

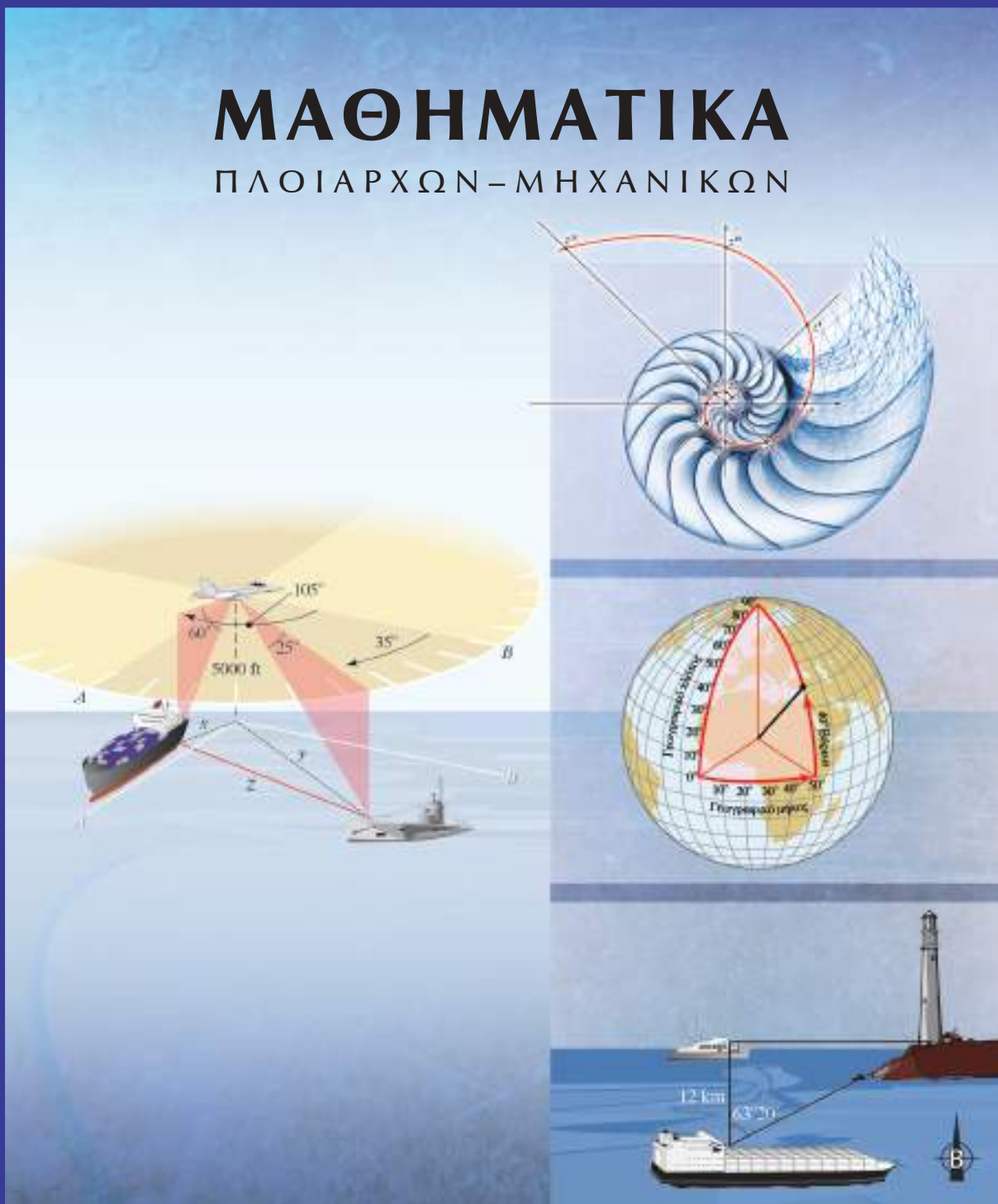


ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ-ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



Μ. Β. Κούτρα
Κ. Ν. Λάττα
Σ. Γ. Μπερσίμη

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μέρη Α, Β και Δ

ΜΑΡΚΟΥ Β. ΚΟΥΤΡΑ

Μαθηματικού/Στατιστικού - Καθηγητού Πανεπιστημίου Πειραιώς

Μέρος Γ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ν. ΛΑΤΤΑ

Μαθηματικού - Καθηγητού Δ.Ε.

ΣΩΤΗΡΙΟΥ Γ. ΜΠΕΡΣΙΜΗ

Στατιστικού - Λέκτορα Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΑΘΗΝΑ

2020



Α' ΕΚΔΟΣΗ 2012

ISBN: 978-960-337-110-6

Copyright © 2020 Ίδρυμα Ευγενίδου

Απαγορεύεται η ολική ή μερική ανατύπωση του βιβλίου και των εικόνων με κάθε μέσο καθώς και η διασκευή, η προσαρμογή, η μετατροπή και η κυκλοφορία του (Άρθρο 3 του ν. 2121/1993).

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Το 1952 ο Ευγένιος Ευγενίδης (1882-1954) όρισε με τη διαθήκη του τη σύσταση του Ιδρύματος Ευγενίδου, του οποίου ως μοναδικό σκοπό έταξε «να συμβάλει εις την εκπαίδευσιν νέων ελληνικής υπηκοότητος εν τῷ ἐπιστημονικῷ καὶ τεχνικῷ πεδίῳ». Ο ιδρυτής και χορηγός του Ιδρύματος Ευγενίδου ορθά προέβλεψε ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο της Ελλάδος αποτελεί η άρτια κατάρτιση των Ελλήνων τεχνικών κατά τα πρότυπα της επαγγελματικής εκπαίδευσης άλλων ευρωπαϊκών χωρών.

Την 23η Φεβρουαρίου του 1956 εγκρίθηκε η σύσταση του κοινωφελούς Ιδρύματος Ευγενίδου, την διοίκηση και διαχείριση του οποίου κατά την ρητή επιθυμία του ιδρυτή του ανέλαβε η αδελφή του Μαριάνθη Σίμου (1895-1981). Τότε ξεκίνησε η υλοποίηση του σκοπού του Ιδρύματος και η εκπλήρωση μίας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου από την Μαριάνθη Σίμου και τους επιστημονικούς συνεργάτες της.

Το έργο της Μαριάνθης Σίμου συνέχισε από το 1981 ο πολύτιμος συνεργάτης και διάδοχος του Ευγενίου Ευγενίδη, Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης (1920-2000). Από το 2000 το έργο του Ιδρύματος Ευγενίδου συνεχίζει ο Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης, ο οποίος υλοποιεί τον σκοπό του Ιδρύματος προσαρμοζοντας το όραμα του ιδρυτή του στις σύγχρονες εξελίξεις.

Μία από τις πρώτες δραστηριότητες του Ιδρύματος Ευγενίδου, ευθύς μετά την ίδρυσή του, υπήρξε η συγγραφή και έκδοση εκπαιδευτικών βιβλίων για τους μαθητές των τεχνικών σχολών, καθώς διαπιστώθηκε ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός τους με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθιγαν τα ορθά θεμέλια για την παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό. Καρπός αυτής της δραστηριότητας είναι η Βιβλιοθήκη του Τεχνίτη, η οποία αριθμεί 32 τίτλους, η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού, που περιλαμβάνει 50 τίτλους, η Τεχνική Βιβλιοθήκη με 11 τίτλους και η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού Βοηθού Χημικού με 3 τίτλους. Επιπλέον, από το 1977 μέχρι σήμερα έχουν εκδοθεί 171 τίτλοι για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων και 16 για τους μαθητές των Σχολών Μέσης Τεχνικής και Επαγγελματικής εκπαίδευσης.

Ξεχωριστή σειρά βιβλίων του Ιδρύματος Ευγενίδου αποτελεί η Βιβλιοθήκη του Ναυτικού (1967 έως σήμερα), η οποία είναι το αποτέλεσμα της συνεργασίας του Ιδρύματος Ευγενίδου με την Διεύθυνση Εκπαίδευσης Ναυτικών του Υπουργείου Ναυτιλίας. Η συγγραφή και έκδοση των εκπαιδευτικών βιβλίων για τους σπουδαστές των ναυτικών σχολών ανατέθηκε στο Ίδρυμα Ευγενίδου με την υπ' αριθμ. 61288/5031/9.8.1966 απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και λειτούργησε η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων, η οποία είχε συσταθεί ήδη από το 1958. Η συνεργασία Ιδρύματος Ευγενίδου και Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας ανανεώθηκε και επικαιροποιήθηκε με Υπουργικές Αποφάσεις το 1999 και το 2005, με τις οποίες το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή των εκπαιδευτικών βοηθημάτων για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.). Η ανάθεση της αρμοδιότητας για την έκδοση των διδακτικών βιβλίων για τις Ακαδημίες επαναβεβαιώθηκε με νομοθετική ρύθμιση τον Μάρτιο του 2020 (Ν. 4676).

Στην Βιβλιοθήκη του Ναυτικού περιλαμβάνονται 137 διδακτικά βιβλία ναυτικής εκπαίδευσης, καθώς και σχετικές έρευνες και πρακτικά συνεδρίων. Όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Ναυτικού ανταποκρίνονται στις ανάγκες των σπουδαστών των ΑΕΝ και είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία. Επιπλέον οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων καταβάλλουν κάθε προσπάθεια ώστε τα διδακτικά βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια, να επικαιροποιούνται με βάση τα εκάστοτε αναλυτικά προγράμματα σπουδών των Α.Ε.Ν. και να παραμένουν συμβατά με τις μεταβαλλόμενες διεθνείς απαιτήσεις.

Η διαχρονική συμβολή του Ιδρύματος Ευγενίδου στη Ναυτική Εκπαίδευση επιτυγχάνεται όχι μόνο με την έκδοση των σχετικών εκπαιδευτικών βιβλίων αλλά και με δωρεές στις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυ-

τικού, υποτροφίες σε αξιωματικούς του Λιμενικού Σώματος, εκπόνηση μελετών/ερευνών και διεξαγωγή συνεδρίων για την ναυτική εκπαίδευση και την ναυτιλία γενικότερα, καθώς και παροχή πρόσβασης σε κορυφαίες ναυτιλιακές βάσεις δεδομένων μέσω της Βιβλιοθήκης του.

Με την προσφορά των εκδόσεών του στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, αλλά και με την πλειάδα εκδόσεων για Τεχνικούς, το Ίδρυμα Ευγενίδου συνεχίζει να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση της Ελλάδος, υλοποιώντας επί 60 και πλέον χρόνια το όραμα του ιδρυτή του, αείμνηστου ενεργέτη Ευγένιου Ευγενίδη.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ιωάννης Γκόλιας, Καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.

Αχιλλέας Ματσάγγος, Αντιναύαρχος Λ.Σ. (ε.α.).

Γεώργιος Γεωργούλης, Πλοίαρχος Α' Ε.Ν., Ε.Δι.Π. Παν/μίου Αιγαίου.

Αντώνιος Βουτσινάς, Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Υπ. Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής.

Κωνσταντίνος Σουφλέρης, Τμηματάρχης ΔΕΚΝ Α'.

Γραμματέας της Επιτροπής, **Ελευθερία Τελειώνη**.

Ειδικός Επιστημονικός Σύμβουλος για το βιβλίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» Γεώργιος Παντελίδης, ομ. καθηγητής ΕΜΠ.

Διατελέσαντα μέλη της Επιτροπής

Πρόεδροι

Α. Παππάς (1955-1983) καθηγητής ΕΜΠ, Μ. Αγγελόπουλος (1983-2003) ομ. καθηγητής ΕΜΠ, Α. Σιαυρόπουλος ομ. καθηγητής Πανεπ. Πειραιώς (2003-2008), Ε. Δρns, Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ (2008-2020)

Λοιπά μέλη

Γ. Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, Α. Καλογεράς (1957-1970) Καθηγητής ΕΜΠ, Χ. Καβουνίδης (1955-1984) Μnx. Ηλ. ΕΜΠ, Μ. Αγγελόπουλος (1970-1983), Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, Σπ. Γουλιέλμος (1958) Αντιπλοίαρχος, Ξ. Αντωνιάδης (1959-1966) Αντιπλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Γ. Τσακίρης (1967-1969) Πλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ελλ. Σίδερης (1967-1969) Υποναύαρχος, Π. Φουσιέρης (1969-1971) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Αλ. Μοσχονάς (1971-1972) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Χρυσανθακόπουλος (1972-1974) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Αθαν. Σωτηρόπουλος (1974-1977) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Γ. Σπαρτιώτης (1977) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., προσωρινός Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Θ. Πουλάκης (1977-1979) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Λυκούδης (1979-1981) Πλοίαρχος Λ. Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Αναστ. Δημαράκης (1981-1982) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Τσαντίλας (1982-1984) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ε. Τζαβέλας (1984-1986) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Γ. Γρηγοράκος (1986-1988) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Α. Μπαρκατσάς (1988-1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Παπαναστασίου (1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Γ. Λάμπρου (1989-1992) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Κοκορέτσις (1992-1993) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Μαρκάκης (1993-1994) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Ζουμπούλης (1994-1995) Πλοίαρχος Λ.Σ., Φ. Ψαρράς (1995-1996) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Γ. Καλαρώνης (1996-1998) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Θ. Ρενιζεπέρης (1998-2000) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Σεφανάκης (2000-2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Μαρίνος (2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Εξαρχόπουλος (2001-2003) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Κ. Μπριλάκης (2003-2004) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ν. Θεμέλαρος (2003-2004) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Κουβέλης (2004-2005) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Δ. Βασιλάκης (2005-2008) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Π. Πειρόπουλος (2008-2009) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Α. Ματσάγγος (2009-2011) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Σέρρης (2011-2012) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Ι. Τζαβάρας, (2004-2013) Αντιναύαρχος Λ.Σ. (Ε.Α.), Ι. Τεγόπουλος (1988-2013) Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, Α. Θεοφανόπουλος (2012-2014) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Β. Καλλιπολίτου (2014-2017) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντρια Ναυτ. Εκπαιδ., Σ. Μπέλλας (2017-2018) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., Α. Τοελίκης (2018-2019) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί διδακτικό εγχειρίδιο για τους σπουδαστές των Ακαδημιών του Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν.). Σκοπός του είναι να προσφέρει μια άρτια και παιδαγωγικά αποτελεσματική εισαγωγή στις βασικές μαθηματικές έννοιες στις οποίες θα στηριχθούν πολλές από τις επόμενες γνώσεις και εμπειρίες, που θα αποκτήσουν στη διάρκεια της σταδιοδρομίας τους, ως φοιτητές των Α.Ε.Ν. και αξιωματικοί του Εμπορικού Ναυτικού.

Για την κατανόηση της ύλης που καλύπτεται, θεωρείται αρκετό το μαθηματικό υπόβαθρο που αποκτά κάποιος με την ολοκλήρωση των λυκειακών του σπουδών. Ιδιαίτερη προσπάθεια έχει καταβληθεί, ώστε να δοθούν τα αποτελέσματα στην πιο απλή μορφή τους, να γίνουν εύκολα κατανοητά από τον αναγνώστη, χωρίς όμως να χάνουν τη μαθηματική τους ορθότητα και τη λογική τους συνέπεια. Επιπλέον, τα θέματα που αναπτύσσονται στο βιβλίο, υποστηρίζονται με επαρκή αριθμό εποπτικών σχημάτων, διαγραμματίων και πινάκων, ώστε να είναι ευκολότερη η αφομοίωση και εμπέδωση της ύλης.

Σχετικά με τη διάρθρωση της ύλης αξίζει να αναφερθούν τα εξής: Κάθε κεφάλαιο χωρίστηκε σε μικρότερες παραγράφους, στις οποίες γίνεται εισαγωγή νέων εννοιών ή αποτελεσμάτων. Για τη διευκόλυνση των σπουδαστών στη μελέτη του εγχειριδίου, τα μαθηματικά στοιχεία ιδιαίτερης σπουδαιότητας (ορισμοί, προτάσεις, θεωρήματα και κατάλογοι ιδιοτήτων) έχουν σημειωθεί με **γαλάζια σκίαση**, ώστε να μπορούν να εντοπισθούν εύκολα και να προσελκύσουν την προσοχή του σπουδαστή. Σε κάθε παράγραφο, δίνεται σειρά προσεκτικά επιλεγμένων παραδειγμάτων, που σημειώνονται με **ροζ σκίαση**, παρέχοντας έτσι τη δυνατότητα να γνωρίσει ο σπουδαστής τον τρόπο χρήσης της θεωρίας στην αντιμετώπιση προβλημάτων και να μπορέσει στη συνέχεια να προχωρήσει στη λύση των ανάλογων ασκήσεων που προτείνονται σε κάθε παράγραφο. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου κρίθηκε σκόπιμο να δοθούν οι βασικές έννοιες και τύποι του κεφαλαίου (συνοπικά στοιχεία θεωρίας), ερωτήσεις κατανόησης (σωστού/λάθους και πολλαπλής επιλογής), αλλά και μια συλλογή από γενικές ασκήσεις.

Η διάρθρωση της ύλης έγινε με βάση το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας των Α.Ε.Ν., το οποίο εκτός από την ειδική ύλη που προβλέπει για τους Πλοιάρχους και για τους Μηχανικούς, περιέχει κοινά κεφάλαια και για τις δύο ειδικότητες. Μετά από συζήτηση μεταξύ των μελών της Επιτροπής Εκδόσεων και των συγγραφέων, ελήφθη η απόφαση η ανωτέρω ύλη, κατάλληλως κατανεμημένη, να περιληφθεί σε έναν τόμο για λόγους διδακτικούς, αλλά και πρακτικούς.

Έτσι, η ύλη κατενεμήθη σε τέσσερα μέρη:

- Α' Μέρος: Ύλη Πλοιάρχων και Μηχανικών,
- Β' Μέρος: Ύλη Μηχανικών,
- Γ' Μέρος: Ύλη Πλοιάρχων,
- Δ' Μέρος: Στιασιτική για Πλοιάρχους και Μηχανικούς.

Η συγγραφή των Μερών Α', Β' και Δ' πραγματοποιήθηκε από τον κ. Μ. Β. Κούτρα, Μαθηματικό/Στιασιτικό – Καθηγητή Πανεπιστημίου Πειραιώς και του Μέρους Γ' από τον κ. Κ. Ν. Λάπα, Μαθηματικό/Καθηγητή Δ.Ε και τον κ. Σ. Γ. Μπερσίμη, Στιασιτικό – Λέκτορα Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Ευχαριστίες οφείλονται στον ομότιμο καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Γεώργιο Παντελίδη, ο οποίος, ως κριτής και ειδικός επιστημονικός σύμβουλος της Επιτροπής Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου αφιέρωσε πολύ χρόνο στη μελέτη των αρχικών κειμένων και, με τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις του, συνέβαλε σημαντικά στη βελτίωση του παρόντος εγχειριδίου.

Επίσης ευχαριστούμε τον συνάδελφο κ. Βασίλη Σεβρόγλου, ο οποίος βοήθησε ουσιαστικά στη διαμόρφωση των κεφαλαίων 7 και 8 και είχε την υπομονή να διορθώσει προσεκτικά τα τυπογραφικά δοκίμια του εγχειριδίου κατά τις διάφορες φάσεις που προηγήθηκαν της εκτύπωσης του βιβλίου.

Οι συγγραφείς θεωρούν τιμή τους την ανάθεση της συγγραφής του παρόντος εγχειριδίου από το

Υπουργείο Ναυτιλίας και Αιγαίου και το Ίδρυμα Ευγενίδου και επιθυμούν να ευχαριστήσουν όλους τους συνεργάτες του Τμήματος Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου που με την άρτια, άριστη και κοπιαστική συνεργασία συνέβαλαν στην άρτια έκδοση του βιβλίου.

Θεωρώντας ότι ο καλύτερος τρόπος για τη βελτίωση κάθε ανθρώπινου (άρα και μη τέλειου) έργου είναι η δημιουργική και καλόπιστη κριτική, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε εκ των προτέρων τους αναγνώστες που θα μας απευθύνουν παρατηρήσεις, υποδείξεις ή σχόλια, τα οποία θα βοηθήσουν στη βελτίωσή του σε επόμενη έκδοση.

Αθήνα, Ιούλιος 2012

Μ. Β. Κούτρας,

Κ. Ν. Λάπας,

Σ. Γ. Μπερσίμης



ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

(ύλη πλοιάρχων και μηχανικών)

Κεφάλαιο 1: Πίνακες

Κεφάλαιο 2: Ορίζουσες – Γραμμικά συστήματα

Κεφάλαιο 3: Συναρτήσεις

Κεφάλαιο 4: Παράγωγοι

ΠΙΝΑΚΕΣ

Οι πίνακες είναι ένα από τα χρησιμότερα «εργαλεία» των μαθηματικών, αφού μας δίνουν τη δυνατότητα να παρουσιάσουμε με συνοπτικό τρόπο ένα σύνολο στοιχείων έτσι, ώστε να μπορούμε να λαμβάνουμε από αυτόν εύκολα και γρήγορα τις πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν. Παράλληλα, με τον ορισμό καταλλήλων πράξεων μεταξύ πινάκων, μπορούμε να παίρνουμε ως αποτέλεσμα νέους πίνακες, που μας δίνουν πρόσθετες πληροφορίες για το πρόβλημα που μελετάμε.

- 1.1 Η έννοια του πίνακα. Ισότητα πινάκων.
Ειδικές μορφές πινάκων.
- 1.2 Πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμός
πίνακα με αριθμό.
- 1.3 Γινόμενο πινάκων.
- 1.4 Αντιστρέψιμοι πίνακες.
- 1.5 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 1.6 Ερωτήσεις κατανόησης.
- 1.7 Γενικές ασκήσεις.

1.1 Η έννοια του πίνακα. Ισότητα πινάκων. Ειδικές μορφές πινάκων.

Στο Υπουργείο Ναυτιλίας έχουν συγκεντρωθεί, μεταξύ άλλων, στατιστικά στοιχεία που αφορούν στον αριθμό επιβατών που μετακινήθηκαν προς τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ, μέσω τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά το μήνα Ιούνιο ενός συγκεκριμένου έτους. Σύμφωνα με τα στοιχεία αυτά, ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν κατά το μήνα Ιούνιο ήταν:

- 1^η Εταιρεία:** 8000 επιβάτες προς το νησί α, 5000 επιβάτες προς το νησί β και 6000 επιβάτες προς το νησί γ.
2^η Εταιρεία: 6000 επιβάτες προς το νησί α, 4000 επιβάτες προς το νησί β και 2000 επιβάτες προς το νησί γ.
3^η Εταιρεία: 3000 επιβάτες προς το νησί α, 2000 επιβάτες προς το νησί β και 3000 επιβάτες προς το νησί γ.
4^η Εταιρεία: 2000 επιβάτες προς το νησί α, 1000 επιβάτες προς το νησί β και 1000 επιβάτες προς το νησί γ.

Προκειμένου να παρουσιάσουμε συνοπτικά τα παραπάνω δεδομένα, αλλά και να έχουμε τη δυνατότητα συγκρίσεως με αντίστοιχα δεδομένα που αφορούν σε άλλους μήνες, θα μπορούσαμε να τα οργανώσουμε όπως παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Εταιρεία	Επιβάτες		
	Νησί α	Νησί β	Νησί γ
1	8000	5000	6000
2	6000	4000	2000
3	3000	2000	3000
4	2000	1000	1000

ή ακόμη καλύτερα, καταγράφοντας την επιβατική κίνηση σε χιλιάδες επιβάτες:

Εταιρεία	Επιβάτες		
	Νησί α	Νησί β	Νησί γ
1	8	5	6
2	6	4	2
3	3	2	3
4	2	1	1

Από τον πίνακα αυτό καταλαβαίνουμε αμέσως ότι μέσω της 1^{ης} Εταιρείας μετακινήθηκαν κατά το μήνα Ιούνιο $8 \times 1000 = 8000$ επιβάτες προς το νησί α, $5 \times 1000 = 5000$ επιβάτες προς το νησί β και $6 \times 1000 = 6000$ επιβάτες προς το νησί γ, μέσω της 4^{ης} Εταιρείας μετακινήθηκαν κατά το μήνα Ιούνιο $1 \times 1000 = 1000$ επιβάτες, τόσο προς το νησί β όσο και προς το νησί γ κ.λπ.. Επί πλέον εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η 4^η εταιρεία διακίνησε σε κάθε νησί τους λιγότερους επιβάτες (σε σχέση με τις υπόλοιπες τρεις εταιρείες), ενώ η 1^η εταιρεία τους περισσότερους κ.λπ..

Αν διατηρήσουμε τα αριθμητικά μόνο δεδομένα της προηγούμενης διατάξεως και τα τοποθετήσουμε μέσα σε αγκύλες, δηλαδή γράψουμε

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

θα λέμε ότι σχηματίζεται ένας **πίνακας** 4×3 ή ένας **πίνακας τύπου** 4×3 . Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Μια ορθογώνια τοποθέτηση $\mu \times \nu$ πλήθους αριθμών, σε μ γραμμές και ν στήλες, ονομάζεται **πίνακας $\mu \times \nu$** ή **πίνακας τύπου $\mu \times \nu$** .

Το πλήθος μ των γραμμών και ν των στηλών ονομάζονται **διαστάσεις** του πίνακα, ενώ οι αριθμοί που εμπεριέχονται σ' αυτόν καλούνται **στοιχεία** του πίνακα. Συνήθως οι πίνακες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ κ.λπ., ενώ τα στοιχεία τους με πεζά. Το στοιχείο ενός πίνακα A τύπου $\mu \times \nu$, που βρίσκεται στην i -**γραμμή** και στην j -**στήλη**, συμβολίζεται με a_{ij} και ο πίνακας A θα γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu j} & \dots & a_{\mu \nu} \end{bmatrix}$$

j στήλη
↓
 i γραμμή

Το σύνολο όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ θα συμβολίζεται με $\Pi_{\mu \times \nu}$. Αν $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ θα γράφομε

$$A = [a_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, \mu \quad \text{και} \quad j = 1, 2, \dots, \nu$$

ή πιο απλά $A = [a_{ij}]_{\mu \times \nu}$ ή, αν είναι προφανές ποιες είναι οι διαστάσεις του πίνακα, $A = [a_{ij}]$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας που περιγράφει τη διακίνηση επιβατών από τις τέσσερις εταιρείες προς τα τρία νησιά έχει διαστάσεις $\mu = 4$ και $\nu = 3$ και αν χρησιμοποιήσουμε γι' αυτόν το γράμμα A , μπορούμε να γράψουμε $A \in \Pi_{4 \times 3}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο a_{22} του πίνακα αυτού είναι ίσο με 4, το a_{41} είναι ίσο με 2 κ.λπ..

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός επιβατών που διακινήθηκαν από τις τέσσερις εταιρείες προς καθένα από τα τρία νησιά κατά τον μήνα Ιούλιο παρέμεινε αμετάβλητος. Είναι τότε φανερό ότι ο αντίστοιχος πίνακας, έστω B , για το μήνα Ιούλιο έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του A . Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο πίνακας B είναι **ίσος** με τον A . Γενικά, η ισότητα δύο πινάκων ορίζεται ως εξής:

Δύο πίνακες A, B , λέμε ότι είναι **ίσοι** δηλαδή $A = B$, όταν είναι του ίδιου τύπου (έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Από τον ορισμό της ισότητας πινάκων που δόθηκε παραπάνω προκύπτει ότι δύο πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορεί να είναι ίσοι.

Έτσι, οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 1/w \\ y^3 & z \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

θα είναι ίσοι αν και μόνο αν $x^2 = 9$, $1/w = -5$, $y^3 = 8$, $z = 6$ δηλαδή όταν $x = \pm 3$, $w = -1/5$, $y = 2$ και $z = 6$.

Αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένα είδη πινάκων, που έχουν ιδιαίτερη σημασία, εφόσον εμφανίζονται αρκετά συχνά στις εφαρμογές που κάνουν χρήση της έννοιας του πίνακα:

α) Μηδενικός πίνακας τύπου $\mu \times \nu$ ονομάζεται ένας πίνακας $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν. Για έναν τέτοιο πίνακα θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathbf{O}_{\mu \times \nu}$ ή απλώς $\mathbf{O}$, όταν

δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως. Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενικοί πίνακες τύπου 2×2 και 3×2 αντίστοιχα.

β) Αντίθετος πίνακας ενός πίνακα $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ ονομάζεται ο πίνακας ίδιου τύπου, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των αντιστοίχων στοιχείων του A . Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $-A$. Για παράδειγμα, ο αντίθετος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ είναι ο $B = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ και αντίστροφα, ο αντίθετος του πίνακα B είναι ο A . Συνήθως θα λέμε απλά ότι οι πίνακες A και B είναι αντίθετοι.

γ) Πίνακας γραμμή ονομάζεται ένας πίνακας τύπου $1 \times \nu$, όπως ο $[4 \ 2 \ 5 \ 4 \ 1]$.

δ) Πίνακας στήλη ονομάζεται ένας πίνακας τύπου $\mu \times 1$, όπως ο $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

ε) Πίνακας στοιχείο ονομάζεται ένας πίνακας τύπου 1×1 , π.χ. ο πίνακας $[10]$.

στ) Τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν ονομάζεται ένας πίνακας με ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ν (δηλ. τύπου $\nu \times \nu$). Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξεως ν θα συμβολίζεται με Π_ν . Για παρά-

δειγμα, οι πίνακες, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ είναι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως 2 και 3 αντί-

στοιχα, δηλαδή $A \in \Pi_2$ και $B \in \Pi_3$.

Σ' έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως ν ,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{\nu\nu}$ λέμε ότι σχηματίζουν την **κύρια διαγώνιο** του και αναφέρονται συνήθως με την ονομασία **διαγώνια στοιχεία**.

ζ) Διαγώνιος πίνακας ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας A , του οποίου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλαδή έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα οι πίνακες $\begin{bmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιοι πίνακες τάξεως 2, 3 και 4 αντίστοιχα.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση διαγώνιου πίνακα είναι ο πίνακας για τον οποίο ισχύει $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, δηλαδή ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας ονομάζεται **μοναδιαίος πίνακας** ή **ταυτοτικός πίνακας** τάξεως n και συμβολίζεται με I_n . Στην περίπτωση που η τάξη του πίνακα είναι προφανής και δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως θα γράφουμε απλώς I (αντί για I_n).

η) Τριγωνικός πίνακας ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά (**άνω τριγωνικός**) ή όλα τα στοιχεία που βρίσκονται επάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά (**κάτω τριγωνικός**). Π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2 & 0 \\ 5 & y & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ -7 & 1 & x^3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Πίνακες τριγωνικοί άνω.

Πίνακες τριγωνικοί κάτω.

θ) Ανάστροφος ενός πίνακα A ονομάζεται ο πίνακας, ο οποίος έχει ως γραμμές τις στήλες του A και ως στήλες τις γραμμές του A . Ο ανάστροφος του πίνακα A θα συμβολίζεται με A^T . Έτσι, αν A είναι ο $\mu \times \nu$ πίνακας τότε ο ανάστροφος του A^T θα είναι ο πίνακας τύπου $\nu \times \mu$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu j} & \dots & a_{\mu \nu} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{\mu 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{\mu 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{\mu j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & \dots & a_{i\nu} & \dots & a_{\mu \nu} \end{bmatrix}$$

Πίνακας A .

Ανάστροφος του πίνακα A .

Συνήθως θα γράφουμε σε συντομία $A^T = [a_{ji}]_{\nu \times \mu}$.

Για παράδειγμα, ανάστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι ισχύει πάντοτε η ισότητα $(A^T)^T = A$.

ι) **Συμμετρικός πίνακας** τάξεως ν ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]_{\nu \times \nu}$ για τον οποίο ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, \nu$ και $j = 1, 2, \dots, \nu$. Έτσι, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & x^2 & 5 \\ x^2 & 2 & y \\ 5 & y & 3 \end{bmatrix}$$

είναι ένα συμμετρικός πίνακας τάξεως 3. Από τον ορισμό που δόθηκε προηγουμένως για τον ανάστροφο πίνακα είναι φανερό ότι ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ισούται με τον ανάστροφό του, δηλαδή αν ισχύει $A^T = A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1.

Ένα πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς-Σύρου-Τήνος-Μύκονος. Οι αποστάσεις (σε ν.μ.) μεταξύ Πειραιά-Σύρου, Σύρου-Τήνου, και Τήνου-Μυκόνου είναι 80, 20 και 10 ν.μ. αντίστοιχα. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα, ο οποίος να δίνει όλες τις δυνατές αποστάσεις μεταξύ των τεσσάρων λιμένων ανά δύο. Να σχολιάσετε τη μορφή του πίνακα σε σχέση με τα είδη πινάκων που αναφέρθηκαν στη θεωρία.

Λύση.

Αν γράψουμε τους τέσσερεις λιμένες στις γραμμές και στις στήλες ενός πίνακα και συμπληρώσουμε τις αποστάσεις που δόθηκαν, θα έχουμε:

ΠΡΟΣ \ ΑΠΟ	Πειραιά	Σύρο	Τήνο	Μύκονο
Πειραιά	0	80	...	...
Σύρο	80	0	20	...
Τήνο	...	20	0	10
Μύκονο	...	...	10	0

Συμπληρώνοντας τώρα και τις μιλιομετρικές αποστάσεις που λείπουν (με πρόσθεση των αντίστοιχων αποστάσεων) οδηγούμαστε στον επόμενο πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 80 & 100 & 110 \\ 80 & 0 & 20 & 30 \\ 100 & 20 & 0 & 10 \\ 110 & 30 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που προέκυψε είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 4, στον οποίο η κύρια διαγώνιος έχει όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα $i = 1, 2, 3, 4$ και $j = 1, 2, 3, 4$ ή ισοδύναμα $A^T = A$ οπότε ο πίνακας είναι συμμετρικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.2.

Δίνεται ο πίνακας $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$, όπου $a_{ij} = |i-j|$, για $i = 1, 2$, και $j = 1, 2, 3$

α) Να γράψετε αναλυτικά τον πίνακα A .

β) Να γράψετε αναλυτικά τον ανάστροφο πίνακα A^T . Είναι ο πίνακας A συμμετρικός;

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & 1 & x^2-2 \\ x-1 & 0 & x^3-7 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

α) Ο ζητούμενος πίνακας A έχει στοιχεία

$$a_{11} = |1-1| = 0, \quad a_{12} = |1-2| = 1, \quad a_{13} = |1-3| = 2,$$

$$a_{21} = |2-1| = 1, \quad a_{22} = |2-2| = 0, \quad a_{23} = |2-3| = 1$$

οπότε

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

β) Ο ανάστροφος του πίνακα A είναι ο

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δεν έχει νόημα να εξετασθεί κατά πόσον ο πίνακας είναι συμμετρικός, αφού ο A δεν είναι τετραγωνικός.

γ) Η ισότητα

$$\begin{bmatrix} x-2 & 1 & x^2-2 \\ x-1 & 0 & x^3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ισχύει αν και μόνο

$$x-2=0, \quad x^2-2=2, \quad x-1=1, \quad x^3-7=1.$$

Είναι προφανές ότι για την τιμή $x = 2$ ισχύουν όλες οι προηγούμενες ισότητες.

Ασκήσεις.

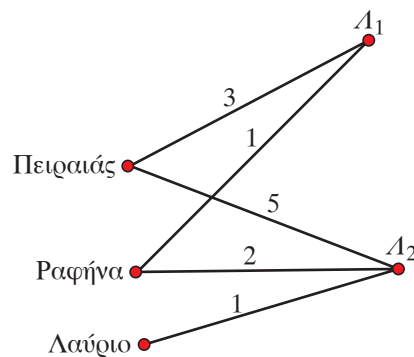
1.1.1. Να αναφέρετε σε ποια ή ποιες από τις κατηγορίες (είδη) πινάκων (α)–(ι) εμπίπτει καθένας από τους επόμενους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3^x & 5^y \\ 3^x & 2 & z^2 \\ 5^y & z^2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y & x^2+1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [10]$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

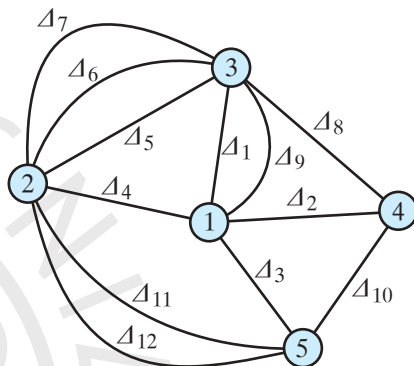
1.1.2. Δίνεται ο 4×4 πίνακας $A = [a_{ij}]$, όπου $a_{ij} = |2i - 3j|$ για $i = 1, 2, 3, 4$ και $j = 1, 2, 3, 4$. Να γράψετε αναλυτικά τον πίνακα αυτόν, αφού βρείτε τα στοιχεία του.

1.1.3. Το δίκτυο του σχήματος 1.1α παρουσιάζει τις συνδέσεις μεταξύ των τριών λιμένων της Αττικής και δύο άλλων λιμένων A_1, A_2 , ενός Ελληνικού νησιού. Ο αριθμός πάνω από κάθε γραμμή είναι ο αριθμός των διαφορετικών ημερησίων δρομολογίων που συνδέουν από το κάθε λιμένα της Αττικής προς τους λιμένες του νησιού π.χ. από το λιμένα του Πειραιά προς το λιμένα A_1 εκτελούνται κάθε ημέρα 3 δρομολόγια. Να παραθέσετε σε μορφή πίνακα τις πληροφορίες που αφορούν στον αριθμό των διαθέσιμων διαφορετικών ημερησίων δρομολογίων του δικτύου που περιγράφει το σχήμα 1.1α.



Σχ. 1.1α.

1.1.4. Πέντε πόλεις 1, 2, 3, 4, 5 επικοινωνούν μεταξύ τους με 12 δρόμους $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{12}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1β. Να κατασκευάσετε πίνακα $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ τέτοιο ώστε, κάθε στοιχείο του a_{ij} να δίνει το πλήθος των απευθείας συνδέσεων μεταξύ των πόλεων i και j (π.χ. το στοιχείο a_{13} είναι το 2, γιατί υπάρχουν δύο απευθείας συνδέσεις μεταξύ των πόλεων 1 και 3).



Σχ. 1.1β.

1.1.5. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των x, y , για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x-1 & 8x-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(4x+1) & (3y-1)(7x-3) \\ 0 & 4x^2 \end{bmatrix}.$$

1.1.6. Να βρείτε την τιμή του αριθμού x ώστε ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & x^2-4 \\ x^2-5x+6 & 2 \end{bmatrix}$ να είναι διαγώνιος.

1.1.7. Να βρείτε τις τιμές των x, y , για τις οποίες ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x^2-1 & x-1 \\ 1-x^2 & x & 0 \\ 0 & y^2 & (x+1)^2-3 \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ίσος με το μοναδιαίο πίνακα τάξεως $n=3$.

1.1.8. Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας τάξεως 3

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a & x & y \\ x' & \beta & z \\ y' & z' & \gamma \end{bmatrix}.$$

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα $B = [\beta_{ij}]$ με

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad i=1, 2, 3 \text{ και } j=1, 2, 3,$$

και να διαπιστώσετε ότι ο B είναι πάντοτε ένας συμμετρικός πίνακας. Τι θα συνέβαινε αν ο αρχικός πίνακας A ήταν συμμετρικός;

1.2 Πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό.

Συνεχίζοντας το παράδειγμα που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά τους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο ενός συγκεκριμένου έτους δίνεται από τους επόμενους πίνακες A, B αντίστοιχα:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 9 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι ο συνολικός αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, κατά τους δύο μήνες που εξετάζουμε (Ιούνιο και Ιούλιο) θα δίνεται από έναν τρίτο πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο θα είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων των δύο αυτών πινάκων, δηλαδή από τον

$$\begin{bmatrix} 8+10 & 5+5 & 6+5 \\ 6+9 & 4+2 & 2+3 \\ 3+7 & 2+8 & 3+1 \\ 2+1 & 1+5 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 10 & 11 \\ 15 & 6 & 5 \\ 10 & 10 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται **άθροισμα** των πινάκων A και B . Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Άθροισμα δύο πινάκων, $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ τύπου $\mu \times \nu$, ονομάζεται ο πίνακας $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων των πινάκων A και B . Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A + B$, δηλαδή $A + B = [a_{ij} + \beta_{ij}]_{\mu \times \nu}$.

Η πράξη, με την οποία υπολογίζουμε το άθροισμα δύο πινάκων ονομάζεται **πρόσθεση πινάκων**.

Η διαφορά του αριθμού επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών, ανάμεσα στους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο θα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο αποτελεί διαφορά των αντιστοίχων στοιχείων των πινάκων A και B .

$$\begin{bmatrix} 8-10 & 5-5 & 6-5 \\ 6-9 & 4-2 & 2-3 \\ 3-7 & 2-8 & 3-1 \\ 2-1 & 1-5 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται **διαφορά** των δύο πινάκων A και B (το αρνητικό αποτέλεσμα στον τελευταίο πίνακα σημαίνει μείωση του αριθμού επιβατών κατά το μήνα Ιούλιο). Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Αν $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ είναι δύο πίνακες τύπου $\mu \times \nu$, τότε ονομάζουμε **διαφορά** του πίνακα B από τον πίνακα A τον πίνακα $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο αποτελεί διαφορά των αντιστοιχών στοιχείων των πινάκων A και B . Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A - B$, δηλαδή $A - B = [a_{ij} - \beta_{ij}]_{\mu \times \nu}$.

Ο υπολογισμός της διαφοράς μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του αντίθετου πίνακα, αφού ισχύει ότι

$$A - B = A + (-B).$$

Από τον τρόπο ορισμού των δύο προηγούμενων πράξεων καταλαβαίνουμε ότι, για να ορίζεται το άθροισμα ή η διαφορά δύο πινάκων θα πρέπει οι πίνακες να είναι του **ίδιου τύπου**.

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix},$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A + \Gamma^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma - A^T = \Gamma + (-A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

ενώ οι πίνακες A , Γ καθώς και οι πίνακες B , Γ , που δεν είναι του ίδιου τύπου δεν μπορούν ούτε να προστεθούν ούτε να αφαιρεθούν.

Οι ιδιότητες της προσθέσεως των πινάκων είναι ανάλογες με τις ιδιότητες της προσθέσεως των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, αν A , B , Γ είναι τρεις πίνακες τύπου $\mu \times \nu$ και $\mathbf{O}$ ο αντίστοιχος μηδενικός (τύπου $\mu \times \nu$), τότε θα ισχύουν τα εξής:

$\Pi_1. A + B = B + A$	(αντιμεταθετική ιδιότητα)
$\Pi_2. A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$	(ουδέτερο στοιχείο της πράξεως)
$\Pi_3. A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$	(προσεταιριστική ιδιότητα)
$\Pi_4. A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{O}$	(αντίθετο στοιχείο της πράξεως)

Το άθροισμα $A + (B + \Gamma)$ ή λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, το άθροισμα $(A + B) + \Gamma$, θα συμβολίζεται με $A + B + \Gamma$. Ομοίως, αν A , B , Γ , Δ είναι τέσσερεις πίνακες ίδιου τύπου, το άθροισμα $(A + (B + \Gamma)) + \Delta$, το οποίο με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα είναι ίσο με καθένα από τα αθροίσματα

$$((A+B)+\Gamma)+\Delta, (A+B)+(\Gamma+\Delta), A+((B+\Gamma)+\Delta), A+(B+(\Gamma+\Delta)),$$

θα λέγεται άθροισμα των πινάκων A, B, Γ, Δ και θα συμβολίζεται ως $A+B+\Gamma+\Delta$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται το άθροισμα k πινάκων $(A_1, A_2, \dots, A_k, k \geq 3$ θετικός ακέραιος), το οποίο συμβολίζεται ως $A_1 + A_2 + \dots + A_k$.

Από τους ορισμούς της προσθέσεως και της αφαιρέσεως και τις ιδιότητές τους προκύπτει ότι

$$X+B=A \Leftrightarrow X=A-B.$$

Πράγματι αν ισχύει $X+B=A$, τότε θα έχουμε $X+B-B=A-B$, οπότε $X=A-B$. Όμοια αν $X=A-B$, τότε θα ισχύει $X+B=A-B+B$, οπότε $X+B=A$.

Τέλος, για τον ανάστροφο του αθροίσματος και της διαφοράς δύο πινάκων $A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned} \Pi_5. (A+B)^T &= A^T + B^T && \text{(ανάστροφος του αθροίσματος πινάκων)} \\ \Pi_6. (A-B)^T &= A^T - B^T && \text{(ανάστροφος της διαφοράς πινάκων)} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.1.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει για τρεις ομάδες ποδοσφαίρου τις νίκες, τις ήττες και τις ισοπαλίες που πέτυχαν στη διάρκεια του πρωταθλήματος (15 αγώνες) εντός και εκτός έδρας.

Ομάδες	Νίκες		Ισοπαλίες		Ήττες	
	εντός	εκτός	εντός	εκτός	εντός	εκτός
1η	13	11	2	1	0	3
2η	10	9	2	2	3	4
3η	8	6	4	4	3	5

- Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή τριών πινάκων A, B, Γ , που να περιέχουν ο A τις νίκες, ο B τις ισοπαλίες και ο Γ τις ήττες κάθε ομάδας.
- Αν για κάθε νίκη η ομάδα παίρνει 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία 2 βαθμούς και για κάθε ήττα 1 βαθμό, να δημιουργήσετε τον πίνακα ο οποίος δίνει:
 - Τους βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα στο πρωτάθλημα εντός και εκτός έδρας.
 - Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εντός έδρας και
 - Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εκτός έδρας.
- Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή δύο πινάκων Δ, E που να περιέχουν ο Δ τις εντός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας και ο E τις εκτός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα που δίνει τις συνολικές (εντός και εκτός έδρας) νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας.

Λύση.

- Οι πίνακες A, B, Γ , που δίνουν αντίστοιχα τις νίκες, τις ισοπαλίες και τις ήττες κάθε ομάδας

είναι οι εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 10 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας X που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός και εκτός έδρας, θα έχει τη μορφή $X = 3A + 2B + \Gamma$, οπότε

$$X = 3 \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 10 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 33 \\ 30 & 27 \\ 24 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 38 \\ 37 & 35 \\ 35 & 31 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας X_1 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της πρώτης στήλης του X , ενώ ο πίνακας X_2 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εκτός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του X . Επομένως

$$X_1 = \begin{bmatrix} 43 \\ 37 \\ 35 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 38 \\ 35 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

γ) Έχουμε

$$\Delta = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 10 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας που δίνει τις συνολικές (εντός και εκτός έδρας) έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας θα είναι ο

$$\Delta + E = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 10 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13+11 & 2+1 & 0+3 \\ 10+9 & 2+2 & 3+4 \\ 8+6 & 4+4 & 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 3 & 3 \\ 19 & 4 & 7 \\ 14 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά το μήνα Αύγουστο ήταν διπλάσιος του αριθμού που μετακινήθηκαν το μήνα Ιούνιο. Για να βρούμε το πλήθος των επιβατών που μετακινήθηκαν κατά το μήνα Αύγουστο, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του πίνακα A που αφορά στο μήνα Ιούνιο με τον αριθμό 2. Έτσι, ο αριθμός επιβατών που μετακινήθηκαν προς τα τρία Ελληνικά νησιά μέσω των τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά το μήνα Αύγουστο θα δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 8 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 6 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 12 \\ 12 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται *γινόμενο* του αριθμού 2 με τον πίνακα A . Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ ονομάζεται ο $\mu \times \nu$ πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε με λ κάθε στοιχείο του πίνακα A . Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με λA , δηλαδή, αν $A = [a_{ij}]$ θα έχουμε $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\mu \times \nu}$.

Αν $A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$ και λ, λ' είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες, που προκύπτουν άμεσα από τον προηγούμενο ορισμό:

- $\Gamma_1. (\lambda + \lambda')A = \lambda A + \lambda' A$
- $\Gamma_2. \lambda(\lambda' A) = (\lambda \lambda') A$
- $\Gamma_3. \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\Gamma_4. 1A = A1 = A$
- $\Gamma_5. \lambda A = \mathbf{O}$ αν και μόνο αν $\lambda = 0$ ή $A = \mathbf{O}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.2.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα X , για τον οποίο ισχύει $5X - I_3 = 2X - 3A$.

(Μια ισότητα μεταξύ πινάκων που περιέχει έναν άγνωστο πίνακα, όπως η παραπάνω, ονομάζεται **εξίσωση με πίνακες**. Η διαδικασία που ακολουθείται με στόχο να βρεθεί ο πίνακας X ονομάζεται επίλυση της εξίσωσης).

Λύση.

Αφού οι πράξεις των πινάκων που γνωρίσαμε (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός με αριθμό) έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με τις πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση με τον ίδιο τρόπο που λύνουμε τις συνήθεις εξισώσεις με έναν άγνωστο. Έτσι παίρνουμε διαδοχικά

$$5X - I_3 = 2X - 3A \Leftrightarrow 5X - 2X = I_3 - 3A \Leftrightarrow 3X = I_3 - 3A \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}(I_3 - 3A)$$

και αντικαθιστώντας τον πίνακα A βρίσκουμε:

$$X = \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -9 & 12 \\ -6 & 6 & -15 \\ -12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1/3 & -9 & 12 \\ -6 & 19/3 & -15 \\ -12 & -3 & 10/3 \end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις.

1.2.1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Για καθένα από τα επόμενα ζεύγη πινάκων να υπολογίσετε το άθροισμα και τη διαφορά των πινάκων, εφόσον ορίζονται.

- α) A, B β) A, Γ γ) A, Δ δ) A, B^T ε) Γ, Δ^T στ) Γ^T, Δ .

1.2.2. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},$$

να βρείτε τους πίνακες $(-A) + (-B)$, $-(A + B)$, $A + (B + \Gamma)$, $(A + B) + \Gamma$, $A - (B - \Gamma)$ και τέλος $A - B + \Gamma$. Τι παρατηρείτε;

1.2.3. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τους πίνακες $-3B$, $\frac{1}{5}A$, $A + 2\Gamma$, $2B - \Gamma$, $\frac{1}{4}(2\Gamma - 3A)$.

1.2.4. Μία αλυσίδα ηλεκτρονικών ειδών έχει υποκαταστήματα σε Αθήνα, Πειραιά και Θεσσαλονίκη. Οι πωλήσεις, σε εκατοντάδες τεμάχια, της αλυσίδας σε τηλεοράσεις, DVD, φωτογραφικές μηχανές και κινητά τηλέφωνα από κάθε υποκατάστημα σε κάθε πόλη κατά τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο ήταν οι εξής:

	Σεπτέμβριος			Οκτώβριος		
	Αθήνα	Πειραιάς	Θεσσαλονίκη	Αθήνα	Πειραιάς	Θεσσαλονίκη
Τηλεοράσεις	20	30	33	25	18	75
DVD	55	40	39	15	23	29
Φωτ. μηχανές	29	15	48	15	50	18
Κινητά	90	80	65	30	66	85

- Να συντάξετε δύο πίνακες που να δίνουν, ο πρώτος τον αριθμό των πωλήσεων για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Σεπτέμβριο και ο δεύτερος τον αριθμό των πωλήσεων για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Οκτώβριο.
- Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει το συνολικό αριθμό των πωλήσεων του διμήνου Σεπτέμβριος-Οκτώβριος για κάθε είδος σε κάθε πόλη.
- Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τη διαφορά πωλήσεων μεταξύ Σεπτεμβρίου και Οκτωβρίου για κάθε είδος σε κάθε πόλη.
- Αν κατά το μήνα Οκτώβριο η αλυσίδα αποφασίζει να κάνει προσφορά μαζί με κάθε είδος που αγοράστηκε και ένα δεύτερο τεμάχιο (του ίδιου είδους) δωρεάν, να συντάξετε τον πίνακα που περιγράφει το συνολικό αριθμό τεμαχίων που διατέθηκαν στο δίμηνο Σεπτέμβριος-Οκτώβριος για κάθε είδος σε κάθε πόλη.

1.2.5. Κατά το μήνα Σεπτέμβριο, οι τιμές πωλήσεως (σε €) ενός συγκεκριμένου μοντέλου από κάθε προϊόν στα υποκαταστήματα της αλυσίδας ηλεκτρονικών ειδών της ασκήσεως 1.2.4, ήταν οι ακόλουθες:

	Αθήνα	Πειραιάς	Θεσσαλονίκη
Τηλεοράσεις	400	380	390
DVD	80	100	90
Φωτ. μηχανές	290	250	310
Κινητά	90	120	100

- α) Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τις τιμές πωλήσεως για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Σεπτέμβριο.
- β) Αν κατά το μήνα Οκτώβριο προσφερθούν όλα τα προϊόντα με έκπτωση 10%, να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τις τιμές πωλήσεως για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά το μήνα Οκτώβριο.

1.2.6. Μια βιομηχανία κατασκευάζει τρία προϊόντα π_1, π_2, π_3 , σε δύο εργοστάσια παραγωγής E_1 και E_2 . Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή σε ευρώ για τα υλικά που χρησιμοποιούνται και την αντίστοιχη εργασία δίνεται στους παρακάτω πίνακες

$$E_1 = \begin{matrix} & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \\ \begin{bmatrix} 30 & 40 & 50 \\ 20 & 10 & 30 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix} \end{matrix} \quad E_2 = \begin{matrix} & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \\ \begin{bmatrix} 36 & 48 & 60 \\ 30 & 10 & 32 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix} \end{matrix}.$$

- α) Να υπολογίσετε τον πίνακα $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ και να εξηγήσετε τι εκφράζει.
- β) Αν τόσο το κόστος παραγωγής όσο και το κόστος των υλικών αυξηθεί κατά 20%, να υπολογίσετε τους νέους πίνακες κόστους παραγωγής για τα δύο εργοστάσια. Επίσης να υπολογίσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους τον πίνακα που εκφράζει το νέο μέσο κόστος κατασκευής ανά συσκευή και είδος (υλικά και εργασία) για τη βιομηχανία.

1.2.7. Να συντάξετε τον πίνακα X , για τον οποίο ισχύει $5X - 2A = 6B + 3X$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.2.8. Να υπολογίσετε τους πίνακες X, Y για τους οποίους ισχύει

$$2X + 3Y = A - 4I_4 \quad \text{και} \quad 3X + 2Y = 3I_4 + A$$

όπου $A = [a_{ij}] \in P_4$ με $a_{ij} = |i - j|$, $i = 1, 2, 3, 4$ και $j = 1, 2, 3, 4$.

1.2.9. Αν $A = 2 \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = 8 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, να λύσετε την εξίσωση $6(X - \frac{1}{2}B) = 12\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{4}A\right) - 2B$.

1.3 Γινόμενο πινάκων.

Ας επανέλθουμε στο αρχικό παράδειγμα της παραγράφου 1.1. Σύμφωνα με αυτό, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δίνει τον αριθμό επιβατών (σε χιλιάδες) που μετακινήθηκαν προς τρία Ελληνικά νησιά α, β, γ , μέσω τεσσάρων ναυτιλιακών εταιρειών κατά το μήνα Ιούνιο ενός συγκεκριμένου έτους. Ας υποθέσουμε επί πλέον ότι ο ΕΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τουρισμού), για διαφημιστικούς λόγους έκανε διανομή ενός δώρου και ενός φυλλαδίου σε κάθε επιβάτη που ταξίδεψε στα τρία νησιά με τις τέσσερις εταιρείες το μήνα

Ιούνιο. Τα δώρα και τα φυλλάδια που διανεμήθηκαν είχαν διαφορετικά κόστη για κάθε νησί και πιο συγκεκριμένα:

α) Κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί α κόστισε 5 €, κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί β κόστισε 6 € και κάθε δώρο που δόθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί γ κόστισε 8 €.

β) Κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί α κόστισε 2 €, κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί β κόστισε 1 € και κάθε φυλλάδιο που διανεμήθηκε σε επιβάτη που ταξίδεψε προς το νησί γ κόστισε 3 €.

Μπορούμε επομένως να συντάξουμε τον επόμενο πίνακα, ο οποίος μας δίνει το κόστος του δώρου και του φυλλαδίου ανά νησί (στην πρώτη στήλη έχει καταχωρηθεί το κόστος των δώρων, ενώ στη δεύτερη το κόστος των φυλλαδίων)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των *δώρων* στα άτομα που ταξίδεψαν με την *1^η εταιρεία*, θα πρέπει να εκτελέσουμε τις πράξεις:

αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί α μέσω της 1 ^{ης} εται- ρείας	·	κόστος δώρου που δόθηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί α μέσω της 1 ^{ης} εταιρείας	+	αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί β μέσω της 1 ^{ης} εται- ρείας	·	κόστος δώρου που δό- θηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί β μέσω της 1 ^{ης} εταιρείας	+
+		αριθμός επιβατών που ταξίδεψαν προς το νησί γ μέσω της 1 ^{ης} εταιρείας	·	κόστος δώρου που δό- θηκε στους επιβάτες που ταξίδεψαν προς το νησί γ μέσω της 1 ^{ης} εταιρείας			

Έτσι τα έξοδα αυτής της κατηγορίας (σε χιλιάδες €) θα δίνονται από την έκφραση

$$8 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 118$$

η οποία προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα.

Αντίστοιχα, αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2ης στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα θα λάβουμε

$$8 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 39$$

το οποίο μας δίνει τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των *φυλλαδίων* στα άτομα που ταξίδεψαν με την *1^η εταιρεία*.

Παρόμοιες πράξεις οι οποίες χρησιμοποιούν τη δεύτερη την τρίτη ή την τέταρτη γραμμή του πίνακα A αντί της πρώτης θα μας δώσουν τα έξοδα του ΕΟΤ από τη διανομή των *δώρων* (όταν χρησιμοποιηθεί η πρώτη γραμμή του πίνακα B) και των *φυλλαδίων* (όταν χρησιμοποιηθεί η δεύτερη γραμμή του πίνακα B) στα άτομα που ταξίδεψαν με την *2^η*, *3^η* ή την *4^η εταιρεία* αντίστοιχα. Έτσι βρίσκουμε ότι τα έξοδα του ΕΟΤ ήταν, σε χιλιάδες ευρώ:

α) Για τους επιβάτες της 1^{ης} εταιρείας: **118** (για τα δώρα), **39** (για τα φυλλάδια).

β) Για τους επιβάτες της 2^{ης} εταιρείας: **70** (για τα δώρα), **39** (για τα φυλλάδια).

γ) Για τους επιβάτες της 3^{ης} εταιρείας: **51** (για τα δώρα), **17** (για τα φυλλάδια).

δ) Για τους επιβάτες της 4^{ης} εταιρείας: **24** (για τα δώρα), **8** (για τα φυλλάδια).
Όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

<i>Εταιρεία \ Κόστος</i>	<i>Δώρων</i>	<i>Φυλλαδίων</i>
1η	118	39
2η	70	22
3η	51	17
4η	24	8

και έτσι φτάνουμε στον επόμενο πίνακα, ο οποίος μας δίνει το διαφημιστικό κόστος για κάθε εταιρεία ανά δώρο και φυλλάδιο

$$G = \begin{bmatrix} 118 & 39 \\ 70 & 22 \\ 51 & 17 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας G ονομάζεται **γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B** και συμβολίζεται $A \cdot B$ ή απλώς AB . Είναι φανερό ότι το στοιχείο γ_{11} του πίνακα G προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα, το γ_{12} αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2ης στήλης του B και προσθέσουμε τα γινόμενα κ.ο.κ..

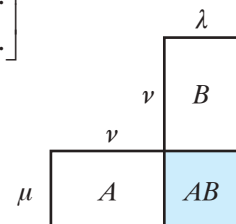
Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Αν $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu \times \nu}$ και $B = [\beta_{ij}] \in \Pi_{\nu \times \lambda}$, τότε ορίζουμε ως **γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B** , και το συμβολίζουμε με AB , τον πίνακα τύπου $\mu \times \lambda$ του οποίου το στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της i γραμμής του A με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της j στήλης του B . Επομένως, $\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + a_{i3}\beta_{3j} + \dots + a_{i\nu}\beta_{\nu j}$.

Η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} i \text{ γραμμή} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} j \text{ στήλη} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} \dots & \beta_{1j} & \dots \\ \dots & \beta_{2j} & \dots \\ \dots & \beta_{3j} & \dots \\ \dots & \beta_{\nu j} & \dots \end{bmatrix} \end{array}
 \end{array}
 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \gamma_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι για να μπορούν να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα $G = AB$ με τον τύπο που αναφέραμε προηγουμένως, θα πρέπει ο αριθμός των στηλών του πίνακα A να είναι ίδιος με τον αριθμό των γραμμών του B (σχ. 1.3).



Σχ. 1.3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως 2.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τα γινόμενα AE , EA και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τον πίνακα A .

Λύση.

Έχουμε

$$AE = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}, \quad EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι όταν ο πίνακας E πολλαπλασιάζει από τα δεξιά τον A , του αντιμεταθέτει τις στήλες, ενώ όταν πολλαπλασιάζει από τα αριστερά τον A , του αντιμεταθέτει τις γραμμές. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πίνακας E προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα I_2 με εναλλαγή των δύο γραμμών του (ή των δύο στηλών του).

Αν λ, μ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και A, B, Γ τρεις πίνακες (για τους οποίους ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω), τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$\Pi_1. (kA)(k'B) = (kk')(AB)$	
$\Pi_2. A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$	(προσεταιριστική ιδιότητα)
$\Pi_3. A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma, (B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$	(επιμεριστική ιδιότητα)
$\Pi_4. AI_\nu = I_\mu A = A$	($A \in \Pi_{\mu \times \nu}$)

Το γινόμενο $A(B\Gamma)$ ή, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας το $(AB)\Gamma$, θα συμβολίζεται με $AB\Gamma$. Αν A, B, Γ, Δ είναι τέσσερις πίνακες, το γινόμενο $(A(B\Gamma))\Delta$, το οποίο με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα θα είναι ίσο με καθένα από τα γινόμενα $((AB)\Gamma)\Delta$, $(AB)(\Gamma\Delta)$, $A(B(\Gamma\Delta))$, $A((B\Gamma)\Delta)$, ονομάζεται γινόμενο των πινάκων A, B, Γ, Δ και συμβολίζεται με $AB\Gamma\Delta$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο k πινάκων $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ για κάθε θετικό ακέραιο k , το οποίο θα συμβολίσουμε με $A_1 A_2 A_3 \dots A_k$. Ειδικά αν $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_k = A$, το γινόμενο $A_1 A_2 A_3 \dots A_k = AAA \dots A$ θα συμβολίζεται με τη μορφή δύναμης ως A^k . Σε αντιστοιχία με την πρώτη και τη μηδενική δύναμη ενός πραγματικού αριθμού ορίζουμε

$$A^1 = A, \quad A^0 = I.$$

Είναι προφανές ότι

$$I^k = I \text{ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο } k.$$

Αν k, r είναι δύο μη αρνητικοί ακέραιοι, εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$\Pi_5. A^k A^r = A^{k+r}$
$\Pi_6. (A^k)^r = A^{kr}$
$\Pi_7. (\lambda A)^k = \lambda^k A^k, \lambda \in \mathbb{R}.$

Για τον ανάστροφο του γινομένου δύο πινάκων A, B ισχύει το εξής:

$$\text{Π}_8. (AB)^T = B^T A^T.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών όπου ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα $ab = ba$ για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών a, b , δεν συμβαίνει το ίδιο για οποιουσδήποτε πίνακες A, B . Μάλιστα, αν A, B είναι δύο πίνακες για τους οποίους ορίζεται το γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B , τότε για το γινόμενο του πίνακα B με τον πίνακα A μπορεί να εμφανιστεί οποιαδήποτε από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) Το AB μπορεί να μην ορίζεται. Για παράδειγμα αν:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

τότε μπορεί να υπολογιστεί το γινόμενο AB (θα είναι ένας πίνακας 3×4), ενώ το γινόμενο BA δεν ορίζεται (δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα τύπου 3×4 με έναν πίνακα τύπου 3×3).

β) Το AB μπορεί να ορίζεται, αλλά να έχει διαφορετικές διαστάσεις από το BA . Για παράδειγμα, αν:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

τότε μπορεί να υπολογιστεί το γινόμενο AB και το γινόμενο BA . Ωστόσο το πρώτο οδηγεί σε έναν πίνακα τύπου 2×2 , ενώ το δεύτερο σε έναν πίνακα τύπου 3×3 και προφανώς δεν έχει νόημα να εξετάσουμε κατά πόσο ισχύει $AB=BA$.

γ) Το AB μπορεί να ορίζεται και να έχει τις ίδιες διαστάσεις με το BA , αλλά να μην είναι ίσο με αυτό. Έτσι αν θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε ισχύει $AB \neq BA$, αφού

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

δ) Το AB μπορεί να ορίζεται, να έχει τις ίδιες διαστάσεις με το BA και να είναι ίσο με αυτό. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$$

οπότε $AB=BA$.

Γενικά λοιπόν δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο γινόμενο δύο πινάκων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να **μην ισχύουν όλες** οι ταυτότητες που γνωρίζουμε για τους πραγματικούς αριθμούς. Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή αναφέρουμε ότι:

α) Αν A είναι ένας πίνακας $\mu \cdot \nu$ και O ο μηδενικός πίνακας $\nu \cdot \lambda$, τότε το γινόμενο AO δίνει το μηδενικό πίνακα $\mu \cdot \lambda$.

β) Η γνωστή ιδιότητα του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών «αν $a \cdot \beta = 0$, τότε $a = 0$ ή $\beta = 0$ » **δεν ισχύει** για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού π.χ. για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ισχύει

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

χωρίς ωστόσο να είναι $A = O$ ή $B = O$. Επομένως, αν το γινόμενο AB δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας (δηλ. αν $AB = O$), δεν είναι απαραίτητο κάποιος από τους πίνακες A, B να είναι μηδενικός ή αλλιώς μπορεί ένα γινόμενο πινάκων να ισούται με το μηδενικό πίνακα, χωρίς κανένας από αυτούς να είναι μηδενικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.2.

Αν A, B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες τάξεως n και I ο μοναδιαίος πίνακας της ίδιας τάξεως, να υπολογίσετε τις δυνάμεις $(A+B)^2$, $(A+B)^3$. Στη συνέχεια να βρείτε τη μορφή που θα λάβουν οι τύποι που βρέθηκαν, στην περίπτωση που ισχύει $AB=BA$. Ως εφαρμογή των προηγούμενων τύπων να υπολογίσετε τις δυνάμεις $(A+I)^2$, $(A+I)^3$.

Λύση.

Κάνοντας χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε διαδοχικά:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^2 + BA + AB + B^2$$

$$\begin{aligned} (A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B) = \\ &= A^3 + A^2B + BA^2 + BAB + ABA + AB^2 + B^2A + B^3. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι για τους πίνακες δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα (δηλ. δεν γνωρίζουμε αν αληθεύει ότι $AB=BA$), οι τύποι που βρέθηκαν δεν επιδέχονται άλλες απλοποιήσεις.

Στην περίπτωση που ισχύει $AB=BA$, ο πρώτος από τους δύο τύπους παίρνει τη μορφή

$$(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

δηλαδή προκύπτει μια έκφραση αντίστοιχη με το γνωστό τύπο του τετραγώνου του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών.

Όσον αφορά στο δεύτερο τύπο, αφού τώρα ισχύουν οι σχέσεις

$$BA^2 = (BA)A = (AB)A = A(BA) = A(AB) = (AA)B = A^2B,$$

$$BAB = (BA)B = (AB)B = A(BB) = AB^2$$

$$ABA = A(BA) = A(AB) = (AA)B = A^2B$$

$$B^2A = (BA)A = (AB)A = A(BA) = A(AB) = (AA)B = A^2B$$

παίρουμε

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 + A^2B + BA^2 + BAB + ABA + AB^2 + B^2A + B^3 = \\ &= A^3 + A^2B + A^2B + AB^2 + A^2B + AB^2 + AB^2 + B^3 = \\ &= A^3 + 3AB^2 + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

δηλαδή προκύπτει μια έκφραση αντίστοιχη με το γνωστό τύπο του κύβου του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών.

Για τις ποσότητες $(A+I)^2$, $(A+I)^3$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τελευταίους δύο τύπους που βρήκαμε αφού $AI = IA = A$. Έτσι παίρουμε

$$(A+I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A^2 + 2A + I.$$

$$(A+I)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I = A^3 + 3A^2 + 3A + I.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.3.

Να αποδείξετε ότι η n -οστή δύναμη (n θετικός ακέραιος) ενός διαγώνιου πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι επίσης διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις n -οστές δυνάμεις των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα, δηλαδή

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^n \end{bmatrix}.$$

Λύση.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n = k$, δηλαδή ότι έχουμε

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^k \end{bmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n = k+1$, δηλαδή ότι η δύναμη A^{k+1} δίνεται από τον τύπο

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{k+1} \end{bmatrix}$$

Έχομε

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων προκύπτει:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η σχέση που δόθηκε θα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

Ασκήσεις.

1.3.1. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε τα επόμενα γινόμενα πινάκων, εφόσον ορίζονται AB , BA , $A\Gamma$, ΓA , $\Gamma\Delta$, ΔA , $A\Gamma^T$, $\Gamma^T A$, $\Gamma^T A^T$.

1.3.2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

α) Να εξετάσετε ποια από τα γινόμενα πινάκων AB , $A\Gamma$, BA , ΓA μπορούν να οριστούν.

β) Να εξετάσετε αν οι πίνακες AB , $A\Gamma$ είναι ίσοι.

γ) Τι παρατηρείτε για το γινόμενο $A(B-\Gamma)$;

1.3.3. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε τους επόμενους πίνακες: $AB + 2B\Gamma + 3\Gamma A$, $3A^2 - 2B\Gamma$, $AB\Gamma$, $2B\Gamma - 3A$:

1.3.4. Μια βιοτεχνία έχει δύο εργοστάσια ε_1 και ε_2 , στα οποία κατασκευάζονται τρία διαφορετικά προϊόντα π_1 , π_2 και π_3 . Οι παρακάτω δύο πίνακες A και B δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για κάθε φάση φ_1 , φ_2 , φ_3 της κατασκευής κάθε προϊόντος και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού κάθε εργοστασίου σε ευρώ αντίστοιχα.

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 1 & 1,5 & 2,5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1,5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 10 & 16 \\ 15 & 17 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο AB και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

β) Πώς θα μπορούσατε να εκφράσετε με πράξεις μεταξύ πινάκων το συνολικό κόστος εργασίας για την κατασκευή 2 μονάδων του προϊόντος π_1 , 3 μονάδων του προϊόντος π_2 και 5 μονάδων του προϊόντος π_3 σε κάθε ένα από τα δύο εργοστάσια;

1.3.5. Οι εργαζόμενοι σε τρεις εταιρείες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: σε ειδικευμένους και σε ανειδίκευτους. Ο αριθμός των εργατών κατά κατηγορία σε κάθε εταιρεία και οι αντίστοιχες εβδομαδιαίες αποδοχές τους για δύο διαδοχικά έτη α και β δίνονται στους επόμενους δύο πίνακες.

Αριθμός εργατών		
	Ειδικευμένοι	Ανειδίκευτοι
1η εταιρεία	60	75
2η εταιρεία	30	60
3η εταιρεία	10	70

Εβδομαδιαίες αποδοχές		
	α	β
Ειδικευμένοι	20	50
Ανειδίκευτοι	15	40

Να συντάξετε έναν πίνακα, ο οποίος περιγράφει τις εβδομαδιαίες δαπάνες κάθε εταιρείας για καθένα από τα δύο έτη.

1.3.6. Να βρείτε τα στοιχεία που λείπουν στο παρακάτω γινόμενο πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.3.7. Αν $A = [x \ y \ z]$, $B = [a \ \beta \ \gamma]^T$ να δείξετε ότι $AB=BA$. Πώς θα μπορούσατε να εκφράσετε με πράξεις μεταξύ πινάκων το άθροισμα τετραγώνων $x^2 + y^2 + z^2$;

1.3.8. Αν $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & a \end{bmatrix}$, $a, \beta, x, y, \in \mathbf{R}$ και $y \neq 0$, να δείξετε ότι η μόνη περίπτωση για την οποία ισχύει $AB = BA$ είναι όταν $a=1$.

1.3.9. Αν $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ να δείξετε ότι $A^1 - (x+w)A + (xw-yz)I_2 = \mathbf{O}$.

1.3.10. Αν $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, να δείξετε ότι ο πίνακας $A^2 + 5A$ εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα τάξεως 2.

1.3.11. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ -\gamma & 0 & a \\ -\beta & -a & 0 \end{bmatrix}$ και $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, να δείξετε ότι $A^3 = -A$.

1.3.12. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB είναι BA είναι αντίθετοι.

1.3.13. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $(A+3B)(2A+B) = (2A+B)(A+3B)$ να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB είναι BA είναι ίσοι.

1.3.14. Αν A, B είναι τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξεως και ο B είναι συμμετρικός να αποδείξετε ότι οι πίνακες $\Gamma = A^T B A$ και $\Delta = A B A^T$ είναι συμμετρικοί.

1.3.15. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. Να δείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες

$A^2 = B^2 = I_3, AB + BA = 2I_3, (A - B)^2 = O$. Είναι σωστός ο ισχυρισμός: «Αν για δύο πίνακες ισχύει $A^2 = B^2$, τότε θα ισχύει $A = B$ ή $A = -B$ »;

1.4 Αντιστρέψιμοι πίνακες.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a με $a \neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφός του, που συμβολίζεται με $\frac{1}{a}$ ή a^{-1} , για τον οποίο ισχύει $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Είναι λογικό λοιπόν να θέσουμε το επόμενο ερώτημα: «Αν δοθεί ένας πίνακας A μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα B , τέτοιον ώστε να ισχύει $AB = BA = I$;».

Για να μπορούν να υπολογιστούν τα γινόμενα AB και BA και επί πλέον να είναι ίσα μεταξύ τους θα πρέπει ο πίνακας A να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Οδηγούμαστε έτσι στον επόμενο ορισμό:

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως n . Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B τάξεως n τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I$, τότε ο A ονομάζεται **αντιστρέψιμος πίνακας** και ο B **αντίστροφος** του A .

Αν ένας πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αποδεικνύεται ότι αυτός είναι μοναδικός. Τον αντίστροφο του πίνακα A , όταν υπάρχει, θα τον συμβολίζουμε με A^{-1} . Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό έχουμε:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

τότε έχουμε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Άρα, ο B είναι αντίστροφος του A .

Από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα είναι φανερό ότι αν ο B είναι αντίστροφος του A , τότε και ο A θα είναι αντίστροφος του B . Για το λόγο αυτό πολλές φορές θα λέμε ότι οι πίνακες A και B είναι αντίστροφοι.

Όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A , δεν είναι απαραίτητο να ελέγξουμε και τις δύο σχέσεις $AB = I$ και $BA = I$, αφού αν για δυο τετραγωνικούς πίνακες A, B αληθεύει μία από τις δύο ισότητες, τότε θα αληθεύει και η άλλη.

Όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, ισχύει η επόμενη πρόταση, η οποία θα μας φανεί πολύ χρήσιμη σε επόμενη παράγραφο:

Αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και B, X είναι δύο άλλοι πίνακες για τους οποίους έχουν νόημα οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \text{ και } XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}. \quad (1.4.1)$$

Πράγματι:

α) Αν $AX = B$, τότε, $A^{-1}B = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X$ και αντίστροφα.

β) Αν $X = A^{-1}B$, τότε, $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$.

Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις.

Στην προηγούμενη παράγραφο διαπιστώσαμε ότι, αν το γινόμενο AB δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας (δηλ. αν $AB = \mathbf{O}$), δεν είναι απαραίτητο κάποιος από τους πίνακες A, B να είναι μηδενικός.

Στην περίπτωση όμως που ισχύει $AB = \mathbf{O}$ και ο ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός. Πράγματι, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε θα έχουμε:

$$AB = \mathbf{O} \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{O} \Rightarrow IB = \mathbf{O} \Rightarrow B = \mathbf{O}.$$

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε πότε αντιστρέφεται ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 2 και θα δώσουμε έναν απλό τύπο για τον υπολογισμό του αντιστρόφου του. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

α) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν, και μόνο αν, $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

β) Ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, όταν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}. \quad (1.4.2)$$

Απόδειξη.

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 2. Για να αντιστρέφεται ο A , πρέπει και αρ-
κεί να υπάρχει ένας πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $AX = I$ ή ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει ότι οι αριθμοί x, y, z, ω ικανοποιούν τα συστήματα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma_1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} \alpha y + \beta \omega = 0 \\ \gamma y + \delta \omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_2).$$

Αρκεί επομένως, τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) να έχουν λύση. Έστω $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ και ας διακρίνομε τις εξής δύο περιπτώσεις:

α) Αν $D \neq 0$, τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το ζεύγος (x, z) με $x = \frac{\delta}{D}$ και $z = \frac{-\gamma}{D}$, είναι η μονα-

δική λύση του συστήματος (Σ_1) , ενώ το ζεύγος (y, ω) με $y = \frac{-\beta}{D}$ και $\omega = \frac{\alpha}{D}$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ_2) . Άρα

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{D} & \frac{-\beta}{D} \\ \frac{-\gamma}{D} & \frac{\alpha}{D} \end{bmatrix} \quad \text{και ο αντίστροφος του } A \text{ θα είναι ο } A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι το τελευταίο θα μπορούσαμε και να το συμπεράνομε απ' ευθείας επαληθεύοντας ότι για τον πίνακα $X = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{D} & \frac{-\beta}{D} \\ \frac{-\gamma}{D} & \frac{\alpha}{D} \end{bmatrix}$ (ο οποίος προφανώς μπορεί να οριστεί αφού υποθέσαμε ότι $D \neq 0$) ισχύει $AX = XA = I$.

β) Αν $D = 0$, τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο, οπότε ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται. Πράγματι:

– Αν $\alpha \neq 0$ ή $\beta = 0$ ή $\gamma \neq 0$ ή $\delta \neq 0$, τότε διαπιστώνεται ότι ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο.

– Αν $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, τότε και τα δύο συστήματα θα είναι αδύνατα.

Με βάση το αποτέλεσμα που διατυπώθηκε προηγουμένως, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται, γιατί $D = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1 \neq 0$ και ο αντίστροφός του είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Αντίθετα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται, αφού $D = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1.

Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως n , να αποδείξετε ότι το γινόμενο AB είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας και ότι ισχύει

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Λύση.

Αρκεί να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν οι ισότητες $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$ και $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Όμως, κάνοντας επανειλημμένη χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας της πράξης του πολλαπλασιασμού έχουμε

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I_n.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2.

$$\text{Δίνονται οι πίνακες } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις A^2, B^2 .

β) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A και τον αντίστροφο του πίνακα B .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $AX=B$ και η εξίσωση $BY=A$.

Λύση.

α) Έχουμε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

και

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

β) Αφού ισχύει $A^2 = B^2 = I_3$ μπορούμε να γράψουμε $AA = AA = I_3$ και $BB = BB = I_3$ οπότε τόσο ο A όσο και ο B είναι αντιστρέψιμοι με $A^{-1} = A$ και $B^{-1} = B$.

γ) Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A$, έχουμε:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ομοίως, επειδή ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος με $B^{-1} = B$, θα έχουμε:

$$BY = A \Leftrightarrow Y = B^{-1} \cdot A \Leftrightarrow Y = BA = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις.

1.4.1. Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα, αν υπάρχει, για καθέναν από τους παρακάτω τετραγωνικούς πίνακες τάξεως 2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.4.2. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των A και B .

β) Να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει $AXA^{-1} = B$.

γ) Να βρείτε τον πίνακα Y για τον οποίο ισχύει $BYB^{-1} = A$.

1.4.3. Σε καθένα από τα παρακάτω ζεύγη πινάκων A, B να αποδείξετε ότι ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A .

$$\alpha) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 11 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \beta) A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\gamma) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 15/8 & -1/4 & -1/4 & -3/8 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/2 & 1/4 \\ -3/8 & 1/4 & 1/4 & -1/8 \end{bmatrix}$$

1.4.4. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3x & 9x^2 \\ 0 & 1 & 6x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα είναι ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 1 & -3x & 9x^2 \\ 0 & 1 & -6x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

β) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 36 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.4.5. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε τους αντίστροφους πίνακες των A και B .

β) Να βρείτε τον πίνακα $(AB)^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο AB .

1.4.6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z έτσι, ώστε οι παρακάτω τετραγωνικοί πίνακες A, B τάξεως 3 να είναι αντίστροφοι.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 0 & -1 \\ y & x & -3 \\ -3 & -1 & z \end{bmatrix}.$$

1.5 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Ισότητα δύο πινάκων $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu \times \nu}, B = [\beta_{ij}] \in \Pi_{\mu \times \nu}$.	$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = \beta_{ij} (i=1,2,\dots,\mu \text{ και } j=1,2,\dots,\nu)$
Μηδενικός πίνακας.	Ένας πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν.
Διαγώνιος πίνακας τάξεως ν .	$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$

Μοναδιαίος πίνακας ή ταυτοτικός πίνακας τάξεως n .	$I_n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$
Ανάστροφος ενός πίνακα A .	Ο πίνακας A^T , ο οποίος έχει ως γραμμές τις στήλες του A και ως στήλες τις γραμμές του A .
Συμμετρικός πίνακας A .	Πίνακας για τον οποίο ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, n$ ή ισοδύναμα $A^T = A$.
Αν $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu \times n}$ και $B = [\beta_{ij}] \in \Pi_{\mu \times n}$, τότε μπορεί να ορισθεί: – το άθροισμα, – η διαφορά, – το γινόμενο λA όπου $\lambda \in \mathbf{R}$.	$A + B = [a_{ij} + \beta_{ij}]$ $A - B = [a_{ij} - \beta_{ij}]$ $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$
Γινόμενο του πίνακα $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu \times n}$ με τον πίνακα $B = [\beta_{ij}] \in \Pi_{n \times \lambda}$.	$AB = [\gamma_{ij}]_{\mu \times \lambda},$ όπου $\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \dots + a_{in}\beta_{nj}$
Αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξεως n .	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα τάξεως 2 $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ με $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$	$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

1.6 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το πλήθος των στοιχείων ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu \times n}$ είναι $\mu + n$.	Σ Λ
2.	Αν $(\alpha^2 + \beta^2)A = \mathbf{O}$, τότε $A = \mathbf{O}$.	Σ Λ
3.	Αν $3(A - B) = \mathbf{O}$, τότε $A = B$.	Σ Λ
4.	Αν $A, B \in \Pi_{3 \times 4}$, τότε δεν ορίζεται το γινόμενό τους.	Σ Λ
5.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος.	Σ Λ

6.	Αν για τον πίνακα A ισχύει $A^2 = I$, τότε θα είναι $A = I$ ή $A = -I$.	Σ Λ
7.	Αν ισχύει $AX = BX$ για κάποιο πίνακα X του οποίου τα στοιχεία δεν είναι όλα ίσα με το μηδέν, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $A = B$.	Σ Λ
8.	Αν ισχύει $AB = 5I$, όπου A, B τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξεως, τότε οι A, B θα είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.	Σ Λ
9.	Αν $(A - I)^2 = O$, τότε ο πίνακας A θα ισούται με το μοναδιαίο πίνακα, δηλαδή $A = I$.	Σ Λ
10.	Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες, θα ισχύει πάντοτε η ισότητα $(AB)^2 = A^2B^2$.	Σ Λ
11.	Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.	Σ Λ
12.	Αν ισχύει $AB = O$ και ο ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι ο ταυτοτικός.	Σ Λ
13.	Αν ισχύει $AB = I$ τότε ο A θα είναι ο αντίστροφος του B .	Σ Λ
14.	Αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και B, X είναι δύο άλλοι πίνακες για τους οποίους ισχύει $BX = A$, τότε συμπεραίνουμε ότι $X = A^{-1}B$.	Σ Λ
15.	Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως n , τότε και το γινόμενο AB θα είναι αντιστρέψιμος πίνακας.	Σ Λ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Οι τύποι που πρέπει να αντιστοιχούν σε δύο πίνακες A, B αντίστοιχα, ώστε να ορίζεται το γινόμενό τους και να είναι πίνακας στοιχείο, είναι αντίστοιχα: α) $m \times n, n \times 1$ β) $1 \times n, n \times 1$ γ) $1 \times n, n \times l$ δ) Ίδιοι
2.	Το γινόμενο του πίνακα $\begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ με τον πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ίσο με: α) $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$
3.	Αν A, B είναι δύο πίνακες τύπου 4×10 , τότε δεν ορίζεται: α) Το γινόμενό τους. β) Το άθροισμά τους. γ) Η διαφορά τους. δ) $O A^T B$.
4.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} a^2 - 3a + 3 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 - a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 4a + 4 \end{bmatrix}$ γίνεται μοναδιαίος: α) Αν $a = 1$. β) Αν $a = 2$. γ) Αν $a = 0$. δ) Ποτέ.

5.	Αν για τον πίνακα $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ και το μοναδιαίο πίνακα τάξεως ν ισχύει $AI_\nu = I_\nu A = A$, τότε: α) $\mu = \nu$ β) $\mu = \nu$ γ) $\mu = \nu$ δ) $\mu = \nu$
6.	Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $x \neq 0$ ένας σταθερός αριθμός. Σ' αυτήν την περίπτωση ο αντίστροφος του πίνακα xA είναι ο πίνακας: α) xA^{-1} β) $\frac{1}{x}A$ γ) $\frac{1}{x}A^{-1}$ δ) xA
7.	Αν A, B, Γ είναι τρεις πίνακες για τους οποίους ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω, τότε: α) Ισχύει $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$. β) Ισχύει $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$. γ) Ισχύει $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$. δ) Ισχύουν όλες οι σχέσεις που δίνονται παραπάνω.
8.	Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$: α) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. β) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. γ) Δεν υπάρχει. δ) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
9.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.
10.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.
11.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.
12.	Αν $A, B, \Gamma \in \Pi_{\mu \times \nu}$, τότε: α) Ισχύει $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$. β) Ισχύει $A + B = B + A$. γ) Ισχύει $A - (B - \Gamma) = (A - B) + \Gamma$. δ) Ισχύουν όλες οι σχέσεις που δίνονται παραπάνω.

13.	Αν $A, B \in \Pi_{m \times n}$ τότε: α) $5(A + B) = 5A + B$ β) $\varrho A = \mathbf{O}$ αν και μόνο αν $\varrho = 0$ ή $A = \mathbf{O}$ γ) $AB = BA$ δ) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

1.7 Γενικές ασκήσεις.

1.7.1. Να γράψετε το άθροισμα τετραγώνων $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ με πράξεις μεταξύ πινάκων χρησιμοποιώντας τον πίνακα γραμμή $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

1.7.2. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το γινόμενο δύο διαγωνίων πινάκων διαστάσεως n είναι επίσης διαγώνιος πίνακας της ίδιας διαστάσεως.
- β) Το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων διαστάσεως n είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας της ίδιας διαστάσεως.
- γ) Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων διαστάσεως n είναι επίσης κάτω τριγωνικός πίνακας της ίδιας διαστάσεως.

1.7.3. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A . Να αποδείξετε ότι:

- α) Ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός.
- β) Ο πίνακας AA^T είναι συμμετρικός.

1.7.4. Έστω δύο τετραγωνικοί συμμετρικοί πίνακες A, B . Να αποδείξετε ότι:

- α) Ο πίνακας $-A$ είναι συμμετρικός.
- β) Ο πίνακας $A + B$ είναι συμμετρικός.

1.7.5. Ένας πίνακας A ονομάζεται αντισυμμετρικός αν ισχύει $A^T = -A$. Έστω δύο τετραγωνικοί αντισυμμετρικοί πίνακες A, B . Να αποδείξετε ότι:

- α) Ο πίνακας $-A$ είναι αντισυμμετρικός.
- β) Ο πίνακας $A + B$ είναι αντισυμμετρικός.

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Κατά τη μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων Μηχανικής, Οικονομίας, Ηλεκτρονικής κ.λπ., οδηγούμαστε αρκετά συχνά σε προβλήματα λύσεως ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Όμως συνήθως σε τέτοια προβλήματα το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων είναι αρκετά μεγάλο, πράγμα που καθιστά δύσκολη τη λύση τους. Στις περιπτώσεις αυτές η γραφή του συστήματος σε μορφή μιας εξισώσεως πινάκων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού δίνει τη δυνατότητα να λυθεί, με κατάλληλα προγράμματα, από τους υπολογιστές. Ο Cramer ανέπτυξε ένα συστηματικό τρόπο λύσεως γραμμικών συστημάτων με τη χρήση της έννοιας της ορίζουσας, την οποία θα επεξηγήσουμε στο παρόν κεφάλαιο.

- 2.1 Η έννοια της ορίζουσας.
- 2.2 Ανάπτυγμα ορίζουσας n τάξεως.
- 2.3 Ιδιότητες οριζουσών.
- 2.4 Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα με χρήση οριζουσών.
- 2.5 Γραμμικά συστήματα εξισώσεων.
- 2.6 Η μέθοδος απαλοιφής.
- 2.7 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με n εξισώσεις και n αγνώστους.
- 2.8 Μελέτη ομογενών γραμμικών συστημάτων.
- 2.9 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 2.10 Ερωτήσεις κατανόησης.
- 2.11 Γενικές ασκήσεις.

2.1 Η έννοια της ορίζουσας.

Ας θεωρήσουμε τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x_1, x_2

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= \beta_2. \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Όμως, το πρώτο μέλος της ισότητας αυτής είναι το γινόμενο του 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (πίνακας των συντελεστών των αγνώντων) με τον 2×1 πίνακα $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (πίνακας των αγνώντων του συστήματος). Επομένως το αρχικό σύστημα γράφεται με τη μορφή

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B \quad (2.1.1)$$

όπου με $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ συμβολίσαμε τον πίνακα των σταθερών όρων.

Για την εύρεση της λύσεως του γραμμικού συστήματος, θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση επί a_{22} και τη δεύτερη επί a_{12} , ώστε να πάρουμε:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= a_{22}\beta_1 \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 &= a_{12}\beta_2 \end{aligned}$$

και να τις αφαιρέσουμε κατά μέλη, οπότε θα έχουμε

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}\beta_1 - a_{12}\beta_2. \quad (2.1.2)$$

Σύμφωνα με τον τελευταίο τύπο, όταν

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

τότε ο άγνωστος x_1 δίνεται από την έκφραση

$$x_1 = \frac{a_{22}\beta_1 - a_{12}\beta_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{a_{22}\beta_1 - a_{12}\beta_2}{D}. \quad (2.1.3)$$

Με ανάλογη διαδικασία μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για τον άγνωστο x_2 ισχύει

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}\beta_2 - a_{21}\beta_1 \quad (2.1.4)$$

και επομένως, για $D \neq 0$, θα έχουμε

$$x_2 = \frac{a_{11}\beta_2 - a_{21}\beta_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{a_{11}\beta_2 - a_{21}\beta_1}{D}. \quad (2.1.5)$$

Ο αριθμός $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ που εμφανίζεται στους παρανομαστές των παραπάνω εκφράσεων,

ονομάζεται **ορίζουσα του πίνακα** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ή **ορίζουσα 2ης τάξεως** (επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν 2×2 πίνακα) και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Επομένως έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε, η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (2.1.6)$$

Για παράδειγμα:

Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ είναι ίση με $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2) - 5(-3) = 7$,

η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι $|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$ και

η ορίζουσα του μηδενικού πίνακα $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι $|O| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$.

Οι εκφράσεις που εμφανίζονται στους αριθμητές των τύπων (2.1.3), (2.1.5) μπορούν επίσης να γραφούν ως ορίζουσες πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψουμε

$$D_{x_1} = \beta_1 a_{22} - \beta_2 a_{12} = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \beta_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_{x_2} = a_{11} \beta_2 - a_{21} \beta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ a_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

οπότε, αν $D \neq 0$ το σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους, θα έχει ως μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \beta_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ a_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (2.1.7)$$

(οι τύποι αυτοί είναι γνωστοί με την ονομασία **τύποι του Cramer**).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ορίζουσες D_{x_1}, D_{x_2} προκύπτουν από την $D = |A|$ αν αντικαταστήσουμε τις στήλες που αντιστοιχούν στους αγνώστους x_1, x_2 με τις στήλες των σταθερών όρων.

Δεδομένου ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τις σχέσεις (2.1.2), (2.1.4), οι οποίες προφανώς γράφονται στη μορφή

$$D \cdot x_1 = D_{x_1}, \quad D \cdot x_2 = D_{x_2}$$

εύκολα καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα που αφορούν στη λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

Έστω το σύστημα $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \beta_2 \end{cases}$ και ας συμβολίσουμε με $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ την ορί-

ζουσα των συντελεστών των αγνώστων.

– Αν $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \beta_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 \\ a_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (2.1.8)$$

– Αν $D = 0$ και ισχύει επί πλέον είτε $D_{x_1} \neq 0$ είτε $D_{x_2} \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

– Αν $D = D_{x_1} = D_{x_2} = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, εκτός αν ισχύει

$$a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{22} = 0 \text{ και } \beta_1 \neq 0 \text{ ή } \beta_2 \neq 0,$$

οπότε θα είναι αδύνατο.

Με τη βοήθεια της ορίζουσας 2ης τάξεως θα ορίσουμε την **ορίζουσα 3ης τάξεως**, δηλαδή την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ο αριθμός } a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ονομάζεται **ορίζουσα του πίνακα A** και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Επομένως έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Τότε, η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση, με την οποία υπολογίζεται η $|A|$ και η οποία ονομάζεται *ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής*, είναι (αλγεβρικό) άθροισμα τριών γινομένων με εναλλασσόμενα πρόσημα. Ο κάθε όρος του (αλγεβρικού) αθροίσματος είναι το γινόμενο του στοιχείου a_{ij} με την ορίζουσα 2ης τάξεως που προκύπτει από την $|A|$, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} . Το πρόσημο κάθε τέτοιου όρου είναι ίσο με $(-1)^{i+j}$.

Αν αντικαταστήσουμε τις ορίζουσες 2ης τάξεως στο προηγούμενο ανάπτυγμα, θα πάρουμε την έκφραση

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος τρόπος γραφής ονομάζεται *ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής*.

Ομοίως, διαπιστώνουμε ότι η $|A|$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως εξής

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται *ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης*.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του πίνακα A προκύπτει αν θεωρήσουμε τα (αλγεβρικά) αθροίσματα των γινομένων που περιγράψαμε παραπάνω, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης. Τα πρόσημα των όρων του αθροίσματος είναι εναλλασσόμενα και ένας μνημονικός κανόνας περιγράφεται παρακάτω

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

για τον υπολογισμό της ορίζουσας $|A|$, θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα του πίνακα A ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής που περιέχει δύο μηδενικά, οπότε θα παίρναμε:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-10 + 2) - 0 \cdot (5 - 3) + 0 \cdot (-2 + 6) = -16.$$

Γενικά, αν υπάρχουν γραμμές ή στήλες που περιέχουν μηδενικά, ο υπολογισμός της ορίζουσας διευκολύνεται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς αυτές τις γραμμές ή στήλες.

Γράφοντας την έκφραση που βρήκαμε προηγουμένως για την ορίζουσα 3×3 πίνακα A στη μορφή

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

καταλήγουμε στον επόμενο πρακτικό κανόνα υπολογισμού, ο οποίος είναι γνωστός με την ονομασία **κανόνας του Sarrus**. Επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα στη δεξιά μεριά του και σχηματίζουμε τρία γινόμενα με «συν» (+) λαμβάνοντας τα γινόμενα που προκύπτουν κινούμενοι από άνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά και τρία γινόμενα με «πλην» (-) λαμβάνοντας τα γινόμενα που προκύπτουν κινούμενοι από κάτω αριστερά προς τα άνω δεξιά (σχ. 2.1α).

Είναι φανερό ότι αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε η ορίζουσα του A είναι ίση με μηδέν (αυτό προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του κανόνα του Sarrus ή αν αναπτύξουμε την $|A|$ ως προς τα στοιχεία της γραμμής ή στήλης που έχει τα μηδενικά).

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array}$$

Σχ. 2.1α.
Κανόνας του Sarrus.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.1.

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι για $\lambda=2$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με μηδέν.

β) Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα A συναρτήσει του λ .

Λύση.

α) Για $\lambda=2$ ο πίνακας γίνεται $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ και αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -[2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)] + 2[2 \cdot 1 - 0 \cdot 3] = -4 + 4 = 0.$$

β) Θεωρώντας το ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \\
 &= (2-\lambda)[(2-\lambda) \cdot (1-\lambda) - (-2) \cdot 1] - 2[1 \cdot (1-\lambda) - 1 \cdot 2] + 3[(1 \cdot (-2) - 2 \cdot (1-\lambda))] = \\
 &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8.
 \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι για $\lambda=2$, η τελευταία ποσότητα μηδενίζεται, όπως αναμένεται και από το αποτέλεσμα που πήραμε στο πρώτο ερώτημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.2.

Αν A, B, Γ είναι τρία σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ αντίστοιχα, τότε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 2.1β) δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Λύση.

Αν φέρομε από τα σημεία A, B, Γ τις κάθετες $AD, BE, \Gamma Z$ προς τον άξονα Ox , όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1γ, το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ μπορεί να εκφραστεί μέσω των εμβαδών των τραπεζίων $ABE\Delta, B\Gamma ZE$ και $A\Gamma Z\Delta$ ως εξής

$$(AB\Gamma) = (ABE\Delta) + (B\Gamma ZE) - (A\Gamma Z\Delta).$$

Όμως, το εμβαδόν του τραπεζίου $ABE\Delta$ (σχ. 2.1δ) υπολογίζεται από τον τύπο $(ABE\Delta) = \frac{AD+BE}{2} \cdot \Delta E$ και αντικαθιστώντας τα $AD = y_1, BE = y_2, \Delta E = x_2 - x_1$ βρίσκουμε:

$$(ABE\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) \cdot (x_2 - x_1).$$

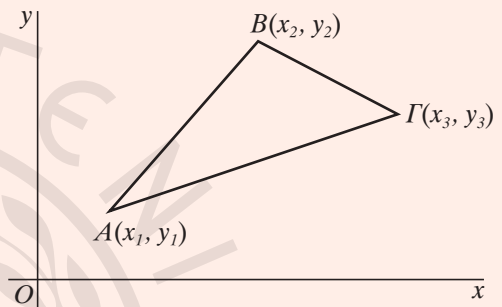
Όμοια προκύπτουν οι επόμενοι δύο τύποι

$$(B\Gamma ZE) = \frac{BE + \Gamma Z}{2} \cdot ZE = \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_3) \cdot (x_3 - x_2)$$

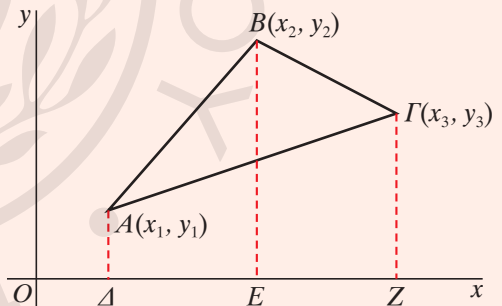
$$(A\Gamma Z\Delta) = \frac{AD + \Gamma Z}{2} \cdot Z\Delta = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_3) \cdot (x_3 - x_1).$$

Επομένως,

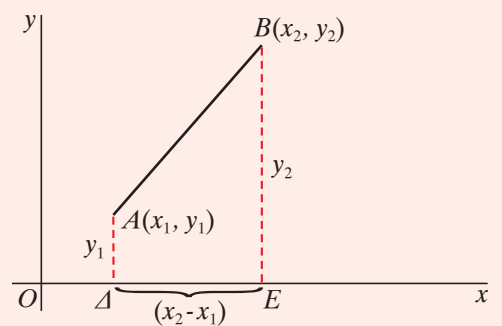
$$\begin{aligned}
 (AB\Gamma) &= \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) \cdot (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_3) \cdot (x_3 - x_2) - \\
 &\quad \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_3) \cdot (x_3 - x_1)
 \end{aligned}$$



Σχ. 2.1β.



Σχ. 2.1γ.



Σχ. 2.1δ.

το οποίο μετά την εκτέλεση των πολλαπλασιασμών και τις απλοποιήσεις δίνει

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot (y_1x_2 - y_1x_3 + y_2x_3 - y_2x_1 - y_3x_2 + y_3x_1) = \frac{1}{2} \cdot [y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)].$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ ως προς τα στοιχεία της 3^{ης} στήλης έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = y_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} - y_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} + y_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = y_3(x_1 - x_2) - y_2(x_1 - x_3) + y_1(x_2 - x_3)$$

και επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Σημειώνεται ότι, αν τα σημεία A, B, Γ βρίσκονται σε διαφορετική σειρά απ' ό,τι στο σχήμα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του προηγούμενου τύπου (π.χ. κοιτάζοντάς τα από αριστερά προς τα δεξιά να είναι πρώτα το B , μετά το A και τελευταίο το Γ κ.λ.π.), τότε, για να βρούμε το εμβαδόν θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις συντεταγμένες τους έτσι, ώστε στην πρώτη γραμμή να βρίσκεται το σημείο που είναι πιο δεξιά και στην τρίτη το σημείο που βρίσκεται πιο αριστερά. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε τα σημεία με οποιαδήποτε σειρά και να χρησιμοποιήσουμε την **απόλυτη τιμή** της ορίζουσας. Για παράδειγμα το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ που ορίζεται από τα σημεία $A(4,5)$, $B(5,2)$ και $\Gamma(1,2)$ βρίσκεται αν αρχικά υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας και χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-12| = 6.$$

Ασκήσεις.

2.1.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων (2.1.8).

α) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -4x + 10y = -2 \end{cases}$

2.1.2. Να υπολογίσετε τις επόμενες ορίζουσες αναπτύσσοντας ως προς κατάλληλη γραμμή ή στήλη έτσι, ώστε να χρειαστεί να υπολογίσετε μόνο μία ορίζουσα 2^{ης} τάξεως.

α) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

β) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

γ) $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

δ) $\begin{vmatrix} \eta\mu\theta & 0 & -\sigma\upsilon\nu\theta \\ -\sigma\upsilon\nu\theta & 1 & \eta\mu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\theta & 0 & \eta\mu\theta \end{vmatrix}$

ε) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \beta \end{vmatrix}$

στ) $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \beta & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.1.3. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & x \\ x-1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta) \begin{vmatrix} x-2 & x+1 & 1 \\ x-1 & x+1 & 2 \\ x-3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 5x & 2x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta) \begin{vmatrix} x^2 & 1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 \\ -1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.1.4. Μία πετρελαιοκηλίδα που εμφανίστηκε στην επιφάνεια της θάλασσας μετά από κάποιο ναυάγιο, περιορίστηκε τελικώς μεταξύ τριών σημείων A, B, Γ με συντεταγμένες $(1, 5), (2, 3), (-2, 1)$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.1.2, να υπολογίσετε το εμβαδόν της πετρελαιοκηλίδας.

2.1.5. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ a^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a).$$

2.1.6. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει η ισότητα

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

2.1.7. Λαμβάνοντας αναπτύγματα ως προς την πρώτη γραμμή, να διαπιστώσετε ότι οι παρακάτω ορίζουσες είναι ίσες με 0.

$$\begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ a+x & \beta+y & \gamma+z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ a+x & \beta+y & \gamma+z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

2.1.8. Λαμβάνοντας αναπτύγματα ως προς την πρώτη γραμμή, να διαπιστώσετε ότι οι παρακάτω ορίζουσες είναι αντίθετες.

$$\begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ k & m & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ k & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

2.1.9. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για $\lambda = -2$ η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με μηδέν.

- β) Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα A συναρτήσει του λ .
 γ) Να βρεθούν όλα τα λ για τα οποία ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1.$$

2.2 Ανάπτυγμα ορίζουσας n τάξεως.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, αν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 3, η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, για παράδειγμα

$$|A| = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Παρατηρήσαμε επίσης ότι, σε καθένα από τα αναπτύγματα της $|A|$, κάθε στοιχείο a_{ij} της αντίστοιχης γραμμής ή στήλης πολλαπλασιάζεται με την ορίζουσα 2ης τάξεως του πίνακα M_{ij} που προκύπτει από τον A , αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} . Η ορίζουσα αυτή ονομάζεται *ελλείπον ορίζουσα* του στοιχείου a_{ij} και θα συμβολίζεται με $m_{ij} = |M_{ij}|$.

Τέλος, κάθε όρος ενός αναπτύγματος της $|A|$ έχει πρόσημο $+$ ή $-$, πιο συγκεκριμένα το πρόσημο του $(-1)^{i+j}$. Το γινόμενο $(-1)^{i+j} m_{ij}$ ονομάζεται *αλγεβρικό συμπλήρωμα* του στοιχείου a_{ij} και θα συμβολίζεται με c_{ij} , δηλαδή

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς, τα παραπάνω αναπτύγματα γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23}, \\ |A| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}, \\ |A| &= a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος, με εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων και σύγκριση των τελικών εκφράσεων ότι η $|A|$ μπορεί να γραφεί στις ισοδύναμες μορφές

$$\begin{aligned} |A| &= a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33}, \\ |A| &= a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32}, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$|A| = a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33}.$$

Οι παραπάνω έξι εκφράσεις μας δίνουν έναν τρόπο για να υπολογίζουμε μία ορίζουσα 3^{ης} τάξεως (ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα) με τη βοήθεια της ορίζουσας 2^{ης} τάξεως.

Την ίδια τεχνική θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια, προκειμένου να φτάσουμε στην ορίζουσα n τάξεως, δηλαδή την ορίζουσα ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in \Pi_n$. Πιο συγκεκριμένα θα ορίσουμε την ορίζουσα n τάξεως $n \geq 3$ με τη βοήθεια της ορίζουσας τάξεως $n-1$ (μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται **επαγωγική διαδικασία**).

Έστω λοιπόν ο τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}] \in \Pi_n$. Ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $|A|$ ή

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

τον αριθμό $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n}$ όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ και M_{ij} είναι ο τετραγωνικός πίνακας τάξεως $n-1$ που προκύπτει από τον A , αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} .

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξεως, η ορίζουσα $m_{ij} = |M_{ij}|$ θα ονομάζεται **ελάσσων ορίζουσα** του στοιχείου a_{ij} και το γινόμενο $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ θα ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου a_{ij} . Η παράσταση $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n}$, μέσω της οποίας ορίσαμε την $|A|$, ονομάζεται **ανάπτυγμα** της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής.

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξεως, για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα δεν έχει σημασία ποια γραμμή ή ποια στήλη θα χρησιμοποιηθεί για το ανάπτυγμά της μέσω οριζουσών τάξεως $n-1$. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του A δίνεται από τους τύπους

$$|A| = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}, \quad |A| = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}$$

όπου i και j είναι οποιοσδήποτε ακέραιος από τους $1, 2, \dots, n$. Η πρώτη παράσταση ονομάζεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ ως προς τα στοιχεία της i γραμμής**, ενώ η δεύτερη, **ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της j στήλης**.

Υπενθυμίζουμε ότι, για λόγους ταχύτητας στις πράξεις, καλό θα είναι το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας να βασίζεται στη γραμμή ή τη στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

Επίσης είναι φανερό από το γενικό ορισμό που δόθηκε παραπάνω ότι, αν τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή μιας οποιασδήποτε στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδενικά, τότε $|A| = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.1.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ x-a & 0 & a-x & 0 \\ a & 0 & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

όπου a είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

Λύση.

Αναπτύσσοντας την οριζούσα του αριστερού μέλους κατά τα στοιχεία της 2ης γραμμής (η οποία έχει δυο μηδενικά στοιχεία) θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ x-a & 0 & a-x & 0 \\ a & 0 & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(x-a)M_{21} + (-1)^{2+3}(a-x)M_{23} = (x-a)(-M_{21} + M_{23})$$

όπου

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & x \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την M_{21} κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης και την M_{23} κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης, παίρνουμε αντίστοιχα

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a \begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a \begin{vmatrix} a & a \\ x & a \end{vmatrix} = a(x^2 - a^2) + a(a^2 - ax) = ax(x-a),$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}a \begin{vmatrix} a & a \\ a & x \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a(ax - a^2) = -a^2(x-a).$$

Αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο βρίσκουμε

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ x-a & 0 & a-x & 0 \\ a & 0 & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)[-ax(x-a) - a^2(x-a)] = -a(x-a)^2(x+a)$$

οπότε η εξίσωση που δόθηκε, γίνεται τελικά $-a(x-a)^2(x+a) \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.2.

Αν A είναι ο κάτω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ή άνω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ τότε η ορίζουσά του θα δίνεται από τον τύπο $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Επομένως, η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

Λύση.

Θα παραθέσουμε την απόδειξη για την περίπτωση ενός 3×3 κάτω τριγωνικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής (παράδειγμα 2.2.1) παίρνουμε:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

οπότε

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} (a_{22}a_{33} - 0 \cdot a_{32}) = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η διαδικασία αυτή γενικεύεται για οποιονδήποτε $n \times n$ κάτω τριγωνικό πίνακα, καθώς επίσης και για άνω τριγωνικούς πίνακες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.3.

Αν ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας έχει τη μορφή: $A = \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

τότε η ορίζουσά του μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ορίζουσών ως εξής:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη.

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης θα έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11} + a'_{11}) \cdot c_{11} + (a_{21} + a'_{21}) \cdot c_{21} + \cdots + (a_{n1} + a'_{n1}) \cdot c_{n1} \quad \text{όπου}$$

$$c_{i1} = (-1)^{i+1} m_{i1} = (-1)^{i+1} |M_{i1}| \quad \text{είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου } a_{i1}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Επομένως

$$|A| = (a_{11} \cdot c_{11} + a_{21} \cdot c_{21} + \cdots + a_{n1} \cdot c_{n1}) + (a'_{11} \cdot c_{11} + a'_{21} \cdot c_{21} + \cdots + a'_{n1} \cdot c_{n1})$$

και η απόδειξη συμπληρώνεται παρατηρώντας ότι ο πρώτος όρος είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης, ενώ ο δεύτερος είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης και πάλι.

Ασκήσεις.

2.2.1. Να υπολογισθούν οι τιμές των οριζουσών

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \beta & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \gamma & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 10 \\ 0 & \beta & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & a & 4 \\ 8 & 0 & \gamma & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 6 & \beta & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

2.2.2. Να υπολογισθούν οι τιμές των οριζουσών

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 0 \\ 111 & 22 & 3 & 0 \\ 1111 & 222 & 33 & 4 \end{vmatrix}.$$

2.2.3. Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+1 & x-2 & 0 & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x-3 & 0 & 0 \\ x^2-1 & x & x^2+1 & x-4 & 0 \\ x^2-4 & x^2-1 & x & x^2+1 & x-5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2+1 & x+2 & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x+3 & 0 \\ x^2-1 & x & x^2+1 & x+4 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2.4. Να υπολογισθούν οι τιμές των οριζουσών

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2.5. Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

με χρήση του αποτελέσματος του παραδείγματος 2.2.3, χωρίς να υπολογιστεί η ορίζουσα των πινάκων που εμφανίζονται.

2.2.6. Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ 0 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & p & 1 \\ 0 & y & q & 1 \\ 0 & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

με χρήση του αποτελέσματος του παραδείγματος 2.2.3, χωρίς να υπολογιστεί η ορίζουσα των πινάκων που εμφανίζονται.

2.2.7. Χρησιμοποιώντας τεχνική παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε στην απόδειξη του παραδείγματος 2.2.2 να υπολογίσετε την ορίζουσα πινάκων της μορφής.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

2.3 Ιδιότητες οριζουσών.

Από όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο υπολογισμός της οριζουσας ενός πίνακα τάξεως n πραγματοποιείται με διαδοχικό υποβιβασμό σε οριζουσες υποπινάκων, οι οποίες, κάθε φορά, είναι κατά ένα μέγεθος μικρότερες από την οριζουσα του προηγούμενου πίνακα. Έτσι καταλήγουμε να έχουμε οριζουσες υποπινάκων τάξεως 2, οπότε χρησιμοποιούμε για κάθε μία από αυτές το γνωστό μας τύπο υπολογισμού (2.1.6). Η προηγούμενη διαδικασία είναι ιδιαίτερα κοπιαστική, γι' αυτό στην πράξη εφαρμόζουμε συνήθως κατάλληλες ιδιότητες της οριζουσας πινάκων, καθώς και έτοιμους τύπους της οριζουσας για συγκεκριμένες κατηγορίες πινάκων, ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί.

Όλα τα αποτελέσματα που ακολουθούν αναφέρονται σε τετραγωνικούς πίνακες, έστω και αν δεν γίνεται ρητή αναφορά σε αυτό.

Στο παράδειγμα 2.2.2 διαπιστώσαμε ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

D₁ Αν ένας πίνακας A είναι τριγωνικός άνω ή κάτω, τότε η οριζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Για παράδειγμα,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 2 & e^x & \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ 0 & 0 & 3 & x^2 - 1 & \frac{1}{x^4 + 2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & xe^{-x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Δύο άμεσες συνέπειες της ιδιότητας D_1 είναι οι επόμενες:

D₂ Αν ένας πίνακας A είναι διαγώνιος, τότε η οριζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

D₃ Η οριζουσα του ταυτοτικού πίνακα τάξεως n είναι ίση με 1, δηλαδή $|I_n| = 1$.

Μία ιδιότητα, η οποία προκύπτει εύκολα από τον τρόπο υπολογισμού οριζουσών μέσω αναπτύγματος κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή οποιασδήποτε στήλης είναι η εξής:

D₄ Αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε η οριζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

Δίνουμε στη συνέχεια, χωρίς απόδειξη, δύο ακόμη χρήσιμες ιδιότητες των οριζουσών.

D₅ Αν δύο γραμμές (ή δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η οριζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

D₆ Αν δύο γραμμές (ή δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ανάλογες, τότε η οριζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.

Στις επόμενες τρεις ιδιότητες περιγράφεται το αποτέλεσμα που έχει στην τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα η εκτέλεση ορισμένων πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών του πίνακα (η απόδειξη παραλείπεται).

- D₇** Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με εναλλαγή της θέσεως δύο γραμμών (ή δύο στηλών) του πίνακα A , τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B| = -|A|$.
- D₈** Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με πολλαπλασιασμό των στοιχείων μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A επί ένα (μη μηδενικό) αριθμό λ , τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B| = \lambda |A|$.
- D₉** Αν B είναι ο πίνακας που παίρνουμε με αντικατάσταση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A με εκείνη που προκύπτει με πρόσθεση σ' αυτήν μιας άλλης γραμμής (ή μιας στήλης) του πίνακα A πολλαπλασιασμένης επί ένα (μη μηδενικό) αριθμό, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει $|B| = |A|$.

Δίνουμε στη συνέχεια, ορισμένους τύπους που αφορούν στην ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα, την ορίζουσα του γινομένου ενός πίνακα μ' έναν πραγματικό αριθμό και του γινομένου δύο πινάκων.

- D₁₀** Η ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του A , δηλαδή $|A^T| = |A|$.
- D₁₁** Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων ίδιου τύπου είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων, δηλαδή $|AB| = |A| \cdot |B|$.
Ειδικά για $B = A$ παίρνουμε $|A^2| = |A|^2$ τύπος, ο οποίος ισχύει και στη γενικότερη μορφή
- $$|A^k| = |A|^k, \quad k = 2, 3, \dots$$
- D₁₂** Για την ορίζουσα του γινομένου ενός τετραγωνικού πίνακα τάξεως n με έναν πραγματικό αριθμό, ισχύει ο τύπος $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων **D₁₀**, **D₁₁**, **D₁₂** γίνονται εύκολα στην περίπτωση τετραγωνικών πινάκων τάξεως $n=2$. Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \quad \text{θα έχουμε } |A| = \alpha\delta - \beta\gamma, |B| = x\omega - yz \text{ και}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}, \quad \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$\alpha) |A^T| = \alpha\delta - \gamma\beta = \alpha\delta - \beta\gamma = |A|,$$

$$\beta) |\lambda A| = (\lambda\alpha)(\lambda\delta) - (\lambda\beta)(\lambda\gamma) = \lambda^2(\alpha\delta - \beta\gamma) = \lambda^2 |A|,$$

$$\begin{aligned} \gamma) |AB| &= (\alpha x + \beta z)(\gamma y + \delta \omega) - (\alpha y + \beta \omega)(\gamma x + \delta z) = \alpha x \gamma y + \alpha x \delta \omega + \beta z \gamma y + \beta z \delta \omega - \\ &\quad - \alpha y \gamma x - \alpha y \delta z - \beta \omega \gamma x - \beta \omega \delta z = (\alpha x \delta \omega - \beta \gamma \omega x) - (\alpha \delta y z - \beta z \gamma y) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)\omega x - (\alpha\delta - \beta\gamma)yz = (\alpha\delta - \beta\gamma)(x\omega - yz) = |A||B|. \end{aligned}$$

Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, δεν θα ασχοληθούμε με τις αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών στη γενική περίπτωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.1.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών, ώστε να φτάσετε στην ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα.

Λύση.

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί (-2) και προσθέτοντας στη δεύτερη παίρνουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 9 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

η οποία σύμφωνα με την ιδιότητα D_9 θα είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα A , δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 9 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή της τελευταίας ορίζουσας επί (-9) και προσθέτοντας στην τρίτη παίρνουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -20 & -35 \end{vmatrix}.$$

Αν τέλος πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη γραμμή της τελευταίας επί (-10) και την προσθέσουμε στην τρίτη θα πάρουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας που βρήκαμε είναι άνω τριγωνικός, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα D_1 η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 = -10.$$

Επομένως τελικά $|A| = -10$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.2.

Να αποδειχτεί ότι οι αριθμοί 0, 1, 2 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης $A(x) = 0$ όπου

$$A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 2 \\ x^2-1 & 1 & 3 & 8 \\ x^3-1 & 1 & 7 & 26 \\ x^4-1 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix}.$$

Λύση.

Για $x = 0, x = 1, x = 2$ και $x = 3$, η ορίζουσα λαμβάνει τη μορφή

$$A(0) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 7 & 26 \\ -1 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix}, \quad A(1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 26 \\ 0 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix}, \quad A(2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 26 \\ 0 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix}, \quad A(3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 26 \\ 0 & 1 & 15 & 80 \end{vmatrix}$$

αντίστοιχα. Στην $A(0)$ η πρώτη και η δεύτερη στήλη έχουν στοιχεία ανάλογα [τα στοιχεία της $2^{\text{ης}}$ στήλης προκύπτουν από τα στοιχεία της $1^{\text{ης}}$ στήλης πολλαπλασιάζοντας επί (-1)], οπότε θα ισχύει, με βάση την ιδιότητα D_6 των οριζουσών $A(0)=0$. Επομένως, το 0 είναι ρίζα της εξισώσεως $A(x)=0$.

Τα στοιχεία της πρώτης στήλης της $A(1)$ είναι όλα μηδέν, οπότε θα ισχύει (με βάση την ιδιότητα D_4 των οριζουσών) $A(1)=0$. Επομένως, το 1 είναι ρίζα της εξισώσεως $A(x)=0$. Τέλος, οι ορίζουσες $A(2), A(3)$ έχουν δύο στήλες με ίσα στοιχεία, συνεπώς θα ισχύει (με βάση την ιδιότητα D_5 των οριζουσών) $A(2)=0$ και $A(3)=0$. Επομένως τόσο το 2 όσο και το 3 είναι ρίζες της εξισώσεως $A(x)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.3.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & x \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να καταφύγετε σε ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες).

Λύση.

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη, τρίτη, τέταρτη και πέμπτη στήλη επί 1 και προσθέτοντάς τις στην πρώτη στήλη παίρνουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{bmatrix}$$

ο οποίος σύμφωνα με την ιδιότητα D_9 θα έχει ορίζουσα ίση με την ορίζουσα του πίνακα A , δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα D_8 , μπορούμε να γράψουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = (x+20) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & x & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & x & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & x & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την πρώτη γραμμή επί (-1) και προσθέτοντάς την στη δεύτερη, τρίτη, τέταρτη και πέμπτη γραμμή παίρνουμε

$$|A| = (x+20) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & x & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & x & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & x & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = (x+20) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας που βρήκαμε είναι άνω τριγωνικός, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα D_1 η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (x-5)^4 = (x-5)^4.$$

Επομένως τελικά $|A| = (x-5)^4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.4.

Αν A, B είναι δύο σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, αντίστοιχα, τότε η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A, B μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3.1)$$

Λύση.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής παίρνουμε

$$1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

η οποία γράφεται στη μορφή $ax + by = \gamma$ όπου $a = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}$ $\beta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$ $\gamma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Επομένως, η εξίσωση (2.3.1) αποτελεί πράγματι εξίσωση ευθείας. Επί πλέον, η (2.3.1) ικανοποιείται για $x=x_1, y=y_1$ και για $x=x_2, y=y_2$, αφού

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

(λόγω της ιδιότητας $\mathbf{D}_5$). Επομένως, η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A, B μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $(1, 2)$ και $(2, 1)$ είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y = 3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.5.

Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1+a & x & p & 1 \\ 1+\beta & y & q & 1 \\ 1+\gamma & w & r & 1 \\ 1+\delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

χωρίς να υπολογιστεί η ορίζουσα των πινάκων που εμφανίζονται.

Λύση.

Με βάση το αποτέλεσμα που αποδείχτηκε στο παράδειγμα 2.2.3, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{vmatrix} 1+a & x & p & 1 \\ 1+\beta & y & q & 1 \\ 1+\gamma & w & r & 1 \\ 1+\delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & p & 1 \\ 1 & y & q & 1 \\ 1 & w & r & 1 \\ 1 & z & s & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}$$

και αφού η πρώτη ορίζουσα είναι ίση με μηδέν (έχει δύο ίσες στήλες), θα έχουμε τελικά

$$\begin{vmatrix} 1+a & x & p & 1 \\ 1+\beta & y & q & 1 \\ 1+\gamma & w & r & 1 \\ 1+\delta & z & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & p & 1 \\ \beta & y & q & 1 \\ \gamma & w & r & 1 \\ \delta & z & s & 1 \end{vmatrix}.$$

Ασκήσεις.

2.3.1. Ένα πλοίο Π_1 κινείται σε ευθεία γραμμή από το λιμάνι A με συντεταγμένες $(0, 0)$ προς το λιμάνι B με συντεταγμένες $(5, 4)$. Ένα δεύτερο πλοίο Π_2 κινείται επίσης σε ευθεία γραμμή από το λιμάνι Γ με συντεταγμένες $(3, 1)$ προς το λιμάνι Δ με συντεταγμένες $(4, 5)$.

α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.3.4, να γράψετε τις εξισώσεις των τροχιών των δύο πλοίων στη μορφή

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1, \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2$$

β) Χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.1.8), να εξετάσετε αν οι τροχιές των δύο πλοίων τέμνονται σε κάποιο σημείο και αν ναι να το βρείτε.

2.3.2. Να διαπιστώσετε ότι οι ορίζουσες που δόθηκαν στην άσκηση 2.2.2 μπορούν να προκύψουν η μία από την άλλη με κατάλληλη εφαρμογή της ιδιότητας D_7 (περισσότερες από μία φορές).

2.3.3. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες D_{12} και D_5 των οριζουσών (ή εναλλακτικά, την ιδιότητα D_6) να αποδείξετε ότι οι ορίζουσες των επομένων πινάκων είναι ίσες με μηδέν.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.3.4. Να αποδείξετε ότι εξίσωση
$$\begin{vmatrix} x - \alpha - \beta & 2x & 2x \\ 2\alpha & \alpha - \beta - x & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta & \beta - x - \alpha \end{vmatrix} = 0$$
 έχει ως ρίζα την $x = -(\alpha + \beta)$.

2.3.5. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να υπολογίσετε τις τιμές τους με ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες) να διαπιστώσετε ότι οι επόμενες τέσσερις ορίζουσες μηδενίζονται για $\lambda = \pm 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.3.6. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1, 2 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ (x-1)^2 & 1 & 4 \\ (x-1)^3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3.7. Αν A, B, Γ είναι τρεις τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξεως να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.

$$A^4 B^3 \Gamma^T, (A^T)^3 (B^4)^T \Gamma^T, A^3 \Gamma B^4, (3A) B^2 (2\Gamma^T), 6B^2 \Gamma B^T, \Gamma^T B^3 A^4, B^3 \Gamma A^4, B^2 (6\Gamma) A^T$$

2.3.8. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B, Γ ίδιας τάξεως γνωρίζουμε ότι $|A| = 1$, $|B| = 2$, $|\Gamma| = 3$, να υπολογίσετε την ορίζουσα των επομένων πινάκων

$$AB\Gamma, A^T B\Gamma, A^3 B^2 \Gamma, 3AB^2 \Gamma^T, 3B^2 \Gamma A.$$

2.3.9. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A αν γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\alpha) A^T A = I_n$$

$$\beta) A^T A^2 = I_n$$

$$\gamma) A^3 = I_n$$

2.3.10. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο (δηλ. χωρίς να καταφύγετε σε ανάπτυγμα κατά γραμμές ή κατά στήλες).

2.3.11. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να βρείτε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & 16 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.3.12. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a^3 & 8a^3 & 27a^3 & 64a^3 \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 & 16a^2 \\ a & 2a & 3a & 4a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12a^6.$$

2.3.13. Να υπολογίσετε την ορίζουσα από τους επόμενους πίνακες, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών, ώστε να φτάσετε στην ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.14. Έστω τρία σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 2.3.4, να αποδείξετε ότι τα σημεία είναι συνευθειακά αν και

μόνο αν ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3.15. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & 1+\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & 1+\gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 1+\delta \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $1+\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 4, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A .

2.3.16. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz.$$

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 4, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τη τιμή της ορίζουσας του πίνακα A .

2.3.17. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα D_{13} των οριζουσών, να υπολογίσετε την ορίζουσα των επομένων πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2.4 Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα με χρήση οριζουσών.

Ας θεωρήσουμε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξεως 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

και ας συμβολίσουμε με $m_{ij} = |M_{ij}|$ την ελάχιστοα ορίζουσα του στοιχείου a_{ij} και με $c_{ji} = (-1)^{i+j} m_{ji} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} για $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Έστω ακόμη C ο πίνακας,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Προφανώς ο ανάστροφος πίνακας C^T θα έχει στη θέση (i, j) το στοιχείο $c_{ji} = (-1)^{i+j} m_{ji} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, δηλαδή

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.4.1)$$

Ο τελευταίος πίνακας ονομάζεται **προσαρτημένος πίνακας** του A και όπως θα δούμε στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα του A (όταν υπάρχει).

Μπορεί να αποδειχθεί (η απόδειξη παραλείπεται), ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα A τάξεως n ισχύει $A \cdot C^T = |A| \cdot I_n$.

Το αποτέλεσμα αυτό μας οδηγεί στην επόμενη πολύ χρήσιμη πρόταση.

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξεως n , $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ji} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} για $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, n$ και C^T ο ανάστροφος του πίνακα C , ο οποίος ονομάζεται **προσαρτημένος πίνακας** του A . Τότε:

α) Ισχύει ότι $A \cdot C^T = |A| \cdot I_n$.

β) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T \quad (2.4.2)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες D_{11} και D_3 μπορούμε να γράψουμε ότι: $|A| \cdot |A^{-1}| = |A A^{-1}| = |I_n| = 1$. Επομένως ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε η ορίζουσα του αντιστρόφου του θα δίνεται από τον τύπο

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \quad (2.4.3)$$

Ας εφαρμόσουμε στη συνέχεια τους τύπους που βρήκαμε για τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού

πίνακα, στην περίπτωση που έχουμε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξεως $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το (β), ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Στην περίπτωση αυτή, ο αντίστροφος του A θα δίνεται από τον τύπο (2.4.2) και είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$C = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Επομένως θα έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Έτσι καταλήγουμε και πάλι στον τύπο (1.4.2), ο οποίος αποδείχτηκε στο κεφάλαιο 1 με εντελώς διαφορετικό τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.1.

Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση.

Υπολογίζουμε αρχικά την ορίζουσα του A , η οποία είναι ίση με

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(12-1) - 1(6-0) = 27 \neq 0.$$

Για τις ελάχιστονες ορίζουσες $m_{ij} = |M_{ij}|$ των στοιχείων a_{ij} και τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

όπου $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$ βρίσκουμε

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11, \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(6-0) = -6, \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-0) = -3, \quad c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9, \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(3-0) = -3,$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-0) = -3, \quad c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10,$$

Επομένως

$$C = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Τέλος ο αντίστροφος του A , σύμφωνα με τον τύπο (2.4.2) θα είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.2.

Να βρεθεί ο αντίστροφος ενός διαγώνιου πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$

τάξεως 3, (όταν αυτός υπάρχει).

Λύση.

Σύμφωνα με την ιδιότητα D_2 των οριζουσών, η ορίζουσα του πίνακα A θα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή $|A| = a_{11} a_{22} a_{33}$.

Αν κάποιος από τους αριθμούς a_{11}, a_{22}, a_{33} είναι ίσος με μηδέν, θα έχουμε $|A| = a_{11} a_{22} a_{33} = 0$, οπότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Αν $a_{11} a_{22} a_{33} \neq 0$, (δηλ. αν και οι τρεις αριθμοί a_{11}, a_{22}, a_{33} είναι διαφορετικοί από το μηδέν) τότε $|A| = a_{11} a_{22} a_{33} \neq 0$ και μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα A με χρήση του τύπου (2.4.2).

Οι ελάχιστες ορίζουσες που αντιστοιχούν στα διαγώνια στοιχεία a_{11}, a_{22}, a_{33} είναι αντίστοιχα

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$$

και χρησιμοποιώντας και πάλι την ιδιότητα D_2 των οριζουσών βρίσκουμε

$$m_{11} = a_{22}a_{33}, \quad m_{22} = a_{11}a_{33}, \quad m_{33} = a_{11}a_{22}.$$

Οι ελάχιστες ορίζουσες που αντιστοιχούν στα εκτός διαγωνίου στοιχεία είναι όλες ίσες με μηδέν (έχουν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ίσα με μηδέν), οπότε ο πίνακας $C = [c_{ij}]$ είναι ο

$$C = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} \end{bmatrix}.$$

Επομένως, ο αντίστροφος του A , σύμφωνα με τον τύπο (2.4.2) θα είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{|A|} \cdot C = \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{bmatrix}.$$

Σημειώνεται ότι το αποτέλεσμα που προέκυψε μπορεί εύκολα να γενικευτεί για διαγώνιους πίνακες οποιασδήποτε τάξεως. Έτσι, αν $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$, ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Στην ειδική περίπτωση $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \cdots = a_{nn} = 1$ λαμβάνουμε τον αντίστροφο του μοναδιαίου πίνακα

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο προφανώς ισχύει $I_n^{-1} = I_n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4.3.

Αν για τους αντιστρέψιμους τετραγωνικούς πίνακες A, B ίδιου τύπου γνωρίζουμε ότι $|A| = 2$, $|B| = 4$, να υπολογιστεί η ορίζουσα των επομένων πινάκων.

$$A^{-1}B, AB^{-1}, (A^T B)^{-1} A^{-1}, (A^3)^{-1} B^T A^2 B^{-1}, (A^T B^T)^{-1} AB^2.$$

Λύση.

Εφαρμόζοντας την (2.4.4) και τις ιδιότητες D_{10}, D_{11} των οριζουσών (παράγρ. 2.3), παίρνουμε

$$|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2,$$

$$|AB^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$|(A^T B)^{-1} A^{-1}| = |(A^T B)^{-1}| \cdot |A^{-1}| = \frac{1}{|A^T B|} \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A^T| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{16}$$

$$|(A^3)^{-1} B^T A^2 B^{-1}| = |(A^3)^{-1}| \cdot |B^T| \cdot |A^2| \cdot |B^{-1}| = \frac{1}{|A^3|} \cdot |B| \cdot |A|^2 \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|B| \cdot |A|^2}{|A^3| \cdot |B|} = \frac{1}{2}$$

$$|(A^T B^T)^{-1} AB^2| = |(A^T B^T)^{-1}| \cdot |AB^2| = \frac{1}{|A^T B^T|} \cdot |A| \cdot |B|^2 = \frac{|A| \cdot |B|^2}{|A^T| \cdot |B^T|} = \frac{|A| \cdot |B|^2}{|A| \cdot |B|} = |B| = 4.$$

Ασκήσεις.

2.4.1. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Στην περίπτωση που είναι, να υπολογίσετε την ορίζουσα του αντίστροφου πίνακα, χωρίς να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.4.2. Να βρείτε τον αντίστροφο των επομένων πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4.3. Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B, Γ ίδιας τάξεως γνωρίζουμε ότι $|A| = |B| = |\Gamma| = 2$, να υπολογιστεί η ορίζουσα των επομένων πινάκων.

$$A^{-1}B\Gamma^T, (A^T B^{-1}\Gamma)^{-1}, A^3 B^T \Gamma^{-1}, A^{-1} B^{-1} \Gamma^{-1}, B^2 \Gamma^{-1} A^{-1}.$$

2.4.4. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως n , αν γνωρίζουμε ότι ισχύει $A^{-1} A^T = A^2$.

2.4.5. Αν A είναι ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας, να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $A^T A^{-1}$.

2.4.6. Να βρεθεί η τιμή του x έτσι, ώστε κανένας από τους επόμενους τρεις πίνακες να μην είναι αντιστρέψιμος.

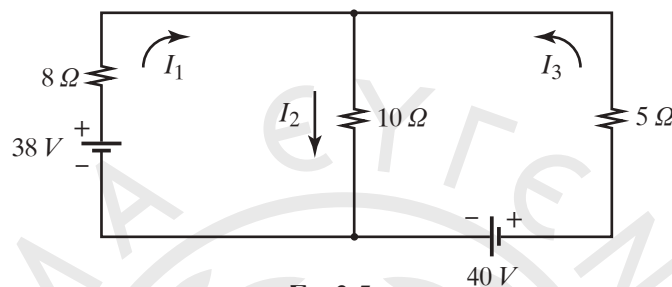
$$\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

2.5 Γραμμικά συστήματα εξισώσεων.

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου 2, πολλά προβλήματα Μηχανικής, Οικονομίας, Ηλεκτρονικής κ.λπ. μπορούν να μετασχηματιστούν σε προβλήματα λύσεως ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Θα αναφέρομε αμέσως τώρα δύο τέτοια προβλήματα και στη συνέχεια θα δούμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε στη λύση τους.

Πρόβλημα I.

Θεωρούμε το ηλεκτρικό δίκτυο του σχήματος 2.5α όπου οι αντιστάσεις εκφράζονται σε Ohm (Ω), η ένταση I ρεύματος σε Ampere (A) και η ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής σε volt (V).



Σχ. 2.5α.

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Kirchhoff μπορεί να διαπιστώσει κάποιος εύκολα ότι οι εντάσεις I_1, I_2, I_3 , ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 8I_1 + 10I_2 &= 38 \\ 10I_2 + 5I_3 &= 40 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Πρόβλημα II.

Ένα ναυπηγείο χρησιμοποιεί 4 διαφορετικά εξαρτήματα πλοίων A, B, Γ, Δ . Τα εξαρτήματα αυτά μπορεί να τα προμηθευτεί το ναυπηγείο μέσω τριών συσκευασιών M_1, M_2, M_3 , καθεμιά από τις οποίες περιέχει και τα τέσσερα είδη εξαρτημάτων, σε διαφορετικές ποσότητες την καθεμία. Η συσκευασία M_1 περιέχει 20 εξαρτήματα τύπου A , 40 εξαρτήματα τύπου B , 120 εξαρτήματα τύπου Γ , και 20 εξαρτήματα τύπου Δ . Η συσκευασία M_2 περιέχει 40 εξαρτήματα τύπου A , 60 εξαρτήματα τύπου B , 40 εξαρτήματα τύπου Γ και 60 εξαρτήματα τύπου Δ . Τέλος, η συσκευασία M_3 περιέχει 60 εξαρτήματα τύπου A , 60 εξαρτήματα τύπου B , 40 εξαρτήματα τύπου Γ , και 40 εξαρτήματα τύπου Δ . Αν οι μηνιαίες ανάγκες του ναυπηγείου είναι 400 μονάδες του εξαρτήματος A , 500 μονάδες του εξαρτήματος B , 520 μονάδες του εξαρτήματος Γ και 380 μονάδες του εξαρτήματος Δ , εκείνο που θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι να βρεθεί ποια ποσότητα πρέπει να προμηθευτεί από καθεμιά από τις συσκευασίες M_1, M_2, M_3 , ώστε να ικανοποιήσει τις μηνιαίες ανάγκες του και συγχρόνως να μην χρειαστεί να γίνει αποθήκευση εξαρτημάτων ή συσκευασιών που περίσσεψαν.

Για να δημιουργήσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για το Πρόβλημα II, ας συμβολίσουμε με x_1, x_2, x_3 το πλήθος των συσκευασιών από τα τρία είδη M_1, M_2, M_3 αντίστοιχα που πρέπει να προμηθευτεί το ναυπηγείο, ώστε να καλύψει τις ανάγκες ενός μήνα.

Στις x_1 συσκευασίες είδους M_1 θα υπάρχουν $20x_1$ εξαρτήματα τύπου A , στις x_2 συσκευασίες είδους M_2 θα υπάρχουν $40x_2$ εξαρτήματα τύπου A και στις x_3 συσκευασίες είδους M_3 θα υπάρχουν $60x_3$ εξαρτήματα τύπου A . Επομένως, το συνολικό πλήθος εξαρτημάτων τύπου A θα είναι:

$$20x_1 + 40x_2 + 60x_3$$

Οι αριθμοί $a_{ij}, i = 1, 2, 3, \dots, \mu$, και $j = 1, 2, 3, \dots, \nu$ ονομάζονται **συντελεστές των αγνώστων** ή απλά **συντελεστές του συστήματος**, ενώ οι αριθμοί $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ ονομάζονται σταθεροί όροι. Οι συντελεστές a_{ii} (δηλ. οι a_{11}, a_{22}, a_{33} κ.τ.λ.) ονομάζονται **διαγώνιοι συντελεστές** του συστήματος. Κάθε διατεταγμένη ν -άδα αριθμών που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις ενός $\mu \times \nu$ συστήματος ονομάζεται **λύση** του συστήματος.

Στην περίπτωση που σε μια εξίσωση του συστήματος λείπει ένας ή περισσότεροι από τους αγνώστους, τότε θεωρούμε ότι ο άγνωστος ή οι άγνωστοι έχουν συντελεστή το μηδέν. Έτσι το σύστημα (2.5.1) γράφεται

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$8I_1 + 10I_2 + 0I_3 = 38$$

$$0I_1 + 10I_2 + 5I_3 = 40$$

του οποίου λύση είναι η τριάδα (1,3,2).

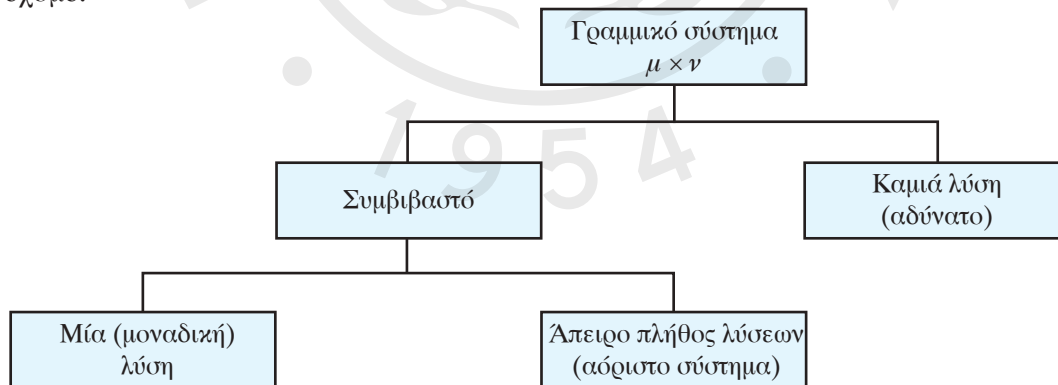
Η διαδικασία, με την οποία βρίσκουμε τις λύσεις ενός συστήματος ονομάζεται **επίλυση** του συστήματος. Ένα γραμμικό σύστημα που έχει μία τουλάχιστον λύση ονομάζεται **συμβιβαστό**, ενώ όταν δεν έχει λύσεις ονομάζεται **αδύνατο**.

Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**. Για παράδειγμα, τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad (\Sigma) \qquad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad (\Sigma')$$

είναι ισοδύναμα, αφού και τα δύο έχουν μοναδική λύση τη δυάδα (1,2). Συμβολικά τότε θα γράφομε $(\Sigma) \sim (\Sigma')$.

Αποδεικνύεται ότι ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα έχει είτε μια μοναδική λύση, είτε άπειρες λύσεις. Δεν μπορεί δηλαδή να έχει δύο, τρεις ή οποιοδήποτε άλλο πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Συνοπτικά έχουμε:



Αν στο γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$ οι σταθεροί όροι $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ είναι όλοι μηδέν, δηλαδή

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\nu}x_\nu = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\nu}x_\nu = 0$$

.....

$$a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \dots + a_{\mu \nu}x_\nu = 0$$

τότε το σύστημα ονομάζεται **ομογενές**.

Η n -άδα $(0,0,0,\dots,0)$ επαληθεύει πάντοτε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$, επομένως ένα τέτοιο σύστημα δεν μπορεί να είναι αδύνατο. Άρα, το ομογενές σύστημα είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει μοναδική λύση (τη μηδενική), είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες.

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί σύντομα ως μία ισότητα με τη βοήθεια της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων. Πράγματι, επιστρέφοντας στο Παράδειγμα II, μπορούμε να παρουσιάσουμε τις τέσσερις εξισώσεις του συστήματος (2.5.4) ως ισότητα δύο πινάκων στηλών με τον εξής τρόπο

$$\begin{bmatrix} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}. \quad (2.5.6)$$

Ορίζοντας τους πίνακες,

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας 4×1 του πρώτου μέλους της (2.5.6) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο,

$$AX = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 \end{bmatrix}$$

και η (2.5.6) παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}$$

ή ακόμη $AX = B$. Ομοίως, το σύστημα (2.5.1) γράφεται στην ίδια μορφή $AX = B$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 38 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, το γραμμικό σύστημα (2.5.1) των μ εξισώσεων με ν αγνώστους γράφεται

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}. \quad (2.5.7)$$

ή ισοδύναμα $AX=B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

ο **πίνακας των συντελεστών των αγνώστων** και

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ο **πίνακας (στήλη) των αγνώστων** και ο **πίνακας (στήλη) των σταθερών όρων** αντίστοιχα.

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η εύρεση γενικών μεθόδων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, δηλαδή τον προσδιορισμό του άγνωστου πίνακα X , δεδομένου του πίνακα A και του πίνακα B .

Για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έχουν προταθεί αρκετές διαφορετικές μέθοδοι. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε μία απλή μέθοδο, τη μέθοδο της αντικαταστάσεως, ενώ στην επόμενη παράγραφο θα αναλύσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss, η οποία προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων αλγεβρικών συστημάτων και χρησιμοποιείται από πολλά υπολογιστικά προγράμματα που παρέχουν τη δυνατότητα επιλύσεως γραμμικών συστημάτων.

Τέλος στην παράγραφο 2.7 θα περιγράψουμε τρεις ακόμη μεθόδους, τη μέθοδο του Cramer, τη μέθοδο της αντιστροφής πίνακα και τη μέθοδο της τριγωνικής παραγοντοποίησης, οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε συστήματα, όπου ο A είναι τετραγωνικός πίνακας (δηλ. σε συστήματα με ίσο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων).

Σημειώνουμε ότι, η επιλογή της μεθόδου που είναι προτιμότερη κάθε φορά εξαρτάται από το μέγεθος και τη μορφή του κάθε συστήματος.

Η **μέθοδος της απλής αντικαταστάσεως** είναι η απλούστερη διαθέσιμη μέθοδος και μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά μόνο για συστήματα που έχουν μικρό αριθμό εξισώσεων. Πρώτο βήμα είναι η επίλυση κάποιας από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και η αντικατάσταση του αγνώστου αυτού στις άλλες εξισώσεις. Προκύπτει έτσι ένα νέο σύστημα, μικρότερο από το αρχικό κατά μία εξίσωση και έναν άγνωστο. Στο νέο σύστημα επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία (επίλυση κάποιας από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και αντικατάσταση του αγνώστου αυτού στις άλλες εξισώσεις) μέχρις ότου να φτάσουμε σε:

α) **Μία εξίσωση με έναν άγνωστο.** Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε αρχικά τον άγνωστο λύνοντας την εξίσωση αυτή και ακολουθούμε αντίστροφα βήματα, αντικαθιστώντας κάθε φορά το αποτέλεσμα στις ενδιαμέσες εξισώσεις, ώστε να υπολογίσουμε και τους υπόλοιπους αγνώστους.

β) **Πολλές εξισώσεις με έναν άγνωστο.** Στην περίπτωση αυτή λύνουμε τη μία από αυτές και αντικαθιστούμε τη λύση στις υπόλοιπες. Αν όλες επαληθεύονται, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση (που βρίσκεται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση). Αν κάποια από τις υπόλοιπες δεν επαληθεύεται, το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) *Μία ή περισσότερες εξισώσεις με πλήθος αγνώστων που υπερβαίνουν το πλήθος των εξισώσεων.* Τότε ορισμένοι από τους αγνώστους μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα και να εκφραστούν οι υπόλοιποι άγνωστοι μέσω αυτών. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο σύστημα).

Σημειώνουμε επίσης ότι, σε περίπτωση που κατά τη διαδικασία των αντικαταστάσεων προκύψει προφανής ισότητα (ταυτότητα), τότε την αγνοούμε και συνεχίζουμε με τις υπόλοιπες, ενώ αν προκύψει μία ισότητα που δεν ισχύει, τότε το αρχικό σύστημα θα είναι αδύνατο.

Στο σύστημα (2.5.1), η μέθοδος της αντικαταστάσεως είναι αρκετά αποτελεσματική, αφού θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να λύσουμε ως προς I_1 και I_3 τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνοντας

$$I_1 = \frac{38-10I_2}{8}, \quad I_3 = \frac{40-10I_2}{5}$$

και αντικαθιστώντας τις τελευταίες στην πρώτη να πάρουμε την επόμενη εξίσωση μ' έναν άγνωστο

$$\frac{38-10I_2}{8} - I_2 + \frac{40-10I_2}{5} = 0.$$

Λύνοντας προκύπτει ότι $I_2=3$ και αντικαθιστώντας στις προηγούμενες παίρνουμε

$$I_1 = \frac{38-10 \cdot 3}{8} = 1, \quad I_3 = \frac{40-10 \cdot 3}{5} = 2.$$

Άρα η λύση του συστήματος θα είναι η $I_1=1, I_2=3, I_3=2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.1.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικαταστάσεως

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7.$$

Λύση.

Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς x_1 (γενικά προτιμάμε να λύνουμε ως προς αγνώστους που δεν δημιουργούν κλάσματα κατά τη λύση, ώστε να διευκολυνόμαστε στις πράξεις), βρίσκουμε

$$x_1 = -1 + x_2 + x_3$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τρίτη παίρνουμε το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} 2(-1+x_2+x_3) - x_2 + x_3 &= 3 & x_2 + 3x_3 &= 5 \\ (-1+x_2+x_3) - 3x_2 + 2x_3 &= 7 & -2x_2 + 3x_3 &= 8. \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος αυτού ως προς x_2 παίρνουμε $x_2 = 5 - 3x_3$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει

$$-2(5-3x_3) + 3x_3 = 8.$$

Επομένως θα έχουμε $9x_3 = 18 \Leftrightarrow x_3 = 2$, οπότε

$$x_2 = 5 - 3x_3 = 5 - 3 \cdot 2 = -1,$$

$$x_1 = -1 + x_2 + x_3 = -1 + (-1) + 2 = 0.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.2.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικατάστασης

$$x_1 - x_2 + x_4 = 3$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$3x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

Λύση.

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x_1 , βρίσκουμε $x_1 = x_2 - x_4 + 3$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση (η τρίτη δεν περιέχει τον άγνωστο x_1) παίρνουμε το επόμενο σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους

$$\begin{array}{rcl} 2(x_2 - x_4 + 3) + x_2 - x_3 = 2 & & 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 & \text{ή ισοδύναμα} & 3x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{array}$$

Ομοίως, λύνοντας την πρώτη εξίσωση του νέου συστήματος ως προς x_3 , βρίσκουμε $x_3 = 3x_2 - 2x_4 + 4$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε $3x_2 + (3x_2 - 2x_4 + 4) - x_4 = 3 \Leftrightarrow 6x_2 - 3x_4 = -1$.

Αφού έχουμε μία μόνο εξίσωση με δύο αγνώστους, μπορούμε να επιλέξουμε έναν από τους αγνώστους αυθαίρετα και να εκφράσουμε τους υπόλοιπους μέσω αυτού. Πράγματι, θέτοντας $x_4 = \lambda$ όπου $\lambda \in \mathbf{R}$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3x_4 - 1}{6} = \frac{3\lambda - 1}{6}, \\ x_3 &= 3 \cdot \frac{3\lambda - 1}{6} - 2\lambda + 4 = \frac{21 - 3\lambda}{6} = \frac{7 - \lambda}{2}, \\ x_1 &= x_2 - x_4 + 3 = \frac{3\lambda - 1}{6} - \lambda + 3 = \frac{17 - 3\lambda}{6}. \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{17 - 3\lambda}{6}, \frac{3\lambda - 1}{6}, \frac{7 - \lambda}{2}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.3.

Να λυθεί το επόμενο σύστημα με τη μέθοδο της απλής αντικατάστασης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 10$$

Λύση.

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x_1 , βρίσκουμε $x_1 = -x_2 - x_3 + 6$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε το επόμενο σύστημα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} (-x_2 - x_3 + 6) - x_2 + 2x_3 &= 5 & -2x_2 + x_3 &= -1 \\ (-x_2 - x_3 + 6) + 5x_2 - 2x_3 &= 1 & \text{ή ισοδύναμα} & 4x_2 - 3x_3 = -5 \\ (-x_2 - x_3 + 6) + 2x_2 - x_3 &= 10 & x_2 - 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Ομοίως, λύνοντας την πρώτη εξίσωση του νέου συστήματος ως προς x_3 , βρίσκουμε $x_3 = 2x_2 - 1$ και αντικαθιστώντας στις δύο τελευταίες θα πάρουμε

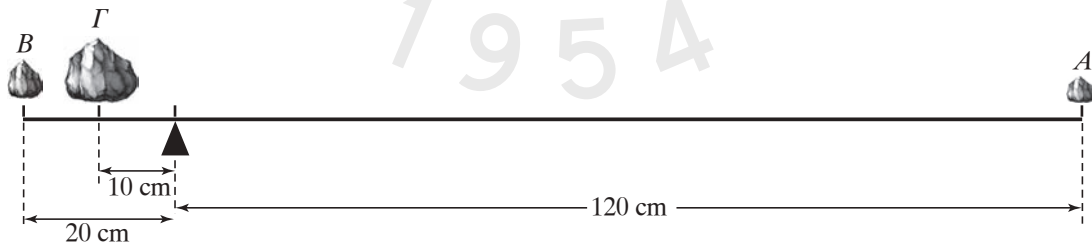
$$\begin{aligned} 4x_2 - 3 \cdot (2x_2 - 1) &= -5 & -2x_2 &= -8 \\ x_2 - 2 \cdot (2x_2 - 1) &= 4 & \text{ή ισοδύναμα} & -3x_2 = 2. \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε τη λύση $x_2 = 4$, η οποία προφανώς δεν επαληθεύει τη δεύτερη. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

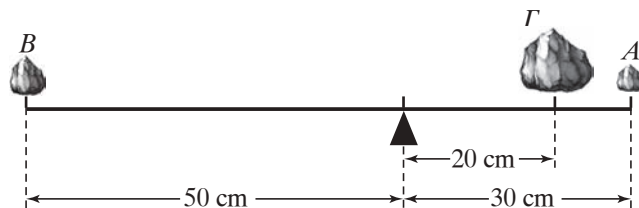
Ασκήσεις.

2.5.1. Κατά τη μεταφορά ενός ογκόλιθου 1000 kg, από αδέξιο χειρισμό του φορτωτή, ο ογκόλιθος έπεσε και έσπασε σε τρία κομμάτια A , B , Γ . Μετά τη θραύση χρειάστηκε να προσδιοριστεί το βάρος των τριών τεμαχίων. Λόγω ελλείψεως ζυγαριάς ο χειριστής σκέφτηκε το εξής τέχνασμα. Τοποθέτησε τα τρία τεμάχια επάνω σε μια σιδηροδοκό με δύο διαφορετικούς τρόπους, ώστε να ισορροπήσουν και μέτρησε τις αποστάσεις από το σημείο στηρίξεως, οι οποίες ήταν όπως δείχνουν τα σχήματα 2.5β και 2.5γ.

- α) Αν συμβολίσουμε με x, y, z τα βάρη των τριών κομματιών, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z .
- β) Να βρείτε τα βάρη των τριών κομματιών, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

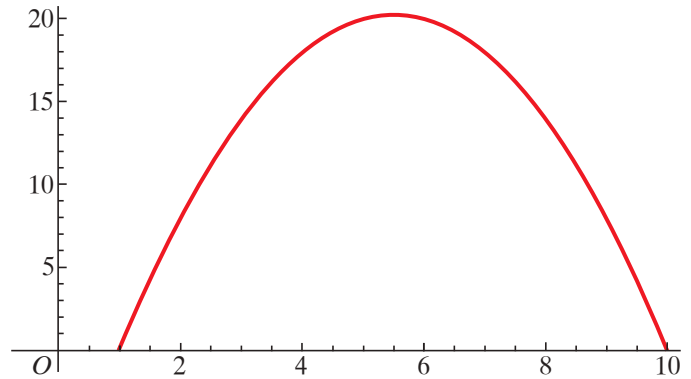


Σχ. 2.5β.



Σχ. 2.5γ.

2.5.2. Η τροχιά μιας τροchioδεικτικής βολίδας (σχ. 2.5δ) που εκτοξεύεται από το σημείο με συντεταγμένες $(1,0)$ είναι παραβολή με εξίσωση της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς της βολίδας αν είναι γνωστό ότι αυτή περνάει από τα σημεία με συντεταγμένες $(x,y)=(2,8), (5,20)$.



Σχ. 2.5δ.

2.5.3. Να γράψετε στη μορφή (2.5.5) τα γραμμικά συστήματα που περιγράφουν οι επόμενες ισότητες.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.5.4. Να γράψετε τα επόμενα συστήματα στη μορφή $AX=B$, όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας των αγνώστων και B ο πίνακας των σταθερών όρων.

α) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -9$

$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -3$

β) $x + y + z = 5$

$x - y + z = 2$

$3x + y + 3z = 12$

γ) $x - 3\omega = 0$

$x + \omega = 0$

$3x - 2\omega = 0$

$x - y + \omega - z = 6$

δ) $x + 2y + 3z = 7$

$x + 4y + 9z = 3$

$x - 4y + 3z = 0$

$x + 7y + 3z = 4$

ε) $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

στ) $2x + 3y + 4\omega + 5z = 6$

$x + y = 1$

$y + \omega = 2$

$y + z = 3$

$x + y + z = 4$

2.5.5. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

α) $x + y + z = 5$

$x - y + z = 2$

$3x + y + 3z = 12$

β) $x + y + \omega + z = 10$

$x + y = 3$

$y + \omega = 5$

$y + z = 6$

γ) $x + 2y + z = 7$

$x + 3y + 9z = 13$

$x - y + z = 0$

$x + y + z = 4$

δ) $x + y + 3z = 6$

$x + 2y + z = 4$

$2x + y + z = 4$

$x + y + 2z = 4$

$x + y + z = 3$

2.5.6. Μια τριγωνική πλατεία έχει περίμετρο 120 m. Η μεγαλύτερη πλευρά της είναι κατά 40 m μεγαλύτερη από τη μικρότερη, ενώ η τρίτη πλευρά διαφέρει από τη μεγαλύτερη όσο και από τη μικρότερη.

α) Αν συμβολίσουμε με x, y, z τα μήκη των τριών πλευρών της πλατείας, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z .

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

2.5.7. Μια εταιρεία που πουλάει καλάθια ποτών σε συσκευασία δώρου, διαθέτει τρεις συσκευασίες α, β, γ με διάφορα ποτά. Το κάθε καλάθι περιέχει μπουκάλια από κρασί, ούισκι και βότκα. Στη συσκευασία α τοποθετούνται 2 μπουκάλια κρασί, 1 μπουκάλι ούισκι και 3 μπουκάλια βότκα. Στη συσκευασία β τοποθετούνται 3 μπουκάλια κρασί και 2 μπουκάλια ούισκι, ενώ τέλος, στη συσκευασία γ τοποθετούνται 4 μπουκάλια κρασί και 4 μπουκάλια βότκα. Η εταιρεία, έχει στην αποθήκη της 90 μπουκάλια κρασί, 30 μπουκάλια ούισκι και 70 μπουκάλια βότκα και θέλει να κατασκευάσει τόσες συσκευασίες, ώστε να χρησιμοποιηθούν όλα τα ποτά της αποθήκης.

α) Αν συμβολίσουμε με x, y, z τον αριθμό συσκευασιών α, β, γ που θα κατασκευάσει η εταιρεία, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z .

β) Να βρείτε τον αριθμό συσκευασιών α, β, γ , λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

2.5.8. Μία μεταλλευτική εταιρεία έχει δύο μεταλλεία I και II που παράγουν μετάλλευμα υψηλής, χαμηλής και μεσαίας ποιότητας. Το μεταλλείο I παράγει κάθε ημέρα 1 τόνο υψηλής, 4 τόνους μεσαίας και 3 τόνους χαμηλής ποιότητας μεταλλεύματος, ενώ το μεταλλείο II παράγει κάθε ημέρα 2 τόνους υψηλής, 3 τόνους μεσαίας και 1 τόνο χαμηλής ποιότητας μεταλλεύματος. Αν η εταιρεία είναι υποχρεωμένη να παραδώσει 15 τόνους υψηλής, 35 τόνους μεσαίας και 20 τόνους χαμηλής ποιότητας μεταλλεύματος,

α) Να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι αριθμοί ημερών x, y που θα πρέπει να εργαστούν τα δύο μεταλλεία I και II αντίστοιχα, ώστε να ικανοποιηθεί ολόκληρη η ζήτηση, χωρίς να υπάρξει περίσσειμα στην παραγωγή κανενός είδους μεταλλεύματος.

β) Λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης να διαπιστώσετε ότι δεν μπορούν να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές των x, y ώστε να επιτευχθεί το ζητούμενο.

2.6 Η μέθοδος απαλοιφής.

Η διαδικασία της επίλυσης συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής συνίσταται στην πρόσθεση σε κάθε εξίσωση καταλλήλων πολλαπλασίων μιας άλλης, ώστε το σύστημα να οδηγηθεί σε απλούστερο ισοδύναμο σύστημα. Συνήθως ξεκινάμε από την πρώτη εξίσωση, την οποία πολλαπλασιάζουμε κατάλληλα και την προσθέτουμε στις επόμενες, ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου σ' αυτές. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, την οποία επίσης πολλαπλασιάζουμε κατάλληλα και την προσθέτουμε στις επόμενες κ.ο.κ..

Ο στόχος είναι να καταλήξουμε σ' ένα τριγωνικό σύστημα, το οποίο μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης, ξεκινώντας από την εξίσωση με τους λιγότερους αγνώστους και πηγαίνοντας προς τα πίσω μέχρι να υπολογιστούν όλοι οι άγνωστοι.

Όπως ήδη αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, η μέθοδος της απαλοιφής προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων αλγεβρικών συστημάτων και χρησιμοποιείται από πολλά υπολογιστικά προγράμματα επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Προκειμένου να παρουσιάσουμε συστηματικότερα την παραπάνω μέθοδο, θα ταξινομήσουμε αρχικά τις ενέργειες που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν σε τρεις διαδικασίες ως εξής:

	Διαδικασία	Συμβολισμός
1.	Εναλλαγή της θέσεως των εξισώσεων που βρίσκονται στη θέση i και j (εξισώσεις ε_i και ε_j)	$\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$
2.	Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση i (εξίσωση ε_i) με εκείνη που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της με ένα μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$)	$\varepsilon_i \rightarrow \lambda \varepsilon_i$
3.	Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση i (εξίσωση ε_i) με εκείνη που προκύπτει αν και στα δύο μέλη της προσθέσουμε τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης που βρίσκεται στη θέση j πολλαπλασιασμένα μ' ένα μη μηδενικό αριθμό λ ($\lambda \neq 0$).	$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i + \lambda \varepsilon_j$

Αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε οποιαδήποτε από τις παραπάνω τρεις διαδικασίες, τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό (η απόδειξη παραλείπεται).

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες διαδικασίες για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, προσπαθώντας μέσω αυτών να το μετασχηματίσουμε σε ένα ισοδύναμο σύστημα, του οποίου η λύση να προκύπτει εύκολα. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι, με εφαρμογή ενός πεπερασμένου πλήθους διαδικασιών της παραπάνω μορφής μπορούμε να πάρουμε ένα ισοδύναμο σύστημα, στο οποίο οι συντελεστές που βρίσκονται κάτω από τους διαγώνιους συντελεστές να είναι μηδενικοί. Η λύση του τελευταίου συστήματος γίνεται πολύ απλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Για παράδειγμα ας προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το σύστημα (2.5.4) που προέκυψε από την ανάλυση του Προβλήματος II της παραγράφου 2.5.

Κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \rightarrow \frac{1}{20} \varepsilon_i$, διαιρούμε αρχικά όλα τα μέλη όλων των εξισώσεων του συστήματος με τον αριθμό 20, ώστε ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου στην πρώτη εξίσωση να γίνει μονάδα (αυτό δεν είναι υποχρεωτικό, αλλά γίνεται για διευκόλυνση των πράξεων). Έτσι, με εφαρμογή των διαδικασιών

$$\varepsilon_i \rightarrow \frac{1}{20} \varepsilon_i, \quad i=1,2,3,4$$

παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 25 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της 1ης εξισώσεως του (Σ_1) με -2 και τα προσθέτουμε στα αντίστοιχα μέλη της 2ης εξισώσεως του (Σ_1) . Έτσι απαλείφεται από την 2^η εξίσωση ο άγνωστος x_1 . Πιο συγκεκριμένα, με εφαρμογή της διαδικασίας

$$\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 + (-2) \varepsilon_1$$

παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases} \quad (\Sigma_2)$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της 1ης εξισώσεως του (Σ_2) με -6 και τα προσθέτουμε στα μέλη

της $3^{\text{ης}}$ [εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + (-6) \varepsilon_1$]. Έτσι απαλείφεται και από την $3^{\text{η}}$ εξίσωση ο άγνωστος x_1 αφού παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases} \quad (\Sigma_3)$$

Πολλαπλασιάζουμε επίσης τα μέλη της 1ης εξισώσεως του (Σ_3) με -1 και τα προσθέτουμε στα μέλη της $4^{\text{ης}}$ εξισώσεως [εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + (-1) \varepsilon_1$]. Έτσι απαλείφεται ο άγνωστος x_1 και από την $4^{\text{η}}$ εξίσωση, αφού παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \quad (\Sigma_4)$$

Στο σύστημα (Σ_4) έχουμε επιτύχει οι συντελεστές του αγνώστου x_1 να μηδενιστούν σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη. Ο επόμενος στόχος είναι να μηδενιστούν οι συντελεστές του αγνώστου x_2 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από τη δεύτερη.

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + (-10) \cdot \varepsilon_2$ προκύπτει το:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ 14x_3 = 56 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \quad (\Sigma_5)$$

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + 1 \cdot \varepsilon_2$ παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ 14x_3 = 56 \\ -4x_3 = -16 \end{cases} \quad (\Sigma_6)$$

και φτάσαμε πλέον σ' ένα σύστημα, στο οποίο έχουν μηδενιστεί οι συντελεστές του αγνώστου x_1 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη εξίσωση και όλοι οι συντελεστές του αγνώστου x_2 σε όλες τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από τη δεύτερη.

Τέλος μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία $\varepsilon_5 \rightarrow \varepsilon_4 + (\frac{4}{14})\varepsilon_3$, οπότε παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ 14x_3 = 56 \\ 0x_3 = 0. \end{cases} \quad (\Sigma_7)$$

Προφανώς, η τελευταία εξίσωση αποτελεί ταυτότητα (ισχύει πάντοτε), οπότε μπορεί να παραληφθεί (γενικά, αν κατά την επίλυση ενός συστήματος παρουσιαστεί μια εξίσωση της μορφής: $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$, τότε η εξίσωση αυτή παραλείπεται).

Επομένως, το σύστημα (Σ_7) είναι ισοδύναμο με το σύστημα των τριών πρώτων εξισώσεων, δηλαδή το

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ -x_2 - 3x_3 = -15 \\ 14x_3 = 56. \end{cases} \quad (\Sigma_8)$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $x_3 = 4$ και αν αντικαταστήσουμε την τιμή $x_3 = 4$ στη δεύτερη εξίσωση του (Σ_8) , μπορούμε να υπολογίσουμε το $x_2 = 3$. Ομοίως θέτοντας $x_2 = 3$ και $x_3 = 4$ στην πρώτη εξίσωση του (Σ_8) , βρίσκουμε $x_1 = 2$.

Επειδή το σύστημα (Σ_8) είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα (2.5.3), συμπεραίνουμε ότι το σύστημα (2.5.3) έχει μοναδική λύση την τριάδα (2,3,4), δηλαδή

$$x_1 = 2, x_2 = 3 \text{ και } x_3 = 4.$$

Η διαδικασία επιλύσεως ενός γραμμικού συστήματος με την προηγούμενη μέθοδο, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία **μέθοδος απαλοιφής**, περιγράφεται αλγοριθμικά με τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1: Φροντίζουμε, κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$, αν υπάρχει ανάγκη, ο συντελεστής του αγνώστου x_1 στην πρώτη εξίσωση να γίνει μη μηδενικός. Αυτός ο συντελεστής ονομάζεται **στοιχείο-οδηγός** ή απλώς **οδηγός**.

Βήμα 2: Απαλείφουμε τον άγνωστο x_1 από τις εξισώσεις που βρίσκονται κάτω από την πρώτη, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i + \lambda \varepsilon_1$.

Βήμα 3: Αγνοώντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος και τον πρώτο άγνωστο, επαναλαμβάνουμε τα Βήματα 1 και 2 στις υπόλοιπες $\mu - 1$ εξισώσεις και $\nu - 1$ αγνώστους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται ανάλογα και στις $\mu - 2, \mu - 3, \mu - 4, \dots, 2$ εξισώσεις, δηλαδή ώσπου να μηδενιστούν όλοι οι συντελεστές των αγνώστων που είναι κάτω από τους διαγώνιους συντελεστές.

Για λόγους ευκολίας στις πράξεις, είναι καλό, κατά την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής:

α) Να φροντίζουμε, ώστε οι εξισώσεις να έχουν ακέραιους ή κλασματικούς συντελεστές (αν οι συντελεστές είναι δεκαδικοί αριθμοί, αυτό μπορεί συνήθως να επιτευχθεί με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_i \rightarrow \lambda \varepsilon_i$),

β) Να φροντίζουμε η εξίσωση που χρησιμοποιούμε για να μηδενίσουμε επόμενους συντελεστές αγνώστων να έχει συντελεστή του πρώτου αγνώστου το 1 (αυτό μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση της διαδικασίας $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$ και της διαδικασίας $\varepsilon_i \rightarrow \lambda \varepsilon_i$).

Χρησιμοποιώντας αυτές τις υποδείξεις, τα τελευταία βήματα της πορείας επιλύσεως του συστήματος (2.5.3) (από το (Σ_4) και μετά) τροποποιούνται ως εξής:

Εφαρμόζουμε τη διαδικασία $\varepsilon_2 \rightarrow (-1)\varepsilon_2$ στο (Σ_4) , ώστε να κάνουμε το συντελεστή του x_2 ίσο με 1, οπότε παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_2 + 3x_3 = 15 \\ -10x_2 - 16x_3 = -94 \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \quad (\Sigma_5)$$

Με εφαρμογή σ' αυτό της διαδικασίας $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + 10 \cdot \varepsilon_2$ προκύπτει:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_2 + 3x_3 = 15 \\ 14x_3 = 56 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_6)$$

και, χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη διαδικασία $\varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + (-1) \varepsilon_2$, παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_2 + 3x_3 = 15 \\ 14x_3 = 56 \\ -4x_3 = -16. \end{cases} \quad (\Sigma_7)$$

Κάνουμε το συντελεστή του x_3 ίσο με 1 εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \rightarrow (\frac{1}{14}) \varepsilon_3$, οπότε βρίσκουμε:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_3 = 4 \\ -4x_3 = -16. \end{cases} \quad (\Sigma_8)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + 4\varepsilon_3$ καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_3 = 4 \\ 0x_3 = 0. \end{cases} \quad (\Sigma_9)$$

και τα βήματα από το σημείο αυτό και κάτω είναι όμοια με αυτά που έγιναν πριν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6.1.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$
 με τη μέθοδο της απαλοιφής (το ίδιο σύστημα, λύθηκε

στο παράδειγμα 2.5.1 με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως).

Λύση.

Με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 + (-2) \varepsilon_1$, παίρνουμε το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Κάνουμε το συντελεστή του x_2 στη δεύτερη εξίσωση ίσον με 1, εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_2 \rightarrow \frac{1}{3}\varepsilon_2$, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{4}{3} \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 - 3\varepsilon_2$ παίρνουμε

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{4}{3} \\ 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Θέτοντας $x_4 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ η τρίτη εξίσωση δίνει $2x_3 = 7 - \lambda \Leftrightarrow x_3 = \frac{7 - \lambda}{2}$.

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{7 - \lambda}{2}\right) + \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{3} = \frac{7 - \lambda + 4\lambda - 8}{6} = \frac{3\lambda - 1}{6}$.

Τέλος, αντικαθιστώντας τα x_2, x_3 στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$x_1 = 3 + x_2 - x_4 = 3 + \frac{3\lambda - 1}{6} - \lambda = \frac{18 + 3\lambda - 1 - 6\lambda}{6} = \frac{17 - 3\lambda}{6}.$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{17 - 3\lambda}{6}, \frac{3\lambda - 1}{6}, \frac{7 - \lambda}{2}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6.2.

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

με τη μέθοδο της απαλοιφής.

Λύση.

Με εφαρμογή της διαδικασίας $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη διαδικασία $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + (-6)\varepsilon_1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 13x_2 - 10x_3 - 10x_4 = -10 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Ο συντελεστής του x_2 στη δεύτερη εξίσωση είναι ίσος με 1, οπότε συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τη διαδικασία $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + (-13)\varepsilon_2$ και οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 42x_3 - 36x_4 = -114 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Με εφαρμογή στο τελευταίο σύστημα της διαδικασίας $\varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + (-1)\varepsilon_2$ βρίσκουμε

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 42x_3 - 36x_4 = -114 \\ 0x_3 + 0x_4 = -3 \end{cases}$$

και αφού η τελευταία εξίσωση δεν επαληθεύεται για καμμία τιμή των x_3, x_4 , το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Γενικά, αν κατά την επίλυση ενός συστήματος παρουσιαστεί μια εξίσωση της μορφής

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_r = \beta \text{ με } \beta \neq 0,$$

τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο να συνεχίσουμε τη διαδικασία μέχρι το τέλος.

Ασκήσεις.

2.6.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της απαλοιφής.

$$\alpha) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = -3 \\ 4x - 5y + 7z = -3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

(2.7.1), ώστε να λάβουμε τη λύση του συστήματος στη μορφή

$$X = A^{-1}B.$$

Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστροφος πίνακας υπολογίζεται από τον τύπο (2.4.2).

Λόγω της εμπλοκής πολλών πράξεων στη διαδικασία ευρέσεως του αντιστρόφου, η μέθοδος της αντιστροφής δεν προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων συστημάτων. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι διευκολύνει την επίλυση πολλών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα A , αλλά διαφορετικό δεξί μέλος B . Στις υπόλοιπες περιπτώσεις και ιδιαίτερα όταν έχουμε να εργαστούμε με μεγάλα συστήματα, η χρήση της μεθόδου αυτής καλόν θα είναι να αποφεύγεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7.1.

Να λύσετε τα συστήματα

$$\begin{array}{lll} 3x_1 + x_2 = 1 & 3x_1 + x_2 = 0 & 3x_1 + x_2 = 1 \\ \alpha) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 & \beta) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 & \gamma) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 1 & x_2 + 3x_3 = 1 & x_2 + 3x_3 = 1. \end{array}$$

Λύση.

α) Έχουμε το σύστημα $AX=B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Όμως, σύμφωνα με τους υπολογισμούς που έγιναν στο παράδειγμα 2.4.1, ο αντίστροφος πίνακας του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix}$$

οπότε η λύση του συστήματος θα δίνεται ως εξής

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $x_1 = 1/3, x_2 = 0, x_3 = 1/3$.

β) Το σύστημα γράφεται στη μορφή $AX=B_1$, όπου A είναι ο πίνακας που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως και

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$X = A^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/27 \\ -3/37 \\ 10/27 \end{bmatrix}.$$

γ) Και αυτό το σύστημα γράφεται στη μορφή $AX = B_2$, όπου A είναι ο πίνακας που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως και

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$X = A^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/27 \\ -6/27 \\ 2/27 \end{bmatrix}$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x_1, x_2, x_3

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \beta_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \beta_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \beta_3$$

και ας εξετάσουμε τη μορφή που παίρνει η λύση του $X = A^{-1}B$, στην περίπτωση που ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.4.2), ο οποίος δίνει τον αντίστροφο πίνακα του A , θα έχουμε

$$X = A^{-1}B = \left(\frac{1}{|A|} C^T \right) B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

ή ακόμη

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11}\beta_1 + c_{21}\beta_2 + c_{31}\beta_3 \\ c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + c_{32}\beta_3 \\ c_{13}\beta_1 + c_{23}\beta_2 + c_{33}\beta_3 \end{bmatrix},$$

όπου $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ είναι τα αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} για $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Επομένως, η λύση του συστήματος θα είναι η

$$x_1 = \frac{c_{11}\beta_1 + c_{21}\beta_2 + c_{31}\beta_3}{|A|}, \quad x_2 = \frac{c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + c_{32}\beta_3}{|A|}, \quad x_3 = \frac{c_{13}\beta_1 + c_{23}\beta_2 + c_{33}\beta_3}{|A|}.$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση που βρήκαμε για το x_1 τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad c_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad c_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

παίρνουμε

$$x_1 = \frac{\beta_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \beta_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Όμως η έκφραση που υπάρχει στον αριθμητή αποτελεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής, και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_{x_1}}{D}.$$

όπου με D συμβολίσαμε την ορίζουσα του πίνακα A και με

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

την ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσουμε τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_1 με τη στήλη των σταθερών όρων. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι αντίστοιχοι τύποι προκύπτουν για τους αγνώστους x_2, x_3 , δηλαδή

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}$$

όπου

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 & a_{13} \\ a_{21} & \beta_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & \beta_3 \end{vmatrix},$$

είναι οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν αντικαταστήσουμε τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_2 με τη στήλη των σταθερών όρων και τη στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_3 με τη στήλη των σταθερών όρων αντίστοιχα.

Οι τύποι που προέκυψαν προηγουμένως για το σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους μπορούν να γενικευθούν για οποιοδήποτε τετραγωνικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους (γραμμικό

σύστημα $n \times n$). Πιο συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα, στο οποίο η λύση ενός γραμμικού συστήματος δίνεται με τη μορφή λόγων από ορίζουσες. Οι τύποι που αναφέρονται σ' αυτό είναι γνωστοί με την ονομασία τύποι του **Cramer**¹.

Τύποι του Cramer.

Έστω ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα $AX = B$.

α) Αν $|A| \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, \quad x_n = \frac{D_{x_n}}{D}, \quad (2.7.2)$$

όπου D είναι η ορίζουσα $|A|$ των συντελεστών των αγνώστων και D_{x_i} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσουμε την i στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.

β) Αν $|A| = 0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Στην περίπτωση που ισχύει $|A| = 0$, για την εύρεση των λύσεων του $n \times n$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ εργαζόμαστε συνήθως με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Σημειώνουμε ότι, στην παράγραφο 2.1, είχαμε επίσης αποδείξει τους τύπους του Cramer στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε πίνακες τύπου 2×2 (βλ. σχέση 2.1.8).

Οι τύποι του Cramer, αν και μας δίνουν μια πιο αποδοτική μέθοδο από τη μέθοδο της αντιστροφής, δεν είναι κατάλληλοι για να χρησιμοποιηθούν στη λύση συστημάτων μ' ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων, αφού απαιτούν τον υπολογισμό πολλών οριζουσών μεγάλης τάξεως. Σε γενικές γραμμές, για αριθμητικούς υπολογισμούς, η μέθοδος επιλύσεως συστήματος με τον αλγόριθμο του Gauss υπερτερεί έναντι των τύπων του Cramer. Ωστόσο ο κανόνας του Cramer είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τη θεωρητική μελέτη γραμμικών συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7.2.

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

Λύση.

$$\alpha) \text{ Έχουμε } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

1. Η χρησιμοποίηση των οριζουσών για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έγινε πρώτη φορά από τον C. MacLaurin το 1729. Ωστόσο, η μέθοδος έμεινε γνωστή με το όνομα του Cramer, ο οποίος, θέλοντας να προσδιορίσει μια καμπύλη που διέρχεται από 5 γνωστά σημεία, κατέληξε σ' ένα γραμμικό σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους. Τη λύση του συστήματος με τη μέθοδο αυτή την παρουσίασε στο βιβλίο του «Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών» (1750).

$$\text{και} \quad D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -6, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 12.$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους του Cramer, θα έχουμε

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D} \right) = (2, 3, -2).$$

δηλαδή το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(2, 3, -2)$.

β) Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίδια με πριν, οπότε $D = 6 \neq 0$. Ωστόσο όλες οι άλλες ορίζουσες έχουν αλλάξει κατά μία στήλη, οπότε θα πρέπει να ξαναυπολογισθούν. Τώρα έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -10, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

και σύμφωνα με τους τύπους του Cramer, θα είναι

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D} \right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{10}{6}, \frac{9}{6} \right).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7.3.

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda^2 x & +y & -z & = & 2 \\ x & +\lambda^2 y & -z & = & 2 \\ -x & +y & +\lambda^2 z & = & 2. \end{cases}$$

Λύση.

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda^2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^4 + 1) - 1(\lambda^2 - 1) - 1(1 + \lambda^2) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$$

απ' όπου προκύπτει ότι $D = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.

Επίσης βρίσκουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda^2 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 2(\lambda^4 + 1) - 2(\lambda^2 + 1) - 2(1 - \lambda^2) = 2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2(\lambda^2 + 1) - 2(\lambda^2 - 1) - 2(1 + 1) = 2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda^2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2(\lambda^2 - 1) - 2(1 + 1) + 2(1 + \lambda^2) = 2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1).$$

Αφού οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την ορίζουσα D είναι οι $0, -1, 1$, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$ θα έχουμε $D \neq 0$ και επομένως

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)} = \frac{2}{\lambda^2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Άρα το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^2}\right)$.

β) Για $\lambda = 0$, το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases}.$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 2 \\ y - z = 4, \end{cases}$$

το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

γ) Για $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2. \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(k, 2, k)$, $k \in \mathbf{R}$.

δ) Για $\lambda = -1$, το σύστημα λαμβάνει την ίδια μορφή με την περίπτωση (β) οπότε θα έχει και πάλι άπειρες λύσεις της μορφής $(k, 2, k)$, $k \in \mathbf{R}$.

Ασκήσεις.

2.7.1. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντιστροφής.

α)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

2.7.2. Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

και στη συνέχεια να λύσετε τα επόμενα συστήματα με τη μέθοδο της αντιστροφής.

$$\alpha) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

2.7.3. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\alpha) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z = 1 \\ \frac{1}{6}x + 2y + \frac{1}{6}z = 1 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 4z = 7 \\ x + 3y + 9z = 13 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y = -1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} x + 2y + 3z = -6 \\ x - 2y - 4z = 1 \\ 7x - 10y - 21z = 0 \end{cases}$$

2.7.4. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα με χρήση των τύπων του Cramer για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

$$\alpha) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2\lambda x + 2\lambda y + z = 2\lambda + 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + \lambda^2 y + \lambda^2 z = 1 \\ \lambda^2 x + 2y - z = 0 \\ \lambda^2 x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + 2y - z = \lambda \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 7x + 7y - 2z = \lambda \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \lambda x + 2y + 2z + 2\omega = 1 \\ 2x + \lambda y + 2z + 2\omega = 1 \\ 2x + 2y + \lambda z + 2\omega = 1 \\ 2x + 2y + 2z + \lambda\omega = 1 \end{cases}$$

2.8 Μελέτη ομογενών γραμμικών συστημάτων.

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.5, στο ομογενές γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$ όλοι οι σταθεροί όροι είναι μηδέν, οπότε έχει τη μορφή $AX = \mathbf{0}$ ή αναλυτικά

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1\nu}x_\nu = 0$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2\nu}x_\nu = 0$$

.....

$$\alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \dots + \alpha_{\mu \nu}x_\nu = 0.$$

Η ν -άδα $(0,0,0,\dots,0)$ επαληθεύει πάντοτε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$, οπότε ένα τέτοιο σύστημα δεν μπορεί να είναι αδύνατο. Επομένως

Ένα *ομογενές γραμμικό σύστημα* είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική, είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες στο πλήθος.

Στην περίπτωση που το ομογενές σύστημα είναι τετραγωνικό ($\mu = \nu$), μπορούμε να μελετήσουμε το σύστημα των τύπων του Cramer (2.7.2). Πράγματι, αν ισχύει $D = |A| \neq 0$, δεδομένου ότι $D_{x_1} = D_{x_2} = \dots = D_{x_\nu} = 0$ (αφού όλες οι ορίζουσες έχουν μια στήλη που όλα τα στοιχεία της είναι μηδενικά), το ομογενές σύστημα θα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Αν $D = |A| = 0$, τότε το ομογενές σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις (αφού δεν μπορεί να είναι αδύνατο).

Το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{0}$,

α) Έχει μόνο τη μηδενική λύση αν και μόνο αν $|A| \neq 0$ και

β) Έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρο πλήθος) αν και μόνο αν $|A| = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8.1.

Να λύσετε το επόμενο σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbf{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\begin{cases} x + y + 2\lambda z = 0 \\ x + 2\lambda y + z = 0 \\ 2\lambda x + y + z = 0. \end{cases}$$

Λύση.

Για την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\lambda \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 2\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2\lambda - 1) - (1 - 2\lambda) + 2\lambda(1 - (2\lambda)^2) = -8\lambda^3 + 6\lambda - 2$$

οπότε $D = 0 \Leftrightarrow -8\lambda^3 + 6\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ ή $\lambda = -1$. Επομένως, το σύστημα

έχει μοναδική λύση όταν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και $\lambda \neq -1$ και μη μηδενικές λύσεις άπειρες (επί πλέον της μηδενικής) όταν $\lambda = \frac{1}{2}$ ή $\lambda = -1$.

Για $\lambda = \frac{1}{2}$ το σύστημα γίνεται $x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$ και επομένως θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(-k - m, k, m)$ όπου $k, m \in \mathbf{R}$ παραμέτροι.

Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z, \end{cases}$$

οπότε θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (k, k, k) $k \in \mathbf{R}$.

Ασκήσεις.

2.8.1. Να εξετάσετε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ , τα επόμενα ομογενή συστήματα έχουν και άλλες πέραν της μηδενικής.

$$\alpha) \begin{cases} (\lambda^2 - 3)x + y + z = 0 \\ x + (\lambda^2 - 3)y + z = 0 \\ x + y + (\lambda^2 - 3)z = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda x + y + 2z = 0 \\ \lambda^2 x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda(\lambda + 1)x + \lambda(\lambda + 1)y + z = 0 \\ \lambda(\lambda + 1)x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (1/\lambda)x + 3y + 2z = 0 \\ (1/\lambda^2)x + 9y + 4z = 0 \end{cases}$$

2.8.2. Να εξετάσετε για ποια τιμή της παραμέτρου λ και τα τρία ομογενή συστήματα που δίνονται παρακάτω έχουν και άλλες λύσεις πέραν της μηδενικής.

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda \omega = 0 \\ \lambda x + 2y - \omega = 0 \\ \lambda x + y + \omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x + y + \omega = 0 \\ x + \lambda y + \omega = 0 \\ x + y + \lambda \omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x + y - \omega = 1 \\ \lambda x + y + \lambda \omega = \lambda - 1 \\ 3x + 3y + \lambda \omega = 1 \end{cases}$$

2.8.3. Να λύσετε τα επόμενα ομογενή συστήματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbf{R}$ με χρήση των τύπων του Cramer.

$$\alpha) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda^2 x + 4y + z = 0 \\ \lambda^4 x + 16y + z = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + \lambda y = 0 \\ 4x + \lambda^2 y = 0 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} (\lambda + 1)x + y + \omega = 0 \\ (\lambda - 1)y - \omega = 0 \\ y + (\lambda - 1)\omega = 0 \end{cases}$$

Τύποι του Cramer (μόνο για $n \times n$ γραμμικό σύστημα).	$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$
Ομογενές γραμμικό σύστημα $AX = \mathbf{O}$.	Είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική, είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες.

2.10 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, τότε η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο $ A = a_{11} a_{12} - a_{21} a_{22}$.	Σ Λ
2.	Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι ίση με μηδέν.	Σ Λ
3.	Αν η ορίζουσα ενός πίνακα A είναι ίση με 1, τότε ο A θα είναι ίσος με τον ταυτοτικό πίνακα.	Σ Λ
4.	Η ορίζουσα ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του.	Σ Λ
5.	Αν τα στοιχεία ενός πίνακα A είναι όλα ίσα με 1, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.	Σ Λ
6.	Αν δύο γραμμές ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.	Σ Λ
7.	Αν $A^3 = \mathbf{O}$, τότε $ A = 1$.	Σ Λ
8.	Σ' ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία: Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση i με εκείνη που προκύπτει αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με ένα μη μηδενικό αριθμό λ . Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.	Σ Λ
9.	Σ' ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία: Αντικατάσταση της εξισώσεως που βρίσκεται στη θέση i με εκείνη που προκύπτει αν και στα δύο μέλη της προσθέσουμε τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης που βρίσκεται στη θέση j . Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.	Σ Λ
10.	Η μέθοδος της αντιστροφής προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων συστημάτων. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι διευκολύνει στην επίλυση πολλών συστημάτων της μορφής $AX=B$ με τον ίδιο πίνακα B , αλλά διαφορετικό δεξί μέλος A .	Σ Λ
11.	Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}$ δεν έχει άλλες λύσεις εκτός από τη μηδενική λύση.	Σ Λ

12.	Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες λύσεις.	Σ Α
13.	Η n -άδα $(0,0,\dots,0)$ είναι λύση κάθε ομογενούς γραμμικού συστήματος με n αγνώστους.	Σ Α
14.	Ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο.	Σ Α

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν

1.	Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ είναι ίση με: α) $A = 0$ β) $A = 1$ γ) $A = 6$ δ) $A = 1/2$
2.	Αν A είναι ένας 2×2 πίνακας, τότε: α) $2A = 4 A$ β) $2A = 2 A$ γ) $2A = \frac{1}{2} A$ δ) $2A = A$
3.	Αν A, B είναι δύο πίνακες με $A = 3, B = 4$ τότε α) $AB = 12$ β) $AB = 3^4$ γ) $AB = 4^3$ δ) $AB = 7$
4.	Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με εναλλαγή της θέσεως δύο γραμμών (ή δύο στηλών) του πίνακα A, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει: α) $B + A = 0$ β) $B = A$ γ) $B = -A$ δ) $B = \frac{1}{ A }$
5.	Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με αντικατάσταση μιας στήλης του πίνακα A με εκείνη που προκύπτει με πρόσθεση σε αυτήν μιας άλλης στήλης) του πίνακα A πολλαπλασιασμένης επί ένα (μη μηδενικό) αριθμό, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει: α) $B + A = 0$ β) $B = A$ γ) $B = -A$ δ) $B = \frac{1}{ A }$
6.	Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις είναι γραμμική εξίσωση με αγνώστους τα x, y, z ; α) $x - 3\sqrt{y} + 2z = 1$ β) $x - y\sqrt{3} + 2z = 1$ γ) $x - 3\sqrt{y} + 2z = 0$ δ) Καμμία
7.	Ποιος από τους επόμενους τύπους ισχύει πάντοτε (εφόσον έχουν νόημα οι πράξεις που σημειώνονται); α) $AA^T = A ^2$ β) $AB = A \cdot B$ γ) $A^T = A$ δ) Και οι τρεις.
8.	Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, αν α) $\lambda = 0$ β) $\lambda = 1$ γ) $\lambda = -1$ δ) $\lambda \neq 0, -1, 1$

9.	Ποια από τις παρακάτω διαδικασίες οδηγεί σε ισοδύναμο σύστημα; α) $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 + 5\varepsilon_3$ β) $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1 + 5\varepsilon_2$ γ) $\varepsilon_1 \rightarrow 5\varepsilon_2$ δ) $\varepsilon_1 \rightarrow (1/5)\varepsilon_2$
10.	Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξεως n με $\lambda = A \neq 0$ και C^T είναι ο προσαρτημένος πίνακας του A , τότε: α) Ισχύει η ισότητα $A C^T = A \cdot I_n$. β) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο $A^{-1} = \frac{1}{ A } C^T$. γ) Ισχύει η ισότητα $ A^{-1} = \frac{1}{ A }$. δ) Ισχύουν όλα τα προηγούμενα.
11.	Το γραμμικό σύστημα $AX=B$ ονομάζεται ομογενές, όταν: α) $B=O$ β) $A=O$ γ) $A=I$ δ) $B=I$
12.	Έστω ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα $AX = B$. Αν $ A = 0$, τότε το σύστημα: α) Είναι αδύνατο. β) Ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. γ) Έχει άπειρες λύσεις. δ) Είναι συμβιβαστό.
13.	Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους: α) Μπορεί να έχει ακριβώς 4 λύσεις. β) Μπορεί να έχει μοναδική λύση. γ) Μπορεί να είναι αδύνατο. δ) Έχει πάντοτε μία λύση.

2.11 Γενικές ασκήσεις.

- 2.11.1.** Δίνονται τρεις ευθείες με εξισώσεις $4\lambda x - 3y + 2\lambda - 3 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$, $4x - 2\lambda y + 1 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ , για τους οποίους οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.
β) Για καθέναν από τους αριθμούς αυτούς να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής.
- 2.11.2.** Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως n αν γνωρίζετε ότι $|A| \neq 0$ και ότι ισχύει $A^4 = A$.
- 2.11.3.** Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως n αν γνωρίζετε ότι ισχύει $A^T = -A$ και ότι το n είναι άρτιος θετικός ακέραιος.
- 2.11.4.** Να υπολογίσετε η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξεως n αν γνωρίζετε ότι $|A| \neq 0$ και ότι ισχύει $A^T A^3 A^T = A A^T$.

2.11.5. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός, P ένας αντιστρέψιμος πίνακας και B ο πίνακας που δίνεται από τον τύπο $B=P^{-1}AP$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα $\lambda I - B = P^{-1}(\lambda I - A)P$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ορίζουσες των πινάκων $\lambda I - B$ και $\lambda I - A$ είναι ίσες.

2.11.6. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως n και λ ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $|A - \lambda I_n| = 0$. Τότε ο αριθμός λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του πίνακα A .

α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης ασκήσεως να αποδείξετε ότι οι πίνακες A και $B = P^{-1}AP$ έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές.

β) Να βρείτε τις ιδιοτιμές των επομένων πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 3 & 0 \\ \gamma & \varepsilon & \theta & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.11.7. Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

$$\alpha) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad \beta) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y & a \\ 0 & 0 & z & \beta & k \\ 0 & w & \gamma & m & b \\ u & \delta & n & c & s \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να γενικεύσετε το αποτέλεσμα για πίνακες τάξεως n , οι οποίοι έχουν τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.11.8. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα (τάξεως n)

$$\begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+a_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+a_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+a_{n-1} & a \\ a & a & a & \cdots & a & a+a_n \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $a(a_1 a_2 \cdots a_n)$.

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 5, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$A \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A .

(Υπόδειξη: Να αφαιρέσετε την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες. Παρατηρήστε στη συνέχεια ότι ο πίνακας που δημιουργείται είναι άνω τριγωνικός).

2.11.9. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο να αποδείξετε ότι η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $|A| = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

2.11.10. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} (x+a)^2 & x^2+a^2 & ax & p \\ (y+\beta)^2 & y^2+\beta^2 & \beta y & q \\ (z+\gamma)^2 & z^2+\gamma^2 & \gamma z & r \\ (w+\delta)^2 & w^2+\delta^2 & \delta w & s \end{vmatrix} = 0.$$

(Υπόδειξη: Προσθέστε στη δεύτερη γραμμή την τρίτη στήλη πολλαπλασιασμένη επί 2 και στη συνέχεια διαπιστώστε ότι η ορίζουσα που προκύπτει έχει δύο ίδιες στήλες).

2.11.11. Έστω A, B, Γ τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Άσκηση 2.3.14, για τις συντεταγμένες των σημείων θα ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

είναι εξίσωση κύκλου.

α) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος περνάει από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία $(1, 1)$, $(3, 4)$ και $(4, 2)$.



ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την έννοια της συναρτήσεως. Η βασική ιδέα για την ανάπτυξη της ήταν η σχέση μεταξύ αιτίου και αποτελέσματος και η μελέτη της εξαρτήσεως των τιμών δύο μεταβλητών ποσοτήτων.

Ο όρος **συνάρτηση**, από το λατινικό ρήμα *fungor*, που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ, εμφανίστηκε για πρώτη φορά σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz το 1673. Το 1755, ο Euler διατύπωσε ένα λιτό, αλλά και αυστηρό συγχρόνως ορισμό της έννοιας της συναρτήσεως, ο οποίος είχε ως εξής: «Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιον τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάζουν συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων». Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο, με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το x υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιοδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του x .

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθεί η έννοια της πραγματικής συναρτήσεως μίας μεταβλητής, καθώς και οι βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα δοθούν οι ιδιότητες των ορίων και της συνέχειας, καθώς και εφαρμογές του Θεωρήματος Bolzano και ενδιάμεσων τιμών.

- 3.1** Η έννοια της συναρτήσεως. Γραφική παράσταση συναρτήσεως.
- 3.2** Ισότητα, πράξεις και είδη συναρτήσεων.
- 3.3** Στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις.
- 3.4** Σύνθεση συναρτήσεων. Η αντίστροφη συνάρτηση.
- 3.5** Πεπερασμένα όρια συναρτήσεων σ' ένα σημείο $x_0 \in \mathbf{R}$. Βασικές ιδιότητες ορίων.
- 3.6** Όριο συναρτήσεως στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Μη πεπερασμένα όρια.
- 3.7** Συνέχεια συναρτήσεων.
- 3.8** Θεώρημα Bolzano και Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.
- 3.9** Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 3.10** Ερωτήσεις κατανόησης.
- 3.11** Γενικές ασκήσεις.

3.1 Η έννοια της συναρτήσεως. Γραφική παράσταση συναρτήσεως.

Η έννοια της συναρτήσεως είναι μία από τις πλέον βασικές έννοιες των Μαθηματικών. Όπως συμβαίνει και με πολλές άλλες μαθηματικές έννοιες, τη χρησιμοποιούμε αρκετά συχνά στις καθημερινές μας δραστηριότητες, χωρίς να το συνειδητοποιούμε. Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της συναρτήσεως προκύπτει με τελείως φυσιολογικό τρόπο σε όλες τις περιπτώσεις, όπου η τιμή μιας ποσότητας εξαρτάται με συγκεκριμένο τρόπο απ' τις τιμές κάποιας άλλης. Για παράδειγμα:

α) Το ποσό του φόρου (Φ.Π.Α.) που πληρώνουμε κατά την αγορά ενός προϊόντος εξαρτάται από την τιμή πωλήσεώς του. Έτσι, αν το προϊόν που αγοράζουμε έχει τιμή x και υπόκειται σε Φ.Π.Α. 19%, γνωρίζουμε ότι η επιβάρυνση του προϊόντος λόγω του Φ.Π.Α. θα είναι ίση με $y = 0,19x$.

β) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου εξαρτάται από το μήκος της πλευράς του. Πιο συγκεκριμένα, αν το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι ίσο με x , τότε το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι ίσο με $y = x^2$.

Στα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι οι τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας, που ονομάζουμε y , εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής ποσότητας, που ονομάζουμε x . Επί πλέον, είναι φανερό ότι, αν γνωρίζουμε την τιμή της μεταβλητής x , τότε καθορίζεται με μοναδικό τρόπο η τιμή της μεταβλητής y . Στις περιπτώσεις αυτές θα λέμε ότι έχουμε μια συνάρτηση της μεταβλητής x .

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον επόμενο γενικό ορισμό:

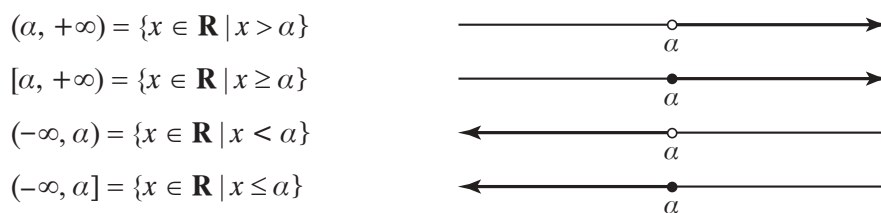
Ονομάζουμε πραγματική **συνάρτηση** ορισμένη σ' ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών ($A \subseteq \mathbf{R}$), μια διαδικασία f , με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός y τον οποίο συμβολίζουμε $y = f(x)$.

Το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους ορίζεται η f ονομάζεται **πεδίο ορισμού** (domain) της f και συνήθως συμβολίζεται με $D(f)$. Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της f , ονομάζεται **σύνολο τιμών** (range) της f και συμβολίζεται με $R(f)$, δηλαδή $R(f) = \{f(x) | x \in D(f)\}$.

Ο ορισμός αυτός αφορά στις λεγόμενες πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, αφού τόσο τα στοιχεία x , όσο και τα στοιχεία y , στα οποία αντιστοιχίζονται αυτά προέρχονται από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δεδομένου ότι στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιες περιπτώσεις, θα χρησιμοποιούμε τον όρο συνάρτηση και θα εννοούμε τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, χωρίς να αναφέρουμε ρητά κάθε φορά. Επίσης, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα θεωρούμε ότι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων τις οποίες μελετάμε είναι **ένα διάστημα** ή **μια ένωση διαστημάτων** (εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό).

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $a, \beta \in \mathbf{R}$, με $a < \beta$, τότε ονομάζουμε διαστήματα με άκρα τα a, β καθενα από τα σύνολα $(a, \beta) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < \beta\}$, $[a, \beta] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq \beta\}$, $[a, \beta) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < \beta\}$ και $(a, \beta] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq \beta\}$. Το πρώτο από τα προαναφερθέντα διαστήματα ονομάζεται **ανοικτό** διάστημα, το δεύτερο **κλειστό**, ενώ τα δύο τελευταία **ημιανοιχτά** διαστήματα.

Επίσης, αν $a \in \mathbf{R}$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα** διαστήματα με άκρο το a καθενα από τα παρακάτω σύνολα (σχ. 3.1α):



Σχ. 3.1α.

Μη φραγμένα διαστήματα.

Το σύνολο $\mathbf{R}$ ορισμένες φορές συμβολίζεται υπό μορφή διαστήματος ως $(-\infty, +\infty)$. Αν $\xi \in \mathbf{R}$, με τον όρο **περιοχή του σημείου** ξ εννοούμε ένα ανοιχτό διάστημα της μορφής $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, όπου δ είναι ένας θετικός αριθμός. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ , που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, ονομάζονται **εσωτερικά σημεία**¹ του Δ .

Κατά την περιγραφή μιας συναρτήσεως f , η μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή του πεδίου ορισμού $A = D(f)$ ονομάζεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή και συμβολίζεται συνήθως με x . Κάθε τιμή του x δημιουργεί μοναδική τιμή για τη δεύτερη μεταβλητή ποσότητα, την **εξαρτημένη** μεταβλητή. Ο μοναδικός αριθμός y , στον οποίο αντιστοιχίζεται το στοιχείο x του $A = D(f)$, ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Μια συνάρτηση f μπορεί να παρασταθεί με τους παρακάτω δύο τρόπους:

$$\begin{aligned} f: A \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto y \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} y = f(x), x \in A, \end{aligned}$$

Η φράση «η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο B » σημαίνει ότι $B \subseteq D(f)$. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται το σύνολο

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για } x \in B\} = \{f(x) \mid x \in B\}.$$

Προφανώς το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το σύνολο $f(A)$.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, για να οριστεί μια συνάρτηση f , αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

α) Το πεδίο ορισμού της και

β) Η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της (ο κανόνας με τον οποίο κάθε x αντιστοιχίζεται στο $f(x)$).

