ βλέπουμε πώς ουσιαστικά **πολλαπλασιάζουμε** το κλάσμα  $\frac{3}{8}$  με τον αριθμό 4.

Ωστε:  $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3 \times 4}{8}$ , που μᾶς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι: **άρκει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος μετὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ καὶ παρονομαστὴ νὰ ἀφίσουμε τὸν ἴδιο.**

Ἄν συνεχίσουμε τὶς πράξεις, ἔχομε:

$$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3 \times 4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}.$$

Ἀπλοποίησι  
μετὸ 4

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος μετὸν ἀκέραιο, μποροῦμε, **ἂν ἡ διαιρέσι εἶναι τελεία, νὰ διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος μετὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ καὶ ἀριθμητὴ νὰ ἀφίσουμε τὸν ἴδιο.**

$$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8 : 4} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}.$$



**Κανών.**

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἓνα κλάσμα μὲ ἓνα ἀκέραιο ἀριθμό, ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ, καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο, ἢ ἂν ὁ παρονομαστὴς διαιρῇται ἀκριβῶς, διαιροῦμε τὸν παρονομαστὴ μὲ τὸν ἀκέραιο, καὶ ἀριθμητὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.

**Παράδειγμα.**

$$\frac{5}{16} \times 4 = \frac{5 \times 4}{16} = \frac{20}{16} = 1 \frac{4}{16} = 1 \frac{1}{4}$$

$$\eta \quad \frac{5}{16} \times 4 = \frac{5}{16 : 4} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}.$$

**Συμπέρασμα.**

Ὅπως εἶδαμε, διαιρώντας τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος  $\frac{3}{8}$  διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4, πήραμε τὸ κλάσμα  $\frac{3}{8 : 4} = \frac{3}{2}$ , ποὺ εἶναι 4 φορές **μεγαλύτερο**. Αὐτὸ σημαίνει πῶς, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἀριθμὸ 4, θὰ πάρωμε ἓνα ἄλλο κλάσμα, ποὺ θὰ εἶναι 4 φορές **μικρότερο**. Θὰ ἔχωμε δηλαδὴ **διαιρέσει τὸ κλάσμα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ**.

$$\text{"Ὡστε: } \frac{3}{8 \times 4} = \frac{3}{32} = \frac{3}{8} : 4.$$

**Ἐφαρμογὴ :** Νὰ γίνη ἡ διαίρεσις:

$$\frac{9}{16} : 3.$$

Κατὰ τὰ γνωστά:

$$\frac{9}{16} : 3 = \frac{9}{16 \times 3} = \frac{9}{48} = \frac{9 : 3}{48 : 3} = \frac{3}{16},$$

  
 Ἀπλοποίηση  
μὲ τὸ 3

πού σημαίνει ότι μπορούμε, αντί να πολλαπλασιάσουμε τον παρονομαστή, να διαιρέσουμε τον αριθμητή με τον αριθμό, αρκεί ή διαίρεση να είναι τελεία.

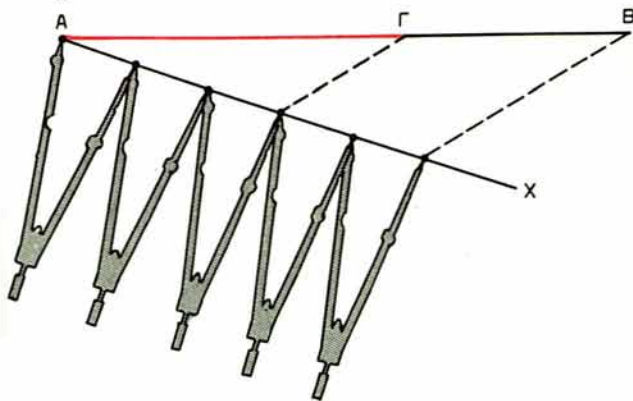
**Κανών.**

Για να διαιρέσουμε ένα κλάσμα με ένα άκεραιο αριθμό, ή διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος, αν διαιρήται ακριβώς, με τον άκεραιο αριθμό και παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο, ή πολλαπλασιάζουμε τον παρονομαστή του με τον άκεραιο αφήνοντας αριθμητή τον ίδιο.

4.11 Πολλαπλασιασμός αριθμού επί κλάσμα.

**Πρόβλημα 1ο.**

Από ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 75 \text{ mm}$  να πάρετε μήκος ίσο με τα  $\frac{3}{5}$ .



Σχ. 4.11 α.

**Λύσι:**

Με την βοήθεια της ήμικυκλίας  $AX$ , χωρίζουμε το  $AB$  σε πέντε ίσα μέρη (όσα λέει ο παρονομαστής) και παίρνουμε μήκος  $AG$ , που αντιστοιχεί σε τρία από αυτά τα ίσα μέρη (όσα λέει ο αριθμητής).

$$\text{Δηλαδή } AG = \frac{3}{5} \cdot AB.$$

Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο χωρίσαμε (διαιρέσαμε) τὸ 75 διὰ τοῦ 5 καὶ τὸ ἐξαγόμενο τῆς διαιρέσεως:

$$75 : 5 = \frac{75}{5}$$

τὸ πολλαπλασιάσαμε ἐπὶ 3, δηλαδή:

$$\frac{75}{5} \times 3 = \frac{75 \times 3}{5}$$

Ἀπὸ ἐδῶ βλέπομε ὅτι γιὰ νὰ εὕρωμε τὰ  $\frac{3}{5}$  τῶν 75 mm κάναμε τὸν

$$\text{πολλαπλασιασμό: } 75 \times \frac{3}{5} = \frac{75 \times 3}{5} = 45 \text{ mm.}$$

### Κανὼν.

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἓνα ἀκέραιο ἀριθμὸ ἐπὶ ἓνα κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ παρονομαστὴ νὰ ἀφίσωμε τὸν ἴδιο.

**Ὑπόδειξι.** Μετὰ τὴν ἐκτέλεσι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ νέο κλάσμα θὰ πρέπει νὰ γίνῃ ἀνάγωγο καὶ νὰ βγοῦν οἱ ἀκέραιες μονάδες.

### Ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

$$27 \times \frac{2}{3} = \frac{27 \times 2}{3} = \frac{3 \times 9 \times 2}{3} = 9 \times 2 = 18$$



Ἀπλοποίησι μὲ 3.

Διότι:

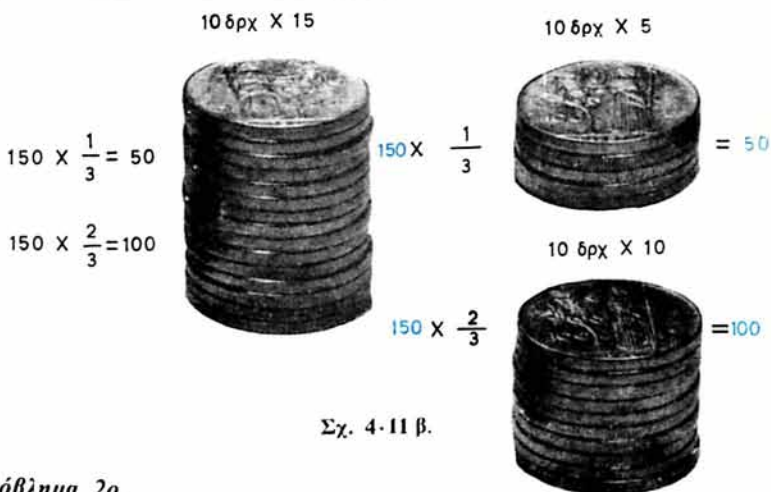
$$\text{τὸ } 27 = 3 \times 9$$

$$62 \times \frac{3}{4} = \frac{62 \times 3}{4} = \frac{2 \times 31 \times 3}{2 \times 2} = \frac{31 \times 3}{2} = \frac{93}{2} = 46 \frac{1}{2}$$



Ἀπλοποίησι μὲ 2

$$\begin{aligned} \text{Διότι: } 62 &= 2 \times 31 \\ \text{καὶ } 4 &= 2 \times 2 \end{aligned}$$



### Πρόβλημα 2ο.

Μία βίδα έχει μήκος  $\frac{3}{4}$  in. "Αν βιδωθεί κατά τὰ  $\frac{5}{8}$  του μήκους της, ζητάμε νὰ βρούμε τὸ μήκος αὐτὸ σὲ κλάσμα τῆς ἴντσας.

Λύσι :

Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἴδιο ὅπως τὸ προηγούμενο, μὲ τὴν διαφορά ὅτι τὸ μήκος τῆς βίδας δίνεται μὲ κλασματικὸ ἀριθμὸ, ποὺ σημαίνει ὅτι θὰ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ  $\frac{3}{4}$  ἐπὶ τὸ  $\frac{5}{8}$ .

Κάνοντας ἀκριβῶς τὶς ἴδιες σκέψεις, ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο πρόβλημα, ἔχομε:

— Χωρίζομε τὸ  $\frac{3}{4}$  in σὲ 8 ἴσα κομμάτια:

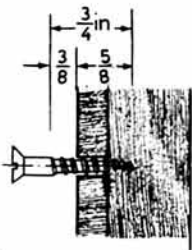
$$\frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{4 \times 8} = \frac{3}{32}.$$

— Παίρνομε κατόπιν 5 ἴσα τέτοια κομμάτια:

$$\frac{3}{32} \times 5 = \frac{3 \times 5}{32} = \frac{15}{32}.$$

Ἐπομένως:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32} = \frac{3 \times 5}{32} = \frac{3 \times 5}{4 \times 8}.$$



Σχ. 4.11 γ.

## Κανών.

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε δύο κλάσματα, ἄρκεϊ νὰ πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ τοὺς ἀριθμητὲς καὶ χωριστὰ τοὺς παρονομαστὲς.

4 · 12 Ἀλλοι πολλαπλασιασμοί.

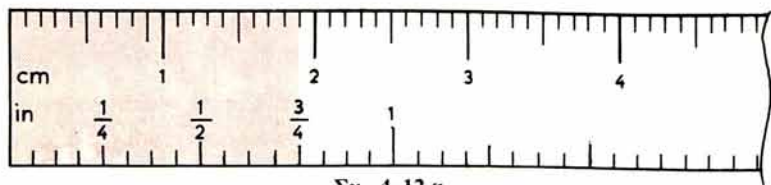
α) Νὰ ἐκφρασθῇ σὲ mm μῆκος ἴσο μὲ  $\frac{3}{4}$  in.

Ἐφ' ὅσον ἡ 1 in = 25,4 mm, τὸ μῆκος τῶν  $\frac{3}{4}$  in θὰ εὐρεθῇ

μὲ πολλαπλασιασμό:  $25,4 \times \frac{3}{4}$ .

Γράφομε τὸν δεκαδικὸ μὲ μορφή κλάσματος, ὅποτε ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε δύο κλάσματα:

$$25,4 \times \frac{3}{4} = \frac{254}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{762}{40} = 19,05 \text{ mm.}$$



Σχ. 4.12 α.

## Κανών.

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε δεκαδικὸ μὲ κλάσμα, τρέπομε τὸν δεκαδικὸ σὲ κλάσμα καὶ μετὰ πολλαπλασιάζομε τὰ δύο κλάσματα.

β) Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός:  $5\frac{3}{8} \times \frac{4}{9}$ .

Τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα, ὅποτε ἔχομε:

$$5\frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{43}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{43 \times 4}{8 \times 9} = \frac{43}{2 \times 9} = \frac{43}{18} = 2\frac{7}{18}.$$

Ἀπλοποιήσι μὲ 4

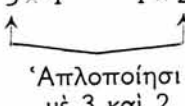
**Κανών.**

Για να πολλαπλασιάσουμε μικτό με κλάσμα, τρέπομε το μικτό σε κλάσμα και μετά πολλαπλασιάζομε τὰ δύο κλάσματα.

$$\gamma) \text{ Νὰ γίνη ὁ πολλαπλασιασμός: } 4\frac{2}{3} \times 3\frac{3}{4}.$$

Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα, ὁπότε ἔχομε:

$$4\frac{2}{3} \times 3\frac{3}{4} = \frac{14}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{14 \times 15}{3 \times 4} = \frac{7 \times 5}{1 \times 2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}.$$



**Κανών.**

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο μικτούς, τοὺς τρέπομε σὲ κλάσματα καὶ μετά πολλαπλασιάζομε τὰ κλάσματα.

#### Π Ι Ν Α Ξ 4 · 12 · 1

Σχέσεις μεταξύ ἴντσας καὶ χιλιοστομέτρου

| in             | mm    | in              | mm     | in              | mm     | in              | mm     |
|----------------|-------|-----------------|--------|-----------------|--------|-----------------|--------|
| $\frac{1}{32}$ | 0,794 | $\frac{9}{32}$  | 7,144  | $\frac{17}{32}$ | 13,494 | $\frac{25}{32}$ | 19,844 |
| $\frac{1}{16}$ | 1,587 | $\frac{5}{16}$  | 7,937  | $\frac{9}{16}$  | 14,287 | $\frac{13}{16}$ | 20,637 |
| $\frac{3}{32}$ | 2,381 | $\frac{11}{32}$ | 8,731  | $\frac{19}{32}$ | 15,081 | $\frac{27}{32}$ | 21,431 |
| $\frac{1}{8}$  | 3,175 | $\frac{3}{8}$   | 9,525  | $\frac{5}{8}$   | 15,875 | $\frac{7}{8}$   | 22,225 |
| $\frac{5}{32}$ | 3,969 | $\frac{13}{32}$ | 10,319 | $\frac{21}{32}$ | 16,669 | $\frac{29}{32}$ | 23,019 |
| $\frac{3}{16}$ | 4,762 | $\frac{7}{16}$  | 11,112 | $\frac{11}{16}$ | 17,462 | $\frac{15}{16}$ | 23,812 |
| $\frac{7}{32}$ | 5,556 | $\frac{15}{32}$ | 11,906 | $\frac{23}{32}$ | 18,256 | $\frac{31}{32}$ | 24,606 |
| $\frac{1}{4}$  | 6,350 | $\frac{1}{2}$   | 12,700 | $\frac{3}{4}$   | 19,050 | 1               | 25,400 |



**Ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή.**

Παίρνομε τὰ διάφορα κλασματικά μέρη τῆς ἴντσας καί, ἐφαρμόζοντας ὅσα εἶπαμε στὴν ἀρχὴ τῆς παραγράφου, σχηματίζομε τὸν Πίνακα 4 · 12 · 1, ὁ ὁποῖος δίνει τὶς σχέσεις μεταξύ τῶν κλασματικῶν μερῶν τῆς ἴντσας, in, καὶ τοῦ χιλιοστομέτρου, mm.

**4 · 13 Ἀντίστροφοι ἀριθμοί. Ἀντίστροφοι πράξεις.**

**α) Ἀριθμητικὲς ἐφαρμογές:** Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω πολλαπλασιασμοί:

$$5 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$3 \times \frac{3}{1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$2 \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = 1$$

$$3,2 \times \frac{5}{16} = \frac{32}{10} \times \frac{5}{16} = 1.$$

Βλέπομε ὅτι τὸ ἐξαγόμενο εἶναι πάντοτε ἡ μονάς. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ποὺ τὸ γινόμενό τους ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, ὀνομάζονται **ἀντίστροφοι**.

**β) Ὑπενθύμισι.**

Ἀντίστροφοι λέγονται, ὅπως μάθαμε, καὶ οἱ πράξεις πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεσι.

**4 · 14 Διαίρεσι διὰ κλάσματος.****α) Πρόβλημα.**

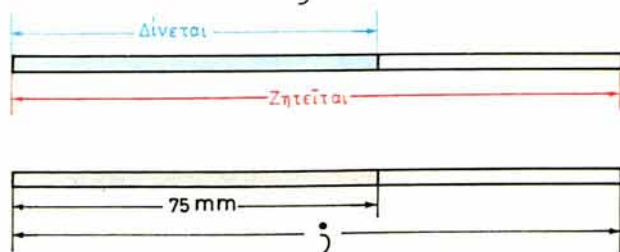
Τὰ  $\frac{3}{5}$  μιᾶς ράβδου ἔχουν μῆκος 75 mm. Πόσο μῆκος ἔχει ὁλόκληρη ἡ ράβδος;

*Λύσι :*

Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἀντίστροφο τοῦ πρώτου προβλήματος τῆς παραγράφου 4 · 11, γιατί ζητοῦμε ἓνα ἀριθμὸ, ποὺ πολ-

λατπλασιαζόμενος με τὸ  $\frac{3}{5}$  μᾶς δίνει τὸ 75. Ἄρα πρέπει νὰ κάνωμε τὴν διαιρέσι:

$$75 : \frac{3}{5}.$$



Σχ. 4.14 α.

Ἐπειδὴ ἡ διαιρέσι εἶναι πρᾶξι ἀντίστροφη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, γιὰ νὰ τὴν ἐκτελέσωμε, κάνομε τὶς παρακάτω ἀντίστροφες πράξεις, σύμφωνα με ὅσα μάθαμε στὸν πολλαπλασιασμό:

Πολλαπλασιασμός

$$75 \times \frac{3}{5}$$

1η πρᾶξι  $75 \times 3$

$$2η \text{ πρᾶξι } \frac{75 \times 3}{5}$$

Διαιρέσι

$$75 : \frac{3}{5}$$

Ἀντίστροφη  $75 : 3 = \frac{75}{3}$

Ἀντίστροφη  $\frac{75}{3} \times 5 = \frac{75 \times 5}{3}$

$$\text{Ὡστε: } 75 : \frac{3}{5} = 75 \times \frac{5}{3}.$$

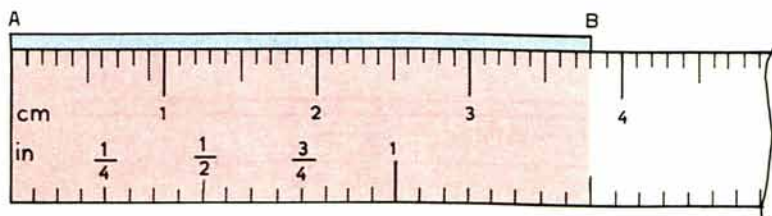
**Κανὼν.**

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἓνα ἀριθμὸ με ἓνα κλάσμα, ἀντιστρέφουμε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτη καὶ ἀντὶ γιὰ διαιρέσι κάνομε πολλαπλασιασμό.

$$\text{Έτσι εύρισκομε ότι : } 75 : \frac{3}{5} = 75 \times \frac{5}{3} = \frac{375}{3} = 125 \text{ mm.}$$

β) Έφαρμογές.

$$25,4 : \frac{2}{3} = 25,4 \times \frac{3}{2} = 38,1 \text{ (σχ. 4·14 β).}$$



Σχ. 4·14 β.

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{2 \times 4 \times 3} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}.$$

$$3 \frac{4}{5} : \frac{2}{5} = \frac{19}{5} : \frac{2}{5} = \frac{19}{5} \times \frac{5}{2} = 9 \frac{1}{2}.$$

$$4 \frac{2}{5} : 2 \frac{1}{5} = \frac{22}{5} : \frac{11}{5} = \frac{22}{5} \times \frac{5}{11} = \frac{22}{11} = 2.$$

Από τις εφαρμογές αυτές αλλά και από άλλες όμοιες, που εύκολα μπορούμε να σκεφθούμε, συμπεραίνουμε πώς ο παραπάνω κανόνας έχει γενική εφαρμογή για την διαίρεση κάθε αριθμού (άκερνού - δεκαδικού - κλασματικού - μικτού) διά κλάσματος.

4·15 Γινόμενο πολλών παραγόντων.

**Πρόβλημα.**

Δοχείο έχει ύψος  $5 \frac{3}{4}$  in. Κάθε ίντσα ύψους από το περιεχόμενο

του δοχείου ζυγίζει  $\frac{2}{5}$  kg. Αν γεμίσουμε το δοχείο κατά τα  $\frac{5}{8}$  του ύψους του, πόσο θα είναι το βάρος του περιεχομένου;

Λύσι:

Στήν άρχή θά πρέπει νά πολλαπλασιάσωμε τó óλικό ύψος  $5 \frac{3}{4}$  in με τó  $\frac{2}{5}$  kg, γιά νά ίδουμε ποιό θά ήταν τó βάρος του περιεχομένου του δοχείου, άν ήταν γεμάτο.

$$\left(5 \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right) \text{ kg.}$$

Τó εξαγόμενο θά τó πολλαπλασιάσωμε ύστερα με τó  $\frac{5}{8}$ , γιά νά βρούμε τó βάρος του περιεχομένου:

$$\left(5 \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{5}{8}.$$

\*Έτσι έχομε:

$$\left(5 \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{5}{8} = \frac{23 \times 2 \times 5}{4 \times 5 \times 8} = \frac{23}{16} = 1 \frac{7}{16} \text{ kg.}$$

\*Όμως, άν θυμηθούμε τά όσα είπαμε στήν παράγραφο 12 (β) του κεφαλαίου Β' γιά τούς άκεραίους άριθμούς, τó παραπάνω *γινόμενο πολλών παραγόντων* μπορεί νά γραφή:

$$5 \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = 1 \frac{7}{16} \text{ kg.}$$

\*Ό κανών είναι ó ίδιος, όπως όταν πολλαπλασιάζωμε δύο παράγοντες.

Δηλαδή:

Γιά νά πολλαπλασιάσωμε πολλούς κλασματικούς άριθμούς μεταξύ τους, τούς γράφομε όλους με τήν μορφή κλάσματος καί μετά πολλαπλασιάζομε χωριστά τούς άριθμητές καί χωριστά τούς παρονομαστές.

\*Άλλα παραδείγματα :

Νά γίνουν οί πολλαπλασιασμοί:

$$\alpha) \Gamma = 2,75 \times \frac{4}{16} \times \frac{3}{9} = \frac{275}{100} \times \frac{4}{16} \times \frac{3}{9}$$

ἢ ἀπλοποιώντας τὰ κλάσματα:

$$\Gamma = \frac{11}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{4 \times 4 \times 3} = \frac{11}{48}.$$

$$\beta) \Gamma = 0,22 \times 1 \frac{4}{5} \times 15 = \frac{22}{100} \times \frac{9}{5} \times \frac{15}{1}.$$

‘Απλοποιούμε τὰ κλάσματα:

$$\Gamma = \frac{11}{50} \times \frac{9}{5} \times \frac{15}{1} = \frac{11 \times 9 \times \overset{3}{\cancel{15}}}{50 \times \cancel{5} \times 1}.$$

Μετά τὴν ἀπλοποίησι καὶ στὸ νέο κλάσμα:

$$\Gamma = \frac{11 \times 9 \times 3}{50 \times 1 \times 1} = \frac{297}{50} = 5 \frac{47}{50}.$$

$$\gamma) \Gamma = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{1}} \times \overset{1}{\cancel{3}} \times 7 \times \overset{1}{\cancel{1}}}{\underset{\underset{3}{\cancel{1 \times 1 \times 8 \times 9}}{}}{}} = \frac{7}{8 \times 3} = \frac{7}{24}.$$

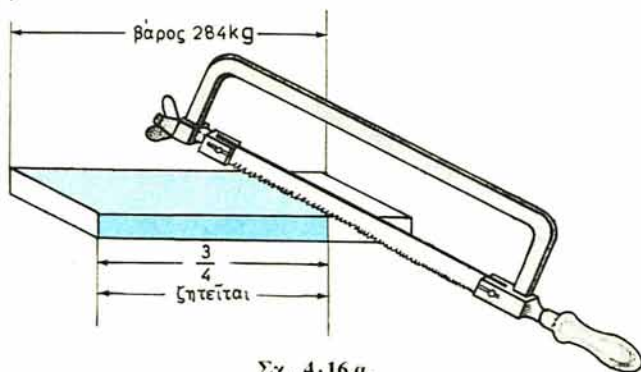
‘Απλοποιήσεις

4 · 16 Δύο ἐφαρμογὲς στὸν πολλαπλασιασμό καὶ τὴν διαίρεσι.

Πρόβλημα 1ο.

Σιδηροδοκὸς ζυγίζει 284 kg, πόσο ζυγίζουν τὰ  $\frac{3}{4}$  αὐτῆς (σχ.

4 · 16 α) ;



Σχ. 4 · 16 α.

Λύσι :

Σύμφωνα με όσα έχουμε μάθει, κάνουμε πολλαπλασιασμό :

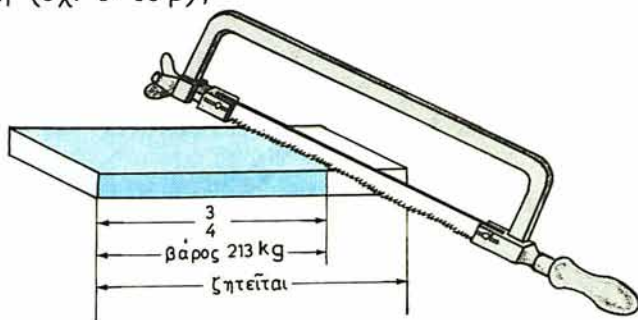
$$284 \times \frac{3}{4} = \frac{284 \times 3}{4} = 213 \text{ kg}$$

Ώστε :

*"Όταν ξέρουμε την τιμή της άκεραίας μονάδος και ζητούμε την αξία του κλασματικού μέρους, κάνουμε πολλαπλασιασμό."*

Πρόβλημα 2ο.

Τὰ  $\frac{3}{4}$  σιδηροδοκού ζυγίζουν 213 kg, πόσο ζυγίζει ή δοκός ολόκληρη (σχ. 4 · 16 β) ;



Σχ. 4·16 β.

Λύσι :

Σύμφωνα με όσα έχουμε μάθει, κάνουμε διαίρεση :

$$213 : \frac{3}{4} = 213 \times \frac{4}{3} = 284 \text{ kg.}$$

Ώστε :

*"Όταν ξέρουμε την τιμή του κλασματικού μέρους και ζητούμε την τιμή της άκεραίας μονάδος κάνουμε διαίρεση."*



4 · 17 Ἡ ἀναγωγή στὴν μονάδα.

Ἀντὶ νὰ θυμώμαστε τοὺς δύο κανόνες τῆς προηγουμένης παραγράφου γιὰ τὴν λύσι τῶν δύο προβλημάτων, σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ὑπενθυμίζομε τὸ 1ο πρόβλημα.

Σιδηροδοκὸς ζυγίζει 284 kg, πόσο ζυγίζουν τὰ  $\frac{3}{4}$  αὐτῆς;

Ὅλη ἡ δοκός, δηλαδὴ τὰ  $\frac{4}{4}$ , ζυγίζουν 284 kg.

Ἀρα τὸ  $\frac{1}{4}$  θὰ ζυγίζη 4 φορές λιγότερο, δηλαδὴ  $284 : 4 = \frac{284}{4}$  kg

καὶ τὰ  $\frac{3}{4}$  αὐτῆς θὰ ζυγίζουν 3 φορές περισσότερο ἀπὸ ὅσο τὸ  $\frac{1}{4}$ , δηλαδὴ:

$$\frac{284}{4} \times 3 = 284 \times \frac{3}{4} = 213 \text{ kg.}$$

Τὶς σκέψεις αὐτὲς διατάσσομε σὲ μία κατάταξι ὡς ἑξῆς:

Τὰ  $\frac{4}{4}$  ζυγίζουν 284 kg

Τὸ  $\frac{1}{4}$  ζυγίζει  $\frac{284}{4}$  kg

Τὰ  $\frac{3}{4}$  ζυγίζουν  $\frac{284 \times 3}{4} = 213 \text{ kg.}$

Ὑπενθυμίζομε τὸ 2ο πρόβλημα.

Τὰ  $\frac{3}{4}$  σιδηροδοκοῦ ζυγίζουν 213 kg, πόσο ζυγίζει ἡ σιδηροδοκὸς ὁλόκληρη;

Στὸ δεύτερο πρόβλημα ἔχομε τὴν παρακάτω κατάταξι:

Τὰ  $\frac{3}{4}$  ζυγίζουν 213 kg

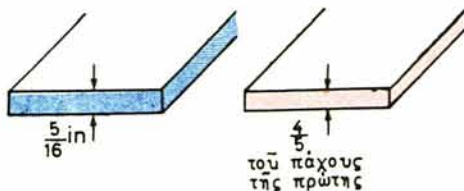
$$\text{Τὸ } \frac{1}{4} \text{ ζυγίζει } \frac{213}{3} \text{ kg}$$

$$\text{Τὰ } \frac{4}{4} \text{ ζυγίζουν } \frac{213 \times 4}{3} = 284 \text{ kg.}$$

Ἡ καινούργια αὐτὴ μέθοδος μὲ τὴν κατάταξι ὀνομάζεται *ἀναγωγή στὴν μονάδα* καὶ αὐτό, γιατί, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, καταφεύγομε στὴν *ἀξία τῆς κλασματικῆς μονάδος* ἢ, ὅπως ἀλλοιῶς λέγεται, *ἀναγόμεστέ* στὴν κλασματικὴ μονάδα.

*Ἄλλα παραδείγματα.*

α) Τὸ πάχος λαμαρίνας εἶναι  $\frac{5}{16}$  in. Μία ἄλλη λαμαρίνα ἔχει πάχος ἴσο μὲ τὰ  $\frac{4}{5}$  τῆς πρώτης. Ζητοῦμε τὸ πάχος τῆς δεύτερης λαμαρίνας (σχ. 4.17 α).



Σχ. 4.17 α.

Κατάταξι:

$$\text{Τὰ } \frac{5}{16} \text{ εἶναι } \frac{5}{16} \text{ in.}$$

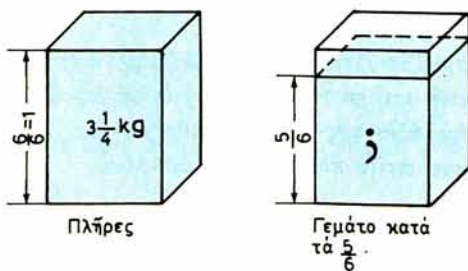
$$\text{Τὸ } \frac{1}{5} \text{ εἶναι } \frac{5}{16} : 5 = \frac{5}{16 \times 5} \text{ in}$$

$$\text{Τὰ } \frac{4}{5} \text{ εἶναι } \frac{5 \times 4}{16 \times 5} = \frac{1}{4} \text{ in.}$$

β) Τὸ καθαρὸ βάρος ἑνὸς γεμάτου δοχείου εἶναι  $3 \frac{1}{4}$  kg. Πόσο

θὰ εἶναι τὸ καθαρὸ του βάρους, ὅταν τὸ γεμίσουμε μόνο κατὰ τὰ  $\frac{5}{6}$  τοῦ ὕψους του (σχ. 4·17 β);

Λύσι :



Σχ. 4·17 β.

Κατάταξι:

$$\text{Τὰ } \frac{6}{6} \text{ ζυγίζουν } 3 \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \text{ kg.}$$

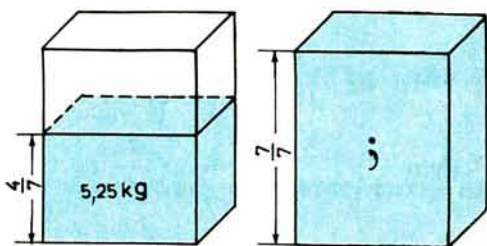
$$\text{Τὸ } \frac{1}{6} \text{ ζυγίζει } \frac{13}{4 \times 6} \text{ kg}$$

$$\text{Τὰ } \frac{5}{6} \text{ ζυγίζουν } \frac{13 \times 5}{4 \times 6} = 2 \frac{17}{24} \text{ kg.}$$

γ) Ἐνα δοχεῖο γεμάτο μέχρι τὰ  $\frac{4}{7}$  τοῦ ὕψους του ζυγίζει

5,25 kg. Πόσο θὰ ζυγίση τὸ περιεχόμενό του, ὅταν τὸ δοχεῖο εἶναι μέχρι ἐπάνω γεμάτο (σχ. 4·17 γ);

Λύσι :



Σχ. 4·17 γ.

Κατάταξι:

$$\text{Τὰ } \frac{4}{7} \text{ ζυγίζουν } 5,25 \text{ kg.}$$

$$\text{Τὸ } \frac{1}{7} \text{ ζυγίζει } \frac{5,25}{4} = 5,25 \times \frac{1}{4} \text{ kg.}$$

$$\text{Τὰ } \frac{7}{7} \text{ ζυγίζουν } 5,25 \times \frac{7}{4} = 9,1875 \text{ kg}$$

καὶ με ἀκρίβεια χιλιοστοῦ τοῦ kg = 9 kg καὶ 187 g,

ἢ ἀλλοιῶς:

$$\text{Τὰ } \frac{4}{7} \text{ ζυγίζουν } 5,25 \text{ kg} = \frac{525}{100} = \frac{21}{4}.$$

$$\text{Τὸ } \frac{1}{7} \text{ ζυγίζει } \frac{21}{4 \times 4}.$$

$$\text{Τὰ } \frac{7}{7} \text{ ζυγίζουν } \frac{21 \times 7}{4 \times 4} = 9 \frac{3}{16} \text{ kp} = 9,187 \text{ kg.}$$

#### 4·18 Κλίμακες σχεδιάσεων.

##### Πρόβλημα 1ο.

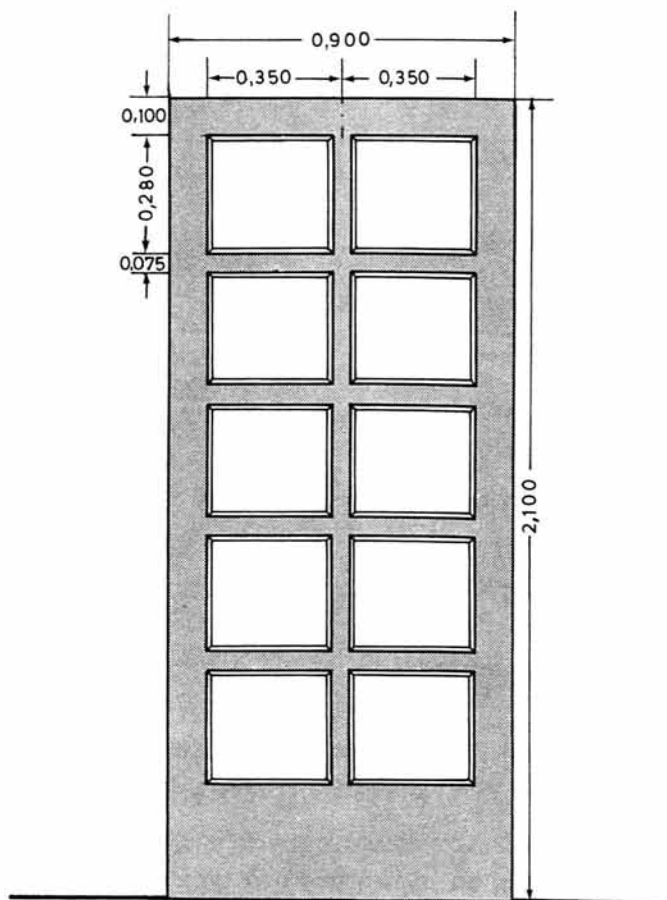
Πάνω σὲ χαρτὶ νὰ σχεδιασθῇ πόρτα ὕψους 2,10 m καὶ πλάτους 0,90 m.

Λύσι :

Γιὰ νὰ χωρέσῃ τὸ σχέδιό μας στὸ χαρτί, διαιροῦμε ὅλες τὶς διαστάσεις τῆς πόρτας με τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (στὸ παράδειγμά μας με τὸ 20) καὶ σχεδιάζομε τὴ πόρτα (σχ. 4·18 α), ποὺ ἔτσι ἔχει διαστάσεις 20 φορές μικρότερες ἀπὸ τὶς διαστάσεις τῆς πραγματικῆς πόρτας. Λέμε τότε ὅτι ἡ πόρτα ἐσχεδιάσθη *ὕπὸ κλίμακα* σχεδιάσεως 1 : 20. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ 1 cm πάνω στὸ χαρτὶ ἀντιπροσωπεύει 20 cm ἀπὸ τὴν πραγματικότητα. Ἔτσι, στὸ σχέδιό μας ἡ πόρτα ποὺ ἔχει διαστάσεις 2,10 m × 0,90 m εἶναι σχεδιασμένη *ὕπὸ σμίκρυνσι* με διαστάσεις:

$$2,10 \text{ m} : 20 = 210 \text{ cm} : 20 = 10,5 \text{ cm,}$$

$$0,90 \text{ m} : 20 = 90 \text{ cm} : 20 = 4,5 \text{ cm.}$$



ΚΛΙΜΑΞ 1:20

Σχ. 4-18 α.

## Πρόβλημα 2ο.

Πάνω στο χαρτί να σχεδιασθῇ ἡ λεπτομέρεια τῆς κεφαλῆς μιᾶς ξυλόβιδας.

Λύσι :

Γιὰ νὰ μπορέσωμε νὰ δώσωμε τὴν λεπτομέρεια αὐτή, ὅλες τὶς διαστάσεις, πού μετροῦμε μὲ ἓνα παχύμετρο, τὶς πολλαπλασιάζομε

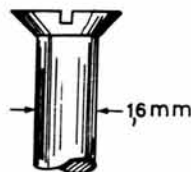
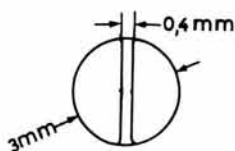
ἐπὶ 5. Ἐτσι στὸ σχέδιο 4 · 18 β δείχνουμε τὴν βίδα ὑπὸ μεγέθυνσι με κλίμακα 5 : 1.

### Σχεδιάσι ὑπὸ κλίμακα.

α) Σχεδιάσι ὑπὸ κλίμακα 1 : 1 σημαίνει ὅτι τὸ ἀντικείμενο τὸ σχεδιάζουμε στὸ χαρτὶ στὸ φυσικὸ του μέγεθος.

β) Σχεδιάσι ὑπὸ κλίμακα 1 : 20 σημαίνει ὅτι τὸ ἀντικείμενο τὸ σχεδιάζουμε στὸ χαρτὶ μὲ διαστάσεις 20 φορές μικρότερες, ἢ, ὅπως ἀλλοιῶς λέμε, κάνουμε σχεδιάσι ὑπὸ σμίκρυνσι 1 : 20.

γ) Σχεδιάσι ὑπὸ κλίμακα 5 : 1 σημαίνει ὅτι τὸ ἀντικείμενο τὸ σχεδιάζουμε στὸ χαρτὶ μὲ διαστάσεις 5 φορές μεγαλύτερες, ἢ, ὅπως ἀλλοιῶς λέμε, κάνουμε σχεδιάσι ὑπὸ μεγέθυνσι 5 : 1.



ΚΛΙΜΑΞ 5:1

Σχ. 4.18 β.

### Κλίμακες.

Οἱ κλίμακες, ποὺ χρησιμοποιοῦνται συνήθως σύμφωνα μὲ τοὺς κανονισμοὺς DIN 823\* εἶναι οἱ παρακάτω:

#### α) Στὰ μηχανολογικὰ σχέδια:

- Σὲ φυσικὸ μέγεθος χρησιμοποιοῦμε τὴν κλίμακα: 1 : 1.
- Γιὰ σμίκρυνσι: 1 : 2,5, 1 : 5, 1 : 10 καὶ 1 : 20.
- Γιὰ μεγέθυνσι: 2 : 1, 5 : 1 καὶ 10 : 1.

β) Στὰ οἰκοδομικὰ σχέδια χρησιμοποιοῦμε συνήθως τὶς κλίμακες: 1 : 50, 1 : 100 καὶ 1 : 200.

γ) Στὰ κτηματολογικὰ σχέδια: 1 : 500, 1 : 1000 καὶ 1 : 2500.

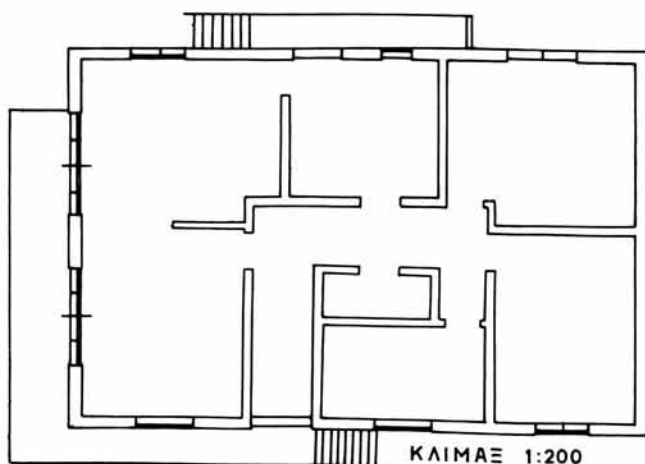
#### δ) Στὸς τοπογραφικοὺς χάρτες:

1 : 5000, 1 : 10 000, 1 : 50 000, 1 : 100 000, 1 : 200 000,  
1 : 500 000, 1 : 100 0000.

\* Πρόκειται γιὰ τοὺς γερμανικοὺς κανονισμοὺς, ποὺ μᾶς ὀρίζουν τὶς διάφορες κλίμακες, ὅπως μαθαίνομε στὸ ἀντίστοιχο μάθημα σχεδίου.



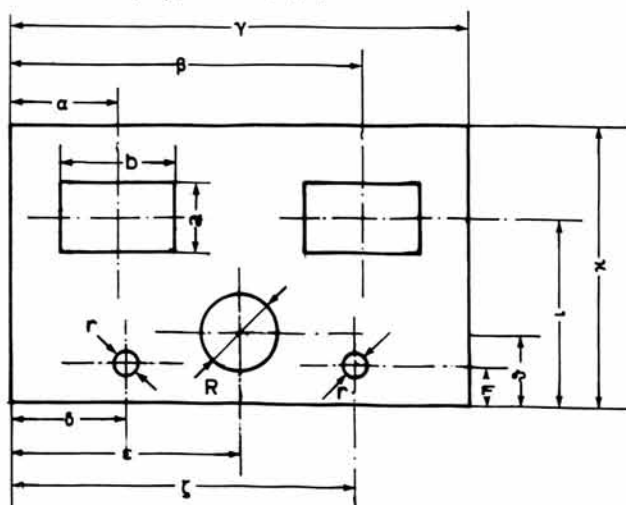
Στὸ σχῆμα 4·18 γ δίνεται ἡ κάτοπι διαμερίσματος σχεδιασμένη με κλίμακα 1 : 200.



Σχ. 4·18 γ.

Ἐφαρμογή.

Στὸ σχῆμα 4·18 δ, πού εἶναι σχεδιασμένο με κλίμακα 1 : 5 νὰ εὑρεθοῦν τὰ πραγματικά μήκη.



Σχ. 4·18 δ.

| Μέτρησι                             | Πραγματικὴ διάστασι |
|-------------------------------------|---------------------|
| $\alpha = 14 \text{ mm} \times 5$   | $= 70 \text{ mm}$   |
| $\beta = 46 \text{ mm} \times 5$    | $= 230 \text{ mm}$  |
| $\gamma = 60 \text{ mm} \times 5$   | $= 300 \text{ mm}$  |
| $\delta = 15 \text{ mm} \times 5$   | $= 75 \text{ mm}$   |
| $\epsilon = 30 \text{ mm} \times 5$ | $= 150 \text{ mm}$  |
| $\zeta = 45 \text{ mm} \times 5$    | $= 225 \text{ mm}$  |
| $\eta = 5 \text{ mm} \times 5$      | $= 25 \text{ mm}$   |
| $\theta = 10 \text{ mm} \times 5$   | $= 50 \text{ mm}$   |
| $\iota = 24 \text{ mm} \times 5$    | $= 120 \text{ mm}$  |
| $\kappa = 36 \text{ mm} \times 5$   | $= 180 \text{ mm}$  |
| $r = 3 \text{ mm} \times 5$         | $= 15 \text{ mm}$   |
| $R = 10 \text{ mm} \times 5$        | $= 50 \text{ mm}$   |
| $a = 9 \text{ mm} \times 5$         | $= 45 \text{ mm}$   |
| $b = 15 \text{ mm} \times 5$        | $= 75 \text{ mm}$   |

#### 4.19 Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισι.

##### α) Πάνω στὴν εὐθεία.

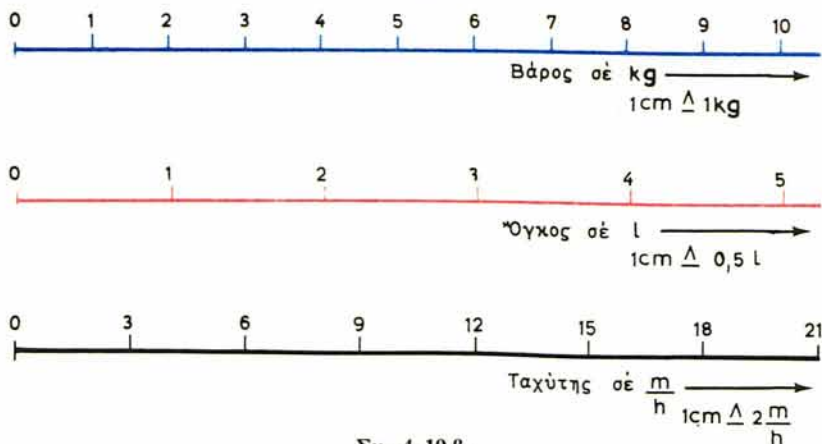
Ἀπὸ ὅσα εἶπαμε παραπάνω, βγάζομε τὸ συμπέρασμα ὅτι πάνω σὲ μία ἡμιευθεῖα  $OX$ , ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν ἀρχή,  $O$ , μπορούμε νὰ βάλωμε ἀριθμούς, ὑπὸ κλίμακα, ποὺ ὁ καθένας τους νὰ ἀντιπροσωπεύη  $dm$ ,  $m$  ἢ  $km$  κ.λπ. Στὸ σχῆμα 4.19 α π.χ. ὑπὸ κλίμακα  $1 : 50$ , οἱ ἀριθμοὶ  $1, 2, 3, 4$  κ.λπ. ἀντιπροσωπεύουν μῆκη  $1 m$ ,  $2 m$ ,  $3 m$ ,  $4 m$  κ.λπ.



Σχ. 4.19 α.

Μὲ τὴν ἴδια σκέψι θὰ μπορούσαμε νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ  $1, 2, 3, 4$  κ.λπ. ἀπεικονίζουν ἄλλα φυσικὰ μεγέθη, ὅπως βάρος σὲ  $kg$ , ὄγκο σὲ  $l$  (λίτρα), ταχύτητα σὲ  $m/h$  (μέτρα τὴν ὥρα) κ.λπ.

Έτσι μπορούμε νὰ ἔχουμε (σχ. 4 · 19 β).



Σχ. 4 · 19 β.

Οἱ κλίμακες στὴν παραπάνω ἀπεικόνισι εἶναι:

### I. Περίπτωσι βάρους.

1 cm ἀντιπροσωπεύει βάρος 1 kg  
καὶ συμβολικά: 1 cm  $\triangleq$  1 kg  
ἢ 1 cm  $\triangleq$  1 kg.

### II. Περίπτωσι ὄγκου.

2 cm ἀντιπροσωπεύουν ὄγκο 1 l,  
ἄρα 1 cm ἀντιπροσωπεύει ὄγκο 0,5 l  
καὶ συμβολικά: 1 cm  $\triangleq$  0,5 l  
ἢ 2 cm  $\triangleq$  1 l.

### III. Περίπτωσι ταχύτητος.

Εὐρίσκομε:

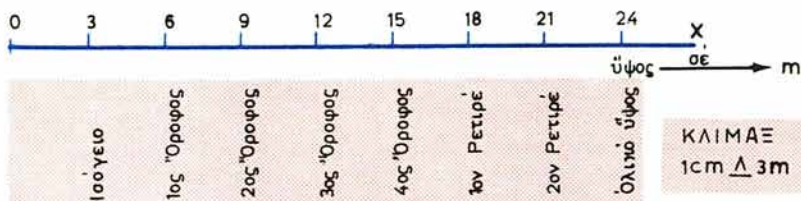
$$1 \text{ cm} \triangleq 2 \frac{m}{h}.$$

Ἐφαρμογή.

Νὰ ἀπεικονίσετε πάνω σὲ μία γραμμὴ τὴν μεταβολὴ τοῦ

ύψους μιᾶς πολυκατοικίας, όταν ἡ ἀπόστασι ἀπὸ πάτωμα σὲ πάτωμα εἶναι 3 m.

Πάνω στὴν ἡμιευθεία OX παίρνομε διαστήματα τοῦ 1 cm, τὰ ὁποῖα δεχόμαστε ὅτι ἀντιπροσωπεύουν ὕψος 3 m. Ἐτσι μὲ κλίμακα  $1 \text{ cm} \triangleq 3 \text{ m}$  σχεδιάσαμε τὸ σχῆμα 4.19 γ.



Σχ. 4.19 γ.

### β) Πάνω στὸ ἐπίπεδο.

Ἄς πάρωμε δύο ἡμιευθεῖες OX καὶ OY, ποὺ νὰ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $90^\circ$ . Χωρίζομε τὸ ἐπίπεδο, ποὺ εἶναι μέσα στὴν γωνία, μὲ εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὴν OX καὶ τὴν OY σὲ μικρὰ τετραγωνάκια, ποὺ τὸ καθένα τους ἔχει πλευρὰ 1 mm. Ἄν αὐτὸ γίνη σὲ ἓνα φύλλο χαρτί, τότε αὐτὸ τὸ χαρτί λέγεται *μιλλιμετρέ* (σχ. 4.19 δ).

### Παράδειγμα.

Ζητοῦμε νὰ προσδιορίσωμε ἓνα τρόπο, μὲ τὸν ὁποῖο θὰ μποροῦμε νὰ εὐρίσκωμε κάθε φορὰ τὸ βάρος, ποὺ ἔχουν διάφορα κομμάτια μιᾶς σιδερένιας ράβδου, χωρὶς νὰ καταφεύγωμε στὸ ζύγισμα, ὅταν ξέρωμε ὅτι κάθε μέτρο ράβδου ζυγίζει 1,2 kg.

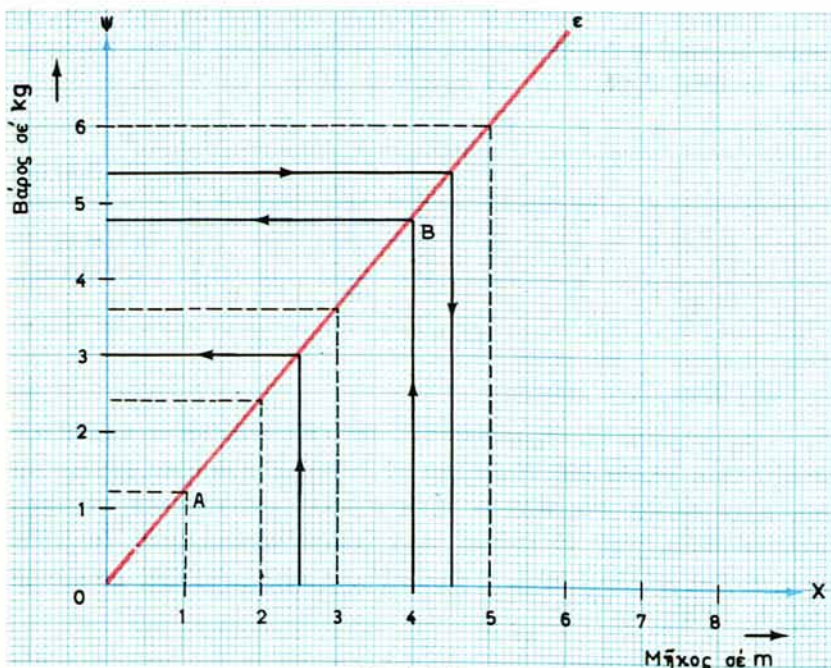
Σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Σὲ ἓνα φύλλο χαρτί μιλλιμετρέ σχηματίζομε μία ὀρθή γωνία XOY. Πάνω στὸν ὀριζόντιο *ἄξονα* OX μὲ κλίμακα  $1 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ m}$  μήκος ράβδου, βάζομε τὰ μήκη καὶ πάνω στὸν κατακόρυφο *ἄξονα* OY μὲ κλίμακα  $1 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ kg}$  βάρους, βάζομε τὰ βάρη (σχ. 4.19 δ).

