ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Χ. ΒΡΟΥΛΟΥ
ΣΤΕΦΑΝΟΥ Ι. ΚΑΡΝΑΒΑ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ

ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 2012
Β΄ ΕΚΔΟΣΗ 2018
ISBN: 978-960-337-154-0

Copyright © 2018 Ίδρυμα Ευγενίδου
Απαγορεύεται η ολική ή μερική ανατύπωση του βιβλίου και των εικόνων με κάθε μέσο καθώς και η διασκευή, η προσαρμογή, η μετατροπή και η κυκλοφορία του (Άρθρο 3 του ν. 2121/1993).

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Το 1952 ο Ευγένιος Ευγενίδης (1882-1954) όρισε με τη διαθήκη του τη σύσταση του Ιδρύματος Ευγενίδου, του οποίου ως μοναδικό σκοπό έταξε «νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν νέων ἑλληνικῆς ὑπηκοότητος ἐν τῷ ἐπιστημονικῷ καὶ τεχνικῷ πεδίῳ». Ο ιδρυτής και χορηγός του Ιδρύματος Ευγενίδου ορθά προέβλεψε ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο της Ελλάδος αποτελεί η άρτια κατάρτιση των Ελλήνων τεχνιτών κατά τα πρότυπα της επαγγελματικής εκπαιδεύσεως άλλων ευρωπαϊκών χωρών.

Την 23η Φεβρουαρίου του 1956 εγκρίθηκε η σύσταση του κοινωφελούς Ιδρύματος Ευγενίδου, την διαχείριση του οποίου κατά την ρητή επιθυμία του ιδρυτή του ανέλαβε η αδελφή του Μαριάνθη Σίμου (1895-1981). Τότε ξεκίνησε η υλοποίηση του σκοπού του Ιδρύματος και η εκπλήρωση μίας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου από την Μαριάνθη Σίμου και τους επιστημονικούς συνεργάτες της.

Το έργο της Μαριάνθης Σίμου συνέχισε από το 1981 ο πολύτιμος συνεργάτης και διάδοχος του Ευγενίου Ευγενίδη, Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης (1920-2000). Από το 2000 συνεχιστής του έργου του Ιδρύματος Ευγενίδου έχει αναλάβει ο Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Μία από τις πρώτες δραστηριότητες του Ιδρύματος Ευγενίδου, ευθύς μετά την ίδρυσή του, υπήρξε η συγγραφή και έκδοση κατάλληλων διδακτικών εγχειριδίων για τους μαθητές των τεχνικών σχολών, καθώς διαπιστώθηκε ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητών με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν τα ορθά θεμέλια για την παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό. Καρπός αυτής της δραστηριότητας είναι η Βιβλιοθήκη του Τεχνίτη (1957-1975), η οποία αριθμεί 32 τίτλους, η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού (1962-1975), που περιλαμβάνει 50 τίτλους, η Τεχνική Βιβλιοθήκη (1969-1980) με 11 τίτλους και η Βιβλιοθήκη του Τεχνικού Βοηθού Χημικού (1971-1973) με 3 τίτλους. Επί πλέον, από το 1977 μέχρι σήμερα έχουν εκδοθεί 171 τίτλοι για τους μαθητές των Τεχνικών και Επαγγελματικών Λυκείων και 16 για τους μαθητές των Σχολών Μέσης Τεχνικής και Επαγγελματικής εκπαιδεύσεως.

Ξεχωριστή σειρά βιβλίων του Ιδρύματος Ευγενίδου αποτελεί η Βιβλιοθήκη του Ναυτικού (1967 έως σήμερα), η οποία είναι το αποτέλεσμα της συνεργασίας του Ιδρύματος Ευγενίδου με την Διεύθυνση Εκπαιδεύσεως Ναυτικών του Υπουργείου Ναυτιλίας. Η συγγραφή και έκδοση των εκπαιδευτικών εγχειριδίων για τους σπουδαστές των ναυτικών σχολών ανετέθη στο Ίδρυμα Ευγενίδου με την υπ' αριθμ. 61288/5031/9.8.1966 απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και λειτούργησε η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων, η οποία είχε συσταθεί ήδη από το 1958. Η συνεργασία Ιδρύματος Ευγενίδου και Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας ανανεώθηκε με την υπ. αριθμ. Μ2111.1/2/99 υπουργική απόφαση όπως τροποποιήθηκε από την Μ3611.2/05/05/16-12-2005, με την οποία το ΥΕΝ ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή διδακτικών εγχειριδίων για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού.

Στην Βιβλιοθήκη του Ναυτικού περιλαμβάνονται συνολικά 137 τίτλοι μέχρι σήμερα: 27 τίτλοι για τις Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού (1967-1979), 42 τίτλοι για τις Ανώτατες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού (1981-2001), 39 τίτλοι για τις Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού, 13 εγχειρίδια κατευθυνόμενης εκπαιδεύσεως επί πλοίου και 16 μεταφράσεις ναυτικών εγχειριδίων.

Όλα τα βιβλία της Βιβλιοθήκης του Ναυτικού, εκτός του ότι έχουν συγγραφεί σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας των σχολών και ανταποκρίνονται στις ανάγκες των σπουδαστών, είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν

το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία. Επί πλέον οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων καταβάλλουν κάθε προσπάθεια ώστε τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και στις δυνατότητες των σπουδαστών.

Την περίοδο 2012-2013 το ΥΝΑ με το υπ' αριθμ. Μ3616/01/2012/26-09-2012 έγγραφο ανέθεσε στην Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου την σύσταση ειδικής ομάδας εργασίας εμπειρογνωμόνων για την επικαιροποίηση των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών για τις ΑΕΝ, τα ΚΕΣΕΝ και τα ειδικά σχολεία Πλοιάρχων και Μηχανικών, εφαρμόζοντας τις νέες απαιτήσεις εκπαιδεύσεως και πιστοποιήσεως ναυτικών της Διεθνούς Συμβάσεως STCW '78 (Standards of Training, Certification and Watchkeeping for Seafarers – Manila amendments 2010). Με βάση τα νέα αναλυτικά προγράμματα για τις ΑΕΝ, τα οποία εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά την χρονιά 2013-2014, ξεκίνησε από το 2014 και η επικαιροποίηση των υφισταμένων διδακτικών εγχειριδίων, προκειμένου αυτά να είναι συμβατά με τις νέες διεθνείς απαιτήσεις.

Με την προσφορά των εκδόσεών του στους καθηγητές, στους σπουδαστές των ΑΕΝ και σε όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα Ευγενίδου συνεχίζει να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση της Ελλάδος, υλοποιώντας επί 60 και πλέον χρόνια το όραμα του ιδρυτή του, αείμνηστου ευεργέτη Ευγενίου Ευγενίδου.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Εμμανουήλ Δρης, Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ, Πρόεδρος.
Αχιλλέας Ματσάγγος, Αντιναύαρχος Λ.Σ. (ε.α.).
Στυλιανός Μπέλλας, Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντης Ναυτ. Εκπαιδ., Υπ. Ναυτιλίας και Νησιωτικής Πολιτικής.
Σύμβουλος επί των εκδόσεων του Ιδρύματος **Κων. Αγγ. Μανάφης,** Ομ. Καθηγ. Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών.
Γραμματέας της Επιτροπής, **Ελευθερία Τελειώνη**.

Επιστημονικός Σύμβουλος για το βιβλίο «Φυσική» **Εμμανουήλ Δρης**, ομ. καθηγητής ΕΜΠ.

Διατελέσαντα μέλη της Επιτροπής

Γ. Κακριδής (1955-1959) Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Καλογεράς* (1957-1970) Καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Παππάς* (1955-1983) καθηγητής ΕΜΠ, *Χ. Καβουνίδης* (1955-1984) Μηχ. Ηλ. ΕΜΠ, *Μ. Αγγελόπουλος* (1970-2003) ομ. καθηγητής ΕΜΠ, *Σπ. Γουλιέλμος (1958)* Αντ/ρχος, *Ξ. Αντωνιάδης* (1959-1966) Αντ/ρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Γ. Τσακίρης* (1967-1969) Πλοίαρχος, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ελλ. Σίδερης* (1967-1969) Υποναύαρχος, *Π. Φουσιέρης* (1969-1971) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ, Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αλ. Μοσχονάς* (1971-1972) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Χρυσανθακόπουλος* (1972-1974) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Αθαν. Σωτηρόπουλος* (1974-1977) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Σπαρτιώτης* (1977) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., προσωρινός Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Πουλάκης* (1977-1979) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Λυκούδης* (1979-1981) Πλοίαρχος Λ. Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ανασ. Δημαράκης* (1981-1982) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Τσαντήλας* (1982-1984) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Σταυρόπουλος* ομ. καθηγητής Πανεπ. Πειραιώς (2003-2008) *Ε. Τζαβέλας* (1984-1986) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Ιρηγοράκος* (1986-1988) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Μπαρκαϊσάς* (1988-1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Παπανασταίου* (1989) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Λάμπρου* (1989-1992) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Κοκορέτσας* (1992-1993) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρκάκης* (1993-1994) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Ζουμπούλης* (1994-1995) Πλοίαρχος Λ.Σ., *Φ. Ψαρράς* (1995-1996) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Γ. Καλαρώνης* (1996-1998) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Θ. Ρενιζεπέρης* (1998-2000) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Στεφανάκης* (2000-2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μαρίνος* (2001) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Εξαρχόπουλος* (2001-2003) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Κ. Μπιλάκης (*2003-2004) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ν. Θεμέλαρος* (2003-2004) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Κουβέλης* (2004-2005) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Δ. Βασιλάκης* (2005-2008) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Π. Πετρόπουλος* (2008-2009) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Α. Μαισάγγος* (2009-2011) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Σέργης* (2011-2012) Αρχιπλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Ι. Τζαβάρας*, (2004-2013) Αντιναύαρχος Λ.Σ. (Ε.Α.), *Ι. Τεγόπουλος* (1988-2013) ομ. καθηγητής ΕΜΠ, *Α. Θεοφανόπουλος* (2012-2014) Πλοίαρχος Λ.Σ., Δ/ντής Ναυτ. Εκπαιδ., *Βενετία Καλλιπολίτου* (2014-2017) Αντιπλοίαρχος Λ.Σ. Δ/ντρια Ναυτ. Εκπαιδ..

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Χ. ΒΡΟΥΛΟΥ
Φυσικού

ΣΤΕΦΑΝΟΥ Ι. ΚΑΡΝΑΒΑ
Μαθηματικού (M.Ed.),
Επικ. Καθηγητή,
Α.Ε.Ν. Οινουσσών

Β' ΕΚΔΟΣΗ

ΑΘΗΝΑ
2018

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Α' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε όλους τους πρωτοετείς και δευτεροετείς σπουδαστές των Ακαδημιών Εμπορικού Ναυτικού, στους αυριανούς πλοιάρχους ή μηχανικούς της ελληνικής ή ελληνόκτητης ναυτιλίας.

Έχει γραφτεί σύμφωνα με τα οριζόμενα στα αναμορφωμένα αναλυτικά και ωρολόγια προγράμματα σπουδών των Α.Ε.Ν., όπως αυτά περιγράφονται στο Φ.Ε.Κ. 1224 Β΄/2007, που εκδόθηκε σε εφαρμογή των module courses του International Maritime Organization και' απαίτηση της Διεθνούς Συμβάσεως STCW.

Για τους σκοπούς του παρόντος βιβλίου χρησιμοποιήσαμε ως σημείο αφετηρίας την προϋπάρχουσα γνώση, την οποία γνωρίζομε από την πολύχρονη εμπειρία μας ότι κατέχει ο μέσος σπουδαστής που εισάγεται στις Α.Ε.Ν.. Αποδεχόμενοι ότι η μάθηση έχει ενεργητικό και όχι παθητικό χαρακτήρα, απαιτεί την εποικοδομητική συμμετοχή του σπουδαστή και είναι μία πολύπλοκη γνωσιακή δραστηριότητα που δεν χωράει βιασύνη, προχωρήσαμε στη συγγραφή του.

Το βιβλίο αυτό θα έχει εκπληρώσει τον στόχο του αν καταφέρει να συμβάλει επιτυχώς στο να κατανοήσουν οι ενεργοί σπουδαστές στοιχειώδεις έννοιες της φυσικής, τις οποίες συναντούν τόσο στην καθημερινή τους ζωή στη ξηρά, όσο και μέσα στα πλοία και όχι όταν απομνημονεύσουν απομονωμένα στοιχεία και διαδικασίες.

Αισθανόμαστε επιτακτική την ανάγκη να ευχαριστήσουμε θερμά όλο το προσωπικό του Τμήματος Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την πλήρη και αποδοτική συνεργασία που είχαμε τα τέσσερα τελευταία έτη και ειδικά τον Ομότιμο Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και Πρόεδρο της Επιτροπής Εκδόσεων κ. Εμμανουήλ Αντ. Δρη, για την υπομονή του, τον άφθονο χρόνο που διέθεσε, τις εύστοχες υποδείξεις του, καθώς και την αμέριστη συμπαράσταση και ουσιαστική βοήθειά του σε όλα τα στάδια μέχρι την ολοκλήρωση της συγγραφής, ως κριτής και ειδικός επιστημονικός σύμβουλος για το βιβλίο αυτό. Θέλουμε επίσης να ευχαριστήσουμε το συνάδελφο φυσικό Στέργιο Παπακωνσταντίνου για τη σημαντική βοήθεια που μας προσέφερε στο ξεκίνημα αυτής της προσπάθειας.

Τα κεφάλαια 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16 και 17 εκπονήθηκαν αυτοτελώς από τον κ. Βρούλο και τα κεφάλαια 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11 και 12 από τον κ. Καρναβά.

Ως ανθρώπινο δημιούργημα το βιβλίο, δεν μπορεί να είναι τέλειο. Ελπίζουμε ότι αυτή μας η προσπάθεια θα τύχει καλόπιστης κριτικής εκ μέρους των αναγνωστών και των συναδέλφων μας. Μην διστάσετε να επικοινωνήσετε μαζί μας για οποιεσδήποτε παρατηρήσεις, σχόλια ή υποδείξεις, που θεωρείτε ότι θα συντελέσουν στην βελτίωση του παρόντος βιβλίου, επ' ωφελεία της παρεχόμενης ναυτικής εκπαιδεύσεως.

Καλλιθέα – Οινούσσες, Μάιος 2012
Αντώνης Χ. Βρούλος – Στέφανος Ι. Καρναβάς

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Στην παρούσα β' έκδοση του βιβλίου Φυσική διορθώθηκαν οι αβλεψίες και παραλείψεις της 1ης εκδόσεως και η ύλη δομήθηκε κατά πιο παιδαγωγικό τρόπο, με απλότητα, σαφήνεια, πληρότητα και συστηματική ταξινόμηση. Βασικός σκοπός και της παρούσας έκδοσης είναι η βαθειά κατανόηση της θεωρίας της Φυσικής και ιδίως των εφαρμογών της στην καθημερινή ζωή πάνω στο πλοίο, η ανάπτυξη σωστής κριτικής σκέψεως και η απόκτηση εμπειρίας στη λύση ασκήσεων, προκειμένου οι αυριανοί αξιωματικοί γέφυρας και μηχανής να αποκτήσουν μία στέρεη γνώση του αντικειμένου της Φυσικής.

Σε κάθε κεφάλαιο περιέχεται η βασική θεωρία και αρκετά επιλεγμένα παραδείγματα, υποδειγματικά λυμένα, ώστε οι σπουδαστές, σύμφωνα με αυτά, να μπορούν να επιλύσουν μόνοι τους τις άλυτες ασκήσεις, η δυσκολία των οποίων αυξάνεται σταδιακά, καθιστώντας έτσι το βιβλίο ένα χρήσιμο εργαλείο μελέτης και εξασκήσεως.

Θεωρούμε, λοιπόν, ότι το βιβλίο θα τους προσφέρει ουσιαστική βοήθεια, καλύπτοντας πλήρως την ύλη της θεωρίας και των εφαρμογών της Φυσικής σύμφωνα με το ΦΕΚ 2303 Β'/ 16-09-2013 «Ωρολόγια και Αναλυτικά Προγράμματα ΑΕΝ/ Π-Μ», το οποίο έχει ενσωματώσει τις αλλαγές της αναθεωρημένης Διεθνούς Συμβάσεως STCW 1978 (2010 τροποποιήσεις Manila).

Επιθυμούμε να εκφράσουμε για άλλη μία φορά τις ευχαριστίες μας στο προσωπικό της Ομάδας Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου για την επίπονη απασχόλησή τους στην άρτια προετοιμασία και ολοκλήρωση αυτής της εκδόσεως και κυρίως στον Επιστημονικό Σύμβουλο του βιβλίου, Ομότιμο Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και Πρόεδρο της Επιτροπής Εκδόσεων κ. Εμμανουήλ Δρη για τις καίριες επισημάνσεις του.

Οι Συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ
ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

1.1 Έννοιες μήκους, εμβαδού, όγκου. Μονάδες μετρήσεώς τους. Συσχετισμός των μονάδων. 1
1.2 Έννοια της μάζας. Μονάδες μετρήσεως. Έλξη της Γης στα σώματα. Βαρυτική επιτάχυνση. Μεταβολή του βάρους σώματος συναρτήσει του ύψους και του γεωγραφικού πλάτους. 3
1.2.1 Νόμος Παγκόσμιας Έλξεως. 3
1.2.2 Βαρυτική επιτάχυνση. 4
1.2.3 Μεταβολή του βάρους του σώματος συναρτήσει του ύψους και του γεωγραφικού πλάτους. 5
1.3 Πυκνότητα και ειδικό βάρος σώματος. Μονάδες μετρήσεώς τους. Συσχετισμός ειδικού βάρους και πυκνότητας. 6
1.4 Συστήματα μονάδων. Σφάλματα στις μετρήσεις, σημαντικά ψηφία. 7
1.4.1 Σφάλματα στις μετρήσεις. 9
1.4.2 Σημαντικά ψηφία. 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

2.1 Μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση. 14
2.1.1 Διάστημα Δs. 15
2.1.2 Μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ 15
2.1.3 Επιτάχυνση. 17
2.1.4 Επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση στην καμπυλόγραμμη κίνηση. 18
2.2 Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. 18
2.3 Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. 20
2.4 Ομαλή κυκλική κίνηση και κυκλική ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. 23
2.4.1 Γωνιακή επιτάχυνση. 26
2.4.2 Γραμμική επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση. 27
2.4.3 Μετάδοση περιστροφικής κινήσεως. 27
2.5 Σύνθεση κινήσεων. Απόλυτη και σχετική κίνηση. 29
2.5.1 Σχετική κίνηση δύο σωμάτων. 30
2.5.2 Σύνθεση ταυτοχρόνων κινήσεων. 30
2.5.3 Σύνθεση δύο ευθυγράμμων ομαλών κινήσεων. 31
2.5.4 Σύνθεση ευθύγραμμης ομαλής και ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως. 32
2.5.5 Σύνθεση ευθύγραμμης ομαλής και ομαλής κυκλικής κινήσεως. 32
2.5.6 Πλάγια βολή υπό γωνία φ προς τα πάνω εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου. 33
2.5.7 Μέγιστο ύψος. 34
2.5.8 Χρόνος καθόδου. 34
2.5.9 Βεληνεκές s. 34

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
ΔΥΝΑΜΙΚΗ

3.1 Δυνάμεις. 41
3.1.1 Μονάδες μετρήσεως της δυνάμεως. 41
3.1.2 Ανάλυση δυνάμεως σε συνιστώσες. 42
3.2 Οι νόμοι του Νεύτωνα. 42
3.2.1 Ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα ή το Αξίωμα της Αδράνειας. 42
3.2.2 Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα ή ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής. 43
3.2.3 Ο Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα ή το Αξίωμα Δράσεως-Αντιδράσεως. 44
3.3 Αδρανειακά και μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς. 45
3.4 Τριβή. 46
3.5 Ορμή. Αρχή διατηρήσεως της ορμής. Κέντρο μάζας. Κίνηση κέντρου μάζας. 48
3.5.1 Ορμή υλικού σημείου. 48
3.5.2 Κέντρο μάζας. 49
3.5.3 Ορμή συστήματος υλικών σημείων. 49
3.5.4 Θεώρημα διατηρήσεως της ορμής συστήματος υλικών σημείων. 49
3.5.5 Κίνηση κέντρου μάζας συστήματος υλικών σημείων. 49
3.5.6 Ώθηση δυνάμεως. Θεώρημα ωθήσεως-ορμής. 51
3.6 Νόμος του Hooke. Ελαστικότητα. Διάτμηση και στρέψη. 52
3.6.1 Εφελκυσμός και θλίψη. 52
3.6.2 Διάγραμμα μηκύνσεως. 53
3.6.3 Διάτμηση και στρέψη. 53
3.7 Ροπή δυνάμεως. 54
3.7.1 Ροπή δυνάμεως ως προς σημείο. 54
3.7.2 Ροπή δυνάμεως ως προς άξονα. 54
3.7.3 Ροπή ζεύγους δυνάμεων. 55
3.7.4 Θεώρημα των ροπών ή θεώρημα του Varignon. 55
3.7.5 Σύνθεση δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων. 55
3.7.6 Σύνθεση δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων. 56
3.7.7 Σύνθεση πολλών παραλλήλων δυνάμεων. 57
3.7.8 Θεώρημα του κέντρου πολλών παραλλήλων δυνάμεων. 57
3.7.9 Κέντρο βάρους στερεού σώματος. 57
3.7.10 Εύρεση του κέντρου βάρους. 58
3.7.11 Κέντρο βάρους συστήματος σωμάτων. 59
3.8 Ισορροπία στερεού σώματος. 59
3.8.1 Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος. 59
3.8.2 Είδη ισορροπίας. 60
3.9 Μεταφορική και στροφική κίνηση στερεού. Στροφορμή.
Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κινήσεως. 61
3.9.1 Στροφική κίνηση στερεού σώματος περί άξονα. 61
3.9.2 Κεντρομόλος δύναμη. 62
3.9.3 Φυγόκεντρος δύναμη. 62
3.9.4 Εφαρμογή της κεντρομόλου δυνάμεως. Ρυθμιστής του Watt. 63
3.9.5 Εφαρμογή της φυγόκεντρης δυνάμεως. Φυγοκεντρικός διαχωριστήρας. 64
3.9.6 Ροπή αδρανείας ως προς άξονα. 64
3.9.7 Κύριοι κεντρικοί άξονες αδρανείας. 65
3.9.8 Θεώρημα Steiner (Θεώρημα παραλλήλων αξόνων). 66
3.9.9 Σφόνδυλος και ροπή αδρανείας σφονδύλου ως προς τον άξονα περιστροφής του. 67

3.9.10 Θεμελιώδης εξίσωση της στροφικής κινήσεως. 68
3.9.11 Διερεύνηση της θεμελιώδους εξισώσεως. 68
3.9.12 Στροφορμή υλικού σημείου περί άξονα. 68
3.9.13 Στροφορμή συστήματος υλικών σημείων περί άξονα. 69
3.9.14 Γενικότερη διατύπωση της θεμελιώδους εξισώσεως της στροφικής κινήσεως. 69
3.9.15 Αρχή διατηρήσεως της στροφορμής ενός σώματος. 70
3.9.16 Αρχή διατηρήσεως της στροφορμής συστήματος σωμάτων. 70

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΙΣΧΥΣ

4.1 Έργο δυνάμεως. 76
4.1.1 Μονάδες μετρήσεως του έργου. 77
4.1.2 Έργο δυνάμεως μεταβλητού μέτρου F=F(s). 77
4.1.3 Έργο τριβής. 78
4.1.4 Έργο ελατηρίου. 78
4.1.5 Έργο δυνάμεως σταθερού μέτρου που εφάπτεται συνεχώς σε καμπύλη τροχιά. 79
4.2 Μηχανική, κινητική και δυναμική ενέργεια. Διατηρητικές και μη διατηρητικές δυνάμεις. 79
4.2.1 Κινητική ενέργεια. 80
4.2.2 Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. 80
4.2.3 Απόδειξη του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για υλικό σημείο. 80
4.2.4 Δυναμική ενέργεια. 81
4.2.5 Δυναμική ενέργεια σώματος μέσα σε πεδίο βαρύτητας. 82
4.2.6 Κινητήριο και ανθιστάμενο έργο. 83
4.3 Αρχή διατηρήσεως της ενέργειας. Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. 84
4.4 Ισχύς. Συντελεστής αποδόσεως μηχανής. 86
4.4.1 Μεγάλες μονάδες έργου. 87
4.4.2 Συντελεστής αποδόσεως μηχανής. 87
4.5 Ενεργειακή μελέτη στροφικών κινήσεων στερεών σωμάτων. 88
4.5.1 Έργο κατά τη στροφική κίνηση. 88
4.5.2 Κινητική ενέργεια στερεού σώματος σε περιστροφή. 88
4.5.3 Θεώρημα Έργου – Ενέργειας στη στροφική κίνηση. 89
4.5.4 Ώθηση της ροπής. 89
4.5.5 Ισχύς της ροπής μίας δυνάμεως. 89
4.6 Αρχή των δυνατών έργων. Απλές μηχανές. 90
4.6.1 Αρχή των δυνατών έργων. 90
4.6.2 Κεκλιμένο επίπεδο. 91
4.6.3 Μοχλοί. 91
4.6.4 Είδη μοχλών. 92
4.6.5 Τροχαλίες. 92
4.6.6 Πολύσπαστο. 93
4.6.7 Βαρούλκο. 94
4.6.8 Κοχλίας (γρύλος). 95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ – ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

5.1 Ορισμοί. Παροχή. Ροή. Δυναμική γραμμή. Στρωτή και τυρβώδης ροή 99
5.1.1 Υπολογισμός της παροχής. 100

5.1.2 Νόμος της Συνέχειας.. 101
5.2 Πίεση. Ατμοσφαιρική πίεση και εξάρτησή της από το ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας. Αρχή του Pascal.. 101
5.2.1 Πίεση. 101
5.2.2 Πίεση σε σημείο επιφάνειας. 102
5.2.3 Μονάδες μετρήσεως της πιέσεως. 102
5.2.4 Πίεση μέσα σε ρευστά. 103
5.2.5 Ατμοσφαιρική πίεση. 103
5.2.6 Εφαρμογές της ατμοσφαιρικής πιέσεως.. 103
5.2.7 Αρχή του Pascal για ρευστά.. 105
5.2.8 Εφαρμογές της αρχής του Pascal.. 105
5.3 Υδροστατική πίεση. Θεώρημα Torricelli.. 106
5.3.1 Υδροστατική πίεση. 106
5.3.2 Απόδειξη της σχέσεως $p_{υσ} = ε h$.. 106
5.3.3 Πείραμα Torricelli.. 107
5.3.4 Μεταβολή της ατμοσφαιρικής πιέσεως με το ύψος.. 108
5.3.5 Δυνάμεις που ασκεί το υγρό που ισορροπεί. 108
5.3.6 Μέτρηση της ατμοσφαιρικής πιέσεως.. 110
5.3.7 Μεταλλικό βαρόμετρο. 110
5.3.8 Ελεύθερη επιφάνεια υγρών που ισορροπούν. 111
5.3.9 Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων. 111
5.3.10 Εφαρμογές της αρχής των συγκοινωνούντων δοχείων. 111
5.3.11 Υγροδείκτης–Υδροδείκτης. 112
5.3.12 Ισορροπία υγρών που δεν αναμειγνύονται και περιέχονται στο ίδιο δοχείο.. 112
5.3.13 Θεώρημα του Torricelli (εκροή υγρού από οπή).. 113
5.4 Δυναμική πίεση. Αρχή του Bernoulli.. 114
5.4.1 Απόδειξη του Νόμου του Bernoulli.. 115
5.4.2 Εφαρμογές του Νόμου του Bernoulli. 115
5.5 Αρχή του Αρχιμήδη. 116
5.5.1 Απόδειξη της αρχής Αρχιμήδη. 117
5.5.2 Πώς επιπλέουν τα σιδερένια πλοία.. 117
5.5.3 Πλωτές δεξαμενές.. 118
5.5.4 Αερόστατο. 118
5.6 Αριθμός Reynolds. Κρίσιμη ταχύτητα ρευστού. Συντελεστές αντιστάσεως για ρευστά. Νόμος Stokes. Αντίσταση σε τυρβώδη ροή. 118
5.6.1 Εσωτερική τριβή υγρών. 118
5.6.2 Μονάδα μετρήσεως του συντελεστή της εσωτερικής τριβής (ή συντελεστή ιξώδους).. 119
5.6.3 Τυρβώδης ροή. 119
5.6.4 Αντίσταση σωμάτων που βρίσκονται μέσα σε ρευστό. 120
5.6.5 Νόμοι της αντιστάσεως.. 120
5.6.6 Πτώση σωμάτων στον αέρα. 121
5.7 Δυναμική άνωση. Υποπίεση, υπερπίεση και φαινόμενο Magnus.. 122
5.7.1 Φαινόμενο Magnus. 122
5.7.2 Πώς κινείται ένα ιστιοφόρο.. 123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

6.1 Θερμοκρασία. 127

6.2 Θερμοδυναμική ενέργεια. Θερμότητα. 128
6.2.1 Γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα. 129
6.2.2 Ειδικές θερμότητες αερίων. 130
6.3 Διάδοση της θερμότητας. 130
6.3.1 Διάδοση θερμότητας με αγωγή. 131
6.3.2 Διάδοση θερμότητας με μεταφορά. 131
6.3.3 Διάδοση θερμότητας με ακτινοβολία. 132
6.4 Θερμική διαστολή στερεών και υγρών. 133
6.4.1 Γραμμική διαστολή. 133
6.4.2 Διαστολή όγκου στερεών και υγρών. 134
6.4.3 Η διαστολή του νερού. 134
6.5 Θερμική διαστολή των αερίων. Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων.
Νόμοι της θερμοδυναμικής. 135
6.5.1 Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων. 135
6.5.2 Μεταβολές αερίων. 136
6.5.3 Εσωτερική ενέργεια. 136
6.5.4 Έργο κατά την εκτόνωση ή συμπίεση. 137
6.5.5 Νόμοι της θερμοδυναμικής. 138
6.5.6 Αντιστρεπτή και μη αντιστρεπτή μεταβολή. 138
6.5.7 Ελεύθερη εκτόνωση. 142
6.6 Θερμικές μηχανές. 143
6.6.1 Θερμική μηχανή. 143
6.6.2 Κύκλος Carnot. 143
6.6.3 Ψυκτικές μηχανές. 145

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

7.1 Στατιστική ισορροπία. 148
7.2 Κατανομή των Maxwell–Boltzmann. 149
7.3 Κινητική θεωρία και καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων. 151
7.4 Εντροπία 152

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ
ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΦΑΣΕΩΝ

8.1 Αλλαγές φάσεων υλικών σωμάτων. 155
8.2 Κορεσμένοι ατμοί. 157
8.3 Θερμότητες μεταβολής φάσεων. 158
8.4 Υγρασία απόλυτη και σχετική. Σημείο δρόσου. 158

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΦΟΡΤΙΑ

9.1 Θετικά και αρνητικά φορτία. 160
9.1.1 Εμφάνιση των δύο ηλεκτρικών φορτίων. 161
9.1.2 Ιδιότητες του ηλεκτρικού φορτίου. 161
9.1.3 Μονάδα μετρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου. 162
9.2 Νόμος του Coulomb. 162

9.3 Ηλεκτρικό πεδίο 164
9.3.1 Υπολογισμός της εντάσεως Ε στο σημείο Α του ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από ακίνητο σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q. 165
9.3.2 Υπολογισμός της εντάσεως που δημιουργείται από δύο ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία Q_1 και Q_2. 165
9.3.3 Δυναμικές γραμμές πεδίου σημειακού φορτίου. 166
9.3.4 Ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν δύο αντίθετα φορτία. 166
9.3.5 Ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν δύο ίσα θετικά φορτία. 166
9.3.6 Ιδιότητες των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου. 167
9.3.7 Ηλεκτρική ροή και νόμος του Gauss. 168
9.4 Ηλεκτρικό δυναμικό. 168
9.4.1 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. 168
9.4.2 Φυσική σημασία της θετικής και της αρνητικής δυναμικής ενέργειας. 169
9.4.3 Δυναμικό ηλεκτροστατικού πεδίου. 169
9.4.4 Διαφορά δυναμικού (τάση). 170
9.4.5 Υπολογισμός δυναμικού σε σημείο ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από ακίνητο σημειακό ηλεκτρικό φορτίο. 170
9.4.6 Υπολογισμός δυναμικού σε σημείο ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από πολλά ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία. 170
9.4.7 Σχέση μεταξύ τάσεως και εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου. 171
9.4.8 Ειδική περίπτωση. 172
9.4.9 Ισοδυναμικές επιφάνειες. 172
9.4.10 Σχέση μεταξύ διαφοράς δυναμικού και εντάσεως ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. 173
9.5 Ηλεκτρικές εκκενώσεις. 174
9.5.1 Ηλεκτρικό πεδίο της Γης. 174
9.5.2 Γείωση. 174
9.5.3 Δημιουργία ηλεκτρικών σπινθήρων, εκκενώσεων. 174
9.5.4 Το αλεξικέραυνο. 176
9.6 Κίνηση φορτισμένου σωματίου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. 176
9.6.1 Βολή σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. 176
9.6.2 Κίνηση παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. 177
9.6.3 Κίνηση κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. 177
9.7 Κατανομή φορτίων σε αγωγούς. 179
9.7.1 Πυκνότητα φορτίου. 179
9.7.2 Κατανομή των ηλεκτρικών φορτίων στο εσωτερικό αγωγού. 180

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

10.1 Ηλεκτρικό ρεύμα και πυκνότητα ρεύματος. 183
10.2 Αντίσταση και αγωγιμότητα αγωγού. Νόμος του Ohm. 184
10.2.1 Μεταβλητός αντιστάτης ή ρυθμιστική αντίσταση. 186
10.2.2 Μέτρηση του ηλεκτρικού ρεύματος. 187
10.2.3 Βολτόμετρο. 187
10.3 Χωρητικότητα αγωγού. Πυκνωτής. Υπολογισμός χωρητικότητας πυκνωτή. Φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή. Συνδεσμολογία πυκνωτών. 187
10.3.1 Χωρητικότητα αγωγού και υπολογισμός της. 187
10.3.2 Πυκνωτής. 188

10.3.3 Φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή. . . . 190
10.3.4 Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή. . . . 190
10.3.5 Διηλεκτρική σταθερά διηλεκτρικού. . . . 191
10.3.6 Διηλεκτρική αντοχή του μονωτή. . . . 191
10.3.7 Συνδεσμολογία πυκνωτών. . . . 192
10.3.8 Παράλληλη συνδεσμολογία πυκνωτών. . . . 192
10.3.9 Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά. . . . 192
10.3.10 Μεικτή συνδεσμολογία πυκνωτών. . . . 193
10.4 Ηλεκτρεγερτική δύναμη ηλεκτρικής πηγής. Εσωτερική αντίσταση ηλεκτρικής πηγής. Νόμοι του Kirchhoff. Συνδεσμολογία αντιστάσεων. . . . 193
10.4.1 Ηλεκτρική πηγή. . . . 193
10.4.2 Εσωτερική αντίσταση ηλεκτρικής πηγής. . . . 194
10.4.3 Πολική τάση. . . . 194
10.4.4 Κανόνες του Kirchhoff. . . . 195
10.4.5 Συνδεσμολογία αντιστάσεων. . . . 198
10.4.6 Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά. . . . 198
10.4.7 Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων. . . . 198
10.4.8 Μεικτή σύνδεση αντιστάσεων. . . . 199
10.5 Συνδεσμολογία πηγών συνεχούς ρεύματος. . . . 200
10.5.1 Συνδεσμολογία ηλεκτρικών πηγών σε σειρά. . . . 200
10.5.2 Παράλληλη σύνδεση δύο ομοίων ηλεκτρικών πηγών. . . . 200
10.5.3 Μεικτή συνδεσμολογία ηλεκτρικών πηγών. . . . 201
10.6 Ενέργεια και ισχύς ηλεκτρικού ρεύματος. . . . 201
10.6.1 Εφαρμογές του φαινομένου Joule. . . . 202
10.6.2 Λαμπτήρας πυρακτώσεως. . . . 202
10.6.3 Βραχυκύκλωμα. . . . 202
10.6.4 Ασφάλειες. . . . 203
10.6.5 Μονάδα μετρήσεως ηλεκτρικής ισχύος. . . . 204
10.6.6 Θεώρημα μέγιστης ισχύος. . . . 204
10.7 Συσσωρευτής ηλεκτρικής ενέργειας. . . . 204
10.7.1 Χαρακτηριστικά μεγέθη συσσωρευτών. . . . 205
10.7.2 Συσσωρευτές μολύβδου. . . . 205

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

11.1 Μαγνητισμός. . . . 209
11.1.1 Μαγνητικό πεδίο. . . . 209
11.1.2 Μαγνητικό πεδίο της Γης. . . . 211
11.2 Μαγνητικό πεδίο του ρεύματος. . . . 211
11.2.1 Νόμος των Biot-Savart. . . . 212
11.2.2 Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού. . . . 213
11.2.3 Μαγνητικό πεδίο δακτυλιοειδούς πηνίου. . . . 213
11.2.4 Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου σωληνοειδούς. . . . 214
11.2.5 Μαγνητικό πεδίο ηλεκτρομαγνήτη. . . . 214
11.3 Νόμος Laplace. Επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω σε κινούμενο φορτίο. . . . 215
11.3.1 Δύναμη Laplace. . . . 215
11.3.2 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. . . . 216

11.3.3 Στοιχειώδης ηλεκτροκινητήρας. 217
11.3.4 Παράλληλα ρεύματα. 217
11.3.5 Ορισμός της θεμελιώδους μονάδας ampere:. 218
11.4 Μονάδα μετρήσεως του πεδίου Β. 218
11.5 Μαγνητική ροή. 218
11.6 Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή. 219
11.6.1 Επαγωγικό ρεύμα. 221
11.6.2 Κανόνας του Lenz. 221
11.6.3 Ηλεκτρικό φορτίο που αναπτύσσεται από επαγωγή. 222
11.6.4 Το φαινόμενο της αμοιβαίας επαγωγής. 222
11.6.5 Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής. 222
11.6.6 Μονάδα μετρήσεως του συντελεστή αυτεπαγωγής. 223
11.6.7 Συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου. 223
11.6.8 Κίνηση μεταλλικής ράβδου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου. 223
11.6.9 Προσδιορισμός της πολικότητας της πηγής. 224
11.7 Δινορρεύματα ή ρεύματα του Foucault. 224

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ
ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

12.1 Εναλλασσόμενο ρεύμα. Διανυσματικά διαγράμματα. 228
12.1.1 Ενεργό ρεύμα και ενεργός τάση. 229
12.1.2 Απόδειξη των σχέσεων $I_{εν} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ και $V_{εν} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ 230
12.1.3 Διανυσματική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών. 231
12.2 Ισχύς εναλλασσομένου ρεύματος. 231
12.2.1 Σε ωμικό αντιστάτη. 231
12.2.2 Σε πυκνωτή. 232
12.2.3 Σε αυτεπαγωγή (πηνίο). 232
12.2.4 Μέση ισχύς. 234
12.2.5 Απόδειξη της σχέσεως $P = I_{εν} V_{εν} \cos\theta$. 234
12.3 Αντιστάσεις στο εναλλασσόμενο ρεύμα. 234
12.3.1 Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με ωμική αντίσταση. 234
12.3.2 Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πηνίο. 235
12.3.3 Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή. 236
12.3.4 Κύκλωμα με αντιστάτη, πηνίο και πυκνωτή σε σειρά. 236
12.3.5 Υπολογισμός της σύνθετης αντιστάσεως του κυκλώματος. 236
12.3.6 Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά. 238
12.3.7 Μελέτη κυκλώματος RC σε σειρά. 239
12.3.8 Μελέτη κυκλώματος RL σε σειρά. 240
12.4 Μετασχηματιστές. Γεννήτριες. 240
12.4.1 Λειτουργία του μετασχηματιστή. 240
12.4.2 Εξισώσεις του μετασχηματιστή. 241
12.4.3 Συντελεστής αποδόσεως μετασχηματιστή. 241
12.4.4 Γεννήτρια ρεύματος. 241
12.4.5 Μονοφασικός εναλλακτήρας. 242
12.4.6 Τριφασικός εναλλακτήρας. 242
12.4.7 Γεννήτρια συνεχούς ρεύματος (δυναμό). 243

12.5 Τριφασικό ρεύμα. Μεταφορά ηλεκτρικού ρεύματος. Κινητήρες. 243
12.5.1 Μεταφορά τριφασικού ρεύματος. 244
12.5.2 Πλεονεκτήματα τριφασικού ρεύματος. 245
12.5.3 Μεταφορά ηλεκτρικού ρεύματος. 245
12.5.4 Φαινόμενη ισχύς $P_{φαιν}$. 246
12.5.5 Άεργος ή αβαττική ισχύς $P_{α}$. 246
12.5.6 Τριφασικοί κινητήρες. 247
12.5.7 Μονοφασικοί κινητήρες. 247
12.5.8 Κινητήρες και γεννήτριες. 248

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

13.1 Απλή αρμονική ταλάντωση. 250
13.1.1 Σχέσεις για την (μηχανική, γραμμική) απλή αρμονική ταλάντωση. 251
13.1.2 Η δύναμη στην απλή αρμονική ταλάντωση. 251
13.1.3 Ενεργειακή μελέτη της απλής αρμονικής ταλαντώσεως. 253
13.1.4 Φθίνουσες ταλαντώσεις 254
13.1.5 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. 255
13.1.6 Σύστημα ελατήριο-μάζα. 256
13.1.7 Απλό εκκρεμές. 256
13.1.8 Στροφικές ταλαντώσεις. 257
13.1.9 Φυσικό εκκρεμές. 257

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

14.1 Ηλεκτρικές ταλαντώσεις σε κύκλωμα LC. 261
14.1.1 Ενεργειακή θεώρηση. 262
14.1.2 Φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση. 262
14.1.3 Το φαινόμενο του συντονισμού στην ηλεκτρική ταλάντωση. 263
14.2 Μετατροπή του κυκλώματος του Thomson σε κεραία εκπομπής – λήψεως ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. 263
14.3 Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. 265
14.4 Χαρακτηριστικά των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ως προς τον τρόπο μεταδόσεώς τους στον αέρα, στο έδαφος και στο κενό. 266
14.5 Παράγοντες που επιδρούν στη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. 269

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΗΧΟΣ

15.1 Παραγωγή, διάδοση και χαρακτηριστικά του ήχου. 272
15.2 Πηγές ήχου. 274
15.3 Υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου. 274
15.4 Διάδοση ενέργειας με ηχητικά κύματα. 275
15.5 Υπόηχοι – Υπέρηχοι. 276
15.6 Φαινόμενο Doppler. 277
15.6.1 Ακίνητος παρατηρητής–ακίνητη πηγή. 277
15.6.2 Ακίνητος παρατηρητής – κινούμενη πηγή. 278

15.6.3 Κινούμενη πηγή – κινούμενος παρατηρητής. 279

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

16.1 Παραγωγή και διάδοση του φωτός. 281
16.1.1 Διάδοση του φωτός. 281
16.2 Ανάκλαση και διάθλαση του φωτός. Πρίσματα. 283
16.2.1 Ανάκλαση. 283
16.2.2 Οι νόμοι της ανακλάσεως. 283
16.2.3 Διάθλαση. 284
16.2.4 Δείκτης διαθλάσεως. 285
16.2.5 Νόμοι της διαθλάσεως. 286
16.2.6 Διερεύνηση του Νόμου του Snell. 286
16.2.7 Φαινόμενα που οφείλονται στη διάθλαση. 289
16.2.8 Περισσότερα για τα πρίσματα. 290
16.3 Λεπτοί φακοί. 290
16.3.1 Συγκλίνοντες φακοί. 291
16.3.2 Αποκλίνοντες φακοί. 292
16.3.3 Πραγματικά και φανταστικά είδωλα. 292
16.3.4 Τύποι κατασκευαστών φακών. 293

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

17.1 Δομή των ατόμων και υποατομικά σωματίδια. 296
17.2 Στάθμες ενέργειας, διέγερση και ιονισμός. 297
17.2.1 Στάθμες ενέργειας ατόμου. 297
17.2.2 Διέγερση και αποδιέγερση του ατόμου. 299
17.2.3 Ιονισμός ατόμου. 299
17.3 Δομή του πυρήνα, ασταθείς πυρήνες. 300
17.3.1 Δομή του πυρήνα. 300
17.3.2 Πυρηνική σταθερότητα (ευστάθεια) και αστάθεια. 301
17.4 Ραδιενέργεια α, β, γ. 302
17.4.1 Ραδιενέργεια τύπου α. 303
17.4.2 Ραδιενέργεια τύπου β. 303
17.4.3 Ραδιενέργεια τύπου γ. 304
17.5 Νόμος των ραδιενεργών μετατροπών. 306
17.5.1 Χρόνος υποδιπλασιασμού και μέσος χρόνος ζωής ραδιενεργού υλικού. 306
17.5.2 Πυρηνική σχάση και σύντηξη. 308
17.6 Απαριθμητής Geiger-Müller και μέτρηση της ραδιενέργειας. 310
17.7 Δοσιμετρία, μέτρα ασφαλείας και προφυλάξεις 311

Ευρετήριο 314

Ενδεικτική Βιβλιογραφία 320

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μετρήσεις

1.1 Έννοιες μήκους, εμβαδού, όγκου. Μονάδες μετρήσεώς τους. Συσχετισμός των μονάδων.

Για την περιγραφή και τη μελέτη ενός φυσικού φαινομένου χρησιμοποιούνται τα διάφορα φυσικά μεγέθη ή φυσικές ποσότητες. Τα φυσικά μεγέθη εκφράζονται με την τιμή τους, που περιλαμβάνει την αριθμητική τιμή και τη μονάδα μετρήσεως. Για παράδειγμα, ταχύτητα κατά μήκος του άξονα x είναι $u_x = -35{,}6$ m/s. Το $-35{,}6$ m/s είναι η τιμή της ταχύτητας και το $-35{,}6$ η αριθμητική τιμή της.

Το ***μήκος*** είναι φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει μία διάσταση. Για παράδειγμα, χαρακτηρίζει πόσο μεγάλη είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται σε μια ευθεία ή πόσο μεγάλη είναι η απόσταση δύο σημείων μετρούμενη κατά μήκος μιας καμπύλης διαδρομής που περνά απ' τα σημεία αυτά. Μονάδα μετρήσεως του μήκους στο ***Διεθνές Σύστημα Μονάδων*** (Système International–SI) είναι το μέτρο (m).

Το μήκος είναι, κατά προσέγγιση, ίσο με το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό (1/10 000 000) της αποστάσεως του Βορείου Πόλου από τον Ισημερινό της Γης. Αυτός παλιότερα ήταν ο ορισμός του μέτρου. Επίσης είναι ίσο, κατά προσέγγιση, με το πρότυπο μέτρο, το οποίο είναι η απόσταση μεταξύ δυο χαραγών σε μία ράβδο από ιριδιούχο λευκόχρυσο που φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (Bureau International des Poids et Mesures) στις Σέβρες (Serves) κοντά στο Παρίσι. Αυτό αποτελούσε και τον ορισμό του μέτρου πριν την καθιέρωση του σημερινού ορισμού.

Πολλαπλάσιο του 1 m είναι το 1 χιλιόμετρο (1 km = 1000 m) και υποπολλαπλάσια το δεκατόμετρο ή παλάμη (1 dm = 10^{-1} m), το εκατοστόμετρο (1 cm = 10^{-2} m), το χιλιοστόμετρο (1 mm = 10^{-3} m) και το μικρόμετρο (1 μm = 10^{-6} m).

Έτος φωτός (ly = light year, la = light annum) ονομάζεται η απόσταση που διανύει το φως, κινούμενο στο κενό επί ένα έτος, και ισούται με $9{,}46 \times 10^{15}$ m. Στην αστρονομία μονάδα μετρήσεως του μήκους είναι το παρσέκ (1pc), ονομασία που προέρχεται από τις λέξεις **par**allaxe και **sec**ond. Εκφράζει την απόσταση του Ήλιου από σημείο, από το οποίο ο μέσος μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο φαίνεται υπό γωνία ενός δεύτερου λεπτού της μοίρας. 1 παρσέκ (1 pc) = 3,26 ly = $3{,}09 \times 10^{16}$ m.

Στη ναυτιλία ως μονάδα μετρήσεως του μήκους χρησιμοποιείται το ναυτικό μίλι (ν.μ.), όπου: 1 ν.μ. = 1852 m. Ισούται περίπου με την απόσταση δύο σημείων του ίδιου μέγιστου κύκλου στην επιφάνεια της Γης (π.χ. μεσημβρινού), που απέχουν μεταξύ τους ένα πρώτο λεπτό της μοίρας. Οι κανόνες του SI δεν περιλαμβάνουν σύμβολο για το ν.μ., αλλά ανεπίσημα χρησιμοποιούνται τα εξής διάφορα σύμβολα 1 M, 1 NM, 1 Nm, 1 nmi. Κατά τη μετατροπή από μία μονάδα σε άλλη ακολουθούνται κανόνες της άλγεβρας, όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν:

$$32{,}1 \text{ pc} = 32{,}1 \times (1 \text{ pc}) = 32{,}1 \times (3{,}09 \times 10^{16} \text{ m}) = (32{,}1 \times 3{,}09) \times 10^{16} \text{ m} = 99{,}2 \times 10^{16} \text{ m} = 9{,}92 \times 10^{17} \text{ m}.$$

$$6{,}7 \text{ km} = 6{,}7 \times (10^3 \text{ m}) = 6{,}7 \times (10^3 \times 10^2 \text{ cm}) = 6{,}7 \times 10^5 \text{ cm}$$

Ο πίνακας 1.1.1 δείχνει τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων μονάδων μήκους. Σήμερα κυριαρχούν οι μονάδες του SI. Ο πίνακας 1.1.2 παρουσιάζει τα προθέματα στο SI. Στον πίνακα 1.1.3 δίνονται τιμές για διάφορα αντιπροσωπευτικά μήκη.

Πίνακας 1.1.1
Μονάδες μετρήσεως μήκους.

1 έτος φωτός	ly	$9{,}46 \times 10^{15}$ m
1 παρσέκ	pc	$3{,}09 \times 10^{16}$ m
1 ναυτικό μίλι	M	1852 m

Πίνακας 1.1.2
Μερικά από τα προθέματα στο SI.

Παράγοντας	*Πρόθεμα*	*Σύμβολο πολλαπλασιασμού*
10^{12}	tera (τερα)	T
10^{9}	giga	(γίγα) G
10^{6}	mega	(μέγα) M
10^{3}	kilo	(χίλιο) k
10^{2}	hecto	(έκτο, εκατό) h
10^{1}	deka	(δέκα) da
10^{-1}	deci	(ντεσι, δέκατο) d
10^{-2}	centi	(σεντι, εκατοστό) c
10^{-3}	milli	(μιλι, χιλιοστό) m
10^{-6}	micro	(μικρό) μ
10^{-9}	nano	(νάνο) n
10^{-12}	pico	(πίκο) p
10^{-15}	fempto	(φέμπτο) f

Πίνακας 1.1.3
Αντιπροσωπευτικά μήκη.

Μέση απόσταση Γης–Σελήνης	$3{,}8 \times 10^{8}$ m
Μέση ακτίνα της Γης	$6{,}4 \times 10^{6}$ m
Τυπικό ύψος τροχιάς δορυφόρου	2×10^{5} m
Διάμετρος ατόμου υδρογόνου	1×10^{-10} m
Διάμετρος πυρήνα ατόμου	1×10^{-14} m

Το ***εμβαδόν*** είναι φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει επιφάνειες, δηλαδή δύο διαστάσεις. Για παράδειγμα, εκφράζει πόσο μεγάλη είναι η επιφάνεια ενός επίπεδου οικοπέδου ή πόσο μεγάλη είναι η επιφάνεια μιας σφαιρικής μπάλας. Μονάδα μετρήσεως του εμβαδού στο SI, είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2).

Το $1\,m^2$ είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά ίση με 1 m. Υπάρχουν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια του τετραγωνικού, τα οποία σχετίζονται με αυτό και μεταξύ τους. Η μετατροπή από τη μια μονάδα στην άλλη ακολουθεί τους κανόνες της άλγεβρας, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$1\,cm^2 = (10^{-1}\,m)^2 = (10^{-1})^2\,(m)^2 = 10^{-2}m^2$$
$$1\,m^2 = (1\,m)^2 = (10^2\,cm)^2 = (10^2)^2(cm)^2 = 10^4\,cm^2$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$1\,km^2 = (1000\,m)^2 = 10^6\,m^2$$
$$34{,}7\,m^2 = 34{,}7 \times (m^2) = 34{,}7 \times (10\,dm)^2 = $$
$$= 34{,}7 \times 10^2\,dm^2 = 3{,}47 \times 10^3\,dm^2$$

Ενδεικτικά αναφέρομε ότι η έκταση της Ελλάδας είναι περίπου $132\,000\,km^2$.

Ο ***όγκος*** είναι φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τον συνήθη χώρο, δηλαδή σχετίζεται με τρεις διαστάσεις. Για παράδειγμα, εκφράζει πόσο μεγάλη είναι η χωρητικότητα ενός βαρελιού ή πόση είναι η χωρητικότητα του αμπαριού ενός συγκεκριμένου πλοίου.

Μονάδα μετρήσεως του όγκου στο SI είναι το κυβικό μέτρο (m^3). Το κυβικό μέτρο ισούται με τον όγκο (ορθού) κύβου ακμής ενός μέτρου. Το κυβικό δεκατόμετρο ή κυβική παλάμη ονομάζεται ***λίτρο*** και το σύμβολό του είναι 1 l, προκειμένου όμως να μην προκαλείται σύγχυση χρησιμοποιείται το σύμβολο 1 L.

$$1\,L = 1\,dm^3 = 1000\,cm^3 = 10^{-3}\,m^3.$$

Εκτός από τη μονάδα του SI και τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά της, για μέτρηση όγκων υπάρχουν και άλλες μονάδες που χρησιμοποιούνται πολύ λιγότερο και σε πολύ ειδικές περιπτώσεις· τέτοιες μονάδες παρουσιάζονται στον πίνακα 1.1.4.

Πίνακας 1.1.4
Μονάδες όγκου, οι οποίες δεν ανήκουν στο SI.

1 γαλόνι των ΗΠΑ	US gallon (1 gal US)	4 qt US	3,785 L
1 barrel US για πετρέλαιο κ.λπ.	42 gal US		159 L
1 κόρος (ναυτιλία)	tonnage		2,83 m^3

Για μετατροπές των τιμών μεγεθών σε διάφορες μονάδες ισχύουν όσα είπαμε και για τα μήκη και εμβαδά. Μερικά παραδείγματα είναι:

$$56{,}7\ \text{barrel US} = 56{,}7 \times (42\ \text{gal US}) = 2381{,}4\ \text{gal US}$$

$$56{,}7\ \text{barrel US} = 56{,}7 \times (159\ \text{L}) = 9{,}02 \times 10^3\ \text{L}$$

$$3475\,cm^3 = 3475 \times (10^{-2}\,dm)^3 = 3475 \times 10^{-6}\,dm^3 = $$
$$= 3475 \times 10^{-6}\ \text{L} = 3{,}475 \times 10^{-3}\ \text{L}$$

1.2 Έννοια της μάζας. Μονάδες μετρήσεως. Έλξη της Γης στα σώματα. Βαρυτική επιτάχυνση. Μεταβολή του βάρους σώματος συναρτήσει του ύψους και του γεωγραφικού πλάτους.

Μάζα ονομάζεται η ποσότητα ύλης που περιέχει κάθε σώμα. Πιο συγκεκριμένα, η μάζα είναι ιδιότητα των σωμάτων, ανεξάρτητη από τις συγκεκριμένες ουσίες που αποτελούν το σώμα, η οποία ασκεί και δέχεται βαρυτική δύναμη από άλλα σώματα. Επίσης είναι το μέτρο της αντιστάσεως του σώματος στην επιτάχυνση, δηλαδή είναι μέτρο της αδράνειας του σώματος. Στο SI μονάδα μετρήσεως της μάζας είναι το χιλιόγραμμο (kg), που ισούται με τη μάζα του διεθνούς προτύπου του χιλιογράμμου. Το διεθνές πρότυπο χιλιόγραμμο είναι ένας κύλινδρος από ιριδιούχο λευκόχρυσο, που φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών. Το 1 kg ισούται περίπου με τη μάζα ενός λίτρου νερού· αυτό παλαιότερα θεωρούταν η βάση ορισμού του χιλιογράμμου. Υπάρχουν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια του χιλιογράμμου, καθώς και μονάδες μάζας που δεν ανήκουν στο **SI, οι οποίες** χρησιμοποιούνται σε πολύ ειδικές περιπτώσεις (πίν. 1.2.1 και 1.2.2).

Πίνακας 1.2.1
Μονάδες μάζας.

1 γραμμάριο	g	10^{-3} kg
1 μιλιγκράμ	mg	10^{-6} kg
1 μικρογκράμ	μg	10^{-9} kg
1 τόνος	t	10^{3} kg
1 amu (για άτομα)	ατομική μονάδα μάζας	$1{,}66\cdot10^{-24}$ g

Πίνακας 1.2.2
Μάζες σωμάτων κατά προσέγγιση.

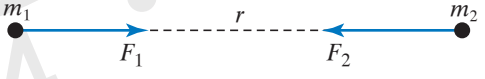
Γαλαξίας	$7\cdot10^{41}$ kg
Ήλιος	$2\cdot10^{30}$ kg
Γη	$6\cdot10^{24}$ kg
Σελήνη	$7\cdot10^{22}$ kg
Άνθρωπος	$7\cdot10^{1}$ kg
Άτομο υδρογόνου	$1{,}67\cdot10^{-27}$ kg
Ηλεκτρόνιο	$9{,}11\cdot10^{-31}$ kg

Στα πλαίσια της Μηχανικής του Νεύτωνα, ***βαρύτητα*** ονομάζεται η ιδιότητα των σωμάτων να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις που οφείλονται στις μάζες τους. Η βαρύτητα δρα εξ αποστάσεως (και όχι εξαιτίας της επαφής των αλληλεπιδρώντων σωμάτων), είναι πάντοτε ελκτική και είναι η πιο αδύναμη από τις τέσσερεις δυνάμεις της φύσεως στο μικρόκοσμο αλλά η πιο ισχυρή στο μακρόκοσμο. Οι άλλες τρεις είναι η ***ηλεκτρομαγνητική***, η ***ασθενής πυρηνική*** και η ***ισχυρή πυρηνική*** δύναμη.

Η Γη, λόγω της βαρύτητας, έλκει τα σώματα και προκαλεί την πτώση τους στην επιφάνειά της, όταν αυτά αφεθούν ελεύθερα σε κάποιο ύψος πάνω απ' αυτή. Η βαρύτητα είναι υπεύθυνη για την τροχιά της Γης και των υπολοίπων πλανητών γύρω από τον Ήλιο, την τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη, τον σχηματισμό παλιρροιών και για διάφορα άλλα φυσικά φαινόμενα.

1.2.1 Νόμος Παγκόσμιας Έλξεως.

Οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ σημειακών μαζών δίνονται από τον ***Νόμο της Παγκόσμιας Έλξεως*** (του Νεύτωνα). Συγκεκριμένα, η βαρυτική δύναμη που ασκεί ένα υλικό σημείο (σωμάτιο) σ' ένα άλλο είναι ελκτική, ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεώς τους. Η βαρυτική δύναμη που ασκείται στο κάθε υλικό σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο υλικά σημεία (σχ. 1.2.1). Οι απόλυτες τιμές των δύο δυνάμεων είναι ίσες, ενώ οι δυνάμεις ως διανύσματα είναι αντίθετες.



Σχ. 1.2.1
Βαρυτική έλξη μεταξύ δύο υλικών σημείων.

Αν τα υλικά σημεία έχουν μάζες m_1, m_2 και απέχουν απόσταση r (σχ. 1.2.1), το μέγεθος (το μέτρο) της βαρυτικής δυνάμεως είναι:

$$F_1 = F_2 = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$$

όπου G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξεως· η τιμή της είναι ίδια για οποιοδήποτε ζεύγος μαζών και δεν εξαρτάται ούτε απ' τα υλικά σημεία, στα οποία αναφερόμαστε, ούτε απ' τη μάζα τους, ούτε από τον τόπο στον οποίο βρίσκονται, ούτε από το μέσο που παρεμβάλλεται ανάμεσα στα σώματα που

αλληλεπιδρούν. Εξαρτάται μόνο απ' το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιείται· η τιμή της λοιπόν στο SI είναι $6{,}673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \times m^2 \times kg^{-2}}$. Η πολύ μικρή τιμή αυτής της σταθεράς αποδεικνύει ότι οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πολύ ασθενικές. Πράγματι, δύο σημειακές μάζες ίσες η κάθε μία με 1 kg, όταν βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση 1 m, ασκούν η μια στην άλλη ελκτική δύναμη ίση με $6{,}673 \times 10^{-11}$ N, μια πάρα πολύ μικρή δύναμη, αν σκεφτείτε ότι το βάρος της μάζας του 1 kg στην επιφάνεια της Γης είναι περίπου 9,81 N. Έτσι αποδεικνύεται ότι:

1) Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξεως ισχύει και για δύο σφαιρικά σώματα και η πυκνότητα μάζας τους εξαρτάται μόνο από την ακτίνα της σφαιρικής κατανομής. Σ' αυτήν την περίπτωση η απόσταση είναι ίση με την απόσταση μεταξύ των κέντρων τους.

2) Ο νόμος ισχύει στην ανωτέρω μορφή του για δύο σώματα ανεξάρτητα από το σχήμα τους, αν η μεταξύ τους απόσταση είναι πολύ μεγαλύτερη απ' τις διαστάσεις τους. Σ' αυτήν την περίπτωση αντιμετωπίζονται ως υλικά σημεία.

3) Στο εσωτερικό ενός σφαιρικού φλοιού με ομοιόμορφη κατανομή μάζας δεν ασκούνται βαρυτικές δυνάμεις.

Σύμφωνα με την ιδέα του πεδίου δυνάμεων, κάθε μάζα δημιουργεί ένα πεδίο δυνάμεων, το οποίο δρα στη συνέχεια πάνω σε κάθε άλλη μάζα ασκώντας της δύναμη.

Ως ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του χώρου του πεδίου ορίζεται το πηλίκο της δυνάμεως F, που ασκεί το πεδίο σε μάζα (υπόθεμα) m, η οποία τοποθετείται στο εν λόγω σημείο διά της μάζας m. Είναι ευνόητο ότι η ένταση του πεδίου είναι διανυσματικό μέγεθος, που έχει σε κάθε σημείο την κατεύθυνση της βαρυτικής δυνάμεως που ασκείται στη μάζα m. Συνήθως, η ένταση του πεδίου βαρύτητας συμβολίζεται με g, οπότε:

$$g = F/m.$$

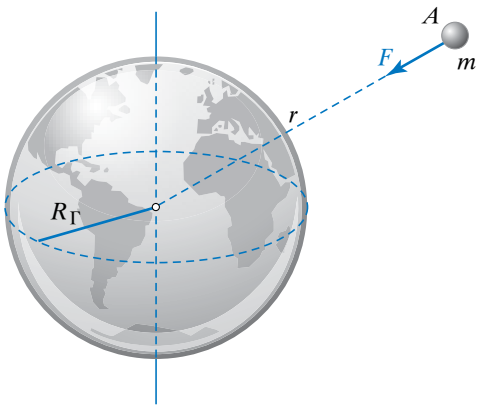
Αν η μάζα που δημιουργεί το πεδίο είναι η Γη, τότε για σημείο Α σε απόσταση $r \geq R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης (σχ. 1.2.2) έχομε για την ένταση:

$$g = F/m = G \cdot M_\Gamma / r^2$$

όπου R_Γ η ακτίνα Γης και M_Γ η μάζα Γης.

Στο σχήμα 1.2.3 φαίνεται η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε διάφορα σημεία του χώρου.

Το g ως συνάρτηση του ύψους h από την επιφάνεια της Γης δίνεται από τη σχέση:



Σχ. 1.2.2
Δύναμη που ασκεί η Γη σε σημειακή μάζα με $r \geq R_\Gamma$.

Σχ. 1.2.3
Ένταση του πεδίου βαρύτητας που δημιουργεί η Γη σε διάφορα σημεία του χώρου.

$$g = G\ \frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}.$$

Μονάδα μετρήσεως της εντάσεως του πεδίου βαρύτητας (G) στο SI είναι το 1 N/kg ή ισοδύναμα το 1 m/s^2, διότι ισχύει:

$$\frac{1\ N}{1\ kg} = \frac{1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}}{1\ kg} = 1\ \frac{m}{s^2}.$$

1.2.2 Βαρυτική επιτάχυνση.

Σύμφωνα με τον ορισμό της εντάσεως του βαρυτικού πεδίου, σώμα μέσα σε βαρυτικό πεδίο δέχεται βαρυτική δύναμη F που δίνεται από τη σχέση:

$$F = mg \qquad (1)$$

Όπως θα δούμε στη δυναμική (κεφ. 3), το σώμα θα κινείται με επιτάχυνση a, για την οποία θα ισχύει:

$$F = ma \qquad (2)$$

Απ' τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $a = g$. Δηλαδή η επιτάχυνση που έχει ένα ελεύθερο σώμα υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας, συμπίπτει με την ένταση του πεδίου βαρύτητας στο σημείο αυτό. Αυτό είναι χαρακτηριστικό μόνο του βαρυτικού πεδίου.

Η μάζα της σχέσεως (1), εμφανίζεται στον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξεως και ονομάζεται βαριά μάζα m_β. Η μάζα της σχέσεως (2), εμφανίζεται στον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής που θα δούμε παρακάτω, αποτελεί το μέτρο της αδράνειας του σώματος και ονομάζεται ***αδρανειακή μάζα*** m_α. Οι μάζες αυτές είναι ίδιες και γι' αυτό δεν χρησιμοποιήσαμε διαφορετικά σύμβολα.

1.2.3 Μεταβολή του βάρους του σώματος συναρτήσει του ύψους και του γεωγραφικού πλάτους.

Όπως είδαμε, η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης δίνεται απ' τη σχέση:

$$g = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}.$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας ή ισοδύναμα η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι:

$$g_0 = G \cdot M_\Gamma / R_\Gamma^2.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις βρίσκομε:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\dfrac{1}{(R_\Gamma + h)^2}}{\dfrac{1}{R_\Gamma^2}} = \frac{R_\Gamma^2}{(R_\Gamma + h)^2} \quad \text{ή} \quad g = g_0 \left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right)^2.$$

Παρατηρούμε ότι η ένταση της βαρύτητας μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της αποστάσεως από το κέντρο της Γης. Αν αγνοήσομε άλλα φαινόμενα, όπως η κίνηση της Γης, και ταυτίσομε τη βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη σ' ένα σώμα με το βάρος του σώματος, τότε, αφού θα έχομε $B = mg$, το βάρος θα μειώνεται όπως μειώνεται και το g, οπότε όσο ψηλότερα ανεβαίνομε από την επιφάνεια της Γης (που είναι ουσιαστικά η επιφάνεια της θάλασσας), τόσο μειώνεται και το βάρος των σωμάτων. Η ένταση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι περίπου ίση με 9,81 m/s^2 (πίν. 1.2.3).

Πίνακας 1.2.3
Μεταβολή του (φαινομένου) g, σε σχέση με το υψόμετρο, σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος 45^o.

Υψόμετρο (m)	*g (m/s^2)*
0	9,806
1000	9,803
4000	9,794
8000	9,782
16.000	9,757
32.000	9,71
100.000	9,60
500.000	8,53
1.000.000	7,41
380.000.000	0,00271

Η ακτίνα της Γης στον Ισημερινό είναι μεγαλύτερη απ' την πολική ακτίνα κατά περίπου 21 km. Όταν η Γη ήταν σε ρευστή μορφή λόγω της περιστροφής της, τα λεγόμενα ***φυγόκεντρα φαινόμενα*** οδήγησαν σ' αυτήν την πλάτυνσή της, διότι αυτά τα φαινόμενα είναι πιο έντονα στον Ισημερινό. Το ότι τα σημεία στον Ισημερινό απέχουν περισσότερο από το κέντρο της Γης απ' ό,τι οι πόλοι, οδηγεί στο να υπάρχει σταδιακή αύξηση στην τιμή του g, καθώς κινούμαστε από πλάτος 0^o (Ισημερινός) σε πλάτος 90^o (ένας απ' τους δύο πόλους). Μια πρόσθετη αιτία είναι αυτές που ονομάζομε ***φυγοκεντρικές δυνάμεις***. Αυτές είναι ψευδοδυνάμεις που οφείλονται στην επιτάχυνση. Ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε περιστρεφόμενο σύστημα αισθάνεται σαν να ασκείται πάνω του μία δύναμη με κατεύθυνση κατά μήκος της ακτίνας περιστροφής από το κέντρο προς τα έξω. Αυτές οι φυγοκεντρικές δυνάμεις είναι μεγαλύτερες στον Ισημερινό και μάλιστα είναι αντίθετες από τη βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη, καθώς επίσης συμβάλουν στο να είναι το βάρος μικρότερο στον Ισημερινό από ό,τι στους πόλους (πίν. 1.2.4).

Η διεθνής σύμβαση στα πλαίσια του SI ορίζει το βάρος λαμβάνοντας υπόψη και τη φυγόκεντρο δύναμη. Μπορεί προφανώς να ορισθεί ένα φαινόμενο g με βάση αυτά που είπαμε. Σε πολλές περιπτώσεις, κατά προσέγγιση ταυτίζομε το βάρος με τη βαρυτική δύναμη.

Πίνακας 1.2.4
Μεταβολή του g, σε σχέση με το γεωγραφικό πλάτος, στο επίπεδο της θάλασσας.

Γεωγραφικό πλάτος	*g (m/s²)*
0°	9,780 39
10°	9,781 95
20°	9,786 41
30°	9,793 29
40°	9,801 71
50°	9,810 71
60°	9,819 18
70°	9,826 08
80°	9,830 59
90°	9,832 17

Πρέπει να τονίσομε ότι το βάρος είναι δύναμη που ασκείται σε σώμα που έχει μάζα. Το βάρος εξαρτάται από τον τόπο που βρίσκεται το σώμα και στο SI μετρείται σε newton (N). Η μάζα σχετίζεται με την ύλη του σώματος και είναι ανεξάρτητη του τόπου.

1.3 Πυκνότητα και ειδικό βάρος σώματος. Μονάδες μετρήσεώς τους. Συσχετισμός ειδικού βάρους και πυκνότητας.

Όταν η μάζα ενός σώματος κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο του, το σώμα ονομάζεται ***ομογενές***, αντιθέτως ονομάζεται ***ανομοιογενές***.

Προκειμένου να χαρακτηρίσομε πόσο πυκνό ή πόσο αραιό είναι ένα σώμα σε κάθε σημείο του, εισάγομε για τη μάζα την έννοια της πυκνότητας (όγκου).

Πυκνότητα d ενός υλικού, ονομάζεται το φυσικό μέγεθος το οποίο εκφράζεται με το πηλίκο της μάζας dm που περιέχεται σε έναν όγκο dV του υλικού, του οποίου όλες οι διαστάσεις είναι πολύ μικρές (τείνουν στο μηδέν), διά του όγκου αυτού, δηλαδή:

$$d = \mathrm{d}m / \mathrm{d}V.$$

Επομένως, $\boxed{\text{πυκνότητα} = \dfrac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}}}$.

Όταν ένα σώμα αποτελείται από ομογενές υλικό, τότε δεν χρειάζεται ο όγκος να είναι πολύ μικρός, και ισχύει:

$$d = m / V.$$

Ειδικό βάρος ε ενός υλικού, ονομάζεται το φυσικό μέγεθος που εκφράζεται με το πηλίκο του βάρους dB του υλικού που περιέχεται σε έναν όγκο dV του υλικού, του οποίου όλες οι διαστάσεις είναι πολύ μικρές (τείνουν στο μηδέν), διά του όγκου αυτού, δηλαδή:

$$\varepsilon = \mathrm{d}B / \mathrm{d}V.$$

Επομένως, $\boxed{\text{ειδικό βάρος} = \dfrac{\text{βάρος}}{\text{όγκος}}}$.

Όταν ένα σώμα αποτελείται από ομογενές υλικό, τότε δεν χρειάζεται ο όγκος να είναι πολύ μικρός, και ισχύει:

$$\varepsilon = B / V.$$

Η πυκνότητα και το ειδικό βάρος είναι χαρακτηριστικά του υλικού από το οποίο αποτελείται ένα σώμα. Μονάδα μετρήσεως της πυκνότητας στο SI είναι το 1 χιλιόγραμμο ανά κυβικό μέτρο (1 kg/m^3). Πολλές φορές χρησιμοποιούνται άλλες μονάδες, μεταξύ των οποίων πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια της ανωτέρω μονάδας. Συνήθως χρησιμοποιείται το 1 g/cm^3.

$$1\ \mathrm{g/cm^3} = (10^{-3}\ \mathrm{kg})/(10^{-2}\ \mathrm{m})^3 = (10^{-3}\ \mathrm{kg})/(10^{-6}\ \mathrm{m^3}) =$$
$$= 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \text{ άρα } 1\ \mathrm{kg/m^3} = 10^{-3}\ \mathrm{g/cm^3}$$

Στον πίνακα 1.3 δίνονται ενδεικτικά οι πυκνότητες διαφόρων υλικών.

Πίνακας 1.3
Πυκνότητες υλικών σε g/cm³.

Χρυσός	19,3
Μόλυβδος	11,3
Άργυρος	10,5
Χαλκός	8,9
Σίδηρος	7,8
Αργίλιο	2,7
Νερό (20 °C)	1
Πάγος	0,92
Πετρέλαιο	0,90
Οινόπνευμα	0,80
Φελλός	0,24
Αέρας (υπό κανονικές συνθήκες)	0,0013

Στο SI μονάδα μετρήσεως του ειδικού βάρους είναι το 1 newton ανά κυβικό μέτρο (1 N/m^3).

Επειδή 1 kgf (χιλιόγραμμο δυνάμεως) = 9,81 N και 1 gf = 0,009 81 N, συμπεραίνομε ότι:

$$1\ N/m^3 = (1/9{,}81)\ kgf/m^3 = 0{,}102\ kgf/m^3.$$

Έστω υλικό πυκνότητας d και ειδικού βάρους ε. Από τους ορισμούς προκύπτει ότι ισχύει:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}m\ g}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}\ g = d\,g,$$

όπου g η ένταση ή η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Βλέπομε ότι ενώ η πυκνότητα, όπως και η μάζα, δεν εξαρτάται από τη βαρύτητα, το ειδικό βάρος όπως και το βάρος εξαρτάται από το g, δηλαδή τη βαρύτητα στο σημείο που βρίσκεται το υλικό.

Αν το υλικό βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης και εκφράσομε το ειδικό βάρος υλικού σε gf/cm^3 (γραμμάριο δυνάμεως ανά κυβικό εκατοστό) και την πυκνότητά του σε g/cm^3, οι αριθμητικές τους τιμές συμπίπτουν με αρκετά καλή προσέγγιση. Αυτό σχετίζεται με το πώς ορίστηκε το 1 kgf και φυσικά το 1 gf. Δηλαδή, 1 kgf είναι η δύναμη με την οποία έλκει η Γη ένα σώμα μάζας 1 kg σε έναν τόπο όπου το $g = 9{,}81\ m/s^2$ (περίπου), γι' αυτό αφού $F = mg$, έχομε από τον ορισμό του 1 kgf ότι 1 kgf = 1 kg × 9,81 m/s^2 = 9,81 N. Η πυκνότητα του υδραργύρου (Hg) είναι 13,6 g/cm^3 και το ειδικό βάρος του στην επιφάνεια της Γης είναι 13,6 gf/cm^3.

Ας το δούμε πιο αναλυτικά. Έχομε τη σχέση πυκνότητας-ειδικού βάρους:

$$\varepsilon_\Gamma = d\,g_\Gamma$$

Θα εργαστούμε στο SI. Αν υποθέσομε ότι το $d = 13{,}6\ g/cm^3$, τότε στο SI θα έχομε:

$$d = 13{,}6 \times 10^{-3}/(10^{-2})^3\ kg/m^3 = 13{,}6 \times 10^{-9}\ kg/m^3.$$

Επομένως, αφού (περίπου) $g_\Gamma = 9{,}81\ m/s^2$ στην επιφάνεια της Γης, έχομε:

$$\varepsilon_\Gamma = d\,g_\Gamma = 13{,}6 \times 10^{-9} \times 9{,}81\ N/m^3,$$

όμως $1\ N = (1/9{,}81) \times 10^3$ gf οπότε:

$$\varepsilon_\Gamma = d\,g_\Gamma = 13{,}6 \times 10^{-9} \times 9{,}81\ N/m^3 =$$
$$= 13{,}6 \times 10^{-9} \times 9{,}81 \times (1/9{,}81) \times 10^3\ gf/[(10^{-2})^3]\ cm^3 =$$
$$= 13{,}6 \times 10^{-9} \times 10^9 \times 9{,}81/9{,}81\ gf/cm^3 = 13{,}6\ gf/cm^3.$$

Φυσικά στο φεγγάρι ο Hg θα έχει πολύ μικρότερο ειδικό βάρος, διότι:

$$\varepsilon_{\varphi\varepsilon\gamma} = d\,g_{\varphi\varepsilon\gamma}$$
$$\varepsilon_\Gamma = d\,g_\Gamma$$

$$\frac{\varepsilon_{\varphi\varepsilon\gamma}}{\varepsilon_\Gamma} = \frac{d\ g_{\varphi\varepsilon\gamma}}{d\ g_\Gamma} = \frac{g_{\varphi\varepsilon\gamma}}{g_\Gamma}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει πάντα, αρκεί οι όμοιες ποσότητες να εκφράζονται με τις ίδιες μονάδες. Επειδή στην επιφάνεια του φεγγαριού το $g = 1{,}62\ m/s^2$, περίπου το 1/6 της τιμής στην επιφάνεια της Γης, θα έχομε:

$$\varepsilon_{\varphi\varepsilon\gamma} = \frac{d\,g_{\varphi\varepsilon\gamma}}{d\,g_\Gamma} = \frac{g_{\varphi\varepsilon\gamma}}{g_\Gamma}\varepsilon_\Gamma =$$

$$= \frac{1{,}62}{9{,}81} 13{,}6\ gf/cm^3 = 2{,}25\ gf/cm^3.$$

Συμπεραίνομε ότι στο φεγγάρι δεν συμπίπτουν οι αριθμητικές τιμές της πυκνότητας και του ειδικού βάρους, ενώ συμπίπτουν με σχετικά καλή προσέγγιση στην επιφάνεια της Γης.

1.4 Συστήματα μονάδων. Σφάλματα στις μετρήσεις, σημαντικά ψηφία.

Υπάρχουν διάφορα συστήματα μονάδων. Σήμερα έχει επικρατήσει διεθνώς το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI).

Τα φυσικά μεγέθη ή οι φυσικές ποσότητες χαρακτηρίζονται από αριθμητική τιμή και μονάδα μετρήσεως. Η αριθμητική τιμή και η μονάδα μετρήσεως αποτελούν την τιμή του φυσικού μεγέθους. Για παράδειγμα, η τιμή της επιταχύνσεως a κατά μήκος μίας ευθείας είναι $a = -45{,}2\ m/s^2$, η αριθμητική τιμή της επιταχύνσεως είναι −45,2. Το a μπορεί να παριστάνει το φυσικό μέγεθος ή την τιμή του. Η αριθμητική τιμή είναι καθαρός αριθμός, χωρίς μονάδα μετρήσεως, ενώ η τιμή γενικώς έχει και μονάδα μετρήσεως.

Η σχέση φυσικών μεγεθών (ή τιμών) και αριθμητικών τιμών και μονάδων γράφεται ως εξής:

$$A = \{A\}\,[A]$$

όπου A είναι η φυσική ποσότητα, $\{A\}$ η αριθμητική τιμή της και $[A]$ η μονάδα μετρήσεώς της. Για την παραπάνω περίπτωση της επιταχύνσεως θα έχομε:

$$A = a \ \text{ και } a = \{-42{,}2\}\ [m/s^2]$$

Κατά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση φυ-

σικών μεγεθών ισχύουν οι γνωστοί κανόνες της άλγεβρας, δηλαδή:

$$AB = \{A\}\,[A]\,\{B\}\,[B] = \{A\}\,\{B\}\,[A]\,[B] = \{AB\}\,[AB]$$

και

$$\frac{A}{B} = \frac{\{A\}[A]}{\{B\}[B]} = \left\{\frac{A}{B}\right\}\left[\frac{A}{B}\right]$$

Για παράδειγμα:

$$u = -8{,}1\ \text{m/s}, \quad t = 21\ \text{s},$$

$$ut = (-8{,}1\times 21)\times(\text{m/s}\times\text{s}) = -1{,}7\times 10^2\,\text{m}.$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών μεγεθών, λαμβάνεται ένα πλήθος απ' τα φυσικά μεγέθη του συστήματος, που θεωρούνται ως ανεξάρτητα και ονομάζονται ***θεμελιώδη φυσικά μεγέθη***, ενώ οι αντίστοιχες μονάδες τους είναι οι θεμελιώδεις μονάδες. Κάθε άλλο φυσικό μέγεθος του συστήματος φυσικών μεγεθών και οι αντίστοιχες μονάδες τους είναι παράγωγα μεγέθη και παράγωγες μονάδες.

Κάθε παράγωγο μέγεθος Q μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα γινομένων θεμελιωδών μεγεθών A, B, C, ... στη μορφή:

$$Q = \xi A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} ... + ...$$

όπου τα ξ είναι αριθμητικοί συντελεστές (παράγοντες).

Η διάσταση ή οι διαστάσεις του Q εκφράζονται ως εξής:

$$\dim Q = \mathrm{A}^{\alpha}\mathrm{B}^{\beta}\mathrm{C}^{\gamma}...$$

χωρίς τον αριθμητικό παράγοντα ξ. Τα A,B,C,... είναι οι διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών και τα α, β, γ,... είναι οι διαστατικοί εκθέτες του φυσικού μεγέθους Q. Μια ποσότητα είναι αδιάστατη αν οι διαστατικοί εκθέτες της είναι όλοι μηδέν. Τότε η ποσότητα έχει διάσταση 1, διότι θα έχομε:

$$\text{διάσταση} = \mathrm{A}^0\mathrm{B}^0... = 1\cdot 1\cdot .... = 1.$$

Όταν τα φυσικά μεγέθη μήκος, μάζα, χρόνος, ρεύμα, θερμοδυναμική θερμοκρασία (απόλυτη θερμοκρασία), γραμμομόριο, φωτεινή ένταση, δύναμη, φορτίο λαμβάνονται ως θεμελιώδη, τότε η διάστασή τους παριστάνεται με τα εξής αντίστοιχα σύμβολα L, M, T, I, Θ, N, J, F, Q. Έχομε εξισώσεις φυσικών μεγεθών όπως η:

$$u = l/t,$$

καθώς επίσης και εξισώσεις αριθμητικών τιμών, όπως η:

$$\{u\}_{\text{km/h}} = 3{,}6\,\{l\}_{\text{m}} / \{t\}_{\text{s}}\ .$$

Το 3,6 ονομάζεται ***εμπειρικός συντελεστής*** (πολλαπλασιαστής). Το l μετρείται σε μέτρα, ο χρόνος σε s και η ταχύτητα σε km/h. Τέτοιες σχέσεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων εξαρτώνται από τις διάφορες μονάδες, που χρησιμοποιούνται.

Λέμε ότι έχομε ***αυτοσυνεπές*** (ή σύμφωνο) σύστημα μονάδων, αν η επιλογή των μονάδων είναι τέτοια, ώστε οι εξισώσεις μεταξύ των αριθμητικών τιμών να είναι ακριβώς ίδιες με αυτές μεταξύ των αντιστοίχων φυσικών μεγεθών, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών συντελεστών, αν υπάρχουν. Αυτήν την ιδιότητα έχουν όλα τα συστήματα μονάδων που έχουν χρησιμοποιηθεί, είναι δηλαδή αυτοσυνεπή (σύμφωνα) συστήματα. Αυτό ισχύει για τις προηγούμενες σχέσεις, αν οι μονάδες για την ταχύτητα είναι το m/s, για το μήκος το m και για το χρόνο το s. Φυσικά, το ίδιο ισχύει αν οι μονάδες είναι cm/s, cm, s αντιστοίχως (σύστημα GCS).

Η αυτοσυνέπεια επιτυγχάνεται στην πράξη με τον καθορισμό της μονάδας μετρήσεως των παράγωγων μεγεθών απ' την εξίσωση για τις διαστάσεις του παράγωγου μεγέθους. Συγκεκριμένα, από τη σχέση:

$$E = 1/2\,mv^2$$

καταλήγομε στην εξίσωση διαστάσεων $\dim E = \mathrm{ML^2T^{-2}}$, οπότε η μονάδα της κινητικής ενέργειας (αν η μάζα έχει μονάδα το kg, το μήκος το m και ο χρόνος το s) είναι $1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 1\ \text{J} = 1$ joule (τζουλ).

Οι σωστές εκφράσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών είναι ομογενείς, δηλαδή το αριστερό και το δεξιό μέλος έχουν ίδιες διαστάσεις. Αυτό μας επιτρέπει να ελέγχομε τα αποτελέσματά μας. Αν μια σχέση που βρήκαμε δεν είναι ομογενής, σίγουρα είναι λάθος, δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο. Μπορούν να προστεθούν και να αφαιρεθούν μόνο μεγέθη και εκφράσεις μεγεθών με ίδια διάσταση.

Το σύστημα μονάδων που έχει επικρατήσει διεθνώς είναι το SI. Αυτό έχει ως θεμελιώδη μεγέθη τα ακόλουθα επτά με τις αντίστοιχες μονάδες μετρήσεώς τους. ***Μήκος*** (m, μέτρο), ***μάζα*** (χιλιόγραμμο, kg), ***χρόνος*** (δευτερόλεπτο, s), ***ηλεκτρικό ρεύμα*** (A, αμπέρ), ***θερμοδυναμική*** ή ***απόλυτη θερμοκρασία*** (K, κέλβιν), ***ποσότητα ουσίας*** (mol, γραμμομόριο), ***φωτεινή ένταση*** (cd, καντήλα).

Οι ***ορισμοί*** των μονάδων του SI είναι οι εξής:

1) Το ***μέτρο*** (m) είναι το ***μήκος*** που διανύει το

φως στο κενό σε χρονικό διάστημα 1/299 792 458 του δευτερολέπτου.

2) Το ***χιλιόγραμμο*** (kg) ισούται με τη ***μάζα*** του διεθνούς προτύπου του χιλιόγραμμου. Το διεθνές πρότυπο του χιλιόγραμμου, όπως είπαμε, είναι ένα κομμάτι από κράμα ιριδιούχου λευκόχρυσου που φυλάσσεται στις Σέβρες κοντά στο Παρίσι.

3) Το ***δευτερόλεπτο*** (s) είναι η διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων της ακτινοβολίας που εκπέμπεται κατά τη μετάβαση των δύο υπέρλεπτων σταθμών της κατώτατης (θεμελιώδους) στάθμης του ατόμου του καισίου-133.

4) Το ***αμπέρ*** (A) είναι εκείνο το σταθερό (***ηλεκτρικό***) ***ρεύμα*** το οποίο, όταν διέρχεται από δυο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους αμελητέας κυκλικής διατομής, που βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους 1 m στο κενό, ασκείται δύναμη μεταξύ τους ίση με 2×10^{-7} N/m.

5) Το ***κέλβιν*** (K) είναι το κλάσμα 1/273,16 της ***θερμοδυναμικής θερμοκρασίας*** του τριπλού σημείου του νερού. Η σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας Κελσίου t (ή θ) και Κέλβιν T είναι:

$$t = T - T_0, \quad T_0 = 273{,}15\ \text{K}.$$

6) Το ***μολ*** ή ***γραμμομόριο*** (mol) είναι η ***ποσότητα ύλης*** που περιέχει τόσες στοιχειώδεις οντότητες όσος είναι ο αριθμός των ατόμων που υπάρχουν σε 0,012 χιλιόγραμμα άνθρακα-12. Τα άτομα του άνθρακα-12 είναι ελεύθερα, σε ηρεμία και στην κατώτατη (θεμελιώδη) ενεργειακή κατάσταση τους. Όταν χρησιμοποιείται το μολ, πρέπει να καθορίζονται οι στοιχειώδεις οντότητες που μπορεί να είναι άτομα, μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια ή άλλα σωματίδια ή καθορισμένες ομάδες τέτοιων σωματιδίων.

7) Η ***καντέλα*** (cd) είναι η φωτεινή ένταση σε δεδομένη κατεύθυνση, πηγής που εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} χερτζ (Hz) και έχει ένταση ακτινοβολίας σ' αυτήν την κατεύθυνση ίση με 1/683 βατ ανά στερακτίνιο (W/sr).

Ο πίνακας 1.4 δείχνει τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων μονάδων.

Πίνακας 1.4
Σχέσεις μεταξύ διαφόρων μονάδων.

1 min (λεπτό της ώρας) = 60 s
1 h (ώρα) = 3600 s
1 d (μέρα) = 86 400 s
1 y (a, έτος) =365,24 d = $3{,}156 \times 10^7$ s
1 kgf (χιλιόγραμμο δυνάμεως) = 9,81 N

1.4.1 Σφάλματα στις μετρήσεις.

Στις μετρήσεις των φυσικών μεγεθών γίνονται σφάλματα που οφείλονται σε διάφορους παράγοντες (π.χ. παρατηρητή, όργανα μετρήσεως) και διακρίνονται σε συστηματικά και τυχαία.

1) Τα ***συστηματικά σφάλματα*** μπορεί να οφείλονται σε ελαττώματα των οργάνων που χρησιμοποιούνται ή στην πειραματική μέθοδο ή στον ίδιο τον παρατηρητή. Μπορεί να παραμένουν αμετάβλητα σε διαδοχικές μετρήσεις ή να μεταβάλλονται με συστηματικό τρόπο. Ενδεικτικά αναφέρομε τις εξής περιπτώσεις:

α) Πιθανόν να υπάρχει αίτιο που δρα συσσωρευτικά, όπως ο μηχανισμός ρολογιού που «τρέχει» πιο γρήγορα από το κανονικό και προκαλεί σφάλμα συνεχώς αυξανόμενο με την πάροδο του χρόνου.

β) Πιθανόν να υπάρχει μόνιμο αίτιο που επηρεάζει τη μέτρηση πάντα κατά την ίδια φορά, δίνοντας για παράδειγμα τιμή πάντα μικρότερη απ' την πραγματική λόγω ανακριβούς κλίμακας ή μετατοπίσεως του μηδενός του οργάνου μετρήσεως ή ανακριβών σταθμών ή μη σωστά βαθμολογημένου θερμόμετρου κ.ο.κ..

γ) Πιθανόν να παρουσιάζονται στο στάδιο του υπολογισμού, είτε λόγω ανεπαρκούς θεωρίας ή προσεγγιστικού τύπου, είτε λόγω ανακριβούς σταθεράς π.χ. $g = 10\,\text{m/s}^2$ αντί του $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$.

Τα συστηματικά σφάλματα είναι δύσκολο να προσδιοριστούν και συχνά είναι τα σημαντικότερα. Η πείρα του παρατηρητή βοηθά στην αποφυγή ή στη διόρθωσή τους.

2) Τα ***τυχαία σφάλματα*** οφείλονται σε πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες, μεταβάλλονται με τον χρόνο κατά τυχαίο τρόπο και είναι εξίσου πιθανόν να είναι θετικά ή αρνητικά. Δεν είναι δυνατό να τα αποφύγομε παρά μόνο να τα περιορίσομε κάνοντας πολλές μετρήσεις και εξάγοντας τον μέσο όρο αυτών. Πολλές φορές τα πράγματα είναι πολύ δύσκολα όταν δεν μπορούμε να ξεχωρίσομε τα συστηματικά από τα τυχαία σφάλματα.

Προκειμένου να έχομε ένα «ικανοποιητικό» αποτέλεσμα από μία μέτρηση, πρέπει να χειριστούμε κατάλληλα τα σφάλματά της. Για τα συστηματικά, πρέπει να εξουδετερώσομε τις αιτίες τους ή να υπολογίσομε το μέγεθός τους. Για τα τυχαία μπορούμε να μειώσομε τη συχνότητά τους κάνοντας πολλές μετρήσεις και λαμβάνοντας τη μέση τιμή.

Η τιμή x_i που προκύπτει από μία μέτρηση ενός φυ-

σικού μεγέθους, διαφέρει από την πραγματική τιμή x_0, που μας είναι άγνωστη κατά μια άγνωστη ποσότητα, και ονομάζεται ***σφάλμα*** αυτής της μετρήσεως:

$$e_i = x_i - x_0.$$

Ας υποθέσομε ότι κάνομε πολλές μετρήσεις, έστω n το πλήθος και ότι παίρνομε τη μέση τιμή των αποτελεσμάτων x_i των μετρήσεων. Παριστάνομε τη μέση τιμή με $\bar{x}$. Ισχύει: $x_i = x_0 + e_i$.
οπότε καταλήγομε στη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_0 + e_i) = x_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$$

Επειδή τα σφάλματα των μετρήσεων e_i είναι εξίσου πιθανόν να είναι θετικά ή αρνητικά, περιμένομε ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο, το τελευταίο άθροισμα στην ανωτέρω σχέση θα τείνει στο μηδέν, οπότε η μέση τιμή θα τείνει στην πραγματική τιμή, δηλαδή πρακτικώς $\bar{x} = x_0$. Έτσι έχομε έναν πρακτικό τρόπο εκτιμήσεως της πραγματικής τιμής, κάνοντας αρκούντως πολλές μετρήσεις. Υποθέτομε ότι έχομε «εξουδετερώσει» τα συστηματικά σφάλματα.

Χρειαζόμαστε και ένα μέγεθος, το οποίο να αποτελεί ένα «μέτρο» του σφάλματος που κάνομε στον προσδιορισμό της τιμής του φυσικού μεγέθους που μετρήσαμε.

Ορίζεται η τυπική απόκλιση s, της σειράς των n μετρήσεων, με τη σχέση:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Αυτή αποτελεί ένα «μέτρο» της διασποράς των τιμών x_i γύρω από την $\bar{x}$.

Για μεγάλο πλήθος μετρήσεων n το s μεταβάλλεται έτσι, ώστε να συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή σ_0, $\lim_{n\to\infty} s \to \sigma_0$, που ονομάζεται ***τυπική απόκλιση*** της κατανομής που ακολουθούν οι μετρήσεις x_i.

Επειδή οι μετρήσεις δεν είναι άπειρες, πρέπει να μπορούμε να έχομε μια εκτίμηση της τυπικής αποκλίσεως σ_0, κάνοντας ένα πεπερασμένο πλήθος μετρήσεων, n. Μπορεί να δειχθεί ότι η πιο πιθανή τιμή για το σ_0 είναι το:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Αυτό το μέγεθος ονομάζεται ***τυπική απόκλιση της μιας μετρήσεως.***

Μπορούμε επίσης να ακολουθήσομε την εξής διαδικασία. Κάνομε μια σειρά από n μετρήσεις, υπολογίζομε τη μέση τιμή τους και στη συνέχεια μιαν άλλη σειρά μετρήσεων, υπολογίζομε ξανά τη μέση τιμή τους κ.ο.κ.. Στο τέλος υπολογίζομε τη μέση τιμή των μέσων τιμών. Οι μέσες τιμές έχουν μια κατανομή και κάποιαν απόκλιση απ' τη μέση τιμή τους. Αυτή η απόκλιση ονομάζεται ***τυπική απόκλιση σ_μ της μέσης τιμής*** και ισχύει:

$$\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Αν κάνομε μία μόνο σειρά από n μετρήσεις απ' αυτόν τον τύπο, υπολογίζομε την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής των n μετρήσεων, που είναι και το σφάλμα $\delta x = \sigma_{\bar{x}}$ των μετρήσεων του φυσικού μεγέθους που μελετούμε και έχομε: $\delta x = \sigma_{\bar{x}} = \sigma_\mu$.

Γράφομε το αποτέλεσμα της μετρήσεως στη μορφή: $x = \bar{x} \pm \delta x$.

Για παράδειγμα: $u = (55{,}3 \pm 0{,}1)$ m/s.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε το σχετικό σφάλμα που είναι:

$$\sigma_{\sigma\chi} = \frac{\delta x}{\bar{x}} = 100\frac{\delta x}{\bar{x}}\ \% = 1000\frac{\delta x}{\bar{x}}\ ‰ \text{ κ.λπ..}$$

Για το παραπάνω παράδειγμα έχομε:

$$\delta u_{\sigma\chi} = \frac{0{,}1}{55{,}3} = 0{,}002 = 0{,}2\ \% = 2\ ‰ .$$

Υπάρχουν δύο έννοιες, στις οποίες δεν προαναφερθήκαμε και δεν τις χρησιμοποιήσαμε, αλλά πρέπει να γίνει μια αναφορά:

1) Η ***ακρίβεια μετρήσεων***, που εκφράζει το πόσο κοντά στην πραγματική τιμή είναι οι μετρήσεις και το πόσο κοντά σε αυτήν είναι η μέση τιμή τους.

2) Η ***πιστότητα***, που εκφράζει το πόσο καλή επαναληψιμότητα έχουν οι μετρήσεις, δηλαδή πόσο μικρή διασπορά έχουν περί τη μέση τιμή τους, ακόμη κι αν αυτή απέχει από την πραγματική τιμή.

1.4.2 Σημαντικά ψηφία.

Όταν αναφερόμαστε σε τιμή φυσικού μεγέθους, η οποία είναι αποτέλεσμα μετρήσεως ή υπολογισμού με βάση τιμές που μετρήθηκαν, είναι σημαντικό να φαίνεται πόσο γνωστή είναι η τιμή που δίνομε. Οι μετρήσεις ποτέ δεν δίνουν την πραγμα-

τική τιμή του μετρούμενου φυσικού μεγέθους, αλλά μία κατά προσέγγιση τιμή. Γι' αυτό και στο τελικό αποτέλεσμα πρέπει να είναι ξεκάθαρος ο βαθμός προσεγγίσεως. Αυτό γίνεται με τη χρήση των σημαντικών ψηφίων. Δηλαδή, στις τιμές που αναφέρομε δίνονται μόνο τα σημαντικά ψηφία, εκείνα τα οποία είναι γνωστά με κάποιον βαθμό σιγουριάς.

Για παράδειγμα, μ' έναν τρόπο μετρήσεως βρήκαμε ότι κάποιο αντικείμενο έχει μάζα 3 g. Αυτό σημαίνει ότι η ακρίβεια της μετρήσεως είναι 1 g, η ελάχιστη αβεβαιότητα μετρήσεως είναι $\pm 0{,}5$g και το σημαντικό ψηφίο είναι 1. Με έναν άλλον τρόπο μετρήσεως βρήκαμε μάζα 2,53 g. Αυτό σημαίνει ότι η ακρίβεια είναι 0,01 g, η ελάχιστη αβεβαιότητα μετρήσεως είναι $\pm 0{,}005$ g και τα σημαντικά ψηφία είναι 3.

Όσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια μιας τιμής φυσικού μεγέθους, τόσο περισσότερα σημαντικά ψηφία έχει.

Υπάρχουν οι εξής συμβατικοί κανόνες που καλό είναι να ακολουθούμε σχετικά με τα σημαντικά ψηφία.

1) Όλα τα μη μηδενικά ψηφία είναι σημαντικά. Το 567 ή $5{,}67 \times 10^2$ έχει 3 σημαντικά ψηφία, το 5,789 ή $57{,}89 \times 10^{-1}$ έχει 4 σημαντικά ψηφία.

2) Μηδενικά μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων είναι σημαντικά. Το 308 054 ή 0,0 8054×10^7 έχει 6 σημαντικά ψηφία. Το 1,097 ή $10{,}97 \times 10^{-1}$ έχει 4 σημαντικά.

3) Τα μηδενικά πριν από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεν είναι σημαντικά ψηφία. Το 0,0057 ή $0{,}057 \times 10^{-1}$ έχει δύο σημαντικά ψηφία.

4) Τα μηδενικά μετά το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο είναι σημαντικά μόνον εάν υπάρχει το σημάδι των δεκαδικών στον αριθμό. Το 40,00 ή $4{,}000 \times 10^1$ έχει 4 σημαντικά ψηφία. Το 4000 ή 4×10^3 έχει 1 σημαντικό ψηφίο. Το 10,750 ή $1{,}0750 \times 10^1$ έχει 5 σημαντικά ψηφία.

Οι ακέραιοι αριθμοί πολλές φορές νοούνται με άπειρα σημαντικά ψηφία. Το ίδιο μπορεί να συμβαίνει με αριθμούς όπως το π (= 3,14...), παρόλο που τα άπειρα ψηφία δεν δείχνονται. Φυσικά μπορεί μερικές φορές να κάνομε πράξεις με λιγότερα σημαντικά ψηφία από τα άπειρα, για παράδειγμα στην περίπτωση του π με 3 σημαντικά ψηφία, δηλαδή 3,14.

Πολλά μεγέθη έχουν τιμές εξ ορισμού, για παράδειγμα η ταχύτητα του φωτός, οπότε το c θεωρείται γνωστό με όλα του τα ψηφία που είναι 9, δηλαδή με 9 σημαντικά ψηφία. Εξ ορισμού $c = 299\,792\,458$ m/s.

Όμως και πάλι μπορεί να κάνομε πράξεις με λιγότερα σημαντικά ψηφία για την ταχύτητα του φωτός, π.χ. αν πάρομε 3 σημαντικά ψηφία πρέπει να γράψομε $3{,}00 \times 10^2$ m/s.

Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να αναφερθεί ότι τα μεγέθη θεωρούνται γνωστά με π.χ. 3 σημαντικά ψηφία. Αυτό διευκολύνει, αλλά οδηγεί στο να μην χρησιμοποιείται ο σωστός συμβολισμός (κυρίως για τα τελικά μηδενικά) και να χάνει κάποιος την εξοικείωσή του με τον σωστό συμβολισμό.

Όταν κάνομε πράξεις, πρέπει να λαμβάνομε υπόψη κανόνες σχετικά με τα σημαντικά ψηφία του αποτελέσματος.

Ισχύουν οι εξής κανόνες των πράξεων.

1) Για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση αριθμών, το αποτέλεσμα έχει αριθμό σημαντικών ψηφίων ίσο με τον αριθμό σημαντικών ψηφίων του αριθμού με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία. Π.χ.:

$$3{,}25 \cdot 0{,}21 = 0{,}68,$$
$$3{,}25 \cdot 0{,}21/0{,}8 = 0{,}9$$

$$0{,}85 \cdot 10{,}80 = 0{,}68,$$
$$0{,}0752/0{,}012 = 6{,}3$$

$$(1{,}35 \cdot 10^4) \cdot (0{,}73) = 9{,}9 \cdot 10^3,$$
$$1{,}35 \cdot 10^4 \cdot 0{,}73/(2 \cdot 10^2) = 0{,}5 \cdot 10^2.$$

Αν έχομε πολλούς διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις και βγάζομε ενδιάμεσα αποτελέσματα, είναι καλό να κρατούμε περισσότερα σημαντικά ψηφία στα ενδιάμεσα αποτελέσματα, όμως το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να είναι σύμφωνο με τα ανωτέρω.

2) Για την πρόσθεση και την αφαίρεση αριθμών, αυτό που παίζει ρόλο είναι η τάξη του τελευταίου σημαντικού ψηφίου κάθε αριθμού (δηλ. η ελάχιστη τάξη ψηφίων του αριθμού). Βρίσκομε την ελάχιστη τάξη για κάθε αριθμό και στη συνέχεια βρίσκομε ποια απ' αυτές είναι η μεγαλύτερη. Το αποτέλεσμα της πράξεως (πράξεων) δεν μπορεί να έχει ψηφία με μικρότερη απ' αυτήν την τάξη. Στην πράξη παίρνομε ψηφία μέχρι αυτήν τη μεγαλύτερη από τις ελάχιστες τάξεις.

Το 10,001 έχει ελάχιστη τάξη 10^{-3} (χιλιοστού), το 0,0003 έχει ελάχιστη τάξη 10^{-4} (δέκατο του χιλιοστού), το 0,85 έχει ελάχιστη τάξη 10^{-2} (εκατοστού). Η μεγαλύτερη τάξη από αυτές είναι 10^{-2} (εκατοστού), άρα $10{,}001 + 0{,}0003 - 0{,}85 = 9{,}15$, δηλαδή η τάξη του αποτελέσματος είναι η μέγιστη από τις ανωτέρω ελάχιστες τάξεις, δηλαδή 10^{-2} (εκατο-

στού). Αυτό ίσως γίνεται πιο κατανοητό αν γράψομε τους αριθμούς όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{r} 10{,}001 \\ +0{,}0003 \\ -0{,}85 \\ \hline 9{,}15 \end{array}$$

Οι περιπτώσεις άλλων υπολογισμών (άλλων πράξεων) είναι πιο πολύπλοκες, αλλά γενικώς δεν πρέπει να κρατούμε υπερβολικό αριθμό ψηφίων στα αποτελέσματα που δίνομε. Στις περιπτώσεις ριζών (και δυνάμεων) μπορούμε να κρατούμε στο αποτέλεσμα τόσα σημαντικά ψηφία, όσα έχει ο αρχικός αριθμός.

Αναφέρομε επίσης ότι τηρούμε τον παρακάτω κανόνα, όταν στρογγυλεύομε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα κρατώντας μόνο τα σημαντικά του ψηφία ως εξής: το 4,6703 με 3 σημαντικά ψηφία γίνεται 4,67, με 1 σημαντικό γίνεται 5, με 2 σημαντικά γίνεται 4,7, με 4 σημαντικά γίνεται 4,670.

Δηλαδή, προσδιορίζομε το σημαντικό ψηφίο ελάχιστης τάξεως (το δεξιότερο σημαντικό ψηφίο) που θέλομε να κρατήσομε. Αν το ψηφίο που το ακολουθεί (δηλ. αυτό που βρίσκεται δεξιά του) είναι μικρότερο του 5, τότε διώχνομε όλα τα ψηφία μετά απ' το σημαντικό ψηφίο με την ελάχιστη τάξη. Αν το ψηφίο που το ακολουθεί είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, τότε αυξάνομε το σημαντικό ψηφίο ελάχιστης τάξεως κατά 1 και παραλείπομε αυτά που το ακολουθούν.

– Διευκρίνιση.

Διευκρινίζομε ότι στις ασκήσεις και τα προβλήματα αυτού του βιβλίου πολλές φορές για λόγους ευκολίας δίνονται μεγέθη με αριθμητικές τιμές ακέραιους, χωρίς να τηρείται ο κανόνας για τα σημαντικά ψηφία. Για παράδειγμα αν γράψομε 1000 J, έχομε μόνο ένα σημαντικό ψηφίο. Παρόλα αυτά ζητείται να γίνονται οι υπολογισμοί με το αποτέλεσμα να δίνεται σ' αυτές τις περιπτώσεις με 3 σημαντικά ψηφία. Στις ασκήσεις και γενικώς στα θέματα που σχετίζονται με την παράγραφο που προηγήθηκε ακολουθείται πιστά ο σωστός συμβολισμός και πρέπει οι απαντήσεις να δίνονται σύμφωνα με τα σημαντικά ψηφία των δεδομένων.

Στα διαγράμματα και στους πίνακες, όταν υπάρχουν αριθμητικές τιμές και μονάδες μετρήσεως, ο πιο «σωστός» τρόπος γραφής είναι να γράφεται ένα κλάσμα που στον αριθμητή του να είναι το σύμβολο των φυσικών μεγεθών και στον παρανομαστή να είναι η μονάδα μετρήσεως u, δηλαδή:

$$\frac{u}{\mathrm{m/s}}.$$

Όμως χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός u (m/s) από την αμερικανική βιβλιογραφία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σώμα στην επιφάνεια της Γης έχει βάρος 200 N. Πόσο είναι το βάρος του σε ύψος h ίσο με την ακτίνα της Γης;
2. Αρκούδα που βρίσκεται στο φυσικό της περιβάλλον, έχει βάρος $B = 2170{,}436$ N και μάζα $m = 220{,}7484$ kg. Να βρείτε το χρώμα της.
3. Να υπολογιστεί ο όγκος ομογενούς και συμπαγούς σιδερένιου εξαρτήματος μάζας 1000 kg. Δίνεται $d_{\mathrm{Fe}} = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$.
4. Ομογενές και συμπαγές κομμάτι σιδήρου έχει όγκο $1\ \mathrm{m^3}$. Ποια είναι η μάζα του; Δίνεται $d_{\mathrm{Fe}} = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$.
5. Σε δύο πανομοιότυπα κενά γυάλινα μπουκάλια όγκου 1 L έκαστο, ρίχνομε καθαρό νερό και πετρέλαιο αντίστοιχα, μέχρις ότου γεμίσουν πλήρως. Ποιο έχει μεγαλύτερη μάζα; Αν τοποθετηθούν στους δύο δίσκους ζυγού που αρχικά ισορροπεί, θα εξακολουθήσει να ισορροπεί και μετά; Δίνονται $d_{\mathrm{H_2O}} = 1\ \mathrm{g/cm^3}$, $d_{\mathrm{ΠΕΤΡ}} = 0{,}9\ \mathrm{g/cm^3}$.
6. Αν τα 16 kg οινόπνευμα έχουν όγκο 20 L, να υπολογίσετε την πυκνότητα του οινοπνεύματος σε $\mathrm{g/cm^3}$, $\mathrm{kg/cm^3}$, $\mathrm{kg/m^3}$.
7. Σώμα έχει πυκνότητα $9\ \mathrm{g/cm^3}$. Ποιο είναι το ειδικό του βάρος σε $\mathrm{gf/cm^3}$, όταν $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.
8. Σώμα έχει ειδικό βάρος $3\ \mathrm{p/cm^3}$. Ποια είναι η πυκνότητά του σε $\mathrm{g/cm^3}$, όταν $\mathrm{g} = 981\ \mathrm{cm/s^2}$;
9. Η ακτίνα της Γης είναι 6.370 km. Να μετατρέψετε αυτό το μήκος σε m, cm, mm.
10. Μεταλλική (κλειστή) δεξαμενή πετρελαίου σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, έχει μήκος ακμών στη βάση 5 m, 6 m και στο ύψος 4 m. Να υπολογίσετε:
    α) Τον όγκο της σε $\mathrm{m^3}$ και L.
    β) Το εμβαδό σε $\mathrm{m^2}$ του μετάλλου που απαιτείται για την κατασκευή της, αν υπάρχουν κατά την κατασκευή απώλειες 5 % στις μεταλλικές επιφάνειες που χρησιμοποιούνται.
    γ) Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας της δεξαμενής.
    δ) Πόσα kg χρώματος θα χρειασθούν για να βα-

φτεί η δεξαμενή (εκτός από τη βάση της), αν με το 1 kg χρώματος βάφονται 4 m^2 της μεταλλικής επιφάνειας;

11. Βαρέλι πετρελαίου κυλινδρικού σχήματος έχει ύψος 1,5 m και εμβαδό βάσεως 0,8 m^2. Να υπολογίσετε πόσα λίτρα πετρελαίου περιέχει.

12. Πλαστική φιάλη αναψυκτικού έχει όγκο 1,5 L. Να εκφράσετε τον όγκο αυτό σε m^3 και σε mm^3.

13. Πόσα κεραμικά πλακάκια τετραγωνικού σχήματος και μήκους πλευράς 0,2 m, θα χρειασθούν για να στρωθεί μπαλκόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με πλευρές μήκους 20 m και 10 m;

14. Δοχείο πετρελαίου έχει όγκο $V = 20$ L. Να εκφράσετε αυτόν τον όγκο σε m^3 και dm^3.

15. Πόσα δευτερόλεπτα έχει ένα έτος;

16. Να γίνει μετατροπή των μονάδων και να συμπληρωθούν τα κενά.

α) Οι 4 ώρες είναι ..... λεπτά και ..... δευτερόλεπτα.

β) Τα 90 m^2 είναι ..... dm^2 και ..... cm^2.

γ) Τα 90 m είναι ..... dm και ..... cm.

δ) Τα 90 m^3 είναι ..... dm^3 και ..... cm^3.

ε) Τα 36 km/h είναι ..... m/s.

στ) Τα 72 km/h είναι .....m/s.

ζ) Τα 108 km/h είναι ..... m/s.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

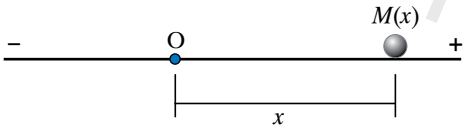
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κινηματική

2.1 Μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση.

Κίνηση είναι η αλλαγή της θέσεως ενός σώματος σε σχέση με κάποιο σύστημα αναφοράς. Το σύνολο των διαδοχικών θέσεων, απ' τις οποίες διέρχεται ένα (υλικό) σημείο κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του αποτελούν την ***τροχιά*** του κινητού (σημείου). Η κίνηση διακρίνεται σε ***ευθύγραμμη*** και ***καμπυλόγραμμη***. Επίσης, η καμπυλόγραμμη διακρίνεται σε ***επίπεδη*** και ***τρισδιάστατη***.

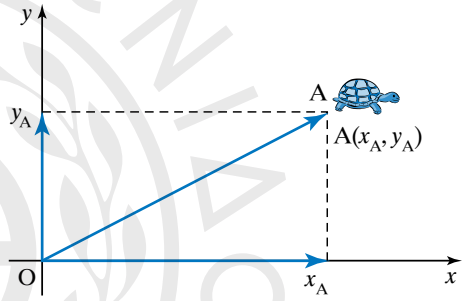
Για τον προσδιορισμό της θέσεως του κινητού στην ευθύγραμμη κίνηση, χρησιμοποιείται ένας προσανατολισμένος άξονας με μια αρχή μετρήσεων Ο και μια συντεταγμένη θέσεως x, που μετρείται από την αρχή του άξονα. Η τιμή της συντεταγμένης έχει απόλυτη τιμή ίση με την απόσταση του σώματος απ' την αρχή του άξονα και το πρόσημό της δείχνει αν το σώμα βρίσκεται δεξιά (θετικός ημιάξονας) ή αριστερά (αρνητικός ημιάξονας) από το Ο (σχ. 2.1.1). Αν γνωρίζομε τη συνάρτηση $x(t)$, δηλαδή τη θέση του σημείου κάθε χρονική στιγμή, έχομε περιγράψει πλήρως την κίνηση. Συνήθως, στα πλαίσια της Γενικής Φυσικής, η συνάρτηση $x = x(t)$ ονομάζεται ***εξίσωση της κινήσεως***.



Σχ. 2.1.1

Κίνηση σε ευθεία γραμμή, 1 βαθμός ελευθερίας.

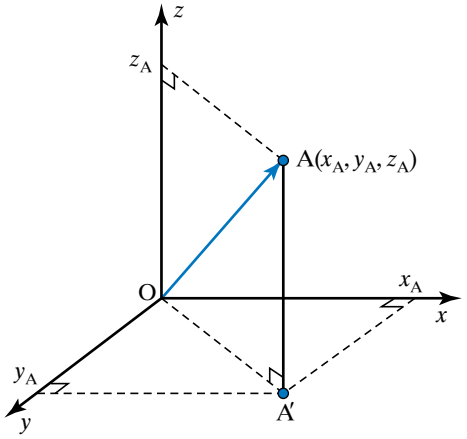
Στην περίπτωση της κινήσεως στο επίπεδο, χρησιμοποιείται ένα σύστημα αναφοράς από δύο ορθογώνιους άξονες συντεταγμένων (καρτεσιανοί άξονες συντεταγμένων) και χρειάζονται δύο συντεταγμένες θέσεως (x, y). Τα μέτρα των συντεταγμένων θέσεως είναι οι αποστάσεις του σημείου από την αρχή Ο των αξόνων που είναι θετικές αν μετρούνται στον θετικό ημιάξονα και αρνητικές στον αρνητικό ημιάξονα. Η διατεταγμένη δυάδα $[x(t), y(t)]$ προσδιορίζει πλήρως τη θέση του σημείου (υλικού σημείου, σωματίου) στο επίπεδο τη χρονική στιγμή t. Διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OA}$ ενός κινητού (σημείου) είναι το διάνυσμα που σε κάθε σύστημα αναφοράς έχει ως αρχή την αρχή Ο του συστήματος και ως πέρας τη θέση Α του σώματος (σχ. 2.1.2).



Σχ. 2.1.2

Κίνηση στην επιφάνεια, 2 βαθμοί ελευθερίας.

Στην περίπτωση της κινήσεως στον τρισδιάστατο χώρο χρειάζεται ένα τρισορθογώνιο (καρτεσιανό) σύστημα αναφοράς και τρεις συντεταγμένες θέσεως, (x, y, z). Για τις τιμές τους ισχύουν όσα είπαμε και στα προηγούμενα (σχ. 2.1.3). Η διατεταγ-



Σχ. 2.1.3

Κίνηση στον χώρο, τρεις βαθμοί ελευθερίας.

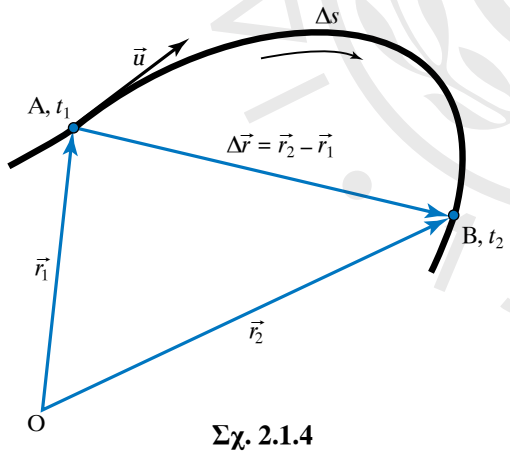
μένη τριάδα $[x(t), y(t), z(t)]$ προσδιορίζει πλήρως το διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OA}$, δηλαδή τη θέση του σημείου στον χώρο την κάθε χρονική στιγμή t (σχ. 2.1.3).

Γενικώς, μπορούν να ορισθούν συστήματα συντεταγμένων που δεν αποτελούνται από ευθύγραμμους άξονες. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το γεωγραφικό πλάτος και μήκος στην επιφάνεια της Γης.

Γενικώς, ο ελάχιστος αριθμός συντεταγμένων που απαιτούνται για τον καθορισμό της θέσεως ενός κινητού εκφράζει τους βαθμούς ελευθερίας (θέσεως) σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς. Αν η κίνηση του κινητού περιορίζεται πάνω σε μία (γενικώς καμπύλη) επιφάνεια το κινητό έχει δυο βαθμούς ελευθερίας (θέσεως), ενώ πάνω σε μία (γενικώς καμπύλη) γραμμή έχει έναν. Τρεις βαθμούς ελευθερίας έχει το αεροπλάνο που πετά, δύο το πλοίο που ταξιδεύει στη θάλασσα και έναν το τρένο που κινείται πάνω στις ράγες του.

2.1.1 Διάστημα Δs.

Διάστημα Δs ονομάζεται το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που εκφράζει το μήκος της συνολικής διαδρομής που κάνει το σημείο κατά την κίνησή του (σχ. 2.1.4). Πρέπει να ληφθεί υπόψη αν το σημείο κινείται μπρος πίσω κατά τη διαδρομή του.



Σχ. 2.1.4

Διανύσματα θέσεως ($\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$), *μετατόπιση* ($\Delta\vec{r}$) *και διάστημα* (Δs).

2.1.2 Μετατόπιση Δr.

Μετατόπιση Δr χαρακτηρίζεται το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την αρχική θέση Α του σώματος και ως πέρας την τελική του θέση Β (σχ. 2.1.4). Ισχύει $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, όπου $\vec{r}_2$, $\vec{r}_1$ είναι τα διανύσματα θέσεως του σώματος στην τελική και αρχική θέση αντίστοιχα. Σε ευθεία γραμμή ισχύει ότι $\Delta x = x_2 - x_1$.

Οι απόλυτες τιμές των τιμών του διαστήματος Δs και της μετατοπίσεως $\Delta\vec{r}$ συμπίπτουν όταν το σώμα κινείται ευθύγραμμα προς μια φορά. Τόσο το διάστημα όσο και η μετατόπιση έχουν την ίδια μονάδα μετρήσεως, που στο SI είναι το 1 m.

Κατά τη διάρκεια της κινήσεως ενός σώματος, δεν μας ενδιαφέρει μόνο η αλλαγή της θέσεώς του, αλλά και σε πόσο χρόνο αυτή πραγματοποιείται. Μεταξύ δύο πλοίων, για να αποφασίσομε ποιο κινείται γρηγορότερα, δεν αρκεί μόνο να γνωρίζομε πόσο έχει κινηθεί το καθένα, αλλά και το χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε για τη διαγραφή της τροχιάς τους.

Έστω κινητό που κινείται σε κάποια τροχιά και τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στο σημείο Α, ενώ μετά από χρόνο Δt, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \Delta t$ βρίσκεται στο σημείο Β (σχ. 2.1.4). Αν $\Delta\vec{r}$ είναι η μετατόπιση του κινητού σε χρόνο Δt, ως μέση διανυσματική ταχύτητα του κινητού, $\vec{u}$, ορίζεται το διανυσματικό φυσικό μέγεθος που προκύπτει απ' τη σχέση:

$$\vec{u} = \Delta\vec{r}/\Delta t.$$

Συνεπώς, η μέση (διανυσματική) ταχύτητα ενός κινητού είναι ένα διάνυσμα, που έχει διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και φορά της μετατοπίσεως του κινητού και μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου της μετατοπίσεως προς τον αντίστοιχο χρόνο, στον οποίο πραγματοποιήθηκε η μετατόπιση.

Η ταχύτητα που με τον τρόπο αυτό ορίζεται δεν δίνει λεπτομερειακά στοιχεία για την κίνηση απ' το σημείο Α προς το Β, αλλά εξαρτάται απλά από τη συνολική μετατόπιση και τον συνολικό χρόνο που απαιτήθηκε γι' αυτήν τη μετατόπιση. Μονάδα μετρήσεώς της στο SI είναι το 1 m/s, καθώς και πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά της. Άλλες μονάδες μετρήσεως είναι: το km/h, το μίλι ανά ώρα (mi/h), όπου 1 mile = 1609 m, το ν.μ. ανά ώρα (ή κόμβος), όπου το 1 ν.μ. = 1 M = 1 nmi = 1852 m, για τους ανέμους το μποφόρ. Η συσχέτιση των μποφόρ με km/h δίνεται στον πίνακα 2.1.

Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας προκύπτει ότι αυτή εξαρτάται από δύο χρονικές στιγμές. Κατά τη μελέτη των κινήσεων μας ενδιαφέρει η ταχύτητα του κινητού να ορίζεται για μία χρονική στιγμή, δηλαδή σε ένα συγκεκριμένο σημείο της τροχιάς του. Αν στον τύπο της μέσης ταχύτητας:

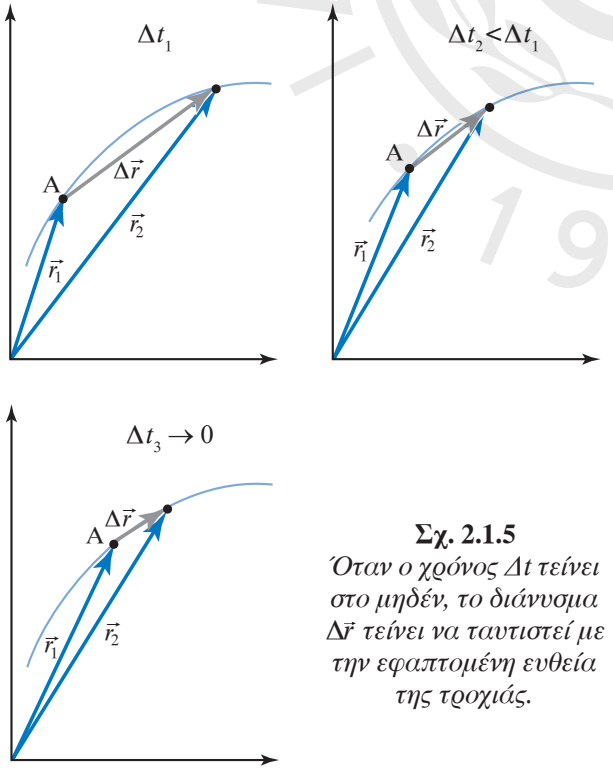
$$\vec{u} = \Delta\vec{r}/\Delta t$$

Πίνακας 2.1
Αντιστοιχίες μποφόρ με km/h.

Μποφόρ	*Ταχύτητα σε km/h*
1	1 – 5
2	6 – 11
3	12 – 19
4	20 – 28
5	29 – 38
6	39 – 49
7	50 – 61
8	62 – 74
9	75 – 88
10	89 – 102
11	103 – 117
12	≥ 118

ο χρόνος Δt τείνει στο μηδέν, το διάνυσμα $\Delta\vec{r}$ τείνει να αποκτήσει ως φορέα την εφαπτόμενη ευθεία της τροχιάς στο σημείο Α (σχ. 2.1.5). Στην περίπτωση αυτή η χορδή ταυτίζεται με το τόξο. Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται ***στιγμιαία ταχύτητα*** και δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Σχ. 2.1.5
Όταν ο χρόνος Δt τείνει στο μηδέν, το διάνυσμα $\Delta\vec{r}$ τείνει να ταυτιστεί με την εφαπτομένη ευθεία της τροχιάς.

Στην περίπτωση που η τροχιά είναι ευθεία, η διεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητας συμπίπτει με την τροχιά. Μονάδα μετρήσεώς της στο SI είναι το 1 m/s.

Παρατηρήσεις.

1) Υπάρχουν δύο μέσες ταχύτητες: η μία είναι διανυσματικό μέγεθος και η άλλη βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος. Μερικοί τη βαθμωτή ταχύτητα την ονομάζουν ***αριθμητική μέση ταχύτητα*** και τη διανυσματική, ***μέση διανυσματική***. Στην πράξη τις λέμε όλες (μέσες) ταχύτητες και καταλαβαίνομε ποια περίπτωση έχομε από το συγκεκριμένο πρόβλημα και τα συμφραζόμενα.

2) Η μέση ταχύτητα (διανυσματική) είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή που ακολουθεί το κινητό, μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε χρόνο 30 s διανύει απόσταση 1200 m. Να εκφράσετε την ταχύτητα του αυτοκινήτου σε km/h.

Λύση

Η ταχύτητα του αυτοκινήτου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{120\cancel{0}\,\text{m}}{3\cancel{0}\,\text{s}} = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Επειδή $1\,\text{m} = 1/1000\,\text{km}$ και $1\,\text{s} = 1/3600\,\text{h}$, είναι

$$u = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 40 \times \frac{\frac{1}{1000}\,\text{km}}{\frac{1}{3600}\,\text{h}} =$$

$$= 4\cancel{0} \times \frac{36\cancel{0}\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} \times \frac{\text{km}}{\text{h}} = 144\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2. Ταχύπλοο σκάφος κινείται με σταθερή ταχύτητα 60 κόμβων. Πόσα km διανύει σε ένα τέταρτο της ώρας;

Λύση

1 κόμβος = 1 M/h (nmi/h), άρα $u = 60$ κόμβοι = 60 M/h. Όμως 1 nmi = 1852 m = 1,852 km. Οπότε:

$$u = 60\ \frac{\text{nmi}}{\text{h}} = 60 \times \frac{1{,}852\ \text{km}}{\text{h}} = 111{,}12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Επειδή το σκάφος κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = \Delta x/\Delta t$, προκύπτει ότι

$$\Delta x = u \cdot \Delta t = 111{,}12\ \frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1}{4}\cancel{\text{h}} = 27{,}78\ \text{km}.$$

2.1.3 Επιτάχυνση.

Γενικώς η ταχύτητα δεν παραμένει σταθερή με τον χρόνο. Όταν η ταχύτητα ενός σημείου κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του μεταβάλλεται, η κίνηση ονομάζεται ***μεταβαλλόμενη***. Επειδή η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, αρκεί να αλλάξει το μέτρο ή η διεύθυνση ή η φορά της για να μεταβληθεί. Όταν η (διανυσματική) ταχύτητα ενός σώματος μεταβάλλεται με τον χρόνο, λέμε ότι το σώμα επιταχύνεται.

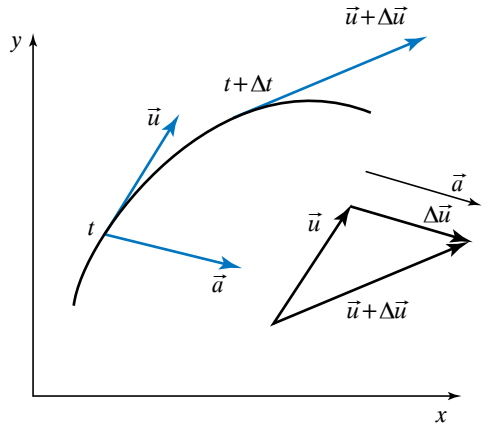
Όταν ένας οδηγός πατήσει γκάζι ή φρενάρει ή κινηθεί με ταχύτητα σταθερού μέτρου γύρω από κυκλική πλατεία, η (διανυσματική) ταχύτητα του αυτοκινήτου του μεταβάλλεται. Για να συγκρίνομε τις επιταχύνσεις δύο κινητών, μας ενδιαφέρει όχι μόνο η μεταβολή της ταχύτητάς τους, αλλά και το χρονικό διάστημα, στο οποίο λαμβάνει χώρα αυτή η μεταβολή. Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος, ονομάζεται ***επιτάχυνση***. Μπορούμε να διακρίνομε την επιτάχυνση σε μέση και στιγμιαία.

1) ***Μέση επιτάχυνση*** ενός κινητού που τη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα $\vec{u}$ και τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ έχει ταχύτητα $\vec{u} + \Delta\vec{u}$, ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta\vec{u}$, προς το χρονικό διάστημα Δt, δηλαδή:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}.$$

Η διεύθυνση και η φορά της συμπίπτουν με τη διεύθυνση και φορά του $\Delta\vec{u}$ (σχ. 2.1.6). Μονάδα μετρήσεως της μέσης επιταχύνσεως στο SI είναι το:

$$\frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Σχ. 2.1.6
Διάνυσμα επιταχύνσεως (a).

Μερικές φορές, όταν το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται με τον χρόνο λέμε ότι έχομε επιταχυνόμενη κίνηση και όταν μειώνεται έχομε επιβραδυνόμενη κίνηση. Ο όρος επιτάχυνση είναι ο πιο γενικός και χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις.

2) Η ***στιγμιαία επιτάχυνση*** αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη θέση ή χρονική στιγμή της κινήσεως ενός σημείου, είναι μέγεθος διανυσματικό και ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

έχει δε τη διεύθυνση και τη φορά του διανύσματος $\mathrm{d}\vec{u}$ και μέτρο:

$$|\vec{a}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|.$$

Παρατηρούμε ότι η στιγμιαία επιτάχυνση είναι η πρώτη παράγωγος της συναρτήσεως της ταχύτητας ως προς τον χρόνο ή η δεύτερη παράγωγος του διαστήματος ως προς τον χρόνο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αυτοκίνητο αυξάνει την ταχύτητά του από 60 km/h σε 69 km/h μέσα σε 2,5 s, ενώ μια μοτοσικλέτα στον ίδιο χρόνο φτάνει από ταχύτητα 0 km/h σε 9 km/h. Ποιο όχημα υφίσταται τη μεγαλύτερη επιτάχυνση; Οι κινήσεις είναι ευθύγραμμες.

Λύση

Η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας που υφίσταται το αυτοκίνητο σε χρόνο $\Delta t = 2{,}5$ s, είναι:

$$\Delta u = 69\ \frac{\text{km}}{\text{h}} - 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\ .$$

Άρα η επιτάχυνσή του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{MOT} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}{2{,}5\ \text{s}} = \frac{9 \times \frac{10000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}}{2{,}5\ \text{s}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ .$$

Η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας της μοτοσικλέτας σε χρόνο $\Delta t = 2{,}5$ s, είναι:

$$\Delta u = 9\ \frac{\text{km}}{\text{h}} - 0\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\ .$$

Άρα η επιτάχυνσή της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{MOT} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}{2{,}5\ \text{s}} = \frac{9 \times \frac{10000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}}{2{,}5\ \text{s}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ .$$

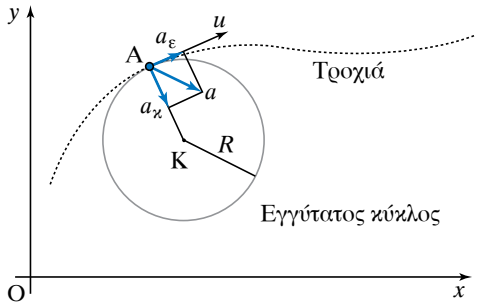
Παρατηρούμε ότι παρόλο που οι ταχύτητες των δύο οχημάτων είναι εντελώς διαφορετικές, ο ρυθμός μεταβολής τους είναι ο ίδιος. Κατά συνέπεια, τα δύο οχήματα έχουν την ίδια επιτάχυνση.

2.1.4 Επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση στην καμπυλόγραμμη κίνηση.

Για κινητό (σημείο) που εκτελεί κυκλική κίνηση, μεταβάλλεται συνεχώς η διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητάς του και είναι δυνατό να μεταβάλλεται και το μέτρο της. Και στις δύο περιπτώσεις η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη, άρα υπάρχει επιτάχυνση. Στην καμπυλόγραμμη κίνηση η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά (σχ. 2.1.7).

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ στην καμπυλόγραμμη κίνηση δεν έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα. Η επιτάχυνση αναλύεται σε δύο συνιστώσες (σχ. 2.1.7).

Από αυτές η a_ε ονομάζεται ***επιτρόχια επιτάχυνση***, είναι εφαπτόμενη στην τροχιά και σχετίζεται με



Σχ. 2.1.7
Συνιστώσες της επιταχύνσεως $\vec{a}$.

τη μεταβολή του μέτρου (της τιμής) της ταχύτητας, ενώ η a_κ ονομάζεται ***κεντρομόλος επιτάχυνση***, είναι κάθετη στην τροχιά και σχετίζεται με τη μεταβολή της διευθύνσεως της ταχύτητας.

Για τη συνιστώσα a_κ ισχύει ότι $a_\kappa = u^2 / R$, όπου R η ακτίνα του εγγύτατου κύκλου[1] (δηλ. η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο θεωρούμενο σημείο). Για την επιτρόχια ισχύει:

$$a_\varepsilon = \text{d}u / \text{d}t\cdot$$

Διακρίνομε τα παρακάτω είδη κινήσεων:

1) Όταν $a_\varepsilon = 0$ και $a_\kappa = 0$, τότε η $\vec{u}$ είναι σταθερή και η κίνηση ευθύγραμμη ομαλή.

2) Όταν η a_ε είναι σταθερή και $a_\kappa = 0$, τότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη.

3) Όταν $a_\varepsilon = 0$ και η a_κ είναι σταθερή, τότε το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, μεταβάλλεται μόνο η διεύθυνση, και η κίνηση είναι ομαλή κυκλική.

4) Όταν $a_\varepsilon \neq 0$ και $a_\kappa \neq 0$, τότε μεταβάλλονται το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας και η κίνηση είναι καμπυλόγραμμη.

2.2 Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Ευθύγραμμη ομαλή ονομάζεται η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα.

Αυτό σημαίνει ότι κινείται σε ευθεία γραμμή προς την ίδια κατεύθυνση και σε ίσα χρονικά διαστήματα διανύει ίσες αποστάσεις. Η μέση ταχύτητά του $\overline{u} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - x_0}{t - t_0}$ ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητά του, $u = \dfrac{\text{d}x}{\text{d}t}$.

[1] ***Εγγύτατος κύκλος*** ονομάζεται ο κύκλος που στην περιοχή ενός σημείου της τροχιάς «εφαρμόζει» άριστα στην τροχιά.

Δηλαδή $\bar{u} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} = u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =$ σταθερό.

Για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, όπου η μέση ταχύτητα ισούται με τη στιγμιαία, μπορούμε να υπολογίσομε τη σχέση μεταξύ μετατοπίσεως και χρόνου με τους παρακάτω τρόπους:

1) Ξεκινώντας απ' τη σχέση της μέσης ταχύτητας, $\bar{u} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, έχομε: $x - x_0 = u \cdot (t - t_0)$,

$$\text{άρα } x = x_0 + u \cdot (t - t_0).$$

Είναι προφανές ότι αν $t_0 = 0$ s, έχομε $x = x_0 + ut$.

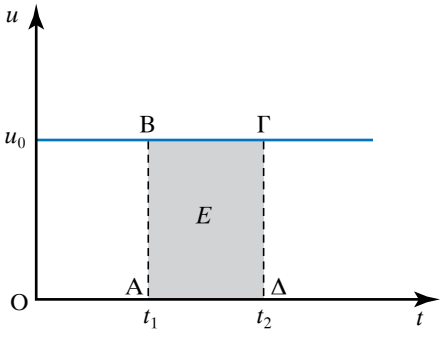
2) Αν ξεκινήσομε απ' τη σχέση για τη στιγμιαία ταχύτητα $u = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$, έχομε $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t$. Στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο, μεταξύ t_0 και t, και υποθέτοντας ότι οι αντίστοιχες τιμές της θέσεως είναι x_0 και x, προκύπτει:

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} u\mathrm{d}t \quad \text{ή} \quad x - x_0 = u\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = u(t - t_0),$$

αφού $u =$ σταθερό

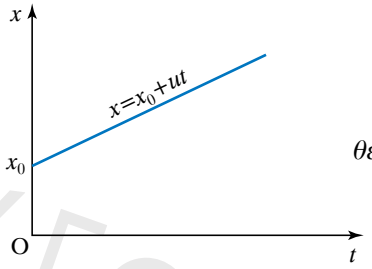
τελικώς $x = x_0 + u\,(t - t_0)$.

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι η μετατόπιση Δx ισούται με το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $u = u(\mathrm{t})$ και τον άξονα του χρόνου, από τη χρονική στιγμή t_1 που ξεκίνησε το κινητό, έως τη χρονική στιγμή t_2 που ολοκληρώθηκε η μετατόπιση. Αυτό ισχύει και όταν η ταχύτητα δεν είναι σταθερή, διότι η μετατόπιση υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα της ταχύτητας ως προς τον χρόνο. Στο σχήμα 2.2.1 το σκιασμένο εμβαδό E δίνεται απ' τον τύπο $E = (\mathrm{AB}) \cdot (\mathrm{B\Gamma})$, διότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Είναι $(\mathrm{AB}) = u_0$, $(\mathrm{B\Gamma}) = t_2 - t_1$, οπότε $E = u_o\,(t_2 - t_1) = u_o\,\Delta t$.



Σχ. 2.2.1
Γραφικός υπολογισμός μετατοπίσεως.

Το διάγραμμα θέσεως-χρόνου εικονίζεται στο σχήμα 2.2.2, είναι ευθεία γραμμή και παριστάνει τη σχέση $x = x_0 + v\,t$. Αν υποθέσομε ότι η αρχή μετρήσεως του διαστήματος είναι το 0, δηλαδή $x_0 = 0$, τότε η σχέση θέσεως – χρόνου γίνεται $x = v\,t$ και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή που διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων.



Σχ. 2.2.2
Διάγραμμα θέσεως-χρόνου.

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι η παράγωγος ως προς τον χρόνο της χρονικής συναρτήσεως της θέσεως $x(t)$, δηλαδή:

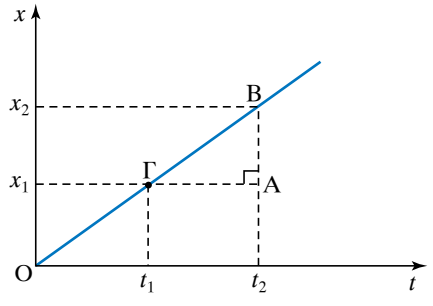
$$u = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t.$$

Αυτό σημαίνει ότι αν ξέρομε τη συνάρτηση $x = x(t)$ μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα υπολογίζοντας την παράγωγο ως προς τον χρόνο της $x = x(t)$. Αυτό ισχύει ακόμη και αν η εξάρτηση με τον χρόνο δεν είναι γραμμική, δηλαδή ακόμη και όταν η στιγμιαία ταχύτητα δεν είναι σταθερή.

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι η κλίση της καμπύλης θέσεως-χρόνου ισούται κάθε χρονική στιγμή με τη στιγμιαία ταχύτητα.

Όταν η καμπύλη είναι ευθεία, ο υπολογισμός της κλίσεως είναι πιο εύκολος. Όταν η καμπύλη δεν είναι ευθεία, τότε η κλίση υπολογίζεται από την κλίση της ευθείας που είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη στο συγκεκριμένο σημείο που μας ενδιαφέρει.

Από τη γραφική παράσταση του σχήματος 2.2.3



Σχ. 2.2.3
Υπολογισμός της ταχύτητας από την κλίση.

βλέπομε ότι τη χρονική στιγμή t_1 το κινητό βρίσκεται στη θέση x_1 και τη χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στη θέση x_2. Η κλίση της ευθείας που παριστάνει την εξάρτηση $x = x(t)$ υπολογίζεται ως εξής:

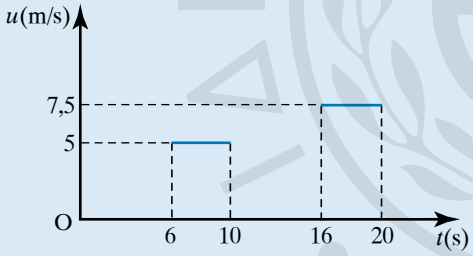
$$\text{κλίση} = \frac{(\text{AB})}{(\Gamma\text{A})} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ταχύπλοο σκάφος κινείται ευθύγραμμα σε θαλάσσιο αγώνα. Έχομε ορίσει ως αρχή μετρήσεως του χρόνου τη στιγμή που ξεκινά η ευθύγραμμη κίνηση.

Μετά από 6 s, η ταχύτητά του έχει μέτρο 18 km/h και διατηρείται σταθερή μέχρι τη στιγμή 10 s. Τη στιγμή 16 s, η ταχύτητά του έχει γίνει 27 km/h και τη διατηρεί σταθερή μέχρι τη στιγμή 20 s.

1) Σε διάγραμμα ταχύτητας–χρόνου (σχ. 2.2.4), να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας από 6 s μέχρι 10 s και από 16 s μέχρι 20 s.



Σχ. 2.2.4

2) Να υπολογίσετε τις μετατοπίσεις του ταχυπλόου στις παραπάνω χρονικές διάρκειες.

Λύση

1) Η χρονική διάρκεια από 6 s μέχρι 10 s είναι $\Delta t_1 = 10\,\text{s} - 6\,\text{s} = 4\,\text{s}$ και η ταχύτητα είναι σταθερή:

$$u_1 = 18\frac{\text{km}}{\text{h}} = 18 \cdot \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ .$$

Για τη χρονική διάρκεια από 16 s μέχρι 20 s που είναι $\Delta t_2 = 10\,\text{s} - 6\,\text{s} = 4\,\text{s}$ έχομε:

$$u_2 = 27\frac{\text{km}}{\text{h}} = 27 \cdot \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 7{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2) Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = 10\,\text{s} - 6\,\text{s} = 4\,\text{s}$ ισχύει:

$$u_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta x_1 = u_1 \cdot \Delta t_1 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\,\text{s} = 20\,\text{m}.$$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = 20\,\text{s} - 16\,\text{s} = 4\,\text{s}$ ισχύει:

$$u_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \ \text{άρα}$$

$$\Delta x_2 = u_2 \cdot \Delta t_2 = 7{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\,\text{s} = 30\,\text{m}.$$

2.3 Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ονομάζεται η κίνηση που πραγματοποιεί ένα σώμα όταν κινείται σε ευθεία γραμμή και σε ίσα χρονικά διαστήματα έχει ίσες μεταβολές ταχύτητας, δηλαδή κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Σταθερή επιτάχυνση σημαίνει σταθερή επιτάχυνση ως διάνυσμα, δηλαδή η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο, σταθερή διεύθυνση και σταθερή φορά. Η ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση διακρίνεται σε επιταχυνόμενη, όταν το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται, και επιβραδυνόμενη, όταν μειώνεται. Όταν τα διανύσματα ταχύτητας και επιταχύνσεως $\vec{u}$, $\vec{a}$ είναι ομόρροπα, η κίνηση είναι ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη, ενώ όταν είναι αντίρροπα, είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

Έστω ότι ένα σώμα τις χρονικές στιγμές t_0, t έχει ταχύτητα u_0, u αντίστοιχα.

Η ταχύτητα u_0 ονομάζεται ***αρχική ταχύτητα***. Έχομε $a = \mathrm{d}u / \mathrm{d}t$, όπου τα a, u στη γενική περίπτωση εξαρτώνται από τον χρόνο. Επομένως:

$$\mathrm{d}u = a\mathrm{d}t, \ \text{οπότε} \ \int_{u_0}^{u} \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}t$$

$$u - u_0 = \int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}t$$

Αν το a είναι σταθερό, τότε βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα και έχομε:

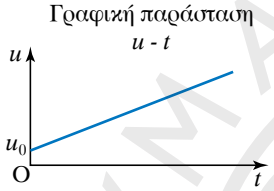
$$u - u_0 = a\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t, \ \text{τελικώς} \ u - u_0 = a(t - t_0).$$

Η σχέση ταχύτητας-χρόνου είναι γραμμική. Φαίνεται από το τελευταίο αποτέλεσμα ότι η επιτάχυνση σχετίζεται με τη μετατόπιση με τη σχέση:

$$a = \frac{u - u_0}{t - t_0} = \frac{\Delta u}{\Delta t},$$

δηλαδή η μέση και η στιγμιαία επιτάχυνση είναι ίδιες, εφόσον η επιτάχυνση είναι σταθερή. Μελετώντας τη σχέση $u - u_0 = a\,(t - t_0)$ ισχύουν τα εξής:

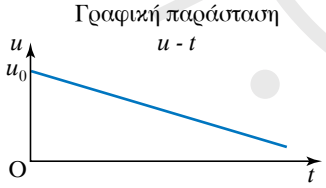
1) Αν θέσουμε $t_0 = 0$ s η εξίσωση ταχύτητας-χρόνου αποκτά τη μορφή $u = u_0 + a\,t$. Τότε το αντίστοιχο διάγραμμα είναι μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο u_0 του άξονα των ταχυτήτων (σχ. 2.3.1). Αν η αρχική ταχύτητα u_0 του σώματος είναι μηδέν, η εξίσωση ταχύτητας-χρόνου γίνεται $u = a\,t$. Το διάγραμμα στην περίπτωση αυτή είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Υποθέσαμε ότι η αρχική ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι θετικές.



Σχ. 2.3.1

Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου με $u_0 \neq 0$, $a > 0$.

2) Αν θεωρήσουμε ότι η αρχική ταχύτητα είναι θετική και η επιτάχυνση αρνητική, τότε το διάγραμμα της σχέσεως $u = u_0 + at$ είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.2.



Σχ. 2.3.2

Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου για $u_0 > 0$, $a < 0$.

Από τη σχέση $u = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$ βρίσκουμε ότι $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t$. Ολοκληρώνουμε αυτήν τη σχέση μεταξύ t_0, t με αντίστοιχες τιμές για τη θέση x_0, x. Θα έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} u\mathrm{d}t \quad \text{ή} \quad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} u\mathrm{d}t.$$

Αν υποθέσουμε ότι $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, έχουμε για την περίπτωση της ευθύγραμμης κινήσεως με σταθερή επιτάχυνση τη σχέση:

$$u = u_0 + at.$$

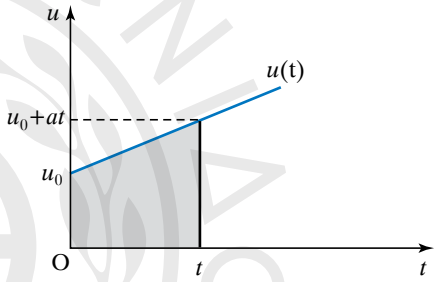
Τότε το $x = x(t)$ βρίσκεται από τη σχέση:

$$x = x_0 + \int_0^t (u_0 + at)\mathrm{d}t = x_0 + u_0 \int_0^t \mathrm{d}t + a \int_0^t t\mathrm{d}t,$$

τελικώς $x = x_0 + u_0 t + 1/2\, at^2$.

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο ότι η μετατόπιση $\Delta x = (x - x_0)$ μπορεί να προσδιοριστεί με τον υπολογισμό του εμβαδού μεταξύ της καμπύλης $u = u(t)$ και του άξονα του χρόνου για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_0 - t$ (σχ. 2.3.3). Στην ειδική περίπτωση όπου $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$, ο υπολογισμός είναι εύκολος, γιατί ξέρομε πώς να υπολογίζομε το εμβαδόν τραπεζίου. Ισχύει δηλαδή:

$$x = E_{\text{ΤΡΑΠ}} = \frac{u + u_0}{2} t = \frac{(u_0 + at) + u_0}{2} t = u_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$



Σχ. 2.3.3

Υπολογισμός του διαστήματος ως συναρτήσεως του χρόνου, α = σταθερό.

Αναλυτικότερα λοιπόν:

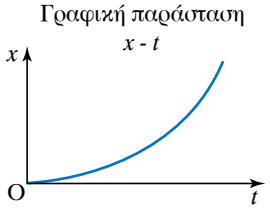
1) Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

$$x = u_0 t + 1/2\, at^2, \quad a > 0,$$

όταν η αρχική ταχύτητα u_0 είναι μηδέν, η εξίσωση γίνεται:

$$x = 1/2\, at^2.$$

Το διάγραμμα είναι μια παραβολή όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.4.



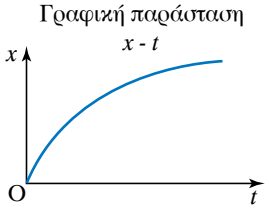
Σχ. 2.3.4

Διάγραμμα $x = x(t)$ για ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

2) Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση όπου:

$$x = u_0 t + 1/2\, at^2,\ a<0,$$

το διάγραμμα είναι μια παραβολή όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.5.



Σχ. 2.3.5
Διάγραμμα $x = x(t)$ για ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κατασκευαστής αυτοκινήτων διαφημίζει το νέο αυτοκίνητο αγώνων που κατασκεύασε λέγοντας ότι, από τη στιγμή που θα ξεκινήσει επιταχυνόμενο ομαλά, αποκτά ταχύτητα 94 mi/h μέσα σε 7 s.

1) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

2) Να υπολογίσετε την απόσταση που διανύει στα πρώτα 7 s.

3) Ποια είναι η ταχύτητά του 10 s μετά την έναρξη της κινήσεώς του, αν υποτεθεί ότι εξακολουθεί να επιταχύνεται με τον ίδιο ρυθμό;

Λύση

1) Θεωρώντας ότι η αρχική του ταχύτητα είναι μηδέν, η ταχύτητα που αποκτά μετά από 7 s είναι:

$$u = 94\frac{\text{mi}}{\text{h}} = 94 \cdot \frac{1609\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 42{,}01\frac{m}{s} \approx 42\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα η επιτάχυνσή του δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u - u_0}{\Delta t} = \frac{42\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{7\ \text{s}} = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2) Θεωρώντας ότι η αρχική θέση x_o του αυτοκινήτου είναι μηδέν και επειδή $u_o = 0$, έχομε:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 49\ \text{s}^2 = 147\ \text{m}.$$

3) Αφού το αυτοκίνητο εξακολουθεί να επιταχύνεται με τον ίδιο ρυθμό $a = 6\ \text{m/s}^2$, μετά από 10 s έχει ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση:

$$u = at = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{s} = 60\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

– Ελεύθερη πτώση μέσα στο πεδίο βαρύτητας.

Ελεύθερη πτώση μέσα σε πεδίο βαρύτητας είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν κινείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας χωρίς να ασκούνται πάνω του άλλες δυνάμεις εκτός από τη δύναμη της βαρύτητας. Για παράδειγμα, ένας δορυφόρος που κινείται γύρω από τη Γη σε περιοχή όπου δεν υπάρχουν τριβές εκτελεί ελεύθερη πτώση. Η Γη κατά την κίνησή της γύρω από τον Ήλιο εκτελεί ελεύθερη πτώση. Σώμα που αφήνεται από μικρό ύψος, πάνω από την επιφάνεια της Γης, χωρίς αρχική ταχύτητα, και που κατά την κίνησή του η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η σταθερή δύναμη του βάρους του, εκτελεί ελεύθερη πτώση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η κίνηση αυτή είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα με σταθερή επιτάχυνση $a = g$, όπου g είναι η επιτάχυνση ή αλλιώς η ένταση της βαρύτητας.

Στην πράξη καμμία κίνηση κοντά στην επιφάνεια της Γης δεν είναι ελεύθερη πτώση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε κάθε σώμα, εκτός από το βάρος, ασκείται και η αντίσταση του αέρα. Η ελεύθερη πτώση πραγματοποιείται επακριβώς μόνο στο κενό.

Σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης η ελεύθερη πτώση χωρίς αρχική ταχύτητα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με σταθερή επιτάχυνση $a = g$. Η εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι $u = u_0 + at$. Για την ελεύθερη πτώση με $u_o = 0$ και $a = g$, προκύπτει ότι $u = g\,t$.

Η εξίσωση της μετατοπίσεως στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι: $\Delta x = u_0 t + 1/2\, at^2$. Θέτοντας $\Delta x = s = y$ και $u_o = 0$, προκύπτει $s = y = 1/2\, g\, t^2$. Η εξίσωση $y = 1/2\, g\, t^2$ δίνει το διάστημα που έχει διανύσει κατακόρυφα προς τα κάτω σε χρόνο t απ' το σημείο που το αφήσαμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από κάποιο ύψος. Αν θεωρηθεί ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$ να υπολογίσετε:

α) Μετά από πόσο χρόνο t, απ' τη στιγμή

που αφέθηκε ελεύθερο, θα διανύσει διάστημα $y = 80\,\text{m}$.

β) Πόση είναι τότε η ταχύτητά του.

Λύση

α) Το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, οπότε: $y = 1/2\, g\, t^2$ άρα:

$$t^2 = \frac{2y}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\,\text{m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 4\,\text{s}.$$

β) Η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση $u = g\,t$, οπότε: $u = g\,t = 10\,\text{m/s}^2 \cdot 4\,\text{s} = 40\,\text{m/s}$.

2. Από την κορυφή κτηρίου αφήνονται να πέσουν ελεύθερα μικρές σφαίρες με ρυθμό μία σφαίρα το δευτερόλεπτο.

α) Πόσο διάστημα έχει διανύσει η πρώτη σφαίρα, όταν ξεκινά η τέταρτη;

β) Πόση είναι η απόσταση της πρώτης σφαίρας από τη δεύτερη, όταν ξεκινά η τρίτη; Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Όταν ξεκινά η τέταρτη σφαίρα, η πρώτη έχει διανύσει διάστημα y κινούμενη ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη για χρόνο $t = 3\,\text{s}$, χωρίς αρχική ταχύτητα, με επιτάχυνση g. Οπότε:

$$y = 1/2\, g\, t^2 = 45\,\text{m}.$$

β) Όταν ξεκινά η τρίτη σφαίρα, η πρώτη έχει διανύσει διάστημα y_1, κινούμενη για χρόνο $t_1 = 2\,\text{s}$, ενώ η δεύτερη έχει διανύσει διάστημα y_2 κινούμενη για χρόνο $t_1 = 1\,\text{s}$. Και οι δύο εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση g. Οπότε:

$$y_1 = 1/2\, g\, t_1^2 = 5\,\text{m} \quad \text{και} \quad y_2 = 1/2\, g\, t_2^2 = 20\,\text{m}.$$

Άρα, η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι $\Delta y = y_2 - y_1 = 15\,\text{m}$.

3. Πίθηκος βρίσκεται πάνω σε δέντρο ύψους $h = 20\,\text{m}$. Ένα παιδί τρέχει με ταχύτητα $u = 2\,\text{m/s}$ και τη στιγμή που διέρχεται κάτω από το δέντρο, ο πίθηκος αφήνει να πέσει μια καρύδα.

Να υπολογίσετε την απόσταση της καρύδας από το παιδί, τη στιγμή που η καρύδα φτάνει στο έδαφος. Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

Λύση

Η καρύδα που πέφτει ελεύθερα, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, με επιτάχυνση g. Ο χρόνος που χρειάζεται για να πέσει στο έδαφος υπολογίζεται ως εξής:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \text{ άρα } t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 2\,\text{s}.$$

Το παιδί εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και στον χρόνο αυτό θα έχει μετακινηθεί κατά:

$$x = u\, t = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\,\text{s} = 4\,\text{m}.$$

Άρα, τη στιγμή που πέφτει η καρύδα στο έδαφος, το παιδί θα έχει μετακινηθεί απ' αυτήν κατά $x = 4\,\text{m}$.

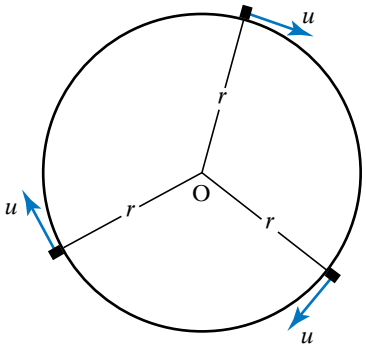
2.4 Ομαλή κυκλική κίνηση και κυκλική ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Μια κίνηση που επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα ονομάζεται ***περιοδική***. Η κίνηση του ωροδείκτη του ρολογιού που επαναλαμβάνεται κάθε 12 h, του λεπτοδείκτη που επαναλαμβάνεται κάθε 1 h, του δευτερολεπτοδείκτη που επαναλαμβάνεται κάθε 1 min, οι κινήσεις της Γης γύρω από τον άξονά της και γύρω από τον Ήλιο και η κίνηση του εκκρεμούς, είναι περιοδικές κινήσεις.

Η ομαλή κυκλική κίνηση είναι μια απλή περιοδική κίνηση. ***Κυκλική*** είναι η κίνηση ενός κινητού, όταν η τροχιά που διαγράφει είναι περιφέρεια κύκλου. Ειδική περίπτωση της κυκλικής κινήσεως αποτελεί η ομαλή κυκλική κίνηση. ***Ομαλή κυκλική*** κίνηση ονομάζεται η κυκλική κίνηση ενός κινητού, κατά την οποία σε ίσα χρονικά διαστήματα, διανύει ίσα τόξα. Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας του κινητού παραμένει σταθερό (σχ. 2.4.1). Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι η ακτίνα r της κυκλικής κινήσεως.

Η ομαλή κυκλική κίνηση περιγράφεται με τα παρακάτω χαρακτηριστικά μεγέθη:

1) ***Περίοδος*** (***T***) στην ομαλή κυκλική κίνηση ονομάζεται ο χρόνος που χρειάζεται το κινητό για να πραγματοποιήσει μια περιφορά (να διαγράψει έναν πλήρη κύκλο). Είναι μέγεθος μονόμετρο και



Σχ. 2.4.1
Το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό.

έχει μονάδες μετρήσεως τις μονάδες μετρήσεως του χρόνου. Στο SI και σε όλα τα συστήματα μονάδων η μονάδα μετρήσεως (που είναι και θεμελιώδης μονάδα) είναι το 1 s. Φυσικά χρησιμοποιούνται και άλλες μονάδες χρόνου.

Για παράδειγμα η περίοδος κινήσεως της Γης γύρω από τον άξονά της είναι 24 h και γύρω από τον Ήλιο περίπου 365 ημέρες.

2) ***Συχνότητα*** (f, ν) στην ομαλή κυκλική κίνηση ονομάζεται το πηλίκο του αριθμού N των στροφών που εκτελεί το κινητό σε χρόνο t διά του χρόνου αυτού. Είναι μέγεθος μονόμετρο και ισχύει:

$$f = \frac{\text{αριθμός στροφών}}{\text{αντίστοιχος χρόνος}} = \frac{N}{t}.$$

Μονάδα μετρήσεως της συχνότητας είναι το 1 Hz = 1 κύκλος/δευτερόλεπτο ή 1 Hz = 1 s^{-1}.

Άλλες μονάδες μετρήσεως της συχνότητας είναι 1 kHz = 10^3 Hz, 1 MHz = 10^6 Hz, 1 GHz = 10^9 Hz.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Κινητό εκτελεί 720 στροφές σε χρόνο 2 min. Η συχνότητα της κινήσεώς του είναι:

$$f = \frac{720}{120} \text{ στροφές ανά δευτερόλεπτο} = 6$$

στροφές ανά δευτερόλεπτο = 6 HZ = 6 s^{-1}.

2. Το ηλεκτρικό ρεύμα για οικιακή κατανάλωση, έχει συχνότητα 50 Hz, δηλαδή τα κινούμενα ηλεκτρόνια κάνουν 50 παλινδρομικές κινήσεις το δευτερόλεπτο και έχουν περίοδο:

$$T = \frac{1}{50} \text{ s} = 20 \text{ ms}.$$

Από τη σχέση $f = N/t$ για $N = 1$ και $t = T$ έχομε:

$$f = 1/T.$$

Δηλαδή η περίοδος και η συχνότητα είναι μεγέθη αντίστροφα. Για πολύ μικρές συχνότητες, προτιμάται η περιγραφή της κινήσεως με την περίοδο. Έτσι, για παράδειγμα για την ιδιοπεριστροφή της Γης (T = 24 h) δεν παίρνομε τη συχνότητα f = 0,000 012 Hz, αλλά την περίοδο.

3) ***Γραμμικά μεγέθη στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι:***

α) ***Διάστημα*** (Δs) στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι το μήκος του τόξου που διανύει το κινητό σε κάποιο χρόνο. Είναι μέγεθος μονόμετρο και έχει μονάδα μετρήσεως το 1 m.

β) ***Γραμμική ταχύτητα*** u στην ομαλή κυκλική κίνηση ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

– Το ***μέτρο*** του είναι σταθερό και ίσο με το πηλίκο του μήκους του τόξου (Δs) που διανύει το κινητό κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς, σε χρονικό διάστημα Δt, προς αυτό το χρονικό διάστημα,

$$u = \Delta s/\Delta t.$$

Γενικώς $u = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, ακόμη και για μη σταθερό u.

– Η ***διεύθυνσή*** του είναι η διεύθυνση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο της τροχιάς που βρίσκεται το κινητό.

– Η ***φορά*** του είναι η φορά περιστροφής του κινητού κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς.

Έχει μονάδες μετρήσεως τις μονάδες μετρήσεως της (γραμμικής) ταχύτητας. Στο SI είναι το 1 m/s. Η γραμμική ταχύτητα εκφράζει τον ρυθμό, με τον οποίο το κινητό διαγράφει τόξα κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς και η κατεύθυνσή της μεταβάλλεται, καθώς το σώμα κινείται κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς.

Η ακτίνα που συνδέει το σώμα με το κέντρο της τροχιάς του ονομάζεται ***επιβατική ακτίνα***.

4) ***Γωνιακά μεγέθη:*** Προκειμένου να περιγράψομε την αλλαγή θέσεως ενός κινητού στην ομαλή κυκλική κίνηση, χρησιμοποιούμε εκτός από το

μήκος Δs του τόξου, και την επίκεντρη γωνία $\Delta\varphi$, η οποία αντιστοιχεί στο τόξο που διαγράφει το κινητό σε ορισμένο χρονικό διάστημα.

Η σχέση του μήκους Δs του τόξου με την αντίστοιχη γωνία $\Delta\varphi$, είναι:

$$\Delta\varphi = \Delta s/R.$$

Μονάδες μετρήσεως της γωνίας $\Delta\varphi$ είναι οι μονάδες μετρήσεως γωνιών, π.χ. το 1 rad (ακτίνιο): όπου 1 rad είναι η γωνία που βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή, $\Delta s = R$ οπότε:

$$\Delta\varphi = R/R = 1 \text{ rad}.$$

Άλλες μονάδες μετρήσεως είναι η μοίρα (^{o}) και ο βαθμός (grad). Δηλαδή:

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} \text{ μοίρες} = 57{,}3^o = \frac{400}{2\pi} \text{ grad} = 63{,}7 \text{ grad}.$$

5) ***Γωνιακή ταχύτητα*** ($\vec{\omega}$) στην ομαλή κυκλική κίνηση ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

α) ***Μέτρο*** σταθερό και ίσο με το πηλίκο της γωνίας $\Delta\varphi$, που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρονικό διάστημα Δt, προς το χρονικό διάστημα αυτό $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$.

Ακριβέστερα, το μέτρο ω της γωνιακής ταχύτητας ορίζεται ως η οριακή τιμή του πηλίκου της γωνίας Δφ, την οποία διαγράφει η επιβατική ακτίνα προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt, όταν αυτός τείνει στο μηδέν και είναι:

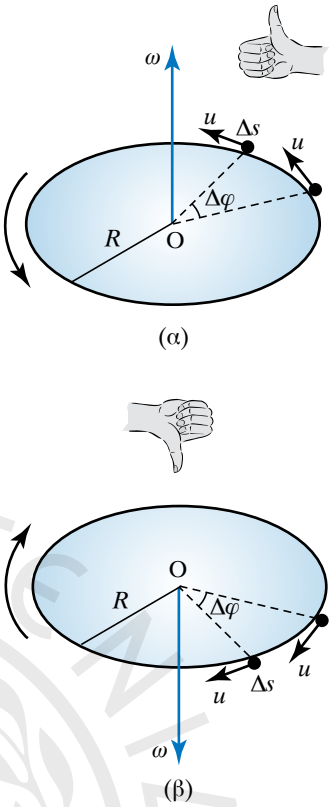
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

β) ***Διεύθυνση***, τη διεύθυνση της ευθείας που είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς και διέρχεται από το κέντρο της.

γ) ***Φορά***, τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ως εξής: τοποθετούμε την παλάμη του δεξιού χεριού, έτσι ώστε τα 4 δάχτυλα πλην του αντίχειρα, να δείχνουν τη φορά περιστροφής του κινητού κατά μήκος της τροχιάς. Τότε ο αντίχειρας μας δείχνει την φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ (σχ. 2.4.2).

Ως φορά της γωνιακής ταχύτητας επιλέγεται κατά σύμβαση εκείνη η φορά που αντιστοιχεί σε προώθηση του δεξιόστροφου κοχλία, αν αυτός περιστραφεί με τη φορά περιστροφής του κινητού.

Μονάδα μετρήσεως είναι το 1 rad/s.



Σχ. 2.4.2

Διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας. (α) Κίνηση αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. (β) Κίνηση σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού.

Η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\omega}$ εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο η επιβατική ακτίνα διαγράφει γωνίες (στρίβει). Επειδή το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερό, η επιβατική ακτίνα σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσες γωνίες.

Η γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με την περίοδο με την ακόλουθη σχέση:

$$\omega = 2\pi/T.$$

Πράγματι, έστω κινητό που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Η γωνιακή ταχύτητά του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \Delta\varphi/\Delta t.$$

Το κινητό σε χρόνο μιας περιόδου $\Delta t = T$ διαγράφει τόξο γωνίας $\Delta\varphi = 2\pi$ rad. Οπότε:

$$\omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi/T.$$

Μεταξύ γωνιακής ταχύτητας και συχνότητας ισχύει η σχέση:

$$\omega = 2\pi f.$$

Πράγματι, απ' τη σχέση $\omega = 2\pi/T$, επειδή $f = 1/T$, προκύπτει ότι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{f}} = 2\pi f.$$

Η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα συνδέονται με τη σχέση:

$$u = \omega R.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις μεταξύ των δύο ταχυτήτων (γραμμικής και γωνιακής) έχομε:

$$\frac{u}{\omega} = \frac{\frac{2\pi R}{T}}{\frac{2\pi}{T}} = R \text{ άρα } u = \omega R.$$

Η γωνία πρέπει να δίνεται σε ακτίνια. Στην ομαλή κυκλική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή, όπως και η γραμμική ταχύτητα u, άρα το σταθερό μέτρο της γραμμικής ταχύτητας u είναι τόσο μεγαλύτερο, όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς.

Για τη γραμμική ταχύτητα ισχύει:

$$u = \frac{2\pi R}{T}.$$

Πράγματι, έστω κινητό που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Η γραμμική ταχύτητά του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$u = \Delta s/\Delta t.$$

Το κινητό σε χρόνο μιας περιόδου $\Delta t = T$, διανύει τόξο ίσο με το μήκος της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς $\Delta s = 2\pi R$, οπότε:

$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}.$$

Η γραμμική ταχύτητα συνδέεται με τη συχνότητα με τη σχέση:

$$u = 2\pi Rf.$$

Πράγματι, έχομε ήδη αποδείξει ότι: $u = \frac{2\pi R}{T}$.

Όμως: $f = 1/T$, οπότε $u = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{\frac{1}{f}} = 2\pi R f.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τροχαλία έχει διάμετρο 200 mm και εκτελεί 300 στροφές το λεπτό. Να υπολογισθούν η γωνιακή και η γραμμική της ταχύτητα.

Λύση

Από τον τύπο και επίσης

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\ 300 \text{ στροφές} / 60 \text{ s} =$$

$$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \text{ rad/s} = 31{,}4 \text{ rad/s} = 31{,}4 \text{ s}^{-1}$$

και επίσης

$$u = \omega \cdot R = 31{,}4 \cdot 100 \text{ mm/s} = 3{,}14 \text{ m/s}.$$

2.4.1 Γωνιακή επιτάχυνση.

Όταν ένα κινητό εκτελεί μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση, τότε μεταβάλλεται η γωνιακή του ταχύτητα. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\Gamma\Omega N}$.

Γωνιακή επιτάχυνση ($\vec{a}_{\Gamma\Omega N}$) στην κυκλική κίνηση χαρακτηρίζεται το φυσικό διανυσματικό μέγεθος, που ορίζεται από το πηλίκο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\Delta\vec{\omega}$ του κινητού σε χρονικό διάστημα Δt, προς το χρονικό διάστημα αυτό. Η γωνιακή επιτάχυνση έχει:

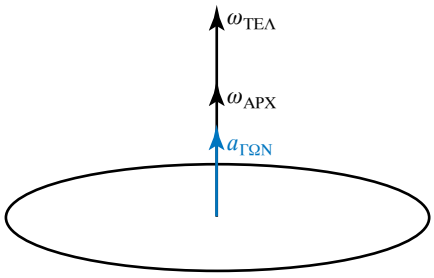
Μέτρο: $a_{\Gamma\Omega N} = a = \Delta\omega/\Delta t$, ***κατεύθυνση***, την κατεύθυνση της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας και ***μονάδα μετρήσεως*** το 1 rad/s^2.

Η γωνιακή επιτάχυνση εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

Όταν $\omega_{\text{ΤΕΛ}} > \omega_{\text{ΑΡΧ}}$, τότε $\omega_{\text{ΤΕΛ}} - \omega_{\text{ΑΡΧ}} > 0$, άρα $\Delta\omega > 0$, συνεπώς $a_{\Gamma\Omega N} = a > 0$, τότε έχομε γωνιακή επιτάχυνση (σχ. 2.4.3).

Όταν $\omega_{\text{ΤΕΛ}} < \omega_{\text{ΑΡΧ}}$, τότε $\omega_{\text{ΤΕΛ}} - \omega_{\text{ΑΡΧ}} < 0$, άρα $\Delta\omega < 0$, συνεπώς $a_{\Gamma\Omega N} = a < 0$, τότε έχομε γωνιακή επιβράδυνση.

Όταν υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση, έχομε με-



Σχ. 2.4.3
Γωνιακή επιτάχυνση.

ταβολή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας και υπάρχει η λεγόμενη (γραμμική) ***επιτρόχια επιτάχυνση***. Η επιτρόχια επιτάχυνση έχει τιμή $a_\varepsilon = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$.

Όπως έχομε αναφέρει (παράγρ. 2.1.4, σελ. 18), η επιτρόχια επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος και έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς στο σημείο που βρίσκεται το κινητό. Η φορά της είναι αυτή της μεταβολής του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας. Επισημαίνεται ότι στην κυκλική κίνηση υπάρχει πάντοτε και κεντρομόλος επιτάχυνση, στην οποία θα αναφερθούμε παρακάτω.

2.4.2 Γραμμική επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό. Η επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση a_κ (η επιτρόχια επιτάχυνση είναι μηδέν), που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

Μέτρο: $a_\kappa = u^2/R$, ***διεύθυνση***, τη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας, ***φορά*** προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και ***μονάδα μετρήσεως*** το $1\ \mathrm{m/s^2}$.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η γωνιακή ταχύτητα συνδέονται με τη σχέση $a_\kappa = \omega^2 R$.

Πράγματι, απ' τις σχέσεις $a_\kappa = u^2/R$ και $u = \omega R$, προκύπτει ότι:

$$a_\kappa = \frac{u^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Από τον ίδιο τύπο δίνεται η κεντρομόλος επιτάχυνση, ακόμη και όταν η κυκλική κίνηση δεν είναι ομαλή.

– Κυκλική ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Στην κυκλική ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή και έχομε $\omega = \omega_0 + \alpha t$, όπου ω_0 η αρχική γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή όταν $t = 0\ \mathrm{s}$.

Σ' αυτήν την περίπτωση, απ' τη σχέση $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ βρίσκομε $\mathrm{d}\varphi = \omega\,\mathrm{d}t$. Θέτοντας όπου ω την ανωτέρω τιμή ως συνάρτηση του χρόνου, μπορούμε με απλή ολοκλήρωση να βρούμε το $\varphi = \varphi(t)$. Η επιτρόχια επιτάχυνση βρίσκεται εύκολα από τις σχέσεις:

$$u = \omega R,\ \ a_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}(\omega_0 + a_{\Gamma\Omega\mathrm{N}}t)}{\mathrm{d}t} = Ra_{\Gamma\Omega\mathrm{N}}.$$

2.4.3 Μετάδοση περιστροφικής κινήσεως.

Συχνά παρουσιάζεται η ανάγκη να μεταδοθεί η περιστροφική κίνηση από έναν άξονα σ' έναν άλλο και τα μέσα που χρησιμοποιούνται για τον σκοπό αυτό είναι ο ιμάντας, η αλυσίδα και οι οδοντωτοί τροχοί. Σε κάθε μετάδοση κινήσεως υπάρχουν δύο άξονες, ο ***κινητήριος*** και ο ***κινούμενος***.

Παρακάτω αναλύεται η μετάδοση κινήσεως με χρήση ιμάντα (σχ. 2.4.4). Ανάλογα ισχύουν και για τις άλλες περιπτώσεις. Όταν η συχνότητα του κινητήριου άξονα είναι μεγαλύτερη απ' αυτήν του κινούμενου άξονα, τότε μιλάμε για υποβιβασμό των στροφών. Αν d_1 είναι η διάμετρος του κινητήριου άξονα, n_1 οι στροφές που πραγματοποιεί σε δεδομένο χρόνο και d_2, n_2 η διάμετρος και οι στροφές του κινούμενου άξονα, ισχύει ότι $d_1/d_2 = n_2/n_1$.

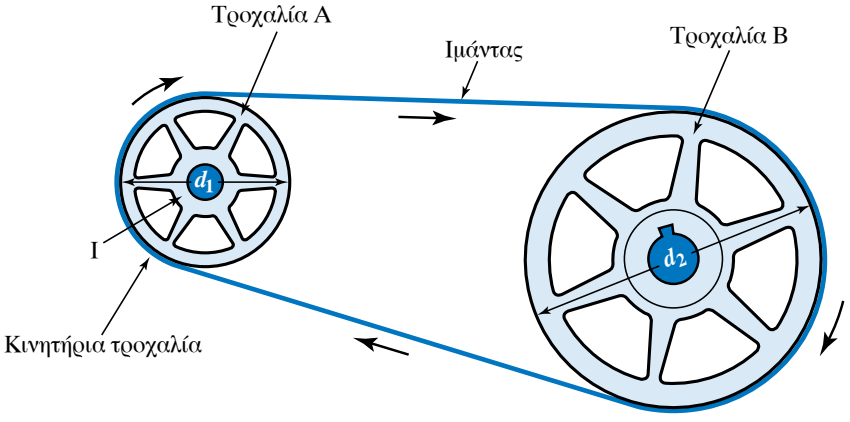
Απόδειξη.

Από τη σχέση $u_1 = u_2$ ισχύει:

$$s_1/t = s_2/t \ \text{ άρα } s_1 = s_2, \text{ άρα } n_1(2\pi R_1) = n_2(2\pi \mathrm{R}_2).$$

Επομένως $n_1(2R_1) = n_2(2\,\mathrm{R}_2)$, οπότε $n_1 d_1 = n_2 d_3$ τελικώς:

$$d_1/d_2 = n_2/n_1.$$



Σχ. 2.4.4
Μετάδοση περιστροφικής κινήσεως με ιμάντα.

Συνήθως κατά τη μετάδοση της κινήσεως, οι στροφές του κινητήριου άξονα είναι περισσότερες από τις στροφές του κινούμενου άξονα.

Στις κινήσεις με επίπεδο ιμάντα δεν επιτυγχάνομε στον κινούμενο άξονα τον αναμενόμενο αριθμό περιστροφών, διότι παρατηρείται μικρή ολίσθηση του ιμάντα πάνω στην κινούμενη τροχαλία.

Η μείωση του αριθμού των αναμενομένων στροφών είναι συνήθως της τάξεως του 5%.

Σχέση μεταδόσεως (i) ονομάζεται ο λόγος $i = n_2/n_1$ όπου n_1 ο αριθμός των στροφών του κινητηρίου άξονα και n_2 ο αριθμός των αντιστοίχων στροφών του κινούμενου άξονα. Συνήθως είναι $n_2/n_1 < 1$ (υποβιβασμός των στροφών). Αν είναι $i = 1:3$ ή $i = 1:5$ σημαίνει ότι:

$$n_2/n_1 = 1/3 \quad \text{ή} \quad n_2/n_1 = 1/5 \quad \text{κ.ο.κ..}$$

Δεν είναι δυνατό να πετύχομε πάρα πολύ μεγάλη σχέση υποβιβασμού (1:100) χρησιμοποιώντας μόνο δύο άξονες (απλή μετάδοση). Σ' αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε πολλαπλή σχέση μεταδόσεως, δηλαδή κλιμακωτή μείωση των στροφών με περισσότερα από ένα ζεύγη μεταδόσεως της κινήσεως. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, με τριπλή κλιμάκωση έχομε ότι

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{4{,}16}$$

που σημαίνει ότι η τελική σχέση ισούται με μία τριπλή σχέση μεταδόσεως, δηλαδή:

$$\frac{n_4}{n_1} = \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_3}{n_2}\cdot\frac{n_4}{n_3} \text{ με } \frac{1}{100} = \frac{n_4}{n_1}, \frac{1}{4} = \frac{n_2}{n_1}, \frac{1}{6} = \frac{n_3}{n_2}$$

$$\text{και } \frac{1}{4{,}16} = \frac{n_4}{n_3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Τροχαλία ηλεκτροκινητήρα διαμέτρου $d_1 = 100$ mm με $n_1 = 2500$ στροφές/min μεταδίδει κίνηση σε παράλληλο άξονα με διάμετρο $d_2 = 200$ mm. Πόσες στροφές/min εκτελεί ο άξονας αυτός; Αν θέλομε να εκτελεί $n_1 = 50$ στροφές/min, τι διαμέτρου τροχαλία πρέπει να τοποθετήσομε στον αντίστοιχο άξονα;

Λύση

Από τη σχέση $\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}$ κάνοντας τις αντίστοιχες αντικαταστάσεις έχομε ότι για μεν το πρώτο ερώτημα $n_2 = 1.250$ στροφές/min, για δε το δεύτερο ερώτημα $d_2 = 5.000$ mm.

2. Δρομέας τρέχει με ταχύτητα σταθερού μέτρου, σε κυκλικό στίβο που έχει μήκος περιφέρειας 400 m. Αν ο δρομέας κάνει μια περιφορά σε χρόνο 50 s, να υπολογίσετε:

α) Το σταθερό μέτρο της ταχύτητάς του.

β) Τη συχνότητα της κυκλικής κινήσεως.

Λύση

α) Ο χρόνος, στον οποίο ο δρομέας εκτελεί μια περιφορά είναι ο χρόνος μιας περιόδου $T = 50$ s. Σ' αυτόν τον χρόνο εκτελεί μια περιφορά μήκους $s = 2\pi R = 400$ m. Άρα:

$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{400\text{ m}}{50\text{ s}} = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

β) Εφόσον γνωρίζομε την περίοδο, η συχνότητα περιστροφής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{50\text{ s}} = 0{,}02\text{ Hz}.$$

3. Το άκρο του πτερυγίου ανεμιστήρα στρέφεται με γραμμική ταχύτητα $u = 15$ m/s και η ακτίνα του έχει μήκος $R = 60$ cm.

α) Να υπολογίσετε τη συχνότητα και τη γωνιακή του ταχύτητα.

β) Να υπολογίσετε επίσης ποιο μήκος του τόξου θα έχει διανυθεί σε χρόνο ενός εκατοστού του δευτερολέπτου.

Λύση

α) Από τη σχέση $u = 2\pi Rf$ υπολογίζομε τη συχνότητά του, άρα $u = 2\pi Rf$, άρα:

$$f = \frac{u}{2\pi R} = 4\text{ Hz}$$

όπου $\pi = 3{,}14$ και $R = 60\text{ cm} = 0{,}6\text{ m}$. Επίσης, η γωνιακή του συχνότητα υπολογίζεται ως εξής: $\omega = 2\pi f = 25{,}12$ rad/s.

β) Το μήκος του τόξου που θα διανυθεί σε $t = 0{,}01$ s είναι $s = u\,ts = 15\text{ m/s} \cdot 0{,}01$, $s = 0{,}15$ m.

4. Στροφή δρόμου θεωρείται τόξο ακτίνας $R = 80$ m. Να υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση αυτοκινήτου, όταν αυτό παίρνει τη στροφή με ταχύτητες μέτρων $u_1 = 36$ km/h, $u_2 = 72$ km/h.

Λύση

Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει σχέση με τη μεταβολή στη διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας. Είναι ένα διάνυσμα με διεύθυνση τη διεύθυνση της ακτίνας και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Έχει μέτρο που δίνεται από τη σχέση $a_κ = u^2/R$.

Έτσι, για $u = u_1 = 36\ \text{km/h} = 10\ \text{m/s}$, είναι:

$$a_{κ_1} = \frac{100\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{80\ \text{m}} = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ \text{ενώ για}$$

$u = u_2 = 72\ \text{km/h} = 20\ \text{m/s}$ είναι:

$$a_{κ_2} = \frac{400\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{80\ \text{m}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Παρατηρούμε πως όταν η ταχύτητα διπλασιάζεται, η κεντρομόλος επιτάχυνση τετραπλασιάζεται, με σταθερή την ακτίνα περιστροφής.

2.5 Σύνθεση κινήσεων. Απόλυτη και σχετική κίνηση.

Η μελέτη μιας κινήσεως γίνεται συνήθως ως προς ένα σύστημα αναφοράς. Ωστόσο, πολλές φορές χρειάζεται να θεωρήσομε την κίνηση ως προς δύο συστήματα αναφοράς ταυτόχρονα. Τότε, θεωρούμε ότι το ένα σύστημα αναφοράς είναι ακίνητο (απόλυτο) και ότι το άλλο κινείται ως προς το πρώτο. Η κίνηση ως προς το πρώτο λέγεται ***απόλυτη κίνηση*** και ως προς το δεύτερο ***σχετική κίνηση***.

Για παράδειγμα, έστω κύλινδρος που κυλίεται πάνω στο κατάστρωμα πλοίου, το οποίο κινείται ως προς την ξηρά με μεταφορική κίνηση. Είναι βολικό να θεωρήσομε ως απόλυτο σύστημα αναφοράς την ξηρά. Ο κύλινδρος εκτελεί κίνηση (απόλυτη) ως προς την ξηρά, που είναι ο συνδυασμός της (σχετικής) κυκλικής κινήσεως ως προς το κατάστρωμα και της μεταφορικής κινήσεως του πλοίου ως προς την ξηρά.

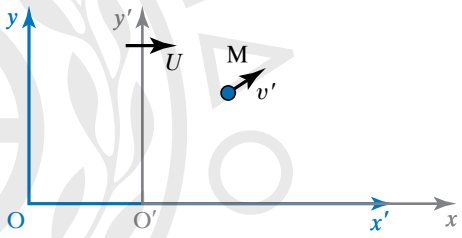
Ένας γλάρος μπορεί να παραμένει ακίνητος για επιβάτη πλοίου και να εκτελεί ομαλή κίνηση για ακίνητο φαροφύλακα.

Δελφίνι κινείται με ταχύτητα παράλληλα σε σκάφος που ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα. Η κίνηση μελετάται ταυτόχρονα από επίγειο σταθμό και από το σκάφος. Ο επίγειος σταθμός και το σκάφος παρουσιάζουν διαφορετικά αποτελέσματα, διότι μελετούν το φαινόμενο από δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Είναι απαραίτητο λοιπόν να βρεθεί τρόπος, ώστε οι δύο παρατηρητές που παρατηρούν το ίδιο φαινόμενο από δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς, να μπορούν να συνεννοηθούν. Αυτό επιτυγχάνεται με τις σχέσεις μετασχηματισμού της θέσεως, της ταχύτητας και κάθε άλλου μεγέθους που γίνεται με διαφορετικό τρόπο αντιληπτό ως προς τα διάφορα συστήματα αναφοράς.

Θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς Σ και Σ΄, που το ένα κινείται σε σχέση με το άλλο με σταθερή ταχύτητα. Δεχόμαστε ως ακίνητο το Σ. Το Σ′ κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα U. Για λόγους απλουστεύσεως κάνομε τις παρακάτω παραδοχές:

1) Τα δύο συστήματα ταυτίζονταν τη χρονική στιγμή $t = 0\ \text{s}$.

2) Η ταχύτητα U είναι παράλληλη με τον άξονα Οx του συστήματος Σ (σχ. 2.5.1).



Σχ. 2.5.1
Η απόλυτη και η σχετική κίνηση σώματος Μ.

Θα βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τη θέση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση και τη δύναμη ενός κινούμενου σημείου, όπως τις μετρούν οι παρατηρητές από τα συστήματα Σ, Σ′. Έστω το κίνητο Μ. Ο παρατηρητής Σ προσδιορίζει τη θέση του Μ με τις συντεταγμένες (x, y) και υπολογίζει την ταχύτητα u και την επιτάχυνση a. Ο παρατηρητής Σ′ προσδιορίζει τη θέση του Μ με τις συντεταγμένες (x', y') και υπολογίζει την ταχύτητα u' και την επιτάχυνση a'. Οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες στα δύο συστήματα είναι: $x = x' + Ut, y = y'$, (Μετασχηματισμός του Γαλιλαίου).

Οι σχέσεις που συνδέουν τις ταχύτητες είναι: $u_x = u'_x + U, u_y = u'_y$.

Πράγματι, από τους μετασχηματισμούς της θέσεως ισχύουν:

$$x = x' + Ut \text{ άρα: } \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + U.$$

Επομένως $u_x = u'_x + U$ και η $y = y'$ δίνει

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}, \text{ άρα } u_y = u'_y.$$

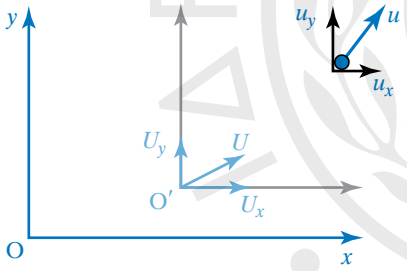
Η σχέση που συνδέει τις επιταχύνσεις είναι $a = a'$. Δηλαδή οι παρατηρητές που βρίσκονται σε ομαλή σχετική μεταφορική κίνηση μετράνε την ίδια επιτάχυνση του σωματιδίου.

Πράγματι, από τους μετασχηματισμούς της ταχύτητας ισχύει ότι $u = u' + U$, άρα:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{dU}{dt} \text{ ή } \frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt} + 0 \ ,$$

άρα $a = a'$. Ισχύει $\frac{dU}{dt} = 0$, διότι $U =$ σταθερό.

Αν η ταχύτητα U με την οποία κινείται το σύστημα Σ' ως προς το σύστημα Σ δεν είναι παράλληλη στον άξονα Ox, αναλύομε την U σε συνιστώσες U_x, U_y (σχ. 2.5.2). Οι μετασχηματισμοί θέσεως εμφανίζουν τη μορφή $x = x' + U_x t$, $y = y' + U_y t$ και οι μετασχηματισμοί ταχύτητας $u_x = u_x' + U_x$, $u_y = u_y' + U_y$, διανυσματικά $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{U}$.



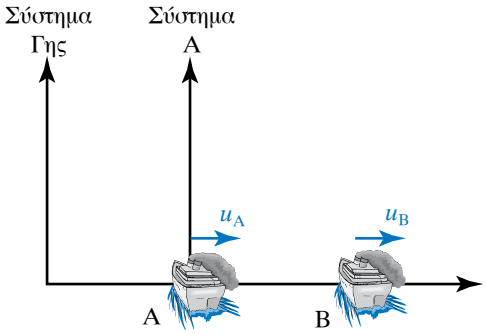
Σχ. 2.5.2
Σχετική κίνηση δύο σωμάτων.

2.5.1 Σχετική κίνηση δύο σωμάτων.

Πλοίο Α κινείται βόρεια με σταθερή ταχύτητα u_A ως προς τη Γη (σχ. 2.5.3). Σε κάποια απόσταση υπάρχει πλοίο Β που κινείται στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα u_B ως προς τη Γη. Μας ενδιαφέρει η ταχύτητα του Β ως προς το Α, $\vec{u}_{BA}$. Αυτή είναι ουσιαστικά η σχετική ταχύτητα που αναφέραμε προηγουμένως, οπότε ισχύει $\vec{u}_B = \vec{u}_{BA} + \vec{u}_A$ ή $\vec{u}_{BA} = \vec{u}_B - \vec{u}_A$, όπου $\vec{u}_{BA}$ η ταχύτητα του Β, όπως την αντιλαμβάνεται το Α. Η σχετική ταχύτητα του Α ως προς το Β είναι $u_{AB} = u_A - u_B$.

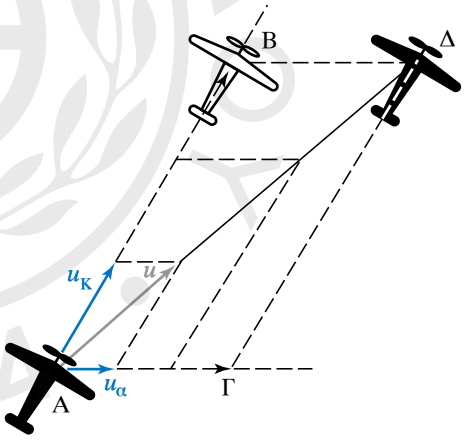
2.5.2 Σύνθεση ταυτοχρόνων κινήσεων.

Έστω ότι αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα u_K



Σχ. 2.5.3
Σχετική κίνηση δύο σωμάτων που κινούνται στην ίδια κατεύθυνση.

που οφείλεται στον κινητήρα του, ενώ ταυτόχρονα το παρασύρει ο άνεμος που φυσά με ταχύτητα u_α. Το αεροπλάνο εκτελεί ταυτόχρονα δύο κινήσεις, μία με ταχύτητα u_K και μία με ταχύτητα u_α (σχ. 2.5.4). Αν υπάρχει άπνοια ($u_\alpha = 0$ m/s), το αεροπλάνο εκτελεί μία μόνο κίνηση με ταχύτητα u_K. Αν σε χρόνο t μετατοπίζεται από τη θέση Α στη Β ισχύει ότι $(AB) = u_K t$.



Σχ. 2.5.4
Σύνθεση ταυτοχρόνων κινήσεων.

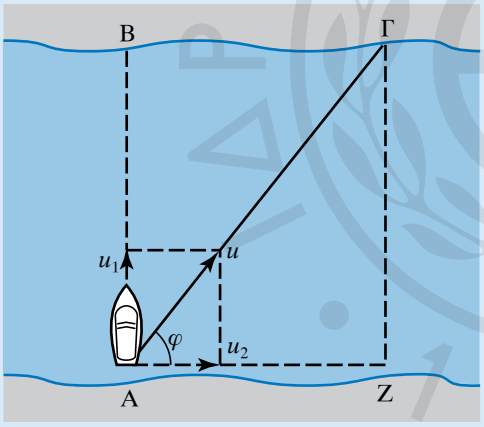
Αν οι μηχανές του δεν λειτουργούν ($u_K = 0$ m/s), παρασύρεται από τον άνεμο και κινείται με την ταχύτητα u_α του ανέμου. Αν σε χρόνο t μετατοπίζεται από τη θέση Α στη Γ, ισχύει ότι $(AΓ) = u_\alpha t$. Αν το αεροπλάνο εκτελεί ταυτόχρονα και τις δύο κινήσεις, κάνει σύνθετη κίνηση και σε χρόνο t πηγαίνει από τη θέση Α στη Δ. Στη θέση Δ θα έφτανε, αν εκτελούσε διαδοχικά τις προηγούμενες κινήσεις για χρόνο t την κάθε μία. Συχνά στην κινηματική, παρόμοια προβλήματα με το παραπάνω αντιμετω-

πίζονται θεωρώντας ότι το κινητό συμμετέχει σε δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες κινήσεις που εξελίσσονται ταυτόχρονα.

Σ' αυτήν την περίπτωση εργαλείο μας αποτελεί η ***αρχή ανεξαρτησίας*** ή ***επαλληλίας των κινήσεων***, σύμφωνα με την οποία όταν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις, η κάθε μία από αυτές εκτελείται ανεξάρτητα απ' τις υπόλοιπες και η θέση στην οποία φτάνει το κινητό μετά από χρόνο t είναι η ίδια, είτε γίνονται ταυτόχρονα οι κινήσεις είτε διαδοχικά σε χρόνο t η κάθε μία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πλοίο διασχίζει ποτάμι πλάτους $s = 300\,\text{m}$ (σχ. 2.5.5). Η ταχύτητα του νερού είναι $u_2 = 6\,\text{m/s}$. Η ταχύτητα του πλοίου ως προς το νερό έχει μέτρο $u_1 = 8\,\text{m/s}$ και διεύθυνση κάθετη στο ρεύμα του ποταμού. Ποια είναι η ταχύτητα του πλοίου ως προς τη Γη και ποιος είναι ο χρόνος που απαιτείται, προκειμένου να φτάσει στην απέναντι όχθη;



Σχ. 2.5.5
Σύνθεση ταυτοχρόνων κινήσεων, όπου οι ταχύτητες είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση

Το πλοίο μετέχει δύο κινήσεων, μίας σχετικής, ως προς το κινούμενο νερό του ποταμού $u_{\Sigma\text{X}} = u_1$ και μίας που ονομάζεται ***μετοχική***, λόγω της κινήσεως του νερού $u_{\text{M}} = u_2$. Η απόλυτη ταχύτητα του πλοίου $\vec{u}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{u} = \vec{u}_{\Sigma\text{X}} + \vec{u}_{\text{M}} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$

Το μέτρο της $\vec{u}$ δίνεται από τον τύπο:

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}\,\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}.$$

Η διεύθυνση της $\vec{u}$ είναι:

$$\tan\varphi = \frac{u_1}{u_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

ΑΓ είναι η απόλυτη μετατόπιση του πλοίου στο χρόνο t. Αν το νερό του ποταμού ήταν ακίνητο ($u_2 = 0$), το πλοίο θα διήνυε απόσταση ΑΒ (σχετική μετατόπιση). Αν οι μηχανές του πλοίου δεν λειτουργούσαν ($u_1 = 0$) το ρεύμα του ποταμού θα το μετατόπιζε κατά απόσταση ΑΖ (μετοχική μετατόπιση),

$$\text{άρα } t = \frac{\text{ΑΓ}}{u} = \frac{\text{ΑΒ}}{u_1} = \frac{\text{ΑΖ}}{u_2}. \text{ Συνεπώς}$$

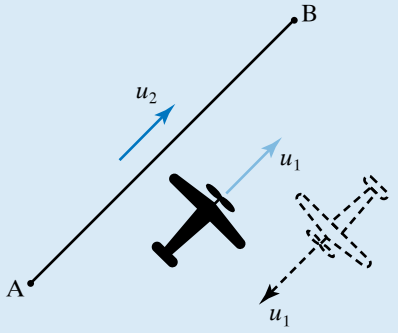
$$t = \frac{\text{ΑΒ}}{u_1} = \frac{s}{u_1} = \frac{300}{8}\,\text{s} = \frac{150}{4}\,\text{s} = \frac{75}{2}\,\text{s} = 37{,}5\,\text{s}.$$

2.5.3 Σύνθεση δύο ευθυγράμμων ομαλών κινήσεων.

Από τη σύνθεση δύο ευθυγράμμων και ομαλών κινήσεων προκύπτει κίνηση ευθύγραμμη και ομαλή με ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ και θέση $r = x_1 + x_2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αεροπλάνο πετά οριζόντια από σημείο Α προς σημείο Β και στη συνέχεια από το Β στο Α. Τα Α, Β απέχουν απόσταση $s = 700$ km. Η ταχύτητα ως προς τον αέρα είναι $u_1 = 300$ km/h. Αν κατά τη διάρκεια της πτήσεως ο αέρας κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_2 = 50$ km/h με φορά απ' το σημείο Α προς το Β, να υπολογίσετε τον χρόνο που απαιτείται για την κάθε μία διαδρομή (σχ. 2.5.6).