Στα δύο παραδείγματα που δόθηκαν στην αρχή της παρούσας παραγράφου έχουμε:

α) $A = [0, +\infty)$, αφού η τιμή x του προϊόντος δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές και $f(x) = 0,19x$.

Θα μπορούσαμε επίσης να γράψουμε:

$$\begin{aligned} f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto 0,19x \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} y = 0,19x, x \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

β) $A = [0, +\infty)$, αφού το μήκος x της πλευράς του τετραγώνου δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές και $f(x) = x^2$.

Αρκετά συχνά, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών x (δηλ. το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$), για το οποίο το $f(x)$ έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε:

$$\text{«δίνεται η συνάρτηση } f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbf{R} \text{ με } f(x) = \sqrt{x-3}\text{»}$$

θα λέμε:

$$\text{«δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με τύπο } f(x) = \sqrt{x-3}\text{»}$$

ή ακόμη πιο σύντομα:

$$\text{«δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \sqrt{x-3}\text{» ή «δίνεται η συνάρτηση } y = \sqrt{x-3}\text{»}.$$

Γνωρίζοντας ότι η τετραγωνική ρίζα ορίζεται μόνο όταν το υπόριζο είναι μη αρνητικό, συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει να ισχύει $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ και επομένως το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως που δόθηκε είναι το $A = [3, +\infty)$.

1. Γενικότερα, εσωτερικά σημεία ενός συνόλου Δ (όχι απαραίτητα διαστήματος) ονομάζονται τα σημεία $\xi \in \mathbf{R}$, για τα οποία μπορεί να βρεθεί ένας θετικός αριθμός ε τέτοιος, ώστε να ισχύει $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \subseteq \Delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.1.

Η πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα στη θάλασσα εξαρτάται από το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Για να βρούμε την πίεση κάθε φορά, διαιρούμε το βάθος (σε μέτρα) με 33, προσθέτουμε 1 στο πηλίκο και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με 15.

- α) Να γράψετε τον τύπο της συναρτήσεως f , ο οποίος εκφράζει την πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα που βρίσκεται σε βάθος x m.
β) Ποια θα είναι η πίεση σε βάθος 198 m;

Λύση.

α) Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε, αν x m είναι το βάθος, τότε η αντίστοιχη πίεση θα είναι ίση με $\left(\frac{x}{33}+1\right) \cdot 15$.

Έτσι ο τύπος της συναρτήσεως f που αντιστοιχίζει στο βάθος x την πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα θα είναι ο επόμενος

$$y = 15 \left(\frac{x}{33} + 1 \right) = \frac{15}{33}x + 15 \quad \text{ή} \quad f(x) = 15 \left(\frac{x}{33} + 1 \right) = \frac{15}{33}x + 15.$$

β) Σε βάθος $x = 198$ m η πίεση που ασκείται σ' ένα σώμα θα είναι ίση με:

$$y = f(198) = 15 \left(\frac{198}{33} + 1 \right) = 15 \cdot (6 + 1) = 105 \text{ (μονάδες πίεσεως).}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.

Ένας εργάτης τοποθετεί βίδες σε συσκευασίες (κουτιά). Το πλήθος των βιδών, σε εκατοντάδες, που τοποθετεί σε x ώρες δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 30x$.

- α) Πόσες βίδες θα τοποθετήσει σε συσκευασίες ο εργάτης ως τη 1 μ.μ., αν ξεκίνησε την εργασία του στις 7 π.μ.;
β) Πόσες βίδες θα έχει τοποθετήσει σε συσκευασίες μεταξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ.;

Λύση.

α) Στις 7 το πρωί είναι $x = 0$ και το πλήθος των βιδών που θα έχει τοποθετήσει ο εργάτης είναι ίσος με $f(0) = 0$ (το οποίο συμφωνεί με ό,τι θα αναμέναμε, αφού τότε ξεκινά να τοποθετεί βίδες).

Μέχρι τη 1 μ.μ. θα έχει εργασθεί $13 - 7 = 6$ ώρες, οπότε θα έχει τοποθετήσει

$$f(6) = \frac{1}{9}6^3 - 6^2 + 30 \cdot 6 = 168$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 16.800 βίδες).

β) Μετάξύ 10 π.μ. και 1 μ.μ. θα έχει τοποθετήσει $f(6) - f(3)$ βίδες αφού έως τις 10:00 έχει εργαστεί 3 ώρες και έως τη 1 έχει εργαστεί 6 ώρες.

Άρα

$$f(6) - f(3) = \left[\frac{1}{9}6^3 - 6^2 + 30 \cdot 6 \right] - \left[\frac{1}{9}3^3 - 3^2 + 30 \cdot 3 \right] = 168 - 90 = 78$$

βίδες (σε εκατοντάδες, δηλ. 7.800 βίδες).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \sqrt{9x^2 - 16}$$

$$\beta) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 1}$$

Λύση.

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους έχει νόημα η παράσταση $\sqrt{9x^2 - 16}$, δηλαδή για όλα τα $x \in \mathbf{R}$ για τα οποία ισχύει $9x^2 - 16 \geq 0$. Όμως:

$$9x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow 9x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{16}{9} \Leftrightarrow |x| \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3} \text{ ή } x \leq -\frac{4}{3}$$

οπότε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως θα είναι το

$$A = (-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty).$$

β) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν, και μόνο όταν, $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ και $x - 1 \neq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3, οπότε η ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ θα αληθεύει, όταν, και μόνο όταν, $x \leq 2$ ή $x \geq 3$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = (-\infty, 1) \cup (1, 2] \cup [3, +\infty).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.4.

Το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, σε €, δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 100x + 80.$$

α) Να υπολογιστεί το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος.

β) Να βρεθεί και να ερμηνευθεί το $f(0)$.

Λύση.

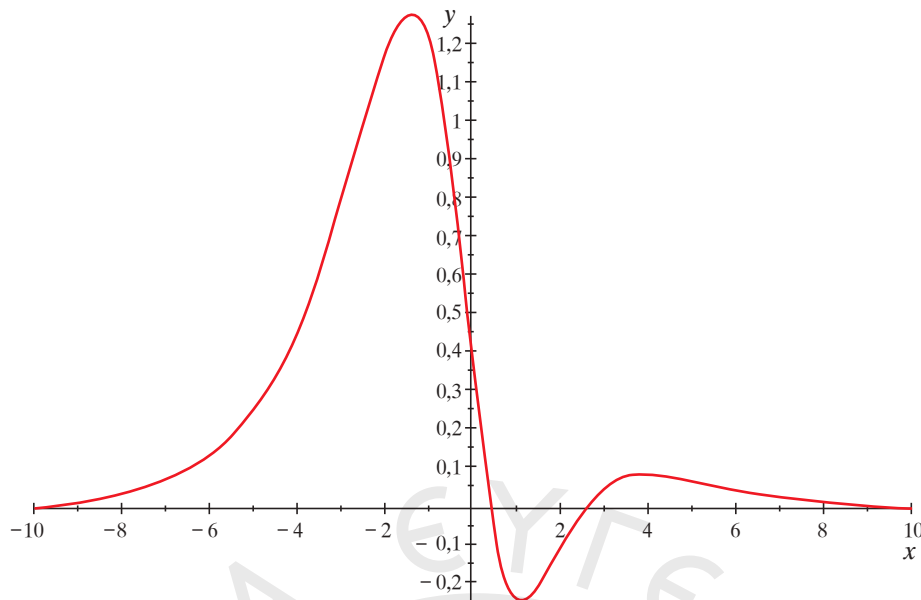
α) Το κόστος παραγωγής 3 μονάδων του προϊόντος θα είναι η τιμή της συναρτήσεως f για $x = 3$, δηλαδή $f(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 100 \cdot 3 + 80 = 434\text{€}$.

β) Αν θέσουμε στον τύπο της συναρτήσεως $x = 0$ παίρνουμε

$$f(0) = 0^4 - 3 \cdot 0^2 + 100 \cdot 0 + 80 = 80.$$

δηλαδή έχουμε $f(0) = 80$. Το ποσό αυτό μπορούμε να πούμε ότι θα αντιστοιχεί στα «πάγια» έξοδα της επιχειρήσεως, τα οποία γίνονται είτε παράγει μονάδες είτε όχι. Τέτοια έξοδα μπορεί να είναι για παράδειγμα το ενοίκιο, οι λογαριασμοί νερού, ρεύματος κ.λπ..

Αξιίζει να σημειωθεί ότι, σε πολλές οικονομικές εφαρμογές, όπως η παρούσα, η ανεξάρτητη μεταβλητή x λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές. Είναι όμως αρκετά συνηθισμένο, σ' αυτές τις περιπτώσεις, να θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της συναρτήσεως που χρησιμοποιούμε, ένα διάστημα ή μία ένωση διαστημάτων A (στην οποία φυσικά να περιέχονται οι ακέραιες τιμές που μας ενδιαφέρουν) και να τη μελετούμε σε ολόκληρο το A . Έτσι, ενώ στο συγκεκριμένο παράδειγμα το x μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0, 1, 2, ... (αφού παριστάνει αριθμό μονάδων ενός προϊόντος) ως πεδίο ορισμού της f χρησιμοποιούμε το $A = [(0, +\infty)$.



Σχ. 3.1β.

Γραφική παράσταση.

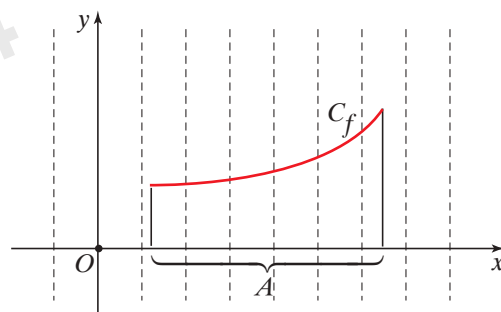
Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, ονομάζεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f (σχ. 3.1β)¹. Η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα ότι η (εξίσωση) $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην C_f . Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παραστάσεως της f .

Εξετάζοντας τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως μπορούμε να πάρουμε αρκετές πληροφορίες γι' αυτήν, όπως για παράδειγμα, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών της, πού τέμνει τους άξονες, αν σε κάποιο σημείο $x = a$ παίρνει τιμή μεγαλύτερη από ό,τι σε όλα τα άλλα σημεία $x \neq a$ κ.λπ..

Επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό μιας συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού το σύνολο A , κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y = f(x) \in \mathbf{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παραστάσεως της f με την ίδια τετμημένη x . Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει, με τη γραφική παράσταση της f , το πολύ ένα κοινό σημείο όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1γ.

Έτσι, από τις 4 γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 3.1δ μόνο η (α) και η (δ) είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αφού για τις υπόλοιπες μπορούμε να βρούμε κατακόρυφες ευθείες που έχουν περισσότερα από ένα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση.

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συναρτήσεως f , τότε μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της αφού αυτό μπορεί να προκύψει εύκολα ως το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f . Επομένως, ένα σημείο x_0 θα



Σχ. 3.1γ.

1. Συνήθως το σύμβολο C_f χρησιμοποιείται για να παραστήσει το υποσύνολο του $\mathbf{R}^2 = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$, το οποίο ονομάζεται **γράφημα** της f . Στην περίπτωση που το γράφημα παρίσταται στο καρτεσιανό επίπεδο, τότε έχουμε τη **γραφική παράσταση** της f . Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα χρησιμοποιούμε (καταχρηστικά) την έκφραση «γραφική παράσταση C_f της f ».

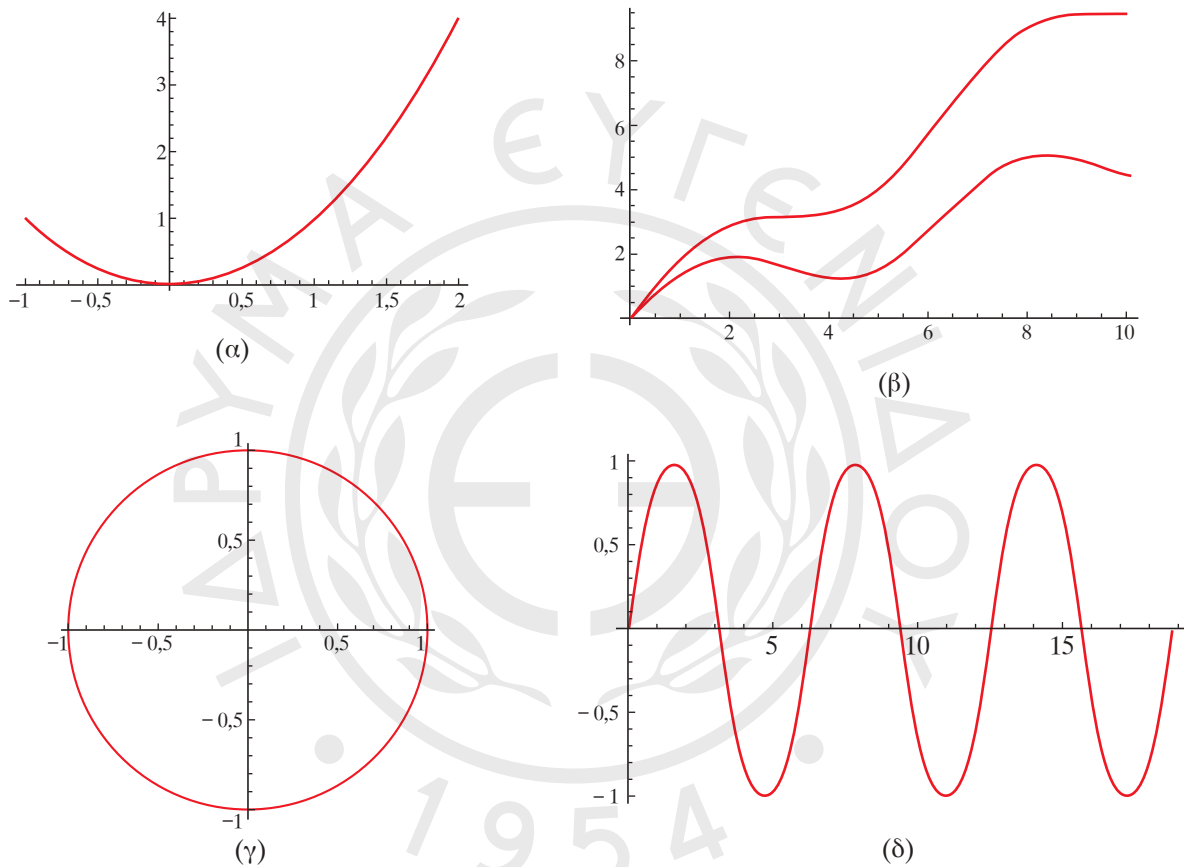
ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f , αν και μόνο αν η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ έχει ένα κοινό σημείο με την C_f (σχ. 3.1ε).

Ομοίως, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f . Έτσι ένας πραγματικός αριθμός β θα ανήκει στο σύνολο τιμών της συναρτήσεως f , αν η ευθεία με εξίσωση $y = \beta$ τέμνει την C_f σε ένα ή **περισσότερα** σημεία C_f (σχ. 3.1στ).

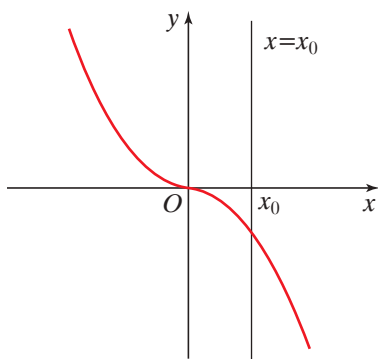
Πρακτικά, από τις παραπάνω διαπιστώσεις προκύπτουν τα εξής:

α) Η προβολή της C_f στον άξονα των x (δηλ. το σύνολο των τετμημένων όλων των σημείων της C_f) δίνει το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως (σχ. 3.1ζ).

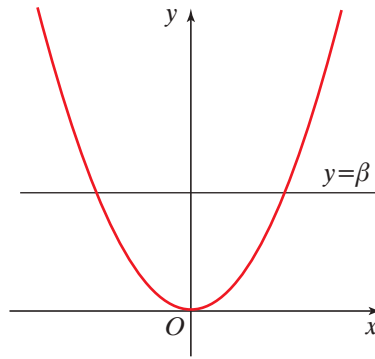
β) Η προβολή της C_f στον άξονα των y (δηλ. το σύνολο των τεταγμένων όλων των σημείων της C_f)



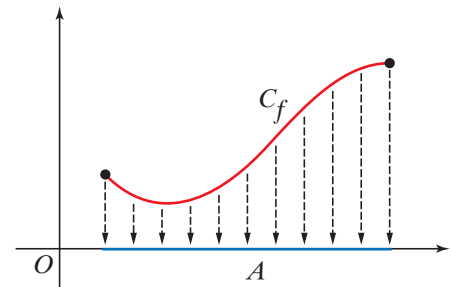
Σχ. 3.1δ.



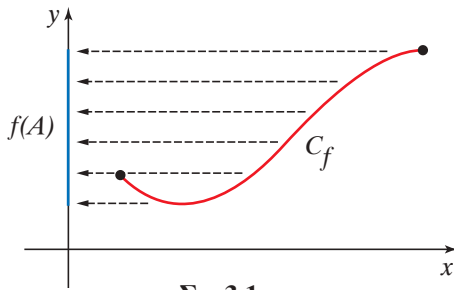
Σχ. 3.1ε.



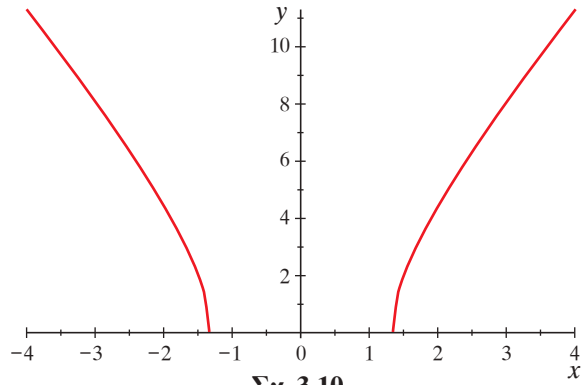
Σχ. 3.1στ.



Σχ. 3.1ζ.



Σχ. 3.1η.



Σχ. 3.1θ.

δίνει το σύνολο τιμών της (σχ. 3.1η).

Για παράδειγμα, παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως με τύπο $f(x) = \sqrt{9x^2 - 16}$ που δίνεται στο σχήμα 3.1θ, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο

$$A = (-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty).$$

(όπως ακριβώς το βρήκαμε στο παράδειγμα 3.1.3), ενώ το σύνολο τιμών της είναι το $B = [0, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & \text{αν } x < 1 \\ 6x - 7 & \text{αν } x \geq 1. \end{cases}$

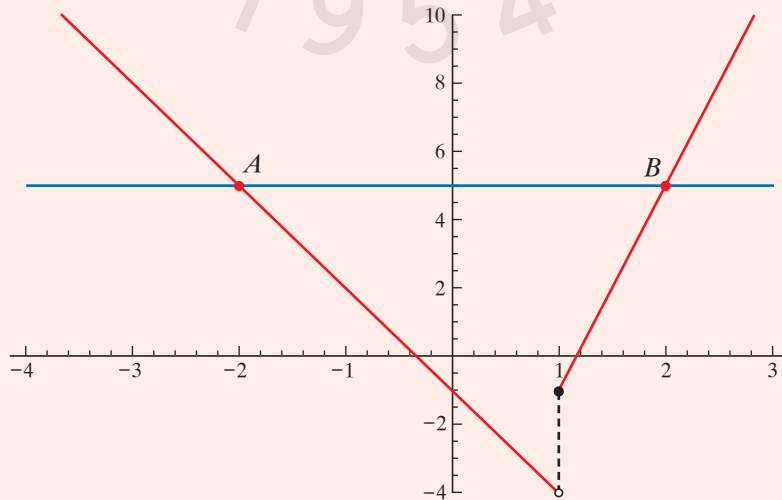
α) Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

β) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 5$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$, αφού τα $y=f(x)$ ορίζονται για κάθε τιμή του x . Για $x < 1$ η C_f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y = -3x - 1$ που έχει κλίση -3 και φτάνει μέχρι το σημείο $(1, -4)$ χωρίς το τελευταίο να συμπεριλαμβάνεται στην C_f . Για $x \geq 1$ η C_f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y = 6x - 7$ που έχει κλίση 6 και ξεκινάει από το σημείο $(1, -1)$, το οποίο όμως τώρα συμπεριλαμβάνεται στην C_f .

Έτσι παίρνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.1ι, η οποία αποτελείται από δύο ημιευθείες.



Σχ. 3.1ι.

β) Η ευθεία με εξίσωση $y = 5$ τέμνει τις δύο ημιευθείες της C_f σε δυο σημεία $A(x_1, 5)$ και $B(x_2, 5)$. Άρα θα έχουμε: $-3x_1 - 1 = 5$ και $6x_2 - 7 = 5$, οπότε $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$. Έτσι οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες από το 5 θα είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται επάνω από την ευθεία με εξίσωση $y=5$. Δηλαδή, $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

α) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ έτσι ώστε το σημείο $(1, 2)$ να ανήκει στην C_f ;

β) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα β, γ έτσι ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$;

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συναρτήσεως f αν ισχύουν και οι δύο συνθήκες που ζητήθηκαν στα ερωτήματα (α) και (β).

Λύση.

α) Για να ανήκει το σημείο $(1, 2)$ στη γραφική παράσταση της f , με τύπο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, θα πρέπει να ισχύει $f(1)=2$, οπότε θα έχουμε $1 + \beta + \gamma = 2 \Leftrightarrow \beta + \gamma = 1$.

β) Για να τέμνει η C_f τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$ θα πρέπει να ισχύει $f(0) = 3$, οπότε θα έχουμε $\gamma = 3$.

γ) Τώρα ζητάμε να ισχύουν και οι δύο σχέσεις που βρήκαμε προηγουμένως, οπότε παίρνουμε

$$\left. \begin{array}{l} \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{array} \right\}$$

και η f γίνεται $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Ασκήσεις.

3.1.1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(0), f(1)$ της συναρτήσεως f .

β) Να βρείτε τις τιμές $g(-1), g(0), g(1), g(-1/2), g(1/2)$ της συναρτήσεως g . Τι παρατηρείτε;

3.1.2. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = 5x - 4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(0), f(1), f(-1/2), f(1/2)$ της συναρτήσεως f και τις τιμές $g(0), g(4/5), g(-4)$ της συναρτήσεως g .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) = g(x)$.

3.1.3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3 \quad \beta) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{(x-1)(x+7)}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-4} \quad \delta) f(x) = \left| \frac{x-4}{x^2+9} \right|$$

3.1.4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \sqrt{\sqrt{3}-|x|} \quad \beta) f(x) = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-16}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x - 2}}$$

$$\delta) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

3.1.5. Ένα σώμα ρίπτεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από την ταράτσα ενός ουρανοξύστη. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε m), ύστερα από t sec, δίνεται από τη συνάρτηση f , με τύπο

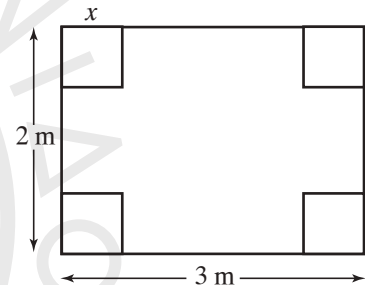
$$f(t) = \frac{1}{4}(-9t^2 + 144).$$

- α) Σε ποιο ύψος θα βρίσκεται το σώμα ύστερα από 3 sec;
- β) Ποιο είναι το ύψος του ουρανοξύστη;
- γ) Πότε θα φτάσει το σώμα στο έδαφος;
- δ) Σε πόσο χρόνο θα βρίσκεται το σώμα σε ύψος 27 m;

3.1.6. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) μπορεί να βρεθεί, αν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) ως εξής: Από τους βαθμούς Φαρενάιτ αφαιρούμε 32 και πολλαπλασιάζουμε τη διαφορά με $5/9$.

- α) Να βρείτε τη συνάρτηση f που να αντιστοιχίζει τους βαθμούς $^{\circ}\text{F}$ σε $^{\circ}\text{C}$.
- β) Να βρεθούν οι θερμοκρασίες σε $^{\circ}\text{C}$ που αντιστοιχούν σε $-10, 0, 10$ και 40 βαθμούς $^{\circ}\text{F}$.

3.1.7. Προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα μεταλλικό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, χρησιμοποιούμε ένα ορθογώνιο φύλλο λαμαρίνας διαστάσεων 2 m και 3 m όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1α. Από κάθε κορυφή του ορθογωνίου, κόβουμε ένα τετράγωνο πλευράς x m και μετά, τσακίζοντας τις πλευρές, σχηματίζουμε ένα ανοικτό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



Σχ. 3.1α.

- α) Να εκφράσετε τον όγκο $V(x)$ του δοχείου ως συνάρτηση του x .
- β) Να βρείτε τα $V(1), V(2/10), V(3/10)$.
- γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως;

3.1.8. Να εξεταστεί ποια από τα σχήματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 3.1β αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

3.1.9. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

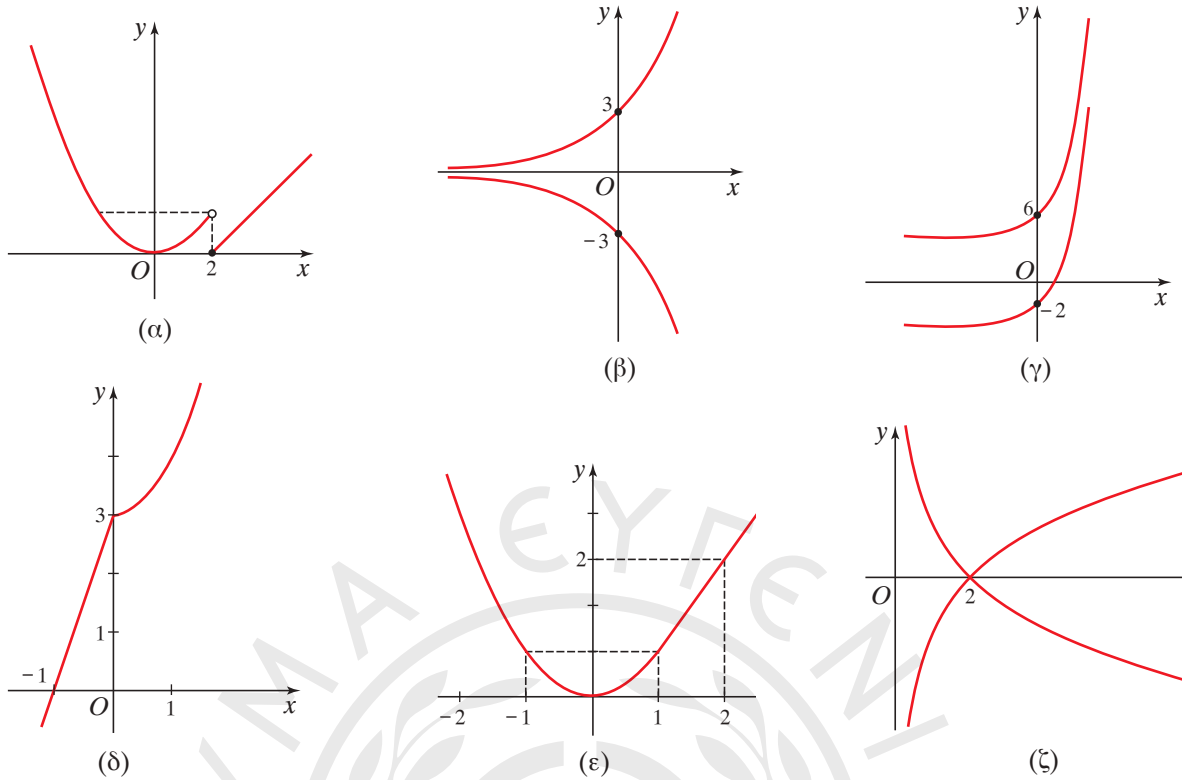
$$\alpha) f(x) = x^2 - 9x + 20 \quad \beta) f(x) = (3x - 1)^5 \quad \gamma) f(x) = \left| \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \right|$$

3.1.10. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = e^{2x} + 1$ και $g(x) = 3e^x - 1$. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

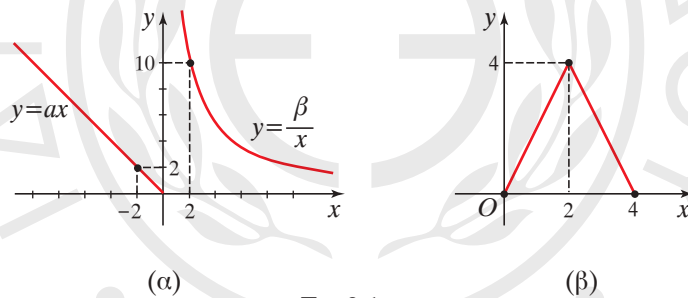
3.1.11. Να δώσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = |2x - 3| \quad \beta) f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 0 < x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 5x, & 0 < x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases} \quad \delta) f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & x < 3 \\ 4x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



Σχ. 3.1β.



Σχ. 3.1γ.

3.1.12. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων, των οποίων η γραφική παράσταση δίνεται παραπάνω (σχ. 3.1γ).

3.2 Ισότητα, πράξεις και είδη συναρτήσεων.

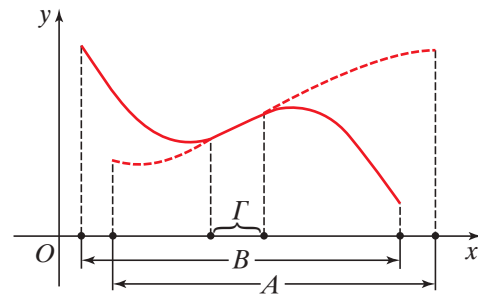
Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{4x^5 + 8x}{x^4 + 2}$ και $g(x) = 4x$, οι οποίες έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Είναι προφανές ότι, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, ισχύει:

$$f(x) = \frac{4x^5 + 8x}{x^4 + 2} = \frac{4x(x^4 + 2)}{x^4 + 2} = 4x = g(x).$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι *ίσες*. Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Δύο συναρτήσεις f και g είναι *ίσες* αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$. Τότε θα γράφουμε $f = g$.

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να συμβεί για δύο συναρτήσεις έστω f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, να ισχύει η ισότητα $f(x) = g(x)$ μόνο σε ένα υποσύνολο Γ των A και B (σχ. 3.2α). Τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι **ίσες στο σύνολο Γ** .



Σχ. 3.2α.

Αρκετά συχνά στην πράξη χρειάζεται να συνδυαστούν δύο ή περισσότερες συναρτήσεις μέσω των συνηθισμένων αλγεβρικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μια ναυτιλιακή εταιρεία κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο προϊόν το οποίο, για να ολοκληρωθεί η διαδικασία κατασκευής του, χρειάζεται να περάσει από δύο διαφορετικά στάδια επεξεργασίας. Το κόστος επεξεργασίας x μονάδων του προϊόντος στο πρώτο στάδιο δίνεται από τη συνάρτηση f με $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$, ενώ το κόστος επεξεργασίας x μονάδων του προϊόντος στο δεύτερο στάδιο δίνεται από την g με $g(x) = 5x + 7$. Προφανώς, το συνολικό κόστος κατασκευής x μονάδων του προϊόντος θα βρίσκεται από το άθροισμα:

$$f(x) + g(x) = (5x^2 + 4x + 1) + (5x + 7) = 5x^2 + 9x + 8.$$

Ορίζεται έτσι μια νέα συνάρτηση h με το ίδιο πεδίο ορισμού A , για την οποία ισχύει $h(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in A$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **άθροισμα των συναρτήσεων f και g** και συμβολίζεται με $f + g$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να εισάγουμε και τις υπόλοιπες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Γενικά, αν f και g είναι συναρτήσεις με **κοινό πεδίο ορισμού A** , τότε μπορούμε να ορίσουμε:

- α) Το **άθροισμα** $f+g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in A$.
- β) Τη **διαφορά** $f-g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in A$.
- γ) Το **γινόμενο** cf αριθμού c με τη συνάρτηση f με τύπο: $(cf)(x) = cf(x), x \in A$.
- δ) Το **γινόμενο** $f \cdot g$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A$.
- ε) Το **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ των συναρτήσεων f και g με τύπο: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in A \text{ και } g(x) \neq 0$.

Το άθροισμα και γινόμενο συναρτήσεων ορίζεται ανάλογα και για περισσότερες των δύο συναρτήσεις. Στην περίπτωση που έχουμε γινόμενο μίας συναρτήσεως f με τον εαυτό της n φορές θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο f^n (όπως ακριβώς κάνουμε και για το γινόμενο ενός αριθμού με τον εαυτό του n φορές), δηλαδή θα έχουμε $f^n(x) = (f(x))^n$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f/g είναι το κοινό πεδίο ορισμού των f και g με τον επί πλέον περιορισμό ότι ο παρονομαστής $g(x)$ δεν πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή το σύνολο:

$$\{x \mid x \in A \text{ με } g(x) \neq 0\}.$$

Στην περίπτωση που, κατά την εκτέλεση πράξεων μεταξύ συναρτήσεων, τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε είναι διαφορετικά, οι πράξεις θα θεωρούμε ότι ορίζονται μόνο **στην τομή των πεδίων ορισμού τους**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.1.

Το κόστος παραγωγής και διαθέσεως x μονάδων ενός προϊόντος (σε χιλιάδες) που κατασκευάζει μια εταιρεία είναι ίσο με $10x + 100$ χρηματικές μονάδες, ενώ τα αντίστοιχα έσοδα από τις πωλήσεις

x μονάδων προϊόντος είναι ίσα με $15x$ χρηματικές μονάδες.

- Να δώσετε τη συνάρτηση f που εκφράζει το κόστος παραγωγής και διαθέσεως x μονάδων του προϊόντος.
- Να δώσετε τη συνάρτηση g που εκφράζει τα έσοδα από τις πωλήσεις x μονάδων του προϊόντος.
- Να δώσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g σε κοινό σύστημα συντεταγμένων.
- Να ορίσετε τη συνάρτηση που δίνει το κέρδος από την πώληση x μονάδων προϊόντος, να δώσετε γραφική της παράσταση και να βρείτε για ποιες τιμές του x η εταιρεία έχει κέρδος από την πώληση του προϊόντος.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση, το κόστος παραγωγής και διαθέσεως x μονάδων ενός προϊόντος (σε χιλιάδες) που κατασκευάζει μια εταιρεία θα δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 10x + 100$.

β) Τα έσοδα από τις πωλήσεις x μονάδων προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $g(x) = 15x$.

γ) Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g σε κοινό σύστημα συντεταγμένων δίνεται στο σχήμα 3.2β.

δ) Το κέρδος από την πώληση x μονάδων του προϊόντος θα είναι η διαφορά των εσόδων από την πώληση x μονάδων του προϊόντος και του αντίστοιχου κόστους παραγωγής τους. Θα είναι δηλαδή η τιμή της συναρτήσεως $h = g - f$ στο x . Έχουμε:

$$h(x) = g(x) - f(x) = 15x - (10x + 100) = 5x - 100$$

και η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα 3.2γ. Παρατηρούμε ότι η C_h τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $A(20, 0)$, που σημαίνει ότι για να έχουμε κέρδος, πρέπει να κατασκευαστούν πάνω από 20 μονάδες προϊόντος.

Το σημείο $A(20, 0)$ αντιστοιχεί προφανώς στο σημείο τομής των δύο ευθειών του σχήματος 3.2β. Στο σχήμα 3.2δ έχει γίνει γραφική παράσταση και των τριών ευθειών που μας ενδιαφέρουν.

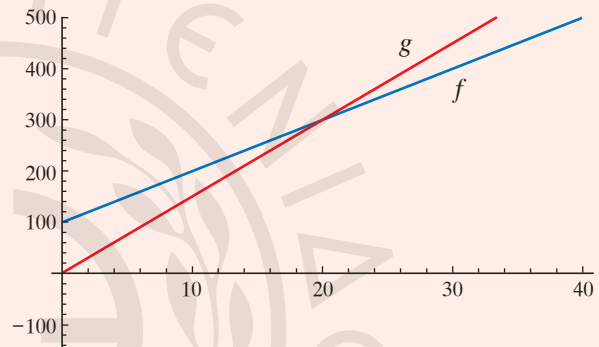
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2.

Έστω ότι γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f , δηλαδή την C_f . Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

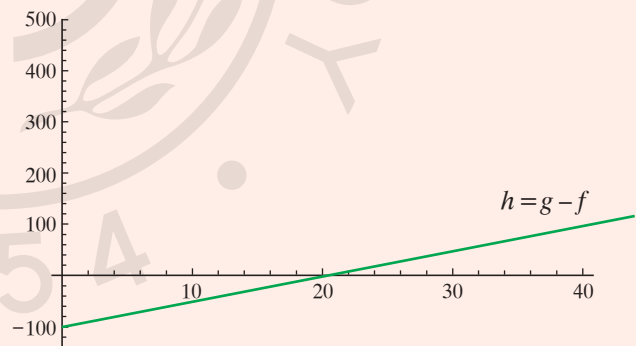
- $g = -f$, η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x) = -f(x)$.
- $g = |f|$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$$

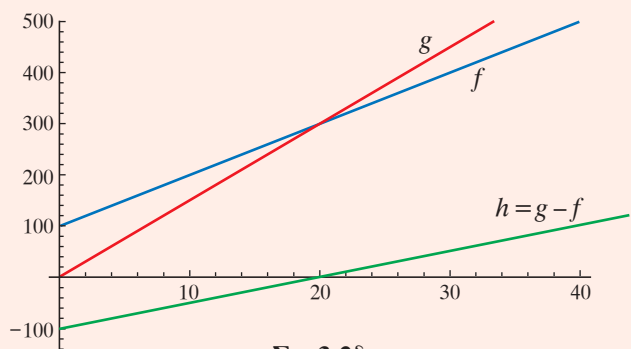
- $g = f + c$ (όπου c είναι μια θετική σταθερά),



Σχ. 3.2β.



Σχ. 3.2γ.



Σχ. 3.2δ.

η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x) = f(x) + c$.

δ) $g = f - c$ (όπου c είναι μια θετική σταθερά), η οποία ορίζεται από τον τύπο $g(x) = f(x) - c$.

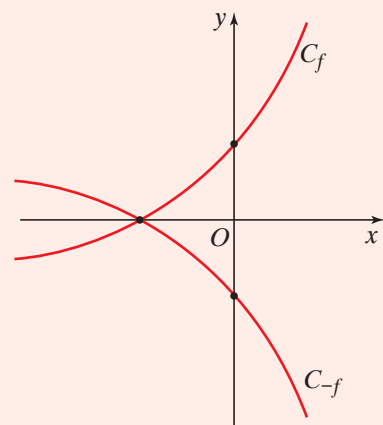
Λύση.

α) Η C_{-f} θα είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$ (σχ. 3.2ε).

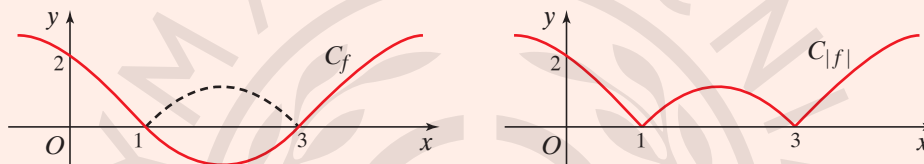
β) Η $C_{|f|}$ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_f , όπου είναι $f(x) \geq 0$, ενώ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_{-f} όπου είναι $f(x) < 0$ (σχ. 3.2στ).

γ) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως g με $g(x) = f(x) + c$, $c > 0$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα πάνω (σχ. 3.2ζ).

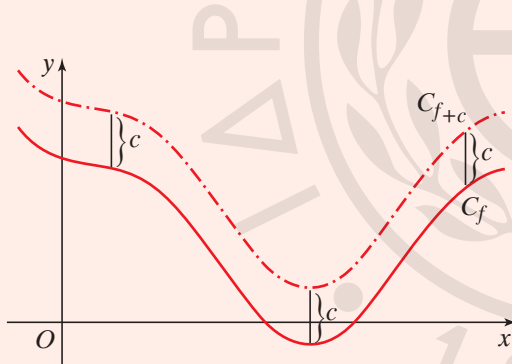
δ) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως g με $g(x) = f(x) - c$, $c > 0$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα κάτω (σχ. 3.2η).



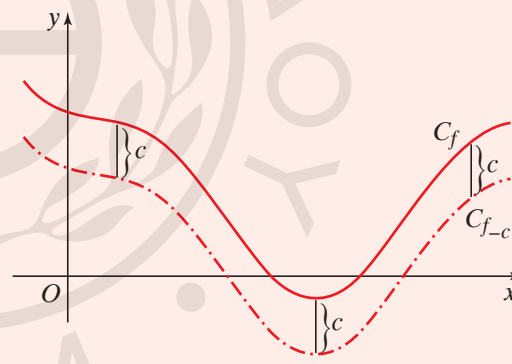
Σχ. 3.2ε.



Σχ. 3.2στ.

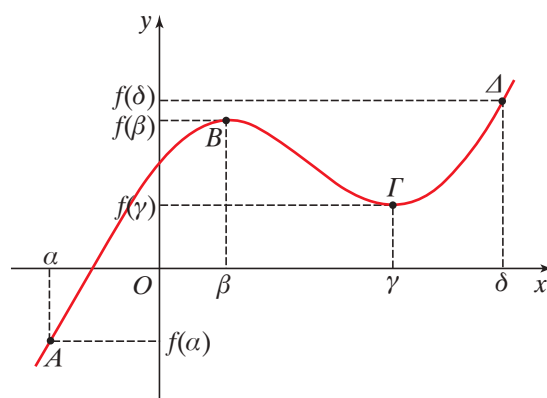


Σχ. 3.2ζ.



Σχ. 3.2η.

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε πού αυτή «ανεβαίνει» και πού «κατεβαίνει». Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f που φαίνεται στο σχήμα 3.2θ, ανεβαίνει από το σημείο A μέχρι το σημείο B (δηλ. οι τιμές της f αυξάνονται, καθώς το x κινείται από το a προς το β), κατεβαίνει από το σημείο B μέχρι το σημείο Γ (δηλ. οι τιμές της μειώνονται, καθώς το x κινείται από το β προς το γ) και πάλι ανεβαίνει από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Δ . Λέμε τότε ότι η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $[a, \beta]$ και $[\gamma, \delta]$ ενώ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[\beta, \gamma]$.



Σχ. 3.2θ.

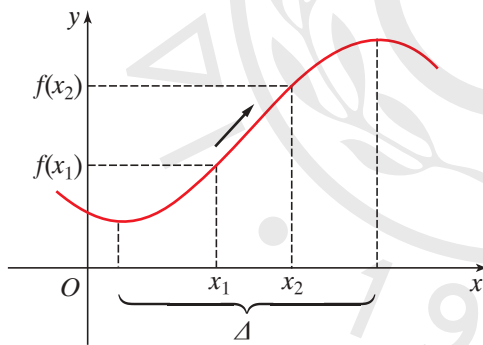
Γενικά, έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbf{R}$ και Δ ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της ($\Delta \subseteq A$). Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε τους επόμενους ορισμούς:

- α) Η συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (σχ. 3.2ι).
- β) Η συνάρτηση f ονομάζεται **αύξουσα** στο διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$ (σχ. 3.2ια).
- γ) Η συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (σχ. 3.2ιβ).
- δ) Η συνάρτηση f ονομάζεται **φθίνουσα** στο διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$ (σχ. 3.2ιγ).

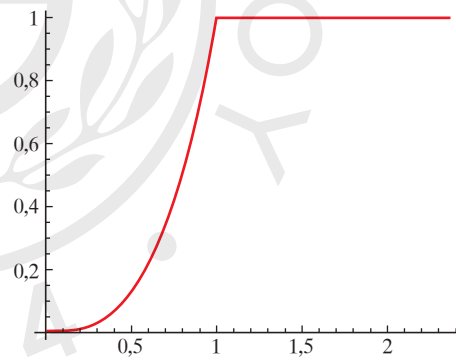
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, αφού για $0 \leq x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

Η ίδια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού για $x_1 < x_2 \leq 0$ έχουμε $0 \leq -x_2 < -x_1$, οπότε $0 \leq x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$.

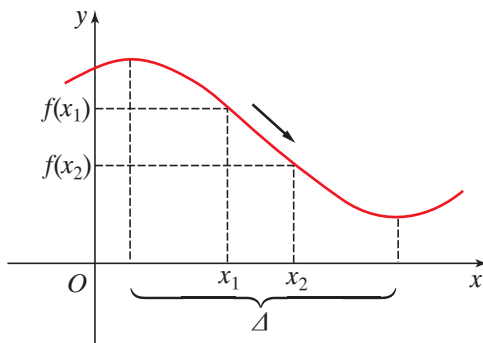
Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε ονομάζεται **γνησίως μονότονη** στο Δ . Αντίστοιχα, αν μια συνάρτηση f είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε ονομάζεται **μονότονη** στο Δ .



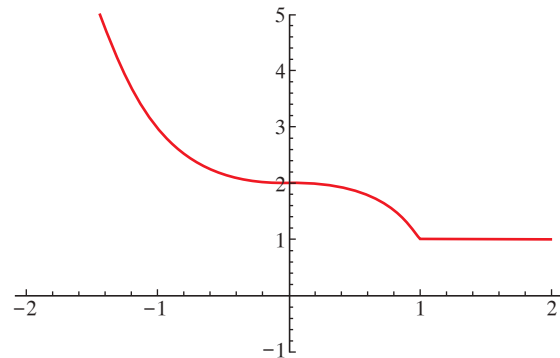
Σχ. 3.2ι.



Σχ. 3.2ια.



Σχ. 3.2ιβ.

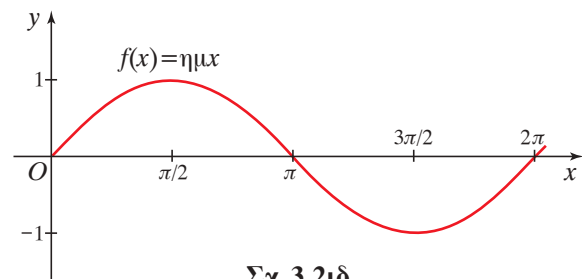


Σχ. 3.2ιγ.

Από τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως εύκολα αναγνωρίζουμε αν αυτή είναι μονότονη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$$

της οποίας η γραφική παράσταση εικονίζεται στο σχήμα 3.2ιδ, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.



Σχ. 3.2ιδ.

Αν συγκρίνουμε τις δύο γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 3.2ιε παρατηρούμε ότι:

α) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση (α) το πολύ σε ένα σημείο ή ισοδύναμα δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παραστάσεως της συναρτήσεως f με την ίδια τεταγμένη.

β) Υπάρχουν οριζόντιες ευθείες που τέμνουν τη γραφική παράσταση (β) σε περισσότερα από ένα σημεία ή ισοδύναμα υπάρχουν σημεία της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως g με την ίδια τεταγμένη.

Μια συνάρτηση f που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x λέγεται αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα:

Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση**¹, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ισοδύναμα, η f θα είναι αμφιμονοσήμαντη όταν για $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Για παράδειγμα:

α) Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a \neq 0$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση αφού, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά (σχ. 3.2ιστ)

$$ax_1 + \beta = ax_2 + \beta \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = 5x^2$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, αφού ισχύει $f(-x) = f(x) = 5x^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό x (π.χ. $f(-2) = f(2) = 20$ αν και είναι $-2 \neq 2$) (σχ. 3.2ιζ).

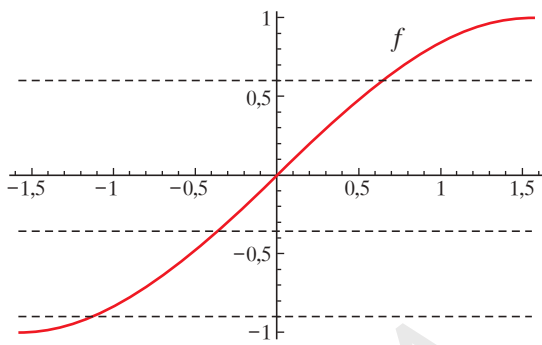
Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ θα λέμε ότι είναι αμφιμονοσήμαντη σε ένα υποσύνολο Δ του πεδίου ορισμού της όταν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Στη συνέχεια, όταν αναφέρουμε ότι μια συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη θα εννοούμε ότι αυτό ισχύει για ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σε αντίθετη περίπτωση θα αναφέρομε ρητά σε ποιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα).

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Πράγματι ας θεωρήσουμε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ και οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε θα ισχύει είτε $x_1 < x_2$, είτε $x_1 > x_2$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε, αφού η f είναι αύξουσα, $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ομοίως, αν $x_1 > x_2$ θα έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε και πάλι θα ισχύει

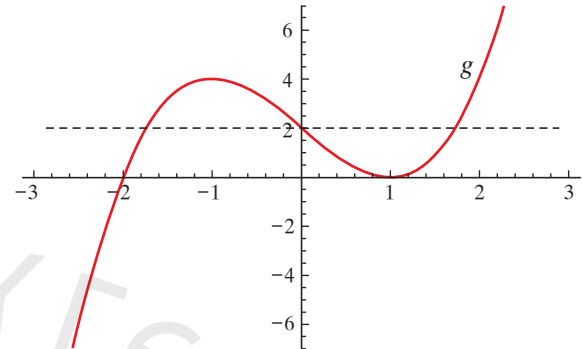
1. Για τις αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις χρησιμοποιείται συχνά και ο όρος συνάρτηση 1-1.

$f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ και σύμφωνα με τον ορισμό η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται ότι κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Το αντίστροφο της παραπάνω διαπιστώσεως δεν αληθεύει, δηλαδή, υπάρχουν συναρτήσεις που είναι αμφιμονοσήμαντες, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. Μία τέτοια συνάρτηση φαίνεται στο σχήμα 3.2η.

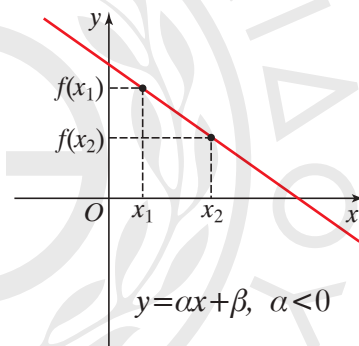
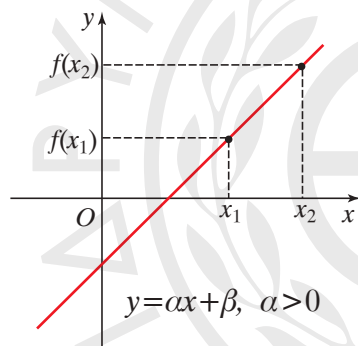


(α)

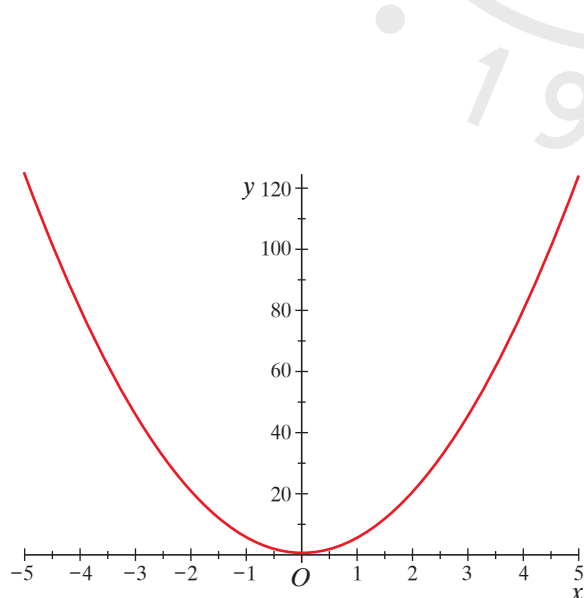


(β)

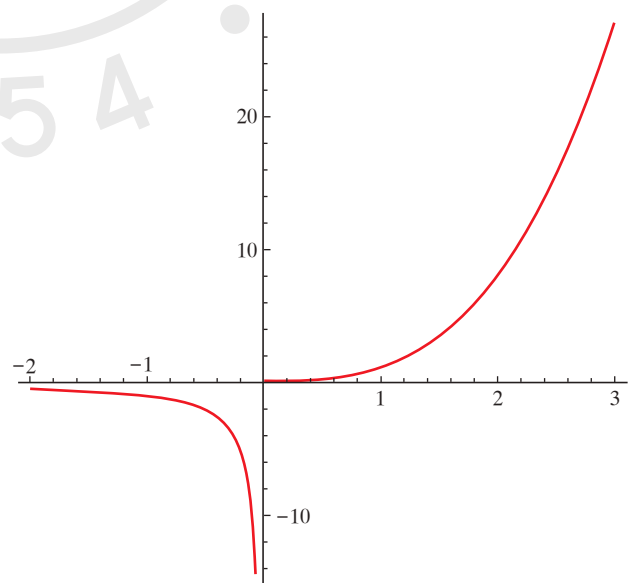
Σχ. 3.2ιε.



Σχ. 3.2ιστ.



Σχ. 3.2ιζ.



Σχ. 3.2ιη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.3.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες.

$$\alpha) f(x) = (x-1)(x-3)$$

$$\beta) f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\gamma) f(x) = \eta\mu x.$$

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(3)=0$, ενώ $1 \neq 3$. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R} - \{-1\}$. Αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1+1} = \frac{x_2+2}{x_2+1} \Leftrightarrow (x_1+2)(x_2+1) = (x_2+2)(x_1+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 + 2x_2 + 2 = x_2x_1 + x_2 + 2x_1 + 2 \Leftrightarrow x_2 = x_1. \end{aligned}$$

γ) Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x$ για κάθε x . Αφού λοιπόν, για παράδειγμα $f(0) = f(2\pi) = 0$, ενώ $0 \neq 2\pi$, η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.4.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι μονότονες.

$$\alpha) f(x) = 5x^2 - 7$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

Λύση.

Ένας συστηματικός τρόπος για να εξετάζουμε τη μονοτονία συναρτήσεων είναι μέσω της διερευνησεως του προσήμου του λεγόμενου **λόγου μεταβολής**

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$

Αν διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

για κάθε $x_1 \neq x_2$ τα οποία ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα στο Δ . Αντίστοιχα, αν διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

για κάθε $x_1 \neq x_2$, τα οποία ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση f θα είναι φθίνουσα στο Δ .

α) Αν $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ με $x_1 \neq x_2$ θα έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = (5x_2^2 - 7) - (5x_1^2 - 7) = 5x_2^2 - 5x_1^2$$

οπότε

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{5x_2^2 - 5x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{5(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = 5(x_2 + x_1).$$

Είναι τώρα φανερό ότι:

- Αν $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ (με $x_1 \neq x_2$), θα ισχύει $\lambda = 5(x_2 + x_1) > 0$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [0, +\infty)$.
- Αν $x_1 \leq 0$ και $x_2 \leq 0$ (με $x_1 \neq x_2$), θα ισχύει $\lambda = 5(x_2 + x_1) < 0$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, 0]$.

β) Αν $x_1, x_2, \in \Delta = \mathbf{R} - \{-1\}$ με $x_1 \neq x_2$ θα έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 + 2}{x_2 + 1} - \frac{x_1 + 2}{x_1 + 1} = \frac{(x_2 + 2)(x_1 + 1) - (x_1 + 2)(x_2 + 1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)}$$

οπότε

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Είναι τώρα φανερό ότι:

- Αν $x_1 > -1$ και $x_2 > -1$, θα ισχύει $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, οπότε $\lambda < 0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-1, \infty)$.
- Αν $x_1 < -1$ και $x_2 < -1$ ισχύει και πάλι $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, οπότε $\lambda < 0$. Άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, -1)$.
- Αν θεωρήσουμε έναν αριθμό $x_1 > -1$ και ένα δεύτερο $x_2 < -1$ (ή αντίστροφα), θα ισχύει $(x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0$, οπότε $\lambda > 0$. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της $A = \mathbf{R}$.

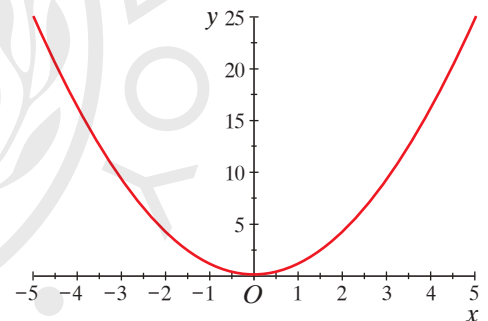
Θα ολοκληρώσουμε την παρούσα παράγραφο αναφέροντας ορισμένες επί πλέον γενικές κατηγορίες συναρτήσεων. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ και $h(x) = \eta\mu x$ (με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbf{R}$), είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύουν τα εξής:

α) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β) $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

γ) $h(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x) = h(x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Συναρτήσεις που έχουν τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται αντίστοιχα άρτιες, περιττές και περιοδικές. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τους παρακάτω γενικούς ορισμούς:



Σχ. 3.2ιθ.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = x^2$.

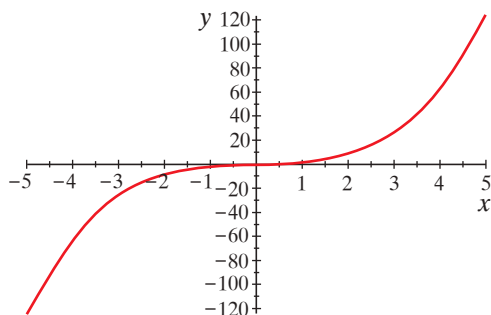
α) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται **άρτια**, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$.

β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται **περιττή**, αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

γ) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ονομάζεται **περιοδική** με περίοδο το θετικό αριθμό T , αν για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $x + T \in A$ και ισχύει $f(x + T) = f(x)$.

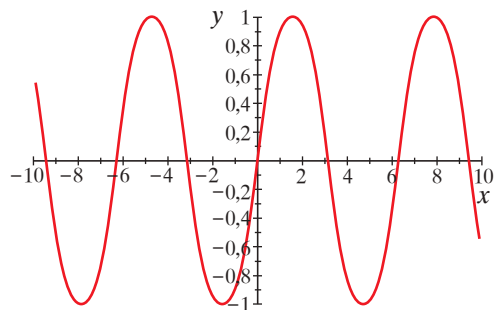
Από τους ορισμούς αυτούς προκύπτει άμεσα ότι:

α) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα (άξονα $y'y$) (σχ. 3.2ιθ).



Σχ. 3.2κ.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = x^3$.



Σχ. 3.2κα.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = \eta\mu x$.

β) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων (σχ. 3.2κ).

γ) Η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συναρτήσεως αποτελείται από επαναλαμβανόμενα τμήματα (σε πλάτος μιας περιόδου) (σχ. 3.2κα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.5.

Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

$$\alpha) f(x) = x^4 + 3x^2 + 2 \quad \beta) f(x) = \frac{1}{x} + 3x \quad \gamma) f(x) = x^2 + 2x.$$

Λύση.

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 + 2 = x^4 + 3x^2 + 2 = f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$. Επίσης ισχύει ότι:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} + 3(-x) = -\left(\frac{1}{x} + 3x\right) = -f(x)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbf{R}$. Είναι φανερό ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$. Όμως:

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x, \quad -f(x) = -(x^2 + 2x) = -x^2 - 2x$$

και δεν μπορεί να ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε x (π.χ. έχουμε $f(-1) = -1 \neq 3 = f(1)$), ούτε να ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x (π.χ. έχουμε $f(-1) = -1 \neq -3 = -f(1)$).

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Ασκήσεις.

3.2.1. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι

$f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

α) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$

β) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$

γ) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}+3, & x < 0 \\ \sqrt{x}+3, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x)=\sqrt{|x|}+3$

δ) $f(x)=\frac{x}{|x|}+3$, $g(x)=\frac{|x|}{x}+3$

3.2.2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=|x-2|$, $g(x)=|x+2|$. Να βρείτε τον τύπο της συναρτήσεως $h=f+g$ χωρίς τη χρήση του συμβόλου της απόλυτης τιμής και στη συνέχεια να δώσετε τη γραφική της παράσταση.

3.2.3. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται από τους τύπους

$$f(x)=\begin{cases} 5x-3, & x < 0 \\ x^2+2, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} -2x+3, & x < 0 \\ 3x-x^2-2, & x \geq 0 \end{cases}$$

να βρείτε τον τύπο της συναρτήσεως $h=f+g$.

3.2.4. Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g$, $f-g$, fg , $\frac{f}{g}$, $3f+2g$.

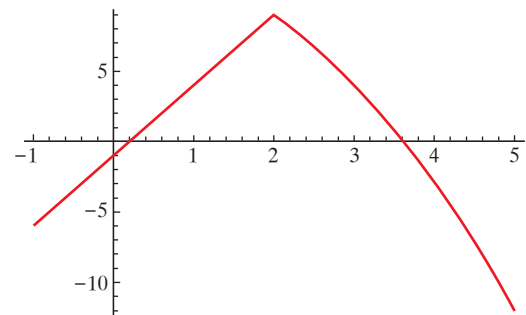
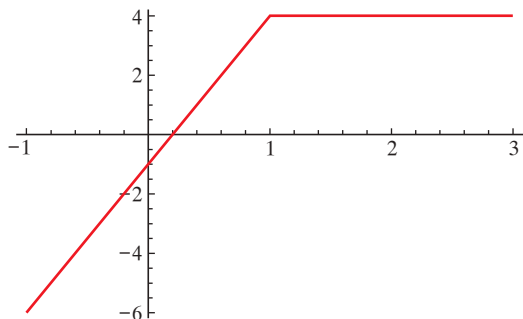
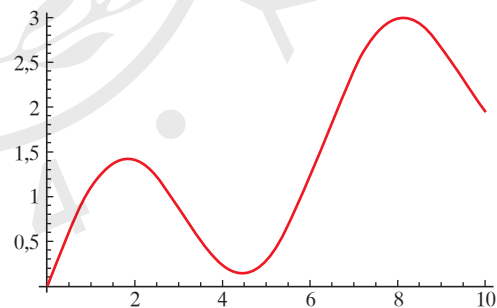
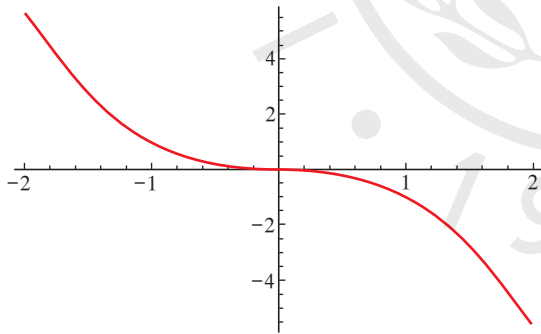
α) $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$

β) $f(x)=\sqrt{x}-3$, $g(x)=\sqrt{x}+3$

γ) $f(x)=-x+2$, $g(x)=x-2$

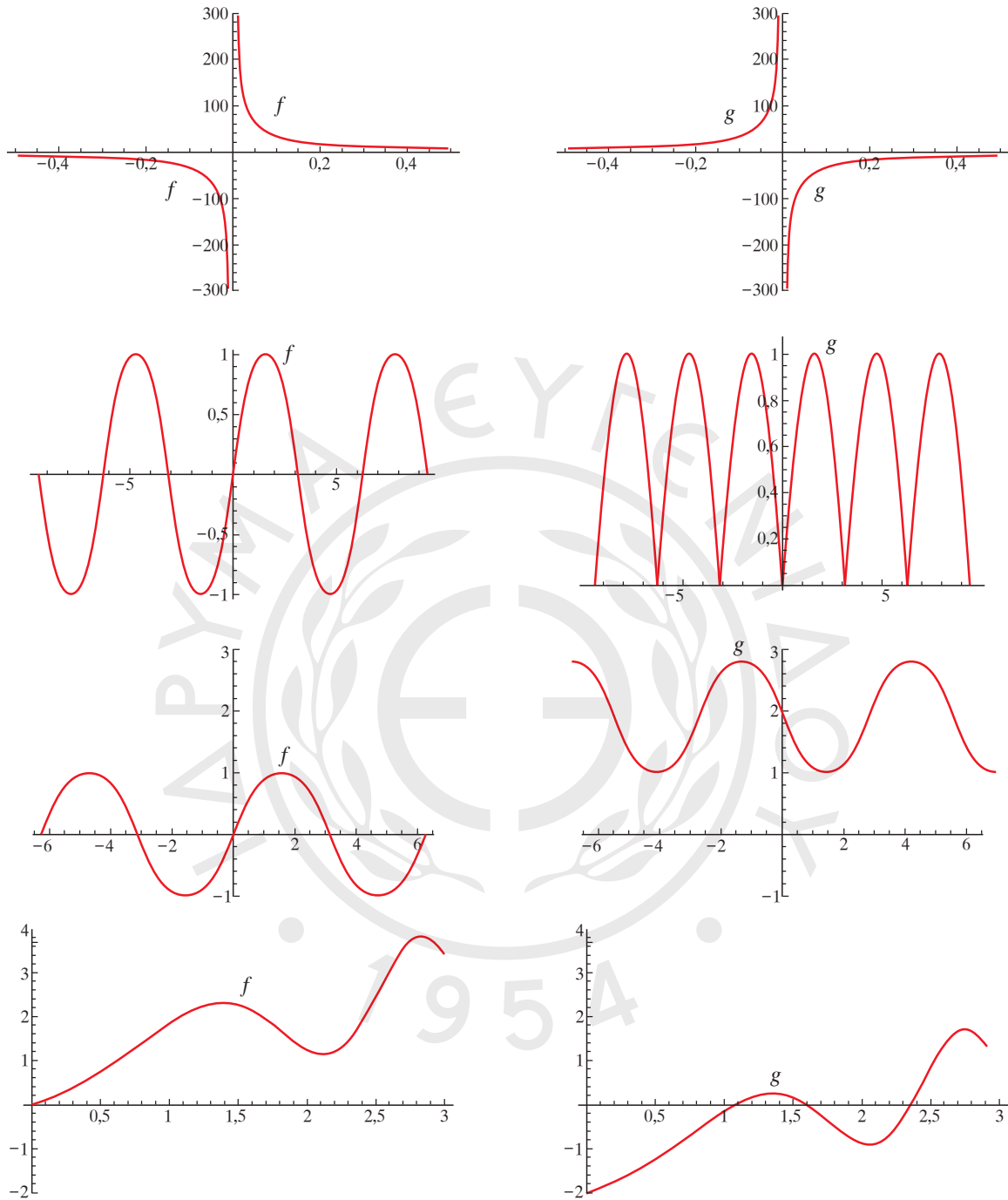
δ) $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\frac{1}{x-1}$

3.2.5. Για καθεμιά από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις (σχ. 3.2κβ) της συναρτήσεως f να δοθεί η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $g=-f$ και της συναρτήσεως $g=|f|$.



Σχ. 3.2κβ.

3.2.6. Να βρείτε τη σχέση που ισχύει μεταξύ των ζευγαριών συναρτήσεων f και g των σχημάτων του 3.2κγ.



Σχ. 3.2κγ.

3.2.7. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες.

$$\alpha) f(x) = (x-5)(x-7) + 1 \quad \beta) f(x) = \frac{x+2}{x+1} - 2 \quad \gamma) f(x) = \sin x \quad \delta) f(x) = |x-5| + |x-2| + 15$$

3.2.8. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι μονότονες στο πεδίο ορισμού τους ή σε κάποιο υποσύνολο αυτού.

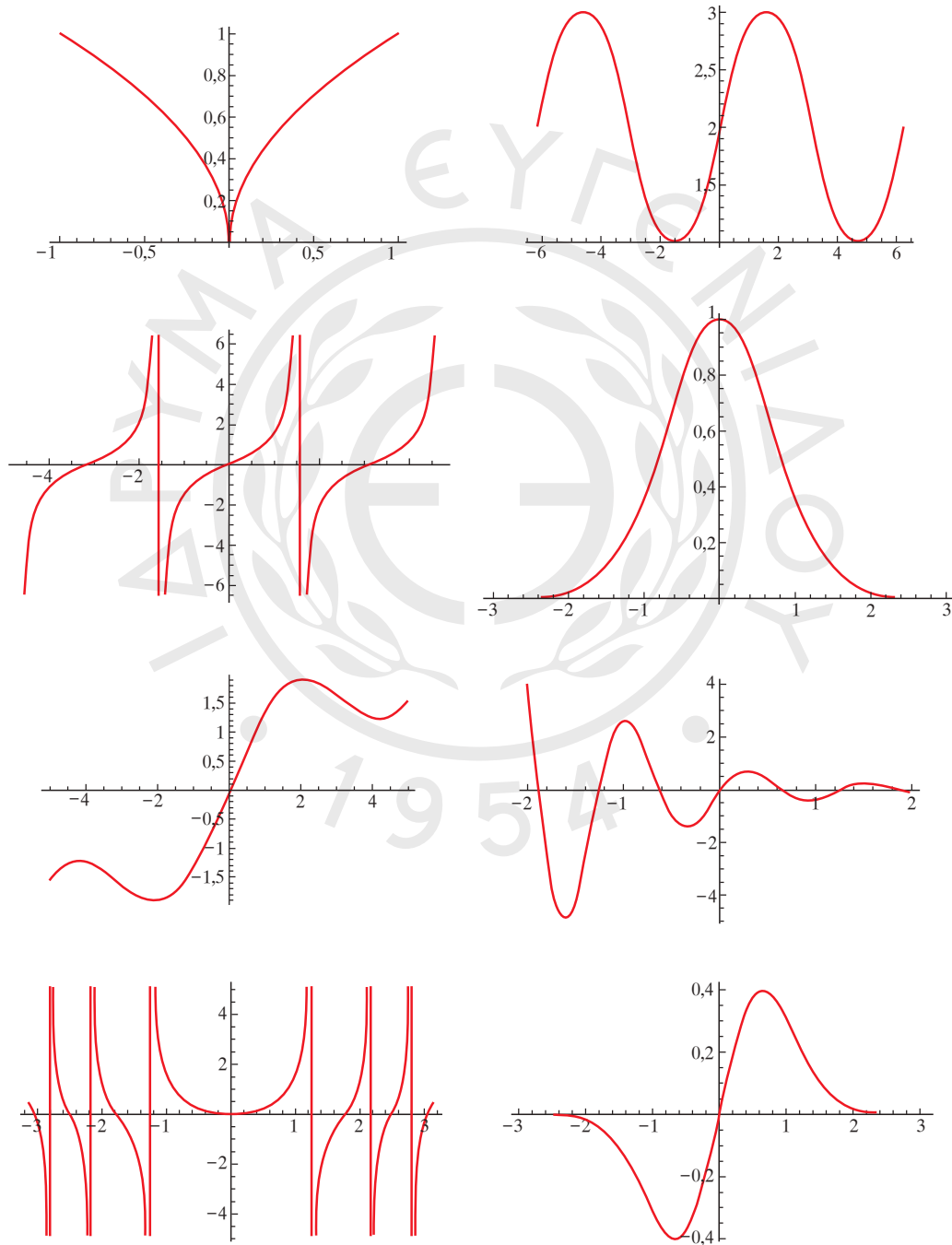
$$\alpha) f(x) = 8x^3 + x + 1 \quad \beta) f(x) = \frac{2x+3}{2x+5} \quad \gamma) f(x) = |3x-5| \quad \delta) f(x) = (x-2)^2 + 4x$$

3.2.9. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

$$\alpha) f(x) = x^6 + 3x^4|x| + 2|x| \quad \beta) f(x) = \frac{1}{|x|} + 3x^2 \quad \gamma) f(x) = 3x^3 + 2x^2 \eta \mu x$$

$$\delta) f(x) = 2x^3 + 2x \sigma \nu \eta x \quad \epsilon) f(x) = \frac{x}{|x|} + 1 \quad \sigma \tau) f(x) = |x-3|.$$

3.2.10. Ποιες από τις γραφικές παραστάσεις (σχ. 3.2κδ) αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που είναι άρτιες, περιττές και ποιες σε τίποτε από τα δύο; Ποιες από τις συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές;



Σχ. 4.κδ.

3.2.11. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και c, d είναι δύο πραγματικές σταθερές με $c > 0$, τότε η συνάρτηση $cf + d$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
 β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ και a, b είναι δύο πραγματικές σταθερές με $c < 0$, τότε η συνάρτηση $cf + d$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

3.2.12. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσες) σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο Δ .
 β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
 γ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
 δ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

3.2.13. Να αποδείξετε ότι:

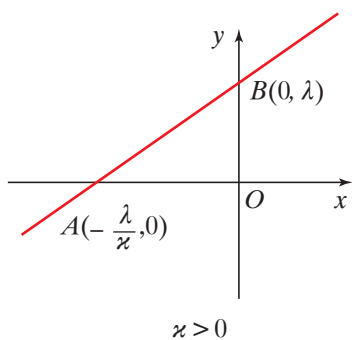
- α) Αν δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbf{R}$ είναι άρτιες, τότε η συνάρτηση $f+g$ και η συνάρτηση fg είναι επίσης άρτιες.
 β) Αν δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbf{R}$ είναι περιττές, τότε η συνάρτηση fg είναι επίσης άρτια.
 γ) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ είναι άρτια και η συνάρτηση $g: A \rightarrow \mathbf{R}$ είναι περιττή, τότε η συνάρτηση fg είναι περιττή.

3.3 Στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις.

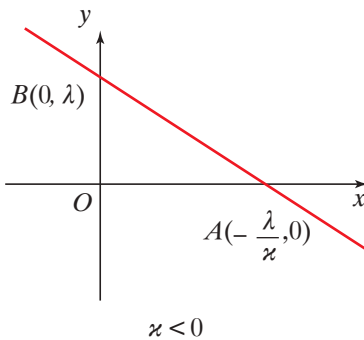
Στην παράγραφο αυτή θα επεξηγήσουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων που συναντάμε συχνά και θα αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητές τους.

α) **Πολυωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού με τύπο $f(x) = \kappa x + \lambda, \kappa \neq 0$.** Το πεδίο ορισμού της είναι το $A = \mathbf{R}$ και το σύνολο τιμών της το $f(A) = \mathbf{R}$. Η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία που τέμνει τους άξονες x, y στα σημεία $A(-\frac{\lambda}{\kappa}, 0)$ και $B(0, \lambda)$ αντίστοιχα. Για $\kappa > 0$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (σχ. 3.3α), για $\kappa < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα (σχ. 3.3β).

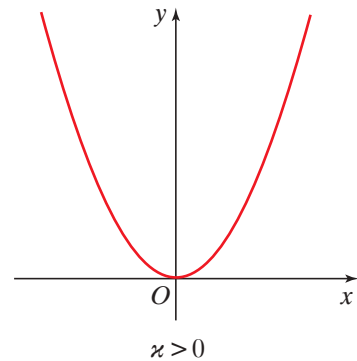
β) **Πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού με τύπο $f(x) = \kappa x^2, \kappa \neq 0$.** Είναι άρτια συνάρτηση (οπότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y) με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$.



Σχ. 3.3α.



Σχ. 3.3β.



Σχ. 3.3γ.

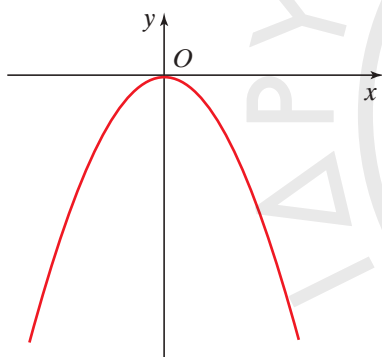
Αν $\kappa > 0$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [0, +\infty)$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \kappa x^2$ για $\kappa > 0$ φαίνεται στο σχήμα 3.3γ.

Αν $\kappa < 0$, η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [-\infty, 0)$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \kappa x^2$ για $\kappa < 0$ φαίνεται στο σχήμα 3.3δ.

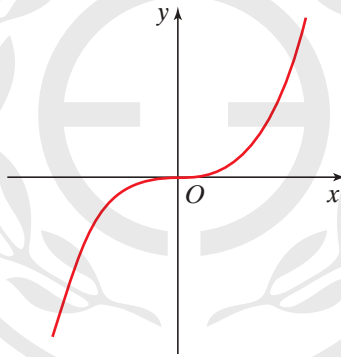
γ) **Πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με τύπο $f(x) = \kappa x^3$, $\kappa \neq 0$.** Είναι περιττή συνάρτηση (οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων) με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbf{R}$.

Αν $\kappa > 0$, η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σχ. 3.3ε), ενώ για $\kappa < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (σχ. 3.3στ).

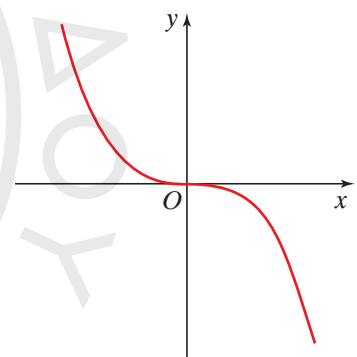
δ) **Ρητή συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\kappa}{x}$, $\kappa \neq 0$.** Είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$. Η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς την αρχή των αξόνων. Για $\kappa > 0$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ (χωρίς όμως να είναι φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της), ενώ για $\kappa < 0$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ (χωρίς όμως να είναι αύξουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της). Στο σχήμα 3.3ζ δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \kappa/x$ με $\kappa > 0$, ενώ στο σχήμα 3.3η για $\kappa < 0$.

 $\kappa < 0$

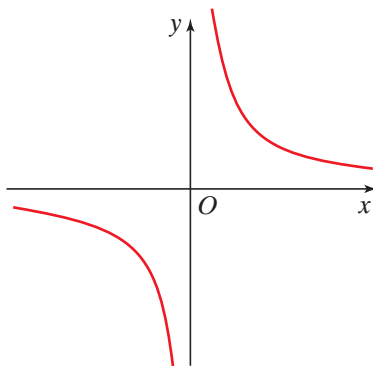
Σχ. 3.3δ.

 $\kappa > 0$

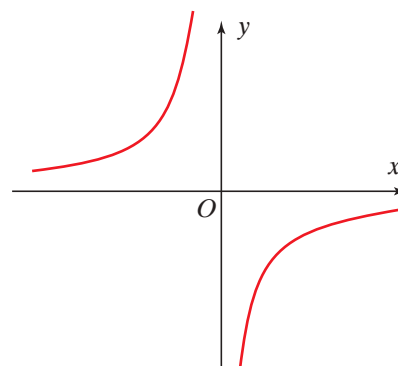
Σχ. 3.3ε.

 $\kappa < 0$

Σχ. 3.3στ.

 $\kappa > 0$

Σχ. 3.3ζ.

 $\kappa < 0$

Σχ. 3.3η.

ε) **Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης.** Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $f(A) = [-1, 1]$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ είναι εναλλάξ αύξουσα και φθίνουσα σε διαστήματα πλάτους π (σχ. 3.3θ).

Δίνεται στη συνέχεια ένας πίνακας χαρακτηριστικών τιμών για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι άρτια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $f(A) = [-1, 1]$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ είναι εναλλάξ αύξουσα και φθίνουσα σε διαστήματα πλάτους π (σχ. 3.3ι).

Δίνεται στη συνέχεια ένας πίνακας χαρακτηριστικών τιμών για τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1

Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\varphi x$ είναι περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού A το $\mathbf{R}$, με εξαίρεση τα σημεία της μορφής $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbf{R}$. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$, ενώ είναι αύξουσα σε διαστήματα πλάτους π της μορφής $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$ (σχ. 3.3ια).

x	$-\pi/4$	0	$\pi/4$
$\epsilon\varphi x$	-1	0	1

στ) **Εκθετική συνάρτηση** με βάση a : $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$. Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = (0, +\infty)$. Αν $0 < a < 1$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 3.3ιβ), επομένως είναι αμφιμονοσήμαντη. Για $a > 1$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 3.3ιγ) οπότε και πάλι είναι αμφιμονοσήμαντη. Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται **βάση** της εκθετικής συναρτήσεως. Η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό του Euler e λέγεται απλά εκθετική συνάρτηση.

ζ) **Λογαριθμική συνάρτηση** με βάση a : $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$. Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbf{R}$. Αν $0 < a < 1$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 3.3ιδ), ενώ για $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (σχ. 3.3ιε). Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον αριθμό Euler e συμβολίζεται με $\ln x$ και ονομάζεται απλά **λογαριθμική συνάρτηση**.

Υπενθυμίζουμε ότι, για τη λογαριθμική συνάρτηση, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$\alpha) \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\beta) \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\gamma) \log_a a^x = x, a^x = e^{x \ln a} \text{ και } a^{\log_a x} = x$$

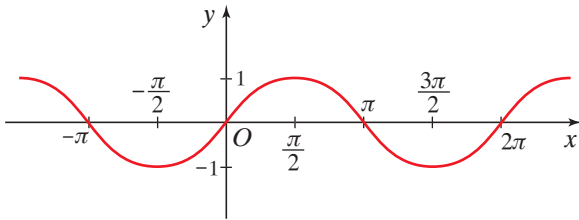
$$\delta) \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\epsilon) \log_a a = 1 \text{ και } \log_a 1 = 0$$

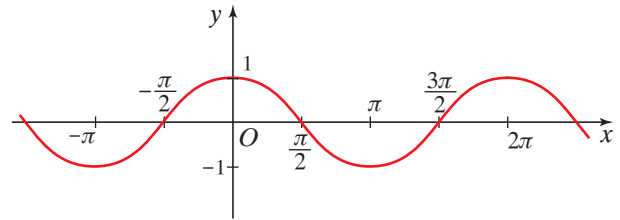
$$\sigma\tau) \log_a x^k = k \log_a x$$

$$\zeta) \text{ Αν } a > 1, \text{ τότε } \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2, \text{ ενώ } \text{αν } 0 < a < 1, \text{ τότε } \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

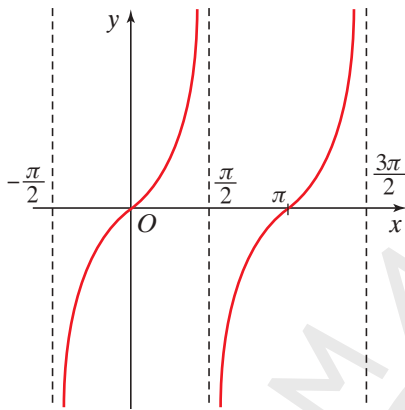
Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.



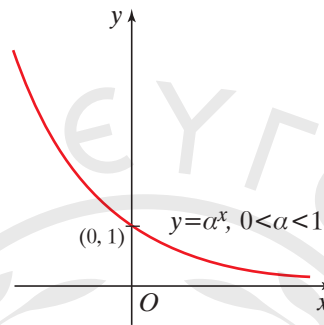
Σχ. 3.3θ.



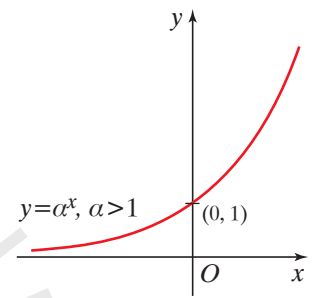
Σχ. 3.3ι.



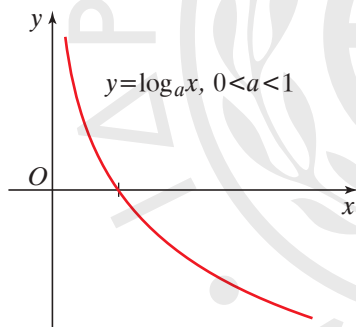
Σχ. 3.3ια.



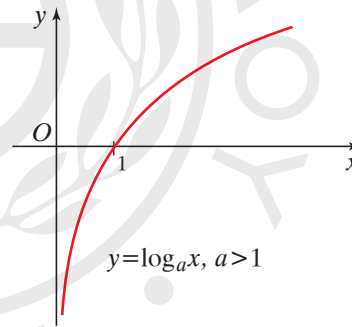
Σχ. 3.3ιβ.



Σχ. 3.3ιγ.



Σχ. 3.3ιδ.



Σχ. 3.3ιε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.1.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e - 2, & x < 1 \\ e^x, & x \geq 1. \end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x και y .

Λύση.

α) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας με εξίσωση $y = 2x + (e - 2)$ στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και το τμήμα της γραφικής παραστάσεως της εκθετικής συναρ-

τήσεως $y = e^x$ στο διάστημα $[1, +\infty)$. Έτσι έχουμε το σχήμα 3.3ιστ.

β) Για να βρούμε σε ποιο σημείο η C_f τέμνει τον άξονα των x θέτουμε $y = 0$ και προσδιορίζουμε το αντίστοιχο x . Αφού για $x \geq 1$ έχουμε $y = e^x > 0$, οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $y = 0$ θα πρέπει να αναζητηθούν στον άλλο κλάδο της συναρτήσεως, δηλαδή για $x < 1$. Έτσι παίρνουμε $2x + e - 2 = 0$, οπότε

$$x = \frac{2-e}{2},$$

η οποία αποτελεί αποδεκτή τιμή, αφού

$$\frac{2-e}{2} < 1.$$

Για να βρούμε σε ποιο σημείο η C_f τέμνει τον άξονα των y θέτουμε $x = 0$, δηλαδή έχουμε $f(0) = y$ ή $y = e - 2$. Άρα η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\frac{2-e}{2}, 0)$ και $(0, e-2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2.

Να γίνει η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{|x-3|}.$$

Λύση.

Αρχικά παριστάνουμε γραφικά (σχ. 3.3ιζ) τη συνάρτηση

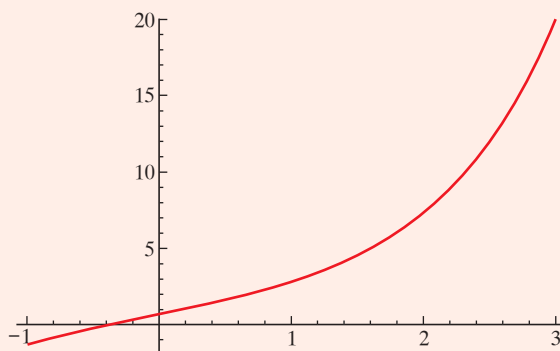
$$f_1(x) = \frac{1}{x}$$

και στη συνέχεια την

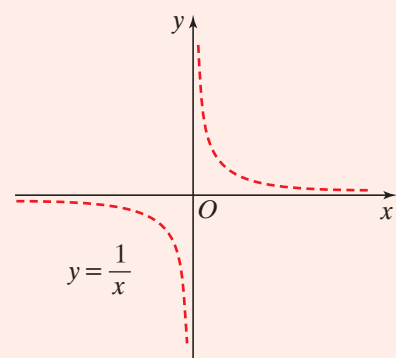
$$f_2(x) = \frac{1}{|x|} = |f_1(x)|.$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.2.2, η $C_{|f|}$ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_f όπου είναι $f(x) \geq 0$ (δηλ. στον άνω δεξί κλάδο), ενώ θα έχει τα ίδια τμήματα με την C_{-f} , όπου είναι $f(x) < 0$ (δηλ. στον κάτω δεξί κλάδο). Όμως, και πάλι σύμφωνα με το παράδειγμα 3.2.2, η C_{-f} θα είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$ (μας ενδιαφέρει μόνο το κομμάτι που αντιστοιχεί σε $x < 0$). Έτσι προκύπτει η γραφική παράσταση (σχ. 3.3ιη) για τη συνάρτηση

$$f_2(x) = \frac{1}{|x|}.$$



Σχ. 3.3ιστ.

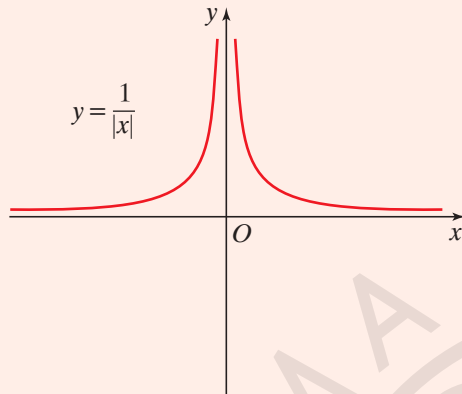


Σχ. 3.3ιζ.

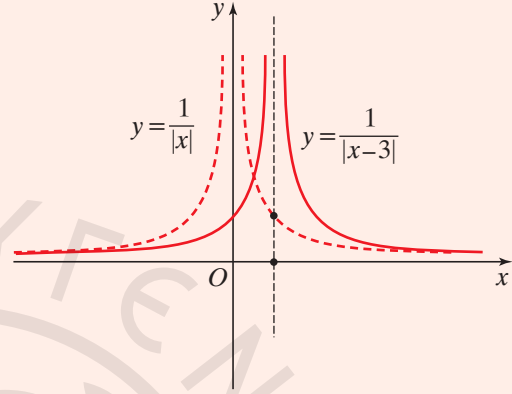
Τέλος, επειδή

$$f(x) = \frac{1}{|x-3|} = f_2(x-3),$$

η γραφική παράσταση της h προκύπτει, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f_2 (διακεκομμένη γραμμή στο σχ. 3.3ιθ) κατά μία μονάδα προς τα δεξιά (συνεχόμενη γραμμή στο σχ. 3.3ιθ).



Σχ. 3.3ιη.



Σχ. 3.3ιθ.

Ασκήσεις.

3.3.1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 - 4} \quad \beta) f(x) = e^{x-3} \quad \gamma) f(x) = \ln(x-3) + 2 \quad \delta) f(x) = |\ln x|$$

Ποιο είναι το σύνολο τιμών για κάθε μια από τις συναρτήσεις αυτές;

3.3.2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 1 \\ x^3 + 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \leq e \\ (x/e)^2, & x > e \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 0 \\ 3x + 2, & 0 < x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases} \quad \delta) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

3.3.3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων f , g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

$$\alpha) f(x) = 2e^x - 3 \text{ και } g(x) = 3e^x + 2 \quad \beta) f(x) = e^x \text{ και } g(x) = -e^x$$

$$\gamma) f(x) = \ln x \text{ και } g(x) = \ln \frac{1}{x^2} \quad \delta) f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = x^2$$

3.3.4. Αν οι συναρτήσεις f , g ορίζονται από τους παρακάτω τύπους, να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$ και να

σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 2 \\ -x^3, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x+3, & x < 1 \\ x^3-3, & x \geq 1 \end{cases}$$

3.4 Σύνθεση συναρτήσεων. Η αντίστροφη συνάρτηση.

Ας υποθέσουμε ότι για τη μελέτη του αριθμού των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν σε μία πόλη χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός τύπος $15\sqrt{y+1}$, όπου y είναι ο πληθυσμός της πόλεως σε εκατοντάδες χιλιάδες άτομα (ο προηγούμενος τύπος δίνει τον αριθμό αυτοκινήτων σε χιλιάδες αυτοκίνητα). Στην πραγματικότητα, για τον καθορισμό του αριθμού των αυτοκινήτων μέσω του πληθυσμού της πόλεως χρησιμοποιείται μία συνάρτηση με τύπο:

$$g(y) = 15\sqrt{y+1}, \quad y > 0. \quad (3.4.1)$$

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ο πληθυσμός της πόλεως μεταβάλλεται ετησίως σύμφωνα με τον τύπο $f(x) = 20e^{0,01x}$, $x \geq 0$, δηλαδή ο πληθυσμός σε x έτη από σήμερα θα είναι $20e^{0,01x}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα [παρατηρήστε ότι ο σημερινός πληθυσμός θεωρείται ίσος με $f(0) = 20$ χιλιάδες άτομα].

Αν θέλαμε να εκφράσουμε τον αριθμό των αυτοκινήτων της πόλεως ως συνάρτηση του χρόνου t , θα σκεφτόμαστε ως εξής: σε x έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλεως θα είναι ίσος με $y = 20e^{0,01x}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα και σύμφωνα με τον τύπο (3.4.1), ο αριθμός των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στην πόλη θα είναι:

$$z = 15\sqrt{y+1} = 15\sqrt{20e^{0,01x} + 1},$$

Ο τελευταίος τύπος ορίζει μια συνάρτηση του x , πιο συγκεκριμένα έχουμε την

$$h(x) = 15\sqrt{20e^{0,01x} + 1}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $y = 20e^{0,01x} = f(x)$, ο τύπος αυτός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$h(x) = 15\sqrt{20e^{0,01x} + 1} = 15\sqrt{y+1}$$

και χρησιμοποιώντας την (3.4.1) θα έχουμε $h(x) = 15\sqrt{20e^{0,01x} + 1} = 15\sqrt{y+1} = g(y) = g(f(x))$.

Τα βήματα του σχηματισμού της νέας συναρτήσεως φαίνονται γραφικά στο σχήμα 3.4α.

$$\begin{array}{c} z = g(y) = g(f(x)) \\ \xrightarrow{\quad \quad \quad} \\ x \longrightarrow y = 20e^{0,01x} = f(x) \longrightarrow z = h(x) = 15\sqrt{20e^{0,01x} + 1} = g(f(x)) \end{array}$$

Η συνάρτηση που σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x αντιστοιχίζει την τιμή $g(f(x))$ ονομάζεται **σύνθεση της f με την g** και συμβολίζεται με $g \circ f$. Είναι φανερό ότι, για να οριστεί η τιμή $g(f(x))$ της συναρτήσεως $g \circ f$, θα πρέπει το $f(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως g . Γενικά έχουμε τον επόμενο ορισμό (σχ. 3.4α):

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Τότε για όλα τα $x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$, ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ και ονομάζεται **σύνθεση της f με την g** .

Θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο γεγονός ότι, το πεδίο ορισμού της συνθέσεως $g \circ f$ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A , της f , αλλά περιορίζεται στα $x \in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της g , δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

(σχ. 3.4β). Στην περίπτωση που ισχύει $f(A) \cap B = \emptyset$ δεν ορίζεται η σύνθεση της f με την g , ενώ αν συμβεί να ισχύει $f(A) \subseteq B$ το πεδίο ορισμού της συνθέσεως είναι ολόκληρο το σύνολο A .

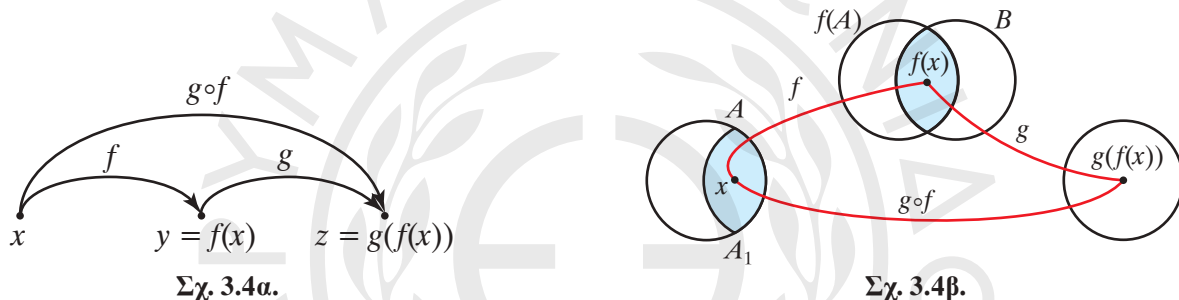
Η σύνθεση συναρτήσεων μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Τη συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε **σύνθεση** των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$ και θα έχουμε:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))).$$

Ομοίως ορίζεται η σύνθεση συναρτήσεων και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.1.

Από ένα δεξαμενόπλοιο διαρρέει συνεχώς πετρέλαιο, το οποίο διαχέεται στην επιφάνεια της θάλασσας σχηματίζοντας μία κυκλική κηλίδα. Η ακτίνα της πετρελαιοκηλίδας δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 5 + 3t$, όπου t είναι ο χρόνος από τη στιγμή που άρχισε η διαρροή. Να εκφράσετε την επιφάνεια της πετρελαιοκηλίδας ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση.

Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας του r , ως συνάρτηση της ακτίνας του δίνεται από τον τύπο

$$E = g(r) = \pi r^2.$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα που εξετάζουμε, η ακτίνα της κυκλικής κηλίδας είναι συνάρτηση του χρόνου t που διαρκεί η διαρροή και εκφράζεται από τη σχέση

$$r = f(t) = 5 + 3t.$$

Επομένως, η επιφάνεια της κηλίδας σε χρόνο t από τη στιγμή που άρχισε η διαρροή θα δίνεται από τη σύνθεση των συναρτήσεων f και g , δηλαδή

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(5 + 3t) = \pi(5 + 3t)^2 = 25\pi + 30\pi t + 9\pi t^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=x+1$ και $g(x)=x^2+1$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι το $\mathbf{R}$, οπότε τόσο η $f \circ g$ όσο και η $g \circ f$ θα έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Ο τύπος της $f \circ g$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2,$$

ενώ τύπος της $g \circ f$ είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2.$$

Είναι φανερό ότι, παρότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού (το $\mathbf{R}$), δεν ισχύει $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ για κάθε x , οπότε

$$g \circ f \neq f \circ g,$$

δηλαδή στη σύνθεση συναρτήσεων έχει σημασία η σειρά με την οποία εργαζόμαστε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = x^2 + 2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = [2, +\infty)$. Η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 + 2$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, οπότε $B = \mathbf{R}$. Επομένως η $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A_1 = \{x \in A : f(x) \in B\} = [2, +\infty) = A$ και για κάθε $x \in A_1$ θα είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = (x-2) + 2 = x.$$

Η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το

$$A_2 = \{x \in B : g(x) \in A\} = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2 \geq 0\} = \mathbf{R}$$

ενώ ο τύπος της είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{(x^2 + 2) - 2} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $g \circ f$ και $f \circ g$ είναι διαφορετικά, οπότε και πάλι έχουμε $g \circ f \neq f \circ g$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

για όλα τα x που ανήκουν και στα δύο πεδία ορισμού, κάτι όμως που δεν συμβαίνει σε κάθε περίπτωση που υπολογίζουμε σύνθεση συναρτήσεων με αλλαγμένη τη σειρά των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε.

Ας υποθέσουμε ότι κατά τη μελέτη της απλής ευθύγραμμης κινήσεως η απόσταση του κινητού (σε cm) από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή x (σε sec) δίνεται από τον τύπο $f(x) = 3x + 5$.

Ας υποθέσουμε ότι το κινητό κινείται συνολικά επί 6 min. Μπορούμε τότε εύκολα να προσδιορίσουμε τη θέση του σε διάφορες χρονικές στιγμές x ($0 \leq x \leq 600$), αφού από τον αριθμό των sec που πέρασαν

από την αρχή των χρόνων μπορούμε να βρούμε την απόσταση σε cm που απέχει το κινητό από την αρχή των αξόνων. Στον πίνακα 3.4.1 δίνονται οι αποστάσεις του κινητού για κάποιες επιλεγμένες χρονικές στιγμές. Έτσι, παρατηρούμε ότι στην αρχή των χρόνων ($x = 0$) το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 5 cm από την αρχή των αξόνων, σε χρόνο $x=5\text{sec}$ σε απόσταση 20 cm, ενώ στο τέλος της κινήσεως έχει βρεθεί σε απόσταση 1805 cm από την αρχή των αξόνων.

Ας δούμε τώρα το ίδιο θέμα από μια διαφορετική οπτική γωνία. Αν αναρωτηθούμε σε ποια χρονική στιγμή το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 305 cm από την αρχή των αξόνων, η απάντηση προφανώς είναι 100 sec. Συνεχίζοντας να εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο (αντίστροφα από ό,τι κάναμε αρχικά), δηλαδή να βρούμε τα sec που απαιτούνται για να βρεθεί το κινητό σε συγκεκριμένη απόσταση από την αρχή των αξόνων, θα δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση, η οποία καλείται **αντίστροφη συνάρτηση** της f , και θα συμβολίζεται με f^{-1} . Έτσι $f^{-1}(y)$ θα είναι ο χρόνος (σε sec) που χρειάζεται το κινητό ώστε να βρεθεί σε συγκεκριμένη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Για να βρούμε κάποιες τιμές της συναρτήσεως f^{-1} μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα 3.4.1 αντίστροφα, με αμοιβαία εναλλαγή των δύο στηλών του, οπότε θα πάρουμε τον πίνακα 3.4.2.

Οι δύο συναρτήσεις f και f^{-1} μάς μεταφέρουν, στην πραγματικότητα, την ίδια πληροφορία, αλλά εκφράζονται διαφορετικά. Για παράδειγμα το γεγονός ότι το κινητό σε χρόνο $x = 20\text{ sec}$ βρίσκεται σε απόσταση $y = 65\text{ cm}$ από την αρχή των αξόνων μπορεί να αποδοθεί και με τις δύο συναρτήσεις ως εξής:

$$f(20)=65 \quad \text{ή} \quad f^{-1}(65)=20.$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή για την f γίνεται εξαρτημένη μεταβλητή για την f^{-1} και αντίστροφα. Επίσης το πεδίο ορισμού της μιας γίνεται σύνολο τιμών της άλλης. Πιο συγκεκριμένα το πεδίο ορισμού της f είναι όλοι οι χρόνοι t για τους οποίους το κινητό πραγματοποιεί την κίνησή του, δηλαδή $0 \leq x \leq 600$ και συμπίπτει με το σύνολο τιμών της f^{-1} . Το σύνολο τιμών της f είναι όλες οι αποστάσεις y από την αρχή των αξόνων, στις οποίες βρέθηκε το κινητό κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του, δηλαδή $5 \leq x \leq 1805$ και συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

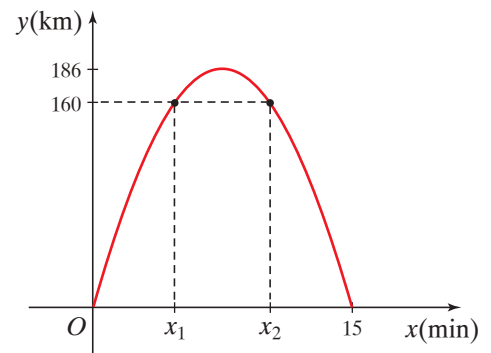
Αν δοθεί μια συνάρτηση f , δεν είναι πάντοτε δυνατό να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} όπως την περιγράψαμε παραπάνω. Για να καταλάβουμε ποιες συναρτήσεις έχουν αντίστροφη θα εξετάσουμε το επόμενο παράδειγμα. Στην πρώτη προσπάθεια πτήσεως αστροναύτη (Alan Shepard, 1961), το διαστημόπλοιο έφθασε σε ύψος 186 km και μετά άρχισε να επιστρέφει προς τη γη, μέχρι που έπεσε στη θάλασσα. Όλο το ταξίδι διήρκεσε μόλις 15 min. Στο σχήμα 3.4γ δίνεται γραφικά το ύψος y (σε km),

Πίνακας 3.4.1
Αποστάσεις από την αρχή
για δεδομένο χρόνο.

χρόνος x (σε sec)	απόσταση $f(x)$ (σε cm)
0	5
1	8
2	11
5	20
10	35
20	65
30	95
100	305
500	1505
600	1805

Πίνακας 3.4.2
Χρόνοι που απαιτούνται για να
διανυθούν δεδομένες αποστάσεις.

απόσταση y (σε sec)	χρόνος $f^{-1}(y)$ (σε sec)
5	0
8	1
11	2
20	5
35	10
65	20
95	30
305	100
1505	500
1805	600



Σχ. 3.4γ.

στο οποίο βρισκόταν το διαστημόπλοιο x λεπτά μετά την απογείωση. Η συνάρτηση $f(x)$ τώρα δεν έχει αντίστροφη. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η f έχει αντίστροφη και ας προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το διαστημόπλοιο βρισκόταν σε ύψος 160 km. Είναι προφανές ότι υπάρχουν δύο τέτοιοι χρόνοι: ένας θα μας δίνει το χρόνο που χρειάστηκε το διαστημόπλοιο για να φθάσει σε ύψος 160 km ανεβαίνοντας και ο άλλος για να φθάσει στο ίδιο ύψος κατεβαίνοντας. Αφού στο ύψος y αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές του χρόνου x , δεν μπορεί να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Γενικά, μια συνάρτηση έχει αντίστροφη, αν και μόνο αν, οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο. Αυτό, σύμφωνα με όσα είδαμε στην παράγραφο 3.2, σημαίνει ότι η συνάρτηση θα πρέπει να είναι αμφιμονοσήμαντη. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Αν $f: A \rightarrow f(A)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση:

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A,$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f ($y \in f(A)$) το μοναδικό x , για το οποίο ισχύει $y=f(x)$. Η f^{-1} θα καλείται **αντίστροφη** συνάρτηση της f .

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν η συνάρτηση f αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό x στον αριθμό y , τότε η συνάρτηση f^{-1} , αν υπάρχει, θα αντιστοιχίζει τον αριθμό y στον αριθμό x , δηλαδή έχουμε την ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Άμεση συνέπεια της τελευταίας ισοδυναμίας είναι και οι επόμενες δύο ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A).$$

Σημειώνεται ότι αν για δύο συναρτήσεις ισχύουν οι σχέσεις $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ τότε οι f, g αποτελούν αντίστροφες συναρτήσεις, δηλαδή ισχύει $f^{-1} = g$ και $g^{-1} = f$.

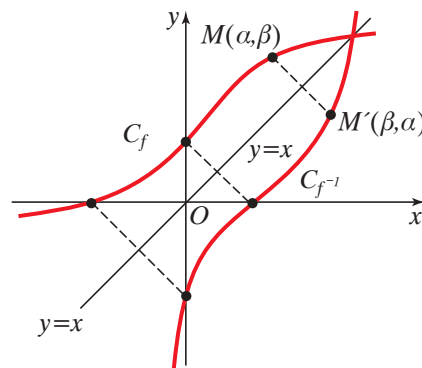
Σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε σημείο (x, y) της γραφικής παραστάσεως της f θα έχουμε ένα σημείο (y, x) της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f^{-1} . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη $C_{f^{-1}}$ βρίσκοντας τα σημεία (a, β) , για τα οποία ισχύει $\beta = f(a)$ και να τα απεικονίζουμε ως (β, a) . Το αποτέλεσμα που θα έχουμε αν εργαστούμε με αυτόν τον τρόπο είναι το ίδιο που θα είχαμε αν σχεδιάζαμε τη συμμετρική της C_f ως προς τη διχοτόμο $y = x$ (σχ. 3.4δ).

Επομένως:

Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων (δηλ. ως προς την ευθεία $y = x$).

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$. Όπως είναι γνωστό (βλ. παράγρ. 3.3 εδάφιο στ για $a=e$) η συνάρτηση αυτή είναι 1-1 με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbf{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . Η συνάρτηση αυτή (σχ. 3.4ε), σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω θα



Σχ. 3.4δ.

έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$ και θα αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0, +\infty)$ στο μοναδικό x για το οποίο ισχύει $e^x = y$. Επειδή όμως $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ θα έχουμε:

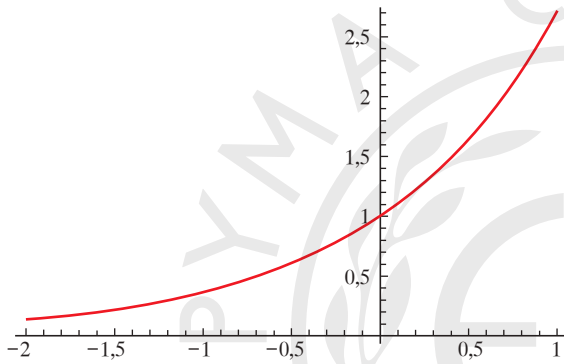
$$f^{-1}(y) = x = \ln y.$$

Επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με x και η εξαρτημένη μεταβλητή με y , για την αντίστροφη συνάρτηση της $f: A \rightarrow f(A)$ θα χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $f^{-1}(x)$, $x \in f(A)$ (αντί του $f^{-1}(y)$, $y \in f(A)$ που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως). Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συναρτήσεως $f(x) = e^x$ είναι η λογαριθμική συνάρτηση

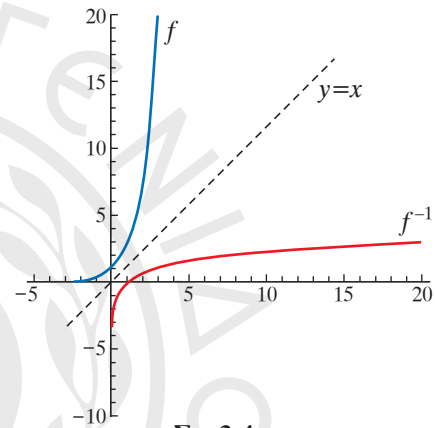
$$f^{-1}(x) = \ln x.$$

(Στο σχήμα 3.4στ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων).

Σημειώνεται ότι, εφαρμόζοντας στην περίπτωση αυτή τους τύπους: $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$, $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ παίρνουμε τους γνωστούς τύπους $\ln e^x = x$, $x \in \mathbf{R}$ και $e^{\ln x} = x$, $x \in (0, +\infty)$.



Σχ. 3.4ε.



Σχ. 3.4στ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.4.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x-1}$ είναι αμφιμονοσήμαντη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Λύση.

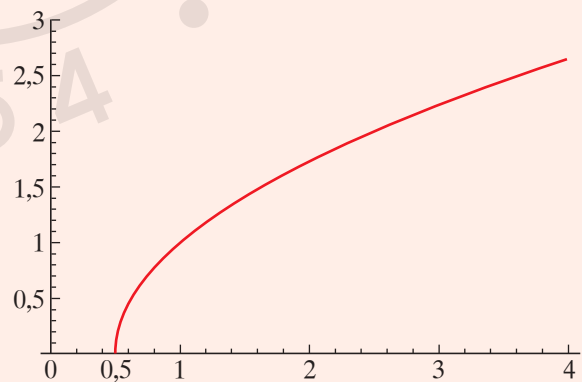
Για να ορίζεται η συνάρτηση f , θα πρέπει να ισχύει $2x-1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq \frac{1}{2}$. Άρα το πεδίο ορισμού της

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \text{ είναι το σύνολο } A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε

$$\sqrt{2x_1-1} = \sqrt{2x_2-1}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x_1 = x_2$. Επίσης, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [0, +\infty)$ (σχ. 3.4ζ).



Σχ. 3.4ζ.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως
 $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

Επομένως, για τη συνάρτηση f μπορεί να οριστεί η αντίστροφη της $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ η οποία θα αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A) = [0, +\infty)$ στο $f^{-1}(y) = x \in A$, για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Για $x \geq \frac{1}{2}$ έχουμε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y^2 = 2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y^2+1)$$

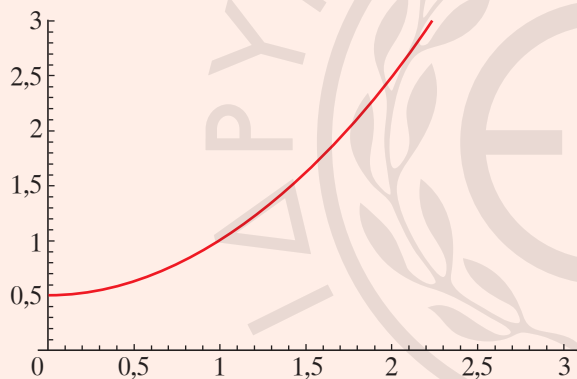
οπότε ο τύπος της αντίστροφης συναρτήσεως θα είναι ο $f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2}(y^2+1)$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y^2+1), y \in [0, +\infty).$$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση της f θα είναι η

$$f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow A \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2+1).$$

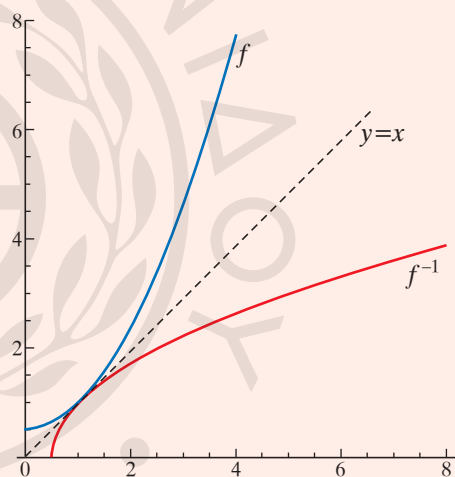
Στο σχήμα 3.4η δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συναρτήσεως f^{-1} , ενώ στο σχήμα 3.4θ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Παρατηρούμε ότι, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f^{-1} ως προς την ευθεία $y=x$.



Σχ. 3.4η.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2+1).$$



Σχ. 3.4θ.

Γραφική παράσταση των συναρτήσεων f, f^{-1} .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.5.

- α) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι αμφιμονοσήμαντες, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f$ θα είναι αμφιμονοσήμαντη.
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = 5e^{2x-3} + 2$ είναι αμφιμονοσήμαντη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Λύση.

α) Έστω x_1, x_2 δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού της συνθέσεως $g \circ f$ με $g \circ f(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

Τότε θα έχουμε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ και εφόσον η g είναι αμφιμονοσήμαντη συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Από την τελευταία, επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη, προκύπτει ότι $x_1 = x_2$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ και επομένως η συνάρτηση $g \circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Η συνάρτηση $h(x) = 5e^{2x-3} + 2$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $f_1(x) = 2x - 3$, $f_2(x) = e^x$ και $f_3(x) = 5x + 2$ οι οποίες είναι αμφιμονοσήμαντες (αφού σύμφωνα με την παράγραφο 3.3 είναι γνήσια μονότονες σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$). Επομένως με εφαρμογή (δύο φορές) του αποτελέσματος που αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), συμπεραίνουμε ότι η h είναι αμφιμονοσήμαντη.

Για να βρούμε την αντίστροφη της h θέτουμε $y = h(x)$ και λύνουμε ως προς x . Παίρνουμε διαδοχικά

$$h(x) = y \Leftrightarrow 5e^{2x-3} + 2 = y \Leftrightarrow e^{2x-3} = \frac{y-2}{5} \Leftrightarrow 2x-3 = \ln\left(\frac{y-2}{5}\right),$$

$$y > 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{y-2}{5} + \frac{3}{2}, y > 2.$$

Επομένως,

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2} \ln \frac{y-2}{5} + \frac{3}{2}, y > 2$$

και η αντίστροφη της συναρτήσεως f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-2}{5} + \frac{3}{2}, x > 2.$$

Ασκήσεις.

3.4.1. Ένα «πράσινο»¹ αυτοκίνητο καταναλώνει 4 lt βενζίνης ανά 100 km. Η τιμή της βενζίνης ανά lt είναι 1,1 €.

- Να γράψετε τη συνάρτηση f που εκφράζει την κατανάλωση του αυτοκινήτου μέσω των χιλιομέτρων που διανύει.
- Να γράψετε τη συνάρτηση g που εκφράζει το κόστος αγοράς βενζίνης συναρτήσει των λίτρων που καταναλώνει το αυτοκίνητο.
- Να γράψετε συνάρτηση που εκφράζει το κόστος μέσω των χιλιομέτρων που διανύει και να εκφραστεί ως σύνθεση συναρτήσεων.

3.4.2. Από διάφορες στατιστικές μελέτες βρέθηκε ότι ο αριθμός των πωλήσεων, σε εκατοντάδες τεμάχια, ενός προϊόντος σε μια πόλη δίνεται από τον τύπο $3\sqrt{x} + 2$ όπου x είναι ο πληθυσμός της πόλεως σε εκατοντάδες χιλιάδες άτομα. Ο πληθυσμός της πόλεως μεταβάλλεται (μειώνεται) σύμφωνα με το μοντέλο $f(t) = ae^{-0,05t}$, $t \geq 0$, όπου $f(t)$ είναι ο πληθυσμός σε t έτη από σήμερα. Ο σημερινός πληθυσμός της πόλεως είναι 10.000 άτομα.

- Να βρείτε η τιμή της σταθεράς a .
- Να γράψετε τη συνάρτηση g που εκφράζει τον αριθμό των πωλήσεων του προϊόντος μέσω του πληθυσμού της πόλεως.
- Να γράψετε τη συνάρτηση h που εκφράζει τον αριθμό των πωλήσεων του προϊόντος μέσω του χρόνου και να την εκφράσετε ως σύνθεση συναρτήσεων.

1. Με τον όρο «πράσινο» αυτοκίνητο εννοούμε το αυτοκίνητο που έχει μηδενικές ή πολύ μικρές εκπομπές ρύπων.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση h είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

3.4.3. Να εκφράσετε τις επόμενες συναρτήσεις ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \ln(e^{3x} + 2) \quad \beta) f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \gamma) f(x) = 3\eta\mu^2(5x) - 2$$

$$\delta) f(x) = \ln|\eta\mu(3x)| \quad \epsilon) f(x) = \sqrt{\eta\mu(x^3 + 1)} + 2 \quad \sigma\tau) f(x) = \eta\mu(x^3 + 1)$$

$$\xi) f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 2)} \quad \eta) f(x) = \ln\sqrt{x^2 + 2}$$

3.4.4. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ f$ και $f \circ f \circ f$ στις επόμενες περιπτώσεις:

$$\alpha) f(x) = x \quad \beta) f(x) = 2x \quad \gamma) f(x) = x/2$$

$$\delta) f(x) = x + 2 \quad \epsilon) f(x) = x^2 \quad \sigma\tau) f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1, 0 \leq x \leq 1$$

3.4.5. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ στις εξής περιπτώσεις.

$$\alpha) f(x) = 2x^2 + 3, g(x) = x + 2 \quad \beta) f(x) = x^2, g(x) = x^3 \quad \gamma) f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x^2}$$

3.4.6. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ στις επόμενες περιπτώσεις:

$$\alpha) f(x) = e^x, g(x) = \ln x \quad \beta) f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x} \quad \gamma) f(x) = e^{-x}, g(x) = \ln(1/x)$$

3.4.7. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$, όπου g είναι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = x - 1$.

3.4.8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.
Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) f(f(x)) = x \text{ για κάθε } x \neq 1 \quad \beta) g(g(x)) = x \text{ για κάθε } x \neq 2.$$

3.4.9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax + 1$ και $g(x) = \beta x + 3$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι ισχύει $f \circ g = g \circ f$ και $f(f(1)) = 1$. Να υπολογισθούν οι τιμές των a και β .

3.4.10. Το κόστος C (σε €) για την παραγωγή x μονάδων (σε εκατοντάδες τεμάχια) ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 3 + 5x$. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να περιγράψετε την πληροφορία που δίνει ο αριθμός $f^{-1}(y)$.

3.4.11. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της.

$$\alpha) f(x) = -5x + 2 \quad \beta) f(x) = \ln(1 - x^2) \quad \gamma) f(x) = \frac{2e^x + 2}{3e^x + 1}$$

$$\delta) f(x) = |x^2 - 1| \quad \epsilon) f(x) = 5\ln(3e^{2x} + 1) \quad \sigma\tau) f(x) = \ln\sqrt{x^2 + 4}$$

3.4.12. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, $g(x) = \ln(x-2)$.

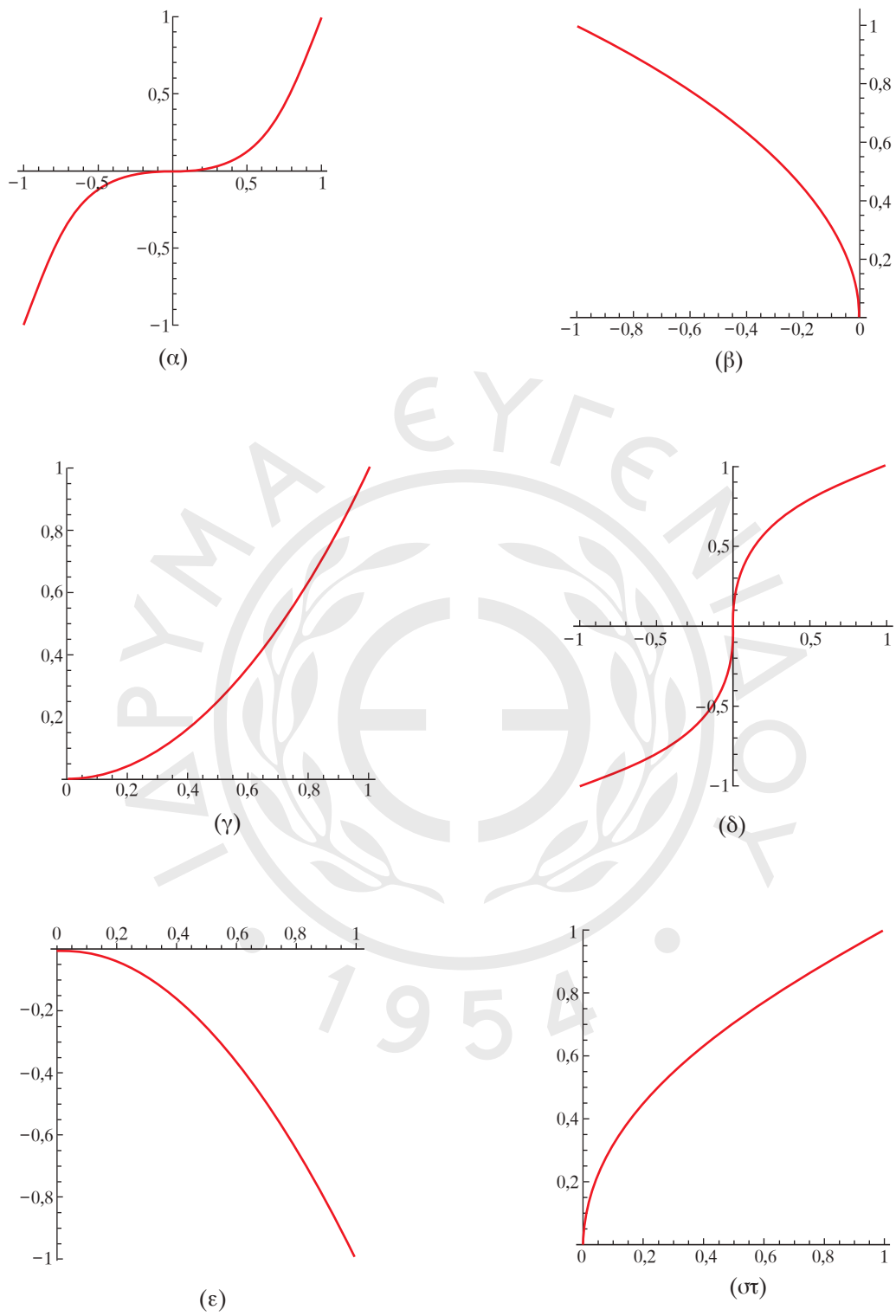
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις f, g .

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g, h αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.

δ) Να διαπιστώσετε ότι ισχύει $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

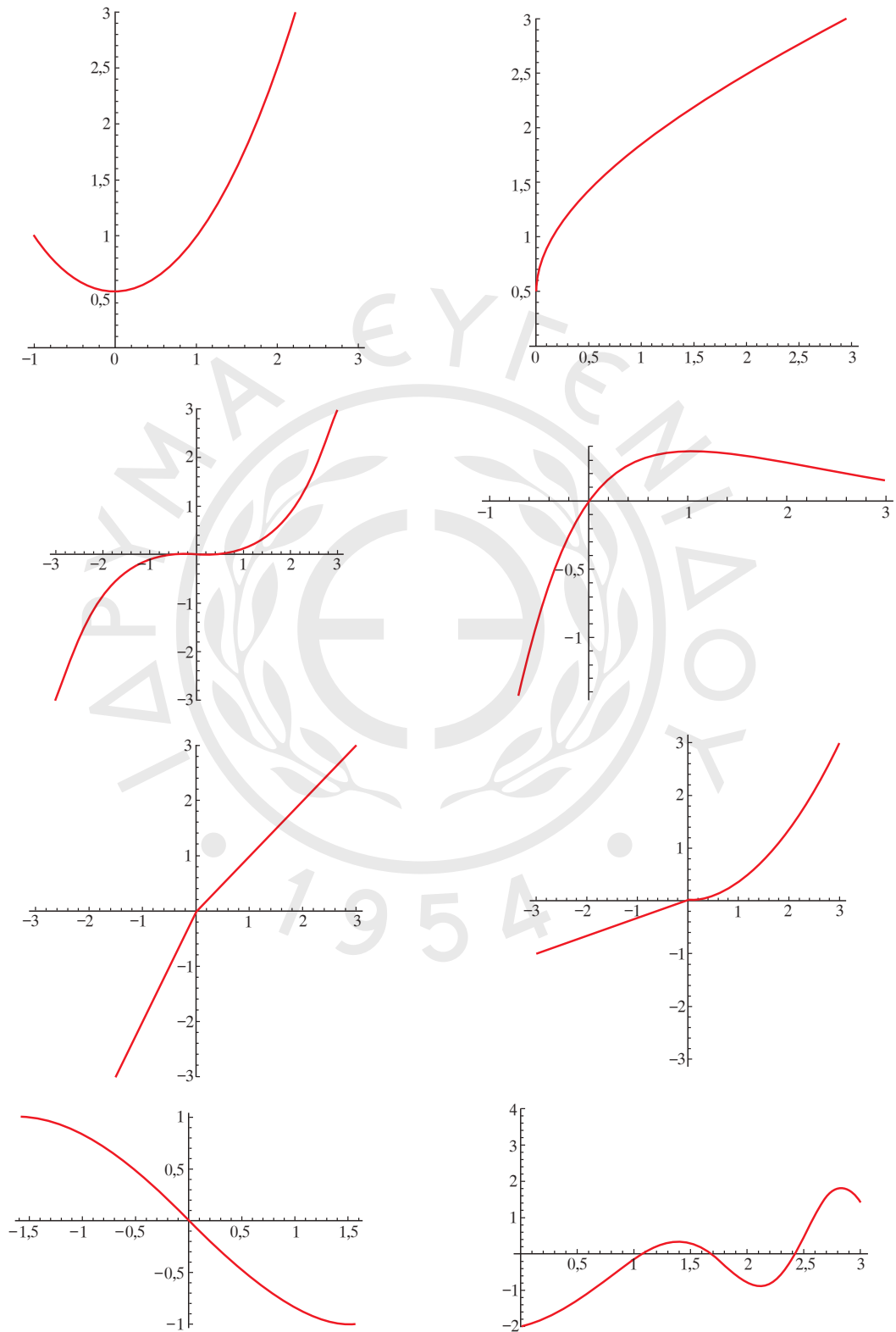
3.4.13. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις (σχ. 3.4ι) κάποιων συναρτήσεων. Να βρείτε ποιες από τις γραφικές αυτές παραστάσεις αντιστοιχούν σε ζεύγη από αντίστροφες συναρτήσεις.



Σχ. 3.4ι.

3.4.14. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις (σχ. 3.4ια) κάποιων συναρτήσεων.

Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.



Σχ. 3.4ια.

3.5 Πεπερασμένα όρια συναρτήσεων σ' ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Βασικές ιδιότητες ορίων.

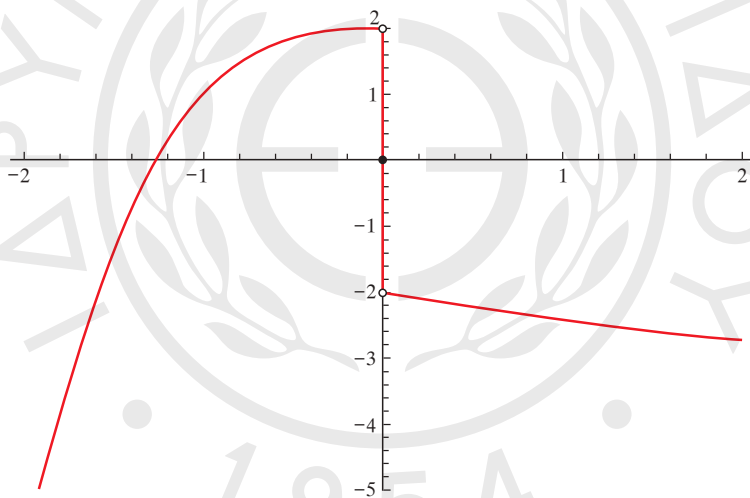
Στην παρούσα παράγραφο θα ορίσουμε την έννοια του ορίου συναρτήσεως και θα παρουσιάσουμε ορισμένες από τις ιδιότητές της. Η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης, αφού πολλές από τις βασικές έννοιες των Μαθηματικών, της Φυσικής αλλά και άλλων επιστημών μπορούν να οριστούν και να κατανοηθούν μόνο με τη βοήθειά της. Στην παράγραφο αυτή, θα επιχειρήσουμε μια διεξοδική προσέγγιση της σημαντικής αυτής έννοιας με απλά αλλά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας, και θα αναφέρουμε με συντομία τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό της.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x}{1 - \sqrt{1+x}}, & x > 0 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

της οποίας γραφική παράσταση εικονίζεται στο σχήμα 3.5α.

Προκειμένου να μελετήσουμε τη «συμπεριφορά» της συναρτήσεως f όταν το x πλησιάζει την τιμή 0, συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών 3.5.1.



Σχ. 3.5α.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως (4.5.1).

Πίνακας 3.5.1

Πίνακας τιμών της f .

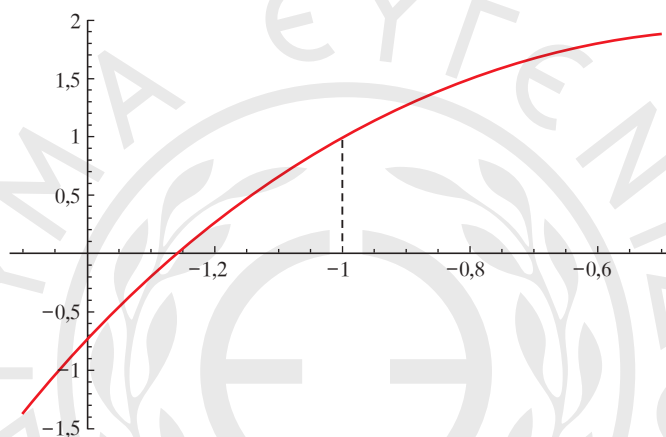
Το x πλησιάζει το 0 από αριστερά						
$x \longrightarrow 0$						
x	-0,3	-0,2	-0,15	-0,1	-0,01	0
$f(x)$	1,973000	1,992000	1,996630	1,999000	1,999999	?
Το x πλησιάζει το 0 από δεξιά						
$0 \longleftarrow x$						
x	0	0,0001	0,001	0,01	0,1	
$f(x)$	?	-2,0004998	-2,0004999	-2,0049876	-2,0488088	

Τόσο από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως όσο και από τον πίνακα τιμών 3.5.1 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

α) Καθώς το x , κινούμενο επάνω στον άξονα x' , πλησιάζει τον αριθμό 0 από αριστερά ($x < 0$), οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε τον αριθμό 2.

β) Καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν τον αριθμό 0 από δεξιά ($x > 0$), οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε τον αριθμό -2 .

Ας εξετάσουμε επί πλέον τη συμπεριφορά της ίδιας συναρτήσεως, όταν το x πλησιάζει την τιμή -1 . Στην περίπτωση αυτή, παρατηρώντας την επόμενη γραφική παράσταση (σχ. 3.5β) (αποτελεί απλά μεγέθυνση της γραφικής παραστάσεως του σχήματος 3.5α στην περιοχή που μας ενδιαφέρει) και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών 3.5.2, διαπιστώνουμε ότι καθώς το x , κινούμενο επάνω στον άξονα x' , πλησιάζει τον αριθμό -1 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, χωρίς να γίνεται ίσο με -1 , οι τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f πλησιάζουν στον αριθμό 1. Μάλιστα υπάρχει η δυνατότητα, με κατάλληλη επιλογή της περιοχής (γύρω από το -1) που κινείται το x , να «φέρουμε» τις τιμές της $f(x)$ όσο κοντά θέλουμε στον αριθμό 1.



Σχ. 3.5β.

Πίνακας 3.5.2
Πίνακας τιμών της f .

το x πλησιάζει το -1 από αριστερά $\rightarrow -1 \leftarrow$ το x πλησιάζει το -1 από δεξιά									
x	$-1,1$	$-1,01$	$-1,001$	$-1,0001$	$\rightarrow -1 \leftarrow$	$-0,9999$	$-0,999$	$-0,99$	$-0,9$
$f(x)$	0,6690	0,9697	0,9970	0,9997		1,0003	1,0030	1,0297	1,2710

Σε περιπτώσεις όπως αυτές που προαναφέρθηκαν θα λέμε ότι ο αριθμός προς τον οποίον πλησιάζουν οι τιμές της f είναι το **όριο της συναρτήσεως**, δηλώνοντας παράλληλα σε ποιον αριθμό πλησιάζουν οι αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x . Πιο συγκεκριμένα, σε αντιστοιχία με ό,τι είδαμε παραπάνω, δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

α) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (a, x_0) . Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ_1 , καθώς το x πλησιάζει το x_0 από αριστερά ($x < x_0$), λέμε ότι το **αριστερό πλευρικό όριο της f στο x_0** είναι το ℓ_1 και γράφουμε¹ (σχ. 3.5γ)

1. Το σύμβολο $\lim$ είναι αρχικό της Λατινικής λέξης *limes* που σημαίνει όριο.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1 »).

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) . Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ_2 , καθώς το x πλησιάζει το x_0 από δεξιά ($x > x_0$), λέμε ότι το **δεξιό πλευρικό όριο της f στο x_0** είναι το ℓ_2 και γράφουμε (σχ. 3.5γ)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2 »).

γ) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ , καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 (χωρίς να είναι απαραίτητο να γίνουν ίσες με το x_0), τότε λέμε ότι **το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι το ℓ** και γράφουμε (σχ. 3.5δ)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

(η έκφραση αυτή διαβάζεται ως εξής: «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ » ή «το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ »).

Έτσι, για τη συνάρτηση f που ορίστηκε στην (3.5.1), μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1.$$

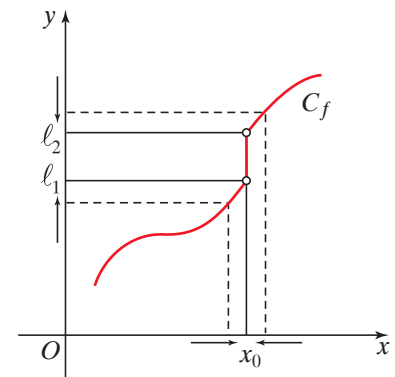
Από τους προηγούμενους ορισμούς είναι φανερό ότι για να αναζητήσουμε το αριστερό πλευρικό όριο μιας συναρτήσεως f στο x_0 , θα πρέπει αυτή να ορίζεται τουλάχιστον σ' ένα διάστημα της μορφής (a, x_0) , ενώ για να αναζητήσουμε το δεξιό πλευρικό όριο της f στο x_0 , θα πρέπει αυτή να ορίζεται τουλάχιστον σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) . Τέλος, για να αναζητήσουμε το όριο μιας συναρτήσεως στο x_0 , θα πρέπει αυτή να ορίζεται «κοντά στο x_0 », δηλαδή τουλάχιστον σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Προφανώς, στην τελευταία περίπτωση, θα μπορούμε να αναζητούμε τόσο το αριστερό πλευρικό όριο της f στο x_0 , όσο και το δεξιό πλευρικό της όριο.

Από τον τρόπο που εισήχθησαν τα όρια προκύπτει άμεσα το εξής χρήσιμο αποτέλεσμα:

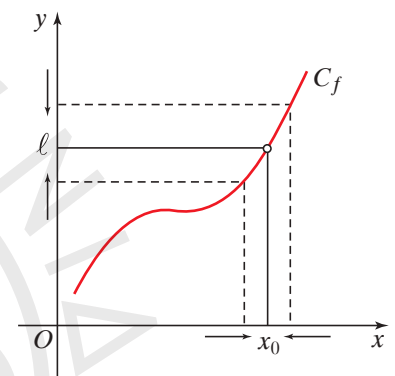
Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Τότε το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν, υπάρχουν τα δύο πλευρικά της όρια και είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ αν, και μόνο αν, } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell.$$

Στην περίπτωση που μια συνάρτηση f είναι ορισμένη μόνο σε ένα διάστημα της μορφής (a, x_0) , ενώ δεν ορίζεται σε διαστήματα της μορφής (x_0, β) , το x θα μπορεί να προσεγγίσει το x_0 μόνο από αριστερά (για $x < x_0$). Τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αντί του $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Ομοίως, αν



Σχ. 3.5γ.

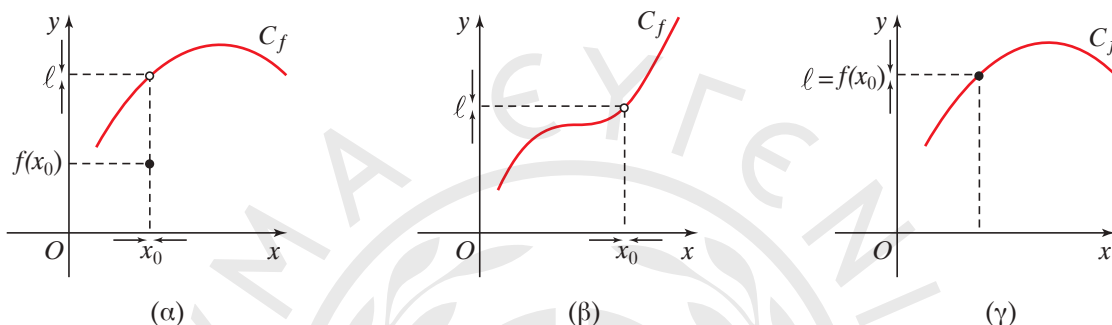


Σχ. 3.5δ.

μια συνάρτηση f είναι ορισμένη μόνο σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ενώ δεν ορίζεται σε διαστήματα της μορφής (a, x_0) , το x θα μπορεί να προσεγγίσει το x_0 μόνο από δεξιά (για $x > x_0$). Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αντί του $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Όπως γίνεται φανερό από τις επόμενες τρεις γραφικές παραστάσεις, όταν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, μπορεί να εμφανιστούν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- α) Το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως [σχ. 3.5ε(α) και (γ)].
- β) Το x_0 να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως [σχ. 3.5ε(β)].
- γ) Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 , η τιμή $f(x_0)$ μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο x_0 , αν υπάρχει [σχ. 3.5ε(γ)] ή μπορεί να είναι διαφορετική από αυτό [σχ. 3.5ε(α)].



Σχ. 3.5ε.

Αποδεικνύεται ότι, αν υπάρχει το όριο μιας συναρτήσεως f στο x_0 , τότε αυτό είναι ορισμένο μονοσήμαντα (είναι μοναδικό). Επίσης, το όριο είναι ανεξάρτητο από τα άκρα a, β των διαστημάτων (a, x_0) και (x_0, β) , στα οποία ορίζεται η f και επηρεάζεται μόνο από τις τιμές της συναρτήσεως «γύρω από το x_0 » (για το λόγο αυτό λέμε ότι το όριο είναι τοπική έννοια)¹.

Η τελευταία διαπίστωση μας δίνει τη δυνατότητα να περιοριζόμαστε σε διαστήματα (γύρω από το x_0) όσο μικρά θέλουμε, γεγονός που πολλές φορές οδηγεί σε απλοποίηση του τύπου της συναρτήσεως και διευκολύνει την εύρεση του ορίου της.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συναρτήσεως

$$f(x) = \frac{|2x - 6|}{x - 3}$$

στο $x_0 = 1$, μπορούμε να περιοριστούμε στο υποσύνολο $(0, 1) \cup (1, 2)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή λαμβάνει τη μορφή (αφού για $x < 3$ ισχύει $2x - 6 < 0$)

$$f(x) = \frac{-(2x - 6)}{x - 3} = -2.$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ (όταν το x βρίσκεται κοντά στο 1, οι τιμές της συναρτήσεως είναι ίσες με -2).

1. Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, όταν λέμε ότι η f έχει «κοντά στο x_0 » μία ιδιότητα θα εννοούμε ότι υπάρχει σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, στο οποίο ορίζεται η f και έχει την ιδιότητα αυτή για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

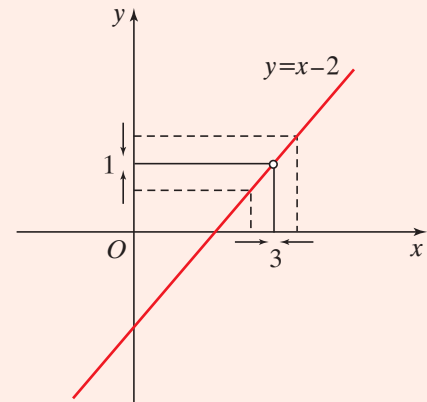
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}.$$

Να παραστήσετε γραφικά την f και να βρείτε (αν υπάρχει) το όριό της στο $x_0 = 3$.

Λύση.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ και για $x \neq 3$ παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2.$$

**Σχ. 3.5στ.**

Προκειμένου να μελετήσουμε τις τιμές της συναρτήσεως f , καθώς οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x πλησιάζουν στο 3 σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.5στ και τον ακόλουθο πίνακα τιμών. Από αυτά παρατηρούμε ότι καθώς το x κινείται στον άξονα $x'x$ και πλησιάζει (από μικρότερες ή μεγαλύτερες τιμές) τον αριθμό 3, οι τιμές της συναρτήσεως πλησιάζουν τον αριθμό 1.

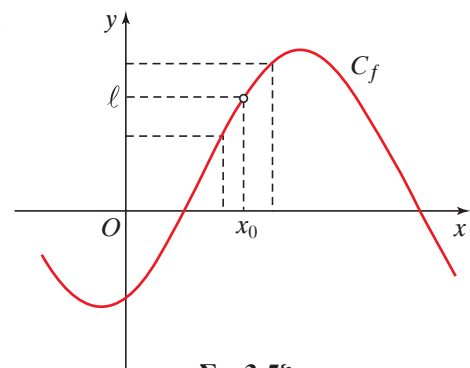
Το x πλησιάζει το 3 από αριστερά $\rightarrow 3 \leftarrow$ το x πλησιάζει το 3 από δεξιά

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	$\rightarrow 3 \leftarrow$	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	0,9	0,99	0,999	0,9999		1,0001	1,001	1,01	1,1

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο παράδειγμα αυτό υπολογίσαμε το όριο της συναρτήσεως f στο σημείο $x_0 = 3$, ενώ η συνάρτηση δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για το όριο ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες. Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου δεν θα επεκταθούμε σε αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών.

- L₁.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$
- L₂.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$
- L₃.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$
- L₄.** α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε θα ισχύει $f(x) > 0$ κοντά¹ στο x_0 (σχ. 3.5ζ).
β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

**Σχ. 3.5ζ.**

1. Όταν λέμε κοντά στο x_0 εννοούμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει σε μία περιοχή του x_0 δηλαδή ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in D(f)$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) > 0$.

Οι δύο αυτές ιδιότητες μας δείχνουν ότι, όταν το όριο μιας συναρτήσεως στο x_0 είναι μη μηδενικό, τότε, κοντά στο x_0 η συνάρτηση λαμβάνει τιμές ομόσημες με το όριό της.

L₅. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια αυτών στο x_0 , τότε ισχύει η ανισότητα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

L₆. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ με $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$ τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως $f+g$ στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

(η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις).

L₇. Αν υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο x_0 και c είναι μια πραγματική σταθερά, τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως cf στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

L₈. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ με $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$ τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως fg στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις).

L₉. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ και επί πλέον ισχύει $l_2 \neq 0$, τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως f/g στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

L₁₀. Αν υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο x_0 , τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως $|f|$ στο x_0 και θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

L₁₁. Αν υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο x_0 και επί πλέον ισχύει $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 , τότε θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως f^ν στο x_0 (ν είναι ένας θετικός ακέραιος) και θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\nu = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^\nu.$$

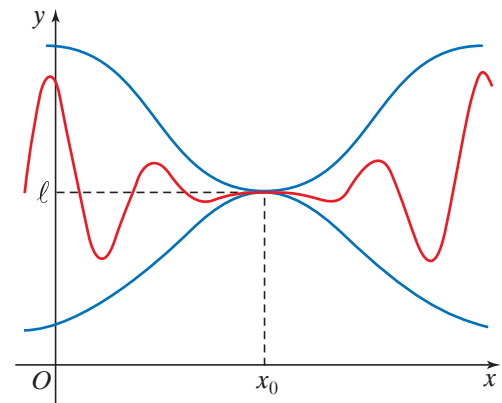
L₁₂. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και επί πλέον έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

(Η τελευταία ιδιότητα είναι γνωστή με την ονομασία **κριτήριο της παρεμβολής**, αφού ουσιαστικά μας δείχνει ότι αν μια συνάρτηση f «εγκλωβίζεται», κοντά στο x_0 , ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g που έχουν κοινό όριο, καθώς το x τείνει στο x_0 , τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.5η, η f θα έχει το ίδιο όριο.

Σημειώνεται ότι όλες οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για τα πλευρικά όρια συναρτήσεων.



Σχ. 3.5η

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.2.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -7$ να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) + 5g(x)]$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + (g(x))^2]^3$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3f(x) + 5g(x)}{[f(x) + (g(x))^2]^3}$$

Λύση.

α) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες L_6 και L_7 συμπεραίνουμε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) + 5g(x)] = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3 \cdot (-1) + 5(-7) = -38.$$

β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες L_6 , L_7 και L_{11} συμπεραίνουμε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + (g(x))^2]^3 &= [\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + (g(x))^2]]^3 = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))^2]^3 = \\ &= [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))^2]^3 = [-1 + (-7)^2]^3 = 48^3. \end{aligned}$$

γ) Αφού

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) + 5g(x)] = -38, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + (g(x))^2]^3 = 48^3 \neq 0$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα L_9 συμπεραίνουμε ότι το όριο που ζητείται υπάρχει και είναι ίσο με:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3f(x) + 5g(x)}{[f(x) + (g(x))^2]^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} (3f(x) + 5g(x))}{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + (g(x))^2]^3} = \frac{-38}{48^3}.$$

Οι ιδιότητες L_1 – L_{13} , σε συνδυασμό με τα όρια κάποιων βασικών συναρτήσεων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό διαφορών πιο πολυπλόκων συναρτήσεων. Για το λόγο αυτό παραθέτουμε στη συνέχεια τα όρια ορισμένων *βασικών συναρτήσεων* που συναντήσαμε στην παράγραφο 3.3.

B₁. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ (όριο της ταυτοτικής συναρτήσεως $f(x) = x$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\nu = x_0^\nu \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } \nu.$$

B₂. Αν $f(x) = c$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (το όριο σταθερής συναρτήσεως είναι ίσο με τη σταθερά, για κάθε x_0).

$$\mathbf{B_3.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$$

$$\mathbf{B_4.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ (σχ. 3.5θ)}$$

$$\mathbf{B_5.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \text{ (σχ. 3.5ι)}$$

Έστω τώρα η *πολυνυμική συνάρτηση*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

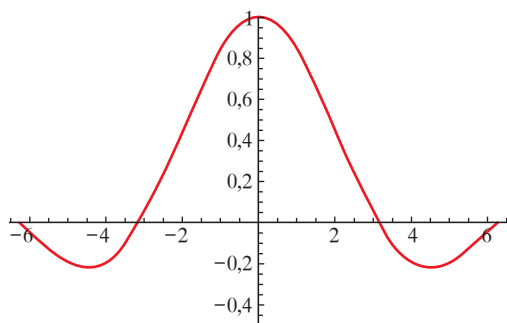
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\text{Για κάθε πολυνυμική συνάρτηση } P(x) \text{ ισχύει: } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

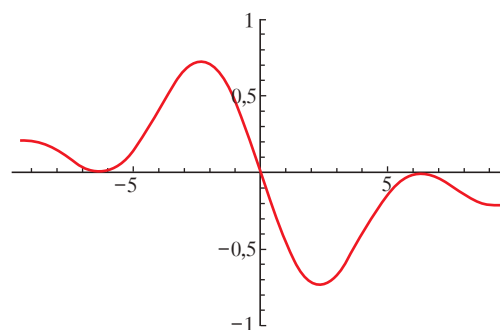
Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (5x^3 - 2x^2 + 3x + 10) = 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) + 10 = 0.$$



Σχ. 3.5θ.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$.



Σχ. 3.5ια.

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια το όριο μιας συναρτήσεως της μορφής

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x (μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται ρητή συνάρτηση του x). Έστω $x_0 \in \mathbf{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως:

Για κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0.$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3x + 13}{x^2 + 2} = \frac{5(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) + 13}{(-1)^2 + 2} = \frac{3}{3} = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.3.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta \mu \frac{1}{x^3} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 5}{x^2 + 1}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} [(x+1)^2 \cdot |x^2 - 1|]$

ε) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

στ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 12}}{x - 2}$

Λύση.

α) Για $x \neq 0$ έχουμε $\left| \eta \mu \frac{1}{x^3} \right| \leq 1$, οπότε $\left| x^2 \eta \mu \frac{1}{x^3} \right| = |x^2| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{x^3} \right| \leq |x^2| = x^2$. Επομένως,

$$-x^2 \leq x^2 \eta \mu \frac{1}{x^3} \leq x^2,$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

εφαρμόζοντας το κριτήριο της παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta \mu \frac{1}{x^3} \right) = 0.$$

β) Αφού έχουμε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = P(1) = 1^3 + 1 = 2.$$

γ) Αφού έχουμε τη ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{x^5 - 5}{x^2 + 1} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ με $Q(1) = 1^2 + 1 = 2 \neq 0$ παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} R(x) = R(1) = \frac{1^5 - 5}{1^2 + 1} = -2.$$

δ) Έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x+1)^2 |x^2 - 3|] = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} |x^2 - 3| = [\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)]^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 3^2 \cdot |2^2 - 3| = 9$$

ε) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα L9. Παρατηρούμε όμως ότι για $x = 4$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, οπότε ο τύπος της συναρτήσεως

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}, \text{ με } x \neq 4$$

θα μπορεί να απλοποιηθεί. Πράγματι, για $x \neq 4$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \frac{(x-4)(x-1)}{x-4} = x-1.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x-1) = 3$

στ) Για $x = 2$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής: πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $2x + \sqrt{x^2 + 12}$ και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x - \sqrt{x^2 + 12}}{x - 2} = \frac{(2x - \sqrt{x^2 + 12})(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})} = \frac{(2x)^2 - (\sqrt{x^2 + 12})^2}{(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})} \\ &= \frac{4x^2 - (x^2 + 12)}{(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})} = \frac{3x^2 - 12}{(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})} \\ &= \frac{3(x+2)}{2x + \sqrt{x^2 + 12}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+2)}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + \sqrt{x^2 + 12})} = \frac{3 \cdot 4}{4 + \sqrt{16}} = \frac{3}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.4.

Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0 = 2$ της συναρτήσεως f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2 \\ \frac{8}{x^3} + 1, & x \geq 2. \end{cases}$

Λύση

Για $x < 2$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2) = 2^2 - 2 = 2$, ενώ

για $x > 2$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{8}{x^3} + 1 \right) = \frac{8}{2^3} + 1 = 2$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, θα είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.5.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 - 25, & x < 3 \\ x - 3a, & x \geq 3. \end{cases}$

α) Να βρείτε το αριστερό πλευρικό όριο της f στο $x_0 = 3$ είτε

β) να βρείτε το δεξί πλευρικό όριο της f στο $x_0 = 3$ είτε

γ) να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a , έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = 3$.

Λύση.

α) Για $x < 3$ είναι $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^3 - 25) = 3^3 - 25 = 2$.

β) Για $x > 3$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3a) = 3 - 3a$.

γ) Αφού ζητάμε να υπάρχει το όριο της συναρτήσεως f στο $x_0 = 3$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

δηλαδή, $3 - 3a = 2$ οπότε $a = \frac{1}{3}$.

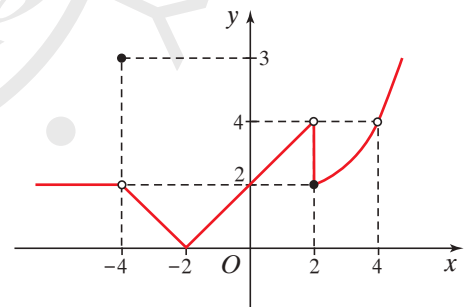
Ασκήσεις.

3.5.1. Στο σχήμα 3.5ια παρατίθεται η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f . Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$



Σχ. 3.5ια.

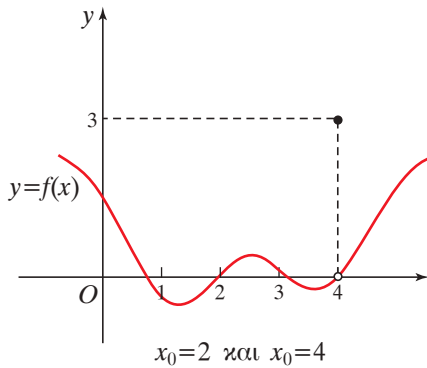
3.5.2. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{|3x-3|}{2x-2}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,1
$f(x)$				$\rightarrow; \leftarrow$			

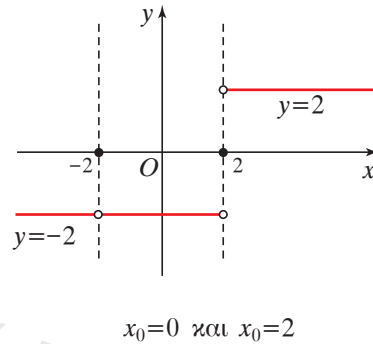
και στη συνέχεια να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

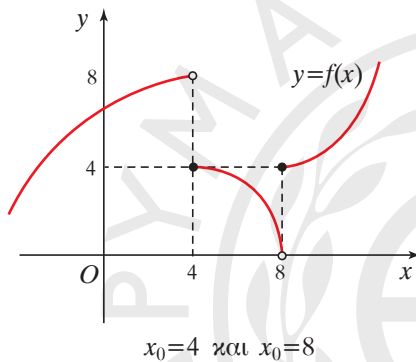
3.5.3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, με βάση τις επόμενες γραφικές παραστάσεις (σχ. 3.5ιβ).



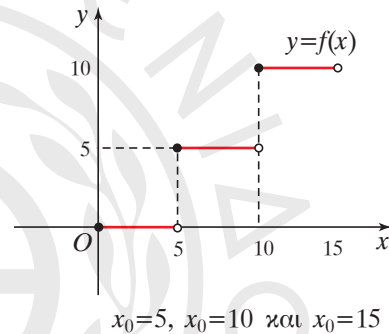
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχ. 3.5ιβ.

3.5.4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

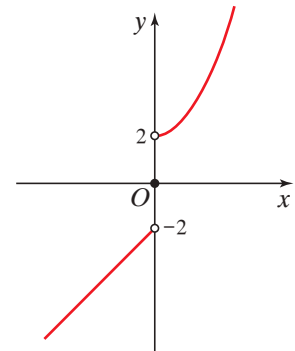
x	-5,1	-5,01	-5,001	$\rightarrow -5 \leftarrow$	-4,999	-4,99	-4,9
$f(x)$				$\rightarrow ; \leftarrow$			

και στη συνέχεια να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο $f(x)$ στο $x_0 = -5$.

3.5.5. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 2, & x > 0. \end{cases}$

α) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.5ιγ να βρείτε τα πλευρικά όρια της $f(x)$ στο $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε τα ίδια όρια, χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα τιμών.



Σχ. 3.5ιγ.

3.5.6. Για τις επόμενες συναρτήσεις f , να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για το x_0 που δίνεται.

$$\alpha) f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4}, x_0 = 2$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4}, x_0 = -2$$

$$\gamma) f(x) = 5x + \frac{(\sqrt{x})^2}{|x|}, x_0 = 0$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ -2x + 3, & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x-3}, & x > 3 \\ 8 - 2x, & x < 3 \end{cases}, x_0 = 3$$

$$\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & x \leq 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{x}, & x > 2 \end{cases}, x_0 = 2$$

3.5.7. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$. Να βρείτε τα όρια στο x_0 των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) g(x) = \frac{1}{(f(x))^2 + 1}$$

$$\beta) g(x) = 5(f(x))^2 - 4$$

$$\gamma) g(x) = \frac{|3f(x) - 1|}{(f(x))^2 + 1}$$

$$\delta) g(x) = \frac{|3\sqrt{|f(x)|} - 1|}{(f(x))^3 - 61}$$

$$\epsilon) g(x) = (f(x) - 3)(f(x) - 10)^{100}$$

$$\sigma\tau) g(x) = \frac{|f(x) - 1|}{f(x) - 1}$$

3.5.8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -2$ να βρείτε τα όρια στο x_0 των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) h(x) = \sqrt{|f(x) + g(x)|}$$

$$\beta) h(x) = \sqrt{|f(x)| + |g(x)|}$$

$$\gamma) h(x) = \frac{1}{\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}}$$

$$\delta) h(x) = (2f(x) + g(x))^{10}$$

3.5.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 3 \\ 7 + x, & \text{αν } x > 3. \end{cases}$ Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

3.5.10. Να υπολογίσετε για ποια τιμή της σταθεράς a υπάρχει το όριο στο $x_0 = -1$ της συναρτήσεως

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - a, & x < -1 \\ -\frac{1}{x^3}, & x \geq -1. \end{cases}$$

3.5.11. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 4} (2x^2 - 3x + 1) & \beta) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^5 - 4x^2 + 2x + 1) & \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 - 4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^5 - 4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} & \epsilon) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2|x| + 1}{|x| + 1} & \sigma\tau) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-1)^2 - 1}{h^2 + 1} \end{array}$$

3.5.12. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} & \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x} & \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{x^2} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi x}{x} & \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x} \right) & \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x^3 + 2x} \right) \end{array}$$

3.5.13. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - \sqrt{x}}{4 - x} & \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^3}}{3x^3} & \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 5x + 4} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 + x}} \end{array}$$

3.5.14. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x} & \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} & \gamma) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{1 - x^2} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \epsilon) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x|x-1|}{|x-3| - 2} & \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} \end{array}$$

3.6 Όριο συναρτήσεως στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Μη πεπεραμένα όρια.

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να μελετήσουμε τις τιμές που λαμβάνει μια συνάρτηση f , καθώς οι τιμές της μεταβλητής x μεγαλώνουν απεριορίιστα, δηλαδή παίρνουν πολύ μεγάλες θετικές τιμές ή πολύ μεγάλες (κατ' απόλυτη τιμή) αρνητικές τιμές. Στην περίπτωση αυτή θα μιλάμε για όριο συναρτήσεων στο άπειρο ($+\infty$ ή $-\infty$). Για να αντιληφθούμε την πρακτική σημασία της έννοιας αυτής ας εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Η αντοχή ενός υλικού είναι γνωστό ότι επηρεάζεται έντονα από τη θερμοκρασία. Μια κατασκευάστρια βιομηχανία ενός εξαρτήματος που χρησιμοποιείται ως ανταλλακτικό σε γεννήτριες πλοίων περιγράφει την αντοχή του εξαρτήματος μ' ένα δείκτη που λαμβάνει τιμές μεταξύ των αριθμών 1 και 2. Ο δείκτης αντοχής λαμβάνει την ελάχιστη τιμή 1 όταν η αντοχή είναι η μεγαλύτερη δυνατή και αυτό συμβαίνει στους 0°C ενώ, όσο αυξάνει η τιμή του δείκτη έχουμε μικρότερες αντοχές. Στη βιομηχανία, για να περιγραφεί η σχέση του δείκτη αντοχής του εξαρτήματος και της θερμοκρασίας x χρησιμοποιείται, για μη αρνητικές θερμοκρασίες, η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}, \quad (3.6.1)$$

όπου $x \geq 0$. Προκειμένου να διερευνήσουμε τι συμβαίνει με την αντοχή του εξαρτήματος για μεγάλες τιμές της θερμοκρασίας, θα πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει με τις τιμές του δείκτη αντοχής, καθώς η θερμοκρασία (x) αυξάνεται συνεχώς χωρίς κανέναν περιορισμό. Ένας πρακτικός τρόπος για να μελετηθεί αυτό είναι, όπως έχουμε δει και στα προηγούμενα κεφάλαια να κατασκευάσουμε έναν πίνακα τιμών. Από τον πίνακα που ακολουθεί είναι φανερό ότι, καθώς οι τιμές του x αυξάνονται απεριορίιστα, οι τιμές $y=f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά στον αριθμό 2.

το x αυξάνει απεριόριστα $\rightarrow$

x	0	5	10	20	50	100	...
$f(x)$	1	1,96	1,99	1,9999	1,9996	1,9999	

Αυτό είναι επίσης εμφανές από το διάγραμμα του σχήματος 3.6α, στο οποίο η γραφική παράσταση της f , όταν οι τιμές του x αυξάνονται, «κολλάει» στην οριζόντια ευθεία που άγεται από το σημείο $y=2$ του κατακόρυφου άξονα. Για το λόγο αυτό, η ευθεία με εξίσωση $y=2$ ονομάζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της συναρτήσεως f στο $+\infty$. Για να περιγράψουμε τα παραπάνω θα λέμε ότι: «η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο τον αριθμό 2» ή ότι: «το όριο της f στο $+\infty$ είναι το 2» και θα γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Γενικότερα έχουμε τον επόμενο ορισμό (σχ. 3.6β):

Όταν οι τιμές μιας συναρτήσεως f πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς οι τιμές του x αυξάνονται απεριόριστα, τότε λέμε ότι **το όριο της f στο $+\infty$ είναι το ℓ** και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$ ονομάζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της συναρτήσεως f στο $+\infty$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συναρτήσεως στο $+\infty$, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$.

Η συνάρτηση (3.6.1) θα μπορούσε να μελετηθεί για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αφού ο τύπος της μπορεί να εφαρμοσθεί για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η f είναι άρτια, αφού για κάθε x , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbf{R}$ ισχύει $-x \in \mathbf{R}$ και επί πλέον

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 + 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = f(x).$$

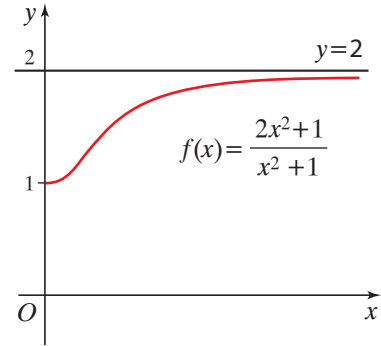
Επομένως, όταν το x παίρνει τις τιμές $-10, -20, -50, -100, \dots$, οι τιμές της συναρτήσεως θα πλησιάζουν και πάλι προς τον πραγματικό αριθμό 2 (σχ. 3.6γ).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο τον αριθμό 2» ή «το όριο της f στο $-\infty$ είναι το 2» και γράφουμε:

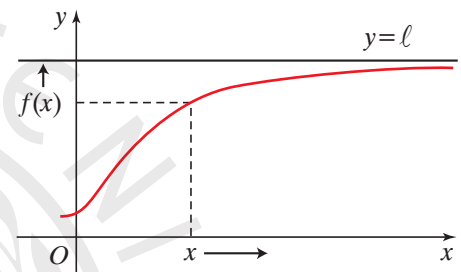
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

Η ευθεία με εξίσωση $y=2$ στην περίπτωση αυτή ονομάζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της συναρτήσεως f στο $-\infty$.

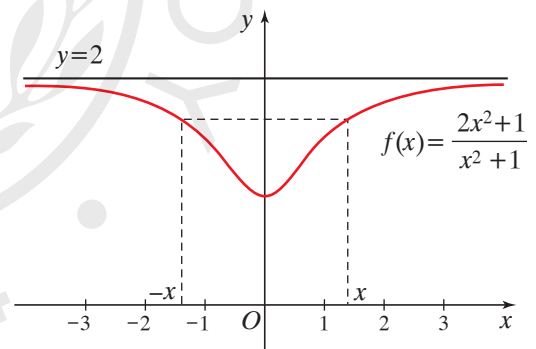
Γενικότερα έχουμε τον επόμενο ορισμό (σχ. 3.6δ):



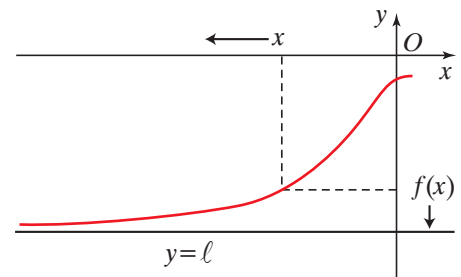
Σχ. 3.6α.



Σχ. 3.6β.



Σχ. 3.6γ.



Σχ. 3.6δ.

Όταν οι τιμές μιας συναρτήσεως f πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς οι τιμές του x μειώνονται απεριόριστα (λαμβάνουν αρνητικές τιμές με απεριόριστα μεγάλη απόλυτη τιμή), τότε λέμε ότι **το όριο της f στο $-\infty$ είναι το ℓ** και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

Η ευθεία με εξίσωση $y = \ell$ ονομάζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της συναρτήσεως f στο $-\infty$.

Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συναρτήσεως στο $-\infty$, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 , με τύπους:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα 3.6ε.

Από τις γραφικές παραστάσεις καθώς επίσης και τον πίνακα τιμών 3.6.1 παρατηρούμε ότι όταν το x αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές των συναρτήσεων πλησιάζουν το μηδέν. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Ανάλογα έχουμε:

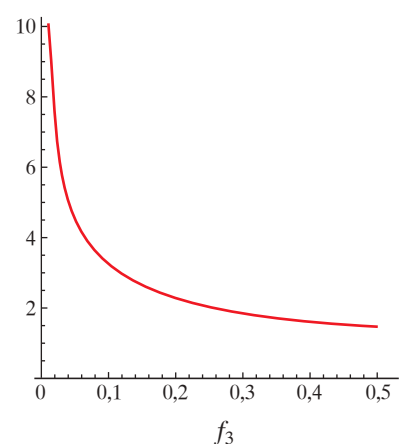
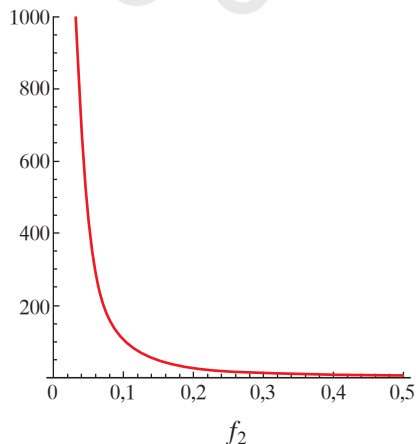
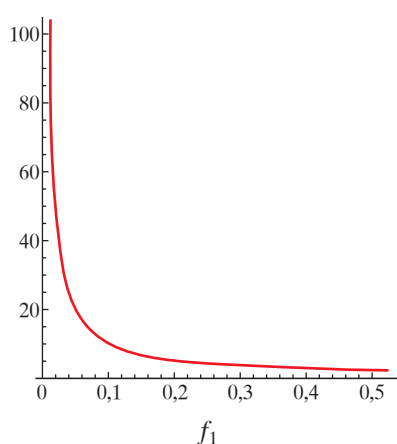
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Γενικά ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν r είναι ένας θετικός αριθμός, τότε:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0, \text{ εφόσον το } x^r \text{ ορίζεται για αρνητικές τιμές.}$$



Σχ. 3.6ε.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2/3}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/2}} = 0.$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

$$f_4(x) = x^2, \quad f_5(x) = x^3, \quad f_6(x) = \sqrt{x}$$

και τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις που φαίνονται στο σχήμα 3.6στ.

Τέλος, ας εξετάσουμε τις συναρτήσεις με τύπους

$$f_7(x) = -x^2, \quad f_8(x) = -x^3, \quad f_9(x) = -\sqrt{x},$$

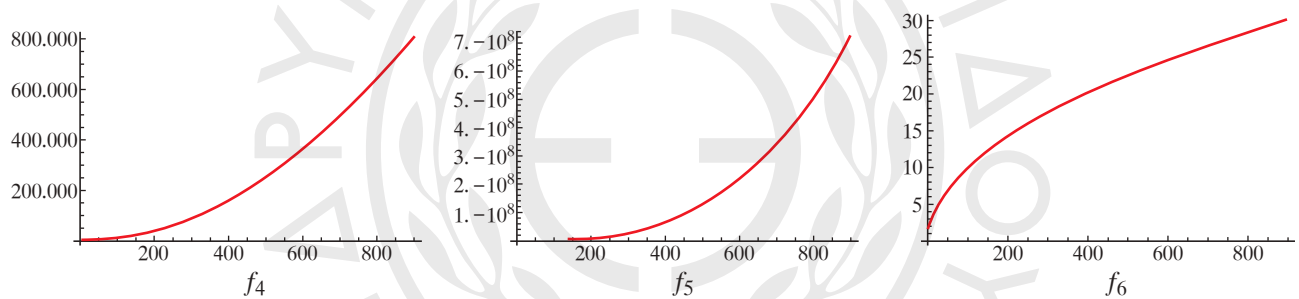
και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους που δίνονται στο σχήμα 3.6ζ.

Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 3.6ζ και τους αντίστοιχους πίνακες τιμών 3.6.2, 3.6.3, παρατηρούμε ότι, όταν το x αυξάνει απεριόριστα ($x \rightarrow +\infty$):

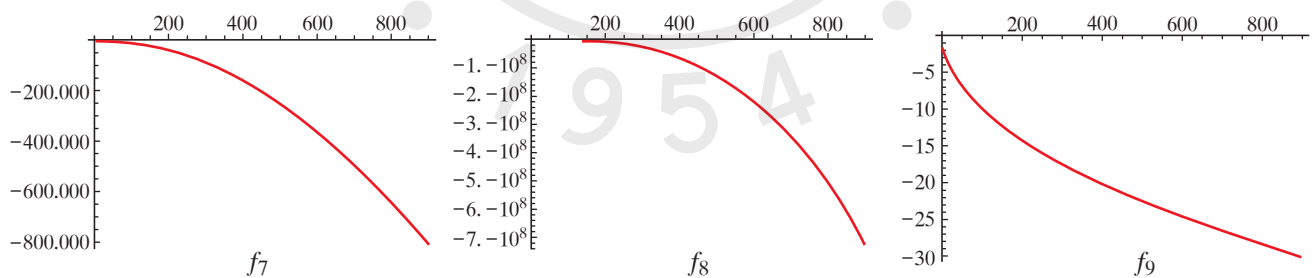
α) Οι τιμές των συναρτήσεων f_4, f_5, f_6 αυξάνουν απεριόριστα, ενώ

β) οι τιμές των συναρτήσεων f_7, f_8, f_9 μειώνονται απεριόριστα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f_4, f_5, f_6 έχουν στο $+\infty$ όριο το $+\infty$, ενώ οι συναρτήσεις f_7, f_8, f_9 έχουν στο $+\infty$ όριο το $-\infty$, και γράφουμε:



Σχ. 3.6στ.



Σχ. 3.6ζ.

Πίνακας 3.6.2

	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_4	x^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}
f_5	x^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{18}
f_6	$\sqrt{x}$	10	$\sqrt{10^3}$	10^2	10^3

Πίνακας 3.6.3

	x	10^2	10^3	10^4	10^6
f_7	$-x^2$	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{12}
f_8	$-x^3$	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{18}
f_9	$-\sqrt{x}$	-10	$-\sqrt{10^3}$	-10^2	-10^3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty.$$

Ανάλογα, από τους πίνακες τιμών 3.6.4, 3.6.5 και το σχήμα 3.6η, παρατηρούμε ότι, όταν το x μικραίνει απεριόριστα ($x \rightarrow -\infty$):

- α) Οι τιμές των συναρτήσεων f_4, f_8 αυξάνονται απεριόριστα, ενώ
β) οι τιμές των συναρτήσεων f_5, f_7 μειώνονται απεριόριστα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f_4, f_8 έχουν στο $-\infty$ όριο το $+\infty$, ενώ οι συναρτήσεις f_5, f_7 έχουν στο $-\infty$ όριο το $-\infty$, και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty,$$

αντίστοιχα.

Οι ιδιότητες των ορίων που εξετάσαμε στην παράγραφο 3.5 ισχύουν και για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$.

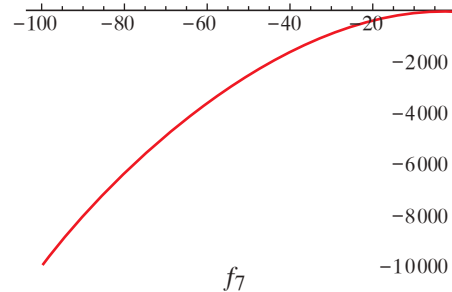
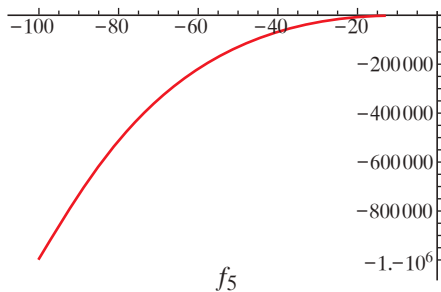
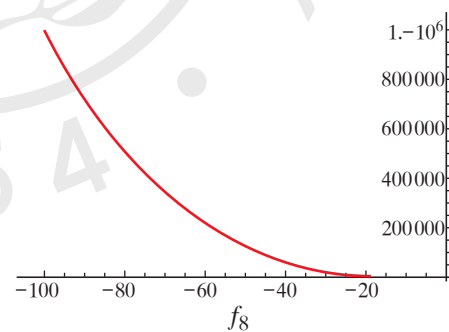
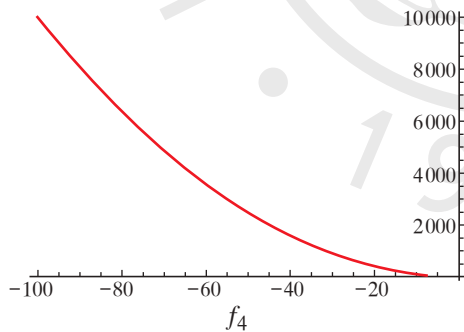
Για το όριο στο $-\infty$ των ακεραίων θετικών δυνάμεων του x ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Πίνακας 3.6.4

	x	-10^2	-10^3	-10^4	-10^6
f_4	x^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}
f_5	x^3	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{18}

Πίνακας 3.6.5

	x	-10^2	-10^3	-10^4	-10^6
f_7	$-x^2$	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{12}
f_8	$-x^3$	10^6	10^9	10^{12}	10^{18}



Σχ. 3.6η.

Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Με χρήση πινάκων τιμών μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$ της εκθετικής και της λογαριθμικής συναρτήσεως που γνωρίσαμε στην παράγραφο 3.3 ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Αν $a > 1$, (σχ. 3.6θ) τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

Αν $0 < a < 1$, (σχ. 3.6ι) τότε:

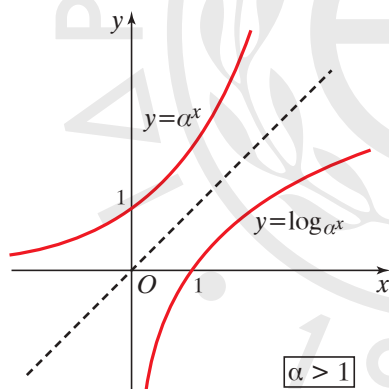
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

Για παράδειγμα, όταν $a = e > 1$ λαμβάνουμε:

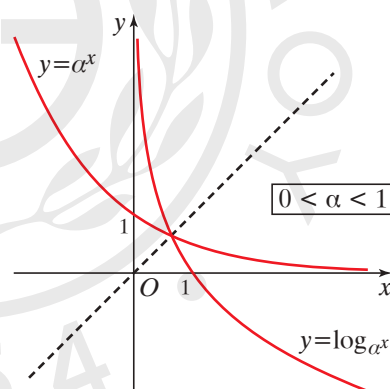
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty,$$

ενώ για $a = 1/e < 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$



Σχ. 3.6θ.



Σχ. 3.6ι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.1.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3 + 7x - 3)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 7x - 3)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 4}{x^3 - 4}$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 4}{x^3 - 4}$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 6x + 9}{6x^3 + 5x - 1}$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 6x + 9}{6x^3 + 5x - 1}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 + x - 7}{3x^3 - x + 1}$

η) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + x - 7}{3x^3 - x + 1}$

Λύση.

α) Για $x \neq 0$ η συνάρτηση $f(x) = 5x^3 + 7x - 3$ μπορεί να λάβει στη μορφή:

$$f(x) = 5x^3 \left(1 - \frac{7}{5x^2} - \frac{3}{5x^3} \right)$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{7}{5x^2} - \frac{3}{5x^3} \right) = 1 - 0 - 0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3) = +\infty$$

έχομε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3) = +\infty$.

β) Αφού τώρα έχομε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{7}{5x^2} - \frac{3}{5x^3} \right) = 1 - 0 - 0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty$ παίρνομε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για πολυωνυμικές συναρτήσεις ισχύει το εξής γενικότερο αποτέλεσμα.

Αν $P(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής

$$P(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \delta,$$

με $\alpha \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n).$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει άμεσα αν παρατηρήσουμε ότι:

$$P(x) = x^n \left(\alpha + \beta \frac{1}{x} + \dots + \delta \cdot \frac{1}{x^n} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha + \beta \frac{1}{x} + \dots + \delta \cdot \frac{1}{x^n} \right) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\alpha + \beta \frac{1}{x} + \dots + \delta \cdot \frac{1}{x^n} \right) = \alpha.$$

γ) Για $x \neq 0$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{6x^2 - 4}{x^3 - 4}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = \frac{6x^2 - 4}{x^3 - 4} = \frac{6x^2 \left(1 - \frac{4}{6x^2} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^3} \right)} = \frac{6x^2}{x^3} \cdot \frac{1 - \frac{4}{6x^2}}{1 - \frac{4}{x^3}},$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{6x^2}}{1 - \frac{4}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{6x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right)} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$$

παίρνομε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{x^3}$.

δ) Αφού τώρα έχομε πάλι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{4}{6x^2}}{1 - \frac{4}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{6x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right)} = \frac{1-0}{1-0} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{x^3}$.

ε) Για $x \neq 0$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 9}{6x^3 + 5x - 2}$ μπορεί με παρόμοιο τρόπο να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 9}{6x^3 + 5x - 2} = \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{5}{6x^2} - \frac{1}{6x^3}} \cdot \frac{3x^2}{6x^3},$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{5}{6x^2} - \frac{1}{6x^3}} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{6x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{6x^3}$.

στ) Τώρα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{5}{6x^2} - \frac{1}{6x^3}} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{6x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

οπότε παίρνουμε και πάλι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{6x^3} = 0$.

ζ) Για $x \neq 0$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{6x^3 + x - 7}{3x^3 - x + 1}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = \frac{6x^3 + x - 7}{3x^3 - x + 1} = \frac{6x^3 \left(1 + \frac{1}{6x^3} - \frac{7}{6x^3}\right)}{3x^3 \left(1 - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3x^3}\right)} = \frac{6x^3}{3x^3} \cdot \frac{1 + \frac{1}{6x^3} - \frac{7}{6x^3}}{1 - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3x^3}},$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{6x^3} - \frac{7}{6x^3}}{1 - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3x^3}} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{3x^3}$.

η) Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (στ) βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{3x^3}$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για ρητές συναρτήσεις προκύπτει το επόμενο γενικότερο αποτέλεσμα.

Για κάθε ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \delta}{\alpha' x^m + \beta' x^{m-1} + \dots + \delta'}, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha' \neq 0$$

ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n-m} \right).$$

Αν $n < m$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = 0$, ενώ για $n = m$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Τέλος, για $n > m$ το όριο θα είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.2.

Η ταχύτητα, με την οποία ένας εργάτης μπορεί να κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο εξάρτημα είναι συνάρτηση της εμπειρίας του (συνολικού χρόνου υπηρεσίας). Ας υποθέσουμε ότι μετά από t μήνες εργασίας, ο μέσος υπάλληλος μπορεί να κατασκευάζει

$$f(t) = 70 - 40e^{-0,5t}$$

εξαρθήματα ανά ημέρα (σχ. 3.6ια). Να βρείτε πόσα εξαρτήματα ανά ώρα μπορεί να κατασκευάζει:

- Ένας νέος εργάτης,
- Ένας μέσος εργάτης με έξι μήνες εμπειρία και
- Ένας μέσος εργάτης με «άπειρες» ώρες εργασίας.

Λύση.

α) Ο αριθμός των εξαρτημάτων που μπορεί να κατασκευάζει ο νέος εργάτης θα είναι (για $t=0$)

$$f(0) = 70 - 40e^{-0,5 \cdot 0} = 70 - 40 = 30.$$

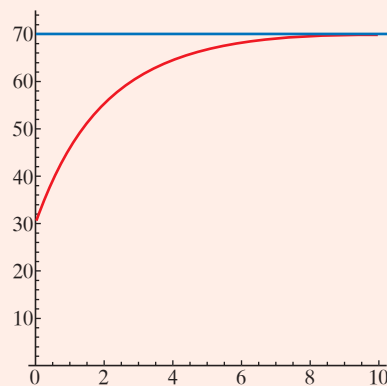
β) Μετά από 6 μήνες εργασίας ο μέσος εργάτης θα κατασκευάζει

$$f(6) = 70 - 40e^{-0,5 \cdot 6} = 70 - 40 \cdot e^{-3} \cong 68 \text{ εξαρτήματα.}$$

γ) Εδώ μας ενδιαφέρει να βρούμε τι συμβαίνει καθώς το t αυξάνει ($t \rightarrow \infty$). Έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (70 - 40e^{-0,5t}) = 70 - 40 \cdot 0 = 70,$$

δηλαδή για εργάτη με «άπειρες» ώρες εργασίας (εμπειρίας) το $f(t)$ προσεγγίζει τον αριθμό 70. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία με εξίσωση $y=70$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συναρτήσεως f (σχ. 3.6ια) και έτσι η απόδοση του μέσου εργάτη μετά από εργασία «άπειρων» ωρών θα «σταθεροποιηθεί» στα 70 εξαρτήματα την ώρα.



Σχ. 3.6ια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.3.

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως C_f της συναρτήσεως f στο $+\infty$ αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

ενώ ονομάζεται ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f στο $-\infty$ αν ισχύει,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0^1.$$

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{20} + \frac{4e^x - 3}{2e^x + 3}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Λύση.

α) Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε, για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{20} - 1 \right) \right] = 0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{20} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6e^x}{2e^x + 3} = \frac{6 \cdot 0}{2 \cdot 0 + 3} = 0.$$

β) Ομοίως, για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \frac{x}{20} + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{20} + 2 \right) \right] = 0.$$

Πράγματι, έχουμε

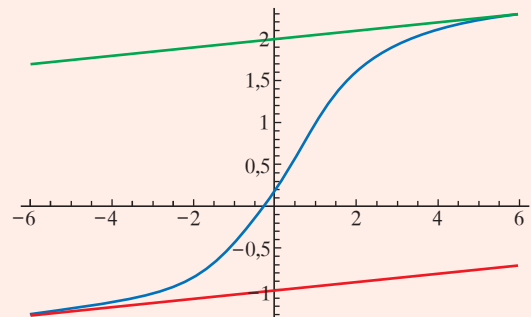
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{20} + 2 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-6}{2e^x + 3} \right] = 0.$$

Όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 3.6ιβ, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία

$$y = \frac{x}{20} + 2,$$

ενώ όταν το x τείνει στο $-\infty$, η γραφική παράσταση της f , προσεγγίζει την ευθεία

$$y = \frac{x}{20} - 1.$$



Σχ. 3.6ιβ.

1. Ο ορισμός αυτός, για $\lambda=0$ ανάγεται στον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης. Όταν $\lambda \neq 0$, η $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται **πλάγια ασύμπτωτη**.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι τιμές μιας συναρτήσεως f μπορεί να αυξάνονται απεριορίιστα, καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνονται απεριορίιστα, δηλαδή λαμβάνουν πολύ μεγάλες θετικές τιμές ή πολύ μεγάλες (κατ' απόλυτη τιμή) αρνητικές τιμές. Υπάρχει όμως περίπτωση οι τιμές της f να αυξάνονται απεριορίιστα ή να μειώνονται απεριορίιστα, καθώς η μεταβλητή x πλησιάζει σ' έναν πραγματικό αριθμό x_0 .

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, η οποία ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Ο πίνακας 3.6.6 δίνει τις τιμές της συναρτήσεως, καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν στον αριθμό 1.

Πίνακας 3.6.6
Πίνακας τιμών της f .

το x πλησιάζει τον αριθμό 1 από αριστερά					$\rightarrow 1 \leftarrow$	το x πλησιάζει τον αριθμό 1 από δεξιά			
x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	-19	-199	-1999	-19999	?	20001	2001	201	21

Από τον πίνακα 3.6.6, καθώς και από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως που φαίνεται στο σχήμα 3.6ιγ παρατηρούμε ότι: καθώς το x πλησιάζει από δεξιά τον πραγματικό αριθμό 1, οι τιμές της συναρτήσεως f αυξάνονται απεριορίιστα. Μάλιστα υπάρχει η δυνατότητα, με κατάλληλη επιλογή των τιμών που θα λάβει το x , να «υποχρεώσουμε» τις τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f να γίνουν μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M μας δοθεί. Για παράδειγμα, από τον πίνακα τιμών 3.6.6 είναι φανερό ότι:

α) Επιλέγοντας το x δεξιά του 1 και σε απόσταση από αυτό μικρότερη του 0,001 (δηλ. $1 < x < 1,001$), εξασφαλίζεται ότι οι τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f θα γίνουν μεγαλύτερες από τον αριθμό 2001 [δηλ. θα ισχύει $f(x) > 2001$].

β) Επιλέγοντας το x δεξιά του 1 και σε απόσταση από αυτό μικρότερη του 0,0001 (δηλ. $1 < x < 1,0001$), εξασφαλίζεται ότι τις τιμές $f(x)$ της συναρτήσεως f θα γίνουν μεγαλύτερες από τον αριθμό 20001 (δηλ. θα ισχύει $f(x) > 20001$) κ.ο.κ. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο 1 από δεξιά, όριο το $+\infty$ και θα γράφουμε:

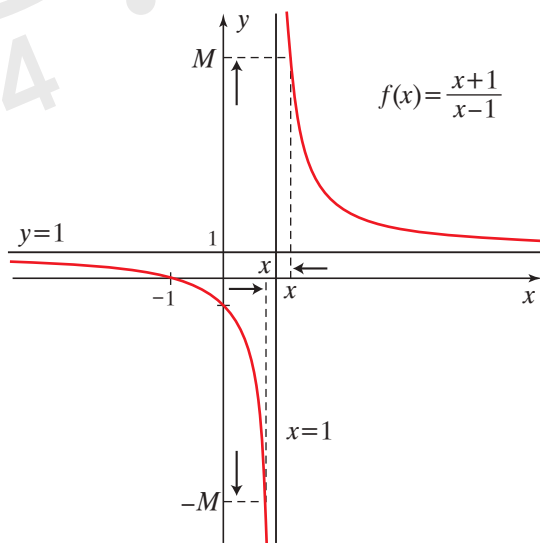
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Από τον πίνακα 3.6.5 είναι επίσης φανερό ότι, καθώς το x πλησιάζει από αριστερά τον πραγματικό αριθμό 1, οι τιμές της συναρτήσεως f ελαττώνονται απεριορίιστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ ($M > 0$). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο 1 από αριστερά, όριο το $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Από το σχήμα 3.6ιγ φαίνεται ότι καθώς το x πλησιάζει τον αριθμό 1, η γραφική παράσταση της συναρτήσεως πλησιάζει την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, η οποία είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

Η ευθεία $x = 1$ ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f ή απλούστερα κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .



Σχ. 3.6ιγ.

Γενικά για $x_0 \in \mathbb{R}$ μπορούν να οριστούν τα επόμενα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

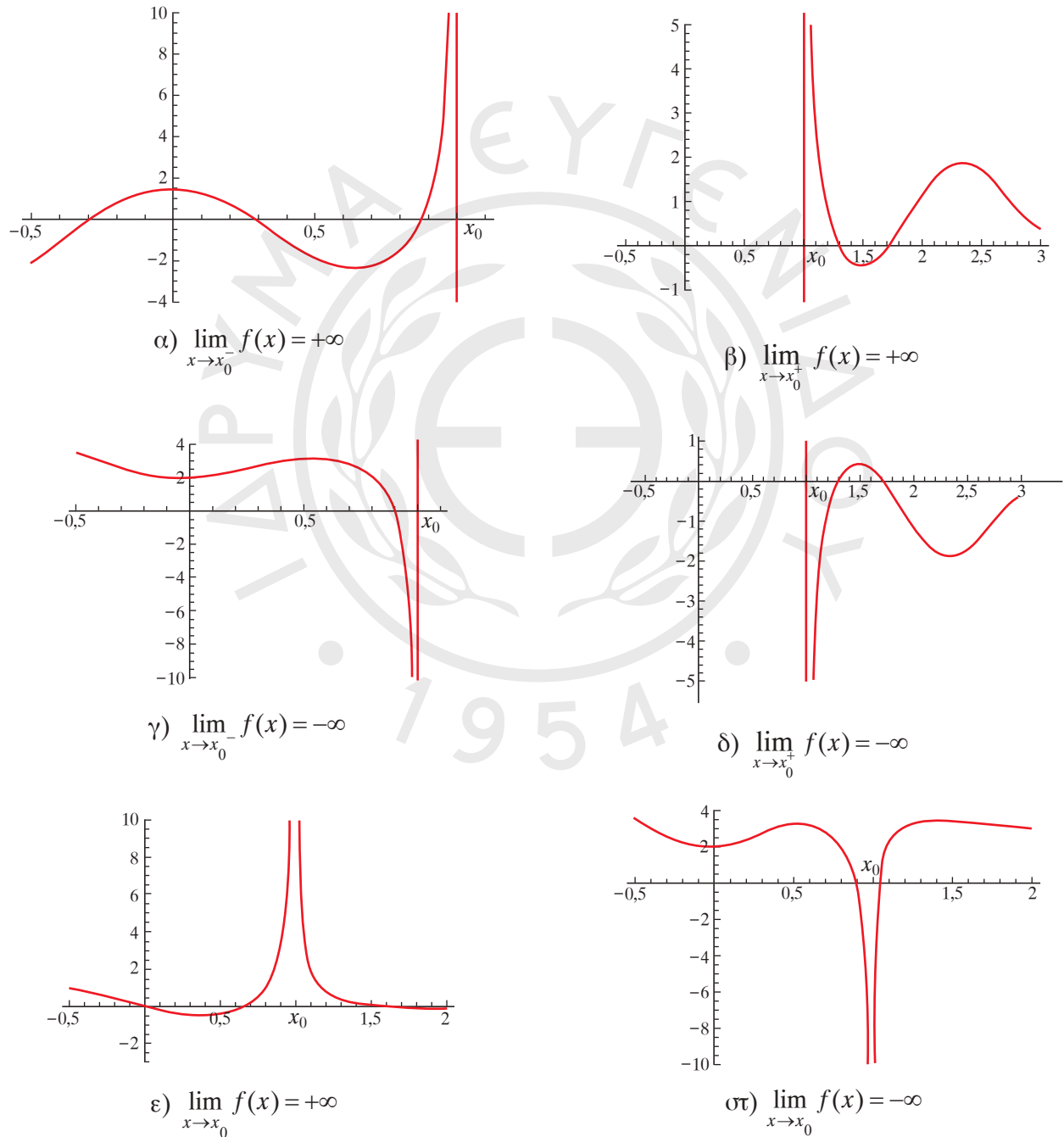
$$\delta) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

των οποίων το νόημα γίνεται ευκολότερα κατανοητό μέσα από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 3.6ιδ (σε όλες έχουμε $x_0 = 1$).

Αν για μία συνάρτηση f υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα όρια (α)–(στ), τότε η ευθεία με εξίσωση



Σχ. 3.6ιδ.

$x = x_0$ θα ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f ή απλώς κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

Εφόσον τα όρια (α)–(στ) αφορούν στα όρια όταν το x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό x_0 ,

α) για να αναζητήσουμε το (μη πεπερασμένο) αριστερό πλευρικό όριο μιας συναρτήσεως f στο x_0 , θα πρέπει αυτή να ορίζεται σ' ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) ,

β) για να αναζητήσουμε το (μη πεπερασμένο) δεξί πλευρικό όριο της f στο x_0 , θα πρέπει αυτή να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ,

γ) για να αναζητήσουμε το (μη πεπερασμένο) όριο μιας συναρτήσεως στο x_0 , θα πρέπει αυτή να ορίζεται «κοντά στο x_0 », δηλαδή να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Αποδεικνύεται (η απόδειξη ξεφεύγει των στόχων του παρόντος εγχειριδίου) ότι, όπως και για τα πεπερασμένα όρια, το (μη πεπερασμένο) όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά της όρια και είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Ισχύουν επίσης τα παρακάτω αποτελέσματα για **μη πεπερασμένα** όρια:

$$\mathbf{M_1} \quad \alpha) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε η } f(x) \text{ θα λαμβάνει θετικές τιμές } (f(x) > 0) \text{ κοντά στο } x_0.$$

$$\beta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε η } f(x) \text{ θα λαμβάνει αρνητικές τιμές } (f(x) < 0) \text{ κοντά στο } x_0.$$

$$\mathbf{M_2} \quad \alpha) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty.$$

$$\beta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

$$\mathbf{M_3} \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

$$\mathbf{M_4} \quad \alpha) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

$$\beta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

$$\mathbf{M_5} \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty.$$

$$\mathbf{M_6} \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty \text{ (για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό } n \text{)}.$$

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{2n}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{(x - x_0)^{2n-1}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{(x - x_0)^{2n-1}} = -\infty$$

Για παράδειγμα, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$, το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει στο 0 το όριο της συναρτήσεως $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Στους επόμενους τρεις πίνακες δίνεται το όριο του αθροίσματος του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων, όταν γνωρίζουμε τα όρια της καθεμίας από αυτές. Τα αποτελέσματα που δίνονται στους πίνακες ισχύουν:

- α) Για πλευρικά και για μη πλευρικά όρια και
β) όταν τα όρια αναφέρονται στο $x_0 \in \mathbf{R}$ ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Όριο της f	Όριο της g	Όριο της $f+g$
ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$
ℓ_1	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	απροσδιόριστο
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$
0	$-\infty$	$-\infty$

Όριο της f	Όριο της g	Όριο της $f \cdot g$
ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 \ell_2$
ℓ_1	$+\infty$	$+\infty$, αν $\ell_1 > 0$ $-\infty$, αν $\ell_1 < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	απροσδιόριστο
0	$-\infty$	απροσδιόριστο

Όριο της f	Όριο της g	Όριο της $\frac{f}{g}$
ℓ_1	$\ell_2 \neq 0$	ℓ_1/ℓ_2
ℓ_1	$+\infty$ ή $-\infty$	0
$+\infty$	$\ell_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$\ell_2 > 0$	$-\infty$
$\ell_1 > 0$	0, $(g(x) > 0)$	$+\infty$
$\ell_1 > 0$	0, $(g(x) < 0)$	$-\infty$
$+\infty$ ή $-\infty$	$+\infty$ ή $-\infty$	απροσδιόριστο
0	0	απροσδιόριστο

Όπου έχει σημειωθεί η έκφραση «απροσδιόριστο» στους παραπάνω πίνακες σημαίνει ότι το όριο, αν υπάρχει, εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη μορφή των συναρτήσεων f και g . Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστες μορφές**.

Πιο συγκεκριμένα, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ και } 0 \cdot (\pm\infty)$$

αντίστοιχα. Επειδή $f - g = f + (-g)$, απροσδιόριστες μορφές για το όριο της διαφοράς συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) - (+\infty) \text{ και } (-\infty) - (-\infty).$$

Τέλος, επειδή $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για το όριο του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την έννοια της απροσδιόριστης μορφής, ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + a$ (όπου a οποιουδήποτε πραγματικός αριθμός) και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, για τις οποίες τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + a \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Αφού $f(x) + g(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + a \right) + \frac{1}{x^2} = a$ είναι φανερό ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} a = a$ οπότε το όριο του αθροίσματος δεν μπορεί να καθορισθεί (προσδιορισθεί) από το όριο των δύο προσθετέων. Για παράδειγμα:

α) Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 1$$

β) Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 2$$

γ) Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0 \text{ κ.ο.κ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.4.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια.

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 10x^3 + 25x^2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x-1} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3}$$

Λύση.

α) Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 10x^3 + 25x^2}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 10x^3 + 25x^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2(x^2 - 10x + 25)} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} \cdot \frac{1}{(x-5)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 1}{5^2} = \frac{41}{25} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 5} (x-5)^2 = 0, \quad (x-5)^2 > 0,$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$.

β) Αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)\sqrt{x+3} = -2$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty$ (για $x > 1$ είναι $(x-1)^3 > 0$),

θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x-1} = -\infty$.

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ και ισχύει $x-2 > 0$ για $x > 2$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = +\infty$.

Ισχύει επί πλέον ότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3$, οπότε το ζητούμενο όριο προκύπτει

$$\text{ως εξής} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{(x-2)^3} (2x^2 - 3x + 1) \right] = +\infty.$$

δ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ και ισχύει $x-2 < 0$ για $x < 2$, θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty.$$

Ισχύει επί πλέον ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3,$$

οπότε το ζητούμενο όριο προκύπτει ως εξής:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{(x-2)^3} (2x^2 - 3x + 1) \right] = -\infty.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.5.

Μια εταιρεία κατασκευής ενός ναυτιλιακού προϊόντος έχει πάγια μηνιαία έξοδα 5000 €, ενώ το κόστος κατασκευής μιας μονάδας του προϊόντος είναι 20 €.

α) Να υπολογίσετε το μηνιαίο κόστος $K(x)$ για την κατασκευή x μονάδων του προϊόντος.

β) Το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος δίνεται από τον τύπο:

$$K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} K_\mu(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} K_\mu(x)$. Ποια είναι η φυσική σημασία των ορίων αυτών;

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $K_\mu(x)$.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση το μηνιαίο κόστος $K(x)$ για την κατασκευή x μονάδων του προϊόντος θα δίνεται από τον τύπο $K(x) = 20x + 5000, x \geq 0$.

β) Έχουμε

$$K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{20x + 5000}{x} = 20 + \frac{5000}{x}$$

και αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000}{x} = 0$, προκύπτει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} K_\mu(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (20 + \frac{5000}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 20 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000}{x} = 20$.

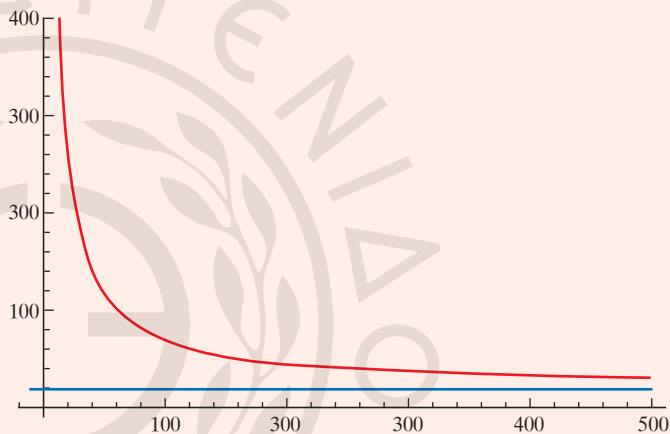
Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 20$ είναι ασύμπτωτη της συναρτήσεως $K_\mu(x)$ στο $+\infty$. Επομένως, όταν η εταιρεία κατασκευάζει απεριόριστα πολλές μονάδες, το μέσο κόστος ταυτίζεται με το κόστος ανά μονάδα, αφού τα πάγια έξοδα είναι τότε αμελητέα.

Για το όριο στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} K_\mu(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (20 + \frac{5000}{x}) = +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συναρτήσεως $K_\mu(x)$. Επομένως, όταν η εταιρεία κατασκευάζει πολύ λίγες μονάδες, το μέσο κόστος είναι εξαιρετικά υψηλό.

γ) Γνωρίζοντας ότι οι ευθείες με εξισώσεις $y = 20$ και $x = 0$ είναι ασύμπτωτες της συναρτήσεως και με τη βοήθεια του πίνακα τιμών μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 3.6ιε.



Σχ. 3.6ιε.

Ασκήσεις.

3.6.1. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^5} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)^2$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x - 7)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x - 7)$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{-x^2 + 5}$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^4 + 3}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + x - 4}{x^3 - 3x + 4}$

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3x^3 - 2x^2 + 2}$

θ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 27}{x^3 + 27}$

ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 9} - x)$

3.6.2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$ των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x) = \frac{1}{2+x}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 3}$

γ) $f(x) = \frac{1-2x}{3+5x}$

3.6.3. Η τιμή των ηλεκτρονικών εξαρτημάτων πλοίων συνήθως μειώνεται πολύ γρήγορα με την πάροδο του χρόνου. Ας υποθέσουμε ότι ένα νέο εξάρτημα έχει αρχική τιμή 1000 € και ότι η τιμή του σε x μήνες, δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $P(x) = 600 + \frac{1200}{x+3}$.

- α) Να βρείτε την τιμή του εξαρτήματος σε 6 μήνες από τη μέρα της κυκλοφορίας του.
- β) Να βρείτε πότε η τιμή του εξαρτήματος θα γίνει 800 €.
- γ) Τι θα συμβεί με την τιμή του μετά από πολλά χρόνια;

3.6.4. Δύο ακτοπλοϊκές εταιρείες εκτίμησαν ότι ξοδεύοντας x χιλιάδες € για διαφήμιση πετυχαίνουν ετήσιες επιβατικές κινήσεις, οι οποίες δίνονται (σε χιλιάδες) κατά προσέγγιση από τους τύπους:

$$S_1(x) = \frac{2000x^2}{2x^2 + 400} \quad \text{και} \quad S_2(x) = \frac{1000x^4}{2x^4 + 200}$$

αντίστοιχα.