Τοὺς δύο αὐτοὺς ἄξονες τοὺς λέμε καὶ *ἄξονες τῶν συντεταγμένων* \*.

\* Τὸν ὀριζόντιο OX τὸν λέμε καὶ *ἄξονα τῶν τεταγμένων*, ἐνῶ τὸν κατακόρυφο OY τὸν λέμε καὶ *ἄξονα τῶν τεταγμένων*.

Ξέρομε ὅτι 1 m ράβδου ζυγίζει 1,2 kg. Στὰ σημεῖα 1 m τῆς ΟΧ καὶ 1,2 kg τῆς ΟΨ φέρνομε καθέτους, οἱ ὁποῖες κόβονται στὸ σημεῖο Α.



Σχ. 4-19 δ.

Τὸ ἴδιο κάνομε καὶ γιὰ τὸ μήκος 2 m, στὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ βάρος 2,4 kg, 3 m, στὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ βάρος 3,6 kg κ.λπ. \*Έτσι εὐρίσκομε διάφορα σημεῖα τομῆς, μὲ τὰ ὁποῖα, ὅταν τὰ ἐνώσωμε, σχηματίζομε τὴν γραμμὴ Οε, ἡ ὁποία στὸ παράδειγμά μας εἶναι εὐθεῖα. Αὐτὴ ἡ εὐθεῖα λέγεται *γραφικὴ ἀπεικόνισις* ἢ *γραφικὴ παράστασις* τῆς μεταβολῆς τοῦ βάρους, ὅταν μεταβάλλεται τὸ μήκος \*. \*Έτσι γιὰ μήκος π.χ. 4 m εὐρίσκομε, ἀπὸ τὸ σχῆμα, βάρος 4,8 kg, ἀρκεῖ νὰ φέρωμε τὴν κάθετο στὴν ἑνδειξὶ 4 τοῦ ἄξονος ΟΧ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Β τομῆς μὲ τὴν Οε τὴν κάθετο στὴν ΟΨ. Μὲ ἀνάλογο τρόπο εὐρίσκομε ὅτι:

Μήκος 2,5 m θὰ ζυγίζη 3 kg.

Βάρος 5,4 kg θὰ ἔχη μήκος 5 m.

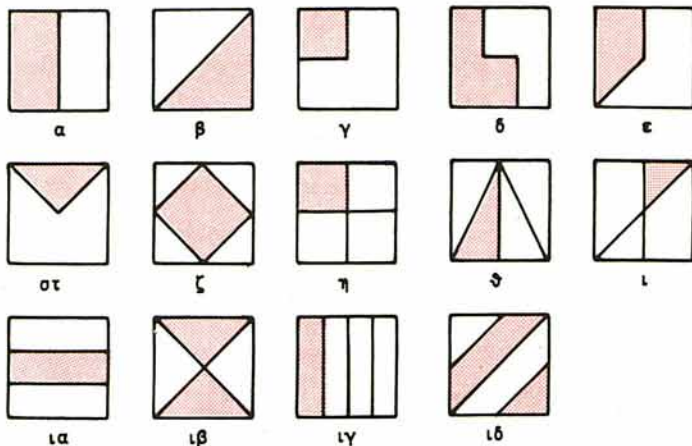
Βάρος 4 kg θὰ ἔχη μήκος 3,3 m περίπου.

\* Ἡ σωστὴ μαθηματικὴ ἔκφρασις εἶναι *γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τοῦ βάρους συναρτήσεως τοῦ μήκους*.

## 4.20. Άσκησης.

Από τις παραγράφους 4.1 έως 4.5.

1. Να εκφράσετε με κλάσματα τα χρωματισμένα μέρη τῶν παρακάτω σχημάτων.



Σχ. 4.20 α.

2. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα υπό μορφήν μικτού αριθμού (δηλαδή να βγάλετε τις ακέραιες μονάδες):

$$\alpha) \frac{3}{2}, \quad \frac{11}{2}, \quad \frac{107}{3}, \quad \frac{187}{5},$$

$$\frac{209}{7}, \quad \frac{377}{9}, \quad \frac{99}{4}, \quad \frac{38}{3},$$

$$\beta) \frac{55}{4} \text{ kp}, \quad \frac{21}{2} \text{ kp}, \quad \frac{60}{4} \text{ kp}, \quad \frac{47}{8} \text{ kp},$$

$$\gamma) \frac{11}{4} \text{ m}, \quad \frac{167}{10} \text{ m}, \quad \frac{17}{3} \text{ m}, \quad \frac{89}{4} \text{ m}.$$

3. Να γράψετε υπό δεκαδική μορφή τούς κλασματικούς αριθμούς:

$$\alpha) \frac{55}{10}, \quad \frac{93}{10}, \quad \frac{407}{100}, \quad \frac{712}{100}, \quad \frac{581}{1000}.$$

$$\frac{11}{1000}, \quad \frac{235}{1000}, \quad \frac{8597}{1000}, \quad \frac{2159}{10000}.$$



$$\beta) \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{97}{4}, \quad \frac{132}{8},$$

$$\frac{950}{16}, \quad \frac{580}{16}, \quad \frac{690}{92}.$$

$$\gamma) \quad 7 \frac{3}{4}, \quad 4 \frac{1}{8}, \quad 5 \frac{1}{2}, \quad 10 \frac{3}{8},$$

$$11 \frac{1}{5}, \quad 7 \frac{3}{8}, \quad 56 \frac{1}{25}.$$

4. Νά γραφούν υπό μορφή αναγώνων κλασμάτων οι παρακάτω δεκαδικοί αριθμοί:

|       |       |       |        |
|-------|-------|-------|--------|
| 0,12  | 0,257 | 0,018 | 0,0004 |
| 0,75  | 0,350 | 0,004 | 0,25   |
| 0,125 | 0,250 | 0,625 | 0,06.  |

5. Νά μετατρέψετε τούς παρακάτω άκεραίους σε κλάσματα μέ:

α) Παρονομαστή τόν 3:

$$2 \quad 7 \quad 17 \quad 25 \quad 49 \quad 58.$$

β) Παρονομαστή τόν 8:

$$7 \quad 15 \quad 26 \quad 49 \quad 75 \quad 111.$$

6. Νά μετατρέψετε τά παρακάτω έτερόνυμα κλάσματα σε όμώνυμα και νά τοποθετήσετε μεταξύ τους τó σύμβολο ισότητος ή άνισότητος:

$$\frac{3}{5} \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{6}{11} \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{12},$$

$$\frac{9}{14} \quad \frac{5}{10}, \quad \frac{27}{45} \quad \frac{18}{90}, \quad \frac{1}{3} \quad \frac{4}{15}.$$

7. Νά άπλοποιηθούν τά κλάσματα:

$$\frac{18}{90} \quad \frac{27}{54} \quad \frac{16}{56} \quad \frac{117}{153} \quad \frac{117}{468}$$

$$\frac{102}{238} \quad \frac{462}{693} \quad \frac{2730}{122850} \quad \frac{693}{2772}.$$

8. Νά εκφράσετε σε m και cm τά παρακάτω μήκη:

$$\frac{1}{2} \text{ m} \quad \frac{3}{4} \text{ m} \quad 2 \frac{1}{2} \text{ m} \quad 5 \frac{4}{25} \text{ m}.$$

9. Να εκφράσετε σε  $kr$  και  $p$  τὰ παρακάτω βάρη:

$$\frac{1}{2} kr, \quad \frac{3}{4} kr, \quad 1 \frac{1}{4} kr, \quad 3 \frac{1}{2} kr, \quad 12 \frac{3}{4} kr.$$

- Ἐπίσης σε  $t$  και  $kr$  τὰ βάρη:

$$\frac{5}{8} t, \quad \frac{7}{10} t, \quad \frac{25}{100} t, \quad 3 \frac{1}{5} t.$$

11. Να εκφραστοῦν σε κλάσμα ὀρθῆς γωνίας οἱ παρακάτω γωνίες:

$$\begin{array}{ccccc} 17^\circ & 49^\circ & 25^\circ & 175^\circ & 360^\circ \\ 225^\circ & 126^\circ & 75^\circ & 270^\circ & 243^\circ. \end{array}$$

Ὅπου χρειάζεται νὰ βγάλετε τὶς ἀκέραιες μονάδες.

12. Ἐκφράστε σε μοῖρες τὶς παρακάτω γωνίες:

$$\frac{1}{2}^\circ, \quad \frac{3}{5}^\circ, \quad \frac{7}{8}^\circ, \quad \frac{1}{10}^\circ.$$

13. Να συμπληρωθοῦν οἱ ἀριθμητές:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{*}{14} = \frac{*}{20}, \quad \frac{2}{3} = \frac{*}{9} = \frac{*}{60} \\ \frac{3}{4} = \frac{*}{40} = \frac{*}{160}, \quad \frac{11}{12} = \frac{*}{36} = \frac{*}{60} \\ \frac{5}{8} = \frac{*}{40} = \frac{*}{160}, \quad \frac{7}{20} = \frac{*}{200} = \frac{*}{1000}. \end{array}$$

14. Ἀπὸ δύο κλάσματα ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμητὴ, ποῖο εἶναι μεγαλύτερο; Δώστε ἀριθμητικὰ παραδείγματα μὲ τὸ σύμβολο ἀνισότητος μεταξὺ τους.

15. Δίδονται δύο κλάσματα, στὰ ὁποῖα ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ δευτέρου καὶ ὁ παρονομαστής τοῦ πρώτου μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή τοῦ δευτέρου. Ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο εἶναι μεγαλύτερο;

Παράδειγμα ἀριθμητικὸ:  $\frac{3}{5} \boxed{;} \frac{2}{7}$ .

Δώστε ἄλλα ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

16. Γράψτε τὸ σωστὸ σύμβολο ἰσότητος ἢ ἀνισότητος μεταξὺ τῶν κλασμάτων, χωρὶς νὰ τὰ μετατρέψετε σὲ ὁμώνυμα:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{12} \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{9}, \quad \frac{7}{10} \quad \frac{7}{15}, \quad \frac{27}{305} \quad \frac{27}{250} \\ \frac{27}{105} \quad \frac{17}{250}, \quad \frac{6}{15} \quad \frac{2}{25}, \quad \frac{17}{12} \quad \frac{34}{40}, \quad \frac{45}{35} \quad \frac{19}{27}. \end{array}$$

17. Νά συμπληρωθοῦν οἱ παρονομαστές:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\boxed{\phantom{0}}}, \quad \frac{1}{5} = \frac{5}{\boxed{\phantom{0}}}, \quad \frac{5}{6} = \frac{40}{\boxed{\phantom{0}}}, \quad \frac{3}{8} = \frac{15}{\boxed{\phantom{0}}}$$

$$\frac{17}{25} = \frac{68}{\boxed{\phantom{0}}}, \quad \frac{11}{17} = \frac{33}{\boxed{\phantom{0}}}, \quad \frac{3}{5} = \frac{24}{\boxed{\phantom{0}}}, \quad \frac{1}{8} = \frac{7}{\boxed{\phantom{0}}}.$$

18. Τί παρατηρεῖτε κατὰ τὴν μετατροπὴ τῶν παρακάτω κλασμάτων σὲ δεκαδικούς;

$$\frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{9}.$$

19. Μετατρέψτε τὰ παρακάτω κλάσματα σὲ δεκαδικούς ἀριθμούς μὲ προσέγγιση χιλιοστοῦ:

$$\frac{13}{99} \quad \frac{31}{99} \quad \frac{50}{99} \quad \frac{157}{999} \quad \frac{451}{999} \quad \frac{752}{999}.$$

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 4 · 6 ἕως 4 · 9.

1. Νά γίνουν οἱ προσθέσεις:

$$\alpha) \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \quad \frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \quad \left( \frac{3}{5}, 1 \frac{7}{12} \right)$$

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{9} = \quad \frac{11}{15} + \frac{12}{20} = \quad \left( 1 \frac{29}{72}, 1 \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{7}{12} + \frac{3}{10} = \quad \frac{1}{4} + \frac{4}{5} = \quad \left( \frac{53}{60}, 1 \frac{1}{20} \right)$$

$$4 \frac{3}{5} + 1 \frac{4}{15} = \quad 9 \frac{2}{15} + 3 \frac{1}{30} = \quad \left( 5 \frac{13}{15}, 12 \frac{1}{6} \right)$$

$$8 \frac{7}{12} + 5 \frac{7}{8} = \quad 19 \frac{3}{7} + 4 \frac{1}{4} = \quad \left( 14 \frac{11}{24}, 23 \frac{19}{28} \right)$$

$$\beta) \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{7}{10} = \quad , \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \quad \left( 1 \frac{4}{5}, 1 \right)$$

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} + \frac{13}{24} = \quad , \quad 2 \frac{3}{8} + 4 \frac{7}{12} + 1 \frac{5}{16} = \quad \left( 1 \frac{3}{4}, 8 \frac{13}{48} \right)$$

$$8 \frac{7}{20} + 3 \frac{7}{60} + 5 \frac{18}{40} = \quad , \quad 1 \frac{3}{14} + 2 \frac{5}{6} + 5 \frac{2}{12} = \quad \left( 16 \frac{11}{12}, 9 \frac{3}{14} \right)$$

$$\gamma) 2 \frac{3}{8} \text{ kp} + 7 \frac{1}{8} \text{ kp} + 4 \frac{7}{8} \text{ kp} = \left( 14 \frac{3}{8} \right)$$

$$3 \frac{5}{8} \text{ kp} + 4 \frac{3}{4} \text{ kp} + 6 \frac{1}{2} \text{ kp} = \left( 14 \frac{7}{8} \right)$$

$$5 \frac{4}{5} \text{ kg} + 3 \frac{1}{6} \text{ kg} + 5 \frac{1}{4} \text{ kg} + 1 \frac{1}{3} \text{ kg} = \left( 15 \frac{11}{20} \right)$$

$$10 \frac{1}{2} \text{ m} + 8 \frac{5}{12} \text{ m} + 7 \frac{5}{6} \text{ m} = \left( 26 \frac{3}{4} \right)$$

$$31 \frac{2}{3} \text{ m} + 18 \frac{11}{12} \text{ m} + 20 \frac{5}{6} \text{ m} = \left( 71 \frac{5}{12} \right)$$

$$3 \frac{2}{5} \text{ m} + 4 \frac{1}{6} \text{ m} + 5 \frac{4}{8} \text{ m} = \left( 13 \frac{1}{15} \right)$$

$$4 \frac{1}{2} \text{ cm} + 7 \frac{3}{5} \text{ cm} + 3 \frac{3}{4} \text{ cm} + 1 \frac{6}{10} \text{ m} = \left( 17 \frac{9}{20} \right)$$

$$2 \frac{2}{3} \text{ στροφές} + 4 \frac{1}{4} \text{ στρ.} + 7 \frac{2}{8} \text{ στρ.} + 5 \frac{8}{12} \text{ στρ.} = \left( 19 \frac{5}{6} \right)$$

$$\delta) 3 \frac{3}{8} \text{ km} + 4,8 \text{ km} = 6,125 \text{ km} + 5 \frac{2}{5} \text{ km} = \left( 8 \frac{7}{40}, 11 \frac{21}{40} \right)$$

$$3,45 \text{ kp} + 7 \frac{1}{2} \text{ kp} = 8 \frac{3}{5} \text{ kp} + 5,4 \text{ kp} = \left( 10 \frac{19}{20}, 14 \right)$$

$$9 \frac{1}{4} \text{ t.} + 0,8 \text{ t.} + 4 \frac{3}{7} \text{ t.} + 5,5 \text{ t.} = \left( 19 \frac{137}{140} \right)$$

2. Νά γίνουν οι αφαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = , \quad \frac{7}{10} - \frac{2}{5} = , \quad \frac{11}{12} - \frac{5}{6} = \left( \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{1}{12} \right)$$

$$\frac{19}{20} - \frac{3}{4} = , \quad 8 \frac{7}{15} - 6 = , \quad 15 \frac{7}{24} - 9 = \left( \frac{1}{5}, 2 \frac{7}{15}, 6 \frac{7}{24} \right)$$

$$11 \frac{5}{32} - \frac{9}{96} = , \quad 14 \frac{7}{12} - 10 \frac{4}{48} = , \quad 2 - \frac{1}{6} = \left( 11 \frac{1}{16}, 4 \frac{1}{2}, 1 \frac{5}{6} \right)$$

$$3 \frac{2}{5} - 1 \frac{5}{6} = , \quad 18 \frac{5}{6} - 12 \frac{8}{10} = , \quad 9 - \frac{2}{3} = \left( 1 \frac{17}{30}, 6 \frac{1}{30}, 8 \frac{1}{3} \right)$$

$$5 \frac{4}{5} - 4 \frac{5}{6} = , \quad 11 \frac{2}{9} - 5 \frac{1}{4} = , \quad 6 - 2 \frac{9}{12} = \left( \frac{29}{30}, 5 \frac{35}{36}, 3 \frac{1}{4} \right)$$

$$\beta) 5 \frac{1}{4} \text{ km} - 2 \frac{1}{8} \text{ km} = , 3 \frac{5}{8} \text{ km} - 2 \frac{5}{12} \text{ km} = \left( 3 \frac{1}{8} \cdot 1 \frac{5}{24} \right)$$

$$13 \frac{7}{8} \text{ kp} - 7 \frac{2}{3} \text{ kp} = , 8 \frac{2}{5} \text{ kp} - 1 \frac{3}{4} \text{ kp} = \left( 6 \frac{5}{24} \cdot 6 \frac{13}{20} \right)$$

$$\gamma) 17 \frac{1}{4} \text{ kg} - 5,7 \text{ kg} = , 35 \frac{1}{2} \text{ ton} - 12,75 \text{ ton} = \left( 6 \frac{11}{20} \cdot 22 \frac{3}{4} \right)$$

$$8,5 \text{ m} - 2 \frac{7}{8} \text{ m} = , 20,48 \text{ m} - 7 \frac{4}{5} \text{ m} = \left( 5 \frac{5}{8} \cdot 12 \frac{17}{25} \right)$$

3. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

$$\alpha) \left( 11 \frac{3}{4} - 5 \frac{1}{6} \right) + \left( 8 \frac{2}{3} - 3 \frac{1}{2} \right) = \left( 11 \frac{3}{4} \right)$$

$$\beta) \left( 6 \frac{1}{2} - 3 \frac{5}{8} \right) + \left( 9 \frac{5}{12} - 4 \frac{2}{6} \right) = \left( 7 \frac{23}{24} \right)$$

$$\gamma) \left( 8 \frac{1}{5} + 2 \frac{2}{3} \right) - \left( 5 \frac{3}{10} + 1 \frac{1}{2} \right) = \left( 4 \frac{1}{15} \right)$$

$$\delta) \left( 1 \frac{7}{8} + 5 \frac{3}{4} \right) - \left( 2 \frac{1}{4} + \frac{6}{7} \right) = \left( 4 \frac{29}{56} \right)$$

4. Δύο τεχνίτες, όταν ἐργάζονται μόνοι τους, ἀποδίδουν καθένας ἔργο ἴσον μὲ τὸ  $\frac{1}{15}$  τῆς ἡμερησίας παραγωγῆς ἐνὸς μικροῦ ἐργαστηρίου βιοτεχνίας. Ἐὰν ὁμως ἐργασθοῦν μαζί, ἡ ἀπόδοσί τους εἶναι ἴση μὲ τὸ  $\frac{1}{5}$ . Ζητεῖται τὸ ὄφελος ποὺ προκύπτει.

5. Ἡ ἀπόδοσι ἐνὸς ἐργάτη στὶς ἡμέρες μιᾶς ἐβδομάδος εἶναι:

$$1\eta \quad \text{ἡμέρα} \quad \frac{1}{5}$$

$$4\eta \quad \frac{3}{8}$$

$$2\alpha \quad \text{ἡμέρα} \quad \frac{1}{3}$$

$$5\eta \quad \frac{1}{5}$$

$$3\eta \quad \text{ἡμέρα} \quad \frac{1}{2}$$

$$6\eta \quad \text{Ἀργία}$$

$$7\eta \quad \text{Ἀργία}$$

Ζητοῦμε ποιά ἡμέρα ὁ ἐργάτης εἶχε τὴν μεγαλύτερη ἀπόδοσι. Ἀκόμη θέλομε νὰ ξέρωμε πόσο παραπάνω ἀπέδωσε τὴν ἡμέρα ἐκείνη (σχετικὰ μὲ τὶς ἄλλες τέσσερις ἡμέρες).

$$\left( \text{τὴν } 3\eta \text{ ἡμέρα, } \frac{3}{10} \text{ σχετικὰ μὲ τὴν } 1\eta \text{ καὶ } 5\eta, \right. \\ \left. \frac{1}{6} \text{ σχετικὰ μὲ τὴν } 2\eta, \frac{1}{8} \text{ σχετικὰ μὲ τὴν } 4\eta \right).$$

6. Δύο ομάδες εργατών εκτελούν το  $\frac{1}{3}$  και το  $\frac{1}{2}$  ενός έργου αντιστοίχως.

Πόσο μέρος του έργου μένει για την τρίτη ομάδα;

$$\left(\frac{1}{6}\right)$$

7. Για μία εργασία σιδηροκατασκευών χρησιμοποιήσαμε διάφορα σιδηρικά της αποθήκης μας βάρους  $4\frac{1}{4}$  kg,  $8\frac{5}{8}$  kg και  $6\frac{3}{4}$  kg. Στην αποθήκη μας έμεινε ακόμη υπόλοιπο  $3\frac{2}{8}$  kg. Πόσο ήταν το βάρος του αρχικού ποσού σιδηρικών της αποθήκης μας;

$$\left(22\frac{7}{8} \text{ kg}\right)$$

8. Κλωστοϋφαντουργική μηχανή κατασκεύασε την πρώτη ώρα  $28\frac{3}{4}$  m ενός υφάσματος, την δεύτερη ώρα  $30\frac{1}{2}$  m, την τρίτη ώρα 29,75 m και την τέταρτη ώρα  $2\frac{3}{4}$  m περισσότερα από την πρώτη ώρα. Πόσα μέτρα κατασκεύασε συνολικά τις 4 αυτές ώρες;

$$(120,50 \text{ m})$$

9. Σε φορτηγό αυτοκίνητο παραδόθηκαν για μεταφορά 4 κιβώτια. Από αυτά το πρώτο ζυγίζει  $145\frac{2}{5}$  kg, το δεύτερο  $10\frac{1}{8}$  kg περισσότερο του πρώτου και  $15\frac{5}{8}$  kg λιγότερο του τρίτου.

Πόσο ζυγίζει κάθε κιβώτιο, όταν ξέρουμε πώς το συνολικό τους βάρος είναι 630 kg;

$$\left(145\frac{2}{5}, 155\frac{21}{40}, 171\frac{3}{20}, 157\frac{37}{40}\right)$$

10. Οι στροφές που παίρνει μία μηχανή τυλίγοντας συρματόσχοινο είναι οι ακόλουθες:

1η φάση :  $12\frac{3}{5}$  στροφές.

2η φάση :  $2\frac{2}{3}$  στροφές λιγότερες από την 1η.

3η φάση :  $2\frac{5}{9}$  περισσότερες από την 1η.

Κατά πόσες στροφές στράφηκε ο άξων της μηχανής;

$$\left(37\frac{31}{45}\right)$$



Ἀπὸ τὶς παραγράφους  $4 \cdot 10$  ἕως  $4 \cdot 16$ .

1. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

$$\alpha) \quad \frac{1}{3} \times 5 = \quad \frac{2}{3} \times 8 = \quad \frac{7}{12} \times 4 = \quad \frac{5}{12} \times 6 =$$

$$\left( 1 \frac{2}{3}, 5 \frac{1}{3}, 2 \frac{1}{3}, 2 \frac{1}{2} \right)$$

$$2 \frac{1}{3} \times 5 = \quad 4 \frac{2}{3} \times 7 = \quad 5 \frac{5}{6} \times 2 = \quad 3 \frac{1}{12} \times 4 =$$

$$\left( 11 \frac{2}{3}, 32 \frac{2}{3}, 11 \frac{2}{3}, 12 \frac{1}{3} \right)$$

$$\beta) \quad \frac{1}{2} : 3 = \quad \frac{1}{3} : 4 = \quad \frac{1}{6} : 5 =$$

$$\left( \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30} \right)$$

$$\frac{1}{9} : 6 = \quad \frac{6}{7} : 7 = \quad \frac{11}{12} : 11 =$$

$$\left( \frac{1}{54}, \frac{6}{49}, \frac{1}{12} \right)$$

$$\frac{8}{9} : 4 = \quad \frac{12}{17} : 5 = \quad 4 \frac{4}{7} : 16 =$$

$$\left( \frac{2}{9}, \frac{12}{85}, \frac{2}{7} \right)$$

$$6 \frac{3}{5} : 11 = \quad 9 \frac{1}{2} : 5 = \quad 3 \frac{5}{9} : 16 =$$

$$\left( \frac{3}{5}, 1 \frac{9}{10}, \frac{2}{9} \right)$$

$$\frac{7}{8} : 14 = \quad \frac{5}{11} : 10 = \quad 6 \frac{3}{7} : 20 =$$

$$\left( \frac{1}{16}, \frac{1}{22}, \frac{9}{28} \right)$$

2. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα\*:

$$\alpha) \quad \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \times 6 = \quad \left( \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right) \times 5 = \quad \left( 7, 5 \frac{1}{2} \right)$$

\* Δὲν πρέπει νὰ ξεχνοῦμε ὅτι οἱ πράξεις ποὺ σημειώνονται μέσα σὲ παρένθεσι δηλώνουν ὅτι ἔχουν γίνῃ καὶ ὅτι ἡ παρένθεσι φανερώνει τὸ ἐξαγόμενό τους.

$$\begin{array}{lll} \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{5}\right) \times 70 = & , \left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4}\right) \times 6 = & \left(68, \quad 33\frac{1}{2}\right) \\ \beta) \left(3 - \frac{1}{3}\right) \times 2 = & , \left(5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}\right) \times 7 = & \left(5\frac{1}{3}, \quad 22\frac{1}{6}\right) \\ \left(8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{6}\right) \times 4 = & , \left(7\frac{1}{12} - 5\frac{1}{2}\right) \times 17 = & \left(18\frac{2}{3}, \quad 26\frac{11}{12}\right) \\ \gamma) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) : 7 = & , \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) : 5 = & \left(\frac{1}{6}, \quad \frac{7}{40}\right) \\ \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) : 11 = & , \left(5\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4}\right) : 3 = & \left(\frac{1}{10}, \quad 1\frac{1}{36}\right) \\ \left(4\frac{1}{5} - 1\frac{3}{4}\right) : 7 = & , \left(1\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) : 8 = & \left(\frac{7}{20}, \quad \frac{2}{15}\right) \end{array}$$

3. Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & 5 \times \frac{1}{3} = \quad , \quad 11 \times \frac{5}{6} = \quad , \quad 13 \times \frac{7}{12} = \\ & \qquad\qquad\qquad \left( 1 \frac{2}{3}, 9 \frac{1}{6}, 7 \frac{7}{12} \right) \\ & 8 \times \frac{1}{12} = \quad , \quad 7 \times \frac{2}{6} = \quad , \quad 17 \times \frac{1}{3} = \\ & \qquad\qquad\qquad \left( \frac{2}{3}, 2 \frac{1}{3}, 5 \frac{2}{3} \right) \\ \beta) \quad & 27 \times \frac{2}{3} = \quad , \quad 45 \times \frac{4}{9} = \quad , \quad 22 \times \frac{5}{11} = \\ & \qquad\qquad\qquad (18, 20, 10) \\ & 18 \times \frac{1}{9} = \quad , \quad 36 \times \frac{5}{72} = \quad , \quad 9 \times \frac{5}{81} = \\ & \qquad\qquad\qquad \left( 2, 2 \frac{1}{2}, \frac{5}{9} \right) \\ \gamma) \quad & 2 \frac{1}{3} \times 5 = \quad , \quad 5 \frac{5}{6} \times 12 = \quad , \quad 6 \frac{7}{12} \times 5 = \\ & \qquad\qquad\qquad \left( 11 \frac{2}{3}, 70, 32 \frac{11}{12} \right) \\ & 2 \frac{11}{12} \times 6 = \quad , \quad 4 \frac{2}{3} \times 7 = \quad , \quad 4 \frac{5}{12} \times 7 = \\ & \qquad\qquad\qquad \left( 17 \frac{1}{2}, 32 \frac{2}{3}, 30 \frac{11}{12} \right) \end{aligned}$$



$$\delta) \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \quad , \quad \frac{4}{5} \times \frac{15}{16} = \quad , \quad \frac{14}{25} \times \frac{5}{21} =$$

$$\left( \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{15} \right)$$

$$\frac{42}{50} \times \frac{25}{21} = \quad , \quad \frac{36}{38} \times \frac{19}{12} = \quad , \quad \frac{91}{39} \times \frac{13}{21} =$$

$$\left( 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{4}{9} \right)$$

$$\epsilon) 3,6 \times \frac{5}{12} = \quad , \quad 4,8 \times \frac{7}{24} = \quad , \quad 1,2 \times \frac{3}{4} =$$

$$\left( 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{5}, \frac{9}{10} \right)$$

$$0,4 \times \frac{1}{4} = \quad , \quad 3,5 \times \frac{5}{7} = \quad , \quad 6,9 \times \frac{8}{23} =$$

$$\left( \frac{1}{10}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{5} \right)$$

$$\sigma\tau) 2\frac{1}{3} \times \frac{1}{12} = \quad , \quad 3\frac{2}{5} \times \frac{4}{9} = \quad , \quad 3\frac{2}{7} \times \frac{7}{10} =$$

$$\left( \frac{7}{36}, 1\frac{23}{45}, 2\frac{3}{10} \right)$$

$$4\frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \quad , \quad 2\frac{5}{9} \times \frac{5}{6} = \quad , \quad 1\frac{5}{8} \times \frac{2}{7} =$$

$$\left( 3\frac{9}{32}, 2\frac{7}{54}, \frac{13}{28} \right)$$

$$\zeta) 3\frac{1}{4} \times 1\frac{2}{5} = \quad , \quad 4\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{4} = \quad , \quad 3\frac{3}{8} \times 1\frac{1}{9} =$$

$$\left( 4\frac{11}{20}, 9\frac{3}{4}, 3\frac{3}{4} \right)$$

$$4\frac{2}{7} \times 2\frac{1}{5} = \quad , \quad 5\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{8} = \quad , \quad 7\frac{1}{2} \times 2\frac{6}{25} =$$

$$\left( 9\frac{3}{7}, 22, 16\frac{4}{5} \right)$$

$$\eta) \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) \times \frac{5}{6} = \quad \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) \times \frac{2}{5} = \quad \left( 1\frac{1}{18}, \frac{11}{30} \right)$$

$$\left( \frac{7}{9} - \frac{1}{6} \right) \times \frac{3}{11} = \quad \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) \times \frac{12}{13} = \quad \left( \frac{1}{6}, \frac{3}{26} \right)$$

$$\left(3\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}\right) \times 1\frac{1}{5} = \left(2\frac{5}{8} + 1\frac{2}{3}\right) \times 2\frac{2}{5} = \left(7\frac{1}{10}, 4\frac{7}{24}\right)$$

$$\left(4\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}\right) \times 1\frac{3}{5} = \left(6\frac{3}{5} - 3\frac{1}{6}\right) \times 2\frac{1}{4} = \left(4\frac{8}{15}, 7\frac{29}{40}\right)$$

$$\theta) \quad 7\frac{1}{5} \times 0,4 = 2,25 \times 1\frac{3}{5} = \left(2\frac{22}{25}, 3\frac{3}{5}\right)$$

$$8,125 \times 2\frac{1}{2} = 5\frac{3}{4} \times 0,64 = \left(20\frac{5}{16}, 3\frac{17}{25}\right)$$

4. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

$$\alpha) \quad 4 : \frac{2}{3} = \quad 1 : \frac{1}{6} = \quad 24 : \frac{3}{5} = \quad (6, 6, 40)$$

$$12 : \frac{4}{9} = \quad 15 : \frac{6}{11} = \quad 11 : \frac{3}{4} = \quad \left(27, 27\frac{1}{2}, 14\frac{2}{3}\right)$$

$$13 : \frac{3}{10} = \quad 18 : \frac{2}{7} = \quad 7 : \frac{3}{8} = \quad \left(43\frac{1}{3}, 63, 18\frac{2}{3}\right)$$

$$\beta) \quad \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \quad \frac{1}{12} : \frac{1}{4} = \quad \frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \quad \left(1\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 6\right)$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{12} = \quad 2\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \quad 3\frac{3}{5} : \frac{7}{9} = \quad \left(3, 7\frac{1}{2}, 4\frac{22}{35}\right)$$

$$4\frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \quad 5\frac{5}{8} : \frac{5}{12} = \quad 2\frac{1}{2} : 1\frac{7}{8} = \quad \left(10\frac{5}{12}, 13\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}\right)$$

$$3 \frac{1}{3} : 5 \frac{5}{6} =$$

$$4 \frac{3}{8} : 1 \frac{1}{4} =$$

$$6 \frac{1}{4} : 1 \frac{5}{8} =$$

$$\left( \frac{4}{7}, 3 \frac{1}{2}, 3 \frac{11}{13} \right)$$

$$5 \frac{1}{7} : \frac{9}{14} =$$

$$8 \frac{1}{3} : 2 \frac{11}{12}$$

$$8 \frac{3}{4} : 4 \frac{1}{12} =$$

$$\left( 8, 2 \frac{6}{7}, 2 \frac{1}{7} \right)$$

$$\gamma) \left( \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) : \frac{1}{3} =$$

$$\left( 2 \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \right) : \frac{7}{10} =$$

$$\left( 3 \frac{3}{14}, 2 \frac{10}{21} \right)$$

$$\left( 3 \frac{3}{4} + 2 \frac{1}{6} \right) : 2 \frac{1}{3} =$$

$$\left( \frac{4}{5} + \frac{3}{8} \right) \left( \frac{3}{10} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$\left( 2 \frac{15}{28}, 23 \frac{1}{2} \right)$$

$$\left( \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \right) : \left( \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \right) =$$

$$\left( \frac{11}{12} - \frac{3}{8} \right) : \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$\left( 1 \frac{15}{23}, 1 \frac{3}{10} \right)$$

$$\delta) 0,625 : \frac{3}{10} =$$

$$0,84 : \frac{7}{8} =$$

$$\left( 2 \frac{1}{12}, \frac{24}{25} \right)$$

$$0,32 : 1 \frac{3}{5} =$$

$$2,75 : 3 \frac{3}{4} =$$

$$\left( \frac{1}{5}, \frac{11}{15} \right)$$

5. Να εύρεθοῦν οἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀριθμῶν:

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 8 & 3 & 27 & 45 & 3,2 \\ 6,5 & 0,275 & 0,025 & \frac{1}{5} & \frac{3}{8} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{25}{36} & 6 \frac{1}{5} & 3 \frac{2}{3} & 5 \frac{9}{12} \end{array}$$

6. Ἐργάτης, ποὺ δουλεύει μόνος του, τελειώνει κάθε ἡμέρα τὸ  $\frac{1}{25}$  ἐνὸς ἔργου. Ὄταν οἱ ἐργάτες γίνουν 5, τί μέρος τοῦ ἔργου θὰ τελειώσουν σὲ 3 ἡμέρες;

$$\left( \frac{3}{5} \right)$$

7. Ἡ ἀπόδοσι ἐνὸς ἐργάτη ἡμερησίως εἶναι ἴση μὲ τὸ  $\frac{1}{45}$  τοῦ συνολικοῦ

έργου. 5 εργάτες με την ίδια απόδοσι σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν το έργο;  
(σε 9 ημέρες)

8. 'Η απόστασι μεταξύ δύο πόλεων Α και Β είναι 675 km. Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν το ένα από την πόλι Α και το άλλο από την πόλι Β για να συναντηθούν. Όταν το πρώτο έχει κάνει τα  $\frac{4}{9}$  της διαδρομής, το δεύτερο έχει κάνει τα  $\frac{2}{5}$ . Πόσο απέχουν την στιγμή αυτή μεταξύ τους;  
(105 km)

9. Πέντε εργάτες με ίση απόδοσι ανέλαβαν να τελειώσουν ένα έργο, που είχε κατασκευασθῇ κατά τα  $\frac{4}{9}$  αυτού. Τί μέρος του έργου απομένει για τὸν κάθε εργάτη χωριστά;  
 $\left(\frac{1}{9}\right)$

10. 'Η άμοιβή ενός τεχνίτη είναι ίση με την άμοιβή τριῶν βοηθῶν. Για τὴν κατασκευὴ ενός έργου ἐργάσθηκαν 5 τεχνίτες καὶ 9 βοηθοί. Πόσο μέρος τῆς συνολικῆς άμοιβῆς ἀντιστοιχεῖ σὲ κάθε τεχνίτη καὶ πόσο σὲ κάθε βοηθό;  
 $\left(\text{τεχνίτης } \frac{1}{8}, \text{ βοηθός } \frac{1}{24}\right)$

11. Μηχανή που περιστρέφεται με 428  $\frac{1}{3}$  στροφές το λεπτό, πόσες στροφές θα κάνει σε μία ὥρα; (1 ὥρα = 60 πρώτα λεπτά).  
(25 700 στρ/η)

12. Όμᾶς εργατῶν τελείωσε τὰ  $\frac{4}{10}$  ενός έργου μέσα σὲ 8 ἡμέρες. Πόσες ἡμέρες ἀκόμα χρειάζεται, γιὰ νὰ τελειώσῃ τὸ έργο;  
(12 ἡμέρες)

13. Έργάτης ἀνέλαβε νὰ κατασκευάσῃ 6000 μικρὰ λαμάκια. Τὸ μηχανήμα πὺ διαθέτει παράγει 200 κομμάτια τὴν ὥρα. Τὴν πρώτη ἡμέρα ὁ ἐργάτης ἐργάσθηκε 5  $\frac{1}{2}$  ὥρες, τὴν δευτέρα 8  $\frac{3}{4}$  ὥρες καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα 6 ὥρες. Πόσες ὥρες θὰ πρέπει νὰ ἐργασθῇ τὴν τετάρτη ἡμέρα, γιὰ νὰ τελειώσῃ τὴν δουλειά του;  
 $\left(9 \frac{3}{4} \text{ ὥρες}\right)$

14. 'Η παραγωγή ἐργοστασίου αὐξάνει τὸν μῆνα με τὸν ἐξῆς ρυθμό: Κατὰ τὸν δεύτερο μῆνα αὐξάνει κατὰ τὸ  $\frac{1}{5}$  τῆς παραγωγῆς τοῦ πρώτου μηνός, τὸν τρίτο μῆνα κατὰ τὸ  $\frac{1}{6}$  τοῦ δευτέρου καὶ τὸν τέταρτο μῆνα κατὰ τὸ  $\frac{1}{21}$  τοῦ τρίτου μηνός. Έν συνεχείᾳ καὶ μέχρι τὸ τέλος τοῦ χρόνου ἡ παραγωγή διατηρεῖται σταθερὴ εἰς τὸ ὕψος τοῦ τετάρτου μηνός.  
Πόση εἶναι ἡ παραγωγή κάθε μηνός, ἀν παράγονται ἐτησίως 252 000 κομμάτια;

(1ος μὴν. = 15 000, 2ος μὴν. = 18 000  
3ος μὴν. = 21 000, ὅποιοι μὴν. = 22 000)



15. Κατὰ τὸ πρῶτο στάδιο ἐπεξεργασίας τῆς πρώτης ὕλης εἶχαμε φύρα ἴση μὲ τὸ  $\frac{1}{12}$  αὐτῆς. Στὸ δεύτερο στάδιο τῆς ἐπεξεργασίας ἡ φύρα ἦταν ἴση μὲ τὰ  $\frac{4}{25}$  τῆς ὑπόλοιπης πρώτης ὕλης. Ζητοῦμε νὰ δοῦμε πόση ἦταν ἡ φύρα στὰ 75 κομμάτια λαμαρίνας ποὺ χρησιμοποιήσαμε.  $\left(17 \frac{1}{4} \text{ κομμάτια}\right)$

16. Τὰ  $\frac{5}{8}$  τοῦ μήκους ράβδου ἰσοῦνται μὲ  $10 \frac{3}{4}$  m. Ζητοῦμε τὸ συνολικὸ μήκος τῆς ράβδου.  $(17,20 \text{ m})$

17. Ράβδο, ποὺ ἔχει μήκος  $63 \frac{6}{8}$  m, πρόκειται νὰ τὴν κόψουμε σὲ ἴσα κομμάτια, ποὺ τὸ καθένα τους νὰ ἔχη μήκος  $4 \frac{1}{4}$  in. Πόσα τέτοια κομμάτια θὰ πάρωμε;  $(15)$

18. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

$$\alpha) \quad \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \quad 1,25 \times \frac{2}{5} \times 4 \frac{2}{7} = \quad \left(\frac{1}{6}, 2 \frac{1}{7}\right)$$

$$3 \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \times 5 = \quad 8 \times 2 \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{5} = \quad \left(3, 2 \frac{3}{4}\right)$$

$$0,75 \times 1 \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{5}{7} = \quad \left(1 \frac{3}{7}\right)$$

$$\beta) \quad \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{18} + \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{39} - \left(\frac{4}{9} - \frac{5}{12}\right) \times 1 \frac{1}{5} = \quad \left(\frac{2}{15}\right)$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \left(\frac{7}{8} - \frac{2}{3}\right) \times 1 \frac{1}{5} = \quad \left(14 \frac{1}{3}\right)$$

19. Ἐργοστάσιο, γιὰ τὴν ἀντιμετώπισι τῶν ἐκτάκτων ἀναγκῶν αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς του, ἀπασχόλησε μὲ ὑπερωρίες τὸν πρῶτο μῆνα τὰ  $\frac{4}{5}$  τοῦ προσωπικοῦ του, τὸν δεύτερο μῆνα τὰ  $\frac{5}{8}$  τοῦ προηγουμένου μηνὸς καὶ τὸν τρίτο μῆνα τὸ  $\frac{1}{12}$  τοῦ δευτέρου μηνὸς. Ἐὰν στὸ ἐργοστάσιο ἐργάζωνται συνολικὰ 600 ἄτομα, πόσα ἀπὸ αὐτὰ ἐργάστηκαν μὲ ὑπερωρίες τὸν τελευταῖο μῆνα;  $(25 \text{ ἄτομα})$

Άπο την παράγραφο 4·17.

1. Νά λυθούν οί άσκήσεις 12 καί 16 (των παραγράφων 4·10 έως 4·17) με την μέθοδο της άναγωγής στην μονάδα.

2. Νά εύρεθῇ άριθμός, του οποίου τὰ  $\frac{2}{5}$  καί τὰ  $\frac{3}{4}$  μαζί νά δίνουν τον άριθμό 230. (200)

3. Όταν από δοχείο Α άδειάσωμε τὰ  $\frac{3}{8}$  του περιεχομένου του σε άλλο δοχείο Β, τὸ Β γεμίζει κατὰ τὰ  $\frac{3}{4}$  του ύψους του. Ποιό μέρος του περιεχομένου του δοχείου πρέπει νά άδειάσωμε στο Β, γιά νά γεμίση;  $\left(\frac{1}{2}\right)$

4. Άπό σωλήνα κόψαμε ένα κομμάτι ίσο με τὰ  $\frac{3}{12}$  του όλικού του μήκους καί αυτό που έμεινε έχει τώρα μήκος  $48\frac{3}{4}$  in. Πόσο ήταν τὸ άρχικό μήκος του σωλήνος; (65 in)

5. Έμπόρευμα άξίας 3645 δραχμῶν άφισε κατὰ την πώλησί του κέρδος ίσο με τὸ  $\frac{1}{5}$  τῆς άξίας του. Πόσο έπωλήθη; (4374 δρχ.)

6. Η παραγωγή εργοστασίου αύξήθηκε την τρέχουσα έβδομάδα κατὰ  $\frac{5}{12}$  τῆς παραγωγῆς τῆς προηγούμενης έβδομάδος. Ζητοῦμε την παραγωγή τῆς προηγούμενης έβδομάδος, όταν ξέρωμε πῶς ἡ παραγωγή την τρέχουσα έβδομάδα ήταν 6324 κομμάτια. (4464 κομ.)

7. Δύο εργάτες κέρδισαν συνολικά 5406 δραχμές. Έάν τὸ μερίδιο του πρώτου είναι μεγαλύτερος κατὰ τὰ  $\frac{5}{24}$  του μεριδίου του δευτέρου, πόσο έλαβε ὁ καθένας; ( $a = 2958$ ,  $\beta = 2448$ )

8. Κατὰ την κατασκευή προϊόντος χάνεται σε φύρα από την πρώτη ύλη τὸ  $\frac{1}{15}$ . Τὰ έργατικά κοστίζουν συνολικά 3000 δραχμές. Τὸ προϊόν πωλεῖται 24 000 δραχμές, από τις ὁποῖες τὰ  $\frac{3}{8}$  είναι κέρδος. Ζητοῦμε την άξία τῆς πρώτης ύλης, που περιέχεται στο προϊόν. (11 200 δρχ.)

9. Σε μία τάξη οί παρόντες μαθητὲς είναι τὰ  $\frac{8}{9}$  των ὁσων έχουν γραφή. Άπό αυτούς τὸ  $\frac{1}{4}$  είναι κορίτσια καί τὰ  $\frac{3}{4}$  άγόρια. Έάν οί άπόντες μαθητὲς

είναι 4, πόσα είναι τὰ ἀγόρια καὶ πόσα τὰ κορίτσια τὴν ἡμέρα αὐτή;  
 (ἀγόρια = 24, κορίτσια = 8)

10. Σχεδιάσετε μία ὀρθή γωνία. Μετὰ χωρίσετε τὴν σὲ δύο γωνίες τέτοιες, ὥστε ἡ μία νὰ εἶναι τριπλασία ἀπὸ τὴν ἄλλη. Ἀφοῦ διχοτομήσετε τὴν μεγαλύτερη, νὰ ἐκφράσετε σὲ κλάσμα τῆς ὀρθῆς τὴν νέα γωνία.

$$\left(\frac{3}{8} \text{ ὀρθῆς}\right)$$

11. Κόβοντας τὸ εὐθύγραμμο τμήμα AB κατὰ τὰ  $\frac{3}{5}$  τοῦ μήκους του ἀπομένουν 46 cm. Πόσο εἶναι τὸ τμήμα ποὺ κόψαμε;  
 (115 cm)

12. Ἄν πάρουμε τὰ  $\frac{4}{5}$  τῶν  $\frac{5}{9}$  μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, ποιά γωνία θὰ ἔχωμε;  
 α) Σὲ μέρη ὀρθῆς. β) Σὲ μοῖρες.

$$\left(a = \frac{4}{9}, \beta = 40^\circ\right)$$

13. Νὰ εὐρεθῇ ἡ παραπληρωματικὴ γωνία μιᾶς γωνίας, τῆς ὁποίας τὸ μέτρο εἶναι τὸ  $\frac{1}{2}$  τῶν  $\frac{3}{4}$  τῆς ὀρθῆς.  
 ( $146^\circ 15' \eta \text{ } 1 \frac{5}{8} \text{ ὀρθῆς}$ )

14. Δύο ἐργάτες ἀνέλαβαν ἓνα ἔργο. Ὁ πρῶτος τελειώνει τὸ ἔργο μόνος του σὲ 5 ἡμέρες, ἐνῶ ὁ δεύτερος χρειάζεται 6 ἡμέρες. Τὴν πρώτη ἡμέρα ἐργάστηκαν μαζί, τὴν δευτέρα ἡμέρα ἐργάστηκε μόνος ὁ πρῶτος, ἐνῶ τὴν τρίτη ἡμέρα ἐργάστηκαν καὶ οἱ δύο καὶ προσέλαβαν καὶ βοηθό. Τί μέρος τοῦ ἔργου κατασκεύασε ὁ βοηθός;  
 ( $\text{τὸ } \frac{1}{15} \text{ τοῦ ἔργου}$ )

15. Κατὰ τὴν κατασκευὴ ἑνὸς ἔργου τὴν πρώτη ἡμέρα κατασκευάστηκε τὸ  $\frac{1}{3}$  του, τὴν δευτέρα τὰ  $\frac{4}{5}$  τῆς πρώτης ἡμέρας καὶ τὴν τρίτη τὸ  $\frac{1}{2}$  τῶν δύο προηγούμενων. Τί μέρος τοῦ ἔργου ἀπομένει ἀκόμα νὰ κατασκευασθῇ;  
 ( $\frac{1}{10}$ )

16. Ἐργάτης τελειώνει ἓνα ἔργο σὲ 6 ἡμέρες, ἐνῶ ὁ βοηθός του χρειάζεται 30 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσουν τὸ ἔργο, ἂν ἐργαστοῦν καὶ οἱ δύο μαζί;  
 (5 ἡμέρες)

17. Κατὰ τὴν διαλογὴ μιᾶς παραγωγῆς ἐπιτρέπομε νὰ ὑπάρχουν σκάρτα μέχρι τὸ  $\frac{1}{50}$  τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ κάθε παρτίδας. Κατὰ τὸν ἔλεγχο στὶς 4 παρακάτω παρτίδες εὐρήκαμε:

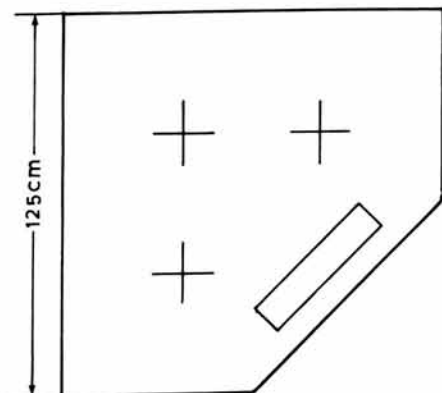
|                |           |       |    |
|----------------|-----------|-------|----|
| 1η παρτίδα επί | 1500 τεμ. | σκάρα | 12 |
| 2η » »         | 800 »     | »     | 15 |
| 3η » »         | 900 »     | »     | 20 |
| 4η » »         | 1800 »    | »     | 35 |

Ποιά η ποιές παρτίδες πρέπει να απορριφθούν;

18. Η εξωτερική διάμετρος τροχαλίας είναι  $5 \frac{1}{4}$  in. Το τόξο έπαφής του Ιμάντος είναι  $160^\circ$ . Ζητούμε το μήκος σε mm του Ιμάντος, ό όποιος έφάπτεται στην τροχαλία (ή άκρίβεια του εξαγομένου να περιορισθί σε mm). (186 mm)

Από τίς παραγράφους 4.18 και 4.19.