Σχ. 2.5.6
Σύνθεση ταυτοχρόνων κινήσεων.

Λύση

Αν δεν φυσούσε αέρας ο χρόνος της κάθε διαδρομής ΑΒ, ΒΑ θα ήταν:

$$t = \frac{s}{u_1} = \frac{700}{300}\,\text{h} = \frac{7}{3}\,\text{h} = 2\frac{1}{3}\,\text{h}.$$

Όταν φυσά αέρας, το αεροπλάνο μετέχει δύο κινήσεων, μίας σχετικής ως προς τον κινούμενο αέρα $u_{\Sigma\Chi} = u_1$ και μίας μετοχικής λόγω του αέρα $u_{\text{Μ}} = u_2$. Η απόλυτη ταχύτητα u του αεροπλάνου δίνεται από τον τύπο $u = u_{\Sigma\Chi} \pm u_{\text{Μ}} = u_1 + u_2$. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής ΑΒ το μέτρο της απόλυτης ταχύτητας του αεροπλάνου είναι $u = u_1 + u_2 = 350\,\text{km/h}$.

Η χρονική διάρκεια της διαδρομής είναι:

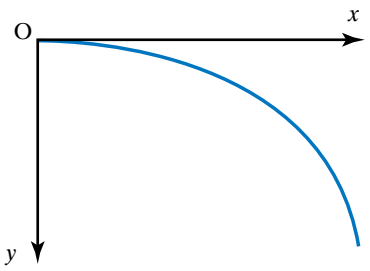
$$t_{\text{AB}} = \frac{s}{u_1 + u_2} = \frac{700}{350}\,\text{h} = 2\,\text{h}.$$

Κατά τη διάρκεια της διαδρομής ΒΑ, το μέτρο της απόλυτης ταχύτητας του αεροπλάνου είναι $u' = u_1 - u_2 = 250\,\text{km/h}$. Η χρονική διάρκεια της διαδρομής είναι:

$$t_{\text{BA}} = \frac{s}{u_1 - u_2} = \frac{700}{250}\,\text{h} = \frac{70}{25}\,\text{h} = \frac{14}{5}\,\text{h} = 2\frac{4}{5}\,\text{h}.$$

2.5.4 Σύνθεση ευθύγραμμης ομαλής και ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως.

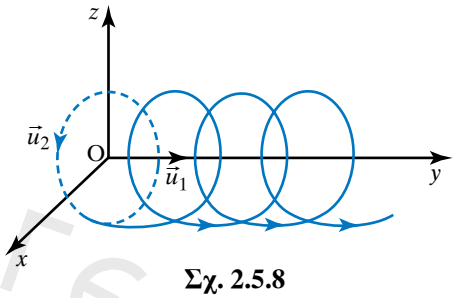
Από τη σύνθεση ευθύγραμμης ομαλής και ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κινήσεως προκύπτει μία κίνηση που στη γενική περίπτωση έχει ***τροχιά παραβολική*** (σχ. 2.5.7). Εξαίρεση αποτελούν οι περιπτώσεις, που οι δύο κινήσεις έχουν την ίδια διεύθυνση, οπότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη.



Σχ. 2.5.7
Παραβολική κίνηση.

2.5.5 Σύνθεση ευθύγραμμης ομαλής και ομαλής κυκλικής κινήσεως.

Όταν η ταχύτητα της ευθύγραμμης ομαλής κινήσεως είναι κάθετη στο επίπεδο της ομαλής κυκλικής κινήσεως, προκύπτει ***ελικοειδής κίνηση*** (σχ. 2.5.8), οι εξισώσεις της οποίας εξάγονται χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων.



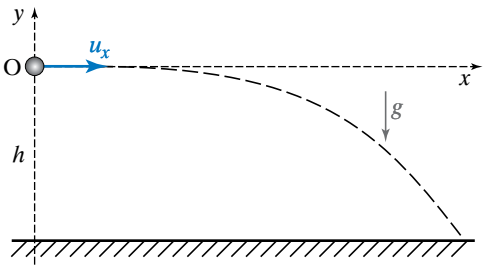
Σχ. 2.5.8
Ελικοειδής κίνηση.

Όταν η ταχύτητα της ευθύγραμμης ομαλής κινήσεως βρίσκεται στο επίπεδο της ομαλής κυκλικής, προκύπτει ***κυκλοειδής τροχιά*** (σχ. 2.5.9).

Σχ. 2.5.9
Κυκλοειδής κίνηση.

Για παράδειγμα αν από την οροφή κτηρίου που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, κλωτσήσομε οριζόντια μία μπάλα, αυτή θα εκτιναχθεί από το κτήριο με οριζόντια ταχύτητα και θα κινηθεί προς τα κάτω ακολουθώντας τροχιά, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.10. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στην περίπτωση που μαχητικό αεροπλάνο, κινούμενο οριζόντια, ελευθερώσει μία βόμβα με σκοπό να πλήξει εχθρικό στόχο.

Οριζόντια βολή ονομάζεται η κίνηση που πραγ-



Σχ. 2.5.10
Οριζόντια βολή σώματος.

ματοποιεί ένα σώμα, όταν βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος και η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος του, που θεωρούμε σταθερό. Το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο επιμέρους κινήσεις. Μία στον οριζόντιο άξονα x (ευθύγραμμη ομαλή) και μία στον κατακόρυφο άξονα y (ελεύθερη πτώση). Προκειμένου να μελετήσομε την κίνηση, θεωρούμε καρτεσιανό σύστημα αξόνων που έχει ως αρχή του το σημείο εκτοξεύσεως Ο. Αναλύομε τη σύνθετη κίνηση σε δύο επιμέρους, οι οποίες λαμβάνουν χώρα στον οριζόντιο x και στον κατακόρυφο άξονα y ταυτόχρονα.

Κατά τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα δεν υπάρχει επιτάχυνση άρα $a_x = 0$ και το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα u_0. Θεωρούμε ως αρχή μετρήσεως του χρόνου ($t_o = 0\,s$) τη χρονική στιγμή που η μπάλα εκτοξεύεται οριζόντια. Δεδομένου ότι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ($u_x = u_0$) έχομε:

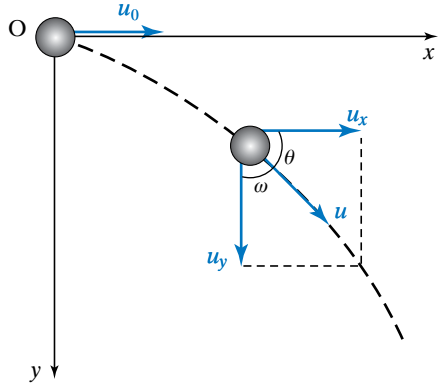
$$u_0 = x/t \quad \text{άρα} \quad x = u_0 t.$$

Κατά τη διεύθυνση του κατακόρυφου έχομε σταθερή επιτάχυνση, με $a_y = g$. Δεν υπάρχει αρχική ταχύτητα, άρα έχομε ελεύθερη πτώση (ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα). Ισχύει:

$$u_y = g\,t \quad \text{και} \quad y = 1/2\,g\,t^2.$$

Η κίνηση περιγράφεται πλήρως όταν κάθε χρονική στιγμή γνωρίζομε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας.

Σε κάθε σημείο της τροχιάς της μπάλας το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}$ είναι εφαπτόμενο της τροχιάς και το μέτρο της υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα (σχ. 2.5.11). Από $\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$ έχομε $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, άρα:



Σχ. 2.5.11

Το διάνυσμα της ταχύτητας στην οριζόντια βολή.

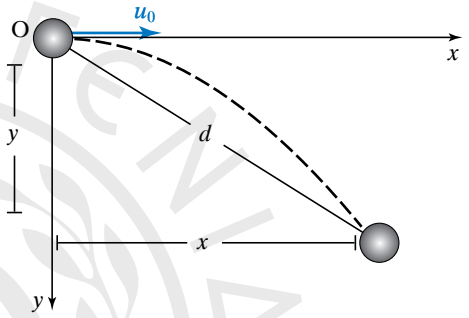
$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u_0^2 + (g\,t)^2}.$$

Προκειμένου να προσδιορίσομε την κατεύθυνση της ταχύτητας u, υπολογίζομε την εφαπτομένη της γωνίας θ ή της συμπληρωματικής της γωνίας ω.

Έχομε: $\tan\theta = \dfrac{u_y}{u_x} = \dfrac{g\,t}{u_0}$ και $\tan\omega = \dfrac{u_x}{u_y} = \dfrac{u_0}{g\,t}$.

Η απόσταση d της μπάλας από το σημείο εκτοξεύσεως Ο (σχ. 2.5.12) την κάθε χρονική στιγμή, είναι:

$$d^2 = x^2 + y^2 \text{ ή } d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(u_0\,t)^2 + (\frac{1}{2} g\,t^2)^2}.$$



Σχ. 2.5.12

Η θέση του σώματος στην οριζόντια βολή.

Ο συνολικός χρόνος ($t_{o\lambda}$) της σύνθετης κινήσεως ισούται με το χρόνο που διαρκεί η κάθε μία από τις επιμέρους κινήσεις. Συνεπώς, ισούται με τον χρόνο που χρειάζεται η μπάλα για να διανύσει κατακόρυφη απόσταση h. Έχομε:

$$y = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \quad \text{ή} \quad h = \frac{1}{2}\,g\,t_{o\lambda}^{\,2}$$

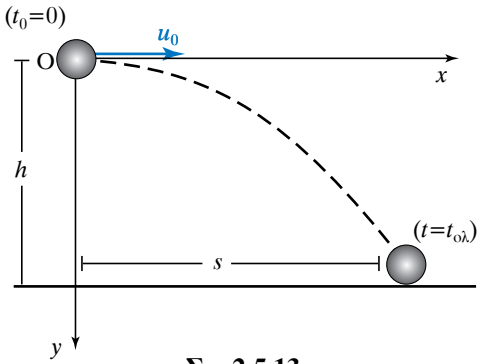
$$\text{ή} \quad t_{o\lambda}^{\,2} = \frac{2h}{g} \quad \text{άρα} \quad t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Βεληνεκές s ονομάζεται η μέγιστη απόσταση που διανύει η μπάλα στην οριζόντια διεύθυνση, όταν φτάσει στο έδαφος, μετά από χρόνο $t_{o\lambda}$ (σχ. 2.5.13). Άρα, αν θέσομε $x = s$ και $t = t_{o\lambda}$, έχομε:

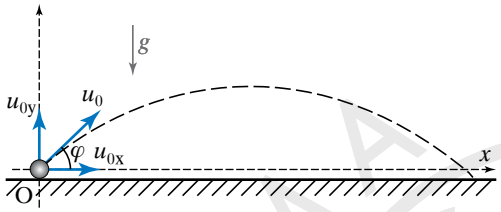
$$\left.\begin{aligned} x &= s \\ t &= t_{o\lambda} \\ x &= u_0\,t \end{aligned}\right\} \quad \text{άρα} \quad s = u_0\,t_{o\lambda} = u_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2.5.6 Πλάγια βολή υπό γωνία φ προς τα πάνω εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου.

Έστω ότι βλήμα βάλλεται από κανόνι με αρχική



Σχ. 2.5.13
Βεληνεκές.



Σχ. 2.5.14
Πλάγια (υπό γωνία) βολή σώματος.

ταχύτητα u_o που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 2.5.14). Η κίνηση του βλήματος, σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, αναλύεται σε δύο επιμέρους κινήσεις, οι οποίες λαμβάνουν χώρα σ' έναν οριζόντιο άξονα x και έναν κατακόρυφο άξονα y. Ως αρχή του καρτεσιανού συστήματος, θεωρούμε το σημείο Ο, από το οποίο εκτοξεύεται το βλήμα. Από την ανάλυση της ταχύτητας u_o στους δύο άξονες προκύπτει ότι $u_{ox} = u_o \cos\varphi$ και $u_{oy} = u_o \sin\varphi$. Η κίνηση του βλήματος είναι συνδυασμός κατακόρυφης βολής με αρχική ταχύτητα u_{oy} και ευθύγραμμης ομαλής κινήσεως με ταχύτητα u_{ox}. Κάθε στιγμή ισχύουν στον οριζόντιο άξονα $u_x = u_{ox} = u_o \cos\varphi$, $x = u_{ox} t = u_o \cos\varphi\, t$ και στον κατακόρυφο άξονα

$$u_y = u_{oy} - g\,t = u_o \sin\varphi - g\,t,$$

$$y = u_{oy}\,t - g\,t^2/2 = u_o \sin\varphi\, t - g\,t^2/2.$$

Όταν το βλήμα φτάσει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ισχύει $u_y = 0$, άρα $u_0 \sin\varphi - g\,t = 0$, δηλαδή:

$$t = \frac{u_0 \sin\varphi}{g} \quad \text{(χρόνος ανόδου του βλήματος).}$$

Ως αρχή μετρήσεως του χρόνου θεωρήσαμε τη χρονική στιγμή που το βλήμα εκτοξεύθηκε. Η μέγιστη τιμή του χρόνου ανόδου είναι:

$$t = u_o/g$$

και επιτυγχάνεται όταν $\sin\varphi = 1$, δηλαδή $\varphi = 90^o$, δηλαδή όταν το βλήμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω.

2.5.7 Μέγιστο ύψος.

Θέτομε στην εξίσωση $y = u_0 \sin\varphi\, t - 1/2\, g\, t^2$ που δίνει κάθε φορά το ύψος, όπου $t = \dfrac{u_0 \sin\varphi}{g}$ και έχομε:

$$y = u_0 \sin\varphi \frac{u_0 \sin\varphi}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_0 \sin\varphi}{g} \right)^2 = \frac{u_0^2 \sin^2\varphi}{2g}.$$

Άρα το μέγιστο ύψος στο οποίο θα ανέλθει το βλήμα είναι:

$$h_{\max} = \frac{u_0^2 \sin^2\varphi}{2\,g}$$

και επειδή τα u_0, g είναι σταθερά, εξαρτάται μόνο απ' τη γωνία βολής φ.

2.5.8 Χρόνος καθόδου.

Όταν το βλήμα βρεθεί στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, ισχύει $u_y = 0$. Η κίνηση που εκτελεί στη συνέχεια στον κατακόρυφο άξονα είναι ελεύθερη πτώση δηλαδή, ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, καθόσον πάνω του ενεργεί μόνο το βάρος του. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$y = 1/2\, g\, t^2.$$

Αν θέσομε $y = h_{\max}$ έχομε ότι:

$$\frac{1}{2} g\, t^2 = \frac{u_0^2 \sin^2\varphi}{2\,g}, \text{ άρα } t^2 = \frac{u_0^2 \sin^2\varphi}{g^2},$$

$$\text{δηλαδή } t = \frac{u_0 \sin\varphi}{g}.$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος ανόδου ισούται με το χρόνο καθόδου.

2.5.9 Βεληνεκές s.

Όταν το βλήμα φτάνει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, μετά από χρόνο

$$t = \frac{u_0 \sin\varphi}{g}$$

έχει διανύσει απόσταση $s_1 = u_0 \cos\varphi\, t$. Αντικαθιστώντας τον χρόνο t, βρίσκομε:

$$s_1 = u_0 \cos\varphi\, t = u_0 \cos\varphi\, \frac{u_0 \sin\varphi}{g} = \frac{u_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g}.$$

Από τη χρονική στιγμή που το βλήμα φτάνει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του μέχρι τη χρονική στιγμή που συναντά το έδαφος, διανύει απόσταση $s_2 = u_0 \cos\varphi\, t$. Αν θέσομε:

$$t = \frac{u_0 \sin\varphi}{g}$$

είναι

$$s_2 = u_0 \cos\varphi\, t = u_0 \cos\varphi\, \frac{u_0 \sin\varphi}{g} = \frac{u_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g}.$$

Δηλαδή η οριζόντια απόσταση s_1, που διανύει το βλήμα κατά την άνοδό του, ισούται με την οριζόντια απόσταση s_2 που διανύει κατά την κάθοδό του. ***Βεληνεκές s*** του βλήματος είναι η μέγιστη οριζόντια απόσταση που διανύει και η οποία είναι:

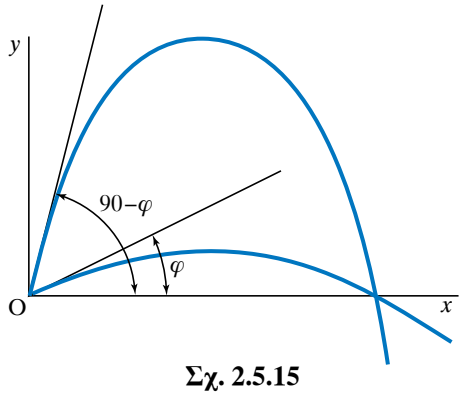
$$s = s_1 + s_2 = \frac{u_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} + \frac{u_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} =$$

$$= \frac{u_0^2\, 2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{u_0^2 \sin(2\varphi)}{g}.$$

Από τον τύπο

$$s = \frac{u_0^2 \sin(2\varphi)}{g}$$

επειδή u_0, g είναι σταθερά, το βεληνεκές μεγιστοποιείται όταν $\sin(2\varphi) = 1$, δηλαδή $2\varphi = 90^\circ$, άρα $\varphi = 45^\circ$. Επειδή ισχύει ότι $\sin(2a) = \sin(180^\circ - 2a)$, το βλήμα έχει το ίδιο βεληνεκές για δύο γωνίες βολής φ και $(90^\circ - \varphi)$ δηλαδή σε συμπληρωματικές γωνίες βολής αντιστοιχεί ίδιο βεληνεκές (σχ. 2.5.15). Η σκόπευση με τη μικρότερη γωνία ονομάζεται ***ευθύφορη***, ενώ με τη μεγαλύτερη ***επισκηπτική***.



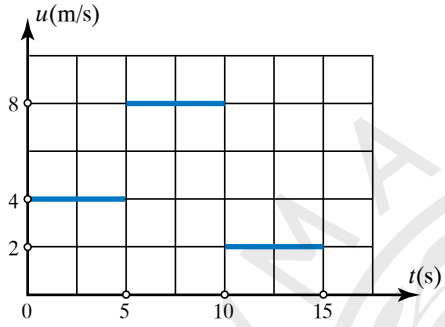
Σχ. 2.5.15
Ευθύφορτη και επισκηπτική σκόπευση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Η μέση ταχύτητα του νικητή σε αγώνα της Formula 1 είναι 320 km/h. Να μετατρέψετε την ταχύτητα σε m/s και σε m/min.
2. Αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 70 km/h, κατά τη διάρκεια του μισού χρόνου της κινήσεώς του και με ταχύτητα 50 km/h, κατά τη διάρκεια του υπόλοιπου μισού της κινήσεώς του. Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου.
3. Αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και κινούμενο με ταχύτητα $u_1 = 60$ km/h φτάνει στην πόλη Β, μετά από χρόνο $t_1 = 2$ h. Στην πόλη Β μένει σταματημένο για χρόνο $t_2 = 1$ h και στη συνέχεια ξεκινά για την πόλη Γ, η οποία απέχει απ' την πόλη Β απόσταση $x = 75$ km, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα $u_2 = 50$ km/h.
   α) Να υπολογίσετε την απόσταση (ΑΒ) και τον χρόνο που διανύει την απόσταση (ΒΓ).
   β) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου και μετατοπίσεως-χρόνου.
4. Στην ευθύγραμμη κίνηση, τι σημαίνει επιτάχυνση 180 km/h^2; Ποια η μεταβολή της ταχύτητας σε χρόνο 5 s;
5. Δύο ασθενοφόρα ξεκινούν συγχρόνως από τα σημεία Α, Β μίας ευθείας, με αντίθετης φοράς ταχύτητες $u_1 = 72$ km/h, $u_2 = 108$ km/h αντίστοιχα. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν και σε ποιο σημείο, αν η απόσταση ΑΒ = 120 km;
6. Μοτοσικλέτα που κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα εθνικής οδού με σταθερή ταχύτητα $u_M = 120$ km/h προπορεύεται 900 m περιπολικού που την καταδιώκει με σταθερή ταχύτητα $u_Π = 150$ km/h. Σε πόση ώρα το περιπολικό θα φτάσει τη μοτοσικλέτα και πόση απόσταση θα έχει διανύσει ως τότε; Λαμβάνοντας ως αρχή των μετρήσεων την αρχική θέση της μοτοσικλέτας, να σχεδιάσετε σε κοινό διάγραμμα τη γραφική παράσταση θέσεως-χρόνου για τα δύο κινητά.
7. Βυτιοφόρο αυτοκίνητο μήκους $\ell_1 = 30$ m κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_1 = 72$ km/h σε ευθύγραμμο τμήμα εθνικής οδού. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να προσπεράσει νταλίκα μήκους $\ell_2 = 50$ m, που βρίσκεται ακίνητη στο δεξιό μέρος του δρόμου; Πόσο χρόνο θα διαρκούσε η προσπέραση, αν η νταλίκα κινούταν προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα $u_2 = 60$ km/h;
8. Αν ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στη λάμψη κεραυνού και στον κρότο είναι $\Delta t = 10$ s, να υπολογίσετε σε ποια απόσταση από τον παρατηρητή έπεσε ο κεραυνός. Δίνεται $u_{ΗΧΟΥ} = 340$ m/s. Θεωρούμε ότι το φως μεταδίδεται ακαριαία.

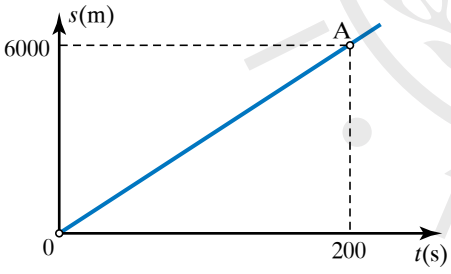
9. Οδηγός φορτηγού ξεκινά από την Αθήνα για πόλη που απέχει 600 km και τις δύο πρώτες ώρες κινείται με ταχύτητα 90 km/h. Τις επόμενες δύο ώρες κινείται με ταχύτητα 120 km/h. Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινηθεί στην υπόλοιπη διαδρομή, ώστε αυτή να διαρκέσει συνολικά 5,5 ώρες;

10. Κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και στο σχήμα 1 φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητάς του σε σχέση με τον χρόνο. Να υπολογίσετε το συνολικό διανυθέν διάστημα, τη μέγιστη τιμή της ταχύτητάς του και τη μέση ταχύτητά του κατά τα 15 s της κινήσεώς του.



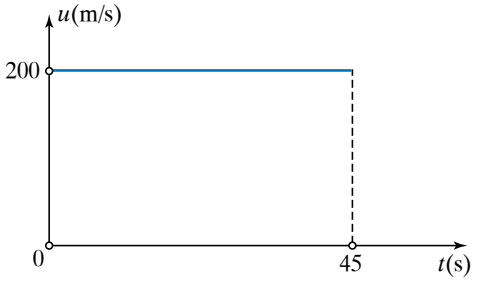
Σχ. 1

11. Η γραφική παράσταση του διαστήματος σε σχέση με τον χρόνο για ένα κινητό παρουσιάζεται στο σχήμα 2. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κινητού και το χρόνο που αυτό χρειάζεται, προκειμένου να διανύσει 1 km.



Σχ. 2

12. Να υπολογίσετε την απόσταση που έχει διανύσει κινητό κινούμενο σε ευθεία γραμμή, όταν η γραφική παράσταση της ταχύτητάς του σε σχέση με τον χρόνο είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχ. 3

13. Αυτοκίνητο είναι αρχικά ακίνητο και επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2\,\text{m/s}^2$. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του αυτοκινήτου μετά από χρόνο $t = 10$ s.

β) Ποια είναι η απόσταση που έχει διανύσει το αυτοκίνητο στο χρόνο αυτό;

γ) Να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου $(u-t)$ και θέσεως-χρόνου $(x-t)$.

δ) Μετά από πόσο χρόνο θα έχει ταχύτητα $\upsilon = 40\,\text{m/s}$;

14. Οι εξισώσεις θέσεως δύο σωμάτων Α, Β που κινούνται ευθύγραμμα είναι: $x_A = 4\,t$, $x_B = 3\,t + t^2$ αντίστοιχα, στο SI.

α) Ποιο είναι το είδος της κινήσεως που εκτελεί το κάθε σώμα;

β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση για κάθε σώμα.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας ως προς το χρόνο για το σώμα Β.

δ) Ποια είναι η χρονική στιγμή της συναντήσεως των δύο σωμάτων και ποια η χρονική στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες;

15. Σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 10\,\text{m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ s αποκτά επιβράδυνση μέτρου $a = 1\,\text{m/s}^2$.

α) Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει και ποιο το διάστημα που θα έχει διανύσει;

β) Τι διάστημα έχει διανύσει μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s;

γ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το μέτρο της επιβραδύνσεως, ώστε να σταματήσει μετά από 5 s; Ποιο το διάστημα που θα έχει διανύσει;

16. Κινητό Α αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a_A = 3\,\text{m/s}^2$ τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ s. Μετά από χρόνο 4 s ένα δεύτερο κινητό Β αρχίζει να κινείται από το ίδιο σημείο, από το οποίο ξεκίνησε το Α και προς την ίδια φορά, με σταθερή ταχύτητα u_B. Αν τα δύο κινητά συναντώνται τη χρονική στιγμή $t = 10$ s:

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα u_B .

β) Να σχεδιάσετε σε κοινό σύστημα αξόνων, τα διαγράμματα διαστήματος-χρόνου $(s\text{-}t)$ για τα δύο κινητά μέχρι τη στιγμή της συναντήσεώς τους.

17. Πέτρα αφήνεται από ύψος h πάνω από το έδαφος τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ s. Αν η πέτρα φτάσει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 3$ s και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\text{m/s}^2$:

α) Να υπολογίσετε το ύψος h και την ταχύτητα με την οποία χτυπά στο έδαφος.

β) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητάς της και το ρυθμό μεταβολής της μετα-

τοπίσεως τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.
γ) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα της επιταχύνσεως, της ταχύτητας και της μετατοπίσεώς της, σε σχέση με τον χρόνο.

18. Σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $u_0 = 50$ m/s. Να υπολογίσετε:
α) Το χρόνο ανόδου και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει.
β) Την ταχύτητα με την οποία ξαναγυρίζει στο σημείο βολής.
γ) Τη διάρκεια καθόδου. Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

19. Από ύψος $h = 100$ m αφήνομε χωρίς αρχική ταχύτητα να πέσει ελεύθερα πέτρα που φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $u = 44{,}3$ m/s. Σε ποιον τόπο έγινε το πείραμα;
α) Στη Φινλανδία.
β) Στην Ελλάδα.
γ) Στην Αίγυπτο.

20. Περιπολικό του Λιμενικού κινούμενο βορειοανατολικά της Ικαρίας με μέγιστη ταχύτητα 40 κόμβων (knot), λαμβάνει σήμα ότι 10 ν.μ. μακριά του και 3 ν.μ. από τα σύνορα, στο ίδιο γεωγραφικό πλάτος, φορτηγό πλοίο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα 20 knot και κατεύθυνση 90° ανατολικά, πιθανώς ρυπαίνει τη θάλασσα.
α) Να υπολογίσετε αν θα μπορέσει το περιπολικό να φτάσει το ύποπτο πλοίο πριν αυτό βγει έξω από τα σύνορα.
β) Τι θα είχε συμβεί αν το περιπολικό μπορούσε να κινηθεί με ταχύτητα 50 knot;

21. Δύο πλοία Α, Β απέχουν 150 ν.μ.. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s το Α κινείται με σταθερή ταχύτητα 30 knot βόρεια, ενώ το Β με σταθερή ταχύτητα 25 knot στο ίδιο γεωγραφικό μήκος, νότια. Να υπολογίσετε:
α) Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν.
β) Ποια η μετατόπιση του καθενός απ' την αρχική του θέση, τη στιγμή της συναντήσεώς τους.
γ) Πόσο θα απέχουν μετά από 20 ώρες, αν διατηρούν την ίδια πορεία.

22. Κατά τη διάρκεια ασκήσεως κατεβάσματος σωσίβιας λέμβου από πλοίο, σπάει το σύστημα, με το οποίο αυτή κατεβαίνει ελεγχόμενα στο νερό, οπότε και ελευθερώνεται από ύψος 4 m και προσκρούει στη θάλασσα. Αν $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$, να υπολογίσετε:
α) Τον χρόνο πτώσεώς της.
β) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει στη θάλασσα.

23. Πλοίαρχος κατά την προσπάθειά του να «δέσει» στο λιμάνι πρέπει να ρίξει την άγκυρα του πλοίου, ενώ η ταχύτητά του είναι 2 knot. Αν η κίνηση αυτή του προσδίδει επιβράδυνση 0,5 m/s^2, να υπολογίσετε:
α) Την ελάχιστη απόσταση απ' το λιμάνι που πρέπει να ρίξει άγκυρα, ώστε να φτάσει σ' αυτό με μηδενική ταχύτητα στο λιμάνι.
β) Σε πόσο χρόνο θα μηδενιστεί η ταχύτητά του.

24. Ερευνητικό σκάφος χρησιμοποιεί ηχοβολιστικό σύστημα για τον προσδιορισμό του βάθους, στο οποίο υπάρχει αρχαίο ναυάγιο. Με το σύστημα αυτό στέλνει σήματα υπερήχων, τα οποία εκπέμπονται κατακόρυφα προς τα κάτω έχουν σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 1530$ m/s, και επιστρέφουν μετά από χρόνο 0,3 s. Να υπολογίσετε το βάθος, στο οποίο βρίσκεται το ναυάγιο.

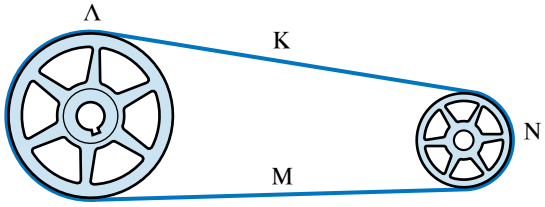
25. Από πυρηνικό υποβρύχιο εκτοξεύεται πύραυλος που κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, ακριβώς 1 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Να υπολογίσετε την ταχύτητά του, αν $g = 10\,\text{m/s}^2$ και ακτίνα Γης $R_{\Gamma\text{ΗΣ}} = 6400$ km. Να υποθέσετε ότι η Γη είναι ιδανική σφαιρική επιφάνεια και δεν υπάρχει ατμόσφαιρα.

26. Πάνω σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας 10 m κινούνται δύο κινητά με ταχύτητες $u_1 = 3$ m/s και $u_2 = 1$ m/s. Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν, αν ξεκινούν απ' το ίδιο σημείο, κινούνται αντίρροπα, και το πρώτο ξεκινά 5 s αργότερα απ' το δεύτερο.

27. Δύο κινητά αναχωρούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο κύκλου εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με συχνότητες 3 Hz και 4 Hz αντίστοιχα. Πόσος χρόνος περνά μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεών τους, αν κινούνται ομόρροπα;

28. Φορτηγό κινείται σε λασπωμένο δρόμο ευθύγραμμα και ομαλά, χωρίς να γλιστρούν οι τροχοί του. Αν ο κάθε τροχός αφήνει ίχνη μήκους $s = 100$ m σε χρόνο $t = 2{,}5$ s και η ακτίνα του είναι $R = 0{,}5$ m, να υπολογίσετε:
α) Την ταχύτητα του αυτοκινήτου.
β) Την περίοδο T περιστροφής των τροχών.
γ) Το μήκος του ίχνους που αφήνει ένας τροχός σε χρόνο $t = T$.

29. Δύο τροχαλίες συνδέονται με ιμάντα. Η μία έχει ακτίνα $R_1 = 1$ m και σταθερή συχνότητα $f_1 = 50/\pi$ Hz. Αν η ακτίνα της άλλης είναι $R_2 = 0{,}5$ m, να υπολογίσετε τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις των σημείων Κ, Λ, Μ, Ν του ιμάντα (σχ. 4).



Σχ. 4

30. Ρολόι δείχνει μεσημέρι. Μετά από πόσο χρόνο απ' το μεσημέρι:
α) Ο λεπτοδείκτης και ο δευτερολεπτοδείκτης ενός ρολογιού θα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 180^o;
β) Ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης, θα σχηματίζουν ορθή γωνία για πρώτη φορά;
γ) Ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης, θα συμπέσουν πάλι για πρώτη φορά και για δέκατη φορά;

31. Πειραματικό μοντέλο αεροπλάνου που βρίσκεται σε πίστα δοκιμών αεροδρομίου, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε περιφέρεια μήκους 40π km, με σταθερή ταχύτητα 180 km/h. Να υπολογίσετε:
α) Τη διανυσματική μεταβολή στην ταχύτητα του αεροπλάνου, όταν αυτό διαγράψει ένα τέταρτο της στροφής και μισή στροφή,
β) Την κεντρομόλο επιτάχυνση του αεροπλάνου.

32. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας κατασκοπευτικού δορυφόρου που είναι συνεχώς σε ύψος 500 km πάνω από στρατιωτική εγκατάσταση που βρίσκεται στον Ισημερινό. Δίνεται ακτίνα Γης $R_{ΓΗΣ} = 6400$ km. Δίνονται μάζα Γης $M_{ΓΗΣ} = 6 \cdot 10^{24}$ kg και $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$.

33. Αν θεωρήσομε ότι η κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι κυκλική και ολοκληρώνεται σε 28 ημέρες, ποιο είναι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της Σελήνης; Απόσταση Γης – Σελήνης = 381.024 km.

34. Δύο τροχοί με ακτίνες R_1, R_2 συνδέονται με λουρί και περιστρέφονται χωρίς ολίσθηση, ο πρώτος με συχνότητα $f_1 = 10$ Hz και ο δεύτερος με περίοδο $T_2 = 3$ s. Αν η ταχύτητα του λουριού είναι 6,28 m/s, να υπολογίσετε τα μήκη των ακτίνων R_1, R_2. Αν κόψουμε το λουρί και ο τροχός ακτίνας R_1 επιβραδύνεται με ρυθμό 0,5 rad/s, μετά από πόσο χρόνο, από τη στιγμή που κόψαμε το λουρί, θα σταματήσει;

35. Μονοκινητήριο αεροπλάνο εκτελεί πτήση μετ' επιστροφής από την πόλη Α προς την πόλη Β, που απέχουν απόσταση $S = 1000$ km. Η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς τον ακίνητο αέρα έχει μέτρο 250 km/h. Αν φυσά άνεμος κατά τη διεύθυνση ΒΑ με ταχύτητα μέτρου 50 km/h, πόσο χρόνο περισσότερο κάνει το αεροπλάνο, ώστε να καλύψει την παραπάνω πτήση;

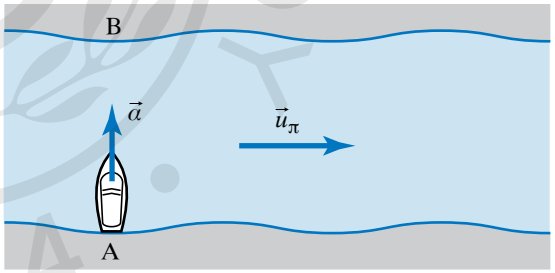
36. Πλοίο διασχίζει ποτάμι πλάτους $s = 200$ m. Αν η ταχύτητά του ως προς το νερό έχει μέτρο $u_1 = 4$ m/s, διεύθυνση κάθετη στο ρεύμα του ποταμού και η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού είναι $u_2 = 3$ m/s, να υπολογίσετε την ταχύτητα του πλοίου ως προς τη Γη και τον χρόνο που απαιτείται, προκειμένου να φτάσει στην απέναντι όχθη.

37. Το ρεύμα ποταμού έχει ταχύτητα $u_1 = 6$ m/s. Πλοίο διασχίζει κάθετα τον ποταμό. Αν η ταχύτητά του ως προς το νερό είναι $u_2 = 10$ m/s, να υπολογίσετε την ταχύτητά του ως προς τη Γη και τη γωνία που σχηματίζουν οι ταχύτητες u_1, u_2.

38. Βάρκα πλέει σε ποταμό με ταχύτητα $u_1 = 10$ km/h ως προς το νερό και φορά κινήσεως που συμπίπτει με τη φορά κινήσεως του νερού, το οποίο κινείται με ταχύτητα $u_2 = 2$ km/h ως προς τη Γη. Ποια η ταχύτητα της βάρκας ως προς τη Γη και πόσο χρόνο χρειάζεται, προκειμένου να διανύσει απόσταση 24 km;

39. Πλοίο που βρίσκεται μεταξύ Μυκόνου και Ικαρίας πρέπει να παραμείνει σε πορεία ανατολική με ταχύτητα 20 knot. Στην περιοχή επικρατεί ισχυρό θαλάσσιο ρεύμα με ταχύτητα 10 knot και κατεύθυνση νότια. Με ποια ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) πρέπει κινηθεί το πλοίο, ώστε να διατηρήσει την προβλεπόμενη πορεία; Να σχεδιαστεί το σχετικό διάγραμμα ταχυτήτων.

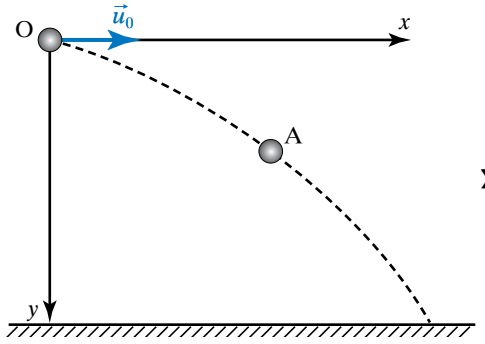
40. Πλοίο ξεκινά από σημείο Α όχθης ποταμού πλάτους 20 m με επιτάχυνση μέτρου $a = 2\ m/s^2$ (σχ. 5). Αν η ταχύτητα του νερού του ποταμού είναι $u_{Π} = 6$ m/s με φορά προς τα δεξιά, να υπολογίσετε:
α) Πόσο χρόνο θα χρειαστεί το πλοίο, προκειμένου να φτάσει στην απέναντι όχθη;
β) Σε πόση απόσταση δεξιά από το σημείο Β της όχθης θα «δέσει»;



Σχ. 5

41. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα u_0, από ύψος h και το σημείο Α (4 m, 5 m) ανήκει στην τροχιά του (σχ. 6).
α) Ποια η αρχική ταχύτητα εκτοξεύσεως u_0;
β) Βρείτε το μέτρο u_A της ταχύτητας του σώματος στο σημείο Α.
γ) Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος, η ταχύτητά του σχηματίζει γωνία 45° με τον ορίζοντα. Από ποιο ύψος h έγινε η εκτόξευση του σώματος; Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

42. Πολεμικό αεροπλάνο που πετάει οριζόντια με ταχύτητα $u_o = 200$ m/s σε σταθερό ύψος $h = 80$ m, αφήνει να πέσει βόμβα και στη συνέχεια πετώντας πάντα στο ίδιο ύψος επιταχύνει με επιτά-



Σχ. 6

χυνση μέτρου $a = 90\ \text{m/s}^2$. Αν ως αρχή μετρήσεως του χρόνου θεωρήσομε τη χρονική στιγμή που αφήνεται η βόμβα, $g = 10\ \text{m/s}^2$ και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα να υπολογίσετε:

α) Πόσο χρόνο χρειάζεται η βόμβα για να φτάσει στο έδαφος.

β) Το βεληνεκές s της βολής.

γ) Πόση οριζόντια απόσταση θα έχει διανύσει το αεροπλάνο μέχρι η βόμβα να φτάσει στο έδαφος.

δ) Με ποια ταχύτητα φτάνει η βόμβα στο έδαφος.

43. Να αποδείξετε ότι δύο πανομοιότυπα βλήματα Α, Β που βάλλονται από το ίδιο σημείο οριζοντίου επιπέδου, με την ίδια ταχύτητα u_0, υπό γωνίες βολής:

α) $\varphi_A = 20^o$ και $\varphi_B = 70^o$ αντίστοιχα, έχουν το ίδιο βεληνεκές.

β) $\varphi_A = 60^o$ και $\varphi_B = 30^o$ αντίστοιχα, ανεβαίνουν σε μέγιστα ύψη που έχουν λόγο $h_A/h_B = 3$.

44. Με ποια γωνία βολής πρέπει να εκτοξευθεί βλήμα από οριζόντιο επίπεδο, ώστε το βεληνεκές του να ισούται με το μέγιστο ύψος ανόδου του;

45. Δύο βλήματα εκτοξεύονται ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο με την ίδια αρχική ταχύτητα $u_0 = 50$ m/s, το ένα κατακόρυφα και το άλλο με γωνία 30^o ως προς τον ορίζοντα. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της μεταξύ τους αποστάσεως σε σχέση με τον χρόνο.

46. Σώμα Α βάλλεται με ταχύτητα u_0 και γωνία βολής φ πάνω από τον ορίζοντα. Την ίδια χρονική στιγμή από ύψος h αφήνομε να πέσει ελεύθερα δεύτερο σώμα. Η οριζόντια απόσταση των δύο σωμάτων είναι d. Να βρεθεί η συνθήκη που απαιτείται, προκειμένου να συναντηθούν. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

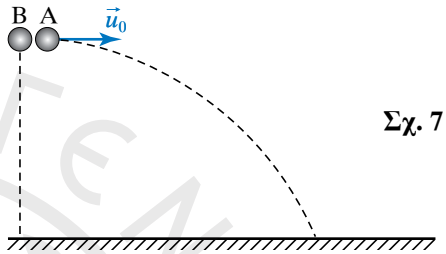
47. Από σημεία Ο, Α που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, το Α d μέτρα δεξιότερα του Ο, εκτοξεύονται ταυτόχρονα δύο βλήματα με ταχύτητες u_0, u_A και γωνίες βολής πάνω από τον ορίζοντα φ_o, φ_A προς τα δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα. Να βρείτε τη συνθήκη για να γίνει η συνάντηση των δύο βλημάτων.

48. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος $h = 100$ m από το έδαφος εκτοξεύεται οριζόντιο σώμα Α με αρχική ταχύτητα $u_0 = 20$ m/s, ενώ ταυτόχρονα αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα να πέσει δεύτερο σώμα Β (σχ. 7).

α) Πού βρίσκονται τα δύο σώματα μετά από 3 s;

β) Σε πόσο χρόνο κάθε σώμα φτάνει στο έδαφος;

γ) Σε ποιο σημείο το Α θα πέσει στο έδαφος και με ποια ταχύτητα; Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.



Σχ. 7

49. Στην πρύμνη πλοίου που προσεγγίζει λιμάνι και από ύψος $h = 5$ m ναύτης εκτοξεύει το βιλάι (σφαιρίδιο δεμένο στο άκρο του σχοινιού) με αρχική οριζόντια ταχύτητα $u_0 = 6$ m/s. Να μελετηθεί η κίνηση του σφαιριδίου μέχρι να φτάσει στο έδαφος και να υπολογίσετε:

α) Τις εξισώσεις που περιγράφουν τη θέση του κάθε χρονική στιγμή.

β) Την εξίσωση της τροχιάς του.

γ) Την εξίσωση της ταχύτητάς του κάθε στιγμή.

δ) Το χρόνο πτώσεώς του. Δίνεται $g = 10$ m/s.

50. Αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 32 m/s σε αυτοκινητόδρομο με όριο ταχύτητας τα 108 km/h. Να εξετάσετε αν το αυτοκίνητο παραβιάζει το όριο ταχύτητας.

51. Πόσο χρόνο χρειάζεται το φως του Ήλιου για να φτάσει στη Γη, όταν κινείται με ταχύτητα $c = 300\,000$ km/s και η απόσταση του Ήλιου από τη Γη είναι $15 \cdot 10^7$ km;

52. Ο χρόνος για να πάνε οι παλμοί του radar σε ακίνητο στόχο και να επιστρέψουν είναι 900 μs. Να υπολογίσετε πόσο απέχει ο στόχος από το radar. Οι παλμοί διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός c = 300 000 km/s.

53. Αυτοκίνητο κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα $u_1 = 10$ m/s για χρονικό διάστημα $t_1 = 5$ s. Τα επόμενα 10 s κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_2 = 20$ m/s. Τα ακόλουθα 15 s της κινήσεώς του κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_3 = 30$ m/s. Να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που διανύει και τη μέση ταχύτητά του.

54. Δίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας κινητού σε σχέση με τον χρόνο (σχ. 8).

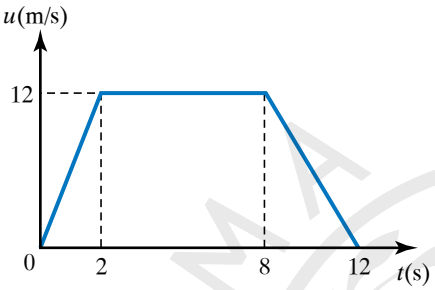
α) Να προσδιορίσετε το είδος της κινήσεως που εκτελεί.

β) Να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που διανύει.

γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση για τα δύο πρώτα δευτερόλεπτα.

δ) Να υπολογίσετε την επιβράδυνση για τα τέσσερα τελευταία δευτερόλεπτα.

ε) Για πόσο χρονικό διάστημα η επιτάχυνσή του είναι μηδέν;



Σχ. 8

55. Απ' το έδαφος εκτοξεύεται κατακόρυφα μικρή πέτρα με αρχική ταχύτητα $u_0 = 20$ m/s. Αν $g = 10\ \text{m/s}^2$ και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, ζητούνται:

α) Ο χρόνος ανόδου και το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η πέτρα.

β) Ποιες χρονικές στιγμές η πέτρα βρίσκεται σε ύψος $h = 4$ m; Ποια η ταχύτητα της πέτρας στο ύψος αυτό;

γ) Ποια χρονική στιγμή και με ποια ταχύτητα η πέτρα επιστρέφει στο έδαφος;

56. Κινητό κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας 10 m με ταχύτητα μέτρου 20 m/s.

α) Ποια η περίοδος και ποια η συχνότητα της κινήσεώς του;

β) Πόσο είναι το μήκος του τόξου που διαγράφει σε 15 s και πόση η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία σε rad και σε μοίρες;

57. Σμυριδοτροχός έχει ακτίνα 20 cm και τα σημεία της περιφέρειάς του κινούνται με γραμμική ταχύτητα μέτρου 15 m/s. Πόσες στροφές εκτελεί σε 1 min;

58. Να υπολογίσετε το μέτρο:

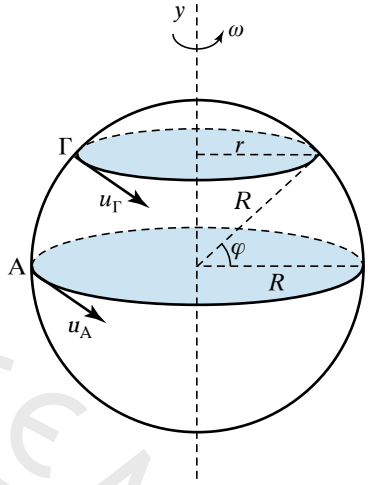
α) Της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της Γης περί τον άξονά της.

β) Της γραμμικής ταχύτητας σημείου που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης:

i. στον Ισημερινό

ii. σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 60^\circ$ (σχ. 9).

Δίνονται $R_{\Gamma\text{H}\Sigma} = 6400$ km και περίοδος κινήσεως της Γης $T = 24$ h.



Σχ. 9

59. Δύο ποδηλάτες Α, Β ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο κυκλικού ποδηλατοδρομίου ακτίνας 200 m με γωνιακές ταχύτητες

$$\omega_A = \frac{1\ \text{rad}}{100\ \text{s}},\quad \omega_B = \frac{3\ \text{rad}}{100\ \text{s}}.$$

Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για πρώτη φορά; Δίνεται $\pi = 3{,}14$.

60. Σε σύστημα δύο οδοντωτών τροχών που βρίσκονται σε επαφή και περιστρέφονται κατά αντίθετη φορά, οι ακτίνες τους έχουν λόγο 3:2. Αν η συχνότητα περιστροφής του μεγάλου τροχού είναι 18 κύκλοι/s, πόση είναι η συχνότητα περιστροφής του μικρού τροχού;

61. Τροχός μηχανής έχει διάμετρο $d = 1$ m και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου 25 rad/s. Να υπολογίσετε:

α) Την περίοδο και τη συχνότητα περιστροφής του τροχού.

β) Την ταχύτητα και την κεντρομόλο επιτάχυνση σημείου της περιφέρειας του τροχού. Δίνεται $\pi = 3{,}14$.

62. Αθλητής των 800 m έχει ατομικό ρεκόρ 80 s, όταν τρέχει σε κυκλικό στίβο ακτίνας 100 m. Αν θεωρήσομε την κίνηση του δρομέα ομαλή, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση:

α) Του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Της γωνίας που έχει διαγράψει σε συνάρτηση με τον χρόνο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Δυναμική

3.1 Δυνάμεις.

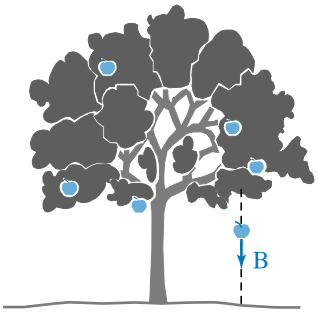
Δύναμη ονομάζεται η αιτία της παραμορφώσεως ή αλλαγής της κινητικής καταστάσεως ενός σώματος.

Οι δυνάμεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1) ***Δυνάμεις εξ επαφής*** που ασκούνται από ένα σώμα σε άλλο εκεί που ακουμπούν, όταν για παράδειγμα σπρώχνομε (σχ. 3.1.1), τραβάμε ή σηκώνομε ένα σώμα. Τέτοιες δυνάμεις είναι η τριβή, η άνωση και η αντίσταση του αέρα.

Σχ. 3.1.1
Δύναμη εξ επαφής.

2) ***Δυνάμεις εξ αποστάσεως***, οι οποίες λέγονται και ***δυνάμεις πεδίου***. Τέτοιες είναι η δύναμη της βαρύτητας (σχ. 3.1.2), οι ηλεκτρικές και οι μαγνητικές δυνάμεις.



Σχ. 3.1.2
Η δύναμη της βαρύτητας είναι δύναμη εξ αποστάσεως.

Η δύναμη είναι διανυσματικό φυσικό μέγεθος, άρα για να την προσδιορίσομε χρειάζεται να γνωρίζομε το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της. Όλα όσα γνωρίζομε ότι ισχύουν για τα διανύσματα (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός), ισχύουν και για τις δυνάμεις.

3.1.1 Μονάδες μετρήσεως της δυνάμεως.

Στο SI μονάδα μετρήσεως της δυνάμεως είναι το ***N (newton, νιούτον)*** που ισούται με τη δύναμη που πρέπει να ασκήσομε σε σώμα μάζας 1 kg, προκειμένου να αποκτήσει επιτάχυνση 1 m/s^2.

Συνισταμένη δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων (συνιστωσών), που ασκούνται στο ίδιο σημείο, ονομάζεται η δύναμη που έχει το ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που προκαλούν οι δύο ή περισσότερες δυνάμεις μαζί. Η συνισταμένη ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών δυνάμεων, $\dot{F}_{ολ} = \dot{F}_1 + \dot{F}_2 + \dot{F}_3 + ... + \dot{F}_ν$.

Για την περίπτωση δύο δυνάμεων έχομε

$$\dot{F}_{ολ} = \dot{F}_1 + \dot{F}_2 \ . \qquad (1)$$

Αν οι δυνάμεις είναι:

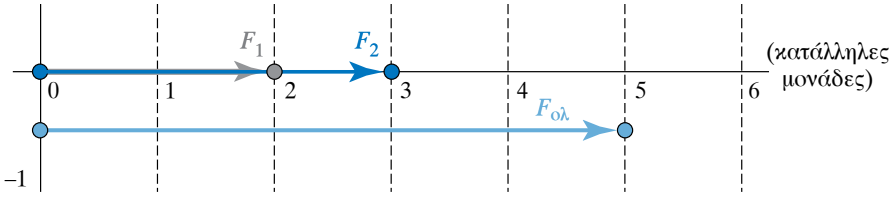
1) ***Ομόρροπες*** ($\dot{F}_1 \nearrow\nearrow \dot{F}_2$), από τη σχέση (1) βρίσκομε

$$F_{ολ} = F_1 + F_2 \text{ (σχ. 3.1.3).}$$

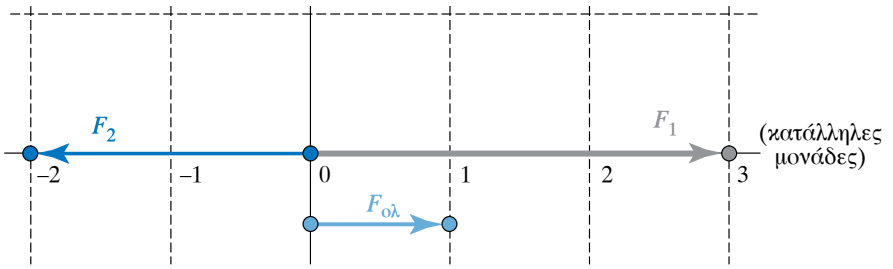
2) ***Αντίρροπες*** ($\dot{F}_1 \nearrow\swarrow \dot{F}_2$), από τη σχέση (1) βρίσκομε

$$F_{ολ} = F_1 - F_2 \text{ (σχ. 3.1.4).}$$

3) ***Κάθετες*** μεταξύ τους ($\dot{F}_1 \perp \dot{F}_2$), από τη σχέ-

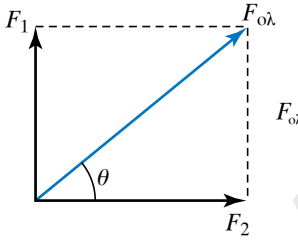


Σχ. 3.1.3
Πρόσθεση ομορρόπων δυνάμεων.



Σχ. 3.1.4
Πρόσθεση αντιρρόπων δυνάμεων.

ση (1) καταλήγομε στη σχέση $F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2$ (σχ. 3.1.5).



Διανύσματα κάθετα

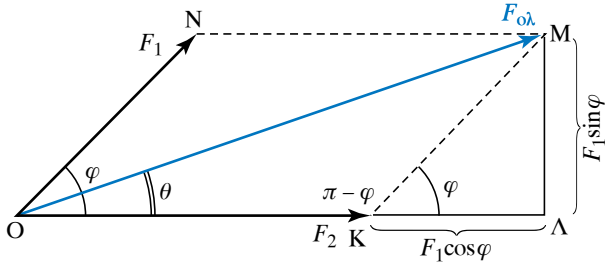
$$F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \qquad \tan\theta = \frac{F_1}{F_2}$$

Σχ. 3.1.5
Πρόσθεση δυνάμεων καθέτων μεταξύ τους.

4) ***Σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία*** φ. Η σχέση (1) οδηγεί στη σχέση $F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sin\varphi}$ (σχ. 3.1.6). Η γωνία θ δίνεται από τη σχέση:

$$\tan\theta = \frac{F_1\sin\theta}{F_2 + F_1\cos\theta}$$

Στην περίπτωση που ασκούνται ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο πολλές συγγραμμικές δυνάμεις, επιλέγομε αυθαίρετα μία θετική φορά, προσθέτομε τα μέτρα των δυνάμεων που έχουν θετική φορά και στη συνέχεια τα μέτρα των δυνάμεων που έχουν αρνητική φορά. Ακολούθως αφαιρούμε απ' το πρώτο



Διανύσματα σε τυχαία γωνία φ

$$F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sin\varphi} \qquad \tan\theta = \frac{F_1\sin\varphi}{F_2 + F_1\cos\varphi}$$

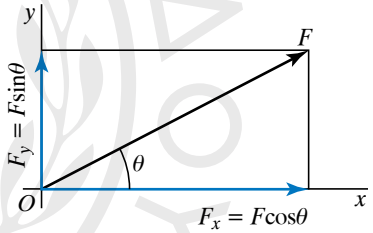
Σχ. 3.1.6
Πρόσθεση δυνάμεων που σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους.

άθροισμα το δεύτερο και αν το αποτέλεσμα είναι θετικό, η συνισταμένη έχει θετική φορά, ενώ αν είναι αρνητικό, η συνισταμένη έχει αρνητική φορά.

3.1.2 Ανάλυση δυνάμεως σε συνιστώσες.

Αν μία δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x (σχ. 3.1.7) από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχομε για την ανάλυση της δυνάμεως σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες στους κάθετους άξονες x, y, $F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$.

Η ανάλυση της δυνάμεως μπορεί να γίνει με συνιστώσες και σε πλαγιογώνιους άξονες.



Σχ. 3.1.7
Ανάλυση δυνάμεως σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους.

3.2 Οι νόμοι του Νεύτωνα.

3.2.1 Ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα ή το Αξίωμα της Αδράνειας.

Ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα διατυπώνεται ως εξής: ***Αν η δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα ηρεμεί ή κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα (εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση).***

Δηλαδή αν $\vec{F} = \vec{0}$ συνεπάγεται ότι:

το σώμα { ακινητεί (ηρεμεί) ή εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Άρα, αν δύναμη που ασκείται σε σώμα πάψει ξαφνικά να ασκείται, αυτό θα εξακολουθήσει να κι-

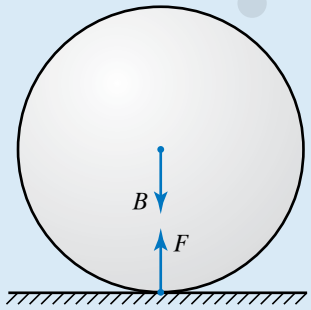
νείται ευθύγραμμα με σταθερή διανυσματική ταχύτητα, την οποία είχε όταν έπαψε να επενεργεί πάνω του η δύναμη. Δηλαδή, το σώμα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Αντιστρέφοντας τον συλλογισμό του αξιώματος έχομε ότι, αν η (διανυσματική) ταχύτητα υλικού σημείου διατηρείται σταθερή, είτε δεν επιδρά πάνω του καμμία δύναμη, είτε, αν επιδρούν δυνάμεις, η συνισταμένη τους είναι μηδέν.

Παρατηρούμε ότι στον Πρώτο Νόμο δεν γίνεται διάκριση μεταξύ σώματος σε ηρεμία και σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα. Επίσης, σύμφωνα με τον Πρώτο Νόμο, δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην περίπτωση που δεν υπάρχουν δυνάμεις και στην περίπτωση που υπάρχουν, αλλά έχουν συνισταμένη μηδέν. Δηλαδή, αν η κινητήρια δύναμη αυτοκινήτου έχει το ίδιο μέτρο με τις πάσης φύσεως τριβές και αντιστάσεις, που συναντά κατά την κίνησή του, αυτό θα κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα.

Το ότι ένα σώμα ακινητεί ή εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, όταν δεν υπάρχουν δυνάμεις ή υπάρχουν, αλλά έχουν μηδενική συνισταμένη, αναφέρεται και ως ιδιότητα της ύλης που ονομάζεται ***αδράνεια*** και τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει, ονομάζονται ***αδρανειακά συστήματα***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σώμα βάρους B = 100 N ακινητεί σε οριζόντιο επίπεδο (σχ. 3.2.1). Να υπολογίσετε την δύναμη $\vec{F}$, που δέχεται από το έδαφος.



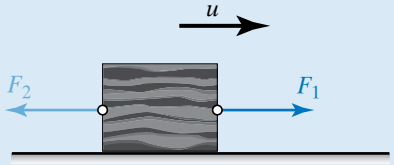
Σχ. 3.2.1

Λύση

Αφού το σώμα ακινητεί, από τον Πρώτο Νόμο του Νεύτωνα έπεται ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδέν. Τα $\vec{B}$ και $\vec{F}$ είναι αντίθετες δυνάμεις και ισχύει:

$$F = B = 100 \text{ N}.$$

2. Σώμα κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (σχ. 3.2.2). Αν $F_1 = 5$ N, να υπολογίσετε τη δύναμη F_2.



Σχ. 3.2.2

Λύση

Σύμφωνα με τον Πρώτο Νόμο του Νεύτωνα, αφού το σώμα κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα, η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι ίση με μηδέν. Προφανώς, οι δυνάμεις είναι αντίρροπες και ισχύει ότι: $F_{ολ} = F_1 - F_2 = 0$ άρα $F_1 = F_2 = 5$ N.

3.2.2 Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα ή ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής.

Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα διατυπώνεται εξής:

Αν σε σώμα μάζας m ασκηθεί (ολική) δύναμη $\vec{F}$, η επιτάχυνση $\vec{a}$ που αποκτά είναι ανάλογη της δυνάμεως. Η δύναμη και η επιτάχυνση είναι συγγραμικές.

Διάφορα σώματα, στα οποία ασκείται η ίδια δύναμη αποκτούν διαφορετικές επιταχύνσεις. Αυτό εξαρτάται από τη μάζα m του κάθε σώματος.

Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα ή Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής, έχει την ακόλουθη μαθηματική διατύπωση:

$$\dot{F} = m\dot{a} \quad \text{και} \quad F = ma.$$

– Διερεύνηση της σχέσεως $\dot{F} = m\dot{a}$.

Παρακάτω θα προσπαθήσομε να εξαγάγομε ορισμένα συμπεράσματα διερευνώντας τη σχέση $\dot{F} = m\dot{a}$.

Όταν ένα σώμα κινείται με επιτάχυνση, του ασκείται δύναμη που του προκάλεσε την επιτάχυνση αυτή. Όταν κινείται με σταθερή επιτάχυνση, του ασκείται σταθερή δύναμη.

Όταν σε σώμα ασκείται σταθερή δύναμη, αυτό

αποκτά σταθερή επιτάχυνση. Πράγματι, από $\vec{F} = m\vec{a}$, όταν $\vec{F}$ = σταθερή, έχομε $m\vec{a}$ = σταθερό. Επειδή η μάζα του σώματος είναι μία σταθερά, έπεται ότι $\vec{a}$ = σταθερή.

Αν η δύναμη έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα, τότε και η επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα, άρα η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. Αν η δύναμη έχει αντίθετη φορά απ' αυτήν της ταχύτητας, η κίνηση του σώματος είναι επιβραδυνόμενη.

Αν σε σώμα ασκείται μόνο το βάρος του $\vec{B}$, δηλαδή το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, η επιτάχυνση του $\vec{a}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\vec{a} = \vec{g}$.

Αν σε ένα σώμα ασκηθεί μεταβλητή δύναμη, αυτό θα αποκτήσει μεταβλητή επιτάχυνση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σε σώμα μάζας $m = 3\,\text{kg}$, που αρχικά ακινητεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου $F = 30\ \text{N}$. Να υπολογίσετε:

α) Την επιτάχυνση που αποκτά το σώμα.

β) Την ταχύτητα που έχει και τη μετατόπισή του μετά από χρόνο 5 s.

Λύση

Το βάρος του σώματος αλληλοεξουδετερώνεται με την αντίδραση του εδάφους.

α) Η επιτάχυνση που αποκτά δίνεται από τη σχέση $F = m\,a$ άρα $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{30}{3}\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

β) Η ταχύτητα δίνεται απ' τον τύπο

$$u = a\,t = 10 \cdot 5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η μετατόπισή του δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\,t^2 = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 5^2\,\text{m} = 125\ \text{m}.$$

2. Σε σώμα μάζας $m = 3\,\text{kg}$ που κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 8\,\text{m/s}$ ασκείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\,\text{s}$ δύναμη σταθερού μέτρου F, που έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας και σε χρόνο 4 s η ταχύτητα του σώματος διπλασιάζεται.

Να υπολογίσετε τη φορά της F, το μέτρο της F και την απόσταση που έχει διανύσει το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 4\,\text{s}$.

Λύση

Αφού η ταχύτητα του σώματος αυξάνεται, η δύναμη είναι ομόρροπη με την ταχύτητα. Η κίνηση που εκτελεί το σώμα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα, άρα ισχύει:

$$u = u_0 + a\,t \text{ επομένως}$$

$$a = \frac{u - u_0}{t} = \frac{16 - 8}{4}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα προκύπτει το μέτρο της δυνάμεως $F = m\,a = 3 \cdot 2\,\text{N} = 6\,\text{N}$. Η μετατόπιση του σώματος είναι:

$$\Delta x = u_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 = (8 \cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 4^2)\ \text{m} = 48\ \text{m}.$$

3.2.3 Ο Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα ή το Αξίωμα Δράσεως-Αντιδράσεως.

Στην καθημερινή μας ζωή έχομε παρατηρήσει πως όταν ασκούμε δύναμη σ' ένα σώμα, ταυτόχρονα ασκεί κι αυτό μία δύναμη σε εμάς. Αν ασκήσομε μία δύναμη με το χέρι μας στο θρανίο, ασκεί κι αυτό δύναμη ίδιου μέτρου σε εμάς. Τόσο η μία, όσο και η άλλη δύναμη μπορεί να θεωρηθούν ως «δράση» η μία και ως «αντίδραση» η άλλη. Μία δύναμη μόνη της είναι η μία πλευρά της αλληλεπιδράσεως μεταξύ δύο σωμάτων. Για τις συνήθεις αλληλεπιδράσεις που απαντούν σε πλήθος φαινόμενα που εξετάζει η Μηχανική, ισχύει αυτό που προβλέπει ο Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής:

«Αν το σώμα Α ασκεί στο σώμα Β δύναμη $\vec{F}_1$***, τότε και το Β ασκεί στο Α δύναμη*** $\vec{F}_2$ ***, που έχει την ίδια διεύθυνση και μέτρο, αλλά αντίθετη φορά με την*** $\vec{F}_1, F_2 = -\vec{F}_1$***».***

Ο Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα:

1) Ισχύει είτε τα δύο σώματα ασκούν δυνάμεις επαφής, είτε όχι. Δηλαδή ισχύει για όλα τα είδη των δυνάμεων.

2) Αναφέρεται σε αλληλεπίδραση σωμάτων, δηλαδή δεν έχει νόημα για ένα μόνο σώμα.

Σύμφωνα με τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα, οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντοτε κατά ζεύγη, άρα αν ασκήσομε μία δύναμη σ' ένα σώμα την ίδια στιγμή και αυτό ασκεί σε εμάς την αντίθετη δύναμη. Η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε δύο διαφορετικά υλικά σημεία.

3.3 Αδρανειακά και μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Γνωρίζομε γενικότερα ότι η κίνηση είναι σχετική και εξαρτάται απ' το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο περιγράφεται. Τίθεται το ερώτημα, εφόσον ο Πρώτος και ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα αναφέρονται σε κίνηση, ως προς ποιο σύστημα αναφοράς ισχύουν;

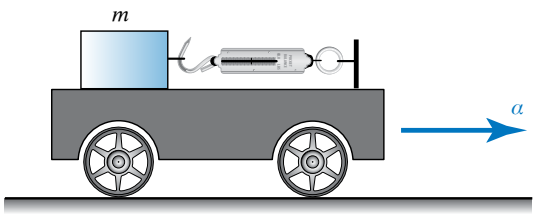
Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, που έχει προκύψει από την εμπειρία πολλών αιώνων, είναι ότι υπάρχουν ορισμένα συστήματα αναφοράς που ονομάζονται ***αδρανειακά*** ή συστήματα του Γαλιλαίου, ως προς τα οποία ισχύει ο Πρώτος και ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα.

Αν διαπιστώσομε ότι ένα σύστημα είναι αδρανειακό, τότε και οποιοδήποτε σύστημα που κινείται παράλληλα προς το πρώτο (μεταφορική κίνηση) με σταθερή διανυσματική ταχύτητα είναι επίσης αδρανειακό.

Αυτό σημαίνει ότι αν ένα υλικό σημείο ελεύθερο δυνάμεων παρατηρείται από το πρώτο αδρανειακό σύστημα, θα έχει ως προς αυτό σταθερή διανυσματική ταχύτητα, η οποία μπορεί να είναι και μηδέν. Το ίδιο υλικό σημείο, παρατηρούμενο από ένα άλλο αδρανειακό σύστημα, θα έχει πάλι σταθερή διανυσματική ταχύτητα, όμως διαφορετική από την προηγούμενη. Για τις επιταχύνσεις μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι ίδιες. Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα ισχύει για όλα τα αδρανειακά συστήματα και οι επιταχύνσεις είναι ίδιες. Αν ένα σύστημα επιταχύνεται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, τότε δεν ισχύουν οι δύο πρώτοι νόμοι του Νεύτωνα γι' αυτό.

Συνήθως θεωρούμε ως βασικό αδρανειακό ένα σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με πολύ μακρινούς αστέρες. Πολλές φορές θεωρούμε ότι η Γη είναι κατά προσέγγιση αδρανειακό σύστημα, παρόλο που γνωρίζομε ότι κινείται με επιτάχυνση ως προς το σύστημα των μακρινών αστέρων.

Απλή είναι η περίπτωση περιγραφής της καταστάσεως ως προς μη αδρανειακό σύστημα, το οποίο επιταχύνεται εκτελώντας μεταφορική κίνηση ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα. Ας θεωρήσομε το σχήμα 3.3.1, όπου έχομε το επιταχυνόμενο σύστημα, καρότσι, με (σταθερή) επιτάχυνση a προς μία διεύθυνση ως προς το ακίνητο αδρανειακό σύστημα που είναι το έδαφος, Γη. Το σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο δυναμόμετρου (κανταράκι με ελατήριο), ενώ το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο στο καρότσι. Εφόσον το σώμα επιταχύνεται ως προς το έδαφος (αδρανειακό σύστημα), πάνω του ασκείται δύναμη $F = ma$, σύμφωνα με όσα γνωρίζομε για αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αυτό θα πει ένας παρατηρητής που στέκεται στο έδαφος, οπότε είναι αδρανειακός παρατηρητής.



Σχ. 3.3.1
Επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς με μεταφορική κίνηση.

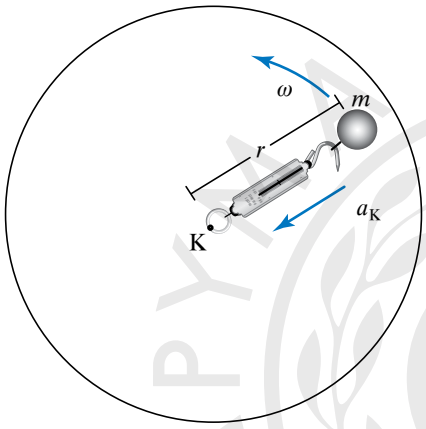
Ας εξετάσομε αυτό το γεγονός από το επιταχυνόμενο μη αδρανειακό σύστημα του καροτσιού. Ως προς αυτό το σύστημα, το σώμα μάζας m είναι ακίνητο, άρα δεν έχει επιτάχυνση. Φανταζόμαστε και πάλι ότι πάνω στο καρότσι στέκεται ένας άλλος, μη αδρανειακός παρατηρητής. Ο παρατηρητής αυτός βλέπει ότι το δυναμόμετρο δείχνει την παραπάνω δύναμη, ενώ δεν υπάρχει (σχετική) επιτάχυνση. Επειδή θέλει να διατηρήσει τη μορφή του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα, λέει ότι πάνω στο σώμα ασκείται η δύναμη του δυναμόμετρου και μια άλλη δύναμη, ίση με $-ma$. Αυτές οι δύο δυνάμεις ισορροπούν, δηλαδή $F+(-ma)=0$ και γι' αυτό το σώμα δεν επιταχύνεται ως προς το καρότσι. Αυτή η δύναμη δεν ασκείται από κανένα άλλο σώμα, όπως θα συνέβαινε για πραγματική δύναμη, αλλά είναι αποτέλεσμα της κινητικής καταστάσεως του συστήματος αναφοράς. Λέγεται ***δύναμη αδράνειας*** ή ***δύναμη του D' Alembert***.

Γενικώς, αν θέλομε να περιγράψομε την κίνηση ως προς μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς που εκτελεί μεταφορική κίνηση ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα, αρκεί να θεωρήσομε ότι εκτός από τις πραγματικές δυνάμεις που ασκούνται, ασκούνται επί πλέον και (ψευδοδυνάμεις) αδρανειακές δυνάμεις της μορφής $-m\vec{a}$.

Αυτή τη δύναμη «αισθάνεται» ο επιβάτης αυτοκινήτου, όταν ο οδηγός πατήσει απότομα το φρένο. Ο επιβάτης «πάει» προς τα εμπρός.

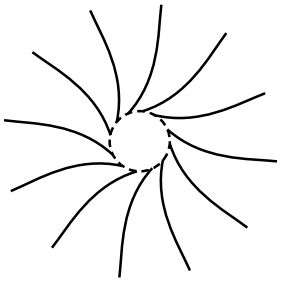
Έστω ότι το μη αδρανειακό σύστημα περιστρέφεται με σταθερή διανυσματική γωνιακή ταχύτητα

(σχ. 3.3.2). Σ' αυτήν την περίπτωση μπορεί κάποιος να διαπιστώσει με ανάλογο συλλογισμό όπως προηγουμένως, ότι αν το σώμα συμπαρασύρεται με το μη αδρανειακό σύστημα και δεν έχει (σχετική) ταχύτητα ως προς αυτό, για την περιγραφή της κινήσεως από το στρεφόμενο με το σύστημα μη αδρανειακό παρατηρητή χρειάζεται να εισαχθεί αδρανειακή δύναμη, που ονομάζεται ***φυγόκεντρος δύναμη***. Αυτή έχει κατεύθυνση ακτινική προς τα έξω από το κέντρο περιστροφής και μέτρο $m\omega^2 r$. Το r είναι η απόσταση της μάζας m απ' το κέντρο περιστροφής. Αυτή τη δύναμη «αισθάνεται» επιβάτης αυτοκινήτου που εκτελεί απότομη στροφή.



Σχ. 3.3.2
Περιστρεφόμενο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Όταν το υλικό σημείο μάζας m έχει και σχετική ταχύτητα $\vec{v}_\sigma$ ως προς το στρεφόμενο σύστημα, τότε υπεισέρχεται και άλλη ψευδοδύναμη, η ***δύναμη του φαινομένου του Coriolis,*** η οποία συνηθιζόταν να λέγεται ***δύναμη coriolis***. Αυτή ισούται με $2m(\vec{v}_\sigma \cdot \vec{\omega})$. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ερμηνεία της κινήσεως των κυκλώνων που στο βόρειο ημισφαίριο είναι όπως στο σχήμα 3.3.3. Στο



Σχ. 3.3.3
Κυκλώνας στο βόρειο ημισφαίριο.

νότιο οι ταχύτητες οδηγούν σε κίνηση κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

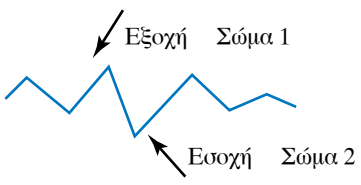
3.4 Τριβή.

Ναύτης προσπαθεί, χωρίς να τα καταφέρει, να μετακινήσει ξύλινο κιβώτιο, που βρίσκεται στο κατάστρωμα πλοίου, ασκώντας σ' αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη F. Σύμφωνα με τον Πρώτο Νόμο του Νεύτωνα, ένα σώμα ακινητεί, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδέν. Αν στο ξύλινο κιβώτιο ασκούνταν μόνο η δύναμη F, έπρεπε να κινηθεί και να αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση. Αφού παραμένει ακίνητο, σημαίνει ότι εκτός απ' την F, ασκείται πάνω του και άλλη δύναμη, αντίθετη της F. Η δύναμη αυτή ονομάζεται ***στατική τριβή*** και ασκείται από το κατάστρωμα του πλοίου. Δηλαδή, εκτός από κάθετη δύναμη που μπορεί να ασκεί στην κοινή επιφάνεια επαφής ένα σώμα που είναι σε επαφή με άλλο, μπορεί να του ασκεί και δύναμη παράλληλη στην επιφάνεια επαφής, η οποία εμποδίζει την κίνηση. Αυτή είναι η ***δύναμη τριβής***.

Αν δεύτερος ναύτης προστρέχει σε βοήθεια του πρώτου, ασκώντας μία επί πλέον δύναμη F' ίδιας φοράς με την προηγούμενη που συνεχώς αυξάνεται, τότε κάποια χρονική στιγμή το ξύλινο κιβώτιο θα είναι έτοιμο να κινηθεί. Η δύναμη τριβής τότε ονομάζεται ***οριακή στατική τριβή***.

Όταν το κιβώτιο αποκτήσει κάποια ταχύτητα, για να διατηρηθεί η ταχύτητα σταθερή, χρειάζεται οι ναύτες να ασκούν λίγο μικρότερη δύναμη από την οριακή στατική τριβή. Η δύναμη που ασκείται από την επιφάνεια επαφής στο κιβώτιο και αντιδρά στην κίνησή του όταν αυτό ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια, ονομάζεται ***τριβή ολισθήσεως*** ή ***κινητική τριβή*** και η τιμή της είναι λίγο μικρότερη από την τιμή της οριακής τριβής.

Οι δυνάμεις τριβής είναι οι δυνάμεις που ενεργούν στη διαχωριστική επιφάνεια δύο σωμάτων όταν το ένα κινείται ή τείνει να κινηθεί σε σχέση με το άλλο και έχουν τέτοια κατεύθυνση, ώστε πάντα να αντιστέκονται στη σχετική μεταξύ τους κίνηση. Η ύπαρξη των δυνάμεων της τριβής οφείλεται στο γεγονός ότι καμμία επιφάνεια στη φύση δεν είναι εντελώς λεία (σχ. 3.4.1). Αν μπορούσαμε, χρησιμοποιώ-



Σχ. 3.4.1
Μεγέθυνση διαχωριστικής επιφάνειας δύο σωμάτων.

ντας ισχυρό μικροσκόπιο, να δούμε τη μορφή δύο επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή, που με γυμνό οφθαλμό τις θεωρούμε λείες, θα βλέπαμε ότι παρουσιάζουν εσοχές και εξοχές, οι οποίες δυσκολεύουν την κίνησή τους. Δηλαδή, η πραγματική επιφάνεια επαφής δύο επιφανειών είναι πολύ μικρότερη εκείνης που εφάπτονται φαινομενικά.

Η τριβή παίζει σημαντικό ρόλο στην καθημερινή μας ζωή. Χωρίς αυτήν δεν θα μπορούσαμε να περπατήσομε, διότι θα γλιστρούσαν τα πόδια μας προς τα πίσω όπως όταν δοκιμάσομε να περπατήσομε πάνω σε πάγο, ούτε να στερεώσομε ένα καρφί στον τοίχο, ούτε να κρατήσομε διάφορα αντικείμενα στα χέρια μας, ούτε τα αυτοκίνητα θα μπορούσαν να κινηθούν.

Τριβές που εμφανίζονται μεταξύ των κινουμένων μερών μηχανής είναι ανεπιθύμητες και, προκειμένου να τις μειώσομε, χρησιμοποιούμε λάδια και λιπαντικά όπως στη μηχανή του αυτοκινήτου.

Για τη στατική τριβή T_σ ισχύει ότι είναι μικρότερη ή ίση με την οριακή (μέγιστη) τιμή της $T_\sigma \le \mu_\sigma N$. Το φυσικό μέγεθος μ_σ λέγεται ***συντελεστής στατικής τριβής*** και είναι καθαρός αριθμός. N είναι η κάθετη δύναμη μεταξύ των δύο σωμάτων στην επιφάνεια κοινής επαφής.

Η ***στατική τριβή*** είναι δύναμη μεταβλητού μέτρου και οι τιμές της κυμαίνονται όπως δείχνει η σχέση $0 \le T_\sigma \le \mu_\sigma \cdot N$, έχει δε:

1) ***Διεύθυνση***, ίδια με της δυνάμεως F, που τείνει να κάνει τις δύο επιφάνειες να κινηθούν η μια σχετικά με την άλλη.

2) ***Φορά***, αντίθετη της δυνάμεως F και ο μ_σ, ο συντελεστής στατικής τριβής, εξαρτάται απ' τη φύση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή.

Η ***τριβή ολισθήσεως*** T_κ ή κινητική τριβή, που ονομάζεται η ασκούμενη δύναμη μεταξύ δύο επιφανειών, όταν μεταξύ τους υπάρχει ολίσθηση, δηλαδή σχετική ταχύτητα, έχει:

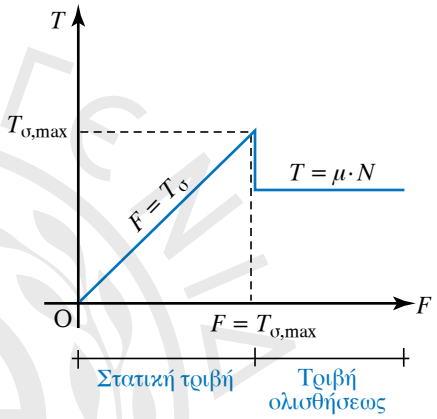
1) ***Διεύθυνση*** παράλληλη στην κοινή επιφάνεια επαφής και ίδια μ' αυτήν της σχετικής ταχύτητας του σώματος, στο οποίο ασκείται, ως προς το άλλο, με το οποίο εφάπτεται και ασκεί την τριβή.

2) ***Φορά***, αντίθετη απ' αυτήν της σχετικής ταχύτητας.

Το ***σημείο εφαρμογής*** της τριβής ολισθήσεως είναι πάνω στην κοινή επιφάνεια των δύο σωμάτων.

Το ***μέτρο*** της τριβής ολισθήσεως δίνεται απ' τον τύπο $T_\kappa = \mu_\kappa N$, όπου N η κάθετη δύναμη που ασκείται μεταξύ των δύο επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή και μ_κ ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως ή κινητικής τριβής, ο οποίος είναι καθαρός αριθμός, (δεν έχει μονάδες μετρήσεως) και η τιμή του εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι λίγο μεγαλύτερος από τον συντελεστή τριβής ολισθήσεως (σχ. 3.4.2). Συνήθως, θεωρούνται ίσοι κατά προσέγγιση, γι' αυτό στον πίνακα 3.4 αναγράφονται απλώς ως συντελεστές τριβής.

Κατά προσέγγιση, μπορούμε να θεωρούμε ότι οι συντελεστές τριβής είναι σταθεροί και ανεξάρτητοι από την κάθετη δύναμη ή την ταχύτητα και από το εμβαδόν επαφής.



Σχ. 3.4.2
Διάγραμμα μεταβολής της τριβής σε σχέση με την ασκούμενη δύναμη F.

Πίνακας 3.4
Συντελεστές τριβής.

Υλικό	***Συντελεστής τριβής***
Χάλυβας πάνω σε πάγο	0,01
Χάλυβας πάνω σε χάλυβα	0,1
Λάστιχο πάνω σε ξηρό οδόστρωμα	0,7
Λάστιχο πάνω σε υγρό οδόστρωμα	0,4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

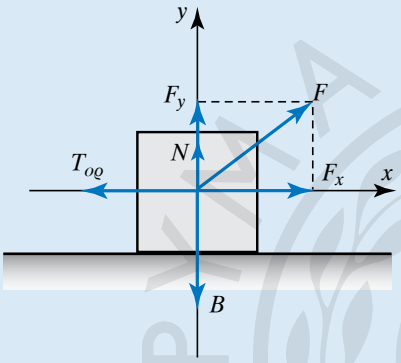
1. Σώμα ακινητεί σε οριζόντιο επίπεδο. Όταν πάνω του ασκείται δύναμη $F = 30\sqrt{3}$N, που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία 30^o με το οριζόντιο επίπεδο, τότε το σώμα μόλις αρχίζει να ολισθαίνει. Αν το βάρος του είναι $B = 25\sqrt{3}$N,

να υπολογίσετε την οριακή τριβή και τον συντελεστή στατικής τριβής.

Λύση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και τις αναλύουμε με τη βοήθεια καρτεσιανού συστήματος αξόνων (σχ. 3.4.3). Τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει, η στατική τριβή παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της, που είναι η οριακή τριβή. Άρα τότε έχουμε:

$$T_{o\rho} = F_x = F\cos 30^o = 30\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{N} = 45\,\text{N}.$$



Σχ. 3.4.3

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα προκύπτει ότι $B = F_y + N$, άρα $25\sqrt{3}\,\text{N} = 15\sqrt{3}\,\text{N} + N$ και συνεπώς $N = 10\sqrt{3}\,\text{N}$.

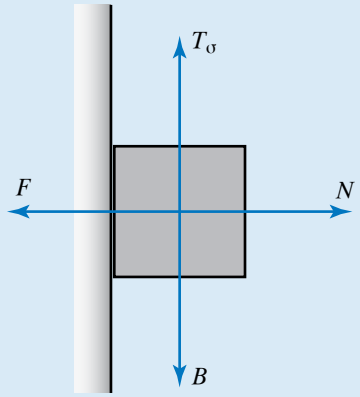
Ισχύει ότι:

$$\mu_\sigma = \frac{T_{o\rho}}{N} = \frac{45}{10\sqrt{3}} = \frac{45\sqrt{3}}{10\cdot 3} = \frac{15\sqrt{3}}{10} = 1{,}5\sqrt{3} = 2{,}60.$$

2. Να υπολογίσετε την ελάχιστη οριζόντια δύναμη F, η οποία ασκείται στο σώμα μάζας $m = 2$ kg του σχήματος 3.4.4, προκειμένου αυτό να συγκρατηθεί στον κατακόρυφο μη λείο τοίχο και να μην πέσει στο πάτωμα. Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$ και συντελεστής στατικής τριβής τοίχου-σώματος $\mu_\sigma = 0{,}1$.

Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που ακινητεί ευρισκόμενο σε επαφή με τον τοίχο είναι: Το βάρος του $B = m\,g = 2\cdot 10\,\text{N} = 20\,\text{N}$, η στατική τριβή T_σ, η οριζόντια δύναμη F που



Σχ. 3.4.4

του ασκούμε και η κάθετη δύναμη από τον τοίχο N.

Αφού το σώμα ισορροπεί, έχουμε:

Στον οριζόντιο άξονα $F - N = 0$ άρα $F = N$.

Στον κατακόρυφο άξονα $B - T_\sigma = 0$ άρα $B = T_\sigma = 20$ N.

Επειδή $T_\sigma = \mu_\sigma N$, ισχύει:

$$N = \frac{T_\sigma}{\mu_\sigma} = \frac{20}{0{,}1}\,\text{N} = 200\,\text{N},\ \text{άρα και}\ F = 200\,\text{N}.$$

3.5 Ορμή. Αρχή διατηρήσεως της ορμής. Κέντρο μάζας. Κίνηση κέντρου μάζας.

3.5.1 Ορμή υλικού σημείου.

Για κινούμενο υλικό σημείο, ***ορμή*** $\vec{p}$ σε κάθε χρονική στιγμή της κινήσεώς του ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της μάζας m επί την ταχύτητά του $\vec{u}$. Δηλαδή $\vec{p} = m\vec{u}$ και $p = mu$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το διάνυσμα της ορμής έχει ως σημείο εφαρμογής το υλικό σημείο, ως φορέα το φορέα της ταχύτητας $\vec{u}$ του υλικού σημείου, ως φορά τη φορά της ταχύτητας $\vec{u}$ και ως μέτρο το γινόμενο του μέτρου της μάζας του υλικού σημείου επί το μέτρο της ταχύτητάς του.

Ο τύπος $\vec{p} = m\vec{u}$ ισχύει όταν η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι κατά πολύ μικρότερη της ταχύτητας c του φωτός στο κενό. Η ορμή ως διανυσματικό μέγεθος έχει όλες τις ιδιότητες των διανυσμάτων. Έτσι, μπορεί να αναλυθεί σε άξονες και μεταβάλλεται εάν μεταβληθεί τουλάχιστον ένα απ' τα στοιχεία της, δηλαδή το μέτρο ή η κατεύθυνσή

της. Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας η σχέση για την ορμή είναι διαφορετική και ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα ισχύει στην πιο γενική μορφή του (που περιλαμβάνει την προηγούμενη ως ειδική περίπτωση για μικρές ταχύτητες) δηλαδή:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

3.5.2 Κέντρο μάζας.

Το ***κέντρο μάζας*** (κ.μ.) συστήματος υλικών σημείων ορίζεται ως το σημείο, του οποίου η θέση στον χώρο (το διάνυσμα θέσεως), $\vec{r}_{\kappa\mu}$, καθορίζεται απ' τη σχέση:

$$\vec{r}_{\kappa\mu} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m},$$

όπου $\vec{r}_i$ είναι το διάνυσμα θέσεως του σωματίου (υλικού σημείου) μάζας m_i και $m = \sum m_i$ το άθροισμα των μαζών των υλικών σημείων του συστήματος, δηλαδή η ολική μάζα. Για καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η ανωτέρω διανυσματική σχέση γράφεται:

$$x_{\kappa\mu} = \frac{\sum m_i x_i}{m},\ y_{\kappa\mu} = \frac{\sum m_i y_i}{m},\ z_{\kappa\mu} = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

όπου $x_{\kappa\mu}, y_{\kappa\mu}, z_{\kappa\mu}$ οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου μάζας και x_i, y_i, z_i οι καρτεσιανές συντεταγμένες του υλικού σημείου μάζας m_i.

3.5.3 Ορμή συστήματος υλικών σημείων.

Για ένα σύνολο από ν υλικά σημεία με μάζες m_1, m_2, ... m_ν και αντίστοιχες ταχύτητες $\dot{u}_1, \dot{u}_2$, ... $\dot{u}_\nu$ η (ολική) ορμή $\vec{p}$ του συστήματος είναι, το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των υλικών σημείων, δηλαδή έχομε $\vec{p}_{\mathrm{ολ}} = m_1\dot{u}_1 + m_2\dot{u}_2 + \ldots$. Απ' τον ορισμό του κέντρου μάζας έχομε:

$$m\dot{\vec{r}}_{\kappa\mu} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Παραγωγίζομε ως προς τον χρόνο και βρίσκομε:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\kappa\mu}}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \vec{u}_i = \vec{p}_{\mathrm{ολ}},$$

$$\text{όμως}\quad m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\kappa\mu}}{\mathrm{d}t} = \vec{p}_{\kappa\mu},$$

είναι η ορμή του κέντρου μάζας αν όλη η μάζα του συστήματος ήταν συγκεντρωμένη σ' αυτό το σημείο και κινούνταν με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, δηλαδή έχομε $\vec{p}_{\kappa\mu} = \vec{p}_{\mathrm{ολ}}$.

3.5.4 Θεώρημα διατηρήσεως της ορμής συστήματος υλικών σημείων.

Είναι ευνόητο ότι αν σε ένα υλικό σημείο δεν ασκείται δύναμη (ή η συνισταμένη των ασκουμένων δυνάμεων είναι μηδέν), τότε η διανυσματική ταχύτητα του υλικού σημείου θα είναι σταθερή με τον χρόνο, δηλαδή θα διατηρείται με τον χρόνο. Αυτό δείχνει ότι και η ορμή του θα διατηρείται.

Ας υποθέσομε λοιπόν ότι έχομε σύστημα υλικών σημείων, που οι μεταξύ τους δυνάμεις αλληλεπιδράσεως (εσωτερικές δυνάμεις) είναι ανά δύο ίσες και αντίθετες. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει ο Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα για όλα αυτά τα ζεύγη των εσωτερικών δυνάμεων. Επίσης, ας υποθέσομε ότι δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις πάνω στα υλικά σημεία του συστήματος από εξωτερικά αίτια τότε κάθε χρονική στιγμή η ορμή του συστήματος είναι σταθερή. Έχομε δηλαδή διατήρηση της ορμής του συστήματος. Ένα σύστημα, στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις λέμε ότι είναι ***απομονωμένο σύστημα***.

Επειδή η ολική ορμή του συστήματος ισούται με την ορμή που θα είχε υλικό σημείο με μάζα ίση με τη συνολική μάζα και ταχύτητα την ταχύτητα του κ.μ., $\vec{p}_{\mathrm{ολ}} = m\vec{u}_{\kappa\mu}$, και εφόσον η ορμή διατηρείται, θα διατηρείται και η ταχύτητα του κ.μ..

Προσοχή! Πολλές φορές διατηρείται η ορμή του συστήματος, χωρίς να διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος.

3.5.5 Κίνηση κέντρου μάζας συστήματος υλικών σημείων.

Έστω σύστημα υλικών σημείων με μάζες m_1, m_2,... και με διανύσματα θέσεως $\vec{r}_1, \vec{r}_2$,.... Αν m είναι η ολική μάζα του συστήματος, από τον ορισμό του κέντρου μάζας (κ.μ.) έχομε ότι $m\vec{r}_{\kappa\mu} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots$, όπου $\vec{r}_{\kappa\mu}$ το διάνυσμα θέσεως του κ.μ..

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς το χρόνο έχομε:

$$m\frac{d\vec{r}_{\kappa\mu}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots,$$

δηλαδή: $m\dot{u}_{\kappa\mu} = m_1\dot{u}_1 + m_2\dot{u}_2 + \ldots,$

όπου $\vec{u}_{\kappa\mu}$ η ταχύτητα του κ.μ..

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς το χρόνο έχομε:

$$m\frac{d\vec{u}_{\kappa\mu}}{dt}=m_1\frac{d\vec{u}_1}{dt}+m_2\frac{d\vec{u}_2}{dt}+\ldots+m_n\frac{d\vec{u}_n}{dt},$$

δηλαδή: $$m\dot{a}_{\kappa\mu}=m_1\dot{a}_1+m_2\dot{a}_2+\ldots+m_n\dot{a}_n,$$

όπου $\vec{a}_{\kappa\mu}$ η επιτάχυνση του κ.μ. Η σχέση αυτή με βάση τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα γράφεται:

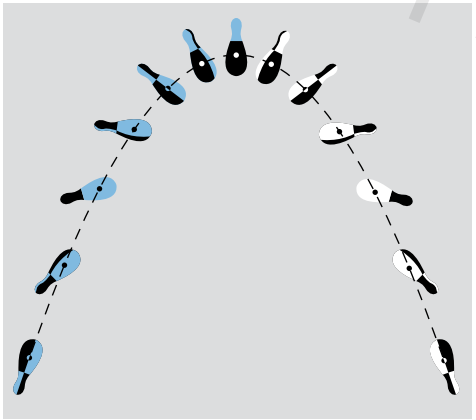
$$m\dot{a}_{\kappa\mu}=\dot{F}_1+\dot{F}_2+\ldots .$$

Δηλαδή, ***η ολική μάζα του συστήματος των σωμάτων επί την επιτάχυνση του κ.μ. ισούται με το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα των σωμάτων.***

Επειδή οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη ίσων και αντιθέτων δυνάμεων (Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα), αυτές έχουν συνισταμένη μηδέν και δεν υπολογίζονται στο ανωτέρω άθροισμα. Άρα, το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας, αφορά στο διανυσματικό άθροισμα μόνο των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα. Δηλαδή:

$$m\dot{a}_{\kappa\mu}=\sum\dot{F}_{i\varepsilon\xi}.$$

Άρα ***το κ.μ. συστήματος σωμάτων κινείται σαν όλη η μάζα του συστήματος να είναι συγκεντρωμένη στο κ.μ. και όλες οι εξωτερικές δυνάμεις να ασκούνται στο σημείο αυτό.*** Συνεπώς, όταν θέλομε να μελετήσομε τη μεταφορική κίνηση σώματος, αρκεί να μελετήσομε την κίνηση του κ.μ. του, θεωρώντας πως όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στο κ.μ. και πως εκεί ασκούνται όλες οι εξωτερικές δυνάμεις. Η κορύνα του σχήματος 3.5.1 περιστρέφεται γύρω απ' τον άξονά της. Το κ.μ. της διαγράφει παραβολική τροχιά.

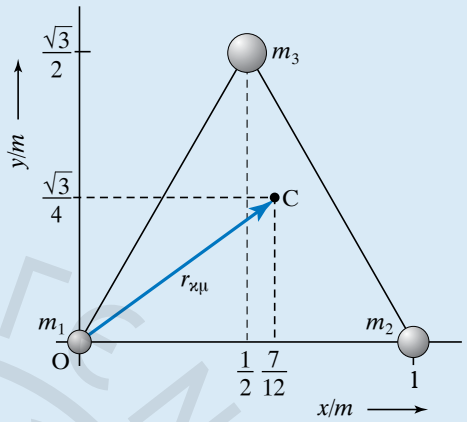


Σχ. 3.5.1

Το κ.μ. της κορύνας διαγράφει παραβολική τροχιά, ενώ αυτή περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ποιες οι συντεταγμένες του κ.μ. τριών σωμάτων μαζών $m_1=1$ kg, $m_2=2$ kg, $m_3=3$ kg, που είναι τοποθετημένα στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς 1 m (σχ. 3.5.2).



Σχ. 3.5.2

Λύση

Είναι: $$x_{\kappa\mu}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=$$

$$=\frac{1\cdot0+2\cdot1+3\cdot\frac{1}{2}}{1+2+3}\text{m}=\frac{7}{12}\text{m}$$

$$y_{\kappa\mu}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}=$$

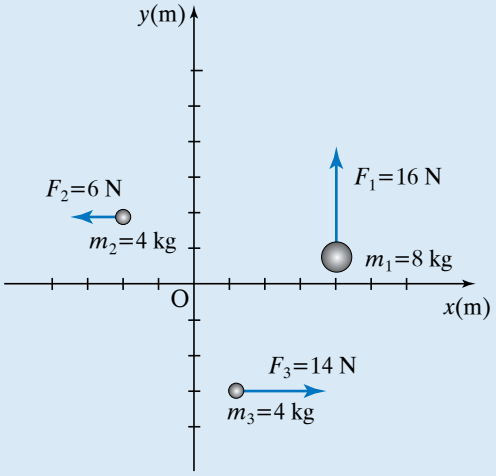
$$=\frac{1\cdot0+2\cdot0+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2+3}\text{m}=\frac{\sqrt{3}}{4}\text{m}.$$

2. Έστω τρία υλικά σημεία μαζών $m_1=8$ kg, $m_2=m_3=4$ kg τοποθετημένα σε επίπεδο εφοδιασμένο με ορθοκανονικό σύστημα αξόνων O_{xy}. Στα σημεία ασκούνται οι δυνάμεις $F_1=16$ N, $F_2=6$ N, $F_3=14$ N αντίστοιχα (σχ. 3.5.3). Να υπολογίσετε:

α) Τη θέση του κ.μ..

β) Τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων.

γ) Τη επιτάχυνση του κ.μ. του συστήματος.



Σχ. 3.5.3

Λύση

α) Οι συντεταγμένες του κ.μ. είναι:

$$x_{\kappa\mu} = \frac{8\cdot 4 + 4\cdot(-2) + 4\cdot 1}{8+4+4}\,\mathrm{m} = \frac{7}{4}\,\mathrm{m},$$

$$y_{\kappa\mu} = \frac{8\cdot 1 + 4\cdot 2 + 4\cdot(-3)}{8+4+4}\,\mathrm{m} = \frac{1}{4}\,\mathrm{m}.$$

β) Η συνισταμένη F των εξωτερικών δυνάμεων που επιδρούν στο σύστημα έχει συνιστώσες μέτρων $F_x = 14 - 6 = 8\ \mathrm{N}$, $F_y = 16\ \mathrm{N}$. Η συνισταμένη έχει μέτρο:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8^2 + 16^2}\ \mathrm{N} = 18\ \mathrm{N}$$

και διεύθυνση $\tan\varphi = \dfrac{F_y}{F_x} = 2$, άρα $\varphi = 63^\circ$.

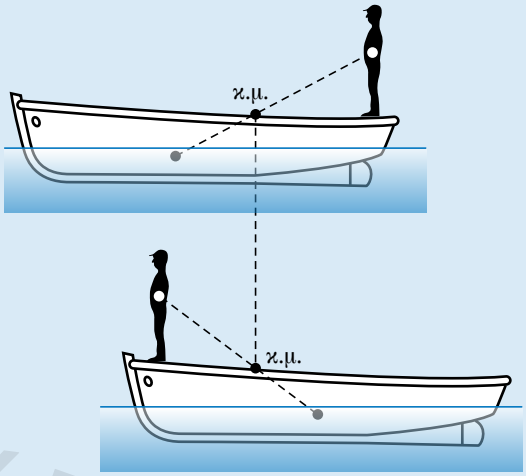
γ) Η επιτάχυνση του κ.μ. είναι:

$$a_{\kappa\mu} = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{18}{16}\,\mathrm{m/s^2} = 1{,}1\ \mathrm{m/s^2}.$$

Τα τρία σώματα του συστήματος μεταβάλλουν τη θέση τους με την πάροδο του χρόνου, όμως το κ.μ. κινείται με σταθερή επιτάχυνση.

3. Θεωρούμε ότι το σύστημα άνθρωπος και βάρκα αποτελούν απομονωμένο σύστημα (σχ. 3.5.4).

Υποθέτομε ότι αρχικά και ο άνθρωπος ακινητεί, $\vec{u}_\alpha = 0$ και η βάρκα ακινητεί, $u_\beta = 0$. Όταν ο άνθρωπος κινείται με ταχύτητα $\vec{u}_\alpha$, η βάρκα θα κινείται με ταχύτητα $\vec{u}_\beta$. Αρχικά, η ολική ορμή



Σχ. 3.5.4

είναι μηδέν. Όταν θα υπάρξει μετακίνηση, επειδή το σύστημα θεωρείται απομονωμένο, η ολική ορμή του θα είναι πάλι μηδέν, άρα:

$$m_\alpha \vec{u}_\alpha + m_\beta \vec{u}_\beta = 0, \quad \text{συνεπώς} \quad \vec{u}_\beta = -\frac{m_\alpha}{m_\beta}\vec{u}_\alpha.$$

Το αρνητικό πρόσημο (–) σημαίνει ότι η βάρκα κινείται αντίθετα απ' τον άνθρωπο. Η κίνηση της βάρκας αρχίζει όταν ο άνθρωπος που βρίσκεται πάνω της αρχίσει να κινείται. Προσέξτε ότι το κ.μ. του συστήματος είναι συνεχώς ακίνητο.

3.5.6 Ώθηση δυνάμεως. Θεώρημα ωθήσεως-ορμής.

Από τη γενική μορφή του Δευτέρου Νόμου του Νεύτωνα έχομε:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t, \quad \text{άρα } \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t.$$

Η ποσότητα $\mathrm{d}\vec{J} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$ ονομάζεται ***στοιχειώδης ώθηση της δυνάμεως*** $\vec{F}$ κατά το στοιχειώδες χρονικό διάστημα $\mathrm{d}t$. Η στοιχειώδης μεταβολή της ορμής, $\mathrm{d}\vec{p}$, ισούται με την αντίστοιχη στοιχειώδη ώθηση της δυνάμεως, $\vec{F}\,\mathrm{d}t$. Το ολοκλήρωμα δίνει την ώθηση της δυνάμεως:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t,$$

όταν η δύναμη δρα επί χρονικό διάστημα από t_1 μέχρι t_2. Οπότε, ισχύει γενικώς ότι η μεταβολή της ορμής ισούται με την αντίστοιχη ώθηση της δυνάμεως, $\Delta\vec{p} = \vec{J}$.

Από τον ορισμό της ωθήσεως προκύπτει ότι αυτή είναι διανυσματικό φυσικό μέγεθος που έχει τη διεύθυνση και τη φορά της δυνάμεως και μέτρο που ισούται με το γινόμενο του μέτρου της δυνάμεως επί το χρόνο που αυτή ασκείται στο σώμα.

Οι μονάδες μετρήσεώς της στο SI είναι $1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$ και προκύπτουν από τον απλοποιημένο τύπο (για σταθερή δύναμη) $J = F\cdot\Delta t$.

Η ορμή και η ώθηση έχουν τις ίδιες διαστάσεις, συνεπώς οι μονάδες μετρήσεώς τους είναι ισοδύναμες. Πράγματι:

$$1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{s} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3.6 Νόμος του Hooke. Ελαστικότητα. Διάτμηση και στρέψη.

Γνωρίζομε ότι οι δυνάμεις όταν ενεργούν σε σώματα, τους προκαλούν παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι το στερεό σώμα είναι μία εξιδανίκευση, καθώς δεν υπάρχει απολύτως στερεό σώμα. Όταν παραμορφώνονται τα σώματα, αναπτύσσονται εσωτερικές ελαστικές δυνάμεις, διά των οποίων επανέρχονται στην αρχική τους θέση, όταν πάψουν να τους ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ***ελαστικότητα*** και τα σώματα ***ελαστικά***. Στα περισσότερα σώματα οι παραμορφώσεις είναι ελαστικές, εφόσον είναι μικρές. Υπάρχουν σώματα που δεν επανέρχονται στην αρχική τους μορφή, αλλά υφίστανται μόνιμη παραμόρφωση και ονομάζονται ***πλαστικά***. Τα ελαστικά σώματα, όταν η ελαστικότητα υπερβεί ένα ορισμένο όριο, που ονομάζεται ***όριο ελαστικότητας*** και εξαρτάται από τη φύση του κάθε σώματος, υφίστανται μόνιμες παραμορφώσεις.

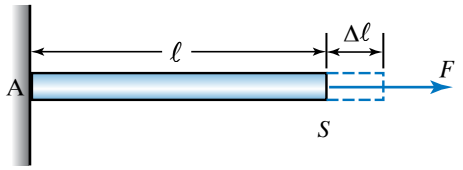
Αν οι εξωτερικές δυνάμεις υπερβούν μία ορισμένη τιμή, που ονομάζεται ***όριο αντοχής***, τα σώματα στα οποία ασκούνται θραύονται.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ελαστικής παραμορφώσεως τα σώματα αποτελούνται από στοιχειώδεις δομικούς λίθους (μόρια, άτομα, ιόντα), που συγκρατούνται μεταξύ τους με δυνάμεις και ισορροπούν σε ορισμένες μεταξύ τους αποστάσεις. Για να ισορροπήσουν σε άλλες μεταξύ τους αποστάσεις, χρειάζεται η εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων. Υπό την επίδραση αυτών των δυνάμεων το σώμα παραμορφώνεται.

Για μικρές παραμορφώσεις ισχύει ο Νόμος του Hooke, που προβλέπει ότι οι παραμορφώσεις είναι ανάλογες των αιτίων που τις προκαλούν (δυνάμεις, ροπές).

3.6.1 Εφελκυσμός και θλίψη.

Λαμβάνομε ράβδο μήκους ℓ, στερεώνομε το ένα άκρο της σε σταθερό σημείο Α και στο ελεύθερο άκρο της ασκούμε δύναμη F (σχ. 3.6.1). Η ράβδος έχει διατομή εμβαδού S και η δύναμη είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στη διατομή της.



Σχ. 3.6.1
Ράβδος υπό εφελκυσμό χωρίς λέπτυνση.

Υπό την επίδραση δυνάμεως F η ράβδος επιμηκύνεται κατά $\Delta\ell$, δηλαδή υφίσταται ***εφελκυσμό***. Η επιμήκυνση είναι ανάλογη της εξωτερικής δυνάμεως F, ανάλογη του μήκους ℓ και αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού S. Η επιμήκυνση εξαρτάται από το υλικό κατασκευής της ράβδου.

Το πηλίκο $\sigma = F/S$ της εξωτερικής δυνάμεως F προς το εμβαδόν της διατομής S ονομάζεται ***τάση εφελκυσμού*** (σ). Ο λόγος $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$ της μεταβολής του μήκους προς το αρχικό μήκος ονομάζεται ***ανηγμένη μήκυνση*** ή ***παραμόρφωση εφελκυσμού***. Τα παραπάνω μεγέθη συνδέονται με τη σχέση:

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\dfrac{F}{S}}{\dfrac{\Delta\ell}{\ell}} = \frac{F\ell}{S\,\Delta\ell}$$

όπου Y το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young. Το Y εξαρτάται από το υλικό κατασκευής του σώματος και μονάδα μετρήσεώς του, όπως και του σ, στο SI είναι το $\mathrm{N/m^2}$ ή Pa (πασκάλ). Αν η φορά της δυνάμεως που ασκείται στη ράβδο είναι αντίθετη, η ράβδος συμπιέζεται και ελαττώνεται το μήκος της, υφίσταται δηλαδή ***θλίψη***.

Από τον προηγούμενο τύπο προκύπτει ότι:

$$\Delta\ell = \frac{F}{S}\,\frac{1}{Y}\,\ell$$

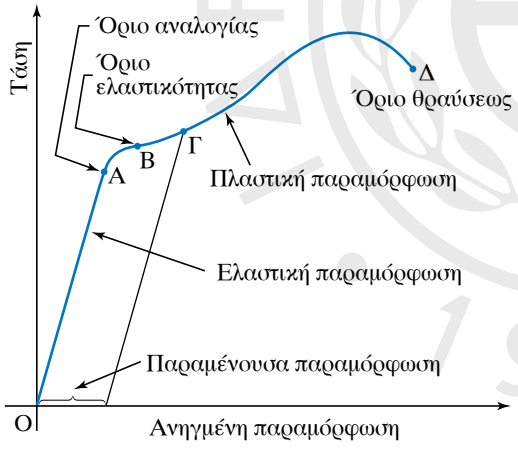
που εκφράζει τον Νόμο του Hooke για τον εφελκυσμό και διατυπώνεται ως εξής:

Η ελαστική επιμήκυνση μιας ράβδου είναι ανάλογη προς τη δύναμη που της ασκείται, ανάλογη του μήκους ℓ και αντιστρόφως ανάλογη της διατομής της S.

3.6.2 Διάγραμμα μηκύνσεως.

Το διάγραμμα μηκύνσεως φαίνεται στο σχήμα 3.6.2 και περιγράφει την παραμόρφωση της ράβδου. Στην ευθύγραμμη περιοχή ΟΑ ή περιοχή Hooke η αναγμένη μήκυνση είναι ανάλογη της τάσεως που την προκαλεί. Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο Α ονομάζεται ***όριο αναλογίας***. Η κλίση του ευθυγράμμου τμήματος παριστάνει το μέτρο ελαστικότητας. Η καμπύλη περιοχή ΑΒ έχει παραμόρφωση μεγαλύτερη απ' ό,τι προβλέπει ο Νόμος του Hooke. Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο Β ονομάζεται ***όριο ελαστικότητας***. Στις ανωτέρω περιοχές οι παραμορφώσεις είναι ελαστικές. Η καμπυλόγραμμη περιοχή ΒΓΔ ονομάζεται ***πλαστική περιοχή***, διότι όταν πάψει να υπάρχει η τάση, η παραμόρφωση που έχει προκληθεί παραμένει μόνιμα. Σ' αυτήν την περιοχή, με μικρή αύξηση της τάσεως, η αναγμένη παραμόρφωση αυξάνεται κατά πολύ.

Η τάση που αντιστοιχεί στο σημείο Δ εκφράζει το όριο θραύσεως $\sigma_{\theta\rho}$, τη μέγιστη δηλαδή τάση, στην οποία αντέχει το υλικό χωρίς να θραυθεί. Η τιμή του ε στο σημείο Δ, ονομάζεται ***αναγμένη μήκυνση θραύσεως*** $\varepsilon_{\theta\rho}$.



Σχ. 3.6.2
Διάγραμμα μηκύνσεως.

Στον πίνακα 3.6 φαίνονται μερικές σταθερές παραμορφώσεως (λέγονται και ελαστικές σταθερές) διαφόρων υλικών.

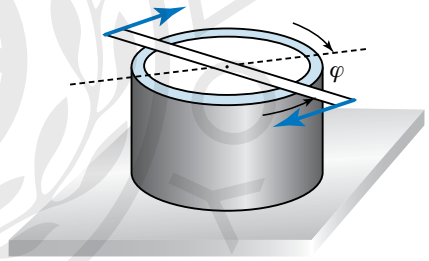
3.6.3 Διάτμηση και στρέψη.

Θεωρούμε σωλήνα με πακτωμένο το ένα άκρο του (σχ. 3.6.3). Στο άλλο άκρο του ασκείται στρεπτική ροπή, υπό την επίδραση της οποίας ο σωλήνας υφίσταται στρέψη, κατά την οποία κάθε εγκάρσια

Πίνακας 3.6
Σταθερές παραμορφώσεως.

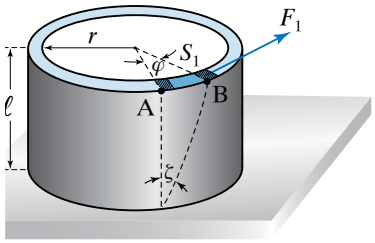
Υλικό	*Μέτρο ελαστικότητας · 10^{10}N/m^2*	*Τάση θραύσεως · · 10^8N/m^2*
Αργίλιο	7	0,78
Χυτοσίδηρος	11	1,1
Νάιλον	0,36	3,2
Μόλυβδος	1,6	2,1
Ορείχαλκος	9,0	3,8
Χαλκός	11,0	2,4
Μαλακός χάλυβας	22,0	3,8

διατομή του στρέφεται κατά γωνία φ, που ονομάζεται ***γωνία στρέψεως***. Η γωνία στρέψεως είναι ανάλογη προς τη στρεπτική ροπή που την προκάλεσε. Δηλαδή $\tau = D\varphi$. Η σταθερά D ονομάζεται ***κατευθύνουσα ροπή*** (ή σταθερά ροπής επαναφοράς) του σωλήνα και εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία και το υλικό κατασκευής του.

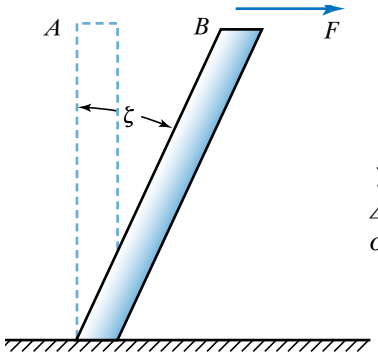


Σχ. 3.6.3
Γωνία στρέψεως φ.

Θεωρούμε μία εγκάρσια τομή του σωλήνα που τον χωρίζει στα δύο. Οι δυνάμεις που ασκεί το ένα τμήμα στο άλλο έχουν παράλληλες διευθύνσεις προς την επιφάνεια τομής και ονομάζονται ***διατμητικές δυνάμεις***. Υπό την επίδρασή τους το ελεύθερο άκρο του σωλήνα στρέφεται κατά γωνία φ. Έτσι, το σημείο Α μετατοπίζεται στη θέση Β (σχ. 3.6.4 και 3.6.5).



Σχ. 3.6.4
Γωνία διατμήσεως ζ.



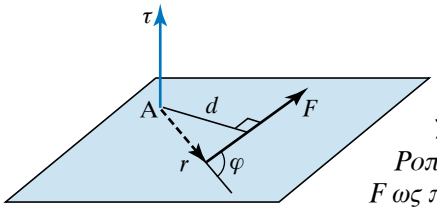
Σχ. 3.6.5
Διάτμηση σε ράβδο.

Η γωνία ζ ονομάζεται ***γωνία διατμήσεως***. Το μέγεθος: $\tau = F_1/S_1 = F/S$ λέγεται ***διατμητική τάση***. Για μικρές παραμορφώσεις, η γωνία διατμήσεως είναι ανάλογη προς τη διατμητική τάση που την προκαλεί. Ισχύει η σχέση $\tau = G\,\zeta$. Η σταθερά G λέγεται ***μέτρο διατμήσεως*** ή ***μέτρο στρέψεως*** και εξαρτάται απ' το υλικό του σωλήνα. Αυτή είναι η διατύπωση του νόμου του Hooke για τη στρέψη. Το G έχει διαστάσεις πιέσεως στο SI μετρείται σε πασκάλ (Pa ή N/m^2).

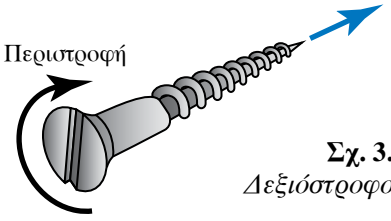
3.7 Ροπή δυνάμεως.

3.7.1 Ροπή δυνάμεως ως προς σημείο.

Ροπή δυνάμεως $\vec{F}$ ***ως προς*** (ή περί) ***σημείο*** Α ονομάζεται το διανυσματικό φυσικό μέγεθος $\vec{\tau}$ (σχ. 3.7.1), που έχει σημείο εφαρμογής το Α, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από την $\vec{F}$ και το Α, μέτρο ίσο με το γινόμενο της αποστάσεως d του Α από τον φορέα της δυνάμεως επί το μέτρο της $\vec{F}$, δηλαδή $\tau = F\,d$, και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (σχ. 3.7.2) ή του



Σχ. 3.7.1
Ροπή δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς σημείο Α.



Σχ. 3.7.2
Δεξιόστροφος κοχλίας.

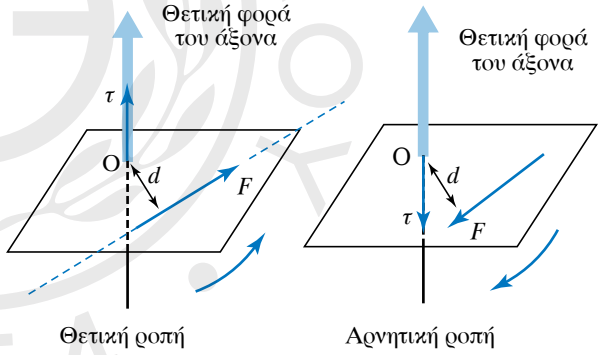
δεξιού χεριού, που σημαίνει ότι: *«Αν περιστρέψομε δεξιόστροφο κοχλία, έτσι όπως καθορίζει η δύναμη, η φορά κινήσεως του κοχλία δίνει τη φορά του διανύσματος της ροπής»*.

Αν η δύναμη μετακινηθεί πάνω στον φορέα της, δεν μεταβάλλεται η ροπή.

Τη ροπή δυνάμεως ως προς σημείο μπορούμε να την ορίσομε και ως εξής: Από το σημείο Α φέρνομε την επιβατική ακτίνα $\vec{r}$ του σημείου εφαρμογής της δυνάμεως και ορίζομε τη ροπή $\vec{\tau}$ ως το εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{r}$, $\vec{F}$. Δηλαδή $\vec{\tau} = (\vec{r} \times \vec{F})$. Για την τιμή της ροπής ισχύει ότι $\tau = F\,r\,\sin\varphi$ (σχ. 3.7.1).

3.7.2 Ροπή δυνάμεως ως προς άξονα.

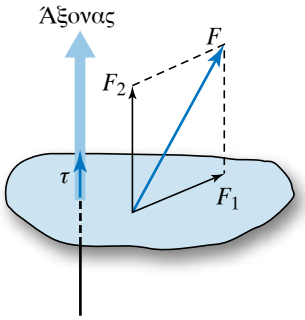
Ροπή δυνάμεως $\vec{F}$ ***ως προς*** (ή περί) ***άξονα*** που τέμνει κάθετα το επίπεδό της, ονομάζομε το διανυσματικό φυσικό μέγεθος $\vec{\tau}$ (σχ. 3.7.3), που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δυνάμεως $\vec{F}$ επί την απόστασή της d από τον άξονα, διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα και φορά εκείνη που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.



Σχ. 3.7.3
Ροπή δυνάμεως προς άξονα.

Η ροπή θεωρείται θετική αν κατά την περιστροφή του δεξιόστροφος κοχλίας μετακινείται κατά τη θετική φορά του άξονα. Στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητική.

Αν η δύναμη $\vec{F}$ δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα, τότε την αναλύομε σε δύο συνιστώσες, μία κατά μήκος του άξονα ($\vec{F}_2$) και μία πάνω στο κάθετο στον άξονα επίπεδο ($\vec{F}_1$) και ορίζομε ως ροπή της δυνάμεως ως προς τον άξονα, τη ροπή της διανυσματικής προβολής $\vec{F}_1$, ως προς τον άξονα (σχ. 3.7.4).



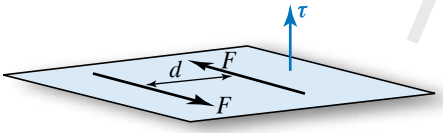
Σχ. 3.7.4
Ροπή δυνάμεως που δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα.

Η ροπή δυνάμεως είτε ως προς σημείο, είτε ως προς άξονα έχει την τάση να περιστρέψει το σώμα, στο οποίο επενεργεί γύρω απ' το σημείο ή τον άξονα.

Από τον ορισμό των ροπών προκύπτει ότι η μονάδα μετρήσεώς τους στο SI είναι το $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. Αντίστοιχα στο CGS είναι $\mathrm{dyn}\cdot\mathrm{cm}$ και στο ΤΣ $\mathrm{kgf}\cdot\mathrm{m}$.

3.7.3 Ροπή ζεύγους δυνάμεων.

Ζεύγος δυνάμεων ονομάζεται το σύστημα που αποτελείται από δύο (ίσου μέτρου) αντίθετες δυνάμεις, που ασκούνται σε διαφορετικά σημεία ενός σώματος. Το επίπεδο που ορίζουν οι δυνάμεις, ονομάζεται ***επίπεδο του ζεύγους***. ***Ροπή $\vec{\tau}$ ζεύγους δυνάμεων*** ονομάζεται το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της μιας δυνάμεως επί τη μεταξύ τους απόσταση και φορά που καθορίζεται απ' τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, $\vec{\tau}=\vec{F}\times\vec{d}$ (σχ. 3.7.5). Αποδεικνύεται ότι η ροπή του ζεύγους ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των δύο δυνάμεων ως προς (ή περί) οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Γι' αυτόν τον λόγο το σημείο εφαρμογής της ροπής μπορεί να είναι οποιοδήποτε στον χώρο.



Σχ. 3.7.5
Ροπή ζεύγους δυνάμεων.

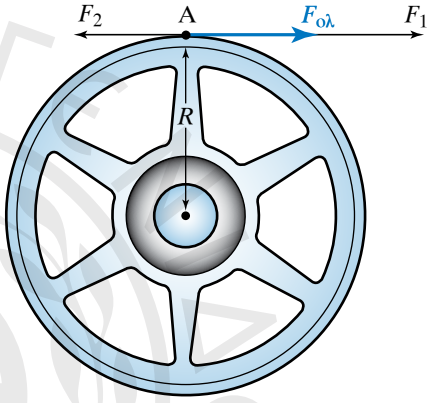
3.7.4 Θεώρημα των ροπών ή θεώρημα του Varignon.

Έστω ότι σε σώμα που στρέφεται γύρω από άξονα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\ldots$ και $\vec{F}_{\text{ολ}}$ είναι η συνισταμένη τους. Η ροπή $\vec{\tau}$ της συνισταμένης των δυνάμεων ως προς σημείο ή άξονα ισούται με το διανυσματικό ή αλγεβρικό, αντίστοιχα, άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο ή τον άξονα. Δηλαδή $\vec{\tau}=\vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2+\ldots$ ή $\tau=\tau_1+\tau_2+\ldots$.

Αν οι δυνάμεις $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\ldots$ είναι ομοεπίπεδες, οι ροπές τους $\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2,\vec{\tau}_3,\ldots$ ως προς κάθε σημείο έχουν την ίδια διεύθυνση.

Απόδειξη σε απλή περίπτωση.

Ας υποθέσομε ότι στον τροχό Τ (σχ. 3.7.6), ακτίνας R, ασκούνται στο σημείο Α οι ομοεπίπεδες και αντίρροπες δυνάμεις F_1, F_2. Ισχύει ότι $F_{\text{ολ}}=F_1-F_2$. Η ροπή της συνισταμένης περί τον άξονα του τροχού είναι $\tau=F_{\text{ολ}}R$. Επίσης, οι ροπές των δυνάμεων είναι $\tau_1=F_1R$ και $\tau_2=F_2R$. Άρα πράγματι ισχύει ότι $\tau=(F_1-F_2)R=F_{\text{ολ}}R$.



Σχ. 3.7.6
Ροπή ομοεπιπέδων και αντίρροπων δυνάμεων.

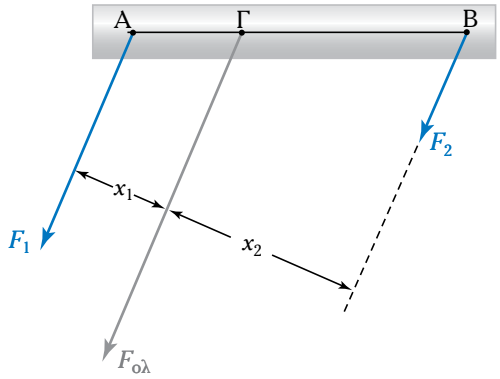
3.7.5 Σύνθεση δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων.

Έστω ότι δύο παράλληλες και ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1,\vec{F}_2$, ασκούνται αντίστοιχα στα σημεία Α, Β μίας ράβδου (σχ. 3.7.7). Η συνισταμένη τους $\vec{F}_{\text{ολ}}$ είναι παράλληλη μ' αυτές και βρίσκεται στο επίπεδό τους, έχει την ίδια φορά μ' αυτές, το μέτρο της είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους και ο φορέας της τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Γ. Οι αποστάσεις του ΑΓ, ΒΓ απ' τα άκρα Α, Β είναι αντιστρόφως ανάλογες των μέτρων των δυνάμεων F_1, F_2. Δηλαδή:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}.$$

Απόδειξη.

Η συνισταμένη πρέπει να είναι παράλληλη προς τις δύο δυνάμεις, διότι οι προβολές τους σε οποιονδήποτε άξονα κάθετο στις δύο δυνάμεις είναι μηδέν, άρα και η προβολή της συνισταμένης πάνω σε τέ-



Σχ. 3.7.7
Σχηματική παράσταση συνθέσεως δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων.

τοιον άξονα πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη δεν μπορεί να έχει μη μηδενική (ορθογώνια) συνιστώσα πάνω σε τέτοιον άξονα, άρα είναι παράλληλη προς τις δύο δυνάμεις. Επίσης, ο φορέας της δυνάμεως πρέπει να περνά από σημείο που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα Α και Β. Θεωρούμε σταθερό άξονα, κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων, που διέρχεται από το σημείο Γ τη μία φορά και απ' το σημείο Β την άλλη φορά. Για τις ροπές των δυνάμεων $\vec{F}_{ολ}$, $\vec{F}_1$,$\vec{F}_2$, σύμφωνα με το θεώρημα των ροπών, περί το σημείο Γ ισχύει ότι:

$$\text{Ροπή της } \vec{F}_1 + \text{Ροπή της } \vec{F}_2 = \text{Ροπή της } \vec{F}_{ολ}$$

άρα: $-F_1x_1 + F_2x_2 = F_{ολ}0 = 0$ άρα: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{x_2}{x_1}$.

Από τη γεωμετρία ισχύει ότι: $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}$,

άρα: $$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}.$$

Για το σημείο Β έχομε:

$$\text{Ροπή της } \vec{F}_1 + \text{Ροπή της } \vec{F}_2 = \text{Ροπή της } \vec{F}_{ολ}$$

άρα: $$-F_1(x_1 + x_2) + F_2 0 = -F_{ολ}x_2$$

άρα: $$-F_1x_1 \quad -F_1x_2 \quad = -F_{ολ}x_2$$

άρα: $$-F_2x_2 \quad -F_1x_2 \quad = -F_{ολ}x_2$$

επομένως: $$F_1 + F_2 = F_{ολ}.$$

3.7.6 Σύνθεση δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων.

Έστω δύο παράλληλες και αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ που ασκούνται στα σημεία Α, Β ράβδου (σχ. 3.7.8). Η συνισταμένη τους $\vec{F}_{ολ}$ είναι παράλληλη μ' αυτές και βρίσκεται στο επίπεδό τους, έχει φορά τη φορά της μεγαλύτερης απ' τις δύο, το μέτρο της είναι ίσο με τη διαφορά των μέτρων τους και ο φορέας της τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Γ, που δεν βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Α, Β, αλλά προς το μέρος του Α (διότι $F_1 > F_2$). Οι αποστάσεις του ΑΓ, ΒΓ από τα άκρα Α, Β είναι αντιστρόφως ανάλογες των μέτρων των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Δηλαδή:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}.$$

Απόδειξη.

Με ανάλογη συλλογιστική όπως πριν, καταλήγομε στο ότι ισχύει ό,τι παρουσιάζεται το σχήμα 3.7.8. Θεωρούμε σταθερό άξονα, κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων, που διέρχεται απ' το σημείο Α τη μία φορά, από το σημείο Β την επόμενη φορά και από το σημείο Γ την τρίτη φορά. Για τις ροπές των δυνάμεων $\vec{F}_{ολ}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, σύμφωνα με το θεώρημα των ροπών, ισχύει για την πρώτη περίπτωση:

$$\text{Ροπή της } \vec{F}_1 + \text{Ροπή της } \vec{F}_2 = \text{Ροπή της } \vec{F}_{ολ} \text{ άρα:}$$

$$F_1 \cdot 0 \quad -F_2x_2 \quad = -F_{ολ}x_1$$

άρα: $$F_2x_2 \quad = \quad F_{ολ}x_1.$$

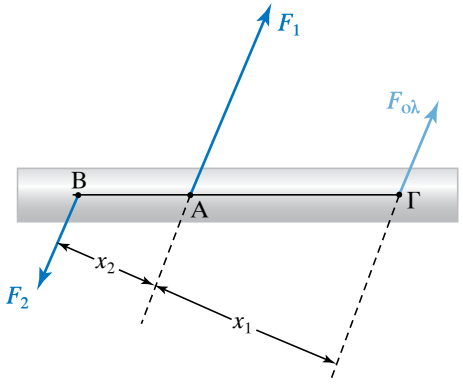
Ομοίως, όταν ο άξονας διέρχεται από το σημείο Β, έχομε:

$$\text{Ροπή της } \vec{F}_1 + \text{Ροπή της } \vec{F}_2 = \text{Ροπή της } \vec{F}_{ολ} \text{ επομένως:}$$

$$-F_1x_2 \quad + F_2 0 \quad = -F_{ολ}(x_1 + x_2)$$

άρα: $$F_1x_2 \quad = F_{ολ}x_1 + F_{ολ}x_2$$

άρα: $$F_1x_2 \quad = F_2x_2 + F_{ολ}x_2$$



Σχ. 3.7.8
Σχηματική παράσταση συνθέσεως δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων.

συνεπώς: $F_1 - F_2 = F_{\text{ολ}}$.

Τέλος, όταν ο άξονας διέρχεται απ' το σημείο Γ, έχομε:

Ροπή της $\vec{F}_1$ + Ροπή της $\vec{F}_2$ = Ροπή της $\vec{F}_{\text{ολ}}$ άρα:

$$F_1 x_1 - F_2 (x_1 + x_2) = F_{\text{ολ}} \cdot 0 = 0$$

$$\text{επομένως:} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1}.$$

Από τη γεωμετρία ισχύει ότι:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}, \quad \text{άρα:} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}.$$

Παρατήρηση.

Για δεδομένες παράλληλες δυνάμεις με καθορισμένη διεύθυνση, το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης μπορεί να είναι οπουδήποτε πάνω στον φορέα που διέρχεται απ' το σημείο το οποίο προσδιορίσαμε πάνω στην ευθεία, που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των δύο δυνάμεων. Όμως, αν έχομε δυνάμεις, οι οποίες μπορούν να περιστραφούν κατά την ίδια γωνία περί τα σταθερά σημεία εφαρμογής τους, τότε η συνισταμένη τους θα διέρχεται πάντα απ' το παραπάνω σημείο, που προφανώς είναι το ίδιο για όλες τις γωνίες και λέγεται ***κέντρο των παραλλήλων δυνάμεων***.

3.7.7 Σύνθεση πολλών παραλλήλων δυνάμεων.

Έστω παράλληλες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,... που ασκούνται σε διάφορα σημεία ενός σώματος. Προκειμένου να βρούμε τη συνισταμένη τους, συνθέτομε τις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, και υπολογίζομε τη συνισταμένη τους $\vec{F}_{1,2}$. Στη συνέχεια, τη συνθέτομε με την $\vec{F}_3$ και υπολογίζομε τη συνισταμένη τους $\vec{F}_{1,2,3}$. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου εξαντληθούν όλες οι δυνάμεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η τελική συνισταμένη τους $\vec{F}_{\text{ολ}}$, που είναι παράλληλη με τις αρχικές δυνάμεις, το δε μέτρο της υπολογίζεται ως το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των δυνάμεων, η μία από τις δύο φορές των οποίων θεωρείται θετική και η άλλη αρνητική. Εφαρμόζοντας την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να αναλύσομε μία δύναμη σε δύο παράλληλες δυνάμεις (συνιστώσες).

3.7.8 Θεώρημα του κέντρου πολλών παραλλήλων δυνάμεων.

Έστω ότι οι παράλληλες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,... ασκούνται στα σημεία 1, 2, 3 ...ενός στερεού σώματος και η συνισταμένη τους είναι η $\vec{F}_{\text{ολ}}$. Αν στρέψομε κατά την ίδια γωνία φ, περί τα σημεία εφαρμογής τους τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,... , η συνισταμένη τους θα έχει την ίδια τιμή και απλώς θα στραφεί κατά την ίδια γωνία, ενώ θα έχει φορέα που τέμνει τον φορέα της προηγούμενης συνισταμένης σε συγκεκριμένο σημείο Κ. Αυτό το σημείο είναι το κέντρο των παραλλήλων δυνάμεων, ανεξάρτητα από τη γωνία στροφής. Το κέντρο προσδιορίζεται συνθέτοντας τις δυνάμεις ανά δύο και θεωρώντας κάθε φορά ως σημείο εφαρμογής της συνισταμένης το αντίστοιχο κέντρο των δύο παραλλήλων δυνάμεων. Σύμφωνα με το θεώρημα των ροπών, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων, ως προς το σημείο Κ είναι μηδέν.

Αυτό το σημείο είναι σταθερό ως προς το στερεό σώμα, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του· εξαρτάται μόνο απ' το σύστημα των παραλλήλων δυνάμεων και τα σταθερά σημεία εφαρμογής τους. Μπορεί, από τον ορισμό, να δειχθεί ότι ισχύουν για τις καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου των παραλλήλων δυνάμεων οι εξής σχέσεις:

$$x_{\text{κβ}} = \frac{\sum F_i x_i}{F_{\text{ολ}}}, \quad y_{\text{κβ}} = \frac{\sum F_i y_i}{F_{\text{ολ}}}, \quad z_{\text{κβ}} = \frac{\sum F_i z_i}{F_{\text{ολ}}}.$$

Αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι $F_{\text{ολ}} \neq 0$. Αν ισχύει $F_{\text{ολ}} = 0$, τότε δεν υπάρχει κέντρο δυνάμεων, αφού δεν υπάρχει συνισταμένη δύναμη, που να είναι ισοδύναμη των δεδομένων δυνάμεων. Σ' αυτήν την περίπτωση το σύστημα των δυνάμεων μπορεί να είναι ισοδύναμο με μη μηδενικό ζεύγος δυνάμεων.

Δεν είναι υποχρεωτικό το κέντρο των δυνάμεων να είναι σημείο του σώματος.

3.7.9 Κέντρο βάρους στερεού σώματος.

Κάθε στερεό σώμα μάζας m μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από πολλά υλικά σημεία στοιχειωδών μαζών m_1, m_2, m_3,... $m = \sum m_i$. Ας υποθέσομε ότι το σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο με ένταση g. Το κάθε ένα υλικό σημείο δέχεται από το βαρυτικό πεδίο στοιχειώδη δύναμη (έχει στοιχειώδες βάρος) $B_1 = m_1 g$, $\text{B}_2 = m_2 g$, $B_3 = m_3 g$,... αντίστοιχα. Επειδή, αν περιστραφεί το

σώμα, τα σημεία εφαρμογής και οι τιμές των στοιχειωδών βαρών δεν αλλάζουν, τα στοιχειώδη αυτά βάρη αποτελούν ένα σύστημα παραλλήλων και μάλιστα ομορρόπων δυνάμεων, που πάντα έχουν μη μηδενική συνισταμένη, η οποία είναι το βάρος B του σώματος. Το κέντρο αυτών των παραλλήλων δυνάμεων είναι το κέντρο βάρους (κ.β. ή κ) του σώματος. Το βάρος διέρχεται απ' αυτό το κ.β., που είναι σταθερό σημείο ως προς το σώμα, ανεξάρτητα απ' τον προσανατολισμό του.

Ισχύουν για τις καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου των παραλλήλων δυνάμεων που εδώ είναι το κ.β.,

$$x_{\kappa\beta} = \frac{\sum B_i x_i}{B} = \frac{\sum g m_i x_i}{gm},$$

$$y_{\kappa\beta} = \frac{\sum B_i y_i}{B} = \frac{\sum g m_i y_i}{gm},$$

$$z_{\kappa\beta} = \frac{\sum B_i z_i}{B} = \frac{\sum g m_i z_i}{gm}.$$

Προφανώς η ολική βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι το βάρος του συστήματος, $B = gm$. Απλοποιούμε το g, οπότε καταλήγομε στις σχέσεις:

$$x_{\kappa\beta} = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_{\kappa\beta} = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_{\kappa\beta} = \frac{\sum m_i z_i}{m}.$$

Βλέπομε ότι το κ.β. είναι το ίδιο σημείο με το κ.μ. που ορίσαμε στα προηγούμενα.

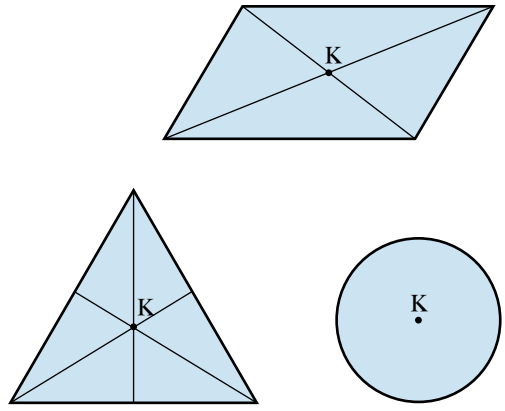
Δεν είναι υποχρεωτικό το κ.β. να είναι σημείο του στερεού σώματος, π.χ. στην περίπτωση δακτυλίου το κ.β. είναι στο κέντρο του, όπου δεν υπάρχει μάζα.

3.7.10 Εύρεση του κέντρου βάρους.

Αν το σώμα έχει κανονικό γεωμετρικό σχήμα και είναι ομογενές ως προς την κατανομή της μάζας του, το κ.β. βρίσκεται σύμφωνα με κανόνες της γεωμετρίας. Το κ.β. λεπτής ομογενούς μεταλλικής πλάκας σχήματος:

1) ***Παραλληλογράμμου***, είναι το σημείο τομής των διαγωνίων της και στο μέσον του πάχους της.

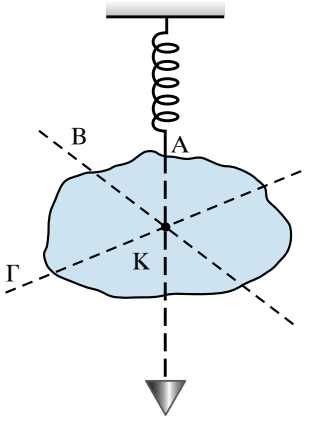
2) ***Τριγώνου***, είναι το σημείο τομής των διαμέσων της (βαρύκεντρο) και απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου τα ⅔ της αντίστοιχης διαμέσου.



Σχ. 3.7.9
Κέντρο βάρους κανονικών γεωμετρικών σωμάτων.

3) ***Κυκλικού δίσκου***, είναι το γεωμετρικό κέντρο αυτού (σχ. 3.7.9).

Αν το σώμα έχει ακανόνιστο σχήμα, το κ.β. βρίσκεται πρακτικά με τη μέθοδο της πολλαπλής αναρτήσεως, η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί εύκολα μόνο στην περίπτωση λεπτόπαχου (επίπεδου) σώματος. Αναρτούμε το στερεό σώμα από το σημείο Α, στο οποίο και τοποθετούμε το ελεύθερο άκρο του νήματος στάθμης και πάνω στο σώμα χαράσσομε τη διεύθυνση του νήματος. Επαναλαμβάνομε την ίδια διαδικασία και με άλλα σημεία Β, Γ. Το σημείο τομής Κ όλων των διευθύνσεων είναι το ζητούμενο κ.β.. Επειδή δύο αναρτήσεις είναι αρκετές, προκειμένου να βρεθεί το σημείο τομής, δηλαδή το κ.β., η ανωτέρω μέθοδος ονομάζεται ***μέθοδος της διπλής αναρτήσεως*** (σχ. 3.7.10). Φυσικά το ίδιο μπορεί να γίνει και για κανονικά γεωμετρικά σχήματα με ομοιόμορφη κατανομή μάζας.



Σχ. 3.7.10
Μέθοδος της διπλής αναρτήσεως.

Στην πιο γενική περίπτωση κανονικών γεωμετρικών σχημάτων που δεν είναι ομογενή, χρειάζονται πιο πολύπλοκοι υπολογισμοί.

Όταν υπάρχει συμμετρική κατανομή μάζας περί άξονα ή σημείο, τότε το κ.β. θα βρίσκεται πάνω στον άξονα ή θα συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας.

3.7.11 Κέντρο βάρους συστήματος σωμάτων.

Κέντρο βάρους (κ.β.) ενός συστήματος στερεών σωμάτων Σ, είναι το κέντρο των παραλλήλων δυνάμεων που αποτελούν το σύστημα των βαρών των σωμάτων Σ_1, Σ_2 ,..., τα κ.β. των οποίων θεωρούνται ως σημεία εφαρμογής των βαρών τους.

3.8 Ισορροπία στερεού σώματος.

3.8.1 Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος.

Ας υποθέσομε ότι έχομε στερεό σώμα και πάνω του ασκούνται δυνάμεις σε διάφορα σημεία του. Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει και αρκεί η συνισταμένη δύναμη και η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν. Δηλαδή, πρέπει να ισχύουν:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \sum \vec{\tau}_i = \vec{0}.$$

Επίσης, ισχύει ότι για την ισορροπία πρέπει και αρκεί το άθροισμα των προβολών των δυνάμεων ως προς οποιονδήποτε άξονα να είναι μηδέν και το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων περί οποιονδήποτε άξονα να είναι μηδέν. Δηλαδή πρέπει να ισχύουν:

$$\sum \vec{F}_{\xi i} = \vec{0}, \quad \sum \vec{\tau}_{\xi i} = \vec{0}.$$

Το ξ δηλώνει τυχαίο άξονα. Κατά τη λύση προβλημάτων είναι πιο χρήσιμες οι τελευταίες σχέσεις. Χρειάζεται κάποια προσοχή, ώστε το πλήθος των (ανεξαρτήτων) εξισώσεων του συστήματος να είναι αρκετό, ώστε να μπορεί να λυθεί το σύστημα ως προς τις ποσότητες που ζητούνται να προσδιοριστούν.

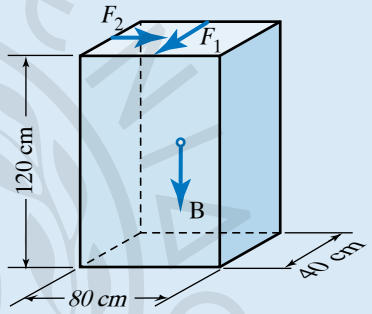
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ομογενές σώμα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 40 cm × 80 cm × 120 cm έχει βάρος $B = 100$ N.

Ποια οριζόντια δύναμη F απαιτείται για την ανατροπή του, όταν αυτή ασκείται στην ψηλότερη πλευρά του σώματος κι αυτό στηρίζεται στη μικρότερη επιφάνειά του (40 cm × 80 cm); Η οριζόντια δύναμη μπορεί να είναι: (α) παράλληλη στην πλευρά των 40 cm ή (β) στην πλευρά των 80 cm;

Λύση

Το κ.β. βρίσκεται στο μέσο του ύψους του σώματος. Προκειμένου να ανατραπεί το σώμα, πρέπει η ροπή της δυνάμεως F να είναι μεγαλύτερη από τη ροπή του βάρους B ως προς τον ίδιο άξονα (σχ. 3.8.1) (καλό είναι όλες οι μονάδες να είναι στο SI).



Σχ. 3.8.1

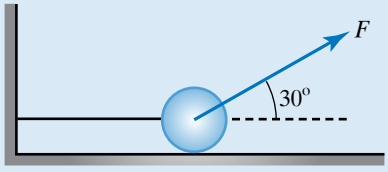
α) $F_1 \cdot 120 \cdot 10^{-2} \geq B \cdot 20 \cdot 10^{-2}$

άρα: $F_1 \cdot 6 \geq B$ άρα $F_1 \geq \dfrac{100}{6}\,\text{N} = \dfrac{50}{3}\,\text{N} = 16{,}7\,\text{N}.$

β) $F_2 \cdot 120 \cdot 10^{-2} \geq B \cdot 40 \cdot 10^{-2}$

επομένως: $F_2 \cdot 3 \geq B$ άρα $F_2 \geq \dfrac{100}{3}\,\text{N} = 33{,}3\,\text{N}.$

2. Σώμα μάζας $m = 1$ kg ισορροπεί όταν πάνω του ασκείται δύναμη $F = 8$ N, που σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 3.8.2). Αν $g = 10\,\text{m/s}^2$, να υπολογίσετε την τάση



Σχ. 3.8.2

του νήματος T και την κάθετη δύναμη N, που ασκείται απ' το έδαφος.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται το βάρος του B, η τάση του νήματος T και η κάθετη δύναμη από το έδαφος N (σχ. 3.8.3). Αφού το σώμα ισορροπεί, ισχύει $\vec{F}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{B}=\vec{0}$. Αναλύομε τη δύναμη F σε δύο συνιστώσες:

$$F_x = F\cos 30^o = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{N} = 4\cdot\sqrt{3}\,\text{N}$$

και $F_y = F\sin 30^o = 8\cdot\frac{1}{2}\,\text{N} = 4\,\text{N}.$

Το βάρος του σώματος είναι:

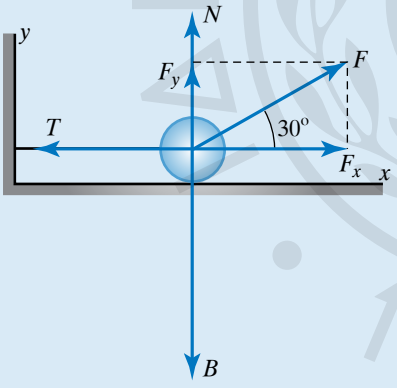
$$B = m\,g = 1\cdot 10\,\text{N} = 10\,\text{N}.$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας για τον οριζόντιο άξονα ισχύει:

$$F_x = \text{T} = 4\cdot\sqrt{3}\,\text{N} = 6{,}93\,\text{N}$$

και για τον κατακόρυφο: $F_y + N = B$

άρα: $N = B - F_y = (10-4)\,\text{N} = 6\,\text{N}.$



Σχ. 3.8.3

3.8.2 Είδη ισορροπίας.

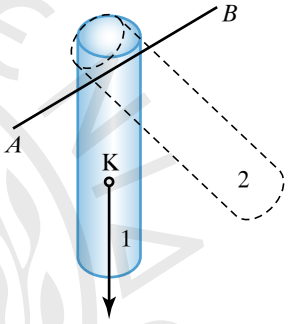
Όταν ένα σώμα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του, τότε η συνισταμένη δύναμη και ροπή που θα ασκούνται στο σώμα δεν θα είναι κατ' ανάγκη μηδέν. Διακρίνομε τα ακόλουθα είδη ισορροπίας:

1) ***Ευσταθής ισορροπία***, ονομάζεται εκείνη κατά την οποία, αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, μόλις αφεθεί ελεύθερο, επανέρχεται πάλι σ' αυτήν. Οι εμφανιζόμενες δυνάμεις (και ροπές) τείνουν να επαναφέρουν το σώμα στη θέση ισορροπίας στην περίπτωση αυτή.

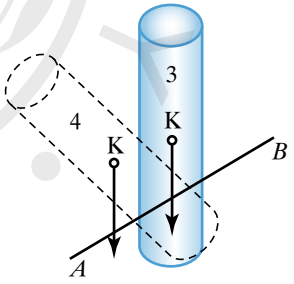
2) ***Ασταθής ισορροπία***, ονομάζεται εκείνη κατά την οποία, αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, μόλις αφεθεί ελεύθερο, απομακρύνεται ακόμη περισσότερο απ' αυτήν. Οι εμφανιζόμενες δυνάμεις (και ροπές) τείνουν να απομακρύνουν το σώμα στη θέση ισορροπίας στην περίπτωση αυτή.

3) ***Αδιάφορη ισορροπία***, ονομάζεται εκείνη κατά την οποία, αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, μόλις αφεθεί ελεύθερο, παραμένει σε ισορροπία στη νέα θέση του. Σ' αυτήν την περίπτωση οι δυνάμεις (και οι ροπές) εξακολουθούν να έχουν συνισταμένη μηδέν.

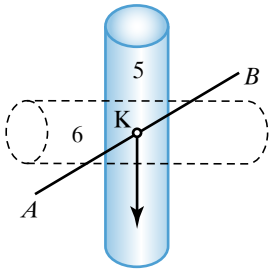
Στο σχήμα 3.8.4 έχομε τα τρία είδη ισορροπίας για κύλινδρο που μπορεί να περιστρέφεται περί άξονα.



(α) Θέση ευσταθούς ισορροπίας



(β) Θέση ασταθούς ισορροπίας



(γ) Θέση αδιάφορης ισορροπίας

Σχ. 3.8.4
Είδη ισορροπίας.

Εδώ παρουσιάζεται ευσταθής ισορροπία, όταν το κ.β. βρίσκεται κάτω απ' τον άξονα στηρίξεως του σώματος [σχ. 3.8.4(α)]. Στη θέση 1 ο κύλινδρος ισορροπεί, διότι η κατακόρυφος που διέρχεται απ' το κ.β. Κ συναντά τον άξονα περιστροφής ΑΒ. Όταν φέρομε τον κύλινδρο στη θέση 2 και τον αφήσομε ελεύθερο, κινείται και επανέρχεται στην αρχική του θέση. Δηλαδή, στην ευσταθή ισορροπία, για μία μικρή αλλαγή της θέσεως του σώματος, το κ.β. του ανυψώνεται και προκαλείται ροπή επαναφοράς που τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας. Στην κατάσταση ηρεμίας του σώματος, το κ.β. του βρίσκεται στη χαμηλότερή του θέση.

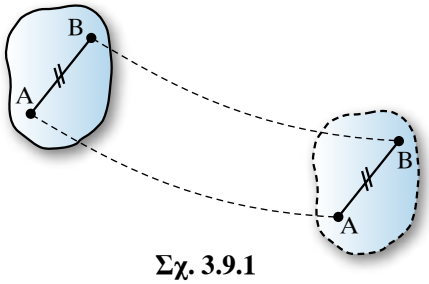
Παρουσιάζεται ασταθής ισορροπία, όταν το κ.β. βρίσκεται πάνω απ' τον άξονα στηρίξεως [σχ. 3.8.4(β)]. Στη θέση 3 ο κύλινδρος ισορροπεί. Όταν τον μετακινήσομε στη θέση 4 και τον αφήσομε ελεύθερο, αυτός απομακρύνεται περισσότερο απ' τη θέση ισορροπίας και έτσι δημιουργείται ροπή ανατροπής. Στην ασταθή ισορροπία, για μία μικρή αλλαγή της θέσεως του σώματος, το κ.β. του χαμηλώνει, οπότε προκαλείται ροπή τέτοια, που απομακρύνει το σώμα ακόμη περισσότερο απ' τη θέση ισορροπίας.

Στην αδιάφορη ισορροπία το κ.β. διέρχεται από τον άξονα στηρίξεως [σχ. 3.8.4(γ)]. Στη θέση 5 ο κύλινδρος ισορροπεί. Ομοίως και όταν τον φέρομε στη θέση 6. Στην αδιάφορη ισορροπία, για μία αλλαγή της θέσεως του σώματος, το κ.β. του ούτε ανυψώνεται ούτε χαμηλώνει και δεν προκαλούνται ροπές επαναφοράς ή ανατροπής.

Στις θέσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας, η δυναμική ενέργεια παίρνει ακρότατες τιμές. Στην ευσταθή ισορροπία γίνεται ελάχιστη, ενώ στην ασταθή μέγιστη. Στην αδιάφορη ισορροπία, κατά τη μετακίνηση του σώματος, η δυναμική ενέργεια παραμένει σταθερή.

3.9 Μεταφορική και στροφική κίνηση στερεού. Στροφορμή. Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κινήσεως.

Μεταφορική ονομάζεται η κίνηση, κατά την οποία όλα τα σημεία ενός σώματος έχουν την ίδια διανυσματική ταχύτητα. Αν το σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, η ταχύτητα του σημείου Α είναι ίση μ' εκείνη του σημείου Β (σχ. 3.9.1), άρα κατά τη μεταφορική κίνηση του σώματος, οι τροχιές όλων των σημείων του είναι παράλληλες.



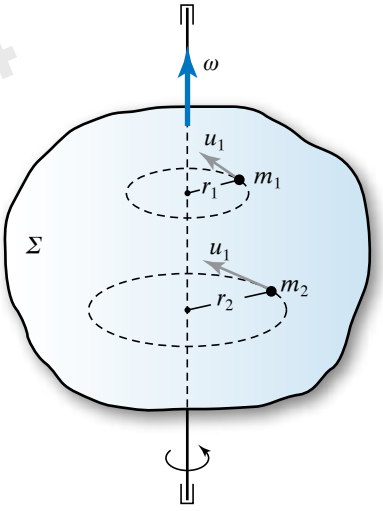
Σχ. 3.9.1
Μεταφορική κίνηση στερεού.

Στη γενική περίπτωση που η τροχιά του σημείου Α είναι καμπύλη γραμμή, η τροχιά του σημείου Β θα έχει την ίδια ακριβώς μορφή, συνεπώς η ευθεία γραμμή που διέρχεται απ' τα τυχαία σημεία Α, Β παραμένει διαρκώς παράλληλη με τον εαυτό της. Κάθε χρονική στιγμή οι διανυσματικές ταχύτητες και οι επιταχύνσεις όλων των σημείων του σώματος είναι ίσες μεταξύ τους.

Κάθε χρονική στιγμή, η θέση του σώματος καθορίζεται πλήρως απ' τη θέση ενός οποιουδήποτε σημείου του. Συνήθως παίρνομε ως τέτοιο σημείο το κ.μ..

3.9.1 Στροφική κίνηση στερεού σώματος περί άξονα.

Ένα στερεό σώμα Σ εκτελεί στροφική κίνηση περί άξονα, όταν κάθε του σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω απ' τον άξονα αυτό. Τα επίπεδα των τροχιών όλων των σημείων του είναι κάθετα στον άξονα. Τα κέντρα των κυκλικών τροχιών βρίσκονται πάνω στον άξονα. Όλα τα σημεία του άξονα παραμένουν σταθερά και ακίνητα κατά την περιστροφή (σχ. 3.9.2).



Σχ. 3.9.2
Στροφική κίνηση στερεού.

Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία του σώματος έχουν κάθε χρονική στιγμή, την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, άρα ίδια συχνότητα και περίοδο περιφοράς. Αν η απόσταση του σημείου απ' τον άξονα περιστροφής είναι r και η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, η γραμμική του ταχύτητα είναι $u = \omega r$.

3.9.2 Κεντρομόλος δύναμη.

Όταν υλικό σημείο (σωμάτιο) μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, έχει γραμμική ταχύτητα $u = \omega r$ και κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$a_{κ} = \omega^2 r = \frac{u^2}{r}.$$

Αυτό, σύμφωνα με τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα), σημαίνει ότι πάνω του πρέπει να ασκείται δύναμη:

$$F_{κ} = ma_{κ} = m\omega^2 r = m\frac{u^2}{r},$$

η οποία ονομάζεται ***κεντρομόλος δύναμη***. Αυτή, όπως και η κεντρομόλος επιτάχυνση, κατευθύνεται προς το κέντρο της κυκλικής κινήσεως.

Η κεντρομόλος δύναμη μπορεί να ασκείται από κάποιο νήμα, στο άκρο του οποίου είναι δεμένο το σωμάτιο ή μπορεί να ασκείται από κάποια μάζα, που βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου (βαρυτική αλληλεπίδραση) ή να οφείλεται σε άλλα αίτια.

3.9.3 Φυγόκεντρος δύναμη.

Ξαναθυμίζομε ότι, μπορούμε να μελετήσομε την κίνηση σωματίου σε κυκλική τροχιά απ' τη σκοπιά ενός περιστρεφόμενου μαζί με το σωμάτιο συστήματος αναφοράς, περί το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Επειδή το σύστημα αυτό δεν είναι αδρανειακό, χρειάζεται να θεωρήσομε ότι, εκτός της πραγματικής δυνάμεως που ασκείται στο σωμάτιο από κάποιο άλλο σώμα, ασκείται και μία ψευδοδύναμη (αδρανειακή δύναμη) με μέτρο:

$$F_{φυγ} = m\omega^2 r = m\frac{u^2}{r}.$$

Αυτή είναι η φυγόκεντρος (φυγόκεντρη) δύναμη, που κατευθύνεται ακτινικά απ' το κέντρο προς τα έξω.

Απ' τη σκοπιά παρατηρητή, που περιστρέφεται μαζί με το μη αδρανειακό σύστημα, το σωμάτιο είναι ακίνητο, άρα η συνισταμένη των δύο δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι μηδέν και οι δυνάμεις βρίσκονται σε ισορροπία, δηλαδή:

$$F_{κ} - F_{φυγ} = F_{κ} - m\omega^2 r = 0 \text{ ή } F_{κ} = m\omega^2 r = m\frac{u^2}{r}.$$

Δηλαδή, βρίσκομε ξανά τη σχέση για την κεντρομόλο δύναμη απ' την αρχή ισορροπίας της πραγματικής και της ψευδοδυνάμεως.

Μερικές φορές, η αναγωγή ενός προβλήματος δυναμικής σε πρόβλημα ισορροπίας διευκολύνει τη συλλογιστική μας στη λύση προβλημάτων.

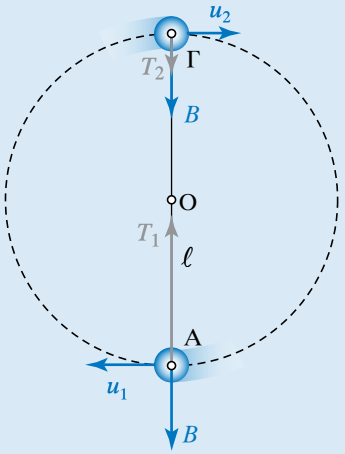
Προσοχή: Μερικές φορές, κυρίως παλαιότερα, αλλά και σήμερα ο όρος φυγόκεντρος δύναμη σημαίνει εκτός από την αδρανειακή δύναμη και κάποιαν άλλη δύναμη. Συγκεκριμένα, σημαίνει τη δύναμη που ασκεί το περιφερόμενο σωμάτιο στο άλλο σώμα που του ασκεί την κεντρομόλο δύναμη, δηλαδή η κεντρομόλος και η φυγόκεντρος είναι δράση και αντίδραση, σύμφωνα με τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα. Αυτές είναι δυνάμεις που ασκούνται σε δύο διαφορετικά υλικά σημεία.

Η φυγόκεντρος μ' αυτήν την έννοια, δηλαδή ως η μία δύναμη του ζεύγους δράση-αντίδραση, ασκείται σε διαφορετικό υλικό σημείο απ' αυτό που ασκείται η αντίστοιχή της κεντρομόλος.

Η φυγόκεντρος, ως αδρανειακή δύναμη, και η κεντρομόλος ασκούνται στο ίδιο υλικό σημείο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σφαίρα βάρους $\vec{B}$ δεμένη στο ελεύθερο άκρο αβαρούς σχοινιού μήκους ℓ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση περί το κέντρο Ο σε κατακόρυφο επίπεδο (σχ. 3.9.3). Στην κατώτερη



Σχ. 3.9.3

θέση Α της τροχιάς της η σφαίρα έχει ταχύτητα $\vec{u}_1$ και της ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}_1$ του σχοινιού. Η συνισταμένη τους παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως της κυκλικής κινήσεως. Άρα:

$$F_K = T_1 - B = m\frac{u_1^2}{\ell}.$$

Στην ανώτερη θέση Γ της τροχιάς της η σφαίρα έχει ταχύτητα $\vec{u}_2$ και της ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}_2$ του σχοινιού.

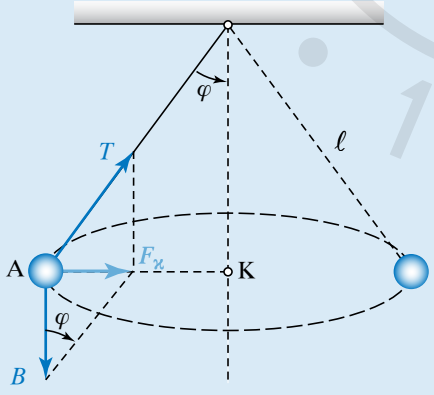
Η συνισταμένη τους παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως της κυκλικής κινήσεως.

Άρα: $$F_K = T_2 + B = m\frac{u_2^2}{\ell}.$$

2. Σφαίρα βάρους $\vec{B}$ δεμένη στο ελεύθερο άκρο αβαρούς σχοινιού μήκους ℓ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R=ΑΚ με κέντρο το Κ, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο (κωνικό εκκρεμές) (σχ. 3.9.4). Οι μόνες δυνάμεις που της ασκούνται είναι το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού. Η συνισταμένη τους αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη, δηλαδή:

$$\vec{B} + \vec{T} = \vec{F}_\kappa.$$

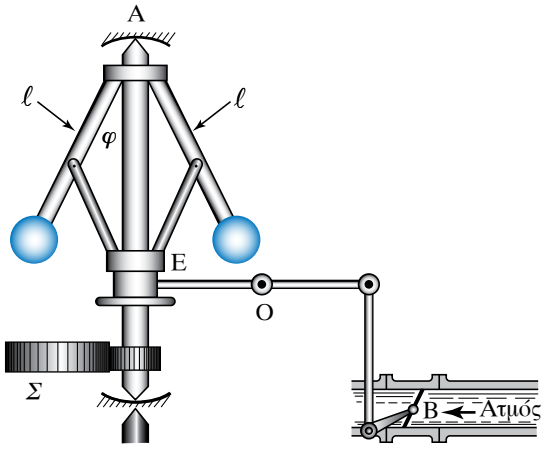
Ισχύει ότι: $\tan\varphi = \dfrac{F_K}{B}$, επομένως $F_\kappa = B\tan\varphi$.



Σχ. 3.9.4

3.9.4 Εφαρμογή της κεντρομόλου δυνάμεως. Ρυθμιστής του Watt.

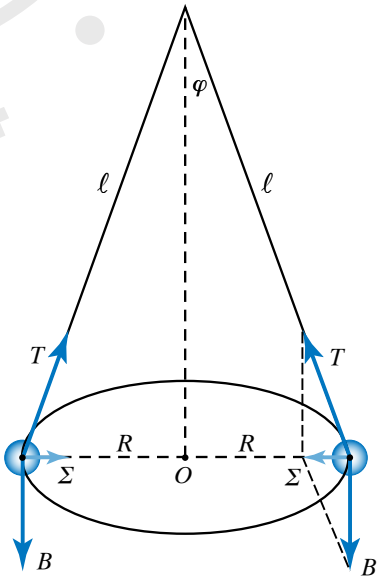
Ο ρυθμιστής του Watt είναι διάταξη που χρησιμοποιείται σε (παλιές) ατμομηχανές, αλλά η ίδια αρχή χρησιμοποιείται και στον κατανεμητή αυτοκινήτων παλαιού τύπου.



Σχ. 3.9.5

Ρυθμιστής του Watt.

Αποτελείται από κατακόρυφο στέλεχος ΑΕ, που μπορεί να στρέφεται γύρω από το διαμήκη του άξονα, συνδεδεμένο με την ατμομηχανή. Στο άνω άκρο του βρίσκονται στερεωμένοι δύο βραχίονες μήκους ℓ, που στις άκρες τους φέρουν δύο πανομοιότυπες σφαίρες μάζας m (σχ. 3.9.5). Όταν το κατακόρυφο στέλεχος περιστρέφεται, οι σφαίρες διαγράφουν κυκλική τροχιά, με κέντρο τον άξονα περιστροφής και ακτίνα R (σχ. 3.9.6). Στην κάθε μία ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ από τον βραχίονα. Η συνισταμένη τους $\vec{\Sigma}$ παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως, άρα $\Sigma = m\omega^2 R$. Επίσης έχομε $\Sigma = B\tan\varphi = mg\tan\varphi$, άρα $mg\tan\varphi = m\omega^2 R$.



Σχ. 3.9.6

Δυνάμεις που δρουν στον ρυθμιστή του Watt.

Δηλαδή $\tan\varphi = \dfrac{\omega^2 R}{g}$.

Συνεπώς $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\omega^2 \ell \sin\varphi}{g}$ ή $\cos\varphi = \dfrac{g}{\omega^2 \ell}$.

Από τη σχέση αυτή έπεται πως όταν αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω των σφαιρών, μειώνεται το $\cos\varphi$, άρα αυξάνεται η γωνία φ. Έτσι, οι περιστρεφόμενες σφαίρες ανυψώνονται συμπαρασύροντας τον δακτύλιο Ε, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ροή του ατμού. Ο ρυθμιστής του Watt με κατάλληλο σύστημα μοχλών χρησιμοποιείται στις ατμομηχανές, προκειμένου να ρυθμίζει την ποσότητα των ατμών που εισρέουν σ' αυτές, ούτως ώστε να διατηρείται σταθερή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

3.9.5 Εφαρμογή της φυγόκεντρης δυνάμεως. Φυγοκεντρικός διαχωριστήρας.

Το προηγούμενο πρόβλημα, που αντιμετωπίσαμε με χρήση της κεντρομόλου δυνάμεως, μπορεί να αντιμετωπιστεί και με χρήση της φυγόκεντρης δυνάμεως.

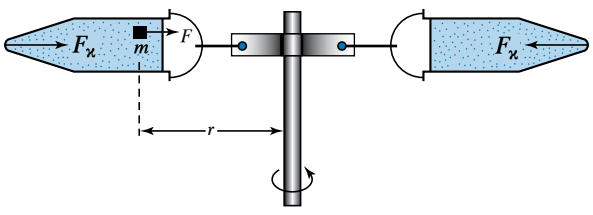
Ο φυγοκεντρικός διαχωριστήρας χρησιμοποιείται για να διαχωρίζονται στερεές ουσίες που αιωρούνται σε υγρά. Τοποθετούμε το υγρό σε δοχείο, το οποίο περιστρέφομε πολύ γρήγορα και κατά την περιστροφική κίνηση τα βαρύτερα συστατικά συγκεντρώνονται στον πυθμένα του δοχείου και διαχωρίζονται. Αν υπάρχουν συστατικά ελαφρύτερα απ' το υγρό, τότε αυτά μαζεύονται στην επιφάνεια. Η φυγοκέντριση του αίματος προκαλεί το διαχωρισμό των ερυθρών αιμοσφαιρίων (σχ. 3.9.7), ενώ η φυγοκέντριση του γάλακτος το διαχωρισμό του βουτύρου, που συγκεντρώνεται στην επιφάνεια του υγρού.

Η ερμηνεία του φαινομένου γίνεται ευκολότερα με χρήση της φυγόκεντρης δυνάμεως.

Ο παρατηρητής που συμπαρασύρεται με το στρεφόμενο σύστημα αναφοράς εισάγει την ψευδοδύναμη, τη φυγόκεντρο. Το σύστημα είναι σαν να βρίσκεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο με κατεύθυνση ακτινική προς τα έξω. Η ένταση του πεδίου είναι:

$$g_{\varphi\upsilon\gamma} = \omega^2 r = \frac{u^2}{r}.$$

Αγνοούμε την πραγματική βαρύτητα, η οποία σε σχέση με την παραπάνω είναι πολύ πιο ασθενική. Σε όλα τα σωμάτια που βρίσκονται μέσα στο περιστρεφόμενο υγρό ασκείται δύναμη ακτινικά προς τα έξω ίση με $F_{\varphi\upsilon\gamma} = m\omega^2 r$ και επίσης «άνωση», που είναι ακτινική αντίθετη της πρώτης, δηλαδή προς το κέντρο. Ισχύουν όσα ξέρομε για τη συνήθη πλεύση. Αν τα σωμάτια είναι πυκνότερα από το υγρό, θα πηγαίνουν στον πυθμένα του δοχείου, αν είναι ελαφρύτερα, θα πηγαίνουν στην επιφάνεια και έτσι επιτυγχάνεται ο διαχωρισμός. Άλλη εφαρμογή της φυγόκεντρης δυνάμεως είναι στις φυγοκεντρικές υδραντλίες, οι οποίες περιστρέφοντας το νερό το ανεβάζουν σε μεγάλα ύψη.



Σχ. 3.9.7
Φυγοκεντρικός διαχωριστήρας.

3.9.6 Ροπή αδρανείας ως προς άξονα.

Ροπή αδρανείας υλικού σημείου μάζας m ως προς (ή περί) άξονα, απ' τον οποίο απέχει απόσταση r, ονομάζεται το γινόμενο $I = m r^2$. Είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος, με μονάδα μετρήσεως στο SI το $\mathrm{kg \cdot m^2}$.

Ροπή αδρανείας σώματος (συστήματος υλικών σημείων) ως προς (ή περί) άξονα, ονομάζεται το άθροισμα των ροπών αδρανείας όλων των υλικών σημείων του σώματος. Δηλαδή $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_i r_i^2$, άρα $I = \Sigma m_i r_i^2$. Για σώμα που δεν αποτελείται από διακριτές μάζες, αλλά από μία συνεχή κατανομή μάζας, η σχέση $I = \Sigma m_i r_i^2$ γράφεται ως ολοκλήρωμα:

$$I = \int r^2 dm.$$

Θεωρούμε δηλαδή ότι το σώμα διαμερίζεται σε απειροστά στοιχειώδη σωμάτια (υλικά σημεία) μάζας dm το καθένα και ότι r είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής του κάθε σωματίου. Παρατηρούμε ότι η τιμή της ροπής αδρανείας σώματος ως προς έναν άξονα περιστροφής εξαρτάται από τη μάζα του σώματος και την κατανομή της ως προς τον άξονα. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα, τόσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδρανείας. Επίσης, η κατανομή των μαζών m_i μακριά από τον άξονα περιστροφής προσδίδει στο σώμα αυξημένη ροπή

αδρανείας, ανάλογη του τετραγώνου των αποστάσεων r_i των στοιχειωδών μαζών από τον άξονα. Η ροπή αδρανείας ενός τροχού ως προς τον άξονά του είναι μεγάλη, διότι η μάζα του είναι κατανεμημένη μακριά από τον άξονα αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δύο σώματα αμελητέων διαστάσεων μαζών m_1, m_2 αντίστοιχα, συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο μήκους $R_1 + R_2$ και περιστρέφονται γύρω από άξονα κάθετο στη ράβδο (σχ. 3.9.8). Η ροπή αδρανείας του συστήματός τους, είναι:

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2.$$

Στην περίπτωση που $m_1 = m_2 = m$ και $R_1 = R_2 = R$ έχομε $I = 2mR^2$. Η ροπή αδρανείας του συστήματος των δύο σωμάτων, ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από τη μάζα m_1, είναι:

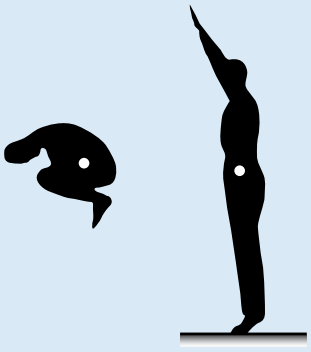
$$I = m_1 \cdot 0^2 + m_2 (R_1 + R_2)^2 = m_2 (R_1 + R_2)^2.$$

Στην περίπτωση που $m_1 = m_2 = m$ και $R_1 = R_2 = R$ έχομε:

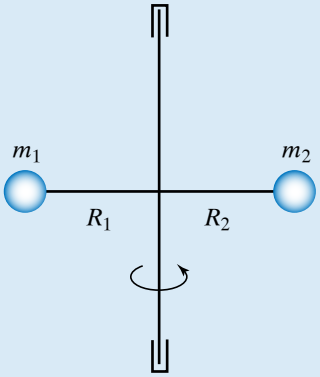
$$I = m\,(2R)^2 = 4mR^2.$$

Δηλαδή σ' αυτήν τη περίπτωση η ροπή αδρανείας ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα (οποιοδήποτε) άκρο είναι διπλάσια από εκείνη ως προς έναν άξονα που διέρχεται απ' το κέντρο του.

2. Ο άνθρωπος, με τεντωμένα τα χέρια και τα πόδια του, έχει περίπου εξαπλάσια ροπή αδρανείας από εκείνη που έχει όταν συμπτύξει τα άκρα του (σχ. 3.9.9).



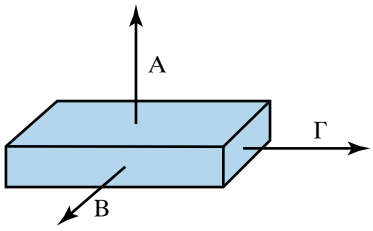
Σχ. 3.9.9



Σχ. 3.9.8

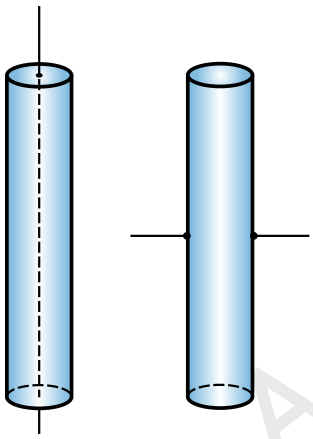
3.9.7 Κύριοι κεντρικοί άξονες αδρανείας.

Θεωρούμε σώμα μάζας m και συγκρίνομε τις ροπές αδρανείας του ως προς διάφορους άξονες που διέρχονται απ' το κ.μ. του. Για δύο απ' αυτούς, η ροπή παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αυτοί οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους. Αν πάρομε έναν τρίτο άξονα κάθετο στους δύο προηγούμενους, που διέρχεται κι αυτός απ' το κ.μ. του σώματος, έχομε κατασκευάσει ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων που ονομάζονται ***κύριοι κεντρικοί άξονες αδρανείας*** (σχ. 3.9.10). Έστω κύλινδρος με μικρή κυκλική διατομή βάσεως. Η ροπή αδρανείας του για τον διαμήκη άξονά του παίρνει τη μικρότερη τιμή, άρα αυτός είναι ο άξονας ελάχιστης ροπής αδρανείας. Οι ροπές αδρανείας για τους άλλους δύο κύριους άξονες αδρανείας είναι ίσες μεταξύ τους (σχ. 3.9.11), ενώ για οποιονδήποτε άλλον άξονα χρειάζεται στήριξη, ώστε να μπορεί ένα στερεό σώμα να περιστρέφεται γύρω απ' αυτόν. Κάτι τέτοιο για



Σχ. 3.9.10
Κύριοι κεντρικοί άξονες αδρανείας σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

τους κύριους κεντρικούς άξονες δεν χρειάζεται. Παρατίθεται πίνακας με τις ροπές αδρανείας μερικών στερεών ως προς κυρίους κεντρικούς άξονες αδρανείας (πίν. 3.9).



Σχ. 3.9.11
Κύριοι κεντρικοί άξονες αδρανείας σε κύλινδρο.

Πίνακας 3.9
Ροπή αδρανείας μερικών ομογενών στερεών.

Σώμα	*Άξονας*	*Ροπή αδρανείας*
Υλικό σημείο	Απόσταση R	mR^2
Λεπτή ράβδος μήκους ℓ	Κάθετος στη ράβδο στο κέντρο μάζας	$\frac{1}{12}M\ell^2$
Ορθογώνιο επίπεδο διαστάσεων α,β	Κάθετος στο επίπεδο στο κέντρο μάζας	$\frac{1}{12}M(\alpha^2+\beta^2)$
Λεπτός δακτύλιος	Κάθετος στο επίπεδο στο κέντρο του. Διάμετρος	MR^2 $\frac{1}{2}MR^2$
Δίσκος	Κάθετος στο κέντρο	$\frac{1}{2}MR^2$
Κύλινδρος	Άξονας κυλίνδρου	$\frac{1}{2}MR^2$
Σφαίρα	Διάμετρος	$\frac{2}{5}MR^2$
Κοίλη σφαίρα	Διάμετρος	$\frac{2}{3}MR^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσομε τη ροπή αδρανείας κυλινδρικού φλοιού μάζας M, σταθερής πυκνότητας ϱ, εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2, ως προς τον άξονα του κυλίνδρου (σχ. 3.9.12). Θεωρούμε στοιχειώδη κυλινδρικό φλοιό μάζας $\mathrm{d}m$, όγκου $\mathrm{d}V$, ακτίνας r $(R_1 \le r \le R_2)$, απειροστού πάχους $\mathrm{d}r$ και ύψους ℓ. Ισχύει ότι:

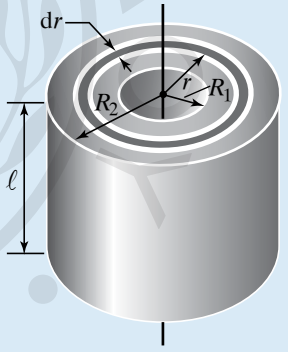
$$\varrho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}m}{(2\pi r\,\mathrm{d}r)\ell} \quad \text{άρα} \quad \mathrm{d}m = (2\pi\varrho r\,\ell)\mathrm{d}r.$$

Άρα

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m = 2\pi\varrho\ell\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr = 2\pi\varrho\ell\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} =$$

$$= \underbrace{\pi\varrho(R_2^2 - R_1^2)\ell}_{M}\,\frac{R_2^2 + R_1^2}{2} = M\,\frac{R_2^2 + R_1^2}{2}.$$

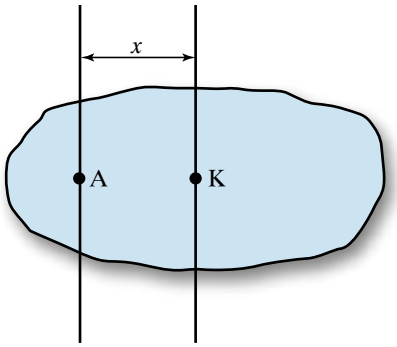
Αν $R_1 = 0$, $R_2 = R$, συμπαγής κύλινδρος, τότε $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Σχ. 3.9.12

3.9.8 Θεώρημα Steiner (Θεώρημα παραλλήλων αξόνων).

Αν $I_{\chi\mu}$ είναι η ροπή αδρανείας σώματος μάζας m, περί άξονα που διέρχεται από το κ.μ. του, Κ, και I_A η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από σημείο Α και είναι παράλληλος με τον προηγούμενο σε απόσταση x (σχ. 3.9.13), ισχύει ότι $I_\mathrm{A} = I_{\chi\mu} + mx^2$. Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η ροπή αδρανείας σώματος ως προς διάφορους άξονες, παράλληλους μεταξύ τους, ελαχιστοποιείται για εκείνον τον άξονα, που διέρχεται απ' το κ.μ. του σώματος.



Σχ. 3.9.13
Τομή σώματος από επίπεδο κάθετο στους άξονες.

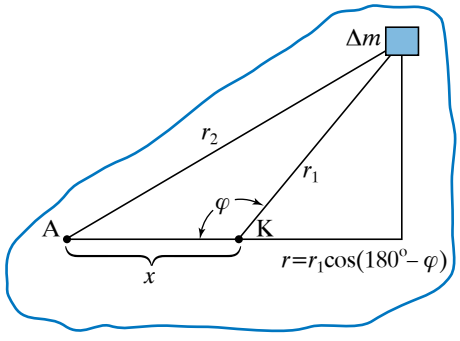
Απόδειξη.

Θεωρούμε μία τομή του σώματος από επίπεδο κάθετο στους άξονες που διέρχονται από το κ.μ. Κ και το σημείο Α (σχ. 3.9.14). Η ροπή αδρανείας της στοιχειώδους μάζας Δm ως προς τους δύο άξονες είναι $I_{\kappa\mu} = \Delta m\, r_1^2$ και $I_A = \Delta m\, r_2^2$.

Η συνολική ροπή αδρανείας του στερεού σώματος ως προς τους δύο άξονες είναι $I_{\kappa\mu} = \Sigma\, \Delta m\, r_1^2$ και $I_A = \Sigma\, \Delta m\, r_2^2$. Απ' τον νόμο των συνημιτόνων ισχύει ότι $r_2^2 = r_1^2 + x^2 - 2 r_1 x \cos\varphi$. Άρα:

$$
\begin{aligned}
I_A &= \Sigma\, \Delta m\, r_2^{\,2} = \\
&= \Sigma\, \Delta m\, (r_1^2 + x^2 - 2 r_1\, x \cos\varphi) \\
&= \underbrace{\Sigma\, \Delta m\, r_1^2}_{I_{\kappa\mu}} + \Sigma\, \Delta m\, x^2 - \Sigma\, \Delta m\ (2 r_1\, x \cos\varphi) = \\
&= I_{\kappa\mu} + x^2\, \Sigma\, \Delta m - 2\, x\, \Sigma\, \Delta m\ r_1 \cos\varphi = \\
&= I_{\kappa\mu} + x^2\, m + 2\, x\, \Sigma\, \Delta m\, r_1 \cos(180^0 - \varphi) = \\
&= I_{\kappa\mu} + m\, x^2 + \underbrace{2\, x\, \Sigma\, \Delta m\, r}_{0} = I_{\kappa\mu} + m\, x^2
\end{aligned}
$$

Ο τελευταίος όρος του αθροίσματος είναι μηδέν, διότι $\Sigma\, \Delta m\, r = 0$, εφόσον και το r είναι η απόσταση από άξονα διερχόμενο από το κ.μ. Κ.



Σχ. 3.9.14
Απόσταση στοιχειώδους μάζας Δm από τους άξονες περιστροφής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η ροπή αδρανείας σώματος μάζας $m = 5$ kg ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο κ.μ. του είναι $I_{\kappa\mu} = 55\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Σε πόση απόσταση d πρέπει να τοποθετηθεί άξονας παράλληλος με τον πρώτο, ώστε η ροπή αδρανείας του σώματος να είναι $I_d = 100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$;

Λύση

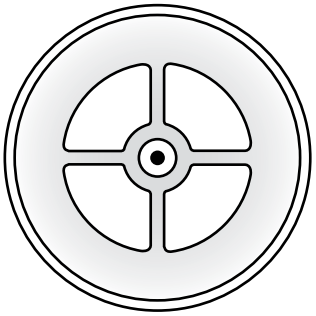
Απ' το θεώρημα του Steiner ισχύει ότι $I_d = I_{\kappa\mu} + m\, d^2$, άρα (στο SI) $100 = 55 + 5\, d^2$, δηλαδή $d = 3$m.

3.9.9 Σφόνδυλος και ροπή αδρανείας σφονδύλου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Σφόνδυλος είναι ένας δίσκος του οποίου όλη (σχεδόν) η μάζα βρίσκεται κατανεμημένη στην περιφέρειά του και στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του (σχ. 3.9.15). Ο λόγος που η μάζα του απέχει όσο το δυνατόν περισσότερο από το κέντρο του, είναι για να μεγιστοποιηθεί η ροπή αδρανείας του περί τον άξονα, γύρω απ' τον οποίο περιστρέφεται. Χρησιμοποιείται ως εξάρτημα σε μηχανές. Ο σκοπός του είναι να αποτρέπει τις μεταβολές της γωνιακής ταχύτητας του άξονα περιστροφής της μηχανής, πάνω στην οποία τοποθετήθηκε, άρα να διατηρεί την ομαλή περιστροφή του άξονα της μηχανής.

Αυτό το επιτυγχάνει, σύμφωνα με όσα είπαμε, λόγω της μεγάλης ροπής αδράνειας.

Θεωρούμε πως όλη η μάζα του σφονδύλου είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Αν m_1, m_2,



Σχ. 3.9.15
Σφόνδυλος.

m_3,... είναι οι στοιχειώδεις μάζες που τον αποτελούν, τότε:

$$I = m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 r^2 + \ldots = \\ = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) r^2 = m r^2.$$

3.9.10 Θεμελιώδης εξίσωση της στροφικής κινήσεως.

Έστω στερεό σώμα που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\Gamma\Omega N}$ και $\vec{\tau}$ η συνισταμένη των ροπών που του ασκούνται. Ισχύει ότι:

$$\tau = I\, a_{\Gamma\Omega N} = I \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}, \qquad a_{\Gamma\Omega N} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},$$

όπου I η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Η ανωτέρω ονομάζεται ***θεμελιώδης εξίσωση*** της στροφικής κινήσεως και εκφράζει τον θεμελιώδη νόμο αυτής:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται σε σώμα που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ισούται με το γινόμενο της ροπής αδρανείας (ως προς αυτόν τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιταχύνσεως.

Όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδρανείας του σώματος, τόσο πιο δύσκολα αλλάζει η περιστροφική του κατάσταση. Η ροπή αδρανείας εκφράζει στην περιστροφική κίνηση ό,τι εκφράζει η μάζα στη μεταφορική, δηλαδή την αδράνεια του σώματος. Σε αντίθεση με τη μάζα ενός σώματος, που είναι σταθερή, η ροπή αδρανείας εξαρτάται κάθε φορά από τη θέση του άξονα περιστροφής.

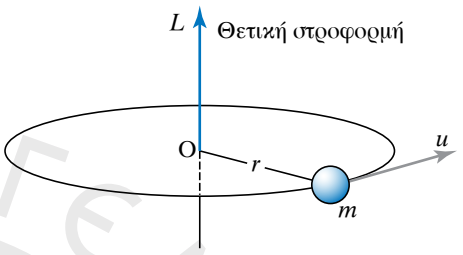
3.9.11 Διερεύνηση της θεμελιώδους εξισώσεως.

Από τη σχέση $\tau = I\, a_{\Gamma\Omega N}$, όταν $\tau = 0$, ισχύει $I\, a_{\Gamma\Omega N} = 0$, επειδή $I \neq 0$, ισχύει $a_{\Gamma\Omega N} = 0$. Δηλαδή, όταν σε σώμα που μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα η συνολική ασκούμενη ροπή είναι μηδέν, το σώμα ή θα είναι ακίνητο ή θα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Όταν $\tau =$ σταθερή, $I\, a_{\Gamma\Omega N} =$ σταθερή. Αφού η $I =$ σταθερή, $\alpha_{\Gamma\Omega N} =$ σταθερή. Δηλαδή, όταν σώμα που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα έχει σταθερή ροπή αδρανείας και η ροπή που του ασκείται είναι σταθερή, το σώμα θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση.

3.9.12 Στροφορμή υλικού σημείου περί άξονα.

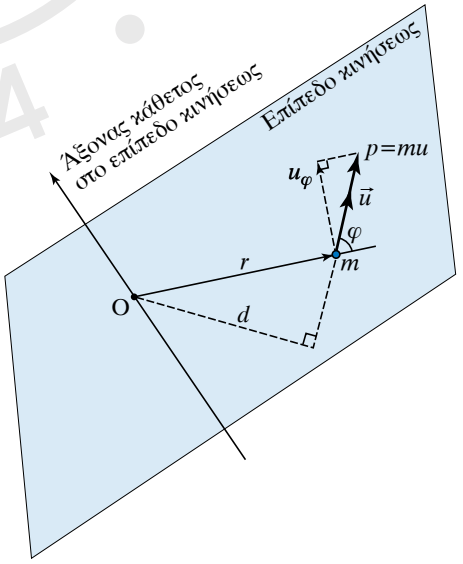
Έστω υλικό σημείο μάζας m που κινείται περί άξονα σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r κάθετου στον άξονα, που τη χρονική στιγμή t έχει γραμμική ταχύτητα $\vec{u}$, άρα ορμή $\vec{p} = m\,\vec{u}$. ***Στροφορμή του υλικού σημείου*** ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου κατά τη χρονική στιγμή t, ονομάζεται το φυσικό μέγεθος που ορίζεται από τη μαθηματική σχέση: $L = p\, r = m\, u\, r$. Η στροφορμή είναι μέγεθος διανυσματικό. Ο φορέας της είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (σχ. 3.9.16). Σημείο εφαρμογής της είναι το κέντρο Ο του κύκλου.



Σχ. 3.9.16
Σχηματική παράσταση κινήσεως με θετική στροφορμή

Γενικότερα, ορίζεται η στροφορμή περί άξονα ακόμη κι όταν το σωμάτιο δεν εκτελεί κυκλική κίνηση, αλλά τυχαία κίνηση από τη διανυσματική θέση $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{u}$ όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσεως του σωματίου που κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ και έχει ορμή $\vec{p}$.

Θα περιοριστούμε στη μελέτη της κινήσεως στο επίπεδο και άξονα κάθετο στο επίπεδο αυτό (σχ. 3.9.17). Σ' αυτήν την περίπτωση για τη στροφορμή



Σχ. 3.9.17
Σχηματική παράσταση για τον υπολογισμό της στροφορμής υλικού σημείου, που δεν εκτελεί κυκλική κίνηση.

προκύπτει $L = p\,d$, όπου d η απόσταση του φορέα της ορμής από το σημείο που ο άξονας τέμνει το επίπεδο κινήσεως. Ισχύει η σχέση $L = p\,d = p\,r\sin\varphi = m\,u\,r\sin\varphi$. Η παράσταση $u\sin\varphi = u_\varphi$ είναι η προβολή της ταχύτητας πάνω στην κάθετη ευθεία προς την ακτίνα r. Άρα έχομε: $L = m\,r\,u_\varphi$.

Δηλαδή τα $\vec{r}, \vec{u}_\varphi$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτουν οι μονάδες μετρήσεως της στροφορμής, που είναι το $\mathrm{kg\cdot m^2/s}$ στο SI και το $\mathrm{g\cdot cm^2/s}$ στο σύστημα CGS.

3.9.13 Στροφορμή συστήματος υλικών σημείων περί άξονα.

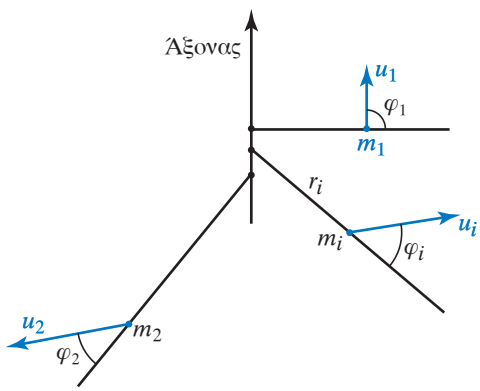
Έστω σύστημα υλικών σημείων, που κινούνται σε επίπεδα κάθετα σε προσανατολισμένο άξονα (σχ. 3.9.18). Η ολική στροφορμή του συστήματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των στροφορμών των σωματίων. Έχομε:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots = \sum m_i\, r_i\, u_i \sin\varphi_i = \sum m_i\, r_i\, u_{\varphi i}.$$

Αν υποθέσομε ότι όλα τα υλικά σημεία περιφέρονται κάθε χρονική στιγμή με ίδια γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα (μπορεί να έχουν το καθένα και ακτινική ταχύτητα), τότε θα έχομε $u_{\varphi i} = \omega \cdot r_i$, επομένως:

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + L_3 + \ldots = \\ &= m_1\, u_{\varphi 1}\, r_1 + m_2\, u_{\varphi 2}\, r_2 + m_3\, u_{\varphi 3}\, r_3 + \ldots \\ &= m_1\,\omega\, r_1^2 + m_2\,\omega\, r_2^2 + m_3\,\omega\, r_3^2 + \ldots \\ &= \omega(m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2 + m_3\, r_3^2 + \ldots) \\ &= I\,\omega \end{aligned}$$

όπου $I = m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2 + m_3\, r_3^2 + \ldots$, είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα.



Σχ. 3.9.18
Σύστημα υλικών σημείων.

Αφού μονάδα μετρήσεως της ροπής αδρανείας I στο SI είναι το $\mathrm{kg\cdot m^2}$ και της γωνιακής ταχύτητας ω το rad/s, μονάδα μετρήσεως της στροφορμής στο SI είναι και το $\mathrm{kg\cdot m^2\cdot rad/s}$. Αντίστοιχα στο CGS, μονάδα μετρήσεως της ροπής αδρανείας I είναι το $\mathrm{g\cdot m^2}$ και της γωνιακής ταχύτητας ω το rad/s. Συνεπώς, μονάδα μετρήσεως της στροφορμής στο CGS είναι και το $\mathrm{g\cdot m^2\cdot rad/s}$.

3.9.14 Γενικότερη διατύπωση της θεμελιώδους εξισώσεως της στροφικής κινήσεως.

Αν σε σύστημα υλικών σημείων ασκείται εξωτερική ροπή περί άξονα ίση με $\vec{\tau}$, τότε αν η στροφορμή του συστήματος είναι τη στιγμή t ίση με $\vec{L}$, ο νόμος της στροφικής κινήσεως γίνεται:

$$\tau = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t.$$

Τα σωμάτια του συστήματος μπορεί να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και να κάνουν διάφορες κινήσεις. Η προϋπόθεση που πρέπει να ισχύει είναι ότι οι εσωτερικές δυνάμεις πρέπει να ακολουθούν την αρχή δράσεως-αντιδράσεως (είναι πάνω στον ίδιο φορέα), οπότε το άθροισμα των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με μηδέν.

Αν η στροφορμή μπορεί να γραφτεί ως $L = I\,\omega$, όπως είδαμε προηγουμένως, τότε έχομε:

$$\tau = \frac{\mathrm{d}(I\,\omega)}{\mathrm{d}t}.$$

Η σχέση ισχύει και όταν το I μεταβάλλεται με τον χρόνο. Αν $I =$ σταθερό (περίπτωση στερεού σώματος), τότε η σχέση που αναφέραμε στην αρχή μετατρέπεται ως εξής:

$$\tau = I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

Σημειώνομε ότι όλες οι σχέσεις του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κινήσεως ισχύουν για σταθερό άξονα περιστροφής, όμως ισχύουν και για επιταχυνόμενο άξονα, αρκεί να διέρχεται απ' το κ.μ. του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα μετέχει δύο κινήσεων, της κινήσεως του κ.μ. που περιγράφεται από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, όπως έχομε αναφέρει στα προηγούμενα, και της περιστροφής περί τον άξονα που διέρχεται από το κ.μ. και ακολουθεί τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κινήσεως.

3.9.15 Αρχή διατηρήσεως της στροφορμής ενός σώματος.

Αν σε σώμα που μπορεί να στραφεί περί άξονα δεν ασκείται ροπή (ή ασκούνται ροπές, αλλά έχουν συνισταμένη μηδέν), η στροφορμή του παραμένει σταθερή.

Πράγματι, από τη σχέση $\tau = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$, όταν $\tau = 0$, έχομε $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = 0$. Άρα L = σταθερή.

3.9.16 Αρχή διατηρήσεως της στροφορμής συστήματος σωμάτων.

Αν η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή. Δηλαδή η στροφορμή μονωμένου συστήματος διατηρείται σταθερή.

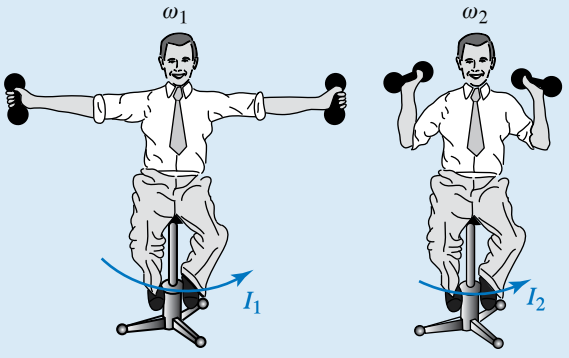
Πράγματι, από $\tau_{\text{εξ}} = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$, αν $\tau_{\text{εξ}} = 0$, είναι $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = 0$.

Άρα L = σταθερή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Άνθρωπος ακινητεί καθισμένος σε σκαμπό που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα με λίγες τριβές και κρατά από ένα βαράκι στο κάθε τεντωμένο χέρι του (σχ. 3.9.19). Με μία πάρα πολύ μικρή ώθηση του προσφέρομε γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_1$ και έστω I_1 η ροπή αδρανείας του ως προς τον άξονα περιστροφής.

Θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_1$, διότι δεν επιδρά πάνω του καμία εξωτερική ροπή. Έστω ότι πλησιάζει τα χέρια του μαζί με τα βαράκια στο σώμα του. Η ροπή αδρανείας του ως προς τον άξονα περιστροφής μειώνεται. Η στροφορμή παραμένει σταθερή, διότι δεν του ασκήθηκε εξωτερική ροπή. Άρα, ο άνθρωπος αποκτά νέα γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_2$ πιο μεγάλη από την ω_1, διότι $L_1 = L_2$ άρα $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ και $I_2 < I_1$.



Σχ. 3.9.19

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τέσσερεις συγγραμμικές δυνάμεις με μέτρο $F_1 = 1$ N, $F_2 = 2$ N, $F_3 = 3$ N και $F_4 = 4$ N ασκούνται στο ίδιο σώμα. Να βρείτε τη συνισταμένη τους στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Οι F_1, F_2 είναι ομόρροπες και ταυτόχρονα αντίρροπες με τις F_3, F_4.
β) Οι F_1, F_2, F_3 είναι ομόρροπες και ταυτόχρονα αντίρροπες με την F_4.
γ) Οι F_2, F_3, F_4 είναι ομόρροπες και ταυτόχρονα αντίρροπες με την F_1.

2. Σε σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = 3$ N, F_2 που όταν είναι ομόρροπες, η συνισταμένη τους έχει μέτρο 5 N. Ποιο το μέτρο της συνισταμένης τους, όταν είναι κάθετες μεταξύ τους;

3. Σε ακίνητο σώμα μάζας 2 kg ασκούνται δύο δυνάμεις, η μία προς τα δεξιά και η άλλη προς τα αριστερά, μέτρων 4 N και 10 N αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος και την απόσταση που θα διανύσει σε χρόνο 5 s.

4. Σε σώμα μάζας $m = 4$ kg που κινείται με ταχύτητα $u_0 = 10$ m/s, ασκείται σταθερή δύναμη F κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας που μετά από χρόνο $t = 3$ s αυξάνεται σε $u = 25$ m/s. Να υπολογίσετε το μέτρο της δυνάμεως F.