- α) Ποια από τις δύο εταιρείες πετυχαίνει καλύτερες ετήσιες επιβατικές κινήσεις ξοδεύοντας 5000 €;
- β) Αν οι εταιρείες είχαν τη δυνατότητα να ξοδεύουν απεριόριστα χρήματα για διαφήμιση, ποια θα μπορούσε να πετύχει καλύτερη ετήσια επιβατική κίνηση και ποια θα ήταν αυτή;

3.6.5. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

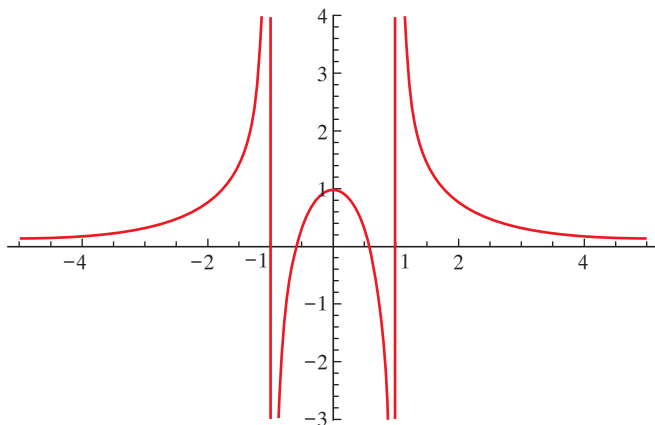
$$\begin{array}{lll} \alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+3} & \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2}{x+1}} & \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 2) \\ \delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x^3+3x} & \epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x & \sigma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x \end{array}$$

3.6.6. Έστω η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 3.6ιστ.

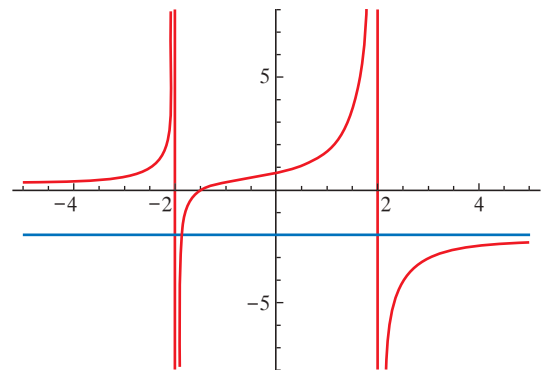
- α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, καθώς και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f .

3.6.7. Έστω η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 3.6ιζ.

- α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.



Σχ. 3.6ιστ.



Σχ. 3.6ιζ.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, καθώς και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f .

3.6.8. Μια εταιρεία κατασκευής εξαρτημάτων πλοίων έχει ετήσια πάγια έξοδα 10.000 €, ενώ το κόστος κατασκευής μιας μονάδας του προϊόντος είναι 200 €.

- α) Να βρεθεί το μέσο κόστος $K_e(x)$ ανά γεννήτρια όταν σ' ένα έτος κατασκευάζονται x μονάδες του προϊόντος.
 β) Τι θα συμβεί όταν η εταιρεία κατασκευάζει πολύ λίγες μονάδες και τι όταν η εταιρεία κατασκευάζει απεριόριστα πολλές μονάδες σε ένα έτος;
 γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $K_e(x)$.

3.6.9. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6}{2x-4}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{\sqrt{1-x}}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^{40}}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2-4}$

ε) $\lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{1}{(x+6)^{11}}$

στ) $\lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{1}{(x+6)^{11}}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2)$

η) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$

3.6.10. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ως κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = x_0$.

α) $f(x) = \frac{1}{2+x}$, $x_0 = -2$

β) $f(x) = \frac{1-3x^2}{1-x^4}$, $x_0 = -1$, και $x_0 = 1$

γ) $f(x) = \frac{1-3x}{3+6x}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$

3.6.11. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 που δίνεται.

α) $f(x) = \frac{x+3}{x^3+3x^2}$, $x_0 = 0$

β) $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$

γ) $f(x) = \frac{x-|x|}{|x|x}$, $x_0 = 0$

3.7 Συνέχεια συναρτήσεων.

Στις προηγούμενες παραγράφους αναλύσαμε την έννοια της συναρτήσεως f και του ορίου της. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων, που μας παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά τους, είναι η συνέχεια. Στην καθημερινή ομιλία, όταν λέμε ότι μια διαδικασία είναι *συνεχής*, εκείνο που αντιλαμβανόμαστε είναι ότι αυτή δεν παρουσιάζει διακοπές. Στα Μαθηματικά η έννοια της συνέχειας δεν διαφέρει και πολύ από την απλοϊκή περιγραφή αυτή.

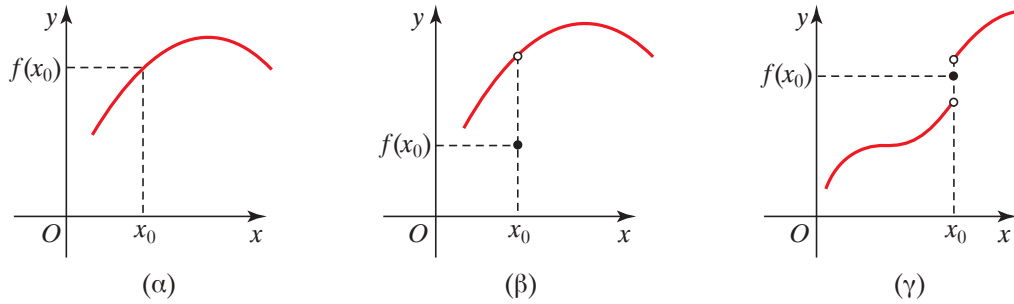
Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, αρχικά θα παραθέσουμε με κάποια παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε την έννοια της συνέχειας και κατόπιν θα δώσουμε το μαθηματικό της ορισμό.

Ας θεωρήσουμε τρεις συναρτήσεις με γραφικές παραστάσεις, που δίνονται στο σχήμα 3.7α.

Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις (β) και (γ) «διακόπτονται» στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, ενώ η γραφική παράσταση (α) δεν «διακόπτεται» στο σημείο αυτό. Με την έννοια αυτή, η συνάρτηση του σχήματος (α) θα λέμε ότι είναι συνεχής στο x_0 , ενώ οι συναρτήσεις των σχημάτων (β) και (γ) ότι δεν είναι συνεχείς στο x_0 .

Γενικά, όταν λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εννοούμε ότι η γραφική της παράσταση *δεν διακόπτεται* στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Αν διακόπτεται, λέμε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της συνέχειας και τη σχέση της με την έννοια



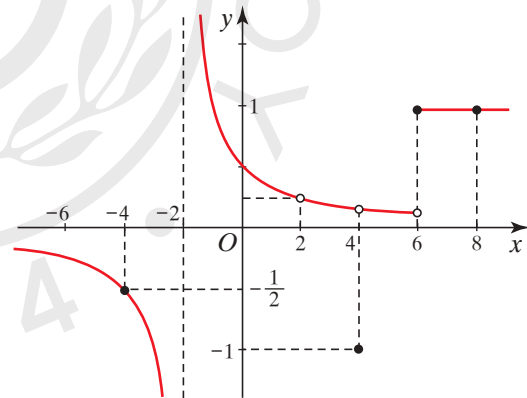
Σχ. 3.7α.

του ορίου που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο και να καταλήξουμε σ' έναν πιο μαθηματικό ορισμό για την έννοια της συνέχειας, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 4) \cup (4, 6) \\ -1, & x = 4 \\ 1, & x \in [6, +\infty) \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζεται στο σχήμα 3.7β απ' όπου συμπεραίνουμε (γραφικά) ότι, σημεία στα οποία παρουσιάζεται διακοπή της συναρτήσεως είναι τα $-2, 2, 4, 6$. Εξετάζοντας τα όρια και τις τιμές της συναρτήσεως f σε διάφορα σημεία, παίρνουμε τον επόμενο πίνακα:

x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$f(x_0)$	Γραφική παράσταση
-4	-1/2	-1/2	δεν διακόπτεται
-2	δεν υπάρχει	δεν ορίζεται	διακόπτεται
0	1/2	1/2	δεν διακόπτεται
2	1/4	δεν ορίζεται	διακόπτεται
4	1/6	-1	διακόπτεται
6	δεν υπάρχει	1	διακόπτεται
8	1	1	δεν διακόπτεται



Σχ. 3.7β.

Παρατηρούμε ότι:

α) Στα σημεία $-2, 2$ παρουσιάζεται διακοπή της C_f , η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι εκεί η f δεν ορίζεται.

β) Στο σημείο $x_0 = 4$, όπου η C_f διακόπτεται, υπάρχει το όριο της f αλλά ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$.

γ) Στο σημείο $x_0 = 6$, όπου επίσης η C_f διακόπτεται, δεν υπάρχει το όριο της f .

Τέλος, στα τρία σημεία στα οποία δεν εμφανίζεται διακοπή της γραφικής παραστάσεως, δηλαδή στα $-4, 0, 8$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται, για να διατυπωθεί μαθηματικά ο ορισμός της συνέχειας μιας συναρ-

τήσεως σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Μία συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)^1.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 2$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2) = 1^3 - 2 = -1 = f(1).$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι, μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω²:

α) Δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

β) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και δεν ισχύει η ισότητα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - 2x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχείς στο σημείο 1, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - 2x) = 1$$

(οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 1) και

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2, \quad g(1) = 0$$

[υπάρχει το όριο της g στο 1, αλλά δεν ισχύει η ισότητα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$].

Το επόμενο Θεώρημα, του οποίου η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες των ορίων, μας βοηθάει στη διαπίστωση της συνέχειας συναρτήσεων που παράγονται από συνεχείς συναρτήσεις μέσω απλών αλγεβρικών πράξεων.

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις

$$f+g, \quad af \text{ (με } a \in \mathbf{R}), \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (όπου } g(x_0) \neq 0), \quad |f|, \quad \sqrt[n]{f} \text{ (όπου } f(x_0) \geq 0)$$

είναι συνεχείς στο x_0 .

1. Ο ορισμός της συνέχειας μιας συναρτήσεως f στο σημείο $x_0 \in \Delta$ (όπου Δ είναι ένα διάστημα) μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in \Delta$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Οι περιπτώσεις που περιγράφονται στη συνέχεια αναφέρονται σε σημεία συσσωρεύσεως x_0 του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως (ώστε να ορίζονται τα αντίστοιχα όρια). Στην περίπτωση που το x_0 είναι **μεμονωμένο σημείο** του πεδίου ορισμού, δηλαδή υπάρχει διάστημα της μορφής $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, τέτοιο, ώστε να ισχύει $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D(f) = \{x_0\}$, τότε η συνάρτηση f θεωρείται συνεχής στο x_0 . Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις.

Για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

Όμως, σύμφωνα με την ιδιότητα L_6 των ορίων (βλ. παράγρ. 3.5), αφού υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , θα υπάρχει και το όριο της συναρτήσεως $f + g$ στο x_0 και θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

σχέση η οποία αποδεικνύει ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0 .

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες των μαθηματικών πράξεων.

Τέλος, μπορεί να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα της συνέχειας διατηρείται και όταν χρησιμοποιούμε την πράξη της συνθέσεως, πιο συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Εκτός από τη συνέχεια μιας συναρτήσεως σ' ένα σημείο, μας ενδιαφέρει και η συνέχεια σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Διαισθητικά η συνέχεια σε διάστημα αναφέρεται στην ιδιότητα να μην διακόπτεται η γραφική παράσταση συναρτήσεως σε κανένα σημείο του διαστήματος που εξετάζουμε (εσωτερικό ή άκρο του). Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής:

- α) Σε ένα **ανοικτό διάστημα** $\Delta = (a, \beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$.
- β) Σε ένα **κλειστό διάστημα** $\Delta = [a, \beta]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in (a, \beta)$ και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Αν η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της ονομάζεται απλά **συνεχής**.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 2$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x^3 - 2) = x_0^3 - 2 = f(x_0).$$

Αντίθετα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της $[0, 1]$, αφού διακόπτεται στο άνω άκρο (ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq 0 = f(1)$).

Από τον τρόπο που ορίστηκε η συνέχεια συναρτήσεων σε διάστημα, γίνεται φανερό ότι οι ιδιότητες που αναφέρονται στη συνέχεια σε σημείο, μπορούν να μεταφερθούν άμεσα σε αντίστοιχες ιδιότητες σε διαστήματα. Έτσι προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα $\Delta = (a, \beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους, τότε και οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f+g, & \quad cf \text{ (με } c \in \mathbf{R}), & \quad f \cdot g, \\ |f|, & \quad \frac{f}{g} \text{ (όπου ισχύει } g(x) \neq 0), & \quad \sqrt[n]{f} \text{ (όταν } f(x) \geq 0), \end{aligned}$$

είναι συνεχείς στο Δ .

Επίσης για τη σύνθεση συναρτήσεων ισχύει το εξής:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta = (a, \beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και η g είναι συνεχής στο $f(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο Δ .

Πολλές από τις συναρτήσεις που γνωρίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους είναι συνεχείς σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους. Έτσι:

α) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ ισχύει (βλ. παραγρ. 3.5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

β) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$ έχουμε (βλ. παραγρ. 3.5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

γ) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ ισχύει (βλ. Ιδιότητα B_3 στην παρ. 3.5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

Οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$ $0 < a \neq 1$ είναι συνεχείς. Ειδικότερα είναι συνεχείς οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = e^x$, $f(x) = 10^x$, $g(x) = \ln x$, $g(x) = \log x$.

Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $g(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους (το οποίο δεν είναι ολόκληρο το $\mathbf{R}$) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \exp(x^3 + 2x + 1)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $g(x) = \exp x$ και $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

Αναφέρουμε τέλος το θεώρημα, το οποίο διευκολύνει την εύρεση της κατακόρυφης ασύμπτωτης μιας συναρτήσεως (αν υπάρχει), η οποία έχει τη μορφή πηλίκου συνεχών συναρτήσεων.

Αν οι συναρτήσεις g, h είναι συνεχείς στο $x = x_0$, $g(x_0) \neq 0$ και $h(x_0) = 0$, τότε για τη συνάρτηση $f = \frac{g}{h}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

οπότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = x_0$.

Το θεώρημα αυτό ισχύει και για πλευρικά όρια, όταν οι δύο συναρτήσεις g, h είναι **ορισμένες στα διαστήματα** $(\alpha, x_0]$ ή $[x_0, \beta)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.1.

Να βρείτε τον αριθμό a , έτσι ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}ax^3, & x \leq 2 \\ 2a^2x - 3, & x > 2. \end{cases}$$

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής για $x > 2$, καθώς και για $x < 2$ ως πολυωνυμική. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = -4a.$$

Όμως έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{2}ax^3\right) = -4a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2a^2x - 3) = 4a^2 - 3.$$

Επομένως θα πρέπει

$$4a^2 - 3 = -4a \Leftrightarrow 4a^2 + 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ ή } a = -\frac{3}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.2.

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συναρτήσεως f με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x(x+3)}$.

Λύση.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $g(x) = x + 2$ και $h(x) = x(x + 3)$ (είναι συνεχείς στο $\mathbf{R}$, ως πολυωνυμικές).

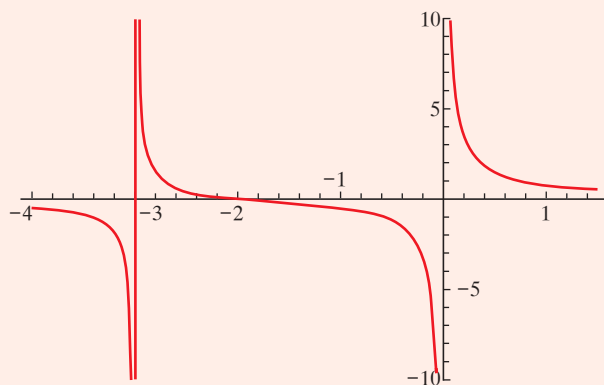
Επί πλέον ισχύει,

$$h(0) = 0 \cdot (0 + 1) = 0, \quad g(0) = 0 + 2 = 2 \neq 0,$$

οπότε η f θα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 0$. Επίσης ισχύει

$$h(-3) = -3 \cdot (-3 + 3) = 0, \quad g(-3) = -3 + 2 = -1 \neq 0,$$

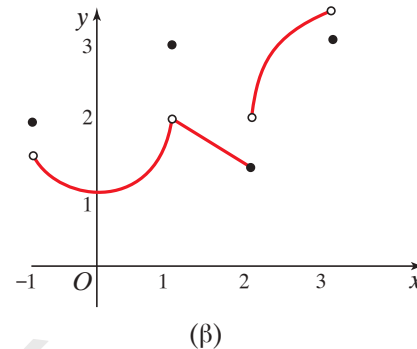
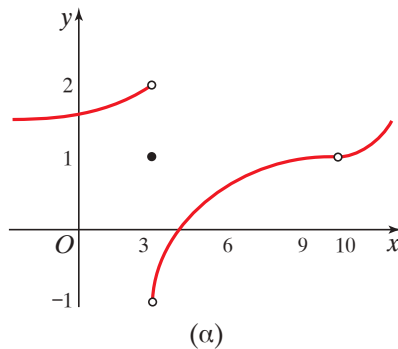
οπότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και την ευθεία με εξίσωση $x = -3$. Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως δίνεται στο σχήμα 3.7γ.



Σχ. 3.7γ.

Ασκήσεις.

3.7.1. Στο σχήμα 3.7δ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία, στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.

**Σχ. 3.7δ.**

3.7.2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις επόμενες συναρτήσεις.

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+3}, & x \neq -3 \\ 0, & x = -3 \end{cases} \quad x_0 = -3$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x^2-2x+1, & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x-4}, & x \neq 4 \\ 6, & x = 4 \end{cases} \quad x_0 = 4$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} x^2-6, & x < 3 \\ \sqrt{6+x}, & x \geq 3 \end{cases} \quad x_0 = 3$$

3.7.3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις επόμενες συναρτήσεις.

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 3 \\ 8-x, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq e \\ -2x+2, & x < e \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} \frac{2 \eta \mu x}{x}, & x < 0 \\ 1 + \sigma \nu \eta x, & x \geq 0 \end{cases}$$

3.7.4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a , ώστε η συνάρτηση f που δίνεται παρακάτω να είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 3 \\ ax^2-2, & x > 3 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} ax^{10}-1, & x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}, & x < 1 \end{cases}$$

3.7.5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

$$\alpha) f(x) = \eta \mu(\epsilon \phi x)$$

$$\beta) f(x) = e^{\eta \mu x}$$

$$\gamma) f(x) = \ln(x^2+4)$$

$$\delta) f(x) = \ln(x^2+x+1)+e^x$$

$$\epsilon) f(x) = \eta \mu \left(\frac{1}{e^{x^2+1}} \right)$$

$$\sigma\tau) f(x) = \ln(\ln(e^x+x))$$

3.7.6. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+4)} \quad \beta) f(x) = \frac{x^4+1}{(x-3)(x^2-4)}$$

3.8 Θεώρημα Bolzano και Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε δύο πολύ βασικά αποτελέσματα που αφορούν σε συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κλειστά διαστήματα.

Ας θεωρήσουμε το σχήμα 3.8α, όπου έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συναρτήσεως f στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, για την οποία ισχύει $f(a) < 0$ και $f(\beta) > 0$. Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα και η γραφική παράσταση της f δεν διακόπτεται (λόγω της συνέχειας της f), αντιλαμβανόμαστε ότι αυτή θα πρέπει οπωσδήποτε να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0 . Προφανώς στο σημείο αυτό θα ισχύει $f(x_0) = 0$, δηλαδή το $x_0 \in (a, \beta)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 3.8β, το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδικό. Μπορεί να έχουμε περισσότερα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις, οι οποίες προφανώς ισχύουν και όταν έχουμε $f(a) > 0$ και $f(\beta) < 0$, είναι γνωστές με την ονομασία **Θεώρημα του Bolzano**. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται:

Θεώρημα Bolzano.

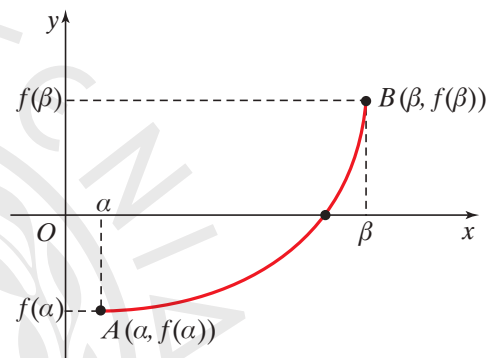
Έστω μία συνάρτηση f , συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην ιδιότητα της συνέχειας της συναρτήσεως f που περιγράφεται στο θεώρημα Bolzano, διότι αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής, τότε η γραφική της παράσταση θα μπορούσε να είναι μια διακοπόμενη γραμμή και επομένως δεν είναι απαραίτητο να τέμνει τον οριζόντιο άξονα, έστω και αν ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$ (σχ. 3.8γ).

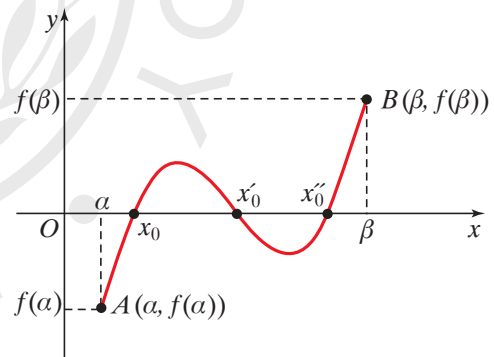
Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν για μια (συνεχή ή μη συνεχή) συνάρτηση f ισχύει $f(a)f(\beta) > 0$ δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η f δεν έχει ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Για παράδειγμα:

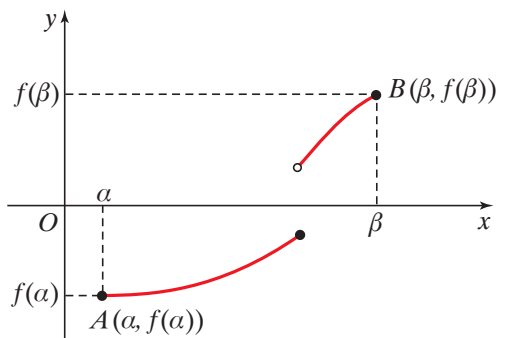
α) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[1, 2]$ αφού είναι συνεχής, ως πολυωνυμική και ισχύει ότι $f(1)f(2) = (-1) \cdot 2 = -2 < 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διά-



Σχ. 3.8α



Σχ. 3.8β



Σχ. 3.8γ

στημα $[1,2]$ (η οποία προφανώς είναι η $x_0 = \sqrt{2}$). Για την ίδια συνάρτηση, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2,2]$, αφού είναι μεν συνεχής, ως πολυωνυμική, αλλά ισχύει $f(-2)f(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0$. Ωστόσο, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα $[-2,2]$, τις $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$.

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$ μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2,2]$ αφού είναι συνεχής, ως πολυωνυμική και ισχύει ότι $f(-2)f(2) = (-10) \cdot 6 = -60 < 0$. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξισώσεως $f(x) = 0$ στο διάστημα $[-2,2]$. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν τρεις ρίζες στο διάστημα $[-2,2]$, οι $x_1 = -1, x_2 = 0$, και $x_3 = 1$.

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει άμεσα ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε οι τιμές της συναρτήσεως είτε θα είναι θετικές για κάθε $x \in \Delta$, είτε θα είναι αρνητικές για κάθε $x \in \Delta$. Επομένως:

Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ , η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Δ , διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ .

Έτσι για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ είτε θα έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ [σχ. 3.8δ(α)] είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ [σχ. 3.8δ(β)].

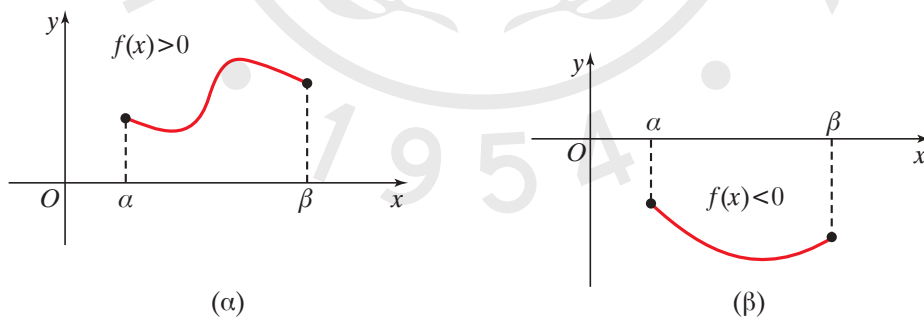
Μια άμεση συνέπεια των προηγούμενων είναι ότι οι συνεχείς συναρτήσεις f διατηρούν το πρόσημό τους σε καθένα από τα διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού τους (σχ. 3.8ε).

Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x . Πιο συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

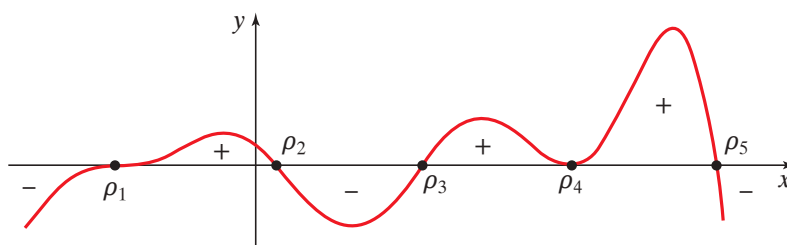
Βήμα 1. Βρίσκουμε όλες τις ρίζες της συναρτήσεως f .

Βήμα 2. Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε ένα σημείο ξ και βρίσκουμε το πρόσημο του $f(\xi)$.

Βήμα 3. Αν $f(\xi) > 0$, η f θα έχει θετικό πρόσημο σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα. Αν $f(\xi) < 0$, η f θα έχει αρνητικό πρόσημο σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα.



Σχ. 3.8δ.



Σχ. 3.8ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.1.

Να μελετήσετε το πρόσημο της συναρτήσεως $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση.

Υπολογίζουμε αρχικά όλες τις ρίζες της εξίσωσεως $f(x) = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Έχουμε

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{4}.$$

Επομένως, οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{και} \quad \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right],$$

στα οποία η f θα διατηρεί σταθερό το πρόσημό της. Για να προσδιορίσουμε το είδος του προσήμου σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε έναν αριθμό ξ και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός ξ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f(\xi)$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$	1	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$
Πρόσημο	-	+	-

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ είναι αρνητικό ($f(x) < 0$), ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ είναι θετικό ($f(x) > 0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^3}{x-1} = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)e^x + (x-2)x^3$ και διαπιστώνουμε ότι ισχύει:

$$f(-1) = -\frac{2}{e} + 3 > 0, f(0) = -1 < 0 \quad \text{και} \quad f(2) = e^2 > 0.$$

Επίσης η f είναι συνεχής ως άθροισμα γινομένων συνεχών συναρτήσεων. Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και ισχύει $f(-1)f(0) < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Όμως, αφού $x_0 \neq -1, 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} + (x_0 - 2)x_0^3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x_0 - 1)e^{x_0} + (x_0 - 2)x_0^3}{(x_0 - 1)(x_0 - 2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{x_0 - 2} + \frac{x_0^3}{x_0 - 2} = 0,$$

πράγμα το οποίο δείχνει ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει $f(0)f(2) < 0$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

Ας υποθέσουμε ότι για μια συνεχή συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, ισχύει $f(a) < f(\beta)$. Ας θεωρήσουμε επίσης έναν αριθμό λ που βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, δηλαδή ισχύει $f(a) < \lambda < f(\beta)$ (σχ. 3.8στ). Τότε μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = f(x) - \lambda$, $x \in [a, \beta]$, ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος του Bolzano. Πράγματι η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, επίσης ισχύει $g(a)g(\beta) < 0$, αφού $g(a) = f(a) - \lambda < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \lambda > 0$.

Επομένως, με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \lambda = 0$ δηλαδή $f(x_0) = \lambda$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Bolzano και είναι γνωστό ως **Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών**. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

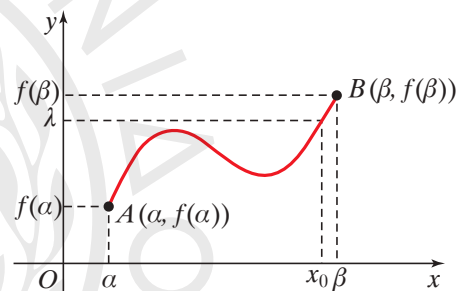
Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \lambda$.

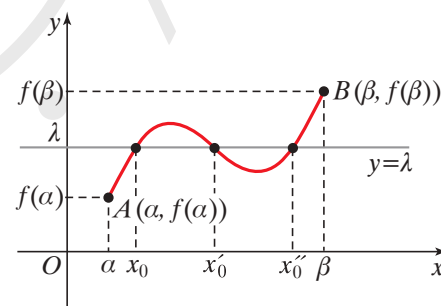
Ο όρος **Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών** έχει προκύψει από το γεγονός ότι, σύμφωνα μ' αυτό, μία συνεχής συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές οι οποίες βρίσκονται ανάμεσα (ενδιάμεσα) στις τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$ που λαμβάνει στα δύο άκρα του διαστήματος. Αυτό σημαίνει, ισοδύναμα, ότι για κάθε τιμή λ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda$ συναντάει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0 .

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.8ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda$ συναντάει τη γραφική παράσταση της f δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδικό. Επίσης, αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.8η, δεν λαμβάνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

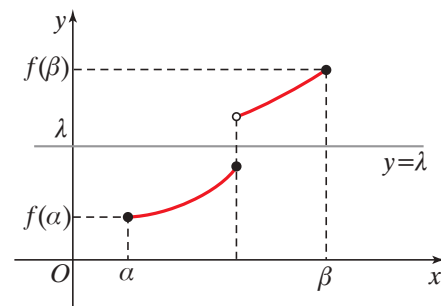
Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών αποδεικνύεται η επόμενη πολύ σημαντική ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων (σχ. 3.8θ):



Σχ. 3.8στ.



Σχ. 3.8ζ.



Σχ. 3.8η.

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συναρτήσεως f είναι διάστημα.

Στην ειδική περίπτωση που μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , μπορούμε πολύ εύκολα να καθορίσουμε τα άκρα του διαστήματος $f(\Delta)$ υπολογίζοντας τις τιμές της στα άκρα του Δ (αν τα άκρα ανήκουν στο πεδίο ορισμού της) ή τα πλευρικά όριά της σε αυτά (αν τα άκρα δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα:

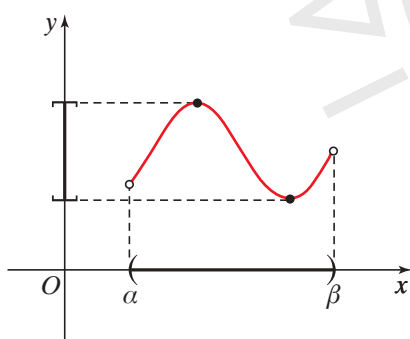
Αν μια συνάρτηση f είναι *γνησίως αύξουσα* και *συνεχής* σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) [σχ. 3.8ι(α)], όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

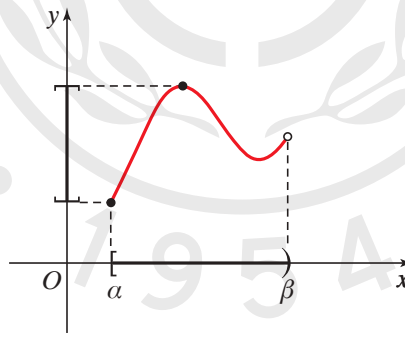
Αν, όμως, η f είναι *γνησίως φθίνουσα* και *συνεχής* στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) [σχ. 3.8ι(β)].

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[a, \beta]$, $[a, \beta)$ και $(\alpha, \beta]$ προκύπτουν αντίστοιχα συμπεράσματα (το άκρο του συνόλου τιμών που αντιστοιχεί σε κλειστό άκρο του πεδίου ορισμού θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών, ενώ το άκρο του συνόλου τιμών που αντιστοιχεί σε ανοικτό άκρο του πεδίου ορισμού δεν θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών).

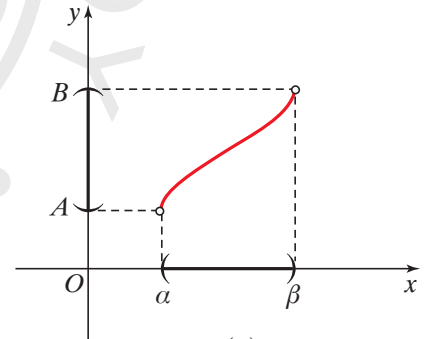
Αξίζει να σημειωθεί ότι, στις παραπάνω περιπτώσεις, η αντίστροφη συνάρτηση της f (η οποία ορίζεται αφού η f , ως γνησίως μονότονη, θα αντιστρέφεται), είναι επίσης συνεχής με πεδίο ορισμού το διάστημα με άκρα A και B και σύνολο τιμών το διάστημα με άκρα α και β .



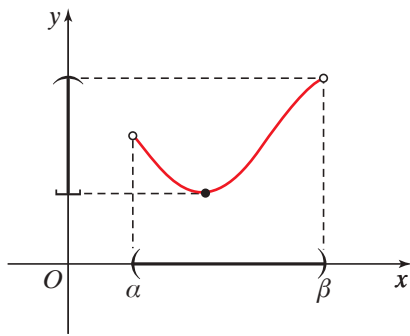
(α)



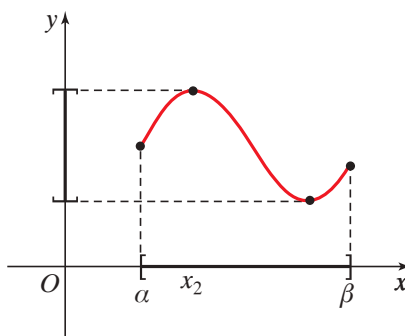
(γ)



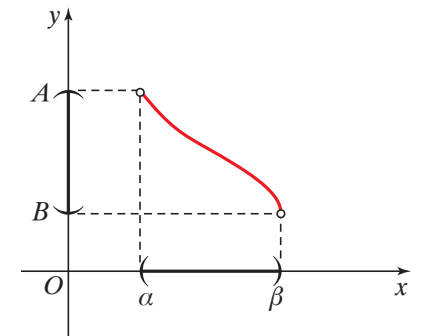
(α)



(β)



(δ)



(β)

Σχ. 3.80.

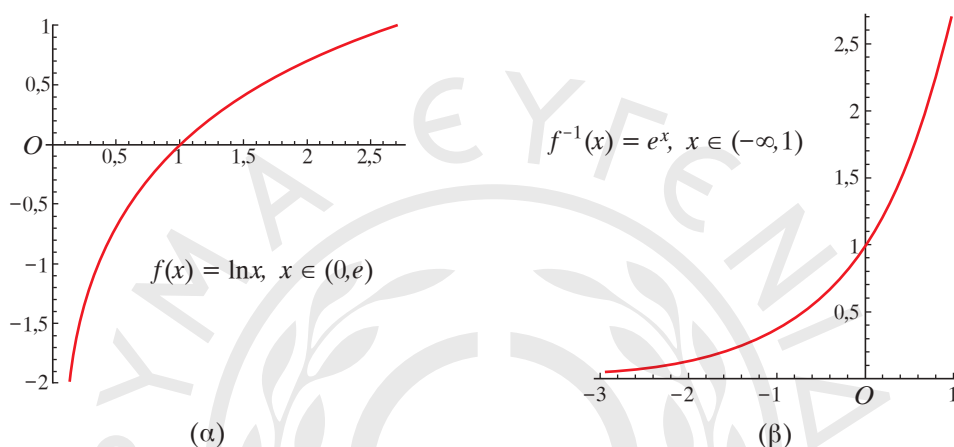
Σχ. 3.8ι.

Για παράδειγμα, το σύνολο τιμών της συναρτήσεως $f(x) = \ln x$, $x \in (0, e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, είναι το διάστημα $(-\infty, 1)$ [σχ. 3.8ια(α)], αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \ln e = 1.$$

Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x) = e^x$ της f , είναι επίσης συνεχής με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, 1)$ και σύνολο τιμών το $(0, e)$ [σχ. 3.8ια(β)].

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, αν μια συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και είναι γνησίως μονότονη, τότε το σύνολο τιμών της $\{f(x) \mid x \in [a, \beta]\}$ είναι ένα κλειστό διάστημα με άκρα τα $f(a), f(\beta)$ (δηλ. το $[f(a), f(\beta)]$ αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή το $[f(\beta), f(a)]$ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα).



Σχ. 3.8ια.

Στην περίπτωση που η συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε και πάλι το σύνολο τιμών της $\{f(x) \mid x \in [a, \beta]\}$ είναι ένα κλειστό διάστημα χωρίς όμως τα άκρα του να είναι απαραίτητα τα $f(a), f(\beta)$. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα (η απόδειξη παραλείπεται).

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η τιμή που λαμβάνει η f στη θέση x_1 είναι η μικρότερη δυνατή (αφού ισχύει $f(x_1) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$), ενώ η τιμή που λαμβάνει στη θέση x_2 είναι η μεγαλύτερη δυνατή (αφού $f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$). Για το λόγο αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό με την ονομασία **θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής**. Συνδυάζοντας το θεώρημα αυτό με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.3.

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

$$f(x) = \ln x + e^x, \quad x \in [1, 3] \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x \in (0, 2].$$

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων (βλ. άσκηση 3.2.11).

$$\text{Αφού} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + e^x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + e^x) = \ln 1 + e^1 = 0 + e = e$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\ln x + e^x) = \lim_{x \rightarrow 3} (\ln x + e^x) = \ln 3 + e^3$$

το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $[e, \ln 3 + e^3]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως φθίνουσα ως άθροισμα φθινουσών συναρτήσεων.

$$\text{Αφού} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \quad \text{θα έχουμε} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = +\infty.$$

$$\text{Επίσης} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

Ασκήσεις.

3.8.1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ .

$$\alpha) f(x) = x + \sin 2x - 3, \quad \Delta = [0, \pi]$$

$$\beta) f(x) = x + \eta \mu x - x + 1, \quad \Delta = [0, \pi]$$

$$\gamma) f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad \Delta = [-2, 0]$$

$$\delta) f(x) = 4^x - 3^x + 2^x - 2, \quad \Delta = [0, 1]$$

$$\epsilon) f(x) = x^5 - 2x^2 + 2, \quad \Delta = [-1, 0]$$

$$\sigma\tau) f(x) = x^3 - 3^x + 2, \quad \Delta = [-2, 0]$$

3.8.2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 2]$ και $[2, 3]$.

3.8.3. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x^3 + 1}{x + 2} + \frac{x^2 + 1}{x - 2} = 0$$

$$\beta) \frac{e^{-2x}}{x + 2} + \frac{\ln(|x|/2) + 1}{x - 2} = 0$$

$$\gamma) \frac{\sqrt{|x| + 2}}{x + 2} + \frac{x^3 + 1}{x - 2} = 0$$

έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 2)$.

3.8.4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων f για όλες τις τιμές του x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού τους.

$$\alpha) f(x) = x^3 - 16x$$

$$\beta) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\gamma) f(x) = (\sqrt{x} - 1)(x^4 - 16)$$

$$\delta) f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

$$\epsilon) f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$\sigma\tau) f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

3.8.5. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων f για όλες τις τιμές του x που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

$$\alpha) f(x) = \eta \mu x + \sigma \nu \nu x$$

$$\beta) f(x) = \eta \mu 2x + \sigma \nu \nu 2x$$

$$\gamma) f(x) = -\eta \mu x + \sigma \nu \nu x$$

$$\delta) f(x) = 2\eta \mu 2x - 1$$

$$\epsilon) f(x) = 2\sigma \nu \nu 2x - 1$$

$$\sigma\tau) f(x) = 2\sigma \nu \nu \frac{x}{2} + 1$$

3.8.6. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα που δίνεται.

$$\alpha) f(x) = e^x, (-1, 1]$$

$$\beta) f(x) = -3x + 2, (-2, 2)$$

$$\gamma) f(x) = 2\ln x + 1, [1, e^2]$$

$$\delta) f(x) = \sqrt{x}, (1, 4]$$

$$\epsilon) f(x) = e^x + 1, (-\infty, 0)$$

$$\sigma\tau) f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in [0, \pi/3]$$

$$\zeta) f(x) = \frac{1}{x^3}, (1, 10]$$

$$\eta) f(x) = 2e^x - 3, (-1, +\infty)$$

$$\theta) f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 1, x \in [\pi/2, \pi]$$

3.9 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

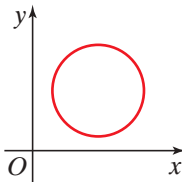
Ίσες συναρτήσεις $f = g$.	Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
Βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο A .	$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in A$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in A$ $(cf)(x) = cf(x), x \in A$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in A \text{ και } g(x) \neq 0.$
Συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο Δ . Συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο Δ .	$f(x_1) < f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$. (ή συνάρτηση 1-1).	Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.
Άρτια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$.	Για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και επί πλέον ισχύει $f(-x) = f(x)$.
Περιττή συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$.	Για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και επί πλέον ισχύει $f(-x) = -f(x)$.
Περιοδική συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ με περίοδο το θετικό αριθμό T .	Για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε $x + T \in A$ και επί πλέον ισχύει $f(x + T) = f(x)$.
Σύνθεση της $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ με την $g: B \rightarrow \mathbf{R}$.	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για όλα τα $x \in A$, για τα οποία $f(x) \in B$
Αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ μιας αμφιμονοσήμαντης συναρτήσεως f .	Αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f ($y \in f(A)$) στο μοναδικό x για το οποίο ισχύει $y = f(x)$. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$
Βασικές ιδιότητες του πεπερασμένου ορίου στο $x_0 \in \mathbf{R}$.	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

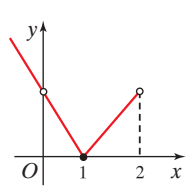
Βασικές ιδιότητες του πεπερασμένου ορίου στο $x_0 \in \mathbf{R}$.	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\text{όταν } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right $ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$
Κριτήριο παρεμβολής.	Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
Όριο πολωνυμικής συναρτήσεως $P(x)$ στο x_0 .	$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$
Όριο ρητής συναρτήσεως $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ στο x_0 (όταν $Q(x_0) \neq 0$):	$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο x_0 .	$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{x} = a$
Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.	Η ευθεία με εξίσωση $y = \ell$, όπου $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Η ευθεία με εξίσωση $y = \ell$, όπου $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.
Όριο πολωνυμικής συναρτήσεως $P(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \delta$, $\alpha \neq 0$, στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^n)$
Όριο ρητής συναρτήσεως $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \delta}{\alpha' x^m + \beta' x^{m-1} + \dots + \delta'}$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha' \neq 0$).	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^n)$
Κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .	Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$, όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, είναι $+\infty$ ή $-\infty$
Συνέχεια συναρτήσεως στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Συνεχής συνάρτηση σε ανοικτό διάστημα (a, β) .	Όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) .
Συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.	Όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του (a, β) και επί πλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$
Συνέχεια και πράξεις.	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις $f+g, cf$ (με $c \in \mathbf{R}$), $f \cdot g, f $ $\frac{f}{g}$ (όπου $g(x_0) \neq 0$), $\sqrt[n]{f}$ (όπου $f(x_0) \geq 0$).
Συνέχεια συνθέσεως συναρτήσεων.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta = (a, \beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και η g είναι συνεχής στο $f(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο Δ .
Συνεχείς βασικές συναρτήσεις.	– Πολυωνυμικές συναρτήσεις. – Ρητές συναρτήσεις. – Τριγωνομετρικές συναρτήσεις. – $f(x) = a^x$. – $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$.
Θεώρημα Bolzano.	Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.	Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \lambda$.

3.10 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το διάγραμμα του σχήματος 3.10α δεν αποτελεί γραφική παράσταση συναρτήσεως	 Σχ. 3.10α.	Σ Λ
2.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3$. Η σύνθεση $h = f \circ f$ έχει τύπο $h(x) = x^6$.		Σ Λ
3.	Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ αντιστρέφεται όταν η ευθεία $y = a$ έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τη C_f .		Σ Λ

4.	Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 2}$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5/2$.	Σ Λ
5.	Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια αυτών στο x_0 , τότε ισχύει η ανισότητα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.	Σ Λ
6.	Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{ x-1 }{x-1}$. Τότε η f δεν έχει όριο στο 0.	Σ Λ
7.	Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε $(f \circ g)(x) = -x$.	Σ Λ
8.	Αν $f(x) = \frac{1}{(x-4)^3}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$, ενώ δεν υπάρχει όριο της f στο 4.	Σ Λ
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^3 + 2x} \right) \right] = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3 + 2x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3 + 2x} = 0$.	Σ Λ
10.	Αν $\frac{2}{x^4} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$, $x \in (1, +\infty)$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.	Σ Λ
11.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, τότε η f θα είναι συνεχής στο x_0 .	Σ Λ
12.	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.	Σ Λ
13.	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, όπου $l, m \in \mathbf{R}$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) < g(x)$, τότε κατ' ανάγκη θα έχουμε $l \leq m$.	Σ Λ
14.	Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-3x)^5}{x^3 + 1}$ είναι ίσο με $-\infty$.	Σ Λ
15.	Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$.	Σ Λ
16.	Έστω η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 3.10β. Σ' αυτήν την περίπτωση η f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 1$.	Σ Λ
 Σχ. 3.10β		
17.	Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $\Delta = [a, \beta]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in (a, \beta)$.	Σ Λ
18.	Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(a)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.	Σ Λ
19.	Κάθε συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ , η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Δ , διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ .	Σ Λ

18.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε: α) Η συνάρτηση gf είναι συνεχής στο x_0. γ) Η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0. β) Η συνάρτηση $g + f$ είναι συνεχής στο x_0. δ) Η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.
19.	Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη. Τότε η εξίσωση $f(x^2) = f(x)$: α) Έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0. γ) Έχει ως ρίζες τους αριθμούς 0 και 1. β) Είναι αδύνατη στο $\mathbf{R}$. δ) Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

3.11 Γενικές ασκήσεις.

3.11.1. Έστω μία συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 + ax^2 - 2x + \beta$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β έτσι, ώστε τα σημεία $(2, 25)$ και $(1, 0)$ να ανήκουν στη C_f .
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- γ) Να μετασχηματίσετε τον τύπο της συναρτήσεως σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.
- δ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει $f(x) > 0$.
- ε) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της συναρτήσεως f ;

3.11.2. Ο λόγος των όγκων αντιψυκτικού και νερού που περιέχονται στο ψυγείο, της μηχανής ενός αυτοκινήτου είναι $5/3$.

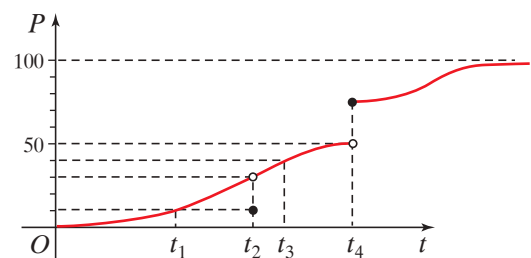
- α) Να βρείτε τη σχέση που δίνει τα y λίτρα του αντιψυκτικού που περιέχονται στο ψυγείο, ως συνάρτηση της χωρητικότητας του x .
- β) Πόσα lt αντιψυκτικού θα περιέχονται σε ψυγείο χωρητικότητας 10 lt;
- γ) Η θερμοκρασία της μηχανής δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 100 - 5x$, όπου x είναι τα lt του διαλύματος αντιψυκτικού και νερού που είναι στο ψυγείο. Να βρείτε τη θερμοκρασία της μηχανής, αν στο ψυγείο υπάρχουν 3 lt αντιψυκτικού.

3.11.3. Σε δύο συνεχόμενα δωμάτια ενός κρουαζιερόπλοιου το ένα έχει θέρμανση, ενώ το άλλο δεν έχει. Όταν η πόρτα που τα συνδέει μείνει ανοικτή, για χρόνο t , (σε min) οι θερμοκρασίες των δωμα-

τίων σε $^{\circ}\text{C}$, δίνονται από τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους $f_1(t) = 30 - \frac{t^2}{50}$ και $f_2(t) = 15 + \frac{t}{10}$.

- α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- β) Ποια από τις δύο συναρτήσεις θα δίνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας στο δωμάτιο χωρίς θέρμανση;
- γ) Τι πληροφορίες λαμβάνετε από την παρατήρηση των δύο γραφικών παραστάσεων;
- δ) Σε πόση ώρα τα δωμάτια θα έχουν την ίδια θερμοκρασία και ποια είναι αυτή;
- ε) Να βρείτε σε πόση ώρα η θερμοκρασία του δωματίου με θέρμανση θα φθάσει τους 10°C .

3.11.4. Το σχήμα 3.11 παριστάνει το ποσοστό γνώσεως $f(t)$, που έχει αποκτήσει κάποιος σπουδαστής της ΑΕΝ τη χρονική στιγμή t διαβάζοντας το αντίστοιχο διδακτικό εγχειρίδιο. Ποσοστό γνώσεως 100% σημαίνει ότι ο σπουδαστής έχει κατανοήσει πλήρως το βιβλίο. Τη χρονική στιγμή t_2 ο φοιτητής



Σχ. 3.11

διέκοψε το διάβασμα, για να λύσει μία άσκηση από την προηγούμενη ύλη. Τη χρονική στιγμή t_4 ο καθηγητής εξηγεί αναλυτικά στο σπουδαστή το περιεχόμενο του βιβλίου και ο φοιτητής αρχίζει να κατανοεί καλύτερα αυτό που διαβάζει.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{t \rightarrow t_1} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_2} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_4} f(t)$.

β) Ποιες χρονικές στιγμές η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής;

γ) Με τι είναι ίσο το όριο $\lim_{t \rightarrow t_1} f(t)$ και ποια η φυσική του σημασία;

3.11.5. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 6\lambda + 5$.

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3.11.6. Όταν ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια, συλλέγει $f(x)$ μονάδες παραγόμενου προϊόντος, οι οποίες δίνονται από τον τύπο: $f(x) = a + \beta(1 - e^{-\lambda x})$, $x \geq 0$ (a, β, λ θετικές σταθερές).

α) Ποια είναι η φυσική σημασία της σταθεράς a ;

β) Πόσες μονάδες προϊόντος θα συλλέξει ο γεωργός ρίχνοντας «άπειρη» ποσότητα λιπάσματος στην καλλιέργεια;

3.11.7. Η εταιρεία A πουλά κάποιο προϊόν με το κιλό. Θέλοντας να παρακινήσει τους πελάτες της σε μεγάλες αγορές χρεώνει το ένα κιλό του προϊόντος, 40 €, αν η ποσότητα που αγοράζεται είναι κάτω από 8 kg και 30 €, αν η ποσότητα είναι 8 ή περισσότερα κιλά.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή αγοράς x kg σε € και να εξετάσετε αν είναι συνεχής.

β) Τι παρατηρείτε για αγορές λίγο μικρότερες ή μεγαλύτερες των 8 kg;

3.11.8. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \quad \beta) f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} \quad \gamma) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

3.11.9. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $-4x^2 - 3x + 2 \leq f(x) \leq -x^2 - 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και

$$2 + x^3 \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sin^2 2x} \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \quad \text{να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

3.11.10. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x-2)(x^2 - 5x^2 + 1)$ και η συνάρτηση με τύπο

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ ax + 5, & x = 1. \end{cases}$$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x, y'y$.

β) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό a , ώστε η συνάρτηση h να είναι συνεχής.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και της g .

3.11.11. Για να μελετήσουν τη δράση ενός νέου φάρμακου, κάποιοι επιστήμονες χορηγούν σε διάφορα άτομα συγκεκριμένη ποσότητα απ' αυτό και καταγράφουν τη συγκέντρωσή του y στο αίμα μετά από x ώρες. Προσπαθούν να βρουν ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει τη συγκέντρωση με τη μορφή μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ χρησιμοποιώντας τα εξής δεδομένα που προκύπτουν από τη μέχρι σήμερα εμπειρία τους:

α) Στην αρχή του πειράματος δεν υπάρχει καθόλου φάρμακο στον οργανισμό, δηλαδή $f(0) = 0$.

β) Η ζητούμενη συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής για $x \geq 0$, επειδή η μεταβολή της συγκέντρωσης στο αίμα γίνεται βαθμιαία.

γ) Ύστερα από πολύ χρόνο η συγκέντρωση του φάρμακου στον οργανισμό, μηδενίζεται, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

δ) Μισή ώρα μετά τη λήψη του φαρμάκου η συγκέντρωση y είναι περίπου 83, ύστερα από 1 ώρα γίνεται περίπου 57%, ενώ μετά από 4 h είναι μόλις 18%.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{12x}{15x^2 + 5x + 1}, x \geq 0$$

έχει όλες τις ιδιότητες που περιγράψαμε.

3.11.12. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x-2}$.

α) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f .

β) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x(x+1))$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x(x+1))$.

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)(f(x) - x(x+1))$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)(f(x) - x(x+1))$.

3.11.13. Η θέση τροχιά δύο πλοίων περιγράφεται επάνω σε ένα ναυτικό χάρτη από τα σημεία $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ αντίστοιχα, όπου f και g είναι συναρτήσεις με τύπους

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 2}, \quad g(x) = \frac{x^4 + 1}{x + 2}, \quad x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι οι τροχιές των πλοίων τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο, του οποίου η τετμημένη βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 1 και 2 ($1 \leq x \leq 2$).

3.11.14. Ένας νέος εργαζόμενος παρουσιάζει απόδοση μετά από x ημέρες απασχολήσεως σε μία συγκεκριμένη θέση, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = 10 + \frac{50x^2}{5x^2 + 50}, \quad x \geq 0.$$

Θεωρήστε ότι ο δείκτης αποδόσεως $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση του x .

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων κυμαίνεται ο δείκτης αποδόσεως του εργάτη.

β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και να δώσετε την φυσική τους ερμηνεία.

γ) Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά ο τύπος $f(x) = 10 + \frac{50x^3}{5x^2 + 50}$, $x \geq 0$

προκειμένου να περιγράψει την απόδοση του εργαζομένου μετά από x ημέρες απασχολήσεως; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Σε πολλά πρακτικά προβλήματα που σχετίζονται με τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανολογία, την οικονομία, την οικολογία κ.λπ. εμφανίζεται συχνά η ανάγκη να μελετήσουμε συστηματικά τον τρόπο που μεταβάλλονται διάφορα μεγέθη, για παράδειγμα πώς αλλάζει η ταχύτητα ενός κινητού με το πέρασμα του χρόνου, πώς κυμαίνεται η τάση σε μία γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικού ρεύματος, πώς μεταβάλλεται διαχρονικά το μέγεθος ενός πληθυσμού κ.ά.. Τον 17^ο αιώνα, διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με την κίνηση ενός σώματος, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642–1727) και Leibniz (1646–1716), οι οποίοι εισήγαγαν την έννοια της «παραγώγου» και τη χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής και της Γεωμετρίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε με την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου (που αποτελεί την «καρδιά» του Διαφορικού Λογισμού) και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδέες και τεχνικές της περιοχής αυτής.

4.1 Η έννοια της παραγώγου.

4.2 Παράγωγος συνάρτησης. Κανόνες παραγωγίσεως.

4.3 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και εφαρμογές.

4.4 Μελέτη συναρτήσεων με τη βοήθεια της παραγώγου.

4.5 Κανόνες του $L' Hospital$.

4.6 Εφαρμογές των παραγώγων.

4.7 Μερική παράγωγος.

4.8 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

4.9 Ερωτήσεις κατανόησης.

4.10 Γενικές ασκήσεις.

4.1 Η έννοια της παραγώγου.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε κυρίως τις μεταβολές που υφίστανται οι τιμές μιας συναρτήσεως, όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή. Στα πλαίσια αυτά διερευνήσαμε δύο συγκεκριμένους «νόμους μεταβολών»: τη **μονοτονία** και τη **συνέχεια** μιας συναρτήσεως. Στο κεφάλαιο θα στραφούμε σε μια τελείως νέα κατεύθυνση που αφορά στη σύγκριση της μεταβολής μιας συναρτήσεως f πλησίον ενός σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της, δηλαδή της διαφοράς $f(x) - f(x_0)$, με την αντίστοιχη μεταβολή $x - x_0$ της ανεξάρτητης μεταβλητής. Προς τούτο ας θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση C_f μιας συνεχούς συναρτήσεως (σχ. 4.1α), ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ και ένα δεύτερο σημείο $B(x, f(x))$, με $x \neq x_0$. Αν συμβολίσουμε με $h = x - x_0 \neq 0$ την απόσταση των τετμημένων των σημείων A και B (οπότε θα έχουμε $x = x_0 + h$), ο λόγος

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τη μορφή και τις ιδιότητες της συναρτήσεως f και ονομάζεται **λόγος μεταβολής της f** (ή εναλλακτικά, **πηλίκο διαφορών της f**). Το όριο του λόγου μεταβολής όταν το x τείνει στο x_0 (ισοδύναμα, όταν $h \rightarrow 0$ ονομάζεται **παράγωγος της συναρτήσεως f** στο σημείο x_0 . Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

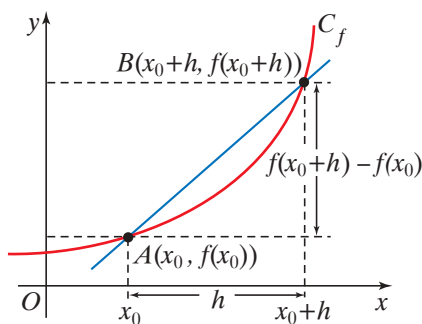
Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε θα λέμε ότι η f είναι **πα-
ραγωγίσιμη** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγω-
γος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

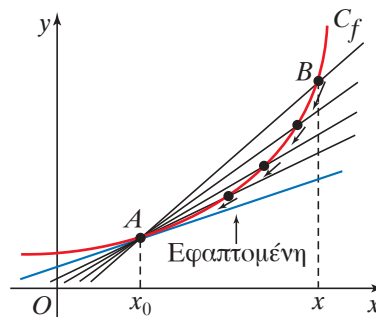
Από τη μοναδικότητα του ορίου (την οποία συναντήσαμε στο κεφάλαιο 3), προκύπτει άμεσα ότι η παράγωγος μιας συναρτήσεως, όταν υπάρχει, είναι μοναδική.

Αν θέσουμε $x - x_0 = \Delta x$ και $f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, ο τύπος ορισμού της παραγώγου μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$



Σχ. 4.1α.



Σχ. 4.1β.

Ο συμβολισμός της παραγώγου στο x_0 με $f'(x_0)$ οφείλεται στον Lagrange, ενώ ο Leibniz, λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία ισότητα, συμβόλισε την παράγωγο στο x_0 με:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Σήμερα χρησιμοποιούνται και οι δύο προηγούμενοι συμβολισμοί, σχεδόν εξίσου, απ' όσους ασχολούνται με αντικείμενα που κάνουν χρήση της έννοιας της παραγώγου.

Έχοντας υπόψη μας το γεωμετρικό ορισμό της εφαπτομένης ενός κύκλου θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη μιας καμπύλης του επιπέδου, όταν έχει με αυτήν ένα μόνο κοινό σημείο και αφήνει την καμπύλη προς το αυτό μέρος του επιπέδου. Κατ' αναλογία θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως μια συνάρτησεως f σ' ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η οριακή θέση (εφ' όσον υπάρχει) των ευθειών που ορίζουν οι χορδές AB της γραφικής παραστάσεως, όταν το σημείο $B(x, f(x))$, κινούμενο πάνω στην γραφική παράσταση της f , προσεγγίζει το A (σχ. 4.1β).

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία, η οποία περνάει από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως $f'(x_0)$. Επομένως:

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ο συντελεστής διεύθυνσεως της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται συνήθως **κλίση της γραφικής παραστάσεως C_f της f στο x_0** ή απλά **κλίση της f στο x_0** . Αν ω ($\omega \neq \frac{\pi}{2}$) είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα, θα ισχύει $\tan \omega = f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \frac{x^2}{2}$ και $x_0 = 1$ θα έχουμε:

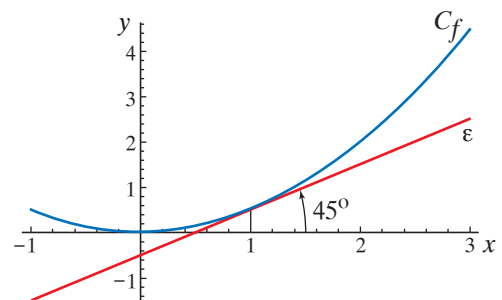
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{(1+h)^2}{2} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2h + h^2}{2h} = 1 + \frac{h}{2}$$

και επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{2}\right) = 1.$$

Άρα η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$ και η παράγωγός της είναι ίση με $f'(1) = 1$. Επίσης, αφού η κλίση της f στο $x_0 = 1$ είναι ίση με $1 = \tan \frac{\pi}{4}$, η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα θα είναι ίση με $\omega = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ (σχ. 4.1γ). Η εφαπτομένη ε της γραφικής παραστάσεως C_f στο σημείο $A(1, f(1))$, έχει την εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}.$$



Σχ. 4.1γ.

Ας εξετάσουμε στο $x_0 = 1$ συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 1 \\ 3x, & x < 1. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Για $x > 1$, δηλαδή $x = 1 + h, h > 0$ θα έχουμε:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{[(1+h)^2 + 2] - 3}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h,$$

και επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 1^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 1^+} (2 + h) = 2.$$

Για $x < 1$, δηλαδή $x = 1 + h, h < 0$ έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 1^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 1^-} \frac{3(1+h) - 3}{h} = 3.$$

Αφού ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 1^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3 \neq 2 = \lim_{h \rightarrow 1^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$.

Από τα παραπάνω και από όσα αναλύσαμε στο κεφάλαιο 4 για τα πλευρικά όρια, καθίσταται φανερό ότι αν x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μίας συναρτήσεως f , τότε θα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 , αν και μόνον αν υπάρχουν τα όρια

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί.

Οι πουσότητες $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι** της f στο x_0 από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που το x_0 είναι άκρο διαστήματος (πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f), τότε ονομάζουμε εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία που προκύπτει χρησιμοποιώντας στον τύπο της εφαπτομένης την κατάλληλη πλευρική παράγωγο.

Έστω τώρα μια συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 . Για $x \neq x_0$ μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

το οποίο δείχνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 . Καταλήγουμε λοιπόν στο επόμενο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής σ' αυτό.

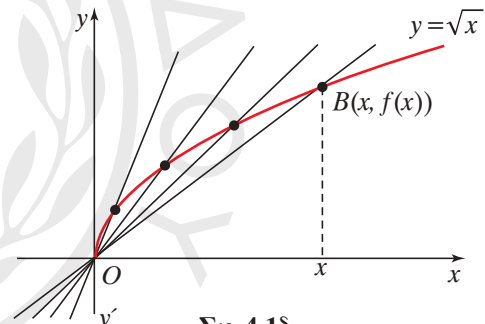
Προφανώς, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα είναι φανερό ότι αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Αξίζει να σημειωθεί ότι μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής στο $x_0=0$ χωρίς να είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο. Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η συνάρτηση (4.1.1), για την οποία αποδείξαμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Έστω τέλος η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$. Η f είναι συνεχής στο 0, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, αφού για $h > 0$ έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Θέλοντας να εξετάσουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή με την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $O(0, 0)$, ας θεωρήσουμε ένα δεύτερο σημείο $B(x, f(x))$, $x > 0$ της C_f . Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1δ, καθώς το B προσεγγίζει το σημείο O κινούμενο επάνω στη γραφική παράσταση της f , η τετμημένη του x προσεγγίζει το μηδέν. Έτσι, η ευθεία OB τείνει να πάρει ως οριακή θέση στο σημείο $O(0, 0)$ την κατακόρυφη που περνά από το O , δηλαδή τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή, ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $O(0, 0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία με την εξίσωση $x=0$.



Σχ. 4.1δ.

Γενικά:

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο x_0 και ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ (ή $-\infty$),

β) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ και $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$,

γ) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$ και $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$,

τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η (κατακόρυφη) ευθεία με εξίσωση $x=x_0$.

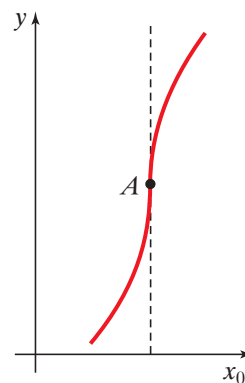
Στην περίπτωση που ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty,$$

τότε λέμε ότι η *συνάρτηση f έχει παράγωγο $+\infty$* (σχ. 4.1ε). Αντίστοιχα αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

θα λέμε ότι η *συνάρτηση f έχει παράγωγο $-\infty$* .



Σχ. 4.1ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} ax + 5, & x \leq 0 \\ x^2 + 5, & x > 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbf{R}.$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ για κάθε πραγματικό αριθμό a .

β) Για ποια τιμή του a είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$;

Λύση.

α) Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$, πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Όμως έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + 5) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax + 5) = a \lim_{x \rightarrow 0} x + 5 = 5$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 5) = 5,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$$

και αφού $f(0) = a \cdot 0 + 5 = 5$ για κάθε $a \in \mathbf{R}$, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η συνάρτηση θα είναι συνεχής στο $x_0=0$ για κάθε $a \in \mathbf{R}$.

β) Για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[a \cdot (0+h) + 5] - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah}{h} = a,$$

ενώ

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h^2 + 5) - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, μόνο όταν $a = 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ενώ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ για κάθε $a \in \mathbf{R}$, μόνο για $a=0$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Ασκήσεις.

4.1.1. Να βρείτε την παράγωγο στο σημείο x_0 των εξής συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x)=3x+2, x_0=1$$

$$\beta) f(x)=x^2+2, x_0=4$$

$$\gamma) f(x)=2, x_0=1$$

$$\delta) f(x)=3x^2+2, x_0=0$$

$$\epsilon) f(x)=\frac{3}{x}, x_0=1$$

$$\sigma\tau) f(x)=\eta\mu x, x_0=0$$

4.1.2. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις με τους παρακάτω τύπους ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_0 και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό το σημείο.

$$\alpha) f(x)=\begin{cases} 4x-2 & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x^2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}, x_0=1 \quad \beta) f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x^2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}, x_0=1$$

$$\gamma) f(x)=|x-1|, x_0=1$$

$$\delta) f(x)=\sqrt{x}, x_0=1$$

$$\epsilon) f(x)=|x-1|+|x+1|, x_0=1$$

$$\sigma\tau) f(x)=|x-1|+|x+1|, x_0=0.$$

Στην περίπτωση που η παράγωγος υπάρχει, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

4.1.3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=3x+2x^2$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 \in \mathbf{R}$.

β) Να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=1$ και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,5)$.

4.1.4. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{αν } x \leq 1 \\ x+\beta & \text{αν } x > 1. \end{cases}$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β , ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

4.1.5. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο x_0 και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = a \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ότι $f'(x_0)=a$.

4.1.6. Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x^2+2x+1 \leq f(x) \leq 5x^2+2x+1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και ότι ισχύει $x(x+2) \leq f(x)-f(0) \leq x(5x^2+2)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0=0$.

4.1.7. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2 \cdot g(x)$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο και ότι $f'(0)=g(0)$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω συμπέρασμα να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2+x^3$ συν x είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ότι $f'(0)=1$.

4.2 Παράγωγος συνάρτησης. Κανόνες παραγωγίσεως.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2$ (η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$) και έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x_0 . Προκειμένου να υπολογίσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$ στο συγκεκριμένο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, παρατηρούμε ότι για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{(x_0^2+2x_0h+h^2)-x_0^2}{h} = \frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0+h$$

οπότε,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0+h) = 2x_0.$$

Άρα $f'(x_0)=2x_0$.

Δεδομένου ότι ισχύει $f'(x_0)=2x_0$ για κάθε x_0 , θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση, η οποία σε κάθε x_0 να απεικονίζει τον αριθμό $f'(x_0)=2x_0$ ή, ισοδύναμα, σε κάθε x να απεικονίζει τον αριθμό $2x$. Τη νέα αυτή συνάρτηση θα τη λέμε συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f και θα τη συμβολίζουμε με f' . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι $f'(0)=2 \cdot 0$ και για τα διάφορα x' να βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της νέας συναρτήσεως, π.χ. $f'(1)=2 \cdot 1 = 2$, $f'(0)=2 \cdot 0 = 0$, $f'(-2)=2 \cdot (-2) = -4$ κ.λπ.

Γενικά, έστω μία συνάρτηση f , η οποία παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \Delta$, όπου Δ είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Τότε η συνάρτηση $f': x \rightarrow f'(x)$ με πεδίο ορισμού το Δ ονομάζεται **συνάρτηση πρώτης παραγώγου** της f ή απλώς **παράγωγος** της f και συμβολίζεται με:

$$f' \text{ ή } \frac{df}{dx} \text{ ή } y' \text{ ή } \frac{dy}{dx}.$$

Μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε και τους όρους «η παράγωγος $f'(x)$ » ή «η παράγωγος $\frac{df(x)}{dx}$ ».

Για τις συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, το Δ είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αν υποθέσουμε ότι σε κάποιο υποσύνολο του Δ η f είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγος της f' , θα ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος συναρτήσεως της f** και συμβολίζεται με:

$$f'' \text{ ή } \frac{d^2f}{dx^2} \text{ ή } y'' \text{ ή } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ή } f''(x).$$

Επαγωγικά μπορεί να οριστεί η **νιοστή παράγωγος $f^{(v)}$** της f ή **παράγωγος της f νιοστής τάξεως**, από τον τύπο

$$f^{(v)} = (f^{(v-1)})', \quad v \geq 3.$$

Η νιοστή παράγωγος θα συμβολίζεται με

$$f^{(v)}(x) \text{ ή } \frac{d^v f}{dx^v} \text{ ή } y^{(v)} \text{ ή } \frac{d^v y}{dx^v}.$$

Η διαδικασία ευρέσεως της παραγώγου μιας συναρτήσεως ονομάζεται **παραγωγή**. Η εύρεση της παραγώγου συναρτήσεως δεν είναι πάντα εύκολο να γίνει με χρήση του ορισμού, για το λόγο αυτό θα μας διευκόλυνε αν είχαμε κάποιους τύπους που θα μας έδιναν την παράγωγο των βασικών συναρτήσεων που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 3 και επί πλέον κάποιους κανόνες παραγωγίσεως για πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Έτσι δεν θα χρειάζεται να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά που θέλουμε να παραγωγίσουμε. Ο πίνακας 4.2.1, δίνει την πρώτη παράγωγο ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

Πίνακας 4.2.1

Η πρώτη παράγωγος των βασικών συναρτήσεων.

f	c (σταθερά)	x^v	$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\sqrt{x}, x \geq 0$	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	e^x	$\ln x, x > 0$
f'	0	$v x^{v-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	e^x	$\frac{1}{x}$

Ας δούμε την απόδειξη τριών από αυτούς τους τύπους.

Έστω αρχικά η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, όπου ν είναι ένας θετικός ακέραιος με $\nu \neq 0, 1$. Αν x_0 είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x-x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}.$$

Επομένως, για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f , δηλαδή του $\mathbf{R}$, ισχύει $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$. Ο τελευταίος τύπος αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το ν είναι αρνητικός ακέραιος.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x > 0$ έχει παράγωγο συνάρτηση $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Πράγματι, αν x_0 είναι ένας θετικός αριθμός, τότε για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\ &= \frac{x_0+h-x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι, όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 4.1, η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 0, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Έστω τέλος η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \eta\mu x$. Για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\eta\mu(x_0+h)-\eta\mu x_0}{h} = \frac{\eta\mu x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \eta\mu h - \eta\mu x_0}{h} = \eta\mu x_0 \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \frac{\eta\mu h}{h}$$

και αφού (βλ. ιδιότητες **B₃**, **B₄**, **B₅** της παραγρ. 3.5)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \eta\mu x_0 \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

Επομένως $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1.

Να βρείτε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x)=\ln x$, για το οποίο:

- α) Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα είναι ίση 45° .

β) Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διευσθύνσεως ίσο με $1/4$.

γ) Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να δώσετε την εξίσωση της εφαπτομένης σε κάθε περίπτωση.

Λύση.

Αφού

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ακόλουθη $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$.

α) Γνωρίζουμε ότι, αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με τον οριζόντιο άξονα, θα ισχύει $\varepsilon\omega = f'(x_0)$. Αφού $\omega = \pi/4$, θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1, f(1)) = A(1, 0)$ και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης η

$$y - \ln 1 = \frac{1}{1}(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

β) Ο συντελεστής διευσθύνσεως της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με $f'(x_0)$. Επομένως έχουμε:

$$f'(x_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = 4$$

και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y - \ln 4 = \frac{1}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{x}{4} + (\ln 4 - 1).$$

γ) Η ευθεία ε θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, αν και μόνο αν

$$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το $A(e, 1)$ και η αντίστοιχη εξίσωση της εφαπτομένης η

$$y - \ln e = \frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{x}{e}.$$

Όπως αναφέρθηκε ήδη προηγουμένως, για να διευκολυνθούμε στη διαδικασία της παραγωγίσεως μιας συναρτήσεως, πέραν των τύπων που βρήκαμε για την παράγωγο των βασικών συναρτήσεων, θα μας ήταν χρήσιμοι κάποιοι κανόνες παραγωγίσεως που να αφορούν σε πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει τύπους, με τους οποίους μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση της παραγώγου συναρτήσεων που προκύπτουν από απλές συναρτήσεις με τις πράξεις της προσθέσεως του πολλαπλασιασμού και της διαιρέσεως.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε υπάρχει η παράγωγος των συναρτήσεων $f+g, cf$ με $c \in \mathbf{R}, f \cdot g, f/g$ στο x_0 και ισχύουν οι επόμενοι τύποι:

$$\Pi_1. (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\Pi_2. (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

$$\Pi_3. (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x)g'(x_0)$$

$$\Pi_4. \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \quad (\text{για } g(x_0) \neq 0).$$

Αρκετά συχνά θα χρησιμοποιούμε τους παραπάνω τύπους και στη μορφή

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων Π_1 – Π_4 μπορούν να γίνουν με χρήση του ορισμού της παραγώγου. Για παράδειγμα, η απόδειξη της Π_1 γίνεται εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

και ότι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Επομένως, για κάθε x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f+g$, ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Ως παραδείγματα εφαρμογής των τύπων Π_1 – Π_4 , αναφέρουμε τα εξής:

α) Αν $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$, $x > 0$, τότε:

$$f'(x) = (x^2)' + (2\sqrt{x})' = 2x + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

β) Αν $f(x) = xe^x - x^3$, $x \in \mathbf{R}$, τότε:

$$f'(x) = (xe^x - x^3)' = (xe^x)' - (x^3)' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' - 3x^2 = e^x + xe^x - 3x^2.$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad g(x) = \sigma\varphi x, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) = (\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\eta x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\eta x - \eta\mu x (\sigma\eta x)'}{\sigma\eta^2 x} = \frac{\sigma\eta x \sigma\eta x - \eta\mu x (-\eta\mu x)}{\sigma\eta^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\eta^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\eta^2 x} = \frac{1}{\sigma\eta^2 x} = \frac{\sigma\eta^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\eta^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x \end{aligned}$$

και

$$g'(x) = (\sigma\varphi x)' = \left(\frac{\sigma\eta\chi}{\eta\mu\chi} \right)' = \frac{(\sigma\eta\chi)' \eta\mu\chi - \sigma\eta\chi (\eta\mu\chi)'}{\eta\mu^2 x} = \frac{(-\eta\mu\chi) \eta\mu\chi - \sigma\eta\chi \sigma\eta\chi}{\eta\mu^2 x} = \frac{-(\eta\mu^2 x + \sigma\eta\chi^2)}{\eta\mu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\eta\chi^2}{\eta\mu^2 x} = -(1 + \sigma\eta\chi^2).$$

Έτσι ο πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων συμπληρώνεται με τον πίνακα 4.2.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι, για να χρησιμοποιηθούν οι τύποι της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, θα πρέπει οι γωνίες x να έχουν εκφραστεί σε **ακτίνια (rad)** και όχι σε μοίρες ή βαθμούς.

Πίνακας 4.2.2
Η πρώτη παράγωγος των βασικών συναρτήσεων.

f	$\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$
f'	$\frac{1}{\sigma\eta\chi^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x} = -(1 + \sigma\varphi^2 x)$

Η ιδιότητα Π_1 ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν $f_1, f_2, \dots, f_k$, είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες, τότε:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x).$$

Επίσης, η ιδιότητα Π_3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του γινομένου περισσότερων από δύο συναρτήσεων. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα:

$$\alpha) (\eta\mu x + x^2 + e^x + 2x)' = (\eta\mu x)' + (x^2)' + (e^x)' + (2x)' = \sigma\eta\chi + 2x + e^x + 2$$

$$\begin{aligned} \beta) (x^4 \cdot e^x \cdot \ln x)' &= (x^4)' e^x \cdot \ln x + x^4 \cdot (e^x)' \cdot \ln x + x^4 e^x \cdot (\ln x)' = \\ &= 3x^3 e^x \cdot \ln x + x^4 \cdot e^x \cdot \ln x + x^4 e^x \cdot \frac{1}{x}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2.

Να βρείτε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}, \quad x \neq -3$$

$$\beta) f(x) = \frac{e^x}{1 + \sqrt{x}}$$

$$\gamma) g(x) = \sqrt{x} \eta\mu x + \frac{\ln x}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

Λύση.

α) Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4)'(x + 3) - (x^2 - 4)(x + 3)'}{(x + 3)^2} = \frac{2x(x + 3) - (x^2 - 4) \cdot 1}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2}.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(1 + \sqrt{x}) - e^x(1 + \sqrt{x})'}{(1 + \sqrt{x})^2} = \frac{e^x(1 + \sqrt{x}) - e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{(1 + \sqrt{x})^2} = e^x \frac{2\sqrt{x} + 2x - 1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}.$$

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sqrt{x} \eta\mu x)' + \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)' = (\sqrt{x})' \eta\mu x + \sqrt{x} (\eta\mu x)' + \frac{(\ln x)'(x-1) - (x-1)' \ln x}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x + \sqrt{x} \sigma\upsilon\nu x + \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{\eta\mu x + 2x \sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 1$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

α) $f''(x) = 0$ β) $f''(x) > 0$ γ) $f''(x) < 0$

Λύση.

Έχουμε $f'(x) = (x^4)' - (2x^3)' - (-12x^2)' + (1)' = 4x^3 - 6x^2 - 24x$ και

$$f''(x) = (4x^3 - 6x^2 - 24x)' = (4x^3)' - (6x^2)' - (24x)' = 12x^2 - 12x - 24 = 12(x^2 - x - 2).$$

Επομένως:

α) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

β) $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

γ) $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$.

Ας προσπαθήσουμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε την παράγωγο της συναρτήσεως $h(x) = \eta\mu^2 x$. Επειδή $\eta\mu^2 x = \eta\mu x \cdot \eta\mu x$, εφαρμόζοντας την ιδιότητα Π_3 παίρνουμε:

$$h'(x) = (\eta\mu^2 x)' = (\eta\mu x \cdot \eta\mu x)' = (\eta\mu x)' \eta\mu x + \eta\mu x (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x,$$

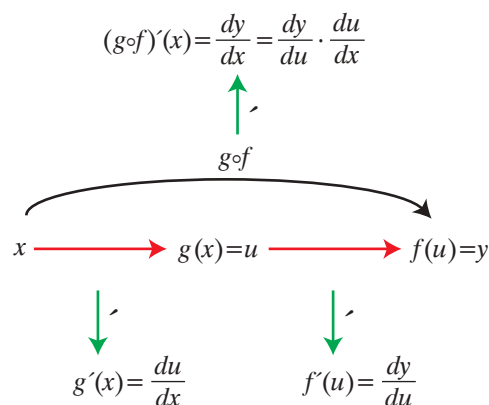
δηλαδή $h'(x) = (\eta\mu^2 x)' = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$. Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $h(x) = \eta\mu^2 x$ δεν είναι η συνάρτηση $2\eta\mu x$, όπως ίσως θα περίμενε κάποιος γνωρίζοντας ότι ισχύει ο τύπος $(x^2)' = 2x$. Αν λάβουμε υπόψη ότι η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu^2 x = (\eta\mu x)^2$ είναι σύνθεση της $f(x) = x^2$ και της $g(x) = \eta\mu x$ (δηλ. $h = f \circ g$), για τις οποίες γνωρίζουμε ότι $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, η παράγωγος h' της h που υπολογίσαμε προηγουμένως μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$h'(x) = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = [2g(x)]g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Αποδεικνύεται (η απόδειξη παραλείπεται) ότι γενικότερα για την παράγωγο σύνθετης συναρτήσεως, ισχύει το επόμενο Θεώρημα:

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$



Σχ. 4.2α.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν θέσουμε $u = g(x)$ και $y = f(u)$, ο παραπάνω τύπος γράφεται στη μορφή $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ και είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας** (σχ.

4.2α). Παρατηρούμε ότι ενώ ο συμβολισμός $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ δεν

δηλώνει διαίρεση, στον κανόνα της αλυσίδας συμπεριφέρεται ως συνηθισμένο πηλίκο (πρόγραμμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα).

Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος και των πινάκων 4.2.1 και 4.2.2 των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων μπορούμε εύκολα να σχηματίσουμε τον πίνακα 4.2.3, ο οποίος μας δίνει παραγώγους συνθέτων συναρτήσεων (g είναι οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση).

Πίνακας 4.2.3
Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων.

f		f'	
$(g(x))^n$	$\varepsilon\varphi(g(x))$	$n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$	$\frac{g'(x)}{\text{συν}^2(g(x))}$
$\sqrt{g(x)}$, με $g(x) > 0$	$\sigma\varphi(g(x))$	$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$-\frac{g'(x)}{\eta\mu^2(g(x))}$
$\eta\mu(g(x))$	$e^{g(x)}$	$\text{συν}(g(x))g'(x)$	$e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$\text{συν}(g(x))$	$\ln(g(x))$, με $g(x) > 0$	$-\eta\mu(g(x))g'(x)$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.2.4.

Να βρείτε τις παραγώγους των εξής συναρτήσεων:

α) $h(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^4$ β) $h(x) = e^{-x^3+2x}$ γ) $h(x) = \ln(x^4 + 2x^2 + 2)$

Λύση.

α) Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x) = x^4 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι έχουμε, $h(x) = [g(x)]^4 = f(g(x))$ και χρησιμοποιώντας τον πρώτο τύπο του πίνακα 4.2.3 παίρνουμε $h'(x) = 4(g(x))^3 \cdot g'(x)$.

Όμως

$$g'(x) = \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2},$$

οπότε

$$h'(x) = 4 \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^3 \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{12(2x-1)^3}{(x+1)^5}.$$

β) Ομοίως παρατηρούμε ότι $h(x) = e^{-x^3+2x} = e^{g(x)}$ όπου $g(x) = -x^3+2x$.

Επομένως $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{-x^3+2x} (-x^3+2x)' = (-3x^2+2) e^{-x^3+2x}$.

γ) Θέτοντας $u = x^4+2x^2+2$ θα έχουμε $y = h(x) = \ln(x^4+2x^2+2) = \ln u$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

βρίσκουμε

$$h'(x) = y' = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{x^4+2x^2+2} \cdot (x^4+2x^2+2)' = \frac{1}{x^4+2x^2+2} \cdot (4x^3+4x) = \frac{4x(x^2+1)}{x^4+2x^2+2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.5.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^a$, $x > 0$ και $a \in \mathbf{R}^*$

β) $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, $0 < a \neq 1$

γ) $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbf{R}^*$

Λύση.

α) Επειδή, για $x > 0$, ισχύει $x^a = e^{a \ln x}$, θα έχουμε $f(x) = e^{a \ln x} = e^{g(x)}$, όπου $g(x) = a \ln x$. Επομένως,

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x) = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = e^{a \ln x} \cdot a \frac{1}{x} = x^a \cdot a \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

δηλαδή ισχύει ο τύπος $(x^a)' = ax^{a-1}$ για κάθε $a \in \mathbf{R}^*$ ($x > 0$), ο οποίος γενικεύει το δεύτερο τύπο του πίνακα 4.2.1.

β) Αφού $f(x) = a^x = e^{x \ln a} = e^{g(x)}$ όπου $g(x) = x \ln a$ θα έχουμε:

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x) = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a,$$

δηλαδή

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, 0 < a \neq 1$$

γ) Αν $x > 0$, τότε

$$(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = \frac{1}{|x|}.$$

Για $x < 0$ θα έχουμε

$$\ln |x| = \ln(-x) = \ln(g(x)) \text{ με } g(x) = -x$$

απ' όπου προκύπτει

$$(\ln |x|)' = (\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$, ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

Ασκήσεις.

4.2.1. Να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως f στο σημείο x_0 .

$$\alpha) f(x)=x^5, x_0=-1$$

$$\beta) f(x)=\ln x, x_0=\frac{1}{2}$$

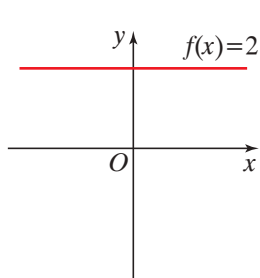
$$\gamma) f(x)=\frac{1}{x}, x_0=3$$

$$\delta) f(x)=e^x, x_0=0$$

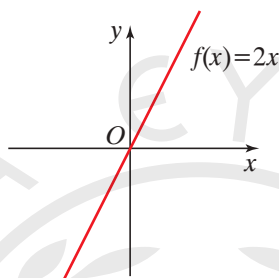
$$\epsilon) f(x)=\sqrt{x}, x_0=4$$

$$\sigma\tau) f(x)=\eta\mu^3 x, x_0=\frac{\pi}{4}$$

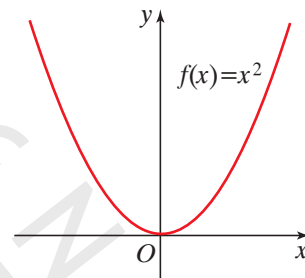
4.2.2. Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων (σχ. 4.2β). Να αποδώσετε τη γραφική παράσταση της παράγωγου συναρτήσεως για κάθε μία από αυτές (για τα σημεία στα οποία αυτή υπάρχει).



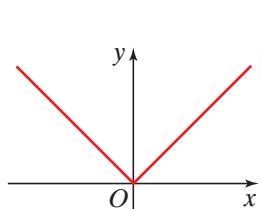
(α)



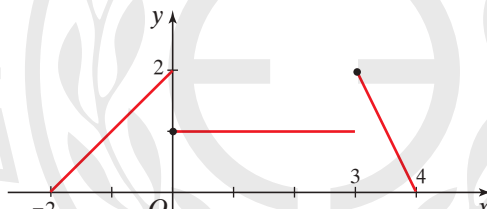
(β)



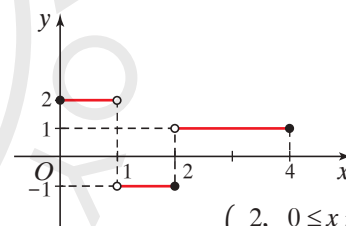
(γ)



(δ)



(ε)



(σ\tau)

Σχ. 4.2β.

4.2.3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^4$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η κλίση της f είναι:

α) Θετική.

β) Αρνητική.

γ) Ίση με 24.

4.2.4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f , οι οποίες είναι παράλληλες με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(-1,1)$.

4.2.5. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^{10}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^{10} - 1}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^{10} - 2^{10}}{h}.$$

4.2.6. Να υπολογίσετε, όπου υπάρχει, την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases} \quad \varepsilon) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases} \quad \sigma\tau) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

4.2.7. Να υπολογίσετε την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \beta) f(x) = (x^{10} - 1)(x^9 - 2)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x^5}{4} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} - x^2 \quad \delta) f(t) = (t^2 + 1)(t^2 + 3)$$

4.2.8. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} \quad \beta) g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\gamma) f(r) = r^3 + \frac{1}{r^3} \quad \delta) f(t) = 2t^2 + t \sin \theta - 2 \text{ (}\theta \text{ σταθερά)}$$

4.2.9. Να υπολογίσετε την παράγωγο των ακολούθων συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 3x^5 + 5 \ln x - \sqrt{3}x \quad \beta) f(x) = 2 \sin x - 3 \eta \mu x + \ln 3$$

$$\gamma) x\sqrt{x} + 6x^2 \quad \delta) x^2 \eta \mu x + (x^2 + 1) \sin x$$

4.2.10. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = x^3 \eta \mu x \sin x \quad \beta) f(x) = \frac{x e^x}{\ln x}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x \eta \mu x}{e^x} \quad \delta) f(x) = \frac{x \eta \mu x + \sin x}{1 + x \sin x}$$

4.2.11. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f με τύπο $f(x) = -2x + x^3$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\pi/4$.

4.2.12. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ όπου α, β, γ είναι τρεις σταθεροί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι για $x \neq \alpha, \beta, \gamma$, ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma}.$$

4.2.13. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 5x^2$ και $g(x) = \frac{24x+1}{5x}$ στο κοινό σημείο τους $A(1,1)$, είναι κάθετες.

4.2.14. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $f(x) = x^3 - 9x + 3$, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 10x - 5$.

4.2.15. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού, ώστε $P = 1$ και $P^{(v)}(0) = 2^v$ για $v = 1, 2, 3$.

4.2.16. Έστω η συνάρτηση με τύπο $h(x) = g(x)e^{2g(x)}$. Αν $g(1) = 1$ και $g'(1) = -1$, να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της συναρτήσεως h στη θέση 1.

4.2.17. Αν $f(x) = a \sin \omega x + \beta \eta \mu \omega x$, όπου a, β και ω είναι τρεις γνωστές σταθερές, να αποδείξετε ότι ισχύει $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

4.2.18. Αν $f(x) = e^{ax}$, να βρείτε την τιμή της σταθεράς $a \in \mathbf{R}$, ώστε να ισχύει $f''(x) - 7f'(x) - 10f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

4.2.19. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$ της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως f με $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x^3\right)$.

4.2.20. Να υπολογίσετε την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = (x^3 + 2x^2 + x)^8$$

$$\beta) f(x) = (x^6 - 3x^2 + 1)^{15}$$

$$\gamma) f(x) = x^5 \eta\mu 5x$$

$$\delta) f(x) = \eta\mu^3 \sqrt{x}$$

$$\epsilon) f(x) = \eta\mu \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$\sigma\tau) f(x) = \eta\mu(x^3 + 2x + 1)$$

4.2.21. Να υπολογίσετε την παράγωγο των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \ln(2x + 3) + e^{2x-1}$$

$$\beta) f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sin x}$$

$$\gamma) f(x) = x^2 \eta\mu(2x) + \eta\mu^2 x$$

$$\delta) f(x) = \eta\mu(\ln x) + x\sqrt{x^2 + 4}$$

4.2.22. Να υπολογίσετε την παράγωγο των ακολούθων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = (3x)^{1/4} + (5x)^{1/3}$$

$$\beta) f(x) = 5^{x+2x}$$

$$\gamma) f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$$

$$\delta) f(x) = 2^{5x-3}$$

4.2.23. Να υπολογίσετε την παράγωγο των εξής συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = (3x)^{1/4} + (5x)^{1/3}$$

$$\beta) f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} - x \right)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{1}{1 + \eta\mu x^2}$$

$$\delta) f(x) = (\ln x)^x, \quad x > 1$$

$$\epsilon) f(x) = \ln \left(e^{5x} + \frac{1}{x^2 + 1} \right)$$

$$\sigma\tau) f(x) = \ln(x^4 + 2^{3x+1})$$

4.3 Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και εφαρμογές.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σ' ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού που είναι γνωστό ως **Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού** (Θ.Μ.Τ.). Με βάση το θεώρημα αυτό θα μπορέσουμε στη συνέχεια να αναπτύξουμε πολλά άλλα αποτελέσματα χρήσιμα για τη συστηματική μελέτη των παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2, όταν μια συνάρτηση f είναι σταθερή, τότε η παράγωγός της ισούται με μηδέν. Θα μπορούσε λοιπόν να αναρωτηθεί κάποιος: μήπως ισχύει και το αντίστροφο αυτού του ισχυρισμού, δηλαδή αν για τα σημεία ενός διαστήματος ισχύει $f'(x) = 0$, είναι τότε αναγκαστικά η f μια σταθερή συνάρτηση (σ' αυτό το διάστημα); Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι καταφατική, και θα προκύψει άμεσα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ..

Ας διατυπώσουμε λοιπόν αρχικά το πολύ σημαντικό αυτό θεώρημα (η απόδειξή του παραλείπεται).

Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3α, γεωμετρικά το θεώρημα αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f , όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία, η οποία περνάει από τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ (και επομένως έχει κλίση).

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Το σημείο ξ για το οποίο ισχύει η ισότητα:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

δεν είναι απαραίτητα μοναδικό όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3β.

Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $f(a) = f(\beta)$, για τον πραγματικό αριθμό ξ θα ισχύει $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f γίνεται παράλληλη με τον άξονα των x . Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Rolle** και η γεωμετρική ερμηνεία του εικονίζεται στα σχήματα 4.3γ και 4.3δ.

Θεώρημα του Rolle.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) . Αν επί πλέον ισχύει $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = 0.$$

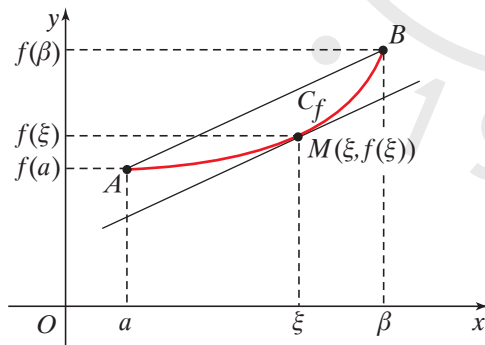
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 8x + 1, x \in [0, 8].$$

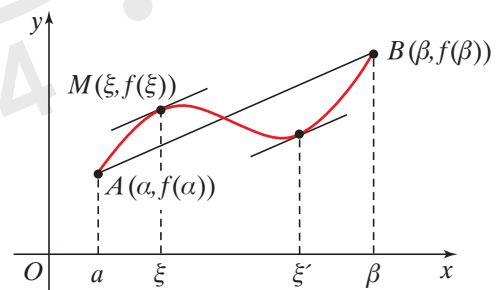
Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή, η f είναι συνεχής στο $[0, 8]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 8)$ με $f'(x) = 3x^2 - 18x + 8$ και $f(0) = f(8) = 1$, θα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (0, 8)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή $3\xi^2 - 18\xi + 8 = 0$. Για την εύρεση του αριθμού ξ , αρκεί να λύσουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $3x^2 - 18x + 8 = 0$, οπότε βρίσκουμε

$$\xi_1 = \frac{18 - 2\sqrt{57}}{6} = 0,48 \text{ και } \xi_2 = \frac{18 + 2\sqrt{57}}{6} = 5,52$$

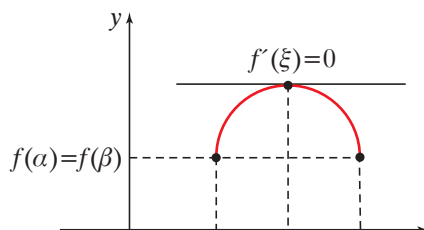
(στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία του διαστήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη $f'(\xi) = 0$).



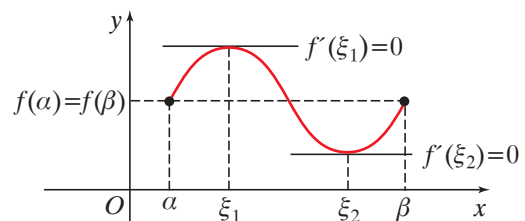
Σχ. 4.3α.



Σχ. 4.3β.



Σχ. 4.3γ.



Σχ. 4.3δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.1.

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \leq |\beta - \alpha|$.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Λύση.

α) Η $f(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ..

β) Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ δηλαδή } \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $|\sigma\upsilon\nu\xi| \leq 1$ για κάθε $\xi \in (\alpha, \beta)$ οπότε θα έχουμε:

$$\left| \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \leq |\beta - \alpha|.$$

γ) Αν $x=0$, η ανισότητα ισχύει (με τη μορφή ισότητας). Αν $x>0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα που αποδείχθηκε στο ερώτημα (β) για $\alpha=0, \beta=x$ παίρνουμε:

$$|\eta\mu x - \eta\mu 0| \leq |x - 0| \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq |x|.$$

Τέλος, αν $x<0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα που αποδείχθηκε στο ερώτημα (β) για $\alpha=x, \beta=0$ θα έχουμε:

$$|\eta\mu 0 - \eta\mu x| \leq |0 - x| \Leftrightarrow |-\eta\mu x| \leq |-x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq |x|.$$

Άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$. Παίρνοντας δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 < x_2$ και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. (οι υποθέσεις του ισχύουν αφού η f παραγωγίζεται στα εσωτερικά σημεία του Δ , άρα θα είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , και επί πλέον είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$) προκύπτει ότι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Αφού όμως υποθέσαμε ότι ισχύει $f'(x) = 0$, για όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ , θα έχουμε $f'(\xi) = 0$ δηλαδή:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1).$$

Άρα, η f έχει την ίδια τιμή για οποιουσδήποτε διαφορετικούς αριθμούς x_1, x_2 του Δ . Επομένως, η f είναι σταθερή στο Δ . Σε αντίστοιχο αποτέλεσμα οδηγούμαστε αν θεωρήσουμε δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 > x_2$.

Καταλήγουμε λοιπόν στο επόμενο θεώρημα, το οποίο δίνει την απάντηση στο ερώτημα που διατυπώθηκε στο ξεκίνημα της παρούσας ενότητας:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Ας θεωρήσουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g σε ένα διάστημα Δ , τέτοιες ώστε για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ να ισχύει $f'(x) = g'(x)$. Τότε για τη συνάρτηση $f - g$, η οποία είναι επίσης συνεχής στο Δ θα ισχύει, για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$,

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

και επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$.

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα:

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε θα υπάρχει μία σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε κανένα $x \in \Delta$. Τότε, σύμφωνα μ' αυτά που γνωρίσαμε στην παράγραφο 3.8, η f θα διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ . Ας θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση που ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ και ας διαλέξουμε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε, αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπότε θα έχουμε

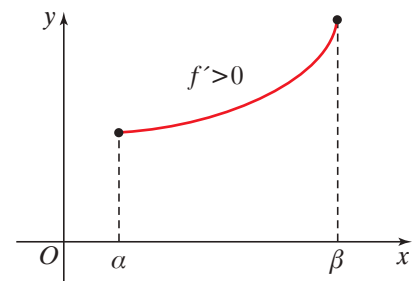
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

(διότι $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$). Άρα $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ή ισοδύναμα $f(x_1) < f(x_2)$ που αποδεικνύει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Στην περίπτωση που σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) < 0$ εργαζόμενοι αναλόγως, διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το επόμενο θεώρημα, το οποίο μας προσφέρει ένα σχετικά εύκολο τρόπο για να διαπιστώνουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη σ' ένα διάστημα.

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ (σχ. 4.3ε).

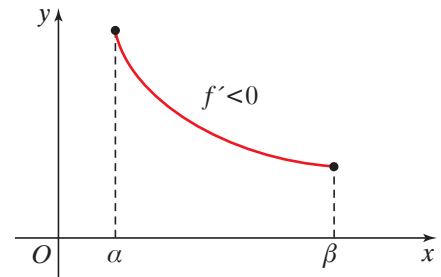


Σχ. 4.3ε.

Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ (σχ. 4.3στ).

Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και όταν η παράγωγος f' μηδενίζεται σ' ένα ή περισσότερα (πεπερασμένα το πλήθος) σημεία του πεδίου ορισμού της.

Στην περίπτωση που ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ τότε η f θα είναι αύξουσα (όχι απαραίτητα γνήσια αύξουσα) στο Δ . Αντίστοιχα, αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f θα είναι φθίνουσα (όχι απαραίτητα γνήσια φθίνουσα) στο Δ .



Σχ. 4.3στ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.2.

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f , αν δίνεται επί πλέον ότι $f(0)=3$.

Λύση.

α) Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ έχουμε:

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{2x}} \right)' = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{(f'(x) - 2f(x))}{e^{2x}}$$

και αφού υποθέσαμε ότι για την f ισχύει $f'(x) = 2f(x)$, θα έχουμε $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Επομένως, η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

β) Επειδή η g είναι σταθερή, υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{f(x)}{e^{2x}} = c \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Επομένως $f(x) = ce^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Επειδή $f(0) = 3$, έχουμε $ce^{2 \cdot 0} = 3$, οπότε $c = 3$ και τελικά βρίσκουμε ότι η συνάρτηση θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = 3e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.3.

Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 1$ είναι γνησίως μονότονη και το είδος της μονοτονίας (αύξουσα, φθίνουσα) σε καθένα από αυτά.

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x - 2)(x - 4)$. Το πρόσημο της f' δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Επομένως, η συνάρτηση f :

α) Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 2)$.

β) Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, 4]$, αφού είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(2, 4)$.

γ) Είναι γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[4, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(4, +\infty)$.

Το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f στα διαστήματα $(-\infty, 2]$, $[2, 4]$ και $[4, +\infty)$ δίνονται συνοπτικά στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$f(2) = 1$ $f(4) = 125$				

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\ln x + 2x - 10$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\ln x + 2x - 10 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, +\infty) \mathbf{R}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$ και έχει παράγωγο ίση με $f'(x) = \frac{3}{x} + 2$. Επει-
δή

$$f'(x) = \frac{3}{x} + 2 > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\ln x + 2x - 10) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3\ln x + 2x - 10) = -\infty,$$

μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω στον επόμενο πίνακα

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

γ) Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (βλ. παραγρ. 3.8), η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 . Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γενικά, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι χρήσιμο για τη μελέτη των ριζών της εξίσωσης $f(x)=c$, $c \in \mathbf{R}$.

Αν f είναι μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (a, β) και οι τιμές της f' είναι όλες θετικές ή όλες αρνητικές στο (a, β) , τότε η εξίσωση $f(x)=c$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, έχει μοναδική λύση στο (a, β) .

Ασκήσεις.

4.3.1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=3x^4-x^3+2x^2-3x+1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$.
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $12x^3-3x^2+4x-3=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

4.3.2. Να εξετάσετε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που δίνεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (a, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$.

- α) $f(x)=x-x^2$, $[-1,1]$ β) $f(x)=\frac{2}{x}$, $[1,3]$ γ) $f(x)=|x|$, $[-2,2]$
 δ) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3x^2-x, & x > 1 \end{cases}$, $[-1,1]$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $[1,9]$

4.3.3. Έστω μια συνάρτηση f , που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, για την οποία ισχύει $f(a) = 0$ και $m \leq f'(x) \leq M$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ (m, M είναι δύο πραγματικοί αριθμοί). Να αποδείξετε ότι $(\beta - a)m \leq f(\beta) \leq (\beta - a)M$.

4.3.4. Αν $a < \beta$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε οποιοδήποτε διάστημα $[a, \beta]$ με $a < \beta$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β με $a < \beta$ ισχύει η ανισότητα:

$$e^a < \frac{e^\beta - e^a}{\beta - a} < e^\beta.$$

4.3.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^4-9x^2+4x+2$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(1,2)$.
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $8x^3-18x+4=0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

4.3.6. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{e^{3x}}$ είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
 β) Να βρείτε τον τύπο της f , αν δίνεται επί πλέον ότι $f(0)=1$.

4.3.7. Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Αν οι f, g έχουν συνεχείς πρώτες

παραγώγους και ισχύει $f'(x)=2g(x)$, $g'(x)=-2f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f''(x)+4f(x)=0$ και $g''(x)+4g(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h με $h(x)=(f(x))^2+(g(x))^2$ είναι σταθερή σ' ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

γ) Να διαπιστώσετε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \eta\mu 2x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, αντίστοιχα ικανοποιούν τις υποθέσεις που κάναμε. Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε απ' αυτήν τη διαπίστωση;

4.3.8. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=3+\frac{2}{x}$ και $g(x)=\begin{cases} \frac{2}{x}, & x < 0 \\ 1+\frac{2}{x}, & x > 0. \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή.

4.3.9. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

4.3.10. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι επόμενες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες και το είδος της μονοτονίας (αύξουσα, φθίνουσα) σε καθένα από αυτά.

α) $f(x)=x^5+3x^3+12x-1$

β) $f(x)=x^3-3x+5$

γ) $f(x)=x-\frac{1}{x}$

δ) $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$

ε) $f(x)=\begin{cases} 1-x^3, & x \leq 1 \\ 2x^2+1, & x > 1 \end{cases}$

στ) $f(x)=|x^2-9|$

4.3.11. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x)=2e^x-3+\ln(x+2)$

β) $f(x)=\ln x^3+e^x$

γ) $f(x)=\frac{x^2}{e^{-x}}$

δ) $f(x)=\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^5 x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ε) $f(x)=3^x+5^x+7^x$

στ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

4.3.12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+6x+3$ και $g(x)=e^x+2x^5-2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $x^3=3x^2-6x-3$ και $e^x+2x^5=2$ έχουν ακριβώς μία ρίζα.

4.4 Μελέτη συναρτήσεων με τη βοήθεια της παραγώγου.

Η επίλυση ενός μεγάλου πλήθους πρακτικών προβλημάτων, απαιτεί τον προσδιορισμό της μικρότερης ή της μεγαλύτερης τιμής μιας συναρτήσεως. Για παράδειγμα:

α) Μία επιχείρηση ενδιαφέρεται συνήθως για το μέγιστο κέρδος ή το ελάχιστο κόστος.

β) Ένας γιατρός, ο οποίος πρόκειται να χορηγήσει σε κάποιον ασθενή ένα συγκεκριμένο φάρμακο είναι λογικό να ενδιαφέρεται να προσδιορίσει τη χρονική στιγμή, κατά την οποία η επίδραση του φαρμάκου στον ασθενή γίνεται η μεγαλύτερη δυνατή.

γ) Οι τεχνικοί ενός εργοστασίου θέλουν να ξέρουν πώς θα κατασκευάσουν έναν κινητήρα, που θα έχει τη μεγαλύτερη απόδοση, για δεδομένη κατανάλωση καυσίμου.

Προβλήματα όπως τα παραπάνω ανάγονται στον προσδιορισμό της μεγαλύτερης ή της μικρότερης τιμής μιας συναρτήσεως (η οποία εκφράζει το μέγεθος που μας ενδιαφέρει κάθε φορά).

Ας θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση f , που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα 4.4α. Στο

σημείο $x=x_1$ η τιμή της συναρτήσεως είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_1 (με άλλα λόγια, το σημείο $M_1(x_1, f(x_1))$ είναι το «ψηλότερο» σημείο της γραφικής παραστάσεως, όταν το x παίρνει τιμές «γειτονικές» στο σημείο x_1). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x=x_1$.

Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $\xi \in A$ όταν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(x) \leq f(\xi) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta.$$

Το ξ ονομάζεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(\xi)$ **τοπικό μέγιστο της f** .

Στο σχήμα 4.4α βλέπουμε επίσης ότι και για το σημείο $M_3(x_3, f(x_3))$ ικανοποιείται η συνθήκη του προηγούμενου ορισμού. Όμως το σημείο αυτό, δεν είναι απλώς το ψηλότερο σημείο της γραφικής παραστάσεως για τα x που ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ γύρω από το x_3 , αλλά είναι και το «ψηλότερο» σημείο ολόκληρης της γραφικής παραστάσεως. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_3 **ολικό μέγιστο** (ή απλώς μέγιστο), ενώ το $f(x_3)$ θα ονομάζεται μέγιστο της f .

Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ακόμη ότι, στο σημείο $x=x_2$ η τιμή της συναρτήσεως είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_2 (με άλλα λόγια, το σημείο $M_2(x_2, f(x_2))$ είναι το «χαμηλότερο» σημείο της γραφικής παραστάσεως, όταν το x παίρνει τιμές «γειτονικές» στο σημείο x_2). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $M_2(x_2, f(x_2))$.

Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $\xi \in A$, όταν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f(x) \geq f(\xi) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta.$$

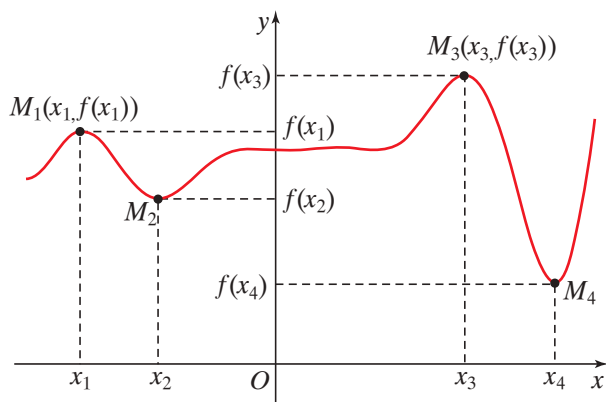
Το ξ ονομάζεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(\xi)$ ονομάζεται **τοπικό ελάχιστο της f** .

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(\xi)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $\xi \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο**, ενώ το $f(\xi)$ θα ονομάζεται ελάχιστο της f . Η συνάρτηση f του σχήματος 4.4α, παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο σημείο $M_4(x_4, f(x_4))$.

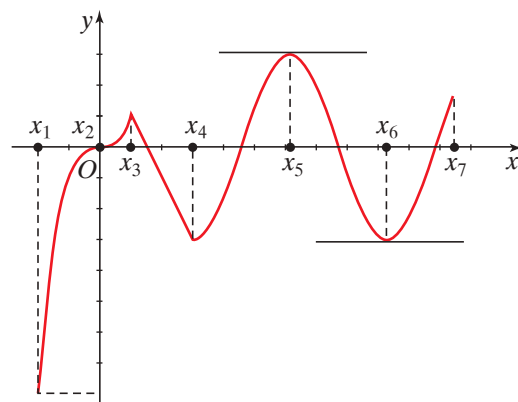
Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f ονομάζονται **τοπικά ακρότατα**, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα ονομάζονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f ονομάζονται **ολικά ακρότατα** ή απλώς **ακρότατα**. Σημειώνουμε ότι, ένα ολικό ακρότατο, μπορεί να θεωρηθεί και ως τοπικό ακρότατο, αφού προφανώς ικανοποιεί τη συνθήκη ορισμού του τελευταίου.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εύρεση ακροτάτων τιμών **συνεχών** συναρτήσεων. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 4.4β. Είναι φανερό ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_1 και ολικό μέγιστο στη θέση x_5 . Επίσης τα σημεία x_4, x_6 (αλλά και το x_1) είναι σημεία τοπικού ελαχίστου, ενώ τα σημεία x_3, x_7 (αλλά και το x_5) είναι σημεία τοπικού μεγίστου.

Παρατηρούμε ότι, στα σημεία x_5, x_6 , όπου η συνάρτηση παραγωγίζεται, η εφαπτομένη παίρνει θέση



Σχ. 4.4α.



Σχ. 4.4β.

παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, οπότε θα ισχύει:

$$f'(x_5) = 0 \text{ και } f'(x_6) = 0.$$

Υπάρχει όμως και ένα τρίτο σημείο, το x_2 το οποίο δεν αποτελεί θέση τοπικού ακροτάτου, παρότι ισχύει $f'(x_2) = 0$. Τέλος στις θέσεις x_3, x_4 έχουμε τοπικά ακρότατα, ενώ η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού A μπορεί να είναι:

α) Τα **άκρα** του A (αν ανήκουν σ' αυτό) και

β) **Εσωτερικά** σημεία του A , στα οποία η f είτε δεν παραγωγίζεται (ενώ όμως είναι συνεχής), είτε παραγωγίζεται και η παράγωγός της μηδενίζεται.

Τα σημεία της περιπτώσεως (β) τα ονομάζουμε **κρίσιμα σημεία** της συναρτήσεως f . Αποδεικνύεται μάλιστα (η απόδειξη παραλείπεται) ότι ισχύει το επόμενο θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα Fermat**.

Θεώρημα του Fermat.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$, τότε θα ισχύει: $f'(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Ωστόσο ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου σε ένα σημείο δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το σημείο αυτό είναι τοπικό ακρότατο. Για παράδειγμα, στο σημείο $x_2 = 0$ του σχήματος 4.4β ισχύει $f'(x_2) = 0$, ενώ το x_2 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Έτσι, τα κρίσιμα σημεία είναι απλώς **υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Χρειαζόμαστε επομένως ένα κριτήριο, το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Αν εξετάσουμε τη συμπεριφορά της συναρτήσεως f του σχήματος 4.4β στο x_3 παρατηρούμε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_3]$, δηλαδή, $f(x) \leq f(x_3)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_3]$, ενώ

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα της μορφής $[x_3, \beta)$, δηλαδή, $f(x) \geq f(x_3)$ για κάθε $x \in [x_3, \beta)$.

Μ' αυτόν τον τρόπο έχει εξασφαλισθεί ότι ισχύει $f(x) \leq f(x_3)$ για κάθε $x \in \Delta = (a, \beta)$ (οπότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_3). Ανάλογες διαπιστώσεις ισχύουν και για το σημείο x_5 .

Ομοίως, εξετάζοντας τη συμπεριφορά της συναρτήσεως f στο x_4 παρατηρούμε ότι:

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής $(a, x_4]$ δηλαδή $f(x) \geq f(x_4)$ για κάθε $x \in (a, x_4]$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα της μορφής $[x_4, \beta)$, δηλαδή $f(x) \geq f(x_4)$ για κάθε $x \in [x_4, \beta)$.

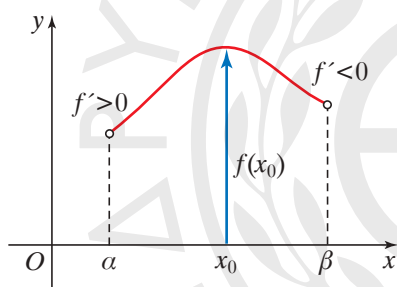
Έτσι, για κάθε $x \in \Delta = (a, \beta)$ ισχύει $f(x) \geq f(x_4)$, οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_4 . Ανάλογες διαπιστώσεις ισχύουν και για το σημείο x_6 .

Αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά το επόμενο Θεώρημα (η απόδειξη παραλείπεται):

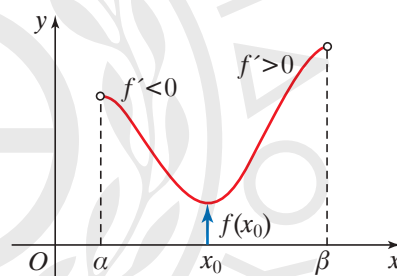
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο A , συνεχής στο διάστημα $(a, \beta) \subseteq A$ και $x_0 \in [a, \beta)$ ένα κρίσιμο σημείο της f .

α) Αν $f'(x) > 0$ για $a < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 (σχ. 4.4γ).

β) Αν $f'(x) < 0$ για $a < x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 (σχ. 4.4δ).



Σχ. 4.4γ.



Σχ. 4.4δ.

Για να βρούμε λοιπόν τα τοπικά ακρότατα μιας συναρτήσεως μπορούμε να χρησιμοποιούμε την πρώτη παράγωγο, ώστε να εντοπίσουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, καθώς και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τα σημεία στα οποία η f' αλλάζει πρόσημο μας δίνουν τα τοπικά της ακρότατα.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (σχ. 4.4ε), που είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$. Η f είναι προφανώς παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$. Για τις ρίζες της πρώτης παραγώγου έχουμε:

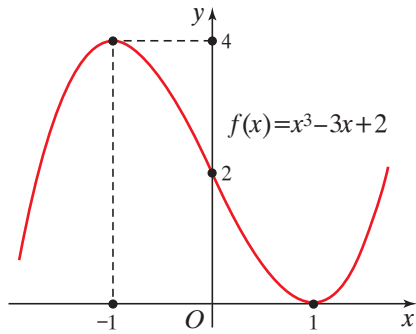
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1,$$

ενώ για το πρόσημο της f' ισχύουν τα εξής:

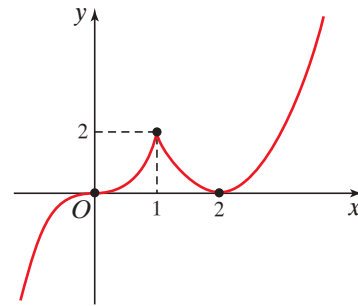
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$, το $f(-1) = 4$ είναι τοπικό μέγιστο. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, το $f(1) = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο (σχ. 4.4ε).



Σχ. 4.4ε.



Σχ. 4.4στ.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 4.4.1.

Πίνακας 4.4.1

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

Τοπικό μέγιστο
στο $x_0 = -1$

Τοπικό ελάχιστο
στο $x_0 = 1$

Σημειώνουμε ότι κατά τη χρησιμοποίηση της διαδικασίας αυτής δεν είναι απαραίτητο να εξασφαλίζεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 (θα πρέπει όμως η f να είναι *συνεχής* στο σημείο αυτό).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση (σχ. 4.4στ):

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x < 1 \\ 2(x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R} - \{1\}$ με: $f'(x) = \begin{cases} 6x^2, & x < 1 \\ 4(x-2), & x > 1 \end{cases}$

Στο σημείο $x_0 = 1$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f . Ωστόσο, αφού ισχύει $f'(x) > 0$ για $x < 1$ και $f'(x) < 0$ για $1 < x < 2$, η f θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 1$.

Το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο ελέγχου σχετικά με το κατά πόσο ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως, στο οποίο (υπάρχει και) μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, αποτελεί τοπικό ακρότατο της συναρτήσεως. Σύμφωνα μ' αυτό, αντί να ελέγχουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0 αρκεί να εξετάσουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο σημείο x_0 μόνο. Για το λόγο αυτό είναι γνωστό ως *κριτήριο της δεύτερης παραγώγου*.

Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ , για το οποίο ισχύει $f'(x) = 0$.

α) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και ισχύει $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 .

β) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και ισχύει $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 .

Σημειώνεται ότι αν κατά την εφαρμογή της προηγούμενης προτάσεως προκύψει ότι $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)=0$, τότε χρειάζεται να καταφύγουμε σε παραγώγους μεγαλύτερης τάξεως για να διευκρινισθεί η φύση του σημείου x_0 (τέτοιες περιπτώσεις δεν θα εξετασθούν στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου).

Ως εφαρμογή του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin 2x$ (σχ. 4.4ζ) που είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$. Η f παραγωγίζεται στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = -2\eta\mu 2x, \quad f''(x) = -4\sigma\upsilon\nu 2x.$$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι $x=k\pi$, $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Επειδή $f''(k\pi) = -4\sigma\upsilon\nu 2k\pi = -4 < 0$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στα σημεία $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ τοπικά μέγιστα.

Ομοίως, αφού

$$f''(k\pi + \frac{\pi}{2}) = -4\sigma\upsilon\nu\left(2(k\pi + \frac{\pi}{2})\right) = -4\sigma\upsilon\nu\pi = 4 > 0,$$

η συνάρτηση f θα παρουσιάζει στα σημεία $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$ τοπικά ελάχιστα.

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο αυτή, υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής που εξηγήσαμε στην παράγραφο 3.8, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta].$$

Επομένως, σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν προηγουμένως, η f θα έχει (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο στο διάστημα $[a, \beta]$. Για την εύρεση αυτών, στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

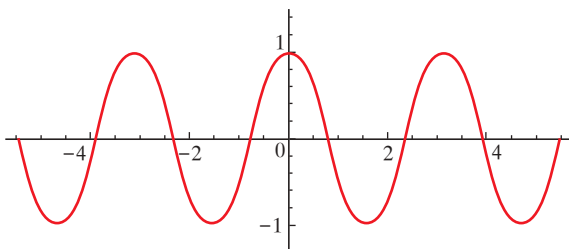
α) Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .

β) Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά, καθώς επίσης και στα άκρα των διαστημάτων.

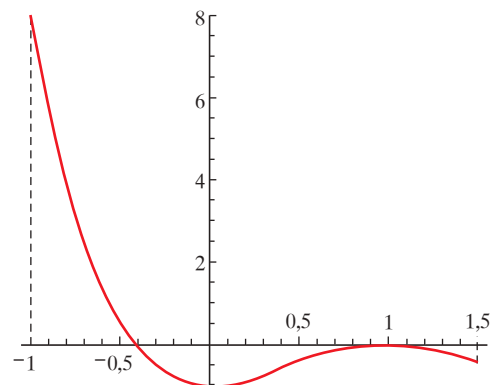
γ) Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο της f και η μικρότερη το ελάχιστο της f .

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$, που είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$ και έχει παράγωγο $f'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$ οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι οι $x = 0, x = 1$, και $x = 2$. Επομένως:

α) Αν εξετάσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[-1, \frac{3}{2}]$, (σχ. 4.4η) το μέγιστο της f θα είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές $f(-1)=8, f(0)=-1, f(1)=0, f(\frac{3}{2})=-\frac{7}{16}$, δηλαδή το $f(-1)=8$, ενώ το ελάχιστο, η μικρότερη από τις τιμές $f(-1)=8, f(0)=-1, f(1)=0, f(\frac{3}{2})=-\frac{7}{16}$, δηλαδή το $f(0)=-1$.

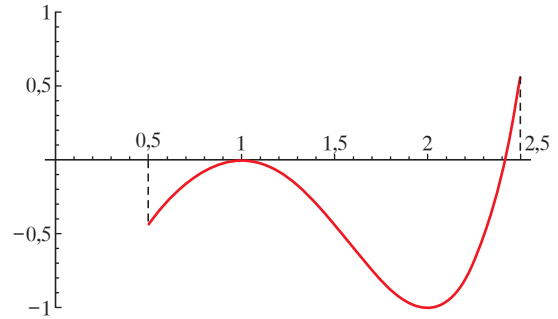


Σχ. 4.4ζ.



Σχ. 4.4η.

β) Αν εξετάσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, (σχ. 4.40) το μέγιστο της f θα είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές $f(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{16}$, $f(1) = 0$, $f(2) = -1$, $f(\frac{5}{2}) = \frac{9}{16}$, δηλαδή το $f(\frac{5}{2}) = \frac{9}{16}$, ενώ το ελάχιστο, η μικρότερη από τις τιμές $f(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{16}$, $f(1) = 0$, $f(2) = -1$, $f(4) = 63$, δηλαδή το $f(2) = -1$.



Σχ. 4.40.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.1.

Μία δεξαμενή πλοίου έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με τις δύο έδρες του τετράγωνα πλευράς x . Αν η δεξαμενή πρόκειται να κατασκευασθεί από λαμαρίνα συνολικού εμβαδού 24 m^2 να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής, έτσι ώστε αυτή να χωράει τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού.

Λύση.

Αν y είναι η τρίτη διάσταση της δεξαμενής, τότε το εμβαδόν της επιφάνειάς της θα δίνεται από τον τύπο:

$$E = 2xy + 2xy + 2x^2 = 4xy + 2x^2.$$

Επειδή η συνολική διαθέσιμη λαμαρίνα είναι 24 m^2 , θα έχουμε $E=24$, οπότε

$$4xy + 2x^2 = 24 \Leftrightarrow 4xy = 24 - 2x^2 \Leftrightarrow y = \frac{24 - 2x^2}{4x}.$$

Ο όγκος της δεξαμενής είναι ίσος με:

$$V = (x \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot \frac{24 - 2x^2}{4x} = \frac{1}{2}(12x - x^3).$$

Επομένως αναζητάμε τη μέγιστη τιμή της συναρτήσεως:

$$f(x) = \frac{1}{2}(12x - x^3), \quad x > 0$$

της οποίας η παράγωγος είναι ίση με $f'(x) = \frac{1}{2}(12 - 3x^2)$. Η μοναδική θετική ρίζα της $f'(x)=0$ είναι η $x=2$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα 4.4.2.

Επειδή $f'(2)=0$ και η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2, η συνάρτηση f θα παρουσιάζει για $x=2$ τη μέγιστη τιμή της, η οποία είναι ίση με:

$$f(2) = \frac{1}{2}(12 \cdot 2 - 2^3) = 8.$$

Πίνακας 4.4.2

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Μέγιστο

Επομένως, οι διαστάσεις της δεξαμενής που εξασφαλίζουν τη μεγαλύτερη χωρητικότητα νερού (8 m^3) είναι:

$$x = 2\text{m} \quad \text{και} \quad y = \frac{24 - 2 \cdot 2^2}{4 \cdot 2} = 2 \text{ m}$$

(η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί στην περίπτωση που η δεξαμενή έχει όλες τις διαστάσεις της ίσες, δηλαδή κυβικό σχήμα).

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα 4.4i.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x)=3x^2>0$ και $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$

για κάθε $x>0$. Επομένως και οι δύο είναι γνησίως αύξουσες στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζουν ελάχιστο στο σημείο 0. Ωστόσο οι δύο γραφικές παραστάσεις που δίνονται στο σχήμα 4.4i φαίνονται να διαφέρουν. Πιο συγκεκριμένα, ο τρόπος με τον οποίο «ανέρχεται» η f είναι τέτοιος, ώστε η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται συνεχώς επάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της, ενώ ο τρόπος με τον οποίο «ανέρχεται» η g είναι τέτοιος, ώστε η γραφική παράσταση της g να βρίσκεται συνεχώς κάτω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της. Παρατηρούμε επίσης ότι, καθώς το x αυξάνει, η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνει, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ η κλίση $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Για μια συνάρτηση όπως η f θα λέμε ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο $[0, +\infty)$ ενώ για μια συνάρτηση όπως η g θα λέμε ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο $[0, +\infty)$.

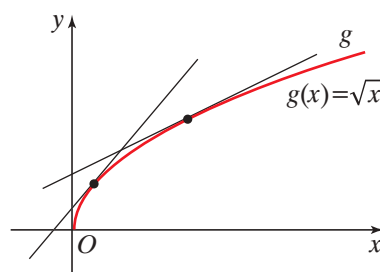
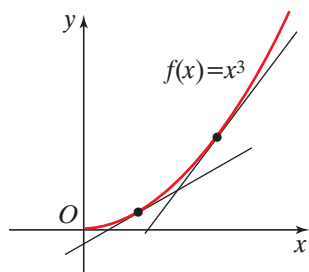
Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Έστω f μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ . Θα λέμε ότι η f είναι:

- α) **Κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- β) **Κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f από τα αριστερά προς τα δεξιά, πρέπει να στραφεί κατά τη θετική φορά (αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού) για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ .

Αντίστοιχα μία συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f από τα αριστερά προς τα δεξιά, πρέπει να στραφεί κατά την αρνητική φορά (φορά των δεικτών του ρολογιού) για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ .



Σχ. 4.4i.

Η διαπίστωση αυτή φαίνεται στο σχήμα 4.4ια.

Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών μιας συναρτήσεως ότι αυτή είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ , θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\cup$ ή $\cap$ αντίστοιχα¹.

Δεδομένου ότι η μονοτονία της πρώτης παραγώγου σ' ένα διάστημα μπορεί να καθορισθεί από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο διάστημα αυτό, μπορούμε να διατυπώσουμε τα επόμενα κριτήρια, τα οποία μας διευκολύνουν να βρούμε τα διαστήματα, στα οποία μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Τότε η f είναι:

- α) **Κυρτή** στο Δ , αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .
- β) **Κοίλη** στο Δ , αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

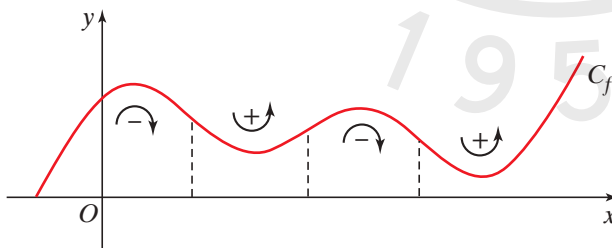
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε και πάλι τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, αυτή τη φορά σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 4.4ιβ. Αφού $f'(x) = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$. Έχουμε επίσης $f''(x) = 6x > 0$ για $x > 0$ και $f''(x) = 6x < 0$ για $x < 0$. Επομένως, η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$, ενώ είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι η f εκατέρωθεν του σημείου $x_0 = 0$ αλλάζει από κοίλη σε κυρτή και ότι η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$ την ευθεία με εξίσωση $y=0$, η οποία μάλιστα «διαπερνά» την καμπύλη. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σημείο O είναι **σημείο καμπής** της C_f ή **η συνάρτηση παρουσιάζει καμπή στο x_0** .

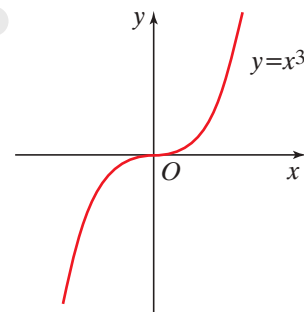
Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) με εξαίρεση ίσως κάποιο σημείο του x_0 . Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παραστάσεως της f αν:

- α) Η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, b) ή αντιστρόφως και
- β) η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.



Σχ. 4.4ια.



Σχ. 4.4ιβ.

1. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε ορισμένα συγγράμματα, μια συνάρτηση με γνησίως αύξουσα πρώτη παράγωγο ονομάζεται **γνησίως κυρτή**, ενώ ο όρος κυρτή χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η παράγωγός της είναι απλώς αύξουσα. Αντίστοιχα, μια συνάρτηση με γνησίως φθίνουσα πρώτη παράγωγο ονομάζεται **γνησίως κοίλη**, ενώ ο όρος κοίλη χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η παράγωγός της είναι απλώς φθίνουσα. Με τη θεώρηση αυτή η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \lambda$ (της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή) θεωρείται και κυρτή και κοίλη ταυτόχρονα. Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου ο όρος κυρτή/κοίλη συνάρτηση θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια συνάρτηση με γνησίως αύξουσα/γνησίως φθίνουσα πρώτη παράγωγο αντίστοιχα (οπότε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \alpha x + \lambda$ δεν είναι ούτε κυρτές ούτε κοίλες).

Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι στο σημείο $O(0,0)$ που είναι σημείο καμπής της γραφικής παραστάσεως της f , ισχύει $f''(0)=0$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται):

Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συναρτήσεως f , τότε είτε θα ισχύει $f''(x_0)=0$ είτε δεν θα υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0 .

Έτσι τα σημεία που αποτελούν **υποψήφιες θέσεις** σημείων καμπής θα πρέπει να τα αναζητούμε εξετάζοντας:

- α) Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ , στα οποία η f'' μηδενίζεται και
- β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^3, & x \leq 2 \\ (x-2)^2 - 2, & x > 2, \end{cases}$$

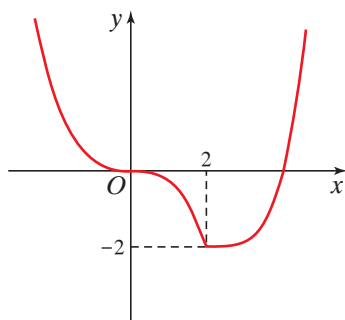
της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 4.4γ. Έχουμε

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2, & x < 2 \\ 2(x-2), & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad f''(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x, & x < 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases}$$

Η μοναδική ρίζα της $f''(x)=0$ είναι το 0, ενώ στο σημείο 2 δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f . Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον πίνακα 4.4.3.

Επομένως, οι υποψήφιες θέσεις σημείων καμπής είναι τα σημεία 0 και 2. Παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν των σημείων 0 και 2 η f'' αλλάζει πρόσημο. Όμως στο σημείο $(2, -2)$ η C_f δεν έχει εφαπτομένη. Επομένως το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της f , ενώ το σημείο $A(2, -2)$ δεν είναι σημείο καμπής.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, όταν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και επί πλέον ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ (δηλ. η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0), τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της συναρτήσεως f .



Σχ. 5.4γ.

Πίνακας 4.4.3

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+		-	+
$f(x)$	↗		↘	↗

σημείο
καμπής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.2.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2-48x+100$.

Λύση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$ με:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 48 \quad \text{και} \quad f''(x) = 6x - 18.$$

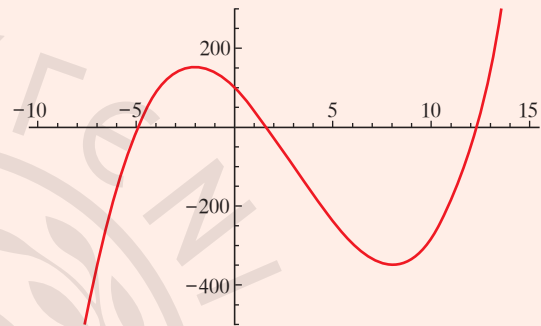
Επίσης έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x - 48 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 8$ και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Το πρόσημο της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου, η μονοτονία της συναρτήσεως και το είδος της (κυρτή/κοίλη) παρουσιάζονται στον πίνακα 4.4.4 μεταβολών της f .

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο για $x = -2$ την τιμή $f(-2) = 152$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 8$ την τιμή $f(8) = -348$. Τέλος η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $\Gamma(3, f(3))$, δηλαδή το $\Gamma(3, -98)$. Στο σχήμα 4.4ιδ δίνεται η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f .

Πίνακας 4.4.4

x	$-\infty$	-2	3	8	$+\infty$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$
f''			$-$	0	$+$	
f						
		τοπικό μέγιστο	σημείο καμπής	τοπικό ελάχιστο		



Σχ. 4.4ιδ.

Η πορεία την οποία ακολουθήσαμε στην εφαρμογή αυτή ονομάζεται **μελέτη συναρτήσεως**. Γενικά, για τη μελέτη μιας συναρτήσεως ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.
- γ) Βρίσκουμε τις δύο πρώτες παραγώγους f' και f'' (όπου αυτές υπάρχουν) και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους.
- δ) Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .
- ε) Με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα, στα οποία η f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και τα σημεία καμπής.
- στ) Μελετούμε τη «συμπεριφορά» της συναρτήσεως στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες κ.λπ.).
- ζ) Κατασκευάζουμε τον **πίνακα μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.3.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $x \in \mathbf{R}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $e^{x_0} \geq x_0 + 1$, για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$.

Λύση.

α) Η συνάρτηση f με $f(x) = e^x$ έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbf{R}$. Επίσης, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, με $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x$. Αφού ισχύει $f''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, η f θα είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

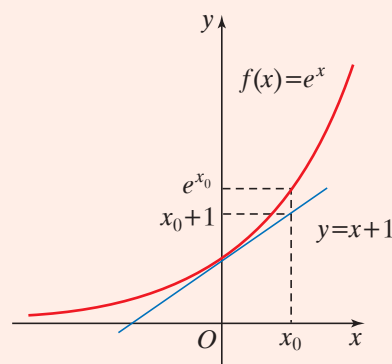
β) Έχουμε $f'(0) = e^0 = 1$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$, δηλαδή η $y = x + 1$ (σχ. 4.4ιε).

γ) Επειδή η f είναι κυρτή σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$, η γραφική παράστασή της θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της, σε οποιοδήποτε σημείο της $(x_0, f(x_0))$. Επομένως, για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ θα ισχύει:

$$f(x_0) \geq y_0 = x_0 + 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$e^{x_0} \geq x_0 + 1.$$



Σχ. 4.4ιε.

Ασκήσεις.

4.4.1. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα (εφόσον υπάρχουν) των επομένων συναρτήσεων.

α) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 5$

β) $f(x) = x^2 - 3x + 5$

γ) $f(x) = 2(x^2 - 4)^5$

δ) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$

ε) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$

στ) $f(x) = x - e^{2x}$

4.4.2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα.

α) $f(x) = 2x^3 + 4x + 1$

β) $f(x) = e^x + \ln x - 1$

γ) $f(x) = \sqrt{x}(1 + \sqrt{x})$

δ) $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x$

ε) $f(x) = x^2 e^x + 3e^x$

στ) $f(x) = x + 3^x$

4.4.3. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα μιας συναρτήσεως f , της οποίας η παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f'(x) = 3(x^2 - 4)(x - 2)^2(x - 4)^2$.

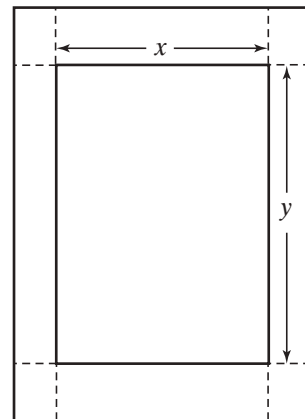
4.4.4. Αφού μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ να βρείτε στη συνέχεια το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσεως $x^2(2x + 3) = 12x - 6$.

4.4.4. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με περίμετρο 40 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

4.4.6. Ένας τυπογράφος θέλει να τυπώσει ένα βιβλίο, σε κάθε σελίδα του οποίου:

α) Να αφηθεί επάνω και κάτω περιθώριο 3 cm και στα δύο πλάγια (αριστερά και δεξιά) περιθώριο 2 cm.

β) Το τυπωμένο μέρος της σελίδας να έχει εμβαδόν 294 cm^2 . Συμβολίζουμε με x το πλάτος του τυπωμένου μέρους της σελίδας και με y το μήκος του (σχ. 4.4ιστ).



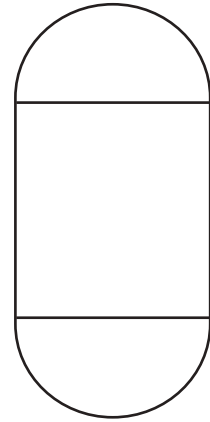
Σχ. 4.4ιστ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της σελίδας δίνεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο

$$E(x) = 6x + \frac{1176}{x} + 318.$$

β) Να βρείτε τις διαστάσεις x, y του τυπωμένου μέρους, ώστε να έχουμε την ελάχιστη κατανάλωση χαρτιού.

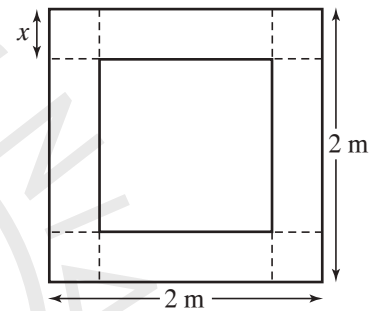
4.4.7. Ένα φινιστρίνι πλοίου αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από δύο ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4ιζ. Αν η περίμετρός του είναι 1 m, πώς πρέπει να κατασκευάσουμε το παράθυρο για να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό φωτισμό;



Σχ. 4.4ιζ.

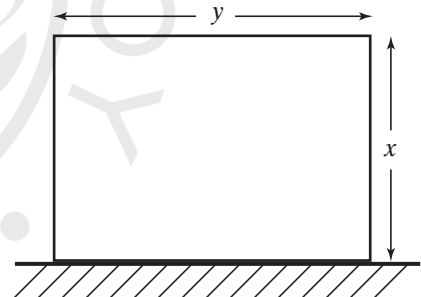
4.4.8. Ένα πλοίο ακολουθεί πορεία, της οποίας οι συντεταγμένες (σ' ένα σύστημα συντεταγμένων) ικανοποιούν την εξίσωση $y = 3x^2$. Να εντοπίσετε σε ποιο σημείο της πορείας του θα βρεθεί πιο κοντά σ' ένα φάρο που είναι τοποθετημένος στη θέση $A(2,3)$.

4.4.9. Από φύλλο λαμαρίνας που έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 2 m θέλουμε να κατασκευάσουμε ανοιχτό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, κόβοντας από τις 4 γωνίες του ίσα τετράγωνα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4ιη. Να βρείτε την πλευρά x του τετραγώνου, ώστε το δοχείο που θα κατασκευάσουμε, να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα.



Σχ. 4.4ιη.

4.4.10. Σ' ένα πλοίο αποφασίστηκε να αντικατασταθεί η παλιά περίφραξη ενός καταστρώματος με νέα. Για την περίφραξη των τριών πλευρών του καταστρώματος, το οποίο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλόγραμμου, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4ιθ, πρόκειται να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό κάγκελο, με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται και το αντίστοιχο κόστος ανά μέτρο. Πιο συγκεκριμένα η πλευρά μήκους y πρόκειται να κατασκευαστεί από κάγκελο που κοστίζει 20 € το μέτρο, ενώ οι πλευρές μήκους x από κάγκελο που κοστίζει 30 € το μέτρο. Αν το συνολικό ποσό που θα διατεθεί είναι 1000 €, να βρείτε τις διαστάσεις x και y του ορθογωνίου που μπορεί να περιφραχτεί, ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.



Σχ. 4.4ιθ.

4.4.11. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι η δεύτερη παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f''(x) = (x-2)(x-1)^2(x+1)$. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα, στα οποία η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παραστάσεως.

4.4.12. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παραστάσεως.

α) $f(x) = -1 + 9x + x^2$

β) $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$

γ) $f(x) = x^2 e^{-x/2}$

δ) $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 1$

ε) $f(x) = \eta \mu 2x$

στ) $f(x) = e^{-x^2/2}$

ζ) $f(x) = x e^{-x}$

η) $f(x) = x^3 |x|$

θ) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

4.4.13. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι η πρώτη παράγωγος δίνεται από τον τύπο $f'(x) = x(x-1)$.
Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

4.4.14. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

4.5 Κανόνες του L' Hospital.

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους:

$$f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}},$$

οι οποίες είναι ορισμένες στα σύνολα $A_1 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $A_2 = (0, +\infty)$ αντίστοιχα. Αν θα θέλαμε να υπολογίσουμε τα όρια των συναρτήσεων αυτών όταν το x τείνει στο 0, δηλαδή τα

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}},$$

δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου του πηλίκου δύο συναρτήσεων, αφού για την f_1 έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

ενώ για την f_2 ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και $\frac{-\infty}{+\infty}$ αντίστοιχα.

Σε τέτοιες απροσδιόριστες μορφές μπορεί να εφαρμοστεί το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως **κανόνας του L' Hospital** και σε αρκετές περιπτώσεις μας προσφέρει έναν πολύ εύκολο τρόπο υπολογισμού ορίων, στα οποία εμπλέκονται απροσδιόριστες μορφές.

Κανόνας του L' Hospital.

Έστω Δ ένα διάστημα, $x_0 \in \Delta$ και f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες τουλάχιστον στο $\Delta - \{x_0\}$. Υποθέτουμε επίσης ότι $g'(x) \neq 0$ τουλάχιστον στο $\Delta - \{x_0\}$, ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή μη) και ότι ισχύει **μία** απ' τις παρακάτω συνθήκες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty.$$

Τότε υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για πλευρικά όρια $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, καθώς και όταν $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$, (αρκεί όμως να πληρούνται οι προϋποθέσεις του).

Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ που θεωρήσαμε προηγουμένως είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \frac{e^x}{1} = e^x.$$

Αφού υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1,$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L' Hospital και να γράψουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Ομοίως, για το δεύτερο όριο θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Σημειώνεται ότι, ο κανόνας του L' Hospital μπορεί να εφαρμοστεί και περισσότερες από μία φορές αν χρειαστεί, δηλαδή αν μετά την εφαρμογή του εξακολουθούμε να έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Για παράδειγμα, θέλοντας να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ όπου } f(x) = e^{5x}, g(x) = x^3$$

παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g''(x) = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^{5x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25e^{5x}}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{125e^{5x}}{6} = +\infty.$$

Ο κανόνας του L' Hospital μπορεί να βρει εφαρμογή και στον υπολογισμό ορίων που αφορούν σε απροσδιόριστες μορφές του τύπου $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, αφού πρώτα μετατρέψουμε κατάλληλα τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει, ώστε να προκύψει μία από τις απροσδιόριστες μορφές που καλύπτει το προηγούμενο θεώρημα.

Για παράδειγμα το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x^2)$, που είναι της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$ (αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^2 = +\infty$) μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: γράφουμε αρχικά τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει στη μορφή (αφού αναζητήσουμε το όριο στο $\pm\infty$ μπορούμε να περιοριστούμε σε μεγάλες θετικές τιμές του x)

$$x - \ln x^2 = x - 2 \ln x = x \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x}\right)$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2 \frac{\ln x}{x}) = 1$$

και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - 2 \frac{\ln x}{x}) = +\infty.$$

Τέλος αναφέρουμε ότι, όταν αναζητούμε όρια συναρτήσεων της μορφής $(f(x))^{g(x)}$ μπορεί να οδηγηθούμε επίσης σε απροσδιόριστες μορφές 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Σε πολλές περιπτώσεις, οι παραπάνω απροσδιόριστες μορφές υπολογίζονται με τον κανόνα του L' Hospital γράφοντας τη συνάρτηση στη μορφή $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$.

Για παράδειγμα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ που είναι της μορφής 0^0 μπορεί να υπολογισθεί αν λάβουμε υπόψη ότι $x^x = e^{x \ln x}$ και καταφέρουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ έχουμε οδηγηθεί σε απροσδιόριστη μορφή $0 \cdot (-\infty)$ και για να προχωρήσουμε στον υπολογισμό γράφουμε την τελευταία συνάρτηση στη μορφή

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.1.

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συναρτήσεως f με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2}$.

Λύση.

Η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο $A = (1, 2) \subseteq (2, +\infty)$. Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f στα 1, 2 και στο $+\infty$.

α) Για $x=1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$$

οπότε θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = +\infty.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

β) Για $x=2$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x-1}(x-1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

γ) Τέλος εξετάζουμε αν η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$ παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 0.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = 0.$$

και η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f .

Ασκήσεις.

4.5.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\ln(2x+1)}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x - \eta\mu x}$

στ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$

θ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$

4.5.2. Να υπολογίσετε τα εξής όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 \ln x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(1 + \frac{2}{x}))$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 \ln x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + 2x)^{1/x}$

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^{x^2}$

στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - 2 \ln(1+x)}{x^2}$

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{x^5}$

θ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\eta\mu^2 x})$

ι) $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \ln x^2$

ια) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-x}$

ιβ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{100} e^{-x}$

4.5.3. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{x - 4x + 3}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2 - 3x}$

στ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 2x + 1}$

4.5.4. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2}{3^x}$$

$$\beta) f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\ln x}{(x-1)(x-2)}$$

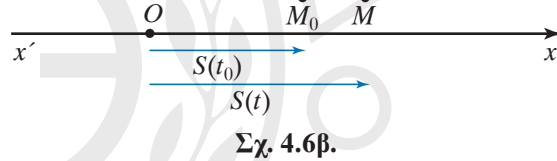
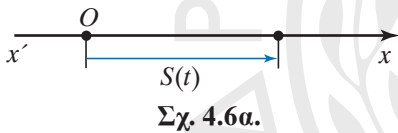
4.6 Εφαρμογές των παραγώγων.

Ας θεωρήσουμε ένα κινητό (σώμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή O ενός άξονα $x'x$ (σχ. 4.6α). Έστω ότι το σώμα κινείται μόνο κατά μήκος του άξονα (εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση) και ας συμβολίσουμε με $S(t)$ την απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t από το O (δηλ. την τετμημένη που αντιστοιχεί στη θέση του κινητού).

Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσεως** του κινητού.

Έστω ότι, ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση O , κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και μετά από παρέλευση χρόνου h , δηλαδή τη χρονική στιγμή $t=t_0+h$, έχει μετακινηθεί στη θέση M (σχ. 4.6β). Τότε η μετατόπιση του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t]$ θα είναι ίση με τη διαφορά $\Delta S = S(t) - S(t_0)$ και επομένως η μέση ταχύτητά του θα δίνεται από το λόγο της συνολικής μετατοπίσεως $\Delta S = S(t) - S(t_0)$ προς το χρόνο $\Delta t = t - t_0 = h$ που πέρασε, δηλαδή από τον τύπο:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}.$$



Όταν το t πλησιάζει το t_0 ($t \rightarrow t_0$ ή ισοδύναμα $h \rightarrow 0$), το παραπάνω πηλίκο μάς δίνει μια ιδέα του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η θέση του κινητού «κοντά στο t_0 ». Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = S'(t_0),$$

ονομάζεται **στιγμιαία ταχύτητα** ή απλά **ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0** και συνήθως συμβολίζεται με $v(t_0)$.

Η ταχύτητα ενός κινητού ονομάζεται πολλές φορές και **ρυθμός μεταβολής** της θέσεως του κινητού. Έτσι, ο λόγος, $\Delta S / \Delta t$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσεως του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t]$, ενώ το όριο $S'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (S(t_0 + h) - S(t_0)) / h$, είναι ο **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής** της θέσεως του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 (ο ρυθμός μεταβολής όταν το κινητό βρίσκεται πάρα πολύ κοντά στο t_0). Στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιούμε τον όρο ρυθμός μεταβολής θα εννοούμε το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής.

Για παράδειγμα, αν $S(t) = -2t^2 + 10t$ είναι η συνάρτηση θέσεως ενός κινητού, τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ και $t_3 = 3$ θα είναι αντίστοιχα (αφού $S'(t) = -4t + 10$)

$$S'(1) = -4 \cdot 1 + 10 = 6, \quad S'(2) = -4 \cdot 2 + 10 = 2, \quad S'(3) = -4 \cdot 3 + 10 = -2.$$

(σημειώνουμε ότι, όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε

θα είναι $v(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά, κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε θα έχουμε $v(t_0) \leq 0$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $v: t \rightarrow v(t) = S'(t)$. Σε αναλογία με όσα προαναφέρθηκαν, αντιλαμβανόμαστε ότι το όριο του πηλίκου

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h}$$

καθώς το t πλησιάζει το t_0 ($t \rightarrow t_0$ ή ισοδύναμα $h \rightarrow 0$) μας δίνει μια ιδέα του ρυθμού, με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα του κινητού κοντά στο t_0 . Το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = v'(t_0) = S''(t_0)$$

ονομάζεται στιγμιαία επιτάχυνση ή απλά **επιτάχυνση του κινητού** τη χρονική στιγμή t_0 . Με άλλα λόγια, η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι ο ρυθμός μεταβολής της συναρτήσεως $v(t)$ (ταχύτητας) τη χρονική στιγμή t_0 .

Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής συμπέρασμα:

Αν $S(t)$ η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t είναι ίσες με $v(t) = S'(t)$ και $a(t) = v'(t) = S''(t)$ αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν η θέση του κινητού δίνεται από τη συνάρτηση

$$S(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

όπου s_0, v_0, a είναι δεδομένες σταθερές, τότε

$$v(t) = S'(t) = (s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2)' = v_0 + a t \quad \text{και} \quad a(t) = v'(t) = (v_0 + a t)' = a,$$

δηλαδή το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση (εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση).

Η χρήση του όρου «ρυθμός μεταβολής» μπορεί να γίνει σε όλες τις περιπτώσεις που κάποιο μέγεθος y μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο άλλο μέγεθος x .

Γενικά προκύπτει ο επόμενος ορισμός:

Αν δύο μεγέθη x, y συνδέονται με τον τύπο $y = f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ , τότε η παράγωγος

$$f'(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής του y ως προς x** για τη συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$.

Για παράδειγμα:

α) Αν ο όγκος y ενός θερμαινόμενου κύβου πλευράς x αυξάνεται σύμφωνα με τον τύπο $y = f(x) = x^3$, ο ρυθμός μεταβολής του όγκου για $x = x_0$ είναι ίσος με $f'(x_0) = 3x_0^2$. Έτσι η ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται ο όγκος ενός κύβου πλευράς 1 (μονάδας μήκους) είναι $3 \cdot 1^2 = 3$, ενώ όταν ο κύβος έχει πλευρά 2, η ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται ο όγκος του τετραπλασιάζεται (γίνεται $3 \cdot 2^2 = 12$).

β) Αν $Q(t)$ είναι η συνάρτηση που εκφράζει το φορτίο που διέρχεται από μια κάθετη τομή ενός αγω-

γού τη χρονική στιγμή t , τότε η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό τη χρονική στιγμή t_0 (που σύμφωνα με τη φυσική, είναι ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου τη χρονική στιγμή t_0), θα δίνεται από την παράγωγο $Q'(t_0)$.

γ) Αν θεωρήσουμε ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και συμβολίσουμε με $J(t)$ το μέτρο της ορμής του τη χρονική στιγμή t , τότε το μέτρο της δύναμews που κινεί το σώμα είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της ορμής τη χρονική στιγμή t_0 , και θα δίνεται από την παράγωγο $J'(t_0)$.

Ας δούμε στη συνέχεια πώς χρησιμοποιείται η έννοια του ρυθμού μεταβολής σε προβλήματα που έχουν σχέση με οικονομικές εφαρμογές. Στην Οικονομία, το κόστος παραγωγής και το κέρδος εκφράζονται συνήθως ως συνάρτηση της ποσότητας x που παράγεται. Ας υποθέσουμε ότι το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x)$ και η συνολική είσπραξη από την πώλησή x μονάδων του προϊόντος είναι $E(x)$.

Τότε:

α) Το συνολικό κέρδος από την πώληση x μονάδων του προϊόντος θα είναι ίσο με

$$P(x) = E(x) - K(x).$$

β) Το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων του προϊόντος είναι ίσο με

$$K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Όταν ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγουμε μεταβάλλεται από x_0 σε x (θεωρούμε ότι το x μεταβάλλεται σε διάστημα), τότε το πηλίκο

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}, \text{ όπου } h = x - x_0$$

δίνει το **μέσο κέρδος** όταν εμπορευόμαστε από x_0 μέχρι x μονάδες του προϊόντος.

Καθώς το x πλησιάζει το x_0 (ισοδύναμα $h \rightarrow 0$), το μέσο κέρδος μάς δίνει μία ιδέα του ρυθμού μεταβολής του κέρδους όταν παράγουμε (και πουλάμε) έναν αριθμό μονάδων που βρίσκεται πολύ κοντά στο x_0 . Για το λόγο αυτό το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h} = P'(x_0),$$

ονομάζεται **οριακό κέρδος** στο x_0 . Ανάλογα ορίζεται και η έννοια του **οριακού κόστους** και της **οριακής εισπράξεως** στο x_0 ως οι παράγωγοι $K'(x_0)$, $E'(x_0)$ αντίστοιχα.

Από τους τύπους:

$$P'(x) = E'(x) - K'(x) \quad \text{και} \quad K'_\mu(x) = \left(\frac{K(x)}{x} \right)' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$$

είναι φανερό ότι:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$$

και

$$K'_\mu(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) \cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \Leftrightarrow K'(x) = K_\mu(x).$$

Επομένως, ισχύουν τα εξής, τα οποία αποτελούν δύο γνωστές αρχές της οικονομικής θεωρίας:

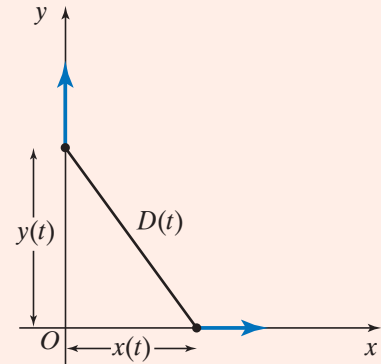
α) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της εισπράξεως είναι ίσοι.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.1.

Δύο πλοία ξεκινούν από ένα λιμάνι O και έχουν κάθετες διευθύνσεις (σχ. 4.6γ). Το πρώτο κινείται βόρεια με σταθερή ταχύτητα 40 ν.μ/h, ενώ το δεύτερο κινείται ανατολικά με σταθερή ταχύτητα 50 ν.μ/h.

- α) Να γράψετε τις σχέσεις που περιγράφουν τις συναρτήσεις θέσεως των δύο πλοίων.
 β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $D(t)$ των πλοίων μετά από 3 ώρες.



Σχ. 4.6γ.

Λύση.

α) Αφού τα πλοία κινούνται με σταθερές ταχύτητες 40 και 50 ν.μ/h, οι συναρτήσεις θέσεως θα βρίσκονται με εφαρμογή του τύπου

$$S(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

για $s_0=0$, $a=0$ και $v_0=40, 50$ αντίστοιχα. Επομένως θα έχουμε: $x(t)=40t$, $y(t)=50t$.

β) Η απόσταση των πλοίων τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο:

$$D(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}$$

οπότε ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης $D(t)$ των πλοίων τη χρονική στιγμή t θα είναι ίσος με:

$$D'(t) = \left(\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}} \left([x(t)]^2 + [y(t)]^2 \right)' = \frac{1}{2\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}} (2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_0=3$ έχουμε $x'(t_0)=40$, $x(t_0)=40t_0=40 \cdot 3=120$, $y'(t_0)=50$, $y(t_0)=50t_0=50 \cdot 3=150$, οπότε:

$$D'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{[x(t_0)]^2 + [y(t_0)]^2}} = \frac{120 \cdot 40 + 150 \cdot 50}{\sqrt{120^2 + 150^2}} = \frac{12300}{\sqrt{36900}} = 64,03.$$

Άρα τα πλοία απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ταχύτητα περίπου 64 ν.μ/h.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.2.

Η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από τον ανθρώπινο οργανισμό μετά την παρείλευση χρόνου t από τη στιγμή που χορηγήθηκε, δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = 2 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \quad t \geq 0.$$

Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t , κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από τον ανθρώπινο οργανισμό είναι ίσος με το $1/10$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0=0$.

Λύση.

Έχουμε

$$f'(t) = (2 \cdot e^{-\frac{t}{100}})' = 2 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \left(-\frac{t}{100}\right)' = 2 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) = -\frac{1}{50} \cdot e^{-\frac{t}{100}}.$$

Ο ρυθμός απορροφήσεως του αντιβιοτικού από τον ανθρώπινο οργανισμό τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι:

$$f'(0) = -\frac{1}{50} \cdot e^{-\frac{0}{100}} = -\frac{1}{50}.$$

Ζητάμε τώρα να βρούμε την τιμή του t για την οποία ισχύει, $f'(t) = \frac{1}{10} \cdot f'(0)$ δηλαδή,

$$-\frac{1}{50} \cdot e^{-\frac{t}{100}} = \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{50}\right) \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{100}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow -\frac{t}{100} = \ln \frac{1}{10} = -\ln 10 \Leftrightarrow t = 100 \cdot \ln 10 = 230,26.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.3.

Η απόδοση μιας συγκεκριμένης μηχανής «εισόδου-εξόδου» τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$E(t) = 2 - \frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)}$$

όπου $T_{in} = T_{in}(t)$ είναι η θερμοκρασία «εισόδου» και $T_{out} = T_{out}(t)$ η θερμοκρασία «εξόδου» σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$). Αν η θερμοκρασία T_{in} αυξάνεται με ρυθμό $6^{\circ}\text{C}/\text{min}$, ενώ η απόδοση $E(t)$ δεν μεταβάλλεται [δηλ. $E(t) = E$ για κάθε t], να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας T_{out} ως συνάρτηση του E .

Λύση.

Λύνοντας τη σχέση $E(t) = 2 - \frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)}$ ως προς $T_{out}(t)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $E(t) = E$ για κάθε t , παίρνουμε:

$$E(t) = 2 - \frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)} \Leftrightarrow \frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)} = 2 - E \Leftrightarrow T_{out}(t) = \frac{4(2-E)}{3} T_{in}(t).$$

Επομένως,

$$T'_{out}(t) = \frac{4(2-E)}{3} T'_{in}(t)$$

και επειδή $T'_{in}(t) = \frac{dT_{in}(t)}{dt} = 6^{\circ}\text{C}/\text{min}$ προκύπτει ότι

$$T'_{out}(t) = \frac{dT_{out}(t)}{dt} = \frac{4(2-E)}{3} \cdot 6 = 8(2-E)^{\circ}\text{C}/\text{min}.$$

Ασκήσεις.

4.6.1. Ένα σώμα κινείται σ' έναν άξονα, έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο t να δίνεται από τον τύπο

$$S(t) = 3t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 2t + 1. \text{ Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο } t \text{ και να προσδιορίσετε}$$

πότε το σώμα είναι ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος στις χρονικές αυτές στιγμές;

- 4.6.2.** Ένα έμβολο κινείται πάνω-κάτω στον κύλινδρο μιας νηξελομηχανής και η απομάκρυνσή του από την κορυφή του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $S(t)=3-2\eta\mu t$.
- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του εμβόλου για κάθε χρονική στιγμή t .
- β) Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές, κατά τις οποίες η ταχύτητα του εμβόλου γίνεται μηδέν. Τι συμβαίνει κατά τις χρονικές αυτές στιγμές;
- 4.6.3.** Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σ' έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $S(t)=s_0\eta\mu\omega t$, όπου t ο χρόνος και τα s_0, ω είναι σταθερές.
- α) Να βρείτε την ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t .
- β) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη του y .
- γ) Να αποδείξετε ότι, όταν η επιτάχυνση γίνει 0, τότε το μέτρο της ταχύτητας παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.
- 4.6.4.** Δύο συναρτήσεις f και g συνδέονται με τη σχέση $f(t)=2e^{3g(t)}+1$. Αν $g(1)=0$ και $g'(1)=1$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f όταν $t=1$.
- 4.6.5.** Μία σφαιρική μπάλα πάγου που βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας αρχίζει να λιώνει και η επιφάνειά της μειώνεται με ρυθμό $3\text{ cm}^2/\text{min}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της διαμέτρου της μπάλας τη χρονική στιγμή που η διάμετρος ισούται με 5 cm (η συνολική επιφάνεια σφαίρας διαμέτρου d δίνεται από τον τύπο $E = \pi d^2$).
- 4.6.6.** Η ακτίνα $R(t)$ ενός κυκλικού στεφανιού μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $R(t)=3t^2+5t+1$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του κυκλικού στεφανιού, καθώς και της επιφάνειας που περικλείεται απ' αυτό κατά τη χρονική στιγμή $t = 10\text{ sec}$.
- 4.6.7.** Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει είναι $10\text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας $R(t)$ του μπαλονιού, όταν η διάμετρος του γίνεται ίση με 5 cm (ο όγκος σφαίρας ακτίνας r δίνεται από τον τύπο $E = \frac{4}{3}\pi r^3$).
- 4.6.8.** Από μια δεξαμενή βυθισμένου πλοίου διαρρέει πετρέλαιο. Ο όγκος του πετρελαίου, σε λίτρα, που απομένει στη δεξαμενή, t ώρες μετά την έναρξη της διαρροής, δίνεται από τον τύπο $V(t)=10 \cdot (20-t)^3$.
- α) Να βρείτε το ρυθμό μείωσης του όγκου του καυσίμου στη δεξαμενή μετά από 3 ώρες και μετά από 5 ώρες.
- β) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει η δεξαμενή.
- γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μείωσης του όγκου του καυσίμου στη δεξαμενή 1 ώρα πριν αυτή αδειάσει.
- 4.6.9.** Το κόστος παραγωγής, $K(x)$, και η είσπραξη, $E(x)$, από την κατασκευή x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις:

$$K(x)=x^3-80x^2+2400x+1 \text{ και } E(x)=300x,$$

αντίστοιχα. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους της βιομηχανίας, είναι θετικός.

- 4.6.10.** Μία μικρή βιομηχανία παράγει κλειδαριές για καμπίνες επιβατικών πλοίων. Το κόστος $K(x)$, σε €, για την παραγωγή x κλειδαριών σε μια ημέρα δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο:

$$K(x)=200+80x-\frac{x^2}{3}, \quad x \in [0, 200],$$

ενώ οι εισπράξεις της βιομηχανίας σε € από την πώληση των x κλειδαριών δίνονται από τη σχέση

$$E(x) = 70x + \frac{x^2}{2}.$$

- α) Να βρείτε τον αριθμό $K'(10)$ και να δώσετε την οικονομική ερμηνεία του.
- β) Να βρείτε το κόστος παραγωγής της 5^{ης} κλειδαριάς (σε κάποια ημέρα).
- γ) Να βρείτε τον αριθμό $E'(10)$ και να δώσετε την οικονομική ερμηνεία του.
- δ) Να βρείτε τον αριθμό $P'(10)$, όπου $P'(x)$ είναι το καθαρό κέρδος από την πώληση x κλειδαριών.
- ε) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο πλήθος κλειδαριών που μπορούν να κατασκευάζονται ημερησίως, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της εισπράξεως να είναι ίσοι.

4.6.11. Πληθυσμός μικροβίων ψεκάζεται με κάποιο χημικό μικροβιοκτόνο. Έστω ότι ο αριθμός $N(t)$ των μικροβίων που επιζούν t λεπτά (min) μετά τον ψεκασμό είναι ίσος με $N(t) = 10^4(100-t)^2$.

- α) Να βρείτε το μέσο αριθμό των μικροβίων που επιζούν στο χρονικό διάστημα $[0, 1]$ min και στο χρονικό διάστημα $[0, 10]$ min.
- β) Να βρείτε το ρυθμό μειώσεως των μικροβίων στο τέλος των 10 λεπτών.
- γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που ο πληθυσμός των μικροβίων εξαφανίζεται.

4.6.12. Η βάση μιας δεξαμενής καυσίμου σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου έχει μήκος 10 m και πλάτος 5 m. Η παροχή καυσίμου στη δεξαμενή είναι τέτοια, ώστε το ύψος z του νερού τη χρονική στιγμή t να δίνεται (σε cm) από τον τύπο $z(t) = 0,2t^2$. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του όγκου V του νερού τη χρονική στιγμή $t_0 = 5$ sec.

4.7 Μερική παράγωγος.

Σε πολλές εφαρμογές, η τιμή που χρησιμοποιούμε για τις συναρτήσεις εξαρτάται από την τιμή περισσότερων της μιας μεταβλητής. Για παράδειγμα ο όγκος ενός κυκλικού κυλίνδρου εκφράζεται συναρτήσει της ακτίνας του r και του ύψους του h μέσω του τύπου

$$V = \pi h r^2.$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται μία συνάρτηση, η οποία απεικονίζει τα στοιχεία του συνόλου $A = \{(r, h) : r \in \mathbf{R} \text{ και } h \in \mathbf{R}\}$ σε πραγματικούς αριθμούς μέσω του τύπου $V(r, h) = \pi h r^2$, ο οποίος για κάθε τιμή της ακτίνας του r και του ύψους του h μάς δίνει τον όγκο του κυκλικού κυλίνδρου. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα είναι $r = 1$ m και το ύψος του $h = 2$ m, τότε ο όγκος του κυκλικού κυλίνδρου θα είναι:

$$V(1, 2) = \pi \cdot 2 \cdot 1^2 \Rightarrow V(1, 2) = 2 \cdot \pi \text{ m}^3.$$

Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται **συναρτήσεις δύο μεταβλητών**. Όπως και για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έτσι και για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών θα θεωρούμε ότι έχουν ως πεδίο ορισμού τους το σύνολο όλων εκείνων των δυάδων για τις οποίες έχει νόημα η συνάρτηση. Γενικά έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, δηλαδή

$$A \subseteq \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ και } y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^2.$$

Μια διαδικασία μέσω της οποίας, σε κάθε δυνάδα (x, y) αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός z καλείται **συνάρτηση f δύο μεταβλητών** με πεδίο ορισμού το A . Ο αριθμός z θα συμβολίζεται με $f(x, y)$ ($z = f(x, y)$) και θα καλείται **εξαρτημένη μεταβλητή**, ενώ οι μεταβλητές x, y **ανεξάρτητες**. Ως σύνολο τιμών της συναρτήσεως ορίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών τιμών $z = f(x, y) \in \mathbf{R}$ για $(x, y) \in A$.

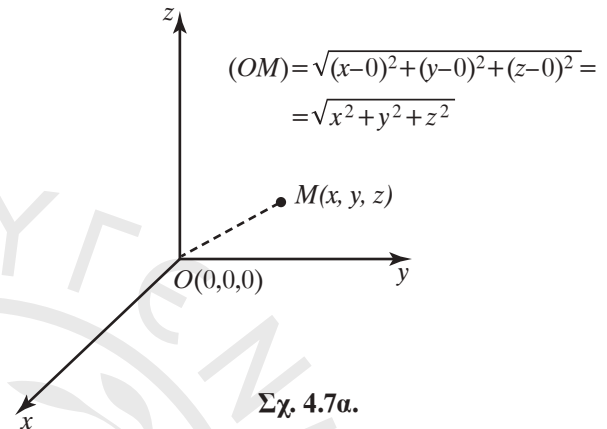
Στο προηγούμενο παράδειγμα όπου $V(r, h) = \pi hr^2$, η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το V , ενώ οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι r, h .

Τα παραπάνω γενικεύονται για συναρτήσεις τριών μεταβλητών, τεσσάρων μεταβλητών κ.ο.κ.. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να εκφράζει την απόσταση OM του σημείου $M(x, y, z)$ από την αρχή $O(0, 0, 0)$ ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων συντεταγμένων $Oxyz$ (σχ. 4.7α). Αφού $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει θα δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Η τιμή της f στο σημείο $(1, 2, 3)$ είναι προφανώς η απόσταση του σημείου $M(1, 2, 3)$ από την αρχή των αξόνων $O(0, 0, 0)$ και βρίσκεται ίση με:

$$f(1, 2, 3) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \text{ δηλαδή } (OM) = \sqrt{14}.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.1.

Να βρείτε και να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως δύο μεταβλητών

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y}.$$

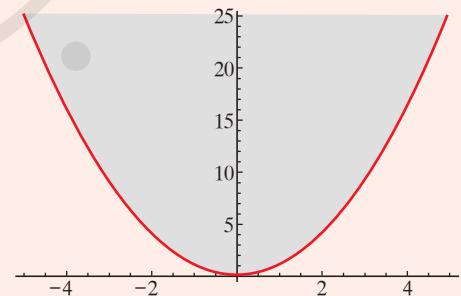
Ποιο είναι το σύνολο τιμών της παραπάνω συναρτήσεως;

Λύση.

Το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλες τις δυνάδες εκείνες (x, y) για τις οποίες ο τύπος της συναρτήσεως f μπορεί να εφαρμοσθεί και να δώσει ως αποτέλεσμα έναν πραγματικό αριθμό. Επομένως θα πρέπει

$$-x^2 + y \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2. \quad (4.7.1)$$

Αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ τότε είναι φανερό από την (4.7.1) ότι ως πεδίο ορισμού της συναρτήσεως παίρνουμε όλα τα σημεία εκείνα που βρίσκονται επάνω ή στο εσωτερικό της παραβολής $y = x^2$ (σχ. 4.7β).



Επί πλέον είναι προφανές ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών, αφού:

$$z = f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y} \geq 0$$

για κάθε ζεύγος (x, y) με $y \geq x^2$ και επί πλέον, για κάθε $z \geq 0$ μπορούμε να βρούμε (τουλάχιστον ένα) ζεύγος (x, y) με $y \geq x^2$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$z = \sqrt{-x^2 + y} \Leftrightarrow -x^2 + y = z^2$$

(θα μπορούσαμε, π.χ. να πάρουμε $x = 0, y = z^2$).

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$z = f(x, y) = 50 - x^2 - y^2 - xy. \quad (4.7.2)$$

Αν στην παραπάνω συνάρτηση κρατήσουμε σταθερή την ανεξάρτητη μεταβλητή y και παραγωγίσουμε ως προς x τότε θα έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{d}{dx} (50 - x^2 - y^2 - xy) = 0 - 2x - y = -2x - y.$$

Ο συμβολισμός $\frac{d}{dx} f(x, y)$ στον παραπάνω τύπο παριστάνει την παράγωγο της $z = f(x, y)$ ως προς x όταν κρατήσουμε το y σταθερό και ονομάζεται **μερική παράγωγος της f ως προς x** . Συνήθως, για τη μερική παράγωγο της f ως προς x , χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{ή} \quad f_x(x, y)$$

ή απλούστερα

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ή} \quad f_x \quad \text{ή} \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Επομένως, για τη συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο (4.7.2) μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x - y. \quad (4.7.3)$$

Για την τελευταία συνάρτηση, η οποία προφανώς αποτελεί μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τιμή της x σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο (x_0, y_0) . Για παράδειγμα η τιμή της $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x - y$ στο σημείο $(x_0, y_0) = (1, 2)$ είναι ίση με $-2 \cdot 1 - 2 = -4$. Ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει θα γράφεται ως:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{x=1, y=2} = -4 \quad \text{ή απλούστερα} \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(1, 2)} = -4.$$

Γενικά, η **μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x_0, y_0)** θα συμβολίζεται με

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{ή} \quad f_x(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{ή απλά} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}.$$

Από τον τρόπο που υπολογίζεται η μερική παράγωγος, μπορεί κάποιος εύκολα να αντιληφθεί ότι θα μπορούσε να εκφραστεί ως όριο μέσω του επόμενου τύπου (ο οποίος μοιάζει με τον τύπο ορισμού της παραγώγου μιας μεταβλητής, που αναφέρεται στην παράγραφο 4.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε τη μερική παράγωγο της f ως προς y , η οποία θα συμβολίζεται με:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{ή} \quad f_y(x, y)$$

ή απλούστερα

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ή} \quad f_y \quad \text{ή} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Έτσι για τη συνάρτηση (4.7.2) θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (50 - x^2 - y^2 - xy) = 0 - 0 - 2y - x = -2y - x,$$

ενώ αν θέλαμε να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο της f ως προς y στο σημείο $(x_0, y_0) = (2, 3)$, θα είχαμε:

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{(2,3)} = \left. \frac{\partial}{\partial y} (50 - x^2 - y^2 - xy) \right|_{(2,3)} = -2y - x \Big|_{(2,3)} = -2 \cdot 3 - 2 = -8.$$

Τα παραπάνω γενικεύονται για συναρτήσεις τριών ή τεσσάρων μεταβλητών ή και γενικότερα, όταν έχουμε n -μεταβλητές. Οι μερικές παράγωγοι είναι αυτές που παίρνουμε όταν σε μια συνάρτηση κρατήσουμε σταθερές όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές, εκτός από μία και παραγωγίσουμε μόνο ως προς αυτή. Στους υπολογισμούς των μερικών παραγώγων μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους ήδη γνωστούς κανόνες παραγωγίσεως για συναρτήσεις μιας μεταβλητής (βλ. παράγρ. 4.2).

Σημειώνουμε τέλος ότι, αφού η μερική παράγωγος μιας συναρτήσεως αποτελεί μια νέα συνάρτηση (δύο ή περισσότερων μεταβλητών), θα μπορούσε να ξαναπαραγωγισθεί ως προς τις μεταβλητές που περιλαμβάνει, λαμβάνοντας παραγώγους ανώτερης τάξεως. Για παράδειγμα, παραγωγίζοντας την (4.7.3) ως προς x και y παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-2x - y) = -1, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-2x - y) = -2.$$

Οι παραπάνω μερικές παράγωγοι συμβολίζονται

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Ομοίως θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-2y - x) = -1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-2y - x) = -2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.2.

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους της παρακάτω συναρτήσεως ως προς κάθε μεταβλητή

$$f(x, y) = e^x \eta \mu y.$$

Λύση.

Βρίσκομε πρώτα την $\frac{\partial f}{\partial x}$ θεωρώντας ότι το $\eta \mu y$ είναι σταθερό. Έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \eta \mu y) = \frac{\partial}{\partial x} (e^x) \cdot \eta \mu y = e^x \eta \mu y.$$

Στη συνέχεια βρίσκομε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ κρατώντας τη μεταβλητή x σταθερά, έτσι παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \eta \mu y) = e^x \frac{\partial}{\partial y} (\eta \mu y) = e^x \sigma \upsilon \nu y.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.3.

Να βρείτε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ της συναρτήσεως: $f(x, y) = e^x \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

Λύση

Βρίσκομε τη ζητούμενη παράγωγο θεωρώντας ως σταθερά τη μεταβλητή x και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (e^x \ln(x^2 + y^2 + 1)) = e^x \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x^2 + y^2 + 1)) = e^x \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + 1) \\ &= e^x \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot (0 + 2y + 0) = \frac{e^x}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2y = \frac{2ye^x}{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.4.

Ας υποθέσουμε ότι τρεις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 , βρίσκονται σε παράλληλη σύνδεση, οπότε η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

α) Να υπολογίσετε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$.

β) Ποια είναι η φυσική ερμηνεία της μερικής παραγώγου $\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$;

Λύση.

α) Με τη βοήθεια της σχέσεως $\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$, βρίσκομε την επόμενη έκφραση για την ολική αντίσταση $R_{ολ}$

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}.$$

Θεωρούμε τις μεταβλητές R_2, R_3 σταθερές και παραγωγίζοντας ως προς R_1 παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} &= R_2 R_3 \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \right) \\ &= R_2 R_3 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial R_1} (R_1) \cdot (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) - R_1 \cdot \frac{\partial}{\partial R_1} (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} \\ &= R_2 R_3 \cdot \frac{1 \cdot (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) - R_1 \cdot (R_2 + 0 + R_3)}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} \\ &= R_2 R_3 \cdot \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 - R_1 R_2 - R_1 R_3}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} = R_2 R_3 \cdot \frac{R_2 R_3}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} = \frac{R_2^2 R_3^2}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2}. \quad (4.7.4)$$

β) Όπως και στην περίπτωση της συνήθους παραγωγού, που είδαμε στην παράγραφο 4.6, η μερική παράγωγος θα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συναρτήσεως. Ωστόσο, επειδή τώρα η συνάρτηση περιέχει περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, ο ρυθμός μεταβολής αφορά στον τρόπο που μεταβάλλεται η συνάρτηση όταν μεταβληθεί η τιμή της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει (αυτή ως προς την οποία παραγωγίζουμε), ενώ όλες οι άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν αμετάβλητες.

Έτσι, η μερική παράγωγος $\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1}$ στο παρόν παράδειγμα, μας δίνει το ρυθμό μεταβολής της ολικής αντιστάσεως $R_{ολ}$ ως προς την R_1 , όταν κρατήσουμε τις αντιστάσεις R_2 και R_3 σταθερές. Έτσι θέλοντας να βρούμε το ρυθμό μεταβολής της ολικής αντιστάσεως $R_{ολ}$ ως προς την R_1 όταν $R_1 = 1 \text{ Ohm}$ και $R_2 = 2 \text{ Ohm}$, από τη σχέση (4.7.4) εύκολα προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} = \frac{1^2 \cdot 2^2}{(R_1 + 2 + 2R_1)^2} \Rightarrow \frac{\partial R_{ολ}}{\partial R_1} = \frac{4}{(3R_1 + 2)^2}.$$

Αν λοιπόν η R_1 έχει τιμή 1 Ohm και αυξηθεί, τότε ο ρυθμός αύξησης της ολικής αντιστάσεως $R_{ολ}$ θα είναι ίσος με $4 / (3 \cdot 1 + 2)^2 = 4 / 25$ (εφόσον φυσικά οι αντιστάσεις R_2 και R_3 διατηρήσουν τις τιμές τους $R_2 = 1 \text{ Ohm}$ και $R_3 = 2 \text{ Ohm}$).

Ασκήσεις.

4.7.1. Σε ένα επίπεδο, θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων xOy και ένα σταθερό σημείο $M_0(x_0, y_0)$. Να γράψετε τη συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση MM_0 ενός σημείου $M(x, y)$ από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως και ποιο το σύνολο τιμών της;

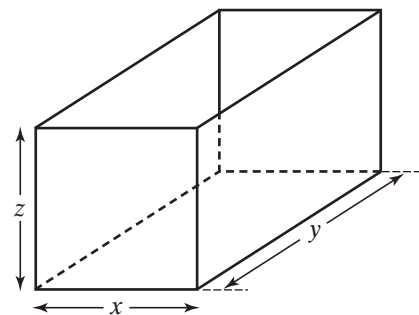
4.7.2. Μία δεξαμενή πλοίου έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με ακμές μήκους x, y, z (σχ. 4.7γ). Το επάνω μέρος της δεξαμενής είναι ανοικτό.

α) Να δώσετε μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τον όγκο της δεξαμενής.

β) Να δώσετε μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τη συνολική επιφάνεια της δεξαμενής.

γ) Αν ο όγκος της δεξαμενής είναι 5 m^3 να δώσετε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τη συνολική επιφάνεια της δεξαμενής.

δ) Αν η συνολική επιφάνεια της δεξαμενής είναι 10 m^2 να δώσετε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τον όγκο της δεξαμενής με χρήση μόνο των x και y .



Σχ. 4.7γ.

4.7.3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των εξής συναρτήσεων:

α) $f(x, y) = xy$

β) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

γ) $f(x, y, z) = e^x \sin(yz)$

δ) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$

ε) $f(x, y) = \sqrt{e^x - 1}$

στ) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

4.7.4. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων ως προς κάθε μεταβλητή.

α) $f(x, y) = x^2 + y^2$

β) $f(x, y) = ye^x$

γ) $f(x, y) = 4$

δ) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

ε) $f(x, y) = e^x \sin y$

στ) $f(x, y) = (xy)^5$

4.7.4. Στις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

α) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$

β) $f(x, y, z) = yze^x$

γ) $f(x, y, z) = e^x \sin(yz)$

δ) $f(x, y, z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

ε) $f(x, y) = (xy)^z$

στ) $f(x, y, z) = (xyz)^5$

4.7.6. Να βρείτε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial z}$ για τη συνάρτηση τριών μεταβλητών με τύπο

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$$

4.7.7. Ας υποθέσουμε ότι, σε κάποιο τόπο, η θερμοκρασία του νερού x μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας κατά την t μέρα του χρόνου, δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση δύο μεταβλητών $w(x, t) = \cos(5t - 2x)e^{0,2x}$.

Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}$ και να δώσετε τη φυσική τους ερμηνεία.

4.7.8. Η ένταση E ενός ηλεκτρικού πεδίου δίνεται με τη βοήθεια συναρτήσεως δυναμικού V από τον τύπο

$$E = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

όπου $V(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$.

β) Να υπολογίσετε την ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $(1, 1, 1)$.

4.7.9. Κατά τη λειτουργία μιας αντλίας της καρδιάς ενός ανθρώπινου οργανισμού, το μηχανικό έργο W που παράγεται δίνεται από τη σχέση

$$W(P, V, \delta, v, g) = PV + \frac{V\delta}{2g}v^2,$$

όπου P είναι η μέση πίεση του αίματος, V ο όγκος του αίματος που αντλείται σε μία χρονική μονάδα, δ το ειδικό βάρος του αίματος, v η μέση ταχύτητα του αίματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial W}{\partial P}, \frac{\partial W}{\partial V}, \frac{\partial W}{\partial \delta}$.

β) Αν μέλη της ιατρικής ομάδας της Πολεμικής Αεροπορίας θέλουν να εκτιμήσουν την ευαισθησία του έργου W (δηλ. πόσο εύκολα μεταβάλλεται η τιμή του) ως προς την επιτάχυνση g της βαρύτητας εξαιτίας των ελιγμών πτήσεων, ποια μερική παράγωγο θα έπρεπε να υπολογίσουν; Να υπολογίσετε την παράγωγο αυτή (θεωρώντας σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές που δεν σας ενδιαφέρουν). Τι παρατηρείτε; Εκφράστε την προσωπική σας άποψη.

4.7.10. Δίνεται ότι οι μεταβλητές x, y και r, θ συνδέονται μεταξύ τους με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta.$$

Να αποδείξετε ότι $\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} = r$.

4.7.11. Για τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y) = \frac{1}{2} - x^2 - y^2$ να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 x \frac{\partial f}{\partial y} = -2x(x + y^3).$$

4.7.12. Δίνεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών με τύπο $f(x, y) = 3x^3y^2 + 2xy^3 + x^2 + y^4$.

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

β) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξεως

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

γ) Να διαπιστώσετε ότι για κάθε x και y ισχύει η ισότητα $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$

(δηλ. δεν έχει καμιά σημασία η σειρά με την οποία γίνεται η παραγωγή για τις μεταβλητές x και y), ενώ δεν ισχύει αντίστοιχη ισότητα ανάμεσα στις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}.$$

4.8 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Παράγωγος της συναρτήσεως f στο σημείο x_0 .	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Πλευρικές παράγωγοι της f στο σημείο x_0 .	$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ (x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f).	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Παράγωγος και συνέχεια.	Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , είναι και συνεχής στο x_0 . Το αντίστροφο δεν ισχύει.
Παράγωγος και πράξεις (οι συναρτήσεις f και g των διπλανών τύπων θεωρούνται παραγωγίσιμες).	$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $(cf)'(x) = cf'(x)$ $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0)$
Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως.	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Θ.Μ.Τ.) και Θεώρημα Rolle.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β), τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \quad (\text{Θ.Μ.Τ.})$ Αν επί πλέον ισχύει $f(a) = f(\beta)$, τότε $f'(\xi) = 0$ (Θεώρημα του Rolle)
Συνεχής συνάρτηση f με μηδενική παράγωγο στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ .	Η f θα είναι σταθερή σε όλο το Δ .
Συνεχείς συναρτήσεις f, g με ίσες παραγώγους στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ .	Οι f και g θα διαφέρουν κατά μια σταθερά $c \in \mathbf{R}$, δηλαδή: $f(x) = g(x) + c, x \in \Delta$
Παράγωγος και μονοτονία.	α) Αν $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα) στο Δ. β) Αν $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα (φθίνουσα) στο Δ.
Η f , με πεδίο ορισμού το σύνολο A , παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο.	$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta$ (για κάποιο ανοικτό διάστημα Δ).
Η f , με πεδίο ορισμού το σύνολο A , παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο.	$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap \Delta$ (για κάποιο ανοικτό διάστημα Δ).

Θεώρημα του Fermat.	Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0)=0$.
Υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού A .	α) Τα άκρα του A (αν ανήκουν σ' αυτό). β) Τα εσωτερικά σημεία του A , στα οποία η f είτε δεν παραγωγίζεται (ενώ όμως είναι συνεχής), είτε παραγωγίζεται και η παράγωγός της μηδενίζεται (κρίσιμα σημεία της συναρτήσεως f).
Εύρεση ακροτάτων μιας συναρτήσεως f ορισμένης στο διάστημα (α, β) .	α) Αν $f'(x) > 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 . β) Αν $f'(x) < 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 .
Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου.	α) Αν $f'(x_0) = 0$ και ισχύει $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 . β) Αν $f'(x_0) = 0$ και ισχύει $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 .
Κυρτή συνάρτηση f στο Δ .	Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ ($f''(x_0) > 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ).
Κοίλη συνάρτηση f στο Δ .	Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ ($f''(x_0) < 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ).
Σημείο καμπής $A(x_0, f(x_0))$ μιας συναρτήσεως f .	Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
Κανόνας του L' Hospital.	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Μερική παράγωγος της $z = f(x, y)$ ως προς x .	$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ ή $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ή $f_x(x, y)$
Μερική παράγωγος της $z = f(x, y)$ ως προς y .	$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ ή $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ή $f_y(x, y)$

4.9 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(0) = 0, f'(0) = 1$, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,0)$ είναι η $y=0$.	Σ Λ

2.	Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0 .	Σ Λ
3.	Έστω x_0 ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως f παραγωγίσιμης στο x_0 . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , τότε θα ισχύει απαραίτητα $f'(x_0)=0$.	Σ Λ
4.	Τα κρίσιμα σημεία μιας συναρτήσεως f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .	Σ Λ
5.	Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.	Σ Λ
6.	Αν $f'(x) = (x-3)^2(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, τότε το $f'(-1)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .	Σ Λ
7.	Αν $f(x) = 2^{3x}$, τότε $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x}$.	Σ Λ
8.	Αν $f'(x) = (x^3 - 1)^3$, τότε η δέκατη παράγωγος της f στο 0 ισούται με μηδέν.	Σ Λ
9.	Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(\beta) > f(a)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) > 0$.	Σ Λ
10.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = 0$.	Σ Λ
11.	Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ισχύει $f'(x) > 0$ για $a < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 .	Σ Λ
12.	Αν για μια συνάρτηση ισχύει $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 .	Σ Λ
13.	Αν $f(x) = \eta \mu x$ και $g(x) = \sigma \nu x$ τότε, για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $[(f(x))^2 + (g(x))^2]' = 0.$	Σ Λ
14.	Αν $f(x) = x^3$, τότε $x(f(2x))' = f(2x)$.	Σ Λ
15.	Αν $f(x) = \eta \mu x$, $g(x) = \sigma \nu x$ τότε $f' = -f$ και $g'' = -g$.	Σ Λ
16.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell - 1$ και $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell + 1$, τότε $f'(x_0) = \ell$.	Σ Λ
17.	Η συνάρτηση $f(x) = x^{11} + x^9 + x^7 + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.	Σ Λ
18.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (a, \beta)$, τότε $f(a) = f(\beta)$.	Σ Λ
19.	Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.	Σ Λ
20.	Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.	Σ Λ
21.	Ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου μιας συναρτήσεως f σ' ένα σημείο σημαίνει ότι το σημείο αυτό είναι απαραίτητα τοπικό ακρότατο της f .	Σ Λ

22.	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε υπάρχει η παράγωγος της f/g στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \quad (\text{για } g(x_0) \neq 0).$	Σ Λ
23.	Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$	Σ Λ
24.	Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 5f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Τότε για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{5x}}$ ισχύει $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.	Σ Λ
25.	Αν η θέση ενός κινητού δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = 5 + t - t^3$, τότε η επιτάχυνσή του διατηρείται σταθερή.	Σ Λ
26.	Η μερική παράγωγος της συναρτήσεως $f(x, y) = 2x + 3y$ ως προς x είναι ίση με τη μερική παράγωγο της f ως προς y , για κάθε x, y .	Σ Λ
27.	Αν $f(x, y) = xy$ τότε $f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.	Σ Λ
28.	Αν $f(x, y) = x^2 y^3 + 2$, τότε $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$.	Σ Λ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της γραμμικής παραστάσεως C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση: α) $y = x + f'(0)$ β) $y = x f'(0)$ γ) $y = f'(0)$ δ) $y = x$
2.	Η παράγωγος της συναρτήσεως $f(x) = x^v$ είναι ίση με: α) x^{v-1} β) $v x^{v-1}$ γ) $v x^v$ δ) $(v-1) x^v$
3.	Η παράγωγος της συναρτήσεως $f(x) = \ln x$ είναι ίση με: α) $\ln x$ β) $-\frac{1}{x^2}$ γ) e^x δ) $\frac{1}{x}$
4.	Η παράγωγος της συναρτήσεως $f(x) = \eta \mu^2 x$ είναι ίση με: α) $f'(x) = 2 \sigma \nu x$ β) $f'(x) = 2 \eta \mu x$ γ) $f'(x) = 2 \eta \mu x \cdot \sigma \nu x$ δ) $f'(x) = 2 \sigma \nu x$
5.	Ποιος από τους επόμενους τύπους είναι σωστός; α) $(e^x)' = e^{x-1}$ β) $(\ln x)' = \frac{1}{ x }$ γ) $(x^a)' = ax^{a-1}$ δ) $(a^x)' = a^x$
6.	Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε: α) $f'(x_0) = 1$ β) $f'(x_0) < 0$ γ) $f'(x_0) > 0$ δ) $f'(x_0) = 0$

7.	Ποια από τις επόμενες συναρτήσεις δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της; α) $f(x)=e^x$ β) $f(x)=x^3$ γ) $f(x)=x^4$ δ) $f(x)=3^x$
8.	Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x $: α) Είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ δεν είναι και συνεχής σ' αυτό: β) Είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. γ) Είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. δ) Είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$.
9.	Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (a, β) και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Αν $f(a) = 0$ και $f(\beta) = 10$, τότε η εξίσωση $f(x) = 5$: α) Έχει μοναδική λύση στο (a, β) . β) Έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (a, β) . γ) Έχει το πολύ μία λύση στο (a, β) . δ) Δεν έχει λύση στο (a, β) .
10.	Τα κρίσιμα σημεία μιας συναρτήσεως f είναι: α) Θέσεις τοπικών ακροτάτων της f . β) Θέσεις τοπικών μεγίστων της f . γ) Υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων της f . δ) Θέσεις τοπικών ελαχίστων της f .
11.	Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$ και ισχύει $f(0) = 1$. Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$, τότε: α) Θα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. β) Θα ισχύει $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. γ) Θα ισχύει $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. δ) Θα ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.
12.	Ο ρυθμός μεταβολής της συναρτήσεως θέσεως ενός κινητού είναι ίσος με: α) Τη μέση επιτάχυνση του κινητού. β) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού. γ) Τη μέση ταχύτητα του κινητού. δ) Τη στιγμιαία επιτάχυνση του κινητού.
13.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x - 1)(x + 1)$, τότε: α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$. β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +1]$. γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +1]$. δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$.

14.	Αν $S(t)$ η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t είναι ίσες με: α) $v(t)=S'(t)$ και $a(t)=v'(t)$ αντίστοιχα. β) $v(t)=S''(t)$ και $a(t)=S'(t)$ αντίστοιχα. γ) $v(t)=S'(t)$ και $a(t)=v''(t)$ αντίστοιχα. δ) $v(t)=S''(t)$ και $a(t)=v'(t)$ αντίστοιχα.
15.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x-1)^3 + (x-2)^5$, τότε: α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$. β) Η f είναι κυρτή. γ) Η f είναι κοίλη. δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

4.10 Γενικές ασκήσεις.

4.10.1. Η τιμή $P(t)$ (σε €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 10 + 6 \frac{e^{-(t-3)}}{1 + 2e^{-(t-3)}}.$$

- α) Ποια είναι η φυσική σημασία του αριθμού $P(0)$;
- β) Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται.
- γ) Ποια θα είναι η τιμή του προϊόντος μετά από πάρα πολύ χρόνο;

4.10.2. Ένα κινητό κινείται επάνω σ' έναν οριζόντιο άξονα και η ταχύτητά του κατά τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$v(t) = (t-2)^2(t-3), \quad 0 \leq t \leq 4.$$

- α) Να βρείτε την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t .
- β) Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν.
- γ) Να βρείτε πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά.
- δ) Να βρείτε πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

4.10.3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$, $x \neq 0$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln|x| = \frac{1}{2}x$ έχει μία μοναδική λύση.
- δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln|x| = -x$ έχει μία μοναδική λύση.

4.10.4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3 - 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της f , αν υπάρχουν.
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a$, όπου $a > 3$ είναι αδύνατη.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ακριβώς 2 λύσεις. Στη συνέχεια να βρείτε τις λύσεις αυτές.

4.10.5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3(2-x)^3$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να εξετάσετε σε ποια διαστήματα η f είναι κυρτή και σε ποια κοίλη. Να διαπιστώσετε επίσης ότι οι ρίζες της f είναι σημεία καμπής.

β) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f , αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a>1$, είναι αδύνατη.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a<1$, έχει ακριβώς δύο λύσεις.

4.10.6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x - \frac{x}{2} + 1$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f , αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x - x + 2 = \ln 2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

4.10.7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=a^x+2^x$, $x \in \mathbf{R}$ όπου $0 < a \neq 1$.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$.

β) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι, αν η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0=0$, τότε η τιμή του a είναι ίση με $1/2$.

4.10.8. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1=0$, $x_2=1$ και $x_3=2$. Στη συνέχεια να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να εξετασθεί σε ποια διαστήματα είναι κυρτή και σε ποια κοίλη.

4.10.9. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=xe^x$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2e^x$.

α) Να διαπιστώσετε ότι ισχύουν οι τύποι $f'(x)=f(x)+e^x$, $g'(x)=f(x)+g(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος ν -οστής τάξεως της συναρτήσεως f δίνεται από τον τύπο $f^{(\nu)}(x)=(x+\nu)e^x$.

γ) Να βρείτε την παράγωγο ν -οστής τάξεως της συναρτήσεως g .

4.10.10. Ο ρυθμός της φωτοσυνθέσεως P ενός φυτού δίνεται από τον τύπο $P(I)=\frac{I}{\alpha+\beta I}$, $I \geq 0$, όπου

I η ένταση του φωτός και α, β θετικές σταθερές. Η παράγωγος του ρυθμού φωτοσυνθέσεως λέγεται *φωτοχημική ικανότητα* του φυτού.

α) Να βρείτε τη φωτοχημική ικανότητα του φυτού για μηδενική ένταση του φωτός.

β) Να βρείτε τον τύπο που δίνει τη φωτοχημική ικανότητα ενός φυτού.

γ) Να αποδείξετε ότι η φωτοχημική ικανότητα ενός φυτού είναι φθίνουσα συνάρτηση της εντάσεως I του φωτός.

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $P'(I)/[1-\beta P(I)]^2$ δεν εξαρτάται από το I .

4.10.11. Σε ένα πείραμα τύχης με δύο δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία (ε) ή αποτυχία (α), η πιθανότητα να εμφανισθεί το αποτέλεσμα ε είναι ίση με p ($0 < p < 1$), ενώ η πιθανότητα να εμφανισθεί το αποτέλεσμα α είναι ίση με $1-p$. Από τη θεωρία πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι, σ' ένα τέτοιο πείραμα, η πιθανότητα να εμφανισθούν x επιτυχίες σε ν επαναλήψεις του δίνεται από τον τύπο

$$f(p) = \binom{\nu}{\kappa} p^{\kappa} (1-p)^{\nu-\kappa}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω πιθανότητα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $p = \kappa / \nu$.
 β) Αν ρίχνεται ένα αμερόληπτο νόμισμα ($p = 1/2$) 10 φορές, ποιος είναι ο πιο πιθανός αριθμός εμφανίσεων της ενδείξεως «κεφαλή»;

4.10.12. Ένα άτομο βρίσκεται στη θέση A του σχήματος (σχ. 4.10α) και κινεί με σταθερή ταχύτητα 10 m το λεπτό μία κατακόρυφη ράβδο μήκους 0,2 m. Παρατηρώντας τη σκιά AB της ράβδου που σχηματίζεται λόγω μιας λάμπας που είναι τοποθετημένη σε ύψος h από το έδαφος, βρίσκει ότι η ταχύτητα, με την οποία αυξάνεται η σκιά είναι 1 m/min.

α) Να αποδείξετε ότι $x(t) = \frac{h-0,2}{0,2} s(t)$.

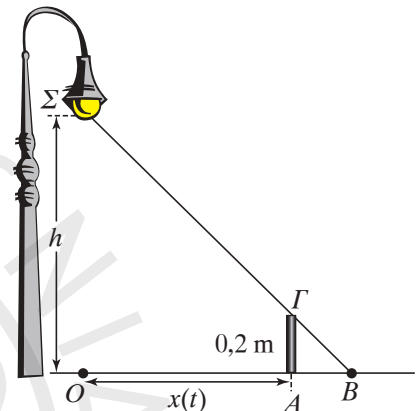
- β) Να βρείτε το ύψος h , στο οποίο είναι τοποθετημένη η λάμπα.

4.10.13. Η κατανάλωση ενός αυτοκινήτου όταν αυτό κινείται με ταχύτητα x km/h δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = a(50x^2 - \frac{x^3}{3}), \quad 0 \leq x \leq 150,$$

όπου a είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f όλες τις τιμές του $x \in \mathbf{R}$.
 β) Να βρείτε σε ποια ταχύτητα x ($0 \leq x \leq 150$) το αυτοκίνητο παρουσιάζει τη μεγαλύτερη κατανάλωση.



Σχ. 4.10α.

4.10.14. Μία σκάλα μήκους 2 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,2 m/sec (σχ. 4.10β).

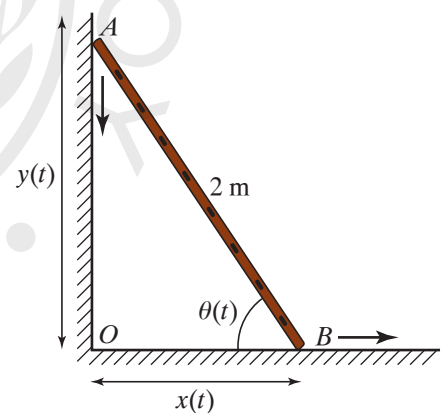
- α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $x'(t) = -2\theta'(t) \cdot \eta\mu\theta(t)$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} x'(t)$.

- γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή που η κορυφή A της σκάλας απέχει από το δάπεδο 1 m.

- δ) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας τη χρονική στιγμή που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 1 m.

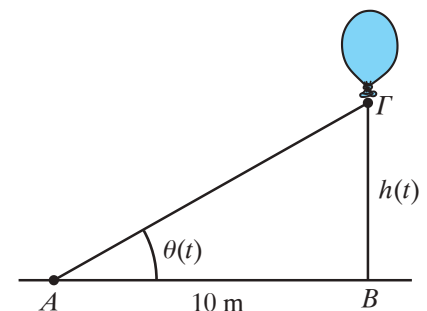
- ε) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας τη χρονική στιγμή που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 0,5 m.



Σχ. 4.10β.

4.10.15. Ένα μπαλόνι αφήνει το έδαφος σε απόσταση $AB = 10$ m από έναν παρατηρητή A και κινείται προς τα επάνω με σταθερή ταχύτητα 20 m/min. Έστω Γ η θέση του μπαλονιού τη χρονική στιγμή t , συμβολίζουμε με $\theta(t)$ τη γωνία που σχηματίζει η $A\Gamma$ με το έδαφος (σχ. 4.10γ).

- α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $h(t)$ και $\theta(t)$.



Σχ. 4.10γ.

β) Να αποδείξετε ότι $\theta'(t) = 2\sin^2\theta(t)$.

γ) Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία $\theta(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 10 m από το έδαφος.

δ) Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία $\theta(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση του μπαλονιού από τον παρατηρητή γίνεται 20 m.

4.10.16. Έστω μια κυρτή συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $x_1 < x_2$ δύο σημεία του Δ .

α) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ_1 τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = 2 \cdot \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

β) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ_2 τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_2) = 2 \cdot \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

(ύλη μηχανικών)

Κεφάλαιο 5: Μιγαδικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 6: Ολοκληρώματα

Κεφάλαιο 7: Διαφορικές εξισώσεις

Κεφάλαιο 8: Μετασχηματισμός Laplace

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η ιδέα του μιγαδικού αριθμού πρωτοεμφανίστηκε το 16^ο αιώνα στην προσπάθεια των μαθηματικών της εποχής εκείνης να λύσουν εξισώσεις 2ου βαθμού. Η επίλυση ορισμένων τέτοιων εξισώσεων δημιουργούσε ιδιαίτερες δυσκολίες, αφού η χρησιμοποίηση των μέχρι τότε γνωστών τύπων και μεθόδων οδηγούσε στο «παράδοξο» της εμφάνισης τετραγωνικών ριζών αρνητικών αριθμών. Για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιούσαν ένα ειδικό σύμβολο για την τετραγωνική ρίζα του αριθμού -1 (την οποία θεωρούσαν ως μη υπαρκτή, φανταστική ποσότητα) και εκτελούσαν πράξεις ανάλογες με τους πραγματικούς αριθμούς.