1. Να σχεδιάσετε υπό κλίμακα 1 : 100 την αίθουσα τής τάξεώς σας.
2. Να σχεδιάσετε μία τυχαία τεθλασμένη γραμμή, έστω τήν ΑΒΓΔΕ. Κατόπιν, μέ τήν παραδοχή ότι σχεδιάσθηκε υπό κλίμακα 1 : 5, να υπολογίσετε τό μήκος τής.
3. Μήκος ΑΒ = 15 m τό σχεδιάζομε σε δύο διαφορετικές θέσεις υπό κλίμακες 1 : 2,5 και 1 : 2.  
Σέ ποιά από τίς δύο θέσεις τό σχέδιο είναι μεγαλύτερο;
4. Μήκος 0,75 m παριστάνεται έπάνω στό σχέδιο μέ μήκος 25 mm. Ποιά είναι ή κλίμαξ κατασκευής του; (1 : 30)
5. Οί διαστάσεις δωματίου είναι 3m × 5,5m. Τό χαρτί πού διαθέτομε έχει διαστάσεις 15 cm × 22 cm. Να σχεδιάσετε τό δωμάτιο πάνω στό χαρτί υπό κλίμακα τής έκλογής σας.



Σχ. 4.20 β.

6. Πάνω στό γενικό σχέδιο οικόπέδου μέ κλίμακα 1 : 500, μέ τί διαστάσεις σχεδίου θα σχεδιάσωμε ένα κτίριο έργοστασίου 75 m × 200 m;
7. Τό σχήμα 4.20 β είναι σχεδιασμένο υπό κλίμακα. Προσδιορίσετε τήν κλί-

μακα καὶ τὶς ὑπόλοιπες διαστάσεις. Κατόπιν σχεδιάσετε στὴν θέσι τῶν μικρῶν σταυρῶν ὅπες μὲ διάμετρο 20 cm.

8. Σχεδιάσετε ὑπὸ κλίμακα τῆς ἐκλογῆς σας μῆκος 150 km. (Τὸ σχέδιο πρέπει νὰ χωρέσῃ στὴν σελίδα τοῦ τετραδίου σας).

9. Ἐνα αὐτοκίνητο τρέχει 65 km/h. Νὰ ἀπεικονισθῇ γραφικῶς, πῶς μεταβάλλεται τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητο, ὅταν μεταβάλλεται ἡ χρονικὴ διάρκεια τῆς κινήσεώς του. Μετὰ νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὴν γραφικὴ ἀπεικόνισι τὸ διάστημα, ποὺ θὰ ἔχη διανύσει τὸ αὐτοκίνητο μετὰ ἀπὸ 5,5 ὥρες.

10. Ἐχομε ἓνα κιβώτιο μὲ σιδερένιες σφαῖρες. Γιὰ τὶς 30 ἀπὸ αὐτὲς εὐρήκαμε βάρος 75 kg. Δώσετε τὴν γραφικὴ ἀπεικόνισι βάρους καὶ ἀριθμοῦ σιδερένιων σφαιρῶν.

11. Δίνεται ὁ παρακάτω πίναξ:

Μῆκος σὲ m: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 10.

Βάρος σὲ kg.: 1,6 3,2 4,8 5,6 6,2 6,5 6,8 7,1 7,4 καὶ 7,7.

Χαράξτε τὴν γραφικὴ ἀπεικόνισι αὐτῆς τῆς μεταβολῆς.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5

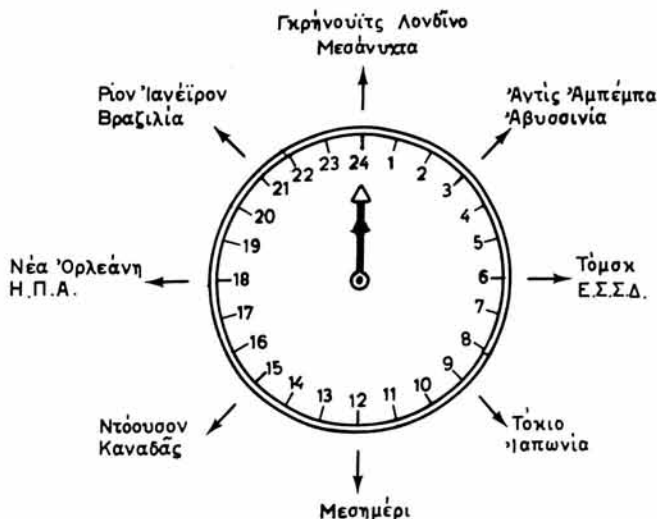
### ΟΙ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

#### 5.1 'Ο συμμιγής αριθμός.

Στὸ προηγούμενο κεφάλαιο εἶδαμε ὅτι οἱ γωνίες καὶ τὰ τόξα μετροῦνται σὲ μοῖρες, πρῶτα λεπτὰ καὶ δεύτερα λεπτὰ, ποὺ σημαίνει ὅτι, γιὰ νὰ ἐκφράσωμε τὸ μέτρο μιᾶς γωνίας, χρειζόμαστε περισσότερους ἀπὸ ἓνα ἀριθμοῦ. Ἔτσι λέμε:  $35^{\circ} 25' 37''$  ἢ  $126^{\circ} 3'$  κ.λπ. Ἕνας τέτοιος ἀριθμὸς ποῦ, γιὰ νὰ σχηματισθῇ, χρειάζεται ἀριθμοὺς ἀπὸ διάφορες μονάδες, οἱ ὁποῖες δὲν ἀνήκουν στὸ δεκαδικὸ σύστημα, λέγεται *συνμιγής ἀριθμός*.

#### 5.2 Ἡ μέτρησι τοῦ χρόνου.

Ὅπως ξέρομε, μία *ἡμέρα* εἶναι ὁ *χρόνος* ἢ σωστότερα ἡ *χρονικὴ*

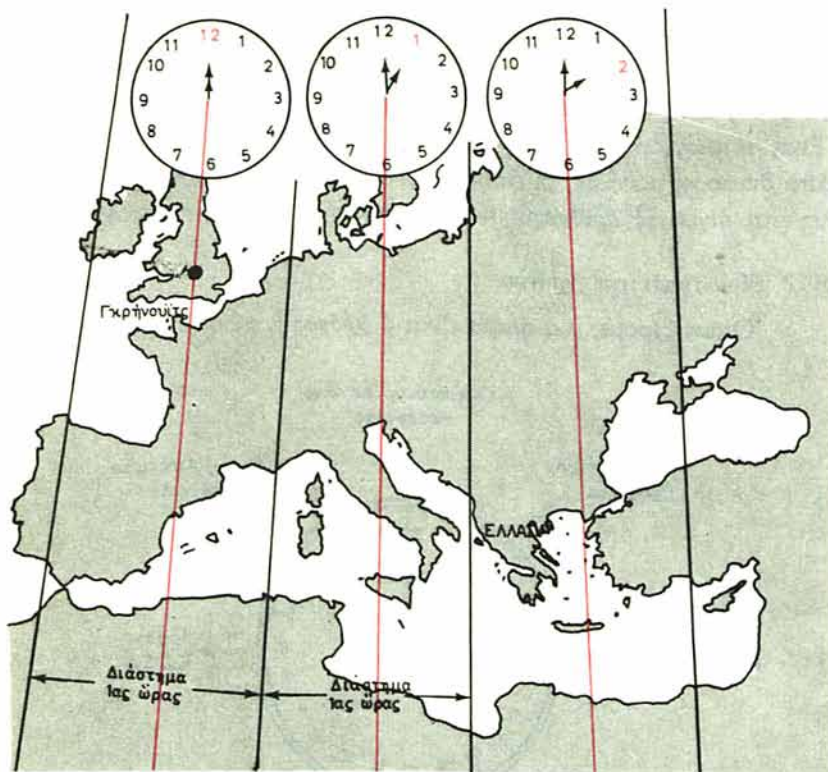


Σχ. 5.2 α.

Ἀπεικόνισι τῆς ὥρας, ποὺ ἔχουν διάφορα μέρη τῆς γῆς, ὅταν στὸ Λονδῖνο εἶναι μεσάνυχτα (καὶ σχ. 5.2 β).

περίοδος ή ακόμη τὸ *χρονικὸ διάστημα*, πού χρειάζεται ἡ γῆ, γιὰ νὰ κάνη μία ὁλόκληρη στροφή γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονά της\*.

Τὴν ἡμέρα τὴν χωρίσαμε σὲ 24 ἴσα μέρη, τὶς *ῥες* (σύμβολο *h*) (σχ. 5·2 α). Κάθε ῥα ἀποτελεῖται ἀπὸ 60 *πρῶτα λεπτά* (σύμβολο *min*), ἐνῶ κάθε πρῶτο λεπτό ἀποτελεῖται ἀπὸ 60 *δεύτερα λεπτά* (σύμβολο *s* ἢ *sec*)\*\*. Τὴν μέτρησι τῶν ῥῶν μιᾶς ἡμέρας τὴν παρακολουθοῦμε μὲ τὸ ὥρολόγιον (σχ. 5·2 γ). Σήμερα κατασκευάζονται

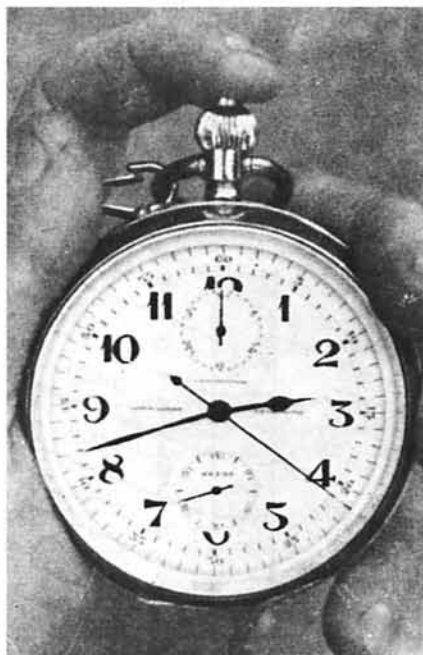


Σχ. 5·2 β.

\* Ἡ γῆ, ὡς γνωστόν, στρέφεται γύρω ἀπὸ νοτιὸν ἄξονα, πού περνᾷ ἀπὸ τὸ Βόρειο καὶ τὸ Νότιο Πόλο.

\*\* Ὑπάρχει σὰν συμβολισμός γιὰ τὸ λεπτό ὁ τόνος (') καὶ γιὰ τὸ δευτερόλεπτο οἱ δύο τόνοι (''), πού δὲν θὰ τὸν χρησιμοποιήσωμε, ἐπειδὴ μὲ τοὺς τόνους ἐκφράζομε τὰ πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά τῆς μοίρας ἢ τοὺς πόδες καὶ τὶς ἴντσες.





Σχ. 5.2 γ.

ώρολόγια, τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ μᾶς δώσουν τὴν ὥρα καὶ τὰ πρῶτα λεπτὰ καθὼς καὶ τὸν μῆνα καὶ τὴν ἡμέρα τῆς ἐβδομάδος. Ἐτσι στὸ σχῆμα 5.2 δ, τὸ ώρολόγιον δείχνει ὅτι ἡ ὥρα εἶναι 20<sup>h</sup> 34' (δηλαδὴ 8 h καὶ 34' ἀπόγευμα) τῆς Δευτέρας 18 Αὐγούστου.



Σχ. 5.2 δ.

Γιὰ τὶς υποδιαιρέσεις τῆς ἡμέρας ἔχομε:

$$1 \text{ ἡμ.} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min} = 86\,400 \text{ s.}$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s.}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s.}$$

Γιὰ μεγαλύτερες χρονικὲς διάρκειες ἔχομε:

Τὴν *ἐβδομάδα*, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 ἡμέρες.

Τὸν *μῆνα*, ποὺ ἔχει 30 ἢ 31 ἡμέρες (ἐκτὸς ἀπὸ τὸν Φεβρουάριο ποὺ ἔχει 28· καὶ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι *δίσεκτος*, ἔχει 29 ἡμέρες).

Μῆνες μὲ 31 ἡμέρες: Ἰανουάριος - Μάρτιος - Μάιος - Ἰούλιος - Αὐγουστος - Ὀκτώβριος καὶ Δεκέμβριος.

Μῆνες μὲ 30 ἡμέρες: Ἀπρίλιος - Ἰούνιος - Σεπτέμβριος καὶ Νοέμβριος.

|                        |       |              |                 |
|------------------------|-------|--------------|-----------------|
| $\frac{1}{100}$ Αἰωνός | «Ἔτος | Αἰών         | 100 ἔτη         |
| $\frac{1}{12}$ ἔτους   | Μῆν   | ἔτος         | 12 μῆνες        |
| $\frac{1}{30}$ μηνός   | ἡμέρ  | μῆνας        | 30 ἡμέρες       |
| $\frac{1}{24}$ ἡμέρας  | h     | ἡμέρα        | 24 ὥρες         |
| $\frac{1}{60}$ ὥρας    | min   | ὥρα          | 60 λεπτά        |
| $\frac{1}{60}$ λεπτοῦ  | s     | λεπτό        | 60 δευτερολεπτά |
|                        |       | ΔΕΥΤΕΡΟΛΕΠΤΟ |                 |

Σχ. 5.2 ε.

Τὸν *χρόνο* ἢ *ἔτος*, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 12 μῆνες ἢ 365 ἡμέρες (καὶ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι *δίσεκτος*, ἀπὸ 366 ἡμέρες).

Τὸν *αἰῶνα*, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 χρόνια.

Γιὰ νὰ ἀπλοποιοῦμε τὶς πράξεις μας δεχόμαστε ὅτι:

$$\begin{aligned} 1 \text{ μῆνας} &= 30 \text{ ἡμέρες} \\ 1 \text{ ἔτος} &= 360 \text{ ἡμέρες.} \end{aligned}$$

### 5.3 Μονάδες μήκους στὸ ἀγγλικὸ σύστημα.

Στὸ ἀγγλικὸ σύστημα μονάδων μετρήσεως τοῦ μήκους ἔχομε τὶς παρακάτω μονάδες:

Τὴν *ἴντσα* (in) ποὺ, ὅπως εἶδαμε, ἀντιστοιχεῖ σὲ μήκος 25,4 mm.

Τὸν *πόδα* (ft), ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 12 ἴντσες

καί τήν *γιάρδα* (yd) ποῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 πόδες.

Ἔτσι ἔχομε:

$$1 \text{ yd} = 3 \text{ ft} = 36 \text{ in}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in.}$$

Καί ἀκόμα ὅτι:

$$1 \text{ yd} = 0,914 \text{ m}$$

$$1 \text{ ft} = 0,305 \text{ m}$$

καί:

$$1 \text{ m} = 1,094 \text{ yd} = 3,281 \text{ ft} = 39,371 \text{ in.}$$

#### Π Ι Ν Α Κ 5.3.1

$$1 \text{ yd} = \begin{cases} 0,914 \text{ m} = 91,4 \text{ cm} = 914 \text{ mm} \\ 3 \text{ ft} = 36 \text{ in} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} \text{ yd} \leftarrow 1 \text{ ft} = \begin{cases} 0,305 \text{ m} = 30,5 \text{ cm} = 305 \text{ mm} \\ 12 \text{ in} \end{cases}$$

$$\frac{1}{36} \text{ in} = \frac{1}{12} \text{ ft} \leftarrow 1 \text{ in} = \begin{cases} 2,54 \text{ cm} = 25,4 \text{ mm} \\ \text{Δὲν ὑπάρχει μικροτέρα ὑποδιαίρεσις ἐκτὸς τῆς} \\ \text{γνωστῆς μας σὲ κλασματικὰ μέρη μὲ παρο-} \\ \text{νομαστὲς 2, 4, 8, 16, 32, 64.} \end{cases}$$

#### 5.4 Μετατροπές στους συμμιγείς.

##### Πρόβλημα 1ο.

Νὰ ἐκφρασθῇ σὲ s ὁ χρόνος τῶν  $3 \text{ h } ' 25 \text{ min } 47 \text{ s}$ .

Λύσι :

Ἐκφράζομε στὴν ἀρχὴ τὶς ὥρες σὲ πρῶτα λεπτὰ καὶ μετὰ τὰ πρῶτα λεπτὰ σὲ δευτερόλεπτα μὲ τὶς ἐξῆς κατατάξεις:

**Κατάταξι 1η**

$$\begin{array}{r} 3 \times 60 \text{ min} = 180 \text{ min} \\ + \quad 25 \text{ min} \\ \hline 205 \text{ min} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 205 \times 60 \text{ s} = 12\,300 \text{ s} \\ + \quad 47 \text{ s} \\ \hline 12\,347 \text{ s} \end{array}$$

Ἄρα:  $3 \text{ h } 25 \text{ min } 47 \text{ s} = 12\,347 \text{ s}$ .

**Πρόβλημα 2ο.**

Μέτρο γωνίας  $168\,975''$  νὰ ἐκφρασθῇ σὲ μοῖρες, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ.

Λύσι :

Διαιρώντας τὸ  $168\,975''$  διὰ 60, εὐρίσκομε πηλίκον  $2816'$  καὶ ὑπόλοιπον  $15''$ .

Διαιρώντας μετὰ τὸ πηλίκον  $2816'$  διὰ 60, εὐρίσκομε νέο πηλίκον  $46^\circ$  καὶ νέο ὑπόλοιπο  $56'$ .

Ἄρα:  $168\,975'' = 46^\circ 56' 15''$ .

Μὲ κατάταξι τὸ πρόβλημα λύνεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l|l} 1689\,75'' & 60 & \\ 489 & 2816'' & 60 \\ = 97 & = 416 & 46^\circ \\ 3\,75 & = 56' & \\ = 15'' & & \end{array}$$

Ἄρα:  $168\,975'' = 46^\circ 56' 15''$ .

**5.5 Πρόσθεσι μὲ συμμιγεῖς.****Πρόβλημα.**

Νὰ προστεθοῦν δύο γωνίες  $\omega$  καὶ  $\varphi$  μὲ μέτρα:

$$\widehat{\omega} = 25^\circ 30' 42'' \qquad \widehat{\varphi} = 32^\circ 48' 35''$$

Λύσι :

1ος τρόπος.

Κάνομε την παρακάτω κατάταξι:

$$\begin{array}{r}
 \widehat{\omega} \quad 25^{\circ} \quad 30' \quad 42'' \\
 \widehat{\varphi} \quad 32^{\circ} \quad 48' \quad 35'' \\
 \hline
 \quad 57^{\circ} \quad 78' \quad 77'' \\
 + \quad 1' - 60'' \\
 \hline
 \quad 57^{\circ} \quad 79' \quad 17'' \\
 + \quad 1^{\circ} - 60' \\
 \hline
 58^{\circ} \quad 19' \quad 17''
 \end{array}$$

Προσθέτομε

Θυμόμαστε:  $1' = 60''$ .

\*Αρα αφαιρούμε  $60''$  και προσθέτομε  $1'$  στα πρώτα λεπτά.

Θυμόμαστε:  $1^{\circ} = 60'$ . \*Αρα αφαιρούμε  $60'$  και προσθέτομε  $1^{\circ}$  στις μοίρες.

Με άλλα λόγια:

Προσθέτομε τις μονάδες κάθε τάξεως χωριστά. Ύστερα, αρχίζοντας από την κατωτέρα τάξι, βγάζομε τις άκεραιες μονάδες, αν υπάρχουν, και τις προσθέτομε στο άθροισμα των μονάδων της άμέσως άνωτέρας τάξεως, μετά κάνομε το ίδιο για την τάξι αυτή κ.ο.κ.

2ος τρόπος.

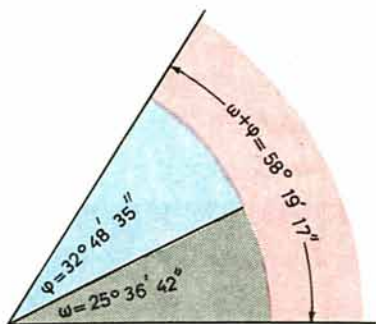
Τρέπομε τὰ μεγέθη που μᾶς δίδονται σὲ μονάδες τῆς ἴδιας κατωτέρας τάξεως, ὅπως στὸ πρόβλημα 1 (παράγρ. 6·4).

\*Ἐτσι ἔχομε:

$$\widehat{\omega} \quad 25^{\circ} \quad 30' \quad 42'' = 91 \, 842''$$

$$\widehat{\varphi} \quad 32^{\circ} \quad 48' \quad 35'' = 118 \, 115''$$

$$\text{Προσθέτομε:} \quad 209 \, 957''$$



Σχ. 5.5.

Τὸ ἄθροισμα ἐν συνεχείᾳ τὸ ἐκφράζομε σὲ μοῖρες, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά, ὅπως στὸ πρόβλημα 2 (παράγρ. 6·4) ἢ ὅπως ἀλλοιῶς λέμε: **τὸ τρέπομε σὲ συμμιγῇ.**

Εὐρίσκομε:

$$209 \, 957'' = 58^{\circ} \quad 19' \quad 17''.$$

“Ωστε:

Στὴν πρόσθεσι τρέπομε τοὺς συμμιγείς σὲ μονάδες τῆς ἰδίας κατωτέρας τάξεως καὶ τὰ ἐξαγόμενα τὰ προσθέτομε ὅπως στοὺς ἀκεραίους. Τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ προκύπτει τὸ κάνομε καὶ πάλι συμμιγῇ ἀριθμό.

Ἐφαρμογή.

Πρόσθεσι συμμιγῶν καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους σὲ μία κατάταξι:

|   |         |        |        |        |          |              |
|---|---------|--------|--------|--------|----------|--------------|
|   | 3 h     | 28 min | 12 sec | =      | 12 492 s |              |
|   | 18 h    | 32 min |        | =      | 66 720 s |              |
| + | 5 h     | 19 min | 39 sec | =      | 19 140 s |              |
|   | 26      | 79     | 51     |        | 98 350 s |              |
| + | 1       | - 60   |        |        |          |              |
|   | 27      | 19     | 51     |        |          | ↓            |
|   |         |        |        |        |          | πρὸς συμμιγῇ |
|   |         |        |        |        |          | μορφή        |
| + | 1       | - 24   |        |        |          | ←            |
|   | 1 ἡμέρα | 3 h    | 19 min | 51 sec |          |              |

5·6 Ἀφαίρεσι μὲ συμμιγείς.

Πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν παρακάτω δύο γωνιῶν:

$$\widehat{\omega} = 28^\circ 45' 17'' \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\varphi} = 19^\circ 53' 49''$$

Λύσι :

1ος τρόπος.

Κάνομε τὴν παρακάτω κατάταξι:

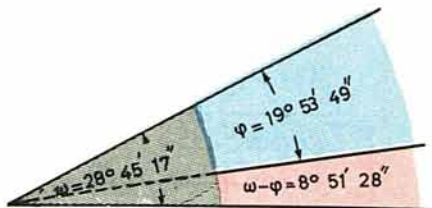
|                     |                |                 |      |
|---------------------|----------------|-----------------|------|
| $\widehat{\omega}$  | 28°            | 45'             | 17'' |
| $\widehat{\varphi}$ | 19°            | 53'             | 49'' |
|                     | 28° 45' - 1' = | 44' 17" + 60" = | 77'' |
| -                   | 19°            | 53'             | 49'' |
| 28° - 1° =          | 27°            | 44' + 60' =     | 104' |
| -                   | 19°            | 53'             | 49'' |
|                     | 8°             | 51'             | 28'' |

Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσι 17'' - 49'' δὲν μπορεῖ νὰ γίνη, παίρνομε 1' ἀπὸ τὰ 45' καὶ ἀφοῦ τὸ κάνομε 60'', τὸ προσθέτομε στὰ 17'' καὶ



έτσι έχουμε:  $(17'' + 60'') - 49'' = 77'' - 49''$ , όπότε ή άφαίρεσι αυτή γίνεται. Τό ίδιο κάνομε και για την άφαίρεσι  $44' - 53'$ .

Μέ άλλα λόγια: Άφαιρούμε τις μονάδες κάθε τάξεως χωριστά, αρχίζοντας από την κατωτέρα. Άν σε μία τάξι ή άφαίρεσι δέν γίνεται, τότε στο μειωτέο μεταφέρομε μία μονάδα από την άμέσως παραπάνω τάξι, άφοϋ προηγουμένως την μετατρέψωμε σε μονάδες τής κατωτέρας τάξεως, που χρειαζόμαστε.



Σχ. 5.6 α.

### 2ος τρόπος.

Τρέπομε σε μονάδες τής ίδιας κατωτέρας τάξεως και τούς δύο συμμιγείς και κάνομε την άφαίρεσι όπως στους άκεραίους.

$$\begin{array}{r} 28^\circ 45' 17'' = 103\,517'' \\ 19^\circ 53' 49'' = \quad 71\,629'' \\ \hline 31\,888'' \end{array}$$

Τρέπομε, κατά τά γνωστά, τά  $31\,888''$  σε συμμιγή και έχουμε:

$$31\,888'' = 8^\circ 51' 28''$$

Ώστε:

Για να αφαιρέσωμε δύο συμμιγείς, τούς τρέπομε σε μονάδες τής ίδιας τάξεως και τούς αφαιρούμε όπως τούς άκεραίους. Μετά, τó εξαγόμενο τó κάνομε πάλι συμμιγή.

### 5.7 Πολλαπλασιασμός συμμιγούς επί άκεραίο.

#### Πρόβλημα.

Για την κατασκευή ενός αντικειμένου μετρήθηκε χρόνος λειτουργίας του μηχανήματος 3 min και 47 s. Πόσο θα χρειασθώ να λειτουργήση τó μηχανήμα για την κατασκευή 5 όμοίων αντικειμένων;



Λύσι :

1ος τρόπος.

Κάνομε την κατάταξι:

$$3 \text{ min} \quad 47 \text{ s}$$

$$\times 5$$

$$15 \text{ min} \quad 235 \text{ s}$$

$$3 \text{ min}$$

$$18 \text{ min} \quad 55 \text{ s}$$

Πολλαπλασιάζομε κάθε τάξι τοῦ συμμιγοῦς μὲ τὸν ἀριθμὸ χωριστὰ καὶ γράφομε τὸ ἐξαγόμενο στὴν ἀντίστοιχη θέσι

$$235 \text{ s} = 3 \text{ min} \quad 55 \text{ s}$$

Ὅπως βλέπομε:

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε συμμιγῇ ἐπὶ ἀκέραιο, πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὶς μονάδες κάθε τάξεως μὲ τὸν ἀκέραιο καὶ μετὰ, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν κατωτέρα τάξι, βγάζομε τὶς μονάδες τῆς ἀνωτέρας τάξεως καὶ τὶς προσθέτομε στὸ ἐξαγόμενο τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

2ος τρόπος.

Τρέπομε τὸν συμμιγῇ σὲ μονάδες κατωτέρας τάξεως καὶ ἔχομε:

$$3 \text{ min} \quad 47 \text{ s} = 227 \text{ s.}$$

Πολλαπλασιάζομε ὅπως στοὺς ἀκεραίους:

$$227 \times 5 = 1135 \text{ s.}$$

Τρέπομε μετὰ τὸ ἐξαγόμενο σὲ συμμιγῇ:

$$1135 \text{ s} = 18 \text{ min} \quad 55 \text{ s.}$$

Ὡστε:

Στὸν πολλαπλασιασμὸν τρέπομε τὸν συμμιγῇ σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τοῦ τάξεως καὶ πολλαπλασιάζομε ὅπως στοὺς ἀκεραίους. Κατόπιν τὸ γινόμενο, ποὺ εὐρίσκομε, τὸ κάνομε καὶ πάλι συμμιγῇ.

Ἐφαρμογή.

Ἔχομε μία γωνία  $3^{\circ} 17''$  καὶ ζητοῦμε πόσο θὰ εἶναι μία ἄλλη γωνία 35 φορές μεγαλύτερη.

Λύσι :

Κατάταξι:

$$\begin{array}{r}
 3^{\circ} \quad 17'' \\
 \times \quad 35 \\
 \hline
 105' \quad 595'' (\alpha) \\
 9' \\
 \hline
 114' (\beta) \quad 55'' \\
 1^{\circ} \\
 \hline
 1^{\circ} \quad 54' \quad 55''
 \end{array}$$

(Βοηθητικές πράξεις)

$$\begin{array}{r}
 \times 17 \\
 \times 35 \\
 \hline
 85 \\
 51 \\
 \hline
 595
 \end{array}$$

$$(\alpha) \begin{array}{|l|l|} \hline 595'' & 60 \\ \hline 55'' & 9' \\ \hline \end{array}$$

$$(\beta) \begin{array}{|l|l|} \hline 114' & 60 \\ \hline 54' & 1^{\circ} \\ \hline \end{array}$$

5.8 Διαίρεσι συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

Πρόβλημα.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ γωνία  $\omega = 42^{\circ} 26' 15''$  σὲ 5 ἴσα μέρη.

Λύσι :

Διαιροῦμε χωριστὰ τὶς μονάδες κάθε τάξεως ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν ἀνωτέρα τάξι. Τὸ ὑπόλοιπο ποὺ μένει σὲ κάθε διαίρεσι τὸ κάνομε μονάδες τῆς παρακάτω τάξεως καὶ τὸ προσθέτομε στὶς μονάδες τῆς τάξεως αὐτῆς, πρὶν ἀρχίσωμε τὴν διαίρεσι στὴν τάξι αὐτή, ὅπως φαίνεται στὸ παράδειγμα ποὺ ἀκολουθεῖ.

Κατάταξι:

$$\begin{array}{r}
 42^{\circ} \quad 26' \quad 15'' \\
 = 2^{\circ} \times 60 = 120' \\
 \quad 146' \\
 \quad = 46 \\
 \quad = 1' \times 60 = 60'' \\
 \quad \quad 75'' \\
 \quad \quad 25 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} 5 \\ \hline 8^{\circ} \quad 29' \quad 15'' \end{array} \right.$$

ἢ ἄλλοιῶς:

$$\begin{array}{r}
 42^{\circ} \quad 26' \quad 15'' \\
 \times = 2^{\circ} \\
 \times \quad 60 \\
 \hline
 120' \\
 + \quad 26' \leftarrow \\
 \hline
 146' \\
 = 46 \\
 \times = 1' \\
 \times \quad 60 \\
 \hline
 60'' \\
 + \quad 15'' \leftarrow \\
 \hline
 75 \\
 25 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r} 5 \\ \hline 8^{\circ} \quad 29' \quad 15'' \end{array} \right.$$

2ος τρόπος.

Τρέπομε τὸν συμμιγῆ σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεώς του:

$$42^{\circ} \quad 26' \quad 15'' = 152 \, 775''.$$

Διαιροῦμε ὅπως στοὺς ἀκεραίους:

$$152 \, 775'' : 5 = 30 \, 555''.$$

Τρέπομε τὸ πηλίκον σὲ συμμιγῆ:

$$30 \, 555'' = 8^{\circ} \quad 29' \quad 15''.$$

Ὡστε:

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, τρέπομε τὸν συμμιγῆ σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας του τάξεως καὶ διαιροῦμε ὅπως στοὺς ἀκεραίους. Μετά, τὸ πηλίκον τὸ κάνομε πάλι συμμιγῆ.

Ἐφαρμογές.

α) Νὰ γίνη ἡ διαίρεσις: 5 h 26 min.

Τρέπουμε τὸν συμμιγῇ σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τοῦ τάξεως:

$$5\text{ h } 26\text{ min} = 19\,560\text{ s.}$$

Διαιροῦμε ὅπως στοὺς ἀκεραίους:

$$19\,560 : 8 = 2445.$$

Τὸ πηλίκον τὸ κάνομε συμμιγῇ:

$$2445\text{ s} = 40\text{ min } 45\text{ s.}$$

Ἀπὸ ἐδῶ βλέπομε καθαρά, γιατί πρέπει τὸν συμμιγῇ νὰ τὸν τρέπωμε σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεώς του.

β) Νὰ γίνη ἡ διαίρεσι:  $5\text{ h } 15\text{ s} : 5.$

Ὁ συμμιγῆς γράφεται:  $5\text{ h } 0\text{ min } 15\text{ s}$ , γιὰ τὸν ὁποῖο ἰσχύουν τὰ προηγούμενα:

$$\begin{array}{r|l} 5\text{ h } & 0\text{ min } & 15\text{ sec} & 5 \\ \hline & & & 1\text{ h } 0\text{ min } 3\text{ s} \end{array}$$

γ) Νὰ γίνη ἡ διαίρεσι:  $5^\circ 45' 12'' : 8.$

Κάνομε τὴν κατὰταξι:

$$\begin{array}{r|l} 5^\circ & 45' & 12'' & 8 \\ \hline 5^\circ \times 60 = & 300 & & 0^\circ 43' 9'' \\ & 345 & & \\ & = 25 & & \\ & = 1 \times 60 = 60'' & & \\ & 72'' & & \\ & 0 & & \end{array}$$

5.9 Πολλαπλασιασμός και διαίρεσι συμμιγούς με άλλους αριθμούς.

α) *Μὲ κλάσμα.*

*Πρόβλημα 1ο.*

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ  $\frac{2}{3}$  τῆς γωνίας:  $\omega = 46^\circ 15'.$

Λύσι :

Θὰ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε :

$$46^{\circ} 15' \times \frac{2}{3},$$

πού σημαίνει ὅτι ὁ συμμιγῆς θὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ 2 καὶ τὸ γινόμενο θὰ διαιρεθῇ ἀκολούθως διὰ τοῦ 3.

$$46^{\circ} 15' \times 2 = 92^{\circ} 30'$$

$$92^{\circ} 30' : 3 = 30^{\circ} 50'.$$

\* Ἀρα:  $46^{\circ} 15' \times \frac{2}{3} = 30^{\circ} 50'.$

**Πρόβλημα 2ο.**

Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσι:  $3 \text{ h } 18 \text{ min} : \frac{2}{3}.$

Λύσι :

Ἐφαρμόζοντας τὸν γνωστὸ κανόνα τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφουμε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό :

$$3 \text{ h } 18 \text{ min} : \frac{2}{3} = 3 \text{ h } 18 \text{ min} \times \frac{3}{2}.$$

\* Ἐπομένως:  $3 \text{ h } 18 \text{ min} \times 3 = 9 \text{ h } 54 \text{ min}$

$$9 \text{ h } 54 \text{ min} : 2 = 4 \text{ h } 57 \text{ min}.$$

\* Ἀρα:  $3 \text{ h } 18 \text{ min} : \frac{2}{3} = 4 \text{ h } 57 \text{ min}.$

β) *Ἐν μικτό.*

Στὴν περίπτωσι αὐτῇ τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε οὐσιαστικὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἢ νὰ διαιρέσωμε συμμιγῇ μὲ κλάσμα.

γ) Με δεκαδικό.

Στην περίπτωση αυτή, όπως πριν, τρέπουμε τὸν δεκαδικὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε προβλήματα ἴδια μὲ αὐτὰ τῆς περιπτώσεως (α).

5.10 Κλασματικὲς καὶ δεκαδικὲς ἐκφράσεις.

Πολλὲς φορές λέμε ὅτι ἓνα ἀντικείμενο κατεργάζεται ἀπὸ μία μηχανὴ σὲ χρόνο 11 λεπτῶν καὶ 5 δεκάτων τοῦ λεπτοῦ καὶ γράφομε 11,5 min ἢ ὅτι γιὰ τὴν ἀντικατάστασι π.χ. ἐνὸς ἐργαλείου σὲ ἓνα τὸρνο εἶναι ἀρκετὸς ὁ χρόνος τῶν  $\frac{45}{100}$  τοῦ λεπτοῦ.

Οἱ ἀριθμοὶ αὗτοὶ εὐκολὰ μποροῦν νὰ γραφοῦν καὶ ὑπὸ μορφῇ συμμιγοῦς, ἀρκεῖ νὰ θυμηθοῦμε, πὼς κάθε κλάσμα σημαίνει διαίρεσι.

Ἔτσι ἔχομε:

$$11,5 \text{ min} = \frac{115}{100} \text{ min}$$

$$\frac{45}{100} \text{ s.}$$

$$\begin{array}{r|l} 115 \text{ min} & 100 \\ \hline = 15 & 1 \text{ min } 9 \text{ s} \\ \times 60 & \\ \hline 900 \text{ s} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 45 \text{ min} & 100 \\ \times 60 & 0 \text{ min } 27 \text{ s} \\ \hline 2700 & \\ 0 & \end{array}$$

5.11 Ἀσκήσεις.

1. Ἡ 1η τοῦ μηνὸς Ἰανουαρίου εἶναι Δευτέρα. Τί μέρα θὰ εἶναι ἡ 1η Φεβρουαρίου; (Πέμπτη)

2. Ἐστω ὅτι τὸ μήκος μιᾶς ράβδου εἶναι 215,9 cm. Μετατρέψατέ το σὲ μονάδες μήκους τοῦ ἀγγλικοῦ συστήματος. (2 yd 1 ft 1 in)

3. Μετατρέψατε σὲ in τὰ μήκη:

$$3 \text{ yd } 2 \text{ ft } 8 \text{ in} \quad , \quad 2 \text{ yd } 3 \text{ in} \quad (140 \text{ in, } 75 \text{ in})$$

$$7 \text{ yd } 2 \text{ ft } 5 \text{ in} \quad , \quad 15 \text{ ft } 1 \text{ in.} \quad (281 \text{ in, } 181 \text{ in})$$

4. Νὰ ἐκφράσετε μὲ συμμιγῇ ἀριθμὸ τὰ μήκη:

$$87 \text{ in, } 49 \text{ in, } 13 \text{ ft.} \quad (2 \text{ yd } 1 \text{ ft } 3 \text{ in, } 1 \text{ yd } 1 \text{ ft } 1 \text{ in, } 4 \text{ yd } 1 \text{ ft})$$

5. Νὰ ἐκφράσετε μὲ συμμιγῇ ἀριθμὸ μία γωνία ἴση μὲ τὰ  $1 \frac{1}{4}^\circ$  (112° 30')

6. Να εκφραστούν σε κλάσμα όρθης γωνίας οι γωνίες:

$$43^\circ 30', \quad 35^\circ 12', \quad 55^\circ 40'. \quad \left( \frac{29}{60}, \quad \frac{88}{225}, \quad \frac{167}{270} \right)$$

7. Να εύρεθῇ σε μοίρες, πρώτα καὶ δεύτερα λεπτά τὸ μήκος τόξου, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὰ ἐξῆς κλασματικά μέρη μιᾶς περιφέρειας:

$$(\alpha) \quad \frac{11}{144} \quad \frac{137}{216} \quad \frac{227}{432} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{13}{54} \quad \frac{11}{72}$$

$$(27^\circ 30', \quad 228^\circ 30', \quad 94^\circ 35', \quad 5^\circ, \quad 86^\circ 40', \quad 55^\circ)$$

$$(\beta) \quad \frac{36}{144} \quad \frac{26}{54} \quad \frac{22}{72} \quad \frac{33}{144} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{2}{6}$$

$$(90^\circ, \quad 173^\circ 20', \quad 110^\circ, \quad 82^\circ 30', \quad 150^\circ, \quad 120^\circ)$$

8. "Ενας γεννήθηκε στὶς 4 Δεκεμβρίου 1928. "Όταν κάποτε ρωτήθηκε πόσων ἐτῶν εἶναι, ἀπάντησε: 43 ἐτῶν, 7 μηνῶν, 5 ἡμερῶν. Ποιὰ ἡμερομηνία τοῦ ἔγινε ἡ ἐρώτησι;

(9 'Ιουλίου 1972)

9. Διαθέτομε στὴν ἀποθήκη μας διάφορα ὑπόλοιπα σωλῆνων μήκους:

$$\alpha) 5 \text{ yd} \quad 2 \text{ ft} \quad 7 \text{ in} \quad \beta) 7 \text{ ft} \quad \gamma) 4 \text{ yd} \quad 1 \text{ ft}$$

$$\delta) 48 \text{ in} \quad \epsilon) 1 \text{ yd} \quad 5 \text{ in} \quad \sigma\tau) 2 \text{ ft} \quad 10 \text{ in}$$

Ποιό εἶναι τὸ συνολικό τους μήκος; (15 yd 2 ft 10 in)

10. Να γίνουν οἱ προσθέσεις:

$$\alpha) \quad \begin{array}{lll} 5 \text{ ἔτ.} & 7 \text{ μην.} & 6 \text{ ἡμ.} \\ 3 \text{ ἔτ.} & 9 \text{ μην.} & 28 \text{ ἡμ.} \\ 17 \text{ ἔτ.} & 11 \text{ μην.} & 25 \text{ ἡμ.} \end{array} \quad \beta) \quad \begin{array}{lll} 25^\circ & 8' & 15'' \\ 18^\circ & 4' & 49'' \\ 39^\circ & 45' & 2'' \end{array}$$

$$\gamma) \quad \begin{array}{ll} 2 \text{ ft} & 5 \text{ in} \\ 1 \text{ ft} & 8 \text{ in} \\ 1 \text{ yd} & 3 \text{ in} \end{array} \quad \delta) \quad \begin{array}{l} 8 \text{ h } 32 \text{ min } 45 \text{ s} \\ 13 \text{ h } 29 \text{ min } 33 \text{ s} \\ 17 \text{ h } 7 \text{ min.} \end{array}$$

$$(a = 27 \text{ ἔτ. } 4 \text{ μην. } 29 \text{ ἡμ.}, \quad \beta = 82^\circ 58' 6'', \\ \gamma = 2 \text{ yd } 1 \text{ ft } 4 \text{ in}, \quad \delta = 39 \text{ h } 9 \text{ min } 18 \text{ s})$$

11. Να εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκολουθῶν τριῶν τόξων τῆς ἰδίας περιφέρειας:

$$\frac{7}{25} \text{ περιφέρειας}, \quad \frac{5}{6} \text{ τετάρτου περιφέρειας}, \quad 25^\circ 40' 25''. \quad (201^\circ 28' 25'')$$

12. Να γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις:

$$1) \quad 5 \text{ h } 25 \text{ min } 40 \text{ s} - 3 \text{ h } 40 \text{ min } 50 \text{ s} \quad (1 \text{ h } 44 \text{ min } 50 \text{ s})$$

$$\beta) \quad 13 \text{ h} - 8 \text{ h } 25 \text{ min } 38 \text{ s} \quad (4 \text{ h } 34 \text{ min } 22 \text{ s})$$

$$\gamma) \quad 32^\circ 18' - 19^\circ 30' 57'' \quad (12^\circ 47' 3'')$$



13. Να εύρεθουν οι παραπληρωματικές γωνίες τῶν γωνιῶν:

$$\alpha) 38^{\circ} 47' 13''$$

$$\beta) 99^{\circ} 56' 27''$$

$$\gamma) 145^{\circ} 38' 19''$$

$$\delta) 179^{\circ} 29' 38''$$

$$\epsilon) 7^{\circ} 17' 26''$$

$$\sigma\tau) 32''$$

$$(\alpha = 141^{\circ} 12' 47'', \beta = 80^{\circ} 3' 33'',$$

$$\gamma = 34^{\circ} 21' 41'', \delta = 30^{\circ} 22'',$$

$$\epsilon = 172^{\circ} 42' 34'', \sigma\tau = 179^{\circ} 59' 28'')$$

14. Να εύρεθουν οι συμπληρωματικές γωνίες τῶν γωνιῶν:

$$\alpha) 6^{\circ} 3' 19''$$

$$\beta) 65^{\circ} 6' 47''$$

$$\gamma) 79^{\circ} 36' 27''$$

$$\delta) 89^{\circ} 59' 12''$$

$$(\alpha = 83^{\circ} 56' 41'', \beta = 24^{\circ} 53' 13'',$$

$$\gamma = 10^{\circ} 23' 33'', \delta = 48'')$$

15. Κάποιος γεννήθηκε στις 23 Μαρτίου 1897 και πέθανε στις 5 Φεβρουαρίου 1971. Σε ποιά ηλικία πέθανε;  
(73 ετών, 10 μην., 12 ημέρ.)

16. Ένα έργο άρχισε την 15η Μαρτίου 1965 και περατώθηκε την 5η Φεβρουαρίου 1972. Το έργο έπρεπε να παραδοθῇ 4 μήνες και 20 ημέρες ενωρίτερα. Ποιά ημερομηνία έπρεπε να παραδοθῇ; Πόση ήταν ἡ προγραμματισμένη και πόση ἡ πραγματική διάρκεια τοῦ έργου;

(προγρ. παράδοσι 15/9/1971, προγραμ. διαρκ. 6 έτ. 6 μην.,  
πραγμ. διάρκεια 6 έτ. 10 μην., 20 ἡμ.)

17. Από τὸν κρουνοῦ δεξαμενῆς πετρελαίου ἔχομε ρυθμίσει νὰ τρέχουν 3 σταγόνες στὸ δευτερόλεπτο. Ἀρχίσαμε τὸ πρωὶ στὶς 7 h καὶ 29 min καὶ σταματήσαμε τὸ ἀπόγευμα στὶς 5 h καὶ 50 min τῆς ἴδιας ἡμέρας. Πόσα λίτρα πετρελαίου θὰ ἔχουν τρέξει στὸ μεταξύ, ἂν γιὰ κάθε λίτρο χρειάζονται 25 000 σταγόνες;  
( $\approx 1,49 l$ )

18. Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

$$1 \text{ h } 27 \text{ min } 36 \text{ s} \times 5 = (7 \text{ h } 18 \text{ min})$$

$$4 \text{ h } 29 \text{ min } 8 \text{ s} \times \frac{3}{4} = (3 \text{ h } 21 \text{ min } 51 \text{ s})$$

$$3 \text{ h } 56 \text{ min} \times 0,25 = (59 \text{ min})$$

$$25^{\circ} 30' 48'' \times 3 = (76^{\circ} 32' 24'')$$

$$17^{\circ} 9' 45'' \times 2 \frac{1}{3} = (40^{\circ} 2' 45'')$$

19. Όμάς εργατῶν τελειώνει τὰ  $\frac{2}{5}$  ἐνὸς έργου σὲ 2 ἡμέρες καὶ 5 h. Σὲ

πόσο χρόνο θα τελειώσει ολόκληρο το έργο; (Ή κάθε ημέρα θα υπολογισθῇ μὲ 8 ἐργάσιμες ὥρες). (6 ἡμ. 4 h 30')

20. Ποδηλάτης κινούμενος σὲ ἓνα κυκλικὸ ποδηλατοδρόμιο διαγράφει γωνία  $36^\circ 18' 50''$  σὲ  $2 \frac{5}{6}$  min.

Ζητοῦμε τὴν γωνία, ποὺ θὰ διατρέξῃ σὲ 1s. (12' 49'')

21. Νὰ γίνουν οἱ διαιρέσεις:

$$50^\circ \quad 12' \quad 55'' : \frac{5}{8} \quad (80^\circ \quad 20' \quad 40'')$$

$$68^\circ \quad 59' \quad 30'' : 5 \frac{2}{3} \quad (12^\circ \quad 10' \quad 30'')$$

$$3 \text{ ἔτ. } 6 \text{ μην. } 15 \text{ ἡμ.} : 3 \frac{3}{4} \quad (11 \text{ μην. } 10 \text{ ἡμ.})$$

$$5 \text{ ἡμ. } 6 \text{ h } 30 \text{ min} : \frac{3}{5} \quad (8 \text{ ἡμ. } 18 \text{ ὥρ. } 50 \text{ min})$$

$$3 \text{ yd } \quad 2 \text{ ft } \quad 6 \text{ in} : \frac{3}{8} \quad (10 \text{ yd } 8 \text{ in})$$

22. Τροχὸς κάνει 1300 στροφές σὲ 4 min καὶ 20 s. Πόσες στροφές θὰ κάνῃ:  
α) Σὲ 1 min. β) Σὲ 1 s. γ) Σὲ 1 h. δ) Πόσος χρόνος χρειάζεται γιὰ νὰ κάνῃ 1000 στροφές;

$$\left( a = 300 \frac{\sigma\tau\rho}{\text{min}}, \quad \beta = 5 \frac{\sigma\tau\rho}{\text{s}} \right)$$

$$\gamma = 18000 \frac{\sigma\tau\rho}{\text{h}}, \quad \delta = 3 \text{ min } 20 \text{ s}$$

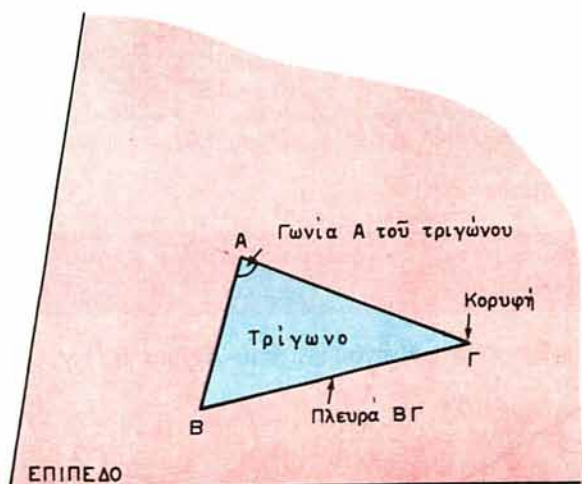
## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 6

### ΔΥΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ. ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ — ΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

#### 6 · 1 Τὸ τρίγωνο.

Πάνω σὲ ἓνα ἐπίπεδο παίρνομε τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ εὐρίσκωνται ἐπάνω στὴν ἰδίᾳ εὐθείᾳ, καὶ τὰ ἐνώνομε μὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ (σχ. 6 · 1 α).

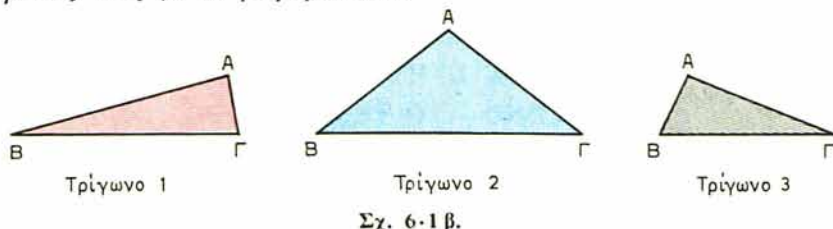
Ἔτσι προκύπτει ἓνα σχῆμα μὲ τρεῖς γωνίες, τὶς  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  καὶ  $\widehat{\Gamma}$ , πού κάθε μία τους σχηματίζεται μὲ δύο ἀπὸ τὰ τρία εὐθύγραμμα τμήματα. Π.χ. ἡ  $\widehat{A}$  σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὸ σχῆμα αὐτὸ μὲ τὶς τρεῖς γωνίες τὸ ὀνομάζομε **τρίγωνο**.



Σχ. 6 · 1 α.