5. Σε σώμα που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $u = 5$ m/s ασκούνται τέσσερεις συγγραμμικές δυνάμεις με μέτρα $F_1 = F_2 = 8$ N, $F_3 = 4$ N, $F_4 = 5$ N. Οι δυνάμεις F_1, F_2 είναι ομόρροπες και ταυτόχρονα αντίρροπες των F_3, F_4.
α) Να εξετάσετε αν ασκείται στο σώμα άλλη δύναμη. Αν ναι, να προσδιορίσετε τα χαρακτηριστικά της.
β) Πόσο μετατοπίζεται το σώμα σε χρόνο 1 min;
γ) Πόσο χρόνο χρειάζεται το σώμα για να μετατοπιστεί κατά 1 km;

6. Σε σώμα μάζας $m = 8$ kg ασκείται κατακόρυφη δύναμη $F = 85$ N με κατεύθυνση προς τα πάνω. Να υπολογίσετε το διάστημα που διήνυσε και την ταχύτητα που απέκτησε μετά από χρόνο $t = 4$ s. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

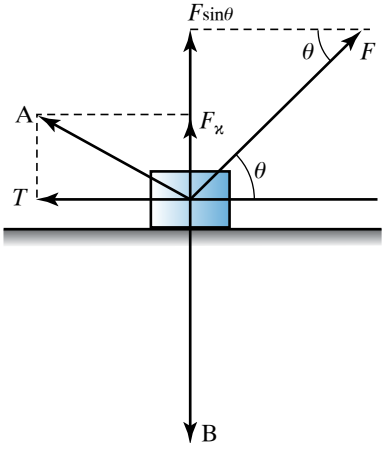
7. Σε σώμα μάζας m = 8 kg που κινείται (ολισθαίνει) προς τα δεξιά πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (χωρίς τριβή) με σταθερή ταχύτητα u_o ασκείται δύναμη $F = 5$ N με οριζόντια διεύθυνση και φορά προς τα αριστερά. Το σώμα σταματά μετά από χρόνο $t = 8$ s. Να υπολογίσετε:
α) Την αρχική ταχύτητα u_o του σώματος.
β) Το διάστημα που διήνυσε μέχρι να σταματήσει.
γ) Μετά από πόσο χρόνο το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά.

8. Σε σώμα μάζας $m = 100$ kg που ακινητεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 50$ N κι αυτό συνεχίζει να ακινητεί. Ποιο το μέτρο της στατικής τριβής; Αν $g = 10$ m/s^2 και ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ σώματος-δαπέδου είναι $\mu_{o\varrho} = 0{,}5$, να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της F, ώστε να μην αρχίσει η κίνηση του σώματος.

9. Σώμα μάζας $m = 2$ kg κινείται πάνω σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $u = 8$ m/s υπό την επίδραση οριζόντιας δυνάμεως $F = 10$ N. Αν $g = 10$ m/s^2 να υπολογίσετε:
α) Το μέτρο και τον συντελεστή της τριβής ολισθήσεως.
β) Την απόσταση που διανύει το σώμα σε χρόνο $t = 6$ s.

10. Με πόση αρχική ταχύτητα u_o πρέπει να εκτοξευθεί σώμα, ώστε να διανύσει απόσταση $s = 250$ m πάνω σε οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει; Δίνεται $g = 10$ m/s^2 και ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως $\mu = 0{,}08$.

11. Σε σώμα μάζας $m = 200$ kg που ακινητεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται δύναμη $F = 200$ N που σχηματίζει γωνία $\theta = 30^o$ με το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 1). Αν $g = 10$ m/s^2 και το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, να υπολογισθεί ο συντελεστής μ της τριβής ολισθήσεως.



Σχ. 1

12. Σώμα μάζας m = 5 kg κατεβαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως $\varphi = 30^o$ με σταθερή ταχύτητα. Αν $g = 10$ m/s^2, να υπολογίσετε:
α) Τη συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα.
β) Το μέτρο της τριβής ολισθήσεως.
γ) Τον συντελεστή της τριβής ολισθήσεως.

13. Ποια η κεντρομόλος δύναμη που επενεργεί σε αυτοκίνητο που μπαίνει με ταχύτητα $u = 108$ km/h σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 250$ m και η ορμή του είναι $p = 450\,000$ kg · m/s;

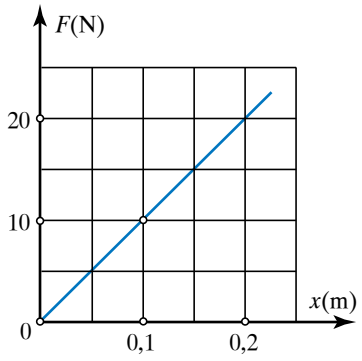
14. Σε τεθωρακισμένο όχημα μάζας $M = 30\,000$ kg υπάρχει πυροβόλο που εκτοξεύει οριζόντια βλήμα μάζας $m_B = 100$ kg με ταχύτητα $u_B = 300$ m/s προς τα δεξιά. Ποια η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση:
α) Αν το όχημα ήταν ακίνητο.
β) Αν το όχημα είχε ταχύτητα $u = 10$ m/s αντίθετης κατευθύνσεως απ' αυτήν του βλήματος.

15. Αυτοκίνητο μάζας $M = 1{,}5$ t κινείται με ταχύτητα $u = 180$ m/h σε οριζόντιο δρόμο, συγκρούεται με τοίχο και ακινητοποιείται σε $\Delta t = 0{,}5$ s. Να βρείτε τη μέση δύναμη που ασκήθηκε απ' τον τοίχο στο αυτοκίνητο.

16. Πόση μάζα αερίων πρέπει να φεύγει ανά δευτερόλεπτο με ταχύτητα $u = 250$ m/s, από πύραυλο μάζας 10 t, προκειμένου να αρχίσει αυτός να ανυψώνεται; Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

17. Να βρείτε τη μέση δύναμη, με την οποία χτυπά τενίστας το μπαλάκι του τένις μάζας 50 g, ώστε αυτό ενώ κινούταν προς το μέρος του με ταχύτητα της οποίας το μέτρο ήταν 20 m/s, να κινείται με νέα ταχύτητα, της οποίας το μέτρο είναι 25 m/s, αντίρροπη της προηγούμενης σε χρόνο t = 1 s.

18. Να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου χρησιμοποιώντας το διάγραμμα δυνάμεως-επιμηκύνσεως (σχ. 2). Πόση θα είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου όταν του κρεμάσομε σώμα βάρους

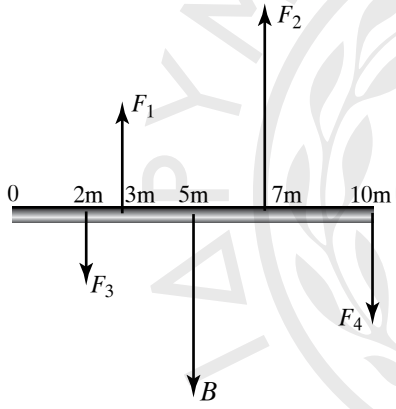


Σχ. 2

15 N; Πόσο βάρος του κρεμάσαμε όταν η επιμήκυνσή του ήταν 0,05 cm;

19. Μία ράβδος είναι ακλόνητα στερεωμένη απ' το ένα άκρο της. Στο ελεύθερο άκρο της ασκείται δύναμη με διεύθυνση αυτήν του άξονα της ράβδου και μέτρο ίσο με $F = 10\,000$ N, με αποτέλεσμα να την επιμηκύνει. Το εμβαδόν διατομής της ράβδου 1/1000 m^2 και το μέτρο Young για το υλικό αυτό είναι $Y = 5 \times 10^{10}$ N/m^2. Να υπολογίσετε την ανηγμένη μήκυνση (παραμόρφωση εφελκυσμού) που θα υποστεί η ράβδος.

20. Να εξετάσετε αν η ισοπαχής και ισοβαρής βάρους $B = 5$ N και μήκους 10 m, ράβδος (σχ. 3) ισορροπεί σε οριζόντια θέση υπό την επίδραση των δυνάμεων $F_1 = 1$ N, $F_2 = 6$ N, $F_3 = 3$ N, $F_4 = 4$ N, σε σημεία που απέχουν από το αριστερό άκρο της, 3 m, 7 m, 2 m, 10 m αντίστοιχα. Αν δεν ισορροπεί, τι θα κάνετε προκειμένου να ισορροπήσει σε οριζόντια θέση;

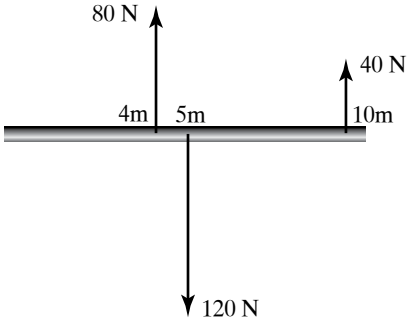


Σχ. 3

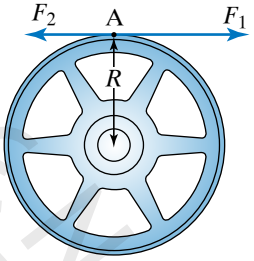
21. Δίσκος γραμμοφώνου περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από κατακόρυφο άξονα και εκτελεί 90 στροφές το λεπτό. Κομμάτι σοκολάτας μάζας 20 g πέφτει κατακόρυφα στο δίσκο και κολλά πάνω του σε απόσταση 5 cm από τον άξονα περιστροφής, με αποτέλεσμα ο αριθμός των στροφών του να μειωθεί σε 80 ανά λεπτό. Πόση είναι η ροπή αδρανείας I, του δίσκου;

22. Να εξετάσετε αν ομογενής και ισοπαχής μήκους 10 m και βάρους $B = 120$ N ράβδος ισορροπεί υπό την επίδραση των δυνάμεων $F_1 = 80$ N, $F_2 = 40$ N, που ασκούνται σε σημεία, τα οποία απέχουν 4 m, 10 m αντίστοιχα απ' το αριστερό της άκρο (σχ. 4).

23. Να υπολογίσετε την ολική ροπή των δυνάμεων $F_1 = 10$ N, $F_2 = 7$ N, που ασκούνται στον τροχό ακτίνας $R = 4\,m$ (σχ. 5).



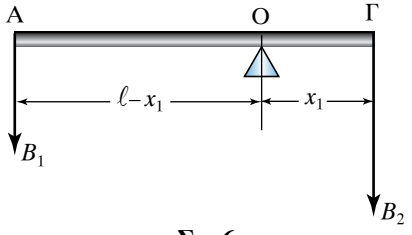
Σχ. 4



Σχ. 5

24. Να αναλύσετε δύναμη $F = 40$ N σε δύο κάθετες συνιστώσες, έτσι ώστε τη κατεύθυνσή της να σχηματίζει με την κατεύθυνση της μίας εξ αυτών γωνία 30°.

25. Δύο βάρη $B_1 = 8$ N, $B_2 = 14$ N κρέμονται στις άκρες ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου ΑΓ μήκους $\ell = 2$ m (σχ. 6). Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ράβδος ώστε να ισορροπεί οριζόντια όταν:
α) δεν έχει βάρος,
β) το βάρος της είναι $B_p = 4$ N;

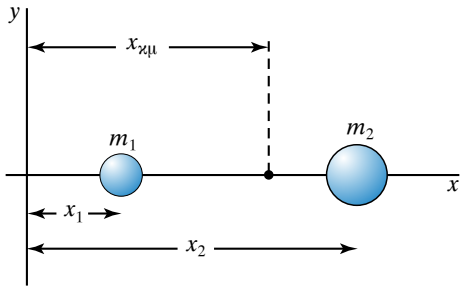


Σχ. 6

26. Τρεις πανομοιότυπες ομογενείς και ισοπαχείς ράβδοι από το ίδιο υλικό, σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Να υπολογίσετε το κ.β. του συστήματός τους.

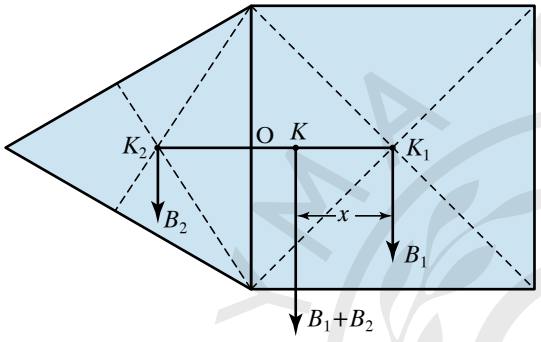
27. Να υπολογίσετε το κ.μ. του συστήματος των μαζών $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, όταν είναι $x_1 = 3\,m$ και $x_2 = 9\,m$ (σχ. 7).

28. Σε μεταλλική τετράγωνη πλάκα πλευράς a, προσαρμόζεται άλλη σχήματος ισόπλευρου τριγώνου



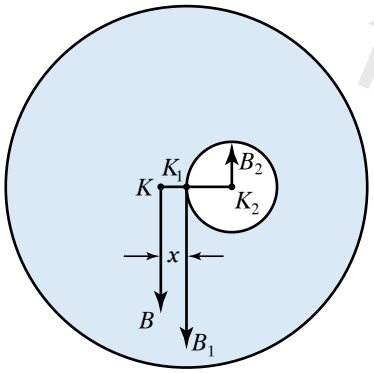
Σχ. 7

πλευράς α, ίδιου υλικού κατασκευής και πάχους h (σχ. 8). Να υπολογίσετε το κ.β. Κ του σώματος που προκύπτει. Εφαρμογή για $\alpha = 20$ cm.



Σχ. 8

29. Από ομογενή και ισοπαχή κυκλικό δίσκο ακτίνας R, αφαιρούμε κυκλικό δίσκο διαμέτρου $R/2$ που η περιφέρειά του διέρχεται από το κέντρο K_1 του αρχικού κυκλικού δίσκου (σχ. 9). Να υπολογίσετε τη θέση του κ.β., Κ του σώματος που απομένει.



Σχ. 9

30. Σώμα μάζας $m = 3$ kg εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα $R = 2$ m και περίοδο $T = 4\pi$s. Να υπολογίσετε τα μέτρα της γραμμικής ταχύτητας και της κεντρομόλου δυνάμεως.

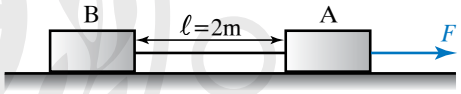
31. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε σώμα μάζας $m = 0{,}5$ kg, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R = 1{,}5$ m, έχει μέτρο $F_K = 300$ N. Να υπολογίσετε τη συχνότητα της κινήσεώς του και τον χρόνο που χρειάζεται για να πραγματοποιήσει 10 περιστροφές.

32. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας περιφοράς δορυφόρου. Δίνονται $R = 6400$ km και $g = 10$ m/s^2. Ποιο το μέτρο της ταχύτητας άλλου δορυφόρου που κινείται στην ίδια τροχιά και έχει δεκαπλάσια μάζα;

33. Τα σώματα Α, Β μαζών $m_1 = m_2 = 20$ kg ηρεμούν σεοριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζουν συντελεστή τριβής ολισθήσεως $\mu = 0{,}2$ και είναι δεμένα στα άκρα νήματος μήκους $\ell = 2m$ (σχ. 10). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ασκούμε στο Α σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 120$ N. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα κόβεται, ενώ η δύναμη F συνεχίζει να ασκείται στο σώμα Α.

α) Ποια η ταχύτητα των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1;

β) Πόσο απέχουν τα δύο σώματα τη χρονική στιγμή $t_2 = 9$ s; Δίνεται $g = 10$ m/s^2.



Σχ. 10

34. Σώμα μάζας $m = 20$ kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μια χρονική στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας μεταβλητής δυνάμεως της μορφής $F = 20 - 2x$ (μονάδες στο SI), όπου x η μετατόπιση απ' την αρχική θέση.

α) Ποια η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα;

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος μετά από μετατόπιση κατά $x_1 = 10$ m.

35. Σώμα μάζας $m = 50$ kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Όταν του ασκήσομε οριζόντια δύναμη $F_1 = 100$ N, το σώμα δεν κινείται. Όταν αυξήσουμε τη δύναμη, παρατηρούμε ότι το σώμα ξεκινά μόλις το μέτρο της γίνει $F_2 = 200$ N. Με σταθερή την $F_2 = 200$ N παρατηρούμε ότι το σώμα θα μετατοπιστεί κατά 16 m σε χρονικό διάστημα 4 s.

α) Ποια πρόταση είναι λάθος:

i. Όταν ασκήσομε την F_1, το σώμα δεν κινείται, διότι η δύναμη αυτή είναι μικρότερη από την τριβή, που του ασκείται και είναι 200 N.

ii. Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι 200 N.

iii. Μόλις ξεκινήσει το σώμα, η τριβή μειώνεται.

iv. Αν η F σχημάτιζε προς τα πάνω γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο, η τριβή θα ήταν μικρότερη.

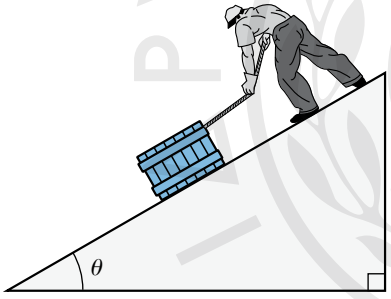
β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του.

γ) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίσετε τα μέτρα τους. Δίνεται $g=10\ \text{m/s}^2$.

36. Εργάτης συγκρατεί κιβώτιο μάζας $m = 25\ \text{kg}$ σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως $\theta = 30^\circ$ ασκώντας του μέσω νήματος δύναμη $F = 100\ \text{N}$, παράλληλη με την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου (σχ. 11). Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

α) Να υπολογίσετε τη στατική τριβή που ασκείται στο κιβώτιο.

β) Ο εργάτης αφήνει το νήμα και το σώμα φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα $u = 24\ \text{m/s}$, αφού διανύσει απόσταση $x = 12\ \text{m}$. Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολισθήσεως μεταξύ σώματος και επιπέδου.



Σχ. 11

37. Βάρκα μάζας $m_\beta = 130\ \text{kg}$ ηρεμεί στα στάσιμα νερά λίμνης. Ναύτης μάζας $m_\text{N} = 70\ \text{kg}$ κινείται μέσα στη βάρκα από την πλώρη προς την πρύμνη, διανύοντας απόσταση $s = 10\ \text{m}$. Να βρείτε κατά πόσο θα μετακινηθεί η βάρκα, όταν η τριβή της στο νερό θεωρηθεί αμελητέα.

38. Σε σώμα μάζας $M = 2\ \text{kg}$ που ηρεμεί στο κάτω άκρο νήματος μήκους $\ell = 5\ m$, προσπίπτει βλήμα μάζας $m_1 = 0{,}1\ \text{kg}$ με ταχύτητα $u_1 = 300\ \text{m/s}$, το διαπερνά και εξέρχεται με ταχύτητα $u_2 = 40\ \text{m/s}$.

α) Ποια πρόταση είναι σωστή και ποια λάθος:

i. Κατά τη διάρκεια της κρούσεως διατηρείται η ορμή του βλήματος.

ii. Η ορμή του συστήματος σώμα-βλήμα, διατηρείται κατά την κρούση.

β) Ποια ταχύτητα αποκτά το σώμα μετά την κρούση;

γ) Να υπολογίσετε το ύψος h, στο οποίο θα ανέβει το σώμα μετά την κρούση. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

39. Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί σώμα Α μάζας $M = 2{,}6\ \text{kg}$. Βλήμα μάζας $m = 0{,}01\ \text{kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_o = 300\ \text{m/s}$, συγκρούεται με το σώμα Α, το διαπερνά σε χρόνο $\Delta t = 0{,}5\ \text{s}$ και εξέρχεται με ταχύτητα $u_1 = 40\ \text{m/s}$ (σχ. 12).

α) Βρείτε την αρχική ορμή του βλήματος.

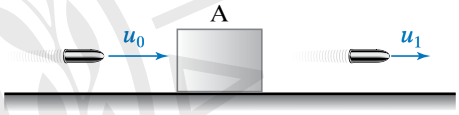
β) Ποια η μεταβολή της ορμής του βλήματος;

γ) Υπολογίστε την ταχύτητα του Α μετά την κρούση.

δ) Ποια η μέση δύναμη που δέχτηκε το βλήμα κατά το πέρασμά του μέσα από το Α;

ε) Σε μία στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του Α είναι $8\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$.
Ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής του βλήματος την ίδια χρονική στιγμή;

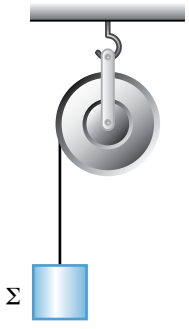
στ) Αν το Α παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστή τριβής ολισθήσεως $\mu = 0{,}3$, πόση απόσταση θα διανύσει το Α, μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει; Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.



Σχ. 12

40. Σώμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα $u = 10\ \text{m/s}$ ξαφνικά διασπάται σε δύο τμήματα Α, Β, μαζών $m_\text{A} = m/3$ και $m_\text{B} = 2m/3$ και ταχυτήτων u_1, u_2 καθέτων μεταξύ τους, αντίστοιχα. Αν η u_1 σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη u να βρεθούν τα μέτρα των u_1, u_2.

41. Κύλινδρος μάζας $M = 5\ \text{kg}$ και ακτίνας $R = 1\ \text{m}$ που μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα διερχόμενο από τα κέντρα των δύο βάσεων (σχ. 13), έχει τυλιγμένο γύρω του αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα Σ μάζας $m = 2\ \text{kg}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0\ \text{s}$, αφήνεται το σύστημα να κινηθεί.



Σχ. 13

Τριβές δεν υπάρχουν. Η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I = 1/2\, mR^2$. Να υπολογίσετε:

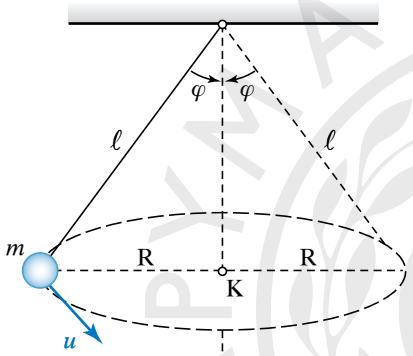
α) Την επιτάχυνση που αποκτά το Σ.

β) Τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου όταν $t = 4$ s.

γ) Τον ρυθμό μεταβολής της συνολικής στροφορμής του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου. Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

42. Σφαίρα μάζας $m = 1/3$ kg κινείται σε κυκλική τροχιά (σχ. 14). Αν $g = 10\ \text{m/s}^2$, $\ell = 2$ m και η περίοδος $T = 10$ s, να υπολογίσετε τη γωνία φ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο και την τάση του νήματος.

43. Τρεις ναύτες μεταφέρουν ομογενή και ισοπαχή πλαστικό σωλήνα βάρους B. Ο πρώτος κρατά το ένα άκρο της και οι άλλοι δύο την αναση κώνουν με τη βοήθεια αβαρούς μεταλλικής ράβδου, κάθετα τοποθετημένης στον σωλήνα. Σε ποιο σημείο του σωλήνα πρέπει να τοποθετήσουν τη ράβδο, έτσι ώστε να αναση κώνουν και οι τρεις το $^1/_3$ του βάρους του σωλήνα;



Σχ. 14

44. Να υπολογίσετε τον λόγο των κεντρομόλων δυνάμεων δύο ακινήτων σωμάτων ίδιας μάζας που βρίσκονται τοποθετημένα στην επιφάνεια της Γης, το ένα στον Ισημερινό και το άλλο σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 45^\circ$.

45. Αυτοκίνητο πρόκειται να πάρει στροφή ακτίνας 300 m σε οριζόντιο δρόμο. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει, προκειμένου η διέλευσή του να είναι ασφαλής, όταν ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως μεταξύ αυτοκινήτου και οδοστρώματος είναι $\mu = 0{,}3$; Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

46. Σώμα μάζας $m = 0{,}5$ kg είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο άμαζου αβαρούς σχοινιού μήκους $\ell = 1$ m με όριο θραύσεως $T_{\theta\rho} = 50$ N. Για ποια συχνότητα περιστροφής f του σώματος κόβεται το νήμα;

47. Ομογενής ξύλινη δοκός μήκους 4 m και μάζας 30 kg, ισορροπεί με το άνω άκρο της ακουμπισμένο σε λείο κατακόρυφο τοίχο και το κάτω σε οριζόντιο τραχύ έδαφος. Πόσος πρέπει να είναι ο συντελεστής τριβής μεταξύ δοκού και εδάφους, ώστε η δοκός να ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία 60° με το έδαφος; Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Έργο - Ενέργεια - Ισχύς

4.1 Έργο δυνάμεως.

Στη Μηχανική είναι χρήσιμη η έννοια του έργου δυνάμεως, την οποία θα ορίσομε και θα αναφερθούμε στη χρήση της.

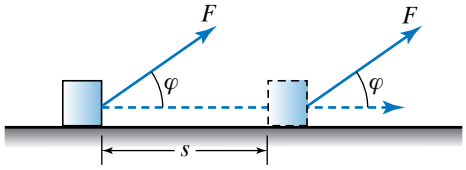
Έργο W μίας σταθερής δυνάμεως που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της, ονομάζεται το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που ισούται με το γινόμενο της δυνάμεως F επί τη μετατόπιση s του σημείου εφαρμογής της. Δηλαδή $W = F\,s$. Η δύναμη ασκείται πάνω σε σημείο κάποιου υλικού σώματος και λέμε ότι η δύναμη παράγει έργο επί του σώματος (σχ. 4.1.1).

Σχ. 4.1.1
Σταθερή δύναμη που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της.

Όταν η διεύθυνση της δυνάμεως σχηματίζει γωνία φ με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της, τότε το έργο της δίνεται απ' τον τύπο $W = F\,s\cos\varphi$ (σχ. 4.1.2).

Όταν $\varphi = 90^o$, η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση και τότε το έργο της είναι μηδέν, διότι $W = F\,s\cos 90^o = F\,s\,0 = 0$.

Γενικώς, το στοιχειώδες έργο δυνάμεως $\vec{F}$, η οποία ασκείται σε σώμα και μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $\mathrm{d}\vec{s}$, ισούται με $\mathrm{d}W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = F\mathrm{d}s\cos\varphi$, όπου φ είναι η γωνία μεταξύ δυνάμεως και στοιχειώδους μετατοπίσεως.



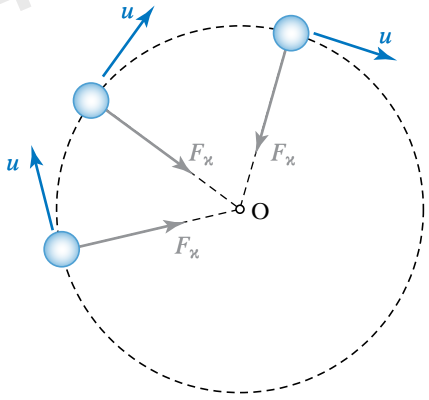
Σχ. 4.1.2
Δύναμη που σχηματίζει γωνία φ με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της.

Αν η μετατόπιση γίνεται σε ευθεία γραμμή και η δύναμη είναι σταθερή και σχηματίζει σταθερή γωνία φ με τη μετατόπιση, βρίσκομε $W = F\,s\cos\varphi$, όπως είπαμε στην αρχή.

Αν η δύναμη είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση, τότε το στοιχειώδες έργο είναι μηδέν. Πράγματι, $\mathrm{d}W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = F\,\mathrm{d}s\cos\varphi = F\mathrm{d}s\cos 90^o = F\mathrm{d}s\,0 = 0$. Για παράδειγμα, όταν ένα σώμα μετακινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, το έργο του βάρους του είναι μηδέν.

Ακόμη και αν κατά τη μετατόπιση μεταβάλλεται η δύναμη ως διάνυσμα, εφόσον σε κάθε σημείο της διαγραφόμενης τροχιάς του σημείου αυτού έχομε $\varphi = 90^o$, έπεται ότι και το συνολικό έργο είναι μηδέν, $W = 0$.

Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}_κ$, η οποία έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{u}$ είναι συνεχώς κάθετη στη στοιχειώδη μετατόπιση του σώματος, άρα το έργο της είναι μηδέν (σχ. 4.1.3).



Σχ. 4.1.3
Το έργο της κεντρομόλου δυνάμεως είναι ίσο με μηδέν.

4.1.1 Μονάδες μετρήσεως του έργου.

Στο SI μονάδα μετρήσεως του έργου είναι το 1 joule, J (τζουλ), που ορίζεται ως το έργο που παράγεται από δύναμη 1 N, η οποία μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά 1 m προς την κατεύθυνσή της. Δηλαδή: 1 joule = 1 J = 1 newton · 1 m = 1 N · m.

Στην ατομική φυσική χρησιμοποιείται ως μονάδα έργου το 1 eV (ηλεκτρονιοβόλτ) και πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσιά του. Ισχύει ότι $1\,eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J$.

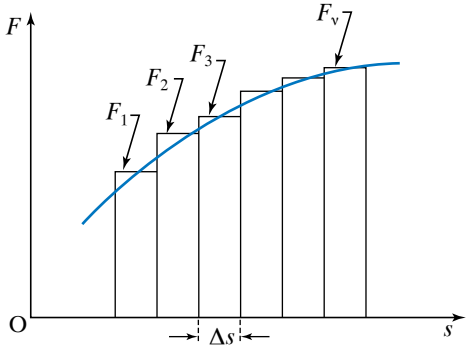
Στην καθημερινή μας ζωή (π.χ. στους λογαριασμούς της ΔΕΗ) χρησιμοποιούμε ως μονάδα έργου το 1 Wh (βατώριο) ή συνηθέστερα την 1 kWh (κιλοβατώρα ή κιλοβατώριο), για την οποία ισχύει $1\,kWh = 3{,}6 \cdot 10^{6}\,J$. Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων μονάδων έργου.

Πίνακας 4.1
Σχέσεις μονάδων έργου.

	J	*kWh*	eV
1 J	1	$2{,}78 \cdot 10^{7}$	$6{,}24 \cdot 10^{18}$
1 kWh	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	1	$2{,}25 \cdot 10^{25}$
1 eV	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	$4{,}44 \cdot 10^{-23}$	1

4.1.2 Έργο δυνάμεως μεταβλητού μέτρου F=F(s).

Προκειμένου να υπολογίσουμε το έργο δυνάμεως F που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της και μεταβάλλεται το μέτρο της, σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση σε σχέση με τη μετατόπιση. Στη συνέχεια, θεωρούμε πολύ μικρές μετατοπίσεις Δs, ώστε να μπορούμε για την κάθε μία απ' αυτές να θεωρούμε σταθερό το μέτρο της δυνάμεως F (σχ. 4.1.4).



Σχ. 4.1.4
Υπολογισμός έργου δυνάμεως μεταβλητού μέτρου.

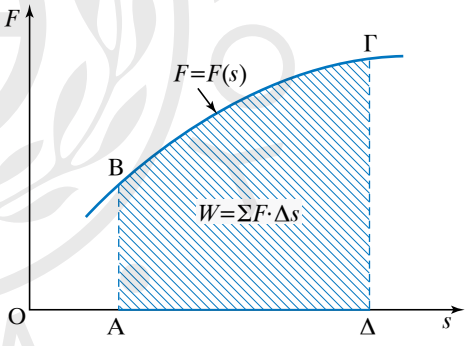
Για κάθε μία απ' αυτές τις πολύ μικρές (στοιχειώδεις) μετατοπίσεις, το στοιχειώδες έργο $\Delta W = F\,\Delta s$ παριστάνεται από το εμβαδό των ορθογωνίων παραλληλογράμμων του σχήματος 4.1.4. Το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη F κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της κατά πεπερασμένο διάστημα s προσεγγίζεται με το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, όταν το πλήθος τους τείνει στο άπειρο, $W = \Sigma\Delta W = \Sigma\,(F\Delta s)$.

Το έργο W της μεταβλητού μέτρου δυνάμεως F θα δίνεται απ' τον τύπο:

$$W = \sum_{\lim \Delta s \to 0} (F\Delta s) = \int_{x_1}^{x_2} F\,ds,$$

όπου $x_1 = OA$ και $x_2 = O\Delta$ και ισούται με το γραμμοσκιασμένο «εμβαδό» ΑΒΓΔ του σχήματος 4.1.5.

Βλέπουμε ότι με χρήση ορισμένου ολοκληρώματος μπορούμε να πούμε ότι το έργο W της δυνάμεως μεταβλητού μέτρου F που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της απ' τη θέση x_1 στη θέση x_2 ισούται με το ολοκλήρωμα της συναρτήσεως $F(x)$ από x_1 ως x_2.



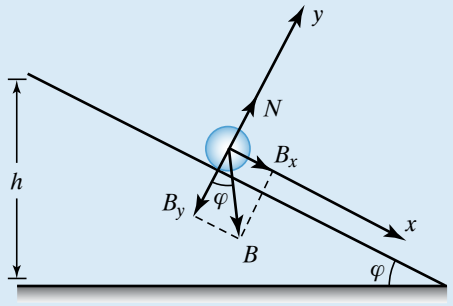
Σχ. 4.1.5
Το έργο ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κίνηση σώματος κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου.

Έστω σώμα μάζας m, που κινείται κατά μήκος της επιφάνειας κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως φ και μετατοπίζεται κατά x κατά μήκος του επιπέδου. Θεωρούμε καρτεσιανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Ο άξονας x έχει τη διεύθυνση κινήσεως του σώματος

και ο άξονας y είναι κάθετος στον άξονα x (σχ. 4.1.6). Αναλύομε το βάρος B σε δύο συνιστώσες. Η μία συνιστώσα B_x δίνεται απ' τη σχέση $B_x = B\sin\varphi = mg\sin\varphi$ και η άλλη συνιστώσα είναι $B_y = B\cos\varphi = mg\cos\varphi$.



Σχ. 4.1.6
Κίνηση σώματος κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου.

Αν το σώμα κινείται προς τα κάτω, η συνιστώσα B_x έχει την κατεύθυνση της μετατοπίσεως, άρα η μεταξύ τους γωνία είναι $\theta = 0$.

Συνεπώς $W_x = B_x x\cos\theta = B_x x\cos 0 = B_x x = mgx\sin\varphi$. Η B_y δεν παράγει έργο, γιατί είναι κάθετη στη μετατόπιση. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των έργων των ορθογωνίων συνιστωσών ισούται με το έργο της συνισταμένης τους δυνάμεως.

Αν το σώμα κινείται προς τα πάνω, η συνιστώσα B_x έχει αντίθετη κατεύθυνση απ' τη μετατόπιση, άρα $\theta = 180^\circ$. Συνεπώς:

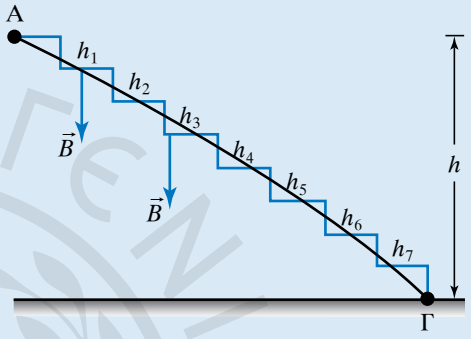
$$W_x = B_x x\cos 180^\circ = B_x x\cdot(-1) = \\ = -B_x x = -mgx\sin\varphi.$$

Γενικότερα, αν το σώμα βάρους B κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο πάνω σε μία τυχαία (καμπύλη) διαδρομή ΑΓ, προκειμένου να προσδιορίσομε το έργο του βάρους του, χωρίζομε τη διαδρομή σε πάρα πολλές μικρές οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις (κάτι σαν σκαλοπατάκια) και έτσι προσεγγίζομε την πραγματική διαδρομή (σχ. 4.1.7).

Κατά τις οριζόντιες μετατοπίσεις το έργο του βάρους είναι μηδέν, διότι είναι κάθετο στη μετατόπιση. Κατά τις κατακόρυφες μετατοπίσεις παράγεται έργο ανά σκαλοπατάκι $W_1 = Bh_1$, $W_2 = Bh_2$, $W_3 = Bh_3$ κ.ο.κ.. Το συνολικό παραχθέν έργο ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους έργων. Άρα:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots = Bh_1 + Bh_2 + Bh_3 + \ldots = \\ = B(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots) = Bh.$$

Βλέπομε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά μόνο από την υψομετρική διαφορά των δύο ακραίων σημείων της διαδρομής.



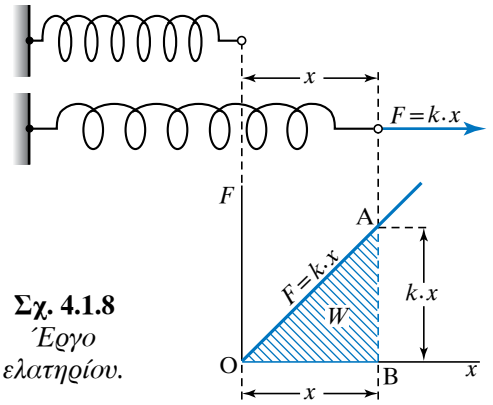
Σχ. 4.1.7
Υπολογισμός του έργου του βάρους για τυχαία διαδρομή.

4.1.3 Έργο τριβής.

Έστω σώμα μάζας m που κινούμενο σε ευθεία γραμμή από το σημείο Α στο σημείο Β πάνω σε οριζόντιο επίπεδο διανύει απόσταση s. Το έργο της τριβής (ολισθήσεως) είναι $W_T = -Ts$, διότι η μετατόπιση είναι αντίθετη προς τη δύναμη τριβής. Ομοίως και κατά την επιστροφή (διαδρομή Β→Α) το έργο της τριβής θα δίνεται απ' τον ίδιο τύπο, διότι η τριβή ολισθήσεως πάντα έχει φορά αντίθετη απ' την κίνηση. Συνεπώς, κατά τη διαδρομή $A \to B \to A$ το έργο της τριβής είναι $W_T = -2Ts$. Επομένως, το έργο της τριβής κατά μία κλειστή διαδρομή δεν είναι ίσο με μηδέν.

4.1.4 Έργο ελατηρίου.

Έστω ελατήριο σταθεράς επαναφοράς k, που στο ένα άκρο ασκείται από εξωτερικό αίτιο δύναμη F, ενώ το άλλο του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Για να συσπειρώνεται ή να επιμηκύνεται το ελατήριο κατά x από το φυσικό του μήκος, η εξωτερική δύναμη πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη, που ασκεί το ελατήριο και η οποία δίνεται



Σχ. 4.1.8
Έργο ελατηρίου.

από τον Νόμο του Hooke, $F = kx$.

Στο σχήμα 4.1.8 παρουσιάζεται η διάταξη του ελατηρίου με την εξωτερική δύναμη. Επίσης, στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της σχέσεως μεταξύ εξωτερικής δυνάμεως και απομακρύνσεως. Από όσα είπαμε στα προηγούμενα συνάγεται ότι το εμβαδό του τριγώνου OAB ισούται με το έργο W της δυνάμεως F. Το έργο ισούται κατά μέτρο με το έργο της εξωτερικής δυνάμεως και με το έργο της δυνάμεως που ασκεί το ελατήριο.

Προφανώς έχομε:

$$W = 1/2\, x\, kx = 1/2\, kx^2.$$

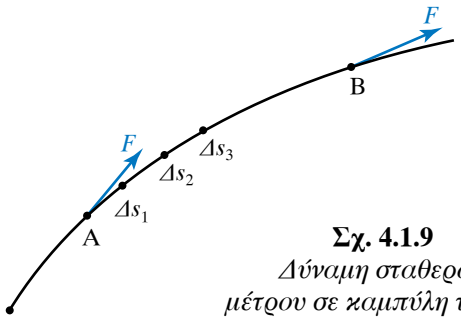
Αυτό μπορεί να υπολογισθεί και με ολοκλήρωση ως εξής:

$$\mathrm{d}W = F dx, \quad W = \int_0^x kx\, dx = k \int_0^x x\, dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

4.1.5 Έργο δυνάμεως σταθερού μέτρου που εφάπτεται συνεχώς σε καμπύλη τροχιά.

Έστω δύναμη F με σταθερό μέτρο που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος καμπύλης γραμμής έχοντας συνεχώς τη διεύθυνση της εφαπτομένης. Για να βρούμε το έργο της F, χωρίζομε την καμπύλη AB σε μεγάλο αριθμό τμημάτων μήκους Δs και αφού υπολογίσομε το έργο ΔW για κάθε στοιχειώδες τμήμα, αθροίζομε όλα τα στοιχειώδη έργα.

Κάθε μία απ' τις στοιχειώδεις μετατοπίσεις είναι μικρή και μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμη με διεύθυνση ίδια με της δυνάμεως. Συνεπώς, η δύναμη θα έχει συνεχώς την ίδια διεύθυνση με την αντίστοιχη μετατόπιση. Το στοιχειώδες έργο ΔW που παράγεται (σχ. 4.1.9), δίνεται από τον τύπο $\Delta W = F\, \Delta s$ και το ολικό έργο W δίνεται από το άθροισμα:



Σχ. 4.1.9
Δύναμη σταθερού μέτρου σε καμπύλη τροχιά.

$$W = F\,\Delta s_1 + F\,\Delta s_2 + F\,\Delta s_3 + \ldots + F\,\Delta s_\nu = \\ = F\,(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_\nu) = F\, s.$$

Συνεπώς, το έργο μίας δυνάμεως σταθερού μέτρου F που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της πάνω σε καμπύλη γραμμή, ενώ η διεύθυνσή της παραμένει πάντοτε εφαπτόμενη στην καμπύλη τροχιά, ισούται με το γινόμενο της δυνάμεως επί το μήκος του τόξου της καμπύλης τροχιάς. Μπορεί το έργο να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με τις σχετικές κατευθύνσεις δυνάμεως και μετατοπίσεως.

4.2 Μηχανική, κινητική και δυναμική ενέργεια. Διατηρητικές και μη διατηρητικές δυνάμεις.

Σε διάφορες μεταβολές στη φύση εισέρχεται η έννοια της ενέργειας. Κατά τη διάρκεια της καύσεως, εκλύεται προς το περιβάλλον θερμότητα.

Τα διάφορα υλικά σώματα λέμε ότι έχουν ενέργεια, διότι υπό κατάλληλες συνθήκες μπορούν να δώσουν έργο. Για παράδειγμα, έργο παράγεται κατά την έκρηξη του μπαρουτιού, κατά την εκτίναξη ενός συσπειρωμένου ελατηρίου ή κατά τη διάσπαση του πυρήνα του ατόμου· όλα αυτά γίνονται διότι το μπαρούτι έχει χημική ενέργεια, το ελατήριο μηχανική και ο πυρήνας πυρηνική ενέργεια. Το ποσό της ενέργειας που ανταλλάσσεται σε ένα φαινόμενο ισούται με το παραγόμενο ή καταναλισκόμενο έργο. Μπορούμε να πούμε ότι ενέργεια είναι η ικανότητα παραγωγής έργου ενός συστήματος.

Όταν ο εργάτης σπρώχνει ένα κιβώτιο, δηλαδή του ασκεί δύναμη F με κατάλληλο τρόπο (π.χ. οριζόντια), του προσφέρει ενέργεια κι αυτή η μεταφορά ενέργειας πραγματοποιείται μέσω του έργου της δυνάμεως F στο κιβώτιο. Ο εργάτης καταναλώνει χημική ενέργεια και το κιβώτιο μπορεί να αποκτά κινητική ενέργεια. Άρα, έχομε μετατροπή της ενέργειας από μία μορφή (χημική) σε μία άλλη (κινητική, δυναμική).

4.2.1 Κινητική ενέργεια.

Υλικό σημείο μάζας m ακινητεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s του ασκείται δύναμη F, οπότε αποκτά επιτάχυνση a και ισχύει ότι $F = m \cdot a$. Το υλικό σημείο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, άρα:

$$s = 1/2\, a\, t^2 \quad \text{και} \quad u = a\, t.$$

Το έργο της δυνάμεως F για οριζόντια μετατόπιση s είναι:

$$W = F\, s = m\, a\, 1/2\, a\, t^2 = 1/2\, m(a\, t)^2 = 1/2\, m\, u^2.$$

Το έργο ισούται με την ποσότητα της ενέργειας που μεταβιβάστηκε στο σώμα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει ταχύτητα. Η ενέργεια που απέκτησε ονομάζεται ***κινητική ενέργεια*** και συνήθως συμβολίζεται με το γράμμα K.

Κινητική ενέργεια ονομάζεται η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της κινητικής του καταστάσεως. Για υλικό σημείο μάζας m, που κινείται με ταχύτητα u, η κινητική ενέργειά του δίνεται απ' τον τύπο:

$$K = 1/2 \cdot m \cdot u^2.$$

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος. Στο SI μονάδα μετρήσεως της ενέργειας είναι το joule (J), δηλαδή η μονάδα μετρήσεως του έργου.

Όταν ένα σώμα έχει κινητική ενέργεια, είναι σε θέση να παράγει έργο. Κάθε σώμα αποτελείται από πολλά υλικά σημεία. Η κινητική του ενέργεια είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών του κάθε υλικού του σημείου. Άρα, αν τα υλικά σημεία που αποτελούν το σώμα μάζας m έχουν μάζες m_1, m_2, m_3,... και σε μία χρονική στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα u (ίδιο μέτρο ταχύτητας), ισχύει ότι:

$$K = K_1 + K_2 + ... = 1/2 \cdot m_1 \cdot u^2 + 1/2 \cdot m_2 \cdot u^2 + ...$$

... δηλαδή $K = 1/2 \cdot (m_1 + m_2 + ...) \cdot u^2 = 1/2 \cdot m \cdot u^2$.

Αν δεν έχουν ταχύτητα ίδιου μέτρου, τότε η ολική κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα των επιμέρους ενεργειών όλων των υλικών σημείων που αποτελούν το σώμα.

$$K = K_1 + K_2 + ... = 1/2\, m_1\, u_1^2 + 1/2\, m_2\, u_2^2 + ...$$

Παρατήρηση.

Η κινητική ενέργεια σώματος που εκτελεί μεταφορική κίνηση είναι ανεξάρτητη απ' τον τρόπο κατανομής της ύλης στο σώμα, διότι όλα τα υλικά σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Έστω τρία σώματα, μάζας m το καθένα, σχήματος κύβου, σφαίρας και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Όταν και τα τρία εκτελούν μεταφορική κίνηση με την ίδια ταχύτητα u, θα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια $K = 1/2\, m \cdot u^2$, παρόλο που η κατανομή της μάζας στον κύβο είναι διαφορετική απ' την κατανομή της μάζας στη σφαίρα και στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

4.2.2 Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Υλικό σημείο (σώμα) μάζας m κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα u_0. Η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = 1/2 \cdot m \cdot u_0^2.$$

Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F και όταν έχει διανύσει απόσταση s, η ταχύτητά του είναι u', άρα η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K' = 1/2 \cdot m \cdot u'^2.$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου είναι:

$$\Delta K = K' - K = 1/2\, m\, u'^2 - 1/2\, m\, u_0^2 = 1/2\, m\, (u'^2 - u_0^2).$$

Αποδεικνύεται γενικώς για κάθε στερεό σώμα ότι: ***«Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός στερεού σώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω του κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του».***

Με τη χρήση του ανωτέρω θεωρήματος διευκολυνόμαστε στη λύση προβλημάτων, καθόσον απλουστεύονται οι υπολογισμοί.

4.2.3 Απόδειξη του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για υλικό σημείο.

Έστω υλικό σημείο μάζας m που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα u_0. Η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = 1/2\, m\, u_0^2.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F σταθερού μέτρου, ομόρροπη της ταχύτητας.

Το σώμα επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση a και ισχύει ότι $F = m\, a$. Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική

ταχύτητα u_0. Αν τη χρονική στιγμή t το σώμα έχει διανύσει απόσταση s και η ταχύτητά του είναι u', η κινητική του ενέργεια δίνεται από τον τύπο:

$$K' = 1/2\, m\, u'^2.$$

Ισχύουν για την κίνησή του οι τύποι:

$$\begin{cases} s = u_0\, t + \dfrac{1}{2}\, a\, t^2 \\ u' = u_0 + a\, t \quad \text{ή} \quad u' - u_0 = a\, t. \end{cases}$$

Το έργο της οριζόντιας δυνάμεως F δίνεται από τον τύπο:

$$W = F\, s = m\, a\, s = m\, a\, (u_0\, t + 1/2\, a\, t^2) =$$
$$= m\, u_0\, (a\, t) + 1/2\, m\, (a\, t)^2 =$$
$$= m\, u_0\, (u' - u_0) + 1/2\, m\, (u' - u_0)^2 =$$
$$= 1/2\, m\, u'^2 - 1/2\, m\, u_0^2 = K' - K.$$

Εδώ $K' > K$.

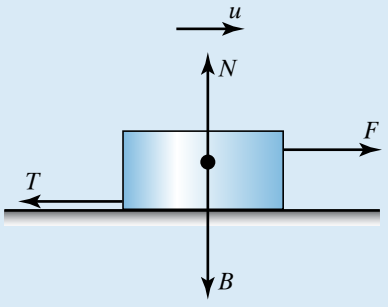
Αν η δύναμη είναι αντίρροπη της ταχύτητας, τότε έχομε μείωση της κινητικής ενέργειας $K' < K$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε σώμα μάζας $m = 1{,}00$ kg που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, μέσα στο πεδίο βαρύτητας, ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ s οριζόντια δύναμη $F = 20{,}0$ N (σχ. 4.2.1). Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος, όταν έχει διανύσει απόσταση $s = 25{,}0$ m. Δίνεται $g = 10{,}0$ m/s^2 και συντελεστής τριβής ολισθήσεως $\mu = 0{,}100$.

Λύση

Αφού αρχικά το σώμα ηρεμεί, το μέτρο της ταχύτητάς του, άρα και η κινητική του ενέργεια, είναι μηδέν. Έστω u η ταχύτητά του, όταν έχει διανύσει τα 25 m. Η κινητική του ενέργεια είναι $1/2\, m\, u^2$. Τόση είναι και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας. Το βάρος B του σώματος είναι $B = m\, g = 10{,}0$ N.



Σχ. 4.2.1
Κίνηση με τριβή.

Η αντίδραση του εδάφους N έχει μέτρο $N = B = 10{,}0$ N. Το έργο των δύο αυτών δυνάμεων είναι μηδέν, διότι είναι κάθετες στη μετατόπιση του σώματος (αλλά και επειδή είναι ίσες και αντίθετες). Η δύναμη T της τριβής έχει μέτρο $T = \mu\, N = 0{,}100 \cdot 10{,}0 = 1{,}00$ N. Η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία 180^o. Η μετατόπιση και το έργο της δίνονται από τον τύπο:

$$W = T\, s \cos 180^o = 1{,}00 \cdot 25{,}0 \cdot (-1{,}00) = -25{,}0\ \text{J}.$$

Το έργο της δυνάμεως F που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία 0^o με τη μετατόπιση δίνεται από τον τύπο:

$$W = F\, s \cos 0^o = 20{,}00 \cdot 25{,}0 \cdot 1{,}00 = 5{,}00 \cdot 10^2\ \text{J}.$$

Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα είναι:

$$W = W_B + W_N + W_T + W_F =$$
$$= [0 + 0 + (-25{,}0) + 5{,}00 \cdot 10^2] = 4{,}75 \cdot 10^2\ \text{J}.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τόση είναι και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας, άρα (μονάδες στο S.I.):

$$1/2\, m\, u^2 = 4{,}75 \times 10^2\ \text{J} \quad \text{άρα} \quad 1/2 \cdot 1{,}00 \times u^2 =$$
$$= 4{,}75 \times 10^2 \quad \text{ή} \quad u^2 = 9{,}50 \cdot 10^2$$

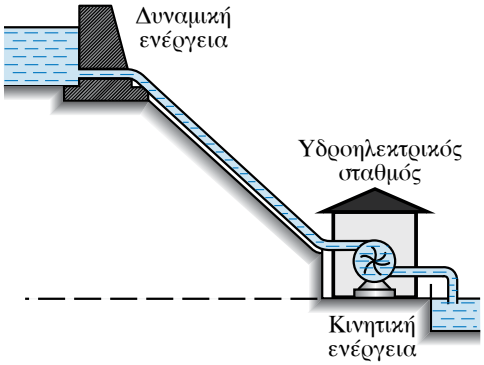
$$u = \sqrt{9{,}50 \cdot 10^2}\ \text{m/s} = 30{,}8\ \text{m/s}.$$

4.2.4 Δυναμική ενέργεια.

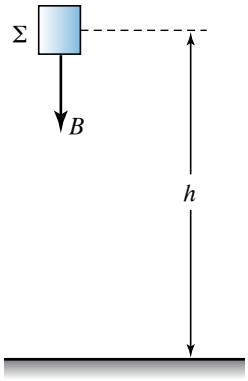
Με τη βοήθεια φράγματος συγκρατείται νερό, σε υψηλότερο σημείο από τον υδροηλεκτρικό σταθμό. Στη συνέχεια ρέει μέσα από σωλήνες και περιστρέφει τους υδροστρόβιλους (τουρμπίνες) του σταθμού. Το νερό συνεπώς έχει τη δυνατότητα παραγωγής έργου, οπότε κατέχει κάποιας μορφής ενέργεια (σχ. 4.2.2).

Η τεντωμένη χορδή τόξου, παρόλο που είναι ακίνητη, έχει αποθηκευμένη ενέργεια, διότι μόλις την αφήσει ο τοξότης ελεύθερη, μετακινεί το βέλος άρα εκτελεί έργο, μεταβιβάζει ενέργεια.

Δυναμική ενέργεια U σώματος, είναι η ενέργεια που έχει το σώμα λόγω της θέσεώς του ή της καταστάσεώς του. Το σώμα εξαιτίας της δυναμικής του



Σχ. 4.2.2
Μετατροπές ενέργειας σε υδατόπτωση.



Σχ. 4.2.3
Σώμα πάνω από τη στάθμη αναφοράς της δυναμικής ενέργειας.

ενέργειας, έχει τη δυνατότητα να παράγει έργο. Μερικές φορές, η δυναμική ενέργεια διακρίνεται σε ενέργεια θέσεως και ενέργεια μορφής.

Στην περίπτωση της δυναμικής ενέργειας ορίζομε μια συγκεκριμένη θέση ή μορφή του σώματος ή των σωμάτων που σχετίζονται με το πρόβλημα που εξετάζομε, ως θέση ή μορφή μηδενικής δυναμικής ενέργειας ή θέση ή μορφή αναφοράς. Συνήθως λέμε θέση και εννοούμε και θέση και μορφή.

Ορίζεται ότι η δυναμική ενέργεια σώματος ισούται με το έργο που παράγει επί του σώματος εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σώμα, ώστε να το φέρει από τη θέση αναφοράς στην τελική του θέση.

Σε διάφορα προβλήματα που εξετάζομε παίζουν ρόλο οι διαφορές δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο σημείων και όχι η τιμή αυτή καθαυτή της δυναμικής ενέργειας σε κάθε σημείο.

4.2.5 Δυναμική ενέργεια σώματος μέσα σε πεδίο βαρύτητας.

Για τη δυναμική ενέργεια μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας (βαρυτική δυναμική ενέργεια), όπως κοντά στην επιφάνεια της Γης, παίρνομε ως στάθμη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας κάποιο χαρακτηριστικό οριζόντιο επίπεδο.

Αν το σώμα (υλικό σημείο) μάζας m βρίσκεται σε ύψος h πάνω απ' τη στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας, δηλαδή από το επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας, τότε η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τον τύπο $U = m\,g\,h$ (σχ. 4.2.3).

Απόδειξη.

Η δυναμική ενέργεια ισούται με το έργο που δαπανήθηκε, προκειμένου να ανέλθει το σώμα στο ύψος h ή με το αντίθετο του έργου που παράγει το βάρος επί του σώματος, όταν το αφήσομε να εκτελέσει ελεύθερη πτώση μέχρι το οριζόντιο επίπεδο της στάθμης αναφοράς.

Άρα η δυναμική ενέργεια ισούται με:

$$U = -W_B = -B\,h\cos 180^{o} = B\,h = m\,g\,h.$$

Η δυναμική ενέργεια ισούται με το ελάχιστο έργο που χρειάζεται μία εξωτερική δύναμη για να φέρει το σώμα από το δάπεδο στη θέση του σε ύψος h. Αν η δύναμη παράγει έργο μεγαλύτερο από το απολύτως αναγκαίο, τότε το παραπάνω έργο θα παρουσιαστεί ως κινητική ενέργεια στο ύψος h.

Όταν δεν θεωρούμε ένα στερεό σώμα ως υλικό σημείο, τότε h είναι η απόσταση του κέντρου μάζας του απ' το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας.

Όταν το σώμα βρίσκεται πάνω απ' το επίπεδο που εμείς αυθαίρετα επιλέγομε ως επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας, τότε η δυναμική του ενέργεια είναι θετική και όταν το σώμα βρίσκεται κάτω από το επίπεδο που θεωρήσαμε ότι $U=0$, η δυναμική του ενέργεια είναι αρνητική. Συνήθως, όταν ένα σώμα κινείται κοντά στην επιφάνεια της Γης, θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το κατώτερο επίπεδο της κινήσεώς του, όπως την επιφάνεια της Γης, οπότε δεν εμφανίζεται αρνητική δυναμική ενέργεια.

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος Σ, που βρίσκεται τοποθετημένο σε οριζόντιο τραπέζι, το οποίο απέχει απόσταση h_1 από το δάπεδο και απόσταση h_2 απ' την οροφή, δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

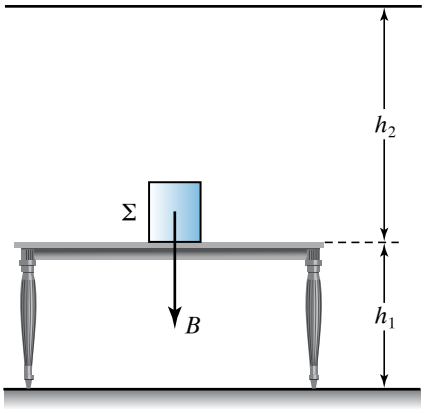
1) Με στάθμη αναφοράς την επιφάνεια του τραπεζιού, $U = 0$.

2) Με στάθμη αναφοράς το πάτωμα, $U = B\,h_1$.

3) Με στάθμη αναφοράς την οροφή του δωματίου, $U = -B\,h_2$ (σχ. 4.2.4).

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η εξωτερική δύναμη και η μετατόπιση από τη στάθμη αναφοράς μέχρι τη στάθμη του τραπεζιού είναι αντίθετες.

Ενέργεια δυναμική αποθηκεύεται σ' ένα υλικό



Σχ. 4.2.4
Διάφορες στάθμες βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

όταν το συστρέφομε, το συμπιέζομε, το τεντώνομε ή το λυγίζομε, αλλάζοντας τη φυσική του μορφή (π.χ. το παραμορφωμένο ελατήριο ή λάστιχο). Στην περίπτωση αυτή το σώμα μπορεί να παράγει έργο επανερχόμενο στη «φυσική» του μορφή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ελατήριο που επιμηκύνεται (ή συσπειρώνεται) κατά x, υπό την επίδραση δυνάμεως F. Από τον Νόμο του Hooke γνωρίζομε ότι ισχύει η σχέση $F = kx$. Για να παραμορφωθεί το ελατήριο, η εξωτερική δύναμη εκτέλεσε έργο, που όπως είδαμε στα προηγούμενα, δίνεται από τη σχέση:

$$W = 1/2\, kx^2.$$

Άρα, το παραμορφωμένο ελατήριο περικλείει δυναμική ενέργεια: $U = W = 1/2\, kx^2$.

Δηλαδή το έργο της εξωτερικής δυνάμεως αποθηκεύτηκε στο ελατήριο υπό μορφή δυναμικής ελαστικής ενέργειας.

Το ότι ένα συσπειρωμένο ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια, το αντιλαμβανόμαστε διότι μπορεί να σπρώξει ένα σώμα Σ· έχει δηλαδή την ικανότητα παραγωγής έργου.

Για να έχει νόημα η δυναμική ενέργεια, πρέπει ο υπολογισμός του έργου της δυνάμεως να μην εξαρτάται απ' τη διαδρομή που ακολουθήσαμε μεταξύ των δύο σημείων, του σημείου αναφοράς και του τελικού σημείου. Ένας χώρος, μέσα στον οποίο όταν φέρομε ένα υπόθεμα (όπως μάζα, φορτίο), ασκείται δύναμη πάνω του, ονομάζεται ***πεδίο δυνάμεων*** ή ***δυναμικό πεδίο***. Ένα δυναμικό πεδίο μέσα στο οποίο, κατά τη μετάβαση από ένα σημείο σε άλλο, το έργο των δυνάμεων δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, ονομάζεται ***συντηρητικό*** ή ***διατηρητικό δυναμικό πεδίο***.

Η δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο για τις συντηρητικές δυνάμεις, έτσι ώστε όταν μετακινήσομε σώμα από σημείο Α σε σημείο Β του πεδίου, η αρνητική μεταβολή του ΔU_{AB} να είναι ίση με το έργο της συντηρητικής δυνάμεως του πεδίου για τη μετακίνηση ΑΒ ή $\Delta U_{AB} = -W_{A\to B}$. Σε μια κλειστή διαδρομή (το αρχικό και τελικό σημείο της διαδρομής είναι το ίδιο), το έργο των συντηρητικών δυνάμεων ή των δυνάμεων του συντηρητικού πεδίου ισούται με μηδέν. Η τριβή, όπως είδαμε, δεν είναι συντηρητική δύναμη, διότι όταν ξεκινούμε από ένα σημείο και μετά από κάποια διαδρομή επιστρέφομε σ' αυτό, το έργο της δυνάμεως της τριβής δεν είναι ίσο με μηδέν.

Συντηρητικές δυνάμεις είναι οι ακόλουθες:

1) Οι βαρυτικές δυνάμεις.

2) Οι ηλεκτρικές δυνάμεις ανάμεσα σε ηλεκτρικά φορτία.

3) Η δύναμη επαναφοράς που ασκεί το ελατήριο.

4) Η άνωση.

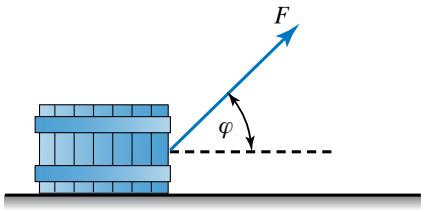
5) Οι δυνάμεις ελαστικών παραμορφώσεων.

Ως μηχανική ενέργεια E σώματος (ή συστήματος σωμάτων) ορίζεται το άθροισμα της κινητικής K και της δυναμικής U ενέργειάς του. Δηλαδή $E = K + U$.

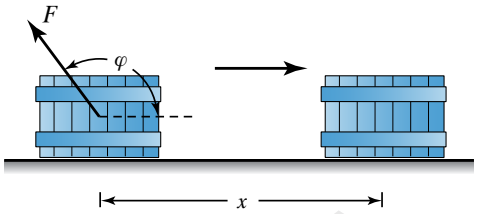
4.2.6 Κινητήριο και ανθιστάμενο έργο.

Το κινητήριο και το ανθιστάμενο έργο ονομάζονται και παραγόμενο και καταναλισκόμενο έργο αντιστοίχως. Από τον ορισμό του έργου $W = Fs$, όπου s η μετατόπιση, ισχύει ότι $W = Fs\cos\varphi$. Αν $\cos\varphi > 0$ (δηλ. $0 \le \varphi < \pi/2$), τότε $W > 0$ κινητήριο έργο ισχύει (σχ. 4.2.5), αν $\cos\varphi < 0$ (δηλ. $\pi/2 < \varphi \le \pi$), τότε $W < 0$ ανθιστάμενο έργο (σχ. 4.2.6).

Το θετικό έργο δυνάμεως F που ονομάζεται και παραγόμενο, εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα από το περιβάλλον του, το οποίο του ασκεί τη δύναμη F. Ονομάζεται επίσης και κινητήριο, διότι η δύναμη δεν αντιστέκεται στη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της, αλλά συμβάλλει στη μετατόπιση αυτή.



Σχ. 4.2.5
Κινητήριο έργο.



Σχ. 4.2.6
Ανθιστάμενο έργο.

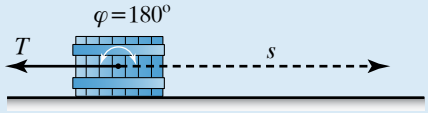
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Εργάτης τραβά με σχοινί κιβώτιο ασκώντας του οριζόντια δύναμη F. Αν η μετατόπιση και η δύναμη του εργάτη έχουν την ίδια φορά, το έργο της F είναι θετικό και εκφράζει την ενέργεια που προσέφερε ο εργάτης στο σώμα πάνω στο οποίο ασκεί τη δύναμη F.

Σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω και μετατοπίζεται κατά απόσταση h. Το βάρος B έχει την κατεύθυνση της μετατοπίσεως, άρα $\varphi = 0^o$, συνεπώς $W_B = B\,h\cos 0^o = B\,h\,1 = B\,h$, επομένως το έργο του βάρους είναι παραγόμενο έργο.

Το αρνητικό έργο μίας δυνάμεως F που ονομάζεται και καταναλισκόμενο, εκφράζει την ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα και μεταφέρεται στο περιβάλλον του, το οποίο του ασκεί τη δύναμη F. Ονομάζεται και ανθιστάμενο έργο, διότι η δύναμη αντιστέκεται στη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της.

2. Το έργο της τριβής ολισθήσεως ($W = Ts\cos 180^0$ ή $W = -Ts$) είναι αρνητικό. Δίνομε αρχική ταχύτητα u_0 σε ένα σώμα και το αφήνομε να κινηθεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι μετά από λίγο σταματά, αφού έχει διανύσει απόσταση s. Η ολική δύναμη που ασκούνταν πάνω του κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του, ήταν η τριβή ολισθήσεως (σχ. 4.2.7).



$W = Ts\cos 180$ ή $W = -Ts$

Σχ. 4.2.7
Ανθιστάμενο έργο λόγω τριβής ολισθήσεως.

Το έργο της τριβής είναι αρνητικό (ανθιστάμενο έργο), άρα από το σώμα αφαιρείται ενέργεια, η οποία μεταβιβάζεται στο οριζόντιο επίπεδο και μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια ενώ μέρος της μπορεί εκλύεται στο περιβάλλον ως θερμότητα. Η ενέργεια του σώματος μειώνεται κατά ποσό ίσο με το έργο της τριβής.

3. Σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και μετατοπίζεται κατά απόσταση h. Το βάρος του B έχει την αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση (ανθιστάμενο έργο), άρα $\varphi = 180^o$, συνεπώς $W_B = B\,h\cos 180^o = B\,h\,(-1) = -B\,h$.

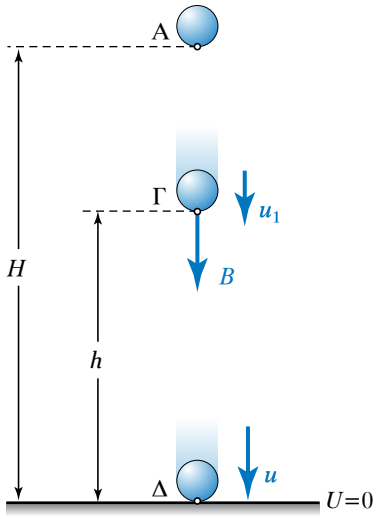
4.3 Αρχή διατηρήσεως της ενέργειας. Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Σε κάθε απομονωμένο σύστημα σωμάτων η ολική ενέργεια (άθροισμα ενεργειών οποιασδήποτε μορφής) διατηρείται σταθερή. Δηλαδή, όταν ένα σύστημα σωμάτων είναι απομονωμένο, δεν ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον του, οπότε κατά τις μετατροπές της ενέργειας του συστήματος απ' τη μία μορφή στην άλλη, η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή.

Ειδική περίπτωση διατηρήσεως της ενέργειας είναι η αρχή διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας. Αυτή είναι η περίπτωση που έχομε να κάνομε μόνο με μηχανική ενέργεια, συγκεκριμένα, κινητική και δυναμική ενέργεια.

Σώμα μάζας m που βρίσκεται στη θέση Α (σχ. 4.3.1) αφήνεται από την ηρεμία να πραγματοποιήσει ελεύθερη πτώση. Θεωρούμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Κατά την πτώση του σώματος ασκείται σ' αυτό μόνο το βάρος του.

Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το έδαφος. Στη θέση Α το σώμα έχει δυναμική ενέργεια $m \cdot g \cdot H$ και η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν, διότι ακινητεί. Συνεπώς, η μηχανική του ενέργεια είναι $E_A = U_A + K_A = mgH$.



Σχ. 4.3.1
Διατήρηση μηχανικής ενέργειας.

Στην ενδιάμεση θέση Γ το σώμα έχει κινητική ενέργεια, διότι κινείται:

$$(K = 1/2\, m u_1^2),$$

καθώς και δυναμική ($U_\Gamma = mgh$), συνεπώς:

$$E_\Gamma = U_\Gamma + K_\Gamma = mgh + 1/2\, m u_1^2.$$

Στη θέση Δ (ακριβώς πριν συγκρουστεί με το έδαφος) το σώμα δεν έχει δυναμική ενέργεια και η κινητική του ενέργεια είναι:

$$(K_\Delta = 1/2\, m u^2).$$

Δηλαδή όσο το σώμα κατεβαίνει, η δυναμική και η κινητική ενέργεια μεταβάλλονται· η δυναμική ενέργεια που είχε στη θέση Α μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια στη θέση Δ. Συγχρόνως, η δύναμη του βάρους εκτέλεσε έργο επί του σώματος. Το έργο είναι ο ενδιάμεσος (το μέσο), με το οποίο μετατρέπεται η ενέργεια από τη μία μορφή στην άλλη. Έτσι μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική γίνεται μέσω του έργου του βάρους.

Η κινητική ενέργεια που έχει το σώμα όταν φτάνει στο έδαφος (σημείο Δ) ισούται με τη δυναμική ενέργεια, που είχε στη θέση Α.

Απόδειξη.

Αφού η κίνηση που εκτελεί το σώμα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, ισχύει ότι:

$$u = g t \text{ και } h = 1/2\, g t^2.$$

Για την κινητική ενέργεια του σώματος όταν φτάνει στο σημείο Δ ισχύει ότι:

$$K_\Delta = 1/2\, m \upsilon^2 = 1/2\, m (gt)^2 =$$

$$= 1/2\, m g^2 t^2 = m g\, 1/2\, g t^2 = m g H.$$

Δηλαδή κατά την κίνηση του σώματος, η μείωση της δυναμικής ισούται με την αύξηση της κινητικής του ενέργειας. Επειδή είναι $E_\Delta = K_\Delta$ και $E_\Alpha = m g H$, έπεται ότι $E_\Alpha = E_\Delta$.

Γενικώς, αν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση μόνο του βάρους του, η μηχανική του ενέργεια παραμένει σταθερή.

Η δύναμη του πεδίου βαρύτητας είναι συντηρητική και αποδεικνύεται γενικώς ότι, η αρχή διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας διατυπώνεται ως εξής: ***Η μηχανική ενέργεια ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων δεν μεταβάλλεται, όταν οι δυνάμεις που ασκούνται είναι συντηρητικές.***

Απόδειξη.

Σώμα που βρίσκεται μέσα σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων κινείται από τη θέση Α στη θέση Β.

Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχομε ότι $K_\Beta - K_\Alpha = W_{\Alpha\Beta}$. Για τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος ισχύει ότι: $\Delta U_{\Alpha\Beta} = -W_{\Alpha\Beta}$, άρα $(U_\Beta - U_\Alpha) = -W_{\Alpha\Beta}$ άρα $-U_\Beta + U_\Alpha = W_{\Alpha\Beta}$. Επομένως:

$$K_\Beta - K_\Alpha = -U_\Beta + U_\Alpha \text{ ή } K_\Beta + U_\Beta = K_\Alpha + U_\Alpha,$$

$$\text{άρα } E_\Beta = E_\Alpha.$$

– Μεταβολή της μηχανικής ενέργειας.

Θυμίζομε ότι όταν έχομε συντηρητικές ή διατηρητικές δυνάμεις, τότε κατά μήκος μίας κλειστής διαδρομής, το έργο τους είναι ίσο με μηδέν.

Γνωρίζομε επίσης πως αν σε ένα σώμα (ή σύστημα σωμάτων) ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, τότε η μηχανική ενέργεια του σώματος (ή του συστήματος σωμάτων) παραμένει σταθερή. Δηλαδή:

$$E = K + U = \text{σταθερή}.$$

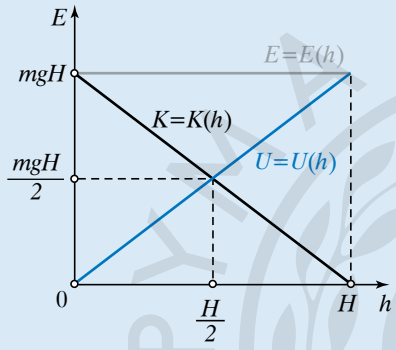
Αν σε ένα σύστημα εκτός από τις συντηρητικές υπάρχουν και μη συντηρητικές δυνάμεις, τότε η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος ισούται με το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων. Δηλαδή:

$$\Delta E_{\text{ΜΗΧ}} = W_{\text{F ΜΗ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΩΝ}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σώμα μάζας m εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος H. Κατά τη διάρκεια της κινήσεώς του ασκείται πάνω του μόνο το βάρος του (συντηρητική δύναμη), άρα η μηχανική του ενέργεια E παραμένει σταθερή.

Κατά τη διάρκεια της πτώσεως έχομε μετατροπή της δυναμικής ενέργειας U σε κινητική K, αλλά το άθροισμά τους παραμένει πάντοτε σταθερό. Η γραφική παράσταση του σχήματος 4.3.2 παρουσιάζει τις μεταβολές της κινητικής, της δυναμικής και της μηχανικής ενέργειας σε σχέση με το ύψος.



Σχ. 4.3.2

Γραφική παράσταση κινητικής, δυναμικής και μηχανικής ενέργειας ως προς το ύψος.

4.4 Ισχύς. Συντελεστής αποδόσεως μηχανής.

Κατά τον ορισμό του έργου και της ενέργειας, δεν έγινε καμία αναφορά στο χρόνο. Όμως, πολλές φορές δεν αρκεί να γνωρίζομε μόνο την ποσότητα του έργου που παράγεται ή δαπανάται, αλλά και το χρονικό διάστημα που απαιτείται, προκειμένου να συμβεί αυτό.

Οι μηχανές που παράγουν μηχανικό έργο, όπως ατμομηχανές, υδραυλικοί στρόβιλοι (υδροτουρμπίνες), ηλεκτροκινητήρες, μηχανές εσωτερικής καύσεως (ΜΕΚ) (πετρελαιομηχανές, βενζινοκινητήρες) χαρακτηρίζονται ως ***κινητήριες μηχανές*** ή ***κινητήρες.***

Οι μηχανές μπορεί να απορροφούν και να παράγουν έργο σε διάφορες μορφές. Επίσης, μπορεί να απορροφούν μιας μορφής ενέργεια και να την αποδίδουν σε άλλη μορφή.

Μία μηχανή έχει κάποιο ***ρυθμό*** παραγόμενου ή απορροφούμενου έργου ή αντίστοιχα ενεργειών, ανά δευτερόλεπτο. Όσο πιο μεγάλος είναι αυτός ο ρυθμός, τόσο πιο ***ισχυρή*** είναι η μηχανή. Η έννοια του ρυθμού σχετίζεται και με το έργο δυνάμεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εργολάβος τοποθετεί στην ταράτσα οικοδομής δύο ανυψωτικές μηχανές Α και Β. Η Α, προκειμένου να ανεβάσει ένα καρότσι γεμάτο τούβλα σε κάποιον όροφο, χρειάζεται 2 min, ενώ η Β 5 min.

Το έργο που παράγει επί του καροτσιού η κάθε μηχανή δίνεται απ' τον τύπο $W = B\ h$. Η μόνη διαφορά τους είναι στο χρόνο. Χρειάζεται να ορίσομε ένα νέο φυσικό μέγεθος, το οποίο να εκφράζει το πόσο γρήγορα παράγεται ή δαπανάται το έργο ή η ενέργεια.

Ισχύς ονομάζεται το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που εκφράζει τον ρυθμό παραγωγής ή καταναλώσεως έργου ή ενέργειας και ισούται με το πηλίκο του έργου ή της ενέργειας W, που παράγεται ή δαπανάται σε χρονικό διάστημα t, προς το χρονικό διάστημα αυτό. Συμβολίζεται με το γράμμα P και ισχύει ότι:

$$P = W/t.$$

Όταν ο ρυθμός δεν είναι σταθερός, με τον χρόνο ορίζεται η στιγμιαία ισχύς, με τη βοήθεια απειροστών ποσοτήτων:

$$P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t.$$

Στο SI μονάδα μετρήσεως της ισχύος είναι το watt, W (βατ) που ορίζεται ως η ισχύς με ρυθμό 1 J/1 s, δηλαδή:

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}.$$

Άλλες μονάδες μετρήσεως της ισχύος είναι:

1) 1 kW(kilowatt) = 1000 W, 1 MW = 1 000 000 W.

2) 1 HP (Horse Power = αγγλικός ίππος) με την οποία συνήθως μετρείται η ισχύς των μηχανών των αυτοκινήτων. Ισχύει ότι:

$$1\ \mathrm{HP} = 76{,}0\,\frac{\mathrm{kgf}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} =$$

$$= 76{,}0\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 746\ \mathrm{W},\ 1\mathrm{kW} \approx 1{,}34\ \mathrm{HP}.$$

3) CV = 1 PS (Cheval vapeur, Pferdestärke, γαλλικός-γερμανικός ίππος) Ισχύει ότι:

$$1\ \mathrm{CV} = 75{,}0\,\frac{\mathrm{kgf}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 75{,}0\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 736\ \mathrm{W}.$$

Άρα 1 PS = 0,736 kW, συνεπώς 1 kW = 1,36 PS.

4.4.1 Μεγάλες μονάδες έργου.

Από τη σχέση $P = W/t$ έχομε $W = P\,t$:

1) Αν $P = 1$ W και $t = 1$ h, τότε $W = 1$ Wh (βατώρα), δηλαδή είναι το έργο που παράγει σε μία ώρα, μία μηχανή ισχύος ενός watt.

2) Αν $P = 1$ kW και $t = 1$ h, τότε $W = 1$ kWh (κιλοβατώρα), δηλαδή είναι το έργο που παράγει σε μία ώρα μία μηχανή ισχύος ενός kW.

Ο λογαριασμός της ΔΕΗ αναφέρεται στο ρεύμα που ξοδέψαμε κατά τη διάρκεια δύο μηνών, μετρημένο σε kWh.

Είναι:

1) $1\text{ Wh} = 1\text{ J/s} \times 3{,}600 \times 10^3\text{ s} = 3{,}600 \times 10^3\text{ J}$.

2) $1\text{ kWh} = 1{,}000 \times 10^3\text{ W} \times 1{,}000\text{ h} =$
$= 1{,}000 \times 10^3\text{ Wh}$.

3) $1\text{ kWh} = 1{,}000 \times 10^3\text{ W} \times 1{,}000\text{ h} =$
$= 1{,}000 \times 10^3\ \ 1\text{ J/s} \times 3{,}600 \times 10^3\text{ s} =$
$= 3{,}600 \times 10^6\text{ J}$.

Αν η στιγμιαία ισχύς μίας μηχανής δεν παραμένει σταθερή με τον χρόνο, τότε από τη σχέση $P = W/t$ ορίζεται η μέση ισχύς για τη χρονική διάρκεια t.

Παρατήρηση.

Σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα u και σε χρόνο t, διανύει απόσταση s. Η ισχύς σταθερής δυνάμεως F που ασκείται πάνω του, με τη διεύθυνσή της συνεχώς εφαπτόμενη στην τροχιά, είναι:

$$P = \frac{W}{t} = \pm\frac{F\,s}{t} = \pm F\,\frac{s}{t} = \pm F\,u.$$

Θεωρούμε ότι τα F, s είναι θετικά (απόλυτες τιμές των αντιστοίχων μεγεθών), οπότε αν η ταχύτητα έχει την ίδια φορά με τη δύναμη, τότε η ισχύς είναι θετική και εκφράζει το ρυθμό, με τον οποίο η δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα, οπότε $P = +F\,u > 0$.

Αν η ταχύτητα έχει αντίθετη φορά απ' τη δύναμη, τότε η ισχύς είναι αρνητική και εκφράζει τον ρυθμό, με τον οποίο η δύναμη αφαιρεί ενέργεια από το σώμα, στο οποίο ενεργεί, οπότε $P = -F\,u < 0$.

4.4.2 Συντελεστής αποδόσεως μηχανής.

Κάθε μηχανή κατά τη λειτουργία της, απαιτείται να τροφοδοτείται με κάποια ποσότητα ενέργειας, την οποία μετασχηματίζει σε μία άλλη μορφή ενέργειας που μας είναι χρήσιμη. Για παράδειγμα, η λάμπα μετασχηματίζει την ηλεκτρική ενέργεια σε φωτεινή. Οι μπαταρίες υποβρυχίου μετατρέπουν τη χημική τους ενέργεια σε κινητική. Ο κινητήρας αυτοκινήτου μετατρέπει τη θερμική ενέργεια που λαμβάνει απ' την καύση της βενζίνης (ή του πετρελαίου) σε μηχανική ενέργεια.

Η ποσότητα της ενέργειας που αποδίδει κάθε μηχανή σε δεδομένο χρόνο δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη απ' την ποσότητα της ενέργειας που έλαβε στον ίδιο χρόνο. Κατά τη λειτουργία της κάθε μηχανής, μέρος της προσφερόμενης σ' αυτήν ενέργειας, μετασχηματίζεται σε μορφή ενέργειας που δεν είναι αυτή που θέλομε· για παράδειγμα μπορεί να εκλύεται στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας. Αυτό μπορεί να συμβαίνει λόγω των τριβών στα κινούμενα μηχανικά μέρη της μηχανής. Συνεπώς, η ποσότητα της ενέργειας που αποδίδεται ως χρήσιμη ενέργεια, είναι πάντοτε μικρότερη απ' την ποσότητα της ενέργειας που λαμβάνεται στον ίδιο χρόνο.

Έτσι, ένα κριτήριο ποιότητας της μηχανής είναι ο συντελεστής αποδόσεως ο οποίος ορίζεται ως το πηλίκο της ωφέλιμης (χρήσιμης) ισχύος που παράγει η μηχανή προς την ισχύ που της προσφέρθηκε (δαπανήθηκε). Δηλαδή:

$$\alpha = \frac{P_{\text{ΩΦΕΛΙΜΗ}}}{P_{\text{ΔΑΠΑΝΟΜΕΝΗ}}}.$$

Ο συντελεστής αποδόσεως είναι καθαρός αριθμός (αδιάστατο μέγεθος), παίρνει τιμές από 0 έως 1 ($0 \le \alpha \le 1$) και συνήθως εκφράζεται με τη μορφή ποσοστού. Η ωφέλιμη ισχύς χαρακτηρίζεται και ως «ενδεικνυόμενη» ισχύς, διότι είναι εκείνη που καταγράφεται όταν η μηχανή διαθέτει σχετικά όργανα. Σε κάθε περίπτωση μετατροπής και μεταδόσεως ενέργειας, υπάρχουν απώλειες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν ο συντελεστής αποδόσεως είναι $\alpha = 0{,}9$, η μηχανή έχει απόδοση 90%, δηλαδή για κάθε 100 joule ενέργειας που της προσφέρεται αποδίδει ωφέλιμη ενέργεια 90 J.

Ισχύει επίσης ότι: $\alpha = \dfrac{P_{\text{ΩΦΕΛΙΜΗ}}}{P_{\text{ΔΑΠΑΝΩΜΕΝΗ}}} =$

$$= \frac{\dfrac{E_{\text{ΩΦΕΛΙΜΗ}}}{t}}{\dfrac{E_{\text{ΔΑΠΑΝΩΜΕΝΗ}}}{t}} = \frac{E_{\text{ΩΦΕΛΙΜΗ}}}{E_{\text{ΔΑΠΑΝΩΜΕΝΗ}}}.$$

2. Η ισχύς μίας υδατοπτώσεως εκφράζει το ρυθμό, με τον οποίο προσφέρει ενέργεια στο στρόβιλο. Η ενέργεια που λαμβάνει ο στρόβιλος ισούται με το έργο του βάρους του νερού $W_B = mgh$, άρα:

$$P_{\text{ΥΔΑΤΟΠΤΩΣΕΩΣ}} = \frac{W_B}{t} = \frac{m\,g\,h}{t}.$$

Αν $d_{\text{ΝΕΡΟΥ}}$ η πυκνότητα του νερού, έχομε $m = d_{\text{ΝΕΡΟΥ}}\,V$, όπου V ο όγκος του νερού που πέφτει στον στρόβιλο σε χρόνο t. Άρα:

$$P_{\text{ΥΔΑΤΟΠΤΩΣΕΩΣ}} = \frac{d_{\text{ΝΕΡΟΥ}}\,V\,g\,h}{t}.$$

Το πηλίκο V/t εκφράζει την παροχή Π του νερού, συνεπώς:

$$P_{\text{ΥΔΑΤΟΠΤΩΣΕΩΣ}} = \mathrm{d}_{\text{ΝΕΡΟΥ}}\,\Pi\,g\,h.$$

Αν ο στρόβιλος έχει συντελεστή αποδόσεως α_Σ, η ισχύς που προσφέρει είναι:

$$P_\Sigma = \alpha_\Sigma P_{\text{ΥΔΑΤΟΠΤΩΣΕΩΣ}} = \alpha_\Sigma\ \mathrm{d}_{\text{ΝΕΡΟΥ}}\,\Pi\,g\,h.$$

Αυτή την ισχύ παίρνει με τη σειρά της η γεννήτρια και αν ο συντελεστής αποδόσεώς της είναι α_Γ, τότε η ισχύς που λαμβάνομε απ' όλη αυτήν τη διαδικασία είναι:

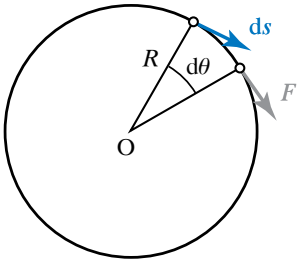
$$P_\Gamma = \alpha_\Gamma P_\Sigma = \alpha_\Gamma\,\alpha_\Sigma\,P_{\text{ΥΔΑΤΟΠΤΩΣΕΩΣ}} = \\ = \alpha_\Gamma\,\alpha_\Sigma\,\mathrm{d}_{\text{ΝΕΡΟΥ}}\,\Pi\,g\,h.$$

4.5 Ενεργειακή μελέτη στροφικών κινήσεων στερεών σωμάτων.

4.5.1 Έργο κατά τη στροφική κίνηση.

Έστω δύναμη F σταθερού μέτρου που ασκείται στην περιφέρεια ρόδας ακτίνας R για απειροστά μικρό χρόνο $\mathrm{d}t$. Η διεύθυνση της δυνάμεως συμπίπτει με τη διεύθυνση της εφαπτομένης και περιστρέφει τον τροχό κατά απειροστά μικρή γωνία $\mathrm{d}\theta$ (σχ. 4.5.1). Το στοιχειώδες έργο, που παράγει η δύναμη γι' αυτήν τη στοιχειώδη μετατόπιση είναι $\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}s$, διότι η δύναμη εφάπτεται συνεχώς στη μετατόπιση.

Όμως $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$ (όταν η γωνία μετρείται σε ακτίνια), άρα $\mathrm{d}W = F\,R\,\mathrm{d}\theta$. Γνωρίζομε ότι $\tau = F\,R$, όπου τ η ροπή της δυνάμεως. Συνεπώς $\mathrm{d}W = \tau\,\mathrm{d}\theta$, αυτό είναι το στοιχειώδες έργο ροπής τ. Αν η σταθερού

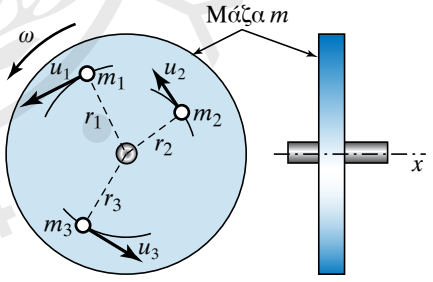


Σχ. 4.5.1
Σχηματική παράσταση δυνάμεως που ασκείται στην περιφέρεια τροχού (ρόδας).

μέτρου δύναμη περιστρέψει τον τροχό (ρόδα) κατά γωνία θ, τότε προκειμένου να υπολογίσομε το έργο της, χωρίζομε τη γωνία σε απειροστά μικρές γωνίες $\mathrm{d}\theta_1$, $\mathrm{d}\theta_2$, $\mathrm{d}\theta_3$,... και προσθέτομε τα αντίστοιχα στοιχειώδη έργα. Ισχύει ότι $W = \tau\,\theta$ κι αυτό είναι το έργο σταθερής ροπής.

4.5.2 Κινητική ενέργεια στερεού σώματος σε περιστροφή.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσομε επίπεδη κίνηση στερεού. Έστω σφόνδυλος μηχανής που περιστρέφεται περί τον άξονά του (σχ. 4.5.2). Όλα τα υλικά του σημεία m_1, m_2, m_3,... έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. Οι αποστάσεις τους αντίστοιχα απ' τον άξονα περιστροφής είναι r_1, r_2, r_3,.... Η κινητική ενέργεια K του σφονδύλου ισούται με το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών.



Σχ. 4.5.2
Σχηματική παράσταση υπολογισμού της κινητικής ενέργειας στέρεου σώματος, λόγω στροφικής κινήσεως.

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots = \\ = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 + \frac{1}{2}m_3 u_3^2 + \ldots \\ = \frac{1}{2}m_1 (\omega r_1)^2 + \frac{1}{2}m_2 (\omega r_2)^2 + \frac{1}{2}m_3 (\omega r_3)^2 + \ldots \\ = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)}_{I} = \frac{1}{2} I\,\omega^2.$$

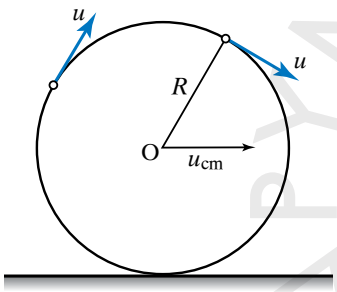
Όπου I η ροπή αδρανείας του σφονδύλου περί τον άξονά του.

Όπως η μάζα m είναι το μέτρο της αντιστάσεως ενός σώματος στις αλλαγές της κινητικής του καταστάσεως κατά τη μεταφορική κίνηση, έτσι και η ροπή αδρανείας I είναι μέτρο της αντιστάσεως ενός σώματος στις αλλαγές της κινητικής του καταστάσεως κατά την περιστροφική κίνηση περί άξονα.

Αν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, η κινητική του ενέργεια K, ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών, λόγω της μεταφορικής και της στροφικής κινήσεώς του περί τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του:

$$K = 1/2\, m\, u_{cm}^2 + 1/2\, I\, \omega^2,$$

όπου I η ροπή αδρανείας, m η μάζα και u_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του (σχ. 4.5.3).



Σχ. 4.5.3
Σχηματική παράσταση υπολογισμού της κινητικής ενέργειας, λόγω στροφικής και μεταφορικής κινήσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σφόνδυλος μάζας $m = 40$ kg έχει σχήμα δίσκου, ακτίνα $R = 1$ m και στρέφεται με 300 στροφές το μισό λεπτό. Αν η ροπή αδρανείας του I δίνεται από τον τύπο $I = \dfrac{m R^2}{2}$, να υπολογίσετε την κινητική του ενέργεια. Έχομε:

$$I = \frac{m R^2}{2} = \frac{40 \cdot 1^2}{2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 = 20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Επίσης,

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{300}{30\text{s}} = 62{,}8\ \text{rad/s},$$

$$\text{άρα } \omega^2 = 62{,}8^2\,\text{s}^{-2} \approx 3944\,\text{s}^{-2}.$$

Συνεπώς:

$$K = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3944\ \text{J} \approx 39\ 400\ \text{J}.$$

2. Ρόδα στρέφεται περί τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 30$ rad/s. Ποια η κινητική της ενέργεια K, και ποια η στροφορμή της L, όταν η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονά της είναι $I = 150\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$; Έχομε:

$$K = 1/2\, I\, \omega^2 = 1/2 \cdot 150 \cdot 30^2\ \text{J} = 67\,500\ \text{J}.$$

Επίσης έχομε:

$$L = I\,\omega = 150 \cdot 30\ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} = 4500\ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}.$$

4.5.3 Θεώρημα Έργου – Ενέργειας στη στροφική κίνηση.

Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που δρουν σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος:

$$\Sigma W = 1/2\, I\, \omega_2^2 - 1/2\, I\, \omega_1^2.$$

4.5.4 Ώθηση της ροπής.

Έστω ότι σ' ένα στερεό σώμα ασκείται μεταβαλλόμενη με τον χρόνο ροπή τ. Από τη γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κινήσεως ισχύει:

$$\tau = \frac{dL}{dt},\ \text{άρα } dL = \tau\, dt,\ \text{συνεπώς } L_2 - L_1 = \int \tau\, dt.$$

Η παράσταση $\int \tau\, \text{d}t$ ονομάζεται ***ώθηση της ροπής*** και ο θεμελιώδης νόμος μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: «***Η μεταβολή της στροφορμής που προκαλεί μία ροπή, ισούται με την ώθηση της ροπής***».

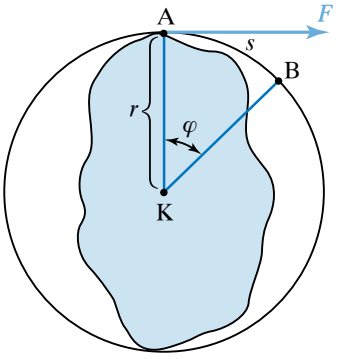
4.5.5 Ισχύς της ροπής μίας δυνάμεως.

Όταν αναφερόμαστε στην ισχύ P που έχει η ροπή τ μίας δυνάμεως F, αναφερόμαστε στην ισχύ της δυνάμεως F. Έστω στερεό σώμα Σ, στο οποίο ασκείται η ροπή τ της δυνάμεως F και περιστρέφεται περί σταθερό άξονα που διέρχεται απ' το σημείο Κ, κατά γωνία φ (σε ακτίνια) μέσα σε χρόνο t (σχ. 4.5.4).

Το έργο που παρήχθη ή που καταναλώθηκε μέσα σε χρόνο t, κατά τον οποίο το σημείο εφαρμογής της δυνάμεως Α έχει γράψει τόξο s, δίνεται από τον τύπο $W = \tau\, \varphi$.

Η ισχύς της ροπής προκύπτει όταν διαιρέσομε το έργο W διά τον χρόνο t, δηλαδή:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\tau\, \varphi}{t} = \tau \frac{\varphi}{t}.$$

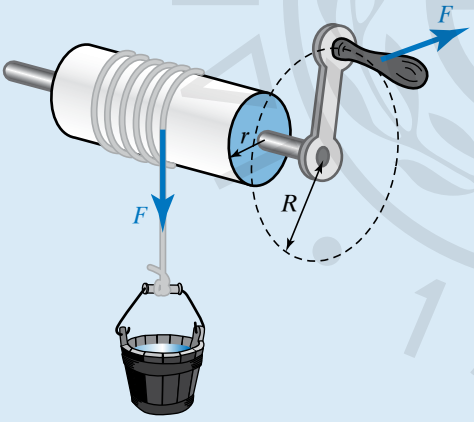


Σχ. 4.5.4
Δύναμη F μεταβάλλει τη στροφική κινητική ενέργεια με ρυθμό $P = \tau\,\omega$.

Επειδή για τη γωνιακή ταχύτητα ω ισχύει από τον ορισμό της ότι $\omega = \varphi/t$, έχομε $P = \tau\,\omega$. Αυτή είναι η σχέση και για την ισχύ ροπής ζεύγους δυνάμεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Άνθρωπος ασκεί στη λαβή του στροφάλου ενός βαρούλκου σταθερή δύναμη $F = 100\,\text{N}$. Το μήκος του στροφάλου είναι $r = 0{,}5\,\text{m}$. Ποιο έργο παράγει μετά από $n = 4$ στροφές; Αν ο χρόνος που απαιτήθηκε για τις στροφές αυτές είναι 1 min, ποια η ισχύς της δυνάμεως που ασκεί ο άνθρωπος (σχ. 4.5.5);



Σχ. 4.5.5
Βαρούλκο.

Λύση

Γνωρίζομε ότι το έργο που παράγεται από μία δύναμη σταθερού μέτρου που παραμένει πάντοτε εφαπτόμενη στην τροχιά που διαγράφει το σημείο εφαρμογής της, ισούται με το γινόμενο της δυνάμεως επί το διάστημα που διανύει το σημείο εφαρμογής της.

Άρα $W = F\,2\pi r n = 100 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1/2 \cdot 4\,\text{J} =$
$= 1256\,\text{J} \approx 1260\,\text{J}.$

Για την ισχύ έχομε:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1256}{60}\,\text{W} = 20{,}93\,\text{W}.$$

4.6 Αρχή των δυνατών έργων. Απλές μηχανές.

Προκειμένου να μετατρέψομε μία μορφή ενέργειας σε άλλη, χρησιμοποιούμε κατάλληλες μηχανές. ***Μηχανή*** είναι ένα σύστημα σωμάτων, κατάλληλα συνδεδεμένων, οι οποίες μετασχηματίζουν, γενικώς, μία μορφή ενέργειας σε άλλη. ***Απλές μηχανές*** ονομάζονται αυτές που λαμβάνουν μηχανική ενέργεια από ένα σώμα και χωρίς να τη μετατρέπουν σε άλλη μορφή, τη μεταφέρουν σε άλλο σώμα.

Απλές μηχανές χρησιμοποιούμε συνήθως για μετακίνηση φορτίων (π.χ. ανύψωσή τους) καταβάλλοντας μικρή σχετικά δύναμη. Τέτοιες είναι οι μοχλοί, οι τροχαλίες, το πολύσπαστο, το βαρούλκο κ.λπ.. Σε κάθε μηχανή ενεργούν τριών ειδών δυνάμεις:

1) ***Κινητήριες δυνάμεις***, οι οποίες παράγουν κινητήριο έργο (π.χ. ανθρώπινη δύναμη, δύναμη του ατμού κ.ά.).

2) ***Ωφέλιμες αντιστάσεις*** ή φορτία για την ανύψωση ή μετακίνηση. Σ' αυτήν την περίπτωση, η μηχανή καταναλώνει ωφέλιμο έργο, καθώς θέλομε να υπερνικήσομε τις δυνάμεις, με τη βοήθεια της μηχανής (π.χ. βάρος που μετακινείται ή ανυψώνεται).

3) ***Παθητικές αντιστάσεις***, οι οποίες για να υπερνικηθούν απορροφούν ενέργεια από τη μηχανή και έτσι υπάρχουν απώλειες (π.χ. οι τριβές).

Πολλές φορές οι παθητικές αντιστάσεις είναι μικρές και τις αγνοούμε. Μ' αυτόν τρόπο απλοποιούνται οι υπολογισμοί μας, δηλαδή δεχόμαστε ότι ισχύει η ***αρχή διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας***.

4.6.1 Αρχή των δυνατών έργων.

Η αρχή των δυνατών έργων είναι μια χρήσιμη αρχή της Μηχανικής, που έχει εφαρμογή και στις απλές μηχανές.

Η αρχή αναφέρει σ' αυτήν την περίπτωση ότι, σε μια νοητή πολύ μικρή (απειροστή) μετατόπιση της απλής μηχανής, η οποία βρίσκεται σε ισορροπία, το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των κινητηρίων δυνάμεων και των ωφελίμων δυνάμεων ισούται με μηδέν. Η απειροστή μετατόπιση χρειάζεται, ώστε να μην απομακρυνθεί πολύ το σύστημα απ' τη θέση ισορροπίας. Σε πολλές περιπτώσεις, η μετατόπιση

δεν είναι ανάγκη να είναι απειροστή, αν η ισορροπία δεν διαταράσσεται.

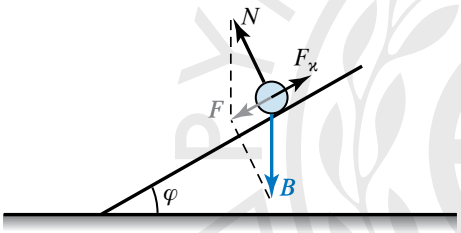
Για τις απλές μηχανές η αρχή αυτή σχετίζεται με τη διατήρηση της ενέργειας.

Θεωρούμε ότι οι παθητικές αντιστάσεις είναι αμελητέες. Αν δεν ήταν, θα έπρεπε να ληφθεί υπόψη το έργο τους στο ανωτέρω ισοζύγιο.

Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι οι αποστάσεις που διανύουν τα σημεία εφαρμογής των κινητηρίων και των ωφελίμων αντιστάσεων (δυνάμεων) στις απλές μηχανές, είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τα μέτρα τους, δηλαδή ό,τι κερδίζομε σε δύναμη, το χάνουμε σε δρόμο και αντίστροφα. Αυτός είναι ο ***χρυσός κανόνας της Μηχανικής***.

4.6.2 Κεκλιμένο επίπεδο.

Κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως φ ονομάζεται μία επίπεδη επιφάνεια που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο οξεία γωνία φ (σχ. 4.6.1).



Σχ. 4.6.1
Κεκλιμένο επίπεδο.

Πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, τοποθετούμε σώμα, που θεωρούμε ως υλικό σημείο μάζας m και βάρους B. Στο σώμα ασκείται το βάρος του και η αντίδραση του κεκλιμένου επιπέδου N (κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο). Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων είναι κατά τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και προς τα κάτω· ισχύει δηλαδή $F = B \cdot \sin\varphi$.

Αν επιθυμούμε να ανυψώσομε το σώμα και δεν μπορούμε να διαθέσομε δύναμη τουλάχιστον ίση με το βάρος του B, τότε χρησιμοποιώντας το κεκλιμένο επίπεδο, αρκεί να καταβάλομε δύναμη F_x μέτρου τουλάχιστον $B\cdot\sin\varphi$, δηλαδή μικρότερη της B. Όσο μικρότερη είναι η γωνία φ, τόσο μεγαλύτερη διαδρομή θα διανύσει το σώμα που κινείται στο κεκλιμένο επίπεδο, ώστε να φτάσει στο τελικό του ύψος.

Μπορεί κάποιος να εφαρμόσει την αρχή των δυνατών έργων ή το χρυσό κανόνα της Μηχανικής και να βρει ότι η κινητήρια δύναμη που χρειάζεται έχει μέτρο $F_x = B\sin\varphi$, όπως βρήκαμε προηγουμένως. Πράγματι, αν έχομε μετακίνηση κατά ύψος h, τότε κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου η μετακίνηση είναι s· προφανώς ισχύει $h = s\sin\varphi$. Σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων $W_B + W_x + W_N = 0$. Αν θεωρήσομε τις μετατοπίσεις h, s θετικές και τα B, F_x θετικά (μέτρα των αντιστοίχων διανυσμάτων των δυνάμεων), τότε έχομε κατά τα γνωστά για τα διάφορα έργα $W_B = -Bh$, $W_x = F_x s$. Επειδή η δύναμη N είναι κάθετη στη μετατόπιση s, έχομε $W_N = 0$.

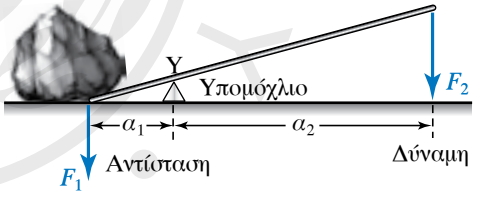
Άρα: $$W_B + W_x + W_N = -Bh + F_x s + 0 = 0$$
$$-Bs\sin\varphi + F_x s = 0 \quad \text{άρα} \quad F_x = B\sin\varphi.$$

Πολλές εργασίες εκτελούνται επί των πλοίων και στα ναυπηγεία με τη χρήση κεκλιμένου επιπέδου.

4.6.3 Μοχλοί.

Ο μοχλός είναι μια απλή μηχανή ευρείας χρήσεως.

Κατά την εκτέλεση αγροτικών και οικοδομικών εργασιών και προκειμένου να μετακινήσομε ογκόλιθους, χρησιμοποιούμε χοντρή σιδερένια ράβδο (λοστό), το ένα άκρο της οποίας τοποθετούμε κάτω από τον ογκόλιθο, το δε άλλο πιέζομε με τα χέρια μας, αφού προηγουμένως βάλομε υποστήριγμα στο σημείο Υ (σχ. 4.6.2).



Σχ. 4.6.2
Ο λοστός είναι μοχλός πρώτου είδους.

Σε κάθε μοχλό διακρίνομε το υπομόχλιο, την αντίσταση και την κινητήρια δύναμη. Στο σχήμα 4.6.2, το ***υπομόχλιο*** (υποστήριγμα) είναι τοποθετημένο στο σημείο Υ, γύρω από το οποίο μπορεί και περιστρέφεται η ράβδος. ***Αντίσταση*** είναι η δύναμη F_1, δηλαδή το βάρος του βράχου. ***Κινητήρια δύναμη*** είναι η F_2, την οποία καταβάλει ο άνθρωπος, προκειμένου να μετακινήσει τον βράχο. Η απόσταση α_1 αντιστοιχεί στον μοχλοβραχίονα της αντιστάσεως και η απόσταση α_2 στον μοχλοβραχίονα της δυνάμεως.

Από την αρχή των δυνατών έργων ή την ισορροπία των ροπών των δυνάμεων περί το Υ προκύπτει:

$$F_1\alpha_1 = F_2\alpha_2. \text{ Δηλαδή } F_2 = F_1\alpha_1/\alpha_2.$$

Ανάλογα με την τιμή του κλάσματος α_1/α_2, η κινητήρια δύναμη F_2 μπορεί να είναι μεγαλύτερη ($\alpha_1 > \alpha_2$), μικρότερη ($\alpha_1 < \alpha_2$) ή και ίση ($\alpha_2 = \alpha_1$) με την αντίσταση F_1.

4.6.4 Είδη μοχλών.

Υπάρχουν τρία είδη μοχλών.

1) ***Μοχλοί πρώτου είδους***, όταν το υπομόχλιο βρίσκεται μεταξύ των δυνάμεων της αντιστάσεως και της κινήσεως, π.χ. ψαλίδι, λοστός.

2) ***Μοχλοί δευτέρου είδους***, όταν η αντίσταση βρίσκεται μεταξύ του υπομοχλίου και της κινητήριας δυνάμεως, π.χ. αραμπάς [χειράμαξα (σχ. 4.6.3)], το κουπί της βάρκας, όταν το υπομόχλιο βρίσκεται μέσα στο νερό.

Σχ. 4.6.3
Χειράμαξα, μοχλός δευτέρου είδους.

γ) ***Μοχλοί τρίτου είδους***, όταν η κινητήρια δύναμη βρίσκεται μεταξύ της αντιστάσεως και του υπομοχλίου, π.χ. η τσιμπίδα (σχ. 4.6.4).

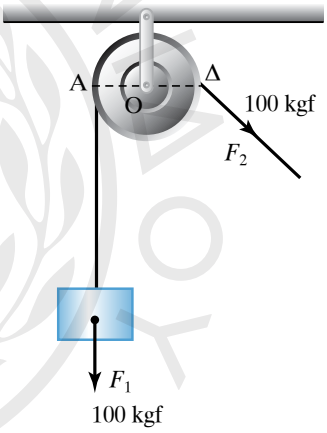
Σχ. 4.6.4
Τσιμπίδα, μοχλός τρίτου είδους.

4.6.5 Τροχαλίες.

Η τροχαλία είναι απλή μηχανή με την οποία μπορούμε να ανυψώνομε διάφορα βάρη. Αποτελείται από έναν δίσκο με αυλάκι, από το οποίο διέρχεται σχοινί ή αλυσίδα. Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται απ' το κέντρο του και στηρίζεται επί στελέχους σχήματος Π, που ονομάζεται ***τροχαλιοθήκη***.

Η τροχαλία διακρίνεται στα εξής τρία κυρίως είδη:

1) ***Πάγια*** ή ***σταθερή τροχαλία*** είναι εκείνη της οποίας η τροχαλιοθήκη στερεώνεται σε σταθερό σημείο, δηλαδή ο άξονας είναι σταθερός, δεν μετακινείται κατά τη χρήση της τροχαλίας. Το μέτρο της δυνάμεως που εφαρμόζεται στην τροχαλία αυτή ισούται με το βάρος (το μέτρο του) που ανυψώνεται. Αυτό βγαίνει εύκολα απ' την αρχή των δυνατών έργων ή από το θεώρημα των ροπών (σχ. 4.6.5).



Σχ. 4.6.5
Πάγια ή σταθερή τροχαλία.

Πράγματι θα έχομε:

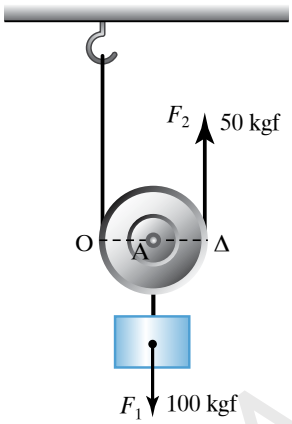
$$F_1 \cdot \text{OA} = F_2 \cdot \text{O}\Delta \quad \text{άρα} \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{\text{OA}}{\text{O}\Delta} = 1 \,,$$

δηλαδή $F_1 = F_2$.

Μ' αυτό το είδος τροχαλίας, δεν κερδίζομε δύναμη, αλλά διευκολυνόμαστε, εφόσον, για να ανυψώσομε το σώμα, αντί να ασκούμε δύναμη από κάτω προς τα πάνω, μπορούμε να ασκήσομε δύναμη από πάνω προς τα κάτω, που είναι πιο εύκολο. Ας μην ξεχνάμε ότι στη δύναμη F_2 μπορεί να προστεθεί και το βάρος του σώματός μας.

2) ***Ελεύθερη*** ή ***τρελή τροχαλία*** είναι εκείνη, της οποίας η τροχαλιοθήκη και ο δίσκος μετακινούνται

συγχρόνως με το σώμα που ανυψώνεται. Το ένα άκρο του σχοινιού δένεται σε σταθερό και ακλόνητο στήριγμα, ενώ στο άλλο εφαρμόζεται η δύναμη (σχ. 4.6.6).



Σχ. 4.6.6
Ελεύθερη ή τρελή τροχαλία.

Στο είδος αυτό της τροχαλίας, το βάρος που πρέπει να ανυψωθεί μοιράζεται στους δύο κλάδους του σχοινιού της τροχαλίας, άρα κερδίζομε σε δύναμη. Η κινητήρια δύναμη F_2, σε κατάσταση ισορροπίας, ισούται με το μισό βάρος του σώματος F_1, διότι απ' το θεώρημα των ροπών, ως προς το σημείο Ο, είναι:

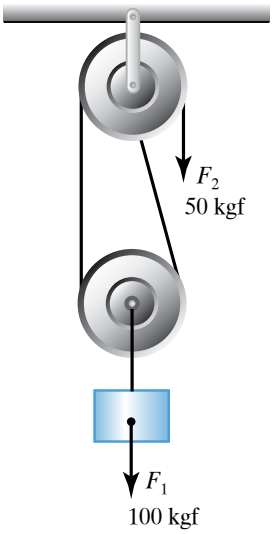
$$F_1 \cdot \text{OA} = F_2 \cdot \text{OΔ}, \text{ άρα } \frac{F_2}{F_1} = \frac{\text{OA}}{\text{OΔ}} = \frac{\text{OA}}{2 \cdot \text{OA}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{δηλαδή } F_2 = F_1/2.$$

Άρα μ' αυτήν την τροχαλία κερδίζομε σε δύναμη. Μπορεί να εφαρμοσθεί η αρχή των δυνατών έργων, αν ληφθεί υπόψη ότι όταν το Δ μετατοπίζεται κατά s_Δ, το Α μετατοπίζεται κατά το μισό, δηλαδή:

$$s_A = 1/2\, s_\Delta.$$

3) ***Μεικτή τροχαλία*** ονομάζεται εκείνη που προκύπτει από συνδυασμό μιας ελεύθερης και μίας σταθερής τροχαλίας. Διευκολύνει περισσότερο την εργασία μας, διότι η κινητήρια δύναμη ισούται με το μισό του βάρους και συγχρόνως μπορούμε να ασκήσομε δύναμη από πάνω προς τα κάτω (σχ. 4.6.7).



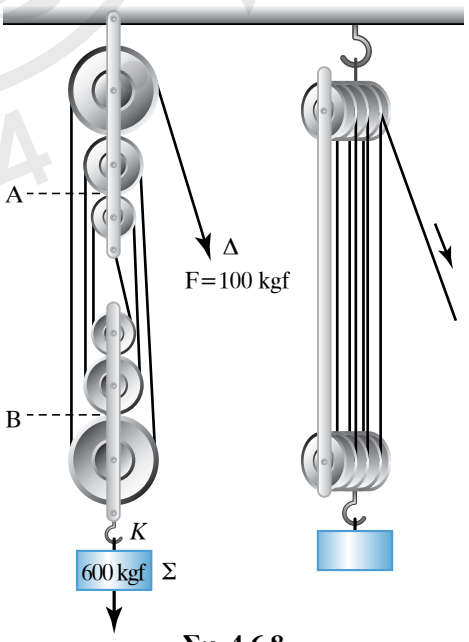
Σχ. 4.6.7
Μεικτή τροχαλία.

4.6.6 Πολύσπαστο.

Το πολύσπαστο είναι μία απλή μηχανή, με την οποία μπορούμε να ανυψώσομε πολύ μεγάλα βάρη. Αποτελείται από δύο ή περισσότερες πάγιες τροχαλίες, με κοινή τροχαλιοθήκη Α και από ίσες το πλήθος ελεύθερες τροχαλίες, με κοινή τροχαλιοθήκη Β, συνδεδεμένες μεταξύ τους. Το ελεύθερο άκρο του σχοινιού είναι το Δ (σχ. 4.6.8).

Το σώμα που επιθυμούμε να ανυψώσομε, αναρτάται στο άγκιστρο (σημείο Κ) όπου καταλήγει το ένα άκρο του συστήματος ελευθέρων τροχαλιών Β και επειδή το βάρος του ισομοιράζεται σε 6 σχοινιά, η κινητήριος δύναμη που απαιτείται να ασκήσομε είναι το 1/6 του βάρους του.

Γενικά, αν ν ο συνολικός αριθμός των τροχαλιών (παγίων συν ελευθέρων) και B το βάρος του



Σχ. 4.6.8
Πολύσπαστο με 3+3=6 τροχαλίες.

προς ανύψωση φορτίου, τότε απαιτείται η κινητήριος δύναμη F που θα ασκήσομε να είναι:

$$F = \text{Β}/\nu.$$

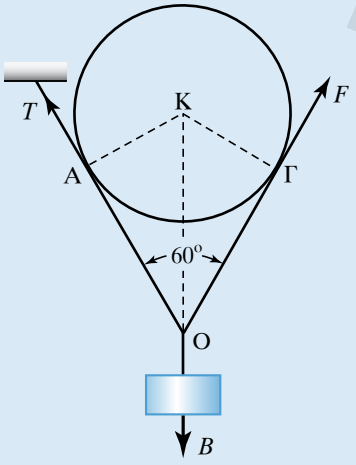
Με το πολύσπαστο κερδίζομε σε δύναμη, χάνομε όμως σε δρόμο, διότι προκειμένου να ανυψώσομε το σώμα κατά 1 m, πρέπει να σύρομε το σχοινί κατά 6 m. Είναι προφανές ότι λόγω των πολλαπλών επαφών του σχοινιού εμφανίζεται αξιόλογη τριβή, συνεπώς η κινητήρια δύναμη F που απαιτείται να καταβάλομε για τη μετακίνηση του φορτίου είναι στην πράξη κάπως μεγαλύτερη απ' την τιμή $\text{Β}/\nu$.

Οι πάνω τροχαλίες έχουν ως μοναδικό προορισμό τη μεταβολή της κατευθύνσεως ασκήσεως της δυνάμεως, χωρίς να παίζουν ρόλο στο μέτρο της δυνάμεως. Οι κάτω τροχαλίες μικραίνουν το μέτρο της κινητήριας δυνάμεως που χρειάζεται, ώστε να ανυψωθεί ορισμένο βάρος. Η κάθε μία «υποβιβάζει» το βάρος κατά παράγοντα 1/2.

Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις υποθέσαμε ότι οι κινητήριες δυνάμεις και οι δυνάμεις-αντιστάσεις, που ήταν το βάρος που ανυψώνομε είναι παράλληλες μεταξύ τους. Στο επόμενο παράδειγμα αυτό δεν ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το μέγιστο φορτίο που μπορούμε να ανυψώσομε με ελεύθερη τροχαλία, όταν η διεύθυνση της κινητήριας δυνάμεως F και της δυνάμεως-αντιστάσεως σχηματίζουν γωνία 60^o, σε διάταξη που φαίνεται στο σχήμα 4.6.9.



Σχ. 4.6.9

Λύση

Το μέγιστο φορτίο ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων F και T (τάση του νήματος), που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^o. Αυτή η συνισταμένη θα ισούται κατά μέτρο με το βάρος B.

Ισχύει ότι $T = F$, διότι οι ροπές τους ως προς το σημείο Κ, είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $\text{ΚΑ} \cdot T = \text{ΚΓ} \cdot F$ και επειδή $\text{ΚΑ} = \text{ΚΓ}$ έπεται ότι $T = F$.

Συνεπώς:

$$B = \sqrt{F^2 + T^2 + 2\,F\,T\cos 60^o} =$$

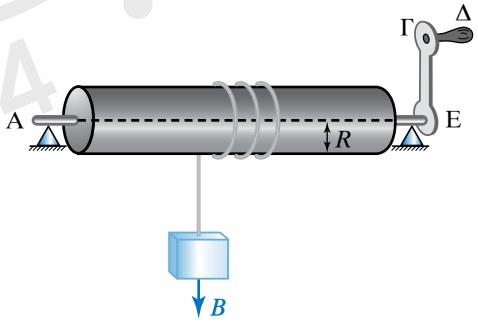
$$= \sqrt{F^2 + F^2 + 2\,F\,F\,\frac{1}{2}} = \sqrt{3F^2} = F\sqrt{3}$$

$$\text{άρα:}\quad F = \frac{B}{\sqrt{3}} > \frac{B}{2}.$$

Δηλαδή χρειάζεται μεγαλύτερη δύναμη απ' τη δύναμη Β/2 που είδαμε στα προηγούμενα, με παράλληλα σχοινιά.

4.6.7 Βαρούλκο.

Το βαρούλκο αποτελείται από κυλινδρικό τύμπανο (ξύλινο ή μεταλλικό) ακτίνας R, που περιστρέφεται περί άξονα ΑΕ με τη βοήθεια στρόφαλου ΓΕ, στην άκρη του οποίου υπάρχει χειρολαβή (μανιβέλα) ΓΔ (σχ. 4.6.10).



Σχ. 4.6.10
Βαρούλκο.

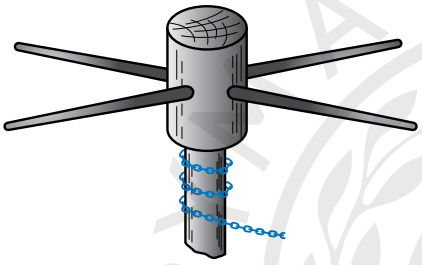
Στην κυλινδρική επιφάνεια δένεται το άκρο σχοινιού που τυλίγεται γύρω απ' τον κύλινδρο. Στο άλλο άκρο του σχοινιού δένεται το σώμα που επιθυμούμε να ανυψώσομε. Από την ισορροπία των ροπών του βάρους B και της κινητήριας δυνάμε-

ως F, ισχύει: $B\,R = F \cdot \Gamma\Epsilon$, οπότε για την κινητήρια (ανυψωτική) δύναμη έχομε:

$$F = B\,\frac{R}{\Gamma\Epsilon}.$$

Συνεπώς, αν επιθυμούμε να ανυψώσομε βαρύ σώμα ασκώντας όσο γίνεται μικρότερη δύναμη, πρέπει η ακτίνα R του τύμπανου να είναι όσο μικρή επιτρέπει η κατασκευή του τύμπανου και το μήκος του στρόφαλου ΓΕ να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο.

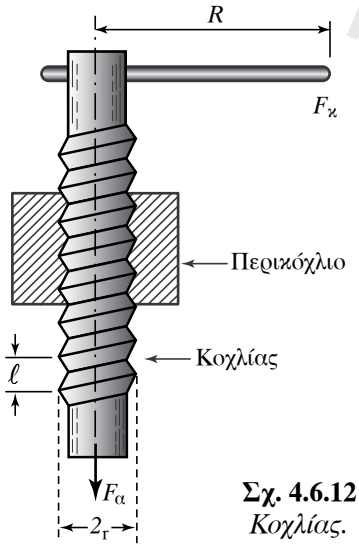
Αν ο άξονας του κυλίνδρου είναι κατακόρυφος, έχομε μία άλλη μορφή βαρούλκου, τον ***εργάτη*** που χρησιμοποιείται για να τραβά την άγκυρα μικρών πλοίων (σχ. 4.6.11).



Σχ. 4.6.11
Εργάτης.

4.6.8 Κοχλίας (γρύλος).

Ο ***κοχλίας*** (γρύλος) αποτελείται από δύο βασικά τμήματα, το περικόχλιο που εσωτερικά φέρει εσοχή και τον κοχλία (βίδα), που φέρει μία ελικοειδή προεξοχή (σχ. 4.6.12). Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ελικώσεων ονομάζεται ***βήμα*** του κοχλία και μπορεί να συμβολίζεται με ℓ.



Σχ. 4.6.12
Κοχλίας.

Ο κοχλίας περιστρέφεται με τη βοήθεια του βραχίονα, μήκους R. Όταν ο βραχίονας περιστραφεί κατά μία πλήρη περιστροφή, τότε, ο κοχλίας προχωρά κατά ένα βήμα, η δε αντίσταση $F_α$ του σώματος, στο οποίο εφαρμόζει οπισθοχωρεί κατά το μήκος του βήματος, ℓ. Η κινητήριος δύναμη $F_κ$, που ενεργεί στο άκρο του βραχίονα, παράγει σε μία πλήρη περιστροφή έργο $W_κ = F_κ\,2\pi R$. Το έργο της αντιστάσεως $F_α$ είναι $W_α = F_α\,\ell$.

Απ' την αρχή των δυνατών έργων ή διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας για τις απλές μηχανές έχομε ότι:

$$F\,2\pi R = F_α\,\ell.$$

Συνεπώς, όσο το μήκος του βήματος (ℓ) είναι μικρότερο, τόσο μικρότερη κινητήρια δύναμη απαιτείται να δαπανήσομε, για να αντισταθμίσομε μία ορισμένη αντίσταση. Άρα, ***με μικρό βήμα και λίγη δύναμη μπορούμε να ανυψώσομε μεγάλα βάρη*** ή να υπερνικήσομε μεγάλες αντιστάσεις.

Μία διαδεδομένη χρήση του είναι για την ανύψωση αυτοκινήτων στα συνεργεία επισκευής. Χρησιμοποιείται επίσης στα πιεστήρια κ.ά..

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποια η κινητική ενέργεια πλοίου μάζας 100 000 τόνων, όταν αυτό κινείται με ταχύτητα 36 km/h;
2. Σώμα μάζας $m = 2$ kg αφήνεται να πέσει χωρίς αρχική ταχύτητα από ύψος $h = 80$ m πάνω από το έδαφος. Να υπολογίσετε την κινητική και δυναμική ενέργεια του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ s, $t_1 = 1$ s, $t_3 = 3$ s από τη στιγμή, που αφέθηκε ελεύθερο, καθώς και τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.
3. Σε σώμα που ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκείται δύναμη $F = 80$ N, που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία 30^o με το επίπεδο, και το σώμα μετατοπίζεται κατά διάστημα $s = 30$ m. Να υπολογίσετε το έργο της δυνάμεως F.
4. Σε σώμα μάζας $m = 1$ kg, που ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (χωρίς τριβές) ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 10$ N για χρονικό διάστημα $t = 4$ s. Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το σώμα, πόση απόσταση θα διανύσει σ' αυτόν τον χρόνο και ποια η κινητική του ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 4$ s;

5. Σε κιβώτιο βάρους $B = 200\,\text{N}$, που ακινητεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 80\,\text{N}$ και το μετακινεί με σταθερή ταχύτητα 2 m/s. Ποιες δυνάμεις ασκούνται στο κιβώτιο, ποιο το μέτρο τους και πόσο είναι το έργο τους για χρονικό διάστημα $t = 5\,\text{s}$;

6. Ναύτης μετακινεί με σταθερή ταχύτητα ένα κιβώτιο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο κατά 10 m και δαπανά ενέργεια 200 joule. Να υπολογίσετε το μέτρο της δυνάμεως της τριβής, που εμφανίστηκε κατά τη μετακίνηση του κιβωτίου.

7. Σε σώμα βάρους $B = 100\,\text{N}$, που ακινητεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 50\,\text{N}$ και το μετακινεί κατά 2 m. Αν ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως σώματος–επιπέδου είναι $n = 0{,}3$ να βρείτε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίσετε το μέτρο και το έργο τους για την ανωτέρω μετακίνηση.

8. Ναύτης μετακινεί με σταθερή ταχύτητα ένα κιβώτιο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο κατά 10 m ασκώντας του σταθερή δύναμη $F = 100$ N, που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία 45° με το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής T και το έργο της δυνάμεως F και της τριβής T για την ανωτέρω μετακίνηση.

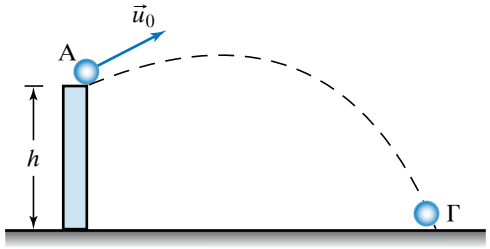
9. Σώμα μάζας 20 kg εκτοξεύεται από σημείο Α σε ύψος $h = 15$ m με αρχική ταχύτητα $u_0 = 30\,\text{m/s}$, όπως στο σχήμα 1 και φτάνει στη θέση Γ.

Αντίσταση του αέρα δεν υπάρχει και $g = 10\,\text{m/s}^2$. Δεχθείτε ότι το σώμα στο έδαφος δεν έχει δυναμική ενέργεια.

α) Πόση είναι η μηχανική ενέργεια του σώματος στη θέση Α;

β) Βρείτε το έργο του βάρους από το Α στο Γ.

γ) Πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος;



Σχ. 1

10. Πόσο ψηλά μπορεί να σηκώσει ένας ναύτης κιβώτιο μάζας 50 kg, αν διαθέσει ενέργεια 250 J; Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

11. Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h πάνω από το έδαφος. Σε ποιο ύψος η δυναμική και η κινητική του ενέργεια θα είναι ίσες μεταξύ τους;

12. Αντλία νερού ανεβάζει 2 L/s, από βάθος 8 m. Πόσο έργο παράγει σε μία ημέρα; Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$. Υπόδειξη: Το 1 L νερού έχει μάζα 1 kg.

13. Όταν ένα ιδανικό ελατήριο επιμηκύνεται από το αρχικό του μήκος κατά 20 cm, η δυναμική του ενέργεια είναι 10 J.

α) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου.

β) Πόση ενέργεια προσφέρθηκε στο ελατήριο για τα 3 πρώτα cm της επιμηκύνσεώς του;

γ) Κατά πόσο αυξήθηκε η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν αυτό επιμηκύνθηκε από τα 17 cm στα 20 cm;

δ) Να συγκρίνετε και να σχολιάσετε τις απαντήσεις των ερωτημάτων β), γ).

14. Σε σώμα μάζας $m = 2\,\text{kg}$ που ακινητεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται δύναμη $F = 21\,\text{N}$ με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα πάνω. Να υπολογίσετε την ταχύτητα, την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του σώματος, 4 s μετά απ' την έναρξη της κινήσεώς του. Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

15. Εργάτης ανυψώνει σώμα βάρους $B = 100$ N ασκώντας του σταθερή κατακόρυφη δύναμη F. Το έργο της F για ανύψωση του σώματος κατά $h = 2$ m είναι 300 J. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της δυνάμεως F.

β) Το έργο του βάρους του σώματος κατά την ανύψωση του κατά h.

γ) Τα έργα του βάρους και της δυνάμεως F είναι παραγόμενα ή καταναλισκόμενα;

16. Η ισχύς που αναπτύσσει η ατμομηχανή σιδηροδρόμου που κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα $u = 36\,\text{km/h}$ είναι $P = 500\,\text{kW}$. Αν υπό αυτές τις συνθήκες διανύσει απόσταση $s = 2\,\text{km}$, ποιο είναι το έργο (σε J) που θα παράξει η ατμομηχανή;

17. Σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί σώμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0\,\text{s}$ του ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 100$ N και τη χρονική στιγμή $t = 3\,\text{s}$ η στιγμιαία ισχύς της δυνάμεως είναι $P = 150\,\text{W}$.

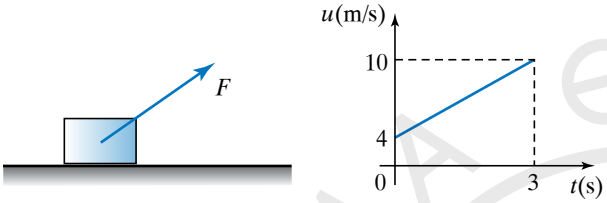
α) Πόση επιτάχυνση απέκτησε το σώμα;

β) Ποια είναι η μέση ισχύς της δυνάμεως από 0 s–3s;

γ) Πόση ενέργεια δόθηκε στο σώμα από αυτόν που ασκεί τη δύναμη F στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

Δίνονται $g = 10\,\text{m/s}^2$, $\eta = 1/10$, $m = 20\,\text{kg}$.

18. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται σώμα μάζας 2 kg, υπό την επίδραση δυνάμεως $F = 8$ N, η οποία σχηματίζει γωνία φ με το επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Στο σχήμα δίνεται η ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος.
β) Ποια είναι η μετατόπιση του σώματος από 0 s έως 3 s;
γ) Να βρεθεί το έργο της δυνάμεως στο παραπάνω χρονικό διάστημα.
δ) Πόση είναι η στιγμιαία ισχύς της δυνάμεως τη χρονική στιγμή $t_1 = 1$ s;



Σχ. 2

19. Ανελκυστήρας μεταφοράς εμπορευμάτων ανεβαίνει από το δεύτερο υπόγειο στον τελευταίο όροφο πολυκαταστήματος που βρίσκεται 50 m ψηλότερα, σε χρόνο 3 min. Ο κινητήρας του ανελκυστήρα ασκεί δύναμη 40.000 N. Να υπολογίσετε το έργο που παράγει ο κινητήρας και την ισχύ του.

20. Σπορ αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 280 km/h και ο κινητήρας του αποδίδει ισχύ 200 Hp. Ποιο το μέτρο της δυνάμεως, που αντικαθιστώντας τον κινητήρα, αποδίδει την ίδια ισχύ;

21. Τελεφερίκ ανυψώνει σε χρόνο 4 min, θάλαμο 20 ατόμων, συνολικής μάζας 3 t, σε ύψος 350 m. Ποιο είναι το δαπανούμενο έργο για την ανύψωση και ποια η ισχύς του κινητήρα του τελεφερίκ; Δίνεται: $g = 10$ m/s^2.

22. Ηλεκτρικός κινητήρας με συντελεστή αποδόσεως $\alpha_1 = 0{,}9$ δίνει ενέργεια σε γερανό φορτοεκφορτώσεως που έχει συντελεστή αποδόσεως $\alpha_2 = 0{,}8$. Όταν τροφοδοτούμε τον κινητήρα με ηλεκτρικό ρεύμα ισχύος $P = 1000$ W, να υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ταχύτητας με την οποία ανυψώνει παλέτα βάρους 720 N.

23. Μοχλός πρώτου είδους λειτουργεί χωρίς τριβές και ισορροπεί υπό την επίδραση της κινητήριας δυνάμεως $F_1 = 10$ N και της δυνάμεως της αντιστάσεως $F_2 = 150$ N.
Να υπολογίσετε τον λόγο ℓ_1/ℓ_2, όπου ℓ_1, ℓ_2 το μήκος του μοχλοβραχίονα της κινητήριας δυνάμεως και της δυνάμεως της αντιστάσεως αντίστοιχα.

24. Κατά τη λειτουργία απλής μηχανής:
α) Το έργο της κινητήριας δυνάμεως ήταν 1000 J και δαπανήθηκαν λόγω τριβών 100 J. Πόσο ήταν το έργο της δυνάμεως της αντιστάσεως;
β) Το έργο της δυνάμεως της αντιστάσεως ήταν 1000 joule και δαπανήθηκαν λόγω τριβών 100 joule. Πόσο ήταν το έργο της κινητήριας δυνάμεως;

25. Μοχλός πρώτου είδους που λειτουργεί χωρίς τριβές, ισορροπεί υπό την επίδραση της κινητηρίου δυνάμεως $F_1 = 100$ N και της δυνάμεως της αντιστάσεως F_2. Αν γνωρίζετε ότι ο λόγος των αντιστοίχων βραχιόνων είναι $\ell_1/\ell_2 = 60$, να υπολογίσετε το μέτρο της δυνάμεως F_2.

26. Να υπολογίσετε τον συντελεστή αποδόσεως ακίνητης τροχαλίας, όταν για την ανύψωση κατά 5 m, σώματος βάρους 100 N, δαπανήσαμε 550 J.

27. Πόση δύναμη δέχεται ο άξονας ακίνητης τροχαλίας, που λειτουργεί με αβαρές σχοινί και παράλληλα νήματα, όταν, ασκώντας δύναμη F, ισορροπούμε σώμα βάρους 3000 N;

28. Πόση είναι η θερμοδυναμική ενέργεια που αναπτύχθηκε κατά τη λειτουργία τροχαλίας, μέσω της οποίας ασκώντας δύναμη 800 N, ανυψώσαμε με σταθερή ταχύτητα, κατά 2 m, σώμα βάρους 390 N;

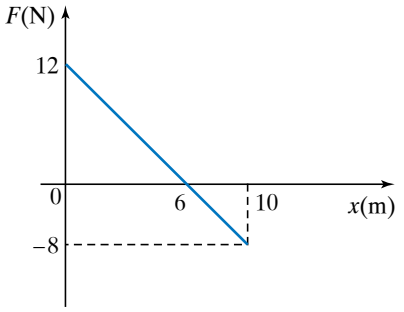
29. Χρησιμοποιώντας κινητή τροχαλία βάρους 500 N, που λειτουργεί χωρίς τριβές, με αβαρές σχοινί και παράλληλα νήματα, ανυψώνομε πολύ αργά, σώμα βάρους 1500 N κατά 5 m. Πόση είναι η κινητήρια δύναμη και ποια η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της;

30. Πόση είναι η κινητήρια δύναμη που πρέπει να ασκήσομε, προκειμένου να ανυψώσομε, με σταθερή ταχύτητα, χρησιμοποιώντας βαρούλκο που λειτουργεί χωρίς τριβές, σώμα βάρους 200 N, όταν η ακτίνα του κυλίνδρου του βαρούλκου είναι 10 cm και η ακτίνα της τροχιάς της μανιβέλας είναι 50 cm; Πόσο έργο δαπανήσαμε όταν ανυψώσαμε το σώμα 31,4 m και πόσες περιστροφές έκαναν η μανιβέλα και ο κύλινδρος του βαρούλκου;

31. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο (χωρίς τριβή) ηρεμεί ένα σώμα μάζας $m = 2$ kg. Σε μία στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας μεταβλητής δυνάμεως, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται όπως στο σχήμα 3.
α) Ποια η αρχική επιτάχυνση του σώματος;
β) Σε ποια θέση το σώμα θα έχει μέγιστη ταχύτητα;

γ) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

δ) Πόση η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση $x = 10\,\text{m}$;



Σχ. 3

32. Εκκρεμές αποτελείται από σημειακή μάζα m και νήμα μήκους 2 m.
Όταν η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο είναι 60^o, η ταχύτητα της μάζας είναι 4 m/s. Ποια η ταχύτητά της στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της και ποιο το μέγιστο ύψος που θα φτάσει; Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

33. Η ισχύς μίας μηχανής είναι 8 kW. Πόσο έργο παράγει αν λειτουργήσει επί 20 min;

34. Η μηχανή Α παράγει 4000 J στα 15 λεπτά λειτουργίας της. Η μηχανή Β παράγει 1600 J στα 7 λεπτά λειτουργίας της. Ποια απ' τις δύο είναι ισχυρότερη;

35. Ανελκυστήρας βάρους $B = 20\,000\,\text{N}$ βρίσκεται μέσα σε μισό λεπτό σε ύψος 25 m και έχει ταχύτητα μέτρου $u = 2\,\text{m/s}$. Ποια είναι η μέση ισχύς του κινητήρα του; Δίνεται: $g = 10\,\text{m/s}^2$.

36. Αυτοκίνητο μάζας $m = 1500\,\text{kg}$ κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u_0 = 108\,\text{km/h}$ και ο κινητήρας του αποδίδει ισχύ 3000 W. Στη συνέχεια ανεβαίνει δρόμο που έχει κλίση 1 % με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Αν $g = 10\,\text{m/s}^2$ και η δύναμη της τριβής έχει το ίδιο μέτρο στον οριζόντιο και στον ανηφορικό δρόμο, να υπολογίσετε την ισχύ που αναπτύσσει η μηχανή του αυτοκινήτου στην ανηφόρα.

37. Ηλεκτροκινητήρας με συντελεστή αποδόσεως 90 % τροφοδοτεί ανυψωτικό μηχάνημα με συντελεστή αποδόσεως 80 %. Με ποια ταχύτητα ανυψώνεται σώμα μάζας 1000 kg, όταν η προσφερόμενη στον κινητήρα ηλεκτρική ισχύς είναι 100 kW; Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

38. Κινητήρας ισχύος 1000 W κινεί αντλία που ανυψώνει μέσα σε 8 ώρες, 36 τόνους καθαρό νερό σε ύψος 20 m. Αν $g = 10\,\text{m/s}^2$ και $d_{\text{ΝΕΡΟΥ}} = 1\,\text{g/cm}^3$, να υπολογίσετε το συντελεστή αποδόσεως της αντλίας.

39. Πόση μάζα καθαρού νερού μπορεί να ανυψώσει μέσα σε χρόνο $t = 8\,\text{h}$ αντλία ισχύος $P = 200\,\text{W}$ από πηγάδι βάθους $H = 10\,\text{m}$; Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$. Τριβές και απώλειες θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν.

40. Δεξαμενή παροχής $\Pi = 2\,\text{m}^3/\text{s}$ που περιέχει καθαρό νερό βρίσκεται σε ύψος $H = 20\,\text{m}$ πάνω από στρόβιλο, που κινείται λόγω της υδατοπτώσεως και θέτει σε λειτουργία ηλεκτρογεννήτρια. Αν $g = 10\,\text{m/s}^2$, $d_{\text{ΝΕΡΟΥ}} = 1\,\text{g/cm}^3$ και ο συντελεστής αποδόσεως του στροβίλου είναι 0,7, να υπολογίσετε την ισχύ που προσφέρει ο στρόβιλος.

41. Ηλεκτρογεννήτρια πρέπει να τροφοδοτήσει δίκτυο με 15 000 kW. Πόσοι ίπποι πρέπει να καταναλωθούν απ' την κινητήρια μηχανή, όταν ο βαθμός αποδόσεως του συστήματος είναι 0,97;

42. Σε υδροστρόβιλο εισρέουν κάθε λεπτό $300\,\text{m}^3$ νερού από υδατόπτωση 20 m. Πόση ωφέλιμη ισχύς παραλαμβάνεται, όταν ο βαθμός αποδόσεως της τουρμπίνας είναι 0,96; Δίνεται: $g = 10\,\text{m/s}^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Υδροστατική - Υδροδυναμική

5.1 Ορισμοί. Παροχή. Ροή. Δυναμική γραμμή. Στρωτή και τυρβώδης ροή.

Ρευστά ονομάζονται είναι τα σώματα που ρέουν. Στα ρευστά ανήκουν τα ***αέρια*** και τα ***υγρά***. Τα υγρά είναι σχεδόν ασυμπίεστα και έχουν σχεδόν σταθερό όγκο, ενώ τα αέρια είναι συμπιεστά και τείνουν να καταλάβουν όλο τον όγκο που τους προσφέρεται.

Τέλεια ή ***ιδανικά*** είναι τα ρευστά, τα οποία είναι τελείως ασυμπίεστα και δεν παρουσιάζουν τριβές στο εσωτερικό τους ούτε με τα τοιχώματα των δοχείων που τα περιέχουν.

Πραγματικά ονομάζονται τα ρευστά τα οποία παρουσιάζουν, όπως συμβαίνει στην πραγματικότητα, τριβή. Η τριβή παρουσιάζεται στο εσωτερικό του ρευστού οπότε ονομάζεται ***εσωτερική τριβή*** και με τα τοιχώματα του δοχείου, εντός του οποίου βρίσκονται.

Μερικοί θεωρούν ως ιδανικά τα ρευστά που δεν παρουσιάζουν τριβές, αλλά μπορεί να είναι συμπιεστά.

Ροή ονομάζεται η κίνηση του ρευστού προς μία κατεύθυνση και ***πεδίο ροής*** ονομάζεται ο χώρος μέσα στον οποίο το ρευστό κινείται (ρέει).

Μπορούμε να περιγράψομε τη ροή ενός ρευστού ως εξής: θεωρούμε ότι διαιρείται σε απείρως μικρούς στοιχειώδεις όγκους που ονομάζομε ***σωμάτια του ρευστού*** και το κάθε σωμάτιο έχει ορισμένη ταχύτητα u και πυκνότητα ϱ. Για την πυκνότητα χρησιμοποιείται και το σύμβολο d. Η ροή μπορεί να εξετασθεί αν ξέρομε την ταχύτητα και την πυκνότητα σε κάθε σημείο του ρευστού κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή τις συναρτήσεις $\vec{u}=u(x, y, z, t)$, $\varrho=\varrho(x, y, z, t)$. Τα υγρά και υπό κάποιες συνθήκες τα αέρια, έχουν σταθερή πυκνότητα σε σχέση με τη θέση και τον χρόνο.

Με αυτήν τη μεθοδολογία επικεντρωνόμαστε στο τι συμβαίνει μία χρονική στιγμή σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου. Επομένως, κάθε φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με το ρευστό (π.χ. η πίεση p) έχει σε κάθε σημείο του χώρου κάθε χρονική στιγμή, μία ορισμένη τιμή, δηλαδή $p=p(x, y, z, t)$.

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες ροής, αλλά εδώ θα αναφέρομε τις εξής:

1) ***Μόνιμη*** ή ***στρωτή ροή***, όταν η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, δηλαδή είναι χρονικά σταθερή. Οι συνθήκες για στρωτή ροή μπορούν να πραγματοποιηθούν με μικρές ταχύτητες ροής (π.χ. όταν κυλά ένα ήρεμο ρυάκι ή ο αέρας κινείται με μικρές ταχύτητες).

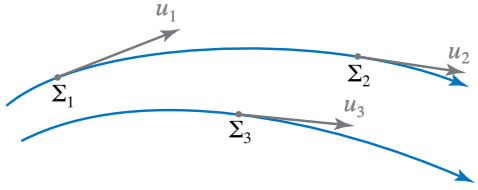
2) ***Μη μόνιμη*** ή ***τυρβώδης ροή***, όταν η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο του χώρου δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται με τον χρόνο. Αυτό μπορεί να παρατηρείται σε ορμητικό ποτάμι, σε καταρράκτη ή σε πολύ δυνατό άνεμο.

Υπάρχουν περιπτώσεις που η ταχύτητα δεν διατηρείται εντελώς σταθερή, αλλά μεταβάλλεται λίγο, γύρω από κάποια μέση τιμή (***ημιμόνιμη ροή***).

Ρευματική ή ***ροϊκή γραμμή*** ονομάζεται η γραμμή που είναι εφαπτόμενη στη στιγμιαία ταχύτητα των σωματίων του ρευστού μια χρονική στιγμή.

Όταν η ροή είναι στρωτή (μόνιμη), τότε οι ρευματικές γραμμές δεν αλλάζουν με τον χρόνο και δείχνουν τη διαδρομή που ακολουθεί ένα σωμάτιο του ρευστού κατά την κίνησή του (σχ. 5.1.1).

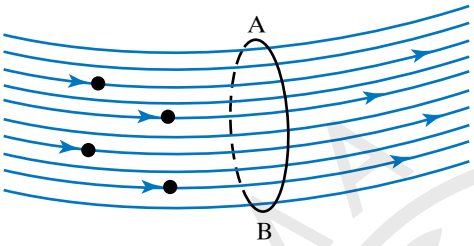
Συνήθως σχεδιάζομε τις ρευματικές γραμμές έτσι, ώστε η πυκνότητά τους σε μία περιοχή του πεδίου ροής να δείχνει το μέτρο της ταχύτητας του ρευστού στην περιοχή αυτή. Μεγάλη πυκνότητα ρευματικών γραμμών σημαίνει μεγάλη ταχύτητα και μικρή πυκνότητα ρευματικών γραμμών σημαίνει μικρή ταχύτητα.



Σχ. 5.1.1
Ρευματικές γραμμές.

Οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται μεταξύ τους, διότι αν τέμνονταν, η ταχύτητα (διάνυσμα) στο σημείο τομής θα είχε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις, αυτές των τεμνομένων ρευματικών γραμμών. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο σε σημεία ισορροπίας, όπου η ταχύτητα είναι μηδέν.

Αν θεωρήσομε επιφάνεια μέσα σε πεδίο ροής και από κάθε σημείο του περιγράμματος της επιφάνειας φέρομε την αντίστοιχη ρευματική γραμμή, τότε σχηματίζεται η υγρή φλέβα ή σωλήνας ροής (σχ. 5.1.2). Αν η διατομή της φλέβας είναι απειροστή, τότε η φλέβα είναι απειροστή.



Σχ. 5.1.2
Φλέβα ή σωλήνας ροής.

Οι ρευματικές γραμμές μίας φλέβας δεν βγαίνουν έξω απ' αυτήν, διότι δεν τέμνονται.

Στη στρωτή ροή οι φλέβες ροής είναι σταθερές με τον χρόνο. Το ρευστό μίας φλέβας (σωλήνα) δεν μπαίνει μέσα σε άλλη φλέβα (σωλήνα), δηλαδή το ρευστό ρέει μέσα στην κάθε μία φλέβα σαν να ήταν τα τοιχώματά της στερεά, αδιαπέραστα. Η κάθε φλέβα είναι σαν ένας σταθερός σωλήνας.

Παροχή (Π) ρευματικής φλέβας ονομάζεται το πηλίκο του στοιχειώδους όγκου $\mathrm{d}V$ του ρευστού, που διέρχεται από μία διατομή της σε απειροστό χρόνο $\mathrm{d}t$, διά του χρόνου αυτού. Δηλαδή:

$$\Pi = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

Αν τα Δt, ΔV είναι αρκετά μικρά, μπορούμε να γράψομε:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Η μονάδα παροχής είναι: $1\ \mathrm{m^3/s}$.

Στην πράξη χρησιμοποιούνται το L/s και το $\mathrm{m^3/h}$. Μερικές ενδεικτικές τιμές παροχών είναι οι παρακάτω:

	Βρύση	***Αρτεσιανό φρέαρ***	***Καταρράκτης του Νιαγάρα***
Παροχή	$0{,}2\ \mathrm{m^3/h}$	$10\ \mathrm{m^3/h}$	$8000\ \mathrm{m^3/h}$

5.1.1 Υπολογισμός της παροχής.

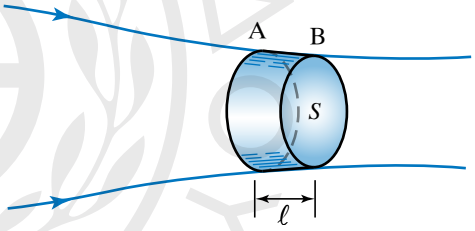
Η στοιχειώδης παροχή $\Delta\Pi$ μίας στοιχειώδους ρευματικής φλέβας ισούται με το γινόμενο του εμβαδού ΔS μίας κάθετης διατομής της, επί την ταχύτητα u, την οποία έχει το ρευστό στη διατομή. Δηλαδή:

$$\Delta\Pi = u\Delta S \quad \text{ή} \quad \mathrm{d}\Pi = u\,\mathrm{d}S.$$

Αν η ταχύτητα είναι ίδια για κάθε σημείο της διατομής μιας φλέβας πεπερασμένης διατομής, τότε ισχύει $\Pi = u\,S$.

Απόδειξη.

Έστω ΔS η κάθετη προς την ταχύτητα επιφάνεια της διατομής της στοιχειώδους φλέβας, στο Β, από την οποία διέρχεται το ρευστό με ταχύτητα $\vec{u}$. Σε χρόνο Δt θα περάσει απ' αυτήν τη στοιχειώδη επιφάνεια όγκος ρευστού ίσος με το στοιχειώδη όγκο, που φαίνεται στο σχήμα 5.1.3, μεταξύ των Α και Β, ο οποίος αντιστοιχεί κατά προσέγγιση σε ορθό κύλινδρο με εμβαδόν βάσεως ΔS και στοιχειώδες ύψος $l = u\Delta t$, οπότε $\Delta V = \Delta S\, l = \Delta S\, u\, \Delta t$.



Σχ. 5.1.3
Σχηματική παράσταση για τον υπολογισμό του στοιχειώδους όγκου.

Από τον ορισμό της παροχής έχομε ότι:

$$\Delta\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta S\,\ell}{\Delta t} = \Delta S\,\frac{\ell}{\Delta t} = \Delta S\, u \quad \text{ή} \quad \mathrm{d}\Pi = u\,\mathrm{d}S.$$

Αν η φλέβα έχει πεπερασμένη διατομή S, και σε κάθε σημείο της διατομής η ταχύτητα είναι διαφορετική, τότε, για να βρούμε την παροχή, χωρίζομε την S σε πολλά μικρά ΔS, ώστε για κάθε ένα η ταχύτητα να είναι πρακτικώς μία, u, βρίσκομε τη στοιχειώδη παροχή $\Delta\Pi = \Delta S\, u$ και στη συνέχεια αθροίζομε τις απειροστές αυτές παροχές, οπότε έχομε:

$$\Pi = \sum \Delta\Pi = \sum \Delta S\, u.$$

Προφανώς το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα.

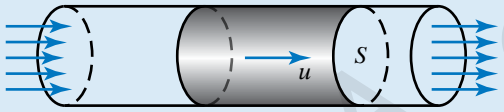
Αν σε όλα τα σημεία της διατομής η ταχύτητα u

είναι η ίδια, τότε η ταχύτητα βγαίνει έξω από το άθροισμα, οπότε βρίσκομε τον γνωστό τύπο:

$$\Pi = \sum \Delta S\, u = u \sum \Delta S = u\, S$$
$$\Pi = S\, u.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε την παροχή της φλέβας του σχήματος 5.1.4, αν γνωρίζετε ότι η ταχύτητα του ρευστού είναι παντού η ίδια και ίση με 4 m/s. Η κάθετη επιφάνεια διατομής έχει εμβαδόν 10 cm^2.



Σχ. 5.1.4

Λύση

Από τον τύπο της παροχής έχομε ότι:

$$\Pi = S\,u = 10\,\text{cm}^2 \cdot 4\,\text{m/s} = 10 \cdot 1/10\,000\,\text{m}^2 \cdot$$
$$\cdot 4\,\text{m/s} = 4/1000\,\text{m}^3/\text{s} = 0{,}004\,\text{m}^3/\text{s}.$$

5.1.2 Νόμος της Συνέχειας.

Ο Νόμος της Συνέχειας αποτελεί τον θεμελιώδη νόμο της ρευστομηχανικής και βρίσκει πολλές εφαρμογές στην κίνηση των ρευστών. Ισχύει για τη στρωτή ροή ιδανικών ρευστών (δηλ. για ασυμπίεστα ρευστά) και διατυπώνεται ως εξής:

Όταν μέσα σε σωλήνα ρέει ιδανικό ρευστό, τότε η παροχή είναι σταθερή σε κάθε διατομή του σωλήνα.

Μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση $S_1 u_1 = S_2 u_2$, όπου S_1, S_2 το εμβαδό δύο κάθετων διατομών σε τυχαίες θέσεις του σωλήνα, στις οποίες το ιδανικό ρευστό έχει ταχύτητες $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ αντίστοιχα (σχ. 5.1.5).

Απόδειξη.

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, δεν γίνεται πουθενά συσσώρευση ρευστού. Αυτό σημαίνει ότι όσος όγκος ρευστού μπαίνει, σε ορισμένο χρόνο, στον χώρο μεταξύ S_1, S_2 από την επιφάνεια S_1, τόσος θα βγαίνει από την S_2 στον ίδιο χρόνο. Επομένως, αν Π_1, Π_2 είναι οι παροχές στις διατομές S_1, S_2 αντίστοιχα, θα ισχύει ότι $\Pi_1 = \Pi_2$. Επειδή είναι $\Pi_1 = S_1 u_1$ και $\Pi_2 = S_2 u_2$, έπεται ότι $S_1 u_1 = S_2 u_2$.

Η προηγούμενη σχέση $S_1 u_1 = S_2 u_2$ μπορεί να γραφεί και ως:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{u_2}{u_1}.$$

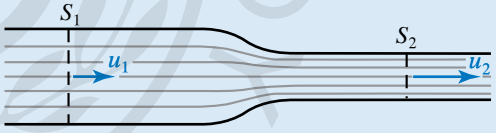
Η τελευταία ισότητα ερμηνεύεται ως εξής: ***Αν ιδανικό ρευστό ρέει μέσα σε σωλήνα που δεν έχει παντού την ίδια διατομή, τότε οι ταχύτητές του στις διάφορες διατομές του σωλήνα είναι αντιστρόφως ανάλογες των εμβαδών των διατομών.***

Αυτό σημαίνει πως εκεί που ο σωλήνας είναι στενός η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από εκεί, που ο σωλήνας είναι φαρδύς. Στο σχήμα 5.1.5 ισχύει ότι $u_2 > u_1$.

Για παράδειγμα όταν ποτίζομε με λάστιχο, το νερό ρέει με συγκεκριμένη ταχύτητα, όταν όμως τοποθετήσομε το δάκτυλό μας στην άκρη του σωλήνα και μικρύνομε το άνοιγμά του, αυτό εξέρχεται με μεγαλύτερη ταχύτητα από πριν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε την ταχύτητα u_1 ιδανικού ρευστού στη διατομή εμβαδού S_1. Η ροή του είναι στρωτή και στη διατομή εμβαδού S_2, που ισούται με το μισό της S_1, έχει ταχύτητα $u_2 = 5$ m/s (σχ. 5.1.5).



Σχ. 5.1.5

Λύση

Από τη σχέση: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{u_2}{u_1}$

αντικαθιστώντας σε μονάδες του SI έχομε ότι:

$$\frac{S_1}{\frac{S_1}{2}} = \frac{5}{u_1} \text{ οπότε } 2 = \frac{5}{u_1} \text{ άρα } u_1 = 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

5.2 Πίεση. Ατμοσφαιρική πίεση και εξάρτησή της από το ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας. Αρχή του Pascal.

5.2.1 Πίεση.

Τοποθετούμε ένα βαρύ σώμα πάνω σε άμμο και παρατηρούμε ότι αυτό βυθίζεται κατά ένα μέρος

του. Αν το τοποθετήσομε πάνω σε ελαφρά σανίδα μεγάλης επιφάνειας, η οποία βρίσκεται πάνω στην άμμο, το βάρος του κατανέμεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια και παρατηρούμε ότι δεν βυθίζεται πλέον στην άμμο. Μία εφαρμογή αυτού του γεγονότος έχομε κατά την προσπάθειά μας να βαδίσομε στο χιόνι (σχ. 5.2.1). Όταν βαδίζομε, παρατηρούμε ότι τα παπούτσια μας βυθίζονται στο χιόνι, ενώ όταν φοράμε πέδιλα του σκι, δεν βυθίζονται καθόλου. Και στις δύο περιπτώσεις το βάρος του σώματος είναι το ίδιο. Τη μία φορά όμως το πηλίκο του βάρους διά το εμβαδό της επιφάνειας στηρίξεως είναι μεγάλο, ενώ την άλλη είναι μικρό.

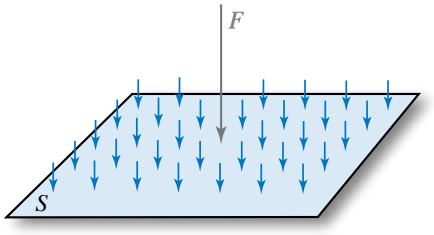
Σχ. 5.2.1
Όσο περισσότερο μεγαλώνει η επιφάνεια στηρίξεως, τόσο λιγότερο βυθίζεται ο άνθρωπος στο χιόνι.

Γενικώς, το πηλίκο της δυνάμεως $\vec{F}$ που ασκείται ***κάθετα*** και ***ομοιόμορφα*** σε μία επιφάνεια, διά το εμβαδό S της επιφάνειας ορίζεται ως πίεση p,

$$p = F/S$$

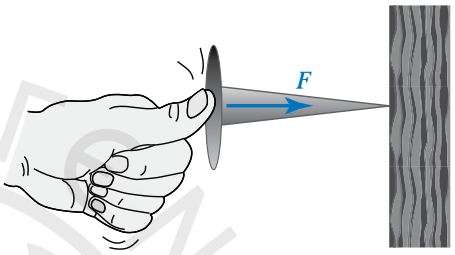
και είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος (σχ. 5.2.2).

Προκειμένου να μειώσομε την πίεση που ασκεί μία συγκεκριμένη δύναμη, αυξάνομε το εμβαδό της επιφάνειας πάνω στην οποία κατανέμεται. Γι' αυτό, όταν χτίζεται ένα κτήριο, οι κολόνες στα θεμέλιά του έχουν πέδιλα στο κάτω τμήμα τους. Οι ράγες των σιδηροδρόμων στηρίζονται σε χοντρά ξύλινα μαδέρια, ούτως ώστε να μειώνεται η πίεση που ασκούν στο έδαφος, όταν διέρχονται από πάνω τους τα τρένα.



Σχ. 5.2.2
Η δύναμη ασκεί πίεση στην επιφάνεια.

Υπάρχουν περιπτώσεις που επιθυμούμε η πίεση να είναι μεγάλη. Αυτό επιτυγχάνεται κατανέμοντας τη δύναμη σε όσο το δυνατό μικρότερη επιφάνεια. Εφαρμογή αυτού έχομε σε όλα τα τέμνοντα εργαλεία (μαχαίρι, ψαλίδι, ξυράφι), στα οποία με μικρές σχετικά δυνάμεις πετυχαίνομε μεγάλες πιέσεις. Για τον λόγο αυτό οι πινέζες και τα καρφιά έχουν οξύ το ένα άκρο τους (σχ. 5.2.3).



Σχ. 5.2.3
Η δύναμη ενεργεί σε μικρή επιφάνεια και η πίεση που ασκεί είναι μεγάλη.

5.2.2 Πίεση σε σημείο επιφάνειας.

Η πίεση μπορεί να μην είναι ομοιόμορφη, επομένως είναι χρήσιμο να ορίσομε την πίεση σε μικρή περιοχή, σε ένα σημείο. Ορίζομε ως πίεση p στο σημείο Α επιφάνειας, το όριο του πηλίκου του μέτρου της στοιχειώδους δυνάμεως $\mathrm{d}F$, η οποία ασκείται κάθετα πάνω στη στοιχειώδη επιφάνεια $\mathrm{d}S$, που βρίσκεται γύρω απ' το σημείο Α, προς το εμβαδό $\mathrm{d}S$, δηλαδή:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}.$$

5.2.3 Μονάδες μετρήσεως της πιέσεως.

Στο SI η δύναμη μετρείται σε N και το εμβαδό σε m^2. Άρα μονάδα πιέσεως είναι το $1\,\mathrm{N/m^2}$ που λέγεται ***πασκάλ*** (1 pascal, 1 Pa). 1 Pa είναι η πίεση που προκαλεί δύναμη 1 N όταν ασκείται κάθετα και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε επιφάνεια εμβαδού $1\,\mathrm{m}^2$.

Επειδή το Pa είναι πάρα πολύ μικρή μονάδα, χρησιμοποιούμε πολλαπλάσιά του, όπως:

1 hPa = 100Pa (εκατοπασκάλ, εκτοπασκάλ) 1 kPa = 1000 Pa (κιλοπασκάλ), 1 MPa = 1 000 000 Pa (μεγαπασκάλ).

Μονάδα για την πίεση είναι και το $1\,\mathrm{N/cm^2}$,

για το οποίο ισχύει ότι: $1\,\mathrm{N/cm^2} = 1\,\mathrm{N/10^{-4}\,m^2} = 10^4\,\mathrm{N/m^2}$.

Άλλες μονάδες είναι το 1 bar (μπαρ) $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$:

$1\,\mathrm{atm}$ (1 ατμόσφαιρα) $= 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}013\,\mathrm{bar} \approx 1{,}0\,\mathrm{bar}$.

$1\,\mathrm{mbar} = 10^{-3}\,\mathrm{bar}$.

1 mm Hg (1 χιλιοστό υδραργύρου) = 1 Torr (1 τορ) = 133,3 Pa.

$1\,\mathrm{atm} = 760\,\mathrm{mm\,Hg}$.

5.2.4 Πίεση μέσα σε ρευστά.

Την έννοια της πιέσεως τη συναντούμε και στα ρευστά, δηλαδή στα υγρά και στα αέρια. Αν φανταστούμε μια επιφάνεια μέσα σε ένα ακίνητο ρευστό, τότε η κάθε πλευρά της δέχεται μια δύναμη. Όπως και προηγουμένως, η πίεση σε ένα σημείο του ρευστού ισούται με το πηλίκο της δυνάμεως $\Delta\vec{F}$ διά την αντίστοιχη πολύ μικρή επιφάνεια ΔS, πάνω στην οποία ασκείται,

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \qquad \text{ή καλύτερα} \qquad p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}.$$

Για το ίδιο σημείο, η πίεση p δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας.

Όταν αλλάζει ο προσανατολισμός της επιφάνειας, αλλάζει και η κατεύθυνση της δυνάμεως, που είναι διανυσματικό μέγεθος, αλλά δεν αλλάζει η πίεση που είναι μονόμετρο (βαθμωτό) μέγεθος και δεν έχει κατεύθυνση. Την επιφάνεια συνήθως την παριστάνομε μ' ένα διάνυσμα που έχει τιμή ίση με το εμβαδόν της και κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια (με τη φορά θετική επιλεγμένη κατάλληλα). Έτσι η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την επιφάνεια.

Όπως είπαμε και στα προηγούμενα, όταν η πίεση είναι η ίδια σε κάθε σημείο επίπεδης επιφάνειας, τότε ισχύει:

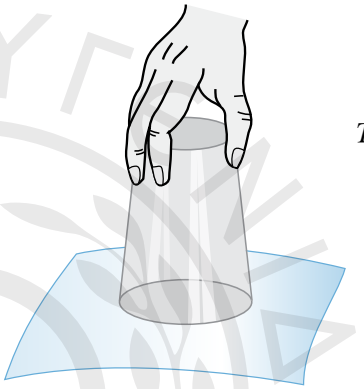
$$p = F/S \quad \textit{και} \quad F = p\,S.$$

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η σχετική πίεση σε σχέση με μιαν άλλη που μπορεί να είναι η ατμοσφαιρική πίεση.

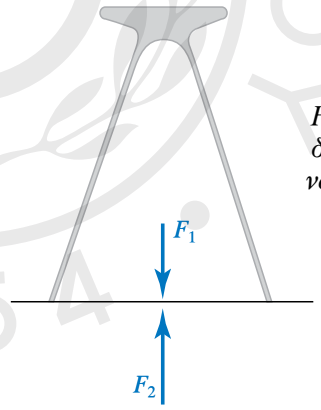
5.2.5 Ατμοσφαιρική πίεση.

Ατμόσφαιρα ονομάζεται το στρώμα αέρα, (ατμοσφαιρικός αέρας), που περιβάλλει τη Γη. Το ύψος της δεν είναι ακριβώς καθορισμένο. Η πυκνότητα της ατμόσφαιρας μειώνεται με το ύψος. Σε κάθε σημείο της ατμόσφαιρας υπάρχει πίεση (ατμοσφαιρική πίεση).

Για να βεβαιωθούμε ότι ο ατμοσφαιρικός αέρας έχει πίεση και ασκεί δύναμη σε επιφάνεια, μπορούμε να κάνομε το εξής απλό πείραμα: παίρνομε ένα ποτήρι πλήρως γεμάτο με νερό, το σκεπάζομε με μία σελίδα χαρτιού και το αναποδογυρίζομε (σχ. 5.2.4). Θα δούμε ότι το νερό δεν χύνεται, παρόλο που στην πάνω πλευρά της σελίδας ασκείται, λόγω του βάρους του, η δύναμη $\vec{F}_1$, όμως στην κάτω πλευρά της σελίδας η ατμόσφαιρα ασκεί τη δύναμη $\vec{F}_2$, λόγω ατμοσφαιρικής πιέσεως (σχ. 5.2.5).



Σχ. 5.2.4
Το νερό δεν χύνεται από το ποτήρι.



Σχ. 5.2.5
Η ατμοσφαιρική πίεση δεν επιτρέπει στο νερό να χυθεί από το ποτήρι.

Ένα απλό πείραμα επίσης είναι να γεμίσομε ένα μπουκάλι με νερό, να έχομε ένα ποτήρι με νερό και να αναποδογυρίσομε το μπουκάλι με το λαιμό του βυθισμένο στο νερό του ποτηριού. Αυτό που θα παρατηρήσομε είναι ότι το νερό του μπουκαλιού δεν χύνεται. Το «συγκρατεί» η δύναμη λόγω της ατμοσφαιρικής πιέσεως.

5.2.6 Εφαρμογές της ατμοσφαιρικής πιέσεως.

Η ***κρεμάστρα-βεντούζα***, το ***σταγονόμετρο***, το ***παιδικό βέλος***, το ***λαδωτήρι*** και το ***εργαλείο αποφράξε-***

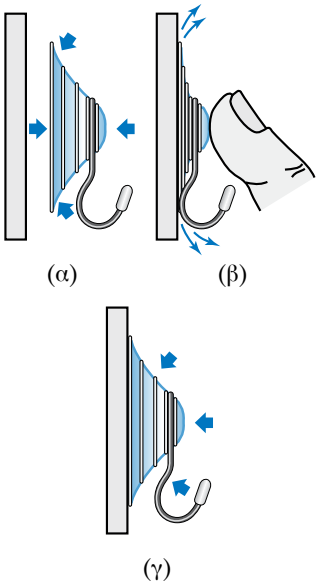
ως του νιπτήρα, λειτουργούν με την πίεση του αέρα. Όλα είναι παραλλαγές της απλής λαστιχένιας «βεντούζας», που λειτουργεί ως εξής:

1) Όταν η βεντούζα δεν συμπιέζεται σε μία επιφάνεια, η πίεση του αέρα (παχιά βέλη) είναι η ίδια σε όλες τις πλευρές [σχ. 5.2.6(α)].

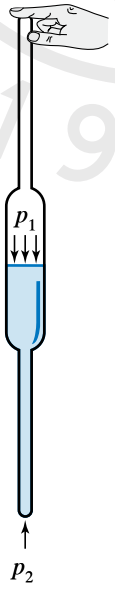
2) Η συμπίεση της βεντούζας σε μία επιφάνεια διώχνει ένα μεγάλο μέρος του αέρα απ' το εσωτερικό της (λεπτά βέλη) [σχ. 5.2.6(β)].

3) Όταν αφεθεί ελεύθερη, εξαιτίας της ελαστικότητάς της, τείνει να ξαναπάρει το αρχικό της σχήμα και δημιουργεί μερικό κενό στο εσωτερικό (χαμηλότερη πίεση). Η ισχυρότερη εξωτερική πίεση (παχιά βέλη) κρατά τη βεντούζα κολλημένη στον τοίχο [σχ. 5.2.6(γ)].

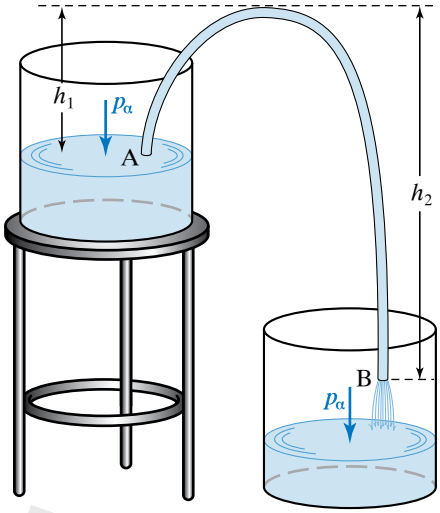
Το ***σιφώνιο*** είναι ένας σωλήνας που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά υγρού από ένα δοχείο σε άλλο. Προς τούτο βυθίζουμε το κάτω άκρο του σωλήνα στο υγρό, φέρνουμε το στόμα μας στο άνω άκρο και ρουφάμε τον αέρα που περιέχει. Έτσι, η πίεση στο εσωτερικό του σιφωνίου μειώνεται και το υγρό λόγω της ατμοσφαιρικής πίεσεως ανέρχεται μέσα στο σιφώνιο. Στη συνέχεια, κλείνουμε με το δάκτυλό μας το άνω άκρο και ανασύρουμε το σιφώνιο από το υγρό (σχ. 5.2.7). Παρατηρούμε ότι εκρέει μία μικρή ποσότητα υγρού από το κάτω άκρο του σιφωνίου. Μετά από λίγο αυτή η εκροή σταματά. Τότε η πίεση p_1 που επικρατεί στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση p_2 που επικρατεί στο κάτω ανοικτό άκρο της.



Σχ. 5.2.6
Ίσες πιέσεις.



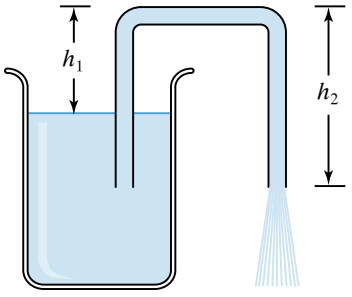
Σχ. 5.2.7
Το σιφώνιο.



Σχ. 5.2.8
Ο σίφωνας.

Ανάλογη είναι και η λειτουργία του σταγονόμετρου. Σ' αυτήν την αρχή στηρίζεται η λειτουργία της ιατρικής σύριγγας και των αναρροφητικών αντλιών.

Ο ***σίφωνας*** είναι ένας εύκαμπτος σωλήνας λυγισμένος σε δύο άνισους βραχίονες. Χρησιμοποιείται για τη μετάγγιση υγρού από ένα δοχείο που βρίσκεται ψηλά σε άλλο δοχείο που βρίσκεται χαμηλότερα (σχ. 5.2.8). Βυθίζουμε το ένα άκρο του σωλήνα στο δοχείο που βρίσκεται ψηλότερα, τον γεμίζουμε με το υγρό (π.χ. ρουφώντας), βυθίζουμε το άλλο άκρο του στο δοχείο που βρίσκεται χαμηλότερα και παρατηρούμε ότι το υγρό ρέει. Προκειμένου να συμβεί αυτό, θα πρέπει το στόμιο του σίφωνα που βρίσκεται στο κάτω δοχείο να είναι συνεχώς πιο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στο πάνω δοχείο. Η λειτουργία του σίφωνα οφείλεται στη διαφορά βαρών των υγρών στηλών h_1 και h_2 (σχ. 5.2.9). Στην ελεύθερη επιφάνεια και των δύο δοχείων επικρατεί η ατμοσφαιρική πίεση. Για να

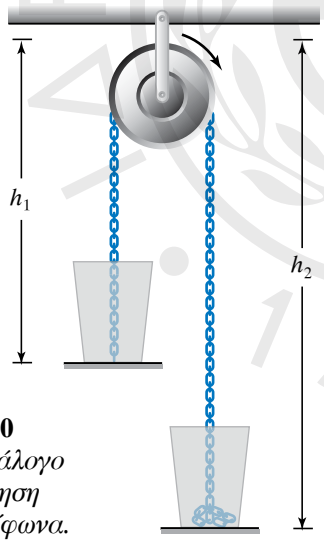


Σχ. 5.2.9
Το μήκος του τμήματος του σωλήνα μέσα στο υγρό δεν έχει σημασία.

λειτουργεί ο σίφωνας, πρέπει οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων του υγρού (δυνάμεις συνοχής) να είναι τέτοιες, που να μπορούν να σηκώσουν το βάρος της στήλης του υγρού. Αυτό δεν είναι εύκολο να γίνει, διότι δημιουργούνται μικρές φυσαλίδες μέσα στο υγρό, που μειώνουν πολύ τη συνοχή. Γι' αυτό είναι σημαντικό να υπάρχει αρκετά μεγάλη ατμοσφαιρική πίεση, η οποία συγκρατεί τη στήλη του υγρού και δεν διαχωρίζεται. Απ' τη συνοχή και την ατμοσφαιρική πίεση εξαρτάται πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το ύψος h_1.

Από την παραπάνω μελέτη μπορούμε να δημιουργήσομε το αντίστοιχο μηχανικό ανάλογο λειτουργίας του σίφωνα ως εξής:

Έστω αλυσίδα που διέρχεται από τροχαλία. Στο κάθε άκρο της συνδέεται ένα ποτήρι που περιέχει μέρος της αλυσίδας (σχ. 5.2.10). Αν τοποθετηθούν σε διαφορετικά ύψη, παρατηρούμε ότι η αλυσίδα «ρέει» από το ποτήρι που βρίσκεται ψηλότερα στο άλλο που βρίσκεται χαμηλότερα. Κατά τον ίδιο τρόπο ρέει το νερό μέσα στον σίφωνα, όταν το άκρο του σωλήνα που είναι έξω από το νερό, βρίσκεται χαμηλότερα από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού που είναι στο δοχείο.



Σχ. 5.2.10
Μηχανικό ανάλογο για κατανόηση λειτουργίας σίφωνα.

5.2.7 Αρχή του Pascal για ρευστά.

Η αρχή του Pascal διατυπώνεται ως εξής:

Σε ρευστό που ηρεμεί εκτός πεδίου βαρύτητας, η πίεση είναι ίδια σε όλα τα σημεία του ρευστού και φυσικά και στα τοιχώματα του δοχείου μέσα στο οποίο βρίσκεται το ρευστό.

Αυτό σημαίνει ότι αν ασκηθεί πίεση από εξωτερικό αίτιο στο ρευστό, αυτή θα μεταδοθεί η ίδια σε όλα τα σημεία του. Αυτό γίνεται συνήθως με ένα έμβολο.

Η αρχή του Pascal ισχύει για όλα τα ρευστά, δηλαδή για υγρά και για αέρια και αποδεικνύεται ως εξής:

Αν ασκήσομε στο μικρό έμβολο εμβαδού S_1 του σχήματος 5.2.11 δύναμη $\vec{F}_1$, αυτό μετακινείται κατά απόσταση l_1 ενώ το μεγάλο έμβολο εμβαδού S_2, μετακινείται κατά απόσταση l_2 και επειδή τα υγρά είναι ασυμπίεστα ισχύει ότι:

$$S_1 l_1 = S_2 l_2. \qquad (1)$$

Από την αρχή των δυνατών έργων ή την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας ή του έργου, γνωρίζομε ότι το έργο της δυνάμεως $\vec{F}_1$ που είναι $F_1 l_1$ θα ισούται με το έργο της δυνάμεως $\vec{F}_2$ που είναι $F_2 l_2$, δηλαδή ισχύει ότι:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

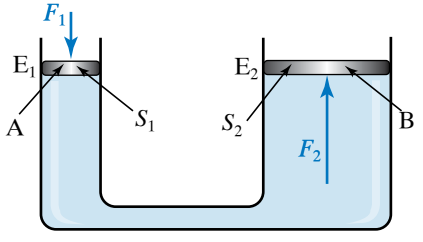
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \text{ ή } p_1 = p_2.$$

Δηλαδή, οι πιέσεις στα δύο έμβολα είναι ίσες μεταξύ τους.

5.2.8 Εφαρμογές της αρχής του Pascal.

Η αρχή του Pascal βρίσκει άμεση εφαρμογή στα υδραυλικά φρένα των αυτοκινήτων, στους υδραυλικούς γρύλους με τους οποίους ανυψώνομε τα αυτοκίνητα και στα υδραυλικά πιεστήρια.

Το υδραυλικό πιεστήριο είναι μία μηχανή μέσω της οποίας μπορούμε να «πολλαπλασιάσομε» τις ασκούμενες δυνάμεις. Αποτελείται από δύο δοχεία που συγκοινωνούν, εκ των οποίων το ένα έχει μεγαλύτερη διατομή. Εντός των δοχείων κινούνται αεροστεγώς δύο έμβολα E_1 (μικρό) και E_2 (μεγάλο), εμβαδού S_1 και S_2, αντίστοιχα (σχ. 5.2.11). Αν



Σχ. 5.2.11
Υδραυλικό πιεστήριο.

ασκήσομε δύναμη $\vec{F}_1$ στο μικρό έμβολο E_1, η πίεση στο σημείο Α του υγρού που προέρχεται από το έμβολο, είναι:

$$p = F_1/S_1.$$

Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, η πίεση στο σημείο Β θα είναι ίδια με την πίεση στο σημείο Α. Εξ αιτίας αυτής της πιέσεως θα ασκείται στο μεγάλο έμβολο E_2 δύναμη $F_2 = p\,S_2$, άρα:

$$F_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν το εμβαδό S_2 είναι πολλαπλάσιο του εμβαδού S_1, τότε το μέτρο της δυνάμεως $\vec{F}_2$ είναι πολλαπλάσιο του μέτρου της δυνάμεως $\vec{F}_1$, δηλαδή με το υδραυλικό πιεστήριο επιτυγχάνομε να πολλαπλασιάσομε τη δύναμη, ένα είδος «υδραυλικού μοχλού».

5.3 Υδροστατική πίεση. Θεώρημα Torricelli.

5.3.1 Υδροστατική πίεση.

Έστω υγρό που ισορροπεί μέσα σε ανοικτό δοχείο που βρίσκεται εντός του βαρυτικού πεδίου. Λόγω του βάρους του υγρού ασκείται πίεση σε κάθε σημείο του υγρού. Αν φέρομε μικρή επιφάνεια σε ένα σημείο του υγρού, θα ασκηθεί δύναμη πάνω της κάθετη προς την επιφάνεια. Δύναμη ασκείται και στα τοιχώματα του δοχείου. Η πίεση που ασκούν τα υγρά που βρίσκονται σε ισορροπία και οφείλεται στο βάρος τους, ονομάζεται ***υδροστατική πίεση*** (σχ. 5.3.1).

Αν έχομε τη διάταξη του σχήματος 5.3.1, μπορούμε να διαπιστώσομε ότι το πώμα στο κάτω μέρος των σωλήνων αποχωρίζεται από τον κύλινδρο, όταν μέσα στον κύλινδρο βάλομε νερό που φτάνει ως την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο εξωτερικό δοχείο. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που οι σωλήνες έχουν κλίση.

Θα διαπιστώσομε ότι η υδροστατική πίεση σ' ένα σημείο υγρού, πυκνότητας ρ ή ειδικού βάρους $\varepsilon = \rho g$, το οποίο βρίσκεται σε βάθος h από την επιφάνεια, ισούται με:

$$p = h\rho g = h\varepsilon.$$

Αυτός είναι ο ***Θεμελιώδης Νόμος της Υδροστατικής***.

Η υδροστατική πίεση σε σημείο εντός υγρού που ισορροπεί, είναι ανάλογη του βάθους του σημείου από την επιφάνεια του ειδικού βάρους του υγρού και δεν εξαρτάται από τη μάζα του υγρού και το σχήμα του δοχείου.

Στην πραγματικότητα η ολική πίεση $p_{ολ}$ σε ένα σημείο μέσα στο υγρό ισούται με την υδροστατική $p_{υσ}$ συν οποιαδήποτε εξωτερική πίεση $p_{εξ}$ ασκείται στην επιφάνεια του υγρού. Μια τέτοια πίεση μπορεί να είναι η ατμοσφαιρική. Η εξωτερική πίεση μεταφέρεται σύμφωνα με την αρχή του Pascal σε όλα τα σημεία του υγρού. Δηλαδή:

$$p_{ολ} = p_{εξ} + p_{υσ} = p_{εξ} + h\varepsilon.$$

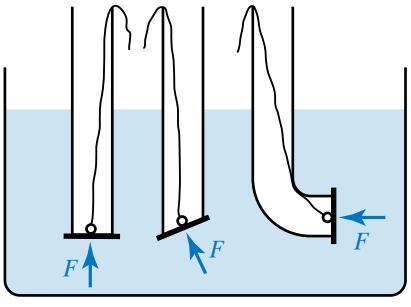
Πολλές φορές αγνοούμε την ατμοσφαιρική πίεση.

5.3.2 Απόδειξη της σχέσεως $p_{υσ} = \varepsilon h$.

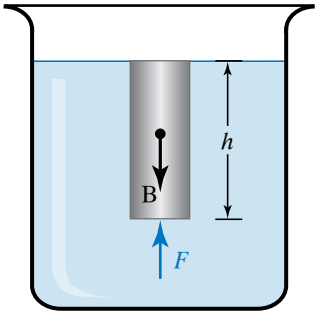
Για να υπολογίσομε την υδροστατική πίεση σε σημείο υγρού, με ειδικό βάρος ε, που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια, θεωρούμε κατακόρυφη κυλινδρική στήλη του υγρού με εμβαδό βάσεως S και ύψος h (ίσο με το βάθος στο οποίο βρίσκεται το σημείο) (σχ. 5.3.2).

Στην υγρή κυλινδρική στήλη ασκούνται οι δυνάμεις:

1) Το βάρος της B.



Σχ. 5.3.1
Κάθετες δυνάμεις σε επιφάνειες λόγω υδροστατικής πιέσεως.



Σχ. 5.3.2
Σχηματική παράσταση για τον υπολογισμό της υδροστατικής πιέσεως.

2) Η δύναμη F που ασκεί το νερό στην κάτω βάση της, που οφείλεται στην υδροστατική πίεση και στην ατμοσφαιρική πίεση, που είναι ίδια με αυτήν στην άνω επιφάνεια λόγω της αρχής του Pascal.

3) Οι οριζόντιες πλευρικές δυνάμεις που ασκούνται στις παράπλευρες επιφάνειες της στήλης και αλληλοαναιρούνται.

4) Η δύναμη που ασκείται εξ αιτίας της ατμοσφαιρικής πιέσεως στην πάνω βάση της.

Επειδή η υγρή κυλινδρική στήλη ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω της ισούται με μηδέν. Άρα, κατά τον κατακόρυφο άξονα ισχύει ότι:

$$F - B - F_{\alpha\tau\mu} = 0,\ F = F_{\upsilon\sigma} + F_{\alpha\tau\mu}$$

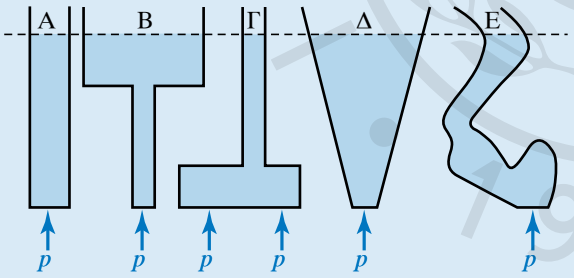
όπου: $F_{\alpha\tau\mu} = p_{\alpha\tau\mu} S,\ F_{\upsilon\sigma} = p_{\alpha\tau\mu} S,\quad B = \varepsilon h S$

άρα: $F_{\upsilon\sigma} + F_{\alpha\tau\mu} - B - F_{\alpha\tau\mu} = 0.$

Οπότε $F_{\upsilon\sigma} = B,\ p_{\upsilon\sigma} S = \varepsilon h S.$ Τελικώς $p_{\upsilon\sigma} = \varepsilon h$ και $p_{\upsilon\sigma} = \varrho g h.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Τα πέντε δοχεία Α, Β, Γ, Δ, Ε του σχήματος 5.3.3 περιέχουν νερό, στο ίδιο ύψος. Η υδροστατική πίεση p που επικρατεί στον πυθμένα τους είναι η ίδια και ίση με $p = \varepsilon h = \varrho g h.$



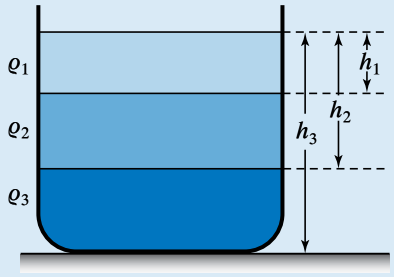
Σχ. 5.3.3
Στον πυθμένα των 5 δοχείων επικρατεί η ίδια υδροστατική πίεση.

2. Έστω δοχείο που περιέχει υγρά πυκνότητας $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ με $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$, που δεν αναμειγνύονται μεταξύ τους, σε ύψη όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3.4.

Η υδροστατική πίεση που επικρατεί στον πυθμένα δίνεται από τον τύπο:

$$p = \varrho_1 g h_1 + \varrho_2 g (h_2 - h_1) + \varrho_3 g (h_3 - h_2).$$

Η διαφορά των ολικών πιέσεων (Δp) μετα-



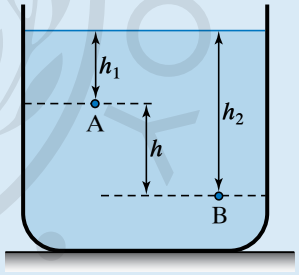
Σχ. 5.3.4

ξύ των σημείων Α και Β που βρίσκονται εντός υγρού που ισορροπεί (σχ. 5.3.5), ισούται με το γινόμενο του ειδικού βάρους ε του υγρού, επί την κατακόρυφη απόσταση των δύο σημείων. Δηλαδή: $\Delta p = p_B - p_A = \varepsilon h.$

Πράγματι, η ολική πίεση που επικρατεί στο σημείο Α δίνεται από τον τύπο: $p_A = \varepsilon h_1 + p_{\varepsilon\xi}.$

Η ολική πίεση που επικρατεί στο σημείο Β δίνεται από τον τύπο: $p_B = \varepsilon h_2 + p_{\varepsilon\xi}.$

Η διαφορά των ολικών πιέσεων ανάμεσα στα δύο σημεία είναι: $p_B - p_A = \varepsilon (h_2 - h_1)\cdot$ προφανώς αυτή είναι και η διαφορά των υδροστατικών πιέσεων.



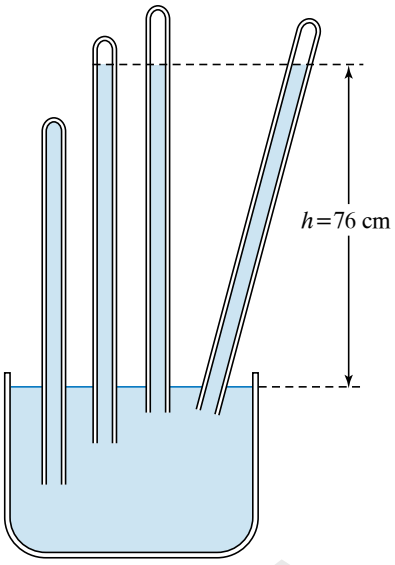
Σχ. 5.3.5

5.3.3 Πείραμα Torricelli.

Με τα πειράματα του Torricelli διαπιστώθηκε και μετρήθηκε για πρώτη φορά η ατμοσφαιρική πίεση (σχ. 5.3.6).

Η ατμοσφαιρική πίεση, στην επιφάνεια της Γης (επιφάνεια της θάλασσας) ισούται με την πίεση που ασκεί στήλη υδραργύρου ύψους περίπου 76 cm. Αυτό αντιστοιχεί με στήλη νερού ψηλότερη από δέκα μέτρα. Στο SI η ατμοσφαιρική πίεση είναι περίπου 100 kPa. Επίσης, η ατμοσφαιρική πίεση δίνεται και σε bar και έχει τιμή περίπου 1 bar.

Η συσκευή που κατασκεύασε ο Torricelli ήταν και το πρώτο βαρόμετρο του κόσμου. Ακόμα και



Σχ. 5.3.6
Η τιμή των 76 cm διατηρείται σταθερή, ακόμη και αν ο σωλήνας βρίσκεται υπό κλίση.

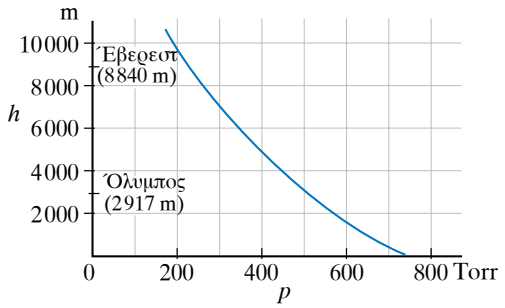
σήμερα η βαρομετρική πίεση του αέρα στα μετεωρολογικά δελτία, αναφέρεται με τους όρους που ο Torricelli εισήγαγε, δηλαδή σε χιλιοστά της «υδραργυρικής στήλης» που λέγονται προς τιμήν του «Torr».

5.3.4 Μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης με το ύψος.

Η ατμοσφαιρική πίεση δεν είναι παντού η ίδια, αλλά μεταβάλλεται όσο αλλάζει το υψόμετρο. Αν εκτελέσομε το πείραμα του Torricelli στην επιφάνεια της θάλασσας και στην κορυφή του Ολύμπου, θα παρατηρήσομε ότι το ύψος της στήλης του υδραργύρου στην κορυφή του Ολύμπου είναι μικρότερο από το αντίστοιχο στην επιφάνεια της θάλασσας. Αυτό το γεγονός εξηγείται διότι όσο ανεβαίνομε ψηλότερα, το ύψος της στήλης του ατμοσφαιρικού αέρα μειώνεται, και μειώνεται και η πυκνότητα της ατμόσφαιρας, οπότε η ατμοσφαιρική πίεση ελαττώνεται.

Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός της μειώσεως της ατμοσφαιρικής πιέσεως με το ύψος, ώστε μετρώντας την πίεση να βρίσκομε το ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (σχ. 5.3.7).

Για κάθε 10,33 m περίπου πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, η ατμοσφαιρική πίεση ελαττώνεται περίπου κατά 1 mm Hg. Αυτό ισχύει μόνο για μικρά ύψη, όπου η πυκνότητα του αέρα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και ίση με την πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της θάλασσας.



Σχ. 5.3.7
Μεταβολή της ατμοσφαιρικής πιέσεως με το ύψος.

Σε μεγάλα ύψη, η παραπάνω αντιστοιχία μεταβολής της ατμοσφαιρικής πιέσεως με το ύψος δεν ισχύει, διότι η πυκνότητα του αέρα μειώνεται σημαντικά όσο αυξάνεται το ύψος.

Σε μικρά ύψη, αφού το $1\,\mathrm{m}^3$ του αέρα έχει μάζα 1293 g, το $1\,\mathrm{cm}^3$ του αέρα έχει μάζα 0,001293 g. Το $1\,\mathrm{cm}^3$ του υδραργύρου έχει μάζα 13,6 g δηλαδή 10.500 φορές περισσότερη. Προκειμένου η ατμοσφαιρική πίεση να μειωθεί κατά 1 mm Hg, πρέπει να ανυψωθούμε κατά 10.500 mm = 10,5 m. Δηλαδή, βρίσκομε περίπου τα 10,33 m που αναφέραμε προηγουμένως.

Όταν η πυκνότητα δεν μεταβάλλεται με το ύψος, τότε η εξάρτηση της πιέσεως με το ύψος είναι γραμμική. Τότε, αν η πίεση στην επιφάνεια της Γης ($h = 0\,\mathrm{m}$) είναι p_0, θα ισχύει:

$$p = p_0 + h\,\varepsilon, \quad \text{ή} \quad h = \frac{1}{\varepsilon}p - \frac{1}{\varepsilon}p_0.$$

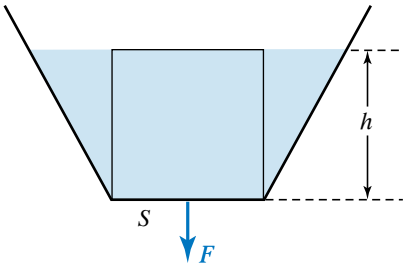
Στο ίδιο υψόμετρο, η ατμοσφαιρική πίεση μεταβάλλεται, όταν αλλάζουν οι καιρικές συνθήκες.

5.3.5 Δυνάμεις που ασκεί το υγρό που ισορροπεί.

Παρακάτω θα μελετήσομε τις δυνάμεις που ασκούνται σε δοχείο από υγρά που ισορροπούν σ' αυτό.

1) Δυνάμεις στον οριζόντιο πυθμένα του δοχείου που περιέχει υγρό.

Ο πυθμένας του δοχείου του σχήματος 5.3.8 είναι οριζόντιος. Το υγρό ειδικού βάρους ε που περιέχεται είναι ακίνητο και η ελεύθερη επιφάνειά του απέχει απόσταση h από τον πυθμένα. Η υδροστατική πίεση στον πυθμένα δίνεται από τον τύπο $p = \varepsilon\, h$ και ασκείται ομοιόμορφα σε όλα τα σημεία του. Η πίεση που ασκεί υγρό που ηρεμεί στον πυθμένα του δοχείου που το περιέχει, δεν εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου ούτε από το βάρος του



Σχ. 5.3.8
Δύναμη στον πυθμένα δοχείου λόγω της υδροστατικής πιέσεως.

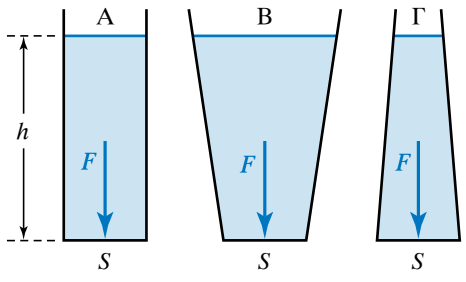
περιεχόμενου υγρού, αλλά μόνο από την πυκνότητα του υγρού και το ύψος της στήλης του, από την ελεύθερη επιφάνεια ως τον πυθμένα. Αν $\vec{F}$ είναι η δύναμη που ασκεί το υγρό κάθετα στον οριζόντιο πυθμένα, ισχύει ότι $F = p\,S = \varepsilon\,h\,S$.

– Υδροστατικό παράδοξο.

Τα τρία δοχεία Α, Β, Γ ίσων οριζοντίων πυθμένων του σχήματος 5.3.9, περιέχουν υγρό ειδικού βάρους ε μέχρι το ίδιο ύψος h. Η δύναμη που ασκείται στον κάθε πυθμένα από το περιεχόμενο στο δοχείο υγρό δίνεται από τον τύπο $F = \varepsilon\,h\,S$. Η δύναμη που ασκεί το υγρό στον πυθμένα του δοχείου Γ είναι μεγαλύτερη απ' το βάρος του υγρού. Η δύναμη που ασκείται στην περίπτωση Β είναι μικρότερη από το βάρος του υγρού και μόνο στην περίπτωση Α αυτά συμπίπτουν. Οι περιπτώσεις Β και Γ λέμε ότι αποτελούν το ***υδροστατικό παράδοξο***. Πρόκειται δηλαδή για το φαινόμενο, κατά το οποίο η δύναμη που εξασκείται στον πυθμένα δοχείου δεν είναι ίση με το βάρος του περιεχόμενου υγρού.

Σχόλιο.

Το γινόμενο $h\,S$ παριστάνει τον όγκο μίας στήλης, εμβαδού S, που έχει ύψος h. Έτσι, η σχέση $F = \varepsilon\,h\,S$ μπορεί να γραφεί και ως $F = \varepsilon\,V$. Αν θεωρήσομε ότι μία στήλη του υγρού, εμβαδού οριζόντιας διατομής S και ύψους h έχει βάρος $\vec{B}$, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται και ως εξής $\vec{F} = \vec{B}$. Άρα δοχείο με οριζόντιο πυθμένα που περιέχει υγρό σε ισορροπία, δέχεται από αυτό στον πυθμένα του δύναμη ίση με το βάρος μίας κατακόρυφης στήλης υγρού που έχει βάση τον πυθμένα και ύψος h την απόσταση του πυθμένα από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

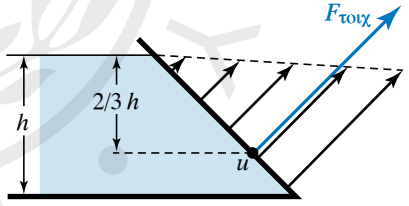


Σχ. 5.3.9
Σχηματική παράσταση για το υδροστατικό παράδοξο.

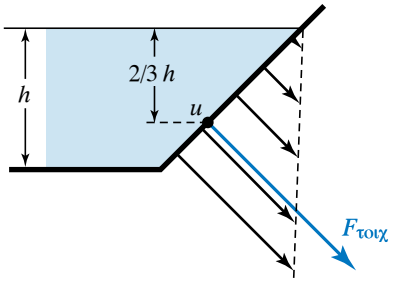
2) Δυνάμεις στο επίπεδο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου που περιέχει υγρό.

Λόγω της υδροστατικής πιέσεως, το υγρό ασκεί δυνάμεις εκτός από τον πυθμένα και στα πλευρικά τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει.