Οι μιγαδικοί αριθμοί μελετήθηκαν αρχικά από το γνωστό μαθηματικό του 16^{ου} αιώνα Gerolamo Cardano, οι κανόνες όμως στους οποίους υπακούουν δόθηκαν πολύ αργότερα από τον Euler στο περίφημο σύγγραμμά του «Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση».

Όπως και σε αρκετές άλλες περιπτώσεις, οι μιγαδικοί αριθμοί, δημιούργημα αρχικά της «μαθηματικής περιέργειας και φαντασίας», απέκτησε ραγδαία ιδιαίτερη πρακτική αξία και σήμερα αποτελούν πλέον βασικό εργαλείο της μηχανολογίας, της ηλεκτροτεχνίας, της φυσικής κ.λπ..

- 5.1** Η έννοια του μιγαδικού αριθμού – Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών.
- 5.2** Γεωμετρική παράσταση και μέτρο μιγαδικού.
- 5.3** Συζυγείς μιγαδικοί – Πολλαπλασιασμός και διαίρεση μιγαδικών.
- 5.4** Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.
- 5.5** Μέτρο και πράξεις – Όρισμα γινομένου και πηλίκου μιγαδικών.
- 5.6** Ο τύπος De Moivre.
- 5.7** Νιοστές ρίζες μιγαδικού αριθμού – Λύση εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
- 5.8** Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 5.9** Ερωτήσεις κατανόησης.
- 5.10** Γενικές ασκήσεις.

5.1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού – Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών.

Είναι γνωστό ότι, αν η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ της δευτεροβάθμιας εξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$, είναι αρνητική, τότε η εξίσωση αυτή δεν έχει ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x^2 - 6x + 10 = 0,$$

της οποίας η διακρίνουσα είναι ίση με $\Delta = -4$, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(x^2 - 6x + 9) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -1$$

και για να μπορέσουμε να επιλύσουμε την τελευταία, χρειαζόμαστε έναν αριθμό $y = x - 3$, για τον οποίο να ισχύει $y^2 = -1$. Γνωρίζουμε όμως ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός y με τέτοια ιδιότητα. Επομένως, η εξίσωση δεν έχει λύση στο **σύνολο των πραγματικών αριθμών**.

Η ανάγκη ευρέσεως ενός αριθμού ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση $y^2 = -1$, οδήγησε στην εισαγωγή της έννοιας του μιγαδικού αριθμού. Το νέο σύνολο, εφοδιασμένο με κατάλληλες πράξεις, αποτελεί μια διεύρυνση του συνόλου των πραγματικών αριθμών ονομάζεται **σύνολο των μιγαδικών αριθμών** και συμβολίζεται με **C**.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε «να επεκτείνουμε» το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών σ' ένα νέο σύνολο, που να έχει παρόμοιες πράξεις με το **R**. Τότε οι νέες πράξεις θα πρέπει να υπακούουν στις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με τις γνωστές πράξεις στο **R** και στο νέο σύνολο η εξίσωση $x^2 = -1$ να έχει λύση. Οι λύσεις της εξισώσεως αυτής θα συμβολίζονται με i (**φανταστική μονάδα**) και $-i$, δηλαδή θα έχουμε

$$i^2 = -1 \text{ και } (-i)^2 = -1.$$

Το νέο σύνολο, το οποίο όπως ήδη αναφέρθηκε ονομάζεται σύνολο των μιγαδικών αριθμών και συμβολίζεται με **C**, περιέχει ως στοιχεία:

α) Αθροίσματα της μορφής $a + \beta i$ με $a, \beta \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ (τα οποία ονομάζονται **καθαροί μιγαδικοί αριθμοί**).

β) Αθροίσματα της μορφής $a + 0i$ με $a \in \mathbf{R}$ τα οποία «ταυτίζονται» με τους αντίστοιχους πραγματικούς αριθμούς $a \in \mathbf{R}$ και

γ) στοιχεία της μορφής βi , $\beta \in \mathbf{R}^*$ (τα οποία ονομάζονται **φανταστικοί αριθμοί**).

Γενικά με τον όρο **μιγαδικός αριθμός** (ή απλώς μιγαδικός) εννοούμε μια έκφραση της μορφής $z = a + \beta i$ με $a, \beta \in \mathbf{R}$. Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται **πραγματικό μέρος** και συμβολίζεται με $\text{Re}(z)$, ενώ ο πραγματικός αριθμός β ονομάζεται **φανταστικό μέρος** και συμβολίζεται με $\text{Im}(z)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο σύνολο **C**, ένας πραγματικός αριθμός $a \in \mathbf{R}$ γράφεται στη μορφή

$$z = a + 0i \quad (\text{οπότε ισχύει } \text{Im}(z) = 0),$$

ενώ ένας φανταστικός αριθμός βi , $\beta \in \mathbf{R}^*$ γράφεται στη μορφή

$$z = 0 + \beta i \quad (\text{οπότε ισχύει } \text{Re}(z) = 0).$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι ίσοι αν και μόνο αν $a = \gamma$ και $\beta = \delta$, δηλαδή

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \text{ και } \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2).$$

Ειδικότερα, ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + \beta i$ είναι ίσος με το μηδέν αν και μόνο αν $a = 0$ και $\beta = 0$, δηλαδή

$$a + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \beta = 0$$

Έτσι:

α) Αν $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = -3 + 4i$, και $z_4 = -3 - 4i$, κανένας από τους αριθμούς αυτούς δεν είναι ίσος με έναν από τους άλλους, παρόλο που όταν τους εξετάζουμε ανά ζεύγη μπορεί να έχουν ίδιο το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος (όχι όμως και τα δύο συγχρόνως).

β) Ο μιγαδικός αριθμός $z = (a - 2) + (3\beta - 5)i$ είναι ίσος με το μηδέν αν και μόνο αν $a = 2$ και $\beta = 5/3$.

Οι πράξεις της προσθέσεως και της αφαιρέσεως μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι πράξεις με διώνυμα της μορφής $a + \beta x$ με $a, \beta \in \mathbf{R}$. Έτσι, αν $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε το άθροισμά τους και η διαφορά τους ορίζονται ως εξής:

$$\text{Άθροισμα: } (a + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (a + \gamma) + (\beta + \delta) i$$

$$\text{Διαφορά: } (a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta) i$$

Επομένως, για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς, προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών χωριστά. Για παράδειγμα,

$$(7 - 3i) + (2 + 8i) = (7 + 2) + (-3 + 8)i = 9 + 5i, \quad 5i + (6 - 2i) = (0 + 6) + (5 - 2)i = 6 + 3i.$$

Αφού

$$(a + \beta i) + (0 + 0i) = (0 + 0i) + (a + \beta i) = a + \beta i,$$

το **ουδέτερο στοιχείο** της προσθέσεως στο σύνολο των μιγαδικών είναι ο μηδενικός μιγαδικός αριθμός $0 + 0i = 0$. Επί πλέον, από την ισότητα

$$(a + \beta i) + ((-a) + (-\beta)i) = (a - a) + (\beta - \beta)i = 0 + 0i = 0,$$

είναι φανερό ότι, ο **αντίθετος** του μιγαδικού $z = a + \beta i$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $(-a) + (-\beta)i = -a - \beta i$, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $-z$.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή αξίζει να αναφερθεί ότι, σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς, δύο μιγαδικοί αριθμοί δεν διατάσσονται σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά μεγέθους. Έτσι αν $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε είτε θα ισχύει $z_1 = z_2$, είτε $z_1 \neq z_2$. Στη δεύτερη περίπτωση όμως, δεν υπάρχει κάποιος κανόνας, με βάση τον οποίο να αποφασίζουμε κατά πόσο ο αριθμός z_1 είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τον αριθμό z_2 (εκτός αν $\beta = \delta = 0$, οπότε η σύγκριση γίνεται ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.1.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β έτσι ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = (a + \beta - 5) + 4i$ και $z_2 = (2a - 3) + (a + \beta)i$ να είναι ίσοι.

Λύση.

Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι ίσοι, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \beta - 5 = 2a - 3 \\ a + \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + \beta = 2 \\ a + \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 6 \\ a + \beta = 4. \end{cases}$$

Άρα $\beta = 3$ και $a = 1$. Για τις τιμές αυτές έχουμε $z_1 = z_2 = -1 + 4i$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.2.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $a, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ με $\gamma \neq 0$ ισχύει $\frac{a}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{\gamma}$, να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2(a + \beta) + (\beta - a)\gamma i$ και $z_2 = 5a + 2i$ είναι ίσοι.

Λύση.

Αν θέσουμε $\frac{a}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{\gamma} = k$, θα έχουμε

$$\frac{a}{2} = k \Leftrightarrow a = 2k, \quad \frac{\beta}{3} = k \Leftrightarrow \beta = 3k \quad \text{και} \quad \frac{2}{\gamma} = k \Leftrightarrow \gamma = \frac{2}{k}.$$

$$\text{Επομένως } z_1 = 2(a + \beta) + (\beta - a)\gamma i = 2(2k + 3k) + (3k - 2k)\frac{2}{k}i = 10k + k\frac{2}{k}i = 10k + 2i,$$

$$z_2 = 5a + 2i = 5 \cdot 2k + 2i = 10k + 2i$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Ασκήσεις.

5.1.1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β , έτσι ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = (a + \beta - 4) + (a - \beta + 1)i$ και $z_2 = (2a - 4) + (a + \beta - 3)i$ να είναι:

- α) Και οι δύο φανταστικοί αριθμοί, β) Ίσοι,
γ) Και οι δύο πραγματικοί αριθμοί.

5.1.2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες ισότητες.

- α) $(a - 3) + 3i = 1 + (\beta - 1)i$ β) $(10a + 3\beta - 5) + (20 - 4\beta)i = 0$
γ) $(a - \beta) + (a + \beta)i = 7 - 5i$ δ) $(a^2 - \beta^2) + (a + \beta)i = 9 + 3i$

5.1.3. Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς.

- α) $(9 + 4i) + (5 - 7i)$ β) $(10a i + 3\beta - 5i) + (20a i - 4\beta + 3i) = 0$
γ) $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}i) + (-3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}i)$ δ) $(4 + 3i) - (6 - 4i) + (2 - 7i)$

5.1.4. Αν $x, y, z \in \mathbf{R}$ και ισχύει $(x + y) - (x - y)i = 5z + zi$, να αποδείξετε ότι $2x - y = z$.

5.1.5. Έστω ο μιγαδικός $z = (k - 5) + (\lambda - 4)i$, όπου k, λ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα k, λ ώστε:

- α) $z = -i$ β) $z = 3$
γ) $z \in \mathbf{R}$ και $\operatorname{Re}(z) = 2$ δ) $\operatorname{Re}(z) = 2$ και $\operatorname{Im}(z) = 4$

5.1.6. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $a, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ ισχύει $\frac{a}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5}$, να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3(\gamma - \beta) + 4(\beta - a)i$, $z_2 = a + \beta i$, $z_3 = a + 2(\gamma - a)i$ είναι ίσοι.

5.1.7. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = 3 + 4i$. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει:

- α) $z + z_3 = z_1 + z_2$ β) $z + \operatorname{Re}(z_3) = z_1 + z_2$ γ) $z + z_3 = \operatorname{Re}(z_1 + z_2) - \operatorname{Im}(z_1 + z_2)$

5.2 Γεωμετρική παράσταση και μέτρο μιγαδικού.

Είναι γνωστό ότι, τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να τους αντιστοιχίσουμε σε σημεία ενός άξονα, ο οποίος ονομάζεται *άξονας των πραγματικών αριθμών*. Οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i$ μπορούν να απεικονισθούν σε σημεία $M(a, \beta)$ του Καρτεσιανού επιπέδου και αντίστροφα¹ (σχ. 5.2α). Το σημείο M ονομάζεται *εικόνα* του μιγαδικού αριθμού z και θα συμβολίζεται με $M(a, \beta)$ ή $M(z)$ ή απλώς $a + \beta i$. Το επίπεδο, επάνω στο οποίο σημειώνονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών ονομάζεται *μιγαδικό επίπεδο* ή *επίπεδο Gauss*. Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται *πραγματικός άξονας* και ο κατακόρυφος *φανταστικός άξονας*.

Στο σχήμα 5.2β δίνεται η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του αριθμού $z = -3 + 2i$.

Η απόσταση της αρχής των αξόνων $O(0,0)$ από το σημείο $M(a, \beta)$, που είναι η εικόνα του $z = a + \beta i$, (σχ. 5.2γ) ονομάζεται *μέτρο* (ή απόλυτη τιμή) του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $|z|$, δηλαδή

$$|z| = |a + \beta i| = \sqrt{a^2 + \beta^2}.$$

Έτσι, για τον αριθμό $z = -3 + 2i$ θα έχουμε

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Η έννοια του μέτρου έχει μια ενδιαφέρουσα πρακτική ερμηνεία στην ηλεκτροτεχνία. Η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος RLC , ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός

$$z = R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right),$$

όπου ω ο παλμός, $\text{Re}(z) = R$ η ωμική αντίσταση και $\text{Im}(z) = L\omega - \frac{1}{C\omega}$

η αντίσταση που οφείλεται στην αυτεπαγωγή L και στη χωρητικότητα C . Το μέτρο αυτού του μιγαδικού δίνεται από τον τύπο:

$$|z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

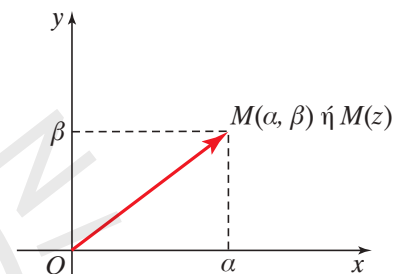
και εκφράζει τη λεγόμενη *εμπέδηση* του κυκλώματος.

Η απεικόνιση μιγαδικών αριθμών σε σημεία του Καρτεσιανού επιπέδου, μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε τους μιγαδικούς στις διανυσματικές ακτίνες των σημείων αυτών. Έτσι στο μιγαδικό $z = a + \beta i$ αντιστοιχίζουμε τη *διανυσματική ακτίνα* $\overline{OM}$. Είναι φανερό ότι

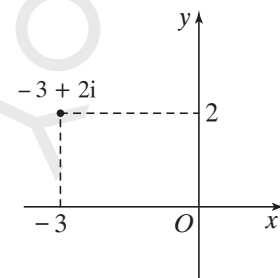
$$|\overline{OM}| = \sqrt{a^2 + \beta^2} = |z|,$$

δηλαδή το μήκος της διανυσματικής ακτίνας $\overline{OM}$ ισούται με το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z .

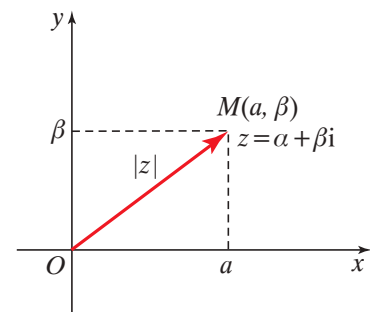
Με τη βοήθεια των διανυσματικών ακτίνων των μιγαδικών μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά το άθροισμα και τη διαφορά των



Σχ. 5.2α.



Σχ. 5.2β.



Σχ. 5.2γ.

1. Η βασική ιδέα της αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών με χρησιμοποίηση σημείων του επιπέδου, οφείλεται στον Jean Robert Argand (1806).

ανισότητα για μιγαδικούς αριθμούς.

Από το σχήμα 5.2θ είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM'}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε τον επόμενο ισχυρισμό:

Η απόσταση των σημείων M_1 και M_2 , που είναι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα, είναι ίση με το μέτρο της διαφοράς $z_1 - z_2$.

Η παραπάνω διαπίστωση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, αν δοθεί ένας μιγαδικός αριθμός $z_0 = x_0 + y_0i$, του οποίου η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ένας θετικός αριθμός r , τότε:

Η εξίσωση $|z - z_0| = r$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r .

Έτσι, για να βρούμε την αναλυτική εξίσωση (της περιφέρειας) ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r (σχ. 5.2ι), μπορούμε να γράψουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r &\Leftrightarrow |x + yi - x_0 - y_0i| = r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |(x - x_0) + (y - y_0)i| = r \Leftrightarrow \\ &\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που το κέντρο K του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$, θα έχουμε $x_0 = y_0 = 0$, οπότε η εξίσωση του κύκλου γίνεται

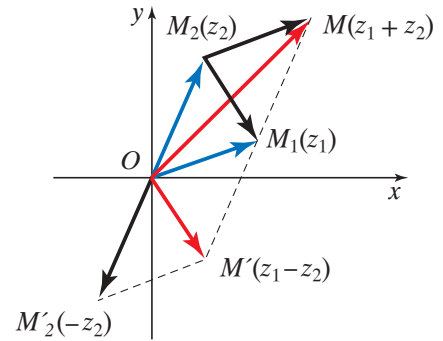
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |z| = r.$$

Είναι φανερό ότι

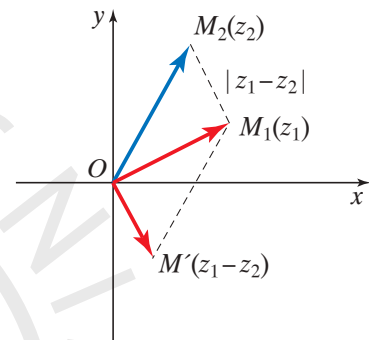
οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z| > r$ είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου $|z| = r$,

ενώ

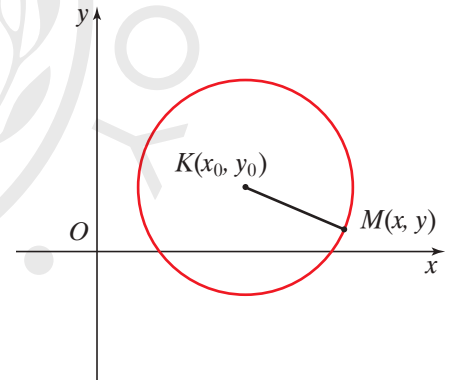
οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z| < r$ είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου $|z| = r$.



Σχ. 5.2η



Σχ. 5.2θ.



Σχ. 5.2ι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.1.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = (x-1) + (y-1)i$ με $|z| = 5$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,1)$ και ακτίνα $r = 5$.

Λύση.

$$\text{Έχουμε } |z| = 5 \Leftrightarrow |(x-1) + (y-1)i| = 5 \Leftrightarrow |(x+yi) - (1+i)| = 5 \Leftrightarrow |w - (1+i)| = 5,$$

όπου θέσαμε $w = x+yi$. Επομένως, τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,1)$ (το οποίο είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_0 = 1+i$) και ακτίνα $r = 5$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου αυτού βρίσκεται άμεσα ως εξής

$$|(x-1) + (y-1)i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.2.

Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τους οποίους ισχύει $|z+4| = |z+2-2i|$.

Λύση.

$$\text{Έχουμε } |z+4| = |z+2-2i| \Leftrightarrow |z-(-4)| = |z-(-2+2i)|.$$

Έστω $A(-4,0)$, $B(-2,2)$ οι εικόνες των μιγαδικών $-4+0i$, $-2+2i$, αντίστοιχα και $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x+yi$, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2α.

Το μέτρο της διαφοράς $|z-(-4+0i)|$ παριστάνει την απόσταση (AM) , ενώ το μέτρο της διαφοράς $|z-(-2+2i)|$ παριστάνει την απόσταση (BM) . Επειδή θέλουμε

$$|z-(-4+0i)| = |z-(-2+2i)|,$$

θα πρέπει $(AM) = (MB)$. Άρα, τα σημεία M ισαπέχουν από τα άκρα $A(-4,0)$, $B(-2,2)$ του τμήματος AB , οπότε βρίσκονται στη μεσοκάθετο ε του AB .

Αντίστροφα, για κάθε σημείο $M(x, y)$ της μεσοκαθέτου ε ισχύει $(AM) = (MB)$, οπότε

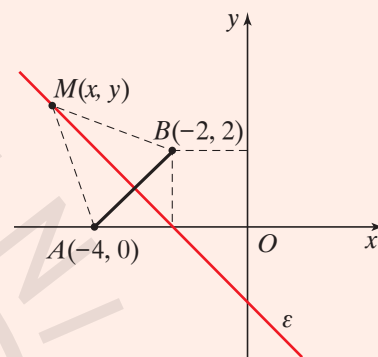
$$|z-(-4+0i)| = |z-(-2+2i)|.$$

Σημειώνεται ότι ισχύει γενικότερα το επόμενο αποτέλεσμα.

Αν z_1, z_2 είναι δύο δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 \neq z_2$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z-z_1| = |z-z_2|,$$

βρίσκονται επάνω στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους αριθμούς z_1 και z_2 .



Σχ. 5.2α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.3.

Τα σημεία τα οποία φωτίζονται από ένα φάρο Α περιγράφονται από τις εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z-4+2i| < 3$. Τα σημεία, τα οποία φωτίζονται από ένα δεύτερο φάρο Β περιγράφονται από τις εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z-8-2i| < 4$. Να βρείτε σημεία:

α) Τα οποία φωτίζονται από το φάρο Α και από το φάρο Β και

β) τα οποία φωτίζονται μόνο από το φάρο Α και όχι από το φάρο Β.

Λύση.

α) Σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε, μας ενδιαφέρουν οι εικόνες $M(z)$ των σημείων, τα οποία ικανοποιούν τις επόμενες δύο συνθήκες

$$|z - (4 - 2i)| < 3, \quad |z - (8 + 2i)| < 4.$$

Έστω $K(4, -2)$, $A(8, 2)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $4 - 2i$, $8 + 2i$ αντίστοιχα. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z - (4 - 2i)| < 3$$

θα βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(4, -2)$ και ακτίνα $r=3$, ενώ οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει

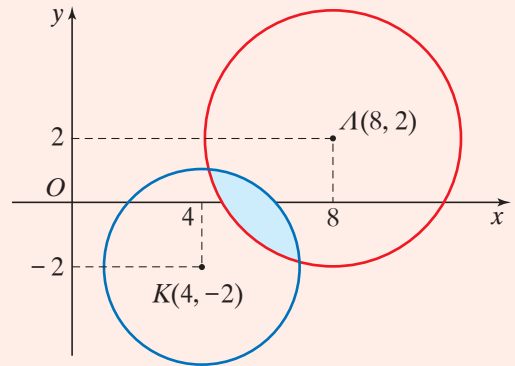
$$|z - (8 + 2i)| < 4$$

βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $A(8, 2)$ και ακτίνα $r=4$. Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z - (4 - 2i)| < 3$ και $|z - (8 + 2i)| < 4$ θα βρίσκονται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος 5.2ιβ.

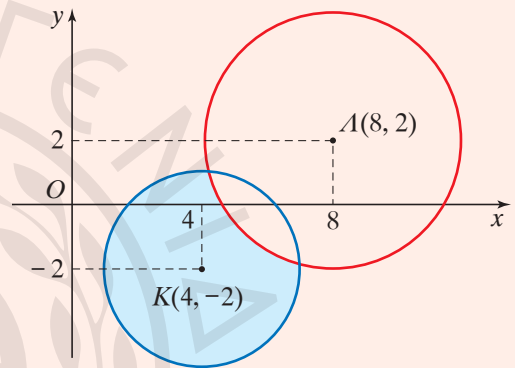
β) Εδώ, μας ενδιαφέρουν οι εικόνες $M(z)$ των σημείων, τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες

$$|z - (4 - 2i)| < 3, \quad |z - (8 + 2i)| \geq 4.$$

Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει η πρώτη συνθήκη θα βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(4 - 2)$ και ακτίνα $r=3$, ενώ οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει $|z - (8 + 2i)| \geq 4$ θα βρίσκονται στο εξωτερικό (ή επάνω στην περιφέρεια) του κύκλου κέντρου $A(8, 2)$ και ακτίνας $r = 4$. Συνεπώς, οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύουν και οι δύο συνθήκες είναι αυτές που βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο μηνίσκο του σχήματος 5.2ιγ.



Σχ. 5.2ιβ.



Σχ. 5.2ιγ.

Ασκήσεις.

5.2.1. Να υπολογίσετε το μέτρο των επομένων μιγαδικών αριθμών.

α) $3 + 4i$

β) $3 - 4i$

γ) $-3 + 4i$

δ) $-3 - 4i$

ε) $2\sqrt{3} - \sqrt{13}i$

στ) $-2\sqrt{3} + \sqrt{13}i$

ζ) $-\sqrt{13} + 2\sqrt{3}i$

η) $\sqrt{13} + 2\sqrt{3}i$

θ) $(-4 + 3i) - (-5 + 4i) + (2 + 3i)$

5.2.2. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των επομένων μιγαδικών.

α) $2(z_1 + z_2)$

β) $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$

γ) $\frac{1}{3}(2z_1 + z_2)$

5.2.3. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

α) $|z|=16$ β) $|z+3|=1/2$ γ) $|z-2+i|=1$ δ) $|z-i|=|z-1|$

5.2.4. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=4+3i$, $z_2=-5+2i$ και $z=x+yi$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|z-2z_1|=|z-3z_2|$. Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y .

5.2.5. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=3-2i$, $z_2=-1+i$ και $z=x+yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|z-z_2|=|z_1+z_2|$. Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y .

5.2.6. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$ (όπου x, y πραγματικοί αριθμοί) με $|z|=3$ και ο μιγαδικός w , για τον οποίο ισχύει $w=z+5$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

5.2.7. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

α) $|z-1+3i| \geq 5$
 β) $|z| \leq |z-1+3i|$
 γ) $|z-1+3i| \geq 5$ και $|z| \leq |z-1+3i|$ συγχρόνως.
 δ) $|z-1+3i| < 5$ και $|z-1+3i| \geq 3$ συγχρόνως.
 ε) $|z| \geq |z-1+3i|$ και $|z-1+3i| \leq |z+1+3i|$ συγχρόνως.
 στ) $|z-1+3i| \leq 3$ και $|z| \geq |z-1+3i|$ συγχρόνως.

5.2.8. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=1+i$, $z_2=1+5i$, $z_3=5+5i$, και $z=x+yi$. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό $z=x+yi$, ο οποίος ισαπέχει και από τους τρεις αριθμούς z_1, z_2, z_3 , δηλαδή το μιγαδικό για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|.$$

Να βρείτε επίσης τη σχέση που ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y .

5.2.9. Έστω $z_1=5+3i$ και z_2 ένας μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει $|z_2|=8$. Κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας, να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παραστάσεως $|z_1+z_2|$.

5.2.10. Δύο πλοία A και B κινούνται προς τον ίδιο προορισμό, η θέση του οποίου περιγράφεται (επάνω σε ένα χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_0=7+9i$. Κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, το πλοίο A βρίσκεται σε μια θέση που αντιστοιχεί στην εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_1=-2+3i$, ενώ το πλοίο B σε μια θέση που αντιστοιχεί στην εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_2=3-2i$.

α) Να βρείτε την απόσταση των δύο πλοίων (επί του χάρτη).

β) Ποιο από τα δύο πλοία βρίσκεται πλησιέστερα στον προορισμό του τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή;

5.2.11. Η θέση τεσσάρων κινητών τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από τους μιγαδικούς:

$$z_1 = \sin t + i \eta \mu t, z_2 = \sin t - i \eta \mu t, z_3 = -\sin t + i \eta \mu t \text{ και } z_4 = -\sin t - i \eta \mu t.$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t , τα 4 κινητά ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων.

νων και πιο συγκεκριμένα ότι κινούνται επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας 1.

- β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των κινητών 1 και 3 είναι ίδια με την απόσταση των κινητών 2 και 4.
 γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των κινητών 1 και 2 είναι ίδια με την απόσταση των κινητών 3 και 4.
 δ) Να βρείτε μία τιμή του t , για την οποία οι αποστάσεις των κινητών 1 και 2, 2 και 4, 4 και 3, 3 και 1 είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

5.2.12. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$, $z_3 = 1$, και $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα x, y , έτσι ώστε να ισχύει $|z - z_1| = 3$ και $|z - z_2| = |z - z_3|$.

5.3 Συζυγείς μιγαδικοί – Πολλαπλασιασμός και διαίρεση μιγαδικών.

Ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών γίνεται και πάλι όπως ο πολλαπλασιασμός διωνύμων της μορφής $a + \beta x$ με $a, \beta \in \mathbf{R}$, όπου φυσικά για το x ισχύει $x^2 = -1$. Έτσι, αν $z_1 = a + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}(a + \beta i)(\gamma + \delta i) &= a \cdot (\gamma + \delta i) + \beta i \cdot (\gamma + \delta i) = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + (\beta i) \cdot (\delta i) = \\ &= a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i - \beta\delta = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma) i,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(a + \beta i)(\gamma + \delta i) = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma) i.$$

Για παράδειγμα,

$$(5 - i)(3 + 4i) = 5(3 + 4i) - i(3 + 4i) = 15 + 20i - 3i - 4i^2 = (15 + 4) + (20 - 3)i = 19 + 17i.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τους μιγαδικούς $3 + 4i$ και $3 - 4i$, οι οποίοι έχουν *ίσα πραγματικά μέρη και αντίθετα φανταστικά μέρη*. Για το γινόμενο τους έχουμε:

$$(3 + 4i)(3 - 4i) = 3(3 - 4i) + 4i(3 - 4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 25.$$

Παρατηρούμε ότι, το γινόμενο δύο μιγαδικών μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου παραδείγματος είναι της μορφής $a + \beta i$ και $a - \beta i$ και ονομάζονται *συζυγείς μιγαδικοί*. Έτσι, αν $z = a + \beta i$, τότε ο συζυγής του, που συμβολίζεται με $\bar{z}$, είναι ο $z = a - \beta i$. Για παράδειγμα, ο συζυγής του $7 + 5i$ είναι ο $7 - 5i$, ο συζυγής του $8i$ είναι ο $-8i$, ενώ ο συζυγής του 3 είναι ο 3 .

Έστω $z = a + \beta i$ ένας μιγαδικός αριθμός. Τότε θα έχουμε

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{a - \beta i} = a + \beta i = z$$

$$z + \bar{z} = (a + \beta i) + (a - \beta i) = 2a = 2\operatorname{Re}(z),$$

$$z - \bar{z} = (a + \beta i) - (a - \beta i) = 2\beta i = 2i\operatorname{Im}(z)$$

και

$$z\bar{z} = (a + \beta i)(a - \beta i) = (a \cdot a - \beta \cdot (-\beta)) + (a \cdot (-\beta) + \beta \cdot a)i = a^2 + \beta^2 = |z|^2.$$

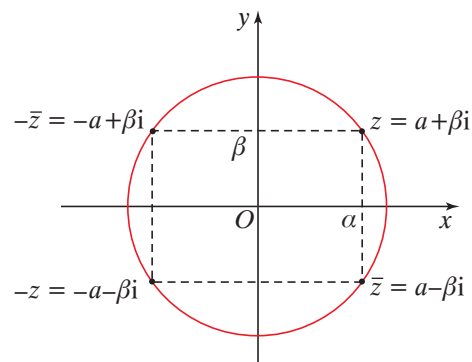
Επομένως, για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες¹.

1. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τις τρεις τελευταίες ισότητες, για κάθε μιγαδικό αριθμό z , οι ποσότητες $z\bar{z}$, $z + \bar{z}$, $(z - \bar{z})/i$, είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$\begin{aligned}\overline{(\bar{z})} &= z, & \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{z - \bar{z}}{2i}, & |z|^2 &= a^2 + \beta^2 = z\bar{z}.\end{aligned}$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη ιδιότητα είναι φανερό ότι:

Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $z = \bar{z}$.
Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $z = -\bar{z}$.



Σχ. 5.3α.

Από το σχήμα 5.3α μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|.$$

Οι προηγούμενες ισότητες μπορούν εύκολα να επαληθευτούν και με βάση τον ορισμό του μέτρου. Πράγματι, αν $z = a + \beta i$, θα έχουμε $-z = (-a) + (-\beta)i$ οπότε

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{a^2 + \beta^2} = |z|$$

Ομοίως διαπιστώνονται οι άλλες δύο ισότητες.

Για τους συζυγείς του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών z_1 και z_2 μπορούν να αποδειχτούν οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

Πράγματι, αν $z_1 = a + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$, θα έχουμε:

$$z_1 + z_2 = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i, \quad z_1 - z_2 = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + \gamma) - (\beta + \delta)i = (a - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = (a - \gamma) - (\beta - \delta)i = (a - \beta i) - (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

Σημειώνεται ότι, η πρώτη ιδιότητα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς.

Οι συζυγείς μιγαδικοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην εκτέλεση της πράξης της διαιρέσεως μιγαδικών. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ με $z_2 \neq 0$, δηλαδή το μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$, για τον οποίο ισχύει $z \cdot z_2 = z_1$. Ο αριθμός αυτός θα συμβολίζεται με $\frac{z_1}{z_2}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας $z \cdot z_2 = z_1$ με το $\bar{z}_2$, έχουμε:

$$zz_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_2 \Leftrightarrow z \cdot |z_2|^2 = z_1\bar{z}_2 \Leftrightarrow (x + yi)(\gamma^2 + \delta^2) = (a + \beta i)(\gamma - \delta i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\gamma^2 + \delta^2) + iy(\gamma^2 + \delta^2) = (a\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - a\delta)i,$$

οπότε

$$x(\gamma^2 + \delta^2) = a\gamma + \beta\delta \text{ και } y(\gamma^2 + \delta^2) = \beta\gamma - a\delta$$

ή ισοδύναμα

$$x = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \text{ και } y = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i.$$

Το δεξί μέλος της ισότητας αυτής μπορεί να προκύψει και με διαφορετικό τρόπο αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος $\frac{z_1}{z_2}$ με το συζυγή του παρονομαστή. Πράγματι,

$$\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(a + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i.$$

Για παράδειγμα,

$$\frac{2 + 3i}{5 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{10 + 4i + 15i + 6i^2}{5^2 + 2^2} = \frac{4 + 19i}{29} = \frac{4}{29} + \frac{19}{29}i.$$

Οι δυνάμεις μιγαδικών αριθμών ορίζονται όπως και οι αντίστοιχες των πραγματικών αριθμών. Έτσι, $z^1 = z$, $z^2 = zz$, $z^3 = z^2 z$ και, γενικά, για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ ορίζουμε

$$z^n = z^{n-1}z.$$

Για $z \neq 0$ θέτουμε

$$z^0 = 1 \text{ και } z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

Στο λογισμό με μιγαδικούς αριθμούς είναι χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίζουμε τις διαφορές δυνάμεις του i . Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} i^1 &= i, & i^2 &= -1, & i^3 &= i^2 i = -i, & i^4 &= i^3 i = -i^2 = 1, \\ i^5 &= i^4 i = i, & i^6 &= i^5 i = i i = -1, & i^7 &= i^6 i = -i, & i^8 &= i^7 i = (-i)i = 1 \text{ κ.λπ.} \end{aligned}$$

δηλαδή μετά το i^4 οι τιμές $1, -1, i, -i$ επαναλαμβάνονται κυκλικά. Έτσι, για τον υπολογισμό της δύναμης i^n , όπου n θετικός ακέραιος, αρκεί να γράψουμε τον εκθέτη n στη μορφή $4k + v$, $0 \leq v < 4$ (με τη βοήθεια της Ευκλείδειας διαιρέσεως διά του 4), οπότε θα έχουμε:

$$i^n = i^{4k+v} = i^{4k} i^v = (i^4)^k \cdot i^v = i^v, \quad 0 \leq v < 4.$$

Επομένως, αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, για τη δύναμη i^n μπορούμε να γράψουμε

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 4k \\ i & \text{αν } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{αν } n = 4k + 2 \\ -i & \text{αν } n = 4k + 3 \end{cases} \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2, \dots$$

Για παράδειγμα,

$$i^{38} = i^{4 \cdot 9 + 2} = i^{4 \cdot 9} \cdot i^2 = (i^4)^9 \cdot i^2 = 1(-1) = -1.$$

Τέλος, για τους συζυγείς του γινομένου, του πηλίκου και της δύναμης δύο μιγαδικών z_1 και z_2 μπορούν να αποδειχτούν οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ (για } z_2 \neq 0) \quad \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ας αποδείξουμε, αρχικά, την ιδιότητα $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, τότε θα έχουμε

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i} = (\alpha\gamma - \beta\delta) - (\alpha\delta + \beta\gamma)i$$

και

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (\alpha - \beta i)(\gamma - \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) - (\alpha\delta + \beta\gamma)i.$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Έστω τώρα $z = z_1/z_2$. Από την ισότητα $zz_2 = z_1$ συμπεραίνουμε, λόγω της ιδιότητας που υποδείξαμε προηγουμένως, ότι $\overline{z_1} = \overline{zz_2} = \overline{z} \cdot \overline{z_2}$, οπότε θα έχουμε $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{z} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)}$.

Η τρίτη ιδιότητα προκύπτει εύκολα με επαγωγή ως προς το φυσικό αριθμό n .

Σημειώνεται ότι, η πρώτη ιδιότητα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερους από δύο μιγαδικούς αριθμούς, δηλαδή για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \dots, z_n$, ισχύει

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.1.

Αν για τη σύνθετη αντίσταση z ενός κυκλώματος RLC ισχύει $|z - 2| = |z|$, να αποδείξετε ότι η ωμική αντίσταση $R = \operatorname{Re}(z)$ του κυκλώματος είναι ίση με 1 Ohm .

Λύση.

Έχουμε τη σχέση $|z - 2| = |z|$, από την οποία παίρνουμε διαδοχικά

$$|z - 2|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow (z - 2)\overline{(z - 2)} = z\overline{z} \Leftrightarrow (z - 2)(\overline{z} - 2) = z\overline{z} \Leftrightarrow -2z - 2\overline{z} + 4 = 0.$$

Άρα,

$$z + \overline{z} = 2 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.2.

Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , για τους οποίους ισχύει $z^2 = 3 + 4i$.

Λύση.

Αν θέσουμε $z = x + yi$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, θα έχουμε

$$(x + yi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}.$$

Με αντικατάσταση του $y = 2/x$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε την $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, η οποία για $x^2 = \omega$ δίνει $\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$. Από την τελευταία βρίσκουμε $\omega = 4$ και $\omega = -1$. Όμως, η δεύτερη λύση απορρίπτεται, γιατί $\omega = x^2 \geq 0$. Επομένως, $x^2 = 4$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x = 2$ ή $x = -2$.

Για $x = 2$ έχουμε $y = \frac{2}{x} = 1$, ενώ για $x = -2$ έχουμε $y = \frac{2}{x} = -1$. Άρα, $z = z_1 = 2 + i$ ή $z = z_2 = -2 - i$.

Οι μιγαδικοί $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = -2 - i$ ονομάζονται τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού $3 + 4i$. Γενικά, **τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού** $a + \beta i$ ονομάζεται κάθε μιγαδικός $z = x + yi$, για τον οποίο ισχύει $z^2 = a + \beta i$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.3.

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $P(z) = 0$, όπου $P(\cdot)$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, να αποδείξετε ότι θα ισχύει επίσης $P(\bar{z}) = 0$.

Λύση.

Έστω

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

με $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$. Αφού $P(z) = 0$ θα έχουμε

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

απ' όπου παίρνουμε διαδοχικά

$$\overline{P(z)} = 0 \Leftrightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = 0 \Leftrightarrow a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0.$$

Επομένως ισχύει ότι

$$P(\bar{z}) = 0.$$

Το αποτέλεσμα του παραδείγματος αυτού μπορεί να διατυπωθεί με λόγια ως εξής:

Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα ενός πολυώνυμου με πραγματικούς συντελεστές, τότε ο συζυγής του είναι επίσης ρίζα του ίδιου πολυωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.4.

Έστω ένας μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $z\bar{z} = 4i(\bar{z} - z)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Λύση.

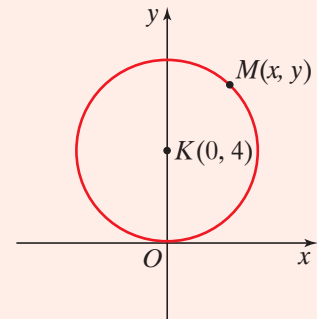
Αν θέσουμε $z = x + yi$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, θα είναι $\bar{z} = x - yi$, οπότε

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \text{ και } \bar{z} - z = -2yi.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} z\bar{z} = 4i(\bar{z} - z) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4i(-2yi) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -8yi^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 = 4^2. \end{aligned}$$

Άρα, τα σημεία $M(x,y) = M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,4)$ και ακτίνα $r = 4$ (σχ. 5.3β).



Σχ. 5.3β.

Ασκήσεις.

5.3.1. Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς $(-3+5i)(-5-2i)$, $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$ και $(1+i)(1+2i)(1+3i)$.

5.3.2. Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς $(1-i)^2 - (1+i)^2$, $-3i(i-3)^2$, $(1-i)^4 7i$.

5.3.3. Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \frac{2+3i}{4+i}$, $z_2 = \frac{2+5i}{-3i}$, $z_3 = \frac{3i}{i-7}$.

5.3.4. Αν $z_1 = 3+i$, $z_2 = 1-2i$, να βρείτε τους μιγαδικούς $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_1^2}{z_2^2}$, $\frac{z_1^2}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2^2}$.

5.3.5. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z , για τον οποίο ισχύει $2iz - z\bar{z} = -7 + 4i$.

5.3.6. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = k + 15i$, $z_2 = 5 + \lambda i$ όπου $k, \lambda \in \mathbf{R}$. Να βρείτε τις τιμές των k και λ , ώστε να ισχύει $z_1 = 5\bar{z}_2$.

5.3.7. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , ώστε να ισχύει $z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 5 + 2i$.

5.3.8. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 5i$, $z_2 = 1 + \sqrt{2}i$.

5.3.9. Να βρείτε τα αθροίσματα $i + i^2 + i^3 + i^4$, $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}$ και $i^5 + i^{10} + i^{15} + i^{20}$.

5.3.10. Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους μιγαδικούς $z_1 = \frac{2-3i}{(2+3i)(3-4i)}$, $z_2 = \frac{(7i-5)(4-2i)}{(8+5i)(3-2i)}$.

5.3.11. Αν $z = x + yi$ και ο αριθμός $u = (z-1)(\bar{z}-i)$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $x=y+1$.

5.3.12. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z^2, z^3, z^4 και $1-z+z^2$.

β) Να αποδείξετε ότι $1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6 = 1$.

5.3.13. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$, σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) $z(2+3i) = 4+i$,

β) $(z+1)(2-i) = 3-4i$.

5.3.14. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+16| = 4|z+1|$, να αποδείξετε ότι $|z| = 4$.

5.3.15. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|2z-i| = |iz+2|$, να αποδείξετε ότι $|z| = 1$.

5.3.16. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y , έτσι ώστε να ισχύει $\frac{x}{2-i} + \frac{iy}{2+i} = \frac{4}{1-2i}$.

5.3.17. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{a^2 + 1} + ai$, $a \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w = z^2$ βρίσκονται, για τις διάφορες τιμές του a , πάνω σε μία ευθεία.

5.3.18. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και w ο μιγαδικός αριθμός που ορίζεται από τον τύπο $w = \frac{i(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$. Να αποδείξετε ότι:

α) $w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2 + (y-1)^2} i$.

β) Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 1.

γ) Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 1.

5.4 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Ας θεωρήσουμε το μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z = a + \beta i$ και έστω $M(a, \beta)$ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Αν θ είναι **μία** από τις γωνίες με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox , τελική πλευρά την OM και φορά θετική, δηλαδή αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, μπορούμε να γράψουμε (σχ. 5.4α)

$$a = \rho \cos \theta, \beta = \rho \sin \theta, \rho = \sqrt{a^2 + \beta^2}.$$

Επομένως,

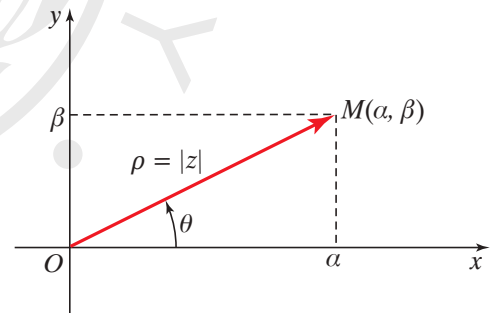
$$a + \beta i = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta i = \rho (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας ονομάζεται **τριγωνομετρική μορφή** του μιγαδικού αριθμού $z = a + \beta i$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Αν $z = a + \beta i$ είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός, τότε, **τριγωνομετρική μορφή** του z ονομάζεται η έκφραση

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta),$$

όπου

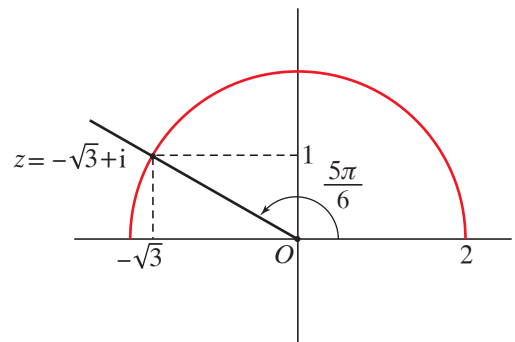
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + \beta^2}, \quad a = \rho \cos \theta \quad \text{και} \quad \beta = \rho \sin \theta.$$


Σχ. 5.4α.

Κάθε γωνία θ για την οποία ισχύει $a = \rho \cos \theta$ και $\beta = \rho \sin \theta$ ονομάζεται **όρισμα** του z . Από όλες τις τιμές της γωνίας θ , μία βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αυτή ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού και συμβολίζεται με $\text{Arg } z$. Κάθε άλλο όρισμα διαφέρει από το πρωτεύον κατά $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}^1$. Αξίζει να σημειωθεί ότι, το ζεύγος (ρ, θ) ορίζει τις λεγόμενες **πολικές συντεταγμένες** του μιγαδικού αριθμού z .

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το μιγαδικό $z = -\sqrt{3} + i$ (σχ. 5.4β), ο οποίος έχει μέτρο ίσο με

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$



Σχ. 5.4β.

1. Με $\mathbf{Z}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Για τη γωνία θ έχουμε

$$-\sqrt{3} = 2\cos\theta \quad \text{και} \quad 1 = 2\sin\theta,$$

οπότε

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

Επομένως $\text{Arg } z = 5\pi/6$, ενώ όλες οι γωνίες της μορφής $\theta = 2k\pi + 5\pi/6$ είναι ορίσματα του z . Έτσι, ο μιγαδικός αριθμός $z = -\sqrt{3} + i$ μπορεί να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής

$$z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού **δεν είναι μοναδική**, αφού για κάθε μιγαδικό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα ορίσματα (εκ των οποίων μόνο ένα είναι το πρωτεύον). Τέλος, σημειώνουμε ότι δεν ορίζεται όρισμα για το μιγαδικό αριθμό $z=0$.

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών: Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , δηλαδή:

$$\text{Αν } z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \text{ και } z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2), \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία} \\ z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Η γραφή ενός μιγαδικού αριθμού σε τριγωνομετρική μορφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν πρέπει να εργαστούμε με γινόμενα, πηλίκα και δυνάμεις μιγαδικών, αλλά και για να βρίσκουμε εύκολα τις λύσεις εξισώσεων της μορφής $z^n = z_w$, όπου $z_w \in \mathbb{C}$. Θα αναλύσουμε τις τεχνικές αυτές στην παράγραφο 5.7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.1

Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των μιγαδικών, για τους οποίους ισχύει:

α) $\text{Arg } z = \frac{\pi}{6}$

ε) $|z| < 3$ και $0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{\pi}{3} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}$

β) $\frac{\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{3}$

στ) $|z| < 3$ και $\frac{\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{3}$ ή $|z| > 3$ και $0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{6}$

γ) $|z| < 4$ και $\frac{\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{3}$

ζ) $\text{Arg}(z - 1 - 2i) = \frac{\pi}{6}$

δ) $|z| < 4$ και $0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{\pi}{3} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}$

Λύση.

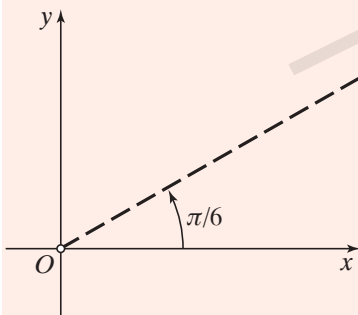
α) Οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται στη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 5.4γ η οποία σχηματίζει γωνία $\pi/6 = 30^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα, με εξαίρεση το σημείο O .

β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z κινούνται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος 5.4δ που περικλείεται από τις διακεκομμένες ημιευθείες, οι οποίες σχηματίζουν γωνίες $\pi/6 = 30^\circ$ και $\pi/3 = 60^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα, με εξαίρεση το σημείο O .

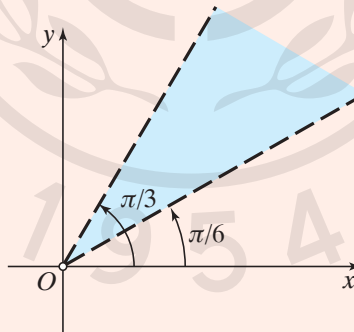
γ) Οι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|z| < 4$, είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $r=4$. Οι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $\frac{\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{3}$ είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τις διακεκομμένες ημιευθείες, του σχήματος 5.4ε οι οποίες σχηματίζουν γωνίες $\pi/6 = 30^\circ$ και $\pi/3 = 60^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύουν και οι δύο συνθήκες κινούνται στο γραμμωσιασμένο χωρίο του σχήματος 5.4ε.

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|z| < 4$ είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $r=4$. Οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{\pi}{3} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}$ είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον οριζόντιο άξονα και τη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 5.4στ που σχηματίζει γωνία $\pi/6 = 30^\circ$ με αυτόν, καθώς επίσης και τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα και τη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 5.4στ που σχηματίζει γωνία $\pi/3 = 60^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών, για τους οποίους ισχύουν οι δοθείσες συνθήκες κινούνται στο γραμμωσιασμένο χωρίο του σχήματος 5.4στ.

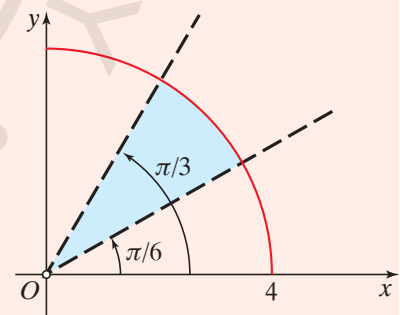
ε) Οι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|z| > 4$ είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $r=4$. Οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{\pi}{3} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}$ είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον οριζόντιο άξονα και της διακεκομμένης ημιευθείας του σχήματος 5.4ζ που σχηματίζει γωνία $\pi/6 = 30^\circ$ μ' αυτόν και τα εσωτερικά σημεία της γωνίας που ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα και τη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 5.4ζ που σχηματίζει γωνία $\pi/3 = 60^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών για τους οποίους ισχύουν οι δοθείσες συνθήκες κινούνται στο γραμμωσιασμένο χωρίο του σχήματος 5.4ζ.



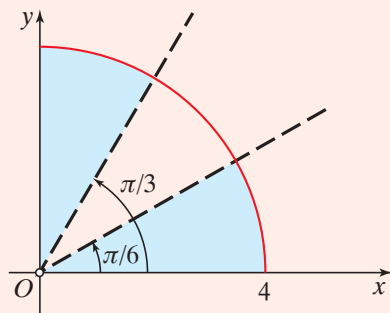
Σχ. 5.4γ.



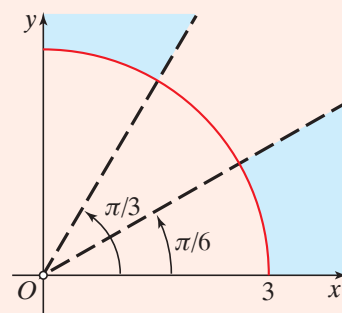
Σχ. 5.4δ.



Σχ. 5.4ε.



Σχ. 5.4στ.



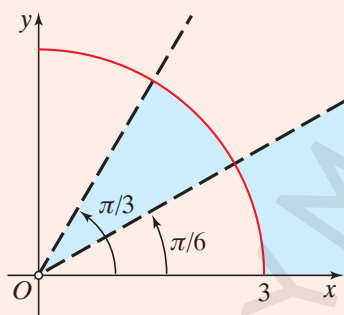
Σχ. 5.4ζ.

στ) Εργαζόμενοι όμοια με τα προηγούμενα ερωτήματα συμπεραίνουμε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύουν οι δοθείσες συνθήκες κινούνται στο γραμμωσκιασμένο χωρίο του σχήματος 5.4η.

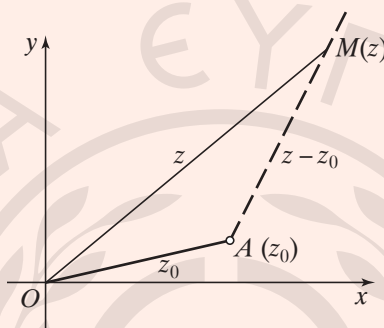
ζ) Έστω $M(z)$, $A(z_0)$ οι εικόνες δυο διαφορετικών μιγαδικών z , z_0 αντίστοιχα (σχ. 5.4θ). Τότε θα έχουμε:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA}$$

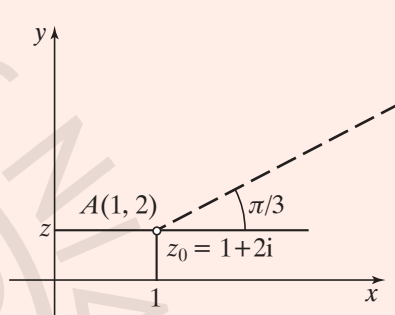
ή ακόμη $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z - z_0$ κινούνται στη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 5.4θ που ξεκινάει από το σημείο A (χωρίς όμως να το περιλαμβάνει). Επομένως, αν $z_0 = 1 + 2i$, οι εικόνες των μιγαδικών $z - 1 - 2i = z - z_0$ με όρισμα $\pi/3$ θα κινούνται στη διακεκομμένη ημιευθεία του σχήματος 5.4ι, η οποία σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\pi/3$, με εξαίρεση το σημείο A .



Σχ. 5.4η.



Σχ. 5.4θ.



Σχ. 5.4ι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4.2.

- α) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$.
 β) Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ το μιγαδικό αριθμό z , για τον οποίο γνωρίζουμε ότι

$$|z| = \sqrt{2} \text{ και } \text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$$

Λύση.

α) Ο μιγαδικός $z_1 = \sqrt{3} + i$ έχει μέτρο $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Θέλοντας να γράψουμε το μιγαδικό αριθμό $z_1 = \sqrt{3} + i$ σε τριγωνομετρική μορφή $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, για τη γωνία θ θα έχουμε

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } \sin\theta = \frac{1}{2},$$

οπότε $\theta = \pi/6$. Άρα,

$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right).$$

Ομοίως, αν $z_2 = \sqrt{3} - i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, θα έχουμε $|z_2| = 2$ ενώ επί πλέον, για τη γωνία θ πρέπει να ισχύει

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } \sin\theta = -\frac{1}{2},$$

οπότε

$$\theta = \frac{11\pi}{6}.$$

Άρα,
$$z_2 = \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

β) Αντικαθιστώντας στο γενικό τύπο της τριγωνομετρικής μορφής ενός μιγαδικού $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ παίρνουμε διαδοχικά

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i.$$

Ασκήσεις.

5.4.1. Έστω ο μιγαδικός $z = \frac{7-i}{3-4i}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα των x .

5.4.2. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους επόμενους μιγαδικούς αριθμούς.

α) $z_1 = 8i$ β) $z_2 = -5$ γ) $z_3 = 1+i$ δ) $z_4 = -2\sqrt{3} + 2i$

5.4.3. Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς.

α) $z_1 = 3(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$ β) $z_3 = 5 \left(\cos \left(-\frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{11\pi}{6} \right) \right)$

5.4.4. Ποια από τις επόμενες εκφράσεις αποτελεί τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z = -2 - 2i$;

α) $z = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$ β) $z = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$

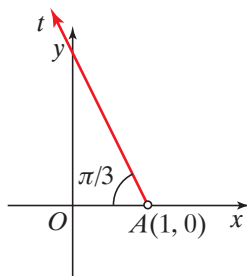
γ) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ δ) $z = 2 \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right]$

5.4.5. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς, για τους οποίους ισχύει:

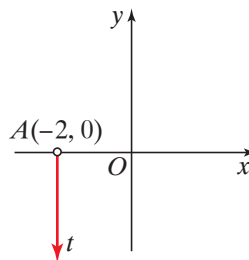
α) $|z| = 3$ και $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$ β) $\frac{3\pi}{2} < \text{Arg } z < \frac{2\pi}{3}$

γ) $\text{Arg } z = \frac{3\pi}{2}$ δ) $\text{Arg } (z-5) = \frac{3\pi}{4}$

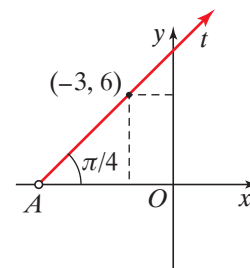
5.4.6. Να γράψετε τις σχέσεις που ικανοποιούν τα ορίσματα των μιγαδικών αριθμών z , των οποίων οι εικόνες κινούνται στις ημιευθείες At των σχημάτων 5.4α, 5.4β και 5.4γ.



Σχ. 5.4α.



Σχ. 5.4β.



Σχ. 5.4γ.

5.4.7. Ένα πλοίο A κινείται ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται (επάνω σε ένα χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_1(z_1)$, όπου $z_1 = 3 + 3i$. Ένα δεύτερο πλοίο B κινείται επίσης ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_2(z_2)$, όπου

$$z_2 = 2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι πορείες των δύο πλοίων.

5.4.8. Ένα πλοίο A κινείται ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται (επάνω σ' ένα χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_\pi(z_\pi)$, όπου $z_\pi = -1 + 3i$. Λόγω του κύματος που επικρατεί, το πλοίο παρασύρεται συνεχώς κατά τη διεύθυνση που περιγράφεται από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_\kappa(z_\kappa)$, όπου $z_\kappa = -4 + 2i$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η πραγματική (συνισταμένη) κίνηση του πλοίου με τον οριζόντιο άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

5.4.9. Σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με δύο αντιστάσεις z_1, z_2 που είναι παράλληλα συνδεδεμένες, για την ολική αντίσταση z ισχύει $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 + i$, να βρείτε την ολική αντίσταση του κυκλώματος σε τριγωνομετρική μορφή.

5.4.10. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2}{11 + i}$.

α) Να γράψετε το μιγαδικό αριθμό z στη μορφή $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbf{R}$.

β) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή το μιγαδικό αριθμό z .

γ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $r = \sqrt{2}$.

5.4.11. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , για τους οποίους ισχύει $w = \frac{z-3i}{1+i}$.

α) Αν $w = 2 - 2i$, να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού z .

β) Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

γ) Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x+y-3}{2}, \quad \operatorname{Im}(w) = \frac{-x+y-3}{2}$$

δ) Να βρείτε πού κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z όταν ισχύει $\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$.

5.5 Μέτρο και πράξεις – Όρισμα γινομένου και πηλίκου μιγαδικών.

Οι ιδιότητες που συνδέουν τις πράξεις των μιγαδικών αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, γινόμενο και πηλίκο) με τα μέτρα τους, είναι ίδιες ακριβώς με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απολύτων τιμών πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, στην παράγραφο 5.2 διαπιστώσαμε την ισχύ της **τριγωνικής ανισότητας για μιγαδικούς αριθμούς**

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

η οποία, ως γνωστό, ισχύει και για την απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών. Όσον αφορά στο μέτρο του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{για } z_2 \neq 0).$$

Για την απόδειξη της πρώτης σχέσεως, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αληθεύουν οι επόμενες ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

και ότι η τελευταία ισότητα προφανώς ισχύει.

Η δεύτερη ιδιότητα μπορεί να αποδειχτεί παρατηρώντας ότι

$$|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2|.$$

Γενικά, ισχύει ότι $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|$ ενώ για $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ προκύπτει $|z^n| = |z|^n$.

Σημειώνουμε ότι, αφού για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |z|$, θα έχουμε

$$\left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1.$$

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μιγαδικών μπορούν να διευκολυνθούν πολύ με τη χρήση της τριγωνομετρικής μορφής που εξηγήσαμε στην παράγραφο 5.4. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα (η απόδειξη παραλείπεται).

Αν $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad \rho_2 \neq 0.$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής του προηγούμενου αποτελέσματος ας θεωρήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{και} \quad z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

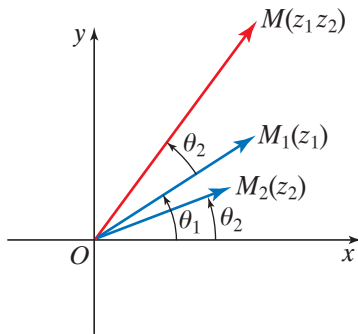
Τότε

$$z_1 z_2 = 8 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 8i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + i \frac{1}{4}.$$

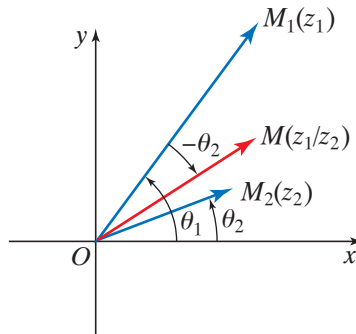
Από τους γενικούς τύπους που βρέθηκαν παραπάνω για την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών προκύπτει ότι:

α) Το μέτρο του γινομένου δύο μιγαδικών ισούται με το γινόμενο των μέτρων τους, ενώ το μέτρο



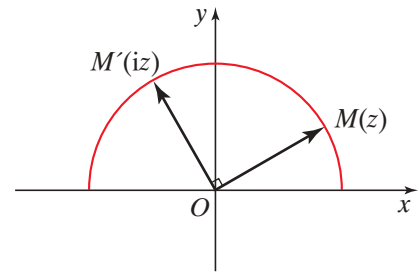
Σχ. 5.5α.

Πολλαπλασιασμός μιγαδικών.



Σχ. 5.5β.

Διαίρεση μιγαδικών.



Σχ. 5.5γ.

του πηλίκου δύο μιγαδικών ισούται με το πηλίκο των μέτρων τους (η ιδιότητα αυτή αποδείχτηκε επίσης στην αρχή της παρούσας ενότητας με διαφορετικό τρόπο).

β) Ένα όρισμα του γινομένου (πηλίκου) δύο μιγαδικών αριθμών προκύπτει αν προσθέσουμε (αφαιρέσουμε) τα ορίσματα των δύο αριθμών, δηλαδή:

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2, \text{Arg}(z_1 / z_2) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού αριθμού $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία θ_2 (σχ. 5.5α).

Ομοίως, η διαίρεση του z_1 με τον z_2 σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ (σχ. 5.5β).

Εφόσον ο μιγαδικός αριθμός $i = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$ έχει μέτρο 1 και πρωτεύον όρισμα $\pi/2$, ο μιγαδικός iz έχει το ίδιο μέτρο με το μέτρο του z και όρισμα μεγαλύτερο κατά $\pi/2$ από το όρισμα του z , δηλαδή ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία¹ $\pi/2$ (σχ. 5.5γ).

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή άλλες δύο φορές καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $\pi/2$, με τον αριθμό $i^2 = -1$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία π , ενώ με τον αριθμό $i^3 = -i$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $3\pi/2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5.1.

Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z = \frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta}$ όπου $\theta \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Στη συνέχεια να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z^{100} .

Λύση.

Αν θέσουμε $w = 1 + \sin \theta + i \cos \theta$ θα έχουμε $z = \frac{w}{\bar{w}}$ και επομένως $|z| = 1$. Για την εύρεση ενός ορίσματος

1. Όταν αναφερόμαστε σε στροφή κατά μία θετική γωνία, εννοούμε ότι η φορά της στροφής είναι αντίθετη με τη φορά κινήσεως των δεικτών του ρολογιού.

του z παρατηρούμε ότι $z = \frac{w}{w} = \frac{w^2}{ww}$ και επομένως:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + \sin\theta + i\eta\mu\theta)^2}{(1 + \sin\theta - i\eta\mu\theta)(1 + \sin\theta + i\eta\mu\theta)} = \frac{(1 + \sin\theta)^2 - \eta\mu^2\theta + 2i\eta\mu\theta(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)^2 + \eta\mu^2\theta} = \\ &= \frac{1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta - \eta\mu^2\theta + 2i\eta\mu\theta(1 + \sin\theta)}{1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta + \eta\mu^2\theta} = \frac{2\sin^2\theta + 2\sin\theta + 2i\eta\mu\theta(1 + \sin\theta)}{2 + 2\sin\theta} = \\ &= \frac{(1 + \sin\theta)(\sin\theta + i\eta\mu\theta)}{1 + \sin\theta} = \sin\theta + i\eta\mu\theta. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα δείχνει ότι ένα όρισμα του z είναι το θ . Για το μέτρο του μιγαδικού z^{100} έχουμε

$$|z^{100}| = |z|^{100} = 1^{100} = 1.$$

Ασκήσεις.

5.5.1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$(1+i)^2, (1-i)^2, \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$$

καθώς επίσης και του μιγαδικού $\left(\frac{a+\beta i}{a-\beta i}\right)^2$ όπου a, β είναι πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $a^2 + \beta^2 \neq 0$.

5.5.2. Αφού γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να βρείτε τους αριθμούς

$$z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1^2}{z_2}, \frac{z_1}{z_2^2}.$$

5.5.3. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $|z| = 1$ και πρωτεύον όρισμα $\pi/3$. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z_1 = \frac{1-z}{1+z}.$$

5.5.4. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \sin\theta + i\eta\mu\theta$. Να βρείτε τον αριθμό $\frac{1}{z}$ και να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z + \frac{1}{z}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $z - \frac{1}{z}$ είναι φανταστικός.

5.5.5. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z = 1 + i \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} \quad \text{όπου } \theta \in [0, \pi] \text{ με } \theta \neq \frac{\pi}{2}.$$

5.5.6. Να βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$, για τους οποίους ισχύει

$$\left| \frac{z}{z-3} \right| = \frac{1}{2}.$$

5.5.7. Αν $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = 1 + i$, να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή το μιγαδικό z_1/z_2 και, με βάση τη μορφή αυτή, να υπολογίσετε το $\sin \frac{\pi}{12}$ και το $\eta\mu \frac{\pi}{12}$.

5.6 Ο τύπος De Moivre.

Ας θεωρήσουμε ένα μιγαδικό αριθμό z με τριγωνομετρική μορφή $z = \rho (\cos \theta + i \eta\mu \theta)$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου 5.5 θα έχουμε:

$$z^2 = \rho [\cos(\theta + \theta) + i \eta\mu(\theta + \theta)] = \rho^2 (\cos 2\theta + i \eta\mu 2\theta),$$

$$\begin{aligned} z^3 &= z \cdot z^2 = [\rho (\cos \theta + i \eta\mu \theta)] \cdot [\rho^2 (\cos 2\theta + i \eta\mu 2\theta)] = \\ &= \rho^3 [\cos(\theta + 2\theta) + i \eta\mu(\theta + 2\theta)] = \rho^3 (\cos 3\theta + i \eta\mu 3\theta) \end{aligned}$$

κ.ο.κ. Γενικά έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι γνωστό ως **Θεώρημα (ή τύπος) De Moivre** (η απόδειξη παραλείπεται).

Θεώρημα De Moivre

Για κάθε ακέραιο n ισχύει:

$$[\rho (\cos \theta + i \eta\mu \theta)]^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \eta\mu(n\theta)].$$

Σημειώνεται ότι ο τύπος De Moivre ισχύει ακόμη και όταν το n είναι ρητός αριθμός (δηλ. πηλίκο δύο ακεραίων). Ως παράδειγμα εφαρμογής του τύπου De Moivre, ας υπολογίσουμε τη δύναμη $(1+i)^{40}$. Μπορούμε να γράψουμε πρώτα το μιγαδικό αριθμό $1+i$ σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \eta\mu \frac{\pi}{4} \right)$$

οπότε, θα έχουμε

$$\begin{aligned} (1+i)^{40} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \eta\mu \frac{\pi}{4} \right) \right]^{40} = (\sqrt{2})^{40} \left(\cos \frac{40\pi}{4} + i \eta\mu \frac{40\pi}{4} \right) \\ &= 2^{20} [\cos(10\pi) + i \eta\mu(10\pi)] = 2^{20} (1 + i \cdot 0) = 2^{20} = 2048. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.1.

Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{(\sqrt{3}-i)^3}{(\sqrt{3}+i)^5}$.

Λύση.

Ο μιγαδικός $z_1 = \sqrt{3} + i$, σύμφωνα με το παράδειγμα 5.4.2 γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \eta\mu \frac{\pi}{6} \right)$$

και επομένως

$$(\sqrt{3} + i)^5 = z_1^5 = 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \eta\mu \frac{5\pi}{6} \right).$$

Ομοίως, για τον $z_2 = \sqrt{3} - i$ είδαμε, στο ίδιο παράδειγμα ότι

$$z_2 = \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

οπότε

$$z_2^3 = (\sqrt{3} - i)^3 = 2^3 \left(\cos \frac{33\pi}{6} + i \sin \frac{33\pi}{6} \right).$$

Συνεπώς, το κλάσμα που δόθηκε γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3} - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^5} &= \frac{2^3 \left(\cos \frac{33\pi}{6} + i \sin \frac{33\pi}{6} \right)}{2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)} = 2^{-2} \left[\cos \left(\frac{28\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{28\pi}{6} \right) \right] = \\ &= 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 4 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2 + 2i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.2.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$.

α) Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z^{10} .

β) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις εικόνες των δυνάμεων $z^2, z^3, \dots, z^{11}$.

Λύση.

α) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = 1 + i$ είναι $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Θέλοντας να γράψουμε το μιγαδικό αριθμό $z = 1 + i$ σε τριγωνομετρική μορφή $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, για τη γωνία θ θα έχουμε

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

οπότε $\theta = \pi/4$. Επομένως,

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

και σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre έχουμε

$$z^{10} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{10} = \sqrt{2^{10}} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) = 32i.$$

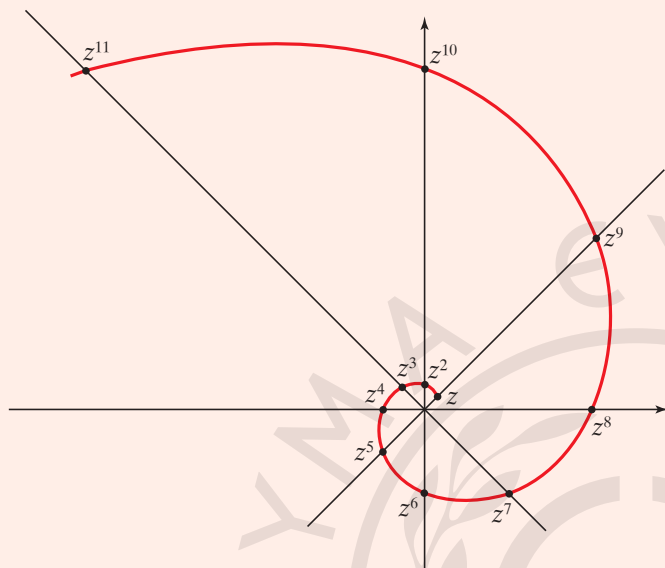
β) Για τις δυνάμεις του z έχουμε:

$$z^2 = \sqrt{2^2} \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) = 2i, \quad z^3 = \sqrt{2^3} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -2 + 2i$$

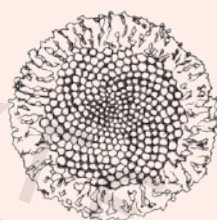
$$z^4 = \sqrt{2^4} \left(\cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} \right) = -4, \dots, \quad z^{11} = 32\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right) = -32 - 32i.$$

Οι εικόνες των δυνάμεων $z^2, z^3, \dots, z^{11}$ του αριθμού z φαίνονται στο σχήμα 5.6α. Αν ενώσουμε τις εικόνες των δυνάμεων αυτών, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μία ελικοειδής γραμμή, η οποία ονομάζεται **ισογωνιακή σπείρα** (σχ. 5.6α).

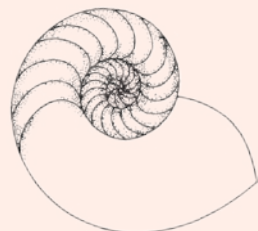
Τέτοιες γραμμές τις συναντάμε αρκετά συχνά στη φύση. Για παράδειγμα, τα κέρατα ορισμένων ζώων, ο σπόρος του ηλιοτροπίου [σχ. 3.6β(α)] κ.λπ. έχουν παρόμοια μορφή. Εντυπωσιακή ομοιότητα με τη σπείρα αυτή έχει και το όστρακο του ναυτίλου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.6β(β).



Σχ. 5.6α.
Ισογωνιακή σπείρα.



σπόρος
ηλιοτροπίου
(α)



όστρακο
ναυτίλου
(β)

Σχ. 5.6β.

Ασκήσεις.

5.6.1. Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = \frac{1}{(1+i)^5}, \quad z_2 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)^{16}, \quad z_3 = \frac{\left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right]^5}{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) \right]^3},$$

$$z_4 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{100}, \quad z_5 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{100}, \quad z_6 = \left(\frac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)^{100}, \quad z_7 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{2008}.$$

5.6.2. Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$[2(\cos 10^0 + i \sin 10^0)]^{-6}, \quad \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)^{-5}, \quad \left[3 \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3} \right) \right]^{-6}.$$

5.6.3. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $z = \frac{(\eta \mu \theta - i \sigma \nu \theta)^{10}}{(\sigma \nu \theta + i \eta \mu \theta)^5}$.

5.6.4. Αν $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $z_1^{600} + z_2^{600}$ και $z_1^{600} - z_2^{600}$.

5.6.5. Αν $z = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z^3 και $(1-z)^8$.

5.6.6. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο n ισχύει $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-3n} = 1$.

5.6.7. Αφού γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^n + z_2^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι πραγματικός. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $z_1^{12} + z_2^{12}$.

5.6.8. Γράψετε την ποσότητα $(\sin\theta + i\eta\mu\theta)^3$ στη μορφή $a + \beta i$:

α) Με χρήση του τύπου De Moivre.

β) Με εκτέλεση πολλαπλασιασμών ή αναλυτικό υπολογισμό της τρίτης δυνάμεως.

Στη συνέχεια να αποδείξετε τις ταυτότητες $\sin 3\theta = 4\sin^2\theta - 3\sin\theta$, $\eta\mu 3\theta = 3\eta\mu\theta - 4\eta\mu^3\theta$.

5.7 Νιοστές ρίζες μιγαδικού αριθμού – Λύση εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Στο παράδειγμα 5.3.2 διαπιστώσαμε ότι οι μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την εξίσωση $z^2 = 3 + 4i$ είναι οι $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = -2 - i$. Σημειώσαμε μάλιστα ότι, κάθε μιγαδικός $z = x + yi$, για τον οποίο ισχύει $z^2 = a + \beta i$ ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού $a + \beta i$** . Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε τη νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού ως εξής:

Ένας μιγαδικός αριθμός z ονομάζεται **νιοστή ρίζα** του μιγαδικού αριθμού w , όταν για τον ακέραιο αριθμό $n > 1$, ισχύει $z^n = w$.

Όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα, η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών, μας δίνει ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για τον υπολογισμό των νιοστών ριζών οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο είναι διαθέσιμη η τριγωνομετρική του μορφή.

Ένας μη μηδενικός αριθμός $w = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)$ έχει n ακριβώς νιοστές ρίζες, οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\eta\mu \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.7.1)$$

Η απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος παραλείπεται.

Αν απεικονίσουμε τις ρίζες z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ στο μιγαδικό επίπεδο, αυτές θα βρίσκονται επάνω στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r = \sqrt[n]{\rho}$ (αφού ισχύει $|z_k| = \sqrt[n]{\rho}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$). Επίσης από τη μορφή που έχουν τα ορίσματα, είναι φανερό ότι, σημειώνοντας τις ρίζες $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ επάνω σ' αυτόν τον κύκλο, θα πάρουμε τις κορυφές ενός κανονικού n -γώνου με μία από τις κορυφές να είναι το σημείο, στο οποίο απεικονίζεται ο μιγαδικός z_0 με όρισμα θ/n .

Ας θεωρήσουμε το μιγαδικό $w = -\sqrt{3} - i$ ως παράδειγμα εφαρμογής του προηγούμενου θεωρήματος. Για να βρούμε τις κυβικές ρίζες ($n=3$) του μιγαδικού αυτού, γράφουμε πρώτα τον αριθμό σε τριγωνομετρική μορφή. Έχουμε

$$|w| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{και} \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta\mu\theta = -\frac{1}{2},$$

οπότε ένα όρισμά του είναι το $\frac{7\pi}{6}$. Άρα,

$$w = 2 \left(\sin \frac{7\pi}{6} + i\eta\mu \frac{7\pi}{6} \right)$$

και σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού $w = -\sqrt{3} - i$ θα δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left[\cos \frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{3} \right], \quad k = 0, 1, 2$$

ή αναλυτικά

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \frac{7\pi}{18} + i \sin \frac{7\pi}{18} \right], \quad z_1 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \frac{19\pi}{18} + i \sin \frac{19\pi}{18} \right], \quad z_2 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \frac{31\pi}{18} + i \sin \frac{31\pi}{18} \right].$$

Γεωμετρικά, οι κυβικές ρίζες είναι οι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[3]{|w|} = \sqrt[3]{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.1.

Δίνεται η εξίσωση $z^n = 1$. Αφού βρείτε τη γενική λύση της εξισώσεως σε τριγωνομετρική μορφή, να διαπιστώσετε ότι οι ρίζες της είναι οι $1, z_1, z_1^2, z_1^3, \dots, z_1^{n-1}$ όπου

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το άθροισμα όλων των ριζών της εξισώσεως είναι ίσο με 0, ενώ το γινόμενό τους είναι ίσο με $(-1)^{n-1}$.

Λύση.

Οι ρίζες της εξισώσεως $z^n = 1$, σύμφωνα με το γενικό τύπο (5.7.1), για $w = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, θα δίνονται από τις εκφράσεις

$$z_k = \sqrt[n]{1} \left[\cos \frac{0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{n} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

δηλαδή

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Για $k=1$ είναι

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

και επειδή

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k,$$

θα έχουμε

$$z_k = z_1^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Άρα οι ρίζες της εξισώσεως είναι της μορφής

$$z_0 = 1, \quad z_1 = z_1, \quad z_2 = z_1^2, \quad \dots, \quad z_{n-1} = z_1^{n-1}.$$

Για το άθροισμα όλων των ριζών παρατηρούμε ότι

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1}$$

και αφού οι αριθμοί $1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{n-1}$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = 1$ και λόγο $\lambda = z_1 \neq 1$, παίρνουμε

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1} = 1 \frac{(z_1)^n - 1}{z_1 - 1} = \frac{1-1}{z_1 - 1} = 0.$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} z_0 z_1 z_2 \dots z_{n-1} &= 1 \cdot z_1 \cdot z_1^2 \cdot z_1^3 \dots z_1^{n-1} = z_1^{1+2+3+\dots+(n-1)} = z_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \cos \frac{2\pi n(n-1)}{2n} + i \sin \frac{2\pi n(n-1)}{2n}, \end{aligned}$$

οπότε

$$z_0 z_1 z_2 \dots z_{n-1} = \cos[\pi(n-1)] + i \sin[\pi(n-1)] = (\cos \pi + i \sin \pi)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ είναι οι **νιοστές ρίζες της μονάδας**. Οι εικόνες των ριζών αυτών στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με n πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $r = 1$. Η κεντρική γωνία του πολυγώνου είναι ίση με $\varphi = \frac{2\pi}{n}$.

Για παράδειγμα, οι **κυβικές ρίζες της μονάδας** είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^3 = 1$ και δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

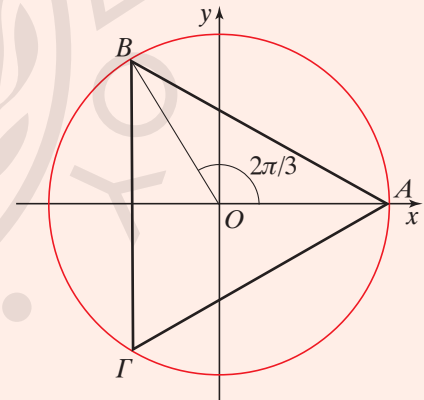
Οι λύσεις αυτές παριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο με τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $r=1$. Η κεντρική γωνία του τριγώνου αυτού είναι $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 5.7. Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση $z^3=1$ θα μπορούσε να λυθεί και ως εξής

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z-1 = 0 \text{ ή}$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ή } z^2 + z + 1 = 0$$

Έτσι, αν ω είναι μία καθαρή μιγαδική ρίζα της εξίσωσης $z^3 = 1$ (δηλ. $\omega \neq 1$), τότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$



Σχ. 5.7

Σύμφωνα με όσα είδαμε μέχρι στιγμής στην παρούσα ενότητα, οι πολωνυμικές εξισώσεις τρίτου βαθμού $z^3 = -\sqrt{3} - i$ και $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$ έχουν ακριβώς τρεις ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ενώ η πολωνυμική εξίσωση $z^n = 1$ όπου n οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος, έχει n ακριβώς διαφορετικές ρίζες στο ίδιο σύνολο. Γενικότερα αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Κάθε πολωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$, νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ με $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ έχει **ακριβώς** n ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Η αναζήτηση των νιοστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού w ισοδυναμεί με τη λύση της πολωνυμικής εξισώσεως $P(z) = 0$, όπου $P(z) = z^n - w$.

Αν $z_1, z_2, \dots, z_n$ είναι οι ρίζες του πολωνύμου $P(z)$ (οι οποίες δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικές), αποδεικνύεται ότι το πολώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής

$$P(z) = a_n (z - z_1) (z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολωνυμικές εξισώσεις με **πραγματικούς συντελεστές** και θα δούμε πώς μπορούν να λυθούν στο σύνολο $\mathbf{C}$. Η επίλυση τέτοιων εξισώσεων στο σύνολο $\mathbf{C}$ γίνεται με τη βοήθεια των ίδιων μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση εξισώσεων στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ας ξεκινήσουμε με τη δευτεροβάθμια εξίσωση $az^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ και $a \neq 0$. Η τελευταία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(z + \frac{\beta}{2a}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\beta}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0,$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ η διακρίνουσα του τριωνύμου $az^2 + \beta z + \gamma$. Επομένως,

α) Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $z_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

β) Αν $\Delta = 0$, τότε έχει διπλή πραγματική λύση, την $z = \frac{-\beta}{2a}$.

γ) Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση στη οποία καταλήξαμε προηγουμένως γράφεται διαδοχικά (αφού $-\Delta > 0$).

$$\left(z + \frac{\beta}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\beta}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \left(z + \frac{\beta}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0.$$

Άρα, οι ρίζες της είναι οι **συζυγείς** μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = \frac{-\beta - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-\beta + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Θα συνεχίσουμε με τη λύση μιας πολωνυμικής εξισώσεως 5^{ου} βαθμού, πιο συγκεκριμένα της $P(z) = 0$, όπου

$$P(z) = z^5 + 2z^4 - z - 2.$$

Θεωρούμε αρχικά τους διαιρέτες του σταθερού όρου -2 , που πιθανόν να είναι ρίζες της. Αυτοί είναι οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2$. Για $z = 1$ βρίσκουμε $P(1) = 0$, οπότε το 1 είναι ρίζα της εξισώσεως. Εφαρμόζοντας το σχήμα του Horner στο $z = 1$, βρίσκουμε

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$P(z) = z^5 + 2z^4 - z - 2 = (z - 1)(z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z + 2).$$

Σημειώνουμε ότι στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε, θεωρώντας την ανάλυση του $P(z)$ στη μορφή (αφού το 1 είναι ρίζα)

$$P(z) = z^5 + 2z^4 - z - 2 = (z - 1)(z^4 + az^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta)$$

όπου τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μπορούν να προσδιοριστούν αν εκτελέσουμε αρχικά τις πράξεις στο δεξί μέλος και εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του z .

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία στο πηλίκο $z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z + 2$ της προηγούμενης διαίρεσεως, βρίσκουμε ότι το $z = -1$ είναι ρίζα και το σχήμα του Horner δίνει

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ & -1 & -2 & -1 & -2 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Επομένως

$$z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = (z+1)(z^3 + 2z^2 + z + 2).$$

Το πολυώνυμο έχει ρίζα το $z = -2$ και εφαρμόζοντας για άλλη μία φορά το σχήμα του Horner προκύπτει

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ & -2 & 0 & -2 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

οπότε

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = (z+2)(z^2 + 1).$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $P(z) = z^5 + 2z^4 - z - 2$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(z) = (z-1)(z+1)(z+2)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z+2)(z-i)(z+i)$$

και έχει ως ρίζες τους αριθμούς $1, -1, -2, i, -i$.

Από την επίλυση της παραπάνω πολωνυμικής εξισώσεως, καθώς και από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξισώσεως $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$) με $\Delta < 0$ παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες που προκύπτουν είναι ανά δύο συζυγείς.

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα (βλ. παρ. 5.3.3):

Αν ο μιγαδικός αριθμός $\alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$) είναι ρίζα μιας πολωνυμικής εξισώσεως με **πραγματικούς** συντελεστές, τότε ο συζυγής του $\alpha - \beta i$ είναι επίσης ρίζα της εξισώσεως αυτής.

Σύμφωνα μ' αυτό:

Κάθε πολωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Παραπάνω είδαμε ότι το πολυώνυμο $P(z) = z^5 + 2z^4 - z - 2$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $1, -1, -2, i, -i$ γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων και ενός δευτεροβάθμιου παράγοντα που έχει $\Delta < 0$, πιο συγκεκριμένα $P(z) = (z-1)(z+1)(z+2)(z^2+1)$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες έχουν αρνητική διακρίνουσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7.2.

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο, ώστε $P(1)=-2$ και η εξίσωση $P(x) = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και $1+i$.

Λύση.

Επειδή το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό $1+i$, θα έχει ρίζα και το συζυγή του αριθμό $1-i$. Επομένως, οι 3 ρίζες του είναι οι αριθμοί 2, $1-i$, $1+i$ και ως εκ τούτου μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(x) = a(x-2)(x-(1-i))(x-(1+i)), \quad a \in \mathbf{R}^*.$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$P(x) = a(x-2)(x^2 - x(1+i) - x(1-i) + (1^2 - i^2)) = a(x-2)(x^2 - 2x + 2) = a(x^3 - 4x^2 + 6x - 4).$$

Αφού $P(1)=-2$, θα έχουμε

$$a(1^3 - 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 4) = -2 \Leftrightarrow -a = -2 \Leftrightarrow a = 2$$

οπότε

$$P(x) = 2(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) = 2x^3 - 8x^2 + 12x - 8.$$

Ασκήσεις.

5.7.1. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α) $z^4 = -16$

β) $z^9 - z^5 + z^4 - 1 = 0$

γ) $z^4 = \frac{2i}{1-i}$

5.7.2. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α) $z^4 = -i$

β) $z^4 = 16 \left(\sin \frac{8\pi}{5} + i \eta \mu \frac{8\pi}{5} \right)$

γ) $z^6 = 64$

δ) $z^3 = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$

ε) $z^4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

στ) $z^4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

5.7.3. Έστω $z = \rho (\sin \theta + i \eta \mu \theta)$ η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z

α) Να γράψετε την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $z^9 \cdot (\bar{z})^5 = 1$.

5.7.4. Αφού βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $z^7 = -1$, να αποδείξετε ότι $\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

5.7.5. Αν ω είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $\omega \neq 1$, να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2)$.

5.7.6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των επομένων δύο εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

$$(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0, \quad z^{23} + z^{16} + 1 = 0.$$

5.7.7. Να βρείτε τις κυβικές ρίζες του αριθμού -1 . Αν w είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $w \neq -1$:

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $w^2 - w + 1 = 0$.

β) Να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $(-1 + w + w^2)(1 + w - w^2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι τρεις κυβικές ρίζες της μονάδας είναι οι $w, \bar{w}, w\bar{w}$.

5.7.8. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

α) $z^2 - 2|z| = 0$

β) $z^3 - 4z = 0$.

Τι παρατηρείτε;

5.7.9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(1-i)z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$

β) $z^3 - 7z^2 + 16z - 10 = 0$

γ) $z^3 - 3z^2 + 3z - 28 = 0$

δ) $z^4 = 4(z^2 + z + 1) + z$

ε) $|z+4+8i| = 2|z+1+2i|$

στ) $|z^2| = -z^2$

ζ) $z^2 - 2z + 2 = 0$

η) $(z-1)^3 - (1-i)(z+1)^3 = 0$

5.7.10. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^4(z+1)^2 + z^2 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0$.

5.7.11. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

5.7.12. Αν ο μιγαδικός αριθμός $1+i$ είναι ρίζα της εξισώσεως $z^3 - z^2 + 2a = 0$, $a \in \mathbf{R}$ να αποδείξετε ότι ο πραγματικός αριθμός a είναι ίσος με 1 και στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ρίζες της εξισώσεως.

5.7.13. Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z = 3 + 2i$ είναι ρίζα της εξισώσεως $z^3 - 5az^2 + 7\beta z + 13 = 0$, $a, \beta \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι $a = \beta = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τις άλλες ρίζες της εξισώσεως.

5.7.14. Να εκφράσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^6 - x^3 + 1$ ως γινόμενο τριών δευτεροβαθμίων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές.

5.7.15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(z) = (z+1)^{6k+1} - z^{6k+1} - 1$ όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος.

α) Να αποδείξετε ότι οι καθαρές μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας είναι ρίζες του $P(z)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(z)$ έχει ως παράγοντα το πολυώνυμο $z^2 + z + 1$.

5.7.16. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^2 + 6z + 18 = 0$. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεως αυτής, να γράψετε το μιγαδικό αριθμό $w = \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2i}{z_1 z_2 + 3i}$ στη μορφή $a + \beta i$, $a, \beta \in \mathbf{R}$.

5.7.17. Δίνεται ότι ο αριθμός $3 + i$ είναι ρίζα της εξισώσεως $z^3 - 8z^2 + az + \beta = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $a = 22, \beta = -20$.

β) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $z^3 - 8z^2 + 22z - 20$ έχει ως παράγοντα το $z^2 - 6z + 10$.

γ) Να βρείτε και τις τρεις ρίζες της αρχικής εξισώσεως.

5.8 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Φανταστική μονάδα i .	$i^2 = (-i)^2 = -1$
Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού $z = a + \beta i$.	$\operatorname{Re}(z) = a, \operatorname{Im}(z) = \beta$
Μέτρο μιγαδικού αριθμού $z = a + \beta i$.	$ z = \sqrt{a^2 + \beta^2}$
Ισότητα δύο μιγαδικών $z_1 = a + \beta i, z_2 = \gamma + \delta i$	$a = \gamma$ και $\beta = \delta$

Πράξεις μεταξύ μιγαδικών.	$(a + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i$ $(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i$ $(a + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i$ $\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$
Συζυγής μιγαδικού.	$\bar{z} = \overline{a + \beta i} = a - \beta i$
Ιδιότητες συζυγούς.	$\overline{(\bar{z})} = z, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \overline{(z^v)} = (\bar{z})^v, \quad v \in \mathbb{N}$
Δυνάμεις του i .	$i^{4\kappa+v} = i^v = \begin{cases} 1 & \text{αν } v=0 \\ i & \text{αν } v=1 \\ -1 & \text{αν } v=2 \\ i & \text{αν } v=3 \end{cases}$ όπου κ, v ακέραιοι και $\kappa \geq 0, 0 \leq v < 4$.
Ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού.	$ z = -z = \bar{z} = -\bar{z} , \quad z\bar{z} = z ^2, \quad z_1 z_2 = z_1 z_2 , \quad \left \frac{z_1}{z_2}\right = \frac{ z_1 }{ z_2 }, \quad z_2 \neq 0$ $\left z_1 - z_2 \right \leq z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $
Εξίσωση $ z - z_0 = r$ όπου $z_0 = x_0 + iy_0$.	Παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r .
Εξίσωση $ z - z_1 = z - z_2 $.	Περιγράφει τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους αριθμούς z_1 και z_2 .
Τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $z = a + \beta i$.	$z = \rho (\cos\theta + i \eta\mu\theta) \text{ όπου } \rho = z ,$ $\cos\theta = \frac{a}{\rho}, \quad \eta\mu\theta = \frac{\beta}{\rho}$
Πράξεις με χρήση τριγωνομετρικής μορφής.	Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \eta\mu\theta_1), z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \eta\mu\theta_2)$ τότε $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \eta\mu(\theta_1 + \theta_2)]$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \eta\mu(\theta_1 - \theta_2)], \quad \rho_2 \neq 0$
Πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i .	Στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία $\pi/2$ (με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού).

Πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $i^3 = -i$.	Στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία $3\pi/2$ (με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού).
Τύπος De Moivre.	Αν $z = \rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta)$, τότε $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)]$
Νιοστές ρίζες μιγαδικού $w = \rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta)$.	$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\eta\mu\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$
Συζυγείς ρίζες πολωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές.	Για κάθε μιγαδική ρίζα $a + \beta i$ ($\beta \neq 0$), ο συζυγής $a - \beta i$ είναι επίσης ρίζα.
Πλήθος ριζών πολωνυμικής εξίσωσης $P(z)=0$, νιοστού βαθμού.	Κάθε πολωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού της μορφής $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ με $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}, a_n \neq 0$, έχει ακριβώς n ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

5.9 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Ο αριθμός z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z + \bar{z} = 0$.	Σ Λ
2.	Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $z_1 = z_2 = 0$.	Σ Λ
3.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $ z^2 = z ^2$.	Σ Λ
4.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $ z^2 = z^2$.	Σ Λ
5.	Ο αριθμός $z = (2+3i)^{20} + (2-3i)^{20}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.	Σ Λ
6.	Αν $z + \bar{z} = 0$, τότε $\operatorname{Re}(z) = 2$.	Σ Λ
7.	Αν $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4}$, τότε η δύναμη z^{200} είναι ίση με 1.	Σ Λ
8.	Η εξίσωση $\alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.	Σ Λ
9.	Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $z + \bar{z} = 0$ είναι όσα βρίσκονται επάνω στο φανταστικό άξονα.	Σ Λ
10.	Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $z - \bar{z} = 2i$ είναι όσα βρίσκονται επάνω στο πραγματικό άξονα.	Σ Λ
11.	Αν ο μιγαδικός αριθμός z έχει όρισμα τη γωνία θ , τότε ο μιγαδικός αριθμός z/i έχει όρισμα τη γωνία $\theta - \frac{\pi}{2}$.	Σ Λ

12.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $ z = - -z = \bar{z} = - -\bar{z} $.	Σ Λ
13.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}$.	Σ Λ
14.	Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με μιγαδικούς συντελεστές, τότε ο συζυγής του είναι επίσης ρίζα του ίδιου πολυωνύμου.	Σ Λ
15.	Αν μία πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον αριθμό $1-i$, τότε το πολυώνυμο $P(z)$ έχει παράγοντα τον $z^2 - 2z + 2$.	Σ Λ
16.	Αν $\rho_1(\sin\theta_1 + i\eta\mu\theta_1) = \rho_2(\sin\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$, τότε $\rho_1 = \rho_2$ και $\theta_1 = \theta_2$.	Σ Λ
17.	Ο τύπος De Moivre $[\rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)]^n = \rho^n[\sin(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)]$ δεν ισχύει όταν ο εκθέτης n είναι αρνητικός ακέραιος.	Σ Λ
18.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $\pi/2$.	Σ Λ
19.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $i^3 = -i$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $3\pi/2$.	Σ Λ
20.	Κάθε πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού, της μορφής $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ με $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$, έχει ακριβώς n ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.	Σ Λ
21.	Οι εικόνες των ριζών της εξισώσεως $z^{40} = 1024$ στο μιγαδικό επίπεδο, σχηματίζουν ένα κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία $\frac{\pi}{40}$.	Σ Λ
22.	Οι εικόνες των ριζών της εξισώσεως $z^{10} = 3^{10}$ στο μιγαδικό επίπεδο, βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r = 3$.	Σ Λ
23.	Οι εικόνες των ριζών της εξισώσεως $z^3 = \sqrt{7} + i\sqrt{25}$ στο μιγαδικό επίπεδο, βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r = \sqrt{2}$.	Σ Λ
24.	Δεν υπάρχει εξίσωση 3 ^{ου} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές που έχει ως ρίζες τους αριθμούς $1 + i, -i$ και i .	Σ Λ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Ο μιγαδικός αριθμός $z = a + \beta i$ είναι μηδενικός, όταν: α) $a = 0$ και $\beta = 0$ β) $a = 0$ γ) $a = 0$ ή $\beta = 0$ δ) $a - \beta = 0$
2.	Αν $z = i$, τότε: α) $z^2 = 1$ β) $\frac{1}{z} = -z$ γ) $z^2 = i$ δ) $z^2 = z$
3.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $i^2 = -1$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία: α) $\pi/2$ β) π γ) $3\pi/2$ δ) $3\pi/4$
4.	Έστω z μια μιγαδική κυβική ρίζα της μονάδας ($z \neq 1$). Τότε η παράσταση $1 + z + z^2$ είναι ίση με: α) 0 β) 1 γ) 3 δ) -1

5.	Μία τετραγωνική ρίζα του αριθμού -4 είναι ο αριθμός: α) $z = -2i$ β) $z = -2$ γ) $z = -2+i$ δ) $z = 2$
6.	Ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = 3 + \sqrt{2}$ είναι ο: α) $\bar{z} = 2 - \sqrt{3}$ β) $\bar{z} = 3 + \sqrt{2}$ γ) $\bar{z} = 3 - \sqrt{2}$ δ) $\bar{z} = 3\sqrt{2}$
7.	Ο μιγαδικός αριθμός z είναι πραγματικός, όταν: α) $z\bar{z} = 1$ β) $z + \bar{z} = 0$ γ) $\overline{\bar{z} - z} = 0$ δ) $z\bar{z} = 0$
8.	Η εξίσωση $z^2 + 3z + 4 = 0$ έχει: α) Μία πραγματική ρίζα και μία μιγαδική ρίζα. γ) Δύο πραγματικές ρίζες. β) Δύο ρίζες που είναι καθαροί μιγαδικοί. δ) Δύο ρίζες που είναι φανταστικοί αριθμοί.
9.	Δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν ορίσματα θ_1, θ_2 αντιστοίχως. Ένα όρισμα του πηλίκου $\frac{z_1}{z_2}$ είναι το: α) $\theta_1 + \theta_2$ β) $\theta_1 - \theta_2$ γ) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ δ) $\theta_1 \cdot \theta_2$
10.	Δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν ορίσματα θ_1, θ_2 αντιστοίχως. Ένα όρισμα του γινομένου $z_1 \cdot z_2$ είναι το: α) $\theta_1 + \theta_2$ β) $\theta_1 - \theta_2$ γ) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ δ) $\theta_2 \cdot \theta_1$
11.	Αν μία πολωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον αριθμό $-i$, τότε το πολώνυμο $P(z)$ έχει παράγοντα το: α) $z^2 - 2z + 2$ β) $z^2 + 2$ γ) $z^2 + i$ δ) $z^2 + 1$
12.	Στο μιγαδικό επίπεδο, έστω $\overline{OA}$ η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z , $\overline{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του iz , $\overline{OF}$ η διανυσματική ακτίνα του i^2z και $\overline{OD}$ η διανυσματική ακτίνα του $-iz$. Τότε: α) Η $\overline{OF}$ είναι διανυσματική ακτίνα του $\bar{z}$. γ) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. β) Τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι συνευθειακά. δ) Το διάνυσμα $\overline{BD}$ παριστάνει έναν πραγματικό αριθμό.
13.	Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$ βρίσκονται: α) Στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα 1. γ) Στον άξονα $y'y$. β) Στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα 2. δ) Στον άξονα $x'x$.
14.	Ένας μιγαδικός αριθμός z ονομάζεται νιοστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού w , όταν για τον ακέ- ραιο αριθμό $n > 1$, ισχύει: α) $w^n = z$ β) $z^n = w$ γ) $z^n = wi$ δ) $z^n = -w$
15.	Ένας μη μηδενικός αριθμός $a = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ έχει: α) n το πολύ νιοστές ρίζες. γ) Τουλάχιστον n νιοστές ρίζες. β) Ακριβώς n νιοστές ρίζες. δ) Ακριβώς n^2 νιοστές ρίζες.

5.10 Γενικές ασκήσεις.

5.10.1. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$.

5.10.2. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , για τους οποίους ισχύει $w = \frac{2+iz}{1-iz}$.
Να αποδείξετε ότι, αν $w \in \mathbf{R}$, τότε ο z είναι φανταστικός.

5.10.3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και z' με $|z|=|z'|=1$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{z+z'}{1+zz'}$ είναι πραγματικός.

5.10.4. Να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $(1+i)^{4\nu} - (1-i)^{4\nu}$, όπου ν ένας θετικός ακέραιος.

5.10.5. Να αποδείξετε ότι $(a + \beta i)^{2008} = (\beta - a i)^{2008}$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β .

5.10.6. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 7 + 8i$ και $z_2 = 4 - 5i$.

Αν $z = z_1 - \bar{z}_2$ να γράψετε το μιγαδικό αριθμό z σε τριγωνομετρική μορφή και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον αριθμό z^4 .

5.10.7. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z . Αν ο αριθμός $u = \frac{z-4i}{z-2}$, με $z \neq 2$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή και να βρείτε την εξίσωση της γραμμής αυτής.

5.10.8. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, για τον οποίο ισχύει η σχέση $z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) = 0$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

5.10.9. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$. Αν για τον αριθμό $u = 2iz + 1 + i$ ισχύει $|u| = 4$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

5.10.10. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, να βρείτε την τιμή της παραστάσεως $|i + z|^2 + |i - z|^2$ αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z| = 3$.

5.10.11. Στην ηλεκτρονική χρησιμοποιείται η συνάρτηση T του παλμού ω με τύπο

$$T(\omega) = \frac{z}{R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}, \quad \omega > 0$$

όπου z είναι ένας σταθερός μιγαδικός και R, L, C είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο παλμός ω εκφράζεται σε rad/sec.

α) Αν $h(\omega) = \frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$, $\omega > 0$, να αποδείξετε ότι $T(\omega) = \frac{z}{R} \cdot \frac{1}{1 + i h(\omega)}$.

β) Να βρείτε την τιμή του ω που μηδενίζει το h .

γ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $1 + ih(\omega)$

5.10.12. Οι σύνθετες αντιστάσεις ενός κυκλώματος RLC δίνονται από τους τύπους

$$z_1 = R + iL\omega \quad \text{και} \quad z_2 = R - \frac{i}{\omega C}, \quad \text{όπου } R, \omega, L, C \text{ είναι πραγματικοί αριθμοί.}$$

α) Να βρείτε την αντίσταση z του κυκλώματος, αν οι αντιστάσεις z_1 και z_2 είναι συνδεδεμένες

παράλληλα. Στην παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων είναι γνωστό ότι $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

β) Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, να προσδιορίσετε τον αριθμό ω .

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο 5 ασχοληθήκαμε με την ενότητα των Μαθηματικών που είναι γνωστή ως Διαφορικός Λογισμός. Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός επίπεδου σχήματος, ώθησε τους μαθηματικούς στην ανακάλυψη ενός νέου κλάδου των Μαθηματικών, του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Το πρόβλημα του εμβαδού μελετήθηκε αρχικά από τον Αρχιμήδη. Οι μέθοδοι που ανέπτυξε, διαπνέονταν από εκπληκτική πρωτοτυπία σκέψης, συνδυασμένη με αυστηρότητα και μεγάλη ικανότητα στην τεχνική των υπολογισμών. Ο Αρχιμήδης εφάρμοσε με επιτυχία τις μεθόδους του για τον κυκλικό δίσκο και για παραβολικά «χωρία». Στο διάστημα που μεσολάβησε από την Αρχαιότητα ως τις αρχές του 17^{ου} αιώνα υπολογίστηκαν με επιτυχία τα εμβαδά και άλλων πιο πολυπλόκων επιφανειών. Όμως, οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν δεν ήταν γενικές και αντιμετώπιζαν μόνο το συγκεκριμένο πρόβλημα κάθε φορά.

Η ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού βοήθησε στην αντικατάσταση όλων αυτών των ειδικών διαδικασιών υπολογισμού εμβαδού σχημάτων και όγκων στερεών από μία γενική μέθοδο. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθεί η έννοια του ολοκληρώματος (αόριστον και ορισμένου) μιας πραγματικής συναρτήσεως μιας μεταβλητής, οι ιδιότητές του και η χρήση του στον υπολογισμό εμβαδών. Στην πορεία της παρουσιάσεως της σχετικής θεωρίας θα αναλυθούν διάφορες εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στη Φυσική, στην Οικονομία κ.λπ..

- 6.1 Η έννοια και οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.
- 6.2 Μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος.
- 6.3 Η έννοια και οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.
- 6.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.
- 6.5 Εμβαδά επιπέδων σχημάτων.
- 6.6 Όγκοι στερεών. Μήκος τόξου καμπύλης.
- 6.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 6.8 Ερωτήσεις κατανόησης.
- 6.9 Γενικές ασκήσεις.

6.1 Η έννοια και οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

Σε διάφορα πρακτικά προβλήματα εμφανίζεται η ανάγκη εφαρμογής μιας διαδικασίας που είναι αντίστροφη της παραγωγίσεως. Πιο συγκεκριμένα, αρκετές φορές μάς δίνεται μία συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μία παραγωγίσιμη συνάρτηση F , έτσι ώστε να ισχύει $F'(x)=f(x)$ σε ένα διάστημα Δ . Τέτοια προβλήματα είναι για παράδειγμα τα εξής:

α) Η εύρεση της θέσεως $S(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t , αν είναι γνωστή η ταχύτητά του $v(t)$ οι οποίες, όπως γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 4, συνδέονται με τη σχέση $S(t) = v'(t)$.

β) Η εύρεση της τιμής $P(t)$ ενός αγαθού τη χρονική στιγμή t , αν είναι γνωστός ο ρυθμός αυξήσεως της τιμής, ο οποίος όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 4, είναι η παράγωγος $f(t)=P'(t)$ της συναρτήσεως $P(t)$.

γ) Η εύρεση του μεγέθους $N(t)$ ενός πληθυσμού τη χρονική στιγμή t , αν είναι γνωστός ο ρυθμός αυξήσεως $f(t)=N'(t)$ του πληθυσμού.

Το κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι δίνεται μία συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση F , για την οποία να ισχύει $F'(x)=f(x)$ σε ένα διάστημα Δ . Η συνάρτηση F ονομάζεται **παράγουσα** ή **αντιπαράγωγος** ή **αρχική συνάρτηση** της f .

Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση** ή **αντιπαράγωγος** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για την οποία ισχύει:

$$F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F , που να ικανοποιεί τη συνθήκη του παραπάνω ορισμού.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ είναι μια παράγουσα της $f(x) = x^3$ στο $\mathbf{R}$, αφού $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$. Προφανώς, για κάθε σταθερά $c \in \mathbf{R}$ ισχύει επίσης $(\frac{1}{4}x^4 + c)' = x^3$, οπότε και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = \frac{1}{4}x^4 + c = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbf{R}$, είναι παράγουσες της f στο $\mathbf{R}$.

Γενικά ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:

- α) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c \in \mathbf{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- β) κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ γράφεται στη μορφή $G(x)=F(x)+c$, όπου $c \in \mathbf{R}$.

Πράγματι, αν F είναι μία παράγουσα της f , τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x)+c$, όπου $c \in \mathbf{R}$, είναι επίσης παράγουσα της f , αφού θα ισχύει $(F(x)+c)' = F'(x)=f(x)$.

Επίσης, αν G είναι μια άλλη παράγουσα της f , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε θα έχουμε:

$$G'(x)=F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με όσα αναλύσαμε στην παράγραφο 4.3, θα υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συναρτήσεως f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ** και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$ (το παραπάνω σύμβολο διαβάζεται «ολοκλήρωμα εφ του x ντε x »). Επομένως, αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ θα έχουμε:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbf{R}.$$

Για παράδειγμα, αφού $(e^x)' = e^x$ και $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \text{και} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Η διαδικασία ευρέσεως του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται **ολοκλήρωση**, ενώ η σταθερά c που εμφανίζεται στον τύπο του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται **σταθερά ολοκλήρωσης**.

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες 4.2.1, 4.2.2 των παραγώγων βασικών συναρτήσεων και τα αποτελέσματα του παραδείγματος 4.2.5 μπορούμε να δημιουργήσουμε άμεσα τον πίνακα αορίστων ολοκληρωμάτων 6.1.1.

Πίνακας 6.1.1
Αόριστα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων.

$\int a dx = ax + c \quad (\text{για } a \in \mathbf{R})$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \epsilon\phi x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \sin x dx = \eta\mu x + c$	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\phi x + c$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (\text{για } a \neq -1)$	$\int \eta\mu x dx = -\sin x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Οι τύποι του πίνακα 6.1.1 ισχύουν σε κάθε διάστημα, στο οποίο έχουν νόημα οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται στον πίνακα. Για να διαπιστώσουμε την ισχύ των τύπων που δόθηκαν παραπάνω αρκεί να παραγωγίσουμε το δεξί μέλος και να επαληθεύσουμε ότι προκύπτει ως αποτέλεσμα το αριστερό. Για παράδειγμα, ο τύπος:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad \text{έχει προκύψει από το γεγονός ότι}$$

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + c \right)' = \frac{(a+1)x^a}{a+1} + 0 = x^a.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.1.

Να βρείτε μία συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$ και η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ να ισούται με x για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ ισούται με την τιμή της παραγώγου $f'(x)$. Επομένως, ζητάμε να ισχύει $f'(x)=x$, οπότε:

$$f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Για να διέρχεται η f από το σημείο $A(2,4)$ πρέπει να ισχύει $f(2)=4$, δηλαδή $\frac{2^2}{2} + c = 4 \Leftrightarrow c = 2$,

επομένως
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 2.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε για το αόριστο ολοκλήρωμα, αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$, θα έχουμε:

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στον τελευταίο τύπο το $f(x)=F'(x)$, προκύπτει ότι

$$\int F'(x) dx = F(x) + c.$$

Προέκυψε λοιπόν το επόμενο χρήσιμο αποτέλεσμα:

Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ , ισχύει:

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Αν τώρα F, G είναι παράγουσες των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα σ' ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbf{R}$, τότε θα ισχύει:

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

και

$$(\lambda F)'(x) = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$$

για κάθε $x \in \Delta$. Επομένως η συνάρτηση $F + G$ είναι μία παράγουσα της $f + g$ και η λF , $\lambda \in \mathbf{R}$, είναι μία παράγουσα της λf στο Δ . Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύει ότι για το αόριστο ολοκλήρωμα ισχύουν οι επόμενες δύο ιδιότητες:

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε θα έχουν παράγουσα (στο ίδιο διάστημα) και οι συναρτήσεις λf , $\lambda \in \mathbf{R}$ και $f + g$. Τότε θα ισχύουν οι τύποι:

$$\alpha) \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

$$\beta) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν για παράδειγμα τα εξής:

$$\int 5x^9 dx = 5 \int x^9 dx = 5 \frac{x^{10}}{10} + c = \frac{x^{10}}{2} + c,$$

$$\int (4e^x - 5\sin x) dx = 4 \int e^x dx - 5 \int \sin x dx = 4e^x - 5\eta\mu x + c.$$

Οι τύποι που δόθηκαν στον πίνακα 4.2.3 για την παράγωγο σύνθετης συναρτήσεως μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να πάρουμε κάποιους αντίστοιχους τύπους για την ολοκλήρωση συνθέτων συναρτήσεων. Έτσι, γράφοντας τον τύπο:

$$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \text{ στη μορφή } \left(2\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$$

συμπεραίνομε ότι:

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = \int \left(2\sqrt{g(x)}\right)' = 2\sqrt{g(x)} + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Εργαζόμενοι με όμοιο τρόπο μπορούμε, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 4.2.2, να δημιουργήσουμε άμεσα τον πίνακα αορίστων ολοκληρωμάτων συνθέτων συναρτήσεων 6.1.2.

Πίνακας 6.1.2
Αόριστα ολοκληρώματα συνθέτων συναρτήσεων.

$\int \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} dx = -\frac{1}{g(x)} + c$	$\int e^{g(x)} \cdot g'(x) dx = e^{g(x)} + c$
$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + c$	$\int \sin(g(x)) \cdot g'(x) dx = \eta\mu(g(x)) + c$
$\int (g(x))^a g'(x) dx = \frac{(g(x))^{a+1}}{a+1} + c \text{ (για } a \neq -1)$	$\int \eta\mu(g(x)) \cdot g'(x) dx = -\cos(g(x)) + c$

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int 3x^2(x^3+1)^4 dx$ μπορούμε να θέσουμε $g(x)=x^3+1$, οπότε θα έχουμε $g'(x)=3x^2$ και επομένως

$$\int 3x^2(x^3+1)^4 dx = \int g'(x)(g(x))^4 dx = \frac{(g(x))^{4+1}}{4+1} = \frac{(g(x))^5}{5} = \frac{(x^3+1)^5}{5}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.2.

Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η ταχύτητά του σε m/min τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $v(t)=t^2(2t+3)+5$. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 3 m από την αρχή των αξόνων, να βρείτε τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min.

Λύση.

Όπως γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 4, ισχύει $u(t) = s'(t)$ όπου με $S(t)$ έχουμε συμβολίσει τη συνάρτηση θέσεως του κινητού. Σύμφωνα την εκφώνηση θα έχουμε:

$$S'(t) = t^2(2t+3)+5 = 2t^3 + 3t^2 + 5$$

και επομένως

$$\int S'(t) dt = \int (2t^3 + 3t^2 + 5) dt = \int 2t^3 dt + \int 3t^2 dt + \int 5 dt = 2 \int t^3 dt + 3 \int t^2 dt + \int 5 dt = 2 \frac{t^4}{4} + 3 \frac{t^3}{3} + 5t + c.$$

Άρα:

$$S(t) = \frac{1}{2}t^4 + t^3 + 5t + c$$

και αφού $S(0)=3$, θα πρέπει $0+c=3$, δηλαδή $c=3$, οπότε τελικά

$$S(t) = \frac{1}{2}t^4 + t^3 + 5t + 3.$$

Η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min θα βρίσκεται με εφαρμογή του τελευταίου τύπου για $t=2$. Έτσι προκύπτει:

$$S(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 + 2^3 + 5 \cdot 2 + 3 = 29 \text{ m.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.3.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int \frac{3x-5}{x^2-4x+3} dx, \quad \beta) \int \frac{2x^2-5x+1}{x^2-4x+3} dx.$$

Λύση.

$$\alpha) \text{ Η συνάρτηση } f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3} \text{ με πεδίο ορισμού το } \mathbf{R}-\{1,3\} \text{ γράφεται } f(x) = \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}$$

και μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα από απλά κλάσματα (με παρονομαστές τους όρους $x-1$ και $x-3$) ως εξής:

$$\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{\beta}{x-3}.$$

Για να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς a, β , προχωράμε σε απαλοιφή παρονομαστών, οπότε θα έχουμε

$$3x-5 = a(x-3) + \beta(x-1) \Leftrightarrow 3x-5 = (a+\beta)x + (-3a-\beta).$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε $x \in \mathbf{R}-\{1,3\}$ θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} a + \beta = 3 \\ -3a - \beta = -5 \end{cases}$$

και λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $a = 1, \beta = 2$. Επομένως έχουμε:

$$\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

και το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει γράφεται ως εξής:

$$\int \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{x-3} dx.$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα με εφαρμογή του τύπου

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c$$

του πίνακα 6.1.2 για $g(x)=x-1$ και $g(x)=x-3$ αντίστοιχα, οπότε παίρνουμε τελικά

$$\int \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} dx = \ln |x-1| + 2 \ln |x-3| + c = \ln(|x-1|(x-3)^2) + c.$$

β) Εκτελώντας τη διαίρεση του πολυωνύμου $2x^2 - 5x + 1$ με το πολώνυμο $x^2 - 4x + 3$, βρίσκουμε

$$2x^2 - 5x + 1 = 2(x^2 - 4x + 3) + (3x - 5)$$

οπότε θα έχουμε:

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4x + 3} = 2 + \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3}$$

Επομένως:

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int 2dx + \int \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} dx = 2x + \ln(|x - 1|(x - 3)^2) + c.$$

Ο τρόπος που εργαστήκαμε στο παράδειγμα αυτό μας επιτρέπει τον υπολογισμό οποιωνδήποτε ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων, των οποίων ο παρονομαστής μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβαθμίων όρων (π.χ. αν είναι τριώνυμο με δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, όπως ήταν στο παράδειγμα).

Ασκήσεις.

6.1.1. Ο αριθμός $N(t)$, σε εκατομμύρια των παθογόνων μικροοργανισμών που βρίσκονται σε μια μολυσμένη λίμνη, αυξάνεται με ρυθμό $N'(t) = e^t$ ανά ώρα. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού των μικροοργανισμών στις πρώτες δύο ώρες.

6.1.2. Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t , δίνεται από τον τύπο $v(t) = \eta t$. Να βρείτε τη συνάρτηση θέσεως $S(t)$ του κινητού και να διαπιστώσετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει $S(t) = -a(t)$, όπου $a(t)$ είναι η επιτάχυνση του κινητού.

6.1.3. Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι παράγουσες της ίδιας συναρτήσεως.

α) $F(x) = x^2 - 3x + 2$

β) $F(x) = e^x - 2$

γ) $F(x) = e^{2x+1}$

δ) $F(x) = e^x + 2$

ε) $F(x) = x(x-3)$

στ) $F(x) = e^{2x}$

ζ) $F(x) = e^{2x} - 2e$

η) $F(x) = e^{2x}(e + e^{-2x})$

θ) $F(x) = -x^2 + 3x - 2$

6.1.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα.

α) $\int (4x^3 + 2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) dx$

β) $\int (x^{99} - 4x^{39} + 3x^{29}) dx$

γ) $\int x^3 \sqrt{x} dx$

δ) $\int \left(5e^x - \frac{2+x^2}{x^3} \right) dx$

ε) $\int \left(\frac{3}{\eta\mu^2 x} - \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx$

στ) $\int \frac{x-3}{x^2-9} dx$

ζ) $\int (3^{x+2} - 4^{x-1}) dx$

η) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} dx$

θ) $\int \frac{x^2 - x}{x^3} dx$

6.1.5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}, \quad g(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x} dx$.

6.1.6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x+8}$.

α) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , ώστε να ισχύει $f(x) = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-4}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx = \int \frac{x-3}{x^2-6x+8} dx$

6.1.7. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 6.1.2.

α) $\int 2x(x^2+3)^6 dx$

β) $\int \frac{4x^3+3}{x^4+3x+2} dx$

γ) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

δ) $\int \sin x e^{\eta \mu x} dx$

ε) $\int e^x \sin e^x dx$

στ) $\int (2e^x+1)(2e^x+x)^{10} dx$

ζ) $\int \frac{\sin x}{\eta \mu x} dx$

η) $\int \frac{e^x}{(2+e^x)^3} dx$

θ) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

6.1.8. Να βρείτε μια συνάρτηση f , της οποίας η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbf{R}$, και επί πλέον ικανοποιεί τις συνθήκες $f(0)=f'(0)=1$ και $f(1)=4$.

6.1.9. Να βρείτε μία συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ να ισούται με $3x^2+2x+1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

6.1.10. Η είσπραξη $E(x)$, $0 \leq x \leq 1000$ από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x) = 500 - \frac{x}{2}$, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι σταθερός και ισούται με 10. Να βρείτε το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 200 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα. Να βρείτε επίσης για ποιον αριθμό προϊόντων η βιομηχανία έχει το μέγιστο κέρδος.

6.1.11. Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η επιτάχυνσή του σε m/min^2 τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $a(t) = e^t + 2t - 1$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 3 m από την αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα 1 m/min.

α) Να βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t .

β) Να βρείτε τον τύπο που δίνει τη συνάρτηση θέσεως του κινητού τη χρονική στιγμή t .

γ) Να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min.

6.1.12. Μια αντλία νερού που χρησιμοποιείται σ' ένα πλοίο για την απομάκρυνση υδάτων σε ένα χώρο, έχει ρυθμό αντλήσεως που δίνεται από τον τύπο:

$$f'(t) = 0,1 + 0,3t - \frac{t^2}{60},$$

όπου $f(t)$ είναι τα κυβικά μέτρα νερού που αντλούνται μετά από τις t ώρες λειτουργίας της. Να βρείτε πόσα κυβικά μέτρα νερού αντλούνται με την αντλία ανάμεσα στην 2^η και 3^η ώρα λειτουργίας της (για τη συνάρτηση f προφανώς θεωρούμε ότι ισχύει $f(0)=0$).

6.1.13. Η θερμοκρασία ενός σώματος, ελαττώνεται με ρυθμό $-6te^{-3t^2}$, όπου t ο χρόνος που πέρασε από την αρχή του πειράματος. Αν η αρχική θερμοκρασία του σώματος είναι $T_0=37^\circ\text{C}$, να βρείτε τον τύπο ο οποίος δίνει τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t .

6.1.14. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x} dx$$

$$\beta) \int \frac{9x^2 + 3x - 1}{9x^2 + 3x - 2} dx$$

$$\gamma) \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} dx$$

$$\delta) \int \left(5e^x - \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right) dx$$

$$\epsilon) \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 9} dx$$

$$\sigma\tau) \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx$$

6.2 Μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος.

Αν θεωρήσουμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g σ' ένα διάστημα Δ , σύμφωνα με τον κανόνα παραγωγίσεως του γινομένου συναρτήσεων (Ιδιότητα Π_3 της παραγρ. 3.2) θα έχουμε:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Επομένως

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + c,$$

αφού

$$\int (f(x)g(x))'dx = \int f(x)g(x)dx + c.$$

Παραλείποντας τη σταθερά c (αφού το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους περιέχει ήδη μια σταθερά ολοκληρώσεως) καταλήγουμε στον επόμενο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός ως **τύπος της παραγοντικής ολοκληρώσεως** ή της **ολοκληρώσεως κατά παράγοντες**.

Παραγοντική ολοκλήρωση.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται όταν το ολοκλήρωμα του β' μέλους υπολογίζεται ευκολότερα από το πρώτο, για παράδειγμα όταν η $f(x)$ είναι μια δύναμη του x , οπότε με την παραγωγή της θα προκύπτει μικρότερη δύναμη.

Έτσι, αν θέλαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int xe^{2x} dx$, θα μπορούσαμε να γράψουμε τον όρο e^{2x} στη μορφή $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$, και χρησιμοποιώντας τον τύπο της παραγοντικής ολοκληρώσεως να πάρουμε:

$$\int xe^{2x} dx = \int x \left(\frac{1}{2}e^{2x} \right)' dx = x \left(\frac{1}{2}e^{2x} \right) - \int (x)' \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

οπότε

$$\int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$$

Ο τύπος της παραγοντικής ολοκληρώσεως μπορεί να απλοποιήσει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int P(x)e^{\lambda x} dx, \quad \int P(x)\eta\mu(\lambda x)dx, \quad \int P(x)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx, \quad \int P(x)\ln(\lambda x)dx,$$

όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x και λ ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός, καθώς επίσης και ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \eta\mu(ax)e^{\lambda x} dx, \quad \int \sigma\upsilon\nu(ax)e^{\lambda x} dx.$$

Στα επόμενα δύο παραδείγματα εξηγείται αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθούμε για τέτοιους υπολογισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 6.2.1.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int (x^2 + x)e^x dx \quad \beta) \int (x^2 + 2x + 1) \ln x dx \quad \gamma) \int x \eta \mu 3x dx$$

Λύση.

α) Αφού $(e^x)' = e^x$, θα έχουμε:

$$\int (x^2 + x)e^x dx = \int (x^2 + x)(e^x)' dx = (x^2 + x)e^x - \int (x^2 + x)' e^x dx = (x^2 + x)e^x - \int (2x + 1)e^x dx .$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για το τελευταίο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int (2x + 1)e^x dx &= \int (2x + 1)(e^x)' dx = (2x + 1)e^x - \int (2x + 1)' e^x dx = \\ &= (2x + 1)e^x - \int 2e^x dx = (2x + 1)e^x - 2e^x + c \end{aligned}$$

οπότε τελικά βρίσκουμε:

$$\int (x^2 + x)e^x dx = (x^2 + x)e^x - ((2x + 1)e^x - 2e^x + c) = (x^2 - x + 1)e^x + c_1.$$

Αξιίζει να σημειωθεί ότι ο πολλαπλασιασμός ή η πρόσθεση σταθερών οδηγούν επίσης σε σταθερές ποσότητες. Για το λόγο αυτό, κατά τον επί μέρους υπολογισμό ολοκληρωμάτων θα μπορούσαμε να παραλείπομε τις σταθερές και απλά να προσθέτομε μια σταθερά c στην τελική έκφραση που βρίσκουμε.

β) Γράφοντας τον όρο $x^2 + 2x + 1$ στη μορφή $(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)'$ παίρνουμε:

$$\int (x^2 + 2x + 1) \ln x dx = \int (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)' \ln x dx = (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x) \ln x - \int (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)(\ln x)' dx$$

και αφού

$$\int (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)(\ln x)' dx = \int \frac{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x}{x} dx = \int (\frac{1}{3}x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

έχουμε τελικά:

$$\int (x^2 + 2x + 1) \ln x dx = (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x) \ln x - (\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + x + c)$$

γ) Γράφοντας τον όρο $\eta \mu 3x$ στη μορφή $(-\frac{1}{3} \sigma \nu \nu 3x)'$ παίρνουμε:

$$\int x \eta \mu 3x dx = \frac{1}{3} \int x (-\sigma \nu \nu 3x)' dx = -\frac{1}{3} x \sigma \nu \nu 3x + \frac{1}{3} \int \sigma \nu \nu 3x dx = -\frac{1}{3} x \sigma \nu \nu 3x + \frac{1}{9} \eta \mu 3x + c .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.2.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^{2x} \eta \mu(4x) dx$.

Λύση.

Θέτοντας $I = \int e^{2x} \eta \mu(4x) dx$ μπορούμε να πάρουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} I &= \int (\frac{1}{2} e^{2x})' \eta \mu(4x) dx = \frac{1}{2} [e^{2x} \eta \mu(4x) - 4 \int e^{2x} \sigma \nu \nu(4x) dx] = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \eta \mu(4x) - 2 \int e^{2x} \sigma \nu \nu(4x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \eta \mu(4x) - \int (e^{2x})' \sigma \nu \nu(4x) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - \left[e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) - \int e^{2x} (\sigma\upsilon\nu(4x))' dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) - 4 \int e^{2x} \eta\mu(4x) dx .$$

Επομένως έχουμε:

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) - 4I$$

και λύνοντας την τελευταία ισότητα ως προς I βρίσκουμε

$$I = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \eta\mu(4x) - e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) \right) .$$

Αν θέλουμε να δώσουμε τύπο για όλες τις παράγουσες της συναρτήσεως που πρέπει να ολοκληρώσουμε, θα πρέπει να γράψουμε:

$$\int e^{2x} \eta\mu(4x) dx = \frac{1}{10} e^{2x} \eta\mu(4x) - \frac{1}{5} e^{2x} \sigma\upsilon\nu(4x) + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Θα αναλύσουμε στη συνέχεια μια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων που έχουν ή μπορούν να λάβουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$ όταν για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε μια παράγουσα της F . Αφού για τις f, F ισχύει η σχέση $F' = f$, για την παράγωγο της σύνθετης συναρτήσεως $F(g(x)) = (F \circ g)(x)$ θα έχουμε

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

οπότε το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει παίρνει τη μορφή

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int F'(g(x))g'(x)dx = \int (F(g(x)))' dx = F(g(x)) + c$$

και θέτοντας $u = g(x)$ έχουμε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(u) + c = \int f(u)du .$$

Έτσι φτάνουμε στον επόμενο τύπο, ο οποίος είναι γνωστός ως **τύπος της ολοκληρώσεως με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως** ή απλά **ολοκλήρωση με αντικατάσταση**.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du, \quad \text{όπου } u = g(x) \text{ και } du = g'(x)dx.$$

Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα $\int (3x^2 + 2) \eta\mu(x^3 + 2x + 1) dx$ μπορεί να υπολογισθεί εύκολα θέτοντας $u = x^3 + 2x + 1$, οπότε $du = (x^3 + 2x + 1)' dx = (3x^2 + 2) dx$ και επομένως θα έχουμε διαδοχικά

$$\int (3x^2 + 2) \eta\mu(x^3 + 2x + 1) dx = \int \eta\mu(u)du = -\sigma\upsilon\nu u + c = -\sigma\upsilon\nu(x^3 + 2x + 1) + c .$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα φτάναμε αν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο $\int \eta\mu(g(x)) \cdot g'(x)dx = -\sigma\upsilon\nu(g(x)) + c$ του πίνακα 6.1.2 για $g(x) = x^3 + 2x + 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2.3.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int x \mu(x^2 + \frac{\pi}{3}) dx$$

$$\beta) \int x(x-2)(x^3-3x^2+1)^{19} dx :$$

$$\gamma) \int \frac{\sigma\upsilon\nu(1/x)}{x^2} dx$$

Λύση.

α) Θέτομε $u = x^2 + \frac{\pi}{3}$, οπότε $du = (x^2 + \frac{\pi}{3})' dx = 2x dx$ και έτσι παίρνουμε:

$$\int x \mu(x^2 + \frac{\pi}{3}) dx = \frac{1}{2} \int \mu u du = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu u + c = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(x^2 + \frac{\pi}{3}) + c .$$

β) Θέτομε $u = x^3 - 3x^2 + 1$, οπότε $du = (x^3 - 3x^2 + 1)' dx = 3x(x-2) dx$, και το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει παίρνει τη μορφή:

$$\int x(x-2)(x^3-3x^2+1)^{19} dx = \frac{1}{3} \int u^{19} du = \frac{1}{3} \frac{u^{20}}{20} + c = \frac{1}{60} (x^3-3x^2+1)^{20} + c .$$

γ) Θέτομε $u = \frac{1}{x}$, οπότε $du = (\frac{1}{x})' dx = -\frac{1}{x^2} dx$, και θα έχουμε:

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu(1/x)}{x^2} dx = - \int \sigma\upsilon\nu u du + c = -\eta\mu u + c = -\eta\mu(1/x) + c .$$

Ασκήσεις.

6.2.1. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με χρήση του τύπου της παραγοντικής ολοκληρώσεως.

$$\alpha) \int x^2 e^{-2x} dx$$

$$\beta) \int (x^2 + x + 1) e^{-3x} dx$$

$$\gamma) \int x^{11} \ln x dx$$

$$\delta) \int e^{-3x} \eta\mu 2x dx$$

6.2.2. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με χρήση του τύπου της παραγοντικής ολοκληρώσεως.

$$\alpha) \int \theta^2 \eta\mu 3\theta d\theta$$

$$\beta) \int \mu \sigma\upsilon\nu 5u du$$

$$\gamma) \int (2t^2 + 3t) \ln t dt$$

6.2.3. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως.

$$\alpha) \int x \eta\mu 5x^2 dx$$

$$\beta) \int (x^2 - 2x + 3)^9 (x-1) dx$$

$$\gamma) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx .$$

$$\delta) \int x \sqrt{x^2+1} dx$$

$$\epsilon) \int \sigma\upsilon\nu \theta \cdot e^{-\eta\mu \theta} d\theta$$

$$\sigma\tau) \int \frac{x+2}{(x^2+4x)^5} dx$$

$$\zeta) \int x \sqrt{9-x^2} dx$$

$$\eta) \int t e^{-t^2} dt$$

6.2.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα.

$$\alpha) \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$\beta) \int \frac{e^x}{(e^x+2) \ln(e^x+2)} dx$$

$$\gamma) \int \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

$$\delta) \int x^2 e^{-x^3} dx$$

$$\epsilon) \int e^{2x+1} \eta\mu(3x) dx$$

$$\sigma\tau) \int \frac{\sigma\upsilon\nu \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\zeta) \int x^5 e^{-x} dx$$

$$\eta) \int e^{-2x} \eta\mu(5x) dx$$

$$\theta) \int \frac{x}{x^2+1} \eta\mu\left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

6.2.5. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών τύπων:

$$\eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta) = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta, \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta,$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta.$$

$$\alpha) \int \eta\mu(20x)\sigma\upsilon\nu(10x) dx$$

$$\beta) \int \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu(3x) dx$$

$$\gamma) \int \eta\mu(3x)\eta\mu(5x) dx$$

6.3 Η έννοια και οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Έστω f μια *συνεχής* συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, η οποία λαμβάνει μη αρνητικές τιμές, δηλαδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Προκειμένου να προσεγγίσουμε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a, x = \beta$ θα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής:

α) Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε ν υποδιαστήματα, ίσου πλάτους $\Delta x = \frac{\beta - a}{\nu}$, χρησιμοποιώντας τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu = \beta$. Μια τέτοια επιλογή σημείων ονομάζεται **διαμερίση** του διαστήματος $[a, \beta]$.

β) Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ . Τα σημεία $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ ονομάζονται **ενδιάμεσα σημεία** της διαμερίσεως. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου αυτού (σχ. 6.3α) θα είναι ίσο με:

$$E_\kappa = f(\xi_\kappa) \Delta x$$

γ) Θεωρούμε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που σχηματίσαμε στο (β), δηλαδή το

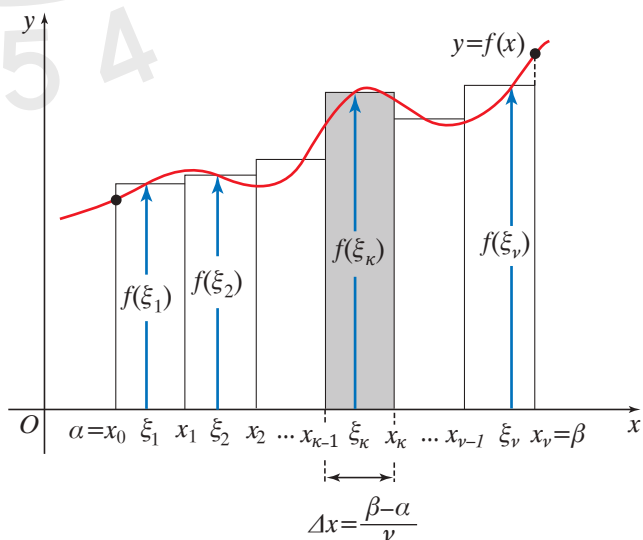
$$R_\nu = E_1 + E_2 + \dots + E_\nu = f(\xi_1) \Delta x + f(\xi_2) \Delta x + \dots + f(\xi_\nu) \Delta x, \quad (6.3.1)$$

το οποίο προφανώς γράφεται και στην εξής μορφή $R_\nu = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_\nu)] \Delta x$.

Είναι φανερό ότι, όσο το πλήθος των σημείων ν της διαμερίσεως αυξάνεται, το άθροισμα R_ν θα προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου Ω . Αποδεικνύεται μάλιστα ότι το R_ν , όταν το ν αυξάνεται απερίοριστα (οπότε το πλάτος $\Delta x = (\beta - a)/\nu$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό, δηλ. τείνει στο μηδέν) λαμβάνει μια «οριακή τιμή» που είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των σημείων ξ_κ . Η οριακή αυτή τιμή ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συναρτήσεως f από το a στο β , συμβολίζεται με:

$$\int_a^\beta f(x) dx$$

και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το a στο β ». Ο τρόπος ορισμού του ολοκληρώματος που παρουσιάστηκε παραπάνω προτάθηκε από τον Riemann, για τον λόγο αυτό το άθροισμα (6.3.1)



Σχ. 6.3α.

είναι γνωστό ως άθροισμα Riemann και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ονομάζεται ως **ολοκλήρωμα Riemann**.

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz. Οι αριθμοί a και b ονομάζονται **όρια της ολοκληρώσεως**. Η λέξη «όρια» που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 4, αφού εδώ μας δείχνουν απλά από ποιο μέχρι ποιο σημείο εξετάζουμε τη συνάρτηση f .

Στην έκφραση $\int_a^b f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα.

Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(u)du$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός (σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που γνωρίσαμε στην παράγραφο 6.1, το οποίο παριστάνει ένα σύνολο συναρτήσεων).

Ένας δεύτερος τρόπος προσεγγίσεως της έννοιας του ολοκληρώματος μιας μη αρνητικής συνεχούς συναρτήσεως f στο διάστημα $[a, b]$ προκύπτει αν, αντί να πάρουμε τυχαία ενδιαμέσα σημεία της διαμερίσεως, θεωρήσουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \dots, n$ τα σημεία ε_k, μ_k , στα οποία η συνάρτηση παίρνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή αντίστοιχα (τέτοια σημεία υπάρχουν πάντοτε σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής που αναφέραμε στην παράγραφο 3.8). Τότε θα έχουμε (σχ. 6.3β):

$$f(\varepsilon_k) \leq f(\xi_k) \leq f(\mu_k)$$

οπότε για το εμβαδόν $E_k = f(\xi_k)\Delta x$ του ορθογώνιου που έχει βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$ θα ισχύει η ανισότητα:

$$f(\varepsilon_k)\Delta x \leq f(\xi_k)\Delta x \leq f(\mu_k)\Delta x \Leftrightarrow f(\varepsilon_k)\Delta x \leq E_k \leq f(\mu_k)\Delta x$$

(η ίδια ανισότητα ισχύει αν στη θέση του E_k θεωρήσουμε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \mu_k$ και $x = \varepsilon_k$).

Επομένως για τα αθροίσματα:

$$s_n = f(\varepsilon_1)\Delta x + f(\varepsilon_2)\Delta x + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x, \quad S_n = f(\mu_1)\Delta x + f(\mu_2)\Delta x + \dots + f(\mu_n)\Delta x \quad (6.3.2)$$

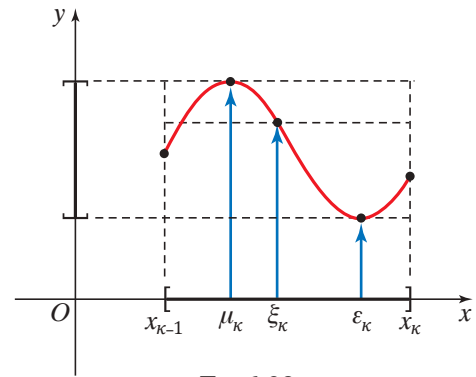
μπορούμε να γράψουμε τις ανισότητες $s_n \leq R_n \leq S_n$, $s_n \leq E(\Omega) \leq S_n$.

Αποδεικνύεται ότι, όσο το πλήθος των σημείων n της διαμερίσεως αυξάνεται (οπότε το πλάτος $\Delta x = (b-a)/n$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό), τα αθροίσματα s_n, S_n πλησιάζουν προς την ίδια «οριακή τιμή». Η τιμή αυτή θα είναι προφανώς η ίδια με την οριακή τιμή που λαμβάνει το R_n (αφού ισχύει $s_n \leq R_n \leq S_n$) και θα ισούται επίσης με το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω , που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a, x = b$ (αφού ισχύει $s_n \leq E(\Omega) \leq S_n$). Έτσι ξαναφτάνουμε στο **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συναρτήσεως f από το a στο b , που έχουμε εισάγει προηγουμένως μέσω του αθροίσματος R_n .

Τα παραπάνω γίνονται πιο εύκολα κατανοητά από το σχήμα 6.3γ, στο οποίο θεωρήσαμε μια γνήσια μονότονη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε το ολοκλήρωμα της **μη αρνητικής συνεχούς** συναρτήσεως f στο διάστημα $[a, b]$ είναι φανερό ότι:

$$\text{Αν } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b], \text{ τότε } E(\Omega) = \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$



Σχ. 6.3β.

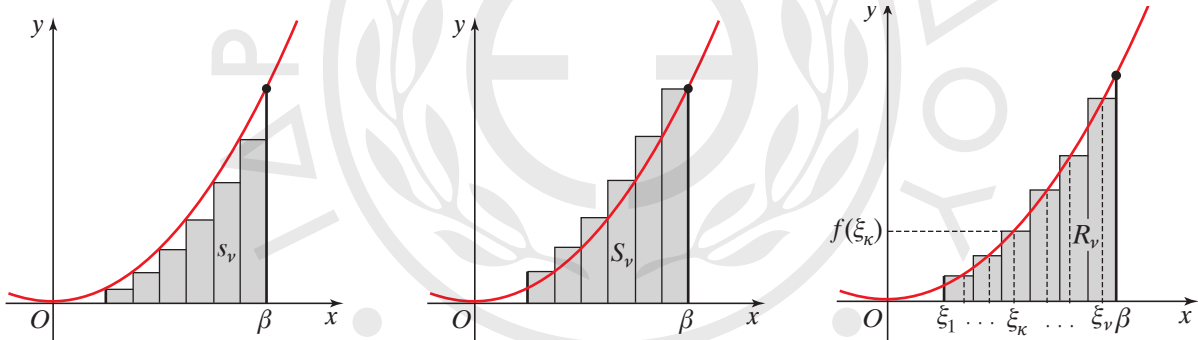
Σημειώνουμε ότι, αν η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι γνήσια θετικό, δηλαδή ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)dx > 0.$$

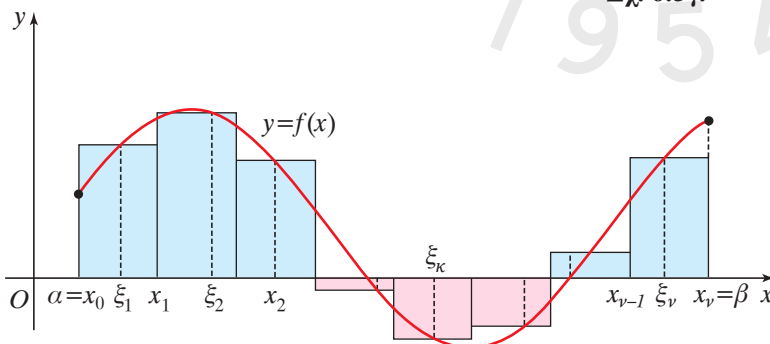
Στην περίπτωση που έχουμε μία συνεχή, αλλά όχι απαραίτητα μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ μπορούμε και πάλι να θεωρήσουμε τα αθροίσματα (6.3.1), (6.3.2), για τα οποία θα ισχύει επίσης η ανισότητα $s_n \leq R_n \leq S_n$. Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση αυτή, τα αθροίσματα s_n, R_n, S_n πλησιάζουν προς την ίδια «οριακή τιμή», όταν το πλήθος των σημείων n της διαμερίσεως αυξάνεται (οπότε το πλάτος $\Delta x = (\beta - a)/n$ των υποδιαστημάτων γίνεται αυθαίρετα μικρό). Έτσι ορίζεται το **ορισμένο ολοκλήρωμα** μιας οποιασδήποτε **συνεχούς** συναρτήσεως f από το a στο β . Στην περίπτωση αυτή όμως, όπως μπορούμε εύκολα να δούμε, το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x (σχ. 6.3δ και 6.3ε)¹.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ εισήχθη παραπάνω μόνο για την περίπτωση που ισχύει $a < \beta$ (αλλιώς δεν έχει νόημα να μιλάμε για διάστημα $[a, \beta]$). Μπορούμε ωστόσο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $a = \beta$ ή $a > \beta$, δεχόμενοι τις εξής συμβάσεις:

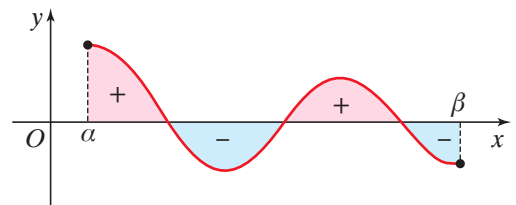
$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_a^\beta f(x)dx = -\int_\beta^a f(x)dx, \text{ για } a > \beta.$$



Σχ. 6.3γ.



Σχ. 6.3δ.



Σχ. 6.3ε.

1. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε παραπάνω για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μπορεί να ακολουθηθεί και για ορισμένες συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς, π.χ. για μονότονες συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Ωστόσο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα περιοριστούμε στη μελέτη ολοκληρωμάτων συνεχών μόνο συναρτήσεων.

Θα αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στους υπολογισμούς της τιμής του χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στον ορισμό (ο οποίος είναι γενικά δύσκολος).

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$ με $a < \beta < \gamma$ (σχ. 6.3στ). Αν συμβολίσουμε με Ω το χωρίο $A\Gamma\Delta Z$, με Ω_1 το $ABEZ$ και με Ω_2 το $B\Gamma\Delta E$, είναι φανερό ότι ισχύει $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$.

Όμως

$$E(\Omega) = \int_a^\gamma f(x)dx, \quad E(\Omega_1) = \int_a^\beta f(x)dx, \quad E(\Omega_2) = \int_\beta^\gamma f(x)dx,$$

οπότε θα έχουμε

$$\int_a^\gamma f(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για **οποιαδήποτε** σημεία $a, \beta, \gamma \in \Delta$ (ανεξάρτητα της διατάξεώς τους) και για **οποιαδήποτε** συνεχή συνάρτηση f . Πιο συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε:

$$\int_a^\gamma f(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx.$$

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος μπορεί να αποδειχθεί και το παρακάτω αποτέλεσμα, που αφορά στο ολοκλήρωμα του αθροίσματος δύο συναρτήσεων και του γινομένου συναρτήσεως επί σταθερού αριθμού.

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$ και $\lambda \in \mathbf{R}$. Τότε ισχύουν οι τύποι:

$$\alpha) \int_a^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^\beta f(x)dx$$

$$\beta) \int_a^\beta [f(x) + g(x)]dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$$

Όπως είδαμε προηγουμένως, για κάθε μη αρνητική συνεχή συνάρτηση f ($f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$) έχουμε $\int_a^\beta f(x)dx = E(\Omega) \geq 0$. Αν τώρα f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, θα έχουμε:

$$\int_a^\beta g(x)dx - \int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta (g(x) - f(x))dx \geq 0,$$

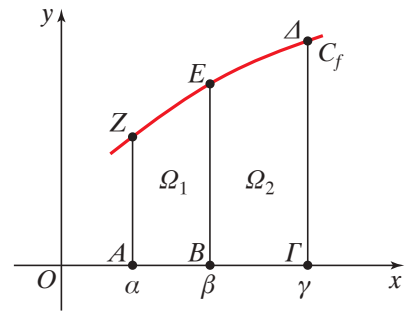
απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι:

$$\int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx.$$

Επομένως, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx.$$



Σχ. 6.3στ.

Τέλος αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε για κάθε $x \in [a, \beta]$ θα ισχύει $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Επομένως:

$$\int_a^\beta (-|f(x)|)dx \leq \int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta |f(x)|dx \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad -\int_a^\beta |f(x)|dx \leq \int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta |f(x)|dx$$

απ' όπου προκύπτει η ανισότητα

$$\left| \int_a^\beta f(x)dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx.$$

Επομένως, αποδείχτηκε το εξής αποτέλεσμα:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ ισχύει η ανισότητα¹:

$$\left| \int_a^\beta f(x)dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3.1.

Δίνεται ότι $\int_1^2 f(x)dx = 2$, $\int_1^4 f(x)dx = 1$ και $\int_1^2 g(x)dx = 4$.

α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 [3f(x) - 2g(x)]dx$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 |3f(x) - 2g(x)|dx \geq 2$.

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_2^4 f(x)dx$.

Λύση.

α) Έχουμε:

$$\int_1^2 [3f(x) - 2g(x)]dx = \int_1^2 3f(x)dx + \int_1^2 (-2)g(x)dx = 3\int_1^2 f(x)dx - 2\int_1^2 g(x)dx = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 = -2.$$

β) Έχουμε: $\left| \int_1^2 [3f(x) - 2g(x)]dx \right| \leq \int_1^2 |3f(x) - 2g(x)|dx$, οπότε $\int_1^2 |3f(x) - 2g(x)|dx \geq |-2| = 2$.

γ) Έχουμε: $\int_2^4 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -1 + 2 = 1$.

Ασκήσεις.

6.3.1. Να αποδείξετε ότι $\int_1^5 \ln x^2 dx + 3 \int_5^1 \ln \frac{1}{x} dx = 5 \int_1^5 \ln x dx$.

6.3.2. Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi \eta \mu^2 x dx + \int_\pi^0 (1 - \sigma \nu^2 x) dx = 0$.

6.3.3. Αν $\int_1^{10} f(x)dx = 5$, $\int_3^{10} f(x)dx = 2$ και $\int_8^{10} f(x)dx = 13$, να υπολογίσετε τις τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_1^3 f(x)dx$, $\int_3^8 f(x)dx$, $\int_1^8 f(x)dx$.

1. Η ανισότητα αυτή είναι αντίστοιχη με τη γνωστή τριγωνική ανισότητα $|\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|$ ή καλύτερα, με τη γενίκευσή της $|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$.

6.3.4. Αν $\int_2^5 f(x)dx = -2$, $\int_5^8 f(x)dx = 2$ και $\int_8^{10} f(x)dx = 4$ να υπολογίσετε τις τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων $\int_2^8 f(x)dx$, $\int_2^{10} f(x)dx$, $\int_{10}^5 f(x)dx$.

6.3.5. Αν $\int_0^3 f(x)dx = -1$ και $\int_0^3 g(x)dx = 2$, να υπολογίσετε τις τιμές των επομένων ορισμένων ολοκληρωμάτων.

$$\begin{array}{lll} \alpha) \int_0^3 2f(x)dx & \beta) \int_0^3 (-3)g(x)dx & \gamma) \int_0^3 (2f(x) - 3g(x))dx \\ \delta) \int_3^0 (2f(x) + g(x))dx & \epsilon) \int_3^0 f(x)dx + \int_0^3 g(x)dx & \sigma\tau) -3 \int_3^0 f(x)dx + 2 \int_0^3 g(x)dx \end{array}$$

6.3.6. Δίνεται μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$. Να γράψετε στη μορφή $\int_a^b f(x)dx$ τις επόμενες παραστάσεις.

$$\begin{array}{ll} \alpha) \int_1^2 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx & \beta) \int_{-1}^5 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx \\ \gamma) \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx + \int_5^{10} f(x)dx & \delta) \int_{-3}^1 f(x)dx - \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_1^6 f(x)dx \end{array}$$

6.3.7. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ανισότητες:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \int_{-5}^5 (x^2 + 1)dx \geq 0 & \beta) \int_1^3 \ln x dx \geq 0 & \gamma) \int_1^2 x^3 dx \geq \int_1^2 x^2 dx \geq \int_1^2 x dx \\ \delta) \int_{-5}^5 (x^2 - 5x + 9)dx \geq 0 & \epsilon) \int_{1/2}^1 \ln x dx \leq 0 & \sigma\tau) \int_0^1 x^3 dx \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx \end{array}$$

6.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μέχρι το σημείο αυτό, παρότι αναφέραμε διάφορες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε κάποια ολοκληρώματα όταν γνωρίζουμε κάποια άλλα, δεν έχουμε δει τρόπους υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος μιας δεδομένης συναρτήσεως (με εξαίρεση τον τύπο του ορισμού, ως οριακή τιμή αθροισμάτων, ο οποίος είναι δύσχρηστος). Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού που θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή θα μας δώσει έναν αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων, χωρίς τη χρήση του ορισμού.

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση f συνεχή σε ένα διάστημα Δ και έστω a ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ (όχι απαραίτητα άκρο του Δ). Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση F με τύπο:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in \Delta. \quad (6.4.1)$$

Αποδεικνύεται (η απόδειξη παραλείπεται) ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το διάστημα Δ και ότι η παράγωγός της είναι ίση με την f , δηλαδή ότι ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta \quad (6.4.2)$$

ή ισοδύναμα [συνδυάζοντας τις (6.4.1), (6.4.2)]

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad x \in \Delta. \quad (6.4.3)$$

Από τον τύπο (6.4.3) και τον τύπο παραγωγίσεως σύνθετης συναρτήσεως προκύπτει ότι για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$, για την οποία έχει νόημα η σύνθεση των f και g , θα ισχύει και ο γενικότερος τύπος:

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x). \quad (6.4.4)$$

Σύμφωνα με τον τύπο (6.4.2), η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι μία παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επίσης έχουμε $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ και $F(\beta) = \int_a^\beta f(t) dt$, οπότε:

$$\int_a^\beta f(t) dt = F(\beta) - F(a).$$

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως **Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού**, δείχνει ότι θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(t) dt$ μέσω του τελευταίου τύπου, ακόμη και αν αντί της F χρησιμοποιούσαμε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο $[a, \beta]$.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

Πράγματι, αφού η G είναι παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, και η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι επίσης παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $G(x) = F(x) + c$. Θέτοντας στην τελευταία $x = a$ και $x = \beta$ παίρνουμε αντίστοιχα:

$$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t) dt + c = c \Leftrightarrow c = G(a),$$

$$G(\beta) = F(\beta) + c = \int_a^\beta f(t) dt + c \Leftrightarrow \int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - c.$$

Επομένως τελικά θα έχουμε: $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$.

Συνήθως η διαφορά $G(\beta) - G(a)$ θα συμβολίζεται με $[G(x)]_a^\beta$, οπότε ο τύπος του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού παίρνει τη μορφή:

$$\int_a^\beta f(x) dx = [G(x)]_a^\beta \quad \text{όπου } G(x) = \int f(x) dx.$$

Για διευκόλυνση κατά την εφαρμογή του τελευταίου τύπου που βρήκαμε παρατίθεται ο πίνακας 6.4.1 (έχει παραλειφθεί η σταθερά c), ο οποίος προκύπτει άμεσα από τον πίνακα 6.1.1.

Πίνακας 6.4.1
Πίνακας παραγουσών (ή αρχικών) συναρτήσεων.

$f(x)$	$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	συνx	ημx	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	a^x
Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\ln x $	e^x	ημx	-συνx	εφx	-σφx	$\frac{a^x}{\ln a}$

Σημειώνεται ότι, οι τύποι της ολοκληρώσεως κατά παράγοντες και της ολοκληρώσεως με αλλαγή μεταβλητής που αναφέραμε στην παράγραφο 6.2 (για αόριστα ολοκληρώματα) λαμβάνουν, για το ορισμένο ολοκλήρωμα, την επόμενη μορφή.

$$\alpha) \int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx$$

$$\beta) \int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(\beta)} f(u)du \quad \text{όπου } u=g(x), du=g'(x)dx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.1.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σταθερά $c \in \mathbf{R}$ ισχύει $\int_a^\beta c dx = c(\beta - a)$.

Λύση.

Μία παράγουσα της συνεχούς συναρτήσεως $f(x)=c$ στο διάστημα $[a, \beta]$ είναι η $F(x)=cx$. Επομένως:

$$\int_a^\beta c dx = [cx]_a^\beta = c\beta - ca = c(\beta - a).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.2.

Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_3^9 x^2 dx, \int_1^3 \frac{1}{x} dx, \int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu x dx, \quad \beta) \int_1^2 \frac{x^2 + 2x - 3}{x} dx, \quad \gamma) \int_1^4 |x - 3| dx$$

Λύση.

α) Χρησιμοποιώντας τα αόριστα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων του πίνακα 6.1.1 παίρνουμε:

$$\int_3^9 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^9 = \frac{9^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 243 - 9 = 234, \quad \int_1^3 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_{-\pi}^{\pi} = -\sigma \nu \pi + \sigma \nu(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0.$$

β) Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^2 + 2x - 3}{x} dx &= \int_1^2 \left(x + 2 - \frac{3}{x} \right) dx = \int_1^2 x dx + 2 \int_1^2 1 dx - 3 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 2[x]_1^2 - 3[\ln x]_1^2 = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 - 3 \ln 2 = \frac{1}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

γ) Αφού

$$|x - 3| = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

θα έχουμε:

$$\int_1^4 |x - 3| dx = \int_1^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (x - 3) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_3^4 = \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2} \right) + \left(-4 - \left(-\frac{9}{2} \right) \right) = 5.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4.3.

Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad \beta) \int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx \quad \gamma) \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

Λύση.

α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} x(\eta\mu x)' dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x)' \eta\mu x dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = \\ &= [x\eta\mu x]_0^{\pi} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = (\pi \cdot \eta\mu\pi - 0 \cdot \eta\mu 0) + (\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = -1. \end{aligned}$$

β) Θέτουμε $u=9-x^2$, οπότε $du = -2xdx$, δηλαδή $xdx = -\frac{1}{2} du$. Για $x=0$ είναι $u_1=9$ και για $x=3$ είναι $u_2=0$. Επομένως:

$$\int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx = \int_9^0 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_9^0 = -\frac{1}{3} (0 - \sqrt{9^3}) = -\frac{1}{3} (-27) = 9.$$

γ) Αν θέσουμε $u=\ln x$, θα έχουμε $du = (\ln x)' = \frac{1}{x} dx$, $u_1=\ln 2$ και $u_2=\ln 3$. Επομένως:

$$\int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{(\ln 3)^2 - (\ln 2)^2}{2}.$$

Ασκήσεις.

6.4.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=xe^x$ και $F(x)=xe^x-e^x$.

α) Να αποδείξετε ότι η F είναι μια παράγουσα της f .

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^2 xe^x dx, \quad \int_2^3 xe^x dx, \quad \int_0^3 xe^x dx, \quad \int_{-1}^1 xe^x dx.$$

6.4.2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x\eta\mu x$:

α) Να βρείτε την παράγωγο της f .

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/2} (\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x) dx, \quad \int_0^{\pi} (\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x) dx, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x) dx.$$

6.4.3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f .

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

6.4.4. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 e^x dx$$

$$\beta) \int_{-1}^0 e^{-x} dx$$

$$\gamma) \int_1^2 \frac{5}{x} dx$$

$$\delta) \int_0^{\pi/2} (2\sigma\eta\kappa - 3\eta\mu\kappa) dx$$

$$\epsilon) \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$\sigma\tau) \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

6.4.5. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\alpha) F(x) = \int_1^{\eta\mu\kappa} \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\beta) F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\sigma\eta\nu(t^2)}{t} dt$$

$$\gamma) F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t} dt$$

6.4.6. Αν $\int_0^x t^2 f(t) dt = x^3 + 2x^5$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, να βρείτε το $f(2)$.

6.4.7. Να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως με τύπο $F(x) = e^x + \int_0^x e^x f(t) dt$.

6.4.8. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^3 (x^2 - 9) dx$$

$$\beta) \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) dx$$

$$\gamma) \int_1^3 \left(2x^2 + 1 - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$\delta) \int_1^4 \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\epsilon) \int_{-2}^1 (x^2 + 3x + 1) dx$$

$$\sigma\tau) \int_{-20}^{20} (2x^3 + 3x) dx$$

$$\zeta) \int_{-2}^2 (2x+3)(x^2+3x+1)^3 dx$$

$$\eta) \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$\theta) \int_2^3 \left(x^2 + x + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

6.4.9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{-1}^1 (x^2 - |x|) dx$$

$$\beta) \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$$

$$\gamma) \int_1^4 |x^2 - 5x + 6| dx$$

6.4.10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 t e^{-t^2} dt$$

$$\beta) \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+6} dx$$

$$\gamma) \int_{-1}^1 x^3 (x^4 + 1)^4 dx$$

$$\delta) \int_{-1}^1 x e^{x^2+1} dx$$

$$\epsilon) \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+2} dx$$

$$\sigma\tau) \int_0^1 x (x^2 + 1)^5 dx$$

6.4.11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{\pi/2} \eta\mu^3 \chi \sigma\eta\nu \chi dx$$

$$\beta) \int_{\pi^2}^{3\pi^2} \frac{\sigma\eta\nu(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

$$\gamma) \int_1^2 \frac{x+3}{(x^2+6x)^2} dx$$

$$\delta) \int_{2/\pi}^{3/\pi} \frac{\sigma\eta\nu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

$$\epsilon) \int_1^2 x \ln x dx$$

$$\sigma\tau) \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$\zeta) \int_0^1 x^4 e^{x^5} dx$$

$$\eta) \int_1^2 x (e^{x^2} - 2x) dx$$

$$\theta) \int_1^2 \frac{x}{9-x^2} dx$$

6.4.12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^2 x e^{2x} dx$$

$$\beta) \int_0^1 x^2 e^{-x/2} dx$$

$$\gamma) \int_0^1 (2x^2 + 3x + 1) e^{-x} dx.$$

6.4.13. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε η f να λάβει τη μορφή:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}.$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ , έτσι ώστε η g να λάβει τη μορφή:

$$g(x) = \kappa x + \lambda + \frac{\mu}{x+1}.$$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 g(x)dx$.

6.4.14. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , έτσι ώστε η f να λάβει τη μορφή:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}.$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^4 f(x)dx$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ , έτσι ώστε η g να λάβει τη μορφή:

$$g(x) = \frac{\kappa}{x-2} + \frac{\lambda}{x-3}.$$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_4^5 g(x)dx$.

6.4.15. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2, & -1 \leq x < 0 \\ 6x^3, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

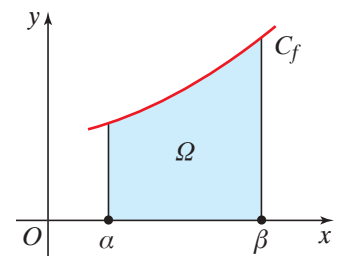
να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

6.5 Εμβαδά επιπέδων σχημάτων.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε πώς μπορούμε, χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα, να υπολογίζουμε το εμβαδόν επιπέδων σχημάτων, των οποίων τα όρια (σύνορα) καθορίζονται από γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και/ή κατακόρυφες ευθείες.

Στην παράγραφο 6.3 στην πορεία εισαγωγής της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, διαπιστώσαμε ότι το εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας μη αρνητικής συνεχούς ($f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$) συναρτήσεως στο διάστημα $[a, \beta]$, από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και από τον άξονα των x , δίνεται από τον τύπο (σχ. 6.5α)

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x)dx.$$



Σχ. 6.5α.

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=x^2$, από τις ευθείες $x=-1$, $x=1$ και από τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f παίρνει μόνο αρνητικές ή μηδενικές τιμές στο διάστημα $[a, \beta]$, ($f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$) μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $-f$ (η οποία θα παίρνει μη αρνητικές τιμές) και το αντίστοιχο χωρίο Ω' που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $-f$ από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.5β). Αφού τα Ω , Ω' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ θα έχουν ίσα εμβαδά, οπότε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_a^\beta (-f(x)) dx = - \int_a^\beta f(x) dx.$$

Έστω τώρα δύο συναρτήσεις f, g , συνεχείς μη αρνητικές στο διάστημα $[a, \beta]$, για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$, μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με το σχήμα 6.5γ παίρνοντας τη διαφορά των εμβαδών που αντιστοιχούν στα χωρία $AB\Gamma\Delta$ και $ABEZ$. Επομένως:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx.$$

Ο τύπος αυτός ισχύει ακόμη και όταν οι συνεχείς συναρτήσεις f, g , δεν είναι μη αρνητικές στο διάστημα $[a, \beta]$, αρκεί όμως να ικανοποιούν τον περιορισμό $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

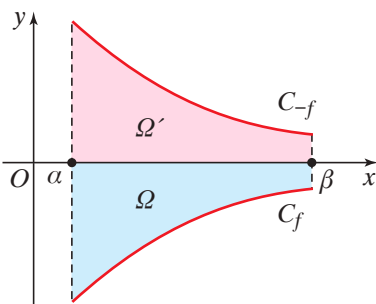
Αν τέλος η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, όπως στο σχήμα 6.5δ, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1 και Ω_2 , οπότε:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\beta (g(x) - f(x)) dx.$$

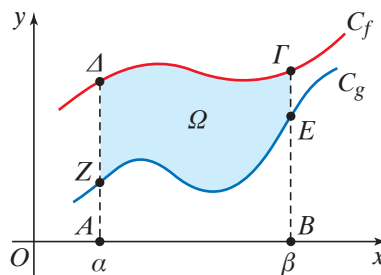
Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος τύπος μπορεί να γραφεί και στην εξής μορφή:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx,$$

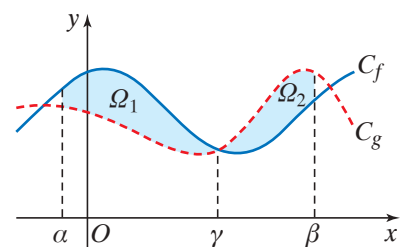
η οποία αποτελεί την πλέον γενική έκφραση για τον υπολογισμό του εμβαδού $E(\Omega)$ του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο οποιωνδήποτε συνεχών συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$.



Σχ. 6.5β.



Σχ. 6.5γ.



Σχ. 6.5δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5.1.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=x^3+x^2$, από τις ευθείες $x=-2, x=1$ και από τον άξονα $x'x$.

Λύση.

Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως τέμνει τον $x'x$ στα σημεία που οι τετμημένες τους είναι ρίζες της εξισώσεως $f(x)=0$. Έχουμε $x^3+x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x^2$ είναι συνεχής στο $[-2,1]$ και ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [-2,-1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$ (σχ. 6.5ε).

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = -\int_{-2}^{-1} (x^3 + x^2) dx + \int_{-1}^1 (x^3 + x^2) dx = -\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{25}{12}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5.2.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2, g(x)=3x$ και από τις ευθείες $x=-1, x=2$.

Λύση.

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων βρίσκουμε αρχικά τις ρίζες της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[-1,2]$. Έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2=3x \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3.$$

Η δεύτερη ρίζα δεν μας ενδιαφέρει αφού βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[-1,2]$. Το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[-1,2]$ φαίνεται στον πίνακα 6.5.1 (σχ. 6.5στ).

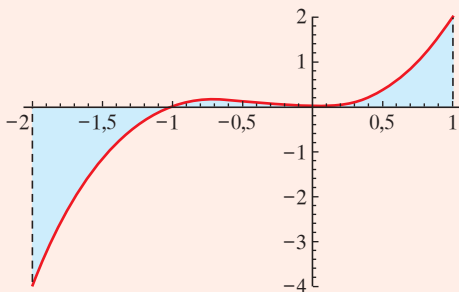
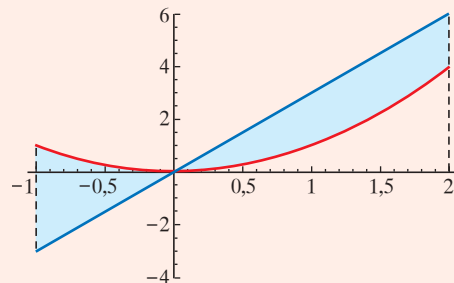
Πίνακας 6.5.1

x	-1	0	2		
$f(x) - g(x)$	4	+	0	-	-2

Δηλαδή για $x \in [-1,0]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$ και για $x \in [0,2]$ ισχύει $f(x) \leq g(x)$.

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_{-1}^0 |3x - x^2| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx + \int_0^2 (3x - x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{31}{6}.$$

**Σχ. 6.5ε.****Σχ. 6.5στ.**

Ασκήσεις.

6.5.1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f , από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, και από τον άξονα των x , όταν:

$$\alpha) f(x) = e^{-x}, \alpha = -1, \beta = 1 \quad \beta) f(x) = -x^2, \alpha = 1, \beta = 3 \quad \gamma) f(x) = \frac{1}{x}, \alpha = 1, \beta = e$$

$$\delta) f(x) = -\frac{1}{x}, \alpha = 1, \beta = e \quad \epsilon) f(x) = \sqrt{x}, \alpha = 0, \beta = 4 \quad \sigma\tau) f(x) = x(x+2), \alpha = 0, \beta = 3.$$

6.5.2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x) = 6x^2 - 3x$ και από τον άξονα x .

6.5.3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^2 + 1$.

6.5.4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2x + 1$ και $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ και από τις ευθείες $x = -2$, $x = 3$.

6.5.5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu 2x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2\pi$.

6.5.6. Στην είσοδο ενός κτηρίου υπάρχουν τρεις αψίδες, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.5ζ. Η κεντρική αψίδα περιγράφεται από τις παραβολές με εξισώσεις $C_1: y = -4x^2 + 24x$ και $C_2: y = -5x^2 + 30x$. Αν το κόστος επενδύσεως με ένα συγκεκριμένο υλικό είναι 20 €/m², να υπολογίσετε το συνολικό κόστος για την επένδυση της αψίδας.

6.5.7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της (1,5).

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , από την εφαπτόμενη και από τον άξονα x .

6.5.8. Το σχήμα 6.5η δείχνει την κάτοψη ενός κανό που χρησιμοποιείται σε θαλάσσιους αγώνες ταχύτητας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των δύο γραμμοσκιασμένων χωρίων του σχήματος, καθώς και το συνολικό εμβαδόν της κατόψεως.

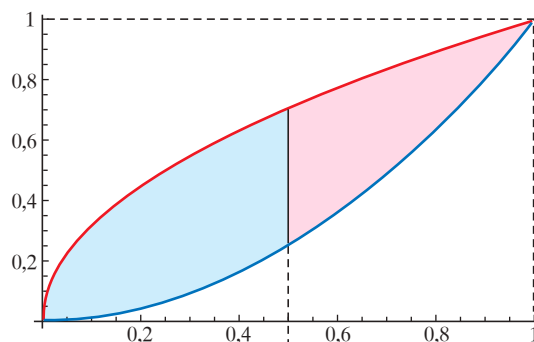
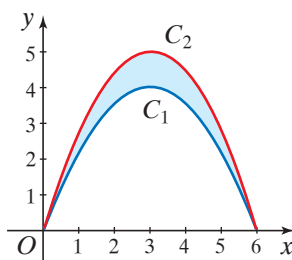
6.5.9. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 1 \\ 2\sqrt{x} - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

τις ευθείες $x = 0$, $x = 3$ και τον άξονα των x .



Σχ. 6.5ζ.



Σχ. 6.5η.

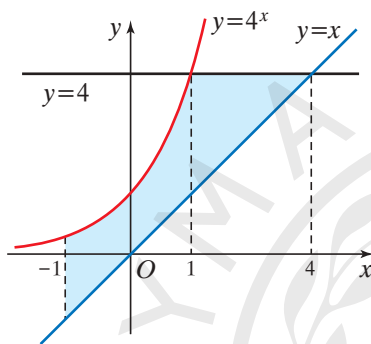
6.5.10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 6.5θ.

6.5.11. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x$.

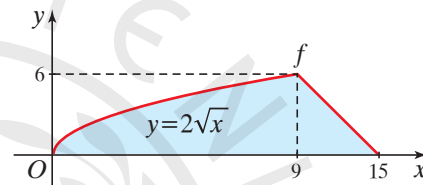
- Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παραστάσεως της f στα σημεία με τετμημένες $x=1$ και $x=e$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη C_f και τις δύο εφαπτόμενες.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e,1)$.

6.5.12. Το περυνγίο σταθεροποίησης ενός πλοίου έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 6.5ι.

- Να γράψετε τον τύπο της συναρτήσεως f , η οποία περιγράφει το σχήμα του περυνγίου
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πλάγιας επιφάνειας του περυνγίου.



Σχ. 6.5θ.



Σχ. 6.5ι.

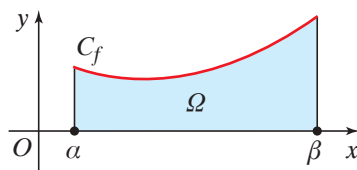
6.6 Όγκοι στερεών. Μήκος τόξου καμπύλης.

Τα ορισμένα ολοκληρώματα, εκτός από τον υπολογισμό εμβαδών επιπέδων χωρίων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον υπολογισμό των όγκων στερεών, που δημιουργούνται από την περιστροφή ενός επίπεδου σχήματος γύρω από ένα σταθερό άξονα.

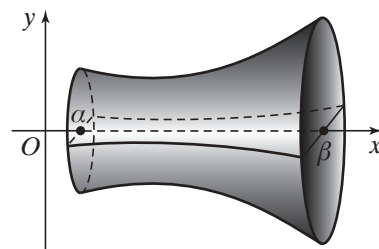
Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως, από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6α). Αν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$ δημιουργείται ένα στερεό, το οποίο ονομάζεται **στερεό εκ περιστροφής** (σχ. 6.6β).

Ο όγκος V_f του στερεού δίνεται από τον παρακάτω τύπο (η απόδειξη παραλείπεται):

$$V_f = \pi \int_a^\beta (f(x))^2 dx$$



Σχ. 6.6α.



Σχ. 6.6β.

Στην περίπτωση που η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα $y'y$ ο όγκος V_f του στερεού δίνεται από τον επόμενο τύπο, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη (και επομένως αντιστρέφεται) στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

$$V_f = \pi \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} (f^{-1}(y))^2 dy$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = 2\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ και } \Omega$$

το χωρίο που περικλείεται από την C_f από τις ευθείες $x=0, x=4$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6γ). Αν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δημιουργήσει το στερεό του σχήματος 6.6δ, που ονομάζεται **παραβολοειδές** και χρησιμοποιείται στην κατασκευή παραβολικών κατόπτρων (φώτα αυτοκινήτων κ.λπ.).

Ο όγκος του στερεού αυτού είναι ίσος με:

$$V_f = \pi \int_0^4 (2\sqrt{x})^2 dx = 4\pi \int_0^4 x dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 32\pi.$$

Αν το περιστρεφόμενο χωρίο περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων f, g και από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$ και ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το στερεό που παράγεται έχει όγκο:

$$V_{f,g} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx.$$

Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις (σχ. 6.6ε):

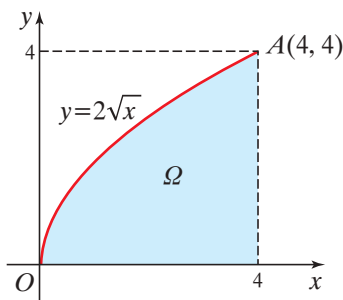
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = \sqrt{x}.$$

Αφού ισχύει

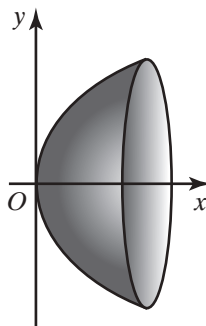
$$\sqrt{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0$$

για κάθε $x \in [1, 2]$, ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι:

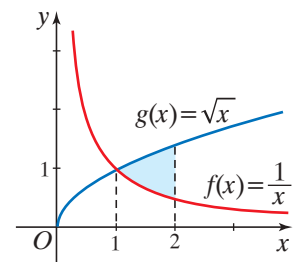
$$V_{f,g} = \pi \int_1^2 [(\sqrt{x})^2 - (\frac{1}{x})^2] dx = \pi \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \pi.$$



Σχ. 6.6γ.



Σχ. 6.6δ.



Σχ. 6.6ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6.1.

Το ορθογώνιο τρίγωνο OAB του σχήματος 6.6στ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, δημιουργώντας κατά την περιστροφή του έναν κώνο ύψους $v=(OA)$ και ακτίνας βάσεως R . Να βρείτε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο του κώνου αυτού συναρτήσει των v και R .

Λύση.

Η κλίση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $O(0,0)$ και $B(v, R)$ είναι ίση με $\lambda=R/v$. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OB θα περιγράφεται από τον τύπο:

$$f(x) = \lambda x = \frac{R}{v}x, \quad 0 \leq x \leq v.$$

Επομένως, ο όγκος V_f του στερεού που παράγεται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_f = \pi \int_0^v \left(\frac{R}{v}x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx = \pi \frac{R^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v = \pi \frac{R^2}{v^2} \frac{v^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 v.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6.2.

Να υπολογίσετε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο σφαίρας ακτίνας R .

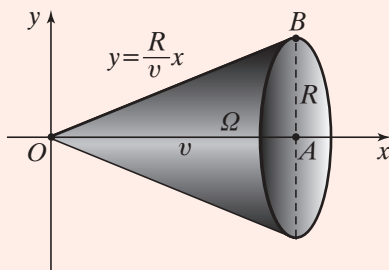
Λύση.

Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq R$, από τις ευθείες $x=0$ και $x=R$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6ζ). Όταν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δημιουργήσει ένα στερεό όγκου

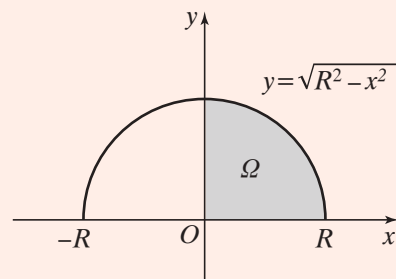
$$V_f = \pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Ο όγκος της σφαίρας ακτίνας R θα βρίσκεται αν πάρουμε το διπλάσιο από το προηγούμενο ολοκλήρωμα, δηλαδή είναι ίσος με

$$V = 2V_f = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

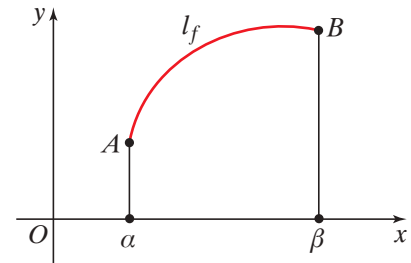


Σχ. 6.6στ.



Σχ. 6.6ζ.

Τα ορισμένα ολοκληρώματα, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του μήκους της καμπύλης της γραφικής παραστάσεως C_f μιας συνεχούς συναρτήσεως που αντιστοιχεί σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Συνήθως αναφερόμαστε σ' αυτό με την ονομασία **μήκος τόξου** της καμπύλης $y=f(x)$ από το a έως το β (ή ισοδύναμα στο διάστημα $[a, \beta]$) και θα το συμβολίζουμε με $l_f(a, \beta)$ ή απλά l_f (σχ. 6.6η).



Σχ. 6.6η.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ με συνεχή παράγωγο. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ από το a έως το β δίνεται από τον τύπο (η απόδειξη παραλείπεται):

$$l_f = \int_a^\beta \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.6.3.

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Να βρείτε το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ από το 0 έως το 1.

Λύση.

Η παράγωγος της συναρτήσεως f είναι ίση με:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο

$$l_f = \int_a^\beta \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

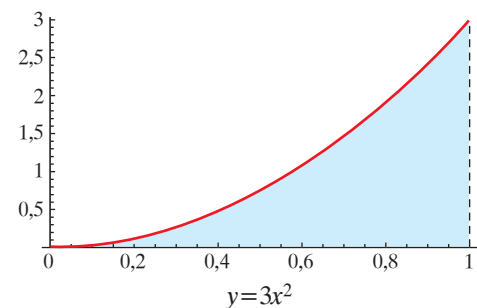
για $a = 0, \beta = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} l_f &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2}([e^x]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1) = \frac{1}{2}(e + e^{-1}). \end{aligned}$$

Ασκήσεις.

6.6.1. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=3x^2$ από την ευθεία με εξίσωση $x=1$ και από τους άξονες $x'x$ και yy' (σχ. 6.6θ).

6.6.2. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου



Σχ. 6.6θ.

που περικλείεται από την καμπύλη $y=\eta\mu 2x$ από τις ευθείες $x=0, x=\pi/4$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6ι).

6.6.3. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=3x$.

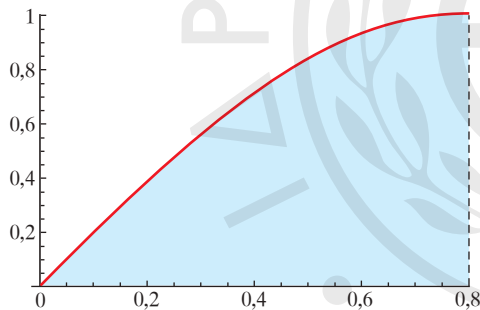
6.6.4. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\sqrt{2x+1}$ από τις ευθείες $x=1, x=3$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.6ια).

6.6.5. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=3x^2$ από τις ευθείες $x=1, x=3$ και από τον άξονα $x'x$.

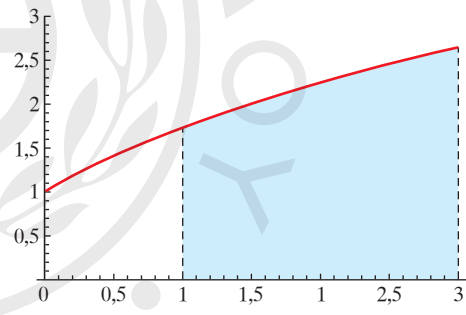
6.6.6. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{\sin x}$, $g(x)=1$ και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=\pi/3$ (σχ. 6.6ιβ).

6.6.7. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x^2$ και $g(x)=3x^3$.

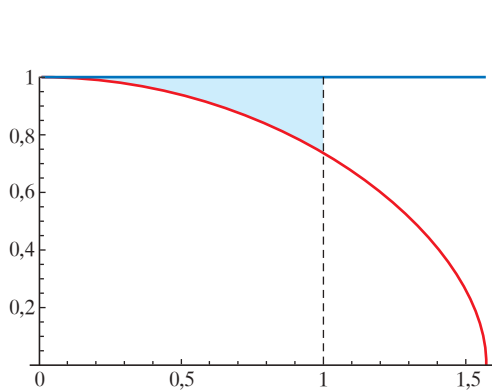
6.6.8. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησεως $f(x)=xe^{-x}$ και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=5$ (σχ. 6.6ιγ).



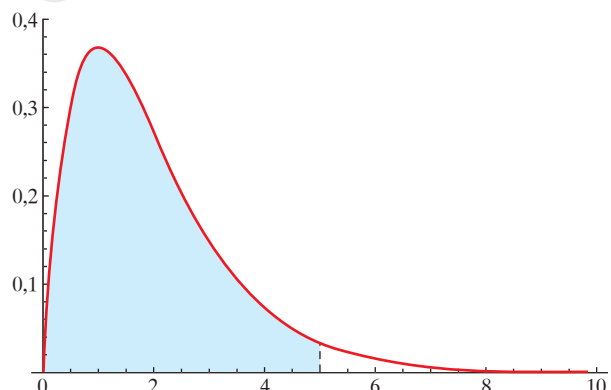
Σχ. 6.6ι.



Σχ. 6.6ια.



Σχ. 6.6ιβ.



Σχ. 6.6ιγ.

6.6.9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Να υπολογίσετε, το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ στο διάστημα $[0, 27]$.

6.6.10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^{x/2} + e^{-x/2}$. Να υπολογίσετε, το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

6.6.11. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{2r}(e^{rx} + e^{-rx})$, όπου r είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συναρτήσεως και να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$1 + (f'(x))^2 = r^2 f^2(x).$$

β) Να βρείτε μια παράγουσα της συναρτήσεως $rf(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ δίνεται από την έκφραση:

$$l_f = \frac{1}{2r} [(e^{r\beta} + e^{-r\alpha})(e^{-r\beta} + e^{r\alpha})].$$

6.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

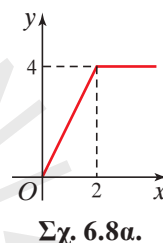
Αρχική συνάρτηση ή αντιπαράγωγος ή παράγουσα της f στο Δ .	Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση F στο Δ για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ .	$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R}$ όπου F είναι μια παράγουσα της f .
Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.	α) $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \in \mathbf{R}$ β) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
Ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το αόριστο ολοκλήρωμα.	$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$
Ολοκλήρωση με αντικατάσταση για το αόριστο ολοκλήρωμα.	$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du, \quad \text{όπου } u = g(x) \text{ και } du = g'(x) dx.$
Ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συναρτήσεως f από το a έως το β .	$\int_a^\beta f(x) dx = G(\beta) - G(a) = [G(x)]_a^\beta$ όπου G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, \beta]$.
Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.	α) $\int_a^\gamma f(x) dx = \int_a^\beta f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx$ β) $\int_a^\beta \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx$ γ) $\int_a^\beta [f(x) + g(x)] dx = \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta g(x) dx$ δ) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$.

	ε) Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx .$ στ) $\left \int_a^\beta f(x) dx \right \leq \int_a^\beta f(x) dx$
Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.	$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$ όπου G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$.
Παράγωγος της συναρτήσεως $F(x) = \int_a^x f(t) dt$	$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = F'(x) = f(x)$
Ολοκλήρωση κατά παράγοντες για τα ορισμένα ολοκληρώματα.	$\int_a^\beta f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x) g(x) dx$
Ολοκλήρωση με αντικατάσταση για τα ορισμένα ολοκληρώματα.	$\int_a^\beta f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(\beta)} f(u) du$ όπου $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$.
Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.	Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(\xi) = \mu_f = \frac{\int_a^\beta f(x) dx}{\beta - a}$
Εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της μη αρνητικής συναρτήσεως f , από τις ευθείες με εξισώσεις $x = a$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$
Εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , τις ευθείες με εξισώσεις $x = a$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) - g(x) dx$
Όγκος V ενός στερεού που δημιουργείται από περιστροφή του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τις ευθείες με εξισώσεις $x = a$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$V_f = \pi \int_a^\beta (f(x))^2 dx$
Όγκος V ενός στερεού που δημιουργείται από περιστροφή του χωρίου Ω που περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, και από τις ευθείες με εξισώσεις $x = a$ και $x = \beta$.	$V_{f,g} = \pi \int_a^\beta [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$
Μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το a έως το β .	$l_f = \int_a^\beta \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

6.8 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 x^2 - 1 dx$ είναι ίσο με 0.	Σ Λ
2.	Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με $x \ln x - x + c$.	Σ Λ
3.	Το ολοκλήρωμα $\int \frac{2 \ln x}{x} dx$ είναι ίσο με $\ln^2 x + c$.	Σ Λ
4.	Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-2, 2]$ και $f(1) = g(1) + 1$, τότε για κάθε $x \in [-2, 2]$ ισχύει $g(x) = f(x) - 1$.	Σ Λ
5.	Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, όπου f η συνάρτηση του σχήματος 6.8α. Τότε $F'(2) = 4$.	Σ Λ
6.	Για το αόριστο ολοκλήρωμα μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως f ισχύει η ισότητα $\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx$.	Σ Λ
7.	Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε θα ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$.	Σ Λ
8.	Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$. Αν $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$, τότε θα ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.	Σ Λ
9.	Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.	Σ Λ
10.	Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_a^\beta f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^\beta f(x) dx \cdot \int_a^\beta g(x) dx$.	Σ Λ
11.	Ισχύει $\int_{-a}^a (x^4 - 2x) dx \leq \int_{-a}^a (x^4 - 2x + x^{10} e^{-x^2}) dx$, για κάθε $a > 0$.	Σ Λ
12.	Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_a^\beta f'(x) x dx = [f(x)x]_a^\beta - \int_a^\beta f(x) dx$.	Σ Λ



13.	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε και οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+e^x$ είναι παράγουσες της f .	Σ Λ
14.	Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο Δ , τότε για κάθε $x_0, x_1 \in \Delta$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f'(x) dx.$	Σ Λ
15.	Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ , ισχύει: $\int f'(x) dx = f(x) - c, c \in \mathbf{R}.$	Σ Λ
16.	Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$, τότε $f(\xi) = 0$ για ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$.	Σ Λ
17.	Αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx$ ή $E(\Omega) = \int_a^\beta g(x) dx - \int_a^\beta f(x) dx$.	Σ Λ
18.	Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 6.8β είναι ίσο με $\int_1^{-1} f(x) dx = E(\Omega)$.	Σ Λ
19.	Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 6.8γ είναι ίσο με $\int_a^0 f(x) dx - \int_0^\beta f(x) dx$.	Σ Λ
20.	Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 (x^2 - 2x) dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)=x^2-2x$ και τον άξονα των x .	Σ Λ
21.	Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ με συνεχή παράγωγο. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ από το a έως το β δίνεται από τον τύπο: $l_f = \int_a^\beta \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$	Σ Λ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1-x} dx$ είναι ίσο με: α) $\ln(1-x) + c$ β) $\ln(x-1) + c$ γ) $\ln 1-x + c$ δ) $\ln x + c$

11.	Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma, \in \Delta$, τότε: α) $\int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\gamma^a f(t)dt$ β) $\int_a^\gamma f(x)dx = \int_a^\beta f(t)dt + \int_\beta^\gamma f(u)du$ γ) $\int_a^\beta f(x)dx = \int_\beta^a f(t)dt$ δ) $\int_a^\beta f(x)dx = -\int_{-\beta}^{-a} f(x)dx$
12.	Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$ και $\lambda \in \mathbf{R}$, τότε: α) $\int_a^\beta (f(x) \circ g(x))dx = \left(\int_a^\beta f(x)dx\right) \left(\int_a^\beta g(x)dx\right)$ β) $\int_a^\beta (f(x) - g(x))dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$ γ) $\int_a^\beta \lambda f(x)dx = -\lambda \int_a^\beta f(x)dx$ δ) $\int_a^\beta (f(x) + g(x))dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$
13.	Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως f, από τις ευθείες με εξισώσεις $x=a$, $x=\beta$ και από τον άξονα $x'x$ δίνεται από τον τύπο $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x)dx$ α) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. β) Αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. γ) Για κάθε (συνεχή) συνάρτηση f. δ) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
14.	Ο όγκος V_f του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της τεθλασμένης γραμμής OAB (σχ. 6.8ε) γύρω από τον άξονα $x'x$ είναι ίσος με: α) $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 x^2 dx$ β) $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi$ γ) $V = \pi \int_0^2 (x + x^2) dx$ δ) $V = \pi + \pi \int_1^2 x^2 dx$ Σχ. 6.8ε.
15.	Ο όγκος V_f του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος AB γύρω από τον άξονα $x'x$ (σχ. 6.8στ) είναι ίσος με: α) $V_f = \int_2^6 x dx$ β) $V_f = \frac{\pi}{2} \int_2^4 x^2 dx$ γ) $V_f = 2\pi \int_2^4 x dx$ δ) $V_f = \int_2^6 x^2 dx$ Σχ. 6.8στ.

6.9 Γενικές ασκήσεις.

6.9.1. Σε ένα πλοίο υπάρχει ένα αυτόματο μηχανήμα πωλήσεως αναψυκτικού, στο οποίο έχει παρατηρηθεί ότι ο ρυθμός καταναλώσεως (λόγω πωλήσεως ποτηριών αναψυκτικού στους επιβάτες του πλοίου) δίνεται από τον τύπο $A'(t) = -0,09\sqrt{t}$ μονάδες όγκου ανά ώρα. Αν στο πλοίο είχε γίνει κατά τον απόπλου προμήθεια 480 μονάδων όγκου αναψυκτικού, να υπολογίσετε την ποσότητα αναψυκτικού που απομένει προς διάθεση στους επιβάτες του πλοίου ως συνάρτηση του χρόνου. Στη συνέχεια να βρείτε σε πόσο χρόνο θα εξαντληθούν τα αποθέματα αναψυκτικού.

6.9.2. Δίνονται τα ολοκληρώματα $F(x) = \int_0^x e^t \sin^2 t dt$ και $G(x) = \int_0^x e^t \eta \mu^2 t dt$, $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $F(x) + G(x) = e^x - 1$, $F(x) - G(x) = \frac{1}{5}[e^x (\sin 2x + \eta \mu 2x) - 1]$.

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $F(x)$ και $G(x)$.

γ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_{\pi/2}^{\pi} e^t \sin^2 t dt$, $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^t \eta \mu^2 t dt$.

6.9.3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(u+1)(u+3)} du$. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\eta \mu x}{\sin x (\sin x + 2)} dx$

β) $\int \frac{x e^{x^2}}{(e^{x^2} - 1)(e^{x^2} + 2)} dx$

γ) $\int \frac{x}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} dx$

6.9.4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ και $g(x) = 3x^2 - 12x + 2$.

α) Να διαπιστώσετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς $-4, 0, 1$ και 3 .

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

6.9.5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - x - 2$.

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^a f(x) dx$.

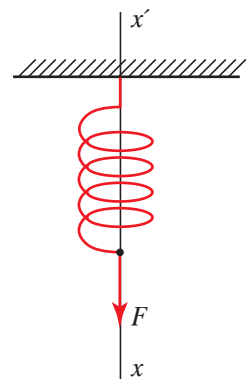
β) Να βρείτε τη τιμή του a έτσι, ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^a f(x) dx$ να λάβει την ελάχιστη τιμή.

6.9.6. Υποθέτουμε ότι ένα σώμα κινείται πάνω σ' έναν άξονα $x'x$ υπό την επίδραση μιας δύναμης με διεύθυνση τη διεύθυνση του $x'x$ και μέτρο που εξαρτάται μόνο από τη θέση x του σώματος, δηλαδή το μέτρο της περιγράφεται από μία συνεχή συνάρτηση $F(x)$ (σχ. 6.9). Αποδεικνύεται ότι το έργο της δύναμης κατά τη μετακίνηση του σώματος από το σημείο $x=a$ στο σημείο $x=\beta$ (το οποίο ονομάζεται σύντομα «έργο της δύναμης στο διάστημα $[a, \beta]$ ») δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$W_f = \int_a^\beta F(x) dx.$$

α) Η δύναμη που απαιτείται για την επιμήκυνση ενός ελατηρίου κατά x cm δίνεται, σύμφωνα με το νόμο του Hooke από τον τύπο $F(x) = kx$, όπου k είναι μια θετική σταθερά. Αν μια δύναμη μέτρου 2 Newton προκαλεί επιμήκυνση 1 cm στο ελατήριο, να υπολογίσετε το έργο που καταναλώνεται για επιμήκυνση του ελατηρίου κατά 5 cm.

β) Δυο ηλεκτρόνια που βρίσκονται σε απόσταση x cm μεταξύ τους απωθούνται με μια δύναμη μέτρου $F(x) = k/x^2$, όπου k είναι μια θετική σταθερά. Υποθέτουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο είναι ακίνητο σε κάποιο σημείο, ενώ ένα δεύτερο κινείται προς αυτό κατά τη διεύθυνση της ευθείας που τα ενώνει. Να βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη, όταν το δεύτερο ηλεκτρόνιο ξεκινάει από απόσταση 3 cm από το πρώτο και κινείται μέχρι να φτάσει σε απόσταση 1 cm.



Σχ. 6.9

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

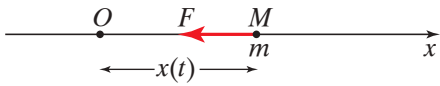
Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαγάγομε την έννοια της διαφορικής εξίσωσης. Μία εξίσωση που περιέχει μία εξαρτημένη μεταβλητή και ένα πλήθος παραγώγων αυτής ως προς μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, καλείται διαφορική εξίσωση. Θα παρουσιάσομε διάφορους τρόπους ταξινομήσεως των εξισώσεων και θα περιγράψομε μεθόδους επιλύσεως αυτών ανά κατηγορία. Επίσης, θα παρουσιάσομε διάφορες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων στη Φυσική και στη Μηχανική. Σημειώνομε, ότι οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν αντικείμενο μελέτης με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για πολλούς μαθηματικούς κατά τους τελευταίους τρεις αιώνες. Παρόλα αυτά, ακόμη και σήμερα ξεχωρίζουν ως ένα δυναμικό πεδίο έρευνας με πολλές εφαρμογές και με πολλά ενδιαφέροντα «άλυτα» προβλήματα.

- 7.1 Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης.
- 7.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.
- 7.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.
- 7.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Εξίσωση του Bernoulli.
- 7.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.
- 7.6 Εφαρμογές.
- 7.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 7.8 Ερωτήσεις κατανόησης.
- 7.9 Γενικές ασκήσεις.

7.1 Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης.

Πολλά σημαντικά προβλήματα στη φυσική, στη χημεία, στη βιολογία, στην αστρονομία και στις κοινωνικές επιστήμες περιγράφονται με τη βοήθεια των διαφορικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα η μοντελοποίηση διαφόρων προβλημάτων που εμφανίζονται στις επιστήμες αυτές, οδηγεί σε εξισώσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν μια άγνωστη συνάρτηση και μία ή περισσότερες παραγώγους αυτής.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης είναι ο νόμος του Νεύτωνα. Ας θεωρήσουμε ένα υλικό σημείο M μάζας m , το οποίο έλκεται από ακίνητο κέντρο O και η δύναμη F που ασκείται από το O προς αυτό είναι ανάλογη της απομακρύνσεως (σχ. 7.1). Τότε ο νόμος κινήσεως του σημείου M περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \quad (7.1.1)$$


Σχ. 7.1

ή ισοδύναμα $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, όπου $x(t)$ είναι η θέση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t και $\omega > 0$ μία σταθερά.

Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης είναι η εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kt \quad (7.1.2)$$

ή ισοδύναμα $x'(t) + kt = 0$ όπου $x(t)$ εκφράζει την ποσότητα ενός προϊόντος που παράγεται σε μια χημική αντίδραση τη χρονική στιγμή t και k είναι μία σταθερά.

Στις εξισώσεις (7.1.1), (7.1.2), για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συναρτήσεως $x(t)$ ως προς t χρησιμοποιήσαμε τους συμβολισμούς

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{και} \quad x''(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Στη συνέχεια, για μια συνάρτηση $y = y(x)$ θα συμβολίζουμε την πρώτη παράγωγο της $y = y(x)$ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x με:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad (\text{αντί } y'(x) = \frac{dy(x)}{dx})$$

τη δεύτερη ως προς x με:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (\text{αντί } y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}) \quad \text{κ.ο.κ.,}$$

δηλαδή, από εδώ και στο εξής, θα παραλείπεται από τους συμβολισμούς η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Στα προηγούμενα παραδείγματα είναι προφανές ότι η άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ που εμφανίζεται στην εξίσωση εξαρτάται από μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, το χρόνο t . Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση καλείται **συνήθης διαφορική εξίσωση**. Αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η εξίσωση καλείται **διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων**.

Παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης μερικών παραγώγων αποτελεί η εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (7.1.3)$$

όπου $u = u(x, y)$ η άγνωστη συνάρτηση με τις $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ να συμβολίζουν τις μερικές παραγώγους της

$u = u(x, y)$ ως προς x και y αντίστοιχα. Μία τέτοια εξίσωση περιγράφει την κατανομή θερμοκρασίας σε μια ομογενή πλάκα.

Επί πλέον παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων είναι τα επόμενα

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 2xy &= e^{-x}, & \frac{dy}{dx} + xy &= 0, \\ \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y &= 0, & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

όπου οι τρεις πρώτες είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με $y = y(x)$ και η τελευταία μερική διαφορική εξίσωση με $w = w(x, y, z)$.

Θα συνεχίσουμε την παρουσίασή μας δίνοντας ορισμένους απαραίτητους ορισμούς και τρόπους ταξινόμησης για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Μια **συνήθης διαφορική εξίσωση** είναι μία εξίσωση που περιέχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή x , μία άγνωστη συνάρτηση αυτής $y = y(x)$ και έναν πεπερασμένο αριθμό παραγώγων $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ της y ως προς x .

Δηλαδή μια συνήθης διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1, \quad y = y(x), \quad (7.1.4)$$

ή ισοδύναμα

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0, \quad n \geq 1, \quad y = y(x). \quad (7.1.5)$$

όπου F είναι μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται σε μια διαφορική εξίσωση, τόσο πιο δύσκολη είναι συνήθως η επίλυσή της. Για το λόγο αυτό η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζεται σ' αυτήν ονομάζεται **τάξη** μιας διαφορικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^2y + 3x - 1 = 0$$

είναι μια εξίσωση δεύτερης τάξεως, ενώ η εξίσωση $y''' - 3y'' + y' + 1 = 0$ είναι μια διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως κ.ο.κ..

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε διάφορες μεθόδους επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Με τον όρο επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης εννοούμε τη διαδικασία, με την οποία βρίσκουμε συναρτήσεις που επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι η συνάρτηση $y = e^{2x}$ αποτελεί λύση της εξίσωσης $y'' - 5y' + 6y = 0$, αφού για $y = e^{2x}$ έχουμε:

$$y'' - 5y' + 6y = (e^{2x})'' - 5(e^{2x})' + 6e^{2x} = 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0.$$

Το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση $y = x^2$ όσον αφορά τη διαφορική εξίσωση $y - 2x = 0$. Πράγματι για $y = x^2$ έχουμε:

$$y' - 2x = (x^2)' - 2x = 2x - 2x = 0.$$

Γενικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Μία συνάρτηση $y: A \rightarrow \mathbf{R}$ λέγεται **λύση** της διαφορικής εξίσωσης (7.1.4) αν:

α) Η y έχει παραγώγους μέχρι και n -τάξεως και

β) η συνάρτηση y ικανοποιεί την (7.1.4) για κάθε $x \in A$, δηλαδή ισχύει:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0, \text{ για κάθε } x \in A.$$

Το πεδίο ορισμού A της λύσεως $y: A \rightarrow \mathbf{R}$ είναι συνήθως ένα διάστημα της μορφής (α, β) , $[a, \beta]$, $(a, \beta]$, $[a, \beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ή ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, \beta)$, $[-\infty, \beta]$, $(-\infty, +\infty)$.

Ένα ερώτημα που θα μπορούσε να τεθεί όσον αφορά σε μια διαφορική εξίσωση είναι: Πόσες λύσεις μπορεί να έχει μία συνήθους διαφορική εξίσωση;

Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση $y' = x^{-1/2}$, $x \in (0, +\infty)$, η οποία γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}.$$

Κάθε συνάρτηση της μορφής $y(x) = 2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbf{R}$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, αφού:

$$\frac{dy}{dx} = (2\sqrt{x} + c)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχουμε άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μία αυθαίρετη σταθερά $c \in \mathbf{R}$. Η οικογένεια των συναρτήσεων

$$y(x) = 2\sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbf{R} \quad (7.1.6)$$

καλείται **γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Γενικά κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής (7.1.4) με $n \geq 1$ έχει άπειρες λύσεις.