Οἱ γωνίες Α, Β καὶ Γ λέγονται **γωνίες τοῦ τριγώνου**· τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ λέγονται **κορυφές** καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ λέγονται **πλευρές** τοῦ τριγώνου. Ὅλα μαζί λέγονται **στοιχεῖα** τοῦ τριγώνου.

Ἄς πάρουμε τρία τρίγωνα (σχ. 6·1 β) καὶ ἄς μετρήσουμε τὶς γωνίες τους μὲ τὸ *μοιρογνωμόνιο*



Εὐρίσκομε:

|           | $\widehat{A}$ | $\widehat{B}$ | $\widehat{\Gamma}$ |
|-----------|---------------|---------------|--------------------|
| Τρίγωνο 1 | $83^\circ$    | $15^\circ$    | $82^\circ$         |
| Τρίγωνο 2 | $104^\circ$   | $38^\circ$    | $38^\circ$         |
| Τρίγωνο 3 | $94^\circ$    | $64^\circ$    | $22^\circ$         |

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 83^\circ + 15^\circ + 82^\circ = 180^\circ$$

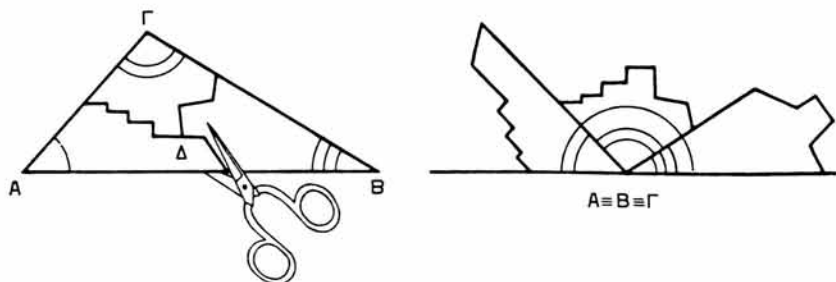
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 104^\circ + 38^\circ + 38^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 94^\circ + 64^\circ + 22^\circ = 180^\circ.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι:

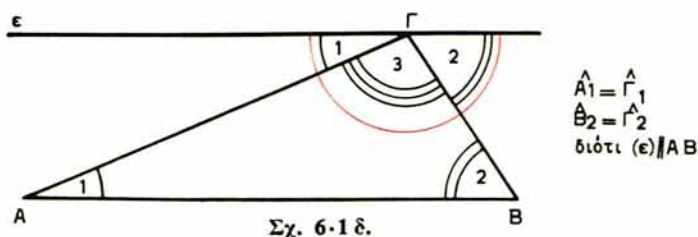
Σὲ κάθε τρίγωνο τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἰσοῦται πάντοτε μὲ  $180^\circ$  ἢ μὲ δύο ὀρθές.

Πρακτικῶς αὐτὸ φαίνεται καὶ στὸ σχῆμα 6·1 γ.



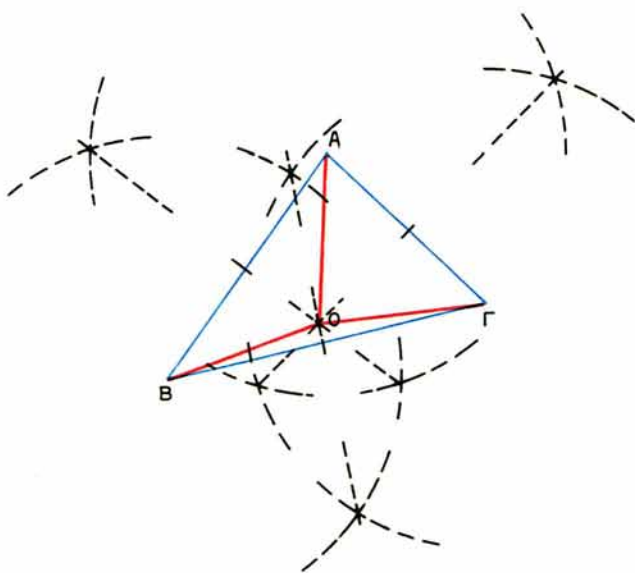
Σχ. 6·1 γ.

Θεωρητικῶς δὲ φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 6.1 δ, στὸ ὁποῖο ἡ εὐθεῖα  $\epsilon$  εἶναι παράλληλη στὴν πλευρὰ  $AB$  τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ .



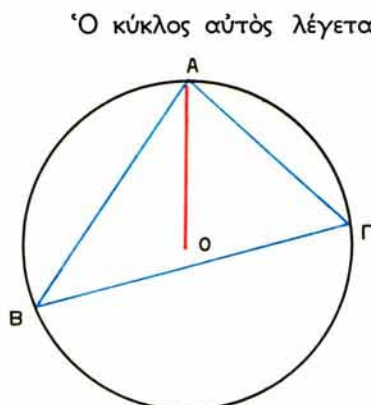
### 6.2 Ἀξιοσημείωτες εὐθεῖες σὲ ἓνα τρίγωνο.

α) Σὲ ἓνα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ἂς φέρουμε τὶς *μεσοκάθετες* ἐπάνω στὶς πλευρές του. Βλέπουμε ὅτι καὶ οἱ τρεῖς περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο  $O$



Σχ. 6.2 α.

(σχ. 6.2 α). Ἄν μετρήσουμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα  $OA$ ,  $OB$  καὶ  $OG$ , διαπιστώνουμε ὅτι εἶναι  $OA = OB = OG$ . Ἄν τώρα μὲ τὸν διαβήτη μὲ κέντρο τὸ  $O$  καὶ ἀκτῖνα τὴν  $OA$  γράψουμε περιφέρεια κύκλου, αὐτὴ περνᾷ ἀπὸ τὶς 3 κορυφές (σχ. 6.2 β).



Σχ. 6-2 β.

Ο κύκλος αυτός λέγεται *περιγεγραμμένος* στο τρίγωνο ΑΒΓ και το τρίγωνο λέγεται *εγγεγραμμένο* μέσα στον κύκλο.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ [σχ. 6·2 γ(α)] φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ, ΒΝ και ΓΛ, που συνδέουν τις κορυφές με τα μέσα των απέναντι πλευρών. Τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα λέγονται *διάμεσοι* και περνούν από το ίδιο σημείο Κ, που το λέμε και *κέντρο βάρους* του τριγώνου. Αυτό γιατί, από όποιο-

δήποτε υλικό και να είναι το τρίγωνο, αν κρεμαστή από το σημείο αυτό με ένα σχοινί, παραμένει οριζόντιο, χωρίς να κλίνει προς την μία ή την άλλη πλευρά [σχ. 6·2 γ(β)].

Αν μετρήσουμε το ΚΜ, βλέπουμε ότι είναι το μισό του ΚΑ. Το ίδιο γίνεται με το ΚΝ, που το εύρισκουμε ίσο με το μισό του ΚΒ, και το ΚΛ, που εύρσκεται ίσο με το μισό του ΚΓ. Αυτό σημαίνει ότι:

Οι διάμεσοι σε κάθε τρίγωνο κόβονται σε ένα σημείο, που απέχει από την κορυφή κάθε τριγώνου απόστασι ίση με τα  $\frac{2}{3}$  της διαμέσου, που μετρούμε.

$$\text{Δηλαδή: } KA = \frac{2}{3} \cdot AM, \quad KB = \frac{2}{3} \cdot BN, \quad KG = \frac{2}{3} \cdot GL \text{ ή, αν}$$

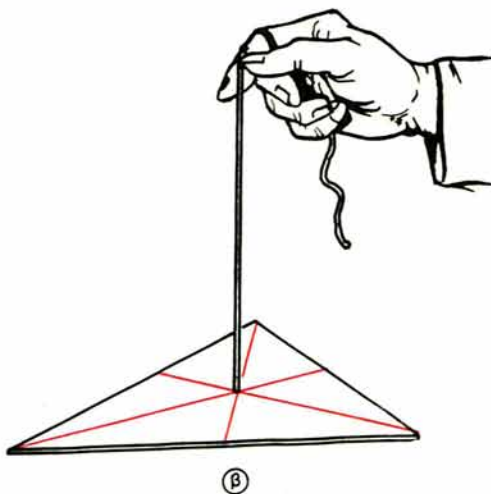
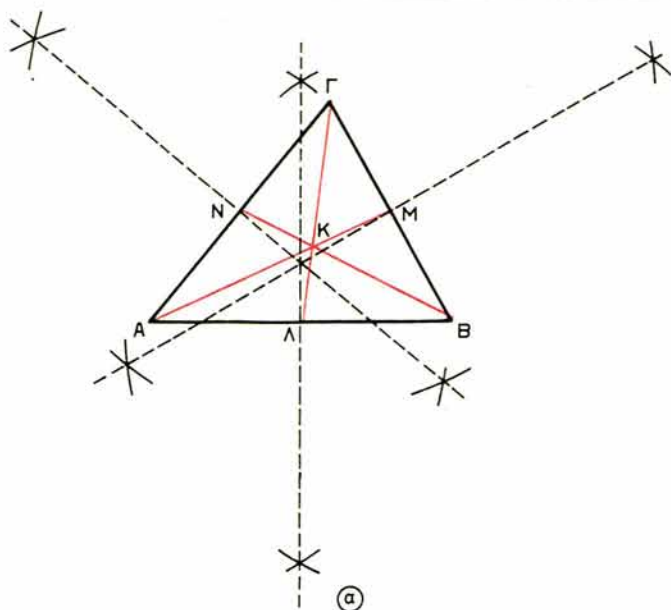
μετρήσουμε με κλίμακα 1 : 5 επάνω στο τρίγωνο του σχήματος 6·2δ, εύρισκουμε ότι:

$$KA = 11,3 \text{ mm, που είναι: } KA = \frac{2}{3} \times 17,0 \text{ mm,}$$

$$KB = 12,0 \text{ mm, που είναι: } KB = \frac{2}{3} \times 18,0 \text{ mm}$$

$$KG = 10,2 \text{ mm, που είναι: } KG = \frac{2}{3} \times 15,3 \text{ mm.}$$

γ) Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις καθέτους από τις κορυφές Α, Β και Γ στις απέναντι πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχως (σχ.



Σχ. 6.2 γ.

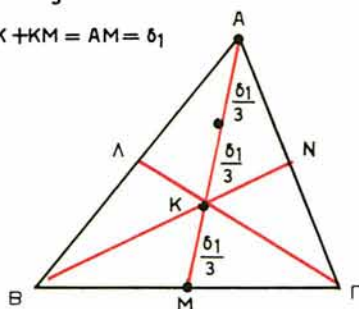
6.2 ε). Τὰ κομμάτια ἀπὸ τὴν κορυφή μέχρι τὴν ἀπέναντι πλευρὰ τὰ ὀνομάζομε *ὑψη τοῦ τριγώνου*, περνοῦν δὲ καὶ τὰ τρία ἀπὸ τὸ ἴδιο



$$AK = \frac{2 \cdot \delta_1}{3}$$

$$KM = \frac{\delta_1}{3}$$

$$AK + KM = AM = \delta_1$$

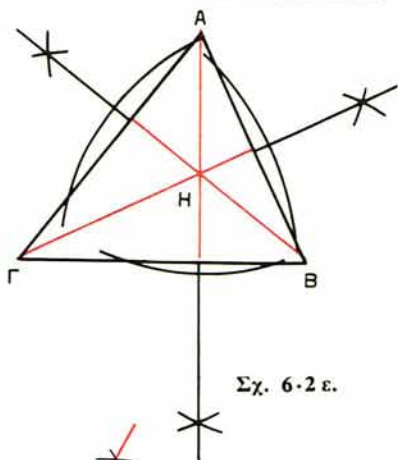


ΚΛΙΜΑΞ 1:5

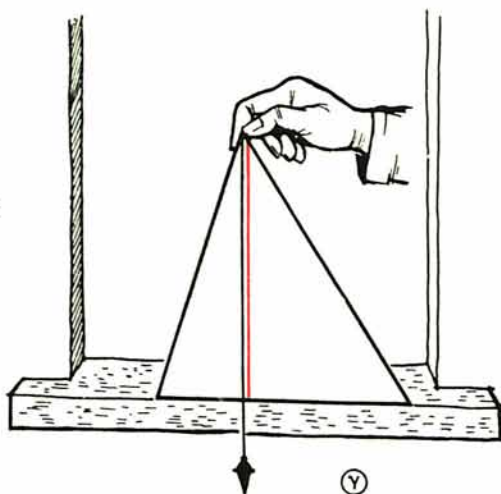
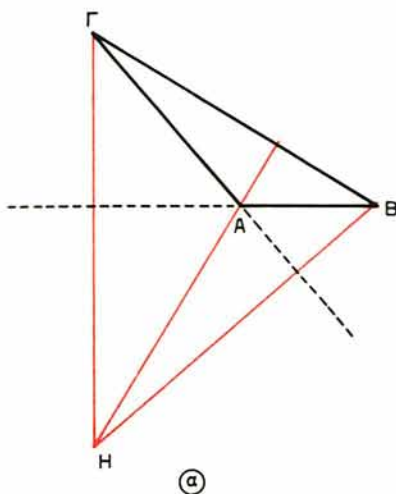
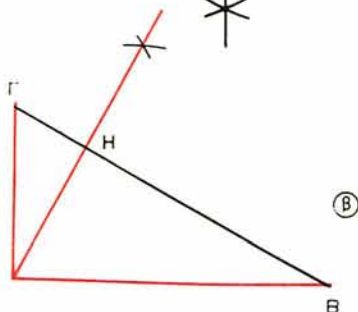
Σχ. 6·2 δ.

σημείο H, πού τὸ λέμε *ὀρθό-κεντρο*.

Στὸ σχῆμα 6·2 στ(α,β) δίδονται τὰ ὕψη καὶ τὸ ὀρθό-κεντρο ἑνὸς τριγώνου μὲ μία



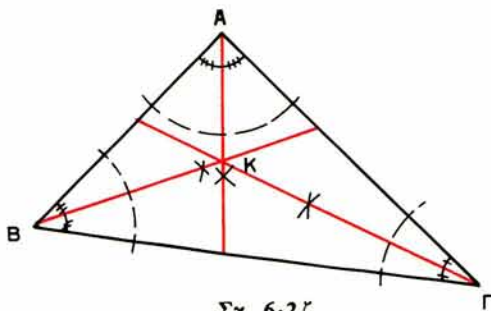
Σχ. 6·2 ε.



Σχ. 6·2 στ.

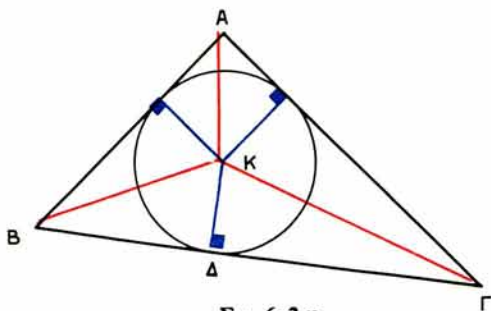
ἀμβλεία γωνία καὶ ἑνὸς ἄλλου τριγώνου μὲ μία γωνία ὀρθή, ἐνῶ στὸ σχῆμα 6.2 στ(γ) βλέπομε πῶς μὲ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου ἐλέγχουμε τὴν ὀριζοντιότητα.

δ) Στὸ τρίγωνο  $AB\Gamma$  διχοτομοῦμε τὶς γωνίες τοῦ  $A$ ,  $B$  καὶ  $\Gamma$ . Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἀπὸ τὴν κορυφή μέχρι τὴν ἀπέναντι



Σχ. 6.2 ζ.

πλευρά, πού διχοτομοῦν τὶς γωνίες αὐτές, ὀνομάζομε *διχοτόμους τοῦ τριγώνου*. Καὶ οἱ τρεῖς διχοτόμοι τέμνονται στὸ ἴδιο σημεῖο  $K$  (σχ. 6.2 ζ). Ἄν θυμηθοῦμε τὴν ιδιότητα τῆς διχοτόμου γωνίας, πού λέει

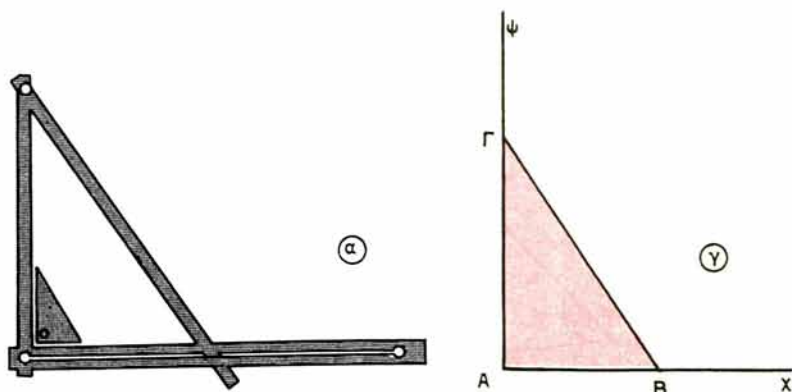


Σχ. 6.2 η.

ὅτι κάθε σημεῖο ἀπέχει τὸ ἴδιο ἀπὸ τὶς πλευρές της, καταλήγομε στὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ  $K$  ἀπέχει τὸ ἴδιο καὶ ἀπὸ τὶς τρεῖς πλευρές  $AB$ ,  $B\Gamma$  καὶ  $A\Gamma$  τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ . Αὐτὸ σημαίνει ὅτι μία περιφέρεια μὲ κέντρο τὸ  $K$  καὶ ἀκτίνα  $K\Delta$ , ἴση μὲ τὴν ἀπόστασι τοῦ  $K$  ἀπὸ τὴν μία πλευρά, θὰ ἐφάπτεται καὶ στὶς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου. Αὕτῃ ἡ περιφέρεια λέγεται *ἐγγεγραμμένη* στὸ τρίγωνο ἢ τὸ τρίγωνο *περιγεγραμμένο* στὴν περιφέρεια (σχ. 6.2 η).

## 6 · 3 Εἶδη τριγώνων.

α) Ἐάν σὲ ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ μία τοῦ γωνία εἶναι ὀρθή, τὸ



Σχ. 6.3 α.

τρίγωνο εἶναι *ὀρθογώνιο* (σχ. 6 · 3α). Ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου, ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ὀρθή γωνία, λέγεται *ὑποτείνουσα* καὶ οἱ ἄλλες δύο τοῦ πλευρὲς λέγονται *κάθετες*.

Ἐνα τέτοιο τρίγωνο σχηματίζεται, ἂν, ἐπάνω στὶς δύο πλευρὲς ὀρθῆς γωνίας ΧΑΨ, πάρωμε δύο σημεῖα Β καὶ Γ καὶ τὰ ἐνώσωμε μεταξὺ τους. Καὶ ἀφοῦ γιὰ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἔχομε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ,$$

σημαίνει πὼς γιὰ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο, στὸ ὁποῖο ἔχομε  $\widehat{A} = 90^\circ$ , θὰ εἶναι  $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ . Δηλαδή:

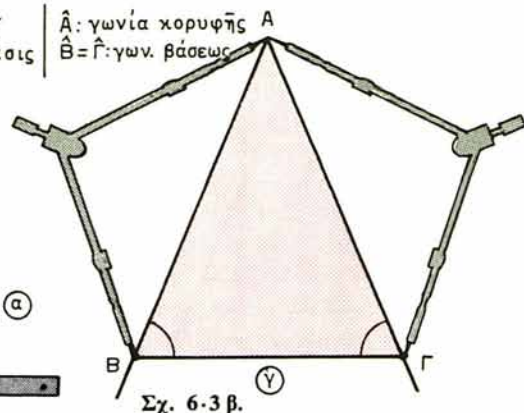
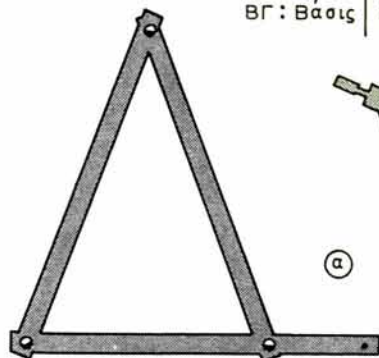
*Σὲ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο οἱ ὀξείες γωνίες εἶναι συμπληρωματικές.*

β) Ἐάν σὲ ἓνα τρίγωνο δύο τοῦ πλευρὲς εἶναι ἴσες, τὸ τρίγωνο λέγεται *ἰσοσκελές* (σχ. 6 · 3β). Ἐνα τέτοιο τρίγωνο σχηματίζεται, ἂν, ἐπάνω στὶς δύο πλευρὲς μιᾶς ὁποιασδήποτε γωνίας Α [σχ. 6 · 3β(γ)], μὲ τὴν βοήθεια τοῦ διαβήτη ἀνοικτοῦ σὲ σταθερὸ ἀνοι-

γμα, πάρωμε δύο σημεία Β και Γ τέτοια, ὥστε  $AB = AG$ , καὶ κατόπιν τὰ ἐνώσωμε φέροντες τὴν ΒΓ. Τὸ σημεῖο Α λέγεται **κορυφή**

$AB = AG$   
 $BΓ$ : Βάσις

$\hat{A}$ : γωνία κορυφῆς Α  
 $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ : γων. βάσεως



Σχ. 6.3 β.

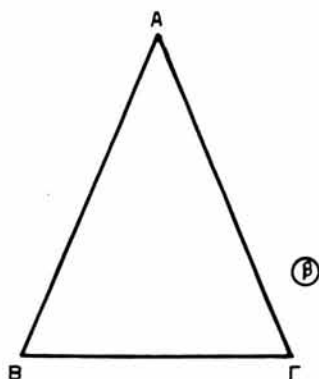
τοῦ τριγώνου, ἐνῶ ἡ πλευρὰ ΒΓ λέγεται **βάσις** του. Ἄν μετρήσωμε τὶς γωνίες Β καὶ Γ, εὐρίσκομε ὅτι:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma},$$

ποὺ σημαίνει ὅτι (σχ. 6.3 γ):

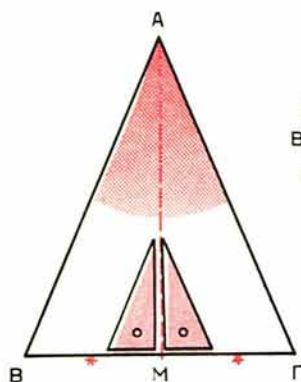
*Οἱ παρὰ τὴν βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίες εἶναι μεταξύ τους ἴσες.*

*Σὲ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ διὰ μέσος, τὸ ὕψος καὶ ἡ διχοτόμος, ποὺ φέρονται ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α, συμπίπτουν.*

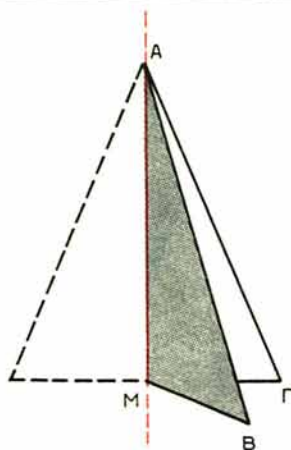


γ) Ἄν σὲ ἓνα τρίγωνο ὅλες οἱ πλευρὲς εἶναι μεταξύ τους ἴσες, τὸ τρίγωνο λέγεται **ἰσοπλευρό** (σχ. 6.3 δ).

Ἐνα τέτοιο τρίγωνο σχηματίζεται, ἂν μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Β καὶ Γ ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ καὶ ἀκτίνες ἴσες μὲ ΒΓ γράψωμε τόξα κύκλου. Ἐστω ὅτι αὐτὰ κόβονται σὲ ἓνα σημεῖο Α, ἀπὸ τὸ ὁποῖο φέρομε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ. Σχηματίζεται



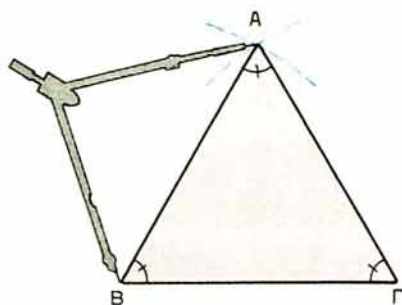
$$\begin{aligned} BM &= MG \\ \widehat{BAM} &= \widehat{MAG} \\ AM &\perp BG \\ \widehat{B} &= \widehat{G} \end{aligned}$$



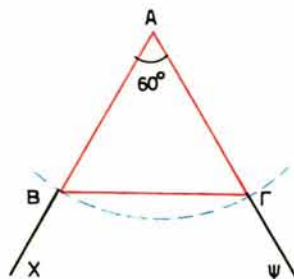
Σχ. 6.3 γ.

Έτσι ένα τρίγωνο, το  $AB\Gamma$ , στο οποίο οι τρεις γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες, δηλαδή:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{G}.$$



Σχ. 6.3 δ.



Σχ. 6.3 ε.

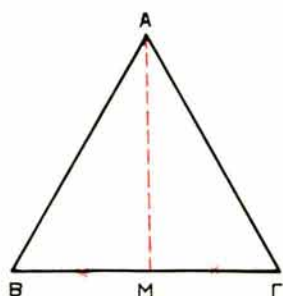
Έπειδή και οι τρεις έχουν άθροισμα  $180^\circ$ , ή κάθε μία θα είναι:

$$180^\circ : 3 = 60^\circ.$$

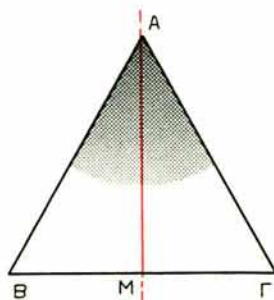
Αυτό μᾶς δείχνει και ένα άλλο τρόπο σχεδίασεως ενός ισοπλεύρου τριγώνου ως εξής (σχ. 6.3 ε):

Παίρνουμε μία γωνία  $60^\circ$ , έστω την  $\widehat{XAP}$ . Μὲ κέντρο τὸ A καὶ ἀκτῖνα ὅποιαδήποτε γράφομε περιφέρεια, ποὺ κόβει τὶς πλευρὲς AX καὶ AP στὰ σημεῖα B καὶ Γ. Φέρνομε τὴν BG. Τὸ τρίγωνο ABΓ εἶναι

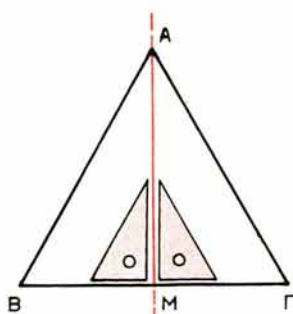
ίσοσκελές. Διότι  $AB = AG$ . Έπομένως  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ . Όμως οι δύο αυτές γωνίες έχουν άθροισμα  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . Έπομένως ή κάθε μία θα είναι  $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ . Άρα  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$ .



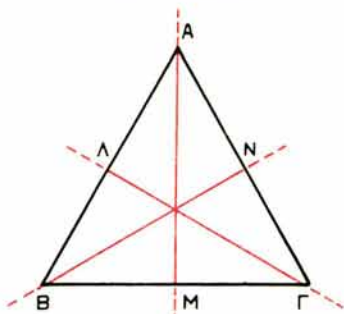
(α)  $BM = M\Gamma$   
 $AM = \text{διάμεσος}$



(β)  $\widehat{ABM} = \widehat{AGM}$   
 $AM = \text{διχοτόμος}$



(γ)  $AM = B\Gamma$   
 $AM = \text{ύψος}$



(δ)

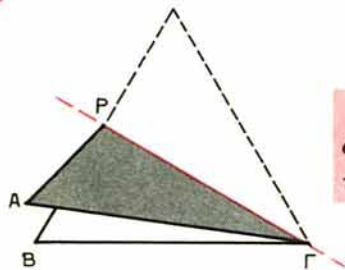
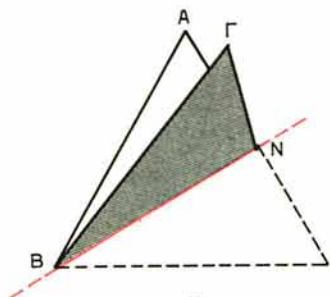
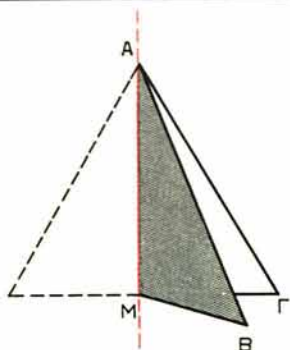
Σχ. 6.3 στ.

Άφοῦ τὸ τρίγωνο  $AB\Gamma$  ἔχει ὅλες τὶς γωνίες ἴσες, σημαίνει ὅτι εἶναι ἰσόπλευρο.

Ἐπίσης ἀπὸ τὰ σχήματα 6.3 στ καὶ 6.3 ζ προκύπτει ὅτι:

Σὲ ἓνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ἡ διάμεσος, ἡ διχοτόμος καὶ τὸ ὕψος ποὺ ἄγονται (φέρονται) ἀπὸ κάθε κορυφή συμπίπτουν.





Σχ. 6.3 ζ.

**Πρόβλημα.**

Σε μία σιδερένια πόρτα θέλουμε να συγκολλήσουμε 2 ένισχύσεις από λαμαρίνα, που κάθε μία τους να έχει ακριβώς το παραπλεύρως τριγωνικό σχήμα (σχ. 6.4 α). Ζητούμε τρόπους, για να σχεδιάσουμε το σχήμα αυτό επάνω στο φύλλο της λαμαρίνας.

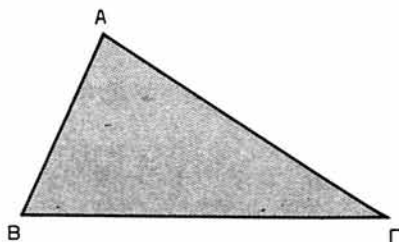
**6.4 Σχεδίασι και ισότης τριγώνων.**

Είπαμε ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο, όταν μās δίδονται τρεις κορυφές του, Α, Β και Γ. Πολλές φορές όμως πρέπει να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο από άλλα στοιχεία του, που μās δίδονται. Τον τρόπο αυτής της σχεδιάσεως θα τον δούμε παρακάτω. Αν μάλιστα την σχεδίασι την κάνουμε επάνω σε ένα διαφανές χαρτί και βγάλουμε φωτοτυπίες, τότε όλα τα τρίγωνα που θα προκύψουν θα είναι μεταξύ τους ίσα. Αυτό σημαίνει πώς, αν τα βάλουμε το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλες μετακινήσεις, μπορούμε να τα κάνουμε να συμπίσουν. Το ίδιο μπορεί να συμβῇ με κάθε γεωμετρικό σχήμα, π.χ. δύο κύκλους κ.λπ.

**Ώρισμός:**

*Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι ίσα, όταν εφαρμόζουν το ένα επάνω στο άλλο τέλεια.*

Ήξετάζουμε παρακάτω μερικές απλές περιπτώσεις ισότητος τριγώνων.



Σχ. 6.4 α.



Λύσι :

1ος Τρόπος.

Μετροῦμε τις τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου. Ἐστω ὅτι εὐρίσκομε :

$$AB = 26 \text{ mm}$$

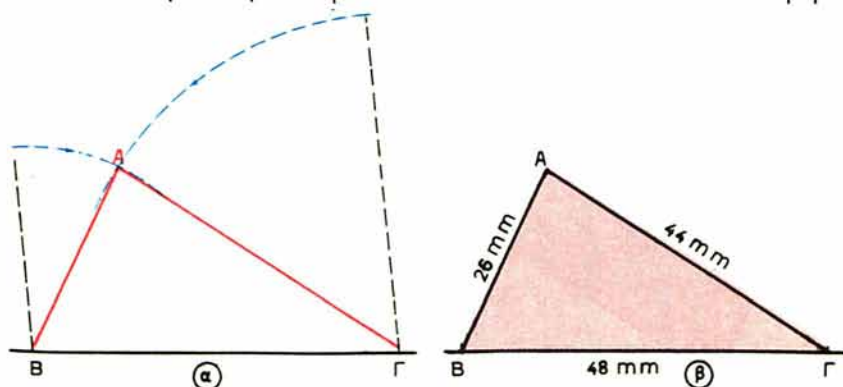
$$BG = 48 \text{ mm}$$

$$AG = 44 \text{ mm}$$

Σχεδίασι (κατασκευή).

Πάνω στὴν λαμαρίνα σύρομε μία εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἐπάνω σ' αὐτὴ παίρνομε ἓνα κομμάτι  $BΓ = 48 \text{ mm}$  [σχ. 6.4β(α)].

Μὲ κέντρο τὸ Β καὶ ἀκτὶνα 26 mm γράφομε περιφέρεια κύκλου. Τὸ ἴδιο κάνομε καὶ μὲ κέντρο τὸ Γ καὶ ἀκτὶνα 44 mm. Οἱ δύο περιφέ-



Σχ. 6.4β.

ρειες κόβονται σὲ ἓνα σημεῖο Α. Φέρνομε τις ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, ποὺ προέκυψε [σχ. 6.4β(β)], ἔχει τις τρεῖς πλευρές του ἴσες μὲ τὰ μήκη ποὺ θέλομε. Ἄρα εἶναι αὐτὸ ποὺ θέλομε.

Ἱσότης.

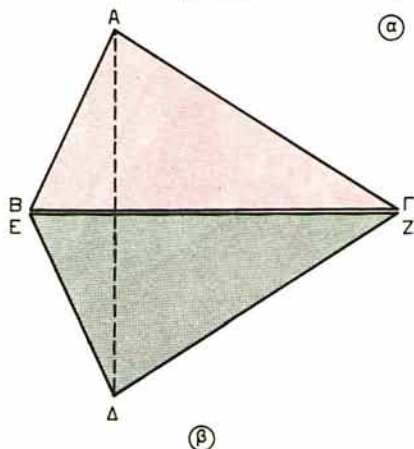
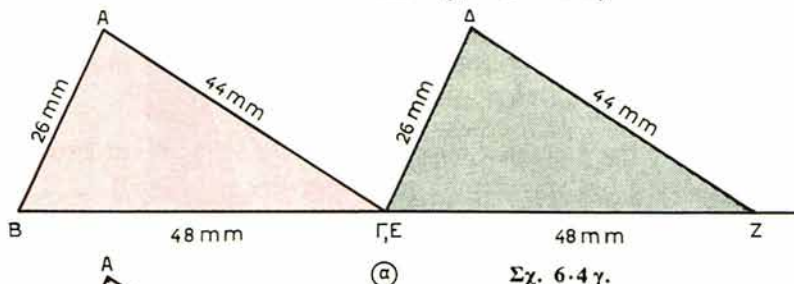
Πάνω στὴν λαμαρίνα σχεδιάζομε σὲ δύο χωριστὲς θέσεις δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 6.4γ(α), μὲ πλευρές ἴσες μὲ αὐτὲς ποὺ μᾶς δόθηκαν. Ἄν κόψωμε τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἀπὸ τὴν λαμαρίνα, θὰ ἔχωμε δύο τριγωνικὰ κομμάτια, ποὺ θὰ δείξωμε ὅτι εἶναι ἴσα μεταξὺ τους.

Ἀποδείξι.

Τὰ τοποθετοῦμε ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 6.4γ(β), ὥστε τὰ σημεῖα Α καὶ Δ νὰ εὐρίσκωνται στὶς ἀπέναντι θέσεις τοῦ τμήματος ΒΓ, ποὺ τὸ βάζομε νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἴσο του ΕΖ.

Ἐπειδὴ:  $BA = EA$  (ἢ  $BA = BD$ )

καὶ  $GA = ZA$  (ἢ  $GA = ΓΔ$ )



τὰ σημεία B καὶ Γ θὰ εὐρίσκωνται ἐπάνω στὴν μεσοκάθετο στὸ εὐθύγραμμο τμήμα AD, δηλαδή ἡ BG (ἢ EZ) εἶναι μεσοκάθετος στὸ AD. Ἐάν, ἐπομένως, στρέψουμε τὸ τρίγωνο EAZ γύρω ἀπὸ τὸ BG (ἢ EZ), τὸ σημεῖο Δ θὰ πέσῃ ἐπάνω στὸ A καὶ τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσουν. Ἐπομένως θὰ ἐφαρμόσουν καὶ οἱ γωνίες A καὶ Δ, B καὶ E, Γ

καὶ Z, πού, ὅπως βλέπομε, εὐρίσκονται ἀντιστοίχως ἀπέναντι ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρὲς BG = EZ, AG = AZ καὶ AB = DE.

Συμπέρασμα:

*Δύο τρίγωνα, ποὺ ἔχουν τὶς πλευρὲς τους ἴσες μία πρὸς μία, εἶναι ἴσα.*

**Σημείωσι.**

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου λέγεται *περίμετρος τοῦ τριγώνου*.

**2ος Τρόπος.**

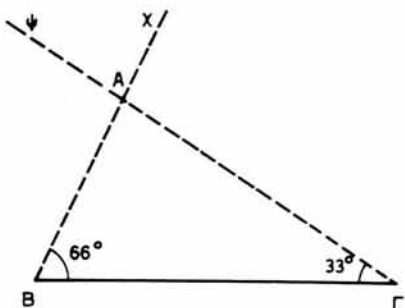
Μετροῦμε τὴν πλευρὰ BG καὶ τὶς δύο γωνίες B καὶ Γ (σχ. 6.4 α), οἱ ὁποῖες, ἐπειδὴ εὐρίσκονται (κεῖνται) στὶς ἄκρες τῆς πλευρᾶς, λέγονται *προσκείμενες*. Ἔστω ὅτι εὐρίσκομε:

$$B\Gamma = 48 \text{ mm} \quad \widehat{B} = 66^\circ \quad \widehat{\Gamma} = 33^\circ.$$

**Σχεδίασι** (κατασκευή).

Παίρνουμε επάνω στην λαμαρίνα, όπως πριν, ένα ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma = 48 \text{ mm}$  (σχ. 6.4δ).

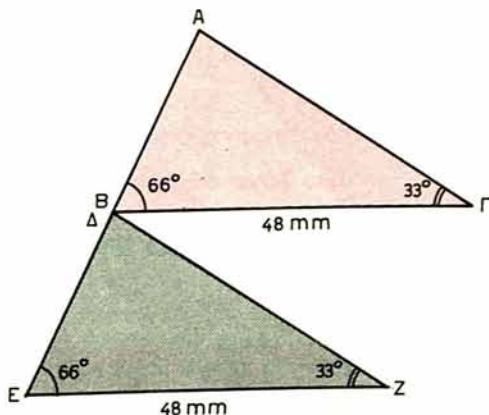
Χρησιμοποιώντας το μοιρογώνιο, σχεδιάζουμε με κορυφή Β μία γωνία  $\angle XB\Gamma = 66^\circ$  (προσέχοντας, ώστε το άνοιγμα της γωνίας να είναι γυρισμένο προς το σημείο Γ). Κάνουμε το ίδιο για την γωνία  $\angle \Psi B\Gamma = 33^\circ$ , (προσέχοντας να είναι γυρισμένη προς το σημείο Β). Οί πλευρές ΒΧ και ΒΨ κόβονται στο σημείο Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ, που σχηματίστηκε, έχει την μίαν πλευρά και τις δύο προσκείμενες γωνίες (που εύρισκονται δεξιά και αριστερά της αυτής πλευράς) ίσες με τα στοιχεία που δόθηκαν, που σημαίνει πως είναι αυτό που ζητούμε.



Σχ. 6.4δ.

**Ίσότης.**

Επάνω στην λαμαρίνα σχεδιάζουμε σε δύο χωριστές θέσεις δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ (σχ. 6.4ε), με στοιχεία ίσα με αυτά

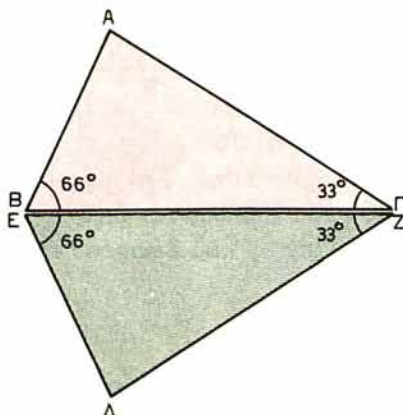


Σχ. 6.4ε.

πού μετρήσαμε παραπάνω. \*Αν κόψουμε τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἀπὸ τὴν λαμαρίνα, θὰ ἔχωμε δύο τριγωνικά κομμάτια, πού θὰ δείξωμε ὅτι εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

**\*Απόδειξι.**

\*Αν τὰ τοποθετήσωμε δίπλα - δίπλα, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 6·4 στ, βλέπομε πὼς ἡ ΒΓ (= ΕΖ) εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ, πού σημαίνει ὅτι, ἂν στρέψωμε τὸ τρίγωνο ΔΕΖ γύρω ἀπὸ τὴν ΒΓ, ἡ ΕΔ θὰ πέση ἐπάνω στὴν ΒΑ καὶ ἡ ΖΔ ἐπάνω στὴν ΓΑ, ἐπομένως καὶ τὸ Δ (τομὴ τῶν ΕΔ καὶ ΖΔ) θὰ πέση ἐπάνω στὸ



Σχ. 6·4 στ.

Α (πού εἶναι τομὴ τῶν ΒΑ καὶ ΓΑ). \*Αρα τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουν. \*Επομένως:

$AB = DE$  (εὐρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ τὶς ἴσες γωνίες Γ καὶ Ζ).

$AG = DZ$  (γιὰ τὸν ἴδιο λόγο ἀπὸ τὶς γωνίες Β καὶ Ε).

$\widehat{A} = \widehat{D}$  (ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων  $\widehat{B} + \widehat{G}$  καὶ  $\widehat{E} + \widehat{Z}$ ).

**Συμπέρασμα.**

Δύο τρίγωνα, πού ἔχουν μία πλευρὰ ἴση καὶ τὶς προσκείμενες γωνίες ἀντιστοίχως ἴσες μίαν πρὸς μία, εἶναι ἴσα.

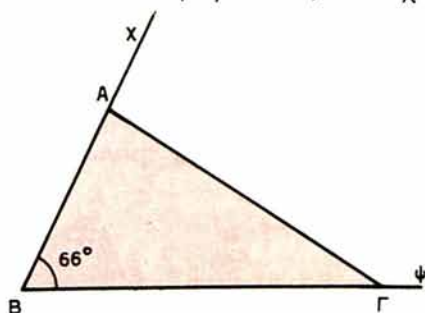
**3ος Τρόπος.**

Μετροῦμε τις πλευρές  $AB$  και  $B\Gamma$  και την γωνία  $B$ , που σχηματίζουν οι δύο αυτές πλευρές (σχ. 6.4 α), την όποια ονομάζουμε και **περιεχομένη γωνία** (γιατί περιέχεται στις πλευρές αυτές).

Ἐστω ὅτι εὐρίσκομε:

$$AB = 26 \text{ mm}, \quad B\Gamma = 48 \text{ mm}$$

$$\text{καὶ } \widehat{B} = 66^\circ.$$



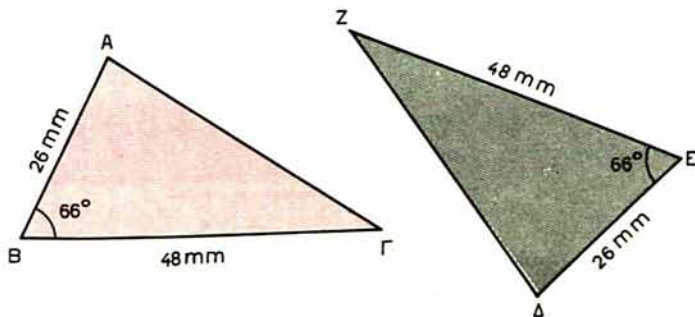
Σχ. 6.4 ζ.

**Σχεδίασι (κατασκευή).**

Με την βοήθεια τοῦ μοιρογνωνομίου σχεδιάζουμε ἑπάνω στὴν λαμαρίνα μία γωνία  $XB\Psi = 66^\circ$  (σχ. 6.4 ζ). Ἐπάνω στὴν πλευρά  $BX$  παίρνομε ἓνα τμήμα  $BA = 26 \text{ mm}$  καὶ στὴν  $B\Psi$  ἓνα τμήμα  $B\Gamma = 48 \text{ mm}$ . Φέρομε τὴν  $A\Gamma$ . Τὸ τρίγωνο  $AB\Gamma$ , πού σχηματίσθηκε, ἔχει τις δύο του πλευρές καὶ τὴν περιεχομένη γωνία ἴσα με τὰ δεδομένα. Ἀρα εἶναι αὐτὸ πού θέλομε.

**Ἰσότης.**

Ἐπάνω στὴν λαμαρίνα σχεδιάζομε σὲ χωριστὲς θέσεις δύο



Σχ. 6.4 η.

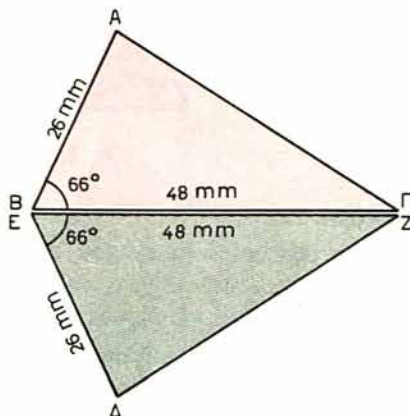
τρίγωνα  $AB\Gamma$  καὶ  $\Delta EZ$ , ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 6.4 η, με στοιχεῖα ἴσα με τὰ δεδομένα. Κόβομε τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ ἔτσι παίρνομε δύο



τριγωνικά κομμάτια λαμαρίνας, τὰ ὅποια θὰ δείξωμε ὅτι εἶναι ἴσα μεταξὺ τους.

**Ἀπόδειξι.**

Ἄν τὰ τοποθετήσωμε δίπλα-δίπλα, ὅπως στὸ σχῆμα 6.4 θ, βλέπομε ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΔ, ποὺ σημαίνει ὅτι, ἂν στρέψωμε τὸ τρίγωνο ΔΕΖ γύρω ἀπὸ τὴν ΒΓ, ἡ πλευρὰ



Σχ. 6.4 θ.

ΕΔ θὰ πέση ἐπάνω στὴν ΒΑ καὶ ἀφοῦ  $ΕΔ = ΒΑ$ , τὸ Δ θὰ πέση ἐπάνω στὸ Α, ἄρα καὶ ἡ ΔΖ ἐπάνω στὴν ΑΓ. Ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἐφαρμόζουν.

**Συμπέρασμα.**

Δύο τρίγωνα, ποὺ ἔχουν δύο πλευρὲς ἴσες μία πρὸς μία καὶ τὴν περιεχομένη γωνία ἴση, εἶναι ἴσα.

**Παρατήρησι.**

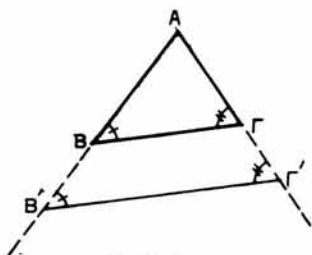
Ἐπάνω σὲ φύλλο κόντρα πλακέ σχεδιάζομε μὲ τὸ γράφτη ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ. Μετὰ προεκτείνομε τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ φέρνομε τὴ Β'Γ' παράλληλη πρὸς τὴ ΒΓ (σχ. 6.4 ι). Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὴν παράγραφο 3.18, θὰ ἔχωμε:

$$\widehat{B} = \widehat{B'} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}.$$

Βλέπομε δηλαδή ότι τὰ δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $AB'\Gamma'$  ἔχουν τὶς γωνίες τους ἴσες χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα.

Ὡστε:

Τὸ ὅτι δύο τρίγωνα ἔχουν τὶς γωνίες τους ἴσες μία πρὸς μία δὲν σημαίνει ὅτι εἶναι καὶ ἴσα, γιατί θὰ πρέπει νὰ ἔχουν καὶ ἀπὸ μία πλευρὰ τουλάχιστον ἴση.

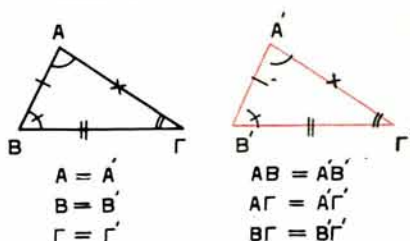


Σχ. 6.4 ι.

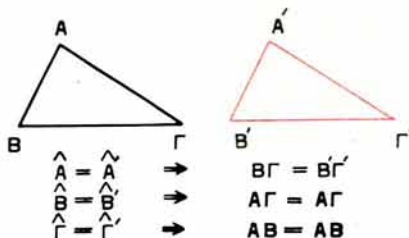
**Γενικά συμπεράσματα.**

Ἀπὸ τὰ παραπάνω, ἐξάγονται τὰ ἀκόλουθα γενικά συμπεράσματα.

α) Ὄταν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, κάθε στοιχεῖο τοῦ ἑνὸς ἔχει ἓνα ἴσο του ἐπάνω στὸ ἄλλο.



β) Σὲ ἴσα τρίγωνα, ἀπέναντι ἀπὸ ἴσες γωνίες εὐρίσκονται ἴσες πλευρὲς καὶ ἀπέναντι ἀπὸ ἴσες πλευρὲς εὐρίσκονται ἴσες γωνίες.



γ) Γιὰ τὴν σχεδίασι ἢ τὴν κατασκευὴ ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τὰ ἔξι στοιχεῖα του (3 γωνίες καὶ 3 πλευρὲς) πρέπει νὰ γνωρίζωμε τὰ τρία (ποτὲ ὅμως μόνο τὶς τρεῖς γωνίες).



δ) Για την σχεδίαση ή την κατασκευή ενός ορθογωνίου τριγώνου, αρκεί να γνωρίζουμε δύο μόνο από τα παραπάνω στοιχεία, γιατί το τρίτο στοιχείο είναι ή ὀρθή γωνία του, που είναι γνωστή.

6 · 5 Μερικὲς ἐφαρμογές.

### Ἐφαρμογή 1η.

Ἐστω ὅτι ἡ τριγωνικὴ ἐνίσχυσι πού θέλουμε νὰ συγκολλήσωμε στὴν προηγούμενη σιδερένια πόρτα, ἔχει σχῆμα ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι στὸ τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 6 · 5α) θὰ ἔχωμε:

$$AB = AG.$$

Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ φέρωμε τὴν ΑΜ θὰ εἶναι:



Σχ. 6 · 5 α.

$$\text{Τρίγωνο } AMB = \text{Τρίγωνο } AMG,$$

διότι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὶς τρεῖς πλευρὲς ἴσες.

Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὶς ἀντίστοιχες γωνίες ἴσες· δηλαδή:

Πλευρὲς

Γωνίες

Ἰδιότης

$$AB = AG \quad \text{ἄρα} \quad \widehat{AMB} = \widehat{AMG} = 90^\circ, \quad AM : \text{ὕψος}$$

$$MB = MG \quad \text{ἄρα} \quad \widehat{BAM} = \widehat{GAM} = \frac{\widehat{A}}{2}, \quad AM : \text{διχοτόμος}$$

$$AM = AM \quad \text{ἄρα} \quad \widehat{B} = \widehat{G}.$$

Ὡστε:

Σὲ ἓνα τρίγωνο ἰσοσκελὲς αἱ παρὰ τὴν βάσι γωνίες εἶναι ἴσες (δηλαδή αὐτὲς πού εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρὲς).