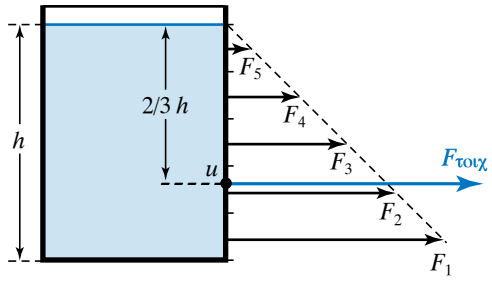
Το μέτρο των δυνάμεων που ασκούνται από το υγρό στα διάφορα σημεία του επιπέδου πλευρικού τοιχώματος, αυξάνεται όσο μεγαλώνει η απόσταση των σημείων απ' την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (σχ. 5.3.10, 5.3.11, 5.3.12). Οι δυνάμεις που ασκεί το υγρό στα διάφορα σημεία του επιπέδου τοιχώματος είναι παράλληλες μεταξύ τους, διότι είναι κάθετες στο τοίχωμα. Η συνολική δύναμη που ασκεί το υγρό σε ολόκληρο το επίπεδο τοίχωμα του δοχείου προκύπτει από τη σύνθεση των παραλλήλων δυνάμεων, που ασκεί σε όλα τα σημεία του πλευρικού τοιχώματος.



Σχ. 5.3.10
Αν το πλευρικό τοίχωμα είναι πλάγιο, μπορεί η συνισταμένη υδροστατική δύναμη να τείνει προς τα πάνω.



Σχ. 5.3.11
Αν το πλευρικό τοίχωμα είναι πλάγιο, μπορεί η συνισταμένη υδροστατική δύναμη να τείνει προς τα κάτω.



Σχ. 5.3.12
Αν το επίπεδο τοίχωμα είναι κατακόρυφο, η συνισταμένη υδροστατική δύναμη είναι οριζόντια.

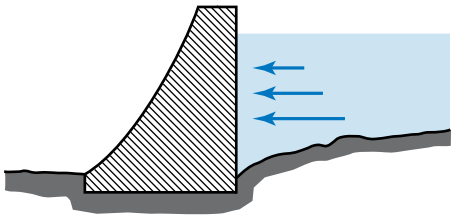
Ας θεωρήσομε την περίπτωση ορθογώνιου κατακόρυφου πλευρικού τοιχώματος (σχ. 5.3.13). Η στοιχειώδης δύναμη που ασκείται σε στοιχειώδη οριζόντια λωρίδα πάχους (ύψους) dh του τοιχώματος είναι $dF = p_{\upsilon\sigma}\,\mathrm{d}S = \varepsilon\, h\, l\, \mathrm{d}h$, διότι το στοιχειώδες εμβαδόν της λωρίδας είναι $dS = l\,\mathrm{d}h$. Αν H είναι το ύψος και ℓ το πλάτος του επιπέδου πλευρικού τοιχώματος, το εμβαδό του είναι $S = H\,\ell$.

Η συνισταμένη δύναμη που ασκεί το υγρό στο πλευρικό τοίχωμα δίνεται από τον τύπο:

$$F = \int_0^H p\, dS = \int_0^H \varepsilon\, h\, dS = \int_0^H \varepsilon\, h\, \ell\, dh = \varepsilon\, \ell\, \frac{H^2}{2} = \varepsilon\, \frac{H}{2}\, S.$$

Γενικώς για επίπεδη επιφάνεια, η δύναμη ισούται με τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια αυτή, αν ήταν οριζόντια, σε βάθος ίσο με το βάθος του γεωμετρικού της κέντρου.

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που η πλευρική επιφάνεια έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με τη μία πλευρά της οριζόντια, το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης (κέντρο πιέσεων) βρίσκεται στα 2/3 του ολικού βάθους H. Τα φράγματα κατασκευάζονται με τέτοιον τρόπο, ώστε το πάχος τους να μεγαλώνει ανάλογα με το βάθος, καθόσον αυξάνονται οι δυνάμεις που ασκεί το νερό στα τοιχώματα (σχ. 5.3.13).



Σχ. 5.3.13
Κάτοψη φράγματος.

3) Συνολική (συνισταμένη) υδροστατική δύναμη που ασκείται στα τοιχώματα του δοχείου που περιέχει υγρό.

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκεί ένα υγρό το οποίο ισορροπεί σε όλα μαζί τα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει, ισούται με το βάρος του υγρού.

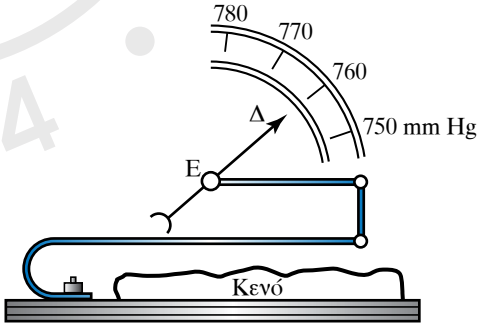
5.3.6 Μέτρηση της ατμοσφαιρικής πιέσεως.

Υπάρχουν διάφορα όργανα μετρήσεως της πιέσεως και ειδικά της ατμοσφαιρικής. Ένα απ' αυτό είναι το υδραργυρικό βαρόμετρο, που προήλθε από τα πειράματα του Torriceli.

Θα αναφερθούμε στο μεταλλικό βαρόμετρο που έχει το πλεονέκτημα, εκτός από την ευκολία που παρέχει στην εγκατάσταση, μετακίνηση και χρήση, να μην περιέχει υδράργυρο, που είναι επικίνδυνος για το περιβάλλον. Επί πλέον, είναι και φτηνό.

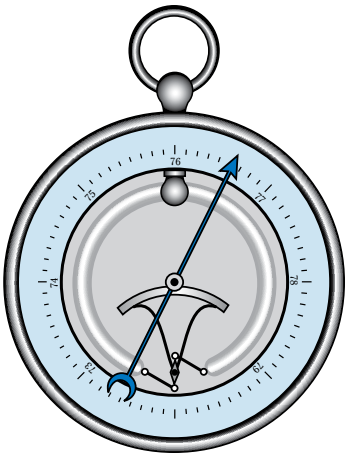
5.3.7 Μεταλλικό βαρόμετρο.

Το μεταλλικό βαρόμετρο αποτελείται από κυλινδρικό δοχείο κενό αέρος, η πάνω επιφάνεια του οποίου καλύπτεται από ελαστικό και πτυχωτό μεταλλικό έλασμα Ε, προκειμένου να είναι πιο εύκαμπτη (σχ. 5.3.14). Το έλασμα, καθώς παραμορφώνεται από την ατμοσφαιρική πίεση, μεταδίδει μέσω μοχλών τη μετακίνηση σε δείκτη Δ που κινείται γύρω από κλίμακα βαθμονομημένη, που μπορεί να δείχνει την πίεση σε κατάλληλες μονάδες.



Σχ. 5.3.14
Λειτουργία μεταλλικού βαρομέτρου.

Συνήθως χρησιμοποιείται για τη μέτρηση των μεταβολών της ατμοσφαιρικής πιέσεως και την πρόγνωση του καιρού. Το μεταλλικό βαρόμετρο δεν είναι μεγάλης ακρίβειας, αλλά είναι πολύ εύχρηστο για τα ταξίδια, κυρίως στη θάλασσα και μάλιστα όταν επικρατεί τρικυμία (σχ. 5.3.15).



Σχ. 5.3.15
Μεταλλικό βαρόμετρο.

Η μονάδα μετρήσεως πιέσεως στο SI είναι το $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N/m}^2$, όμως εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται και οι άλλες μονάδες, παρόλο που σιγά-σιγά παραμερίζονται.

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να μετρείται η πίεση σε σχέση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή η υπερπίεση ή η υποπίεση.

Χρησιμοποιούνται πολλές φορές οι όροι:

1) ***Απόλυτη πίεση*** p_α, που είναι η πραγματική πίεση που έχει για παράδειγμα ο ατμός, και

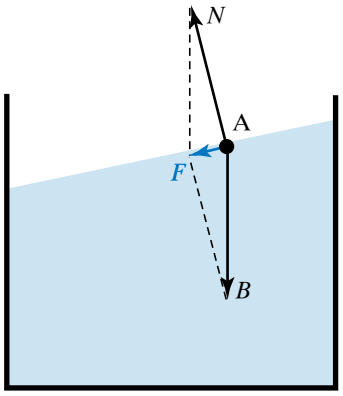
2) ***μανομετρική*** (σχετική) ***πίεση*** p_μ, που είναι η διαφορά της απόλυτης πιέσεως p_α από την ατμοσφαιρική $p_{\alpha\tau\mu}$, δηλαδή $p_\mu = p_\alpha - p_{\alpha\tau\mu}$. Αν $p_\mu > 0$, τότε ο ατμός έχει υπερπίεση και αν $p_\mu < 0$, τότε ο ατμός έχει υποπίεση.

Τα λεγόμενα ***μανόμετρα*** είναι συνήθως κατασκευασμένα και βαθμονομημένα έτσι, ώστε να δείχνουν τη μανομετρική πίεση.

5.3.8 Ελεύθερη επιφάνεια υγρών που ισορροπούν.

Ισχύει ότι η ελεύθερη επιφάνεια υγρού που ισορροπεί είναι οριζόντιο επίπεδο, διότι αν δεν ήταν οριζόντιο επίπεδο, τότε το βάρος $\vec{B}$ του κάθε σωματίου του υγρού θα μπορούσε να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη στην επιφάνεια $\vec{N}$ και μία εφαπτόμενη σ' αυτήν $\vec{F}$. Η τελευταία συνιστώσα θα μετακινούσε το υγρό, πράγμα άτοπο, μιας και υποθέσαμε ότι το υγρό ισορροπεί (σχ. 5.3.16).

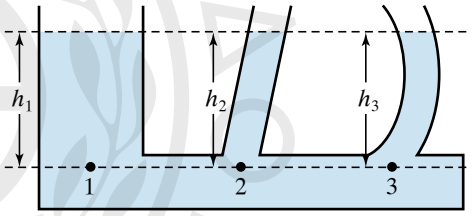
Απ' αυτήν τη διαπίστωση και από το Θεμελιώδη Νόμο της Υδροστατικής έπεται ότι η πίεση στο εσωτερικό υγρού είναι σταθερή σε όλα τα οριζόντια επίπεδα και εξαρτάται μόνο από το βάθος. Αυτό ισχύει για κάθε δοχείο, ανεξάρτητα από το σχήμα του, και αποτελεί απόδειξη της αρχής των συγκοινωνούντων δοχείων.



Σχ. 5.3.16
Σχηματική παράσταση δυνάμεων που θα ασκούνται στα μόρια της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού, όταν δεν είναι σε οριζόντιο επίπεδο.

5.3.9 Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων.

Η Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων διατυπώνεται ως εξής: ***Οι ελεύθερες επιφάνειες υγρού που ισορροπεί και περιέχεται σε δοχεία που συγκοινωνούν βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο*** (σχ. 5.3.17).



Σχ. 5.3.17
Συγκοινωνούντα δοχεία.

Απόδειξη.

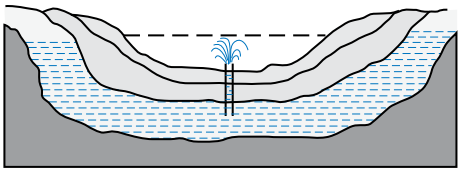
Αφού τα σημεία 1, 2, 3 του σχήματος 5.3.17 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, ισχύει ότι $p_1 = p_2 = p_3$.

Άρα $p_{\alpha\tau\mu} + \varepsilon h_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \varepsilon h_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \varepsilon h_3$. Δηλαδή $\varepsilon h_1 = \varepsilon h_2 = \varepsilon h_3$. Συνεπώς $h_1 = h_2 = h_3$.

5.3.10 Εφαρμογές της αρχής των συγκοινωνούντων δοχείων.

Μία εφαρμογή της αρχής των συγκοινωνούντων δοχείων είναι στα αρτεσιανά υδάτων (σχ. 5.3.18), όπου το νερό παγιδεύεται σε φυσικές δεξαμενές, οι οποίοι σχηματίζονται από αδιάβροχα στρώματα του υπεδάφους.

Όταν ανοίξομε οπή που φτάνει μέχρι το υδροφόρο στρώμα, το νερό υπό μορφή πίδακα εκτινάσσεται προς τα πάνω. Επειδή κατά την κίνησή του συναντά τριβές, στην πράξη δεν φτάνει ποτέ στο



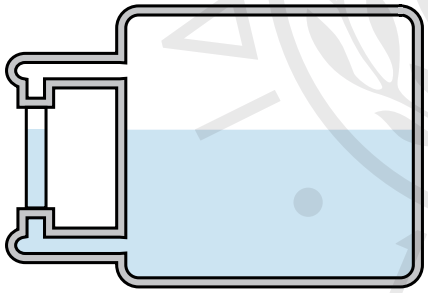
Σχ. 5.3.18
Αρτεσιανό φρέαρ (πηγάδι).

ύψος του νερού που βρίσκεται στις υπόγειες δεξαμενές.

Στα δίκτυα υδρεύσεως η κεντρική δεξαμενή νερού τοποθετείται στο υψηλότερο σημείο, ώστε να δημιουργείται η αναγκαία πίεση που θα ανυψώσει το νερό.

5.3.11 Υγροδείκτης–Υδροδείκτης.

Ο ***υγροδείκτης*** είναι ένας γυάλινος διαφανής σωλήνας που συγκοινωνεί με τη δεξαμενή, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3.19. Το υγρό βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο στη δεξαμενή και στο γυάλινο σωλήνα. Αν γνωρίζομε τη στάθμη του υγρού στο γυάλινο σωλήνα, τότε γνωρίζομε και τη στάθμη του στη δεξαμενή. Ο υγροδείκτης που χρησιμοποιείται στις ατμομηχανές για να δείχνει τη στάθμη του νερού στους λέβητες, ονομάζεται ***υδροδείκτης***.



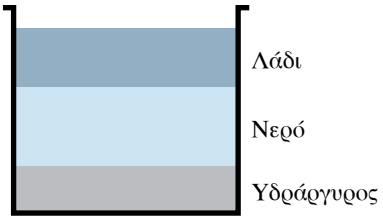
Σχ. 5.3.19
Υγροδείκτης.

5.3.12 Ισορροπία υγρών που δεν αναμειγνύονται και περιέχονται στο ίδιο δοχείο.

Αν τοποθετήσομε σε δοχείο υγρά που δεν αναμειγνύονται, όπως στο σχήμα 5.3.20, διαπιστώνομε ότι οι διαχωριστικές επιφάνειές τους είναι οριζόντια επίπεδα και το υγρό με το μεγαλύτερο ειδικό βάρος βρίσκεται χαμηλότερα.

Τι συμβαίνει, όμως, με τα συγκοινωνούντα δοχεία που περιέχουν υγρά, τα οποία δεν αναμειγνύονται;

Η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων ***δεν ισχύει*** στην περίπτωση που το δοχείο περιέχει υγρά διαφορετικού ειδικού βάρους που δεν αναμειγνύονται. Τα ύψη των υγρών στα συγκοινωνούντα δοχεία του σχήματος 5.3.21 υπολογίζονται θεωρώντας ότι η πίεση στο κάθε ένα υγρό χωριστά είναι ίδια για κάθε σημείο του ίδιου υγρού που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



Σχ. 5.3.20
Ισορροπία υγρών που δεν αναμειγνύονται στο ίδιο δοχείο.

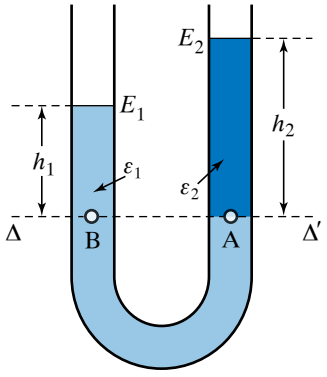
Έτσι αποδεικνύεται ότι ***αν μέσα σε δύο συγκοινωνούντα δοχεία ισορροπούν δύο υγρά που δεν αναμειγνύονται και οι εξωτερικές πιέσεις στις δύο ελεύθερες επιφάνειες είναι ίδιες, τότε τα ύψη h_1, h_2 των υγρών πάνω από την επιφάνεια διαχωρισμού είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ειδικά βάρη ε_1, ε_2.*** Η μαθηματική διατύπωση αυτής της προτάσεως είναι η ακόλουθη:

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Απόδειξη.

Στο σχήμα 5.3.21 θεωρούμε την επιφάνεια διαχωρισμού ΔΒΑΔ′ και τα σημεία Α, Β που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο που ανήκει στο ίδιο υγρό με ειδικό βάρος ε_2. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, έχομε ότι $p_A = p_B$ άρα $p_{\varepsilon\xi} + \varepsilon_2 h_2 = p_{\varepsilon\xi} + \varepsilon_1 h_1$ οπότε $\varepsilon_2 h_2 = \varepsilon_1 h_1$. Άρα:

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$



Σχ. 5.3.21
Ισορροπία υγρών που δεν αναμειγνύονται σε συγκοινωνούντα δοχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στα συγκοινωνούντα δοχεία του σχήματος 5.3.22 ισορροπούν δύο υγρά που δεν αναμειγνύονται. Αν είναι $h_1 = 5\,\text{cm}$, $h_2 = 6\,\text{cm}$, $h_3 = 2\,\text{cm}$ και το βαρύτερο υγρό έχει $\varepsilon_1 = 4\,\text{N/m}^3$, να υπολογίσετε το ειδικό βάρος ε_2 του ελαφρύτερου υγρού.

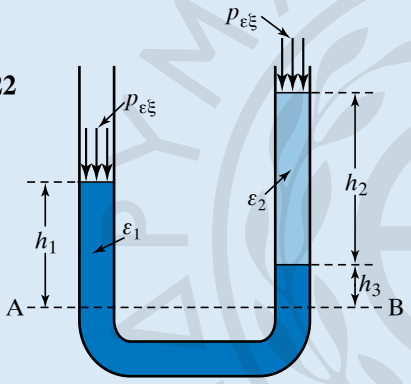
Λύση

Η πίεση σε δύο σημεία Α, Β βαρύτερου υγρού είναι:

$$p_A = p_B \Rightarrow p_{\varepsilon\xi} + \varepsilon_1 h_1 = p_{\varepsilon\xi} + \varepsilon_1 h_3 + \varepsilon_2 h_3 \Rightarrow \varepsilon_1 h_1 = \varepsilon_1 h_3 + \varepsilon_2 h_2 \Rightarrow \varepsilon_1 (h_1 - h_3) = \varepsilon_2 h_2 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 (h_1 - h_3)}{h_2} = 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

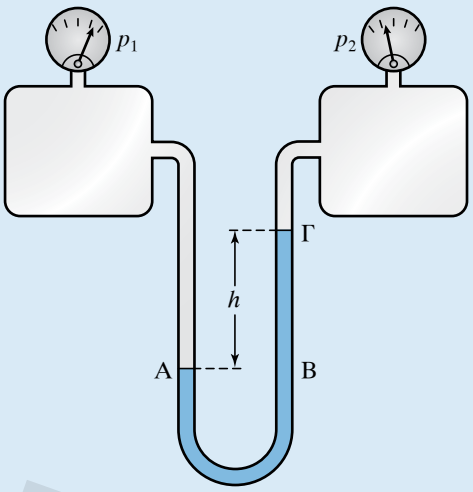
Σχ. 5.3.22



Παρατήρηση.

Η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων ***δεν ισχύει*** όταν η εξωτερική πίεση στα δύο δοχεία δεν είναι η ίδια. Στο σχήμα 5.3.23 τα δύο άκρα του σωλήνα σχήματος U συνδέονται με δοχεία που περιέχουν αέρια υπό πίεση. Επειδή $p_1 > p_2$ είναι και $p_1 = p_A > p_2 = p_\Gamma$. Από τον Θεμελιώδη Νόμο της Υδροστατικής για το σημείο Β έχομε ότι:

$$p_1 = p_2 + \varepsilon h, \text{ άρα } h = \frac{P_1 - P_2}{\varepsilon}.$$



Σχ. 5.3.23
Σωλήνας σχήματος U με ελεγχόμενη πίεση στα άκρα.

5.3.13 Θεώρημα του Torricelli (εκροή υγρού από οπή).

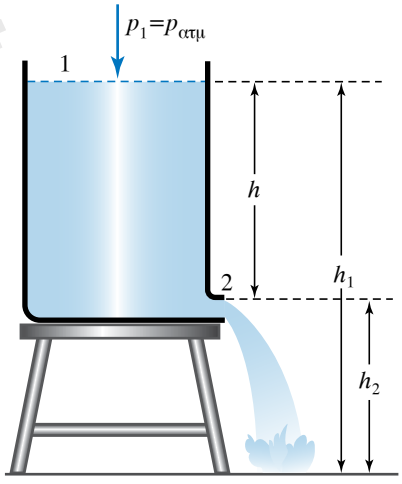
Το θεώρημα του Torricelli διατυπώνεται ως εξής:

Η ταχύτητα εκροής u ιδανικού υγρού από μικρό άνοιγμα που βρίσκεται σε υψόμετρο h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια δοχείου που περιέχει το υγρό, ισούται με την ταχύτητα που θα αποκτούσε σωμάτιο του υγρού, αν εκτελούσε ελεύθερη πτώση από αυτό το ύψος (σχ. 5.3.24). Δηλαδή:

$$u = \sqrt{2\,g\,h}.$$

Απόδειξη.

Το δοχείο του σχήματος 5.3.24 περιέχει υγρό πυκνότητας ρ μέχρι το υψόμετρο h_1. Στο σημείο 1 που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια, επικρατεί πίεση p_1 ίση με την ατμοσφαιρική ($p_1 = p_{\text{ατμ}}$) και η ταχύτητα του υγρού είναι $\vec{u}_1$.



Σχ. 5.3.24
Εκροή ιδανικού υγρού από μικρό άνοιγμα.

Στο σημείο 2 που βρίσκεται σε υψόμετρο h_2 υπάρχει μικρή οπή απ' όπου εκρέει το υγρό με ταχύτητα $\vec{u}_2$ και επικρατεί πίεση p_2, ίση με την ατμοσφαιρική ($p_2 = p_{\text{ατμ}}$). Κάνομε χρήση του νόμου του Bernoulli (βλ. παράγρ. 5.4) έχομε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\, u_1^{\,2} + \varrho\, g\, h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho\, u_2^{\,2} + \varrho\, g\, h_2.$$

Επειδή $p_1 = p_2 = p_{\text{ατμ}}$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{2}\varrho\, u_1^{\,2} + \varrho\, g\, h_1 = \frac{1}{2}\varrho\, u_2^{\,2} + \varrho\, g\, h_2$$

και διαιρώντας με την πυκνότητα ϱ του υγρού βρίσκομε:

$$\frac{1}{2}u_1^{\,2} + g\, h_1 = \frac{1}{2}u_2^{\,2} + g\, h_2.$$

Αν θεωρήσομε ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού έχει πολύ μεγαλύτερο εμβαδό συγκριτικά με το εμβαδό της οπής που βρίσκεται στη θέση 2, μπορούμε να θεωρήσομε την ταχύτητα $\vec{u}_1$ ίση με μηδέν ($u_1 = 0$). Συνεπώς, η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$g\, h_1 = \frac{1}{2}u_2^{\,2} + g\, h_2,$$

δηλαδή:

$$\frac{1}{2}u_2^{\,2} = g\, h_2 - g\, h_1,$$

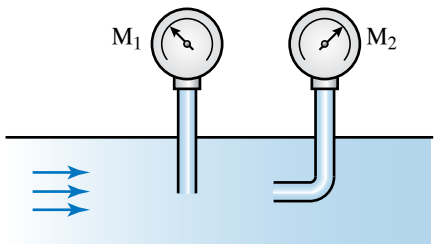
άρα:

$$u_2 = \sqrt{2\, g\, h}, \text{ όπου } h = h_2 - h_1.$$

5.4 Δυναμική πίεση. Αρχή του Bernoulli.

Η πίεση p που επικρατεί σε σημείο κινούμενου ρευστού, την οποία μετρά όργανο (μανόμετρο) που η εισαγωγή του δεν διαταράσσει τη ροή του ρευστού, ονομάζεται ***στατική πίεση*** του ρευστού στο σημείο αυτό (σχ. 5.4.1) M_1.

Σε κάθε σημείο του κινούμενου ρευστού το μέγεθος $1/2\,\varrho\, u^2$ ονομάζεται ***δυναμική πίεση***. Το ϱ, u συμβολίζουν αντιστοίχως την πυκνότητα και την ταχύτητα του ρευστού σε αυτό το σημείο. Το μέγεθος $\varrho\, g\, h$ ονομάζεται ***υψομετρική πίεση***, όπου h είναι το ύψος του σημείου του υγρού από μια στάθμη αναφοράς όπου το ύψος θεωρείται μηδέν. Το h θεωρείται θετικό προς τα πάνω, ενώ το g είναι η ένταση του πεδίου βαρύτητας.



Σχ. 5.4.1
Σωστός (M_1) και λανθασμένος (M_2) τρόπος μετρήσεως της στατικής πιέσεως ρευστού.

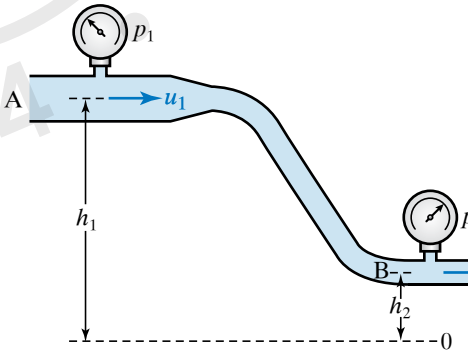
Το άθροισμα της στατικής, της δυναμικής και της υψομετρικής πιέσεως σε ένα σημείο του ρευστού, ονομάζεται ***ολική πίεση*** του ρευστού στο σημείο αυτό. Ο Νόμος του Bernoulli ισχύει για στρωτή και ασυμπίεστη, χωρίς εσωτερικές τριβές ροή (ιδανικό ρευστό) και προβλέπει τα εξής.

Κατά μήκος ενός λεπτού σωλήνα, μέσα στον οποίο ρέει ιδανικό ρευστό με στρωτή ροή, το άθροισμα της στατικής, της δυναμικής και της υψομετρικής πιέσεως σε κάθε σημείο είναι το ίδιο, δηλαδή η ολική πίεση παραμένει σταθερή κατά μήκος του σωλήνα, συνεπώς αποτελεί μία σταθερά για το συγκεκριμένο σωλήνα. Σε πολλές περιπτώσεις η σταθερά είναι ίδια για κάθε σημείο του ρευστού, σε όλο τον όγκο του.

Έστω σωλήνας μη σταθερής διατομής, μέσα στον οποίο ρέει ιδανικό ρευστό με στρωτή ροή (σχ. 5.4.2). Για τα σημεία Α και Β ισχύει ότι $p_{\text{ολA}} = p_{\text{ολB}}$, άρα:

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\, u_1^{\,2} + \varrho\, g\, h_1 =$$

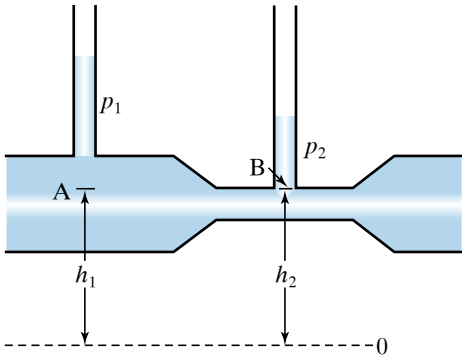
$$= p_2 + \frac{1}{2}\varrho\, u_2^{\,2} + \varrho\, g\, h_2 = \text{σταθερό}.$$



Σχ. 5.4.2
Τυχαίος σωλήνας μη σταθερής διατομής.

Για την περίπτωση που ο σωλήνας είναι οριζόντιος, δηλαδή $h_1 = h_2$ (σχ. 5.4.3), ο Νόμος του Bernoulli ορίζεται ως εξής:

Κατά μήκος οριζόντιου σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει ιδανικό ρευστό με στρωτή ροή, το άθροισμα της



Σχ. 5.4.3
Οριζόντιος σωλήνας μη σταθερής διατομής.

στατικής και της δυναμικής πίεσεως των σημείων του ρευστού παραμένει σταθερό.

Η μαθηματική του διατύπωση είναι:

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\, u_1^{\,2} = p_2 + \frac{1}{2}\varrho\, u_2^{\,2} = \text{σταθερό}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι στις στενώσεις οριζόντιου σωλήνα, που η ταχύτητα του ρευστού είναι μεγάλη, η στατική του πίεση είναι μικρή.

5.4.1 Απόδειξη του Νόμου του Bernoulli.

Θεωρούμε λεπτό σωλήνα, μέσα στον οποίο ρέει ιδανικό ρευστό πυκνότητας ϱ με στρωτή ροή όπως στο σχήμα 5.4.4. Σε χρόνο Δt από τις στοιχειώδεις διατομές A_1 και A_2 θα περάσει ο ίδιος όγκος ρευστού.

Κατά την κίνηση στον χρόνο Δt, το υγρό δέχεται στο σημείο 1 δύναμη $F_1 = p_1 A_1$, όπου p_1 η στατική πίεση στο σημείο 1. Η δύναμη $\vec{F}_1$ παράγει έργο $\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$, όπου ΔV ο όγκος του ρευστού, ο οποίος περιέχει μάζα Δm. Στον ίδιο χρόνο Δt, στο υγρό στο σημείο 2, ασκείται δύναμη $F_2 = p_2 A_2$ προς τα αριστερά, όπου p_2 η στατική πίεση στο σημείο 2. Η δύναμη $\vec{F}_2$ παράγει αρνητικό έργο

$$\Delta W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -p_2 A_2 \Delta x_2 = -p_2 \Delta V.$$

Συνεπώς το συνολικό έργο των δυνάμεων F_1 και F_2 είναι:

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = (p_1 - p_2)\,\Delta V.$$

Από το θεώρημα έργου-ενέργειας, το έργο που παράγεται από τη συνισταμένη δύναμη που δρα πάνω σ' ένα σύστημα, ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος. Ισχύει ότι $\Delta U = \Delta m\, g y_2 - \Delta m\, g y_1$. Επίσης ισχύει ότι:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}\Delta m\, u_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m\, u_1^2.$$

Συνεπώς: $(p_1 - p_2)\,\Delta V =$

$$= \Delta m\, g\, y_2 - \Delta m\, g\, y_1 + \frac{1}{2}\Delta m\, u_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m\, u_1^2.$$

Διαιρώντας διά ΔV προκύπτει ότι:

$$(p_1 - p_2) = \varrho\, g\, y_2 - \varrho\, g\, y_1 + \frac{1}{2}\varrho\, u_2^2 - \frac{1}{2}\varrho\, u_1^2,$$

που ισοδυνάμως γράφεται:

$$p_1 + \varrho\, g\, y_1 + \frac{1}{2}\varrho\, u_1^2 = p_2 + \varrho\, g\, y_2 + \frac{1}{2}\varrho\, u_2^2.$$

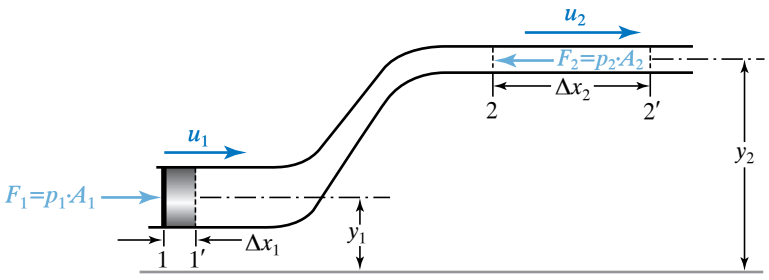
Αυτή η σχέση είναι ο Νόμος του Bernoulli.

5.4.2 Εφαρμογές του Νόμου του Bernoulli.

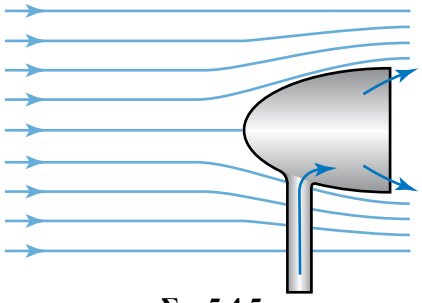
Υπάρχουν εφαρμογές του Νόμου του Bernoulli σε υγρά και αέρια. Σε αυτόν τον Νόμο στηρίζεται η λειτουργία των εξαεριστήρων των πλοίων και των λεωφορείων (σχ. 5.4.5). Μερικές από τις εφαρμογές του Νόμου του Bernoulli είναι οι ακόλουθες:

1) Εξαεριστήρας πλοίου.

Στα άκρα του εξαεριστήρα πλοίου δημιουργείται συμπύκνωση των γραμμών ροής του αέρα, η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από ό,τι στο εσωτερικό του πλοίου, οπότε η πίεση είναι μικρότερη και ο αέρας «πιέζεται» να βγει έξω από το εσωτερικό



Σχ. 5.4.4
Ροή ρευστού μέσα σε λεπτό σωλήνα, στη θέση 1 και στη θέση 2.

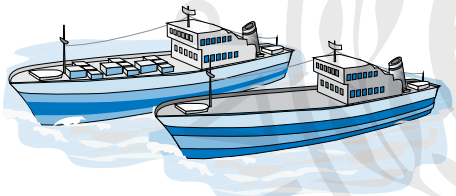


Σχ. 5.4.5
Εξαεριστήρας πλοίου.

του πλοίου και με αυτόν τον τρόπο γίνεται ο εξαερισμός. Οι διαφορές υψομετρικής πιέσεως δεν είναι σημαντικές σε σχέση με τις διαφορές της στατικής και δυναμικής πιέσεως.

2) Σύγκρουση πλοίων.

Όταν δύο πλοία κινούνται το ένα πολύ κοντά στο άλλο, τότε η ταχύτητα του νερού που βρίσκεται ανάμεσά τους γίνεται πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του νερού στα άλλα σημεία (σχ. 5.4.6). Συνεπώς, οι στατικές πιέσεις του νερού που βρίσκεται ανάμεσα στα πλοία είναι μικρότερες, άρα τα πλοία ωθούνται το ένα προς το άλλο.



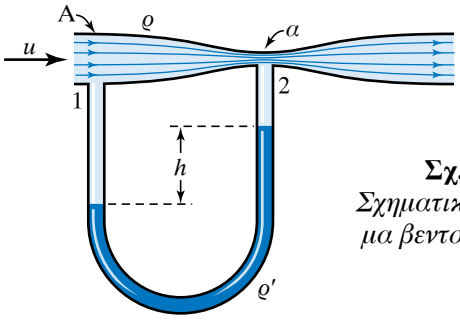
Σχ. 5.4.6
Σύγκρουση πλοίων λόγω μικρότερων στατικών πιέσεων ανάμεσά τους σε σχέση με τις εξωτερικές.

3) Βεντουρίμετρο.

Το βεντουρίμετρο είναι ένα όργανο μετρήσεως πιέσεως (μανόμετρο). Συνδέεται με σωλήνα, μέσα στον οποίο ρέει ρευστό πυκνότητας ϱ την ταχύτητα ροής του οποίου θέλομε να μετρήσομε (υπολογίσομε) (σχ. 5.4.7).

Έστω ότι A είναι η διατομή στην αρχή του σωλήνα και a διατομή σε μία στένωση του σωλήνα, όπου συνδέεται ο σωλήνας του μανόμετρου, το οποίο περιέχει υγρό πυκνότητας ϱ'. Από την Αρχή της Συνέχειας και τον νόμο του Bernoulli στα σημεία 1 και 2, προκύπτει ότι η ταχύτητα ροής του ρευστού στο σημείο Α δίνεται από τον τύπο:

$$u = a\sqrt{\frac{2(\varrho' - \varrho)gh}{\varrho(A^2 - a^2)}}.$$



Σχ. 5.4.7
Σχηματικό διάγραμμα βεντουρίμετρου.

5.5 Αρχή του Αρχιμήδη.

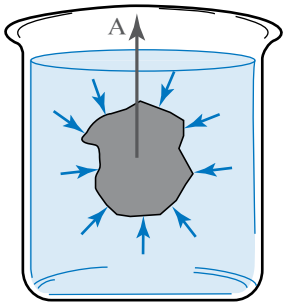
Όταν κολυμπάμε στη θάλασσα, νιώθομε ότι το νερό ασκεί δυνάμεις πάνω μας και δυσκολεύει τη βύθισή μας. Αυτό συμβαίνει διότι μέσα στο ρευστό υπάρχουν πιέσεις. Έτσι, όταν ένα σώμα είναι ακίνητο μέσα στο ρευστό, το ρευστό ασκεί σε κάθε σημείο του σώματος δυνάμεις, των οποίων η συνισταμένη είναι κατακόρυφη προς τα πάνω. Αυτή η δύναμη A ονομάζεται ***άνωση*** και μελετήθηκε πρώτα από τον Αρχιμήδη (σχ. 5.5.1).

Για ρευστό με ομοιόμορφη πυκνότητα, η τιμή της ανώσεως υπολογίζεται από τον τύπο: $A = \varrho g V = \varepsilon V$, όπου: ϱ, ε η ***πυκνότητα*** ή το ειδικό βάρος του ρευστού, g η ***επιτάχυνση*** της βαρύτητας και V ο ***όγκος*** του βυθισμένου στο υγρό τμήματος του σώματος. Το ρευστό μπορεί να είναι υγρό ή αέριο.

Κέντρο ανώσεως ενός σώματος ονομάζεται το σημείο εφαρμογής της ανώσεως και συμπίπτει με το κέντρο βάρος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα μόνο όταν αυτό είναι ομογενές και τελείως βυθισμένο στο ρευστό.

Η διατύπωση της αρχής του Αρχιμήδη, είναι η ακόλουθη:

Κάθε σώμα που βρίσκεται μέσα σε ρευστό υφίσταται δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω, την άνωση, η οποία είναι ίση με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζει.



Σχ. 5.5.1
Η άνωση ως συνισταμένη των διαφορετικών δυνάμεων που ασκούνται σε σώμα βυθισμένο σε υγρό.

Αυτό είναι κατανοητό από τη σχέση που δώσαμε για την άνωση.

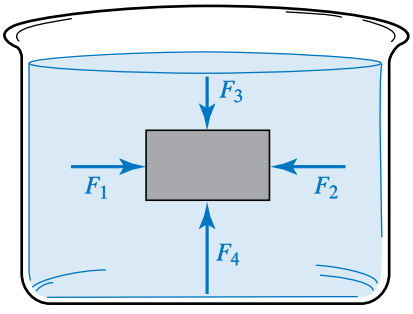
Αν ζυγίσομε σώμα βυθισμένο μέσα σε ρευστό, αυτό θα φαίνεται ελαφρύτερο. Μέσα στην ατμόσφαιρα μετρούμε τη διαφορά B–A ένα είδος φαινόμενου βάρους.

5.5.1 Απόδειξη της αρχής Αρχιμήδη.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η αρχή του Αρχιμήδη ισχύει στην απλή περίπτωση του σχήματος 5.5.2. Για σώμα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, το σχήμα δείχνει υγρό, αλλά η απόδειξη είναι γενική και ισχύει γενικώς για ρευστό. Έστω ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ύψος h και εμβαδό βάσεως S. Ο όγκος του είναι $V = h\,S$ και το ειδικό βάρος του ρευστού είναι ε. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, που ασκεί το ρευστό στις πλευρικές επιφάνειες του σώματος, αλληλοεξουδετερώνονται ως ίσες και αντίθετες. Η δύναμη $\vec{F}_3$ που ασκεί το υγρό στην οριζόντια άνω έδρα του σώματος, έχει διεύθυνση κατακόρυφη, φορά προς τα κάτω και μέτρο που δίνεται από τον τύπο: $F_3 = p_1 S$, όπου p_1 η πίεση στην πάνω έδρα τους στερεού. Η δύναμη $\vec{F}_4$ που ασκεί το ρευστό στην οριζόντια κάτω έδρα του στερεού, έχει διεύθυνση κατακόρυφη, φορά προς τα πάνω και μέτρο που δίνεται από τον τύπο: $F_4 = p_2 S$, όπου p_2 η πίεση στην κάτω έδρα του στερεού. Η διαφορά πιέσεως μεταξύ της κάτω και πάνω επιφάνειας είναι $p_2 - p_1 = h\varepsilon$, διότι οι υψομετρικές διαφορές τους διαφέρουν κατά h. Η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$ είναι η άνωση και δίνεται από τον τύπο:

$$A = F_4 - F_3. \text{ Άρα } A = F_4 - F_3 = p_2 S - p_1 S = \\ = (p_2 - p_1) S = \varepsilon\, h\, S = \varepsilon V = B_{\text{ρευ}}.$$

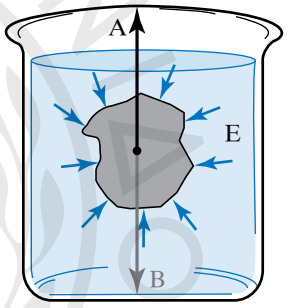
Η πιο γενική απόδειξη είναι η εξής: Θεωρούμε



Σχ. 5.5.2
Δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, το οποίο είναι βυθισμένο σε υγρό.

κλειστή επιφάνεια Ε εντός ρευστού που ισορροπεί (σχ. 5.5.3). Έστω $\vec{B}$ το βάρος της μάζας του υγρού που περιέχεται μέσα στην επιφάνεια Ε. Αφού το ρευστό ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκεί το υγρό στο σώμα (άνωση $\vec{A}$) εξισορροπείται από το βάρος B, άρα ισχύει ότι $\vec{A} = \vec{B}$. Όμως $B = \varepsilon V$, επομένως $A = \varepsilon V$, όπου V ο όγκος του υγρού που περικλείεται από την επιφάνεια Ε. Είναι ευνόητο ότι αν το περιεχόμενο ρευστό μέσα στον όγκο που περικλείει η επιφάνεια Ε αντικατασταθεί με άλλο υλικό, η δύναμη που ασκεί το ρευστό στην επιφάνεια δεν θα αλλάξει, επομένως η άνωση είναι ανεξάρτητη από το σώμα που βυθίζεται και έχει ίδια περιβάλλουσα επιφάνεια στη συγκεκριμένη θέση.

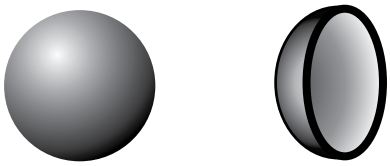
Η Αρχή του Αρχιμήδη βρίσκει μεγάλες εφαρμογές σε πολλές περιπτώσεις. Μια από αυτές είναι η ναυπηγική.



Σχ. 5.5.3
Ισορροπία δυνάμεων ανώσεως και βάρους σε σώμα που είναι βυθισμένο σε υγρό.

5.5.2 Πώς επιπλέουν τα σιδερένια πλοία.

Ένα συμπαγές σώμα επιπλέει όταν το ειδικό του βάρος ή η πυκνότητά του είναι μικρότερη από του νερού. Γεννάται το ερώτημα πώς μπορεί ένα σιδερένιο πλοίο να επιπλέει, αφού η πυκνότητα του σιδήρου (7,8 g/cm^3) είναι μεγαλύτερη από του νερού (1 g/cm^3). Θεωρούμε δύο σιδερένιες σφαίρες που έχουν την ίδια μάζα. Η μία είναι συμπαγής και η άλλη κοίλη [σχ. 5.5.4(α)(β)]. Συνεπώς, η πρώ-



(α) (β)

Σχ. 5.5.4
(α) Συμπαγής σιδερένια σφαίρα. (β) Κοίλη σιδερένια σφαίρα.

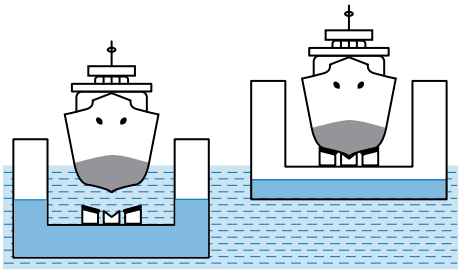
τη έχει μικρότερο όγκο από τη δεύτερη. Όταν τις ρίξομε στη θάλασσα, παρατηρούμε ότι η μεν πρώτη βυθίζεται, η δε δεύτερη επιπλέει. Αυτό εξηγείται διότι η συμπαγής σφαίρα, που έχει μικρότερο όγκο, δέχεται και μικρότερη άνωση από την κοίλη και επειδή η άνωση είναι μικρότερη από το βάρος της, βυθίζεται.

Η κοίλη σφαίρα δεν είναι συμπαγής, επιπλέει διότι το βάρος της είναι μικρότερο από την άνωση. Στους εσωτερικούς χώρους του σιδερένιου πλοίου (καμπίνες, διάδρομοι, γκαράζ, αποθήκες) υπάρχει αέρας, άρα αν διαιρέσομε τη συνολική του μάζα με τον βυθισμένο όγκο, βρίσκομε την πυκνότητά του (μέση πυκνότητα) μικρότερη από του νερού.

Συνεπώς, το πλοίο μπορεί να επιπλέει. Καταλήγομε στο ότι το φυσικό μέγεθος που κρίνει εάν ένα σώμα θα βουλιάξει ή θα επιπλεύσει, δεν είναι η πυκνότητα του υλικού κατασκευής του, αλλά η μέση πυκνότητα του σώματος που ισούται με το πηλίκο της συνολικής του μάζας προς τον όγκο που είναι βυθισμένος.

5.5.3 Πλωτές δεξαμενές.

Πρόκειται για ειδικά σκάφη που υπάρχουν στα ναυπηγεία και χρησιμεύουν για την επισκευή των πλοίων. Γεμίζοντας τα διαμερίσματά της με νερό, η δεξαμενή βυθίζεται, οπότε και το προς επισκευή πλοίο ρυμουλκείται εντός αυτής. Στη συνέχεια με χρήση αντλιών αφαιρείται το νερό από τα διαμερίσματα και η δεξαμενή με το πλοίο ανέρχονται στην επιφάνεια της θάλασσας. Έτσι, είναι δυνατό να γίνει επισκευή του πλοίου ακόμα και στα ύφαλά του (σχ. 5.5.5).



Σχ. 5.5.5

5.5.4 Αερόστατο.

Το αερόστατο αποτελείται από αεροστεγή σάκο κατασκευασμένο από ελαστικό υλικό ή μετάξι ή ύφασμα, που δεν μπορούν τα αέρια να το διαπεράσουν. Γεμίζεται με αέριο που έχει μικρότερη πυκνότητα από την πυκνότητα του αέρα, όπως ήλιο ή υδρογόνο ή ζεστό αέρα. Ο σάκος περιβάλλεται με πλέγμα από σχοινί (δίχτυ), στο κάτω μέρος του οποίου βρίσκεται δακτύλιος, από τον οποίο κρέμεται το καλάθι όπου επιβαίνουν οι ταξιδιώτες ή τοποθετούνται όργανα μετρήσεως του καιρού. Στις εξωτερικές πλευρές του καλαθιού κρεμιούνται σάκοι με άμμο για έρμα (σαβούρα).

5.6 Αριθμός Reynolds. Κρίσιμη ταχύτητα ρευστού. Συντελεστές αντιστάσεως για ρευστά. Νόμος Stokes. Αντίσταση σε τυρβώδη ροή.

Όταν ένα ρευστό, πραγματικό ή ιδανικό, ακινητεί, τότε η δύναμη που ασκεί στη μια πλευρά οποιασδήποτε (νοητής ή όχι) επιφάνειας μέσα στο ρευστό, είναι κάθετη στην επιφάνεια. Δηλαδή δεν παρουσιάζονται μέσα στο ακίνητο ρευστό διατμητικές τάσεις. Όταν ένα πραγματικό ρευστό κινείται, μεταξύ στρωμάτων διαφορετικής ταχύτητας ασκούνται πλάγιες, ως προς το θεωρούμενο στρώμα, δυνάμεις που έχουν συνιστώσα παράλληλη προς την επιφάνεια του στρώματος. Η συνιστώσα αυτή έχει φορά τέτοια που τείνει να εξισώσει τις ταχύτητες των στρωμάτων, επιταχύνοντας το βραδύτερο στρώμα και επιβραδύνοντας το ταχύτερο.

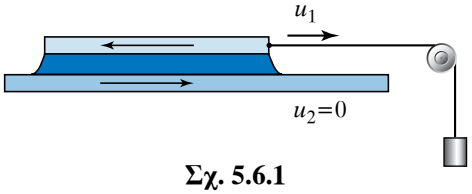
Κατά τη ροή πραγματικού ρευστού, παρατηρείται ανάπτυξη δυνάμεων συνάφειας, εξαιτίας των οποίων ασκούνται δυνάμεις μεταξύ του ρευστού και των στερεών σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή με το ρευστό. Στα σημεία επαφής τους, το ρευστό έχει πάντα την ταχύτητα του στερεού.

Μία ιδιότητα που παρατηρείται στη ροή πραγματικών ρευστών είναι η συμπιεστότητα, που δεν επηρεάζει σημαντικά τη ροή των υγρών και των αερίων. Επηρεάζει τη ροή αερίων, όταν αυτά κινούνται με ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα διαδόσεως του ήχου. Οι παραπάνω ιδιότητες των πραγματικών ρευστών, προκαλούν φαινόμενα όπως η εσωτερική τριβή, η δημιουργία στροβίλων στην τυρβώδη ροή και η αντίσταση που παρουσιάζουν τα διάφορα σώματα, όταν εισάγονται σε ρεύμα πραγματικού ρευστού.

5.6.1 Εσωτερική τριβή υγρών.

Κατά τη ροή υγρού, λεπτά στρώματά του κινούνται με διαφορετική ταχύτητα. Όταν το υγρό ρέει, ρέει κατά στρώματα που έχουν διαφορετικές τα-

χύτητες. Ας θεωρήσομε τη διάταξη του σχήματος 5.6.1, όπου ανάμεσα σε δύο πλάκες υπάρχει ένα λεπτό στρώμα υγρού.



Σχ. 5.6.1
Λεπτό στρώμα υγρού ανάμεσα σε κινούμενες πλάκες.

Κρατάμε την κάτω πλάκα ακίνητη ($\vec{u}_2 = 0$) και κινούμε την πάνω με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}_1$. Κατά την κίνηση, τα σωμάτια του υγρού που βρίσκονται σε επαφή με την πάνω πλάκα κινούνται, εξαιτίας της συνάφειας με ταχύτητα $\vec{u}_1$. Αυτά που βρίσκονται σε επαφή με την κάτω πλάκα, παραμένουν ακίνητα. Με τον τρόπον αυτόν στο εσωτερικό του υγρού, που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο πλάκες, δημιουργούνται στρώματα που κινούνται με ταχύτητες από μηδέν έως u_1.

Προκειμένου να επιτύχομε την κίνηση της πάνω πλάκας, της ασκούμε μέσω του βάρους που της έχομε αναρτήσει μία σταθερή δύναμη. Επειδή η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα και συνεπώς η επιτάχυνσή της είναι μηδέν, συμπεραίνομε ότι το υγρό ασκεί στην πάνω πλάκα μία δύναμη $\vec{T}_1$ αντίθετη αυτής που προκαλεί την κίνηση.

Αποδεικνύεται ότι η δύναμη αυτή είναι ανάλογη του εμβαδού S της κινούμενης πλάκας, της ταχύτητας $\vec{u}_1$, του συντελεστή εσωτερικής τριβής (ή συντελεστή ιξώδους) η και αντιστρόφως ανάλογη της αποστάσεως Z των δύο πλακών. Ισχύει ότι:

$$T_1 = \eta\, S\, \frac{u_1}{Z}.$$

Ο συντελεστής εσωτερικής τριβής η εξαρτάται από τη φύση και τη θερμοκρασία του υγρού. Όταν η θερμοκρασία των υγρών αυξάνεται, συνήθως ο συντελεστής εσωτερικής τριβής η μειώνεται.

Στα αέρια, ο συντελεστής τριβής αυξάνεται. Η δύναμη $\vec{T}_1$ οφείλεται στην εσωτερική τριβή και ασκείται στην κινούμενη πλάκα από την ακίνητη, διά μέσου του υγρού. Σύμφωνα με την αρχή δράσεως-αντιδράσεως και η κινούμενη πλάκα ασκεί στην ακίνητη μία αντίθετη δύναμη $\vec{T}_2$, που τείνει να παρασύρει την ακίνητη πλάκα. Κατά την κίνηση της πάνω πλάκας, η δύναμη της εσωτερικής τριβής παράγει έργο, που μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια και προκαλεί θέρμανση του υγρού.

5.6.2 Μονάδα μετρήσεως του συντελεστή της εσωτερικής τριβής (ή συντελεστή ιξώδους).

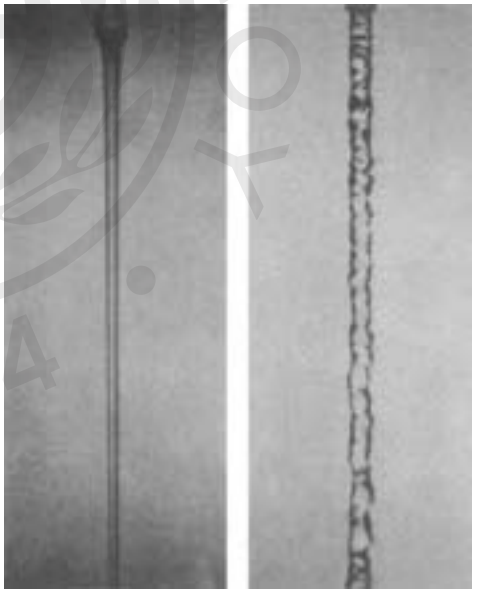
Από την εξίσωση $T = \eta\ S\ u/Z$ προκύπτει ότι $\eta = \dfrac{T\,Z}{S\,u}$.

Από τον τύπο αυτό έπεται ότι στο SI μονάδα μετρήσεως του συντελεστή της εσωτερικής τριβής είναι το $1\,\mathrm{N\cdot s/m^2} = 1\,\mathrm{kg/m\cdot s}$.

Χρησιμοποιείται και η μονάδα του CGS, που είναι το 1g/cm·s, που μπορεί να γραφεί και ως $1\,\mathrm{dyn\cdot s/cm^2}$ και ονομάζεται 1 Poise (1 P) από τον Poiseuille και ισχύει: $1\ \mathrm{Poise} = 1\ \mathrm{P} = 10^{-1}\mathrm{N\cdot s/m^2}$.

5.6.3 Τυρβώδης ροή.

Κατά την κίνηση πραγματικού ρευστού, αν η ταχύτητα είναι μικρή, η ροή είναι στρωτή. Από πειραματικές παρατηρήσεις προέκυψε ότι όταν αυξήσομε την ταχύτητα και γίνει μεγαλύτερη από μία κρίσιμη τιμή, η ροή γίνεται τυρβώδης (σχ. 5.6.2).



Σχ. 5.6.2
(α) Στρωτή ροή νερού και (β) τυρβώδης.

Στην τυρβώδη ροή η ταχύτητα σε κάθε σημείο του ρευστού δεν είναι πλέον χρονικά σταθερή, αλλά κυμαίνεται ακανόνιστα γύρω από μία μέση τιμή. Οι ρευματικές γραμμές μεταβάλλονται διαρκώς και ακανόνιστα.

Η τιμή $u_{\text{ΚΡ}}$ της κρίσιμης ταχύτητας του ρευστού εξαρτάται από τη μορφή και τις διαστάσεις του σώματος, περί το οποίο ή μέσα στο οποίο έχομε τη ροή, και από τη φύση του ρευστού (πυκνότητα ϱ, ιξώδες η). Ισχύει:

$$u_{\text{ΚΡ}} = R_{\text{ΚΡ}} \frac{\eta}{\varrho\, l},$$

όπου l μία από τις κατάλληλες γραμμικές διαστάσεις του σώματος (π.χ. η ακτίνα ή διάμετρος της κυκλικής διατομής σωλήνα όπου ρέει υγρό ή η ακτίνα ή η διάμετρος σφαίρας, που βρίσκεται μέσα σε κινούμενο υγρό).

Το γεγονός ότι η $u_{\text{ΚΡ}}$ είναι ανάλογη του η, εξηγεί το γιατί τα παχύρρευστα υγρά (μεγάλος συντελεστής η) μεταπίπτουν στην τυρβώδη ροή, μόνο όταν οι ταχύτητες γίνουν πολύ μεγάλες. Η κρίσιμη ταχύτητα σχετίζεται μ' έναν (καθαρό) αριθμό που χαρακτηρίζει τη ροή και ονομάζεται ***κρίσιμος αριθμός του Reynolds***. Συμβολίζεται με $R_{\text{ΚΡ}}$ και η τιμή του είναι δυνατό να υπολογισθεί πειραματικά ($R_{\text{ΚΡ}} = 1160$ για κυλινδρικό σωλήνα, $R_{\text{ΚΡ}} = 2100$ για σωλήνα τετραγωνικής διατομής, $R_{\text{ΚΡ}} = 4100$ αν η διατομή είναι ισόπλευρο τρίγωνο). Για τη ροή περί σφαίρα, η γραμμική διάσταση που χρησιμοποιείται είναι η διάμετρός της d και ισχύει ότι $R_{\text{ΚΡ}} = 10$.

Όταν η ταχύτητα είναι μικρότερη απ' την κρίσιμη, η ροή είναι στρωτή και μεταπίπτει σε τυρβώδη όταν την υπερβεί. Η τιμή αυτή αποτελεί ένα πάνω όριο για την ευστάθεια της στρωτής ροής. Από την εξίσωση $u_{\text{ΚΡ}} = R_{\text{ΚΡ}} \frac{\eta}{\varrho\, l}$ προκύπτει ότι $R_{\text{ΚΡ}} = \frac{u_{\text{ΚΡ}}\, \varrho\, l}{\eta}$.

Αν θεωρήσομε μία ροή με ταχύτητα u (μικρότερη απ' την κρίσιμη), το πηλίκο $\frac{u\, \varrho\, l}{\eta}$ ορίζεται ως ***αριθμός του Reynolds R*** και είναι μικρότερος απ' τον κρίσιμο $R_{\text{ΚΡ}}$. Δηλαδή ο αριθμός του Reynolds δίνεται από τον τύπο:

$$R = \frac{u\, \varrho\, l}{\eta}$$

και προκειμένου να κρίνομε αν μία ροή είναι στρωτή ή όχι, το συγκρίνομε με τον κρίσιμο αριθμό του Reynolds. Αν ο αριθμός του Reynolds είναι μικρότερος από τον κρίσιμο $R_{\text{ΚΡ}}$, τότε η ροή είναι στρωτή. Αν είναι μεγαλύτερος, τότε η ροή είναι τυρβώδης. Ο αριθμός Reynolds είναι μεγάλης σημασίας για τη διερεύνηση προβλημάτων ροής στην αεροναυπηγική και στην υδραυλική. Επιτρέπει μετρήσεις πάνω σε εργαστηριακά μηχανικά ομοιώματα μικροτέρων διαστάσεων (μοντέλα αυτοκινήτων, αεροσκαφών μέσα σε αεροδυναμική σήραγγα) και στη συνέχεια την αναγωγή των συμπερασμάτων στις πραγματικές διαστάσεις. Κατά την αναγωγή γίνεται επιλογή της ταχύτητας, προκειμένου ο αριθμός του Reynolds να έχει την ίδια τιμή και στις δύο περιπτώσεις.

5.6.4 Αντίσταση σωμάτων που βρίσκονται μέσα σε ρευστό.

Αν βυθίσομε την παλάμη μας μέσα σε νερό που ισορροπεί και την μετακινήσομε απότομα, αισθανόμαστε ότι το νερό της ασκεί μία δύναμη που τείνει να εμποδίσει την κίνηση και η φορά της είναι αντίθετη προς τη φορά της κινήσεως. Η δύναμη αυτή είναι δύναμη αντιστάσεως. Τέτοια δύναμη αισθάνεται ο οδηγός ποδηλάτου.

Όταν ένα σώμα ακινητεί μέσα σε (πραγματικό) ρευστό που κινείται, τότε στο σώμα ασκείται από το ρευστό μία δύναμη που έχει τη φορά της κινήσεως και τείνει να το παρασύρει. Η δύναμη αυτή είναι δύναμη αντιστάσεως. Τέτοια δύναμη αισθάνεται ένας ακίνητος άνθρωπος που τον φυσά ισχυρός άνεμος.

Γενικότερα, όταν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ρευστό και έχει σχετική ταχύτητα ως προς το ρευστό, τότε πάνω του ασκείται, από το ρευστό, μία δύναμη, δηλαδή μια αντίσταση, που λέγεται και ***οπισθέλκουσα***.

5.6.5 Νόμοι της αντιστάσεως.

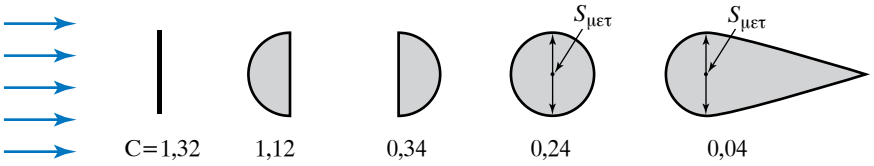
Η αντίσταση (οπισθέλκουσα) $\vec{T}$ ***εξαρτάται από την ταχύτητα*** $\vec{u}$ ***του σώματος ως προς το ρευστό ή την ταχύτητα*** $\vec{u}$ ***του ρευστού ως προς το σώμα. Γενικώς εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα ρευστού-σώματος.***

Επισημαίνομε για άλλη μία φορά ότι η αντίσταση εμφανίζεται σε πραγματικά ρευστά. Αν η ταχύτητα είναι αρκετά μικρή, οπότε έχομε στρωτή ροή, η αντίσταση T είναι ανάλογη προς την ταχύτητα, $\vec{T} = K \cdot \vec{u}$. Ειδικά για σφαίρα ισχύει ο Νόμος του Stokes,

$$T = 6\, \pi\, \eta\, r\, u$$

όπου r, u είναι η ακτίνα της σφαίρας και η σχετική ταχύτητα ρευστού-σφαίρας μακριά από τη σφαίρα.

Αν η ταχύτητα είναι σχετικά μεγάλη, αλλά αρκετά μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου στον αέρα, τότε έχομε τυρβώδη ροή και η αντίσταση



Σχ. 5.6.3
Τιμές του συντελεστή αντιστάσεως.

είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας, $T = k\,u^2$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει η σχέση:

$$T = c_{αντ}\, S \frac{\varrho}{2} u^2,$$

όπου $c_{αντ}$ είναι ο συντελεστής αντιστάσεως που εξαρτάται από τη μορφή του σώματος και κυρίως από τη μορφή του πίσω μέρους του και είναι καθαρός αριθμός, S το εμβαδόν της διατομής του σώματος κάθετα προς το ρεύμα, ϱ η πυκνότητα του ρευστού και u η σχετική ταχύτητα σώματος-ρευστού σε μεγάλη απόσταση από το σώμα.

Αν η ταχύτητα είναι κοντά ή μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου στο ρευστό, τότε η αντίσταση T αυξάνεται πολύ περισσότερο με τη σχετική ταχύτητα.

Στο σχήμα 5.6.3 δίνεται ο συντελεστής αντιστάσεως, για τυρβώδη ροή, για διάφορα σώματα.

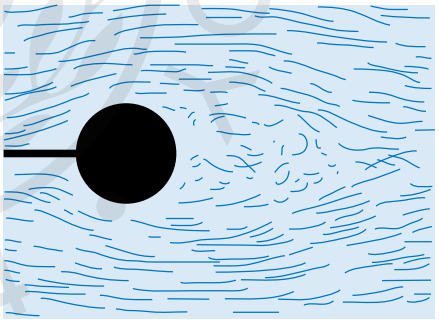
Παρατηρούμε ότι, ενώ το ημισφαίριο παρουσιάζει μεγάλη αντίσταση, η σφαίρα παρουσιάζει πολύ μικρότερη. Την πιο μικρή αντίσταση παρατηρούμε ότι παρουσιάζει το σώμα με αεροδυναμικό σχήμα (ιχθυοειδές).

Συγκρίνοντας τις τιμές που παίρνει ο συντελεστής αντιστάσεως για κάθε ένα από τα σώματα του σχήματος 5.6.3, παρατηρούμε ότι αυτός εξαρτάται κυρίως από τη μορφή του πίσω τμήματος του σώματος, διότι εκεί παράγονται στρόβιλοι που καταναλώνουν ενέργεια.

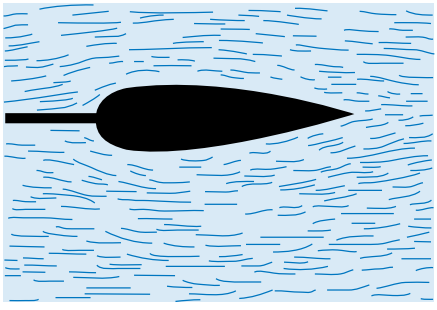
Με κατάλληλη διαμόρφωση του πίσω μέρους του σώματος, μειώνεται η παραγωγή στροβίλων, άρα και ο συντελεστής αντιστάσεως. Πάρα πολύ μικρό συντελεστή παρουσιάζει το ιχθυοειδές σχήμα που δίνεται σε αγωνιστικά αυτοκίνητα, αεροσκάφη, υποβρύχια και πλοία, προκειμένου να έχουν μικρότερη κατανάλωση καυσίμων. Ακόμη και στη σφαίρα (σχ. 5.6.4), παρατηρείται έντονος σχηματισμός στροβίλων. Στο ιχθυοειδές (αεροδυναμικό) σχήμα η ροή δεν εμφανίζει στροβίλους. Συνεπώς, με κατάλληλη διαμόρφωση του πίσω τμήματος ενός σώματος, αποφεύγεται η δημιουργία στροβίλων (σχ. 5.6.5) και επιτυγχάνεται μικρός συντελεστής αντιστάσεως.

5.6.6 Πτώση σωμάτων στον αέρα.

Σε σώμα που εκτελεί πτώση στον αέρα, ασκούνται τρεις δυνάμεις, το ***βάρος*** του $\vec{B}$, η ***άνωση*** $\vec{A}$ και η ***αντίσταση*** $\vec{T}$ του αέρα. Το βάρος και η άνωση είναι σταθερές κατά την πτώση του σώματος. Η αντίσταση του αέρα αυξάνεται όσο αυξάνει η ταχύτητα. Άρα, όσο το σώμα πέφτει και η ταχύτητά του αυξάνεται, θα μεγαλώνει και η αντίσταση. Αν το ύψος απ' το οποίο πέφτει το σώμα είναι αρκετά μεγάλο, θα φτάσει κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία η αντίσταση θα γίνει τόσο μεγάλη, που μαζί με την άνωση, θα ισορροπούν το βάρος. Τότε, η συνισταμένη $\vec{F}$ των τριών δυνάμεων θα είναι ίση με μηδέν.



Σχ. 5.6.4
Σχηματισμός στροβίλων σε σφαίρα.



Σχ. 5.6.5
Αεροδυναμικό σχήμα.

Δηλαδή θα ισχύει ότι $\vec{F} = \vec{T} + \vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$.

Γι' αυτήν την οριακή τιμή της αντιστάσεως έχομε επιτάχυνση του σώματος ίση με μηδέν, πράγματι

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0}{m} = 0\, m/s^2 .$$

Από τη στιγμή που η αντίσταση $\vec{T}$ πάρει την οριακή αυτή τιμή και η επιτάχυνση μηδενιστεί, το σώμα πέφτει κατακόρυφα με σταθερή οριακή (ή ορική) ταχύτητα $u_{\text{ορ}}$, άρα εκτελεί κατακόρυφη ομαλή κίνηση. Αν θεωρήσομε την άνωση αμελητέα, προκύπτει ότι $\vec{B} = \vec{T}$. Αν έχομε την περίπτωση της τυρβώδους ροής, τότε:

$$T = c_{\text{αντ}} S \frac{\varrho}{2} u_{\text{ορ}}^2 ,$$

οπότε το βάρος θα είναι:

$$B = T = c_{\text{αντ}} S \frac{\varrho}{2} u_{\text{ορ}}^2 .$$

Από τον τύπο αυτόν μπορούμε να υπολογίσομε την οριακή ταχύτητα, εφόσον είναι γνωστά τα υπόλοιπα μεγέθη. Ισχύει:

$$u_{\text{ορ}} = \sqrt{\frac{B}{\varrho\, c_{\text{αντ}}\, S}} = \sqrt{\frac{m\, g}{\varrho\, c_{\text{αντ}}\, S}} .$$

Η πτώση των σωμάτων μέσα στον αέρα δεν είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Όταν ένα σώμα πέφτει μέσα στον αέρα από αρκετό ύψος, τότε η ταχύτητά του αρχικά αυξάνεται. Στη συνέχεια το σώμα αποκτά την οριακή ταχύτητα και μ' αυτήν εξακολουθεί να πέφτει κινούμενο ομαλά. Κίνηση με οριακή ταχύτητα είναι η πτώση των αλεξιπτωτιστών, των σταγόνων της βροχής και η κίνηση μίας πέτρας που βυθίζεται στη θάλασσα.

Η χρησιμοποίηση των αλεξιπτώτων στηρίζεται στο ότι μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα αποκτούν την οριακή τους ταχύτητα που είναι μικρή. Μόλις ο αλεξιπτωτιστής εκτελέσει το άλμα του, το αλεξίπτωτο ανοίγει και, επειδή έχει μεγάλη επιφάνεια, δημιουργεί μεγάλη αντίσταση. Με τον τρόπο αυτόν εξουδετερώνεται το βάρος του αλεξιπτωτιστή και αυτός δεν αποκτά μεγάλη ταχύτητα.

5.7 Δυναμική άνωση. Υποπίεση, υπερπίεση και φαινόμενο Magnus.

Η δυναμική άνωση είναι δύναμη ασκούμενη σε σώμα που βρίσκεται μέσα σε ρευστό και είναι κάθετη στη σχετική ταχύτητα σώματος-ρευστού.

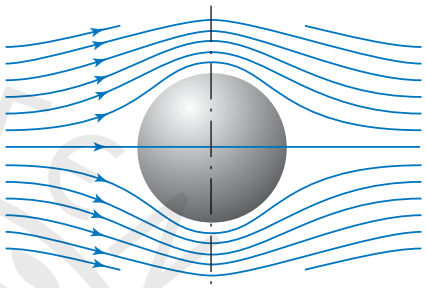
Κατά την κίνηση σώματος μέσα σε ρευστό, στο σώμα ασκούνται από το ρευστό δυνάμεις:

1) Κατά τη διεύθυνση της κινήσεως (αντίσταση).

2) Κάθετη προς τη διεύθυνση ροής. Αυτή ονομάζεται ***δυναμική άνωση***.

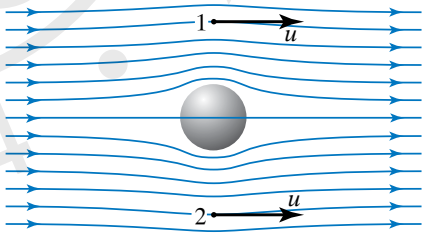
5.7.1 Φαινόμενο Magnus.

Έστω σφαίρα ή κύλινδρος που ακινητεί και γύρω του ρέει κάποιο σχεδόν ιδανικό ρευστό. Οι ιδανικές ρευματικές γραμμές παριστάνονται στο σχήμα 5.7.1.



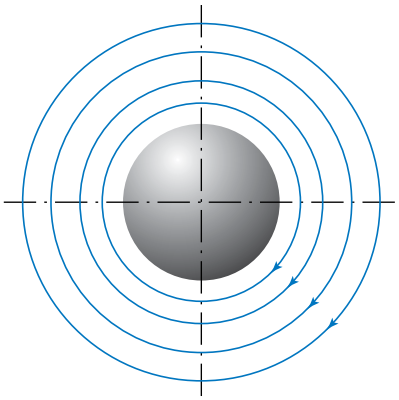
Σχ. 5.7.1
Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που ακινητεί.

Από τη συμμετρία των ρευματικών γραμμών προκύπτει ότι η ταχύτητα του ρευστού είναι η ίδια σε αντίστοιχα σημεία πάνω και κάτω απ' τη σφαίρα, όπως φαίνεται για τα σημεία 1 και 2 του σχήματος 5.7.2.

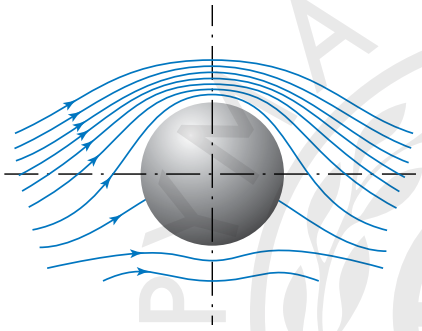


Σχ. 5.7.2
Στα σημεία 1 και 2 το ρευστό έχει την ίδια ταχύτητα.

Με εφαρμογή του Νόμου του Bernoulli προκύπτει ότι δεν εμφανίζεται δύναμη κάθετη στη ροή. Αν το ρευστό εκτελεί και περιστροφική κίνηση γύρω από το σώμα ή αν στριφογυρίζομε το σώμα γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του, θα παρασύρει το ρευστό και έτσι θα εκτελεί και περιστροφική κίνηση (σχ. 5.7.3). Λόγω της επαλληλίας των δυο κινήσεων, οι ρευματικές γραμμές θα είναι όπως παρουσιάζονται στο σχήμα 5.7.4.



Σχ. 5.7.3
Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που περιστρέφεται.



Σχ. 5.7.4
Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που μετατοπίζεται και περιστρέφεται.

Εφαρμόζοντας τον Νόμο του Bernoulli έχομε: στο κάτω μέρος αραίωση των γραμμών ροής, άρα μείωση της ταχύτητας και επομένως αύξηση της πιέσεως (υπερπίεση) και στο πάνω μέρος πύκνωση, αύξηση της ταχύτητας και επομένως μείωση της πιέσεως (υποπίεση). Αυτό οδηγεί στην άσκηση δυνάμεως (δυναμική άνωση) κάθετης στη διεύθυνση της ροής. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***φαινόμενο Magnus*** και σ' αυτό οφείλεται η τροχιά που ακολουθεί η μπάλα, όταν ο ποδοσφαιριστής βάζει φάλτσο.

Η δυναμική άνωση που παρουσιάζουν τα αεροπλάνα όταν κινούνται μέσα στον αέρα (ρευστό) οφείλεται στο κατάλληλο σχήμα και προσανατολισμό των πτερύγων τους.

5.7.2 Πώς κινείται ένα ιστιοφόρο.

Γύρω από το πανί του ιστιοφόρου, λόγω του κατάλληλου σχήματός του (αεροτομή), δημιουργούνται ρευματικές γραμμές, όπως αυτές που εμφανίζονται στο φαινόμενο Magnus. Έτσι, εμφανίζεται συνιστώσα δυνάμεως κάθετη στον άνεμο.

Όταν ο άνεμος φυσά απ' τη μία πλευρά του σκάφους, αναμένομε να το παρασύρει προς την κατεύθυνση προς την οποία πνέει (σχ. 5.7.5).

Σχ. 5.7.5
Πλάγιος άνεμος ασκεί δύναμη σε σκάφος.

Αυτό όμως δεν συμβαίνει, διότι το βυθισμένο τμήμα του σκάφους (ύφαλα, καρίνα) προβάλλει αντίσταση ως προς την πλάγια κίνηση του σκάφους (σχ. 5.7.6). Ο συνδυασμός των δύο αυτών πλευρικών δυνάμεων μαζί με την κάθετη προς τον άνεμο δύναμη πάνω στο πανί, έχει ως αποτέλεσμα το σκάφος να κινείται προς τα εμπρός κατά μήκος του άξονά του (σχ. 5.7.7).

Σχ. 5.7.6
Η καρίνα του σκάφους προβάλλει αντίσταση στην πλάγια κίνηση.

Σχ. 5.7.7

Ο συνδυασμός των δυνάμεων έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση του σκάφους κατά μήκος του άξονά του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αγωγός υδρεύσεως (διαμέτρου 3 cm) συνδέεται με τρεις σωλήνες υδρεύσεως (διαμέτρων 1, 0,75 και 0,5 cm), των οποίων αντίστοιχα οι παροχές είναι $\Pi_1 = 20\,\text{L/min}$, $\Pi_2 = 10\,\text{L/min}$, $\Pi_3 = 8\,\text{L/min}$. Ποια η παροχή του αγωγού υδρεύσεως; Ποια η ταχύτητα του νερού στο σωλήνα διαμέτρου μισής ίντσας;

2. Αγωγός υδρεύσεως εμβαδού διατομής $S = 30\,\text{cm}^2$ γεμίζει δεξαμενή χωρητικότητας $10\,\text{m}^3$ σε 25 ώρες. Να υπολογίσετε την παροχή του αγωγού και την ταχύτητα εκροής του νερού από αυτόν.

3. Πύργος στηρίζεται σε 16 υδραυλικά πιεστήρια και έχει μάζα 8000 t. Πόση δύναμη πρέπει να ασκείται στο μικρό έμβολο κάθε πιεστηρίου, εάν η διατομή του μεγάλου εμβόλου είναι εκατονταπλάσια της διατομής του μικρού;

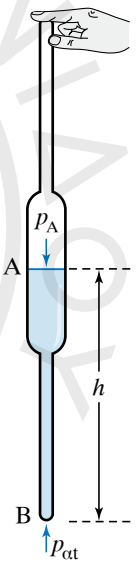
4. Το μικρό έμβολο υδραυλικού πιεστηρίου έχει διάμετρο $D_1 = 1\text{cm}$ και ασκείται σε αυτό δύναμη $F_1 = 10\,\text{N}$. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος D_2 του μεγάλου εμβόλου ώστε να ασκείται σ' αυτό δύναμη $F_2 = 200\,000\,\text{N}$;

5. Το μικρό έμβολο υδραυλικού πιεστηρίου έχει επιφάνεια $S_1 = 4\,\text{cm}^2$ και του ασκείται δύναμη $F_1 = 20\,\text{kgf}$. Αν το μεγάλο έμβολο έχει επιφάνεια $S_2 = 40\,\text{cm}^2$, να υπολογίσετε:
α) Το μέτρο της δυνάμεως F_2 που ασκείται στο μεγάλο έμβολο,
β) Τη μετατόπιση ℓ_2 του μεγάλου εμβόλου, όταν το μικρό έμβολο μετατοπιστεί κατά $\ell_1 = 15\,\text{cm}$.
γ) Τι συμπεράσματα βγάζετε για τα έργα στα δύο έμβολα;

6. Το εμβαδό των μικρών εμβόλων σε δύο υδραυλικά πιεστήρια είναι το ίδιο και ισούται με $S_1 = 10\,\text{cm}^2$. Τα μεγάλα τους έμβολα έχουν εμβαδό $S_2 = 150\,\text{cm}^2$ και $S_2' = 1500\,\text{cm}^2$ αντίστοιχα. Αν στο μικρό έμβολο κάθε πιεστηρίου ασκήσομε δύναμη $F_1 = 1\,\text{N}$, να υπολογίσετε:
α) Την πίεση που δέχεται κάθε μεγάλο έμβολο.
β) Τις δυνάμεις που ασκούνται στο μεγάλο έμβολο κάθε πιεστηρίου.

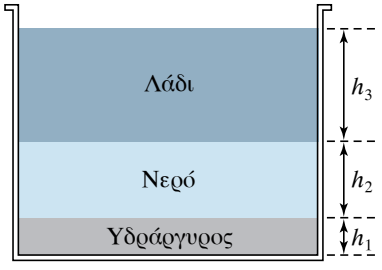
7. Δύο κατακόρυφα κυλινδρικά συγκοινωνούντα δοχεία διατομών $100\,\text{cm}^2$ και $25\,\text{cm}^2$, αντίστοιχα, περιέχουν νερό. Ρίχνομε στο ένα 2,5 L νερό. Να υπολογίσετε πόσο θα ανεβεί η στάθμη στο κάθε δοχείο.

8. Να υπολογίσετε την πίεση p_A που επικρατεί στην ελεύθερη επιφάνεια του σιφωνίου του σχήματος 1 που περιέχει νερό ύψους $h = 15\,\text{cm}$. Δίνεται $\varepsilon_{\text{ΝΕΡΟΥ}} = 1\,\text{p/cm}^3$.



Σχ. 1

9. Μέσα στο γυάλινο κυλινδρικό δοχείο του σχήματος 2 ισορροπούν υδράργυρος, νερό και λάδι με ύψη $h_1 = 10\,\text{cm}$, $h_2 = 20\,\text{cm}$ και $h_3 = 30\,\text{cm}$, αντίστοιχα.



Σχ. 2

Να υπολογίσετε την υδροστατική πίεση σε mm Hg στον πυθμένα του δοχείου και στις διαχωριστικές επιφάνειες των υγρών. Δίνονται:

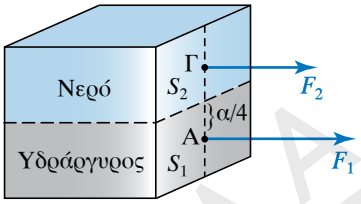
$\varrho_{Hg} = 13{,}6\,g/cm^3$, $\varrho_{H_2O} = 1\,g/cm^3$, $\varrho_{OIL} = 0{,}9\,g/cm^3$.

10. Δοχείο κυβικού σχήματος ακμής $\alpha = 1\,m$ (σχ. 3), γεμίζεται κατά το ένα του ήμισυ με υδράργυρο και κατά το άλλο του ήμισυ με νερό. Να υπολογίσετε:

α) Τη δύναμη F που ασκείται στον πυθμένα.

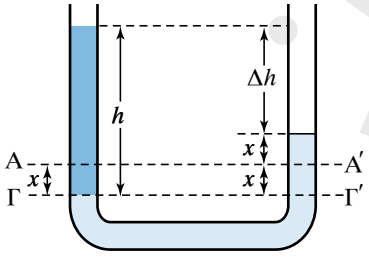
β) Τη δύναμη F' που ασκείται σε μία πλευρική έδρα του κύβου.

Δίνονται $\varrho_{Hg} = 13{,}6\,g/cm^3$, $\varrho_{H_2O} = 1\,g/cm^3$.



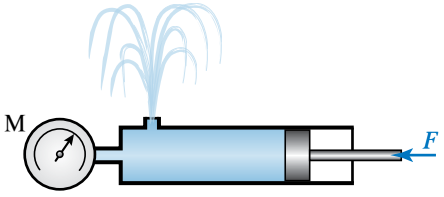
Σχ. 3

11. Στα δύο συγκοινωνούντα δοχεία του σχήματος 4, που έχουν την ίδια διατομή $S = 2\,cm^2$, ρίχνομε υδράργυρο, και όταν ισορροπήσει, οι ελεύθερες επιφάνειες στα δύο του άκρα βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο ΑΑ΄. Στη συνέχεια ρίχνομε στο αριστερό άκρο υγρό ειδικού βάρους $\varepsilon = gf/cm^3$ και βάρους $B = 100\,gf$. Να υπολογίσετε την απόσταση x, κατά την οποία θα ανεβεί η ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου στον δεξιό σωλήνα, καθώς και την απόσταση Δh των δύο ελευθέρων επιφανειών (του νερού και του υδραργύρου).



Σχ. 4

12. Αν η ένδειξη του μανόμετρου του σχήματος 5 είναι 2 atm, ποια δύναμη ασκείται στο εμβαδού $S = 4\,cm^2$ έμβολο και σε ποιο ύψος φτάνει ο πίδακας του νερού ($\varepsilon_{NEPOY} = 1\,p/cm^3$);



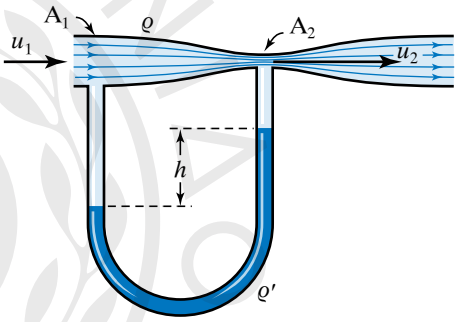
Σχ. 5

13. Ποιο είναι το βάθος στη θάλασσα, στο οποίο η υπερπίεση είναι ίση με μία ατμόσφαιρα ($\varepsilon_{ΘΑΛ} = 1{,}2\,p/cm^3$);

14. Πόσο είναι το ύψος στήλης υδραργύρου ή νερού ή οινοπνεύματος που εξασκεί πίεση $p = 10\,gf/cm^2$; Δίνονται: $\varepsilon_{Hg} = 13{,}6\,gf/cm^3$, $\varepsilon_{H_2O} = 1\,gf/cm^3$ και $\varepsilon_{OIN.} = 0{,}8\,gf/cm^3$.

15. Νερό ρέει μέσα σε οριζόντιο σωλήνα διατομής $3\,cm^2$. Σε άλλο του σημείο ο σωλήνας έχει διατομή $63\,cm^2$ και η διαφορά πιέσεως ανάμεσα στα δύο σημεία είναι $200\,N/m^2$. Πόσα m^3 νερού ρέουν στο σωλήνα σε 1 min ($d_{NEPOY} = 1\,g/cm^3$);

16. Από τον σωλήνα του σχήματος 6 (βεντουρίμετρο) ρέει ιδανικό ρευστό. Αν για τις διατομές A_1, A_2 ισχύει ότι $A_1 = 3\,A_2$ και $\Delta h = 0{,}9\,cm$, να υπολογίσετε τις ταχύτητες u_1, u_2. Δίνεται $g = 10\,m/s^2$.



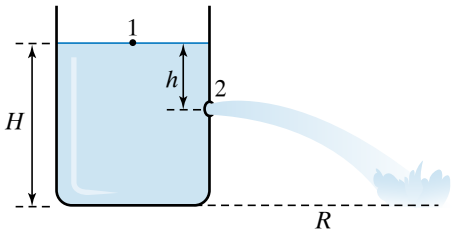
Σχ. 6

17. Δεξαμενή περιέχει νερό μέχρι ύψος H (σχ. 7). Στη μία πλευρά και σε βάθος h απ' την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, ανοίγεται τρύπα. Να υπολογίσετε:

α) Την απόσταση R απ' τη βάση του δοχείου στην οποία η φλέβα συναντά το πάτωμα.

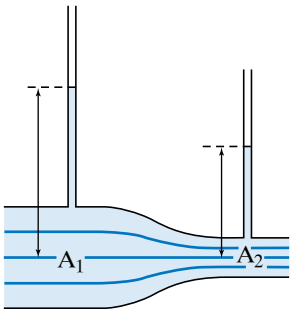
β) Σε ποιο άλλο ύψος μπορεί να ανοιχτεί δεύτερη τρύπα, ώστε η δεύτερη φλέβα να έχει το ίδιο βεληνεκές;

γ) Σε ποιο βάθος h πρέπει να ανοιχτεί τρύπα, ώστε το νερό να εκτινάσσεται στη μέγιστη δυνατή απόσταση;



Σχ. 7

18. Για τον οριζόντιο σωλήνα μεταβλητής διαμέτρου του σχήματος 8, να υπολογίσετε την ταχύτητα του ιδανικού ρευστού στο σημείο A_1, όταν γνωρίζετε ότι η ταχύτητά του στο σημείο A_2 είναι 3 m/s, η πυκνότητά του είναι 1 kg/m^3 και η διαφορά των στατικών πιέσεων στα σημεία A_1, A_2 είναι 4 atm.



Σχ. 8

19. Νερό απορρέει από δεξαμενή μεγάλης επιφάνειας μέσω μικρής οπής. Η διάμετρος της οπής είναι ίση με 0,5 m. Εάν το νερό στη δεξαμενή ανέρχεται σε 8 m πάνω από την οπή και $g = 10$ m/s^2, να υπολογίσετε την:
α) Ταχύτητα εκροής του νερού.
β) Παροχή της οπής.

20. Όταν ομογενές σώμα επιπλέει σε καθαρό νερό, είναι βυθισμένα τα 3/4 του όγκου του. Όταν επιπλέει σε λάδι, είναι βυθισμένα τα 9/10 του όγκου του. Να υπολογίσετε τα ειδικά βάρη του σώματος και του λαδιού όταν το ειδικό βάρος του νερού είναι 1 gf/cm^3.

21. Ξύλινο μαδέρι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου βάρους B_1 με εμβαδό βάσεως $S = 0{,}5$ m^2 και ύψος $h = 20$ cm επιπλέει σε νερό ποταμού βυθισμένο κατά $h_1 = 14$ cm. Πόσο βάρος B_2 πρέπει να τοποθετήσομε πάνω στο μαδέρι, ώστε να βυθιστεί κατά όλο το ύψος του; Δίνεται $\varepsilon_{\text{νερού}} = 1$ gf/cm^3.

22. Από την ελεύθερη επιφάνεια λίμνης αφήνομε χωρίς αρχική ταχύτητα μικρή σφαίρα βάρους B που φτάνει σε βάθος $h = 4$ μέσα σε χρόνο $t = 4$ s. Να υπολογίσετε την πυκνότητά της, όταν γνωρίζετε ότι $g = 10$ m/s^2, $d_{H_2O} = 1$ g/cm^3. Η αντίσταση του νερού θεωρείται αμελητέα.

23. Πόσο στα εκατό του όγκου παγόβουνου που επιπλέει είναι βυθισμένο στη θάλασσα; Δίνονται: $d_{\text{ΘΑΛΑΣΣΑΣ}} = 1{,}1$ g/cm^3 και $d_{\text{ΠΑΓΟΥ}} = 0{,}88$ g/cm^3.

24. Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα που αποκτά αλεξίπτωτο-αλεξιπτωτιστής ολικής μάζας 100 kg, όταν η μετωπική επιφάνεια του αλεξίπτωτου είναι $S = 70$ m^2, ο συντελεστής αντιστάσεως $K = 1 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}^2$ και η άνωση που δέχεται θεωρείται αμελητέα. Η ροή είναι τυρβώδης και ισχύει $T = K \cdot S \cdot u^2$. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

25. Ομογενές στερεό σώμα βάρους 100 N, έχει πυκνότητα 5 g/cm^3 και βυθίζεται σε καθαρό νερό πυκνότητας 1 g/cm^3. Να βρείτε τον όγκο του και το φαινόμενο βάρος του. Δίνεται: $g = 10$ m/s^2.

26. Άγκυρα καϊκιού ζυγίζει στον αέρα 300 N και όταν βυθίζεται σε καθαρό νερό ζυγίζει 250 N. Να υπολογίσετε την άνωση που δέχεται και τον όγκο της άγκυρας, όταν το ειδικό βάρος του νερού είναι 1 gf/cm^3 και $g = 10$ m/s^2.

27. Ομογενής κύλινδρος αναρτάται από δυναμόμετρο στον αέρα και η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι 100 N. Όταν είναι εξ ολοκλήρου βυθισμένος σε καθαρό νερό η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι 90 N και σε άγνωστο υγρό η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι 80 N. Να υπολογίσετε τον όγκο και την πυκνότητα του κυλίνδρου, καθώς και την πυκνότητα του άγνωστου υγρού. Δίνεται ειδικό βάρος του νερού 1 gf/cm^3.

28. Μετεωρολογικό αερόστατο είναι ακίνητο στον αέρα σε κάποιο ύψος. Φέρει καλάθι βάρους 1200 N. Να υπολογίσετε τον όγκο του μπαλονιού κατά την ανύψωσή του, αν ο θερμός αέρας που περιέχει έχει πυκνότητα 0,7 kg/m^3 και ο ατμοσφαιρικός αέρας 1,3 kg/m^3. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

29. Ομογενής κύβος βάρους 0,3 N εκτοπίζει 50 cm^3 όταν είναι εξ ολοκλήρου βυθισμένος σε καθαρό νερό πυκνότητας 1 g/cm^3. Να αποδείξετε πως όταν τον αφήσομε ελεύθερο στο νερό επιπλέει και να υπολογίσετε τον όγκο του βυθισμένου τμήματός του.

30. Κιβώτιο σχήματος κύβου και ακμής 1 m έχει βάρος 950 kgf. Αν το αφήσομε σε ένα ποτάμι, επιπλέει ή βυθίζεται;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θερμότητα

6.1 Θερμοκρασία.

Το κρύο ή το ζεστό είναι μία εντύπωση που προσδιορίζεται απ' την αίσθηση της αφής και είναι αρκετά ασαφής και υποκειμενική. Η εντύπωση αυτή εισάγει την έννοια της ***θερμοκρασίας ενός σώματος***, που μπορούμε να προσδιορίζομε αντικειμενικά μετρώντας ιδιότητες της ύλης που εξαρτώνται απ' αυτήν.

Μπορούμε για παράδειγμα να προσδιορίσομε τη θερμοκρασία από τη μεταβολή του όγκου ενός υγρού, από τη μεταβολή του μήκους μιας ράβδου, από τη μεταβολή του χρώματος μιας φλόγας, από τη μεταβολή της πιέσεως ενός αερίου, από τη μεταβολή της ηλεκτρικής αντιστάσεως ενός μετάλλου και από άλλες ιδιότητες, που μεταβάλλονται με τη θερμοκρασία.

Τα όργανα που μετρούν τη θερμοκρασία είναι τα ***θερμόμετρα***.

Μια βασική ιδιότητα χρήσιμη για τη μέτρηση της θερμοκρασίας είναι το γεγονός ότι αν δύο σώματα έρθουν σε θερμική επαφή, τότε αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και όταν η θερμοκρασία τους σταθεροποιηθεί, θα έχουν αποκτήσει την ίδια θερμοκρασία. Το σύστημα έτσι φτάνει σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας.

– Θερμόμετρα.

Στα θερμόμετρα, η θερμοκρασία κάθε σώματος εκφράζεται μ' έναν αριθμό και την αντίστοιχη μονάδα μετρήσεως, που αντιστοιχεί στο πόσο θερμό είναι το σώμα σύμφωνα με κάποια δεδομένη κλίμακα. Η βαθμονόμηση της κλίμακας είναι αυθαίρετη. Η πιο γνωστές κλίμακες που χρησιμοποιούμε είναι η κλίμακα Κελσίου (Celsius), σωστότερα Κέλσιους ή Κέλσιο, η κλίμακα Κέλβιν (Kelvin) και η κλίμακα Φαρενάιτ (Fahrenheit).

Το μηδέν (0) της κλίμακας ***Κελσίου*** αντιστοιχεί στη θερμοκρασία πήξεως του καθαρού νερού και το 100 στη θερμοκρασία βρασμού του καθαρού νερού και τα δύο υπό πίεση ίση με 1 atm = 101.325 Pa (1 κανονική ατμόσφαιρα). Η περιοχή μεταξύ των δύο θερμοκρασιών διαιρείται σε 100 ίσα μέρη, που τα ονομάζομε βαθμούς Κελσίου, °C. Οι θερμοκρασίες καταστάσεων που είναι πιο κρύες από το σημείο πήξεως του νερού εκφράζονται με αρνητικές ενδείξεις. Η κλίμακα Κελσίου είναι πολύ διαδεδομένη και χρησιμοποιείται στην καθημερινή μας ζωή, αλλά και στην επιστήμη. Ως σύμβολα για τη θερμοκρασία στην κλίμακα Κελσίου, συνιστώνται τα θ και t.

Μια άλλη πολύ γνωστή θερμοκρασιακή κλίμακα που χρησιμοποιείται απ' την επιστημονική κοινότητα είναι η κλίμακα ***Kelvin***, στην οποία το μηδέν αντιστοιχεί στη χαμηλότερη δυνατή θερμοκρασία (***το απόλυτο μηδέν***).

Το απόλυτο μηδέν αντιστοιχεί σε –273,15 °C. Η κλίμακα ορίζεται θεωρώντας ότι το τριπλό σημείο του καθαρού νερού έχει θερμοκρασία ίση με 273,16 K. Το σύμβολο που συνιστάται για τη θερμοκρασία κέλβιν είναι το T ή το Θ. Οι μονάδες της κλίμακας Kelvin έχουν το ίδιο μέγεθος με τους βαθμούς της κλίμακας Κελσίου και λέγονται Κέλβιν (Kelvin, K). Παλαιότερα η θερμοκρασία T ονομαζόταν ***απόλυτη θερμοκρασία***, ενώ σήμερα προτιμάται ο όρος ***θερμοδυναμική θερμοκρασία***. Οι θερμοκρασίες στις δύο κλίμακες συνδέονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$T = \theta + 273{,}15\ \mathrm{K}.$$

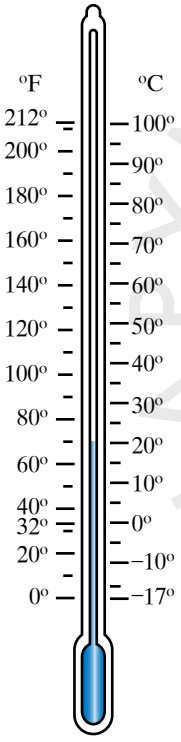
Η θερμοδυναμική θερμοκρασία είναι ένα απ' τα επτά θεμελιώδη μεγέθη του SI και το κέλβιν είναι η αντίστοιχη θεμελιώδης μονάδα του SI.

Στις ΗΠΑ χρησιμοποιείται ακόμη η θερμοκρασιακή κλίμακα Φαρενάιτ. Στο παγωμένο νερό αποδίδεται η θερμοκρασία των 32 °F, ενώ στο νερό που βράζει οι 212 °F. Ανάμεσα στα δύο αυτά σημεία αντιστοιχούν 180 °F, δηλαδή ένας βαθμός της κλίμακας Φαρενάιτ αντιστοιχεί σε 100/180 = $^5/_9$ Κελσίου. Η σχέση των θερμοκρασιών της κλίμακας Κελσίου και της κλίμακας Fahrenheit είναι:

$$\theta_F = 9/5\,\theta + 32\,^{o}\mathrm{F}.$$

Για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιούμε διάφορους τύπους θερμομέτρων, όπως θερμόμετρα υγρού, θερμόμετρα με διμεταλλικό έλασμα, θερμόμετρα αντιστάσεως, οπτικά πυρόμετρα, θερμόμετρα αέριου κ.ά.. Παρακάτω περιγράφομε μερικά από αυτά.

1) Το ***θερμόμετρο υγρού*** αποτελείται από έναν γυάλινο τριχοειδή σωλήνα, που στη βάση του σχηματίζει μια φούσκα. Το υγρό που περιέχει μπορεί να είναι υδράργυρος, αιθανόλη ή πετρέλαιο (σχ. 6.1.1). Η λειτουργία αυτών των θερμομέτρων στηρίζεται στη διαστολή του όγκου των υγρών με την αύξηση της θερμοκρασίας και τη συστολή του όγκου τους με τη μείωση της θερμοκρασίας.

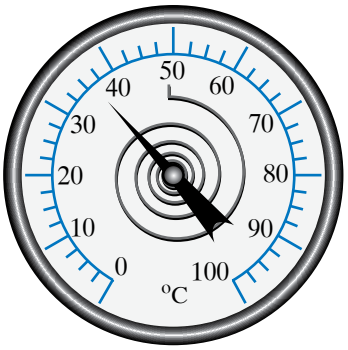


Σχ. 6.1.1
Θερμόμετρο υγρού.

2) Το ***θερμόμετρο με διμεταλλικό έλασμα*** αποτελείται από διμεταλλικό έλασμα σε σπειροειδή μορφή, πάνω στο οποίο είναι προσαρμοσμένος κατάλληλα ένας δείκτης που στρέφεται ανάλογα με την παραμόρφωση που συμβαίνει στο διμεταλλικό έλασμα (σχ. 6.1.2).

Το διμεταλλικό έλασμα κατασκευάζεται με συγκόλληση δύο μετάλλων που διαστέλλονται διαφορετικά, με αποτέλεσμα να προκαλείται κύρτωση κατά τη θέρμανσή του.

3) Το ***θερμόμετρο αντιστάσεως*** αποτελείται από ηλεκτρικό κύκλωμα με ηλεκτρική αντίσταση, της



Σχ. 6.1.2
Θερμόμετρο σε διμεταλλικό έλασμα.

οποίας η τιμή μεταβάλλεται ανάλογα με τη θερμοκρασία, στην οποία βρίσκεται. Στα θερμόμετρα αυτά συνδέομε την ένδειξη της θερμοκρασίας με την τιμή μιας μεταβλητής, π.χ. του ηλεκτρικού ρεύματος, το οποίο για σταθερή ΗΕΔ (ηλεκτρεγερτική δύναμη) στο κύκλωμα, εξαρτάται απ' την ηλεκτρική αντίσταση.

6.2 Θερμοδυναμική ενέργεια. Θερμότητα.

Θερμοδυναμική ή ***θερμική*** ή ***εσωτερική ενέργεια*** U ενός συστήματος ονομάζεται η ενέργεια που έχει ένα σύστημα, η οποία οφείλεται στις τυχαίες κινήσεις των δομικών του λίθων (ατόμων, μορίων κ.λπ.) και των δυναμικών ενεργειών τους.

Θερμότητα Q είναι η ενέργεια που μεταβιβάζεται από ένα σώμα σε ένα άλλο, εξ αιτίας της διαφοράς που παρουσιάζουν οι θερμοκρασίες τους. Η θερμότητα ρέει αυθόρμητα πάντα απ' το θερμότερο προς το ψυχρότερο σώμα. Η ροή θερμότητας σταματά, όταν επιτευχθεί θερμική ισορροπία ανάμεσα στα σώματα, δηλαδή όταν οι θερμοκρασίες τους εξισωθούν.

Η θερμότητα Q που απαιτείται για την αύξηση της θερμοκρασίας ενός σώματος μάζας m από θερμοκρασία T_α σε θερμοκρασία T_τ είναι ανάλογη της μεταβολής της θερμοκρασίας $\Delta T = T_\tau - T_\alpha = \Delta\theta$ και της μάζας του σώματος. Επίσης εξαρτάται από τη φύση του υλικού, το οποίο απορροφά τη θερμότητα και αυτό εκφράζεται με τη σταθερά ***c,*** που είναι διαφορετική για κάθε υλικό και ονομάζεται ***ειδική θερμοχωρητικότητα (θερμότητα) του υλικού***. Ισχύει:

$$Q = mc\Delta T.$$

Η ειδική θερμοχωρητικότητα ενός υλικού είναι η ποσότητα της θερμότητας που απορροφάται ανά μονάδα μάζας του υλικού και ανά κέλβιν αυξήσεως της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του. Από τον πίνακα 6.2.1 μπορούμε να λάβομε πληροφορίες για την ειδική θερμοχωρητικότητα διαφόρων υλικών.

Πίνακας 6.2.1
Πινάκας ειδικών θερμοτήτων και ειδικών γραμμομοριακών θερμοτήτων.

Υλικό (ουσία)	*Ειδική θερμοχωρητικότητα (J/kg · K)*	*Γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα (J/mol · K)*
Νερό	4190	75,4
Αιθανόλη	2428	112,0
Πάγος	2000	36,5
Βηρύλλιο	1970	17,7
Αργίλιο	910	24,6
Χλωριούχο νάτριο (αλάτι)	879	51,4
Μάρμαρο	879	87,9
Σίδηρος	470	26,3
Χαλκός	390	24,8
Άργυρος	234	25,3
Υδράργυρος	138	27,7
Μόλυβδος	130	26,9

Η μονάδα που μετρά το ποσό της θερμότητας είναι συνήθως η ***θερμίδα (1 cal)*** και η ***χιλιοθερμίδα (1 kcal)***, όπου 1 kcal=1000 cal. Το 1 cal είναι ίσο, περίπου, με το ποσό θερμότητας που απαιτείται για την αύξηση της θερμοκρασίας ενός γραμμαρίου νερού από τους 14,5 °C στους 15,5 °C. Η θερμότητα είναι «ενέργεια σε κίνηση» και προφανώς μπορεί να μετρείται σε οποιεσδήποτε μονάδες ενέργειας. Ισχύει:

$$1\,\text{cal} = 4186\,\text{J}.$$

Μονάδα της ειδικής θερμοχωρητικότητας μπορεί να είναι το 1 cal/g · K και πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσιά του, ενώ στο SI η μονάδα είναι το 1 J/kg · K.

Θερμοχωρητικότητα ονομάζεται το μέγεθος mc, που εκφράζει το ποσό της θερμότητας που απορροφά το σώμα ανά μονάδα αυξήσεως της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του.

Η θερμοχωρητικότητα μπορεί να μετρείται σε 1 cal/K και στο SI σε 1 J/K.

Το καλοκαίρι έχομε παρατηρήσει ότι, παρόλο που ο ήλιος παρέχει στον ίδιο χρόνο την ίδια ποσότητα θερμότητας στην άμμο και το νερό μιας παραλίας, η άμμος αποκτά στον ίδιο χρόνο πολύ υψηλότερη θερμοκρασία απ' ό,τι το νερό της θάλασσας.

Αν δώσομε το ίδιο ποσό θερμότητας σε μία ποσότητα σιδήρου και σε ίδια ποσότητα νερού, τότε στον ίδιο χρόνο ο σίδηρος θα αποκτήσει πολύ υψηλότερη θερμοκρασία απ' ό,τι το νερό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για να αυξηθεί η θερμοκρασία 1 g νερού κατά 1 K (ή 1 °C) απαιτείται πολύ περισσότερη θερμότητα απ' αυτήν που απαιτείται, προκειμένου να αυξηθεί κατά 1 K η θερμοκρασία 1 g άμμου ή σιδήρου. Δηλαδή το νερό έχει μεγαλύτερη ειδική θερμότητα απ' την άμμο και το σίδηρο (η ειδική θερμότητά του είναι περίπου 8 φορές αυτής του σιδήρου). Το νερό έχει τη μεγαλύτερη ειδική θερμότητα απ' όλα τα συνήθη σώματα. Αυτό επηρεάζει το κλίμα· οι παραθαλάσσιες περιοχές δεν έχουν μεγάλες μεταβολές θερμοκρασιών σε σχέση με στεριανές περιοχές, καθώς η θάλασσα «αργεί» να ζεσταθεί και «αργεί» να κρυώσει.

6.2.1 Γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα.

Πολύ συχνά, όταν αναφερόμαστε στην ποσότητα κάποιας ουσίας, χρησιμοποιούμε ως μονάδα μετρήσεως το ***γραμμομόριο*** (mol). Το ένα γραμμομόριο ενός υλικού (καθαρής ουσίας) ορίζεται ως η ποσότητα του υλικού που περιέχει ένα συγκεκριμένο πλήθος δομικών μονάδων (μορίων, ατόμων, ιόντων κ.λπ.). Αυτό εκφράζεται με τη σταθερά του Avogadro N_A, που είναι $N_A = 6{,}023 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $6{,}023 \times 10^{23}$ δομικοί λίθοι ανά γραμμομόριο ουσίας.

Η γραμμομοριακή μάζα M είναι η μάζα ανά γραμμομόριο, δηλαδή:

$$M = m/n$$

όπου m είναι η μάζα και n η ποσότητα ουσίας.

Είναι ευνόητο ότι ισχύει $M = m_\delta N_A$, όπου m_δ είναι η μάζα του ενός δομικού λίθου.

Ορίζεται η ***γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα C*** (ή ειδική γραμμομοριακή θερμότητα) απ' τη σχέση $C = Mc$.

Έχομε $Q = mc\Delta T$ άρα $Q = nMc\Delta T$, επομένως $Q = n\text{C}\Delta T$, όπου Q είναι η ποσότητα θερμότητας που χρειάζεται προκειμένου να αυξηθεί η θερμοκρασία της ποσότητας n κατά ΔT.

Μονάδα μετρήσεως της γραμμομοριακής θερμοχωρητικότητας είναι το 1 J/mol · K. Από τον πίνακα 6.2.1 μπορούμε να λάβομε πληροφορίες για τη γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα διαφόρων υλικών.

6.2.2 Ειδικές θερμότητες αερίων.

Η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα και η ειδική θερμοχωρητικότητα για τα αέρια, εξαρτάται και απ' τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η θέρμανση. Για τον λόγο αυτό, για κάθε αέριο έχομε δύο γραμμομοριακές θερμοχωρητικότητες.

Την $C_{p,}$ γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση και την C_V, γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο.

Η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα C_p είναι εκείνη που εμφανίζεται να έχει το αέριο όταν κατά τη διαδικασία της απορροφήσεως θερμότητας, η πίεσή του μένει σταθερή. Η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα C_V είναι εκείνη που εμφανίζεται να έχει το αέριο, όταν κατά τη διαδικασία απορροφήσεως θερμότητας ο όγκος του μένει σταθερός.

Οι δύο θερμοχωρητικότητες είναι διαφορετικές, διότι όταν η θέρμανση γίνεται υπό σταθερή πίεση (αυτό θα το εξετάσομε παρακάτω), ο όγκος μεταβάλλεται κι ένα μέρος της θερμότητας που απορροφά το αέριο αποδίδεται προς τα έξω ως μηχανικό έργο. Στην περίπτωση που ο όγκος μένει σταθερός, όλη η θερμότητα που απορροφά το αέριο μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια. Δηλαδή για την ίδια μεταβολή της θερμοκρασίας μιας ποσότητας αερίου, απαιτείται μικρότερο ποσό θερμότητας, αν πρόκειται για μεταβολή με τον όγκο σταθερό, σε σχέση με τη θερμότητα που απαιτείται, αν η μεταβολή είναι υπό σταθερή πίεση.

Αποδεικνύεται ότι ο λόγος των γραμμομοριακών θερμοχωρητικοτήτων του αερίου $\gamma = C_p/C_v$ εξαρτάται από τον αριθμό των ατόμων στο μόριο του αερίου (πίν. 6.2.2). Σύμφωνα με όσα είπαμε, ισχύει πάντα $\gamma > 1$.

Η σχέση που συνδέει τις θερμοχωρητικότητες C_p, και C_v αποδεικνύεται ότι είναι $C_p = C_v + R$. Αυτό είναι σύμφωνο με το γεγονός ότι για κάθε αέριο έχομε $C_p > C_{v.}$ (Η απόδειξη γίνεται με τη χρήση του Πρώτου Θερμοδυναμικού Νόμου, στον οποίο θα αναφερθούμε στις επόμενες παραγράφους).

6.3 Διάδοση της θερμότητας.

Αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι η θερμότητα είναι ενέργεια που ρέει από θερμό προς ψυχρό σώμα. Το ερώτημα που τίθεται είναι με ποιους τρόπους συμβαίνει αυτή η ροή. Πριν απαντήσομε σ' αυτό, ας φέρομε στο μυαλό μας μερικά παραδείγματα. Αν τοποθετήσομε ένα μεταλλικό δοχείο με κρύο νερό πάνω στο θερμό «μάτι» μιας ηλεκτρικής κουζίνας, θα παρατηρήσομε ότι μετά από λίγη ώρα η θερμοκρασία του νερού θα έχει αυξηθεί σημαντικά. Κάτι παρόμοιο θα συμβεί, αν στο δοχείο με το κρύο νερό ρίξομε μερικά ποτήρια καυτό νερό και τα αναταράξομε. Πάλι η θερμοκρασία του νερού που έχομε στο δοχείο θα αυξηθεί σε σχέση με την αρχική.

Επίσης όλοι γνωρίζομε ότι το καλοκαίρι είναι πολύ δύσκολο να περπατήσομε με γυμνά πέλματα στην άμμο μιας παραλίας, διότι καίει εξαιτίας της ηλιακής ακτινοβολίας που δέχεται. Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι πολύ εύκολο να εξάγομε τρόπους, με τους οποίους μεταφέρεται η θερμότητα.

Πίνακας 6.2.2
Γραμμομοριακές θερμοχωρητικότητες αερίων.

Τύπος αερίου	***Αέριο***	C_v $(J/mol \cdot K)$	C_p $(J/mol \cdot K)$	$C_p - C_v$ $(J/mol \cdot K)$	$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$
Μονατομικό	He	12,47	20,78	8,31	1,67
	A	12,47	20,78	8,31	1,67
Διατομικό	H_2	20,42	28,74	8,32	1,41
	N_2	20,76	29,07	8,31	1,40
	O_2	20,85	29,17	8,31	1,40
	CO	20,85	29,16	8,31	1,40
Πολυατομικό	CO_2	28,46	36,94	8,48	1,30
	SO_2	31,39	40,37	8,96	1,29
	H_2S	25,95	34,60	8,65	1,33

Στο πρώτο παράδειγμα έχομε διάδοση θερμότητας με ***αγωγή*** από το ένα θερμό «μάτι» της κουζίνας στο μεταλλικό δοχείο και μετά στο νερό. Στο δεύτερο παράδειγμα έχομε διάδοση θερμότητας με ***μεταφορά*** απ' το θερμό νερό στο κρύο, καθώς αναμειγνύονται. Στο τρίτο παράδειγμα η ηλιακή ***ακτινοβολία*** που εκπέμπεται απ' τον θερμό ήλιο απορροφάται απ' την άμμο και αυξάνει τη θερμοκρασία της. Θα μελετήσομε πιο αναλυτικά τον καθένα απ' τους παραπάνω τρόπους.

6.3.1 Διάδοση θερμότητας με αγωγή.

Για την κατανόηση του μηχανισμού διαδόσεως της θερμότητας με αγωγή, μπορούμε να φανταστούμε το εξής πείραμα. Κρατούμε από το ένα της άκρο μία χάλκινη ράβδο. Προσαρμόζομε στη ράβδο αυτή ανά ίσα διαστήματα μικρά κομμάτια κεριού και στο άλλο της άκρο το πλησιάζομε μια φλόγα. Θα δούμε ότι τα προσαρμοσμένα στη ράβδο κομμάτια κεριού θα αρχίσουν να λειώνουν διαδοχικά, με πρώτα αυτά που είναι πλησιέστερα στο άκρο που είναι η φλόγα. Μετά από λίγο η θερμότητα θα φτάσει ***με αγωγή*** στο άλλο άκρο, αυξάνοντας τη θερμοκρασία όλης της ράβδου.

Θα αναφέρομε τι συμβαίνει στο μικροσκοπικό επίπεδο, στο επίπεδο των δομικών λίθων (ατόμων, μορίων, ιόντων) της ράβδου. Η φλόγα έχει υψηλή θερμοκρασία, συνεπώς τα άτομα της ράβδου, τα οποία είναι πιο κοντά στη φλόγα έχουν υψηλότερη κινητική ενέργεια σε σχέση με τα γειτονικά τους, τα οποία είναι πιο απομακρυσμένα. Τα άτομα υψηλής κινητικής ενεργείας συγκρούονται με τα γειτονικά τους αποδίδοντας μέρος της ενέργειάς τους σ' αυτά, που με τη σειρά τους κατά τη σύγκρουσή τους με τα γειτονικά τους θα αποδώσουν μέρος της ενέργειάς τους. Στα μέταλλα, σημαντικό ρόλο στη διάδοση της θερμότητας με αγωγή διαδραματίζουν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Η διάδοση οφείλεται στις διαφορές θερμοκρασίας. Δεν γίνεται μετακίνηση ύλης, μόνο ενέργειας.

΄Εστω ότι έχομε μια αγώγιμη ράβδο μήκους L, εμβαδού διατομής A, όπου το ένα άκρο της διατηρείται σε υψηλή θερμοκρασία T_H και το άλλο σε χαμηλή θερμοκρασία T_C και πλευρικά είναι μονωμένη. Τότε μπορούμε να ονομάσομε ***θερμικό ρεύμα*** τον ρυθμό ροής θερμότητας απ' το ένα άκρο στο άλλο και να το συμβολίσομε με H, δηλαδή να το ορίσομε ως $H = \Delta Q/\Delta t$.

Το θερμικό ρεύμα μετρείται σε joule/s = W (στο εμπόριο συνηθίζεται και η μονάδα Btu/h, όπου 1 Btu/h = 0,293W). Ο ρυθμός ροής θερμότητας σε ομογενή σώματα σταθερής διατομής δίνεται από τη σχέση:

$$H = kA(T_H - T_C)/L$$

όπου k είναι μια σταθερά που εξαρτάται απ' το υλικό και λέγεται ***θερμική αγωγιμότητα*** ή ***συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας***. Η μονάδα μετρήσεως της σταθεράς k είναι $1\text{W}/(\text{m} \times \text{K})$.

Υλικά με μεγάλο συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k είναι καλοί αγωγοί της θερμότητας, ενώ υλικά με μικρό k είναι κακοί αγωγοί της θερμότητας.

Το αντίστροφο μέγεθος του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k είναι η ***θερμική αντίσταση R***, που για ομογενή πλάκα πάχους L υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$R = L/k.$$

Η έννοια της θερμικής αντιστάσεως χρησιμοποιείται συχνά σε προβλήματα μονώσεως χώρων και συνδέεται με το θερμικό ρεύμα H, που ρέει μέσω επιφάνειας Α με τη σχέση:

$$H = A\frac{(T_H - T_C)}{R}.$$

Η μονάδα της θερμικής αντιστάσεως R στο SI είναι το $1\ \text{m}^2\,\text{K/W}$.

Ο διπλασιασμός του πάχους ενός υλικού σημαίνει και διπλασιασμό της θερμικής αντιστάσεως. Η τοποθέτηση πολλαπλών μονωτικών υλικών σε στρώματα δημιουργεί συνολική θερμική αντίσταση ίση με το άθροισμα των αντιστάσεων.

Ο αέρας σε πλήρη άπνοια έχει πολύ μικρή θερμική αγωγιμότητα.

Η τεχνολογία έχει προχωρήσει στην ανακάλυψη κεραμικών υλικών με εξαιρετικά μικρούς συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας, που χρησιμοποιούνται στη διαστημική τεχνολογία.

Στον πίνακα 6.3 παρατίθενται οι θερμικές αγωγιμότητες βασικών υλικών.

6.3.2 Διάδοση θερμότητας με μεταφορά.

Η διάδοση της θερμότητας με μεταφορά είναι ο πιο σημαντικός τρόπος διαδόσεως θερμότητας σε υγρά και αέρια. Σε αντίθεση με την αγωγή εδώ έχομε μεταφορά μάζας ρευστού από μία περιοχή σε άλλη. Η διάδοση της θερμότητας με μεταφορά είναι πολύπλοκο φαινόμενο και γι' αυτόν το λόγο δημιουργούμε μοντέλα (πρότυπα) για μελέτη, ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της κάθε περιπτώσεως.

Πίνακας 6.3
Πινάκας με τις θερμικές αγωγιμότητες υλικών σε W/(mK).

Μέταλλα	*k*	*Διάφορα στερεά*	*k*	*Αέρια*	*k*
Άργυρος	406,0	Πάγος	1,6	Υδρογόνο	0,14
Χαλκός	385,0	Μπετόν	0,8	Ήλιο	0,14
Αργίλιο	205,0	Γυαλί	0,8	Οξυγόνο	0.023
Ορείχαλκος	109,0	Τούβλο	0,6	Αέρας	0,024
Χάλυβας	50,2	Γυαλότουβλο	0,15	Αργό	0,016
Μόλυβδος	34,7	Ξύλο	0,12-0,04		
Υδράργυρος	8,3	Φελλός	0,04		
		Ορυκτοβάμβακας	0,04		
		Fiberglass	0,04		
		Styrofoam	0,01		

Ένας γενικός διαχωρισμός της διαδόσεως θερμότητας είναι με ***ελεύθερη*** ή ***φυσική μεταφορά*** ή με ***εξαναγκασμένη μεταφορά***.

Για την ***ελεύθερη*** ή ***φυσική μεταφορά*** μπορούμε να περιγράψομε έναν πολύ γενικό μηχανισμό. Έστω ρευστό που σε μία περιοχή του έχομε αυξημένη θερμοκρασία, η οποία ελαττώνει την πυκνότητά του, καθώς προκαλείται θερμική διαστολή. Λόγω της ελαττώσεως της πυκνότητας, το θερμό ρευστό ανέρχεται μεταφέροντας θερμότητα σε υψηλοτέρα στρώματα και τη θέση του καταλαμβάνει ψυχρό ρευστό (μεγαλύτερης πυκνότητας).

Η διάδοση θερμότητας με ***εξαναγκασμένη μεταφορά*** περιλαμβάνει όλες τις περιπτώσεις, που το ρευστό εξαναγκάζεται σε μεταφορά με κάποια μηχανική παρέμβαση, όπως με τη χρήση αντλίας ή ανεμιστήρα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα συστήματα θερμάνσεως (καλοριφέρ) με την εξαναγκασμένη ροή του θερμού νερού μέσα από τα σώματα, τα συστήματα κλιματισμού με αέρα, τα υδραυλικά συστήματα απαγωγής θερμότητας απ' τις θερμικές μηχανές αυτοκινήτων και πλοίων.

6.3.3 Διάδοση θερμότητας με ακτινοβολία.

Στην αρχή της ενότητας αναφέραμε ότι τις ηλιόλουστες μέρες του καλοκαιριού η άμμος της παραλίας καίει τόσο πολύ, που είναι δύσκολο να περπατήσομε χωρίς παπούτσια. Στο ερώτημα γιατί καίει η άμμος, η απάντηση είναι προφανής: Έχει θερμανθεί από τον ήλιο. Και βέβαια η θέρμανση δεν μπορεί να έχει γίνει ούτε με αγωγή, διότι δεν έχομε επαφή, ούτε με ρεύματα μεταφοράς, αφού ανάμεσα στον Ήλιο και τη Γη μεσολαβεί «κενό». Η διάδοση της θερμότητας έχει γίνει με ***ακτινοβολία***, ηλεκτρομαγνητικά κύματα (υπέρυθρη ακτινοβολία, ορατό φως, υπεριώδης ακτινοβολία), που εκπέμπεται από τον Ήλιο και απορροφάται απ' την άμμο αυξάνοντας τη θερμοκρασία της.

Επίσης, διάδοση θερμότητας γίνεται και με ηλεκτρομαγνητικά κύματα συχνότητας μικρότερης απ' το υπέρυθρο, από τα ***μικροκύματα*** που απορροφώνται επιλεκτικά από διάφορα υλικά, όπως το νερό, και αυξάνουν τη θερμοκρασία τους. Εφαρμογή τους είναι ο φούρνος μικροκυμάτων και οι συσκευές διαθερμίας που χρησιμοποιούνται στα νοσοκομεία για θέρμανση μυών σε ασθενείς.

Εκπομπή θερμότητας με ακτινοβολία μπορεί να έχομε από οποιοδήποτε σώμα. Η εκπομπή αυτή έχει άμεση σχέση με τη θερμοκρασία του σώματος. Στις συνήθεις θερμοκρασίες, περίπου 25 °C, ένα σώμα εκπέμπει ακτινοβολία κυρίως στην περιοχή του υπέρυθρου. Όταν αυξηθεί η θερμοκρασία του σώματος, εκπέμπει ακτινοβολία με μικρότερα μήκη κύματος, πάλι στην περιοχή του υπέρυθρου, ενώ σε θερμοκρασίες περίπου από 800 °C και πάνω έχομε εκπομπή ακτινοβολίας και στο ορατό τμήμα του φάσματος. Τα σώματα σ' αυτήν την κατάσταση εμφανίζονται «ερυθροπυρωμένα». Σε υψηλότερες θερμοκρασίες και γύρω στους 3000 °C, το σώμα εκπέμπει σημαντική ακτινοβολία στο ορατό, όπως συμβαίνει και με το νήμα βολφραμίου στις λάμπες πυρακτώσεως.

Σημαντικό εργαλείο στην κατανόηση της εκπομπής θερμότητας με ακτινοβολία είναι ο ***Νόμος των Stefan–Boltzmann*** για την ισχύ της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας απ' την επιφάνεια του σώματος εμβαδού A και θερμοκρασίας T,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = P = A\, e\, \sigma\, T^4.$$

Απ' την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι εκτός των άλλων, ο ρυθμός εκπομπής ενέργειας είναι ανάλογος της τετάρτης δυνάμεως της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του σώματος. Δηλαδή έχομε πολύ μεγάλη αύξηση της ακτινοβολούμενης θερμικής ισχύος με την αύξηση της θερμοκρασίας του σώματος. Επίσης, η ισχύς της ακτινοβολούμενης ενέργειας εξαρτάται απ' την ***υφή*** και το ***χρώμα*** της επιφάνειας του σώματος. Η εξάρτηση αυτή εκφράζεται με τον συντελεστή ***e***, ο οποίος είναι ένας αδιάστατος αριθμός με τιμές από 0 έως 1 και με πολύ μικρή εξάρτηση από τη θερμοκρασία. Τα υλικά με σκουρόχρωμη επιφάνεια εκπέμπουν εντονότερα από υλικά με ανοιχτόχρωμη επιφάνεια. Επίσης, εντονότερα εκπέμπουν σώματα με τραχιά επιφάνεια σε σχέση με τα σώματα, που έχουν λεία επιφάνεια. Ένα σώμα με σκουρόχρωμη και τραχιά επιφάνεια έχει συντελεστή ***e*** που πλησιάζει τη μονάδα, ενώ ένα ανοιχτόχρωμο και λείο σώμα έχει συντελεστή ***e*** που πλησιάζει το μηδέν. Το ***σ*** είναι μια θεμελιώδης φυσική σταθερά που ονομάζεται ***σταθερά των Stefan–Boltzmann*** και ισχύει:

$$\sigma = 5{,}6705 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}.$$

Όταν ένα σώμα ακτινοβολεί εύκολα, τότε και απορροφά εύκολα ενέργεια.

Ένα σώμα συγχρόνως εκπέμπει και απορροφά θερμότητα με τη μορφή ακτινοβολίας, αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον του. Όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι ίδια με τη θερμοκρασία του σώματος, τότε η θερμότητα ανά μονάδα χρόνου που ακτινοβολεί το σώμα προς το περιβάλλον του είναι ίση μ' αυτήν που απορροφά απ' το περιβάλλον. Άρα, η θερμοκρασία του και η θερμοδυναμική του ενέργεια παραμένουν σταθερές. Όταν η θερμοκρασία του σώματος είναι μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, τότε το σώμα ακτινοβολεί περισσότερο απ' όσο απορροφά. Έτσι, έχομε ροή θερμότητας από το θερμό στο ψυχρό σώμα.

Το ιδανικό θερμαντικό σώμα έχει συντελεστή εκπομπής $e=1$ και αποτελεί και ιδανικό απορροφητή, δηλαδή απορροφά όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει επάνω του και εκπέμπει περισσότερο από άλλα σώματα στην ίδια θερμοκρασία. Το σώμα αυτό ονομάζεται ***μέλαν σώμα*** (μελανό ή μαύρο σώμα). Σε πλήρη αντίθεση με το μέλαν σώμα έρχεται το ***ιδανικό κάτοπτρο***, το οποίο δεν απορροφά καθόλου ακτινοβολία και δεν εκπέμπει πολλή ακτινοβολία.

Μια εφαρμογή για το κάτοπτρο είναι στις πρώτες βοήθειες ναυαγών. Αμέσως μετά την περισυλλογή ναυαγών, οι διασώστες τους τυλίγουν με ειδικές κουβέρτες που έχουν «μεταλλιζέ» επιφάνεια, προκειμένου να επιτύχουν μέγιστο βαθμό μειώσεως των απωλειών θερμότητας από το ανθρώπινο σώμα.

6.4 Θερμική διαστολή στερεών και υγρών.

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, συνήθως αυτό διαστέλλεται. Αυτό οφείλεται στο ότι οι δομικοί λίθοι του σώματος αποκτούν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια (κινούνται ταχύτερα), με αποτέλεσμα να αυξάνεται κατά μέσο όρο η μεταξύ τους απόσταση.

Σχεδόν όλα τα υλικά συστέλλονται ή διαστέλλονται με τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Η διαστολή και η συστολή εξαρτώνται από το υλικό. Διαφορετικά υλικά στις ίδιες μεταβολές της θερμοκρασίας παρουσιάζουν διαφορετικές διαστολές. Η θερμική διαστολή είναι πολύ σημαντική και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη με πολύ προσοχή, ειδικά στις κατασκευές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι κατασκευές μεταλλικών σιδηροτροχιών τρένων, οι οποίες αρθρώνονται με ράγες που ανάμεσά τους παρεμβάλλονται διάκενα για να επιτρέπουν τη θερμική διαστολή.

Επίσης, τα καταστρώματα των πλοίων συνδέονται με ειδικούς συνδέσμους και στηρίγματα προκειμένου να αντιμετωπίσουν τη διαστολή. Εφαρμογές αντιμετωπίσεως θερμικής διαστολής και συστολής συναντάμε στις κατασκευές γεφυρών με τα ειδικά διάκενα, στην τεχνολογία Pyrex (ειδικά γυαλιά με πολύ μικρή θερμική διαστολή), στην τεχνολογία κατασκευών οικοδομών κ.λπ..

6.4.1 Γραμμική διαστολή.

Έστω ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων ενός στερεού σώματος σε μια αρχική θερμοκρασία T_0 είναι L_0. Αν αυξηθεί η θερμοκρασία του υλικού και γίνει T, τότε για αρκετά μικρές μεταβολές ΔT η μεταβολή της αποστάσεως δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta L = aL_0\Delta T.$$

Το *a* είναι ο συντελεστής γραμμικής διαστολής και κατά προσέγγιση είναι σταθερός, τουλάχιστον για μικρές μεταβολές θερμοκρασίας, και εξαρτάται από το υλικό (πίν. 6.4.1). Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι έχομε ***γραμμική διαστολή*** ή ***διαστολή κατά μήκος***. Σημειώνομε ότι δεν είναι ανάγκη μεταξύ των δύο σημείων να υπάρχει υλικό. Για παράδειγμα, η μεταβολή της αποστάσεως μεταξύ δύο αντιδιαμετρικών σημείων ενός δακτυλιδιού από μέταλλο ακολουθεί την παραπάνω σχέση. Ο συντελεστής γραμμικής διαστολής μετρείται σε K^{-1}.

Στην πραγματικότητα, η εξάρτηση της διαστολής απ' τη θερμοκρασία είναι πιο πολύπλοκη και περιλαμβάνει πολλές σταθερές.

Μερικά υλικά λόγω της δομής τους διαστέλλονται διαφορετικά σε διαφορετικές κατευθύνσεις, όπως το ξύλο και μερικοί κρύσταλλοι.

Πίνακας 6.4.1
Συντελεστές γραμμικής διαστολής.

Υλικό	***a σε K^{-1}***
Αργίλιο	$2{,}4\times10^{-5}$
Αλουμίνιο	$2{,}0\times10^{-5}$
Χαλκός	$1{,}7\times10^{-5}$
Χάλυβας	$1{,}2\times10^{-5}$
Γυαλί	$(0{,}4-0{,}9)\times10^{-5}$
Invar (κράμα νικελίου-σιδήρου)	$0{,}09\times10^{-5}$
Άμορφος χαλαζίας	$0{,}04\times10^{-5}$

6.4.2 Διαστολή όγκου στερεών και υγρών.

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία, συνήθως αυξάνεται ο όγκος ενός στερεού ή υγρού σώματος. Η σχέση που δίνει τη μεταβολή του όγκου με την αύξηση της θερμοκρασίας είναι για μικρές μεταβολές θερμοκρασίας:

$$\Delta V = \beta V_0\,\Delta T.$$

Όπου ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας, V_0 ο αρχικός όγκος και $\boldsymbol{\beta}$ ο συντελεστής διαστολής όγκου. Ο $\boldsymbol{\beta}$ εξαρτάται από το υλικό και μετρείται σε K^{-1}.

Ο συντελεστής β διαστολής όγκου για τα στερεά συνδέεται με τον συντελεστή a της γραμμικής διαστολής με τη σχέση $\boldsymbol{\beta=3a}$.

Απ' τον πίνακα με τους συντελεστές θερμικής διαστολής (πίν. 6.4.2) παρατηρούμε ότι η θερμική διαστολή των υγρών είναι πολύ μεγαλύτερη από τη διαστολή των στερεών και είναι λογικό, αν σκεφτούμε ότι οι δυνάμεις, με τις οποίες αλληλεπιδρούν οι δομικοί λίθοι στα στερεά είναι μεγαλύτερες από ό,τι στα υγρά.

Αν προσπαθήσομε να παρεμποδίσομε τη διαστολή ενός σώματος, ενώ αυξάνομε τη θερμοκρασία του, τότε θα αναπτυχθούν ισχυρές μηχανικές τάσεις, που ονομάζονται ***θερμικές (μηχανικές) τάσεις,*** οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν διάφορα συστήματα σε μόνιμη παραμόρφωση ή θραύση. Γι' αυτόν το λόγο στις διάφορες κατασκευές προβλέπεται να δημιουργούνται αρκετά κενά ή να γίνονται ειδικοί σύνδεσμοι, ώστε να αποφευχθεί αυτό το καταστροφικό φαινόμενο.

6.4.3 Η διαστολή του νερού.

Η συμπεριφορά του νερού όσον αφορά στη διαστολή του, παρουσιάζει μια σημαντική διαφορά σε σχέση με τα υπόλοιπα υλικά. Το νερό διαστέλλεται, όταν γίνει πάγος. Όταν θερμαίνεται το νερό, ξεκινώντας από 0 °C, παρατηρείται συστολή μέχρι τους 4 °C. Με περαιτέρω αύξηση της θερμοκρασίας αρχίζει να διαστέλλεται και η διαστολή συνεχίζεται

Πίνακας 6.4.2
Συντελεστές θερμικής διαστολής όγκου.

Στερεά	***β σε K^{-1}***
Αργίλιο	$7{,}2\times10^{-5}$
Αλουμίνιο	$6{,}0\times10^{-5}$
Χαλκός	$5{,}1\times10^{-5}$
Χάλυβας	$3{,}6\times10^{-5}$
Σκυρόδεμα	$3{,}6\times10^{-5}$
Γυαλί	$(1{,}2–2{,}7)\times10^{-5}$
Invar (κράμα νικελίου-σιδήρου)	$0{,}27\times10^{-5}$
Άμορφος χαλαζίας	$0{,}12\times10^{-5}$
Υγρά	***β σε K^{-1}***
Βενζίνη	96×10^{-5}
Οινόπνευμα	75×10^{-5}
Λάδι	68×10^{-5}
Γλυκερίνη	49×10^{-5}
Υδράργυρος	18×10^{-5}

μέχρι το σημείο βρασμού, στους 100 °C.

Λόγω της συστολής το νερό έχει τη μέγιστη πυκνότητα σε θερμοκρασία 4 °C.

Απ' τα παραπάνω γίνεται κατανοητό γιατί ο πάγος επιπλέει στο νερό. Ας δούμε στη συνέχεια τι συμβαίνει όταν ψύχεται μια μεγάλη ποσότητα νερού, όπως το νερό μιας λίμνης. Καθώς το νερό της επιφάνειας ψύχεται δημιουργεί ένα επιφανειακό στρώμα 4 °C, το οποίο βυθίζεται λόγω της μεγάλης πυκνότητάς του. Το φαινόμενο συνεχίζεται μέχρι να ψυχθεί όλη η λίμνη στους 4 °C και στη συνέχεια δημιουργούνται στρώματα με διαβάθμιση θερμοκρασιών από 4 °C στον βυθό, μέχρι 0 °C στην επιφάνεια της λίμνης όπου επιπλέει πάγος. Αν συνεχιστεί η ψύξη, οδηγούμαστε σε πήξη του στρώματος του νερού που βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον πάγο της επιφάνειας, δηλαδή η λίμνη παγώνει από την επιφάνεια προς τα κάτω. Επομένως, ο βυθός μιας λίμνης είναι πολύ δύσκολο να παγώσει και βρίσκεται συνήθως σε θερμοκρασία 4 °C, η οποία μπορεί να διατηρήσει πολύ καλά την υποβρύχια ζωή.

Λόγω της πυκνότητας του πάγου, τα παγόβουνα επιπλέουν με τα 9/10 του όγκου τους βυθισμένα στο νερό.

6.5 Θερμική διαστολή των αερίων. Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων. Νόμοι της θερμοδυναμικής.

Όπως στα υγρά και τα στερεά έτσι και στα αέρια η αύξηση της θερμοκρασίας σημαίνει, μικροσκοπικά, αυξημένη μέση κινητική ενέργεια των μορίων.

Μακροσκοπικά όμως η μελέτη της διαστολής των αερίων είναι λίγο διαφορετική απ' αυτήν των υγρών ή των στερεών, γιατί τα αέρια μπορούν και συμπιέζονται, ενώ τα υγρά και τα στερεά είναι πρακτικώς ασυμπίεστα. Τη συμπεριφορά των ιδανικών αερίων σε σχέση με τις μεταβολές όγκου, πιέσεως και θερμοκρασίας τις περιγράφουν οι Νόμοι των Boyle-Mariotte, του Charles και των Gay-Lussac.

1) Ο ***Νόμος των Boyle-Mariotte*** (σχ. 6.5.1) αναφέρει ότι ο όγκος ορισμένης μάζας ιδανικού αερίου υπό σταθερή θερμοκρασία είναι αντιστρόφως ανάλογος της πιέσεως, $p \cdot V = \sigma\tau\alpha\theta$. ($T$ σταθερό).

2) Ο ***Νόμος του Charles*** (σχ. 6.5.2) αναφέρει ότι η πίεση ορισμένης μάζας ιδανικού αερίου, του οποίου ο όγκος παραμένει σταθερός, είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία, $p = \sigma\tau\alpha\theta \cdot T$ (V = σταθερό).

3) Ο ***Νόμος των Gay-Lussac*** (σχ. 6.5.3) αναφέρει ότι ο όγκος ορισμένης μάζας ιδανικού αερίου, του οποίου η πίεση παραμένει σταθερή, είναι ανάλογος με την απόλυτη θερμοκρασία, $V = \sigma\tau\alpha\theta \cdot T$ (p = σταθερό).

6.5.1 Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων.

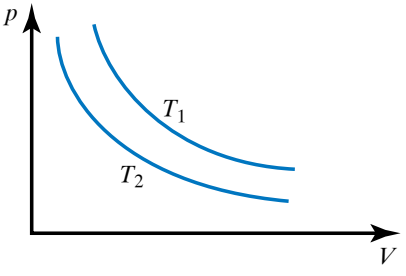
Συνδυάζοντας τους νόμους των ιδανικών αερίων καταλήγομε σε μία εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση του αερίου σε σχέση με τις μεταβλητές της πιέσεως p, του όγκου V και της θερμοκρασίας T. Η σχέση που προκύπτει δείχνει πως για δύο καταστάσεις ορισμένης ποσότητας αερίου ισχύει:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \quad \frac{pV}{T} = \sigma\tau\alpha\theta, \quad pV = \sigma\tau\alpha\theta \cdot T.$$

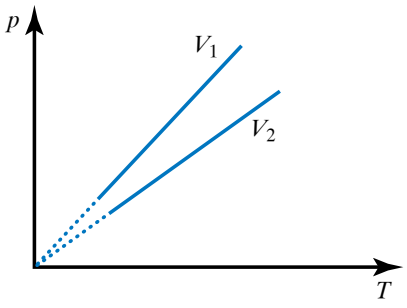
Δηλαδή το γινόμενο της πιέσεως επί τον όγκο, ορισμένης μάζας αερίου, είναι ανάλογο με την απόλυτη θερμοκρασία. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την παραπάνω σχέση πιέσεως, όγκου και θερμοκρασίας κάθε καταστάσεως ενός (ιδανικού) αερίου, ονομάζεται ***καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων***:

$$pV = nRT,$$

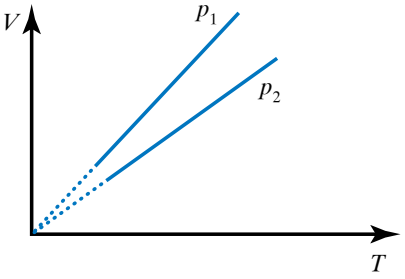
όπου ***n*** η ποσότητα ουσίας (μετρείται σε mol) του



Σχ. 6.5.1
Νόμος των Boyle-Mariotte.



Σχ. 6.5.2
Νόμος του Charles.



Σχ. 6.5.3
Νόμος των Gay-Lussac.

αερίου και ***R*** η παγκόσμια σταθερά των αερίων, ισχύει:

$$R = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \times \text{K}} \text{ στο SI ή } R = 0{,}082 \frac{\text{J}}{\text{mol} \times \text{K}}.$$

Τα αέρια, για τα οποία ισχύει η καταστατική εξίσωση ονομάζονται ***ιδανικά αέρια***. Τα ιδανικά αέρια ορίζονται και μικροσκοπικά με τις παρακάτω υποθέσεις:

1) Οι αλληλεπιδράσεις των μορίων του αερίου είναι αμελητέες κατά την κίνηση των μορίων στον χώρο και εμφανίζονται μόνο κατά τη διάρκεια της κρούσεως μεταξύ τους ή με τα τοιχώματα του δοχείου στο σημείο, στο οποίο βρίσκονται.

2) Ο συνολικός όγκος των μορίων είναι αμελητέος σε σχέση με τον όγκο που καταλαμβάνει το αέριο στο δοχείο όπου βρίσκεται.

3) Ο χρόνος που διαρκεί η κρούση μεταξύ των μορίων ή μορίου και τοιχώματος του δοχείου είναι αμελητέος σε σχέση με τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων.

4) Η κίνηση των μορίων μεταξύ των συγκρούσεων είναι ευθύγραμμη ομαλή.

5) Οι κρούσεις των μορίων είναι ελαστικές και

6) οι ταχύτητες των μορίων μπορούν να έχουν με την ίδια πιθανότητα οποιαδήποτε κατεύθυνση (τα μόρια κινούνται άτακτα).

Σε συνήθεις συνθήκες, πολλά αέρια, που είναι αραιά συμπεριφέρονται σε ικανοποιητικό βαθμό ως ιδανικά. Γενικώς, πρέπει η πίεση και η πυκνότητά τους να μην είναι πολύ μεγάλες.

Απ' την καταστατική εξίσωση των αερίων για 1 mol σε θερμοκρασία $T_0 = 273{,}15\,\text{K} \approx 273\text{K}$ και πίεση ίση με 1 κανονική ατμόσφαιρα, $p_0 = 1\,\text{atm} \approx 100000\ \text{N/m}^2$ (αυτές παλιότερα ήταν οι κανονικές συνθήκες πιέσεως και θερμοκρασίας) έχομε:

$$pV = nRT, \qquad V = \frac{nRT}{p},$$

$$V = \frac{1\,\text{mol} \times 0{,}082(\text{J/mol} \cdot \text{K}) \cdot 273\,\text{K}}{10^5(\text{N/m}^2)}.$$

άρα $V \approx 22{,}4\,\text{L}$ δηλαδή 1 mol κάθε (ιδανικού) αερίου, στις ανωτέρω συνθήκες, καταλαμβάνει όγκο ***22,4 L***. Επομένως για τον γραμμομοριακό όγκο V_0, έχομε $\boldsymbol{V_0 = 22{,}4\,\text{L/mol}}$.

Με εισαγωγή της πυκνότητας $\varrho = m/V$ στην καταστατική εξίσωση των αερίων, προκύπτει η σχέση που συνδέει την πίεση του αερίου με την πυκνότητα ϱ και τη θερμοκρασία T.

Έχομε δηλαδή:

$$pV = nRT,\ \varrho = \frac{m}{V},\ n = \frac{m}{M},$$

$$pV = nRT,\ pV = \frac{m}{M}RT,\ \ p = \frac{m}{VM}RT,$$

$$p = \frac{mRT}{VM},\ \ p = \frac{m}{V}\frac{RT}{M},\ \ \ p = \varrho\frac{RT}{M}$$

όπου M είναι η γραμμομοριακή μάζα.

Τα p, V, T και n που περιγράφουν το ιδανικό αέριο ονομάζονται ***θερμοδυναμικές μεταβλητές***.

Ονομάζομε ***κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας*** εκείνη, στην οποία το αέριο διατηρεί σε όλη του την έκταση σταθερές τιμές για την πίεση, τη θερμοκρασία και την πυκνότητα. Μία κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας μπορεί να παρασταθεί μ' ένα σημείο σε διάγραμμα p-V.

6.5.2 Μεταβολές αερίων.

Κάθε σύστημα αερίου είναι δυνατό να υποστεί διεργασίες οι οποίες μεταβάλλουν την κατάστασή του όχι μόνο όσον αφορά στην πίεση, στη θερμοκρασία και στην πυκνότητά του, αλλά και στην ενεργειακή του κατάσταση. Δηλαδή μπορεί να έχομε ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον με παράλληλη παραγωγή ή κατανάλωση μηχανικού έργου και μεταβολή της θερμοδυναμικής (εσωτερικής) του ενέργειας. Σημαντικό ρόλο στις μεταβολές αυτές διαδραματίζει ο τρόπος, με τον οποίο γίνονται.

Στις επόμενες παραγράφους θα προσπαθήσομε να περιγράψομε μερικές από τις μεταβολές, που μπορεί να υποστεί ένα αέριο. Πριν απ' αυτό όμως είναι απαραίτητο να ορίσομε την εσωτερική (ή θερμοδυναμική) ενέργεια ενός συστήματος και να μάθομε πώς να υπολογίζομε το έργο και τη θερμότητα που ανταλλάσσεται με το περιβάλλον σε μία μεταβολή.

6.5.3 Εσωτερική ενέργεια.

Έστω ότι έχομε ένα δοχείο όγκου V που περιέχει μία ποσότητα αερίου σε πίεση p και θερμοκρασία T. Τα μόρια ενός αερίου κινούνται, άρα έχουν κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς και δυναμική ενέργεια. Επίσης, μπορεί να έχουν ενέργεια λόγω περιστροφικής κινήσεως και λόγω της ταλαντώσεώς τους.

Η θερμοδυναμική ή ***εσωτερική ενέργεια, U***, ενός αερίου και γενικότερα ενός υλικού είναι το άθροι-

σμα των παραπάνω κινητικών και δυναμικών ενεργειών όλων των σωματιδίων που το αποτελούν.

Παρατηρήσεις.

1) ***Στη θερμοδυναμική*** μας ενδιαφέρουν κυρίως οι μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας σε μια μετάβαση του συστήματος από μια κατάσταση σε μια άλλη. Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας $\Delta U = U_B - U_A$ από μια κατάσταση Α σε μια κατάσταση Β είναι ίδια, ανεξάρτητα από τον τρόπο μεταβάσεως από τη μια κατάσταση στην άλλη.

2) Στην ***εσωτερική ενέργεια*** δεν συμπεριλαμβάνεται ποτέ «οργανωμένη» κίνηση των μορίων του συστήματος, π.χ. λόγω μεταφορικής ή περιστροφικής κινήσεως του δοχείου που περιέχει το αέριο, δηλαδή του συστήματος ως συνόλου.

3) Στα ***ιδανικά αέρια*** οι αλληλεπιδράσεις (δυνάμεις) μεταξύ των μορίων είναι αμελητέες, επομένως η εσωτερική ενέργεια ενός ιδανικού αερίου που βρίσκεται εκτός (εξωτερικού) πεδίου δυνάμεων, όπως είναι το βαρυτικό, είναι ίση με το άθροισμα μόνο των κινητικών ενεργειών των μορίων.

4) Για ***ένα ιδανικό μονατομικό αέριο*** αποδεικνύεται ότι η εσωτερική του ενέργεια μπορεί να υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U = 3/2\, nRT,$$

ενώ αν πρόκειται για διατομικό ή πολυατομικό, η σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$U = f/2\, nRT,$$

όπου f οι θερμοδυναμικοί βαθμοί ελευθερίας του μορίου.

6.5.4 Έργο κατά την εκτόνωση ή συμπίεση.

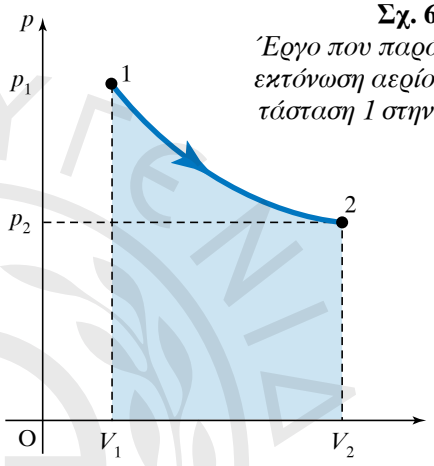
Έστω σύστημα που αποτελείται από αέριο μέσα σε κυλινδρικό δοχείο διατομής Α και όγκου V, στη μία πλευρά, του οποίου υπάρχει κινούμενο έμβολο. Στο δοχείο επικρατεί πίεση p και λόγω αυτής το έμβολο δέχεται δύναμη $F = pA$. Αν το έμβολο μετακινείται προς τα έξω, έχομε εκτόνωση του αερίου, δηλαδή αύξηση του συνολικού του όγκου.

Η δύναμη F που ασκείται από το αέριο στο έμβολο παράγει έργο. Προκειμένου να υπολογίζομε το έργο που παράγεται σε τέτοιες μεταβολές, θεωρούμε μία απειροστή μεταβολή της θέσεως του εμβόλου κατά dx, που αντιστοιχεί σε μεταβολή του όγκου κατά $dV = A\,\mathrm{d}x$.

Στην απειροστή αυτή μεταβολή η δύναμη F παράγει έργο $\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = pA\mathrm{d}x = p\mathrm{d}V$. Επομένως, σε μία πεπερασμένη αλλαγή του όγκου από V_1 σε V_2 το έργο που παράγεται είναι:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ισούται με το εμβαδό που φαίνεται στο σχήμα 6.5.4, στο διάγραμμα πιέσεως-όγκου.



Σχ. 6.5.4
Έργο που παράγεται από την εκτόνωση αερίου από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2.

Παρατηρήσεις.

1) Το έργο σε μια μεταβολή μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν. ***Θετικό*** ονομάζεται το έργο όταν προσφέρεται από το σύστημα στο περιβάλλον (βλ. σχ. 6.5.5). Αντίστοιχα, ***αρνητικό*** λέμε το έργο όταν καταναλώνεται από το σύστημα, δηλαδή προσφέρεται στο σύστημα (βλ. σχ. 6.5.6). Επομένως, θετικό είναι το έργο της εκτονώσεως ενός αερίου και αρνητικό το έργο μιας συμπιέσεως αερίου.

2) Στις μεταβολές που ο όγκος παραμένει σταθερός, το σύστημα δεν παράγει έργο, δηλαδή είναι $W = 0$. Επίσης, ***μηδενικό*** είναι και το έργο σε μια ελεύθερη εκτόνωση αερίου στο κενό, όπου δεν υπάρχει έμβολο που μετακινείται.

3) Το έργο που παράγεται από ένα σύστημα που μεταβαίνει από μια δεδομένη αρχική κατάσταση σε άλλη δεδομένη τελική κατάσταση, εξαρτάται απ' τον τρόπο, με τον οποίο μεταβαίνει από τη μια κατάσταση στην άλλη, δηλαδή από τις ενδιάμεσες καταστάσεις, συνεπώς από την ακολουθούμενη διαδρομή.

6.5.5 Νόμοι της θερμοδυναμικής.

Η θερμότητα Q, όπως έχομε αναφέρει ήδη, είναι ενέργεια που ανταλλάσσει ένα σύστημα με το περιβάλλον του (δηλ. άλλο σώμα) λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας τους.

Η θερμότητα που απορροφά ένα αέριο (ή ένα οποιοδήποτε σώμα) σε μια μεταβολή εξαρτάται απ' τον τρόπο μεταβάσεως από τη μια κατάσταση στην άλλη. Δηλαδή εξαρτάται και απ' τη διαδρομή που ακολουθούμε για να φτάσομε στην τελική κατάσταση.

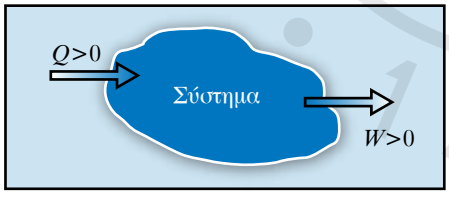
Ορίζομε θετική τη θερμότητα, όταν απορροφάται από το σύστημα (σχ. 6.5.5) και αρνητική, όταν προσφέρεται από το σύστημα στο περιβάλλον (σχ. 6.5.6).

Όταν ένα αέριο ή σύστημα υφίσταται μια μεταβολή, είναι δυνατόν ένα μέρος της ενέργειας (θερμότητας) Q που απορροφά να μετατρέπεται σε μηχανικό έργο W κι ένα άλλο να συμβάλλει στη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας U. Στη διαδικασία αυτή ισχύει η αρχή διατηρήσεως της ενέργειας. Στη θερμοδυναμική περιγράφομε τις ενεργειακές μεταβολές με τη διατύπωση του Πρώτου και του Δεύτερου Θερμοδυναμικού Νόμου. Αναλυτικότερα:

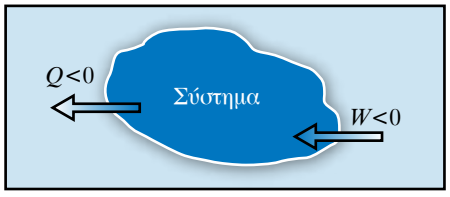
1) Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος ή 1ο Θερμοδυναμικό Αξίωμα.

Το ποσό της θερμότητας Q που απορροφά ή αποβάλλει ένα σύστημα σε μια θερμοδυναμική μεταβολή είναι ίσο με το (αλγεβρικό) άθροισμα της μεταβολής της εσωτερικής του ενέργειας ΔU και του έργου W που παράγει ή καταναλώνει το σύστημα:

$$Q = \Delta U + W$$



Σχ. 6.5.5
Σύστημα απορροφά θερμότητα από το περιβάλλον και προσφέρει έργο στο περιβάλλον.



Σχ. 6.5.6
Σύστημα αποδίδει θερμότητα στο περιβάλλον και καταναλώνει έργο.

2) Δεύτερος Θερμοδυναμικός Νόμος ή 2ο Θερμοδυναμικό Αξίωμα.

Ο Δεύτερος Θερμοδυναμικός Νόμος έχει τις εξής δύο ισοδύναμες διατυπώσεις, αν και φαινομενικά δεν δείχνουν ότι συνδέονται:

α) ***Διατύπωση των Kelvin και Planck.***

Δεν είναι δυνατό να υπάρξει θερμική μηχανή που να μετατρέπει όλη τη θερμότητα σε μηχανικό έργο.

β) ***Διατύπωση του Clausius.***

Είναι αδύνατο να μεταφερθεί θερμότητα από ένα ψυχρό σώμα σ' ένα θερμότερο χωρίς να δαπανήσομε ενέργεια.

Ο Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος δείχνει ότι η ενέργεια διατηρείται.

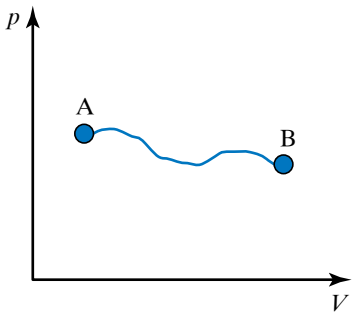
Ο Δεύτερος Θερμοδυναμικός Νόμος δείχνει ότι η θερμότητα δεν μπορεί να μετασχηματιστεί πλήρως σε μηχανική ενέργεια. Επίσης, δείχνει ότι η κατεύθυνση που συμβαίνουν αυθόρμητα τα φαινόμενα στη φύση, είναι εκείνη όπου η θερμότητα μεταφέρεται πάντοτε απ' τα θερμότερα στα ψυχρότερα σώματα.

6.5.6 Αντιστρεπτή και μη αντιστρεπτή μεταβολή.

Ένα σύστημα μπορεί να μεταβεί από μία κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α σε μια άλλη κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β. Αν η μετάβαση από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β γίνει με διαδικασία κατά την οποία όλες οι ενδιάμεσες καταστάσεις είναι καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας, τότε λέμε ότι έχομε μια αντιστρεπτή μεταβολή. Δηλαδή μπορούμε να επιστρέψομε το σύστημα και το περιβάλλον στην αρχική τους κατάσταση, ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία, μέσα από καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας.

Μία αντιστρεπτή μεταβολή παριστάνεται σε διάγραμμα με συνεχή γραμμή (σχ. 6.5.7), που ξεκινά από το σημείο Α(p_A, V_A, T_A) και καταλήγει στο σημείο Β(p_B, V_B, T_B).

Η αντιστρεπτή μεταβολή είναι ιδανική μεταβολή και δεν υπάρχει πραγματικά στη φύση. Μπορούμε όμως να προσεγγίσομε ικανοποιητικά την αντιστρεπτή μεταβολή με μια μεταβολή που συμβαίνει πολύ

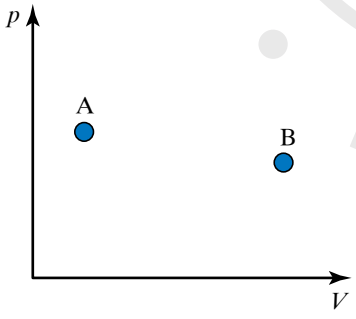


Σχ. 6.5.7
Παράσταση αντιστρεπτής μεταβολής σε άξονες p, V.

αργά (ώστε κάθε κατάσταση να μπορεί να θεωρείται κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας) και να έχομε αμελητέες απώλειες ενέργειας λόγω τριβών ή αντιστάσεων.

Αν η μετάβαση από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β γίνει με τέτοια διαδικασία, όπου οι ενδιάμεσες καταστάσεις δεν είναι καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας, τότε λέμε ότι έχομε μια μη αντιστρεπτή μεταβολή. Στη φύση όλες οι μεταβολές είναι μη αντιστρεπτές.

Μία μη αντιστρεπτή μεταβολή σ' ένα διάγραμμα μπορεί να παρασταθεί μόνο με τα δύο σημεία που χαρακτηρίζουν την αρχική και την τελική κατάσταση ισορροπίας, ενώ οι ενδιάμεσες καταστάσεις δεν μπορούν να αντιπροσωπευθούν με σημεία (σχ. 6.5.8). Χαρακτηριστικό παράδειγμα μη αντιστρεπτής μεταβολής αποτελεί η ελεύθερη εκτόνωση αερίου, που θα περιγράψομε παρακάτω.



Σχ. 6.5.8
Παράσταση μη αντιστρεπτή μεταβολής σε άξονες p, V.

Παρόλο που οι αντιστρεπτές μεταβολές είναι ιδανική μη πραγματική περίπτωση, η μελέτη τους αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για τη συμπεριφορά των αερίων στις μεταβολές που υφίστανται. Χαρακτηριστικές αντιστρεπτές μεταβολές για τη μελέτη διαφόρων θερμοδυναμικών συστημάτων είναι οι εξής:

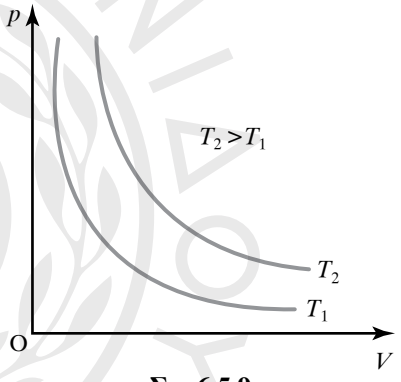
1) Ισόθερμη μεταβολή.

Ισόθερμη ονομάζεται η αντιστρεπτή μεταβολή ορισμένης μάζας αερίου, που πραγματοποιείται υπό σταθερή θερμοκρασία.

Μελετώντας τη μεταβολή με βάση την καταστατική εξίσωση των αερίων έχομε ότι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Κατάσταση Α}\\ (p_1, V_1, T_1),\ p_1V_1 = nRT\\ \text{Κατάσταση Β}\\ (p_2, V_2, T_2),\ p_2V_2 = nRT\\ \text{Ισόθερμη μεταβολή}\\ T_1 = T_2 = T\end{array}\right\} \rightarrow\ p_1V_1 = p_2V_2$$

Στο διάγραμμα *p–V* (σχ. 6.5.9) έχομε δύο ισόθερμες μεταβολές μίας ποσότητας ιδανικού αερίου σε θερμοκρασίες T_1 και T_2.



Σχ. 6.5.9
Γραφική παράσταση ισοθέρμων μεταβολών σε άξονες p–V.

– Ισόθερμη μεταβολή και ο Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος.

Η εσωτερική ενέργεια μιας ποσότητας ιδανικού αερίου εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία *T*,

$$U = f/2\, nRT.$$

Άρα, σε μια ισόθερμη μεταβολή (όπου T = σταθερό), η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι μηδέν, $\Delta U = 0$. Εφαρμόζοντας τον Πρώτο Θερμοδυναμικό Νόμο για την ισόθερμη μεταβολή έχομε:

$$Q = \Delta U + W,\ Q = 0 + W,\ Q = W.$$

Στην ισόθερμη εκτόνωση, όλο το ποσό της θερμότητας που απορροφά το αέριο μετατρέπεται σε μηχανικό έργο που αποδίδεται στο περιβάλλον. Αντίστροφα, στην ισόθερμη συμπίεση το μηχανικό

έργο που δίνεται στο σύστημα από το περιβάλλον μετατρέπεται σε θερμότητα που αποδίδεται από το αέριο στο περιβάλλον.

Το έργο που παράγεται (ή καταναλώνεται) σε μία ισόθερμη εκτόνωση (ή συμπίεση) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}\text{, που προκύπτει ως εξής:}$$

$$\left.\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V \\ p &= \frac{nRT}{V} \end{aligned}\right\} \quad W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V,\ W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Από τη σχέση $W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$ προκύπτει ότι το έργο σε μια ισόθερμη μεταβολή είναι θετικό, αν έχομε εκτόνωση ($V_2 > V_1$) και αρνητικό, αν έχομε συμπίεση ($V_2 < V_1$).

2) Ισόχωρη μεταβολή.

Ισόχωρη ονομάζεται η μεταβολή ενός αερίου που πραγματοποιείται υπό σταθερό όγκο.

Μελετώντας την ισόχωρη μεταβολή με βάση την καταστατική εξίσωση των αερίων έχομε ότι:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Κατάσταση A } (p_1, V_1, T_1),\ p_1V_1 = nRT_1 \\ &\text{Κατάσταση B } (p_2, V_2, T_2),\ p_2V_2 = nRT_2 \\ &\text{Ισόθερμη μεταβολή } V_1 = V_2 \end{aligned}\right\} \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

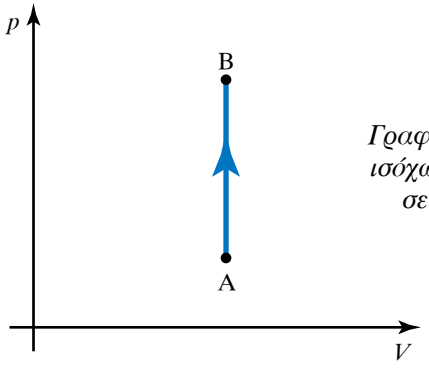
– Ισόχωρη μεταβολή και ο Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος.

Σε μία ισόχωρη μεταβολή (θέρμανση ή ψύξη) ο όγκος παραμένει σταθερός, συνεπώς το έργο είναι μηδέν, $W = 0$. Η θερμότητα υπολογίζεται από τη σχέση $Q = nC_V\Delta T$.

Άρα από τον Πρώτο Θερμοδυναμικό Νόμο έχομε:

$$\left.\begin{aligned} &Q = \Delta U + W,\quad Q = \Delta U,\quad \Delta U = Q \\ &Q = nC_V\Delta T \end{aligned}\right\} \quad \Delta U = nC_V\Delta T$$

Στην ισόχωρη μεταβολή (σχ. 6.5.10) όλο το ποσό της θερμότητας που απορροφά το αέριο χρησιμοποιείται για την αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας. Αντίστοιχα, στην ισόχωρη ψύξη το ποσό της θερμότητας που αποδίδει το αέριο στο περιβάλλον προέρχεται απ' τη μείωση της εσωτερικής του ενέργειας.



Σχ. 6.5.10
Γραφική παράσταση ισόχωρης μεταβολής σε άξονες p–V.

3) Ισοβαρής μεταβολή.

Ισοβαρής μεταβολή ονομάζεται η μεταβολή ενός αερίου, όταν αυτή πραγματοποιείται υπό σταθερή πίεση.

Μελετώντας τη μεταβολή με εργαλείο την καταστατική εξίσωση των αερίων έχομε ότι:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Κατάσταση A } (p_1, V_1, T_1),\\ &\text{άρα } p_1V_1 = nRT_1 \\ &\text{Κατάσταση B } (p_2, V_2, T_2),\\ &\text{άρα } p_2V_2 = nRT_2 \\ &\text{Ισόβαρής μεταβολή} \\ &p_1 = p_2 \end{aligned}\right\} \text{επομένως } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

– Ισοβαρής μεταβολή και Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος.

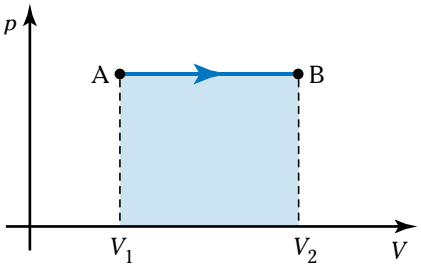
Στην ισοβαρή μεταβολή (σχ. 6.5.11) έχομε για το έργο:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V,\ W = p\int_{V_1}^{V_2}\mathrm{d}V,\ W =$$

$$= p(V_2 - V_1),\ W = p\Delta V.$$

Υπολογίζομε τη θερμότητα από τη σχέση:

$$Q = nC_p\Delta T.$$



Σχ. 6.5.11
Γραφική παράσταση ισοβαρούς μεταβολής σε άξονες p–V.

Υπολογίζομε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας από τη σχέση $\Delta U = nC_V\Delta T$.

Με τη βοήθεια του Πρώτου Θερμοδυναμικού Νόμου μπορούμε να δείξομε τη σχέση που συνδέει τις ειδικές θερμοχωρητικότητες C_V και C_p.

$$\left.\begin{array}{r} Q = \Delta U + W,\ \ nC_p\Delta T = nC_V\Delta T + p\Delta VT \\ \text{Έχομε για ισοβαρή μεταβολή } pV = nRT, \\ p\Delta V = nR\Delta T \end{array}\right\}$$

$$n\,C_p\Delta T = nC_V\Delta T + nR\Delta T \quad \text{άρα} \quad C_p = C_V + R$$

Σε μια ισοβαρή μεταβολή, μέρος από το ποσό θερμότητας που απορρόφησε το αέριο απ' το περιβάλλον χρησιμοποιείται για την αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας και το υπόλοιπο αποδίδεται στο περιβάλλον υπό μορφή έργου.

4) Αδιαβατική μεταβολή.

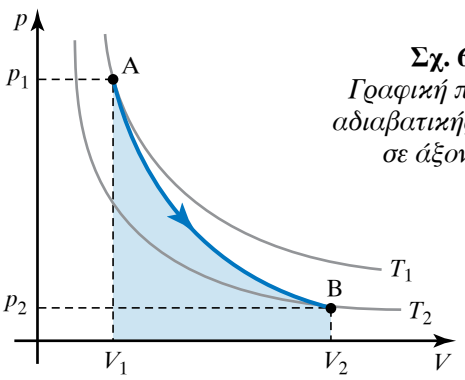
Αδιαβατική μεταβολή ονομάζεται η μεταβολή, στην οποία δεν παρατηρείται ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ του συστήματος (αερίου) και του περιβάλλοντος, δηλαδή είναι $Q = 0$. Αδιαβατική μεταβολή μπορούμε να επιτύχομε σε σύστημα με πολύ υψηλή θερμομόνωση ή πραγματοποιώντας τη μεταβολή γρήγορα, ώστε να μην υπάρχει αρκετό χρονικό διάστημα για σημαντική ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον.

Μελετώντας την αδιαβατική μεταβολή (σχ. 6.5.12) με εργαλείο την καταστατική εξίσωση των αερίων έχομε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Κατάσταση Α } (p_1, V_1, T_1), \\ p_1V_1 = nRT_1 \\ \text{Κατάσταση Β } (p_2, V_2, T_2), \\ p_2V_2 = nRT_2 \end{array}\right\} \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Επίσης, με την εισαγωγή της συνθήκης $dQ=0$ στον Πρώτο Θερμοδυναμικό Νόμο έχομε: $dQ = dU + dW$, $0 = dU + dW$, $dU = -dW$ και προκύπτει ότι: pV^γ = σταθερό,

$$\text{άρα} \quad p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma, \text{ όπου } \gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$



Σχ. 6.5.12
Γραφική παράσταση αδιαβατικής μεταβολής σε άξονες p–V.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την καταστατική εξίσωση:

$pV = nRT$, οπότε από την $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$ προκύπτουν οι σχέσεις:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \quad \text{και} \quad p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma\ .$$

– Αδιαβατική μεταβολή και Πρώτος Θερμοδυναμικός Νόμος.

Από τον ορισμό της αδιαβατικής μεταβολής έχομε $Q = 0$. Υπολογίζομε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας από τη σχέση:

$$\Delta U = nC_V\Delta T.$$

Εφαρμόζοντας τον Πρώτο Θερμοδυναμικό Νόμο έχομε:

$$Q = \Delta U + W, \quad 0 = \Delta U + W, \quad W = -\Delta U$$

$$W = -nC_V(T_2 - T_1), \quad W = nC_V(T_1 - T_2), \qquad (1)$$

$$W = nC_V\left(\frac{p_1V_1}{nR} - \frac{p_2V_2}{nR}\right), \quad W = \frac{C_V}{R}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{C_p}{C_V} = \gamma \\ C_p = C_V + R \end{array}\right\} \gamma C_V = C_V + R,\ C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\} \quad W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2),\ W = \frac{(p_1V_1 - p_2V_2)}{\gamma - 1}.$$

Όταν ένα σύστημα εκτονώνεται υπό αδιαβατικές συνθήκες, το έργο W είναι θετικό και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU αρνητική. Όταν το σύστημα συμπιέζεται αδιαβατικά, το έργο W είναι αρνητικό και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU θετική.

5) Κυκλική μεταβολή.

Κυκλική ονομάζεται η μεταβολή, στην οποία το σύστημα, μετά από μία διεργασία, επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση.

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU σε μία κυκλική μεταβολή είναι μηδέν, εφόσον η αρχική και η τελική κατάσταση είναι ίδιες. Το έργο που παράγε-

ται ή καταναλώνεται σε μία κυκλική μεταβολή είναι ίσο με το εμβαδό που περικλείεται στην καμπύλη απεικονίσεώς της σε διάγραμμα *p-V,* όπως παρατηρούμε στο σχήμα 6.5.13.

Το έργο είναι ίσο με το εμβαδό που περικλείεται στην καμπύλη ΑΒΑ.

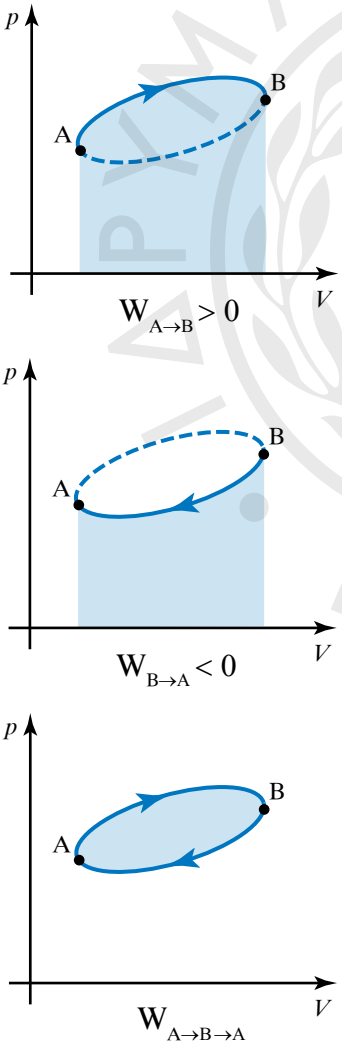
Απ' τον Πρώτο Θερμοδυναμικό Νόμο έχομε:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \Delta U + W \\ \Delta U &= 0 \end{aligned}\right\} \; Q = W.$$

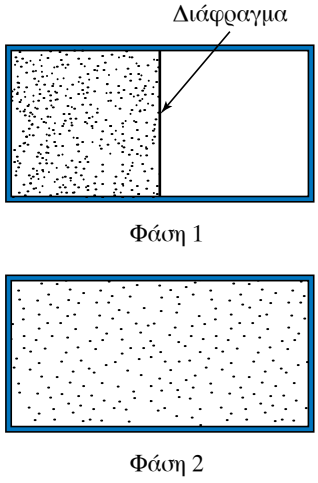
Δηλαδή η θερμότητα είναι ίση με το έργο που παράγεται στην κυκλική μεταβολή.

6.5.7 Ελεύθερη εκτόνωση.

Θεωρούμε ένα θερμικά μονωμένο δοχείο με στερεά τοιχώματα, που διαιρείται μ' ένα διάφραγμα σε δύο χώρους. Ο ένας χώρος περιέχει μια ποσότητα ιδανικού αερίου και ο άλλος είναι κενός.



Σχ. 6.5.13
Κυκλική μεταβολή.



Σχ. 6.5.14
Ελεύθερη εκτόνωση αερίου μετά την αφαίρεση του διαφράγματος.

Όταν αφαιρεθεί το διάφραγμα, το αέριο εκτονώνεται και καταλαμβάνει και τους δύο χώρους στο δοχείο (σχ. 6.5.14). Η παραπάνω μεταβολή είναι μία μη αντιστρεπτή μεταβολή, που ονομάζεται ***ελεύθερη εκτόνωση***. Στην ελεύθερη εκτόνωση το έργο W είναι μηδέν, διότι τα τοιχώματα του δοχείου είναι ακλόνητα.

Επειδή τα τοιχώματα του δοχείου είναι αδιαβατικά, το αέριο δεν ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον, άρα ισχύει ότι $Q=0$. Δηλαδή στην ελεύθερη εκτόνωση έχομε έργο $W=0$, θερμότητα $Q=0$, άρα και μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας $\Delta U=0$. Τα παραπάνω ισχύουν για κάθε αέριο, είτε είναι ιδανικό είτε όχι. Αν το αέριο είναι ιδανικό, δεν μεταβάλλεται η θερμοκρασία του.

Για τα μη ιδανικά αέρια κατά τη διάρκεια της ελεύθερης εκτονώσεως κι ενώ η εσωτερική ενέργεια U παραμένει σταθερή, παρατηρείται κάποια μεταβολή της θερμοκρασίας. Αυτό σημαίνει ότι στα μη ιδανικά αέρια, η εσωτερική ενέργεια δεν εξαρτάται μόνο απ' τη θερμοκρασία, αλλά και από άλλη μεταβλητή (π.χ. την πίεση).

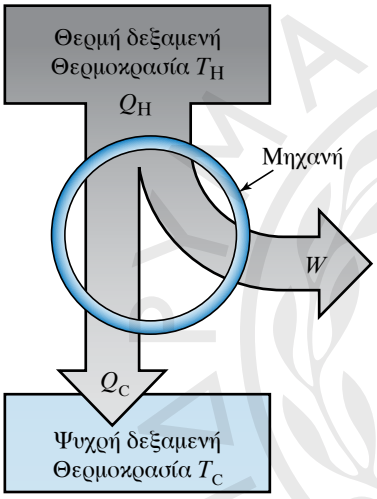
Μικροσκοπικά θα μπορούσαμε να εξηγήσομε το φαινόμενο ως εξής: στα μη ιδανικά αέρια υπάρχουν ελκτικές διαμοριακές δυνάμεις. Όταν το αέριο εκτονώνεται και τα μόρια απομακρύνονται, αυξάνεται η δυναμική ενέργεια, που σχετίζεται με τις δυνάμεις αυτές, με αποτέλεσμα να μειώνεται η κινητική ενέργεια των μορίων, εφόσον η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή. Η μείωση της κινη-

τικής ενέργειας στο αέριο, σημαίνει και πτώση της θερμοκρασίας. Για τον λόγο αυτό η ελεύθερη εκτόνωση στα μη ιδανικά αέρια συνοδεύεται συνήθως από πτώση της θερμοκρασίας.

6.6 Θερμικές μηχανές.

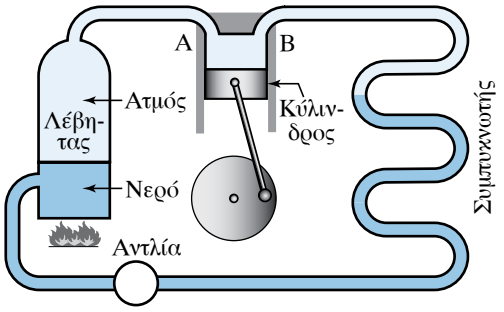
6.6.1 Θερμική μηχανή.

Θερμική μηχανή ονομάζεται οποιαδήποτε διάταξη μετατρέπει τη θερμότητα σε μηχανική ενέργεια. Όλες οι θερμικές μηχανές απορροφούν θερμότητα Q_{H} από μία θερμή δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας T_{H}, παράγουν μηχανικό έργο W και αποβάλλουν θερμότητα Q_{C} σε μία δεξαμενή χαμηλότερης θερμοκρασίας T_C (σχ. 6.6.1).



Σχ. 6.6.1
Σχηματική αναπαράσταση λειτουργίας θερμικής μηχανής.

Παραδείγματα θερμικών μηχανών αποτελούν οι ατμομηχανές (σχ. 6.6.2), οι ατμοστρόβιλοι, αλλά και οι μηχανές εσωτερικής καύσεως (ΜΕΚ), όπως οι βενζινοκινητήρες των αυτοκινήτων. Απ' τις πιο



Σχ. 6.6.2
Λειτουργία θερμικής μηχανής (ατμομηχανής).

απλές θερμικές μηχανές που μπορούμε εύκολα να μελετήσομε είναι εκείνη που χρησιμοποιεί ιδανικό αέριο, το οποίο υποβάλλεται σε κυκλική μεταβολή, δηλαδή μια σειρά μεταβολών που τελικά το επαναφέρουν στην αρχική του κατάσταση.

Η ποσότητα της ύλης που υποβάλλεται στις μεταβολές ονομάζεται ***ενεργό υλικό***. Στην απλή θεωρητική διάταξη το ενεργό υλικό είναι το ιδανικό αέριο, σε μία ατμομηχανή είναι ο ατμός, ενώ στις ΜΕΚ είναι το μείγμα αέρα–καυσίμου. ***Δεξαμενή θερμότητας*** ονομάζεται κάθε σύστημα που είναι δυνατό να απορροφά ή να αποδίδει ποσά θερμότητας χωρίς να μεταβάλλεται πρακτικά η θερμοκρασία του. Δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας T_{C} μπορεί να θεωρηθεί για μια θερμική μηχανή, η ατμόσφαιρα.

– Μελέτη λειτουργίας και απόδοση μιας θερμικής μηχανής.

Θεωρούμε μια θερμική μηχανή όπως απεικονίζεται σχηματικά στο σχήμα 6.6.1, όπου έχομε:

Τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας T_{H}, το σύστημα με το ενεργό υλικό (π.χ. το ιδανικό αέριο) και τη δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας T_{C}. Το ενεργό υλικό απορροφά θερμότητα Q_H από τη θερμή δεξαμενή, παράγει έργο W και αποδίδει θερμότητα Q_{C} στην ψυχρή δεξαμενή. Η διαφορά θερμότητας $Q = Q_{\text{H}} - |Q_{\text{C}}|$ είναι η ποσότητα της θερμότητας που μετατρέπεται σε μηχανικό έργο, δηλαδή $W = Q_{\text{H}} - |Q_{\text{C}}|$.

Η απόδοση μιας θερμικής μηχανής, e, ορίζεται ως ο λόγος του μηχανικού έργου W προς τη θερμότητα Q_{H} που απορροφάται απ' το σύστημα για να παραχθεί το έργο αυτό. Έχομε ότι ο συντελεστής αποδόσεως είναι:

$$e = \frac{W}{Q_{\text{H}}},\ \text{άρα}\ e = \frac{Q_{\text{H}} - |Q_{\text{C}}|}{Q_{\text{H}}}\ \text{ή}\ e = 1 - \frac{|Q_{\text{C}}|}{Q_{\text{H}}}.$$

Ο συντελεστής αποδόσεως e μιας θερμικής μηχανής είναι καθαρός αριθμός, διότι είναι λόγος δύο ομοειδών μεγεθών (ποσοτήτων ενέργειας).

Ο συντελεστής αποδόσεως, e, μιας μηχανής είναι πάντοτε μικρότερος της μονάδας, συμφωνώντας απόλυτα με τον Δεύτερο Θερμοδυναμικό Νόμο.

6.6.2 Κύκλος Carnot.

Ο Γάλλος μηχανικός Nicolas Carnot μελέτησε και παρουσίασε μια κυκλική μεταβολή, πάνω στην οποία θα μπορούσε θεωρητικά να εργαστεί μια θερμική μηχανή. Η θερμική μηχανή που ακολουθεί

την κυκλική μεταβολή του κύκλου Carnot είναι μια ιδανική μηχανή με το μέγιστο δυνατό συντελεστή αποδόσεως μεταξύ δύο δεδομένων θερμοκρασιών T_1 και T_2, που χρησιμοποιεί ιδανικό αέριο ως ενεργό υλικό. Στο σχήμα 6.6.3 περιγράφομε τον κύκλο Carnot, ο οποίος περιλαμβάνει τις εξής μεταβολές:

1) Ισόθερμη εκτόνωση σε θερμοκρασία T_{H}, κατά τη διάρκεια της οποίας απορροφά θερμότητα Q_{H}. (Μεταβολή a-b).

2) Αδιαβατική εκτόνωση μέχρι η θερμοκρασία του να πέσει σε T_{C}. (Μεταβολή b-c).

3) Ισόθερμη συμπίεση σε θερμοκρασία T_{C}, κατά τη διάρκεια της οποίας το αέριο αποβάλλει θερμότητα Q_{C}. (Μεταβολή c-d).

4) Αδιαβατική συμπίεση μέχρι να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση σε θερμοκρασία T_{H}. (Μεταβολή d-a).

Ο συντελεστής αποδόσεως της μηχανής Carnot εξαρτάται μόνο απ' τις θερμοκρασίες T_{c} και T_{H} των δύο δεξαμενών θερμότητας. Θα δείξομε ότι ο συντελεστής αποδόσεως μιας μηχανής Carnot υπολογίζεται από τη σχέση:

$$e_c = 1 - \frac{T_{\text{C}}}{T_{\text{H}}}, \quad e_{\text{c}} = \frac{T_{\text{H}} - T_{\text{C}}}{T_{\text{H}}}.$$

Απόδειξη.

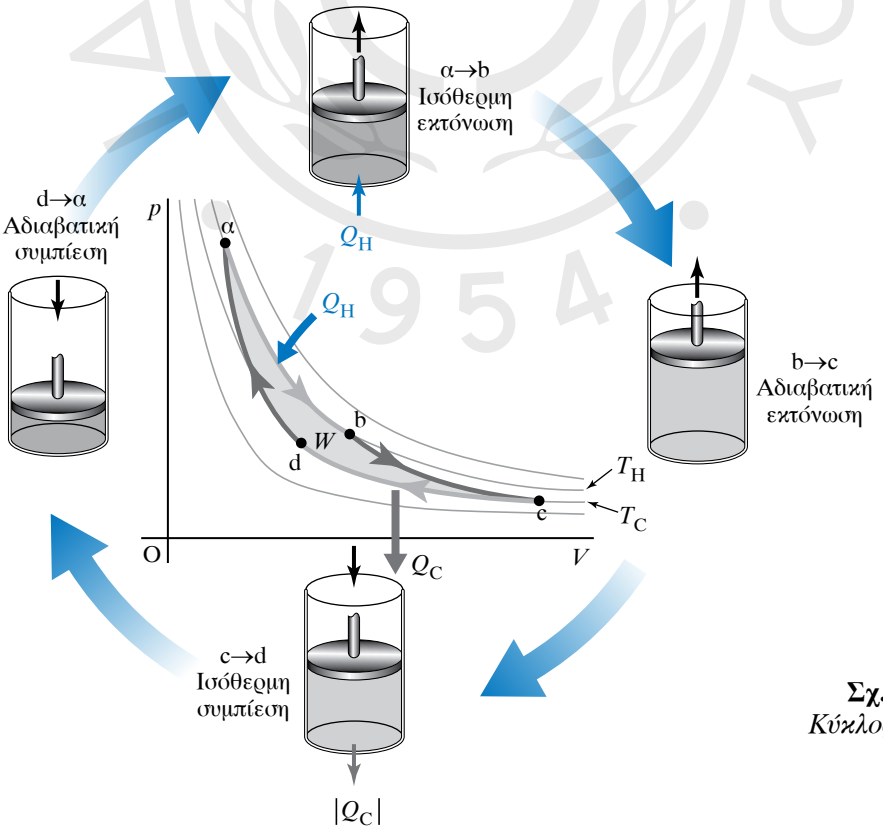
Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ο συντελεστής αποδόσεως μίας μηχανής υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$e = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}.$$

Υπολογίζομε τον λόγο $\dfrac{|Q_C|}{|Q_H|}$ για την περίπτωση που έχομε κύκλο του Carnot, όπου Q_{C} και Q_{H} είναι οι θερμότητες που ανταλλάσσονται στις ισόθερμες μεταβολές. Έχομε:

$$\left.\begin{aligned} Q_C = W_{\text{cd}} = nRT_C \ln\frac{V_{\text{d}}}{V_{\text{c}}},\ Q_C = -nRT_C \ln\frac{V_{\text{c}}}{V_{\text{d}}} \\ Q_H = W_{\text{ab}} = nRT_H \ln\frac{V_b}{V_a} \end{aligned}\right\} \frac{Q_C}{Q_H} =$$

$$= \frac{-nRT_C \ln\frac{V_{\text{c}}}{V_{\text{d}}}}{nRT_H \ln\frac{V_{\text{b}}}{V_{\alpha}}}, \frac{Q_C}{Q_H} = -\frac{T_C \ln\frac{V_{\text{c}}}{V_{\text{d}}}}{T_H \ln\frac{V_{\text{b}}}{V_{\alpha}}}, \quad \frac{Q_C}{Q_H} = -\frac{T_C}{T_H}\frac{\ln\frac{V_{\text{c}}}{V_{\text{d}}}}{\ln\frac{V_{\text{b}}}{V_{\alpha}}}.$$



Σχ. 6.6.3
Κύκλος Carnot.

Από τις δύο αδιαβατικές μεταβολές bc και da έχομε:

$$\left.\begin{aligned} T_H V_{\mathrm{b}}^{\gamma-1} &= T_C V_{\mathrm{c}}^{\gamma-1} \\ T_H V_{\alpha}^{\gamma-1} &= T_C V_{\mathrm{d}}^{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \frac{V_{\mathrm{b}}^{\gamma-1}}{V_{\alpha}^{\gamma-1}} = \frac{V_{\mathrm{c}}^{\gamma-1}}{V_{\mathrm{d}}^{\gamma-1}},\ \frac{V_{\mathrm{b}}}{V_{\alpha}} = \frac{V_{\mathrm{c}}}{V_{\mathrm{d}}}$$

$$\text{άρα: } \ln\frac{V_{\mathrm{b}}}{V_{\alpha}} = \ln\frac{V_{\mathrm{c}}}{V_{\mathrm{d}}}$$

$$\text{άρα: } \left.\begin{aligned} \frac{Q_C}{Q_H} &= -\frac{T_C}{T_H}\frac{\ln\frac{V_{\mathrm{c}}}{V_{\mathrm{d}}}}{\ln\frac{V_{\mathrm{b}}}{V_{\alpha}}} \\ \ln\frac{V_{\mathrm{c}}}{V_{\mathrm{d}}} &= \ln\frac{V_{\mathrm{b}}}{V_{\alpha}} \end{aligned}\right\} \frac{Q_C}{Q_H} = -\frac{T_C}{T_H},\ \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = \frac{T_C}{T_H}.$$

επομένως καταλήγομε για τον συντελεστή αποδόσεως της μηχανής Carnot ότι:

$$e_c = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|},\ e_c = 1 - \frac{T_C}{T_H}.$$

Παρατηρήσεις.

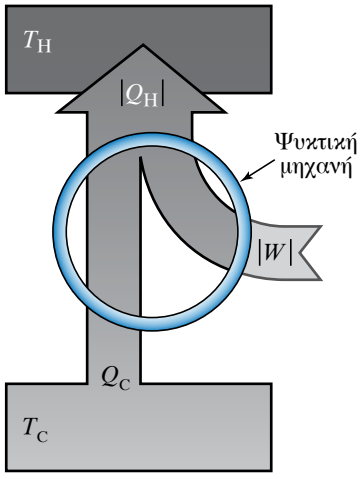
1) Από την τελική σχέση παρατηρούμε ότι η απόδοση για μία θερμική μηχανή Carnot εξαρτάται μόνο απ' τις θερμοκρασίες των δύο δεξαμενών θερμότητας. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, διότι αποδεικνύεται ότι ο κύκλος Carnot έχει τη μέγιστη θεωρητική απόδοση απ' όλες τις θερμικές μηχανές.

2) Γνωρίζοντας δηλαδή τις θερμοκρασίες των δεξαμενών θερμότητας, στις οποίες εργάζεται μια θερμική μηχανή, μπορούμε να υπολογίσομε πολύ εύκολα τη μέγιστη θεωρητική απόδοση που δεν μπορεί να υπερβεί με κανέναν τρόπο.

3) Η απόδοση μιας θερμικής μηχανής Carnot είναι μεγάλη, όταν η διαφορά θερμοκρασιών των δύο δεξαμενών θερμότητας είναι μεγάλη και αντίστοιχα η απόδοση είναι μικρή, όταν η διαφορά των δύο θερμοκρασιών είναι μικρή.

6.6.3 Ψυκτικές μηχανές.

Πολύ συχνά στην καθημερινότητά μας χρησιμοποιούμε μηχανές που λειτουργούν αντίθετα απ' τις παραπάνω μηχανές. Δηλαδή μηχανές που απορροφούν θερμότητα από ένα ψυχρότερο σώμα και τη μεταφέρουν σ' ένα θερμότερο καταναλώνοντας μηχανικό έργο (σχ. 6.6.4).



Σχ. 6.6.4
Σχηματική παράσταση λειτουργίας ψυκτικής μηχανής.

Ψυκτική μηχανή ονομάζεται η μηχανή που απορροφά θερμότητα Q_C από το ψυχρότερο σώμα θερμοκρασίας T_C και καταναλώνοντας έργο W, αποδίδει θερμότητα Q_H στο θερμότερο σώμα θερμοκρασίας T_H.

Για την ψυκτική μηχανή είναι σημαντικό στον κύκλο της να έχει μέγιστη απαγωγή θερμότητας Q_C σε συνδυασμό με την ελάχιστη κατανάλωση έργου W.

Ο λόγος $\dfrac{|Q_C|}{|W|}$ των δύο ποσοτήτων ενέργειας ονομάζεται ***συντελεστής αποδόσεως*** της ψυκτικής μηχανής, συμβολίζεται με ***K*** και είναι αδιάστατος αριθμός όταν οι ποσότητες Q_C, W, Q_H μετρούνται στις ίδιες μονάδες μετρήσεως:

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{|Q_C|}{|W|} \\ |W| &= |Q_H| - |Q_C| \end{aligned}\right\} \text{ άρα: } K = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|}.$$

Πάνω στις βασικές αρχές λειτουργίας του ψυκτικού κύκλου στηρίζονται τα συστήματα κλιματισμού και τα ψυγεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένα πλοίο μεταφέρει από τις ΗΠΑ κοντέινερ που έχουν σήμανση ότι το υλικό που περιέχουν είναι δυνατόν να καταστραφεί, εάν βρεθεί σε θερμοκρασία πάνω από 192 °F. Να μετατραπεί η παραπάνω

πληροφορία σε βαθμούς Κελσίου και σε Κέλβιν.

2. Μεταλλικό βαρέλι που βρίσκεται στο κατάστρωμα του πλοίου εκτίθεται για μια ώρα στην ηλιακή ακτινοβολία και η θερμοκρασία του αυξάνεται κατά $\Delta\theta = 10\ ^{o}C$. Να υπολογισθεί η αντίστοιχη αύξηση σε βαθμούς Φαρενάιτ και σε Κέλβιν.
3. Ποια είναι η μικρότερη τιμή της θερμοκρασίας στην κλίμακα Κελσίου, στην κλίμακα Φαρενάιτ και στην κλίμακα Κέλβιν;
4. Το γραφείο μιας ναυτιλιακής εταιρείας στην επικοινωνία του με τους πλοίαρχους των πλοίων της που ταξιδεύουν σε όλο τον κόσμο λαμβάνει τις παρακάτω πληροφορίες σχετικά με τη θερμοκρασία που επικρατεί στις περιοχές που ταξιδεύουν τα πλοία της: Στην Ανατολική Μεσόγειο έχομε θερμοκρασία 310 K, στη θάλασσα της Νορβηγίας $-10\ ^{o}C$ και στα παράλια του Καναδά $2\ ^{o}F$. Να συγκρίνετε τις θερμοκρασίες των παραπάνω περιοχών.
5. Πόση θερμότητα πρέπει να προσφέρομε σε νερό μάζας 10 kg, ώστε να αυξηθεί η θερμοκρασία του από $20\ ^{o}C$ σε $100\ ^{o}C$. Δίνεται η ειδική θερμότητα του νερού $c = 4200\ J/kg \cdot K$.
6. Στο κατάστρωμα ενός πλοίου υπάρχουν δύο όμοιες μεταλλικές δεξαμενές, μία από σίδηρο και μία από αλουμίνιο. Αν η μάζα της κάθε μίας από αυτές είναι 200 kg, να υπολογισθεί το ποσό της θερμότητας που απαιτείται για κάθε μία, προκειμένου να αυξήσει τη θερμοκρασία της κατά $20\ ^{o}C$. (Οι ειδικές θερμότητες του σιδήρου και του αλουμινίου να βρεθούν από τον σχετικό πίνακα).
7. Στο κατάστρωμα ενός πλοίου υπάρχει δεξαμενή κατασκευασμένη από σίδηρο μάζας 100 kg, η οποία λόγω της εκθέσεώς της στον ήλιο έχει ανάπτυξη θερμοκρασίας $80\ ^{o}C$. Μέσα στη δεξαμενή ρίχνομε 200 kg νερό αρχικής θερμοκρασίας $10\ ^{o}C$. Εάν θεωρήσομε το σύστημα δεξαμενή–νερό μονωμένο, να βρεθεί η τελική θερμοκρασία της δεξαμενής και του νερού μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας. (Οι ειδικές θερμότητες του σιδήρου και του νερού να βρεθούν από τον σχετικό πίνακα).
8. Ο μηχανικός ενός πλοίου στην προσπάθειά του να προσδιορίσει το υλικό κατασκευής ενός μεταλλικού εξαρτήματος της ηλεκτρομηχανής πραγματοποιεί το εξής πείραμα: Τοποθετεί το εξάρτημα σε ειδικά μονωμένο χώρο, του προφέρει θερμότητα $Q = 36$ kJ και διαπιστώνει ότι από $25\ ^{o}C$ που ήταν αρχικά, αυξάνεται στους $105\ ^{o}C$. Με δεδομένο ότι η μάζα του είναι 0,5 kg και χρησιμοποιώντας τον πίνακα ειδικών θερμοτήτων, βοηθήστε τον να προσδιορίσει το υλικό κατασκευής.
9. Μονωμένη δεξαμενή περιέχει 200 kg νερό θερμοκρασίας $90\ ^{o}C$. Να υπολογισθεί η ποσότητα νερού θερμοκρασίας $20\ ^{o}C$ που πρέπει να προσθέσομε στη δεξαμενή, ώστε να μειωθεί η θερμοκρασία στους $70\ ^{o}C$. Ποια ποσότητα θερμότητας αντάλλαξαν οι δύο μάζες νερού;
10. Να υπολογισθεί το τελικό μήκος σιδερένιας ράβδου, όταν αποκτήσει θερμοκρασία $610\ ^{o}C$. Αρχικά η ράβδος βρίσκεται σε θερμοκρασία $10\ ^{o}C$ και έχει μήκος 5 m.
11. Μεταλλική ράβδος μήκους 20 cm συνδέει δύο κινητά μέρη μηχανής. Κατά τη λειτουργία της από $20\ ^{o}C$ αρχικά φτάνει σε θερμοκρασία $220\ ^{o}C$. Για να μην δημιουργεί προβλήματα το υπόλοιπο σύστημα, με το οποίο συνεργάζεται, πρέπει κατά τη μεταβολή της θερμοκρασίας που συμβαίνει, η διαστολή της ράβδου να φτάσει έως τα 0,036 mm. Χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους πίνακες, βρείτε υλικά που είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσομε για την κατασκευή της ράβδου.
12. Πόσο θα αυξηθεί το εμβαδόν μιας τετράγωνης επιφάνειας αλουμινίου με αρχικό εμβαδόν $2\ m^2$, αν μεταβληθεί ομοιόμορφα η θερμοκρασία της από $20\ ^{o}C$ σε $200\ ^{o}C$;
13. Γυάλινος ογκομετρικός σωλήνας ύψους 1 m, για τον οποίο θεωρούμε ότι έχει αμελητέα θερμική διαστολή, περιέχει άγνωστο υγρό που πρέπει να προσδιορίσομε. Για το υγρό αυτό γνωρίζομε ότι, αν η θερμοκρασία του αυξηθεί από $0\ ^{o}C$ σε $100\ ^{o}C$, διαστέλλεται και απ' την υψομετρική θέση 50 cm στον σωλήνα μεταβαίνει στην υψομετρική θέση 50,9 cm. Να υπολογισθεί ο συντελεστής κυβικής διαστολής του υγρού και με τη χρήση των αντιστοίχων πινάκων να προσδιορισθεί το υγρό που περιέχει ο σωλήνας.
14. Ο πλοίαρχος ενός δεξαμενόπλοιου φορτώνει από τον κόλπο του Περσικού 500.000 L πετρέλαιο σε θερμοκρασία $25\ ^{o}C$ και το παραδίδει μετά από έναν μήνα στη Μεγάλη Βρετανία. Κατά την εκφόρτωση επικρατεί παγετός και η θερμοκρασία του πετρελαίου έχει φτάσει στους $2\ ^{o}C$. Ο αγοραστής, μετρώντας τον όγκο του πετρελαίου που παρέλαβε, κατηγορεί τον πλοίαρχο για κλοπή. Ο πλοίαρχος απέδειξε ότι το πετρέλαιο που παρέδωσε έχει μικρότερο όγκο λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας. Ποιος ήταν ο όγκος του πετρελαίου που παρέλαβε ο αγοραστής τελικά; Οι συντελεστές διαστολής να αναζητηθούν στους κατάλληλους πίνακες.
15. Ένα κυλινδρικό δοχείο βρίσκεται σε οριζόντια θέση και περιέχει ορισμένη μάζα αερίου, που συμπεριφέρεται ως ιδανικό. Το άνω μέρος του δοχείου φράσσεται με έμβολο, διαμέτρου $d = 10$ cm το οποίο έχει τη δυνατότητα να μετακινείται με τη χρήση ειδικού βραχίονα. Η αρχική κατάστα-

ση του συστήματος περιγράφεται ως εξής: Πίεση αερίου $p = 1\,\text{atm}$, θερμοκρασία $27\,^{\circ}\text{C}$ και όγκος $V = 1\,\text{L}$. Να υπολογίσετε την πίεση του αερίου, όταν το συμπιέσομε μέσω του εμβόλου, ώστε να καταλαμβάνει όγκο 0,5 L, ενώ η θερμοκρασία του έχει ανέβει στους $177\,^{\circ}\text{C}$. Να υπολογισθεί η δύναμη που πρέπει να ασκείται απ' τον βραχίονα στο έμβολο, ώστε να διατηρείται η σκατάσταση αυτή.