Από το παραπάνω παράδειγμα καθίσταται φανερό ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως που εξετάστηκε είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά). Αντίστοιχα αποδεικνύεται, ότι η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξεως είναι μια διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές) κ.ο.κ.. Αν στη γενική λύση (7.1.6) δώσουμε μια συγκεκριμένη τιμή στη σταθερά $c \in \mathbf{R}$, τότε προκύπτει μια συγκεκριμένη λύση η οποία ονομάζεται **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Έτσι η μερική λύση που αντιστοιχεί στην τιμή $c=1$ είναι η:

$$y(x) = 2\sqrt{x} + 1.$$

Επίσης, αν ζητήσουμε τη μερική λύση που επαληθεύει τη συνθήκη $y(1)=2$, τότε από την (7.1.6) προκύπτει ότι:

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 2\sqrt{1} + c \Rightarrow c = 0.$$

Συνεπώς, η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(1)=2$ είναι η $y(x) = 2\sqrt{x}$.

Γενικά δίνουμε τους επόμενους ορισμούς:

Θα λέμε ότι η συνάρτηση

$$y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n) \quad (7.1.7)$$

που εξαρτάται από τις n σταθερές $c_1, \dots, c_n$ είναι η **γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης (7.1.4), όταν:

α) Για κάθε σημείο $(c_1, \dots, c_n)$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου Δ του $\mathbf{R}^n$ η (7.1.7) αποτελεί λύση, μια μερική λύση της, (7.1.4) και

β) για οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου του πεδίου ορισμού της F , υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $(c_1, \dots, c_n)$ του Δ , ώστε η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Κάθε λύση μιας διαφορικής εξίσωσης η οποία προκύπτει από τη γενική λύση της, όταν στις αυθαίρετες σταθερές που περιλαμβάνει δοθούν συγκεκριμένες πραγματικές τιμές, καλείται **μερική λύση** αυτής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.1

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y = 0$.

α) Να προσδιορίσετε την τάξη της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = \sin 2x + \eta\mu 2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

γ) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = c_1 \sin 2x + c_2 \eta\mu 2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

δ) Να βρείτε τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(0)=1 \text{ και } y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση είναι η δεύτερη (ο όρος y''), συνεπώς η διαφορική εξίσωση είναι τάξεως 2.

β) Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $y = \sin 2x + \eta\mu 2x$ ως προς x δύο φορές και παίρνουμε:

$$y' = -2\eta\mu 2x + 2\sin 2x, \quad y'' = -4\sin 2x - 4\eta\mu 2x = -4(\sin 2x + \eta\mu 2x) = -4y.$$

Από την τελευταία προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

γ) Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $y = c_1 \sin 2x + c_2 \eta\mu 2x$ δύο φορές ως προς x και παίρνουμε:

$$y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \eta\mu 2x.$$

Με αντικατάσταση των y και y'' στο πρώτο μέλος της αρχικής διαφορικής εξίσωσης βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \eta\mu 2x + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \eta\mu 2x) = \\ &= -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \eta\mu 2x + 4c_1 \sin 2x + 4c_2 \eta\mu 2x = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση $y = c_1 \sin 2x + c_2 \eta\mu 2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

δ) Με χρήση της συνθήκης $y(0)=1$ για την $y = c_1 \sin 2x + c_2 \eta\mu 2x$ έχουμε:

$$y(0)=1 \Rightarrow c_1 \sin 0 + c_2 \eta\mu 0 = 1 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Επί πλέον αν χρησιμοποιήσουμε και τη δεύτερη συνθήκη $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ σε συνδυασμό με την $c_1 = 1$, προκύπτει:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow c_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2} - 1.$$

Τελικά, η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις δύο δοθείσες συνθήκες δίνεται από τον τύπο $y = \sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\eta\mu 2x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.2.

Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση $y = xe^{fx}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $xy' = y + x^2 + y^2$.

Λύση.

Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $y = xe^{fx}$ είναι το $A = \{x \in \mathbf{R} : \sin x \neq 0\}$. Αν παραγωγίσουμε την $y = xe^{fx}$ ως προς x βρίσκουμε:

$$y' = (xe^{fx})' = x'e^{fx} + x(e^{fx})' = e^{fx} + \frac{x}{\sin^2 x},$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση στο πρώτο μέλος της διαφορικής εξίσωσης που δόθηκε προκύπτει:

$$xy' = x \left(e^{fx} + \frac{x}{\sin^2 x} \right) = xe^{fx} + \frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

Ομοίως αντικαθιστώντας την έκφραση $y = xe^{fx}$ στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης προκύπτει:

$$y + x^2 + y^2 = xe^{fx} + x^2 + x^2 e^{2fx} = xe^{fx} + x^2(1 + e^{2fx}) = xe^{fx} + \frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $y = xe^{fx}$ αποτελεί πράγματι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1.3.

Μία καλλιέργεια βακτηρίων πολλαπλασιάζεται, με ρυθμό που είναι ανάλογος του αριθμού $P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας τη χρονική στιγμή t . Ας συμβολίσουμε με q το συντελεστή αναλογίας μεταξύ του ρυθμού αύξησεως των βακτηρίων και του πληθυσμού των βακτηρίων (η ποσότητα αυτή προσδιορίζεται συνήθως από εργαστηριακές μετρήσεις).

- Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί ο αριθμός $P = P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας και να διαπιστώσετε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $P(t) = e^{c+qt}$, $c \in \mathbf{R}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.
- Να εκφράσετε τον αριθμό $P(t)$ των βακτηρίων της καλλιέργειας τη χρονική στιγμή $t = 10$ sec συναρτήσει του αρχικού πληθυσμού $P(0)$.
- Αν σε μια καλλιέργεια τη χρονική στιγμή $t = 1$ sec ο αριθμός των βακτηρίων είναι 100, τότε να βρείτε τον αρχικό πληθυσμό των βακτηρίων.

Λύση.

α) Γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συναρτήσεως $P(t)$ είναι ίσος με $P'(t) = \frac{dP}{dt}$. Επομένως, σύμφωνα με την εκφώνηση, θα έχουμε $\frac{dP}{dt} = qP$, όπου q η σταθερά αναλογίας. Κάθε συνάρτηση της μορφής $P(t) = e^{c+qt}$, $c \in \mathbf{R}$, ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, αφού ισχύει:

$$\frac{dP}{dt} = (e^{c+qt})' = e^c (e^{qt})' = e^c q e^{qt} = q e^{c+qt} = qP.$$

β) Η λύση της διαφορικής εξισώσεως που δόθηκε στο ερώτημα (α) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(t) = e^{c+qt} = e^c e^{qt} = P_0 e^{qt},$$

όπου $P_0 = e^c$. Ο αρχικός πληθυσμός των βακτηρίων της καλλιέργειας δίνεται από την τελευταία σχέση για $t=0$, δηλαδή έχουμε:

$$P(0) = P_0 e^{q \cdot 0} \Rightarrow P(0) = P_0.$$

Τη χρονική στιγμή $t=10 \text{ sec}$ ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι $P(10) = P_0 e^{q \cdot 10} \Rightarrow P(10) = P_0 e^{10q}$, όπου $P_0 = e^c$ ο αρχικός πληθυσμός βακτηρίων της καλλιέργειας.

γ) Στην περίπτωση αυτή δίνεται $P(1)=100$, οπότε θα έχουμε:

$$P(1) = 100 \Rightarrow P_0 e^q = 100 \Rightarrow P_0 = \frac{100}{e^q} = 100e^{-q}.$$

Ασκήσεις.

7.1.1. Να προσδιορίσετε την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

α) $y' + 2xy = e^{-x}$

β) $y^{(4)} + 4y''' + 3y = x$

γ) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

δ) $\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1$

7.1.2. Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι λύσεις των αντιστοίχων διαφορικών εξισώσεων.

α) $y = x^2 + c, \quad y = 2x$

β) $y = cx^2, \quad xy' = 2y$

γ) $y^2 = e^{2x} + c, \quad yy' = e^{2x}$

δ) $y = e^{3x} + e^x, \quad y'' - 4y' + 3y = 0,$

ε) $y = \frac{1}{1-x^2}, \quad y' = 2xy^2$

στ) $y = ce^{y/x}, \quad y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$

ζ) $y^2 = x^2 - cx, \quad 2xyy' = x^2 + y^2$

7.1.3. Έστω η διαφορική εξίσωση $y' = 2xy, y > 0$.

α) Να προσδιορίσετε την τάξη της παραπάνω εξισώσεως.

β) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = 4e^{x^2}$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = c e^{x^2}, c \in \mathbf{R}$ είναι η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως.

δ) Να βρείτε τη μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(2) = 1$.

7.1.4. Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = c_1 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \cos x$ είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως $y'' + 2y' + 2y = 0$. Στη συνέχεια να βρείτε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(\pi) = 0$.

7.1.5. Κατά την κίνηση ενός σώματος επάνω σ' έναν άξονα $x'x$ διαπιστώθηκε ότι η στιγμιαία ταχύτητα $v(t)$ είναι ανάλογη του χρόνου t . Αν συμβολίσουμε με $S(t)$ τη συνάρτηση θέσης του κινητού, γνωρίζουμε ότι ισχύει $S'(t) = v(t)$.

α) Να βρείτε τη θέση του κινητού συναρτήσει του χρόνου t .

β) Να βρείτε τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 7 \text{ sec}$, συναρτήσει της αρχικής θέσεως του κινητού (δηλ. της θέσεως του τη χρονική στιγμή $t = 0$).

γ) Να βρείτε ποια θα είναι η αρχική θέση του κινητού, αν ισχύει $S(1) = 10$.

7.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.

Αρκετά συχνά πολλά προβλήματα της μηχανικής, της οικονομίας, της βιολογίας κ.λπ. οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν την άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$, την πρώτη παράγωγο $y' = f'(x)$ και την ανεξάρτητη μεταβλητή x . Μία τέτοια διαφορική εξίσωση είναι της μορφής (7.1.4) που αντιστοιχεί στην τιμή $n=1$, δηλαδή έχει τη μορφή:

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \quad (7.2.1)$$

Τέτοιες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 7.1, ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, θα μελετηθούν στην παρούσα παράγραφο.

Ας θεωρήσουμε αρχικά την απλή περίπτωση, κατά την οποία η (7.2.1) μπορεί να επιλυθεί ως προς $\frac{dy}{dx}$, δηλαδή

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (7.2.2)$$

όπου $f(x, y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Παράδειγμα τέτοιας διαφορικής εξίσωσης αποτελεί η

$$y'(x) = \frac{2y}{x}, \quad x \neq 0. \quad (7.2.3)$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$y = cx^2 \quad (7.2.4)$$

διαπιστώνουμε εύκολα με αντικατάσταση της y και της παραγώγου της y' , στην (7.2.3), ότι αποτελεί λύση της για κάθε τιμή της σταθεράς $c \in \mathbf{R}$. Πράγματι για το πρώτο μέλος της (7.2.3) έχουμε:

$$y = (cx^2)' = 2cx,$$

ενώ επίσης με αντικατάσταση της y στο δεύτερο μέλος της (7.2.3) προκύπτει και πάλι

$$\frac{2y}{x} = \frac{2cx^2}{x} = 2cx.$$

Στην περίπτωση αυτή μπορέσαμε να βρούμε μια λύση της διαφορικής εξίσωσης, στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή y εκφράζεται συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής x μέσω ενός συγκεκριμένου τύπου.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = \frac{1-y^2}{xy}. \quad (7.2.5)$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι κάθε συνάρτηση y , η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$xy = \ln y + c, \quad (7.2.6)$$

αποτελεί λύση της (7.2.5) για κάθε τιμή της σταθεράς $c \in \mathbf{R}$, χωρίς ωστόσο από την έκφραση αυτή να μπορούμε να εκφράσουμε το y συναρτήσει του x . Πράγματι, παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x , προκύπτει:

$$xy' + y = \frac{1}{y} \Leftrightarrow xy' = \frac{1-y^2}{y} \Leftrightarrow y' = \frac{1-y^2}{xy}.$$

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι μερικές φορές η λύση y είναι δύσκολο ή και αδύνατο να εκφραστεί ακριβώς συναρτήσει μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Η μορφή (7.2.6) λέμε ότι δίνει τη λύση της εξίσωσης σε *πεπλεγμένη μορφή*.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την απλούστερη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, η οποία είναι γνωστή με την ονομασία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ονομάζουμε διαφορική εξίσωση *χωριζομένων μεταβλητών* μια διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, της οποίας το δεύτερο μέλος αποτελείται από δύο παράγοντες που ο ένας εξαρτάται από το x και ο άλλος από το y . Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x) \cdot M(y) \frac{dy}{dx} + Q(x) \cdot N(y) = 0 \quad (7.2.7)$$

μπορεί με κατάλληλες προϋποθέσεις να πάρει την προηγούμενη μορφή.

Αν υποθέσουμε ότι $N(y) \neq 0$, $P(x) \neq 0$, τότε η διαφορική εξίσωση (7.2.7) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$\frac{M(y)}{N(y)} dy = -\frac{Q(x)}{P(x)} dx,$$

στην οποία έχουν διαχωριστεί οι μεταβλητές x και y στα δύο μέλη της εξισώσεως (εκεί οφείλεται και η ονομασία της κατηγορίας αυτής διαφορικών εξισώσεων). Για να επιλύσουμε την τελευταία, αρκεί να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της, οπότε έχουμε:

$$\int \frac{M(y)}{N(y)} dy = -\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx + c, \quad c \in \mathbf{R}. \quad (7.2.8)$$

Σημειώνεται ότι αν η $y = \beta$ είναι ρίζα της εξισώσεως $N(y) = 0$, τότε και η σταθερά συνάρτηση $y = \beta$ είναι επίσης λύση της διαφορικής εξισώσεως (7.2.7).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.3.

Να επιλύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση $y' = x^{-1/2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση γράφεται σε μορφή χωριζομένων μεταβλητών, ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2} \Leftrightarrow dy = x^{-1/2} dx.$$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας παίρνουμε $\int dy = \int x^{-1/2} dx \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbf{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.4.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $e^y \frac{dy}{dx} - (x + x^3) = 0$.

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση γράφεται σε μορφή χωριζομένων μεταβλητών ως εξής:

$$e^y dy = (x + x^3) dx.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας βρίσκουμε:

$$\int e^y dy = \int (x + x^3) dx \Leftrightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c\right), \quad c \in \mathbf{R}.$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c\right)$, $c \in \mathbf{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.5.

Να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = k(a-y)(\beta-y), \quad y(0)=0, \quad (7.2.9)$$

όπου a, β, k είναι γνωστές και σταθερές με $\beta > a > 0, k > 0$.

Λύση.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\frac{dy}{(a-y)(\beta-y)} = k dx$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\int \frac{dy}{(a-y)(\beta-y)} = \int k dx + c. \quad (7.2.10)$$

Εφαρμόζοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του πρώτου μέλους, παίρνουμε:

$$\frac{1}{(a-y)(\beta-y)} = \frac{1}{\beta-a} \cdot \frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-\beta} \cdot \frac{1}{\beta-y} \quad (7.2.11)$$

Με αντικατάσταση της (7.2.11) στην (7.2.10) προκύπτει:

$$\frac{1}{\beta-a} \int \frac{1}{(a-y)} dy + \frac{1}{\beta-a} \int \frac{1}{(\beta-y)} dy = kx + c \Rightarrow \frac{1}{a-\beta} \ln|a-y| - \frac{1}{a-\beta} \ln|\beta-y| = kx + c_1,$$

απ' όπου καταλήγουμε στην ισότητα $\frac{y-a}{y-\beta} = e^{kx(a-\beta)} e^{c(a-\beta)}$. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς y , προκύπτει ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (7.2.9) δίνεται από την έκφραση:

$$y(x) = \frac{a - \beta c e^{(a-\beta)kx}}{1 - c e^{(a-\beta)kx}}, \quad (7.2.12)$$

όπου $c = e^{c_1(a-\beta)}$. Αν επί πλέον $(a-y)(\beta-y) = 0$, τότε και οι συναρτήσεις $y=a, y=\beta$ [με αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση (7.2.9)], προκύπτει ότι είναι λύσεις αυτής.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0)=0$, από την γενική λύση (7.2.12) προκύπτει ότι:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{a - \beta c e^{(a-\beta)k \cdot 0}}{1 - c e^{(a-\beta)k \cdot 0}} \Rightarrow c = \frac{a}{\beta}$$

και με αντικατάσταση της σταθεράς c στην (7.2.12) παίρνουμε τη μερική λύση $y(x) = \frac{a\beta[1 - e^{(a-\beta)kx}]}{\beta - ae^{(a-\beta)kx}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2.6.

Υποθέτουμε ότι η αξία ενός DVD player για home cinema δίνεται από την εξαρτημένη μεταβλητή $y = y(x)$, όπου x τα χρόνια εμφανίσεώς του στην αγορά. Έχει παρατηρηθεί ότι η $y = y(x)$ μειώνεται με ρυθμό που είναι ίσος με την τρέχουσα τιμή του player.

α) Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $y = y(x)$.

β) Να βρείτε τη γενική λύση της.

γ) Αν υποθέσουμε ότι στην αγορά του home cinema εμφανίζεται το υψηλής τεχνολογίας Hi-End DVD, με τιμή 2599 €, τότε να βρείτε ποια θα είναι η αξία του ύστερα από ένα χρόνο.

Λύση.

α) Αφού ο ρυθμός μείωσης της τιμής του DVD player ισούται με την τρέχουσα τιμή του, η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $y = y(x)$ είναι η $\frac{dy}{dx} = -y(x)$.

β) Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται στη μορφή $\frac{dy}{y} = -dx$.

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx \Leftrightarrow \ln y = -x + c' \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{-x+c'} \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{c'} e^{-x} \Leftrightarrow y = c e^{-x},$$

όπου θέσαμε $e^{c'} = c$. Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι η $y(x) = ce^{-x}$, $c \in \mathbf{R}$.

γ) Αν τώρα στην αγορά του home cinema εμφανιστεί το υψηλής τεχνολογίας DVD player, με τιμή 2599 €, η αρχική συνθήκη που θα έχουμε γι' αυτό είναι η $y(0) = 2599$.

Επομένως, η τελευταία σε συνδυασμό με τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως δίνει:

$$y(0) = 2599 \Rightarrow 2599 = c e^{-0} \Rightarrow c = 2599.$$

Άρα η μερική λύση είναι η $y(x) = 2599 e^{-x}$ και συνεπώς, η αξία του player, ύστερα από ένα χρόνο ($x=1$) θα είναι:

$$y(1) = 2599 e^{-1} = 2599 / e \cong 956 \text{ €}.$$

Ασκήσεις.

7.2.1. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $y' + 6xy = 0, y(\pi) = 5$

β) $e^y y' = (x + x^3), y(0) = 1$

γ) $y' = \log x, y(e) = 0$

7.2.2. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη λύση εκείνη που ικανοποιεί την αντίστοιχη δοθείσα αρχική συνθήκη.

α) $y' = xe^x, y(1) = 3$

β) $y' = \log x, y(e) = 0$

γ) $y' = 2 \sin x \cos x, y(0) = 1$

δ) $y' = 2x^2, y(0) = 1$

7.2.3. Να λύσετε τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) y' = \frac{x+1}{y^3+3},$$

$$\beta) y' = \frac{y}{x^2},$$

$$\gamma) y' = \frac{x^2 y - y}{y+1}.$$

$$\delta) y' = 2x$$

$$\epsilon) y' = x^3 y^2$$

$$\sigma\tau) xy' = 2y$$

7.2.4. Για κάθε μία από τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις να βρείτε τη λύση εκείνη που ικανοποιεί τη δοθείσα αρχική συνθήκη.

$$\alpha) y' = xe^x, y(1)=3$$

$$\beta) y' = \log x, y(e)=0$$

$$\gamma) y' = 2 \sin x \cos x, y(0)=1$$

$$\delta) y' = 2x^2, y(0)=1$$

7.2.5. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(x) = \frac{xy(4-y)}{1+x}$, $y(0)=y_0>0$.

α) Να βρείτε τη γενική λύση $y=y(x)$ της διαφορικής εξίσωσης.

β) Να υπολογίσετε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στη δοθείσα αρχική συνθήκη.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$.

7.2.6. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των αυτοκινήτων μίας μεγαλουπόλεως δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t , από τη συνάρτηση $y=y(t)$ και ότι ο ρυθμός αύξησης αυτών είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων. Αν ο αριθμός αυτοκινήτων της μεγαλουπόλεως σε 7 χρόνια είναι τριπλάσιος του αρχικού, να βρείτε σε πόσα χρόνια θα πενταπλασιαστεί.

7.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.

Συνεχίζοντας τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, βρίσκουμε στο επόμενο επίπεδο δυσκολίας τις λεγόμενες **ομογενείς διαφορικές εξισώσεις**.

Ας θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y) = x^2 + xy$, όπου $(x,y) \in I \subseteq \mathbf{R}^2$ και ας υπολογίσουμε την $f(\lambda x, \lambda y)$ για κάθε $\lambda \neq 0$. Τότε, έχουμε:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy = \lambda^2 (x^2 + xy) = \lambda^2 f(x, y).$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$, $\lambda \neq 0$. Μία τέτοια συνάρτηση λέμε ότι είναι ομογενής δευτέρου βαθμού ή ομογενής βαθμού δύο.

Γενικά έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ καλείται **ομογενής βαθμού m** αν για κάθε $\lambda \neq 0$ ισχύει

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y). \quad (7.3.1)$$

Έτσι οι συναρτήσεις $\sqrt{x^2 + y^2}$ και $\sin(x/y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 1 και 0 αντίστοιχα. Είμαστε έτοιμοι τώρα να δώσουμε το βασικό ορισμό αυτής της παραγράφου:

Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ονομάζεται **ομογενής**, αν είναι της μορφής

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (7.3.2)$$

όπου $P(x, y)$, $Q(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού και συνεχείς ως προς τις μεταβλητές τους x και y .

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια της αντικαταστάσεως $z=y/x$ ή $z=x/y$. Με τον τρόπο αυτό η διαφορική εξίσωση (7.3.2) μετατρέπεται σε μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Το παράδειγμα που ακολουθεί αποσαφηνίζει τη διαδικασία αυτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3.1.

Να διαπιστώσετε ότι η διαφορική εξίσωση

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0 \quad (7.3.3)$$

είναι ομογενής και κατόπιν να την επιλύσετε.

Λύση.

Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση (7.3.3) στη μορφή:

$$x^2 - y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0 \quad (7.3.4)$$

και παρατηρούμε ότι η τελευταία είναι της μορφής (7.3.2), με $P(x,y)=x^2-y^2$ και $Q(x,y)=2xy$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό (7.3.1), ελέγχουμε αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού. Όντως, παρατηρούμε ότι:

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (x^2 - y^2) = \lambda^2 P(x, y) \quad \text{και} \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 Q(x, y).$$

Αφού διαπιστώσαμε ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι και οι δύο ομογενείς βαθμού δύο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $z=y/x$ οπότε προκύπτει:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}. \quad (7.3.5)$$

Με αντικατάσταση της (7.3.5) στη διαφορική εξίσωση (7.3.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x^2 - z^2 x^2 + 2xzx \left(x \frac{dz}{dx} + z \right) &= 0 \Rightarrow x^2(1 - z^2) + 2x^2zx \frac{dz}{dx} + 2x^2z^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2(1 + z^2) dx + 2x^3z dz = 0 \Rightarrow (1 + z^2) dx + 2xz dz = 0, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Από την έκφραση

$$2xz dz = -(1 + z^2) dx \Rightarrow \frac{z}{1 + z^2} dz = -\frac{1}{2x} dx, \quad (7.3.6)$$

ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{z}{1 + z^2} dz &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \log(1 + z^2) = -\log x + c' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log(1 + z^2) = -\log x + \log c \quad (c' = \log c) \Rightarrow 1 + z^2 = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

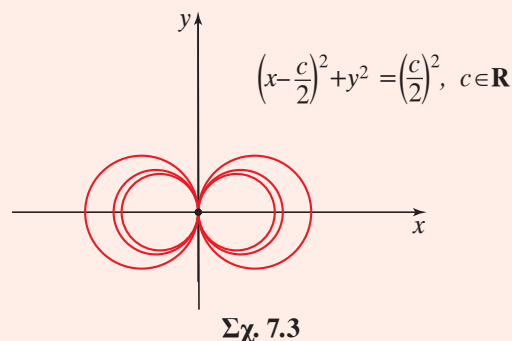
Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της αρχικής μας αντικαταστάσεως $z=y/x$, βρίσκουμε από την τελευταία ότι η γενική λύση της (7.3.3.) δίνεται από τη σχέση $x^2 + y^2 = cx$, $c \in \mathbf{R}$, όπου $y=y(x)$. Τέλος, μπορούμε εύκολα να δώσουμε στη γενική λύση την ισοδύναμη μορφή:

$$x^2 - 2x\frac{c}{2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = 0,$$

δηλαδή

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Η τελευταία μορφή δείχνει ότι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης αποτελούν μία οικογένεια κύκλων με κέντρα $K(c/2, 0)$ και αντίστοιχες ακτίνες $c/2$, $c \in \mathbf{R}$ (σχ. 7.3).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3.2.

Να διαπιστώσετε ότι η διαφορική εξίσωση $x + y - x \frac{dy}{dx} = 0$ είναι ομογενής και κατόπιν την επιλύστε.

Λύση.

Η διαφορική εξίσωση που δόθηκε είναι ομογενής, αφού είναι της μορφής (7.3.2) με

$$P(x, y) = x - y, \quad Q(x, y) = -x$$

και ισχύει

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x) - (\lambda y) = \lambda(x - y) = \lambda P(x, y), \quad Q(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda x) = \lambda(-x) = \lambda Q(x, y).$$

Αφού διαπιστώσαμε ότι οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ είναι και οι δύο ομογενείς πρώτου βαθμού, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $z = y/x \Leftrightarrow y = zx$, καθώς και την αντίστοιχη παράγωγο (7.3.5). Έτσι, η διαφορική εξίσωση που δόθηκε γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$x + zx - x \left(z + x \frac{dz}{dx} \right) = 0 \Rightarrow x + zx - zx - x^2 \frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow x = x^2 \frac{dz}{dx} \Rightarrow dz = \frac{1}{x} dx.$$

Η τελευταία αποτελεί διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της παίρνουμε:

$$\int dz = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow z = \ln|x| + c' \Rightarrow z = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow z = \ln|cx|, \quad c \in \mathbf{R}$$

όπου $c' = \ln|c|$. Αντικαθιστώντας τέλος το $z = y/x$, βρίσκουμε τη λύση $y = x \ln|cx|$, $c \in \mathbf{R}$.

Ασκήσεις.

7.3.1. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομογενείς και, αν είναι, να βρεθεί ο βαθμός τους.

$$\alpha) f(x, y) = y^2 + xy \quad \beta) g(x, y) = x^3 + y^2 x e^{\frac{x}{y}} \quad \gamma) h(x, y) = x + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \delta) k(x, y) = xy + x$$

7.3.2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς.

$$\alpha) y' = \frac{y^2}{x} \quad \beta) 2xy e^{\frac{x}{y}} - \left(x^2 + y^2 \sin \frac{x}{y} \right) y' = 0 \quad \gamma) y' = \frac{x^2 + y}{x^3}$$

7.3.3. Να επαληθεύσετε ότι οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και στη συνέχεια να την επιλύσετε.

$$\alpha) (x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0 \quad \beta) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{y}{x} \quad \gamma) xy' = y + 2xe^{-y/x} \quad \delta) y' = \frac{x+y}{x-y}$$

7.3.4. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

$$\alpha) y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, y(1) = -2 \quad \beta) 2xyy' + x^2 - 3y^2 = 0, y(2) = 1 \quad \gamma) y' = 1 + \frac{y}{x + \sqrt{xy}}, y(2) = 3$$

7.3.5. Να επαληθεύσετε ότι οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και στη συνέχεια να τις επιλύσετε.

$$\alpha) 2xyy' = x^2 + 2y^2 \quad \beta) x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0 \quad \gamma) (x+y)dx - (x-y)dy = 0$$

7.3.6. Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + \beta y + \gamma}{\delta x + \epsilon y + \zeta}\right),$$

όπου $a\epsilon \neq \beta\delta$. Να διαπιστώσετε ότι, με την αντικατάσταση $x = z - h$, $y = w - k$, και την κατάλληλη επιλογή των σταθερών h, k , η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται σε μία ομογενή διαφορική εξίσωση ως προς τις νέες μεταβλητές z, w . Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6} \quad \beta) y' = \frac{x+y+1}{2x+4y+3}$$

7.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Εξίσωση του Bernoulli.

Ένα από τα σημαντικότερα είδη διαφορικών εξισώσεων είναι οι γραμμικές. Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως είναι εκείνη, της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι γραμμική συνάρτηση της άγνωστης συναρτήσεως $y=y(x)$. Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση $y' = 3y + 6$ ή ισοδύναμα η

$$y' - 3y = 6 \quad (7.4.1)$$

είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση. Αν πολλαπλασιάσουμε την (7.4.1) με τον παράγοντα

$$Q(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x},$$

(σημειώνουμε ότι έχει παραληφθεί η σταθερά της ολοκλήρωσης στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας) προκύπτει:

$$y'e^{-3x} - 3ye^{-3x} = 6e^{-3x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(ye^{-3x}) = 6e^{-3x}.$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς x , μπορούμε να λάβουμε εύκολα τη γενική λύση ως εξής:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}(ye^{-3x})dx &= \int 6e^{-3x}dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ye^{-3x} &= -2e^{-3x} + c, \quad c \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να επιλύσουμε οποιαδήποτε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Ας δώσουμε όμως αρχικά τον επόμενο ορισμό:

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως καλείται **γραμμική** όταν είναι της μορφής

$$y'(x) + p(x)y = f(x), \quad (7.4.2)$$

όπου $p(x), f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα διάστημα $A \subseteq \mathbf{R}$. Αν $f(x)=0$, η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που προκύπτει ονομάζεται **ομογενής**.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

όπου $p(x), q(x)$ και $r(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x .

Το ενδιαφέρον μας σε αυτήν την παράγραφο θα επικεντρωθεί στην επίλυση της εξισώσεως πρώτης τάξεως (7.4.2). Εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται με τη βοήθεια ενός **ολοκληρωτικού παράγοντα**, γνωστού και ως **πολλαπλασιαστή** του **Euler**, της μορφής

$$Q(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (7.4.3)$$

που εξαρτάται μόνο από το x (δηλ. δεν περιέχει καθόλου το y). Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (7.4.2) με τον παραπάνω ολοκληρωτικό παράγοντα παίρνουμε:

$$y' \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} y = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow \left(y \cdot e^{\int p(x) dx} \right)' = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της τελευταίας βρίσκουμε:

$$\int \left(y \cdot e^{\int p(x) dx} \right)' dx = \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \Leftrightarrow y e^{\int p(x) dx} = \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c.$$

Συνεπώς:

Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (7.4.2) δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \right], \quad c \in \mathbf{R}. \quad (7.4.4)$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι:

α) Αν $f(x)=0$ (ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως) έχουμε ουσιαστικά μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών της μορφής $y'(x) + p(x)y=0$, της οποίας η λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = c e^{-\int p(x) dx}.$$

β) Αν οι $p(x), f(x)$ είναι σταθερές, τότε η (7.4.2) είναι και πάλι μία εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και μπορεί να επιλυθεί με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 7.2.

γ) Αν $p(x)=0$, τότε προκύπτει η εξίσωση $y'=f(x)$, της οποίας η γενική λύση προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση και των δύο μελών, δηλαδή:

$$y' = f(x) \Rightarrow \int y' dy = \int f(x) dx \Rightarrow y = \int f(x) dx + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.1.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' + 3y = e^{2x}$.

Λύση.

Όπως παρατηρούμε, η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική της μορφής (7.4.2) με $p(x)=3$ και $f(x)=e^{2x}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.4.4) παίρνουμε:

$$y(x)=e^{-\int 3dx} \left[\int e^{2x} \cdot e^{\int 3dx} dx + c \right] \Leftrightarrow y(x)=e^{-3x} \left[\int e^{2x} e^{3x} dx + c \right] \Leftrightarrow y(x)=e^{-3x} \left[\int e^{5x} dx + c \right].$$

Επομένως, η γενική λύση της δοθείσας εξισώσεως θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=e^{-3x} \left[\frac{1}{5} e^{5x} + c \right] \Rightarrow y(x)=\frac{1}{5} e^{2x} + c e^{-3x}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.2.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 3x, x \neq 0$.

Λύση.

Η παραπάνω εξίσωση είναι προφανώς γραμμική με $p(x)=1/x$ και $f(x)=3x$ και αντίστοιχο ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$Q(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (7.4.4) η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x)=e^{-\ln x} \left[\int 3x \cdot e^{\ln x} dx + c \right] \Rightarrow y(x)=\frac{1}{x} \left[\int 3x \cdot x dx + c \right] \Rightarrow y(x)=\frac{1}{x} \left[3 \int x^2 dx + c \right],$$

απ' όπου προκύπτει τελικά:

$$y(x)=x^2 + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη διαφορική εξίσωση $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$, η οποία διαφέρει από τη γραμμική διαφορική εξίσωση (7.4.2) μόνο κατά τον όρο y^2 στο δεύτερο μέλος. Μία τέτοια εξίσωση (η οποία είναι μεν πρώτης τάξεως αλλά όχι γραμμική) ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli. Γενικά έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της μορφής:

$$y'(x) + p(x)y = f(x)y^m, \quad m \neq 0,1 \quad (7.4.5)$$

όπου $p(x), f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x , καλείται **διαφορική εξίσωση του Bernoulli**.

Αν $m = 0$, η διαφορική εξίσωση του Bernoulli είναι προφανώς γραμμική, ενώ αν $m = 1$ ανάγεται άμεσα σε διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Για άλλες τιμές του m ($m \neq 0,1$) μετατρέπεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με τη βοήθεια της αντικαταστάσεως $z=y^{1-m}$ [μετά την αντικατάσταση, η άγνωστη συνάρτηση που αναζητούμε είναι η $z(x)$]. Η διαδικασία αυτή αποσαφηνίζεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4.5.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$y' + \frac{3}{x}y = x^2 y^2, \quad x > 0 \quad (7.4.6)$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (7.4.6) είναι εξίσωση Bernoulli με

$$m = 2 \text{ και } p(x) = \frac{3}{x}, \quad f(x) = x^2.$$

Στην περίπτωση που ισχύει $y \neq 0$, μπορούμε να προχωρήσουμε στην αντικατάσταση

$$z = y^{1-2} \Leftrightarrow z = y^{-1},$$

οπότε θα έχουμε $z = -y^{-2}y'$ και η δοθείσα παίρνει τη μορφή

$$-y^{-2}y' - \frac{3}{x}y^{-1} = -x^2 \Rightarrow z' - \frac{3}{x}z = -x^2.$$

Η τελευταία είναι γραμμική πρώτης τάξεως και μπορούμε να την επιλύσουμε εύκολα ακολουθώντας τη γενική πορεία λύσεως που είδαμε στα προηγούμενα. Η λύση που προκύπτει είναι η:

$$y(x) = \frac{1}{x^3(c - \ln x)}, \quad c - \ln x \neq 0, \quad x > 0$$

όπου $c \in \mathbf{R}$ μία σταθερά. Αξίζει να αναφερθεί ότι και η $y(x) = 0, x > 0$ είναι μια προφανής λύση της (7.4.6), η οποία όμως δεν προκύπτει από τη γενική λύση.

Ασκήσεις.

7.4.1. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση $y' - 3y = 6$.

- α) Να βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα για την παραπάνω εξίσωση.
β) Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση.

7.4.2. Να επιλύσετε τις παρακάτω (γραμμικές) διαφορικές εξισώσεις.

$$\alpha) y' - \frac{3}{x}y = x^3 \quad \beta) y' + y = \sin x \quad \gamma) y' + \frac{4}{x}y = x^4 \quad \delta) y' - xy = -x$$

7.4.3. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

$$\begin{array}{ll} \alpha) y' + 2xy = 2x^3, & y(0) = 1 \\ \beta) y' + xy = -x, & y(0) = -4 \\ \gamma) y' + y = \sin x, & y(\pi) = 1 \\ \delta) y' + \frac{2}{10+2y}y = 4, & y(2) = 100 \end{array}$$

7.4.4. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' + y - e^x y^2 = 0$.

7.4.5. Να επιλύσετε το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών $y' + \frac{6}{x}y = 3y^{\frac{4}{3}}, \quad y(1) = \frac{1}{8}$.

7.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε τη γενίκευση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Δίνουμε αρχικά τον εξής ορισμό:

Γραμμική διαφορική εξίσωση n -τάξεως καλείται μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad (7.5.1)$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ και οι συντελεστές $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή x .

Αν $f(x)=0$, τότε η εξίσωση (7.5.1) ονομάζεται **ομογενής**, ενώ αν $f(x) \neq 0$ ονομάζεται **μη ομογενής**.

Στην περίπτωση που όλοι οι συντελεστές a_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, είναι σταθεροί αριθμοί, δηλαδή η εξίσωση έχει τη μορφή

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

θα ονομάζεται **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές**.

Η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξεως με σταθερούς συντελεστές μπορεί προφανώς να γραφεί στη μορφή

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0 \quad (7.5.2)$$

όπου p, q σταθεροί αριθμοί. Στη συνέχεια, θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε διαφορικές εξισώσεις αυτού του τύπου.

Ας αναζητήσουμε αρχικά για την (7.5.2) μερικές λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$. Αφού:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \text{ και } y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

αντικαθιστώντας στην (7.5.2), παίρνουμε $\lambda^2 e^{\lambda x} + p \lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} (\lambda^2 + p \lambda + q) = 0$, οπότε θα έχουμε

$$\lambda^2 + p \lambda + q = 0. \quad (7.5.3)$$

Η τελευταία καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (7.5.2). Αν λ_0 είναι μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξισώσεως (7.5.3), τότε η συνάρτηση $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ θα αποτελεί όντως μια μερική λύση της (7.5.2). Έτσι, για παράδειγμα, η χαρακτηριστική εξίσωση της $y'' + 3y' - 4y = 0$ είναι η $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ και αφού οι ρίζες της τελευταίας είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -4$, οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^{1x} = e^x$ και $y_2(x) = e^{-4x}$ θα αποτελούν μερικές λύσεις της.

Σημειώνουμε ότι, με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξισώσεως n -τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,$$

η οποία θα δίνεται από την

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Π.χ. η χαρακτηριστική εξίσωση της $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - y = 0$ είναι η $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση της $\frac{d^5 x}{dt^5} - 3 \frac{d^3 x}{dt^3} + 5 \frac{dx}{dt} - 7x = 0$ είναι η $\lambda^5 - 3\lambda^3 + 5\lambda - 7 = 0$ κ.ο.κ..

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις ορίζονται μόνο για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και όχι για τη γενική μορφή (7.5.1). Η χαρακτηριστική εξίσωση παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, αφού οι ρίζες της σχετίζονται άμεσα με τις λύσεις των αντιστοίχων διαφορικών εξισώσεων.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Για την κατηγορία αυτή διαφορικών εξισώσεων ισχύει το επόμενο γενικό αποτέλεσμα:

Έστω η διαφορική εξίσωση (7.5.2) με αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση την (7.5.3). Ας συμβολίσουμε με $\Delta = p^2 - 4q$ τη διακρίνουσα της (7.5.3) και με λ_1, λ_2 τις ρίζες της. Για την εύρεση της γενικής λύσεως $y_{\text{ομ}}$ της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξεως (7.5.2) διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta > 0$, οπότε $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (η χαρακτηριστική εξίσωση (7.5.3) έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες), τότε οι $e^{\lambda_1 x}$ και $e^{\lambda_2 x}$ είναι μερικές λύσεις της (7.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (7.5.4)$$

β) Αν $\Delta = 0$, οπότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (η χαρακτηριστική εξίσωση (7.5.3) έχει μια διπλή πραγματική ρίζα), τότε οι $e^{\lambda x}$ και $x e^{\lambda x}$ είναι μερικές λύσεις της (7.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}. \quad (7.5.5)$$

γ) Αν $\Delta < 0$, οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση (7.5.3) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω $\lambda_1 = a + \beta i$, $\lambda_2 = a - \beta i$, τότε οι $e^{(a+\beta i)x}$ και $e^{(a-\beta i)x}$ είναι μερικές λύσεις της (7.5.2) και η γενική της λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y_{\text{ομ}} = d_1 e^{(a+\beta i)x} + d_2 e^{(a-\beta i)x},$$

ο οποίος αποδεικνύεται ότι είναι αλγεβρικά ισοδύναμος με τον

$$y_{\text{ομ}} = e^{ax} (c_1 \sin \beta x + c_2 \eta \mu \beta x). \quad (7.5.6)$$

Στα επόμενα παραδείγματα παρουσιάζεται ο τρόπος εφαρμογής των παραπάνω σε συγκεκριμένες διαφορικές εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.1.

Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Λύση.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι η επόμενη $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Αυτή έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (7.5.4), η γενική λύση της θα δίνεται από τον τύπο $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.2.

α) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' - 4y' + 4y = 0$.

β) Να βρείτε τη μερική λύση της παραπάνω εξισώσεως που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = y'(0) = 1$.

Λύση.

α) Η παραπάνω εξίσωση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ με ρίζες τις $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$, οπότε η γενική λύση της είναι η $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι, αν παραγωγίσουμε τη γενική λύση, έχουμε:

$$y'_{\text{ομ}} = 2c_1 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + c_2 e^{2x} = e^{2x} (2c_1 + 2xc_2 + c_2).$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = y'(0) = 1$ παίρνουμε:

$$y_{\text{ομ}}(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1, \quad y'_{\text{ομ}}(0) = 1 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 1.$$

Επομένως, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ και η μερική λύση για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες είναι η $y_{\text{ομ}} = x e^{2x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.3.

Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Λύση.

Η παραπάνω εξίσωση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, με $\Delta = p^2 - 4q = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$ και επομένως έχει δύο μιγαδικές ρίζες, τις $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$.

Σύμφωνα με τον τύπο (7.5.6), η γενική λύση της εξισώσεως είναι η $y_{\text{ομ}} = e^{-2x} (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$.

Στις εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων που αφορούν στον τύπο (7.5.6), αν θέσουμε $c_1 = A \eta\mu\varphi$, $c_2 = A \sigma\upsilon\upsilon\varphi$ ο τύπος (7.5.6) μετατρέπεται στον ισοδύναμο

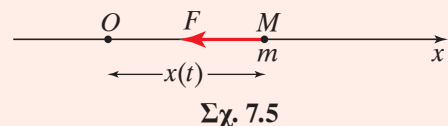
$$y_{\text{ομ}} = e^{ax} (A \eta\mu\varphi \sigma\upsilon\upsilon\beta x + A \sigma\upsilon\upsilon\varphi \eta\mu\beta x) = A e^{ax} (\eta\mu\varphi \sigma\upsilon\upsilon\beta x + \sigma\upsilon\upsilon\varphi \eta\mu\beta x) = A e^{ax} \eta\mu(\beta x + \varphi)$$

(χρησιμοποιήθηκε ο τριγωνομετρικός τύπος $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\upsilon\beta + \sigma\upsilon\upsilon\alpha \eta\mu\beta$). Η φυσική ερμηνεία της παραπάνω εκφράσεως είναι ότι αν η ανεξάρτητη μεταβλητή x ερμηνευθεί ως χρόνος, τότε από φυσικής απόψεως ο τύπος $y_{\text{ομ}} = A e^{ax} \eta\mu(\beta x + \varphi)$ περιγράφει ταλαντώσεις με αρχική φάση φ , οι οποίες για $\alpha > 0$ μεγαλώνουν απεριορίστα, ενώ για $\alpha < 0$ αποσβένουν.

Ως εφαρμογή του παραπάνω, ας επανέλθουμε στην πρώτη διαφορική εξίσωση που αναφέρθηκε στην αρχή της παράγραφο 7.1 η οποία προκύπτει από τον νόμο του Νεύτωνα. Στο επόμενο παράδειγμα θα κατασκευάσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση και στη συνέχεια θα την επιλύσουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.4.

Έστω ένα υλικό σημείο M μάζας m , το οποίο έλκεται από ακίνητο κέντρο O και η δύναμη F που ασκείται από το O προς αυτό είναι ανάλογη της απομακρύνσεως (σχ. 7.5). Να βρείτε το νόμο κινήσεως του σημείου M .



Λύση.

Από τον νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι ισχύει $F = m \cdot a$, όπου a είναι η επιτάχυνση που αποκτά το υλικό σημείο υπό την επίδραση της δυνάμεως F . Γνωρίζουμε όμως, από τον νόμο του Hooke, ότι

ισχύει επίσης $F = -k \cdot x$, όπου $k > 0$ ένας συντελεστής αναλογίας, x η απόσταση του υλικού σημείου M από το O (το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της F είναι αντίθετη προς την μετατόπιση x του M). Είναι επίσης γνωστό ότι η επιτάχυνση $a = a(t)$ δίνεται από τη δεύτερη παράγωγο της αποστάσεως $x = x(t)$ ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση:

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \Leftrightarrow x'' + \omega^2 x = 0,$$

όπου θέσαμε $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (σταθερά). Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, οπότε $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$, δηλαδή έχει μιγαδικές ρίζες, τις $\lambda_1 = 0 + i\omega$, $\lambda_2 = 0 - i\omega$.

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (7.5.6), η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως που μας ενδιαφέρει δίνεται από τον τύπο $x_{\text{ομ}} = e^{0 \cdot x} (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t)$.

Αν θέσουμε $c_1 = A \sin \varphi$, $c_2 = A \cos \varphi$, η γενική λύση μετατρέπεται στην $x_{\text{ομ}}(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, $A \geq 0$. Η τελευταία δηλώνει ότι το σημείο M εκτελεί περιοδικές αρμονικές ταλαντώσεις ως προς το κέντρο έλξεως O , με πλάτος ταλαντώσεως A και αρχική φάση φ .

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = f(x), \quad (7.5.7)$$

όπου p, q σταθερές και $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = e^{3x}, \quad (7.5.8)$$

όπου έχουμε $p = -2$, $q = 1$ και $f(x) = e^{3x}$. Αν επιλύσουμε την ομογενή εξίσωση της (7.5.8), δηλαδή την $y'' - 2y' + y = 0$, τότε από τη χαρακτηριστική της εξίσωση $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ (η οποία έχει μια διπλή ρίζα, την $\lambda = 1$), βρίσκουμε ότι η γενική της λύση είναι η

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι **μία μερική λύση της μη ομογενούς** εξισώσεως (7.5.8) είναι η

$$y_{\mu} = \frac{1}{4} e^{3x},$$

αφού με αντικατάσταση των

$$y_{\mu} = \frac{1}{4} e^{3x}, \quad y'_{\mu} = \frac{3}{4} e^{3x} \quad \text{και} \quad y''_{\mu} = \frac{9}{4} e^{3x}$$

στην (7.5.8) έχουμε

$$y'' - 2y' + y = e^{3x} \Leftrightarrow \frac{9}{4} e^{3x} - 2 \frac{3}{4} e^{3x} + \frac{1}{4} e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow e^{3x} = e^{3x},$$

το οποίο προφανώς ισχύει. Αν τώρα προσθέσουμε τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως $y'' - 2y' + y = 0$ και τη μερική λύση της μη ομογενούς αυτής, τότε προκύπτει η συνάρτηση

$$y = y_{\text{ομ}} + y_{\mu} = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{4} e^{3x},$$

η οποία εύκολα μπορεί να επαληθευθεί ότι αποτελεί τη γενική λύση της (7.5.8).

Γενικά, αποδεικνύεται το εξής:

Η γενική λύση y της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές (7.5.7) δίνεται από την έκφραση:

$$y = y_{\text{ομ}} + y_{\mu},$$

όπου $y_{\text{ομ}}$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0$$

και y_{μ} είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (7.5.7) (η οποία δεν θα περιέχει καθόλου σταθερές).

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι, για να υπολογιστεί η γενική λύση μιας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (7.5.7), θα πρέπει κάθε φορά να γνωρίζουμε μία μερική της λύση. Άρα, γεννιέται το βασικό ερώτημα: με ποιον τρόπο μπορούμε να προσδιορίζουμε τέτοιες μερικές λύσεις y_{μ} ; Θα περιγράψουμε στη συνέχεια μια συγκεκριμένη μέθοδο ευρέσεως μερικής λύσεως, γνωστή ως **μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών**. Πριν περιγράψουμε τη γενική μέθοδο, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.5.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' - 5y' + 6y = x - 1, \quad (7.5.9)$$

Λύση.

Επιλύουμε αρχικά την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση $y'' - 5y' + 6y = 0$, η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση την $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Άρα η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

Θα αναζητήσουμε τώρα μία μερική λύση της (7.5.9). Αφού $f(x) = x - 1$ θα μπορούσαμε ίσως να αναζητήσουμε μια μερική λύση της μορφής $y_{\mu} = \kappa x + \lambda$. Έχουμε τότε $y'_{\mu} = \kappa, y''_{\mu} = 0$ και αντικαθιστώντας στην (7.5.9) παίρνουμε:

$$0 - 5\kappa + 6\kappa x + 6\lambda = x - 1 \Leftrightarrow 6\kappa x + (6\lambda - 5\kappa) = x - 1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδίων δυνάμεων του x βρίσκουμε $6\kappa = 1$ και $6\lambda - 5\kappa = -1$, απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\kappa = \frac{1}{6}, \quad \lambda = -\frac{1}{36}.$$

Συνεπώς μία μερική λύση της (7.5.9) είναι η $y_{\mu} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}$. Άρα, η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (7.5.9) θα δίνεται από τον τύπο

$$y = y_{\text{ομ}} + y_{\mu} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι στην περίπτωση που στη διαφορική εξίσωση (7.5.7) η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο, μπορούμε να αναζητήσουμε μια μερική λύση της μορφής $y_\mu = P(x)$, όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο όμοιο με την f .

Γενικά το τι θα επιλέγουμε ως μορφή της μερικής λύσεως της (7.5.7) εξαρτάται από τη μορφή της συναρτήσεως f που βρίσκεται στο δεξί της μέλος. Ακολουθούν αναλυτικές οδηγίες για τον τρόπο επιλογής της συναρτήσεως f στις πλέον συνήθεις περιπτώσεις:

Η μερική λύση y_μ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (7.5.7) μπορεί να προσδιορισθεί ως εξής:

α) Έστω ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού n ως προς x . Τότε:

– Αν $q \neq 0$, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

– Αν $q = 0$, αναζητούμε μια μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = x(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0),$$

όπου $a_i, i=0,1,2,3,\dots,n$ είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

β) Έστω ότι $f(x) = k e^{\lambda x}$, όπου k, λ είναι γνωστές σταθερές. Τότε αναζητούμε μια μερική λύση της μορφής $y_\mu = A e^{\lambda x}$, όπου A είναι μία σταθερά που πρέπει να προσδιορισθεί.

γ) Έστω ότι $f(x) = k_1 \eta \mu \omega x + k_2 \sigma \nu \omega x$, όπου k_1, k_2 και ω είναι γνωστές σταθερές. Τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_\mu = A \eta \mu \omega x + B \sigma \nu \omega x$, όπου A, B είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε μερική λύση της (7.5.7) και όταν το δεξί μέλος της είναι συνδυασμός των περιπτώσεων (α), (β) και (γ). Για παράδειγμα, αν η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α) και (β), δηλαδή $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$, τότε θεωρούμε ως μερική λύση την

$$y_\mu = e^{\lambda x} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$$

με $a_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Αν η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α), (β) και (γ) (πολυωνύμου, εκθετικής συναρτήσεως και όρου ημιτόνου ή συνημιτόνου), δηλαδή:

$$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x) \eta \mu \omega x \quad \text{ή} \quad f(x) = e^{\lambda x} P_n(x) \sigma \nu \omega x,$$

τότε θεωρούμε ως μερική λύση την

$$y_\mu = e^{\lambda x} \eta \mu \omega x (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) + e^{\lambda x} \sigma \nu \omega x (\beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0)$$

με $a_i, \beta_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Αναφέρουμε ότι υπάρχουν και διάφορες άλλες μέθοδοι ευρέσεως μερικών λύσεων που καλύπτουν την περίπτωση που η f δεν ανήκει στους τύπους των συναρτήσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω ή όταν η διαφορική εξίσωση δεν έχει σταθερούς συντελεστές. Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες μεθόδους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.6.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Λύση.

Στην εξίσωση που δόθηκε η f είναι γινόμενο των περιπτώσεων (α) και (β), δηλαδή, $f(x) = e^{2x} P_1(x)$, όπου $P_1(x) = 4x$ είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και $\lambda = 2$. Αναζητούμε λοιπόν μια μερική λύση της μορφής $y_\mu = e^{2x} (Ax + B)$, όπου A, B είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Όμως

$$y'_\mu = e^{2x} (2Ax + A + 2B), \quad y''_\mu = e^{2x} (4Ax + 4A + 4B)$$

και με αντικατάσταση των δύο τελευταίων σχέσεων στη διαφορική εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} e^{2x} (4Ax + 4A + 4B) - e^{2x} (2Ax + A + 2B) - e^{2x} (Ax + B) &= 4xe^{2x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{2x} (Ax + 3A + B) &= e^{2x} 4x \Leftrightarrow Ax + 3A + B = 4x + 0. \end{aligned}$$

Άρα $A = 4$ και $3A + B = 0 \Rightarrow B = -12$ και μια μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως που δόθηκε είναι η $y_\mu = e^{2x} (4x - 12)$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $y'' - y' - y = 0$, η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Οι ρίζες της είναι οι $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς είναι η

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

Τελικά η γενική λύση θα είναι η

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + e^{2x} (4x - 12).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5.7.

Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'' - y - 2y = \eta\mu 2x$.

Λύση.

Εύκολα μπορεί να βρει κάποιος, ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία, ότι η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως είναι η $y_{\text{ομ}} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.

Αφού $f(x) = \eta\mu 2x$ αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_\mu = A \eta\mu 2x + B \sigma\upsilon\nu 2x$. Παραγωγίζοντας δύο φορές τη μερική λύση έχουμε:

$$y'_\mu = 2A \sigma\upsilon\nu 2x - 2B \eta\mu 2x, \quad y''_\mu = -4A \eta\mu 2x - 2B \sigma\upsilon\nu 2x$$

και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} (-4A \eta\mu 2x - 2B \sigma\upsilon\nu 2x) - (2A \sigma\upsilon\nu 2x - 2B \eta\mu 2x) - 2(A \eta\mu 2x + B \sigma\upsilon\nu 2x) &= \eta\mu 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-6A + 2B) \eta\mu 2x + (-6B - 2A) \sigma\upsilon\nu 2x &= 1 \cdot \eta\mu 2x + 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοίων όρων παίρνουμε $-6A + 2B = 1$ και $-2A - 6B = 0$, απ' όπου βρίσκουμε:

$$A = -\frac{3}{20} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{20}.$$

Επομένως $y_\mu = -\frac{3}{20}\eta\mu 2x + \frac{1}{20}\sigma\upsilon\nu 2x$ και η γενική λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y = y_{\text{ομ}} + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\eta\mu 2x + \frac{1}{20}\sigma\upsilon\nu 2x.$$

Ασκήσεις.

7.5.1. Να βρείτε την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων και να προσδιορίσετε ποιες από αυτές είναι γραμμικές.

α) $2xy'' + x^2y' - (\sigma\upsilon\nu x)y = 2$

β) $y'' - y - 2y = 0$

γ) $y'' - 2y = 0$

δ) $yy'' + xy' + y = x^3$

ε) $4y'' + 4y' + y = 0$

στ) $2y' + 4xy = x + 1$

Ποιες από τις παραπάνω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και ποιες με σταθερούς συντελεστές;

7.5.2. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = 5e^{-x}$ είναι δύο μερικές λύσεις της διαφορικής εξισώσεως $y'' - 2y' + y = 0$. Στη συνέχεια να ελέγξετε αν η $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ αποτελεί επίσης λύση της.

7.5.3. Να επιλύσετε τις εξής διαφορικές εξισώσεις:

α) $y'' - 6y = 0$

β) $y'' - 7y' = 0$

γ) $y'' - 2y' - y = 0$

δ) $y'' + 2y' + 5y = 0$

ε) $y'' + 10y' + 21y = 0$

στ) $y'' - 3y' + 4y = 0$

7.5.4. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2 I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 200I = 0$.

7.5.5. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 6$ είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως $y'' - 2y' + y = x^2$, να βρείτε τη γενική της λύση.

7.5.6. Να αποδείξετε ότι η γενική λύση $y_{\text{ομ}} = d_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + d_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$ της (7.5.2) στην περίπτωση που έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες, είναι ισοδύναμη με την $y_{\text{ομ}} = e^{\alpha x} (c_1 \sigma\upsilon\nu\beta x + c_2 \eta\mu\beta x)$.

7.5.7. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y'' + y = 0, y(2) = y'(2) = 1$

β) $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$

γ) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$

δ) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

7.5.8. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

β) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

γ) $y'' - 3y' + 2y = 2\eta\mu x$

δ) $y'' - 2y = 4x^2 e^x$

ε) $y'' - 7y' + y = e^{2x}(3x - 5)$

στ) $y'' - 3y' + 2y = 8x - 1$

7.5.9. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

α) $y'' - 3y' + 2y = 2\eta\mu x, y(1) = 0, y'(1) = 1$

β) $y'' + 8y' + 15y = e^x(x + 3), y(0) = y'(0) = 0$

γ) $y'' + y = x^2 - 3x + 1, y(2) = 3, y'(2) = 0$

δ) $y'' - 2y + y = \frac{e^x}{x}, y(1) = 0, y'(1) = 1$

7.6 Εφαρμογές.

Η μαθηματική μοντελοποίηση ενός φαινομένου της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, της Μηχανικής και πολλών άλλων επιστημών, οδηγεί αρκετά συχνά σε διαφορικές εξισώσεις. Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε παραδείγματα από μία σειρά φυσικών προβλημάτων-φαινομένων, τα οποία μπορούν να περιγραφούν και συγχρόνως να μελετηθούν μέσω διαφορικών εξισώσεων.

Για κάθε κατηγορία μοντέλου παρουσιάζεται αναλυτικά το φυσικό πρόβλημα, καθώς και η διαφορική εξίσωση που το περιγράφει μαθηματικά.

7.6.1 Ραδιενεργή ακτινοβολία.

Χρόνος ημιζωής ή απλά **ημιζωή** ενός **ραδιενεργού στοιχείου** είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ελαττωθεί κατά το ήμισυ η ένταση της ακτινοβολίας του. Η ημιζωή ενός ραδιενεργού ισοτόπου, σχετίζεται μ' έναν αριθμό, που χαρακτηρίζει την ταχύτητα ελαττώσεως της εντάσεως ακτινοβολίας με την πάροδο του χρόνου.

Η ελάττωση της εντάσεως της ακτινοβολίας ενός ραδιοϊσοτόπου περιγράφεται μαθηματικά με μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της μορφής

$$\frac{dR}{dt} = kR, \quad (7.6.1)$$

όπου $k < 0$. Η εξίσωση (7.6.1) είναι χωριζομένων μεταβλητών και η γενική της λύση βρίσκεται εύκολα ως εξής

$$\frac{dR}{R} = k dt \Rightarrow \int \frac{dR}{R} = k \int dt \Rightarrow \ln R = kt + c' \Rightarrow R(t) = ce^{kt}, \quad (7.6.2)$$

όπου $c = e^{c'}$ μία σταθερά. Αν γνωρίζουμε την αρχική ένταση ακτινοβολίας του ισοτόπου (δηλ. αυτή που αντιστοιχεί σε χρόνο $t=0$), τότε η σταθερά c της λύσεως (7.6.2) προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$R(0) = ce^{k \cdot 0} \Rightarrow c = R(0).$$

Επομένως, η σταθερά c είναι ίση με την αρχική ένταση ακτινοβολίας $R(0)$. Η σταθερά k προσδιορίζεται από εργαστηριακές μετρήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.1.

Το ισότοπο άνθρακα 14, του ραδιενεργού άνθρακα, περιέχεται ως συστατικό της ύλης όλων των ζωντανών οργανισμών. Όταν ένας οργανισμός πεθάνει, τότε το ισότοπο άνθρακα-14 εξακολουθεί να ακτινοβολεί μέχρι να μηδενιστεί η ακτινοβολία του (στην πράξη μέχρι να αποκτήσει αμελητέα τιμή). Οι επιστήμονες που χρονολογούν με άνθρακα-14 υποστηρίζουν ότι αυτό θα συμβεί μετά από χρόνο διπλάσιο της ημιζωής του άνθρακα-14, η οποία είναι περίπου 5730 χρόνια.

Αν ο ραδιενεργός άνθρακας που ανιχνεύτηκε σε ένα απολίθωμα εκπέμπει το 77,7% της αρχικής του ακτινοβολίας να προσδιορίσετε την ηλικία του απολίθωματος.

Λύση.

Όπως είδαμε παραπάνω, η γενική λύση της (7.6.1) είναι η $R(t) = ce^{kt}$, όπου $c = R(0)$ η αρχική ακτινοβολία. Σύμφωνα με την υπόθεση των επιστημόνων, η ημιζωή του άνθρακα-14 είναι περίπου 5730 χρόνια, οπότε θα πρέπει να έχουμε $R(5730) = 0,5 R(0)$ ή ισοδύναμα:

$$0,5 R(0) = R(0) e^{5730k} \Leftrightarrow \ln 0,5 = 5730k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 0,5}{5730}.$$

Αφού ο ραδιενεργός άνθρακας που ανιχνεύτηκε στο απολίθωμα εκπέμπει το 77,7% της αρχικής του ακτινοβολίας, για την ηλικία t του απολιθώματος θα πρέπει να ισχύει $R(t)=0,777 R(0)$. Επομένως θα έχουμε διαδοχικά:

$$0,777 R(0) = R(0)e^{kt} \Leftrightarrow 0,777 = e^{kt} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,777}{k} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,777}{\frac{\ln 0,5}{5730}} \cong 2086.$$

Άρα η ηλικία του απολιθώματος εκτιμάται στα 2086 χρόνια.

7.6.2 Ψύξη και θέρμανση.

Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι, σύμφωνα με μια βασική αρχή της διεργασίας ψύξεως, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογος με τη διαφορά μεταξύ της θερμοκρασίας του και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος μέσου. Πρόκειται για το νόμο ψύξεως του Νεύτωνα, που ισχύει βεβαίως και για τη θέρμανση. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα σχετικό με το νόμο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.2.

Έστω ότι μία γαλοπούλα βρίσκεται σ' ένα ψυγείο θερμοκρασίας 2°C και στη συνέχεια τοποθετείται σ' ένα φούρνο θερμοκρασίας 200°C . Μετά από παρέλευση 30 min η εσωτερική θερμοκρασία της γαλοπούλας ανέρχεται στους 16°C . Αν το ψήσιμο της γαλοπούλας ολοκληρώνεται όταν η εσωτερική της θερμοκρασία φτάσει τους 88°C , να βρείτε το χρόνο που απαιτείται συνολικά για το ψήσιμο της γαλοπούλας.

Λύση.

Αν συμβολίσουμε με $\theta=\theta(t)$ τη θερμοκρασία της γαλοπούλας, τότε ο ρυθμός μεταβολής αυτής θα δίνεται από την παράγωγο $\frac{d\theta}{dt}$. Επομένως, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διεργασία θέρμανσεως είναι η

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma(200 - \theta),$$

όπου γ ένας συντελεστής αναλογίας (που εξαρτάται από το μέσο). Η τελευταία είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και θα έχουμε:

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma(200 - \theta) \Leftrightarrow \frac{d\theta}{200 - \theta} = \gamma dt \Leftrightarrow \int \frac{d\theta}{200 - \theta} = \int \gamma dt \Leftrightarrow -\ln(200 - \theta) = \gamma t + c.$$

Από τη λύση της διαφορικής εξισώσεως προκύπτει ότι:

$$t = \frac{1}{\gamma}(-\ln(200 - \theta) - c). \quad (7.6.3)$$

Αφού τη χρονική στιγμή $t=0$ η γαλοπούλα βρισκόταν σε θερμοκρασία 2°C , ενώ στο χρόνο $t=30$ η θερμοκρασία της ήταν 16°C , από την (7.6.3) προκύπτει $0 = \frac{1}{\gamma}(-\ln(200 - 2) - c) \Rightarrow c = -\ln 198$ και

$$30 = \frac{1}{\gamma}(-\ln(200 - 16) - c) \Rightarrow 30\gamma = -c - \ln 184 \Rightarrow \gamma = \frac{\ln 198 - \ln 184}{30}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των c, γ στην έκφραση (7.6.3) βρίσκουμε το χρόνο που απαιτείται για το ψήσιμο της γαλοπούλας

$$t = 30 \frac{\ln 198 - \ln 112}{\ln 198 - \ln 184} \cong 233 \text{ min}.$$

7.6.3 Εξάπλωση επιδημίας.

Στη Βιολογία με τον όρο «πληθυσμός» εννοούμε τον αριθμό των ατόμων ή οργανισμών που ζουν σε μια δεδομένη περιοχή. Η εξάπλωση επιδημίας σε έναν πληθυσμό αποτελεί ένα φυσικό πρόβλημα, το οποίο μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μεταβολής της νόσου του πληθυσμού που αποτελείται από φορείς ιού μίας γρίπης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.3.

- α) Έστω ότι σε μια μονάδα νεοσυλλέκτων του Πολεμικού Ναυτικού κατατάχτηκαν συνολικά 3000 άτομα, 3 εκ των οποίων είναι φορείς ιού μίας γρίπης. Ο ιός μεταδίδεται με ρυθμό ίσο με το ένα δεκάκις χιλιοστό του γινομένου των νοσούντων και μη νοσούντων ατόμων. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που θα νοσήσουν μετά από δύο ημέρες.
- β) Μετά από πόσες ημέρες θα έχουν νοσήσει όλοι οι νεοσύλλεκτοι; Είναι λογικό το ερώτημα αυτό; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση.

α) Έστω $x = x(t)$ ο αριθμός των νοσούντων ατόμων τη χρονική στιγμή t . Από υπόθεση για το ρυθμό μεταβολής, θα έχουμε τη σχέση

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10^4} x(3000 - x), \quad (7.6.4)$$

η οποία είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Η λύση της (7.6.4) είναι η (αφήνεται ως άσκηση στο σπουδαστή)

$$x(t) = \frac{3000}{1 + c e^{-0,3t}}.$$

Από την αρχική συνθήκη $x(0)=3$, μπορούμε να βρούμε τη σταθερά c , ως εξής:

$$x(0) = 3 \Rightarrow \frac{3000}{1 + c e^0} = 3 \Rightarrow c = 999.$$

Άρα

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 999 e^{-0,3t}} \quad (7.6.5)$$

και ο αριθμός των νεοσυλλέκτων που θα νοσήσουν μετά από δύο ημέρες θα δίνεται από την (7.6.5) για $t = 2$, δηλαδή θα είναι ίσος με:

$$x(2) = \frac{3000}{1 + 999 e^{-0,6t}} \Rightarrow x(2) \cong 5.$$

β) Αφού θέλουμε να έχουν νοσήσει όλοι οι νεοσύλλεκτοι, δηλαδή και τα 3000 άτομα, θα πρέπει να έχουμε $x(t)=3000$, οπότε παίρνουμε

$$3000 = \frac{3000}{1 + 999 e^{-0,3t}} \Rightarrow e^{-0,3t} = 0.$$

Η ισότητα αυτή δεν ισχύει για καμμία συγκεκριμένη πραγματική τιμή του χρόνου t . Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει για $t \rightarrow +\infty$, δηλαδή χρειάζεται άπειρος χρόνος για να νοσήσουν όλοι οι νεοσύλλεκτοι. Επομένως, το ερώτημα αυτό δεν έχει νόημα, αφού το ζητούμενο ενδεχόμενο πρακτικά δεν θα συμβεί ποτέ.

Ασκήσεις.

7.6.1. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται με ρυθμό ανάλογο με την παρούσα ποσότητά του, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{dN}{dt} = k N,$$

όπου $N = N(t)$ είναι η μάζα του υλικού και k μια σταθερά. Αν αρχικά υπήρχαν 50 mg ραδιενεργού υλικού, ενώ έπειτα από δύο ώρες παρατηρήθηκε ότι το υλικό έχει χάσει το 10% της αρχικής του μάζας, να βρείτε:

- α) Μια έκφραση για τη μάζα που απομένει οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .
- β) Τη μάζα του υλικού μετά από 4 ώρες.
- γ) Το χρόνο που χρειάζεται για να απομείνει το 50% της αρχικής μάζας.

7.6.2. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται με ρυθμό ανάλογο με την παρούσα ποσότητά του. Υποθέτουμε ότι αρχικά υπάρχουν 100 mg, ενώ έπειτα από δύο χρόνια παρατηρήθηκε ότι έχει διασπαστεί το 5% της αρχικής του μάζας. Να βρείτε:

- α) Μια έκφραση για τη μάζα για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .
- β) Το χρόνο που χρειάζεται για να διασπαστεί 10% της αρχικής μάζας.

7.6.3. Σε μία καλλιέργεια αναπτύσσονται βακτηρίδια με ρυθμό ανάλογο με τον πληθυσμό τους. Υποθέτουμε ότι αρχικά υπάρχουν 300 άτομα, ενώ μετά από 2 ώρες το πλήθος ατόμων της καλλιέργειας έχει αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε:

- α) Το πλήθος ατόμων της καλλιέργειας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .
- β) Το χρόνο που χρειάζεται για να διπλασιαστεί ο αρχικός πληθυσμός.

7.6.4. Ένα σώμα θερμοκρασίας $0^\circ F$ τοποθετείται σε περιβάλλον, το οποίο έχει θερμοκρασία $100^\circ F$. Μετά παρέλευση 10 min η θερμοκρασία του σώματος γίνεται $25^\circ F$. Να βρείτε:

- α) Το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει η θερμοκρασία στους $50^\circ F$.
- β) Τη θερμοκρασία του σώματος μετά από 20 min.

7.6.5. Ένα σώμα θερμοκρασίας $50^\circ F$ τοποθετείται σε φούρνο με σταθερή θερμοκρασία $150^\circ F$. Αν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $75^\circ F$, να βρείτε το χρόνο που απαιτείται, ώστε η θερμοκρασία να φτάσει τους $100^\circ F$.

7.6.6. Ένα σώμα θερμοκρασίας $50^\circ F$ τοποθετείται σε φούρνο με σταθερή θερμοκρασία $150^\circ F$. Αν μετά από 10 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $75^\circ F$, να βρείτε το χρόνο που απαιτείται, ώστε η θερμοκρασία του να φτάσει τους $100^\circ F$.

7.6.7. Ένα φλιτζάνι ζεστής σοκολάτας με αρχική θερμοκρασία $190^\circ F$, αφήνεται να παγώσει σε περιβάλλον θερμοκρασίας $72^\circ F$. Η θερμοκρασία του μετά από δύο λεπτά πέφτει στους $150^\circ F$. Να υπολογίσετε:

- α) Τη θερμοκρασία της σοκολάτας μετά από 5 min.
- β) Το χρόνο που χρειάζεται για να πέσει η θερμοκρασία στους $100^\circ F$.

7.6.8. Σ' έναν πληθυσμό που αποτελείται από 500 ποντίκια μολύνθηκαν σκόπιμα τα 5 από αυτά από

ιό μιας μεταδοτικής νόσου. Ο σκοπός της μολύνσεως ήταν να ελεγχθεί μια θεωρία επιδημικής εξαπλώσεως, σύμφωνα με την οποία ο ρυθμός μεταβολής του μολυσμένου πληθυσμού $N(t)$ είναι ανάλογος με το γινόμενο του πλήθους των ποντικών που μολύνθηκαν επί το πλήθος των υγιών ποντικών, δηλαδή $\frac{dN}{dt} = k N (500 - N)$, όπου k μια σταθερά. Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να μολυνθεί ο μισός πληθυσμός.

7.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Συνήθης διαφορική εξίσωση n -τάξεως.	Μία εξίσωση που περιέχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή x , μία συνάρτηση $y=y(x)$ και έναν πεπερασμένο αριθμό παραγώγων της y ως προς x , δηλαδή: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1$
Τάξη μιας διαφορικής εξισώσεως.	Είναι η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται σ' αυτήν.
Μερική λύση διαφορικής εξισώσεως.	Κάθε λύση της, η οποία προκύπτει από τη γενική λύση, όταν στις αυθαίρετες σταθερές που περιλαμβάνει δοθούν συγκεκριμένες τιμές.
Διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών πρώτης τάξεως.	$P(x) \cdot M(y) \frac{dy}{dx} + Q(x) \cdot N(y) = 0$
Ομογενής συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$, βαθμού m .	$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y) \text{ για κάθε } \lambda \neq 0$
Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	$y'(x) + p(x)y = f(x),$ όπου $p(x), f(x)$ δεδομένες συνεχείς συναρτήσεις.
Ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$ όπου $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού και συνεχείς ως προς τις μεταβλητές x και y .
Ολοκληρωτικός παράγοντας ή πολλαπλασιαστής του Euler για τη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως $y'(x) + p(x)y = f(x)$.	$Q(x) = e^{\int p(x) dx}$
Λύση γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξης $y'(x) + p(x)y = f(x)$.	$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \right], \quad c \in \mathbb{R}$
Διαφορική εξίσωση Bernoulli.	$y'(x) + p(x)y = f(x)y^m, \quad m \neq 0, 1$ όπου $p(x), f(x)$ συνεχείς συναρτήσεις.

Γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξεως.	$\alpha_n y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = f(x)$
Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές.	$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0, (p, q \text{ σταθερές})$
Χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0$.	$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
Χαρακτηριστική εξίσωση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n-τάξεως.	$\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$
Γενική λύση $y_{\text{ομ}}$ της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0$ όπου p, q σταθερές.	$\alpha) y_{\text{ομ}} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ αν $\Delta > 0$ $\beta) y_{\text{ομ}} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$ αν $\Delta = 0$ $\gamma) y_{\text{ομ}} = e^{ax} (c_1 \sin bx + c_2 \eta \mu bx)$ αν $\Delta < 0$ $(\Delta = p^2 - 4q \text{ η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης } \lambda^2 + p\lambda + q = 0)$
Γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = f(x)$.	$y = y_0 + y_\mu$ όπου y_0 η γενική λύση της ομογενούς $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0$ και y_μ μία μερική λύση της μη ομογενούς $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = f(x)$
Μερική λύση της $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = P_n(x)$ όπου $P_n(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς x .	$\alpha) y_\mu = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, αν $q \neq 0$ $\beta) y_\mu = x (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)$, αν $q = 0$
Μερική λύση της $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = k e^{\lambda x}$.	$y_\mu = A e^{\lambda x}$
Μερική λύση της $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = k_1 \eta \mu \omega x + k_2 \sigma \nu \omega x$.	$y_\mu = A \eta \mu \omega x + B \sigma \nu \omega x$

7.8 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Η $y'' + 3xy' + 4y = x^2$, είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως.	Σ Λ
2.	Η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = x^2$ είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως.	Σ Λ
3.	Η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = x^2$ είναι μία μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	Σ Λ

4.	Η $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$, $w = w(x, y)$ είναι μία μερική διαφορική εξίσωση.	Σ Λ
5.	Η συνάρτηση $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ είναι λύση της $y'' + 2y' + y = 0$.	Σ Λ
6.	Η συνάρτηση $y(x) = 1$ είναι λύση της $y'' + 2y' + y = x$.	Σ Λ
7.	Η $y = \eta\mu 2x$ είναι η γενική λύση της $y'' + 4y = 0$.	Σ Λ
8.	Η $y = \eta\mu 2x$ είναι μία μερική λύση της $y'' + 4y = 0$.	Σ Λ
9.	Η $y = \eta\mu 2x + c$, $c \in \mathbf{R}$ είναι γενική λύση της $y'' + 4y = 0$.	Σ Λ
10.	Η $y(x) = 2e^{3-x}$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' + y = 0$, $y(3) = 2$.	Σ Λ
11.	Μία διαφορική εξίσωση 1 ^{ης} τάξεως έχει τη μορφή $F(x, y, y') = 0$.	Σ Λ
12.	Οι λύσεις μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως δίνονται από την $y = \Phi(x, c)$, $c \in \mathbf{R}$.	Σ Λ
13.	Η λύση μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως μπορεί να δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την $F(x, y, c) = 0$.	Σ Λ
14.	Η λύση μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως μπορεί να δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την $F(x, y, c_1, c_2) = 0$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.	Σ Λ
15.	Η εξίσωση $e^x dx - y dy = 0$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.	Σ Λ
16.	Η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + 2y^4}{xy^3}$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.	Σ Λ
17.	Η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + 2y^4$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού 4.	Σ Λ
18.	Η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{x^4 + 2y^4}{xy^3}$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού 4.	Σ Λ
19.	Η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση.	Σ Λ
20.	Η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ επιλύεται με τη βοήθεια της αντικαταστάσεως $z = \frac{x}{y}$.	Σ Λ
21.	Η εξίσωση $y' + 3y = x$ είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	Σ Λ
22.	Η εξίσωση $y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{1/3}$ είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.	Σ Λ
23.	Η συνάρτηση $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ είναι λύση της $y'' - y' - 2y = 0$.	Σ Λ

24.	Η γενική λύση της $y'' - py' + qy = 0$ με $p^2 - 4q < 0$ δίνεται από τον τύπο $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$.	Σ Λ
25.	Η γενική λύση της $y'' + py' + qy = 0$ με $p^2 - 4q < 0$ δίνεται από τον τύπο $y = e^{ax}(c_1 \sin bx + c_2 \eta \mu bx)$.	Σ Λ
26.	Η γενική λύση της $y'' + py' + qy = 0$ με $p^2 - 4q = 0$ δίνεται από τον τύπο $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.	Σ Λ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = y^2$ έχει μερική λύση την: α) $y = x + 1$ β) $y = -\frac{1}{x}$ γ) $y = x$ δ) $y = x^2$
2.	Η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1}$ έχει γενική λύση την: α) $(x+c)^2$ β) $1 + \frac{(x^2+c)^2}{4}$ γ) $y = -\frac{1}{x} + c$ δ) $y = -\frac{c}{x^2}$
3.	Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^4$, $x > 0$ έχει γενική λύση την: α) $1 + \frac{(x^5+c)^2}{4}$ β) $\frac{x}{5} + \frac{(x^5+c)^2}{4}$ γ) $\frac{x^5}{3} + cx^2$ δ) $\frac{x^5}{3} + cx^2 + 2x$
4.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(1+x^2)y' + 2xy = 1$, $y(0) = 1$ δίνεται από τον τύπο: α) $y = \frac{x+1}{x^2+1} + c$ β) $y = x + 3$ γ) $y = -\frac{4}{x^2}$ δ) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$
5.	Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως Bernoulli $y' + \frac{3}{x}y = x^2 y^2$, $x > 0$ είναι η: α) $y = x^3 \ln x + c$ β) $y = \frac{1}{x^3}(c - \ln x)^{-1}$ γ) $y = \frac{1}{x^5}(c - 2 \ln x)^{-1}$ δ) $y = \frac{2}{x^3}(c - 2 \ln x)^{-1}$
6.	Η συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + xy^2 e^{xy}$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού: α) 3 β) 2 γ) 1 δ) 4
7.	Η λύση της διαφορικής εξισώσεως $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ είναι η: α) $y = x^2 \ln x + 2cx^3$ β) $y = \frac{1}{x^2} \ln x + c$ γ) $y^2 = x^2 \ln x + 2cx^3$ δ) $y^2 = 2x^2 \ln x - 2cx^2$
8.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, $y(1) = -2$ δίνεται από τον τύπο: α) $y = -\sqrt{2x^2 \ln x + 4x^2}$ β) $y = +\sqrt{2x^2 \ln x + 4x^2}$ γ) $y^2 + x = \sqrt{3x^2 \ln x + 4x^2}$ δ) $y^2 + x = x^2 + \sqrt{x^2 \ln x + 3x^2}$

9.	Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η: α) $y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^5}{5} - x = c$ β) $y^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^8}{8} - x = c$ γ) $\ln(xy) - \frac{x^2}{2} + \frac{y^5}{5} - x = c$ δ) $e^{x+y} - \ln(x-y) = c$
10.	Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = -\frac{y^2}{x}$, $x > 0$ που διέρχεται από το σημείο $(1, \frac{1}{3})$ είναι η: α) $y = x + 3$ β) $y = (x + 3)^{-2}$ γ) $y = (3 + \ln x)^{-1}$ δ) $y = x + (3 - \ln x)^{-1}$
11.	Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' - 6y' + 25y = 0$ δίνεται από: α) $y = c_1 e^{3x} \sin 4x + c_2 e^{3x} \eta\mu 4x$ β) $y = e^{3x} (c_1 \sin 4x + c_2 \eta\mu 3x)$ γ) $y = c_1 x e^{3x} \sin 4x + c_2 x e^{3x} \eta\mu 4x$ δ) $y = e^{3x} \sin 4x + 2c_2 e^{3x} \eta\mu 4x$
12.	Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y'' - 6y' + 25y = 64e^{-x}$. Η λύση της σύμφωνα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών είναι η: α) $y = c_1 e^{3x} \sin 4x + c_2 e^{3x} \eta\mu 4x + 4e^x$ β) $y = c_1 e^{3x} \sin 5x + c_2 e^{3x} \eta\mu 5x + 4e^x$ γ) $y = e^{2x} (c_1 \sin 4x + c_2 e^{3x} \eta\mu 4x) + 2e^{-x}$ δ) $y = e^{3x} (c_1 \sin 4x + c_2 e^{3x} \eta\mu 4x) + 2e^{-x}$
13.	Μία μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' = 9x^2 + 2x - 1$ είναι η: α) $y_\mu = -\frac{2}{x} + 1$ β) $y_\mu = -\frac{2}{x} + 1$ γ) $y_\mu = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{4}$ δ) $y_\mu = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} + cx$, $c \in \mathbf{R}$
14.	Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' - y' - 2y = 4x^2$ είναι η: α) $y = y_0 + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - 2x^2 + 3x - 3$ β) $y = y_0 + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$ γ) $y = y_0 + y_\mu = c_1 e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$ δ) $y = y_0 + y_\mu = c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$
15.	Δίνεται η διαφορική εξίσωση Bernoulli $y' + \frac{6}{t}y = 3y^{4/3}$, $t > 0$. Η γενική της λύση είναι η: α) $y = t^2 + c$ β) $y = \frac{1}{(ct^2 + t)^3}$, με $ct^2 + t \neq 0$, $t > 0$ γ) $y = (t^2 + c)^{-1}$, $t^2 + c \neq 0$ δ) $y = \frac{t^2}{(ct^2 + t)^3}$, με $ct^2 + t \neq 0$, $t > 0$

7.9 Γενικές ασκήσεις.

7.9.1. Να προσδιορίσετε την άγνωστη συνάρτηση, την ανεξάρτητη μεταβλητή και την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

$$\alpha) y'' - 3yy' + xy = 0$$

$$\beta) y^{(6)} + 4y^2 y''' + 5y^8 = x$$

$$\gamma) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^n = y^3 + 2$$

$$\delta) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^{3/2} = 1 + x - y$$

7.9.2. Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\beta) y' = y \eta \mu x$$

$$\gamma) 2\sqrt{x} \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$$

$$\delta) \frac{dy}{dx} = (64xy)^{\frac{1}{3}}$$

$$\epsilon) \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)y^5}{x^2(2y^3-y)}$$

7.9.3. Να βρείτε τις σταθερές c_1 και c_2 , ώστε η συνάρτηση $y(x) = c_1 \eta \mu x + c_2 \sigma \nu \chi$ να ικανοποιεί τις

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

7.9.4. Να βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'' + 4y = 0$, που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

7.9.5. Να επιλύσετε τα επόμενα προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\alpha) y' - 2xy = 0, \quad y(0) = -1$$

$$\beta) y' - \frac{1}{x^2} y = 0, \quad y(0) = 2$$

$$\gamma) y' + y = 2, \quad y(0) = 0$$

$$\delta) y' + y = e^x, \quad y(0) = 1$$

$$\epsilon) xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 4$$

$$\sigma\tau) y' - 2y = x, \quad y(0) = \frac{3}{4}$$

7.9.6. Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) y' + 3y = 2xe^{-3x}$$

$$\beta) xy' + (x-2)y = 3x^3 e^{-x}$$

$$\gamma) x(x+1)y' - y = 2x^2(x+1)$$

$$\delta) y' + \frac{2x-3}{x}y = 4x^3$$

$$\epsilon) y' - 5y = e^x$$

7.9.7. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\alpha) \frac{dy}{dx} = ye^x, \quad y(0) = 2e$$

$$\beta) yy' = \eta \mu x, \quad y(0) = 2$$

$$\gamma) y' = e^{x+y}, \quad y(0) = 1$$

$$\delta) (y + e^{-y})y' = 1, \quad y(1) = 1$$

7.9.8. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) y' + y = xy^3$$

$$\beta) y' + y = y^{-1}$$

7.9.9. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\alpha) \frac{dy}{dx} = ye^x, \quad y(0) = 2e$$

$$\beta) yy' = \eta \mu x, \quad y(0) = 2$$

7.9.10. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομογενείς και, αν είναι, να βρείτε το βαθμό τους.

$$\alpha) f(x, y) = \frac{y-x}{x}$$

$$\beta) g(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$$

$$\gamma) h(x, y) = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$$

$$\delta) k(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + y^4}{x^3y}$$

7.9.11. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και σε περίπτωση θετικής απαντήσεως να τις επιλύσετε.

$$\alpha) y' = \frac{x+2y}{x}$$

$$\beta) y' = \frac{y-x}{x}$$

$$\gamma) y' = \frac{y^2 + 2x}{xy}$$

$$\delta) y'(y^2 - x^2) = 2xy$$

7.9.12. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}.$$

α) Να βρείτε τη γενική της λύση $y = y(x)$.

β) Να μελετήσετε τη συμπεριφορά της λύσεως όταν $x \rightarrow 0$, δηλαδή να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} y(x)$.

7.9.13. Να επιλύσετε τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις.

$$\alpha) y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$\beta) y'' - 20y' + 64y = 0$$

$$\gamma) y'' + y' + 2y = 0$$

$$\delta) y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$$

$$\epsilon) \frac{d^2y}{dy^2} - 5\frac{dy}{dy} + 7y = 0$$

$$\sigma\tau) \frac{d^2y}{dy^2} - 18\frac{dy}{dy} + 81y = 0$$

7.9.14. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2I}{dt^2} - 4I = t^2e^{-t}.$$

7.9.15. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' - y - 2y = 0, y(0) = a, y'(0) = 2$.

α) Να βρείτε τη λύση του προβλήματος.

β) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς a , ώστε η λύση $y = y(t)$ να τείνει στο μηδέν όταν $t \rightarrow +\infty$, δηλαδή να ισχύει $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

7.9.16. Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$.

7.9.17. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\alpha) y'' - 2y' + y = x^2 - 1$$

$$\beta) y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$$

$$\gamma) y'' - 2y' + y = 4\sin x$$

$$\delta) y'' - 2y' + y = xe^x$$

$$\epsilon) y'' - 2y' + y = 3e^x$$

$$\sigma\tau) \frac{y' - y}{y''} = 3$$

7.9.18. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως της μορφής $y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0$, όπου οι συναρτήσεις $p(x), q(x), r(x)$ είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα A , λέγεται **διαφορική εξίσωση Riccati**. Έστω η διαφορική εξίσωση Riccati

$$y' - e^{-x}y^2 + 3y - 3e^x = 0.$$

α) Ναδειχθεί ότι η $y_1(x) = e^x$ είναι μερική λύση της.

β) Αν θέσουμε $y(x) = e^x + \frac{1}{u(x)}$ ναδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$u' - u + e^{-x} = 0.$$

γ) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως του ερωτήματος (β).

δ) Ναδειχθεί ότι η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξισώσεως είναι η:

$$y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^x + e^{-x}}$$

7.9.19. Ένα σώμα με άγνωστη θερμοκρασία μπαίνει σε ψυγείο, το οποίο έχει σταθερή θερμοκρασία $0^\circ F$. Μετά την παρέλευση 20 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $40^\circ F$ και μετά από 40 min είναι $20^\circ F$. Να βρείτε την αρχική θερμοκρασία του σώματος.

7.9.20. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας T μίας μεταλλικής ράβδου είναι η

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0, \quad T = T(t),$$

όπου k μία σταθερά. Υποθέτουμε ότι η μεταλλική ράβδος θερμοκρασίας $100^\circ F$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ τοποθετείται σε περιβάλλον με θερμοκρασία $0^\circ F$. Αν μετά από 20 min η θερμοκρασία της ράβδου έχει γίνει $50^\circ F$, να βρείτε:

α) Το χρόνο που χρειάζεται για να πέσει η θερμοκρασία της ράβδου στους $20^\circ F$.

β) Τη θερμοκρασία της ράβδου μετά από 10 min.

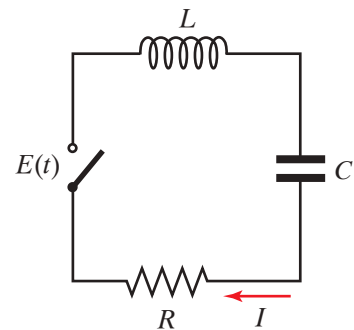
7.9.21. Σε ένα κύκλωμα RC έχουμε ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής $300\sin 2t$ (σε Volt), μία αντίσταση 150 Ohm και έναν πυκνωτή χωρητικότητας $1/600 \text{ Farad}$. Αν ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο 5 Coulomb

α) Να βρείτε το φορτίο $q = q(t)$ του πυκνωτή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

β) Να βρείτε το ρεύμα του κυκλώματος τη χρονική στιγμή $t = \pi/2$.

7.9.22. Έστω κύκλωμα RL με ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής $4\eta\mu t$ (σε Volt), μία αντίσταση 100 Ohm και ένα πηνίο $L = 4 \text{ Henry}$. Αν το κύκλωμα έχει μηδενικό αρχικό ρεύμα, να υπολογίσετε το ρεύμα $I = I(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

7.9.23. Έστω κύκλωμα RCL (σχ. 7.9), το οποίο αποτελείται από ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής $200 \sin (100t) \text{ Volt}$, μια αντίσταση 5 Ohm , ένα πηνίο $L = 0,05 \text{ Henry}$ και έναν πυκνωτή χωρητικότητας $0,0004 \text{ Farad}$, όλα συνδεδεμένα σε σειρά. Αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό ρεύμα είναι μηδέν και ο πυκνωτής δεν έχει αρχική φόρτιση, να υπολογίσετε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .



Σχ. 7.9.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές που εμφανίζεται η ανάγκη λύσεως μίας ή περισσότερων διαφορικών εξισώσεων, οι μέθοδοι που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είτε δεν μπορούν να εφαρμοσθούν, είτε εφαρμόζονται με ιδιαίτερη δυσκολία. Μία εναλλακτική μέθοδος, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε τέτοια προβλήματα είναι ο μετασχηματισμός Laplace.

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός με πολλές εφαρμογές, τόσο στα θεωρητικά, όσο και στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, θα παρουσιάσουμε τις βασικότερες ιδιότητές του και θα αναδείξουμε τη χρησιμότητά του στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών για διαφορικές εξισώσεις.

- 8.1** Ο μετασχηματισμός Laplace.
- 8.2** Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.
- 8.3** Λύση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.
- 8.4** Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 8.5** Ερωτήσεις κατανόησης.
- 8.6** Γενικές ασκήσεις.

8.1 Ο μετασχηματισμός Laplace.

Στο κεφάλαιο 6 μελετήθηκε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ μίας συνεχούς συναρτήσεως f σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όπου $a, \beta \in \mathbf{R}$. Στο ολοκλήρωμα αυτό, αν συμβεί το ένα ή και τα δύο άκρα της ολοκληρώσεως να είναι άπειρα και η f να είναι συνεχής σε κάθε υποδιάστημα του διαστήματος ολοκληρώσεως, τότε θα λέμε ότι έχουμε ένα **γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους**. Πιο συγκεκριμένα, ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους μπορεί να λάβει μία από τις παρακάτω μορφές:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^\beta f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων αυτών γίνεται, αφού πρώτα υπολογίσουμε αντίστοιχα ολοκληρώματα με πεπερασμένο διάστημα ολοκληρώσεως και στη συνέχεια λάβουμε το όριο όταν το αντίστοιχο άκρο τείνει στο άπειρο. Για παράδειγμα, αν $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $G(x) = \int_a^x f(x)dx$ (ισοδύναμα G είναι μια παράγουσα της f), τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - G(a).$$

Ανάλογα έχουμε τους επόμενους τύπους:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\beta f(x)dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^\beta f(x)dx = G(\beta) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) - \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s). \end{aligned}$$

Αν κάποιο από τα όρια που εμφανίζονται στους παρακάτω τύπους δεν υπάρχει, τότε θα λέμε ότι το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει. Υπάρχουν διάφορα κριτήρια για το πότε τα παραπάνω ολοκληρώματα υπάρχουν ή όχι, τα οποία είναι γνωστά ως **κριτήρια συγκλίσεως** των γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Η θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων είναι εκτενής και πολύ μεγάλη και δεν θα αποτελέσει αντικείμενο αναλυτικής μελέτης στο παρόν εγχειρίδιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.1

Να υπολογίσετε τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx \quad \beta) \int_3^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx.$$

Λύση.

α) Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = e^{-4x}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και σύμφωνα με τη θεωρία, το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta e^{-4x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-4\beta} - 1}{-4} \right] = \frac{1}{4}.$$

β) Στη δεύτερη περίπτωση η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει είναι η $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Η f είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[3, +\infty)$ και για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ θα πρέπει να υπολογισθεί αρχικά το $\int_3^\beta \frac{1}{x-1} dx$ και στη συνέχεια το όριο $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_3^\beta \frac{1}{x-1} dx$.

Όμως

$$\int_3^\beta \frac{1}{x-1} dx = \ln(\beta-1) - \ln 2$$

και $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln(\beta-1) = +\infty$. Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Από τα τρία διαφορετικά είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων που ορίσαμε, εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα είναι το πρώτο, αφού ενός τέτοιου τύπου ολοκλήρωμα εμφανίζεται στον ορισμό του **μετασχηματισμού Laplace** μιας συναρτήσεως f . Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Η **μετασχηματισμένη Laplace** μιας συνεχούς συναρτήσεως $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ είναι η συνάρτηση F που ορίζεται μέσω του γενικευμένου ολοκληρώματος πρώτου είδους

$$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx. \quad (8.1.1)$$

Ως πεδίο ορισμού της συναρτήσεως F , θεωρούμε το σύνολο των τιμών της μεταβλητής $s \in \mathbf{R}$, για τις οποίες υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα (8.1.1).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μεταβλητή s , κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στο δεξί μέλος της σχέσεως (8.1.1), θεωρείται σταθερά αφού η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x .

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον τύπο (8.1.1) αποκλίνει για κάθε $s \in \mathbf{R}$, τότε θα λέμε ότι η $f(x)$ δεν έχει μετασχηματισμένη Laplace.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.2

Να βρείτε η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = e^{ax}$, $x \geq 0$.

Λύση.

Σύμφωνα με τον τύπο (8.1.1), προκειμένου να βρούμε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = e^{ax}$, $x \geq 0$, θα πρέπει να υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} dx.$$

Όμως,

$$\int_0^t e^{(a-s)x} dx = \left[\frac{e^{(a-s)x}}{a-s} \right]_0^t = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s}$$

και για $a-s < 0 \Leftrightarrow s > a$ θα έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{(a-s)x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right] - \frac{1}{a-s} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

Τελικά

$$F(s) = L\{f(x)\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί Laplace των βασικών συναρτήσεων, οι οποίοι παρατίθενται στον πίνακα 8.1.1. Στην άσκηση 8.1.5 δίνονται κατάλληλες υποδείξεις για την απόδει-

ξη των τύπων που αφορούν στο μετασχηματισμό Laplace των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημβx και συνβx, ενώ η μετασχηματισμένη Laplace της σταθερής συναρτήσεως $f(x)=1$ μπορεί να προκύψει άμεσα και ως ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace της $f(x)=e^{ax}$ για $a=0$. Τέλος, ένας γρήγορος τρόπος υπολογισμού της μετασχηματισμένης Laplace της συναρτήσεως $f(x)=x^n$, προκύπτει με κατάλληλη χρήση μιας ιδιότητας που θα δοθεί στη συνέχεια (βλ. σχετική υπόδειξη στην άσκηση 8.1.6).

Πριν συνεχίσουμε με επί πλέον παραδείγματα θα αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του και τις ιδιότητες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

L₁. Γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace. Αν $L\{f_1(x)\} = F_1(s)$, $L\{f_2(x)\} = F_2(s)$ και c_1 και $c_2 \in \mathbf{R}$ είναι δύο σταθερές, τότε η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ είναι ίση με $c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$. Δηλαδή:

$$L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).$$

L₂. Τύπος μετατοπίσεως της μετασχηματισμένης Laplace. Αν $L\{f(x)\} = F(s)$, και $a \in \mathbf{R}$ είναι οποιαδήποτε σταθερά, τότε ισχύει:

$$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a).$$

Με άμεση εφαρμογή του τύπου αυτού μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα μετασχηματισμών Laplace με τον πίνακα 8.1.2.

L₃. Αν $L\{f(x)\} = F(s)$ είναι η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως f , τότε για κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει:

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (F(s)).$$

L₄. Μετασχηματισμένη Laplace των παραγώγων μιας συναρτήσεως f . Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Τότε, για τη μετασχηματισμένη Laplace της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της f ισχύουν οι επόμενοι τύποι:

$$L\{f'(x)\} = s L\{f(x)\} - f(0)$$

$$L\{f''(x)\} = s^2 L\{f(x)\} - s f(0) - f'(0).$$

Πίνακας 8.1.1

$f(x)$	$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a \quad (a > 0)$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0 \quad (n \text{ θετικός ακέραιος})$
$\eta\mu(\beta x)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \quad s > 0$
$\sigma\upsilon\nu(\beta x)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}, \quad s > 0$

Πίνακας 8.1.2

$f(x)$	$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$
$e^{ax} \eta\mu(\beta x)$	$\frac{\beta}{(s-a)^2 + \beta^2}, \quad s > a$
$e^{ax} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$	$\frac{\beta}{(s-a)^2 + \beta^2}, \quad s > a$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.3

Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=3+2x^2$.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace των βασικών συναρτήσεων και την ιδιότητα L_1 που δόθηκε παραπάνω μπορούμε να γράψουμε:

$$L\{f(x)\} = L\{3\} + L\{2x^2\} = 3L\{1\} + 2L\{x^2\} = 3\left(\frac{1}{s}\right) + 2\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{3s^2 + 4}{s^3}, \quad \text{για } s > 0.$$

Επομένως

$$L\{f(x)\} = \frac{3s^2 + 4}{s^3}, \quad \text{για } s > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.4

Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x)=e^{3x}+2\eta\mu^2 3x$.

Λύση.

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες L_1 και L_2 βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} L\{f(x)\} &= L\{e^{3x}\} + 2L\{\eta\mu^2 3x\} = L\{e^{3x}\} + 2L\{1 - \sigma\upsilon\nu^2 3x\} = L\{e^{3x}\} + 2L\left\{1 - \frac{\sigma\upsilon\nu 6x + 1}{2}\right\} = \\ &= L\{e^{3x}\} + L\{1\} - L\{\sigma\upsilon\nu 6x\} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 36}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$L\{e^{3x} + 2\eta\mu^2 3x\} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 36}, \quad \text{για } s > 3.$$

Ασκήσεις.

8.1.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γενικευμένα ολοκλήρωμα:

α) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

β) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x+2} dx$

γ) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$

δ) $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$

ε) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$

στ) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx, \quad a > 0$

8.1.2. Να αποδείξετε ότι $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} a^{1-p}$ όταν $p > 1, a > 0$.

8.1.3. Να βρείτε τις τιμές του p , για τις οποίες συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-px} dx$.

8.1.4. Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x^2-3x+4$

β) $g(x)=2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu(2x)$.

8.1.5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x)=\eta\mu(\omega x)$ και $f_2(x)=\sigma\upsilon\nu(\omega x)$.

Έστω $L\{f_1(x)\} = F_1(s)$, $L\{f_2(x)\} = F_2(s)$ οι μετασχηματισμένες Laplace των συναρτήσεων f_1, f_2 αντίστοιχα.

α) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση να αποδείξετε ότι $F_1(s) = \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega^2} F_1(s)$, $s > 0$.

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο $L\{f'(x)\} = sL\{f(x)\} - f(0)$ (βλ. ιδιότητα L_4) για τη συνάρτηση $f_1(x)=\eta\mu(\omega x)$ να αποδείξετε ότι $F_2(s) = \frac{s}{\omega} F_1(s)$, $s > 0$.

γ) Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν στα ερωτήματα (α) και (β) να συμπεράνετε τους τύπους του πίνακα 8.1.1 για τις μετασχηματισμένες Laplace των συναρτήσεων:

$$f(x) = \eta\mu(\omega x) \text{ και } g(x) = \sigma\upsilon\nu(\omega x).$$

δ) Να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace των συναρτήσεων:

$$f_1(x) = e^{\omega x} \eta\mu(\beta x) \text{ και } f_2(x) = e^{\omega x} \sigma\upsilon\nu(\beta x).$$

8.1.6. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του πίνακα 8.1.1 $L\{1\} = \frac{1}{s}$, $s > 0$, καθώς και την ιδιότητα L_3 , να αποδείξετε ότι:

$$L\{x\} = \frac{1!}{s^2}, \quad s > 0, \quad L\{x^2\} = \frac{2!}{s^3}, \quad s > 0.$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω, να αποδείξετε ότι $L\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$.

Τέλος, να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = [(x+1)e^x]^2$.

8.1.7. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 8.1.1 και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, να αποδείξετε ότι οι μετασχηματισμένες Laplace των συναρτήσεων $f(x)$, οι οποίες παρατίθενται στον πίνακα 8.1.3 δίνονται από τον τύπο που αναφέρεται στη στήλη με επικεφαλίδα $F(s)$.

Πίνακας 8.1.3

$f(x)$	$F(s)$
xe^{-ax}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$(1-ax)e^{-ax}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-ax} - e^{-\beta t}$	$\frac{\beta - a}{(s+a)(s+\beta)} \quad (a \neq \beta)$
$e^{-ax} \eta\mu \beta x$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$e^{-ax} \sigma\upsilon\nu \beta x$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$\sigma\upsilon\nu(a + \beta x)$	$\frac{s \sigma\upsilon\nu a + \beta \eta\mu a}{s^2 + \beta^2}$
$\eta\mu(a + \beta x)$	$\frac{s \eta\mu a + \beta \sigma\upsilon\nu a}{s^2 + \beta^2}$

8.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Πολλές φορές παρατηρείται η ανάγκη ευρέσεως της συναρτήσεως $y = f(x)$ όταν είναι γνωστός ο τύπος του μετασχηματισμού Laplace $F(s)$ της f . Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως αντίστροφο πρόβλημα για το μετασχηματισμό Laplace ή πρόβλημα της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace. Μία εν-

διαφέρουσα εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών με διαφορικές εξισώσεις, την οποία θα παρουσιάσουμε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο. Ένα πρώτο ερώτημα που θα πρέπει να εξετασθεί είναι κατά πόσο ο μετασχηματισμός Laplace μιας συναρτήσεως καθορίζει τη συνάρτηση αυτή με μοναδικό τρόπο.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από την επόμενη πρόταση:

Αν f_1, f_2 συνεχείς συναρτήσεις, για τις οποίες ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace, τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία:

$$L\{f_1(x)\} = L\{f_2(x)\} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \text{ για κάθε } x.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, αν δοθεί η μετασχηματισμένη Laplace $F(s) = L\{f(x)\}$ μίας συναρτήσεως $f(x)$, τότε η $f(x)$ προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο. Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace** που αντιστοιχεί στην $F(s)$ και θα γράφομε $f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ συναρτήσεων και των αντιστοίχων μετασχηματισμένων Laplace.

Γενικά προκύπτει ο παρακάτω ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση $F(s)$. Τότε ορίζουμε ως **αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace** της $F(s)$, τη μοναδική συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει $L\{f(x)\} = F(s)$. Συμβολικά θα γράφομε:

$$f(x) = L^{-1}\{F(s)\}. \quad (8.2.1)$$

Για παράδειγμα, αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $L\{f(x)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, τότε, σύμφωνα με τον πίνακα 8.1.1 θα έχουμε $L\{f(x)\} = L\{x^n\}$, οπότε $f(x) = x^n = L^{-1}\{F(s)\}$.

Με βάση τον ορισμό που δόθηκε για την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace, οι συναρτήσεις που δίνονται στην πρώτη στήλη του πίνακα 8.1.1 είναι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί εκείνων, που αναφέρονται στη δεύτερη στήλη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει γενικός (ολοκληρωτικός) τύπος για τον υπολογισμό της αντίστροφης μετασχηματισμένης Laplace μιας συναρτήσεως, ο οποίος βασίζεται στη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων. (Ο τύπος αυτός δεν θα παρουσιασθεί αφού απαιτεί πρόσθετες έννοιες και αποτελέσματα, τα οποία δεν έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.1.

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει $L\{f(x)\} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

Λύση.

Ζητείται να υπολογίσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = L^{-1}\{F(s)\}, \text{ όπου } F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Αναλύουμε αρχικά τη συνάρτηση $F(s)$ σε απλά κλάσματα, δηλαδή τη γράφομε στη μορφή:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{\beta}{s+2}.$$

Η προηγούμενη ισότητα οδηγεί στην ταυτότητα $\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{as+2a+\beta s+\beta}{(s+1)(s+2)}$, από την οποία προκύπτει το σύστημα $a + \beta = 0$ και $2a + \beta = 1$.

Η λύση του τελευταίου είναι η $a = 1$ και $\beta = -1$ και επομένως

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Με τη βοήθεια του πίνακα 8.1.1 μπορούμε να γράψουμε $\frac{1}{s+1} = L\{e^{-x}\}$, $\frac{1}{s+2} = L\{e^{-2x}\}$, οπότε

$$L\{f(x)\} = F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = L\{e^{-x}\} - L\{e^{-2x}\} = L\{e^{-x} - e^{-2x}\}.$$

Άρα $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$, δηλαδή η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της $F(s)$ είναι η:

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = e^{-x} - e^{-2x}.$$

Κατά τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace μιας συναρτήσεως είναι ιδιαίτερα χρήσιμες οι επόμενες δύο ιδιότητες, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace που αναφέραμε στην παράγραφο 8.1.

I₁. Γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Αν $F_1(s), F_2(s)$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f_1(x), f_2(x)$, και $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ είναι δύο σταθερές, τότε ισχύει:

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\} = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x).$$

I₂. Τύπος μετατοπίσεως του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Αν $f(x)$ είναι η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s)$ (δηλ. $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$) και $a \in \mathbf{R}$ είναι μια σταθερά, τότε η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s-a)$ δίνεται από τον τύπο:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax} f(x).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.2.2.

Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συναρτήσεως $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+6s+13}$.

Λύση

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $F(s)$, θα πρέπει ο παρονομα-

στής του κλάσματος να γραφεί με τέτοιον τρόπο, ώστε να πάρουμε εκφράσεις παρόμοιες μ' αυτές που εμφανίζονται στον πίνακα 8.1.1. Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου στον παρονομαστή της $F(s)$ είναι αρνητική ($\Delta = -16 < 0$), οπότε θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τη γνωστή μέθοδο *συμπληρώσεως τέλειου τετραγώνου* για να τον γράψουμε στη μορφή

$$s^2 + 6s + 13 = s^2 + 2 \cdot s \cdot 3 + 3^2 + 4 = (s + 3)^2 + 2^2.$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας εκφράσεως, σε συνδυασμό με την ιδιότητα $\mathbf{I}_1$ της γραμμικότητας παίρνουμε:

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2s+6-5}{(s+3)^2+2^2}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right\} - \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right\}.$$

Λαμβάνοντας τέλος υπόψη την ιδιότητα $\mathbf{I}_2$, μπορούμε να γράψουμε

$$L^{-1}\{F(s)\} = 2L^{-1}\{F_1(s+3)\} - \frac{5}{2}L^{-1}\{F_2(s+3)\},$$

όπου θέσαμε

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2+2^2} = L\{\sin(2x)\}, \quad F_2(s) = \frac{2}{s^2+2^2} = L\{\eta\mu(2x)\}.$$

και έτσι καταλήγουμε στο επόμενο αποτέλεσμα:

$$L^{-1}\{F(s)\} = 2e^{-3x}\sin(2x) - \frac{5}{2}e^{-3x}\eta\mu(2x).$$

Γενικά, για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μιας συναρτήσεως $F(s)$ χρησιμοποιούμε τον πίνακα 8.1.1. Αν η συνάρτηση $F(s)$ δεν έχει ακριβώς μια από τις μορφές που εμφανίζονται στον πίνακα, τότε τη μετατρέπουμε με κατάλληλους αλγεβρικούς χειρισμούς (εκμεταλλευόμενοι και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace και του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace) σε μία αναγνωρίσιμη μορφή, όπως ακριβώς εργαστήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ασκήσεις.

8.2.1. Να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace, των επομένων συναρτήσεων:

$$\alpha) F(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\beta) F(s) = \frac{2}{(s-1)^2+4}$$

$$\gamma) F(s) = \frac{s}{(s-2)^2+3}$$

$$\delta) F(s) = \frac{24}{(s-5)^5}$$

$$\epsilon) F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+7}$$

$$\sigma\tau) F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{6}{s^4}$$

8.2.2. Να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace, των επομένων συναρτήσεων:

$$\alpha) F(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$\beta) F(s) = \frac{12}{3s+9}$$

$$\gamma) F(s) = \frac{1}{s^2-2s+2}$$

$$\delta) F(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

$$\epsilon) F(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+5}$$

$$\sigma\tau) F(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+4}$$

8.2.3. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει $L\{f(x)\} = \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$, όπου α, β, γ , είναι τρεις διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί.

8.2.4. Δίνεται η συνάρτηση $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.

α) Να βρείτε τις σταθερές α, β, γ , έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2+1}.$$

β) Να υπολογίσετε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace $f(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$.

8.3 Λύση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο χρήσεως του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις n -τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Υπενθυμίζουμε ότι μία γραμμική διαφορική εξίσωση n -τάξεως με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x),$$

όπου οι συντελεστές $a_i, i=0,1,2,\dots, n$ είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί. Επίσης, σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, οι αρχικές συνθήκες έχουν τη μορφή:

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad y''(0) = c_2, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

Στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου, θα περιοριστούμε στη μελέτη εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξεως, ωστόσο η μεθοδολογία που θα παρουσιάσουμε να μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί για τη γενική περίπτωση της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως n -τάξεως.

Υπενθυμίζουμε ότι, η τεχνική που εφαρμόσαμε στο κεφάλαιο 7 για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, ήταν να βρούμε αρχικά τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως και στη συνέχεια να χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες, προκειμένου να υπολογίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές που εμφανίζονταν στη γενική λύση. Στη μέθοδο που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια για λύση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, η επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών γίνεται μ' ένα μόνο βήμα.

Το βασικό εργαλείο για την ανάπτυξη της μεθοδολογίας είναι η δράση του μετασχηματισμού Laplace επί των παραγώγων μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως f . Μ' αυτόν τον τρόπο θα μπορούμε να μετασχηματίζουμε τις διαφορικές εξισώσεις σε αντίστοιχες αλγεβρικές με μοναδικό άγνωστο το μετασχηματισμό Laplace της συναρτήσεως που αναζητούμε.

Σύμφωνα με την ιδιότητα **L₄**, για το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου μιας συναρτήσεως ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν $L\{f(x)\} = F(s)$ είναι η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως f , τότε θα ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{aligned} L\{f'(x)\} &= sF(s) - f(0), \\ L\{f''(x)\} &= s^2 F(s) - s f(0) - f'(0), \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

με την προϋπόθεση ότι η f και οι δύο πρώτες παράγωγοί της ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες, ώστε να υπάρχουν οι μετασχηματισμένες Laplace που σημειώνονται.

Το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτείνεται και για την παράγωγο n -τάξεως $f^{(n)}$ μιας συναρτήσεως f , με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f και οι παράγωγοί της ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες. Έτσι, η μετασχηματισμένη Laplace της παραγώγου n -τάξεως $f^{(n)}$ μίας συναρτήσεως f δίνεται από τον τύπο:

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (8.3.2)$$

Πριν παρουσιάσουμε τη γενική μεθοδολογία επιλύσεως προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, ας δώσουμε ένα απλό παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' - 2y = e^{5x}, \quad y(0) = 3.$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως $y' - 2y = e^{5x}$ παίρνουμε $L\{y' - 2y\} = L\{e^{5x}\} \Leftrightarrow L\{y'\} - 2L\{y\} = L\{e^{5x}\}$. Σύμφωνα με τον πίνακα 8.1.1 και τον τύπο (8.3.1) έχουμε:

$$L\{y'\} = sL\{y(x)\} - y(0), \quad L\{e^{5x}\} = \frac{1}{s-5}, \quad s > 5$$

οπότε η τελευταία ισότητα λαμβάνει τη μορφή:

$$sL\{y(x)\} - y(0) - 2L\{y(x)\} = \frac{1}{s-5}, \quad s > 5.$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 3$ φτάνουμε στην ισότητα:

$$sL\{y(x)\} - 3 - 2L\{y(x)\} = \frac{1}{s-5},$$

στην οποία εμφανίζεται ένας μοναδικός άγνωστος, η μετασχηματισμένη Laplace $L\{y(x)\}$. Λύνοντας ως προς $L\{y(x)\}$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$L\{y(x)\}(s-2) = \frac{1}{s-5} + 3 \Leftrightarrow L\{y(x)\}(s-2) = \frac{1+3s-15}{s-5} \Leftrightarrow L\{y(x)\} = \frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}.$$

Από την τελευταία ισότητα είναι προφανές ότι η άγνωστη συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Y(s) = \frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}$, δηλαδή $y(x) = L^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\}$.

Αναλύοντας την $Y(s)$ σε απλά κλάσματα βρίσκουμε ότι:

$Y(s) = \frac{3s-14}{(s-2)(s-5)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-5}$, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε:

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\} = \frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = \frac{8}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{5x}.$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που μας δόθηκε είναι η $y(x) = \frac{8}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{5x}$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε αποτελεί μια γενική διαδικασία που θα μπορούσε να εφαρμοσθεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Πιο συγκεκριμένα, τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν είναι τα επόμενα:

- α) Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης.
- β) Με χρήση του πίνακα 8.1.1 και του τύπου (8.3.1) (ή του γενικότερου τύπου (8.3.2), αν η διαφορική εξίσωση είναι ανώτερη από δεύτερη τάξη) μετασχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική με άγνωστο τη συνάρτηση $L\{y(x)\}=Y(s)$.
- γ) Επιλύουμε την αλγεβρική εξίσωση που βρέθηκε στο βήμα (β), ως προς $Y(s)$.
- δ) Αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace $L\{y(x)\}=Y(s)$ και βρίσκουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y(x)=L^{-1}\{Y(s)\}$.

Ας δούμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα επιλύσεως ενός προβλήματος αρχικών τιμών, το οποίο αποτελείται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.3.1.

Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=5$.

Λύση.

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και παίρνουμε:

$$L\{y'' - y' - 2y\} = L\{0\} \Leftrightarrow L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = L\{0\}.$$

Με τη βοήθεια του τύπου (8.3.1) για το μετασχηματισμό Laplace για την παράγωγο πρώτη και δεύτερης τάξεως της συναρτήσεως $y=f(x)$ και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$, $y'(0)=5$, φτάνουμε στην εξίσωση

$$s^2 L\{y(x)\} - y'(0) - s y(0) - s L\{y(x)\} - y(0) - 2 L\{y(x)\} = 0$$

στην οποία μοναδικός άγνωστος είναι η συνάρτηση $L\{y(x)\}=Y(s)$. Λύνοντας την εξίσωση αυτή έχουμε:

$$L\{y(x)\} (s^2 - s - 2) - 5 - s - 1 = 0 \Leftrightarrow L\{y(x)\} = \frac{s+6}{s^2 - s - 2}.$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, σε συνδυασμό με ανάλυση σε απλά κλάσματα, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{s+6}{s^2 - s - 2}\right\} = -\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}.$$

Ασκήσεις.

8.3.1. Να λύσετε τα επόμενα προβλήματα αρχικών τιμών με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

α) $y' + 2y = 0$, $y(0)=1$

β) $y' + 2y = 2$, $y(0)=1$

γ) $y' + 2y = e^x$, $y(0)=1$

δ) $y' + 2y = 0$, $y(1)=1$

ε) $y' + 5y = 0$, $y(1)=0$

στ) $y' - 5y = e^{5x}$, $y(0)=2$

8.3.2. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + 16y = 2\eta\mu(4x)$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$, παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης.

8.3.3. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = 0,05N,$$

όπου $N = N(t)$ μια άγνωστη συνάρτηση με $N(0) = 20$. Θέτοντας $L\{N(t)\} = M(s)$ να βρείτε την αλγεβρική εξίσωση που ικανοποιεί η $M(s)$ και αφού λυθεί να βρείτε τον τύπο της $N(t)$.

8.3.4. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 4y' + 8y = \eta \mu x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως.

8.4 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Μεταχηματισμένη Laplace μιας συναρτήσεως $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$.	$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$
Γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους.	$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x) dx$
Γραμμικότητα του μετασχηματισμένου Laplace.	$L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\}$
Μετατόπιση της μετασχηματισμένης Laplace.	$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$ όπου $F(s) = L\{f(x)\}$
n -οστή παράγωγος της μετασχηματισμένης Laplace.	$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (F(s)),$
Γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμένου Laplace.	$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}$
Τύπος μετατόπισης της αντίστροφης μετασχηματισμένης Laplace.	$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax} f(x), \quad a \in \mathbf{R}$
Το αμφιμονοσήμαντο του μετασχηματισμένου Laplace.	$L\{f_1(x)\} = L\{f_2(x)\} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x), \quad x > 0$
Μετασχηματισμένη Laplace των παραγώγων μιας συναρτήσεως f με $L\{f(x)\} = F(s)$.	$L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$ $L\{f''(x)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$ $\dots$ $L\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.	α) Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως. β) Μετασχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική με άγνωστο τη συνάρτηση $L\{y(x)\} = Y(s)$. γ) Επιλύουμε την αλγεβρική εξίσωση ως προς $Y(s)$. δ) Βρίσκομε τη λύση της διαφορικής εξισώσεως με αντιστροφή της μετασχηματισμένης Laplace $Y(s)$.

8.5 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ λέγεται γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους.	Σ Λ
2.	Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους μπορεί να έχει και τα δύο άκρα ολοκληρώσεώς του άπειρα.	Σ Λ
3.	Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ δεν συγκλίνει.	Σ Λ
4.	Ισχύει ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = +\infty$.	Σ Λ
5.	Η μετασχηματισμένη Laplace μιας συναρτήσεως $f(x) = 1, x > 0$ είναι η συνάρτηση F που ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα $F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ για τις τιμές της μεταβλητής $s \in \mathbf{R}$, για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.	Σ Λ
6.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = 1, x > 0$ δίνεται από τον τύπο $L\{1\} = \frac{1}{s}, s < 0.$	Σ Λ
7.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = e^x$ ισούται με $L\{e^x\} = \frac{1}{s-1}, s > 1.$	Σ Λ
8.	Ισχύει ότι $L\{x^4 + 2e^x - \eta\mu^2 x\} = 4L\{x\} + 2L\{e^x\} - 2L\{\eta\mu x\}$.	Σ Λ
9.	Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace για μία δοσμένη συνάρτηση F υπάρχει πάντα.	Σ Λ
10.	Αν υπάρχει η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$, τότε ισχύει: $L^{-1}\{F(s-1)\} = e^{-x} f(x), a \in \mathbf{R}.$	Σ Λ
11.	Αν $F_1(s), F_2(s)$ είναι οι μετασχηματισμένες Laplace δύο συναρτήσεων $f_1(x), f_2(x)$ αντίστοιχα και $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, τότε ισχύει: $L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}.$	Σ Λ
12.	Αν υπάρχει η μετασχηματισμένη Laplace της f , οι f', f'' ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες και ισχύει $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $L\{f''(x)\} = sL\{f'(x)\}$.	Σ Λ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ ισούται με: α) 2 β) $\frac{3}{4}$ γ) $\frac{1}{2}$ δ) 0
2.	Το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους $\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx$ συγκλίνει όταν: α) $s < 0$ β) $s = 0$ γ) $s > 0$ δ) $s = -1$
3.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = x^2$ ισούται με: α) $2s$ β) $\frac{2}{s^3}$ γ) $\frac{1}{s^3}$ δ) $-s$
4.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = xe^{4x}$ ισούται με: α) $\frac{1}{(s-4)^2}$ β) $\frac{1}{(s-4)^3}$ γ) $\frac{3}{(s-4)^2}$ δ) $\frac{1}{(s-4)^{1/2}}$
5.	Η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = x^{7/2}$ ισούται με: α) $\frac{105}{16} s^{-9/2} \sqrt{\pi}$ β) $\frac{104}{16} s^{-9/2} \sqrt{\pi^3}$ γ) $s^{-9/2} \sqrt{\pi}$ δ) $\frac{104}{16} s^{-9/2}$
6.	Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6}$ είναι η: α) $\eta\mu(\sqrt{6}x)$ β) $\eta\mu(2\sqrt{6}x)$ γ) $\eta\mu^2(\sqrt{6}x)$ δ) $\sigma\upsilon\nu(\sqrt{6}x)$
7.	Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3}$ ισούται με: α) e^{3x} β) $4e^{3x} + e^x$ γ) $4e^{3x} - e^x$ δ) $4e^{3x} - e^{-x}$
8.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' - 5y = e^{5x}$, $y(0)=0$, είναι η: α) $y(x) = 4xe^{3x}$ β) $y(x) = 5xe^{5x}$ γ) $y(x) = xe^{5x}$ δ) $y(x) = 2xe^{5x}$

8.6 Γενικές ασκήσεις.

8.6.1. Η *συνάρτηση Γάμμα*, η οποία εμφανίζεται σε διάφορα προβλήματα της θεωρίας Πιθανοτήτων και της Φυσικής, ορίζεται από το επόμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$, όπου a είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της ολοκληρώσεως κατά παράγοντες να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $a > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(1) = 1$.

γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β) να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $\Gamma(n+1) = n!$.

δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$, $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-3x} dx$, $\int_0^{+\infty} x^7 e^{-x} dx$.

8.6.2. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της ασκήσεως 8.6.1 να αποδείξετε ότι η μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = x^n$ όπου n ένας θετικός ακέραιος είναι ο $L\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$.

8.6.3. Να υπολογίσετε τα επόμενα γενικευμένα ολοκληρώματα, αν υπάρχουν.

$$\begin{array}{lll} \alpha) \int_2^{+\infty} x^{-3} dx & \beta) \int_{-\infty}^{-1} x^{-3} dx & \gamma) \int_{-\infty}^1 x e^x dx \\ \delta) \int_1^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{2x-1}} dx & \epsilon) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-3x}} dx & \sigma\tau) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \end{array}$$

8.6.4. Χρησιμοποιώντας τους τύπους υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους, να

βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 2 \\ 4, & x > 2. \end{cases}$

8.6.5. Να υπολογίσετε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 3 \\ 2, & x > 3 \end{cases}$, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα 8.6α.

8.6.6. Να βρείτε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace των επομένων συναρτήσεων.

$$\alpha) F(s) = \frac{s}{(s-2)^2+9} \quad \beta) F(s) = \frac{1}{s^2-2s+9} \quad \gamma) F(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+8} \quad \delta) F(s) = \frac{s+1}{s^2-9}$$

8.6.7. Χρησιμοποιώντας την παρακάτω ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$F(s) = \frac{4}{s^3(s^2-s-2)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{\gamma}{s^3} + \frac{\delta}{s-2} + \frac{\epsilon}{s+1},$$

[Υπόδειξη: Το τριώνυμο του παρονομαστή γράφεται στη μορφή $s^2-s-2=(s-2)(s+1)$], να βρείτε αρχικά τις τιμές των σταθερών $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace της $F(s)$, δηλαδή τη συνάρτηση $f(x) = L^{-1}\left\{\frac{4}{s^3(s^2-s-2)}\right\}$.

8.6.8. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dI}{dt} + 50I = 5$, όπου $I = I(t)$ μια άγνωστη συνάρτηση με $I(0) = 0$.

Θέτοντας $L\{I(t)\} = J(s)$ να βρείτε την αλγεβρική εξίσωση που ικανοποιεί η $J(s)$ και, αφού τη λύσετε, να βρείτε τον τύπο της συναρτήσεως $I(t)$.

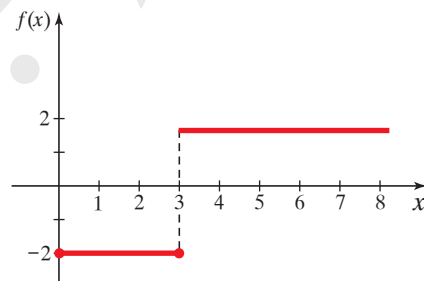
8.6.9. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών με χρήση της μετασχηματισμένης Laplace.

$\alpha) y'' + 2y' - 3y = \eta\mu 2x, y(0) = y'(0) = 0$

$\beta) y'' + y = \eta\mu x, y(0) = 0, y'(0) = 2$

$\gamma) y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2$

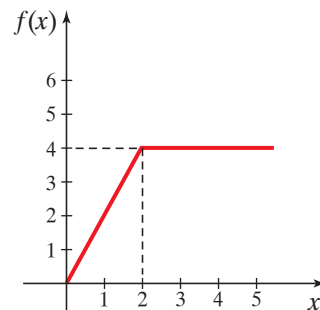
$\delta) \frac{d^2 y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} = 25y = 0, y(\pi) = 0, y'(\pi) = 6$



Σχ. 8.6α.

8.6.10. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace να λύσετε το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + 4y' + 4y = x^2$, $y(0) = y'(0) = 0$ (Υπόδειξη: Εργαστείτε με παρόμοιο τρόπο αναλύσεως σε απλά κλάσματα όπως στην άσκηση 8.6.7).

8.6.11. Χρησιμοποιώντας τους τύπους υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους, να βρείτε τη μετασχηματισμένη Laplace της συναρτήσεως f , της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα 8.6β.



Σχ. 8.6β.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

(ύλη πλοιάρχων)

Κεφάλαιο 9: Λογάριθμοι

Κεφάλαιο 10: Επίπεδη τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 11: Διανυσματικός λογισμός

Κεφάλαιο 12: Αναλυτική γεωμετρία

Κεφάλαιο 13: Σφαιρική τριγωνομετρία

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων, καθώς και στη χρήση τους για τον υπολογισμό γινομένων, πηλίκων, δυνάμεων και ριζών. Στη συνέχεια θα δοθεί ο τύπος αλλαγής βάσεως λογαρίθμων και ο αναγνώστης θα εξοικειωθεί με τη χρήση των λογαριθμικών πινάκων. Όπως είναι γνωστό, η καλή γνώση και ορθή χρήση των λογαρίθμων και των ιδιοτήτων τους είναι απαραίτητο εργαλείο κατά την εφαρμογή μαθηματικών πράξεων σε μεγάλο αριθμό εφαρμοσμένων κλάδων, μεταξύ των οποίων και η Ναυτιλία.

- 9.1 Εισαγωγή.
- 9.2 Χαρακτηριστικό λογαρίθμων.
- 9.3 Ιδιότητες των λογαρίθμων.
- 9.4 Χρήση λογαρίθμων για τον υπολογισμό αλγεβρικών παραστάσεων.
- 9.5 Εκθετικές εξισώσεις.
- 9.6 Λογαριθμικές εξισώσεις.
- 9.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 9.8 Γενικές ασκήσεις.

9.1 Εισαγωγή.

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε τον λογάριθμο ως την αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συναρτήσεως.

Συγκεκριμένα, όπως είδαμε, η εκθετική συνάρτηση με βάση το a , $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(x) = a^x$, όπου $a > 0$ (με $a \neq 1$), είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση. Επομένως, υπάρχει η αντίστροφη της, που είναι η **λογαριθμική συνάρτηση** (σχ. 9.1) με βάση το a , $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο $g(x) = \log_a x$.

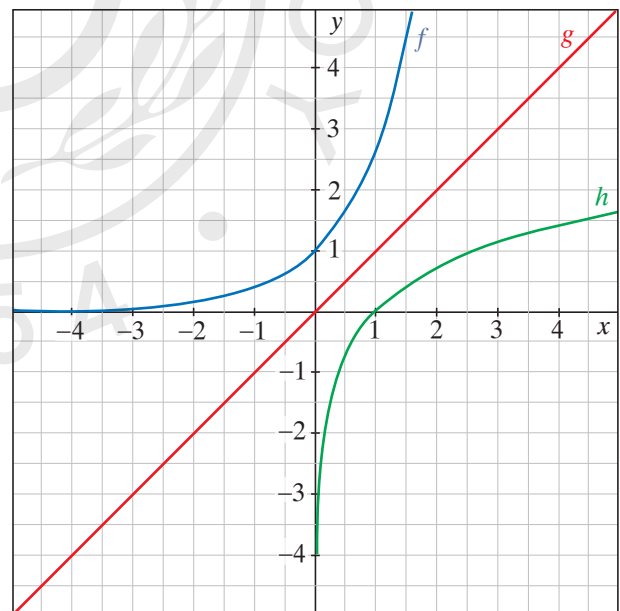
Η **λογαριθμική συνάρτηση** είναι γνησίως αύξουσα για $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα για $0 < a < 1$ και ισχύουν οι σχέσεις $f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$ και $g(f(x)) = \log_a a^x = x$.

Η λέξη «λογάριθμος» χρησιμοποιείται συχνά τόσο για να γίνει αναφορά σε μια λογαριθμική συνάρτηση, όσο και για συγκεκριμένες τιμές της συναρτήσεως αυτής. Ο λογάριθμος με βάση τον αριθμό του Euler, $e = 2,718281828459\dots$ ονομάζεται **φυσικός λογάριθμος** και συμβολίζεται με **lux**. Το αριθμητικό σύστημα στο οποίο χρησιμοποιούνται φυσικοί λογάριθμοι ονομάζεται **Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα** προς τιμή του John Napier¹. Το σύστημα αυτό, αν και σημαντικό στις θετικές επιστήμες, δεν χρησιμοποιείται από τους ναυτιλλόμενους. Αντίθετα, ο λογάριθμος με βάση $a = 10$, συμβολίζεται με **logx** και ονομάζεται **δεκαδικός** ή **κοινός λογάριθμος** του x , και είναι αυτός που χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στη ναυτιλία. Το αριθμητικό σύστημα, στο οποίο χρησιμοποιείται ως βάση των λογαρίθμων ο αριθμός 10, ονομάζεται **δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα**.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι εάν γνωρίζουμε τον κοινό (δεκαδικό) λογάριθμο και θέλουμε να τον μετατρέψουμε σε φυσικό (νεπέρειο), τότε **πολλαπλασιάζουμε τον δεκαδικό λογάριθμο με το 2,3026**. Πράγματι, εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\ln 1,20$, και γνωρίζουμε ότι $\log 1,20 = 0,0792$, τότε $\ln 1,20 = 0,0792 \cdot 2,3026 = 0,1824$ (και στις δύο περιπτώσεις έγινε στρογγυλοποίηση στα τέσσερα δεκαδικά ψηφία). Αντίστοιχα, αν είναι γνωστός ο φυσικός λογάριθμος, τότε, για να υπολογισθεί ο δεκαδικός λογάριθμος, **πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό $\frac{1}{2,3026} = 0,4343$** .

Στο κεφάλαιο αυτό δεν θα ασχοληθούμε με τον λογάριθμο ως συνάρτηση (όπως παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3), αλλά θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων προκειμένου να διευκολύνουμε μαθηματικές πράξεις σε πρακτικές εφαρμογές, αφού οι λογάριθμοι εκφράζουν μια διαφορετική χρήση των εκθετών των δυνάμεων. Με τη βοήθεια των λογαρίθμων η **πράξη του πολλαπλασιασμού ανάγεται σε πρόσθεση, η πράξη της διαίρεσης σε αφαίρεση, η ύψωση σε δύναμη σε πολλαπλασιασμό και οι ρίζες σε διαίρεση**. Επομένως, οι λογάριθμοι είναι χρήσιμοι στο να πραγματοποιηθούν δύσκολοι αριθμητικοί υπολογισμοί, γεγονός που τους έκανε ιδιαίτερα σημαντικούς σε τομείς όπως η ναυσιπλοΐα, η αστρονομία και η χαρτογραφία, ειδικά πριν την ανακάλυψη των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Από τον ορισμό της συναρτήσεως του λογαρίθμου προκύπτουν, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 3, οι ιδιότητες:



Σχ. 9.1.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$, $a > 1$ και της $h(x) = \log_a x$.

1. John Napier (1550-1617). Σκωτσέζος μαθηματικός που πρώτος επινόησε τους λογάριθμους.

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0, \log_a a^x = x, a^{\log_a x} = x,$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Στον πίνακα 9.1 δίνεται ένα παράδειγμα υπολογισμών, οι οποίοι αναδεικνύουν τη σχέση των δυνάμεων με τους λογαρίθμους.

Πίνακας 9.1
Σχέση εκθετικής και λογαριθμικής συναρτήσεως.

<i>Δυνάμεις του 2 από 0 μέχρι 12</i>	<i>Λογάριθμοί με βάση το 2</i>
$2^0 = 1$	$\log_2 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\log_2 2 = 1$
$2^2 = 4$	$\log_2 4 = 2$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$
$2^5 = 32$	$\log_2 32 = 5$
$2^6 = 64$	$\log_2 64 = 6$
$2^7 = 128$	$\log_2 128 = 7$
$2^8 = 256$	$\log_2 256 = 8$
$2^9 = 512$	$\log_2 512 = 9$
$2^{10} = 1024$	$\log_2 1024 = 10$
$2^{11} = 2048$	$\log_2 2048 = 11$
$2^{12} = 4096$	$\log_2 4096 = 12$

Με την χρήση του ορισμού μπορούμε να υπολογίσουμε λογάριθμους διαφόρων βάσεων, για παράδειγμα $\log_3 27 = 3$ γιατί $3^3 = 27$, $\log_2 16 = 4$ γιατί $2^4 = 16$, $\log_{10} 10000 = 4$ γιατί $10^4 = 10000$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.1.1

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς 64 και 128 χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στον Πίνακα 9.1. Πράγματι ισχύει:

$$64 \cdot 128 = 2^6 \cdot 2^7 = 2^{6+7} = 2^{13} = 8192.$$

Βλέπουμε δηλαδή πώς μετατρέπεται η πράξη του πολλαπλασιασμού δύο μεγάλων αριθμών σε άθροισμα εκθετών δυνάμεων του 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.1.2

Στο παράδειγμα αυτό, βλέπουμε πώς μπορούμε να κάνουμε την διαίρεση $64 : 32$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στον Πίνακα 9.1. Πράγματι ισχύει:

$$64 : 32 = 2^6 : 2^5 = 2^{6-5} = 2^1 = 2.$$

Βλέπουμε δηλαδή πώς μετατρέπεται η πράξη του πολλαπλασιασμού δύο μεγάλων αριθμών σε άθροισμα εκθετών δυνάμεων του 2.

Με βάση τον ορισμό των δεκαδικών λογαρίθμων αλλά και τη συνάρτηση $f(x) = \log x$ προκύπτουν τα εξής:

- α) Κάθε θετικός πραγματικός αριθμός έχει λογάριθμο (η συνάρτηση $f(x) = \log x$, ορίζεται για $x > 0$).
- β) Κάθε λογάριθμος είναι πραγματικός αριθμός θετικός, αρνητικός ή μηδέν (σύνολο τιμών της συναρτήσεως $f(x) = \log x$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών).
- γ) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι λογάριθμος ενός μόνο θετικού αριθμού (η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι ένα προς ένα) (σχ. 9.1).
- δ) Όσο αυξάνεται ένας αριθμός, αυξάνεται ο λογάριθμός του ($x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log x_1 < \log x_2$) και αντίστροφα.
- ε) Αν $x > 1$ τότε $\log x > 0$ και αν $0 < x < 1$, τότε $\log x < 0$.

9.2 Χαρακτηριστικό λογαρίθμων.

Οι περισσότεροι λογάριθμοι έχουν και ακέραιο και δεκαδικό μέρος. Επειδή κάθε ένα μέρος έχει έναν ειδικό ρόλο σε σχέση με τον αριθμό που ο λογάριθμος αντιπροσωπεύει, έχουν και διαφορετικό όνομα. Το ακέραιο μέρος ενός λογαρίθμου ονομάζεται **χαρακτηριστικό** (characteristic), ενώ το δεκαδικό μέρος ενός λογαρίθμου καλείται **μαντίσσα** (mantissa).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2.1

Αν ο $\log 78509 = 4,89492$, τότε ισχύει ότι η μαντίσσα είναι 0,89492 και το χαρακτηριστικό είναι 4.

Αν υπολογίσουμε τον λογάριθμο του 250, έχουμε $\log 250 = 2,39794$, αφού ισχύει ότι $10^{2,39794} = 250$. Ξέρομε ότι το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός 250 και όχι ο 25 ή ο 2.500, αφού έχει χαρακτηριστικό 2. Είναι γνωστό επίσης ότι $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, άρα ο αριθμός $10^{2,55630}$ θα βρίσκεται ανάμεσα στο 100 και το 1000 και θα έχει τρία ακέραια ψηφία. Αν αντίστοιχα ξέραμε ότι το χαρακτηριστικό ενός λογαρίθμου είναι 1, τότε ο ζητούμενος αριθμός είναι ανάμεσα στο 10 και στο 100, με δεδομένο ότι $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, και θα έχει δυο ακέραια ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2.2

Στα παρακάτω παραδείγματα φαίνεται πώς μεταβάλλεται η θέση της υποδιαστολής ανάλογα με το χαρακτηριστικό της:

$\log 25.000 = 4,39794$	$\log 25 = 1,39794$
$\log 2.500 = 3,39794$	$\log 2,5 = 0,39794$
$\log 250 = 2,39794$	

Όπως βλέπουμε στο παράδειγμα 9.2.2, όταν οι αριθμοί έχουν λόγο ίσο με δύναμη του 10, οι λογάριθμοί τους έχουν το ίδιο δεκαδικό μέρος, την ίδια μαντίσσα δηλαδή, αλλά διαφορετικό χαρακτηριστικό. Βλέπουμε, επομένως, μια άμεση σχέση ανάμεσα στο χαρακτηριστικό και τις δυνάμεις του 10. Το χαρακτηριστικό μπορεί να υπολογισθεί μηχανικά με τη χρήση των ακολούθων κανόνων:

α) Για έναν αριθμό μεγαλύτερο της μονάδας, το χαρακτηριστικό είναι θετικό και θα είναι ένα ψηφίο λιγότερο απ' ό,τι ο αριθμός των ψηφίων αριστερά της υποδιαστολής του αριθμού.

β) Για έναν θετικό αριθμό μικρότερο της μονάδας, το χαρακτηριστικό είναι αρνητικό και η απόλυτη τιμή του είναι ίση με το πλήθος των μηδενικών μεταξύ της υποδιαστολής και του πρώτου διαφορετικού από το μηδέν ψηφίου του, αυξημένο κατά ένα. Τα παραπάνω φαίνονται στον πίνακα 9.2.1

Πίνακας 9.2.1
Κανόνες υπολογισμού του χαρακτηριστικού ενός λογαρίθμου.

Αριθμός	Αριθμός ψηφίων αριστερά της υποδιαστολής	Χαρακτηριστικό
567	3	2
32,5	2	1
2,39	1	0
Αριθμός	Αριθμός μηδενικών μεταξύ της υποδιαστολής και του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου	Χαρακτηριστικό
0,275	0	-1
0,0197	1	-2
0,00294	2	-3

Άσκηση

- 9.2.1** α) Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό των λογαρίθμων για κάθε έναν από τους παρακάτω αριθμούς: α) 1.234, β) 3,12, γ) 0,02, δ) 21.
 β) Να τοποθετήσετε την υποδιαστολή σε κάθε αριθμό όπως υποδεικνύεται από το χαρακτηριστικό (c) για κάθε έναν από τους αριθμούς: α) 567, $c = 5$, β) 4.521, $c = 0$, γ) 4, $c = -1$, δ) 123, $c = -3$.

Λύση.

- α) Το χαρακτηριστικό αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση είναι: α) 3, β) 0, γ) -2, δ) 1.
 β) Ο αριθμός γίνεται ως εξής: α) 567.000, β) 4,521, γ) 0,4, δ) 0,00123.

Παρατηρούμε ότι όταν το χαρακτηριστικό είναι αρνητικό, δεν αντιστοιχεί ακριβώς στο ακέραιο μέρος του αριθμού, αλλά μπορεί να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε τον λογάριθμο του αριθμού, αρκεί να έχουμε βρει την μαντίσσα τού από τους κατάλληλους πίνακες. Έτσι, για παράδειγμα, αν ο αριθμός 0,456 έχει χαρακτηριστικό -1 και μαντίσσα 0,6590, τότε ο λογάριθμός του είναι $0,6590 - 1 = -0,3410$. Άρα $\log 0,456 = -0,3410$.

Όπως ήδη αναφέραμε, η μαντίσσα εκφράζει το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου. Οι πίνακες των λογαρίθμων συνήθως περιέχουν μόνο τη μαντίσσα, αφού, όπως είδαμε, το χαρακτηριστικό μπορούμε να το υπολογίσουμε με βάση τους κανόνες που προαναφέρθηκαν. Στον πίνακα 9.2.2 φαίνονται ο αριθμός, το χαρακτηριστικό, η μαντίσσα και ο λογάριθμος για τις διάφορες πιθανές θέσεις της υποδιαστολής, χρησιμοποιώντας τα ψηφία 6, 7, 8. Όπως φαίνεται, η μαντίσσα παραμένει ίδια, ανεξάρτητα από τη θέση της υποδιαστολής.

Πίνακας 9.2.2
Πρακτικός υπολογισμός λογαρίθμου.

Αριθμός	Χαρακτηριστικό	Μαντίσσα	Λογάριθμος
6.780	3	0,8312	3,8312
678	2	0,8312	2,8312
67,8	1	0,8312	1,8312
6,78	0	0,8312	0,8312
0,678	-1	0,8312	$0,8312 - 1 = -0,1688$
0,0678	-2	0,8312	$0,8312 - 2 = -1,1688$
0,00678	-3	0,8312	$0,8312 - 3 = -2,1688$

Στον πίνακα 9.2.3 παραθέτουμε τις τιμές των λογαρίθμων από το 0 έως το 100. Έτσι, βλέπουμε ότι ο λογάριθμος του 55 είναι $\log 55 = 1,74036$. Αν τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τον λογάριθμο του 550, αφού έχει χαρακτηριστικό 2, θα είναι $\log 550 = 2,74036$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε τον λογάριθμο οποιουδήποτε αριθμού χρησιμοποιώντας τους λογαριθμικούς πίνακες, χωρίς βέβαια μεγάλη ακρίβεια. Αντίθετα, η σημερινή τεχνολογία μάς δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τους λογαρίθμους όλων των αριθμών, χρησιμοποιώντας έναν επιστημονικό υπολογιστή τσέπης.

Πίνακας 9.2.3
Πίνακας τιμών της λογαριθμικής συναρτήσεως.

x	$\log(x)$	x	$\log(x)$	x	$\log(x)$	x	$\log(x)$
1	0,000000	26	1,414973	51	1,707570	76	1,880814
2	0,301030	27	1,431364	52	1,716003	77	1,886491
3	0,477121	28	1,447158	53	1,724276	78	1,892095
4	0,602060	29	1,462398	54	1,732394	79	1,897627
5	0,698970	30	1,477121	55	1,740363	80	1,903090
6	0,778151	31	1,491362	56	1,748188	81	1,908485
7	0,845098	32	1,505150	57	1,755875	82	1,913814
8	0,903090	33	1,518514	58	1,763428	83	1,919078
9	0,954243	34	1,531479	59	1,770852	84	1,924279
10	1,000000	35	1,544068	60	1,778151	85	1,929419
11	1,041393	36	1,556303	61	1,785330	86	1,934498
12	1,079181	37	1,568202	62	1,792392	87	1,939519
13	1,113943	38	1,579784	63	1,799341	88	1,944483
14	1,146128	39	1,591065	64	1,806180	89	1,949390
15	1,176091	40	1,602060	65	1,812913	90	1,954243
16	1,204120	41	1,612784	66	1,819544	91	1,959041
17	1,230449	42	1,623249	67	1,826075	92	1,963788
18	1,255273	43	1,633468	68	1,832509	93	1,968483
19	1,278754	44	1,643453	69	1,838849	94	1,973128
20	1,301030	45	1,653213	70	1,845098	95	1,977724
21	1,322219	46	1,662758	71	1,851258	96	1,982271
22	1,342423	47	1,672098	72	1,857332	97	1,986772
23	1,361728	48	1,681241	73	1,863323	98	1,991226
24	1,380211	49	1,690196	74	1,869232	99	1,995635
25	1,397940	50	1,698970	75	1,875061	100	2,000000

9.3 Ιδιότητες των λογαρίθμων.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στις ιδιότητες των δεκαδικών λογαρίθμων, χωρίς τις αποδείξεις τους, οι οποίες δεν ανήκουν στους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Στις ιδιότητες αυτές έχει γίνει αναφορά και στο Κεφάλαιο 3, αλλά παρουσιάζονται συνοπτικά και στο παρόν κεφάλαιο για λόγους πληρότητας, αφού, όπως είπαμε, χρησιμοποιούνται για μαθηματικούς υπολογισμούς. Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα ιδιοτήτων 9.3.

Πίνακας 9.3
Ιδιότητες λογαρίθμων.

A/A	<i>Ιδιότητα</i>	A/A	<i>Ιδιότητα</i>
1	$\log(xy) = \log x + \log y$	4	$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
2	$\log a^x = x \log a$	5	$\log\left(\frac{1}{y}\right) = -\log y$
3	$\log \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k} \log x$	6	$\log_{\beta} x = \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta}$

Επί πλέον, ισχύει ότι εάν $\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$ λόγω της μονοτονίας της συναρτήσεως.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα είναι η ιδιότητα (6), η οποία καλείται και **τύπος αλλαγής βάσεως**, αφού χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το λογάριθμο ενός αριθμού με βάση β , όταν γνωρίζουμε το λογάριθμο με βάση α . Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι για κάθε

$$x \in \mathbf{R}_+, \alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \neq 1 \text{ ισχύει } \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \alpha = 1 \text{ και } \log_{\beta} x = \log_{\beta} \alpha \cdot \log_{\alpha} x.$$

Ο αριθμός $\log_{\beta} \alpha$ αποκαλείται σταθερά της αλλαγής βάσεως ή πολλαπλασιαστής του συστήματος βάσεως α ως προς το σύστημα βάσεως β , καθώς με τη βοήθειά του μπορούμε να βρούμε τους λογαρίθμους αριθμών σε μια άλλη βάση.

9.4 Χρήση λογαρίθμων για τον υπολογισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Συνήθως, για να υπολογίσουμε μια παράσταση η οποία περιέχει γινόμενα και πηλίκα, τα οποία αποτελούνται από δυνάμεις ή ρίζες αριθμών, λογαριθμούμε και τα δύο μέρη της εξισώσεως και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες δυνάμεων υπολογίζουμε το ζητούμενο.

Άσκηση

9.4.1 Να υπολογίσετε την τιμή της παραστάσεως: $A = \frac{\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[6]{5}}$.

Λύση.

Για να υπολογίσουμε την παράσταση, λογαριθμούμε τα δύο μέρη της εξισώσεως και στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων. Πράγματι,

$$A = \frac{\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[6]{5}}, \text{ αν τότε } \log A = \log \frac{\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[6]{5}},$$

$$\log A = \log \sqrt[3]{7} - \log 2\sqrt[6]{5} \Leftrightarrow \log A = \log \sqrt[3]{7} - \log 2 - \log \sqrt[6]{5}$$

$$\log A = \log 7^{\frac{1}{3}} - \log 2 - \log 5^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow \log A = \frac{1}{3} \log 7 - \log 2 - \frac{1}{6} \log 5.$$

Από τους λογαριθμικούς πίνακες υπολογίζουμε τους λογαρίθμους. Έτσι, έχουμε $\log 7 = 0,8451$, $\log 2 = 0,3010$ και $\log 5 = 0,69897$. Άρα $\log A = -0,136$, αλλά $\log 0,731 = -0,136$. Άρα $\log A = \log 0,731$, οπότε $A = 0,731$.

9.5 Εκθετικές εξισώσεις.

Εκθετική εξίσωση αποκαλείται κάθε εξίσωση όπου σ' ένα τουλάχιστον από τα μέλη της εμφανίζεται ο άγνωστος x ή κάποια συνάρτηση του αγνώστου σε εκθέτη δυνάμεως με βάση θετικό αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.1

Παραδείγματα εκθετικών εξισώσεων είναι τα εξής: $2^x = 32$, $4^{x^2+2x-6} = 16$, $(5x+1)^{3x} = 1$.

Ακολουθούν οι πιο συνηθισμένες μορφές εκθετικών εξισώσεων και οι περιπτώσεις επιλύσεώς τους.

$$a^x = \beta, \text{ για κάθε } a \in \mathbf{R}_+^*, a \neq 1.$$

1^η περίπτωση: Αν ο β μπορεί να γραφεί ως μια δύναμη του a . Θέτομε $\beta = a^k$, άρα έχουμε $a^x = a^k$, οπότε $x = k$.

2^η περίπτωση: Αν ο β δεν μπορεί να γραφεί, κατά προφανή τρόπο, σαν δύναμη του a . Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη της εξισώσεως και έχουμε $\log a^x = \log \beta$ απ' όπου λαμβάνουμε $x \log a = \log \beta$ και τελικά

$$x = \frac{\log \beta}{\log a}.$$

$$a^{f(x)} = \beta, \text{ για κάθε } a \in \mathbf{R}_+^*, a \neq 1, \text{ ενώ η } f(x) \text{ είναι πραγματική συνάρτηση του } x.$$

1^η περίπτωση: Αν ο β μπορεί να γραφεί ως μια δύναμη του a . Θέτομε $\beta = a^k$, άρα έχουμε $a^{f(x)} = a^k$, οπότε $f(x) = k$.

2^η περίπτωση: Αν ο β δεν μπορεί να γραφεί, κατά προφανή τρόπο, ως δύναμη του a . Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη της εξισώσεως και λύνουμε την εξίσωση.

Άρα $a^{f(x)} = \beta$, οπότε $\log a^{f(x)} = \log \beta$, και $f(x) \cdot \log a = \log \beta$, δηλαδή

$$f(x) = \frac{\log \beta}{\log a}.$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \text{ για κάθε } a \in \mathbf{R}_+^*, a \neq 1, \text{ ενώ οι } f(x) \text{ και } g(x) \text{ είναι πραγματικές συναρτήσεις του } x.$$

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

$$a^{f(x)} = \beta^{g(x)}, \text{ για κάθε } a, \beta \in \mathbf{R}_+^*, a \neq 1, \text{ ενώ οι } f(x) \text{ και } g(x) \text{ είναι πραγματικές συναρτήσεις του } x.$$

1^η περίπτωση: Αν ο β μπορεί να γραφεί ως μια δύναμη του a . Τότε έχουμε εκθετική εξίσωση της προηγούμενης μορφής.

2^η περίπτωση: Αν ο β δεν μπορεί να γραφεί ως μια δύναμη του a . Τότε, παίρνουμε τους λογαρίθμους ως προς a και των δύο μελών της εξισώσεως και έχουμε:

$$\log_a a^{f(x)} = \log_a \beta^{g(x)}, \quad f(x) \cdot \log_a a = g(x) \cdot \log_a \beta, \quad f(x) = g(x) \cdot \log_a \beta$$

$$f(a^x) = g(a^x), \text{ για κάθε } a, \beta \in \mathbf{R}_+^*, a \neq 1, \text{ ενώ οι } f(x) \text{ και } g(x) \text{ είναι πραγματικές συναρτήσεις του } x.$$

Θέτουμε όπου $a^x = y$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς y για να δούμε ποιες τιμές του y θα κάνουμε αποδεκτές, καθότι $y = a^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

$f(a^x) = g(\beta^x)$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+^*$, $a \neq 1$, $\beta \neq 1$, ενώ οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις του x .

Θέτουμε όπου $\left(\frac{a}{\beta}\right)^x = y$, λύνουμε την εξίσωση ως προς y και κάνουμε διερεύνηση για να δούμε ποιες τιμές του y θα κάνουμε αποδεκτές, καθότι $a^x > 0$ και $\beta^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

$$A \cdot a^x = B \cdot \beta^x, \text{ για κάθε } a, \beta \in \mathbf{R}_+^*, a \neq 1, \beta \neq 1, \text{ και } a \cdot \beta = 1.$$

Θέτουμε όπου $a^x = y$ και όπου $\beta^x = \frac{1}{y}$, λύνουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς y και κάνουμε διερεύνηση για να δούμε ποιες τιμές του y θα κάνουμε αποδεκτές, καθότι $a^x > 0$ και $\beta^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

$$f(x)^{g(x)} = 1, \text{ όπου οι } f(x) \text{ και } g(x) \text{ είναι πραγματικές συναρτήσεις του } x \text{ και } f(x) > 0.$$

Βρίσκουμε τις λύσεις των εξισώσεων:

α) $f(x) = 1$,

β) $g(x) = 0$ και $f(x) > 0$,

γ) $f(x) = -1$ και $g(x)$ άρτιος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.2

Να επιλύσετε την εξίσωση: $3^x = 6521$. Βρίσκουμε ότι $3^8 = 6521$.

Λύση

$$\text{Άρα } 3^x = 3^8 \Leftrightarrow x = 8.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.3

Να επιλύσετε την εξίσωση: $2,27^x = 5,42$.

Λύση

$$\log 2,27^x = \log 5,42 \Leftrightarrow x \cdot \log 2,27 = \log 5,42 \Leftrightarrow x = \frac{\log 5,42}{\log 2,27} \Leftrightarrow x = \frac{0,734}{0,356} \Leftrightarrow x = 2,062.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.4

Να επιλύσετε την εξίσωση: $5^{x^2-7x+12} = 1$.

Λύση

$$5^{x^2-7x+12} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 4.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.5

Να επιλύσετε την εξίσωση: $2^{x^2+8x} = 2^{2x}$.

Λύση

$$x^2 + 8x = 2x \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -6.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.6

Να επιλύσετε την: $3^{x^2+x} = 9^{1+x}$ $3^{x^2+x} = (3^2)^{1+x}$.

Λύση

$$3^{x^2+x} = 3^{2+2x} \Leftrightarrow x^2 + x = 2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.7

Να επιλύσετε την εξίσωση: $2^{2x+2} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$.

Λύση

$2^x \cdot 2^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$. Θέτομε $2^x = y$, οπότε η εξίσωση γίνεται: $4y^2 - 9y + 2 = 0$. Είναι $\Delta = 49$ άρα

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{8} \Leftrightarrow y_1 = 2 > 0 \text{ ή } y_2 = \frac{1}{4} > 0.$$

$$\text{Οπότε } 2^x = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } 2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.8

Να επιλύσετε την εξίσωση: $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$.

Λύση

$$2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-1} \cdot 3^{-1} = 5^{x-1} \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{x-1} \cdot 5^{-2}.$$

$$3^{x-1} \left(2 - \frac{1}{3} \right) = 5^{x-1} \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{25} \right) \Leftrightarrow 3^{x-1} \frac{5}{3} = 5^{x-1} \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{3^{x-1}}{5^{x-1}} = \frac{27}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5} \right)^{x-1} = \left(\frac{3}{5} \right)^3.$$

$$\text{Θέτω } y = \frac{3}{5} > 0, \text{ οπότε η εξίσωση γίνεται: } y^{x-1} = y^3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$$

9.6 Λογαριθμικές εξισώσεις.

Λογαριθμική εξίσωση αποκαλείται κάθε εξίσωση όπου σ' ένα τουλάχιστον από τα μέλη της υπάρχει ο λογάριθμος του x ή ο λογάριθμος συναρτήσεων του x .

Για να λύσουμε μια λογαριθμική εξίσωση, προσπαθούμε να καταλήξουμε σε εξισώσεις που να περιέχουν λογαρίθμους και στα δύο μέλη τους ή έναν λογάριθμο κι έναν αριθμό, ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε απαλοιφή των λογαρίθμων και να ασχοληθούμε με γνωστές εξισώσεις.

Συνήθως, η επίλυση μιας λογαριθμικής εξισώσεως καταλήγει στην επίλυση εξισώσεων με μια από τις ακόλουθες μορφές:

α) $\log x = a$ τότε $x = 10^a$,

β) $\log x = \log a$ τότε $x = a$ και $a > 0$,

γ) $\log f(x) = \log a$ τότε $f(x) = a$ και $a > 0$,

δ) $\log f(x) = \log g(x)$ τότε $f(x) = g(x)$ και $g(x) > 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.6.1

Να υπολογίσετε το x : α) $\log x = -4$ και β) $\log(x+3) = -\log 2$.

Λύση.

α) Επειδή $\log_{\alpha} \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$, έχουμε: $\log x = -4 \Leftrightarrow x = 10^{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10000} \Leftrightarrow x = 0,0001$.

β) $\log(x+3) = -\log 2$. Πρέπει $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

Έχουμε: $\log(x+3) = -\log 2 \Leftrightarrow \log(x+3) = \log 2^{-1} \Leftrightarrow x+3 = 2^{-1} \Leftrightarrow x+3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} > -3$, άρα είναι δεκτή.

9.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Χαρακτηριστικά εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων.

Χαρακτηριστικό	Εκθετική $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$	Λογαριθμική $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
Τύπος Συναρτήσεως	$f(x) = \alpha^x$	$f(x) = \log_{\alpha} x$
Πεδίο Ορισμού	$-\infty < x < +\infty$	$0 < x < +\infty$
Σύνολο Τιμών	$0 < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Μονοτονία, $\alpha \in (0,1)$	γνησίως φθίνουσα	γνησίως φθίνουσα
Μονοτονία, $\alpha \in (1,+\infty)$	γνησίως αύξουσα	γνησίως αύξουσα
Ιδιότητες	$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y},$	$\log(xy) = \log x + \log y,$
	$\frac{\alpha^x}{\alpha^y} = \alpha^{x-y},$	$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y,$
	$(\alpha^x)^y = \alpha^{x \cdot y},$	$\log \alpha^x = x \log \alpha,$
	$\alpha^x \cdot \beta^x = (\alpha \cdot \beta)^x$	$\alpha^{\log_{\alpha} x} = x,$
	$\frac{\alpha^x}{\beta^x} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$	$\log_{\alpha} \alpha x = x.$

Κυριότερες ιδιότητες λογαρίθμου.

A/A	Ιδιότητα	A/A	Ιδιότητα
1	$\log(xy) = \log x + \log y,$	4	$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
2	$\log \alpha^x = x \log \alpha$	5	$\log\left(\frac{1}{y}\right) = -\log y$
3	$\log \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k} \log x$	6	$\log_{\beta} x = \frac{\log_{\alpha} x}{\log_{\alpha} \beta}$

Πράξεις Μεταξύ των Εκθετικών και Λογαριθμικών Συναρτήσεων.

$y = a^x \Rightarrow y = a^0 = 1$	$a^x = e^{x \ln a}$
$y = a^{-x} \Rightarrow y = \frac{1}{a^x}$	$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$
$y = e^x \Rightarrow y = e^0 = 1$	$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y = e^{y \ln a}$
$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$	$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$
	$\log_a x = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Κυριότεροι Τύποι Εκθετικών Εξισώσεων.

A/A	Τύποι Εκθετικών Εξισώσεων
1	$a^x = \beta$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+$, $a \neq 1$.
2	$a^{f(x)} = \beta$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+$, $a \neq 1$, ενώ η $f(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση του x .
3	$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+$, $a \neq 1$, ενώ οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις του x .
4	$a^{f(x)} = \beta^{g(x)}$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+$, $a \neq 1$, ενώ οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις του x .
5	$f(a^x) = g(a^x)$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+$, $a \neq 1$, ενώ οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις του x .
6	$f(a^x) = g(\beta^x)$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+$, $a \neq 1$, $\beta \neq 1$, ενώ οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις του x .
7	$A \cdot a^x = B \cdot \beta^x$, για κάθε $a, \beta \in \mathbf{R}_+$, $a \neq 1$, $\beta \neq 1$ και $a \cdot \beta = 1$.
8	$f(x)^{g(x)} = 1$, όπου οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις του x και $f(x) > 0$.

9.8 Γενικές ασκήσεις.**9.8.1.** Να επιλύσετε τις παρακάτω εκθετικές εξισώσεις:

$$\alpha) 5^x = 625, \quad \beta) 2^x = \frac{11}{13}, \quad \gamma) 2^{2x+11} = 8^x, \quad \delta) 3^{x^2-4} = 5^{2x}, \quad \epsilon) 5^{x+1} + 8 \cdot 5^x = 325.$$

9.8.2. Να επιλύσετε τις ακόλουθες εκθετικές εξισώσεις:

$$\alpha) 4^{x^2+2x-6} = 16, \quad \beta) 3^{2x-6} = 1, \quad \gamma) 6^{3x+4} = 100, \quad \delta) 8 \cdot 2^{x-9} = 2^{-x}.$$

9.8.3. Να επιλύσετε τις ακόλουθες εκθετικές εξισώσεις:

$$\alpha) 4^{x+1} + 3 \cdot 2^x = 1, \quad \beta) 9^x + 3 \cdot 3^{2x} = 8 \cdot 4^x + 2^{2x}, \quad \gamma) 2 \cdot 9^x + 3 \cdot 12^x - 2 \cdot 4^{2x} = 0, \quad \delta) 2^x - 5 \cdot 2^{-x} = 4.$$

9.8.4. Να επιλύσετε την εκθετική εξίσωση $(x^2 + x + 1)^{x^2-6x} = 1$.**9.8.5.** Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+4} + 4^{x+3}, \quad \beta) 2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12, \quad \gamma) 9^{x+1} \cdot 3^{x+2} = 81 \cdot (27^x + 9 \cdot 3^{-x} - 1).$$

9.8.6. Να επιλύσετε τη λογαριθμική εξίσωση: $\log(8x + 2) = \log 3 + \log(x^2 - 3)$.**9.8.7.** Να επιλύσετε τη λογαριθμική εξίσωση: $\frac{1}{2} \log x + \log \sqrt{x+10} = 2 + \log \sqrt{x}$.**9.8.8.** Να επιλύσετε τη λογαριθμική εξίσωση: $\log(4x) = \log 33 + \log(x^2 - 5)$.

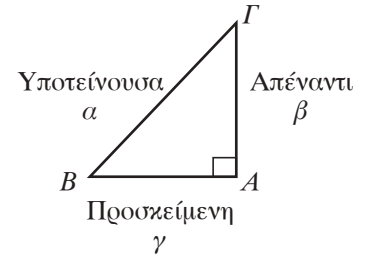
ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπενθυμίσουμε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα της Επίπεδης Τριγωνομετρίας, η οποία αποτελεί ένα σημαντικό υπολογιστικό εργαλείο στα χέρια κάθε μαθηματικού, με σημαντική χρήση στη Ναυτιλία.

- 10.1** Τριγωνομετρικοί αριθμοί.
- 10.2** Τριγωνομετρικοί αριθμοί – Τριγωνομετρικές σχέσεις.
- 10.3** Επίλυση επιπέδων τριγώνων.
- 10.4** Εφαρμογές τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία.
- 10.5** Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 10.6** Γενικές ασκήσεις.

10.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Στην επίπεδη γεωμετρία σε ένα τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$ συμβολίζουμε με α την πλευρά $B\hat{G}$, με β την πλευρά $A\hat{G}$ και με γ την πλευρά $B\hat{A}$, ενώ με $\hat{A}, \hat{B}, \hat{G}$, τις γωνίες του. Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, η ορθή γωνία είναι (συνήθως) η $\hat{A}$, η πλευρά $B\hat{G} = \alpha$, που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\hat{A}$, ονομάζεται υποτείνουσα, ενώ η $A\hat{G} = \beta$ είναι η απέναντι πλευρά στη γωνία $\hat{B}$ και η $B\hat{A} = \gamma$ η προσκείμενη πλευρά στη γωνία $\hat{B}$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της οξείας γωνίας $\hat{B}$ (σχ. 10.1α) ορίζονται ως εξής:



Σχ. 10.1α.

Ημίτονο:	$\eta\mu\hat{B} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}}$
Συνημίτονο:	$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}}$
Εφαπτομένη:	$\epsilon\varphi\hat{B} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}$
Συνεφαπτομένη:	$\sigma\varphi\hat{B} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}$
Τέμνουσα:	$\tau\epsilon\mu\hat{B} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\text{μήκος υποτείνουσας}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}$
Συντέμνουσα:	$\sigma\tau\epsilon\mu\hat{B} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{μήκος υποτείνουσας}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}$

Παρατήρηση: Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε στη γωνία $\hat{A}$, θα γράφομε γωνία A (παραλείπεται το σύμβολο της γωνίας) και όταν αναφερόμαστε στο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$, θα γράφομε τρίγωνο ABG (παραλείπεται το σύμβολο του τριγώνου).

Από τους παραπάνω ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας B παρατηρούμε ότι η συντέμνουσα είναι αντίστροφη του ημιτόνου, η τέμνουσα είναι αντίστροφη του συνημιτόνου και η συνεφαπτομένη είναι αντίστροφη της εφαπτομένης. Δηλαδή ισχύουν τα εξής:

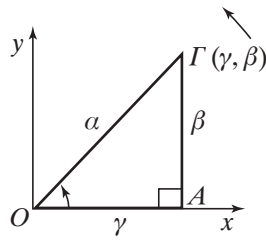
Για κάθε γωνία B σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABG ισχύει:

$$\sigma\tau\epsilon\mu B = \frac{1}{\eta\mu B}, \quad \tau\epsilon\mu B = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu B}, \quad \sigma\varphi B = \frac{1}{\epsilon\varphi B}.$$

Το άμεσο συμπέρασμα της παραπάνω παρατηρήσεως είναι ότι στη συνέχεια θα υπολογίζουμε μόνο τα ημίτονα, συνημίτονα και εφαπτομένες, αφού ο υπολογισμός των υπολοίπων είναι προφανής.

Αντίστοιχα ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, αν τοποθετήσουμε το τρίγωνο ABG πάνω σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων με κατάλληλο τρόπο (σχ. 10.1β), ώστε η γωνία B να είναι η γωνία που διαγράφει ο ημιάξονας Ox κατά τη θετική φορά μέχρι να συναντήσει το σημείο G με συντεταγμένες (γ, β) και μήκος $OG = \alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, όπως προκύπτει από το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**, δηλαδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Πίνακας 10.1



Σχ. 10.1β.

Ελληνικός συμβολισμός	Αγγλικός συμβολισμός
ημ	$\sin$
συν	$\cos$
εφ	$\tan$
σφ	$\cot$
τεμ	$\sec$
στεμ	$\csc$

Ο αγγλικός συμβολισμός για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς φαίνεται στον πίνακα 10.1.

Παρατήρηση: Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μένουν σταθεροί όταν τα τρίγωνα είναι όμοια. Τα τρίγωνα θεωρούνται όμοια, εάν οι αντίστοιχες γωνίες τους έχουν το ίδιο μέτρο. Σε όμοια τρίγωνα, τα μήκη των αντιστοίχων πλευρών είναι ανάλογα.

Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες όταν έχουν άθροισμα 90° (ή $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια).

Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.1α, στο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι γωνίες B και Γ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή ισχύει ότι $\Gamma = 90^\circ - B$ και για τις γωνίες αυτές ισχύουν, με βάση τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, τα εξής:

Για κάθε γωνία B σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \eta\mu B &= \frac{\beta}{a} = \sigma\eta\nu\Gamma = \sigma\eta\nu(90^\circ - B), & \sigma\eta\nu B &= \frac{\gamma}{a} = \eta\mu\Gamma = \eta\mu(90^\circ - B) \\ \epsilon\varphi B &= \frac{\beta}{\gamma} = \sigma\varphi\Gamma = \sigma\varphi(90^\circ - B), & \sigma\varphi B &= \frac{\gamma}{\beta} = \epsilon\varphi\Gamma = \epsilon\varphi(90^\circ - B) \\ \tau\epsilon\mu B &= \frac{a}{\gamma} = \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = \sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ - B), & \sigma\tau\epsilon\mu B &= \frac{a}{\beta} = \tau\epsilon\mu\Gamma = \tau\epsilon\mu(90^\circ - B). \end{aligned}$$

Άσκηση.

10.1.1 Αν για μια γωνία 25° ξέρομε ότι $\eta\mu 25^\circ = 0,4226$, $\sigma\eta\nu 25^\circ = 0,9063$ και $\epsilon\varphi 25^\circ = 0,4666$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 65° .

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τους αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς των: ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτόμενη, έχουμε:

$$\sigma\tau\epsilon\mu 25^\circ = \frac{1}{\eta\mu 25^\circ} = \frac{1}{0,4226} \approx 2,3663, \quad \tau\epsilon\mu 25^\circ = \frac{1}{\sigma\eta\nu 25^\circ} = \frac{1}{0,9063} \approx 1,1034,$$

$$\sigma\varphi 25^\circ = \frac{1}{\epsilon\varphi 25^\circ} = \frac{1}{0,4666} \approx 2,1430.$$

Επειδή οι γωνίες 25° και 65° είναι συμπληρωματικές ($25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$), ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\eta\mu 65^\circ &= \sigma\upsilon\nu 25^\circ \simeq 0,9063, & \sigma\upsilon\nu 65^\circ &= \eta\mu 25^\circ \simeq 0,4226, \\ \epsilon\varphi 65^\circ &= \sigma\varphi 25^\circ \simeq 2,1430, & \sigma\varphi 65^\circ &= \epsilon\varphi 25^\circ \simeq 0,4666, \\ \tau\epsilon\mu 65^\circ &= \sigma\tau\epsilon\mu 25^\circ \simeq 2,3663, & \sigma\tau\epsilon\mu 75^\circ &= \tau\epsilon\mu 25^\circ \simeq 1,1034.\end{aligned}$$

10.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί – Τριγωνομετρικές σχέσεις.

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στον ορισμό της γωνίας, θα υπολογίσουμε τους βασικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς και θα αναφέρουμε τις βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις και ταυτότητες.

10.2.1 Μονάδες μετρήσεως γωνιών.

Ιστορικά, το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε μοίρες, πρώτα και δεύτερα λεπτά. Το ένα πρώτο λεπτό, που συμβολίζεται $1'$, είναι τέτοιο ώστε $60' = 1^\circ$, ή $1' = \frac{1}{60} \cdot (1^\circ)$. Το ένα δεύτερο λεπτό, που συμβολίζεται $1''$, είναι τέτοιο ώστε $60'' = 1'$, ή $1'' = \frac{1}{60} \cdot (1')$. Κατά συνέπεια, αν μια γωνία είναι 17 μοίρες, 2 πρώτα λεπτά και 14 δεύτερα, μπορεί να γραφεί και με τη μορφή $17^\circ 2' 14''$. Η μορφή αυτή ήταν ευρέως διαδεδομένη πριν από τη χρήση των επιστημονικών αριθμομηχανών, αλλά χρησιμοποιείται ευρέως και σήμερα στη ναυσιπλοΐα. Οι περισσότερες αριθμομηχανές μπορούν να μετατρέψουν τις μονάδες μετρήσεως μιας γωνίας από τη μια μορφή στην άλλη.

Μια άλλη μονάδα μετρήσεως των γωνιών είναι το ακτίνιο (rad). Το ένα ακτίνιο ορίζεται ως εκείνη η επίκεντρη γωνία που βαίνει σε ένα τόξο κύκλου μήκους ίσου με την ακτίνα του.

Οι σχέσεις που συνδέουν ακτίνια και μοίρες είναι:

$$1 \text{ ακτίνιο} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 2\pi \text{ ακτίνια} = 360^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ακτίνια}.$$

Ασκήσεις

10.2.1 Να μετατρέψετε τη γωνία $8^\circ 12' 15''$ σε δεκαδική μορφή.

Λύση.

Για να κάνουμε τη μετατροπή αυτή, ακολουθούμε τα εξής:

$$\begin{aligned}8^\circ 12' 15'' &= 8^\circ + 12' + 15'' = 8^\circ + 12' + \frac{15'}{60} = 8^\circ + 12' + 0,25' = 8^\circ + 12,25' = \\ &= 8^\circ + \frac{12,25^\circ}{60} \simeq 8^\circ + 0,204 \simeq 8,204^\circ.\end{aligned}$$

10.2.2 Να μετατρέψετε τη γωνία $42,14^\circ$ σε μοίρες, πρώτα και δεύτερα λεπτά.

Λύση.

Για να κάνουμε τη μετατροπή αυτή, ακολουθούμε τα εξής:

$$\begin{aligned}42,14^\circ &= 42^\circ + 0,14 \cdot 1^\circ \\ &= 42^\circ + 0,14 \cdot 60' = 42^\circ + 8' + 0,4' \\ &= 42^\circ + 8' + 0,4 \cdot 1' = 42^\circ + 8' + 0,4 \cdot 60'' \\ &= 42^\circ + 8' + 24'' = 42^\circ 8' 24''.\end{aligned}$$

Οι παραπάνω μετατροπές μπορούν να γίνουν χρησιμοποιώντας μια επιστημονική αριθμομηχανή, όπως αυτή των Windows (σχ. 10.2α). Αφού πληκτρολογήσουμε τον αριθμό σε δεκαδική μορφή και πιέσουμε το πλήκτρο dms, μετατρέπεται ο εμφανιζόμενος αριθμός σε μοίρες-πρώτα-δεύτερα. Για να μετατραπεί ένας αριθμός σε δεκαδική μορφή μοιρών, όταν αυτός έχει τη μορφή μοίρες-πρώτα-δεύτερα, χρησιμοποιούμε το συνδυασμό πλήκτρων Inv + dms.



Σχ. 10.2α.

10.2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30° , 45° και 60° .

Έστω ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο (σχ. 10.2β.) με κάθετες πλευρές μήκους 1 και οξείες γωνίες ίσες με 45° . Από το πυθαγόρειο θεώρημα μπορούμε να βρούμε την υποτείνουσα α του ορθογώνιου τριγώνου ως εξής:

$$\alpha^2 = 1^2 + 1^2, \quad \alpha^2 = 2, \quad \alpha = \sqrt{2}.$$

Άρα:

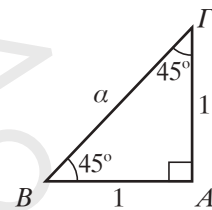
$$\eta\mu 45^\circ = \frac{AG}{BG} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

$$\tau\epsilon\mu 45^\circ = \frac{BG}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu 45^\circ = \frac{BG}{AG} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\epsilon\varphi 45^\circ = \frac{AG}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$



Σχ. 10.2β.

Έστω ένα ισοπλευρο τρίγωνο πλευράς 2 (σχ. 10.2γ). Η διάμεσος AD χωρίζει την πλευρά BG σε δύο ίσα τμήματα, μήκους 1. Επίσης, επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, η πλευρά AD είναι και ύψος και διχοτόμος. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ADG έχουμε ότι:

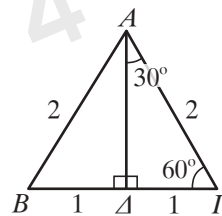
$$AD^2 + DG^2 = AG^2,$$

$$AD^2 + 1^2 = 2^2$$

$$AD^2 + 1 = 4$$

$$AD^2 = 3$$

$$AD = \sqrt{3}$$



Σχ. 10.2γ.

Αφού βρήκαμε την πλευρά AD μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° και 60° ως εξής:

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{AD}{AG} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{AD}{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660,$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660,$$

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774,$$

$$\tau\epsilon\mu 30^\circ = \frac{A\Gamma}{\Delta\Delta} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,1547,$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu 30^\circ = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{1} \approx 1,7321,$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu 60^\circ = \frac{A\Gamma}{\Delta\Delta} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,$$

$$\tau\epsilon\mu 60^\circ = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{2}{1} = 2$$

Στον πίνακα 10.2 βλέπουμε συγκεντρωμένους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° , των 45° και των 60° .

Πίνακας 10.2.

	30°	45°	60°		30°	45°	60°
$\eta\mu$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sigma\varphi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sigma\upsilon\upsilon$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\tau\epsilon\mu$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\varepsilon\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sigma\tau\epsilon\mu$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ασκήσεις

10.2.3 Ένα αερόστατο βρίσκεται σε απόσταση 300 m από έναν επίγειο παρατηρητή (σχ. 10.2δ). Αφού το αερόστατο ανυψώθηκε για ένα χρονικό διάστημα, ο παρατηρητής υπολόγισε τη γωνία μεταξύ του εδάφους και της νοητής γραμμής θεάσεως του αερόστατου να είναι, κατά προσέγγιση, 30° . Να βρείτε πόσο ψηλά βρίσκεται το αερόστατο σε εκείνο το σημείο. (Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα αέρα είναι χαμηλή και ότι το μπαλόνι ανυψώθηκε κάθετα για τα πρώτα λεπτά.)

Λύση.

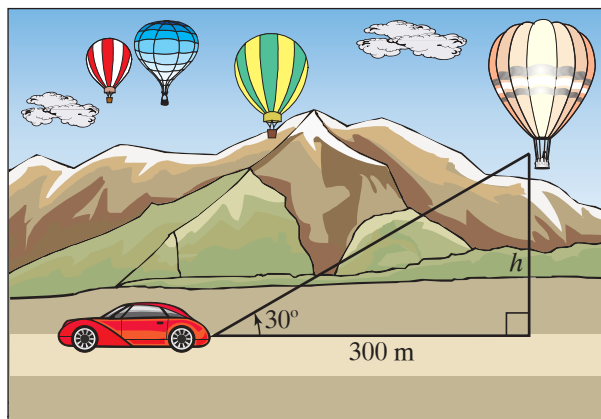
Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω τρίγωνο γνωρίζουμε μια οξεία γωνία και το μέτρο της προσκείμενης σε αυτήν πλευράς και θέλουμε να βρούμε το μήκος της απέναντι πλευράς της γωνίας. Για να υπολογίσουμε την πλευρά αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη ή τη συνεφαπτομένη της γωνίας 30° . Χρησιμοποιώντας την εφαπτομένη της γωνίας 30° έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{h}{300} \Leftrightarrow h = 300 \cdot \varepsilon\varphi 30^\circ,$$

$$h = 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow h \approx 173,21.$$

Άρα, το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 173,21 m.

10.2.4 Ένα δέντρο έχει ύψος 100 ft, ενώ η σκιά του έχει μήκος 120 ft. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας ανυψώσεως του ήλιου (σχ. 10.2ε).



Σχ. 10.2δ.

Λύση.

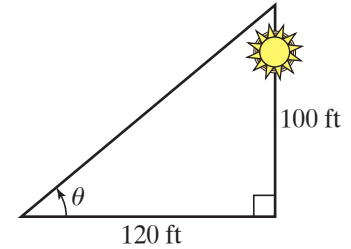
Στο τρίγωνο αυτό γνωρίζουμε το ύψος του δέντρου (100 ft, απέναντι πλευρά), το μήκος της σκιάς του (120 ft, προσκείμενη πλευρά) και θέλουμε να βρούμε ποια είναι η οξεία γωνία θ . Για να υπολογίσουμε την άγνωστη πλευρά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνεφαπτομένη είτε την εφαπτομένη της γωνίας θ . Εργαζόμενοι με τη συνεφαπτόμενη έχουμε:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{120}{100} = 1,2.$$

Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες (ή μια αριθμομηχανή) βρίσκουμε ότι η οξεία γωνία με συνεφαπτομένη 1,2 είναι:

$$\theta \simeq 39,794297943^\circ.$$

Άρα, η γωνία ανυψώσεως του ήλιου είναι περίπου 40° .



Σχ. 10.2ε.

10.2.3 Τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Μια ταυτότητα είναι μια εξίσωση που ισχύει για όλες τις πιθανές τιμές των μεταβλητών. Στη συνέχεια ακολουθούν, χωρισμένες σε ομάδες, οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που προκύπτουν από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, αλλά και σχέσεις που η ισχύς τους θεωρείται δεδομένη και δεν χρειάζεται να αποδειχθούν.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

$$\begin{aligned} \eta\mu^2 x + \sigma\nu\eta^2 x &= 1, & \varepsilon\varphi x &= \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu\eta x} = \frac{1}{\sigma\varphi x}, & \sigma\varphi x &= \frac{\sigma\nu\eta x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\varepsilon\varphi x}, \\ \sigma\tau\epsilon\mu x &= \frac{1}{\eta\mu x}, & \tau\epsilon\mu x &= \frac{1}{\sigma\nu\eta x}, & 1 + \sigma\varphi^2 x &= \sigma\tau\epsilon\mu^2 x, & 1 + \varepsilon\varphi^2 x &= \tau\epsilon\mu^2 x. \end{aligned}$$

Μέχρι τώρα, αναφερθήκαμε στους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείων γωνιών, γωνιών δηλαδή που αναφέρονται κυρίως σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στους τριγωνομετρικούς αριθμούς κάθε γωνίας και πώς μπορούμε να τους υπολογίσουμε, αν ξέρουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξείων γωνιών.

Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών αριθμών.

$$\begin{aligned} \eta\mu(-x) &= -\eta\mu x, & \sigma\nu\eta(-x) &= \sigma\nu\eta x, & \varepsilon\varphi(-x) &= -\varepsilon\varphi x, & \sigma\varphi(-x) &= -\sigma\varphi x, \\ \eta\mu(\pi + x) &= -\eta\mu x, & \sigma\nu\eta(\pi - x) &= -\sigma\nu\eta x, & \varepsilon\varphi(\pi + x) &= \varepsilon\varphi x, & \sigma\varphi(\pi + x) &= \sigma\varphi x, \\ \eta\mu(\pi - x) &= \eta\mu x, & \sigma\nu\eta(\pi + x) &= -\sigma\nu\eta x, & \varepsilon\varphi(\pi - x) &= -\varepsilon\varphi x, & \sigma\varphi(\pi - x) &= -\sigma\varphi x, \\ \eta\mu(2\pi + x) &= \eta\mu x, & \sigma\nu\eta(2\pi + x) &= \sigma\nu\eta x, & \varepsilon\varphi(2\pi + x) &= \varepsilon\varphi x, & \sigma\varphi(2\pi + x) &= \sigma\varphi x, \\ \eta\mu(2\pi - x) &= -\eta\mu x, & \sigma\nu\eta(2\pi - x) &= \sigma\nu\eta x, & \varepsilon\varphi(2\pi - x) &= -\varepsilon\varphi x, & \sigma\varphi(2\pi - x) &= -\sigma\varphi x. \end{aligned}$$

Τριγωνομετρικές τιμές αθροισμάτων και διαφορών γωνιών.

$$\begin{aligned} \eta\mu(\omega + x) &= \eta\mu\omega \cdot \sigma\nu\eta x + \sigma\nu\eta\omega \cdot \eta\mu x, & \eta\mu(\omega - x) &= \eta\mu\omega \cdot \sigma\nu\eta x - \sigma\nu\eta\omega \cdot \eta\mu x, \\ \sigma\nu\eta(\omega + x) &= \sigma\nu\eta\omega \cdot \sigma\nu\eta x - \eta\mu\omega \cdot \eta\mu x, & \sigma\nu\eta(\omega - x) &= \sigma\nu\eta\omega \cdot \sigma\nu\eta x + \eta\mu\omega \cdot \eta\mu x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi(\omega + \varphi) &= \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\varphi}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\varphi}, & \varepsilon\varphi(\omega - \varphi) &= \frac{\varepsilon\varphi\omega - \varepsilon\varphi\varphi}{1 + \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\varphi}, \\ \sigma\varphi(\omega + \varphi) &= \frac{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\varphi}, & \sigma\varphi(\omega - \varphi) &= \frac{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\omega - \sigma\varphi\varphi}.\end{aligned}$$

Άσκηση.

10.2.5 Να βρείτε την εφαπτομένη των 15° ακριβώς.

Λύση.

Ισχύει για την γωνία των 15° ότι: $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, άρα χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος της εφαπτομένης έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 15^\circ = \varepsilon\varphi(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ - \varepsilon\varphi 30^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 45^\circ \varepsilon\varphi 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}.$$

10.3 Επίλυση επιπέδων τριγώνων.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την επίλυση ενός τριγώνου, δηλαδή πώς θα βρούμε τα μήκη όλων των πλευρών και τα μέτρα όλων των γωνιών του. Ένα σημαντικό εργαλείο για το σκοπό αυτό είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την επίλυση τριγώνων χωρίς καμμία ορθή γωνία.

10.3.1 Επίπεδα τρίγωνα.

Σε κάθε επίπεδο τρίγωνο (σχ. 10.3α) οι πλευρές α, β, γ και οι γωνίες A, B, Γ , συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ, \quad |\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta.$$

10.3.2 Επίλυση τυχαίων επιπέδων τριγώνων.

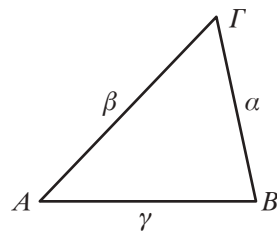
Οποιοδήποτε τρίγωνο, ορθογώνιο ή μη, μπορεί να λυθεί, εάν γνωρίζουμε τουλάχιστον μία πλευρά και οποιαδήποτε δύο άλλα στοιχεία του. Οι πέντε πιθανές περιπτώσεις επίλυσης τριγώνου, φαίνονται στον πίνακα 10.3.

Στις παρακάτω περιπτώσεις δεν περιλαμβάνεται η περίπτωση να είναι γνωστές οι τρεις γωνίες, αφού τα μέτρα των γωνιών καθορίζουν μόνο τη μορφή του τριγώνου. Επομένως, δεν μπορούμε να λύσουμε ένα τρίγωνο όταν δίνονται μόνο τα μέτρα των τριών γωνιών.

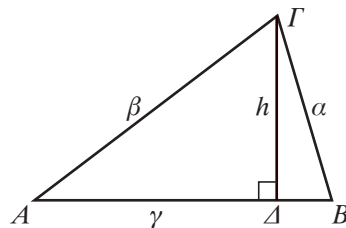
Για την επίλυση των παραπάνω τριγώνων, θα διατυπώσουμε τους νόμους ημιτόνων και συνημίτονων. Τον νόμο των ημιτόνων τον χρησιμοποιούμε για την επίλυση των τριών πρώτων περιπτώσεων, ενώ το νόμο των συνημίτονων για τις άλλες δύο.

10.3.3 Νόμος ημιτόνων.

Έστω ένα τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 10.3β). Από την κορυφή Γ φέρ-

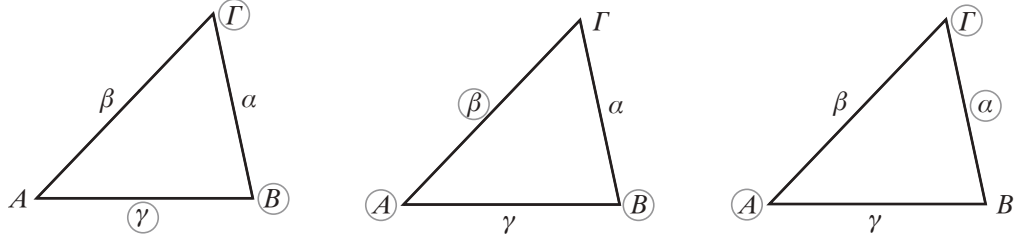
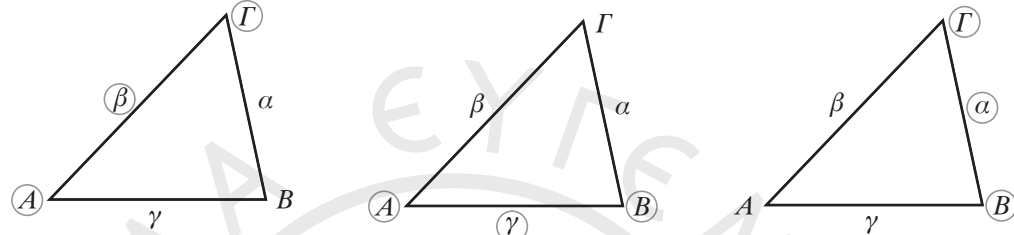
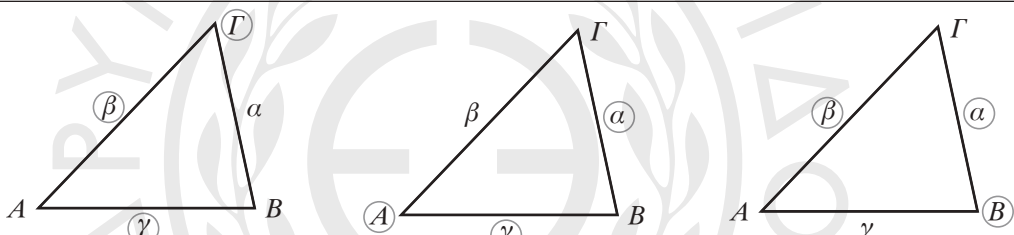
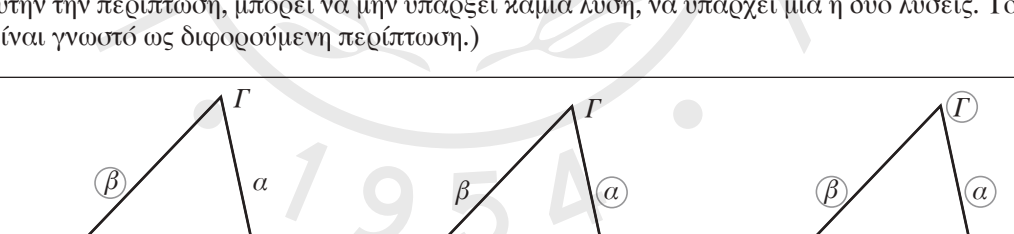
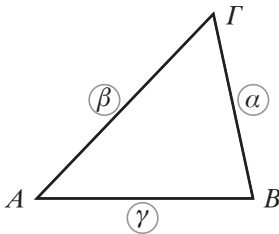


Σχ. 10.3α.



Σχ. 10.3β.

Πίνακας 10.3

	Συμβ.	Δεδομένα
1 ^η	ΓΓΠ	 Αν είναι γνωστές δύο γωνίες ενός τριγώνου και μία πλευρά απέναντι σε μια από τις δύο αυτές γωνίες.
2 ^η	ΓΠΓ	 Αν είναι γνωστές μια πλευρά και οι προσκείμενες σε αυτήν γωνίες.
3 ^η	ΠΠΓ	 Αν είναι γνωστές δύο πλευρές ενός τριγώνου και μία γωνία απέναντι σε μία από αυτές τις πλευρές. (Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να μην υπάρξει καμία λύση, να υπάρχει μία ή δύο λύσεις. Το τελευταίο είναι γνωστό ως διφορούμενη περίπτωση.)
4 ^η	ΠΓΠ	 Αν είναι γνωστές δύο πλευρές ενός τριγώνου και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία.
5 ^η	ΠΠΠ	 Και οι τρεις πλευρές του τριγώνου είναι γνωστές.

(Όπου Γ = η γνωστή γωνία και Π = η γνωστή πλευρά, οι οποίες είναι μέσα σε κύκλο).

νομε το ύψος $\Gamma\Delta$, που έχει μήκος h . Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{h}{\beta} \Leftrightarrow h = \beta \cdot \eta\mu A.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{h}{\alpha} \Leftrightarrow h = \alpha \cdot \eta\mu B.$$

Άρα, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $h = \beta \cdot \eta\mu A$ και $h = \alpha \cdot \eta\mu B$, οπότε ισχύει:

$$\alpha \cdot \eta\mu B = \beta \cdot \eta\mu A, \text{ διαιρώντας με } \eta\mu A \cdot \eta\mu B$$

$$\frac{\alpha \cdot \eta\mu B}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B} = \frac{\beta \cdot \eta\mu A}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}, \text{ απλοποιώντας έχουμε } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}.$$

Εάν φέρομε τα ύψη από τις κορυφές A και B στο προηγούμενο τρίγωνο, με τον ίδιο τρόπο θα καταλήγαμε στις σχέσεις:

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \text{ και } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ο νόμος των ημιτόνων, σύμφωνα με τον οποίο:

Θεώρημα 1. Νόμος των ημιτόνων.

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Κατά συνέπεια, σε οποιοδήποτε τρίγωνο, οι πλευρές είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των αντιτοίχων γωνιών. Ο νόμος των ημιτόνων ισχύει είτε το τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες του οξείες, είτε υπάρχει μια γωνία αμβλεία.

Παρατήρηση: Οι διαιρέσεις με το γινόμενο $\eta\mu A \cdot \eta\mu B$ μπορούν να γίνουν κανονικά, γιατί η τιμή του ημιτόνου δεν μπορεί να είναι ποτέ μηδέν, αφού οι γωνίες ενός τριγώνου δεν μπορούν να είναι ποτέ 0° ή 180° .

Όταν είναι γνωστές δύο γωνίες και μια πλευρά ενός οποιουδήποτε τριγώνου, ο νόμος των ημιτόνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυσή του (περίπτωση ΓΓΠ και ΓΠΓ, βλ. πίν. 10.3).

Ασκήσεις.

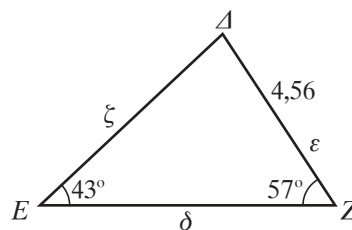
10.3.1 Στο τρίγωνο ΔEZ (σχ. 10.3γ), έχουμε ότι $\varepsilon = 4,56$, $E = 43^\circ$ και $Z = 57^\circ$. Να γίνει επίλυση του τριγώνου.

Λύση.

Αρχικά, σχεδιάζουμε το σχήμα στο οποίο γνωρίζουμε τα τρία από τα έξι ζητούμενα και βλέπουμε ότι είμαστε στην περίπτωση ΓΓΠ. Αρχικά, θα βρούμε την γωνία Δ :

$$\Delta = 180^\circ - (43^\circ + 57^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

Για να βρούμε τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων.



Σχ. 10.3γ.

$$\frac{\delta}{\eta\mu\Delta} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\eta\mu 80^\circ} = \frac{4,56}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \delta = \frac{4,56 \eta\mu 80^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \delta = 6,58.$$

Και αντίστοιχα έχουμε

$$\frac{\zeta}{\eta\mu Z} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} \Leftrightarrow \frac{\zeta}{\eta\mu 57^\circ} = \frac{4,56}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \zeta = \frac{4,56 \eta\mu 57^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \zeta = 5,61.$$

10.3.2 Κατά τη διάρκεια μιας αποστολής διασώσεως, ο πιλότος ενός διασωστικού ελικοπτέρου λαμβάνει από ένα αεροπλάνο AWACS τα στοιχεία που αφορούν σε ένα άγνωστης ταυτότητας πλοίο που έχει εκπέμψει S.O.S. και καθοδηγείται, ώστε να μπορέσει να συναντήσει το πλοίο. Το σχήμα 10.3δ που παρουσιάζεται κατωτέρω εμφανίζεται στην οθόνη, αλλά προτού εμφανισθεί η απόσταση του σημείου συναντήσεως στην οθόνη, χάνονται οι επικοινωνίες. Ευτυχώς, ο πιλότος θυμάται το νόμο των ημιτόνων. Πόσο μακριά πρέπει ο πιλότος να πετάξει;

Λύση.

Το x αντιπροσωπεύει την απόσταση που ο πιλότος πρέπει να διανύσει, ώστε να συναντήσει το πλοίο και το Σ είναι το σημείο συναντήσεως. Η γωνία Σ είναι:

$$\Sigma = 180^\circ - (115^\circ + 27^\circ) = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ.$$

Επειδή αυτή η εφαρμογή περιλαμβάνει την περίπτωση ΓΠΓ, χρησιμοποιούμε τον νόμο των ημιτόνων για να υπολογισθεί το x :

$$\frac{x}{\eta\mu\Pi} = \frac{\sigma}{\eta\mu\Sigma} \Leftrightarrow \frac{x}{\eta\mu 115^\circ} = \frac{500}{\eta\mu 38^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{500 \eta\mu 115^\circ}{\eta\mu 38^\circ} \Leftrightarrow x = 736.$$

Κατά συνέπεια, ο πιλότος πρέπει να πετάξει περίπου 736 km, προκειμένου να συναντήσει το πλοίο.

10.3.4 Νόμος συνημιτόνων.

Έστω ένα τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 10.3ε). Από την κορυφή B φέρνουμε το ύψος $B\Delta$, που έχει μήκος h . Στα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $B\Delta A$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

$$\alpha^2 = h^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ και } h^2 = \gamma^2 - A\Delta^2. \quad (10.3.1)$$

Επίσης ισχύει: $\Delta\Gamma = A\Delta + \beta$, άρα

$$\Delta\Gamma^2 = (A\Delta + \beta)^2 = A\Delta^2 + \beta^2 + 2 A\Delta \cdot \beta. \quad (10.3.2)$$

Από την αρχική σχέση $\alpha^2 = h^2 + \Delta\Gamma^2$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (10.3.1) και (10.3.2), παίρνουμε:

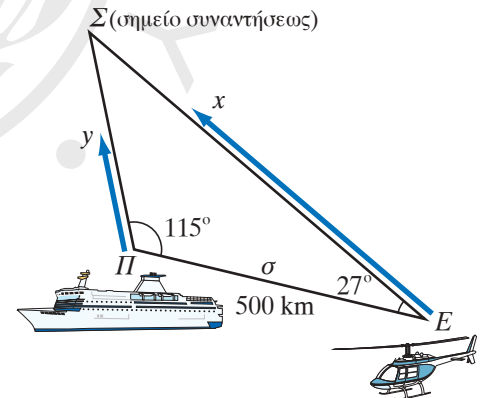
$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + A\Delta^2 + \beta^2 + 2 A\Delta \cdot \beta = \gamma^2 + \beta^2 + 2 \cdot A\Delta \cdot \beta.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta A$ ισχύει $\sin B\Delta A = \frac{A\Delta}{\gamma}$, οπότε

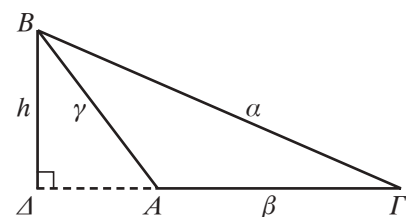
$$A\Delta = \gamma \cdot \sin B\Delta A. \quad (10.3.3)$$

Αλλά οι γωνίες $B\Delta A$ και A είναι παραπληρωματικές και ισχύει $\sin B\Delta A = -\sin A$, οπότε η σχέση (10.3.3) γίνεται

$$A\Delta = -\gamma \cdot \sin A.$$



Σχ. 10.3δ.



Σχ. 10.3ε.

Άρα, $\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 - 2\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \cdot \beta$. Τότε, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$.

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ο νόμος των συνημιτόνων, σύμφωνα με τον οποίο ισχύουν τα εξής:

Θεώρημα 2. Νόμος των συνημιτόνων.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A,$ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B,$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma.$

Όταν δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία ενός οποιουδήποτε τριγώνου είναι γνωστές ή οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου είναι γνωστές, τότε ο νόμος των συνημιτόνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυσή τους (περίπτωση ΠΓΠ και ΠΠΠ, βλ. πιν. 10.3).

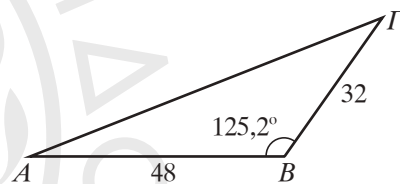
Ασκήσεις

10.3.3 Στο παρακάτω τρίγωνο (σχ. 10.3στ), είναι γνωστές οι πλευρές $\alpha = 32$, $\gamma = 48$ και η γωνία $B = 125,2^\circ$. Να γίνει επίλυση του τριγώνου.

Λύση.

Αρχικά, θα βρούμε την τρίτη πλευρά β , χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B \\ \beta^2 &= 32^2 + 48^2 - 2 \cdot 32 \cdot 48 \sigma\upsilon\nu 125,2^\circ \\ \beta^2 &= 1024 + 2304 - 3072 (-0,576) \\ \beta^2 &= 1024 + 2304 + 1769,472 = 5097,472 = 71,369 \simeq 71.\end{aligned}$$



Σχ. 10.3στ.