Ἀκόμη ἀπὸ τὰ παραπάνω:

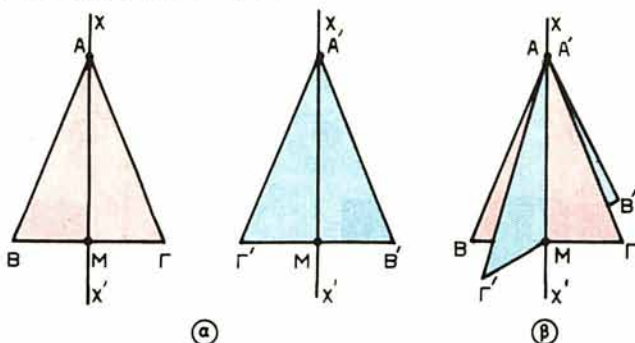
α) Ἐπαληθεύουμε αὐτὸ πού εἴπαμε στὴν παράγραφο 6 · 3,

ὅτι δηλαδή ἡ  $AM$ , ἐκτὸς ἀπὸ διάμεσος, εἶναι καὶ ὕψος καὶ διχοτόμος.

Ὡστε:

*Σὲ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ διάμεσος, ποὺ φέρομε ἀπὸ τὴν κορυφή, εἶναι καὶ ὕψος καὶ διχοτόμος.*

β) Διαπιστώνομε ὅτι, ἂν στρέψωμε τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο γύρω ἀπὸ τὴν  $AM$  [σχ. 6.5 β (α)] τότε, μετὰ ἀπὸ στροφή  $180^\circ$ , τὸ σημεῖο  $B$ , ποὺ γίνεται  $B'$ , θὰ πάρῃ τὴν θέσι τοῦ  $\Gamma$  καὶ τὸ  $\Gamma$ , ποὺ γίνεται  $\Gamma'$ , θὰ πάρῃ τὴν θέσι τοῦ  $B$ .

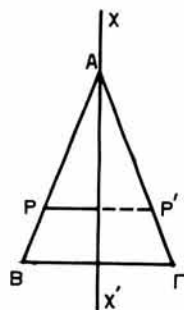


Σχ. 6.5 β.

Γιὰ εὐκολία μας τὴν μία ὀψι τοῦ τριγώνου τὴν ζωγραφίζομε κόκκινη καὶ τὴν ἄλλη μπλέ.

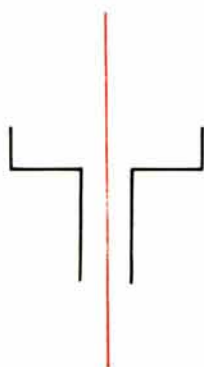
Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα πῶς τὸ τρίγωνο  $AB\Gamma'$  ποὺ γύρισε, μπορεῖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπάνω στὸ ἀρχικό. Τότε λέμε πῶς ἡ εὐθεῖα  $XX'$ , ἐπάνω στὴν ὁποία εὑρίσκεται τὸ τμήμα  $AM$  [σχ. 6.5 β(β)], εἶναι *ἄξων συμμετρίας* τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι σὲ κάθε σημεῖο  $P$  (σχ. 6.5 γ) θὰ *ἀντιστοιχῇ* ἓνα σημεῖο  $P'$  τέτοιο, ὥστε, ὅταν τὸ τρίγωνο στραφῇ γύρω ἀπὸ τὸν ἄξωνα συμμετρίας  $XX'$  κατὰ  $180^\circ$ , τὸ  $P$  νὰ πέσῃ στὸ  $P'$ .

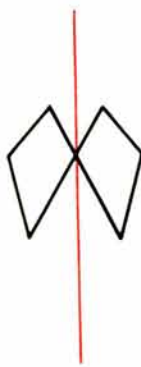


Σχ. 6.5 γ.

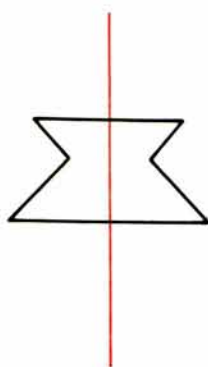
Παρατηρούμε δηλαδή ότι ή  $PP'$  έχει τόν άξονα  $XX'$  σάν με-



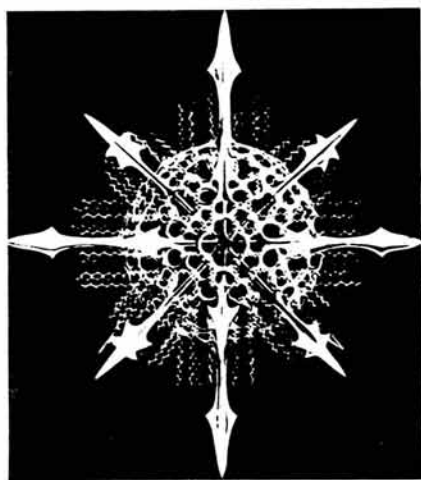
α



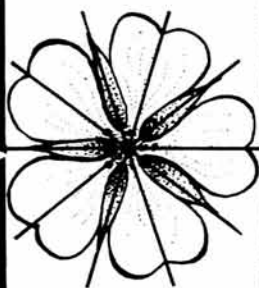
β



γ



δ



ε



στ

Σχ. 6.5 δ.  
Σχέδια με άξονα ίσομετρίας.

σοκάθετο και ακόμα ότι ο άξων  $XX'$  συμμετρίας χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα κομμάτια.

“Ωστε:

“Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, αρκεί να σχεδιάσουμε το μισό σχέδιο, για να είναι προσδιορισμένο και το άλλο μισό.

### Εφαρμογή 2α.

Στο τριγωνικό σχήμα ΑΒΓ μιᾶς λαμαρινένιας ἐνισχύσεως (σχ. 6.5 ε) μετροῦμε τὶς γωνίες Β καὶ Γ καὶ τὶς εὐρίσκομε ἴσες.

α) Ἐστω ὅτι:  $\widehat{B} = \widehat{G} = 70^\circ$ .

Φέρομε τὸ ὕψος ΑΔ.

Τότε  $\widehat{ADB} = \widehat{ADG} = 90^\circ$ .

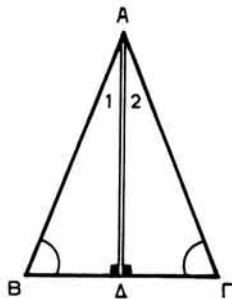
Ἄρα:

Τρίγωνο ΑΔΒ = Ὀρθογώνιο:

Ὄποτε  $\widehat{A_1} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ .

Τρίγωνο ΑΔΓ = Ὀρθογώνιο:

Ὄποτε  $\widehat{A_2} = 90^\circ - \widehat{G} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ .



Σχ. 6.5 ε.

Δηλαδή τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, ἀφοῦ ἔχουν μία πλευρὰ κοινὴ (τὴν ΑΔ) καὶ τὶς προσκείμενες γωνίες ἴσες. Ἄρα καὶ  $AB = AG$ .

“Ωστε:

“Αν σὲ ἓνα τρίγωνο δύο γωνίες εἶναι ἴσες, τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

β) Ἡ παραπάνω πρότασι εἶναι **ἀντίστροφη** τῆς ἀρχικῆς, τῆς Ἐφαρμογῆς 1, ποὺ λέει ὅτι, ἂν ἓνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές, οἱ γωνίες τῆς βάσεως εἶναι ἴσες.

Βλέπομε δηλαδή πὼς ἡ **ὑπόθεσι** τῆς μιᾶς προτάσεως εἶναι **συμπέρασμα** στὴν ἄλλη. Οἱ προτάσεις αὐτὲς λέγονται **ἀντίστροφες**.

“Ωστε:

Δύο προτάσεις εἶναι ἀντίστροφες, ὅταν ἡ ὑπόθεσι τῆς μιᾶς εἶναι συμπέρασμα τῆς ἄλλης.

γ) Έφαρμόζοντας τὰ παραπάνω, μπορούμε π.χ. νὰ ποῦμε γιὰ ἓνα ἰσόπλευρο τρίγωνο:

*Σὲ ἰσόπλευρο τρίγωνο οἱ τρεῖς γωνίες του εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ ἀντιστρόφως.*

Μὲ τὴν λέξι *ἀντιστρόφως* ἐννοοῦμε ὅτι:

*Τρίγωνο μὲ τὶς τρεῖς γωνίες του ἴσες εἶναι ἰσόπλευρο.*

### Ἐφαρμογὴ 3η.

Ἐὰς συγκρίνωμε δύο ὀρθογώνια τριγωνικὰ κομμάτια  $AB\Gamma$  καὶ  $A'B'\Gamma'$  μὲ ὀρθές γωνίες τὶς  $\widehat{A}$  καὶ  $\widehat{A'}$ , ὅπως αὐτὰ πού βλέπομε στὸ σχῆμα 6·5 στ.

Ἐστω ὅτι αὐτὰ ἔχουν:

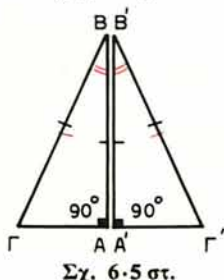
#### Περίπτωσι 1η.

$AB = A'B'$ : μία κάθετη πλευρὰ ἴση

$B\Gamma = B'\Gamma'$ : ἴσες ὑποτείνουσες.

Τὰ τοποθετοῦμε δίπλα-δίπλα, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 6·5 στ, ὥστε νὰ συμπίσουν οἱ δύο ἴσες κάθετες πλευρές. Τὸ τρίγωνο, πού σχηματίζεται τότε, εἶναι τὸ  $B\Gamma\Gamma'$ , τὸ ὁποῖο εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα ἢ  $BA$  (ἢ  $B'A'$ ) εἶναι ἄξων συμμετρίας, πού σημαίνει ὅτι τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma$  καὶ  $A'B'\Gamma'$  εἶναι ἴσα.

Ἔστω:



*Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, πού ἔχουν μία κάθετη πλευρὰ καὶ τὴν ὑποτείνουσα ἴση ἀντιστοίχως, εἶναι ἴσα.*

#### Περίπτωσι 2α.

$$\widehat{B} = \widehat{B'} \quad (\text{ἔστω } 30^\circ)$$

$$B\Gamma = B'\Gamma'.$$



Ἀφοῦ τὰ τρίγωνα εἶναι ὀρθογώνια, οἱ ἄλλες δύο ὀξείες γωνίες τους εἶναι, γιὰ κάθε ἓνα ἀπὸ αὐτά, συμπληρωματικές, δηλαδή:

$$\begin{array}{l|l} \widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{B} & \widehat{\Gamma'} = 90^\circ - \widehat{B'} \\ \widehat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ & \widehat{\Gamma'} = 90^\circ - 30^\circ \\ \widehat{\Gamma} = 60^\circ & \widehat{\Gamma'} = 60^\circ. \end{array}$$

Τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma$  καὶ  $A'B'\Gamma'$  ἔχουν:

$$B\Gamma = B'\Gamma' \quad - \text{(μᾶς δόθηκε)}$$

$$\widehat{B} = \widehat{B'} \quad - \text{(μᾶς δόθηκε)}$$

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \quad - \text{(τὸ εὐρήκαμε)}$$

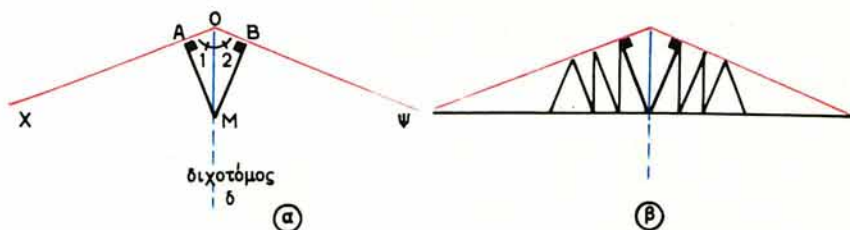
ἄρα εἶναι ἴσα.

Ὡστε:

*Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ποὺ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεία γωνία ἴσες, εἶναι ἴσα.*

#### Ἐφαρμογή 4η.

Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τὴς δύο πλευρὲς τῆς γωνίας.



Σχ. 6.5 ζ.

Αὐτὸ φαίνεται εὐκόλα, ἂν στὴν διχοτόμο  $O\delta$  τῆς γωνίας  $XO\Psi$  [σχ. 6.5 ζ(α)] πάρωμε ἓνα σημεῖο  $M$  καὶ φέρωμε τὴς  $MA$  καὶ  $MB$  ἔτσι, ὥστε:  $MA \perp OX$  καὶ  $MB \perp O\Psi$ .

Τότε τα τρίγωνα  $OAM$  και  $OBM$  είναι ίσα, διότι:

α) Είναι ὀρθογώνια.

β) Έχουν τὴν  $OM$  κοινή.

γ) Έχουν  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ , ἀφοῦ ἡ  $Od$  εἶναι διχοτόμος.

\*Αρα θὰ ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα ἴσα, ὁπότε:

$$MA = MB.$$

\*Ετσι, ἂν στὸ τρίγωνο  $AB\Gamma$  (σχ. 6.5 η) πάρωμε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν  $A$  καὶ  $B$ , αὐτὲς θὰ τέμνονται σὲ ἓνα σημεῖο  $K$  τέτοιο, ὥστε:

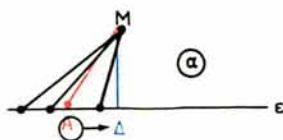
$$KM = KN = KL,$$

ὅπου:  $KM \perp B\Gamma$ ,  $KN \perp A\Gamma$  καὶ  $KL \perp AB$ .

Γράφοντας ἐπομένως μὲ κέντρο τὸ  $K$  καὶ ἀκτῖνα  $KM$  μία περιφέρεια, αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα  $M$ ,  $N$  καὶ  $L$  καὶ ἀκόμη θὰ ἔχῃ τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  ἐφαπτόμενες. Ἡ περιφέρεια ἐπομένως εἶναι *ἐγγεγραμμένη* στὸ τρίγωνο, καὶ τὸ τρίγωνο εἶναι *περιγεγραμμένο* στὴν περιφέρεια.

### 6.6 Ἰδιότητες πλαγίων.

\*Απὸ ἓνα σημεῖο  $M$ , ποῦ εὐρίσκεται ἔξω ἀπὸ μία εὐθεῖα  $\epsilon$ , μποροῦμε νὰ φέρωμε ἄπειρα εὐθύγραμμα τμήματα  $MA$ , ποῦ νὰ συνδέουν τὸ  $M$  μὲ τὰ σημεῖα  $A$  τῆς εὐθείας  $\epsilon$  (σχ. 6.6 α). Ἀρκεῖ νὰ φαντασθοῦμε τὸ  $A$  νὰ κινῆται ἐπάνω στὴν  $\epsilon$ , ὁπότε σὲ κάθε του νέα θέσι θὰ ἀντιστοιχῇ καὶ ἀπὸ ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα  $MA$ .



Σχ. 6.6 α.

\*Απὸ ὅλα αὐτὰ τὰ τμήματα τὸ  $MD$ , ποῦ εἶναι κάθετο στὴν  $\epsilon$ , ἔχει τὸ μικρότερο μήκος καὶ λέγεται *ἀπόστασις* τοῦ σημείου  $M$  ἀπὸ τὴν  $\epsilon$ .

Τὸ σημεῖο  $A$  λέγεται *πόδι* (πούς) τοῦ πλαγίου τμήματος  $MA$ ,



ἐνῶ τὸ Δ λέγεται πόδι (πούς) τῆς καθέτου, ἡ *προβολή* τοῦ Μ ἐπ' αὐτὴν εὐθεία ε. Τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ΑΔ λέγεται *ἀπόστασι* τοῦ ποδὸς Α τῆς πλαγίας ἀπὸ τὸν πόδα Δ τῆς καθέτου.

Ἄς ἐξετάσωμε τώρα τὶς παρακάτω περιπτώσεις:

### Περίπτωσι 1η.

Στὶς δύο πλάγιες ΜΑ καὶ ΜΒ οἱ πόδες τοὺς Α καὶ Β ἰσά-  
πέχουν ἀπὸ τὸν πόδα Δ τῆς κα-  
θέτου (σχ. 6·6β). Πού σημαίνει  
ὅτι ἡ ΜΔ εἶναι *μεσοκάθετος* καὶ  
σύμφωνα μὲ γνωστὴ ιδιότητα  
(παράγρ. 3·13) θὰ εἶναι:

$$MA = MB.$$

### Ἀντίστροφη περίπτωση.

Ἐστω ὅτι οἱ δύο πλάγιες  
ΜΑ καὶ ΜΒ εἶναι ἴσες. Τότε τὸ  
τρίγωνο ΑΜΒ θὰ εἶναι ἰσοσκε-  
λές, πού σημαίνει ὅτι ἡ ΜΔ, ἐκτὸς ἀπὸ ὕψος, θὰ εἶναι καὶ διάμεσος.

Ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ  $AD = BD$ .

*Συμπέρασμα.*

Ἄν οἱ πόδες (Α καὶ Β) δύο πλαγίων τμημάτων (ΜΑ καὶ ΜΒ) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸν πόδα (Δ) τῆς καθέτου (ΜΔ), τότε τὰ δύο πλάγια τμήματα εἶναι ἴσα μεταξύ τους καὶ ἀντιστρόφως\*.

### Περίπτωσι 2α.

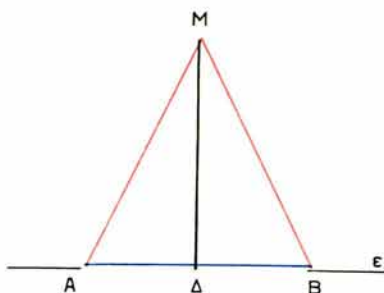
Ἐστω ὅτι στὶς πλάγιες ΜΑ καὶ ΜΒ ἔχομε γιὰ τοὺς πόδες  
τούς:  $AD < BD$  (σχ. 6·6γ).

Βλέπομε τότε ὅτι:  $MA < MB$  \*\*.

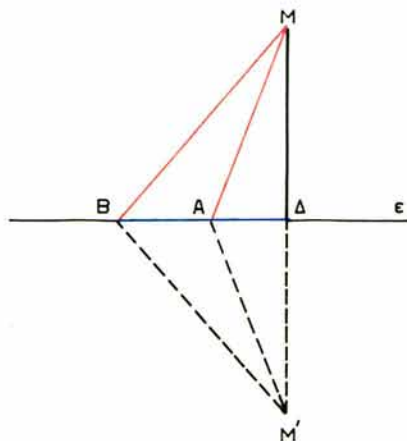
\* Ἡ ἀντίστροφη πρότασι μπορεῖ νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

Ἄν δύο πλάγια τμήματα εἶναι μεταξύ τους ἴσα, τότε οἱ πόδες τους ἰσα-  
πέχουν ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

\*\* Τὸ ἐστιγμένο τμήμα στὸ σχῆμα δείχνει τὸν τρόπο τῆς θεωρητικῆς  
ἀποδείξεως καὶ ἀφορᾷ στὸν διδάσκοντα.



Σχ. 6·6β.



Σχ. 6·6 γ.

*Ἀντίστροφη περίπτωση.*

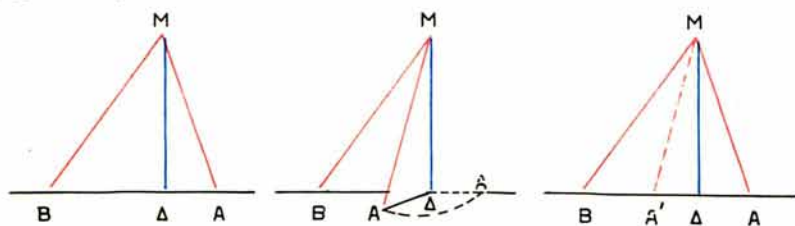
Ἄν οἱ δύο πόδες ἀντιστοιχοῦν σὲ πλάγιες  $MA$  καὶ  $MB$  τέτοιες, ὥστε:  $MA < MB$ , τότε καὶ οἱ ἀποστάσεις  $AΔ$  καὶ  $BΔ$  θὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσι:

$$AΔ < BΔ.$$

*Σημείωσι.*

Ἄν ὁ πούς  $Δ$  τῆς καθέτου εὑρίσκεται ἀνάμεσα στοὺς πόδες  $A$  καὶ  $B$ , τὸ πρόβλημα δὲν ἀλλάζει καὶ λύεται μὲ συνδυασμὸ τῶν δύο παραπάνω περιπτώσεων,

ἀρκεῖ νὰ στρέψουμε γύρω ἀπὸ τὴν  $MΔ$  τὸ τρίγωνο  $MΔA$  (σχ. 6·6 δ).



Σχ. 6·6 δ.

*Συμπέρασμα.*

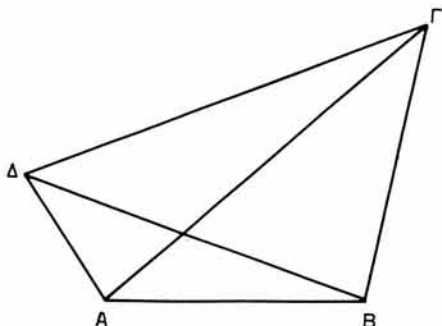
Ἀπὸ δύο πλάγιες ( $MA$  καὶ  $MB$ ), ποὺ οἱ πόδες τους ( $A$  καὶ  $B$ ) ἀπέχουν ἄνισα ἀπὸ τὸν πόδα ( $Δ$ ) τῆς καθέτου ( $MΔ$ ), μεγαλύτερη εἶναι ἐκείνη, ποὺ ἔχει τὸν πόδα τῆς νὰ ἀπέχη περισσότερο ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου καὶ ἀντιστρόφως\*.

\* Ἡ ἀντίστροφη πρότασι μπορεῖ νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

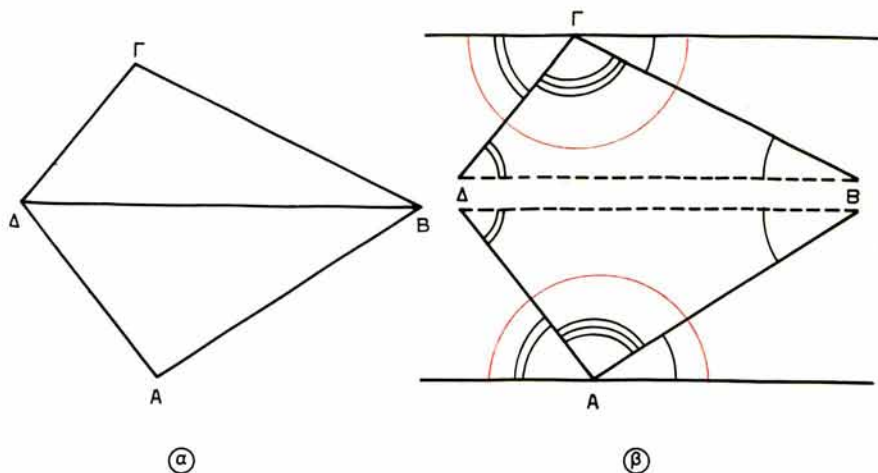
Ἀπὸ δύο ἄνισες πλάγιες, ὁ πούς τῆς μεγαλύτερας ἀπὸ αὐτὲς ἀπέχει περισσότερο ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

## 6.7 Τὸ τετράπλευρο.

Ἄς πάρωμε τέσσερα σημεία  $A, B, \Gamma$  καὶ  $\Delta$  ἐπάνω σὲ ἓνα ἐπίπεδο καὶ ἄς τὰ ἐνώσωμε μεταξύ τους μὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$  καὶ  $\Delta A$ . Τὸ σχῆμα  $AB\Gamma\Delta$ , ποὺ προκύπτει, ἔχει τέσσερις πλευρὲς (σχ. 6.7 α) καὶ λέγεται **τετράπλευρο**. Τὰ σημεία  $A, B, \Gamma$  καὶ  $\Delta$



Σχ. 6.7 α.



Σχ. 6.7 β.

λέγονται **κορυφές**, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$  καὶ  $\Delta A$  λέγονται **πλευρὲς** τοῦ τετραπλεύρου, ἐνῶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα  $AG$  καὶ  $BD$ , ποὺ συνδέουν τὶς ἀπέναντι κορυφές, λέγονται **διαγώνιοι** του.

Χωρίζομε τὸ τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  σὲ δύο μέρη φέροντας μία διαγώνιό του, ἔστω τὴν  $BD$  [σχ. 6.7 β (α)].

Βλέπουμε ότι σχηματίζονται δύο τρίγωνα, τὰ  $ΑΒΔ$  καὶ  $ΓΒΔ$ , πού καθένα τους, ὡς γνωστόν, ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2 ὀρθές.

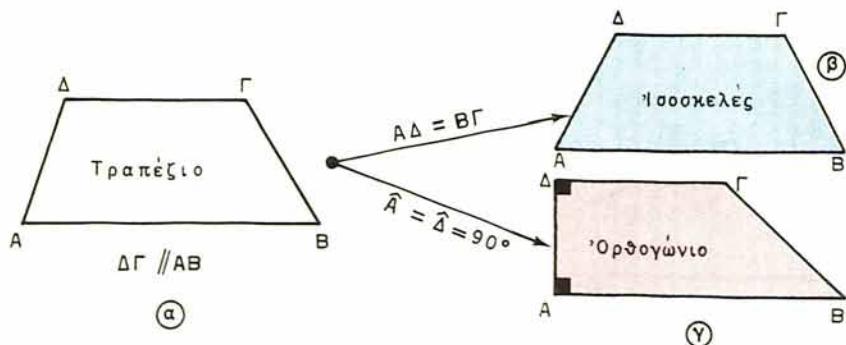
Ἐπομένως γιὰ τὸ τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  θὰ ἔχωμε:

$$\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} + \widehat{Δ} = 4 \text{ ὀρθές} = 360^\circ,$$

πού σημαίνει, ὅτι:

*Σὲ κάθε τετράπλευρο τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων του γωνιῶν εἶναι  $360^\circ$ .*

α) Ἄν σὲ ἓνα τετράπλευρο οἱ δύο ἀπέναντι πλευρές του  $ΑΒ$  καὶ  $ΓΔ$  εἶναι παράλληλες, τὸ τετράπλευρο ὀνομάζεται **τραπέζιο** [σχ. 6.7 γ (α)].

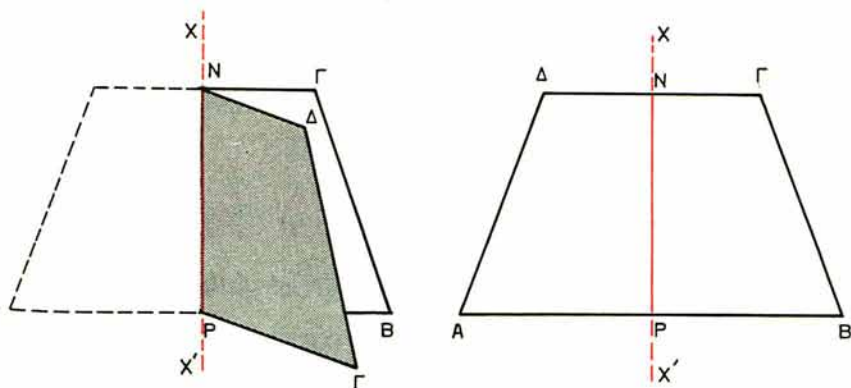


Σχ. 6.7 γ.

Στὴν περίπτωσηι πού οἱ δύο ἄλλες, μὴ παράλληλες πλευρές, εἶναι ἴσες, δηλαδή  $ΑΔ = ΒΓ$ , τὸ τραπέζιο λέγεται **ἰσοσκελές** [σχ. 6.7 γ (β)], ἐνῶ, ἂν μία γωνία του, π.χ. ἡ  $\widehat{Α} = 90^\circ$ , εἶναι δηλαδή ὀρθή (ὅποτε καὶ ἡ  $\widehat{Δ} = 90^\circ$ ), τὸ τραπέζιο λέγεται **ὀρθογώνιο** τραπέζιο [σχ. 6.7 γ (γ)].

Στὸ σχῆμα 6.7 δ δίνεται ὁ ἄξων συμμετρίας  $ΧΧ'$  ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τραπέζιου  $ΑΒΓΔ$ .

β) Ἄν στὸ τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  συμβῇ νὰ εἶναι μεταξύ τους παράλληλες ὄχι μόνο οἱ πλευρές  $ΑΒ$  καὶ  $ΓΔ$ , ἀλλὰ καὶ οἱ  $ΑΔ$  καὶ  $ΒΓ$ ,



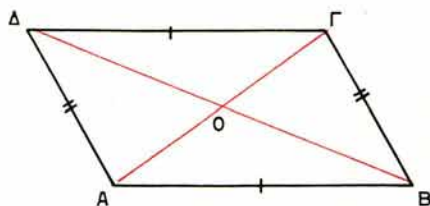
Σχ. 6.7 δ.

τότε τὸ τετράπλευρο λέγεται **παράλληλογράμμο** (σχ. 6.7 ε). Ἄν μετρήσωμε τὶς παράλληλες πλευρές, βλέπομε ὅτι εἶναι ἀνὰ δύο ἴσες μεταξύ τους.

Δηλαδή:

$$AB = // \Gamma\Delta$$

$$A\Delta = // B\Gamma$$



Σχ. 6.7 ε.

Τὸ σύμβολο  $= //$  σημαίνει **ἴσον καὶ παράλληλον**.

᾽Ωστε:

*Σὲ ἓνα παράλληλογράμμο οἱ ἀπέναντι πλευρές εἶναι ἴσες.*

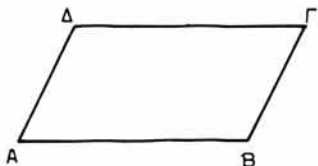
Ἄν συγκρίνωμε τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ εὐρίσκομε ὅτι εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν τὶς πλευρές τους μία πρὸς μία ἴσες. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ . Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἐξάγεται ὅτι  $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ .

᾽Ωστε:

*Σὲ ἓνα παράλληλογράμμο οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες.*

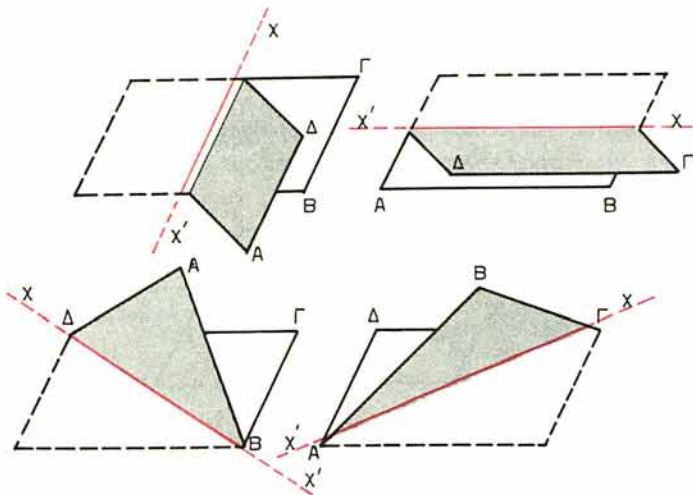


“Αν μετρήσουμε τὰ κομμάτια, στὰ ὁποῖα χωρίζονται οἱ δύο διαγώνιοι, καθὼς κόβονται στὸ  $O$  (σχ. 6·7 ε), διαπιστώνουμε ὅτι τὸ  $O$  εἶναι μέσον τῆς  $ΑΓ$  καὶ τῆς  $ΒΔ$ , πού σημαίνει ὅτι:



Οἱ διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται\*.

Στὸ σχῆμα 6·7 στ δεικνύεται



Σχ. 6·7 στ.

ἢ ἔλλειψι σὲ ἄξονες συμμετρίας σὲ ἓνα παραλληλόγραμμο.

γ) “Αν τώρα στὸ παραλληλόγραμμο τοῦ σχήματος 6·7 ε συμβῇ, ὥστε δύο διαδοχικές, μὴ παράλληλες πλευρές, νὰ εἶναι ἴσες, π.χ.  $AB = BΓ$  (σχ. 6·7 ζ), τότε ὅλες του οἱ πλευρές θὰ εἶναι ἴσες, δηλαδή θὰ ἔχωμε:

$$AB = BΓ = ΓΔ = ΔΑ.$$

\* Αὐτὸ προκύπτει καὶ ἀπὸ τὴν σύγκρισι τῶν τριγώνων  $AOB$  καὶ  $ΓOD$ , πού ἔχουν:  $AB = ΓΔ$ ,  $\widehat{OAB} = \widehat{OΓΔ}$  καὶ  $\widehat{OBA} = \widehat{ODΓ}$ , ὡς γωνίες ὀξείες τῶν παραλλήλων  $AB$  καὶ  $ΓΔ$ , πού κόβονται ἀπὸ τὴς  $ΑΓ$  καὶ  $ΒΔ$  ἀντιστοίχως.

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ τὸ παραλληλόγραμμο λέγεται **ρόμβος**.

Στὸν **ρόμβο** οἱ **διαγώνιοι** **τέμνονται καθέτως**, **στὸ μέσον** καὶ **διχοτομοῦν τὶς γωνίες του**.

Δηλαδή:  $ΑΓ \perp ΒΔ$

καὶ  $\widehat{ΒΑΟ} = \widehat{ΟΑΔ} = \widehat{ΒΓΟ} = \widehat{ΟΓΔ}$

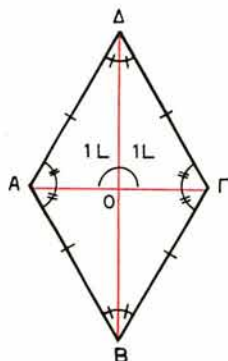
$\widehat{ΑΒΟ} = \widehat{ΟΒΓ} = \widehat{ΑΔΟ} = \widehat{ΟΔΓ}$

Αὐτὸ εὐκόλα φαίνεται, ἂν σκεφθοῦμε ὅτι:

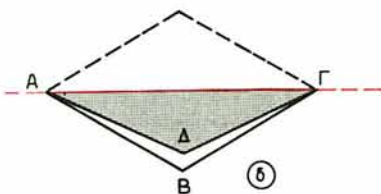
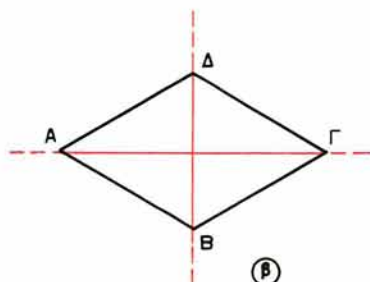
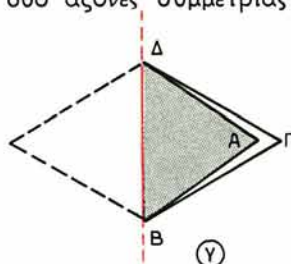
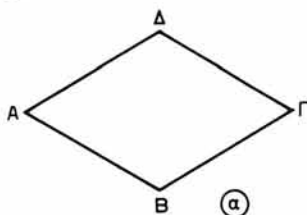
Τρίγωνο  $ΑΟΒ =$  Τρίγωνο  $ΑΟΔ$ ,

γιατὶ ἔχουν τὶς πλευρὲς τους ἴσες μίᾱ πρὸς μίᾱ.

Στὸ σχῆμα 6.7 η δίνονται οἱ δύο ἄξονες συμμετρίας σὲ ἓνα **ρόμβο**.



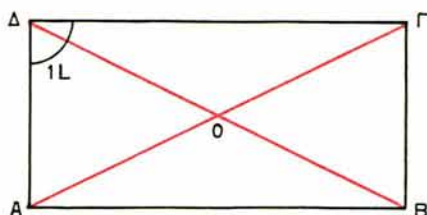
Σχ. 6.7 ζ.



Σχ. 6.7 η.

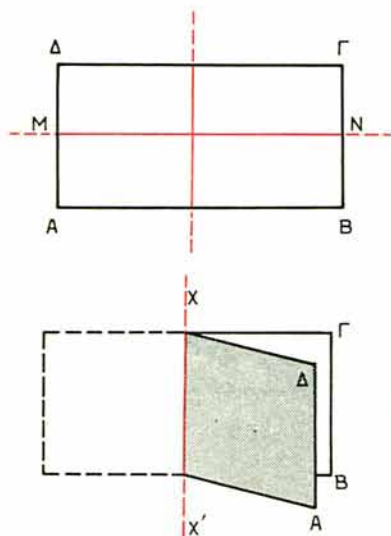
δ) Ἄν στὸ παραλληλόγραμμο τοῦ σχήματος 6.7 ε συμβῇ μίᾱ γωνία νὰ εἶναι ὀρθή, ὅποτε καὶ ὅλες οἱ ἄλλες θὰ εἶναι ὀρθές, τότε αὐτὸ λέγεται **ὀρθογώνιο** (σχ. 6.7 θ). Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωσι οἱ διαγώνιοι





Σχ. 6.7θ.

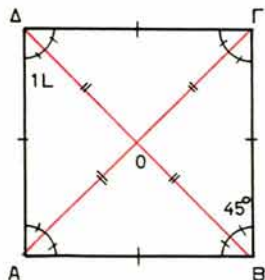
είναι μεταξύ τους ίσες, δηλαδή  $AG = BD$ . Στο σχήμα 6.7 ι δίνονται οι δύο άξονες συμμετρίας ενός ορθογωνίου.



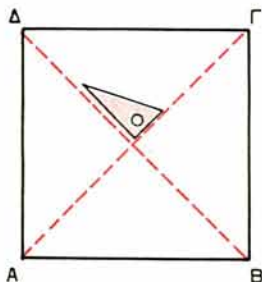
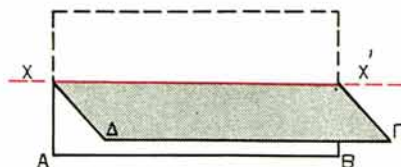
ε) Τέλος, αν σέ ένα ρόμβο μία γωνία είναι ὀρθή, τότε ὁ ρόμβος γίνεται καὶ ὀρθογώνιο (σχ. 6.7 ια) ἢ, ἂν σέ ένα ὀρθογώνιο δύο μὴ παράλληλες πλευρές του γίνουν ἴσες, τὸ ὀρθογώνιο γίνεται καὶ ρόμβος (σχ. 6.7 ιβ).

Αὐτὸ τὸ τετράπλευρο, ποὺ

Σχ. 6.7 ι.



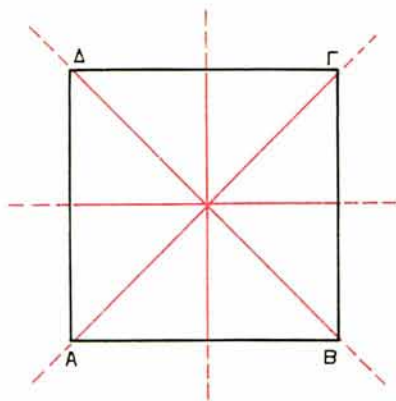
Σχ. 6.7 ια.



Σχ. 6.7 ιβ.

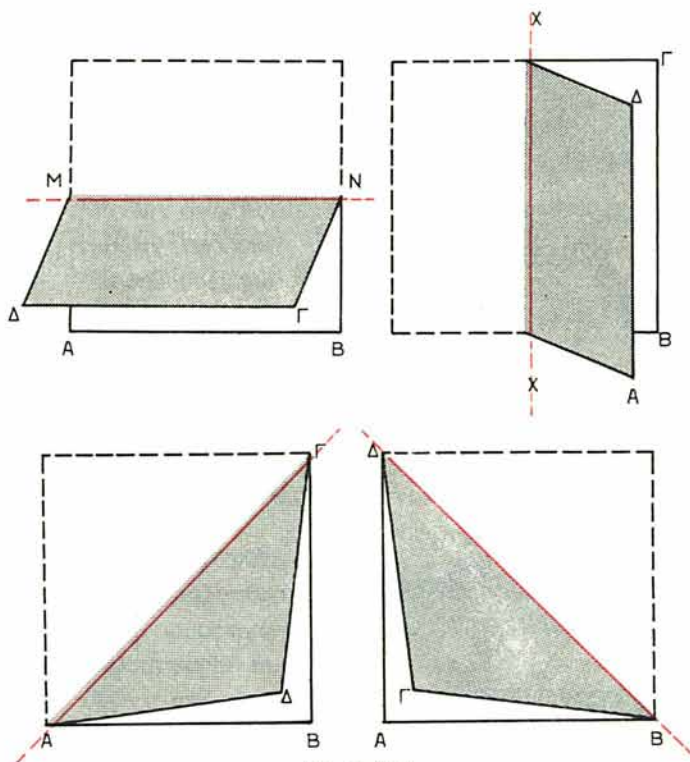
Είναι και ὀρθογώνιο και ρόμβος, λέγεται *τετράγωνο*. Αυτό έχει όλες τις ιδιότητες και τῶν δύο σχημάτων, δηλαδή ἴσες πλευρές, ἴσες γωνίες ( $90^\circ$  ή κάθε μία), ἴσες διαγωνίους, που τέμνονται καθέτως και στο μέσον και διχοτομοῦν τις γωνίες του (σχ. 6.7 ια και 6.7 ιβ).

Στο σχῆμα 6.7 ιγ δίνονται οἱ 4 ἄξονες συμμετρίας του.



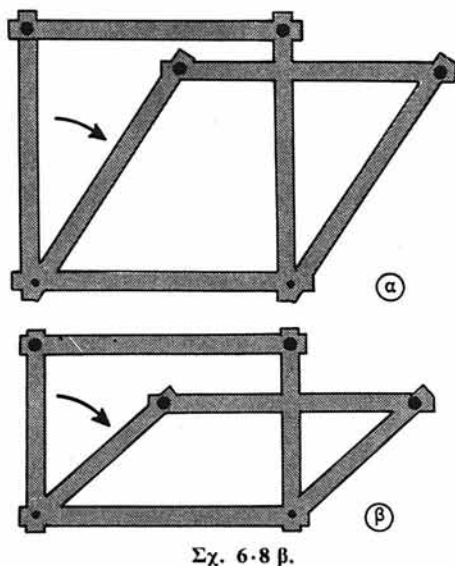
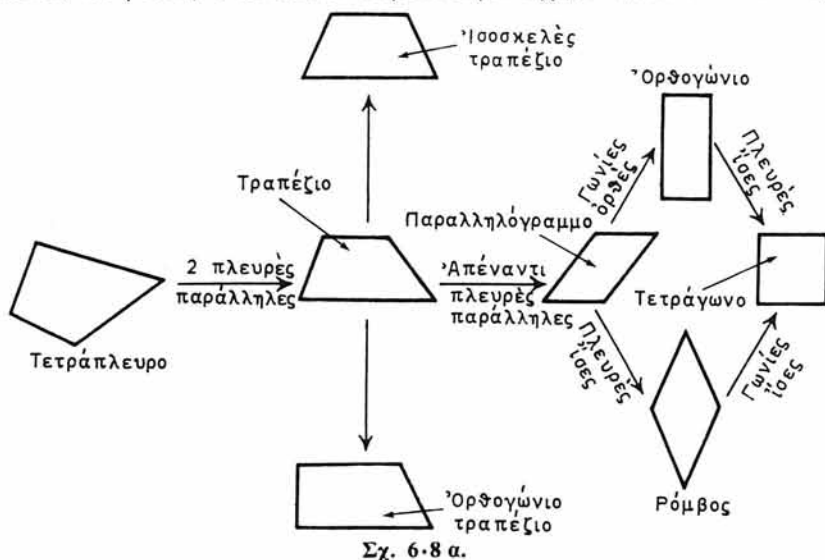
6.8 Ανακεφαλαίωση στα τετράπλευρα.

Στο σχῆμα 6.8 α δίνουμε μία



Σχ. 6.7 ιγ.

ἀνακεφαλαιώσι για τὸ πῶς ἀπὸ τὸ ἀπλὸ τετράπλευρο μπορεῖ κανεὶς νὰ φτάσῃ στὰ εἰδικὰ τετράπλευρα σχήματα, ποὺ τὸ καθένα,



ἀνάλογα μετὰ τὴν ιδιότητα ποὺ ἔχει, χαρακτηρίζεται μετὰ εἰδικότερο ὄνομα.

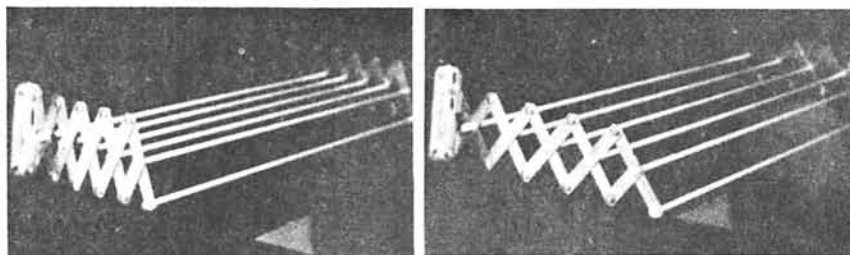
Στὸ σχῆμα 6·8 β φαίνονται τὰ ἀκόλουθα:

— Πῶς τὸ τετράγωνο γίνεται Ῥόμβος, μετὰ τὴν βοήθεια ἀρθρωτῶν ράβδων [σχ. 6·8 β (α)] καὶ ἀντίστροφα.

— Πῶς μετὰ τὴν βοήθεια πάλι ἀρθρωτῶν ράβδων τὸ ὀρθογώνιο γίνεται παραλληλόγραμμο [σχ. 6·8 β (β)] καὶ ἀντίστροφα.

Στὸ σχῆμα 6·8 γ φαίνεται μία ἐφαρμογὴ τῶν ἀρθρωτῶν αὐτῶν ράβδων καὶ

ἡ χρησιμότης τῆς μετατροπῆς στὰ σχήματα τετραγώνου - Ῥόμβου.



Σχ. 6.8 γ.

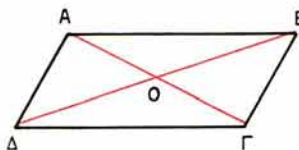
6.9 Βασικές ιδιότητες στα παραλληλόγραμμα και αντίστροφες προτάσεις.

## ΙΔΙΟΤΗΣ

## ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

1. Σε ένα **παραλληλόγραμμο** έχουμε ότι:

1. Ένα **τετράπλευρο** είναι **παραλληλόγραμμο** όταν:

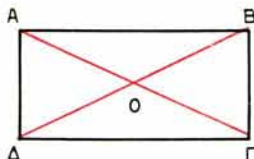


|                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| $AB \parallel \Gamma\Delta$ | $BC \parallel A\Delta$   |
| $AO = O\Gamma$              | $BO = O\Delta$           |
| $\hat{A} = \hat{\Gamma}$    | $\hat{B} = \hat{\Delta}$ |

- α) Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.  
 β) Οί απέναντι πλευρές είναι ίσες.  
 γ) Οί απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.  
 δ) Οί διαγώνιοι διχοτομούνται.  
 ε) Οί απέναντι γωνίες είναι ίσες.

2. Σε ένα **όρθογώνιο** παραλληλόγραμμο έχουμε ότι:

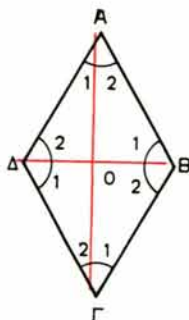
2. Ένα **τετράπλευρο** είναι **όρθογώνιο**, όταν:



|                                                              |
|--------------------------------------------------------------|
| $AF = B\Delta$                                               |
| $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ |

- α) Οί διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται.  
 β) Όλες οί γωνίες είναι όρθές.

3. Σε ένα **ρόμβο** έχουμε ότι:



3. Ένα **τετράπλευρο** είναι **ρόμβος**, όταν:

$$ΑΓ \perp ΒΔ \quad \text{ή} \quad ΑΟ = ΟΓ \\ ΒΟ = ΟΔ$$

$$ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

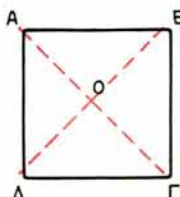
$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \quad \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$$

α) Η μία διαγώνιος είναι μεσοκάθετος στην άλλη.

β) Όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους.

γ) Οί διαγώνιοι είναι διχοτόμοι των γωνιών.

4. Σε ένα **τετράγωνο** έχουμε ότι:



$$ΑΓ = ΒΔ \quad ΑΓ \perp ΒΔ \\ ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ \\ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ \\ ΑΒ \perp ΒΓ \quad ΓΔ \perp ΔΑ \\ ΓΔ \perp ΒΓ \quad ΓΔ \perp ΑΔ$$

4. Ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, όταν:

α) Οί διαγώνιοι είναι ίσες και ή μία είναι μεσοκάθετος στην άλλη.

β) Όλες οι πλευρές είναι ίσες και κάθετες μεταξύ τους.

Άκόμη έχουμε ότι:

α) Όλες οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου είναι και ιδιότητες του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου.

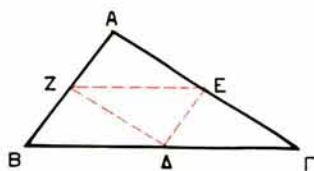
β) Όλες οι ιδιότητες του ορθογωνίου είναι και ιδιότητες του τετραγώνου.

γ) Όλες οι ιδιότητες του ρόμβου είναι και ιδιότητες του τετραγώνου.

6 · 10 Μία ιδιότης στα τρίγωνα.

Σε κάθε τρίγωνο το εὐθύγραμμο τμήμα που ἐνώνει τὰ μέσα δύο πλευρῶν εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν τρίτη πλευρὰ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ μισό της.

Αυτό σημαίνει πώς στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , αν τὰ  $\Delta$ ,  $E$  καὶ  $Z$  εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$ ,  $AB$  ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμε (σχ. 6·10 α):



$$ZE = \parallel \frac{B\Gamma}{2}$$

$$\Delta E = \parallel \frac{A\Gamma}{2}$$

$$\Delta Z = \parallel \frac{AB}{2}$$

Σχ. 6·10 α.

Ἀπόδειξι.

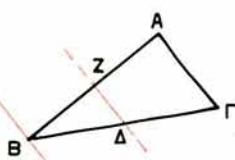
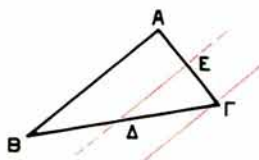
Στὸ τρίγωνο  $AB\Gamma$  (σχ. 6·10 β) τὸ  $\Delta$  εἶναι μέσον τῆς  $B\Gamma$ . Φέρνομε τὴν  $\Delta E \parallel AB$ . Σύμφωνα μετὰ τὴν γνωστὴ ἰδιότητα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν (Κεφάλ. 3, παράγρ. 3·19 ε) θὰ ἔχωμε ὅτι τὸ  $E$  εἶναι μέσον τῆς  $A\Gamma$ . Τὸ ἴδιο θὰ συμβῇ, ἂν φέρωμε τὴν  $\Delta Z \parallel A\Gamma$  ἢ τὴν  $EZ \parallel B\Gamma$ .

Ἐπίσης: Τὸ τετράπλευρο  $B\Delta EZ$  ἔχει:

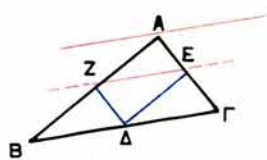
$$ZE \parallel B\Delta \quad \text{καὶ} \quad \Delta E \parallel BZ.$$

Ἐπομένως εἶναι παραλληλόγραμμο.

$$\text{Ἄρα: } ZE = \parallel \frac{B\Gamma}{2}.$$



Σχ. 6·10 β.