16. Κυλινδρικό δοχείο περιέχει ιδανικό αέριο που βρίσκεται σε θερμοδυναμική κατάσταση Α, καταλαμβάνει όγκο $V_A = 0{,}01\,\text{m}^3$, σε θερμοκρασία $T_A = 300\,\text{K}$ και πίεση $p_A = 8\times10^5\,\text{N/m}^2$. Προκαλούμε στο αέριο τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές: Το θερμαίνομε υπό σταθερή πίεση μέχρι ο όγκος του να γίνει $V_B = 0{,}02\,\text{m}^3$. Στη συνέχεια, διατηρούμε τον όγκο σταθερό και το ψύχομε μέχρι η πίεση να γίνει $p_\Gamma = 4\times10^5\,\text{N/m}^2$ και μετά το συμπιέζομε ισόθερμα μέχρι η πίεσή του να αποκτήσει την αρχική τιμή p_A.

α) Να αναγνωρίσετε τις μεταβολές που προκλήθηκαν στο αέριο και να γράψετε τους νόμους, που τις περιγράφουν.

β) Υπολογίστε για κάθε κατάσταση την πίεση, τη θερμοκρασία και τον όγκο του αερίου.

γ) Να σχεδιάσετε τις παραπάνω μεταβολές σε διαγράμματα *p–V, V–T, p–T*.

17. Ιδανικό αέριο ποσότητας (ουσίας) $n = 0{,}48\,\text{mol}$ βρίσκεται αρχικά στη θερμοδυναμική κατάσταση Α με $p_A = 2\times10^5\,\text{N/m}^2$, $V_A = 6\times10^{-3}\ \text{m}^3$. Προκαλούμε στο αέριο τις παρακάτω αντιστρεπτές θερμοδυναμικές μεταβολές:

– ΑΒ ισόθερμη εκτόνωση μέχρι όγκο $V_B = 12\times10^{-3}\,\text{m}^3$.

– ΒΓ ισόχωρη θέρμανση μέχρι τη θερμοκρασία $T_\Gamma = 3T_A$.

– ΓΔ ισοβαρή συμπίεση μέχρι θερμοκρασία $T_\Delta = 2T_A$.

α) Να υπολογίσετε για κάθε κατάσταση την πίεση, τη θερμοκρασία και τον όγκο του αερίου και να σχεδιάσετε τις μεταβολές σε άξονες *p–V*.

β) Να υπολογίσετε το έργο και τη θερμότητα που αντάλλαξε το αέριο με το περιβάλλον σε κάθε μεταβολή και το έργο για τη συνολική μεταβολή.

γ) Να υπολογισθεί η μεταβολή της εσωτερικής ενεργείας του αερίου στη συνολική μεταβολή ΑΔ.

Δίνεται $C_V = 3R/2$, $R = 8{,}314\cdot\text{J}\,(/\text{mol}\cdot\text{K})$

18. Ένα ιδανικό αέριο $C_V = 3R/2$ βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση $p_A = 160\,\text{N/m}^2$ και υπόκειται στην κυκλική μεταβολή που διαμορφώνεται απ' τις παρακάτω μεταβολές:

– ΑΒ ισοβαρής εκτόνωση μέχρι όγκου $V_B = 8\,\text{m}^3$

– ΒΓ ισόχωρη ψύξη

– ΓΑ αδιαβατική συμπίεση, η οποία μπορεί να περιγράφεται από τη σχέση $pV^\gamma = 160\,\text{Nm}^3$

α) Να παραστήσετε την κυκλική μεταβολή σε άξονες *p–V*.

β) Να υπολογίσετε το έργο, τη θερμότητα και τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας σε κάθε μεταβολή, καθώς και το ολικό έργο.

γ) Αν μια θερμική μηχανή εργάζεται με τον παραπάνω κύκλο, να υπολογισθεί ο συντελεστής αποδόσεώς της.

19. Θερμική μηχανή εργάζεται με ποσότητα ιδανικού αερίου που εκτελεί τον παρακάτω κύκλο αντιστρεπτών μεταβολών: ισοβαρής εκτόνωση ΑΒ, αδιαβατική εκτόνωση ΒΓ, ισόθερμη συμπίεση ΓΑ. Για τη διεργασία αυτή γνωρίζομε τα παρακάτω: $T_A = 300\,\text{K}$, $T_B = 1200\,\text{K}$, $T_\Gamma = 300\,\text{K}$, $\gamma = 1{,}40$, $n = 0{,}5\,\text{mol}$, $R = 8{,}314\,\text{J/(mol}\times\text{K)}$.

α) Να υπολογισθεί η απόδοση της θερμικής μηχανής.

β) Αν η μηχανή εκτελεί 5000 κύκλους ανά λεπτό να υπολογισθεί η ισχύς της.

20. Υπολογίστε το συντελεστή αποδόσεως μιας μηχανής του Carnot που εργάζεται με ιδανικό αέριο μεταξύ των θερμοκρασιών $T_H = 1600\,\text{K}$ και $T_C = 1200\,\text{K}$. Ποια θα έπρεπε να είναι η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής, ώστε η απόδοση της μηχανής να είναι διπλάσια; Πόση θερμότητα ανά κύκλο πρέπει να απορροφά σε κάθε περίπτωση η μηχανή, ώστε να αποδίδει μηχανικό έργο 400 J; Πόσο μηχανικό έργο θα αποδίδει ανά κύκλο σε κάθε περίπτωση, αν η θερμότητα που απορροφά απ' τη θερμή δεξαμενή είναι 1000 J ανά κύκλο;

21. Δύο θερμικές μηχανές, που εργάζονται με κύκλο Carnot αντλούν θερμότητα από τη θερμή δεξαμενή θερμοκρασίας $T_H = 1000\,\text{K}$. Να υπολογίσετε τον συντελεστή αποδόσεως κάθε μηχανής, αν γνωρίζετε ότι η πρώτη απορροφά θερμότητα 600 J ανά κύκλο και αποβάλλει θερμότητα στην ψυχρή δεξαμενή 300 J, ενώ η δεύτερη απορροφά θερμότητα 900 J και αποβάλλει θερμότητα 600 J στην ψυχρή της δεξαμενή.

α) Από τα δεδομένα που έχετε στη διάθεσή σας μπορείτε να αντιληφθείτε αν οι δύο μηχανές αποβάλλουν θερμότητα στην ίδια ψυχρή δεξαμενή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) Υπολογίστε τη θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής για κάθε μηχανή.

γ) Πόσο πρέπει να μεταβάλομε τη θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής της δεύτερης μηχανής ώστε να εξισωθούν οι αποδόσεις των δύο μηχανών;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Στατιστική μηχανική

7.1 Στατιστική ισορροπία.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσομε τη συμπεριφορά των αερίων με τη βοήθεια της στατιστικής επιστήμης.

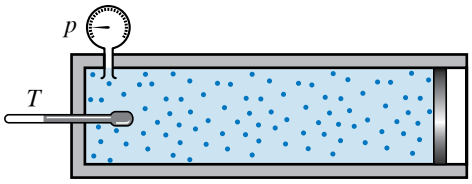
Αρχικά θα αναφερθούμε στην περίπτωση ιδανικού αερίου, που εξετάζεται μέσα στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής. Το αέριο χαρακτηρίζεται από μακροσκοπικά φυσικά μεγέθη, όπως η πίεση και η θερμοκρασία, τα οποία σχετίζονται με μεγάλο πλήθος δομικών λίθων του αερίου (μόρια, άτομα) και από μικροσκοπικά μεγέθη που σχετίζονται με τους επιμέρους δομικούς λίθους. Είναι ευνόητο ότι δεν μπορούμε να γνωρίζομε κάθε χρονική στιγμή τι κάνει ο κάθε δομικός λίθος του αερίου (το πλήθος τους εξάλλου είναι της τάξεως του 10^{23}), μπορούμε όμως να περιγράφομε το αέριο με τα γνωστά μας μακροσκοπικά μεγέθη και με τη στατιστική μηχανική να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των μακροσκοπικών και των μικροσκοπικών μεγεθών. Για παράδειγμα, η πίεση του αερίου μπορεί να ερμηνευτεί απ' τις συγκρούσεις των δομικών λίθων του αερίου με τα τοιχώματα του δοχείου.

Ας φανταστούμε μία σταθερή ποσότητα ιδανικού αερίου σ' ένα κλειστό θερμομονωμένο δοχείο, με σταθερό όγκο, σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι η θερμοκρασία σε κάθε σημείο του αερίου είναι σταθερή με τον χρόνο. Επίσης, η θερμοκρασία είναι ίδια σε κάθε σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το αέριο και δεν υπάρχει ροή ενέργειας ή μάζας από ένα σημείο στο άλλο, ούτε από και προς το περιβάλλον.

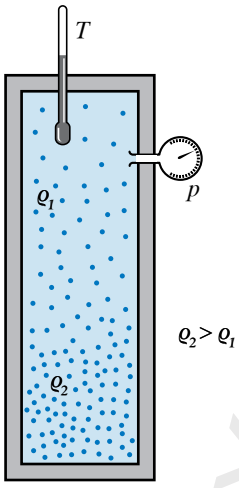
Αυτό το ιδανικό αέριο αποτελεί ένα σύστημα με πολύ μεγάλο αριθμό, N, σωματιδίων και το κάθε σωματίδιο μπορεί να έχει μία από τις ενέργειες E_i. Κάθε χρονική στιγμή, το κάθε σωματίδιο του αερίου χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες θέσεως και ορμής του. Αυτό είναι μια μικροκατάσταση του συστήματος, η οποία γενικώς δεν είναι κατάσταση (θερμοδυναμικής) ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να αντιστοιχεί σε μακροκατάσταση, όπου στις διαφορετικές θέσεις μέσα στο αέριο να έχομε διαφορετική θερμοκρασία (μακροσκοπικό μέγεθος) και διαφορετική πίεση (επίσης μακροσκοπικό μέγεθος). Έτσι, δύναται να υπάρχει ροή μάζας και ενέργειας μεταξύ των διαφόρων σημείων του αερίου. Ένα θεμελιώδες αίτημα της στατιστικής μηχανικής είναι ότι όλες οι μικροκαταστάσεις έχουν την ίδια πιθανότητα να υπάρχουν.

Έστω ότι n_1 σωματίδια έχουν ενέργεια E_1, n_2 σωματίδια ενέργεια E_2, ... n_i σωματίδια E_i. Η ολική ενέργεια του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση $U = \sum n_i E_i = n_1 E_1 + n_2 E_2 + ... + n_i E_i$ είναι σταθερή με τον χρόνο και ο ολικός αριθμός των σωματιδίων είναι δεδομένος (σταθερός), δηλαδή ίσος με $N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \ ... \ + n_i$. Λόγω των αλληλεπιδράσεων και των συγκρούσεων των μορίων του συστήματος η κατανομή των σωματιδίων μεταξύ των ενεργειακών καταστάσεων μεταβάλλεται. Δηλαδή απ' τις συγκρούσεις αλλάζει το πλήθος των σωματιδίων, που βρίσκονται κατανεμημένα σε διάφορες μικροσκοπικές ενεργειακές καταστάσεις E_i, παρόλο που η ολική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Η στατιστική μελέτη του φαινομένου της κατανομής των σωματιδίων δείχνει ότι για δεδομένο σύστημα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (πλήθος σωματιδίων και δομή) και για δεδομένη ολική ενέργεια υπάρχει μία ενεργειακή κατανομή των σωματιδίων, που είναι πολύ πιο πιθανή απ' τις άλλες. Αυτή είναι η κατανομή της καταστάσεως (θερμοδυναμικής) ισορροπίας. Αν τα σωματίδια έχουν ενέργεια που δεν εξαρτάται απ' τη θέση τους στον χώρο, τότε θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο δοχείο (σχ. 7.1.1), δηλαδή η (μακροσκοπική) πυκνότητα του αερίου θα είναι ίδια σε όλη του την έκταση. Αν το αέριο βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας με ένταση προς τα κάτω και το δοχείο έχει σχετικά μεγάλο ύψος, η πυκνότητα θα είναι μεγαλύτερη στη βάση του δοχείου (σχ. 7.1.2).



Σχ. 7.1.1
Σύστημα πολλών σωματιδίων. Αέριο σε δοχείο.



Σχ. 7.1.2
Σύστημα πολλών σωματιδίων σε δοχείο με σχετικά μεγάλο ύψος μέσα σε πεδίο βαρύτητας.

Μελετώντας ένα σύστημα πολλών σωματίδιων που έχει καθορισμένη ενέργεια (ας υποθέσομε εδώ, μόνο κινητική) και βρίσκεται σε ισορροπία, προκύπτει ότι η μέση κινητική ενέργεια κμ των σωματιδίων του, που προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$K_{\mu} = \frac{U}{N} = \frac{n_1E_1 + n_2E_2 + \ldots + n_iE_i}{n_1 + n_2 + \ldots + n_i}$$

έχει αυτήν την καθορισμένη τιμή και άρα η θερμοκρασία του είναι καθορισμένη.

Όταν ένα σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, παραμένει με μικρές στατιστικές διακυμάνσεις κοντά στην πιο πιθανή κατανομή. Δηλαδή οι αριθμοί n_1, n_2, n_3,... n_i, που αντιστοιχούν σε ενέργειες E_1, E_2, E_3, ..E_i, διατηρούν τιμές που κυμαίνονται κοντά στις τιμές της πιο πιθανής κατανομής. Στην περίπτωση αυτή δεν παρατηρούμε σημαντικές μακροσκοπικές μεταβολές στο σύστημα, όπως αλλαγή της θερμοκρασίας του.

7.2 Κατανομή των Maxwell–Boltzmann.

Καθοριστικές για τη μελέτη των θεμάτων της στατιστικής μηχανικής υπήρξαν οι εργασίες των J. Maxwell, L. Boltzmann και J. Gibbs.

Ο νόμος του Boltzmann (κατανομή του Boltzmann) είναι βασικός νόμος της στατιστικής μηχανικής και υπολογίζει τον αριθμό των σωματιδίων n_i που αντιστοιχούν σε ενέργεια E_i (αριθμός καταλήψεως), όταν το αέριο βρίσκεται σε θερμοκρασία T και σε θερμοδυναμική ισορροπία. Η μαθηματική σχέση που τον περιγράφει είναι:

$$n_i = Ae^{-E_i/kT}$$

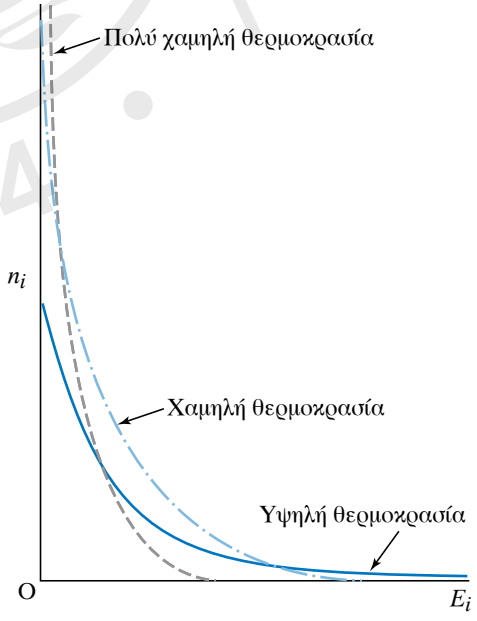
όπου n_i ο αριθμός των σωματιδίων με ενέργεια E_i, k η σταθερά του Boltzmann και A ένας συντελεστής που εξαρτάται από τη θερμοκρασία, από τον ολικό αριθμό των σωματιδίων και από άλλες ιδιότητες των σωματιδίων.

Στο σχήμα 7.2.1 παρουσιάζεται η κατανομή των σωματιδίων ενός συστήματος, όταν το σύστημα βρίσκεται σε υψηλή, σε χαμηλή και σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία. Από το σχήμα μπορούμε να παρατηρήσομε ότι:

1) Για δεδομένη θερμοκρασία, όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια E_i, τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός των σωματιδίων που βρίσκονται σ' αυτήν την κατάσταση.

2) Όταν το σύστημα βρίσκεται σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία, μόνο οι χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες είναι κατειλημμένες από σωματίδια.

3) Όταν το σύστημα βρίσκεται σε υψηλή θερ-



Σχ. 7.2.1
Γραφικές παραστάσεις της κατανομής Boltzmann για τρεις θερμοκρασίες.

μοκρασία, «μεταφέρονται» σωματίδια από τις χαμηλές ενεργειακές στάθμες σε υψηλές ενεργειακές στάθμες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί ο λόγος των αριθμών καταλήψεως (n_i/n_j) δύο ενεργειακών σταθμών E_i και E_j.

Λύση

$$\frac{n_i}{n_j}=\frac{Ae^{-E_i/kT}}{Ae^{-E_j/kT}}=Ae^{-(E_i-E_j)/kT}=Ae^{-\Delta E/kT}.$$

Μία εφαρμογή του νόμου του Boltzmann είναι ο υπολογισμός της κατανομής των ενεργειών και των ταχυτήτων των μορίων ενός αέριου σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Αυτή είναι η κατανομή των Maxwell–Boltzmann. Συγκεκριμένα, θα υπολογίσουμε τον αριθμό dn των μορίων, που έχουν ενέργεια στην περιοχή από E έως $E+dE$ ή ταχύτητες από u έως $u+du$.

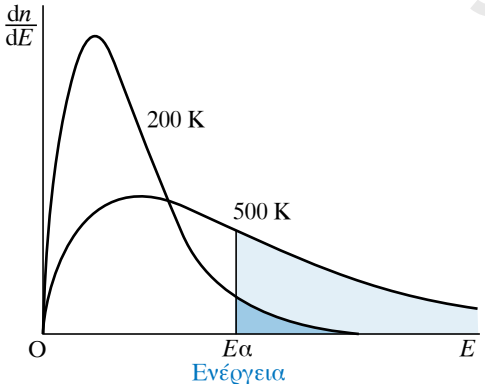
Αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις που προκύπτουν είναι οι παρακάτω:

1) Νόμος κατανομής για τις ενέργειες:

$$dn=\frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}}E^{1/2}e^{-E/kT}dE \quad (\text{σχ. } 7.2.2).$$

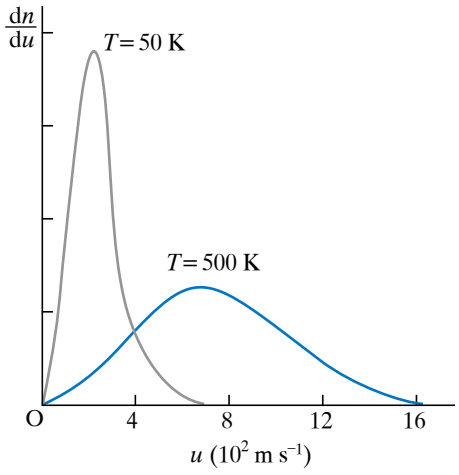
2) Νόμος κατανομής για τις ταχύτητες:

$$dn=4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}u^2e^{-mv^2/2kT}du \quad (\text{σχ. } 7.2.3).$$



Σχ. 7.2.2

Μοριακή ενεργειακή κατανομή ενός αερίου για δύο διαφορετικές θερμοκρασίες.



Σχ. 7.2.3

Κατανομή μοριακών ταχυτήτων ενός αερίου για δύο διαφορετικές θερμοκρασίες.

Παρατηρήσεις.

1) Η μοριακή ενεργειακή κατανομή είναι ίδια για όλα τα ιδανικά αέρια στην ίδια θερμοκρασία, ενώ η κατανομή των ταχυτήτων είναι διαφορετική για διαφορετικά αέρια στην ίδια θερμοκρασία, λόγω της διαφορετικής μάζας των μορίων των αερίων.

2) Από μελέτη της καμπύλης κατανομής των ταχυτήτων, μπορούμε σε κάθε κατανομή να διακρίνομε τρεις ταχύτητες:

α) Την πιο πιθανή ταχύτητα $u_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$, που αντιστοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης και εκφράζει την ταχύτητα που είναι πιθανότερο να έχουν τα μόρια.

β) Τη μέση ταχύτητα $\bar{u}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, η οποία ορίζεται από τη σχέση $\bar{u}=\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_N}{N}\right)$ και αντιστοιχεί στη μέση τιμή των ταχυτήτων (μέτρων).

γ) Την ενεργό ταχύτητα $u_{rms}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$, που μας δίνει την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων και συνδέεται άμεσα με τη θερμοκρασία του αερίου.

3) Η κατανομή ταχυτήτων των Maxwell–Boltzmann μπορεί να εξηγήσει και φαινόμενα όπως είναι η χημική σύσταση της ατμόσφαιρας των πλανητών. Η ενεργός ταχύτητα (u_{rms}) των

μορίων, που προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$u_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

εξαρτάται από τη μάζα και τη θερμοκρασία, άρα τα μόρια της ατμόσφαιρας με μικρότερη μάζα αποκτούν μεγάλες ταχύτητες (μεγαλύτερες απ' την ταχύτητα διαφυγής) και μπορούν να διαφύγουν απ' την ατμόσφαιρα του πλανήτη και να διασκορπιστούν στο διάστημα. Έτσι εξηγείται και η απουσία από τη θερμή Αφροδίτη των ελαφρών μορίων H_2, N_2, O_2.

7.3 Κινητική θεωρία και καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων.

Στη συνέχεια θα αποδείξομε ότι η πίεση των αερίων εξηγείται με βάση την κινητική θεωρία και η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων αποδεικνύεται με χρήση αυτής της θεωρίας. Στο σημείο αυτό θα υπενθυμίσομε τις εξής υπεραπλουστεύσεις για τα ιδανικά αέρια σε θερμοδυναμική ισορροπία:

1) Μέσα σε ένα δοχείο περιέχεται τεράστιο πλήθος δομικών λίθων (μόρια) του αερίου. Ο όγκος του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερος από το συνολικό όγκο όλων των μορίων που αποτελούν το αέριο.

2) Οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων και των τοιχωμάτων του δοχείου είναι αμελητέες κατά τη διάρκεια της κινήσεως των μορίων και εμφανίζονται στιγμιαία μόνο τη στιγμή της μεταξύ τους συγκρούσεως.

3) Κάθε στιγμή στο εσωτερικό του δοχείου, τα μόρια κινούνται ατάκτως προς όλες τις κατευθύνσεις, έτσι ώστε, κατά μέσον όρο, όσα μόρια κινούνται προς μία κατεύθυνση, τόσα κινούνται και προς οποιαδήποτε άλλη.

4) Οι κρούσεις των μορίων με τα τοιχώματα του δοχείου και μεταξύ τους είναι τελείως ελαστικές.

Θα προσπαθήσομε να συνδέσομε αυτό που συμβαίνει μικροσκοπικά μ' αυτό που παρατηρούμε μακροσκοπικά.

Έστω ότι έχομε ένα δοχείο σχήματος κύβου, που περιέχει ιδανικό αέριο με τα χαρακτηριστικά που περιγράψαμε παραπάνω. Τα τοιχώματα του δοχείου δέχονται πίεση λόγω των κρούσεων των μορίων μ' αυτά. Η πίεση p που ασκείται σ' ένα τοίχωμα του δοχείου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p = F/A,$$

όπου F η δύναμη που δέχεται η επιφάνεια A του τοιχώματος του κυβικού δοχείου από τις κρούσεις των μορίων με αυτήν. Για ευκολία θα λάβομε υπόψη/χρησιμοποιήσομε την απλή παραδοχή ότι κάθε χρονική στιγμή το $\frac{1}{6}$ των μορίων κινείται προς την κάθε μία πλευρά του κυβικού δοχείου με μεταφορική ταχύτητα ίδιου μέτρου, u. Το πλήθος των μορίων που σε χρόνο $\mathrm{d}t$ συγκρούονται με τη δεξιά επιφάνεια του κύβου ισούται με το πλήθος των μορίων, που βρίσκονται μέσα σε παραλληλεπίπεδο εμβαδού βάσεως A και ύψους $u\mathrm{d}t$ και κινούνται προς τα δεξιά (σχ. 7.3).

Το σύνολο των μορίων στον όγκο V του κύβου είναι N, άρα η συγκέντρωσή τους είναι N/V, επομένως το πλήθος των μορίων που συγκρούονται με το δεξί τοίχωμα σε χρόνο $\mathrm{d}t$ είναι:

$$\mathrm{d}N = \frac{1}{6}\frac{N}{V}Au\mathrm{d}t.$$

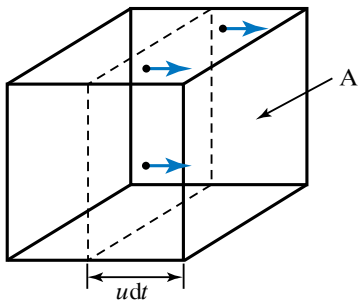
Εφόσον η κρούση είναι ελαστική, το κάθε μόριο μετά τη σύγκρουσή του με το τοίχωμα κινείται με κατεύθυνση προς τα αριστερά, με ταχύτητα ίδιου μέτρου. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της ορμής του κάθε μορίου είναι $mu-(-mu)=2mu$, όπου m η μάζα του κάθε μορίου. Η μεταβολή της ορμής των $\mathrm{d}N$ μορίων που συγκρούστηκαν σε χρόνο $\mathrm{d}t$ με το δεξί τοίχωμα είναι:

$$\mathrm{d}p = 2mu\mathrm{d}N = 2mu\frac{1}{6}\frac{N}{V}Au\mathrm{d}t.$$

Η δύναμη που ασκεί κατά μέσο όρο το τοίχωμα στα μόρια αυτά είναι:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

Σύμφωνα με την αρχή της δράσεως-αντιδράσεως,



Σχ. 7.3

Σε χρόνο dt συγκρούονται με το τοίχωμα του δοχείου τα μόρια που καταλαμβάνουν όγκο V=Audy.

η δύναμη που ασκεί το αέριο στο τοίχωμα έχει ίδιο μέτρο, επομένως η πίεση που ασκεί το αέριο είναι:

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{mu^2}{2}.$$

Είναι ευνόητο ότι πρέπει να πάρομε μέσες τιμές, διότι δεν έχουν τα μόρια ίδιες ταχύτητες, άρα θα ισχύει:

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}m\overline{u^2}.$$

Για τη μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων έχομε πει ότι ισχύει:

$$u_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}\ ,\ \text{δηλαδή}\ \ \overline{u^2} = \frac{3kT}{m}.$$

Επομένως: $pV = NkT$. Το πλήθος των μορίων N ισούται με την ποσότητα ουσίας n που μετρείται σε mol επί τη σταθερά του Avogadro N_{A}, $N = nN_A$, επομένως $pV = nN_AkT$.

Έτσι, με χρήση της κινητικής θεωρίας, καταλήγομε στο ότι η σταθερά των αερίων R που έχομε στον τύπο της καταστατικής εξισώσεως των ιδανικών αερίων, $pV = nRT$ σχετίζεται με δύο άλλες σταθερές: τη σταθερά του Avogadro και τη σταθερά του Boltzmann, δηλαδή $R = kN_{\text{A}}$.

– Θεώρημα Ισοκατανομής της ενέργειας.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για την κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς κάθε μορίου ενός ιδανικού αερίου, ισχύει:

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}m\overline{u^2} = 3\frac{1}{2}kT.$$

Όμως ισχύουν:

$$\overline{u_x^2} = \overline{u_y^2} = \overline{u_z^2}\ ,\ \text{όμως}\ u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

$$\text{οπότε}\ \ \overline{u^2} = \overline{u_x^2} + \overline{u_y^2} + \overline{u_z^2}.$$

Έτσι βρίσκομε ότι:

$$3\frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}m\overline{u_x^2} + \frac{1}{2}m\overline{u_y^2} + \frac{1}{2}m\overline{u_z^2} =$$

$$= 3\frac{1}{2}m\overline{u_x^2} = 3\frac{1}{2}m\overline{u_y^2} = 3\frac{1}{2}m\overline{u_z^2}.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι για κάθε μία συνιστώσα ταχύτητας η μέση ενέργεια ισούται με $1/2\,kT$.

Αυτό είναι ένα πιο γενικό θεώρημα, που ονομάζεται ***θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας*** και ισχύει όχι μόνο για αέρια, αλλά και για όλα τα υλικά σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Πιο συγκεκριμένα, η ενέργεια ενός μορίου εξαρτάται από το είδος των κινήσεων του μορίου που μπορεί να είναι πολυατομικό.

Για παράδειγμα, ένα διατομικό μόριο εκτός απ' τη μεταφορική του κίνηση μπορεί να περιστρέφεται περί άξονές του και να ταλαντεύεται. Οι διάφορες κινήσεις χαρακτηρίζονται απ' τους θερμοδυναμικούς βαθμούς ελευθερίας του μορίου, f.

Η ενέργεια ενός μορίου μπορεί να έχει f όρους της μορφής $1/2\ A_i\eta_i^2$, όπου το A_i είναι κάποια σταθερή ποσότητα χαρακτηριστική του μορίου, όπως μάζα, ροπή αδράνειας κ.λπ. και το η_i συντεταγμένες θέσεως, όπως οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου μάζας του μορίου, οι αντίστοιχες ταχύτητες, οι γωνίες περιστροφής ή οι αντίστοιχες γωνιακές ταχύτητες κ.λπ.. Οι διάφοροι όροι αντιστοιχούν σε κινητική και δυναμική ενέργεια. Το θεώρημα της ισοκατανομής της ενέργειας λέει ότι κατά μέσο όρο σε κάθε βαθμό θερμοδυναμικής ελευθερίας αντιστοιχεί ενέργεια $1/2\,kT$.

Για f θερμοδυναμικούς βαθμούς ελευθερίας, η ενέργεια του μορίου είναι $E = f\ 1/2\,kT$. Για μονατομικά αέρια οι βαθμοί ελευθερίας είναι τρεις. Για διατομικά μόρια, τα οποία μπορεί να περιστρέφονται περί τρεις άξονες στον χώρο, οι θερμοδυναμικοί βαθμοί ελευθερίας είναι 6, όμως για λόγους που εξηγούνται απ' την κβαντομηχανική, ο ένας βαθμός είναι «παγωμένος» σε συνήθεις θερμοκρασίες, οπότε οι βαθμοί ελευθερίας είναι 5. Τα διατομικά άτομα μπορεί να ταλαντεύονται, οπότε απ' αυτό προκύπτουν άλλοι 2 βαθμοί ελευθερίας. Όμως, σε συνήθεις θερμοκρασίες αυτοί είναι «παγωμένοι». Αν δεν υπήρχαν οι παγωμένοι βαθμοί ελευθερίας, το διατομικό μόριο θα είχε 8 βαθμούς ελευθερίας.

7.4 Εντροπία.

Κάθε σύστημα σωματιδίων έχει την τάση να εξελίσσεται μέσω των αλληλεπιδράσεων των δομικών του λίθων, προς την κατάσταση με την κατανομή της μέγιστης πιθανότητας. Όταν το σύστημα καταλήξει στην κατάσταση αυτή, παραμένει εκεί σε ισορροπία και μόνο ασήμαντες διακυμάνσεις (απομακρύνσεις απ' αυτήν) μπορεί να συμβαίνουν.

Για να μελετήσομε την εξέλιξη ενός συστήμα-

τος σωματιδίων προς τη θερμοδυναμική ισορροπία, εισάγομε την ***εντροπία*** που ορίζεται απ' τη σχέση $S = k\ln\Omega$, όπου k είναι η σταθερά του Boltzmann και Ω είναι το πλήθος των μικροκαταστάσεων, οι οποίες αντιστοιχούν στη μακροκατάσταση του συστήματος. Στη θερμοδυναμική ισορροπία το πλήθος αυτό των μικροκαταστάσεων γίνεται μέγιστο σε σχέση με τις άλλες μακροκαταστάσεις, που δεν είναι καταστάσεις ισορροπίας. Με άλλα λόγια, η πιθανότητα του συστήματος να βρίσκεται σε μία απ' αυτές τις μικροκαταστάσεις είναι πολύ πιο μεγάλη σε σχέση με τις καταστάσεις όπου δεν υπάρχει ισορροπία.

Δηλαδή η εντροπία είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται άμεσα με την πιθανότητα μίας κατανομής των σωματιδίων του συστήματος. Η εντροπία εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του συστήματος και μας ενδιαφέρει η ***μεταβολή*** της μεταξύ δύο καταστάσεων, στις οποίες μεταβαίνει το σύστημα, ανεξάρτητα απ' τον τρόπο που συμβαίνει η μετάβαση. Κατά τη μετάβαση, για παράδειγμα, ενός αερίου απ' την κατάσταση Α στην κατάσταση Β με δύο ή περισσότερους διαφορετικούς τρόπους, η μεταβολή της εντροπίας του ΔS είναι ίδια σε όλες τις περιπτώσεις, $\Delta S = S_B - S_A$.

Αν το σύστημα υποβάλλεται σε μία κυκλική μεταβολή, όπου ταυτίζεται η αρχική με την τελική κατάσταση, τότε η μεταβολή της εντροπίας του είναι μηδέν.

Ονομάζομε ***ισεντροπική*** τη μεταβολή ενός συστήματος, κατά την οποία η εντροπία του δεν μεταβάλλεται. Διαπιστώσαμε παραπάνω ότι η εντροπία S ενός συστήματος συνδέεται με την πιθανότητα P της κατανομής των σωματιδίων του συστήματος, το οποίο βρίσκεται σε θερμοκρασία T. Όμως η πιθανότητα μίας κατανομής έχει σχέση με την ενεργειακή κατάσταση και τη θερμοκρασία του συστήματος. Μπορούμε λοιπόν να υποψιαστούμε ότι και η εντροπία συνδέεται με την ενέργεια.

Πράγματι, έχει δειχθεί ότι σε κάθε αντιστρεπτή διαδικασία ισχύει για τη μεταβολή της εντροπίας η σχέση:

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T},$$

όπου $\mathrm{d}Q$ η θερμότητα που απορροφάται ή αποβάλλεται και T η θερμοδυναμική (απόλυτη) θερμοκρασία του συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί η μεταβολή της εντροπίας ενός mol νερού κατά την τήξη του, αν γνωρίζομε ότι ο πάγος τήκεται σε θερμοκρασία περίπου 273,1 K, όταν βρίσκεται υπό πίεση 1 atm, απορροφώντας 1435 cal/mol.

Λύση

$$\Delta S_m = \frac{Q}{T},\ \Delta S_m = \frac{1435\,\mathrm{cal/mol}}{273{,}1\ \mathrm{K}},$$

$$\Delta S_m = 5{,}26\,\frac{\mathrm{cal/mol}}{\mathrm{K}}.$$

Παρατηρήσεις.

1) Η σχέση $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$ ισχύει μόνο για αντιστρεπτές μεταβολές.

2) Οι μονάδες της εντροπίας είναι J/K ή cal/K.

3) Μπορούμε να υπολογίσομε τη μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος σε μία αντιστρεπτή μεταβολή a–b από τη σχέση:

$$\Delta S = \int_a^b \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

4) Σε αδιαβατική αντιστρεπτή μεταβολή, όπου $Q = 0$ έχομε $\Delta S = 0$.

5) Μπορούμε να υπολογίσομε τη θερμότητα που απορροφάται ή αποβάλλεται σε μια αντιστρεπτή διαδικασία απ' την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 από το ολοκλήρωμα:

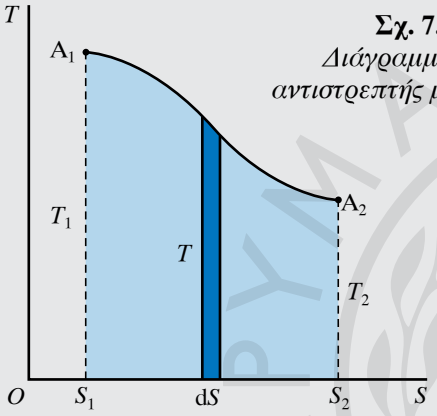
$$Q = \int_1^2 T\mathrm{d}S.$$

Στο διάγραμμα μίας αντιστρεπτής μεταβολής (σχ. 7.4) που απεικονίζεται σε άξονες *T–S,* η θερμότητα είναι ίση με το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται από την καμπύλη $T = T(S)$, τον άξονα S και τις ευθείες $S = S_1$ και $S = S_2$.

6) Διατύπωση του Δεύτερου Θερμοδυναμικού Νόμου σε σχέση με την εντροπία του συστήματος: ***Οι πιο πιθανές διαδικασίες που είναι δυνατόν να συμβούν σε ένα απομονωμένο σύστημα είναι αυτές, στις οποίες η εντροπία αυξάνεται ή παραμένει σταθερή.***

7) Αν ένα σύνολο N συστημάτων είναι απομονωμένο με ολική εντροπία S, οι διαδικασίες που συμβαίνουν στο σύνολο των συστημάτων πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + .. + \Delta S_N \geq 0$, δηλαδή μπορεί η εντροπία ενός ή περισσοτέρων συστημάτων να ελαττώνεται σε μια μεταβολή, όμως η συνολική εντροπία ολόκληρου του συστήματος αυξάνεται ή παραμένει σταθερή.

8) Η εντροπία είναι ένα μέτρο της αταξίας του συστήματος, λόγω της θερμικής κινήσεως, των δομικών του λίθων.



Σχ. 7.4
Διάγραμμα T–S αντιστρεπτής μεταβολής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. α) Να αποδείξετε ότι η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$u_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

όπου $R = kN_A$ και M η γραμμομοριακή μάζα του αερίου.

β) Να υπολογισθεί η ενεργός ταχύτητα των μορίων του υδρογόνου, του οξυγόνου και του αζώτου στην ατμόσφαιρα με την προϋπόθεση ότι συμπεριφέρονται ως ιδανικά αέρια. Δίνονται οι γραμμομοριακές μάζες των H_2, O_2, N_2, αντίστοιχα: 0,002 kg/mol, 0,032 kg/mol, 0,028 kg/mol και $R = 8{,}31 \dfrac{J}{\text{mol}\cdot\text{K}}$.

2. Δύο όμοια δοχεία Α και Β περιλαμβάνουν υδρογόνο και οξυγόνο αντίστοιχα σε συνθήκες πιέσεως και θερμοκρασίας τέτοιες, ώστε τα αέρια να μπορούν να θεωρηθούν ιδανικά. Η ενεργός ταχύτητα των μορίων του υδρογόνου είναι 1850 m/s.

α) Υπολογίστε τον λόγο των ποσοστών των μορίων των δύο αερίων που έχουν ταχύτητες στο διάστημα u_{rms} μέχρι $u_{\text{rms}} + 50$ m/s, λαμβάνοντας υποψη ότι η ποσότητα $\Delta u = 50$ m/s είναι πάρα πολύ μικρή σε σχέση με το u.

β) Προσπαθήστε να δώσετε ποιοτικά μία σχηματική παράσταση της κατανομής των μοριακών ταχυτήτων των δύο αερίων και στη συνέχεια σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος Α.

Δίνονται οι γραμμομοριακές μάζες υδρογόνου H_2, O_2, αντίστοιχα: 0,002 kg/mol και 0,032 kg/mol.

3. Ένα δοχείο περιέχει 2 kg πάγου στους 0 °C. Προσφέρομε στον πάγο θερμότητα $Q = 3{,}34 \times 10^3$ J. Τήκεται όλη η ποσότητα και μετατρέπεται σε νερό θερμοκρασίας 0 °C. Να υπολογισθεί η αύξηση της εντροπίας του συστήματος.

4. Ποσότητα αερίου υπόκειται σε αντιστρεπτή αδιαβατική εκτόνωση. Να υπολογισθεί η μεταβολή της εντροπίας του συστήματος.

5. Ένα σώμα υψηλής θερμοκρασίας $T_1 = 1000$ K έρχεται σε επαφή με σώμα χαμηλής θερμοκρασίας $T_2 = 300$ K, με αποτέλεσμα να μεταφερθεί θερμότητα $Q = 2100$ J. Τα δύο σώματα έχουν πολύ μεγάλη μάζα, με αποτέλεσμα να έχομε αμελητέα μεταβολή στη θερμοκρασία τους από τη διαδικασία αυτή. Να υπολογισθεί η μεταβολή της εντροπίας κάθε σώματος και η μεταβολή της εντροπίας του συστήματος.

6. Ένα σώμα αποβάλλει στην ατμόσφαιρα ποσό θερμότητας $Q = 4000$ J. Η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας είναι 300 K και η μεταβολή της εντροπίας του θερμού σώματος είναι $\Delta S = -5000$ J/K. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες, απαντήστε αν η διεργασία που περιγράφεται μπορεί να είναι:

α) Δυνατή και αντιστρεπτή.

β) Δυνατή, αλλά μη αντιστρεπτή και

γ) αδύνατη.

7. Ένα θερμικά μονωμένο δοχείο είναι χωρισμένο σε δύο ίσα μέρη από ένα διάφραγμα. Το ένα μέρος περιέχει 1 mol υδρογόνου και το άλλο 1 mol αζώτου σε συνθήκες πιέσεως και θερμοκρασίας, όπου τα δύο αέρια θεωρείται ότι έχουν ιδανική συμπεριφορά. Αν απομακρύνομε το διάφραγμα, ώστε τα δύο αέρια να αναμειχθούν, η μεταβολή της εντροπίας θα είναι θετική, αρνητική ή μηδέν; Υπολογίστε τη μεταβολή της εντροπίας ΔS στην περίπτωση αυτή. Δίνεται:

$$R = 8{,}31 \frac{J}{\text{mol}\cdot\text{K}}$$

(***Υπόδειξη*** για ισόθερμη μεταβολή: $Q = nRT \ln \dfrac{V_2}{V_1}$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μετατροπές φάσεων

8.1 Αλλαγές φάσεων υλικών σωμάτων.

Με τον όρο ***φάση*** ενός υλικού εννοούμε τη στερεή, την υγρή και την αέρια κατάσταση, στην οποία είναι δυνατό να βρίσκεται το υλικό. Στη συνέχεια θυμίζουμε τις διαφορές μεταξύ των τριών καταστάσεων της ύλης.

Στα στερεά σώματα, τα στοιχειώδη δομικά σωματίδια ή δομικοί λίθοι (μόρια, άτομα, ιόντα) διατηρούν σχετικά σταθερές θέσεις και εξασκούν ισχυρές δυνάμεις μεταξύ τους, υπό την επίδραση των οποίων έχουν τη δυνατότητα να εκτελούν ταλαντώσεις γύρω απ' τη θέση ισορροπίας τους. Οι αποστάσεις μεταξύ των δομικών λίθων διατηρούνται σταθερές, γι' αυτό έχουν και συγκεκριμένο σχήμα και όγκο σε δεδομένη θερμοκρασία.

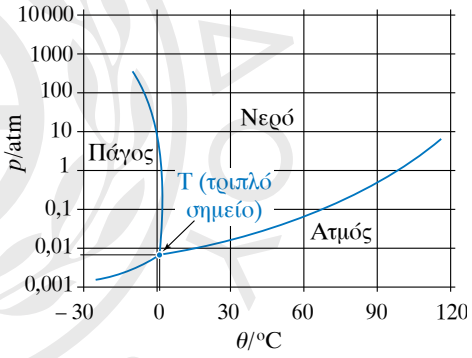
Στα υγρά, οι δυνάμεις μεταξύ των δομικών μονάδων είναι λιγότερο ισχυρές απ' τις δυνάμεις που υπάρχουν στα στερεά. Έτσι, λόγω της θερμικής κινήσεως οι δομικοί λίθοι δεν διατηρούνται σε συγκεκριμένες θέσεις, με αποτέλεσμα τα υγρά να μην έχουν συγκεκριμένο σχήμα, αλλά να παίρνουν κάθε φορά το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει. Διατηρούν όμως συγκεκριμένο όγκο σε συγκεκριμένη θερμοκρασία.

Στα αέρια, οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων είναι μικρές, με αποτέλεσμα να υπάρχει η δυνατότητα για σημαντική κίνηση των μορίων, κίνηση άτακτη και τυχαία. Τα αέρια παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει, δεν έχουν συγκεκριμένο όγκο, αλλά καταλαμβάνουν όλο τον όγκο του δοχείου που τα περιέχει.

Γενικώς, τα υλικά μπορούν να βρεθούν σε οποιαδήποτε απ' τις τρεις φάσεις της ύλης, εκτός αν διασπώνται πριν την αλλαγή φάσεως, όταν αλλάζουν οι διάφορες συνθήκες.

Μεταβάλλοντας τις συνθήκες, στις οποίες βρίσκεται ένα σώμα μπορούμε να μετατρέψομε τη φάση του. Η μεταβολή αυτή απαιτεί προσφορά ή αφαίρεση θερμότητας. Αν η μεταβολή γίνεται αργά (ένα είδος ισορροπίας) για όσο χρόνο διαρκεί η μετατροπή της φάσεως, η θερμοκρασία του υλικού παραμένει σταθερή, παρόλο που παρέχομε ή αφαιρούμε θερμότητα απ' το υλικό. Στο διάγραμμα του σχήματος 8.1 απεικονίζονται σε άξονες πιέσεως-θερμοκρασίας (p–θ) οι μετατροπές φάσεων του νερού.

Κάθε σημείο (p, θ) στο επίπεδο p–θ αντιστοιχεί σε μια κατάσταση (θερμοδυναμικής) ισορροπίας. Τα σημεία που βρίσκονται εκτός των καμπυλών αντιστοιχούν σε μια φάση, ενώ τα σημεία των καμπυλών σε δυο και το σημείο τομής των τριών καμπυλών σε τρεις φάσεις.



Σχ. 8.1
Τριπλό σημείο ως σημείο τομής των καμπυλών εξαερώσεως και εξαχνώσεως.

Οι καμπύλες χωρίζουν στο διάγραμμα τις περιοχές του στερεού, του υγρού και του ατμού (αέριο) (σχ. 8.1). Η καμπύλη που διαχωρίζει τη στερεά από την υγρή περιοχή ονομάζεται ***καμπύλη τήξεως*** (ή ***πήξεως***) και κάθε σημείο της αντιπροσωπεύει ένα ζεύγος τιμών πιέσεως και θερμοκρασίας, στις οποίες έχομε συνύπαρξη (ισορροπία) της στερεής και της υγρής φάσεως του υλικού.

Παλαιότερα λέγονταν ***κανονικές συνθήκες***, δηλαδή κανονική θερμοκρασία και πίεση, η θερμοκρασία των 0 °C ή 273,15 K και η πίεση 1 atm = = 101,325 kPa. Σήμερα αυτό έχει αλλάξει και ως κανονική πίεση θεωρείται η πίεση των 100 kPa = 1 bar (1 μπαρ).

Παλαιότερα όριζαν ως κανονικό σημείο τήξεως (ή πήξεως) ή κανονική θερμοκρασία τήξεως (ή πήξεως) τη θερμοκρασία που αντιστοιχεί σε πίεση 1 atm = 101,325 kPa. Σήμερα, που η κανονική πίεση είναι τα 100 kPa = 1 bar, το σημείο (θερμοκρασία) τήξεως (πήξεως) που αντιστοιχεί σ' αυτήν την κανονική πίεση λέγεται ***μπαρικό σημείο τήξεως*** (πήξεως). Το σημείο τήξεως σε πίεση 1atm σήμερα λέγεται ***ατμοσφαιρικό σημείο τήξεως***.

Επειδή δεν ενδιαφερόμαστε για μεγάλη ακρίβεια, δεν παίζει μεγάλο ρόλο στη θερμοκρασία τήξεως η μεταβολή κατά περίπου 1% στον ορισμό της κανονικής πιέσεως, οπότε δεν θα δίνεται σημασία στην αυστηρή ορολογία που ισχύει σήμερα.

Η καμπύλη που διαχωρίζει την υγρή από την αέρια φάση ονομάζεται ***καμπύλη εξαερώσεως***, ενώ η καμπύλη που διαχωρίζει τη στερεή από την αέρια φάση ονομάζεται ***καμπύλη εξαχνώσεως***. Παρατηρούμε ότι οι τρεις καμπύλες τέμνονται σε ένα σημείο, που ονομάζεται ***τριπλό σημείο*** και είναι το μοναδικό σημείο που οι συνθήκες επιτρέπουν τη συνύπαρξη και των τριών φάσεων σε ισορροπία. Για καθαρό νερό η θερμοκρασία του τριπλού σημείου έχει ληφθεί να είναι ίση με 273,16 K. Ο πίνακας 8.1 παρουσιάζει το τριπλό σημείο διαφόρων υλικών.

Η «σειρά» μετατροπής φάσεων στερεό-υγρό-αέριο είναι η συνήθης για τα περισσότερα υλικά. Υπάρχουν όμως υλικά, τα οποία μπορούν να μετατραπούν από στερεό σε αέριο χωρίς να περάσουν από την υγρή φάση ή και το αντίστροφο. Η αλλαγή φάσεως από στερεό απευθείας σε αέριο ονομάζεται ***εξάχνωση***.

Έντονη εξάχνωση παρατηρούμε στο στερεό διοξείδιο του άνθρακα (ξηρός πάγος). Επίσης, εξάχνωση παρατηρούμε στους κρυστάλλους ναφθαλίνης, στο στερεό ιώδιο στον πάγο και στο χιόνι. Παρατηρείται και το αντίστροφο φαινόμενο δημιουργίας παγοκρυστάλλων από υδρατμούς.

Πίνακας 8.1
Πίνακας τριπλού σημείου για διάφορα υλικά.

Υλικό	***Θερμοκρασία (K)***	***Πίεση (Pa)***
Υδρογόνο	13,84	$0{,}074\times10^5$
Δευτέριο	18,63	$0{,}171\times10^5$
Νέον	24,57	$0{,}432\times10^5$
Οξυγόνο	54,36	$0{,}001\,52\times10^5$
Άζωτο	63,18	$0{,}125\times10^5$
Αμμωνία	195,40	$0{,}0607\times10^5$
Διοξείδιο του θείου	197,68	$0{,}001\,67\times10^5$
Διοξείδιο του άνθρακα	216,55	$5{,}17\times10^5$
Νερό	273,16	$0{,}006\,10\times10^5$

Παρατηρήσεις.

1) Το σημείο τήξεως ενός υλικού μεταβάλλεται με την πίεση που επικρατεί στην επιφάνεια του υλικού. Στα περισσότερα υλικά η επίδραση της πιέσεως είναι πολύ μικρή. Στον πάγο η αύξηση της πιέσεως προκαλεί μείωση του σημείου τήξεως. Υπάρχουν και υλικά, όπως ο μόλυβδος, που η αύξηση της πιέσεως προκαλεί αύξηση του σημείου τήξεως.

2) Το σημείο τήξεως εξαρτάται και από την καθαρότητα του υλικού, δηλαδή η διάλυση ξένων ουσιών σε κάποιο υλικό (διαλύτης) προκαλεί την ταπείνωση του σημείου τήξεως αυτού. Παράδειγμα αποτελεί η διάλυση χλωριούχου νατρίου (αλατιού) στο νερό, που κατεβάζει το σημείο πήξεως από τους 0 °C στους –20 °C περίπου. Για τον λόγο αυτόν, ρίχνομε αλάτι στους αυτοκινητοδρόμους κατά τη διάρκεια των χιονοπτώσεων και για τον ίδιο λόγο προσθέτομε στα ψυγεία των αυτοκινήτων γλυκερίνη ή αλκοόλη, ώστε να αποφευχθεί η δημιουργία πάγου τον χειμώνα.

3) Η διαδικασία μεταβάσεως από την υγρή στην αέρια φάση ονομάζεται ***εξάτμιση*** και ερμηνεύεται ως εξής: Τα μόρια του υγρού έχουν διάφορες ταχύτητες λόγω της θερμικής τους κινήσεως. Ανάλογα με τη θερμοκρασία, στην οποία βρίσκεται το υγρό, αρκετά μόριά του έχουν σχετικά υψηλές ταχύτητες όταν βρεθούν στην επιφάνεια του υγρού, με αποτέλεσμα να καταφέρνουν να υπερνικήσουν τις ελκτικές δυνάμεις των άλλων μορίων και να διαφύγουν στον αέρα· δηλαδή έχομε μετάβαση από την υγρή φάση στην αέρια.

Η ***ταχύτητα εξατμίσεως*** ενός υγρού εξαρτάται απ' το είδος του (διαμοριακές δυνάμεις), τη θερμοκρασία, το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειάς του, την πίεση που ασκείται στην επιφάνειά του, και την πυκνότητα των ατμών που

συσσωρεύονται πάνω από την επιφάνειά του (π.χ. για το νερό σημαντικό ρόλο έχει η υγρασία του αέρα και η ύπαρξη ρευμάτων που απομακρύνουν τους ατμούς από την επιφάνειά του).

Η εξάτμιση συμβαίνει σε οποιαδήποτε θερμοκρασία και γίνεται μόνο από την επιφάνεια του υγρού. Η εξάτμιση οδηγεί σε ψύξη του υγρού, διότι κατά τη διαδικασία της διαφεύγουν μόρια με υψηλή κινητική ενέργεια.

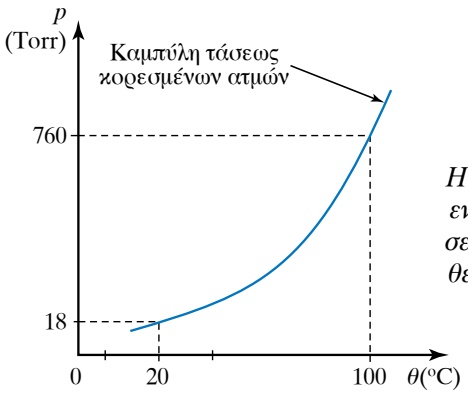
8.2 Κορεσμένοι ατμοί.

Ας φανταστούμε τι συμβαίνει στο παρακάτω πείραμα:

Διαθέτομε δοχείο, στο οποίο έχομε δημιουργήσει κενό. Εφοδιάζομε το δοχείο με μανόμετρο και ρίχνομε μέσα σ' αυτό μερικές σταγόνες αιθέρα (πτητικό υγρό). Παρατηρούμε ότι η πίεση στο μανόμετρο αυξάνει. Η αύξηση αυτή συμβαίνει γιατί ο αιθέρας εξατμίζεται και ο χώρος γεμίζει απ' τους ατμούς του. Αν ρίξομε μεγαλύτερη ποσότητα αιθέρα, θα παρατηρήσομε ότι η πίεση θα αυξηθεί μέχρι μία τιμή και μετά θα παραμείνει σταθερή, ενώ μια ποσότητα αιθέρα θα παραμείνει σε υγρή κατάσταση. Θα έχομε μια δυναμική ισορροπία ανάμεσα στην υγρή και την αέρια φάση του υγρού για τη δεδομένη θερμοκρασία. Στην ισορροπία αυτή όσα μόρια του υγρού εξατμίζονται, άλλα τόσα υγροποιούνται. Στην κατάσταση αυτή λέμε ότι έχομε κορεσμένους ατμούς και η πίεση που προκαλούν ονομάζεται ***τάση των κορεσμένων ατμών***.

Τάση ατμών ενός υγρού (ή στερεού) σε μία ορισμένη θερμοκρασία ονομάζεται η πίεση των ατμών του σώματος, όταν ατμοί και υγρό (ή ατμοί και στερεό) βρίσκονται σε ισορροπία στη θερμοκρασία αυτή (σχ. 8.2). Η τάση ατμών εκφράζει για μια ορισμένη θερμοκρασία την ευκολία ή δυσκολία με την οποία εξατμίζεται ένα υγρό ή εξαχνώνεται ένα στερεό. Έτσι, μία «μεγάλη τάση ατμών» φανερώνει την ευκολία της εξατμίσεως ή εξαχνώσεως μιας χημικής ουσίας και αντιστρόφως.

Για την επίτευξη της παραπάνω ισορροπίας απαιτείται κάποιο χρονικό διάστημα, στη διάρκεια του οποίου κάθε στιγμή η ταχύτητα δημιουργίας ατμού είναι μεγαλύτερη απ' την ταχύτητα της αντίστροφης διαδικασίας. Η παραπάνω ισορροπία είναι δυναμική και όχι στατική, που σημαίνει ότι σε κάθε στιγμή ποσότητες απ' το σώμα αλλάζουν φάση, αλλά με ίσους ρυθμούς. Σώματα με μεγάλη



Σχ. 8.2
Η τάση ατμών ενός σώματος σε σχέση με τη θερμοκρασία.

τάση ατμών ονομάζονται ***πτητικά***.

Η τάση ατμών ενός σώματος εξαρτάται τόσο από τη φύση του σώματος, όσο και από τη θερμοκρασία του. Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία, αυξάνεται και η πίεση των ατμών στην ισορροπία.

Η εξάτμιση συμβαίνει από την επιφάνεια του υγρού. Έχομε βρασμό όταν δημιουργούνται φυσαλίδες αέριας φάσεως σε όλο τον όγκο του υγρού. Για να συμβεί αυτό, πρέπει η τάση ατμών να είναι ίση με την «εξωτερική» πίεση που ασκείται στη φυσαλίδα. Αυτή είναι περίπου ίση με την πίεση που ασκείται στην επιφάνεια του υγρού, αν το βάθος του υγρού δεν είναι μεγάλο και μπορεί να αγνοηθεί η επιφανειακή τάση στη φυσαλίδα. Η τάση ατμών αυξάνεται με τη θερμοκρασία, επομένως όσο μεγαλύτερη είναι η εξωτερική πίεση, τόσο μεγαλύτερη η θερμοκρασία που γίνεται ο βρασμός, δηλαδή η ***θερμοκρασία βρασμού***. Η τάση ατμών του νερού στους 100 °C είναι περίπου 1 atm, γι' αυτό στην επιφάνεια της Γης, όπου η πίεση είναι περίπου 1 atm, το νερό βράζει στους 100 °C. Σε μεγαλύτερα υψόμετρα, όπως σε ψηλά βουνά, βράζει σε χαμηλότερη θερμοκρασία. Η θερμοκρασία βρασμού εξαρτάται και απ' την καθαρότητα του υγρού· για παράδειγμα αυξάνεται αν υπάρχουν σ' αυτό διαλυμένες μη πτητικές ουσίες. Το φαινόμενο της αυξήσεως της θερμοκρασίας βρασμού με την πίεση βρίσκει εφαρμογή στις οικιακές χύτρες ταχύτητας και σε συστήματα αποστειρώσεως που χρησιμοποιούν θερμοκρασίες πάνω από 100 – 130 °C.

Παρατηρήσεις.

Η τάση ατμών στα διαλύματα μη πτητικών ουσιών, εκτός απ' τη φύση του διαλύτη και τη θερμοκρασία, εξαρτάται και από τη συγκέντρωση του διαλυμένου σώματος. Αυτό συμ-

βαίνει διότι στην επιφάνεια του καθαρού διαλύτη ορισμένα από τα μόριά του υπερνικούν τις δυνάμεις συνοχής και μεταπηδούν στην αέρια φάση και αποκαθίσταται τελικά η δυναμική ισορροπία με κάποια πίεση που χαρακτηρίζει τον διαλύτη. Όταν στον διαλύτη αυτόν διαλυθεί μια μη πτητική ουσία, τότε στην επιφάνεια του διαλύματος θα υπάρχουν μόρια και του διαλύτη και της διαλυμένης ουσίας, άρα θα αντιστοιχούν λιγότερα μόρια του διαλύτη ανά μονάδα επιφανείας. Συνεπώς, ο αριθμός των μορίων που θα έχουν τη δυνατότητα να «μεταπηδήσουν» σε αέρια κατάσταση θα είναι μικρότερος, άρα, όταν επακολουθήσει ισορροπία, η πίεση που θα ασκούν οι ατμοί του διαλύματος θα είναι μικρότερη εκείνης του καθαρού διαλύτη.

8.3 Θερμότητες μεταβολής φάσεων.

Όπως έχομε αναφέρει, είναι δυνατό να μετατραπεί η φάση κάθε υλικού από στερεή σε υγρή. Η μετατροπή αυτή ονομάζεται ***τήξη*** και συμβαίνει για μια ορισμένη θερμοκρασία, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες πιέσεως με προσφορά θερμότητας.

Έστω στερεό, στο οποίο προσφέρομε θερμότητα με ορισμένο ρυθμό. Η θερμοκρασία του στερεού αυξάνεται, καθώς αυτό απορροφά θερμότητα, μέχρι να φτάσει στη θερμοκρασία τήξεως. Τότε, ενώ απορροφά θερμότητα, η θερμοκρασία του παραμένει σταθερή, μέχρι να μετατραπεί όλο το στερεό σε υγρό. Η θερμότητα που απορροφά στη διαδικασία αυτή καταναλώνεται όλη για τη μετατροπή της στερεής φάσεως σε υγρή.

Αυτή η θερμότητα εξαρτάται απ' το υλικό και είναι ανάλογη της μάζας που αλλάζει φάση. Υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = L_{\mathrm{T}} m,$$

όπου το μέγεθος L_{T} ονομάζεται ***θερμότητα τήξεως*** (παλαιότερα λεγόταν λανθάνουσα θερμότητα τήξεως) και στο SI έχει μονάδα το 1 J/kg. Η θερμότητα τήξεως εκφράζει την ποσότητα θερμότητας που απαιτείται για την πλήρη τήξη 1 kg από το υλικό.

Η αντίστροφη διαδικασία συμβαίνει όταν αποβάλλεται θερμότητα από ένα υγρό, δηλαδή η θερμοκρασία του ελαττώνεται μέχρι να φτάσει στο σημείο πήξεως. Στη συνέχεια, και ενώ συνεχίζομε να αφαιρούμε θερμότητα, η θερμοκρασία παραμένει σταθερή, μέχρι να στερεοποιηθεί όλο το υλικό. Μετά τη στερεοποίηση, η αποβολή θερμότητας οδηγεί σε μείωση της θερμοκρασίας.

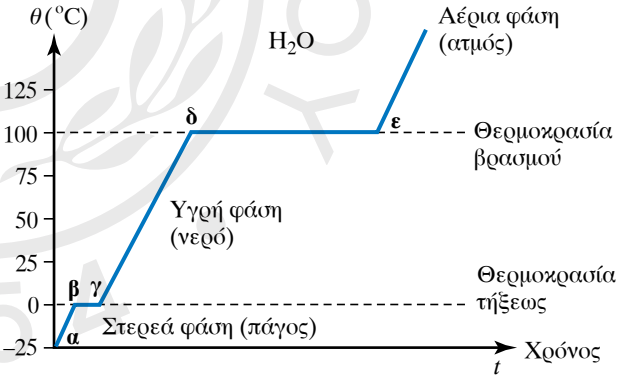
Ανάλογο είναι αυτό που συμβαίνει στην εξαέρωση και στον βρασμό, ο οποίος είναι ένα είδος εξαερώσεως. Στην περίπτωση της εξαερώσεως, μελετούμε την εξαέρωση κατά τον βρασμό. Έτσι, όταν το υγρό απορροφά θερμότητα, αυξάνεται η θερμοκρασία του, μέχρι να φτάσει στη θερμοκρασία βρασμού. Στη συνέχεια, ενώ απορροφά θερμότητα, η θερμοκρασία του παραμένει σταθερή, μέχρι να έχομε μετατροπή όλης της μάζας του σε αέριο ίδιας θερμοκρασίας (σχ. 8.3).

Για τη θερμότητα έχομε τη σχέση:

$$Q = L_{\mathrm{B}} m$$

όπου το μέγεθος L_{B} ονομάζεται ***θερμότητα εξαερώσεως*** ή ***θερμότητα βρασμού***, εξαρτάται απ' το υλικό και εκφράζει την ποσότητα θερμότητας που απαιτείται για την πλήρη εξαέρωση με βρασμό 1 kg υγρού. Για το νερό που βράζει στην επιφάνεια της Γης έχομε (περίπου) $L_{\mathrm{B}} = 539\ \mathrm{cal/g} = 2{,}26 \times 10^6\ \mathrm{J/kg}$.

Το αντίστροφο φαινόμενο του βρασμού είναι η ***υγροποίηση***, δηλαδή η μετατροπή της αέριας φάσεως σε υγρή. Την υγροποίηση την επιτυγχάνομε με αφαίρεση θερμότητας από το αέριο.



Σχ. 8.3
Μεταβολή φάσεων νερού.

8.4 Υγρασία απόλυτη και σχετική. Σημείο δρόσου.

Απόλυτη υγρασία ονομάζεται η ποσότητα των υδρατμών ανά μονάδα όγκου αέρα, συνήθως μετρείται σε $\mathrm{g/m^3}$, ενώ στο SI σε $\mathrm{1kg/m^3}$. Πρόκειται δηλαδή για την πυκνότητα του αέρα σε υδρατμούς και υπολογίζεται από τον τύπο: $a = m/V$, όπου m η μάζα των υδρατμών που περιέχονται σε όγκο V.

Η ικανότητα του αέρα να συγκρατεί μικρή ή μεγάλη ποσότητα υδρατμών εξαρτάται απ' τη θερμοκρασία του.

Σχετική υγρασία είναι ο λόγος της μάζας m υδρατμών που περιέχει ο αέρας, προς εκείνη τη μάζα των υδρατμών, τους οποίους μπορεί να περιέχει (υπό την ίδια θερμοκρασία και πίεση) όταν έχει κορεσθεί (μέγιστη μάζα υδρατμών).

Η σχετική υγρασία εκφράζεται ***επί τοις %*** και περιγράφεται από τη μαθηματική σχέση:

$$\Sigma_{\upsilon} = \frac{m}{m_{\chi\upsilon}} \times 100,$$

όπου m η ποσότητα των υπαρχόντων υδρατμών και $m_{\chi\upsilon}$ η ποσότητα που καθιστά τον αέρα κορεσμένο, οπότε έχει τη μέγιστη τάση υδρατμών.

Παρατηρήσεις.

1) Η υγρασία της ατμόσφαιρας έχει άμεση επίδραση στην αποβολή ύδατος από το ανθρώπινο σώμα που γίνεται με την εξάτμιση από το δέρμα, ρυθμίζοντας έτσι τη θερμοκρασία του σώματος. Ο αέρας όταν βρίσκεται πολύ κοντά στο σημείο κορεσμού, λόγω της μεγάλης περιεκτικότητας των υδρατμών, προκαλεί στον άνθρωπο αίσθημα δυσφορίας και δυσχεραίνει την αναπνοή και την αποβολή του ύδατος από το δέρμα. Όταν ακόμη αυτό συνδυάζεται και με υψηλή θερμοκρασία, τότε υπάρχει κίνδυνος θερμοπληξίας.

2) Η δρόσος είναι το φυσικό φαινόμενο, κατά το οποίο οι υπάρχοντες υδρατμοί στην ατμόσφαιρα κοντά στο έδαφος συμπυκνώνονται σε μεγάλες σταγόνες νερού που καλύπτουν κάθε αντικείμενο.

3) ***Σημείο δρόσου*** ονομάζεται η θερμοκρασία, στην οποία όταν ψυχθεί ο αέρας με δεδομένη σταθερή πίεση, γίνεται κορεσμένος λόγω των υδρατμών που ήδη περιέχει.

Το φαινόμενο παρατηρείται ιδιαίτερα τις νύχτες, οπότε δεν υπάρχουν σύννεφα για να προστατεύουν την επιφάνεια της Γης, και όταν δεν φυσάει άνεμος. Η Γη ακτινοβολεί συνεχώς θερμότητα στην ατμόσφαιρα, με αποτέλεσμα να ψύχεται η επιφάνειά της. Τα μόρια των υδρατμών λοιπόν που υπάρχουν σ' αυτό το πολύ χαμηλό ύψος, αγγίζοντας τις ψυχρές επιφάνειες των σωμάτων αρχίζουν να συμπυκνώνονται και να κολλούν σ' αυτές, έλκοντας και άλλα μόρια υδρατμών και σχηματίζοντας έτσι υδροσταγόνες. Η θερμοκρασία κορεσμού της ατμόσφαιρας ή το «σημείο δρόσου» μπορεί να είναι οποιαδήποτε θερμοκρασία, πάνω απ' το $0\,^{o}C$. Η θερμοκρασία αυτή εξαρτάται από την υγρασία που επικρατεί.

Στα μετεωρολογικά δελτία δίνεται η θερμοκρασία του αέρα και το σημείο δρόσου, γιατί οι δύο αυτές θερμοκρασίες όταν συσχετίζονται μας δίνουν ποιοτικά την κατάσταση του αέρα ως προς τον κορεσμό του. Για παράδειγμα, αν η θερμοκρασία σε μια περιοχή είναι $15\,^{o}C$ και το σημείο δρόσου είναι $6\,^{o}C$, σημαίνει ότι ο αέρας απέχει πολύ από το να κορεσθεί. Όταν όμως η θερμοκρασία είναι $8\,^{o}C$ και το σημείο δρόσου $7\,^{o}C$, τότε ο αέρας είναι πολύ κοντά στον κορεσμό και άρα υπάρχει πιθανότητα δημιουργίας ομίχλης. Η διαφορά θερμοκρασίας εδάφους και σημείου δρόσου είναι σημαντική στην πρόγνωση της ομίχλης.

Ο κορεσμένος αέρας έχει *σχετική υγρασία* 100 %, ενώ ο τελείως ξηρός αέρας έχει υγρασία 0 %. Η μέτρηση της υγρασίας της ατμόσφαιρας πραγματοποιείται με ειδικά μετεωρολογικά όργανα, τα ***υγρόμετρα***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Για τις παρακάτω ασκήσεις να θεωρηθούν δεδομένα τα εξής:
Θερμότητα τήξεως πάγου $L_T = 334 \cdot 10^3\ J/kg$.
Θερμότητα βρασμού πάγου $L_B = 2256 \cdot 10^3\ J/kg$.
Ειδική θερμότητα πάγου $C_{\text{πάγου}} = 2000\ J/kg \cdot K$.
Ειδική θερμότητα νερού $C_{\text{νερού}} = 4190\ J/kg \cdot K$.
Ειδική θερμότητα αλουμινίου $C_{Al} = 910\ J/kg \cdot K$.
Να υπολογισθεί η θερμότητα που πρέπει να προσφέρομε σε 2000 g πάγου θερμοκρασίας $-10\,^{o}C$, ώστε να μετατραπεί σε νερό θερμοκρασίας $10\,^{o}C$.

1. Ποσότητα πάγου μάζας 5 kg βρίσκεται σε θερμοκρασία $-5\,^{o}C$. Προσφέρομε στον πάγο θερμότητα $Q = 600\ kJ$.
α) Να υπολογισθεί η ποσότητα του πάγου που θα μετατραπεί σε υγρό.
β) Να υπολογισθεί η θερμότητα που πρέπει να προσφέρομε στον πάγο, ώστε να μετατραπεί ολόκληρη η ποσότητά του σε ατμό.

2. Δοχείο αλουμινίου μάζας $m = 0{,}5\ kg$ περιέχει 1,5 kg πάγου θερμοκρασίας $-10\,^{o}C$. Ρίχνομε στο δοχείο 5 kg νερό θερμοκρασίας $50\,^{o}C$. Αν θεωρήσομε το σύστημα μονωμένο, να βρεθεί η τελική θερμοκρασία του συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Ηλεκτρικά φορτία

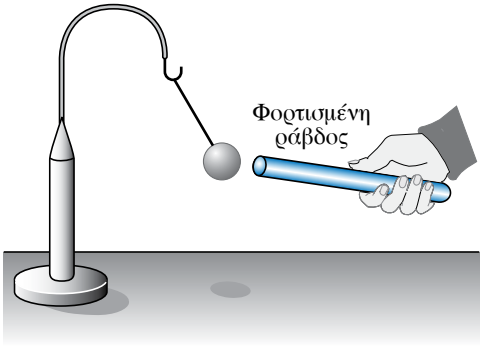
9.1 Θετικά και αρνητικά φορτία.

Όταν δύο διαφορετικά υλικά σώματα έρθουν σε στενή επαφή μεταξύ τους (π.χ. τρίβοντας το ένα με το άλλο) ακόμη και αν μετά απομακρυνθούν λίγο, ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο ή και σε άλλα σώματα που τα πλησιάζουν. Τα υλικά αυτά αποκτούν ηλεκτρικό φορτίο (ηλεκτρίζονται). Η δύναμη που ασκείται μεταξύ των ηλεκτρισμένων σωμάτων ονομάζεται ***ηλεκτρική***. Τα φαινόμενα που προκαλούνται από τα ηλεκτρισμένα σώματα ονομάζονται ***ηλεκτρικά φαινόμενα***.

Ένα απλό όργανο μελέτης των ηλεκτρικών φαινομένων είναι το ηλεκτροσκόπιο, που σε μια παραλλαγή του είναι ένα είδος (ηλεκτρικού) εκκρεμούς. Αποτελείται από ελαφρύ σφαιρίδιο, κατασκευασμένο από φελλό ή χαρτί, που έχει αναρτηθεί με μεταξωτό νήμα σε σταθερό σημείο (σχ. 9.1.1). Η λειτουργία του είναι πολύ απλή:

1) Αν το σώμα που φέρνομε κοντά στο σφαιρίδιο είναι φορτισμένο, τότε το σφαιρίδιο έλκεται και παρατηρούμε εκτροπή του νήματος από την κατακόρυφη θέση του (σχ. 9.1.1).

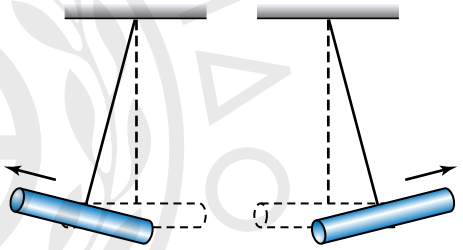
2) Αν το σώμα που φέρνομε κοντά στο σφαιρίδιο δεν είναι φορτισμένο, τότε το σφαιρίδιο παραμένει ακίνητο.



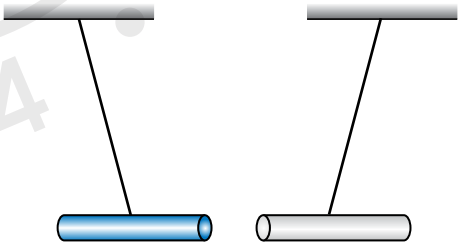
Σχ. 9.1.1
Το ηλεκτρικό εκκρεμές έλκεται από τη φορτισμένη ράβδο.

Οι ηλεκτρικές δυνάμεις μπορούν να ασκηθούν από απόσταση και μπορεί να είναι ελκτικές ή απωστικές.

Δύο γυάλινες ράβδοι που τρίφτηκαν με μεταξωτό ύφασμα και έχουν αναρτηθεί με μεταξωτό σχοινί, όταν έρθουν κοντά, απωθούν η μία την άλλη (σχ. 9.1.2). Αν όμως μία γυάλινη ράβδος τριφτεί με μεταξωτό ύφασμα και μία από εβονίτη με μάλλινο ύφασμα, τότε όταν θα έρθουν κοντά, παρατηρούμε ότι η μία έλκει την άλλη (σχ. 9.1.3).



Σχ. 9.1.2
Τα ομώνυμα απωθούνται.



Σχ. 9.1.3
Τα ετερώνυμα έλκονται.

Τα πειράματα αυτά μπορούμε να τα ερμηνεύσομε παραδεχόμενοι την ύπαρξη μιας φυσικής οντότητας, η οποία ονομάζεται ***ηλεκτρικό φορτίο*** και το οποίο αποτελεί θεμελιώδη ιδιότητα της ύλης. Υπάρχει σε δύο μορφές, ***θετικό*** (+), που εμφανίζεται στο γυαλί όταν το τρίψομε με μεταξωτό ύφασμα, και ***αρνητικό*** (–), που εμφανίζεται στον εβονίτη, όταν τον τρίψομε με μάλλινο ύφασμα.

Ομώνυμα (ή ομόσημα ή ιδίου τύπου) φορτία ονομάζονται τα φορτία εκείνα που έχουν το ίδιο πρόσημο, δηλαδή είναι θετικά ή αρνητικά. ***Ετερώνυμα*** (ή ετερόσημα ή αντίθετα) φορτία, ονομάζονται δύο φορτία που το ένα είναι θετικό και το άλλο αρνητικό. Τα ετερώνυμα φορτία έλκονται, ενώ τα ομώνυμα φορτία απωθούνται. Ο ηλεκτρισμός διακρίνεται σε ***στατικό*** (όπου τα ηλεκτρικά φορτία ακινητούν) και σε ***δυναμικό*** (όπου τα ηλεκτρικά φορτία κινούνται).

Σήμερα, η ηλέκτριση των σωμάτων εξηγείται με τη γνώση μας για την ατομική δομή της ύλης.

9.1.1 Εμφάνιση των δύο ηλεκτρικών φορτίων.

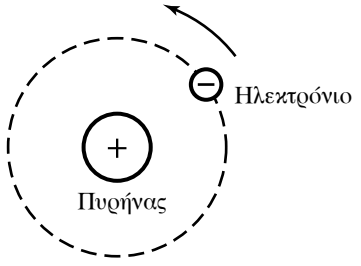
Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 17 (παράγρ. 17.1), η ύλη συγκροτείται από μόρια κι αυτά από άτομα. Το κάθε άτομο αποτελείται από τον πυρήνα, ο οποίος περιέχει τα νουκλεόνια (πρωτόνια και νετρόνια) και τα ηλεκτρόνια που περιστρέφονται γύρω απ' αυτόν (πίν. 9.1).

Πίνακας 9.1
Ιδιότητες των 3 σωματιδίων του ατόμου.

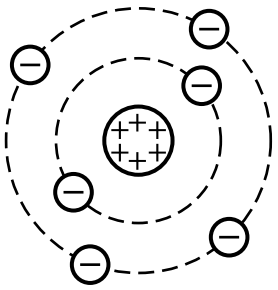
Σωμάτιο	*Σύμβολο*	*Φορτίο*	*Μάζα*
Πρωτόνιο	p	$+e$	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg
Νετρόνιο	n	0	$1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg
Ηλεκτρόνιο	e	$-e$	$9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg

Σύμφωνα με το παλιό απλό ατομικό μοντέλο, το άτομο μοιάζει με μια μικρογραφία του πλανητικού συστήματος, με τα ηλεκτρόνια στη θέση των πλανητών να περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα σε κυκλικές (ή ελλειπτικές) τροχιές (σχ. 9.1.4 και σχ. 9.1.5).

Τα ηλεκτρόνια είναι σωματίδια αρνητικά φορτισμένα, τα πρωτόνια θετικά φορτισμένα και τα νετρόνια δεν έχουν ηλεκτρικό φορτίο (ουδέτερα). Το φορτίο του πρωτονίου είναι συγκεκριμένο, θετικό,



Σχ. 9.1.4
Το άτομο του υδρογόνου.



Σχ. 9.1.5
Το άτομο του άνθρακα.

ονομάζεται ***στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο***, συμβολίζεται με το γράμμα e και ισούται με $1{,}6 \cdot 10^{-19} C$. Το ηλεκτρόνιο έχει φορτίο ίδιου μέτρου με το πρωτόνιο, αλλά αρνητικό.

Η μάζα του πρωτονίου ισούται περίπου με τη μάζα του νετρονίου και έχει 1836 φορές τη μάζα του ηλεκτρονίου. Τα ηλεκτρικά φαινόμενα οφείλονται στα φορτία, που έχουν τα παραπάνω στοιχειώδη σωματίδια.

Ο πυρήνας των ατόμων είναι θετικά φορτισμένος. Υπό κανονικές συνθήκες όλα τα άτομα εμφανίζονται ως ηλεκτρικώς ουδέτερα, δηλαδή έχουν τόσο αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο όσο και θετικό.

Αν αφαιρεθούν ηλεκτρόνια από ένα σώμα (π.χ. λόγω τριβής) και μεταφερθούν σε άλλο, τότε το πρώτο σώμα έχει λιγότερα ηλεκτρόνια απ' όσα απαιτούνται για να είναι ουδέτερο. Συνεπώς, θα είναι φορτισμένο θετικά. Ένα θετικά φορτισμένο άτομο ή μόριο ονομάζεται ***θετικό ιόν*** (ή κατιόν).

Το δεύτερο σώμα που έλαβε τα ηλεκτρόνια, έχει πλεόνασμα αρνητικού φορτίου και συνεπώς εμφανίζεται αρνητικά φορτισμένο. Ένα αρνητικά φορτισμένο άτομο ή μόριο ονομάζεται ***αρνητικό ιόν*** (ή ανιόν). Τα ιόντα είναι άτομα (ή συγκροτήματα ατόμων, όπως η ρίζα αμμωνίου NH_4^+) με περίσσεια ή έλλειψη ηλεκτρονίων. Το φαινόμενο της δημιουργίας ιόντων ονομάζεται ιονισμός ή ιοντισμός. ***Ένα σώμα είναι ηλεκτρικά φορτισμένο, όταν έχει πλεόνασμα*** ή ***έλλειμμα ηλεκτρονίων.*** Συνεπώς, όταν ένα σώμα είναι αφόρτιστο, έχει ηλεκτρικά φορτία, αλλά το συνολικό θετικό του φορτίο ισούται με το συνολικό αρνητικό του φορτίο.

9.1.2 Ιδιότητες του ηλεκτρικού φορτίου.

Το ηλεκτρικο φορτίο είναι ***μονόμετρο φυσικό μέγεθος*** στο SI και μετρείται σε coulomb (C).

Στη φύση υπάρχουν ***δύο διαφορετικά είδη*** ηλεκτρικού φορτίου, το θετικό και το αρνητικό.

Μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων ***αναπτύσσονται δυνάμεις***. Τα ομώνυμα φορτία απωθούνται, τα ετερώνυμα φορτία έλκονται.

Τα ηλεκτρικά φορτία ***αναπτύσσονται στα διάφορα υλικά σώματα*** όταν υπάρξουν οι κατάλληλες προς τούτο συνθήκες (π.χ. τριβή με ύφασμα).

Αντικείμενα απ' το ίδιο υλικό που ηλεκτρίζονται με όμοιο τρόπο, ***πάντοτε απωθούνται***.

Αντικείμενα από διαφορετικά υλικά που ηλεκτρίζονται με διαφορετικό τρόπο, ***είναι δυνατό να έλκονται*** ή ***να απωθούνται***.

Το φορτίο είναι ***κβαντωμένο μέγεθος***, δηλαδή κάθε φορτίο στη φύση είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της στοιχειώδους ποσότητας $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ C. Συνεπώς, το ηλεκτρικό φορτίο ενός σώματος θα είναι πάντοτε ακέραιο πολλαπλάσιο του στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου, δηλαδή $q = n \cdot e$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Όταν ένα σώμα αποβάλλει 10 ηλεκτρόνια, τότε αυτό παρουσιάζει έλλειμμα ηλεκτρονίων, άρα το φορτίο του είναι θετικό,

$$q = +10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}.$$

Όταν ένα σώμα προσλάβει 5 ηλεκτρόνια, τότε το σώμα παρουσιάζει πλεόνασμα (ή περίσσευμα) ηλεκτρονίων, άρα το φορτίο του είναι αρνητικό $q = -5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο ***διατηρείται*** δηλαδή ισχύει η ***αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου***, σύμφωνα με την οποία: ***«Σε μονωμένο ηλεκτρικό σύστημα σωμάτων ή σε ολόκληρο το σύμπαν, δηλαδή σε σύστημα, στο οποίο δεν μπορούν να έρθουν ούτε να φύγουν ηλεκτρικά φορτία, το ολικό φορτίο του συστήματος παραμένει σταθερό»***.

Αυτό σημαίνει ότι αν ένα μονωμένο σύστημα σωμάτων είναι αρχικά ουδέτερο και μέσα στο σύστημα παράγονται θετικά και αρνητικά φορτία, το αλγεβρικό άθροισμα των φορτίων θα είναι πάντοτε μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω δύο μεταλλικές σφαίρες Α και Β που έχουν φορτία q_A και q_B αντίστοιχα. Τις φέρνομε σε επαφή και έστω ότι αποκτούν φορτία q_A' και q_B'. Σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου, θα ισχύει ότι $q_{\text{ΟΛΙΚΟ (ΜΕΤΑ)}} = q_{\text{ΟΛΙΚΟ (ΠΡΙΝ)}}$, άρα $q_A' + q_B' = q_A + q_B$.

2. Όταν τρίβομε γυάλινη ράβδο με μεταξωτό ύφασμα, τότε μεταφέρονται ηλεκτρόνια από τη ράβδο στο ύφασμα. Η ράβδος εμφανίζει έλλειμμα, ενώ το ύφασμα πλεόνασμα ηλεκτρονίων. Συνεπώς, η ράβδος αποκτά θετικό φορτίο, ενώ το ύφασμα αρνητικό. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που μετακινήθηκαν από τη ράβδο ισούται με το πλήθος των ηλεκτρονίων που πήγαν στο μεταξωτό ύφασμα. Άρα, αν $+q$ είναι το φορτίο που αποκτά η ράβδος, τότε $-q$ είναι το φορτίο που έχει το μεταξωτό ύφασμα.

9.1.3 Μονάδα μετρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου.

Στο SI μονάδα μετρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου είναι το coulomb (συντομογραφία C) που ορίζεται ως το φορτίο που διέρχεται από διατομή αγωγού, σε χρόνο 1 s, όταν ο αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα 1 ampere (1 A). (Σχετικά για το ηλεκτρικό ρεύμα βλ. Κεφ. 10). Επειδή το 1 C είναι πολύ μεγάλη μονάδα, συχνά χρησιμοποιούμε μικρότερες μονάδες μετρήσεως, υποπολλαπλάσιά του, όπως:

$1\ \text{mC} = 10^{-3}$ C (χιλιοστοκουλόμπ, μιλικουλόμπ),

$1\ \mu\text{C} = 10^{-6}$ C (μικροκουλόμπ).

$1\ \text{nC} = 10^{-9}$ C (νανοκουλόμπ), $1\ \text{pC} = 10^{-12}$ C (πικοκουλόμπ).

9.2 Νόμος του Coulomb.

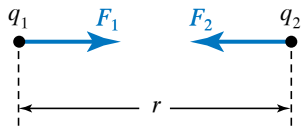
Ο Charles Augustin de Coulomb, μετά από πειράματα που πραγματοποίησε, στα οποία μετρούσε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων, διατύπωσε το γνωστό νόμο για τη δύναμη μεταξύ δυο σημειακών ηλεκτρικών φορτίων, που φέρει το όνομά του.

Σύμφωνα με τον Νόμο του Coulomb, για την ελκτική ή απωστική δύναμη F (σχ. 9.2.1 και 9.2.2), που αναπτύσσεται ανάμεσα σε δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία q_1, q_2 τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση r, ισχύουν τα εξής:

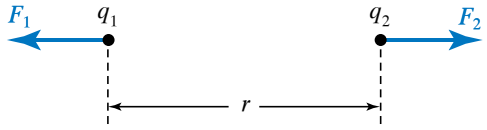
1) Το μέτρο της δυνάμεως F είναι ανάλογο της απόλυτης τιμής του γινομένου των δύο φορτίων και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της αποστάσεως μεταξύ των δύο φορτίων. Δηλαδή:

$$F = k\frac{|q_1\, q_2|}{r^2},$$

όπου k η σταθερά του Νόμου του Coulomb.



Σχ. 9.2.1
Ελκτικές δυνάμεις Coulomb ανάμεσα σε ετερώνυμα φορτία.



Σχ. 9.2.2
Απωστικές δυνάμεις Coulomb ανάμεσα σε ομώνυμα φορτία.

2) Έχει διεύθυνση, τη διεύθυνση της ευθείας που ορίζεται από τα δύο φορτία.

3) Έχει φορά ελκτική, αν τα φορτία είναι ετερόσημα (το ένα θετικό και το άλλο αρνητικό) και απωστική, αν τα φορτία είναι ομόσημα (και τα δύο θετικά ή και τα δύο αρνητικά).

4) Σημείο εφαρμογής της είναι το κάθε σημειακό φορτίο q_1 και q_2.

Ο Νόμος του Coulomb είναι δυνατόν να αποδοθεί με την ακόλουθη μορφή:

$$F = k\frac{q_1\, q_2}{r^2}.$$

Όταν το F είναι θετικό, η δύναμη είναι απωστική, όταν είναι αρνητικό, είναι ελκτική.

Ο Νόμος του Coulomb ισχύει στην ανωτέρω μορφή του για σημειακά ηλεκτρικά φορτία ή για φορτισμένα αντικείμενα που φέρουν ηλεκτρικά φορτία και έχουν διαστάσεις που είναι πολύ μικρότερες απ' τη μεταξύ τους απόσταση.

Αποδεικνύεται (βλ. παράγρ. 9.7.2) ότι ένας λεπτόπαχος σφαιρικός φλοιός με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου συμπεριφέρεται σε φορτίο που βρίσκεται στο εξωτερικό του, με τον ίδιο τρόπο που συμπεριφέρεται το ολικό φορτίο του φλοιού, αν το τοποθετούσαμε στο κέντρο του φλοιού, οπότε θα ήταν σημειακό φορτίο. Έτσι, δύο σφαιρικοί φλοιοί φορτισμένοι ομοιόμορφα, που δεν μπαίνει ο ένας μέσα στον άλλο, αλληλεπιδρούν με δυνάμεις ίσες μ' αυτές που αλληλεπιδρούν αντίστοιχα σημειακά φορτία στα κέντρα τους.

Στο εσωτερικό του φλοιού μία ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πάνω στον φλοιό δεν ασκεί ηλεκτρικές δυνάμεις.

Μια σφαιρική κατανομή που αποτελείται από πολλούς σφαιρικούς φλοιούς, όπως οι παραπάνω, συμπεριφέρεται ως ένα σημειακό φορτίο στο κέντρο της. Για δύο τέτοιες σφαιρικές κατανομές φορτίων οι μεταξύ τους δυνάμεις είναι ίσες μ' αυτές μεταξύ αντιστοίχων σημειακών φορτίων στα κέντρα τους.

Παρατηρήσεις.

1) Η σταθερά k εξαρτάται από το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιούμε και από το υλικό που παρεμβάλλεται ανάμεσα στα δύο φορτία. Αν και τα δύο φορτία βρίσκονται στο κενό ή (κατά προσέγγιση) στον αέρα, η σταθερά k στο SI ισούται με:

$$k_0 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}.$$

Όταν τα φορτία βρίσκονται μέσα σε νερό, ισχύει ότι $k = \dfrac{k_0}{81}$.

2) Το ε_o ονομάζεται ***απόλυτη διηλεκτρική σταθερά του κενού*** (permittivity of free space) ή ***επιτρεπτότητα του κενού*** ή ***ηλεκτρική σταθερά*** και στο SI ισούται με:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}.$$

3) Αν τα φορτία βρίσκονται μέσα σε κάποιο υλικό, η ηλεκτρική σταθερά k ισούται με:

$$k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_\mathrm{r}}.$$

Το ε_r ή $\varkappa$ ονομάζεται ***σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού*** ή και απλώς διηλεκτρική σταθερά και είναι καθαρός αριθμός.

Η τιμή της σταθεράς k είναι:

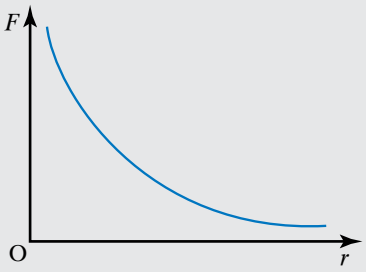
$$k = \frac{k_0}{\varepsilon_\mathrm{r}}.$$

Συνεπώς, αν δύο φορτία βρεθούν σε μονωτικό υλικό διηλεκτρικής σταθεράς ε_r, η δύναμη F' του Coulomb μεταξύ τους είναι ελαττωμένη σε σχέση με τη δύναμη F που θα δέχονταν τα φορτία στο κενό, όπως προκύπτει απ' τη σχέση $F' = F/\varepsilon_\mathrm{r}$.

Το $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_\mathrm{r} = \varepsilon_0\,\varkappa$ ονομάζεται ***διηλεκτρική σταθερά*** του υλικού ή επιτρεπτότητα του υλικού. Η σχέση:

$$F = k\frac{|q_1\, q_2|}{r^2}$$

οδηγεί στη γραφική παράσταση του μέτρου της



Σχ. 9.2.3
Δύναμη Coulomb συναρτήσει της αποστάσεως των φορτίων.

δυνάμεως σε σχέση με την απόσταση, η οποία είναι μια υπερβολή (σχ. 9.2.3).

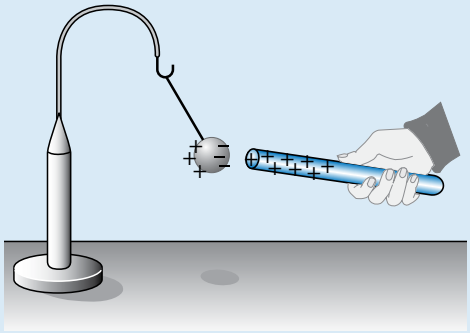
Η δύναμη Coulomb, που ασκεί ένα ακίνητο φορτίο σε άλλο, είναι συντηρητική. Το έργο της εξαρτάται μόνο απ' την αρχική και τελική θέση του δεύτερου φορτίου και όχι από την ενδιάμεση ακολουθούμενη διαδρομή μεταβάσεως απ' την αρχική θέση στην τελική.

Αν (σημειακό) φορτίο ίσο με 1 C βρεθεί στο κενό σε απόσταση 1 m από άλλο ίσο μ' αυτό φορτίο, θα του ασκήσει δύναμη ίση με $9 \cdot 10^9$ N. Το 1 C είναι πάρα πολύ μεγάλη ποσότητα φορτίου, γι' αυτό χρησιμοποιούμε τις υποδιαιρέσεις που αναφέραμε παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Με τη βοήθεια του Νόμου του Coulomb, μπορείτε να εξηγήσετε για ποιο λόγο ένα φορτισμένο σώμα έλκει ένα μη φορτισμένο;

Θεωρούμε το ηλεκτρικό εκκρεμές με το σφαιρίδιό του αφόρτιστο. Πλησιάζομε το άκρο μίας γυάλινης φορτισμένης θετικά ράβδου και παρατηρούμε ότι έλκει το σφαιρίδιο (σχ. 9.2.4).



Σχ. 9.2.4
Φορτισμένο σώμα έλκει μη φορτισμένο.

Το σφαιρίδιο δεν ήρθε σε επαφή με τη ράβδο, όμως έχει ηλεκτριστεί εξ αποστάσεως (με επαγωγή). Το τμήμα του σφαιριδίου που βρίσκεται πλησιέστερα στη ράβδο ηλεκτρίζεται αντίθετα από εκείνη (αρνητικά), ενώ το τμήμα του που βρίσκεται μακρύτερα απ' τη ράβδο ηλεκτρίζεται όπως εκείνη (θετικά). Συνεπώς, η ράβδος έλκει το ένα τμήμα του σφαιριδίου (το ευρισκόμενο πλησιέστερά της) και απωθεί το άλλο (το ευρισκόμενο πιο μακριά της). Άρα, σύμφωνα με τον Νόμο του Coulomb, η ελκτική δύναμη είναι ισχυρότερη απ' την απωστική, οπότε το σφαιρίδιο τελικά έλκεται από τη ράβδο.

9.3 Ηλεκτρικό πεδίο.

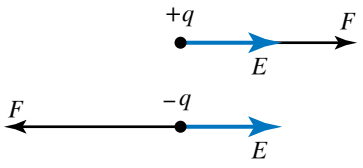
Πεδίο δυνάμεων ονομάζεται ο χώρος, μέσα στον οποίο αν βρεθεί κατάλληλο «υπόθεμα», ασκείται δύναμη. ***Ηλεκτρικό πεδίο*** ονομάζεται ο χώρος, μέσα στον οποίο όταν βρεθεί ένα ηλεκτρικό φορτίο, του ασκείται ηλεκτρική δύναμη. Όταν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, το «υπόθεμα» είναι το ηλεκτρικό φορτίο. Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται γύρω από οποιοδήποτε φορτίο Q (ή κατανομή φορτίου), το οποίο και ονομάζεται ***πηγή*** του πεδίου. Γενικότερα, κάθε φορτισμένο σώμα δημιουργεί γύρω του ηλεκτρικό πεδίο. Αν στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί γύρω του το φορτίο Q, βρεθεί το φορτίο q, τότε από το πεδίο θα του ασκηθεί η δύναμη F_1. Όμως, με τη σειρά του και το φορτίο q δημιουργεί γύρω του ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο ασκεί στο φορτίο Q δύναμη F_2.

Προκειμένου να διαπιστώσομε αν σε μία περιοχή υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, φέρνομε σ' αυτήν το φορτισμένο σφαιρίδιο του ηλεκτρικού εκκρεμούς. Αν ασκείται δύναμη στο σφαιρίδιο, στην περιοχή υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Αν δεν ασκείται, τότε δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από τα φυσικά μεγέθη ***ένταση*** και ***δυναμικό***. Το φυσικό μέγεθος που δείχνει πόσο ισχυρό είναι το πεδίο είναι η ένταση του πεδίου.

Ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο του, ονομάζεται το διανυσματικό φυσικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο της δυνάμεως F που δέχεται θετικό ηλεκτρικό φορτίο q (δοκιμαστικό φορτίο), το οποίο βρίσκεται στο σημείο αυτό του πεδίου, προς αυτό το θετικό φορτίο q, δηλαδή:

$$\vec{E} = \vec{F} / q$$

Απ' τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η δύναμη που ασκείται από το πεδίο στο φορτίο q, δίνεται από τον



Σχ. 9.3.1
Κατεύθυνση εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου.

τύπο $F = E\,q$. Αν αντί φορτίο q, φέρομε στο ίδιο σημείο διπλάσιο φορτίο $(2q)$, το πεδίο θα του ασκήσει διπλάσια δύναμη $2F = E\,2q$.

Η ***κατεύθυνση της εντάσεως*** E (σχ. 9.3.1) συμπίπτει με την κατεύθυνση της δυνάμεως πάνω στο φορτίο q όταν το φορτίο q είναι θετικό και η κατεύθυνση της εντάσεως είναι αντίθετη με την κατεύθυνση της δυνάμεως, όταν το φορτίο q είναι αρνητικό.

Μονάδα μετρήσεως της εντάσεως είναι το N/C (newton/coulomb) και προκύπτει από τον ορισμό της. Η ένταση σε σημείο του πεδίου ισούται με 1 N/C, όταν σε ηλεκτρικό φορτίο 1 C που βρίσκεται στο σημείο αυτό, ασκείται από το πεδίο δύναμη ίση με 1 N.

9.3.1 Υπολογισμός της εντάσεως E στο σημείο A του ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από ακίνητο σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q.

Έστω σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q που δημιουργεί γύρω του ηλεκτροστατικό πεδίο. Στο σημείο Α του πεδίου που απέχει από το Q απόσταση r, φέρνομε ηλεκτρικό φορτίο q (υπόθεμα). Η ένταση E του πεδίου στο σημείο Α δίνεται εξ ορισμού από τον τύπο:

$$E = \frac{F}{q}, \quad \text{όπου} \quad F = k\frac{Q\,q}{r^2}\ .$$

Συνεπώς: $$E = \frac{F}{q} = \frac{k\dfrac{Q\,q}{r^2}}{q} = \frac{k\,Q\,q}{q\,r^2} = k\frac{Q}{r^2}.$$

Η γραφική παράσταση του μέτρου της εντάσεως E σε σχέση με την απόσταση r είναι υπερβολή όμοια μ' αυτήν του σχήματος 9.2.3.

Από τη σχέση $E = k\dfrac{Q}{r^2}$ προκύπτει ότι το μέτρο της εντάσεως του πεδίου σε ένα σημείο του:

1) Εξαρτάται από το φορτίο που παράγει το πεδίο.

2) Είναι αντιστρόφως ανάλογο με το τετράγωνο της αποστάσεως του σημείου από το φορτίο που παράγει το πεδίο.

3) Δεν εξαρτάται ούτε απ' την τιμή, ούτε από το πρόσημο του υποθέματος q, που τυχόν υπάρχει στο σημείο εκείνο.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου, ανεξάρτητα από το εάν στο σημείο αυτό υπάρχει ή όχι κάποιο υπόθεμα.

9.3.2 Υπολογισμός της εντάσεως που δημιουργείται από δύο ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία Q_1 και Q_2.

Θεωρούμε ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από δύο ακίνητα θετικά σημειακά ηλεκτρικά φορτία Q_1, Q_2. Θα υπολογίσομε την ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Α (σχ. 9.3.2). Η ένταση E_1 που οφείλεται στο φορτίο Q_1, έχει μέτρο που δίνεται απ' τον τύπο:

$$E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^2},$$

όπου r_1 η απόσταση του σημείου Α από το σημειακό φορτίο Q_1.

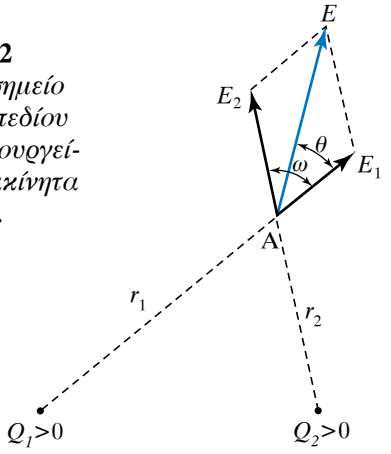
Η ένταση E_2 που οφείλεται στο φορτίο Q_2, έχει μέτρο που δίνεται από τον τύπο:

$$E_2 = k\frac{Q_2}{r_2^2},$$

όπου r_2 η απόσταση του σημείου Α απ' το σημειακό φορτίο Q_2. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας (βλ. παράγρ. 2.5.2), η ένταση E στο σημείο Α του πεδίου ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των εντάσεων E_1 και E_2. Ισχύει ότι $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (σχ. 9.3.2).

Από τον νόμο των συνημιτόνων (ή κανόνα του παραλληλογράμμου) ισχύει ότι:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1\,E_2\cos\omega}\ ,$$



Σχ. 9.3.2
Ένταση σε σημείο ηλεκτρικού πεδίου το οποίο δημιουργείται από δύο ακίνητα φορτία.

όπου ω η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\dot{E}_1, \dot{E}_2$. Η διεύθυνση της εντάσεως E προσδιορίζεται από τον υπολογισμό της γωνίας θ, για την εφαπτομένη της οποίας ισχύει η σχέση:

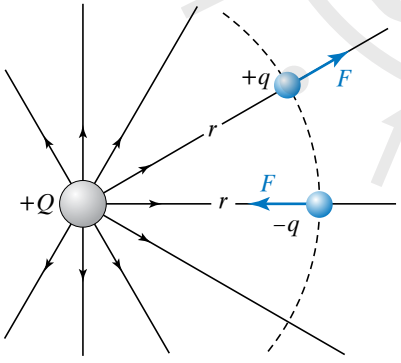
$$\tan\theta = \frac{E_2 \sin\varphi}{E_1 + E_2 \cos\varphi}.$$

Πολύ συχνά, κατά τη μελέτη των προβλημάτων, αποδείχθηκε ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να έχομε μια «οπτική εικόνα» του πεδίου. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, οι οποίες είναι γραμμές όπου το διάνυσμα της εντάσεως του πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο τους.

Όταν σχεδιάζομε τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, φροντίζομε, ώστε η πυκνότητά τους σε κάθε σημείο να είναι ανάλογη της εντάσεως του πεδίου σ' αυτό το σημείο.

9.3.3 Δυναμικές γραμμές πεδίου σημειακού φορτίου.

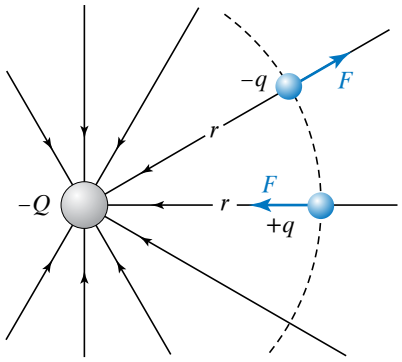
Το πεδίο είναι ακτινωτό, δηλαδή οι δυναμικές του γραμμές είναι ακτίνες κύκλου με κέντρο το σημειακό φορτίο. Αν αυτό είναι θετικό, τότε οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν απ' το φορτίο και καταλήγουν στο άπειρο (σχ. 9.3.3). Αν το φορτίο που δημιουργεί το πεδίο είναι αρνητικό, τότε οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν απ' το άπειρο και καταλήγουν στο φορτίο (σχ. 9.3.4).



Σχ. 9.3.3
Δυναμικές γραμμές ηλεκτροστατικού πεδίου που παράγεται από θετικό σημειακό ηλεκτρικό φορτίο.

9.3.4 Ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν δύο αντίθετα φορτία.

Αν δύο αντίθετα φορτία Q και $-Q$ βρίσκονται σε μικρή σχετικά μεταξύ τους απόσταση, τότε οι δυ-



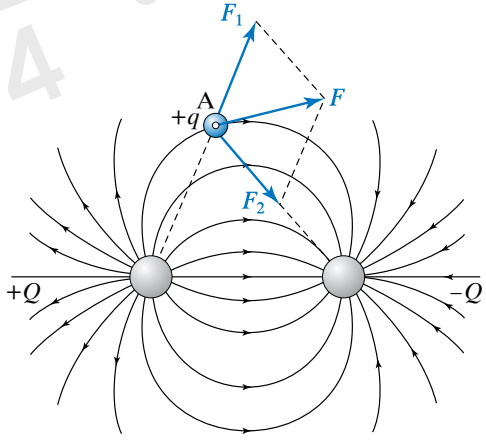
Σχ. 9.3.4
Δυναμικές γραμμές ηλεκτροστατικού πεδίου που παράγεται από αρνητικό σημειακό ηλεκτρικό φορτίο.

ναμικές γραμμές του ηλεκτρικού τους πεδίου δεν είναι ακτινωτές, αλλά καμπύλες που ξεκινούν απ' το θετικό (Q) και καταλήγουν στο αρνητικό ($-Q$) (σχ. 9.3.5).

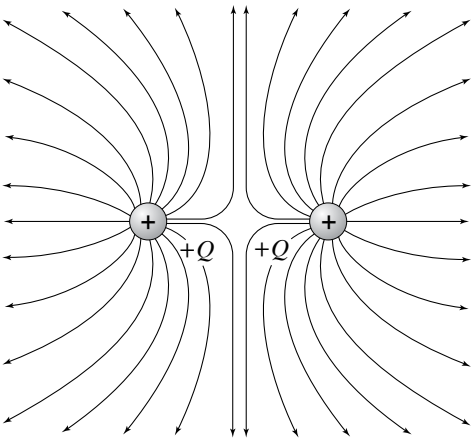
9.3.5 Ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν δύο ίσα θετικά φορτία.

Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από δύο ίσα θετικά φορτία εικονίζονται στο σχήμα 9.3.6.

Παρατηρούμε ότι στον μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων χώρο, υπάρχει περιοχή απ' όπου δεν διέρχονται δυναμικές γραμμές. Αν σε οποιοδήποτε σημείο αυτής της περιοχής φέρομε στοιχειώδες θετικό φορτίο q το πεδίο δεν θα του ασκήσει καμία δύναμη.



Σχ. 9.3.5
Δυναμικές γραμμές ηλεκτροστατικού πεδίου που παράγεται από δύο ακίνητα και αντίθετα ηλεκτρικά φορτία.



Σχ. 9.3.6
Δυναμικές γραμμές ηλεκτροστατικού πεδίου που παράγεται από δύο ακίνητα ίσα θετικά ηλεκτρικά φορτία.

9.3.6 Ιδιότητες των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Οι ιδιότητες των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι οι ακόλουθες:

1) Ξεκινούν από θετικά φορτία ή το άπειρο και καταλήγουν σε αρνητικά ηλεκτρικά φορτία ή στο άπειρο.

2) Δεν τέμνονται, ούτε εφάπτονται σε κάποιο σημείο του πεδίου όπου δεν υπάρχουν φορτία. Από κάθε τέτοιο σημείο του πεδίου διέρχεται μόνο μια δυναμική γραμμή.

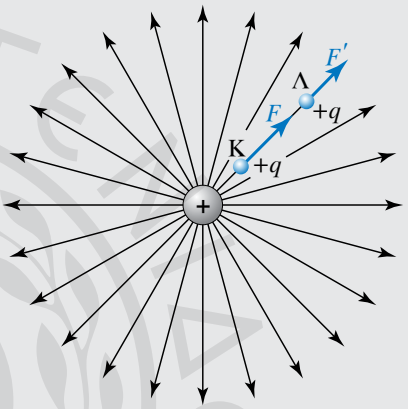
3) Η πυκνότητά τους σε κάθε σημείο είναι ανάλογη με το μέτρο της εντάσεως E του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Παρατηρήσεις.

1) Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου δεν τέμνονται ούτε εφάπτονται μεταξύ τους. Αν υποθέσομε ότι τέμνονται, τότε στο ίδιο σημείο η ένταση και η αντίστοιχη δύναμη θα έχουν δύο κατευθύνσεις, ενώ αν τοποθετήσομε σ' αυτό το σημείο ένα φορτίο q, δέχεται μία μόνο δύναμη από το πεδίο.

Έστω ότι όλες οι δυναμικές γραμμές εφάπτονται σ' ένα σημείο. Επειδή το μέτρο της δυνάμεως εκφράζει την πυκνότητα των δυναμικών γραμμών και στο σημείο Κ η πυκνότητα είναι άπειρη, πρέπει και η δύναμη που ασκεί το πεδίο στο θετικό φορτίο q, όταν τοποθετηθεί στο σημείο Κ, να είναι άπειρη. Αυτό όμως συμβαίνει παρά αν στο σημείο υπάρχει σημειακό πεπερασμένο φορτίο.

2) Παρατηρώντας την πυκνότητα των δυναμικών γραμμών στο σχήμα 9.3.7 βλέπομε ότι είναι μεγαλύτερη στο σημείο Κ απ' ό,τι στο σημείο Λ. Εκεί που οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνότερες, εκεί είναι μεγαλύτερη η ένταση και η δύναμη που δέχεται ένα φορτίο. Όπου οι δυναμικές γραμμές είναι πιο αραιές, εκεί είναι μικρότερη η ένταση και η δύναμη που ασκεί το πεδίο σ' ένα φορτίο. Ειδική περίπτωση ηλεκτροστατικού πεδίου αποτελεί το ομογενές πεδίο.



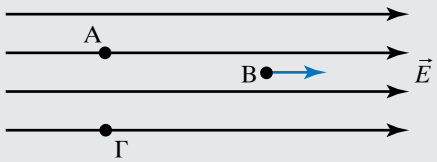
Σχ. 9.3.7
Δυναμικές γραμμές σε ηλεκτροστατικό πεδίο Coulomb.

Ομογενές πεδίο ονομάζεται εκείνο το πεδίο που το διάνυσμα της εντάσεως είναι παντού το ίδιο (σχ. 9.3.8). Οι δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου είναι:

1) Παράλληλες με την ίδια φορά, διότι η ένταση έχει την ίδια κατεύθυνση σε κάθε σημείο του και

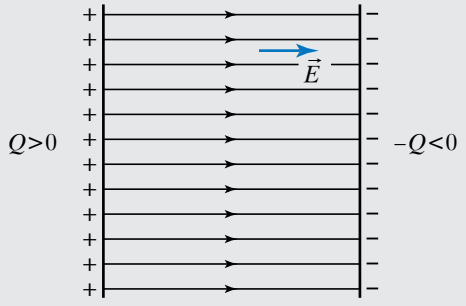
2) ισαπέχουσες, διότι η ένταση έχει το ίδιο μέτρο σε κάθε σημείο του. Συνεπώς, η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι ίδια σε όλο τον χώρο του πεδίου.

Τέτοιο πεδίο δημιουργείται ανάμεσα σε



Σχ. 9.3.8
Ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.

δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες ιδίων διαστάσεων, που έχουν φορτιστεί με αντίθετα ηλεκτρικά φορτία και η μεταξύ τους απόσταση είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις τους (σχ. 9.3.9).



Σχ. 9.3.9
Ανάμεσα σε δύο παράλληλες φορτισμένες πλάκες δημιουργείται ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.

Στο ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ μεγάλων παραλλήλων φορτισμένων πλακών, οι δυναμικές γραμμές:

1) Ξεκινούν από τη θετική πλάκα και καταλήγουν στην αρνητική.

2) Δεν είναι παράλληλες στις άκρες των πλακών, ούτε και έξω απ' αυτές, δηλαδή το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο περιορίζεται μόνο στο εσωτερικό μεταξύ των επιπέδων πλακών.

Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται ***πυκνωτής*** και οι επίπεδες μεταλλικές πλάκες ονομάζονται ***οπλισμοί του πυκνωτή***. Η διεύθυνση της εντάσεως είναι κάθετη στα επίπεδα των οπλισμών.

Ανομοιογενές πεδίο, ονομάζεται εκείνο το ηλεκτρικό πεδίο, στο οποίο η ένταση μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο.

9.3.7 Ηλεκτρική ροή και νόμος του Gauss.

Εάν έχομε μία μικρή επιφάνεια dS μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο σε μια μικρή περιοχή που η ένταση του πεδίου είναι E, ορίζεται ως στοιχειώδης ηλεκτρική ροή $d\Phi$ διά της επιφάνειας το μέγεθος $d\Phi = E\, dS \cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της εντάσεως του πεδίου με το διάνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια, που δείχνει τον προσανατολισμό της επιφάνειας. Αν η ένταση του πεδίου είναι κάθετη στην επιφάνεια και έχει την ίδια φορά με το κάθετο διάνυσμα, τότε $d\Phi = E\, dS$. Αν το πεδίο είναι ομογενές και η επιφάνεια είναι επίπεδη και πεπερασμένη, τότε ισχύει: $\Phi = E\, S \cos\theta$.

Για να βρει κάποιος την ολική ροή διά μέσου μιας τυχαίας επιφάνειας μέσα σε ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο, πρέπει να φανταστεί ότι χωρίζει την επιφάνεια σε απειροστές (επίπεδες) επιφάνειες, βρίσκει τη στοιχειώδη ροή απ' την κάθε μία και τις προσθέτει:

$$\Phi = \sum E\, \Delta S \cos\theta.$$

Αυτό στην πραγματικότητα είναι ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα.

Αποδεικνύεται ότι ***για τον κενό χώρο, η ολική ηλεκτρική ροή, που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια, η οποία βρίσκεται μέσα σε οποιοδήποτε ηλεκτροστατικό πεδίο, ισούται με:***

$$\Phi = Q_{\varepsilon\sigma} / \varepsilon_0.$$

Αυτό είναι το θεώρημα του Gauss και η απόδειξή του στηρίζεται στην ισχύ του Νόμου του Coulomb. Κάτι ανάλογο ισχύει και για το βαρυτικό πεδίο.

Κατά τον υπολογισμό της ροής, η κλειστή επιφάνεια έχει προσανατολισμό από μέσα προς τα έξω, δηλαδή η εξερχόμενη ροή είναι θετική και η εισερχόμενη αρνητική. Αν υπάρχουν φορτία έξω απ' την κλειστή επιφάνεια, αυτά δεν συνεισφέρουν στην ολική ροή που περνά από την επιφάνεια. Όταν υπάρχει διηλεκτρικό στον χώρο, τότε η σχέση τροποποιείται και γίνεται:

$$\Phi = Q_{\varepsilon\sigma} / \kappa\varepsilon_0.$$

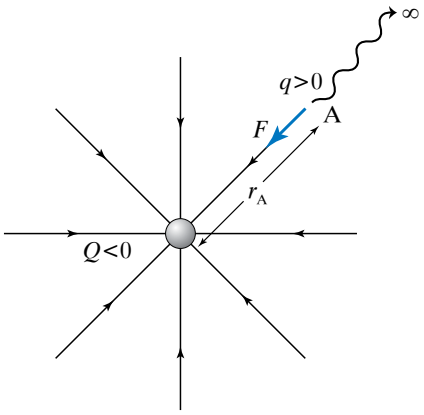
9.4 Ηλεκτρικό δυναμικό.

Προκειμένου να πλησιάσομε θετικό φορτίο q σε επίσης θετικό φορτίο Q, πρέπει να του ασκούμε δύναμη F_1, ώστε να εξουδετερώσομε την απωστική δύναμη F, που αναπτύσσεται ανάμεσά τους. Η δύναμη που ασκούμε παράγει έργο, το οποίο αποθηκεύεται υπό μορφή ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας.

9.4.1 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.

Έστω σημειακό φορτίο Q, που δημιουργεί γύρω του ηλεκτρικό πεδίο. Στο σημείο Α του πεδίου τοποθετούμε το ηλεκτρικό φορτίο q (σχ. 9.4.1). Ως ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_A του φορτίου q στο σημείο Α, ορίζεται το έργο $W_{A\infty}$ της δυνάμεως F του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη μεταφορά του φορτίου q από το σημείο Α μέχρι το άπειρο.

Το έργο $W_{A\infty}$ είναι ανεξάρτητο απ' τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μεταφορά, δηλαδή από την ακολουθούμενη διαδρομή, διότι η δύναμη είναι συντηρητική.



Σχ. 9.4.1
Σύστημα φορτίων, στο οποίο είναι αποθηκευμένη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.

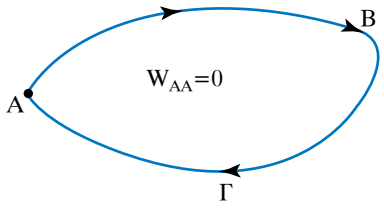
Επίσης το έργο ανάμεσα σε δύο θέσεις Α, Γ δεν εξαρτάται από την ακολουθούμενη διαδρομή, αλλά μόνο από τις θέσεις Α (αρχική) και Γ (τελική). Ισχύει ότι $W_{A\to\Gamma} = -\Delta U = -(U_\Gamma - U_A) = U_A - U_\Gamma$. Το ΔU είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας και τα U_A, U_Γ οι δυναμικές ενέργειες του φορτίου που μετακινείται στις θέσεις Α και Γ. Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι κατά μια οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή, όπως αυτή που παρουσιάζεται στο σχήμα 9.4.2, το έργο της δυνάμεως ισούται με μηδέν.

Έστω ξανά η περίπτωση του σχήματος 9.4.1. Το έργο της δυνάμεως F του πεδίου κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από τη θέση r_A μέχρι το άπειρο, το οποίο είναι ίσο με τη δυναμική ενέργεια, ισούται με:

$$W_{A\infty} = k\frac{Q\,q}{r_A}, \quad \text{συνεπώς είναι και} \quad U_A = k\frac{Q\,q}{r_A}.$$

Απόδειξη.

Αν το φορτίο q μετακινηθεί κατά τη στοιχειώδη απόσταση dr, το στοιχειώδες έργο dW που παράγεται είναι:



Σχ. 9.4.2
Η κλειστή διαδρομή φορτίου Q σε ηλεκτροστατικό πεδίο δεν παράγει έργο.

$$dW = F\,dr = k\frac{Q\,q}{r^2}\,dr.$$

Αν το φορτίο q μετακινηθεί μέχρι το άπειρο (∞), τότε το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση δίνεται από τον τύπο:

$$W_{A\infty} = \int_A^\infty dW = \int_A^\infty k\frac{Q\,q}{r^2}\,dr = k\,Q\,q\int_A^\infty \frac{dr}{r^2} = k\,Q\,q\left[-\frac{1}{r}\right]_A^\infty =$$

$$= k\,Q\,q\,\frac{1}{r_A} \quad \text{άρα} \quad U_A = k\frac{Q\,q}{r_A}.$$

Η δυναμική ενέργεια του q είναι και η ενέργεια του συστήματος των φορτίων Q, q.

9.4.2 Φυσική σημασία της θετικής και της αρνητικής δυναμικής ενέργειας.

Από την τελευταία σχέση $U_A = k\frac{Q\,q}{r_A}$ συμπεραίνομε ότι:

1) Αν τα φορτία Q, q είναι ομόσημα, θα είναι $W_{A\infty} > 0$ και $U_A > 0$. Δηλαδή η δύναμη F του ηλεκτρικού πεδίου παράγει θετικό έργο κατά τη μεταφορά του φορτίου q από το σημείο Α μέχρι το άπειρο. Τότε το πεδίο παράγει θετικό έργο, με αποτέλεσμα να μειώνεται η δυναμική του ενέργεια.

2) Αν τα φορτία Q, q είναι ετερόσημα, θα είναι $W_{A\infty} < 0$ και $U_A < 0$. Δηλαδή η δύναμη F του ηλεκτρικού πεδίου παράγει αρνητικό έργο (απορροφά έργο), συνεπώς το πεδίο απορροφά έργο κι έτσι η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται.

9.4.3 Δυναμικό ηλεκτροστατικού πεδίου.

Το δυναμικό V_A του ηλεκτροστατικού πεδίου σε σημείο Α του πεδίου ορίζεται ως το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο του έργου $W_{A\infty}$ της δυνάμεως του πεδίου κατά τη μετακίνηση ενός φορτίου q από το σημείο Α ως το άπειρο, προς το φορτίο αυτό. Δηλαδή:

$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{q}.$$

Εφόσον $U_A = W_{A\infty}$, προφανώς έχομε επίσης ότι:

$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{q},$$

δηλαδή το δυναμικό ισούται με το πηλίκο της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας U_A που έχει το ηλεκτρικό φορτίο q στο σημείο Α, προς το φορτίο αυτό.

Μονάδα μετρήσεως του δυναμικού στο SI είναι το 1 volt (1 V) και ισχύει ότι:

$$1\ \text{volt} = \frac{1\ \text{joule}}{1\ \text{coulomb}}, \qquad 1\ \text{V} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{C}}.$$

9.4.4 Διαφορά δυναμικού (τάση).

Διαφορά δυναμικού $V_{A\Gamma}$, που λέγεται και ***ηλεκτρική τάση*** ή ***βολτάζ***, μεταξύ δύο σημείων Α, Γ ηλεκτρικού πεδίου ονομάζεται το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο του έργου $W_{A\Gamma}$ της δυνάμεως του πεδίου κατά τη μεταφορά ενός ηλεκτρικού φορτίου q απ' το σημείο Α προς το σημείο Γ, προς το ηλεκτρικό αυτό φορτίο. Δηλαδή:

$$V_{A\Gamma} = \frac{W_{A\Gamma}}{q}.$$

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε, η διαφορά δυναμικού ισούται με τη διαφορά των δυναμικών, δηλαδή $V_{A\Gamma} = V_A - V_\Gamma$. Πράγματι, είναι ευνόητο ότι ισχύουν:

$$V_{A\Gamma} = \frac{W_{A\infty} - W_{\Gamma\infty}}{q} = \frac{U_A - U_\Gamma}{q}.$$

Το δυναμικό σ' ένα σημείο είναι στην ουσία η διαφορά δυναμικού μεταξύ του σημείου και του απείρου. Το άπειρο θεωρούμε συνήθως ότι έχει δυναμικό μηδέν.

Μονάδα μετρήσεως της διαφοράς δυναμικού στο SI είναι το 1 volt (1 V = 1 J/1C), ίδιο με τη μονάδα μετρήσεως του δυναμικού.

Η σχέση $V_{A\Gamma} = V_A - V_\Gamma = \frac{W_{A\Gamma}}{q}$ γράφεται και ως:

$$W_{A\Gamma} = (V_A - V_\Gamma)\, q = V_{A\Gamma}\, q.$$

Η τελευταία σχέση μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το έργο (και την αντίστοιχη μεταβολή ηλεκτρικής ενέργειας), που παράγεται κατά τη μεταφορά φορτίου μεταξύ δύο σημείων που παρουσιάζουν γνωστή διαφορά δυναμικού.

Με τον τρόπο αυτόν ορίζεται μία νέα μονάδα μετρήσεως του έργου, το ηλεκτρονιοβόλτ (1 eV). Ένα ηλεκτρονιοβόλτ είναι το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου, e, μεταξύ δύο σημείων που παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού 1 V.

Επομένως: $1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot \text{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$.

9.4.5 Υπολογισμός δυναμικού σε σημείο ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από ακίνητο σημειακό ηλεκτρικό φορτίο.

Έστω ηλεκτρικό φορτίο Q, που παράγει γύρω του ηλεκτρικό πεδίο. Στο σημείο Α του πεδίου, που απέχει απόσταση r απ' το φορτίο Q, τοποθετούμε φορτίο q. Το δυναμικό στο σημείο Α είναι:

$$V_A = \frac{U_A}{q},$$

όπου έχομε βρει ότι:

$$U_A = k\frac{Q\,q}{r} \quad \text{και αντικαθιστώντας}$$

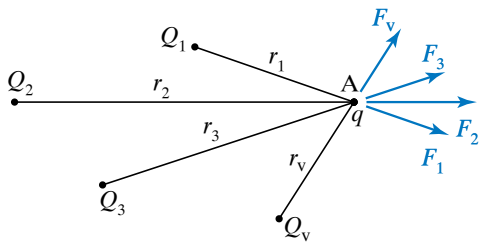
$$\text{προκύπτει ότι} \quad V_A = k\frac{Q}{r}.$$

Απ' την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι, όπως η ένταση έτσι και το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο του είναι ανεξάρτητο από την ύπαρξη ηλεκτρικού φορτίου (υποθέματος) στο σημείο αυτό. Εξαρτάται από το ηλεκτρικό φορτίο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο (πηγή) και απ' την απόσταση του σημείου από το φορτίο αυτό.

Όταν η απόσταση r από το φορτίο τείνει στο άπειρο, τότε το δυναμικό V τείνει στο μηδέν.

9.4.6 Υπολογισμός δυναμικού σε σημείο ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από πολλά ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία.

Έστω ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από τα ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\nu$ και σημείο Α του πεδίου που απέχει αποστάσεις $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$ από τα φορτία $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\nu$ αντίστοιχα (σχ. 9.4.3). Θα υπολογίσομε το δυναμικό V_A σημείου Α. Το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση φορτίου q από το σημείο Α μέχρι το άπειρο, ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έρ-



Σχ. 9.4.3

Δυνάμεις που ασκούνται στο δοκιμαστικό φορτίο q που βρίσκεται στη θέση Α.

γων που παράγονται λόγω των αντιστοίχων ασκουμένων δυνάμεων, κατά τη μετακίνηση του φορτίου q στο πεδίο του καθενός απ' τα σημειακά φορτία $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\nu$ ξεχωριστά.

Από τη σχέση:

$$W_{A\infty} = k\frac{Q\,q}{r} \text{ έχομε } W_{A\infty} =$$

$$= k\frac{Q_1\,q}{r_1} + k\frac{Q_2\,q}{r_2} + k\frac{Q_3\,q}{r_3} \ldots + k\frac{Q_\nu\,q}{r_\nu}.$$

Από τη σχέση: $V_A = \dfrac{W_{A\infty}}{q}$ έχομε ότι

$$V_{\text{A}} = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_2}{r_2} + k\frac{Q_3}{r_3} \ldots + k\frac{Q_\nu}{r_\nu}.$$

Αν $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_\nu$ τα δυναμικά στο σημείο Α εξαιτίας των ηλεκτρικών φορτίων $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\nu$ αντίστοιχα, ισχύει ότι:

$$V_1 = k\frac{Q_1}{r_1},\ V_2 = k\frac{Q_2}{r_2},\ V_3 = k\frac{Q_3}{r_3}, \ldots,\ V_\nu = k\frac{Q_\nu}{r_\nu}.$$

Επομένως, ισχύει ότι το δυναμικό V_{A} στο σημείο Α του πεδίου ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_\nu$, $V_{\text{A}} = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_\nu$. Δηλαδή ισχύει η αρχή της επαλληλίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω θετικό φορτίο q που αφήνεται ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα σε σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου και κινείται προς σημείο Γ, υπό την επίδραση του πεδίου. Αφού η κίνησή του πραγματοποιείται από τη δύναμη που το πεδίο του ασκεί, ισχύει ότι: $W_{\text{AΓ}} > 0$.

Επίσης έχομε:

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{AΓ}} = \dfrac{W_{\text{AΓ}}}{q} \\ W_{\text{AΓ}} > 0 \\ q > 0 \end{array}\right\} \text{ άρα } V_{\text{AΓ}} > 0 \text{ ή } V_{\text{A}} - V_{\Gamma} > 0, \text{ επομένως } V_{\text{A}} > V_{\Gamma}$$

και
$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{AΓ}} > 0 \\ W_{\text{AΓ}} = U_{\text{A}} - U_{\Gamma} \end{array}\right\} \text{ άρα } U_{\text{A}} - U_{\Gamma} > 0, \text{ επομένως } U_{\text{A}} > U_{\Gamma}.$$

Όταν ένα ***θετικό φορτίο*** q αφεθεί ελεύθερο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο και κινείται μόνο υπό την επίδραση της δυνάμεως του πεδίου, ***θα κινηθεί από σημεία μεγαλύτερου προς σημεία μικρότερου δυναμικού, έτσι ώστε η δυναμική του ενέργεια να μειώνεται.***

Αν αρνητικό φορτίο q αφεθεί ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα σε σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου και κινείται προς σημείο Γ υπό την επίδραση του πεδίου, ισχύει ότι $W_{\text{AΓ}} > 0$. Επίσης έχομε:

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{AΓ}} = \dfrac{W_{\text{AΓ}}}{q} \\ W_{\text{AΓ}} > 0 \\ q < 0 \end{array}\right\} \text{ άρα } V_{\text{AΓ}} < 0 \text{ ή } V_{\text{A}} - V_{\Gamma} < 0, \text{ επομένως } V_{\text{A}} < V_{\Gamma}$$

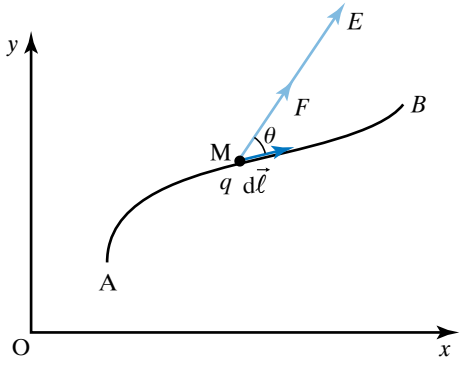
και
$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{AΓ}} > 0 \\ W_{\text{AΓ}} = U_{\text{A}} - U_{\Gamma} \end{array}\right\} \text{ άρα } U_{\text{A}} - U_{\Gamma} > 0, \text{ επομένως } U_{\text{A}} > U_{\Gamma}.$$

Όταν ***αρνητικό φορτίο*** q αφεθεί ελεύθερο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο και κινείται μόνο υπό την επίδραση της δυνάμεως του πεδίου, ***θα κινηθεί από σημεία μικρότερου προς σημεία μεγαλύτερου δυναμικού, έτσι ώστε η δυναμική του ενέργεια να μειώνεται.***

9.4.7 Σχέση μεταξύ τάσεως και εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου.

Έστω ότι φορτίο q κινείται κατά μήκος της διαδρομής ΑΒ εντός ηλεκτρικού πεδίου, από το οποίο δέχεται δύναμη F. Το στοιχειώδες έργο που παράγεται κατά τη στοιχειώδη διαδρομή μήκους $\mathrm{d}\ell$, δίνεται από τον τύπο $\mathrm{d}W = F\,d\ell = F\cos\theta\,\mathrm{d}\ell$, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{F}$ και $d\vec{\ell}$ (σχ. 9.4.4). Ο τύπος αυτός γράφεται και ως $\mathrm{d}W = E\,q\cos\theta\,\mathrm{d}\ell$.

Το συνολικό έργο που παράγεται κατά μήκος της διαδρομής ΑΒ είναι:



Σχ. 9.4.4
Δοκιμαστικό φορτίο q ακολουθεί διαδρομή ΑΒ.

$$W_{AB} = \int_A^B dW = q\int_A^B Ed\ell = q\int_A^B E\cos\theta\, d\ell.$$

Το έργο αυτό μπορεί να γραφεί και ως $W_{AB} = qV_{AB} = q(V_A - V_B)$, άρα:

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B E\cos\theta\, d\ell.$$

Η σχέση αυτή συνδέει τη διαφορά δυναμικού που επικρατεί ανάμεσα σε δύο σημεία ηλεκτρικού πεδίου με την ένταση του πεδίου.

Η ολική ενέργεια $E_{ΟΛ}$ υλικού σημείου φορτίου q ισούται με το άθροισμα της κινητικής $E_{ΚΙΝ}$ και της δυναμικής ενέργειας $E_{ΔΥΝ}$ και παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του υλικού σημείου υπό την επίδραση του πεδίου, δηλαδή είναι: $E_{ΟΛ} = E_{ΚΙΝ} + E_{ΔΥΝ}$.

Ισχύει για κάθε μεταβολή των ενεργειών ότι:

$$\left.\begin{aligned}\Delta E_{ΟΛ} &= \Delta E_{ΚΙΝ} + \Delta E_{ΔΥΝ}\\ \Delta E_{ΟΛ} &= 0\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{άρα } \Delta E_{ΚΙΝ} + \Delta E_{ΔΥΝ} = 0\\ &\text{δηλ. } \Delta E_{ΚΙΝ} = -\Delta E_{ΚΙΝ}.\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η αύξηση της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρικού φορτίου, γίνεται σε βάρος της δυναμικής του ενέργειας, καθόσον αυτή συνοδεύεται από ισόποση μείωση.

Για απειροστή μετατόπιση μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο έχομε ότι:

$$\left.\begin{aligned}dW &= F\cos\theta\, d\ell = qE\cos\theta\, d\ell\\ \Delta W_{AB} &= q(V_A - V_B) = -q(V_B - V_A) = -q\Delta V\end{aligned}\right\}$$

$$\text{άρα } qE\cos\theta\, d\ell = -q\, dV$$

$$\text{δηλαδή } E\cos\theta\, d\ell = -dV$$

$$\text{άρα } dW = -q dV.$$

Το πρόσημο – δηλώνει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνεται από θέσεις μεγαλύτερου σε θέσεις μικρότερου δυναμικού.

9.4.8 Ειδική περίπτωση.

Αν το φορτίο q μετακινείται κατά μήκος δυναμικής γραμμής, τότε ισχύει ότι $\theta = 0$ και τα διανύσματα E και $d\ell$ είναι ομόρροπα ($\vec{E} /\!/ d\vec{\ell}$).

Η σχέση $E\cos\theta\, d\ell = -dV$ σ' αυτήν την περίπτωση γράφεται: $E\, d\ell = -dV$, οπότε:

$$E = -dV/d\ell.$$

Απ' την σχέση αυτή προκύπτει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με την ανά μονάδα μήκους μεταβολή του δυναμικού (δηλ. ισούται με τη βαθμίδα δυναμικού).

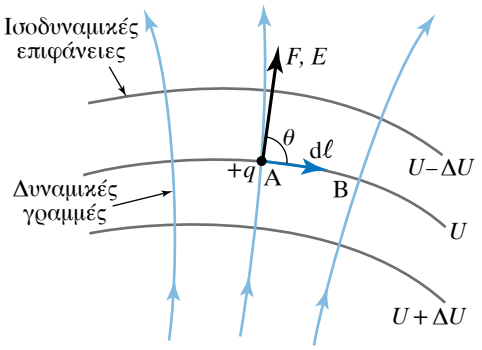
9.4.9 Ισοδυναμικές επιφάνειες.

Στην παράγραφο 9.3 αναφέραμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να παρασταθεί με τις δυναμικές γραμμές. Κατά συνθήκη θεωρούμε ότι το δυναμικό του εδάφους (της Γης) είναι μηδέν. Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να παρασταθεί και με ισοδυναμικές επιφάνειες.

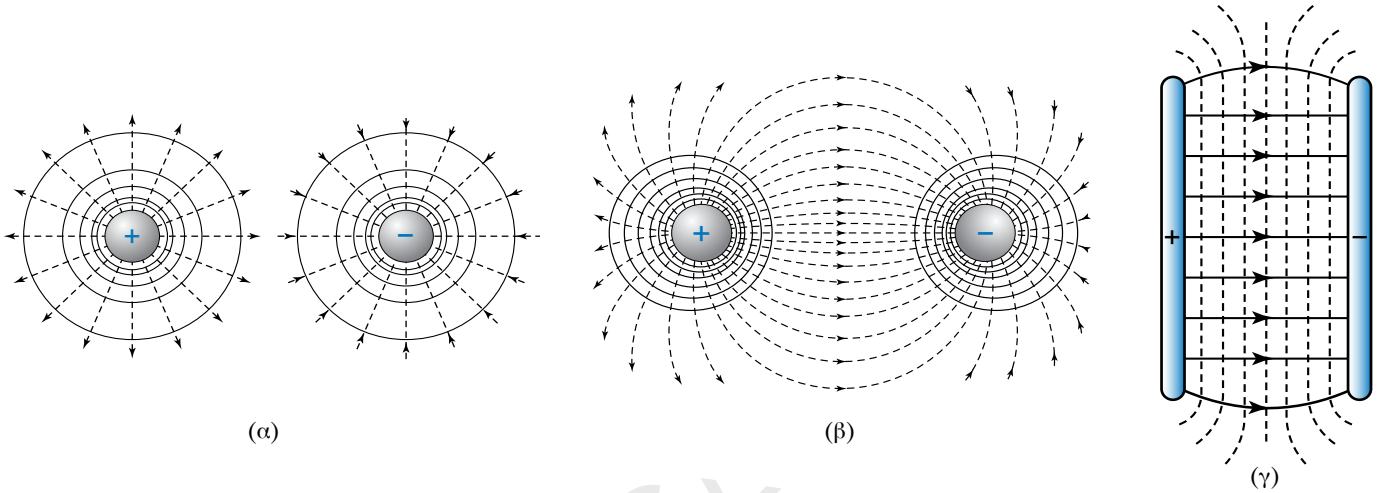
Ισοδυναμική επιφάνεια ηλεκτρικού πεδίου ονομάζεται η επιφάνεια, στην οποία το δυναμικό έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της. Για δύο σημεία Α, Β που ανήκουν στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια ισχύει ότι $W_{AB} = (V_A - V_B)q = 0 \cdot q = 0$. Συνεπώς, το έργο που παράγεται από το ηλεκτρικό πεδίο κατά τη μετακίνηση φορτίου q πάνω σε μία ισοδυναμική επιφάνεια είναι ίσο με μηδέν.

Έστω σημεία Α, Β που ανήκουν σε ισοδυναμική επιφάνεια και ορίζουν μία διαδρομή. Σ' αυτήν τη διαδρομή λαμβάνομε το στοιχειώδες μήκος $d\ell$ (σχ. 9.4.5). Ισχύει ότι $dV = -E\cos\theta\, d\ell = 0$. Επειδή η ένταση E του πεδίου είναι $E \neq 0$ και επίσης ισχύει $d\ell \neq 0$, έπεται ότι $\cos\theta = 0$. Άρα $\theta = 90^o$. Συνεπώς, η δύναμη και η ένταση σε κάθε σημείο του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετες στην ισοδυναμική επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο αυτό. Οπότε ***οι δυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες*** [σχ. 9.4.5, σχ. 9.4.6(α), (β), (γ)].

Όσο η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αυξάνεται, τόσο μειώνεται η απόσταση ανάμεσα στις ισοδυναμικές επιφάνειες. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 9.4.7, που παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ακίδας και επίπεδης επιφάνειας. Στο σημείο Α που η ένταση του πεδίου είναι μεγάλη, η απόσταση των

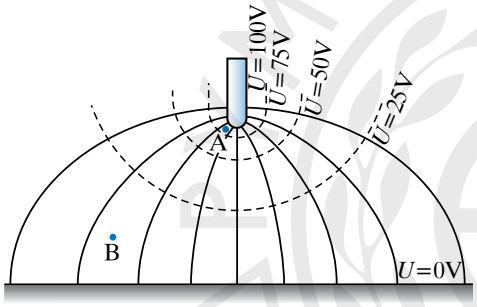


Σχ. 9.4.5
Οι δυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.



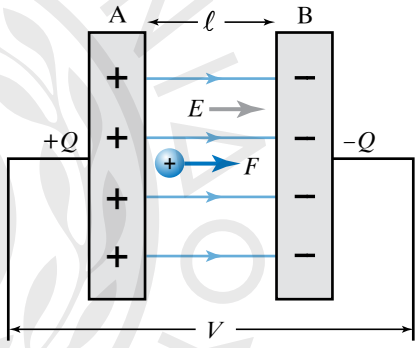
Σχ. 9.4.6

Δυναμικές γραμμές και ισοδυναμικές επιφάνειες (α) γύρω από θετικό και αρνητικό σημειακό φορτίο, (β) πεδίου δύο ετερωνύμων σημειακών ηλεκτρικών φορτίων, και (γ) πεδίου δύο φορτισμένων επιπέδων και παραλλήλων πλακών.



Σχ. 9.4.7

Δυναμικές γραμμές και ισοδυναμικές επιφάνειες πεδίου μεταξύ ακίδας και επίπεδης επιφάνειας.



Σχ. 9.4.8

Η ένταση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα σε δύο φορτισμένες πλάκες εξαρτάται από τη διαφορά δυναμικού (V) και τη μεταξύ τους απόσταση (ℓ).

ισοδυναμικών επιφανειών είναι μικρή. Στο σημείο Β που η ένταση του πεδίου είναι μικρή, η απόσταση των ισοδυναμικών επιφανειών είναι μεγάλη.

9.4.10 Σχέση μεταξύ διαφοράς δυναμικού και εντάσεως ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

Δύο επίπεδες μεταλλικές πλάκες Α, Β έχουν ίσα αλλά ετερώνυμα ηλεκτρικά φορτία και η μεταξύ τους απόσταση είναι ℓ. Ανάμεσα στις πλάκες σχηματίζεται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, με σταθερή ένταση E. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πλακών είναι V (σχ. 9.4.8). Δοκιμαστικό φορτίο q αφήνεται αρχικά πολύ κοντά στον οπλισμό Α. Στο φορτίο ενεργεί δύναμη $F = E\,q$ και το μετακινεί μέχρι τον οπλισμό Β. Κατά τη μετακίνηση αυτή η δύναμη του πεδίου παράγει έργο $W = F\,\ell = E\,q\,\ell$ ή $W = q\,V$, δηλαδή ισχύει $E\,q\,\ell = q\,V$ ή $E\,\ell = V$, συνεπώς:

$$E = V/\ell.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ειδική περίπτωση της σχέσεως $E = \mathrm{d}V/\mathrm{d}\ell$ και φανερώνει ότι η ένταση E ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου ισούται με τη μεταβολή του δυναμικού κατά μονάδα μήκους της δυναμικής γραμμής. Απ' τη σχέση $E = V/\ell$ διαπιστώνομε ότι μονάδα μετρήσεως της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου είναι το 1 V/m, που είναι ισοδύναμο με το 1 N/C. Πράγματι ισχύει:

$$1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 1\ \frac{\dfrac{\text{joule}}{\text{coulomb}}}{\mathrm{m}} = 1\ \frac{\mathrm{N}\times\mathrm{m}}{\mathrm{m}\times\mathrm{C}} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

9.5 Ηλεκτρικές εκκενώσεις.

Ηλεκτρική εκκένωση ονομάζεται η διατεταγμένη κίνηση φορτίων (διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος) μέσα από αέριο, που πολλές φορές συνοδεύεται από φωτεινά φαινόμενα. Για να διέρχεται ρεύμα, πρέπει να υπάρχουν φορτία μέσα στο αέριο. Σε φυσιολογικές συνθήκες τα αέρια αποτελούνται από ουδέτερα άτομα ή μόρια ή σωμάτια σκόνης που είναι ουδέτερα. Όμως υπάρχουν πολλοί μηχανισμοί, οι οποίοι μπορούν να ιοντίσουν αυτά τα ουδέτερα συστατικά του αερίου και να δημιουργήσουν αρχικά πολύ μικρό πλήθος ηλεκτρονίων και αρνητικών και θετικών ιόντων μέσα στο αέριο.

Αυτό μπορεί να συμβεί με την τριβή των σωματίων σκόνης με τα τοιχώματα του δοχείου που περιέχει το αέριο, καθώς επίσης με την τριβή σωματίων σκόνης του αερίου διαφορετικών ειδών. Μια άλλη αιτία ιοντισμού είναι η ύπαρξη ραδιενεργών υλικών στην ατμόσφαιρα και η κοσμική ακτινοβολία.

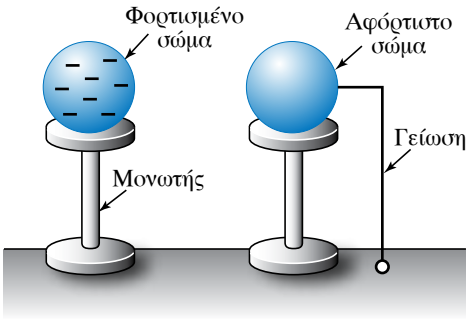
9.5.1 Ηλεκτρικό πεδίο της Γης.

Από πειράματα, έχει αποδειχθεί ότι όταν υπάρχει ηρεμία στην ατμόσφαιρα, χωρίς σύννεφα, η Γη περιβάλλεται από ηλεκτρικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κατακόρυφες με φορά από πάνω προς τα κάτω. Δηλαδή στην ατμόσφαιρα υπάρχει πλεόνασμα θετικών ηλεκτρικών φορτίων, ενώ στο έδαφος πλεόνασμα αρνητικών. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου της Γης δεν είναι σταθερή, αλλά μειώνεται με το ύψος.

Στην επιφάνεια της θάλασσας έχει τιμή $E = 130\ \text{V/m}$ και σε ύψος περίπου 15 km μηδενίζεται. Όταν δεν υπάρχουν σύννεφα, φορτία ρέουν από την αρνητικά φορτισμένη Γη προς τα θετικά φορτισμένα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Γνωστό στους ναυτικούς και στους αεροπόρους είναι το λεγόμενο ***φως των Διοσκούρων***, δηλαδή η ροή φορτίων από τα κατάρτια των πλοίων τη νύχτα.

9.5.2 Γείωση.

Η χωρητικότητα της Γης είναι μεγάλη ($C = 708\ \mu\text{F}$) και γι' αυτόν το λόγο το δυναμικό της πρακτικά δεν μεταβάλλεται, όταν μετακινούνται ηλεκτρικά φορτία από και προς αυτήν. Συνεπώς, όταν συνδέσομε ένα φορτισμένο σώμα με τη Γη (έδαφος) μέσω αγωγού (σύρματος), όλο το φορτίο του σώματος θα μεταφερθεί στη Γη, άρα το σώμα θα εκφορτισθεί πλήρως. Τότε λέμε ότι το σώμα ***γειώθηκε*** και



Σχ. 9.5.1
Σώμα πριν (φορτισμένο) και μετά (αφόρτιστο) τη γείωσή του.

η διαδικασία που περιγράψαμε ονομάζεται ***γείωση*** (σχ. 9.5.1). Λόγω της καλής σχετικά αγωγιμότητας των τοιχωμάτων των οικοδομών, αυτά έχουν το δυναμικό της Γης.

Υπάρχουν οι εξής δύο περιπτώσεις:

1) Αν το σώμα που γειώνεται έχει αρχικά θετικό ηλεκτρικό φορτίο, τότε θα έχει έλλειμμα ελευθέρων ηλεκτρονίων. Κατά τη γείωση, μέσω του σύρματος της γειώσεως, ελεύθερα ηλεκτρόνια από την επιφάνεια της Γης μετακινούνται προς το σώμα, μέχρι αυτό να γίνει ηλεκτρικά ουδέτερο, δηλαδή να έχει μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο.

2) Αν το σώμα που γειώνεται έχει αρχικά αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο, τότε θα έχει πλεόνασμα ελευθέρων ηλεκτρονίων. Κατά τη γείωση, μέσω του σύρματος της γειώσεως, ελεύθερα ηλεκτρόνια από το σώμα μετακινούνται προς την επιφάνεια της Γης, μέχρι το σώμα να γίνει ηλεκτρικά ουδέτερο, δηλαδή να έχει μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο.

9.5.3 Δημιουργία ηλεκτρικών σπινθήρων, εκκενώσεων.

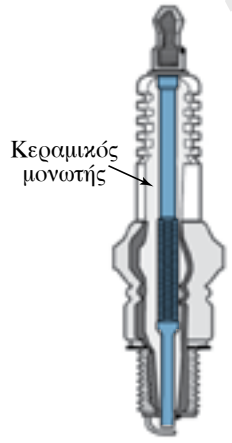
Όταν δύο σώματα Α, Β, φορτισμένα με αντίθετα ηλεκτρικά φορτία (έστω το Α θετικό και το Β αρνητικό) πλησιάσουν πολύ κοντά το ένα στο άλλο, παρατηρούμε ότι δημιουργούνται ***ηλεκτρικοί σπινθήρες***. Αυτό το φαινόμενο εξηγείται ως εξής:

Ανάμεσα στα δύο σώματα Α, Β παρεμβάλλεται αέρας. Ο αέρας αποτελείται από ουδέτερα και από λίγα θετικά και αρνητικά φορτισμένα σωμάτια. Τα ιόντα και κυρίως τα ηλεκτρόνια, αν το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα δύο φορτισμένα σώματα μέσα στο αέριο είναι αρκετά μεγάλο, θα αποκτήσουν μεγάλη κινητική ενέργεια, και έτσι κατά τη σύγκρουσή τους με τα ουδέτερα σωμάτια μπορεί

να τα ιονίσουν. Η διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε καταιγισμό, δηλαδή σε παραγωγή μεγάλου πλήθους θετικών και αρνητικών φορτίων, συνεπώς έχομε μεγάλη ροή φορτίων (μεγάλο ηλεκτρικό ρεύμα) που συνοδεύεται από διέγερση μορίων και ατόμων του αερίου, οπότε μπορεί να προκύψουν φωτεινά φαινόμενα (σπινθήρας, αστραπή) και θέρμανση του αέρα (απότομη διαστολή) η οποία μπορεί να προκαλέσει και ηχητικά φαινόμενα (βροντή).

Όταν φέρομε κοντά τις ακίδες δύο σωμάτων, τα οποία έχομε φορτίσει με μεγάλη ποσότητα αντιθέτων ηλεκτρικών φορτίων, παρατηρούμε ότι ανάμεσά τους εμφανίζεται σπινθήρας. Αυτό είναι ένα είδος φαινομένου ηλεκτρικής εκκενώσεως και οφείλεται στο ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται σε ακίδες. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά δυναμικού, τόσο μεγαλύτερη είναι και η απόσταση των σωμάτων στην οποία μπορεί να εμφανίζονται σπινθήρες. Όσο αυξάνεται η ατμοσφαιρική πίεση, τόσο μειώνεται η απόσταση των σωμάτων στην οποία εμφανίζεται ο σπινθήρας.

Το φαινόμενο αυτό βρίσκει εφαρμογή στους αναφλεκτήρες (μπουζί) των βενζινομηχανών (σχ. 9.5.2). Η τάση που αναπτύσσεται είναι περίπου 40 kV, ικανή να προκαλέσει ηλεκτρική εκκένωση, απαραίτητη για την ανάφλεξη του καυσίμου (μείγματα αέρα και βενζίνης). Ακόμη και οι κεραυνοί (ατμοσφαιρικές ηλεκτρικές εκκενώσεις) οφείλονται σε παρόμοια αιτία.



Σχ. 9.5.2
Αναφλεκτήρας (μπουζί).

Στον ξηρό ατμοσφαιρικό αέρα έχομε σπινθήρα, αν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου φτάσει περίπου τα 30 kV/cm.

Με κάποιο σχετικά πολύπλοκο μηχανισμό, τα σύννεφα φορτίζονται έτσι, ώστε μερικές περιοχές τους είναι θετικά και άλλες αρνητικά φορτισμένες. Όταν οι διαφορές των φορτίων στα σύννεφα είναι μεγάλες (μεγάλες διαφορές δυναμικού) και οι αποστάσεις των περιοχών μικρές, παρατηρούνται ατμοσφαιρικές ηλεκτρικές εκκενώσεις (κεραυνοί). Τα φορτία που βρίσκονται στα κάτω τμήματα των νεφών, επάγουν στο έδαφος ίσα και αντίθετα φορτία. Έτσι, μεταξύ του σύννεφου και του εδάφους δημιουργείται ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο.

Το κάτω μέρος ενός σύννεφου συνήθως έχει αρνητικό φορτίο. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει ένταση πεδίου στον χώρο μεταξύ του σύννεφου και του εδάφους 100 εκατομμύρια φορές ισχυρότερη από τη συνήθη ένταση που υπάρχει όταν δεν υπάρχουν σύννεφα. Τότε, τα ηλεκτρόνια εξαναγκάζονται να κινηθούν απ' το σύννεφο προς το έδαφος και μόλις γεφυρωθεί το χάσμα, σχηματίζεται ο κεραυνός, όπως ο σπινθήρας στο μπουζί του αυτοκινήτου. Περίπου 100 φορές κάθε δευτερόλεπτο οι κεραυνοί κτυπούν τη Γη και κατρακυλούν σε φωτεινές δέσμες, μήκους 300 m έως 3000 m. Ένας μόνο κεραυνός μπορεί να έχει ισχύ 3750 εκατομμύρια κιλοβάτ (kW), περισσότερο από όλη μαζί την παραγωγή όλων των εργοστασίων ηλεκτροπαραγωγής μίας χώρας. Υπολογίζεται ότι σε κάθε κεραυνό απελευθερώνεται ενέργεια περίπου 360 εκατομμυρίων joule. Ο κεραυνός είναι ένας γιγάντιος σπινθήρας. Η βροντή προκαλείται από τη θέρμανση και την απότομη διαστολή του αέρα γύρω από τον κεραυνό. Το φως του κεραυνού (αστραπή) κινείται προς τον παρατηρητή με ταχύτητα 300 000 km/s, ενώ ο ήχος της βροντής με ταχύτητα 340 m/s. Άρα η βροντή γίνεται αργότερα αντιληπτή από τον παρατηρητή. Για να υπολογίσομε κατά προσέγγιση την απόσταση, σε χιλιόμετρα, που μας χωρίζει από την τοποθεσία που έχει ξεσπάσει η θύελλα, διαιρούμε διά 3 τον χρόνο, σε δευτερόλεπτα, ανάμεσα στη λάμψη και στη βροντή.

Η διαφορά δυναμικού που αναπτύσσεται ακριβώς πριν τη δημιουργία του κεραυνού κυμαίνεται από 100 MV – 1000 MV και αυξάνεται περίπου με το τετράγωνο του ύψους του σύννεφου. Το ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει στη φωτεινή φλέβα είναι της τάξεως των 20 000 A. Το 75% αυτής της ενέργειας γίνεται εσωτερική ενέργεια και αυξάνει τη θερμοκρασία της ατμόσφαιρας κατά μήκος της διαδρομής του, έως τους 15 000 °C. Έτσι, ο αέρας αναγκάζεται να εκτονωθεί ταχύτατα, όπως συμβαίνει στις εκρήξεις. Η κίνηση αυτή του αέρα δημιουργεί ηχητικά κύματα που μπορούν να ακουσθούν ως βροντή, σε απόσταση 30 km.

9.5.4 Το αλεξικέραυνο.

Το αλεξικέραυνο είναι μια διάταξη που χρησιμεύει για να προφυλάσσει κτήρια, πλοία, συσκευές και ηλεκτρικές εγκαταστάσεις απ' τις καταστρεπτικές συνέπειες των κεραυνών.

Ο συνήθης τύπος αλεξικέραυνου (σχ. 9.5.3) αποτελείται από:

1) Μια ***ευθύγραμμη μεταλλική ράβδο***, που ονομάζεται ***κεραία***. Είναι συνήθως σιδερένια και τοποθετείται στο ψηλότερο σημείο του οικοδομήματος ή του πλοίου. Η κορυφή της καταλήγει σε ακίδα από χαλκό που επιμεταλλώνεται με ευγενές μέταλλο, συνήθως χρυσό ή λευκόχρυσο.

2) Ένα ***σύστημα αγωγών*** που συνδέουν τη ράβδο με τη γείωση και επιτυγχάνουν ηλεκτρική επαφή ανάμεσα στην κεραία και στις μεταλλικές μάζες του οικοδομήματος.

3) Τη ***γείωση*** που γίνεται με κατάλληλη τοποθέτηση του αγωγού μέσα στο έδαφος ή στον μεταλλικό σκελετό του πλοίου. Η γείωση των αλεξικέραυνων πρέπει να παρουσιάζει μικρή αντίσταση, ώστε να μην προκαλείται υψηλή τάση όταν τη διαρρέει το ρεύμα.

Η προστασία των κτηρίων είναι άμεση και προληπτική. Χάρη στην ακίδα του αλεξικέραυνου προκαλείται βραδεία ηλεκτρική εκκένωση του στατικού ηλεκτρισμού του κτηρίου, το οποίο ηλεκτρίσθηκε «εξ επαγωγής» από την προσέγγιση φορτισμένου σύννεφου. Όταν ο κεραυνός γίνει αναπόφευκτος, τότε η κεραία απάγει με ασφάλεια τον ατμοσφαιρικό ηλεκτρισμό.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι αλεξικέραυνων, ανάλογα με το τι θέλομε να προστατεύσομε.

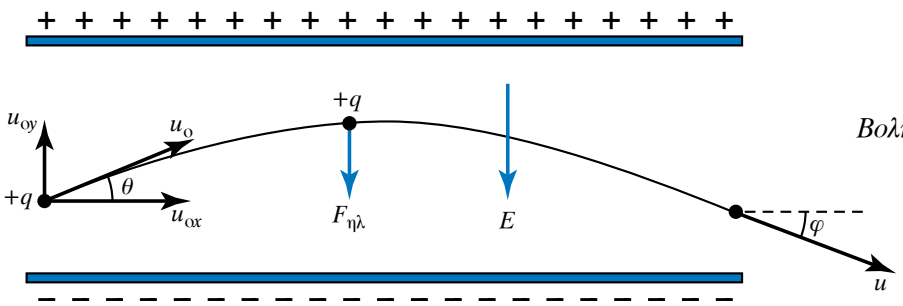
Σχ. 9.5.3
Αλεξικέραυνο.

9.6 Κίνηση φορτισμένου σωματίου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.

9.6.1 Βολή σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Για να μελετήσομε τη βολή φορτισμένου σωματίου σε ηλεκτρικό πεδίο, πρέπει να αγνοήσομε κάθε δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο (βάρος, άνωση, αντίσταση αέρα), εκτός απ' τη δύναμη που του ασκεί το πεδίο. Το σωμάτιο, κατά την κίνησή του μέσα στο πεδίο, κινείται υπό την επίδραση σταθερής κατακόρυφης δυνάμεως, που έχει φορά από πάνω προς τα κάτω και ισχύει: $F = E\,q$.

Η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο, έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τη δύναμη που ασκείται στο σώμα που εκτελεί πλάγια βολή μέσα στο βαρυτικό πεδίο. Η κίνησή του, σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων (βλ. παράγρ. 2.5.2), θεωρείται ως σύνθεση δύο κινήσεων: Μίας οριζόντιας ομαλής κινήσεως με ταχύτητα $u_{0x} = u_0 \cos\theta$ και μίας κατακόρυφης ομαλά επιβραδυνόμενης με αρχική ταχύτητα $u_{0y} = u_0 \sin\theta$ (θεωρούμε τη διάταξη δύο παραλλήλων φορτισμένων πλακών του σχ. 9.6.1). Στο ομογενές πεδίο υπολογίζομε την επιτάχυνση a του σωματίου από το Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα και στη συνέχεια εφαρμόζομε τύπους ανάλογους με το βαρυτικό πεδίο. Η επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο:



Σχ. 9.6.1
Βολή σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{ml},$$

όπου E η ένταση του πεδίου, V η διαφορά δυναμικού και l η απόσταση των πλακών. Αναλύομε την ταχύτητα u_o του σωματίου σε μία συνιστώσα κάθετη και μία παράλληλη με τις γραμμές του πεδίου.

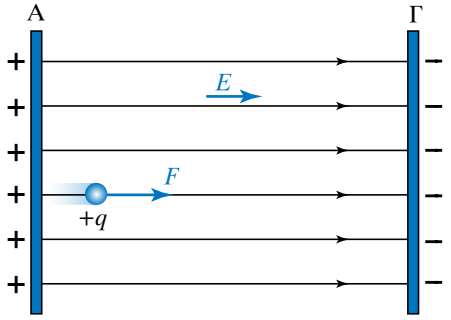
Η τροχιά που θα διαγράψει το σωμάτιο μέσα στο πεδίο είναι παραβολή και οι εξισώσεις της παρουσιάζονται στον πίνακα 9.6.1.

Πίνακας 9.6.1
Εξισώσεις κινήσεως για πλάγια βολή σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Άξονας x	*Άξονας y*
$F_x = 0$	$F_y = Eq$
$a_x = 0$	$a_y = \frac{Eq}{m}$
Ομαλή κίνηση	Ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση
$u_x = u_0 \cos\theta$	$u_y = u_0 \sin\theta - \frac{Eq}{m}t$
$s_x = u_0 \cos\theta t$	$s_y = u_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t^2$

9.6.2 Κίνηση παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ασκεί στο φορτισμένο σωμάτιο σταθερή δύναμη $F = Eq$ κατά τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών. Το σωμάτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}$ (σχ. 9.6.2). Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s που αφήνεται μέσα στο πεδίο η ταχύτητά του είναι μηδέν, τότε την κάθε χρονική στιγμή θα έχει ταχύτητα $u = at = \frac{Eq}{m}t$ και θα έχει μετακινηθεί κατά $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Eq}{m}t^2$.



Σχ. 9.6.2
Κίνηση φορτίου μέσα σε ομογενές πεδίο παράλληλα στις δυναμικές γραμμές.

Αν γνωρίζομε την απόσταση ℓ που απέχουν μεταξύ τους οι παράλληλες πλάκες και τη μεταξύ τους τάση V, τότε η ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου δίνεται απ' τον τύπο: $E = V/\ell$.

Συνεπώς, η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σωματίδιο δίνεται από τον τύπο $a = Vq/\ell m$.

Ο χρόνος που χρειάζεται για να πάει από τη θετική (την Α) στην αρνητική (τη Γ) πλάκα βρίσκεται ως εξής:

$$\ell = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \ell\sqrt{\frac{2m}{qV}}.$$

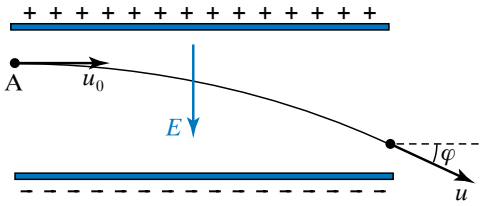
Η ταχύτητα, με τη οποία φτάνει στην απέναντι πλάκα (τη Γ) δίνεται από τον τύπο:

$$u = at = a\sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \sqrt{2\ell a} = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s που αφήνεται μέσα στο πεδίο, η ταχύτητά του είναι u_0, τότε εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη (ή επιβραδυνόμενη) κίνηση με αρχική ταχύτητα. Η ταχύτητά του την κάθε χρονική στιγμή είναι $u = u_0 \pm at$ και έχει μετακινηθεί κατά $x = u_0 t \pm at^2/2$.

9.6.3 Κίνηση κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Το σωμάτιο εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου (σχ. 9.6.3). Η σταθερή δύναμη που του ασκεί το πεδίο είναι $F = Eq$ και έχει κατακόρυφη διεύθυνση που για $q > 0$ έχει φορά προς την αρνητική πλάκα που είναι οριζόντια. Τη στιγμή της εισόδου (θέση Α) η δύναμη F είναι κάθετη στην ταχύτητα u_0.



Σχ. 9.6.3
Κίνηση φορτίου που εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου.

Η κίνηση του σωματίου μπορεί να θεωρηθεί ως η συνισταμένη δύο κινήσεων, μίας κατά τη διεύθυνση του άξονα x και μίας κατά τη διεύθυνση του άξονα y. Η κίνηση στον οριζόντιο άξονα είναι ομαλή με ταχύτητα u_0, διότι το σωμάτιο δεν δέχεται καμμία δύναμη. Άρα ισχύει ότι $u_x = u_0$ και η μετατόπισή του στον οριζόντιο άξονα δίνεται απ' τον τύπο $x = u_0 t$. Η κίνηση στον κατακόρυφο άξονα είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα και με επιτάχυνση $a_y = E\,q/m$, διότι σε όλη τη διάρκεια της κινήσεώς του το σωματίδιο δέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο τη σταθερή δύναμη F. Τα μέτρα της ταχύτητας και της μετατοπίσεως του σωματιδίου στον άξονα y κάθε χρονική στιγμή δίνονται από τους τύπους $u_y = at$ και $y = at^2/2$. Η κίνηση είναι όμοια με την οριζόντια βολή μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο και αποτελεί συνδυασμό επιταχυνόμενης κινήσεως χωρίς αρχική ταχύτητα και ευθύγραμμης ομαλής με ταχύτητα $u_{ox} = u_0$. Η τροχιά του σωματιδίου είναι παραβολή και η θέση του (οι συντεταγμένες) γνωστή κάθε χρονική στιγμή. Οι εξισώσεις της κινήσεως φαίνονται στον πίνακα 9.6.2.

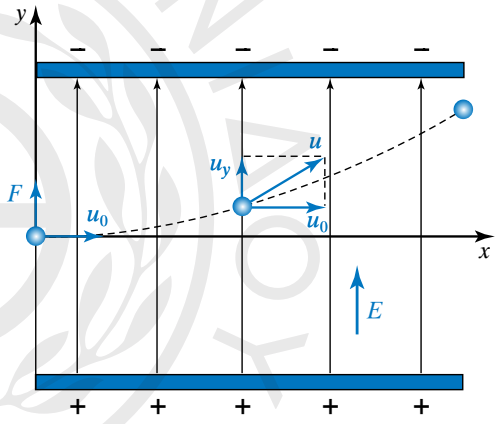
Πίνακας 9.6.2
Εξισώσεις κινήσεως για βολή κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

Άξονας x	*Άξονας y*
Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση	Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
$a_x = 0$	$a_y = E\,q/m$
$u_x = u_0$	$u_y = a\,t$
$s_x = u_0 t$	$s_y = 1/2\,a\,t^2$

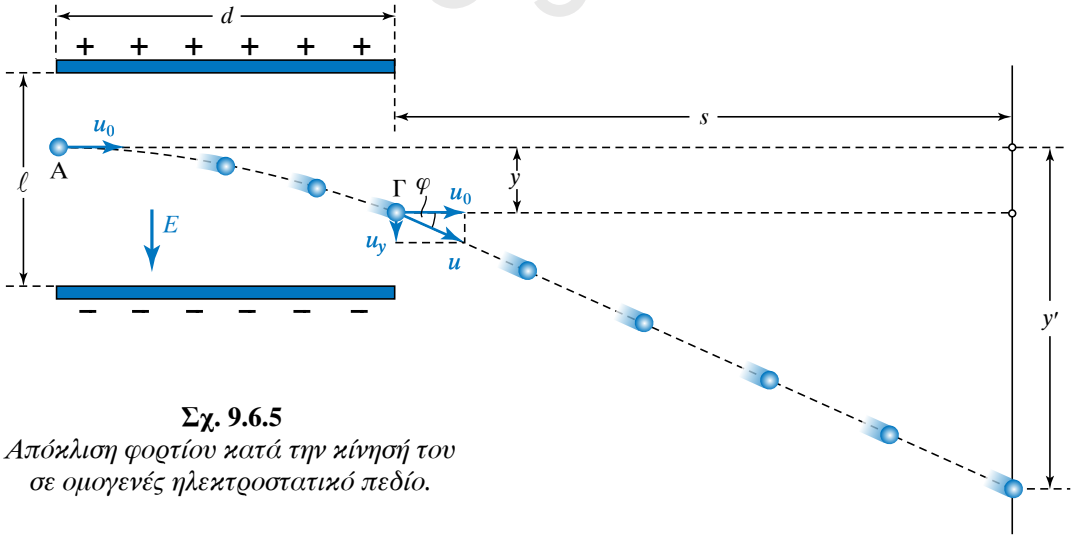
Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, αν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα για χρόνο t δύο κινήσεις, φτάνει στην ίδια θέση αν εκτελεί ξεχωριστά και διαδοχικά κάθε κίνηση για χρόνο t την κάθε μία. Γνωρίζοντας κάθε χρονική στιγμή τις ταχύτητες $u_x = u_0$ και $u_y = a\,t$, υπολογίζομε την ταχύτητα u του σωματιδίου (σχ. 9.6.4). Κάθε χρονική στιγμή για την ταχύτητα u του σωματιδίου, διανυσματικά ισχύει ότι $\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$ δηλαδή $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_y$. Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα, κάθε χρονική στιγμή για την ταχύτητα u του σωματιδίου ισχύει ότι $u^2 = u_0^2 + u_y^2$.

Η ταχύτητα που έχει το σωματίδιο όταν εξέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο, στο σημείο Γ του σχήματος 9.6.5, ονομάζεται ***ταχύτητα εξόδου*** και η απόσταση y ***κατακόρυφη απόκλιση***.

Η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της u με τη



Σχ. 9.6.4
Ταχύτητα φορτίου κατά την κίνησή του σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.



Σχ. 9.6.5
Απόκλιση φορτίου κατά την κίνησή του σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.

διεύθυνση της u_0, υπολογίζεται απ' τη σχέση

$$\tan\varphi = \frac{u_y}{u_0}.$$

Μετά την έξοδό του το σωματίδιο προσκρούει σε κατακόρυφη επιφάνεια που έχει τοποθετηθεί σε οριζόντια απόσταση s απ' το ηλεκτρικό πεδίο. Η κατακόρυφη απόσταση y' υπολογίζεται από τον τύπο $y' = y + s \cdot \tan\varphi$.

Παρατήρηση.

Γενικά το έργο της δυνάμεως του πεδίου για μετακίνηση φορτίου q από σημείο Α σε σημείο Β είναι: $W_{A\Gamma} = q\,(V_A - V_B)$. Αυτό ισχύει για ομογενές και για ανομοιογενές πεδίο.

Πολλά προβλήματα αντιμετωπίζονται με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

9.7 Κατανομή φορτίων σε αγωγούς.

9.7.1 Πυκνότητα φορτίου.

Έστω σημείο Α μιας επιφανειακής κατανομής φορτίου. Αν dS είναι το εμβαδό της στοιχειώδους επιφάνειας γύρω από το σημείο Α και dq το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο που έχει κατανεμηθεί στην επιφάνεια αυτή, το πηλίκο $\sigma = \mathrm{d}q/\mathrm{d}S$ ονομάζεται ***επιφανειακή πυκνότητα*** του ηλεκτρικού φορτίου. Αν η κατανομή του φορτίου είναι ομοιόμορφη, τότε η επιφανειακή πυκνότητα είναι παντού η ίδια και δίνεται από τον τύπο $\sigma = q/S$.

Μονάδα μετρήσεως της επιφανειακής πυκνότητας του φορτίου στο SI είναι το $1\ \mathrm{C/m^2}$.

Ομοίως, για γραμμική κατανομή φορτίου ορίζεται η γραμμική πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου, ως το πηλίκο $\mu = \mathrm{d}q/\mathrm{d}l$, όπου d$q$ είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο, που έχει κατανεμηθεί στο στοιχειώδες μήκος dl.

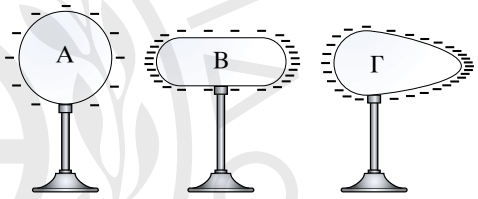
Μονάδα μετρήσεως της γραμμικής πυκνότητας του φορτίου είναι το $1\ \mathrm{C/m}$.

Ανάλογα, για κατανομή φορτίου σε όγκο ορίζεται και η πυκνότητα όγκου του ηλεκτρικού φορτίου, ως το πηλίκο $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}V$, όπου d$q$ είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο, που έχει κατανεμηθεί σε στοιχειώδη όγκο dV.

Μονάδα μετρήσεως της πυκνότητας όγκου του ηλεκτρικού φορτίου είναι το $1\ \mathrm{C/m^3}$.

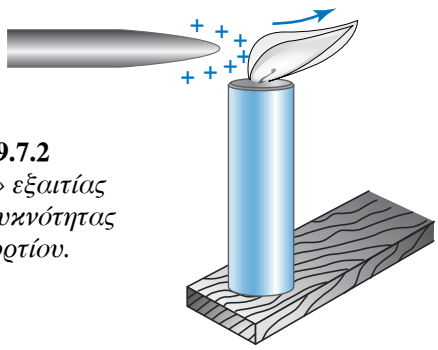
Στους αγωγούς, το ηλεκτρικό φορτίο κατανέμεται στην επιφάνειά τους. Αυτό σχετίζεται με το γεγονός ότι ισχύει ο Νόμος του Coulomb, όπου η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεως μεταξύ αλληλεπιδρώντων σημειακών φορτίων. Μάλιστα, αυτό χρησιμοποιείται πειραματικά για να βρεθεί με τι ακρίβεια ισχύει η εξάρτηση της δυνάμεως του Coulomb απ' την απόσταση.

Η ακριβής κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου εξαρτάται από το σχήμα που έχει ο αγωγός. Στον σφαιρικό αγωγό Α του σχήματος 9.7.1, η κατανομή του φορτίου είναι ομοιόμορφη και η επιφανειακή πυκνότητα σ είναι ίδια σε όλα τα σημεία της επιφάνειάς του. Στον αγωγό Β η επιφανειακή πυκνότητα είναι μεγαλύτερη στα άκρα του, ενώ στο μέσο του είναι μικρή. Στον αγωγό Γ, του οποίου το ένα άκρο είναι οξύ, η επιφανειακή πυκνότητα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο άκρο αυτό. Όταν ο αγωγός παρουσιάζει οξύ άκρο, ιδιαίτερα στις ακίδες, η επιφανειακή πυκνότητα στην περιοχή αυτή λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.



Σχ. 9.7.1
Κατανομή ηλεκτρικού φορτίου σε αγωγό.

Αν κοντά στην ακίδα φορτισμένου αγωγού πλησιάσομε φλόγα, παρατηρούμε ότι δημιουργείται φύσημα και τη σβήνει (σχ. 9.7.2). Αυτό συμβαίνει διότι η συγκέντρωση του φορτίου στην ακίδα είναι πολύ μεγάλη, με αποτέλεσμα να ανταλλάσσεται φορτίο μεταξύ αέρα και ακίδας. Έτσι, ο αέρας φορτίζεται με ομόσημο φορτίο με αυτόν της ακίδας. Αποτέλεσμα αυτού είναι να απωθείται ο αέρας από την ακίδα και να δημιουργείται ρεύμα αέρα το



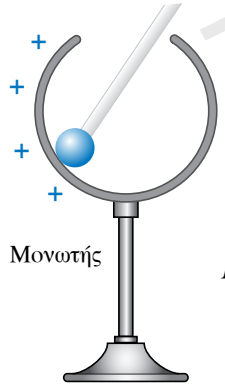
Σχ. 9.7.2
«Φύσημα» εξαιτίας μεγάλης πυκνότητας του φορτίου.

οποίο μπορεί να σβήσει τη φλόγα. Η ανταλλαγή των ηλεκτρικών φορτίων μεταξύ επιφάνειας αγωγού και αέρα εξαρτάται κυρίως από την τιμή της επιφανειακής πυκνότητας. Όταν αυτή ξεπεράσει μία κρίσιμη τιμή ($\sigma > \sigma_{crit}$), τότε έχομε έντονο ηλεκτρικό πεδίο, γίνεται μεγάλος ιοντισμός του αέρα και παρατηρείται ροή φορτίων. Πειραματικά, έχει υπολογισθεί ότι για τον αέρα ισχύει $\sigma_{crit} = 2{,}65 \cdot 10^{-5} C/m^2$. Συχνά, διαρροή θυσάνων ηλεκτρικού φορτίου είναι ορατή στους πυργίσκους των καλωδίων υψηλής τάσεως.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***φαινόμενο Corona*** και προκαλεί ανωμαλίες στους εναέριους αγωγούς υψηλής τάσεως λόγω της διαρροής ηλεκτρικών φορτίων, όταν ο καιρός είναι κρύος, οπότε και σχηματίζονται παγοκρύσταλλοι στα καλώδια, οι δε σπινθηρισμοί είναι ορατοί από μεγάλες αποστάσεις.

9.7.2 Κατανομή των ηλεκτρικών φορτίων στο εσωτερικό αγωγού.

Έστω ότι μεταφέρομε ηλεκτρικά φορτία στο εσωτερικό ενός αγωγού. Αυτά φεύγουν από το εσωτερικό του και κατανέμονται στην εξωτερική του επιφάνεια. Εκεί, κατανέμονται επίσης και όσα φορτία αναπτύσσονται με ηλεκτρική επαγωγή. Στο εσωτερικό φορτισμένου αγωγού (συμπαγούς ή κοίλου) δεν μπορεί να παραμείνει ηλεκτρικό φορτίο. Αυτό διαπιστώνεται πειραματικά με κοίλο ηλεκτρισμένο αγωγό, που είναι μονωμένος (σχ. 9.7.3).



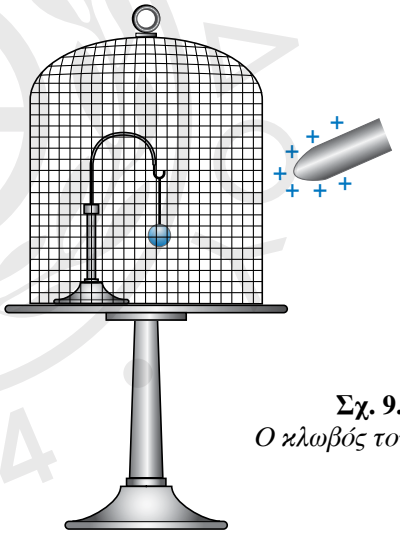
Σχ. 9.7.3
Ηλεκτρική φόρτιση κοίλου αγωγού.

Στην άκρη γυάλινης ράβδου είναι στερεωμένο ένα μεταλλικό σφαιρίδιο, που ονομάζεται ***δοκιμαστικό σφαιρίδιο***. Όταν το ουδέτερο σφαιρίδιο έρθει σε επαφή με την εξωτερική επιφάνεια του αγωγού, τότε το σφαιρίδιο παίρνει από τον αγωγό λίγο ηλεκτρικό φορτίο (ηλέκτριση με επαφή).

Με χρήση του ηλεκτροσκοπίου διαπιστώνομε ότι το σφαιρίδιο δεν παίρνει καθόλου ηλεκτρικό φορτίο, όταν έρχεται σε επαφή με την εσωτερική επιφάνεια του κοίλου αγωγού. Αν ο αγωγός έχει ακμές, τότε μεγάλο μέρος του ηλεκτρικού φορτίου του, συγκεντρώνεται στα σημεία αυτά.

Αποδεικνύεται ότι η ένταση στο εσωτερικό φορτισμένου αγωγού είναι μηδενική.

Η ιδιότητα αυτή εφαρμόζεται όταν επιθυμούμε να προστατέψομε έναν χώρο από ανεπιθύμητα εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία, (ηλεκτρική θωράκιση) περιβάλλοντάς τον με μεταλλικό πλέγμα, όπως συμβαίνει στον κλωβό του Faraday. Ο κλωβός αυτός είναι ένας κοίλος αγωγός, που στο σχήμα του μοιάζει με ποτήρι (σχ. 9.7.4). Στο εσωτερικό του δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, άσχετα από το φορτίο του αγωγού και από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Αν στην εσωτερική επιφάνεια του κλωβού εισχωρήσουν για κάποιον λόγο ηλεκτρικά φορτία, τότε τα φορτία αυτά περνούν αμέσως στην εξωτερική του επιφάνεια και επίσης η ένταση στο εσωτερικό του είναι μηδενική.



Σχ. 9.7.4
Ο κλωβός του Faraday.

Μία εφαρμογή της ηλεκτρικής θωρακίσεως έχομε στην περίπτωση που κεραυνός χτυπά αυτοκίνητο. Το αμάξωμα του αυτοκινήτου είναι μεταλλικό. Όταν ο κεραυνός το χτυπήσει, υπάρχει ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο έξω από τον χώρο του αυτοκινήτου, αλλά στο εσωτερικό του δεν υπάρχει και γι' αυτόν τον λόγο οι επιβάτες δεν παθαίνουν τίποτα.

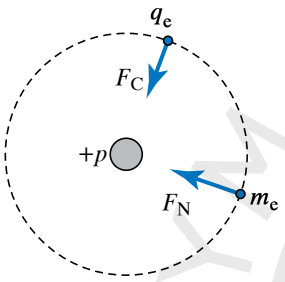
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Για δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία που βρίσκο-

νται στον αέρα ισχύει $q_1 = 2 \cdot 10^{-9}$C, $q_2 = 3 \cdot 10^{-9}$C και η μεταξύ τους απόσταση είναι $r = 4$ m. Να υπολογίσετε το μέτρο της απωστικής δυνάμεως που ασκεί το ένα φορτίο στο άλλο. Δίνεται:

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\, m^2}{C^2}.$$

2. Στο άτομο του υδρογόνου (σχ. 1) το ηλεκτρόνιο κινείται γύρω από τον πυρήνα σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 5{,}3 \times 10^{-11}$ m. Να υπολογίσετε τη δύναμη Coulomb μεταξύ ηλεκτρονίου και του πυρήνα και στη συνέχεια να τη συγκρίνετε με τη δύναμη της παγκόσμιας έλξεως που ασκείται μεταξύ τους. Δίνονται $q_p = e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg, $q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$kg.



Σχ. 1

3. Δύο σημειακά ετερόσημα ηλεκτρικά φορτία βρίσκονται στον αέρα, τοποθετημένα σε απόσταση $r = 0{,}2$ m μεταξύ τους και έλκονται με δυνάμεις μέτρου $F_A = F_B = 1\,N$. Σε πόση απόσταση r' πρέπει να τοποθετηθούν τα ανωτέρω ηλεκτρικά φορτία, ώστε η δύναμη που δέχεται το κάθε ένα φορτίο απ' το άλλο να τετραπλασιαστεί;

4. Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $q_1 = 1$ pC και $q_2 = 9$ pC τοποθετούνται στα δύο σταθερά σημεία Α και Β αντίστοιχα και παραμένουν ακίνητα. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος $\ell = 2$ m, σε ποιο εσωτερικό του σημείο Γ πρέπει να τοποθετηθεί το σημειακό φορτίο $+q$, ώστε αυτό να ισορροπεί;

5. Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $q_1 = 1$ pC και $q_2 = -9$ pC τοποθετούνται στα σταθερά σημεία Α, Β αντίστοιχα και παραμένουν ακίνητα. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος $\ell = 2$ m, σε ποιο εξωτερικό σημείο του Ζ πρέπει να τοποθετηθεί το σημειακό φορτίο $+q$, ώστε αυτό να ισορροπεί;

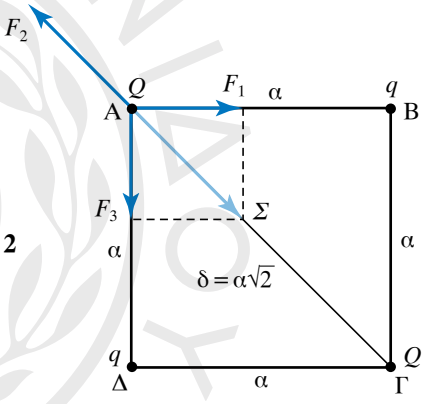
6. Σημειακό φορτίο Q θα μοιραστεί σε δύο μέρη q και Q-q (σημειακό). Ποια σχέση πρέπει να υπάρχει ανάμεσα στα μεγέθη Q και q, ώστε όταν βρεθούν σε απόσταση r μεταξύ τους, να δέχονται μέγιστη άπωση Coulomb;

7. Τρία σημειακά φορτία $q = 4$ pC είναι τοποθετημένα στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς $\alpha = 2$ cm. Να υπολογίσετε τη δύναμη (μέτρο, διεύθυνση και φορά) που ενεργεί σε κάθε φορτίο.

8. Σε φορτίο $q = -1$ C πόσα ηλεκτρόνια πλεονάζουν;

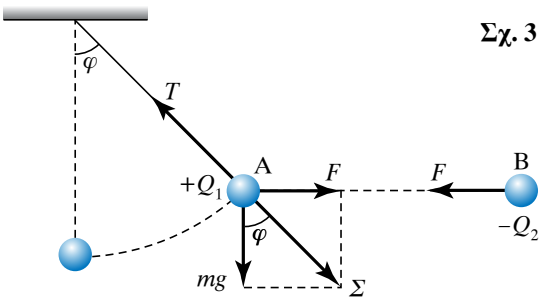
9. Δύο ίσα θετικά φορτία Q ακινητούν σε απόσταση r. Η δύναμη σε ένα θετικό φορτίο q που βρίσκεται στο μέσο της μεταξύ τους αποστάσεως είναι μηδέν. Αν το φορτίο q μετακινηθεί σε πολύ μικρή απόσταση.
α) Προς το ένα από τα δύο φορτία.
β) Πάνω στη μεσοκάθετη της μεταξύ τους αποστάσεως.
Να υπολογίσετε τη φορά της δυνάμεως που θα ασκηθεί στο φορτίο q και το είδος της ισορροπίας του.

10. Τέσσερα σημειακά ηλεκτρικά φορτία Q, q, Q, q τοποθετούνται στις κορυφές τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α (σχ. 2). Αν τα φορτία Q, q είναι ετερόσημα, να υπολογίσετε ποια σχέση πρέπει να τα συνδέει, ώστε η δύναμη που ασκείται στο κάθε φορτίο Q να είναι ίση με μηδέν.



Σχ. 2

11. Μεταλλική σφαίρα Α μάζας $m = 9$ kg που φέρει ηλεκτρικό φορτίο $Q_1 = 0{,}25 \cdot 10^{-5}$ C έχει αναρτηθεί από σταθερό σημείο με μεταξωτό νήμα και ισορροπεί κατακόρυφα (σχ. 3). Όταν της πλησιάσομε όμοια μεταλλική σφαίρα Β αρνητικά φορτισμένη με φορτίο $Q_2 = -10^{-3}$ C, εκτρέπεται απ' την αρχική της θέση και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία φ με την κατακόρυφο, ευρισκόμενη στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τη σφαίρα Β και σε



Σχ. 3

απόσταση $r = 1/2$ m. Να υπολογίσετε τη γωνία φ. Δίνεται ότι $g = 10\,\text{m/s}^2$.

12. Αν ένα ηλεκτρόνιο εκτελεί κυκλική κίνηση σε τροχιά ακτίνας $r = 10^{-10}$ m και η ολική του ενέργεια είναι $24{,}4 \times 10^{-19}$ joule, να υπολογίσετε τη δυναμική του ενέργεια.
Δίνονται $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $k = 9 \cdot 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

13. Μεταξύ δύο σημείων ηλεκτρικού πεδίου υπάρχει διαφορά δυναμικού $V = 6$ V. Πόσο ηλεκτρικό φορτίο πρέπει να μεταφερθεί απ' το ένα σημείο στο άλλο, ώστε να παραχθεί έργο ίσο με 0,5 joule;

14. Δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες έχουν ίσα ετερώνυμα φορτία. Αν η απόσταση τους είναι $\ell = 5$ mm και η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι $V = 400$ V, να υπολογίσετε:
α) Πόση είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.
β) Πόση δύναμη ασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο που εισέρχεται στο πεδίο.
Δίνεται $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

15. Μεταξύ δύο παράλληλων μεταλλικών πλακών που απέχουν μεταξύ τους $l = 1$ cm υπάρχει τάση $V = 12000$ V. Πόσο έργο παράγεται, όταν φορτίο $q = 4 \cdot 10^{-19}$ C μεταφέρεται, απ' το ηλεκτρικό πεδίο, από τη θετική προς την αρνητική πλάκα;

16. Σφαιρικός αγωγός έχει ακτίνα $R = 0{,}4$ m. Πόσο είναι το δυναμικό του, αν το φορτίο του είναι $q = 10^{-6}$ C; Πόσο φορτίο πρέπει να έχει ο αγωγός, ώστε το δυναμικό του να είναι ίσο με 10^5 V;

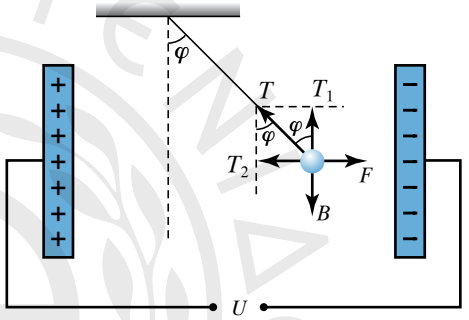
17. Ηλεκτρικό φορτίο $Q = 10^{-10}$ C δημιουργεί γύρω του ηλεκτρικό πεδίο. Να υπολογίσετε το δυναμικό του πεδίου σε απόσταση $r = 10^{-9}$ m από το φορτίο Q. Πόση είναι η δυναμική ενέργεια που έχει φορτίο $q = 4 \cdot 10^{-20}$ C, όταν απέχει απόσταση r από το φορτίο Q;

18. Σφαιρικός αγωγός ακτίνας $r = 8$ cm έχει φορτίο $Q = 10^{-10}$ C. Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και το δυναμικό στην επιφάνειά του.

19. Ηλεκτρόνιο κινείται ανάμεσα σε δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες που απέχουν $\ell = 5$ cm και έχουν διαφορά δυναμικού $V = 80$ V. Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και τη δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο. Δίνεται $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$.

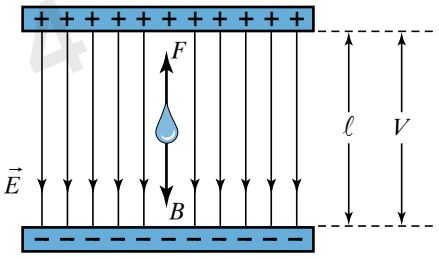
20. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου είναι $V = 160$ V. Το δυναμικό του σημείου Α είναι 60V. Να υπολογίσετε το δυναμικό του σημείου Μ που είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

21. Ανάμεσα σε δύο κατακόρυφες επίπεδες μεταλλικές πλάκες, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\ell = 10$ cm και έχουν συνδεθεί με τους πόλους πηγής σταθερής τάσεως $V = 200$ V κρέμεται με μεταξωτό νήμα σφαιρίδιο μάζας m = 2 g που ακινητεί σχηματίζοντας γωνία $\varphi = 45^\circ$ με την κατακόρυφο (σχ. 4). Να υπολογίσετε το φορτίο q του σφαιριδίου. Δίνεται ότι $g = 10\,\text{m/s}^2$.



Σχ. 4

22. Δύο επίπεδες μεταλλικές πλάκες τοποθετούνται οριζόντια σε μεταξύ τους απόσταση $\ell = 5$ cm και έχουν διαφορά δυναμικού $V = 200$ V. Στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν, αιωρείται μία μικρή σταγόνα λαδιού μάζας $m = 10\,g$ (σχ. 5). Να υπολογίσετε το φορτίο q της σταγόνας. Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.



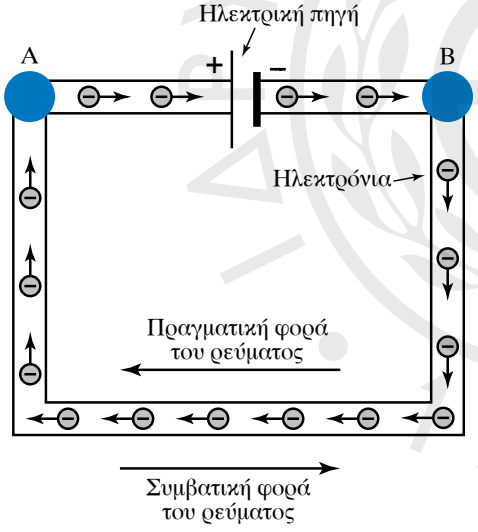
Σχ. 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Ηλεκτρικό ρεύμα

10.1 Ηλεκτρικό ρεύμα και πυκνότητα ρεύματος.

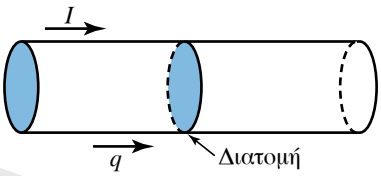
Ηλεκτρικό ρεύμα ή απλώς ***ρεύμα*** ονομάζεται η προσανατολισμένη (σε μια κατεύθυνση) κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων (φορτισμένων σωματιδίων) μέσα σε αγωγό (σχ. 10.1.1). Φορείς του ρεύματος είναι τα ηλεκτρικά φορτία που κινούνται προσανατολισμένα. Στους μεταλλικούς αγωγούς φορείς του ρεύματος είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, στους ηλεκτρολύτες τα κατιόντα και τα ανιόντα (θετικά και αρνητικά ιόντα) του διαλύματος και στους αέριους αγωγούς είναι τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια.



Σχ. 10.1.1
Ροή φορτίων σε μεταλλικό αγωγό.

Το ηλεκτρικό ρεύμα, είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος που περιγράφει τον ρυθμό, με τον οποίο το ηλεκτρικό φορτίο διέρχεται από τυχαία διατομή αγωγού. Συμβολίζεται με i ή I και ισούται με το πηλίκο του στοιχειώδους φορτίου $\mathrm{d}q$ που διέρχεται από διατομή αγωγού σε στοιχειώδη χρόνο $\mathrm{d}t(\mathrm{d}t\to 0)$, προς τον χρόνο αυτόν (σχ. 10.1.2).

Δηλαδή $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$.



Σχ. 10.1.2
Εγκάρσια διατομή αγωγού που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το I:

1) Εκφράζει τον ρυθμό ροής του φορτίου που διέρχεται από διατομή αγωγού,

2) και αναφέρεται σε κάποια χρονική στιγμή, αφού $\mathrm{d}t\to 0$.

Όταν η φορά του ρεύματος δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, το ρεύμα είναι συνεχές. Αν στο συνεχές ρεύμα ο ρυθμός ροής του φορτίου είναι σταθερός, τότε ισχύει:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{t}.$$

Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και γενικώς τα ιόντα μέσα σε αγωγό κινούνται άτακτα και η κίνησή τους δεν έχει προσανατολισμό. Αν θεωρήσομε μια επιφάνεια μέσα στον αγωγό, ο ρυθμός με τον οποίο τα φορτία διέρχονται μέσα από την επιφάνεια, από τα αριστερά προς τα δεξιά είναι ίδιος με τον ρυθμό που διέρχονται από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έτσι, ο συνολικός αριθμός διελεύσεως φορτίων από την επιφάνεια είναι μηδέν.

Αν τα άκρα του αγωγού συνδεθούν με συσσωρευτή (μπαταρία), τότε σε κάθε σημείο μέσα στον αγωγό δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο που κάνει τα φορτία να κινούνται προς τη διεύθυνση του πεδίου. Δηλαδή, προστίθεται στην ταχύτητα της άτακτης (θερμικής) κινήσεως μία, συνήθως πολύ μικρότερη, συνιστώσα ταχύτητας κατά τη διεύθυνση του πεδίου που δημιουργεί το (ηλεκτρικό) ρεύμα.

Σημειώνομε ότι λαμβάνεται ως φορά του ρεύματος (συμβατική φορά) η φορά που καθορίζεται απ'

την κίνηση θετικών φορτίων που δημιουργούν ηλεκτρικό ρεύμα. Ρεύμα ίδιας φοράς μ' αυτό των θετικών φορτίων, δημιουργείται απ' αρνητικά φορτία που κινούνται στην αντίθετη φορά.

Μονάδα μετρήσεως του ηλεκτρικού ρεύματος στο SI είναι το 1 ampere (1 A). Ορίζεται απ' τη σχέση:

$$I = q/t,$$

με $q = 1$ C και $t = 1$ s. Συνεπώς 1 ampere είναι η τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος που ανά δευτερόλεπτο (1s) μεταφέρει ηλεκτρικό φορτίο ίσο με 1 coulomb, δηλαδή:

$$1 \text{ ampere} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ second}}, \quad 1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}}.$$

Το ampere είναι θεμελιώδης μονάδα στο SI, ενώ το coulomb είναι παράγωγη μονάδα.

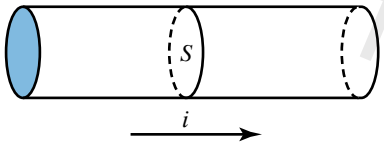
Στις πρακτικές εφαρμογές και σε περιπτώσεις ασθενών ρευμάτων χρησιμοποιούνται και τα υποπολλαπλάσια: 1 milliampere $(1\text{ mA}) = 10^{-3}$ A, 1 microampere $(1\ \mu\text{A}) = 10^{-6}$ A.

Πολλαπλάσιο του ampere είναι το 1 kiloampere $(1\text{ kA}) = 10^{3}$ A.

Από τη σχέση $q = I\,t$ προκύπτει ότι 1 coulomb είναι το φορτίο που διέρχεται από διατομή αγωγού ανά δευτερόλεπτο, όταν αυτός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα ενός ampere.

– Πυκνότητα ρεύματος.

Αν το εμβαδό της εγκάρσιας διατομής αγωγού είναι S και το ρεύμα (η τιμή του ρεύματος) που τον διαρρέει είναι i (σχ. 10.1.3), τότε ως πυκνότητα του ρεύματος j ορίζεται το πηλίκο $j = i/S$.



Σχ. 10.1.3
Εγκάρσια διατομή αγωγού εμβαδού S που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα.