Έτσι, αφού βρήκαμε τις δύο πλευρές του τριγώνου, πρέπει να βρούμε τα μέτρα των δύο άλλων γωνιών. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους, είτε με το νόμο των ημιτόνων, είτε με το νόμο των συνημιτόνων. Το πλεονέκτημα από τη χρησιμοποίηση του νόμου των συνημιτόνων είναι ότι εάν βρούμε ότι το μέτρο της γωνίας είναι αρνητικό, τότε η γωνία θα είναι αμβλεία, ενώ αν το μέτρο είναι θετικό, τότε η γωνία είναι οξεία. Άρα από το νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να βρούμε μια δεύτερη γωνία, έστω την A .

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \\ 32^2 &= 71^2 + 48^2 - 2 \cdot 71 \cdot 48 \sigma\upsilon\nu A \\ 1024 &= 5041 + 2304 - 6816 \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow -6321 = -6816 \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = 0,9273 \\ A &= 21,97^\circ \simeq 22^\circ.\end{aligned}$$

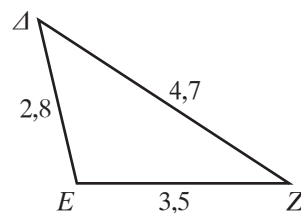
Επομένως, η τρίτη γωνία Γ είναι $\Gamma \simeq 180^\circ - (125,2^\circ + 22^\circ) \simeq 180^\circ - 147,2^\circ \simeq 32,8^\circ$.

10.3.4 Στο επόμενο τρίγωνο (σχ. 10.3ζ), είναι γνωστές οι πλευρές $\delta = 3,5$, $\varepsilon = 4,7$ και $\zeta = 2,8$. Να γίνει επίλυση του τριγώνου.

Λύση.

Όταν και οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου (ΠΠΠ) είναι γνωστές, ο νόμος των συνημιτόνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί το τρίγωνο.

Επειδή δεν ξέρουμε το μέτρο καμίας γωνίας, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων. Από το νόμο των συνημιτόνων, μπορούμε να βρούμε τη γωνία E .



Σχ. 10.3ζ.

Άρα $\varepsilon^2 = \delta^2 + \xi^2 - 2\delta \cdot \xi \cdot \sin E$
 $4,7^2 = 3,5^2 + 2,8^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 2,8 \sin E$
 $22,09 = 12,25 + 7,84 - 19,6 \sin E \Leftrightarrow 2 = -19,6 \sin E$
 $\sin E = -0,10204 \Leftrightarrow E = 95,856654^\circ \Leftrightarrow E \simeq 95,86^\circ$.

Ομοίως, θα βρούμε την γωνία Δ :
 $\delta^2 = \varepsilon^2 + \xi^2 - 2\varepsilon \cdot \xi \cdot \sin \Delta$
 $3,5^2 = 4,7^2 + 2,8^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 2,8 \sin \Delta$
 $12,25 = 22,09 + 7,84 - 26,32 \sin \Delta \Leftrightarrow -17,18 = -26,32 \sin \Delta$
 $\sin \Delta = 0,652735 \Leftrightarrow \Delta = 49,25182951^\circ \Leftrightarrow \Delta \simeq 49,25^\circ$.

Τέλος, για τη γωνία Z έχουμε:

$$Z \simeq 180^\circ - (E + \Delta) \simeq 180^\circ - (95,86^\circ + 49,25^\circ) \simeq 180^\circ - 145,11^\circ.$$

10.3.5 Νόμος εφαπτομένης – Τύπος προβολής – Τύποι περιμέτρου.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 10.3η), όπου α, β, γ οι πλευρές και A, B, Γ οι γωνίες του, ισχύουν οι ιδιότητες:

Νόμος των εφαπτομένων: $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{A - B}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{A + B}{2}\right)}$

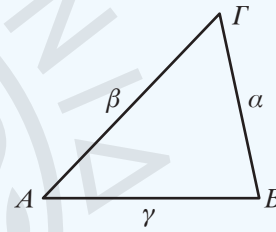
Τύπος Προβολής: $\gamma = \alpha \cdot \sin B + \beta \cdot \sin A$

Τύποι Περιμέτρου:

$$\eta\mu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta \cdot \gamma}}, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta \cdot \gamma}},$$

$$\eta\mu A = \frac{2}{\beta \cdot \gamma} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)},$$

όπου $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$ είναι η περίμετρος του τριγώνου.



Σχ. 10.3η.

10.4 Εφαρμογές τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία.

10.4.1 Διόπτρευση.

Τόσο στη ναυτιλία όσο και γενικότερα, **διόπτρευση** (bearing) ονομάζεται η κατά συγκεκριμένη κατεύθυνση παρατήρηση ενός αντικειμένου. Πιο συγκεκριμένα, διόπτρευση ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ κάποιας γραμμής αναγωγής και της κατευθύνσεως ενός σημείου ή αντικειμένου στον ορίζοντα.

Υπάρχουν πολλών ειδών διοπτρεύσεις, τόσο κατά το αντικείμενο παρατηρήσεως όσο και ως προς το λαμβανόμενο σημείο της αρχής μετρήσεως της διοπτρεύσεως, καθώς και ως προς το όργανο με το οποίο πραγματοποιείται αυτή.

Η τεταρτοκυκλική διόπτρευση είναι μια μέθοδος υπολογισμού της διοπτρεύσεως, που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στη ναυτιλία, από Βορρά ή Νότο προς Ανατολή ή Δύση με όριο μετρήσεως $0^\circ - 90^\circ$

(ανατολικά ή δυτικά), χρησιμοποιώντας δηλαδή μόνο μια οξεία γωνία (σχ. 10.4α).

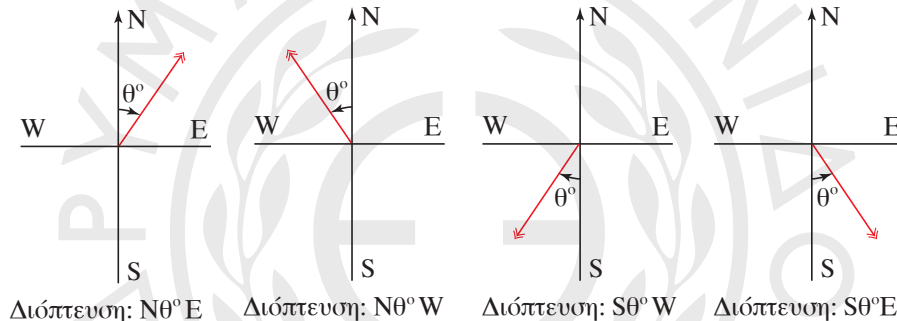
Στην αεροπλοΐα χρησιμοποιείται η απόλυτη ή ολοκυκλική διόπτευση με γωνίες από 0° έως 360° (σχ. 10.4β). Αυτή είναι μια διόπτευση με βάση το Βορρά, όπου κάθε γωνία μετράται πάντα κατά τη φορά του ρολογιού, και η αντιστοιχία έχει ως εξής:

0° : Βορράς (N) 90° : Ανατολή (E)
 180° : Νότος (S) 270° : Δύση (W).

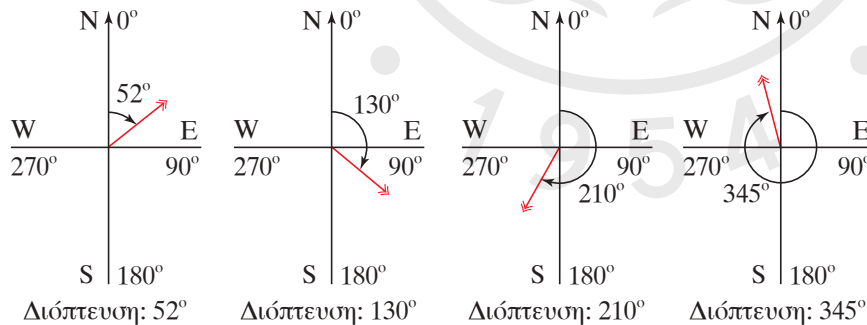
10.4.2 Τρίγωνο πλεύσεως.

Το τρίγωνο πλεύσεως χρησιμοποιείται στους μικρούς λοξοδρομικούς πλόες, όπου η απόσταση – διάγραμμα (d) μεταξύ του σημείου αναχωρήσεως E και του σημείου αφίξεως A δεν υπερβαίνει τα 600 ναυτικά μίλια. Σε αυτή την περίπτωση η επιφάνεια της γης θεωρείται επίπεδη και η επίλυση των προβλημάτων γίνεται με μεθόδους επίπεδης τριγωνομετρίας.

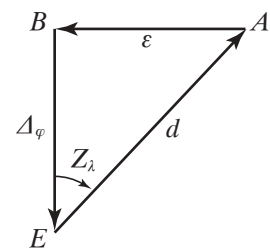
Στο σχήμα 10.4γ παρουσιάζεται το τρίγωνο πλεύσεως, όπου η πλευρά BE ονομάζεται **διαφορά πλάτους** και συμβολίζεται με $\Delta\varphi$, με φορά από το βορρά προς το νότο. Η πλευρά BA ονομάζεται **αποχώρηση** και συμβολίζεται με ε , με φορά από την ανατολή προς τη δύση. Η πλευρά EA ονομάζεται **διάγραμμα** μεταξύ του σημείου αναχωρήσεως E και του σημείου αφίξεως και συμβολίζεται με d . Τέλος, η γωνία BEA ονομάζεται αληθής πορεία και συμβολίζεται με Z_λ .



Σχ. 10.4α.



Σχ. 10.4β.



Σχ. 10.4γ.

Άσκησης.

10.4.1 Δύο πλοία αναχωρούν από ένα λιμάνι συγχρόνως (σχ. 10.4δ). Το πρώτο πλοίο κινείται με 25 κόμβους (ένας κόμβος είναι ένα ναυτικό μίλι ανά ώρα), $N15^\circ W$. Το δεύτερο πλοίο κινείται με 20 κόμβους $N32^\circ E$. Μετά από 2 ώρες, ποια θα είναι η απόσταση d μεταξύ των δύο πλοίων;

Λύση.

Έστω ότι το Π_1 είναι η θέση του πρώτου πλοίου, Π_2 η θέση του δεύτερου πλοίου και A η αρχική

θέση τους. Μετά από δύο ώρες, το Π_1 θα έχει διανύσει 50 μίλια, ενώ το Π_2 40 μίλια. Στο τρίγωνο που φαίνεται στο σχήμα 10.4ε ξέρουμε τις πλευρές με $A\Pi_1 = 50$ μίλια και $A\Pi_2 = 40$ μίλια, καθώς και την περιεχόμενη τους γωνία. Άρα, είμαστε στην 4^η περίπτωση ΠΠΠ του πίνακα 10.3 και αναζητούμε την απόσταση των δύο πλοίων, $d = \Pi_1\Pi_2$. Θα υπολογίσουμε αρχικά τις γωνίες Π_1, Π_2 , οπότε η γωνία $\Pi_1 + \Pi_2$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 180 - (32 + 15) = 180 - 47 = 133^\circ.$$

Η διαφορά τους υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{2}}{\varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 + \Pi_1}{2}} &= \frac{50 - 40}{50 + 40} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{2} = \frac{50 - 40}{50 + 40} \varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 + \Pi_1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{2} = \frac{10}{90} \varepsilon\varphi \frac{133}{2} \\ \varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{2} &= \frac{10}{90} \varepsilon\varphi 66,5 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{2} = \frac{10}{90} 1,7216 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{2} = 0,19128 \Leftrightarrow \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{2} = 10,82873^\circ \end{aligned}$$

Επομένως για τις γωνίες Π_1, Π_2 έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \Pi_1 - \Pi_2 = 21,65746^\circ \\ \Pi_1 + \Pi_2 = 133^\circ \end{cases} \Rightarrow \Pi_1 = 56^\circ \text{ και } \Pi_2 = 77^\circ.$$

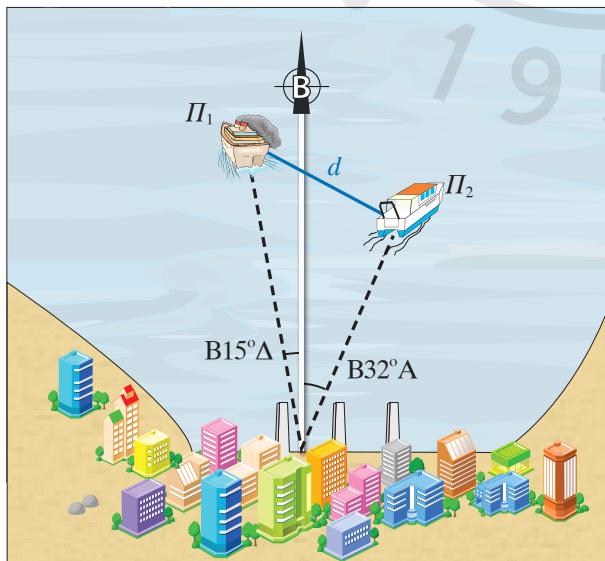
Εφαρμόζοντας τον νόμο των ημιτόνων, παίρνουμε:

$$\frac{A\Pi_1}{\eta\mu \Pi_2} = \frac{\Pi_1 \Pi_2}{\eta\mu A} \Leftrightarrow \frac{50}{\eta\mu 77^\circ} = \frac{d}{\eta\mu 47^\circ} \Leftrightarrow d = \frac{50 \cdot \eta\mu 47^\circ}{\eta\mu 77^\circ} \Leftrightarrow d = 37,526 \text{ μίλια}.$$

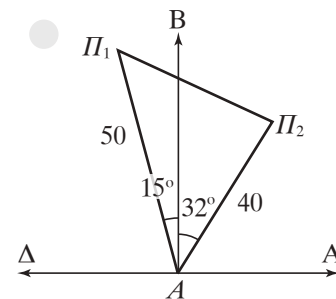
10.4.2 Μια βάρκα Κ φαίνεται από τον φάρο Α σε απόσταση 5,1 km (σχ. 10.4στ). Ταυτόχρονα διακρίνεται από το φάρο Β, ο οποίος βρίσκεται 7,2 km δυτικά του Α. Η διόπτρευση της βάρκας από το φάρο Β είναι $N65^\circ 10'E$. Πόσο μακριά είναι η βάρκα από το φάρο Β, αν ξέρουμε ότι η γωνία που σχηματίζει η βάρκα με τους δύο φάρους είναι οξεία γωνία;

Λύση.

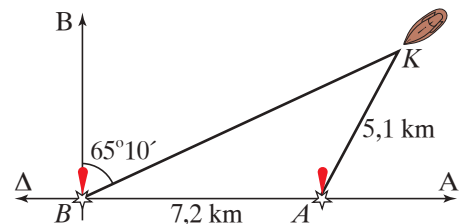
Αρχικά υπολογίζουμε τη γωνία ABK , η οποία είναι συμπληρωματική της γωνίας των $65^\circ 10'$. Άρα $ABK = 90^\circ - 65^\circ 10' = 24^\circ 50'$.



Σχ. 10.4δ.



Σχ. 10.4ε.



Σχ. 10.4στ.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{AB}{\eta\mu K} = \frac{AK}{\eta\mu(24^\circ 50')} \Leftrightarrow \frac{7,2}{\eta\mu K} = \frac{5,1}{0,41998} \Leftrightarrow \eta\mu K = \frac{7,2 \cdot 0,41998}{5,1} \Leftrightarrow \eta\mu K = 0,59291 \Leftrightarrow \eta\mu K = 0,593.$$

Άρα $K = 36^\circ 21'$ ή $K = 180^\circ - 36^\circ 21' = 143^\circ 39'$. Από την εκφώνηση έχουμε ότι η γωνία K είναι οξεία, άρα $K = 36^\circ 21'$. Η γωνία A θα είναι: $A = 180^\circ - (24^\circ 50' + 36^\circ 21') = 180^\circ - 61^\circ 11' = 118^\circ 49'$. Τέλος, από το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{BK}{\eta\mu A} = \frac{AK}{\eta\mu ABK} \Leftrightarrow \frac{BK}{\eta\mu(118^\circ 49')} = \frac{AK}{\eta\mu(24^\circ 50')} \Leftrightarrow \frac{BK}{0,8762} = \frac{5,1}{0,41998}$$

$$BK = \frac{5,1 \cdot 0,8762}{0,41998} \Leftrightarrow BK = 10,64 \text{ km}.$$

Άρα, η βάρκα απέχει από το φάρο B, 10,64 km.

10.5 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Ημίτονο	$\sin$	$\eta\mu B = \frac{\beta}{a} = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}}$
Συνημίτονο	$\cos$	$\sigma\eta\mu B = \frac{\gamma}{a} = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος υποτείνουσας}}$
Εφαπτομένη	$\tan$	$\epsilon\phi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}$
Συνεφαπτομένη	$\cot$	$\sigma\phi B = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}$
Τέμνουσα	$\sec$	$\tau\epsilon\mu B = \frac{a}{\gamma} = \frac{\text{μήκος υποτείνουσας}}{\text{μήκος προσκείμενης κάθετης πλευράς}}$
Συντέμνουσα	$\csc$	$\sigma\tau\epsilon\mu B = \frac{a}{\beta} = \frac{\text{μήκος υποτείνουσας}}{\text{μήκος απέναντι κάθετης πλευράς}}$
$\sigma\tau\epsilon\mu B = \frac{1}{\eta\mu B}, \quad \tau\epsilon\mu B = \frac{1}{\sigma\eta\mu B}, \quad \sigma\phi B = \frac{1}{\epsilon\phi B}$		
Μονάδες Μετρούσεως Γωνιών	$1 \text{ ακτίνιο} = \frac{180^\circ}{\pi}$ $2\pi \text{ ακτίνια} = 360^\circ$ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ ακτίνια}$	

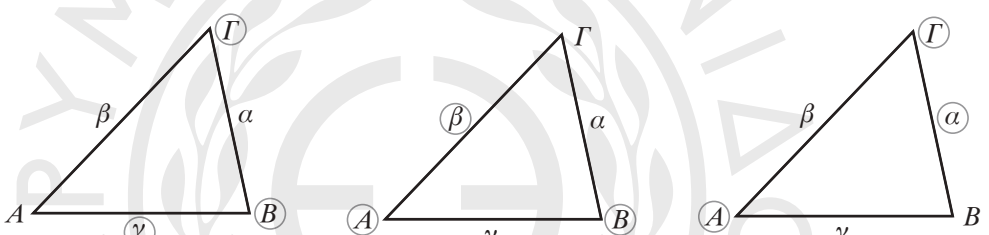
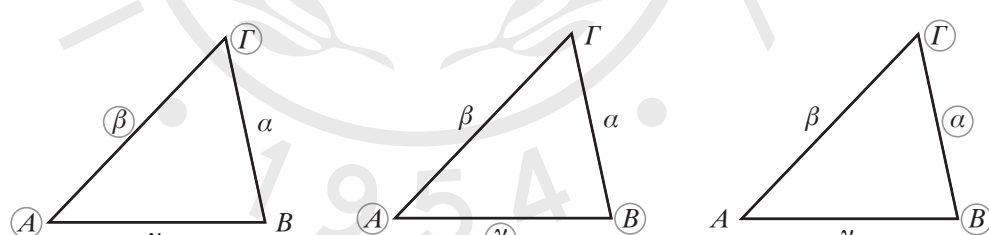
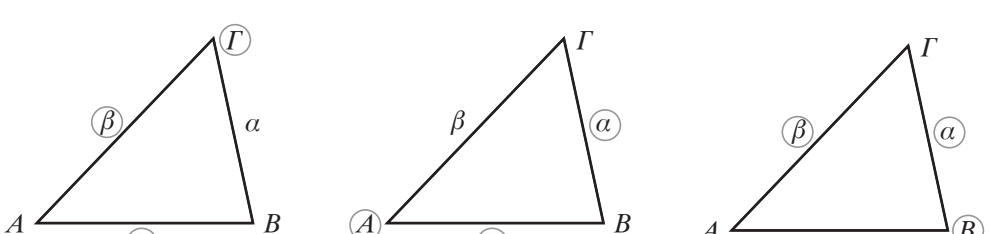
Τριγωνομετρικές σχέσεις.

Συμπληρωματικές γωνίες	$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - B) \quad \tau\epsilon\mu B = \frac{\alpha}{\gamma} = \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = \sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ - B)$ $\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} = \eta\mu\Gamma = \eta\mu(90^\circ - B) \quad \sigma\tau\epsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} = \tau\epsilon\mu\Gamma = \tau\epsilon\mu(90^\circ - B)$ $\epsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \sigma\varphi\Gamma = \sigma\varphi(90^\circ - B) \quad \sigma\tau\epsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} = \tau\epsilon\mu\Gamma = \tau\epsilon\mu(90^\circ - B)$ $\sigma\varphi B = \frac{\gamma}{\beta} = \epsilon\varphi\Gamma = \epsilon\varphi(90^\circ - B)$
Τριγωνομετρικές ταυτότητες	$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \quad \tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x},$ $\epsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sigma\varphi x}, \quad 1 + \sigma\varphi^2 x = \sigma\tau\epsilon\mu^2 x,$ $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\epsilon\varphi x}, \quad 1 + \epsilon\varphi^2 x = \tau\epsilon\mu^2 x.$ $\sigma\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x},$
Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών αριθμών	$\begin{aligned} \eta\mu(-x) &= -\eta\mu x, & \sigma\upsilon\nu(-x) &= \sigma\upsilon\nu x, \\ \epsilon\varphi(-x) &= -\epsilon\varphi x, & \sigma\varphi(-x) &= -\sigma\varphi x, \\ \eta\mu(\pi + x) &= -\eta\mu x, & \sigma\upsilon\nu(\pi - x) &= \sigma\upsilon\nu x, \\ \epsilon\varphi(\pi + x) &= \epsilon\varphi x, & \sigma\varphi(\pi + x) &= \sigma\varphi x, \\ \eta\mu(\pi - x) &= \eta\mu x, & \sigma\upsilon\nu(\pi + x) &= -\sigma\upsilon\nu x, \\ \epsilon\varphi(\pi - x) &= -\epsilon\varphi x, & \sigma\varphi(\pi - x) &= -\sigma\varphi x, \\ \eta\mu(2\pi + x) &= \eta\mu x, & \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) &= \sigma\upsilon\nu x, \\ \epsilon\varphi(2\pi + x) &= \epsilon\varphi x, & \sigma\varphi(2\pi + x) &= +\sigma\varphi x, \\ \eta\mu(2\pi - x) &= -\eta\mu x, & \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) &= \sigma\upsilon\nu x, \\ \epsilon\varphi(2\pi - x) &= -\epsilon\varphi x, & \sigma\varphi(2\pi - x) &= -\sigma\varphi x. \end{aligned}$
Τριγωνομετρικές τιμές αθροισμάτων και διαφορών γωνιών	$\begin{aligned} \eta\mu(\omega + \varphi) &= \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu(\omega + \varphi) &= \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\omega \cdot \eta\mu\varphi \\ \epsilon\varphi(\omega + \varphi) &= \frac{\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi\varphi}{1 - \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi\varphi}, & \sigma\varphi(\omega + \varphi) &= \frac{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\varphi}, \\ \eta\mu(\omega - \varphi) &= \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu(\omega - \varphi) &= \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\omega \cdot \eta\mu\varphi \\ \epsilon\varphi(\omega - \varphi) &= \frac{\epsilon\varphi\omega - \epsilon\varphi\varphi}{1 + \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi\varphi}, & \sigma\varphi(\omega - \varphi) &= \frac{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\omega - \sigma\varphi\varphi}. \end{aligned}$
Νόμος των ημιτόνων	$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

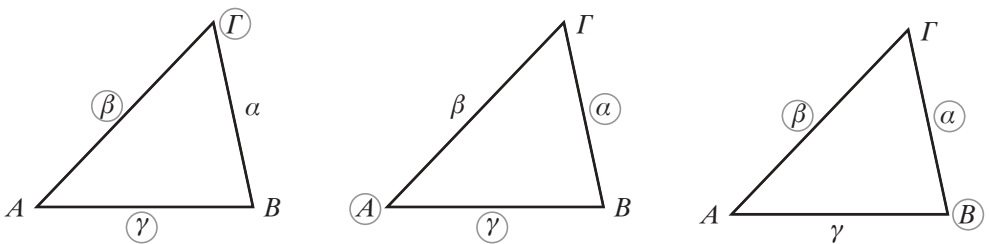
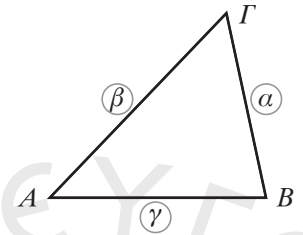
(συνεχίζεται)

Νόμος των συνημιτόνων	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A,$ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \sin B,$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin \Gamma.$
Νόμος των εφαπτομένων	$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)}$
Τύπος προβολής	$\gamma = \alpha \cdot \sin B + \beta \cdot \sin A$
Τύποι περιμέτρου	$\eta\mu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta \cdot \gamma}}$ $\eta\mu A = \frac{2}{\beta \cdot \gamma} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)},$ $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta \cdot \gamma}}$

Επίλυση τυχαίων επιπέδων τριγώνων.

	Συμβ..	Δεδομένα
1 ^η	ΓΓΠ	 Αν είναι γνωστές δύο γωνίες ενός τριγώνου και μια πλευρά απέναντι σε μια από τις δύο αυτές γωνίες.
2 ^η	ΓΠΓ	 Αν είναι γνωστές μια πλευρά και οι προσκείμενες σε αυτήν γωνίες.
3 ^η	ΠΠΓ	 Αν είναι γνωστές δύο πλευρές ενός τριγώνου και μια γωνία απέναντι σε μια από αυτές τις πλευρές. (Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να μην υπάρξει καμία λύση, να υπάρχει μία ή δύο λύσεις. Το τελευταίο είναι γνωστό ως διφορούμενη περίπτωση.)

(συνεχίζεται)

4 ^η	ΠΓΠ	 Αν είναι γνωστές δύο πλευρές ενός τριγώνου και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία.
5 ^η	ΠΠΠ	 Και οι τρεις πλευρές του τριγώνου είναι γνωστές.

10.6 Γενικές ασκήσεις.

10.6.1 Να μετατρέψετε τις παρακάτω γωνίες σε δεκαδική μορφή, στρογγυλοποιώντας σε δύο δεκαδικά ψηφία:

- α) $8^\circ 43'$ β) $63^\circ 53'$ γ) $75^\circ 10' 36''$ δ) $6^\circ 54'$
ε) $49^\circ 38' 46''$ στ) $15' 5''$ η) $5^\circ 53''$ θ) $19^\circ 47' 23''$

10.6.2 Να μετατρέψετε τις παρακάτω γωνίες σε βαθμούς, πρώτα και δεύτερα λεπτά, στρογγυλοποιώντας στα πλησιέστερα δευτέρτα:

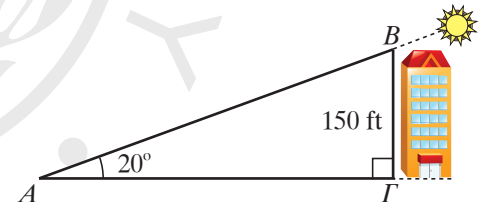
- α) $18,7^\circ$ β) $38,022^\circ$ γ) $72,81^\circ$
δ) $22,3232^\circ$ ε) $83,025^\circ$ στ) $11,75^\circ$
η) $47,8268^\circ$ θ) $0,9^\circ$

10.6.3 Για τη γωνία των 65° γνωρίζουμε τα εξής:

- $\eta\mu 65^\circ \simeq 0,9063$, $\sigma\upsilon\upsilon\eta 65^\circ \simeq 0,4226$, $\epsilon\varphi 65^\circ \simeq 2,1445$,
 $\sigma\varphi 65^\circ \simeq 0,4663$, $\tau\epsilon\mu 65^\circ \simeq 2,3662$, $\sigma\tau\epsilon\mu 65^\circ \simeq 1,1034$.

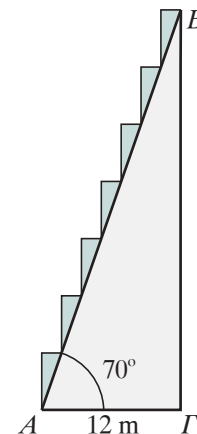
Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 25° .

10.6.4 Όταν ο Ήλιος είναι 20° επάνω από τον ορίζοντα, πόσο μεγάλη είναι η σκιά ενός κτηρίου με ύψος 150 ft (σχ. 10.6α);



Σχ. 10.6α.

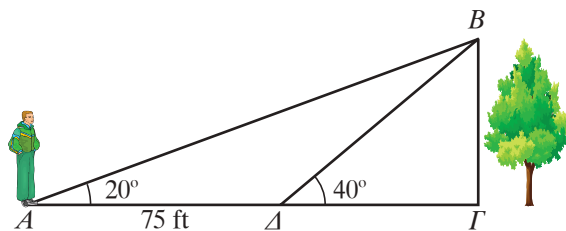
10.6.5 Το κάτω μέρος μια σκάλας απέχει από τον τοίχο ενός κτηρίου 12m. Να βρείτε πόσο μακριά από το έδαφος είναι η κορυφή της σκάλας και πόσο είναι το μήκος της σκάλας, εάν αυτή σχηματίζει γωνία 70° , με το έδαφος (σχ. 10.6β).



Σχ. 10.6β.

10.6.6 Από την κορυφή ενός φάρου, ο οποίος βρίσκεται 120 ft πάνω από τη θάλασσα, μια βάρκα φαίνεται υπό γωνία 15° . Πόσο μακριά είναι η βάρκα από το φάρο;

10.6.7 Να βρείτε το ύψος ενός δέντρου, εάν η γωνία που σχηματίζει ένας παρατηρητής στο έδαφος με την κορυφή του δέντρου αλλάζει από 20° σε 40° , όταν αυτός προχωρήσει κατά 75 ft προς τη βάση του (σχ. 10.6γ).

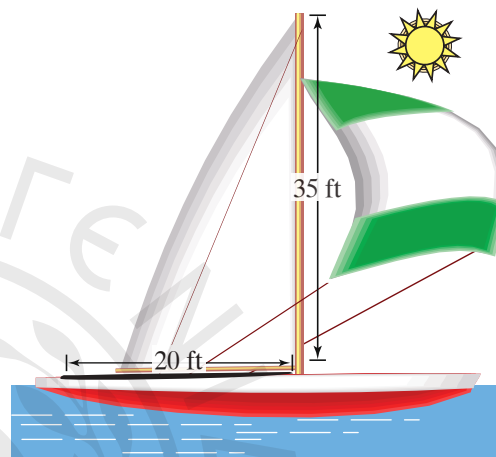


Σχ. 10.6γ.

10.6.8 Ένα δέντρο σπάζοντας από τον αέρα σχηματίζει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με το έδαφος. Εάν το σπασμένο μέρος σχηματίζει γωνία 50° με το έδαφος και η κορυφή του δέντρου τώρα απέχει 20 ft από τη βάση του, πόσο ψηλό ήταν το δέντρο;

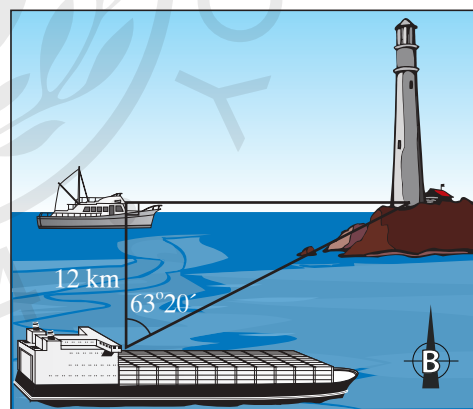
10.6.9 Σε ένα κρουαζιερόπλοιο τα δύο καταστρώματα έχουν διαφορά 60 ft. Το πρώτο κατάστρωμα βρίσκεται σε ύψος 40 ft, ενώ η σκάλα ανόδου στο δεύτερο κατάστρωμα σχηματίζει γωνία 40° . Σε τι ύψος βρίσκεται το δεύτερο κατάστρωμα;

10.6.10 Ποια είναι η γωνία ανυψώσεως του ήλιου όταν ένα κατάρτι 35 ft σχηματίζει σκιά 20 ft (σχ. 10.6δ);



Σχ. 10.6δ.

10.6.11 Ένα καΐκι βρίσκεται δυτικά ενός φάρου και μια φορτηγίδα είναι 12 km νότια του καϊκιού. Από τη φορτηγίδα, η διόπτρευση του φάρου είναι $N63^\circ 20'E$. Πόσο μακριά βρίσκεται το καΐκι από το φάρο (σχ. 10.6ε);



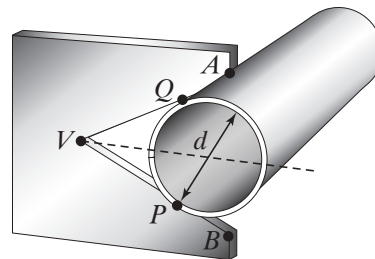
Σχ. 10.6ε.

10.6.12 Ένας V-μετρητής χρησιμοποιείται για να υπολογισθεί η διάμετρος ενός σωλήνα. Το πλεονέκτημα ενός τέτοιου οργάνου είναι ότι είναι τραχύ, ακριβές, και δεν έχει κανένα κινούμενο μέρος που να αποσπάται. Στην εικόνα, το μέτρο της γωνίας AVB είναι 54° . Ένας σωλήνας τοποθετείται μέσα σε μια εγκοπή του οργάνου και η απόσταση VP χρησιμοποιείται για να υπολογισθεί η διάμετρος. Η γραμμή VP είναι μια εφαπτόμενη στο σωλήνα και μαζί με τη γωνία AVB χρησιμοποιείται για να προσδιορισθεί η εσωτερική διάμετρος. Αυτό, στην πραγματικότητα, δημιουργεί μια συνάρτηση μεταξύ του VP και του d (σχ. 10.6στ).

α) Αν υποθέσουμε ότι η διάμετρος ενός σωλήνα είναι 2 cm, ποια είναι η απόσταση VP ;

β) Αν υποθέσουμε ότι η απόσταση VP είναι 3,93 cm, ποια είναι η διάμετρος του σωλήνα;

γ) Να βρείτε έναν τύπο υπολογισμού του d ως προς το VP .



Σχ. 10.6στ.

δ) Να βρείτε έναν τύπο υπολογισμού του VP ως προς το d .

10.6.13 Ένας τρόπος να μετρηθεί η ακτίνα της γης είναι να αναρριχηθεί κάποιος στην κορυφή ενός βουνού, το ύψος του οποίου επάνω από τη στάθμη θάλασσας είναι γνωστό, και να μετρήσει τη γωνία μεταξύ μιας κατακόρυφης γραμμής στο κέντρο της γης από την κορυφή του βουνού και μιας γραμμής που προέρχεται από την κορυφή του βουνού και φτάνει στον ορίζοντα, όπως φαίνεται στην εικόνα. Το ύψος του όρους Shasta στην Καλιφόρνια είναι 14.162 ft. Από την κορυφή του όρους, κάποιος μπορεί να δει τον ορίζοντα στον Ειρηνικό ωκεανό. Η γωνία που διαμορφώνεται μεταξύ μιας γραμμής στον ορίζοντα και της κατακόρυφου είναι $87^\circ 53'$. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, μπορεί να υπολογίσει την ακτίνα της γης, σε ft (σχ. 10.6ζ);

10.6.14 Σε ένα τσίρκο, το σκοινί A είναι συνδεδεμένο με την κορυφή της σκηνής, σε έναν στύλο, ύψους 30 ft. Το σκοινί B χρησιμοποιείται από τους ακροβάτες για να περπατήσουν μέχρι το σφιχτό σκοινί, πάνω στο οποίο κάνουν τα νούμερά τους, και το οποίο βρίσκεται 10 ft πάνω από το έδαφος. Να βρείτε τη γωνία φ μεταξύ των σκοινιών, εάν αυτά έχουν συνδεθεί με το έδαφος σε ένα σημείο που απέχει 40 ft από τον στύλο (σχ. 10.6η).

10.6.15 Να χρησιμοποιήσετε τύπους του αθροίσματος και της διαφοράς για να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ β) $\cos(45^\circ - 30^\circ)$,

γ) $\sin 27^\circ \sin 16^\circ + \eta\mu 27^\circ \eta\mu 16^\circ$, δ) $\sin 165^\circ$.

10.6.16 Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ , αν ξέρουμε

ότι $\sin 2\theta = \frac{5}{6}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

10.6.17 Να επιλύσετε τα παρακάτω τρίγωνα:

α) $B = 38^\circ$, $\Gamma = 21^\circ$, $\beta = 24$,

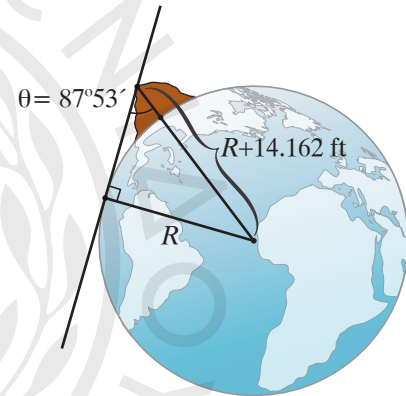
β) $A = 36,5^\circ$, $\alpha = 24$, $\beta = 34$,

γ) $\alpha = 2345$, $\beta = 2345$, $A = 124,67^\circ$.

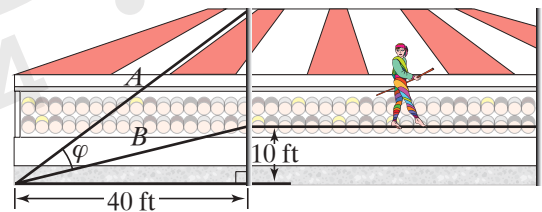
10.6.18 Ένας δασοφύλακας βρίσκεται σε ένα δάσος στο σημείο A , από το οποίο εντοπίζει φωτιά σε κατεύθυνση 295° από αυτόν. Την ίδια φωτιά εντοπίζει και ένας άλλος δασοφύλακας, ο οποίος βρίσκεται στην θέση B , απέχει απόσταση 45 μίλια από τη θέση A και έχει κατεύθυνση 045° . Ο δεύτερος δασοφύλακας βλέπει τη φωτιά σε κατεύθυνση 255° . Πόσο μακριά από τη θέση A είναι η πυρκαγιά και πόσο από τη θέση B (σχ. 10.6θ);

10.6.19 Δύο αεροπλάνα απογειώνονται από έναν αερολιμένα συγχρόνως. Το πρώτο πετά με ταχύτητα 150 km/h σε μια κατεύθυνση 320° . Το δεύτερο πετά με ταχύτητα 200 km/h σε μια κατεύθυνση 200° . Μετά από 3 ώρες πόσο μακριά θα είναι τα δύο αεροπλάνα;

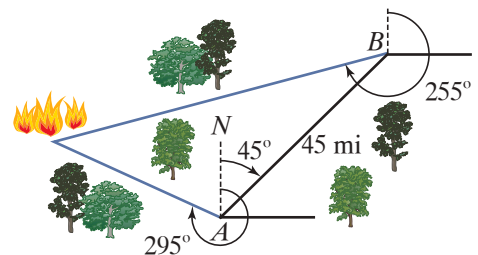
10.6.20 Η πιο μεγάλη βάση ενός ισοσκελούς τραπεζιού είναι 14 ft, οι μη παράλληλες πλευρές 10 ft και οι



Σχ. 10.6ζ.



Σχ. 10.6η.

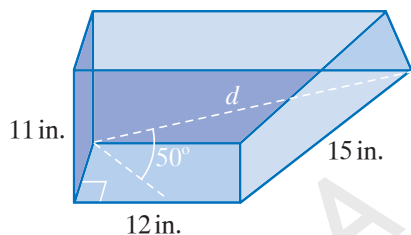


Σχ. 10.6θ.

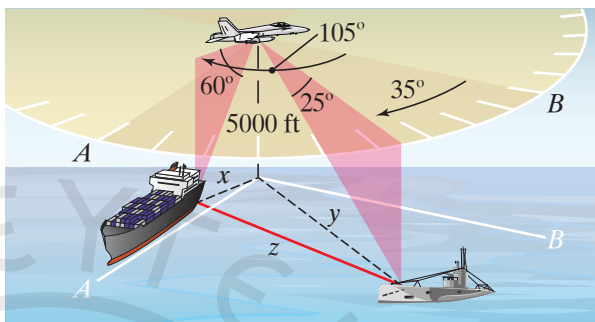
παρά τη βάσει γωνίες είναι 80° . Να βρείτε: α) Το μήκος μιας διαγωνίου. Περίπου 16ft και β) το εμβαδό του.

10.6.21 Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε την πλευρά d (σχ. 10.6ι):

10.6.22 Ένα αναγνωριστικό αεροσκάφος, ενώ βρίσκεται στα 5000 ft, διακρίνει ένα υποβρύχιο με διόπτρευση 35° και διαγωνίως προς τα κάτω 25° . Επίσης, διακρίνει ένα εμπορικό πλοίο με 105° και διαγωνίως προς τα κάτω 60° . Πόσο μακριά βρίσκεται το υποβρύχιο από το εμπορικό πλοίο (σχ. 10.6ια);



Σχ. 10.6ι.



Σχ. 10.6ια.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Στα προηγούμενα κεφάλαια έχουμε ήδη αναφέρει ότι η άλγεβρα και η αναλυτική γεωμετρία ήταν στενά συνδεδεμένες σε όλη την ιστορική εξέλιξή τους. Κάθε νέα ανακάλυψη στον έναν τομέα οδηγούσε σε μια βελτίωση στον άλλο. Υπάρχουν προβλήματα όμως που απαιτούν μια βαθύτερη γνώση της αναλυτικής γεωμετρίας απ' ό,τι έχουμε παρουσιάσει μέχρι τώρα. Ιδανικά εργαλεία για την επεξήγηση και την απλοποίηση πολλών σημαντικών εννοιών της γεωμετρίας και της φυσικής είναι τα διανύσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τις βασικές αρχές του διανυσματικού λογισμού, ο οποίος έχει εφαρμογές τόσο στη γεωμετρία όσο και στη φυσική.

- 11.1 Η έννοια του διανύσματος.
- 11.2 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.
- 11.3 Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων.
- 11.4 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 11.5 Γενικές ασκήσεις.

11.1 Η έννοια του διανύσματος.

Στις θετικές επιστήμες φυσικό μέγεθος ονομάζουμε μία κατάλληλη ποσότητα που επισυνάπτεται στα ποσοτικά χαρακτηριστικά των φυσικών φαινομένων. Κάθε φυσικό μέγεθος αναπαριστάται από ένα μαθηματικό μέγεθος των μεταβλητών του χωροχρόνου, δηλαδή θέσεως και χρόνου, και εκφράζεται από μια μονάδα μετρήσεως, η οποία υπολογίζεται ως ο λόγος του εξεταζόμενου μεγέθους προς άλλο ομοειδές που έχει επιλεγθεί.

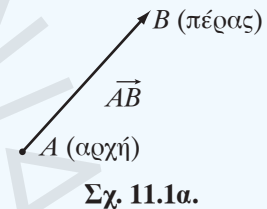
Διακρίνουμε δύο τουλάχιστον είδη φυσικών μεγεθών: τα **μονόμετρα** ή **βαθμωτά** και τα **διανυσματικά** μεγέθη. Μονόμετρα μεγέθη ονομάζονται αυτά που ορίζονται μόνο από μια και μόνο αριθμητική τιμή. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία, η ενέργεια, η μάζα, η ισχύς.

Διανυσματικά μεγέθη ονομάζονται αυτά που για να ορισθούν, απαιτείται να είναι γνωστή μια αριθμητική τιμή που να τα εκφράζει αλλά και η κατεύθυνση, δηλαδή η διεύθυνση και η φορά. Παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών είναι η ταχύτητα, η δύναμη και η μετατόπιση.

11.1.1 Ορισμός διανύσματος.

Αρχικά θα ορίσουμε το διάνυσμα στο χώρο, ως εξής:

Διάνυσμα στο χώρο $\mathbf{R}^3$ ή στο επίπεδο $\mathbf{R}^2$, ονομάζουμε ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο ονομάζεται **αρχή** ή σημείο εφαρμογής του διανύσματος, ενώ το δεύτερο ονομάζεται **πέρας** του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\vec{AB}$ (σχ. 11.1α).



Σχ. 11.1α.

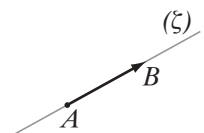
Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα**.

Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου, τοποθετώντας ένα βέλος πάνω απ' αυτά, για παράδειγμα, $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\vec{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , ονομάζεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$. Αν το διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει μέτρο 1, τότε ονομάζεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$ ονομάζεται **φορέας** του $\vec{AB}$.

Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\vec{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία (ζ) , τότε λέμε ότι το $\vec{AB}$ είναι παράλληλο προς τη (ζ) και γράφουμε $\vec{AB} \parallel (\zeta)$ (σχ. 11.1β).



Σχ. 11.1β.

Δύο διανύσματα ονομάζονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{GA}$ είναι ίσα, γράφουμε $\vec{AB} = \vec{GA}$.

Η ιδιότητα διανυσμάτων διαμερίζει το σύνολο των διανυσμάτων του χώρου $\mathbf{R}^3$ (ή του επιπέδου $\mathbf{R}^2$) σε κλάσεις ίσων διανυσμάτων που κάθε μία θα ονομάζεται **ελεύθερο διάνυσμα**. Ένα από τα διανύσματα μιας τέτοιας κλάσεως θα ονομάζεται **αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος. Συνήθως, ως

αντιπρόσωπο ενός ελεύθερου διανύσματος του $\mathbf{R}^3$ (ή του $\mathbf{R}^2$), παίρνομε ένα διάνυσμα που έχει αρχή το O ενός συστήματος συντεταγμένων του $\mathbf{R}^3$ (ή του $\mathbf{R}^2$).

11.1.2 Άξονας συντεταγμένων.

Πάνω σε μια ευθεία επιλέγομε δύο σημεία, O και I , έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox . Τότε η ευθεία αυτή ονομάζεται **άξονας συντεταγμένων** με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ και τον συμβολίζομε με x' . Η ημιευθεία Ox ονομάζεται θετικός ημιάξονας Ox , ενώ η Ox' ονομάζεται αρνητικός ημιάξονας Ox' (σχ. 11.1γ).

Αλγεβρική τιμή ή τετμημένη ενός σημείου M , το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα x' και για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM} // \vec{i}$, ονομάζομε έναν πραγματικό αριθμό x τον οποίο συμβολίζομε με $(\overline{OM}) = x$, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = (\overline{OM}) \cdot \vec{i} = x \cdot \vec{i}$ (σχ. 11.1γ). Το σημείο M του άξονα x' , στο οποίο αντιστοιχεί τετμημένη x συμβολίζεται με $M(x)$.



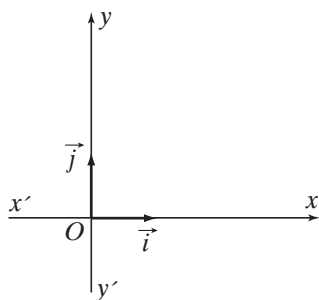
Σχ. 11.1γ.

11.1.3 Σύστημα συντεταγμένων.

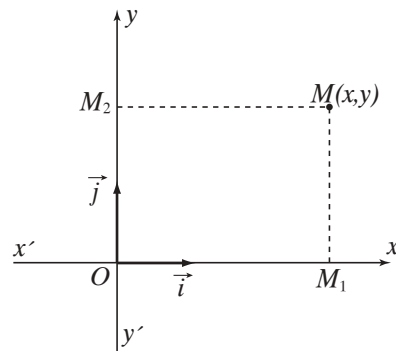
Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζομε δύο κάθετους άξονες $x'y'$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$, με $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αποτελούν μια βάση του χώρου των διανυσμάτων του επιπέδου, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Ο άξονας x' ονομάζεται **άξονας των τετμημένων** και ο άξονας y' **των τεταγμένων**. Τότε λέμε ότι έχομε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων** στο επίπεδο ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων** στο επίπεδο ή ακόμα ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζομε με Oxy (σχ. 11.1δ).

Πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παίρνομε ένα σημείο M (σχ. 11.1ε). Από το M φέρνομε την παράλληλη στον y' , που τέμνει τον x' στο M_1 , και την παράλληλη στον x' , που τέμνει τον y' στο M_2 . Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα x' και y η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα y' , τότε ο x ονομάζεται **τετμημένη** του M και ο y **τεταγμένη** του M . Η τετμημένη και η τεταγμένη ονομάζονται **συντεταγμένες** του M . Έτσι, σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων, αλλά και αντιστρόφως σε κάθε ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί μοναδικό σημείο του επιπέδου.

Αν τώρα, πάρομε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ στο επίπεδο των αξόνων (σχ. 11.1στ) και το προβάλλομε στους άξονες, έχομε ότι ο αριθμός $(\overline{K_1K_2}) = a_1$ ονομάζεται **τετμημένη** του $\vec{a}$, ενώ ο αριθμός $(\overline{A_1A_2}) = a_2$ ονο-



Σχ. 11.1δ.



Σχ. 11.1ε.

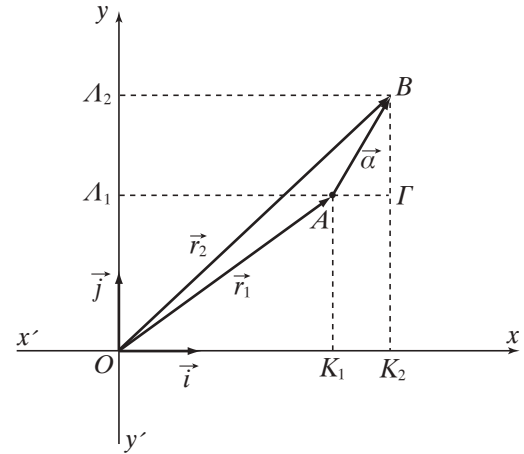
μάζεται **τεταγμένη** του $\vec{a}$ και οι δύο μαζί ονομάζονται **συντεταγμένες** του $\vec{a}$ και γράφομε $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

Από το σχήμα 11.1στ διαπιστώνουμε ότι για το διάνυσμα $\vec{a}$ ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{K_1K_2} + \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{K_1K_2}$ και $\overrightarrow{A_1A_2}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του $\overrightarrow{AB}$ κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox και Oy . Για τα διανύσματα $\overrightarrow{K_1K_2}$ και $\overrightarrow{A_1A_2}$ επίσης ισχύει ότι $\overrightarrow{K_1K_2} = a_1 \cdot \vec{i}$ και $\overrightarrow{A_1A_2} = a_2 \cdot \vec{j}$.

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AB} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} \text{ ή } \vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}.$$



Σχ. 11.1στ.

11.1.4 Συντεταγμένες διανύσματος στο χώρο.

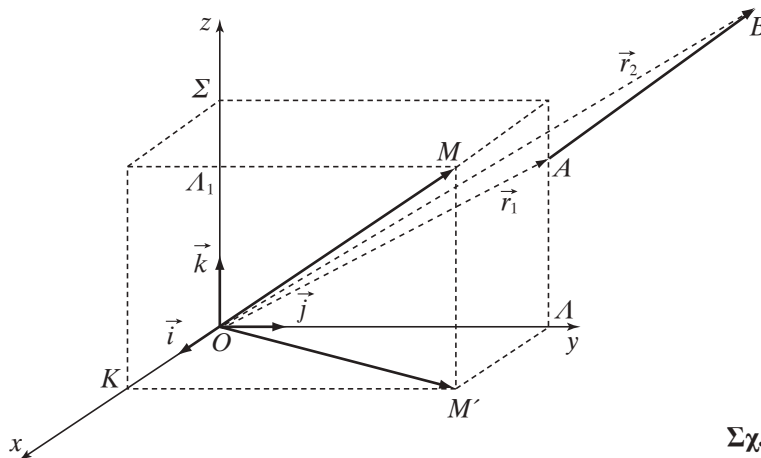
Όπως ορίσαμε την έννοια του διανύσματος στο επίπεδο, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του διανύσματος στο χώρο. Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα στον τρισδιάστατο χώρο, με μοναδιαία διαστήματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$, με $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, όπου τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$ αποτελούν μια βάση του χώρου. Ο άξονας x' ονομάζεται **άξονας των τετμημένων**, ο y' **άξονας των τεταγμένων** και ο z' **άξονας των κατηγμένων** (σχ. 11.1ζ).

Έστω ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ στο ορθοκανονικό σύστημα $Oxyz$ (σχ. 11.1ζ). Έστω ότι φέρνουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ ίσο με το $\overrightarrow{AB}$ και προβάλλουμε αυτό σε άξονες με επίπεδα παράλληλα από το M προς τα επίπεδα yOz , xOz , xOy που τέμνουν τους άξονες στα σημεία K , Λ , Σ αντίστοιχα. Τα επίπεδα yOz , xOz , xOy ονομάζονται **συντεταγμένα επίπεδα**. Ο αριθμός $(\overline{OK}) = \alpha$ ονομάζεται **τετμημένη** του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, ο αριθμός $(\overline{O\Lambda}) = \beta$ ονομάζεται **τεταγμένη** και ο αριθμός $(\overline{O\Sigma}) = \gamma$ ονομάζεται **κατηγμένη** του διανύσματος.

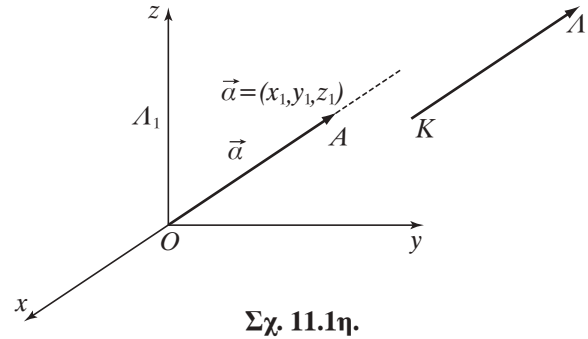
Οι αριθμοί α , β , γ ονομάζονται **συντεταγμένες** του $\overrightarrow{OM}$, άρα και του $\overrightarrow{AB}$ και γράφομε $\overrightarrow{OM} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ή $\overrightarrow{AB} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Ισχύει επίσης ότι: $\overline{OK} = \alpha \cdot \vec{i}$, $\overline{O\Lambda} = \beta \cdot \vec{j}$, $\overline{O\Sigma} = \gamma \cdot \vec{k}$, και άρα αποδεικνύεται ότι:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k} \text{ και } \overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k}.$$



Σχ. 11.1ζ.

Αν τώρα $a = (x_1, y_1, z_1)$ είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}^3$, τότε με $\vec{a}$ θα παριστάνομε το διάνυσμα που έχει αρχή το $(0, 0, 0)$ και πέρας το σημείο (x_1, y_1, z_1) (σχ. 11.1η). Το διάνυσμα $\vec{a}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσεως** του σημείου (x_1, y_1, z_1) . Επειδή υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων θέσεως του χώρου $\mathbf{R}^3$ (ή του επιπέδου $\mathbf{R}^2$), μπορούμε να ταυτίσουμε το διάνυσμα $\vec{a}$ με το σημείο $A = (x_1, y_1, z_1)$ (αντ. $A = (x_1, y_1)$), δηλαδή $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ (αντ. $\vec{a} = (x_1, y_1)$).



Σχ. 11.1η.

Παρατήρηση: Αν το $\vec{a}$ είναι το διάνυσμα θέσεως του σημείου A , τότε κάθε διάνυσμα που είναι ίσο με $\vec{a}$ θα συμβολίζεται, χάριν ευκολίας, επίσης με $\vec{a}$ (σχ. 11.1η).

Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε κυρίως σε διανύσματα του $\mathbf{R}^3$.

11.1.5 Πράξεις και ιδιότητες διανυσμάτων.

Ανάμεσα στα διανύσματα του χώρου $\mathbf{R}^3$ ή του επιπέδου $\mathbf{R}^2$ μπορούμε να ορίσουμε τις παρακάτω πράξεις:

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ δύο διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ και $\lambda \in \mathbf{R}$, ορίζουμε τις εξής πράξεις:

α) **Πρόσθεση:**

$$\vec{a} + \vec{\beta} = \overline{a + \beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

β) **Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός:**

$$\lambda \vec{a} = \overline{\lambda a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

γ) **Εσωτερικό γινόμενο:**

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

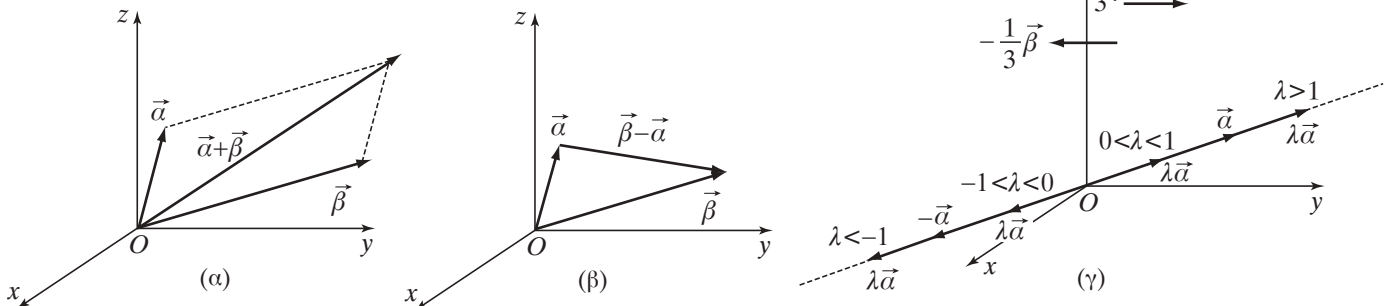
Το **μηδενικό διάνυσμα** του $\mathbf{R}^3$ είναι το διάνυσμα $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ του $\mathbf{R}^3$ που ικανοποιεί τη σχέση $\vec{a} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ονομάζεται **αντίθετο διάνυσμα** του $\vec{a}$ και συμβολίζεται με $-\vec{a}$.

Στο σχήμα 11.1θ δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία της προσθέσεως και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι πράξεις αυτές στο $\mathbf{R}^2$. Δηλαδή αν $\vec{a}, \vec{\beta} \in \mathbf{R}^2$, με $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε:

α) $\vec{a} + \vec{\beta} = \overline{a + \beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$

β) $\lambda \vec{a} = \overline{\lambda a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1), \lambda \in \mathbf{R}.$

γ) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$



Σχ. 11.1θ.

Με τη βοήθεια των συντεταγμένων ενός διανύσματος μπορούμε να υπολογίσουμε το **μέτρο** του. Πράγματι, για ένα διάνυσμα $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbf{R}^3$, ισχύει:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (11.1.1)$$

Για το διάνυσμα $\vec{a} = (x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$, αντίστοιχα ισχύει:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (11.1.2)$$

Αν τα $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο σημεία του χώρου, τότε για το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ισχύει $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Η **απόσταση** d των σημείων A και B θα είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $|\overrightarrow{AB}|$, δηλαδή:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (11.1.3)$$

Αντίστοιχα, αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, για το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ισχύει $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, και η **απόσταση** d των σημείων A και B θα είναι:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (11.1.4)$$

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου προκύπτουν εύκολα οι παρακάτω **ιδιότητες**:

Για $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ και $\lambda \in \mathbf{R}$ ισχύουν:

α) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

β) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$

γ) $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

δ) $\lambda \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{\beta})$

ε) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ και $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

**Μεταθετική
Επιμεριστική**

Ισχύει η ακόλουθη βασική πρόταση:

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$, διανύσματα του $\mathbf{R}^3$, τότε:

α) $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ (ανισότητα Cauchy – Schwarz),

β) $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (νόμος παραλληλογράμμου),

γ) $|\vec{a} \pm \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$ (τριγωνική ανισότητα).

Παρατηρήσεις:

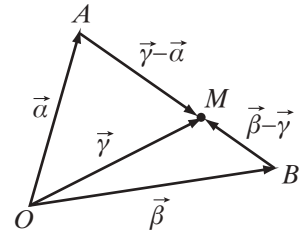
α) Για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή: $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \neq \vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$.

β) Δεν ισχύει ο νόμος της διαγραφής, δηλαδή αν $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$, τότε δεν ισχύει αναγκαστικά $\vec{a} = \vec{\beta}$.

11.1.6 Συντεταγμένες σημείου που χωρίζει ευθύγραμμο τμήμα σε λόγο λ .

Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ του $\mathbf{R}^3$, με διανύσματα θέσεως $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα. Αν το σημείο M χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λόγο λ (σχ. 11.1ι) και $\vec{\gamma}$ το διάνυσμα θέσεως που αντιστοιχεί στο σημείο M , τότε θα ισχύει:

$$\vec{\gamma} - \vec{a} = \lambda(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Leftrightarrow \vec{\gamma} + \lambda\vec{\gamma} = \lambda\vec{\beta} + \vec{a} \Leftrightarrow \vec{\gamma}(\lambda + 1) = \lambda\vec{\beta} + \vec{a} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \frac{\vec{a} + \lambda\vec{\beta}}{1 + \lambda}.$$



Σχ. 11.1ι.

Αν το $\vec{\gamma} = (x, y, z)$, τότε από την τελευταία σχέση προκύπτουν οι συντεταγμένες του σημείου M :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \text{ και } z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \text{ με } \lambda \neq -1. \quad (11.1.5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.1.1

Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , όπου $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ σημεία του $\mathbf{R}^3$, με διανύσματα θέσεως $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα. Από την εξίσωση (11.1.5) για $\lambda = 1$, οι συντεταγμένες του σημείου M θα ισχύει:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ και } z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

11.1.7 Γραμμική εξάρτηση – Ανεξαρτησία διανυσμάτων.

Αν θεωρήσουμε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ του $\mathbf{R}^3$, τότε κάθε έκφραση της μορφής $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, όπου τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ του χώρου $\mathbf{R}^3$ λέμε ότι είναι **γραμμικά εξαρτημένα**, αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, όχι όλοι μηδέν, ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, λέμε ότι είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**. Στην περίπτωση αυτή από μια σχέση της μορφής

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0},$$

συμπεραίνομε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ του $\mathbf{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

α) Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ του $\mathbf{R}^3$ λέμε ότι είναι **συγγραμμικά**, αν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Δύο συγγραμμικά διανύσματα διαφορετικά από το μηδενικό $\vec{0}$, ονομάζονται **παράλληλα**.

β) Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του $\mathbf{R}^3$ λέμε ότι είναι **συνεπίπεδα**, αν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Παρατηρήσεις:

α) Αν έχουμε **δύο συγγραμμικά** διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του $\mathbf{R}^3$, τότε το ένα από αυτά γράφεται σαν **αλγεβρικό πολλαπλάσιο** του άλλου. Για παράδειγμα ισχύει $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbf{R}$.

β) Αντίστοιχα, αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι **συνεπίπεδα**, τότε κάποιο από αυτά γράφεται σαν **γραμμικός συνδυασμός** των άλλων. Για παράδειγμα, το $\vec{\gamma}$ μπορεί να γραφεί ως $\vec{\gamma} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ (σχ. 11.1α).

Έστω τώρα δύο διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ του $\mathbf{R}^2$ με $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και έστω $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$. Είναι φανερό ότι τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι **παράλληλα, αν η οριζούσα** που έχει ως πρώτη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$ και ως δεύτερη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$, **είναι μηδέν**. Άρα:

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.1.6)$$

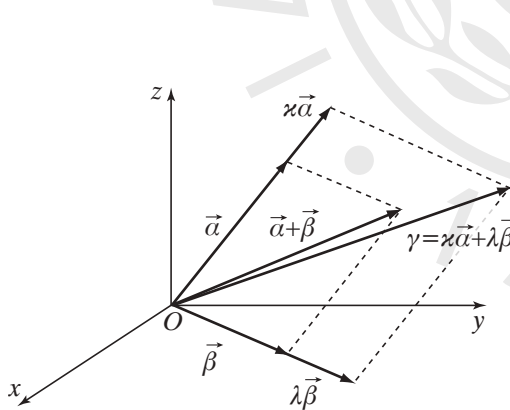
Δύο διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ του $\mathbf{R}^3$ είναι **ορθογώνια**, όταν ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι διαφορετικά από το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$, τότε τα διανύσματα αυτά λέμε ότι είναι **κάθετα**.

Είναι φανερό ότι το **μηδενικό διάνυσμα** $\vec{0}$ είναι **ορθογώνιο** και **συγγραμμικό** με οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{a}$ του $\mathbf{R}^3$.

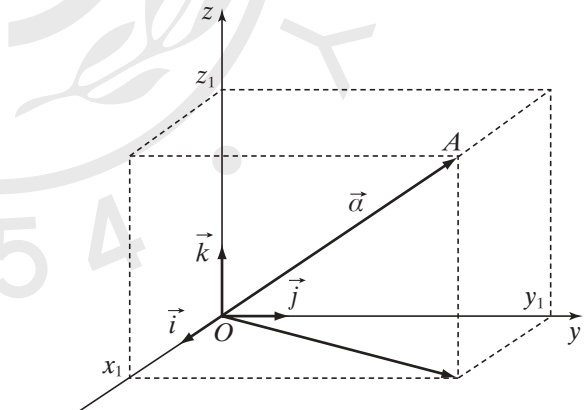
Τέλος, τα διανύσματα $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ και $\vec{k} = (0, 0, 1)$, αποτελούν όπως λέμε μια **ορθοκανονική βάση** του $\mathbf{R}^3$, αφού για τα διανύσματα αυτά ισχύει:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \text{ και } |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$$

ενώ, επιπλέον, το διάνυσμα $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ γράφεται σαν **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$ (σχ. 11.1β), $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$.



Σχ. 11.1α.



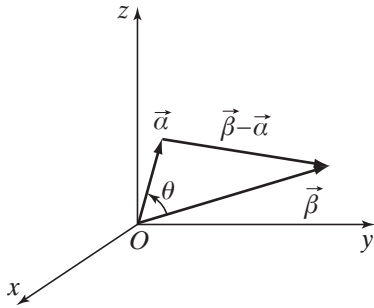
Σχ. 11.1β.

11.1.8 Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

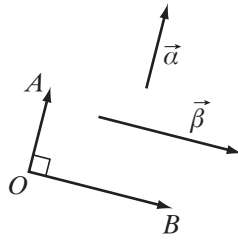
Αν τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbf{R}^3$, η γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων αυτών ορίζεται από τη σχέση:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}, \theta \in [0, \pi]. \quad (11.1.7)$$

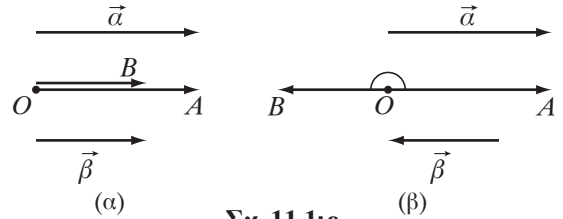
Αποδεικνύεται ότι η γωνία θ ταυτίζεται με την κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και



Σχ. 11.1.1γ.



Σχ. 11.1.1δ.



Σχ. 11.1.1ε.

$\vec{\beta}$ (σχ. 11.1.1γ). Η γωνία θ μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ θα συμβολίζεται με $(\vec{a}, \vec{\beta})$.

Παρατηρήσεις:

α) Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του $\mathbf{R}^3$ είναι **κάθετα** (σχ. 11.1.1δ), όταν και μόνο όταν οι φορείς τους είναι κάθετοι (με τη γεωμετρική έννοια) και γράφουμε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

β) Αν δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι **παράλληλα**, δηλαδή ισχύει $\vec{\beta} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (όπως είδαμε σε προηγούμενη παρατήρηση), τότε η σχέση (11.1.7) γίνεται:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|} = \frac{\vec{a} \cdot \lambda \vec{a}}{|\vec{a}| |\lambda| |\vec{a}|} = \frac{\lambda \vec{a} \cdot \vec{a}}{|\lambda| |\vec{a}|^2} = \frac{\lambda |\vec{a}|^2}{|\lambda| |\vec{a}|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Αν $\lambda > 0$, τότε $\cos \theta = 1$, άρα $\theta = 0$ [σχ. 11.1.1ε(α)]. Αν $\lambda < 0$, τότε $\cos \theta = -1$, άρα $\theta = \pi$ [σχ. 11.1.1ε(β)].

Η γωνία δύο διανυσμάτων μπορεί επίσης να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (11.1.1), (11.1.2) και (11.1.7), ως εξής:

α) Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (11.1.8)$$

β) Αν $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$, ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (11.1.9)$$

11.1.9 Συνημίτονα κατευθύνσεως διανύσματος.

Έστω $\vec{a} = (x, y, z)$ ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^3$ και $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ οι γωνίες που σχηματίζει αυτό, με τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ και $\vec{k}$ αντίστοιχα (σχ. 11.1.1στ).

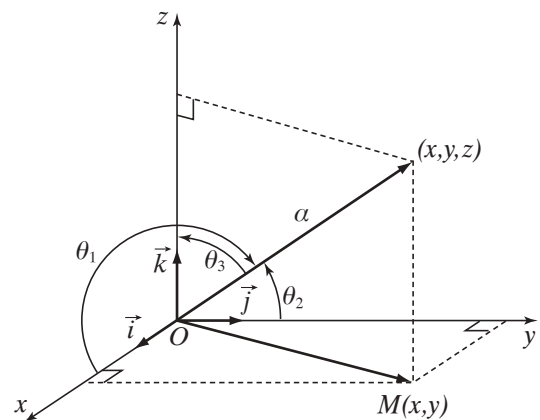
Οι αριθμοί

$$\lambda = \cos \theta_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{a}|},$$

$$\mu = \cos \theta_2 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{a}|},$$

$$\nu = \cos \theta_3 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{a}|},$$

ονομάζονται **συνημίτονα κατευθύνσεως** του διανύσματος $\vec{a}$.



Σχ. 11.1.1στ.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι για τα συνημίτονα κατευθύνσεως ισχύει: $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, αφού:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \frac{x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{z^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

11.1.10 Ορθογώνιες προβολές.

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbf{R}^3$. Το διάνυσμα $\vec{a}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\vec{a} = \vec{\gamma} + \vec{\delta}$, όπου το $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$ και το $\vec{\delta}$ κάθετο στο $\vec{\beta}$ (σχ. 11.1ιζ). Επειδή τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, ισχύει $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\beta}$. Επομένως, έχουμε $\vec{a} = \lambda \vec{\beta} + \vec{\delta}$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{a}$ με το $\vec{\beta}$, βρίσκουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = (\lambda \vec{\beta} + \vec{\delta}) \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}) + \vec{\delta} \cdot \vec{\beta}.$$

Αλλά $\vec{\delta} \cdot \vec{\beta} = 0$, αφού τα $\vec{\delta}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, άρα $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})$. Δηλαδή ισχύει: $\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}$.

Άρα για το διάνυσμα $\vec{a}$, έχουμε $\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta} + \vec{\delta}$. Το διάνυσμα:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta} \quad (11.1.10)$$

ονομάζεται **ορθογώνια προβολή** του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}$. Το μήκος το ορθογώνιας προβολής είναι:

$$|\vec{\gamma}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|} \quad (11.1.11)$$

Παρατήρηση: Αν το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαίο, τότε θα έχουμε: $\vec{\gamma} = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}$ και $|\vec{\gamma}| = |\vec{a} \cdot \vec{\beta}|$.

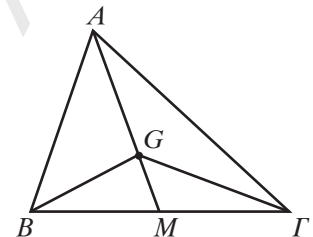
Ασκήσεις

11.1.1 Αν το σημείο $G(x, y)$ είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου G (σχ. 11.1ιη).

Λύση.

Αν το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε σύμφωνα με το παράδειγμα 11.1.1, ισχύει:

$$M\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right).$$



Σχ. 11.1ιη.

Όπως είναι γνωστό από την ευκλείδεια γεωμετρία, το βαρύκεντρο G είναι το σημείο τομής των διαμέσων και χωρίζει το διάνυσμα $\vec{AM}$ σε μερικό λόγο $\lambda = 2$. Από την εξίσωση (11.1.5), έχουμε:

$$x = \frac{x_1 + 2 \frac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2}, \quad y = \frac{y_1 + 2 \frac{y_2 + y_3}{2}}{1 + 2}, \quad \text{ή} \quad x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$\text{άρα } G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

11.1.2 Αν το βαρύκεντρο G ενός τριγώνου ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων, να βρείτε τις οι συντεταγμένες της κορυφής Γ , αν ξέρουμε τις άλλες δύο κορυφές $A(2, 5)$ και $B(-1, 1)$.

Λύση.

Επειδή το βαρύκεντρο ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων, ισχύει ότι $G(0,0)$. Αν $\Gamma(x,y)$ το ζητούμενο σημείο, από την προηγούμενη εφαρμογή ισχύει:

$$0 = \frac{2-1+x}{3} \quad \text{και} \quad 0 = \frac{5+1+y}{3}, \quad \text{άρα} \quad x = -1 \quad \text{και} \quad y = -6. \quad \text{Δηλαδή} \quad \Gamma(-1, -6).$$

11.1.3 Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a} = (9, 6, -3)$ και $\vec{\beta} = (-3, -2, 1)$ είναι συγγραμμικά.

Λύση.

Πράγματι, έχουμε $\vec{a} = (9, 6, -3) = -3(-3, -2, 1) = -3\vec{\beta}$. Άρα για $\lambda = -3$ ισχύει $\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$ και τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

11.1.4 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (5, -5)$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες των διανυσμάτων $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-3, -4)$.

Λύση.

Έστω $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$, όπου $\vec{\gamma}_1 \parallel \vec{a}$ και $\vec{\gamma}_2 \parallel \vec{\beta}$. Τότε $\vec{\gamma}_1 = \kappa\vec{a}$ και $\vec{\gamma}_2 = \lambda\vec{\beta}$, οπότε η σχέση γράφεται:

$$\vec{\gamma}_1 = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow (5, -5) = \kappa(2, 1) + \lambda(-3, -4) \Leftrightarrow (5, -5) = (2\kappa - 3\lambda, \kappa - 4\lambda)$$

οπότε $2\kappa - 3\lambda = 5$ και $\kappa - 4\lambda = -5$. Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων προκύπτει $\lambda = 3$ και $\kappa = 7$. Άρα $\vec{\gamma}_1 = 7\vec{a} = (14, 7)$ και $\vec{\gamma}_2 = 3\vec{\beta} = (-9, -12)$.

11.1.5 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{\beta} = (2, 5)$ και $\vec{\gamma} = (4, 7)$.

α) Να αποδείξετε ότι ανά δύο δεν είναι παράλληλα.

β) Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση.

α) Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία (11.1.6), ισχύει,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 3 \neq 0, \quad \text{άρα τα } \vec{a}, \vec{\beta} \text{ δεν είναι παράλληλα.}$$

Ομοίως $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 3 \neq 0$, άρα τα $\vec{a}, \vec{\gamma}$ δεν είναι παράλληλα. Επομένως ούτε τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι παράλληλα.

β) Για να γράψουμε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, αρκεί να βρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$, ώστε να ισχύει $\vec{\gamma} = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$.

Πράγματι, $\vec{\gamma} = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow (4, 7) = \kappa(1, 1) + \lambda(2, 5) \Leftrightarrow (4, 7) = (\kappa, \kappa) + (2\lambda, 5\lambda)$.

Επομένως, έχουμε το σύστημα $\begin{cases} 4 = \kappa + 2\lambda \\ 7 = \kappa + 5\lambda \end{cases}$, η λύση του οποίου είναι $\kappa = 2$ και $\lambda = 1$. Άρα $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$.

11.1.6 Να βρείτε τον ακέραιο αριθμό x , ώστε η απόσταση των σημείων $A(3x+1, 2)$ και $B(1, 4-5x)$ να είναι 10. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Γ του άξονα $y'y$, για το οποίο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή Γ .

Λύση.

Επειδή η απόσταση των σημείων A και B είναι 10, ισχύει:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{[1-(3x+1)]^2 + [(4-5x)-2]^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(-3x)^2 + (2-5x)^2} = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + 4 - 20x + 25x^2 = 100 \Leftrightarrow 34x^2 - 20x - 96 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{24}{17} \end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος ακέραιος αριθμός x είναι $x=2$. Επομένως, $A(7, 2)$ και $B(1, -6)$.

Επειδή το σημείο Γ ανήκει στον άξονα $y'y$, θα είναι $\Gamma(0, y)$ και αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή Γ , θα ισχύει $|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Επομένως:

$$\sqrt{(0-7)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (y+6)^2} \Leftrightarrow 49 + y^2 - 4y + 4 = 1 + y^2 + 12y + 36 \Leftrightarrow 16y = 16 \Leftrightarrow y = 1.$$

Άρα $\Gamma(0, 1)$.

11.1.7 Αν $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, να βρείτε τα συνημίτονα κατευθύνσεως του $\vec{a}$.

Λύση.

Επειδή $\vec{a} = (1, 1, -1)$ και $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ τα συνημίτονα κατευθύνσεως του διανύσματος $\vec{a}$, θα είναι:

$$\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \mu = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \nu = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

11.1.8 Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{a} = (3, -2, -1)$ και $\vec{\beta} = (2, 1, -4)$ είναι κάθετα.

Λύση.

Ισχύει, $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = (3, -2, -1) \cdot (2, 1, -4) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) = 6 - 2 + 4 = 8 \neq 0$.

Άρα, τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, δηλαδή $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

11.1.9 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 0, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 1, 0)$. Να βρείτε τη γωνία θ που σχηματίζουν.

Λύση.

Από τον τύπο (11.1.9), έχουμε ότι

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1+0+1} \sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

11.1.10 Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{3}$. Αν είναι $|\vec{a}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 4$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, β) $|2\vec{a} + \vec{\beta}|^2$, γ) $|2\vec{a} + \vec{\beta}|$.

Λύση.

α) Από τον τύπο (11.1.7), έχουμε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$,

β) Ισχύει, $|2\vec{a} + \vec{\beta}|^2 = (2\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{a} + \vec{\beta}) = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 6 + 16 = 76$,

γ) $|2\vec{a} + \vec{\beta}| = \sqrt{|2\vec{a} + \vec{\beta}|^2} = \sqrt{76}$.

11.1.11 Να βρείτε την προβολή $\vec{\gamma}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{a}$, αν:

α) $\vec{a} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-1, 3)$, β) $\vec{a} = (1, 1, 1)$ και $\vec{\beta} = (-2, 2, 3)$.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (11.1.10) έχουμε:

$$\alpha) \vec{\gamma} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{(2, -1) \cdot (-1, 3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}^2} \cdot (2, -1) = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3}{5} \cdot (2, -1) = (-2, 1),$$

$$\beta) \vec{\gamma} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (-2, 2, 3)}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})^2} \cdot (1, 1, 1) = \frac{1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{3} \cdot (1, 1, 1) = (1, 1, 1).$$

11.1.12 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (5, -5)$ σε δύο συνιστώσες κάθετες των διανυσμάτων $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-3, -4)$.

Λύση.

Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{a}_1$, όπου $\vec{a}_1 \perp \vec{a}$, δηλαδή $\vec{a}_1 \cdot \vec{a} = 0$, άρα $\vec{a}_1 = (-1, 2)$. Αντίστοιχα, θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}_1$, όπου $\vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}$ και $\vec{\beta}_1 = (-4, 3)$. Ισχύει ότι $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$ και από την εκφώνηση ότι $\vec{\gamma}_1 \parallel \vec{a}_1$ και $\vec{\gamma}_2 \parallel \vec{\beta}_1$. Άρα $\vec{\gamma}_1 = \kappa \vec{a}_1$ και $\vec{\gamma}_2 = \lambda \vec{\beta}_1$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\vec{\gamma} = \kappa \vec{a}_1 + \lambda \vec{\beta}_1 \Leftrightarrow (5, -5) = \kappa(-1, 2) + \lambda(-4, 3) \Leftrightarrow (5, 5) = (-\kappa - 4\lambda, 2\kappa + 3\lambda).$$

Επομένως, προκύπτει το σύστημα: $-\kappa - 4\lambda = -5$ και $2\kappa + 3\lambda = -5$, του οποίου η λύση είναι $\lambda = -1$ και $\kappa = -1$.

Συνεπώς θα είναι: $\vec{\gamma}_1 = (-1) \cdot (-1, 2) = (1, -2)$ και $\vec{\gamma}_2 = (-1) \cdot (-4, 3) = (4, -3)$.

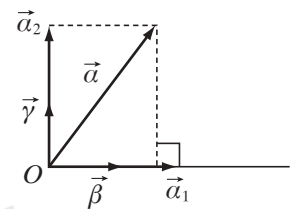
11.1.13 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{a} = (4, 7)$ σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-1, 2)$ και μία κάθετη προς αυτό (σχ. 11.1θ).

Λύση.

Εύκολα βρίσκουμε ότι ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ κάθετο στο $\vec{\beta}$ είναι το $\vec{\gamma}_1 = (2, 1)$, αφού θα ισχύει $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = 0$. Για το διάνυσμα $\vec{a}$, επομένως, ισχύει ότι: $\vec{a} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma} \Leftrightarrow (4, 7) = \kappa(-1, 2) + \lambda(2, 1)$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} -\kappa + 2\lambda = 4 \\ 2\kappa + \lambda = 7 \end{cases}, \text{ η λύση του οποίου είναι } \kappa = 2 \text{ και } \lambda = 3.$$

Άρα το διάνυσμα $\vec{a}$, αναλύεται σε δύο άλλες συνιστώσες $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ ώστε να ισχύει $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, όπου $\vec{a}_1 = \kappa \vec{\beta} = (-2, 4)$ και $\vec{a}_2 = \lambda \vec{\gamma} = (6, 3)$.



Σχ. 11.1θ.

11.2 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

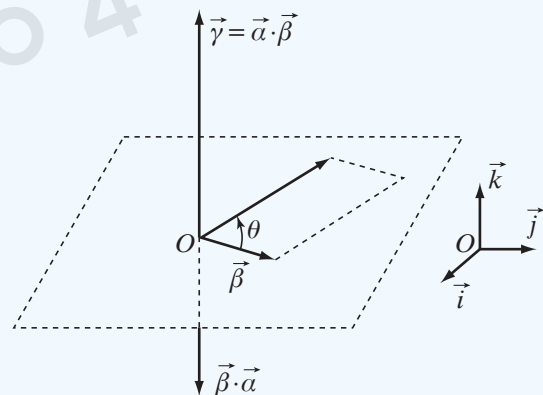
Ανάμεσα σε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα α και β του $\mathbf{R}^3$ μπορούμε να ορίσουμε το εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενό τους, ως εξής:

Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζουμε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$, το οποίο συμβολίζουμε με $\vec{\gamma} = \vec{a} \times \vec{\beta}$ (σχ. 11.2α) και για το οποίο ισχύουν τα εξής:

α) Έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ (άρα $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$).

β) Έχει φορά τέτοια, ώστε η διατεταγμένη τριάδα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = \vec{a} \times \vec{\beta}$ να είναι δεξιόστροφη και τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ να σχηματίζουν τριάδα όμοια με αυτή των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

γ) Έχει μέτρο $|\vec{\gamma}| = |\vec{a} \times \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\theta$, όπου θ η γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ με $0 \leq \theta \leq \pi$.



Σχ. 11.2α.

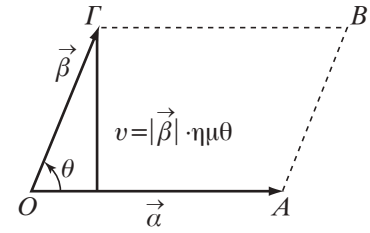
Παρατηρήσεις:

α) Αν ένα από τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε το εξωτερικό γινόμενο θα είναι $\vec{0}$. Δηλαδή $\vec{\gamma} = \vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{0}$.

β) Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά και μη μηδενικά διανύσματα, τότε το εξωτερικό γινόμενο είναι $\vec{0}$ αφού $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$ και άρα $\eta\mu\theta = 0$.

γ) Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου και το (σχ. 11.2β) έχουμε $|\vec{a} \times \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\theta$, αλλά $|\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\theta = v$ και $E_{OAB\Gamma} = |\vec{a}| \cdot v$, άρα προκύπτει:

$$E_{OAB\Gamma} = |\vec{a} \times \vec{\beta}|.$$

**Σχ. 11.2β.**

Συνεπώς, το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα δυο διανύσματα.

Από τον ορισμό του **εξωτερικού γινομένου** προκύπτουν οι παρακάτω **ιδιότητες**:

α) $\vec{a} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{a}$

β) $\vec{a} \times (\vec{\beta} \pm \vec{\gamma}) = \vec{a} \times \vec{\beta} \pm \vec{a} \times \vec{\gamma}$ Επιμεριστική ιδιότητα

γ) $\lambda \vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{a} \times \lambda \vec{\beta} = \lambda(\vec{a} \times \vec{\beta}), \lambda \in \mathbf{R}.$

Στη συνέχεια παρατίθεται η **αναλυτική έκφραση του εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων**:

Αν τα $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, τότε έχουμε $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ και $\vec{\beta} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ γράφεται ως εξής:

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Επομένως, το εξωτερικό διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το ανάπτυγμα μιας συμβολικής ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, δηλαδή:

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Ασκήσεις

11.2.1 Να βρείτε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a} = (2, -1, 3)$ και $\vec{\beta} = (1, 0, 4)$.

Λύση.

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -4\vec{i} - 5\vec{j} + 1\vec{k} \text{ άρα } \vec{a} \times \vec{\beta} = (-4, -5, 1).$$

11.2.2 Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(1,2)$, $B(3,4)$, $\Gamma(4,-7)$.

Λύση.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ δημιουργούν το παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Gamma$, με $\overrightarrow{AB} = (3-1, 4-2) = (2, 2)$ και $\overrightarrow{AG} = (4-1, -7-2) = (3, -9)$. Τότε, όπως έχουμε αναφέρει, το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}$ εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Delta\Gamma$. Άρα, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Delta\Gamma)$.

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 24\vec{k} = (0, 0, -24)$$

(αφού $z = 0$).

$$\text{Άρα } |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}| = \sqrt{0+0+(-24)^2} = 24 \text{ και } (AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}24 = 12.$$

11.3 Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων.

Στις παραγράφους 11.1 και 11.2 ορίσαμε το εσωτερικό γινόμενο (που είναι ένας πραγματικός αριθμός) και το εξωτερικό γινόμενο (που είναι διάνυσμα) δύο διανυσμάτων. Με αντίστοιχο τρόπο ορίζουμε το μεικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων, ως εξής:

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα του $\mathbf{R}^3$, τότε **μεικτό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, ονομάζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{a} \times \vec{\beta}$ με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ και συμβολίζουμε:

$$(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}.$$

Στη συνέχεια παρατίθεται η **αναλυτική του έκφραση του μεικτού γινομένου των διανυσμάτων**:

Αν τα $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{\gamma}(x_3, y_3, z_3)$ είναι τρία διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, τότε έχουμε ότι:

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Άρα:

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο $\mathbf{R}^3$, με $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3, z_3)$, τότε το **μεικτό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισούται με:

$$(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Το **μεικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων** δεν μεταβάλλεται, αν αλλάξουμε τη θέση των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ κυκλικά, ενώ αλλάζει πρόσημο αν αντιμεταθέσουμε δύο, οποιαδήποτε από αυτά.

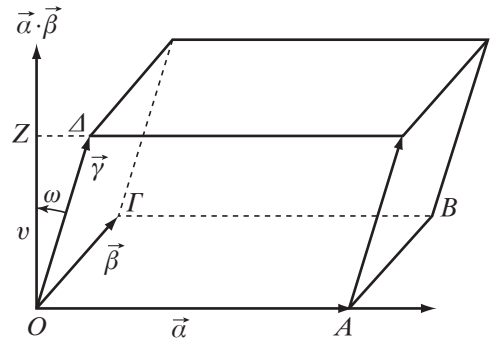
11.3.1 Γεωμετρική ερμηνεία μεικτού γινομένου διανυσμάτων.

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μη συνεπίπεδα. Αν τα μεταφέρουμε σε ένα ορθοκανονικό σύ-

σημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ με κοινή αρχή, έστω O , τότε τα διανύσματα αυτά παράγουν το παραλληλεπίπεδο $OAB\Gamma$ (σχ. 11.3).

Όπως αναφέραμε, ισχύει ότι το *εμβαδόν* του παραλληλογράμμου $OAB\Gamma$ ισούται με το *εξωτερικό γινόμενο*, δηλαδή $E_{OAB\Gamma} = |\vec{a} \times \vec{\beta}|$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο $OZ\Delta$ έχουμε $v = |\vec{\gamma}| \sin \omega$, όπου ω η γωνία που σχηματίζεται από τα $\vec{a} \times \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Άρα ο *όγκος* του παραλληλεπιπέδου είναι:

$$V = |\vec{a} \times \vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \sin \omega = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = (\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}).$$



Σχ. 11.3.

Το μεικτό γινόμενο είναι θετικό, αν η διατεταγμένη τριάδα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι δεξιόστροφη, δηλαδή αν τα $\vec{a} \times \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ σχηματίζουν γωνία $\omega < \frac{\pi}{2}$, ενώ είναι αρνητικό αν η διατεταγμένη τριάδα είναι αριστερόστροφη, δηλαδή αν τα $\vec{a} \times \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ σχηματίζουν γωνία $\omega > \frac{\pi}{2}$.

11.3.2 Ιδιότητες μεικτού γινομένου διανυσμάτων.

Από τον ορισμό του μεικτού γινομένου, αλλά και από την γεωμετρική του ερμηνεία, προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α) Το μεικτό γινόμενο μηδενίζεται, αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα (αφού τότε ο *όγκος* θα είναι μηδέν).

$$(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

β) Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει: $(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{a} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$.

γ) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ διανύσματα, τότε: $\lambda(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\lambda \vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \lambda \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \vec{\beta} \lambda \vec{\gamma})$.

Άσκηση.

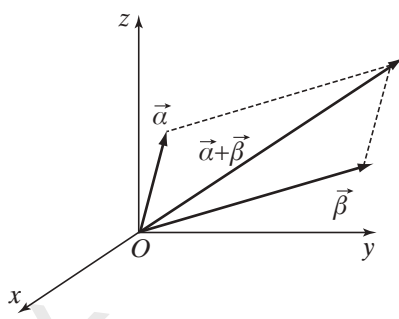
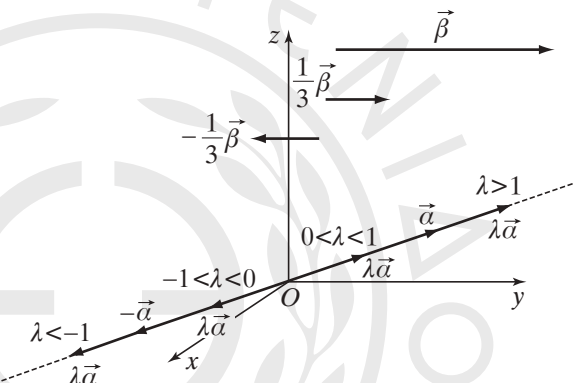
11.3.1 Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{\beta} = (-1, 1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (1, 2, -1)$ αποτελούν δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο σύστημα.

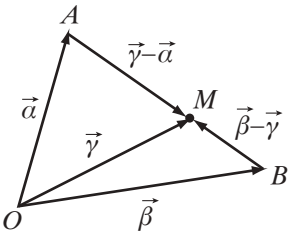
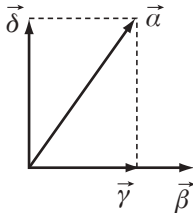
Λύση.

$$\text{Έχουμε: } (\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

Άρα αποτελούν αριστερόστροφο σύστημα.

11.4 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Πρόσθεση διανυσμάτων:	$\vec{a} + \vec{\beta} = \overrightarrow{a + \beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ 
Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός:	$\lambda \vec{a} = \overrightarrow{\lambda a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ 
Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων:	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$
Μέτρο διανύσματος:	$ \vec{a} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \text{ αν } \vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$
	$ \vec{a} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \text{ αν } \vec{a} = (x_1, y_1)$
Απόσταση d δύο σημείων A και B:	$d = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$ αν $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$
	$d = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{ αν } A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2)$
Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου	$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$ $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ $\lambda \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{\beta})$ $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ και } \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$
Ανισότητα Cauchy – Schwarz	$ \vec{a} \cdot \vec{\beta} \leq \vec{a} \cdot \vec{\beta} $

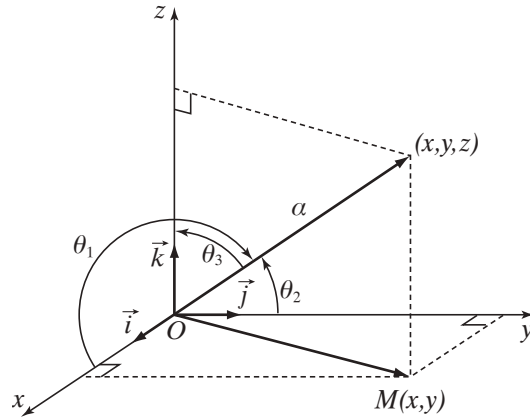
Συντεταγμένες σημείου που χωρίζει ευθύγραμμο τμήμα σε λόγο λ	 $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$
Γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα	Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ του χώρου $\mathbf{R}^3$ λέμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, όχι όλοι μηδέν, ώστε να ισχύει: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}.$
Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα	Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, λέμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Στην περίπτωση αυτή από μια σχέση της μορφής $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.
Συγγραμμικά διανύσματα	Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ του $\mathbf{R}^3$ λέμε ότι είναι συγγραμμικά, αν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισχύει, $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbf{R}$.
Παράλληλα διανύσματα	Δύο συγγραμμικά διανύσματα διαφορετικά από το μηδενικό $\vec{0}$, ονομάζονται παράλληλα. $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$
Συνεπίπεδα διανύσματα	Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του $\mathbf{R}^3$ λέμε ότι είναι συνεπίπεδα, αν είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Ορθογώνια – Κάθετα διανύσματα	Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ του $\mathbf{R}^3$ είναι ορθογώνια, όταν ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι διαφορετικά από το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$, τότε τα διανύσματα αυτά λέμε ότι είναι κάθετα.
Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων	$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{ \vec{a} \vec{\beta} } \quad \theta \in [0, \pi]$
	$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad \text{αν } \vec{a} = (x_1, y_1), \text{ και } \vec{\beta} = (x_2, y_2)$
	$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$ αν $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, και $\vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$
Ορθογώνια προβολή	 $\vec{\gamma} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{ \vec{\beta} ^2} \vec{\beta}$

**Συνημίτονα κατευθύνσεως
διανύσματος**

$$\lambda = \text{συν}\theta_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{a}|}$$

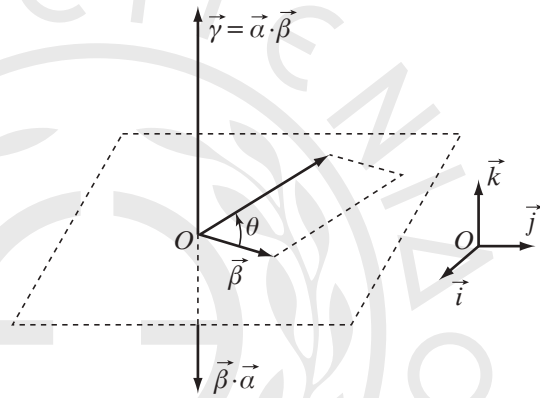
$$\mu = \text{συν}\theta_2 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{a}|}$$

$$\nu = \text{συν}\theta_3 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{a}|}$$



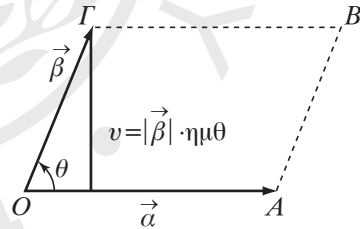
**Εξωτερικό ή διανυσματικό
γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$
και $\vec{\beta}$**

$$\vec{\gamma} = \vec{a} \times \vec{\beta} \quad |\vec{\gamma}| = |\vec{a} \times \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$



Εμβαδόν παραλληλογράμμου

$$E_{\text{OABF}} = |\vec{a} \times \vec{\beta}|$$



**Ιδιότητες εξωτερικού γινομέ-
νου**

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{\beta} \pm \vec{\gamma}) = \vec{a} \times \vec{\beta} \pm \vec{a} \times \vec{\gamma}$$

$$\lambda \vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{a} \times \lambda \vec{\beta} = \lambda (\vec{a} \times \vec{\beta}), \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

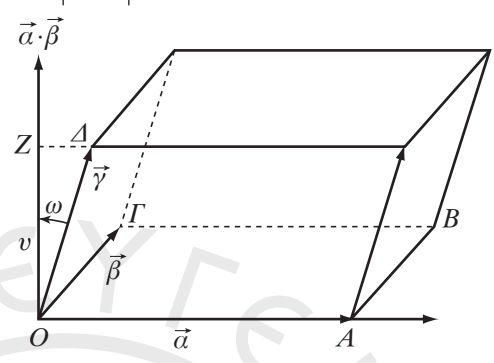
**Αναλυτική έκφραση εξωτερι-
κού γινομένου διανυσμάτων**

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \quad \vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$\text{αν } \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \text{ και } \vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$$

Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων

$$(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$$

<i>Αναλυτική έκφραση μεικτού γινομένου διανυσμάτων</i>	$\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma} = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
<i>Όγκος του παραλληλεπιπέδου</i>	$V = \vec{a} \times \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \sin \omega = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = (\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma})$ 
<i>Ιδιότητες μεικτού γινομένου διανυσμάτων</i>	1. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα ισχύει: $(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ 2. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει: $(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{a} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}).$ 3. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ διανύσματα, τότε: $\lambda(\vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\lambda \vec{a} \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \lambda \vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{a} \vec{\beta} \lambda \vec{\gamma}).$

11.5 Γενικές ασκήσεις.

- 11.5.1** Έστω το διάνυσμα $\vec{a} = (2,1)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$, το οποίο να είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{a}$ και έχει τριπλάσιο μέτρο από το μέτρο του $\vec{a}$.
- 11.5.2** Αν $\vec{a} = (-2,1)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$, για το οποίο ισχύει $2\vec{a} - \vec{u} = \vec{\beta}$.
- 11.5.3** Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (6,5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,-3)$.
- 11.5.4** Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{a} = (-3,4,1)$.
- 11.5.5** Δίνονται τα σημεία A(-2,5) και B(-10,-3). Να βρείτε τα εξής:
α) Σημείο του άξονα x'x που να ισαπέχει από τα A, B.
β) Σημείο της ευθείας (ε): $y = -1$ που να ισαπέχει από τα A, B.
- 11.5.6** Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι A(4,13), B(10,1) και $G\left(4, \frac{19}{3}\right)$, όπου G το βαρύκεντρο του τριγώνου. Να βρείτε το μήκος της πλευράς BΓ.

- 11.5.7** Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-2, 6)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v} = (2, -1)$ και $\vec{w} = (3, 1)$.
- 11.5.8** Αν $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ και $\vec{\gamma} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, να υπολογίσετε τα παρακάτω:
α) $\vec{a} \times \vec{b}$, β) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\gamma}$, γ) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{\gamma}$, δ) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma})$.
- 11.5.9** Αν $A(4, -4, 3)$, $B(2, 4, 3)$ και $\Gamma(8, 6, 6)$ είναι τρία σημεία, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 11.5.10** Αν $A(4, -4, 3)$, $B(2, 4, 3)$, $\Gamma(8, 6, 6)$ και $\Delta(1, -2, 3)$ τέσσερα σημεία, να βρείτε τον όγκο του $AB\Gamma\Delta$.
- 11.5.11** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$, αν είναι γνωστό ότι:
α) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ και $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ και β) $|2\vec{a} + 5\vec{b}| = 10$ και $|2\vec{a} - 5\vec{b}| = 2\sqrt{5}$.
- 11.5.12** Έστω ότι $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ και ότι $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + 3\vec{b}$.
- 11.5.13** Αν ισχύουν οι σχέσεις $\vec{a} + 4\vec{b} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να αποδείξετε ότι:
 $\vec{b} = 2\vec{a}$ και $\vec{\gamma} = -3\vec{a}$.
- 11.5.14** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{a} + \vec{b} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{b}, \vec{\gamma})$ και $(\vec{\gamma}, \vec{a})$.
- 11.5.15** Αν $\vec{a} = (2, x)$ και $\vec{b} = (3, 2)$, να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει:
α) $\vec{a} \perp \vec{b}$. β) $\vec{a} \parallel \vec{b}$. γ) $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.
- 11.5.16** Η ανάλυση ενός διανύσματος $\vec{u}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δίνει $\vec{a} = (-3, 5, 1)$ και $\vec{b} = (10, 6, 2)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$.
- 11.5.17** Έστω $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $\vec{u} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$, να βρείτε συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ τα διανύσματα:
α) $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{u}$ και β) $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{a}$.
- 11.5.18** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{b} + \vec{\gamma}$, αν για τις γωνίες των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ ισχύει ότι $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 1$.
- 11.5.19** Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων: $\vec{a} = (-2, 2, 1)$ και $\vec{b} = (-1, 2, -1)$.
- 11.5.20** Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, να βρείτε τη γωνία $(\vec{b} - \vec{a}, \vec{a})$.
- 11.5.21** Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα, να αποδείξετε ότι τότε και τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$ είναι κάθετα.
- 11.5.22** Δίνονται τα σημεία $B(1, 2)$ και $\Gamma(-1, -6)$. Να βρείτε το σημείο A του άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $(AB) = (A\Gamma)$.
- 11.5.23** Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, να βρείτε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{a} - \vec{b})$.
- 11.5.24** Αν $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ δεν είναι συγγραμμικά.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}$ και $\vec{v} = 2\sqrt{3}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.
- 11.5.25** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{b}$ και $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a} = -6$.

- 11.5.26** Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (23, 14)$ σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (5, 4)$ και μία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\beta} = (16, 4)$.
- 11.5.27** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, να βρείτε τα ακόλουθα:
 α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, β) $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$, γ) $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$, δ) $|\vec{a} + \vec{\beta}|$, ε) $(2\vec{a} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{\beta})$.
- 11.5.28** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{\beta} = (2, 3, 5)$ και $\vec{\gamma} = (1, 1, 2)$, είναι συνεπίπεδα.



ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

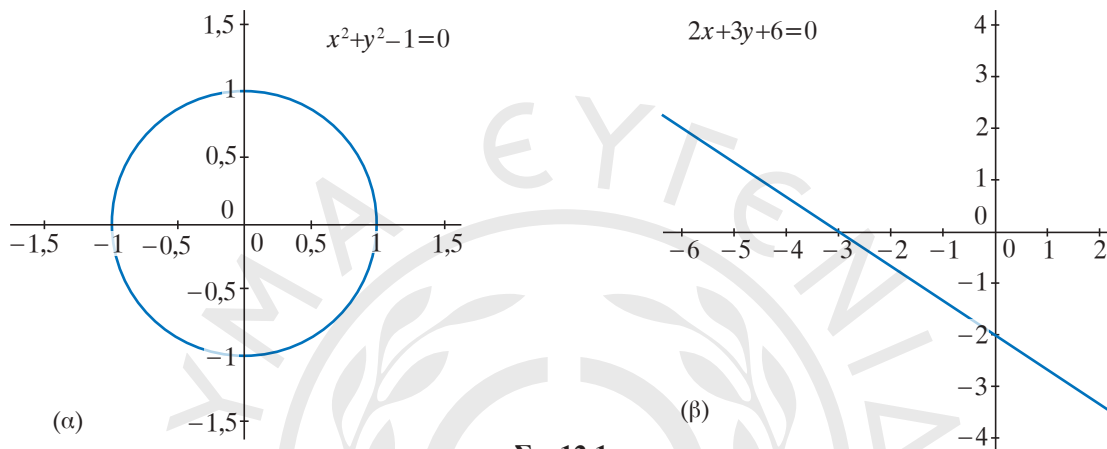
Η Αναλυτική Γεωμετρία αναφέρεται στις εφαρμογές του διανυσματικού λογισμού στη μελέτη των ευθειών, των επιπέδων και των κωνικών τομών. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις σπουδαιότερες καμπύλες του επιπέδου, που είναι η ευθεία και οι κωνικές τομές (κύκλος, έλλειψη, υπερβολή, παραβολή), προσδιορίζοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις τους.

- 12.1 Καμπύλες στο επίπεδο.
- 12.2 Εξισώσεις ευθείας στο επίπεδο.
- 12.3 Γενική μορφή εξισώσεως ευθείας.
- 12.4 Συντελεστής διεύθυνσεως μιας ευθείας (ϵ).
- 12.5 Ειδικές μορφές εξισώσεων ευθείας.
- 12.6 Θέση ευθειών στο επίπεδο.
- 12.7 Πολικές συντεταγμένες.
- 12.8 Κωνικές τομές.
- 12.9 Κύκλος.
- 12.10 Έλλειψη.
- 12.11 Υπερβολή.
- 12.12 Παραβολή.
- 12.13 Πολικές εξισώσεις κωνικών τομών.
- 12.14 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 12.15 Γενικές ασκήσεις.

12.1 Καμπύλες στο επίπεδο.

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$ και $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνάρτηση. Γενικά το σύνολο $C \equiv \{(x,y) \in A: f(x,y) = 0\}$ παριστάνει μια **καμπύλη στο xy -επίπεδο**. Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, τότε η καμπύλη C ονομάζεται **αλγεβρική καμπύλη** και αν το πολυώνυμο είναι βαθμού $n \in \mathbf{N}$, τότε λέμε ότι η καμπύλη C είναι βαθμού n . Έτσι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η ευθεία είναι μια καμπύλη πρώτου βαθμού, ενώ ο κύκλος μια καμπύλη δευτέρου βαθμού.

Για παράδειγμα, το σύνολο $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2: x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ [σχ. 12.1(α)], παριστάνει όπως θα δούμε αργότερα, το μοναδιαίο κύκλο. Αντίστοιχα, το σύνολο $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2: 2x + 3y + 6 = 0\}$ [(σχ. 12.1(β))], παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο.



Σχ. 12.1.

12.2 Εξισώσεις ευθείας στο επίπεδο.

Έστω μια ευθεία (ε) που διέρχεται από ένα σημείο M_o και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα $\vec{u}$, με $\vec{u} \neq 0$. Παίρνουμε τυχαία ένα σημείο M , πάνω στην ευθεία (ε) (σχ. 12.2α), τότε θα ισχύει:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \overrightarrow{M_o M},$$

όπου $\vec{r}$ και $\vec{r}_o$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M, M_o . Επειδή τα $\overrightarrow{M_o M}$ και $\vec{u}$ είναι παράλληλα, θα ισχύει: $\overrightarrow{M_o M} = t\vec{u}$, $t \in \mathbf{R}$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται $\vec{r} = \vec{r}_o + \lambda \vec{u}$, $t \in \mathbf{R}$.

Η εξίσωση της ευθείας (ε) που **διέρχεται από ένα σημείο M_o** και είναι **παράλληλη προς ένα διάνυσμα $\vec{u}$** , με $\vec{u} \neq 0$, ονομάζεται **διανυσματική εξίσωση** και είναι:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + t\vec{u}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (12.2.1)$$

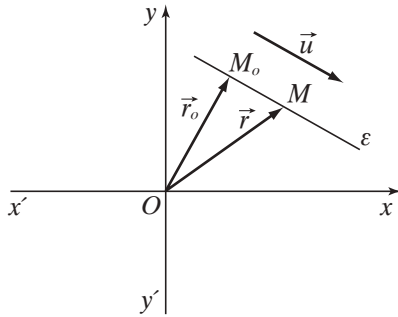
Αν αντίστοιχα υποθέσουμε δύο σημεία M_1 και M_2 που ανήκουν σε μια ευθεία (ε) και έστω ένα σημείο M , πάνω στην ευθεία (ε) (σχ. 12.2β), τότε θα ισχύει ότι $\vec{r} = \vec{r}_1 + \overrightarrow{M_1 M}$ και $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, όπου τα $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ είναι τα διανύσματα θέσεως των σημείων M, M_1 και M_2 αντίστοιχα. Επειδή το διάνυσμα $\overrightarrow{M_1 M}$ είναι παράλληλο του διανύσματος $\overrightarrow{M_1 M_2}$, ισχύει $\overrightarrow{M_1 M} = t \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$, $t \in \mathbf{R}$. Άρα $\vec{r} = \vec{r}_1 + \overrightarrow{M_1 M} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, $t \in \mathbf{R}$.

Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2 με διανύσματα θέσεως $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ αντίστοιχα, ονομάζεται **διανυσματική εξίσωση** και έχει τη μορφή:

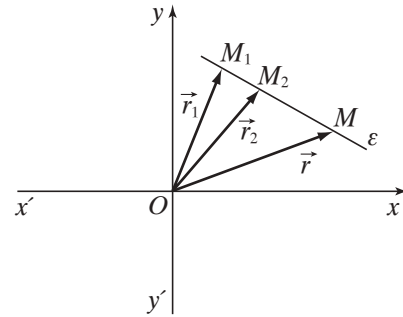
$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (12.2.2)$$

Αν $\vec{r}_1 = (x, y)$, $\vec{r}_o = (x_o, y_o)$ και $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, τότε από τον τύπο (12.2.1), έχουμε:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (x, y) = (x_o, y_o) + t(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (x, y) = (x_o + t \cdot \alpha, y_o + t \cdot \beta).$$



Σχ. 12.2α.



Σχ. 12.2β.

Άρα:

$$\begin{cases} x = x_o + t \cdot \alpha \\ y = y_o + t \cdot \beta \end{cases} \quad (12.2.3)$$

Το σύστημα αυτών των εξισώσεων ορίζει τις **παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ε)** που διέρχεται από ένα σημείο M_o και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα $\vec{u}$.

Επίσης, αν $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, τότε από τον τύπο (12.2.2) έχουμε:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Leftrightarrow (x, y) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)).$$

Άρα, οι **παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ε)**, που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, t \in \mathbf{R}. \quad (12.2.4)$$

Αν λύσουμε τις εξισώσεις (12.2.3) ως προς t , έχουμε:

$$\frac{x - x_o}{\alpha} = \frac{y - y_o}{\beta} \quad \text{ή με τη μορφή ορίζουσας} \quad \begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Επίσης, αν λύσουμε τις εξισώσεις (12.2.4) ως προς t , έχουμε:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Επομένως, οι **αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας (ε)**, που διέρχεται:

α) από ένα σημείο (x_o, y_o) και είναι παράλληλη σε ένα διάνυσμα $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, με $\vec{u} \neq 0$ είναι:

$$\frac{x - x_o}{\alpha} = \frac{y - y_o}{\beta} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (12.2.5)$$

β) από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.2.6)$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι αν τα σημεία $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ και $M_3(x_3, y_3)$ είναι

συνευθειακά, τότε:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12.3 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας.

Διαπιστώσαμε προηγουμένως ότι η εξίσωση μιας ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο $M(x_o, y_o)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}(\alpha, \beta)$ είναι:

$$\frac{x - x_o}{\alpha} = \frac{y - y_o}{\beta},$$

η οποία γράφεται,

$$\beta \cdot x - \alpha \cdot y + \alpha \cdot y_o - \beta \cdot x_o = 0. \quad (12.3.1)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή $\beta(x - x_o) - \alpha(y - y_o)$ ή αν θέσουμε $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_o = (x_o, y_o)$ και $\vec{n} = (\beta, -\alpha)$ στη μορφή $(\vec{r} - \vec{r}_o) \cdot \vec{n} = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}$. Η σχέση (12.3.1) ονομάζεται **καρτεσιανή εξίσωση** της ευθείας και γράφεται στη μορφή:

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad (12.3.2)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι κάθε εξίσωση της μορφής (12.3.2), όπου οι αριθμοί A και B δεν είναι και οι δύο μηδέν, είναι η καρτεσιανή εξίσωση μιας ευθείας που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ και επομένως παράλληλη προς το διάνυσμα $(-B, A)$. Πράγματι, αν (x_o, y_o) είναι μια λύση της (12.3.2), τότε έχουμε $Ax_o + By_o + \Gamma = 0$, δηλαδή $\Gamma = -(Ax_o + By_o)$. Έτσι η (12.3.2) γράφεται:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 \quad (12.3.3)$$

Αν $\vec{r} = (x, y)$ και $\vec{r}_o = (x_o, y_o)$, τότε η τελευταία σχέση γράφεται:

$$(\vec{r} - \vec{r}_o) \cdot \vec{n} = 0 \quad (12.3.4)$$

που σημαίνει ότι η (12.3.3) είναι η εξίσωση μιας ευθείας κάθετης στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ και επομένως παράλληλη στο διάνυσμα $(-B, A)$.

Από τα προηγούμενα, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

α) **παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$** και

β) **κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.**

12.3.1 Διερεύνηση της εξισώσεως ευθείας.

Για την εξίσωση ευθείας (12.3.2) μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν είναι $B = 0$, $\Gamma \neq 0$ και $A \neq 0$, η εξίσωση (12.3.2) παίρνει τη μορφή:

$$A \cdot x + \Gamma = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A} \Leftrightarrow x = \kappa, \text{ όπου } \kappa = -\frac{\Gamma}{A}.$$

Η εξίσωση $x = \kappa$ παριστάνει μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ και απέχει απόσταση $|\kappa|$ από αυτόν.

Αν είναι $A \neq 0$ και $B = \Gamma = 0$, η εξίσωση (12.3.2) γίνεται $x = 0$ και παριστάνει τον άξονα $y'y$. Αν είναι $A = 0$, $B \neq 0$ και $\Gamma \neq 0$, η εξίσωση (12.3.2) παίρνει τη μορφή:

$$B \cdot y + \Gamma = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\Gamma}{B} \Leftrightarrow y = \mu, \text{ όπου } \mu = -\frac{\Gamma}{B}.$$

Η εξίσωση $y = \mu$ παριστάνει μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ και απέχει απόσταση $|\mu|$ από αυτόν.

Αν είναι $B \neq 0$ και $A = \Gamma = 0$, η εξίσωση (12.3.2) γίνεται $y = 0$ και παριστάνει τον άξονα $x'x$. Αν είναι

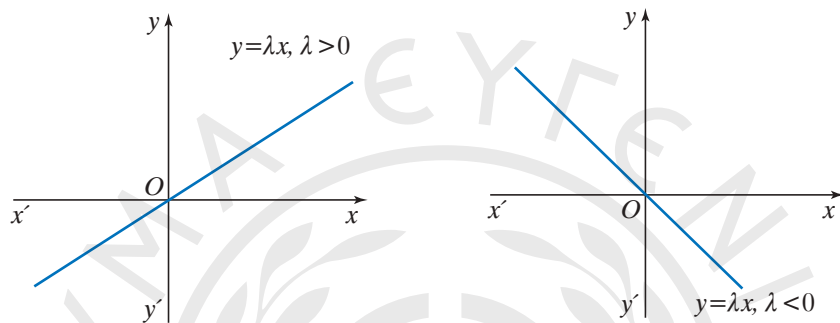
$A \neq 0, B \neq 0$ και $\Gamma = 0$, η εξίσωση (12.3.2) παίρνει τη μορφή:

$$A \cdot x + B \cdot y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{B}{A} \cdot x \Leftrightarrow y = \lambda \cdot x, \text{ όπου } \lambda = -\frac{B}{A}.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ (σχ. 12.3α).
Αν είναι $A \neq 0, B \neq 0$ και $\Gamma \neq 0$, η εξίσωση (12.3.2) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\frac{\frac{x}{-\frac{\Gamma}{A}} + \frac{y}{-\frac{\Gamma}{B}}}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

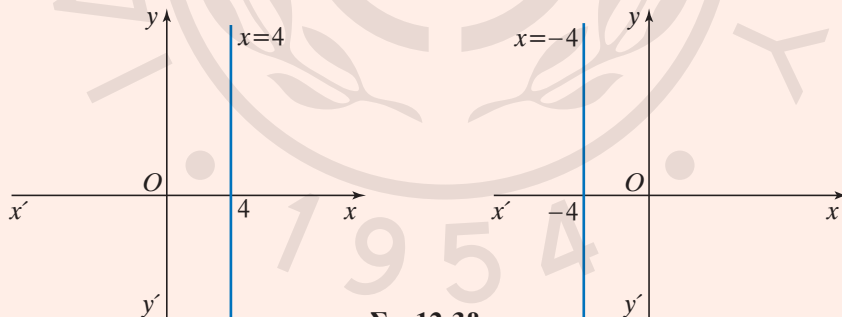
όπου οι όροι α και β είναι οι αριθμοί $\alpha = -\frac{\Gamma}{A}, \beta = -\frac{\Gamma}{B}$ και ονομάζονται *συντεταγμένες επί την αρχή*.



Σχ. 12.3α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12.3.1

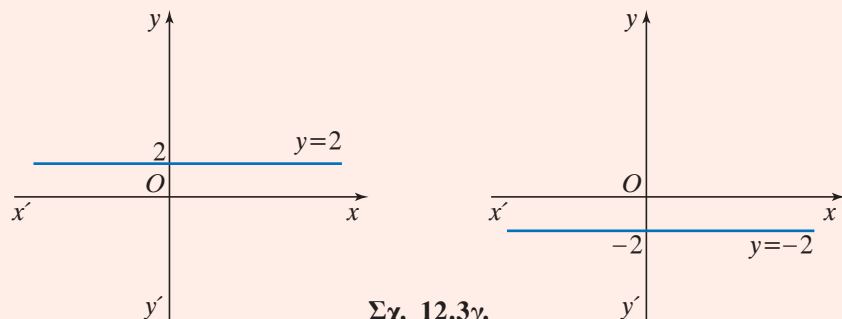
Να σχεδιάσετε τις ευθείες $x = 4$ και $x = -4$ (σχ. 12.3β).



Σχ. 12.3β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12.3.2

Να σχεδιάσετε τις ευθείες $y = 2$ και $y = -2$ (σχ. 12.3γ).

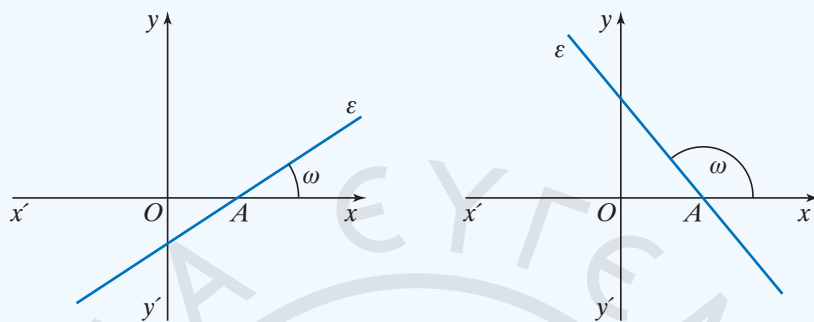


Σχ. 12.3γ.

12.4 Συντελεστής διεύθυνσεως μιας ευθείας (ϵ).

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι μια ευθεία σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x$. Η γωνία αυτή ορίζεται ως εξής:

Η γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία (ϵ) ονομάζεται **γωνία που σχηματίζει η (ϵ) με τον άξονα $x'x$** (σχ. 12.4).



Σχ. 12.4

Παρατηρήσεις:

- α) Αν η ευθεία (ϵ) $\parallel x'x$, τότε $\omega = 0$.
- β) Σε κάθε περίπτωση, για τη γωνία ω ισχύει $0 \leq \omega < \pi$.

Ως **συντελεστή διεύθυνσεως (ή κλίσεως)** μιας ευθείας (ϵ) ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω , με $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, που σχηματίζει η (ϵ) με τον άξονα $x'x$, δηλαδή:

$$\lambda = \epsilon \phi \omega.$$

Παρατηρήσεις:

- α) Αν η ευθεία (ϵ) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, δηλαδή $\omega = \frac{\pi}{2}$, τότε δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσεως.
- β) Αν (ϵ) $\parallel x'x$, τότε $\lambda = 0$, και αντίστροφα.

Ο **συντελεστής διεύθυνσεως** λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν, και μόνο αν, έχουν **ίσους συντελεστές διεύθυνσεως** ή δεν ορίζεται γι' αυτές συντελεστής διεύθυνσεως (αφού τότε $\epsilon_1 \parallel y'y$, $\epsilon_2 \parallel y'y$). (**Συνθήκη παραλληλίας ευθειών**).

Δύο ευθείες είναι κάθετες αν, και μόνο αν, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσεως, λ_1 και λ_2 , είναι ίσο με -1 ή όταν για τη μία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσεως και ο συντελεστής διεύθυνσεως της άλλης είναι ίσος με 0 (αφού τότε $(\epsilon_1) \parallel y'y$ και $(\epsilon_2) \parallel x'x$ ή αντίστροφως). (**Συνθήκη καθετότητας ευθειών**).

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1.$$

Παρατήρηση:

Η ευθεία (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, αν $B \neq 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσεως, $\lambda = -\frac{A}{B}$.

12.5 Ειδικές μορφές εξισώσεων ευθείας.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε εξισώσεις ευθειών που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά.

α) **Ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως λ .**

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha \neq 0$ και $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ (σχ. 12.5α), τότε από τον τύπο (12.2.5) έχουμε:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0). \quad (12.5.1)$$

β) **Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.**

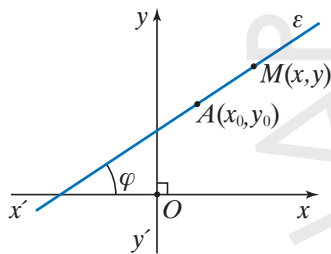
Αν, $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσεως της ευθείας (σχ. 12.5β) είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ γίνεται:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{ή} \quad y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

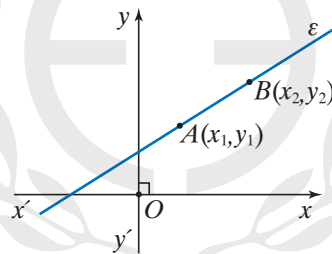
γ) **Ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα Ox .**

Η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ (σχ. 12.5γ) (δηλαδή μιας ευθείας στην οποία δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσεως) μπορεί να βρεθεί αμέσως, αφού κάθε σημείο της M έχει τετμημένη x_0 και άρα η εξίσωσή της είναι:

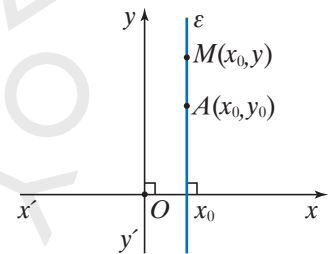
$$x = x_0 \quad (12.5.2)$$



Σχ. 12.5α.



Σχ. 12.5β.



Σχ. 12.5γ.

12.6 Θέση ευθειών στο επίπεδο.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε συγκεκριμένες εφαρμογές που αφορούν στη σχέση δύο ή περισσότερων ευθειών στο επίπεδο.

1) Σχετικές θέσεις δύο ευθειών του επιπέδου.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2), με εξισώσεις (ε_1): $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και (ε_2): $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$. Οι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2) αποτελούν ένα σύστημα 2×2 . Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα (Σ) των εξισώσεων των δύο ευθειών διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) **Το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση.**

Για να έχει ένα σύστημα 2×2 μοναδική λύση, όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι διάφορη του μηδενός. Δηλαδή:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0.$$

Η μοναδική λύση θα είναι:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ και } y = \frac{D_y}{D}, \text{ όπου } D_x = \begin{vmatrix} -\Gamma_1 & B_1 \\ -\Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} A_1 & -\Gamma_1 \\ A_2 & -\Gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή, η λύση του συστήματος είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών.

β) **Το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.**

Για να είναι ένα σύστημα 2×2 αδύνατο, πρέπει $D = 0$ και μία τουλάχιστον από τις D_x και D_y να είναι διάφορη του μηδενός. Τότε θα ισχύει:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}.$$

Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.

γ) **Το σύστημα (Σ) είναι αόριστο.**

Για να είναι ένα σύστημα 2×2 αόριστο, πρέπει $D = D_x = D_y = 0$, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}.$$

Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται.

2) Συνθήκη για να διέρχονται τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο.

Έστω οι ευθείες του επιπέδου:

$$(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, (\varepsilon_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0.$$

Οι εξισώσεις των παραπάνω ευθειών αποτελούν ένα σύστημα 3×2 .

Για να διέρχονται τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο, δηλαδή το σύστημα των εξισώσεών τους να έχει μία μοναδική λύση, πρέπει και αρκεί η ορίζουσα των συντελεστών τους να είναι μηδέν. Δηλαδή:

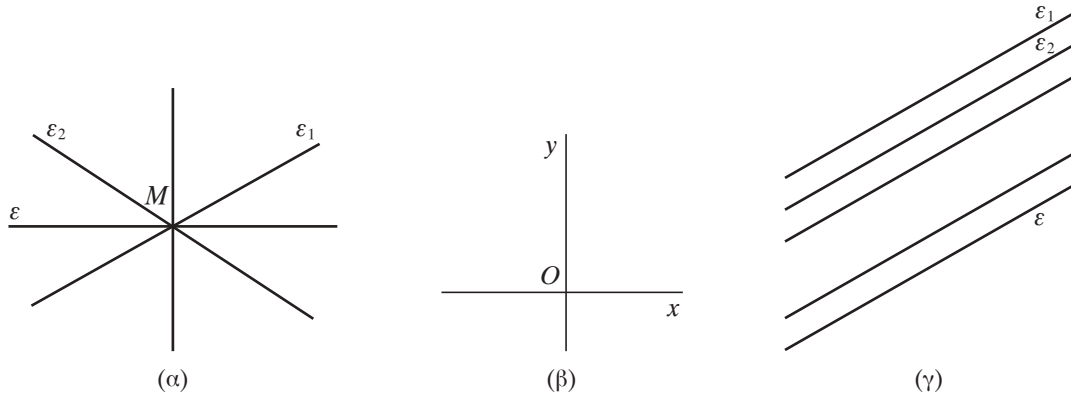
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Δέσμη ευθειών.

Όπως παρατηρούμε υπάρχουν ευθείες στο επίπεδο, οι οποίες διακρίνονται από κοινές ιδιότητες. Μια ομάδα τέτοιων ευθειών ονομάζεται δέσμη ευθειών και ορίζεται ως εξής:

Επίπεδη δέσμη ευθειών ονομάζουμε το σύνολο των ευθειών του επιπέδου, οι οποίες διέρχονται από ένα κοινό σημείο [σχ. 12.6α(α, β)] ή είναι παράλληλες [σχ. 12.6α(γ)]. Το κοινό σημείο από το οποίο διέρχονται ονομάζεται κέντρο της δέσμης

Επειδή οι ευθείες που ανήκουν στη δέσμη έχουν κοινές ιδιότητες, μπορούν να έχουν και κοινή εξίσωση, όπως φαίνεται και στο επόμενο θεώρημα.



Σχ. 12.6α.

Θεώρημα 1.

Αν $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, είναι οι εξισώσεις δύο τεμνομένων ευθειών του επιπέδου, τότε κάθε εξίσωση της μορφής

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 + \kappa(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \text{ με } \kappa \in \mathbf{R} \quad (12.6.1)$$

παριστάνει μια ευθεία της δέσμης που ορίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) και αντίστροφα, κάθε ευθεία της δέσμης αυτής έχει εξίσωση της μορφής (12.6.1).

Παρατηρήσεις:

α) Για $\kappa = 0$ η (12.6.1) παριστάνει την ευθεία $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ της δέσμης.

β) Για $\kappa \rightarrow \infty$ η (12.6.1) παριστάνει την ευθεία $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ της δέσμης.

γ) Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες, τότε η (12.6.1) είναι η εξίσωση της δέσμης των παραλλήλων ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

Πράγματι, οι συντελεστές των ευθειών (ε_1) , (ε_2) και της (12.6.1) είναι:

$$\lambda_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \lambda_2 = -\frac{A_2}{B_2} \text{ και } \lambda' = -\frac{A_1 + \lambda A_2}{B_1 + \lambda B_2},$$

επειδή $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$, άρα $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ και από τις ιδιότητες των αναλογιών έχουμε

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{A_1 + \lambda A_2}{B_1 + \lambda B_2}.$$

Επομένως $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, άρα η (12.6.1) είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2) .

δ) Αν θέσουμε $\kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\lambda_1 \neq 0$ η εξίσωση (12.6.1) της δέσμης γίνεται:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$$

4) Θετικό και αρνητικό ημιεπίπεδο.

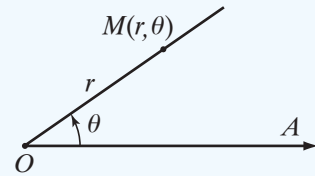
Έστω το καρτεσιανό επίπεδο xOy και μια ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$. Η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) χωρίζει το καρτεσιανό επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Το ένα ημιεπίπεδο ικανοποιεί την

12.7 Πολικές συντεταγμένες.

Στη μελέτη γεωμετρικών προβλημάτων, η θέση ενός σημείου συχνά προσδιορίζεται όχι μόνο από τις καρτεσιανές (παράγρ. 11.1.3), αλλά και τις πολικές συντεταγμένες του.

Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός σημείου στο επίπεδο, ορίζεται με τη βοήθεια μιας γωνίας και μιας αποστάσεως από την αρχή O . Αναλυτικά, οι πολικές συντεταγμένες ορίζονται ως εξής:

Θεωρούμε μια ημιευθεία OA , την οποία θα καλούμε **πολικό άξονα** και το σημείο O (αρχή της ημιευθείας) θα το λέμε **αρχή** ή **πόλο**. Η θέση ενός σημείου M του επιπέδου μπορεί να προσδιοριστεί από την απόσταση $r = (OM)$ και τη γωνία $\theta = AOM$ (σχ. 12.7α). Τους πραγματικούς αριθμούς r και θ (ισχύει $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$) θα ονομάζουμε **πολικές συντεταγμένες** του σημείου M και θα γράφομε $M = (r, \theta)$ ή $M(r, \theta)$. Ο r ονομάζεται **πολική ακτίνα** και το θ **πολική γωνία** ή **πρωτεύον όρισμα** του σημείου M .

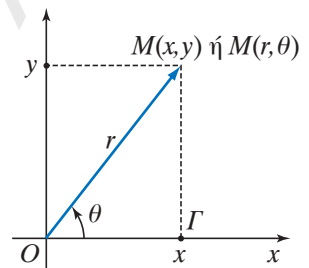


Σχ. 12.7α.

Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε ένα **$r\theta$ -επίπεδο**, θα εννοούμε ένα επίπεδο στο οποίο έχει οριστεί ένα **σύστημα πολικών συντεταγμένων** (r, θ) .

Η σχέση μεταξύ καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων προκύπτει εύκολα από ένα καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή τον πόλο O και θετικό ημιάξονα των x την ημιευθεία OG . Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $OM\Gamma$ (σχ. 12.7β), μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις πολικές συντεταγμένες του σημείου $M \neq 0$. Άρα ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \\ y = r \cdot \eta\mu\theta \end{cases} \text{ και } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \eta\mu\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$



Σχ. 12.7β.

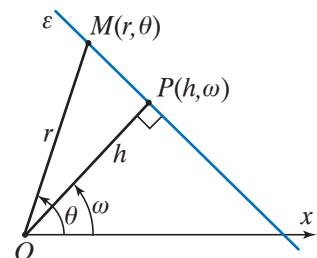
12.7.1 Εξίσωση ευθείας σε πολικές συντεταγμένες.

Σε ένα $r\theta$ -επίπεδο θεωρούμε μια ευθεία (ε) και από τον πόλο O του $r\theta$ -επιπέδου φέρνουμε κάθετη στην ευθεία (ε) , και έστω P το σημείο τομής τους [άρα το P είναι η προβολή του πόλου O πάνω στην ευθεία (ε)]. Οι πολικές συντεταγμένες του σημείου P είναι $P(h, \omega)$, και έστω ένα τυχαίο

σημείο $M(r, \theta)$ (σχ. 12.7γ). Στο ορθογώνιο τρίγωνο OPM ($OPM = \frac{\pi}{2}$) έχουμε $POM = \theta - \omega$, άρα ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu(\theta - \omega) = \frac{(OP)}{(OM)} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow h = r \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta - \omega).$$

Η εξίσωση μιας ευθείας (ε) , που δεν διέρχεται από τον πόλο O , σε πολικές συντεταγμένες είναι: $h = r \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta - \omega)$, όπου τα h και ω είναι σταθερά.



Σχ. 12.7γ.

Ασκήσεις

- 12.7.1** Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση και οι αντίστοιχες παραμετρικές της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_o(1,2)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = (-1,3)$.

Λύση.

Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας είναι $\vec{r} = \vec{r}_o + t\vec{u} = (1,2) + t(-1,3), t \in \mathbf{R}$. Οι παραμετρικές εξισώσεις της ζητούμενης ευθείας, προφανώς θα είναι

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

- 12.7.2** Να βρείτε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3,4)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (-1,2)$.

Λύση.

Ξέρουμε ότι ισχύει: $\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b}$, άρα η εξίσωση $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2}$ είναι η αναλυτική εξίσωση της ευθείας.

- 12.7.3** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $M_1(-2,3)$ και $M_2(4,5)$.

Λύση.

Ισχύει: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, άρα έχουμε: $\frac{x+2}{4-(-2)} = \frac{y-3}{5-3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{3} = y-3$.

- 12.7.4** Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(a,-\beta)$, $B(a+\beta, a-\beta)$ και $\Gamma(a+2\beta, 2a-\beta)$ είναι συνευθειακά.

Λύση.

Από τη σχέση 6 έχουμε ότι για να είναι συνευθειακά τα σημεία $A(a,-\beta)$, $B(a+\beta, a-\beta)$ και $\Gamma(a+2\beta, 2a-\beta)$ πρέπει:

$$\begin{vmatrix} a & -\beta & 1 \\ a+\beta & a-\beta & 1 \\ a+2\beta & 2a-\beta & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a-\beta & 1 \\ 2a-\beta & 1 \end{vmatrix} - (-\beta) \begin{vmatrix} a+\beta & 1 \\ a+2\beta & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a+\beta & a-\beta \\ a+2\beta & 2a-\beta \end{vmatrix} =$$

$$= a(a-\beta-2a+\beta) + \beta(a+\beta-a-2\beta) + (a+\beta)(2a-\beta) - (a+2\beta)(a-\beta) = 0.$$

Άρα τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.

- 12.7.5** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(1,-3)$, και είναι παράλληλη προς την ευθεία που περνά από τα σημεία $A(-6,9)$ και $B(3,0)$.

Λύση.

Το διάνυσμα $\vec{AB} = (3 - (-6), -9) = (9, -9)$, θα είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε) . Άρα η εξίσωση της (ε) είναι:

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+3}{-9}, \text{ δηλαδή } x + y + 2 = 0.$$

- 12.7.6** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) με συντελεστή διεύθυνσής $\lambda = -\frac{3}{5}$ και η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο $B(0,2)$.

Λύση.

Για την ευθεία (ε) ισχύει $y = \lambda x + \beta$, άρα $y = -\frac{3}{5}x + 2$.

12.7.7 Να βρείτε τη γωνία των ευθειών $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$ και $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$.

Λύση.

Οι συντελεστές διευσθύνσεως των ευθειών είναι: $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ και $\lambda_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Επομένως:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = -1.$$

Από τη συνθήκη καθετότητας ευθειών έχουμε ότι οι δύο ευθείες θα είναι κάθετες.

12.7.8 Να προσδιορίσετε τα λ και μ , ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): -2x + 3y - 4 = 0$ και $(\varepsilon_2): \kappa x + 9y + \mu = 0$ να είναι: α) παράλληλες και β) κάθετες.

Λύση.

α) Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 12.4, για να είναι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες, πρέπει οι συντελεστές διευσθύνσεως να είναι ίσοι, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2$. Επομένως:

$$\frac{-2}{\kappa} = \frac{3}{9}, \text{ άρα } \kappa = -6 \text{ και } \mu \in \mathbf{R}.$$

β) Αντίστοιχα, για να είναι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) κάθετες πρέπει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Επομένως έχουμε:

$$\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \text{ και } \lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{\lambda}{9}.$$

$$\text{Άρα } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\lambda}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow -\frac{2\lambda}{27} = -1, \text{ οπότε } \lambda = \frac{27}{2} \text{ και } \mu \in \mathbf{R}.$$

12.7.9 Έστω ότι έχουμε τις ευθείες $3x - 4y + 5 = 0$ και $x + 2y - 1 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ανήκει στη δέσμη των ευθειών, η οποία περνά από το σημείο $A(2,3)$.

Λύση.

Το σημείο $A(2,3)$ είναι διάφορο του σημείου τομής των παραπάνω ευθειών, αφού οι συντεταγμένες του σημείου A δεν επαληθεύουν τις εξισώσεις τους. Η εξίσωση της δέσμης ευθειών, σύμφωνα με το θεώρημα 1, θα είναι $3x - 4y + 5 + \lambda(x + 2y - 1) = 0$. Επειδή το σημείο A ανήκει σε ευθεία των δεσμών, θα έχουμε:

$$3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 5 + \lambda(2 + 2 \cdot 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow 6 - 12 + 5 + \lambda(2 + 6 - 1) = 0 \Leftrightarrow -1 + \lambda \cdot 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{7}.$$

Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 5 + \frac{1}{7}(x + 2y - 1) &= 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 5 + \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{1}{7} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{22}{7}x - \frac{26}{7}y + \frac{34}{7} = 0 \Leftrightarrow 11x - 13y + 17 = 0. \end{aligned}$$

12.7.10 Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(1,2)$ από την ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y - 5 = 0$.

Λύση.

Από τη σχέση αποστάσεως σημείου από ευθεία (παράγρ. 12.6 και 12.6.5) έχουμε:

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1.$$

12.7.11 Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζονται από τις τεμνόμενες

ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

Λύση.

Οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζονται από τις δύο παραπάνω ευθείες (ε_1) και (ε_2) , είναι το σύνολο των σημείων $M(x,y)$, τα οποία ισαπέχουν από αυτές. Με αυτόν τον τρόπο ορίζονται δύο ευθείες (δ_1) και (δ_2) που διχοτομούν τις γωνίες αυτές και οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους (σχ. 12.7δ). Η εύρεση των εξισώσεων των διχοτόμων (δ_1) και (δ_2) των δύο τεμνομένων ευθειών (ε_1) και (ε_2) γίνεται ως εξής:

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x,y)$ στη διχοτόμο (δ_1) . Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} M \in (\delta_1) &\Leftrightarrow d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|A_1x + B_1y + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή μετά τις απλοποιήσεις δίνει τις εξισώσεις των ζητούμενων διχοτόμων. Για να βρούμε τη διχοτόμο της οξείας γωνίας δύο τεμνομένων ευθειών, θεωρούμε ένα σημείο A της μίας ευθείας και βρίσκουμε τις αποστάσεις από τις διχοτόμους (δ_1) και (δ_2) . **Η διχοτόμος που απέχει λιγότερο από το A είναι εκείνη της οξείας γωνίας.**

- 12.7.12** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $P(5, \frac{\pi}{3})$ και είναι κάθετη στον πολικό άξονα OA (σχ. 12.7ε).

Λύση.

Αν $M(r, \theta)$ ένα τυχαίο σημείο της ζητούμενης ευθείας (ε) , έχουμε: $(OB) = r \cdot \sin \theta$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OBP έχουμε:

$$(OB) = 5 \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (OB) = 5 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow (OB) = 2,5.$$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι: $r \cdot \sin \theta = 2,5$.

- 12.7.13** Να βρείτε την η πολική εξίσωση μιας ευθείας παράλληλης προς τον πολικό άξονα OA και 5 μονάδες κάτω από αυτόν (σχ. 12.7στ).

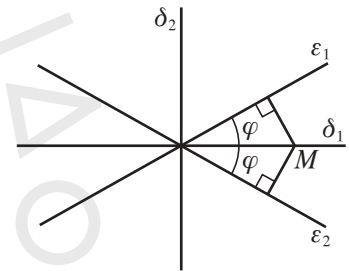
Λύση.

Αν $M(r, -\theta)$ ένα τυχαίο σημείο της ζητούμενης ευθείας (ε) , από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM έχουμε: $(AM) = r \cdot \eta \mu(-\theta) \Leftrightarrow r \cdot \eta \mu(-\theta) + 5 = 0$. Αυτή είναι και η ζητούμενη εξίσωση ευθείας.

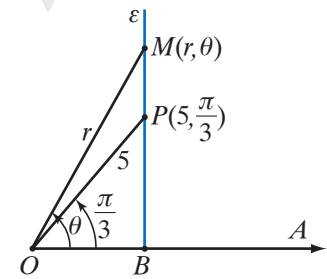
- 12.7.14** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $M(2,3)$ και σχηματίζει με τους άξονες συντεταγμένων τρίγωνο εμβαδού 12 (σχ. 12.7ζ).

Λύση.

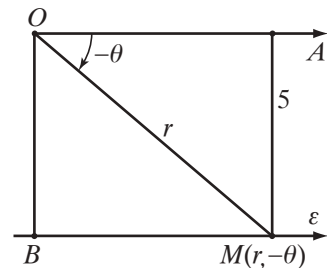
Η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $M(2,3)$ και έχει κλίση λ είναι: $(\varepsilon): y - 3 = \lambda(x - 2)$. Για $x = 0$, προκύπτει $y = 3 - 2\lambda$, άρα το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι $B(0, 3 - 2\lambda)$. Αντίστοιχα, η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν για $y = 0$, προκύπτει η σχέση $\lambda x = 2\lambda - 3$ και για $\lambda = 0$, η τελευταία ισότητα είναι αδύνα-



Σχ. 12.7δ.



Σχ. 12.7ε.



Σχ. 12.7στ.

τη. Άρα $\lambda \neq 0$, οπότε η ευθεία (ε) τέμνει τον x στο σημείο $A\left(\frac{2\lambda-3}{\lambda}, 0\right)$. Επειδή το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, για το εμβαδό του ισχύει:

$$\begin{aligned}(OAB) &= 12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OA)(OB) = 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2\lambda-3}{\lambda}\right)(3-2\lambda) = 12 \Leftrightarrow (2\lambda-3)^2 = -24\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Για αυτή την τιμή του λ η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται:

$$\begin{aligned}(\varepsilon): y - 3 &= -\frac{3}{2}(x - 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2y - 6 = -3x + 6 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1.\end{aligned}$$

Αυτή είναι και η ζητούμενη εξίσωση ευθείας.

- 12.7.15** Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου, του οποίου δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ε_1): $x - y + 1 = 0$ και (ε_2): $x - y + 4 = 0$ (σχ. 12.7η).

Λύση.

Αρχικά βρίσκουμε ένα σημείο της (ε_2). Θέτοντας στην (ε_2), όπου $x = 0$, έχουμε $y = 4$. Άρα το $A(0, 4)$ είναι σημείο της (ε_2). Στη συνέχεια βρίσκουμε την απόσταση d του A από την ευθεία (ε_1):

$$\begin{aligned}d(A, \varepsilon_1) &= \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

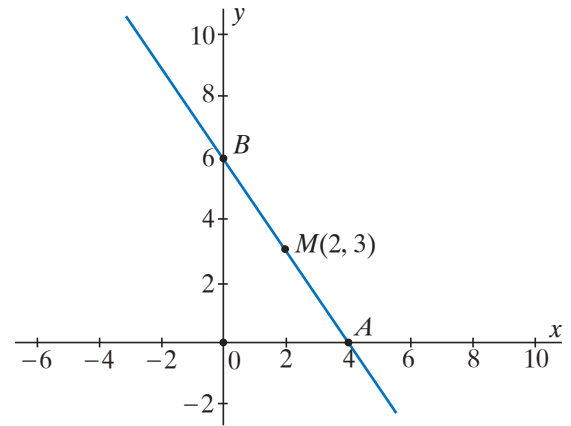
Η απόσταση αυτή θα είναι και το μήκος της πλευράς του τετραγώνου. Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:

$$E = d^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{18}{4}.$$

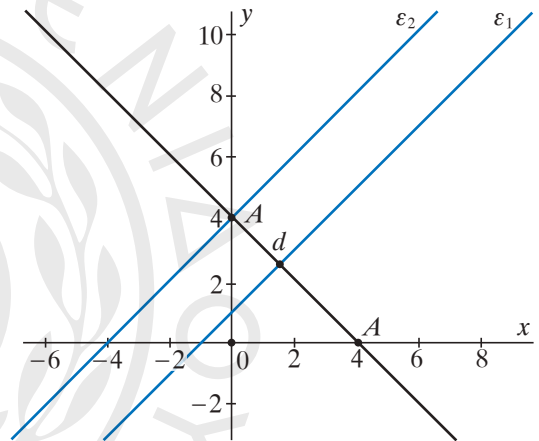
- 12.7.16** Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(1, 4)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ (σχ. 12.7θ).

Λύση.

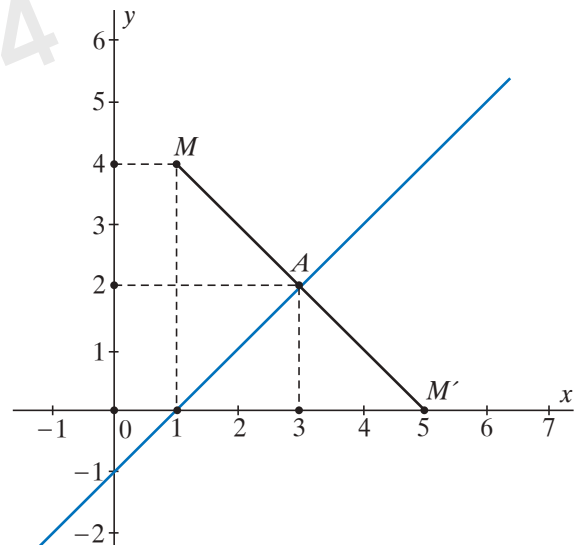
Η ευθεία (ε) έχει κλίση 1, άρα η ευθεία (ζ) που είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y = x - 1$ και διέρχεται από το $M(1, 4)$ έχει κλίση -2 , οπότε η εξίσωσή της (ζ) είναι $y - 4 = -2(x - 1)$, (ζ): $y = -2x + 6$. Βρίσκο-



Σχ. 12.7ζ.



Σχ. 12.7η.



Σχ. 12.7θ.

με το σημείο τομής των δύο ευθειών λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους (ϵ): $y = x - 1$, (ζ): $y = -x + 5$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $2y = 4$, $y = 2$ και άρα $x = 3$. Επομένως, το σημείο τομής τους είναι $A(3,2)$.

Αν M' είναι το συμμετρικό του M ως προς την ευθεία (ϵ), τότε το A θα είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος MM' . Θεωρούμε ότι το M' έχει συντεταγμένες $M'(\kappa, \lambda)$.

Άρα θα ισχύει: $\frac{1+\kappa}{2} = 3$ και $\frac{4+\lambda}{2} = 2$, $\kappa = 5$ και $\lambda = 0$. Άρα $M'(5,0)$.

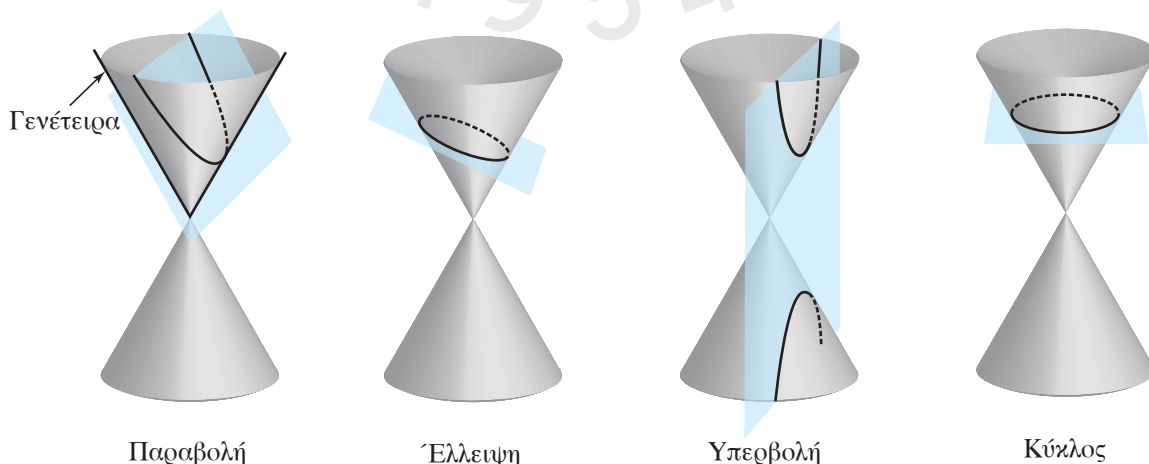
12.8 Κωνικές τομές.

Πολλές σημαντικές ανακαλύψεις στα θεωρητικά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά σχετίζονται με τις κωνικές τομές. Οι κωνικές τομές, σύμφωνα με αναφορές του Απολλώνιου τον 3^ο αιώνα π.Χ. ήταν ένα από τα βαθύτερα επιτεύγματα της κλασικής ελληνικής γεωμετρίας. Σχεδόν 2000 έτη αργότερα, ο Γαλιλαίος ανακάλυψε ότι ένα βλήμα που βάλλεται οριζόντια από την κορυφή ενός πύργου, πέφτει στη γη διαγράφοντας μια παραβολική πορεία. Μια από τις κρίσιμες καμπές στην ιστορία της αστρονομίας εμφανίστηκε περίπου το 1600, όταν ο Kepler πρότεινε ότι όλοι οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές. Περίπου 80 χρόνια μετά, ο Newton ήταν σε θέση να αποδείξει ότι η ελλειπτική πορεία των πλανητών υποδηλώνει το ακριβώς αντίστροφο του νόμου της βαρύτητας. Οι κωνικές τομές εμφανίζονται όχι μόνο ως τροχιές των πλανητών και των δορυφόρων, αλλά και ως τροχιές των στοιχειωδών ατομικών μορίων. Χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό φακών επαφής και καθρεπτών, καθώς και στην αρχιτεκτονική. Αυτά τα παραδείγματα και πολλά άλλα δείχνουν τη σημασία που έχουν οι κωνικές τομές.

Με τον όρο κωνική τομή προσδιορίζουμε την καμπύλη που προκύπτει αν τμήσουμε ένα δίχωνο κυκλικό κώνο με ένα επίπεδο, το οποίο δεν θα διέρχεται από την κορυφή του κώνου (σχ. 12.8).

Όπως φαίνεται στο σχήμα 12.8, εάν το επίπεδο τομής είναι παράλληλο σε μια τουλάχιστον γενέτειρα του κώνου, η κωνική τομή λέγεται παραβολή. Διαφορετικά, η κωνική τομή καλείται έλλειψη, αν το επίπεδο τέμνει μόνο τη μία από τις δύο χοάνες του κώνου, ενώ αν το επίπεδο τέμνει και τις δύο, καλείται υπερβολή. Η υπερβολή αυτή αποτελείται από δύο κλάδους, έναν σε κάθε χοάνη. Τέλος, αν το επίπεδο τομής είναι παράλληλο στη βάση του κώνου, τότε η κωνική τομή είναι κύκλος.

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στη μελέτη των παραπάνω καμπυλών χρησιμοποιώντας τις βασικές διανυσματικές και γεωμετρικές ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν.



Σχ. 12.8.

12.9 Κύκλος.

Η πρώτη κωνική τομή στην οποία θα αναφερθούμε είναι ο κύκλος, που ορίζεται ως εξής:

Κύκλος ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου αυτού. Το σταθερό αυτό σημείο λέγεται **κέντρο** του κύκλου και η σταθερή απόσταση, **ακτίνα** του κύκλου.

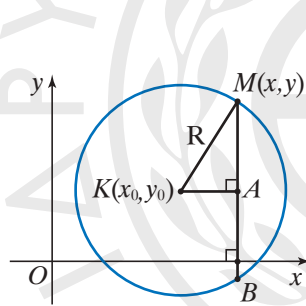
12.9.1 Αναλυτική εξίσωση κύκλου.

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα R . Αν $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο του κύκλου και φέρουμε τις $MB \parallel Oy$ και $KA \parallel Ox$ (σχ. 12.9α), τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο AMK ($\angle A = 90^\circ$) έχουμε: $(KA)^2 + (AM)^2 = (KM)^2$, και αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των σημείων, η σχέση αυτή γίνεται: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

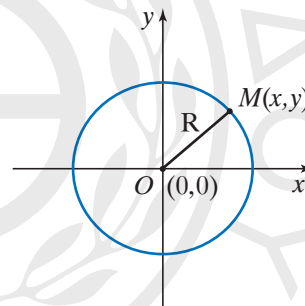
Η **αναλυτική εξίσωση** ενός κύκλου με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα R είναι:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Αν σαν κέντρο του κύκλου θεωρήσουμε την αρχή των αξόνων (σχ. 12.9β), δηλαδή αν $x_0 = 0$ και $y_0 = 0$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $x^2 + y^2 = R^2$.



Σχ. 12.9α.



Σχ. 12.9β.

12.9.2 Γενική εξίσωση κύκλου.

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική εξίσωση του κύκλου, μπορούμε να καταλήξουμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.

Η **γενική εξίσωση** ενός κύκλου είναι $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, παριστάνει κύκλο με κέντρο το

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}.$$

Απόδειξη.

Αν αναλύσουμε την αναλυτική εξίσωση του κύκλου έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \cdot x_0 + x_0^2 + y^2 - 2y \cdot y_0 + y_0^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 + (-2x_0)x + (-2y_0)y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) &= 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής:

$$x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0, \text{ όπου } A = -2x_o, B = -2y_o \text{ και } \Gamma = x_o^2 + y_o^2 - R^2.$$

Αντίστροφα, η εξίσωση $x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ γίνεται,

$$\left(x^2 + A \cdot x + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + B \cdot y + \frac{B^2}{4}\right) - \left(\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma\right) = 0.$$

Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, τότε:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}\right)^2.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}.$$

Παρατηρήσεις:

α) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

β) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x, y)$, των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

12.9.3 Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου.

Αν θέσουμε ως παράμετρο τη γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα $\overline{KM}$ (σχ. 12.9γ) με τον θετικό ημιάξονα Ox , τότε:

$$x - x_o = |\overline{KA}| = R \cdot \sigma\eta\nu\theta \text{ και } y - y_o = |\overline{AP}| = R \cdot \eta\mu\theta,$$

$$\text{άρα } x = x_o + R \cdot \sigma\eta\nu\theta \text{ και } y = y_o + R \cdot \eta\mu\theta.$$

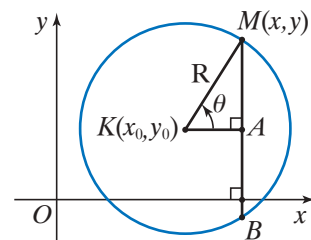
Άρα, οι **παραμετρικές εξισώσεις** του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $M(x, y)$ με κέντρο το $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα R , ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} x = x_o + R \cdot \sigma\eta\nu\theta \\ y = y_o + R \cdot \eta\mu\theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (12.9.1)$$

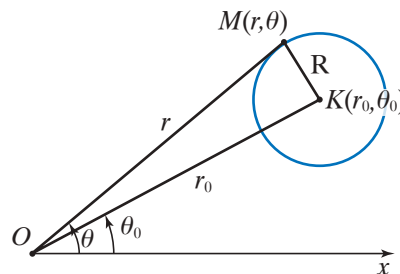
Αν ως κέντρο του κύκλου θεωρήσουμε την αρχή των αξόνων, δηλαδή αν $x_o = 0$ και $y_o = 0$, τότε οι εξισώσεις (12.9.1) γίνονται $x = R \cdot \sigma\eta\nu\theta$ και $y = R \cdot \eta\mu\theta$.

12.9.4 Εξίσωση κύκλου σε πολικές συντεταγμένες.

Σε ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων, θεωρούμε έναν κύκλο ακτίνας R και κέντρου $K(r_o, \theta_o)$ (σχ. 12.9δ). Αν $M(r, \theta)$ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου, τότε από το νόμο των συνημίτονων (Κεφ. 10) στο τρίγωνο OMK , έχουμε:



Σχ. 12.9γ.



Σχ. 12.9δ.

$$R^2 = r^2 + r_o^2 - 2r \cdot r_o \sin(\theta - \theta_o).$$

Άρα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(r_o, \theta_o)$ και ακτίνα R σε **πολικές συντεταγμένες** είναι:

$$r^2 + r_o^2 - 2r \cdot r_o \sin(\theta - \theta_o) = R^2. \quad (12.9.2)$$

Παρατηρήσεις:

α) Αν το κέντρο του κύκλου είναι στη θέση $(R, 0)$, τότε θα ισχύει $r_o = R$ και η σχέση (12.9.2) γίνεται: $\varrho = 2R \cdot \sin\theta$.

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι στη θέση $(R, \frac{\pi}{2})$, η σχέση (12.9.2) γίνεται: $\varrho = 2R \cdot \eta\mu\theta$.

12.9.5 Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου.

Έστω ότι έχουμε έναν κύκλο κέντρου $K(x_o, y_o)$ και ακτίνας R με εξίσωση της μορφής $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$ και μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1)$ (σχ. 12.9ε).

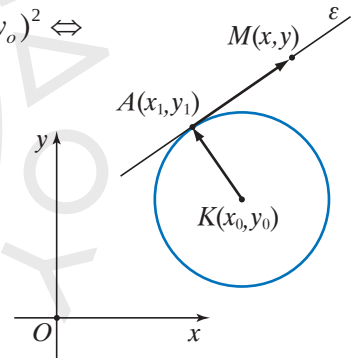
Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της (ε) , τότε $\overline{AM} \perp \overline{KA}$, άρα το εσωτερικό γινόμενο τους είναι μηδέν. Έτσι, αν $\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1)$ και $\overline{KA} = (x_1 - x_o, y_1 - y_o)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{AM} \cdot \overline{KA} &= 0 \Leftrightarrow (x - x_1) \cdot (x_1 - x_o) + (y - y_1)(y_1 - y_o) = 0 \Leftrightarrow \\ &[(x - x_o) - (x_1 - x_o)] \cdot (x_1 - x_o) + [(y - y_o) - (y_1 - y_o)] \cdot (y_1 - y_o) = 0 \Leftrightarrow \\ &(x - x_o)(x_1 - x_o) + (y - y_o)(y_1 - y_o) = (x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2 \Leftrightarrow \\ &(x - x_o)(x_1 - x_o) + (y - y_o)(y_1 - y_o) = (x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2 \Leftrightarrow \\ &(x - x_o)(x_1 - x_o) + (y - y_o)(y_1 - y_o) = R^2. \end{aligned}$$

Αφού το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου, ισχύει $(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2 = R^2$. Άρα, η **εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου** με κέντρο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα R , στο σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου, είναι:

$$(x - x_o)(x_1 - x_o) + (y - y_o)(y_1 - y_o) = R^2. \quad (12.9.3)$$

Αν ως κέντρο του κύκλου θεωρήσουμε την αρχή των αξόνων, δηλαδή αν $x_o = 0$ και $y_o = 0$, τότε η σχέση (12.9.3) γίνεται $x \cdot x_1 + (y \cdot y_1) = R^2$.



Σχ. 12.9ε.

Ασκήσεις.

12.9.1 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(2, 3)$ και $R = 5$.

Λύση.

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$, δηλαδή, $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

12.9.2 Να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 10 = 0$.

Λύση.

Επειδή $A = 4$, $B = -6$, $\Gamma = -10$, το κέντρο K είναι $K\left(-\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}\right) = K(-2, 3)$ και η ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{4^2 + (-6)^2 - 4(-10)}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 36 + 40}}{2} = \frac{\sqrt{93}}{2} = \sqrt{23}.$$

12.9.3 Να βρείτε την εξίσωση ενός κύκλου που περνά από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $\Gamma(10, 5)$, τα

οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Λύση.

Η εξίσωση του κύκλου δίνεται από τον τύπο $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Επειδή ο κύκλος διέρχεται από τα τρία σημεία, οι συντεταγμένες τους θα την επαληθεύουν. Άρα έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} A - B + \Gamma &= -5 \\ 5A + 4B + \Gamma &= -41 \\ 10A + 5B + \Gamma &= -125. \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος μας δίνει $A = -18$, $B = 6$, $\Gamma = 25$, οπότε η εξίσωση του κύκλου γράφεται $x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0$, με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(9, -3) \text{ και ακτίνα } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \sqrt{65}.$$

- 12.9.4** Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 18 = 0$ και το σημείο του $A(2,3)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C στο σημείο A (σχ. 12.9στ).

Λύση.

Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (1, 2)$.

Έστω $B(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης (ε). Τότε, αφού $KA \perp \varepsilon$, θα είναι $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

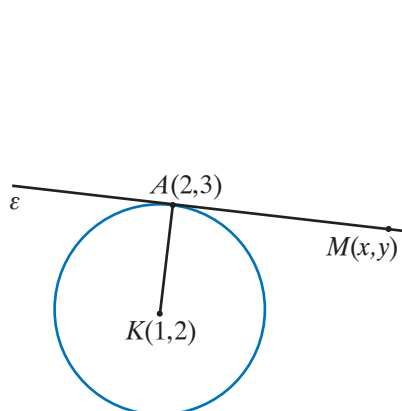
Όμως $\overrightarrow{KA} = (2-1, 3-2) = (1, 1)$ και $\overrightarrow{AB} = (x-2, y-3)$ οπότε έχουμε $(1, 1) \cdot (x-2, y-3) = 0 \Leftrightarrow (x-2) + (y-3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι: $x + y - 5 = 0$.

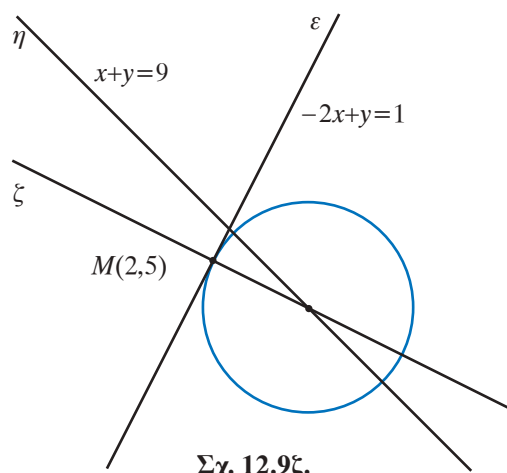
- 12.9.5.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας (ε): $2x - y + 1 = 0$ σε ένα σημείο της $M(2,5)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $x + y = 9$ (σχ. 12.9ζ).

Λύση.

Η ευθεία (ζ), που περνά από το κέντρο K και από το σημείο επαφής M , είναι κάθετη στην ευθεία $2x - y + 1 = 0$. Η $2x - y + 1 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = 2$, οπότε η (ζ) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = -\frac{1}{2}$. Άρα, η εξίσωση της (ζ) είναι: $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, δηλαδή, (ζ): $x + 2y - 12 = 0$. Επομένως, το κέντρο του κύκλου προκύπτει από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών $x + y = 9$, $x + 2y = 12$. Άρα, το σημείο $K(6, 3)$ είναι το κέντρο



Σχ. 12.9στ.



Σχ. 12.9ζ.

του κύκλου. Η ακτίνα του κύκλου ισούται με την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $(\varepsilon): 2x - y + 1 = 0$. Επομένως:

$$R = d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$.

12.10 Έλλειψη.

Μια κωνική τομή με πολλές θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές, τόσο στην επίπεδη όσο και στην σφαιρική γεωμετρία είναι η έλλειψη, η οποία ορίζεται ως εξής:

Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του, E και E' , είναι σταθερό και μεγαλύτερο της αποστάσεως $d(E', E)$ (σχ. 12.10α). Τα σημεία E και E' λέγονται **εστίες** της ελλείψεως και η απόσταση $d(E', E)$ **εστιακή απόσταση**. Το σταθερό άθροισμα συμβολίζεται με $2a$ και η εστιακή απόσταση με 2γ . Δηλαδή ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της ελλείψεως, αν και μόνο αν

$$d(M, E') + d(M, E) = 2a.$$

Παρατήρηση:

Σε μια έλλειψη ισχύουν τα εξής:

α) $d(E', E) < d(M, E) + d(M, E')$, δηλαδή $2\gamma < 2a$, άρα $\gamma < a$.

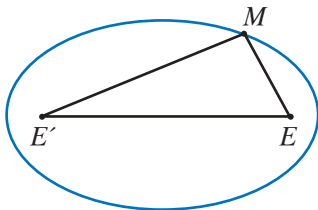
β) Αν $\gamma = 0$, τότε τα σημεία E' και E συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το E και ακτίνα a .

12.10.1 Αναλυτική εξίσωση ελλείψεως.

Έστω μια έλλειψη C με εστίες E' και E . Η εξίσωση της ελλείψεως ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$, όπου τα σημεία E' και E έχουν συντεταγμένες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ αντίστοιχα και σταθερό άθροισμα $2a$ (σχ. 12.10β). Αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ελλείψεως ότι η αναλυτική εξίσωσή της είναι:

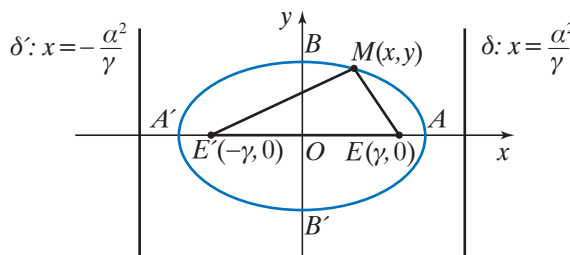
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ όπου } b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}.$$

Αν πάρουμε ως σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ και άξονα των y την ευθεία $E'E$ (σχ. 12.10γ), τότε αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της ελλείψεως C με εστίες $E'(0, -\gamma)$,

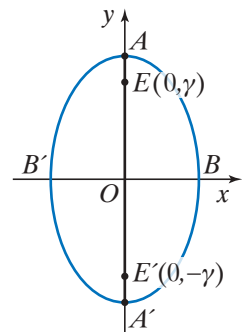


$$\begin{aligned} d(E', E) &= 2\gamma \\ d(M, E') + d(M, E) &= 2a \end{aligned}$$

Σχ. 12.10α.



Σχ. 12.10β.



Σχ. 12.10γ.

$E(0,\gamma)$ και σταθερό άθροισμα $2a$, είναι: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$.

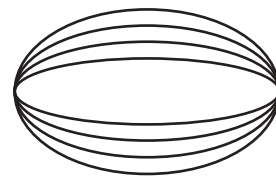
Η **αναλυτική εξίσωση** της ελλείψεως:

α) με άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$ (σχ. 12.10δ) είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}. \quad (12.10.1)$$

β) με άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ και άξονα των y την ευθεία $E'E$ (σχ. 12.10ε) είναι:

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}. \quad (12.10.2)$$



Σχ. 12.10δ.

Παρατήρηση:

Όταν μας δίνουν μια εξίσωση ελλείψεως για να βρούμε πού βρίσκονται οι εστίες, *ακολουθούμε τον παρακάτω πρακτικό κανόνα*:

α) Αν ο μεγαλύτερος παρονομαστής (a^2) βρίσκεται κάτω από το x^2 , τότε οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$.

β) Αν ο μεγαλύτερος παρονομαστής (a^2) βρίσκεται κάτω από το y^2 , τότε οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

12.10.2 Χαρακτηριστικά της ελλείψεως.

Από τις αναλυτικές εξισώσεις (12.10.1) και (12.10.2) της ελλείψεως, ανεξάρτητα με το πού βρίσκονται οι εστίες της, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε τα εξής:

α) Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι **άξονες συμμετρίας** της ελλείψεως.

β) Τα σημεία A, A', B, B' ονομάζονται **κορυφές της ελλείψεως** και είναι τα σημεία που η έλλειψη τέμνει τους άξονες.

γ) Το ευθύγραμμο τμήμα AA' ονομάζεται **μεγάλος άξονας** της ελλείψεως και έχει μήκος $2a$, ενώ το τμήμα BB' ονομάζεται **μικρός άξονας** και έχει μήκος $2b$.

δ) Η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της ελλείψεως και ονομάζεται **κέντρο της ελλείψεως**.

ε) Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς O σημεία, M και N της ελλείψεως, ονομάζεται **διάμετρος της ελλείψεως**. Ισχύει ότι $2b \leq d(M,N) \leq 2a$.

Άρα κάθε διάμετρος της ελλείψεως είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μήκος του μικρού άξονα και μικρότερη ή ίση από το μήκος του μεγάλου άξονα της ελλείψεως.

Από τη γραφική παράσταση στο σχήμα 12.10β, για την έλλειψη με εξίσωση $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, έχουμε ότι:

α) Τα σημεία $A(a,0), A'(-a,0), B(0,\beta)$ και $B'(0,-\beta)$ είναι οι **κορυφές της ελλείψεως** και είναι τα σημεία στα οποία η έλλειψη τέμνει τους άξονες.

β) Περιέχεται στο **ορθογώνιο** που ορίζουν οι ευθείες $x = a, x = -a, y = \beta$ και $y = -\beta$.

γ) Οι κάθετες ευθείες στο μεγάλο άξονα $(\delta): x = \frac{a^2}{\gamma}$ και $(\delta'): x = -\frac{a^2}{\gamma}$ ονομάζονται **διευθετούσες** της ελλείψεως.

Αντίστοιχα από τη γραφική παράσταση στο σχήμα 12.10γ, για την έλλειψη με εξίσωση $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, έχουμε ότι:

α) Τα σημεία $A(0,a), A'(0,-a), B(\beta,0)$ και $B'(-\beta,0)$ είναι οι **κορυφές της ελλείψεως** και είναι τα σημεία στα οποία η έλλειψη τέμνει τους άξονες.

β) Περιέχεται στο **ορθογώνιο** που ορίζουν οι ευθείες $x = \beta$, $x = -\beta$, $y = a$ και $y = -a$.

γ) Οι κάθετες ευθείες στο μεγάλο άξονα (δ): $y = \frac{a^2}{\gamma}$ και (δ'): $y = -\frac{a^2}{\gamma}$ είναι οι **διευθετούσες** της ελλείψεως.

12.10.3 Εκκεντρότητα ελλείψεως.

Σε όλες τις κωνικές τομές, εκτός του κύκλου, υπάρχει μία παράμετρος που καθορίζει τη μορφή τους. Η παράμετρος αυτή ονομάζεται **εκκεντρότητα**, συμβολίζεται με ε και αντιστοιχεί στο σταθερό λόγο των αποστάσεων από την εστία E και από μια σταθερή ευθεία δ , η οποία ονομάζεται **διευθετούσα**. Έτσι, η εκκεντρότητα της ελλείψεως ορίζεται ως εξής:

Εκκεντρότητα της ελλείψεως C ονομάζουμε το λόγο της εστιακής απόστασεως προς το μήκος του μεγάλου άξονα.

$$\varepsilon = \frac{2\gamma}{2a} \left(= \frac{\text{εστιακή απόσταση}}{\text{μήκος του μεγάλου άξονα}} \right) < 1.$$

Επειδή για τους συντελεστές της ελλείψεως a, β, γ ισχύει η σχέση $\gamma = \sqrt{a^2 - \beta^2}$, ο τύπος της εκκεντρότητας γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - \beta^2}}{a}, \text{ οπότε } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - \beta^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{\beta}{a} \right)^2 \text{ και άρα } \frac{\beta}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις:

Παρατηρήσεις:

α) Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{a}$ και κατά συνέπεια τόσο πιο **επιμήκης** γίνεται η έλλειψη (σχ. 12.10δ).

β) Όταν το ε τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{a}$ τείνει στο 1 και η έλλειψη τείνει να γίνει **κύκλος**.

γ) Όταν το ε τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{a}$ τείνει στο 0 και η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε **ευθύγραμμο τμήμα**.

δ) Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{a}$, ονομάζονται **όμοιες** (σχ. 12.10ε).

12.10.4 Εξίσωση εφαπτομένης της ελλείψεως.

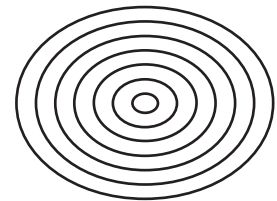
Έστω μια έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της

$M_0(x_0, y_0)$, διαφορετικό από τις κορυφές A και A' (σχ. 12.10στ). Επειδή η εφαπτομένη της ελλείψεως C διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$, έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

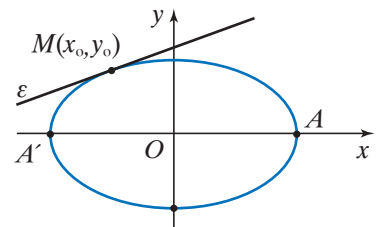
Αν στο σύστημα των εξισώσεων της ελλείψεως και ευθείας που προκύπτει,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ y - y_0 = \lambda(x - x_0) \end{array} \right\}$$

λύσουμε την δεύτερη ως προς y και αντικαταστήσουμε στην πρώτη, παίρνουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x . Επειδή όμως η ευθεία εφάπτεται της ελλείψεως, θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, άρα και η



Σχ. 12.10ε.



Σχ. 12.10στ.

δευτεροβάθμια εξίσωση θα έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή διακρίνουσα ίση με 0.

Επειδή $\Delta = 0$ έχουμε $\lambda = -\frac{\beta^2 x_o}{\alpha^2 y_o}$ και η εξίσωση ευθείας γίνεται:

$$y = y_o - \frac{\beta^2 x_o}{\alpha^2 y_o} (x - x_o) \Leftrightarrow \frac{xx_o}{\alpha^2} + \frac{yy_o}{\beta^2} = \frac{x_o^2}{\alpha^2} + \frac{y_o^2}{\beta^2} = 1.$$

Αφού το σημείο $M_o(x_o, y_o)$, είναι σημείο της ελλείψεως, θα ικανοποιεί την εξίσωσή της, δηλαδή θα ισχύει: $\frac{x_o^2}{\alpha^2} + \frac{y_o^2}{\beta^2} = 1$.

Άρα η **εξίσωση της εφαπτομένης** μιας ελλείψεως με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_o(x_o, y_o)$ είναι:

$$\frac{xx_o}{\alpha^2} + \frac{yy_o}{\beta^2} = 1. \quad (12.10.3)$$

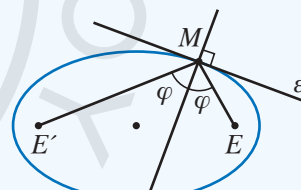
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η εξίσωση της εφαπτομένης της ελλείψεως με μορφή $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_o(x_o, y_o)$ είναι:

$$\frac{xx_o}{\beta^2} + \frac{yy_o}{\alpha^2} = 1. \quad (12.10.4)$$

12.10.5 Ανακλαστική ιδιότητα της ελλείψεως.

Σε όλες τις κωνικές τομές, εκτός του κύκλου, μπορούμε να ορίσουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα, ανάμεσα στην κάθετη στο σημείο επαφής μιας εφαπτομένης ευθείας και της κωνικής τομής. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ανακλαστική και για την έλλειψη ισχύει ότι:

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας ελλείψεως στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $E'ME$, όπου E', E οι εστίες της ελλείψεως (σχ. 12.10ζ).

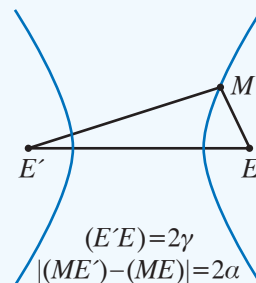


Σχ. 12.10ζ.

12.11 Υπερβολή.

Η επόμενη κωνική τομή στην οποία θα αναφερθούμε είναι η υπερβολή.

Υπερβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο διαφορετικά σημεία του, E και E' είναι σταθερή και μικρότερη της απόστασής $d(E', E)$ (σχ. 12.11α). Τα σημεία E και E' λέγονται **εστίες** της υπερβολής και η απόσταση $d(E', E)$ **εστιακή απόσταση**. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς τη συμβολίζουμε με $2a$ και την εστιακή απόσταση με 2γ . Ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν $|d(M, E') - d(M, E)| = 2a$.



Σχ. 12.11α.

Παρατήρηση: Σε μια υπερβολή ισχύει ότι $|d(M, E) - d(M, E')| < d(E', E)$, δηλαδή $2a < 2\gamma$, οπότε $a < \gamma$.

12.11.1 Αναλυτική εξίσωση υπερβολής.

Έστω μια υπερβολή με εστίες E' και E . Η εξίσωση της υπερβολής ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy έχει ως άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$, όπου τα σημεία E' και E έχουν συντεταγμένες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$, αντίστοιχα και σταθερή διαφορά $2a$ (σχ. 12.11β). Αποδεικνύεται εύκολα από τον ορισμό της υπερβολής ότι η **αναλυτική εξίσωσή** της είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}. \quad (12.11.1)$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι:

α) Η υπερβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(a, 0)$ και $A'(-a, 0)$. Τα σημεία αυτά ονομάζονται **κορυφές της υπερβολής**.

β) Το ευθύγραμμο τμήμα AA' ονομάζεται **άξονας της υπερβολής** και έχει μήκος $2a$.

Αν πάρουμε ως σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των y την ευθεία $E'E$ και άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ (σχ. 12.11γ), τότε αποδεικνύεται ότι η **αναλυτική εξίσωση** της υπερβολής, με εστίες $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$ και σταθερή διαφορά $2a$, είναι:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}. \quad (12.11.2)$$

Αν στις παραπάνω εξισώσεις υπερβολής ισχύει $a = \beta$, τότε η υπερβολή ονομάζεται **ισοσκελής** και οι εξισώσεις παίρνουν αντίστοιχα την μορφή:

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ ή } y^2 - x^2 = \beta^2.$$

Παρατήρηση: Όταν μας δίνεται η εξίσωση μιας υπερβολής, το κλάσμα που έχει μπροστά του το πρόσημο $+$ μας πληροφορεί για τον άξονα πάνω στον οποίο βρίσκονται οι εστίες της υπερβολής. Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι πάντα το a^2 .

12.11.2 Χαρακτηριστικά της υπερβολής.

Για την υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}, \text{ ισχύουν τα εξής:}$$

α) Η υπερβολή C έχει ως **άξονες συμμετρίας** τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και ως **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων (σχ. 12.11δ). Άρα, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E' , E της υπερβολής και η μεσοκάθετος του τμήματος $E'E$, είναι οι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ το μέσο O του τμήματος $E'E$ είναι το κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο O ονομάζεται **κέντρο της υπερβολής**.

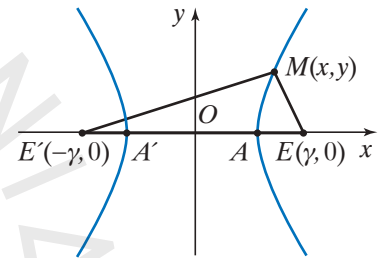
β) Η υπερβολή **δεν τέμνει** τον άξονα $y'y$.

γ) Τα σημεία της υπερβολής βρίσκονται έξω από το χωρίο που ορίζουν οι ευθείες $x = -a$ και $x = a$, κάτι που μας δείχνει ότι το γράφημα της υπερβολής **αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους** (σχ. 12.11δ).

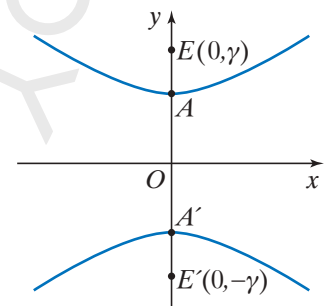
Πράγματι, από την εξίσωση της υπερβολής, έχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{\beta^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0$$

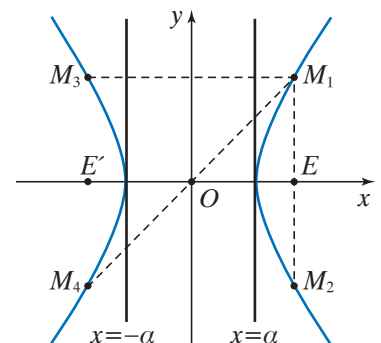
$$\text{άρα } x \leq -a \text{ ή } x \geq a.$$



Σχ. 12.11β.



Σχ. 12.11γ.



Σχ. 12.11δ.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά της υπερβολής που ορίζεται με την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ισχύουν κατ' αντιστοιχία και για την υπερβολή που ορίζεται από την εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση οι **κορυφές της υπερβολής** βρίσκονται πάνω **στον άξονα $y'y$** , στα σημεία $A(0, \alpha)$ και $A'(0, -\alpha)$, ενώ η υπερβολή **δεν τέμνει** τον άξονα $x'x$. Επίσης, η υπερβολή αποτελείται από **δύο χωριστούς κλάδους**, οι οποίοι βρίσκονται έξω από το χωρίο που ορίζουν οι ευθείες $y = -\alpha$ και $y = \alpha$.

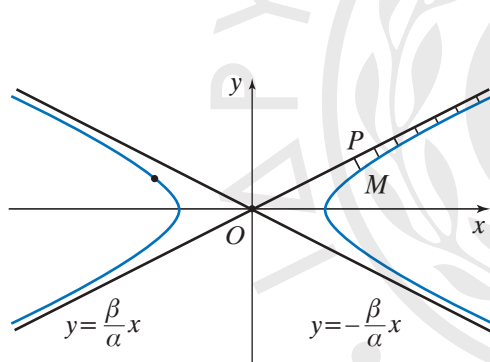
12.11.3 Ασύμπτωτες της υπερβολής.

Η υπερβολή έχει ένα επί πλέον χαρακτηριστικό σε σχέση με τις άλλες κωνικές τομές. Όπως μπορούμε να δούμε και στα σχήματα 12.11ε και 12.11στ, υπάρχουν δύο ευθείες οι οποίες «πλησιάζουν» τους κλάδους της υπερβολής. Οι ευθείες αυτές ονομάζονται **ασύμπτωτες**. Οι **ασύμπτωτες της υπερβολής** με εξίσωση:

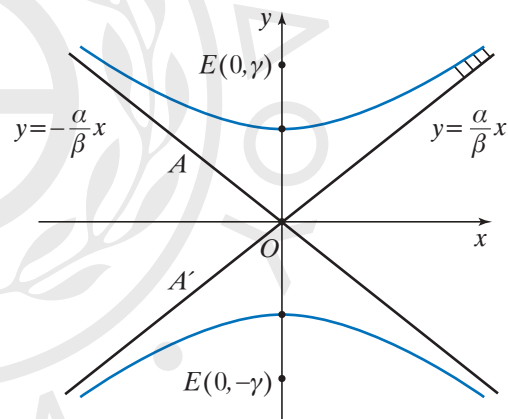
$$\alpha) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ (σχ. 12.11ε) είναι οι ευθείες } y = \frac{\beta}{a}x, y = -\frac{\beta}{a}x. \quad (12.11.3)$$

$$\beta) \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \text{ (σχ. 12.11στ) είναι οι ευθείες } y = \frac{\alpha}{\beta}x, y = -\frac{\alpha}{\beta}x. \quad (12.11.4)$$

Παρατήρηση: Ένας μνημονικός κανόνας για να προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες μίας υπερβολής είναι ο εξής: Αντικαθιστούμε τη μονάδα στην εξίσωση της υπερβολής με μηδέν, παραγοντοποιούμε, και λύνουμε την εξίσωση ως προς y .



Σχ. 12.11ε.



Σχ. 12.11στ.

12.11.4 Εκκεντρότητα υπερβολής.

Όπως στην έλλειψη, έτσι και στην υπερβολή, η εκκεντρότητα είναι μια παράμετρος η οποία καθορίζει τη μορφή της. Η εκκεντρότητα της υπερβολής ορίζεται ως εξής:

Εκκεντρότητα της υπερβολής ονομάζουμε το λόγο της εστιακής απόστασεως προς το μήκος του άξονα της υπερβολής.

$$\varepsilon = \frac{2\gamma}{2a} \left(= \frac{\text{εστιακή απόσταση}}{\text{μήκος του άξονα της υπερβολής}} \right) = \frac{\gamma}{a} > 1.$$

Επειδή για τα a, β, γ στην υπερβολή ισχύει η σχέση $\gamma = \sqrt{a^2 + \beta^2}$, ο τύπος της εκκεντρότητας γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + \beta^2}}{a}, \text{ οπότε } \varepsilon^2 = \frac{a^2 + \beta^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{\beta}{a}\right)^2, \text{ άρα } \frac{\beta}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν τα εξής:

α) Η **εκκεντρότητα** ε προσδιορίζει το **συντελεστή διευσθύνσεως της ασύμπτωτης** ευθείας της υπερβολής, άρα και τη μορφή της ίδιας της υπερβολής (σχ. 12.11ζ).

β) Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, ο λόγος $\frac{\beta}{a}$, άρα και το β , μικραίνει και τείνει να γίνει ίσο με 0. Κατά συνέπεια, **όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής, τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.**

γ) Στην περίπτωση της **ισοσκελούς υπερβολής** είναι $a = \beta$ και αποδεικνύεται ότι η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \sqrt{2}$.

12.11.5 Εξίσωση εφαπτομένης της υπερβολής.

Η εξίσωση της **εφαπτομένης** της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ (σχ. 12.11η), αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{\beta^2} = 1. \quad (12.11.5)$$

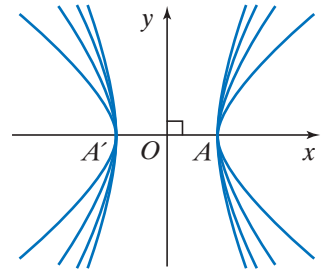
Αν η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, τότε η **εφαπτομένη** της στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ θα έχει εξίσωση:

$$\frac{yy_0}{a^2} - \frac{xx_0}{\beta^2} = 1. \quad (12.11.6)$$

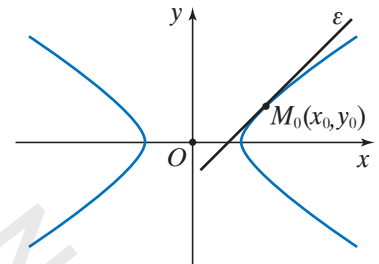
12.11.6 Ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής.

Στην υπερβολή, όπως και στην έλλειψη, ορίζεται η ανακλαστική ιδιότητα.

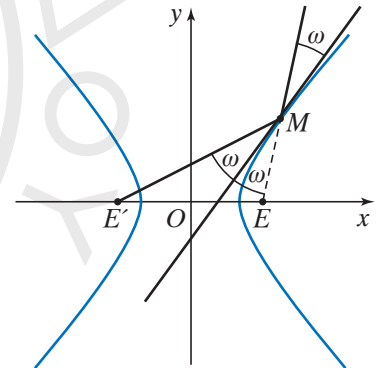
Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'ME$, όπου E' και E οι εστίες της υπερβολής (σχ. 12.11θ).



Σχ. 12.11ζ.



Σχ. 12.11η.

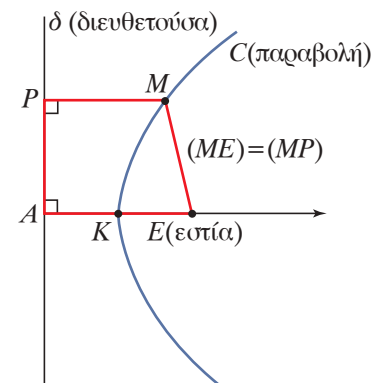


Σχ. 12.11θ.

12.12 Παραβολή.

Η τελευταία κωνική τομή, στην οποία θα αναφερθούμε, είναι η παραβολή.

Παραβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από μία σταθερή ευθεία δ και ένα σταθερό σημείο E , το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία δ (σχ. 12.12α). Η ευθεία δ ονομάζεται **διευθετούσα** της παραβολής και το σημείο E , **εστία** της παραβολής.



Σχ. 12.12α.

Αν A είναι η προβολή της εστίας E στη διευθετούσα δ , τότε το μέσο K του τμήματος EA είναι προφανώς σημείο της παραβολής και ονομάζεται κορυφή της. Άρα, ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της παραβολής, αν και μόνο αν $d(M,E) = d(M,\delta)$.

12.12.1 Αναλυτική εξίσωση παραβολής.

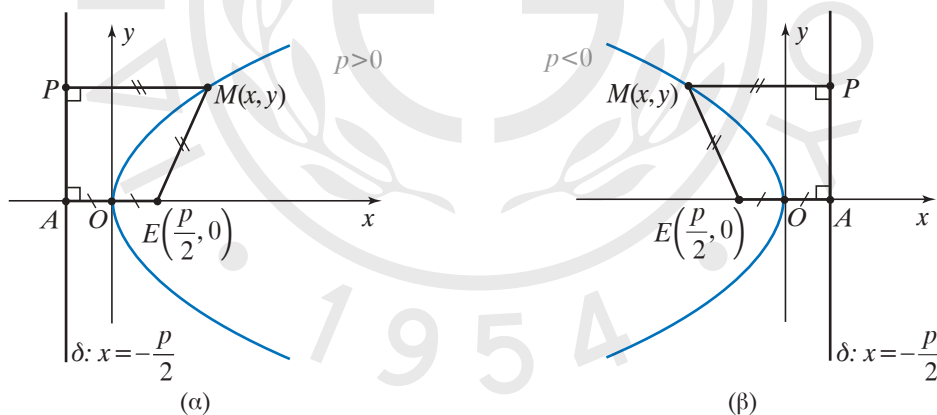
Έστω μια παραβολή με εστία E και διευθετούσα δ . Εκλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O την κορυφή της παραβολής και άξονα των x την κάθετη ευθεία από το σημείο E στην ευθεία δ (σχ. 12.12β). Αποδεικνύεται ότι η αναλυτική εξίσωση της παραβολής, με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2}$, είναι $y^2 = 2px$.

Ο αριθμός p ονομάζεται **παράμετρος** της παραβολής, το πρόσημό της καθορίζει σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η παραβολή (σχ. 12.12β και 12.12γ) και η απόλυτη τιμή της παραμέτρου $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα.

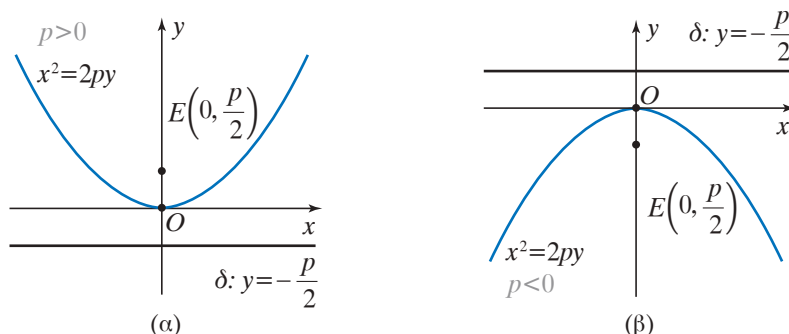
Αν πάρουμε ως σύστημα συντεταγμένων το Oxy , με αρχή O την κορυφή της παραβολής και άξονα των y την κάθετη από το E στη δ (σχ. 12.12γ), τότε η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $(\delta): y = -\frac{p}{2}$ είναι $x^2 = 2py$.

Η **αναλυτική εξίσωση της παραβολής** ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy :

α) με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2}$, (σχ. 12.12β) είναι: $y^2 = 2px$. (12.12.1)



Σχ. 12.12β.



Σχ. 12.12γ.

β) με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα (δ): $y = -\frac{p}{2}$, (σχ. 12.12γ) είναι $x^2 = 2py$. (12.12.2)

12.12.2 Χαρακτηριστικά της παραβολής.

Αν η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2px$ (σχ. 12.12β), τότε:

α) Έχει **άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$** .

β) Οι αριθμοί p και x , (με $x \neq 0$) είναι αριθμοί ομόσημοι, συνεπώς όλα τα σημεία της παραβολής βρίσκονται **δεξιά** του άξονα $y'y$, αν $p > 0$, και **αριστερά** του άξονα $y'y$, αν $p < 0$.

γ) Η **κορυφή** της είναι η αρχή των αξόνων.

Αν η εξίσωση της παραβολής είναι $x^2 = 2py$ (σχ. 12.12γ), τότε:

α) Έχει **άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$** .

β) Αν $p > 0$, όλα τα σημεία της παραβολής βρίσκονται **πάνω** από τον άξονα $x'x$, ενώ αν $p < 0$ βρίσκονται όλα **κάτω** από τον άξονα $x'x$.

γ) Η **κορυφή** της είναι η αρχή των αξόνων.

Παρατήρηση: Όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από τις παραπάνω ιδιότητες, η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η διευθετούσα δ και η εστία E.

12.12.3 Εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής.

Η **εφαπτομένη της παραβολής** με εξίσωση $y^2 = 2px$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ της παραβολής (σχ. 12.12δ) έχει εξίσωση:

$$yy_0 = p(x + x_0) \quad (12.12.3)$$

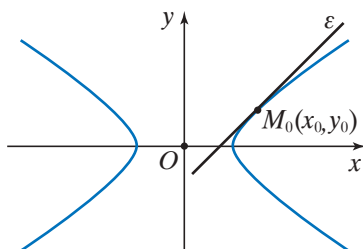
Η **εφαπτομένη της παραβολής** με εξίσωση $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ της παραβολής έχει εξίσωση:

$$xx_0 = p(y + y_0) \quad (12.12.4)$$

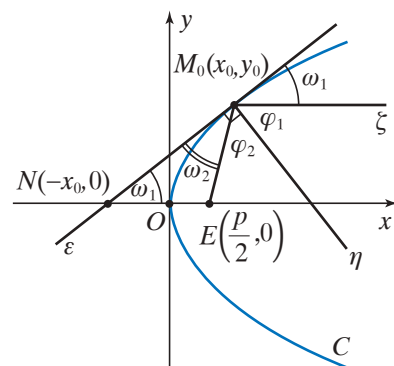
12.12.4 Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής.

Μία από τις βασικές ιδιότητες της παραβολής και με σημαντικές εφαρμογές στην καθημερινότητα είναι η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής.

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_0 **διχοτομεί** τη γωνία που σχηματίζουν το ευθύγραμμο τμήμα M_0E και η ημιευθεία $M_0\zeta$, που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής (σχ. 12.12ε).



Σχ. 12.12δ.



Σχ. 12.12ε.

12.13 Πολικές εξισώσεις κωνικών τομών.

Θεωρούμε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο, με **πόλο την εστία E** της κωνικής τομής και **πολικό άξονα** την ημιευθεία EA που είναι κάθετη στην διευθετούσα δ και την τέμνει σε ένα σημείο B [σχ. 12.13α (α), (β), (γ)].

Έστω ότι είναι $p = (EB)$, η απόσταση της εστίας E από τη διευθετούσα δ και $M(r, \theta)$ ένα τυχαίο σημείο της κωνικής επιφάνειας. Αν $MG \perp \delta$, τότε για την έλλειψη ή την παραβολή έχουμε ότι εκκεντρότητα θα είναι:

$$\varepsilon = \frac{(ME)}{(MG)} = \frac{r}{p - r \cdot \sin \theta}.$$

Άρα:

Η πολική εξίσωση της ελλείψεως ή της παραβολής είναι:

$$\varepsilon = \frac{r}{p - r \cdot \sin \theta}, \text{ όπου τα } p \text{ και } r \text{ είναι σταθερά.}$$

Για την υπερβολή αντίστοιχα έχουμε δύο εξισώσεις, μία για κάθε κλάδο:

$$\varepsilon = \frac{r}{p - r \cdot \sin \theta} \text{ και } \varepsilon = \frac{r}{r \cdot \sin \theta - p}.$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις αυτές αντιστοιχεί στον κλάδο της υπερβολής που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με την εστία E , ενώ η δεύτερη εξίσωση αντιστοιχεί στον άλλο κλάδο [σχ. 12.13α(γ)].

Οι πολικές εξισώσεις της υπερβολής, μία για κάθε κλάδο, είναι:

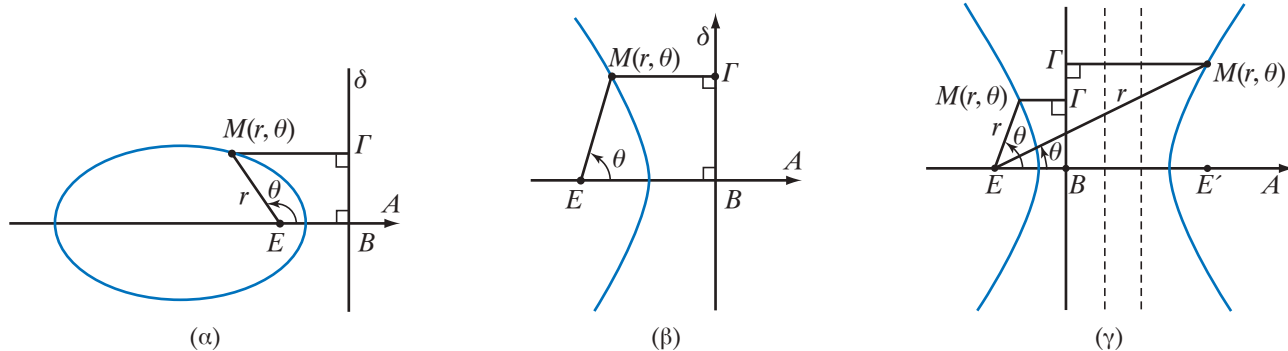
$$\pm \varepsilon = \frac{r}{p - r \cdot \sin \theta}, \text{ όπου τα } p \text{ και } r \text{ είναι σταθερά.}$$

Οι πολικές εξισώσεις των κωνικών τομών γράφονται, αν επιλυθούν ως προς r , αντίστοιχα ως εξής:

$$r = \frac{\varepsilon \cdot p}{1 + \varepsilon \cdot \sin \theta} \text{ και } r = \frac{\pm \varepsilon \cdot p}{1 \pm \varepsilon \cdot \sin \theta}.$$

Οι εξισώσεις που αναφέραμε σε αυτή την παράγραφο **αντιπροσωπεύουν** τα εξής:

- α) Έλλειψη, αν $0 < \varepsilon < 1$.
- β) Παραβολή, αν $\varepsilon = 1$.
- γ) Υπερβολή, αν $\varepsilon > 1$.



Σχ. 12.13α.

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, μπορούμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της κωνικής τομής, παρατηρώντας το είδος της κωνικής από την τιμή του ε .

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η καμπύλη τέμνει τον πολικό άξονα, την προέκταση του άξονα που διέρχεται από τον πόλο E και την ευθεία που είναι κάθετη στον πολικό άξονα και περνάει από τον πόλο E . Τα σημεία αυτά που ονομάζονται **σημεία τομής** μπορούν να βρεθούν με τη χρήση των τιμών $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ για τη γωνία θ .

(Για την παραβολή μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο τρεις από αυτές τις τιμές, αφού μία από αυτές μηδενίζει τον παρονομαστή).

Οι πολικές εξισώσεις της ελλείψεως και της υπερβολής, χρησιμοποιήθηκαν στη διατύπωση του πρώτου νόμου του Kepler, στον οποίο ο Kepler θεωρεί ότι οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις, των οποίων η μια εστία αντιστοιχεί στον Ήλιο.

Ασκήσεις.

12.13.1 Να βρείτε την εξίσωση της ελλείψεως, της οποίας οι εστίες E_1, E_2 βρίσκονται στον x άξονα, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων και για την οποία επίσης ισχύει ότι:

- α) $a = 5, b = 3$,
- β) οι εστίες $E(-3,0)$ και $E'(3,0)$ και κορυφή $A(5,0)$,
- γ) ο μεγάλος άξονας είναι 8 και η εστιακή απόσταση 6,
- δ) η εστιακή απόσταση είναι 6 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{5}$,
- ε) ο μικρός άξονας είναι 8 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{5}$,
- στ) η απόσταση των διευθετουσών είναι 10, ενώ η εστιακή απόσταση είναι 6

Λύση.

α) Αν $a = 5$ και $b = 3$, τότε $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

β) Από τα σημεία που δίνονται έχουμε ότι $a = 5, c = 3$ και ότι η έλλειψη θα έχει τη μορφή $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Από τη σχέση $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 16$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

γ) Αν ο μεγάλος άξονας είναι 8, τότε $2a = 8$, άρα $a = 4$ και αφού η εστιακή απόσταση είναι 6, ισχύει $2c = 6$ οπότε $c = 3$. Άρα $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 - 9 \Leftrightarrow b^2 = 7$ και η εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

δ) Επειδή η εστιακή απόσταση είναι 6, ισχύει $2c = 6$, άρα $c = 3$ και αφού η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \frac{3}{5}$, ισχύει $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ άρα $a = 5$. Επίσης ισχύει $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow b^2 = 16$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

ε) Αν ο μικρός άξονας είναι 8, τότε $2b = 8$, άρα $b = 4$. Επειδή η εκκεντρότητα ε είναι $\frac{3}{5}$ και ισχύει $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ (παράγρ. 12.10.3), έχουμε:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow a^2 = 25.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

στ) Αφού η εστιακή απόσταση είναι 6, ισχύει $2\gamma = 6$, άρα $\gamma = 3$. Επίσης, αφού η απόσταση των διευθετούσων είναι 10 και οι διευθετούσες είναι $(\delta'): x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$ και $(\delta): x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$, ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma} = 10 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{3} = 10 \Leftrightarrow \alpha^2 = 30.$$

Τέλος, ισχύει $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 30 - 9 \Leftrightarrow \beta^2 = 21$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{21} = 1.$$

12.13.2 Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της ελλείψεως $x^2 + 2y^2 = 2$ οι οποίες:

α) Είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -2x + 1$.

β) Είναι κάθετες στην ευθεία $y = 2x$.

γ) Διέρχονται από το σημείο $M(2,0)$.

Λύση.

Η εφαπτομένη (ε) της ελλείψεως $x^2 + 2y^2 = 2$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + 2yy_1 = 2$ και συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda_\varepsilon = -\frac{x_1}{2y_1}$. Τότε:

α) Η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x + 1$, αν και μόνο αν:

$$\frac{-x_1}{2y_1} = -2 \Leftrightarrow x_1 = 4y_1.$$

Επειδή το $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της ελλείψεως, ισχύει: $x_1^2 + 2y_1^2 = 2$ και, επειδή $x_1 = 4y_1$, θα ισχύει:

$$(4y_1)^2 + 2y_1^2 = 2 \Leftrightarrow 18y_1^2 = 2 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y_1 = \pm \frac{1}{3}.$$

Επομένως, $(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ή $(x_1, y_1) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Άρα, οι δύο εφαπτόμενες ευθείες της ελλείψεως, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -2x + 1$, είναι:

$$\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y = 2 \quad \text{και} \quad -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y = 2.$$

β) Η εφαπτομένη (ε) είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x$, αν και μόνο αν $-\frac{x_1}{2y_1} \cdot 2 = -1$, δηλαδή αν $x_1 = y_1$. Άρα, το σημείο M θα έχει συντεταγμένες $M(x_1, y_1)$ και, αφού ανήκει στην έλλειψη, θα είναι $x_1^2 + 2x_1^2 = 2 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = y_1$.