### 6·11 Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ τὶς παραγράφους 6·1 ἕως 6·6.

1. Σὲ τρίγωνο  $AB\Gamma$  ἔχομε:

$$\widehat{A} = 48^\circ 50' 32'' \quad \widehat{B} = 75^\circ 30' 28''$$

Νὰ υπολογίσετε τὴν γωνία  $\Gamma$ .

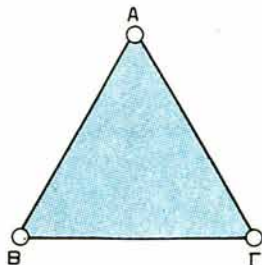
$$(55^\circ 39')$$

2. Ἀπὸ φύλλο λαμαρίνας  $2,5 \text{ m} \times 3,9 \text{ m}$  πόσα τριγωνικὰ κομμάτια με κάθετες πλευρὲς  $1,2 \text{ m}$  καὶ  $1,8 \text{ m}$  μπορεῖτε νὰ κόψετε; Τὰ κομμάτια τῆς λαμαρίνας, ποὺ θὰ μείνουν, τί πλάτος θὰ ἔχουν; (Σχεδιάσετε ὑπὸ κλίμακα τῆς ἐκλογῆς σας).

(8 κομ., μένουν:  $0,3 \text{ m}$  καὶ  $0,1 \text{ m}$ )



3. Το πολύφωτο ΑΒΓ (σχ. 6·11 α) έχει σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά 30 cm. Ἀπό ποιο σημείο θά τὸ κρεμάσωμε, ὥστε νὰ μείνῃ ὀριζόντιο;



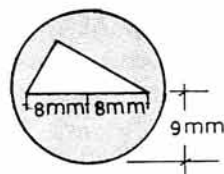
Σχ. 6·11 α.

4. Σὲ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι  $A = 38^\circ 40' 18''$ . Πόσο εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὶς ἄλλες δύο;  $(70^\circ 39' 51'')$

5. Πόσο θά εἶναι ἡ κάθε ὁξεία γωνία σὲ τρίγωνο ὀρθογώνιο ἰσοσκελές;

 $(45^\circ)$ 

20 mm τριγωνικά κομμάτια σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου με μία ὁξεία γωνία  $30^\circ$  καὶ ὑποτείνουσα 16 mm, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 6·11 β.

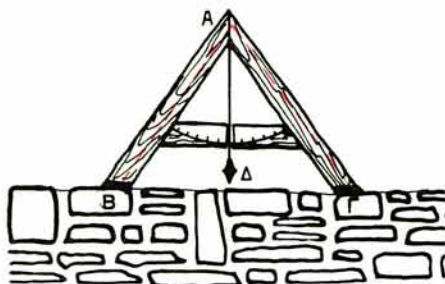


Σχ. 6·11 β.

7. Σὲ ποιο σημείο κόβονται τὰ ὕψη ὀρθογωνίου τριγώνου;

8. Μὲ τὴν βοήθεια πρόχειρης κατασκευῆς, ὅπως εἶναι αὐτὴ μετὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο τοῦ σχήματος 6·11 γ, ἐλέγχομε ἂν μία ἐπιφάνεια τοίχου εἶναι ὀριζόντια. Ἀνοίγομε τὰ σκέλη, μέχρι τοῦ τὸ βαρίδι νὰ ἀγγίξῃ τὸν τοῖχο.

Πότε ὁ τοῖχος εἶναι ὀριζόντιος καὶ γιατί; (Ἐξετάσετε, τί εἶναι ἡ ΑΔ στὸ τρίγωνο ΑΒΓ).



Σχ. 6·11 γ.

9. Γιὰ κάθε 30 cm μήκους ἡλεκτροσυγκολλήσεως χρειαζόμαστε καὶ ἓνα ἡλεκτρόδιο. Πόσα ἡλεκτρόδια χρειαζόμαστε γιὰ νὰ συγκολλήσωμε ἐπάνω σὲ μιὰ λαμαρίνα δύο τριγωνικά κομμάτια μετὰ πλευρές:

|             |       |       |       |     |
|-------------|-------|-------|-------|-----|
| Τὸ πρῶτο:   | 30 cm | 40 cm | 50 cm | καὶ |
| τὸ δεύτερο: | 50 cm | 85 cm | 85 cm |     |

Τὰ δύο κομμάτια τὰ κολλᾶμε πρῶτα μεταξύ τους σόκορα, ὥστε νὰ σχηματισθῇ τετράπλευρο. Σχεδιάσετε τὴν συγκόλλησι ὁλόκληρη.

$\left(9 \frac{2}{3} \text{ ἡλεκτρόδια}\right)$

10. Θέλουμε να κατασκευάσουμε το πλαίσιο ενός φωτιστικού, όπως δείχνει το σχήμα 6.11 δ. Πώς θα το σχεδιάσουμε;

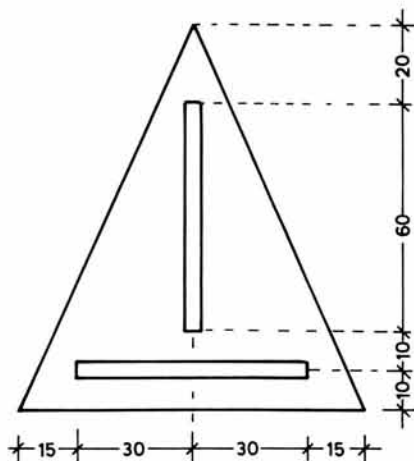
11. Μπορείτε να εξηγήσετε, γιατί στην σκάλα του σχήματος 6.11 ε το τρίτο πόδι περνάει από την μέση όλων των σκαλοπατιών, όταν την κλείσουμε και την στήσουμε κατακόρυφα;

12. Στο παράθυρο ΑΒΓΔ (σχ. 6.11 στ), στο όποιο  $AE = EB$  και  $AZ = ZΓ$ , μπορείτε να εξηγήσετε, γιατί τα κομμάτια τζαμιού είναι ανά δύο ίσα μεταξύ τους; Δηλαδή:

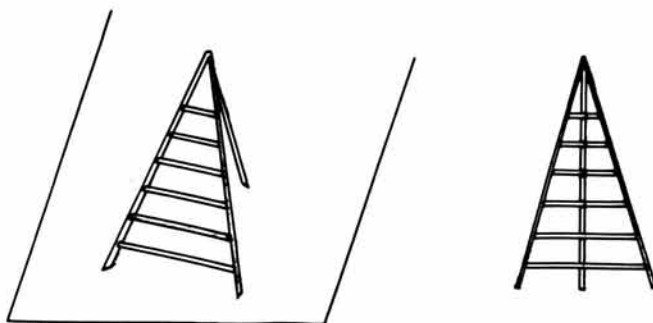
Το ΔΑΕ με το ΓΒΕ

το ΔΕΗ με το ΓΕΗ

το ΔΖΗ με το ΓΖΗ.



Σχ. 6.11 δ.

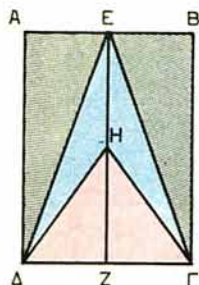


Σχ. 6.11 ε.

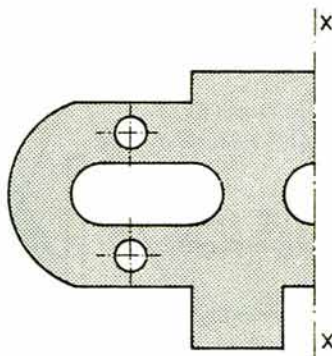
13. Όλοκληρώσετε το σχήμα 6.11 ζ, στο όποιο η  $X'X$  είναι άξων συμμετρίας.

14. Πώς θα μετρήσουμε την γωνία, που σχηματίζουν στο πάτωμα δύο τοίχοι, χρησιμοποιώντας ένα μοιρογνωμόνιο\* και μία ράβδο (σχ. 6.11 η);

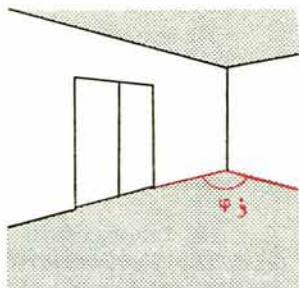
\* Πρόκειται για ειδικό μοιρογνωμόνιο, κατάλληλο για την μέτρηση γωνιών πάνω σε μεγάλες επιφάνειες (δάπεδο, λαμαρίνες κ.λπ).



Σχ. 6·11 στ.

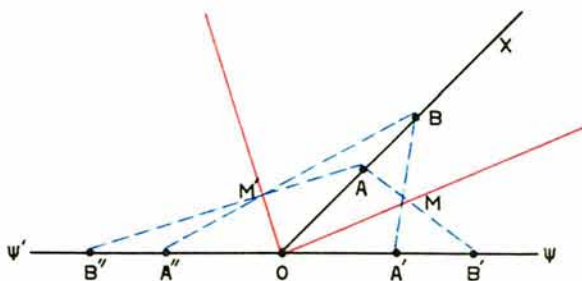


Σχ. 6·11 ζ.



Σχ. 6·11 η.

15. Πάνω στις πλευρές γωνίας  $XO\Psi$  (σχ. 6·11 θ) πάρετε με την βοήθεια κανόνος τὰ παρακάτω τμήματα:  $OA = OA' = OA''$ ,  $OB = OB' = OB''$ .



Σχ. 6·11 θ.

α) Νά συγκρίνετε τὰ τρίγωνα  $OAB'$  και  $OA'B$ , πού σχηματίζονται, αν φέρωμε τις  $A'B$  και  $AB'$  και νά δείξετε ότι είναι ίσα.

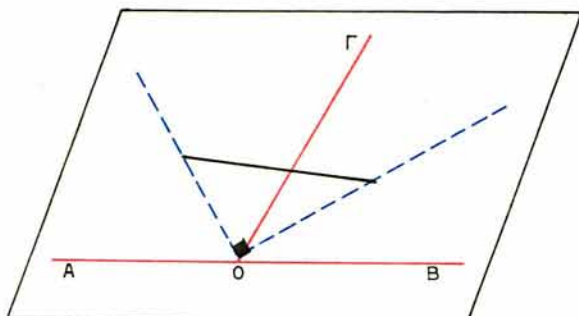
β) Νά δείξετε μετά ότι και τὰ τρίγωνα  $AMB$  και  $A'MB'$  είναι ίσα.

γ) Τέλος ότι και τὰ τρίγωνα  $OMB$  και  $OMB'$  είναι ίσα, πού σημαίνει ότι  $\widehat{AOM} = \widehat{A'OM}$ , δηλαδή  $OM = \text{διχοτόμος της } \widehat{XO\Psi}$ .

Ό παραπάνω τρόπος χρησιμοποιείται τόσο για την σχεδίαση της διχοτόμου μιᾶς γωνίας όσο και μιᾶς ὀρθῆς γωνίας με την βοήθεια μόνο ἑνὸς κανόνος.

16. Διαθέτετε μόνο τὸ μέτρο σας καὶ τὸ σιδηροπρίονό σας. Χρησιμοποιώντας τὴν λάμα σὰν κανόνα, πῶς θὰ κατασκευάσετε ἐπάνω σὲ ἓνα κομμάτι λαμαρίνας ἓνα τρίγωνο ὀρθογώνιο με κάθετες πλευρές 15 cm καὶ 20 cm;

(Νά φέρετε τὴν  $AB$  καὶ τὴν  $OG$  (σχ. 6.11 ι), μετὰ νὰ διχοτομήσετε τὶς γωνίες  $AOG$  καὶ  $BOG$ . Ἐξηγήσετε τὶς κατασκευές σας αὐτές).

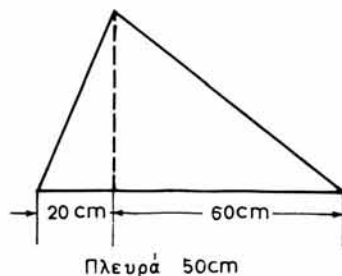


Σχ. 6.11 ι.

17. Μετρώντας τὶς διαστάσεις ἑνὸς ἀνοίγματος τριγωνικοῦ σχήματος σὲ μία σιδερένια πόρτα, στὴν θέσι τοῦ ὁποίου θὰ κολλήσωμε ἔλασμα τῶν ἰδίων διαστάσεων, ὁ τεχνίτης ἔγραψε στὸ σημειωματάριό του ὅτι οἱ δύο πλευρὲς ἔχουν μῆκος 85 cm καὶ 70 cm καὶ ὅτι τὸ ἕνα ὕψος εἶναι 45 cm. Ἐπειδὴ εἶναι δύσκολο νὰ πάρωμε πάλι μέτρα, πόσα τέτοια τριγωνικά κομμάτια πρέπει νὰ κατασκευάσωμε, ὥστε πηγαίνοντας νὰ τὰ κολλήσωμε, νὰ εἴμαστε βέβαιοι ὅτι ἕνα ἀπὸ ὅλα θὰ ἐφαρμόσῃ; Σχεδιάσετε τα.

(6 τεμάχια)

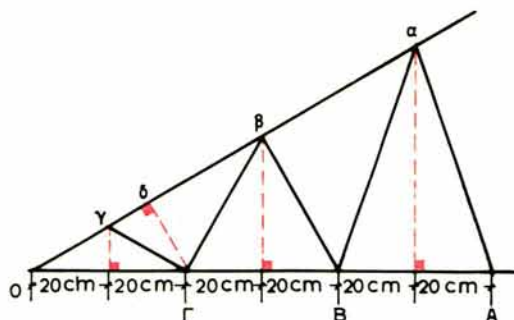
18. Παίρνοντας τὰ μέτρα στὸ τριγωνικὸ σχῆμα τοῦ σχήματος 6.11 ια, ὁ τεχνίτης ἔγραψε στὸ χαρτί του «πλευρὰ 50 cm». Μπορεῖτε νὰ σχεδιάσετε τὸ τρίγωνο, προσδιορίζοντας προηγουμένως ποῖα ἀπὸ τὶς δύο πλευρὲς εἶναι ἐκείνη ποὺ ἔχει μῆκος 50 cm;



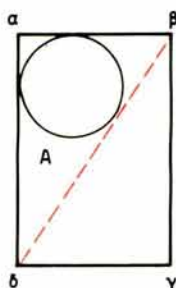
Σχ. 6.11 ια.

19. Στὴν σιδηροκατασκευὴ τοῦ σχήματος 6.11 ιβ νὰ συγκρίνετε τὰ κομμάτια  $A\alpha$  καὶ  $B\alpha$ ,  $B\beta$  καὶ  $\Gamma\beta$ . Γιατί εἶναι ἴσα μεταξύ τους; Φέρετε μετὰ ἀπὸ τὸ  $\Gamma$  τὴν  $\Gamma\delta \perp O\alpha$  καὶ μετρήσετε τὰ κομμάτια  $\gamma\delta$  καὶ  $\delta\beta$ . Γιατί τὸ  $\delta\beta$  εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ  $\delta\gamma$ ;

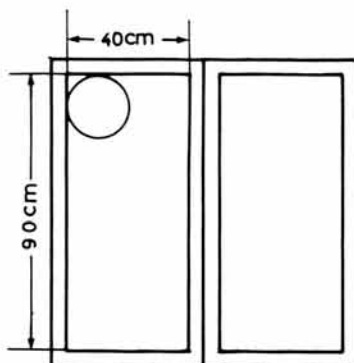
20. Ἐνα φύλλο παραθύρου τὸ χωρίζομε ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 6.11 ιγ. Στὸ κομμάτι  $A$  θέλομε νὰ βάλωμε ἕνα ἐξαεριστήρα, ποῦ τὸ πλαίσίό του νὰ ἐφάπτεται στὶς τρεῖς πλευρὲς  $\alpha\beta$ ,  $\beta\delta$ ,  $\alpha\delta$ . Μπορεῖτε νὰ σχεδιάσετε ἐπάνω στὸ φύλλο  $\alpha\beta\delta$  τοῦ παραθύρου τὸν κύκλο; (Θὰ πρέπει πρῶτα νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρο του· θὰ εἶναι ἕνα σημεῖο  $O$ , ποῦ θὰ ἀπέχῃ τὴν ἴδια ἀπόστασι καὶ ἀπὸ τὶς τρεῖς πλευρὲς).



Σχ. 6·11 ιβ.



Σχ. 6·11 ιγ.



Σχ. 6·11 ιδ.

21. Στο τζάμι παραθύρου (σχ. 6·11 ιδ) θέλουμε να ανοίξουμε τρύπα για να βάλουμε εξεριστήρα.

Πώς θα επιτύχουμε, ώστε το πλαίσίό του να εφάπτεται στο πλαίσιο του παραθύρου;

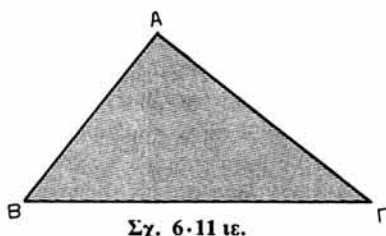
Διάμετρος πλαισίου ανεμιστήρος 26 cm.

22. Έχουμε ένα τριγωνικό κομμάτι λαμαρίνας (σχ. 6·11 ιε), από το οποίο θέλουμε να κόψουμε ένα κυκλικό κομμάτι, όσο μεγαλύτερο μπορούμε. Πώς θα το σχεδιάσουμε;

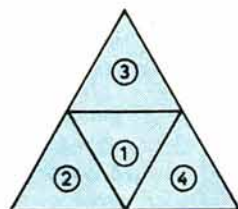
23. Έχετε τέσσερα ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τριγωνικά κομμάτια κόντρα πλακέ, με μήκος πλευράς 27,5 cm. Συγκολλήσετέ τα έτσι, ώστε να σχηματισθή ένα νέο τριγωνικό κομμάτι (σχ. 6·11 ιστ). Ύπολογίσετε το μήκος της συγκολλήσεως καθώς και την περίμετρο του νέου τριγώνου.

(82,5 cm και 165 cm)





Σχ. 6.11 ιε.



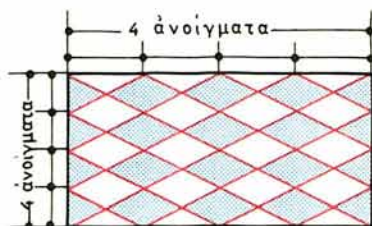
Σχ. 6.11 ιστ.

Από τις παραγράφους 6.7 έως 6.10.

1. Έχουμε τέσσερα έλάσματα μήκους 20 m, 8 m, 8 m και 12 m, με τὰ ὁποῖα θέλουμε νὰ κατασκευάσωμε πλαίσιο, πού νὰ ἔχη σχῆμα ἰσοσκελοῦς τραπεζίου. Πῶς θὰ τὸ ἐπιτύχωμε; (Γιὰ τὸ σχέδιο νὰ χρησιμοποιήσετε κλίμακα 1 : 4).

2. Νὰ κατασκευάσετε ὀρθογώνιο πλαίσιο, πού νὰ ἔχη μία πλευρὰ 3 m καὶ διαγώνιο 5 m. (Γιὰ τὴν σχεδίασι νὰ χρησιμοποιήσετε κλίμακα 1 : 50).

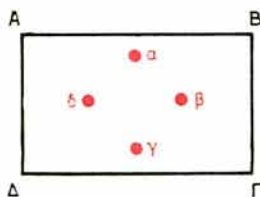
3. Τὸ δάπεδο ἐνὸς δωματίου, πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλακάκια σὲ σχῆμα ρόμβου, ὅπως στὸ σχῆμα 6.11 ιζ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν; (Θὰ πρέπει νὰ ἔχετε ὑπ' ὄψι σας ὅτι τὰ πλακάκια κόβονται σὲ κομμάτια, ἂν χρειασθῇ).



Σχ. 6.11 ιζ.

4. Νὰ μετρήσετε πόση λάμα θὰ χρειασθῇτε καὶ νὰ δείξετε μὲ ποιό τρόπο θὰ κατασκευάσετε ὀρθογώνιο πλαίσιο, ὅταν ξέρετε πῶς οἱ διαγώνιοι ἔχουν μήκος 80 cm καὶ σχηματίζουν γωνία 60°. (Νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν κλίμακα πού σὰς ἐξυπηρετεῖ καλῶτερα).

(περίπου 220 cm)

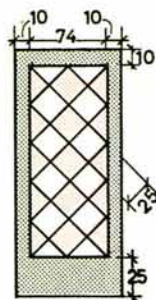


Σχ. 6.11 ιη.

5. Ἀπὸ τὴν ὀροφή ἐνὸς δωματίου εἶναι κρεμασμένα 4 φῶτα, πού τὸ καθένα τοὺς ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τοὺς τοίχους (π.χ. τὸ α ἀπέχει ἴσα ἀπὸ τοὺς τοίχους ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ) (σχ. 6.11 ιη). Μπορεῖτε νὰ εὑρετε τὸν τρόπο, πού θὰ προσδιορισθοῦν οἱ θέσεις α, β, γ καὶ δ; Τί σχῆμα θὰ εἶναι τὸ τετράπλευρο αβγδ;

6. Νὰ σχεδιάσετε τὴν σιδεριά, πού βλέπετε στὸ σχῆμα 6.11 ιθ καὶ νὰ ὑπολογίσετε πόση σιδερένια λάμα θὰ χρειασθῇτε, γιὰ τὴν κατασκευὴ της, ὅταν ὁλόκληρη, πλαίσιο καὶ πλέγμα, κατασκευάζεται ἀπὸ



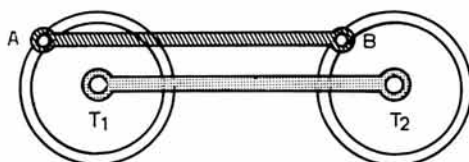


Σχ. 6·11 ιθ.

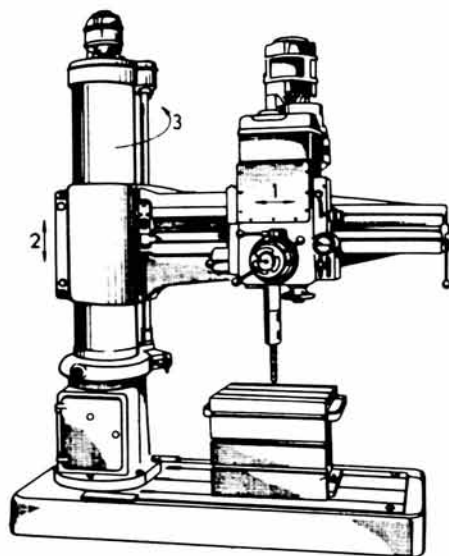
την ίδια λάμα. (Το σκιασμένο γκρι μέρος θα σκεπαστή από λαμαρίνα). (21,46 m λάμα)

7. Οι δύο τροχοί  $T_1$ ,  $T_2$  (σχ. 6·11 κ) είναι της ίδιας διαμέτρου και συνδέονται μόνιμα με το βράκτρο  $T_1$ ,  $T_2$ . 'Η κίνηση από τον  $T_1$  στον  $T_2$  μεταδίδεται με την βοήθεια του διωστήρος ΑΒ. Να δείξετε ότι ο διωστήρ μένει παράλληλος προς τον εαυτόν του σε όλη την διάρκεια της κινήσεως.

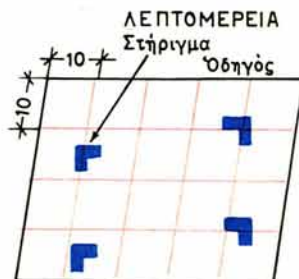
8. Στην πλάκα ενός καθετού τρυπανιού υπάρχουν ανά 10 cm έγκοπές, όπως φαίνεται στο σχήμα 6·11 κα. Θέλομε να τρυπήσωμε λαμαρίνες σχήματος ορθογωνίου 20 cm x 30 cm ακριβώς στο σημείο, που κόβονται οι διαγώνιοι. Που θα τοποθετήσωμε τους 4 οδηγούς, ώστε η έργασία μας να γίνει



Σχ. 6·11 κ.



Σχ. 6·11 κα.



Η πλάκα του καθετού τρυπανιού

συνέχεια χωρίς μέτρημα; (έν σειρά τρύπημα, όπως λέμε).

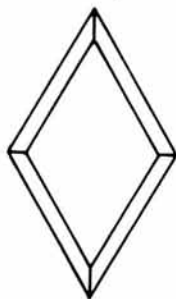
9. Για την κατασκευή πλαισίου σε σχήμα ρόμβου (σχ. 6·11 κβ) χρειαστήκαμε συνολικά 1,40 m λάμα. Πόση είναι η εξωτερική πλευρά του ρόμβου; (δέν θα υπολογισθῇ φύρα).

(35 cm)

10. Σε πλαίσιο σχήματος ρόμβου, που έχει έσωτερική πλευρά 50 cm μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα γυαλί, πάλι σε σχήμα ρόμβου, που έχει διαγωνίους 80 cm και 60 cm, σχεδιάσετε και τους δύο ρόμβους και μετρήσετε τις πλευρές και τις διαγωνίους, που δέν δίνονται.

11. Σε πάτωμα ενός τετραπλεύρου δωματίου (σχ. 6.11 κγ), μετρήσαμε τους τρεις τοίχους και εύρηκαμε ότι σχηματίζουν μεταξύ τους τις γωνίες  $A = 88^\circ$ ,  $B = 65^\circ$ ,  $\Gamma = 110^\circ$ . Ζητούμε το μέτρο της γωνίας Δ, που δέν μπορούσαμε να μετρήσουμε, γιατί οι τοίχοι ήταν γκρεμισμένοι.

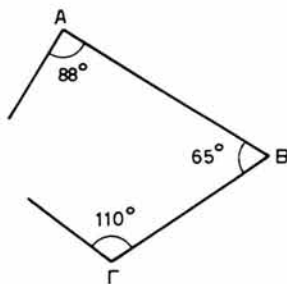
(97°)



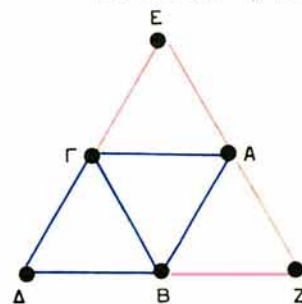
Σχ. 6.11 κβ.

12. Χρειάστηκε να κάνουμε μία τριγωνική γείωση με τέσσερα ηλεκτρόδια Α, Β, Γ και Δ, που τα βάλαμε σε σχήμα παραλληλογράμμου με πλευρές 3,15 μέτρα και μία διαγώνιο πάλι 3,15 μέτρα. Έπειδή όμως ή τιμή της αντίστασως της γειώσεως δέν μās ικανοποιούσε, βάλαμε άλλα δύο ηλεκτρόδια Ε και Ζ έτσι, ώστε η ΕΖ να είναι παράλληλη προς την ΒΓ και να περνά από το Α (σχ.6.11 κδ). Μπορείτε να υπολογίσετε, πόσο χάλκινο σύρμα θα χρειασθούμε: α) για την αρχική γείωση και β) για την συμπληρωματική;

(α : 15,75 m. β : 12,60 m)



Σχ. 6.11 κγ.



— Αρχική γείωση

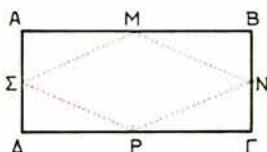
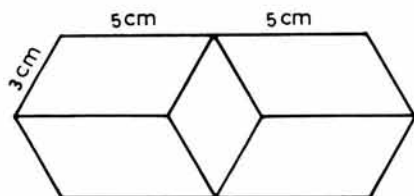
— Προσθήκη

Σχ. 6.11 κδ.

13. Μās λένε ότι το πλαίσιο ΑΒΓΔ του σχήματος 6.11 κε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Πώς μπορούμε να το ελέγξω αυτό με την βοήθεια ενός μέτρου ή ενός κανόνος ή έστω και με μία ξύλινη ράβδο που διαθέτομε; (τά σημεία Μ, Ν, Ρ και Σ είναι μέσα των πλευρών).

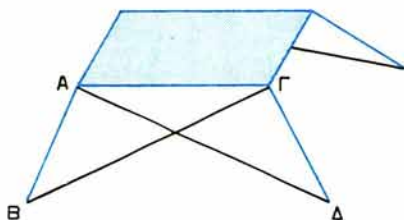
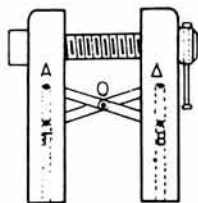
14. Ξέροντας ότι σε ένα παραλληλόγραμμο μία γωνία είναι  $85^\circ$ , μπορείτε να υπολογίσετε τις άλλες; ( $85^\circ$ ,  $95^\circ$ ,  $95^\circ$ )

15. Μπορείτε να σχεδιάσετε το πλαίσιο του σχήματος  $6 \cdot 11$  κστ, που κατασκευάσαμε από 4 κόντρα πλακέ σε σχήμα παραλληλογράμμου με πλευρές 3 cm, 5 cm και μία διαγώνιο 7 cm;

Σχ.  $6 \cdot 11$  κε.Σχ.  $6 \cdot 11$  κστ.

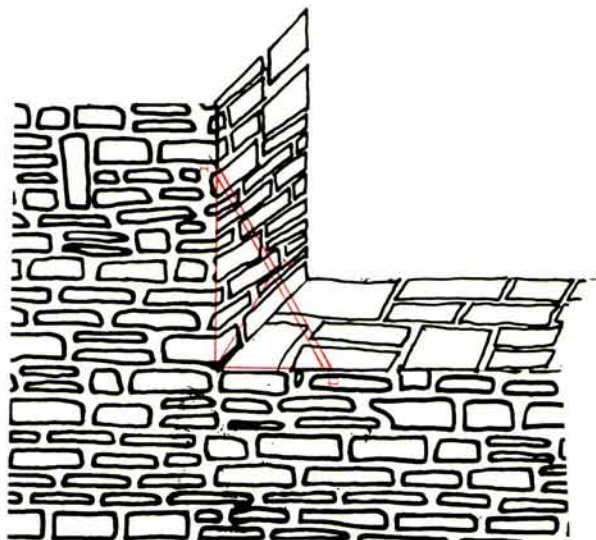
16. Στο πτυσσόμενο τραπέζι του σχήματος  $6 \cdot 11$  κζ τα δύο πόδια AB και ΓΔ είναι ίσα μεταξύ τους. Να δείξετε ότι, όταν το τραπέζι είναι άνοικτό, οι διαγώνιες ένισχύσεις ΑΔ και ΒΓ είναι μεταξύ τους ίσες.

17. Ξέρομε ότι οι σιαγόνες μιās μέγγενης παραμένουν μεταξύ τους παράλληλες. Όπως δείχνει το σχήμα  $6 \cdot 11$  κη, ο μηχανισμός που εξασφαλίζει αυτό άπτελείται από δύο ίσα στελέχη AB και ΔΓ άρθρωμένα στο μέσον O. Τα άκρα A και Δ είναι μονίμως στερεωμένα επάνω στις σιαγόνες, ενώ τα Γ και B γλιστρούν μέσα σε αulάκια, που έχουν οι σιαγόνες. Μπορείτε να εξηγήσετε, γιατί οι σιαγόνες μένουν παράλληλες;

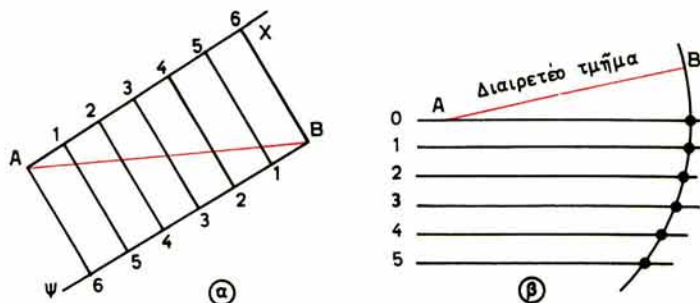
Σχ.  $6 \cdot 11$  κζ.Σχ.  $6 \cdot 11$  κη.

18. Θέλοντας να εξακριβώσωμε αν ένας τοίχος είναι κάθετος επάνω σε ένα άλλο, κάνομε το εξής: Τοποθετούμε μία σανίδα AB, όπως δείχνει το σχήμα  $6 \cdot 11$  κθ, και μετρούμε το μήκος OM, όπου M είναι το μέσον της AB. Έαν ή  $OM = \frac{AB}{2}$ , τότε λέμε ότι ο τοίχος A είναι κάθετος επάνω στον τοίχο B. Γιατί;

19. Δικαιολογήσετε την μέθοδο, που πολλές φορές χρησιμοποιούμε στο εφαρμοστήριο, προκειμένου να διαιρέσωμε ένα μήκος σε ίσα μέρη (3, 4, 5 κ.λπ.). Οι ευθείες AX και BY [σχ.  $6 \cdot 11$  λ (α)] είναι παράλληλες και τα διαδοχικά κομμάτια επάνω σ' αυτές είναι ίσα μεταξύ τους. Κάτι πιο απλό γίνεται με τις γραμμές του τετραδίου σας: εξηγήσέτε το [σχ.  $6 \cdot 11$  λ (β)].

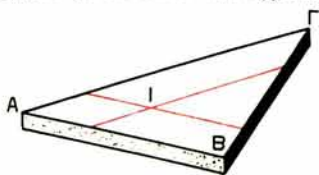


Σχ. 6.11 κθ.



Σχ. 6.11 λ.

20. Θέλοντας να χωρίσωμε ένα τρίγωνο κομμάτι ξύλου κατά την διχοτόμο στην γωνία A, παίρνομε την σηματούρα του ξυλουργού και χαράσσομε δύο ευθείες παράλληλες πρὸς τις πλευρὲς AB καὶ AG, σὲ ἴσες ἀποστάσεις, π.χ. 2 cm (σχ. 6.11 λα). Ἐστω I τὸ σημεῖο τομῆς τους. Μὲ τὸν χάρακα φέρομε τὴν AI καὶ λέμε ὅτι αὐτὴ εἶναι ἡ διχοτόμος. Γιατί;



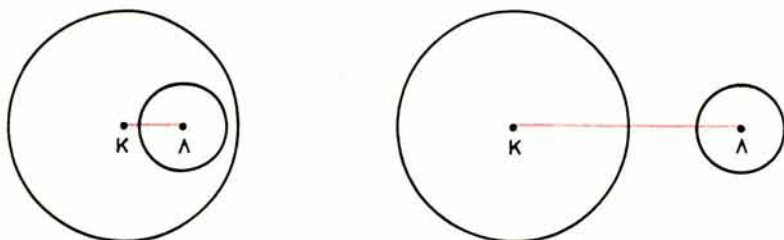
Σχ. 6.11 λα.

## Η ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

7 · 1 Θέσεις δύο περιφερειῶν μεταξύ τους.

Δύο περιφέρειες με διαφορετικές ἀκτίνες μποροῦν νὰ ἔχουν τὶς παρακάτω θέσεις:

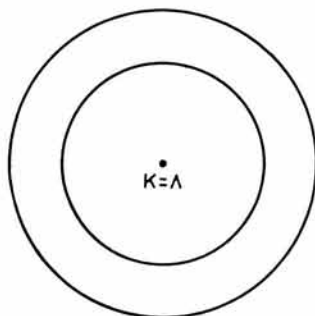
α) Ἡ μία νὰ εὐρίσκεται μέσα ἢ ἔξω ἀπὸ τὴν ἄλλη. Τότε οἱ δύο περιφέρειες *δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο* (σχ. 7 · 1 α). Τὸ εὐθύγραμ-



Σχ. 7 · 1 α.

Περιφέρειες χωρὶς κοινὰ σημεῖα.

μο τμήμα ΚΛ, ποὺ συνδέει τὰ δύο κέντρα Κ καὶ Λ, λέγεται *διάκεντρος*. Στὴν περίπτωσι ποὺ οἱ δύο περιφέρειες ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο ἀλλὰ διαφορετικὲς ἀκτίνες (σχ. 7 · 1 β), τότε λέγονται *ὁμόκεντρες*.



Σχ. 7 · 1 β.

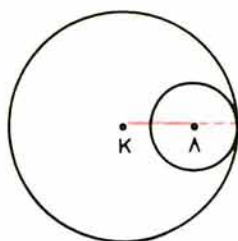
Ὁμόκεντρες περιφέρειες.

β) Οἱ δύο περιφέρειες νὰ *ἐφάπτονται*. Δηλαδή νὰ ἔχουν *ἓνα μόνο κοινὸ σημεῖο* μεταξύ τους (σχ. 7 · 1 γ).

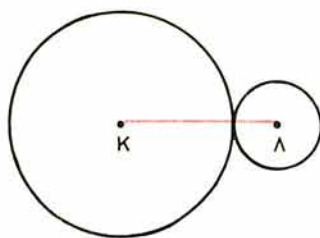
Καὶ ἂν μὲν αὐτή, ποὺ ἔχει μικρότερη ἀκτίνα, εἶναι ὁλόκληρη μέσα στὴν ἄλλη, λέμε ὅτι ἐφάπτονται *ἐσωτερικά* [σχ. 7 · 1 γ (α)], ἐνῶ, ἂν εἶναι ἔξω ἀπὸ τὴν ἄλλη, λέμε ὅτι ἐφάπτονται *ἐξωτερικά* [σχ. 7 · 1 γ (β)]. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ἡ διάκεντρος περνᾷ ἀπὸ τὸ σημεῖο ἐπαφῆς.

γ) Οἱ δύο περιφέρειες νὰ *τέμνονται*. Δηλαδή νὰ ἔχουν *δύο κοινὰ σημεῖα* (σχ. 7 · 1 δ). Τότε ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΒ εἶναι κάθετος στὴν διάκεντρο ΚΛ.





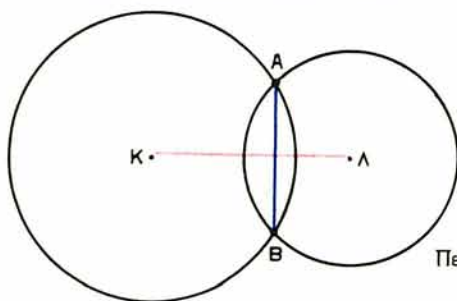
α



β

Σχ. 7.1 γ.

Περιφέρειες έφαπτόμενες, δηλαδή με ένα κοινό σημείο.



Σχ. 7.1 δ.

Περιφέρειες τεμνόμενες, δηλαδή με δύο κοινά σημεία.



Σχ. 7.1 ε.

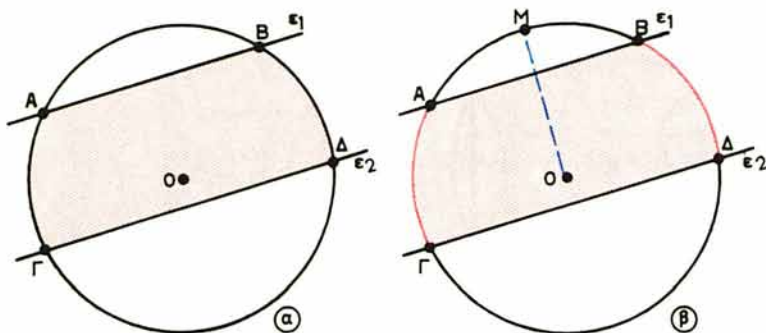
Δυνατές θέσεις δύο περιφερειών.



δ) Στὸ σχῆμα 7 · 1 ε φαίνονται οἱ δυνατὲς θέσεις δύο περιφερῶν, καθὼς τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ δύο παιδιὰ προσπαθῇ νὰ ρίξῃ τοὺς (κυκλικούς) δίσκους μέσα στὸν κύκλο, ποὺ εἶναι χαραγμένος ἐπάνω στὸ χῶμα.

7 · 2 Τόξα ἀνάμεσα σὲ δύο παράλληλες χορδές.

Ἄς πάρουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες  $\epsilon_1$  καὶ  $\epsilon_2$ , ποὺ νὰ κόβουν τὴν περιφέρεια  $O$  στὰ σημεία  $A, B$  καὶ  $\Gamma, \Delta$  [σχ. 7 · 2 α(α)]. Τὰ τόξα  $ΑΓ$  καὶ  $ΒΔ$  εἶναι μεταξύ τους ἴσα.



Σχ. 7 · 2 α.

Ἀπόδειξι.

Φέρομε τὴν ἀκτῖνα  $OM \perp \epsilon_1$  [σχ. 7 · 2 α(β)]. Ὅπως ξέρομε, χωρίζει τὰ κύρια τόξα  $AB$  καὶ  $\Gamma\Delta$  σὲ δύο ἴσα μέρη. Δηλαδή:

$$\widehat{\Gamma M} = \widehat{\Delta M} \text{ καὶ } \widehat{AM} = \widehat{BM}$$

$$\text{ἄρα: } \widehat{\Gamma M} - \widehat{AM} = \widehat{\Delta M} - \widehat{BM}$$

$$\text{ποὺ σημαίνει: } \widehat{\Gamma A} = \widehat{\Delta B}.$$

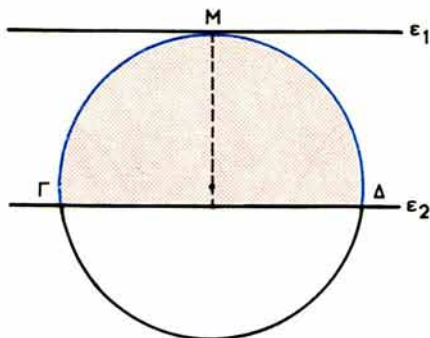
Ὅταν ἡ  $\epsilon_1$  γίνῃ ἐφαπτομένη, τότε:  $\widehat{\Gamma M} = \widehat{\Delta M}$  (σχ. 7 · 2 β).

**Συμπέρασμα.**

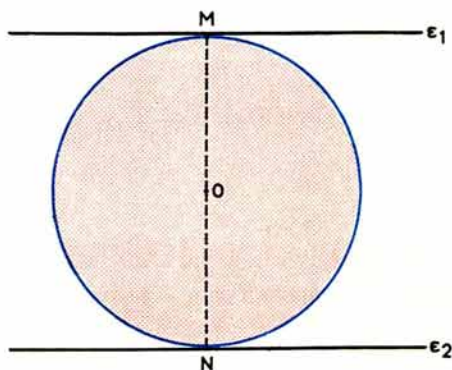
α) Τὰ τόξα, ποὺ εὐρίσκονται ἀνάμεσα σὲ παράλληλες χορδές, εἶναι μεταξύ τους ἴσα.

β) Ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας, ποὺ εἶναι παράλληλη σὲ μία χορδή, χωρίζει τὸ ἀντίστοιχο τόξο σὲ δύο ἴσα μέρη.

γ) Δύο παράλληλες ἐφαπτόμενες μιᾶς περιφερείας τὴν χωρίζουν σὲ δύο ἴσα μέρη (ἡμιπεριφέρειες).



Σχ. 7.2 β.



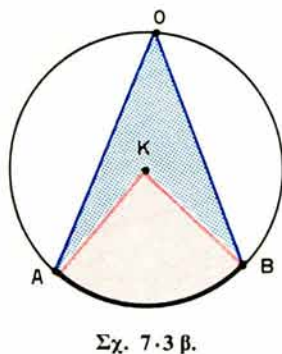
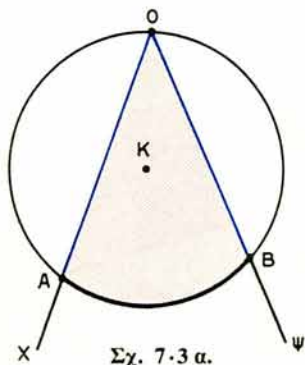
Σχ. 7.2 γ.

Αὐτὸ σημαίνει πὼς, ἂν συνδέσωμε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, τὸ εὐθύγραμμο αὐτὸ τμήμα θὰ εἶναι διάμετρος (σχ. 7.2 γ).

## 7 · 3 Γωνίες ἐγγεγραμμένες σὲ κύκλο.

Μία γωνία λέγεται ἐγγεγραμμένη σὲ κύκλο, ὅταν ἔχη τὴν κορυφή της ἐπάνω στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου καὶ οἱ πλευρές της εἶναι χορδές τοῦ κύκλου.

Ἔτσι ἡ γωνία ΧΟΨ (σχ. 7 · 3 α) εἶναι ἐγγεγραμμένη στὸν κύκλο Κ καὶ ἀντιστοιχεῖ στὸ τόξο ΑΒ. Ἄν φέρωμε τὶς ἀκτίνες ΚΑ καὶ



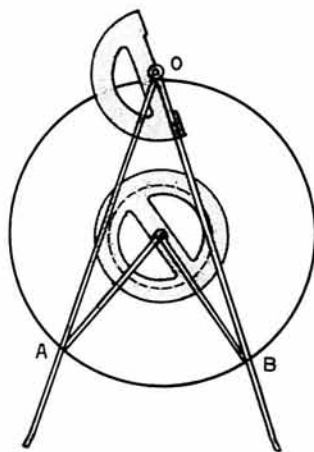
ΚΒ (σχ. 7 · 3 β), σχηματίζομε τὴν ἐπίκεντρη γωνία ΑΚΒ. Ἄν συγκρίνωμε τὶς δύο γωνίες βλέπομε ὅτι:

$$\widehat{AOB} = \frac{\widehat{AKB}}{2},$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

Ἡ ἐγγεγραμμένη σὲ κύκλο γωνία εἶναι τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ ἴδιο τόξο, ἢ ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη σὲ κύκλο γωνία μετρεῖται μὲ τὸν μισὸ ἀριθμὸ ἐκείνου, μὲ τὸν ὁποῖο μετρεῖται τὸ ἀντίστοιχό της τόξο.

Π.χ. ἂν ἡ ἐπίκεντρη γωνία ΑΚΒ τοῦ σχήματος 7 · 3 γ εἶναι  $74^\circ$ , τὸ ἴδιο θὰ εἶναι καὶ τὸ τόξο ΑΒ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὴ τὴν γωνία, ἐνῶ ἡ ἀντίστοιχη ἐγγεγραμμένη  $\widehat{AOB}$  θὰ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ τόξου καὶ τῆς ἐπίκεντρης γωνίας, δηλαδή θὰ εἶναι  $74^\circ : 2 = 37^\circ$ .



Σχ. 7.3 γ.

Ἀπὸ ἐδῶ βγαίνουν τὰ παρακάτω συμπεράσματα:

α) Ὅλες οἱ ἐγγεγραμμένες σὲ κύκλο γωνίες, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸ ἴδιο τόξο, εἶναι ἴσες.

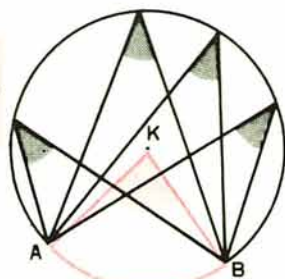
Τοῦτο συμβαίνει, γιατί ὅλες εἶναι τὸ μισὸ τῆς ἴδιας ἐπίκεντρης γωνίας ΑΚΒ (σχ. 7.3 δ).

β) Ἡ ἐγγεγραμμένη σὲ κύκλο γωνία, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ τόξο ἴσο μὲ ἡμικυκλίῳ εἶναι ὀρθή.

$$\text{Πραγματικά, ἀφοῦ } \widehat{ΒΑΓ} = \frac{\widehat{ΒΚΓ}}{2}$$

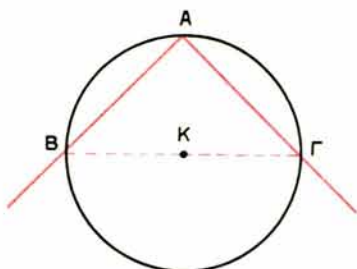
καὶ ἡ  $\widehat{ΒΚΓ} = 180^\circ$  ὡς εὐθεία γωνία, θὰ

εἶναι:  $\widehat{ΒΑΓ} = 90^\circ$  (σχ. 7.3 ε).

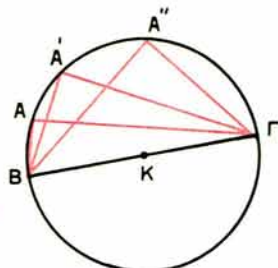


Σχ. 7.3 δ.

γ) Δύο ἐγγεγραμμένες στὸν ἴδιο κύκλο γωνίες, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ δύο τόξα ΑΒ (κύριο καὶ δευτερεύον), εἶναι παραπληρωματικές.

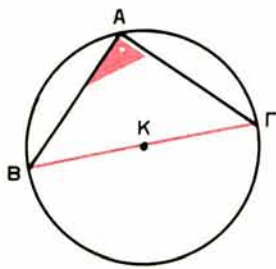


α

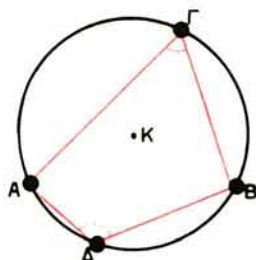


γ

Σχ. 7.3 ε.



β



Σχ. 7.3 στ.

Τὸ ἄθροισμά τους δηλαδή εἶναι δύο ὀρθές ( $180^\circ$ ) (σχ. 7.3 στ).

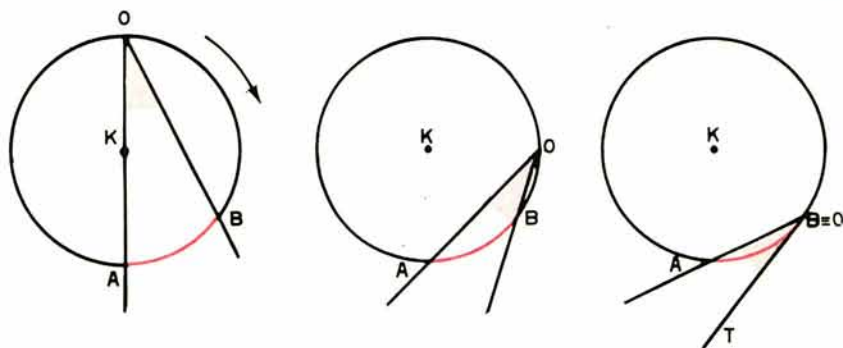
Αὐτὸ προκύπτει ἀπὸ τὸ συμπέρασμα ὅτι κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία μετρεῖται μὲ τὸν μισὸ ἀριθμὸ τοῦ τόξου, στὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ.

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}: \left. \begin{aligned} \widehat{A\Gamma B} &= \frac{\widehat{A\Delta B}}{2} \\ \widehat{A\Delta B} &= \frac{\widehat{A\Gamma B}}{2} \end{aligned} \right\} \widehat{A\Gamma B} + \widehat{A\Delta B} = \frac{\text{περιφερ. σὲ μοῖρες}}{2}$$

$$\widehat{A\Gamma B} + \widehat{A\Delta B} = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\widehat{A\Gamma B} + \widehat{A\Delta B} = 180^\circ.$$

δ) Ἡ ἐγγεγραμμένη σὲ τόξο  $AB$  ἑνὸς κύκλου γωνία, ἰσοῦται μὲ τὴν γωνία, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴ  $AB$  καὶ τὴν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στὸ σημεῖο  $A$  ἢ  $B$ .