Πρόκειται για διανυσματικό φυσικό μέγεθος, το διάνυσμα $\vec{j}$ σε κάθε σημείο έχει τη διεύθυνση της προσανατολισμένης κινήσεως των φορέων του ρεύματος και φορά τη συμβατική φορά του ρεύματος.

Γενικότερα, αν $\mathrm{d}\vec{S}$ είναι ένα στοιχείο μίας ορισμένης προσανατολισμένης επιφάνειας αγωγού, ισχύει ότι το στοιχειώδες ρεύμα $\mathrm{d}i$ διά της $\mathrm{d}\vec{S}$ είναι $\mathrm{d}i = \vec{j}\ \mathrm{d}\vec{S}$ και το ολικό ρεύμα διά μέσου του αγωγού δίνεται απ' τη σχέση $i = \int \vec{j}\ \mathrm{d}\vec{S}$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε επιφάνεια και δείχνει πράγματι ότι το i είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος, διότι το $\vec{j}\ \mathrm{d}\vec{S}$ ως εσωτερικό γινόμενο είναι μονόμετρο μέγεθος. Η σχέση $j = i/S$ είναι ειδική περίπτωση της σχέσεως $i = \int j\ \mathrm{d}S = j \int \mathrm{d}S = j\,S$, στην οποία η επιφάνεια ολοκληρώσεως είναι η κάθετη τομή του αγωγού και το j είναι σταθερό για την επιφάνεια και κάθετο προς αυτήν.

Στο SI μονάδα πυκνότητας είναι το 1 A/m^2. Στην πράξη χρησιμοποιούνται και άλλες μονάδες όπως 1 A/cm^2 και 1 A/mm^2.

10.2 Αντίσταση και αγωγιμότητα αγωγού. Νόμος του Ohm.

Θεωρούμε αγωγό, που στα άκρα του υπάρχει διαφορά δυναμικού (ηλεκτρική τάση) V (σχ. 10.2.1). Απ' τον αγωγό περνά ρεύμα I. Ηλεκτρική (ωμική) αντίσταση R του αγωγού είναι το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που ορίζεται ως το πηλίκο της τάσεως V, που εφαρμόζεται στα άκρα του, προς το ηλεκτρικό ρεύμα I που τον διαρρέει. Η σχέση ορισμού της ηλεκτρικής (ωμικής) αντιστάσεως είναι $R = V/I$.

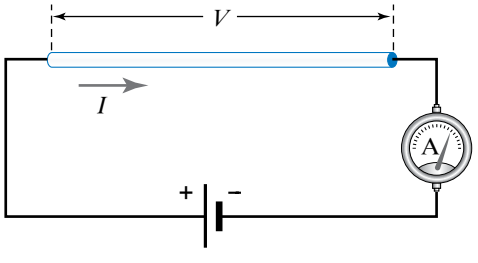
Το αντίστροφο της αντιστάσεως ονομάζεται αγωγιμότητα G,

$$G = 1/R.$$

Σε πολλούς αγωγούς η αντίσταση και η αγωγιμότητα είναι σταθερές, όταν η θερμοκρασία διατηρείται με κάποιον τρόπο σταθερή. Τότε λέμε ότι ισχύει για τον αγωγό ο νόμος του Ohm (Ωμ) και έχομε γραμμικό αγωγό. Η αντίσταση αυτή λέγεται και ***ωμική αντίσταση***.

Μονάδα μετρήσεως της ηλεκτρικής αντιστάσεως είναι το:

$$\text{ohm} = \frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ ampere}}, \qquad 1\ \Omega = \frac{1\text{ V}}{1\text{ A}} = 1\ \frac{\text{V}}{\text{A}}.$$



Σχ. 10.2.1
Το ρεύμα που διαρρέει έναν αγωγό καθορίζεται από την αντίστασή του και την τάση που εφαρμόζεται στα άκρα του.

Είναι η αντίσταση που παρουσιάζει αγωγός, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα 1Α, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται τάση 1V. Άλλες μονάδες μετρήσεως της αντιστάσεως είναι οι ακόλουθες:

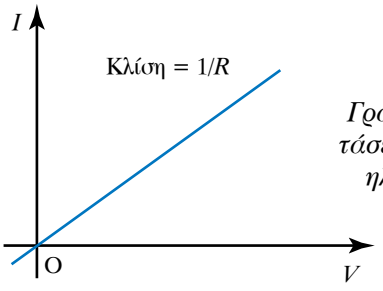
$$1\,\text{m}\Omega = 10^{-3}\,\Omega, \quad 1\,\text{k}\Omega = 10^{3}\,\Omega,$$
$$1\,\text{M}\Omega = 10^{6}\,\Omega, \quad 1\,\text{G}\Omega = 10^{9}\,\Omega.$$

Μονάδα της αγωγιμότητας είναι το $1\,\Omega^{-1} = 1\,\text{siemens} = 1\text{S}$.

Όπως είπαμε στα προηγούμενα, ηλεκτρικό ρεύμα είναι η προσανατολισμένη κίνηση φορτισμένων σωματιδίων (φορτίων) στο εσωτερικό αγωγού. Αυτή η κίνηση εμποδίζεται από ένα είδος δυνάμεων τριβής που ασκούνται πάνω σ' αυτά τα φορτία (στους μεταλλικούς αγωγούς τα φορτία είναι κυρίως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια). Η αντίσταση του αγωγού είναι ένα μέτρο που περιγράφει τη δυσκολία στην κίνηση των φορτίων-φορέων του ρεύματος.

Ως παράδειγμα αναφέρομε την περίπτωση μεταλλικού αγωγού, όπου κατά την κίνησή τους τα ηλεκτρόνια συναντούν τα θετικά ιόντα του μετάλλου, που ταλαντώνονται γύρω από συγκεκριμένες θέσεις ισορροπίας και συγκρούονται μ' αυτά. Εξαιτίας αυτών των συγκρούσεων εμποδίζεται η ροή των ηλεκτρονίων μέσα στο υλικό και το υλικό παρουσιάζει αντίσταση στο ρεύμα.

Η αντίσταση των μεταλλικών αγωγών δεν εξαρτάται από την τάση που εφαρμόζεται στα άκρα τους, ούτε απ' την πολικότητα του ρεύματος αυτής της τάσεως. Η γραφική παράσταση της τάσεως σε συνάρτηση με το ηλεκτρικό ρεύμα I που διαρρέει τον αγωγό φαίνεται στο σχήμα 10.2.2 και είναι ευθεία γραμμή (γραμμική σχέση) που η κλίση της (βαθμίδα) ισούται με $1/R = G$.

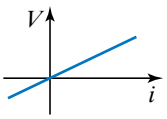
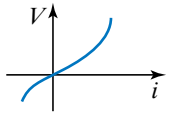


Σχ. 10.2.2
Γραφική παράσταση τάσεως σε σχέση με το ηλεκτρικό ρεύμα.

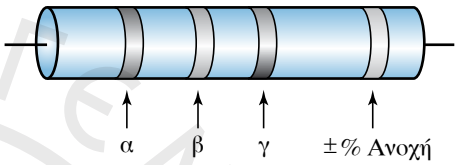
Υπάρχουν αγωγοί που δεν υπακούουν σ' αυτόν το νόμο, αυτοί είναι μη ωμικοί αγωγοί (σχ. 10.2.3).

Στην πράξη κατασκευάζονται διατάξεις, εξαρτήματα, που έχουν συγκεκριμένη αντίσταση και λέγονται ***αντιστάτες*** ή ***αντιστάσεις***.

Υπάρχουν αντιστάτες διαφόρων τύπων, ένας συνήθης είναι αυτός του σχήματος 10.2.4. Υπάρχει

Ωμικός αγωγός	***Μη ωμικός αγωγός***
 Χαρακτηριστική καμπύλη γραμμικού αγωγού (ακολουθείται ο Νόμος του Ohm).	 Χαρακτηριστική καμπύλη μη ωμικού αγωγού. Δεν ακολουθείται ο Νόμος του Ohm.

Σχ. 10.2.3
Συμπεριφορά ωμικού και μη ωμικού αγωγού.



Σχ. 10.2.4
Συνηθισμένος αντιστάτης.

διεθνής χρωματικός κώδικας που καταγράφει την τιμή και άλλα στοιχεία του αντιστάτη. Τα α, β, γ καθορίζουν την τιμή και η τελευταία λωρίδα το σχετικό σφάλμα (ανοχή) της τιμής, δηλαδή της αντιστάσεως του αντιστάτη. Τα α, β είναι τα ψηφία της τιμής της αντιστάσεως και το γ ο εκθέτης δυνάμεως του δέκα που πολλαπλασιάζει την αριθμητική τιμή που καθορίζεται από τα δύο ψηφία. Ο χρωματικός κώδικας για την τιμή της αντιστάσεως φαίνεται στον πίνακα 10.2.1. Ο κώδικας για την ανοχή είναι: το χρυσαφί αντιστοιχεί στο ±5%, το ασημί στο ±10% και χωρίς χρώμα ±20%.

Πίνακας 10.2.1
Χρωματικός κώδικας για την τιμή των αντιστάσεων.

Χρώμα	***Αριθμός***
Μαύρο	0
Καφέ	1
Κόκκινο	2
Πορτοκαλί	3
Κίτρινο	4
Πράσινο	5
Μπλε	6
Μωβ	7
Γκρι	8
Άσπρο	9

Για παράδειγμα, αν η διαδοχή λωρίδων είναι κόκκινο, πράσινο, γκρι και χρυσαφί (σχ. 10.2.4), τότε η τιμή της αντιστάσεως είναι:

$$25 \times 10^8\,\Omega = 2500\,\text{M}\Omega = 2{,}5 \times 10^6\,\text{G}\Omega.$$

Η ανοχή είναι 5%. Η αντίσταση R κυλινδρικού αγωγού είναι ανάλογη του μήκους l του αγωγού, αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού S της διατομής του αγωγού και εξαρτάται από το υλικό κατασκευής του αγωγού.

Η σχέση για την αντίσταση είναι $R = \rho \cdot \ell/S$.

Το φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει το υλικό κατασκευής του αγωγού ονομάζεται ***ειδική αντίσταση*** ρ. Η τιμή της είναι χαρακτηριστική για κάθε υλικό, εξαρτάται από τη θερμοκρασία και μετρείται σε Ω·m. Ορίζεται και η ειδική αγωγιμότητα ενός υλικού, το $\sigma = 1/\rho$, που μετρείται σε $\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1} = \text{S/m}$.

Όσο μικρότερη είναι η τιμή της ειδικής αντιστάσεως υλικού ή όσο μεγαλύτερη είναι η ειδική αγωγιμότητά του, τόσο μικρότερη αντίσταση προβάλλει ο αγωγός που κατασκευάζεται απ' αυτό το υλικό.

Με κριτήριο την τιμή της ειδικής αντιστάσεως, τα υλικά χωρίζονται ως εξής:

1) ***Αγωγοί*** ονομάζονται όσα υλικά έχουν μικρή ειδική αντίσταση (π.χ. τα μέταλλα). Όσο μικρότερη είναι η τιμή της ειδικής αντιστάσεως, τόσο καλύτερος είναι ο αγωγός. Έτσι ο χαλκός είναι καλύτερος αγωγός απ' το αλουμίνιο.

2) ***Μονωτές*** (κακοί αγωγοί) χαρακτηρίζονται όσα υλικά έχουν μεγάλη ειδική αντίσταση (π.χ. το γυαλί, το ξύλο).

3) Οι ***ημιαγωγοί*** έχουν ενδιάμεση ειδική αντίσταση μεταξύ μετάλλων και μονωτών. Οι ημιαγωγοί είναι το υλικό της σύγχρονης τεχνολογίας ηλεκτρονικών.

Υπάρχουν και υλικά που λέγονται ***υπεραγώγιμα*** και χάνουν τελείως την ειδική αντίστασή τους σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Αυτά τα υλικά χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο σε πολλές εφαρμογές που χρειάζεται να μην υπάρχει αντίσταση στη διέλευση του ρεύματος.

Η ειδική αντίσταση, όπως και η αντίσταση εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Για πολλούς αγωγούς, όπως είναι οι μεταλλικοί αγωγοί, η ειδική αντίσταση αυξάνεται με τη θερμοκρασία.

Οι ημιαγωγοί σε χαμηλή θερμοκρασία, κάτω από $0\,^{\circ}\text{C}$, έχουν μεγάλη ειδική αντίσταση. Όταν η θερμοκρασία αυξάνει, η ειδική τους αντίσταση μειώνεται πολύ γρήγορα.

Στον πίνακα 10.2.2 φαίνονται οι τιμές ειδικών αντιστάσεων μερικών υλικών.

Πίνακας 10.2.2
Τιμές ειδικών αντιστάσεων (Ω×cm).

Μέταλλα	***Αγώγιμα υγρά***
Άργυρος $1{,}47 \cdot 10^{-8}$	Απεσταγμένο νερό $1 \cdot 10^5$
Χαλκός $1{,}72 \cdot 10^{-8}$	Πόσιμο νερό $5 \cdot 10^5$
Αργίλιο $2{,}63 \cdot 10^{-8}$	Αραιό θειικό οξύ (H_2SO_4) 5
Βολφράμιο $5{,}51 \cdot 10^{-8}$	
Λευκόχρυσος $2{,}44 \cdot 10^{-8}$	***Μονωτές***
Σίδηρος $1{,}00 \cdot 10^{-7}$	Μάρμαρο $1 \cdot 10^{11}$
Κονσταντάνη $49 \cdot 10^{-8}$	Πορσελάνη $3 \cdot 10^{14}$
Υδράργυρος $9{,}6 \cdot 10^{-7}$	Μαρμαρυγία $9 \cdot 10^{15}$
Χρωμονικελίνη $10{,}0 \cdot 10^{-7}$	

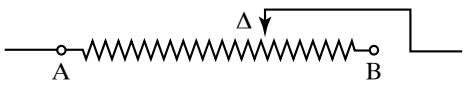
10.2.1 Μεταβλητός αντιστάτης ή ρυθμιστική αντίσταση.

Ο μεταβλητός αντιστάτης είναι διάταξη, της οποίας μπορούμε να μεταβάλλομε την αντίσταση με τη μετακίνηση δρομέα ή την περιστροφή κουμπιού (σχ. 10.2.5). Με κατάλληλη σύνδεση του αντιστάτη σε κύκλωμα, μπορούμε να ρυθμίσομε:

1) Το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει τη συσκευή. Σ' αυτήν την περίπτωση ο μεταβλητός αντιστάτης ονομάζεται ***ροοστάτης***.

2) Την ηλεκτρική τάση που εφαρμόζεται στα άκρα συσκευής. Σ' αυτήν την περίπτωση ο μεταβλητός αντιστάτης ονομάζεται ***ποτενσιόμετρο***.

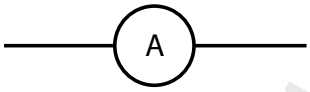
Η αντίσταση μεταλλικού αγωγού εξαρτάται απ' το μήκος του. Αυτή την ιδιότητα εφαρμόζομε στους μεταβλητούς αντιστάτες με το να αυξάνομε ή να μειώνομε το μήκος τους.



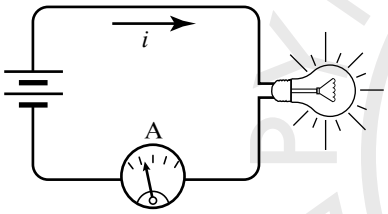
Σχ. 10.2.5
Μετακινώντας τον δρομέα Δ μεταβάλλεται το μήκος του τμήματος του αντιστάτη ΑΒ που διαρρέεται από ρεύμα, άρα και η αντίσταση του αντιστάτη.

10.2.2 Μέτρηση του ηλεκτρικού ρεύματος.

Για τη μέτρηση του ρεύματος χρησιμοποιείται το ***αμπερόμετρο***. Ο συμβολισμός του σε ηλεκτρικό κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 10.2.6. Προκειμένου να μετρήσομε την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του σχήματος 10.2.7, πρέπει να αναγκάσομε το ρεύμα που διέρχεται απ' το κύκλωμα, να διέλθει από το αμπερόμετρο. Προς τούτο διακόπτομε το κύκλωμα σε οποιοδήποτε σημείο του, διότι το ρεύμα είναι παντού το ίδιο και παρεμβάλλομε στο σημείο αυτό (σε σειρά) το αμπερόμετρο. Τα αμπερόμετρα κατασκευάζονται με όσο το δυνατό πιο μικρή αντίσταση, προκειμένου να μην ελαττώνεται η μετρούμενη τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.



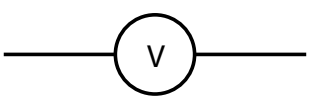
Σχ. 10.2.6
Συμβολισμός αμπερομέτρου.



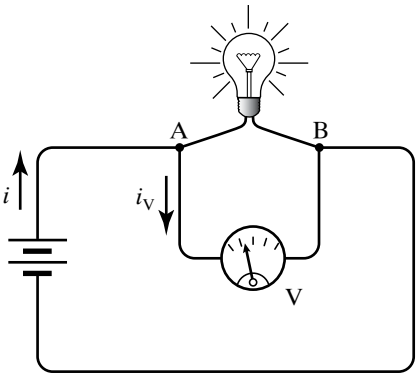
Σχ. 10.2.7
Σύνδεση αμπερομέτρου σε σειρά.

10.2.3 Βολτόμετρο.

Το ***βολτόμετρο*** είναι όργανο που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της διαφοράς δυναμικού μεταξύ δύο σημείων. Ο συμβολισμός του φαίνεται στο σχήμα 10.2.8. Προκειμένου να μετρήσομε τη διαφορά δυναμικού που επικρατεί στα άκρα Α, Β του λαμπτήρα του σχήματος 10.2.9, πρέπει να συνδέσομε τους δύο ακροδέκτες του βολτομέτρου στα σημεία αυτά. Τότε, από το βολτόμετρο θα διέλθει ρεύμα i_V, ανάλογο προς τη διαφορά δυναμικού που επικρατεί στα άκρα του λαμπτήρα, σύμφωνα με τον Νόμο του Ohm. Η απόκλιση του δείκτη του οργάνου, ο οποίος κινείται μπροστά από κλίμακα βαθμολογημένη σε volt, δείχνει τη ζητούμενη τιμή της διαφοράς δυναμικού. Η κατασκευή των βολτομέτρων είναι ανάλογη με των αμπερομέτρων, αλλά αντίθετα μ' αυτά, τα βολτόμετρα έχουν μεγάλη εσωτερική αντίσταση. Αυτό συμβαίνει διότι πρέπει, κατά τη μέτρηση, το ρεύμα i_V να είναι όσο το δυνατόν ασθενέστερο, καθόσον σε αντίθετη περίπτωση αυξάνεται πολύ το ρεύμα i, που παρέχει η ηλεκτρική πηγή και μπορεί να επηρεάζει την ένδειξη του βολτομέτρου.



Σχ. 10.2.8
Συμβολισμός βολτομέτρου.



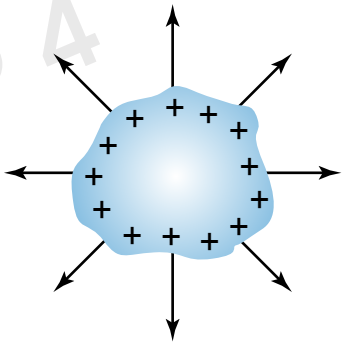
Σχ. 10.2.9
Μέτρηση διαφοράς δυναμικού στα άκρα λαμπτήρα.

10.3 Χωρητικότητα αγωγού. Πυκνωτής. Υπολογισμός χωρητικότητας πυκνωτή. Φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή. Συνδεσμολογία πυκνωτών.

10.3.1 Χωρητικότητα αγωγού και υπολογισμός της.

Στον αγωγό του σχήματος 10.3.1 προσφέρομε φορτίο Q, που κατανέμεται στην εξωτερική του επιφάνεια, κάθε σημείο της οποίας αποκτά δυναμικό V.

Το πηλίκο Q/V παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα απ' το φορτίο που δίνομε στον αγωγό. Το σταθερό πηλίκο του ηλεκτρικού φορτίου αγωγού προς το δυναμικό του ονομάζεται ***χωρητικότητα*** του αγωγού, C.



Σχ. 10.3.1
Κατανομή φορτίου Q σε αγωγό.

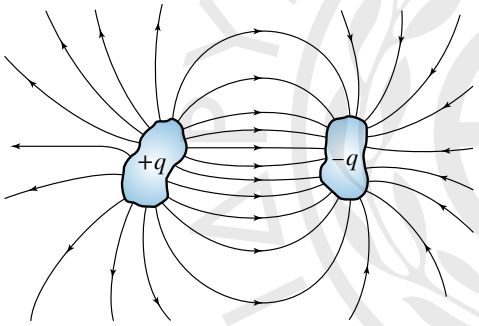
Αποδεικνύεται ότι η χωρητικότητα σφαιρικού αγωγού ακτίνας R στο SI δίνεται από τον τύπο $C = 4\pi\varepsilon_0 \kappa R$, όπου κ είναι η διηλεκτρική σταθερά του μέσου, μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός. Αν το μέσον είναι το κενό, τότε $\kappa = 1$. Αυτό ισχύει κατά προσέγγιση και για τον αέρα.

Μονάδα μετρήσεως της χωρητικότητας στο SI είναι το 1C/V. Αυτή η μονάδα μετρήσεως ονομάζεται ***φαράντ***, (farad – F), $(1\,\text{F} = 1\,\text{C}/1\,\text{V} = 1\,\text{C/V})$. Υποπολλαπλάσια του 1 F είναι: $1\,\text{mF} = 10^{-3}\,\text{F}$ (μιλιφαράντ), $1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F}$ (μικροφαράντ), $1\,\text{nF} = 10^{-9}\,\text{F}$ (νανοφαράντ), $1\,\text{pF} = 10^{-12}\,\text{F}$ (πικοφαράντ).

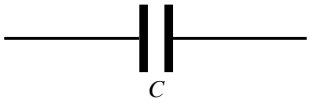
Για παράδειγμα, η Γη έχει χωρητικότητα ίση με περίπου $710\,\mu\text{F}$.

10.3.2 Πυκνωτής.

Πυκνωτής ονομάζεται ένα σύστημα δύο μονωμένων αγωγών. Στην πράξη, οι αγωγοί βρίσκονται σε σχετικά κοντινή απόσταση ο ένας απ' τον άλλον. Συνήθως οι δύο αγωγοί είναι φορτισμένοι με ίσα κατά απόλυτη τιμή, αλλά ετερώνυμα φορτία (σχ. 10.3.2). Οι αγωγοί αυτοί ονομάζονται ***οπλισμοί του πυκνωτή***. Ονομάζομε ***φορτίο του πυκνωτή*** το (θετικό) φορτίο του θετικού οπλισμού του. Στα ηλεκτροτεχνικά σχέδια ο πυκνωτής παριστάνεται με το σύμβολο του σχήματος 10.3.3.



Σχ. 10.3.2
Σχηματική παράσταση πυκνωτή.



Σχ. 10.3.3
Σύμβολο πυκνωτή.

Πρακτικά πρόκειται για μία δεξαμενή, στην οποία αποθηκεύονται ηλεκτρικά φορτία και αποτελεί βασικό στοιχείο στα κυκλώματα ηλεκτρονικής.

Υπάρχουν πολλοί τύποι πυκνωτών ανάλογα με την εφαρμογή που χρησιμοποιούνται. Στους επίπεδους πυκνωτές οι οπλισμοί είναι παράλληλες πλάκες σε σχετικά μικρή μεταξύ τους απόσταση (σχ. 10.3.4).

Η χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή στο κενό δίνεται από τη σχέση

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{\ell}, \quad \text{όπου} \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2},$$

είναι η απόλυτη διηλεκτρική σταθερά του κενού, S είναι το εμβαδό των πλακών, ℓ είναι η απόσταση μεταξύ των οπλισμών.

Απόδειξη.

Τα φορτία $+Q$, $-Q$ των οπλισμών του επίπεδου πυκνωτή δημιουργούν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο (ιδανικά) περιορίζεται στον χώρο μεταξύ των οπλισμών. Η ένταση του δίνεται από τη σχέση:

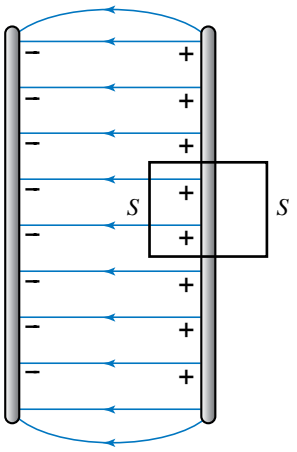
$$E = V/\ell.$$

Τα φορτία βρίσκονται στις δύο (εσωτερικές) επιφάνειες των αγωγών-οπλισμών, που είναι η μία απέναντι στην άλλη. Οι εξωτερικές επιφάνειες δεν έχουν φορτία και στον εξωτερικό χώρο η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν.

Θεωρούμε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (σχ. 10.3.4) με δύο επιφάνειες εμβαδού S παράλληλες στους οπλισμούς και επομένως κάθετες στις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Η μία επιφάνεια βρίσκεται στο χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή και η άλλη στο εξωτερικό του πυκνωτή. Απ' την επιφάνεια στο εξωτερικό δεν διέρχεται ηλεκτρική ροή, γιατί το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό είναι μηδέν. Τέσσερεις επιφάνειες του παραλληλεπιπέδου είναι παράλληλες προς την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, οπότε $\theta = \pi/2$, άρα η ηλεκτρική ροή που περνά απ' αυτές είναι μηδέν διότι:

$$\Phi = E\,S\cos\theta = E\,S\cos\pi/2 = E\,S\,0 = 0.$$

Επομένως, η ολική ροή που διέρχεται απ' την κλειστή ολική επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (θετική από μέσα προς τα έξω) ισούται με τη ροή, που διέρχεται από την επιφάνεια S στο εσωτερικό του πυκνωτή και δίνεται απ' τον τύπο:



Σχ. 10.3.4
Επίπεδος πυκνωτής.

$$\Phi = E\,S = V/\ell \cdot S.$$

Από τον Νόμο του Gauss για τη ροή, ισχύει ότι

$$\Phi = Q/\varepsilon_0$$

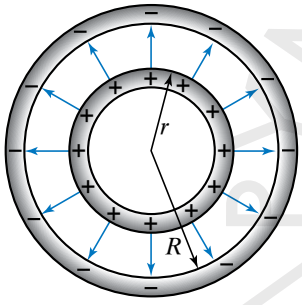
Συνεπώς $V/\ell \cdot S = Q/\varepsilon_0$ ή $Q/V = \varepsilon_0 \cdot S/\ell$ επομένως πράγματι ισχύει ότι

$$C = \varepsilon_0 \cdot S/\ell.$$

Έχομε πάρει θετικούς τους προσανατολισμούς των κινήσεων από μέσα προς τα έξω.

Στους σφαιρικούς πυκνωτές οι οπλισμοί είναι δύο ομόκεντρες σφαίρες, που έχουν ίσα και αντίθετα ηλεκτρικά φορτία (σχ. 10.3.5). Η χωρητικότητά τους μπορεί να αποδειχθεί ότι δίνεται από τον τύπο:

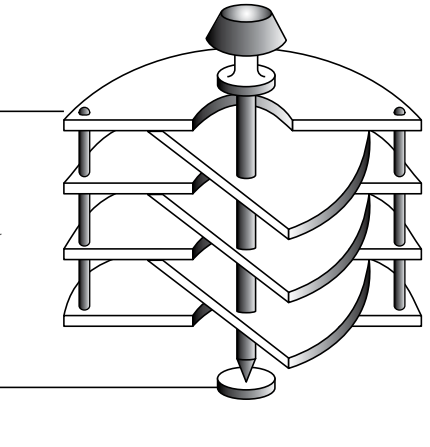
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R\,r}{R-r}.$$



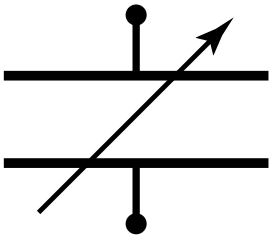
Σχ. 10.3.5
Τομή σφαιρικού πυκνωτή.

Οι μεταβλητοί πυκνωτές αέρα αποτελούνται από δύο συστήματα επιπέδων μεταλλικών πλακών, τα οποία απαρτίζουν τους οπλισμούς του πυκνωτή. Τα φύλλα κάθε συστήματος είναι ηλεκτρικά συνδεδεμένα μεταξύ τους χωρίς να εφάπτονται (σχ. 10.3.6) και ο ένας οπλισμός είναι κινητός.

Η χωρητικότητα του μεταβλητού πυκνωτή μεταβάλλεται ανάλογα με το μέγεθος της επιφάνειας των οπλισμών που βρίσκονται κάθε φορά η μία απέναντι στην άλλη, δηλαδή ανάλογα με τη θέση του στρεφόμενου άξονα. Τέτοιοι πυκνωτές χρησιμοποιούνται στο κύκλωμα συντονισμού ενός ραδιοφωνικού δέκτη. Στο σχήμα 10.3.7 φαίνεται η παράσταση μεταβλητού πυκνωτή.

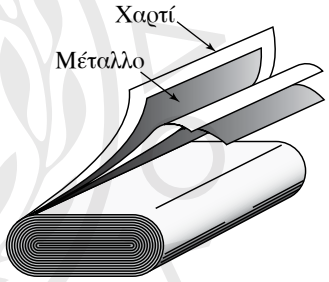


Σχ. 10.3.6
Μεταβλητός πυκνωτής.



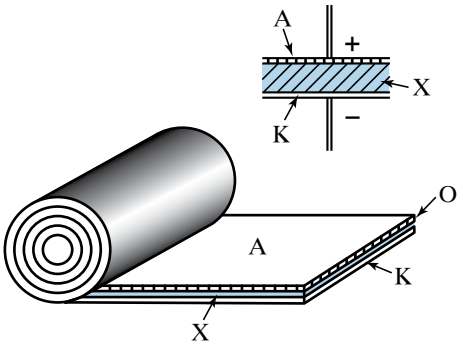
Σχ. 10.3.7
Παράσταση μεταβλητού πυκνωτή.

Στους πυκνωτές με στερεά μονωτικά ανήκουν οι ***πυκνωτές χάρτου***. Οι πυκνωτές χάρτου έχουν ως οπλισμούς δύο λωρίδες μεταλλικών φύλλων που τυλίγονται κατάλληλα, ενώ μεταξύ τους υπάρχει μονωτικό υλικό, το οποίο αποτελούν λεπτές χάρτινες ταινίες (σχ. 10.3.8) εμποτισμένες με παραφίνη (διηλεκτρικό).



Σχ. 10.3.8
Πυκνωτές χάρτου.

Ο ηλεκτρολυτικός πυκνωτής χρησιμοποιείται μόνο σε συνεχές ρεύμα διότι έχει θετικό και αρνητικό πόλο. Για τον λόγο αυτό ονομάζεται ***πολωμένος πυκνωτής***. Κατά τη σύνδεσή του με την πηγή απαιτείται να συνδέονται μεταξύ τους οι αντίστοιχοι πόλοι (θετικός πόλος πηγής με θετικό οπλισμό πυκνωτή), διαφορετικά καταστρέφεται το διηλεκτρικό στρώμα και ο πυκνωτής βραχυκυκλώνει. Ο θετικός οπλισμός του πυκνωτή (άνοδος) αποτελείται από ένα αλουμινένιο φύλλο Α (σχ. 10.3.9). Ο αρνητικός οπλισμός (κάθοδος) είναι ηλεκτρολύτης (διάλυμα βορικού οξέως ή αλάτων του αργιλίου), που διαποτίζει απορροφητικό χαρτί Χ τοποθετημένο ανάμεσα στην άνοδο και σε μεταλλικό φύλλο Κ συνδεδεμένο με τον αρνητικό πόλο της πηγής. Τα τρία φύλλα τυλίγονται μαζί και τοποθετούνται εντός μεταλλικού δοχείου συνδεδεμένου με την κάθοδο.



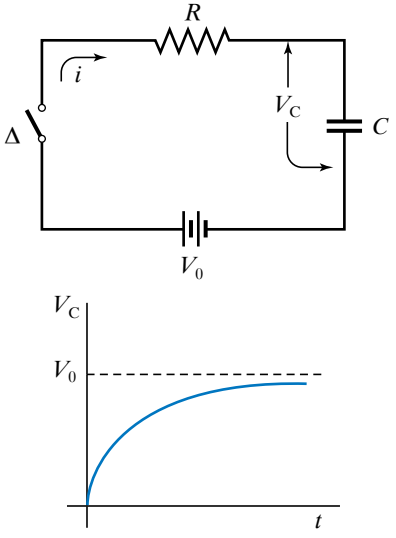
Σχ. 10.3.9
Ηλεκτρολυτικός πυκνωτής.

10.3.3 Φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή.

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 10.3.10, όπου έχομε πηγή τάσεως V_0 συνδεδεμένη με διακόπτη και αντιστάτη αντιστάσεως R. Στην αρχή ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Κλείνομε τον διακόπτη, οπότε ο πυκνωτής αρχίζει και φορτίζεται. Η τάση στα άκρα του θα αυξάνεται από μηδέν μέχρι την τιμή V_0. Αποδεικνύεται ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$V_C = V_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

(γραφική παράσταση στο σχ. 10.3.10). Το γινόμενο RC έχει διαστάσεις χρόνου, λέγεται σταθερά χρόνου, $\tau = RC$ του κυκλώματος και δείχνει πόσο γρήγορα φορτίζεται ο πυκνωτής. Μετά από πολύ χρόνο παύει να κυκλοφορεί ρεύμα στο κύκλωμα, η τάση στα άκρα του πυκνωτή μένει σταθερή και ο πυκνωτής είναι σαν να «κόβει» το κύκλωμα, όπου υπάρχει πηγή συνεχούς (σταθερής) τάσεως.

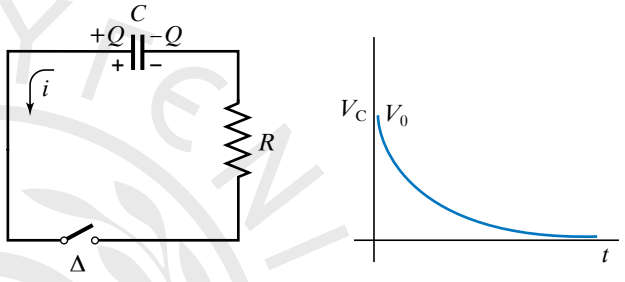


Σχ. 10.3.10
Φόρτιση πυκνωτή.

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 10.3.11. Στην αρχή ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε τάση V_0 και ο διακόπτης είναι ανοιχτός. Δεν ρέει ρεύμα στο κύκλωμα. Κάποια στιγμή κλείνει ο διακόπτης, αρχίζει να κυκλοφορεί ρεύμα στο κύκλωμα και ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Αποδεικνύεται ότι η τάση στον πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου δίνεται απ' τη σχέση:

$$V_i = V_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

(γραφική παράσταση στο σχ. 10.3.11). Μετά από πολύ χρόνο ο πυκνωτής εκφορτίζεται πλήρως και η τάση του μηδενίζεται.



Σχ. 10.3.11
Εκφόρτιση πυκνωτή.

10.3.4 Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή.

Έστω πυκνωτής χωρητικότητας C υπό τάση V. Ο πυκνωτής θα έχει ηλεκτρικό φορτίο Q. Ο πυκνωτής έχει αποθηκευμένη ηλεκτρική ενέργεια.

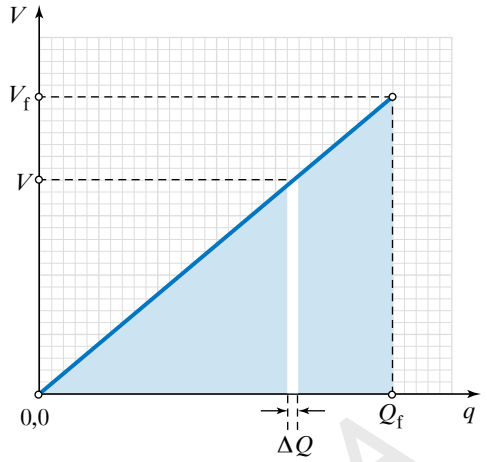
Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του πυκνωτή ισούται με το έργο που απαιτείται για τη φόρτισή του και δίνεται απ' τη σχέση $U = 1/2 \cdot CV^2$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση ορισμού $C = Q/V$, προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις $U = 1/2 \cdot Q\,V$ και $U = 1/2 \cdot Q^2/C$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε ότι ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος. Έστω ότι η τελική τάση φορτίσεως είναι V_f και το τελικό φορτίο είναι Q_f. Προκειμένου να τον φορτίσομε πρέπει να μεταφέρομε φορτίο από τον έναν οπλισμό του στον άλλο. Φανταζόμαστε ότι η μεταφορά του φορτίου γίνεται σταδιακά. Παίρνομε ένα στοιχειώδες φορτίο $+\Delta C$ απ' τον έναν οπλισμό και το πηγαίνομε στον άλλον οπλισμό. Το έργο που απαιτείται είναι $\Delta W = \Delta Q\,V$, όπου V η διαφορά δυναμικού των πλακών τη στιγμή της μεταφοράς. Αν σε μία χρονική στιγμή της φορτίσεως ο πυκνωτής έχει φορτίο Q και τάση V, ισχύει ότι:

$$C = Q/V \quad \text{ή} \quad V = 1/C \cdot Q.$$

Η γραφική παράσταση της σχέσεως αυτής είναι μία ευθεία γραμμή που διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων (σχ. 10.3.12).



Σχ. 10.3.12
Το εμβαδόν (λευκή στήλη) εκφράζει το στοιχειώδες έργο $\Delta W = \Delta Q\, V$.

Το στοιχειώδες έργο $\Delta W = \Delta Q\, V$ ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό, το οποίο μπορεί να προσεγγιστεί μ' ένα παραλληλόγραμμο. Το συνολικό έργο που απαιτείται για να φορτιστεί, ο πυκνωτής, ισούται με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου. Συνεπώς:

$$W = \frac{1}{2}\, Q_f\, V_f = \frac{1}{2}\, C\, V_f^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_f^2}{C},$$

όπου V_f η τελική τάση και Q_f το τελικό φορτίο του πυκνωτή. Μπορούμε να περιγράφομε τους δείκτες και να αναφερόμαστε σε τελική τάση V και τελικό φορτίο Q_f. Το συνολικό έργο που απαιτείται για τη φόρτιση του πυκνωτή ισούται με την ηλεκτροστατική του ενέργεια. Συνεπώς είναι:

$$U = \frac{1}{2}\, C\, V^2 = \frac{1}{2}\, QV = \frac{1}{2}\, \frac{Q^2}{C}.$$

10.3.5 Διηλεκτρική σταθερά διηλεκτρικού.

Έστω C_0 η χωρητικότητα πυκνωτή, όταν ανάμεσα στους οπλισμούς του υπάρχει κενό, και C η χωρητικότητα του ίδιου πυκνωτή, όταν ανάμεσα στους οπλισμούς του υπάρχει διηλεκτρικό. Το πηλίκο $\varepsilon_r = \kappa = C/C_0$ ισούται με τη (σχετική) διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού. Η ***σχετική διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού*** είναι αδιάστατο μέγεθος, καθαρός αριθμός και χαρακτηρίζει το υλικό απ' το οποίο είναι κατασκευασμένος ο διηλεκτρικός (μονωτής). Για το κενό και με μεγάλη προσέγγιση για τον αέρα, η διηλεκτρική σταθερά είναι ίση με τη μονάδα ($\varepsilon_r = 1$). Για τα άλλα διηλεκτρικά είναι $\varepsilon_r > 1$. Είναι προφανές ότι η χωρητικότητα πυκνωτή εξαρτάται απ' τη φύση του διηλεκτρικού που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς του. Η εισαγωγή μονωτικού (διηλεκτρικού) στο εσωτερικό πυκνωτή αυξάνει τη χωρητικότητά του $C = \varepsilon_r C_0$.

Στον πίνακα 10.3.1 δίνονται οι τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς διαφόρων υλικών.

10.3.6 Διηλεκτρική αντοχή του μονωτή.

Θεωρούμε επίπεδο πυκνωτή με διηλεκτρικό, τον οποίο φορτίζομε με συνεχώς αυξανόμενη τάση V. Η

Πίνακας 10.3.1
Διηλεκτρικές σταθερές διαφόρων υλικών.

Υλικό	*Διηλεκτρική σταθερά*	*Υλικό*	*Διηλεκτρική σταθερά*
Κενό	1	Ξύλο	1 – 7
Αέρας	1,0005	Μάρμαρο	8,5
Νερό	80	Πετρέλαιο	2,1
Χαρτί	3,5	Βενζόλιο	2,3
Μίκα	5,4	Γλυκερίνη	56
Κεχριμπάρι	2,7	Καουτσούκ	2,4
Γυαλί	4,5	Παραφίνη	2 – 2,3
Πορσελάνη	6,5	Κεραμικές μάζες	100
Πολυαιθυλένιο	2,3	Νιτροβενζόλιο	36

ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του, που δίνεται απ' τη σχέση $E = V/\ell$ συνεχώς αυξάνεται. Όσο η τάση V αυξάνεται, παίρνει μία τιμή, για την οποία στο εσωτερικό του πυκνωτή εκδηλώνεται σπινθήρας, το διηλεκτρικό παύει να είναι μονωτής και γίνεται αγωγός και ο πυκνωτής εκφορτίζεται. ***Διηλεκτρική αντοχή*** του διηλεκτρικού ονομάζεται η τιμή της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του, για την οποία το διηλεκτρικό παύει να είναι μονωτής και γίνεται αγωγός.

Η διηλεκτρική αντοχή του αέρα εξαρτάται απ' τις συνθήκες του περιβάλλοντος (πίεση, υγρασία), συνεπώς δεν έχει πάντα την ίδια τιμή. Στον πίνακα 10.3.2 δίνονται οι τιμές της διηλεκτρικής αντοχής διαφόρων υλικών.

Πίνακας 10.3.2
Διηλεκτρικές αντοχές μερικών υλικών.

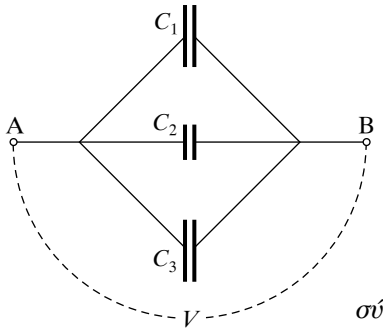
Διηλεκτρικό υλικό	***Διηλεκτρική αντοχή kV/cm***
Ξηρός αέρας σε κανονική πίεση	30
Λάδι	75
Παραφίνη	350
Χαρτί	400
Μίκα	500
Γυαλί	1000

10.3.7 Συνδεσμολογία πυκνωτών.

Σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι δυνατό να περιέχονται περισσότεροι από ένας πυκνωτές. Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει να γνωρίζομε την ολική χωρητικότητα $C_{ΟΛ}$, που εξαρτάται απ' τη χωρητικότητα του κάθε πυκνωτή και απ' τον τρόπο συνδέσεως των πυκνωτών στο κύκλωμα. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι συνδέσεως των πυκνωτών, ***παράλληλα*** και σε ***σειρά***. Η ***μεικτή σύνδεση*** προκύπτει από συνδυασμό των δύο προηγουμένων συνδέσεων. ***Ολική χωρητικότητα συνδεσμολογίας πυκνωτών*** ονομάζεται το πηλίκο του φορτίου που προσφέρεται στη συνδεσμολογία, ώστε να φορτιστεί, προς την τάση που εμφανίζεται στα άκρα της.

10.3.8 Παράλληλη συνδεσμολογία πυκνωτών.

Το σχήμα 10.3.13 παριστάνει παράλληλη σύνδεση τριών πυκνωτών με χωρητικότητες C_1, C_2, C_3. Στα άκρα Α, Β των τριών πυκνωτών της συνδεσμολογίας εφαρμόζεται τάση V. Τα φορτία των τριών πυκνωτών είναι $q_1 = C_1 V$, $q_2 = C_2 V$, $q_3 = C_3 V$. Για το ηλεκτρικό φορτίο $q_{ΟΛ}$ που θα κινηθεί μέσω της πηγής, ώστε να φορτιστούν οι πυκνωτές, ισχύει ότι $q_{ΟΛ} = q_1 + q_2 + q_2$. Συνεπώς:



Σχ. 10.3.13
Παράλληλη σύνδεση πυκνωτών.

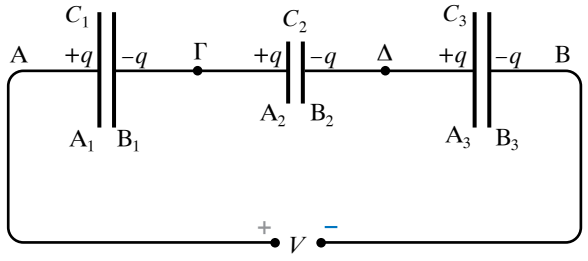
$$C_{ΟΛ} = \frac{q_{ΟΛ}}{V} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{V} =$$

$$= \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} + \frac{q_3}{V} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Δηλαδή η ολική χωρητικότητα ισούται με το άθροισμα των χωρητικοτήτων των τριών πυκνωτών.

10.3.9 Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά.

Το σχήμα 10.3.14 παριστάνει σύνδεση τριών πυκνωτών με χωρητικότητες C_1, C_2, C_3 σε σειρά. Οι συνδεδεμένοι μεταξύ τους οπλισμοί ήταν αρχικά ουδέτεροι. Και οι τρεις πυκνωτές της συνδεσμολογίας φέρουν το ίδιο φορτίο q, διότι αν ο οπλισμός A_1 έχει φορτίο $+q$, τότε ο οπλισμός B_1 θα έχει φορτίο $-q$. Αφού οι οπλισμοί B_1, A_2 είχαν αρχικά φορτίο μηδέν, πρέπει σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως του φορτίου ο οπλισμός A_2 να αποκτήσει πάλι φορτίο $+q$. Το ίδιο συμβαίνει και με τους υπόλοιπους πυκνωτές. Οι τάσεις των τριών πυκνωτών είναι αντιστοίχως



Σχ. 10.3.14
Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά.

$$V_1 = q/C_1, \quad V_2 = q/C_2, \quad V_3 = q/C_3.$$

Η ολική τάση $V_{ΟΛ}$ ισούται με το άθροισμα των τάσεων, δηλαδή $V_{ΟΛ} = V_1 + V_2 + V_3$. Άρα:

$$\frac{1}{C_{ΟΛ}} = \frac{V_{ΟΛ}}{q} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{q} = \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q} + \frac{V_3}{q}$$

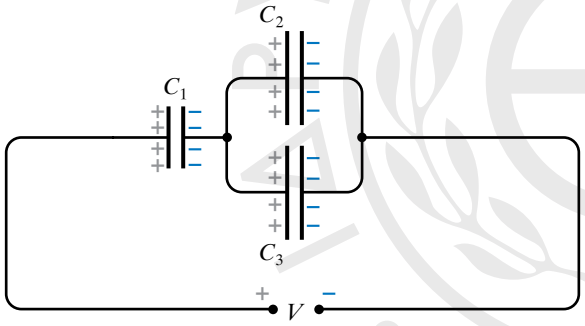
$$\text{άρα } \frac{1}{C_{ΟΛ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Συνεπώς, το σύστημα των τριών πυκνωτών μπορεί να αντικατασταθεί από πυκνωτή, του οποίου η χωρητικότητα είναι $C_{ΟΛ}$.

10.3.10 Μεικτή συνδεσμολογία πυκνωτών.

Η ισοδύναμη χωρητικότητα της συνδεσμολογίας των τριών πυκνωτών του σχήματος 10.3.15 είναι:

$$C_{2,3} = C_2 + C_3 \quad \text{και} \quad C_{ΟΛ} = \frac{C_1 C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$



Σχ. 10.3.15
Μεικτή συνδεσμολογία πυκνωτών.

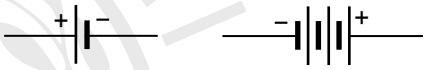
10.4 Ηλεκτρεγερτική δύναμη ηλεκτρικής πηγής. Εσωτερική αντίσταση ηλεκτρικής πηγής. Νόμοι του Kirchhoff. Συνδεσμολογία αντιστάσεων.

10.4.1 Ηλεκτρική πηγή.

Με τον όρο ***ηλεκτρική πηγή*** ονομάζουμε κάθε συσκευή που δημιουργεί διαφορά δυναμικού (πολική τάση) μεταξύ των άκρων της, παρέχοντας με τον τρόπο αυτόν ενέργεια στο κύκλωμα που θα συνδεθεί με την πηγή. Ο ρόλος της ηλεκτρικής πηγής είναι να αντλεί ηλεκτρόνια από τον θετικό πόλο και να τα μεταφέρει, μέσω αυτής, στον αρνητικό πόλο. ***Θετικός*** είναι ο πόλος της πηγής που βρίσκεται στο μεγαλύτερο δυναμικό και συμβολίζεται με +. ***Αρνητικός*** είναι ο πόλος της πηγής που βρίσκεται στο μικρότερο δυναμικό και συμβολίζεται με –.

Η ***φορά*** κινήσεως των ηλεκτρονίων μέσα σε μεταλλικό αγωγό που συνδέεται με την πηγή, είναι απ' τον αρνητικό προς τον θετικό πόλο της ηλεκτρικής πηγής. Η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος, δηλαδή η ***συμβατική φορά***, είναι αντίθετη απ' τη φορά κινήσεως των ηλεκτρονίων.

Αν το ρεύμα έχει σταθερή φορά ανεξάρτητα από τον χρόνο, τότε ονομάζεται ***συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα***. Πολλές ηλεκτρικές πηγές είναι πηγές σταθερής πολικότητας ή πηγές συνεχούς τάσεως, που είναι συνήθως και πηγές σταθερής τιμής τάσεως (σχ. 10.4.1). Υπάρχουν πηγές που η πολικότητά τους μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο και η πολική τάση τους μεταβάλλεται ημιτονοειδώς σε σχέση με τον χρόνο (σχ. 10.4.2). Αυτές είναι πηγές εναλλασσόμενου ρεύματος ή τάσεως.

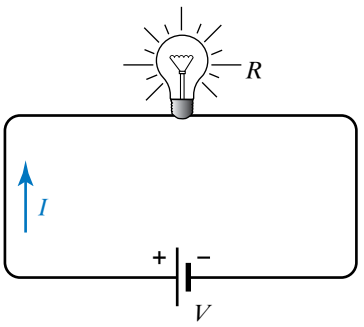


Σχ. 10.4.1
Συμβολισμός πηγών σταθερής τάσεως.

Σχ. 10.4.2
Συμβολισμός πηγής εναλλασσόμενης τάσεως.

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 10.4.3, που περιέχει ηλεκτρική πηγή και λαμπτήρα. Όταν αυτό διαρρέεται από ρεύμα I, η ηλεκτρική πηγή του προσφέρει ενέργεια W, η οποία είναι ανάλογη του φορτίου που μετακινείται και δίνεται απ' τη σχέση $W = Vq = VIt$.

Η ηλεκτρική πηγή είναι ένας ενεργειακός μετατροπέας που μετατρέπει μία μορφή ενέργειας (π.χ. χημική, μηχανική) σε ηλεκτρική.



Σχ. 10.4.3
Κύκλωμα με ηλεκτρική πηγή και λαμπτήρα.

Το πηλίκο της ενέργειας W προς το φορτίο q είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει την πηγή και ονομάζεται ***ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) της πηγής.*** Συμβολίζεται με E ή $\mathcal{E}$ και ισχύει ότι:

$$\mathcal{E} = (E =)\ W/q.$$

Θα χρησιμοποιούμε και τα δύο σύμβολα. Αξίζει να τονιστεί ότι η ΗΕΔ δεν είναι δύναμη.

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη μίας πηγής (γεννήτριας, μπαταρίας) ισούται με την τάση στους πόλους της (πολική τάση), όταν η πηγή δεν διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα.

Μονάδα μετρήσεως της ΗΕΔ στο SI είναι το 1 V(1 V = 1 J/C) και είναι ίδια με τη μονάδα μετρήσεως της διαφοράς δυναμικού. Αυτό σημαίνει ότι αν μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V, τότε όταν είναι συνδεδεμένη σε κύκλωμα όπου κυκλοφορεί σε ορισμένο χρόνο ηλεκτρικό φορτίο 1 C, η πηγή παρέχει στο κύκλωμα ηλεκτρική ενέργεια 12 J.

Από τη σχέση $\mathcal{E} = (E =)\ W/q$, διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με τον χρόνο t, έχομε:

$$\mathcal{E} = (\mathrm{E} =)\frac{W}{q} = \frac{\frac{W}{t}}{\frac{q}{t}} = \frac{P}{I}.$$

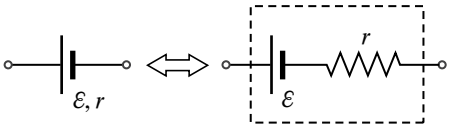
Άρα η ΗΕΔ μίας πηγής δίνεται και απ' το πηλίκο της ισχύος P, που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα, προς την τιμή του ρεύματος I που διαρρέει το κύκλωμα. Δηλαδή:

$$\mathrm{E} = P/I.$$

10.4.2 Εσωτερική αντίσταση ηλεκτρικής πηγής.

Όταν μία πηγή διαρρέεται από ρεύμα, θερμαίνεται. Δηλαδή τμήμα της ηλεκτρικής ενέργειας που προσφέρει η πηγή στο κύκλωμα μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια (εσωτερική ενέργεια) στο εσωτερικό της. Αυτό συμβαίνει διότι η πηγή εμφανίζει αντίσταση στη διέλευση του ρεύματος.

Η αντίσταση που εμφανίζει η ηλεκτρική πηγή είναι χαρακτηριστικό της μέγεθος, ονομάζεται ***εσωτερική αντίσταση*** και συνήθως συμβολίζεται με r (σχ. 10.4.4). Εξαρτάται απ' τα κατασκευαστικά στοιχεία της πηγής και θεωρείται ανεξάρτητη απ' το ρεύμα I που τη διαρρέει. Πολλές φορές θεωρούμε ότι μια πηγή είναι ιδανική, δηλαδή δεν έχει εσωτερική αντίσταση.



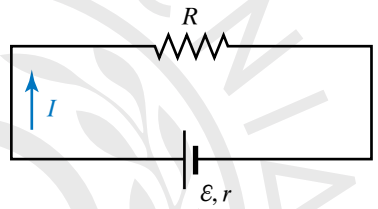
Σχ. 10.4.4
Συμβολισμός πηγής με εσωτερική αντίσταση.

10.4.3 Πολική τάση.

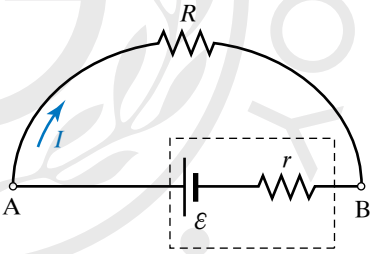
Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 10.4.5, το οποίο ισοδυναμεί με το κύκλωμα του σχήματος 10.4.6, όπου η πηγή είναι ιδανική, δηλαδή χωρίς εσωτερική αντίσταση. Από τον Νόμο του Ohm για το κλειστό κύκλωμα έχομε ότι:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Άρα $IR = \mathcal{E} - Ir$. Από τον Νόμο του Ohm για την αντίσταση R έχομε ότι $V_R = V_{AB} = V_A - V_B = IR$.



Σχ. 10.4.5
Κλειστό κύκλωμα.



Σχ. 10.4.6
Ηλεκτρική πηγή με εσωτερική αντίσταση σε κλειστό κύκλωμα.

Το γινόμενο ρεύμα επί αντίσταση λέγεται και ***πτώση τάσεως στην αντίσταση***. Το IR είναι η πτώση τάσεως στον αντιστάτη με αντίσταση R και αυτή η πτώση τάσεως ισούται με την τάση στα άκρα του αντιστάτη, $V_R = IR$.

Πολική τάση πηγής V_Π ονομάζεται η τάση που επικρατεί στους πόλους της και ισούται με τη διαφορά δυναμικού $V_A - V_B$. Συνεπώς $V_\Pi = \mathcal{E} - Ir$. Η πολική τάση V_Π πηγής ισούται με την ΗΕΔ $\mathcal{E}$, μειωμένη κατά την πτώση τάσεως $I\,r$ στην εσωτερική της αντίσταση.

Συνεπώς, για το κύκλωμα του σχήματος 10.4.6 ισχύει ότι $\mathcal{E} = IR + Ir$. Άρα η ΗΕΔ της πηγής ισούται με το άθροισμα των πτώσεων τάσεων στην εσωτερική αντίσταση της πηγής και στην εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος.

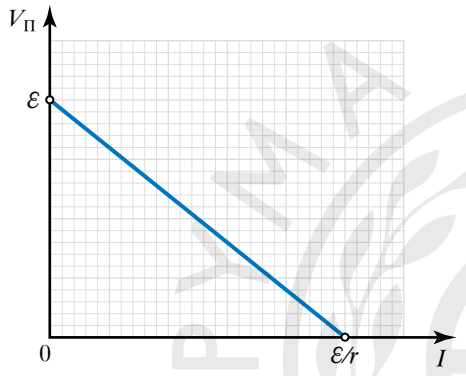
Απ' τα παραπάνω συνάγεται ότι όταν η πηγή δεν παρέχει ρεύμα, τότε $V_{\Pi} = \mathcal{E}$.

Όταν η πηγή είναι ιδανική, δηλαδή έχει αμελητέα εσωτερική αντίσταση ($r = 0$), ισχύει πάντα ότι $V_{\Pi} = \mathcal{E}$.

Όταν η πηγή τροφοδοτεί αντιστάτη πολύ μεγάλης αντιστάσεως ($R \to \infty$), το ηλεκτρικό ρεύμα που τον διαρρέει είναι πολύ μικρό, σχεδόν μηδενικό ($I \to 0$). Συνεπώς $Ir \to 0$, άρα $V_{\Pi} = \mathcal{E}$.

Η γραφική παράσταση της πολικής τάσεως V_{Π} πηγής ($\mathcal{E}, r$) σε συνάρτηση με το ρεύμα I που τη διαρρέει, παρουσιάζεται στο σχήμα 10.4.7.

Γενικά, η εσωτερική αντίσταση των ηλεκτρικών πηγών είναι μικρή.



Σχ. 10.4.7

Πολική τάση V_{π} πηγής ($\mathcal{E}, r$).

10.4.4 Κανόνες του Kirchhoff.

Στοιχεία ηλεκτρικού κυκλώματος ονομάζονται οι ηλεκτρικές πηγές και οι καταναλωτές (π.χ. αντιστάτες, πυκνωτές, πηνία, κινητήρες κ.λπ.). Στο κύκλωμα μπορεί να υπάρχουν διακόπτες και αγωγοί συνδέσεως. Η έννοια ***ηλεκτρικό δίκτυο*** ή απλά ***δίκτυο*** είναι ταυτόσημη με την έννοια ***κύκλωμα***.

Ενεργητικά στοιχεία του κυκλώματος είναι οι πηγές που παρέχουν ενέργεια στο κύκλωμα. Κάθε κύκλωμα περιέχει τουλάχιστον μία πηγή.

Παθητικά στοιχεία του κυκλώματος είναι εκείνα τα στοιχεία, που δέχονται ενέργεια (π.χ. αντιστάτες, πυκνωτές, πηνία). Σε κάποιες περιπτώσεις ορισμένα παθητικά στοιχεία (π.χ. πυκνωτές, πηνία) αποθηκεύουν ενέργεια, η οποία προσφέρεται στο κύκλωμα αργότερα, ενώ οι αντιστάτες καταναλώνουν την προσφερόμενη ενέργεια μετατρέποντάς την σε θερμοδυναμική ενέργεια και μπορεί να προκαλέσουν ροή ενέργειας προς το περιβάλλον, δηλαδή έχομε παραγωγή θερμότητας.

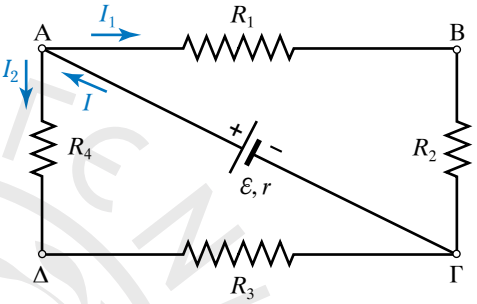
Σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ονομάζεται:

1) ***Κόμβος*** κάθε σημείο, στο οποίο συναντιούνται τουλάχιστον τρεις ρευματοφόροι αγωγοί.

2) ***Κλάδος*** κάθε τμήμα που συνδέεται ανάμεσα σε δύο κόμβους.

3) ***Βρόχος*** κάθε κλειστός δρόμος, που μπορεί να νοηθεί κατά μήκος διαδοχικών κλάδων του κυκλώματος.

Στο ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 10.4.8, κόμβοι είναι τα Α, Β, Γ, Δ, κλάδοι είναι οι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΓΔ, βρόχοι είναι οι ΑΒΓΑ, ΑΓΔΑ, ΑΒΓΔΑ.



Σχ. 10.4.8

Σύνθετο ηλεκτρικό κύκλωμα.

Για τα κυκλώματα ισχύουν οι εξής δύο Νόμοι (κανόνες) του Kirchhoff.

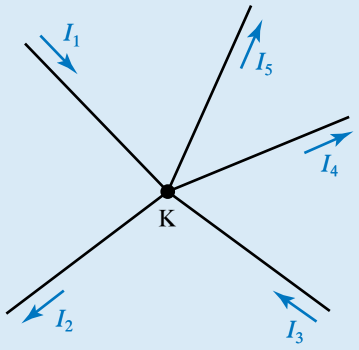
1) Πρώτος κανόνας του Kirchhoff.

Σε κάθε κόμβο του κυκλώματος, το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται σ' αυτόν ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων που εξέρχονται απ' αυτόν. Δηλαδή $\Sigma I = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σύμφωνα με τον Πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο Κ του σχήματος 10.4.9 ισχύει ότι $I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5$.

Αυτό συμβαίνει διότι σε χρόνο Δt το φορτίο

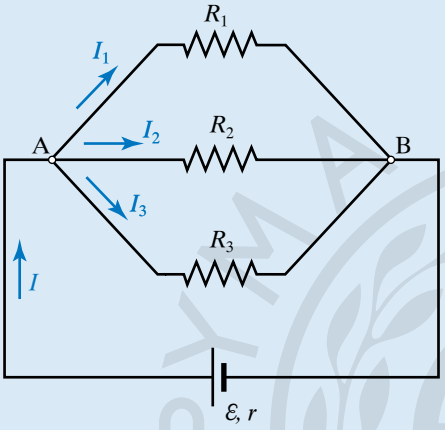


Σχ. 10.4.9

που φτάνει στον κόμβο Κ είναι $q = (I_1 + I_3)\,\Delta t$ και το φορτίο που φεύγει $q' = (I_2 + I_4 + I_5)\,\Delta t$. Επειδή τα φορτία δεν συσσωρεύονται σε κανέναν κόμβο, πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή πρέπει να ισχύει ότι: $q = q'$. Άρα: $(I_1 + I_3)\,\Delta t = (I_2 + I_4 + I_5)\,\Delta t$. Συνεπώς

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5 \quad \text{ή} \quad I_1 + I_3 - I_2 - I_4 - I_5 = 0.$$

2. Στο ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 10.4.10, για τον κόμβο Α ισχύει ότι $I = I_1 + I_2 + I_3$.



Σχ. 10.4.10

Παρατηρήσεις.

1) Ο Πρώτος κανόνας είναι απόρροια της αρχής διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου, διότι όσο φορτίο «φτάνει» στον κόμβο, τόσο φορτίο «φεύγει» απ' αυτόν στον ίδιο χρόνο. Οι κόμβοι δεν είναι ούτε «πηγές» ούτε «καταβόθρες» φορτίων.

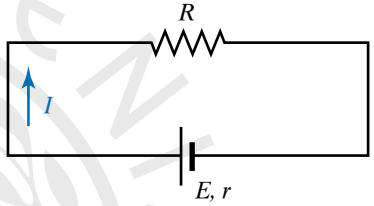
2) Τις φορές των ρευμάτων τις ορίζομε αυθαίρετα. Συνήθως στην Ηλεκτροτεχνία θεωρούμε ως θετικά τα ρεύματα που φτάνουν στον κόμβο και ως αρνητικά τα ρεύματα που φεύγουν από τον κόμβο.

2) Δεύτερος κανόνας του Kirchhoff.

Το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού κατά μήκος βρόχου είναι μηδέν. Δηλαδή κατά μήκος κλειστής διαδρομής ισχύει ότι $\Sigma V = 0$. Μία ισοδύναμη διατύπωση είναι η ακόλουθη: Σε κάθε βρόχο κυκλώματος, το αλγεβρικό άθροισμα των ΗΕΔ ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσεως στους κλάδους αυτού του βρόχου. Δηλαδή σε κάθε βρόχο ισχύει ότι $\Sigma E = \Sigma(I\,\mathrm{R})$.

Απόδειξη.

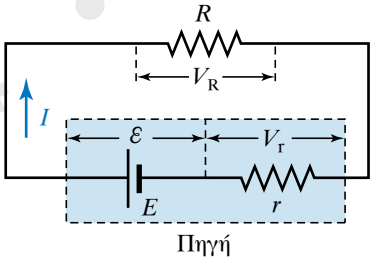
Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 10.4.11 που διαρρέεται από ρεύμα I. Αποτελείται από πηγή ΗΕΔ E και εσωτερικής αντιστάσεως r, καθώς και από εξωτερική αντίσταση R. Η πηγή σε χρόνο Δt προσφέρει στο κύκλωμα ηλεκτρική ενέργεια $W_{\mathrm{H\Lambda}} = E\,I\,\Delta t$. Στη διάρκεια του χρόνου Δt το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα, μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια στις (ωμικές) αντιστάσεις R και r, $W_{\mathrm{R}} = I^2 R\,\Delta t$ και $W_{\mathrm{r}} = I^2 r\,\Delta t$, αντίστοιχα. Από την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας ισχύει ότι $W_{\mathrm{H\Lambda}} = W_{\mathrm{R}} + W_{\mathrm{r}}$, άρα $I\,E\,\Delta t = I^2 R\,\Delta t + I^2 r\,\Delta t$. Συνεπώς $E = IR + Ir$.



Σχ. 10.4.11

Δεύτερος κανόνας του Kirchhoff σε κλειστό κύκλωμα.

Όπως προκύπτει από το σχήμα 10.4.12, είναι $IR = V_{\mathrm{R}}$ και $Ir = V_{\mathrm{r}}$. Τα γινόμενα IR και Ir περιγράφουν τις διαφορές δυναμικού στις αντιστάσεις R και r αντίστοιχα. Συνεπώς, η σχέση $E = IR + Ir$ γράφεται $E = V_{\mathrm{R}} + V_{\mathrm{r}}$ ή $-E + V_{\mathrm{R}} + V_{\mathrm{r}} = 0$.



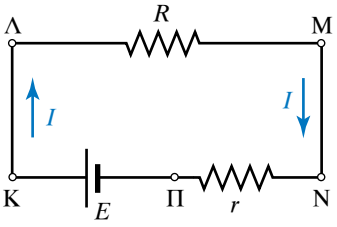
Σχ. 10.4.12

Δεύτερος κανόνας του Kirchhoff σε κλειστό κύκλωμα.

Απόδειξη (με δυναμικά).

Τα κυκλώματα της προηγούμενης αποδείξεως μπορεί ισοδύναμα να γίνουν όπως στο σχήμα 10.4.13, όπου ισχύουν:

$$V_{\mathrm{K}} - V_{\Lambda} = 0, \quad V_{\Lambda} - V_{\mathrm{M}} = IR, \quad V_{\mathrm{M}} - V_{\mathrm{N}} = O,$$
$$V_{\mathrm{N}} - V_{\Pi} = Ir, \quad V_{\Pi} - V_{\mathrm{K}} = -E.$$

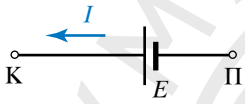


Σχ. 10.4.13
Δεύτερος κανόνας του Kirchhoff σε κλειστό κύκλωμα.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχομε ότι

$$0 = -E + IR + Ir \text{ ή } E = IR + Ir.$$

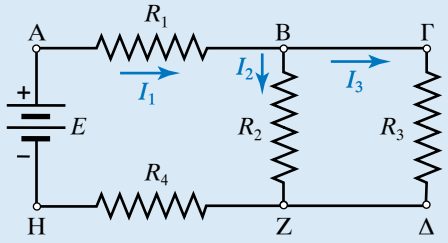
Επεξήγηση. Για τα δυναμικά στους δύο πόλους της πηγής του σχήματος 10.4.14, ισχύει ότι $V_{\text{Κ}} - V_{\Pi} = E$ ή $V_{\Pi} - V_{\text{Κ}} = -E$.



Σχ. 10.4.14
Δεύτερος κανόνας του Kirchhoff σε κλειστό κύκλωμα.

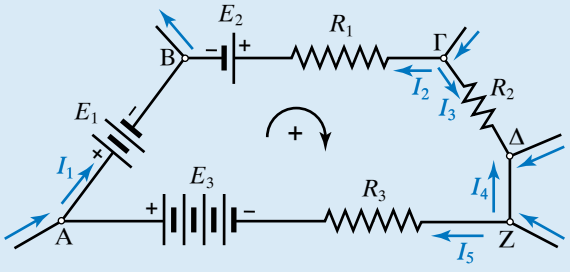
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σύμφωνα με τον Πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο Β του κυκλώματος του σχήματος 10.4.15 ισχύει ότι $I_1 = I_2 + I_3$. Σύμφωνα με τον Δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στα κλειστά κυκλώματα ΑΒΖΗ και ΒΓΔΖ ισχύει αντίστοιχα ότι $I_1R_1 + I_2R_2 + I_1R_4 - E = 0$ και $I_3R_3 - I_2R_2 = 0$. Αν γνωρίζομε την ΗΕΔ E της πηγής και τις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3, R_4, μπορούμε να υπολογίσομε τα τρία ρεύματα I_1, I_2, I_3.



Σχ. 10.4.15

2. Εφαρμόζοντας τον Δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο κλειστό κύκλωμα ΑΒΓΔΖ του σχήματος 10.4.16 και δεδομένου ότι οι κλάδοι ΑΒ και ΔΖ δεν παρουσιάζουν αντίσταση, έχομε ότι $-E_1 + E_2 + E_3 = I_1 0 - I_2R_1 + I_3R_2 - I_4 0 + I_5R_3$.



Σχ. 10.4.16

Παρατηρήσεις.

1) Ο Δεύτερος κανόνας είναι απόρροια του θεωρήματος διατηρήσεως της ενέργειας.

2) Επιλέγομε αυθαίρετα θετικές φορές περιγραφής των βρόχων.

3) Λαμβάνομε την ΗΕΔ πηγής ως θετική, όταν κινούμενοι κατά τη θετική φορά που ορίσαμε, συναντάμε πρώτο τον αρνητικό της πόλο (−).

4) Η πτώση τάσεως IR θεωρείται θετική, όταν το ρεύμα I που διαρρέει την R έχει τη φορά περιγραφής του βρόχου.

5) Λαμβάνομε αυθαίρετα τη φορά του ρεύματος που διαρρέει έναν κλάδο. Αν τελικά η αριθμητική της τιμή βρεθεί αρνητική, τότε η φορά της είναι αντίθετη απ' αυτήν που πήραμε.

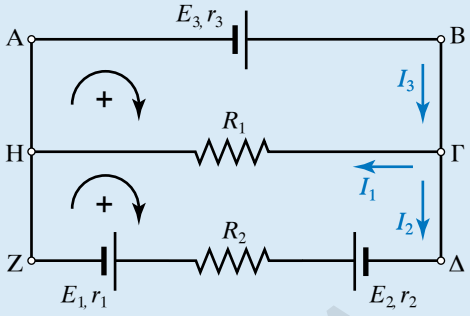
Παράδειγμα. Να υπολογίσετε τα ρεύματα I_1, I_2, I_3, στο ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 10.4.17, σε σχέση με τα υπόλοιπα στοιχεία του κυκλώματος $(E_1, E_2, E_3, r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3)$, που θεωρούνται δεδομένα.

Από τον Πρώτο κανόνα στον κόμβο Γ, ισχύει ότι $I_1 + I_2 = I_3$. Από τον δεύτερο κανόνα στον βρόχο ΑΒΓΗΑ, ισχύει ότι $-E_3 + I_1R_1 + I_3R_3 = 0$. Από τον Δεύτερο κανόνα στον βρόχο ΗΓΔΖΗ, ισχύει ότι $-I_1R_1 + I_2r_2 - E_2 + I_2R_2 + E_1 + I_2r_1 = 0$. Απ' την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους προκύπτει ότι:

$$I_1 = \frac{E_3(r_1 + r_2 + R_2) + (E_1 - E_2)r_3}{(r_1 + r_2 + R_2)\cdot(r_3 + R_1) + R_1 r_3}$$

$$I_2 = \frac{(E_2 - E_1)\cdot(r_3 + R_1) + E_3\, R_1}{(r_1 + r_2 + R_2)\cdot(r_3 + R_1) + R_1\, r_3}$$

$$I_3 = \frac{(E_2 - E_1)\, R_1 + E_3\,(r_1 + r_2 + R_1 + R_2)}{(r_1 + r_2 + R_2)\cdot(r_3 + R_1) + R_1\, r_3}.$$



Σχ. 10.4.17
Ηλεκτρικό κύκλωμα.

10.4.5 Συνδεσμολογία αντιστάσεων.

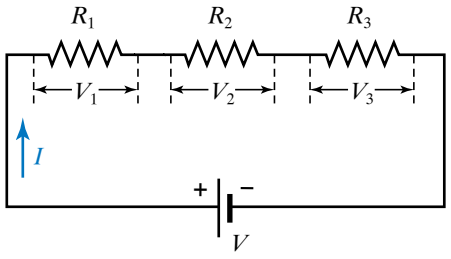
Οι αντιστάσεις μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με πολλούς τρόπους, δημιουργώντας έτσι συστήματα αντιστάσεων. Το ηλεκτρικό ρεύμα που εισέρχεται και εξέρχεται απ' τα άκρα συστήματος αντιστάσεων ονομάζεται ***ολικό ρεύμα*** $I_{ΟΛ}$. Η τάση που εφαρμόζεται στα άκρα συστήματος αντιστάσεων ονομάζεται ***ολική τάση*** $V_{ΟΛ}$. Ισοδύναμη ή ολική αντίσταση $R_{ΟΛ}$ συστήματος αντιστάσεων, ονομάζεται η ***αντίσταση στα άκρα*** της οποίας, αν εφαρμοσθεί τάση $V_{ΟΛ}$, αυτή θα διαρρέεται από ρεύμα $I_{ΟΛ}$, δηλαδή:

$$I_{ΟΛ} = \frac{V_{ΟΛ}}{R_{ΟΛ}}.$$

Υπάρχουν οι εξής τρόποι συνδέσεως των αντιστάσεων: σε σειρά, παράλληλα και με συνδυασμό των δύο αυτών τρόπων οπότε και προκύπτει η μεικτή συνδεσμολογία.

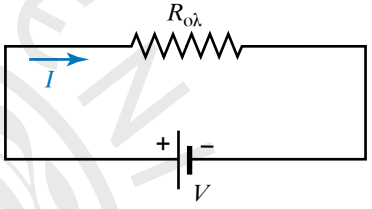
10.4.6 Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά.

Όταν οι αντιστάτες συνδέονται διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλον, τότε διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα και είναι συνδεδεμένοι σε σειρά (σχ. 10.4.18). Οι τρεις αντιστάτες αντιστάσεων R_1, R_2, R_3 διαρρέονται από ρεύμα I. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή τάσεως V. Η τάση της συνδεσμολογίας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων, δηλαδή $V = V_1 + V_2 + V_3$. Η συνδεσμολογία των αντιστατών



Σχ. 10.4.18
Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά.

μπορεί να αντικατασταθεί από ισοδύναμο αντιστάτη, που θα διαρρέεται απ' το ίδιο ρεύμα I, θα έχει την τάση V της συνδεσμολογίας και αντίσταση $R_{ΟΛ}$ ίση με το άθροισμα των αντιστάσεων των αντιστατών. Δηλαδή $R_{ΟΛ} = R_1 + R_2 + R_3$ (σχ. 10.4.19).



Σχ. 10.4.19
Η ισοδύναμη αντίσταση είναι:
$R_{ΟΛ} = R_1 + R_2 + R_3$.

Απόδειξη.

Από τον Νόμο του Ohm γνωρίζομε ότι:

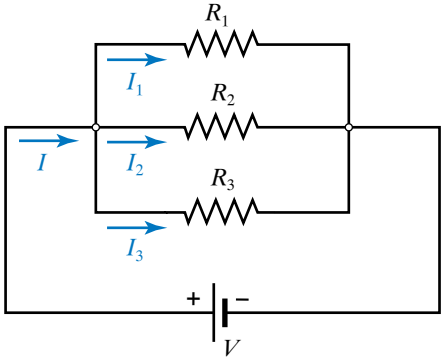
$V_1 = IR_1$, $V_2 = IR_2$, $V_3 = IR_3$, και $V = IR_{ΟΛ}$.

Η σχέση $V = V_1 + V_2 + V_3$ γράφεται

$IR_{ΟΛ} = IR_1 + IR_2 + IR_3$ ή $R_{ΟΛ} = R_1 + R_2 + R_3$.

10.4.7 Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων.

Όταν τα άκρα των αντιστατών είναι ενωμένα μεταξύ τους (σχ. 10.4.20), τότε στα άκρα τους θα



Σχ. 10.4.20
Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων.

έχουν την ίδια τάση και λέμε ότι οι αντιστάτες είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Οι τρεις αντιστάτες αντιστάσεων R_1, R_2, R_3 διαρρέονται από ρεύματα I_1, I_2, I_3, που υπολογίζονται από τον Νόμο του Ohm. Η τάση της συνδεσμολογίας είναι ταυτόχρονα και τάση του κάθε αντιστάτη. Δηλαδή: $V = V_1 = V_2 = V_3$. Η συνδεσμολογία των αντιστατών (σχ. 10.4.21) μπορεί να αντικατασταθεί από ισοδύναμο αντιστάτη, ο οποίος έχει τάση ίση με την κοινή τάση κάθε αντιστάτη, διαρρέεται απ' το ρεύμα I της συνδεσμολογίας και έχει αντίσταση $R_{ΟΛ}$, που δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{R_{ΟΛ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

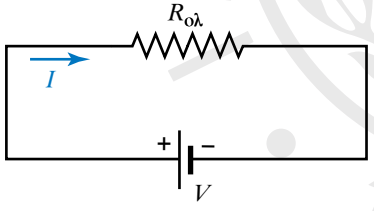
Απόδειξη.

Από τον Νόμο του Ohm γνωρίζομε ότι για τις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 και $R_{ΟΛ}$ ισχύουν:

$$I_1 = \frac{V}{R_1},\quad I_2 = \frac{V}{R_2},\quad I_3 = \frac{V}{R_3} \quad \text{και} \quad I = \frac{V}{R_{ΟΛ}}.$$

Επειδή δεν έχομε συσσώρευση φορτίου σε κανένα σημείο, ισχύει ότι: $I = I_1 + I_2 + I_3$. Συνεπώς είναι:

$$\frac{V}{R_{ΟΛ}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{R_{ΟΛ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$



Σχ. 10.4.21

Η ισοδύναμη αντίσταση είναι:

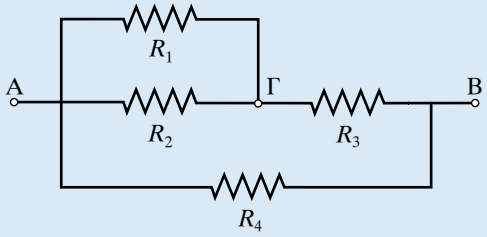
$$\frac{1}{R_{ΟΛ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

10.4.8 Μεικτή σύνδεση αντιστάσεων.

Η μεικτή σύνδεση προκύπτει από συνδυασμό των δύο προηγουμένων συνδέσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε την ολική αντίσταση της συνδεσμολογίας του κυκλώματος του σχήματος 10.4.22, όταν $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ και η τάση που εφαρμόζεται στα σημεία Α και Β είναι V.

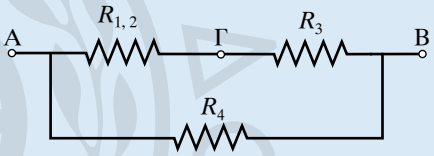


Σχ. 10.4.22

Λύση.

Οι αντιστάτες R_1, R_2, είναι παράλληλα συνδεδεμένοι (σχ. 10.4.23). Συνεπώς, αντικαθίστανται από ισοδύναμο αντιστάτη $R_{1,2}$, όπου:

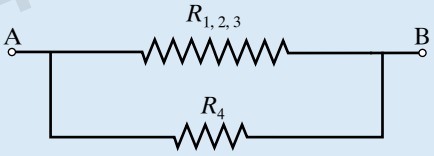
$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ή } R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R\,R}{R+R} = \frac{R}{2}.$$



Σχ. 10.4.23

Οι αντιστάτες $R_{1,2}$ και R_3 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά (σχ. 10.4.24). Συνεπώς, αντικαθίστανται από ισοδύναμο αντιστάτη $R_{1,2,3}$, όπου:

$$R_{1,2,3} = R_{1,2} + R_3 = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}.$$

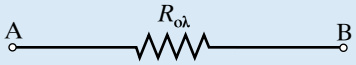


Σχ. 10.4.24

Οι αντιστάτες $R_{1,2,3}$ και R_4 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι. Συνεπώς, αντικαθίστανται από ισοδύναμο αντιστάτη $R_{ΟΛ}$ (σχ. 10.4.25), όπου:

$$\frac{1}{R_{ΟΛ}} = \frac{1}{R_{1,2,3}} + \frac{1}{R_4} \quad \text{ή}$$

$$R_{O\Lambda} = \frac{R_{1,2,3}R_4}{R_{1,2,3}+R_4} = \frac{R\frac{3R}{2}}{R+\frac{3R}{2}} = \frac{3R}{5}.$$



Σχ. 10.4.25

Παρατήρηση.

Οι ηλεκτρικές συσκευές των σπιτιών μας συνδέονται παράλληλα για τους δύο παρακάτω λόγους. Ο ένας είναι ότι απ' το εργοστάσιο κατασκευής τους είναι ρυθμισμένες έτσι, ώστε να λειτουργούν κανονικά για μία συγκεκριμένη τιμή της τάσεως που συμπίπτει με την τάση του δικτύου (220 V για την Ευρώπη και 110 V για τις ΗΠΑ). Ο δεύτερος λόγος είναι ότι με την παράλληλη σύνδεση των συσκευών εξασφαλίζεται ότι η μία θα λειτουργεί ανεξάρτητα απ' την άλλη. Ακόμη δε και αν κάποια καταστραφεί ή αποσυνδεθεί από το δίκτυο, οι υπόλοιπες θα συνεχίσουν να λειτουργούν.

10.5 Συνδεσμολογία πηγών συνεχούς ρεύματος.

10.5.1 Συνδεσμολογία ηλεκτρικών πηγών σε σειρά.

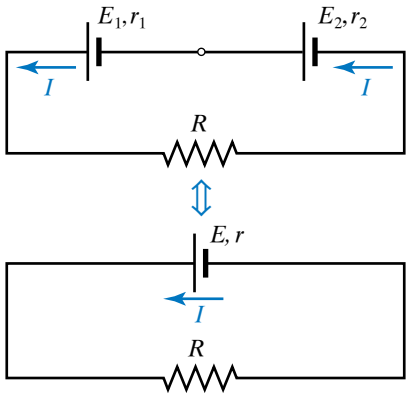
Στη συνδεσμολογία αυτού του τύπου, ο θετικός πόλος της μίας πηγής συνδέεται με τον αρνητικό πόλο της επόμενης, ο θετικός με τον αρνητικό της τρίτης κ.ο.κ. (σχ. 10.5.1). Με τον τρόπο αυτό υπάρχουν πάλι δύο πόλοι, ο αρνητικός της πρώτης και ο θετικός της τελευταίας. Αν $E_1, E_2, E_3, \ldots E_v$ οι ΗΕΔ των πηγών, η ολική $E_{O\Lambda}$, είναι ίση με $E_{O\Lambda} = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_v$. Η εσωτερική αντίσταση r είναι ίση με το άθροισμα των εσωτερικών αντιστάσεων των πηγών. Δηλαδή $r = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_v$. Τη σύνδεση πηγών σε σειρά χρησιμοποιούμε όταν επιθυμούμε να έχομε μεγάλη ΗΕΔ, ενώ διαθέτομε πολλές πηγές μικρής ΗΕΔ.

10.5.2 Παράλληλη σύνδεση δύο ομοίων ηλεκτρικών πηγών.

Στη συνδεσμολογία αυτού του τύπου, συνδέονται μεταξύ τους όλοι μαζί οι θετικοί πόλοι, οπότε δημιουργούν τον θετικό πόλο, και όλοι μαζί οι αρνητικοί πόλοι οπότε δημιουργούν τον αρνητικό πόλο (σχ. 10.5.2). Με τον τρόπο αυτό υπάρχουν πάλι δύο πόλοι, ένας θετικός και ένας αρνητικός. Η ΗΕΔ των δύο κοινών πόλων ισούται με την ΗΕΔ της μίας πηγής. Κατά την παράλληλη σύνδεση ομοίων πηγών (γεννητριών) αυτές διαρρέονται από ίσα ρεύματα. Την παράλληλη σύνδεση χρησιμοποιούμε όταν επιθυμούμε να λάβομε μεγάλο ρεύμα, το οποίο δεν μπορεί να προσφέρει μία μόνο πηγή. Για την εσωτερική αντίσταση $r_{I\Sigma}$ της ισοδύναμης ηλεκτρικής πηγής ν ομοίων πηγών εσωτερικής αντιστάσεως r η κάθε μία, ισχύει ότι:

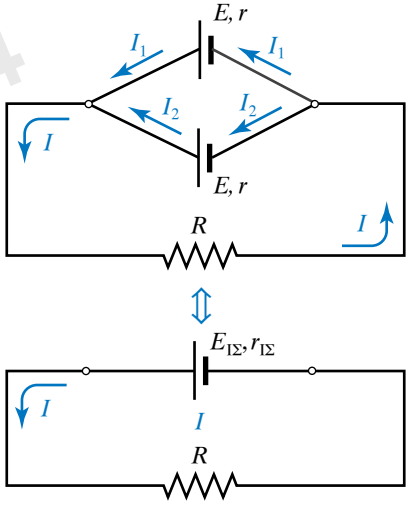
$$r_{I\Sigma} = r/v.$$

Η σύνδεση αυτή χρησιμοποιείται σπανιότατα,



Σχ. 10.5.1

Συνδεσμολογία δύο ηλεκτρικών πηγών σε σειρά. Ισχύει ότι $r = r_1 + r_2$ *και* $E = E_1 + E_2$.



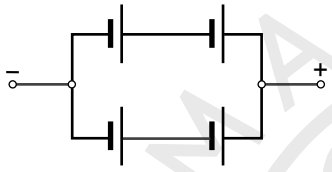
Σχ. 10.5.2

Ισχύει ότι $E_{I\Sigma} = E$ *και* $r_{I\Sigma} = r/2$.

διότι για να γίνει, πρέπει όλες οι πηγές να έχουν την ίδια ΗΕΔ. Σε αντίθετη περίπτωση οι πηγές με μεγαλύτερη ΗΕΔ προκαλούν ηλεκτρικό ρεύμα διά μέσου των πηγών με μικρότερη ΗΕΔ και σταδιακά οι πρώτες καταστρέφονται πολύ γρηγορότερα απ' τις άλλες.

10.5.3 Μεικτή συνδεσμολογία ηλεκτρικών πηγών.

Στη συνδεσμολογία αυτού του τύπου, μερικές πηγές συνδέονται μεταξύ τους σε σειρά και αποτελούν ομάδες. Στη συνέχεια αυτές οι ομάδες συνδέονται παράλληλα (σχ. 10.5.3). Η μεικτή συνδεσμολογία χρησιμοποιείται όταν απαιτείται μεγάλη ΗΕΔ και ταυτόχρονα ισχυρό ρεύμα.



Σχ. 10.5.3
Μεικτή συνδεσμολογία ηλεκτρικών πηγών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Συνδέομε παράλληλα τέσσερεις ομάδες πηγών ($\mu = 4$), που η κάθε μία αποτελείται από τρεις πηγές ($\nu = 3$) συνδεδεμένες σε σειρά. Κάθε πηγή έχει ΗΕΔ $E = 12\,\text{V}$ και εσωτερική αντίσταση $r = 0{,}1\,\Omega$. Αν η εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος είναι $R = 3\,\Omega$, να υπολογισθούν:

1) Η ΗΕΔ του συστήματος των πηγών.
2) Η αντίσταση του συστήματος των πηγών.
3) Το ρεύμα I που διαρρέει την αντίσταση R.
4) Το ρεύμα I' που διαρρέει την κάθε πηγή.

Λύση

1) Η ΗΕΔ της κάθε ομάδας στοιχείων είναι $E' = \nu E$ (σε σειρά). Η ΗΕΔ του συστήματος των πηγών είναι $E_{\text{ΟΛ}} = E'\,\nu E = 36\,\text{V}$.

2) Η εσωτερική αντίσταση κάθε ομάδας στοιχείων είναι $r' = \nu r = 3 \cdot 0{,}1\,\Omega = 0{,}3\,\Omega$.

Η εσωτερική αντίσταση του συστήματος των στοιχείων είναι:

$$r_{\text{ΟΛ}} = \frac{r'}{\mu} = \frac{\nu r}{\mu} = \frac{0{,}3}{4}\ \Omega = 0{,}075\ \Omega.$$

3) Από τον Νόμο του Ohm για το κλειστό κύκλωμα προκύπτει ότι:

$$E_{\text{ΟΛ}} = I \cdot R_{\text{ΟΛ}} \quad \text{ή} \quad I = \frac{E_{\text{ΟΛ}}}{R + r_{\text{ΟΛ}}} =$$

$$= \frac{\nu E}{R + \dfrac{\nu r}{\mu}} = \frac{36}{3 + \dfrac{3}{40}}\ \text{A} = 11{,}707\ \text{A}.$$

4) Η τάση V στα άκρα της κάθε ομάδας πηγών είναι ίση με την τάση στα άκρα της αντιστάσεως R. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} V &= I\,R \\ V &= E' - I'\,r' \end{aligned}\right\} \text{επομένως}$$

$$E' - I'\,r' = I\,R \ \text{ή}\ I'\,r' = E' - I\,R$$

$$\text{άρα}\ I' = \frac{E' - I\,R}{r'} = \frac{36 - 11{,}707 \cdot 3}{0{,}3}\ \text{A} = 2{,}93\ \text{A}.$$

10.6 Ενέργεια και ισχύς ηλεκτρικού ρεύματος.

Προκειμένου να διατηρηθεί ρεύμα σ' ένα κλειστό κύκλωμα, χρειάζεται να υπάρχει κάποια πηγή ρεύματος που παράγει ηλεκτρικό έργο. Δηλαδή για να λειτουργήσει μία ηλεκτρική συσκευή χρειάζεται ενέργεια, που της προσφέρεται από κάποια ηλεκτρική πηγή. Αυτή η ενέργεια ονομάζεται ***ηλεκτρική ενέργεια ή ενέργεια του ηλεκτρικού ρεύματος***. Αν ποσότητα φορτίου $\text{d}q$ περάσει απ' το κύκλωμα σε χρόνο $\text{d}t$, τότε, αν η πηγή έχει ΗΕΔ $\mathcal{E}$, το έργο που παράγει η πηγή σ' αυτόν τον χρόνο είναι $\text{d}W = \mathcal{E}\text{d}q$.

Αυτό σημαίνει ότι έχομε για την ισχύ

$$\text{d}W/\text{d}t = \mathcal{E} \cdot \text{d}q/\text{d}t, \quad \text{δηλαδή} \quad P = \mathcal{E}\,I.$$

Όταν το ρεύμα στο εξωτερικό κύκλωμα έχει κατεύθυνση από τον θετικό πόλο της πηγής προς τον αρνητικό, τότε τα $\mathcal{E}$, I είναι ομόσημα. Τότε η ισχύς είναι θετική, που σημαίνει ότι η πηγή παρέχει ισχύ στο κύκλωμα, ενώ όταν συμβαίνει το αντίθετο, τα $\mathcal{E}, I$ είναι ετερόσημα και η ισχύς είναι αρνητική, συνεπώς η πηγή απορροφά ισχύ απ' το κύκλωμα.

Αν έχομε έναν αντιστάτη στο κύκλωμα, έξω από πηγή, τότε κατά τη μεταφορά φορτίου $\text{d}q$ μέσα στον αντιστάτη, σε χρόνο $\text{d}t$, από το άκρο του, που βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό προς το άλλο άκρο με το χαμηλότερο δυναμικό, καταναλίσκεται ενέργεια. Συνεπώς έχομε πτώση δυναμικού άρα μείωση της δυναμικής ενέργειας του κινούμενου φορτίου).

Η ενέργεια αυτή ισούται με το έργο πάνω στο φορτίο κατ' αυτή τη μετακίνηση. Είναι $\mathrm{d}W = V_\mathrm{R}\,\mathrm{d}q$ όπου V_R είναι η τάση στα άκρα του αντιστάτη (πτώση τάσεως) που έχει (ωμική) αντίσταση R. Επομένως, η ισχύς που καταναλώνεται στον αντιστάτη είναι:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = V_R \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\ \text{δηλαδή}\ P = V_R\, I$$

όπου I το ρεύμα που ρέει από τον αντιστάτη. Το P είναι η στιγμιαία ισχύς και μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο. Με χρήση του Νόμου του Ohm έχομε $V_\mathrm{R} = I\,R$, οπότε:

$$P = I^2 R = \frac{V_R^2}{R}.$$

Όταν ένας μεταλλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα, το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο εσωτερικό του ασκεί δυνάμεις στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα δέσμια ιόντα του υλικού (χάνουν όλη την κινητική ενέργεια που απέκτησαν απ' το ηλεκτρικό πεδίο) και τα κάνουν να κινούνται περί τη θέση ισορροπίας τους με μεγαλύτερες ταχύτητες. Δηλαδή το υλικό θερμαίνεται, διότι όλη η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια (λέγεται και εσωτερική ή θερμική ενέργεια). Αν ο αντιστάτης δεν είναι θερμικά μονωμένος, θα έχομε ροή θερμότητας προς το περιβάλλον ένεκα διαφοράς θερμοκρασίας, επειδή ο αντιστάτης θα αποκτήσει μεγαλύτερη θερμοκρασία απ' αυτό. Η μετατροπή ηλεκτρικής σε εσωτερική ενέργεια λέγεται ***φαινόμενο Joule*** (Τζουλ) και η εκλυόμενη στο περιβάλλον ενέργεια ***θερμότητα τζουλ***.

Αν η τάση V_R είναι σταθερή, τότε και το ρεύμα I θα είναι σταθερό. Τότε έχομε τις σχέσεις:

$$P = \frac{W}{t} = V_R \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\ P = V_R\, I\ \ \text{και}\ \ W = P\,t = V_R\, I\,t.$$

Στη γενική περίπτωση, που δεν είναι σταθερή η τάση και το ρεύμα του αντιστάτη, τότε η ολική ενέργεια που καταναλώνεται σε δεδομένο χρόνο δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$W = \int_{t_1}^{t_2} V\, I\, \mathrm{d}t.$$

Μονάδα μετρήσεως της ηλεκτρικής ενέργειας στο SI είναι το joule (J). Όταν στα άκρα συσκευής εφαρμόζεται τάση 1 V και διαρρέεται από ρεύμα 1 A, τότε το ρεύμα μεταφέρει στη συσκευή κάθε δευτερόλεπτο ενέργεια ίση με 1 joule.

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται ο υπολογισμός ενέργειας που εκλύεται στον περιβάλλοντα χώρο υπό μορφή θερμότητας σε cal (θερμίδες) αντί joule. Στις περιπτώσεις αυτές υπολογίζομε πρώτα τη θερμότητα σε joule και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 1 cal = 4,2 J ή 1 J = 0,24 cal μετατρέπομε τα joule σε θερμίδες. Δηλαδή έχομε έναν συντελεστή μετατροπής από τζουλ σε θερμίδες a = 0,24 cal/J που συνηθιζόταν να λέγεται παλαιότερα ***ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας***.

Η τιμή του συντελεστή a βρίσκεται με κατάλληλο πείραμα θερμιδομετρίας. Συγκεκριμένα, σε γνωστή αντίσταση R που βρίσκεται μέσα σε θερμιδόμετρο, διαβιβάζομε ρεύμα I επί χρόνο t. Εφαρμόζομε τον τύπο $W = I^2 R\,t$ και υπολογίζομε την ηλεκτρική ενέργεια που καταναλώθηκε στον αντιστάτη. Όλη η ενέργεια έρρευσε ως θερμότητα στο νερό του θερμιδόμετρου, με αποτέλεσμα να αυξήσει τη θερμοκρασία του.

Γνωρίζομε τη μάζα του νερού, την ειδική θερμότητά του, μετρούμε την ανύψωση της θερμοκρασίας του, οπότε από τον θεμελιώδη νόμο της θερμιδομετρίας $Q = m\,c\,\Delta\theta$ (βλ. παράγρ. 6.2), υπολογίζομε τη θερμότητα που αναπτύχθηκε. Είναι ευνόητο ότι $W = Q$, οπότε προσδιορίζεται η αντιστοιχία των δύο μονάδων ενέργειας.

Είναι γνωστή η ειδική θερμότητα του νερού

$$c = 4200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}.$$

10.6.1 Εφαρμογές του φαινομένου Joule.

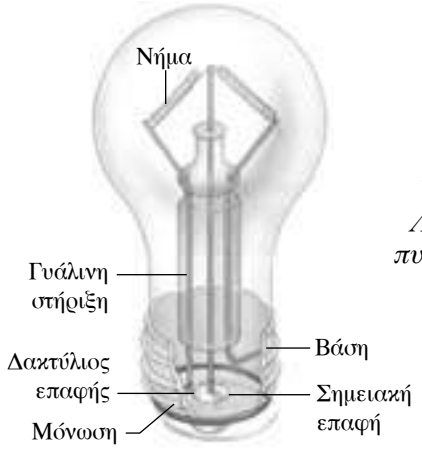
Το φαινόμενο Joule είναι ένα πολύ γενικό φαινόμενο, που συνοδεύει πάντα τη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από αγωγούς. Το χρησιμοποιούμε σε πολλές χρήσιμες εφαρμογές, αλλά έχει και ανεπιθύμητα αποτελέσματα, όπως είναι οι μεγάλες απώλειες ενέργειας μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

10.6.2 Λαμπτήρας πυρακτώσεως.

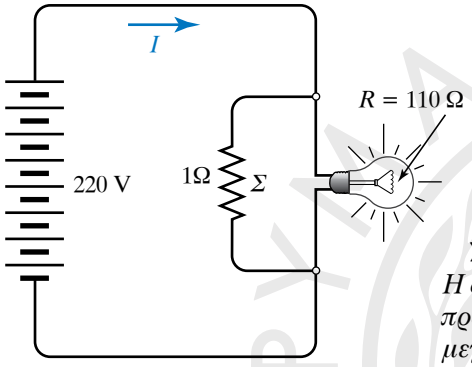
Στο λαμπτήρα πυρακτώσεως (σχ. 10.6.1), το ηλεκτρικό ρεύμα διέρχεται μέσα απ' το δύστηκτο λεπτό μεταλλικό νήμα (σύρμα) από βολφράμιο, που έχει μεγάλη ηλεκτρική αντίσταση. Έτσι θερμαίνεται πολύ, η θερμοκρασία του φτάνει περίπου στους 2000 °C, πυρακτώνεται και ακτινοβολεί.

10.6.3 Βραχυκύκλωμα.

Έστω ότι η ΗΕΔ της πηγής στο κύκλωμα του σχήματος 10.6.2 είναι 220V και η αντίσταση του λα-



Σχ. 10.6.1
Λαμπτήρας πυρακτώσεως.



Σχ. 10.6.2
Η αντίσταση Σ προκαλεί πολύ μεγάλο ρεύμα.

μπτήρα 110 Ω. Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

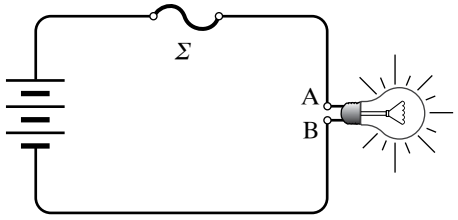
$$I = \frac{V}{R} = \frac{220\ \text{V}}{110\ \Omega} = 2\ \text{A}.$$

Στα άκρα του λαμπτήρα συνδέομε σύρμα Σ που έχει μεγάλη διατομή, άρα μικρή αντίσταση, 1 Ω. Τότε η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι μικρότερη από 1 Ω, άρα πολύ μικρή. Αυτό έχει ως συνέπεια το ρεύμα I που διέρχεται από τους αγωγούς του κυκλώματος να είναι πολύ μεγάλο, μεγαλύτερο από 220 Α, με αποτέλεσμα οι αγωγοί να θερμαίνονται τόσο πολύ, που υπάρχει περίπτωση να καταστραφούν.

Όταν οι πόλοι ηλεκτρικής πηγής (ή κάποια σημεία κυκλώματος με μεγάλη διαφορά δυναμικού μεταξύ τους) συνδεθούν με αγωγό αμελητέας αντιστάσεως ή ακουμπήσουν το ένα σημείο με το άλλο, τότε προκαλείται ***βραχυκύκλωμα*** και διέρχονται απ' το κύκλωμα πολύ μεγάλα ρεύματα, που μπορεί να είναι καταστροφικά για το κύκλωμα και να προκαλέσουν ακόμη και πυρκαγιά.

10.6.4 Ασφάλειες.

Για την αποφυγή των συνεπειών του βραχυκυκλώματος χρησιμοποιούνται στα ηλεκτρικά κυκλώματα οι ασφάλειες. Ο πιο συνηθισμένος και απλός τύπος είναι η τηκόμενη ασφάλεια, δηλαδή η ασφάλεια που λειώνει. Αποτελείται από μικρού μήκους εύτηκτο σύρμα Σ, που παρεμβάλλεται στο κύκλωμα (σχ. 10.6.3).



Σχ. 10.6.3
Ασφάλεια σε ηλεκτρικό κύκλωμα.

Όταν περάσει στο κύκλωμα μεγαλύτερο ρεύμα I από το προβλεπόμενο, τότε εξαιτίας της μεγάλης θερμοδυναμικής ενέργειας αυξάνεται πολύ η θερμοκρασία του σύρματος της ασφάλειας και αυτό λειώνει, με συνέπεια να διακόπτεται το κύκλωμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ηλεκτρικός κινητήρας εσωτερικής αντιστάσεως r που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I, και στις άκρες του υπάρχει τάση V. Η ισχύς $P = VI$ που προσφέρεται στον κινητήρα κατά τη λειτουργία του μοιράζεται ως εξής:

Μέρος της ισχύος $P_{\text{Ι}} = I^2 r$ καταναλίσκεται στην εσωτερική ωμική αντίσταση, σύμφωνα με το φαινόμενο Joule, προκαλώντας ροή θερμότητας προς το περιβάλλον και τον ίδιο τον κινητήρα. Ένα άλλο μέρος $P_{\omega\varphi}$ είναι η ωφέλιμη ισχύς που μετατρέπεται σε μηχανική ενέργεια που χρησιμοποιούμε.

Αυτή δίνεται απ' τη σχέση $P_{\omega\varphi} = \mathcal{E}_{\alpha\nu\tau} I$, και ισχύει η διατήρηση της ενέργειας, που σημαίνει ότι $P = VI = P_{\text{Ι}} + P_{\omega\varphi} = I^2 r + \mathcal{E}_{\alpha\nu\tau} I$, αν ο κινητήρας λειτουργεί.

Το μέγεθος $\mathcal{E}_{\alpha\nu\tau}$ είναι χαρακτηριστικό του κινητήρα και ονομάζεται ***αντιηλεκτρεγερτική δύναμη*** του κινητήρα.

Η τάση στα άκρα του κινητήρα όταν ο κινητήρας παράγει ωφέλιμο έργο δεν σχετίζεται με το ρεύμα σύμφωνα με τον Νόμο του Ohm. Ο Νόμος του Ohm, όταν ο κινητήρας δεν περιστρέφεται, δεν παράγει ωφέλιμο έργο, και έχει σταθερή θερμοκρασία.

10.6.5 Μονάδα μετρήσεως ηλεκτρικής ισχύος.

Μονάδα μετρήσεως της ηλεκτρικής όπως και κάθε μορφής ισχύος στο SI είναι το 1 watt (1 W), που ισούται με 1 j/1 s, και είναι η ισχύς συσκευής που σε χρόνο 1 s ανταλλάσσει ηλεκτρική ενέργεια ίση με 1 joule.

Εκτός από το 1 W, χρησιμοποιούνται και μεγαλύτερες μονάδες μετρήσεως της ισχύος. Τέτοιες είναι το 1 kW = 10^3 W και το 1 MW = 10^6 W.

Απ' τη σχέση $W = P\,t$ μπορούμε να ορίσομε μια νέα μονάδα μετρήσεως ενέργειας, την κιλοβατώρα. Προκύπτει βάζοντας στην προηγούμενη σχέση όπου P, 1kW και όπου t, 1 h. Κιλοβατώρα είναι η ενέργεια που καταναλώνει ή παράγει συσκευή ισχύος ενός κιλοβάτ, όταν λειτουργεί επί μία ώρα. Μικρότερη μονάδα μετρήσεως της ενέργειας είναι η βατώρα (Wh), για την οποία ισχύει ότι 1 kWh = 1000 Wh. Η σχέση που συνδέει την kWh με το joule είναι η ακόλουθη:

$$1\,\text{kWh} = 1000\,\text{Wh} = 1000\,\text{W} \times 1\,\text{h} = \\ = 1000\,\text{W} \times 3600\,\text{s} = 3\,600\,000\,\text{J}.$$

10.6.6 Θεώρημα μέγιστης ισχύος.

Ηλεκτρική πηγή με ΗΕΔ Ε και εσωτερική αντίσταση r συνδέεται με διάταξη που έχει ωμική αντίσταση R. Η μέγιστη ισχύς P_{MAX} που μπορεί να δώσει στην αντίσταση R η πηγή είναι $P_{\text{MAX}} = \dfrac{E^2}{4\,r}$. Αυτό συμβαίνει όταν $r = R$ και τότε ο συντελεστής αποδόσεως της πηγής είναι $n = 0{,}5$.

Απόδειξη.

΄Εχομε ότι ισχύει:

$$E = I\,R_{\text{ΟΛΙΚΗ}} \qquad \text{ή} \qquad I = \frac{E}{R_{\text{ΟΛΙΚΗ}}} = \frac{E}{R+r}.$$

Η ισχύς P που δίνει η πηγή στην εξωτερική αντίσταση R είναι $P = I^2 \cdot R$. Λόγω της προηγούμενης σχέσεως είναι:

$$P = \left(\frac{E}{R+r}\right)^2 R = \frac{E^2}{(R+r)^2}\,R.$$

Η σχέση αυτή γράφεται και ως:

$$P\,R^2 + 2\,P\,R\,r + P\,r^2 = E^2\,R$$

ή $$P R^2 + (2\,r\,P - E^2)\,R + r^2\,P = 0.$$

Η τελευταία είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς τον R. Η διακρίνουσά της πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν. Συνεπώς:

$$\left(2\,r\,P - E^2\right)^2 - 4\,P\,r^2\,P \geq 0$$

$$\text{ή} \quad 4\,r^2\,P^2 - 4\,r\,P\,E^2 + E^4 - 4\,r^2\,P^2 \geq 0$$

$$\text{ή} \quad E^2\left(E^2 - 4\,r\,P\right) \geq 0$$

$$\text{ή} \quad E^2 - 4\,r\,P \geq 0 \quad \text{ή} \quad E^2 \geq 4\,r\,P \quad \text{άρα} \quad P \leq \frac{E^2}{4\,r}.$$

Απ' την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή για το P είναι η $P_{\text{MAX}} = E^2/4\,r$.

Προκειμένου να παρέχει η πηγή τη μέγιστη ισχύ της, πρέπει να είναι: $P = P_{\text{MAX}}$. Λόγω της σχέσεως $P_{\text{MAX}} = E^2/\,4\,r.$, η σχέση $P = \dfrac{E^2}{(R+r)^2}\,R$ γίνεται:

$$\frac{E^2}{(R+r)^2}\,R = \frac{E^2}{4\,r} \quad \text{ή} \quad 4\,r\,R = (r+R)^2$$

$$\text{ή} \quad 4\,r\,R = r^2 + 2\,r\,R + R^2 \quad \text{ή}$$

$$r^2 - 2\,r\,R + R^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (r-R)^2 = 0 \qquad \text{άρα} \quad r = R.$$

Συνεπώς, η πηγή παρέχει τη μέγιστη ισχύ της στην αντίσταση R, όταν είναι $r = R$.

– Υπολογισμός του συντελεστή αποδόσεως της πηγής όταν $P_{MAX} = E^2/4\,r$.

Για τον υπολογισμό της αποδόσεως n ηλεκτρικής πηγής, ισχύει εξ ορισμού ότι $n = P_{\omega\varphi}/P_{\pi\rho o\sigma}$, όπου $P_{\omega\varphi}$ η ισχύς που δαπανάται στην αντίσταση R και $P_{\pi\rho o\sigma}$ η ισχύς που δίνει η πηγή στο κύκλωμα.

Συνεπώς, είναι:

$$P_{\omega\varphi} = \frac{E^2}{(R+r)^2}\,R \quad \text{και} \quad P_{\pi\rho o\sigma} = E\,I = E\,\frac{E}{R+r} = \frac{E^2}{R+r}.$$

Άρα $n = R/R + r$. ΄Οταν είναι $P = P_{\text{MAX}}$, ισχύει ότι $r = R$. Οπότε, είναι:

$$n = \frac{R}{R+R} = 0{,}5.$$

10.7 Συσσωρευτής ηλεκτρικής ενέργειας.

Συσσωρευτές (μπαταρίες) ονομάζονται πηγές

συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος, στις οποίες αποθηκεύουμε ηλεκτρική ενέργεια υπό μορφή χημικής ενέργειας, προκειμένου να τη χρησιμοποιήσομε όπου και όταν κρίνομε σκόπιμο.

Ένας πολύ κοινός τύπος είναι η κοινή «μπαταρία» μολύβδου-οξέως. Οι συσσωρευτές αποτελούνται από δύο ηλεκτρόδια που ονομάζονται ***πόλοι*** και βρίσκονται βυθισμένα εντός ηλεκτρολυτικού διαλύματος. Αν τα ηλεκτρόδια είναι όμοια, τότε μεταξύ των πόλων του συσσωρευτή δεν παρατηρείται ανάπτυξη ΗΕΔ. Η διαδικασία της αποθηκεύσεως ηλεκτρικής ενέργειας υπό μορφή χημικής ενέργειας στον συσσωρευτή είναι η ***φόρτιση*** του συσσωρευτή. Μετά τη λήξη της φορτίσεως στους πόλους της μπαταρίας αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού και εφόσον οι πόλοι συνδεθούν με εξωτερικό αγωγό, ο συσσωρευτής γίνεται πηγή ηλεκτρικού ρεύματος.

Εκφόρτιση του συσσωρευτή ονομάζεται η διαδικασία, κατά την οποία ο συσσωρευτής παρέχει μέρος της ενέργειάς του σε εξωτερικό κύκλωμα. Το ρεύμα εκφορτίσεως έχει αντίθετη φορά απ' το ρεύμα φορτίσεως. Κατά τη διάρκεια της εκφορτίσεως πραγματοποιούνται χημικές αντιδράσεις, που ως αποτέλεσμα έχουν την επαναφορά των ηλεκτροδίων στην κατάσταση, που είχαν πριν από τη φόρτιση. Επίσης κατά την εκφόρτιση μειώνεται διαρκώς η ΗΕΔ του συσσωρευτή, ο οποίος όταν εκφορτιστεί πλήρως, πρέπει να φορτιστεί εκ νέου, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί.

10.7.1 Χαρακτηριστικά μεγέθη συσσωρευτών.

Τα κύρια χαρακτηριστικά μεγέθη των συσσωρευτών είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη, που επειδή η εσωτερική αντίσταση είναι πολύ μικρή, ισούται περίπου με την πολική τάση υπό ήπιες μορφές λειτουργία και η χωρητικότητα, δηλαδή το φορτίο $Q = It$ (που συνήθως μετρείται σε Ah), που μπορεί να αποδώσει ο συσσωρευτής κατά την εκφόρτισή του.

$$1\,\text{Ah} = 1\,\text{A} \times 1\,\text{h} = 1\,\text{A} \times 3600\,\text{s} = 3600\,\text{C}.$$

10.7.2 Συσσωρευτές μολύβδου.

Περιέχουν ως ηλεκτρολύτη διάλυμα θειικού οξέως (H_2SO_4) σε υγρή κατάσταση. Οι πλάκες από μόλυβδο εμβαπτίζονται στο θειικό οξύ και αμέσως καλύπτονται από στρώμα θειικού μολύβδου ($PbSO_4$) και λειτουργούν ως ηλεκτρόδια (σχ. 10.7.1).

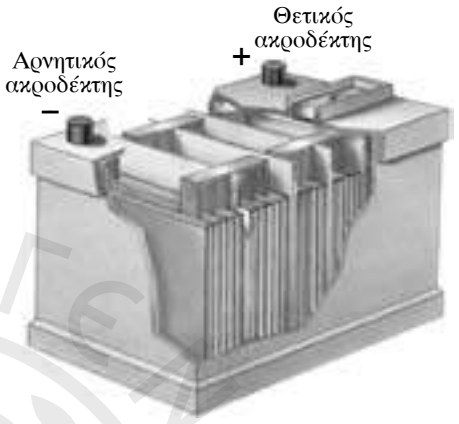
Κατά τη φόρτισή τους (σχ. 10.7.2) δημιουργείται H_2SO_4, που καθιστά τον ηλεκτρολύτη πυκνότερο, ενώ κατά την εκφόρτισή τους παράγεται νερό, που καθιστά τον ηλεκτρολύτη αραιότερο.

Οι χημικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα κατά τη φόρτιση και εκφόρτιση (σχ. 10.7.3) συσσωρευτή μολύβδου είναι οι εξής:

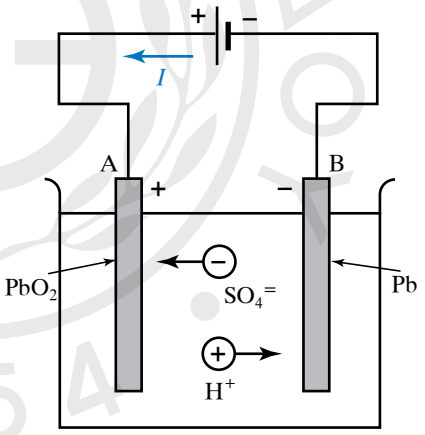
Φόρτιση

Άνοδος:

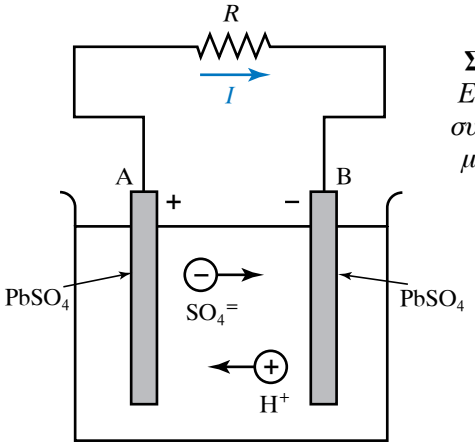
$$PbSO_4 + SO_4 + 2H_2O \rightarrow PbO_2 + 2H_2SO_4$$



Σχ. 10.7.1
Συσσωρευτής μολύβδου.



Σχ. 10.7.2
Φόρτιση συσσωρευτή μολύβδου.



Σχ. 10.7.3
Εκφόρτιση συσσωρευτή μολύβδου.

Κάθοδος:

$PbSO_4 + H_2 \rightarrow Pb + H_2SO_4$

Εκφόρτιση

Άνοδος:

$PbO_2 + H_2 + H_2SO \rightarrow PbSO_4 + 2H_2O$

Κάθοδος:

$Pb + SO_4 \rightarrow PbSO_4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει αγωγό, όταν από διατομή του διέρχεται σε χρόνο 5 s ηλεκτρικό φορτίο $q = 10\,C$.

2. Αν το ρεύμα που διαρρέει αγωγό είναι $I = 5\,mA$, να υπολογίσετε το φορτίο που διέρχεται από μία διατομή του σε χρόνο 2 min.

3. Να υπολογίσετε τη διαφορά δυναμικού που εφαρμόζεται στα άκρα αντιστάτη αντιστάσεως $R = 4\,\Omega$, αν σε χρόνο $t = 2\,min$ διέρχεται από μία διατομή του συνολικό φορτίο $q = 600\,C$.

4. Όταν στις άκρες αγωγού αντιστάσεως $R_1 = 10\,\Omega$ εφαρμοστεί τάση $V_1 = 220\,V$, αυτός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I_1. Ποια πρέπει να είναι η αντίσταση R_2 δεύτερου αγωγού, ώστε όταν στις άκρες της εφαρμοστεί τάση $V_2 = 44\,V$ να διαρρέεται κι αυτός από ρεύμα I_1 ;

5. Πυκνωτής έχει παράλληλους κυκλικούς οπλισμούς ακτίνας 5 cm, που απέχουν μεταξύ τους 2 mm. Να υπολογίσετε το φορτίο των οπλισμών, αν η διαφορά δυναμικού τους είναι 50 V.

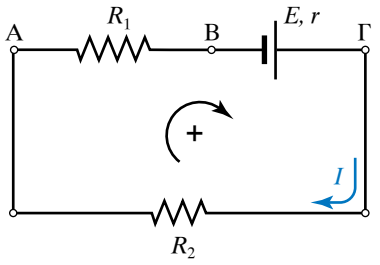
6. Αν η Γη θεωρηθεί σφαιρικός αγωγός ακτίνας 6400 km, να υπολογίσετε τη χωρητικότητά της.

7. Ποια η απαιτούμενη χωρητικότητα πυκνωτή, ώστε να αποθηκευθεί ενέργεια 1000 joule σε διαφορά δυναμικού 200 V;

8. Διαφορά δυναμικού 220 V εφαρμόζεται σε πυκνωτές χωρητικότητας $C_1 = 1\,F$ και $C_2 = 3\,F$ συνδεδεμένους σε σειρά. Ποιο το φορτίο και ποια η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή; Οι φορτισμένοι πυκνωτές ξανασυνδέονται (θετικός με θετικό και αρνητικός με αρνητικό οπλισμό) χωρίς να εφαρμοστεί εξωτερική τάση. Ποιο το φορτίο και ποια η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή;

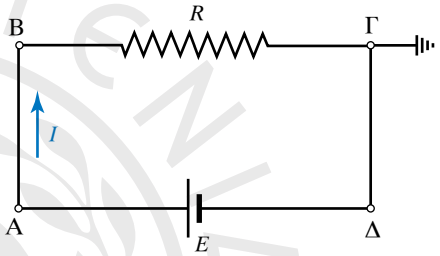
9. Πυκνωτής αέρα με παράλληλους οπλισμούς έχει χωρητικότητα $C = 300\,pF$. Ποια η αποθηκευμένη ενέργεια, αν η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού είναι 20 V;

10. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα του σχήματος 1. Δίνονται $r = 0{,}3\,\Omega$, $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 25\,\Omega$, $E = 220\,V$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία Α, Γ.



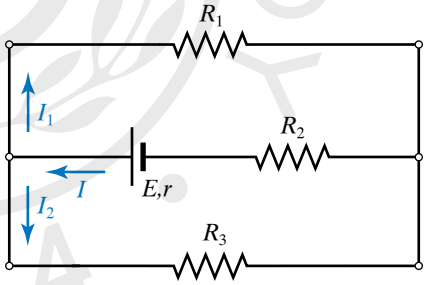
Σχ. 1

11. Να υπολογίσετε το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα του σχήματος 2 και τα δυναμικά των σημείων Α, Β και Δ, αν γνωρίζετε ότι το σημείο Γ είναι γειωμένο ($V_\Gamma = 0\,V$), $E = 12\,V$ και $R = 4\,\Omega$.



Σχ. 2

12. Να υπολογίσετε τα ηλεκτρικά ρεύματα I, I_1, I_2 για το κύκλωμα του σχήματος 3. Δίνονται $r = 0{,}4\,\Omega$, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 1{,}6\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$ και $E = 10\,V$.

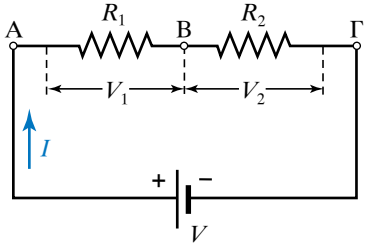


Σχ. 3

13. Στο κύκλωμα του σχήματος 4 οι αντιστάτες έχουν αντιστάσεις $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ και το ρεύμα που το διαρρέει είναι $I = 5\,A$. Να υπολογίσετε:

α) Την ισοδύναμη αντίσταση $R_{O\Lambda}$ του κυκλώματος.

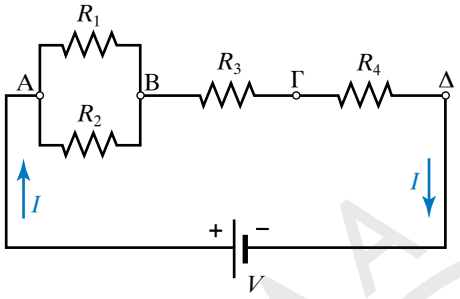
β) Τη διαφορά δυναμικού στα άκρα των αντιστατών.



Σχ. 4

γ) Την τάση V της πηγής.

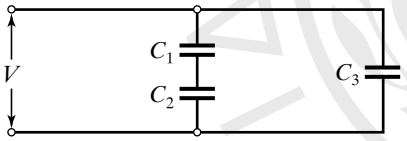
14. Στο κύκλωμα του σχήματος 5 δίνεται ότι $R_1 = 10\,\Omega, R_2 = 16\,\Omega, R_3 = 8\,\Omega, R_4 = 4\,\Omega$ και $I = 10\,\text{A}$. Να υπολογίσετε:
α) Την ισοδύναμη αντίσταση $R_{\text{ΟΛ}}$ του κυκλώματος.
β) Την τάση V της πηγής.
γ) Τη διαφορά δυναμικού στα άκρα των αντιστατών.
δ) Το ρεύμα που διαρρέει τον κάθε αντιστάτη.



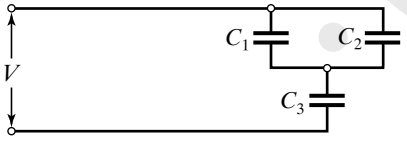
Σχ. 5

15. Να υπολογίσετε την ολική ενέργεια, που είναι αποθηκευμένη στο σύστημα δύο πυκνωτών με χωρητικότητες $C_1 = 1\,\text{F}$ και $C_2 = 2\,\text{F}$, που συνδέονται παράλληλα σε διαφορά δυναμικού 200 V.

16. Να υπολογίσετε την ολική χωρητικότητα των συνδυασμών των σχημάτων 6 και 7 όταν $C_1 = 1\,\text{F}$, $C_2 = 2\,\text{F}$, $C_3 = 3\,\text{F}$.



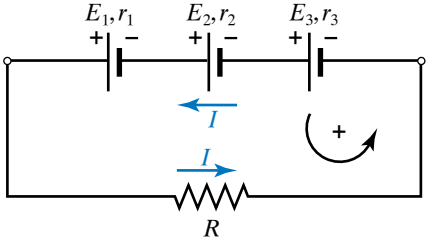
Σχ. 6



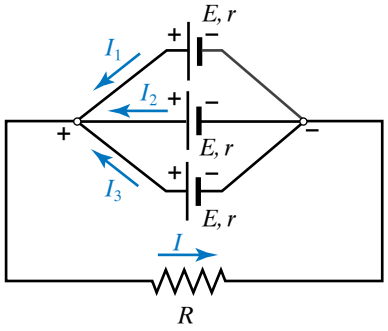
Σχ. 7

17. Να υπολογίσετε το ρεύμα I που διαρρέει την αντίσταση $R = 5\,\Omega$ του κυκλώματος (σχ. 8). Δίνονται $r_1 = 0{,}1\,\Omega, r_2 = 0{,}2\,\Omega, r_3 = 0{,}3\,\Omega, E_1 = 10\,\text{V}$, $E_2 = 20\,\text{V}, E_3 = 30\,\text{V}$.

18. Να υπολογίσετε το ρεύμα I που διαρρέει την αντίσταση $R = 5\,\Omega$ του κυκλώματος (σχ. 9). Οι τρεις πηγές είναι όμοιες. Δίνονται $r = 0{,}1\,\Omega$ και $E = 12\,\text{V}$.

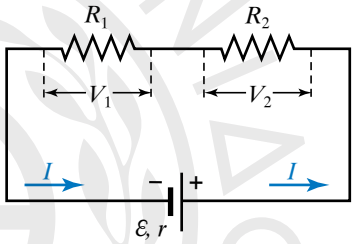


Σχ. 8



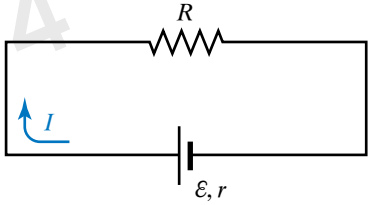
Σχ. 9

19. Στο κύκλωμα (σχ. 10) οι σε σειρά συνδεδεμένες μεταξύ τους αντιστάσεις $R_1 = 1\,\Omega$ και $R_2 = 2\,\Omega$ συνδέονται με πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E} = 24\,\text{V}$ και εσωτερικής αντιστάσεως $r = 0{,}5\,\Omega$. Να υπολογίσετε:
α) Το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα.
β) Την πολική τάση της πηγής.
γ) Την τάση στα άκρα της κάθε αντιστάσεως.



Σχ. 10

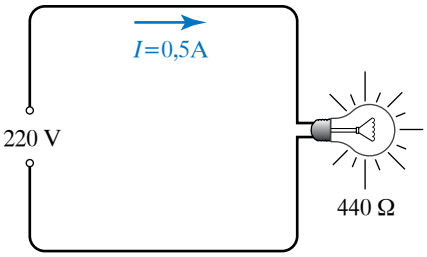
20. Πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E} = 12\,\text{V}$ και εσωτερικής αντιστάσεως $r = 0{,}5\,\Omega$ συνδέεται με αγωγό αντιστάσεως $R = 5{,}5\,\Omega$ (σχ. 11). Να υπολογίσετε:
α) Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.
β) Την πολική τάση της πηγής.
γ) Την ενέργεια που απορροφά η αντίσταση R σε μία ώρα.



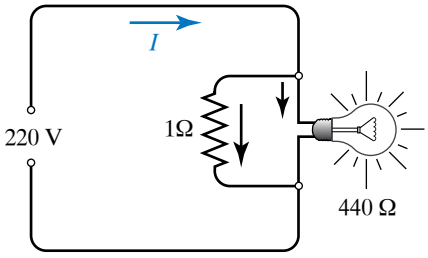
Σχ. 11

21. Δίνεται το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 12. Να υπολογίσετε το ρεύμα που θα διαρρέει την πηγή, όταν συνδέσομε αντίσταση $r = 1\,\Omega$ παράλληλα στο λαμπτήρα (σχ. 13).

22. Προκειμένου να θερμάνομε σ' ένα λεπτό μισό κιλό καθαρό νερό από τους 5 °C στους 85 °C βυθίζομε μέσα στο νερό σύρμα και στις άκρες του εφαρμόζομε τάση 220 V. Να υπολογίσετε πόση πρέπει να είναι η αντίσταση του σύρματος. Δίνεται $c = 4200\,\text{J/kg}\cdot\text{K}$.



Σχ. 12



Σχ. 13

23. Σε πόσο χρόνο t συσκευή αντιστάσεως $R = 400\,\Omega$ που λειτουργεί κανονικά υπό τάση $V = 220\,\text{V}$, απορροφά ενέργεια $W = 2\,\text{kWh}$;

24. Τρεις ηλεκτρικές αντιστάσεις $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ και $R_3 = 3\,\Omega$ συνδέονται στη σειρά και στις άκρες του συστήματος εφαρμόζεται τάση 100 V. Να υπολογίσετε:
α) Πόση ηλεκτρική ισχύς καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση.
β) Πόση θερμότητα εκλύεται από κάθε αντίσταση σε χρόνο 1 min.

25. Λαμπτήρας πυρακτώσεως ισχύος $P = 40\,\text{W}$ λειτουργεί με τάση 220 V. Να υπολογίσετε:
α) Το ρεύμα που τον διαρρέει.
β) Το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται απ' τον λαμπτήρα ανά λεπτό.
γ) Την ηλεκτρική ενέργεια που δαπανάται στον λαμπτήρα, όταν αυτός μείνει αναμμένος για πέντε ώρες.

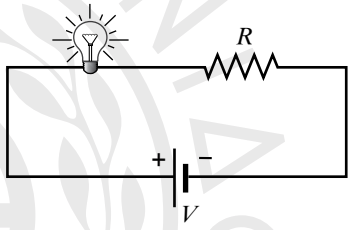
26. Ηλεκτρική συσκευή διαρρέεται από ρεύμα $I = 5\,\text{A}$, όταν στα άκρα της εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού 220 V. Να υπολογίσετε:
α) Την ισχύ της συσκευής.
β) Πόσες kWh καταναλώνει αν λειτουργεί για 24 h.
γ) Το κόστος λειτουργίας, αν η 1 kWh κοστίζει 0,0876 €.

27. Στα άκρα ηλεκτρικού κινητήρα εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού 6 V και το ρεύμα που τον διαρρέει είναι $I = 5\,\text{A}$. Ο κινητήρας σε χρόνο $t = 1\,\text{min}$ αποδίδει μηχανική ενέργεια 1000 joule. Να υπολογίσετε την:
α) Ισχύ που μεταφέρει το ρεύμα στον κινητήρα.
β) Ηλεκτρική ενέργεια που μεταφέρεται στον κινητήρα σε χρόνο $t = 1\,\text{min}$.
γ) Ηλεκτρική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα σε χρόνο $t = 1\,\text{min}$.
δ) Απόδοση του κινητήρα.

28. Ηλεκτρική συσκευή ισχύος $P = 5\,\text{kW}$ λειτουργεί σε δίκτυο τάσεως 220 V. Τι ασφάλεια πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την προστασία της γραμμής;

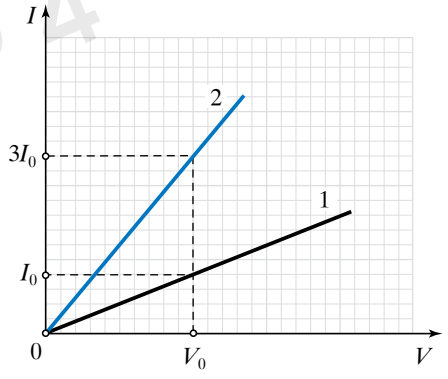
29. Λαμπτήρας έχει τις ενδείξεις: 40 W, 100 V.
α) Να υπολογίσετε την αντίσταση R του λαμπτήρα, καθώς και την ενέργεια που απορροφά, όταν λειτουργεί επί μία ώρα.
β) Να υπολογίσετε την αντίσταση R' του αντιστάτη που πρέπει να συνδέσομε σε σειρά με τον λαμπτήρα, προκειμένου αυτός να φωτοβολεί κανονικά, όταν συνδεθεί υπό τάση $V' = 220\,V$.

30. Στο κύκλωμα του σχήματος 14 η τάση είναι $V = 220\,\text{V}$, ο αντιστάτης έχει αντίσταση $R = 220\,\Omega$ και τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα είναι 110 V και 55 kW. Να εξετάσετε αν φωτοβολεί κανονικά ο λαμπτήρας.



Σχ. 14

31. Στο σχήμα 15 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις $I-V$ για δύο συρμάτινες αντιστάσεις (1) και (2) κατασκευασμένες απ' το ίδιο υλικό, που έχουν ίδια διατομή και βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία. Αν το μήκος του πρώτου σύρματος είναι $\ell_1 = 10\,\text{m}$, να υπολογίσετε το μήκος του δεύτερου σύρματος.



Σχ. 15

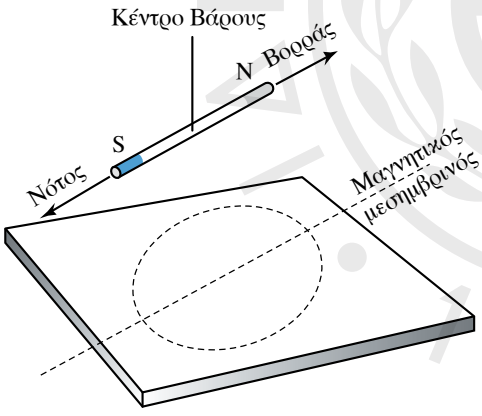
32. Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 5\,\mu\text{F}$ συνδέεται με πηγή τάσεως 220 V. Να υπολογίσετε το φορτίο Q και την ενέργεια U που θα αποκτήσει ο πυκνωτής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή

11.1 Μαγνητισμός.

Είναι γνωστό ότι ορισμένα υλικά που απαντούν στη φύση έλκουν κομματάκια (ρινίσματα) σιδήρου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αυτά τα υλικά παρουσιάζουν το φαινόμενο του μαγνητισμού. Τα υλικά είναι μόνιμοι, φυσικοί μαγνήτες. Από τέτοιο υλικό μπορεί να φτιαχτεί λεπτός μαγνήτης σε μορφή ράβδου, που όταν στερεωθεί από το κέντρο βάρους του, ώστε να μπορεί να στρέφεται περί το σημείο εξαρτήσεώς του, προσανατολίζεται έτσι που το ένα άκρο του να δείχνει προς τον βόρειο γεωγραφικό πόλο της Γης και το άλλο προς τον νότιο (σχ. 11.1.1).

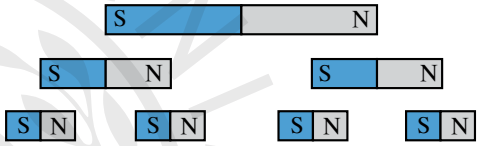


Σχ. 11.1.1
Οι δύο πόλοι του μαγνήτη.

Το άκρο που δείχνει προς το Βορρά λέγεται ***βόρειος μαγνητικός πόλος*** και παριστάνεται διεθνώς με το σύμβολο N (από την αγγλική λέξη north για το «βορράς») και ο άλλος με το S, λέγεται ***νότιος μαγνητικός πόλος*** (από το south «νότος»). Αυτό είναι ένα ***μαγνητικό δίπολο***.

Αν έχομε δύο ραβδόμορφους μαγνήτες με βόρειο και νότιο πόλο, όταν πλησιάσομε τους δύο ομώνυμους πόλους τους, οι μαγνήτες απωθούνται, ενώ αν πλησιάσομε τους ετερώνυμους πόλους, οι μαγνήτες έλκονται. Οι ραβδόμορφοι μαγνήτες μπορεί να έχουν τη μορφή μαγνητικής βελόνας με βόρειο και νότιο πόλο.

Αν κόψομε μία μαγνητική ράβδο στα δύο, κάθε τμήμα γίνεται ένας νέος μαγνήτης, μαγνητικό δίπολο, με το δικό του βόρειο και νότιο πόλο (σχ. 11.1.2).



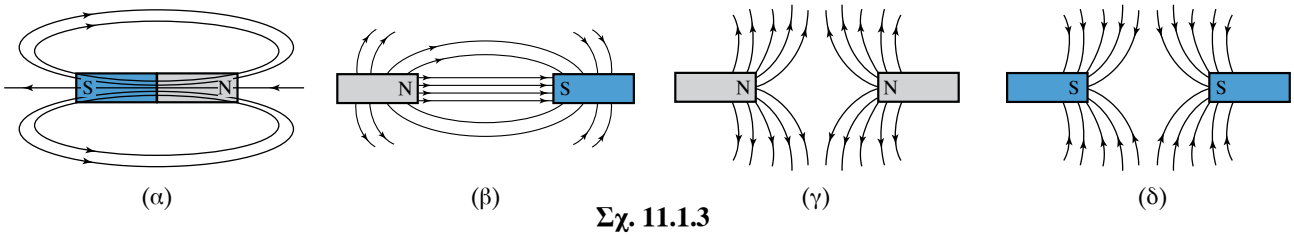
Σχ. 11.1.2
Κόβοντας το μαγνήτη παίρνομε συνεχώς νέους μαγνήτες, μαγνητικά δίπολα.

Πάντα οι μαγνητικοί πόλοι εμφανίζονται κατά ζεύγη, βόρειος – νότιος, δηλαδή ως δίπολα. Μαγνητικά μονόπολα (απομονωμένοι βόρειοι ή νότιοι πόλοι) δεν έχουν παρατηρηθεί μέχρι σήμερα.

11.1.1 Μαγνητικό πεδίο.

Μαγνητικό πεδίο ονομάζεται ο χώρος μέσα στον οποίο ασκούνται μαγνητικές δυνάμεις. Το φυσικό μέγεθος που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του μαγνητικού πεδίου είναι το διανυσματικό μέγεθος $\vec{B}$, που ονομάζεται ***πυκνότητα μαγνητικής ροής*** ή ***μαγνητική επαγωγή*** ή ***μαγνητικό πεδίο B***. Το διάνυσμα $\vec{B}$ σε ένα σημείο του χώρου έχει τη διεύθυνση του άξονα της μαγνητικής βελόνας και φορά από το νότιο προς το βόρειο πόλο της. Στο σύστημα SI το B μετρείται σε tesla (T). Θα δούμε παρακάτω τον ορισμό αυτής της μονάδας. Άλλη μονάδα είναι το gauss (G), 1 T = 10.000 G.

Δυναμική γραμμή είναι η συνεχής γραμμή εκείνη που σε κάθε σημείο της το διάνυσμα του πεδίου $\vec{B}$ είναι εφαπτόμενο σ' αυτήν. Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται ούτε εφάπτονται (παρά μόνο σε ανώμαλα σημεία, όπου το B μηδενίζεται ή απειρίζεται)

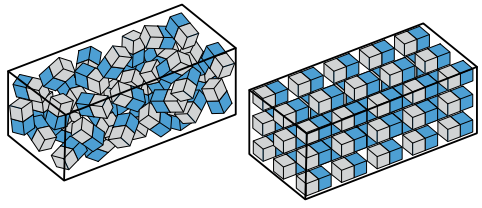


Σχ. 11.1.3
Δυναμικές γραμμές διαφόρων μαγνητικών πεδίων.

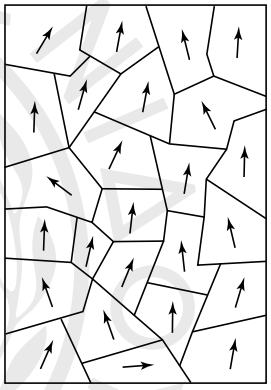
και η πυκνότητά τους λαμβάνεται να είναι ανάλογη της τιμής του πεδίου. Όταν σε ένα μαγνητικό πεδίο το $\vec{B}$ είναι το ίδιο παντού, κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, τότε το πεδίο είναι ομογενές και οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες και ισόπυκνες. Το σχήμα 11.1.3 δείχνει τις δυναμικές γραμμές διαφόρων μαγνητικών πεδίων. Στο εξωτερικό ενός μόνιμου μαγνήτη οι μαγνητικές γραμμές εξέρχονται από το βόρειο και εισέρχονται στον νότιο πόλο.

Σύμφωνα με όσα θα δούμε παρακάτω, μαγνητικά πεδία δημιουργούνται από ηλεκτρικά ρεύματα. Η μαγνήτιση των υλικών οφείλεται σε μικροσκοπικά ρεύματα, που προέρχονται από την περιστροφή των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα. Επίσης οφείλεται στη μαγνήτιση που έχουν τα ηλεκτρόνια, τα οποία έχουν φορτίο και είναι σαν να περιστρέφονται περί άξονά τους, δηλαδή σαν να έχουν κλειστά στοιχειώδη ρεύματα και είναι μικροσκοπικοί μαγνήτες. Αυτή η εικόνα δεν είναι σωστή, αλλά την αναφέρομε για εκπαιδευτικούς σκοπούς, για λόγους κατανοήσεως. Στα υλικά που δεν είναι μαγνητισμένα μπορεί να υπάρχουν στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα, που ο προσανατολισμός τους είναι τέτοιος, ώστε τα στοιχειώδη μαγνητικά πεδία να αλληλοεξουδετερώνονται. Στα μαγνητισμένα υλικά τα στοιχειώδη δίπολα, είναι προσανατολισμένα και τα στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα δεν εξουδετερώνονται (σχ. 11.1.4).

Στα λεγόμενα σιδηρομαγνητικά υλικά, υπάρχουν μικρές μαγνητικές περιοχές, που ονομάζονται περιοχές του Weiss και έχουν διαστάσεις από 10^{-4}mm έως 10^{-2}mm και περιλαμβάνουν περίπου 10^{10} άτομα. Οι περιοχές του Weiss συμπεριφέρονται ως ισχυρότατοι μικροί μαγνήτες, διότι όλα τα άτομά τους έχουν τους μαγνητικούς τους άξονες παράλληλους. Όταν το σιδηρομαγνητικό υλικό δεν είναι μαγνήτης, οι μαγνητικές περιοχές του Weiss έχουν τυχαίο προσανατολισμό (σχ. 11.1.5). Αν ένας μεγάλος αριθμός μαγνητικών περιοχών προσανατολιστεί προς ορισμένη κατεύθυνση, το υλικό θα παρουσιαστεί ως ισχυρός μαγνήτης.



Σχ. 11.1.4
Στοιχειώδεις μαγνήτες σε αμαγνήτιστη και σε μαγνητισμένη ράβδο σιδήρου.



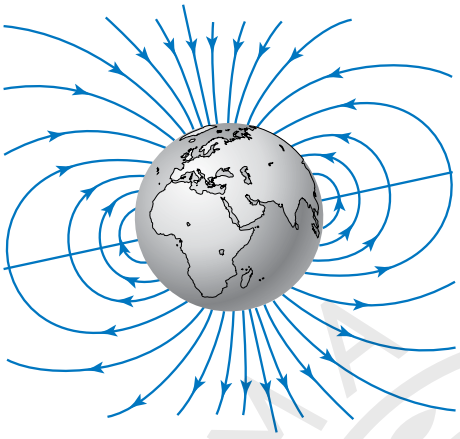
Σχ. 11.1.5
Περιοχές Weiss μαγνητισμένου υλικού.

Στη θεωρία των μαγνητικών περιοχών, υπάρχει η έννοια του μαγνητικού κόρου, δηλαδή του ανωτάτου ορίου στη μαγνήτιση ενός υλικού, που συμβαίνει όταν όλες οι μαγνητικές του περιοχές αποκτήσουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Θερμαίνοντας ένα μαγνητισμένο σιδηρομαγνητικό υλικό πάνω από κάποια θερμοκρασία, αυτό χάνει τις μαγνητικές του ιδιότητες. Η θερμοκρασία αυτή ονομάζεται ***θερμοκρασία Curie***, συμβολίζεται T_C και είναι χαρακτηριστική για κάθε υλικό. Αυτό συμβαίνει διότι με τη θέρμανση του υλικού αυξάνεται η θερμική (άτακτη) κίνηση των ατόμων των μαγνητικών περιοχών και έτσι καταστρέφεται ο συγκεκριμένος προσανατολισμός, όταν η θερμοκρασία ξεπεράσει τη θερμοκρασία Curie. Για τον σίδηρο είναι $T_C = 1043\,\text{K}$. Αν ελαττώσομε τη θερμοκρασία, το υλικό αποκτά εκ νέου τις μαγνητικές του ιδιότητες.

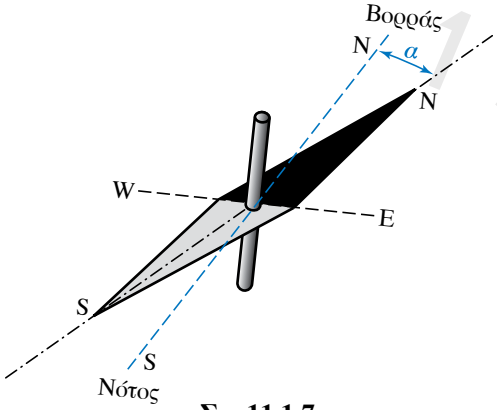
11.1.2 Μαγνητικό πεδίο της Γης.

Στη Γη υπάρχει μαγνητικό πεδίο (σχ. 11.1.6) και για κάθε μικρή περιοχή θεωρείται ομογενές. Το διάνυσμα $\vec{B}$ σε κάθε τόπο στην επιφάνεια της Γης βρίσκεται σ' ένα κατακόρυφο επίπεδο, που είναι ο μαγνητικός μεσημβρινός του τόπου.



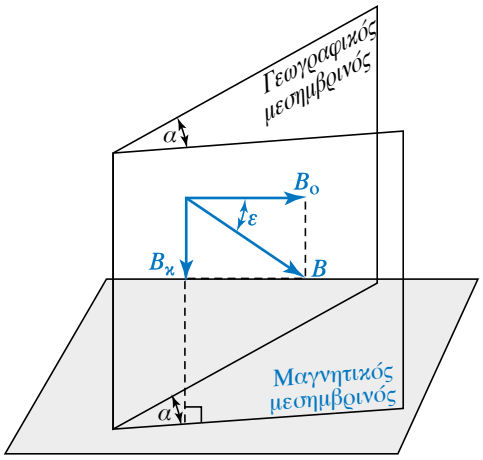
Σχ. 11.1.6
Σχηματική παράσταση του γήινου μαγνητικού πεδίου.

Μαγνητική απόκλιση (α) ονομάζεται η δίεδρη γωνία που σχηματίζουν ο μαγνητικός μεσημβρινός ενός τόπου με τον γεωγραφικό μεσημβρινό του τόπου αυτού (σχ. 11.1.7 και 11.1.8). Η μαγνητική απόκλιση χαρακτηρίζεται ως ανατολική ή δυτική, ανάλογα με το αν ο βόρειος πόλος της μαγνητικής βελόνας βρίσκεται αντίστοιχα ανατολικά ή δυτικά του γεωγραφικού μεσημβρινού.

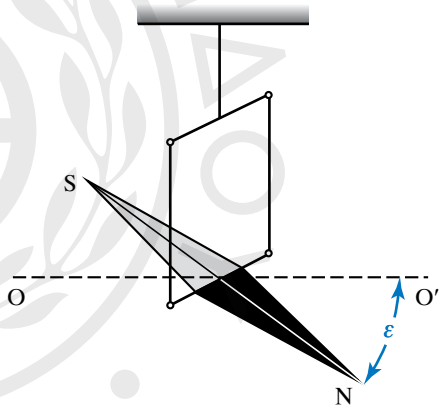


Σχ. 11.1.7
Μαγνητική απόκλιση (α).

Μαγνητική έγκλιση (ε) ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο το $\vec{B}$ του γήινου μαγνητικού πεδίου (σχ. 11.1.9). Στο βόρειο μαγνητικό πόλο η έγκλιση είναι $+90^o$ (το $\vec{B}$ είναι κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω), στον νότιο μαγνητικό πόλο είναι -90^o και στον Ισημερινό είναι περίπου μηδέν.



Σχ. 11.1.8
Μαγνητική απόκλιση (α) και μαγνητική έγκλιση (ε).

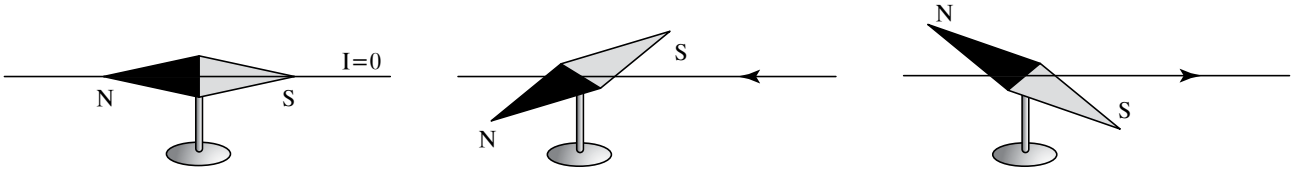


Σχ. 11.1.9
Μαγνητική έγκλιση.

Το διάνυσμα $\vec{B}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους, την οριζόντια B_o και την κατακόρυφη B_K (σχ. 11.1.8). Το μαγνητικό πεδίο της Γης σε κάθε τόπο, κάθε χρονική στιγμή, προσδιορίζεται από τη μαγνητική απόκλιση, τη μαγνητική έγκλιση και την οριζόντια συνιστώσα B_o. Ισχύει ότι $B_o = B\cos\varepsilon$. Τα μαγνητόμετρα είναι όργανα με τα οποία μετριέται το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

11.2 Μαγνητικό πεδίο του ρεύματος.

Το 1820 ο Δανός φυσικός Hans Christian Oersted, αναζητώντας σύνδεση ανάμεσα στον ηλεκτρισμό και στον μαγνητισμό, τοποθέτησε ένα σύρμα που διαρ-



Ο αγωγός δεν διαρρέεται από ρεύμα. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα. Η φορά του ρεύματος αντιστράφηκε.

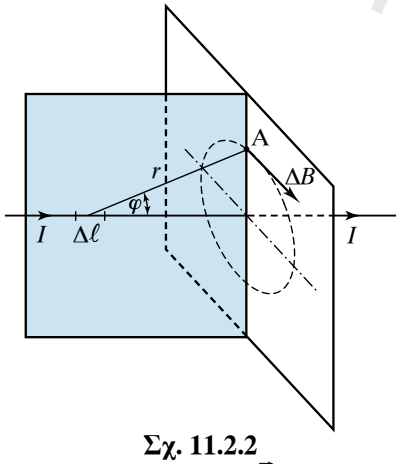
Σχ. 11.2.1
Το πείραμα του Oersted.

ρέονταν από ρεύμα παράλληλα σε μία μαγνητική βελόνα. Η βελόνα αντέδρασε και έστριψε ισορροπώντας κάθετα προς το σύρμα, αποκαλύπτοντας έτσι ότι το ηλεκτρικό ρεύμα είχε δημιουργήσει γύρω από το σύρμα μαγνητικό πεδίο (σχ. 11.2.1). Όταν διέκοπτε το ρεύμα, η βελόνα επέστρεφε στην αρχική της θέση. Όταν διαβίβαζε ρεύμα αντίθετης φοράς, η βελόνα εκτρεπόταν αντίθετα προς την αρχική εκτροπή.

11.2.1 Νόμος των Biot-Savart.

Ο Νόμος των Biot–Savart μάς επιτρέπει να προσδιορίσομε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ενός ρευματοφόρου αγωγού σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Ευθύγραμμος αγωγός μεγάλου μήκους διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I και δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο. Στοιχειώδες τμήμα του αγωγού μήκους $\Delta\ell$ δημιουργεί στο σημείο Α που απέχει απ' αυτό απόσταση r, στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $\Delta\vec{B}$ που υπολογίζεται από τον Νόμο των Biot–Savart (σχ. 11.2.2).

Συγκεκριμένα, το $\Delta\vec{B}$ που δημιουργεί στοιχειώδες τμήμα $\Delta\ell$ ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού σ' ένα σημείο Α του χώρου, έχει τα εξής χαρακτηριστικά:



Σχ. 11.2.2
Στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $\Delta\vec{B}$, όπως υπολογίζεται από τον Νόμο των Biot-Savart.

1) Σημείο εφαρμογής, το σημείο Α.

2) Διεύθυνση, τη διεύθυνση της ευθείας που είναι κάθετη στο επίπεδο που διέρχεται απ' το σημείο Α και από το στοιχειώδες τμήμα $\Delta\ell$ του αγωγού.

3) Φορά, τη φορά προς την οποία πρέπει να περιστραφεί δεξιόστροφος κοχλίας, ώστε να προχωρεί κατά τη φορά του ρεύματος (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία).

4) Μέτρο, που δίνεται απ' τη σχέση:

$$\Delta B = K_{\text{M}} \frac{I\,\Delta\ell}{r^2} \sin\varphi,$$

όπου K_{M} μια σταθερά και r η απόσταση του σημείου Α από το στοιχειώδες τμήμα $\Delta\ell$ του αγωγού και φ η γωνία που σχηματίζει το στοιχειώδες τμήμα $\Delta\ell$ με τη διεύθυνση του r.

Κάθε στοιχειώδες τμήμα του αγωγού δημιουργεί στο σημείο Α του πεδίου ένα στοιχειώδες πεδίο $\Delta\vec{B}$. Από την αρχή της επαλληλίας, το διανυσματικό άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών μαγνητικών πεδίων είναι το ολικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο σημείο Α και οφείλεται σε ολόκληρο τον αγωγό, δηλαδή $\vec{B} = \Delta\vec{B}_1 + \Delta\vec{B}_2 + \Delta\vec{B}_3 + \ldots$. Η σταθερά K_{M} εξαρτάται από το σύστημα μονάδων και απ' το μέσο που περιβάλλει τον αγωγό. Για το SI και για το κενό ή τον αέρα είναι:

$$K_{\text{M}} = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Το μέγεθος μ_0 ονομάζεται ***μαγνητική διαπερατότητα*** του κενού και έχει τιμή:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}.$$

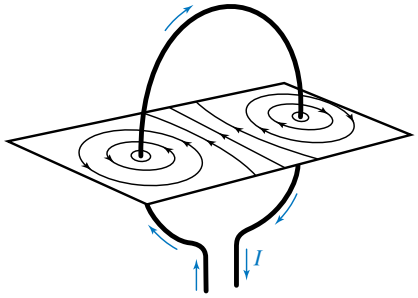
Άρα: $$K_{\text{M}} = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}.$$

Επομένως, ο Νόμος των Biot–Savart στο SI μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\Delta\ell}{r^2} \sin\varphi.$$

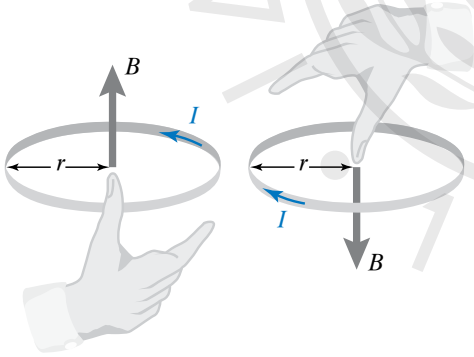
11.2.2 Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού.

Κυκλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα *I*. Σε μία τομή στο σχήμα 11.2.3 φαίνονται οι μαγνητικές γραμμές του (μαγνητικού) πεδίου, που δημιουργεί ο αγωγός.



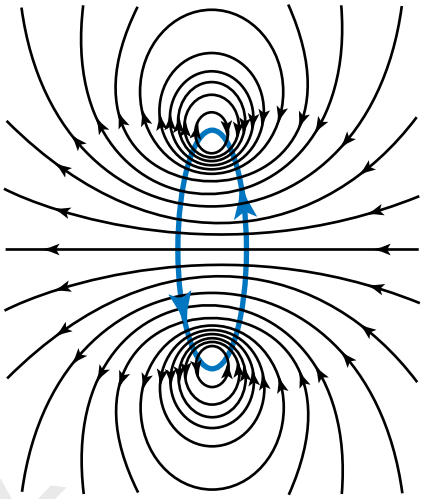
Σχ. 11.2.3
Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού.

Η φορά των δυναμικών γραμμών προσδιορίζεται απ' τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Τοποθετούμε τα δάκτυλα του δεξιού χεριού, έτσι ώστε να «αγκαλιάζουν» τον κυκλικό αγωγό δείχνοντας τη φορά του ρεύματος *I* που διαρρέει τον αγωγό. Τότε ο αντίχειρας, τεντωμένος, δείχνει τη φορά του πεδίου $\vec{B}$ (σχ. 11.2.4).



Σχ. 11.2.4
Προσδιορισμός της φοράς του $\vec{B}$ με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (ή του δεξιού χεριού).

Το μαγνητικό φάσμα του κυκλικού ρεύματος είναι ανάλογο με το μαγνητικό φάσμα μικρού ευθύγραμμου μαγνήτη (σχ. 11.2.5). Οι δυναμικές γραμμές βγαίνουν από τη μία όψη του επιπέδου του κύκλου (βόρειος μαγνητικός πόλος) και μπαίνουν απ' την άλλη όψη του επιπέδου (νότιος μαγνητικός πόλος). Άρα, το κυκλικό ηλεκτρικό ρεύμα αποτελεί ένα μαγνητικό δίπολο και είναι σαν να έχει δύο ετερώνυμους μαγνητικούς πόλους. Αποδεικνύεται ότι το $\vec{B}$ στο κέντρο του κύκλου είναι κάθετο στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού, ανάλογο με το ρεύμα I και αντιστρόφως ανάλογο με την ακτίνα r του κύκλου. Δηλαδή:



Σχ. 11.2.5
Το κυκλικό ρεύμα είναι μαγνητικό δίπολο.

$$B = K_{\text{M}} \frac{2\pi I}{r}.$$

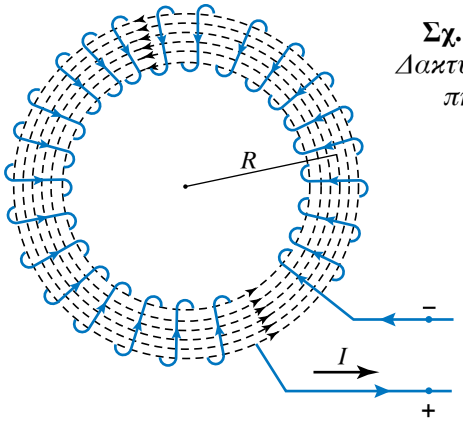
Αν *N* σπείρες, που έχουν την ίδια ακτίνα *r* σχηματίζουν επίπεδο κυκλικό πλαίσιο που διαρρέεται από ρεύμα *I*, τότε η πυκνότητα μαγνητικής ροής στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου είναι:

$$B = K_{\text{N}} \frac{2\pi I}{r} \text{ N}.$$

11.2.3 Μαγνητικό πεδίο δακτυλιοειδούς πηνίου.

Γενικώς, ***πηνίο*** ονομάζεται ένα σύνολο (συνήθως) κυκλικών σπειρών της ίδιας επιφάνειας, σε στενή περιέλιξη.

Στο σχήμα 11.2.6 εικονίζεται ένα δακτυλιοειδές (ή κυκλικό) πηνίο. Αν η διάμετρος της κάθε κυκλι-



Σχ. 11.2.6
Δακτυλιοειδές πηνίο.

κής σπείρας είναι πολύ μικρότερη απ' το κυκλικό μήκος του πηνίου, τότε είναι εύκολος ο υπολογισμός του συνολικού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ στο εσωτερικό του (στο εξωτερικό αποδεικνύεται ότι είναι μηδέν). Το $\vec{B}$ ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών πεδίων των κυκλικών σπειρών. Το μέτρο του δίνεται από τον τύπο:

$$B = K_{\text{M}} \frac{2\pi I}{R} N,$$

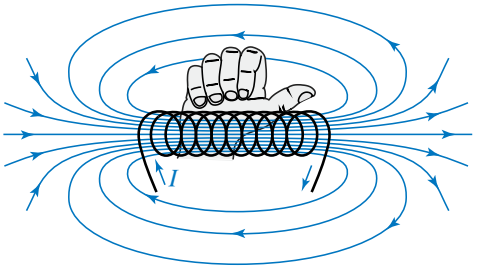
όπου N ο αριθμός των σπειρών.

Ως ακτίνα R παίρνομε τη μέση τιμή της εσωτερικής (ελάχιστης) και εξωτερικής (μέγιστης) ακτίνας του δακτυλίου. Δηλαδή:

$$R = \frac{R_{\text{ΕΣΩΤ}} + R_{\text{ΕΞΩΤ}}}{2}.$$

11.2.4 Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου σωληνοειδούς.

Η ευθεία που ορίζεται από τα κέντρα των σπειρών είναι ο άξονας του σωληνοειδούς. Αν το μήκος του σωληνοειδούς είναι πολύ μεγαλύτερο από τη διάμετρό του, τότε το πεδίο στο εσωτερικό (μακριά από τα άκρα) είναι ομογενές και οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλες και ισόπυκνες. Στο εξωτερικό το πεδίο είναι σχεδόν μηδέν. Για να συμβαίνουν αυτά πρέπει οι σπείρες να είναι πυκνές και όχι όπως είναι στο σχήμα 11.2.7, το οποίο απεικονίζει ένα ευθύγραμμο σωληνοειδές. Το $\vec{B}$ έχει διεύθυνση παράλληλη στον άξονα του σωληνοειδούς και φορά που καθορίζεται απ' τον κανόνα του δεξιού χεριού. Σύμφωνα μ' αυτόν, τοποθετούμε τα δάκτυλα του δεξιού μας χεριού, έτσι ώστε να αγκαλιάσουν τις σπείρες του σωληνοειδούς και να δείχνουν τη φορά του ρεύματος I που τις διαρρέει. Τότε ο δείκτης, τεντωμένος, δείχνει τη φορά του $\vec{B}$.



Σχ. 11.2.7
Ευθύγραμμο σωληνοειδές.

Το μέτρο B του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$B = K_{\text{M}}\, 4\pi \frac{N}{\ell} I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I,$$

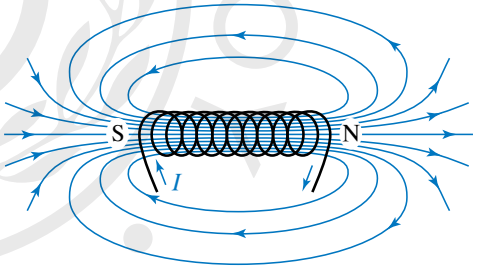
όπου N το πλήθος των σπειρών, ℓ το μήκος του σωληνοειδούς και I το ρεύμα που το διαρρέει.

Το πηλίκο $N/\ell = n$ εκφράζει τον αριθμό των σπειρών ανά μονάδα μήκους του σωληνοειδούς, οπότε οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής: $B = K_{\text{M}}\, 4\pi n I = \mu_0 n I$.

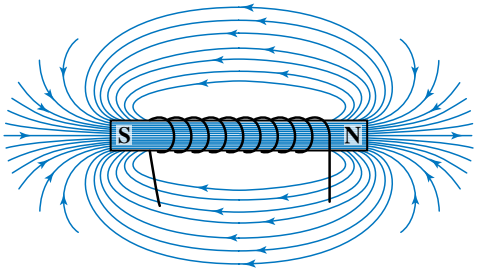
11.2.5 Μαγνητικό πεδίο ηλεκτρομαγνήτη.

Στο εσωτερικό σωληνοειδούς που διαρρέεται από ρεύμα δημιουργείται ομογενές μαγνητικό πεδίο (σχ. 11.2.8). Αν τοποθετήσομε στο εσωτερικό του σωληνοειδούς ράβδο από μαλακό σίδηρο, η ράβδος γίνεται μαγνήτης που κάθε πόλος του συμπίπτει με τον ομώνυμο πόλο του σωληνοειδούς (σχ. 11.2.9). Το σύστημα που αποτελούν το σωληνοειδές και η ράβδος, ονομάζεται ***ηλεκτρομαγνήτης*** και ουσιαστικά πρόκειται για τεχνητό μαγνήτη που παρουσιάζει παροδική μαγνήτιση.

Η μαγνήτιση του μαλακού σιδήρου είναι προσω-



Σχ. 11.2.8
Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς χωρίς ράβδο μαλακού σιδήρου στο εσωτερικό του.



Σχ. 11.2.9
Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς με ράβδο από μαλακό σίδηρο.

ρινή και διαρκεί όσο χρόνο το σωληνοειδές διαρρέεται από ρεύμα. Αν μέσα στο σωληνοειδές τοποθετήσομε ράβδο από χάλυβα, η ράβδος μεταβάλλεται σε μόνιμο μαγνήτη.

Όταν στο εσωτερικό του σωληνοειδούς υπάρχει αέρας, η τιμή του μαγνητικού πεδίου είναι B_0. Αν τοποθετήσομε στο εσωτερικό του σωληνοειδούς ράβδο από κάποιο υλικό, τότε το μαγνητικό πεδίο B μεταβάλλεται. Αν το υλικό είναι μαλακός σίδηρος, τότε η τιμή του νέου μαγνητικού πεδίου B είναι κατά πολύ μεγαλύτερη, έχομε $B>>B_0$. Η αύξηση αυτή σχετίζεται με τη λεγόμενη σχετική διαπερατότητα του μαλακού σιδήρου.

Ονομάζομε ***σχετική*** (μαγνητική) ***διαπερατότητα*** ενός υλικού το πηλίκο:

$$\mu_r = B/B_0.$$

Ανάλογα με την τιμή του μ_r, τα υλικά διακρίνονται σε σιδηρομαγνητικά, παραμαγνητικά και διαμαγνητικά (πίν. 11.2).

Πίνακας 11.2
Σχετικές διαπερατότητες.

Σιδηρο-μαγνητικά	***Παραμαγνητικά***	***Διαμαγνητικά***
Fe, Ni, Co $\mu_r >> 1$	Al, Cr, αέρας... $\mu_r > 1$	C, Cu, Bi, Hg, νερό κ.λπ.. $\mu_r < 1$

Η σχετική μαγνητική διαπερατότητα δείχνει πόσες φορές πολλαπλασιάστηκε η τιμή του μαγνητικού πεδίου λόγω της παρουσίας του υλικού και είναι καθαρός αριθμός. Η τοποθέτηση σιδηρομαγνητικών υλικών στο εσωτερικό μαγνητικού πεδίου συνεπάγεται τη μεγάλη αύξηση της τιμής του. Η τοποθέτηση παραμαγνητικών υλικών στο εσωτερικό μαγνητικού πεδίου συνεπάγεται τη σχετικά μικρή αύξηση της τιμής του. Η τοποθέτηση διαμαγνητικών υλικών στο εσωτερικό μαγνητικού πεδίου συνεπάγεται τη μείωση της τιμής του.

11.3 Νόμος Laplace. Επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω σε κινούμενο φορτίο.

11.3.1 Δύναμη Laplace.

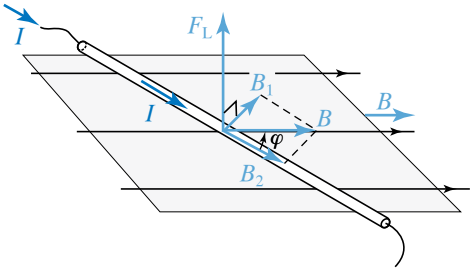
Όταν ένας ρευματοφόρος αγωγός βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο, δέχεται δύναμη.

Ας υποθέσομε ότι έχομε ευθύγραμμο αγωγό μήκους l, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I. Η γωνία μεταξύ της φοράς του ρεύματος και του πεδίου είναι φ (σχ. 11.3.1). Πάνω στον αγωγό ασκείται από το μαγνητικό πεδίο δύναμη, που ονομάζεται, στη γαλλική βιβλιογραφία (κυρίως), ***δύναμη Laplace*** η οποία έχει τα εξής χαρακτηριστικά, σημείο εφαρμογής το μέσον του τμήματος του αγωγού, που βρίσκεται εντός του μαγνητικού πεδίου, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται απ' τον αγωγό και τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών, φορά που καθορίζεται από τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, φέρνομε τα τρία δάκτυλα του δεξιού χεριού (αντίχειρας, δείκτης, μέσος) έτσι ώστε, ανά δύο, να είναι κάθετα μεταξύ τους και τα τοποθετούμε, ώστε ο αντίχειρας να δείχνει τη φορά του ρεύματος I που διαρρέει τον αγωγό και ο δείκτης τη φορά του πεδίου $\vec{B}$. Τότε ο μέσος δείχνει τη φορά της δυνάμεως Laplace $\vec{F}_L$.

Επί πλέον της μεθόδου των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, υπάρχει η μέθοδος της δεξιάς παλάμης για τον προσδιορισμό της φοράς της δυνάμεως Laplace. Σύμφωνα μ' αυτήν, τοποθετούμε ενωμένα και τεντωμένα τα τέσσερα δάκτυλα της παλάμης του δεξιού χεριού, ώστε να δείχνουν τη φορά του $\vec{B}$ και ο αντίχειρας να δείχνει τεντωμένος τη φορά του ρεύματος I, που διαρρέει τον αγωγό. Τότε η φορά της δυνάμεως Laplace είναι απ' το εξωτερικό προς το εσωτερικό μέρος της παλάμης.

Το μέτρο F_L της δυνάμεως Laplace δίνεται από τη σχέση, $F_L = B\,I\,\ell\sin\varphi$.

Αν ο αγωγός σχηματίζει γωνία φ με το $\vec{B}$, μπορούμε να αναλύσομε το πεδίο $\vec{B}$ σε δύο συνιστώσες, στη B_1 που είναι κάθετη στον αγωγό και στη B_2 που είναι παράλληλη στον αγωγό (σχ. 11.3.1). Έτσι ο αγωγός είναι σαν να βρίσκεται μέσα σε δύο μαγνητικά πεδία. Εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου B_2, ο αγωγός δεν δέχεται καμμία δύναμη, διότι είναι παράλληλος στο $\vec{B}_2$. Εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου B_1, ο

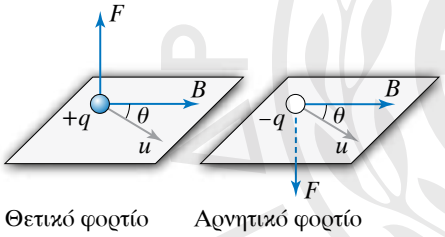


Σχ. 11.3.1
Δύναμη Laplace σε ρευματοφόρο αγωγό.

αγωγός δέχεται δύναμη Laplace μέτρου $F_L = B_1 I \ell$. Επειδή $B_1 = B \sin\varphi$, είναι $F_L = B_1 I \ell \sin\varphi$.

Αν ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος, τον χωρίζομε σε στοιχειώδη τμήματα μήκους $\Delta\ell$, που το καθένα μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμο, και υπολογίζομε τη δύναμη, που ασκείται στο κάθε τμήμα ξεχωριστά. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών είναι η δύναμη που δέχεται ο αγωγός.

Το πεδίο ασκεί σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο μαγνητική δύναμη μέτρου $F = q\,u\,B\sin\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του σωματιδίου με την κατεύθυνση του πεδίου (σχ. 11.3.2). Η δύναμη είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από την ταχύτητα και την κατεύθυνση του πεδίου. Η φορά της δυνάμεως προσδιορίζεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού. Ο αντίχειρας, ο δείκτης και ο μέσος σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα. Τοποθετούμε τον αντίχειρα στην κατεύθυνση της κινήσεως του θετικού φορτίου και στην αντίθετη, αν πρόκειται για αρνητικό φορτίο. Ο δείκτης τοποθετείται στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Τότε ο μέσος δείχνει την κατεύθυνση της δυνάμεως.

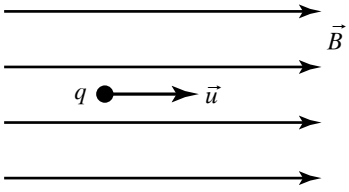


Σχ. 11.3.2
Μαγνητική δύναμη που ασκείται σε ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο κινείται σε μαγνητικό πεδίο.

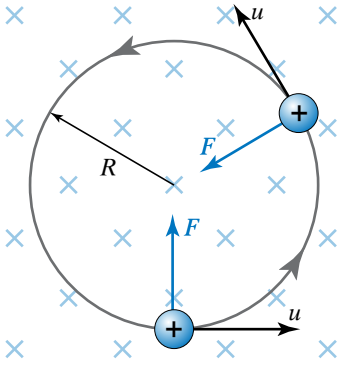
11.3.2 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

1) Πρώτη περίπτωση.

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι παράλληλη προς τις δυναμικές γραμμές. Η δύναμη που δέχεται είναι $F = q\,u\,B\sin\varphi = q\,u\,B\,0 = 0$ (σχ. 11.3.3). Συνεπώς, το φορτίο δεν δέχεται δύναμη, με αποτέλεσμα να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα u.



Σχ. 11.3.3
Το φορτισμένο σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.



Σχ. 11.3.4
Φορτισμένο σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

2) Δεύτερη περίπτωση.

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές (σχ. 11.3.4). Η δύναμη που δέχεται είναι:

$$F = q\,u\,B\sin\varphi = q\,u\,B\,1 = q\,u\,B.$$

Η F έχει διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα. Συνεπώς, είναι η κεντρομόλος δύναμη στην κίνηση του ηλεκτρονίου, άρα:

$$|q|\,u\,B = \frac{m\,u^2}{r},\ \text{οπότε}\ r = \frac{m\,u}{|q|\,B}.$$

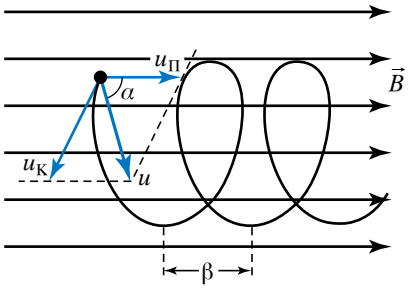
Η περίοδος της περιφοράς του σωματιδίου προκύπτει απ' τη σχέση $u = \dfrac{2\pi r}{T}$, όπου αντικαθιστώντας την ακτίνα βρίσκομε:

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η περίοδος περιφοράς δεν εξαρτάται από την ταχύτητα, ούτε από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, αλλά μόνο από το πηλίκο της μάζας προς την απόλυτη τιμή του φορτίου του σωματιδίου.

3) Τρίτη περίπτωση.

Η ταχύτητα του φορτισμένου σωματιδίου είναι πλάγια προς τις δυναμικές γραμμές (σχ. 11.3.5). Αναλύομε την ταχύτητα σε δύο συνιστώσες $u_\Pi = u\cos\alpha$, παράλληλη, και $u_K = u\sin\alpha$, κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Η μαγνητική δύναμη οφείλεται μόνο στη συνιστώσα u_K. Λόγω της u_K το φορτισμένο σωματίδιο δέχεται δύναμη που έχει μέτρο $F = q\,u_K\,B$ και διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα u_K και στο πεδίο $\vec{B}$. Αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο κατά τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $u_\Pi = u\cos\alpha$.



Σχ. 11.3.5
Το φορτισμένο σωματίδιο εκτελεί ελικοειδή κίνηση.

Συγχρόνως το φορτισμένο σωματίδιο θα εκτελεί κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα u_K και ακτίνα τροχιάς:

$$r = \frac{m\,u_K}{|q|\,B}$$

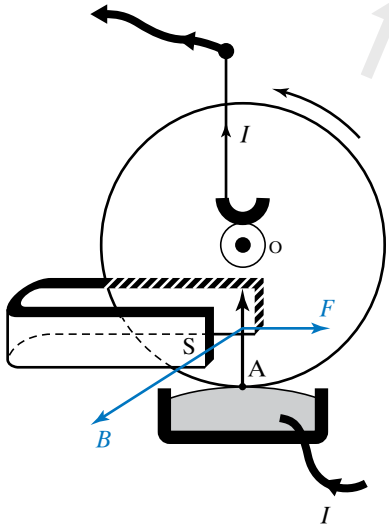
κατά τη διεύθυνση που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου που προκύπτει απ' τη σύνθεση των δύο επιμέρους κινήσεων, είναι ελικοειδής (σχ. 11.3.5).

Το βήμα της έλικας β ισούται με τη σταθερή απόσταση που διανύει σε χρόνο μίας περιόδου το σωματίδιο στη διεύθυνση του πεδίου και δίνεται από τη σχέση:

$$\beta = u_\Pi\,T = u_\Pi\,\frac{2\,\pi\,m}{B\,|q|}.$$

11.3.3 Στοιχειώδης ηλεκτροκινητήρας.

Χάλκινος κατακόρυφος δίσκος στρεπτός περί οριζόντιο άξονα, έχει πάντοτε ένα μικρό τμήμα της περιφέρειάς του σε επαφή με επιφάνεια υδραργύρου, που βρίσκεται στο κάτω μέρος του (σχ. 11.3.6). Ο άξονας του δίσκου και ο υδράργυρος συνδέονται με τους πόλους γεννήτριας. Συνεπώς, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας ΟΑ διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα. Ο δίσκος βρίσκεται στο εσωτερικό ομογενούς μαγνητικού πεδίου, του οποίου το $\vec{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο του δίσκου. Ο δίσκος περιστρέφεται. Αυτό συμβαίνει διότι το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει την ακτίνα ΟΑ, είναι σαν να διαρρέει έναν ευθύγραμμο αγωγό.



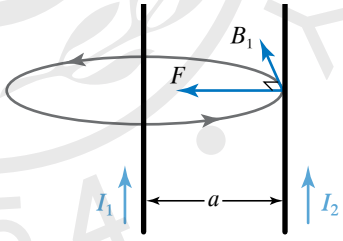
Σχ. 11.3.6
Αρχή του ηλεκτροκινητήρα.

Άρα πάνω στην ακτίνα και κάθετα σε αυτήν, ενεργεί μία μαγνητική δύναμη F, η οποία βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του δίσκου και γι' αυτό προκαλεί την περιστροφή του.

Αν η φορά του ρεύματος αντιστραφεί ή αντιστραφεί η φορά του μαγνητικού πεδίου, τότε αντιστρέφεται και η φορά περιστροφής του δίσκου. Με βάση τα παραπάνω λειτουργούν οι ηλεκτροκινητήρες.

11.3.4 Παράλληλα ρεύματα.

Όταν ένας ρευματοφόρος αγωγός βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου, δέχεται από αυτό δύναμη. Αγωγός που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο. Από συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει ότι αν δύο ρευματοφόροι αγωγοί τοποθετηθούν ο ένας κοντά στον άλλον, το μαγνητικό πεδίο του ενός θα ασκεί δύναμη στον άλλον. Οι παράλληλοι αγωγοί πολύ μεγάλου μήκους του σχήματος 11.3.7 που απέχουν απόσταση a, διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα I_1 και I_2.



Σχ. 11.3.7
Οι αγωγοί έλκονται όταν διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα.

Ο αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα I_1 δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο B_1. Σε απόσταση a, όπου βρίσκεται ο άλλος αγωγός, το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$B_1 = K_M\,\frac{2\,I_1}{a}.$$

Το διάνυσμα $\vec{B}_1$ είναι κάθετο στον δεύτερο αγωγό. Ο δεύτερος αγωγός, σύμφωνα με τον Νόμο Laplace, σε τμήμα του μήκους ℓ δέχεται δύναμη $F_2 = B_1\,I_2\,\ell$, που μπορεί να γραφεί και ως:

$$F_2 = K_M\,\frac{2\,I_1}{a}\,I_2\,\ell = 2\,K_M\,\frac{I_1\,I_2}{a}\,\ell.$$

Επειδή $K_M = \mu_0/4\pi$, ο προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I_1 I_2}{a}\,\ell.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εκφρασθεί και ως δύναμη ανά μονάδα μήκους

$$\frac{F_2}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I_1 I_2}{a}.$$

Από τον κανόνα των τριών δακτύλων προκύπτει ότι η φορά της δυνάμεως F_2 είναι προς τον πρώτο αγωγό. Ομοίως προκύπτει ότι και ο πρώτος αγωγός δέχεται σε τμήμα του μήκους ℓ από τον δεύτερο δύναμη F_1 αντίθετη της F_2. Από τα παραπάνω καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι οι παράλληλοι αγωγοί, όταν διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα, έλκονται. Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι, όταν διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, απωθούνται με δυνάμεις μέτρου:

$$F = 2\,K_M\,\frac{I_1 I_2}{a}\,\ell.$$

11.3.5 Ορισμός της θεμελιώδους μονάδας ampere:

Στο SI η μονάδα μετρήσεως του ηλεκτρικού ρεύματος είναι το 1 ampere (A), που αποτελεί θεμελιώδη μονάδα. Ορίζεται από την προηγούμενη εξίσωση αν θέσομε $I = 1\,\text{A}$ και $a = \ell = 1\,\text{m}$, οπότε βρίσκομε ότι $F = 2\cdot 10^{-7}\,\text{N}$. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός: ***1 A είναι το ρεύμα που όταν διαρρέει δύο λεπτούς παράλληλους ευθύγραμμους και με άπειρο μήκος αγωγούς, οι οποίοι βρίσκονται στο κενό και απέχουν μεταξύ τους 1m, αναπτύσσει μεταξύ αυτών των αγωγών ηλεκτρομαγνητική δύναμη ίση με $2\cdot 10^{-7}$ N ανά μέτρο μήκους.***

11.4 Μονάδα μετρήσεως του πεδίου *B*.

Προκειμένου να ορισθεί η ένταση βαρυτικού πεδίου δυνάμεων, χρησιμοποιήθηκε ως κατάλληλο υπόθεμα η μάζα. Για τον ορισμό της εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιήθηκε ως κατάλληλο υπόθεμα το ηλεκτρικό φορτίο. Στον μαγνητισμό, προκειμένου να ορισθεί το αντίστοιχο μέγεθος που είναι το $\vec{B}$ και λέγεται ***πυκνότητα μαγνητικής ροής*** ή ***μαγνητική επαγωγή*** ή (μαγνητικό) ***πεδίο*** *B*, χρησιμοποιηθήκε ως κατάλληλο υπόθεμα η ποσότητα μαγνητισμού. Σήμερα αυτό έχει αλλάξει και ως κατάλληλο υπόθεμα θεωρείται το κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο.

Ο ορισμός του μέτρου του μαγνητικού πεδίου *B* προκύπτει από τον τύπο του νόμου του Laplace. Από τη σχέση $F_L = B\,I\,\ell\sin\varphi$, προκύπτει ότι αν ο αγωγός είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή αν $\varphi = 90^o$, τότε ισχύει ότι $F_L = B\,I\,\ell$. Με τη βοήθεια της σχέσεως αυτής δίνομε τον ακόλουθο ορισμό για το μαγνητικό πεδίο *B*:

Πεδίο** B* ή ***μαγνητική επαγωγή ή ***πυκνότητα μαγνητικής ροής***, ονομάζεται το διανυσματικό φυσικό μέγεθος που έχει:

1) Μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου F_L της δυνάμεως Laplace, που δέχεται ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός, κάθετος στις δυναμικές γραμμές του (ομογενούς) μαγνητικού πεδίου, προς το γινόμενο $I\,\ell$, όπου *I* το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό και ℓ το μήκος του αγωγού που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Δηλαδή είναι:

$$B = F_L/I\,\ell.$$

2) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο, που ορίζεται από τη διεύθυνση της δυνάμεως Laplace και τον αγωγό.

3) Φορά που καθορίζεται από τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού. Σύμφωνα μ' αυτόν, τεντώνομε τον αντίχειρα, το δείκτη και το μέσο του δεξιού μας χεριού με τέτοιον τρόπο, ώστε να σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα. Αν ο αντίχειρας αντιστοιχεί στη φορά του ρεύματος και ο μέσος στη φορά της δυνάμεως Laplace, τότε ο δείκτης δείχνει τη φορά της του $\vec{B}$.

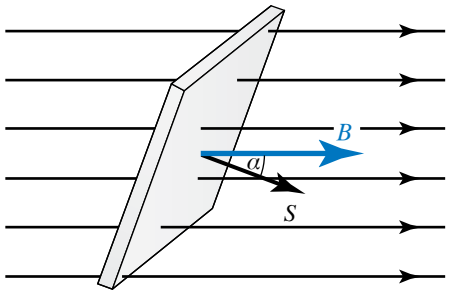
Από τη σχέση $B = F_L/I\,\ell$ ορίζεται η μονάδα μετρήσεως του *B* στο SI, που είναι το 1 tesla (1 T) ως εξής:

Ένα tesla (1 T) είναι η τιμή ομογενούς μαγνητικού πεδίου B που ασκεί δύναμη Laplace 1 N σε τμήμα αγωγού μήκους 1m όταν αυτό διαρρέεται από ρεύμα 1A και βρίσκεται μέσα στο πεδίο τέμνοντας κάθετα τις μαγνητικές γραμμές του. Δηλαδή είναι:

$$1\,\text{T} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}}.$$

11.5 Μαγνητική ροή.

Η μαγνητική ροή είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος και συμβολίζεται με το γράμμα Φ. Σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με τιμή *B,* τοποθετούμε επίπεδη προσανατολισμένη επιφάνεια εμβαδού *S*. Το διάνυσμα $\vec{S}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν της. Ορίζεται ως μαγνητική ροή, που διέρχεται από την επιφάνεια το μέγεθος $\Phi = \text{B S}\,\cos\alpha$ (σχ. 11.5).



Σχ. 11.5
Μαγνητική ροή που διέρχεται από επιφάνεια $\vec{s}$.

Αν η διεύθυνση του διανύσματος $\vec{S}$ είναι ίδια με του $\vec{B}$, η επιφάνεια είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Στην περίπτωση αυτή η μαγνητική ροή γίνεται μέγιστη κατά μέτρο αφού $\Phi = \pm B\,S$.

Αν η διεύθυνση του διανύσματος $\vec{S}$ είναι κάθετη στο $\vec{B}$, η επιφάνεια είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές. Στην περίπτωση αυτή η μαγνητική ροή είναι ίση με το μηδέν και καμμία δυναμική γραμμή δεν διαπερνά την επιφάνεια.

Όταν $0 \le \alpha < 90^o$, η μαγνητική ροή Φ είναι θετική. Όταν $90^o < \alpha \le 180^o$, τότε η μαγνητική ροή Φ είναι αρνητική.

Αν η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη ή το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ομογενές ή συμβαίνουν και τα δύο, για να υπολογίσομε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια, χωρίζομε την επιφάνεια σε στοιχειώδη εμβαδά, που μπορούν να θεωρηθούν επίπεδα. Το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή του κάθε στοιχειώδους εμβαδού θεωρείται ομογενές. Στη συνέχεια υπολογίζομε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από την κάθε στοιχειώδη επιφάνεια και το άθροισμα όλων των επιμέρους ροών ισούται με την ολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια.

Η ολική ροή που διέρχεται από κλειστή επιφάνεια τοποθετημένη μέσα σε μαγνητικό πεδίο ισούται με μηδέν. Όσες δυναμικές γραμμές εισέρχονται στην επιφάνεια, τόσες και εξέρχονται απ' αυτήν. Το παραπάνω αποτελεί τον Νόμο του Gauss για το μαγνητισμό. Η φυσική του σημασία είναι ότι δεν υπάρχουν μονόπολα, πηγές μαγνητικού πεδίου, όπως υπάρχουν θετικά και αρνητικά φορτία στο ηλεκτρικό πεδίο.

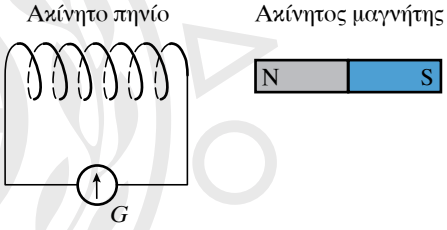
Μονάδα μετρήσεως της μαγνητικής ροής είναι το 1 weber (1 Wb). Από τη σχέση $\Phi = B\,S$ προκύπτει ότι ***1 Wb είναι η μαγνητική ροή που διέρχεται από επιφάνεια εμβαδού 1m^2, όταν τοποθετηθεί κάθετα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο 1 T. Δηλαδή 1 Wb = 1 T·m^2.***

11.6 Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή.

Από τα πειράματα του Oersted προέκυψε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Τότε ετέθη το ερώτημα αν μπορεί να συμβεί και το αντίστροφο. Δηλαδή αν το μαγνητικό πεδίο μπορεί να δημιουργήσει ηλεκτρικό ρεύμα. Με την ιδέα αυτή ασχολήθηκαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, οι Michael Faraday και Joseph Henry.

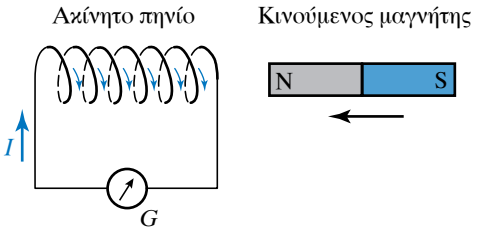
Το φαινόμενο της δημιουργίας ηλεκτρικού ρεύματος από το μαγνητικό πεδίο ονομάζεται ***ηλεκτρομαγνητική επαγωγή***.

Ένα από τα πειράματα που έκανε ο Faraday μελετώντας το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής είναι τα παρακάτω: Έστω κύκλωμα που περιλαμβάνει πηνίο (σωληνοειδές) συνδεδεμένο με γαλβανόμετρο G, που μπορεί να μετρά πολύ μικρά ρεύματα. Δίπλα στο πηνίο και πάνω στον άξονά του υπάρχει ραβδόμορφος μαγνήτης. Αν ο μαγνήτης και το πηνίο είναι ακίνητα, η ένδειξη του γαλβανομέτρου είναι μηδενική (σχ. 11.6.1).



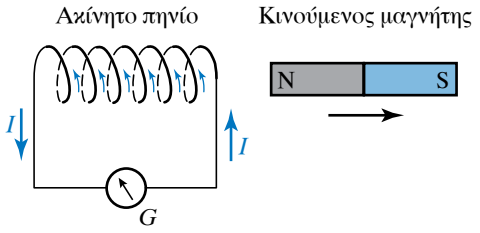
Σχ. 11.6.1
Όταν ο μαγνήτης και το πηνίο είναι ακίνητα, η ένδειξη του οργάνου είναι μηδενική.

Αν ο μαγνήτης κινείται προς το ακίνητο πηνίο, ο δείκτης του γαλβανομέτρου αποκλίνει δείχνοντας μία ένδειξη, άρα το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα (σχ. 11.6.2). Όσο διαρκεί η κίνηση του μαγνήτη, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, το οποίο οφείλεται στη δημιουργία ηλεκτρεγερτικής δυνάμεως (ΗΕΔ) από επαγωγή.



Σχ. 11.6.2
Όταν ο μαγνήτης πλησιάζει το πηνίο, η ένδειξη του οργάνου είναι μη μηδενική.

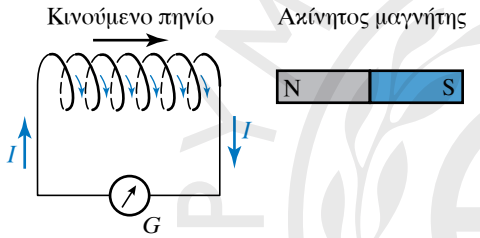
Αν ο μαγνήτης απομακρύνεται από το πηνίο, ο δείκτης του γαλβανομέτρου αποκλίνει προς την αντίθετη κατεύθυνση, άρα το ρεύμα έχει αποκτήσει αντίθετη φορά (σχ. 11.6.3).



Σχ. 11.6.3

Η ένδειξη του οργάνου είναι μη μηδενική, όταν το πηνίο πλησιάζει τον μαγνήτη.

Αν κρατάμε ακίνητο τον μαγνήτη και μετακινούμε το πηνίο, παρατηρούμε ότι το γαλβανόμετρο δείχνει πάλι ένδειξη (σχ. 11.6.4).



Σχ. 11.6.4

Η ένδειξη του οργάνου είναι μη μηδενική, όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται από το πηνίο.

Αν μετακινούμε τον μαγνήτη και το πηνίο προς την ίδια κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα, παρατηρούμε ότι η ένδειξη του οργάνου είναι μηδενική.

Εμφάνιση ΗΕΔ υπάρχει και όταν αντί για μαγνήτη χρησιμοποιήσομε ένα δεύτερο πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα και ακολουθήσομε την ίδια διαδικασία, όπως με τον μαγνήτη. Η μετακίνηση ενός πηνίου σε σχέση με το άλλο δημιουργεί επαγωγικό ρεύμα στο κύκλωμα του άλλου πηνίου.

Αν στο αρχικό κύκλωμα προσθέσομε πηγή συνεχούς ρεύματος και ροοστάτη, ώστε να μεταβάλλεται το ρεύμα που διαρρέει το αντίστοιχο πηνίο, τότε παρατηρούμε ότι στα άκρα του άλλου πηνίου εμφανίζεται επαγωγική τάση για όσο χρόνο διαρκεί η μεταβολή του ρεύματος.

Από τα παραπάνω πειράματα και τις παρατηρήσεις που προέκυψαν, καταλήγομε στα εξής συμπεράσματα:

1) Επειδή το πηνίο βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη, διέρχονται από τις σπείρες του δυναμικές γραμμές, άρα υπάρχει μαγνητική ροή.

2) Όταν ο μαγνήτης είναι ακίνητος, το μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο βρίσκεται το επίσης ακίνητο πηνίο, είναι χρονικά σταθερό. Η μαγνητική ροή που διέρχεται απ' τις σπείρες του πηνίου είναι χρονικά σταθερή. Σ' αυτήν την περίπτωση δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή στο πηνίο.

3) Όταν ο μαγνήτης κινείται σε σχέση με το πηνίο (πλησιάζει ή απομακρύνεται), το μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο βρίσκεται το πηνίο μεταβάλλεται με τον χρόνο. Το ίδιο συμβαίνει και με τη μαγνητική ροή που διέρχεται από τις σπείρες του. Σ' αυτήν την περίπτωση στο πηνίο αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή.

4) Ανάλογα ισχύουν αν ο μαγνήτης αντικατασταθεί από πηνίο, του οποίου μπορούμε να μεταβάλλομε και το ρεύμα.

5) Όταν η μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από τις σπείρες του πηνίου είναι ταχύτερη, η ΗΕΔ έχει μεγαλύτερη τιμή. Η τιμή της επαγωγικής ΗΕΔ είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$, που διέρχεται από το πηνίο.

Ο Νόμος της επαγωγής ή Νόμος του Faraday διατυπώνεται ως εξής: Η ***ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_{ΕΠ}$ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε πηνίο είναι ανάλογη με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής, που διέρχεται από τις σπείρες του πηνίου και με τον αριθμό N των σπειρών.*** Δηλαδή:

$$E_{ΕΠ} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} N.$$

Το αρνητικό πρόσημο σχετίζεται με τον Νόμο του Lenz που θα δούμε παρακάτω. Στο SI μονάδα μετρήσεως της ΗΕΔ από επαγωγή είναι, όπως συμβαίνει για κάθε είδους ΗΕΔ, το $1\,\mathrm{V} = \frac{1\,\mathrm{Wb}}{\mathrm{s}}$.

Από τον Νόμο της επαγωγής μπορεί να δώσει ως ορισμό της μονάδας μετρήσεως της μαγνητικής ροής (που είναι το 1 Wb) τον εξής: ***1 Wb είναι η μαγνητική ροή που όταν διέρχεται από μία σπείρα και μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό 1 Wb/s αναπτύσσει ΗΕΔ εξ επαγωγής ίση με 1 V. Δηλαδή 1 Wb = 1 V × s.***

Γενικώς, ο Νόμος του Faraday διατυπώνεται ως εξής: ***Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται σε κύκλωμα είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής, που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει το κύκλωμα.*** Δηλαδή:

$$E_{ΕΠ} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}.$$

11.6.1 Επαγωγικό ρεύμα.

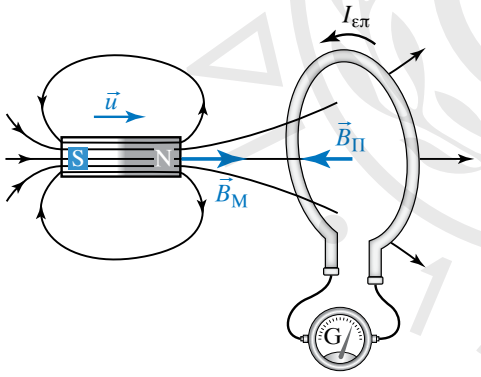
Αν υποθέσομε ότι το (κλειστό) κύκλωμα που βρίσκεται μέσα στο μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο έχει συνολική αντίσταση R, τότε σύμφωνα με τον Νόμο του Ohm θα διαρρέεται από ρεύμα I και θα ισχύει:

$$I = \frac{E_{\text{ΕΠ}}}{R} = \frac{\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}}{R} = \frac{|\Delta\Phi|}{R\,\Delta t}.$$

11.6.2 Κανόνας του Lenz.

Ο H. F. Lenz διετύπωσε έναν κανόνα που δίνει τη φορά του ρεύματος (και κατά συνέπεια και της ΗΕΔ) από επαγωγή. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά, ώστε το αποτέλεσμά του (μαγνητικό πεδίο) να αντιστέκεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Αυτό είναι συνέπεια της αρχής διατηρήσεως της ενέργειας και ερμηνεύει το πρόσημο μείον στον Νόμο του Faraday.

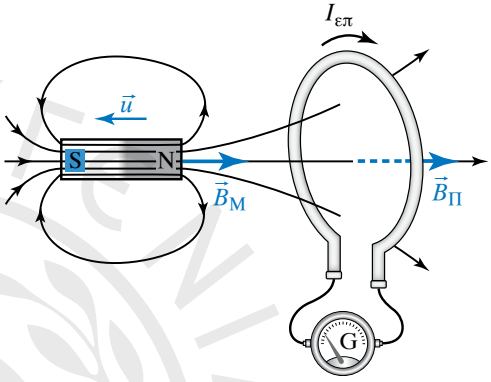
Θεωρούμε κυκλικό πλαίσιο μίας σπείρας με το επίπεδό του κάθετο στη διεύθυνση ραβδόμορφου μαγνήτη (σχ. 11.6.5). Όταν ο μαγνήτης πλησιάζει στο πλαίσιο, αυξάνεται η μαγνητική ροή $B_{\text{Μ}}$, που διέρχεται απ' το πλαίσιο.



Σχ. 11.6.5
Δημιουργία επαγωγικού ρεύματος στο πλαίσιο, όταν ο μαγνήτης πλησιάζει.

Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής $\Delta\Phi/\Delta t$ προκαλεί εμφάνιση ΗΕΔ από επαγωγή στο πλαίσιο. Αυτό διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα $I_{\text{ΕΠ}}$, που με τη σειρά του δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $B_{\text{Π}}$. Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz είναι τέτοια, ώστε να αντιστέκεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Δηλαδή δημιουργεί έναν βόρειο πόλο που απωθεί το βόρειο πόλο του μαγνήτη. Ο μαγνήτης, λόγω του μαγνητικού πεδίου του αγωγού, δέχεται δύναμη αντίρροπη της κινήσεώς του.

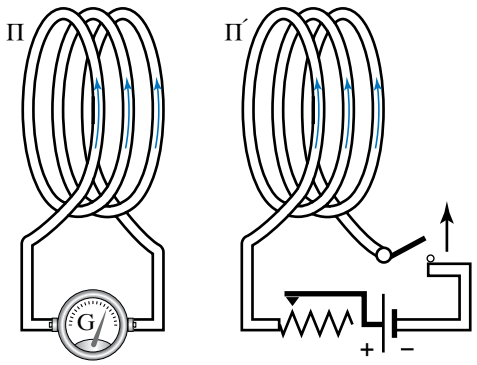
Όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται από το πλαίσιο, μειώνεται η ροή που δημιουργεί στο πλαίσιο. Άρα στο πλαίσιο δημιουργείται ΗΕΔ από επαγωγή και διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα (σχ. 11.6.6) με τέτοια φορά, ώστε να αντιστέκεται στο αίτιο που το προκαλεί. Δηλαδή δημιουργεί δικό του μαγνητικό πεδίο $B_{\text{Π}}$, ώστε να έλκει τον μαγνήτη και να προσπαθεί να διατηρήσει σταθερή τη συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο.



Σχ. 11.6.6
Δημιουργία επαγωγικού ρεύματος στο πλαίσιο, όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται.

Σύμφωνα με το κανόνα του Lenz, όταν κλείνομε το κύκλωμα του πηνίου Π′ (σχ. 11.6.7) ή αυξάνομε το ρεύμα I, που διαρρέει αυτό το κύκλωμα, στο γειτονικό κύκλωμα του πηνίου Π παράγεται επαγωγικό ρεύμα αντίρροπο με το ρεύμα του πηνίου Π′.

Αντιθέτως, όταν ανοίγομε το κύκλωμα του πηνίου Π′ ή μειώνομε το ρεύμα I, που διαρρέει το κύκλωμα, στο κύκλωμα του πηνίου Π παράγεται επαγωγικό ρεύμα ομόρροπο με το ρεύμα του πηνίου Π′.



Σχ. 11.6.7
Η μεταβολή του ρεύματος στο πηνίο Π′ προκαλεί ρεύμα με επαγωγή στο πηνίο Π.

Στην περίπτωση του σχήματος 11.6.4, για να υπερνικηθεί η έλξη που δέχεται ο μαγνήτης απ' το πηνίο και να μπορεί να απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα, δαπανάται ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια στους αγωγούς. Αν το πηνίο διαρρεόταν από ρεύμα αντίθετης φοράς, απέναντι από το βόρειο πόλο του μαγνήτη, θα δημιουργούσε βόρειο πόλο που θα ασκούσε απωστική δύναμη στον μαγνήτη, με αποτέλεσμα να μην απαιτείται καμμία προσπάθεια για να απομακρυνθεί. Έτσι, θα παραγόταν ηλεκτρική ενέργεια στο πηνίο εξαιτίας της επαγωγής, χωρίς να έχει δαπανηθεί καθόλου ενέργεια. Όμως, η παραγωγή ενέργειας από το μηδέν αντίκειται στην αρχή διατηρήσεως της ενέργειας. Συνεπώς, ο κανόνας του Lenz είναι αποτέλεσμα της αρχής διατηρήσεως της ενέργειας.

11.6.3 Ηλεκτρικό φορτίο που αναπτύσσεται από επαγωγή.

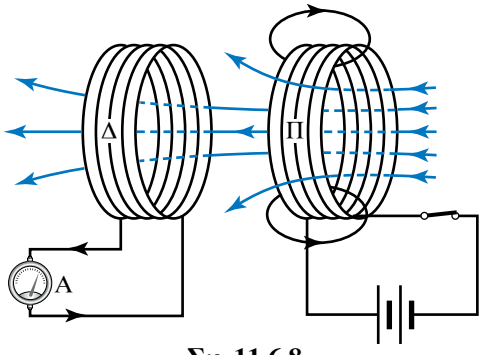
Το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει κύκλωμα επί χρόνο Δt μεταφέρει ηλεκτρικό φορτίο Q. Το φορτίο αυτό, που αναπτύχθηκε στο κύκλωμα εξαιτίας της επαγωγής, ισούται με:

$$Q = I\,\Delta t = \frac{|\Delta\Phi|}{R\,\Delta t}\,\Delta t = \frac{|\Delta\Phi|}{R}.$$

Δηλαδή το ηλεκτρικό φορτίο που αναπτύσσεται κατά μία ορισμένη μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι ανεξάρτητο από τον χρόνο που διαρκεί αυτή η μεταβολή (Νόμος του Neumann).

11.6.4 Το φαινόμενο της αμοιβαίας επαγωγής.

Θεωρούμε δύο γειτονικά κυκλώματα (σχ. 11.6.8). Το κύκλωμα του πηνίου Π διαρρέεται από ρεύμα I. Αν στο πηνίο Π (πρωτεύον) μεταβάλλεται το ρεύμα με κάποιον ρυθμό ως προς τον χρόνο, θα μεταβάλλεται στο πηνίο Δ (δευτερεύον) η μαγνητική ροή με κάποιον ρυθμό. Συνεπώς, στο κύκλωμα του πηνίου Δ θα αναπτύσσεται ΗΕΔ $E_{\text{ΕΠ}}$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***αμοιβαία επαγωγή***. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι μεταξύ των δύο πηνίων (Π, Δ) υπάρχει επαγωγική σύζευξη.



Σχ. 11.6.8
Αμοιβαία επαγωγή.

Η μεταβολή $\Delta\Phi$ της μαγνητικής ροής στο πηνίο Δ είναι ανάλογη με τη μεταβολή ΔI του ρεύματος στο πηνίο Π. Δηλαδή ισχύει η σχέση $\Delta\Phi = M\,\Delta I$, όπου M ένας συντελεστής αναλογίας, που ονομάζεται ***συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής*** των δύο κυκλωμάτων και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (σχήμα) και τη σχετική θέση των δύο κυκλωμάτων και από τη σχετική μαγνητική διαπερατότητα του περιβάλλοντος. Ο συντελεστής M μετρείται με τη μονάδα 1H (henry, χένρυ). Στο πηνίο Δ αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής που ισούται με:

$$E_{\text{ΕΠ}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Από τη σχέση αυτή και την προηγούμενη, προκύπτει ότι:

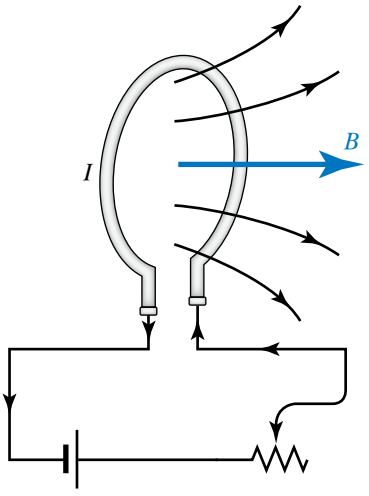
$$E_{\text{ΕΠ}} = -M\,\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Το αρνητικό πρόσημο δικαιολογείται από τον κανόνα του Lenz. Εφαρμογή της αμοιβαίας επαγωγής έχομε στους μετασχηματιστές, όπου η τάση που εφαρμόζεται στο ένα πηνίο (πρωτεύον) μετασχηματίζεται σε τάση διαφορετικού πλάτους στο δεύτερο πηνίο (δευτερεύον).

11.6.5 Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής.

Έστω κυκλικός αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα I (σχ. 11.6.9). Γύρω από τον αγωγό δημιουργείται μαγνητικό πεδίο, στο οποίο οφείλεται η μαγνητική ροή Φ, που διέρχεται από την επιφάνεια του ίδιου του αγωγού. Αν σε χρόνο Δt μεταβληθεί το ρεύμα κατά ΔI, μεταβάλλεται το $\vec{B}$, συνεπώς μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του αγωγού κατά $\Delta\Phi$. Άρα, μέσα στον αγωγό αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται ***αυτεπαγωγή***.

Δηλαδή, αυτεπαγωγή είναι το φαινόμενο κατά το οποίο δημιουργείται ηλεκτρεγερτική δύναμη σε κύκλωμα, όταν μεταβάλλεται το ρεύμα, που διαρρέει το ίδιο το κύκλωμα. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται ονομάζεται ***ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή*** $E_{\text{ΑΥΤ}}$. Γνωρίζομε από το κανόνα του Lenz πως όταν αυξάνεται η τιμή του ρεύματος, το ρεύμα αυτεπαγωγής είναι αντίρροπο με το κύριο



Σχ. 11.6.9
Η μεταβολή του ρεύματος I προκαλεί μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής B και έτσι δημιουργείται μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από τη σπείρα.

ρεύμα και προσπαθεί να εμποδίσει την αύξηση του κυρίου ρεύματος. Όταν μειώνεται η τιμή του ρεύματος, το ρεύμα αυτεπαγωγής είναι ομόρροπο με το κύριο ρεύμα και προσπαθεί να εμποδίσει την μείωση του κυρίου ρεύματος.

Η μεταβολή $\Delta\Phi$ της μαγνητικής ροής που διέρχεται απ' την επιφάνεια αγωγού είναι ανάλογη με την μεταβολή ΔI του ρεύματος. Συνεπώς ισχύει ότι $\Delta\Phi = L\,\Delta I$, όπου L ένας συντελεστής αναλογίας που ονομάζεται ***συντελεστής αυτεπαγωγής του αγωγού*** και εξαρτάται από το σχήμα του αγωγού και τη σχετική μαγνητική διαπερατότητα του περιβάλλοντος. Στο κύκλωμα του αγωγού αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη

$$E_{\text{ΑΥΤ}} = -L\,\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από τον κανόνα του Lenz.

11.6.6 Μονάδα μετρήσεως του συντελεστή αυτεπαγωγής.

Η μονάδα μετρήσεως του συντελεστή αυτεπαγωγής ονομάζεται henry (1 H) και ορίζεται από την εξίσωση:

$$L = \frac{E_{\text{ΑΥΤ}}\,\Delta t}{\Delta I}.$$

Συνεπώς: $$1\text{H} = \frac{1\text{V}\cdot 1\text{s}}{1\text{A}}.$$

Το 1 H είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής αγωγού, στον οποίο αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη αυτεπαγωγής ίση με 1 V, όταν η ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος είναι 1 A/s. Στην πράξη χρησιμοποιούνται συνήθως υποπολλαπλάσια της μονάδας henry:

1 millihenry: $1\,\text{mH} = 10^{-3}\,\text{H}$ και 1 microhenry: $1\,\mu\text{H} = 10^{-6}\,\text{H}$. Με την μονάδα henry μετρείται και ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής M.

11.6.7 Συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου.

Έστω πηνίο μεγάλου μήκους ℓ που αποτελείται από N σπείρες, εμβαδού S η κάθε μία. Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής L_0 του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$L_0 = \mu_0\,\frac{N^2\,S}{\ell}.$$

Αν το πηνίο έχει πυρήνα από μαλακό σίδηρο σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας μ_r, ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι:

$$L = \mu_r\,L_0 = \mu_r\,\mu_0\,\frac{N^2\,S}{\ell}.$$

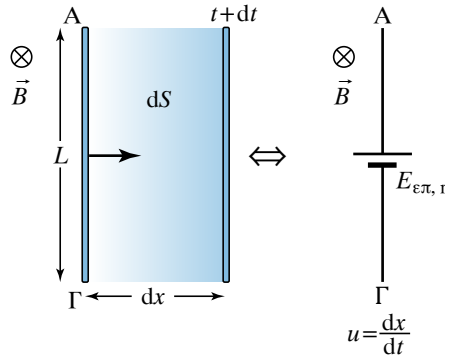
Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής είναι ιδιαίτερα έντονο στην περίπτωση πηνίου, διότι έχει πολλές σπείρες και η μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι μεγάλη. Αν το πηνίο έχει πυρήνα μαλακού σιδήρου, η μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι ακόμη μεγαλύτερη.

Αποδεικνύεται ότι ένα πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα I έχει αποθηκευμένη ενέργεια:

$$U = 1/2\;L\,I^2.$$

11.6.8 Κίνηση μεταλλικής ράβδου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου.

Έστω μεταλλική ράβδος ΑΓ μήκους L που εκτελεί μεταφορική κίνηση εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, έτσι ώστε ο αγωγός, η ταχύτητα u και το πεδίο B να είναι κάθετα ανά δύο μεταξύ τους ($B\perp L$, $L\perp u$, $u\perp B$). Έστω ότι τη χρονική στιγμή t η ταχύτητα της ράβδου είναι u και ότι σε στοιχειώδη χρόνο $\mathrm{d}t$ διανύει στοιχειώδη απόσταση $\mathrm{d}x$ διαγράφοντας στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού $\mathrm{d}S = L\,\mathrm{d}x$ (σχ. 11.6.10). Όσο ο χρόνος περνά, αυξάνεται η επιφάνεια που διαγράφει η ράβδος, άρα μεγαλώνει η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από τη διαγραφόμενη επιφάνεια. Η αύξηση $\mathrm{d}\Phi$ της μαγνητικής ροής σε χρόνο $\mathrm{d}t$ είναι $\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}S$. Μπορεί να δειχθεί ότι και σ' αυτήν την περίπτωση στη ράβδο



Σχ. 11.6.10
Κίνηση μεταλλικής ράβδου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου.

αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή μέτρου:

$$E_{\text{ΕΠ}} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{B\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{B\,L\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,L\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,L\,u.$$

Αν το μέτρο u της ταχύτητας της ράβδου είναι σταθερό, το μέτρο $E_{\text{ΕΠ}}$ της ΗΕΔ από επαγωγή είναι σταθερό. Αν το μέτρο u της ταχύτητας της ράβδου μεταβάλλεται, μεταβάλλεται και το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή. Η ράβδος συμπεριφέρεται ως πηγή με ΗΕΔ ίση με $E_{\text{ΕΠ}}$. Η πολική τάση αυτής της πηγής αντιστοιχεί στη διαφορά δυναμικού μεταξύ του θετικού και του αρνητικού της πόλου. Αν η ράβδος δεν έχει αντίσταση ή δεν είναι μέρος κλειστού κυκλώματος, η πολική τάση ισούται με την ΗΕΔ, όπως συμβαίνει σε όλες τις πηγές ΗΕΔ.

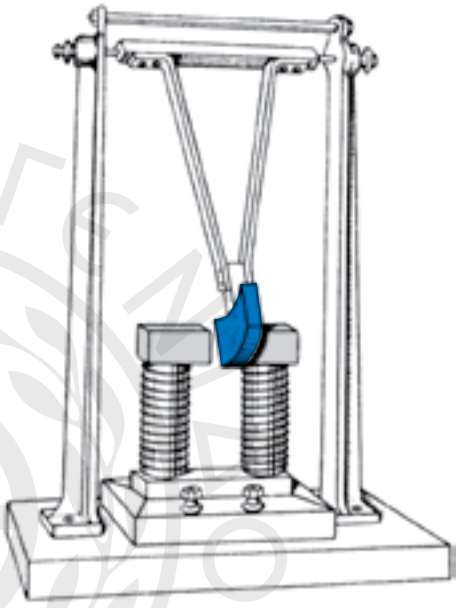
11.6.9 Προσδιορισμός της πολικότητας της πηγής.

Τοποθετούμε τα τρία δάκτυλα του δεξιού χεριού (αντίχειρα, δείκτη, μέσο) ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, έτσι ώστε ο δείκτης να δείχνει την κατεύθυνση του B και ο αντίχειρας την κατεύθυνση της ταχύτητας u της ράβδου. Τότε ο μεσαίος δείχνει τον θετικό πόλο της πηγής. Αν συνδεθούν αγώγιμα τα άκρα της ράβδου, εμφανίζεται επαγωγικό ρεύμα και συγχρόνως στη ράβδο ασκείται δύναμη Laplace από το πεδίο.

Αν η ράβδος σχηματίζει με το πεδίο οξεία γωνία φ, αναλύομε το B σε δύο συνιστώσες $B_{\text{Κ}}$ και $B_{\text{Π}}$, όπου $B_{\text{Κ}} \perp L$ και $B_{\text{Π}} \parallel L$. Η ΗΕΔ από επαγωγή δίνεται από τη σχέση $E_{\text{ΕΠ}} = B_{\text{Κ}}\,L\,u$.

11.7 Δινορρεύματα ή ρεύματα του Foucault.

Επαγωγικά ρεύματα αναπτύσσονται όχι μόνο σε μεταλλικούς αγωγούς, αλλά και στο εσωτερικό αγωγίμων σωμάτων, μεγάλων σχετικά διαστάσεων, που κινούνται εντός μαγνητικού πεδίου σταθερού ή μεταβαλλόμενου $\vec{B}$, όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που τα διαπερνά. Η χάλκινη πλάκα του σχήματος 11.7.1 είναι αναρτημένη από σταθερό σημείο με τέτοιον τρόπο, ώστε να ταλαντώνεται σαν εκκρεμές μεταξύ των πόλων ηλεκτρομαγνήτη, που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Η ταλάντωσή της θα σταματήσει πολύ σύντομα.

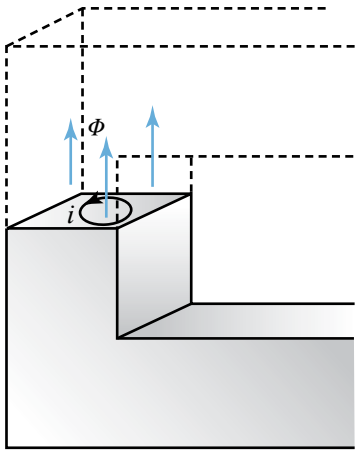


Σχ. 11.7.1
Στη χάλκινη πλάκα δημιουργούνται ηλεκτρικά ρεύματα λόγω της κινήσεώς της ανάμεσα στους μαγνήτες.

Αυτό οφείλεται στα επαγωγικά ρεύματα που δημιουργούνται στο εσωτερικό της πλάκας και ονομάζονται ***ρεύματα του Foucault*** (κυρίως στη γαλλική βιβλιογραφία) ή ***δινορρεύματα***. Τα ρεύματα αυτά σχηματίζουν δίνες μέσα στις μεταλλικές μάζες (σχ. 11.7.2).

Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, τα ρεύματα αυτά έχουν τέτοια φορά, ώστε οι δυνάμεις Laplace που ασκούνται, να αντιτίθεται στην κίνηση της πλάκας, με αποτέλεσμα η ταλάντωσή της να σταματά πολύ γρήγορα. Για τον λόγο αυτό, τα ρεύματα Foucault χρησιμοποιούνται στην κατασκευή ηλεκτρομαγνητικών φρένων και στην απόσβεση της κινήσεως των κινητών συστημάτων των ηλεκτρικών οργάνων μετρήσεως.

Στο εσωτερικό της πλάκας τα ρεύματα Foucault που έχουν δημιουργηθεί, αναπτύσσουν θερμοδυναμική ενέργεια και ζεσταίνουν την πλάκα. Επειδή οι



Σχ. 11.7.2
Ρεύματα Foucault σε μεταλλική μάζα.

μεταλλικές μάζες παρουσιάζουν μικρή αντίσταση, τα δινορρεύματα παίρνουν μεγάλες τιμές, με αποτέλεσμα να παράγεται στο εσωτερικό των μαζών μεγάλο ποσό θερμοδυναμικής ενέργειας με κίνδυνο να προκληθεί βλάβη, πέρα από την άσκοπη δαπάνη ενέργειας. Η ενέργεια αυτή ισούται με το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις Laplace, οι οποίες ασκούνται πάνω στην πλάκα κατά τη διάρκεια της κινήσεώς της. Χρήση της ενέργειας αυτής γίνεται στην κατασκευή ηλεκτρικών κλιβάνων.

Έτσι εξηγείται το ότι ο πυρήνας μαλακού σιδήρου του μετασχηματιστή θερμαίνεται. Αν ο πυρήνας δεν είναι συμπαγής, αλλά αποτελείται από λεπτά ηλεκτρικά μονωμένα φύλλα, η απώλεια ενέργειας είναι μικρότερη, διότι περιορίζονται τα δινορρεύματα. Οι μεγάλοι μετασχηματιστές, για να μην υπερθερμαίνονται, ψύχονται με τη βοήθεια ειδικού λαδιού.

Τα ρεύματα Foucault, που εμφανίζονται σε αρκετές ηλεκτρικές μηχανές (γεννήτριες, κινητήρες, μετασχηματιστές) περιορίζονται όταν αυξηθεί η ειδική αντίσταση του υλικού που χρησιμοποιείται στον πυρήνα. Προς τούτο κατασκευάζονται ειδικά κράματα με μικρή περιεκτικότητα πυριτίου. Ρεύματα Foucault αναπτύσσονται γενικώς και σε ακίνητα ή κινούμενα μεταλλικά σώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό μεταβαλλομένων μαγνητικών πεδίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Μακρύ σωληνοειδές αποτελείται από 200 σπείρες ανά cm. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι $B_0 = 25\ 10^{-3}$T. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό ρεύμα I. Αν στο εσωτερικό του σωληνοειδούς τοποθετηθεί ράβδος από μαλακό σίδηρο σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας $\mu_r = 3000$, να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο B στο εσωτερικό του σωληνοειδούς.

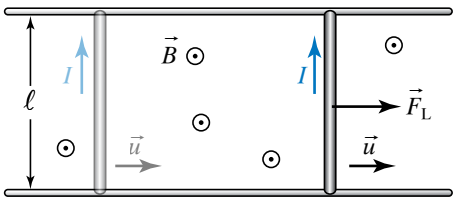
2. Με σύρμα συνολικής αντιστάσεως $R = 2\,\Omega$ δημιουργείται σωληνοειδές μήκους $\ell = 50$ cm και $N = 500$ σπειρών. Τα άκρα του σύρματος συνδέονται με ηλεκτρική πηγή ΗΕΔ $E = 24$ V και ασήμαντης εσωτερικής αντιστάσεως. Να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{B}$ στο εσωτερικό του σωληνοειδούς (το σωληνοειδές να θεωρηθεί μεγάλου μήκους).

3. Ευθύγραμμος αγωγός μεγάλου μήκους αποτελείται από δέσμη είκοσι λεπτών ευθυγράμμων συρμάτων, που το καθένα διαρρέεται από ρεύμα $I = 10$ A ίδιας φοράς. Να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_A$ στο σημείο Α που απέχει απόσταση $r = 4$ cm απ' τον αγωγό.

4. Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι απείρου μήκους αγωγοί διαρρέονται από ρεύματα $I_1 = 6$ A και $I_2 = 8$ A ίδιας φοράς. Αν η μεταξύ τους απόσταση είναι $r = 1$ cm, να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο μέσον της μεταξύ τους αποστάσεως. Αν τα ρεύματα ήταν αντίρροπα, ποιο θα ήταν το μαγνητικό πεδίο;

5. Να υπολογίσετε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από τετράγωνο πλαίσιο πλευράς 20 cm, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό ομογενούς μαγνητικού πεδίου B = 2 T, που σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου γωνία:
α) $\varphi = 0^o$.
β) $\varphi = 30^o$.
γ) $\varphi = 90^o$.
δ) $\varphi = 180^o$.

6. Ευθύγραμμο σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm τοποθετείται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς πεδίου $B = 0{,}5$ T (σχ. 1). Το σύρμα μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα $u = 1$ m/s, ενώ διαρρέεται από ρεύμα $I = 2$ A. Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη Laplace σε χρόνο 1 s.



Σχ. 1

7. Τα παράλληλα μεγάλου μήκους σύρματα Α, Γ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $r = 10$ cm διαρρέονται από ομόρροπα ηλεκτρικά ρεύματα $I_1 = 8$ A και $I_2 = 2$ A αντίστοιχα. Το σύρμα Δ τοποθετημένο

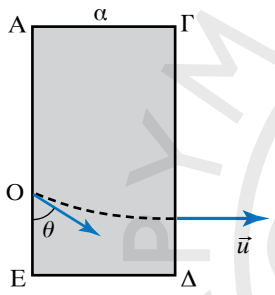
ανάμεσα στα Α, Γ σε απόσταση $r_1 = 3\,\text{cm}$ από το Α, είναι παράλληλο μ' αυτά και διαρρέεται από ρεύμα $I_3 = 1\,\text{A}$ αντίρροπο προς τα άλλα δύο. Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται σε κάθε τμήμα του σύρματος Δ, που έχει μήκος $\ell = 1\,\text{m}$, απ' το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται εξαιτίας του ρεύματος που διαρρέει:

α) Το σύρμα Α.

β) Το σύρμα Γ.

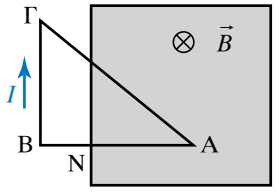
γ) Τα σύρματα Α και Γ.

8. Φορτισμένο σωματίδιο με ταχύτητα $10\pi\,\text{m/s}$ εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου, τομή του οποίου αποτελεί το ορθογώνιο ΑΓΔΕ, υπό γωνία $\theta = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΕ και εξέρχεται από το πεδίο κάθετα στην απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ. 2). Αν $\alpha = 4\,\text{cm}$, να υπολογισθεί η ακτίνα της τροχιάς του σωματιδίου μέσα στο πεδίο.



Σχ. 2

9. Μεταλλικό πλαίσιο σχήματος ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου διαρρέεται από ρεύμα $I = 1\,\text{A}$ και βρίσκεται κατά ένα τμήμα του εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B = 2\,\text{T}$ (σχ. 3). Αν $\text{AN} = 1\,\text{m}$, να υπολογίσετε τη δύναμη που δέχεται το πλαίσιο από το πεδίο.



Σχ. 3

10. Κυκλικό πλαίσιο (πολύ μικρού πάχους) ακτίνας $r = 30\,\text{cm}$ που έχει $\text{N} = 200$ σπείρες τοποθετείται στο εσωτερικό ομογενούς μαγνητικού πεδίου με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Αν το πεδίο $B = 1\,\text{T}$, να υπολογίσετε την $E_{\text{ΕΠ}}$ που αναπτύσσεται στο πλαίσιο, όταν σε χρόνο $\Delta t = 1\,s$:

α) Το πεδίο διπλασιάζεται.

β) Το πεδίο μηδενίζεται.

γ) Το πλαίσιο στρέφεται κατά 90° ή 180° γύρω από άξονα κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου που διέρχεται από σημείο της περιφέρειας του πλαισίου.

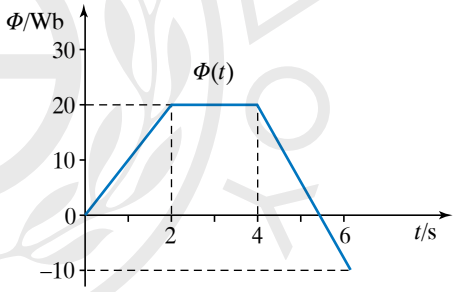
11. Μεταλλική ράβδος μήκους $\ell = 1\,\text{m}$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 30\,rad/s$ σε επίπεδο κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B = 1\,T$. Να υπολογίσετε την τάση που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου, όταν το κέντρο περιστροφής βρίσκεται σ' ένα από αυτά.

12. Σωληνοειδές μήκους 2 m έχει 1000 σπείρες διαμέτρου 4 cm και διαρρέεται από ρεύμα $I = 5\,\text{A}$. Να υπολογίσετε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από το σύνολο των σπειρών του σωληνοειδούς.

13. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από κλειστό συρμάτινο πλαίσιο ωμικής αντιστάσεως $1\,\Omega$ μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με το σχήμα 4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις σε σχέση με τον χρόνο

α) Της ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.

β) Του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο.



Σχ. 4

14. Πηνίο αποτελείται από 1000 σπείρες, που η κάθε μία έχει εμβαδό $3\,\text{cm}^2$. Ο άξονας του πηνίου είναι παράλληλος προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Μέσα σε χρόνο 0,1 s η φορά των δυναμικών γραμμών αντιστρέφεται και στο πηνίο αναπτύσσεται ΗΕΔ $E = 3\,\text{V}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου B.

15. Σωληνοειδές έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 0{,}1\,\text{H}$ και διαρρέεται από ρεύμα 12 A. Πόσο πρέπει να γίνει το ρεύμα μέσα σε χρόνο 0,01 s, ώστε το μέτρο της ΗΕΔ που θα αναπτυχθεί στο σωληνοειδές να είναι 30 V;

16. Πηνίο με 700 σπείρες διαρρέεται από ρεύμα 3,5 A. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα είναι $10^{-5}\,\text{Wb}$. Να υπολογίσετε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. Αν το ρεύμα μηδενιστεί σε χρόνο 0,02 s, πόση είναι η ΗΕΔ στο πηνίο;

17. Σωληνοειδές έχει 4000 σπείρες εμβαδού $8\,cm^2$ και διαρρέεται από ρεύμα 6 A. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του έχει τιμή 0,0001 T. Να υπολογίσετε το συντελεστή αυτεπαγωγής L του σωληνοειδούς.

18. Μεταξύ δύο πηνίων Π_1, Π_2 υπάρχει επαγωγική σύζευξη. Όταν στο πηνίο Π_1 το ρεύμα μεταβάλλεται από 5 A σε 15 A μέσα σε χρόνο 0,02 s, στο πηνίο Π_2 αναπτύσσεται ΗΕΔ 24 V. Να υπολογίσετε τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής M των δύο πηνίων.

19. Να υπολογίσετε τη μαγνητική επαγωγή στο κέντρο κυκλικού πλαισίου που αποτελείται από $N = 1000$ σπείρες, διαμέτρου $2\,cm$ η κάθε μία, όταν διαρρέεται από ρεύμα $I = 8$ A. Δίνεται $K_M = 10^{-7}\,N/A^2$.

20. Πηνίο μήκους $\ell = 0{,}5\,m$ αποτελείται από $N = 1000$ σπείρες διαμέτρου $2\,cm$ η κάθε μία και διαρρέεται από ρεύμα $I = 6$ A. Να υπολογίσετε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από μία τομή του πηνίου, κάθετη στον άξονά του. Αν στο εσωτερικό του πηνίου τοποθετήσομε πυρήνα από μαλακό σίδηρο μαγνητικής διαπερατότητας $\mu_r = 3000$ να υπολογίσετε τη νέα τιμή της μαγνητικής ροής. Δίνεται $K_M = 10^{-7}\,N/A^2$.

21. Σύρμα μήκους $\ell = 0{,}5\,m$ τοποθετημένο κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής $B = 10^{-2}$ T διαρρέεται από ρεύμα I = 7 A, οπότε μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 1\,m/s$. Να υπολογίσετε το έργο της δυνάμεως Laplace ανά δευτερόλεπτο.

22. Να υπολογίσετε τον συντελεστή αυτεπαγωγής L σωληνοειδούς που έχει μήκος $\ell = 0{,}5\,m$ και αποτελείται από $N = 1000$ σπείρες εμβαδού $s = 5\,cm^2$ η κάθε μία. Δίνεται $\mu_0 = 4\pi/10^7 \cdot N/A^2$.

23. Δύο πηνία $N_1 = 500$ σπειρών το πρώτο και $N_2 = 800$ σπειρών το δεύτερο βρίσκονται σε επαγωγική σύζευξη. Όταν το πρώτο πηνίο διαρρέεται από ρεύμα $I_1 = 10$ A, η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα του είναι $\Phi_1 = 4 \cdot 10^{-3}\,Wb$, ενώ από κάθε σπείρα του δεύτερου πηνίου είναι $\Phi_2 = 2 \cdot 10^{-3}\,Wb$. Να υπολογίσετε:

α) Τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πρώτου πηνίου;

β) Τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής των δυο πηνίων;

γ) Την ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο δεύτερο πηνίο, λόγω αμοιβαίας επαγωγής, όταν το ρεύμα I_1 μηδενίζεται εντός μισού δευτερολέπτου.

24. Ευθύγραμμος αγωγός μήκους $\ell = 0{,}5\,m$ και μάζας $m = 10\,g$ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε δυο κατακόρυφα στηρίγματα από μονωτικό υλικό, παραμένοντας συνεχώς οριζόντιος. Το σύστημα βρίσκεται στο εσωτερικό οριζόντιου ομογενούς μαγνητικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής B = 2 T. Αν $g = 10\,m/s^2$, να υπολογίσετε το ρεύμα που πρέπει να τον διαρρέει, προκειμένου αυτός να ισορροπεί.

25. Κυκλικό πλαίσιο αποτελείται από $N_2 = 100$ σπείρες ακτίνας $r = 1\,cm$ η κάθε μία. Τα άκρα του πλαισίου συνδέονται με τους πόλους δωδεκάβολτης μπαταρίας, αμελητέας εσωτερικής αντιστάσεως. Το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του πλαισίου έχει μαγνητική επαγωγή $B = 10^{-6}$ T. Να υπολογίσετε το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο και την αντίσταση του πλαισίου. Δίνεται $K_M = 10^{-7}\,N/A^2$.

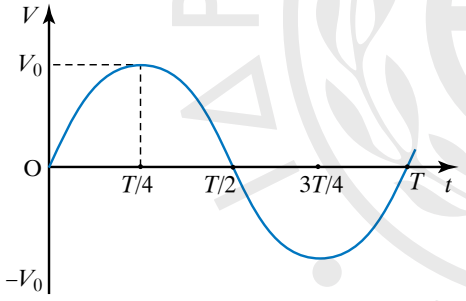
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Εναλλασσόμενα ρεύματα

12.1 Εναλλασσόμενο ρεύμα. Διανυσματικά διαγράμματα.

Όταν η τάση είναι αρμονική (ημιτονοειδής) συνάρτηση του χρόνου, τότε λέμε ότι έχομε εναλλασσόμενο ρεύμα, διεθνώς αυτό συμβολίζεται με το σύμβολο AC (alternating current).

Η εναλλασσόμενη τάση μπορεί να περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση $V = V_0 \sin \omega t$, όπου V η στιγμιαία τάση τη χρονική στιγμή t, V_0 το πλάτος της τάσεως, ωt η φάση και ω η κυκλική συχνότητα. Η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς τάσεως σε σχέση με τον χρόνο φαίνεται στο σχήμα 12.1.1, όπου T η περίοδος.



Σχ. 12.1.1

Γραφική παράσταση εναλλασσόμενης τάσεως.

Οι διατάξεις που παράγουν την εναλλασσόμενη τάση ονομάζονται γεννήτριες εναλλασσόμενης τάσεως. Η αρχή λειτουργίας της γεννήτριας εναλλασσόμενης τάσεως φαίνεται στο σχήμα 12.1.2, όπου ο εμβαδού S αγωγός σε σχήμα πλαισίου, βρίσκεται στο εσωτερικό ομογενούς μαγνητικού πεδίου και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα κάθετο στο πεδίο.

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο ΑΒΓΔ μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση: $\Phi = B\,S \cos\alpha = B\,S \cos\omega t = \Phi_0 \cos\omega t$. Όπου $\alpha = \omega t$ είναι η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στο πλαίσιο με το πεδίο B. $\Phi_0 = B\,S$ είναι η μέγιστη μαγνητική ροή, που διέρχεται από το πλαίσιο, η οποία ονομάζεται και πλάτος της μαγνητικής ροής και ω είναι η κυκλική συχνότητα, η οποία ισούται με τη γωνιακή ταχύτητα του στρεφόμενου πλαισίου.

Αφού η μαγνητική ροή μεταβάλλεται, αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου, σύμφωνα με τον νόμο της επαγωγής, εναλλασσόμενη τάση της μορφής

$$V = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \omega\,\Phi_0 \sin\omega t = V_0 \sin\omega t,$$

όπου $V_0 = \omega\,\Phi_0 = \omega\,B\,S$. Το μέγεθος V είναι η στιγμιαία τάση και το όρισμα του ημιτόνου, δηλαδή η γωνία $\alpha = \omega t$ είναι η φάση της τάσεως. Παρατηρούμε ότι η τάση μηδενίζεται, όταν το πλαίσιο είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου (στην περίπτωση αυτή η μαγνητική ροή λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της), ενώ η τάση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, όταν το πλαίσιο είναι παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές (τότε η μαγνητική ροή είναι μηδέν).

Έστω ότι μεταλλικός αγωγός (ωμικής) αντιστάσεως R συνδέεται με πηγή εναλλασσόμενης τάσεως (σχ. 12.1.3). Στο εσωτερικό του αγωγού σχηματίζεται ηλεκτρικό πεδίο μεταβαλλόμενο περιοδικά. Το πεδίο κινεί τα ηλεκτρόνια και δημιουργεί εναλλασσόμενο (δηλ. αρμονικό με το χρόνο) ηλεκτρικό ρεύμα που δίνεται από τον τύπο

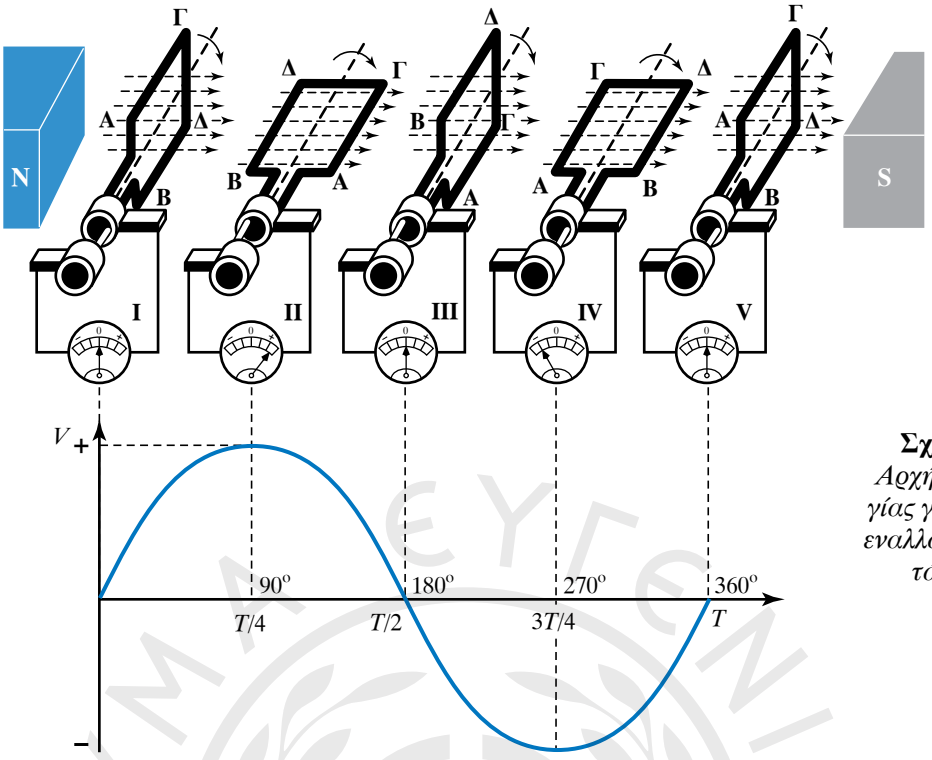
$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0 \sin\omega t}{R} = \frac{V_0}{R} \sin\omega t = I_0 \sin\omega t.$$

Από σύγκριση των σχέσεων $V = V_0 \sin\omega t$ και $I = I_0 \sin\omega t$ προκύπτει ότι:

1) Το ρεύμα και η τάση μεταβάλλονται και τα δύο αρμονικά με τον χρόνο και έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

2) Η τάση και το ρεύμα είναι μεγέθη συμφασικά, δηλαδή παίρνουν ταυτόχρονα μέγιστη θετική ή μέγιστη αρνητική τιμή (σχ. 12.1.4).

Οι προηγούμενες σχέσεις δίνουν τις στιγμιαίες τιμές του εναλλασσομένου ρεύματος και της τάσεως που μεταβάλλονται με τον χρόνο. Χρήσιμο είναι να



Σχ. 12.1.2
Αρχή λειτουργίας γεννήτριας εναλλασσόμενης τάσεως.

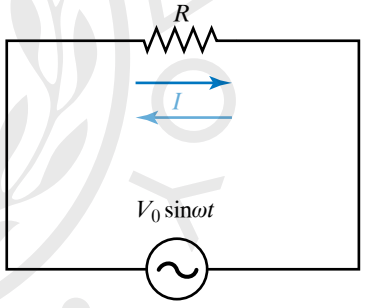
ορίσομε ένα μέγεθος ανεξάρτητο του χρόνου, ένα για την τάση και ένα για το ρεύμα, που ονομάζεται ***ενεργός τιμή*** και έχει άμεση χρησιμότητα όπως θα δούμε.

12.1.1 Ενεργό ρεύμα και ενεργός τάση.

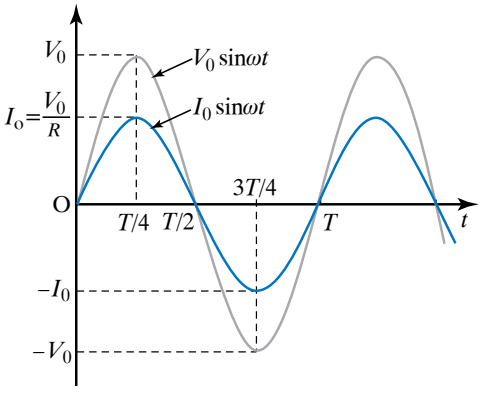
Θεωρούμε ωμική αντίσταση R που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα για χρονικό διάστημα t και έστω W η ηλεκτρική ενέργεια που καταναλίσκει και η οποία μπορεί να μεταφερθεί στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας. Λέμε επίσης ότι καταναλίσκεται πάνω στην αντίσταση ηλεκτρικό έργο.

Θεωρούμε την ίδια ωμική αντίσταση R, που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα I, για το ίδιο χρονικό διάστημα t και έστω ότι καταναλίσκει την ίδια ηλεκτρική ενέργεια.

Η τιμή αυτού του συνεχούς ρεύματος ονομάζεται ***ενεργός τιμή του αντίστοιχου εναλλασσομένου ρεύματος***. Συνεπώς, ενεργός τιμή $I_{εν}$ εναλλασσομένου ρεύματος είναι η τιμή εκείνου του συνεχούς ρεύματος, το οποίο οδηγεί στην ίδια κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας με το αντίστοιχο εναλλασσόμενο ρεύμα, όταν διαρρέει την ίδια αντίσταση R επί το ίδιο χρονικό διάστημα t. Αποδεικνύεται ότι η ενεργός τιμή $I_{εν}$ και το πλάτος I_0 του εναλλασσομένου ρεύματος συνδέονται με τη σχέση:



Σχ. 12.1.3
Κύκλωμα με πηγή εναλλασσόμενης τάσεως.



Σχ. 12.1.4
Γραφικές παραστάσεις του ρεύματος και της τάσεως σε σχέση με τον χρόνο.

$$I_{εν} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot I_0.$$

Ενεργός τάση $V_{εν}$ εναλλασσόμενου ρεύματος είναι η σταθερή τάση εκείνου του συνεχούς ρεύματος, η οποία αν εφαρμοστεί στα άκρα της ίδιας αντιστάσεως R, δημιουργεί συνεχές ρεύμα ίσο με την ενεργό τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος. Εύκολα προκύπτει ότι η τάση $V_{εν}$ και το πλάτος V_0 της εναλλασσόμενης τάσεως συνδέονται με τη σχέση:

$$V_{εν} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot V_0.$$

Στην πράξη όταν αναφερόμαστε στην τιμή της εναλλασσόμενης τάσεως ή στην τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος, εννοούμε την ενεργό τιμή αυτών των μεγεθών. Τα όργανα μετρήσεων που χρησιμοποιούνται στο εναλλασσόμενο ρεύμα μετράνε ενεργό τιμή. Αν συνδέσομε πηγή εναλλασσόμενης τάσεως με αντιστάτη ωμικής αντιστάσεως R και μετρήσομε την ενεργό τιμή $I_{εν}$ του ρεύματος και την ενεργό τάση $V_{εν}$ στα άκρα του αντιστάτη, διαπιστώνομε ότι ισχύει η σχέση $R = \frac{V_{εν}}{I_{εν}}$, που αποτελεί την έκφραση του Νόμου του Ohm για ωμική αντίσταση στο εναλλασσόμενο ρεύμα.

12.1.2 Απόδειξη των σχέσεων $I_{εν} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ *και* $V_{εν} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$.

Θεωρούμε ωμική αντίσταση R, στην οποία διαβιβάζεται εναλλασσόμενο ρεύμα $I = I_0 \sin \omega t$. Σε στοιχειώδη χρόνο Δt η αντίσταση καταναλίσκει ηλεκτρική ενέργεια $\Delta W = I^2 R \Delta t$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση το ρεύμα $I = I_0 \sin \omega t$, προκύπτει ότι $\Delta W = I_0^2 \sin^2 \omega t \, R \, \Delta t$.

Επειδή $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται ως εξής:

$$\Delta W = I_0^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} R \, \Delta t =$$

$$= \frac{I_0^2 R}{2} \Delta t - \frac{I_0^2 R}{2} \cos 2\omega t \, \Delta t.$$

Κατά τη διάρκεια μίας περιόδου T, το συνολικό ηλεκτρικό έργο που καταναλίσκεται στην αντίσταση R είναι:

$$W = \Sigma \Delta W = \Sigma \frac{I_0^2 R}{2} \Delta t - \Sigma \frac{I_0^2 R}{2} \cos 2\omega t \, \Delta t =$$

$$= \frac{I_0^2 R}{2} \Sigma \Delta t - \frac{I_0^2 R}{2} \Sigma \cos 2\omega t \, \Delta t.$$

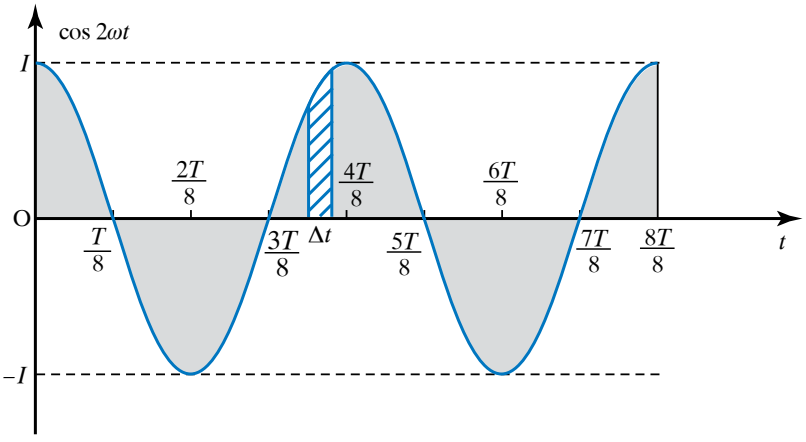
Ισχύει ότι $\Sigma \Delta t = T$. Γραφικά αποδεικνύεται ότι $\Sigma \cos 2\omega t = 0$ (σχ. 12.1.5). Συνεπώς $W = \frac{I_0^2 R}{2} T$.

Αν για το ίδιο χρονικό διάστημα T η ίδια αντίσταση R διαρρέεται από συνεχές ρεύμα I_Σ, η ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας W' που καταναλίσκεται σ' αυτήν είναι $W' = I_\Sigma^2 R \, T$.

Αν τα ποσά W και W' είναι ίσα μεταξύ τους, το συνεχές ρεύμα I_Σ είναι η ενεργός τιμή του εναλλασσομένου ρεύματος $I_{εν}$. Άρα:

$$\frac{I_0^2 R}{2} T = I_\Sigma^2 R T \quad \text{ή} \quad \frac{I_0^2}{2} = I_\Sigma^2$$

$$\text{ή} \quad I_\Sigma = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{άρα} \quad I_{εν} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$



Σχ. 12.1.5
Γραφική απόδειξη του ότι $\Sigma \cos 2\omega t = 0$.

Η ενεργός τάση $V_{εν}$ υπολογίζεται σε σχέση με το πλάτος V_0 της εναλλασσόμενης τάσεως από το Νόμο του Ohm, σύμφωνα με τον οποίο για το εναλλασσόμενο ρεύμα ισχύει ότι:

$$I_{εν}=\frac{V_{εν}}{R} \text{ ή } \frac{I_0}{\sqrt{2}}=\frac{V_{εν}}{R} \text{ ή } \frac{\frac{V_0}{R}}{\sqrt{2}}=\frac{V_{εν}}{R} \text{ άρα } V_{εν}=\frac{V_0}{\sqrt{2}}\,.$$

Από τις σχέσεις $I_{εν}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ και $V_{εν}=\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ προκύπτει ότι μπορούμε να υπολογίζομε το πλάτος του εναλλασσόμενου ρεύματος και της τάσεώς του, χρησιμοποιώντας τις ενδείξεις των οργάνων μετρήσεως, που είναι οι ενεργές τιμές.

12.1.3 Διανυσματική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών.

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία που αναφέρονται σε εναλλασσόμενο μέγεθος είναι η στιγμιαία τιμή, η μέγιστη τιμή ή πλάτος, η φάση, η αρχική φάση και η κυκλική συχνότητα. Πιο γενικά από ό,τι αναφέραμε προηγουμένως, ένα εναλλασσόμενο μέγεθος περιγράφεται από σχέση της μορφής $x=x_0\,\sin(\omega t+\varphi)$, όπου φ είναι η αρχική φάση του φυσικού μεγέθους, δηλαδή η φάση του τη χρονική στιγμή $t=0$.

Τα αρμονικά μεγέθη και οι σχέσεις μεταξύ τους μελετώνται καλύτερα αν τα παραστήσομε κατάλληλα με διαγράμματα περιστρεφόμενων διανυσμάτων.

Στο αριστερό τμήμα του σχήματος 12.1.6 φαίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, που κείται στο επίπεδο Oxy. Έχει σταθερή αρχή του το σημείο Ο και περιστρέφεται κατά τη θετική φορά (δηλ. αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με την κυκλική συχνότητα του εναλλασσόμενου μεγέθους. Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x είναι $\theta=\omega t+\varphi$.

Η γωνία φ παριστάνει την αρχική φάση, δηλαδή καθορίζει τη θέση του διανύσματος $\overrightarrow{OA_0}$ τη χρονική στιγμή $t=0$ s. Η τιμή της προβολής, που έχει την κάθε χρονική στιγμή το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ πάνω στον άξονα y, είναι $OM=(OA)\sin(\omega t+\varphi)$ και ισούται με τη στιγμιαία τιμή του εναλλασσομένου μεγέθους. Έτσι, η διανυσματική παράσταση με το περιστρεφόμενο διάνυσμα δίνει όλα τα χαρακτηριστικά στοιχεία που αντιστοιχούν στο εναλλασσόμενο μέγεθος.

Η διανυσματική παράσταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν αναφέρεται σε περισσότερα από ένα εναλλασσόμενα μεγέθη της ίδιας κυκλικής συχνότητας. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά φάσεως γίνεται αμέσως αντιληπτή και η πρόσθεση των ομοειδών εναλλασσομένων μεγεθών είναι απλή σύνθεση διανυσμάτων.

Στην Ελλάδα όπως και στην Ευρώπη το εναλλασσόμενο ρεύμα του δικτύου έχει συχνότητα $f=50$ Hz (στις ΗΠΑ $f=60$ Hz).

12.2 Ισχύς εναλλασσομένου ρεύματος.

12.2.1 Σε ωμικό αντιστάτη.

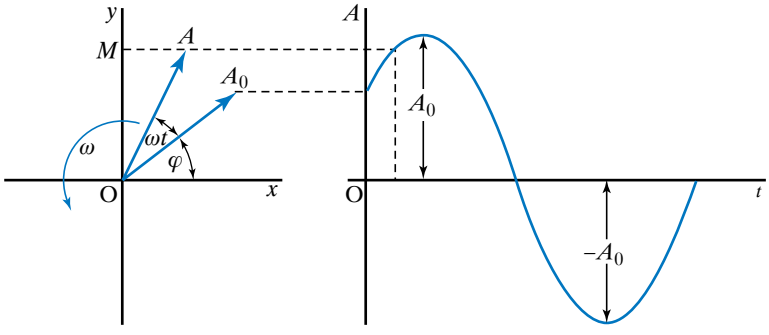
Γνωρίζομε ότι η ισχύς P του συνεχούς ρεύματος που τροφοδοτεί ωμικό αντιστάτη αντιστάσεως R είναι $P=IV=I^2R$, όπου V η τάση στα άκρα της αντιστάσεως και I το ρεύμα που τη διαρρέει.

Αν ο ωμικός αντιστάτης αντιστάσεως R συνδεθεί με εναλλασσόμενο ρεύμα η ισχύς που δαπανάται είναι $P=IV=I_0V_0\sin^2\omega t$ (σχ. 12.2.1).

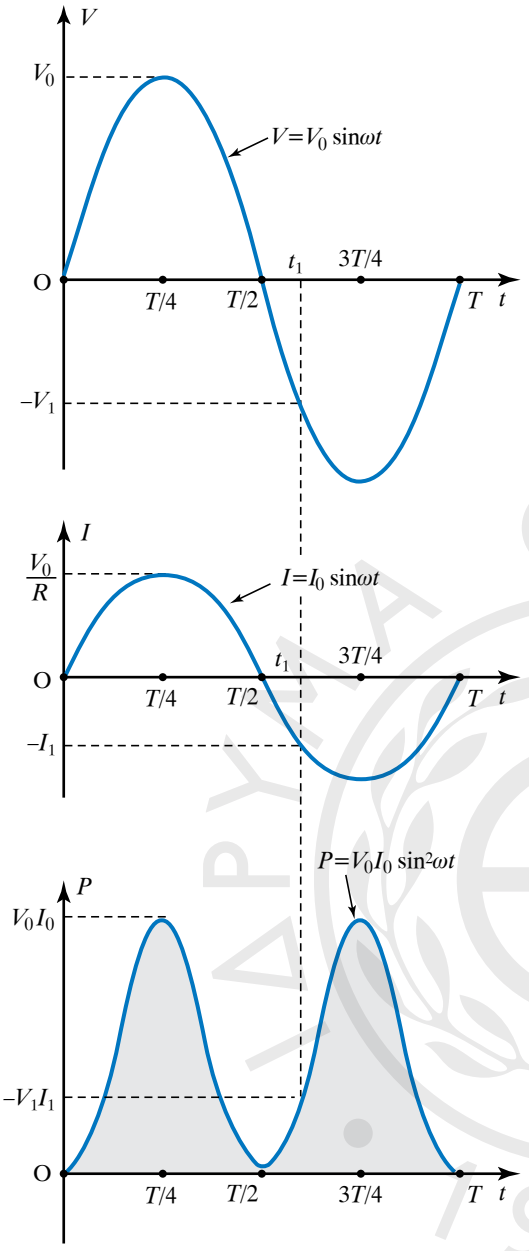
Σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$W=\frac{I_0^2\,R}{2}T \quad \text{ή} \quad W=\frac{I_0\,V_0}{2}T=I_{εν}\,V_{εν}\,T.$$

Επομένως, η μέση ισχύς που υπολογίζεται για μια περίοδο είναι $P=I_{εν}V_{εν}$. Η ισχύς σε μία περίοδο T, ισούται με το σκιασμένο εμβαδόν στο διάγραμμα για τη στιγμιαία ισχύ στο σχήμα 12.2.1.



Σχ. 12.1.6
Διανυσματική παράσταση και παράσταση με την ημιτονοειδή καμπύλη.



Σχ. 12.2.1

Τάση, ρεύμα και ισχύς εναλλασσομένου ρεύματος σε ωμική αντίσταση.

12.2.2 Σε πυκνωτή.

Αν στα άκρα πυκνωτή εφαρμοστεί τάση $V = V_0 \sin \omega t$, το ρεύμα που τον διαρρέει είναι:

$$I = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Αυτό οδηγεί στον ορισμό της χωρητικής αντίστασης Z_C, σύμφωνα με τη σχέση:

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Ισχύουν $V_0 = I_0 Z_C$, $V_{εν} = I_{εν} Z_C$.

Χαράζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του εναλλασσομένου ρεύματος και της τάσεώς του σε σχέση με τον χρόνο. Προκειμένου να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ισχύ τη χρονική στιγμή t_1, στη γραφική παράσταση του σχήματος 12.2.2, πολλαπλασιάζουμε την τιμή της τάσεως V_1 επί την τιμή I_1 του ρεύματος, δηλαδή $P_1 = I_1 V_1$.

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της στιγμιαίας ισχύος που προκύπτει, είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου και έχει κυκλική συχνότητα διπλάσια απ' αυτήν της τάσεως που εφαρμόζεται. Το εμβαδό της σκιασμένης επιφανείας της τελευταίας γραφικής παραστάσεως του σχήματος 12.2.2 ισούται με την ενέργεια που απορροφά ο πυκνωτής στη χρονική διάρκεια μίας περιόδου.

Παρατηρούμε ότι το συνολικό εμβαδό για χρόνο μίας περιόδου ισούται με μηδέν. Κατά το χρονικό διάστημα $(0, T/4)$ ο πυκνωτής φορτίζεται, άρα απορροφά ενέργεια απ' την πηγή, ενώ κατά το χρονικό διάστημα $(T/4, T/2)$ ο πυκνωτής εκφορτίζεται, αποδίδοντας στο κύκλωμα ενέργεια ίση μ' αυτήν, που είχε απορροφήσει. Κατά τα χρονικά διαστήματα $(T/2, 3T/4)$ και $(3T/4, T)$ επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία. Άρα η συνολική ενέργεια που απορροφά ο πυκνωτής απ' την πηγή στη διάρκεια μίας περιόδου είναι μηδέν. Συνεπώς, ο πυκνωτής, όταν συνδεθεί σε κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος, δεν καταναλώνει ενέργεια, αλλά τη μετατρέπει περιοδικά σε ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του και την αποδίδει περιοδικά στην πηγή.

12.2.3 Σε αυτεπαγωγή (πηνίο).

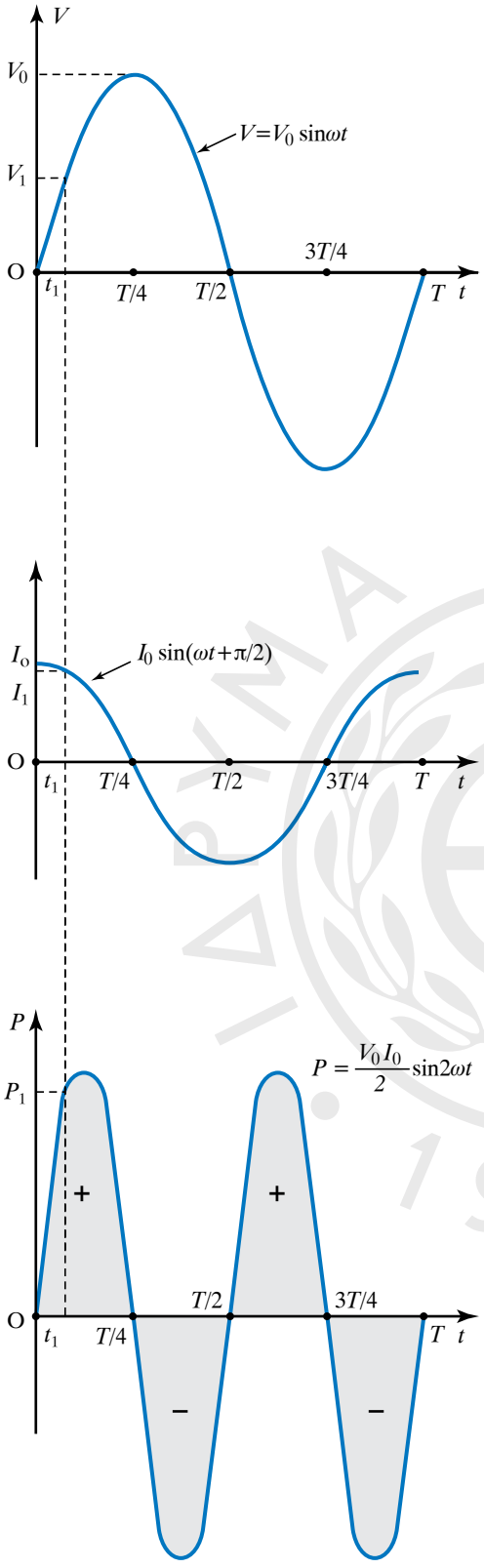
Στα άκρα πηνίου αυτεπαγωγής L υπάρχει τάση $V = V_0 \sin \omega t$. Αποδεικνύεται ότι απ' το πηνίο περνά ρεύμα $I = I_0 \sin(\omega t - \pi/2)$.

Αυτό οδηγεί στον ορισμό της επαγωγικής αντιστάσεως Z_L, σύμφωνα με τη σχέση $Z_L = \omega L$. Ισχύουν:

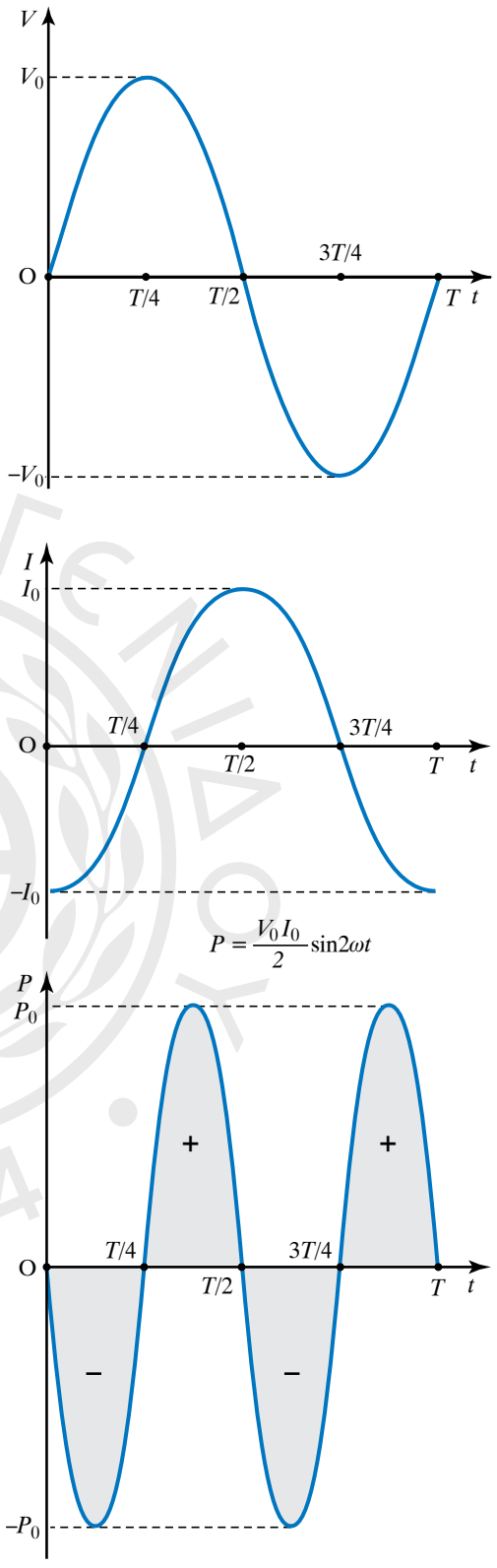
$$V_0 = I_0 Z_L \text{ και } V_{εν} = I_{εν} Z_L.$$

Το ιδανικό πηνίο όπως και ο πυκνωτής, δεν καταναλώνει ηλεκτρική ενέργεια όταν συνδεθεί σε κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος (σχ. 12.2.3).

Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση με τον πυκνωτή και παρατηρούμε ότι όση



Σχ. 12.2.2
Τάση, ρεύμα και ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος σε χωρητική αντίσταση.



Σχ. 12.2.3
Τάση, ρεύμα και στιγμιαία ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος σε επαγωγική αντίσταση.

ηλεκτρική ενέργεια προσφέρει η πηγή στο πηνίο, σε μία περίοδο τόση και της επιστρέφει το πηνίο (σχ. 12.2.3). Συνεπώς, στη διάρκεια μίας περιόδου, η ηλεκτρική ενέργεια που καταναλώνεται στο ιδανικό πηνίο είναι ίση με μηδέν. Άρα όταν το ιδανικό πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, δεν δαπανά ενέργεια, αλλά περιοδικά τη μετατρέπει σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου και στη συνέχεια την επιστρέφει στο κύκλωμα.

12.2.4 Μέση ισχύς.

Μέση ισχύς $\bar{P}$ του εναλλασσομένου ρεύματος ονομάζεται το πηλίκο του έργου W που παράγει το ρεύμα, μεταφέροντας ενέργεια απ' την πηγή στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος στη διάρκεια μίας περιόδου, διά την περίοδο T. Δηλαδή:

$$\bar{P} = W/T.$$

Αποδεικνύεται γενικώς ότι η μέση ισχύς δίνεται απ' τον τύπο $\bar{P} = P = I_{\varepsilon\nu}\, V_{\varepsilon\nu} \cos\theta$, όπου $I_{\varepsilon\nu}$ η ενεργός τιμή του ρεύματος, $V_{\varepsilon\nu}$ η ενεργός τιμή της τάσεώς του και θ η διαφορά φάσεως μεταξύ της τάσεως και του ρεύματος. Το $\cos\theta$ ονομάζεται ***συντελεστής ισχύος*** και παίρνει τιμές από 0 έως και $+1$.

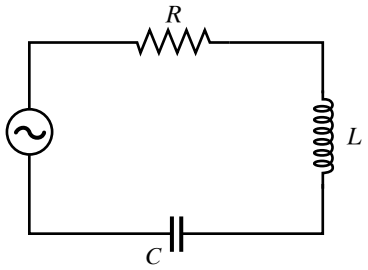
12.2.5 Απόδειξη της σχέσεως $P = I_{\varepsilon\nu} V_{\varepsilon\nu} \cos\theta$.

Θεωρούμε το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 12.2.4 που περιέχει ωμικό αντιστάτη, πυκνωτή και ιδανικό πηνίο σε σειρά.

Στο κύκλωμα αυτό η ηλεκτρική ενέργεια καταναλώνεται μόνο στον ωμικό αντιστάτη. Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ενεργού τιμής του ρεύματος $I_{\varepsilon\nu}$, έχομε ότι η ενέργεια που καταναλίσκεται κατά τη διάρκεια μίας περιόδου δίνεται απ' τη σχέση: $W = I_{\varepsilon\nu}^2 R\, t = I_{\varepsilon\nu}\, V_{R\varepsilon\nu}\, T$, όπου $V_{R\varepsilon\nu}$ η ενεργός τιμή της τάσεως στα άκρα του αντιστάτη αντιστάσεως R.

Η μέση ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα του σχήματος 12.2.4 δίνεται απ' τη σχέση:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{I_{\varepsilon\nu}\, V_{R_{\varepsilon\nu}}\, T}{T} = I_{\varepsilon\nu}\, V_{R\varepsilon\nu}.$$



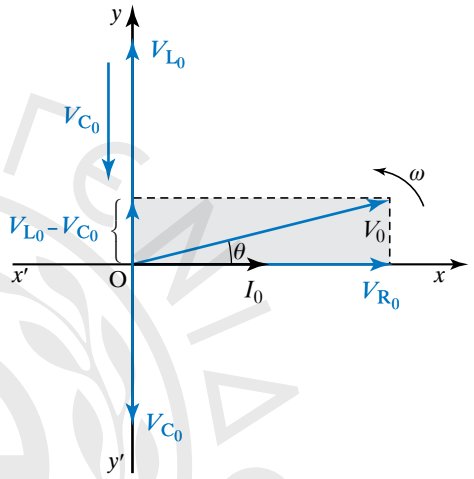
Σχ. 12.2.4
Κύκλωμα RLC.

Από το σχήμα 12.2.5 προκύπτει ότι:

$$V_{R_0} = V_0 \cos\theta \quad \text{ή} \quad \frac{V_{R_0}}{\sqrt{2}} = \frac{V_0 \cos\theta}{\sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad V_{R\varepsilon\nu} = V_{\varepsilon\nu} \cos\theta.$$

Άρα $P = I_{\varepsilon\nu} V_{\varepsilon\nu} \cos\theta$.

Όταν το κύκλωμα περιλαμβάνει μόνο (ιδανικό, δηλ. χωρίς απώλειες) πυκνωτή ή μόνο (ιδανικό, δηλ. χωρίς απώλειες) πηνίο, ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος είναι μηδέν. Ένα τέτοιο κύκλωμα δεν απορροφά κατά μέσο όρο ενέργεια.



Σχ. 12.2.5
Διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων σε κύκλωμα RLC.

12.3 Αντιστάσεις στο εναλλασσόμενο ρεύμα.

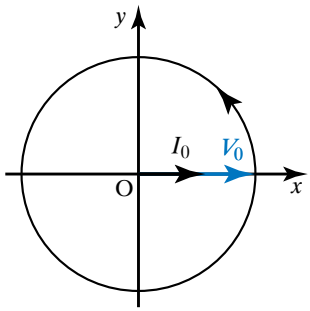
12.3.1 Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με ωμική αντίσταση.

Κύκλωμα περιλαμβάνει ωμική αντίσταση R και τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση της μορφής $V = V_0 \cos\omega t$. Όπως είπαμε προηγουμένως, το στιγμιαίο ρεύμα δίνεται απ' τη σχέση:

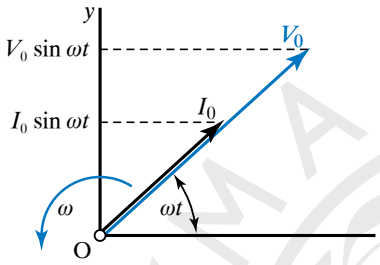
$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0 \sin\omega t}{R} = I_0 \sin\omega t,$$

όπου I_0 το πλάτος του ρεύματος που δίνεται από τον τύπο $I_0 = V_0/R$. Παρατηρούμε πως όταν το κύκλωμα της ωμικής αντιστάσεως διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, οι στιγμιαίες τιμές του ρεύματος και της τάσεως έχουν την ίδια φάση. Αφού τα μεγέθη είναι συμφασικά, μπορούμε να τα παραστήσομε με τη βοήθεια περιστρεφομένων διανυσμάτων μέτρου I_0, V_0, όπως στα σχήματα 12.3.1 και 12.3.2.

Αν τη χρονική στιγμή $t = 0\,\text{s}$ το διάνυσμα της τά-



Σχ 12.3.1
Διανυσματική παράσταση ρεύματος και τάσεως σε ωμική αντίσταση.



Σχ. 12.3.2
Κάθε χρονική στιγμή τα διανύσματα της τάσεως (V) και του ρεύματος (I) έχουν την ίδια διεύθυνση.

σεως βρίσκεται πάνω στον άξονα x, το διάνυσμα του ρεύματος θα βρίσκεται πάνω στον ίδιο άξονα. Σε κάθε άλλη χρονική στιγμή σχηματίζουν με τον άξονα x την ίδια γωνία $\varphi = \omega t$ και η προβολή τους στον άξονα y έχει τιμές $V = V_0 \sin \omega t$ και $I_0 \sin \omega t$. Αυτό αποδίδεται διανυσματικά στο σχήμα 12.3.2.

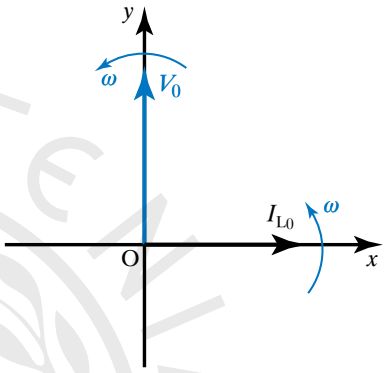
Από τη σχέση $I_0 = V_0/R$ που είδαμε νωρίτερα, προκύπτει διαιρώντας τα μέλη της διά $\sqrt{2}$, η σχέση $I_{\varepsilon\nu} = V_{\varepsilon\nu}/R$. Συνεπώς, ο Νόμος του Ohm ισχύει και για τις ενεργές τιμές του ρεύματος και της τάσεως. Επειδή η διαφορά φάσεως ανάμεσα στην τάση και στο ρεύμα είναι ίση με μηδέν, ο συντελεστής ισχύος ισούται με τη μονάδα ($\cos\theta = 1$). Άρα η ισχύς που αντιστοιχεί στο ωμικό κύκλωμα δίνεται απ' τις σχέσεις

$$P = I_{\varepsilon\nu} V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R} = I_{\varepsilon\nu}^2 R.$$

12.3.2 Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πηνίο.

Στα άκρα ιδανικού πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής L, εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $V = V_0 \sin \omega t$. Το πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα I_L που μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο, έχει την ίδια κυκλική συχνότητα ω με την τάση και η φάση του υστερεί της φάσεως της τάσεως κατά π/2. Η σχέση που περιγράφει το ρεύμα είναι $I_L = I_{L_0} \sin(\omega t - \pi/2)$.

Διαφορά φάσεως π/2 μεταξύ της τάσεως και του ρεύματος σημαίνει ότι, αν τη χρονική στιγμή t η τάση έχει τη μέγιστη τιμή της, πρέπει να παρέλθει χρόνος ίσος με $T/4$, προκειμένου και το ρεύμα να πάρει την αντίστοιχη μέγιστη τιμή του, δεδομένου ότι σε φάση 2π αντιστοιχεί χρόνος μίας περιόδου T. Η τάση και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο παριστάνονται με περιστρεφόμενα διανύσματα (σχ. 12.3.3, τη στιγμή $t = 0$ s).



Σχ. 12.3.3
Διανυσματικό διάγραμμα τάσεως και ρεύματος σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πηνίο.

Οι «δυσκολίες» (αντίσταση) στη δημιουργία του ρεύματος προκαλούνται από το φαινόμενο της αυτεπαγωγής. Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή συνεχώς μεταβάλλεται και σύμφωνα με τον Νόμο του Lenz σε κάθε χρονική στιγμή αντιδρά στις μεταβολές του ρεύματος, που την προκαλούν. Όταν η συχνότητα του ρεύματος είναι μεγάλη, οι εναλλαγές είναι πολύ γρήγορες και συνεπώς η τάση από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται είναι μεγάλη. Αποδεικνύεται ότι η επαγωγική αντίσταση κυκλώματος που περιέχει ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L είναι $Z_L = L\omega$ και ισχύει $Z_L = V_0/I_{L_0}$.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_{L_0}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{V_0}{L\omega}}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{L\omega\sqrt{2}} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{L\omega},$$

όπου $V_{\varepsilon\nu}$ η ενεργός τιμή της τάσεως στα άκρα του πηνίου.

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η ενεργός τιμή $I_{\varepsilon\nu}$ του ρεύματος μειώνεται, όταν αυξάνεται η συχνότητα του ρεύματος. Συνεπώς, όταν

η συχνότητα γίνεται μεγάλη, το ρεύμα πρακτικά μηδενίζεται. Αυτό το γεγονός βρίσκει εφαρμογή στα ***αποπνικτικά πηνία***. Όταν ένα τέτοιο πηνίο παρεμβάλλεται σε κύκλωμα, από το οποίο πρόκειται να περάσουν ρεύματα με διάφορες συχνότητες, οι υψηλότερες φράσσονται έντονα, ενώ οι χαμηλότερες συχνότητες συναντούν μικρή επαγωγική αντίσταση και διέρχονται απ' το πηνίο. Από τα αποπνικτικά πηνία διέρχεται ελεύθερα το συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα, ιδιαίτερα όταν είναι πολύ μικρή η ωμική του αντίσταση.

12.3.3 Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή.

Πυκνωτής έχει χωρητικότητα C και στους οπλισμούς του εφαρμόζεται τάση $V = V_0 \sin \omega t$. Το εναλλασσόμενο ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμά του είναι $I_C = I_{C_0} \sin(\omega t + \pi/2)$.

Ο πυκνωτής προκαλεί «δυσκολία» στη διέλευση εναλλασσόμενου ρεύματος, η οποία προέρχεται από τις εναλλασσόμενες μεταφορές ενέργειας στον πυκνωτή από το κύκλωμα και αντίστροφα. Το μέτρο για τη δυσκολία που προβάλλει ο πυκνωτής είναι η ***χωρητική αντίσταση*** και δίνεται απ' τη σχέση:

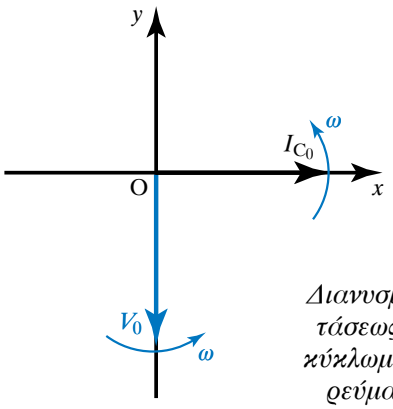
$$Z_C = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}} = \frac{V_0}{I_{C_0}} = \frac{1}{C\omega}.$$

Παρατηρούμε πως όταν ο πυκνωτής συνδέεται με πηγή συνεχούς τάσεως ($\omega = 0$), τότε η χωρητική του αντίσταση είναι άπειρη, οπότε δεν αφήνει το ρεύμα να διέρχεται συνεχώς από αυτόν, απλώς ο πυκνωτής φορτίζεται με το κατάλληλο φορτίο και στη συνέχεια μένει φορτισμένος χωρίς να κινούνται φορτία προς αυτόν ή από αυτόν. Αφού φορτιστεί, αποτελεί διακόπτη για το συνεχές ρεύμα.

Από τη σχέση για το Z_C προκύπτει ότι η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τη συχνότητα. Έτσι, τα ρεύματα υψηλής συχνότητας διαρρέουν εύκολα το κύκλωμα που περιλαμβάνει πυκνωτή, ενώ τα ρεύματα χαμηλής συχνότητας συναντούν μεγάλη αντίσταση. Η τάση στα άκρα του πυκνωτή και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι μεγέθη που μεταβάλλονται αρμονικά με τον χρόνο και μπορούν να παρασταθούν από περιστρεφόμενα διανύσματα (σχ. 12.3.4).

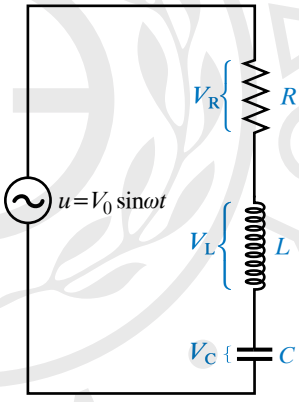
12.3.4 Κύκλωμα με αντιστάτη, πηνίο και πυκνωτή σε σειρά.

Θεωρούμε κύκλωμα που περιλαμβάνει ωμικό αντιστάτη αντιστάσεως R, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και ιδανικό πυκνωτή χωρητικότητας C, συνδεδεμένα σε σειρά (σχ. 12.3.5).



Σχ. 12.3.4
Διανυσματικό διάγραμμα τάσεως και ρεύματος σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή.

Το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, που αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση $I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το ρεύμα μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο, έχει την ίδια κυκλική συχνότητα με την τάση και παρουσιάζει διαφορά φάσεως θ σε σχέση με την τάση.

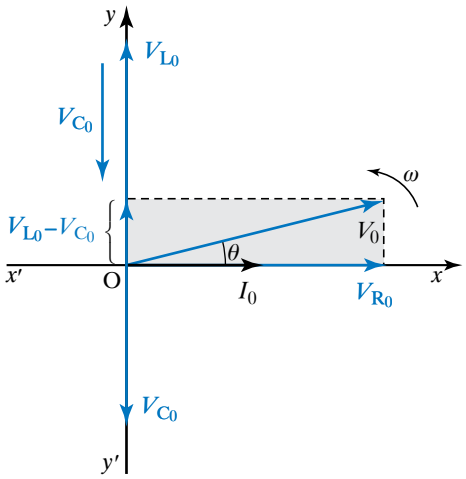


Σχ. 12.3.5
Κύκλωμα RLC σε σειρά.

12.3.5 Υπολογισμός της σύνθετης αντιστάσεως του κυκλώματος.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος λέγεται και ***εμπέδηση*** (εμπέδηση λέγεται και η χωρητική και η επαγωγική αντίσταση).

Ο ωμικός αντιστάτης, το πηνίο και ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένα σε σειρά, άρα την κάθε χρονική στιγμή διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα που δημιουργεί στις άκρες τους τάσεις V_R, V_L, V_C, αντίστοιχα. Η τάση V_R βρίσκεται σε φάση με το ρεύμα I. Η τάση V_L προηγείται του ρεύματος κατά π/2, ενώ η τάση V_C υστερεί του ρεύματος κατά π/2. Στο σχήμα 12.3.6 απεικονίζεται το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και του ρεύματος. Θεωρούμε μία χρονική στιγμή, κατά την οποία το διάνυσμα I του ρεύματος



Σχ. 12.3.6

Διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων.

βρίσκεται πάνω στον θετικό άξονα x. Τότε και το διάνυσμα V_{R_0} θα βρίσκεται πάνω στον ίδιο άξονα. Το διάνυσμα V_{L_0} της τάσεως που εφαρμόζεται στο πηνίο προηγείται κατά π/2 και βρίσκεται πάνω στον θετικό άξονα y. Το διάνυσμα V_{C_0} της τάσεως που εφαρμόζεται στον πυκνωτή υστερεί κατά π/2 και βρίσκεται πάνω στον αρνητικό άξονα y. Η συνισταμένη των τριών διανυσμάτων $V_{R_0}, V_{L_0}, V_{C_0}$ ισούται με το διάνυσμα V_0, που αντιστοιχεί στην εφαρμοζόμενη ημιτονοειδή τάση. Από το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων (σχ. 12.3.6) προκύπτει ότι:

$$V_0 = \sqrt{\left(V_{R_0}\right)^2 + \left(V_{L_0} - V_{C_0}\right)^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $V_{R_0} = I_0 R$, $V_{L_0} = I_0 \omega L$, $V_{C_0} = I_0 \cdot 1/\omega C$. Άρα η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ ή}$$

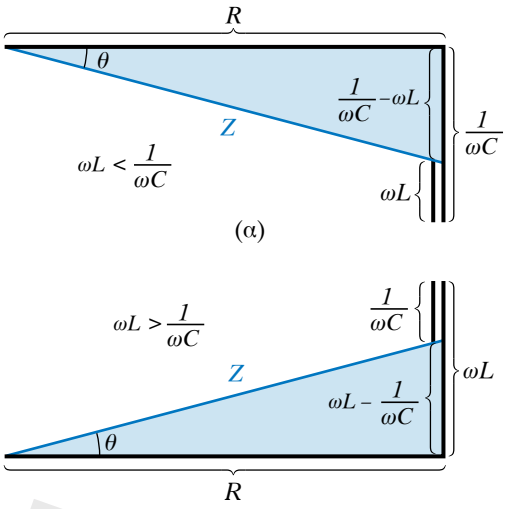
$$\frac{V_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Για την εμπέδηση Z του κυκλώματος έχομε εξ ορισμού $Z = V_0/I_0$ και επομένως ότι:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Χρήσιμα είναι τα διαγράμματα στο σχήμα 12.3.7.

Η διαφορά φάσεως μεταξύ της εφαρμοζόμενης ημιτονοειδούς τάσεως και του ρεύματος που διαρ-



Σχ. 12.3.7

Υπολογισμός της εμπεδήσεως Z, όταν η εμπέδηση του πηνίου είναι: (α) μικρότερη, (β) μεγαλύτερη από την εμπέδηση του πυκνωτή.

ρέει το κύκλωμα υπολογίζεται από τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος 12.3.7 και ισχύει ότι:

$$\tan\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Διακρίνομε τις περιπτώσεις:

1) Όταν $\omega L > 1/\omega C$, τότε η γωνία θ είναι θετική και το ρεύμα υστερεί ως προς την τάση, κατά γωνία θ, άρα $I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$.

2) Όταν $\omega L < 1/\omega C$, τότε η γωνία θ είναι αρνητική και το ρεύμα προηγείται της τάσεως, κατά γωνία θ, άρα $I = I_0 \sin(\omega t + \theta)$.

3) Όταν $\omega L = 1/\omega C$, τότε η διαφορά φάσεως ισούται με το μηδέν. Άρα η τάση στα άκρα του κυκλώματος και το διερχόμενο ρεύμα βρίσκονται σε συμφωνία φάσεως. Το κύκλωμα παρουσιάζει ***ωμική συμπεριφορά***.

Από τη σχέση $V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ προκύπτει ο Νόμος του Ohm για τα ενεργά μεγέθη:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Αλλάζομε συμβολισμό και θέτομε $\varphi = \theta$. Η μέση ισχύς του κυκλώματος υπολογίζεται από τη σχέση

$P = I_{εν} V_{εν} \cos\varphi$, όπου ο συντελεστής ισχύος είναι:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}\ .$$

και παίρνει μόνο θετικές τιμές ($0 \le \cos\varphi \le 1$), διότι η διαφορά φάσεως είναι δυνατό να παίρνει μόνο τις τιμές του διαστήματος $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Με συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων προκύπτει ότι $P = I_{εν}^2 R$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι η μέση ισχύς του κυκλώματος ισούται με την ισχύ στον ωμικό αντιστάτη αντιστάσεως R. Η αυτεπαγωγή και η χωρητικότητα αποτελούν άεργα στοιχεία στα κυκλώματα του εναλλασσομένου ρεύματος.

Παρατήρηση.

Στο συνεχές ρεύμα η τάση που εφαρμόζεται στο κύκλωμα, κατανέμεται στα στοιχεία του. Συνεπώς, αθροίζοντας τις επιμέρους τάσεις, υπολογίζομε την ολική τάση. Στο εναλλασσόμενο ρεύμα προσθέτομε αριθμητικά τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων. Τα πλάτη και οι ενεργές τιμές των τάσεων αθροίζονται διανυσματικά και λαμβάνεται υπόψη η διαφορά φάσεως.

12.3.6 Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά.

Από τη σχέση:

$$\frac{V_0}{I_0} = \sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

προκύπτει ότι το πλάτος του ρεύματος είναι:

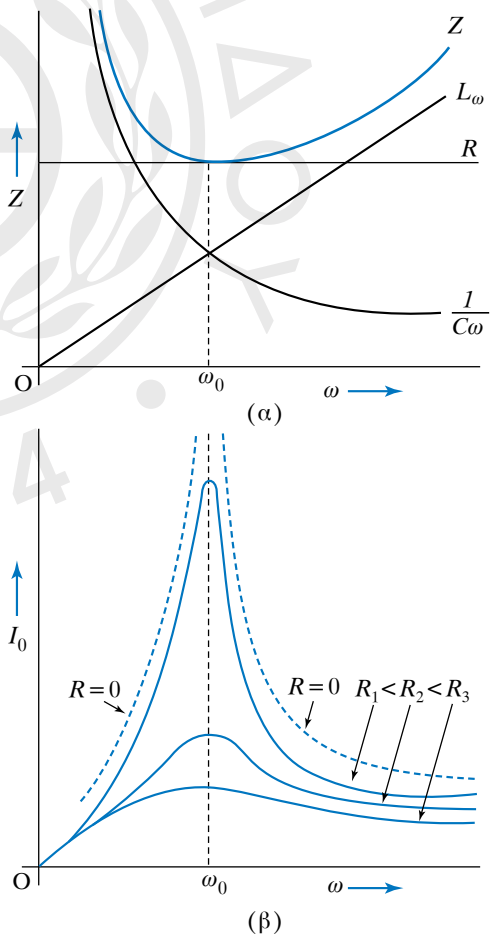
$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_0}{Z}\ .$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος του ρεύματος είναι ανάλογο προς το πλάτος της εφαρμοζόμενης τάσεως και εξαρτάται από την κυκλική της συχνότητα. Στις πολύ χαμηλές συχνότητες ο πυκνωτής είναι το κυριότερο εμπόδιο στη ροή του ρεύματος, ενώ, αντιθέτως, στις πολύ μεγάλες συχνότητες η αυτεπαγωγή αποτελεί το κύριο εμπόδιο. Θα δούμε ότι υπάρχει πάντα μία κυκλική συχνότητα ω_0, στην οποία η επαγωγική αντίσταση αντισταθμίζει τη χωρητική, με αποτέλεσμα η εμπέδηση που προβάλλει το κύκλωμα να γίνεται ελάχιστη και να ισούται με την ωμική αντίσταση. Διατηρούμε σταθερά όλα τα άλλα μεγέθη και μεταβάλλουμε μόνο το ω. Από τις αντιστάσεις του κυκλώματος μόνο η ωμική αντίσταση R παραμένει τότε σταθερή, διότι είναι ανεξάρτητη απ' την κυκλική συχνότητα. Η επαγωγική αντίσταση μεταβάλλεται ανάλογα με την ω και η χωρητική αντιστρόφως ανάλογα [σχ. 12.3.8(α)]. Παρατηρούμε ότι η εμπέδηση (σύνθετη αντίσταση) Z παραμένει πάντοτε μεγαλύτερη από την ωμική αντίσταση R. Τότε για μία ορισμένη τιμή του ω, έστω την ω_0, ισχύει ότι:

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C.$$

Η τιμή της ω_0 καθορίζεται από τα στοιχεία L, C του κυκλώματος και δεν έχει καμμία σχέση με την εναλλασσόμενη τάση που εφαρμόζεται στα άκρα του. Αντικαθιστούμε στη σχέση:

$$\frac{V_0}{I_0} = \sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



Σχ. 12.3.8

Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά.

και προκύπτει ότι το πλάτος του ρεύματος παίρνει τη μέγιστη τιμή του, που είναι $I_0 = V_0/R$. Η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται ίση με την ωμική αντίσταση R και η διαφορά φάσεως ρεύματος και τάσεως μηδενίζεται. Όταν σ' ένα κύκλωμα RLC σε σειρά ισχύει η σχέση $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$, τότε η εμπέδηση ισούται με την ωμική αντίσταση, το πλάτος του ρεύματος γίνεται μέγιστο και η τάση συμφασική με το ρεύμα. Η κατάσταση αυτή του κυκλώματος ονομάζεται ***συντονισμός***, διότι το αίτιο (τάση) και το αποτέλεσμα (ρεύμα) έχουν την ίδια φάση. Στην ιδανική περίπτωση, που η ωμική αντίσταση του κυκλώματος είναι μηδέν, το ρεύμα γίνεται άπειρο κατά το συντονισμό [σχ. 12.3.8(β)]. Στην πράξη δεν υπάρχει ιδανικό πηνίο και οι αγωγοί συνδέσεως έχουν πάντα μία ωμική αντίσταση, έστω μικρή. Συνεπώς το ρεύμα δεν τείνει στο άπειρο, αλλά λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του κατά τον συντονισμό. Η τιμή της κυκλικής συχνότητας, για την οποία μεγιστοποιείται το πλάτος I_0, ονομάζεται ***κυκλική ιδιοσυχνότητα*** του κυκλώματος και ισούται με

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}.$$

Η συχνότητα και η περίοδος που αντιστοιχούν στην ω_0 ονομάζονται αντίστοιχα ιδιοσυχνότητα και ιδιοπερίοδος του κυκλώματος RLC σε σειρά και είναι

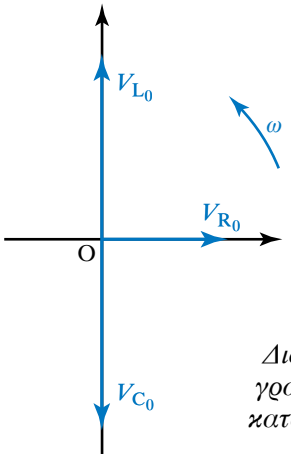
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}} \quad \text{και} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C}\,.$$

Από τη σχέση $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ προκύπτει ότι

$$I_0\,\omega_0 L = I_0 \cdot 1/\omega_0 C.$$

Το πρώτο μέλος της σχέσεως αυτής δίνει το πλάτος της τάσεως στα άκρα του πηνίου και το δεύτερο μέλος το πλάτος της τάσεως στα άκρα του πυκνωτή. Συνεπώς, κατά το συντονισμό ισχύει ότι $V_{C_0} = V_{L_0}$.

Στο διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων (σχ. 12.3.9) η συνισταμένη των V_C, V_L είναι μηδέν, διότι η τάση στο πηνίο προηγείται της τάσεως στον πυκνωτή κατά π.



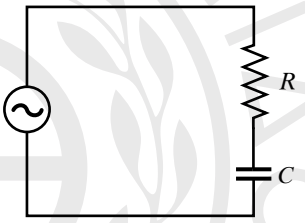
Σχ. 12.3.9
Διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων κατά τον συντονισμό.

12.3.7 Μελέτη κυκλώματος RC σε σειρά.

Θεωρούμε κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος που αποτελείται από ωμικό αντιστάτη αντιστάσεως R και πυκνωτή χωρητικότητας C (σχ. 12.3.10). Η εμπέδηση του Z υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

αν θέσομε $L = 0$ και είναι $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$.



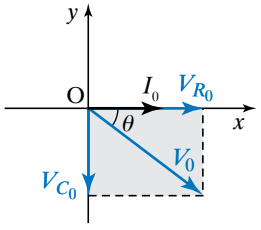
Σχ. 12.3.10
Κύκλωμα RC σε σειρά.

Η διαφορά φάσεως θ μεταξύ τάσεως και ρεύματος, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$ Αν θέσομε $L = 0$, είναι:

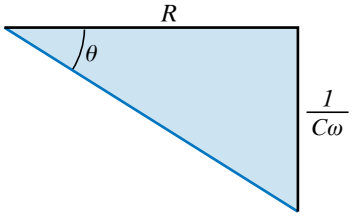
$$\tan\theta = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Επειδή η γωνία θ είναι αρνητική, το διάνυσμα του ρεύματος στο διάγραμμα των τάσεων θα προηγείται του διανύσματος της εφαρμοζόμενης τάσεως V_0 κατά θ (σχ. 12.3.11).



Σχ. 12.3.11
Διάγραμμα των τάσεων και του ρεύματος.

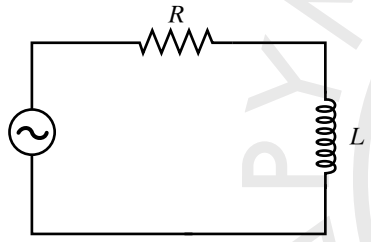
Παρατηρούμε ότι αν κάποια χρονική στιγμή το διάνυσμα I βρίσκεται πάνω στο θετικό άξονα x, το διάνυσμα V_R θα βρίσκεται στον ίδιο άξονα, ενώ το διάνυσμα V_C θα βρίσκεται στον αρνητικό άξονα y. Το σχήμα 12.3.12 δείχνει το διάγραμμα των εμπεδήσεων.



Σχ. 12.3.12
Διάγραμμα εμπεδήσεων σε κύκλωμα RC.

12.3.8 Μελέτη κυκλώματος RL σε σειρά.

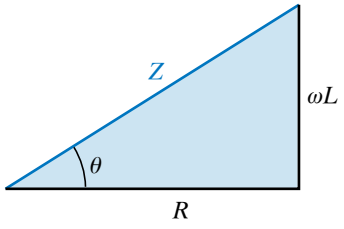
Θεωρούμε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος που αποτελείται από πηνίο αυτεπαγωγής L και ωμικό αντιστάτη αντιστάσεως R, συνδεδεμένων σε σειρά (σχ. 12.3.13).



Σχ. 12.3.13
Κύκλωμα RL σε σειρά.

Η εμπέδηση Z υπολογίζεται ως η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές R και ωL (σχ. 12.3.14). Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

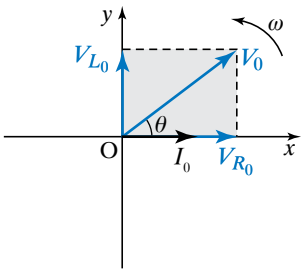
$$L=\frac{\sqrt{Z^2-R^2}}{\omega}.$$



Σχ. 12.3.14
Διάγραμμα εμπεδήσεων σε κύκλωμα RL.

Από το σχήμα 12.3.15 υπολογίζεται η διαφορά φάσεως θ μεταξύ της τάσεως και του ρεύματος. Ισχύει ότι:

$$\tan\theta=\frac{\omega L}{R}.$$

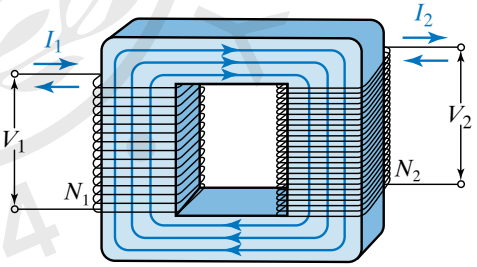


Σχ. 12.3.15
Διάγραμμα των τάσεων και του ρεύματος.

Η τάση στο κύκλωμα προηγείται του ρεύματος κατά γωνία θ.

12.4 Μετασχηματιστές. Γεννήτριες.

Ο μετασχηματιστής είναι διάταξη, με την οποία μεταβάλλομε την τάση του εναλλασσομένου ρεύματος. Η λειτουργία του οφείλεται στο φαινόμενο της αμοιβαίας επαγωγής. Αποτελείται από δύο πηνία Π_1, Π_2 τυλιγμένα στις δύο πλευρές κλειστού πλαισίου από μαλακό σίδηρο. Τα σύρματα των πηνίων συνήθως είναι χάλκινα με μονωτική επένδυση. Το Π_1 ονομάζεται ***πρωτεύον πηνίο***, συνδέεται με την πηγή εναλλασσόμενης τάσεως και αποτελείται από N_1 σπείρες σύρματος. Το κύκλωμα του πηνίου Π_1 ονομάζεται ***πρωτεύον κύκλωμα***. Το Π_2 ονομάζεται ***δευτερεύον πηνίο***, αποτελείται από N_2 σπείρες σύρματος και οι άκρες του συνδέονται με κύκλωμα που ονομάζεται ***δευτερεύον κύκλωμα*** (σχ. 12.4.1).



Σχ. 12.4.1
Μετασχηματιστής.

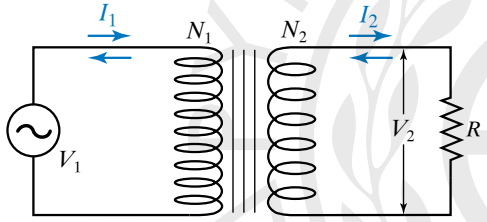
12.4.1 Λειτουργία του μετασχηματιστή.

Στα άκρα του πρωτεύοντος πηνίου Π_1 υπάρχει ενεργός τάση V_1 (τάση εισόδου) με συχνότητα f. Θα υποθέτομε ότι τα κυκλώματα είναι τέτοια που το ρεύμα και η τάση του πρωτεύοντος έχουν την ίδια φάση και το ίδιο ισχύει για τα αντίστοιχα του δευτερεύοντος. Το κύκλωμα του πρωτεύοντος πηνίου διαρρέεται από ενεργό ρεύμα (πρωτεύον ρεύμα) I_1. Μέσα στον πυρήνα του μαλακού σιδήρου σχηματίζεται εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που οι δυναμικές γραμμές του μένουν στο εσωτερικό του

μαλακού σιδήρου σχηματίζοντας κλειστό μαγνητικό κύκλωμα. Η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου προκαλεί μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από τις σπείρες του πηνίου Π_2· τότε (αμοιβαία επαγωγή) αναπτύσσεται στις άκρες του δευτερεύοντος πηνίου Π_2 εναλλασσόμενη τάση ίδιας συχνότητας f.

12.4.2 Εξισώσεις του μετασχηματιστή.

Ας θεωρήσομε ότι ο μετασχηματιστής είναι ιδανικός. Οι τάσεις στην είσοδο (στο πρωτεύον) V_1 και στην έξοδο (στο δευτερεύον) V_2 συνδέονται με τη σχέση $\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}$, όπου N_1, N_2 ο αριθμός των σπειρών του πρωτεύοντος και του δευτερεύοντος πηνίου (σχ. 12.4.2). Ο λόγος N_2/N_1 ονομάζεται ***λόγος μετασχηματισμού*** και είναι χαρακτηριστικός για κάθε μετασχηματιστή. Αν $N_2>N_1$ τότε $V_2>V_1$ και ο μετασχηματιστής λειτουργεί ως μετασχηματιστής υψώσεως της τάσεως.



Σχ. 12.4.2
Σχηματική παράσταση μετασχηματιστή.

Αν $N_1>N_2$, τότε $V_1>V_2$, και ο μετασχηματιστής λειτουργεί ως μετασχηματιστής υποβιβασμού της τάσεως.

Όταν το κύκλωμα του δευτερεύοντος πηνίου Π_2 είναι κλειστό, λέμε ότι ο μετασχηματιστής λειτουργεί με φορτίο. Όταν το κύκλωμα του δευτερεύοντος πηνίου Π_2 είναι ανοιχτό, τότε ο μετασχηματιστής λειτουργεί στο κενό. Στο πρωτεύον και στο δευτερεύον κύκλωμα η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι I_1 και I_2 αντιστοίχως. Η πηγή παρέχει στο πρωτεύον πηνίο Π_1 ισχύ $P_1=I_1V_1$. Το δευτερεύον πηνίο Π_2 παρέχει στο κύκλωμά του ισχύ $P_2=I_2V_2$. Για ιδανικό μετασχηματιστή, δηλαδή χωρίς απώλειες, από την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας ισχύει ότι:

$$P_1=P_2 \quad \text{ή} \quad I_1V_1=I_2V_2 \quad \text{άρα} \quad \frac{V_2}{V_1}=\frac{I_1}{I_2}.$$

Στην περίπτωση αυτή όλη η ισχύς που προσφέρεται στο πρωτεύον μεταφέρεται στο δευτερεύον πηνίο. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{I_1}{I_2}=\frac{N_2}{N_1}.$$

12.4.3 Συντελεστής αποδόσεως μετασχηματιστή.

Στην πράξη οι μετασχηματιστές δεν είναι ιδανικοί, έχουν απώλειες. Συντελεστής αποδόσεως α ενός μετασχηματιστή είναι το πηλίκο της ισχύος $P_{\delta\epsilon\upsilon\tau}$, η οποία λαμβάνεται στο δευτερεύον, και της ισχύος $P_{\pi\rho\omega\tau}$, η οποία τροφοδοτεί το πρωτεύον. Δηλαδή $\alpha=\frac{P_{\delta\epsilon\upsilon\tau.}}{P_{\pi\rho\omega\tau.}}$. Γενικά στους μετασχηματιστές οι απώλειες είναι πολύ μικρές (έως 5%). Οι μεγάλοι μετασχηματιστές που χρησιμοποιούνται στα δίκτυα μεταφοράς και διανομής της ηλεκτρικής ενέργειας έχουν απόδοση που φτάνει έως 99%. Για την περίπτωση του ιδανικού μετασχηματιστή είναι $\alpha=1$.

12.4.4 Γεννήτρια ρεύματος.

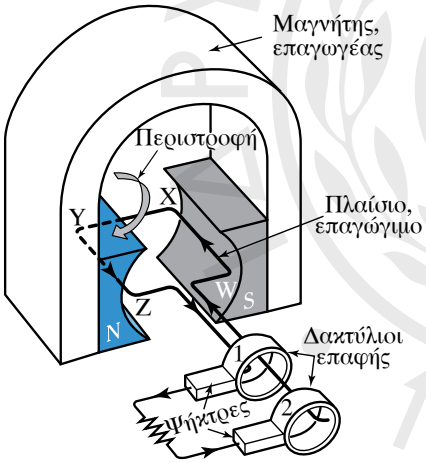
Η αρχή λειτουργίας της γεννήτριας περιλαμβάνει ισχυρό ομογενές μαγνητικό πεδίο και αγωγό που κινείται σε σχέση με το πεδίο. Η κίνηση του αγωγού διατηρείται ασκώντας του δύναμη, άρα δαπανώντας ενέργεια. Στην πράξη οι γεννήτριες που χρησιμοποιούνται διαθέτουν όχι μόνο έναν αλλά πολλούς αγωγούς, που είναι κατάλληλα ενωμένοι μεταξύ τους και σχηματίζουν τύμπανο, ώστε να αθροίζονται οι ΗΕΔ, που προκαλούνται από το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής. Με τη βοήθεια κινητηρίου μηχανής (βενζινομηχανής, πετρελαιομηχανής, ατμομηχανής, τουρμπίνας), περιστρέφεται το κυλινδρικό τύμπανο, καθώς και οι αγωγοί που βρίσκονται πάνω σ' αυτό.

Η γεννήτρια (εναλλακτήρας) εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από τρία κύρια μέρη: τον ***επαγωγέα***, το ***επαγώγιμο*** και τον ***συλλέκτη***. Ο επαγωγέας είναι ένας ισχυρός μαγνήτης, δηλαδή ηλεκτρομαγνήτης ή πεταλοειδής μαγνήτης. Μεταξύ των πόλων του μαγνήτη στρέφεται, περί άξονα κάθετο στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, το επαγώγιμο, που είναι πηνίο ή στην απλούστερη περίπτωση πλαίσιο. Στα άκρα του πλαισίου είναι στερεωμένοι δύο μεταλλικοί δακτύλιοι, που περιστρέφονται μαζί του. Κατά την περιστροφή του πλαισίου αναπτύσσεται στα άκρα του ΗΕΔ από ηλεκτρομαγνητική επαγωγή. Αντί για ένα χρησι-

μοποιούνται πολλά πλαίσια προσαρμοσμένα στον ίδιο άξονα περιστροφής, έτσι ώστε τα επίπεδά τους να σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους.

Ο συλλέκτης είναι το σύστημα των δύο μονωμένων μεταλλικών δακτυλίων μαζί με δύο τεμάχια γραφίτη (ψήκτρες), που παραμένουν ακίνητα και βρίσκονται σε τέλεια επαφή με τη λεία επιφάνεια των δακτυλίων. Οι ψήκτρες (κοινώς καρβουνάκια) χρησιμεύουν για μεταβίβαση του ρεύματος που παράγεται, στο εξωτερικό κύκλωμα.

Στο σχήμα 12.4.3 φαίνεται μία απλή μορφή γεννήτριας, όπου ο επαγωγέας είναι πεταλοειδής μαγνήτης και το επαγώγιμο ένα ορθογώνιο συρμάτινο πλαίσιο, στα άκρα του οποίου είναι στερεωμένοι δύο μεταλλικοί δακτύλιοι που περιστρέφονται μαζί του. Στους εναλλακτήρες μεγάλης ισχύος, αντί να περιστρέφονται τα πλαίσια (επαγώγιμο) περιστρέφεται ο ηλεκτρομαγνήτης, που παράγει το μαγνητικό πεδίο (επαγωγέας). Το ακίνητο μέρος της γεννήτριας ονομάζεται στάτορας (stator) και το περιστρεφόμενο ρότορας (rotor).



Σχ. 12.4.3
Γεννήτρια εναλλασσομένου ρεύματος.

12.4.5 Μονοφασικός εναλλακτήρας.

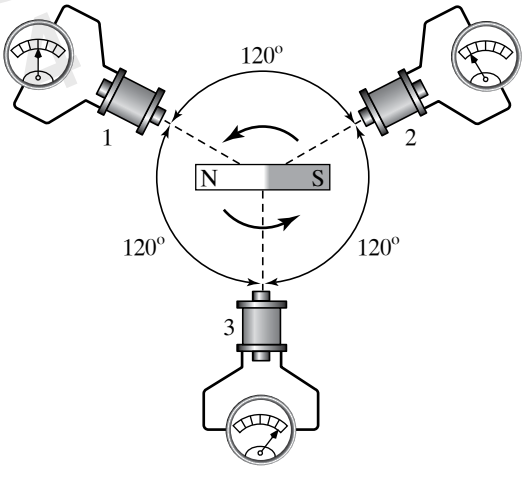
Το στρεφόμενο πλαίσιο είναι η πιο απλή μορφή γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος. Το παραγόμενο εναλλασσόμενο ρεύμα ονομάζεται ***μονοφασικό***. Τα ίδια φαινόμενα παρατηρούνται και όταν ένας μαγνήτης ή ηλεκτρομαγνήτης (επαγωγέας) στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μπροστά από ακίνητο πλαίσιο ή πηνίο (επαγώγιμο). Συνήθως ο επαγωγέας αποτελείται από ζεύγη μαγνητικών πόλων και το επαγώγιμο αποτελείται από τόσα πηνία, όσοι είναι οι μαγνητικοί πόλοι του επαγωγέα [σχ. 12.4.4(α)].

12.4.6 Τριφασικός εναλλακτήρας.

Στις γεννήτριες τριφασικού ρεύματος που χρησιμοποιεί η βιομηχανία, ο αριθμός των πηνίων (επαγώγιμο) είναι τριπλάσιος από τον αριθμό των μαγνητικών πόλων (επαγωγέας). Στο σχήμα 12.4.4(β) φαίνεται το διάγραμμα τριφασικής γεννήτριας, καθώς και οι άκρες του συστήματος των τριών κυκλωμάτων του ακίνητου επαγώγιμου.

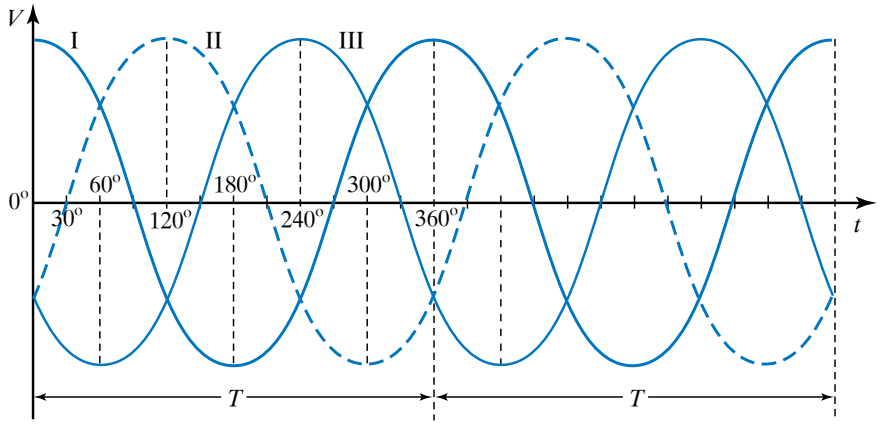
Σε κάθε ζεύγος αγωγών του επαγώγιμου (1, 2, 3) αναπτύσσεται εναλλασσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη, που η συχνότητά της ισούται με τον αριθμό των περιστροφών, που κάνει ο μαγνήτης σε ένα δευτερόλεπτο. Κάθε μία από αυτές τις ΗΕΔ καθυ-

(α)



(β)

Σχ. 12.4.4
Τριφασικός εναλλακτήρας.



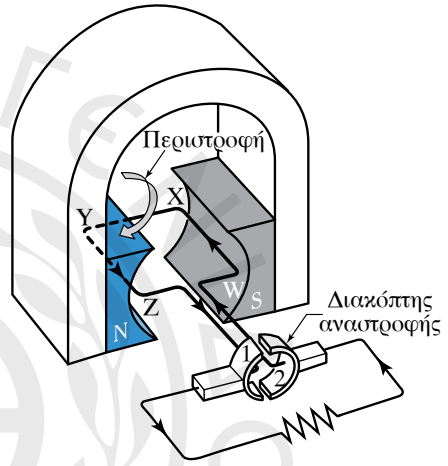
Σχ. 12.4.5
Οι τρεις αυτές ΗΕΔ αποτελούν ένα τριφασικό σύστημα.

στερεί κατά ⅓ της περιόδου σχετικά με την προηγούμενη, δηλαδή παρουσιάζει διαφορά φάσεως 120^o (σχ. 12.4.5).

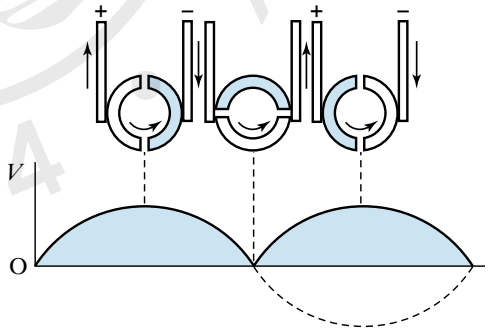
12.4.7 Γεννήτρια συνεχούς ρεύματος (δυναμό).

Κάθε γεννήτρια συνεχούς ρεύματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως κινητήρας και αντίστροφα οι κινητήρες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως γεννήτριες. Η αρχή λειτουργίας των γεννητριών συνεχούς ρεύματος είναι η ίδια με των εναλλακτήρων. Η διαφορά τους οφείλεται στη διαφορετική κατασκευή του δακτυλίου. Συγκεκριμένα, αντί για δύο έχουν μόνο έναν δακτύλιο, που είναι χωρισμένος σε δύο ημιδακτυλίους (σχ. 12.4.6). Οι ψήκτρες είναι έτσι τοποθετημένες, ώστε να αλλάζουν ημιδακτύλιο, όταν το πλαίσιο είναι σε κατακόρυφη θέση. Σ' αυτήν τη θέση του πλαισίου η επαγόμενη ΗΕΔ αντιστρέφεται, με αποτέλεσμα η μία ψήκτρα να διατηρείται πάντοτε θετική και η άλλη αρνητική (σχ. 12.4.7).

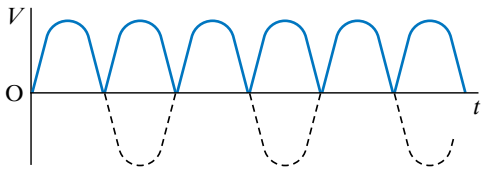
Η μορφή της τάσεως στα άκρα του επαγωγέα φαίνεται στο σχήμα 12.4.8. Συνήθως αντί για ένα χρησιμοποιούνται πολλά πλαίσια.



Σχ. 12.4.6
Γεννήτρια συνεχούς ρεύματος.



Σχ. 12.4.7
Οι δυο ψήκτρες αλλάζουν ημιδακτύλιο.



Σχ. 12.4.8
Η μορφή της τάσεως στα άκρα του επαγωγέα.

12.5 Τριφασικό ρεύμα. Μεταφορά ηλεκτρικού ρεύματος. Κινητήρες.

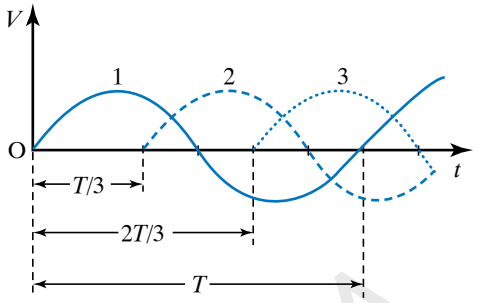
– Τριφασικό ρεύμα.

Οι μονοφασικοί εναλλακτήρες παράγουν εναλλασσόμενο ρεύμα που ονομάζεται ***μονοφασικό***. Αν το εξωτερικό κύκλωμα αποτελείται μόνο από ωμική αντίσταση οι εξισώσεις του εναλλασσομένου ρεύματος είναι $I = I_0 \sin(\omega t)$ και $V = V_0 \sin(\omega t)$. Θεωρούμε τρία μονοφασικά ρεύματα που έχουν την ίδια περίοδο T, το ίδιο πλάτος τάσεως V_0 και ρεύματος I_0, αλλά παρουσιάζουν μεταξύ τους δια-

φορά φάσεως 120° (σχ. 12.5.1). Ισχύουν αντίστοιχα οι εξισώσεις:

$$I_1 = I_0 \sin(\omega t),\ I_2 = I_0 \sin(\omega t + 120^\circ),$$
$$I_3 = I_0 \sin(\omega t + 240^\circ), \text{ και}$$

$$V_1 = V_0 \sin(\omega t),\ V_2 = V_0 \sin(\omega t + 120^\circ),$$
$$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 240^\circ).$$



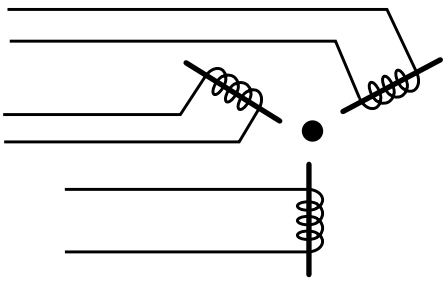
Σχ. 12.5.1
Τρία όμοια ρεύματα που έχουν το ένα με το άλλο διαφορά φάσεως 120° ή T/3.

Τριφασικό ρεύμα είναι ένα σύστημα τριών εναλλασσομένων ρευμάτων, τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος τάσεως (V_0) και ρεύματος (I_0) , την ίδια περίοδο T και το καθένα παρουσιάζει διαφορά φάσεως 120° σχετικά με καθένα από τα άλλα δύο, δηλαδή παρουσιάζει μία χρονική υστέρηση ίση με $T/3$.

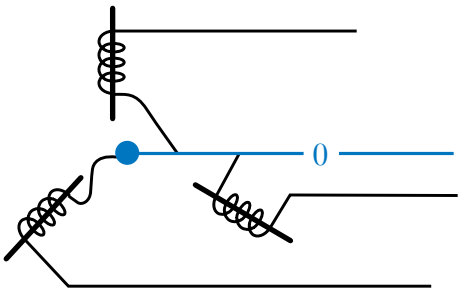
Αν τα άκρα των τριών πηνίων συνδεθούν με τρεις ίσες ωμικές αντιστάσεις, σχηματίζονται τρία κυκλώματα, τα οποία διαρρέονται από τρία εναλλασσόμενα ρεύματα, που αποτελούν το τριφασικό ρεύμα. Την τυχαία χρονική στιγμή t οι στιγμιαίες τιμές των τριών ρευμάτων είναι I_1, I_2, I_3 και ισχύει ότι $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

12.5.1 Μεταφορά τριφασικού ρεύματος.

Για τη μεταφορά τριφασικού ρεύματος φαίνεται ότι χρειάζονται έξι αγωγοί (σχ. 12.5.2). Αν όμως η



Σχ. 12.5.2
Μεταφορά 3 ρευμάτων.



Σχ. 12.5.3
Οι τρεις αγωγοί αντικαθίστανται από τον ουδέτερο αγωγό (0).

μία άκρη κάθε πηνίου συνδεθεί με τον ίδιο αγωγό, που ονομάζεται ουδέτερος (0), τότε για τη μεταφορά του τριφασικού ρεύματος χρειάζονται μόνο τέσσερεις αγωγοί (σχ. 12.5.3).

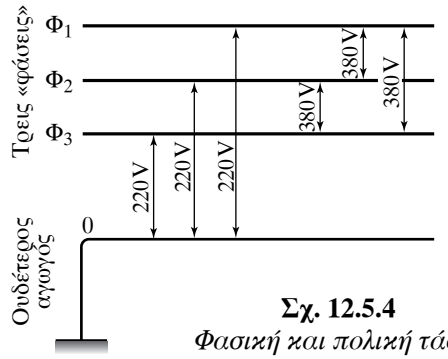
Το ολικό ρεύμα στον ουδέτερο αγωγό είναι ίσο με μηδέν ($I_1 + I_2 + I_3 = 0$). Οι άλλοι τρεις αγωγοί ονομάζονται ***φάσεις***. Προκειμένου ο ουδέτερος αγωγός να μην διαρρέεται από ρεύμα ($I_{ΟΛ} = 0$), πρέπει τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 που διαρρέουν τις τρεις φάσεις να έχουν το ίδιο πλάτος I_0. Για να συμβεί αυτό απαιτείται:

1) Οι καταναλωτές να χρησιμοποιούν μόνο ωμικές αντιστάσεις και όχι πηνία και πυκνωτές, διότι θα μεταβάλλουν τη διαφορά φάσεως των 120°.

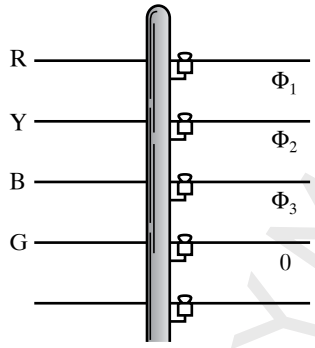
2) Οι ωμικές αντιστάσεις των καταναλωτών να είναι ίσες, διότι αν είναι διαφορετικές, τα τρία ρεύματα θα έχουν διαφορετικό πλάτος.

Επειδή οι παραπάνω προϋποθέσεις δεν μπορούν να ισχύσουν σε κάθε περίπτωση, ο ουδέτερος αγωγός διαρρέεται από κάποιο μικρό ρεύμα και επομένως πρέπει να υπάρχει.

Η ενεργός τάση μεταξύ της μίας φάσεως και του ουδετέρου αγωγού ονομάζεται ***φασική τάση*** ($V_{ΦΑΣ}$) και είναι ίση με 220 V. Η ενεργός τάση μεταξύ δύο φάσεων ονομάζεται ***πολική τάση*** ($V_{ΠΟΛ}$) και είναι ίση με 380 V. Στην κατανάλωση διατίθενται δύο τάσεις. Η φασική τάση 220 V χρησιμοποιείται στις οικιακές εφαρμογές, ενώ η πολική τάση 380 V σε τεχνικές εφαρμογές (σχ. 12.5.4). Στις κολόνες της ΔΕΗ μέσα στην πόλη, υπάρχουν πέντε (5) σύρματα (σχ. 12.5.5). Τρία σύρματα αντιπροσωπεύουν τις τρεις φάσεις ($Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$) του τριφασικού ρεύματος. Ένα λεπτότερο σύρμα αντιπροσωπεύει τον ουδέτερο αγωγό (0) και το τελευταίο χρησιμεύει για κοινοτικό φωτισμό. Τα σύρματα ανάλογα με τα χρώματά τους συμβολίζονται R (red), Y (yellow), B (blue) και G (green).



Σχ. 12.5.4
Φασική και πολική τάση.



Σχ. 12.5.5
Κολόνα της ΔΕΗ με 5 σύρματα.

12.5.2 Πλεονεκτήματα τριφασικού ρεύματος.

Τα πλεονεκτήματα του τριφασικού ρεύματος έναντι του μονοφασικού είναι τα εξής:

1) Κατά την παραγωγή τριφασικού ρεύματος υπάρχει οικονομία, διότι τα τρία επαγώγιμα τροφοδοτούνται με μαγνητική ροή από έναν μόνο επαγωγέα και όχι από τρεις.

2) Κατά τη μεταφορά τριφασικού ρεύματος απαιτούνται λιγότεροι αγωγοί (4 σύρματα μόνο, δηλ. 3 φάσεις και ο ουδέτερος) έναντι 3 αντίστοιχων του μονοφασικού (6 σύρματα), οπότε υπάρχει σημαντική οικονομία σε υλικά και ηλεκτρική ενέργεια (μικρότερες απώλειες).

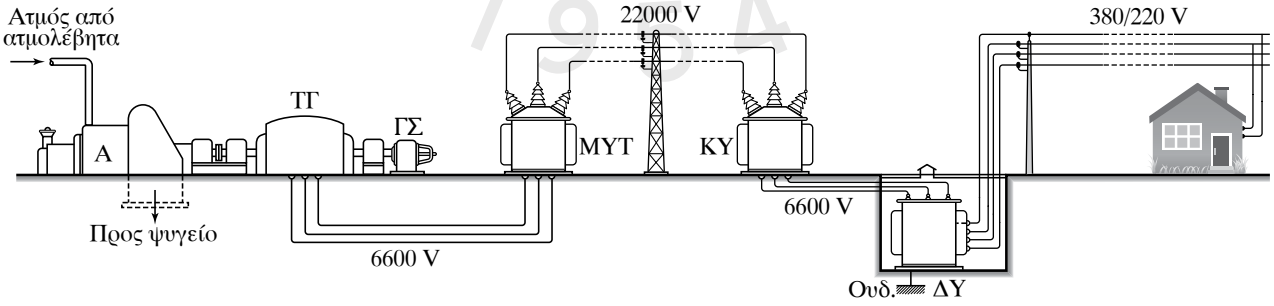
12.5.3 Μεταφορά ηλεκτρικού ρεύματος.

Ένα δίκτυο παραγωγής, μεταφοράς και διανομής ηλεκτρικής ενέργειας αποτελείται από:

1) Το εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.
2) Τον μετασχηματιστή ανυψώσεως της τάσεως.
3) Το σύστημα μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας.
4) Το μετασχηματιστή υποβιβασμού της τάσεως.
5) Τους καταναλωτές.

Το σχήμα 12.5.6 απεικονίζει μια τέτοια διάταξη με περισσότερες λεπτομέρειες.

Η απαίτηση για μικρό κόστος της ηλεκτρικής ενέργειας έχει σχέση με την οικονομικότερη μεταφορά της. Συνεπώς πρέπει να ελαχιστοποιούνται οι οποιεσδήποτε απώλειες ενέργειας. Σε κάθε περίπτωση στις γραμμές μεταφοράς θα υπάρχουν απώλειες λόγω του φαινομένου του Joule. Έστω εργοστάσιο ηλεκτροπαραγωγής, που παράγει ισχύ $P_{ΕΞ}$ (ισχύς εξόδου), η οποία πρόκειται να μεταφερθεί στον τόπο καταναλώσεως. Το συγκεκριμένο μέγεθος αποτελεί χαρακτηριστικό του κάθε εργοστασίου. Αν $V_{ΕΞ}$ η (ενεργός) τάση στην έξοδο του εργοστασίου και I το ηλεκτρικό ρεύμα (ενεργό) στη γραμμή μεταφοράς, ισχύει ότι $P_E = V_{ΕΞ} I$ (αν έχομε ωμικούς καταναλωτές).



Α=ατμοστρόβιλος
ΤΓ=τριφασική γεννήτρια,
ΓΣ= γεννήτρια συνεχούς ρεύματος για την τροφοδότηση του ρότορα της ΤΓ,
ΜΥΤ=μετασχηματιστής υψηλής τάσεως,
ΚΥ= κεντρικός υποσταθμός,
ΔΥ=δευτερεύων υποσταθμός,
Ο= ουδέτερος αγωγός.

Σχ. 12.5.6
Σχηματική παράσταση εργοστασίου ηλεκτροπαραγωγής και δικτύου μεταφοράς και διανομής της ηλεκτρικής ενέργειας.

Παρατηρούμε απ' τη σχέση αυτή ότι για δεδομένη ισχύ, τα μεγέθη I, $V_{ΕΞ}$ είναι αντιστρόφως ανάλογα, δηλαδή όταν το ένα αυξάνεται το άλλο μειώνεται. Προκειμένου οι απώλειες ισχύος, εξαιτίας του φαινομένου του Joule στη γραμμή μεταφοράς, να είναι μικρές, πρέπει η τιμή του ρεύματος να είναι μικρή. Άρα η τάση εξόδου $V_{ΕΞ}$ από το εργοστάσιο πρέπει να είναι μεγάλη. Έστω R η αντίσταση στη γραμμή μεταφοράς, η οποία είναι σταθερή για καθορισμένη απόσταση εργοστασίου-τόπου καταναλώσεως και για συγκεκριμένο υλικό κατασκευής των αγωγών μεταφοράς. Οι απώλειες ισχύος στη γραμμή μεταφοράς είναι:

$$P_{ΓΡ} = I^2 R = \frac{P_{ΕΞ}^2}{V_{ΕΞ}^2} R.$$

Παρατηρούμε απ' τη σχέση αυτή ότι ένας τρόπος για να περιορίσουμε τις απώλειες ισχύος, είναι να αυξήσουμε την τάση $V_{ΕΞ}$ του εργοστασίου. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στο εναλλασσόμενο ρεύμα (χρήση μετασχηματιστών). Αν το εργοστάσιο παρήγαγε συνεχές ρεύμα αυτό δεν θα ήταν εύκολο να γίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω γεννήτρια συνεχούς ρεύματος, που έχει στους πόλους της σταθερή τάση $V = 10.000\,\text{V}$ και προσφέρει ρεύμα $I = 20\,\text{A}$. Η ισχύς της γεννήτριας στο εξωτερικό κύκλωμα είναι $P = IV = 200.000\,\text{W}$. Αν η γραμμή μεταφοράς μέχρι τον τόπο καταναλώσεως παρουσιάζει αντίσταση $R = 300\,\Omega$, τότε μεταφέρεται θερμότητα προς το περιβάλλον με ισχύ $P_{ΘΕΡ} = I^2 R = 120.000\,\text{W}$. Συνεπώς στην κατανάλωση φτάνουν μόνο τα 80.000 W, άρα οι απώλειες ενέργειας είναι της τάξεως του 60%.

Αν η γεννήτρια στους πόλους της είχε δεκαπλάσια τάση $V' = 100\,000\,\text{V}$ και έδινε στο κύκλωμα την ίδια ισχύ $P = 200.000\,\text{W}$, θα έπρεπε το ρεύμα να είναι $I' = 2\,\text{A}$. Τότε στη γραμμή μεταφοράς, έχομε απώλειες ένεκα φαινομένου joule, ισχύς απωλειών $P'_{ΘΕΡ} = I^2 R = 1200\,\text{W}$. Συνεπώς, στην κατανάλωση αποδίδεται ισχύς 198.800 W, οπότε η απώλεια ενέργειας είναι σχεδόν ασήμαντη.

12.5.4 Φαινόμενη ισχύς $P_{φαιν}$.

Για τα εναλλασσόμενα ρεύματα γνωρίζομε ότι η πραγματική ισχύς ισούται με το γινόμενο της ενεργού τιμής της τάσεως επί την ενεργό τιμή του ρεύματος επί το συνημίτονο της μεταξύ τους διαφοράς φάσεως $φ$. Δηλαδή είναι $P = I_{εν} V_{εν} \cos φ$. Η πραγματική ισχύς μετρείται σε watt με όργανα που ονομάζονται ***βαττόμετρα***.

Το $\cos φ$, ο συντελεστής ισχύος, $0 \le \cos φ \le 1$, δεν είναι «επιθυμητό» μέγεθος. Όταν το ρεύμα και η τάση του βρίσκονται σε φάση, δηλαδή όταν $φ = 0$ είναι $\cos φ = 1$, ισχύει ότι $P = I_{εν} V_{εν}$. Αυτή η σχέση είναι η μέγιστη ισχύς που μπορεί να απορροφήσει καταναλωτής για δεδομένα $I_{εν}$, $V_{εν}$. Η μέγιστη αυτή ισχύς ονομάζεται ***φαινόμενη ισχύς***.

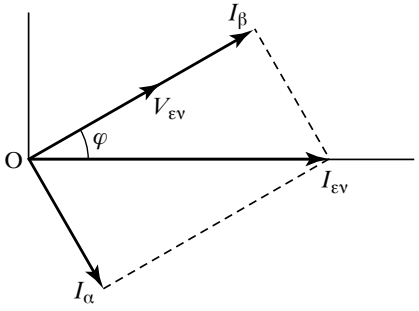
Η φαινόμενη ισχύς συνηθίζεται να μετρείται σε V·A (volt × ampere, βολταμπέρ). Από τη φαινόμενη ισχύ εξαρτάται πόσο μεγάλες ή πόσο μικρές είναι οι απώλειες που θα έχομε στους αγωγούς μεταφοράς της ηλεκτρικής ενέργειας. Η $I_{εν}$ καθορίζει τις διατομές των συρμάτων που πρέπει να χρησιμοποιήσομε, προκειμένου να μην υπερθερμαίνονται τα σύρματα εξαιτίας του φαινομένου Joule.

12.5.5 Άεργος ή αβαττική ισχύς $P_α$.

Έστω κύκλωμα που η διαφορά φάσεως μεταξύ της τάσεως και του ρεύματος είναι $φ$. Στο διανυσματικό διάγραμμα δείχνομε τα διανύσματα με πλάτος ίσο με αυτό των ενεργών τιμών τους και για σύμβολα χρησιμοποιούμε αυτά των ενεργών τιμών (σχ. 12.5.7). Αναλύομε το ρεύμα $I_{εν}$ σε δύο συνιστώσες, μία κατά τη διεύθυνση της $V_{εν}$ και μία κατά την κάθετο διεύθυνση στην $V_{εν}$. Είναι $I_β = I_{εν} \cos φ$ (βαττική ή ενεργός συνιστώσα) και $I_α = I_{εν} \sin φ$ (αβαττική ή άεργος συνιστώσα).

Το γινόμενο $V_{εν} I_β = V_{εν} I_{εν} \cos φ$ ονομάζεται ***πραγματική*** (μέση) ***ισχύς*** P.

Το γινόμενο $V_{εν} I_α = V_{εν} I_{εν} \sin φ$ ονομάζεται ***άεργος*** ή ***αβαττική ισχύς*** $P_α$. Η άεργος ισχύς $P_α$ έχει δια-



Σχ. 12.5.7
Ενεργός ($I_β$) και άεργος ($I_α$) συνιστώσα του ρεύματος.

στάσεις ισχύος, αλλά δεν παριστάνει κάποια καταναλισκόμενη ισχύ. Η καταναλισκόμενη ισχύς είναι:

$$V_{εν} I_α \cos π/2 = 0.$$

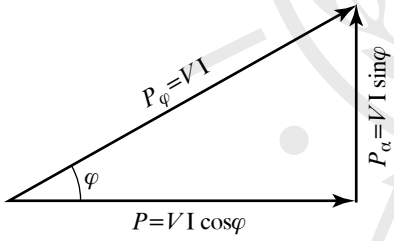
Για τον λόγο αυτόν ονομάζεται ***άεργη*** και μετρείται σε V·Ar, προκειμένου να διακρίνεται από την πραγματική και τη φαινόμενη ισχύ. Το r σε αυτήν τη μονάδα προέρχεται από τον αγγλικό όρο reactive (power)= ισχύς αντιδράσεως, δηλαδή όχι καταναλισκόμενη ή στα ελληνικά άεργη ισχύς. Από το διάγραμμα στο σχήμα 12.5.7 προκύπτει ότι:

$$I_{εν}^2 = I_α^2 + I_β^2 \text{ ή } V_{εν}^2\ I_{εν}^2 = V_{εν}^2\ I_α^2 + V_{εν}^2\ I_β^2$$

$$\text{ή } P_{φαιν}^2 = P_α^2 + P^2.$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος 12.5.8 ονομάζεται ***τρίγωνο ισχύος*** και δίνει τη γραφική παράσταση της σχέσεως $P_{φαιν}^2 = P_α^2 + P^2$.

Από το τρίγωνο ισχύος και από τη σχέση $P_{φαιν}^2 = P_α^2 + P^2$ προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά φάσεως $φ$, τόσο μεγαλύτερη είναι η άεργη και τόσο μικρότερη η πραγματική ισχύς, που καταναλώνεται υπό σταθερή φαινόμενη τάση. Για $φ = 0^o$ ($\cos φ = 1$, $\sin φ = 0$) όλη η φαινόμενη ισχύς αποδίδεται ως πραγματική ισχύς. Για $φ = \pm 90^o$ ($\cos φ = 0$, $\sin φ = 1$) όλη η φαινόμενη ισχύς μετατρέπεται σε άεργη ισχύ.

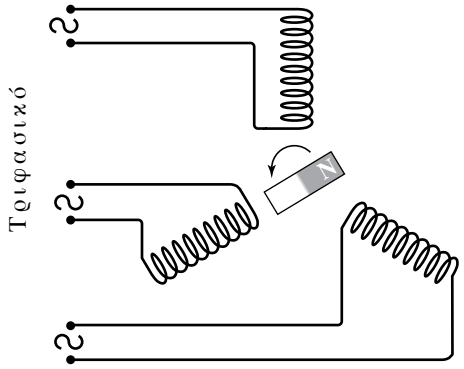


Σχ. 12.5.8
Τρίγωνο ισχύος.

12.5.6 Τριφασικοί κινητήρες.

Για να κατανοήσομε την αρχή λειτουργίας του τριφασικού κινητήρα, φανταζόμαστε την ακόλουθη διαδικασία. Στον χώρο μεταξύ των τριών πηνίων τοποθετούμε μαγνητική ράβδο στρεπτή περί κατακόρυφο άξονα (σχ. 12.5.9). Αν τροφοδοτήσομε τα τρία πηνία με τριφασικό ρεύμα, θα δούμε ότι η ράβδος θα περιστρέφεται.

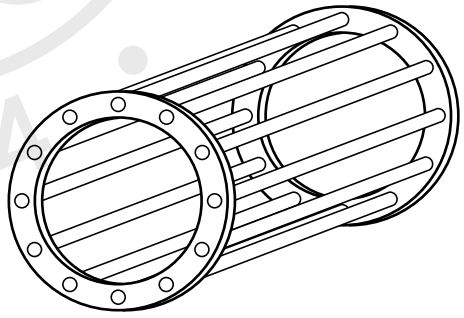
Αυτό οφείλεται στο ότι τα τρία πηνία, διαρρεόμενα από τριφασικό ρεύμα, σχηματίζουν στη θέση της ράβδου ένα στρεφόμενο μαγνητικό πεδίο. Δη-



Σχ. 12.5.9
Αρχή λειτουργίας τριφασικού κινητήρα.

λαδή ένα μαγνητικό πεδίο, του οποίου η διεύθυνση δεν διατηρείται σταθερή, αλλά περιστρέφεται. Ως εκ τούτου, η μαγνητική ράβδος τείνει να προσανατολισθεί στην εκάστοτε διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου και έτσι τίθεται σε περιστροφή.

Στην πραγματικότητα ο ρότορας του κινητήρα αποτελείται από έναν αριθμό χάλκινων ράβδων βραχυκυκλωμένων μεταξύ τους στα άκρα τους μέσω δύο χάλκινων στεφανιών (σχ. 12.5.10). Το σύστημα αυτό ονομάζεται ***κλωβός***. Όταν ο κινητήρας τροφοδοτηθεί με τριφασικό ρεύμα, αναπτύσσονται στο εσωτερικό των ράβδων του κλωβού επαγωγικά ρεύματα, τα οποία, αφού βρίσκονται μέσα στο μαγνητικό πεδίο που σχηματίζουν τα τρία πηνία, υφίστανται δυνάμεις Laplace, που θέτουν σε περιστροφή τον ρότορα.



Σχ. 12.5.10
Αρχή κατασκευής κλωβού.

12.5.7 Μονοφασικοί κινητήρες.

Οι μονοφασικοί κινητήρες χρησιμοποιούνται για οικιακή χρήση (ανεμιστήρες, απορροφητήρες, ηλεκτρικές σκούπες). Ο μονοφασικός κινητήρας με συλλέκτη είναι ανάλογης κατασκευής με τους κινητήρες συνεχούς ρεύματος, με τη διαφορά ότι ο σιδερένιος πυρήνας του ηλεκτρομαγνήτη δεν είναι

ολόσωμος, αλλά έχει υποδιαιρεθεί σε φύλλα για την αποφυγή των ισχυρών δινορρευμάτων (λέγονται και ρεύματα του Foucault). Τα δινορρεύματα έχουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να λειτουργήσουν και με συνεχές ρεύμα.

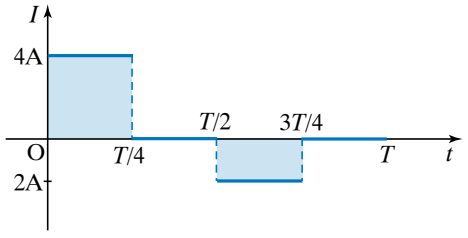
12.5.8 Κινητήρες και γεννήτριες.

Όταν μία γεννήτρια λειτουργεί, αλλά οι πόλοι της δεν είναι συνδεδεμένοι με εξωτερικό κύκλωμα, οπότε δεν παρέχει ρεύμα, λέμε ότι λειτουργεί σε κενό. Όταν παρέχει ρεύμα στο εξωτερικό κύκλωμα, λέμε ότι λειτουργεί υπό φορτίο. Στην περίπτωση αυτή, η ηλεκτρική ενέργεια παράγεται δαπανώντας έργο, το οποίο παρέχει η μηχανή που κινεί τη γεννήτρια. Ανάλογα ισχύουν και για τους κινητήρες. Οι ηλεκτρικοί κινητήρες χρησιμοποιούνται για να θέσουν σε κίνηση άλλες μηχανές, με τις οποίες είναι κατάλληλα συνδεδεμένοι. Όταν ένας κινητήρας θέτει σε κίνηση μία μηχανή, λέμε ότι λειτουργεί υπό φορτίο. Όταν περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς να κινεί άλλη μηχανή, λέμε ότι λειτουργεί στο κενό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Η στιγμιαία τιμή ημιτονοειδούς εναλλασσομένου ρεύματος είναι $I = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(628t)$ σε μονάδες του SI. Να υπολογίσετε:
α) Το πλάτος I_0.
β) Την ενεργό τιμή $I_{εν}$.
γ) Την κυκλική συχνότητα ω.
δ) Τη συχνότητα f
ε) Την περίοδο T.

2. Το περιοδικά μεταβαλλόμενο ρεύμα μεταβάλλεται μέσα σε χρόνο μίας περιόδου T, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Να υπολογίσετε την ενεργό τιμή αυτού του μεταβαλλόμενου ρεύματος.



Σχ. 1

3. Η στιγμιαία τιμή ημιτονοειδούς εναλλασσομένου ρεύματος γίνεται για πρώτη φορά ίση με την ενεργό τιμή του σε χρόνο $t_1 = 0{,}01$ s. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s η τιμή του είναι μηδέν και τη χρονική στιγμή $t_2 = 1/300$ s είναι $I_2 = 8$ A, να υπολογίσετε:
α) Τη συχνότητα f και
β) το πλάτος I_0 του ρεύματος.

4. Στα άκρα αντιστάτη αντιστάσεως $R = 20\ \Omega$ εφαρμόζεται ημιτονοειδής τάση με ενεργό τιμή $V_{εν} = 120$ V. Να υπολογίσετε:
α) Το πλάτος της τάσεως.
β) Το πλάτος του ρεύματος.
γ) Την ενεργό τιμή του ρεύματος.

5. Στα άκρα αντιστάτη αντιστάσεως $R = 4\ \Omega$ εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής $V = 40 \sin(80t)$οι τιμές είναι στο SI. Να υπολογίσετε:
α) Το πλάτος και την ενεργό τιμή της τάσεως.
β) Την συχνότητα της τάσεως.
γ) Το πλάτος και την ενεργό τιμή του ρεύματος στον αντιστάτη.
δ) Τη θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον από τον αντιστάτη σε χρόνο ενός λεπτού.

6. Ωμική αντίσταση τροφοδοτείται με εναλλασσόμενο ρεύμα $I = I_0 \sin\omega t$ συχνότητας $f = 50$ Hz και καταναλώνει μέση ισχύ $P = 200$ W. Να υπολογίσετε τη στιγμιαία ισχύ που καταναλώνει η αντίσταση τη χρονική στιγμή 0,01 s.

7. Στα άκρα ηλεκτρικής συσκευής ωμικής αντιστάσεως $R = 200\ \Omega$ εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $V = 400 \cdot \sqrt{2} \sin 314t$, στο SI. Να υπολογισθεί η μέση ισχύς που καταναλώνει η συσκευή.

8. Το πρωτεύον πηνίο ιδανικού μετασχηματιστή έχει 300 σπείρες και το δευτερεύον 100. Στα άκρα του πρωτεύοντος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής 120 V και στα άκρα του δευτερεύοντος συνδέεται αντίσταση $R = 20\ \Omega$. Να υπολογίσετε:
α) Την ενεργό τιμή της τάσεως στα άκρα του δευτερεύοντος.
β) Την ενεργό τιμή του ρεύματος στα άκρα του δευτερεύοντος.
γ) Την ισχύ που καταναλώνεται από την αντίσταση R.

9. Η ενεργός τιμή της τάσεως στο πρωτεύον πηνίο μετασχηματιστή είναι 100 V και η ισχύς που αποδίδεται στον ωμικό καταναλωτή του δευτερεύοντος είναι 900 W. Αν η απόδοση του μετασχηματιστή είναι $\alpha = 0{,}9$, να υπολογίσετε:
α) Την ενεργό τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα του πρωτεύοντος πηνίου.
β) Την ισχύ που εκφράζει τις απώλειες του μετασχηματιστή.

10. Το πρωτεύον πηνίο μετασχηματιστή τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής 1000 V και διαρρέεται από ρεύμα $I_{εν} = 5$ A. Όταν το δευτερεύον πηνίο τροφοδοτεί ωμικό αντιστάτη, στον

μετασχηματιστή υπάρχουν οι παρακάτω απώλειες ισχύος: 50 W στο πρωτεύον και 150 W στο δευτερεύον λόγω του φαινομένου Joule και 200 W στον πυρήνα λόγω ρευμάτων Foucault. Αν η ενεργός τιμή του ρεύματος στο δευτερεύον είναι 23 A, να υπολογίσετε:

α) Την ενεργό τιμή της τάσεως στα άκρα του δευτερεύοντος.

β) Την απόδοση του μετασχηματιστή.

11. Ηλεκτρική ενέργεια ισχύος 500 MW πρόκειται να μεταφερθεί μέσω γραμμής μεταφοράς που παρουσιάζει αντίσταση $R = 100\,\Omega$. Το εργοστάσιο παραγωγής μπορεί να την παράγει υπό τάση $V_1 = 500.000$ V ή υπό τάση $V_2 = 200.000$ V. Να υπολογίσετε για την κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις:

α) Το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγούς και

β) την απώλεια ισχύος κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς.

12. Σύρμα διαρρέεται από συνεχές $I_\Sigma = 3$ A και από εναλλασσόμενο ρεύμα $I_{\varepsilon\nu} = 4$ A. Να υπολογίσετε την ενεργό τιμή του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό.

13. Σε γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας προσφέρεται ισχύς $P = 1$ MW υπό τάση 2000 V. Αν η αντίσταση των αγωγών μεταφοράς είναι $R = 10\,\Omega$, να υπολογίσετε:

α) Την πτώση τάσεως στους αγωγούς και

β) το συντελεστή αποδόσεως της γραμμής μεταφοράς.

14. Σε μετασχηματιστή υποβιβασμού τάσεως, η ενεργός τάση του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος αντίστοιχα είναι $V_1 = 1000$ V και $V_2 = 220$ V. Στο κύκλωμα υψηλής τάσεως η ισχύς είναι $P_1 = 60$ kW και η απόδοση του μετασχηματιστή $\alpha = 98\%$. Να υπολογίσετε την ενεργό τιμή του ρεύματος στα κυκλώματα υψηλής και χαμηλής τάσεως του μετασχηματιστή.

15. Το πρωτεύον πηνίο μετασχηματιστή υποβιβασμού τάσεως τροφοδοτείται με τάση $V_1 = 10.000$ V και το δευτερεύον προσφέρει τάση $V_2 = 220$ V. Η απόδοση του μετασχηματιστή είναι $\alpha = 0{,}9$ και η ισχύς που δίνει είναι $P_2 = 90$ kW. Αν ο αριθμός των σπειρών στο πρωτεύον είναι $N_1 = 3000$ σπείρες και ο συντελεστής ισχύος στα δύο κυκλώματα είναι μονάδα, να υπολογίσετε:

α) Τον αριθμό των σπειρών στο δευτερεύον.

β) Την ισχύ που προσφέρεται στο πρωτεύον.

γ) Την ενεργό τιμή του ρεύματος που διαρρέει το πρωτεύον και το δευτερεύον.

16. Πηνίο συνδέεται με γεννήτρια συνεχούς ρεύματος τάσεως $V = 20$ V, οπότε διαρρέεται από ρεύμα $I = 5$ A. Όταν συνδεθεί το πηνίο με γεννήτρια εναλλασσομένου ρεύματος ενεργού τάσεως $V_{\varepsilon\nu} = 220$ V και συχνότητας $f = 50$ Hz, διαρρέεται από ρεύμα $I_{\varepsilon\nu} = 3$ A. Να υπολογίσετε το συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου.

17. Ωμικός αντιστάτης αντιστάσεως R και ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 60$ mH συνδέονται σε σειρά με πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος συχνότητας $f = 60$ Hz. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα πυκνωτή, που όταν συνδεθεί σε σειρά στο κύκλωμα, η ενεργός τιμή του ρεύματος:

α) Δεν μεταβάλλεται και

β) γίνεται μέγιστη.

18. Ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 2$ H συνδέεται στη σειρά με ωμικό αντιστάτη αντιστάσεως $R = 100\,\Omega$. Στα άκρα του συστήματος συνδέεται εναλλασσόμενη τάση $V = V_0 \sin \omega t$, συχνότητας $f = 60$ Hz. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσεως μεταξύ των τάσεων

α) V_R, V_L.

β) V_R, V.

γ) V, V_L.

19. Προκειμένου να υποβιβάσουμε τάση 220 V στην τιμή των 110 V, διαθέτομε τρεις μετασχηματιστές με λόγο σπειρών δευτερεύοντος και πρωτεύοντος $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$. Ποιον μετασχηματιστή θα χρησιμοποιήσουμε;

20. Θέλομε να υποβιβάσουμε την ενεργό τάση από 220 V σε 5 V. Αν το πηνίο χαμηλής τάσεως έχει 10 σπείρες να υπολογίσετε πόσες σπείρες πρέπει να έχει το πηνίο υψηλής τάσεως.

21. Σε μετασχηματιστή υποβιβασμού τάσεως, στο κύκλωμα υψηλής τάσεως εφαρμόζεται τάση 4000 V και η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι 20 A. Η απόδοση του μετασχηματιστή είναι 90%. Πόση είναι η ισχύς στο κύκλωμα χαμηλής τάσεως; Αν η ενεργός τάση στο κύκλωμα χαμηλής τάσεως είναι 200 V, να υπολογίσετε την ενεργό τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα χαμηλής τάσεως.

22. Πηνίο και πυκνωτής συνδέονται σε σειρά με πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος $220\,V$, μεταβλητής συχνότητας ω. Όταν $\omega = 20\,000\,rad/s$, η ενεργός τιμή του ρεύματος λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της που είναι 10 A. Αν $C = 0{,}5\,\mu F$ να υπολογίσετε την ωμική αντίσταση και τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Ταλαντώσεις

13.1 Απλή αρμονική ταλάντωση.

Οι ταλαντώσεις ανήκουν σε μία ευρύτερη κατηγορία κινήσεων, που ονομάζονται ***περιοδικές***. Είναι οι κινήσεις που επαναλαμβάνονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Περιοδική είναι η κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη, η κίνηση της προπέλας του πλοίου, της κούνιας, η κίνηση του εκκρεμούς κ.λπ..

Βασικά χαρακτηριστικά μιας περιοδικής κινήσεως είναι η περίοδος T και η συχνότητα f .

Περίοδο ονομάζομε τον χρόνο, στον οποίο επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο η περιοδική κίνηση. Συμβολίζεται με T και μονάδα μετρήσεώς της στο SI είναι το 1 s.

Συχνότητα ονομάζομε το πλήθος των επαναλήψεων της περιοδικής κινήσεως στη μονάδα του χρόνου. Συμβολίζεται με το f. Ορίζεται από τη σχέση $f = N/t$, όπου N το πλήθος των επαναλήψεων σε χρόνο t. Μονάδα μετρήσεώς της στο SI είναι το 1 Hz = 1/s.

Συχνότητα 1 Hz σημαίνει ότι έχομε 1 επανάληψη της κινήσεως κάθε 1 δευτερόλεπτο. Σημαντικός αριθμός περιοδικών κινήσεων έχουν μικρή έως πάρα πολύ μικρή περίοδο (10^{-6}s ή 10^{-9}s), άρα μεγάλη συχνότητα, γι' αυτό πολύ συχνά στην πράξη για τη συχνότητα χρησιμοποιούμε τα πολλαπλάσια της μονάδας Hz, όπως το 1 kHz = 10^3 Hz, το 1 MHz = 10^6 Hz και το 1 GHz = 10^9 Hz.

Ισχύει η σχέση περιόδου και συχνότητας, $f = 1/T$, διότι απ' τον ορισμό της συχνότητας έχομε $f = N/t$. Από τον ορισμό της περιόδου έχομε ότι για $N = 1$ είναι $t = T$, άρα $f = 1/T$.

Οι ταλαντώσεις είναι κινήσεις παλινδρομικές ως προς μια θέση ισορροπίας. Τις ταλαντώσεις μπορούμε να τις κατατάξομε σε διάφορες κατηγορίες σε σχέση με τον τρόπο ταλαντώσεως του συστήματος, με τη διατήρηση ή όχι της ενέργειας κατά την ταλάντωση και με το αν πρόκειται για ταλάντωση μηχανικού, ηλεκτρικού ή άλλου μεγέθους.

Έτσι, έχομε διαφόρων τύπων ταλαντώσεις, όπως:

1) ***Γραμμικές ταλαντώσεις.*** Είναι οι ταλαντώσεις που η παλινδρομική κίνηση του σώματος γίνεται πάνω σε ευθεία γραμμή.

2) ***Στροφικές ταλαντώσεις.*** Είναι οι ταλαντώσεις που η παλινδρομική κίνηση των σωμάτων είναι στροφική γύρω απ' τη θέση ισορροπίας.

3) ***Αμείωτες ταλαντώσεις.*** Είναι οι ταλαντώσεις, στις οποίες η ενέργεια διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της ταλαντώσεως.

4) ***Φθίνουσες ταλαντώσεις.*** Είναι οι ταλαντώσεις, στις οποίες έχομε απώλεια ενέργειας, με αποτέλεσμα τη μείωση του μέγιστου του μεγέθους που ταλαντεύεται (π.χ. του μέγιστου της απομακρύνσεως του εκκρεμούς ή του μέγιστου του ρεύματος, αν πρόκειται για ταλάντωση ηλεκτρικού κυκλώματος).

Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι μία ειδική περίπτωση της γραμμικής ταλαντώσεως, όπου η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου. Δηλαδή περιγράφεται από μια αρμονική σχέση της μορφής $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. Στοιχεία μιας απλής αρμονικής ταλαντώσεως είναι τα παρακάτω:

1) Στη ***μηχανική ταλάντωση*** η θέση ισορροπίας είναι η θέση γύρω απ' την οποία εξελίσσεται η ταλάντωση κι εκεί η δύναμη που είναι η αιτία της ταλαντώσεως είναι μηδέν.

2) Η ***στιγμιαία τιμή*** του ταλαντούμενου μεγέθους που για μηχανικό σύστημα είναι η απομάκρυνση απ' τη θέση ισορροπίας.

3) Το ***πλάτος*** είναι η μέγιστη τιμή του ταλαντούμενου μεγέθους, το οποίο για μηχανικό σύστημα είναι η μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας.

4) Η ***περίοδος*** είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση.

5) ***Συχνότητα*** είναι το πλήθος των ταλαντώσεων ανά μονάδα χρόνου.

6) ***Κυκλική συχνότητα*** $\omega = 2\pi f$, $\omega = 2\pi/T$, μονάδα μετρήσεως της είναι το rad/s.

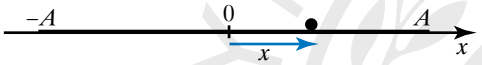
7) ***Στιγμιαία φάση*** είναι η έκφραση $(\omega t + \varphi_0)$. Μονάδα μετρήσεως της είναι το rad.

8) ***Αρχική φάση*** είναι η φάση φ_0 τη στιγμή $t = 0$.

Στην πράξη, η απλή αρμονική ταλάντωση δεν είναι ακριβώς περιοδική, διότι υπάρχουν απώλειες ενέργειας, για παράδειγμα τριβές. Έτσι, ενώ γίνεται ταλάντωση περί το μηδέν, οι μέγιστες τιμές του ταλαντούμενου μεγέθους μειώνονται με τον χρόνο. Τα συστήματα που πραγματοποιούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις ονομάζονται ***απλοί αρμονικοί ταλαντωτές***. Απλός αρμονικός ταλαντωτής είναι το σύστημα ελατήριο-μάζα ή το απλό εκκρεμές (για μικρού πλάτους ταλαντώσεις).

13.1.1 Σχέσεις για την (μηχανική, γραμμική) απλή αρμονική ταλάντωση.

Θεωρούμε υλικό σημείο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στον άξονα x με θέση ισορροπίας την $x = 0$ (σχ. 13.1.1). Για την περιγραφή της ταλαντώσεως χρησιμοποιούμε τις σχέσεις για την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου που ταλαντώνεται, ως προς τον χρόνο.



Σχ. 13.1.1
Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στον άξονα x.

1) Εξισωση απομάκρύνσεως:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

2) Εξίσωση ταχύτητας: $u = u_0\cos(\omega t + \varphi_0)$, όπου $u_0 = \omega A$ η μέγιστη ταχύτητα, την οποία έχει το σώμα, όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας.

Απόδειξη.

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad u = \frac{d[A\sin(\omega t + \varphi_0)]}{dt},$$

$$u = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad u = u_0\cos(\omega t + \varphi_0).$$

3) Εξίσωση επιταχύνσεως:

$$a = -a_0\sin(\omega t + \varphi_0)$$

όπου $a_0 = \omega^2 A$ είναι η μέγιστη επιτάχυνση, την οποία έχει το σώμα στις ακραίες θέσεις.

Απόδειξη.

$$a = \frac{du}{dt},\ a = \frac{d[u_0\cos(\omega t + \varphi_0)]}{dt},$$

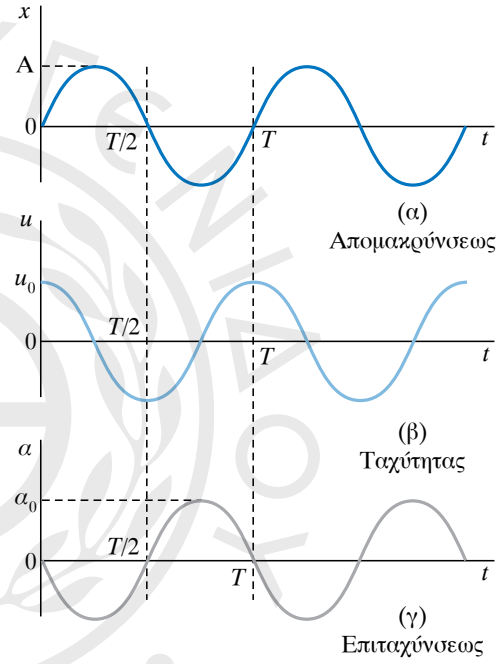
$$a = \frac{d[\omega A\cos(\omega t + \varphi_0)]}{dt}$$

$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$a = -a_0\sin(\omega t + \varphi_0),\ a_0 = \omega^2 A.$$

Στην περίπτωση που η αρχική φάση είναι μηδέν ($\varphi_0 = 0$), οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή $x = A\sin\omega t$, $u = u_o\cos\omega t$, $a = -a_0\sin\omega t$.

Σχεδιάζομε τις γραφικές παραστάσεις της απομακρύνσεως $x = A\sin\omega t$, της ταχύτητας $u = u_o\cos\omega t$ και της επιταχύνσεως $a = -a_0\sin\omega t$ (σχ. 13.1.2). Κάνομε χρήση του πίνακα 13.1.



Σχ. 13.1.2
Διαγράμματα (α) απομακρύνσεως, (β) ταχύτητας και (γ) επιταχύνσεως με αρχική φάση $\varphi_0 = 0$.

Πίνακας 13.1

t	***ωt***	***x***	***u***	***a***
0	0	0	u_o	0
$T/4$	π/2	A	0	$-a_0$
$T/2$	π	0	$-u_o$	*0*
$3T/4$	3π/2	$-A$	0	a_0
T	2π	0	u_o	0

13.1.2 Η δύναμη στην απλή αρμονική ταλάντωση.

Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχει κάθε χρονική στιγμή επιτάχυνση a, για την

οποία σύμφωνα με τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα υπεύθυνη είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα.

Αυτή η δύναμη ονομάζεται ***δύναμη επαναφοράς***, διότι τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας. Θα αποδείξομε ότι είναι της μορφής $F = -kx$, το k ονομάζεται ***σταθερά επαναφοράς***. Το (–) δηλώνει ότι η δύναμη και η απομάκρυνση έχουν πάντοτε αντίθετη φορά. Το k μετρείται σε N/m.

Θα υπολογίσομε τη δύναμη που ασκείται σε σώμα μάζας m, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, άρα η κίνησή του περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_o),\ u = u_o\cos(\omega t + \varphi_o),$$
$$a = -a_0\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι δέχεται δύναμη:

$$F = ma,\ \text{όμως}\ a = -a_o\sin(\omega t + \varphi_o),$$
$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_o).$$

Άρα:
$$F = m(-\omega^2)A\sin(\omega t + \varphi_o),$$
$$F = m(-\omega^2)A\sin(\omega t + \varphi_o),$$
$$F = m(-\omega^2 x),$$
$$F = -m\omega^2 x,\quad F = -kx,\quad \text{όπου}\ k = m\omega.$$

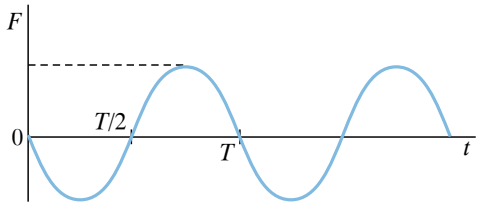
Με χρήση της παραπάνω σχέσεως μπορούμε να υπολογίσομε την περίοδο ταλαντώσεως ενός συστήματος και να αντιληφθούμε τον τρόπο, με τον οποίο εξαρτάται από τα τεχνικά χαρακτηριστικά του, τα οποία σχετίζονται με το k και το m.

Είναι: $k = m\omega^2$, $\omega^2 = k/m$,

$$\omega = \sqrt{k/m},\ \frac{2\pi}{T} = \sqrt{k/m},\ T = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

Παρατηρούμε ότι η περίοδος της ταλαντώσεως εξαρτάται απ' τη σταθερά επαναφοράς k του συστήματος και από τη μάζα του m. Για ένα ελατήριο το k είναι χαρακτηριστική σταθερά του ελατηρίου.

Η γραφική παράσταση δυνάμεως-χρόνου φαίνεται στο σχήμα 13.1.3.



Σχ. 13.1.3
Γραφική παράσταση δυνάμεως-χρόνου.

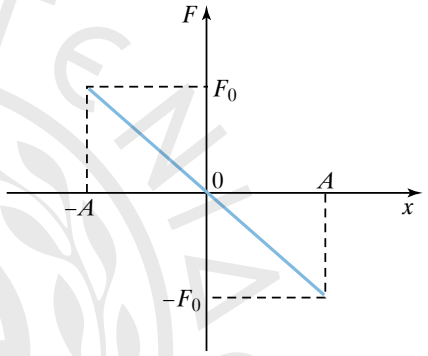
Έχομε $F = -k\,x$, $F = -kA\sin(\omega t + \varphi_o) =$
$= -F_o\sin(\omega t + \varphi_o)$.

Από τη σχέση $F = -k\,x$ σχεδιάζομε τη σχέση δυνάμεως απομακρύνσεως (σχ. 13.1.4).

Τα ανωτέρω αποτελέσματα για τον απλό γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή προκύπτουν αν ξεκινήσομε απ' τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής, τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, που είναι η διαφορική εξίσωση:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Η λύση της διαφορικής εξισώσεως μάς οδηγεί στην $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ και στη συνέχεια στις άλλες για την ταχύτητα και επιτάχυνση.



Σχ. 13.1.4
Γραφική παράσταση δυνάμεως-απομακρύνσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σώμα μάζας $m = 2\,\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με τα εξής χαρακτηριστικά: α) συχνότητα ταλαντώσεως $f = 10\,\text{Hz}$, β) πλάτος ταλαντώσεως $A = 0{,}30\,\text{m}$ γ) τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από θέση $x > 0$ έχοντας ταχύτητα με κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας και ίση με τη μισή ταχύτητα απ' αυτήν που έχει όταν διέρχεται απ' τη θέση ισορροπίας. Αξιοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες, να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις, της απομακρύνσεως, της ταχύτητας, της επιταχύνσεως και της δυνάμεως επαναφοράς, που περιγράφουν την εξέλιξη της παραπάνω κινήσεως.

Λύση

Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι: $x = A\sin(\omega t + \varphi_o)$, $x = A\sin(2\pi f t + \varphi_o)$. Από τις πληροφορίες έχομε $A = 0{,}30\,\text{m}$, $f = 30\,\text{Hz}$.

Υπολογίζομε την αρχική φάση φ_o (όλα είναι στο SI).

$$u = u_o\cos(2\pi ft + \varphi_o),\ -\frac{u_o}{2} = u_o\cos(2\pi 0t + \varphi_o),$$

$$-\frac{u_o}{2} = u_o\cos(2\pi 0t + \varphi_o),$$

$$-\frac{1}{2} = \cos\varphi_o,\quad \varphi_o = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}\ \text{όμως}\ 0 \le \varphi_o < 2\pi$$

και για $t = 0$ είναι $x > 0$ άρα $\varphi_o = \frac{2\pi}{3}$.

Επομένως $x = 0{,}30\sin(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3})$

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0\cos(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3}) \\ u_0 &= \omega A = 2\pi 10 \cdot 0{,}30 = 6\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = 6\pi\cos(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3})$$

$$\left.\begin{aligned} a &= -a_0\sin(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3}) \\ a_0 &= \omega^2 A = (2\pi 10)^2 \cdot 0{,}30 = 1200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -120\pi^2\sin(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3})$$

$$\left.\begin{aligned} F &= -kx \\ K &= m\omega^2 = 2\,(2\pi 10)^2 = 800\pi^2 \\ x &= 0{,}30 \cdot \sin\,(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F = -800\pi^2 \cdot 0{,}30\sin\,(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3}) \\ F = -240\pi^2\sin\,(2\pi 10t + \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

13.1.3 Ενεργειακή μελέτη της απλής αρμονικής ταλαντώσεως.

Έστω ότι ένα σώμα έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση υπό την επίδραση δυνάμεως επαναφοράς $F = -kx$. Θα υπολογίσομε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια που έχει το σύστημα, όταν το σώμα βρίσκεται στην τυχαία θέση που χαρακτηρίζεται από απομάκρυνση x.

Επιλέγομε ως θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη θέση ισορροπίας (όπου $x = 0$ και $F = 0$).

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται απ' τη σχέση:

$$W = \frac{1}{2}kx^2.$$

Άρα η στιγμιαία αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\mathrm{A}^2\sin^2(\omega t + \varphi_o).$$

Καθώς το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση, θα διέρχεται από τη θέση x με ταχύτητα $u = u_0\cos(\omega t + \varphi_o)$ και θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu_o^2\sin^2(\omega t + \varphi_o).$$

Παρατηρούμε ότι η δυναμική και η κινητική ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι αρμονικές περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσομε κάθε στιγμή τη στιγμιαία ολική ενέργεια της ταλαντώσεως, που είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Δηλαδή έχομε:

$$E_\mathrm{T} = K + U = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mu_0^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

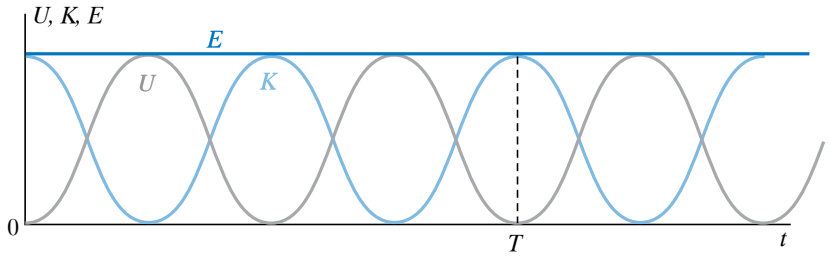
$$= \frac{1}{2}kA^2\,[\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}kA^2$$

άρα: $E_\mathrm{T} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$.

Απ' αυτά τα αποτελέσματα αντιλαμβανόμαστε ότι η ολική μηχανική ενέργεια της ταλαντώσεως είναι σταθερή κάθε στιγμή. Ισούται με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια που έχει το σώμα στις ακραίες θέσεις ($x = A$) και με τη μέγιστη κινητική που έχει το σώμα στη θέση ισορροπίας ($x = 0, u = u_o$)

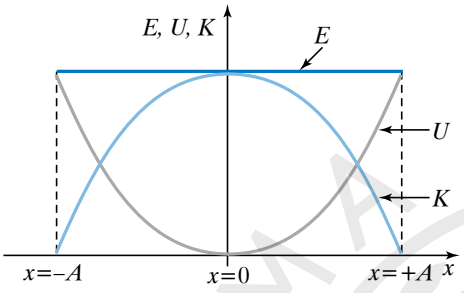
$$E_\mathrm{T} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx^2,\ E_\mathrm{T} = \frac{1}{2}kA^2,\ E_\mathrm{T} = \frac{1}{2}mu_\mathrm{o}^2.$$

Οι γραφικές παραστάσεις ενέργειας-χρόνου για $u_\mathrm{o} = 0$ φαίνονται στο σχήμα 13.1.5.



Σχ. 13.1.5
Γραφικές παραστάσεις ενέργειας-χρόνου.

Οι γραφικές παραστάσεις ενέργειας-θέσεως για $u_o = 0$ φαίνονται στο σχήμα 13.1.6.



Σχ. 13.1.6
Γραφικές παραστάσεις ενέργειας-θέσεως για αρμονικές αμείωτες ταλαντώσεις.

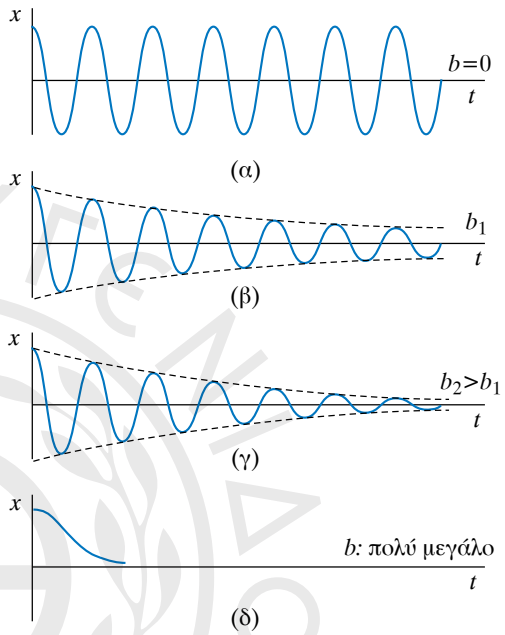
13.1.4 Φθίνουσες ταλαντώσεις

Σε όλες τις πραγματικές ταλαντώσεις έχομε απώλεια ενέργειας που οφείλεται κυρίως σε αίτια που αντιστέκονται στην ταλάντωση (π.χ. στις μηχανικές ταλαντώσεις το αίτιο είναι τριβές που μετατρέπουν σε θερμοδυναμική ενέργεια την ενέργεια ταλαντώσεως).

Ονομάζομε ***φθίνουσα*** την ταλάντωση στην οποία, λόγω απώλειας ενέργειας, η μέγιστη τιμή του ταλαντούμενου φυσικού μεγέθους μειώνεται με το χρόνο και τελικά μηδενίζεται.

Θα μελετήσομε τη φθίνουσα μηχανική ταλάντωση, όταν η δύναμη αντιστάσεως F_a, που είναι υπεύθυνη για την απώλεια ενέργειας είναι ανάλογη με την ταχύτητα της ταλαντώσεως $F_a = -bu$. Η δύναμη αυτή ονομάζεται ***δύναμη αποσβέσεως***. Η σταθερά ***b*** ονομάζεται ***σταθερά αποσβέσεως*** και εξαρτάται απ' διάφορα χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος.

Από τη μελέτη της φθίνουσας ταλαντώσεως προκύπτει ότι η σταθερά αποσβέσεως b έχει σημαντικό ρόλο στη συμπεριφορά του συστήματος και την εξέλιξη της ταλαντώσεως. Μπορούμε να εξάγομε εύκολα τα συμπεράσματα απ' τα διαγράμματα της απομακρύνσεως ως προς τον χρόνο (σχ. 13.1.7).



Σχ. 13.1.7
Η σταθερά αποσβέσεως έχει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της ταλαντώσεως.

Συμπεράσματα.

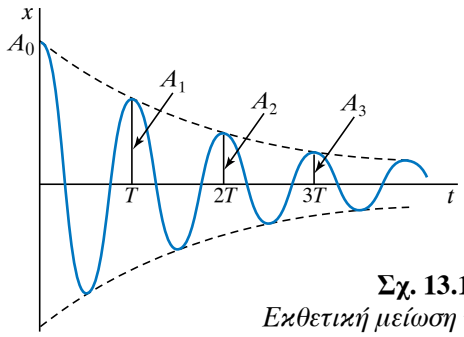
1) Συνήθως θεωρούμε ως πλάτος ταλαντώσεως το μέγεθος $A = A_o e^{-\Lambda t}$, αυτό έχει νόημα περισσότερο για την περίπτωση που η απόσβεση είναι μικρή. Δηλαδή το πλάτος ταλαντώσεως είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου και ακολουθεί εκθετική μείωση.

Το Λ είναι σταθερά που ονομάζεται ***συντελεστής αποσβέσεως*** και εξαρτάται από τη σταθερά b και τη μάζα του σώματος $\Lambda = b/2m$.

2) Για τα πλάτη $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n \ldots$ που αντιστοιχούν σε κάθε περίοδο ($t = nT$, $n = 0,1,2,\ldots$) ισχύει ότι:

$$A_0/A_1 = A_1/A_2 = \ldots = A_{n-1}/A_n = \text{σταθ.}$$

δηλαδή ο λόγος διαδοχικών πλατών είναι σταθερός (σχ. 13.1.8).



Σχ. 13.1.8
Εκθετική μείωση του πλάτους σε μια φθίνουσα ταλάντωση.

3) Σε μια φθίνουσα ταλάντωση η κυκλική συχνότητα δίνεται από τη σχέση $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$, όπου ω_0 η κυκλική συχνότητα του συστήματος όταν δεν υπάρχει απόσβεση, δηλαδή όταν $b = 0, \Lambda = 0$. Η περίοδος είναι $T = 2\pi/\omega'$.

4) Ο ρυθμός μειώσεως του πλάτους αυξάνεται όταν αυξάνεται η σταθερά αποσβέσεως. Όταν η σταθερά αποσβέσεως πάρει αρκετά μεγάλες τιμές, η κίνηση παύει να είναι ταλάντωση (το σώμα δεν περνά απ' τη θέση ισορροπίας) και γίνεται απεριοδική.

5) Για ένα σύστημα που εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, η περίοδος T μεγαλώνει, αν αυξηθεί η σταθερά αποσβέσεως b. Δηλαδή όταν αυξάνεται η σταθερά b, η ταλάντωση γίνεται πιο αργή.

Παρατήρηση.

Οι δυνάμεις αποσβέσεως και οι φθίνουσες ταλαντώσεις που προκαλούν, είναι για πολλές διεργασίες ανεπιθύμητο φαινόμενο. Υπάρχουν όμως και πολλές εφαρμογές που η φθίνουσα ταλάντωση και η μεγάλη απόσβεση είναι το ζητούμενο, όπως στην περίπτωση της αποσβέσεως κραδασμών σε μηχανικά συστήματα.

13.1.5 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

Για τις περιπτώσεις που η μείωση του πλάτους στην ταλάντωση είναι ανεπιθύμητη, μπορούμε να το διατηρήσομε σταθερό αναπληρώνοντας περιοδικά την απώλεια της ενέργειας. Την αναπλήρωση επιτυγχάνομε ασκώντας με κατάλληλη διάταξη στο σώμα μια περιοδική δύναμη. Η περιοδική δύναμη ονομάζεται ***διεγείρουσα δύναμη*** και το σύστημα, με το οποίο την εφαρμόζομε ονομάζεται ***διεγέρτης***.

Γενικώς, η περίπτωση αρμονικής ταλαντώσεως με διέγερση οδηγεί στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Έστω ότι έχομε ένα σύστημα που αποτελείται από σώμα μάζας m και ελατήριο σταθεράς k και δύναμη αντιστάσεως $-bu$. Στο σώμα ασκείται και περιοδική με το χρόνο δύναμη $F = F_0 \sin(\omega t)$.

Ιδιοσυχνότητα f_o του συστήματος ονομάζεται η συχνότητα με την οποία το σύστημα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

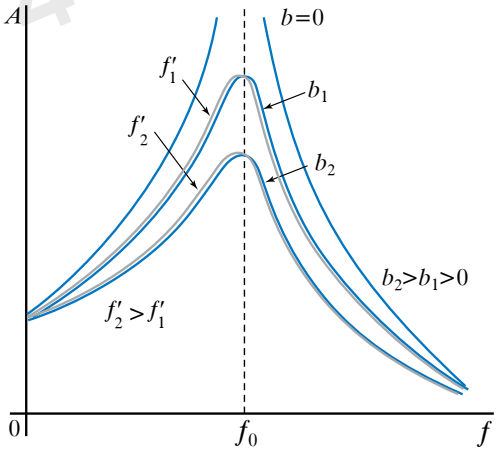
Η συχνότητα της ταλαντώσεως που εκτελεί το σώμα είναι η συχνότητα f του διεγέρτη που ασκεί την περιοδική δύναμη και όχι η ιδιοσυχνότητα f_o, που είναι η συχνότητα της ελεύθερης ταλαντώσεως (χωρίς απόσβεση), ούτε η συχνότητα $f' = \omega'/2\pi$ της ταλαντώσεως με απόσβεση (χωρίς διεγείρουσα περιοδική δύναμη).

Στην ***εξαναγκασμένη*** ταλάντωση η εξωτερική περιοδική δύναμη αναπληρώνει τις απώλειες ενέργειας και το πλάτος της παραμένει σταθερό.

Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις η συχνότητα του διεγέρτη παίζει καθοριστικό ρόλο στην απορρόφηση ενέργειας από το σύστημα που ταλαντώνεται. Όταν μεταβάλλεται η συχνότητα του διεγέρτη, μεταβάλλεται και το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως.

Όταν η συχνότητα του διεγέρτη γίνει ίση με κάποια συχνότητα που λέγεται ***συχνότητα συντονισμού πλάτους του συστήματος***, τότε έχομε μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλαντώσεως. Την κατάσταση αυτή την ονομάζομε ***συντονισμό πλάτους***.

Η συχνότητα συντονισμού πλάτους είναι ίση με τη συχνότητα ελεύθερης ταλαντώσεως με απόσβεση, $f' = 2\pi/\omega'$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$. Στο σχήμα 13.1.9 έχομε το διάγραμμα του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλαντώσεως σε συνάρτηση με τη συχνότη-



Σχ. 13.1.9
Συντονισμός για διάφορες τιμές της σταθεράς b.

τα του διεγέρτη για διάφορες τιμές της σταθεράς b.

Μελετώντας τις καμπύλες στο διάγραμμα διαπιστώνομε τα παρακάτω:

1) Στις ταλαντώσεις με απόσβεση b, η συχνότητα συντονισμού f' είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_o του συστήματος και όσο αυξάνεται η απόσβεση b, η συχνότητα συντονισμού f' μειώνεται.

2) Στην ιδανική περίπτωση που η απόσβεση είναι μηδενική $b = 0$, η συχνότητα του διεγέρτη, για την οποία έχομε συντονισμό $f = f'$ είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_o του συστήματος και επειδή δεν έχομε απώλειες ενέργειας, η απορρόφηση ενέργειας προκαλεί απεριόριστη αύξηση του πλάτους. Δηλαδή όταν δεν υπάρχει απόσβεση, το πλάτος γίνεται άπειρο στον συντονισμό.

Στην πραγματικότητα δεν έχομε αποσβέσεις με $b = 0$. Όμως για συστήματα με πολύ μικρή απόσβεση, είναι δυνατό κατά τον συντονισμό να έχομε πολύ μεγάλη αύξηση του πλάτους, που να υπερβαίνει τις μηχανικές αντοχές του συστήματος με καταστροφικά αποτελέσματα.

3) Σε συστήματα που έχομε μεγάλη απόσβεση b, το πλάτος ταλαντώσεως στον συντονισμό δεν αυξάνεται πολύ, ενώ διευρύνεται και η περιοχή γύρω από τη συχνότητα συντονισμού, που έχομε μεγιστοποίηση του πλάτους.

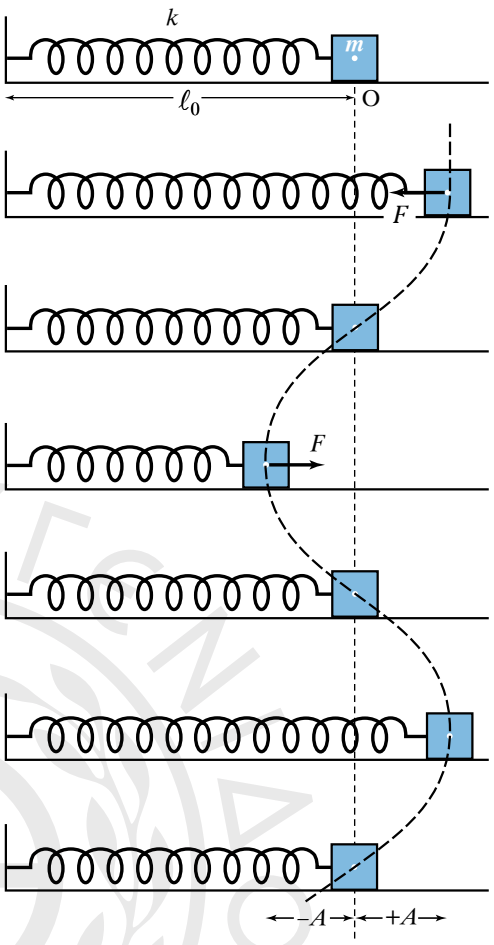
13.1.6 Σύστημα ελατήριο-μάζα.

Ιδανικό άμαζο ελατήριο είναι τοποθετημένο οριζόντια πάνω σε λείο δάπεδο με αμελητέα τριβή. Το ένα άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και στο άλλο βρίσκεται στερεωμένη μάζα m (σχ. 13.1.10). Απομακρύνομε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά A και το αφήνομε ελεύθερο. Τότε το σύστημα ταλαντώνεται γύρω απ' τη θέση ισορροπίας υπό την επίδραση της δυνάμεως ελατηρίου.

Αφού το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, δέχεται δύναμη ανάλογη της απομακρύνσεως του $F = -kx$. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη του ελατηρίου $F = -kx$, όπου k η σταθερά του ελατηρίου και x η απομάκρυνσή του. Δηλαδή η δύναμη που δέχεται το σώμα είναι ανάλογη της απομακρύνσεώς του και έχει κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

13.1.7 Απλό εκκρεμές.

Το απλό εκκρεμές αποτελείται από ράβδο αμελητέας μάζας και σταθερού μήκους, το ένα άκρο της οποίας είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο και στο άλλο άκρο έχει δεθεί σώμα μάζας m, του οποίου οι διαστάσεις είναι πολύ μικρές σε σχέση με το μήκος της ράβδου. Η ράβδος μπορεί να είναι ένα νήμα (σχ. 13.1.11).

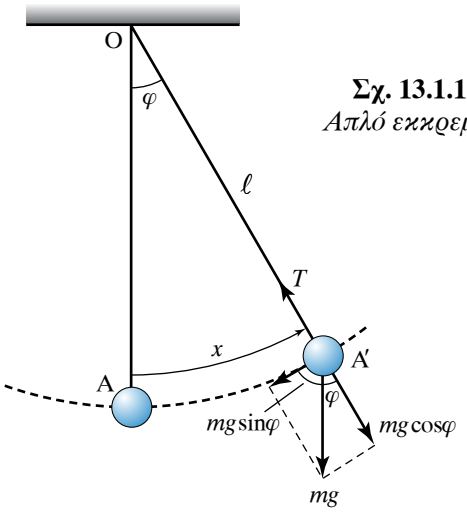


Σχ. 13.1.10
Σύστημα ελατήριο-μάζα.

Στο σώμα επιδρούν δύο δυνάμεις, το βάρος του και η τάση του νήματος. Ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση. Αν το σώμα εκτραπεί λίγο ($\varphi < 6^o$) απ' τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο, εκτελεί ταλάντωση γύρω απ' την κατακόρυφη θέση.

Μελέτη της ταλαντώσεως: Για τη μελέτη της κινήσεως αναλύομε, στην τυχαία θέση (σχ. 13.1.11) το βάρος σε δύο συνιστώσες, μία εφαπτομενική στην τροχιά, που είναι ίση με $mg\sin\varphi$ και μία ακτινική που είναι ίση με $mg\cos\varphi$. Η συνισταμένη της τάσεως T και της συνιστώσας $mg\cos\varphi$ αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη.

Θα δείξομε ότι για πολύ μικρές γωνίες η κίνηση



Σχ. 13.1.11
Απλό εκκρεμές.

του απλού εκκρεμούς είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Για γωνίες μικρότερες των 6° το τόξο ΑΑ΄ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από το x, άρα $\sin\varphi \approx \varphi$. Έχομε $\sin\varphi = x/l$ και $F = -mg\sin\varphi$, $F = -mg \cdot x/l$, επομένως προσεγγιστικά $F = -(mg/l)x$.

Επειδή (mg/l) σταθερό, θέτομε $k = (mg/l)$.

Άρα $F = -kx$, δηλαδή το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $k = (mg/l)$ και περίοδο $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$$\text{ή} \quad T = 2\pi\sqrt{\left(m/\frac{mg}{l}\right)}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Από τη σχέση:

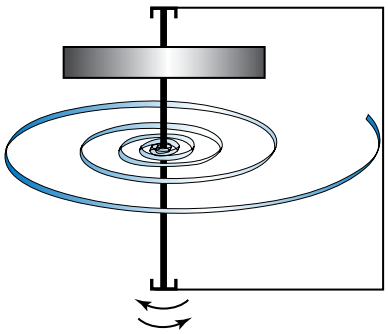
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

προκύπτει ότι η περίοδος του απλού εκκρεμούς εξαρτάται από το μήκος l του νήματος και από την επιτάχυνση της βαρύτητας g, ενώ είναι ανεξάρτητη απ' τη μάζα του συστήματος και του πλάτους αιωρήσεως για μικρά πλάτη. Το εκκρεμές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της επιταχύνσεως της βαρύτητας g σ' έναν τόπο. Χρησιμοποιείται σε ρολόγια για τη μέτρηση του χρόνου.

13.1.8 Στροφικές ταλαντώσεις.

Ας θεωρήσομε ότι έχομε σώμα που μπορεί να περιστρέφεται περί άξονα. Πάνω του δρα σπειροειδές ελατήριο (σχ. 13.1.12), έτσι που ασκεί πάνω του ροπή τ και ισχύει $\tau = -D\varphi$. Η σταθερά D λέγεται ***κατευθύνουσα ροπή του ελατηρίου***.

Τέτοιος μηχανισμός υπάρχει στα κουρδιστά ρολόγια.



Σχ. 13.1.12
Μηχανισμός στροφικών ταλαντώσεων.

Αν η ροπή αδράνειας της περιστρεφόμενης μάζας περί τον άξονα περιστροφής είναι I, τότε ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κινήσεως δίνει:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -D\varphi.$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι ίδιας μορφής με αυτήν που ισχύει για τον (γραμμικό) αρμονικό ταλαντωτή, και ότι υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ του γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή και των στροφικών ταλαντώσεων, συγκεκριμένα $x \Leftrightarrow \varphi$, $m \Leftrightarrow I$, $k \Leftrightarrow D$. Προφανώς, αυτό το σύστημα των στροφικών ταλαντώσεων αποτελεί αρμονικό ταλαντωτή, όπου το μέγεθος που ταλαντεύεται είναι γωνία.

Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία, όπως στο γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή, καταλήγομε στις σχέσεις:

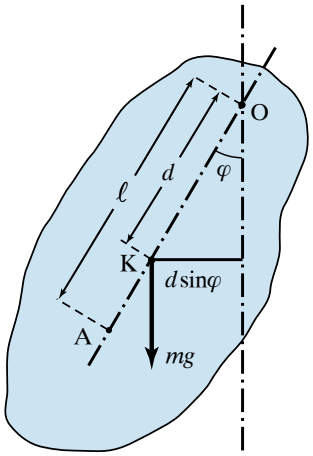
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}.$$

13.1.9 Φυσικό εκκρεμές.

Με τον όρο ***φυσικό εκκρεμές*** εννοούμε οποιοδήποτε σώμα με οποιοδήποτε σχήμα, το οποίο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και απέχει από το κέντρο βάρους [και κέντρο μάζας (κ.β.)/(κ.μ.)] απόσταση d (σχ. 13.1.13).

Το εκκρεμές έχει μάζα m και ροπή αδράνειας I ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Ο. Αν εκτρέψομε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά γωνία φ, η δύναμη του βάρους προκαλεί ροπή επαναφοράς $\tau = -mgd\sin\varphi$. Το αρνητικό πρόσημο (–) δηλώνει ότι η ροπή επαναφοράς τείνει να περιστρέψει το σώμα με φορά αντίθετη της εκτροπής.

Όταν αφήσομε το σώμα ελεύθερο, ταλαντώνεται γύρω απ' τη θέση ισορροπίας του. Αν η γωνιά εκτροπής είναι πολύ μικρή, μπορούμε να κάνο-



Σχ. 13.1.13
Φυσικό εκκρεμές.

με την προσέγγιση ότι $\sin\varphi = \varphi$. Άρα η σχέση που δίνει τη ροπή επαναφοράς γίνεται $\tau = -(m\,g\,d)\varphi$, $\tau = -D\varphi$, $D = m\,g\,d$. Ο ***θεμελιώδης νόμος της στροφικής κινήσεως*** δίνει:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -D\varphi.$$

Οπότε έχομε απλό αρμονικό ταλαντωτή και ισχύουν:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad \text{άρα} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

– Διατοιχισμός πλοίου.

Η ***διατοίχιση*** ή ***διατοιχισμός*** ή ***μπότζι*** είναι μια μορφή ταλαντώσεως του πλοίου κατά τον εγκάρσιο άξονα, δηλαδή τις κλίσεις δεξιά και αριστερά που μπορεί να παίρνει το πλοίο, όταν ταξιδεύει ή όταν είναι αγκυροβολημένο. Η αιτία που προκαλεί τη διατοίχιση είναι είτε ο υφιστάμενος πλάγιος κυματισμός, είτε κυματισμός από το φαινόμενο της αποθαλασσίας, είτε και από άλλο παράγοντα, όπως από κυματισμό που προκάλεσε διερχόμενο άλλο πλοίο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομακρύνσεως $x = 0{,}5\sin\pi t$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω:
α) Το πλάτος της απομακρύνσεως, το πλάτος της ταχύτητας, το πλάτος της επιταχύνσεως.
β) Την περίοδο, τη συχνότητα και τη γωνιακή συχνότητα ω.

2. Να γραφούν οι εξισώσεις της απομακρύνσεως, της ταχύτητας και της επιταχύνσεως, που περιγράφουν την απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος, για το οποίο γνωρίζομε ότι:
α) Το πλάτος ταλαντώσεως του είναι $A = 0{,}6$ m.
β) Η περίοδος της ταλαντώσεώς είναι $T = 5$ s. Έχει αρχική φάση $\varphi_o = \pi/6$ rad.

3. Σώμα μάζας m είναι συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 4$ s και πλάτος $A = 0{,}4$ m. Να υπολογίσετε την ταχύτητά του και την επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι $x = 0{,}2$ m.

4. Η εξίσωση της απομακρύνσεως ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση $x = 0{,}5 \cdot \sin 4\pi t$ (x σε m και t σε s).
α) Να υπολογιστεί η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές i) $t = T/12$ και ii) $t = 7T/12$.
β) Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της απομακρύνσεως, της ταχύτητας και της επιταχύνσεως σε συνάρτηση με τον χρόνο.

5. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $x = A\sin(\omega t + \varphi_o)$.
Να υπολογιστεί η αρχική φάση για τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$ με θετική ταχύτητα.
β) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$ με αρνητική ταχύτητα.
γ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = +A/2$ με θετική ταχύτητα.
δ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = -A/2$ με αρνητική ταχύτητα.
ε) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = +A\sqrt{3}/2$ με θετική ταχύτητα.
στ) Τη χρονική στιγμή βρίσκεται στη θέση $x = -A$.

6. Για ένα σύστημα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχομε τις παρακάτω πληροφορίες:
α) Το πλάτος ταλαντώσεώς του είναι $A = 0{,}2$ m.
β) Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0{,}1\sqrt{2}$ m με θετική ταχύτητα.
γ) Ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει πρώτη φορά στην ακραία θέση ταλαντώσεως είναι $t = 0{,}125$ s.
Να γραφούν οι εξισώσεις της απομακρύνσεως, της ταχύτητας, και της επιταχύνσεως του συστήματος.

7. Ο μηχανικός ενός πλοίου για λόγους ασφάλειας προσπαθεί να μελετήσει τη συμπεριφορά μηχανικού συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Από τις μετρήσεις που πραγματοποιεί, συγκεντρώνει τις παρακάτω πληροφορίες: το πλάτος

ταλαντώσεως είναι $A = 20\,\text{cm}$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 10\sqrt{3}\,\text{cm}$ με αρνητική ταχύτητα και διέρχεται πάλι από την ίδια θέση με την ίδια ταχύτητα μετά από χρόνο $t = 2\,\text{s}$. Με βάση τις προηγούμενες πληροφορίες, γράψτε τις εξισώσεις της απομακρύνσεως, της ταχύτητας και της δυνάμεως επαναφοράς για το μηχανικό σύστημα.

8. Ένα σύστημα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση αποτελείται από κατακόρυφο ελατήριο, όπου στο ελεύθερο άκρο του έχομε συνδέσει σώμα μάζας $m_1 = 5\,\text{kg}$, η οποία προκαλεί αρχική επιμήκυνση από το φυσικό του μήκος ίση με 1 m. Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος, με το οποίο πρέπει να αντικαταστήσομε τη μάζα m_1, ώστε το σύστημα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\,\text{s}$.

9. Μηχανικό σύστημα αποτελείται από ελατήριο σταθερό $k = 100\,\text{N/m}$ στο άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας $m = 10\,\text{kg}$. Να αποδείξετε για τις παρακάτω περιπτώσεις ότι, αν το σύστημα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογιστεί για κάθε περίπτωση η περίοδος της ταλαντώσεως.

α) Το ελατήριο είναι κατακόρυφα στερεωμένο στο άνω άκρο.

β) Το ελατήριο βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντιο επίπεδο και είναι στερεωμένο στο άνω άκρο.

10. Ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Οι πληροφορίες που έχομε γι' αυτό είναι οι παρακάτω:

α) Η ταχύτητά του όταν διέρχεται απ' τη θέση ισορροπίας είναι $u = 4\,\text{m/s}$

β) Το πλάτος ταλαντώσεώς του είναι $A = 5\,\text{m}$.

γ) Η μάζα του σώματος είναι $m = 10\,\text{kg}$.

Αξιοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες, να υπολογίσετε την περίοδο T της ταλαντώσεως, την σταθερά επαναφοράς K και τη δύναμη επαναφοράς όταν η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι:

α) $x = +2\,\text{cm}$ και $x = -2\,\text{cm}$

β) τη δύναμη επαναφοράς τη χρονική στιγμή $t = 3T/4$, αν γνωρίζομε ότι για $t = 0$ $x = A/2$ και $u > 0$.

11. Σώμα $m = 2\,\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 10\,\text{cm}$. Αν η περίοδος της ταλαντώσεως είναι $T = 0{,}2\,\pi$, να υπολογιστούν:

α) Η ενέργεια της ταλαντώσεως.

β) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση όπου η ταχύτητα του σώματος είναι το μισό της μέγιστης τιμής της.

12. Σώμα μάζας $m = 1\,\text{kg}$ είναι προσαρμοσμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο $T = 0{,}1\pi\,\text{s}$. Να υπολογιστεί:

α) *i.* Η σταθερά του ελατηρίου k.

ii. Το μέτρο της απομακρύνσεως του σώματος στη θέση που η δυναμική ενέργεια είναι $U_1 = 2\,\text{J}$.

β) Αν η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή στην παραπάνω θέση είναι ίση με την κινητική, να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση αυτή και το πλάτος της ταλαντώσεως.

γ) Να υπολογιστεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος από τη θέση $x = 0{,}1\,\text{m}$ έως τη θέση όπου η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με $U_2 = 4\,\text{J}$.

13. Ένα μηχανικό σύστημα στο πλοίο που χρησιμοποιείται για την απόσβεση κραδασμών έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

α) Το μέγιστο πλάτος ταλαντώσεώς του στην αρχή κάθε διαταραχής είναι $A_o = 0{,}20\,\text{m}$.

β) Η απόσβεση στην ταλάντωσή του περιγράφεται από τη σχέση $A = A_o e^{-(\ln 4)t}$ στο SI.

γ) Η συχνότητα ταλαντώσεως του είναι $f = 10\,\text{Hz}$.

Να υπολογίσετε το πλάτος ταλαντώσεως 2 s μετά την έναρξη των ταλαντώσεων.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή στην οποία το πλάτος της φθίνουσας ταλαντώσεως θα έχει ελαττωθεί κατά 50%.

Σε ποια χρονική στιγμή το πλάτος ταλαντώσεως του σώματος θα έχει μειωθεί κατά 90%; Ποιο θα είναι το πλήθος των ταλαντώσεων του συστήματος μέχρι εκείνη τη στιγμή;

14. Σώμα μάζας $m = 2\,\text{kg}$ είναι συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς $k = 200\,\text{N/m}$ και δέχεται εξωτερική περιοδική δύναμη, που το εξαναγκάζει σε ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}1\,\text{m}$ με συχνότητα $f = 3/2\pi\,\text{Hz}$.

α) Να γραφεί η εξίσωση της απομακρύνσεως του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, αν για $t = 0$ έχομε $x = 0$.

β) Τι θα συμβεί με το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως, αν διπλασιαστεί η συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δυνάμεως.

γ) Τι θα συμβεί με το πλάτος ταλαντώσεως, αν το ελατήριο αντικατασταθεί από άλλο διπλάσιας σταθεράς k.