Επομένως, $(x_1, y_1) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ή $(x_1, y_1) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Άρα, οι δύο εφαπτόμενες ευθείες της ελλείψεως, που είναι κάθετες στην ευθεία $y = 2x$, είναι:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}x + 2\sqrt{\frac{2}{3}}y = 2 \quad \text{και} \quad -\sqrt{\frac{2}{3}}x - 2\sqrt{\frac{2}{3}}y = 2.$$

γ) Η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το $M(2,0)$, αν και μόνο αν η εξίσωσή της ικανοποιείται

από τις συντεταγμένες του M . Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει $2x_1 + 2 \cdot 0 \cdot y_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Επειδή το $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη, θα έχουμε:

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + 2y_1^2 = 2 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Επομένως, $(x_1, y_1) = (1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ή $(x_1, y_1) = (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Άρα, θα έχουμε δύο εφαπτόμενες της ελλείψεως που διέρχονται από το $M(2,0)$, τις ευθείες $x + \sqrt{2}y = 2$ και $x - \sqrt{2}y = 2$.

- 12.13.3** Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $y = x - 1$ (σχ.12.13β).

Λύση.

Για την έλλειψη $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ είναι $a = 5$ και $b = 3$. Επομένως $\gamma^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow \gamma^2 = 16 \Leftrightarrow \gamma = 4$, οπότε οι εστίες της ελλείψεως είναι τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$. Η εξίσωση της ζητούμενης υπερβολής με εστίες που βρίσκονται πάνω στον x' θα είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ τότε θα ισχύει } a^2 + b^2 = 4^2 = 16.$$

Για να εφάπτεται η υπερβολή της ευθείας $y = x - 1$, αρκεί το σύστημα

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

να έχει διπλή λύση. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης, γράφεται:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(x-1)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x^2 - a^2 (x-1)^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow (\beta^2 - a^2)x^2 + 2a^2 x - a^2(\beta^2 + 1) = 0.$$

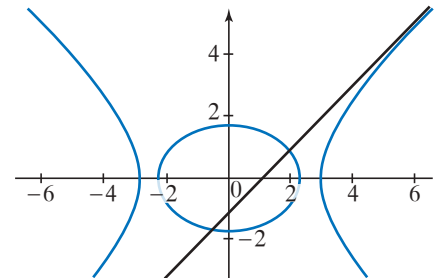
Επομένως, αρκεί η τελευταία εξίσωση να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$, δηλαδή αρκεί $\beta^2 - a^2 \neq 0$ και $4a^4 + 4a^2(\beta^2 + 1)(\beta^2 - a^2) = 0$, άρα $\beta \neq \pm a$ και $a^2(\beta^2 + 1)(\beta^2 - a^2) = 0$. Όμως

$$a^2(\beta^2 + 1)(\beta^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 + \beta^4 + \beta^2 - a^2 \beta^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 + 1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - \beta^2 = 1.$$

$$\text{Έτσι, έχουμε } \begin{cases} a^2 + \beta^2 = 16 \\ a^2 - \beta^2 = 1 \\ a \neq \pm \beta \end{cases}, \text{ οπότε } \begin{cases} a^2 = \frac{17}{2} \\ \beta^2 = \frac{15}{2} \end{cases}.$$

Άρα, η υπερβολή έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\frac{17}{2}} - \frac{y^2}{\frac{15}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{17} - \frac{2y^2}{15} = 1.$$



Σχ. 12.13β.

- 12.13.4** Να βρείτε τις εστίες, η εκκεντρότητα και οι ασύμπτωτες της

υπερβολής με εξίσωση: $16y^2 - 25x^2 = 400$ (σχ. 12.13γ).

Λύση.

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με 400, έχουμε: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Άρα $a = 5$ και $b = 4$ και $\gamma^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 + 16 \Leftrightarrow \gamma^2 = 41 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{41}$, οπότε οι εστίες της ελλείψεως είναι τα σημεία $E'(0, -\sqrt{41})$ και $E(0, \sqrt{41})$. Η εκκεντρότητα θα είναι:

$$e = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}, \text{ ενώ οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι } y = \frac{a}{b}x = \frac{5}{4}x \text{ και } y = -\frac{a}{b}x = -\frac{5}{4}x.$$

12.13.5 Δίνεται η εξίσωση μιας καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες $r^2 = \frac{12}{9 - 25\eta\mu^2\theta}$. Να βρείτε το είδος της καμπύλης, αφού αρχικά μετατραπεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

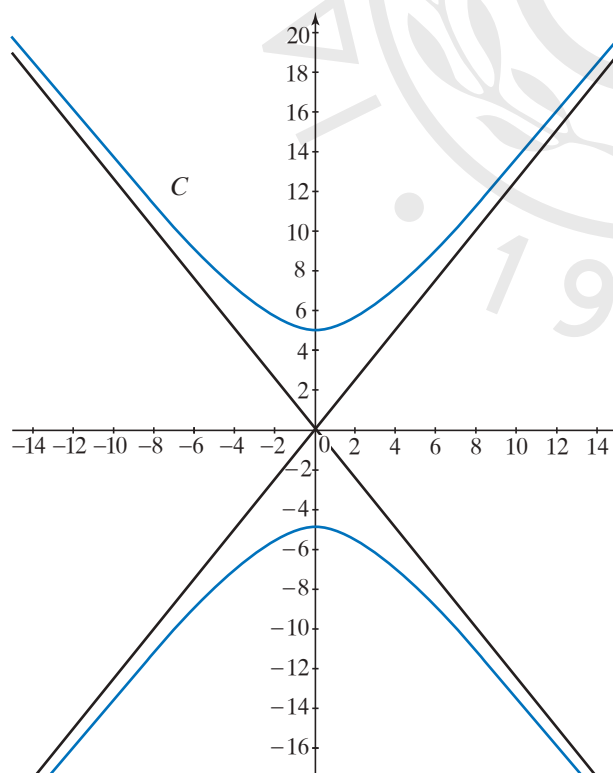
Λύση.

Γνωρίζουμε ότι για το r ισχύει $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και ότι $e\phi\theta = \frac{y}{x}$, $\eta\mu\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Άρα:

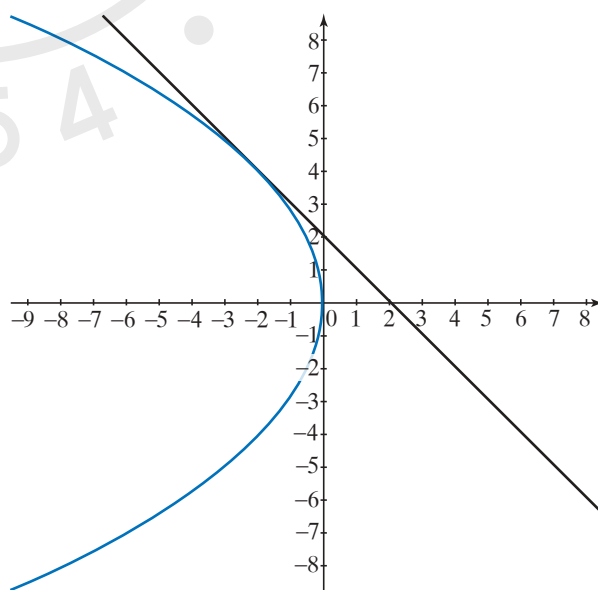
$$r^2 = \frac{12}{9 - 25\eta\mu^2\theta} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{12}{9 - 25\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{12}{9 - 25\frac{y^2}{x^2 + y^2}} \Leftrightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Άρα έχουμε την υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

12.13.6 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, η οποία έχει κορυφή το $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται της ευθείας $y = -x + 2$ (σχ. 12.13δ).



Σχ. 12.13γ.



Σχ. 12.13δ.

Λύση.

Η παραβολή θα έχει τη μορφή $y^2 = 2px$. Το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας είναι:

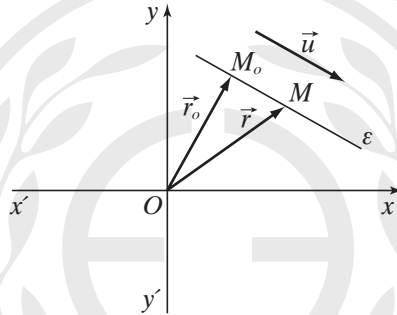
$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

Άρα $(-x + 2)^2 = 2px \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 2px \Leftrightarrow x^2 - (2p + 4)x + 4 = 0$. Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = [-(2p + 4)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4p^2 + 16p = 4p(p + 4)$.

Για να εφάπτεται η παραβολή της ευθείας $y = -x + 2$, αρκεί η Δ να είναι μηδέν. Δηλαδή $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4p(p + 4) = 0 \Leftrightarrow p = -4$, αφού η παράμετρος p είναι διάφορη του μηδενός. Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = -8x$.

12.14 Συνοπτική στοιχεία θεωρίας.**Εξισώσεις ευθείας.**

Εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα $\vec{u} = (a, \beta)$, με $\vec{u} \neq \vec{0}$



Διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{u}, t \in \mathbf{R}.$$

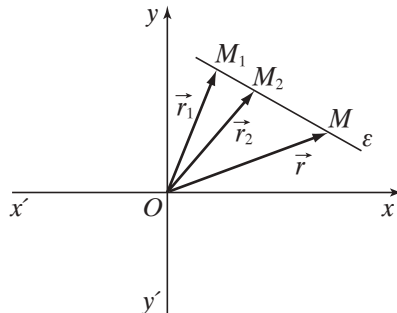
Παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ε)

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας (ε)

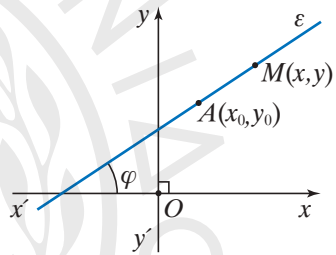
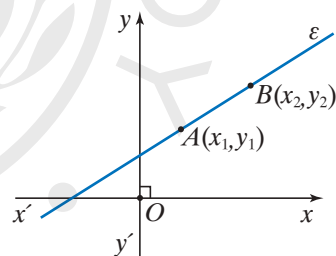
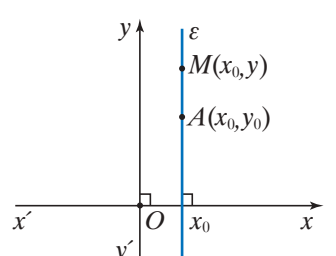
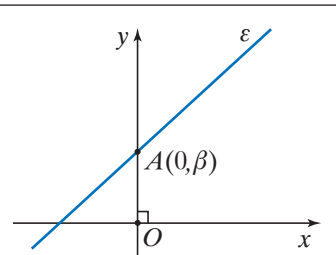
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ με διανυσματικές ακτίνες $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$



Διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε)

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), t \in \mathbf{R}.$$

Παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ε)	$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \end{aligned} \right\}, t \in \mathbf{R}.$
Αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας (ε)	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Γενική μορφή εξισώσεως ευθείας	$Ax + By + \Gamma = 0$, με $ A + B \neq 0$
Συντελεστής διεύθυνσεως (ή κλίση) λ μιας ευθείας (ε)	$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$, $\omega \neq \frac{\pi}{2}$
Συντελεστής διεύθυνσεως λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$	$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Συνθήκη παραλληλίας ευθειών	$\lambda_1 = \lambda_2$
Συνθήκη καθετότητας ευθειών	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$
Ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως λ $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$	
Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$	
Ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κατακόρυφη $x = x_0$	
Ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ από το σημείο $A(0, \beta)$ $y = \lambda x + \beta$	

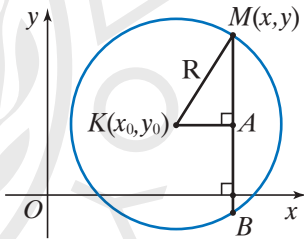
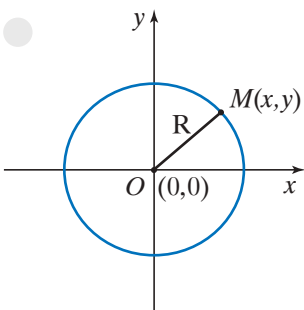
Διχοτόμοι των γωνιών xOy και yOx' $y = x$ και $y = -x$	
Ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον x' $y = y_0$	
Ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία $M(\alpha, 0)$ και $N(0, \beta)$ $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$	
Εξίσωση ευθείας (ϵ), που δεν διέρχεται από τον πόλο O, σε πολικές συντεταγμένες είναι $h = r \cdot \sin(\theta - \omega)$	

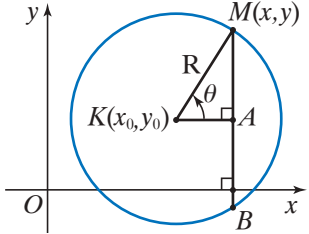
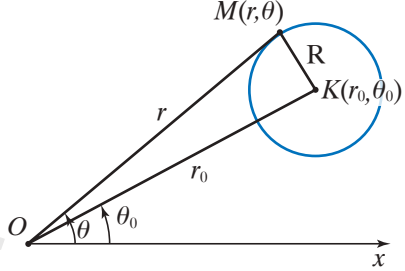
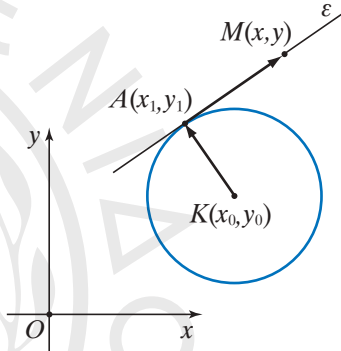
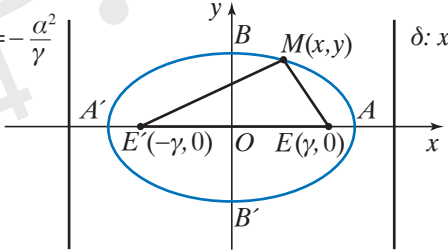
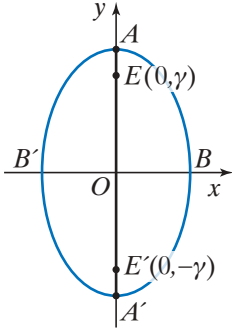
Θέση ευθειών στο επίπεδο.

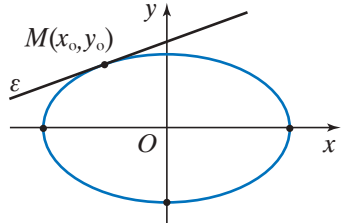
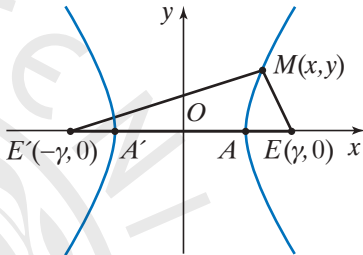
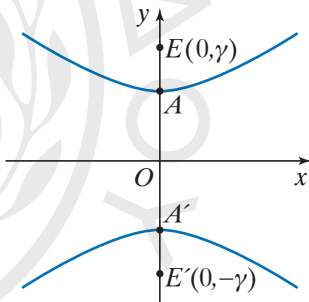
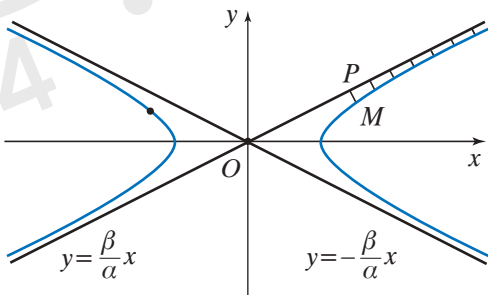
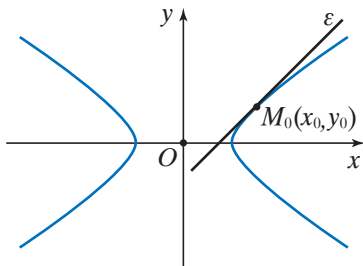
Έστω δύο ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2), με εξισώσεις (ϵ_1): $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και (ϵ_2): $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, τότε	
Διέρχονται από το ίδιο σημείο με συντεταγμένες (x, y)	$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ $x = \frac{D_x}{D} \text{ και } y = \frac{D_y}{D}, \text{ όπου}$ $D_x = \begin{vmatrix} -\Gamma_1 & B_1 \\ -\Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} A_1 & -\Gamma_1 \\ A_2 & -\Gamma_2 \end{vmatrix}$
Οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι παράλληλες	$D=0$ και μία τουλάχιστον από τις D_x και D_y να είναι διάφορη του μηδενός. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$

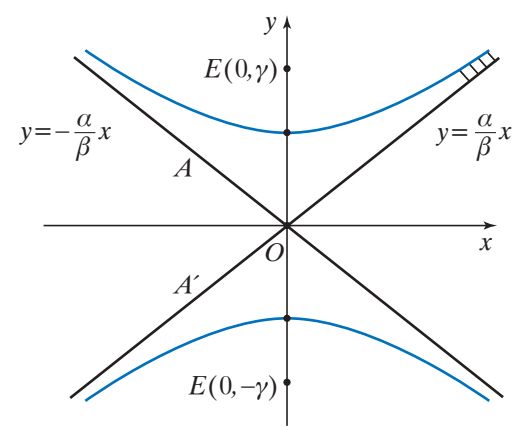
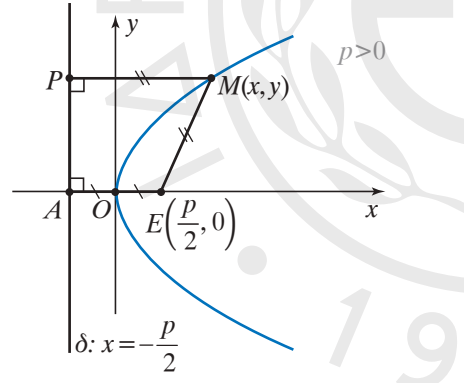
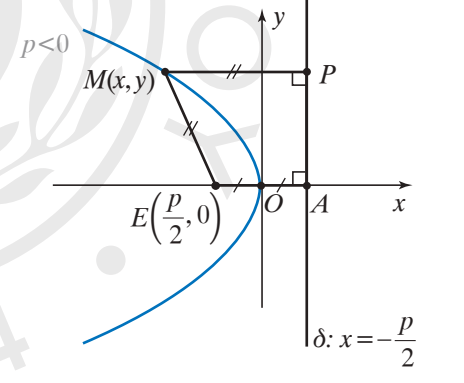
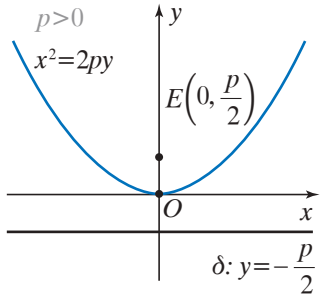
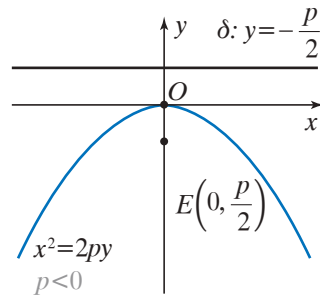
Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται	$D=D_x=D_y=0$ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0, (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0,$ $(\varepsilon_3): A_3x + B_3y + C_3 = 0$	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$
Απόσταση σημείου από ευθεία	$d = \frac{ Ax_o + By_o + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Εμβαδόν ενός τριγώνου	$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\ $

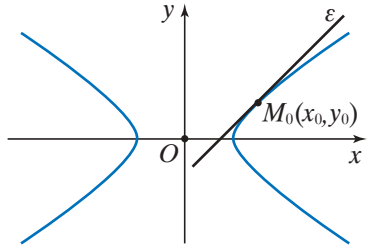
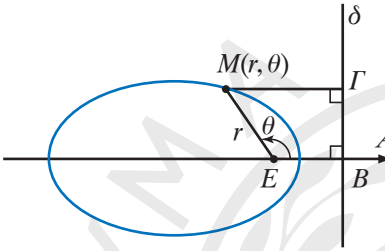
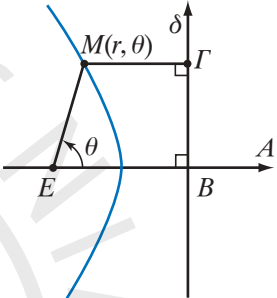
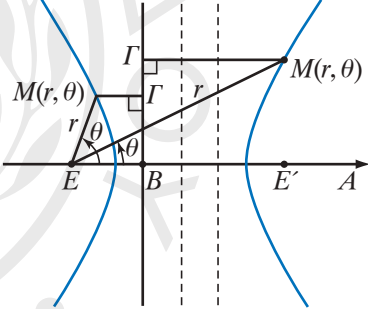
Εξισώσεις κωνικών τόμων.

Κύκλος	
Αναλυτική εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο το $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα R $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$	
Αναλυτική εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα R $x^2 + y^2 = R^2$	
Γενική εξίσωση ενός κύκλου είναι $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	Αν $A^2 + B^2 - 4C > 0$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα}$ $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

Παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $M(x,y)$ με κέντρο το $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα $Rx = x_0 + R \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ και $Ry = y_0 + R \cdot \eta\mu\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.	
Εξίσωση Κύκλου σε Πολικές Συντεταγμένες $R^2 = r^2 + r_0^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \sigma\upsilon\nu(\theta - \theta_0)$	
Εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα R, στο σημείο $A(x_1,y_1)$ του κύκλου $(x-x_0)(x_1-x_0) + (y-y_0)(y_1-y_0) = R^2$	
Εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα R, στο σημείο $A(x_1,y_1)$ του κύκλου	$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = R^2$
Έλλειψη	
Αναλυτική εξίσωση της ελλείψεως με άξονα των x την ευθεία των εστιών $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$, όπου $E'(-\gamma,\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$ $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$	
Αναλυτική εξίσωση της ελλείψεως με άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ και άξονα των y την ευθεία των εστιών $E'E$, όπου $E'(0,-\gamma)$ και $E(0,\gamma)$ $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$	

Εξίσωση της εφαπτόμενης μιας ελλείψεως με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_0(x_0, y_0)$ $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	
Εξίσωση της εφαπτομένης μιας ελλείψεως με εξίσωση $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_0(x_0, y_0)$	$\frac{xx_0}{b^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1$
Υπερβολή	
Αναλυτική εξίσωση της υπερβολής με άξονα των x την ευθεία των εστιών $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$, όπου $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ όπου } b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$	
Αναλυτική εξίσωση της υπερβολής με άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ και άξονα των y την ευθεία των εστιών $E'E$, όπου $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ όπου } b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$	
Οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$	
Η εφαπτομένη της υπερβολής με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$	

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\alpha}{\beta}x, \quad y = -\frac{\alpha}{\beta}x$	
Η εφαπτομένη της υπερβολής με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $M_o(x_o, y_o)$	$\frac{yy_o}{\alpha^2} - \frac{xx_o}{\beta^2} = 1$
Παραβολή	
Η αναλυτική εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2}$ είναι $y^2 = 2px$	
	
Η αναλυτική εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $(\delta): y = -\frac{p}{2}$ είναι $x^2 = 2py$	
	

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$ στο σημείο $M_o(x_o, y_o)$ είναι $yy_o = p(x+x_o)$	
Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής με εξίσωση $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_o(x_o, y_o)$ είναι $xx_o = p(y+y_o)$	$xx_o = p(y+y_o)$
Η πολική εξίσωση της ελλείψεως ή της παραβολής είναι $\varepsilon = \frac{r}{p - r \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$	
	
Οι πολικές εξισώσεις της υπερβολής, μία για κάθε κλάδο, είναι: $\pm \varepsilon = \frac{r}{p - r \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$	

12.15 Γενικές ασκήσεις.

- 12.15.1** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσεως μιας ευθείας (ε), που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία:
- α) $\omega = \frac{\pi}{3}$, β) $\omega = \frac{2\pi}{3}$, γ) $\omega = \pi$.
- 12.15.2** Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ μια ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από τα σημεία:
- α) $A(-6, -2)$ $B(3, 7)$
β) $A(1, 3)$ $B(2, 4)$
- 12.15.3** Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(-6, 1)$ και $\Gamma(-10, -1)$ είναι συνευθειακά.
- 12.15.4** Δίνονται τα σημεία $A(7, 5)$, $B(6, -7)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- 12.15.5** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και:

α) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(2, -5)$.

β) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(0, 3)$.

12.15.6 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:

α) Παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$.

β) Κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$.

γ) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ε) Παράλληλη στον άξονα $y'y$.

12.15.7 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): 2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12.

12.15.8 Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): (\lambda + 2)x + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): (\lambda - 1)x + \lambda y + 5 = 0$. Να βρείτε το λ , ώστε να είναι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.

12.15.9 Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $(\varepsilon_2): \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$. Να βρείτε το μ , ώστε η γωνία των (ε_1) και (ε_2) να είναι $\frac{\pi}{2}$.

12.15.10 Αν οι ευθείες $(\varepsilon): 2x - y + 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): x + 2y + 3 = 0$ είναι οι φορείς των δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και $A(2, -1)$ μία κορυφή του, να βρείτε τις άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.

12.15.11 Τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 6)$ ισαπέχουν από το σημείο $\Gamma(-4, \lambda)$. Να υπολογίσετε την τιμή του λ .

12.15.12 Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-1, -5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

β) Να βρείτε το συντελεστή διευσθύνσεως της ευθείας AB .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθυγράμμου τμήματος AB .

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB .

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB .

12.15.13 Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(2, 3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την (ε) .

12.15.14 Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t-1, t+2)$ και $\Pi_2(3t, 3t-1)$ για κάθε χρονική στιγμή t ($t > 0$).

α) Να βρείτε τις γραμμές, πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

γ) Να βρείτε την απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

12.15.15 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.

12.15.16 Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία:

α) να τέμνει τον κύκλο,

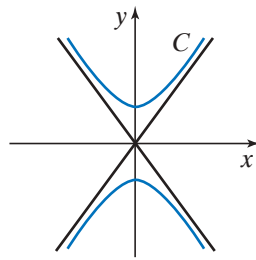
β) να εφάπτεται του κύκλου και

γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

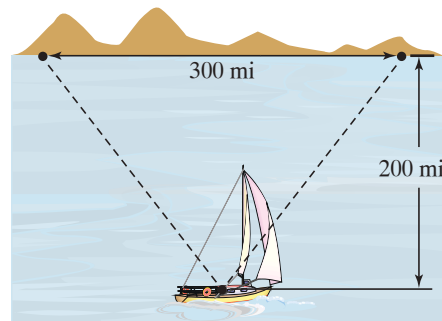
12.15.17 Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.

- 12.15.18** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $K(-4, 5)$ και περνάει από το σημείο $A(3,3)$.
- 12.15.19** Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0, 0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
 α) Είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Ox και έχει παράμετρο $p = 5$.
 β) Είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox και διέρχεται από το σημείο $(-1, 4)$.
 γ) Είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy και διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.
 δ) Έχει άξονα συμμετρίας τον Oy και εστία $E(0, -4)$.
 ε) Έχει εστία $E(-2, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x - 2 = 0$.
 στ) Έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$.
- 12.15.20** Να γράψετε την εξίσωση της ελλείψεως που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.
- 12.15.21** Να βρείτε την εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:
 α) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, β) $4x^2 + 9y^2 = 36$, γ) $9x^2 + 25y^2 = 225$.
- 12.15.22** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(1, 4)$. Να βρείτε:
 α) Τις εξισώσεις των πλευρών του.
 β) Τις εξισώσεις δύο υψών του.
 γ) Τις εξισώσεις δύο διαμέσων του.
 δ) Τις εξισώσεις δύο διχοτόμων του.
- 12.15.23** Τα σημεία $M_1(1, 1)$, $M_2(2, 2)$ και $M_3(3, -1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρείτε:
 α) Τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του.
 β) Τις συντεταγμένες του κέντρου του.
 γ) Το εμβαδόν του.
- 12.15.24** Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3y + 20 = 0$ και $3x + 5y - 27 = 0$ και η μία διαγώνιός του βρίσκεται επί της ευθείας $x + 7y - 16 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.
- 12.15.25** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή $A(1, 2)$ και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 12.15.26** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $A(\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega)$ και $B(\eta\mu\varphi, \sigma\upsilon\nu\varphi)$. Να βρείτε την απόσταση του $O(0, 0)$ από αυτήν $(0 \leq \omega \neq \varphi < \frac{\pi}{2})$.
- 12.15.27** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων, η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου από το σημείο $\Pi(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
 α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A ;
 β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι A , όταν κινείται ευθύγραμμα.
 γ) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;
- 12.15.28** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy , ένα πλοiάριο ξεκινά από ένα λιμάνι A και κατευθύνεται στο λιμάνι O . Το ραντάρ θέσεως για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοiάριο $(2t - 40, t - 30)$, $t \geq 0$.
 α) Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι A ;
 β) Πόσο απέχει το λιμάνι A από το O ;
 γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοiάρου; Ποια είναι η εξίσωσή της;

- 12.15.29** Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο $A(-1, -1)$. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο A .
- 12.15.30** Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της ελλείψεως $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{y^2}{\alpha^2}$.
- 12.15.31** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$.
 α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρεθούν όλα τα κοινά σημεία.
 β) Να αποδείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
 γ) Να βρείτε τα σημεία $M(x_0, y_0)$, ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$ (E', E οι εστίες της ελλείψεως).
- 12.15.32** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του σχήματος 12.15α, της οποίας η μία ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρείτε:
 α) Τις εστίες της υπερβολής.
 β) Την εστιακή της απόσταση.
 γ) Την εξίσωσή της.
 δ) Την εκκεντρότητά της και να προσδιορισθεί το ορθογώνιο βάσεως της υπερβολής.
- 12.15.33** Να εκφράσετε τις παρακάτω καμπύλες από πολικές σε ισοδύναμες καρτεσιανές συντεταγμένες ή αντίστροφα.
 α) $x^2 + 2y^2 = 9$, β) $r = 1 - \sin\theta$, γ) $r^2 = \eta\mu 2\theta$.
- 12.15.34** Να σχεδιάσετε τις παρακάτω κωνικές τομές σε πολικές συντεταγμένες.
 α) $r = \frac{2}{1 + \sin\theta}$, β) $r = \frac{16}{5 - 3\sin\theta}$, γ) $r(3 - 5\sin\theta) = 9$, δ) $r = \frac{-2}{1 - \cos\theta}$.
- 12.15.35** Η μέγιστη απόσταση της γης από τον ήλιο είναι $9,3 \cdot 10^7$ μίλια. Η ελάχιστη απόσταση είναι $9,1 \cdot 10^7$ μίλια. Αν ο ήλιος βρίσκεται σε μια εστία της ελλειπτικής τροχιάς, να υπολογίσετε την απόσταση του ήλιου από την άλλη εστία.
- 12.15.36** Δύο ραδιοσυσκευές αποστολής σημάτων τοποθετήθηκαν σε απόσταση 300 μιλίων κατά μήκος της ακτής (σχ. 12.15β). Οι συσκευές στέλνουν ταυτόχρονα σήματα σε ένα σκάφος που απέχει 200 μίλια από την ακτή και πλέει παράλληλα σε αυτήν. Το σήμα από τη συσκευή αποστολής σημάτων S φθάνει στο σκάφος με καθυστέρηση 200 microsec, σε σχέση με τη



Σχ. 12.15α



Σχ. 12.15β

συσκευή αποστολής σημάτων T. Τα σήματα ταξιδεύουν με ταχύτητα 186.000 μιλίων ανά sec, ή 0,186 μίλια ανά microsec. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες S και T, πάνω στην οποία το σκάφος κινείται. (Υπόδειξη: για οποιοδήποτε σημείο της υπερβολής, η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών του από τις εστίες είναι 2α.)

- 12.15.37** Υποθέστε ότι ένας κομήτης ταξιδεύει σε μια παραβολική τροχιά με τον ήλιο ως εστία του. Τοποθετήστε ένα πολικό ισότιμο σύστημα με τον πόλο στον ήλιο και τον άξονα της καθέτου τροχιάς στον πολικό άξονα. Όταν ο κομήτης είναι σε δεδομένη απόσταση r από τον ήλιο, η νοητή ευθεία που ενώνει τον κομήτη με τον ήλιο σχηματίζει γωνία θ με τον πολικό άξονα. Βρείτε μια πολική εξίσωση της τροχιάς, υποθέτοντας ότι η διευθετούσα βρίσκεται επάνω από τον πόλο αν:

α) $r = 100.000.000$ μίλια, $\theta = \frac{\pi}{6}$, β) $r = 120.000.000$ μίλια, $\theta = \frac{\pi}{4}$.



ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η σφαίρα αποτελεί ένα από τα βασικά γεωμετρικά σχήματα. Από την αρχαιότητα η μελέτη της απασχόλησε μαθηματικούς αλλά και φιλόσοφους. Τα σχήματα που περικλείονται στη σφαίρα είναι ακριβώς τα κανονικά πολύεδρα, τα πλατωνικά στερεά: το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο, ο κύβος και το δωδεκάεδρο. Ο Πλάτων διένειμε τα τέσσερα πρώτα από αυτά τα πολύεδρα στη φωτιά, τη γη, το νερό και τον αέρα. Στη φωτιά έδωσε το τετράεδρο, στη γη τη μορφή του κύβου, στον αέρα έδωσε το σχήμα του οκτάεδρου, ενώ το νερό το αντιστόιχισε στο εικοσάεδρο. Για το πέμπτο κανονικό στερεό, μας δίνει ελάχιστες πληροφορίες λέγοντας ότι αυτήν την κατασκευή ο Θεός την προέβαλε στο σύμπαν και το διακόσμησε περιχαράσσοντάς το με αυτή. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη στερεομετρία, τη γεωμετρία της σφαίρας, τη σφαιρική τριγωνομετρία και τις εφαρμογές αυτών στη Ναυτιλία και την Αστρονομία.

- 13.1 Στερεομετρία.
- 13.2 Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα.
- 13.3 Θεμελιώδεις σχέσεις σε ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα.
- 13.4 Κανόνες του Napier.
- 13.5 Θεωρήματα των τεταρτημορίων.
- 13.6 Επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.
- 13.7 Ορθόπλευρα σφαιρικά τρίγωνα.
- 13.8 Επίλυση σφαιρικού τριγώνου.
- 13.9 Εφαρμογές σφαιρικής τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία.
- 13.10 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 13.11 Γενικές ασκήσεις.

13.1 Στερεομετρία.

Η θεωρία των πολυέδρων, και ιδιαίτερα για τα κυρτά πολυέδρα, αποτελεί ένα από τα πιο γοητευτικά κεφάλαια της Γεωμετρίας. Ξεκινώντας την αναφορά μας στη στερεομετρία θα παραθέσουμε **ορισμούς και πορίσματα** που ισχύουν σε αυτήν, χωρίς αποδείξεις, ώστε να καταλήξουμε στη σφαιρική τριγωνομετρία. Κάποια πορίσματα θα αποδειχθούν ως εφαρμογές για την καλύτερη εμπέδωση και κατανόησή τους.

1) Η έννοια της γωνίας στο χώρο.

Ήδη είναι γνωστός ο ορισμός της γωνίας στο επίπεδο, είναι απαραίτητο όμως να ορίσουμε τη γωνία και στο χώρο.

Έτσι λοιπόν, διακρίνεται σε:

α) **Πολύεδρη ή Στερεά γωνία** ονομάζεται η γωνία, η οποία σχηματίζεται από τρία ή περισσότερα επίπεδα που συναντώνται στο ίδιο σημείο και ανά τρία δεν διέρχονται από την ίδια ευθεία (σχ. 13.1α). Συμβολισμός: $O.A_1A_2A_3 \dots A_n$ ($n \geq 3$).

β) **Διέδρη γωνία** στερεάς γωνίας ονομάζεται η γωνία που σχηματίζουν οι έδρες που ανά δύο διέρχονται από κάθε ακμή.

γ) **Τρίεδρη ονομάζεται** η στερεά γωνία που έχει ακριβώς τρεις ακμές, όπως: $O.A_1A_2A_3$ (σχ. 13.1β).

Σχόλια: Χαρακτηριστικά των γωνιών.

α) Οι ημιευθείες $OA_1, OA_2, OA_3, \dots, OA_n$ ονομάζονται ακμές της στερεάς γωνίας και η κοινή αρχή O ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας.

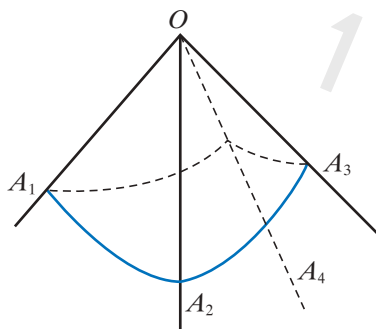
β) Οι κυρτές επίπεδες γωνίες $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_nOA_1$ ονομάζονται **εδρικές γωνίες** ή απλά **έδρες**. Έδρες επίσης ονομάζονται και τα επίπεδα που σχηματίζουν τη στερεά γωνία.

γ) Τις έδρες $A_2OA_3, A_3OA_1, A_1OA_2$ τις συμβολίζουμε με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, δηλ.:

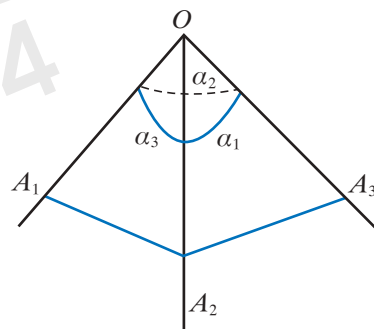
$$A_2OA_3 \equiv \alpha_1, A_3OA_1 \equiv \alpha_2, A_1OA_2 \equiv \alpha_3.$$

δ) Τις διέδρες γωνίες της τρίεδρης $O.A_1A_2A_3$ που έχουν ακμές τις ημιευθείες OA_1, OA_2, OA_3 , τις συμβολίζουμε με τα γράμματα A_1, A_2, A_3 , αντίστοιχα.

ε) Οι έδρες $A_2OA_3 \equiv \alpha_1, A_3OA_1 \equiv \alpha_2, A_1OA_2 \equiv \alpha_3$, βρίσκονται απέναντι από τις ακμές OA_1, OA_2, OA_3 ή από τις διέδρες A_1, A_2, A_3 αντίστοιχα.



Σχ. 13.1α.



Σχ. 13.1β.

2) Χαρακτηρισμός των γωνιών ως προς τις έδρες τους.

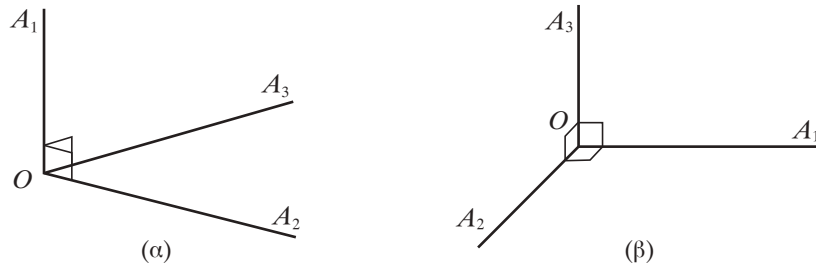
Ανάλογα με το πόσες έδρες είναι ίσες, καθώς και με το είδος των γωνιών, οι γωνίες διακρίνονται σε:

α) **Ισοσκελής** ονομάζεται η τρίεδρη γωνία $O.A_1A_2A_3$, της οποίας οι δύο έδρες (εδρικές γωνίες) είναι ίσες.

β) Μια ισοσκελής τρίεδρη γωνία, με τις ίσες γωνίες ορθές, χαρακτηρίζεται **δισορθογώνια** [σχ. 13.1γ(α)].

γ) Μια τριεδρη γωνία $OA_1A_2A_3$ ονομάζεται **ισοεδρική**, αν οι έδρες της είναι όλες ίσες.

δ) Μια ισοεδρική τριεδρη γωνία, με τις ακμές της ανά δύο κάθετες μεταξύ τους και όλες τις δίεδρες ορθές, ονομάζεται **τρισορθογώνια** [σχ. 13.1γ(β)].



Σχ. 13.1γ.

3) Η σφαίρα (κέντρο, ακτίνα, στερεά σφαίρα).

Σφαίρα είναι το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν από ένα σταθερό σημείο O (το **κέντρο της σφαίρας**) σταθερή απόσταση R (την **ακτίνα** της). Η σφαίρα συμβολίζεται (O, R) (σχ. 13.1δ).

Η **στερεά σφαίρα** είναι το σύνολο των σημείων του χώρου, που απέχουν από το σταθερό σημείο O απόσταση μικρότερη ή ίση του R .

4) Βασικά χαρακτηριστικά σημεία της σφαίρας.

Τα βασικά χαρακτηριστικά σημεία της σφαίρας συνίστανται στα εξής:

α) Κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο O της σφαίρας, τέμνει τη σφαίρα σε δύο **αντιδιαμετρικά** σημεία A και A' .

β) Το ευθύγραμμο τμήμα AA' ονομάζεται **διάμετρος** της σφαίρας και το μήκος της διαμέτρου είναι $2R$ (σχ. 13.1ε).

γ) Το ευθύγραμμο τμήμα $BΓ$ που ενώνει δύο σημεία B και $Γ$ της σφαίρας ονομάζεται **χορδή** (σχ. 13.1ε). **Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη από όλες τις χορδές** (εδώ η AA' είναι μεγαλύτερη από τη χορδή $BΓ$).

5) Τομή σφαίρας.

Τομή μιας σφαίρας και ενός επιπέδου ονομάζουμε το σχήμα που προκύπτει όταν η σφαίρα τμηθεί από το επίπεδο. Η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι γενικά κύκλος (σχ. 13.1στ).

Σχόλια: Θέση σημείου σε σφαίρα.

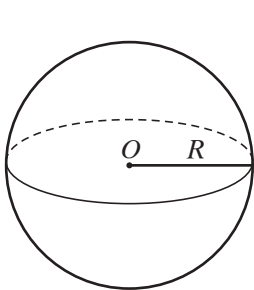
Έστω K το σημείο του επιπέδου $(Π)$ που απέχει απόσταση δ από το κέντρο της σφαίρας. Τότε:

α) Αν $\delta < R$, το σημείο K είναι **εσωτερικό** σημείο της σφαίρας.

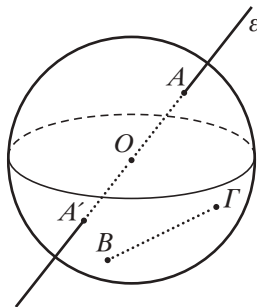
β) Αν $\delta = R$, το σημείο K είναι το σημείο, στο οποίο η σφαίρα και το επίπεδο **εφάπτονται**.

γ) Αν $\delta > R$, το σημείο K είναι **εξωτερικό** σημείο της σφαίρας.

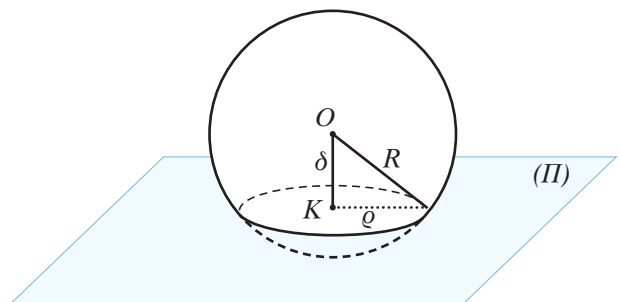
δ) Αν ϱ η ακτίνα του σχηματιζόμενου από την τομή κύκλου, τότε ισχύει: $R^2 = \delta^2 + \varrho^2$ (σχ. 13.1στ).



Σχ. 13.1δ.



Σχ. 13.1ε.



Σχ. 13.1στ.

6) Κύκλοι σφαίρας (O, R).

Ο κύκλος σφαίρας διακρίνεται σε:

α) **Μέγιστο κύκλο σφαίρας**, που ονομάζεται κάθε κύκλος ο οποίος προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της (σχ. 13.1ζ).

β) **Μικρό κύκλο σφαίρας**, που ονομάζεται κάθε κύκλος ο οποίος προκύπτει από την τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο που δεν διέρχεται από το κέντρο της (σχ. 13.1η).

Σχόλια: Χαρακτηριστικά μέγιστου κύκλου.

Ο μέγιστος κύκλος έχει κέντρο, το κέντρο O της σφαίρας, και ακτίνα, την ακτίνα R της σφαίρας (σχ. 13.1ζ). Η απόσταση δ του κέντρου της σφαίρας από το επίπεδο του μέγιστου κύκλου, είναι ίση με το μηδέν. Ο μέγιστος κύκλος χωρίζει τη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια.

7) Ιδιότητες μεγίστων κύκλων σφαίρας.

Οι βασικές ιδιότητες μεγίστων κύκλων σφαίρας συνίστανται στις εξής:

α) Δύο μέγιστοι κύκλοι ή θα ταυτίζονται ή θα τέμνονται σε δύο **αντιδιαμετρικά** σημεία.

β) Από δύο σημεία A, B μιας σφαίρας, τα οποία δεν είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου (μη αντιδιαμετρικά), διέρχεται ακριβώς ένας μέγιστος κύκλος (σχ. 13.1θ). Τα σημεία αυτά χωρίζουν το μέγιστο κύκλο, που διέρχεται από αυτά, σε δύο άνισα τόξα.

γ) Αν τα σημεία αυτά είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου, τότε διέρχονται από αυτά άπειροι μέγιστοι κύκλοι.

δ) **Απόσταση** δύο σημείων A και B πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ονομάζουμε το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από αυτά και συμβολίζεται με (AB) . Η απόσταση αυτή είναι ίση με το μέτρο της **επίκεντρης γωνίας** AOB . Το μέτρο της γωνίας είναι ανεξάρτητο της ακτίνας της σφαίρας (σχ. 13.1θ).

ε) Οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους και διχοτομούνται.

στ) Η τομή δύο κυκλικών δίσκων, αντιστοίχων δύο μεγίστων κύκλων της σφαίρας είναι κοινή διάμετρος τους.

8) Ιδιότητες μικρών κύκλων σφαίρας.

Οι βασικές ιδιότητες μικρών κύκλων σφαίρας συνίστανται στις εξής:

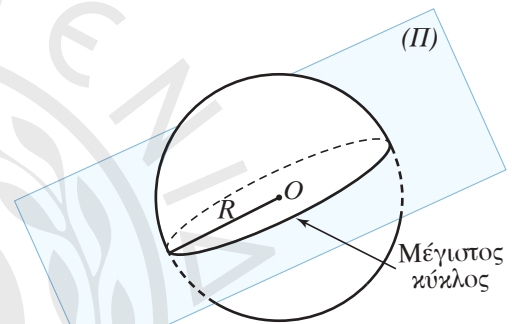
α) Δύο μικροί κύκλοι σφαίρας που απέχουν εξίσου από το κέντρο της είναι **ίσοι**.

β) Αν δύο μικροί κύκλοι σφαίρας απέχουν άνισα από το κέντρο της, τότε είναι **άνισοι** και μικρότερος είναι εκείνος που απέχει περισσότερο από το κέντρο της σφαίρας.

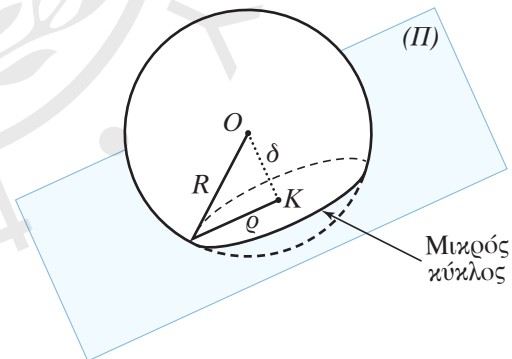
γ) Η ευθεία που ενώνει το κέντρο της σφαίρας με το κέντρο ενός μικρού κύκλου της είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.

9) Ιδιότητες και χαρακτηριστικά κύκλων σφαίρας.

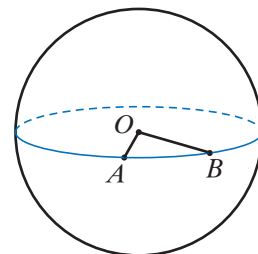
Οι βασικές ιδιότητες και τα κυριότερα χαρακτηριστικά κύκλων σφαίρας συνίστανται στα εξής:



Σχ. 13.1ζ.



Σχ. 13.1η.



Σχ. 13.1θ.

α) Σε μια σφαίρα, **παράλληλοι κύκλοι** ονομάζονται οι κύκλοι, των οποίων τα επίπεδα είναι παράλληλα (σχ. 13.1ι).

β) Η ευθεία, η οποία διέρχεται από το κέντρο O της σφαίρας και είναι κάθετη στο επίπεδο ενός κύκλου (μικρού ή μεγάλου), καλείται **άξονας** του κύκλου [σχ. 13.1α(α), (β)]. Στα σχήματα 13.1α(α) και (β) άξονας του κύκλου είναι η ευθεία PP' .

γ) Το επίπεδο που περνά από το σημείο O και είναι κάθετο στη διάμετρο PP' , τέμνει τη σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο, ο οποίος ονομάζεται **ισημερινός κύκλος** του σημείου P (σχ. 13.1α).

10) Πόλοι κύκλων σφαίρας.

Πόλοι ενός κύκλου σφαίρας ονομάζονται τα σημεία τομής του άξονα του κύκλου με την επιφάνεια της σφαίρας. Τα σημεία αυτά είναι αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας και παρουσιάζουν τα εξής χαρακτηριστικά:

α) Κάθε μέγιστος κύκλος είναι ισημερινός κύκλος των πόλων του [σχ. 13.1α(β)].

β) Για δύο σημεία A και B ενός κύκλου σφαίρας (O, R) και τον πόλο P ισχύει ότι η απόσταση (PA) είναι **ίση** με την απόσταση (PB) (σχ. 13.1β). Εφόσον τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται είναι ίσα, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, PA και PB , καθώς και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{PA}$ και $\widehat{PB}$ (βλ. Άσκηση 13.1.1).

γ) Η απόσταση κάθε σημείου του κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου, είναι σταθερή και ονομάζεται **πολική απόσταση του κύκλου**.

δ) Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει τον πόλο του κύκλου με ένα τυχαίο σημείο του κύκλου ονομάζεται **σφαιρική ακτίνα** του κύκλου.

ε) Η πολική απόσταση του κύκλου (K, KA) είναι το μήκος του τμήματος (PA) (σχ. 13.1γ) και η σφαιρική ακτίνα το μήκος του τόξου $\widehat{PA}$ του μέγιστου κύκλου PAP' .

στ) Η σφαιρική ακτίνα ενός μέγιστου κύκλου είναι 90° ή $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια.

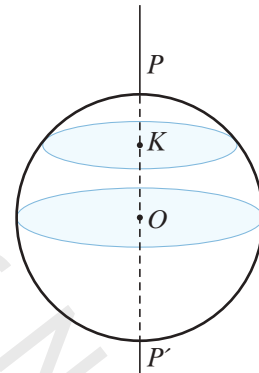
11) Σφαιρική γωνία.

Σφαιρική γωνία ονομάζεται το μέρος της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ δύο τόξων μέγιστων κύκλων, τα οποία τέμνονται σε κάποιο σημείο αυτής (σχ. 13.1δ). Τα τόξα αυτά τέμνονται και σε ένα άλλο σημείο της σφαίρας, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του πρώτου.

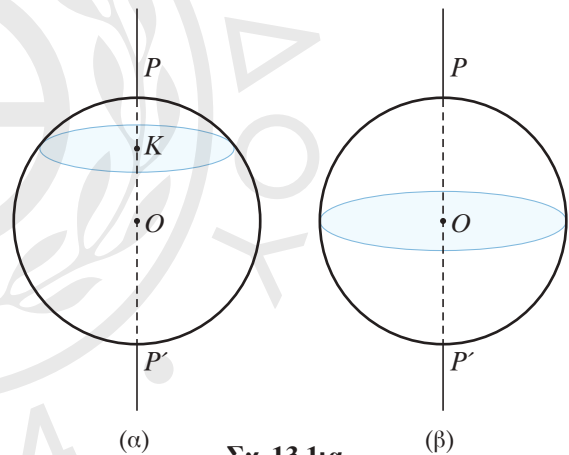
Σχόλια: Χαρακτηριστικά σφαιρικής γωνίας

α) Τα τόξα του μέγιστου κύκλου που σχηματίζονται ονομάζονται **πλευρές** της σφαιρικής γωνίας και ένα από τα σημεία τομής των τόξων ονομάζεται **κορυφή** της σφαιρικής γωνίας.

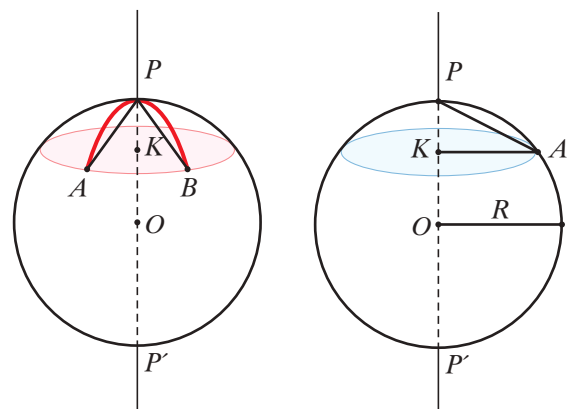
β) Η σφαιρική γωνία με κορυφή το σημείο P μετρείται από την επίπεδη γωνία xPy που σχηματίζεται από



Σχ. 13.1ι.



Σχ. 13.1α.



Σχ. 13.1β.

Σχ. 13.1γ.

τις εφαπτόμενες των πλευρών της γωνίας, στην κορυφή P (σχ. 13.1ιδ).

γ) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας ισούται με το μέτρο του τόξου του ισημερινού κύκλου της κορυφής της, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας (σχ. 13.1ιδ). Δηλαδή θα ισχύει ότι $xPy = AOB = \widehat{AB} = \theta$.

12) Σφαιρικό τρίγωνο.

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που ορίζεται από τα τόξα τριών μέγιστων κύκλων, που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο (σχ. 13.1ιε). Το σφαιρικό τρίγωνο είναι το απλούστερο από όλα τα σφαιρικά σχήματα που διαγράφονται πάνω στη σφαίρα, ενώ η μελέτη του βοήθησε στην ανάπτυξη τόσο της σφαιρικής τριγωνομετρίας, όσο και στην εξέλιξη της Αστρονομίας.

Σχόλια: Χαρακτηριστικά σφαιρικού τριγώνου.

α) Τα σημεία τομής των μεγίστων κύκλων A, B, Γ ονομάζονται **κορυφές** και τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$ και $\widehat{GA}$ ονομάζονται **πλευρές** του σφαιρικού τριγώνου. Στο σχήμα 13.1ιστ το μέρος της σφαίρας που ορίζεται από τα σημεία A, B και Γ είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο.

β) Κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου είναι το μικρότερο από τα δύο τόξα στα οποία χωρίζεται κάθε μέγιστος κύκλος. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πλευρά είναι τόξο μέγιστου κύκλου, μικρότερο από ημικύκλιο.

γ) Κάθε **πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από π rad (180°)**.

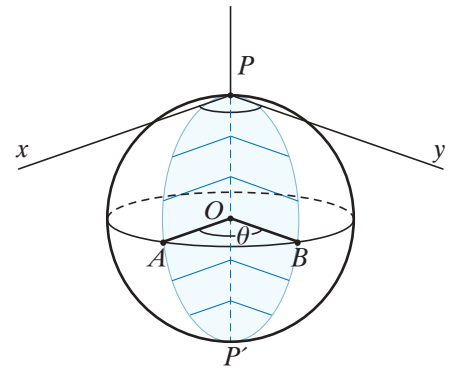
13) Κύρια στοιχεία σφαιρικού τριγώνου.

Το σφαιρικό τρίγωνο ABΓ (σχ. 13.1ιστ) σχηματίζεται από τους τρεις μέγιστους κύκλους της σφαίρας. Αν ενώσουμε το κέντρο O της σφαίρας με τις κορυφές του σφαιρικού τριγώνου A, B, Γ σχηματίζεται η **τρίεδρη γωνία O.ABΓ**. Στην τρίεδρη αυτή γωνία λέμε ότι αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο ABΓ. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι **τρεις μέγιστοι κύκλοι** ανά δύο ονομάζονται **γωνίες του σφαιρικού τριγώνου**, έχουν το **ίδιο μέτρο με τις διέδρες γωνίες A, B, Γ** και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα των **κορυφών A, B, Γ**. Ισοδύναμα, οι γωνίες αυτές είναι οι αντίστοιχες επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μεγίστων κύκλων σε κάθε κορυφή του τριγώνου. Αντίστοιχα τις **πλευρές του τριγώνου** τις συμβολίζουμε συνήθως με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών, δηλαδή **συμβολίζουμε με α, β, γ τα τόξα $\widehat{BG}$, $\widehat{AB}$ και $\widehat{GA}$ αντίστοιχα**.

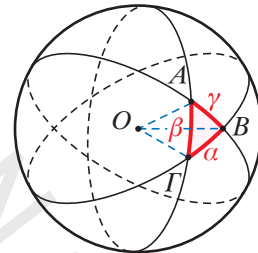
Πρέπει στο σημείο αυτό να τονίσουμε τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ του **μέτρου α κάθε πλευράς, που είναι το «γωνιακό» μέτρο του τόξου του αντίστοιχου μέγιστου κύκλου**, δηλαδή του μέτρου της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας **και του μήκους s της πλευράς**, δηλαδή του πραγματικού μήκους του τόξου σε μονάδες μήκους (π.χ. σε μέτρα). Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μέσω της ακτίνας R της σφαίρας (στις ίδιες μονάδες μήκους):

$$s = R \cdot \alpha.$$

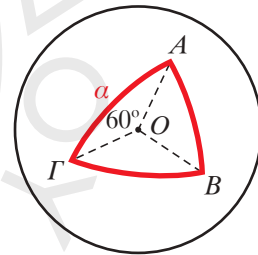
Παρατήρηση: Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε στην πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου, θα εννοούμε το μέτρο της, το οποίο μετρείται σε ακτίνια (rad) ή σε συμβατικές μονάδες μετρήσεως γωνιών



Σχ. 13.1ιδ.



Σχ. 13.1ιε.



Σχ. 13.1ιστ.

(μοίρες, βαθμοί, ...). Αυτό σημαίνει ότι όλα τα μετρούμενα μεγέθη, μήκη πλευρών και γωνίες κορυφών δεν επηρεάζονται από την ακτίνα της σφαίρας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.1.1

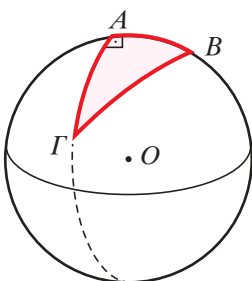
Στο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 13.1ιστ, η πλευρά $\widehat{A\Gamma}$ έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της επίκεντρης γωνίας $\widehat{AOG}$. Άρα $\widehat{A\Gamma} = a = 60^\circ$.

14) Είδη σφαιρικών τριγώνων.

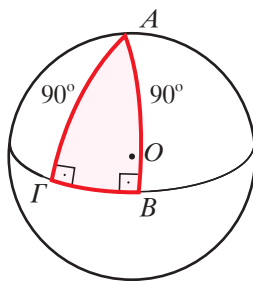
Στον πίνακα 13.1 μπορούμε να δούμε πώς χαρακτηρίζεται ένα σφαιρικό τρίγωνο ανάλογα τις γωνίες ή τις πλευρές του, ενώ στο σχήμα 13.1ιζ βλέπουμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις από αυτές.

Πίνακας 13.1
Είδη σφαιρικών τριγώνων.

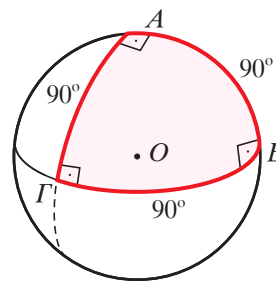
Ορθογώνιο	Αν μια σφαιρική γωνία του είναι ίση με μια ορθή γωνία (90°).
Δισορθογώνιο	Αν δύο σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90° .
Τρισορθογώνιο	Αν και οι τρεις σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90° .
Ισόπλευρο	Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.
Ισοσκελές	Αν δύο πλευρές του είναι ίσες.
Σκαληνό	Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
Ορθόπλευρο	Αν μια πλευρά του έχει μέτρο ίσο με 90° .
Δισορθόπλευρο	Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90° .
Τρισορθόπλευρο	Αν τρεις πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90° .
Τυχόν (ή πλάγιο ή κοινό)	Αν δεν έχει αναγκαστικά μια πλευρά ή μια γωνία μέτρου 90° .



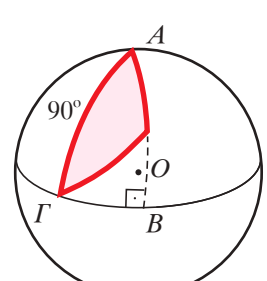
(α) Ορθογώνιο



(β) Ισοσκελές – δισορθογώνιο – δισορθόπλευρο



(γ) Ισόπλευρο – τρισορθογώνιο – τρισορθόπλευρο



(δ) Ορθόπλευρο

Σχ. 13.1ιζ.

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις σφαιρικών τριγώνων.

15) Πολικό σφαιρικό τρίγωνο.

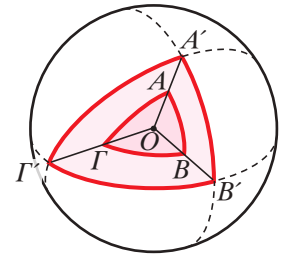
Πολικό τρίγωνο του τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 13.1η), ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A' , B' και Γ' . Το A' είναι ο πόλος του μέγιστου κύκλου $B\Gamma$, που βρίσκεται στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή A , το B' ο πόλος του μέγιστου κύκλου $A\Gamma$, που βρίσκεται στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή B και το Γ' ο πόλος του μέγιστου κύκλου AB , που βρίσκεται στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή Γ . Τις πλευρές του πολικού τριγώνου θα συμβολίζουμε με α' , β' , γ' .

Αν $A'B'\Gamma'$ είναι ένα πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, τότε και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου $A'B'\Gamma'$ (σχ. 13.1η) (βλ. Άσκηση 13.1.2).

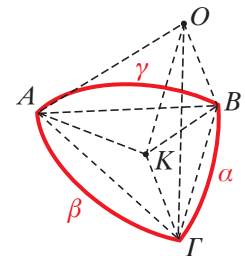
Κάθε γωνία ενός σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ είναι **παραπληρωματική** της αντίστοιχης πλευράς του πολικού τριγώνου $A'B'\Gamma'$, δηλαδή

$$\begin{aligned} A + \alpha' &= B + \beta' = \Gamma + \gamma' = 180^\circ (= 2 \text{ ορθές}), \\ A' + \alpha &= B' + \beta = \Gamma' + \gamma = 180^\circ (= 2 \text{ ορθές}). \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Σε κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου αντιστοιχούν δύο πόλοι. Ο πόλος A' , που επιλέγουμε, είναι ο πλησιέστερος στην κορυφή A . Με αντίστοιχο τρόπο βρίσκονται και οι πόλοι B' και Γ' .



Σχ. 13.1η.



Σχ. 13.1θ.

16) Σχέσεις μεταξύ των βασικών στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου.

Οι σχέσεις μεταξύ των βασικών στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου συνίστανται στις εξής:

α) Αν οι πλευρές α , β , γ ενός σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ μετρηθούν σε μοίρες, τότε το άθροισμά τους είναι μικρότερο των 360° (σχ. 13.1θ), άρα (βλ. Άσκηση 13.1.3):

$$\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ.$$

β) Αν οι γωνίες A , B , Γ ενός σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ μετρηθούν σε μοίρες, τότε το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο από 180° και μικρότερο των 540° , (βλ. Άσκηση 13.1.4) δηλαδή,

$$180^\circ < A + B + \Gamma < 540^\circ.$$

γ) Αν οι γωνίες A , B , Γ ενός σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ μετρηθούν σε ακτίνια, τότε για το άθροισμά τους ισχύει:

$$A + B + \Gamma - \pi = \frac{(AB\Gamma)}{R^2},$$

όπου $(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου και R η ακτίνα της σφαίρας.

Η διαφορά $A + B + \Gamma - \pi$ ονομάζεται **σφαιρική υπεροχή** του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, συμβολίζεται με $2S$ και είναι ίση με τη στερεά γωνία που ορίζει το τρίγωνο, όπως φαίνεται από το κέντρο της σφαίρας. Για τη σφαιρική υπεροχή ισχύει:

$$2S = \frac{(AB\Gamma)}{R^2}.$$

Παρατήρηση: Αν η σφαιρική υπεροχή ενός τριγώνου είναι πολύ μικρή ($2S \rightarrow 0$), δηλαδή αν η ακτίνα της σφαίρας γίνει πολύ μεγάλη ($R \rightarrow \infty$), το σφαιρικό τρίγωνο μπορεί να θεωρηθεί ως επίπεδο τρίγωνο. Αυτό σημαίνει ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι μια οριακή περίπτωση της Σφαιρικής.

Η σφαιρική υπεροχή κάθε σφαιρικού τριγώνου ισούται με το εμβαδόν του, αν ως μονάδα μετρήσεως επιφανειών θεωρηθεί το εμβαδόν του τρισσορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου ίσο με $\frac{\pi}{2}$, και ως μονάδας μετρήσεως γωνιών και πλευρών η ορθή γωνία (σχ. 13.1κ). Δηλαδή ισχύει:

$$2S = \frac{E}{8} \text{ (βλ. Άσκηση 13.1.5).}$$

Το εμβαδόν $(AB\Gamma)$ ενός σφαιρικού τριγώνου, σε τετραγωνικά μέτρα, ισούται με το γινόμενο της σφαιρικής του υπεροχής επί το $1/8$ του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας. Άρα:

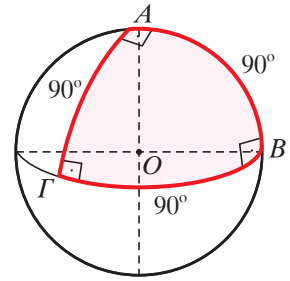
$$(AB\Gamma) = 2S \cdot \frac{1}{8} \cdot E,$$

όπου $E = 4\pi R^2$, το εμβαδόν σφαίρας ακτίνας R και $2S$ η σφαιρική της υπεροχή (το $2S$ είναι διαιρεμένο με 90° και οι γωνίες A, B, Γ σε μοίρες).

δ) Δύο πλευρές σφαιρικού τριγώνου είναι *ίσες*, αν και μόνο αν, οι *απέναντι* προς αυτές γωνίες του είναι *ίσες* (βλ. Άσκηση 13.2.4).

ε) Το άθροισμα δύο πλευρών σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά του (βλ. Άσκηση 13.2.5).

στ) Αν δύο πλευρές σφαιρικού τριγώνου είναι άνισες, τότε και οι απέναντι προς αυτές γωνίες είναι άνισες και μάλιστα απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά. Ισχύει και το αντίστροφο.



Σχ. 13.1α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.1.2

Οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $A = 120^\circ$, $B = 145^\circ$ και $\Gamma = 70^\circ$. Αν η ακτίνα της σφαίρας στην οποία ανήκει είναι 2 m, να υπολογισθεί το εμβαδόν του.

Τότε, έχουμε για τις γωνίες.

$$A = \frac{120}{90} \text{ ορθ.}, B = \frac{145}{90} \text{ ορθ. και } \Gamma = \frac{70}{90} \text{ ορθ.}$$

Η σφαιρική του υπεροχή θα είναι:

$$2S = \frac{120}{90} + \frac{145}{90} + \frac{70}{90} - 2 = \frac{155}{90} = \frac{31}{18}.$$

Άρα:

$$(AB\Gamma) = 2S \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{31}{18} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{31}{9} \cdot \pi = 10,821 m^2.$$

Στις παρακάτω ασκήσεις αποδεικνύονται κάποιοι από τους ορισμούς που αναφέρθηκαν, για την καλύτερη κατανόησή τους.

Ασκήσεις.

13.1.1 Για δύο σημεία A και B ενός κύκλου σφαίρας (O, R) και τον πόλο P ισχύει ότι η απόσταση (PA) είναι ίση με την απόσταση (PB) (βλ. σελ. 505).

Λύση.

Όπως βλέπουμε στο σχήμα 13.1β, τα σημεία A, P και O ορίζουν επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το κέντρο O της σφαίρας και τέμνει τη σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο. Το ίδιο συμβαίνει και με τα σημεία B, P και O . Άρα τα τόξα $\widehat{PA}$ και $\widehat{PB}$ είναι τόξα μεγίστων κύκλων.

Επειδή το P είναι πόλος του κύκλου, η PO τέμνει κάθετα το επίπεδο του κύκλου, στο κέντρο του

Κ. Αν συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα PKA και PKB παρατηρούμε ότι έχουν:

- (1) $PK = PK$ (κοινή πλευρά)
- (2) $KA = KB$ (ακτίνες κύκλου)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές τους PA και PB , καθώς και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{PA}$ και $\widehat{PB}$ είναι ίσα.

- 13.1.2** Αν $A'B'Γ'$ είναι ένα πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου $ABΓ$, τότε και τρίγωνο $ABΓ$ είναι πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου $A'B'Γ'$ (σελ. 508).

Λύση.

Αν το A' είναι πόλος του μέγιστου κύκλου $BΓ$ (σχ. 13.1η), τότε το τόξο $\widehat{ΓA'}$ θα είναι 90° . Αντίστοιχα, αν το B' είναι πόλος του μέγιστου κύκλου $AΓ$, τότε το τόξο $\widehat{ΓB'}$ θα είναι 90° . Άρα κάθε ένα από τα σημεία A' , B' απέχει 90° από το σημείο $Γ$, οπότε το σημείο $Γ$ θα είναι πόλος του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A' και B' . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το σημείο A θα είναι πόλος του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $Γ'$ και B' και το σημείο B' θα είναι πόλος του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $Γ'$ και A' . Άρα το τρίγωνο $ABΓ$ είναι πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου $A'B'Γ'$.

- 13.1.3** Αν οι πλευρές α , β , γ ενός σφαιρικού τριγώνου $ABΓ$ μετρηθούν σε μοίρες, τότε το άθροισμά τους είναι μικρότερο των 360° , (σχ. 13.1θ) δηλαδή (βλ. σελ. 508): $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.

Λύση.

Όπως έχουμε αναφέρει, οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι τόξα μέγιστου κύκλου και μετρώνται από τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες.

Αν το O είναι το κέντρο της σφαίρας, ισχύει:

$$\alpha = \angle GOB, \beta = \angle AOG \text{ και } \gamma = \angle AOB \text{ τότε } \alpha + \beta + \gamma = \angle GOB + \angle AOG + \angle AOB. \quad (13.1.1)$$

Αν η OK είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στο επίπεδο που ορίζουν τα A , B και $Γ$, δηλαδή το K είναι η προβολή του κέντρου O στο επίπεδο αυτό, ισχύει:

$$\angle GOB < \angle KGB, \angle GOA < \angle KGA \text{ και } \angle BOA < \angle BKA.$$

Τότε:

$$\angle BOΓ + \angle GOA + \angle BOA < \angle BKG + \angle KGA + \angle BKA = 360^\circ. \quad (13.1.2)$$

Άρα από (13.1.1) και (13.1.2), έχουμε $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.

- 13.1.4** Αν οι γωνίες A , B , $Γ$ ενός σφαιρικού τριγώνου $ABΓ$ μετρηθούν σε μοίρες, τότε το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο από 180° και μικρότερο των 540° , δηλαδή, $180^\circ < A + B + Γ < 540^\circ$ (βλ. σελ. 508).

Λύση.

Αν $A'B'Γ'$ το πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου $ABΓ$, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' + \gamma' < 360^\circ &\Leftrightarrow (180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - \Gamma) < 360^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 540^\circ - (A + B + \Gamma) < 360^\circ \Leftrightarrow 180^\circ < A + B + \Gamma \end{aligned} \quad (13.1.3)$$

Επίσης, για κάθε μία από τις γωνίες έχουμε $0^\circ < A < 180^\circ$, $0^\circ < B < 180^\circ$ και $0^\circ < \Gamma < 180^\circ$, άρα

$$A + B + \Gamma < 540^\circ \quad (13.1.4)$$

Από (13.1.3) και (13.1.4) έχουμε το ζητούμενο.

- 13.1.5.** Η σφαιρική υπεροχή κάθε σφαιρικού τριγώνου ισούται με το εμβαδόν του, αν ως μονάδα μετρήσεως επιφανειών θεωρηθεί το εμβαδόν του τρισσορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου (και ως

μονάδα μετρήσεως γωνιών και πλευρών η ορθή γωνία) (βλ. σελ. 509). Δηλαδή:

$$2S = \frac{E}{8}.$$

Λύση.

Έστω ένα τρισσορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 13.1κ), με ακτίνα σφαίρας ίση με $R = 1 \text{ rad}$. Το εμβαδόν του τρισσορθογώνιου τριγώνου είναι ίσο με το $1/8$ της επιφάνειας της σφαίρας, αφού αυτή χωρίζεται σε 8 ίσα σφαιρικά τρισσορθογώνια τρίγωνα. Επομένως, στο τρισσορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ για τις γωνίες A, B, Γ ισχύει $A = B = \Gamma = \frac{\pi}{2}$ και η σφαιρική υπεροχή θα είναι $2S = \frac{\pi}{2}$. Επειδή για την επιφάνεια της σφαίρας ισχύει $E = 4\pi R^2$ και $R = 1 \text{ rad}$, έχουμε $E = 4\pi \text{ rad}^2$. Άρα, το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου θα είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{E}{8} = \frac{4\pi \text{ rad}^2}{8} = \frac{\pi \text{ rad}^2}{2}.$$

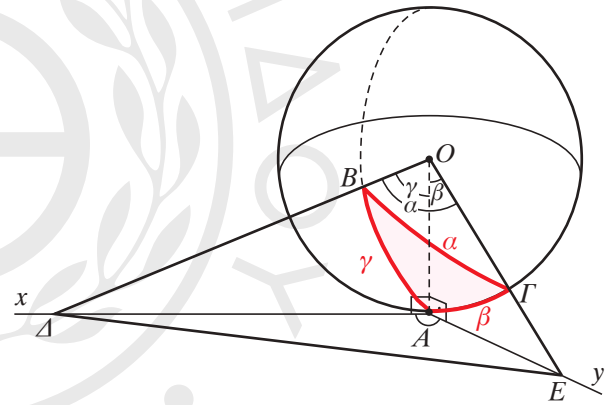
Οπότε $\frac{(AB\Gamma)}{R^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$. Άρα, η σφαιρική υπεροχή τελικά γίνεται: $2S = \frac{E}{8}$.

13.2 Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα.

Έστω ένα σφαιρικό τρίγωνο, με πλευρές a, β, γ , γωνίες A, B, Γ , το οποίο βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα κέντρου O και ακτίνας R (σχ. 13.2α).

Φέρονμε τις εφαπτόμενες Ax και Ay στην κορυφή A , των τόξων μεγίστων κύκλων $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$ αντίστοιχα. Η OB τέμνει την Ax στο Δ και η OG τέμνει την Ay στο E και τα τρίγωνα $O\Delta A$ και OAE είναι ορθογώνια στο A . Η επίπεδη γωνία ΔAE χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της γωνίας A , ενώ οι πλευρές a, β, γ μετρώνται από τις επίκεντρες γωνίες $BO\Gamma, AOG, AOB$ αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας το σχήμα 13.2α και βασικές γεωμετρικές σχέσεις, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω σχέσεις που ισχύουν σε ένα σφαιρικό τρίγωνο.



Σχ. 13.2α.

Τύποι συνημιτόνων ή θεμελιώδεις σχέσεις πρώτου είδους. (Νόμος των συνημιτόνων για τις πλευρές)			
$\text{συν}a = \text{συν}\beta \cdot \text{συν}\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \text{συν}A$	(13.2.1)	$\text{συν}\gamma = \text{συν}a \cdot \text{συν}\beta + \eta\mu a \cdot \eta\mu\beta \cdot \text{συν}\Gamma$	(13.2.3)
$\text{συν}\beta = \text{συν}a \cdot \text{συν}\gamma + \eta\mu a \cdot \eta\mu\gamma \cdot \text{συν}B$	(13.2.2)		
Τύποι ημιτόνων ή θεμελιώδεις σχέσεις δεύτερου είδους. (Νόμος των ημιτόνων)			
$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu a} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\gamma} \quad (13.2.4)$			
Θεμελιώδεις σχέσεις τρίτου είδους.			
$\eta\mu a \cdot \text{συν}\beta = \text{συν}\beta \cdot \eta\mu\gamma - \eta\mu\beta \cdot \text{συν}\gamma \cdot \text{συν}A$	(13.2.5)	$\eta\mu\beta \cdot \text{συν}a = \text{συν}a \cdot \eta\mu\gamma - \eta\mu a \cdot \text{συν}\gamma \cdot \text{συν}B$	(13.2.8)
$\eta\mu a \cdot \text{συν}\Gamma = \text{συν}\gamma \cdot \eta\mu\beta - \eta\mu\gamma \cdot \text{συν}\beta \cdot \text{συν}B$	(13.2.6)	$\eta\mu\gamma \cdot \text{συν}a = \text{συν}a \cdot \eta\mu\beta - \eta\mu a \cdot \text{συν}\beta \cdot \text{συν}\Gamma$	(13.2.9)
$\eta\mu\beta \cdot \text{συν}\Gamma = \text{συν}\gamma \cdot \eta\mu a - \eta\mu\gamma \cdot \text{συν}a \cdot \text{συν}B$	(13.2.7)	$\eta\mu\gamma \cdot \text{συν}\beta = \text{συν}\beta \cdot \eta\mu a - \eta\mu\beta \cdot \text{συν}a \cdot \text{συν}\Gamma$	(13.2.10)

Πολικοί τύποι των θεμελιωδών σχέσεων. (Νόμος συννημιτόνων για τις γωνίες ή νόμος του Gauss)	
$\text{συν}A = -\text{συν}B \cdot \text{συν}\Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \text{συν}\alpha$ (13.2.11)	$\text{συν}B = -\text{συν}A \cdot \text{συν}B + \eta\mu A \cdot \eta\mu B \cdot \text{συν}\gamma$ (13.2.13)
$\text{συν}B = -\text{συν}\Gamma \cdot \text{συν}A + \eta\mu\Gamma \cdot \eta\mu A \cdot \text{συν}\beta$ (13.2.12)	
Τύποι ημίσεως γωνιών και ημίσεως πλευρών.	
$\varepsilon\varphi^2 \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu(\tau - \beta) \eta\mu(\tau - \gamma)}{\eta\mu(\tau - \alpha) \eta\mu\tau}$ (13.2.14)	$\varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu \frac{2S}{2} \eta\mu(A - \frac{2S}{2})}{\eta\mu(B - \frac{2S}{2}) \eta\mu(\Gamma - \frac{2S}{2})}$ (13.2.16)
$\sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{συν}(T - A) \text{συν}(T - B) \text{συν}(T - \Gamma)}{-\text{συν}T \text{συν}(T - A)}$ (13.2.15)	όπου: $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}, T = \frac{A + B + \Gamma}{2}$ και $2S = \frac{(AB\Gamma)}{R^2}$.
Αναλογικοί τύποι των Gauss – Delambre.	
$\eta\mu \frac{A}{2} = \text{συν} \frac{\alpha}{2} \frac{\text{συν} \frac{B + \Gamma}{2}}{\text{συν} \frac{\beta + \gamma}{2}} = \eta\mu \frac{\alpha}{2} \frac{\text{συν} \frac{B - \Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\beta + \gamma}{2}}$ (13.2.17)	$\text{συν} \frac{A}{2} = \text{συν} \frac{\alpha}{2} \frac{\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}}{\text{συν} \frac{\beta - \gamma}{2}} = \eta\mu \frac{\alpha}{2} \frac{\text{συν} \frac{B - \Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\beta - \gamma}{2}}$ (13.2.18)
Αναλογικοί τύποι του Napier.	
$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\beta - \gamma}{2} \frac{\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2}} = \varepsilon\varphi \frac{\beta + \gamma}{2} \frac{\text{συν} \frac{B + \Gamma}{2}}{\text{συν} \frac{B - \Gamma}{2}}$ (13.2.19)	
$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sigma\varphi \frac{B - \Gamma}{2} \frac{\eta\mu \frac{\beta - \gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\beta + \gamma}{2}} = \sigma\varphi \frac{B + \Gamma}{2} \frac{\text{συν} \frac{\beta - \gamma}{2}}{\text{συν} \frac{\beta + \gamma}{2}}$ (13.2.20)	
Τύποι των τεσσάρων συνεχών στοιχείων σφαιρικού τριγώνου.	
$\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu B = \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\varphi A - \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi B$ (13.2.21)	$\sigma\varphi\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu A = \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\varphi B - \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi A$ (13.2.24)
$\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\varphi A - \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\Gamma$ (13.2.22)	$\sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu A = \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi A$ (13.2.25)
$\sigma\varphi\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\varphi B - \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\Gamma$ (13.2.23)	$\sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu B = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi B$ (13.2.26)

Παρατηρήσεις:

α) Με τη βοήθεια των σχέσεων (13.2.1), (13.2.2), (13.2.3) μπορούμε να βρούμε μια πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου, όταν είναι γνωστές οι άλλες δύο πλευρές του, καθώς και η γωνία απέναντι της γνωστής πλευράς.

β) Με τη βοήθεια της σχέσεως (13.2.4) μπορούμε να κάνουμε επίλυση των σφαιρικών τριγώνων, αν δίνονται δύο πλευρές και μια αντικείμενη γωνία ή δύο γωνίες και μια αντικείμενη πλευρά.

γ) Από τους πολικούς τύπους (13.2.11), (13.2.12), (13.2.13) μπορούμε να βρούμε τις πλευρές α, β, γ ενός σφαιρικού τριγώνου, αν είναι γνωστές οι γωνίες του A, B, Γ . Πράγματι,

$$\text{συν}\alpha = \frac{\text{συν}A + \text{συν}B \cdot \text{συν}\Gamma}{\eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma}, \quad \text{συν}\beta = \frac{\text{συν}B + \text{συν}A \cdot \text{συν}\Gamma}{\eta\mu A \cdot \eta\mu\Gamma}, \quad \text{συν}\gamma = \frac{\text{συν}\Gamma + \text{συν}A \cdot \text{συν}B}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}.$$

δ) Στους τύπους από (13.2.14) μέχρι (13.2.20) μεταξύ των στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου, γράφουμε την αλγεβρική σχέση για την μία γωνία ή πλευρά, ενώ οι υπόλοιποι τύποι προκύπτουν με κυκλική μετάθεση των συμβόλων. (Δηλαδή $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$ κ.λπ.)

ε) Οι τύποι (13.2.21) έως (13.2.26) ονομάζονται τύποι των τεσσάρων συνεχών στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου, αφού κάθε τύπος αρχίζει από μία πλευρά και συνεχίζει με τέσσερα διαδοχικά στοιχεία του τριγώνου (σχ. 13.2α), είτε από δεξιά είτε από αριστερά, και γυρίζει πίσω κατά δύο στοιχεία.

στ) Κάθε μία από τις σχέσεις (13.2.21) έως (13.2.26), έστω για παράδειγμα η

$$\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu B = \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\phi A - \sigma\phi\gamma \cdot \sigma\phi B,$$

μπορεί να γραφεί εύκολα στην εξής μορφή:

$$\sigma\phi\alpha \cdot \eta\mu\gamma = \eta\mu B \cdot \sigma\phi A - \sigma\eta\gamma \cdot \sigma\eta B.$$

Στη Ναυτιλία, χρησιμοποιούνται δύο ακόμα τριγωνομετρικοί αριθμοί, το παρημίτονο και το ημιπαρημίτονο, αφού με τη χρήση ειδικά του ημιπαρημιτόνου, αποφεύγονταν οι πράξεις με αρνητικούς αριθμούς. Η ανάπτυξη όμως των υπολογιστών έχει μειώσει τη χρήση τους.

Η διαφορά $1 - \sigma\eta\omega$ ονομάζεται **παρημίτονο (versine)** του τόξου ω , συμβολίζεται με **πρω (ή verω)** και ισχύει $\pi\rho\omega = 1 - \sigma\eta\omega$. Ενώ το μισό της διαφοράς αυτής, $\frac{1 - \sigma\eta\omega}{2}$, καλείται **ημιπαρημίτονο (haversine)**, συμβολίζεται με **ημπρω (ή hanω)** και ισχύει:

$$\eta\mu\pi\rho\omega = \frac{1 - \sigma\eta\omega}{2}.$$

Τύποι ημιπαρημιτόνων γωνιών και πλευρών:			
$\eta\mu\pi\rho A = \eta\mu(\tau - \beta) \eta\mu(\tau - \gamma) \sigma\tau\epsilon\mu\beta \sigma\tau\epsilon\mu\gamma$ (13.2.27)	$\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta \eta\mu\gamma \eta\mu\pi\rho A$	(13.2.30)	
$\eta\mu\pi\rho B = \eta\mu(\tau - \gamma) \eta\mu(\tau - \alpha) \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \sigma\tau\epsilon\mu\alpha$ (13.2.28)	$\eta\mu\pi\rho\beta = \eta\mu\pi\rho(\gamma - \alpha) + \eta\mu\gamma \eta\mu\alpha \eta\mu\pi\rho B$	(13.2.31)	
$\eta\mu\pi\rho\Gamma = \eta\mu(\tau - \alpha) \eta\mu(\tau - \beta) \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \sigma\tau\epsilon\mu\beta$ (13.2.29)	$\eta\mu\pi\rho\gamma = \eta\mu\pi\rho(\alpha - \beta) + \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu\pi\rho\Gamma$	(13.2.32)	

Παρατήρηση: Από τον ορισμό του ημιπαρημιτόνου μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το ημιπαρημίτονο είναι πάντα θετικό, αφού $\frac{1 - \sigma\eta\omega}{2} = \eta\mu^2 \frac{\omega}{2} \geq 0$.

Ασκήσεις.

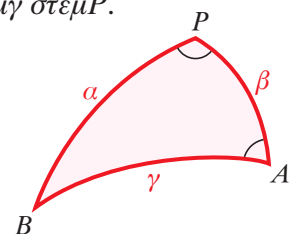
13.2.1 Έστω ένα σφαιρικό τρίγωνο PAB , στο οποίο το P είναι ο πόλος και τα A, B δύο σημεία του βορείου ημισφαιρίου. Αν για τις γωνίες A και P ισχύει $A = 68^\circ$ και $P = 80^\circ 16'$, ενώ $\eta AB = \gamma = 60^\circ 30'$, να υπολογίσετε το πλάτος του B (σχ. 13.2β).

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (13.2.4), έχουμε $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu P}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu A \eta\mu\gamma \sigma\tau\epsilon\mu P$.

Άρα, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των λογαρίθμων, έχουμε

$$\begin{aligned} \log \eta\mu\gamma &= 9,9397 \\ \log \eta\mu A &= 9,9672 \\ + \log \sigma\tau\epsilon\mu P &= 0,0063 \\ \hline \log \eta\mu\alpha &= 9,9132 \end{aligned}$$



Σχ. 13.2β.

Απολογαριθμίζοντας έχουμε $\alpha = 54^\circ 58'$ ή $\alpha = 125^\circ 02'$. Αλλά επειδή για τις γωνίες P, A ισχύει $P > A$, πρέπει και $\gamma > \alpha$, όπως και $\alpha < 90^\circ$, τότε $\alpha = 54^\circ 58'$. Άρα, το πλάτος του B είναι $90 - \alpha = 90 - 54^\circ 58' = 35^\circ 02' N$.

13.2.2 Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι ισχύει ο τύπος (13.2.5):

$$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\gamma - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A.$$

Λύση.

Στο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει από το νόμο των συνημιτόνων (τύπος 13.2.2).

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B.$$

Τότε $\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\gamma (\sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma - \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta (1 - \sigma\upsilon\nu^2\gamma) - \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu^2\gamma - \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A.$$

Για τη γωνία ισχύει $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, άρα $\eta\mu\gamma \neq 0$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\gamma - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A.$$

Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες θεμελιώδεις σχέσεις τρίτου είδους.

13.2.3. Να αποδείξετε το νόμο των συνημιτόνων (νόμος του Gauss), για τη γωνία A σφαιρικού τριγώνου (σχέση 13.2.11).

$$\sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Λύση.

Έστω $A'B'\Gamma'$ το πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$. Γράφουμε το νόμο του συνημιτόνου για την πλευρά α' :

$$\sigma\upsilon\nu\alpha' = \sigma\upsilon\nu\beta' \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma' + \eta\mu\beta' \cdot \eta\mu\gamma' \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(180^\circ - A) = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - B) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \Gamma) + \eta\mu(180^\circ - B) \eta\mu(180^\circ - \Gamma) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu B (-\sigma\upsilon\nu\Gamma) + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma (-\sigma\upsilon\nu\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma - \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες σχέσεις.

13.2.4 Να αποδείξετε ότι δύο πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι ίσες, αν και μόνο αν, οι απέναντι προς αυτές γωνίες του είναι ίσες, χρησιμοποιώντας τις θεμελιώδεις σχέσεις (σελ. 509).

Λύση.

Ευθύ: Έστω σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = \gamma$. Θα δείξουμε ότι $B = \Gamma$. Επειδή $\beta = \gamma$, ισχύει $\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\gamma$. Επομένως:

$$\sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\beta) \sigma\upsilon\nu\alpha + (\eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma) \eta\mu\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 \sigma\upsilon\nu\alpha + (\eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma) \eta\mu\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma) \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma = 0.$$

(1)

Ισχύει $\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \neq 0$, γιατί $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ και $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma. \text{ Άρα } B = \Gamma, \text{ αφού } 0^\circ < B, \Gamma < 180^\circ.$$

Αντίστροφο: Έστω σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B = \Gamma$. Θα δείξουμε ότι $\beta = \gamma$. Επειδή $B = \Gamma$, τότε $\sin B = \sin \Gamma$. Επομένως:

$$\begin{aligned} -\sin \Gamma \cdot \sin A + \eta \mu \Gamma \cdot \eta \mu A \cdot \sin B &= -\sin A \cdot \sin B + \eta \mu A \cdot \eta \mu B \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \\ (\sin B - \sin \Gamma) \sin A + (\eta \mu \Gamma \cdot \sin B - \eta \mu B \cdot \sin \gamma) \eta \mu A &= 0 \Leftrightarrow \\ 0 \sin A + (\eta \mu \Gamma \cdot \sin B - \eta \mu \Gamma \cdot \sin \gamma) \eta \mu A &= 0 \Leftrightarrow \\ (\sin B - \sin \gamma) \eta \mu A \eta \mu \Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Είναι $\eta \mu A \cdot \eta \mu \Gamma \neq 0$, γιατί $0^\circ < A, \Gamma < 180^\circ$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:
 $\sin B - \sin \gamma = 0 \Leftrightarrow \sin B = \sin \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$, αφού $0^\circ < \beta, \gamma < 180^\circ$.

13.2.5 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο πλευρών σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά αυτού, χρησιμοποιώντας τις θεμελιώδεις σχέσεις (σελ. 509).

Λύση.

Αν α, β, γ οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ θα δείξουμε ότι: $\alpha + \beta > \gamma$.

$$\text{Είναι} \quad \sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta \cdot \sin \Gamma \quad (1)$$

$$\text{και} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta - \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει:

$$\sin \gamma - \sin(\alpha + \beta) = \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta (1 + \sin \Gamma) \Leftrightarrow \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta) = \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta \left(1 + 2 \sin^2 \frac{\Gamma}{2} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\sin \gamma - \sin(\alpha + \beta) = 2 \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta \cdot \sin^2 \frac{\Gamma}{2} > 0,$$

αφού $\eta \mu \alpha > 0$, $\eta \mu \beta > 0$ και $\sin \frac{\Gamma}{2} \neq 0$, αφού $0^\circ < \alpha, \beta, \Gamma < 180^\circ$, τότε:

$$\sin \gamma - \sin(\alpha + \beta) > 0 \Leftrightarrow \sin \gamma > \sin(\alpha + \beta) \quad (3)$$

Αν $\alpha + \beta \geq 180^\circ$, τότε ισχύει και $\alpha + \beta > \gamma$, γιατί $0^\circ < \gamma < 180^\circ$.

Αν $\alpha + \beta < 180^\circ$, τότε από (3) έχουμε: $\gamma < \alpha + \beta$.

(Η συνάρτηση $\sin x$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$).

13.2.6 Έστω το σφαιρικό τρίγωνο APB (σχ. 13.2β), στο οποίο δίνονται η γωνία $P = 40^\circ$ και οι πλευρές $\alpha = 38^\circ 48'$ και $\beta = 25^\circ 32'$. Να υπολογίσετε την πλευρά γ (απέναντι από την γωνία P) και η γωνία B .

Λύση.

Από τον τύπο 30, έχουμε: $\eta \mu \rho \gamma = \eta \mu \rho(\alpha - \beta) + \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta \cdot \eta \mu \rho P$ (1), με $\alpha - \beta = 13^\circ 16'$.

Θέτομε $\eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \beta \cdot \eta \mu \rho P = \eta \mu \rho x$, οπότε αν λογαριθμήσουμε, ισχύει:

$$\log \eta \mu \alpha + \log \eta \mu \beta + \log \eta \mu \rho P = \log \eta \mu \rho x$$

Άρα:

$$\log \eta \mu \alpha = \log \eta \mu 38^\circ 48' = 9,797$$

$$\log \eta \mu \beta = \log \eta \mu 25^\circ 32' = 9,6345$$

$$\log \eta \mu \rho P = \log \eta \mu \rho 40 = 9,0682$$

$$\log \eta \mu \rho x = 8,4997, \text{ άρα } \eta \mu \rho x = 0,0316.$$

Επίσης $\eta \mu \rho x = 0,0316$ και $\eta \mu \rho(\alpha - \beta) = 0,0133$, από την (1) έχουμε:

$$\eta \mu \rho \gamma = \eta \mu \rho(\alpha - \beta) + \eta \mu \rho x = 0,0133, \text{ όποτε } \gamma = 13^\circ 14'.$$

Επειδή τώρα είναι γνωστές όλες οι πλευρές, ισχύει:

$$\eta\mu\pi\rho B = \eta\mu(\tau - \gamma) \eta\mu(\tau - \alpha) \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha, \text{ όπου } \tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 77^\circ 34',$$

οπότε $\tau - \gamma = 64^\circ 19'$ και $\tau - \alpha = 38^\circ 46'$. Άρα:

$$\begin{array}{rcl} \log\eta\mu(\tau - \gamma) & = & 9,9548 \\ \log\eta\mu(\tau - \alpha) & = & 9,7967 \\ \log\sigma\tau\epsilon\mu\gamma & = & 0,6403 \\ \log\sigma\tau\epsilon\mu\alpha & = & 0,2030 \\ \hline \log\eta\mu\pi\rho B & = & 0,5948, \text{ άρα } B = 0^\circ 22'. \end{array}$$

13.3 Θεμελιώδεις σχέσεις σε ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα.

Τα θεωρήματα και οι προτάσεις που αναφέραμε στην παράγραφο 13.2. γίνονται περισσότερο εύχρηστα και απλά όταν χρησιμοποιηθούν σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο. Στο θεώρημα 1 αποδεικνύουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν οι επόμενοι 10 βασικοί τύποι, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου, αν γνωρίζουμε δύο στοιχεία του πλην της ορθής γωνίας.

Θεώρημα 1.

Αν $AB\Gamma$ ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^\circ$, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

1.(α) $\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$	1. (β) $\eta\mu\beta = \epsilon\phi\gamma \cdot \sigma\phi\Gamma$
2.(α) $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma$	2. (β) $\eta\mu\gamma = \epsilon\phi\beta \cdot \sigma\phi B$
3.(α) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$	3. (β) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\phi B \cdot \sigma\phi\Gamma$
4.(α) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B$	4. (β) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \epsilon\phi\beta \cdot \sigma\phi\alpha$
5.(α) $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma$	5. (β) $\sigma\upsilon\nu B = \epsilon\phi\gamma \cdot \sigma\phi\alpha$

Απόδειξη.

(α) Από το νόμο των ημιτόνων (σχέση 13.2.4) ισχύει: $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\beta}$.

Αν $A = 90^\circ$, έχουμε: $\frac{\eta\mu 90^\circ}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\beta} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$.

Με το ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η 2(α).

3. (α) Από το νόμο των συνημιτόνων (σχέση 13.2.11) για τις πλευρές έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow (A = 90^\circ)$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma.$$

(β) Από το νόμο των συνημιτόνων (σχέση 13.2.11) για τις γωνίες έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow (A = 90^\circ)$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = -\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow$$

$$0 = -\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow (\eta\mu B \neq 0 \text{ και } \eta\mu\Gamma \neq 0)$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\beta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\phi B \cdot \sigma\phi\Gamma.$$

(α) Από τον νόμο των συνημιτόνων (σχέση 13.2.13) για τις γωνίες έχουμε:

$$\sin \Gamma = -\sin A \cdot \sin B + \eta \mu A \cdot \eta \mu B \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow (A = 90^\circ)$$

$$\sin \Gamma = -\sin 90^\circ \cdot \sin B + \eta \mu 90^\circ \cdot \eta \mu B \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow$$

$$\sin \Gamma = 0 \cdot \sin B + 1 \cdot \eta \mu B \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow$$

$$\sin \Gamma = \eta \mu B \cdot \sin \gamma.$$

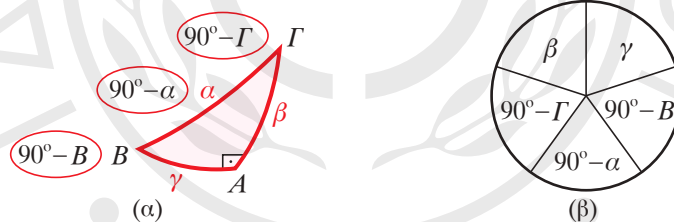
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η 5 (α).

Παρατήρηση: Στο προηγούμενο θεώρημα αποδείξαμε τις βασικότερες προτάσεις του. Οι υπόλοιπες αποδεικνύονται με τη χρήση των θεμελιωδών θεωρημάτων και σχέσεων που αναφέραμε στην παράγραφο 13.2 και αφήνονται στον σπουδαστή ως εργασία.

13.4 Κανόνες του Napier.

Οι δέκα τύποι του θεωρήματος 1 είναι πολύ σημαντικοί και χρήσιμοι στην επίλυση ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου. Για το λόγο αυτόν, ο Napier διατύπωσε δύο μνημονικούς κανόνες, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε από τους παραπάνω τύπους είναι απαραίτητος για την επίλυση που πραγματοποιείται.

Για τη διατύπωση των δύο αυτών κανόνων σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και έναν κύκλο τον οποίο χωρίζουμε σε πέντε κυκλικούς τομείς (σχ. 13.4). Σε κάθε κυκλικό τομέα τοποθετούμε από ένα στοιχείο του τριγώνου με τον ίδιο κυκλικό τρόπο, με τον οποίο αναγράφονται τα στοιχεία αυτά στο σφαιρικό τρίγωνο. Αγνοώντας την ορθή γωνία A , τοποθετούμε τις προσκείμενες σε αυτήν πλευρές β και γ , ενώ αντί της α , γράφουμε τη συμπληρωματική της, $90^\circ - \alpha$. Επίσης, προσθέτουμε τα συμπληρώματα των υπολοίπων στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, δηλαδή τα $90^\circ - B$ και $90^\circ - \Gamma$, όπως φαίνεται στο σχήμα 13.4(β).



Σχ. 13.4.

Στην παραπάνω διάταξη, κάθε στοιχείο έχει δύο *προσκείμενα* και δύο *αντικείμενα στοιχεία*. Για παράδειγμα, για το στοιχείο $90^\circ - \Gamma$ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - \alpha$ και β και τα αντικείμενα τα $90^\circ - B$ και γ .

Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε τους κανόνες του Napier ως εξής:

Πρώτος κανόνας του Napier.

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκείμενων στοιχείων του.

Δεύτερος κανόνας του Napier.

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των συνημιτόνων των αντικείμενων στοιχείων του.

Με τη βοήθεια των δύο κανόνων του Napier μπορούν να προκύψουν οι δέκα σχέσεις του θεωρήματος 1, για κάθε στοιχείο της διατάξεως του σχήματος 13.4, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.4.1

Αν πάρουμε το στοιχείο β από το σχήμα 13.4(β), τότε τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - \Gamma$ και γ , ενώ τα αντικείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - B$ και $90^\circ - \alpha$.

Από το 1^ο κανόνα του Napier έχουμε $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$.

Από το 2^ο κανόνα του Napier έχουμε: $\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \sigma\upsilon\nu(90^\circ - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$.

Παρατήρηση: Στις εφαρμογές, δεν χρειάζεται να σχεδιάζουμε τον κύκλο, αρκεί μόνο να σημειώνουμε πάνω σε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο τα συμπληρώματα των στοιχείων, όπως φαίνεται στο σχήμα 13.4(α) και να θυμόμαστε ότι στον κύκλο, έχουμε μόνο τις πλευρές β και γ .

13.5 Θεωρήματα των τεταρτημορίων.

Η θεωρία των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες, οι οποίες δεν συναντώνται στο επίπεδο ορθογώνιο τρίγωνο. Για παράδειγμα, σε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, οι γωνίες που είναι διάφορες της ορθής, δεν είναι πάντοτε οξείες, ούτε η υποτείνουσα είναι πάντοτε η μεγαλύτερη πλευρά.

Επίσης, αν στο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο υπολογίσουμε την πλευρά γ από τα στοιχεία α και Γ με τον τύπο $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma$ (θεώρημα 1), θα έχουμε πρόβλημα επιλογής μεταξύ των δύο τιμών της πλευράς γ στο διάστημα $(0^\circ, 180^\circ)$. Για παράδειγμα, αν σε μια άσκηση καταλήξουμε ότι $\eta\mu\gamma = 0,5$, τότε στο διάστημα $(0^\circ, 180^\circ)$ για την πλευρά γ έχουμε, $\gamma = 30^\circ$ ή $\gamma = 150^\circ$. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού, θα διατυπώσουμε τα επόμενα θεωρήματα, που είναι γνωστά και ως **θεωρήματα των τεταρτημορίων**.

Θεώρημα 2.

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, κάθε γωνία διάφορη της ορθής και η απέναντι πλευρά της, ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

Απόδειξη.

Έστω ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$. Θα δείξουμε ότι η γωνία B και η απέναντι πλευρά της ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο [σχ. 13.4(α)].

Από τον 2^ο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - B) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma. \quad (13.5.1)$$

Επειδή ισχύει $0^\circ < \Gamma < 180^\circ$, έχουμε $\eta\mu\Gamma > 0$, άρα από τη σχέση (13.5.1) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα $\sigma\upsilon\nu B$ και $\sigma\upsilon\nu\beta$ θα είναι ομόσημοι αριθμοί. Άρα

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma\upsilon\nu B > 0 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu\beta > 0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{c} \sigma\upsilon\nu B < 0 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu\beta < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} B \in (0^\circ, 90^\circ) \\ \text{και} \\ \beta \in (0^\circ, 90^\circ) \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{c} B \in (90^\circ, 180^\circ) \\ \text{και} \\ \beta \in (90^\circ, 180^\circ) \end{array} \right\}.$$

Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η γωνία Γ και η πλευρά γ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

Στο σημείο αυτό είναι καλό να υπενθυμίσουμε ότι οποιαδήποτε πλευρά ή γωνία ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° , ανήκει ή στο πρώτο ή στο δεύτερο τεταρτημόριο.

Θεώρημα 3.

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από γωνία διάφορης της ορθής είναι μικρότερη ή ίση προς τη γωνία αυτή, αν η γωνία είναι οξεία, ενώ είναι μεγαλύτερη ή ίση προς αυτή, αν η γωνία είναι αμβλεία. Η παραπάνω σύγκριση γίνεται ως προς τα μέτρα των γωνιών.

Απόδειξη.

Έστω ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ [σχ. 13.4(α)]. Θα δείξουμε ότι αν η γωνία B είναι οξεία, ισχύει $\beta \leq B$, ενώ αν η γωνία B είναι αμβλεία, τότε ισχύει ότι $\beta \geq B$.

Από τον 2^ο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B. \quad (13.5.2)$$

Για την πλευρά α ισχύει $0^\circ < \eta\mu\alpha \leq 1$, οπότε από τη σχέση (13.5.2) έχουμε:

$$\eta\mu\beta \leq 1 \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow \eta\mu\beta \leq \eta\mu B. \quad (13.5.3)$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η γωνία B και η πλευρά β ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο. Άρα:

α) αν η γωνία B είναι οξεία, οξεία θα είναι και η πλευρά β . Τότε από τη σχέση (13.5.3) έχουμε $\beta \leq B$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο πρώτο τεταρτημόριο $(0, \frac{\pi}{2})$, οπότε, όπως έχουμε προαναφέρει, η φορά της ανισώσεως δεν μεταβάλλεται.

β) αν η γωνία B είναι αμβλεία, αμβλεία θα είναι και η πλευρά β . Τότε από τη σχέση (13.5.3) έχουμε $\beta \geq B$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο δεύτερο τεταρτημόριο $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Θεώρημα 4.

Έστω ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$.

α) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρας στο πρώτο τεταρτημόριο, τότε και οι πλευρές β, γ θα έχουν τα πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο και αντίστροφα.

β) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρας στο δεύτερο τεταρτημόριο, τότε οι πλευρές β και γ θα έχουν τα πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια (πρώτο, δεύτερο).

Η απόδειξη του θεωρήματος 4 γίνεται με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν του θεωρήματος 3.

13.6 Επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.

Για να κάνουμε επίλυση ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, αρκεί να δίνονται δύο από τα πέντε στοιχεία του. Τα υπόλοιπα υπολογίζονται με τη βοήθεια των τύπων που ισχύουν μεταξύ των στοιχείων του (θεώρημα 1).

13.6.1 Γενικοί κανόνες επιλύσεως ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.

Κατά την επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων πρέπει να εφαρμόζονται τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^ο: Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο και σημειώνουμε πάνω σ' αυτό τα στοιχεία,

γνωστά (εντός κύκλου) και άγνωστα, όπως στο σχήμα 13.4(α).

Βήμα 2°: Με τη βοήθεια των κανόνων του Napier παίρνουμε τρεις τύπους από αυτούς που ισχύουν μεταξύ των στοιχείων του, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε τύπος να περιέχει μόνο ένα από τα άγνωστα στοιχεία και τα δύο γνωστά.

Βήμα 3°: Αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε στοιχείο που υπολογίστηκε για τον υπολογισμό άλλου στοιχείου.

Βήμα 4°: Χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα των τεταρτημορίων (θεωρήματα 2 και 4), ειδικά όταν πρέπει να προσδιορίσουμε ένα στοιχείο από το ημίτονό του.

Βήμα 5°: Τέλος, παίρνουμε έναν τύπο που συνδέει τα υπολογισθέντα άγνωστα στοιχεία. Ο τύπος αυτός, ο οποίος πρέπει να αληθεύει, ονομάζεται **τύπος ελέγχου** και χρησιμεύει για έλεγχο των υπολογισμών μας.

13.6.2 Εφαρμογές επιλύσεως ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου.

Στη συνέχεια ακολουθούν μερικές από τις βασικές εφαρμογές επιλύσεως ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων, καθώς και ο τρόπος αναγραφής πράξεων και αποτελεσμάτων σε φύλλο υπολογισμού. Στις εφαρμογές αυτές δεν αναγράφεται το βήμα 3 το οποίο είναι μεν σημαντικό κατά τη διάρκεια της λύσεως για να αποφευχθούν λάθη, αλλά δεν είναι εκτελέσιμο. Επίσης το βήμα 4 αναγράφεται μόνο αν χρειάζεται να υπολογίσουμε το ημίτονο μιας πλευράς ή μίας γωνίας.

Εφαρμογή 1.

Αν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά.

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, όταν δίνονται η υποτείνουσα a και η πλευρά β , με τον περιορισμό $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$.

Βήμα 1°: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (σχ. 13.6α), στο οποίο βάζουμε σε κύκλο τα γνωστά στοιχεία a και β , ενώ αναγράφουμε τα υπόλοιπα στις αντίστοιχες θέσεις.

Βήμα 2°: **Υπολογισμός της γωνίας B .**

Για την πλευρά β , αντικείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - a$ και $90^\circ - B$, άρα από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - a) \sigma\upsilon\nu(90^\circ - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu a \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu a}. \quad (13.6.1)$$

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Για το συμπλήρωμα της πλευράς a , αντικείμενα στοιχεία είναι οι πλευρές β και γ , οπότε από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - a) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu a = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu a}{\sigma\upsilon\nu\beta}. \quad (13.6.2)$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

Για το συμπλήρωμα της γωνίας Γ , προσκείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - a$ και β , οπότε από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \Gamma) = \epsilon\varphi\beta(90^\circ - a) \epsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\varphi a \cdot \epsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\epsilon\varphi\beta}{\epsilon\varphi a}. \quad (13.6.3)$$

Βήμα 4°: Επειδή για τη γωνία B χρησιμοποιήσαμε το ημίτονο, για τη γωνία B θα έχουμε δύο τιμές:

$$B = B_1 \in (0^\circ, 90^\circ) \text{ ή } B = B_2 \in (90^\circ, 180^\circ),$$

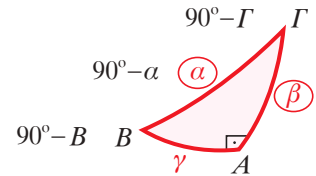
οπότε με τη βοήθεια των θεωρημάτων των τεταρτημορίων 2 και 4 πρέπει να εξετάσουμε αν ορίζεται τρίγωνο και για τις δύο τιμές.

Βήμα 5°: **Τύπος ελέγχου.**

Για να βρούμε τον τύπο ελέγχου, πρέπει να συνδυάσουμε τα ζητούμενα στοιχεία B , Γ και γ .

Από το σχήμα 13.6α βλέπουμε ότι στο στοιχείο $90^\circ - B$, αντικαίμενα είναι τα $90^\circ - \Gamma$ και γ . Άρα από το δεύτερο νόμο του Napier, έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - A) = \varepsilon\varphi(90^\circ - B) \sin\gamma \Leftrightarrow \sin\Gamma = \eta\mu\beta \cdot \sin\gamma.$$



Σχ. 13.6α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.1

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\alpha = 96^\circ$ και $\beta = 97^\circ$. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε το σχήμα 13.6α.

Υπολογισμός της γωνίας Β.

Από τη σχέση (13.6.1) θα πάρουμε:

$$\eta\mu B = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu 97^\circ}{\eta\mu 96^\circ} = \frac{0,9925}{0,9945} = 0,998.$$

Όπως έχουμε αναφέρει η γωνία B και η πλευρά β πρέπει να έχουν τα πέγρατα στο ίδιο τεταρτημόριο (και αν $B > 90^\circ$, τότε $\beta \geq B$), οπότε για τη γωνία B έχουμε $B = 93^\circ,6234$ και όχι $B = 86,3757^\circ$.

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Από τη σχέση (13.6.2) έχουμε:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 96^\circ}{\sin 97^\circ} = \frac{-0,1045}{-0,1219} = 0,8573, \text{ άρα } \gamma = 30,9852^\circ.$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ.

Από τη σχέση (13.6.3) έχουμε:

$$\sin\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi 97^\circ}{\varepsilon\varphi 96^\circ} = \frac{-8,1443}{-9,5144} = 0,856, \text{ οπότε } \Gamma = 31,1296^\circ.$$

Τύπος ελέγχου:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \Gamma) &= \sin(90^\circ - B) \sin\gamma \Leftrightarrow \sin\Gamma = \eta\mu B \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,856 = 0,998 \cdot 0,8573 \Leftrightarrow 0,856 = 0,856, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Είναι δυνατό ανάλογα με το μέτρο των γωνιών ή των πλευρών, να μην ορίζεται το τρίγωνο με τις αντίστοιχες γωνίες ή πλευρές, όπως βλέπουμε στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.2

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\alpha = 96^\circ$ και $\beta = 95^\circ$. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το σχήμα 13.6α.

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Από τη σχέση (13.6.2) έχουμε:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 96^\circ}{\sin 95^\circ} = \frac{-0,1045}{-0,0872} = 1,1984 > 1, \text{ κάτι που είναι αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $\alpha = 96^\circ$ και $\beta = 95^\circ$.

Παρατήρηση: Πολλές φορές στις εφαρμογές είναι βολικό να χρησιμοποιούμε τους λογάριθμους των τριγωνομετρικών αριθμών. Τους αριθμούς αυτούς, όπως και τις πράξεις ανάμεσά τους, μπορούμε να τους συμπεριλάβουμε σε ένα φύλλο υπολογισμού, όπως αυτό που ακολουθεί. Στην πρώτη στήλη του φύλλου τοποθετούμε αρχικά τα γνωστά και στη συνέχεια τα άγνωστα στοιχεία του τριγώνου. Στις επόμενες στήλες, οι οποίες έχουν ως επικεφαλίδες τα άγνωστα στοιχεία, γράφουμε τους λογαρίθμους των αντιστοίχων τριγωνομετρικών αριθμών που προκύπτουν από τις σχέσεις (13.6.1), (13.6.2), (13.6.3), ώστε προσθέτοντας και απολογαριθμώντας να προκύπτουν τα άγνωστα στοιχεία.

Έτσι, η σχέση (13.6.1) γίνεται: $\eta\mu B = \eta\mu\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \Leftrightarrow \log(\eta\mu B) = \log(\eta\mu\beta) + \log(\sigma\tau\epsilon\mu\alpha)$,
 η σχέση (13.6.2) γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \tau\epsilon\mu\beta \Leftrightarrow \log(\sigma\upsilon\nu\gamma) = \log(\sigma\upsilon\nu\alpha) + \log(\tau\epsilon\mu\beta)$,
 η σχέση (13.6.3) γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta \Leftrightarrow \log(\sigma\upsilon\nu\Gamma) = \log(\sigma\phi\alpha) + \log(\epsilon\phi\beta)$,
 ενώ ο τύπος ελέγχου γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \log(\sigma\upsilon\nu\Gamma) = \log(\eta\mu\beta) + \log(\sigma\upsilon\nu\gamma)$.

Φύλλο υπολογισμού.

	<i>B</i>	<i>γ</i>	<i>Γ</i>
$\beta = 97^\circ$	$\log(\eta\mu\beta) = 9,9968$	$\log(\tau\epsilon\mu\beta) = 0,9141$	$\log(\epsilon\phi\beta) = 0,9108$
$\alpha = 96^\circ$	$\log(\sigma\tau\epsilon\mu\alpha) = 0,0024$	$\log(\sigma\upsilon\nu\alpha) = 9,0192$	$\log(\sigma\phi\alpha) = 9,0216$
$B = 86,5233 \leftarrow$	$\log(\eta\mu B) = 9,9992$		
$\gamma = 30,9485 \leftarrow$		$\log(\sigma\upsilon\nu\gamma) = 9,9333$	
$\Gamma = 31,1304 \leftarrow$			$\log(\sigma\upsilon\nu\Gamma) = 9,9324$
έλεγχος	$\log(\eta\mu B) + \log(\sigma\upsilon\nu\gamma) = 9,9992 + 9,9333$		$= 9,9325$

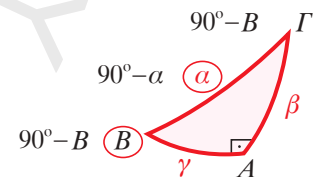
(Η μικρή διαφορά στις πλευρές και στις γωνίες οφείλεται στις προσεγγίσεις που γίνονται στους τριγωνομετρικούς αριθμούς και στους λογάριθμους).

Εφαρμογή 2.

Αν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής.

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, όταν είναι γνωστή η υποτείνουσα α και η γωνία B , με τον περιορισμό $0^\circ < \alpha, B < 180^\circ$.

Βήμα 1^ο: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (σχ. 13.6β), στο οποίο βάζουμε σε κύκλο τα γνωστά στοιχεία α και B , ενώ αναγράφουμε τα υπόλοιπα στις αντίστοιχες θέσεις.



Σχ. 13.6β.

Βήμα 2^ο: Υπολογισμός της πλευράς γ .

Για τη γωνία $90^\circ - B$, προσκείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - \alpha$ και γ , άρα από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - B) &= \epsilon\phi\gamma \cdot \epsilon\phi(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \epsilon\phi\gamma \cdot \sigma\phi\alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \epsilon\phi\gamma &= \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\phi\alpha} \Leftrightarrow \epsilon\phi\gamma = \sigma\upsilon\nu B \cdot \epsilon\phi\alpha \end{aligned} \quad (13.6.4)$$

Υπολογισμός της πλευράς β .

Για την πλευρά β , αντικείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - B$ και $90^\circ - \alpha$, οπότε από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - B) \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu B \cdot \eta\mu\alpha \quad (13.6.5)$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

Για το συμπλήρωμα της πλευράς α , προσκείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - B$ και $90^\circ - \Gamma$, οπότε από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned}\eta\mu(90^\circ - \alpha) &= \varepsilon\varphi(90^\circ - B) \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma\varphi\Gamma &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\varphi B} \Leftrightarrow \sigma\varphi\Gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi B\end{aligned}\quad (13.6.6)$$

Βήμα 4°:

Από τη σχέση (13.6.5) θα πάρουμε δύο τιμές για την πλευρά β :

$$\beta = \beta_1 \in (0^\circ, 90^\circ) \text{ ή } \beta = \beta_2 \in (90^\circ, 180^\circ).$$

Γνωρίζουμε όμως (θεώρημα 2) ότι αν η γωνία B και η πλευρά β βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο, τότε η β είναι γνωστή, αφού $B = \omega$.

Βήμα 5°: *Τύπος ελέγχου.*

Για να βρούμε τον τύπο ελέγχου, πρέπει να συνδυάσουμε τα ζητούμενα. Από τον πρώτο νόμο του Napier, έχουμε:

$$\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma \quad (13.6.7)$$

Ελέγχουμε αν οι τιμές των β , γ και Γ επαληθεύουν τη σχέση (13.6.7).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.3

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\alpha = 39^\circ$ και $B = 137^\circ$. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε το σχήμα 13.6β.

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Από τη σχέση (13.6.4) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi\gamma &= \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\varphi\alpha} = \sigma\upsilon\nu B \cdot \varepsilon\varphi\alpha = \sigma\upsilon\nu 137^\circ \varepsilon\varphi 39^\circ = -0,7313 \cdot 0,8098 = -0,5922, \\ \text{τότε } \gamma &= 149,366^\circ, \text{ άρα } 180 - \gamma = 30,634^\circ.\end{aligned}$$

Υπολογισμός της πλευράς β .

Από τη σχέση (13.6.5) έχουμε:

$$\eta\mu\beta = \eta\mu B \cdot \eta\mu\alpha = \eta\mu 137^\circ \eta\mu 39^\circ = 0,682 \cdot 0,629 = 0,429.$$

Οπότε για τη πλευρά β έχουμε $\beta = 25,404^\circ$ ή $\beta = 180^\circ - 25,404^\circ = 154,596^\circ$. Επειδή όμως η γωνία B και η πλευρά β πρέπει να ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (και αν $B > 90^\circ$, τότε $\beta \geq B$), τότε $\beta = 154,596^\circ$.

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

Από τη σχέση (13.6.6) έχουμε:

$$\begin{aligned}\sigma\varphi\Gamma &= \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi B = \sigma\upsilon\nu 39^\circ \varepsilon\varphi 137^\circ = 0,7771 (-0,9325) = -0,7246 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma} &= -0,7246 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = -1,38 \\ \text{τότε } 180^\circ - \Gamma &= 54,071^\circ, \text{ άρα } \Gamma = 125,929^\circ.\end{aligned}$$

Τύπος ελέγχου:

Από τη σχέση (13.6.7) έχουμε: $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta \cdot \varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi\gamma$.

Με αντικατάσταση των τιμών που βρήκαμε έχουμε:

$$\begin{aligned}\eta\mu 154^\circ,596 \cdot \varepsilon\varphi 125^\circ,929 &= \varepsilon\varphi 149^\circ,366 \Leftrightarrow 0,429 \cdot (-1,38) = -0,5922 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -0,59202 &= -0,5922\end{aligned}$$

(Η μικρή διαφορά οφείλεται στις προσεγγίσεις των τριγωνομετρικών αριθμών).

Εφαρμογή 3.

Αν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία.

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, όταν δίνονται β και γ με τον περιορισμό $0^\circ < \beta, \gamma < 180^\circ$.

Βήμα 1°: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (σχ. 13.6γ), στο οποίο βάζουμε σε κύκλο τα γνωστά στοιχεία β και γ , ενώ αναγράφουμε τα υπόλοιπα στις αντίστοιχες θέσεις.

Βήμα 2°: Υπολογισμός των αγνώστων στοιχείων του τριγώνου.

Υπολογισμός της πλευράς a .

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\eta\nu\beta \cdot \sigma\eta\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\eta\nu\alpha = \sigma\eta\nu\beta \cdot \sigma\eta\nu\gamma \quad (13.6.8)$$

Υπολογισμός της γωνίας B .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\gamma &= \epsilon\varphi(90^\circ - B) \quad \epsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \sigma\varphi B \cdot \epsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \frac{1}{\epsilon\varphi B} \quad \epsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu\gamma \cdot \epsilon\varphi B = \epsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \epsilon\varphi B = \frac{\epsilon\varphi\beta}{\eta\mu\gamma}. \end{aligned} \quad (13.6.9)$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

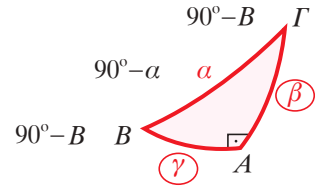
Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\beta &= \epsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \quad \epsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \sigma\varphi\Gamma \cdot \epsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{1}{\epsilon\varphi\Gamma} \quad \epsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu\beta \cdot \epsilon\varphi\Gamma = \epsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \epsilon\varphi\Gamma = \frac{\epsilon\varphi\gamma}{\eta\mu\beta}. \end{aligned} \quad (13.6.10)$$

Βήμα 3°: Τύπος ελέγχου.

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \epsilon\varphi(90^\circ - B) \epsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \sigma\eta\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma \quad (13.6.11).$$



Σχ. 13.6γ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.4

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\beta = 37^\circ$ και $\gamma = 121^\circ$. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε το σχήμα 13.6δ.

Υπολογισμός της πλευράς a .

Από τη σχέση (13.6.8) θα πάρουμε:

$$\sigma\eta\nu\alpha = \sigma\eta\nu\beta \cdot \sigma\eta\nu\gamma = \sigma\eta\nu 37^\circ \sigma\eta\nu 121^\circ = 0,7986 (-0,515) = -0,4113, \text{ τότε } \alpha = 114^\circ, 285.$$

Υπολογισμός της γωνίας B .

Από τη σχέση (13.6.9) έχουμε:

$$\epsilon\varphi B = \frac{\epsilon\varphi 37^\circ}{\eta\mu 121^\circ} = \frac{0,7536}{0,8572} = 0,8791, \text{ τότε } B = 41^\circ, 319.$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

Από τη σχέση (13.6.10) έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi 121^\circ}{\eta\mu 37^\circ} = \frac{-1,6643}{0,6018} = -2,7655, \text{ τότε } 180 - \Gamma = 70^\circ,12 \text{ άρα } \Gamma = 109^\circ,88.$$

Τύπος ελέγχου:

Από τη σχέση (13.6.11) και με αντικατάσταση των τιμών που βρήκαμε έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma\nu\alpha &= \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow \sigma\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi B} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow -0,4113 = \frac{1}{0,8791} \cdot \frac{1}{-2,7655} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,4113 = -0,4113, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Εφαρμογή 4.

Αν δίνονται μία πλευρά και μία προσκείμενη σε αυτήν γωνία.

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, όταν δίνονται β και Γ με τον περιορισμό $0^\circ < \beta, \Gamma < 180^\circ$.

Βήμα 1^ο: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (σχ. 13.6δ), στο οποίο βάζουμε σε κύκλο τα γνωστά στοιχεία β και Γ , ενώ αναγράφουμε τα υπόλοιπα στις αντίστοιχες θέσεις.

Βήμα 2^ο: Υπολογισμός των αγνώστων στοιχείων του τριγώνου.

Υπολογισμός της πλευράς α .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \Gamma) &= \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \sigma\nu\Gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha \Leftrightarrow \\ \sigma\nu\Gamma &= \varepsilon\varphi\beta \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \Leftrightarrow \sigma\nu\Gamma \cdot \varepsilon\varphi\alpha \Leftrightarrow \sigma\nu\Gamma \cdot \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\sigma\nu\Gamma}. \end{aligned} \quad (13.6.12)$$

Υπολογισμός της γωνίας B .

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - B) = \sigma\nu\beta \cdot \sigma\nu(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \sigma\nu B = \sigma\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma \quad (13.6.13)$$

Υπολογισμός της πλευράς γ .

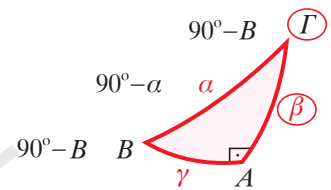
Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\beta &= \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \frac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu\beta \cdot \varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \eta\mu\beta \cdot \varepsilon\varphi\Gamma. \end{aligned} \quad (13.6.14)$$

Βήμα 5^ο: Τύπος ελέγχου.

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - B) = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \sigma\nu B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha \quad (13.6.15)$$



Σχ. 13.6δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.5

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\beta = 1^\circ$ και $\Gamma = 52^\circ$. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε το σχήμα 13.6δ.

Υπολογισμός της πλευράς α .

Από τη σχέση (13.6.12) θα πάρουμε $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\varepsilon\varphi 1^\circ}{\sigma\nu 52^\circ} = \frac{0,0175}{0,6157} = 0,0284$, τότε $\alpha = 1,6267^\circ$.

Υπολογισμός της γωνίας B.

Από τη σχέση (13.6.13) έχουμε:

$$\sin B = \sin 1^\circ \cdot \eta\mu 52^\circ = 0,9998 \cdot 0,788 = 0,7878, \text{ τότε } B = 38,0157^\circ.$$

Υπολογισμός της γωνίας γ.

Από τη σχέση (13.6.14) έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\gamma = \eta\mu 1^\circ \varepsilon\varphi 52^\circ = 0,0175 \cdot 1,2799 = 0,0224 \text{ τότε } \gamma = 1,2831^\circ.$$

Τύπος ελέγχου:

Από τη σχέση (13.6.15) και με αντικατάσταση των τιμών που βρήκαμε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin B &= \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha \Leftrightarrow \sin B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \Leftrightarrow 0,7878 = 0,0224 \cdot \frac{1}{0,284} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,7878 = 0,7887, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

(Η μικρή διαφορά οφείλεται στις προσεγγίσεις των τριγωνομετρικών αριθμών).

Εφαρμογή 5.

Αν δίνονται δύο γωνίες του (πλην της ορθής).

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, όταν δίνονται B και Γ με τον περιορισμό $0^\circ < B, \Gamma < 180^\circ$.

Βήμα 1^ο: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (σχ. 13.6ε), στο οποίο βάζουμε σε κύκλο τα γνωστά στοιχεία B και Γ , ενώ αναγράφουμε τα υπόλοιπα στις αντίστοιχες θέσεις.

Βήμα 2^ο: Υπολογισμός των αγνώστων στοιχείων του τριγώνου.

Υπολογισμός της πλευράς α.

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \alpha) &= \varepsilon\varphi(90^\circ - B) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \sigma\eta\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma\eta\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma}. \end{aligned} \quad (13.6.16)$$

Υπολογισμός της πλευράς γ.

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \Gamma) = \sigma\eta\gamma \cdot \sigma\eta(90^\circ - B) \Leftrightarrow \sigma\eta\Gamma = \sigma\eta\gamma \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow \sigma\eta\gamma = \frac{\sigma\eta\Gamma}{\eta\mu B}. \quad (13.6.17)$$

Υπολογισμός της πλευράς β.

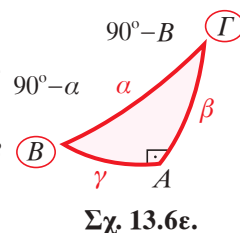
Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - B) = \sigma\eta\beta \cdot \sigma\eta(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \sigma\eta B = \sigma\eta\beta \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \sigma\eta\beta = \frac{\sigma\eta B}{\eta\mu\Gamma}. \quad (13.6.18)$$

Βήμα 5^ο: Τύπος ελέγχου.

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\eta\beta \cdot \sigma\eta\gamma \Leftrightarrow \sigma\eta\alpha = \sigma\eta\beta \cdot \sigma\eta\gamma. \quad (13.6.19)$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.6

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $B = 42^\circ 15''$ και $\Gamma = 58^\circ 21' 12''$. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε το σχήμα 13.6ε. Αρχικά όμως πρέπει να μετατρέψουμε τις γωνίες σε μοίρες.

$$\text{Άρα } B = 42^\circ 15' = 42^\circ + \frac{15}{60} = 42,25^\circ \text{ και } \Gamma = 58^\circ 21' + \frac{12}{60} = 58^\circ 21,2' = 58^\circ + \frac{21,2}{60} = 58,353^\circ.$$

Υπολογισμός της πλευράς α .

Από τη σχέση (13.6.16) θα πάρουμε:

$$\sigma\eta\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi 42,25^\circ \cdot \varepsilon\varphi 58,353^\circ} = \frac{1}{0,9083 \cdot 1,6225} = \frac{1}{1,4737} = 0,6786, \text{ τότε } \alpha = 47,2657^\circ.$$

Υπολογισμός της πλευράς β .

Από τη σχέση (13.6.17) έχουμε:

$$\sigma\eta\gamma = \frac{\sigma\eta\alpha 58,363}{\eta\mu 42,25} = \frac{0,5247}{0,6724} = 0,7803, \text{ τότε } \gamma = 38,7119^\circ.$$

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Από τη σχέση (13.6.18) έχουμε:

$$\sigma\eta\beta = \frac{\sigma\eta\alpha 42,25^\circ}{\eta\mu 58,353^\circ} = \frac{0,7402}{0,8513} = 0,8695, \text{ τότε } \beta = 29,5994^\circ.$$

Τύπος ελέγχου:

Από τη σχέση (13.6.19) και με αντικατάσταση των τιμών που βρήκαμε, έχουμε:

$$\sigma\eta\alpha = \sigma\eta\beta \cdot \sigma\eta\gamma \Leftrightarrow 0,6786 = 0,7803 \cdot 0,8695 \Leftrightarrow 0,6786 = 0,6785, \text{ που ισχύει.}$$

(Η μικρή διαφορά οφείλεται στις προσεγγίσεις των τριγωνομετρικών αριθμών).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.7

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $B = 50^\circ$ και $\Gamma = 150^\circ$.

Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το σχήμα 13.6ε.

Υπολογισμός της πλευράς α .

Από τη σχέση (13.6.16) έχουμε:

$$\sigma\eta\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma} = \frac{1}{\varepsilon\varphi 50^\circ \varepsilon\varphi 150^\circ} = \frac{1}{1,1917(-0,5773)} = \frac{1}{-0,6879} = -1,4537 < -1,$$

κάτι που είναι αδύνατο.

Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $B = 50^\circ$ και $\Gamma = 150^\circ$.

Εφαρμογή 6.

Αν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτή γωνία.

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, όταν δίνονται β και B με τον περιορισμό $0^\circ < \beta, B < 180^\circ$.

Για να υπάρχει τρίγωνο στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει ή $\beta \leq B$, όταν $\beta, B \in (0^\circ, 90^\circ)$ ή $\beta \geq B$, όταν $\beta, B \in (90^\circ, 180^\circ)$.

Βήμα 1^ο: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (σχ. 13.6στ), στο οποίο βάζουμε σε κύκλο τα γνωστά στοιχεία β και B , ενώ αναγράφουμε τα υπόλοιπα στις αντίστοιχες θέσεις.

Βήμα 2^ο: Υπολογισμός των αγνώστων στοιχείων του τριγώνου.

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \beta) \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi B \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi B}. \quad (13.6.20)$$

Άρα για την πλευρά γ θα έχουμε $\gamma = \gamma_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$ ή $\gamma = 180^\circ - \gamma_1$.

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - B) = \sigma\eta\nu\beta \cdot \sigma\eta\nu(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \sigma\eta\nu B = \sigma\eta\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{\sigma\eta\nu B}{\sigma\eta\nu\beta}. \quad (13.6.21)$$

Επομένως και για τη γωνία Γ θα έχουμε ότι $\Gamma = \Gamma_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$ ή $\Gamma = 180^\circ - \Gamma_1$.

Υπολογισμός της πλευράς α .

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu\beta = \sigma\eta\nu(90^\circ - B) \cdot \sigma\eta\nu(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu B \cdot \eta\mu\alpha \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}. \quad (13.6.22)$$

Από την (13.6.22) θα έχουμε για την πλευρά α : $\alpha = \alpha_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$ ή $\alpha = 180^\circ - \alpha_1$.

Βήμα 3^ο: Με τη βοήθεια των θεωρημάτων της παραγράφου 13.5, θα εξετάσουμε ποιες από τις τριάδες τιμών (γ, Γ, α) απορρίπτονται.

Επομένως, για την πλευρά γ έχουμε δύο τιμές: $\gamma = \gamma_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$ ή $\gamma = 180^\circ - \gamma_1$ και για τη γωνία Γ έχουμε επίσης δύο τιμές: $\Gamma = \Gamma_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$ ή $\Gamma = 180^\circ - \Gamma_1$.

Επομένως, μέχρι εδώ έχουμε κάνει τέσσερα ζεύγη: (γ_1, Γ_1) , $(\gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1)$, $(180^\circ - \gamma_1, \Gamma_1)$ και $(180^\circ - \gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1)$.

Από τα παραπάνω ζεύγη **απορρίπτονται** τα $(\gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1)$ και $(180^\circ - \gamma_1, \Gamma_1)$, γιατί η πλευρά γ και η γωνία Γ πρέπει να έχουν τα πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο.

Έτσι, έχουμε μέχρι εδώ δύο ζεύγη το (γ_1, Γ_1) και το $(180^\circ - \gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1)$.

Επίσης και για την πλευρά α έχουμε δύο τιμές: $\alpha = \alpha_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\alpha = 180^\circ - \alpha_1$, οπότε έχουμε τέσσερις τριάδες:

$$(\gamma_1, \Gamma_1, \alpha_1), (\gamma_1, \Gamma_1, 180^\circ - \alpha_1), (180^\circ - \gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1, \alpha_1) \text{ και } (180^\circ - \gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1, 180^\circ - \alpha_1).$$

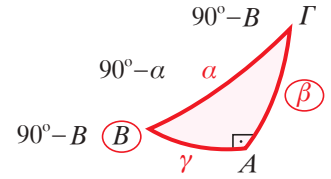
Αν $\beta \in (0^\circ, 90^\circ)$, τότε από τις παραπάνω τέσσερις τριάδες έχουμε την $(\gamma_1, \Gamma_1, \alpha_1)$ και την $(180^\circ - \gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1, 180^\circ - \alpha_1)$, γιατί αν οι πλευρές β και γ έχουν τα πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο, τότε $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, ενώ αν έχουν τα πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια, τότε $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$.

Αν $\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$, τότε θα έχουμε τις τριάδες: $(180^\circ - \gamma_1, 180^\circ - \Gamma_1, \alpha_1)$, $(\gamma_1, \Gamma_1, 180^\circ - \alpha_1)$.

Βήμα 4^ο: Τύπος ελέγχου.

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu\gamma = \sigma\eta\nu(90^\circ - \alpha) \sigma\eta\nu(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma \quad (13.6.23)$$



Σχ. 13.6στ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.8

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\beta = 80^\circ$ και $B = 30^\circ$.

Για να υπάρχει τρίγωνο, *πρέπει* $\beta < B$, όταν $\beta, B \in (0^\circ, 90^\circ)$. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $\beta > B$ ($\beta = 80^\circ, B = 30^\circ$), άρα *δεν υπάρχει ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $\beta = 80^\circ$ και $B = 30^\circ$* .

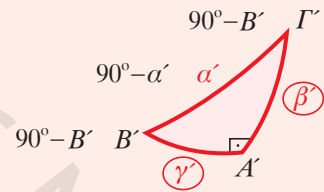
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6.9

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\beta = 45^\circ$ και $B = 60^\circ$. (Εδώ έχουμε $\beta, B \in (0^\circ, 90^\circ)$ με $\beta < B$, άρα υπάρχει τρίγωνο). Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε το σχήμα 13.6ζ.

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Από τη σχέση (13.6.20) έχουμε:

$$\eta\mu\gamma = \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ}{\varepsilon\varphi 60^\circ} = \frac{1}{1,732} = 0,5773, \text{ τότε } \gamma = 35,265^\circ \text{ ή } \\ \gamma = 180^\circ - 35,265^\circ = 144,735^\circ.$$



Σχ. 13.6ζ.

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

Από τη σχέση (13.6.21) έχουμε:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ} = \frac{0,5}{0,7071} = 0,7071, \text{ τότε } \Gamma = 45^\circ \text{ ή } \Gamma = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Υπολογισμός της πλευράς α .

Από τη σχέση (13.6.22) έχουμε:

$$\eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{0,7071}{0,8660} = 0,8165, \text{ τότε } \alpha = 54,7372^\circ \text{ ή } \alpha = 180^\circ - 54,7372^\circ = 125,2628^\circ.$$

Από τις τιμές των γ και Γ που βρήκαμε έχουμε:

α) αν $\Gamma = 45^\circ$, τότε και $\gamma = 35,265^\circ$, γιατί $\Gamma, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$ και $\gamma < \Gamma$.

Επειδή ξέρομε ότι $\beta = 45^\circ$, οι πλευρές β και γ έχουν τα πέρατα στο πρώτο τεταρτημόριο, τότε και η υποτείνουσα α έχει το πέρασ της στο πρώτο τεταρτημόριο, άρα $\alpha = 54,7372^\circ$. Επομένως, μια λύση είναι: $\alpha = 54,7372^\circ, \gamma = 35,265^\circ, \Gamma = 45^\circ$.

β) αν $\Gamma = 135^\circ$, τότε και $\gamma = 144,735^\circ$, γιατί $\Gamma, \gamma \in (90^\circ, 180^\circ)$ και $\gamma > \Gamma$.

Επειδή έχουμε δεδομένο ότι $\beta = 45^\circ$, οι πλευρές β και γ έχουν τα πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια, τότε η υποτείνουσα α έχει το πέρασ στο δεύτερο τεταρτημόριο, άρα $\alpha = 125,2628^\circ$.

Μια δεύτερη λύση είναι: $\alpha = 125,2628^\circ, \gamma = 144,735^\circ, \Gamma = 135^\circ$.

Τύπος ελέγχου:

Από τη σχέση (13.6.23) έχουμε $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma$. Άρα με αντικατάσταση των τιμών που βρήκαμε για κάθε περίπτωση προκύπτει:

α) $\eta\mu 35,265^\circ = \eta\mu 54,7372^\circ \cdot \eta\mu 45^\circ \Leftrightarrow 0,5391 = 0,8165 \cdot 0,7071 \Leftrightarrow 0,5391 \approx 0,5773$ (η μικρή διαφορά οφείλεται στη προσέγγιση των τριγωνομετρικών αριθμών).

β) $\eta\mu 144,735^\circ = \eta\mu 125,2628^\circ \cdot \eta\mu 135^\circ \Leftrightarrow 3,6023 = 0,8165 \cdot 0,7071$. Άρα η δεύτερη περίπτωση δεν είναι δεκτή.

13.7 Ορθόπλευρα σφαιρικά τρίγωνα.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι σφαιρικό τρίγωνο του οποίου μία πλευρά είναι 90° καλείται **ορθόπλευρο**. Το **πολικό τρίγωνο** ενός ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου είναι ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, γιατί αν ένα ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει την $\alpha = 90^\circ$, τότε το πολικό του $A'B'\Gamma'$ θα έχει την $A' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (θεώρημα 1).

Επομένως, για να επιλύσουμε ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο, αρκεί να επιλύσουμε το πολικό αυτού, το οποίο είναι ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, σύμφωνα με τις περιπτώσεις της παραγράφου 13.6.2, όπως φαίνεται στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση

13.7.1 Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $\alpha = 90^\circ$, όταν δίνονται οι δύο γωνίες B και Γ , με τον περιορισμό $0^\circ < B, \Gamma < 180^\circ$.

Λύση.

Αν α, β, γ οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ θα δείξουμε ότι: $\alpha + \beta > \gamma$. Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ του ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$. Για το σφαιρικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχουμε:

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \beta' = 180^\circ - B = 180^\circ - \varphi = \varphi_1, \gamma' = 180^\circ - \Gamma = 180^\circ - \omega = \omega_1.$$

Επομένως, επιλύουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ (σχ. 13.6ζ). [Περίπτωση ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου, όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία, (παράγρ. 13.6.2, εφαρμογή 3)]. Άρα:

Υπολογισμός της πλευράς α' .

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha') = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha' = \sigma\upsilon\nu\beta' \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma'. \quad (13.7.1)$$

Υπολογισμός της γωνίας B' .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\gamma' &= \epsilon\varphi(90^\circ - B') \quad \epsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow \eta\mu\gamma' = \sigma\varphi B' \cdot \epsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \eta\mu\gamma' &= \frac{1}{\epsilon\varphi B'} \quad \epsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow \eta\mu\gamma' \cdot \epsilon\varphi B' = \epsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow \epsilon\varphi B' = \frac{\epsilon\varphi\beta'}{\eta\mu\gamma'}. \end{aligned} \quad (13.7.2)$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ' .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\beta' &= \epsilon\varphi(90^\circ - \Gamma') \quad \epsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow \eta\mu\beta' = \sigma\varphi\Gamma' \cdot \epsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \eta\mu\beta' &= \frac{1}{\epsilon\varphi\Gamma'} \quad \epsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow \eta\mu\beta' \cdot \epsilon\varphi\Gamma' = \epsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow \epsilon\varphi\Gamma' = \frac{\epsilon\varphi\gamma'}{\eta\mu\beta'}. \end{aligned} \quad (13.7.3)$$

Τύπος ελέγχου.

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha') = \epsilon\varphi(90^\circ - B') \epsilon\varphi(90^\circ - \Gamma') \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha' = \sigma\varphi B' \cdot \sigma\varphi\Gamma'. \quad (13.7.4)$$

Άρα τα στοιχεία του ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου είναι: $\alpha = 90^\circ$, B, Γ (γνωστά από την υπόθεση της εφαρμογής), $A = 180^\circ - \alpha', \beta = 180^\circ - B', \gamma = 180^\circ - \Gamma'$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.7.1

Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $\alpha = 90^\circ$, με $B = 112^\circ$ και $\Gamma = 48^\circ$. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιούμε το σχήμα 13.6ζ.

Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ του ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$.

Για το σφαιρικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχουμε:

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$$\beta' = 180^\circ - B = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ.$$

$$\gamma' = 180^\circ - \Gamma = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ.$$

Έτσι, έχουμε να επιλύσουμε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, $A' = 90^\circ$ με $\beta' = 68^\circ$ και $\gamma' = 132^\circ$, όπως στο παράδειγμα 13.6.9. Άρα:

Υπολογισμός της πλευράς a' : $\alpha' = 104,513^\circ$.

Υπολογισμός της γωνίας B' : $B' = 73,288^\circ$.

Υπολογισμός της γωνίας Γ' : $\Gamma' = 129,857^\circ$.

Επομένως, τα στοιχεία του ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου είναι:

$\alpha = 90^\circ$, $B = 112^\circ$, $\Gamma = 48^\circ$ (γνωστά από την υπόθεση της εφαρμογής) και

$$A = 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - 104,513^\circ = 75,487^\circ.$$

$$\beta = 180^\circ - B' = 180^\circ - 73,288^\circ = 106,712^\circ.$$

$$\gamma = 180^\circ - \Gamma' = 180^\circ - 129,857^\circ = 50,143^\circ.$$

13.8 Επίλυση σφαιρικού τριγώνου.

Η επίλυση ενός σφαιρικού τριγώνου αφορά στον υπολογισμό τριών αγνώστων στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου, αν είναι γνωστά τα υπόλοιπα τρία στοιχεία. Υπενθυμίζουμε ότι τα πρωτεύοντα στοιχεία ενός σφαιρικού τριγώνου είναι οι τρεις πλευρές και οι τρεις γωνίες του.

Για την επίλυση των σφαιρικών τριγώνων χρησιμοποιούμε τις σχέσεις που ήδη έχουμε αναφέρει, αλλά και διάφορες μεθόδους επιλύσεως που θα αναφέρουμε, ανάλογα με την περίπτωση. Μία από τις πιο σημαντικές μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε, είναι η **μέθοδος των ορθογωνίων τριγώνων**. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, φέρνουμε από μία κορυφή του τριγώνου έναν μέγιστο κύκλο κάθετα στην απέναντι πλευρά, ώστε το αρχικό τρίγωνο να διαιρεθεί σε δύο ορθογώνια, τα οποία επιλύουμε σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 13.6. Η συνένωση των λύσεων των δύο τριγώνων μάς δίνει την επίλυση του αρχικού τριγώνου.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις εφαρμογών επιλύσεως τυχαίου τριγώνου.

Εφαρμογή 1.

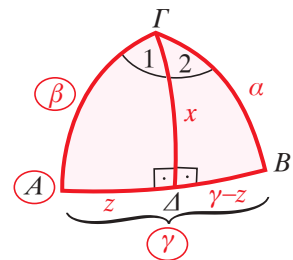
Αν δίνονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία.

Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται συχνότερα από κάθε άλλη περίπτωση σε προβλήματα Ναυτιλίας και Αστρονομίας (παράγρ. 13.9).

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, όταν δίνονται οι πλευρές β , γ και η γωνία A , με τους περιορισμούς $0^\circ < \beta, \gamma, A < 180^\circ$.

1^{ος} τρόπος.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων, φέρνουμε από την κορυφή Γ , τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ μεγίστου κύκλου κάθετο στην πλευρά AB . Έστω x το μέ-



Σχ. 13.8α.

τρο του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$ και z του $\widehat{A\Delta}$ (σχ. 13.8α). Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι αντίστοιχη με αυτή που χρησιμοποιήσαμε στην επίλυση ορθογώνιων σφαιρικών τριγώνων, σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που δημιουργούνται ανάλογα με τη θέση του Δ σε σχέση με την πλευρά του AB .

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) *Αν το Δ είναι εσωτερικό σημείο της πλευράς AB* (σχ. 13.8α).

Επιλύουμε πρώτα το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, $\Delta = 90^\circ$ (σχ. 13.8β) με γνωστά στοιχεία την πλευρά β και τη γωνία A .

Υπολογισμός της πλευράς z .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - A) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \beta) \varepsilon\varphi z \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = \sigma\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi z \Leftrightarrow \varepsilon\varphi z = \sigma\upsilon\nu A \cdot \varepsilon\varphi\beta. \quad (13.8.1)$$

Υπολογισμός της πλευράς x .

Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - A) \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \beta) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu A \cdot \eta\mu\beta. \quad (13.8.2)$$

Επομένως, από τη σχέση (13.8.2) υπολογίζονται δύο τιμές για την πλευρά x . Από τις δύο τιμές της θα πάρουμε εκείνη που βρίσκεται στο ίδιο τεταρτημόριο με τη γωνία A και είναι $x \leq A$.

Υπολογισμός της γωνίας Γ_1 .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \beta) = \varepsilon\varphi(90^\circ - A) \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma_1) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\varphi A \cdot \sigma\varphi\Gamma_1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma_1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\beta \cdot \varepsilon\varphi A}. \quad (13.8.3)$$

Τύπος ελέγχου.

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu x = \varepsilon\varphi z \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma_1) \Leftrightarrow \eta\mu x = \varepsilon\varphi z \cdot \sigma\varphi\Gamma_1.$$

Στη συνέχεια επιλύουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, $\Delta = 90^\circ$ (σχ. 13.8γ) με γνωστά στοιχεία τις πλευρές x και $\gamma - z$.

Υπολογισμός της γωνίας Γ_2 .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu x = \varepsilon\varphi(\gamma - z) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma_2) \Leftrightarrow \eta\mu x = \varepsilon\varphi(\gamma - z) \cdot \sigma\varphi\Gamma_2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma_2 = \frac{\varepsilon\varphi(\gamma - z)}{\eta\mu x}. \quad (13.8.4)$$

Υπολογισμός της πλευράς a .

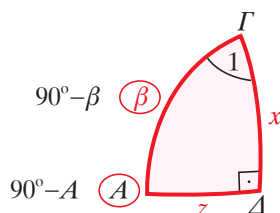
Από το δεύτερο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma - z) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma - z). \quad (13.8.5)$$

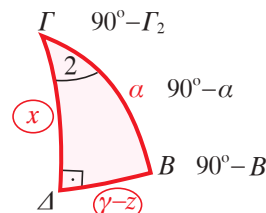
Υπολογισμός της γωνίας B .

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(\gamma - z) = \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - B) \Leftrightarrow \eta\mu(\gamma - z) = \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi B \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B = \frac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu(\gamma - z)}. \quad (13.8.6)$$



Σχ. 13.8β.



Σχ. 13.8γ.

Τύπος ελέγχου.

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^\circ - B) \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma_2) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma_2.$$

Άρα, για το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε υπολογίσει την πλευρά α , τη γωνία B και τη γωνία $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

β) *Αν το Δ είναι εξωτερικό σημείο της πλευράς AB* (σχ. 13.8δ).

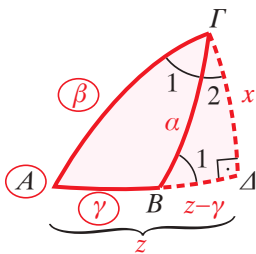
Επιλύουμε πρώτα το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, $\Delta = 90^\circ$ (σχ. 13.8ε) με γνωστά στοιχεία την πλευρά β και τη γωνία A και υπολογίζουμε την πλευρά z , την πλευρά x και την γωνία Γ_1 , όπως στην προηγούμενη ενότητα.

Στη συνέχεια, επιλύουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, $\Delta = 90^\circ$ (σχ. 13.8στ) με γνωστά στοιχεία τις πλευρές x και $z - \gamma$ και υπολογίζουμε την πλευρά α , τη γωνία Γ_2 και τη γωνία B_1 .

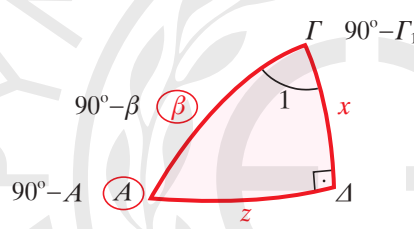
Επομένως, για το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε υπολογίσει: την πλευρά α , τη γωνία $B = 180^\circ - B_1$ και τη γωνία $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$.

2^{ος} τρόπος

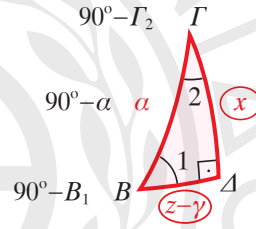
Αντί για τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές (σχ. 13.8ζ).



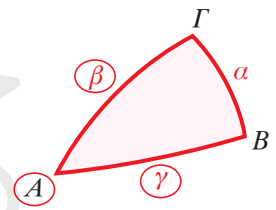
Σχ. 13.8δ.



Σχ. 13.8ε.



Σχ. 13.8στ.



Σχ. 13.8ζ.

Υπολογισμός της πλευράς α .

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A. \quad (13.8.7)$$

Υπολογισμός της γωνίας B .

Αν χρησιμοποιήσουμε την πλευρά α που ήδη υπολογίσαμε, με τον τύπο:

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\alpha}. \quad (13.8.8)$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

Από τον τύπο:

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}. \quad (13.8.9)$$

3^{ος} τρόπος.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους των ημιπαρημιτόνων πλευρών (σχέσεις 13.2.30 έως 13.2.32), μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα την πλευρά α .

Υπολογισμός της πλευράς α .

$$\eta\mu\pi\alpha = \eta\mu\pi\beta(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\pi\alpha \quad (13.8.10)$$

Αν θέσουμε $\eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\pi\alpha = \eta\mu\pi\alpha$, και λογαριθμήσουμε, θα έχουμε:

$$\log\eta\mu\beta + \log\eta\mu\gamma + \log\eta\mu\pi\alpha = \log\eta\mu\pi\alpha \quad (13.8.11)$$

Από τη σχέση (13.8.11) υπολογίζουμε τον $\log \eta \mu \rho \chi$ και άρα το $\eta \mu \rho \chi$.

Τα υπόλοιπα στοιχεία τα υπολογίζουμε είτε από το νόμο των ημιτόνων (σχέση 13.2.4), είτε από τους τύπους των ημιπαρημίτωνων γωνιών (σχέσεις 13.2.27 έως 13.2.29).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.8.1

Να επιλυθεί τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\gamma = 100^\circ$, $\beta = 38^\circ$ και $A = 40^\circ$.

Ακολουθώντας τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων που περιγράψαμε παραπάνω, για την περίπτωση που το Δ είναι εσωτερικό του τριγώνου, **αρχικά επιλύουμε το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$** (σχ. 13.8β).

Υπολογισμός της πλευράς z .

Από τη σχέση (13.8.1) έχουμε:

$$\varepsilon \varphi z = \sigma \nu \nu A \cdot \varepsilon \varphi \beta \Leftrightarrow \varepsilon \varphi z = \sigma \nu \nu 40 \varepsilon \varphi 38 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi z = 0,7660 \cdot 0,7813 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi z = 0,5985, \text{ άρα } z = 30,1^\circ.$$

Υπολογισμός της πλευράς x .

Από τη σχέση (13.8.2) έχουμε:

$$\eta \mu x = \eta \mu A \cdot \eta \mu \beta \Leftrightarrow \eta \mu x = \eta \mu 40 \eta \mu 38 \Leftrightarrow \eta \mu x = 0,6428 \cdot 0,6157 \Leftrightarrow \eta \mu x = 0,3958.$$

Άρα $x = 23,32^\circ$ ή $x = 156,68^\circ$.

Από τις δύο τιμές της θα πάρουμε εκείνη που βρίσκεται στο ίδιο τεταρτημόριο με τη γωνία A και είναι $x \leq A$. Άρα $x = 23,32^\circ$.

Υπολογισμός της γωνίας Γ_1 .

Από τη σχέση (13.8.3) έχουμε:

$$\varepsilon \varphi \Gamma_1 = \frac{1}{\sigma \nu \nu \beta \cdot \varepsilon \varphi A} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \Gamma_1 = \frac{1}{\sigma \nu \nu 38 \varepsilon \varphi 40} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \Gamma_1 = \frac{1}{0,788 \cdot 0,839} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \Gamma_1 = 1,2104, \text{ άρα } \Gamma_1 = 50,44^\circ.$$

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\eta \mu x = \varepsilon \varphi z \cdot \varepsilon \varphi (90^\circ - \Gamma_1) \Leftrightarrow \eta \mu x = \varepsilon \varphi z \cdot \sigma \varphi \Gamma_1.$$

Στη συνέχεια, επιλύουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, $\Delta = 90^\circ$ (σχ. 13.8γ) με γνωστά στοιχεία τις πλευρές $x = 23,32^\circ$ και $\gamma - z = 100 - 30,1 = 69,9^\circ$.

Υπολογισμός της γωνίας Γ_2 .

Από τη σχέση (13.8.4) έχουμε:

$$\varepsilon \varphi \Gamma_2 = \frac{\varepsilon \varphi (\gamma - z)}{\eta \mu x} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \Gamma_2 = \frac{\varepsilon \varphi 69,9}{\eta \mu 23,32} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \Gamma_2 = 6,91, \text{ άρα } \Gamma_2 = 81,77^\circ.$$

Υπολογισμός της πλευράς a .

Από τη σχέση (13.8.5) έχουμε:

$$\sigma \nu \nu a = \sigma \nu \nu x \cdot \sigma \nu \nu (\gamma - z) \Leftrightarrow \sigma \nu \nu a = \sigma \nu \nu 23,32 \sigma \nu \nu 69,9 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu a = 0,92 \cdot 0,34 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu a = 0,31, \text{ άρα } a = 71,94^\circ.$$

Υπολογισμός της γωνίας B .

Από τη σχέση (13.8.6) έχουμε:

$$\varepsilon \varphi B = \frac{\varepsilon \varphi x}{\eta \mu (\gamma - z)} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi B = \frac{\varepsilon \varphi 23,32}{\eta \mu 69,9} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi B = \frac{0,43}{0,94} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi B = 0,46, \text{ άρα } B = 24,70^\circ.$$

Τύπος ελέγχου.

Από τον πρώτο κανόνα του Napier έχουμε: $\sigma\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma_2$.

Άρα, για το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε υπολογίσει την πλευρά $\alpha = 71,94^\circ$, τη γωνία $B = 24,7^\circ$ και τη γωνία $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 50,44^\circ + 81,77^\circ = 132,21^\circ$.

Εφαρμογή 2.

Αν δίνονται μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτή γωνίες.

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, όταν δίνονται η πλευρά α και οι γωνίες B και Γ , με τους περιορισμούς $0^\circ < \alpha, B, \Gamma < 180^\circ$.

1^{ος} τρόπος.

Για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε το πολικό του τρίγωνο $A'B'\Gamma'$. Τότε έχουμε:

$$A' = 180^\circ - \alpha, \beta' = 180^\circ - B \text{ και } \gamma' = 180^\circ - \Gamma$$

οπότε έχουμε την Εφαρμογή 1, αφού θα είναι γνωστές δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία.

2^{ος} τρόπος

Αντί για τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του συνημιτόνου για τις γωνίες (σχ. 13.8η).

Υπολογισμός της γωνίας A .

Από το νόμο του συνημιτόνου έχουμε:

$$\sigma\nu A = \sigma\nu B \cdot \sigma\nu \Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\nu \alpha \quad (13.8.12)$$

Υπολογισμός της πλευράς β .

Αν χρησιμοποιήσουμε τη γωνία A που ήδη υπολογίσαμε, στον τύπο:

$$\sigma\nu B = -\sigma\nu \Gamma \cdot \sigma\nu A + \eta\mu \Gamma \cdot \eta\mu A \cdot \sigma\nu \beta \Leftrightarrow \sigma\nu \beta = \frac{\sigma\nu B + \sigma\nu \Gamma \cdot \sigma\nu A}{\eta\mu \Gamma \cdot \eta\mu A}. \quad (13.8.13)$$

Υπολογισμός της πλευράς γ .

Από τον τύπο:

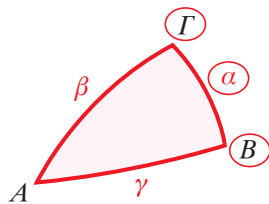
$$\sigma\nu \Gamma = -\sigma\nu A \cdot \sigma\nu B + \eta\mu A \cdot \eta\mu B \cdot \sigma\nu \gamma \Leftrightarrow \sigma\nu \gamma = \frac{\sigma\nu \Gamma + \sigma\nu A \cdot \sigma\nu B}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}. \quad (13.8.14)$$

Εφαρμογή 3.

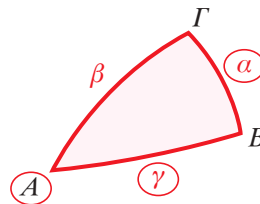
Αν δύο πλευρές και μία γωνία απέναντι μίας εκ των δύο πλευρών.

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 13.8θ), όταν δίνονται οι πλευρές α, γ και η γωνία A , με τους περιορισμούς $0^\circ < \alpha, \gamma, A < 180^\circ$.

Για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, φέρονε από την κορυφή B τόξο $\widehat{BA}$, μεγίστου κύκλου, κάθετο στην πλευρά AG και επιλύουμε τα ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, όπως και στην Εφαρμογή 1.



Σχ. 13.8η.



Σχ. 13.8θ.

Εφαρμογή 4.

Αν δίνονται δύο γωνίες και μία πλευρά απέναντι μίας εκ των δύο γωνιών.

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 13.8ι), όταν δίνονται η πλευρά a και οι γωνίες A και Γ , με τους περιορισμούς $0^\circ < a, A, \Gamma < 180^\circ$.

Για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε έχουμε:

$$\alpha' = 180^\circ - A$$

$$\gamma' = 180^\circ - \Gamma$$

$$A' = 180^\circ - a$$

οπότε έχουμε την Εφαρμογή 3.

Εφαρμογή 5.

Αν δίνονται οι τρεις πλευρές του.

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, όταν δίνονται οι πλευρές a, β και γ , με τους περιορισμούς $0^\circ < a, \beta, \gamma < 180^\circ$.

Για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, χρησιμοποιούμε το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές. Δηλαδή:

Υπολογισμός της γωνίας A .

$$\sigma\eta\alpha = \sigma\eta\beta \cdot \sigma\eta\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\eta A \Leftrightarrow \sigma\eta A = \frac{\sigma\eta\alpha - \sigma\eta\beta \cdot \sigma\eta\gamma}{\eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma}. \quad (13.8.15)$$

Γράφοντας κυκλικά την (13.8.15) για τις γωνίες B και Γ έχουμε:

Υπολογισμός της γωνίας B .

$$\sigma\eta B = \frac{\sigma\eta\beta - \sigma\eta\gamma \cdot \sigma\eta\alpha}{\eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\alpha}. \quad (13.8.16)$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ .

$$\sigma\eta\Gamma = \frac{\sigma\eta\gamma - \sigma\eta\alpha \cdot \sigma\eta\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}. \quad (13.8.17)$$

Εφαρμογή 6.

Αν δίνονται οι τρεις γωνίες του.

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 13.8ι), όταν δίνονται οι γωνίες A, B και Γ , με τους περιορισμούς $0^\circ < A, B, \Gamma < 180^\circ$.

1^{ος} τρόπος.

Για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε έχουμε $\alpha' = 180^\circ - A$, $\beta' = 180^\circ - B$, $\gamma' = 180^\circ - \Gamma$ οπότε έχουμε την Εφαρμογή 5.

2^{ος} τρόπος.

Αντί για τη μέθοδο των ορθογωνίων τριγώνων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του συνημιτόνου για τις γωνίες.

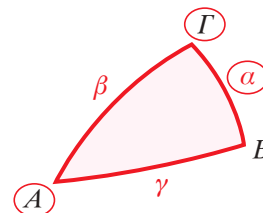
Υπολογισμός της πλευράς a .

$$\sigma\eta A = -\sigma\eta B \cdot \sigma\eta\Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\eta\alpha \Leftrightarrow \sigma\eta\alpha = \frac{\sigma\eta A + \sigma\eta B \cdot \sigma\eta\Gamma}{\eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma}. \quad (13.8.18)$$

Γράφοντας κυκλικά την (13.8.18) για τις πλευρές β και γ έχουμε:

Υπολογισμός της πλευράς β .

$$\sigma\eta\beta = \frac{\sigma\eta B + \sigma\eta\Gamma \cdot \sigma\eta A}{\eta\mu\Gamma \cdot \eta\mu A}. \quad (13.8.19)$$



Σχ. 13.8ι.

Υπολογισμός της πλευράς γ.

$$\sigma\eta\nu\gamma = \frac{\sigma\eta\nu\Gamma + \sigma\eta\nu A \cdot \sigma\eta\nu B}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}. \quad (13.8.20)$$

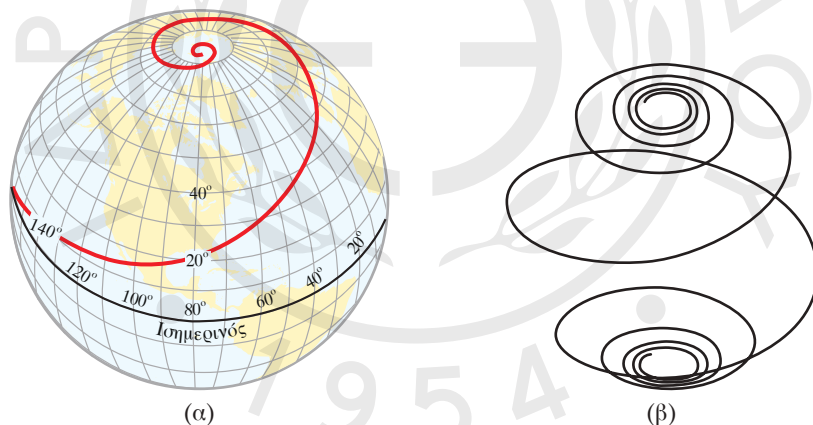
13.9 Εφαρμογές σφαιρικής τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία.

Η σφαιρική τριγωνομετρία αποτέλεσε βασικό λόγο της αναπτύξεως και της εξελίξεως της ναυτιλίας, καθώς έχει άμεση εφαρμογή σε προβλήματα τόσο της γήινης όσο και της ουράνιας σφαίρας.

Μία από αυτές τις εφαρμογές είναι ο υπολογισμός των στοιχείων του **πλου ελάχιστης διαδρομής από ένα σημείο αναχωρήσεως Α, προς ένα σημείο προορισμού Β**. Ο πλους αυτός μπορεί να υλοποιηθεί, είτε με τη μέθοδο του **λοξοδρομικού** πλου, είτε με τη μέθοδο του **ορθοδρομικού** πλου ή με έναν συνδυασμό τους (**μεικτός ή σύνθετος πλους**).

13.9.1 Λοξοδρομικός πλους.

Στο **λοξοδρομικό** πλου τηρείται **σταθερή πορεία**, αλλά δεν ακολουθείται η συντομότερη απόσταση. Το ίχνος του λοξοδρομικού πλου στην επιφάνεια της σφαίρας ή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ονομάζεται **ρुम्βοειδής γραμμή** (rhumbline) ή **λοξοδρομία** (loxodrome) (σχ. 13.9α). Στη διεθνή βιβλιογραφία, η ονομασία «ρुम्βοειδής γραμμή» χρησιμοποιείται ως ναυτιλιακός όρος για να εκφράσει το ίχνος του λοξοδρομικού πλου, ενώ η ονομασία «λοξοδρομία» ως γεωμετρικός όρος για την περιγραφή αυτής της μη επίπεδης γραμμής στην επιφάνεια της σφαίρας ή του σφαιροειδούς που τέμνει τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία (σχ. 13.9α). Η σταθερή αυτή γωνία ονομάζεται **λοξοδρομική ή μερκατορική πορεία**.



Σχ. 13.9α.

Επειδή η λοξοδρομία δεν είναι τόξο μέγιστου κύκλου, οι υπολογισμοί σχετικά με αυτήν δεν θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

13.9.2 Ορθοδρομικός πλους.

Ανάμεσα σε δύο τόπους υπάρχουν άπειρα τόξα που τους συνδέουν. Η πιο σύντομη απόσταση ανάμεσα σε αυτούς τους τόπους στην επιφάνεια της γης, δηλαδή το μικρότερο τόξο που τους ενώνει, ονομάζεται **ορθοδρομικό τόξο**.

Το μικρότερο από 180° τόξο μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο τόπους, ονομάζεται **ορθοδρομία ή ορθοδρομικό τόξο**.

Χαρακτηριστικό του ορθοδρομικού τόξου είναι ότι όταν απεικονίζεται σε Μερκατορικό χάρτη, στρέφει το κυρτό μέρος του προς τους πόλους και το κοίλο προς τον Ισημερινό. Ο πλους, η πορεία δηλαδή ενός πλοίου, θα μεταβάλλεται συνεχώς, αν πρέπει να ακολουθεί μια πορεία με βάση τις γωνίες που σχηματίζονται από την ορθοδρομία, όταν αυτό τέμνει τους μεσημβρινούς της γης. Κάθε μία από τις γωνίες αυτές ονομάζεται **ορθοδρομική πλεύση**. Είναι εμφανές ότι ένα πλοίο δεν μπορεί να μεταβάλλει συνεχώς την πορεία του. Για το λόγο αυτό, συνήθως ακολουθείται μια τεθλασμένη γραμμή, η οποία εγγράφεται στο ορθοδρομικό τόξο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 13.9β. Είναι εμφανές ότι όσο περισσότερες είναι οι πλευρές της τεθλασμένης γραμμής, τόσο περισσότερο προσεγγίζει αυτή το ορθοδρομικό τόξο.

Ο πλους πάνω σε αυτή την τεθλασμένη γραμμή ελάχιστης διαδρομής μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας της γης ονομάζεται **ορθοδρομικός πλους ή πλους σε μέγιστο κύκλο**.

Ο υπολογισμός των στοιχείων του ορθοδρομικού πλου υλοποιείται με την επίλυση **του σφαιρικού τριγώνου ΑΠΒ** με κορυφές **το σημείο αναχωρήσεως Α, το σημείο προορισμού Β** και τον πλησιέστερο, στο σημείο αναχωρήσεως, **πόλο** (σχ. 13.9γ). Το τρίγωνο αυτό ονομάζεται **τρίγωνο ορθοδρομίας** (ή γήινο τρίγωνο).

Οι πλευρές του τριγώνου ορθοδρομίας **ΠΑ** και **ΠΒ**, ως τόξα των μεσημβρινών των αντιστοίχων τόπων Α και Β, είναι τόξα μεγίστων κύκλων. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι και η πλευρά **ΑΒ** τόξο μέγιστου κύκλου, ο πλους πρέπει να είναι ορθοδρομικός. Τα βασικά στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας ως προς τις πλευρές είναι τα εξής:

α) Το τόξο **ΠΑ** του μεσημβρινού του τόπου εκκινήσεως, το οποίο ισούται με $90^\circ - \varphi_A$ (όπου φ_A το πλάτος του τόπου εκκινήσεως).

β) Το τόξο **ΠΒ** του μεσημβρινού του τόπου αφίξεως, το οποίο ισούται με $90^\circ - \varphi_B$ (όπου φ_B το πλάτος του τόπου αφίξεως), αν τα φ_A και φ_B είναι ομώνυμα, και με $90^\circ + \varphi_B$, αν τα φ_A και φ_B είναι ετερόνυμα.

γ) **Η απόσταση D_0 του ορθοδρομικού πλου** των δύο τόπων, η οποία υπολογίζεται σε ναυτικά μίλια και προκύπτει από την υπολογιζόμενη τιμή της πλευράς **ΑΒ** του σφαιρικού τριγώνου **ΑΠΒ** σε πρώτα λεπτά της μοίρας (όπως είναι γνωστό, οι υπολογισμοί της παραδοσιακής ναυτιλίας στηρίζονται στην παραδοχή ότι: «Ένα πρώτο λεπτό της μοίρας του μεσημβρινού, όπως και οποιουδήποτε άλλου μέγιστου κύκλου ισούται με ένα ναυτικό μίλι»).

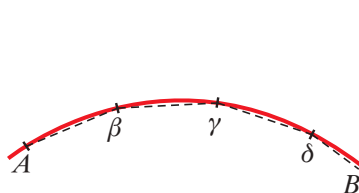
Τα βασικά στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας ως προς τις γωνίες είναι τα εξής:

α) Η γωνία **Π**, η οποία ισούται με τη διαφορά των μηκών μεταξύ των τόπων Α και Β και συμβολίζεται με $\Delta\lambda$.

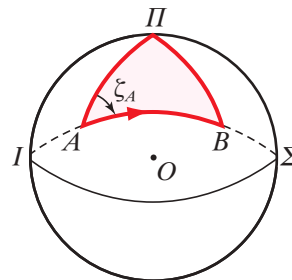
β) Η γωνία **Α**, που είναι η αρχική πλεύση, και με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε την **αρχική πορεία ζ_A του ορθοδρομικού πλου**.

γ) Η γωνία **Β**, από την οποία βρίσκεται η τελική πλεύση και σπάνια χρησιμοποιείται.

Έστω τώρα Α και Β δύο τόποι πάνω στη Γη, με το Α να είναι το σημείο εκκινήσεως με συντεταγμέ-



Σχ. 13.9β.

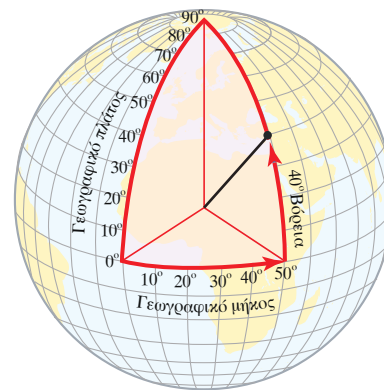


Σχ. 13.9γ.

νες φ_A , λ_A και το B να είναι το σημείο αφίξεως με συντεταγμένες φ_B , λ_B . Ο υπολογισμός της ορθοδρομικής απόστασης D_o και της αρχικής πλεύσεως ζ_A μπορεί να γίνει στο τρίγωνο ορθοδρομίας $ΠΑΒ$ που μόλις περιγράψαμε (σχ. 13.9δ), με γνωστά στοιχεία τα ακόλουθα:

- α) Την πλευρά $ΠΑ$ η οποία είναι ίση με $90^\circ - \varphi_A$.
- β) Την πλευρά $ΠΒ$ η οποία είναι ίση με $90^\circ - \varphi_B$, αν τα φ_A και φ_B είναι ομώνυμα, και με $90^\circ + \varphi_B$, αν τα φ_A και φ_B είναι ετερόνυμα.
- γ) Τη γωνία $\Delta\lambda$.

Επομένως, ως γνωστά στοιχεία έχουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία, οπότε επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο $ΠΑΒ$ (παράγρ. 13.8 εφαρμογή 1), μπορούμε να επιλύσουμε τα ζητούμενα στοιχεία.



Σχ. 13.9δ.

Για τις *συντεταγμένες φ και λ* ενός τόπου ισχύουν τα εξής (σχ. 13.9δ):

α) Η πρώτη συντεταγμένη ονομάζεται **πλάτος (latitude) φ** και μετρείται πάνω στο μεσημβρινό του τόπου, από τον Ισημερινό μέχρι το ζενίθ (είναι δηλαδή το μήκος ενός τόξου του μεσημβρινού). Το πλάτος μετρείται σε μοίρες και υποδιαιρέσεις αυτών, πρώτα και δεύτερα από 0° ως 90° προς το Βόρειο Πόλο ή 0° ως 90° προς το Νότιο Πόλο (αρχής γενομένης της μετρήσεως από τον Ισημερινό, του οποίου το γεωγραφικό πλάτος είναι 0°) και χαρακτηρίζεται Βόρειο Β (North N) ή Νότιο Ν (South S) ανάλογα σε ποιο ημισφαίριο βρίσκεται το σημείο. Σημεία του ίδιου ημισφαιρίου έχουν **ομώνυμα πλάτη** (same names), σε αντίθεση με σημεία διαφορετικού ημισφαιρίου που έχουν **ετερόνυμα πλάτη** (contrary names).

Παράδειγμα: πλάτος $\varphi = 10^\circ 15' 30''$ Β ή (στα αγγλικά) latitude = $10^\circ 15' 30''$ N.

Παρατήρηση: Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο ότι το ελληνικό Ν δηλώνει το Νότιο ενώ το αγγλικό N (North) δηλώνει το Βόρειο. Στην αναφορά στίγματος πρώτα δίδεται ή ζητείται το πλάτος φ .

β) Η δεύτερη συντεταγμένη του συστήματος ονομάζεται **μήκος (longitude) λ** και ορίζεται ως η διέδρη γωνία μεταξύ της αφετηρίας (πρωτεύων μεσημβρινός) και του μεσημβρινού του τόπου. Το μήκος μετρείται σε μοίρες και υποδιαιρέσεις αυτών, πρώτα και δεύτερα λεπτά, από $0^\circ - 180^\circ$ Ανατολικό ή $0^\circ - 180^\circ$ Δυτικό [αρχής γενομένης της μετρήσεως από τον πρώτο μεσημβρινό, διερχόμενο από τον Greenwich, με γεωγραφικό μήκος 0° και χαρακτηρίζεται Ανατολικό Α (East E) ή Δυτικό Δ (West W) ανάλογα σε ποιο ημισφαίριο βρίσκεται το σημείο]. Σημεία του ίδιου ημισφαιρίου έχουν **ομώνυμα μήκη** (same names), σε αντίθεση με τόπους διαφορετικού ημισφαιρίου που έχουν **ετερόνυμα μήκη** (contrary names).

Παράδειγμα: μήκος $\lambda = 010^\circ 15' 30''$ Α ή (στα αγγλικά) longitude = $010^\circ 15' 30''$ E.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.9.1

Να υπολογίσετε την απόσταση του ορθοδρομικού πλου και την αρχική πορεία στο σημείο αναχωρήσεως, για ταξίδι από το λιμάνι της Βοστώνης των Η.Π.Α. με γεωγραφικές συντεταγμένες $\varphi_A : 41^\circ 6,338' \text{ N}$, $\lambda_A : 71^\circ 23,467' \text{ W}$, μέχρι το λιμάνι της Λισαβόνας με γεωγραφικές συντεταγμένες $\varphi_B : 38^\circ 37,204' \text{ N}$, $\lambda_B : 9^\circ 13,394' \text{ W}$.

Λύση.

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων στοιχείων, επιλύουμε το σφαιρικό τρίγωνο $ΠΑΒ$ (σχ. 13.9γ), στο οποίο γνωρίζουμε:

Την **πλευρά $ΠΑ$** , η οποία είναι ίση με $90^\circ - \varphi_A = 90^\circ - 41^\circ 6,338' = 90^\circ - 41,1056^\circ = 48,8944^\circ$.

Την **πλευρά $ΠΒ$** , η οποία είναι ίση με $90^\circ - \varphi_B = 90^\circ - 38^\circ 37,204' = 90^\circ - 38,62^\circ = 51,38^\circ$.

Τη **γωνία $ΑΠΒ$** , η οποία είναι ίση με $\Delta\lambda = |\lambda_B - \lambda_A| = |9^\circ 13,394' - 71^\circ 23,467'| =$
 $= |9,2232^\circ - 71,3911^\circ| = 62,1679^\circ$.

Υπολογισμός της πλευράς $ΑΒ$.

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\begin{aligned}\sin(AB) &= \sin(ΠΑ) \sin(ΠΒ) + \eta\mu(ΠΑ) \eta\mu(ΠΒ) \sin(ΑΠΒ) = \\ &= \sin 48,8944^\circ \sin 51,38^\circ + \eta\mu 48,8944^\circ \eta\mu 51,38^\circ \sin 62,1679^\circ = \\ &= 0,65744894 \cdot 0,62415236 + 0,753499137 \cdot 0,781302649 \cdot 0,466882154 = \\ &= 0,410348308 + 0,274858599 = 0,685206907.\end{aligned}$$

Άρα $(AB) = 46,74811855^\circ = 46,74811855 \cdot 60' = 2804,88'$.

Επομένως, η απόσταση **D_0 του ορθοδρομικού πλου** για ταξίδι από το λιμάνι της Βουτώνης των Η.Π.Α. μέχρι το λιμάνι της Λισαβόνας είναι: $D_0 = 2804,88$ ν.μ..

Υπολογισμός της γωνίας A

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\begin{aligned}\sin(ΠΒ) &= \sin(ΠΑ) \sin(ΑΒ) + \eta\mu(ΠΑ) \eta\mu(ΑΒ) \sin A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin A &= \frac{\sin(ΠΒ) - \sin(ΠΑ) \sin(ΑΒ)}{\eta\mu(ΠΑ) \eta\mu(ΑΒ)} = \frac{\sin 51,38^\circ - \sin 48,8944^\circ \sin 46,7481^\circ}{\eta\mu 48,8944^\circ \eta\mu 46,7481^\circ} = \\ &= \frac{0,62415236 - 0,657448894 \cdot 0,685207143}{0,753499137 \cdot 0,728348248} = \frac{0,173663682}{0,548809776} = 0,316436932, \\ \text{τότε } A &= 71,5524181^\circ \cong 71^\circ 33,145' .\end{aligned}$$

Επομένως, η αρχική πορεία ζ_A του ορθοδρομικού πλου είναι: $\zeta_A = 71^\circ 33,145'$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.9.2

Να υπολογίσετε την απόσταση του ορθοδρομικού πλου και την αρχική πορεία στο σημείο αναχωρήσεως, για ταξίδι από το Ακρωτήριο Καλής Ελπίδας (Cape of Good Hope) με γεωγραφικές συντεταγμένες $\varphi_A : 34^\circ 25', 61S$, $\lambda_A : 18^\circ 25', 9090 E$ μέχρι το λιμάνι του Buenos Aires με γεωγραφικές συντεταγμένες $\varphi_B : 36^\circ 3', 7610S$, $\lambda_B : 55^\circ 30', 2290 W$ (σχ. 13.9ε).

Λύση.

α) Υπολογισμός των στοιχείων του ορθοδρομικού πλου με επίλυση σφαιρικού τριγώνου που έχει μία κορυφή στο νότιο πόλο.

Επιλύουμε το σφαιρικό τρίγωνο $Π'ΑΒ$, στο οποίο γνωρίζουμε:

Την **πλευρά $Π'Α$** , η οποία είναι ίση με $90^\circ - \varphi_A = 90^\circ - 34^\circ 25,61' =$
 $= 90^\circ - 34,42683333^\circ = 55,5732^\circ$.

Την πλευρά $\Pi'B$, η οποία είναι ίση με $90^\circ - \varphi_B = 90^\circ - 36^\circ 3,7610' = 90^\circ - 36,06268333^\circ = 53,9374^\circ$.

Τη γωνία $\Lambda\Pi'B$, η οποία είναι ίση με $\Delta_\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 18^\circ 25,9090' + 55^\circ 30,2290' = 18,43181666^\circ + 55,50381666^\circ = 73,93563332^\circ$.

Υπολογισμός της πλευράς AB .

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{συν}(AB) &= \text{συν}(\Pi'A) \cdot \text{συν}(\Pi'B) + \eta\mu(\Pi'A) \cdot \eta\mu(\Pi'B) \cdot \text{συν}(\Lambda\Pi'B) = \\ &= \text{συν}55,57316667^\circ \cdot \text{συν}53,93731667^\circ + \eta\mu55,57316667^\circ \cdot \text{συν}73,93563332^\circ = \quad \Sigma\chi. 13.9\epsilon. \\ &= 0,565353366 \cdot 0,588669989 + 0,824848816 \cdot 0,808373455 \cdot 0,276717073 = \\ &= 0,332806559 + 0,184511039 = 0,517317598 \end{aligned}$$

τότε $(AB) = 58,84750734^\circ = 58,84750734 \cdot 60' = 3530,85'$.

Επομένως, η απόσταση D_0 του ορθοδρομικού πλου για ταξίδι από το Ακρωτήριο Καλής Ελπίδας (Cape of Good Hope) μέχρι το λιμάνι του Buenos Aires είναι:

$$D_0 = 3530,85 \text{ ν.μ.}$$

Υπολογισμός της γωνίας $BA\Pi'$.

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{συν}(\Pi'B) &= \text{συν}(AB) \text{συν}(\Pi'A) + \eta\mu(AB) \eta\mu(\Pi'A) \text{συν}(BA\Pi') \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{συν}(BA\Pi') &= \frac{\text{συν}(\Pi'B) - \text{συν}(AB) \text{συν}(\Pi'A)}{\eta\mu(AB) \eta\mu(\Pi'A)} = \\ &= \frac{\text{συν}53,93731667^\circ - \text{συν}58,84750734^\circ \text{συν}55,57316667^\circ}{\eta\mu58,84750734^\circ \eta\mu55,57316667^\circ} = \\ &= \frac{0,588669989 - 0,517317598 \cdot 0,565353366}{0,855793493 \cdot 0,824848816} \\ &= \frac{0,588669989 - 0,292467245}{0,70590025} = \frac{0,296202744}{0,70590025} = 0,419609915 \end{aligned}$$

τότε $(BA\Pi') = 65,2^\circ$.

Επομένως, η αρχική πορεία ζ_A στο σημείο αναχωρήσεως του ορθοδρομικού πλου είναι:

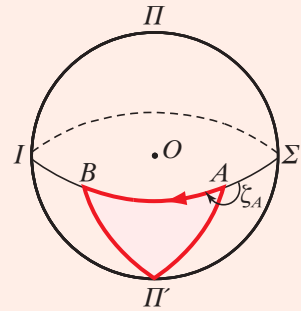
$$\zeta_A = 180^\circ + (BA\Pi') = 180^\circ + 65,2^\circ = 245,2^\circ.$$

β) Υπολογισμός των στοιχείων του ορθοδρομικού πλου με επίλυση σφαιρικού τριγώνου που έχει μία κορυφή στο βόρειο πόλο.

Επιλύουμε το σφαιρικό τρίγωνο ΠAB , στο οποίο γνωρίζουμε:

Την πλευρά ΠA , η οποία είναι ίση με $90^\circ + \varphi_A = 90^\circ + 34^\circ 25,61' = 90^\circ + 34,42683333^\circ = 124,42683333^\circ$.

Την πλευρά ΠB , η οποία είναι ίση με $90^\circ + \varphi_B = 90^\circ + 36^\circ 3,7610' = 90^\circ + 36,06268333^\circ = 126,06268333^\circ$.



Σχ. 13.9ε.

Τη **γωνία ΑΠΒ**, η οποία είναι ίση με $\Delta_\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 18^\circ 25,9090' + 55^\circ 30,2290' = 18,43181666^\circ + 55,50381666^\circ = 73,93563332^\circ$.

Υπολογισμός της πλευράς Α.

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin(AB) &= \sin(ΠΑ) \sin(ΠΒ) + \eta\mu(ΠΑ) \eta\mu(ΠΒ) \sin(ΑΠΒ) = \\ &= \sin 124,42683333^\circ \sin 126,06268333^\circ + \eta\mu 124,42683333^\circ \eta\mu 126,06268333^\circ \sin 73,93563332^\circ = \\ &= -0,565353366 \cdot (-0,588669989) + 0,824848816 \cdot 0,808373455 \cdot 0,276717073 = \\ &= 0,332806559 + 0,184511039 = 0,517317598 \end{aligned}$$

τότε $(AB) = 58,84750734^\circ = 58,84750734 \cdot 60' = 3530,85'$.

Επομένως, **η απόσταση D_0 του ορθοδρομικού πλου** για ταξίδι από το Ακρωτήριο Καλής Ελπίδας μέχρι το λιμάνι του Buenos Aires είναι:

$$D_0 = 3530,85 \text{ ν.μ.}$$

Υπολογισμός της γωνίας ΠΑΒ

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin(ΠΒ) &= \sin(AB) \cdot \sin(ΠΑ) + \eta\mu(AB) \cdot \eta\mu(ΠΑ) \cdot \sin(ΒΑΠ) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin(ΒΑΠ) &= \frac{\sin(ΠΒ) - \sin(AB) \cdot \sin(ΠΑ)}{\eta\mu(AB) \cdot \eta\mu(ΠΑ)} = \\ &= \frac{\sin 126,06268333^\circ - \sin 58,84750734^\circ \cdot \sin 124,42683333^\circ}{\eta\mu 58,84750734^\circ \cdot \eta\mu 124,42683333^\circ} = \\ &= \frac{0,588669989 - 0,517317598 \cdot 0,565353366}{0,855793493 \cdot 0,824848816} = \\ &= \frac{0,588669989 - 0,292467245}{0,70590025} = \frac{0,296202744}{0,70590025} = 0,419609915 \end{aligned}$$

τότε $(ΠΑΒ) = 114,8^\circ$.

Επομένως, **η αρχική πορεία ζ_A στο σημείο αναχωρήσεως** του ορθοδρομικού πλου είναι:

$$\zeta_A = 360^\circ - (ΠΑΒ) = 360^\circ - 114,8^\circ = 245,2^\circ.$$

Παρατήρηση: Στο παράδειγμα αυτό, ο υπολογισμός των στοιχείων του ορθοδρομικού πλου για ταξίδι από το Ακρωτήριο της Καλής Ελπίδας μέχρι το λιμάνι του Buenos Aires, έγινε με την επίλυση διαφορετικών σφαιρικών τριγώνων, οπότε έχουμε και επαλήθευση των υπολογισθέντων στοιχείων.

Για το αντίστροφο ταξίδι από Buenos Aires προς το Ακρωτήριο της Καλής Ελπίδας, από το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ, υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο η απόσταση D_0 του ορθοδρομικού πλου, $D_0 = 3530,85$ ν.μ. και η αρχική πορεία ζ_A .

Υπολογισμός της γωνίας ABΠ.

Από το νόμο του συνημιτόνου για τις πλευρές έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \sin(\Pi A) &= \sin(AB) \sin(\Pi B) + \eta\mu(AB) \eta\mu(\Pi B) \sin(AB\Pi) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin(AB\Pi) &= \frac{\sin(\Pi A) - \sin(AB) \sin(\Pi B)}{\eta\mu(AB) \eta\mu(\Pi B)} = \\
 &= \frac{\sin 124,4268333^\circ - \sin 58,84750734^\circ \cdot \sin 126,06268333^\circ}{\eta\mu 58,84750734^\circ \eta\mu 126,06268333^\circ} = \\
 &= \frac{-0,565353366 - 0,517317598(-0,588669989)}{0,855793493 \cdot 0,808373455} \\
 &= \frac{0,565353366 - 0,304529344}{0,691800743} = \frac{-0,260824021}{0,691800743} = -0,377021886, \\
 \text{τότε } (AB\Pi) &= 112,15^\circ.
 \end{aligned}$$

Επομένως, η αρχική πορεία του ορθοδρομικού πλου για το αντίστροφο ταξίδι από Buenos Aires προς το Ακρωτήριο της Καλής Ελπίδας είναι $\zeta_B = 112,15^\circ$.

13.9.3 Μεικτός ή σύνθετος πλους.

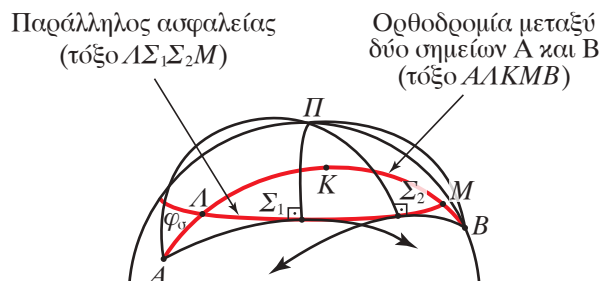
Αρκετά συχνά, η σχεδίαση ενός πλου ελάχιστης διαδρομής από ένα σημείο αναχωρήσεως Α προς ένα σημείο αφίξεως Β συναντά δυσκολίες, όταν υπάρχουν περιορισμοί στη σχεδίαση του ορθοδρομικού πλου (π.χ. όταν χερσαίες περιοχές παρεμβάλλονται στην ορθοδρομία του, η αποφυγή πλου σε περιοχές μεγάλου πλάτους, κ.λπ.). Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο πλους αρχικά εκτελείται ως ορθοδρομικός και στη συνέχεια ως λοξοδρομικός. Για το λόγο αυτό θεωρούμε συνήθως έναν προκαθορισμένο παράλληλο, ώστε το δρομολόγιο του πλου να μην τον υπερβαίνει. Τον παράλληλο αυτό τον ονομάζουμε **παράλληλο ασφαλείας φ_σ** , ενώ ο πλους που εκτελείται ονομάζεται **μεικτός πλους**.

Η πλεύση, επομένως, από το σημείο αναχωρήσεως Α προς ένα σημείο αφίξεως Β (σχ. 13.9στ) αποτελείται από τρεις κλάδους:

α) Ορθοδρομικό πλου από το σημείο αναχωρήσεως Α, μέχρι το σημείο Σ_1 του παραλλήλου ασφαλείας φ_σ . Το ορθοδρομικό τόξο $A\Sigma_1$ εφάπτεται του παραλλήλου ασφαλείας στο σημείο Σ_1 .

β) Λοξοδρομικό πλου επί του παραλλήλου ασφαλείας φ_σ , με πορεία 090° ή 270° από το σημείο Σ_1 μέχρι το σημείο Σ_2 του παραλλήλου ασφαλείας.

γ) Ορθοδρομικό πλου από το σημείο Σ_2 του παραλλήλου ασφαλείας μέχρι του σημείου αφίξεως Β.

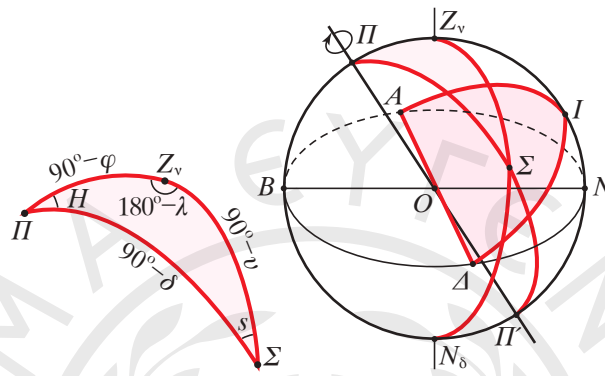


Σχ. 13.9στ.

13.9.4 Τρίγωνο θέσεως ή αστρονομικό τρίγωνο.

Η σφαιρική τριγωνομετρία βρίσκει εφαρμογή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, και σε προβλήματα της ουράνιας σφαίρας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο υπολογισμός των στοιχείων του τριγώνου θέσεως ή αστρονομικού τριγώνου.

Τρίγωνο θέσεως (σχ. 13.9ζ) ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο επί της ουράνιας σφαίρας, του οποίου κορυφές είναι το **Ζενίθ (Z)** του παρατηρητή, ο άνω ουράνιος **Πόλος (Π)** και η θέση ενός **αστέρα (Σ)**. Το αντίστοιχο αυτού στην επιφάνεια της Γης είναι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις γήινες προβολές των τριών ακτίνων, οι οποίες συνδέουν το κέντρο της Γης με τις τρεις κορυφές του τριγώνου θέσεως στην ουράνια σφαίρα (σχ. 13.9ζ).



Σχ. 13.9ζ.

Τα στοιχεία του τριγώνου θέσεως ως προς τις πλευρές είναι τα ακόλουθα:

α) Η **πλευρά Πόλου – Ζενίθ**, (πλευρά ΠΖ), η οποία εκφράζει την επί του μεσημβρινού απόσταση του τόπου από τον άνω πόλο, ονομάζεται **πολοζενιθιακή απόσταση** και είναι ίση με το **σύμπλατος**, δηλαδή με $90^\circ - \varphi$.

β) Η **πλευρά Πόλου – Αστέρα** (πλευρά ΠΣ), η οποία παρίσταται επί του ωρικού κύκλου (ουράνιου μεσημβρινού) του αστέρα και εκφράζει την απόσταση αυτού από τον άνω πόλο. Η πλευρά αυτή ονομάζεται **πολική απόσταση P** και υπολογίζεται από τη σχέση $P = 90^\circ + \delta$ (για ετερώνυμα φ και δ) και $P = 90^\circ - \delta$ (για ομώνυμα φ και δ), όπου δ η κλίση του αστέρα (η κλίση δ μετρείται πάνω στον ωριαίο του αστέρα, από τον Ισημερινό μέχρι τον αστέρα, είναι δηλαδή το μήκος ενός τόξου του ωριαίου).

γ) Η **πλευρά Ζενίθ – Αστέρα** (πλευρά ΖΣ): Η πλευρά αυτή παρίσταται επί του κάθετου κύκλου του αστέρα και εκφράζει την απόσταση του αστέρα από το ζενίθ. Η πλευρά αυτή ονομάζεται **ζενιθιακή απόσταση**, συμβολίζεται με **Zλ** και υπολογίζεται από τη σχέση $Z\lambda = 90^\circ - H\lambda$, όπου $H\lambda$ το ύψος του αστέρα.

Τα στοιχεία του τριγώνου θέσεως ως προς τις γωνίες είναι τα ακόλουθα:

α) Η γωνία **Z**, η οποία ονομάζεται **αξιμούθ του αστέρα** και συμβολίζεται με **Aζλ**.

β) Η γωνία **Σ**, η οποία ονομάζεται **παραλλακτική γωνία** ή γωνία θέσεως άλλα δεν ενδιαφέρει το ναυτιλλόμενο.

γ) Η γωνία **Π**, η οποία σχηματίζεται με κορυφή τον πόλο και πλευρές το μεσημβρινό του τόπου και τον ωρικό κύκλο του αστέρα, ονομάζεται **ωρική γωνία** του αστέρα, συμβολίζεται με **HA** και είναι ιδιαίτερα σημαντική για το ναυτιλλόμενο.

Γενικά, με το τρίγωνο θέσεως προσδιορίζονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες της θέσεως ενός παρατηρητή, δηλαδή το γεωγραφικό του στίγμα. Έτσι, τα συνηθέστερα προβλήματα που ανάγονται στο τρίγωνο θέσεως είναι τα παρακάτω:

α) **Εύρεση ευθειών θέσεως**: όπου με δεδομένα το πλάτος (φ), την κλίση (δ) και την ωρική γωνία (**HA**) ζητείται ή εύρεση του ύψους (**Hλ**) και το αξιμούθ των αστέρων (**Aζλ**).

β) **Αναγνώριση αστέρα**: όπου με δεδομένα το πλάτος (φ), το ύψος (**Hλ**) και το αξιμούθ (**Aζλ**) ζητείται

η εύρεση της κλίσεως (δ) και της ωρικής γωνίας (HA).

γ) **Εύρεση παραλλαγής:** όπου με δεδομένα την ωρική γωνία (HA), την κλίση (δ) και το ύψος του αστέρα ($H\lambda$) ζητείται η εύρεση του Αζιμούθ ($Aζλ$) του αστέρα.

13.10 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα	Παράγραφος 13.2
Πρώτος κανόνας του Napier	Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκειμένων στοιχείων του.
Δεύτερος κανόνας του Napier	Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των συνημιτόνων των αντικειμένων στοιχείων του.
Θεωρήματα των τεταρτημορίων	Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, κάθε γωνία διάφορη της ορθής και η απέναντι πλευρά της, ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο. Έστω ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ABΓ$. (α) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρας στο πρώτο τεταρτημόριο, τότε και οι πλευρές β, γ θα έχουν τα πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο και αντίστροφα. (β) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρας στο δεύτερο τεταρτημόριο, τότε οι πλευρές β και γ θα έχουν τα πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια (πρώτο, δεύτερο).
Επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων	Όταν δίνονται δύο από τα πέντε στοιχεία ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου και υπολογίζονται τα υπόλοιπα με τη βοήθεια των τύπων που ισχύουν μεταξύ των στοιχείων του.
Εφαρμογές Επίλυσεως Ορθογωνίου Σφαιρικού Τριγώνου	α) Αν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά. β) Αν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής. γ) Αν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία. δ) Αν δίνονται μία πλευρά και μία προσκείμενη σε αυτήν γωνία. ε) Αν δίνονται δύο γωνίες του (πλην της ορθής). στ) Αν δίνεται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία.
Επίλυση σφαιρικών τριγώνων	Υπολογισμός τριών αγνώστων στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου, αν είναι γνωστά τα υπόλοιπα τρία στοιχεία.
Εφαρμογές Επίλυσεως Σφαιρικού Τριγώνου	α) Αν δίνονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία. β) Αν δίνονται μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες. γ) Αν δίνονται δύο πλευρές και μία γωνία απέναντι μίας εκ των δύο πλευρών. δ) Αν δίνονται δύο γωνίες και μία πλευρά απέναντι μίας εκ των δύο γωνιών. ε) Αν δίνονται οι τρεις πλευρές του. στ) Αν δίνονται οι τρεις γωνίες του.
Στοιχεία στερεομετρίας	Παράγραφος 13.1
Ορθοδρομικό τόξο	Το μικρότερο από 180° τόξο μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο τόπους.

Ορθοδρομικός πλους ή πλους σε μέγιστο κύκλο	Ο πλους, πάνω σε μια τεθλασμένη γραμμή, ελάχιστης διαδρομής, μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας της γης.
Τρίγωνο ορθοδρομίας	Το σφαιρικό τρίγωνο $ΑΠΒ$ με κορυφές το σημείο αναχωρήσεως A , το σημείο προορισμού B και τον πλησιέστερο, στο σημείο αναχωρήσεως, πόλο.
Παράλληλο ασφαλείας φ_{σ}	Προκαθορισμένο παράλληλο, ώστε το δρομολόγιο του πλου να μην τον υπερβαίνει.
Μεικτός πλους	Ο πλους, ο οποίος αρχικά εκτελείται ως ορθοδρομικός και στη συνέχεια ως λοξοδρομικός, ώστε το δρομολόγιο του πλου να μην υπερβαίνει τον παράλληλο ασφαλείας φ_{σ} και τελικά, αν ο προορισμός δεν βρίσκεται επί του παραλλήλου ασφαλείας φ_{σ} , εκτελεί πάλι ορθοδρομικό πλου.
Τρίγωνο θέσεως ή αστρονομικό τρίγωνο	Το σφαιρικό τρίγωνο επί της ουράνιας σφαίρας, του οποίου κορυφές είναι το Ζενίθ (Z) του παρατηρητή, ο άνω ουράνιος Πόλος (Π) και η θέση ενός αστέρα (Σ). Το αντίστοιχο αυτού στην επιφάνεια της Γης είναι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις γήινες προβολές των τριών ακτίνων, οι οποίες συνδέουν το κέντρο της Γης με τις τρεις κορυφές του τριγώνου θέσεως στην ουράνια σφαίρα.