Σχ. 7.3 ζ.

Διότι, ἂν φαντασθοῦμε τὸ σημεῖο  $O$  (σχ. 7.3 ζ) νὰ μετακινῆται πάνω στὸ τόξο  $AOB$  τοῦ κύκλου, ὅπως δείχνει τὸ βέλος, ὁπότε σύμφωνα μὲ τὸ (α) συμπέρασμα οἱ γωνίες  $AOB$  εἶναι ἴσες μεταξύ τους, ὅταν αὐτὸ συμπίπτει π.χ. μὲ τὸ  $B$ , ἢ  $AO$  θὰ γίνῃ ἡ χορδὴ  $AB$  καὶ ἡ  $OB$  θὰ γίνῃ ἡ ἐφαπτομένη  $BT$  στὸ σημεῖο  $B$ . Ἔτσι θὰ ἔχουμε:

$$\widehat{AOB} = \widehat{ABT}.$$

ε) Στὸ σχῆμα 7.3 η δίδεται ὁδοντωτὴ μετρητικὴ στεφάνη, τὸ κάθε δόντι τῆς ὁποίας ἀντιπροσωπεύει τόξο  $10^\circ$ .

#### 7.4 Μερικές εφαρμογές.

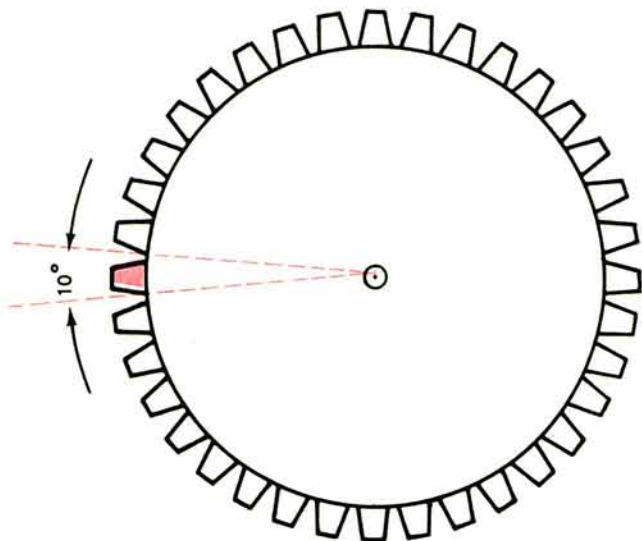
##### Ἐφαρμογὴ 1η.

Πῶς θὰ χαράξουμε ἓνα τόξο, ὅταν ξέρωμε τρία σημεῖα του  $A, B, \Gamma$ .

##### 1ος τρόπος.

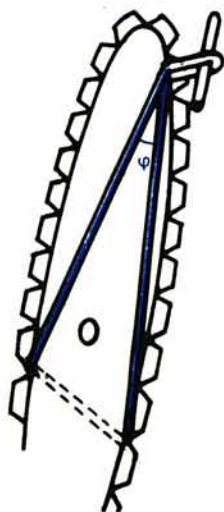
Ἡ χάραξι γίνεται μὲ τὴν βοήθεια ἑνὸς ὀργάνου, ποὺ ἀποτελεῖ-





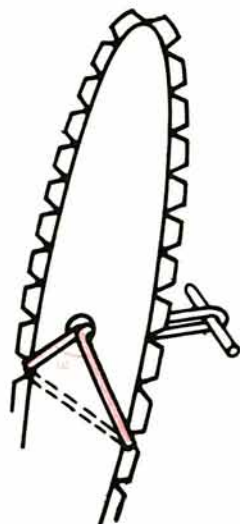
Τὰ 36 δόντια σ' ὁλόκληρη τὴν περιφέρεια διαιροῦν τὸ τόξο τῶν  $360^\circ$  σὲ ἴσα μέρη, ποὺ τὸ καθένα ἀντιπροσωπεύει τόξο  $10^\circ$  ἢ ἐπίκεντρη γωνία  $10^\circ$  ἢ ἐγγεγραμμένη

$$\text{γωνία } \frac{10^\circ}{2} = 5^\circ.$$



Ἐγγεγραμμένη γωνία  $(36 - 20) = 16$

$$16 \text{ δόντια} \times \frac{10^\circ}{2} = 80^\circ.$$



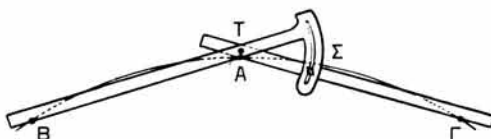
Ἐπίκεντρη γωνία

$$(36 - 20) = 16 \text{ δόντια} \times 10^\circ = 160^\circ.$$

Σχ. 7.3 η.

Ὅδοντωτὴ μετρητικὴ στεφάνη γωνιῶν.

ται από δύο ξυλίνους πήχεις, οι όποιοι συνδέονται με μία άρθρωση (σχ. 7.4 α).



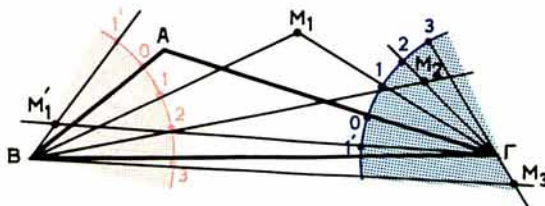
Σχ. 7.4 α.

Χρησιμοποιώντας δύο ξυλίνους πήχεις προσδιορίζομε σημεία του τόξου ΒΑΔ.

Αφού σταθεροποιήσωμε τὸν σφιγκτήρα Σ σὲ μία θέσι τέτοια, ὥστε οἱ δύο πήχεις νὰ σχηματίζουν γωνία ἴση μετὴν  $\widehat{ΒΑΓ}$ , μετακινούμε τὸ ὄργανο ἔτσι, ὥστε οἱ ἀκμές του νὰ περνοῦν πάντοτε ἀπὸ τὰ σημεία Β καὶ Γ. Οἱ διάφορες θέσεις, πού παίρνει τὸ σημείο τομῆς Τ αὐτῶν τῶν ἀκμῶν, μᾶς δίνουν σημεία τοῦ τόξου ΒΑΓ καὶ αὐτό, γιατί ὅλες οἱ γωνίες ΒΤΓ ἀντιστοιχοῦν πάντα στοῦ ἴδιου (κύριου) τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου, πού περνᾷ ἀπὸ τὰ τρία σημεία Β, Α καὶ Γ.

### 2ος τρόπος.

Ὁ τρόπος αὐτός χρησιμοποιεῖται πολὺ ἀπὸ τοὺς λεβητοποιοὺς: Χαράσσομε τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ. Μὲ κέντρα τὰ σημεία Β καὶ Γ καὶ ἀκτίνα τὴν ἴδια γράφομε δύο τόξα (σχ. 7.4 β).



Σχ. 7.4 β.

Χαράξετε μετὴν ἴδια ἀκτίνα δυὸ τόξα πού ἔχουν κέντρα τὰ σημεία Β καὶ Γ. Πάρτε πάνω στοῦ καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ αὐτὰ τόξα τὶς ἴδιες ἴσες διαιρέσεις καὶ ἀριθμήσετέ τις κατὰ σειρὰ μέ... 1', 0, 1, 2,... ἀλλὰ με ἀντίστροφη φορά (τὰ 0 τῶν δυὸ διαβασίσεων νὰ συμπίπτουν μετὰ τὰ σημεία, ὅπου οἱ ἡμιευθεῖες ΒΑ καὶ ΓΑ τέμνουν τὰ 2 τόξα). Οἱ εὐθεῖες Β-1 καὶ Γ-1 κόβονται τότε σὲ ἓνα σημείο  $M_1$ , πού εἶναι σημείο τοῦ τόξου ΒΑΓ. Τὸ ἴδιο ἀληθεύει γιὰ τὶς εὐθεῖες Β-1' καὶ Γ-1', Β-2 καὶ Γ-2, κ.λπ.

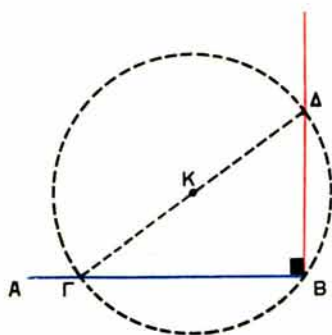
Παίρνομε πάνω στοῦ καθένα ἴσες διαιρέσεις καὶ τὶς ἀριθμοῦμε κατὰ σειρὰ... 1', 0, 1, 2, 3, 4, ... ἀλλὰ με ἀντίθετη φορά, ὅπως

δείχνει τὸ σχῆμα 7 · 4 β. Οἱ εὐθεῖες  $B-1$  καὶ  $\Gamma-1$  κόβονται στὸ σημείο  $M_1$ , πού εἶναι ἓνα σημεῖο τοῦ τόξου  $BA\Gamma$ . Τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ τὴν τομὴ τῶν εὐθειῶν  $B-2$  καὶ  $\Gamma-2$ ,  $B-3$  καὶ  $\Gamma-3$ ,  $B-1'$  καὶ  $\Gamma-1'$ , κ.λπ. Ἡ δικαιολογία εἶναι εὐκόλη, ἂν παρατηρήσῃ κανεὶς ὅτι σὲ ὅλα τὰ τρίγωνα  $BM\Gamma$  οἱ γωνίες  $B$  καὶ  $\Gamma$  ἔχουν πάντα τὸ ἴδιο ἄθροισμα.

### Ἐφαρμογὴ 2α.

Χάραξι καθέτου ἐπάνω στὸ ἄκρο  $B$  εὐθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

Γράφομε μία περιφέρεια  $K$ , ἡ ὁποία νὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ  $B$  (σχ. 7 · 4 γ). Αὕτῃ κόβει τὸ τμήμα  $AB$  σὲ ἓνα σημεῖο  $\Gamma$ . Φέρνομε τὴν διάμετρο, πού περνᾷ ἀπὸ τὸ  $\Gamma$ , τὴν  $\Gamma K\Delta$ . Ἡ γωνία  $\Gamma B\Delta$  εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη σὲ ἡμιπεριφέρεια κύκλου, ἄρα  $B\Delta \perp AB$  στὸ σημεῖο  $B$ .

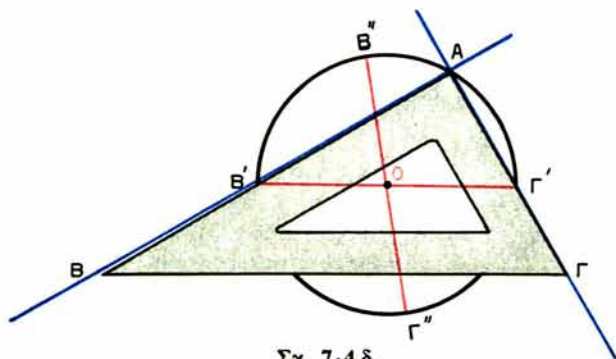


Σχ. 7.4 γ.

### Ἐφαρμογὴ 3η.

Προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου ἑνὸς κύκλου μὲ τὴν βοήθεια τοῦ τριγώνου.

Τοποθετοῦμε τὸ γνωστό μας τρίγωνο ἔτσι, ὥστε ἡ κορυφή του  $A$  νὰ εὐρεθῇ ἐπάνω στὴν περιφέρεια (σχ. 7 · 4 δ). Μετὰ χαράσσομε τὶς δύο εὐ-



Σχ. 7.4 δ.

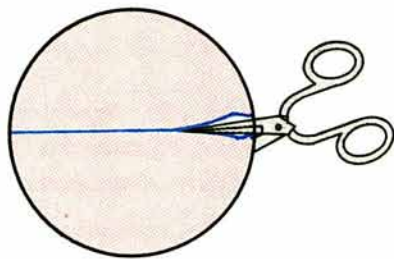
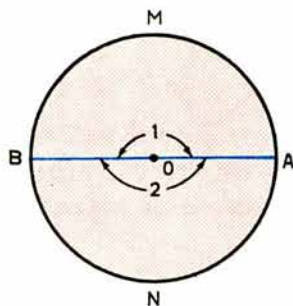
θεῖες, πού ἀντιστοιχοῦν στὶς κάθετες πλευρὲς  $AB$  καὶ  $A\Gamma$  καὶ οἱ ὁποῖες κόβουν τὴν περιφέρειαν στὰ σημεῖα  $B'$  καὶ  $\Gamma'$ . Ἡ  $B'\Gamma'$  εἶναι

μία διάμετρος. Με τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ γράψουμε καὶ μία ἄλλη διάμετρο  $B''Γ''$ . Ἡ τομή τους  $O$  εἶναι τὸ κέντρο τοῦ κύκλου.

### 7.5 Διαίρεσι περιφερείας σε ἴσα μέρη.

α) Διαίρεσι περιφερείας σε δύο ἴσα μέρη.

Σε μία περιφέρεια χαράσσουμε τὴν διάμετρο  $AB$  (σχ. 7.5 α). Τὰ τόξα  $AMB$  καὶ  $ANB$  εἶναι καθένα  $180^\circ$ , ἀφοῦ οἱ ἀντίστοιχες ἐπικεντρες γωνίες  $O_1$  καὶ  $O_2$  εἶναι εὐθείες.



Σχ. 7.5 α.

Διαίρεσι περιφερείας σε δύο ἴσα μέρη.

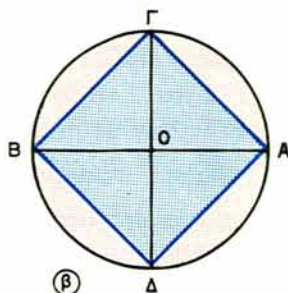
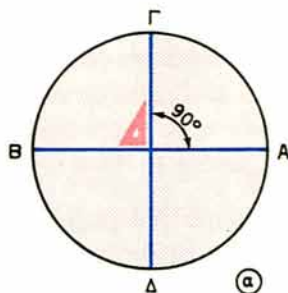
Συμπέρασμα.

Κάθε διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρεια σε δύο ἴσα μέρη.

β) Διαίρεσι περιφερείας σε τέσσερα ἴσα μέρη.

Χαράσσουμε δύο καθέτους μεταξύ τους διαμέτρους  $AB$  καὶ  $ΓΔ$  [σχ. 7.5 β (α)]. Κάθε μία ἀπὸ τὶς τέσσερις ἐπικεντρες γωνίες εἶναι, ὅπως ξέρομε,  $90^\circ$ , ἄρα καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα θὰ εἶναι τὸ ἴδιο, δηλαδή ἔχομε:  $\widehat{ΑΓ} = \widehat{ΓΒ} = \widehat{ΒΔ} = \widehat{ΔΑ} = 90^\circ$ , πού σημαίνει ὅτι δύο κάθετοι διάμετροι χωρίζουν τὴν περιφέρεια σε 4 ἴσα μέρη.

Φέρομε τὶς χορδές  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$  καὶ  $ΔΑ$  [σχ. 7.5 β (β)]. Στὸ τετράπλευρο  $ΑΓΒΔ$  πού σχηματίσθηκε ἔχομε ὅτι οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες καὶ τέμνονται καθέτως· ἄρα εἶναι **τετράγωνο**. Καὶ ἐπειδὴ ὅλες του οἱ κορυφές εἶναι σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ οἱ πλευρές του χορδές, τὸ τετράγωνο αὐτὸ λέγεται **ἐγγεγραμμένο σε κύκλο**.



Σχ. 7.5 β.

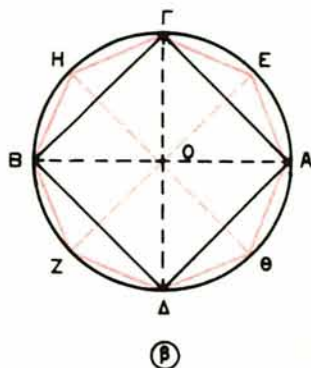
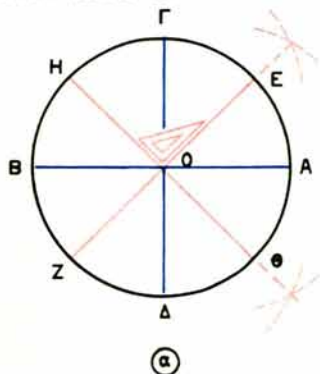
Διαιρέσι περιφέρειας σὲ 4 ἴσα μέρη. Ἐγγραφή ἑνὸς τετραγώνου σὲ κύκλο.

### Ἀντίστροφα.

Ἀφοῦ σὲ *κάθε τετράγωνο* οἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται καθέτως καὶ εἶναι καὶ ἴσες, σημαίνει ὅτι  $OA = OG = OB = OD$  [σχ. 7.5 β(β)], ἄρα *τὸ τετράγωνο εἶναι πάντοτε δυνατόν νὰ ἐγγραφῇ σὲ κύκλο*.

γ) Διαιρέσι περιφέρειας σὲ ὀκτὼ ἴσα μέρη.

Αὐτὸ ἐπιτυγχάνεται, ἂν στὴν προηγούμενη περίπτωσηι διχοτομήσωμε τίς ἐπίκεντρος γωνίες  $AOΓ$  καὶ  $AOΔ$  [σχ. 7.5 γ(α)] καὶ φέρωμε τίς χορδὲς  $ΑΕ$ ,  $ΕΓ$ ,  $ΓΗ$  κ.λπ., ὅποτε θὰ σχηματίσωμε τὸ σχῆμα  $ΑΕΓΗΒΖΔΘ$  [σχ. 7.5 γ(β)], τὸ ὅποιο εἶναι ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο  $O$ .

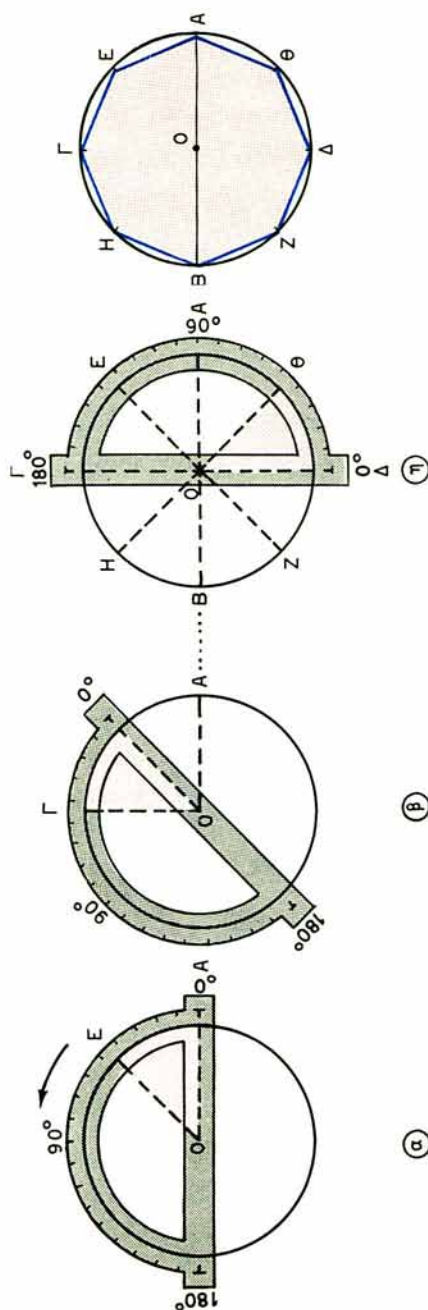


Διαιρέσι περιφέρειας σὲ 8 ἴσα μέρη.

Σχ. 7.5 γ.

Ἐγγραφή ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου σὲ κύκλο.





Σχ. 7.5 δ.

Τοποθετούμε τὸ μοιρογνῶμόνιο σὲ μιὰ ἀρχικὴ θέσι καὶ μετροῦμε γωνία  $AOE = 45^\circ$  [θέσι (α)]. Στρέφουμε τὸ μοιρογνῶμόνιο ὥστε νὰ δείχνει τὸ βέλος καὶ προσδιορίζουμε γωνία  $EOG = 45^\circ$  [θέσι (β)]. Συνεχίζουμε ἔτσι μέχρι νὰ προσδιορίσουμε τὴν 7η γωνία ποὺ εἶναι ἡ  $\widehat{\Delta OG} = 45^\circ$  [θέσι (γ)]. Ἡ γωνία  $\widehat{GOA}$  ποὺ μένει εἶναι:  $360^\circ - (7 \cdot 45^\circ) = 45^\circ$ .

**Συντάξεις:** Συντομεύουμε τὶς σχεδιάσεις, ἀν περιορίσουμε τὶς τοποθετήσεις τοῦ μοιρογνῶμόνιου στὶς τέσσερις πρώτες θέσεις α, β, γ καὶ δ καὶ στὴν συνέχεια ἐπεκτείνουμε τὶς ἀκτῖνες OA, OE, OG καὶ OH, πρὸς τὴν πλευρὰ τοῦ O, μέχρι νὰ γίνουν διάμετροι.

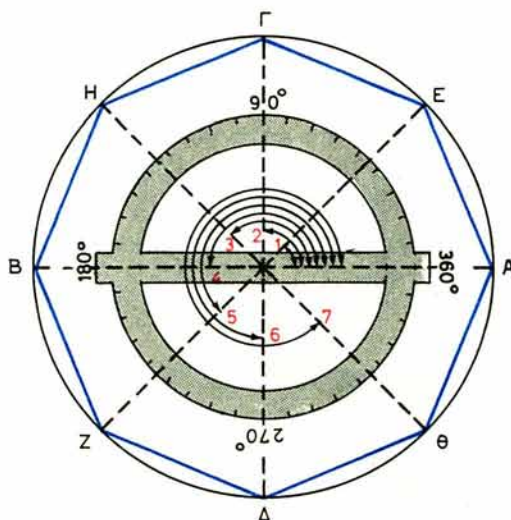


Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα αὐτὸ ἔχει ὀκτὼ γωνίες, λέγεται *ὀκτάγωνο*. Καὶ ἀκόμη ἐπειδὴ ὅλες του οἱ πλευρές καὶ ὅλες του οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, τὸ ὀκτάγωνο αὐτὸ λέγεται *κανονικό*. Γιά τὰ σχήματα αὐτὰ θὰ μιλήσωμε στὴν ἐπομένη παράγραφο 7·6.

Κάθε γωνία του, π.χ. ἡ  $\widehat{ΕΑΘ} = \widehat{Α}$ , ἔχει ἀντίστοιχο τόξο ἴσο μὲ τὰ  $\frac{6}{8}$  τῆς περιφέρειας, δηλαδή:  $\frac{6}{8} \times 360^\circ = 270^\circ$ . Ἀρα:

$$\widehat{Α} = \widehat{Ε} = \widehat{Γ} = \dots = \widehat{Θ} = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ.$$

Ἕνας ἄλλος τρόπος εἶναι νὰ διαιρέσωμε τὶς  $360^\circ$  διὰ 8, ὅποτε ἔχομε  $360^\circ : 8 = 45^\circ$  καὶ μὲ τὴν βοήθεια τοῦ μοιρογνωμονίου νὰ σχεδιάσωμε τὶς 8 ἴσες διαδοχικὲς αὐτὲς ἐπίκεντρες γωνίες (σχ. 7·5 δ καὶ 7·5 ε).



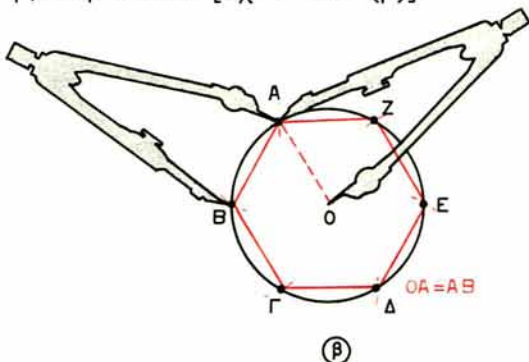
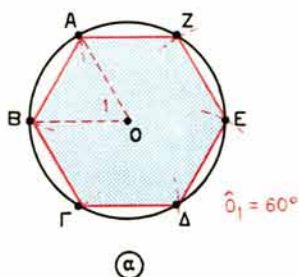
Σχ. 7·5 ε.

δ) Διαιρέσι περιφερείας σὲ ἕξι ἴσα μέρη.

Αὐτὸ σημαίνει πὼς κάθε ἓνα ἀπὸ τὰ ἴσα τόξα  $ΑΒ = ΒΓ = \dots = ΖΑ$  θὰ εἶναι τὸ  $\frac{1}{6}$  τῆς περιφέρειας, δηλαδή  $\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$ .

Ἐπομένως  $\widehat{O_1} = 60^\circ$  [σχ. 7.5 στ (α)], τὸ ὁποῖο μᾶς ὁδηγεῖ στὰ παρακάτω συμπεράσματα:

- Τὸ τρίγωνο OAB εἶναι ἰσοπλευρο.
- Ἡ πλευρὰ AB τοῦ τριγώνου, ποὺ εἶναι καὶ ἀντίστοιχη χορδὴ τοῦ τόξου AB, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα [σχ. 7.5 στ (β)].



Διαίρεσι περιφερείας σὲ ἕξι ἴσα μέρη. Ἐγγραφή κανονικοῦ ἑξαγώνου σὲ κύκλο.  
Σχ. 7.5 στ.

\*Ἀρα ἡ διαίρεσι τῆς περιφερείας σὲ ἕξι ἴσα μέρη γίνεται μὲ τὴν βοήθεια τοῦ διαβήτη, ποὺ τὸν ἀνοίγουμε ὅσο εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς περιφερείας, στὴν ὁποία μετροῦμε διαδοχικὰ ἴσες χορδές [σχ. 7.5 στ (β)].

Καὶ ἂν χαράξουμε τὶς χορδές, σχηματίζεται τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο ABΓΔΕΖ, ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο O. Κάθε τοῦ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα καὶ κάθε τοῦ γωνία εὐρίσκεται:

$$\widehat{B\Delta Z} = \frac{4}{6} \times 360^\circ = 240^\circ$$

$$\widehat{A} = \widehat{B\Delta Z} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$\text{ἄρα: } \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \widehat{E} = \widehat{Z} = 120^\circ.$$

Ἕνας ἄλλος τρόπος εἶναι, ὅπως καὶ στὸ ὀκτάγωνο, διὰ τῆς διαιρέσεως  $360^\circ : 6 = 60^\circ$  καὶ τῆς χαράξεως 6 διαδοχικῶν ἐπικέντρων γωνιῶν τῶν  $60^\circ$  μὲ τὴν βοήθεια τοῦ μοιρογνομονίου, ὅποτε προσδιορίζουμε τὶς κορυφές A, B, Γ, Δ, Ε καὶ Ζ τοῦ ἑξαγώνου.

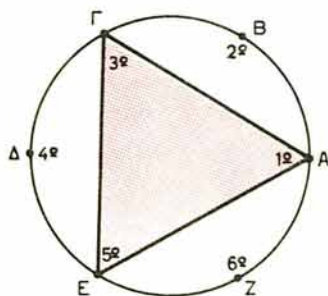
ε) Διαίρεισι περιφερείας σὲ τρία ἴσα μέρη.

Διαιροῦμε μὲ ἓνα διαβήτη τὴν περιφέρεια σὲ ἕξι ἴσα μέρη· συνδέομε τὸ πρῶτο μὲ τὸ τρίτο, τὸ τρίτο μὲ τὸ πέμπτο καὶ τὸ πέμπτο μὲ τὸ πρῶτο (σχ. 7·5 ζ).

Θὰ προκύψουν τρεῖς χορδὲς ἴσες καὶ τρία τόξα ἴσα. Τὸ τρίγωνο ΑΓΕ, ποὺ θὰ σχηματισθῇ, εἶναι ἰσόπλευρο:

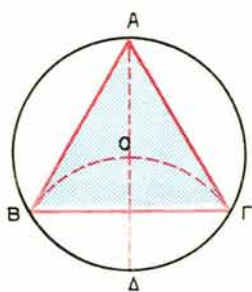
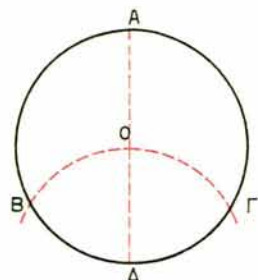
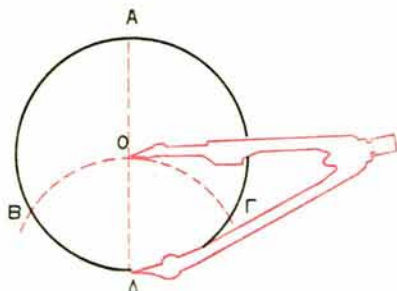
$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Ἕνας ἄλλος τρόπος εἶναι αὐτὸς ποὺ δείχνεται στὸ σχῆμα 7·5 η, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο μὲ κέντρο τὸ ἓνα ἄκρο Δ τῆς διαμέτρου ΑΔ γράφομε τόξο κύκλου ἀκτίνος ΟΔ, ἴσης μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας Ο καὶ τὸ ὁποῖο κόβει τὴν ἀρχικὴ περιφέρεια Ο στὰ σημεῖα



Σχ. 7·5 ζ.

Διαίρεισι περιφερείας σὲ τρία ἴσα μέρη.



Σχ. 7·5 η.

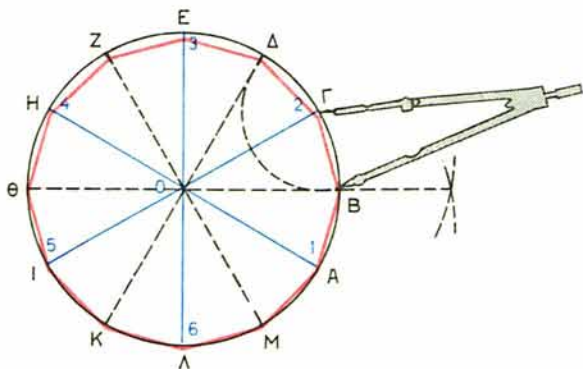
Ἕνας ἄλλος τρόπος διαιρέσεως περιφερείας σὲ τρία ἴσα μέρη.

Β καὶ Γ. Εὐκόλα φαίνεται ὅτι  $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma A}$ , ἄρα τρίγωνο ΑΒΓ ἰσόπλευρο.

στ) Διαίρει περιφέρειας σὲ 12 ἴσα μέρη.

Μετὰ τὴν διαίρεσι τῆς περιφέρειας σὲ 6 ἴσα μέρη, χαράσσουμε τὶς διχοτόμους ὅλων τῶν κατακορυφῇ ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ ἔτσι προκύπτουν 12 ἴσα τόξα (σχ. 7·5 θ).

Ἄν συνδέσωμε διαδοχικὰ τὰ σημεῖα, σχηματίζομε ἓνα **κανονικὸ δωδεκάγωνο**, ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο Ο.



Σχ. 7·5 θ.

Διαίρεσι περιφέρειας σὲ δώδεκα ἴσα μέρη.

Κάθε γωνία του ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ  $\widehat{A} = \widehat{BAM}$  εἶναι ἐγγεγραμμένη σὲ τόξο:  $BAM = \frac{10}{12} \times$

$360^\circ = 300^\circ$ , ἄρα θὰ ἔχωμε ὅτι:  $\widehat{A} = \widehat{BAM} = \frac{300^\circ}{2} = 150^\circ$ .

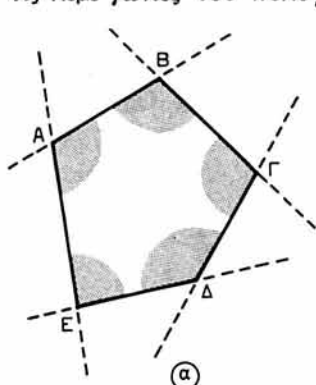
Ἐπομένως:  $\widehat{A} = \widehat{B} = \dots = \widehat{M} = 150^\circ$ .

#### 7·6 Κανονικά πολύγωνα.

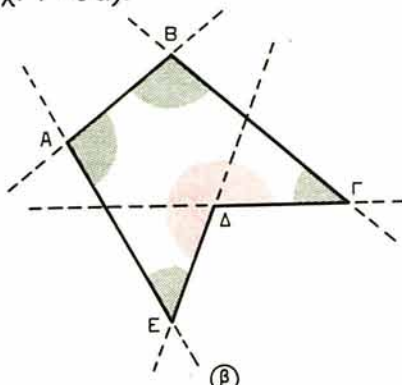
Ἄς πάρωμε τὴν τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕΑ (σχ. 7·6 α). Βλέπομε πὼς εἶναι **κλειστή**, δηλαδή τελειώνει στὸ σημεῖο ποὺ ἀρχίζει. Ὅρισμός.

Τὸ κομμάτι τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ περικλείεται μέσα σὲ μία κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ, τὸ λέμε **πολύγωνο**.

Τὰ σημεῖα  $A, B, \Gamma, \dots$  τὰ λέμε *κορυφές* τοῦ πολυγώνου, τὰ τμήματα  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \dots$  τὰ λέμε *πλευρές* καὶ τὶς γωνίες  $A, B, \Gamma, \dots$  τὶς λέμε *γωνίες* τοῦ πολυγώνου (σχ. 7·6 α).



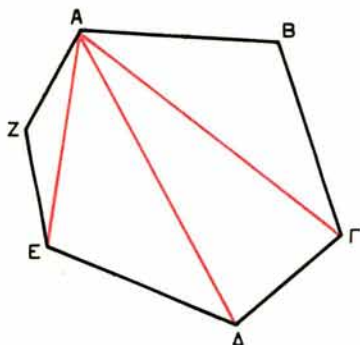
Κυρτό.



Μὴ κυρτό.

Σχ. 7·6 α.

Ἄν κάθε μία ἀπὸ τὶς γωνίες στὸ πολύγωνο εἶναι μικρότερη ἀπὸ  $180^\circ$ , τὸ πολύγωνο λέγεται *κυρτό* [σχ. 7·6 α(α)]. Ἐὰν μία γωνία εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ  $180^\circ$ , ὅπως εἶναι ἡ γωνία  $\Delta$  [σχ. 7·6 α(β)], τότε τὸ πολύγωνο λέγεται *μὴ κυρτό*.



Σχ. 7·6 β.

Σὲ ἓνα πολύγωνο, ἀπὸ μία κορυφή του, π.χ. τὴν  $A$ , φέρομε ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα πρὸς τὶς ἄλλες κορυφές (σχ. 7·6 β). Αὐτὰ τὰ τμήματα  $A\Gamma, A\Delta, A\epsilon$ , ποὺ δὲν εἶναι πλευρές, λέγονται *διαγώνιοι* τοῦ πολυγώνου.

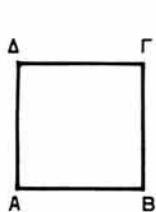
Ἄν ἓνα πολύγωνο ἔχη ἑξι γωνίες, λέγεται *ἑξάγωνο*, ἂν ἔχη ἑπτὰ, λέγεται *ἐπτάγωνο*, ἂν ἔχη ὀκτώ, λέγεται *ὀκτάγωνο* κ.ο.κ.

Ὅρισμός.

Ἐνα πολύγωνο λέγεται *κανονικό*, ὅταν ὅλες του οἱ πλευρές καὶ ὅλες του οἱ γωνίες εἶναι ἴσες.



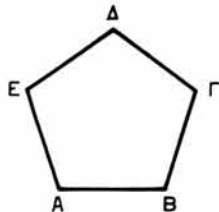
Στὸ σχῆμα 7.6 γ δίνονται τρία κανονικά πολύγωνα.



Τετράγωνο:

$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$$



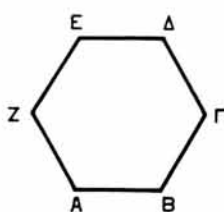
Σχ. 7.6 γ.

Κανονικό πεντάγωνο:

$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta =$$

$$= \Delta E = EA$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \widehat{E}$$



Κανονικό εξάγωνο:

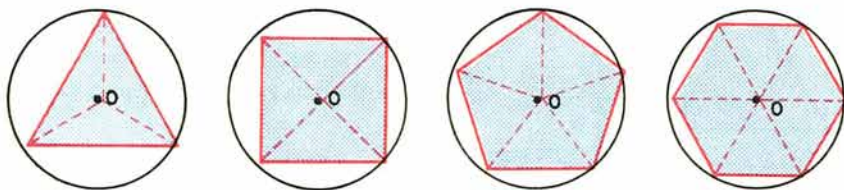
$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta =$$

$$= \Delta E = EZ = ZA$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \widehat{E} = \widehat{Z}$$

Κάθε κανονικό πολύγωνο μπορεί πάντοτε να εγγραφεί μέσα σὲ κύκλο.

Τότε οἱ κορυφές τοῦ πολυγώνου εἶναι σημεία τῆς περιφερείας καὶ οἱ πλευρές του χορδές της, ἐνῶ οἱ γωνίες του εἶναι ἐγγεγραμμένες στὸν κύκλο.



Σχ. 7.6 δ.

Ὁ κύκλος Ο λέγεται *περιγεγραμμένος* στὸ κανονικό πολύγωνο (σχ. 7.6 δ). Τὸ *κέντρο* Ο τοῦ κύκλου αὐτοῦ τὸ λέμε καὶ *κέντρο (βάρος)* τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

**Συμπέρασμα 1ο.**

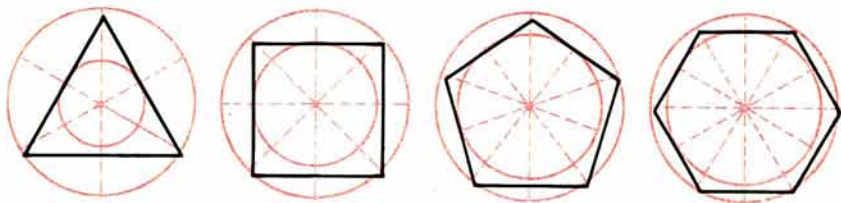
Ἀφοῦ ὅλες οἱ πλευρές τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσες, ἂν φέρουμε τὶς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ ὅλες τὶς πλευρές, οἱ ἀποστάσεις αὐτὲς θὰ εἶναι μεταξύ τους ἴσες, ὅπως πολὺ εὐκόλα μπορεῖ κανεὶς νὰ ἀποδείξη.



Δηλαδή  $OH = O\Theta = OI = \dots$ . Ὅπως ξέρομε, ἡ  $OH$  λέγεται ἀπόστασι τοῦ  $O$  ἀπὸ τὴν πλευρὰ  $AB$  ἢ *ἀπόστημα* τοῦ πολυγώνου (σχ. 7·6 ε). Ἀφοῦ ὅλες αὐτὲς οἱ ἀποστάσεις εἶναι ἴσες, μποροῦμε νὰ γράψωμε μία περιφέρεια μὲ κέντρο τὸ  $O$  καὶ ἀκτῖνα τὸ  $OH$ . Αὕτὴ θὰ περνᾷ ἀπὸ τοὺς πόδες  $H, \Theta, I, M, N, \Sigma$  καὶ θὰ ἔχη τὶς πλευρὲς τοῦ πολυγώνου ἐφαπτόμενες. Μία τέτοια περιφέρεια τὴν λέμε *ἐγγεγραμμένη* στὸ πολύγωνο.

Ὡστε:

Σὲ κάθε κανονικὸ πολύγωνο μποροῦμε νὰ γράψωμε μὲ κέντρο τὸ κέντρο βάρους δύο περιφέρειες. Μία περιγεγραμμένη, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα ἴση μὲ τὴν ἀπόστασι τοῦ κέντρου ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ πολυγώνου, καὶ μία ἐγγεγραμμένη, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασι τοῦ κέντρου ἀπὸ μίαν πλευρὰ τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 7·6 στ.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι:

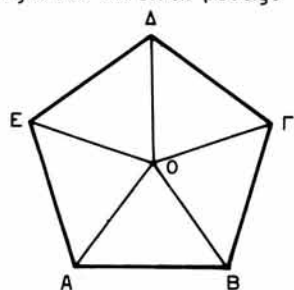
Ὁ περιγεγραμμένος καὶ ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος κάθε κανονικοῦ πολυγώνου ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο· τὸ κέντρο βάρους τοῦ πολυγώνου.

### Συμπέρασμα 2ο.

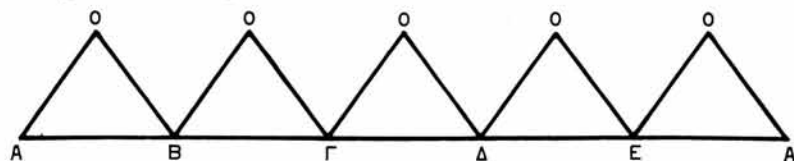
Ὅλες οἱ πλευρὲς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι, ὅπως εἴπαμε, ἴσες μεταξύ τους. Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα πῶς, ἂν φέρωμε τὶς ἀκτῖνες πρὸς τὶς κορυφὲς τοῦ πολυγώνου, π.χ. στὸ πεντάγωνο

ΑΒΓΔΕ τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, τὰ 5 τρίγωνα που σχηματίζονται θὰ εἶναι μεταξύ τους ἴσα (σχ. 7·6 ζ).

Δηλαδή:



Οἱ ἀκτίνες, ποὺ συνδέουν τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου, σὲ κανονικὸ πολύγωνο, κύκλου μὲ τις κορυφὲς τοῦ πολυγώνου, τὸ χωρίζουν σὲ τόσα ἴσα τρίγωνα, ὅσες εἶναι οἱ πλευρὲς του.



Σχ. 7·6 ζ.

### Συμπέρασμα 3ο.

Στὸ κανονικὸ πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 7·6 η) ἡ ἐπίκεντρο γωνία ΑΟΒ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ τόξο ΑΒ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ὀνομάζεται **ἐπίκεντρο γωνία τοῦ πολυγώνου**. Σὲ κάθε πολύγωνο ὑπάρχουν τόσες ἐπίκεντρος γωνίες, ὅσες καὶ πλευρὲς.

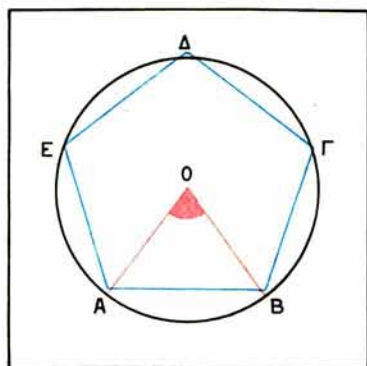
*Ὅλες οἱ ἐπίκεντρος γωνίες ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι μεταξύ τους ἴσες.*

(Γιατὶ ἀντιστοιχοῦν σὲ ἴσα τόξα).

Ἀρα στὸ κανονικὸ πεντάγωνο τοῦ σχήματος 7·6 η ἡ ἐπίκεντρο γωνία ΑΟΒ =  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ .

Ὡστε:

Γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ μέτρου κάθε ἐπίκεντρος γωνίας κανονικοῦ πολυγώνου, διαιροῦμε τις  $360^\circ$  μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 7·6 η.

$$\text{Π.χ.} \quad \text{ἑξάγωνο} : \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\text{ὀκτάγωνο} : \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

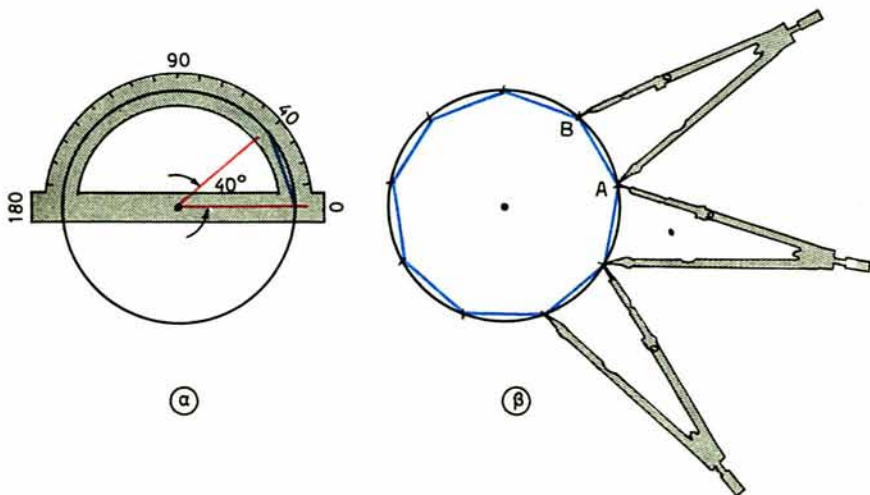
$$\text{ἐννεάγωνο} : \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ \quad \text{κ.λπ.}$$

Ἀπὸ αὐτὰ προκύπτει ἓνας εὐκολος τρόπος γιὰ τὴν σχεδίασι κανονικοῦ πολυγώνου.

\*Ἐστω π.χ. ὅτι θέλομε νὰ σχεδιάσωμε ἓνα κανονικὸ 9γωνο. Εὐρίσκομε τὴν ἐπίκεντρη γωνία:

$$\widehat{\varphi} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

τὴν ὁποία σχεδιάζομε. Φέρομε μετὰ τὴν χορδὴ AB (σχ. 7·6θ) καὶ



Σχ. 7·6θ.

μὲ τὴν βοήθεια τοῦ διαβήτη μας μετροῦμε καὶ χαράσσομε ἄλλες 8 ἴσες χορδές, ὅποτε θὰ γυρίσωμε στὸ σημεῖο ἀπὸ τὸ ὁποῖο ξεκινήσαμε.

Δηλαδή:

Για να σχεδιάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο, σχεδιάζουμε πρώτα την επίκεντρη γωνία του και μετά επάνω στον κύκλο (στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το πολύγωνο) μετρούμε ίσα τόξα· οι χορδές αυτών των τόξων σχηματίζουν το πολύγωνο που ζητούμε.

#### Συμπέρασμα 4ο.

Όταν ζητούμε το μέτρο κάθε γωνίας σε ένα κανονικό πολύγωνο, π.χ. στο έξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 7.6 ι), φέρνουμε όλες τις ακτίνες προς τις κορυφές.

Έτσι σχηματίζονται 6 τρίγωνα, που το καθένα τους έχει, ως γνωστόν, άθροισμα γωνιών  $180^\circ$  ή 2 όρθων. Άρα για όλα τα τρίγωνα θα έχουμε:

$$6 \times 2^\circ = 12^\circ.$$

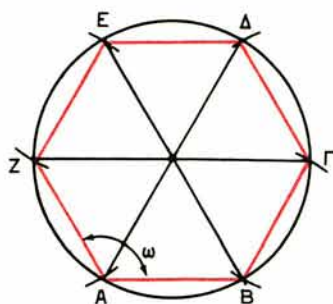
Από αυτές πρέπει να αφαιρέσουμε τις γωνίες, που είναι γύρω από το Ο και έχουν άθροισμα 4 όρθες:

$$12^\circ - 4^\circ = 8^\circ.$$

Ωστε για κάθε γωνία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ θα έχουμε σαν μέτρο:

$$8^\circ : 6 = 1 \frac{1}{3} \text{ όρθες} = 120^\circ.$$

Έπομένως:



$$\hat{\omega} = 1 \frac{1}{3}^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} = \hat{\omega}$$

Σχ. 7.6 ι.

Για την εύρεσι του μέτρου της γωνίας ενός κανονικού πολυγώνου, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου επί 2 και από το γινόμενο αφαιρούμε το 4. Το εξαγόμενο το διαιρούμε με τον αριθμό των κορυφών (ή πλευρών)· το πηλίκον της διαιρέσεως είναι το μέτρο της γωνίας, σε μέρη όρθης.

Παραδείγματα.

**Κανονικὸ πεντάγωνο :**

$$5 \times 2^{\circ} = 10^{\circ}$$

$$10^{\circ} - 4^{\circ} = 6^{\circ}$$

$$6^{\circ} : 5 = 1 \frac{1}{5} \text{ ὀρθές.}$$

**Κανονικὸ δεκάγωνο :**

$$10 \times 2^{\circ} = 20^{\circ}$$

$$20^{\circ} - 4^{\circ} = 16^{\circ}$$

$$16^{\circ} : 10 = 1 \frac{3}{5} \text{ ὀρθές.}$$

Ἄν τὸ μέτρο τῆς γωνίας τὸ θέλωμε σὲ μοῖρες, ἔχομε :

**Κανονικὸ πεντάγωνο :**

$$5 \times 180^{\circ} = 900^{\circ}$$

$$900^{\circ} - 360^{\circ} = 540^{\circ}$$

$$540^{\circ} : 5 = 108^{\circ}$$

$$\eta \quad 1 \frac{1}{5} \times 90^{\circ} = 108^{\circ}$$

**Κανονικὸ δεκάγωνο :**

$$10 \times 180^{\circ} = 1800^{\circ}$$

$$1800^{\circ} - 360^{\circ} = 1440^{\circ}$$

$$1440^{\circ} : 10 = 144^{\circ}$$

$$\eta \quad 1 \frac{3}{5} \times 90^{\circ} = 144^{\circ}$$

Ἀπὸ ὅλα τὰ παραπάνω προκύπτει :

**Κανονικὸ πεντάγωνο :**

$$\frac{5 \times 2^{\circ} - 4^{\circ}}{5} = 2^{\circ} - \frac{4^{\circ}}{5} \quad \eta$$

$$\frac{5 \times 180^{\circ} - 360^{\circ}}{5} = 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{5}$$

**Κανονικὸ ἑξάγωνο :**

$$\frac{6 \times 2^{\circ} - 4^{\circ}}{6} = 2^{\circ} - \frac{4^{\circ}}{6} \quad \eta$$

$$\frac{6 \times 180^{\circ} - 360^{\circ}}{6} = 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{6}$$



## Συμπέρασμα.

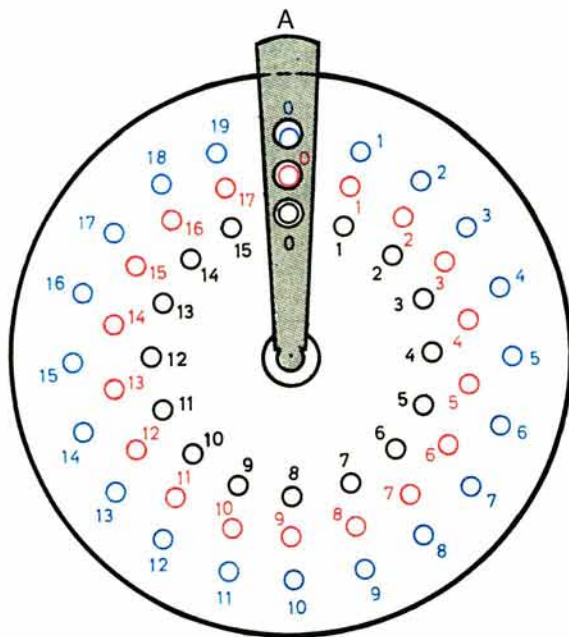
Γιὰ νὰ εὗρωμε τὸ μέτρο τῆς γωνίας ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ μέτρο τῶν  $2^\circ$  ἢ  $180^\circ$  τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν  $4^\circ$  ἢ  $360^\circ$  διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀντιστοίχως.

Δηλαδή ἀφαιροῦμε τὸ μέτρο τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας τοῦ πολυγώνου.