13.11 Γενικές ασκήσεις.

- 13.11.1** Αν οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 30^\circ$ και $\gamma = 150^\circ$, να βρείτε τα τεταρτημόρια, στα οποία βρίσκονται οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου.
- 13.11.2** Αν οι γωνίες σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $A = 45^\circ$, $B = 135^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε την πλευρά α .
- 13.11.3** Αν οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $\alpha = 60^\circ$ και $\beta = \gamma = 90^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του σφαιρικού τριγώνου.
- 13.11.4** Αν α , β , γ και α' , β' , γ' είναι οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ και οι αντίστοιχες πλευρές του πολικού του $A'B'\Gamma'$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\alpha'}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\beta'}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\gamma'}{\eta\mu\gamma}.$$

- 13.11.5** Αν σε σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha = A$, τότε να δείξετε ότι: $\beta = B$ ή $\beta = 180^\circ - B$ και $\gamma = \Gamma$ ή $\gamma = 180^\circ - \Gamma$.
- 13.11.6** Να δείξετε ότι σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $\sigma\varphi\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\eta\nu\beta \cdot \sigma\eta\nu\Gamma + \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\varphi A$.
- 13.11.7** Να δείξετε ότι μία πλευρά και η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου έχουν πέρασ στο ίδιο τεταρτημόριο ή διαφορετικά τεταρτημόρια, όταν η γωνία που σχηματίζεται από αυτές είναι μικρότερη των 90° ή μεγαλύτερη των 90° αντίστοιχα.

- 13.11.8** Να επιλύσετε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, στις περιπτώσεις:
α) $\alpha = 1^\circ$ και $\Gamma = 1^\circ$ και β) $\alpha = 0^\circ,001$ και $B = 127^\circ$.
- 13.11.9** Να επιλύσετε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $\beta = 115^\circ$ και $\gamma = 64^\circ$.
- 13.11.10** Να επιλύσετε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, στις περιπτώσεις:
α) $\gamma = 78^\circ$ και $B = 29^\circ$ και β) $\beta = 57^\circ$ και $\Gamma = 110^\circ$.
- 13.11.11** Να επιλύσετε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, με $B = 60^\circ$ και $\Gamma = 75^\circ$.
- 13.11.12** Να επιλύσετε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, στις περιπτώσεις:
α) $\gamma = 139^\circ$ και $\Gamma = 118^\circ$ και β) $\beta = 65^\circ$ και $B = 72^\circ$.
- 13.11.13** Να επιλύσετε ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $\alpha = 90^\circ$, στις περιπτώσεις:
α) $A = 53^\circ$ και $\Gamma = 141^\circ$, δ) $\beta = 121^\circ$ και $B = 105^\circ$,
β) $\beta = 41^\circ$ και $A = 141^\circ$, ε) $\beta = 56^\circ$ και $\gamma = 141^\circ$.
γ) $\beta = 149^\circ$ και $\Gamma = 64^\circ$,
- 13.11.14** Να επιλύσετε το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\alpha = 49,3^\circ$, $\beta = 128,23^\circ$ και $\Gamma = 74,2^\circ$.
- 13.11.15** Να επιλύσετε το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\beta = 98^\circ$, $\gamma = 122^\circ$ και $A = 47^\circ$.
- 13.11.16** Να επιλύσετε το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, με:
α) $\alpha = 67,5^\circ$, $\beta = 108,25^\circ$ και $A = 47,33^\circ$, γ) $\beta = 33^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ και $B = 110^\circ$.
β) $\beta = 103^\circ$, $\gamma = 62^\circ$ και $\Gamma = 53^\circ$,
- 13.11.17** Να επιλύσετε το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, με:
α) $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ και $\beta = 160^\circ$, γ) $B = 132^\circ$, $A = 130^\circ$ και $\alpha = 127^\circ$.
β) $B = 60^\circ$, $\Gamma = 45^\circ$ και $\gamma = 60^\circ$,
- 13.11.18** Αν οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 30^\circ$ και $\gamma = 150^\circ$, να βρείτε τα τεταρτημόρια, στα οποία βρίσκονται οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου.
- 13.11.19** Ένα πλοίο κινείται Ανατολικά σε μέγιστο κύκλο από μία θέση 52°S , 50°E , προς μία θέση 23°S . Να υπολογίσετε το πλάτος αφίξεως, η τελική πλευση και η διανυθείσα απόσταση.
- 13.11.20** Ένα πλοίο φεύγει από τη Λισαβόνα ($\varphi_A : 38^\circ 38' \text{N}$, $\lambda_A : 9^\circ 14' \text{W}$) ακολουθώντας ορθοδρομική πορεία με αρχική πλευση 35° . Να βρείτε το πλάτος και το μήκος της θέσεως του πλοίου, αν αυτό έχει διανύσει 400 ν.μ..
- 13.11.21.** Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία (οι πλευρές α , β , γ και οι γωνίες A , B , Γ) των σφαιρικών τριγώνων $AB\Gamma$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $A = 120^\circ$ και β) $B = 60^\circ$, $\Gamma = 135^\circ$, $\alpha = 45^\circ$.
- 13.11.22** Αν είναι γνωστό ότι $\text{συν}\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}$, να δείξετε ότι σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση
- $$\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} = \eta\mu^2 \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu^2 \frac{A}{2}.$$
- 13.11.23** Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$), να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:
α) $2 \text{συν}\alpha = \text{συν}(\beta + \gamma) + \text{συν}(\beta - \gamma)$ και β) $\eta\mu^2\alpha = \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma - \eta\mu^2\beta \cdot \eta\mu^2\gamma$.
- 13.11.24** Να δείξετε ότι σε ισοσκελές ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $\beta = \gamma$ ισχύει $\text{συν}\alpha = \text{συν}^2\beta = \text{σφ}^2B$.
Στη συνέχεια, να δείξετε ότι η υποτείνουσα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη των 90° και οι γωνίες του οι διαφορές της ορθής να είναι μικρότερες των 45° .
- 13.11.25** Να επιλύσετε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, $A = 90^\circ$, στις περιπτώσεις:
α) $\alpha = 135^\circ$ και $\beta = 52^\circ$ και β) $\alpha = 94^\circ$ και $\gamma = 72^\circ$.

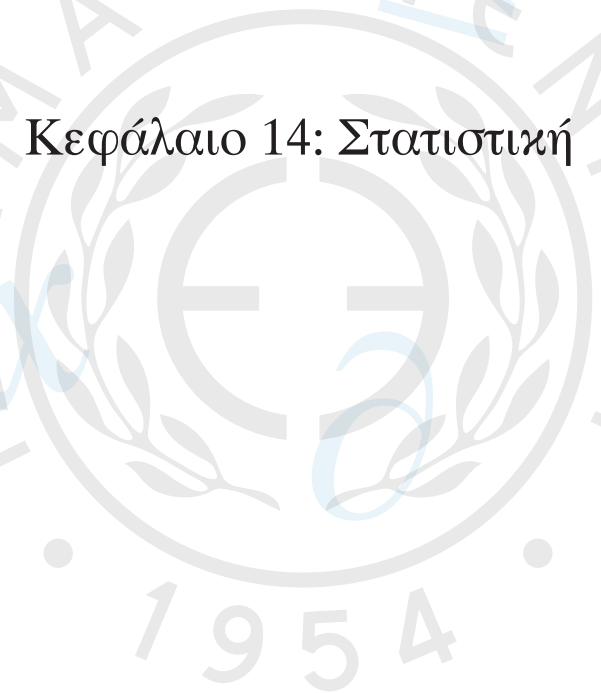
- 13.11.26** Να επιλύσετε το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\alpha = 94^\circ$, $\gamma = 102^\circ$ και $B = 141^\circ$.
- 13.11.27** Να επιλύσετε το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A = 56^\circ$, $B = 48^\circ$ και $\gamma = 112^\circ$.
- 13.11.28** Να επιλύσετε το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, με:
α) $\alpha = 96^\circ$ $\beta = 68^\circ$ και $\gamma = 87^\circ$ και β) $A = 96^\circ$ $B = 84^\circ$ και $\Gamma = 125^\circ$.
- 13.11.29** Να υπολογίσετε τη συντομότερη απόσταση από το λιμάνι της Λισαβόνας ($\varphi_A: 38^\circ 38'N$, $\lambda_A: 9^\circ 14'E$) έως το λιμάνι του Περθ (Perth) ($\varphi_A: 32^\circ 06'S$, $\lambda_A: 115^\circ 35'E$).



ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

(ύλη πλοιάρχων και μηχανικών)

Κεφάλαιο 14: Στατιστική



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Ο όρος «στατιστική» είναι ένας γνωστός όρος σε όλους, αφού αρκετά συχνά τα Μ.Μ.Ε. αναφέρονται σε στατιστικά στοιχεία που αφορούν στις αφίξεις τουριστών στην Ελλάδα, στα τροχαία ατυχήματα, στις γεννήσεις, στο εξωτερικό μας εμπόριο κ.ά.. Η στατιστική με την έννοια της απλής συλλογής πληροφοριών (απογραφής), οι οποίες ήταν απαραίτητες για τη λειτουργία του κράτους (για στρατιωτικούς και φορολογικούς λόγους) ήταν γνωστή από την αρχαιότητα. Για το λόγο αυτό, από πολλούς θεωρείται ότι, ο όρος στατιστική προέρχεται από τη λατινική λέξη *status*, η οποία σημαίνει πολιτεία ή κράτος. Σύμφωνα με ιστορικές μαρτυρίες, η πρώτη συστηματική απογραφή διενεργήθηκε στην Κίνα το 2238 π.Χ. από τον αυτοκράτορα Υαο, ενώ κατά καιρούς πραγματοποιήθηκαν επίσης απογραφές και από τους Αιγύπτιους, τους Έλληνες και τους Ρωμαίους.

Ενώ παλαιότερα η Στατιστική είχε ως αντικείμενο τη συγκέντρωση στοιχείων και την παράθεση τεραστίων πινάκων με δεδομένα καθώς και διαγραμμάτων, σήμερα αποτελεί μια αυτοτελή επιστήμη, της οποίας οι βασικές έννοιες και τεχνικές έχουν εισχωρήσει σε όλες σχεδόν τις επιστήμες. Είναι πλέον δύσκολο να φανταστεί κάποιος, τομέα της σύγχρονης ζωής, στον οποίο να μην υπεισέρχεται η στατιστική είτε με την απλοϊκή μορφή της (περιγραφική παρουσίαση δεδομένων), είτε με τις προχωρημένες αναλυτικές τεχνικές της.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Στατιστικής και στις μεθόδους παρουσιάσεως στατιστικών στοιχείων μέσω γραφημάτων και αριθμητικών περιγραφικών μέτρων. Τέλος, θα δοθεί η έννοια της συσχέτισεως δύο μεταβλητών, καθώς και μία σύντομη εισαγωγή στην ανάλυση παλινδρομίσεως.

- 14.1** Εισαγωγή – Πληθυσμός και δείγμα.
- 14.2** Πίνακες συχνοτήτων – Γραφικές μέθοδοι παρουσιάσεως στατιστικών στοιχείων.
- 14.3** Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.
- 14.4** Μέτρα θέσεως.
- 14.5** Μέτρα διακυμάνσεως.
- 14.6** Γραμμική παλινδρόμηση.
- 14.7** Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.
- 14.8** Ερωτήσεις κατανόησης.
- 14.9** Γενικές ασκήσεις.

14.1 Εισαγωγή – Πληθυσμός και δείγμα.

Σύμφωνα με τη συνήθη έννοια, ο όρος στατιστική σημαίνει την οργανωμένη πληροφορία που αντλείται μέσα από απαριθμήσεις ή μετρήσεις γεγονότων και χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των ατόμων ή φαινομένων που μελετάμε. Ο πλέον γνωστός ορισμός της επιστήμης της Στατιστικής είναι εκείνος που δόθηκε από τον R.A. Fisher (1890-1962), σύμφωνα με τον οποίο:

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών που έχουν ως στόχο:

- α) Το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων.
- β) Τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους.
- γ) Την ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η ανάπτυξη επιστημονικών τεχνικών που αφορούν στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση της διαδικασίας συλλογής δεδομένων είναι αντικείμενο μιας περιοχής της Στατιστικής, γνωστής με την ονομασία **δειγματοληψία** και μιας δεύτερης που ονομάζεται **σχεδιασμός πειραμάτων**. Η οργάνωση των δεδομένων και η παρουσίασή τους με συνοπτικό και αποτελεσματικό τρόπο, ώστε αυτά να γίνουν κατανοητά ακόμη και από τους μη ειδικούς, αποτελεί το αντικείμενο ενός κλάδου της Στατιστικής που ονομάζεται **περιγραφική στατιστική**. Τέλος, η λεγόμενη **επαγωγική στατιστική** ή **στατιστική συμπερασματολογία** αναπτύσσει μεθόδους για την εξαγωγή επιστημονικά τεκμηριωμένων συμπερασμάτων, ώστε ο ενδιαφερόμενος να οδηγηθεί στη συνέχεια στη λήψη αποφάσεων, με μικρά περιθώρια σφάλματος. Οι τεχνικές που αναπτύσσονται στα πλαίσια της επαγωγικής Στατιστικής επιτρέπουν τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου πληθυσμού, με βάση τα στοιχεία που συλλέχθηκαν για τα χαρακτηριστικά αυτά σ' ένα μικρό υποσύνολο των δεδομένων.

Μια θεμελιώδης έννοια της Στατιστικής είναι αυτή της ομάδας ή του συνόλου, για την οποία οι στατιστικοί χρησιμοποιούν τον όρο **στατιστικός πληθυσμός** ή απλά **πληθυσμός**. Ο όρος πληθυσμός θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια για να δηλώσει οποιαδήποτε συλλογή ατόμων (ανθρώπων, ζώων κ.λπ.) ή αντικειμένων, τα χαρακτηριστικά των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε. Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως **μονάδες** ή **άτομα** του πληθυσμού. Οι πληθυσμοί διακρίνονται σε πεπερασμένους και μη πεπερασμένους (ή άπειρους), ανάλογα με το αν το πλήθος των μονάδων που περιλαμβάνουν είναι πεπερασμένο ή όχι.

Για παράδειγμα:

α) Αν, εν όψει των προσεχών εκλογών, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την ηλικία και τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων, ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των ατόμων που μπορούν να ψηφίσουν στις συγκεκριμένες εκλογές. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι οι ψηφοφόροι και ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος.

β) Αν θέλουμε να μελετήσουμε το χρόνο ζωής ενός GPS πλοίου που παράγεται από μια συγκεκριμένη βιομηχανία, ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των GPS που παράγονται από τη βιομηχανία. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι τα GPS και ο πληθυσμός είναι μη πεπερασμένος (θεωρητικά τουλάχιστον, αν υποθέσουμε ότι η βιομηχανία θα συνεχίσει να παράγει το συγκεκριμένο GPS στο μέλλον χωρίς διακοπή).

γ) Αν θέλουμε να μελετήσουμε εργατικό δυναμικό (αριθμός υπαλλήλων) και το μέγεθος των Ελληνικών ναυτιλιακών εταιρειών (έστω ότι αυτές έχουν ταξινομηθεί σε τρεις κατηγορίες: μικρή, μεσαία, μεγάλη), ο πληθυσμός μας είναι το σύνολο όλων των Ελληνικών ναυτιλιακών εταιρειών. Οι μονάδες του πληθυσμού είναι οι ναυτιλιακές εταιρείες και ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος.

Σε καθένα από τα παραπάνω παραδείγματα επιθυμούμε να εξετάσουμε τις μονάδες ενός πληθυσμού ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους, τα οποία ονομάζονται **πληθυσμιακά χαρακτηριστικά**. Είναι προφανές ότι οι τιμές των εξεταζομένων χαρακτηριστικών ποικίλλουν (διαφέρουν, μεταβάλλονται) μεταξύ των μονάδων του πληθυσμού. Για το λόγο αυτό τα πληθυσμιακά χαρακτηριστικά καλούνται **μεταβλητές** και συμβολίζονται συνήθως με κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, \dots$. Οι τιμές που μπορεί να λάβει μια μεταβλητή ονομάζονται (δυνατές) **τιμές της μεταβλητής**. Για τα τρία παραδείγματα που

δόθηκαν παραπάνω, οι μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν είναι:

α) Η προτίμηση X των ψηφοφόρων με τιμές «κόμμα α , κόμμα β , ...» και η ηλικία Y των ψηφοφόρων με τιμές «18, 19, 20, ...».

β) Ο χρόνος ζωής Z του GPS που παράγεται από τη βιομηχανία με τιμές στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) Το δυναμικό W των ναυτιλιακών εταιρειών με τιμές «1, 2,...» και το μέγεθος V με τιμές «μικρή, μεσαία, μεγάλη».

Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με τις τιμές που μπορούν να λάβουν και το είδος της μετρήσεως που επιδέχονται: τις **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** και τις **ποσοτικές**.

Οι τιμές των ποιοτικών μεταβλητών εκφράζονται με λέξεις, γράμματα ή άλλα σύμβολα (αριθμητικά ή μη) και επιτρέπουν απλά την κατάταξη των επί μέρους μονάδων ενός πληθυσμού σε διακεκριμένες μεταξύ τους κατηγορίες. Καθεμιά μονάδα του πληθυσμού ανήκει οπωσδήποτε σε μία και μόνο κατηγορία και η πληροφόρηση που μπορούμε να έχουμε για ένα τέτοιο χαρακτηριστικό είναι η απλή απαρίθμηση των μονάδων-μελών καθεμιάς κατηγορίας. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές X και W που ορίστηκαν παραπάνω είναι ποιοτικές μεταβλητές. Ως άλλα παραδείγματα, μπορούμε να αναφέρουμε την ομάδα αίματος (με τιμές $A, B, AB, 0$), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), την επιβατική κίνηση των πλοίων σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλή, μέτρια ή χαμηλή κ.λπ..

Δύο ιδιαίτερες κατηγορίες ποιοτικών μεταβλητών είναι οι **δίτιμες**, οι οποίες χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι μπορούν να λάβουν μόνο δύο τιμές (π.χ. το φύλο, με τιμές αγόρι, κορίτσι) και οι **διατάξιμες**, οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα στον ερευνητή να διαβαθμίσει (διατάξει) τις κατηγορίες που προκύπτουν από τις τιμές τους σε μια ιεραρχική σειρά (π.χ. το «επίπεδο εκπαίδευσεως», σύμφωνα με το οποίο κατατάσσουμε τις μονάδες του πληθυσμού σε διακριτές κατηγορίες, όπως αυτούς που έχουν τελειώσει πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση, είναι διατάξιμη μεταβλητή, αφού μας δίνεται επί πλέον η δυνατότητα να διατάξουμε τις κατηγορίες αυτές σε μία σειρά από το χαμηλότερο προς το ανώτερο εκπαιδευτικό επίπεδο ή αντίστροφα).

Οι **ποσοτικές** μεταβλητές, αντίθετα με τις ποιοτικές, μπορούν να λάβουν μόνο αριθμητικές τιμές και για τις τιμές αυτές έχουν νόημα οι συνήθεις αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός κ.λπ.). Στην περίπτωση που μία μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο «μεμονωμένες» αριθμητικές τιμές (π.χ. «1, 2, 3, 4» ή «1, 10, 100» ή «...», $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$) ονομάζεται **διακριτή**. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές Y και V που ορίστηκαν στις περιπτώσεις (α) και (γ) παραπάνω είναι διακριτές μεταβλητές. Ως άλλα παραδείγματα, μπορούμε να αναφέρουμε τον αριθμό παιδιών μιας οικογένειας, το αποτέλεσμα της ρίψεως ενός ζαριού (με τιμές 1, 2,..., 6), τον αριθμό μελών ενός νοικοκυριού, το μηνιαίο αριθμό θανατηφόρων ατυχημάτων στις εθνικές οδούς κ.λπ..

Η δεύτερη κατηγορία ποσοτικών μεταβλητών είναι οι λεγόμενες **συνεχείς** μεταβλητές, οι τιμές των οποίων δύνανται, έστω θεωρητικά, να καλύψουν ένα ολόκληρο διάστημα τιμών, χωρίς να υπάρχει κανένα κενό μεταξύ των δυνατών τιμών τους. Τέτοια περίπτωση είναι η μεταβλητή Z του παραδείγματος (β), η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιαλέξεως, ο χρόνος που χρειάζεται ένα πλοίο για να πραγματοποιήσει ένα προγραμματισμένο δρομολόγιο κ.λπ.. Για τη μέτρηση των συνεχών μεταβλητών υπάρχει συνήθως κάποια καθιερωμένη μονάδα μετρήσεως, π.χ. δευτερόλεπτο (sec), ώρα (hour), μέτρο (m), κιλό (kg) κ.ά..

Στην πράξη ο διαχωρισμός μεταξύ διακριτών και συνεχών μεταβλητών δεν είναι πάντα σαφής, κυρίως λόγω του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι μονάδες μετρήσεως και της πιθανής στρωγυλοποίησεως που μπορεί να γίνεται. Έτσι, μία διακριτή μεταβλητή μπορεί να έχει προκύψει από την παρατήρηση μιας συνεχούς μεταβλητής, της οποίας η τιμή δεν καταγράφεται με απόλυτη ακρίβεια. Για παράδειγμα η ηλικία ενός ανθρώπου συνήθως δίνεται σε χρόνια, οπότε αποτελεί διακριτή μεταβλητή, ενώ η πραγματική της τιμή, μετρούμενη με απόλυτη ακρίβεια, με σημείο ενάρξεως τη στιγμή γεννήσεως του ανθρώπου, θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή.

Ένας τρόπος προκειμένου να αντλήσουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό

που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή**.

Σήμερα, σε κάθε χώρα υπάρχουν εθνικές Στατιστικές υπηρεσίες, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τη συλλογή και δημοσίευση δεδομένων που αφορούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό της χώρας και στους περισσότερους τομείς της Εθνικής Οικονομίας. Η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος (ΕΣΥΕ) πραγματοποιεί κάθε 10 χρόνια απογραφή του πληθυσμού, η οποία αποτελεί κύρια πηγή δεδομένων δημογραφικού, οικονομικού, εμπορικού και βιομηχανικού χαρακτήρα. Στην ετήσια έκδοση της «Στατιστικής Επετηρίδας της Ελλάδος», δημοσιεύεται πλήθος στοιχείων που αφορούν σε δημογραφικά στοιχεία του Ελληνικού πληθυσμού, στοιχεία της τουριστικής κινήσεως, νομισματικά και τραπεζοοικονομικά μεγέθη (προερχόμενα από την Τράπεζα της Ελλάδος), παραγωγή και κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας (προερχόμενα από τη ΔΕΗ) κ.λπ.. Υπάρχουν επίσης και διάφοροι άλλοι οργανισμοί, κέντρα ερευνών και υπηρεσίες υπουργείων, όπως το Κέντρο Προγραμματισμού και Οικονομικών Ερευνών (ΚΕΠΕ) ή ο Οργανισμός Απασχολήσεως Εργατικού Δυναμικού (ΟΑΕΔ), αλλά και ιδιωτικές εταιρείες που συλλέγουν και παρέχουν στατιστικές πληροφορίες για διάφορους τομείς του δημοσίου και ιδιωτικού φορέα. Τέλος, από τη στατιστική υπηρεσία της Ευρωπαϊκής Κοινότητας (Eurostat) και του Οργανισμού Ηνωμένων Εθνών δημοσιεύονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα συγκριτικά διεθνή στοιχεία.

Αρκετά συχνά οι (ανθρώπινοι ή μη ανθρώπινοι) πληθυσμοί που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε, είναι πρακτικά μη άπειροι ή τόσο μεγάλοι σε μέγεθος, που είναι πρακτικά δύσκολο ή και σχεδόν αδύνατο να λάβουμε τις επιθυμητές πληροφορίες για καθ' ένα από τα μέλη τους. Παράλληλα, ο χρόνος και τα έξοδα που χρειάζονται για τη διεξαγωγή μιας απογραφής είναι υπερβολικός, ιδίως όταν ο πληθυσμός που εξετάζεται είναι αρκετά μεγάλος. Για παράδειγμα, μια εταιρεία δημοσκοπήσεων που έχει αναλάβει να προβλέψει το αποτέλεσμα των επομένων βουλευτικών εκλογών, πριν αυτές διενεργηθούν, είναι δύσκολο να εξετάσει όλους τους ψηφοφόρους, για να προσδιορίσει το τι θα ψηφίσουν. Ένας κατασκευαστής ηλεκτρικών συσκευών είναι αδύνατο να δοκιμάζει όλες τις παραγόμενες συσκευές, για να ελέγχει την ορθή λειτουργία τους ή να τις παρακολουθεί μέχρι τη στιγμή που θα εμφανίσουν βλάβη για να καταγράψει το χρόνο ζωής τους. Ομοίως, ένας γιατρός, για να υπολογίσει την αποτελεσματικότητα ενός νέου φαρμάκου στην καταπολέμηση της υπέρτασης είναι αδύνατο να περιμένει να δοκιμαστεί το φάρμακο σε όλα τα άτομα που πάσχουν από τη συγκεκριμένη ασθένεια.

Όταν λοιπόν η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή ασύμφορη, καταφεύγουμε στην πράξη στη διαδικασία της **δειγματοληψίας**, δηλαδή συλλέγουμε πληροφορίες από μια σχετικά μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται **δείγμα** και καταγράφουμε τις τιμές του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει μόνο για τα άτομα που επιλέχθηκαν στο δείγμα. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας κατάλληλες στατιστικές τεχνικές γενικεύουμε τα συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Είναι φανερό ότι, για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα που θα προκύψουν από τη μελέτη του δείγματος, δηλαδή να ισχύουν πράγματι με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό, η επιλογή του δείγματος θα πρέπει να πραγματοποιηθεί με ορθό τρόπο ή όπως λέμε στη στατιστική ορολογία το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού. Πρακτικά, ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Όπως ήδη αναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας παραγράφου, μετά τον ορισμό της έννοιας της Στατιστικής, οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πληθυσμούς είναι αντικείμενο μιας ιδιαίτερης περιοχής της Στατιστικής που αναφέρεται ως Μέθοδοι Δειγματοληπτικών Ερευνών ή απλά ως Δειγματοληψία.

Ασκήσεις.

14.1.1. Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές;

- α) Αριθμός ναυτικών ατυχημάτων σε ένα έτος.

- β) Τόπος καταγωγής των πλοιάρχων που εργάζονται σε μία ναυτιλιακή εταιρεία.
- γ) Αριθμός επιβατών ενός πλοίου.
- δ) Μεικτό βάρος ενός πλοίου.
- ε) Οικογενειακή κατάσταση του πληρώματος ενός πλοίου.
- στ) Είδος απασχολήσεως του πληρώματος ενός πλοίου.
- ζ) Τιμή αμόλυβδης βενζίνης σε ένα πρατήριο βενζίνης.
- η) Αποτελέσματα εξετάσεων στο μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.
- θ) Μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στα μαθήματα των πανελληνίων εξετάσεων.
- ι) Βάρος ενός ταχυδρομικού δέματος.
- ια) Θερμοκρασία ψύξεως στο χώρο του ψυγείου ενός εμπορικού πλοίου.

14.1.2. Για όσες από τις μεταβλητές της ασκήσεως 14.1.1 διαπιστώθηκε ότι είναι ποσοτικές, να βρείτε ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς.

14.1.3. Σε ένα πλοίο ταξιδεύουν 200 επιβάτες. Αν θέλετε να επιλέξετε με τυχαίο τρόπο 20 άτομα για να τους διανεμίετε ένα ερωτηματολόγιο, με ποιους τρόπους θα κάνετε την επιλογή του δείγματος;

14.1.4. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αναφέρετε δυο μεταβλητές που θα μπορούσαν να μας ενδιαφέρουν. Στη συνέχεια, να καθορίσετε το είδος τους (ποιοτικές ή ποσοτικές) και να αναφέρετε μερικές δυνατές τιμές τους.

- α) Λαμβάνομε ένα δείγμα επιβατών ενός πλοίου, συνολικής χωρητικότητας 300 επιβατών.
- β) Λαμβάνομε ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας, στην οποία εργάζονται 30 άτομα.
- γ) Εξετάζομε ένα δείγμα προϊόντων από μια βιομηχανική γραμμή παραγωγής.
- δ) Λαμβάνομε τα στατιστικά στοιχεία ενός αγώνα καλαθοσφαίρισης.

14.1.5. Σε μία μονάδα ιχθυοκαλλιέργειας εκτρέφεται ένα συγκεκριμένο είδος ψαριού, το οποίο στη συνέχεια πωλείται σε εστιατόρια. Η διεύθυνση της μονάδας, προκειμένου να αποφασίσει κατά πόσο θα χρησιμοποιήσει ή όχι μία νέα τροφή θέλει να εκτιμήσει το βάρος που αποκτούν τα ψάρια μετά από τέσσερις μήνες εκτροφής τους μ' αυτήν. Για το σκοπό αυτό, μετά τη γέννηση μιας νέας γενιάς ψαριών, ξεκινάει τη χρήση της νέας τροφής και ύστερα από 4 μήνες αλιεύει με τυχαίο τρόπο από την ιχθυοκαλλιέργεια 200 ψάρια.

- α) Να αναγνωρίσετε τον υπό μελέτη πληθυσμό, το είδος του, καθώς και το δείγμα.
- β) Να βρείτε τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.
- γ) Να εξηγήσετε ποια είναι τα στάδια της στατιστικής διαδικασίας που θα πρέπει να ακολουθηθούν.

14.1.6. Με την αγορά μίας καινούργιας ηλεκτρικής συσκευής λαμβάνεται ένα σύντομο στατιστικό δελτίο, το οποίο παρακαλείστε να συμπληρώσετε και να το ταχυδρομήσετε στον εμπορικό αντιπρόσωπο. Το φυλλάδιο περιλαμβάνει τις επόμενες ερωτήσεις:

- α) Πόσες άλλες συσκευές ίδιου είδους έχετε στην οικία σας;
 - β) Το φύλο σας.
 - γ) Την ημερομηνία γεννήσεώς σας.
 - δ) Τον τόπο γεννήσεώς σας.
 - ε) Από πόσα μέλη αποτελείται η οικογένειά σας.
 - στ) Ποιοι είναι οι τρεις σημαντικότεροι λόγοι που σας οδήγησαν να αγοράσετε το συγκεκριμένο προϊόν;
 - ζ) Από ποιο κατάστημα αγοράσατε τη συσκευή;
- Να αναγνωρίσετε τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο και να τις ταξινομήσετε, δίνοντας παράλληλα και μερικές ή όλες (αν είναι δυνατόν) τις τιμές που μπορούν να λάβουν.

14.2 Πίνακες συχνοτήτων – Γραφικές μέθοδοι παρουσιάσεως στατιστικών στοιχείων.

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων (συνήθως από τις εθνικές στατιστικές υπηρεσίες, αν πρόκειται για απογραφικά δεδομένα ή εταιρείες δημοσκοπήσεων και ερευνητικά κέντρα αν πρόκειται για δεδομένα δειγματοληψίας), η πρώτη ενέργεια που γίνεται συνήθως, είναι η κατασκευή συνοπτικών πινάκων ή γραφικών παραστάσεων, ώστε να είναι εύκολη η κατανόηση των δεδομένων τους και μια προκαταρκτική ανάλυση αυτών. Στους πίνακες αυτούς γίνεται κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση των στοιχείων και να απεικονίζεται με κάποιο τρόπο η δομή του πληθυσμού που μελετάμε.

Για παράδειγμα, ο πίνακας 14.2.1 έχει βασισθεί στα δελτία συμβάντων της Τροχαίας Αττικής του έτους 1970 και δίνει πληροφορίες για τον αριθμό τροχαίων ατυχημάτων κατά βαθμό σοβαρότητας (ελαφρά, σοβαρά, θανατηφόρα).

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην εισαγωγή των εννοιών που θα αναλύσουμε στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι, μετά τη διανομή ενός ερωτηματολογίου σε 20 τυχαία επιλεγμένα ενήλικα άτομα που ταξίδευαν με ένα επιβατικό πλοίο συγκεντρώθηκαν τα δεδομένα του πίνακα 14.2.2.

Είναι φανερό ότι στον πίνακα 14.2.2 έχουν καταχωρηθεί οι τιμές τριών χαρακτηριστικών (επάγγελμα, μηνιαίο εισόδημα και μηνιαία χρήση δρομολογίου) για $n = 20$ άτομα. Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι συγκεντρώσαμε τις τιμές για τρεις μεταβλητές, με βάση ένα τυχαίο επιλεγμένο δείγμα μεγέθους 20. Αν συμβολίσουμε με X , μια από τις μεταβλητές αυτές, θα σημειώνουμε με $x_1, x_2, \dots, x_n$ τις αντίστοιχες τιμές για τα n άτομα και με $t_1, t_2, \dots, t_k$ τις διαφορετικές μεταξύ τους τιμές x_i . Έτσι, αν η μεταβλητή X παριστάνει το επάγγελμα των ατόμων του δείγματος, θα έχουμε:

$x_1 =$ Δημόσιος υπάλληλος, $x_2 =$ Ιδιοκτήτης εταιρείας,

$x_3 =$ Ανειδίκευτος εργάτης, $x_4 =$ Ιδιοκτήτης εταιρείας,

$x_5 =$ Δημόσιος υπάλληλος, ..., $x_{20} =$ Δημόσιος υπάλληλος,

ενώ το πλήθος των διαφορετικών τιμών είναι μόλις $k = 5$, δηλαδή

$t_1 =$ Δημόσιος υπάλληλος, $t_2 =$ Ιδιοκτήτης εταιρείας,

$t_3 =$ Ανειδίκευτος εργάτης, $t_4 =$ Τεχνίτης,

$t_5 =$ Ιδιωτικός υπάλληλος.

Αντίστοιχα, αν το X παριστάνει τη μηνιαία χρήση του δρομολογίου (πόσες φορές χρησιμοποιεί ο συγκεκριμένος επιβάτης το συγκεκριμένο δρομολόγιο το μήνα) οι τιμές των $x_i, i = 1, 2, \dots, 20$ είναι 1, 2, 1, 10, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 4, 10, 1, 6, 2, 6, 6, ενώ $k = 6$ και

$$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 6, t_6 = 10.$$

Ας υποθέσουμε ότι $t_1, t_2, \dots, t_k$ είναι οι διαφορετικές τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n . Σε κάθε τιμή t_i αντιστοιχίζεται ένας φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή t_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **απόλυτη συχνότητα** ή απλά **συχνότητα** της τιμής t_i . Είναι προφανές ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, δηλαδή ισχύει:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n. \quad (14.2.1)$$

Ο υπολογισμός των συχνοτήτων γίνεται, διατρέχοντας με τη σειρά τα συγκεντρωθέντα δεδομένα και καταγράφοντας κάθε παρατήρηση με ένα σύμβολο (π.χ. μια γραμμή “|”). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **διαλογή των παρατηρήσεων** και για λόγους εύκολης απαριθμήσεως στη συνέχεια συνηθίζουμε να οργανώνουμε τα σύμβολα ανά πεντάδες, όπως φαίνεται στους πίνακες 14.2.3 και 14.2.4.

Πίνακας 14.2.1

Ατυχήματα	Αριθμός
Θανατηφόρα	269
Βαρέα	1.278
Ελαφρά	11.360
Σύνολο	12.907

Πίνακας 14.2.2
Στοιχεία που αφορούν 20 ενήλικες επιβάτες.

<i>Άτομο</i>	<i>Επάγγελμα</i>	<i>Μηνιαίο Εισόδημα (σε €)</i>	<i>Μηνιαία χρήση δρομολογίου</i>
1	Δημόσιος υπάλληλος	2000	1
2	Ιδιοκτήτης εταιρείας	5000	2
3	Ανειδίκευτος εργάτης	800	1
4	Ιδιοκτήτης εταιρείας	4000	10
5	Δημόσιος υπάλληλος	1800	1
6	Τεχνίτης	2450	2
7	Ιδιωτικός υπάλληλος	2500	3
8	Τεχνίτης	950	2
9	Δημόσιος υπάλληλος	2100	3
10	Ιδιωτικός υπάλληλος	3500	2
11	Τεχνίτης	1350	2
12	Δημόσιος υπάλληλος	1500	2
13	Ιδιωτικός υπάλληλος	3100	4
14	Ιδιωτικός υπάλληλος	2800	10
15	Δημόσιος υπάλληλος	1700	1
16	Ιδιωτικός υπάλληλος	1600	6
17	Δημόσιος υπάλληλος	1950	2
18	Δημόσιος υπάλληλος	2050	6
19	Ιδιωτικός υπάλληλος	3050	6
20	Δημόσιος υπάλληλος	2150	2

Πίνακας 14.2.3
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή X: «Επάγγελμα».

t_i	<i>Διαλογή</i>	<i>Συχνότητα</i>	<i>Σχετική συχνότητα f_i</i>	<i>Σχετική συχνότητα f_i %</i>
Δημόσιος υπάλληλος		8	0,40	40
Ιδιοκτήτης εταιρείας		2	0,10	10
Ανειδίκευτος εργάτης		1	0,05	5
Τεχνίτης		3	0,15	15
Ιδιωτικός υπάλληλος		6	0,30	30
Σύνολο		20	1,00	100

Πίνακας 14.2.4
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή X: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου».

t_i	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
1		4	0,20	20
2		8	0,40	40
3		2	0,10	10
4		1	0,05	10
6		3	0,15	15
10		2	0,10	10
Σύνολο		20	1,00	100

Η τέταρτη στήλη των πινάκων 14.2.3 και 14.2.4 προκύπτει αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, οπότε λαμβάνουμε τη λεγόμενη **σχετική συχνότητα** f_i της τιμής t_i , δηλαδή έχουμε:

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa. \quad (14.2.2)$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i \%$ (βλ. τελευταίες στήλες των πινάκων 14.2.3 και 14.2.4). Είναι προφανές ότι για τις σχετικές συχνότητες ισχύουν οι σχέσεις:

α) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$ αφού $0 \leq \nu_i \leq \nu$.

β) $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$.

Η πρώτη προκύπτει άμεσα από την ανισότητα $0 \leq \nu_i \leq \nu$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$, ενώ για τη δεύτερη έχουμε:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \dots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

Ένας πίνακας στον οποίο είναι συγκεντρωμένες οι ποσότητες t_i , ν_i , f_i (όπως οι πίνακες 14.2.3 και 14.2.4) ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**. Το σύνολο των ζευγών (t_i, ν_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (t_i, f_i) , την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων** του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για ποσοτικές μεταβλητές, εκτός από τις συχνότητες ν_i και f_i χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες **αθροιστικές συχνότητες** N_i και οι **αθροιστικές σχετικές συχνότητες** F_i , οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό (απλό ή εκφρασμένο επί τοις εκατό) αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής t_i .

Αν οι διαφορετικές τιμές $t_1, t_2, \dots, t_\kappa$, $\kappa \leq \nu$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X τοποθετηθούν στον πίνακα συχνοτήτων σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής t_i θα ισούται με $N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i$. Ομοίως, για την αθροιστική σχετική συχνότητα θα έχουμε $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$, για $i = 1, 2, \dots, \kappa$. Από τις δύο τελευταίες εκφράσεις είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\nu_1 = N_1, \quad \nu_2 = N_2 - N_1, \dots, \nu_\kappa = N_\kappa - N_{\kappa-1}$$

και

$$f_1 = F_1, \quad f_2 = F_2 - F_1, \dots, f_\kappa = F_\kappa - F_{\kappa-1},$$

μέσω των οποίων μπορούμε να υπολογίζουμε τις συχνότητες (απλές ή σχετικές) όταν γνωρίζουμε τις αθροιστικές συχνότητες.

Στον πίνακα 14.2.5 δίνονται οι αθροιστικές συχνότητες της μεταβλητής «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» για τα δεδομένα του πίνακα 14.2.2.

Πίνακας 14.2.5
Πίνακας συχνοτήτων για τη μεταβλητή X: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου».

t_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
1	5	0,25	5	0,25
2	8	0,40	13	0,65
3	2	0,10	15	0,75
4	1	0,05	16	0,80
6	3	0,15	19	0,95
10	1	0,05	20	1,00
Σύνολο	20	1,00		

Το είδος των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται κάθε φορά (απόλυτες ή σχετικές) εξαρτάται από τη φύση και το σκοπό της μελέτης που πραγματοποιούμε. Οι σχετικές συχνότητες είναι απαραίτητες για συγκρίσεις μεταξύ πληθυσμών (ή δειγμάτων) που διαφέρουν πολύ σε μέγεθος, αλλά και για την καλύτερη κατανόηση της συνθέσεως ενός πληθυσμού (ή δείγματος), αφού μας πληροφορούν για τη σχετική «βαρύτητα» που έχει η κάθε τιμή του χαρακτηριστικού συγκριτικά με τις υπόλοιπες. Από την άλλη πλευρά, η χρήση των απόλυτων συχνοτήτων κρίνεται απαραίτητη στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να λάβουμε μία σαφή εικόνα των πραγματικών μεγεθών ενός χαρακτηριστικού. Συνεπώς, οι απόλυτες συχνότητες ενδιαφέρουν κατά κύριο λόγο σε κοινωνικοοικονομικές μελέτες που στοχεύουν στον προγραμματισμό για τη λήψη μέτρων σε εθνικό ή ιδιωτικό επίπεδο. Για παράδειγμα, για το σχεδιασμό της επεκτάσεως του δικτύου υδρεύσεως, ηλεκτρικού ρεύματος ή τηλεφωνικών γραμμών, δεν αρκεί μόνο η διαθεσιμότητα του ποσοστού των νοικοκυριών που στερούνται τέτοιων παροχών, αλλά και η γνώση του απόλυτου αριθμού τους.

Πίνακας 14.2.6
Χρήση δρομολογίου.

<i>Valid</i>	<i>Frequency</i>	<i>Percent</i>	<i>Cumulative percent</i>
1	4	20,0	20,0
2	8	40,0	60,0
3	2	10,0	70,0
4	1	5,0	75,0
6	3	15,0	90,0
10	2	10,0	100,0
Total	20	100,0	

Ένας ταχύς τρόπος δημιουργίας πινάκων συχνοτήτων είναι με χρήση ειδικών προγραμμάτων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, τα οποία είναι γνωστά με την ονομασία **Στατιστικά Προγράμματα** ή **Στατιστικά Πακέτα**. Ο πίνακας 14.2.6 έχει ληφθεί από ένα τέτοιο πρόγραμμα και μας δίνει την κατανομή συχνοτήτων για τη μεταβλητή X : «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14.2.1.

Στον πίνακα συχνοτήτων 14.2.7 δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και ορισμένες συχνότητες.

Πίνακας 14.2.7

t_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
1				
2	6	0,15	16	
3				0,45
4				
5	18			
Σύνολο				

- α) Να συμπληρώσετε όλες οι τιμές του πίνακα που λείπουν.
 β) Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι:
 – το πολύ 3,
 – τουλάχιστον 4,
 – μεταξύ του 2 και του 4 (συμπεριλαμβανομένων των τιμών αυτών).

Λύση.

α) Με βάση τους τύπους που γνωρίζουμε για τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες (απόλυτες και σχετικές) έχουμε διαδοχικά:

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Rightarrow 0,15 = \frac{6}{v} \Rightarrow v = \frac{6}{0,15} = 40, \quad N_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow 16 = v_1 + 6 \Rightarrow v_1 = 10,$$

$$N_1 = v_1 = 10, \quad f_1 = F_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{40} = 0,25,$$

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = F_1 + f_2 + f_3 \Rightarrow 0,45 = 0,25 + 0,15 + f_3 \Rightarrow f_3 = 0,05,$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0,05 = \frac{v_3}{40} \Rightarrow v_3 = 2,$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \Rightarrow 40 = 10 + 6 + 2 + v_4 + 18 \Rightarrow v_4 = 4.$$

Αφού έχει συμπληρωθεί η στήλη με τις συχνότητες του πίνακα είναι πλέον εύκολο να συμπληρωθούν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία που λείπουν και έτσι προκύπτει ο πίνακας 14.2.8.

β) Με βάση τον πίνακα τα ζητούμενα ποσοστά είναι ίσα με:

$$f_1 + f_2 + f_3 = F_3 = 45\%.$$

$$f_4 + f_5 = 0,10 + 0,45 = 55\% \text{ ή εναλλακτικά } 1 - F_3 = 1 - 0,45 = 55\%.$$

$$f_2 + f_3 + f_4 = 0,15 + 0,05 + 0,10 = 0,30 = 30\%.$$

Πίνακας 14.2.8

t_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
1	10	0,25	10	0,25
2	6	0,15	16	0,40
3	2	0,05	18	0,45
4	4	0,10	22	0,55
5	18	0,45	40	1,00
Σύνολο	40	1,00		

Ένας αποτελεσματικός τρόπος παρουσιάσεως στατιστικών δεδομένων είναι με μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Σε σχέση με τους πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν μία πιο εύληπτη εικόνα του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει και είναι πολύ πιο ελκυστικές, χωρίς πρακτικά να προσφέρουν λιγότερη πληροφορία από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνότητων. Επιπρόσθετα, με τα διαγράμματα διευκολύνεται σημαντικά η σύγκριση μεταξύ διάφορων πληθυσμιακών ομάδων ή δειγμάτων.

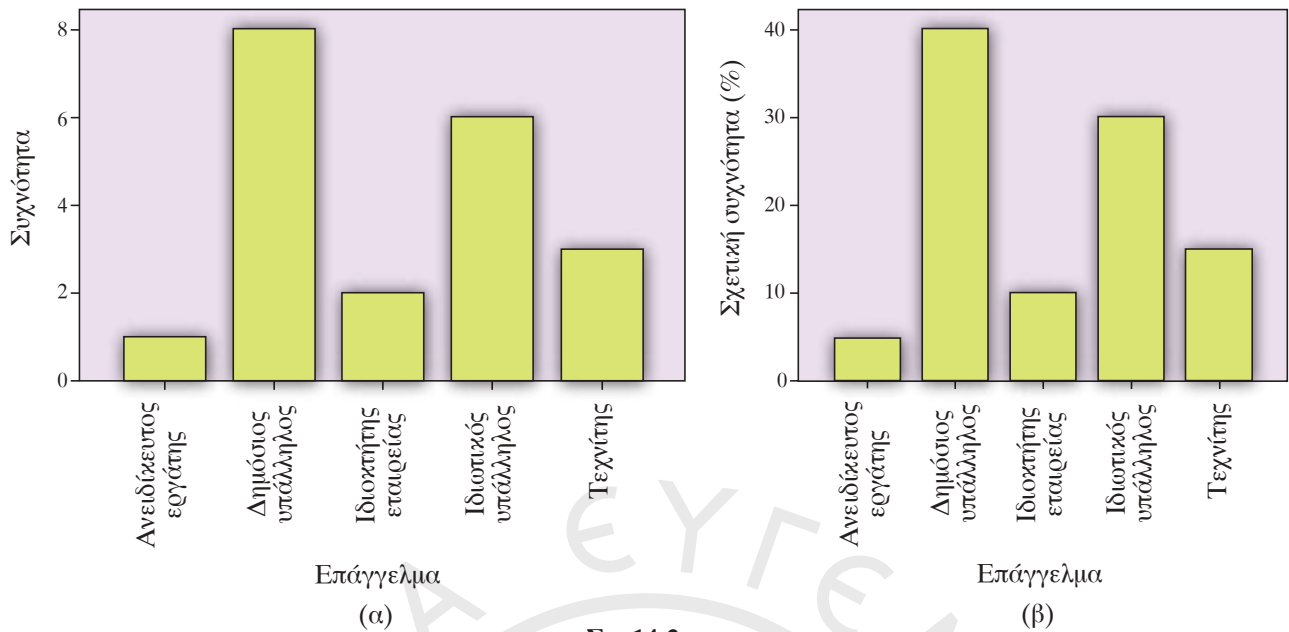
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσιάσεως, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που διαθέτουμε. Για τη γραφική απεικόνιση των κατηγορικών δεδομένων χρησιμοποιούνται συνήθως τα ραβδόγραμμα και τα κυκλικά διαγράμματα. Στα διαγράμματα αυτά οι απεικονίσεις των διάφορων μεγεθών γίνεται με γεωμετρικά ή άλλα σχήματα, με εφαρμογή της αρχής της αναλογίας ως προς τις παρατηρούμενες συχνότητες, απόλυτες ή σχετικές. Στην περίπτωση που έχουμε ποσοτικά χαρακτηριστικά, αντί του ραβδόγραμματος χρησιμοποιούμε το λεγόμενο **διάγραμμα συχνότητων**, ενώ για δεδομένα που παρουσιάζει ενδιαφέρον η παρακολούθησή τους κατά την πάροδο του χρόνου, ιδιαίτερα χρήσιμα είναι τα χρονολογικά διαγράμματα ή διαγράμματα χρονοσειράς.

Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή στον κατακόρυφο άξονα. Έτσι, τα ραβδόγραμμα αποτελούνται από τόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όσες είναι οι διαφορετικές τιμές της ποιοτικής μεταβλητής που εξετάζουμε, έχουν συνήθως βάσεις ίσου εύρους, ενώ τα ύψη τους είναι ανάλογα των συχνότητων των αντιστοιχών τιμών, στις οποίες αναφέρονται.

Ανάλογα με το αν στο ραβδόγραμμα απεικονίζονται απόλυτες ή σχετικές συχνότητες έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνότητων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνότητων**. Στο σχήμα 14.2α δίνεται το ραβδόγραμμα συχνότητων και σχετικών συχνότητων της μεταβλητής X : «Επάγγελμα» για τα δεδομένα του πίνακα 14.2.1.

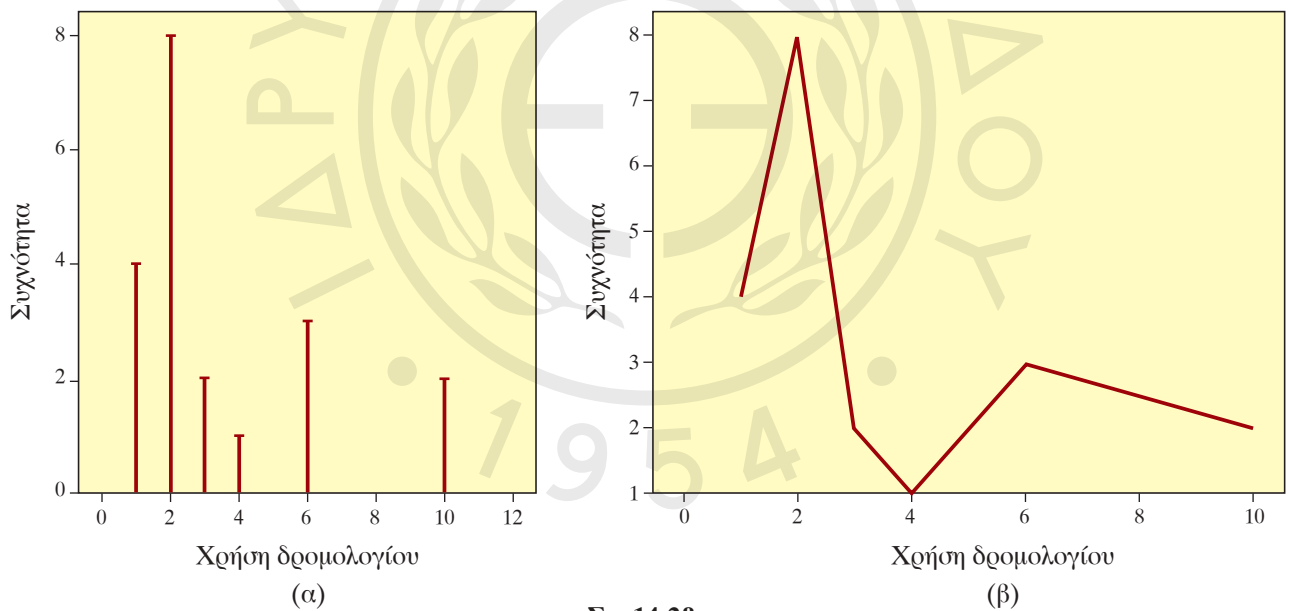
Όπως ήδη αναφέρθηκε, όταν έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή, αντί του ραβδόγραμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνότητων** (σχ. 14.2β). Σ' αυτό, αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια, υψώνουμε στη θέση του άξονα που αντιστοιχούν οι διαφορετικές τιμές t_i μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνότητων v_i στον κάθετο άξονα να βάλομε τις σχετικές συχνότητες f_i , οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνότητων**. Ενώνοντας τα σημεία (t_i, v_i) ή (t_i, f_i) λαμβάνουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνότητων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνότητων**, αντίστοιχα.

Το **κυκλικό διάγραμμα** (piechart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων. Για την κατασκευή ενός κυκλικού διαγράμματος αρχικά δημιουργούμε έναν κυκλικό δίσκο και στη συνέχεια τον χωρίζουμε σε τόσους κυκλικούς τομείς, όσες και οι δια-



Σχ. 14.2α.

Ραβδόγραμμα συχνοτήτων (α) και σχετικών συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή X: «Επάγγελμα» των δεδομένων του πίνακα 14.2.2.



Σχ. 14.2β.

Διάγραμμα συχνοτήτων (α) και πολύγωνο συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή X: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 14.2.2.

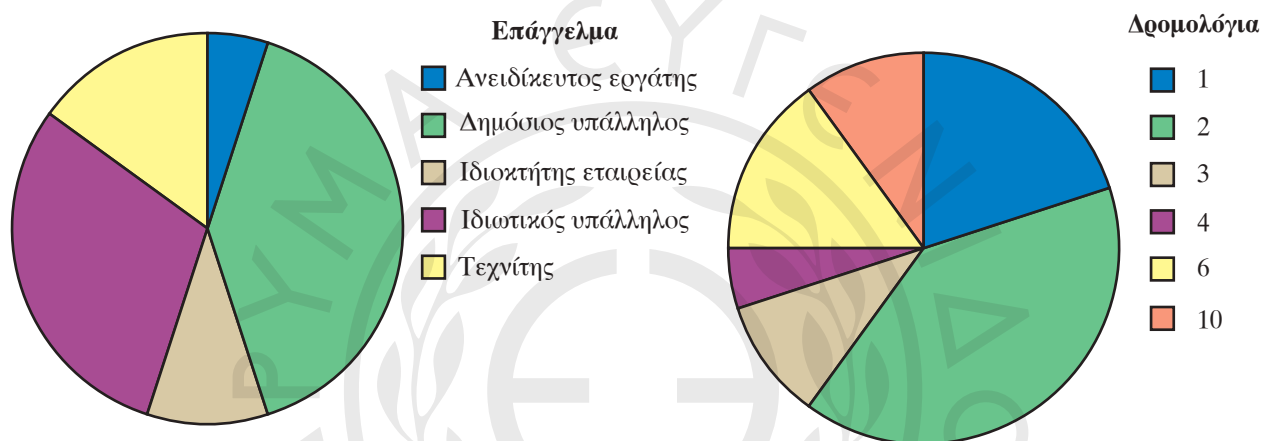
φορετικές τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει, έτσι ώστε τα εμβαδά (ή ισοδύναμα, τα τόξα τους) να είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i . Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με θ_i το τόξο του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή t_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i , τότε θα έχουμε:

$$\theta_i = \nu_i \frac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ f_i \quad \text{για } i=1,2,\dots,\kappa.$$

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες, αφού σε αντίθετη περίπτωση το σχήμα που προκύπτει περιέχει πάρα πολλούς μικρούς κυκλικούς τομείς, με αποτέλεσμα να χάνει την περιγραφική του αξία.

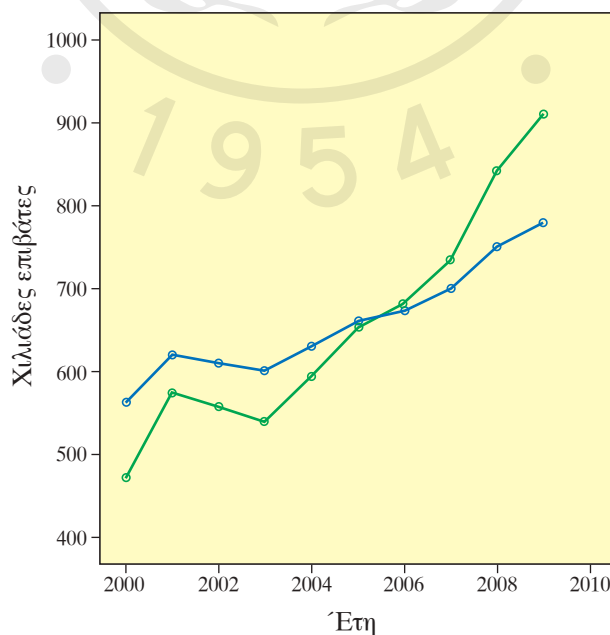
Στο σχήμα 14.2γ δίνεται το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «Επάγγελμα» και «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 14.2.2.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή παρουσιάζοντας τα χρονολογικά διαγράμματα ή διαγράμματα χρονοσειράς, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης οικονομικών, πληθυσμιακών ή άλλων χαρακτηριστικών που μεταβάλλονται με το χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα ενός διαγράμματος χρονοσειράς τοποθετείται συνήθως ο χρόνος, ενώ στον κάθετο άξονα η εξεταζόμενη μεταβλητή. Στο σχήμα 14.2δ δίνεται η ετήσια κίνηση (σε χιλιάδες επιβάτες) δύο Ελληνικών λιμανιών κατά τα τελευταία χρόνια. Σύμφωνα με τα διαγράμματα αυτά, μετά το 2003 υπάρχει συνεχής αύξηση της επιβατικής κινήσεως και στα δύο λιμάνια, ενώ από το έτος 2005 στο 2006 υπήρξε ανατροπή της σειράς των δύο λιμανιών ως προς την επιβατική τους κίνηση.



Σχ. 14.2γ.

Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «Επάγγελμα» και «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 14.2.2.

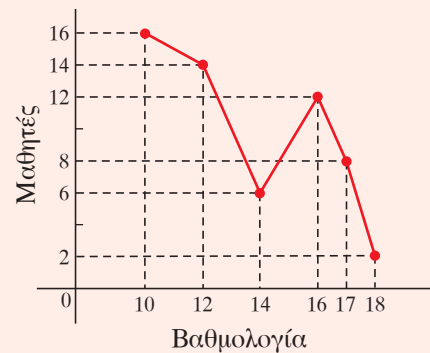


Σχ. 14.2δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14.2.2.

Στο σχήμα 14.2ε δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων που προέκυψε από τη βαθμολογία σ' ένα τεστ σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού.

- α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στο πολύγωνο συχνοτήτων το οποίο δόθηκε.
β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

**Σχ. 14.2ε.****Λύση.**

α) Διαβάζοντας από το πολύγωνο συχνοτήτων που δόθηκε, τις συχνοτήτες ν_i , $i = 1, 2, \dots, \kappa$ ($\kappa = 6$) και τις τιμές της μεταβλητής που μελετάμε (βαθμολογία των σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού στο τεστ) συμπληρώνουμε άμεσα τις πρώτες δύο στήλες του πίνακα 14.2.9.

Πίνακας 14.2.9

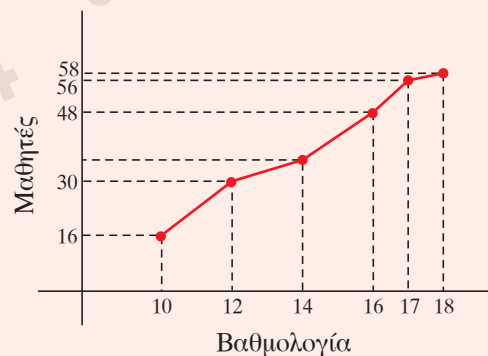
t_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
10	16	0,275862	16	0,275862
12	14	0,241379	30	0,517241
14	6	0,103448	36	0,62069
16	12	0,206897	48	0,827586
17	8	0,137931	56	0,965517
18	2	0,034483	58	1
Σύνολο	58	1		

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τις υπόλοιπες στήλες με χρήση των τύπων

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i, \quad F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

για $i=1, 2, \dots, 6$.

β) Από τον προηγούμενο πίνακα, προκύπτει εύκολα το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων που παρουσιάζεται στο σχήμα 14.2στ.

**Σχ. 14.2στ.****Ασκήσεις.**

14.2.1. Ο πίνακας συχνοτήτων 14.2.10 παρουσιάζει την κατανομή των ωρών λειτουργίας ενός μηχανήματος, σε χιλιάδες ώρες, πριν εμφανίσει βλάβη για πρώτη φορά. Τα δεδομένα προέκυψαν από

την παρακολούθηση ενός δείγματος 120 μηχανημάτων που λήφθηκαν από μια συγκεκριμένη γραμμή παραγωγής.

- α) Να συμπληρώσετε τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες για κάθε τιμή του χαρακτηριστικού που μελετάμε.
- β) Να υπολογίσετε το πλήθος των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο λιγότερο ή ίσο των 2, 5, 8 και 10 χιλιάδων ωρών.
- γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο μεγαλύτερο των 2, 5, 8 και 10 χιλιάδων ωρών.
- δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των μηχανημάτων που εμφάνισαν βλάβη σε χρόνο μεταξύ 2 και 9 χιλιάδων ωρών.

14.2.2. Στον πίνακα συχνοτήτων 14.2.11 δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και ορισμένες συχνότητες.

- α) Να συμπληρώσετε όλες τις τιμές του πίνακα που λείπουν.
- β) Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων, για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι το πολύ 4.
- γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των ατόμων, για τα οποία η τιμή του χαρακτηριστικού είναι από 4 μέχρι 6.

Πίνακας 14.2.10

Αριθμός ωρών	Συχνότητα
1	4
2	7
3	9
4	15
5	16
6	20
7	24
8	10
9	5
10	5
11	3
12	2

Πίνακας 14.2.11

t_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
1		0,10		
2	4			
3	6		20	
4	20			
5				0,85
6	18			
7				
Σύνολο				

14.2.3. Ο αριθμός των δωματίων 20 διαμερισμάτων που επιλέχθηκαν τυχαία σ' ένα οικοδομικό τετράγωνο ήταν:

2 3 5 2 4 2 2 3 4 4
2 3 5 4 4 4 4 3 6 2

- α) Να κατασκευάσετε πίνακα, ο οποίος να περιέχει τις (απόλυτες) συχνότητες, τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες για κάθε τιμή του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

- β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των διαμερισμάτων που έχουν τουλάχιστον 3 δωμάτια.
 γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των διαμερισμάτων που έχουν το πολύ 4 δωμάτια.

14.2.4. Οι ενδείξεις ενός ζαριού που το ρίξαμε 40 φορές ήταν:

1	3	5	6	1	2	5	2	4	1
6	2	1	4	4	3	1	4	6	2
5	3	1	2	5	2	2	2	4	3
2	4	5	4	6	1	4	1	6	2

- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων για τις ενδείξεις τα ζαριού.
 β) Να υπολογίσετε το ποσοστό ρίψεων που το ζάρι έδειξε ένδειξη μεγαλύτερη από 3.
 γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό ρίψεων που το ζάρι έδειξε ένδειξη μικρότερη από 2.

14.2.5. Καθένας από τους 30 υπαλλήλους μιας επιχειρήσεως πήρε για θερινή άδεια τον παρακάτω αριθμό ημερών:

21	25	26	22	26	24	22	26	24	27
22	26	21	25	24	25	25	25	24	25
24	22	24	23	27	27	23	24	25	24.

- α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.
 β) Να σχεδιαστεί διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.
 γ) Να σχεδιαστεί κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τον αριθμό των ημερών αδείας των 30 ατόμων.

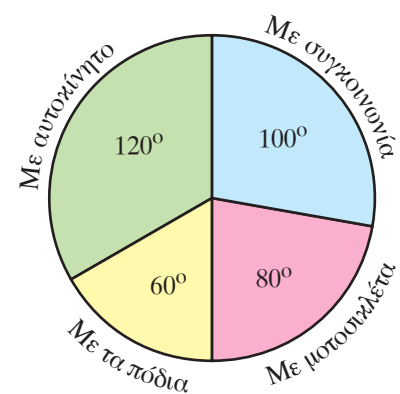
14.2.6. Η οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως είναι η εξής:

Άνδρες ανύπαντροι	15	Γυναίκες ανύπαντρες	18
Άνδρες παντρεμένοι	25	Γυναίκες παντρεμένες	20
Άνδρες διαζευγμένοι	10	Γυναίκες διαζευγμένες	15

- α) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα με ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
 β) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα μ' ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

14.2.7. Το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζει του σχήματος 14.2ξ το μεταφορικό μέσο που χρησιμοποίησαν 180 άνθρωποι, για να μετακινηθούν από το σπίτι τους στη δουλειά τους.

- α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που χρησιμοποίησαν συγκοινωνία.
 β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ατόμων που δεν μετακινήθηκαν με τα πόδια.



Σχ. 14.2ξ.

γ) Να μετατραπεί το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα.

14.2.8. Σ' ένα μετεωρολογικό σταθμό καταγράφεται κάθε έτος ο αριθμός των χιονοπτώσεων. Σε διάστημα 40 ετών συγκεντρώθηκαν τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον πίνακα 14.2.12.

α) Να συντάξετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απολύτων και αθροιστικών).

β) Να συντάξετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να συντάξετε κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας 14.2.12

Αριθμός χιονοπτώσεων	Αριθμός ετών
0	21
1	10
2	5
3	2
4	1
5	1
Σύνολο	40

14.2.9. Στον πίνακα 14.2.13 δίνονται τα καθαρά κέρδη (σε χιλιάδες €) μιας επιχειρήσεως κατά την οκταετία 2000 – 2007.

Πίνακας 14.2.13

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Κέρδη	560	550	610	8200	1220	1500	1950	2100

Να παρασταθούν τα δεδομένα σ' ένα χρονολογικό διάγραμμα.

14.2.10. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα έχει απεικονιστεί το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας ναυτιλιακής εταιρείας σε τέσσερις κατηγορίες:

Α' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαιδεύσεως

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές. Στην Α' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχειρήσεως. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της επιχειρήσεως της Β' κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' κατηγορίας.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.

β) Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

14.2.11. Τα κρούσματα δύο μεταδοτικών νόσων από το 2000–2010 παρουσιάζονται στον πίνακα 14.2.14.

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα χρονοσειράς για τη νόσο *A*.
- β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα χρονοσειράς για τη νόσο *B*.
- γ) Να σχολιάσετε την εξέλιξη των νόσων και να τις συγκρίνετε με βάση τα δύο διαγράμματα χρονοσειράς.

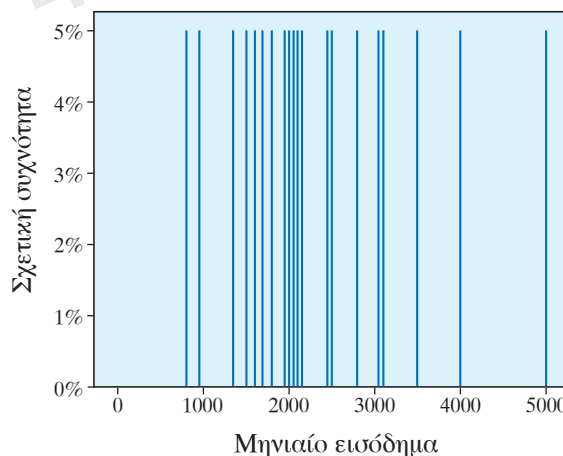
Πίνακας 14.2.14

Έτος	Νόσος <i>A</i>	Νόσος <i>B</i>
2000	180	720
2001	126	526
2002	256	564
2003	366	362
2004	278	444
2005	412	272
2006	492	264
2007	514	536
2008	686	608
2009	602	232
2010	522	280

14.3 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.

Όταν το πλήθος των διαφορετικών τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο, είναι αρκετά δύσκολο να κατασκευαστούν οι πίνακες συχνοτήτων και τα αντίστοιχα διαγράμματα. Ακόμη όμως και αν τα κατασκευάσουμε, οι πληροφορίες που δίνουν έχουν πολύ μικρή αξία, αφού οι πιο πολλές τιμές θα έχουν μικρές ή ίσες συχνότητες εμφάνισης, με αποτέλεσμα να μην προκύπτει κάποιο χρήσιμο συμπέρασμα από την παρατήρηση του πίνακα συχνοτήτων ή του διαγράμματος. Για παράδειγμα, αν κατασκευάζαμε τον πίνακα συχνοτήτων της μεταβλητής «Μηνιαίο εισόδημα» του πίνακα 14.2.2, θα διαπιστώναμε ότι εμφανίζονται 20 διαφορετικές τιμές με συχνότητα 1, οπότε το αντίστοιχο διάγραμμα συχνοτήτων θα είχε τη μορφή που δίνεται στο σχήμα 14.3α και δεν θα παρείχε καμμία χρήσιμη πληροφορία.

Το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά έντονο στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, η οποία μπορεί θεωρητικά να λάβει οποιαδήποτε τιμή σε συνεχή διαστήματα, με αποτέλεσμα οι τιμές της να είναι όλες ή σχεδόν όλες διαφορετικές μεταξύ τους και επομένως να μην έχει νόημα να καταγράψουμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε τιμής, αφού το πιθανότερο ενδεχόμενο είναι κάθε τιμή να εμφανίζεται μόνο μια φορά. Παρόμοιο πρόβλημα μπορεί να προκύψει και στην περίπτωση διακριτών μεταβλητών με πολύ μεγάλο εύρος τιμών.



Σχ. 14.3α

Στις περιπτώσεις αυτές ακολουθούμε την τεχνική της *ομαδοποίησης* των παρατηρήσεων, σύμφωνα με την οποία τα δεδομένα ταξινομούνται (ομαδοποιούνται) σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται *ομάδες* ή *κλάσεις*, έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει σε μία μόνο κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται *όρια* των κλάσεων. Προκειμένου να αποφευχθεί το φαινόμενο της ταξινομήσεως μιας παρατηρήσεως σε περισσότερες από μία κλάσεις, μπορούμε να ακολουθήσουμε μία από τις επόμενες δύο τεχνικές:

α) Χρησιμοποιούμε ως όρια τιμές, οι οποίες δεν μπορούν να ληφθούν από το χαρακτηριστικό που μελετάμε. Για παράδειγμα, αν το χαρακτηριστικό που μελετάμε λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές, χρησιμοποιούμε δεκαδικά όρια (0,5 1,5 2,5 κ.λπ.).

β) Θεωρούμε ότι κάθε κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), δηλαδή είναι της μορφής $[,)$ ή αντίστροφα ότι κάθε κλάση περιέχει το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), αλλά όχι το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), δηλαδή είναι της μορφής $(,]$.

Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι τιμές που εμπίπτουν σε κάθε κλάση θεωρούνται μεταξύ τους ισοδύναμες. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις μιας κλάσεως είναι ομοιόμορφα κατανομημένες (τοποθετημένες) εντός της κλάσεως και μπορούν να «αντιπροσωπευθούν» από τις *κεντρικές τιμές* κάθε κλάσεως, δηλαδή το ημίθροισμα των δύο άκρων της κλάσεως.

Η διαδικασία κατασκευής ενός πίνακα συχνοτήτων για ομαδοποιημένα δεδομένα είναι σχετικά απλή και συνοψίζεται στα επόμενα *βήματα*:

- B₁.** Υπολογίζουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή στα δεδομένα μας.
- B₂.** Υπολογίζουμε το εύρος των δεδομένων, δηλαδή τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.
- B₃.** Υπολογίζουμε τον αριθμό των τάξεων (κλάσεων) που θα χρησιμοποιηθούν.
- B₄.** Υπολογίζουμε το εύρος (πλάτος) κάθε κλάσεως και στη συνέχεια καθορίζουμε τα όρια της καθεμιάς.
- B₅.** Καταγράφουμε τον αριθμό των τιμών της μεταβλητής που ανήκουν σε κάθε μια από τις κλάσεις.
- B₆.** Συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων (με τη βοήθεια της διαδικασίας της επιλογής).

Προκειμένου να παρουσιάσουμε ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα για τη διαδικασία της ομαδοποίησης, θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1, τα οποία αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση ενός πλοίου σε διάστημα 40 ημερών.

Πίνακας 14.3.1
Ημερήσια επιβατική κίνηση ενός πλοίου σε διάστημα 40 ημερών.

252	255	263	276	265	276	275	279
265	256	264	277	285	277	277	281
277	256	265	277	241	289	265	265
247	258	267	287	265	253	277	292
300	262	270	264	272	273	278	277

Εξετάζοντας τα δεδομένα εντοπίζουμε την ελάχιστη τιμή $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και τη μέγιστη τιμή $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Σύμφωνα με τα διαθέσιμα δεδομένα του πίνακα 14.3.1 η μέγιστη τιμή είναι ίση με 300 και η ελάχιστη 241 και έτσι ολοκληρώνεται το **B₁**.

Σύμφωνα με το **B₂**, υπολογίζουμε στη συνέχεια το εύρος (*Range - R*) των δεδομένων ως τη διαφορά

μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατηρήσεως. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το εύρος είναι ίσο με $R = 300 - 241 = 59$.

Για την εκτέλεση του B_3 , χρησιμοποιούμε τον εμπειρικό τύπο του Sturges, σύμφωνα με τον οποίο το πλήθος k των κλάσεων δίνεται από την έκφραση:

$$k = 1 + 3,32 \log n = 1 + 1,44 \ln n$$

όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιούμε. Ο τύπος αυτός δίνει έναν ενδεικτικό αριθμό κλάσεων και δεν είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιήσουμε ακριβώς το πλήθος κλάσεων που προκύπτει από αυτόν, ιδιαίτερα αν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος να έχουμε διαφορετικό αριθμό κλάσεων με βάση τη διαθέσιμη εμπειρία. Για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1 έχουμε $n=40$, οπότε:

$$k = 1 + 1,44 \ln 40 \cong 6,31$$

και για τη διαδικασία της ομαδοποίησης θα χρησιμοποιήσουμε $k = 6$ κλάσεις.

Το B_4 είναι ο προσδιορισμός του εύρους (πλάτους) των κλάσεων, δηλαδή της διαφοράς του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσεως. Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι κλάσεις έχουν το ίδιο εύρος. Για κλάσεις ίσου εύρους, το εύρος c των κλάσεων υπολογίζεται απλά διαιρώντας το εύρος R διά του αριθμού των κλάσεων k , δηλαδή:

$$c = \frac{R}{k}.$$

Αν χρειαστεί να γίνει στρογγύλευση του αποτελέσματος (ώστε να προκύψει ακέραιο αποτέλεσμα), θα πρέπει να γίνει προς τα επάνω, γιατί σε αντίθετη περίπτωση δεν θα είναι εφικτό να καλύψουμε όλες τις παρατηρήσεις του δείγματος. Για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1 έχουμε $k = 6$ και $R = 59$, οπότε

$$c = \frac{R}{k} = \frac{59}{6} \cong 9,83$$

και θα μπορούσαμε, για λόγους ευκολίας να θεωρήσουμε $c=10$ (έτσι ώστε το εύρος των κλάσεων να είναι ακέραιος αριθμός).

Στη συνέχεια προχωράμε στην κατασκευή των κλάσεων, δηλαδή στον καθορισμό των άκρων (ορίων) της καθεμιάς. Ξεκινώντας από τη μικρότερη παρατήρηση ή λίγο πιο κάτω από τη μικρότερη παρατήρηση (αν αυτό διευκολύνει για να προκύπτουν πιο εύχρηστα όρια) και προσθέτοντας κάθε φορά το εύρος c , δημιουργούμε τα όρια των k κλάσεων. Εφόσον η στρογγύλευση κατά τον υπολογισμό του c έχει γίνει προς τα επάνω, η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση και κάθε τιμή θα εμπίπτει σε μία και μόνο μία κλάση. Για το παράδειγμα που επεξεργαζόμαστε θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως αρχή της πρώτης κλάσεως το 240 και προσθέτοντας το εύρος $c=10$ δημιουργούμε την πρώτη κλάση, η οποία ξεκινά από το 240 και καταλήγει στο $240+10 = 250$. Με την ίδια διαδικασία ορίζουμε και τις υπόλοιπες κλάσεις, χρησιμοποιώντας πάντα ως αριστερό όριο για κάθε κλάση το αντίστοιχο δεξί (άνω) όριο της προηγούμενης κλάσεως. Τελικά λαμβάνουμε τα επόμενα όρια:

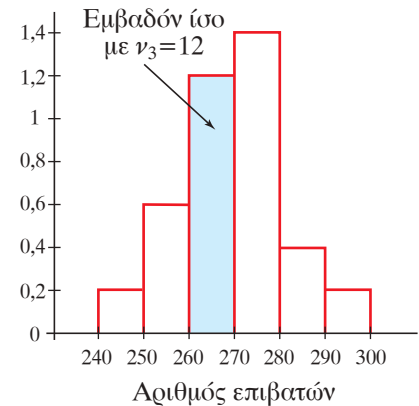
$$240, 250, 260, 270, 280, 290, 300.$$

Θεωρώντας ότι κάθε κλάση περιέχει το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά) αλλά όχι το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά), δηλαδή είναι της μορφής $(\quad, \quad]$, εκτελούμε τέλος τη διαδικασία της διαλογής και λαμβάνουμε τον πίνακα συχνοτήτων 14.3.2 (B_5 και B_6). Το πλήθος των παρατηρήσεων n_i που ανήκουν στην κλάση i καλείται **συχνότητα της κλάσεως** αυτής. Ως **κεντρική τιμή**, $i = 1, 2, \dots, k$ της κλάσεως i θεωρούμε το ημιάθροισμα των δύο της άκρων της κλάσεως.

Για τη γραφική παράσταση ομαδοποιημένων δεδομένων χρησιμοποιούμε συνήθως το **ιστόγραμμα**.

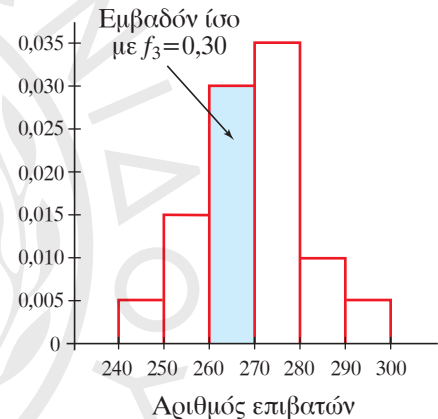
Πίνακας 14.3.2**Πίνακας συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1.**

Κλάσεις (-]	Κεντρικές τιμές	ν_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
240–250	245	2	5	2	5
250–260	255	6	15	8	20
260–270	265	12	30	20	50
270–280	275	14	35	34	85
280–290	285	4	10	38	95
290–300	295	2	5	40	100
Σύνολο		40	100	—	—

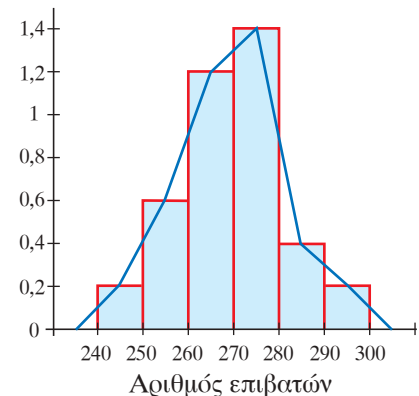
**Σχ. 14.3β.**
Ιστογράμμο
συχνοτήτων.

μα συχνοτήτων. Σ' αυτό σημειώνουμε στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων τα όρια των κλάσεων και στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το εύρος της κλάσεως και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσεως αυτής. Στο σχήμα 14.3β δίνεται το ιστογράμμο συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1, όπως αυτά ομαδοποιήθηκαν στον πίνακα 14.3.2.

Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το **ιστόγραμμο σχετικών συχνοτήτων**, δημιουργώντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το εύρος της κλάσεως και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσεως. Προφανώς το ιστογράμμο σχετικών συχνοτήτων θα έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το αντίστοιχο ιστογράμμο συχνοτήτων, με μοναδική διαφορά στην κλίμακα που χρησιμοποιείται στον κατακόρυφο άξονα (σχ. 14.3γ).

**Σχ. 14.3γ.**
Ιστογράμμο σχετικών
συχνοτήτων.

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων προσθέσουμε δύο υποθετικές κλάσεις με μηδενικές συχνότητες, μία πριν από την πρώτη και μία μετά από την τελευταία κλάση και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων όλων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** (frequency polygon). Από τον τρόπο κατασκευής του είναι προφανές ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν . Στο σχήμα 14.3δ δίνεται το ιστογράμμο και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1.

**Σχ. 14.3δ.**
Ιστογράμμο και πολύγωνο
συχνοτήτων.

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται, από το ιστογράμμο σχετικών συχνοτήτων και το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών

συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων, δηλαδή 1 (100%).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε κλάσεις ίσου εύρους, όπως στο παράδειγμά μας, είναι φανερό ότι το ύψος κάθε ορθογωνίου θα είναι ανάλογο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσεως, οπότε το σχήμα που δημιουργείται θα είναι όμοιο με αυτό που θα λαμβάναμε αν στον κατακόρυφο άξονα τοποθετούσαμε απλά τις συχνότητες (χωρίς δηλ. να τις διαιρούμε με το εύρος, ώστε το εμβαδό να είναι ίσο με τη συχνότητα). Στο σχήμα 14.3ε δίνεται το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1, όπου όμως τώρα στον κατακόρυφο άξονα έχουν σημειωθεί οι (απόλυτες) συχνότητες.

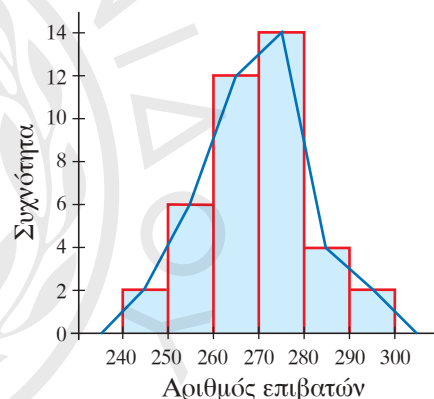
Για πρακτικούς λόγους (ελάττωση των απαιτούμενων υπολογισμών) στον κατακόρυφο άξονα ενός ιστογράμματος συχνοτήτων θα σημειώνουμε στη συνέχεια τις συχνότητες των κλάσεων, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό ή έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα με κλάσεις άνισου εύρους.

Με τον ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε και **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**, στα οποία ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τις αθροιστικές ή τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες των κλάσεων. Αν μάλιστα σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων ενώσουμε τα δεξιά άκρα των άνω βάσεων των ορθογωνίων του με ευθύγραμμα τμήματα, τότε προκύπτει μια πολυγωνική γραμμή, η οποία ονομάζεται **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων**. Στο σχήμα 14.3στ δίνεται το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1. Σημειώνουμε ότι, σ' ένα διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων οι επάνω πλευρές των ορθογωνίων παραλληλογράμμων κινούνται προς υψηλότερες θέσεις όσο αυξάνονται οι τιμές της μεταβλητής που μελετάμε, αφού στην περίπτωση αυτή αυξάνονται συνεχώς οι τιμές της αθροιστικής συχνότητας. Επί πλέον, η πολυγωνική γραμμή του πολύγωνου αθροιστικών συχνοτήτων αντιστοιχεί σε μια αύξουσα συνάρτηση.

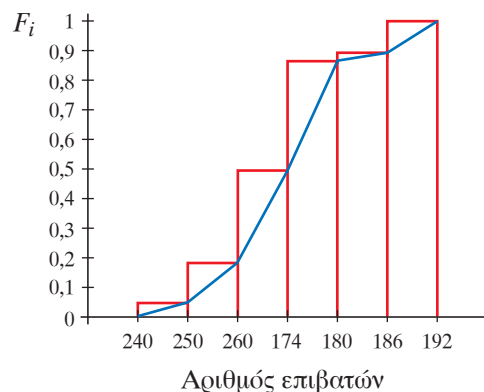
Μια εξαιρετικά απλή αλλά και ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική συνοπτικής παρουσιάσεως δεδομένων είναι τα λεγόμενα διαγράμματα κορμού-και-φύλλων ή **φυλλογραφήματα** (stem and leaf plots). Με την τεχνική αυτή ουσιαστικά οδηγούμαστε σε μια τεχνητή ομαδοποίηση των δεδομένων που διαθέτουμε και συγχρόνως δημιουργούμε μια σχηματική παράσταση παρόμοια μ' αυτήν των ιστογραμμάτων, χωρίς όμως να έχουμε οποιαδήποτε απώλεια πληροφοριών από τη συγχώνευση διαφορετικών παρατηρήσεων σε κλάσεις. Αυτό συμβαίνει διότι το διάγραμμα κορμού-και-φύλλων παρέχει τη δυνατότητα ανασυστάσεως των μετρήσεων των αρχικών δεδομένων του δείγματος με απόλυτη ακρίβεια, πράγμα το οποίο δεν επιτυγχάνεται με τους πίνακες συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων ή τα ιστογράμματα συχνοτήτων. Η χρήση των φυλλογραφημάτων ενδείκνυται κατά κύριο λόγο για την επεξεργασία μέτρου πλήθους παρατηρήσεων.

Τα βασικά πλεονεκτήματα του φυλλογραφήματος είναι ότι:

- α) Περιέχει όλα τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί.
- β) Δείχνει τη μορφή της κατανομής συχνοτήτων και
- γ) εμφανίζει τυχόν ακραίες/έκτροπες παρατηρήσεις, δη-



Σχ. 14.3ε.
Ιστόγραμμα και πολύγωνο
συχνοτήτων.



Σχ. 14.3στ.
Ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών
σχετικών συχνοτήτων

λαδή παρατηρήσεις που είναι είτε υπερβολικά μεγάλες, είτε υπερβολικά μικρές σε σχέση με τον κύριο όγκο των δεδομένων.

Θα παρουσιάσουμε τον τρόπο, με τον οποίο δημιουργείται ένα φυλλογράφημα μέσα από ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι έχουν συγκεντρωθεί οι επόμενες 25 μετρήσεις που αφορούν στην ηλικία (σε συμπληρωμένα έτη) των ατόμων που αποτελούν το πλήρωμα ενός πλοίου:

39 45 50 41 46 47 40 47 59 59 23 38 39 41 41
50 51 34 35 35 42 43 27 32 34

Διατάσσουμε για διευκόλυνση τα δεδομένα κατά μέγεθος από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τιμή:

23 27 32 34 34 35 35 38 39 39 40 41
41 41 42 43 45 46 47 47 50 50 51 59 59

Θεωρούμε ότι κάθε μία παρατήρηση αντιπροσωπεύεται από δύο τμήματα:

- α) Αυτό που αποτελείται από ένα πρώτο ή αρχικό ψηφίο και
- β) από το δεύτερο ή επόμενο ψηφίο, δηλαδή αυτό που έπεται του τμήματος που θεωρήσαμε ως αρχικό.

Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η πρώτη μέτρηση (η τιμή 23) έχει ως αρχικό ψηφίο (stem: κορμό ή μίσχο) το νούμερο 2 και ως επόμενο (leaf: φύλλο) το 3. Αυτό θα σημειώνεται ως εξής:

Κορμός–Stem (μονάδα = 10)	Φύλλο–Leaf (μονάδα = 1)
2	3

Ομοίως, η τελευταία παρατήρηση (η οποία έχει τιμή 59) παριστάνεται ως:

Κορμός–Stem (μονάδα = 10)	Φύλλο–Leaf (μονάδα = 1)
5	9

Το διάγραμμα ολοκληρώνεται τοποθετώντας όλα τα ψηφία που απαρτίζουν τον κορμό των παρατηρήσεων κατά αύξουσα τάξη καθεώς και αριστερά της διαχωριστικής γραμμής και θέτοντας τις τιμές των φύλλων ακριβώς δίπλα από το αντίστοιχο τμήμα κορμού (δεξιά της κάθετης διαχωριστικής γραμμής) επίσης κατ' αύξουσα τάξη μεγέθους. Το φυλλογράφημα του παραδείγματός μας θα έχει τελικά την εξής μορφή:

Κορμός–Stem (μονάδα = 10)	Φύλλο–Leaf (μονάδα = 1)
2	3 7
3	2 4 4 5 5 8 9 9
4	0 1 1 1 2 3 5 6 7 7
5	0 0 1 9 9

Σε γενικές γραμμές ως φύλλο κάθε στατιστικού στοιχείου λαμβάνεται το τελευταίο ή τα δύο τελευταία ψηφία της τιμής της παρατήρησης και ως κορμός το πρώτο ή τα εναπομείναντα πρώτα ψηφία. Ας

σημειωθεί όμως ότι ο προσδιορισμός του κορμού και του φύλλου των παρατηρήσεων εξαρτάται από τη φύση και το εύρος των τιμών των δεδομένων. Για παράδειγμα, η τιμή 1234 θα μπορούσε, ανάλογα με την περίπτωση, να αναπαρασταθεί είτε ως $1 \mid 234$ είτε ως $12 \mid 34$ είτε ως $123 \mid 4$.

Είναι φανερό ότι αν περιστρέψουμε νοητά το παραπάνω φυλλογράφημα, έτσι ώστε τα ψηφία του κορμού να λάβουν οριζόντια θέση, θα ήταν σαν να σκιαγραφούσαμε τέσσερα παραλληλόγραμμα (ιστούς) το καθένα με 2, 8, 10 και 5 (συμβατικές) μονάδες ύψους αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό θα λαμβάναμε στην πραγματικότητα την εικόνα του ιστογράμματος συχνοτήτων όταν στα δεδομένα μας έχει γίνει ομαδοποίηση με κλάσεις τις δεκάδες ηλικιών [20, 30), [30, 40), [40, 50), [50, 60).

Ασκήσεις.

14.3.1. Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν στον αριθμό των ατόμων του πληρώματος σε 50 μεγάλα επιβατικά πλοία.

104	109	126	152	130	152	150	158	143	143
130	112	128	154	176	154	154	162	154	112
154	112	125	154	82	178	129	128	201	135
94	116	134	174	127	106	154	184	132	165
205	124	140	128	144	146	156	154	219	217

- Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα αυτά σε 5 κλάσεις.
- Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, καθώς και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

14.3.2. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 50 τεχνίτες για να συναρμολογήσουν (ο καθένας) ένα εξάρτημα πλοίου ήταν:

39	137	72	19	18	43	44	34	44	32
49	41	19	29	41	36	80	74	132	44
38	102	25	49	38	92	44	121	95	39
19	40	33	109	124	128	34	33	46	64
36	92	33	43	135	35	69	37	75	87

- Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων.
- Να συντάξετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.
- Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

14.3.3. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ηλικίες 400 επιβατών που ταξίδεψαν μ' ένα πλοίο.

Ηλικίες [,)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
Αριθμός ατόμων	20	60	200	70	40	10

- α) Να συνταχθούν οι πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, καθώς και των αντιστοίχων αθροιστικών συχνοτήτων.
- β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.
- γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, καθώς και το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.
- δ) Τι ποσοστό επιβατών ήταν ηλικίας μικρότερης των 40 ετών και τι ποσοστό ανθρώπων ήταν ηλικίας από 25 έως 55 ετών;

14.3.4. Δίνονται οι επόμενες παρατηρήσεις που αφορούν στη βαθμολογία που έλαβαν 20 φοιτητές σε ένα τεστ με κλίμακα 0–1000

724 738 647 583 883 999 829 803 782 755

811 756 756 953 738 638 738 592 988 811

- α) Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα των δεδομένων.
- β) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε ομάδες εύρους 100, ξεκινώντας από μια ομάδα με κάτω άκρο την τιμή 600 και στη συνέχεια να γίνει το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων.
- γ) Να συγκρίνετε τα δύο διαγράμματα μεταξύ τους.

14.3.5. Στον πίνακα 14.3.3 δίνεται η κατανομή συχνοτήτων της συστολικής πίεσης 160 ατόμων, που λαμβάνουν το φάρμακο *A* και 180 άλλων ατόμων, που λαμβάνουν το φάρμακο *B*.

- α) Να κατασκευάσετε τα ιστογράμματα σχετικών συχνοτήτων για κάθε φάρμακο και να τα συγκρίνετε μεταξύ τους.
- β) Να κατασκευάσετε τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τους ίδιους άξονες συντεταγμένων.

Πίνακας 14.3.3

Συστολική πίεση (σε mm Hg)	n_i	
	Φάρμακο <i>A</i>	Φάρμακο <i>B</i>
95–99	8	2
100–104	18	12
105–109	16	14
110–114	24	20
115–119	32	32
120–124	20	26
125–129	14	24
130–134	12	22
135–139	6	12
140–144	6	8
145–149	4	4
Σύνολο	160	180

14.3.6. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας (ΕΣΥΕ) η κατανο-

μή ανά ηλικία και φύλο των θανάτων το έτος 1995 λόγω υπερτασικής νόσου ήταν η εξής:

- α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία των συνολικών ατόμων που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995.
- β) Να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τα ιστογράμματα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία των αντρών και των γυναικών, αντίστοιχα, που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995 και στη συνέχεια να τα συγκρίνετε.

<i>Ηλικία</i>	<i>Θάνατοι</i>	
	<i>Άνδρες</i>	<i>Γυναίκες</i>
50–54	10	7
55–59	10	4
60–64	17	21
65–69	36	57
70–74	44	61
75–79	73	109
80–84	117	162
85–89	123	195

14.3.7. Δίνεται ο πίνακας κατανομής 14.3.4 συχνοτήτων της μεταβλητής X .

- α) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία του πίνακα που λείπουν.
- β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων των δεδομένων.
- γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων των δεδομένων.

Πίνακας 14.3.4.

<i>Κλάσεις</i> [–)	<i>Κεντρικές</i> <i>τιμές</i>	<i>Συχνότητα</i> n_i	<i>Σχετική</i> <i>συχνότητα</i> f_i	<i>Αθροιστική σχετική</i> <i>συχνότητα</i> F_i %
1–5				20
5–9				50
9–13				85
13–17				95
17–21		2		
Σύνολο			1	

14.3.8. Σε μία μεγάλη ναυτιλιακή εταιρεία υπηρετούν συνολικά 100 υπάλληλοι. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των υπαλλήλων δίνεται από τον πίνακα 14.3.5.

- α) Πόσοι υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;
- β) Με την προϋπόθεση ότι κάθε υπάλληλος θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια, πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;
- γ) Με την προϋπόθεση ότι κάθε υπάλληλος θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια

πόσοι συνολικά υπάλληλοι πρέπει να προσληφθούν στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των υπαλλήλων να παραμένει ο ίδιος;

Πίνακας 14.3.5

<i>Χρόνια υπηρεσίας</i> [-)	<i>Σχετική συχνότητα</i> f_i %
0–5	10
5–10	15
10–15	12
15–20	15
20–25	18
25–30	18
30–35	12

14.4 Μέτρα θέσεως.

Στην παρούσα παράγραφο και σ' αυτήν που θα ακολουθήσει, θα παρουσιάσουμε τα κυριότερα (στατιστικά) περιγραφικά μέτρα. Με τον όρο αυτό αναφερόμαστε σε κατάλληλες αριθμητικές ποσότητες, οι οποίες μπορούν να συνοψίζουν τις πληροφορίες που περιέχονται στα δεδομένα μας, παρέχοντάς μας μια πλήρη εικόνα για την κατανομή συχνοτήτων του χαρακτηριστικού που μελετάμε. Πιο συγκεκριμένα τα στατιστικά περιγραφικά μέτρα παρέχουν έναν ακόμα πιο σύντομο τρόπο περιγραφής της κατανομής ενός συνόλου δεδομένων σε σχέση με τους πίνακες συχνοτήτων και τις γραφικές παραστάσεις που μελετήσαμε στις παραγράφους 14.2 και 14.3.

Διακρίνουμε δυο βασικές κατηγορίες περιγραφικών μέτρων, τα *μέτρα θέσεως* και τα *μέτρα διακυμάνσεως* ή *μέτρα μεταβλητότητας*. Επίσης, ανάλογα με το αν τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε αφορούν σε ολόκληρο τον προς μελέτη πληθυσμό ή ένα δείγμα από αυτόν, αναφερόμαστε σε *πληθυσμιακά μέτρα* ή *δειγματικά μέτρα*, αντίστοιχα.

Τα μέτρα θέσεως είναι τα περιγραφικά εκείνα μέτρα, τα οποία παρέχουν πληροφορίες για τη θέση του «κέντρου» της κατανομής των τιμών μιας μεταβλητής. Τα μέτρα διακυμάνσεως ποσοτικοποιούν την τάση των παρατηρήσεων να απομακρύνονται από το «κέντρο» τους.

Τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσεως είναι ο *αριθμητικός μέσος* ή *μέση τιμή*, η *διάμεσος* και τα *εκατοστημόρια* και τέλος η *κορυφή* ή *επικρατούσα τιμή*. Θα εξετάσουμε στη συνέχεια αναλυτικά καθένα από τα μέτρα αυτά.

14.4.1 Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ($\bar{x}$).

Ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων είναι στην πραγματικότητα ο γνωστός σε όλους από την καθημερινή πράξη μέσος όρος ενός αριθμού παρατηρήσεων. Αποτελεί το σπουδαιότερο και χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των διαθεσίμων παρατηρήσεων διὰ του πλήθους τους.

Συμβολικά, αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριστικό) X , τότε η μέση τιμή των παρατηρήσεων συμβολίζεται με $\bar{x}$ και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Στον παραπάνω τύπο χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο $\sum_{i=1}^n x_i$ για να παραστήσουμε σε συντομογραφία το άθροισμα $x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Η συντομογραφία αυτή ή όταν δεν υπάρχει πρόβλημα συγχύσεως ο απλούστερος συμβολισμός $\sum x_i$, θα χρησιμοποιείται συχνά στη συνέχεια, προκειμένου να μπορούμε να γράφουμε με σύντομο και κομψό τρόπο ορισμένους τύπους που θα χρειαστούμε στην πορεία της παρουσιάσεως των στατιστικών περιγραφικών μέτρων, εξοικονομώντας έτσι χώρο.

Για παράδειγμα, η μέση τιμή της ημερήσιας επιβατικής κινήσεως που δίνεται (για διάστημα 40 ημερών) στον πίνακα 14.3.1 βρίσκεται εύκολα ως εξής

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{40}}{40} = \frac{252 + 255 + 263 + \dots + 277}{40} = \frac{10800}{40} = 270.$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι με βάση τα δεδομένα που διαθέτουμε, η μέση ημερήσια επιβατική κίνηση για το διάστημα των 40 ημερών, το οποίο μελετήσαμε, ήταν 270 (επιβάτες ανά ημέρα).

Στην περίπτωση που για τα δεδομένα που συλλέξαμε έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας συχνοτήτων, η μέση τιμή μπορεί να υπολογισθεί πιο γρήγορα χρησιμοποιώντας τον εναλλακτικό τύπο:

$$\bar{x} = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i v_i$$

ή ισοδύναμα τον

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n t_i \frac{v_i}{n} = \sum_{i=1}^n t_i f_i,$$

όπου $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_n$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_n$. Πολλές φορές αναφερόμαστε στον τελευταίο τύπο λέγοντας ότι έχουμε ένα **σταθμικό** ή **σταθμισμένο μέσο όρο** των τιμών $t_1, t_2, \dots, t_n$ αφού για τον υπολογισμό του $\bar{x}$ σταθμίζονται οι τιμές t_i με τις αντίστοιχες συχνότητες v_i ή σχετικές συχνότητες f_i που ονομάζονται **βάση** της σταθμίσεως. Για το λόγο αυτό μάλιστα, στην ελληνική βιβλιογραφία ο σταθμικός μέσος όρος αναφέρεται και ως **βαρυκεντρικός μέσος**.

Για παράδειγμα η μέση μηνιαία χρήση δρομολογίου που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 14.2.2 μπορεί να υπολογισθεί είτε απ' ευθείας μέσω του τύπου:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20} = \frac{1 + 2 + 1 + 10 + \dots + 6 + 2}{20} = \frac{68}{20} = 3,4$$

είτε, χρησιμοποιώντας και τα στοιχεία του πίνακα συχνοτήτων 14.2.4, μέσω του τύπου:

$$\bar{x} = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_6 v_6}{v_1 + v_2 + \dots + v_6} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{20} = \frac{68}{20} = 3,4$$

(προφανώς τα δύο αποτελέσματα δεν διαφέρουν μεταξύ τους).

Ο τύπος $\bar{x} = \sum_{i=1}^n t_i \frac{v_i}{n} = \sum_{i=1}^n t_i f_i$ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του αριθμητικού

μέσου ομαδοποιημένων δεδομένων, θεωρώντας ως t_i τις κεντρικές τιμές των αντιστοίχων κλάσεων. Έτσι, με βάση τον πίνακα συχνοτήτων 14.3.2, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ημερήσια επιβατική

κίνηση για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1 ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{t_1 v_1 + \dots + t_6 v_6}{v_1 + \dots + v_6} = \frac{245 \cdot 2 + 255 \cdot 6 + 265 \cdot 12 + 275 \cdot 14 + 285 \cdot 4 + 195 \cdot 2}{40} = \frac{10780}{40} = 269,5.$$

Κατά τον υπολογισμό της μέσης τιμής μέσω πίνακα συχνοτήτων είναι αρκετά σύνηθες να σχηματίσουμε τον πίνακα 14.4.1, ο οποίος διευκολύνει κατά πολύ τους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Πίνακας 14.4.1

i	Κεντρικές τιμές t_i	v_i	$t_i v_i$
1	245	2	490
2	255	6	1530
3	265	12	3180
4	275	14	3850
5	285	4	1140
6	295	2	590
Σύνολο		$v = 40$	$\sum t_i v_i = 10780$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή που λάβαμε τώρα για τον αριθμητικό μέσο διαφέρει ελαφρώς από την τιμή ($\bar{x} = 270$) που είχαμε βρει προηγουμένως χρησιμοποιώντας τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα. Η μικρή αυτή διαφορά οφείλεται στο ότι κατά την ομαδοποίηση χάνουμε πλέον τις αρχικές παρατηρήσεις κάθε κλάσεως και προχωρούμε στον υπολογισμό, θεωρώντας ότι οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και εκπροσωπούνται από την αντίστοιχη κεντρική τιμή t_i . Η υπόθεση αυτή σημαίνει απώλεια πληροφοριών για τις αρχικές τιμές και για το λόγο αυτό χάνουμε λίγο ως προς την ακρίβεια (κερδίζουμε όμως σε υπολογιστικό χρόνο).

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στον αριθμητικό μέσο παραθέτουμε τις επόμενες χρήσιμες ιδιότητές του:

- M₁.** Αν όλες οι τιμές των διαθεσίμων παρατηρήσεων είναι ίσες, δηλαδή $x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$, τότε ο αριθμητικός τους μέσος είναι ίσος επίσης με c .
- M₂.** Η τιμή του αριθμητικού μέσου βρίσκεται πάντοτε μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του.
- M₃.** Το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι πάντα ίσο με το μηδέν, δηλαδή ισχύει:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

- M₄.** Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής προσθέσουμε μία σταθερή ποσότητα, έστω c , τότε ο αριθμητικός τους μέσος θα αυξηθεί κατά c , δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ έχουν μέσο $\bar{x}$, τότε οι παρατηρήσεις $y_1 = x_1 + c, y_2 = x_2 + c, \dots, y_n = x_n + c$ θα έχουν μέσο $\bar{y} = \bar{x} + c$.

M₅. Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε ο αριθμητικός τους μέσος πολλαπλασιάζεται με την ποσότητα αυτή, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ έχουν μέσο $\bar{x}$, τότε ο αριθμητικός μέσος των παρατηρήσεων $y_1=cx_1, y_2=cx_2, \dots, y_n=cx_n$ θα είναι ίσος με $\bar{y} = c\bar{x}$.

M₆. Έστω n σύνολα δεδομένων, εκ των οποίων το πρώτο περιλαμβάνει m_1 μετρήσεις με αριθμητικό μέσο $\bar{x}_1$, το δεύτερο περιλαμβάνει m_2 μετρήσεις με αριθμητικό μέσο $\bar{x}_2$ κ.ο.κ. και το τελευταίο περιέχει m_n μετρήσεις με αντίστοιχο αριθμητικό μέσο $\bar{x}_n$. Τότε ο αριθμητικός μέσος όλων των μετρήσεων, πλήθους $m=m_1+m_2+\dots+m_n$, είναι ίσος με:

$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + \dots + m_n\bar{x}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i\bar{x}_i.$$

14.4.2 Διάμεσος (δ) και εκατοστημόρια.

Η διάμεσος ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή που χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων δεδομένων σε δύο ισοπληθή υποσύνολα, έτσι ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες με τη διάμεσο και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες ή ίσες μ' αυτήν. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι διάμεσος (δ) ενός συνόλου n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε **αύξουσα σειρά** ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο ενός συνόλου n παρατηρήσεων εργαζόμαστε ως εξής:

- Διατάσσουμε τα δεδομένα κατά σειρά μεγέθους, από την παρατήρηση με τη μικρότερη τιμή μέχρι την παρατήρηση με τη μεγαλύτερη τιμή.
- Εντοπίζουμε το θετικό ακέραιο αριθμό

$$v_0 = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{αν } n \text{ περιττός,} \\ \frac{n}{2}, & \text{αν } n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

- Η διάμεσος (δ) των δεδομένων μας θα είναι η τιμή της παρατηρήσεως του διατεταγμένου δείγματος, η οποία κατέχει τη θέση v_0 , αν το n είναι περιττός ή το ημιάθροισμα των παρατηρήσεων, οι οποίες κατέχουν τις θέσεις v_0 και v_0+1 του διατεταγμένου δείγματος, αν το n είναι άρτιος.

Για παράδειγμα, η διάμεσος των επομένων $n = 7$ παρατηρήσεων:

90 55 50 75 57 80 60,

για τις οποίες το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα είναι το:

50 55 57 **60** 75 80 90

βρίσκεται αν υπολογίσουμε τη θέση της διαμέσου:

$$v_0 = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

και θεωρήσουμε την τέταρτη κατά σειρά παρατήρηση του διατεταγμένου δείγματος. Επομένως $\delta = 60$.

Ομοίως η διάμεσος των επομένων $\nu = 8$ παρατηρήσεων

90 55 50 75 57 80 60 95,

για τις οποίες το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα είναι το:

50 55 57 **60** **75** 80 90 95,

βρίσκεται αν υπολογίσουμε το ημίαθροισμα της 4ης και 5ης παρατηρήσεως του τελευταίου δείγματος,

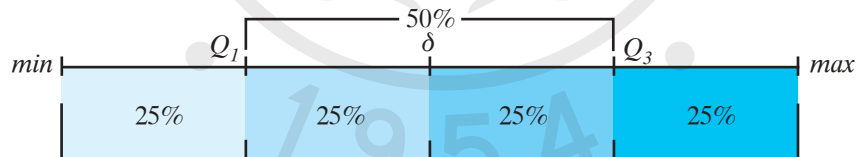
αφού τώρα το ν είναι άρτιος αριθμός και $\nu_0 = \frac{\nu}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Επομένως:

$$\delta = \frac{60 + 75}{2} = 67,5.$$

Παρατηρήστε ότι στη δεύτερη περίπτωση η προκύπτουσα τιμή της διαμέσου (67,5) δεν είναι μια τιμή που εμφανίζεται στις παρατηρήσεις μας.

Η διάμεσος είναι ένα πολύ χρήσιμο μέτρο θέσεως, ιδιαίτερα στην περίπτωση που στα δεδομένα υπάρχουν έκτροπες (ακραίες) παρατηρήσεις, δηλαδή παρατηρήσεις που είναι είτε υπερβολικά μεγάλες είτε υπερβολικά μικρές σε σχέση με τον κύριο όγκο των δεδομένων. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να αποφεύγεται η χρήση του μέσου όρου, ο οποίος επηρεάζεται υπερβολικά από τις ακραίες τιμές και στη θέση του να χρησιμοποιείται η διάμεσος. Για παράδειγμα, αν στο τελευταίο παράδειγμα των οκτώ παρατηρήσεων αντικαταστήσουμε την τιμή 95 με την τιμή 9500, η διάμεσος των $\nu = 8$ παρατηρήσεων δεν θα αλλάξει, ενώ ο μέσος όρος θα εκτιναχθεί από την τιμή 70,25 (που είχε στα αρχικά δεδομένα) στην τιμή 1184!

Όπως ορίσαμε τη διάμεσο δ , έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες του δ και το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες του δ , μπορούμε ανάλογα να ορίσουμε και τα **εκατοστημόρια** p_a , $a=1,2,\dots,99$ ως την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ $a\%$ των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του p_a και το πολύ $(100-a)\%$ των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν. Τα εκατοστημόρια p_{25} , p_{50} , p_{75} καλούνται **τεταρτημόρια**, αφού χωρίζουν το διατεταγμένο δείγμα σε 4 ισομεγέθη τμήματα, και συμβολίζονται με Q_1 , Q_2 , Q_3 , αντίστοιχα (σχ. 14.4α).



Σχ. 14.4α.

Προφανώς ισχύει ότι $Q_2 = p_{50} = \delta$. Αρκετά συχνά, για λόγους ευκολίας ο υπολογισμός των τεταρτημορίων Q_1 και Q_3 γίνεται κατά προσέγγιση, υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις $\nu = 40$ παρατηρήσεις του πίνακα 14.3.1, οι οποίες αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση σ' ένα επιβατικό πλοίο. Διατάσσοντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά παίρνουμε:

241, 247, 252, 253, 255, 256, 256, 258, 262, 263,
 264, 264, 265, 265, 265, 265, 265, 265, 267, 270,
 272, 273, 275, 276, 276, 277, 277, 277, 277, 277,
 277, 277, 278, 279, 281, 285, 287, 289, 292, 300.

Δεδομένου ότι έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων, η διάμεσος θα βρίσκεται αν υπολογίσουμε το

ημιάθροισμα της 20ης και 21ης παρατηρήσεως των διατεταγμένων δεδομένων, δηλαδή:

$$\delta = Q_2 = p_{50} = \frac{270 + 272}{2} = 271.$$

Το πρώτο τεταρτημόριο μπορεί να βρεθεί θεωρώντας το πρώτο μισό τμήμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή τις πρώτες 20 παρατηρήσεις:

241, 247, 252, 253, 255, 256, 256, 258, 262, 263,
264, 264, 265, 265, 265, 265, 265, 265, 267, 270

και υπολογίζοντας τη διάμεσό τους, η οποία θα είναι ίση με το ημιάθροισμα της 10^{ης} και 11^{ης} παρατηρήσεως. Άρα:

$$Q_1 = p_{25} = \frac{263 + 264}{2} = 263,5.$$

Ομοίως, θεωρώντας το δεύτερο μισό τμήμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή τις 20 παρατηρήσεις

272, 273, 275, 276, 276, 277, 277, 277, 277,
277, 277, 278, 279, 281, 285, 287, 289, 292, 300

βρίσκουμε

$$Q_3 = p_{75} = \frac{277 + 277}{2} = 277.$$

Αν θέλαμε να υπολογίσουμε τα εκατοστημόρια p_{10} και p_{90} θα έπρεπε να ελέγξουμε πού αντιστοιχεί το 10% και 90% των $n = 40$ παρατηρήσεων του δείγματος, δηλαδή το $0,01 \cdot 40 = 4$ και $0,09 \cdot 40 = 36$. Το p_{10} θα είναι εκείνη η τιμή, για την οποία το πολύ 4 παρατηρήσεις είναι μικρότερες της και το πολύ $40 - 4 = 36$ είναι μεγαλύτερες, οπότε θα πρέπει να πάρουμε το ημιάθροισμα της 4^{ης} και 5^{ης} τιμής του διατεταγμένου δείγματος, δηλαδή:

$$p_{10} = \frac{253 + 255}{2} = 254.$$

Αντίστοιχα, το p_{90} θα είναι εκείνη η τιμή, για την οποία το πολύ 36 παρατηρήσεις είναι μικρότερες της και το πολύ $40 - 36 = 4$ είναι μεγαλύτερες, οπότε θα πρέπει να πάρουμε το ημιάθροισμα της 36^{ης} και 37^{ης} τιμής του διατεταγμένου δείγματος, δηλαδή:

$$p_{90} = \frac{285 + 287}{2} = 286.$$

Όταν τα δεδομένα που μας ενδιαφέρουν δίνονται με τη μορφή πινάκων συχνοτήτων που έχουν προκύψει μετά από ομαδοποίηση (βλ. παράγρ. 14.3), τότε δεν γνωρίζουμε ούτε τις ακριβείς τιμές όλων των παρατηρήσεων, ούτε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι συχνότητες μέσα στα διαστήματα των τάξεων της κατανομής. Στην περίπτωση αυτή, δεν μπορούμε να διατάξουμε τις παρατηρήσεις μία προς μία κατά μέγεθος, ώστε να προσδιορίσουμε τη μεσαία διατεταγμένη παρατήρηση. Μπορούμε ωστόσο να χρησιμοποιήσουμε τις αθροιστικές συχνότητες (οι οποίες μας δίνουν το πλήθος ή το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή μέχρι κάποιο όριο) για να υποκαταστήσουμε αυτήν τη διαδικασία και να προσδιορίσουμε κατά προσέγγιση τη διάμεσο (υποθέτοντας ότι οι τιμές του χαρακτηριστικού που παρατηρούμε κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στις κλάσεις της ομαδοποίησης).

Τα βήματα υπολογισμού της διαμέσου στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων που έχουν προέλθει από n παρατηρήσεις είναι τα εξής:

- α) Υπολογίζουμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες που αντιστοιχούν στα ομαδοποιημένα δεδομένα.

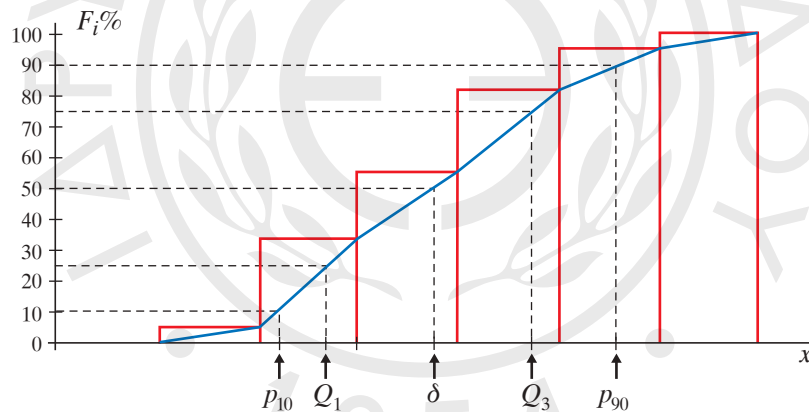
β) Εντοπίζουμε την κλάση, η οποία περιέχει τη διάμεσο, δηλαδή τη μεσαία παρατήρηση αν το n είναι περιττός ή τις δύο μεσαίες, αν το n είναι άρτιος. Έστω ότι αυτή είναι η i κλάση και ας συμβολίσουμε με L_i το κάτω όριο (κάτω άκρο) της κλάσεως αυτής, με F_i την αθροιστική σχετική συχνότητα της ίδιας κλάσεως και με F_{i-1} την αθροιστική σχετική συχνότητα της προηγούμενης κλάσεως απ' αυτήν, στην οποία εντοπίστηκε η διάμεσος.

γ) Υπολογίζουμε τη διάμεσο με τον (προσεγγιστικό) τύπο:

$$\delta = L_i + \frac{0,5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} c = L_i + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} c ,$$

όπου c το εύρος της κλάσεως τάξεως, στην οποία εντοπίστηκε η διάμεσος (εμείς θα εργαστούμε με κλάσεις ίσου εύρους, οπότε το c θα είναι το κοινό εύρος όλων των κλάσεων).

Με ανάλογο τύπο μπορούν να υπολογισθούν τα τεταρτημόρια και γενικότερα τα εκατοστημόρια P_a εντοπίζοντας την κλάση που περιέχει την αντίστοιχη παρατήρηση που μας ενδιαφέρει κάθε φορά και χρησιμοποιώντας στον παραπάνω τύπο την ποσότητα $a/100$ αντί του 0,5 που εμφανίζεται στον αριθμητή του κλάσματος. Η γεωμετρική ερμηνεία των τύπων υπολογισμού δίνεται στο σχήμα 14.4β, όπου έχει απεικονισθεί ένα ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Σχ. 14.4β.

14.4.3 Επικρατούσα τιμή ή κορυφή (M_0).

Επικρατούσα τιμή ή κορυφή M_0 ενός συνόλου δεδομένων ονομάζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφανίσεως στο δείγμα, δηλαδή η τιμή που εμφανίζεται περισσότερες φορές σ' αυτό. Είναι φανερό ότι η επικρατούσα τιμή:

α) Δεν είναι απαραίτητα μοναδική (μάλιστα, όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή) και

β) μπορεί να οριστεί τόσο στην περίπτωση ποσοτικών, όσο και στην περίπτωση ποιοτικών δεδομένων, αντίθετα με τα άλλα μέτρα θέσεως που έχουμε εξετάσει μέχρι τώρα, τα οποία ορίζονται μόνο για ποσοτικά δεδομένα.

Για παράδειγμα η επικρατούσα τιμή για τη μεταβλητή «Επάγγελμα» του πίνακα 14.2.2 είναι η τιμή «Δημόσιος υπάλληλος» με συχνότητα 8 (και σχετική συχνότητα 40%), όπως φαίνεται στον πίνακα 14.2.3. Επίσης η επικρατούσα τιμή για τη μεταβλητή «Μηνιαία χρήση δρομολογίου» του πίνακα 14.2.2 είναι η τιμή $t_2=8$ επίσης με συχνότητα 8 (και σχετική συχνότητα 40%), όπως φαίνεται στον πίνακα 14.2.4.

Τα βήματα υπολογισμού της επικρατούσας τιμής στην περίπτωση που έχουμε ποσοτικά δεδομένα ομαδοποιημένα σε κλάσεις ίσου εύρους c είναι τα εξής:

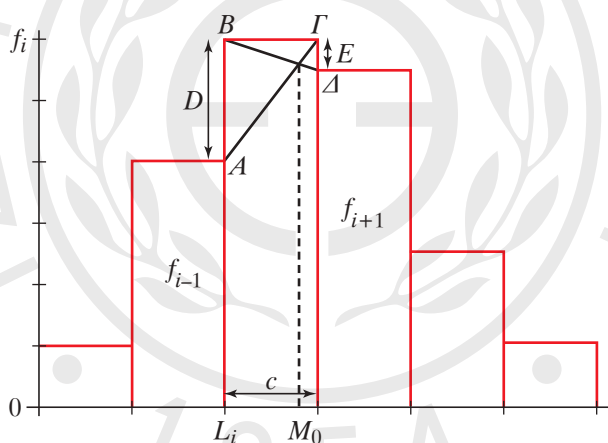
- Υπολογίζουμε τις σχετικές συχνότητες που αντιστοιχούν στα ομαδοποιημένα δεδομένα.
- Εντοπίζουμε την **επικρατούσα κλάση**, δηλαδή την κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Έστω ότι αυτή είναι η i κλάση και ας συμβολίσουμε με L_i το κάτω όριο (κάτω άκρο) της κλάσεως αυτής, με f_i τη σχετική συχνότητα της ίδιας κλάσεως και με f_{i-1} τη σχετική συχνότητα της προηγούμενης κλάσεως και με f_{i+1} τη σχετική συχνότητα της επόμενης κλάσεως.
- Υπολογίζουμε την κορυφή ή την επικρατούσα τιμή M_0 με χρήση του (προσεγγιστικού) τύπου:

$$M_0 = L_i + \frac{D}{D+E}c,$$

όπου $D = f_i - f_{i-1}$ και $E = f_i - f_{i+1}$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω τύπου υπολογισμού δίνεται στο σχήμα 14.4γ όπου έχει απεικονισθεί ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις μέσα στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται ως η τετμημένη του σημείου τομής των ευθυγράμμων τμημάτων AG και BD .



Σχ. 14.4γ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14.4.1.

Ο πίνακας συχνοτήτων 14.4.2 δίνει την κατανομή του χρόνου X (σε min) που χρειάστηκαν 100 σπουδαστών της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού για να λύσουν ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο, τη διάμεσο και τον επικρατέστερο χρόνο για τη λύση του προβλήματος. Επίσης να βρείτε το χρόνο εντός του οποίου το 25% των μαθητών είχε κατορθώσει να ολοκληρώσει τη λύση του προβλήματος.

Λύση.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής συμπληρώνουμε τις στήλες του πίνακα 14.4.3. Επομένως, ο μέσος χρόνος για τη λύση του προβλήματος είναι ίσος με:

Πίνακας 14.4.2

i	t_i	v_i
1	30	6
2	35	14
3	45	20
4	50	36
5	60	10
6	75	12
7	90	2

$$\bar{x} = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_7 v_7}{v_1 + v_2 + \dots + v_7} = \frac{5050}{100} = 50,5.$$

Προκειμένου να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της διαμέσου παρατηρούμε ότι έχουμε $n=100$ τιμές που βρίσκονται ήδη σε αύξουσα σειρά, οπότε η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα της $50^{\text{ης}}$ και $51^{\text{ης}}$ παρατηρήσεως. Και οι δύο αυτές παρατηρήσεις είναι, σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων, ίσες με 50, οπότε $\delta = \frac{50+50}{2} = 50 \text{ min.}$

Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, οπότε $M_0=50\text{min}$ (με αντίστοιχη συχνότητα $v_4=36$).

Για να βρεθεί σε πόσο χρόνο κατόρθωσε να λύσει το πρόβλημα το 25% των μαθητών, θα πρέπει να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 των δεδομένων. Αφού $n/4=100/4=25$, θα πρέπει να εξετάσουμε την $25^{\text{η}}$ και $26^{\text{η}}$ παρατήρηση του δείγματος. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων που δόθηκε, όλες οι παρατηρήσεις από την $21^{\text{η}}$ μέχρι την $40^{\text{η}}$ είναι ίσες με 45, οπότε $Q_1=45$.

Πίνακας 14.4.3

i	t_i	v_i	$t_i v_i$
1	30	6	180
2	35	14	490
3	45	20	900
4	50	36	1800
5	60	10	600
6	75	12	900
7	90	2	180
Σύνολο		100	5050

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14.4.2.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 14.3.2 (ομαδοποιημένα δεδομένα), να υπολογίσετε την κορυφή για τις $n = 40$ παρατηρήσεις του πίνακα 14.3.1, οι οποίες αφορούν στην ημερήσια επιβατική κίνηση ενός επιβατικού πλοίου.

Λύση.

Για τον υπολογισμό της κορυφής M_0 παρατηρούμε αρχικά ότι η επικρατούσα κλάση, δηλαδή η κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα (14), είναι η τέταρτη και έχει ως κάτω άκρο το $L_4=270$. Έχουμε επίσης $f_4=14, f_3=12, f_5=4$, και $c=10$, οπότε:

$$D = f_i - f_{i-1} = f_4 - f_3 = 14 - 12 = 2, \quad E = f_i - f_{i+1} = f_4 - f_5 = 12 - 4 = 8$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο $M_0 = L_i + \frac{D}{D+E}c$ προκύπτει:

$$M_0 = L_4 + \frac{D}{D+E}c = 270 + \frac{2}{2+8} \cdot 10 = 272.$$

Ασκήσεις.

14.4.1. Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο, την επικρατούσα τιμή (αν υπάρχει) και τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

- α) 4 0 2 1 4 3 2 3 3 4 4 11 5 4 7 2
- β) 20, 0, 7, 2, 7, 1, 90, 4
- γ) 2, 3, 1, 5, 2, 7, 1, 2, 4, 1, 5, 9

14.4.2. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 9 άτομα για να λύσουν ένα απλό πρόβλημα ήταν: 3, 5, α, 36, 6, 7, 4, 7, 8 με μέση τιμή $\bar{x}=9$.

- α) Να βρείτε τον χρόνο α που χρειάστηκε το 3^ο άτομο για να λύσει το πρόβλημα.
- β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δεδομένων.

γ) Να υπολογίσετε τη κορυφή των δεδομένων.

14.4.3. Για τον έλεγχο της καταναλώσεως καυσίμου (ίδιου τύπου) δύο αυτοκινήτων A και B μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το A και σε πέντε διαδρομές για το B . Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 km) για το αυτοκίνητο A ήταν 9, 6, 7, 9, 9, 8, ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο B ήταν 8, 10, 7, 8, 12.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν στο αυτοκίνητο A .
- β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν στο αυτοκίνητο B .
- γ) Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο A και όχι το B , ποιο μέτρο θέσεως (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο B και όχι το A , ποιο μέτρο θέσεως (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

14.4.4. Μια εταιρεία απασχολεί 15 υπαλλήλους, εκ των οποίων οι 8 εργάζονται στο τμήμα A και οι 7 στο τμήμα B . Οι μισθοί (σε €) των 8 εργαζομένων στο τμήμα A είναι:

1350, 1450, 1470, 1370, 1410, 1390, 1430, 1410,

ενώ των 7 εργαζομένων στο τμήμα B είναι:

1390, 1150, 1310, 1510, 1230, 1470, 1390

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα A της εταιρείας.
- β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα B της εταιρείας.
- γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων της εταιρείας.

14.4.5. Ένα σύνολο δεδομένων αποτελείται από πέντε αριθμούς, που ο καθένας απέχει από τον επόμενο του ίση απόσταση. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς αν ο αριθμητικός μέσος τους είναι ίσος με 10 και η διαφορά του μικρότερου από το μεγαλύτερο είναι ίση με 8.

14.4.6. Η μέση βαθμολογία ενός σπουδαστή της Ακαδημίας του Εμπορικού Ναυτικού σε 10 μαθήματα είναι 18. Ποια θα είναι η μέση βαθμολογία του:

- α) Αν στα επόμενα δύο μαθήματα λάβει βαθμολογία 17 και 20;
- β) Αν διαγράψει ένα από τα μαθήματά του, στο οποίο είχε επιτύχει βαθμολογία 16;
- γ) Αν ξαναδώσει ένα μάθημα, στο οποίο είχε επιτύχει βαθμολογία 16 και η νέα βαθμολογία του είναι 18;

14.4.7. Η μέση ηλικία των ανδρών ενός πληρώματος πλοίου είναι 40 χρόνια, ενώ των γυναικών είναι 36 χρόνια. Ποια είναι η μέση ηλικία του πληρώματος του πλοίου αν:

- α) Σε αυτό υπηρετούν 20 άντρες και 16 γυναίκες;
- β) Το πλήθος των αντρών και των γυναικών που υπηρετούν στο πλοίο είναι ίδιο;
- γ) Το πλήθος των αντρών που υπηρετούν στο πλοίο είναι διπλάσιο από το πλήθος των γυναικών;

14.4.8. Ένα τουριστικό γραφείο απασχολεί 10 υπαλλήλους στο τμήμα A με μέσο (μηνιαίο) μισθό 1200€, 20 υπαλλήλους στο τμήμα B με μέσο μισθό 1500€ και 30 υπαλλήλους στο τμήμα Γ . Αν ο μέσος μισθός των 45 υπαλλήλων που απασχολούνται και στα τρία τμήματα του γραφείου είναι 1700€, να υπολογίσετε το μέσο μισθό των υπαλλήλων που απασχολούνται στο τμήμα Γ του γραφείου.

14.4.9. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δεδομένα:

5, 3, 6, 9, 8, 1, 17.

Στη συνέχεια, χωρίς να γίνουν αναλυτικοί υπολογισμοί με χρήση των τύπων της μέσης τιμής και της διαμέσου, να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα επόμενα δεδομένα:

- α) 7, 5, 8, 11, 10, 3, 19
 β) 10, 6, 12, 18, 16, 2, 34
 γ) 17, 11, 20, 29, 26, 5, 53

14.4.10. Ένας επιβάτης πλοίου αγόρασε 10 είδη από το κατάστημα που υπήρχε στο πλοίο, τα οποία κόστιζαν 50, 25, 25, 65, 70, 15, 25, 95, 37, 33€ αντίστοιχα (προ ΦΠΑ).

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.
 β) Πώς μεταβάλλονται οι τιμές που προέκυψαν από το ερώτημα (α), αν προσθέσουμε και το ΦΠΑ, που είναι 19%;
 γ) Αν όλα τα είδη είχαν προσφερθεί με έκπτωση 3€, ποια θα ήταν η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή;

14.4.11. Στον πίνακα 14.4.4 δίνεται η κατανομή της ηλικίας των ατόμων μιας πόλεως. Να υπολογίσετε:

- α) τη μέση ηλικία των ατόμων της πόλεως.
 β) τη διάμεσο της ηλικίας των ατόμων της πόλεως.
 γ) την επικρατούσα τιμή για την ηλικία των ατόμων της πόλεως.
 Ποιες θα είναι οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων μετά από πάροδο 5 ετών;

14.4.12. Δίνεται ο πίνακας 14.4.5 συχνοτήτων μιας μεταβλητής X .

- α) Να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν στον πίνακα.
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.
 γ) Να υπολογίσετε τη διασπορά των παρατηρήσεων.

Πίνακας 14.4.4

Ηλικία (σε έτη)	Συχνότητα (σε χιλιάδες)
0–20	8
20–40	12
40–60	17
60–80	6
80–100	1

Πίνακας 14.4.5

Τιμές της μεταβλητής x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i n_i$
1				10
2			35	
3				
Άθροισμα	$n=50$	1		

14.5 Μέτρα διακυμάνσεως.

Αφού παρουσιάσαμε τα κυριότερα μέτρα θέσεως θα προχωρήσουμε τώρα στην παρουσίαση των **μέτρων διακυμάνσεως** ή **μεταβλητότητας**. Όπως αναφέρθηκε ήδη στην προηγούμενη παράγραφο, τα μέτρα διακυμάνσεως είναι αριθμητικά μέτρα, τα οποία μας παρέχουν συνοπτικές πληροφορίες σχετικά με το κατά πόσον οι τιμές μιας μεταβλητής έχουν την τάση να συγκεντρώνονται γύρω από ένα μέτρο θέσεως ή να διασπείρονται (αποκλίνουν) μακριά από αυτό. Τα σπουδαιότερα μέτρα διακυμάνσεως είναι το **εύρος**, η **ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση**, η **διασπορά** και η **τυπική απόκλιση**.

Το απλούστερο μέτρο διακυμάνσεως είναι το **εύρος** ή **κύμανση** (R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατηρήσεως από τη μέγιστη παρατήρηση. Για παράδειγμα, στα δεδομένα επιβατικής κινήσεως του πίνακα 14.3.1, κατά την υλοποίηση της διαδικασίας ομαδοποίησης είχαμε υπολογίσει το

εύρος $r = 300 - 241 = 59$. Όταν μας δοθούν ομαδοποιημένα δεδομένα, χωρίς να είναι διαθέσιμες οι αρχικές μετρήσεις, ως εύρος θεωρούμε τη διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσεως από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσεως (η τιμή αυτή μπορεί να διαφέρει ελαφρώς από το πραγματικό εύρος που θα λαμβάναμε αν είχαμε διαθέσιμα τα αρχικά δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν).

Ένα δεύτερο μέτρο διακυμάνσεως είναι το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος** Q , το οποίο ορίζεται ως η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 , δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

[μερικές φορές χρησιμοποιείται ως μέτρο διασποράς και η ημιδιαφορά $(Q_3 - Q_1)/2$ μεταξύ του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου, η οποία ονομάζεται **ημιενδοτεταρτημοριακό εύρος**, ωστόσο στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου θα περιοριστούμε στη χρήση του Q μόνο]. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q μάς δίνει το εύρος ενός διαστήματος, το οποίο εκτείνεται αριστερά και δεξιά από τη διάμεσο δ των δεδομένων μας, το οποίο περιλαμβάνεται το 50% των παρατηρήσεων. Συνεπώς, όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συγκέντρωση των τιμών γύρω από τη διάμεσο και άρα μικρότερη η διακύμανση των τιμών της μεταβλητής. Για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1 βρήκαμε στην παράγραφο 14.4 ότι $Q_1 = 263,5$, $Q_3 = 277$ οπότε $Q = Q_3 - Q_1 = 277 - 263,5 = 13,5$.

Το πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο μεταβλητότητας για ποιοτικές μεταβλητές είναι η **διασπορά**, η οποία ορίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των τετραγώνων των διαφορών (αποκλίσεων), των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό μέσο $\bar{x}$ της μεταβλητής αυτής. Έτσι, αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριστικό) X , τότε η διασπορά της X θα συμβολίζεται με s^2 ή, αν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, με s^2 και θα υπολογίζεται από τον τύπο¹

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στις ακόλουθες δύο μορφές, οι οποίες διευκολύνουν σημαντικά τους αριθμητικούς υπολογισμούς

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right\}.$$

Στην περίπτωση που για τα δεδομένα που συλλέξαμε έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας συχνοτήτων, η διασπορά s^2 μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (t_i - \bar{x})^2 v_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k t_i^2 v_i - (\bar{x})^2, \quad s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^k t_i^2 v_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k t_i v_i \right)^2 \right\}$$

ή ισοδύναμα τους:

$$s^2 = \sum_{i=1}^k (t_i - \bar{x})^2 f_i, \quad s^2 = \sum_{i=1}^k t_i^2 f_i - (\bar{x})^2, \quad s^2 = \sum_{i=1}^k t_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^k t_i f_i \right)^2,$$

όπου $t_1, t_2, \dots, t_k$ είναι οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_k$.

Οι τελευταίοι τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ομαδοποιημένα δεδομένα, θεωρώντας

1. Πολλές φορές, ιδιαίτερα όταν έχουμε μικρά δείγματα παρατηρήσεων, στον τύπο της διακυμάνσεως χρησιμοποιείται ως παρονομαστής η ποσότητα $n-1$ αντί του n , για λόγους που έχουν να κάνουν με τις στατιστικές ιδιότητες του s^2 (αποδεικνύεται ότι τότε γίνεται πιο σωστή εκτίμηση της άγνωστης διασποράς που υπάρχει στον πληθυσμό από τον οποίο λήφθηκε το δείγμα). Στο παρόν εγχειρίδιο θα χρησιμοποιούμε παντού τον τύπο με το n και όχι το $n-1$.

Πίνακας 14.5.1

i	Κεντρικές τιμές t_i	v_i	$t_i v_i$	$t_i^2 v_i$
1	245	2	490	120050
2	255	6	1530	390150
3	265	12	3180	842700
4	275	14	3850	1058750
5	285	4	1140	324900
6	295	2	590	174050
	Σύνολο	$v=40$	$\sum t_i v_i = 10780$	$\sum t_i^2 v_i = 2910600$

ότι τα $t_1, t_2, \dots, t_x$ είναι τα αντίστοιχα κέντρα των κλάσεων. Στην περίπτωση αυτή η τιμή που θα προκύψει θα αποτελεί μια προσέγγιση της διακυμάνσεως και όχι την ακριβή τιμή, η οποία δεν μπορεί να υπολογιστεί αν δεν μας δοθούν οι πραγματικές παρατηρήσεις (η διαφορά οφείλεται φυσικά στην απώλεια πληροφορίας λόγω ομαδοποιήσεως των παρατηρήσεων).

Για παράδειγμα, η διασπορά της ημερήσιας επιβατικής κινήσεως με βάση τα δεδομένα που δίνονται στον πίνακα 14.3.1 είναι ίση με (υπενθυμίζουμε ότι $\bar{x} = 269$)

$$s^2 = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(252 - 270)^2 + (255 - 270)^2 + \dots + (277 - 270)^2}{40} = \frac{6066}{40} = 151,65.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τα ομαδοποιημένα δεδομένα και τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων 14.3.2, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διασπορά της ημερήσιας επιβατικής κινήσεως για τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1, κατασκευάζοντας τον πίνακα 14.5.1. με βάση τον οποίο έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{40} \left\{ \sum_{i=1}^6 t_i^2 v_i - \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^6 t_i v_i \right)^2 \right\} = \frac{1}{40} \left\{ 2910600 - \frac{10780^2}{40} \right\} = \frac{5390}{40} = 134,75.$$

Για τη διασπορά ισχύουν οι επόμενες χρήσιμες ιδιότητες:

- Δ_1 . Αν όλες οι τιμές των διαθεσίμων παρατηρήσεων είναι ίσες, δηλαδή $x_1 = x_2 = \dots = x_v = c$, τότε η διασπορά τους είναι ίση με μηδέν.
- Δ_2 . Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι ίση με ns^2 , δηλαδή:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 = ns^2.$$

- Δ_3 . Αν σε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής προσθέσουμε μία σταθερή ποσότητα, έστω c , τότε η διασπορά τους δεν θα μεταβληθεί, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_v$ έχουν διασπορά s_X^2 , τότε οι παρατηρήσεις $y_1 = x_1 + c, y_2 = x_2 + c, \dots, y_v = x_v + c$ θα έχουν διασπορά $s_Y^2 = s_X^2$.

- Δ₄** Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε η διασπορά τους πολλαπλασιάζεται με το τετράγωνο της ποσότητας αυτής, δηλαδή αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ έχουν διασπορά s_X^2 , τότε η διασπορά των παρατηρήσεων $y_1 = cx_1, y_2 = cx_2, \dots, y_n = cx_n$ θα είναι ίση με $s_Y^2 = c^2 s_X^2$.
- Δ₅** Έστω n σύνολα δεδομένων, εκ των οποίων το πρώτο περιλαμβάνει m_1 μετρήσεις με διασπορά s_1^2 , το δεύτερο περιλαμβάνει m_2 μετρήσεις με διασπορά s_2^2 , κ.ο.κ. και το τελευταίο περιέχει m_n μετρήσεις με αντίστοιχη διασπορά s_n^2 . Τότε η διασπορά s^2 όλων των μετρήσεων ($m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$) είναι ίση με:

$$s^2 = \frac{m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 + \dots + m_n s_n^2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i s_i^2.$$

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της διασποράς s^2 είναι ότι δεν εκφράζεται στις μονάδες, στις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις που μελετάμε. Έτσι, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε m, η διασπορά θα εκφράζεται σε m^2 , αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε sec, η διασπορά θα εκφράζεται σε sec^2 κ.ο.κ.. Ένας τρόπος για να εξαλειφθεί το πρόβλημα αυτό είναι να θεωρήσουμε ως μέτρο διασποράς τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακυμάνσεως, η οποία προφανώς θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μετρήσεως με το χαρακτηριστικό που μελετάμε (όπως ακριβώς συμβαίνει και με όλα τα μέτρα θέσεως που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο). Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **τυπική απόκλιση** και συμβολίζεται με s_X ή απλά με s , δηλαδή $s = \sqrt{s^2}$.

Για παράδειγμα, η τυπική απόκλιση για την ημερήσια επιβατική κίνηση που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 14.3.1 είναι ίση με $s = \sqrt{151,65} \approx 12,3$, αν αυτή υπολογιστεί από τα πραγματικά δεδομένα ή $s = \sqrt{134,75} \approx 11,6$, αν υπολογιστεί από τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 14.3.2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14.5.1.

Στο παράδειγμα 14.4.1. δόθηκε ο πίνακας συχνοτήτων που περιγράφει την κατανομή του χρόνου X (σε min) που χρειάστηκαν 100 σπουδαστές της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού για να λύσουν ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση του χρόνου για τη λύση του προβλήματος.

Λύση.

Αφού η μεγαλύτερη τιμή είναι το 90 και η μικρότερη το 30, το εύρος των παρατηρήσεων θα είναι ίσο με:

$$R = 90 - 30 = 60 \text{ min.}$$

Για τον υπολογισμό του ενδοτεταρτημοριακού εύρους $Q = Q_3 - Q_1$ χρειαζόμαστε τις τιμές του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 και του τρίτου τεταρτημορίου Q_3 . Στη λύση του παραδείγματος 14.4.1 είχαμε ήδη βρει την τιμή $Q_1 = 45$. Επίσης, αφού $3n/4 = 3 \cdot 100/4 = 75$, για να υπολογίσουμε το Q_3 θα πρέπει να εξετάσουμε την 75^η και 76^η παρατήρηση του δείγματος. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων που δόθηκε, όλες οι παρατηρήσεις από την 31^η μέχρι την 76^η είναι ίσες με 50, οπότε $Q_3 = 50$. Άρα:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 50 - 45 = 5.$$

Για τον υπολογισμό της διακυμάνσεως και στη συνέχεια της τυπικής αποκλίσεως θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} t_i^2 v_i - \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^{\kappa} t_i v_i \right)^2 \right\}, s = \sqrt{s^2}.$$

Με βάση τον πίνακα 14.5.2 βρίσκουμε:

$$s^2 = \frac{1}{100} \left\{ \sum_{i=1}^7 t_i^2 v_i - \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^7 t_i v_i \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{100} \left\{ 272750 - \frac{5050^2}{100} \right\} = \frac{17725}{100} = 177,25.$$

Επομένως, η διασπορά της μεταβλητής X είναι $s^2 = 177,25$ και η τυπική της απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{177,25} = 13,31$.

Πίνακας 14.5.2

i	t_i	v_i	$t_i v_i$	$t_i^2 v_i$
1	30	6	180	5400
2	35	14	490	17150
3	45	20	900	40500
4	50	36	1800	90000
5	60	10	600	36000
6	75	12	900	67500
7	90	2	180	16200
Σύνολο		100	5050	272750

Ασκήσεις.

14.5.1. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της ασκήσεως 14.4.2. Ποιο από τα μέτρα αυτά θεωρείτε ότι είναι το πλέον κατάλληλο για την περιγραφή της κυμάνσεως (μεταβλητότητας) των δεδομένων;

14.5.2. Δίνονται τα παρακάτω τρία σύνολα δεδομένων:

10, 30, 50, 60, 70, 90, 110

10, 59, 59, 60, 61, 61, 110

10, 11, 22, 60, 98, 109, 110.

- Να επαληθεύσετε ότι καθένα από τα τρία σύνολα δεδομένων έχει την ίδια μέση τιμή.
- Παρατηρώντας με το «μάτι» τα δεδομένα να αποφασίσετε σε ποιο από αυτά εμφανίζεται η μεγαλύτερη και σε ποιο η μικρότερη διασπορά.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση των δεδομένων αυτών το εύρος;
- Να υπολογίσετε όλα τα μέτρα διασποράς που γνωρίζετε και για τα τρία σύνολα δεδομένων.
- Ποιο μέτρο διασποράς θεωρείτε το πλέον κατάλληλο για τη σύγκριση των δεδομένων;

14.5.3. Να αποδείξετε ότι εάν από όλες τις τιμές ενός δείγματος αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική τους απόκλιση, τότε νέες τιμές που θα προκύψουν έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Οι μετασχηματισμένες τιμές που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο ονομάζονται τυποποιημένες τιμές. Να υπολογίσετε τις τυποποιημένες τιμές των τριών συνόλων δεδομένων που δόθηκαν στην άσκηση 14.5.2. Τι παρατηρείτε;

14.5.4. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της ασκήσεως 14.4.7. Στη συνέχεια, χωρίς να γίνουν ξανά αναλυτικοί υπολογισμοί, να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα που δίνονται στα ερωτήματα (α) και (β).

14.5.5. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση

για τα δεδομένα της ασκήσεως 14.4.14. Ποιες θα είναι οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων μετά από πάροδο 5 ετών;

14.5.6. Να υπολογίσετε το εύρος, τη διασπορά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση για τα δεδομένα της ασκήσεως 14.4.10. Ποιες θα ήταν οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων αν το ύψος το μετρούσαμε σε cm (αντί για m);

14.5.7. Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους αριθμούς α, β αν είναι γνωστό ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $\alpha, \beta, 5, 7, 8$ είναι ίσος με 6 και η τυπική τους απόκλιση είναι ίση με $\sqrt{2}$.

14.5.8. Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχολήσεως κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο πίνακας 14.5.3.

α) Να βρείτε τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων.

β) Να υπολογίσετε τη μέση υπερωριακή απασχόληση.

γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση της υπερωριακής απασχολήσεως.

δ) Να υπολογίσετε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και στη συνέχεια το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

14.5.9. Στον πίνακα 14.5.4 δίνεται η κατανομή του ύψους 50 ατόμων που επιλέχτηκαν τυχαία από το ακροατήριο μιας ομιλίας. Να υπολογίσετε:

α) Το μέσο ύψος των ατόμων του δείγματος.

β) Το διάμεσο ύψος των ατόμων του δείγματος.

γ) Την επικρατούσα τιμή για το ύψος των ατόμων του δείγματος.

δ) Το ύψος, κάτω από το οποίο βρίσκονται το 25% των παρατηρήσεων του δείγματος.

ε) Το ύψος, κάτω από το οποίο βρίσκονται το 75% των παρατηρήσεων του δείγματος.

στ) Το ύψος, κάτω από το οποίο βρίσκονται το 90% των παρατηρήσεων του δείγματος.

ζ) Την τυπική απόκλιση του ύψους των ατόμων του δείγματος.

η) Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο για το ύψος των ατόμων του δείγματος.

θ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για το ύψος των ατόμων του δείγματος.

14.5.10. Εξετάζοντας 50 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, σχηματίσαμε τον πίνακα 14.5.5 κατανομής συχνοτήτων.

α) Να συμπληρώσετε τα δύο στοιχεία που λείπουν από τον πίνακα αν είναι γνωστό ότι ο μέσος αριθμός παιδιών των 50 οικογενειών που εξετάστηκαν είναι 1,8.

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο για τον αριθμό

Πίνακας 14.5.3

Ώρες υπερωριακής απασχολήσεως Κλάσεις [-)	Αθροιστική συχνότητα N_i
0–2	5
2–4	15
4–6	20
6–8	35
8–10	40

Πίνακας 14.5.4

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές	Συχνότητα v_i
162–168	165	8
168–174	171	18
174–180	177	20
180–186	183	7
186–192	189	3

Πίνακας 14.5.5

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών v_i
0	4
1	16
2	20
3	?
4	?
Σύνολο	50

παιδιών των 50 οικογενειών.

- γ) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων των δεδομένων.
- δ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων των δεδομένων.
- ε) Να υπολογίσετε το εύρος και την τυπική απόκλιση του αριθμού παιδιών για τις οικογένειες του δείγματος των 50 οικογενειών που επιλέχθηκαν.
- στ) Να υπολογίσετε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο για τον αριθμό παιδιών των οικογενειών του δείγματος των 50 οικογενειών που επιλέχθηκαν.
- ζ) Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τον αριθμό παιδιών των οικογενειών του δείγματος (πίν. 14.5.5).

14.6 Γραμμική παλινδρόμηση.

Αρκετά συχνά εμφανίζεται η ανάγκη ταυτόχρονης μελέτης δύο ή περισσότερων χαρακτηριστικών (μεταβλητών), με στόχο τον προσδιορισμό του τρόπου, με τον οποίο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

α) Το πλήθος των επιβατών που θα προσελκύσει μια ακτοπλοϊκή εταιρεία σχετίζεται με το ύψος της διαφημιστικής δαπάνης που θα κάνει.

β) Ο χρόνος αλλοιώσεως ενός γαλακτοκομικού προϊόντος επηρεάζεται αρνητικά από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλη είναι η θερμοκρασία, τόσο μικρότερος θα είναι ο χρόνος που θα υποστεί αλλοίωση το προϊόν.

γ) Η ηλικία και το βάρος ενός παιδιού έχουν κάποια θετική εξάρτηση μεταξύ τους, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο σε ηλικία είναι το παιδί, τόσο μεγαλύτερο βάρος θα έχει.

δ) Η παραγωγή ενός αγροτικού προϊόντος εξαρτάται από την ποσότητα λιπάσματος που θα χρησιμοποιηθεί.

ε) Το ύψος των αποδοχών των υπαλλήλων μιας εταιρείας εξαρτάται από το χρόνο υπηρεσίας τους.

Σε όλα τα παραπάνω προβλήματα παρουσιάζει ενδιαφέρον να εξεταστούν οι επιδράσεις που κάποια μεταβλητή ασκεί σε κάποια άλλη μεταβλητή. Αν μάλιστα θα μπορούσε να βρεθεί και ένα απλό μαθηματικό μοντέλο που να εκφράζει τη σχέση αυτή μέσω μιας συναρτήσεως, τότε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των τιμών μιας μεταβλητής από τις γνώσεις που διαθέτουμε για τις άλλες μεταβλητές.

Ο τομέας της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με στόχο την πρόβλεψη μίας από αυτές με χρήση των τιμών μιας ή περισσότερων άλλων ονομάζεται **ανάλυση παλινδρόμησης**. Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1885 από τον Άγγλο ανθρωπολόγο Galton (1822-1911) στην εργασία του *Regression Towards Mediocrity in Hereditary Stature* όπου, μελετώντας τα ύψη των παιδιών σε σχέση με το μέσο ύψος των γονέων τους διαπιστώθηκε ότι αυτά είχαν την τάση να παλινδρομούν γύρω από το μέσο γονικό ύψος, αντί να στρέφονται προς ακραίες τιμές.

Παρότι αρχικά ο όρος παλινδρόμηση χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τη συγκεκριμένη διαπίστωση του Galton, με την πάροδο του χρόνου επεκτάθηκε η χρήση του και σήμερα πλέον έχει καταστεί συνώνυμος με τη στατιστική μελέτη της σχέσεως μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

Σε κάθε πρόβλημα παλινδρόμησης διακρίνουμε συνήθως δύο είδη μεταβλητών: τις **ανεξάρτητες** ή **ελεγχόμενες** και τις **εξαρτημένες** μεταβλητές ή **μεταβλητές αποκρίσεως**. Ανεξάρτητες μεταβλητές, οι οποίες συμβολίζονται συνήθως με X , είναι εκείνες στις οποίες μπορούμε να δίνουμε μια συγκεκριμένη τιμή (π.χ. τιμή πωλήσεως ενός προϊόντος, θερμοκρασία επεξεργασίας μιας ουσίας, ποσότητα λιπάσματος που θα χρησιμοποιηθεί σ' έναν αγρό) ή λαμβάνουν τιμές που μπορούμε να παρατηρήσουμε, αλλά όχι να ελέγξουμε (π.χ. θερμοκρασία περιβάλλοντος, ηλιοφάνεια). Η εξαρτημένη μεταβλητή, η οποία συμβολίζεται συνήθως με Y , αντανακλά το αποτέλεσμα μεταβολών στις ελεγχόμενες μεταβλητές (π.χ. αριθμός πωλήσεων του προϊόντος, χρώμα-καθαρότητα της παραγόμενης ουσίας, παραγωγή του αγρού). Αξίζει να σημειωθεί ότι η διάκριση μεταξύ ανεξαρτήτων και εξαρτημένων μεταβλητών δεν είναι πάντοτε

σαφής, αφού μπορεί κάποιος παράγοντας, ο οποίος σε ένα ενδιάμεσο στάδιο θεωρείται εξαρτημένη μεταβλητή, σε ένα επόμενο να λάβει το ρόλο της ανεξάρτητης.

Η απλούστερη περίπτωση παλινδρομήσεως είναι η **απλή γραμμική παλινδρόμηση**, κατά την οποία υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή X και μία εξαρτημένη μεταβλητή Y , η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία γραμμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής X .

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Στον πίνακα 14.6.1 δίνεται η ετήσια επιβατική κίνηση Y (σε χιλιάδες επιβάτες) που αφορά σε μια ακτοπλοϊκή εταιρεία για $n=10$ έτη και το ποσό X (σε εκατομμύρια €) που δαπάνησε η συγκεκριμένη εταιρεία για διαφημιστική δαπάνη στην αρχή του έτους.

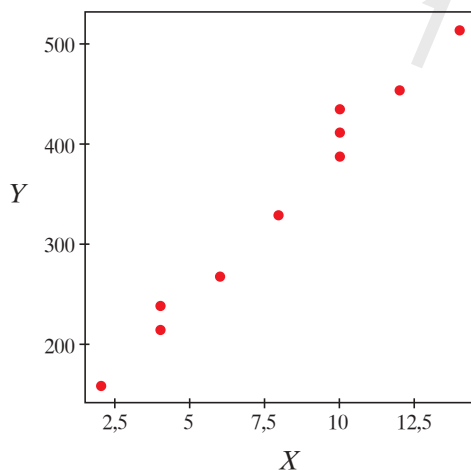
Αν παραστήσουμε τα ζεύγη (x_i, y_i) των παρατηρήσεων σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, θα πάρουμε το σχήμα 14.6α το οποίο ονομάζεται **διάγραμμα διασποράς**.

Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται να υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ποσό X που δαπανά η εταιρεία για διαφήμιση στην αρχή του έτους και την ετήσια επιβατική κίνηση Y . Πιο συγκεκριμένα, τα σημεία (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 10$ δείχνουν να είναι συγκεντρωμένα γύρω από μία ευθεία, δηλαδή η σχέση μεταξύ των X και Y φαίνεται να είναι γραμμική (κατά προσέγγιση). Θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος της διαφημιστικής δαπάνης X και ως εξαρτημένη μεταβλητή την επιβατική κίνηση Y , η ευθεία που θα προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία αυτά (με βάση κάποιο κριτήριο που θα δούμε στη συνέχεια) θα ονομάζεται **ευθεία παλινδρομήσεως** της Y πάνω στη X . Στο σχήμα 14.6β παρουσιάζεται το διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 14.6.1 μαζί με τρεις ευθείες που περνούν «ανάμεσα» στα 10 σημεία και φαίνεται να τα προσεγγίζουν ικανοποιητικά. Προφανώς η χάραξη της «με το μάτι», παρά την απλότητά της, έχει πολλά μειονεκτήματα, το κυριότερο από τα οποία είναι έλλειψη αντικειμενικότητας, αφού διάφορα άτομα μπορούν να προτείνουν πολλές διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα αντικειμενικό (μάλλον μαθηματικό) κριτήριο επιλογής της βέλτιστης ευθείας προσεγγίσεως.

Πίνακας 14.6.1

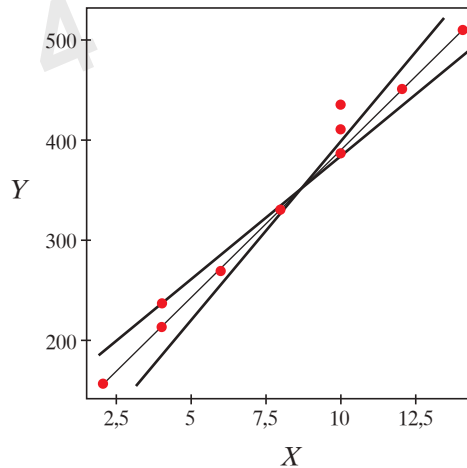
Ετήσια επιβατική κίνηση Y και διαφημιστική δαπάνη X μιας ακτοπλοϊκής εταιρείας για $n=10$ έτη.

i	x_i	y_i
1	4	225
2	2	156
3	10	390
4	14	516
5	6	267
6	8	330
7	10	411
8	4	213
9	12	450
10	10	402



Σχ. 14.6α.

Διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 14.6.1.



Σχ. 14.6β.

Διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα του πίνακα 14.6.1 και ευθεία προσεγγίσεως.

Ας θεωρήσουμε ότι η εξίσωση της ευθείας που προσεγγίζει τα δεδομένα μας έχει τη γενική μορφή:

$$y = \alpha + \beta x.$$

Η παράμετρος α θα μας δίνει τότε τη θέση όπου η ευθεία τέμνει τον άξονα y' , ενώ η παράμετρος β παριστάνει την κλίση (συντελεστή διευσθύνσεως) της ευθείας. Το ερώτημα που προκύπτει είναι με ποιον τρόπο μπορούμε να καθορίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους α και β έτσι, ώστε η ευθεία που θα προκύψει να μας δίνει όσο το δυνατόν την καλύτερη περιγραφή της σχέσεως (εξαρτήσεως) που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών X και Y . Η διαδικασία καθορισμού των α και β ονομάζεται **εκτίμηση** των παραμέτρων, ενώ οι τιμές που προκύπτουν γι' αυτές με την υλοποίηση της διαδικασίας εκτιμήσεως ονομάζονται **εκτιμήτριες**.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β είναι η **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων**, η οποία προτάθηκε το 1805 σε μια εργασία του Γάλλου μαθηματικού Legendre, (1752-1833) και αμέσως μετά από το Γερμανό μαθηματικό Gauss, (1777-1855). Σύμφωνα μ' αυτήν ο προσδιορισμός των παραμέτρων α , β , γίνεται έτσι, ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των κατακορύφων αποστάσεων

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία $y = \alpha + \beta x$ (σχ. 14.6γ). Έτσι, εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι η ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$AT = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2. \quad (14.6.1)$$

Οι τιμές των παραμέτρων α και β , που ελαχιστοποιούν την (14.6.1), καλούνται **εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων** και συμβολίζονται $\hat{\alpha}$ με $\hat{\beta}$ και αντίστοιχα. Αποδεικνύεται¹ ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων δίνονται από τους τύπους:

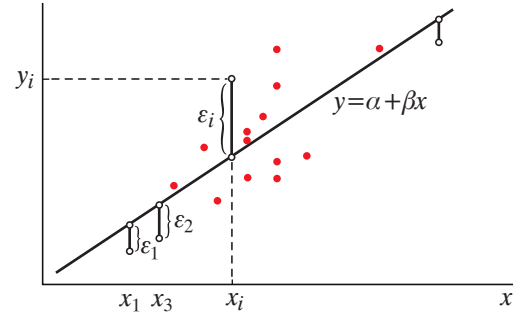
$$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (14.6.2)$$

Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$ καλείται **ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** ή **ευθεία παλινδρομώσεως** της Y (πάνω) στη X .

Αν συμβολίσουμε με

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

τους αριθμητικούς μέσους των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$ και $y_1, y_2, \dots, y_n$ αντίστοιχα, ο τύπος που δόθηκε



Σχ. 14.6γ.

Διάγραμμα διασποράς και κατακόρυφες αποστάσεις εἰς ἀπὸ τὴν ευθεία προσεγγίσεως.

1. Η απόδειξη παραλείπεται, αφού απαιτεί τη γνώση αποτελεσμάτων που δεν έχουν καλυφθεί στα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου.

προηγουμένως για την εκτιμήτρια του α , γίνεται

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν αντικαταστήσουμε την έκφραση $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$ στην εξίσωση της ευθείας παλινδρομήσεως, η τελευταία γράφεται στη μορφή

$$\hat{y} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} + \hat{\beta} x \Leftrightarrow \hat{y} - \bar{y} = \hat{\beta}(x - \bar{x}),$$

η οποία δείχνει ότι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$ διέρχεται πάντοτε από το σημείο με συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y})$.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 14.6.1 μπορούμε να προχωρήσουμε εύκολα στους υπολογισμούς που δίνονται στον πίνακα 14.6.2 και αντικαθιστώντας στους τύπους (14.6.2) βρίσκουμε:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i \right)}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2} = \frac{10 \cdot 30960 - 80 \cdot 3360}{10 \cdot 776 - 80^2} = 30$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} y_i - \hat{\beta} \cdot \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i = \frac{1}{10} \cdot 3360 - 30 \cdot \frac{1}{10} \cdot 80 = 96.$$

Πίνακας 14.6.2

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	4	225	16	900
2	2	156	4	312
3	10	390	100	3900
4	14	516	196	7224
5	6	267	36	1602
6	8	330	64	2640
7	10	411	100	4110
8	4	213	16	852
9	12	450	144	5400
10	10	402	100	4020
	$\sum x_i = 80$	$\sum y_i = 3360$	$\sum x_i^2 = 776$	$\sum x_i y_i = 30960$

Επομένως έχουμε τις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta} = 30$ και $\hat{\alpha} = 96$ και η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα είναι η:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x = 96 + 30x$$

(σχ. 14.6δ). Σύμφωνα μ' αυτήν, η εκτίμησή μας για την ετήσια επιβατική κίνηση Y (σε χιλιάδες επι-

βάτες) όταν δεν γίνει καμμία διαφημιστική δαπάνη ($x=0$) είναι:

$$\hat{y} = 96 + 30 \cdot 0 = 96.$$

Γενικά, στην εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ (που αποτελεί την τεταγμένη του σημείου, στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα y/y'), μας δίνει την (αναμενόμενη, εκτιμώμενη) τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν $x=0$. Προφανώς, αν προκύψει $\hat{\alpha} = 0$, τότε η ευθεία θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Προκειμένου να δώσουμε μια πρακτική ερμηνεία στην εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β , δηλαδή στο συντελεστή διευσθύνσεως $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές τιμές x_1 και $x_2 = x_1 + 1$ της ανεξάρτητης μεταβλητής X . Τότε η διαφορά των αντιστοίχων προβλεπομένων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής θα είναι ίση με:

$$\hat{y}_2 - \hat{y}_1 = (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_2) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_1) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_1 + 1) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_1) = \hat{\beta}.$$

Συνεπώς $\hat{y}_2 = \hat{y}_1 + \hat{\beta}$ και μπορούμε να πούμε ότι:

Η εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\beta > 0$ ή ελαττώνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta} < 0$.

Για παράδειγμα, με βάση την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x = 96 + 30x$ που βρήκαμε προηγουμένως για τα δεδομένα του πίνακα 14.6.1, μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό ότι αν η διαφημιστική δαπάνη της ακτοπλοϊκής εταιρείας αυξηθεί κατά 1 μονάδα (1.000.000 €), εκτιμάμε ότι η ετήσια επιβατική κίνηση Y θα αυξηθεί κατά 30 μονάδες (30.000 επιβάτες).

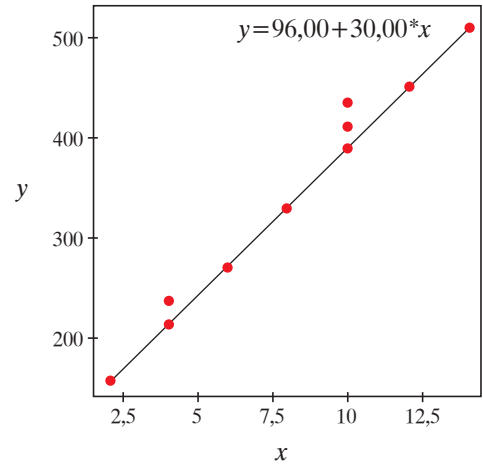
Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή αναφέροντας ένα δείκτη για την ποιότητα της προσεγγίσεως που προσφέρεται από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων αποτελεί ο λεγόμενος **συντελεστής προσδιορισμού** (coefficient of determination) R^2 , ο οποίος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^v \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^v (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^v (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^v (y_i - \bar{y})^2},$$

όπου

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i, \quad \hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, v.$$

Ο συντελεστής προσδιορισμού λαμβάνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1 ($0 \leq R^2 \leq 1$) και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό. Τιμές του R^2 κοντά στο 1 σημαίνουν ότι η ευθεία παλινδρομήσεως περνάει πολύ κοντά από τα περισσότερα σημεία, ενώ τιμές κοντά στο 0 σημαίνουν ότι όλα σχεδόν τα σημεία βρίσκονται μακριά από την ευθεία παλινδρομήσεως και επομένως θα πρέπει να αναζητηθεί κάποια άλλη σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής (μη γραμμική).



Σχ. 14.6δ.

Διάγραμμα διασποράς και κατακόρυφες αποστάσεις ε_i από την ευθεία προσεγγίσεως.

Πίνακας 14.6.3

i	x_i	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$	$\hat{\varepsilon}_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$
1	4	225	-111	12321	216	9	81
2	2	156	-180	32400	156	0	0
3	10	390	54	2916	396	-6	36
4	14	516	180	32400	516	0	0
5	6	267	-69	4761	276	-9	81
6	8	330	-6	36	336	-6	36
7	10	411	75	5625	396	15	225
8	4	213	-123	15129	216	-3	9
9	12	450	114	12996	456	-6	36
10	10	402	66	4356	396	6	36
Άθροισμα			0	122940	3360	0	540

Χρησιμοποιώντας τα αθροίσματα που υπολογίστηκαν στον πίνακα 14.6.3. μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το συντελεστή προσδιορισμού για τα δεδομένα του πίνακα 14.6.1 ως εξής:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{540}{3360} = 0,9956.$$

Με βάση την τιμή αυτή (99,6%) συμπεραίνουμε ότι η ευθεία παλινδρομήσεως που δημιουργήσαμε προηγουμένως προσφέρει πολύ ικανοποιητική προσέγγιση των σημείων που διαθέτουμε και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματική πρόβλεψη της ετήσιας επιβατικής κινήσεως με βάση τη διαφημιστική δαπάνη της εταιρείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14.6.1.

Δίνονται n σημεία (x_i, y_i) $i = 1, 2 \dots n$ του επιπέδου. Από όλες τις ευθείες της μορφής $y = \beta x$ που περνάνε από την αρχή των αξόνων, ζητάμε να προσδιορίσουμε εκείνη που τα προσεγγίζει καλύτερα με βάση την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

- Να εκτιμήσετε την παράμετρο β της ευθείας $y = \beta x$.
- Να βρείτε την εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ για τα επόμενα δεδομένα.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	30	20	60	80	40	50	70	90
y_i	75	52	120	170	86	110	153	194

Λύση.

α) Ο υπολογισμός της εκτιμήτριας ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β θα γίνει με την ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$AT = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_v^2 = \sum_{i=1}^v \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^v (y_i - \beta x_i)^2.$$

Θεωρώντας την ποσότητα αυτή ως μια συνάρτηση του β , δηλαδή

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^v \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^v (y_i - \beta x_i)^2 = (y_1 - \beta x_1)^2 + (y_2 - \beta x_2)^2 + \dots + (y_v - \beta x_v)^2$$

αντιλαμβανόμαστε ότι, σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε στο κεφάλαιο 4, για να λάβει η $f(\beta)$ την ελάχιστη τιμή της θα πρέπει να ισχύει $f'(\beta) = 0$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(\beta) &= (y_1 - \beta x_1)^2 + (y_2 - \beta x_2)^2 + \dots + (y_v - \beta x_v)^2 = \\ &= (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_v^2) - 2\beta(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_v y_v) + \beta^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) \end{aligned}$$

ως προς β προκύπτει:

$$f'(\beta) = -2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_v y_v) + 2\beta(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2)$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της αθροίσεως

$$f'(\beta) = -2 \sum_{i=1}^v x_i y_i + 2\beta \sum_{i=1}^v x_i^2 = 2(\beta \sum_{i=1}^v x_i^2 - \sum_{i=1}^v x_i y_i).$$

Λύνοντας τέλος τη σχέση $f'(\beta) = 0$ ως προς β βρίσκουμε:

$$\beta \sum_{i=1}^v x_i^2 - \sum_{i=1}^v x_i y_i = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\sum_{i=1}^v x_i y_i}{\sum_{i=1}^v x_i^2}.$$

Επομένως, η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β θα δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i y_i}{\sum_{i=1}^v x_i^2}.$$

β) Με βάση τους υπολογισμούς που δίνονται στον πίνακα 14.6.4.

Πίνακας 14.6.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	<i>Άθροισμα</i>
x_i	30	20	60	80	40	50	70	90	
y_i	75	52	120	170	86	110	153	194	
x_i^2	900	400	3600	6400	1600	2500	4900	8100	
$x_i y_i$	2250	1040	7200	13600	3440	5500	10710	17460	61200

παίρνουμε $\hat{\beta} = \frac{61200}{28400} = 2,155$ οπότε η ευθεία παλινδρομήσεως θα είναι η $y = \hat{\beta} x = 2,155x$.

Ασκήσεις.

14.6.1. Στον πίνακα 14.6.5 φαίνονται οι μετρήσεις του βάρους Y και του ύψους X είκοσι βρεφών, τα οποία κατά τη γέννηση είχαν βάρος μικρότερο των 1500 gr (λιπόβαρα).

- α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.
- β) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος βρεφών συγκεκριμένου ύψους.
- γ) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το ύψος βρεφών συγκεκριμένου βάρους.
- δ) Θα μπορούσε να προκύψει το ένα μοντέλο από το άλλο χωρίς να επαναλάβετε όλους τους υπολογισμούς;
- ε) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (α).
- στ) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (β). Τι παρατηρείτε;

14.6.2. Τα βάρη των δέκα πρώτων βρεφών του πίνακα 14.6.5 αφορούν σε αγόρια, ενώ τα βάρη των δέκα επομένων αφορούν σε κορίτσια.

- α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων, σημειώνοντας συγχρόνως ποια σημεία αντιστοιχούν σε αγόρια και ποια σε κορίτσια.
- β) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος αγοριών συγκεκριμένου ύψους.
- γ) Να βρείτε το καλύτερο (με βάση την αρχή ελαχίστων τετραγώνων) μοντέλο, μέσω του οποίου να μπορεί να εκτιμηθεί το βάρος κοριτσιών συγκεκριμένου ύψους.
- δ) Να διαπιστώσετε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (β) είναι σημαντικά καλύτερος απ' αυτόν του μοντέλου που δημιουργήσατε στο ερώτημα (γ).
- ε) Αν μας ενδιαφέρει να εκτιμηθεί το βάρος ενός βρέφους συγκεκριμένου ύψους ποια εκτίμηση είναι πιο αξιόπιστη, αυτή που αφορά σε αγόρια ή αυτή που αφορά σε κορίτσια;
- στ) Ποιο βάρος προβλέπετε ότι θα έχει ένα κορίτσι ύψους 40 cm; Ποιο βάρος προβλέπετε ότι θα έχει ένα αγόρι ύψους 40 cm;

14.6.3. Ένα υλικό συσκευάζεται από ένα εργοστάσιο σε μεγάλα κουτιά, ο αριθμός των οποίων ποικίλλει ανάλογα με την παραγγελία. Ο πίνακας 14.6.6 δίνει τον αριθμό των κουτιών που συσκευάστηκαν (ώστε να καλυφθούν οι παραγγελίες που δέχτηκε το εργοστάσιο) και τις εργατοώρες που χρειάστηκαν για 10 πρόσφατες παραγγελίες που εκτελέστηκαν.

- α) Ποια από τις δύο μεταβλητές (αριθμός κουτιών, εργατοώρες) μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή X και ποια ως εξαρτημένη Y ;

Πίνακας 14.6.5

Ύψος (σε cm)	Βάρος (σε gr)
41	1450
40	1490
38	1400
38	1410
38	1380
32	1100
33	1150
38	1420
30	1000
34	1150
32	1100
39	1450
38	1400
39	1450
37	1350
39	1450
38	1380
42	1490
39	1480
38	1450

Πίνακας 14.6.6

Αριθμός κουτιών	Εργατοώρες
60	230
40	161
120	365
160	515
80	263
100	335
100	335
140	464
180	587
70	245

- β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.
- γ) Να υπολογίσετε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων την ευθεία γραμμικής παλινδρομώσεως της Y πάνω στη X και να χαραχθεί στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.
- δ) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων που αφορούν στη μεταβλητή X και των παρατηρήσεων που αφορούν στη μεταβλητή Y . Στη συνέχεια να δώσετε ένα χαρακτηριστικό σημείο, απ' το οποίο διέρχεται η ευθεία παλινδρομώσεως.
- ε) Να δώσετε η ερμηνεία του συντελεστή του x , καθώς και του σταθερού όρου της ευθείας γραμμικής παλινδρομώσεως της Y πάνω στη X .
- στ) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που αναπτύχθηκε.
- ζ) Πόσες εργατοώρες προβλέπετε ότι θα χρειασθούν για να ικανοποιηθεί μια παραγγελία που απαιτεί τη συσκευασία 85 κουτιών;

14.6.4. Ας θεωρήσουμε και πάλι τα δεδομένα της ασκήσεως 14.6.3.

- α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 14.6.1, να βρείτε την ευθεία της μορφής $y = \beta x$ (η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων), που προσεγγίζει τα δεδομένα καλύτερα με βάση τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
- β) Να υπολογίσετε το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου και να συγκρίνετε με το συντελεστή προσδιορισμού του μοντέλου που αναπτύχθηκε στην άσκηση 14.6.3.
- γ) Πόσες εργατοώρες προβλέπετε ότι θα χρειασθούν για να ικανοποιηθεί μία παραγγελία που απαιτεί τη συσκευασία 85 κουτιών;

14.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Απόλυτη συχνότητα ή απλά συχνότητα ν_i της τιμής t_i .	Ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή t_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος ($i = 1, 2, \dots, \kappa$).
Σχετική συχνότητα f_i της τιμής t_i .	$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa$
Ιδιότητες της σχετικής συχνότητας.	α) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$ β) $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$
Αθροιστικές συχνότητες N_i .	$N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$
Αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i .	$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$
Τρόποι γραφικής απεικονίσεως κατηγορικών δεδομένων.	Με ραβδογράμματα και κυκλικά διαγράμματα.
Τρόποι γραφικής απεικονίσεως ποσοτικών δεδομένων.	Με διαγράμματα συχνοτήτων (ιστογράμματα, όταν έχει γίνει ομαδοποίηση των δεδομένων), κυκλικά διαγράμματα και φυλλογραφήματα.
Εμπειρικός τύπος του Sturges.	$\kappa = 1 + 3,32 \log \nu = 1 + 1,44 \ln \nu$
Μέτρα θέσεως.	α) Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή. β) Διάμεσος. γ) Κορυφή ή επικρατούσα τιμή.

Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ($\bar{x}$)	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i v_i$
Διάμεσος (δ).	Η τιμή που χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων δεδομένων σε δύο ισοπληθή υποσύνολα έτσι, ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες από αυτήν και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από αυτήν.
Εκατοστημόρια $p_a, a = 1, 2, \dots, 99$.	Η τιμή εκείνη, για την οποία το πολύ $a\%$ των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του p_a και το πολύ $(100-a)\%$ των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.
Τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 .	Τα εκατοστημόρια p_{25}, p_{50}, p_{75} .
Υπολογισμός διαμέσου για ομαδοποιημένα δεδομένα.	$\delta = L_i + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i - F_{i-1}} c = L_i + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} c$
Επικρατούσα τιμή ή κορυφή (M_0).	Η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.
Υπολογισμός της κορυφής για ομαδοποιημένα δεδομένα.	$M_0 = L_i + \frac{D}{D + E} c$ όπου $D = f_i - f_{i-1}$ και $E = f_i - f_{i+1}$
Μέτρα διακυμάνσεως.	α) Εύρος ή κύμανση. β) Ενδοτεταρτημοριακό εύρος. γ) Διασπορά.
Εύρος ή κύμανση (R).	Η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.
Διασπορά s^2 .	$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2 v_i$ ή ισοδύναμα $s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right\} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n t_i^2 v_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i v_i \right)^2 \right\}$
Τυπική απόκλιση.	$s = \sqrt{s^2}$
Εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων.	$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$ $\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρομήσεως της Y (πάνω) στη X .	$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$
Συντελεστής προσδιορισμού.	$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ όπου $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$, $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

14.8 Ερωτήσεις κατανοήσεως.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων.	Σ Λ
2.	Αν συμβολίσουμε με θ_i το τόξο του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή t_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i , τότε $\theta_i = 360^\circ \nu_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$.	Σ Λ
3.	Ο αριθμός παιδιών μιας οικογένειας είναι μια ποσοτική συνεχής μεταβλητή.	Σ Λ
4.	Η τιμή της αμόλυβδης βενζίνης σ' ένα πρατήριο είναι συνεχής ή μεταβλητή.	Σ Λ
5.	Η μέση τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για ποιοτικά, όσο και για ποσοτικά δεδομένα.	Σ Λ
6.	Ένα φυλλογράφημα δεν περιέχει όλα τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, αφού κατά τη δημιουργία του χάνονται ορισμένες πληροφορίες που αφορούν στα δεδομένα.	Σ Λ
7.	Η διάμεσος των παρατηρήσεων 1 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με τη διάμεσο των 1 888 88 2 4 6 88.	Σ Λ
8.	Η διασπορά των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$ δίνεται από τον τύπο: $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.	Σ Λ
9.	Η διασπορά s^2 εκφράζεται στις μονάδες, με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις που μελετάμε.	Σ Λ
10.	Όταν έχουμε ακραίες παρατηρήσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή αντί της διαμέσου.	Σ Λ
11.	Όταν προσθέσουμε τον αριθμό 5 σε όλες τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής, τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυξάνουν κατά 5.	Σ Λ
12.	Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί 4, τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί 2.	Σ Λ
13.	Στην ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$ η εκτιμήτρια του α εκφράζει την αναμενόμενη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y , όταν το X μεταβληθεί κατά μια μονάδα.	Σ Λ

14.	Τα τεταρτημόρια είναι μέτρα θέσεως, ενώ η διαφορά τους είναι μέτρο διακυμάνσεως.	Σ Λ
15.	Ο αριθμητικός μέσος μπορεί να λάβει τιμή μικρότερη από την ελάχιστη τιμή των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του.	Σ Λ
16.	Ένας προσεγγιστικός υπολογισμός των τεταρτημορίων Q_1 και Q_3 μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα.	Σ Λ
17.	Η επικρατούσα τιμή ή κορυφή M_0 ενός συνόλου δεδομένων είναι πάντοτε μοναδική.	Σ Λ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής t_i δίνεται από τον τύπο: α) $f_i = n \cdot v_i$ β) $f_i = \frac{n}{v_i}$ γ) $f_i = \frac{v_i}{n}$ δ) $f_i = \frac{1}{v_i}$
2.	Για τις σχετικές συχνότητες ισχύει: α) $f_1 + \dots + f_n = 1$ β) $f_1 + \dots + f_n = 0$ γ) $-1 \leq f_i \leq 1$ δ) $1 \leq f_i \leq 2$.
3.	Το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι: α) Ίσο με το μηδέν. β) Πάντοτε αρνητικό. γ) Πάντοτε θετικό. δ) Ορισμένες φορές θετικό και ορισμένες αρνητικό
4.	Η κορυφή των παρατηρήσεων 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με: α) $M_0 = 8$ β) $M_0 = 2$ γ) $M_0 = 4$ δ) $M_0 = 6$.
5.	Η διάμεσος των παρατηρήσεων 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με: α) $\delta = 3$ β) $\delta = 7$ γ) $\delta = 2$ δ) $\delta = 4$.
6.	Ποιο από τα επόμενα είναι μέτρο θέσεως; α) Η διάμεσος β) Η διασπορά γ) Το εύρος δ) Κανένα
7.	Ποιο από τα επόμενα είναι μέτρο διακυμάνσεως; α) Η τυπική απόκλιση β) Η μέση τιμή γ) Η κορυφή δ) Η διάμεσος
8.	Η διάμεσος είναι πάντοτε ίση με: α) Το δεύτερο τεταρτημόριο. β) Το πρώτο τεταρτημόριο. γ) Το τρίτο τεταρτημόριο. δ) Την κορυφή.
9.	Η σχετική συχνότητα μπορεί να λάβει: α) Τιμές μεταξύ του 0 και του 1 μόνο. β) Κάθε πραγματική τιμή. γ) Τιμές μεγαλύτερες από 1. δ) Αρνητικές τιμές.

10.	Ένα μέτρο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για ποιοτικά, όσο και για ποσοτικά δεδομένα είναι: α) Η επικρατούσα τιμή. β) Τυπική απόκλιση. γ) Η διασπορά. δ) Η διάμεσος.
11.	Το αποτέλεσμα της ρίψεως ενός ζαριού είναι: α) Μια διακριτή ποσοτική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. β) Μια συνεχής ποσοτική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. γ) Μια κατηγορική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. δ) Μια διακριτή ποσοτική μεταβλητή με τιμές 0, 1,..., 6.
12.	Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε ο αριθμητικός τους μέσος: α) Πολλαπλασιάζεται με την ποσότητα αυτή. β) Διαιρείται με την ποσότητα αυτή. γ) Δεν μεταβάλλεται. δ) Μεγαλώνει όσο ακριβώς είναι η τιμή της ποσότητας αυτής.
13.	Ο συντελεστής προσδιορισμού λαμβάνει τιμές: α) Μεταξύ του 0 και του 1, δηλαδή ισχύει $0 \leq R^2 \leq 1$. β) Μεγαλύτερες από 1, δηλαδή ισχύει $R^2 > 1$. γ) Μεταξύ του -1 και του 0, δηλαδή ισχύει $-1 \leq R^2 \leq 0$. δ) Μόνο αρνητικές, δηλαδή ισχύει $R^2 \leq 0$.

14.9 Γενικές ασκήσεις.

14.9.1. Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ενός συνόλου δεδομένων ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}},$$

εκφράζεται συνήθως επί τοις εκατό και αποτελεί ένα μέτρο σχετικής διακυμάνσεως των τιμών που μελετάμε. Όταν ο συντελεστής μεταβολής είναι μικρότερος ή ίσος από 10%, δεχόμαστε ότι το σύνολο τιμών είναι ομοιογενές. Να εξετάσετε τα επόμενα σύνολα τιμών ως προς την ομοιογένεια και να τα συγκρίνετε μεταξύ τους με βάση τη διασπορά τους τη σχετική διασπορά τους.

α) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

β) 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109.

γ) 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190.

14.9.2. Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων A και B , το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν:

Πόλη A : 20 18 20 17 18 17 16 17 16 10

Πόλη B : 18 16 17 15 16 12 16 17 20 22

α) Να βρείτε την μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων A και B .

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών των πόλεων A και B και να διαπιστώ-

σετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

- γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη A παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς, ενώ το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη B αύξανε τη θερμοκρασία κατά 10%. Να βρείτε τις νέες τιμές της μέσης θερμοκρασίας και της τυπικής αποκλίσεως για τις δύο πόλεις.

14.9.3. Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσεως είναι τουλάχιστον 11 kg, αλλά μικρότερο από 26 kg. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 kg, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 kg, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 kg και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 kg.

- α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σ' έναν πίνακα συχνοτήτων.
 β) Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 kg, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσεως αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.
 γ) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του προβλήματος.
 δ) Να υπολογίσετε το μέσο βάρος των αποσκευών των επιβατών της πτήσεως.
 ε) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του βάρους των αποσκευών των επιβατών της πτήσεως.
 στ) Να υπολογίσετε τη διασπορά του βάρους των αποσκευών των επιβατών της πτήσεως.

14.9.4. Ένας αριθμός επιβατών ενός πλοίου ρωτήθηκε πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασε ο καθένας κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν οι εξής: 5 επιβάτες δεν διάβασαν κανένα βιβλίο (0 βιβλία), 25 επιβάτες διάβασαν 1 βιβλίο, 15 επιβάτες διάβασαν 2 βιβλία, ενώ τέλος 5 επιβάτες διάβασαν 3 βιβλία.

- α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων των δεδομένων.
 β) Να βρείτε πόσοι από τους επιβάτες που ρωτήθηκαν διάβασαν κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους το πολύ δύο βιβλία.
 γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των βιβλίων που διάβασε κάθε επιβάτης κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους.
 δ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την κορυφή των δεδομένων.
 ε) Να υπολογίσετε τη διασπορά και την τυπική απόκλιση των δεδομένων.
 στ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων των δεδομένων.

14.9.5. Στον πίνακα 14.9.1 δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 ατόμων. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

- α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσεως είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσεως, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και στην τέταρτη κλάση.
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά των δεδομένων.
 γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την κορυφή των δεδομένων.

Πίνακας 9.9.1

Βάρος (σε kg) [-)	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i
45–55	0,2
55–65	0,5
65–75	
75–85	

14.9.6. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια θετική ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριστικό) X , τότε, ο γεωμετρικός μέσος g_x των παρα-

τηρήσεων ορίζεται ως η ν -οστή ρίζα του γινομένου των τιμών των διαθεσίμων παρατηρήσεων, δηλαδή $g_x = \sqrt[\nu]{x_1 x_2 \cdots x_\nu}$.

Ο γεωμετρικός μέσος χρησιμοποιείται στην εκτίμηση της μέσης ετήσιας μεταβολής (αυξήσεως ή μειώσεως) του όγκου ή της αξίας της παραγωγής προϊόντων, στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής ενός πληθυσμού, στην κατάρτιση αριθμοδεικτών (δεικτών τιμών ή ποσοτήτων αγαθών) κ.λπ..

- α) Να αποδείξετε ότι ο λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου είναι ίσος με τον αριθμητικό μέσο των λογαρίθμων των τιμών των διαθεσίμων παρατηρήσεων.
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των παρατηρήσεων 1, 3, 5, 10, 15.
 γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που βρέθηκε στο ερώτημα (α), να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των παρατηρήσεων $2, 2^2, 2^3, 2^4$.

14.9.7. Έστω n σύνολα δεδομένων με ίσο αριθμό παρατηρήσεων, σε κάθε σύνολο. Ας συμβολίσουμε με $\bar{x}_1$ και s_1^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά αντίστοιχα του πρώτου συνόλου δεδομένων, με $\bar{x}_2$ και s_2^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά του δεύτερου συνόλου δεδομένων κ.ο.κ. και με $\bar{x}_n$ και s_n^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά του n -οστού συνόλου δεδομένων.

- α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος όλων των μετρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i.$$

- β) Να αποδείξετε ότι η διασπορά s^2 όλων των μετρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^2.$$

- γ) Ισχύει αντίστοιχος τύπος για την τυπική απόκλιση;

14.9.8. Προκειμένου να διαπιστωθεί η επίδραση της θερμοκρασίας X στην αντοχή Y ενός υλικού, θέλουμε να δημιουργήσουμε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων μια ευθεία της μορφής $y = a + \beta x$.

- α) Αν χρησιμοποιούμε $\nu = 5$ μετρήσεις της αντοχής του υλικού y_1, y_2, y_3, y_4 και y_5 στις θερμοκρασίες $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$ και $x_5 = 2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{10}(-2y_1 - y_2 + y_4 + 2y_5).$$

- β) Αν χρησιμοποιούμε $\nu = 6$ μετρήσεις της αντοχής του υλικού y_1, y_2, y_3, y_4 και y_5 στις θερμοκρασίες $x_1 = -2, x_2 = -2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$ και $x_6 = 1$, και αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{84}(9y_1 + 9y_2 + 15y_3 + 15y_4 + 18y_5 + 18y_6), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{28}(-5y_1 - 5y_2 + y_3 + y_4 + 4y_5 + 4y_6).$$

14.9.9. Με βάση τα αποτελέσματα της ασκήσεως 14.9.8 να βρείτε τις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β και το συντελεστή προσδιορισμού για τα επόμενα δεδομένα

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3,5	7,2	10,4	12,6	15,9

14.6.10. Για τις παρατηρήσεις $y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ δίνεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$y_1 = a - 3\beta + \varepsilon_1, y_2 = a - 5\beta + \varepsilon_2, y_3 = a + \varepsilon_3, y_4 = a + 5\beta + \varepsilon_4, y_5 = a + 3\beta + \varepsilon_5.$$

Να αποδείξετε ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των a και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{68}(-3y_1 - 5y_2 + 5y_4 + 3y_5).$$

14.9.11. Η διοίκηση μιας επιχειρήσεως ενδιαφέρεται να προσδιορίσει πώς επηρεάζονται οι πωλήσεις ενός προϊόντος της από διάφορα χαρακτηριστικά, τα οποία θεωρούνται ότι έχουν σχέση μ' αυτές. Για το σκοπό αυτό κατέγραψε για 20 δίμηνα διαστήματα τον αριθμό πωλήσεων που επιτεύχθηκε (εξαρτημένη μεταβλητή Y), την τιμή πωλήσεώς του σε € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_1), την τιμή του κύριου ανταγωνιστικού προϊόντος σε € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_2), το κόστος τηλεοπτικής διαφημίσεως του προϊόντος σε χιλιάδες € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_3) και το κόστος ραδιοφωνικής διαφημίσεως (ανεξάρτητη μεταβλητή X_4) σε χιλιάδες €. Τα αποτελέσματα της έρευνας δίνονται στον πίνακα 14.9.2.

Να εξετάσετε όλα τα δυνατά μοντέλα παλινδρομώσεως που έχουν ως ανεξάρτητες μεταβλητές μία από τις X_1, X_2, X_3, X_4 και ως εξαρτημένη μεταβλητή την Y . Να βρείτε το καλύτερο από αυτά με βάση την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού R^2 .

Πίνακας 14.9.2

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	82	5	8	10	2
2	99	7,4	9	11	3
3	123	6,8	10	12	4
4	231	6	12	13	5
5	53	8,4	7	4	1
6	85	8	8,4	6	5
7	37	8,9	6,6	3	6,6
8	90	7,7	6,8	9	4,4
9	120	7,8	7	9,9	2,2
10	313	6,1	9,9	13,1	6
11	51	10	5,5	6,4	7,1
12	81	8,2	7,6	8,8	4,1
13	181	5,8	7,3	9,8	4
14	151	5,7	7,1	8,7	5,1
15	121	6,2	6	5,4	5,2
16	88	6,6	5	4,3	3,4
17	213	6,3	11	11,1	4
18	54	8,98	9	3,3	2,1
19	111	8,86	9,2	10,6	2,4
20	77	9,9	6,1	6,1	3

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1	Η έννοια του πίνακα. Ισότητα πινάκων. Ειδικές μορφές πινάκων.	12
1.2	Πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό.	19
1.3	Γινόμενο πινάκων.	25
1.4	Αντιστρέψιμοι πίνακες.	34
1.5	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	38
1.6	Ερωτήσεις κατανόησης.	39
1.7	Γενικές ασκήσεις.	42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1	Η έννοια της ορίζουσας.	44
2.2	Ανάπτυγμα ορίζουσας n τάξεως.	52
2.3	Ιδιότητες ορίζουσών.	58
2.4	Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα με χρήση ορίζουσών.	67
2.5	Γραμμικά συστήματα εξισώσεων.	72
2.6	Η μέθοδος απαλοιφής.	81
2.7	Επίλυση γραμμικών συστημάτων με n εξισώσεις και n αγνώστους.	88
2.8	Μελέτη ομογενών γραμμικών συστημάτων.	96
2.9	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	98
2.10	Ερωτήσεις κατανόησης.	99
2.11	Γενικές ασκήσεις.	101

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1	Η έννοια της συναρτήσεως. Γραφική παράσταση συναρτήσεως.	106
3.2	Ισότητα, πράξεις και είδη συναρτήσεων.	115
3.3	Στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις.	128
3.4	Σύνθεση συναρτήσεων. Η αντίστροφη συνάρτηση.	134
3.5	Πεπερασμένα όρια συναρτήσεων σ' ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Βασικές ιδιότητες ορίων.	145
3.6	Όριο συναρτήσεως στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Μη πεπερασμένα όρια.	158
3.7	Συνέχεια συναρτήσεων.	176

3.8	Θεώρημα Bolzano και Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.....	183
3.9	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	190
3.10	Ερωτήσεις κατανόησης.	192
3.11	Γενικές ασκήσεις.....	196

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

4.1	Η έννοια της παραγώγου.....	200
4.2	Παράγωγος συνάρτησης. Κανόνες παραγωγίσεως	205
4.3	Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και εφαρμογές.....	216
4.4	Μελέτη συναρτήσεων με τη βοήθεια της παραγώγου	223
4.5	Κανόνες του L' Hospital.....	236
4.6	Εφαρμογές των παραγώγων.....	240
4.7	Μερική παράγωγος	246
4.8	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	253
4.9	Ερωτήσεις κατανόησης.	255
4.10	Γενικές ασκήσεις.....	259

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

5.1	Η έννοια του μιγαδικού αριθμού – Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών.....	266
5.2	Γεωμετρική παράσταση και μέτρο μιγαδικού.	269
5.3	Συζυγείς μιγαδικοί – Πολλαπλασιασμός και διαίρεση μιγαδικών.....	275
5.4	Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.....	281
5.5	Μέτρο και πράξεις – Όρισμα γινομένου και πηλίκου μιγαδικών.....	286
5.6	Ο τύπος De Moivre.	290
5.7	Νιυστές ρίζες μιγαδικού αριθμού – Λύση εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ...	293
5.8	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	299
5.9	Ερωτήσεις κατανόησης.	301
5.10	Γενικές ασκήσεις.....	304

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1	Η έννοια και οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.....	306
6.2	Μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος.....	313
6.3	Η έννοια και οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.....	317
6.4	Το Θεμελιώδες Θεώρημα και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.....	322
6.5	Εμβαδά επιπέδων σχημάτων.	327
6.6	Όγκοι στερεών. Μήκος τόξου καμπύλης.	331
6.7	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	336
6.8	Ερωτήσεις κατανόησης.	338
6.9	Γενικές ασκήσεις.....	341

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7.1	Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης.....	344
7.2	Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.	350
7.3	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.....	354
7.4	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Εξίσωση του Bernoulli.....	357
7.5	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.	361
7.6	Εφαρμογές.....	369
	7.6.1 Ραδιενεργή ακτινοβολία.	369
	7.6.2 Ψύξη και θέρμανση.	370
	7.6.3 Εξάπλωση επιδημίας.	371
7.7	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας	373
7.8	Ερωτήσεις κατανόησης.....	374
7.9	Γενικές ασκήσεις.	378

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

8.1	Ο μετασχηματισμός Laplace.....	382
8.2	Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.	386
8.3	Λύση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.....	390
8.4	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.....	393
8.5	Ερωτήσεις κατανόησης.....	394
8.6	Γενικές ασκήσεις.....	395

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

9.1	Εισαγωγή.	400
9.2	Χαρακτηριστικό λογαρίθμων.....	402
9.3	Ιδιότητες των λογαρίθμων.....	404
9.4	Χρήση λογαρίθμων για τον υπολογισμό αλγεβρικών παραστάσεων.....	405
9.5	Εκθετικές εξισώσεις.....	406
9.6	Λογαριθμικές εξισώσεις.....	408
9.7	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.....	409
9.8	Γενικές ασκήσεις.....	410

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

10.1	Τριγωνομετρικοί αριθμοί.....	412
10.2	Τριγωνομετρικοί αριθμοί – Τριγωνομετρικές σχέσεις.....	414
	10.2.1 Μονάδες μετρήσεως γωνιών.	414
	10.2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30° , 45° και 60°	415

10.2.3 Τριγωνομετρικές ταυτότητες.	417
10.3 Επίλυση επιπέδων τριγώνων.	418
10.3.1 Επίπεδα τρίγωνα.	418
10.3.2 Επίλυση τυχαίων επιπέδων τριγώνων.	418
10.3.3 Νόμος ημιτόνων.	418
10.3.4 Νόμος συνημιτόνων.	421
10.3.5 Νόμος εφαπτομένης – Τύπος προβολής – Τύποι περιμέτρου.	423
10.4 Εφαρμογές τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία.	423
10.4.1 Διόπτρευση.	423
10.4.2 Τρίγωνο πλευσέως.	424
10.5 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	426
10.6 Γενικές ασκήσεις.	429

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

11.1 Η έννοια του διανύσματος.	434
11.1.1 Ορισμός διανύσματος.	434
11.1.2 Άξονας συντεταγμένων.	435
11.1.3 Σύστημα συντεταγμένων.	435
11.1.4 Συντεταγμένες διανύσματος στο χώρο.	436
11.1.5 Πράξεις και ιδιότητες διανυσμάτων.	437
11.1.6 Συντεταγμένες σημείου που χωρίζει ευθύγραμμο τμήμα σε λόγο λ.	439
11.1.7 Γραμμική εξάρτηση – Ανεξαρτησία διανυσμάτων.	439
11.1.8 Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.	440
11.1.9 Συνημίτονα κατευθύνσεως διανύσματος.	441
11.1.10 Ορθογώνιες προβολές.	442
11.2 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.	445
11.3 Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων.	447
11.3.1 Γεωμετρική ερμηνεία μεικτού γινομένου διανυσμάτων.	447
11.3.2 Ιδιότητες μεικτού γινομένου διανυσμάτων.	448
11.4 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	449
11.5 Γενικές ασκήσεις.	452

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

12.1 Καμπύλες στο επίπεδο.	456
12.2 Εξισώσεις ευθείας στο επίπεδο.	456
12.3 Γενική μορφή εξισώσεως ευθείας.	458
12.3.1 Διερεύνηση της εξισώσεως ευθείας.	458
12.4 Συντελεστής διεύθυνσεως μιας ευθείας (ε).	460
12.5 Ειδικές μορφές εξισώσεων ευθείας.	461
12.6 Θέση ευθειών στο επίπεδο.	461
12.7 Πολικές συντεταγμένες.	465
12.7.1 Εξίσωση ευθείας σε πολικές συντεταγμένες.	465
12.8 Κωνικές τομές.	470
12.9 Κύκλος.	471

12.9.1 Αναλυτική εξίσωση κύκλου.	471
12.9.2 Γενική εξίσωση κύκλου.	471
12.9.3 Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου.	472
12.9.4 Εξίσωση κύκλου σε πολικές συντεταγμένες.	472
12.9.5 Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου.	473
12.10 Έλλειψη.	475
12.10.1 Αναλυτική εξίσωση ελλείψεως.	475
12.10.2 Χαρακτηριστικά της ελλείψεως.	476
12.10.3 Εκκεντρότητα ελλείψεως.	477
12.10.4 Εξίσωση εφαπτομένης της ελλείψεως.	477
12.10.5 Ανακλαστική ιδιότητα της ελλείψεως.	478
12.11 Υπερβολή.	478
12.11.1 Αναλυτική εξίσωση υπερβολής.	479
12.11.2 Χαρακτηριστικά της υπερβολής.	479
12.11.3 Ασύμπτωτες της υπερβολής.	480
12.11.4 Εκκεντρότητα υπερβολής.	480
12.11.5 Εξίσωση εφαπτομένης της υπερβολής.	481
12.11.6 Ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής.	481
12.12 Παραβολή.	481
12.12.1 Αναλυτική εξίσωση παραβολής.	482
12.12.2 Χαρακτηριστικά της παραβολής.	483
12.12.3 Εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής.	483
12.12.4 Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής.	483
12.13 Πολικές εξισώσεις κωνικών τομών.	484
12.14 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	489
12.15 Γενικές ασκήσεις.	496

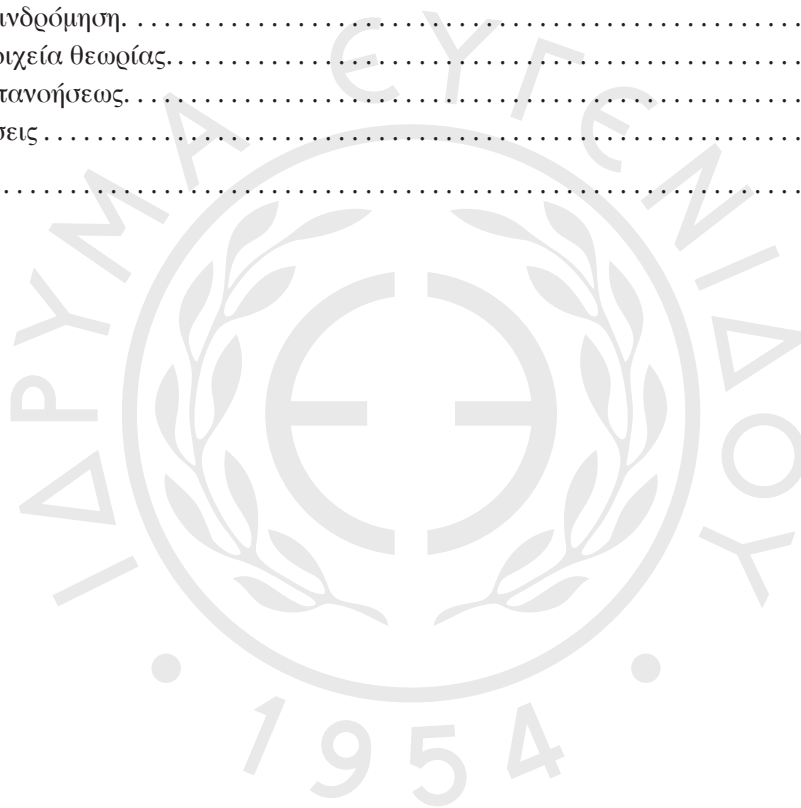
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

13.1 Στερεομετρία.	502
13.2 Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα.	511
13.3 Θεμελιώδεις σχέσεις σε ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα.	516
13.4 Κανόνες του Napier.	517
13.5 Θεωρήματα των τεταρτημορίων.	518
13.6 Επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.	519
13.6.1 Γενικοί κανόνες επίλυσεως ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.	519
13.6.2 Εφαρμογές επίλυσεως ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου.	520
13.7 Ορθόπλευρα σφαιρικά τρίγωνα.	529
13.8 Επίλυση σφαιρικού τριγώνου.	531
13.9 Εφαρμογές σφαιρικής τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία.	537
13.9.1 Λοξοδρομικός πλους.	537
13.9.2 Ορθοδρομικός πλους.	537
13.9.3 Μεικτός ή σύνθετος πλους.	543
13.9.4 Τρίγωνο θέσεως ή αστρονομικό τρίγωνο.	544
13.10 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	545
13.11 Γενικές ασκήσεις.	546

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

14.1	Εισαγωγή – Πληθυσμός και δείγμα.	552
14.2	Πίνακες συχνοτήτων – Γραφικές μέθοδοι παρουσιάσεως στατιστικών στοιχείων.	556
14.3	Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.	568
14.4	Μέτρα θέσεως.	577
14.4.1	Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ($\bar{x}$).	577
14.4.2	Διάμεσος (δ) και εκατοστημόρια.	580
14.4.3	Επικρατούσα τιμή ή κορυφή (M_0).	583
14.5	Μέτρα διακυμάνσεως.	587
14.6	Γραμμική παλινδρόμηση.	593
14.7	Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.	601
14.8	Ερωτήσεις κατανόησης.	603
14.9	Γενικές ασκήσεις.	605
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.		609





*Ο Ευκλείδης από την Αλεξάνδρεια
(4^{ος} – 3^{ος} αι. π.Χ.).
Μουσείο Φυσικής Ιστορίας
του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης.*