## 7.7 Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ τίς παραγράφους 7.1 ἕως 7.4.

1. Ὁ κυκλικὸς δίσκος τοῦ σχήματος 7.7 α ἔχει τρεῖς ὁμόκεντρες σειρὲς μετρώπες, ποὺ ἰσαπέχουν μεταξὺ τους. Ἡ πρώτη σειρὰ ἔχει 16 τρώπες, ἡ δευτέρα

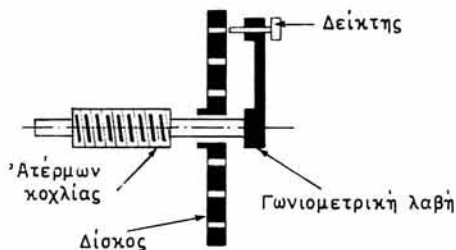


Σχ. 7.7 α.

18 καὶ ἡ τρίτη 20. Γιὰ νὰ σχεδιάσετε τίς γωνίες  $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $80^\circ$  καὶ  $135^\circ$ , ποιά σειρὰ θὰ χρησιμοποιήσετε κάθε φορά καὶ σὲ ποιά θέσι θὰ φέρετε τὸν μοχλὸ A;



2. Ἡ περιστροφή ἑνὸς ἀτέρμονος κοχλίας ρυθμίζεται ἀπὸ μιὰ γωνιομετρικὴ λαβὴ μὲ ἓνα κάθετο δείκτη, ὁ ὁποῖος μπορεῖ νὰ χωθῇ σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς τρύπες ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου στερεωμένου πάνω στὸν σκελετὸ τοῦ διαιρετικοῦ μηχανήματος (σχ. 7·7 β).



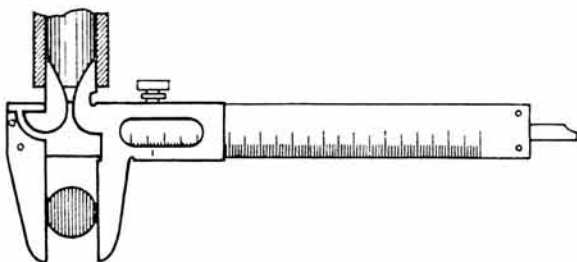
Σχ. 7·7 β.

Γνωρίζοντας ὅτι ὁ δίσκος ἔχει πέντε κυκλικές σειρές ἀπὸ, ἀντιστοίχως:

15, 16, 17, 18, 19, 20

τρύπες, μὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις στὴν κάθε σειρά, πῶς μπορούμε νὰ στρέψουμε τὸν κοχλίας κατὰ  $1/5$  στροφῆς, κατὰ  $1/6$  στροφῆς, κατὰ  $1/4$  στροφῆς κ.λπ.

3. Μπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε, γιατί μὲ τὸ παχύμετρο (σχ. 7·7 γ) μπορούμε νὰ μετρήσωμε τὴν διάμετρο ἑνὸς κύκλου; (Νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν παράγραφο 2 τοῦ 7ου Κεφαλαίου καὶ τὰ συμπεράσματα).

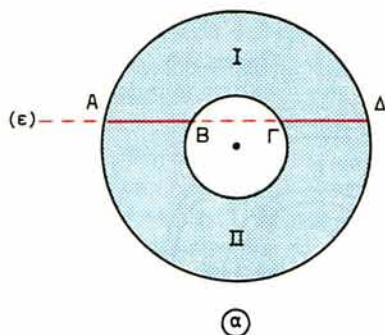


Σχ. 7·7 γ.

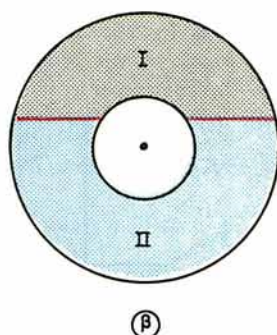
4. Ἐχομε ἓνα κυκλικὸ δακτυλίδι, ποὺ προκύπτει ἀπὸ δύο κυκλικούς δίσκους, μὲ ἴδιο κέντρο (σχ. 7·7 δ). Τὸ κόψαμε, ὅπως δείχνει ἡ εὐθεία ε. Ὅταν θελήσαμε νὰ τὸ κολλήσωμε πάλι, ἀπὸ λάθος ἀντιστρέψαμε τὸ κομμάτι I καὶ τὴν ἔμπρὸς ὀψι τὴν βάλαμε πίσω. Θὰ ταιριάσουν τώρα τὰ κομμάτια I καὶ II; (Χρειάζεται νὰ συγκρίνετε τὰ τμήματα AB καὶ ΓΔ).

5. Σὲ περιφέρεια μὲ κέντρο K νὰ φέρετε ἐφαπτομένη στὸ σημεῖο A. (Νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν παράγραφο 3 τοῦ Κεφαλαίου 7 καὶ τὶς ἐφαρμογές της).

6. Ξηγήστε, γιατί κάθε τραπέζιο, που έχει τις κορυφές του επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου, είναι όπωςσδήποτε ίσσοκελές.



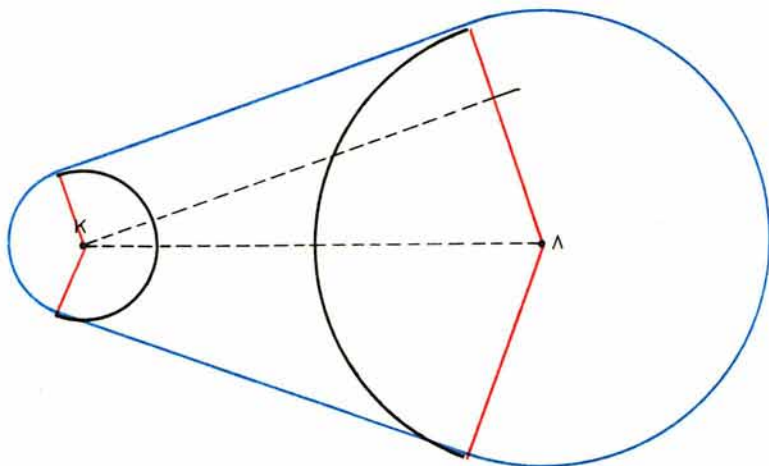
Πρό της άποκοπής κατά την ΑΒΓΔ  
δηλαδή την ε.



Μετά την λανθασμένη συγκόλληση  
θα ισχύση ή μορφή αυτή;

Σχ. 7.7 δ.

7. Έχομε δύο τροχαλίες με διαμέτρους 10 cm και 30 cm, οι όποιες εύρισκονται επάνω σε δύο παραλλήλους άξονες Κ και Λ, που απέχουν μεταξύ τους 30 cm (σχ. 7.7 ε).



Σχ. 7.7 ε.

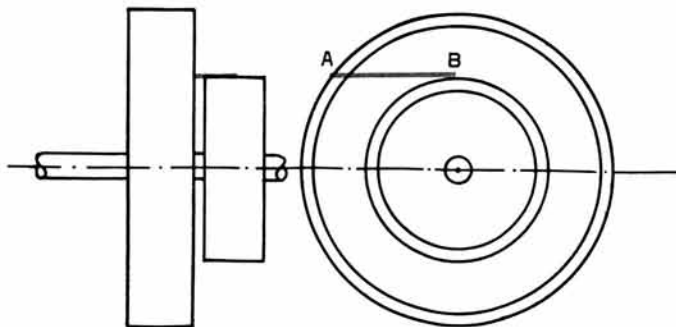
α) Σχεδιάσετε τὸ σχήμα (χάραξι ἐφαπτομένης κοινῆς στοὺς δύο κύκλους).

β) Μετρήσετε τὰ τόξα ἐπαφῆς τοῦ ἱμάντος, που συνδέει τίς δύο τροχαλίες, σὲ μοῖρες.

γ) Ὑπολογίσετε τὰ μήκη τῶν τόξων ἐπαφῆς σὲ cm.

$$(\simeq 220^\circ - 57,6 \text{ cm} \quad 140^\circ - 12,2 \text{ cm})$$

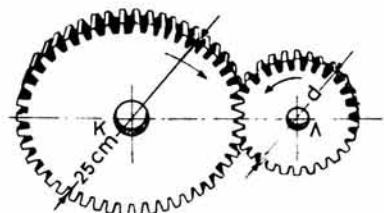
8. Σχεδιάσετε δύο τροχαλίες, ποὺ νὰ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀξονα. Κατόπιν ἀπὸ ἓνα σημεῖο A τῆς ἐξωτερικῆς τροχαλίας φέρετε ἓνα ἐλασμα AB (σχ. 7·7 στ), ποὺ νὰ ἐφάπτεται στὴν μέσα τροχαλία. Πῶς θὰ προσδιορίσετε τὸ σημεῖο B;



Σχ. 7·7 στ.

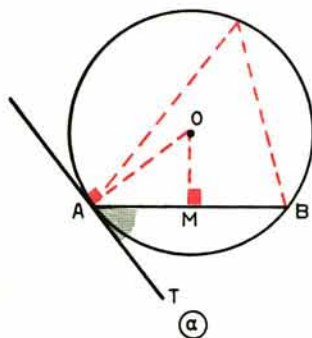
9. Σὲ ἀξονα K εἶναι ἐφαρμοσμένο ἓνα γρανάζι ὀνομαστικῆς διαμέτρου 25 cm, μὲ τὴν βοήθεια τοῦ ὁποίου θὰ κινήσωμε τὸ γρανάζι ἐνὸς ἄλλου ἀξονος Λ, ποὺ θέλομε νὰ στραφῇ μὲ διπλάσιες στροφές (σχ. 7·7 ζ). Ποιὰ θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ διάμετρος τοῦ γραναζιοῦ τοῦ ἀξονος Λ;

$$(12,5 \text{ cm})$$

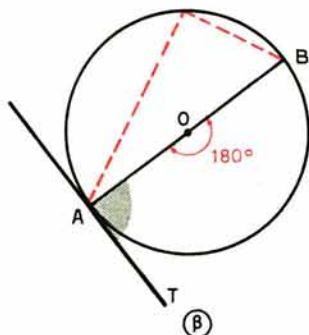


Σχ. 7·7 ζ.

10. Ἀποδείξτε ὅτι ἡ γωνία, ποὺ σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς περιφέρειας στὸ ἄκρο A μιᾶς χορδῆς AB, ἰσοῦται μὲ τὴν ἐγγεγραμμένη γωνία, ποὺ



$$\begin{aligned} OA &\perp AT \\ OM &\perp AB \end{aligned}$$

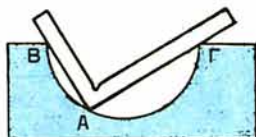


Σχ. 7·7 η.

αντιστοιχεί στο κύριο τόξο της χορδής [σχ. 7.7 η (α)]. Τί θα συμβή στην περίπτωση, που η χορδή θα γίνει διάμετρος [σχ. 7.7 η (β)]; Οι σχεδιάσεις που έχουν γίνει με κόκκινη γραμμή καθοδηγούν για την λύση.

11. Χρησιμοποιώντας την γωνιά του εφαρμοστή και ένα ίσοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε το κέντρο ενός δίσκου;

12. Ξεγηγήστε, γιατί με μία όρθη γωνιά εφαρμοστή μπορούμε να ελέγξουμε, αν η αύλακωσι (σχ. 7.7 θ) επάνω σε ένα δοκίμιο είναι ή όχι ήμικυκλική. Τί θα συμβή, αν η αύλακωσι δεν είναι ήμικυκλική, ειδικά αν το τόξο ΒΑΓ είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από μιάν ήμιπεριφέρεια; (Να κάμετε τὰ ἀντίστοιχα σχήματα).

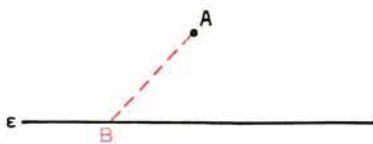


Σχ. 7.7 θ.

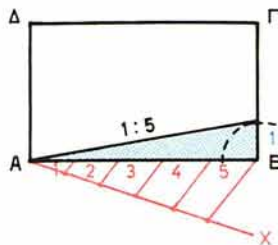
“Έλεγχος μιᾶς ήμικυκλικῆς αὐλακώσεως.

13. Πάρετε τρία σημεία Α, Β και Γ επάνω σε ένα κύκλο τέτοια, ώστε  $\widehat{AB} = \widehat{AG}$  και ένα τέταρτο σημείο Μ επάνω στο κύριο τόξο ΒΓ. Δείξτε ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος στην γωνία ΒΜΓ.

14. Με την βοήθεια διαβήτη και χάρακα φέρετε από ένα σημείο Α, που είναι έξω από μία ευθεία ε, την κάθετο επάνω σ' αυτή την ευθεία (σχ. 7.7 ι). (Θα σᾶς βοηθήση νὰ φέρετε τὴν ΑΒ τυχαία καὶ μὲ διάμετρο αὐτὴ νὰ γράψετε περιφέρεια).



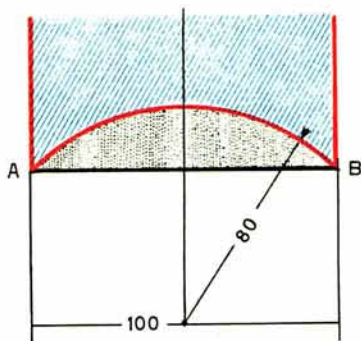
Σχ. 7.7 ι.



Σχ. 7.7 ια.

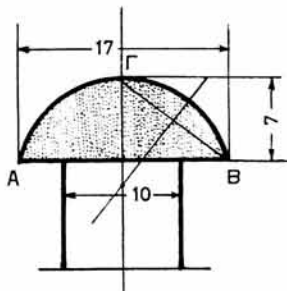
15. Στο σχήμα 7.7 ια φαίνεται ο τρόπος, με τον οποίο στο ορθογωνικό κομμάτι ξύλου ΑΒΓΔ μπορούμε να σχεδιάσουμε και να κόψουμε σφήνες με κλίση 1 : 5. Ξεφαιρέστε τον σε ξύλο με διαστάσεις ΑΒ = 80 mm και ΒΓ = 64 mm. (Σημειώσι: Στην πράξη η ΑΧ σχεδιάζεται μέσα στο ορθογώνιο· την δείχνουμε απ' έξω χάριν ευκολίας).

16. Σχεδιάστε τα κομμάτια του σχήματος 7.7 ιβ. (Για όλα τα σχέδια χρησιμοποιήστε κλίμακες κατά την κρίση σας).



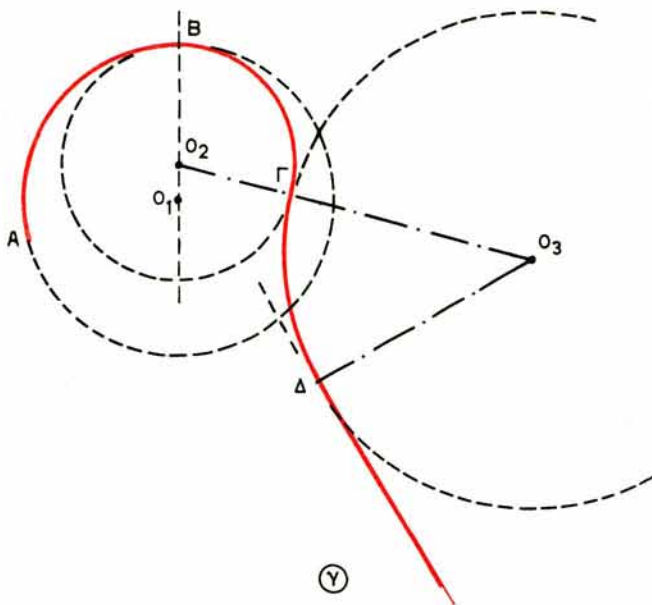
(α)

Πυθμὴν δοχείου.



(β)

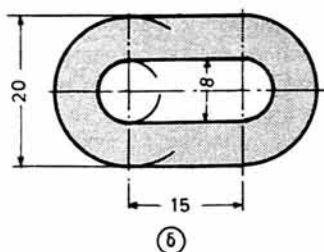
Κεφαλὴ βίδας.



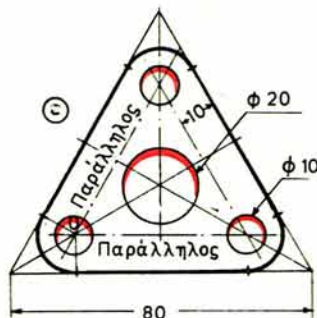
(γ)

Συναρμογὴ τόξων καὶ τόξου με εὐθύγραμμον τμήμα.

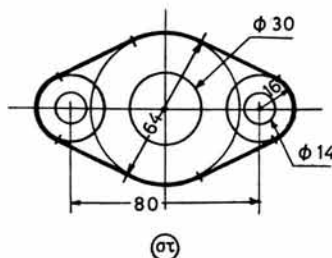
Ἀκτίνες περιφερειῶν: Περιφ.  $O_1 = 40$  cm. Περιφ.  $O_2 = 30$  cm. Περιφ.  $O_3 = 65$  cm.Τὰ τόξα εἶναι:  $\widehat{AB} = 105^\circ$ ,  $\widehat{BG} = 105^\circ$ ,  $\widehat{GD} = 45^\circ$ .



Κρίκος άλυσίδας.



Τριγωνική φλάντζα.



Φλάντζα.

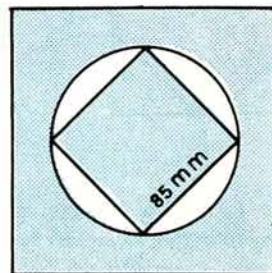
Σχ. 7.7 ιβ.

Από τις παραγράφους 7.5 και 7.6.

1. Ένα κομμάτι λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου με πλευρά 85 mm πρόκειται να το τοποθετήσω, όπως δείχνει το σχήμα 7.7 ιγ, στην κυκλική όπη μιᾶς άλλης τετραγωνικής λαμαρίνας. Μπορείτε να προσδιορίσετε την διάμετρο του κύκλου; (σχεδιάσετε και μετρήσετε).

2. Χωρίσετε ένα κύκλο σε 20 ίσα μέρη (με μέτρηση).

3. Στην όροφή τετραγωνικού δωματίου με πλευρά 3,5 m πρόκειται να βάλω κυκλική γύψινη διακόσμηση, όπως δείχνει το σχήμα 7.7 ιδ, που να εφάπτεται στις πλευρές της. Πόση θα είναι η διάμετρος της;

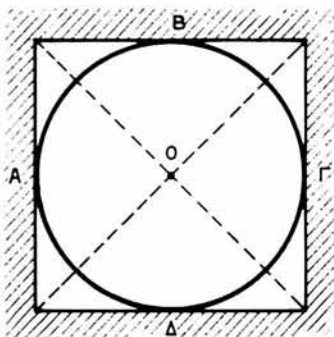


Σχ. 7.7 ιγ.

4. Στην όροφή του δωματίου της προηγούμενης άσκησης και ακριβώς στο



σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων μὲ τὴν ἐγγεγραμμένη περιφέρεια θέλομε νὰ κρεμάσωμε τέσσερα φωτιστικά. Πῶς θὰ εὕρεθoῦν οἱ θέσεις, γιὰ νὰ ἀφίσωμε τὶς ἀναμονές, πρὶν τοποθετηθῇ ἡ διακόσμηση;



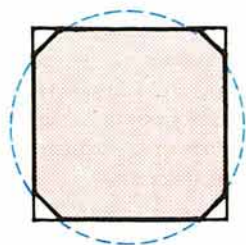
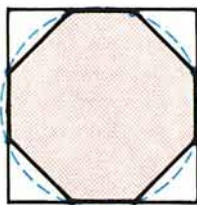
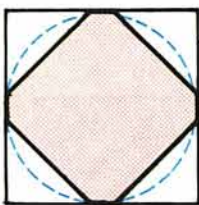
Σχ. 7·7 ιδ.

(Τὶς θέσεις νὰ τὶς προσδιορίσετε σὰν ἀπόστασι ἀπὸ τὶς κορυφές τοῦ τετραγώνου. Ἄν σᾶς χρειάζονται οἱ διαγώνιες, μετρήσετε τὸ μῆκος μὲ προσέγγισι cm γιὰ τὸ πραγματικό μῆκος ἀπὸ τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖο νὰ σχεδιάσετε μὲ κλίμακα).

5. Στὴν ὁροφὴ τοῦ δωματίου, ποὺ ἀναφέραμε προηγουμένως (σχ. 7·7 ιδ), καὶ ἀκριβῶς στὴν τομὴ τῶν διαγωνίων τοῦ δωματίου καὶ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ πρόκειται νὰ κρεμαστοῦν 4 φῶτα. Πόσο θὰ ἀπέχουν τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀπὸ τὶς γωνίες τοῦ δωματίου; (Ἄν σᾶς χρειάζεται τὸ μῆκος τοῦ δωματίου, μετρήσετέ το μὲ τὴν ἴδια ἀκρίβεια τῆς ἀσκήσεως 4 παραπάνω).

6. Ἐνα δίσκο ξύλινο ἀκτίνος 25 mm τοποθετήσετέ τον μέσα σὲ τετράγωνο, ὥστε νὰ ἐφάπτεται στὶς πλευρές του. Πόσο θὰ πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου;

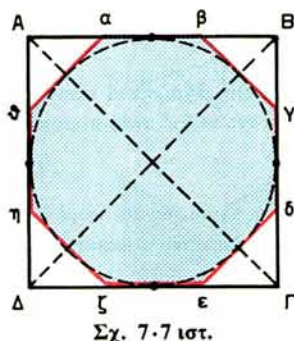
7. Πάρετε ἓνα τετραγωνικὸ κομμάτι λαμαρίνας καὶ ἀπὸ κάθε γωνία του κόψετε κομμάτια ἴσα μεταξύ τους σὲ σχῆμα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου (σχ. 7·7 ιε). Ἐξηγήσετε, γιὰτί τὸ ὀκταγωνικὸ κομμάτι ποὺ θὰ προκύψῃ, μπορεῖ νὰ ἐφαρμόσῃ σὲ μία κυκλικὴ τρύπα.



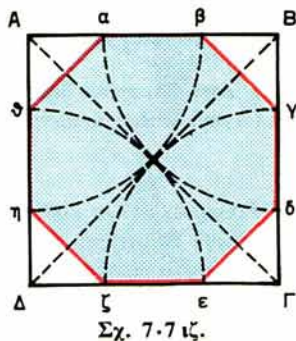
Σχ. 7·7 ιε.

8. Γιὰ νὰ δώσωμε σὲ τετραγωνικὸ κομμάτι ΑΒΓΔ λαμαρίνας μὲ πλευρὰ 10 cm τὸ σχῆμα κανονικοῦ ὀκταγώνου, κάνομε τὰ ἑξῆς: α) εἴτε γράφομε τὴν ἐγγεγραμμένη περιφέρεια καὶ ἐκεῖ ποὺ κόβεται ἀπὸ τὶς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ φέρνομε τὶς ἐφαπτόμενες (σχ. 7·7 ιστ), ὁπότε σχηματίζεται τὸ ὀκτάγωνο αβγδεζηθ, ποὺ εἶναι κανονικό, β) εἴτε μὲ κέντρο τὴν κάθε κορυφὴν τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτίνα τὴν μισὴ διαγώνιο γράφομε περιφέρειες καὶ σημειώνομε τὰ δύο σημεῖα, στὰ ὁποῖα κάθε

μία κόβει τις δύο πλευρές του τετραγώνου. Τα οκτώ σημεία τομής, που προκύπτουν, είναι κορυφές κανονικού όκταγώνου (σχ. 7.7 ιζ).



Σχ. 7.7 ιστ.



Σχ. 7.7 ιζ.

Να ελέγξετε μετρώντας και να προσπαθήσετε να δώσετε θεωρητική εξήγηση.

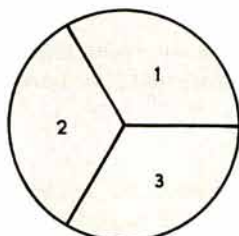
9. Ένα παξιμάδι έχει διατομή κανονικού εξαγώνου με πλευρά 6mm. Πόσο είναι η μεγαλύτερη διαγώνιος;

10. Σχεδιάστε υπό κλίμακα 2 : 1 ένα τετραγωνικό παξιμάδι, που η πλευρά του να είναι διπλασία της διαμέτρου της εσωτερικής τρύπας (σχ. 7.7 ιη), αν γνωρίζετε ότι η διαγώνιος του είναι 20 mm. Μετά καμπυλώστε τις γωνίες του κατά τόξο  $30^\circ$ . Σχεδιάστε το καμπύλωμα.



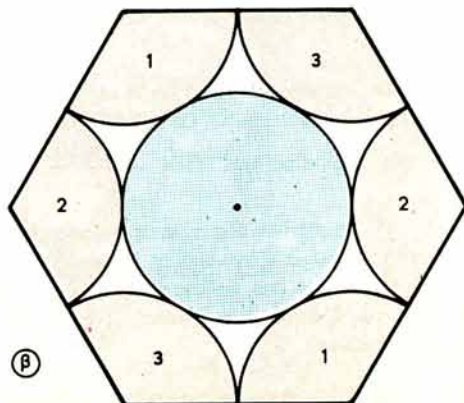
Σχ. 7.7 ιη.

11. Να χωρίσετε κυκλικά ελάσματα διαμέτρου 3 mm καθένα σε τρία ίσα κομμάτια [σχ. 7.7 ιθ (α)]. Μετά να τα συγκολλήσετε, όπως



(α)

Σχ. 7.7 ιθ.



(β)

δείχνει το σχήμα 7.7 ιθ (β). Μπορείτε να δείξετε ότι το εξάγωνο που σχημα-

τίστηκε εἶναι κανονικό; Πόσο μήκος ἔχει ἡ πλευρά του; Ὑπολογίσετε τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου, ποὺ πρέπει νὰ κόψετε, ὥστε, ὅταν τὸν συγκολλήσετε μέσα στὸ σχῆμα ποὺ φτιάξατε, νὰ ἐφάπτεται στὰ τόξα τῶν κομματιῶν τοῦ ἀρχικοῦ κύκλου, ποὺ εὐρίσκονται μέσα στὸ ἐξάγωνο.

12. Ἀπὸ λαμαρίνα διαστάσεων  $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$  βγάζουμε 4 παρακύκλους. Ποιὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερα διάμετρος, ποὺ μπορούμε νὰ ἔχουμε γιὰ τοὺς παρακύκλους;

(125 mm)

13. Ἐπάνω σὲ ἓνα φύλλο κόντρα πλακὲ σχεδιάσετε ἓνα κύκλο μὲ διάμετρο 1 m. Νὰ εὐρεθῇ μὲ μέτρησι τὸ μήκος κάθε πλευρᾶς ἀπὸ τὰ παρακάτω περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα:

|            |           |            |
|------------|-----------|------------|
| Τρίγωνο    | τετράγωνο | πεντάγωνο  |
| ἑξάγωνο    | ἑπτάγωνο  | ὀκτάγωνο   |
| ἐννεάγωνο  | δεκάγωνο  | ἐνδεκάγωνο |
| δωδεκάγωνο |           |            |

(Μετρήσετε μὲ ἀκρίβεια mm. Αὐτὸ μᾶς χρειάζεται πολλές φορές στὴν ξυλογλυπτική).

14. Νὰ εὐρεθῇ πόσες μοῖρες εἶναι οἱ ἐπίκεντρος γωνίες τῶν παρακάτω κανονικῶν πολυγώνων:

πενταγώνου, ἑπταγώνου, ὀκταγώνου, ἐνδεκαγώνου, δεκαπενταγώνου.

( $72^\circ$ ,  $\simeq 51^\circ 25' 43''$ ,  $45^\circ$ ,  $\simeq 32^\circ 43' 38''$ ,  $24^\circ$ )

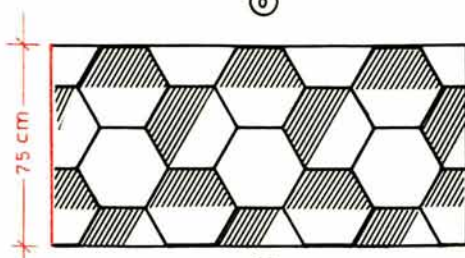
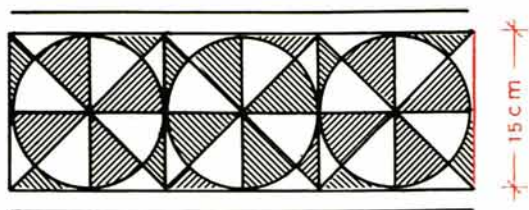
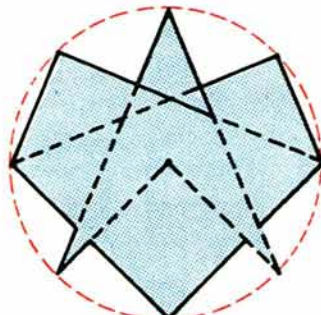
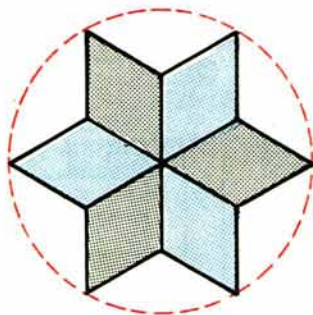
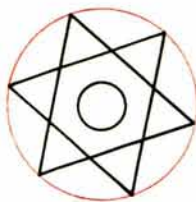
15. Ὑπολογίσετε πόσο εἶναι οἱ γωνίες κανονικοῦ δεκαπενταγώνου, εἰκοσαγώνου καὶ πολυγώνου μὲ 36 πλευρές.

( $156^\circ$ ,  $162^\circ$ ,  $170^\circ$ )

16. Σχεδιάσετε μιὰ φλάντζα μὲ ἐξωτερικὴ διάμετρο 80 mm, ἐσωτερικὴ 30 mm καὶ 8 τρύπες τῶν 10 mm. (Οἱ τρύπες ἔχουν τὰ κέντρα τους ἑπάνω στὴν μέση διάμετρο τῆς φλάντζας, ποὺ εἶναι  $\frac{80+30}{2} = 55\text{ mm}$ ).

17. Διαθέτομε δύο τύπους πλακάκια, ρόμβους ὁξείας γωνίας  $60^\circ$  καὶ ἑξαγωνικά (κανονικὸ ἑξάγωνο) μὲ πλευρὰ 20 cm καὶ τὰ δύο, μὲ τὰ ὁποῖα θέλομε νὰ πλακοστρώσωμε ἓνα ὀρθογωνικὸ διάδρομο μὲ διαστάσεις  $1,20\text{ m} \times 4,33\text{ m}$ . Σχεδιάσετέ τον ἢ ὑποδείξετε τρόπο. (Προσπαθήσετε νὰ κόψετε ὅσο μπορεῖτε λιγότερα πλακάκια).

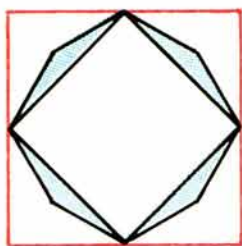
18. Σχεδιάσετε τὰ παρακάτω σχήματα (σχ. 7·7 κ), ὅταν δίδεται τὸ σχῆμα ἢ ἡ διάστασι, ποὺ εἶναι σχεδιασμένα μὲ κόκκινο.



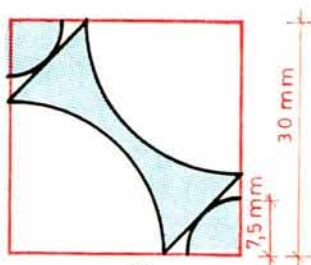
Σχ. 7.7 κ.

α) 'Ο μεγάλος κύκλος είναι περιγεγραμμένος. 'Ο μικρός κύκλος είναι έγγεγραμμένος στα άλλα δύο σχήματα του α. β) και γ) Τά τόξα στον κάθε κύκλο είναι ίσα μεταξύ τους.

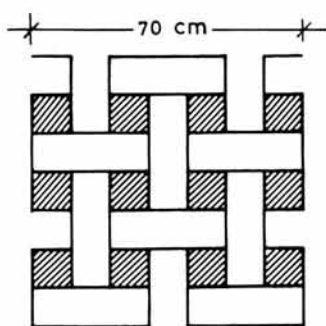




(στ)

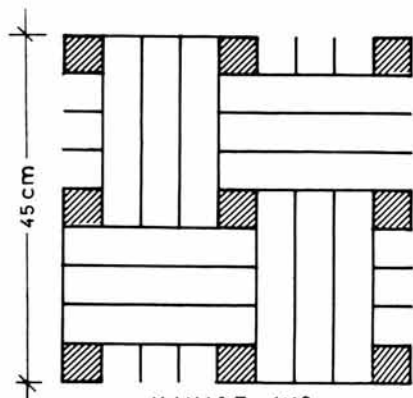


(ς)



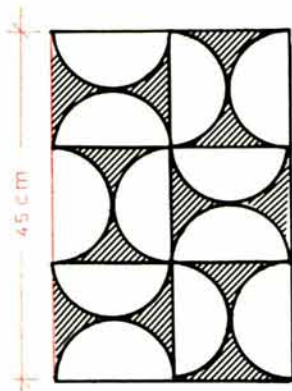
ΚΛΙΜΑΞ 1:20

(η)

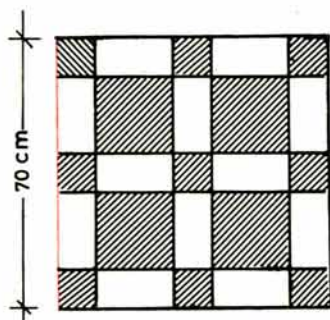


ΚΛΙΜΑΞ 1:10

(θ)



(λ)



ΚΛΙΜΑΞ 1:20

(λα)

Σχ. 7.7 κ.

στ) τὰ πολύγωνα εἶναι κανονικά.

## Ε Υ Ρ Ε Τ Η Ρ Ι Ο

( Οί αριθμοί αναφέρονται σὲ σελίδες τοῦ βιβλίου )

### Ἐξισοτισμὸς 32

- αἰῶν 190
- ἀκεραία μόνος 1
- ἀκέραιος ἀριθμὸς 1
- ἀκριβείας μέτρησι 21, 22
- ἀκτὶς κύκλου ἢ περιφερείας 82
- ἀμβλεία γωνία 93
- ἀναγωγή στὴν μονάδα 158
- ἀνάγωγο κλάσμα 132
- ἀνισα εὐθύγραμμα τμήματα 14
- ἀνισοὶ ἀριθμοὶ 7
- ἀνισότης 7
  - κλασμάτων 133
- ἀντίστροφες πράξεις 69
  - προτάσεις 227
- ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ 152
- ἄξων συμμετρίας 225
  - συντεταγμένων 167
  - τεταγμένων 167
  - τετμημένων 167
- ἀπεικόνισι γραφικὴ 165
- ἀπλοποίησι κλασμάτων 130
- ἀπόστασι δύο παραλλήλων εὐθειῶν 106
  - δύο σημείων 11
  - σημείου ἀπὸ εὐθείας 230
- ἀπόστημα 99, 274
  - κανονικοῦ πολυγώνου 274
- ἀριθμησι 1
- ἀριθμητὴς 124
- ἀριθμητικὰ ψηφία 1
- ἀριθμοὶ ἀνισοὶ 7
  - ἀντίστροφοι 152
  - ἴσοι 7
- ἀριθμὸς 1
  - ἀκέραιος 1
  - ἀφηρημένος 23
  - δεκαδικὸς 15
  - διψήφιος 2
  - μικτὸς 127
  - μονοψήφιος 1
  - π 98
  - πολυψήφιος 2
  - συγκεκριμένος 13
  - συμμιγῆς 187

ἀτελὲς διαίρεσι 55

ἀφαιρέσεως ὑπόλοιπο 37

ἀφαίρεσι ἀκεραίων 37

— δεκαδικῶν 37

— κλασμάτων 142

— συγκεκριμένων ἀριθμῶν 40

— συμμιγῶν 194

ἀφαιρετέος 37

ἀφηρημένος ἀριθμὸς 23

### Βάρος 23

βάσι ἰσοσκελοῦς τριγώνου 213

βερνιέρος 21

### Γινόμενο 41

— δεκαδικῶν ἀριθμῶν 42

— πολλῶν παραγόντων 43, 154

— συγκεκριμένων ἀριθμῶν 45, 46

γραμμὴ εὐθεία 8

— καμπύλη 9

— κλάσματος 123

— μικτὴ 10

— τεθλασμένη 9

— — κλειστὴ 271

γραμμάριο 23

— βάρους (πὸντ) 24

γραφικὴ ἀπεικόνισι 165

— παράστασι 168

γυάρδα 191

γωνία 92

γωνία 80

— ἀμβλεία 93

— ἐγγεγραμμένη 258

— ἐπίκεντρο 258

— εὐθεία 81

— ὀξεία 93

— ὀρθή 90

— περιεχομένη 221

γωνίες ἐπίκεντρος 86,

— ἴσες 84

— κατακορυφή 93

— παραπληρωματικὲς 93

— προσκείμενες (τριγώνου) 218

— πολυγώνου 272

— συμπληρωματικὲς 93



γωνίες τριγώνου 205  
γωνιών μέτρηση 94

### Δεκάς 1

δεκαδική μονάς 15, 16  
δεκαδικό κλάσμα 124  
δεκαδικός αριθμός 15  
δεκατόμετρο (παλάμη) 12  
δευτερεύον τόξο περιφέρειας 83  
δευτερόλεπτο (ώρας) 188  
δευτερο λεπτό (γωνίας) 94  
— — (μοίρας) 94  
διά 84  
διαβήτη 83  
διαγώνιοι πολυγώνου 272  
— τετραπλεύρου 233  
διαίρέσεως υπόλοιπο 54  
— επέκτασι 58  
διαίρεσι άκεραίων 53, 54  
— άτελής 55  
— δεκαδικών 56-60  
— διά κλάσματος 152  
— κλάσματος δι' άκεραίου 147  
— με προσέγγισι 56  
— περιφέρειας (σέ ίσα μέρη) 265-271  
— συμμιγών 197, 200  
— τελεία 55

διαιρετέος 54

διαιρέτης 54

διάκεντρος περιφερειών 254

διάμεσοι τριγώνου 208

διάμετρος περιφέρειας 82

διαστημόμετρο 84

διαφορά 37

δισεκτος χρόνος (έτος) 190

διχοτόμοι τριγώνου 211

διχοτόμος γωνίας 88

διψήφιος αριθμός 2

δοκιμή άφαιρέσεως 38

— διαίρέσεως 62

— πολλαπλασιασμού 49

— προσθέσεως 35

δωδεκάγωνο κανονικό 271

### Έβδομάς 189

έγγεγραμμένη γωνία 258

— περιφέρεια 211, 230, 274

έγγεγραμμένο πολύγωνο 273

— τρίγωνο 208

έκατοστόμετρο (έκατοστό, πόντος) 12

έκατοντάς 2

έλεγχος (δοκιμή) άφαιρέσεως 138

— — διαίρέσεως 62, 63

έλεγχος εύθυγραμμίας 8

— (δοκιμή) πολλαπλασιασμού 49, 50

— — προσθέσεως 35

έξαγωγή άκεραίων μονάδων κλάσματος 129

έξάγωνο κανονικό 269

έπέκτασι διαίρέσεως 58

έπί 41

έπίκεντρος γωνίες 86, 258

έπίκεντρο γωνία πολυγώνου 275

έπίπεδη έπιφάνεια 79

έπίπεδο 79

— σχήμα 79

έτερώνυμα κλάσματα 134

έτος (χρόνος) 190

εύθεια 8

— γραμμή 7

— γωνία 81

— τέμνουσα 108

εύθυγραμμίας έλεγχος 8

εύθύγραμμο τμήμα 8

εύθυγράμμου τμήματος μεσοκάθετος 15

— — μέσον 15

εύθειες κάθετες 103

— παράλληλες 105

έφαπτόμενες περιφέρειες 254

έφαπτομένη περιφέρειας 104, 261, 254

Ήμερα (24ωρο) 187

ήμιευθεία 78

ήμιπεριφέρεια 83

Ήντσα 144, 190

ίσα εύθύγραμμα τμήματα 14

ίσες γωνίες 84

ίσοι αριθμοί 7

ισόπλευρο τρίγωνο 213, 271

ισοσκελές τραπέζιο 234

— τρίγωνο 212

ισοσκελούς τριγώνου βάσις 213

— — κορυφή 213

ισότης τριγώνων 216 - 223

Κάθετες εύθειες 103

— πλευρές όρθης γωνίας 93

κάθετος πλευρά τριγώνου 212

καμπύλη γραμμή 9

κανονικό δωδεκάγωνο 271

— έξάγωνο 269

— όκτάγωνο 268

— πολύγωνο 272

κατακορυφή γωνίες 93

- κατάταξι αφαιρέσεως 37  
 — διαιρέσεως 54  
 — πολλαπλασιασμού 40, 41  
 — προσθέσεως 33  
 κέντρο βάρους κανονικού πολυγώνου 273  
 — — τριγώνου 208, 273  
 — περιφέρειας 82  
 κιλό 23  
 κιλοπόντ (χιλιόγραμμα βάρους) 24  
 κλάσι αριθμού 3, 4  
 κλάσμα 122  
 — ανάγωγο 132  
 — δεκαδικό 124  
 κλάσματα έτερόνυμα 134  
 — όμώνυμα 134  
 κλασματική μονάς 123  
 κλασμάτων άπλοποίηση 130  
 — άφάιρεσι 142  
 — διαίρεσι 147, 152  
 — πολλαπλασιασμός 144, 147-151  
 — πρόσθεσι 136  
 κλίμακες 163  
 — σχεδιάσεων 161  
 κόμμα (ύποδιαστολή) 15  
 κοντέρ (χιλιομετρικός μετρητής) 52  
 κορδέλλα (μετροταινία) 50  
 κορυφές πολυγώνου 272  
 — τετραπλεύρου 233  
 — τριγώνου 205  
 κορυφή γωνίας 80  
 — ίσοσκελούς τριγώνου 213  
 κρατούμενο 32, 37  
 κύκλος 83  
 — έγγεγραμμένος 211, 230, 274  
 — περιγεγραμμένος τριγώνου 208, 273  
 κύριο τόξο περιφέρειας 83  
 Λεπτό (δευτερο μοίρας) 94  
 — (— ώρας) 188  
 — (πρώτο μοίρας) 94  
 — (— ώρας) 188  
 Μείον (πλήν) 37  
 μειωτέος 37  
 μεσοκάθετοι τριγώνου 207  
 μεσοκάθετος εύθυγράμμου τμήματος 99  
 — πλευράς τριγώνου 207  
 — χορδής 99  
 μέσον εύθυγράμμου τμήματος 15  
 μέσος όρος 66  
 μετάθεσι ύποδιαστολής 18  
 μετατροπές στους συμμιγείς 191  
 μέτρησι 11  
 — άκριβείας 21, 22  
 — γωνιών 94  
 — μέ διαίρεσι 65  
 — μέ προσέγγισι 21  
 — μέ πρόσθεσι 36  
 — μήκους 19, 39  
 — περιφέρειας 97  
 μετρητής χιλιομετρικός (κοντέρ) 52  
 μετρικό σύστημα 13  
 μέτρο 11  
 μετροταινία (κορδέλλα) 50  
 μηδέν 1, 5, 6  
 μήκος 11  
 μήνας 190  
 міκρεμα αριθμού 50  
 μικρόμετρο 22  
 μικρόν 13  
 μικτή γραμμή 10  
 μικτός αριθμός 127  
 μιλλιμέτρ (χιλιοστόμετρο) 13  
 μιλλιμετρέ χαρτί 167  
 μιλλιγραμμάριο (μιλλιγκράμ) 24  
 μοίρα (γωνίας) 94  
 μοιρογνωμόνιο 95, 206  
 μονάδες μήκους 11 - 13  
 μονάς άκεραία 1  
 — δεκαδική 15, 16  
 — κλασματική 123  
 — μετρήσεως 11  
 — — μήκους 11 - 13  
 μονάδες αριθμητικές διαφόρων τάξεων 2  
 — βάρους 23  
 — δεκαδικές διαφόρων τάξεων 17  
 — μετρήσεως γωνιών 94  
 μονοψηφιος αριθμός 1  
 Όκτάγωνο κανονικό 268  
 όμόκεντρες περιφέρειες 254  
 όμοτάξια ψηφία 32  
 όμώνυμα κλάσματα 134  
 όξεία γωνία 93  
 όρθή γωνία 90  
 όρθογώνιο 237  
 — τραπέζιο 234  
 — τρίγωνο 90, 212  
 όρθόκεντρο τριγώνου 210  
 όροι κλάσματος 124  
 Π 98  
 παλάμη (δεκατόμετρο) 12  
 παράγοντες γινομένου 41  
 παράλληλες εύθειες 105

- παραλληλόγραμμο 235  
 παραπληρωματικές γωνίες 93  
 παράστασι γραφική 168  
 παρένθεσι 44  
 παρονομαστής 123  
 παχύμετρο 21  
 περιγεγραμμένη περιφέρεια 208, 273  
 περιγεγραμμένο τρίγωνο 211, 230  
 περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου 208, 273  
 περιεχομένη γωνία τριγώνου 221  
 περίμετρος τριγώνου 218  
 περιφέρεια 82  
 — έγγεγραμμένη 211, 230, 274  
 — περιγεγραμμένη τριγώνου 208, 273  
 περιφερείας δευτερεύον τόξο 83  
 — διάμετρος 82  
 — έφαπτομένη 104  
 — κύριο τόξο 83  
 περιφέρειες έφαπτόμενες 254  
 — ομόκεντρες 254  
 — τεμνόμενες 254  
 πηλίκον 54  
 πίναξ Πυθαγόρειος 42  
 — σχέσεων ίντσας και χιλιοστομέτρου 151  
 — — μονάδων μήκους μετρικού και αγγλικού συστήματος 191  
 πλευρές γωνίας 80  
 — πολυγώνου 272  
 — τετραπλεύρου 233  
 — τριγώνου 205  
 πλήν (μείον) 37  
 πόδι (μονάς μετρήσεως μήκους) 190  
 — εύθυγράμμου τμήματος 230  
 — καθέτου 231  
 πολλαπλασιασμός άκεραίων 40  
 — δεκαδικών 42  
 — κλασμάτων 144, 147-151  
 — συμμιγών 195, 200  
 πολλαπλασιαστέος 41  
 πολλαπλασιαστής 41  
 πολύγωνο 271  
 — κανονικό 272  
 — κυρτό 272  
 — μη κυρτό 272  
 πολυγώνου διαγώνιοι 272  
 — κορυφές 272  
 — πλευρές 272  
 πολυψήφιος αριθμός 2  
 πόντ (γραμμάριο βάρους) 24  
 πόντος (έκατοστόμετρο) 12  
 πράξεις αντίστροφες 69  
 προβολή σημείου σέ εύθεια 231  
 πρόσθεσι άκεραίων 32  
 — δεκαδικών 33  
 — κλασμάτων 136  
 — συγκεκριμένων αριθμών 36  
 πρόσθεσι συμμιγών 192  
 προσθετέοι 32  
 προσκείμενες γωνίες τριγώνου 218  
 προτάσεις αντίστροφες 227  
 πρώτο λεπτό γωνίας 94  
 — — μοίρας 94  
 — — ώρας 188  
 Πυθαγόρειος πίναξ 42  
**Ρόμβος** 237  
**Σειρά** φυσική αριθμών 6  
 σημείο 7  
 στοιχεία τριγώνου 205  
 συγκεκριμένος αριθμός 13  
 σύμβολο ανισότητας 7  
 — αντιστοιχίας («άντιπροσωπεύει») 166  
 — άφαιρέσεως 127  
 — διαιρέσεως 54  
 — καθέτου 98  
 — παραλλήλων εύθειών 105  
 — πολλαπλασιασμού 41  
 — προσθέσεως 32  
 συμμετρίας άξων 225  
 συμμιγής αριθμός 187  
 συμπληρωματικές γωνίες 93  
 σύν 32  
 συντεταγμένων άξων 167  
 σύστημα μετρικό 13  
 σχεδιάσι ύπό κλίμακα 163  
 σχήμα έπίπεδο 79  
**Τάξεις** μονάδων 2, 4, 17 - 19  
 τεθλασμένη γραμμή 9  
 — — κλειστή 271  
 τελεία διαίρεσι 55  
 τεμνόμενες περιφέρειες 254  
 τέμνουσα παραλλήλων εύθειών 108  
 τεταγμένη 167  
 τεταγμένων άξων 167  
 τετμημένη 167  
 τετμημένων άξων 167  
 τετράγωνο 239, 265  
 τετράπλευρο 233  
 τετραπλεύρου διαγώνιοι 233  
 — κορυφές 233  
 — πλευρές 233  
 τμήμα εύθύγραμμο 8

- τόννος 24  
 τόξο δευτερεύον περιφέρειας 83  
 τόξο κύριο περιφέρειας 83  
   — περιφέρειας 83  
 τραπέζιο 234  
   — ίσοσκελές 234  
   — ὀρθογώνιο 234  
 τρίγωνο 205  
   — ἐγγεγραμμένο 208  
   — ἰσόπλευρο 213, 271  
   — ἰσοσκελές 212  
   — ὀρθογώνιο 90, 212  
   — περιγεγραμμένο 211, 230  
 τριγώνου γωνίες 205  
   — διάμεσοι 208  
   — διχοτόμοι 211  
   — κέντρο βάρους 208  
   — κορυφές 205  
   — ὀρθόκентρο 210  
   — περιγεγραμμένος κύκλος 208  
   — περίμετρος 218  
   — πλευρές 205  
   — στοιχεῖα 205  
   — ὕψη 209  
 τριγώνων ἰσότης 216 - 223  
   — σχεδίασι 216 - 223  
 τριψήφιος ἀριθμὸς 2  
 τροπή ἐτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁ-  
   μῶνυμα 134, 136  
   — μικτοῦ ἀριθμοῦ σὲ κλάσμα 140  
 Ὑάρδα 191  
 ὑποδεκάμετρο 19  
 ὑποδιαστολή (κόμμα) 15  
 ὑποδιαστολῆς μετάθεσι 18  
 ὑπόλοιπο ἀφαιρέσεως 37  
   — διαιρέσεως 54  
 ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου  
   105, 212  
   — τριγώνου 209  
 Φυσικὴ σειρά ἀριθμῶν 6  
 Χάραξι διχοτόμου 88  
   — καθέτου 103, 265  
   — μεσοκαθέτου 100  
   — παραλλήλου 112  
   — τόξου 262-265  
 χαρτί μιλλιμετρέ 167  
 χιλιόγραμμα (κιλό) 23  
   — βάρους (κιλοπόντ) 24  
 χιλιομετρικὸς μετρητής (κοντέρ) 52  
 χιλιόμετρο 13  
 χιλιοστόμετρο (χιλιοστό, μιλλιμέτρ) 13  
 χορδὴ (κύκλου, περιφέρειας) 82  
 χρόνος (δίσεκτος) 190  
   — (ἔτος) 190  
 Ψηφία ὁμοτάξια 32  
 ψηφίο ἀριθμητικὸ 1  
 Ὡρα 188  
 ὥρας δεύτερο λεπτό 188  
   — πρῶτο λεπτό 188

COPYRIGHT ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

---

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ "ΑΣΠΙΩΤΗ - ΕΛΚΑ" Α. Ε.