15. Ένα μικρό ταχύπλοο έχει ιδιοπερίοδο ταλαντώσεως $T = 2\,\text{s}$. Όταν πλέει σε θάλασσα με μικρό κυματισμό, δέχεται περιοδικά χτυπήματα που προκαλούν την εξαναγκασμένη ταλάντωσή του.

Να υπολογιστεί η ταχύτητα που πρέπει να αποφύγει το ταχύπλοο, για να μην υπάρξει συντονισμός, όταν πλέει σε θάλασσα με μικρό κυματισμό, όπου οι κορυφές των κυμάτων απέχουν μεταξύ τους $x = 5\,\text{m}$.

16. Ο πλοίαρχος ενός πλοίου που πλέει στον Ισημερινό θέλει να κατασκευάσει ένα απλό εκκρεμές, το οποίο να εκτελεί 10 πλήρεις ταλαντώσεις μικρού πλάτους σε 10 s. Να υπολογίσετε το μήκος του νήματος που πρέπει να χρησιμοποιήσει. Πόσο πρέπει να μεταβάλει το μήκος του νήματος, όταν βρεθεί στον Βόρειο Πόλο;

17. Ένας κατασκευαστής ναυτικών συστημάτων, προσπαθώντας να προσδιορίσει τη ροπή αδράνειας μιας μικρής άγκυρας μάζας $m = 150\,\text{kg}$ παρά το σημείο προσδέσεώς της με την αλυσίδα, ακολουθεί την παρακάτω τεχνική: κρεμά την άγκυρα από το σημείο προσδέσεως της αλυσίδας, την εκτρέπει από τη θέση ισορροπίας και μετρά την περίοδο ταλαντώσεώς της. Αν η απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής είναι $d = 1\,\text{m}$, η περίοδος ταλαντώσεως μετρήθηκε $T = 3\,\text{s}$ και το πείραμα γίνεται σε περιοχή με γεωγραφικό πλάτος όπου $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της άγκυρας.

18. Ένα σώμα μάζας $m = 4\text{kg}$ συνδέεται σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K = 10\,\text{N/m}$. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}02\,\text{m}$ και την χρονική στιγμή $t = 0\,\text{s}$ βρίσκεται στην θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα.

α) Να υπολογιστεί η αρχική φάση της ταλαντώσεως και να γραφεί η εξίσωση της απομακρύνσεως του σώματος απ' τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο.

β) Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1\,\text{s}$ και $t_2 = 2\,\text{s}$.

19. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 20\,\text{cm}$ και συχνότητας $f = 10\,\text{Hz}$. Να υπολογιστεί ό ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί:

α) Από τη θέση $x = 10\,\text{cm}$ στην ακραία θέση $x = +20\,\text{cm}$.

β) Από τη θέση $x = 10\,\text{cm}$ στην θέση $x = -10\,\text{cm}$.

20. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ενέργεια $E_0 = 10\,\text{J}$. Ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί από την μια ακραία θέση έως στην άλλη είναι 0,5 s και η απόσταση αυτή είναι 1 m. Να υπολογίσετε:

α) Την σταθερά επαναφοράς D.

β) Την μάζα του σώματος.

γ) Την μεγίστη ταχύτητα.

21. Σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου που βρίσκεται στερεωμένο στην οροφή και έχει σταθερά k. Εκτρέπομε το σώμα από την θέση ισορροπίας κι αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 0{,}628\,\text{s}$ πλάτος $A = 0{,}4\,\text{m}$. Ορίζομε ως αρχική στιγμή ($t = 0$) για τη μελέτη μας την στιγμή που διέρχεται απ' τη θέση y_1 με αρνητική επιτάχυνση ($\alpha_1 < 0$) και έχοντας δυναμική ενέργεια $U_1 = 6\,\text{J}$, ενώ η ολική του ενέργεια είναι $E_T = 10\,\text{J}$.

α) Να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου και να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομακρύνσεως από τη θέση ισορροπίας.

β) Να υπολογίσετε τον χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί το σώμα από τη θέση που βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0\,\text{s}$ στη θέση ισορροπίας του.

γ) Να υπολογιστούν οι θέσεις όπου η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το 1/3 της δυναμικής του ενέργειας.

22. Το έμβολο μιας μηχανής ενός οχήματος μπορεί να θεωρηθεί ότι κάνει απλή αρμονική ταλάντωση όταν το όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Γνωρίζοντας ότι η μάζα του εμβόλου είναι 0,7 kg, η απόσταση του άκρου της ράβδου από τον άξονα του στροφαλοφόρου είναι 0,05 m και ότι ο στροφαλοφόρος εκτελεί 3600 περιστροφές ανά λεπτό να υπολογίσετε τα παρακάτω:

α) Το πλάτος ταλαντώσεως, τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας και τη μέγιστη τιμή της επιταχύνσεως του εμβόλου.

β) Να γράψετε τις εξισώσεις της απομακρύνσεως και της δυνάμεως του εμβόλου θεωρώντας ότι δεν έχουμε αρχική φάση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

14.1 Ηλεκτρικές ταλαντώσεις σε κύκλωμα *LC*.

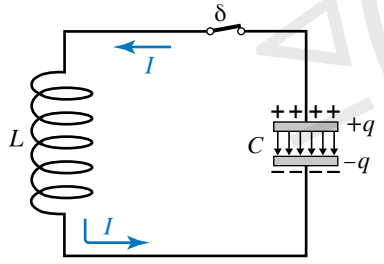
Θυμίζομε ότι η ηλεκτρική ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή δίνεται από τις σχέσεις:

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}qV,$$

η μαγνητική ενέργεια πηνίου που διαρρέεται από ρεύμα δίνεται από τη σχέση:

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2.$$

Έστω κύκλωμα με πυκνωτή, πηνίο και διακόπτη (σχ. 14.1.1). Το κύκλωμα αυτό λέγεται ***κύκλωμα Thomson***. Ας υποθέσομε ότι ο διακόπτης είναι ανοιχτός και ο πυκνωτής φορτισμένος με φορτίο $Q > 0$.



Σχ. 14.1.1
Κύκλωμα Thomson ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων ή κύκλωμα LC.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνομε τον διακόπτη κι αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή. Τότε το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα.

Κάθε στιγμή η τάση $V_c = q/C$ είναι ίση με την $V_L = L\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$.

Αρχικά, όταν ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί λίγο, η V_c είναι μεγάλη, άρα και η V_L. Επειδή το πηνίο, άρα η τάση V_L, αντιστέκεται στην αύξηση του ρεύματος, το ρεύμα στην αρχή έχει μικρή τιμή που σταδιακά αυξάνεται όσο προχωράει η εκφόρτιση, μέχρις ότου πάρει τη μέγιστη τιμή του, όταν ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί πλήρως. Τότε $q = 0$ και $i = i_{max} = I$.

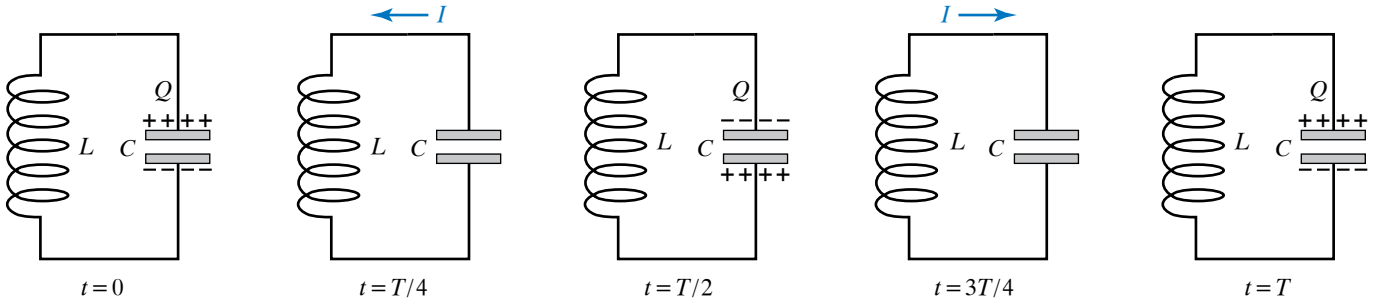
Στη συνέχεια, το ρεύμα αρχίζει να μειώνεται, ο πυκνωτής φορτίζεται ξανά, αλλά με αντίθετη πολικότητα. Όταν το ρεύμα μηδενιστεί, το φορτίο του πυκνωτή θα πάρει πάλι τη μέγιστη τιμή του (με αντίθετο πρόσημο απ' αυτό που είχε στην αρχή) και τότε $q = -Q$ και $i = 0$.

Κατόπιν, το φαινόμενο επαναλαμβάνεται αντίστροφα. Ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται, το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα αντίθετης φοράς και το κύκλωμα επανέρχεται στην κατάσταση που βρισκόταν τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 14.1.2.

Για το φορτίο του πυκνωτή ισχύει: $q = Q\cos\omega t$.

Για την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και φυσικά το πηνίο:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -Q\omega\sin\omega t = -I\sin\omega t,\ I = Q\omega.$$

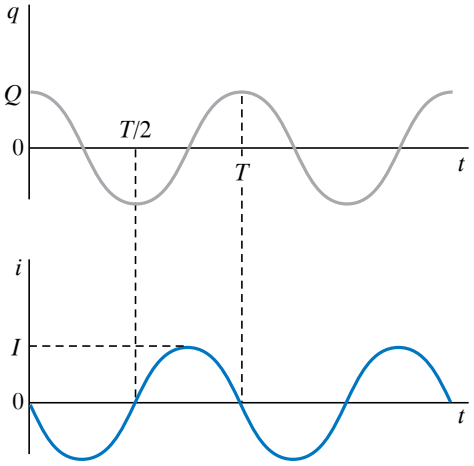


Σχ. 14.1.2
Φάσεις ταλαντώσεως του κυκλώματος Thomson.

Μπορεί να κάνει κάποιος την ίδια ανάλυση που κάναμε για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή, διότι ισχύει παρόμοια διαφορική εξίσωση και να δείξει ότι η κυκλική συχνότητα και η περίοδος ταλαντώσεως ενός τέτοιου κυκλώματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Στο σχήμα 14.1.3 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του φορτίου και του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου.



Σχ. 14.1.3
Γραφικές παραστάσεις της χρονικής μεταβολής του φορτίου q και της χρονικής μεταβολής του ρεύματος στο κύκλωμα Thomson.

14.1.1 Ενεργειακή θεώρηση.

Η ενέργεια του πυκνωτή είναι:

$$U_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\cos^2\omega t = U_{C_0}\cos^2\omega t,$$

$$U_{C_0} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Η ενέργεια του πηνίου είναι:

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI^2\sin^2\omega t = U_{L_0}\sin^2\omega t,$$

$$U_{L_0}\sin^2\omega t,\ \ U_{L_0} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LQ^2\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{άρα} \quad U_{L_0} = U_{C_0} = U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2.$$

Η ***ολική ενέργεια του κυκλώματος*** κάθε ***χρονική στιγμή*** είναι:

$$E = U_C + U_L = U_0(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) =$$
$$= U_0 = \text{σταθερή}.$$

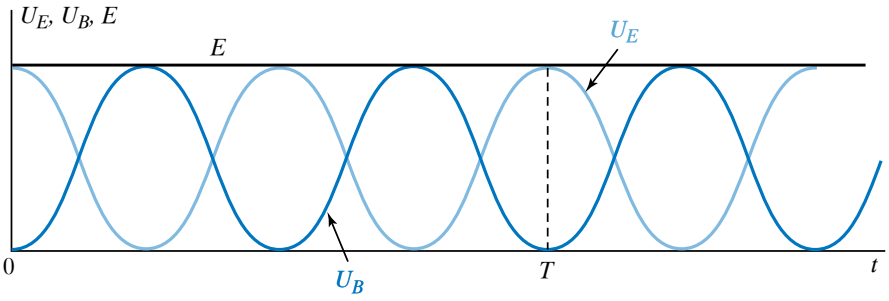
$$E = U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2.$$

Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο και αντίστροφα. Στο σχήμα 14.1.4 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών συναρτήσει του χρόνου.

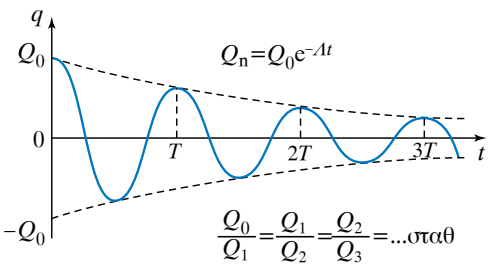
14.1.2 Φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση.

Πρακτικά οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι φθίνουσες, γιατί πρώτον οι αγωγοί του συστήματος έχουν αντίσταση και ένα μέρος της ενέργειας μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια που μπορεί να ρέει στο περιβάλλον ως θερμότητα και δεύτερον τα κυκλώματα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων μπορεί να εκπέμπουν σημαντική ποσότητα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, άρα χάνουν ενέργεια.

Συνεπώς, το πλάτος του ρεύματος συνεχώς μικραίνει, όπως και το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, μέχρι που το κύκλωμα θα σταματήσει να ταλαντώνεται. Μπορεί να οριστεί η σταθερά αποσβέσεως Λ, που εξαρτάται από τις απώλειες του κυκλώματος.



Σχ. 14.1.4
Γραφικές παραστάσεις για τις χρονικές μεταβολές της ενέργειας του πυκνωτή U_C, της ενέργειας του πηνίου U_L και της ολικής ενέργειας του συστήματος E.



Σχ. 14.1.5

Γραφική παράσταση χρονικής μεταβολής του φορτίου σε φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση.

Στο σχήμα 14.1.5 φαίνεται η μείωση του φορτίου του πυκνωτή με τον χρόνο.

Παρατηρήσεις.

Η μελέτη για τις φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι ανάλογη με τη μελέτη των μηχανικών ταλαντώσεων. Ισχύουν τα παρακάτω:

1) Αν υποθέσομε ότι δεν υπάρχει σημαντική ακτινοβολία, η αιτία της αποσβέσεως είναι η ωμική αντίσταση R.

2) Όσο αυξάνει η αντίσταση R, η περίοδος T της φθίνουσας ταλαντώσεως μεγαλώνει.

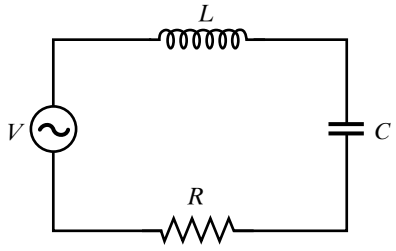
3) Όσο αυξάνει η αντίσταση R, τόσο πιο γρήγορη γίνεται η απόσβεση.

4) Όταν η τιμή της αντιστάσεως R, υπερβεί κάποιο όριο, τότε η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.

5) Η αντιστοιχία με τις μηχανικές ταλαντώσεις είναι $x \leftrightarrow q$, $u \leftrightarrow i$, $m \leftrightarrow L$, $k \leftrightarrow 1/C$, $b \leftrightarrow R$, $F \leftrightarrow V$.

14.1.3 Το φαινόμενο του συντονισμού στην ηλεκτρική ταλάντωση.

Ας υποθέσομε ότι έχομε το κύκλωμα του σχήματος 14.1.6. Στο κύκλωμα LC έχει προστεθεί πηγή τάσεως $V = V_0 \sin\omega t$ (πηγή διεγέρσεως). Όπως και στην περίπτωση των μηχανικών ταλαντώσεων, αν μεταβληθεί η συχνότητα της τάσεως διεγέρσεως, το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή και το πλάτος του ρεύματος θα μεταβάλλονται. Για κάποια τιμή της συχνότητας τα πλάτη γίνονται μέγιστα. Αυτό είναι το φαινόμενο του συντονισμού στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Αν η απώλεια ενέγειας είναι πολύ μικρή, τότε ο συντονισμός και για το φορτίο και για το ρεύμα συμβαίνουν στην ίδια συχνότητα, στη συχνότητα ταλαντώσεως του κυκλώματος, χωρίς διέγερση και χωρίς απώλειες. Στη φυσική ταλάντωση του κυκλώματος, η κυκλική ιδιοσυχνότητα είναι $\omega = 1/\sqrt{LC}$.



Σχ. 14.1.6

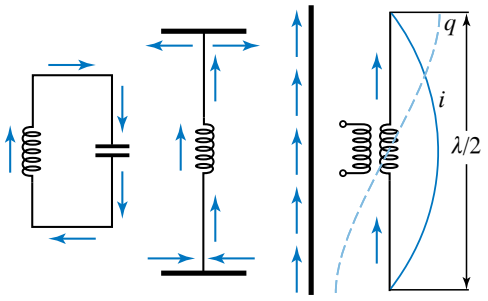
Κύκλωμα LC με αντιστάτη και πηγή διεγέρσεως.

14.2 Μετατροπή του κυκλώματος του Thomson σε κεραία εκπομπής – λήψεως ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Ένα κλειστό κύκλωμα ταλαντώσεων (βρόχος), που έχει μικρές διαστάσεις σε σύγκριση με το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην συχνότητα ταλαντώσεως, είναι ακατάλληλο για την ακτινοβολία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί τα κύματα που δημιουργούνται από τα ρεύματα που κυκλοφορούν στον βρόχο είναι κοντά το ένα στο άλλο, έχουν αντίθετες φάσεις και αλληλοαναιρούνται. Δηλαδή από ένα τέτοιο κλειστό κύκλωμα ταλαντώσεων η ακτινοβολία ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας είναι πρακτικά πολύ ασθενής.

Είναι δυνατόν όμως να τροποποιήσομε το κύκλωμα του ταλαντωτή, ώστε τα ρεύματα στα στοιχεία του να εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Αυτό μπορούμε να το πετύχομε μετατρέποντας το κλειστό κύκλωμα σε ανοικτό, δηλαδή σε κεραία. Για να επιτύχομε την παραπάνω μετατροπή, απομακρύνομε τους οπλισμούς και φέρνομε τους αγωγούς συνδέσεως σε ευθεία γραμμή. Τότε οι φορές των ρευμάτων γίνονται ίδιες. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα ακτινοβολεί ενέργεια, αλλά ανεπαρκώς. Στη συνέχεια, «τεντώνομε» το πηνίο, ώστε να γίνει ευθύγραμμος αγωγός και παράλληλα καταργούμε τους οπλισμούς αντικαθιστώντας τη χωρητικότητά του με τη χωρητικότητα του αγωγού. Διατηρούμε ένα μικρό τμήμα του πηνίου, για να επιτύχομε σύζευξη του αγωγού με την πηγή. Το ανοικτό κύκλωμα που προκύπτει, αποτελεί μία κεραία και μπορεί να ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητική ενέργεια (σχ. 14.2.1). Το ρεύμα δεν έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της κεραίας την ίδια χρονική στιγμή.

Το 1887 πρώτος ο Hertz πέτυχε την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στηριζόμενος στην



Σχ. 14.2.1
Μετατροπή του κυκλώματος Thomson σε κεραία ηλεκτρο-μαγνητικών κυμάτων.

ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell. Μετά τον Hertz ακολούθησαν εντατικές προσπάθειες από επιστήμονες για μετάδοση μηνυμάτων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Τα πρώτα σημαντικά αποτελέσματα ήρθαν το 1900 από τους Popov στη Ρωσία και Marconi στην Ιταλία, που μετέδωσαν μηνύματα με ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε απόσταση δεκάδων χιλιομέτρων.

Στο σχήμα 14.2.2 παρατηρούμε σχηματικά την εκπομπή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από το τροποποιημένο σε κεραία κύκλωμα ταλαντώσεων.

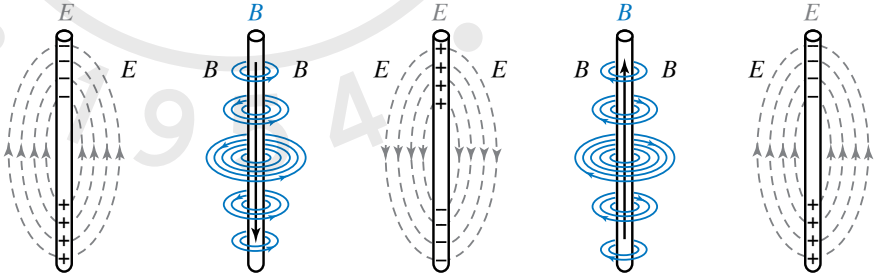
Αρχικά έχομε φορτίο κατανεμημένο στον αγωγό, το οποίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο. Στη συνέχεια, με την κίνηση των φορτίων έχομε ρεύμα που προκαλεί μαγνητικό πεδίο, το οποίο αντλεί την ενέργειά του από το ηλεκτρικό πεδίο με αποτέλεσμα σε χρόνο $T/4$ όλη η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου να έχει μετασχηματιστεί σε ενέργεια του μαγνητικού πεδίου. Τότε το ρεύμα είναι μέγιστο και η τάση μηδέν. Στο επόμενο χρονικό διάστημα, από $T/4$ έως $T/2$, το ρεύμα ελαττώνεται μέχρι να μηδενιστεί και αναπτύσσεται στην κεραία τάση από αυτεπαγωγή αντίθετης πολικότητας, οπότε η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου μετασχηματίζεται σε ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται με αντίθετη φορά για τα υπόλοιπα χρονικά διαστήματα της περιόδου. Η κεραία λειτουργεί ως απλός ταλαντωτής και εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ενέργεια. Για να συντηρήσομε τις ταλαντώσεις, τροφοδοτούμε την κεραία με πηγή εναλλασσόμενης τάσεως, που παρέχει την κατάλληλη ενέργεια.

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα (σχ. 14.2.3) που παράγεται περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, όπως διαδίδονται σε μία διεύθυνση x:

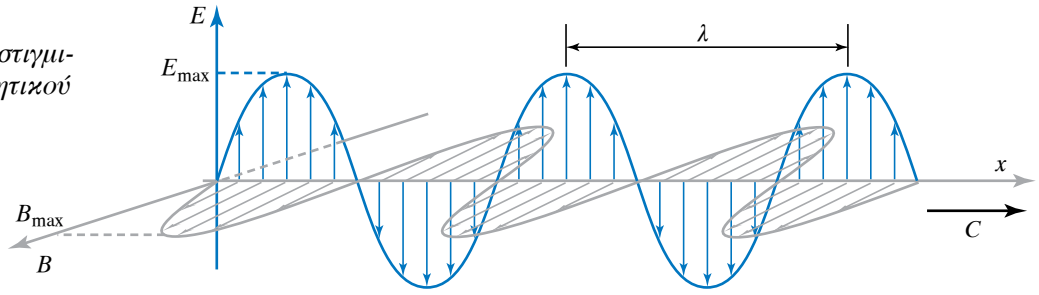
$$E = E_o \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$B = B_o \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

όπου E_o η μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου και B_o η μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου. Επίσης T η περίοδος του κύματος, λ το μήκος κύματος, ενώ t και x είναι οι μεταβλητές του χρόνου και της θέσεως.



Σχ. 14.2.2
Σχηματική παράσταση εκπομπής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τροποποιημένο σε κεραία κύκλωμα ταλαντώσεων.



Σχ. 14.2.3
Γραφική παράσταση στιγμιότυπου ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Παρατηρήσεις.

1) Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα συνίστανται από μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Τα σταθερά ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία δεν είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Ένα ακίνητο φορτίο ή ένα φορτίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα δεν παράγει ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχομε μόνο από επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη κίνηση φορτίων. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια, την οποία τους παρέχει η πηγή των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

2) Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια. Τα διανύσματα του ηλεκτρικού πεδίου E και του μαγνητικού πεδίου B είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως.

3) Κάθε στιγμή το πηλίκο των μέτρων των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με την ταχύτητα του φωτός $E/B = c$ (ισχύει στο SI, που κυρίως μας ενδιαφέρει).

4) Η αρχή της επαλληλίας των κυμάτων ισχύει και για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Δηλαδή σε κάθε σημείο του μέσου διαδόσεως η τιμή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του κύματος προκύπτει απ' τη συνισταμένη των διανυσμάτων των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διέρχονται από το δεδομένο σημείο εκείνη τη χρονική στιγμή.

14.3 Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και από πλήθος άλλων φυσικών φαινομένων (όπως η επιτάχυνση ηλεκτρικών φορτίων, η αποδιέγερση ατόμων, οι πυρηνικές μεταβολές), και παρουσιάζουν ευρύτατο φάσμα συχνοτήτων. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν όλα τα ίδια γενικά χαρακτηριστικά, όμως έχουν και μεγάλες διαφορές που εξαρτώνται κυρίως από τη συχνότητά τους (ή το μήκος κύματός τους), που καθορίζει την αλληλεπίδρασή τους με την ύλη.

Ανάλογα με τη συχνότητα (ή το μήκος κύματος), διαχωρίζομε το φάσμα τους σε διάφορες περιοχές. Τα όρια των περιοχών αυτών δεν είναι αυστηρά σαφή. Η κατάταξη θα ξεκινήσει από τα κύματα μικρότερης συχνότητας (μεγαλύτερου μήκους κύματος). Αναλυτικότερα:

1) ***Ραδιοκύματα*** είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μήκος κύματος από 10^5 m έως 1 cm. Μερικές από τις πηγές που τα εκπέμπουν είναι οι ραδιοφωνικοί και οι τηλεοπτικοί πομποί. Ανιχνεύονται από διάφορους απλούς τύπους κεραιών. Δεν έχουν συσχετιστεί με σημαντικό κίνδυνο για τα έμβια όντα.

2) ***Μικροκύματα*** είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκος κύματος από 30 cm έως 1 mm. Μερικές από τις πηγές που τα παράγουν είναι τα ραντάρ, οι πομποί τηλεπικοινωνιών, οι φούρνοι μικροκυμάτων. Ανιχνεύονται από κεραίες με ειδικές προδιαγραφές. Υπάρχουν ενδείξεις ότι μπορεί να εγκυμονούν κινδύνους για τον άνθρωπο και διεξάγεται έρευνα προς αυτήν την κατεύθυνση.

3) ***Υπέρυθρες ακτίνες*** είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκος κύματος από 1 mm έως 700×10^{-9} m. Πηγές τους είναι τα θερμά σώματα. Απορροφώνται εύκολα από τα περισσότερα υλικά αυξάνοντας τη θερμοκρασία τους και ανιχνεύονται πολύ εύκολα από θερμόμετρα και από θερμοευαίσθητα υλικά. Η υπερέκθεση του ανθρώπου σ' αυτές μπορεί να προκαλέσει δερματικά εγκαύματα λόγω αυξήσεως της θερμοκρασίας.

4) Το ***ορατό φως*** είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκος κύματος από 700×10^{-9}m (700 nm) έως 400×10^{-9}m (400 nm). Είναι το τμήμα του φάσματος που γίνεται αντιληπτό από το ανθρώπινο μάτι. Παράγεται κατά την αποδιέγερση ατόμων ή μορίων. Το ορατό τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος χωρίζεται σε μικρότερες περιοχές σχετικές με τη χρωματική αίσθηση που προκαλούν στον άνθρωπο οι διάφορες συχνότητες. Έχομε λοιπόν την περιοχή του:

α) ερυθρού με μήκη κύματος από 700 – 630 nm,
β) πορτοκαλί με μήκη κύματος από 630 – 590 nm,
γ) κίτρινου με μήκη κύματος από 590 – 560 nm,
δ) πράσινου με μήκη κύματος από 560 – 480 nm,
ε) κυανού με μήκη κύματος από 480 – 440 nm, και
στ) του ιώδους με μήκη κύματος από 440 –400 nm.

5) ***Υπεριώδης ακτινοβολία*** είναι ηλεκτρομαγνη-

τικά κύματα με μήκη κύματος από 380×10^{-9}m έως 60×10^{-9}m. Σημαντική πηγή υπεριώδους ακτινοβολίας είναι ο Ήλιος. Επίσης έχομε τεχνητές πηγές, που είναι διάφορα είδη λαμπτήρων.

Η υπεριώδης ακτινοβολία είναι υπεύθυνη για το καλοκαιρινό μας μαύρισμα, όμως σε μεγάλες δόσεις μπορεί να δημιουργήσει σοβαρά προβλήματα στο δέρμα. Τις τελευταίες δεκαετίες η επιφάνεια της Γης δέχεται αυξημένες ποσότητες υπεριώδους ακτινοβολίας εξαιτίας της μειώσεως του στρώματος του όζοντος που υπάρχει στη στρατόσφαιρα και απορροφά μέρος της υπεριώδους ακτινοβολίας.

6) ***Ακτίνες Χ*** ή ***ακτίνες Röntgen*** είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκη κύματος 10^{-8} m έως 10^{-13}m. Ένας τρόπος παραγωγής τους είναι όταν επιβραδύνονται ηλεκτρόνια που προσκρούουν με μεγάλη ταχύτητα σε μεταλλικό στόχο.

Οι ακτίνες Χ χρησιμοποιούνται στη μηχανουργία για τον έλεγχο πιθανής υπάρξεως ρωγμών σε μηχανικές κατασκευές και εσωτερικά τμήματα μηχανών. Επίσης χρησιμοποιούνται στην Ιατρική για διαγνωστικούς σκοπούς (ακτινογραφίες). Οι ακτίνες Χ είναι επικίνδυνες για τον άνθρωπο, διότι μπορούν να αλλοιώσουν το γενετικό υλικό στα κύτταρα και να προκαλέσουν σημαντικές βλάβες. Για τον λόγο αυτόν, η έκθεση σ' αυτές πρέπει να γίνεται μόνο όταν υπάρχει σοβαρός λόγος.

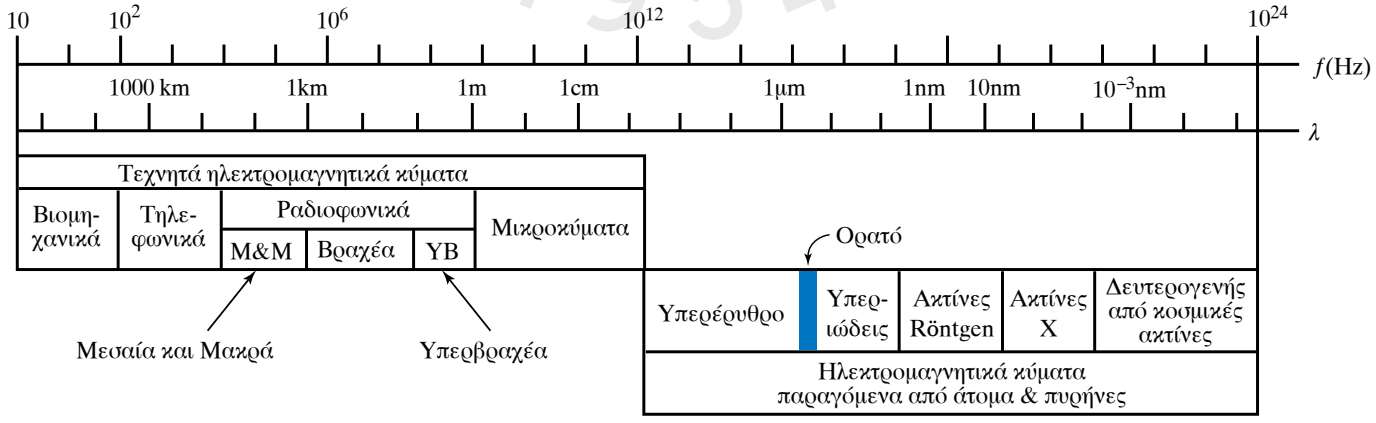
7) ***Ακτίνες γ*** είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκη κύματος 10^{-10} m έως 10^{-14} m. Παράγονται σε πυρηνικές αλληλεπιδράσεις, όπως πυρηνικές αποδιεγέρσεις, διάσπαση στοιχειωδών σωματιδίων. Ανιχνεύονται από ειδικούς ανιχνευτές πυρηνικής ακτινοβολίας. Είναι πολύ διεισδυτικές και πολύ επικίνδυνες, διότι προκαλούν σοβαρές βλάβες σε ιστούς και κύτταρα όταν απορροφούνται.

14.4 Χαρακτηριστικά των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ως προς τον τρόπο μεταδόσεώς τους στον αέρα, στο έδαφος και στο κενό.

Η χρήση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στις τηλεπικοινωνίες είναι σημαντική. Σήμερα έχει αναπτυχθεί ένα παγκόσμιο δίκτυο τηλεπικοινωνιών με επίγειους σταθμούς και δορυφόρους, που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη ναυτιλία. Για τις τηλεπικοινωνίες το ζητούμενο αφορά στην ομαλή και καλής ποιότητας επικοινωνία μεταξύ πομπού και δέκτη. Η ποιότητα της επικοινωνίας εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, που έχουν σχέση με την ισχύ των εκπεμπομένων κυμάτων, τη διαμόρφωση του σήματος και τη διάδοση των κυμάτων.

Οι ηλεκτρομαγνητικές ακτινοβολίες του φάσματος έχουν κοινές ιδιότητες, που οφείλονται στην κοινή τους φύση, (ηλεκτρομαγνητική διαταραχή), για παράδειγμα ταξιδεύουν στο κενό με την ίδια ταχύτητα, μεταφέρουν ενέργεια και παρουσιάζουν κυματικές ιδιότητες. Ανάλογα με τη συχνότητά τους εμφανίζουν διαφορές που αφορούν στην απορρόφησή τους από την ύλη, στην ανάκλαση, στη διάθλαση και στην ενέργεια που μεταφέρουν. Οι διαφορές αυτές είναι σημαντικές σε πολλές εφαρμογές των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, από τις τηλεπικοινωνίες μέχρι το φως ή τις εφαρμογές των ακτίνων Χ και γ στην Ιατρική.

Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα έχει διαιρεθεί σε ζώνες (περιοχές) ανάλογα με τη συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος (σχ. 14.4.1). Οι ζώνες



Σχ. 14.4.1
Περιοχές ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

Πινάκας 14.4
Οι ζώνες του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

Συμβολισμός	*Ονομασία*	*Ζώνη συχνοτήτων*
ELF	Άκρως χαμηλές συχνότητες	100 Hz – 3 kHz
VLF	Υπέρμακρα	3 kHz –30 kHz
LF	Μακρά	30 kHz –300 kHz
MF	Μεσαία	300 kHz – 3 MHz
HF	Βραχέα	3 MHz – 30 MHz
VHF	Υπερβραχέα	30 MHz – 300 MHz
UHF	Μικροκύματα δεκατομετρικά	300 MHz –3 GHz
SHF	Μικροκύματα εκατοστομετρικά	3 GHz – 30 GHz
EHF	Μικροκύματα χιλιοστομετρικά	30 GHz – 300 GHz
IR	Υπέρυθρες ακτίνες	300 GHz – 10^{14}Hz
	Ορατό φως	10^{14} Hz – 10^{16} Hz
UV	Υπεριώδεις ακτίνες	10^{16} Hz – 10^{18} Hz
X	Ακτίνες X	10^{18} Hz – 10^{20} Hz
γ	Ακτίνες γ (ραδιενέργεια γ)	10^{20} Hz – .....

εκτείνονται από τις πολύ μικρές συχνότητες έως τις υπεριώδεις ακτίνες και τις ακτίνες X (πίν. 14.4).

Η συχνότητα f και το μήκος κύματος λ ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος συνδέονται με τη σχέση $c = \lambda f$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο μέσο διαδόσεως. Η συχνότητα (και το μήκος κύματος) είναι ουσιαστικά το βασικό μέγεθος που καθορίζει τη συμπεριφορά του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διάδοσή του σε σχέση και με το μέσο διαδόσεως. Για παράδειγμα, πώς συμπεριφέρεται το κύμα όταν συναντάει ένα εμπόδιο ή όταν αλλάζει η πυκνότητα και η σύσταση του μέσου που διαδίδεται, πώς ανακλάται, πώς διαθλάται και πόσο διαφορετική είναι η απορρόφησή του από τα διάφορα υλικά.

Όταν μελετάμε τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, εξετάζομε δύο βασικούς τρόπους:

1) Ο πρώτος αφορά στα ***κύματα εδάφους***, δηλαδή κύματα που δεν απομακρύνονται πολύ από την επιφάνεια της Γης.

2) Ο δεύτερος αφορά στα ***κύματα χώρου*** ή ***ιονοσφαιρικά κύματα***, τα οποία είναι κύματα που απομακρύνονται από το έδαφος, ανακλώνται στα στρώματα της ιονόσφαιρας και επιστρέφουν στη Γη.

Είναι προφανές ότι οι μεταβολές στη σύσταση της ιονόσφαιρας παίζουν σημαντικό ρόλο στη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Πιο ειδικά, για τη συμπεριφορά των φασματικών ζωνών μπορούμε να αναφέρομε τα παρακάτω:

1) ***Κύματα VLF (υπέρμακρα κύματα)*** με μήκη κύματος από 30 – 10 km (συχνότητες 10 – 30 kHz). Η αξιοποίηση αυτών των κυμάτων γίνεται σε ειδικές εφαρμογές ραδιοτηλεγραφίας. Τα VLF κύματα διαδίδονται πολύ καλά ως κύματα εδάφους (μπορούν να καλύψουν και αποστάσεις έως 1000 km). Επίσης μπορούν να καλύψουν και μεγαλύτερες αποστάσεις ως κύματα χώρου μέσω ανακλάσεως στην ιονόσφαιρα. Τα VLF αξιοποιούνται στην επικοινωνία με τα υποβρύχια, γιατί διαδίδονται καλύτερα πάνω από τη θάλασσα και παρουσιάζουν διεισδυτικότητα στο νερό.

2) ***Κύματα LF (μακρά κύματα)*** με μήκη κύματος από 10 – 1 km (συχνότητες 30 – 300 kHz). Διαδίδονται σε μικρότερες αποστάσεις από τα VLF. Προσαρμόζονται στη μορφολογία του εδάφους, αλλά εξασθενούν συντομότερα όσο αυξάνεται η συχνότητά τους. Η διάδοσή τους ως κύματα χώρου μέσω ανακλάσεως στην ιονόσφαιρα παρουσιάζει απώλειες και μεγάλες αστάθειες μεταξύ ημέρας και νύχτας. Ειδικά την ημέρα, για μεγάλες αποστάσεις οι ραδιοζεύξεις παρουσιάζουν προβλήματα. Τα μακρά κύματα αξιοποιούνται στην επικοινωνία με πλοία.

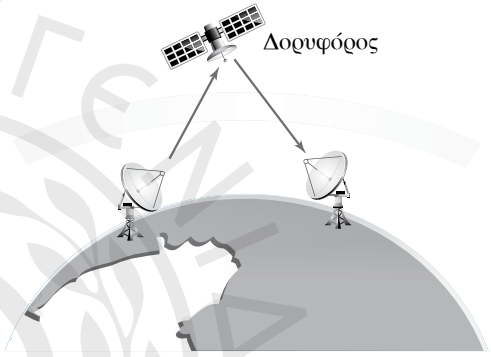
3) ***Κύματα MF (μεσαία κύματα)*** με μήκη κύματος από 1 – 100 m (συχνότητες 300 kHz –3 MHz). Τα μεσαία κύματα διαδίδονται μερικές εκατοντάδες χιλιόμετρα ως κύματα εδάφους και η απόσβεσή τους γίνεται μεγαλύτερη όσο μεγαλώνει η συχνότητα. Την ημέρα δεν μπορούν να διαδοθούν με κύματα χώρου, γιατί απορροφώνται από τα κατώτερα στρώματα τις ιονόσφαιρας. Τη νύχτα όμως λόγω των μεταβολών στην ιονόσφαιρα, μπορούν με ανάκλαση να καλύψουν μεγαλύτερες αποστάσεις, εμφανίζοντας κάποια προβλήματα διαλείψεων λόγω συμβολής. Χρησιμοποιούνται στη ραδιοφωνία (ΑΜ) και για στρατιωτικές εφαρμογές.

4) ***Κύματα HF (βραχέα κύματα)*** με μήκη κύματος από 100 – 10 m (συχνότητες 3 – 30 MHz). Τα βραχέα κύματα απορροφώνται έντονα από το έδαφος γι' αυτό και έχομε πολύ μικρή κάλυψη μέσω κυμάτων εδάφους, που φτάνει μερικές δεκάδες χιλιόμετρα. Όμως έχομε σημαντική κάλυψη με τα κύματα χώρου των βραχέων, γιατί μπορούν να υποστούν πολύ εύκολα διαδοχικές ανακλάσεις στην ιονόσφαιρα και στο έδαφος. Με τον τρόπο αυτόν πετυχαίνομε καλύψεις σε πολύ μεγάλες αποστάσεις χιλιάδων χιλιομέτρων. Το πρόβλημα που ανακύπτει από το συγκεκριμένο τρόπο μεταδόσεως είναι οι πολλαπλές ζώνες σιγής. Επίσης πρόβλημα παρατηρείται λόγω των μεταβολών της συστάσεως της ιονόσφαιρας, που συμβαίνουν μεταξύ ημέρας και νύχτας.

Τα βραχέα αξιοποιούνται για επικοινωνία σε μακρινές αποστάσεις σε εμπορικές και στρατιωτικές εφαρμογές, αλλά και στη ραδιοτηλεφωνία (CB στην περιοχή των 27 MHz).

5) ***Κύματα VHF (υπερβραχέα κύματα)*** με μήκη κύματος από 10 – 1 m (συχνότητες από 30 – 300 MHz). Τα υπερβραχέα κύματα σπάνια ανακλώνται από την ιονόσφαιρα. Η ραδιοζεύξη γίνεται μόνο με κύματα εδάφους σε αποστάσεις που υπάρχει οπτική επαφή. Επίσης είναι δυνατόν να έχομε κάλυψη σε μεγαλύτερες αποστάσεις απ' τον οπτικό ορίζοντα λόγω της διαθλάσεως των υπερβραχέων στα κατώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, η διάδοση των οποίων επηρεάζεται από τις μετεωρολογικές μεταβολές. Η ζώνη των υπερβραχέων χρησιμοποιείται στη ραδιοφωνία από 88 MHz έως 108 MHz, στην τηλεόραση, στη ραδιοτηλεφωνία, και κάποιες ζώνες σε ραδιοερασιτέχνες, όπως η περιοχή κοντά στα 143 MHz.

6) ***Κύματα UHF, SHF, EHF (μικροκύματα)*** με μήκη κύματος από 1 m έως και 1 mm, περίπου. Τα μικροκύματα δεν ανακλώνται στην ιονόσφαιρα, τη διαπερνούν εύκολα και γι' αυτό χρησιμοποιούνται πάρα πολύ στις δορυφορικές επικοινωνίες (σχ. 14.4.2). Για την εκπομπή και τη λήψη τους μπορούμε να χρησιμοποιούμε κατευθυντικές κεραίες σχετικά μικρών διαστάσεων και να κερδίζομε όσον αφορά στην ανάγκη εκπεμπόμενης ισχύος, λόγω της κατευθυντικότητας της εκπομπής και της λήψεως. Τα μικροκύματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά για τις επικοινωνίες, γιατί έχουν υψηλές συχνότητες, που παρέχουν τη δυνατότητα για διαμορφώσεις μεγάλου εύρους και μπορούν να μεταφέρουν σημαντικά μεγάλο όγκο πληροφοριών.



Σχ. 14.4.2
Επικοινωνία με μικροκύματα μέσω δορυφόρου.

Η ταχύτητα διαδόσεως των ηλεκτρονικών κυμάτων στο κενό είναι η μέγιστη δυνατή που μπορεί να υπάρξει και είναι ίση με $c = 300.000$ km/s με ταχύτητα αυτή ελαττώνεται όταν τα κύματα διαδίδονται σε υλικά μέσα. Η τιμή της τότε υπολογίζεται, για τα υλικά πρακτικού ενδιαφέροντος, απ' τη σχέση:

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}},$$

όπου ε_r η σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού, στο οποίο διαδίδεται το κύμα.

Παρατήρηση.

Η $c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $c' = c/n$, όπου n ο δείκτης διαθλάσεως του μέσου διαδόσεως και ισχύει η σχέση $\varepsilon_r = n^2$.

Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, που αφορούν στη διάδοσή του, είναι το μήκος κύματος, (και η συχνότητα) το επίπεδο πο-

λώσεως του κύματος και η πυκνότητα ισχύος του σε δεδομένο σημείο του χώρου.

Το μήκος κύματος συμβολίζεται με το γράμμα λ και εκφράζει την απόσταση που διανύει το κύμα, στο μέσο διαδόσεως για χρόνο μίας περιόδου T της ηλεκτρικής ταλαντώσεως απ' την οποία προέρχεται. Δηλαδή $\lambda = c\,T$ ή $\lambda = c/f$, όπου $f = 1/T$ η συχνότητα του κύματος.

Επίπεδο πολώσεως του ηλεκτρομαγνητικού κύματος ονομάζεται το επίπεδο που ορίζει η κατεύθυνση ταλαντώσεως του ηλεκτρικού πεδίου. Όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι κατακόρυφο, λέμε ότι το κύμα είναι κατακόρυφα πολωμένο, αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι οριζόντιο, λέμε ότι το κύμα είναι οριζόντια πολωμένο, ενώ αν το επίπεδο του ηλεκτρικού πεδίου αλλάζει συνεχώς κατεύθυνση, περιστρέφεται κυκλικά, το κύμα κυκλικά πολωμένο.

Πυκνότητα ισχύος ηλεκτρομαγνητικού κύματος ονομάζουμε την ηλεκτρομαγνητική ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας που έχομε σε δεδομένο σημείο του χώρου. Η πυκνότητα ισχύος ϱ δίνεται απ' τη σχέση $\varrho = EH$, όπου E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και $H = B/\mu_o$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο δεδομένο σημείο του χώρου, μετρημένη σε A/m. Η πυκνότητα ισχύος του κύματος μετρείται σε W/m^2 ή σε W/km^2.

Παρατήρηση.

Η τιμή του ηλεκτρικού E και η τιμή του μαγνητικού πεδίου H δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν το κύμα διαδίδεται στο κενό, συνδέονται με τη σχέση $E/H = 120\pi$, όπου E μετρημένο σε V/m και H μετρημένο σε A/m.

14.5 Παράγοντες που επιδρούν στη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν να παράγονται από μία κεραία εκπομπής και να διαδίδονται στον χώρο όταν δεν συναντούν εμπόδια. Η συμπεριφορά τους μοιάζει με τη συμπεριφορά του φωτός. (Υπενθυμίζομε ότι και το φως είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία). Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι δυνατόν κατά τη διάδοσή τους να υποστούν ανάκλαση, όταν συναντήσουν εμπόδιο, διάθλαση όταν μεταβάλλεται η πυκνότητα ή τα χαρακτηριστικά του μέσου διαδόσεως, απορρόφηση και απόσβεση.

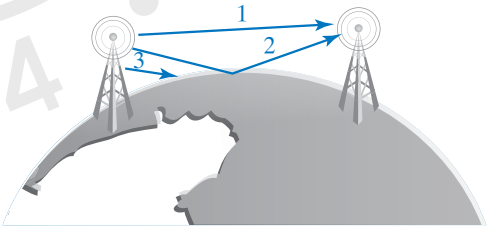
Το μέγεθος που είναι καθοριστικό για τη συμπεριφορά του κύματος κατά τη διάδοσή του είναι η συχνότητα f και το μήκος κύματός του, λ.

Θα υποθέσομε ότι η εκπομπή γίνεται στον χώρο ομοιόμορφα σφαιρικά. Στην περίπτωση αυτή εκπέμπεται ισχύς P, της όποιας η πυκνότητα ελαττώνεται, καθώς το κύμα διαδίδεται στον χώρο, με αποτέλεσμα σε απόσταση R από την κεραία εκπομπής να έχομε πυκνότητα ισχύος $\varrho = P/4\pi R^2$, όπου $4\pi R^2$ το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας S ακτίνας R, που έχει διαδοθεί το ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Η διάδοση και η απορρόφηση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων επηρεάζεται καθοριστικά από χαρακτηριστικά του μέσου, στο οποίο διαδίδεται. Δηλαδή σημαντική είναι η σύσταση της ατμόσφαιρας, ειδικά της ιονόσφαιρας, οι μετεωρολογικές συνθήκες, η μορφολογία και η αγωγιμότητα του εδάφους και αν το κύμα διαδίδεται πάνω από τη θάλασσα ή την ξηρά.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω εξετάζοντας τη διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος μετά την εκπομπή του από μια κεραία, μπορούμε να διακρίνομε δύο γενικούς τρόπους. Ο πρώτος τρόπος αφορά στα κύματα εδάφους και ο δεύτερος στα κύματα χώρου ή ιονοσφαιρικά κύματα.

Κύματα εδάφους (σχ. 14.4.3) ονομάζομε τα κύματα που υποθέτομε ότι δεν απομακρύνονται πολύ απ' το έδαφος. Τα κύματα αυτά μπορούν να διαδοθούν είτε απευθείας στην κεραία λήψεως, όταν δεν υπάρχει φυσικό εμπόδιο, είτε μετά από ανάκλαση στο έδαφος, είτε να κινηθούν εφαπτομενικά με το έδαφος ή τη θάλασσα ακολουθώντας την καμπυλότητα της Γης, ειδικά αν υπάρχει καλή αγωγιμότητα, για παράδειγμα από το νερό.

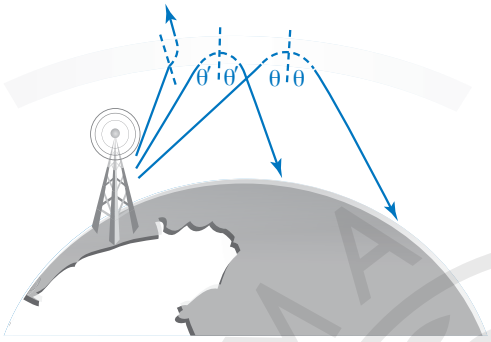


Σχ. 14.4.3
Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εδάφους.

Τα προβλήματα που προκύπτουν από αυτόν τον τρόπο διαδόσεως έχουν σχέση με την απορρόφηση από το έδαφος, αλλά και με τις περιοχές εξασθενημένου σήματος, που δημιουργούνται από τη συμβολή των κυμάτων που διαδίδονται ευθύγραμμα και των κυμάτων που διαδίδονται με ανάκλαση από το έδαφος. Δηλαδή όταν συμβάλλουν τα δύο κύματα, μπορεί να βρίσκονται σε διαφορά φάσεως λόγω της

διαφορετικής αποστάσεως που διανύουν, με αποτέλεσμα σε άλλες περιοχές να έχομε ενίσχυση σήματος και σε άλλες περιοχές απόσβεση.

Κύματα χώρου ή ***ιονοσφαιρικά κύματα*** (σχ. 14.4.4) ονομάζομε τα κύματα που υποθέτομε ότι απομακρύνονται από το έδαφος και όταν φτάσουν στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, την ιονόσφαιρα, είναι δυνατόν να υποστούν ανάκλαση, ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν.



Σχ. 14.4.4
Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων χώρου (ιονοσφαιρικών κυμάτων).

Αναφέρομε ότι η ιονόσφαιρα είναι μια περιοχή της ατμόσφαιρας που εκτείνεται περίπου σε ύψος από τα 70 km έως τα 400 km και περιλαμβάνει διάφορα στρώματα με μεγάλη πυκνότητα ιόντων, που προέρχονται από ιονισμό ατόμων από την ηλιακή ακτινοβολία. Τα στρώματα τις ιονόσφαιρας παρουσιάζουν σημαντικές μεταβολές, ανάλογα με την ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας, που προκαλεί τον ιονισμό τους. Η πυκνότητα ιονισμού τους εξασθενεί τη νύχτα, εξαρτάται από τις εποχές του χρόνου, από τις ηλιακές κηλίδες και τις ηλιακές καταιγίδες και επηρεάζεται από τις μεταβολές του μαγνητικού πεδίου της Γης.

Οι μεταβολές στην ιονόσφαιρα επιδρούν άμεσα στη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Η ανάκλαση και η διάθλαση που θα υποστεί ένα κύμα εξαρτάται σημαντικά απ' την πυκνότητα της ιονόσφαιρας, το μήκος κύματος, αλλά και τη γωνία προσπτώσεως στο ιονοσφαιρικό στρώμα. Έχει παρατηρηθεί ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μικρό μήκος κύματος (μεγάλη συχνότητα) ανακλώνται σε ιονοσφαιρικά στρώματα με υψηλή πυκνότητα ιονισμού. Δηλαδή η ανάκλαση κυμάτων υψηλοτέρων συχνοτήτων συμβαίνει στα ανώτερα στρώματα της ιονόσφαιρας, όπου υπάρχει υψηλότερη πυκνότητα ιονισμού, ενώ στα κατώτερα στρώματα, με τη χαμηλότερη πυκνότητα ιονισμού, ανακλώνται οι κατώτερες συχνότητες. Επίσης η γωνία επιστροφής του κύματος στη Γη είναι μικρότερη, όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα ιονισμού και όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος κύματος. Σημαντικό ρόλο στη διαδικασία αυτή έχει και η γωνία, με την οποία προσπίπτει ένα κύμα στην ιονόσφαιρα. Ανάλογα με την πυκνότητα ιονισμού και το μήκος κύματος, ορίζεται και η οριακή γωνία προσπτώσεως θ_c, που είναι η ελάχιστη γωνία προσπτώσεως, ώστε να έχομε ανάκλαση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Με δεδομένη συχνότητα, για γωνίες προσπτώσεως μικρότερες απ' την κρίσιμη θ_c το κύμα δεν ανακλάται, διαπερνά το στρώμα και χάνεται.

Τα προβλήματα που προκύπτουν από τη διάδοση με ιονοσφαιρικά κύματα αφορούν στην κάλυψη διαφόρων περιοχών, οι οποίες μπορεί να είναι έξω από την ελάχιστη οριακή απόσταση που καλύπτουν τα κύματα εδάφους. Δηλαδή ένα κύμα λόγω της ανακλάσεώς του στην ιονόσφαιρα μπορεί να φτάνει αρκετά μακριά σε σχέση με την απόσταση που καλύπτει ένα κύμα εδάφους, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία περιοχή χωρίς κάλυψη, «μια ζώνη σιγής». Επίσης, αν το κύμα από ανάκλαση καλύπτει τις περιοχές, που καλύπτει το κύμα εδάφους, τότε παρατηρούνται φαινόμενα συμβολής με μεταβαλλόμενες αποσβέσεις ή ενισχύσεις των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με αποτέλεσμα διαλείψεις του σήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 10\,\mu F$ συνδέεται αρχικά στους πόλους μιας πηγής τάσεως $V = 4{,}5\,V$. Στη συνέχεια οι οπλισμοί του πυκνωτή συνδέονται στα άκρα του πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 9\,mH$. Να βρείτε:
α) Τη συχνότητα f των ηλεκτρικών ταλαντώσεων που εκτελεί το κύκλωμα.
β) Τη μέγιστη τιμή I του ρεύματος στο κύκλωμα.
γ) Την ενέργεια ταλαντώσεως του κυκλώματος και τη μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή. Τι παρατηρείτε;

2. Ο πυκνωτής ενός κυκλώματος έχει χωρητικότητα $C = 5\,\mu F$ και φορτίο $Q = 1\,\mu C$, ενώ το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 2\,mH$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνομε το διακόπτη και το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση.
α) Να βρεθεί η περίοδος των ταλαντώσεων του κυκλώματος.
β) Ποιες σχέσεις δίνουν το φορτίο του πυκνωτή

και την τιμή του ρεύματος σε συνάρτηση με τον χρόνο;

γ) Πόση είναι η τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή που η ενέργεια U_E του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή είναι ίση με την ενέργεια U_B του μαγνητικού πεδίου του πηνίου;

3. Φορτισμένος πυκνωτής χωρητικότητας $C = 10^{-6}$ F συνδέεται με ιδανικό πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 0{,}09$ H μέσω διακόπτη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνομε τον διακόπτη. Να βρείτε:

α) Τη συχνότητα f των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

β) Τις χρονικές στιγμές στη διάρκεια της πρώτης περιόδου, όπου η τιμή του ρεύματος μηδενίζεται.

γ) Τη χρονική στιγμή, όπου η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου γίνεται τριπλάσια απ' την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου για πρώτη φορά.

4. Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 10\,\mu$F φορτίζεται από πηγή τάσεως $V = 36$ V. Στη συνέχεια, η πηγή απομακρύνεται και τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t = 0}$, ο πυκνωτής συνδέεται στα άκρα πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 16$ mH. Να υπολογίσετε για τη χρονική στιγμή $t_1 = 17\pi \times 10^{-4}$ s τα παρακάτω μεγέθη:

α) Το φορτίο του πυκνωτή.

β) Την τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα.

γ) Την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή.

δ) Τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου.

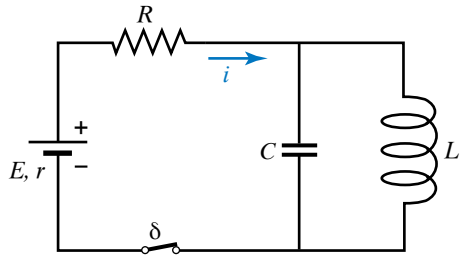
5. Σ' ένα κύκλωμα LC ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 10\,\mu$F και ηλεκτρικό φορτίο $Q = 20\,\mu$C. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνομε τον διακόπτη. Αν ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι $L = 4$ mH, να βρείτε:

α) Τις εξισώσεις σε συνάρτηση με τον χρόνο του ρεύματος και της τάσεως V_C του πυκνωτή.

β) Αν υπάρχει χρονική στιγμή όπου $V_C = 3V_L$.

γ) Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή που η τιμή του ρεύματος είναι το μισό της μέγιστης τιμής της.

6. Για το παρακάτω κύκλωμα (σχ. 1) ισχύει: $E = 40$ V, $r = 2\,\Omega$, $R = 6\,\Omega$, $C = 8\,\mu$F, $L = 20$ mH. Ο διακόπτης αρχικά είναι κλειστός. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγομε το διακόπτη, οπότε το κύκλωμα LC εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.



Σχ. 1

α) Να γραφούν οι σχέσεις που δίνουν το φορτίο q του πυκνωτή και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο σε συνάρτηση με τον χρόνο.

β) Σε ποια χρονική στιγμή το ρεύμα στο πηνίο μηδενίζεται για πρώτη φορά;

γ) Σε ποια χρονική στιγμή η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο γίνεται για πρώτη φορά ίση με την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή;

7. Σ' ένα κύκλωμα RLC ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 10^{-8}$ F. Φορτίζομε τον πυκνωτή με φορτίο $Q = 10^{-6}$ C και αφήνομε το κύκλωμα να εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση. Να βρείτε τη θερμική ενέργεια που αναπτύσσεται στο κύκλωμα λόγω των ωμικών αντιστάσεων, απ' τη στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση μέχρι που αυτή σταματά τελείως. Η ενέργεια που εκπέμπεται από το κύκλωμα με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας θεωρείται αμελητέα.

8. Το κύκλωμα παραγωγής ηλεκτρικών ταλαντώσεων ενός πομπού αποτελείται από πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L_1 = 0{,}5$ H, και πυκνωτή με χωρητικότητα $C_1 = 10^{-8}$ F. Το κύκλωμα του δέκτη αποτελείται από πηνίο με συνταλεστή αυτεπαγωγής $L_2 = 0{,}01$ H και πυκνωτή μεταβλητής χωρητικότητας C. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της χωρητικότητας C του πυκνωτή, ώστε ο δέκτης να βρίσκεται σε συντονισμό με τον πομπό;

9. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας $C = 10\,\mu$F, με ηλεκτρικό φορτίο $Q = 10^{-3}$ C συνδέεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στα άκρα ενός πηνίου με μη αμελητέα ωμική αντίσταση. Να βρείτε τη θερμική ενέργεια που παράγεται λόγω αντιστάσεως του πηνίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που η μέγιστη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή υποτετραπλασιαστεί.

10. Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 1\,\mu$F συνδέεται σε σειρά με πηνίο, που έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 40$ mH. Το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Κάποια χρονική στιγμή η τάση του πυκνωτή είναι $V_c = 100$ V και το ρεύμα είναι $i = 0{,}5$ A. Να βρείτε:

α) Την ολική ενέργεια του κυκλώματος.

β) Τις μέγιστες τιμές του φορτίου του πυκνωτή και του ρεύματος.

11. Ένας φάρος είναι εφοδιασμένος με κατάλληλη κεραία που εκπέμπει σφαιρικά ραδιοκύματα για να προειδοποιεί τα διερχόμενα πλοία Αν η ισχύς εκπομπής απ' την κεραία είναι $P_\varepsilon = 2000$ W, να υπολογιστεί η πυκνότητα ισχύος του σήματος που λαμβάνει ένα πλοίο, το οποίο πλέει σε απόσταση 400 m από τον φάρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

Ήχος

15.1 Παραγωγή, διάδοση και χαρακτηριστικά του ήχου.

Ο κοσμοναύτης Aleksei Leonov περιέγραψε έναν περίπατό του έξω από το διαστημόπλοιο ως εξής: *«Αυτό που με εντυπωσίασε ήταν η ησυχία. Τέτοια ησυχία δεν μπορεί να φανταστεί κανένας στη Γη. Μια ησυχία τόσο βαθιά και τόσο απόλυτη, που μπορεί κανείς ν' ακούσει τους ήχους του σώματός του: τους χτύπους της καρδιάς και τους παλμούς των αρτηριών, ακόμη και τον ήχο που κάνουν οι μύες, καθώς συσπώνται»*.

Από την άλλη, στη Γη μας ακούμε γύρω μας διάφορους ήχους, τη φωνή μας, τα γέλια των φίλων μας, τραγούδια, θορύβους, το γάβγισμα του σκύλου, το κελάηδημα των πουλιών, τον ήχο των κυμάτων της θάλασσας, τον ήχο της βροντής, το θρόισμα των φύλλων. Τι είναι όμως όλοι αυτοί οι ήχοι, πώς παράγονται και γιατί, ενώ τους ακούμε στη Γη, στο διάστημα επικρατεί απόλυτη ησυχία;

Ήχο στην καθημερινή μας ζωή ονομάζομε ό,τι αντιλαμβανόμαστε με την αίσθηση της ακοής.

Οι ήχοι παράγονται από τις ταλαντώσεις (δονήσεις) κάποιου σώματος (της πηγής του ήχου) και διαδίδονται ως κύματα μέσω κάποιου υλικού μέσου.

Κύμα είναι η διάδοση μιας διαταραχής στο χώρο. Κατά τη διάδοση του κύματος μεταφέρεται ενέργεια, ενώ δεν μεταφέρεται ύλη.

Πιο συγκεκριμένα, οι ήχοι είναι μηχανικά κύματα. Στα αέρια και στα υγρά είναι διαμήκη κύματα, ενώ στα στερεά είναι διαμήκη και εγκάρσια. Οι ήχοι, προκειμένου να διαδοθούν, χρειάζονται ένα ελαστικό μέσο.

Στα στερεά διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα απ' ό,τι στα υγρά, και στα υγρά με μεγαλύτερη ταχύτητα απ' ό,τι στα αέρια. Δηλαδή: $u_{\text{στερ}} > u_{\text{υγρ}} > u_{\text{αερ}}$.

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα εξαρτάται απ' τη θερμοκρασία και την υγρασία. Η ταχύτητά του δεν εξαρτάται από την έντασή του, δηλαδή από το αν είναι ισχυρός ή ασθενής. Για παράδειγμα στον αέρα, όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, αυξάνεται και η ταχύτητα του ήχου.

Η ταχύτητά του στον αέρα είναι $u = 331\ \text{m/s}$ στους $0\ ^{\circ}\text{C}$ και στους $20\ ^{\circ}\text{C}$ είναι $u = 344\ \text{m/s}$.

Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται και από την υγρασία. Η διάδοσή του είναι ταχύτερη στον υγρό αέρα απ' ό,τι στον ξηρό.

Αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα της διαδόσεως του ήχου σ' ένα αέριο δίνεται από τον τύπο:

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

όπου $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων του αερίου, R η παγκόσμια σταθερά των αερίων, M η μάζα ενός γραμμομορίου του αερίου και T η απόλυτη θερμοκρασία του.

Για τον αέρα στους $0\ ^{\circ}\text{C}$ η ταχύτητα υπολογίζεται από τον παραπάνω τύπο. Εάν θέσομε: $\gamma = 1{,}4$, $T = 273\ \text{K}$, $M = 28{,}96 \times 10^{3}\ \text{kg}$ και $R = 8{,}31\ \text{J/(mol} \times \times \text{K)}$ προκύπτει ότι στους $0\ ^{\circ}\text{C}$ η ταχύτητα στον αέρα είναι $u_0 = 331\text{m/s}$.

Εάν στους $0\ ^{\circ}\text{C}$ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι u_0, τότε στη θερμοκρασία θ (σε $^{\circ}\text{C}$) υπολογίζεται από τη σχέση: $u_{\theta} = u_0(1 + \alpha\theta)$, όπου α είναι συντελεστής που εξαρτάται από τη σύνθεση του αέρα. Στον πίνακα 15.1 δίδονται ενδεικτικές τιμές της ταχύτητας του ήχου σε διάφορα υλικά.

Στο κενό ο ήχος δεν διαδίδεται. Για να μεταδοθεί ο ήχος, απαιτείται ταλάντωση κάποιου υλικού ελαστικού μέσου.

Τα ηχητικά κύματα στα αέρια και στα υγρά είναι διαμήκη κύματα, είναι δηλαδή κύματα, στα οποία έχομε ταλάντωση του μέσου παράλληλα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στα αέρια και στα υγρά δεν μπορούν να δημιουργηθούν σημαντικές διατμητικές τάσεις, υπάρχει μόνο συμπίεση και αποσυμπίεση. Κατά τη διάδοση διαμήκων κυμάτων στον χώρο, δημιουρ-

Πίνακας 15.1
Ταχύτητα του ήχου σε διάφορα υλικά.

Υλικό	*Ταχύτητα ήχου (m/s)*
Αέρια	
1. Αέρας (20 °C)	344
2. Ήλιο (20 °C)	999
3. Υδρογόνο (20 °C)	1330
Υγρά	
1. Υδράργυρος	1451
2. Νερό (0 °C)	1402
3. Νερό (20 °C)	1482
4. Νερό (100 °C)	1543
Στερεό	
1. Βηρύλλιο	12 870
2. Κόκκαλο	3445
3. Ορείχαλκος	3450
4. Γυαλί Pyrex	5170
5. Χάλυβας	5000

γούνται πυκνώματα και αραιώματα κι αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία τοπικών μεταβολών της πυκνότητας του ελαστικού μέσου. Οι μεταβολές αυτές οφείλονται στην ελαστικότητα του όγκου, την οποία παρουσιάζουν όλα τα σώματα. Επομένως τα διαμήκη κύματα διαδίδονται σε όλα τα σώματα στερεά, υγρά και αέρια.

Ο ήχος είναι κύμα, άρα έχει όλα τα χαρακτηριστικά των κυμάτων. Αναφέρομε συνοπτικά:

1) ***Ταχύτητα (σε m/s)***, που εκφράζει το πόσο γρήγορα ή αργά απομακρύνεται μια διαταραχή από το σημείο παραγωγής της. Αν σε χρόνο t μια διαταραχή διαδίδεται σε απόσταση x από την πηγή παραγωγής της, τότε η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος ισούται με το πηλίκο ***ταχύτητα*** $u = x/t$.

2) ***Περίοδος (T σε s),*** το χρονικό διάστημα δηλαδή που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μια πλήρης ταλάντωση σ' ένα σημείο του μέσου. Σε χρόνο μιας περιόδου, παρ' όλο που το κύμα έχει προχωρήσει, τα σωμάτια του μέσου, έχοντας εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, βρίσκονται πάλι στις αρχικές τους θέσεις, ισχύουν $T = t/N$ άρα $T = 1/f$.

3) ***Συχνότητα (f σε Hz)***, δηλαδή η συχνότητα, με την οποία ταλαντώνεται το μέσο διαδόσεως ισχύει $f = 1/T$.

4) ***Μήκος κύματος (λ σε m)***, δηλαδή η απόσταση, στην οποία διαδίδεται το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.

Η κυματική εξίσωση προφανώς ισχύει και για τα ηχητικά κύματα. Αν στη σχέση για την ταχύτητα θέσομε $t = T$ και $x = \lambda$, τότε έχομε $u = \lambda/T$ επομένως αφού $T = 1/f$, $u = \lambda f$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Από ένα πλοίο που βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας εκπέμπομε ηχητικό σήμα, το οποίο φτάνει στο βυθό, ανακλάται και επιστρέφει στο πλοίο. Αν ο ήχος μέσα στο νερό διαδίδεται με ταχύτητα $u = 1450$ m/s και το χρονικό διάστημα απ' τη στιγμή της εκπομπής του ηχητικού σήματος μέχρι την επιστροφή του στο πλοίο είναι $t = 4$ s, να βρείτε το βάθος H της θάλασσας στο σημείο εκείνο.

Λύση

Η απόσταση που διανύει ο ήχος είναι ίση με $2H$ (H για να φτάσει απ' το πλοίο στο βυθό και H για να επιστρέψει από το βυθό στο πλοίο). Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται σ' όλη τη διαδρομή είναι 4 s. Άρα:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{2H}{t}, \quad 2H = ut, \quad H = \frac{ut}{2},$$

$$H = \frac{1450}{2m}, \quad H = 2900 \text{ m}.$$

2. Ήχος συχνότητας $f = 3400$ Hz διαδίδεται στον αέρα και στο νερό. Αν στον αέρα ο ήχος διαδίδεται με ταχύτητα 340 m/s και στο νερό με ταχύτητα 1700 m/s, να βρείτε το μήκος κύματος του ήχου στον αέρα και στο νερό.

Λύση

Γνωρίζομε ότι όταν ένα κύμα αλλάζει μέσο διαδόσεως, η συχνότητά του παραμένει η ίδια, επομένως η συχνότητα του ήχου είναι ίδια στο νερό και στον αέρα $f = 3400$ Hz.

Εφαρμόζομε την κυματική εξίσωση σε κάθε περίπτωση και έχομε: $u_\alpha = \lambda_\alpha f$.

$$\text{Άρα} \quad \lambda_\alpha = \frac{u_\alpha}{f} = \frac{340\text{m/s}}{3400\text{Hz}} = 0{,}1\text{m} \quad \text{και}$$

$$u_\nu = \lambda_\nu f \quad \text{άρα} \quad \lambda_\nu = \frac{u_\nu}{f} = \frac{1700\text{ m/s}}{3400\text{ Hz}} = 0{,}5\text{ m}.$$

15.2 Πηγές ήχου.

Ένα ηχητικό κύμα ξεκινά από μια ταλάντωση ενός συστήματος. Μπορεί να είναι οι φωνητικές μας χορδές που ταλαντώνομε όταν μιλάμε ή μια μεμβράνη τυμπάνου που ταλαντώνεται, όταν χτυπάμε το τύμπανο.

Ο ήχος λοιπόν παράγεται όταν μια ηχητική πηγή ταλαντώνεται, δηλαδή όταν κάνει παλμικές κινήσεις. Οι παλμικές κινήσεις αναγκάζουν το μέσο διαδόσεως να ταλαντεύεται με την ίδια συχνότητα.

Στην περίπτωση αερίων και υγρών μέσων διαδόσεως, δημιουργούνται πυκνώματα και αραιώματα, που διαδίδονται στο υλικό μέσο (σχ. 15.2). Η ταλάντωση του μέσου μεταφέρει τον ήχο στο αυτί μας, το οποίο τον ανιχνεύει με μια ειδική μεμβράνη το ***τύμπανο***. Στη συνέχεια, μεταβιβάζεται σε πληροφορία με τη βοήθεια του ακουστικού νεύρου στον εγκέφαλό μας και έτσι αντιλαμβανόμαστε τον ήχο. Όμως, το ανθρώπινο αυτί δεν είναι ένα απλό φυσικό όργανο που απλά καταγράφει «αντικειμενικά» τους ήχους. Συχνά, τον ίδιο ήχο διαφορετικοί άνθρωποι τον αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο. Συνεπώς υπάρχουν κάποια υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου.

Σχ. 15.2
Πυκνώματα και αραιώματα.

15.3 Υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου.

Τα υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου είναι τα ακόλουθα:

1) Το ***ύψος*** του ήχου, σύμφωνα με το οποίο διακρίνομε έναν οξύ (ψηλό) από ένα βαρύ (χαμηλό) ήχο. Το ύψος του ήχου σχετίζεται με τη συχνότητα του ηχητικού κύματος, την οποία αντιλαμβάνεται το ανθρώπινο αυτί. Όσο η συχνότητα μεγαλώνει (γρήγορες ταλαντώσεις της ηχητικής πηγής), τόσο πιο οξύς (ψηλός και διαπεραστικός) είναι ο ήχος. Όσο η συχνότητα μικραίνει (αργές ταλαντώσεις της ηχητικής πηγής), τόσο πιο βαρύς (χαμηλός και βαθύς) γίνεται.

Οι ήχοι που μπορούν να συλληφθούν από το ανθρώπινο αυτί είναι αυτοί που η συχνότητά τους βρίσκεται μεταξύ 20 παλμικών κινήσεων το δευτερόλεπτο (20 Hz) και 20 000 παλμικών κινήσεων το δευτερόλεπτο (20 000 Hz). Οι ήχοι που η συχνότητά τους είναι κάτω από 20 Hz ονομάζονται ***υπόηχοι*** και δεν συλλαμβάνονται από το αυτί του ανθρώπου, ενώ εκείνοι που έχουν συχνότητα πάνω από 20 000 Hz καλούνται ***υπέρηχοι*** και δεν γίνονται ακουστοί.

2) ***Ακουστότητα*** ονομάζεται το υποκειμενικό χαρακτηριστικό του ήχου, με το οποίο ξεχωρίζομε τους ήχους σε ισχυρούς και ασθενείς.

Η ακουστότητα αναφέρεται στον τρόπο, με τον οποίο το ανθρώπινο αυτί αντιλαμβάνεται την ένταση του ηχητικού κύματος, δηλαδή την ενέργεια που φτάνει στο αυτί μας στη μονάδα του χρόνου. Είναι όμως πολύ σημαντικό να ειπωθεί ότι η ακουστότητα δεν είναι ανάλογη της εντάσεως. Δηλαδή, αν δυναμώσομε έναν ήχο, π.χ. στο ραδιόφωνό μας, ο οποίος μας φαίνεται δύο φορές πιο δυνατός από τον προηγούμενο, η ένταση του ήχου αυξάνεται κατά 100 φορές, ενώ αν τον δυναμώσομε τόσο που να νομίζομε ότι έγινε τρεις φορές πιο δυνατός, η ένταση του αυξάνεται κατά 1000 φορές. Γίνεται κατανοητό λοιπόν ότι διαφορετικά «μετράει» η Φυσική την ένταση του ήχου και διαφορετικά ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Ενώ νομίζομε ότι ο πιο δυνατός ήχος που μπορούμε να ακούσομε διαφέρει από τον πιο ασθενή μόνο 120 φορές, στην πραγματικότητα η ένταση του δυνατότερου ήχου είναι 1 000 000 000 (ένα τρισεκατομμύριο) φορές μεγαλύτερη από τον πιο ασθενή.

Η ακουστότητα εξαρτάται επίσης και από τη συχνότητα του ήχου, καθώς το ανθρώπινο αυτί είναι πιο ευαίσθητο στις συχνότητες γύρω στα 100 Hz απ' ό,τι στις χαμηλές και ψηλές συχνότητες.

3) ***Χροιά*** του ήχου ονομάζεται το χαρακτηριστικό του με το οποίο διακρίνομε τις πηγές των ήχων. Είναι αυτό που κάνει τους ήχους να διαφέρουν, ακόμη κι αν τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά τους είναι ίδια. Όταν μιλάμε για χροιές, αναφερόμαστε σε σύνθετους ήχους.

Η χροιά οφείλεται στο ότι οι ήχοι δεν είναι απλοί, δεν αποτελούνται δηλαδή από μια μόνο συχνότητα, αλλά είναι σύνθετοι, αποτελούνται από πολλές συχνότητες. Για παράδειγμα, ο κάθε μουσικός ήχος καθορίζεται κυρίως από τη βασική, θεμελιώδη (χαμηλότερη) συχνότητα, όμως τη χροιά τη δίνουν οι ψηλότερες συχνότητες των ανωτέρων αρμονικών συχνοτήτων. Η συχνότητα κάθε αρμονικού είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της συχνότητας του θεμελιώδους. Αν δηλαδή ο θεμελιώδης έχει συχνότητα 500 Hz, οι αρμονικοί θα έχουν 1000, 1500, 2000 παλμικές κινήσεις το δευτερόλεπτο. Έτσι, η νότα λα στο πιάνο

και η νότα λα στην κιθάρα ακούγονται διαφορετικά, διότι παρόλο που έχουν την ίδια βασική συχνότητα, έχουν διαφορετικές ανώτερες αρμονικές. Απλούς ήχους μπορούμε να παράγομε από τα διαπασών και τους ηχητικούς σωλήνες μεγάλου μήκους. Στην περίπτωση αυτή οι ήχοι δεν ξεχωρίζουν κατά τη χροιά, γιατί δεν έχουν σημαντικές αρμονικές συχνότητες.

15.4 Διάδοση ενέργειας με ηχητικά κύματα.

Τα ηχητικά, όπως όλα τα κύματα, μεταφέρουν ενέργεια. Τα ηχητικά κύματα που ξεκινούν από μία πηγή, καθώς περνά ο χρόνος, απλώνονται στο χώρο και διασχίζουν κάθετα ολοένα και μεγαλύτερες νοητές σφαιρικές επιφάνειες.

Όσο απομακρυνόμαστε από την ηχητική πηγή, ελαττώνεται το μέρος της αρχικής ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας, που καλύπτει μια περιοχή του χώρου. Αυτό το καταλαβαίνομε καθημερινά καθώς, όσο πιο κοντά στην ηχητική πηγή βρισκόμαστε, τόσο πιο έντονα ακούμε τον ήχο της.

Το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται ανά δευτερόλεπτο από ένα ηχητικό κύμα ονομάζεται ***ισχύς του κύματος.***

Δηλαδή $P = W/t$ με μονάδα μετρήσεως το $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/1\,s}$.

Ως ***ένταση του ήχου (I)*** ορίζεται η ισχύς του ηχητικού κύματος (P) ανά μονάδα επιφανείας (A) ή διαφορετικά, η ενέργεια που μεταφέρει το ηχητικό κύμα ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου.

Δηλαδή $I = P/A$ με μονάδα $1\,\mathrm{W/m^2}$. Αν η ηχητική πηγή εκπέμπει ήχο προς όλες τις κατευθύνσεις ομοιόμορφα, η ένταση σε κάθε σημείο αποδεικνύεται ότι είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεως απ' την πηγή. Πράγματι, αν υποθέσομε ότι η ηχητική πηγή βρίσκεται στο κέντρο μιας νοητής σφαίρας, σε κάποια χρονική στιγμή t η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς θα έχει περάσει από μία σφαιρική επιφάνεια εμβαδού $A = 4\,\pi\,r^2$. Τότε η ηχητική ένταση σε απόσταση r θα είναι:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω σχέση έχει τους περιορισμούς της στην πραγματική ζωή. Έτσι ισχύει μόνο εφόσον δεν υπάρχουν τοίχοι, οροφές, πατώματα, έπιπλα κ.λπ., ώστε να ανακλάται ο ήχος και τότε τα ηχητικά κύματα μπορεί να περνούν απ' την ίδια επιφάνεια περισσότερες από μία φορές.

Η ένταση του ήχου, όπως είδαμε και προηγουμένως, συνδέεται με την ακουστότητα, υποκειμενικό μέγεθος που μας επιτρέπει να χαρακτηρίζομε τους ήχους ως δυνατούς ή ασθενείς.

Η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή στο ανθρώπινο αυτί αντιστοιχεί σε $10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ και ονομάζεται ***κατώφλι ακουστότητας.***

Η μονάδα μετρήσεως της εντάσεως του ήχου στο SI είναι το $1\,\mathrm{W/m^2}$.

Σε ντεσιμπέλ (decibel, dB) μετρείται η στάθμη της εντάσεως του ήχου. Δηλαδή η μονάδα dB εκφράζει τη διαφορά στάθμης ενός ήχου εντάσεως I προς την ένταση του κατωφλίου ακουστότητας I_o ($10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$). Επειδή όμως όπως έχομε πει, ο ανθρώπινος εγκέφαλος αντιδρά με έναν ιδιαίτερο τρόπο (λογαριθμικό) στην ένταση του ήχου, κρίθηκε ως πιο κατάλληλη για τη σύγκριση δύο εντάσεων η λογαριθμική κλίμακα.

Έτσι, ως ***στάθμη εντάσεως (β)*** σε dB ορίζεται το δεκαπλάσιο του δεκαδικού λογαρίθμου της εντάσεως του ήχου (I) προς την ένταση του κατωφλίου ακουστότητας, (I_o) και δίνεται μαθηματικά απ' τη σχέση:

$$\beta(\text{σε dB}) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω εντάσεως ήχου είναι τα 120 dB. Έκθεση σε ήχους πάνω από 120 dB είναι επικίνδυνη και μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή και κώφωση. Επίσης, παρατεταμένη και συνεχής έκθεση σε ήχους άνω των 90 dB προκαλεί προβλήματα στην ακοή.

Ο πίνακας 15.4 παρουσιάζει τη στάθμη της εντάσεως κάποιων χαρακτηριστικών ήχων.

Πίνακας 15.4
Στάθμη εντάσεως για κάποιους χαρακτηριστικούς ήχους.

Χαρακτηριστικοί ήχοι	***Στάθμης εντάσεως σε dB***
Κατώφλι ακουστότητας	0
Θρόισμα φύλλων	10
Ψίθυρος	20
Κανονική συζήτηση (1 m)	65
Κυκλοφοριακή κίνηση	80
Ροκ συναυλία	120
Πολυβόλο	130
Αεριωθούμενο	150

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ένα ηχείο εκπέμπει ήχο ισχύος $P = 12\times10^{-5}\,\text{W}$. Ένα μέρος της ενέργειας αυτής περνά κάθετα από δύο επιφάνειες με εμβαδά αντιστοίχως $A_1 = 6\,\text{m}^2$ και $A_2 = 18\,\text{m}^2$. Να υπολογίσετε την ένταση του ήχου σε κάθε περίπτωση και να συγκρίνετε τις δύο εντάσεις.

Λύση

Για την επιφάνεια με εμβαδόν A_1 ισχύει:

$$I_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{12\times10^{-5}\,\text{W}}{6\,\text{m}^2} = 2\times10^{-5}\,\text{W/m}^2.$$

Για την επιφάνεια με εμβαδόν A_2 ισχύει:

$$I_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{12\times10^{-5}\,\text{W}}{18\,\text{m}^2} = 0{,}66\times10^{-5}\,\text{W/m}^2.$$

Οπότε: $\dfrac{I_1}{I_2} = 3,\ I_1 = 3I_2.$

2. Ηχητική πηγή εκπέμπει ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Ποιος είναι ο λόγος των εντάσεων σε δύο σημεία που απέχουν από την πηγή αποστάσεις με λόγο $r_1/r_2 = 2$.

Λύση

Ισχύει:

$$I_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{P_1}{4\pi r_1^2}\ (1) \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{P_2}{4\pi r_2^2}\ (2).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχομε:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\dfrac{P_1}{4\pi r_1^2}}{\dfrac{P_2}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25.$$

15.5 Υπόηχοι – Υπέρηχοι.

Οι ήχοι διακρίνονται σε τρεις περιοχές σε σχέση με την ευαισθησία του ανθρώπινου αυτιού.

1) ***Υπόηχοι,*** οι οποίοι έχουν συχνότητα χαμηλότερη από το κατώτατο όριο συχνοτήτων που μπορούν να γίνουν αντιληπτές από τον άνθρωπο και βρίσκονται μεταξύ του κατώτατου ορίου της ανθρώπινης ακοής, (20 Hz) έως συχνότητες 0,001 Hz. Αυτή η περιοχή του φάσματος χρησιμοποιείται στη σεισμολογία για την παρακολούθηση των σεισμών. Οι υπόηχοι μπορούν να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις, ειδικά μέσα σε στερεά ή υγρά και να παρακάμψουν εμπόδια χωρίς σημαντική εξασθένηση.

Οι επιστήμονες ανακάλυψαν ότι η περιστρεφόμενη δίνη ενός τυφώνα δημιουργεί υποηχητικά κύματα. Όταν η δίνη είναι μεγάλης εκτάσεως, οι συχνότητες είναι χαμηλότερες. Τα κύματα αυτά μπορούν να εντοπιστούν σε αποστάσεις έως και 160 km και έτσι να προειδοποιήσουν για την ύπαρξη κάποιου τυφώνα.

2) ***Ήχοι που μπορεί να ακούσει ο άνθρωπος*** και οι οποίοι έχουν συχνότητες από 20 Hz – 20 000 Hz.

3) ***Υπέρηχοι,*** οι οποίοι έχουν συχνότητες μεγαλύτερες από 20 000 Hz δεν γίνονται αντιληπτοί από τον άνθρωπο.

Οι υπέρηχοι έχουν σημαντικές εφαρμογές σε πολλούς τομείς της τεχνολογίας, όπως στην ιατρική, τη μηχανολογία, τη γεωλογία και τη βιολογία. Στην ιατρική είναι πολύ διαδεδομένη η απεικόνιση με υπερήχους, που εκπέμπονται προς συγκεκριμένες περιοχές του σώματος, ανακλώνται από τους ανθρώπινους ιστούς και μας δίνουν μια καλή εικόνα για τη μορφολογία της συγκεκριμένης περιοχής του σώματος. Απεικόνιση με υπερήχους χρησιμοποιείται σε προγεννητικές εξετάσεις, στη μελέτη της καρδιακής λειτουργίας και στην ανακάλυψη ανωμαλιών σε ιστούς. Χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη μαιευτική και ειδικότερα δίνεται η δυνατότητα να παρακολουθείται το έμβρυο κατά τη διάρκεια της εγκυμοσύνης. Επειδή το έμβρυο περιβάλλεται από τον αμνιακό σάκο, κατά το υπερηχογράφημα μπορεί να διακριθεί από τα άλλα ανατομικά χαρακτηριστικά της εγκύου. Έτσι, προσδιορίζεται το μέγεθος, η θέση του και τυχόν αποκλίσεις από τη φυσιολογική του ανάπτυξη. Με υπερήχους ανιχνεύονται κακοήθειες στο συκώτι, στο πάγκρεας, στα νεφρά και στον εγκέφαλο.

Οι υπέρηχοι πλεονεκτούν των ακτίνων Χ, διότι δεν έχουν σχέση με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που μπορεί να προκαλέσει βλάβες στον οργανισμό και σε αρκετές περιπτώσεις παρουσιάζουν περισσότερη ευαισθησία από τις ακτίνες Χ στο να διακρίνουν διαφορετικούς ιστούς. Με μεγάλη ένταση χρησιμοποιούνται ακόμη και ως θεραπευτικό εργαλείο για την επιλεκτική καταστροφή παθολογικών ιστών και τη θεραπεία της αρθρίτιδας, αλλά και στη συντριβή λίθων της χολής ή του νεφρού.

Ειδικές τεχνικές με υπερήχους χρησιμοποιούνται στη μηχανολογία για τον έλεγχο πιθανών ανω-

μαλιών σε μηχανικά συστήματα, για τη μέτρηση των διαστάσεων και του πάχους διαφόρων υλικών, αλλά και για τον έλεγχο της ροής σε υδραυλικά συστήματα, ακόμη και για τον προσδιορισμό της ροής του αίματος, σε συνδυασμό με το φαινόμενο Doppler.

Επίσης, οι υπέρηχοι είναι χρήσιμοι στη γεωλογία, διότι μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για τη δομή του υπεδάφους (π.χ. τοπικές ανωμαλίες στην πυκνότητά τους, που μπορεί να οφείλονται σε κοιτάσματα πετρελαίου).

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή των υπερήχων στη ναυτιλία είναι το sonar.

Το sonar (σόναρ) είναι μια συσκευή που ονομάστηκε από τα αρχικά των λέξεων Sound Navigation and Ranging, που σημαίνουν ***πλοήγηση και εξερεύνηση διά του ήχου***. Το σόναρ έχει ζωτική σημασία για οποιονδήποτε ναυτικό σκοπό. Το βυθόμετρο είναι σήμερα ίσως η πλέον χρησιμοποιούμενη συσκευή σόναρ, και μάλιστα τόσο ανέξοδη που και τα μικρότερα πλοιάρια αναψυχής μπορούν να την έχουν. Απλή είναι και η λειτουργία του. Είναι μια συσκευή που παράγει έναν παλμό υπερήχων, ο οποίος μεταδίδεται διά μέσου του νερού, έως ότου φθάσει στο βυθό ή σε μία ομάδα διερχόμενων ψαριών. Μέρος του παλμού ανακλάται και γυρίζοντας πίσω συλλέγεται από το όργανο. Αφού η ταχύτητα του ήχου στο νερό είναι γνωστή, είναι πια εύκολο να μετρηθεί το βάθος από τη χρονική διάρκεια που έκανε ο παλμός να επανέλθει στο πλοίο.

Γενικά οι υπέρηχοι χρησιμοποιούνται στις συσκευές σόναρ είτε για ανίχνευση σωμάτων που κινούνται υποβρυχίως, είτε για την εξέταση της μορφολογίας του βυθού ή για τον προσδιορισμό του βάθους σ' ένα συγκεκριμένο σημείο.

Η συμπεριφορά των υπερήχων στη θάλασσα οδήγησε και στην ανακάλυψη ότι τα δελφίνια συνεννοούνται μεταξύ τους με υπερήχους. Έτσι οι επιστήμονες σήμερα προσπαθούν να μάθουν να επικοινωνούν με τα έξυπνα αυτά θαλάσσια θηλαστικά στην ίδια τους τη γλώσσα.

15.6 Φαινόμενο Doppler.

Αρκετές φορές, όταν ακούμε ασθενοφόρο, καταλαβαίνομε διαφορετικό ήχο όταν πλησιάζει και διαφορετικό όταν απομακρύνεται. Ο ήχος ακούγεται με διαφορετική οξύτητα στις δύο περιπτώσεις. Όταν μας πλησιάζει το ασθενοφόρο, αντιλαμβανόμαστε οξύτερο ήχο (μεγαλύτερης συχνότητας) σε σχέση με τον ήχο που αντιλαμβανόμαστε όταν απομακρύνεται.

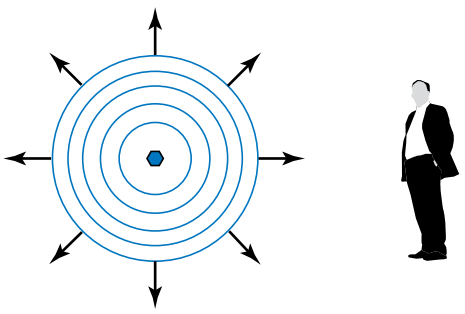
Το φαινόμενο αυτό λέγεται ***φαινόμενο Doppler*** (Ντόπλερ) και είναι το φαινόμενο, κατά το οποίο ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται διαφορετική συχνότητα απ' αυτήν που εκπέμπει η πηγή, όταν παρατηρητής και πηγή βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους. Το φαινόμενο Doppler είναι σημαντικό και δεν σχετίζεται μόνο με τα ηχητικά κύματα, έχει εφαρμογές στους υπερήχους, στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, στα radar, στην οπτική και την αστρονομία. Θα μελετήσομε το φαινόμενο προσπαθώντας να βρούμε τη σχέση που συνδέει τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής με τη σχετική κίνηση πηγής-παρατηρητή. Θα ασχοληθούμε μόνο με τον ήχο.

Για να απλουστεύσομε τη μελέτη δίχως να αλλοιώνονται τα συμπεράσματα, θα εξετάσομε μόνο την ειδική περίπτωση που οι ταχύτητες της πηγής και του παρατηρητή βρίσκονται στη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τον παρατηρητή με την πηγή. Θα συμβολίσομε με f_s τη συχνότητα του ήχου που παράγει η πηγή, f_A τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, u_s την ταχύτητα της πηγής, u_A την ταχύτητα του παρατηρητή και u την ταχύτητα του ήχου ως προς το μέσο διαδόσεως. Θα μελετήσομε καθεμία από τις πιθανές περιπτώσεις σχετικής κινήσεως.

15.6.1 Ακίνητος παρατηρητής–ακίνητη πηγή.

Η ακίνητη πηγή ως προς το μέσο διαδόσεως παράγει ηχητικά κύματα συχνότητας f_s που κινούνται με ταχύτητα u ως προς το μέσο διαδόσεως και ισχύει η εξίσωση της κυματικής $f_s = u/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.

Στο σχήμα 15.6.1 οι ομόκεντροι κύκλοι παριστάνουν τα διαδοχικά μέγιστα των μετώπων του κύματος, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση λ και κινούνται στον χώρο με ταχύτητα u. Ο παρατηρητής



Σχ. 15.6.1
Ακίνητα πηγή και ακίνητος παρατηρητής.

Α που είναι ακίνητος ως προς το μέσο διαδόσεως αντιλαμβάνεται τη συχνότητα του ήχου απ' τον ρυθμό, με τον οποίο φτάνουν τα μέγιστα σ' αυτόν.

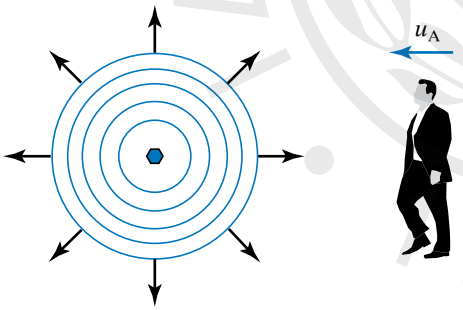
Όμως το πλήθος των μεγίστων που φτάνουν στον παρατηρητή στη μονάδα του χρόνου είναι ακριβώς ίδιο μ' αυτό που παράγει η πηγή στη μονάδα του χρόνου. Δηλαδή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται την ίδια συχνότητα μ' αυτήν που παράγει η πηγή. Συμπεραίνομε λοιπόν ότι $f_A = f_s$.

Έστω ότι ο παρατηρητής Α κινείται με ταχύτητα u_A προς την πηγή (σχ. 15.6.2). Τότε ο παρατηρητής «συναντά» (αντιλαμβάνεται) περισσότερα μέγιστα στη μονάδα του χρόνου απ' όσα παράγει η πηγή, διότι η σχετική ταχύτητά τους ως προς τον παρατηρητή είναι $u + u_A$. Άρα η συχνότητα που αντιλαμβάνεται είναι:

$$\left.\begin{array}{l} f_{A=}\dfrac{(u+u_A)}{\lambda}, \quad f_{A=}\dfrac{(u+u_A)}{\lambda} \\ \lambda = u/f_s \end{array}\right\} \text{ άρα}$$

$$f_A = \frac{(u+u_A)}{u/f_s}, \quad f_A = \frac{(u+u_A)}{u} f_s, \quad f_A = (1+\frac{u_A}{u}) f_s.$$

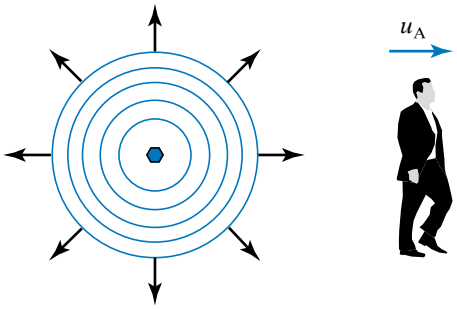
Επομένως, ένας παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή, ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερο) απ' τον ήχο που παράγει η πηγή.



Σχ. 15.6.2
Ακίνητη πηγή παρατηρητής, που πλησιάζει προς την πηγή.

Αν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή, η σχετική ταχύτητα του ήχου ως προς αυτόν, θα είναι $u - u_A$ και αντιλαμβάνεται λιγότερα μέγιστα στη μονάδα του χρόνου απ' όσα παράγει η πηγή (σχ. 15.6.3). Δηλαδή αντιλαμβάνεται συχνότητα:

$$\left.\begin{array}{l} f_A = \dfrac{(u-v_A)}{\lambda}, \quad f_A = \dfrac{(u-u_A)}{\lambda} \\ \lambda = u/f_s \end{array}\right\} \text{ άρα}$$



Σχ. 15.6.3
Ακίνητη πηγή, παρατηρητής που απομακρύνεται από την πηγή.

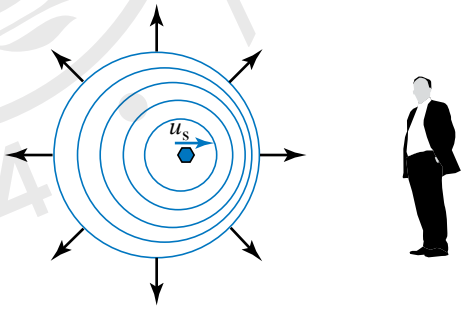
$$f_A = \frac{(u-u_A)}{u/f_s}, \quad f_A = \frac{(u-u_A)}{u} f_s, \quad f_A = (1-\frac{u_A}{u}) f_s.$$

Επομένως, ένας παρατηρητής που απομακρύνεται από μία πηγή ακούει ήχο μικρότερης συχνότητας από τον ήχο που παράγει η πηγή. ***Συνοψίζοντας τις δύο σχέσεις για τις περιπτώσεις του κινούμενου παρατηρητή, έχομε:***

$$f_A = (1 \pm \frac{u_A}{u}) f_s.$$

15.6.2 Ακίνητος παρατηρητής – κινούμενη πηγή.

Έστω ότι η πηγή κινείται με ταχύτητα u_s πλησιάζοντας τον ακίνητο παρατηρητή (σχ. 15.6.4).



Σχ. 15.6.4
Κινούμενη προς την παρατηρητή πηγή, ακίνητος παρατηρητής.

Η ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα παραμένει σταθερή και ίση με v, διότι η ταχύτητα των κυμάτων καθορίζεται από το μέσο διαδόσεως. Το μήκος κύματος δεν παραμένει ίσο με (u/f_s), διότι όταν κατά τη διάρκεια εκπομπής ενός κύματος η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή και ακολουθεί τα κύματα που παράγει, τα μέγιστα πλησιάζουν μεταξύ τους, πάνω στην κατεύθυνση κινήσεως της πηγής

και απομακρύνονται μεταξύ τους στην κατεύθυνση που είναι αντίθετη από την κίνηση της πηγής.

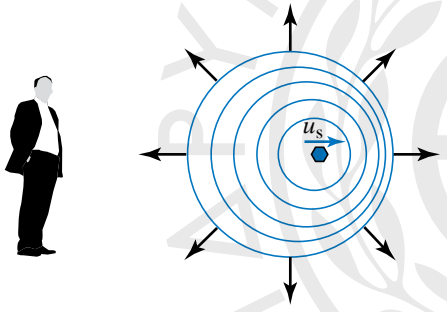
Το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι $\lambda_A = \lambda - u_s T$ όπου $u_s T$ η απόσταση κατά την οποία έχει πλησιάσει η πηγή τον παρατηρητή σε χρόνο μιας περιόδου. Η συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής σε αυτές τις συνθήκες είναι:

$$f_A = \frac{u}{\lambda_A},\quad f_A = \frac{u}{(\lambda - u_s T)},\quad f_A = \frac{u}{(uT - u_s T)},$$

$$f_A = \frac{u}{(u - u_s)T},\quad f_A = \frac{u}{(u - u_s)(1/f_s)},\quad f_A = \frac{u}{(u - u_s)} f_s$$

δηλαδή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα μεγαλύτερη από αυτήν που παράγει η πηγή (οξύτερο ήχο).

Θα εξετάσομε τι αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής όταν η πηγή απομακρύνεται απ' αυτόν με ταχύτητα u_s (σχ. 15.6.5).



Σχ. 15.6.5
Πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή, ακίνητος παρατηρητής.

Επειδή στην κατεύθυνση που είναι αντίθετη από την κίνηση της πηγής, τα μέγιστα απομακρύνονται μεταξύ τους, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μήκος κύματος $\lambda_A = \lambda + u_s T$. Υπολογίζομε τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής στην περίπτωση αυτή,

$$f_A = \frac{u}{\lambda_A},\quad f_A = \frac{u}{(\lambda + u_s T)},\quad f_A = \frac{u}{(uT + u_s T)},$$

$$f_A = \frac{u}{(u + u_s)T},\quad f_A = \frac{u}{(u + u_s)(1/f_s)},\quad f_A = \frac{u}{(u + u_s)}$$

Δηλαδή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα μικρότερη από αυτήν, που παράγει η πηγή (βαρύτερο ήχο). ***Συνοψίζοντας τις δύο σχέσεις για τις περιπτώσεις της κινούμενης πηγής, έχομε:***

$$f_A = \frac{u}{(u \mp u_s)} f_s.$$

15.6.3 Κινούμενη πηγή – κινούμενος παρατηρητής.

Στην περίπτωση που υπάρχει κίνηση και της πηγής και του παρατηρητή ως προς το μέσο διαδόσεως, το συμπέρασμα προκύπτει από το συνδυασμό των επιμέρους περιπτώσεων, οπότε για τη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής ισχύει ότι:

$$f_A = \frac{u \pm u_A}{(u \mp u_s)} f_s.$$

Απ' τη σχέση αυτή αντιλαμβανόμαστε ότι αν ο παρατηρητής και η πηγή είναι ακίνητα ως προς το μέσο ή αν κινούνται με την ιδία ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση), τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται την ίδια συχνότητα μ' αυτήν που εκπέμπει η πηγή. Αν κινούνται και οι δύο έτσι που και η μεταξύ τους απόσταση ελαττώνεται, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μεγαλύτερη συχνότητα, ενώ αν η μεταξύ τους απόσταση αυξάνεται, τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μικρότερη συχνότητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένα μέσο ανθρώπινο αυτί έχει επιφάνεια εμβαδού $2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$. Κατά τη διάρκεια μιας κανονικής συζητήσεως η ένταση του ήχου είναι περίπου $3{,}5 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$. Αν υποθέσομε ότι ο ήχος φτάνει κάθετα στην επιφάνεια του αυτιού, πόση ισχύς συλλαμβάνεται από το αυτί του ανθρώπου;

2. Στην άκρη μιας προβλήτας γίνεται μια έκρηξη. Ο ήχος φτάνει στην άλλη άκρη της προβλήτας περνώντας από τρία μέσα: αέρα, νερό και ατσάλι. Σε κάθε μέσο ο ήχος διανύει 1000 m.

α) Από ποιο μέσο περνώντας θα φτάσει πρώτος ο ήχος, από ποιο δεύτερος και από ποιο τρίτος;

β) Αφού φτάσει ο πρώτος ήχος, μετά από πόσο χρόνο θα φτάσει ο δεύτερος και μετά από πόσο χρόνο θα φτάσει ο τρίτος;

Δίνονται οι ταχύτητες του ήχου στον αέρα, στο νερό και στην κουπαστή αντίστοιχα 344 m/s, 1482 m/s και 5040 m/s.

3. Ένα υποβρύχιο έχει υποστεί βλάβη, ενώ βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας. Ο καπετάνιος γνωρίζει από τους χάρτες ότι το βάθος της θάλασσας στο συγκεκριμένο στίγμα είναι 2000 m και ότι η ταχύτητα του ήχου στο νερό είναι 1450 m/s. Στην προσπάθειά του να προσδιορίσει

το βάθος που βρίσκεται, εκπέμπει κατευθυνόμενο ηχητικό σήμα προς τον βυθό, το οποίο επιστρέφει μετά από χρόνο 2,1 s. Με τη χρήση των παραπάνω δεδομένων υπολογίστε το βάθος, στο οποίο βρίσκεται το υποβρύχιο.

4. Ένα πλοίο βρίσκεται κοντά στην ακτή, ενώ επικρατεί ομίχλη. Ο καπετάνιος εκπέμπει ηχητικό σήμα, για να προσδιορίσει την απόσταση του πλοίου από την ακτή. Ακούει δύο ήχους από ανάκλαση με διαφορά χρόνου 6 s. Αν ο ήχος που ταξιδεύει στον αέρα έχει ταχύτητα 340 m/s και ο ήχος που ταξιδεύει στο νερό έχει ταχύτητα 1425 m/s, ποια είναι η απόσταση του πλοίου από την ακτή;

5. Ο μηχανικός ενός πλοίου μετράει στο μηχανοστάσιο στάθμη εντάσεως ήχου (β) ίση με 80 dB. Πόσες φορές θα ήταν μεγαλύτερη η ένταση του ήχου, αν η μέτρηση της στάθμης εντάσεως έδειχνε 90 dB;

6. Ηχητική πηγή παράγει ήχο ισχύος $P = 25 \times 10^{-5}$W, που διέρχεται από σωλήνα με διάμετρο $\delta = 2$ m. Να υπολογιστεί η ένταση του ήχου στην έξοδο του σωλήνα, αν δεχτούμε ότι δεν υπάρχει σημαντική εξασθένηση λόγω απορροφήσεως μέσα στον σωλήνα. Αν μετά την έξοδό του διαδίδεται σφαιρικά προς όλες τις κατευθύνσεις, να υπολογιστεί η έντασή του σε απόσταση $r_1 = 50$ m και σε απόσταση $r_2 = 100$ m, από την έξοδο του σωλήνα.

7. Παρατηρητής κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα $u_A = 20$ m/s στην ίδια κατεύθυνση με προπορευόμενη πηγή ήχου, η οποία κινείται με ταχύτητα $u_s = 36$ m/s. Ο παρατηρητής ακούει ήχο συχνότητας $f_1 = 3600$ Hz.

α) Ποια η συχνότητα του ήχου που παράγει η πηγή;

β) Ποια είναι η συχνότητα του ήχου, που ακούει ένας άλλος παρατηρητής που κινείται με αντίθετη ταχύτητα από τον πρώτο και βρίσκεται κι αυτός πίσω από την ηχητική πηγή;

γ) Ποια είναι η συχνότητα του ήχου που ακούει τρίτος παρατηρητής, ο οποίος ακολουθεί την πηγή με ταχύτητα $u_\Gamma = 36$ m/s; Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $u = 340$ m/s.

8. Ένα ρυμουλκό ξεκινά από την ακτή για να προσφέρει βοήθεια σε σκάφος, που πλέει προς την ακτή με ταχύτητα 10 m/s. Η ταχύτητα του ρυμουλκού είναι 30 m/s. Όταν ο καπετάνιος του ρυμουλκού αποκτά οπτική επαφή με τον καπετάνιο του σκάφους προχωρεί σε χαιρετισμό εκπέμποντας με τη σειρήνα ήχο συχνότητας $f = 1440$ Hz και διάρκειας $\Delta t = 10$ s.

α) Να υπολογιστεί η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο καπετάνιος του σκάφους.

β) Να υπολογιστεί η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής στην ακτή.

γ) Να υπολογιστεί η διάρκεια του ηχητικού σήματος που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής στο σκάφος και η διάρκεια του σήματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής στην ακτή.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: $u = 340$ m/s.

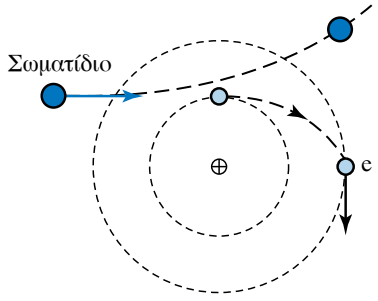
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

Γεωμετρική οπτική

16.1 Παραγωγή και διάδοση του φωτός.

Το φως είναι ένα είδος ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται στον χώρο και μεταφέρουν ενέργεια. Πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικά κύματα με κατάλληλες συχνότητες, που είναι σε θέση να διεγείρουν το ανθρώπινο μάτι.

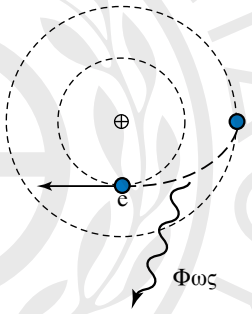
Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο (Στοιχεία Ατομικής και Πυρηνικής Φυσικής), το φως παράγεται κατά την αποδιέγερση ατόμων. Δηλαδή κάθε φορά που ένα ηλεκτρόνιο μεταπίπτει από μια διεγερμένη ενεργειακή στάθμη σε μια άλλη μικρότερης ενέργειας εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με ενέργεια ίση με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών. Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται απ' αυτήν τη διαδικασία είναι δυνατόν να βρίσκεται στην περιοχή του ορατού, ανάλογα με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών ανάμεσα στις οποίες γίνεται η αποδιέγερση. Για την παραγωγή φωτός απαιτείται δαπάνη ενέργειας, ώστε να προκληθεί διέγερση των ηλεκτρονίων από τη θεμελιώδη σε ανώτερη ενεργειακή στάθμη (σχ. 16.1.1).



Σχ. 16.1.1
Διέγερση του ατόμου του υδρογόνου σε ανώτερη ενεργειακή στάθμη.

Παραγωγή φωτεινής ενέργειας μπορούμε να έχομε με διέγερση που προέρχεται από διάφορες μορφές ενέργειας, όπως από θερμική, ηλεκτρική, χημική κ.ά.. Τα συστήματα από τα οποία εκπέμπεται φωτεινή ενέργεια τα ονομάζομε ***φωτεινές πηγές***. Χαρακτηριστικές φωτεινές πηγές είναι ο Ήλιος, στον οποίο πραγματοποιείται μετατροπή μέρους της πυρηνικής ενέργειας σε φωτεινή, οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες, στους οποίους μετατρέπεται μέρος της ηλεκτρικής ενέργειας σε φωτεινή, τα διάφορα υλικά που παράγουν φως κατά την καύση τους, μετατρέποντας τη χημική τους ενέργεια σε φωτεινή, όπως το κερί κ.ά..

Το «πακέτο» ενέργειας που εκπέμπεται από κάθε αποδιέγερση (σχ. 16.1.2) το ονομάζομε ***φωτόνιο*** και έχει σχέση με τη συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται.

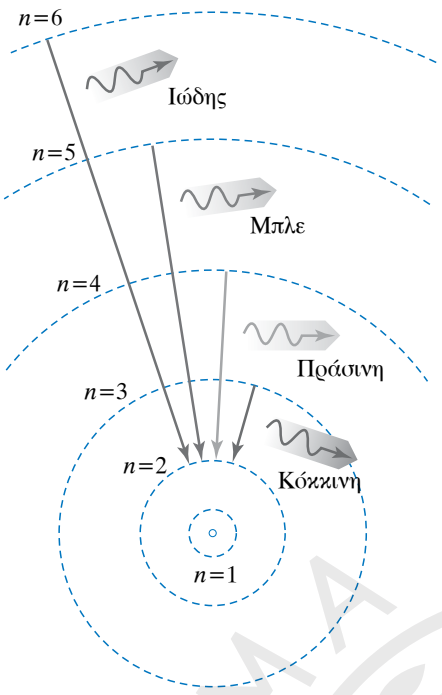


Σχ. 16.1.2
Αποδιέγερση του ατόμου του υδρογόνου με ταυτόχρονη εκπομπή φωτονίου.

Οι διαφορετικές συχνότητες της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, μας προκαλούν τη διαφορετική χρωματική αίσθηση. Σε κάθε αποδιέγερση εκπέμπεται φωτόνιο ενέργειας $E_\varphi = E_\alpha - E_\tau$, το οποίο χαρακτηρίζεται από συχνότητα f, όπως προκύπτει απ' τη σχέση $hf = E_\alpha - E_\tau$, όπου h η σταθερά Plank, f η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου, ενώ E_α, και E_τ οι ενέργειες της αρχικής και τελικής στάθμης, ανάμεσα στις οποίες συμβαίνει η αποδιέγερση (σχ. 16.1.3).

16.1.1 Διάδοση του φωτός.

Μετά την παραγωγή του, το φως διαδίδεται αυτόνομα, μεταφέροντας ενέργεια. Η ενέργειά του μπορεί απορροφηθεί από την ύλη και να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, για παράδειγμα σε θερμοδυναμική ενέργεια (ή εσωτερική θερμική ενέργεια), όπως συμβαίνει με το φως του Ήλιου που θερμαίνει κάθε γωνιά του πλανήτη, σε χημική στα φυτά, σε ηλεκτρική, όπως συμβαίνει στα φωτοβολταϊκά συστήματα κ.ά..



Σχ. 16.1.3

Σε αποδιεγέρσεις διαφορετικών ενεργειακών στάθμεων εκπέμπονται φωτόνια διαφορετικής ενέργειας, προκαλώντας διαφορετική χρωματική αίσθηση.

Για τη διάδοσή του δεν απαιτείται η ύπαρξη υλικού μέσου. Δηλαδή το φως διαδίδεται και στο κενό. Η ταχύτητα διαδόσεως του φωτός στο κενό είναι η μέγιστη ταχύτητα, με την οποία οποιαδήποτε μορφή ενέργειας ή μάζας μπορεί να ταξιδέψει.

Η ταχύτητά του στο κενό είναι περίπου ίση με $c = 300\,000$ km/s και αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις φυσικές σταθερές. Σήμερα η ταχύτητα του φωτός θεωρείται δεδομένη με εννιά σημαντικά ψηφία και είναι $c = 2\,997\,924\,583$ m/s ακριβώς.

Η διάδοση του φωτός μέσα σε ομογενές μέσο γίνεται ***ευθύγραμμα***.

Ονομάζουμε τη γραμμή που νοητά διαγράφει το φως κατά τη διάδοσή του ***ακτίνα φωτός*** ή ***φωτεινή ακτίνα***. Μία ομάδα από ακτίνες ονομάζεται ***φωτεινή δέσμη***.

Όταν μελετάμε πειραματικά το φως και τις ιδιότητές του, εργαζόμαστε πάντα με φωτεινές δέσμες, παρόλο που συνηθίζουμε να τις χαρακτηρίζουμε ως φωτεινές ακτίνες, ειδικά αν έχουμε αρκετά λεπτή φωτεινή δέσμη. Μια φωτεινή δέσμη είναι: ***παράλληλη***, αν οι ακτίνες της είναι παράλληλες, ***συγκλίνουσα***, αν οι ακτίνες της συγκλίνουν σε κάποιο σημείο ***αποκλίνουσα***, αν οι ακτίνες της αποκλίνουν (σχ. 16.1.4).

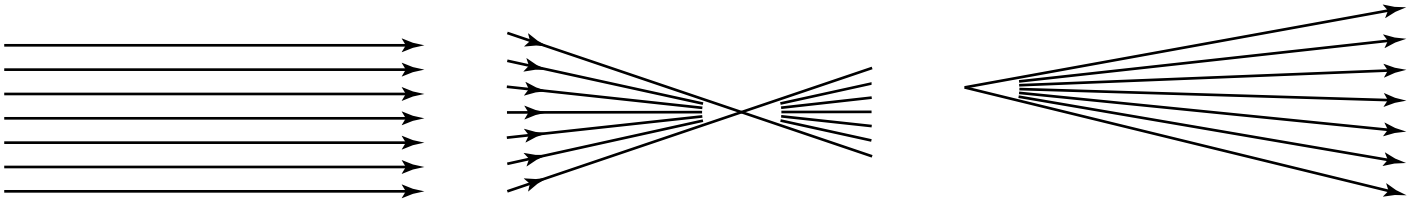
Κατά τη διάδοσή του, το φως αλληλεπιδρά με το μέσο διαδόσεως προκαλώντας διάφορα φαινόμενα. Μερικά από αυτά τα φαινόμενα είναι η δημιουργία σκιάς, ο φωτισμός σημείων που δεν βρίσκονται στην ευθεία διαδόσεως μια δέσμης, τα χρώματα, η δημιουργία ειδώλων, η οπτική παραμόρφωση αντικειμένων, η πρόκληση ηλεκτρικών φαινομένων, η αύξηση της θερμοκρασίας των σωμάτων κ.ά..

Όταν μια φωτεινή δέσμη πέσει πάνω σ' ένα αντικείμενο, η συμπεριφορά της εξαρτάται από τη δομή και την κατασκευή του. Είναι δυνατόν να διέλθει μέσα από αυτό, οπότε το χαρακτηρίζουμε ***διαφανές υλικό***. Αν δεν μπορεί να το διαπεράσει, χαρακτηρίζουμε το υλικό ***αδιαφανές,*** ενώ το χαρακτηρίζουμε ***ημιδιαφανές***, αν παρουσιάζει κάτι μεταξύ των δύο. Για παράδειγμα, μπορούμε να αναφέρομε το γυαλί ως διαφανές υλικό, το ξύλο ως αδιαφανές και το ειδικό χαρτί σχεδίου, το ριζόχαρτο, ως ημιδιαφανές.

Στην περίπτωση που μια δέσμη φωτός συναντήσει στην πορεία της ένα αδιαφανές αντικείμενο, δημιουργείται πίσω από το αντικείμενο αυτό μια περιοχή που δεν φωτίζεται, δηλαδή μια σκοτεινή περιοχή που την ονομάζομε ***σκιά του αντικειμένου***.

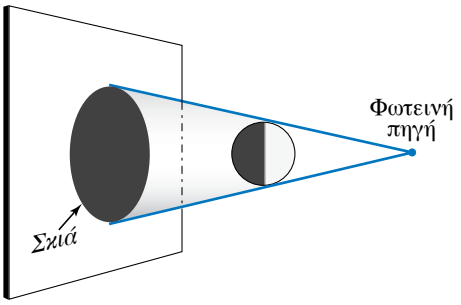
Η δημιουργία της σκιάς οφείλεται στην ευθεία διάδοση του φωτός και στη συμπεριφορά του υλικού σε σχέση με την απορρόφηση του φωτός (σχ. 16.1.5).

Το μέγεθος της σκιάς εξαρτάται απ' τη θέση της πηγής, αλλά και τις σχετικές διαστάσεις της ως προς



Σχ. 16.1.4

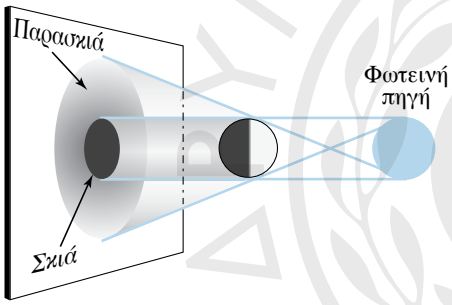
Φωτεινή δέσμη. (α) Παράλληλη, (β) συγκλίνουσα και (γ) αποκλίνουσα.



Σχ. 16.1.5
Δημιουργία σκιάς όταν το φως εκπέμπεται από σημειακή φωτεινή πηγή.

το αντικείμενο. Μεγαλύτερη σκιά έχομε όταν η φωτεινή πηγή είναι κοντά στο αντικείμενο.

Όταν η φωτεινή πηγή δεν είναι σημειακή, αλλά έχει διαστάσεις, η μετάβαση στη σκοτεινή περιοχή γίνεται μέσω μιας ενδιάμεσης καταστάσεως, που ονομάζεται ***παρασκιά*** (σχ. 16.1.6).



Σχ. 16.1.6
Δημιουργία σκιάς και παρασκιάς όταν η φωτεινή πηγή έχει διαστάσεις συγκρίσιμες με το εμπόδιο.

16.2 Ανάκλαση και διάθλαση του φωτός. Πρίσματα.

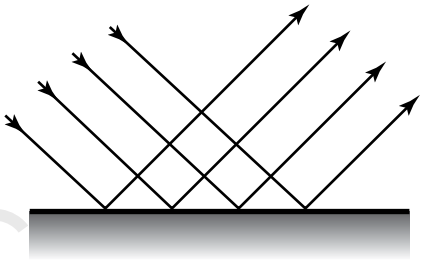
16.2.1 Ανάκλαση.

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι το φως είναι δυνατόν να μην διαπεράσει ένα υλικό οπότε θα δημιουργηθεί σκιά.

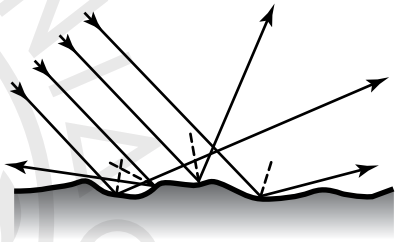
Στην περίπτωση που το φως προσπίπτει στην επιφάνεια του υλικού, είτε επανεκπέμπεται χωρίς μεταβολή στο υλικό είτε απορροφάται από το υλικό αποδίδοντας όλη την ενέργειά του σ' αυτό, είτε ένα μέρος επανεκπέμπεται και ένα μέρος απορροφάται. Όταν το φως επιστρέφει στο μέσο, από το οποίο προήλθε, λέμε ότι ***ανακλάται*** και ονομάζομε το φαινόμενο ***ανάκλαση.***

Ανάκλαση μιας φωτεινής δέσμης συμβαίνει σε κάθε επιφάνεια. Είναι όμως διαφορετική στην περίπτωση ανακλάσεως σε καθρέπτη από την ανάκλαση σε επιφάνεια ενός τοίχου.

Λέμε απλώς ***ανάκλαση*** ή κατοπτρική ανάκλαση, το φαινόμενο που παρατηρούμε όταν η φωτεινή δέσμη προσπίπτει πάνω σ' έναν καθρέπτη και γενικότερα σε μια λεία και στιλπνή επιφάνεια (σχ. 16.2.1), ενώ λέμε ***διάχυση*** το φαινόμενο που παρατηρούμε όταν η φωτεινή δέσμη προσπίπτει σε μια «τραχιά» επιφάνεια (σχ. 16.2.2).



Σχ. 16.2.1
Ανάκλαση φωτεινής δέσμης σε λεία και στιλπνή επιφάνεια.



Σχ. 16.2.2
Διάχυση φωτεινής δέσμης σε «τραχιά» επιφάνεια

Στη διάχυση, κάθε φωτεινή ακτίνα της δέσμης ανακλάται προς διαφορετική κατεύθυνση, γιατί συναντά μικροεπίπεδα διαφορετικού προσανατολισμού στην τραχιά επιφάνεια. Αποτέλεσμα της ανακλάσεως των ακτίνων σε διαφορετικές κατευθύνσεις είναι το «σκόρπισμα», η διάχυση των φωτεινών ακτίνων σε όλο τον χώρο.

Παρατήρηση.

Μια επιφάνεια είναι «τραχιά» για το φως, όταν οι διαδοχικές ανωμαλίες της απέχουν περισσότερο από περίπου το 1/8 του μήκους κύματός του.

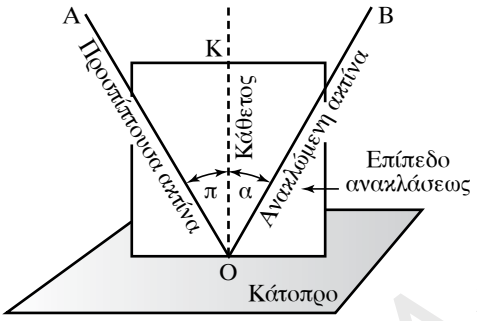
16.2.2 Οι νόμοι της ανακλάσεως.

Ονομάζομε ***προσπίπτουσα*** την ακτίνα που πέφτει στο κάτοπτρο ή γενικώς σε λεία ανακλαστική επιφάνεια και ανακλώμενη την ακτίνα που επιστρέφει. Επίσης, θα ονομάζομε ***γωνία προσπτώσεως*** θ_π τη γωνία που σχηματίζει η προσπίπτουσα με την κάθετο στο κάτοπτρο και ***γωνία ανακλάσεως*** θ_α τη γωνία που σχηματίζει η ανακλώμενη με την κάθετο.

Ισχύουν ότι (σχ. 16.2.3):

1) Η γωνία της ανακλάσεως θ_α είναι πάντα ίση με τη γωνία προσπτώσεως θ_π ($\theta_\alpha = \theta_\pi$).

2) Το επίπεδο που ορίζεται από την προσπίπτουσα και την ανακλώμενη ακτίνα είναι πάντα κάθετο στο επίπεδο του κατόπτρου που γίνεται η ανάκλαση.

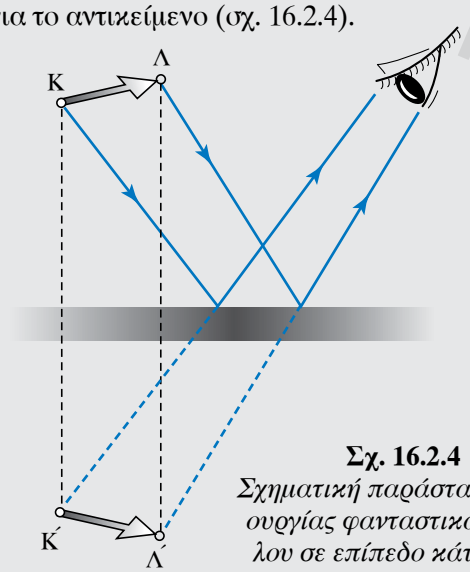


Σχ. 16.2.3
Ανάκλαση του φωτός.

Παρατηρήσεις.

1) Κάτοπτρο είναι κάθε λεία και στιλπνή επιφάνεια όπως η επιφάνεια ενός καθρέπτη, η επιφάνεια ενός γυαλιού, η ήρεμη επιφάνεια ενός υγρού κ.ά.. Τα κάτοπτρα μπορούν να έχουν διάφορα γεωμετρικά σχήματα, όπως επίπεδα, σφαιρικά, παραβολικά. Ανάλογα με το σχήμα τους, διαφέρουν και στη λειτουργία τους, π.χ. στα είδωλα που σχηματίζουν.

2) Τα επίπεδα κάτοπτρα (καθρέπτες) σχηματίζουν φανταστικά είδωλα με τα παρακάτω χαρακτηριστικά: πρώτον, το είδωλο και το αντικείμενο απέχουν το ίδιο από το κάτοπτρο. Δεύτερον, το είδωλο έχει το ίδιο μέγεθος με το αντικείμενο και τρίτον, η αριστερή πλευρά του ειδώλου είναι δεξιά για το αντικείμενο (σχ. 16.2.4).



Σχ. 16.2.4
Σχηματική παράσταση δημιουργίας φανταστικού ειδώλου σε επίπεδο κάτοπτρο.

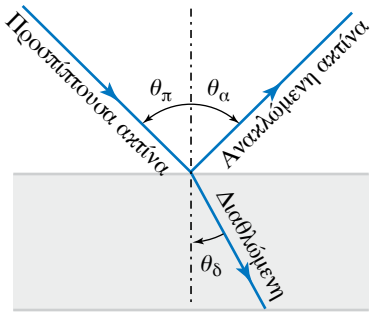
3) Ονομάζομε ***πραγματικά*** τα είδωλα που σχηματίζονται από τις φωτεινές ακτίνες που μετά από την ανάκλασή τους ή τη διάθλασή τους, συγκλίνουν στη θέση του ειδώλου. Τα ***πραγματικά είδωλα*** μπορούν να προβάλλονται σε οθόνη. Ονομάζομε ***φανταστικά*** τα είδωλα που σχηματίζονται από τις προεκτάσεις των φωτεινών ακτίνων που δεν συγκλίνουν μετά την ανάκλαση ή τη διάθλασή τους. Τα φανταστικά είδωλα δεν είναι δυνατόν να προβληθούν σε οθόνες.

16.2.3 Διάθλαση.

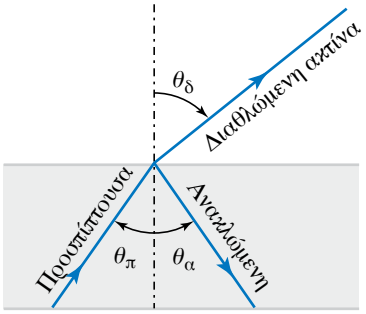
Μια πολύ βασική αρχή που ισχύει για όλα τα φαινόμενα διαδόσεως του φωτός (διάδοση σε μέσο, ανάκλαση, διάθλαση κ.ά.) είναι η αρχή που διατύπωσε το 1650 ο Γάλλος επιστήμονας Pierre de Fermat (Φερμά). ***Η αρχή του Φερμά*** αναφέρει ότι: ***όταν το φως μεταβεί από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Β, θα ακολουθήσει απ' όλες τις πιθανές διαδρομές εκείνη που είναι χρονικά πιο σύντομη.***

Η ***αρχή του Φερμά*** ή ***αρχή του ελαχίστου χρόνου*** αιτιολογεί την αλλαγή πορείας που υφίσταται μια ακτίνα φωτός όταν αλλάζει μέσο διαδόσεως. Το φαινόμενο της αλλαγής κατευθύνσεως μιας ακτίνας φωτός όταν εισέρχεται υπό γωνία από ένα μέσο σε κάποιο άλλο ονομάζεται ***διάθλαση*** (σχ. 16.2.5, 16.2.6).

Η διάθλαση δικαιολογείται από την αρχή του ελαχίστου χρόνου και οφείλεται στις διαφορετικές ταχύτητες διαδόσεως που έχει το φως όταν διαδίδεται σε διαφορετικά διαφανή μέσα, π.χ. όταν μια δέσμη μονοχρωματικού φωτός που διαδίδεται στον αέρα, προσπίπτει υπό γωνία στην επιφάνεια ενός υγρού, ένα μέρος της ανακλάται κι ένα μέρος της συνεχίζει τη δι-



Σχ. 16.2.5
Διάθλαση φωτεινής δέσμης όταν προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφορετικών οπτικών μέσων (από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο).



Σχ. 16.2.6

Διάθλαση φωτεινής δέσμης όταν προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφορετικών οπτικών μέσων (από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο).

άδοση στο υγρό με διαφορετική ταχύτητα. Η ακτίνα που συνεχίζει στο υγρό έχει διαφορετική κατεύθυνση απ' την αρχική, δηλαδή η γωνία θ_δ που σχηματίζει με την κάθετη στην επιφάνεια είναι διαφορετική της γωνίας προσπτώσεως θ_π ($\theta_\delta \neq \theta_\pi$).

Η αλλαγή στην κατεύθυνση διαδόσεως της φωτεινής ακτίνας όταν εισέρχεται υπό γωνία από ένα οπτικό μέσο σ' ένα άλλο είναι άμεσα εξαρτώμενη απ' την ταχύτητα διαδόσεως του φωτός στα δύο οπτικά μέσα.

Παρατήρηση.

Όταν η ακτίνα προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων, δεν υφίσταται εκτροπή στη διεύθυνση διαδόσεως.

16.2.4 Δείκτης διαθλάσεως.

Για να διερευνήσομε τη σχέση της ταχύτητας διαδόσεως σε οπτικό μέσο με τη γωνία διαθλάσεως, θα ορίσομε έναν σημαντικό συντελεστή: ***τον δείκτη διαθλάσεως υλικού μέσου.***

Ορίζομε ως δείκτη διαθλάσεως n ενός υλικού μέσου, τον αριθμό που ισούται με το πηλίκο της ταχύτητας c_0 του φωτός στο κενό προς την ταχύτητα c του φωτός στο υλικό μέσο.

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\text{ταχύτητα του φωτός στο κενό}}{\text{ταχύτητα του φωτός στο υλικό μέσο}}.$$

Όταν το φως από το κενό εισέρχεται σε κάποιο υλικό μέσο, η ταχύτητά του ελαττώνεται. Η τιμή της ταχύτητας εξαρτάται από το μέσο διαδόσεως αλλά και από τη συχνότητα της ακτινοβολίας.

Παρατηρήσεις.

1) Η ταχύτητα του φωτός c_0 στο κενό είναι μεγαλύτερη απ' την ταχύτητά του σε οποιοδήποτε υλικό μέσο, επομένως ο δείκτης διαθλάσεως ενός υλικού είναι πάντοτε μεγαλύτερος της μονάδας, $c_0 > c$ άρα $c_0/c > 1$ επομένως $n > 1$ για κάθε υλικό (πίν. 16.2).

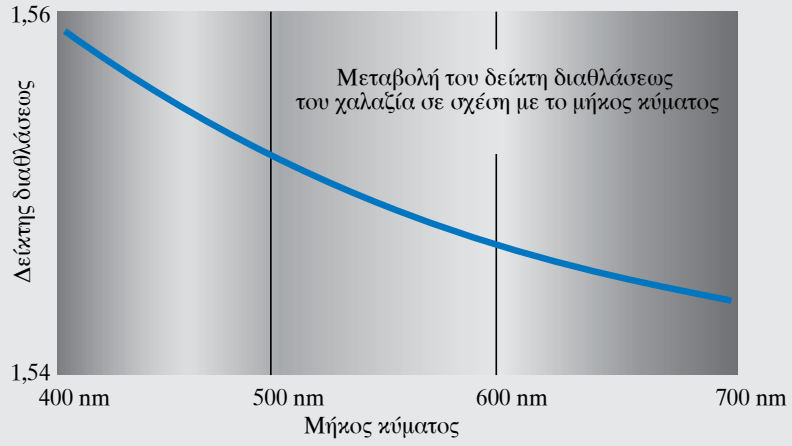
2) Μεταξύ δύο υλικών μέσων, εκείνο στο οποίο η ταχύτητα του φωτός είναι μικρότερη έχει το μεγαλύτερο δείκτη διαθλάσεως. Έστω ότι έχομε δύο υλικά μέσα, το υλικό 1 και το υλικό 2, για τα οποία ισχύει $c_1 > c_2$, τότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} n_1 = \dfrac{c_0}{c_1} \\ n_2 = \dfrac{c_0}{c_2} \end{array} \right\} \text{ άρα } \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{\frac{c_0}{c_1}}{\frac{c_0}{c_2}} \text{ άρα } \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{c_0 c_2}{c_0 c_1} \text{ ή } \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{c_2}{c_1} \\ \text{όμως } \; c_1 > c_2 \text{ άρα } \dfrac{c_1}{c_2} > 1 \text{ άρα } \dfrac{c_2}{c_1} < 1 \text{ ή } \dfrac{n_1}{n_2} < 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{άρα } n_1 < n_2.$$

Πίνακας 16.2
Δείκτες διαθλάσεως μερικών υλικών.

Αέρια (0^o C, 1 atm)		***Υγρά 20^o C***		***Στερεά***	
Αέρας	1,000239	Μεθανόλη	1,329	Πάγος	1,309
CO_2	1,00045	Νερό	1,333	Άλας ορυκτό	1,544
		Αιθανόλη	1,360	Χαλαζίας	1,544
		Τετραχλωράνθρακας	1,460	Φθορίτης	1,434
		Γλυκερίνη	1,473	Ζιρκόνιο	1,923
		Βενζόλιο	1,501	Διαμάντι	2,417
				Ύαλοι	1,5–1,9



Σχ. 16.2.7
Ο δείκτης διαθλάσεως που παρουσιάζει ένα υλικό, εξαρτάται από τη συχνότητα.

3) Ανάμεσα σε δύο υλικά μέσα θα λέμε οπτικά πυκνότερο εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο δείκτη διαθλάσεως, δηλαδή το υλικό στο οποίο το φως έχει τη μικρότερη ταχύτητα.

4) Η τιμή του δείκτη διαθλάσεως ενός υλικού εξαρτάται και απ' το μήκος κύματος του μονοχρωματικού φωτός, που διαδίδεται στο υλικό. Δηλαδή το ίδιο υλικό μέσο, για ακτίνες διαφορετικού χρώματος παρουσιάζει διαφορετικούς δείκτες διαθλάσεως. Αυτό συμβαίνει γιατί ακτίνες διαφορετικής συχνότητας (χρώματος) διαδίδονται στο ίδιο μέσο με διαφορετική ταχύτητα. Στο ίδιο υλικό, μεγαλύτερο δείκτη διαθλάσεως εμφανίζει το ιώδες και μικρότερο το κόκκινο (σχ. 16.2.7).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός διαδίδεται από τον αέρα στο γυαλί, που έχει δείκτη διαθλάσεως $n = 1{,}5$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του φωτός στο γυαλί. Δίνεται ότι η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c_o = 3\times10^8$ m/s.

Λύση.

Από τον ορισμό του δείκτη διαθλάσεως έχομε:

$$n=\frac{c_0}{c} \;\text{ή}\; c=\frac{c_0}{n} \;\text{ή}\; c=\frac{3\times10^8}{1{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{άρα}\;\; c=2\times10^8\,\text{m/s}.$$

16.2.5 Νόμοι της διαθλάσεως.

1) Το επίπεδο που σχηματίζουν η προσπίπτουσα και η διαθλώμενη ακτίνα είναι κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων.

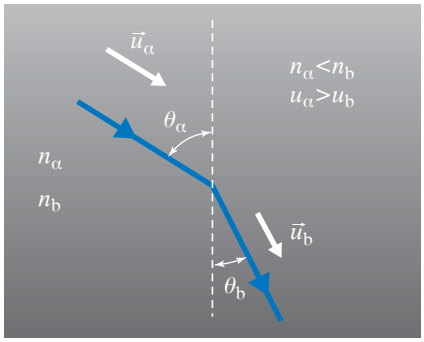
2) ***Νόμος του Snell***. Ο λόγος του ημιτόνου της γωνίας προσπτώσεως προς το ημίτονο της γωνίας διαθλάσεως είναι αντίστροφος με τον λόγο των δεικτών διαθλάσεως των δύο υλικών μέσων α, b αντιστοίχως:

$$\frac{\sin\theta_\alpha}{\sin\theta_b}=\frac{n_b}{n_\alpha}\,.$$

16.2.6 Διερεύνηση του Νόμου του Snell.

Με βάση τον Νόμο του Snell θα μελετήσομε την πορεία του φωτός όταν αυτό διαδίδεται από ένα μέσο σε ένα άλλο.

1) Όταν το φως διαδίδεται από ***αραιότερο μέσο σε πυκνότερο***, η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει προς την κάθετο $\theta_\alpha > \theta_b$ (σχ. 16.2.8).



Σχ. 16.2.8
Όταν το φως διαδίδεται από αραιότερο μέσο α σε πυκνότερο b, η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει προς την κάθετο ($\theta_\alpha > \theta_b$).

Απόδειξη.

Έστω μονοχρωματική ακτίνα φωτός που διαδίδεται από το οπτικά αραιότερο μέσο α με δείκτη διαθλάσεως n_α στο οπτικά πυκνότερο μέσο b με δείκτη διαθλάσεως n_b ($n_\alpha < n_b$).

Εφαρμόζοντας τον Νόμο του Snell έχομε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin\theta_\alpha}{\sin\theta_b} = \dfrac{n_b}{n_\alpha} \\ n_\alpha < n_b \Rightarrow \dfrac{n_b}{n_\alpha} > 1 \end{array}\right\}$$

$$\text{ή } \frac{\sin\theta_\alpha}{\sin\theta_b} > 1 \text{ ή } \sin\theta_\alpha > \sin\theta_b \text{ άρα } \theta_\alpha > \theta_b.$$

2) Όταν το φως διαδίδεται από ***πυκνότερο μέσο σε αραιότερο***, η διαθλώμενη ακτίνα απομακρύνεται από την κάθετο $\theta_\alpha < \theta_b$ (σχ. 16.2.9).

Απόδειξη.

Έστω μονοχρωματική ακτίνα φωτός που διαδίδεται από το οπτικά πυκνότερο μέσο α με δείκτη διαθλάσεως n_α στο οπτικά αραιότερο μέσο b με δείκτη διαθλάσεως n_b ($n_\alpha > n_b$).

Εφαρμόζοντας τον Νόμο του Snell έχομε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin\theta_\alpha}{\sin\theta_b} = \dfrac{n_b}{n_\alpha} \\ n_\alpha > n_b \Rightarrow \dfrac{n_b}{n_\alpha} < 1 \end{array}\right\}$$

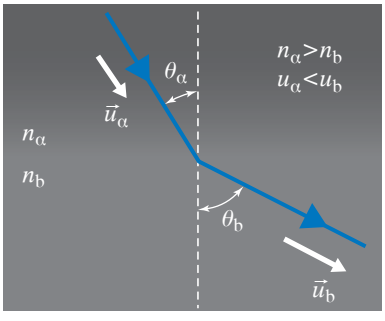
$$\text{άρα } \frac{\sin\theta_\alpha}{\sin\theta_b} < 1 \text{ ή } \sin\theta_\alpha < \sin\theta_b \text{ οπότε } \theta_\alpha < \theta_b.$$

Ένα πολύ σημαντικό φαινόμενο που συνδέεται άμεσα με τη διάθλαση είναι η ***ολική ανάκλαση***, που είναι δυνατόν να υποστεί μια ακτίνα φωτός από τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων.

Όταν μια δέσμη φωτός διαδίδεται από οπτικά πυκνότερο μέσο σε ένα μέσο οπτικά αραιότερο, ένα μέρος της διαθλάται κι ένα μέρος ανακλάται. Η γωνία διαθλάσεως, η γωνία ανακλάσεως αλλά και το «ποσοστό» της δέσμης που διαθλάται, εξαρτώνται από τους δείκτες διαθλάσεως και τη γωνία προσπτώσεως. Όταν η φωτεινή δέσμη διαδίδεται απ' το πυκνότερο μέσο διαδόσεως με δείκτη διαθλάσεως n_2, στο αραιότερο μέσο με δείκτη διαθλάσεως n_1 ($n_1 < n_2$), η αύξηση της γωνίας προσπτώσεως οδηγεί σε αύξηση της γωνίας διαθλάσεως, αύξηση του «ποσοστού» εντάσεως ανακλάσεως της δέσμης και ελάττωση της εντάσεως της διαθλώμενης. Καθώς αυξάνομε τη γωνία προσπτώσεως, παρατηρούμε ότι μετά από κάποια τιμή της γωνίας όλη η δέσμη υφίσταται ανάκλαση και δεν έχομε διάθλαση.

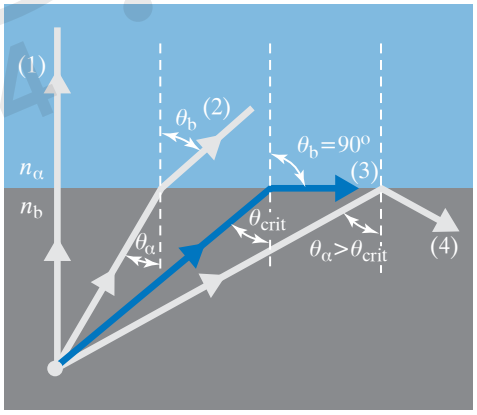
Ονομάζομε το φαινόμενο που περιγράψαμε ***ολική ανάκλαση*** και ονομάζομε ***οριακή*** ή ***κρίσιμη γωνία*** τη μικρότερη γωνία προσπτώσεως, στην οποία εμφανίζεται το φαινόμενο, δηλαδή τη μικρότερη γωνία για την οποία η φωτεινή δέσμη ανακλάται ολικά. Όταν η γωνία προσπτώσεως είναι η κρίσιμη γωνία, η γωνία διαθλάσεως είναι 90^o (και η ένταση της διαθλώμενης δέσμης τείνει στο μηδέν) (σχ. 16.2.10).

Η κρίσιμη γωνία θ_{crit} υπολογίζεται με βάση το Νόμο του Snell: Έστω ότι ακτίνα φωτός διαδίδεται σε οπτικό μέσο n_α και προσπίπτει με γωνία θ_{crit} στη διαχωριστική επιφάνεια του οπτικού μέσου n_b, όπου



Σχ. 16.2.9

Όταν το φως διαδίδεται από πυκνότερο μέσο n_α, σε αραιότερο n_b, η διαθλώμενη ακτίνα απομακρύνεται από την κάθετο ($\theta_\alpha < \theta_b$).



Σχ. 16.2.10

Κατά τη διάδοση του φωτός από οπτικά πυκνότερο μέσο σε οπτικά αραιότερο, παρατηρείται ολική ανάκλαση για γωνίες προσπτώσεως μεγαλύτερες από μια γωνία, που ονομάζεται κρίσιμη θ_{crit} ή οριακή και εξαρτάται από τα δύο μέσα διαδόσεως.

$n_b < n_\alpha$. Η ακτίνα θα υποστεί ολική ανάκλαση και η γωνία διαθλάσεώς της θα είναι 90°. Εφαρμόζοντας το Νόμο του Snell έχομε:

$$\frac{\sin\theta_\alpha}{\sin\theta_\delta} = \frac{n_b}{n_\alpha} \text{ ή } \frac{\sin\theta_{crit}}{\sin 90^o} = \frac{n_b}{n_\alpha} \text{ ή}$$

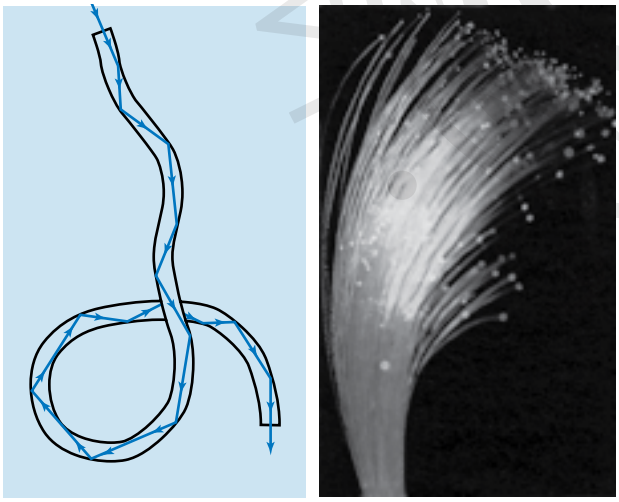
$$\text{ή } \frac{\sin\theta_{crit}}{1} = \frac{n_b}{n_\alpha} \text{ ή } \sin\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_\alpha}.$$

Αν το οπτικά αραιότερο μέσο είναι ο αέρας, με $n_b = 1$ έχομε

$$\sin\theta_{crit} = \frac{1}{n_\alpha}.$$

Η κρίσιμη γωνία για πρόσπτωση σε διαχωριστική επιφάνεια νερού–αέρα είναι περίπου 48°, για επιφάνεια γυαλιού – αέρα είναι περίπου 43° ανάλογα και τον τύπο του γυαλιού, ενώ για επιφάνεια διαμαντιού–αέρα είναι 24,5°.

Μία απ' τις σημαντικότερες εφαρμογές της ολικής ανακλάσεως είναι οι οπτικές ίνες. Στην οπτική ίνα, η φωτεινή ακτίνα υπόκειται σε διαδοχικές ολικές ανακλάσεις, με αποτέλεσμα να ακολουθεί κάθε καμπή της ίνας και να μεταφέρεται χωρίς απώλειες στην έξοδό της απ' όπου και εξέρχεται (σχ. 16.2.11).

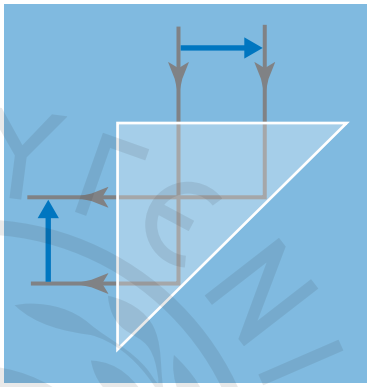


Σχ. 16.2.11
Σχηματική παράσταση λειτουργίας οπτικής ίνας και δέσμη από οπτικές ίνες.

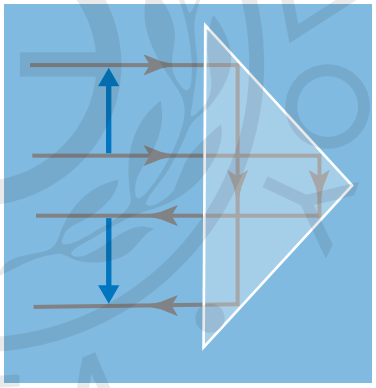
Οι οπτικές ίνες βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές, απ' τις πιο απλές σε φωτιστικά, μέχρι πολύ σημαντικές στην ιατρική και στις τηλεπικοινωνίες. Οι οπτικές ίνες κατασκευάζονται από διαφανή υλικά υψηλής καθαρότητας, π.χ. γυαλί ή πλαστικό, ενώ μπορούν να έχουν πολύ μικρή διάμετρο, ανάλογα με την εφαρμογή που προορίζονται.

Με τα πρίσματα ολικής ανακλάσεως μπορούμε να αλλάξομε τον προσανατολισμό του ειδώλου ή να μεταβάλουμε την πορεία μιας φωτεινής δέσμης εκμεταλλευόμενοι το φαινόμενο της ολικής ανακλάσεως.

Στα σχήματα 16.2.12 και 16.2.13 παρατηρούμε αλλαγή προσανατολισμού του ειδώλου και μεταβολή της κατευθύνσεως της δέσμης κατά 90° ή 180°.



Σχ. 16.2.12
Πρίσμα ολικής ανακλάσεως, όπου παρατηρούμε μεταβολή κατευθύνσεως της δέσμης κατά 90° και αλλαγή προσανατολισμού του ειδώλου.



Σχ. 16.2.13
Πρίσμα ολικής ανακλάσεως, όπου παρατηρούμε μεταβολή κατευθύνσεως της δέσμης κατά 180° και αλλαγή προσανατολισμού του ειδώλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

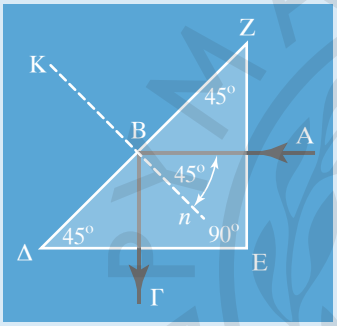
Να μελετηθεί η ολική ανάκλαση σε ορθογώνιο ισοσκελές τριγωνικό πρίσμα κατασκευασμένο από γυαλί με δείκτη διαθλάσεως $n_\gamma = 1{,}42$ (σχ. 16.2.14).

Επειδή το πρίσμα περιβάλλεται από αέρα με δείκτη διαθλάσεως $n = 1$ μικρότερο του γυαλιού $n_\gamma = 1{,}42$, είναι δυνατόν να έχομε ολική ανάκλαση για γωνίες προσπτώσεως στην ΖΔ μεγαλύτερες τις κρίσιμης θ_{crit} με $\sin\theta_{crit} = \frac{1}{n_\alpha}$.

$$\sin\theta_{crit}=\frac{1}{n_\gamma}\ \text{ή}\ \sin\theta_{crit}=\frac{1}{1,42}=0,704$$

$$\text{ή}\ \sin\theta_{crit}=0,704\ \text{άρα}\ \theta_{crit}=45^o.$$

Στο παραπάνω πρίσμα επιτυγχάνομε ολική ανάκλαση για κάθε ακτίνα που εισέρχεται κάθετα από τις κάθετες έδρες του πρίσματος. Δηλαδή η ακτίνα που εισέρχεται από την πλευρά ΖΕ (σχ. 16.2.14) δεν διαθλάται λόγω της κάθετης εισόδου στο πρίσμα. Συνεχίζει προσπίπτοντας στη διαχωριστική επιφάνεια ΖΔ με γωνία $\theta = 45^o$, η οποία είναι μεγαλύτερη απ' την κρίσιμη, άρα ανακλάται ολικά και κινείται κάθετα προς την πλευρά ΔΕ, από την οποία και εξέρχεται χωρίς διάθλαση.

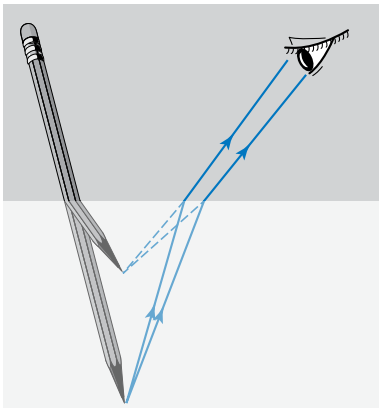


Σχ. 16.1.14
Ορθογώνιο τριγωνικό πρίσμα, στο οποίο η προσπίπτουσα φωτεινή δέσμη έχει υποστεί ολική ανάκλαση.

16.2.7 Φαινόμενα που οφείλονται στη διάθλαση.

1) Φαινομενική ανύψωση λόγω διαθλάσεως.

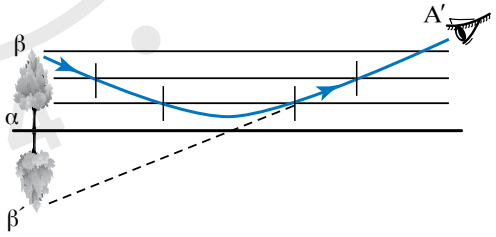
Η διάθλαση είναι μια ιδιότητα του φωτός που ευθύνεται για πολλές οφθαλμαπάτες. Χαρακτηριστικό είναι το φαινόμενο του «σπασίματος» ενός μολυβιού στο νερό και η φαινομενική ανύψωση ενός αντικειμένου ως προς την πραγματική του θέση για έναν παρατηρητή που δεν βρίσκεται στο ίδιο οπτικό μέσο με το αντικείμενο. Η εξήγηση και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις είναι η ίδια. Λόγω της διαθλάσεως, οι ακτίνες που εκπέμπονται από το αντικείμενο που βρίσκεται σε διαφορετικό μέσο από τον παρατηρητή, εκτρέπονται στη διαχωριστική επιφάνεια, ενώ ο εγκέφαλος του παρατηρητή «λειτουργεί» με την αίσθηση ότι «βλέπει» ευθύγραμμα, δημιουργώντας έτσι μια λάθος εντύπωση για την πραγματική θέση ή το σχήμα του αντικειμένου (σχ. 16.2.15).



Σχ. 16.2.15
Φαινομενική ανύψωση του μολυβιού λόγω της διαθλάσεως.

2) Αντικατοπτρισμός.

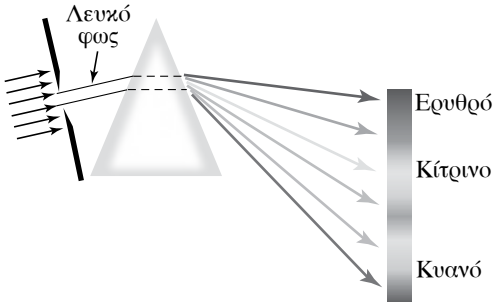
Ο αντικατοπτρισμός είναι ένα φαινόμενο που οφείλεται στη διάθλαση του φωτός στον αέρα λόγω αερίων στρωμάτων που διαφέρουν στη θερμοκρασία και επομένως και στην πυκνότητα. Παρατηρείται συχνότερα στην έρημο και στην άσφαλτο κατά τη διάρκεια ιδιαίτερα θερμών ημερών. Στον αντικατοπτρισμό ο παρατηρητής μπορεί να βλέπει τα μακρινά αντικείμενα αντεστραμμένα ή την εικόνα του ουρανού στο έδαφος, επειδή καμπυλώνονται οι ακτίνες λόγω της διαθλάσεως (σχ. 16.2.16).



Σχ. 16.2.16
Αντικατοπτρισμός.

3) Διασκεδασμός.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο δείκτης διαθλάσεως ενός υλικού εξαρτάται και από το μήκος κύματος του φωτός. Άρα, διαφορετικού μήκους κύματος ακτίνες διαθλώνται διαφορετικά. Η ιδιότητα αυτή οδηγεί στο διασκεδασμό του λευκού φωτός, όταν αυτό διέρχεται από ένα κατάλληλο διαθλαστικό μέσο, όπως είναι ένα πρίσμα, με αποτέλεσμα να έχομε ανάλυση του λευκού φωτός και παρατήρηση



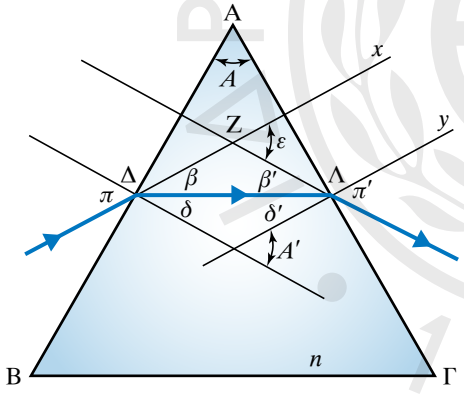
Σχ. 16.2.17

Η εξάρτηση του δείκτη διαθλάσεως ενός υλικού από τη συχνότητα της ακτινοβολίας προκαλεί διαφορετικές διαθλάσεις, με αποτέλεσμα την ανάλυση του σύνθετου, λευκού φωτός.

του φάσματος. Κάθε χρώμα υφίσταται διαφορετική εκτροπή μέσα στο πρίσμα (σχ. 16.2.17).

16.2.8 Περισσότερα για τα πρίσματα.

Στις πιο συνηθισμένες εφαρμογές της οπτικής χρησιμοποιούμε το τριγωνικό οπτικό πρίσμα, δηλαδή ένα πρίσμα κατασκευασμένο από διαφανές διαθλαστικό υλικό, του οποίου η βάση (διατομή) είναι τριγωνική (σχ. 16.2.18).



Σχ. 16.2.18

Διάθλαση μονοχρωματικής ακτίνας σε οπτικό πρίσμα.

Στο πρίσμα αυτό θα ονομάζουμε τη γωνία A ***διαθλαστική γωνία*** και ***κύρια τομή του πρίσματος*** κάθε επίπεδο τομής παράλληλο στη βάση. Όταν μια δέσμη φωτός εισέρχεται υπό γωνία στην επιφάνεια του πρίσματος, διαθλάται, και στη συνέχεια, κατά την έξοδό της από το πρίσμα, διαθλάται για δεύτερη φορά, με αποτέλεσμα να παρατηρείται σημαντική εκτροπή της αρχικής δέσμης. Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της εισερχόμενης ακτίνας που είναι παράλληλη στην κύρια τομή του πρίσματος και της εξερχόμενης, ονομάζεται ***γωνία εκτροπής*** ε.

– Μελέτη σχέσεως γωνίας εκτροπής με το δείκτη διαθλάσεως n και τη διαθλαστική γωνία A του πρίσματος:

Στο σχήμα 16.2.18 έχομε n το δείκτη διαθλάσεως του πρίσματος, ε τη γωνία εκτροπής της εισερχόμενης δέσμης, A τη διαθλαστική γωνία του πρίσματος, π τη γωνία εισόδου της δέσμης στο πρίσμα, π' τη γωνία εξόδου της δέσμης από το πρίσμα.

Από τον Νόμο του Snell έχομε:

$$\frac{\sin\theta_{\pi}}{\sin\theta_{\delta}} = n \text{ και } \frac{\sin\theta_{\delta'}}{\sin\theta_{\pi'}} = \frac{1}{n}.$$

Η γωνία εκτροπής ***ε είναι εξωτερική του τριγώνου*** ΔΖΛ, άρα:

$$\varepsilon = \beta + \beta' \text{ ή } \varepsilon = (\pi - \delta) + (\pi' - \delta') \text{ ή}$$
$$\varepsilon = (\pi + \pi') - (\delta + \delta') \text{ ή}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = (\pi + \pi') - A' \\ A = A' \text{ γιατί είναι οξείες γωνίες με} \\ \text{τις πλευρές κάθετες μεταξύ τους} \end{array}\right\}$$

$$\text{άρα } \varepsilon = (\pi + \pi') - A.$$

Παρατηρήσεις.

1) Η γωνία εκτροπής μιας φωτεινής ακτίνας μεταβάλλεται ανάλογα με τη γωνία προσπτώσεως.

2) Η γωνία εκτροπής ε εξαρτάται από τη διαθλαστική γωνία A του πρίσματος. Αύξηση της διαθλαστικής γωνίας οδηγεί σε μείωση της γωνίας εκτροπής.

3) Η γωνία εκτροπής εξαρτάται από τον δείκτη διαθλάσεως του πρίσματος. Όταν αυξάνεται ο δείκτης διαθλάσεως, αυξάνεται και η γωνία εκτροπής της ακτίνας.

Αρκετές εφαρμογές στην οπτική, όπως στα περισκόπια ή στις φωτογραφικές μηχανές, έχουν τα ***πρίσματα ολικής ανακλάσεως***. Στα πρίσματα ολικής ανακλάσεως πετυχαίνομε ολική ανάκλαση μίας φωτεινής ακτίνας από μια εσωτερική επιφάνεια αξιοποιώντας στο πρίσμα τη σχέση μεταξύ του δείκτη διαθλάσεως n και της κρίσιμης γωνίας θ_{crit} ολικής ανακλάσεως.

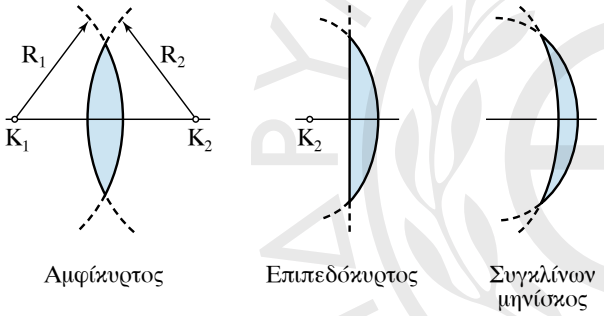
16.3 Λεπτοί φακοί.

Όλοι μας, στην καθημερινότητά μας, έχομε την εμπειρία της χρήσεως ενός φακού, π.χ. ενός μεγε-

θυντικού φακού ή των φακών στα γυαλιά οράσεως. Γενικά θα ονομάζομε ***φακό*** κάθε διαφανές σώμα, το οποίο έχει σφαιρικές επιφάνειες ή μια σφαιρική και μια επίπεδη επιφάνεια, με αποτέλεσμα να παρατηρούνται σχετικά έντονα φαινόμενα διαθλάσεως. Φακό έχει το ανθρώπινο μάτι, και φυσικά έχομε τους τεχνητούς φακούς, που κατασκευάζονται από γυαλί ή συνθετικά υλικά υψηλής καθαρότητας για διάφορες χρήσεις, όπως σε τηλεσκόπια, φωτογραφικές μηχανές, γυαλιά οράσεως, μεγεθυντικές συσκευές κ.ά..

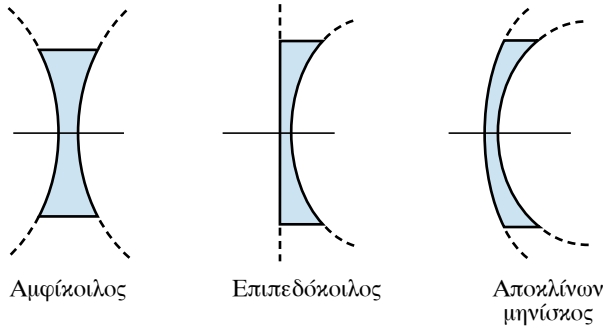
Διακρίνομε τους φακούς ανάλογα με τον τρόπο που μεταβάλλεται η πορεία μιας δέσμης φωτός, όταν διέρχεται από αυτούς στις εξής δύο κατηγορίες:

1) Στους ***συγκλίνοντες*** φακούς, στους οποίους μια δέσμη παραλλήλων ακτίνων μετατρέπεται σε συγκλίνουσα λόγω της διαθλάσεως που υφίσταται, όταν διέλθει μέσα από τον φακό. Οι συγκλίνοντες φακοί είναι λεπτοί στα άκρα και παχύτεροι στη μέση (σχ. 16.3.1).



Σχ. 16.3.1
Διάφοροι τύποι συγκλινόντων φακών.

2) Στους ***αποκλίνοντες*** φακούς, στους οποίους μια δέσμη παραλλήλων ακτίνων μετατρέπεται σε αποκλίνουσα λόγω της διαθλάσεως που υφίσταται, όταν διέλθει μέσα από τον φακό. Οι αποκλίνοντες φακοί είναι παχείς στα άκρα και λεπτότεροι στη μέση (σχ. 16.3.2).



Σχ. 16.3.2
Διάφοροι τύποι αποκλινόντων φακών.

Προκειμένου να μελετούμε ευκολότερα τη συμπεριφορά των φακών, ορίζομε μερικές χρήσιμες παραμέτρους:

1) ***Κέντρα καμπυλότητας***, ονομάζομε τα κέντρα των σφαιρικών επιφανειών, όπου ανήκουν οι επιφάνειες του φακού. Ένας φακός έχει δύο κέντρα καμπυλότητας.

2) ***Ακτίνες καμπυλότητας***, ονομάζομε τις ακτίνες των σφαιρικών επιφανειών, των οποίων τμήματα αποτελούν οι επιφάνειες του φακού.

3) ***Άξονας***, είναι η ευθεία που ενώνει τα δύο κέντρα καμπυλότητας του φακού.

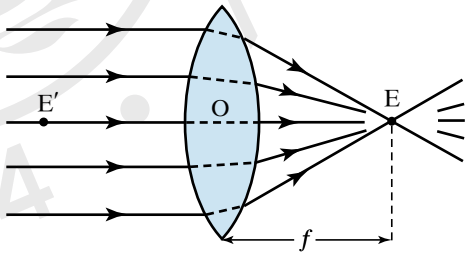
4) ***Οπτικό κέντρο***, ονομάζομε το σημείο που βρίσκεται στο μέσο του φακού.

5) ***Εστία***, ονομάζομε το σημείο που συγκεντρώνονται οι ακτίνες μιας παράλληλης προς τον άξονα δέσμης, που διέρχεται από το φακό.

6) ***Εστιακή απόσταση***, ονομάζομε την απόσταση της εστίας από το οπτικό κέντρο του φακού.

16.3.1 Συγκλίνοντες φακοί.

Όταν μια φωτεινή δέσμη παράλληλη στον άξονα ενός συγκλίνοντα φακού, προσπίπτει πάνω σ' αυτόν, οι ακτίνες μετά τη διάθλαση συγκλίνουν στο σημείο της εστίας του φακού. Επίσης, αν μια φωτεινή πηγή τοποθετηθεί στην εστία ενός συγκλίνοντα φακού, η φωτεινή δέσμη που εκπέμπει θα γίνει παράλληλη μετά τη διέλευσή της από τον φακό (σχ. 16.3.3).



Σχ. 16.3.3
Διάθλαση δέσμης σε συγκλίνοντα φακό.

Σ' έναν συγκλίνοντα φακό η εστιακή απόσταση f είναι ***θετική***, γι' αυτό και ο φακός ονομάζεται ***θετικός φακός***.

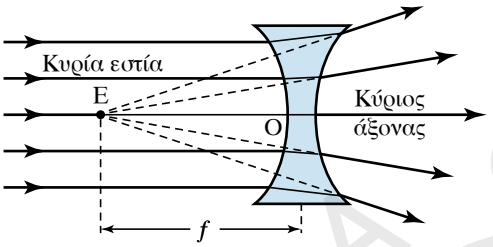
Θα δούμε ότι τα είδωλα που σχηματίζονται από έναν συγκλίνοντα φακό είναι:

1) ***Πραγματικά*** και ***αντεστραμμένα***, αν το αντικείμενο τοποθετείται πριν από την εστία.

2) ***Φανταστικά, όρθια*** και ***μεγαλύτερα***, όταν το αντικείμενο τοποθετείται μεταξύ της εστίας και του φακού.

16.3.2 Αποκλίνοντες φακοί.

Όταν μια φωτεινή δέσμη παράλληλη στον κύριο άξονα ενός αποκλίνοντος φακού προσπίπτει σ' αυτόν, οι ακτίνες μετά τη διάθλαση αποκλίνουν, έτσι ώστε οι προεκτάσεις των διευθύνσεών τους να τέμνονται στην εστία που βρίσκεται από την πλευρά της εισερχόμενης δέσμης (σχ. 16.3.4). Στον φακό αυτό, η εστιακή απόσταση f είναι ***αρνητική*** και ο φακός ονομάζεται ***αρνητικός φακός***.



Σχ. 16.3.4
Διάθλαση δέσμης σε αποκλίνοντα φακό.

Στους αποκλίνοντες φακούς το είδωλο σχηματίζεται πάντα από την πλευρά του αντικειμένου, είναι ***φανταστικό***, ***όρθιο*** και ***μικρότερο*** από το αντικείμενο.

16.3.3 Πραγματικά και φανταστικά είδωλα.

Αν τοποθετήσομε σε κάποια απόσταση από συγκλίνοντα φακό (πιο πέρα από την εστία του) ένα αντικείμενο (καλά φωτισμένο) και από την άλλη πλευρά μια οθόνη (σε περιοχή με χαμηλό φωτισμό για καλύτερη παρατήρηση), μετακινώντας την οθόνη θα παρατηρήσομε σε κάποια θέση μετά την εστία το σχηματισμό ενός πραγματικού ειδώλου αντεστραμμένου. Μεταβάλλοντας τη θέση του αντικειμένου ως προς τον φακό ή τη θέση του φακού ως προς το αντικείμενο, παρατηρούμε ότι μεταβάλλεται το μέγεθος και η θέση, στην οποία σχηματίζεται το πραγματικό είδωλο. Όταν η σχετική απόσταση του αντικειμένου με την εστία του φακού μειώνεται, το είδωλο μεγεθύνεται και απομακρύνεται απ' την εστία. Όταν η θέση του αντικειμένου ταυτιστεί με την εστία του φακού, τότε δεν είναι δυνατόν να παρατηρήσομε είδωλο και λέμε ότι το είδωλο σχηματίζεται στο άπειρο. Επίσης, αν η θέση του αντικειμένου είναι μεταξύ της εστίας και του φακού, το είδωλο που σχηματίζεται είναι φανταστικό, όρθιο και μεγαλύτερο από το αντικείμενο.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία, μ' έναν αποκλίνοντα φακό δεν παρατηρούμε σχηματισμό πραγματικού ειδώλου. Παρατηρούμε όμως φανταστικό είδωλο μικρότερο από το αντικείμενο και όρθιο.

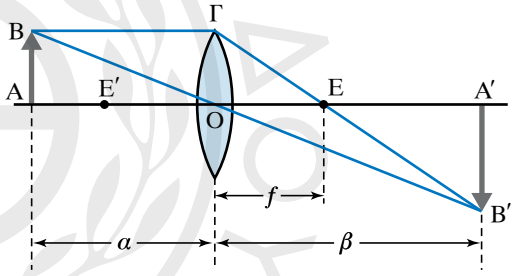
Για να προβλέψομε το σχηματισμό ενός ειδώλου πραγματικού ή φανταστικού, χρησιμοποιούμε τη γραφική μέθοδο, η οποία μας επιτρέπει να βρίσκομε το είδωλο κάθε σημείου γεωμετρικά, αν εφαρμόσομε τους παρακάτω κανόνες:

1) Κάθε ακτίνα που περνά από το κέντρο του φακού, δεν διαθλάται.

2) Οι ακτίνες που είναι παράλληλες στον άξονα, μετά τη διάθλασή τους διέρχονται οι ίδιες ή οι προεκτάσεις τους απ' την εστία του φακού.

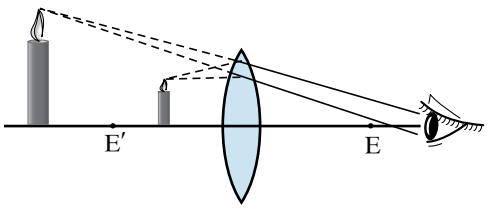
3) Οι ακτίνες που διέρχονται οι ίδιες ή οι προεκτάσεις τους απ' την εστία, μετά τη διάθλασή τους έχουν διεύθυνση παράλληλη στον άξονα.

Για να προσδιορίσομε γραφικά το είδωλο ενός σημείου που δημιουργείται από συγκλίνοντα φακό, αρκεί να χρησιμοποιήσομε κατάλληλα τους κανόνες σχηματισμού ειδώλων, δηλαδή μπορούμε να εργαστούμε όπως φαίνεται στα σχήματα 16.3.5 και 16.3.6.



Σχ. 16.3.5
Γραφική μέθοδος σχηματισμού του πραγματικού ειδώλου σε συγκλίνοντα φακό.

Για να σχηματίσομε το είδωλο του σημείου Β, φέρνομε την παράλληλη προς τον άξονα ακτίνα από το Β προς τον φακό και σχεδιάζομε τη διαθλώμενή της, που διέρχεται από την εστία Ε. Στη συνέχεια, σχεδιάζομε την ακτίνα από το Β, που διέρχεται από το κέντρο του φακού, η οποία δεν διαθλάται. Στο



Σχ. 16.3.6
Γραφική μέθοδος σχηματισμού του φανταστικού ειδώλου σε συγκλίνοντα φακό.

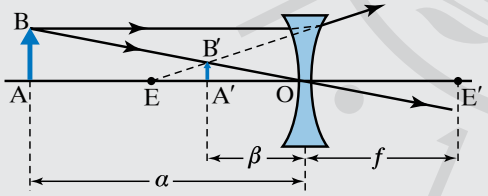
σημείο που τέμνονται οι δύο ακτίνες έχομε το είδωλο του σημείου Β.

Παρατηρήσεις.

1) Όταν το σημείο Β βρίσκεται πιο ψηλά από το σημείο Γ του φακού, θεωρούμε ότι ο φακός εκτείνεται ως προέκταση της ευθείας ΟΓ όσο χρειάζεται. Δηλαδή από το Β φέρνομε παράλληλη προς τον άξονα του φακού ακτίνα μέχρι το σημείο που συναντά αυτή την ευθεία-προέκταση. Από τη θέση αυτή φέρνομε την ακτίνα που διέρχεται από την εστία του φακού και στη συνέχεια σχεδιάζομε από το Β την ακτίνα που διέρχεται από το κέντρο του φακού. Το σημείο τομής τους είναι το είδωλο του σημείου Β.

2) Όταν το σημείο βρίσκεται μεταξύ της εστίας Ε και του φακού, η διαδικασία παραμένει ίδια, με τη διαφορά ότι το σημείο τομής βρίσκεται στην προέκταση των ακτίνων από την πλευρά του αντικειμένου και το είδωλο είναι φανταστικό.

3) Με την παραπάνω γραφική μέθοδο μπορούμε να προσδιορίσομε και το φανταστικό είδωλο που δημιουργείται από αποκλίνοντα φακό. Η μοναδική διαφορά είναι ότι το σημείο τομής βρίσκεται στην προέκταση της διαθλώμενης ακτίνας από την πλευρά του αντικειμένου (σχ. 16.3.7).



Σχ. 16.3.7
Γραφική μέθοδος σχηματισμού του φανταστικού ειδώλου σε αποκλίνοντα φακό.

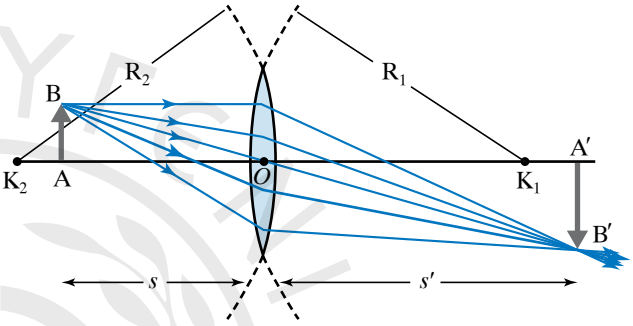
16.3.4 Τύποι κατασκευαστών φακών.

1) Μεγέθυνση φακού.

Μία πληροφορία, που μας είναι χρήσιμη όταν μελετάμε τα είδωλα είναι η σχέση μεγέθους μεταξύ αντικειμένου και ειδώλου. Η σχέση αυτή εκφράζεται με τον όρο ***εγκάρσια μεγέθυνση***. Η εγκάρσια μεγέθυνση συμβολίζεται με το m και ορίζεται ως το πηλίκο της αποστάσεως δύο σημείων του ειδώλου προς την απόσταση των αντιστοίχων σημείων του αντικειμένου. Από το σχήμα 16.3.8 έχομε $m = A'B'/AB$ και, όπως προκύπτει από τα όμοια τρίγωνα $A\hat{B}O$ και $A'\hat{B}'O$, έχομε:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{s'}{s} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = -\frac{s'}{s} \quad \text{άρα} \quad m = -\frac{s'}{s},$$

όπου s η απόσταση του αντικειμένου ΑΒ από το κέντρο του φακού και s' απόσταση του ειδώλου Α′Β′ απ' το κέντρο του φακού. Τα s και s' συνδέονται με τη σχέση $1/s + 1/s = 1/f$ όπου f η εστιακή απόσταση.



Σχ. 16.3.8
Μεγέθυνση φακού.

Παρατηρήσεις.

1) Το (–) στη σχέση της μεγέθυνσης προκύπτει από τη φορά των διανυσμάτων Α′Β′ και ΑΒ και δηλώνει ότι το είδωλο είναι αντεστραμμένο, σε σχέση με το αντικείμενο.

2) Στους συγκλίνοντες φακούς η μεγέθυνση m μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες, μικρότερες ή και ίσες με τη μονάδα, ανάλογα με τη θέση που βρίσκεται το αντικείμενο.

3) Στους αποκλίνοντες φακούς η μεγέθυνση μπορεί να πάρει τιμές μόνο μικρότερες της μονάδας, γιατί το είδωλο είναι πάντα μικρότερο από το αντικείμενο.

2) Εξίσωση των κατασκευαστών φακών.

Η εξίσωση των κατασκευαστών φακών συνδέει όλα τα βασικά μεγέθη ενός φακού. Δηλαδή αναφέρεται στους φακούς που προκύπτουν απ' την τομή δύο σφαιρικών διαθλαστικών επιφανειών και συνδέει τα παρακάτω μεγέθη:

1) Τις ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 των σφαιρικών επιφανειών.

2) Τον δείκτη διαθλάσεως του φακού n.

3) Την εστιακή απόσταση f.

Σύμφωνα με την εξίσωση, τα παραπάνω μεγέθη συνδέονται ως εξής:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Οι ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 λαμβάνονται με πρόσημο (+) για κυρτές επιφάνειες και με πρόσημο (–) για κοίλες επιφάνειες. Αν στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει αρνητικό f, σημαίνει ότι έχομε αποκλίνοντα φακό, ενώ όταν προκύπτει f θετικό, σημαίνει ότι έχομε συγκλίνοντα φακό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σε απόσταση $s = 30\,\text{cm}$ από συγκλίνοντα φακό εστιακής αποστάσεως $f = 10\,\text{cm}$ τοποθετείται αντικείμενο ύψους $h = 5\,\text{cm}$.

α) Να υπολογιστεί η εγκάρσια μεγέθυνση του αντικειμένου.

β) Να υπολογιστεί το ύψος και η απόσταση του πραγματικού ειδώλου.

2. Ένας ερευνητής, προκειμένου να μετρήσει την εστιακή απόσταση ενός φακού, τοποθετεί μια ράβδο ύψους $H = 2\,\text{cm}$ σε απόσταση 25 cm από το κέντρο του φακού και λαμβάνει πραγματικό είδωλο αντεστραμμένο, ύψους 6 cm. Μπορείτε να τον βοηθήσετε στον υπολογισμό της εστιακής αποστάσεως του φακού, στον υπολογισμό της θέσεως του ειδώλου και στον προσδιορισμό του είδους του φακού;

Αν το είδωλο ήταν φανταστικό, ορθό, από την ίδια πλευρά με το αντικείμενο, και μικρότερο κατά 1 cm από το αντικείμενο, τι συμπεράσματα προκύπτουν σχετικά με το είδος του φακού και την εστιακή απόσταση; Να σχεδιάσετε τα κατάλληλα σχήματα.

3. Σε απόσταση $s = 20\,\text{cm}$ απ' το κέντρο συγκλίνοντος φακού εστιακής αποστάσεως $f = 40\,\text{cm}$ τοποθετείται αντικείμενο ύψους $H = 10\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε τη μεγέθυνση του φακού, το ύψος και τη θέση του ειδώλου, αφού το χαρακτηρίσετε πραγματικό ή φανταστικό και να σχεδιάσετε τα κατάλληλα σχήματα.

4. Φακός είναι κατασκευασμένος από διαφανές υλικό με δείκτη διαθλάσεως $n = 1{,}25$. Να υπολογιστεί η εστιακή του απόσταση και να χαρακτηριστεί ως συγκλίνων ή αποκλίνων σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, όπου οι ακτίνες καμπυλότητας είναι:

α) $R_1 = 5\,\text{cm}$, $R_2 = 5\,\text{cm}$

β) $R_1 = -5\,\text{cm}$, $R_2 = -5\,\text{cm}$

γ) $R_1 = -5\,\text{cm}$, $R_2 = 10\,\text{cm}$

δ) $R_1 = 5\,\text{cm}$, $R_2 = -10\,\text{cm}$

ε) $R_1 = 5\,\text{cm}$, $R_2 = 10\,\text{cm}$

Προσπαθήστε να σχεδιάσετε κάθε φορά τον φακό.

5. Μονοχρωματική ακτινοβολία προσπίπτει κάθετα σε γυάλινη πλάκα πάχους 0,2 m. Αν ο δείκτης διαθλάσεως είναι $n = 1{,}9$, να υπολογιστεί η χρονική καθυστέρηση του φωτός λόγω της διελεύσεώς του απ' την πλάκα.

6. Μονοχρωματικό φως προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια υγρού με δείκτη διαθλάσεως $n = \sqrt{3}$. Αν η γωνία προσπτώσεως είναι $\theta_\alpha = 30^\circ$, να υπολογιστεί η γωνία διαθλάσεως στις παρακάτω περιπτώσεις:

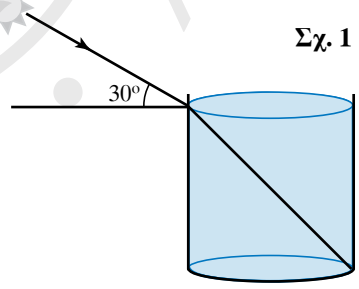
α) Όταν η ακτίνα διαδίδεται απ' το υγρό στον αέρα.

β) Όταν η διάδοση γίνεται από τον αέρα στο υγρό.

7. Ο μηχανικός του πλοίου προσπαθεί να μετρήσει το βάθος μιας δεξαμενής στο πλοίο χρησιμοποιώντας τα παρακάτω δεδομένα:

α) Η δεξαμενή είναι κυκλική με διάμετρο 4 m.

β) Όταν είναι γεμάτη με νερό, προκειμένου το φως να αρχίζει να φωτίζει τον πυθμένα της, πρέπει ο Ήλιος να σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία μεγαλύτερη από 30° (σχ. 1). Δίνεται ο δείκτης διαθλάσεως του νερού $n = 1{,}35$.



Σχ. 1

8. Μονοχρωματική ακτίνα φωτός διαδίδεται σε διαφανές υλικό και προσπίπτει στη διαχωριστική του επιφάνεια με τον αέρα υπό γωνία 30°.

α) Αν ο δείκτης διαθλάσεως είναι $n = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, να σχεδιάσετε την ανακλώμενη και διαθλώμενη ακτίνα.

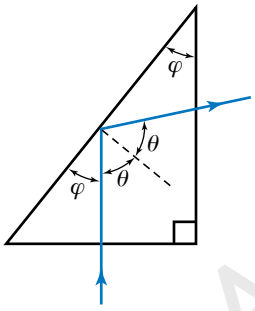
β) Να επαναλάβετε το ίδιο για γωνίες προσπτώσεως 60°, 45°, 90.

γ) Να υπολογίσετε την κρίσιμη γωνία, για να έχομε ολική ανάκλαση.

9. Ορθογώνιο τριγωνικό πρίσμα έχει δείκτη διαθλάσεως $n = 1{,}88$. Να σχεδιαστεί η πορεία μιας φωτεινής δέσμης που προσπίπτει κάθετα στη μια κάθετη πλευρά του πρίσματος:

α) Στην περίπτωση που το πρίσμα βρίσκεται στον αέρα.

β) Στην περίπτωση που το πρίσμα είναι βυθισμένο στο νερό με δείκτη διαθλάσεως $n = 1{,}33$ (σχ. 2).

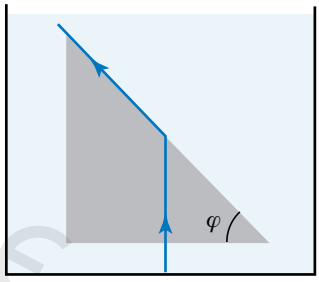


Σχ. 2

10. Το πρίσμα του σχήματος 3 είναι από γυαλί, έχει δείκτη διαθλάσεως $n_γ = \sqrt{2}$ και βρίσκεται βυθισμένο στο νερό με δείκτη διαθλάσεως $n_ν = 1{,}2$. Η ακτίνα εισέρχεται κάθετα στην πλευρά του.

α) Να βρεθεί η γωνία φ του πρίσματος, ώστε η ακτίνα να υφίσταται ολική ανάκλαση.

β) Να επαναληφθεί ο υπολογισμός για την περίπτωση όπου το πρίσμα βρίσκεται στον αέρα.



Σχ. 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17

Στοιχεία ατομικής και πυρηνικής φυσικής

17.1 Δομή των ατόμων και υποατομικά σωματίδια.

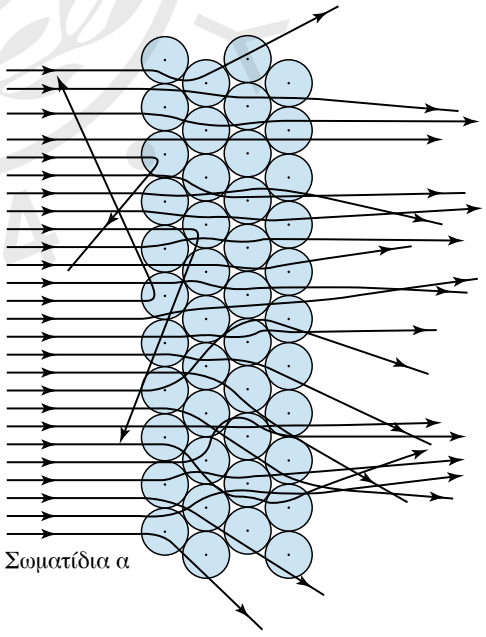
Από την αρχαιότητα, η δομή της ύλης ήταν ένα από τα βασικά ερωτήματα των φιλοσόφων. Τον 5ο π.Χ. αιώνα οι φιλόσοφοι Δημόκριτος και Λεύκιππος υποστήριξαν ότι στην προσπάθειά μας να διαιρέσομε συνεχώς την ύλη, θα συναντήσομε ένα όριο. Θα φτάσομε σε ένα στοιχειώδες τμήμα ύλης, το οποίο είναι αδιαίρετο. Ονόμασαν το μικρότερο και αδιαίρετο τμήμα της ύλης ***άτομο***. Υποστηρίξαν ότι κάθε υλικό σώμα αποτελείται από άτομα που διαφέρουν μεταξύ τους σε σχήμα και μέγεθος, είναι αιώνια, άφθαρτα, βρίσκονται σε διαρκή κίνηση και είναι υπεύθυνα για τα φαινόμενα που παρατηρούμε στη φύση.

Οι απόψεις αυτές έμειναν αναξιοποίητες για δύο χιλιάδες χρόνια περίπου, μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα που με την εισαγωγή της ατομικής θεωρίας από τον Dalton ξεκινά δυναμικά μια επιστημονική αναζήτηση με θέμα τη δομή της ύλης. Σημαντικοί σταθμοί στην αναζήτηση αυτή είναι η ανακάλυψη του ηλεκτρονίου από τον Thomson, το πείραμα του Rutherford, με το οποίο ανακαλύπτεται η ύπαρξη του πυρήνα, το ατομικό πρότυπο του Bohr, η κβαντική φυσική, η ανακάλυψη των πυρηνικών δυνάμεων (ισχυρή και ασθενής αλληλεπίδραση) κ.λπ..

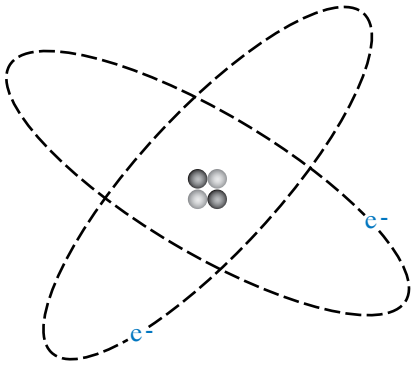
Ο Thomson προτείνει να θεωρούμε τα άτομα σφαιρικά με ίσες ποσότητες θετικού και αρνητικού «αναμεμειγμένες» ώστε να εμφανίζονται ουδέτερα.

Στο πείραμα του Rutherford, δέσμη σωματιδίων α (πυρήνες ηλίου $^4_2$He) που προέρχονται από ραδιενεργό υλικό διέρχονται μέσα από πολύ λεπτό φύλλο χρυσού. Τα σωμάτια α φέρουν θετικό φορτίο και η μάζα τους είναι πάνω από 10.000 φορές η μάζα του ηλεκτρονίου, άρα τα ηλεκτρόνια των ατόμων δεν θα εμπόδιζαν τη διέλευση των σωματιδίων α από τα φύλλα χρυσού (σχ. 17.1.1).

Τα αποτελέσματα του πειράματος έδειξαν ότι σχεδόν όλα τα σωματίδια περνούσαν από το φύλλο χρυσού με ελάχιστη έως μηδενική εκτροπή. Μερικά μόνο από τα σωματίδια α εκτρέπονταν κατά αρκετά μεγάλες γωνίες, ενώ ένας ακόμη μικρότερος αριθμός τους σκεδαζόταν προς τα πίσω. Το γεγονός ότι υπήρχαν σωματίδια που εκτρέπονταν προς τα πίσω είναι το πιο σημαντικό και ανατρεπτικό αποτέλεσμα των απόψεων που επικρατούσαν μέχρι τότε για τη δομή του ατόμου. Ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα, ο Rutherford κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα σωματίδια που δεν εκτρέπονταν, διέρχονταν από περιοχές του φύλλου όπου υπήρχε κενός χώρος, ενώ τα σωματίδια που παρουσίαζαν εκτροπή, απωθούνταν από περιοχές ύλης μεγάλης πυκνότητας μάζας και θετικού φορτίου. Τις περιοχές αυτές τις ονόμασε ***πυρήνες των ατόμων*** και υπολόγισε τις διαστάσεις τους, οι οποίες βρέθηκαν εξαιρετικά μικρές σε σχέση με τη διάμετρο του ατόμου (περίπου 10.000 φορές μικρότερες). Με τα δεδομένα από τα πειράμα-



Σχ. 17.1.1
Στο πείραμα του Rutherford παρατηρούμε την εκτροπή των σωματιδίων α από τους πυρήνες του υλικού (χρυσός).



Σχ. 17.1.2
Το πλανητικό μοντέλο του Rutherford για το άτομο.

τά του ο Rutherford πρότεινε ένα ατομικό μοντέλο, που τοποθετεί τον πυρήνα, όταν υπάρχει σχεδόν όλη η μάζα του ατόμου, στο κέντρο και τα ηλεκτρόνια σε κυκλικές τροχιές γύρω του, όπως ο Ήλιος και οι πλανήτες στο Ηλιακό μας σύστημα (σχ. 17.1.2).

Το πλανητικό μοντέλο του Rutherford για το άτομο παρουσίαζε προβλήματα στην ερμηνεία διαφόρων φαινομένων σχετικών με τα φάσματα εκπομπής και απορροφήσεως του φωτός. Ήταν γνωστό από τον ηλεκτρομαγνητισμό ότι το κάθε ηλεκτρόνιο που περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα έχει επιτάχυνση και κάθε επιταχυνόμενο φορτισμένο σωματίδιο ακτινοβολεί, άρα χάνει ενέργεια και έτσι το ηλεκτρόνιο έπρεπε να πέσει στον πυρήνα. Το μοντέλο του Rutherford για το άτομο, εκτός των άλλων αδυναμιών, οδηγούσε σε ένα ασταθές άτομο. Αν ίσχυε αυτό το μοντέλο, δεν θα υπήρχαν άτομα!

Παρόλα τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν, η ανακάλυψη του πυρήνα από τον Rutherford ήταν καθοριστικής σημασίας στην εξέλιξη του ατομικού μοντέλου. Κάθε σύγχρονο ατομικό πρότυπο δομείται με δεδομένο την ύπαρξη της περιοχής του πυρήνα που αποτελείται από πρωτόνια p και νετρόνια n, και της περιοχής γύρω απ' τον πυρήνα που κινούνται τα ηλεκτρόνια e.

Η σύγχρονη Φυσική που μελετά τα στοιχειώδη σωματίδια, δέχεται για το ηλεκτρόνιο ότι είναι στοιχειώδες θεμελιώδες σωματίδιο, ενώ για τα πρωτόνια και νετρόνια, δέχεται ότι έχουν δομή και είναι συνδυασμός μικρότερων σωματιδίων, που ονομάζονται ***κουάρκ*** (quark). Η άποψη αυτή εξηγεί και τη μετατροπή νετρονίου σε πρωτόνιο, που θα μελετήσομε παρακάτω στη β^- διάσπαση και τη μεταστοιχείωση.

17.2 Στάθμες ενέργειας, διέγερση και ιονισμός.

17.2.1 Στάθμες ενέργειας ατόμου.

Μετά τα προβλήματα που αντιμετώπιζε το ατομικό πρότυπο του Rutherford, οι φυσικοί αναζητούν τρόπους να κατανοήσουν περισσότερο τη δομή του ατόμου, ώστε να δώσουν απαντήσεις στα ερωτήματα, που προέκυπταν απ' την προσπάθεια αναλύσεως των φασματικών γραμμών.

Σημαντικό βήμα στην κατεύθυνση αυτή είναι το ατομικό πρότυπο που πρότεινε ο Bohr, το οποίο τροποποιεί το πρότυπο του Rutherford και έρχεται σε σύγκρουση με απόψεις της κλασικής φυσικής.

Το πρότυπο του Bohr αναφέρεται στο άτομο του υδρογόνου και κάνει τις παρακάτω παραδοχές:

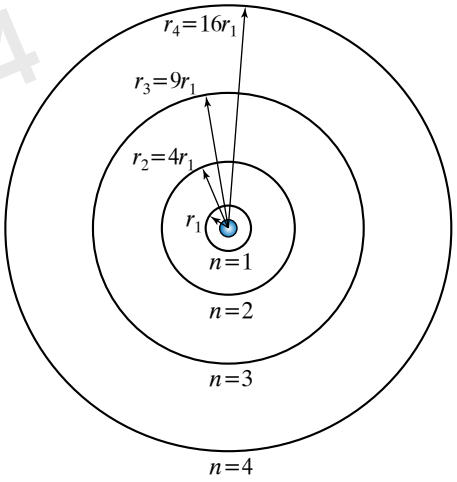
1) Το άτομο του υδρογόνου αποτελείται από ένα θετικά φορτισμένο πυρήνα, γύρω απ' τον οποίο περιφέρεται ένα ηλεκτρόνιο υπό την επίδραση της ηλεκτρικής δυνάμεως Coulomb. Η κίνηση του ηλεκτρονίου γίνεται μόνο σε ορισμένες τροχιές, στις οποίες η στροφορμή είναι κβαντωμένη, δηλαδή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της στοιχειώδους ποσότητας στροφορμής:

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar.$$

Αυτός είναι ένας τρόπος που οδηγεί στην κβάντωση της ενέργειας. Οι τροχιές που μπορεί να κινηθεί το ηλεκτρόνιο ονομάζονται ***επιτρεπόμενες τροχιές*** και οι αντίστοιχες ενέργειες σε αυτές τις καταστάσεις αποτελούν τις επιτρεπόμενες ***ενεργειακές στάθμες*** (σχ. 17.2.1).

2) Η κίνηση του ηλεκτρονίου σε μια επιτρεπόμενη τροχιά δεν συνοδεύεται από εκπομπή ακτινοβολίας.

3) Ένα ηλεκτρόνιο εκπέμπει ακτινοβολία μόνο



Σχ. 17.2.1
Οι επιτρεπόμενες τροχιές για τα ηλεκτρόνια του υδρογόνου, σύμφωνα με τον Bohr.

όταν μεταβεί από μια τροχιά υψηλότερης ενέργειας σε τροχιά χαμηλότερης ενέργειας. Η ενέργεια εκπέμπεται με τη μορφή φωτονίων και είναι ίση με τη διαφορά των δύο ενεργειακών σταθμών, ανάμεσα στις οποίες έγινε η μετακίνηση. Δηλαδή $hf = E_i - E_f$, όπου h η σταθερά του Plank, f η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου, E_i η ενέργεια της αρχικής στάθμης, και E_f η ενέργεια της τελικής στάθμης. Για να μεταβεί από στάθμη χαμηλής ενέργειας σε στάθμη μεγαλύτερης, πρέπει να απορροφήσει (διέγερση) ενέργεια ίση με τη διαφορά ενεργειών των σταθμών αυτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στη θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση το άτομο του υδρογόνου έχει ενέργεια $E_1 = -13{,}6\,\text{eV}$.

α) Να υπολογιστεί η ενέργειά του στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση.

β) Να βρεθεί σε ποια διεγερμένη κατάσταση βρίσκεται, όταν έχει ενέργεια –1,51 eV.

γ) Να υπολογιστεί η ενέργεια που απορρόφησε, για να μεταβεί στη συγκεκριμένη κατάσταση.

δ) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα των ενεργειακών σταθμών και οι πιθανές μεταβάσεις κατά την αποδιέγερση.

ε) Να υπολογιστεί η ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτονίων για κάθε πιθανή μετάβαση.

Λύση

α) Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση χαρακτηρίζεται από κύριο κβαντικό αριθμό $n = 2$. Υπολογίζομε την ενέργειά της από τη σχέση:

$$E_n = E_1/n^2.$$

Άρα έχομε:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \text{ ή } E_2 = \frac{E_1}{2^2} \text{ ή } E_2 = \frac{-13{,}6\text{eV}}{4}$$

$$\text{άρα } E_2 = -3{,}4\text{eV}.$$

β) $$E_n = \frac{E_1}{n^2} \text{ ή } n^2 = \frac{E_1}{E_n} \text{ ή}$$

$$n^2 = \frac{E_1}{E_n} \text{ ή } n^2 = \frac{-13{,}6\text{eV}}{-1{,}51\text{eV}}$$

άρα $n^2 = 9$ οπότε $n = 3$, άρα το άτομο του υδρογόνου είναι στη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση με κύριο κβαντικό αριθμό $n = 3$.

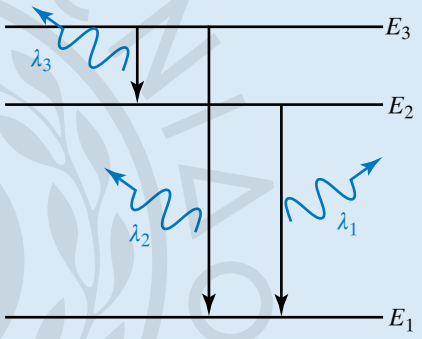
γ) $E_3 - E_1 = -1{,}5\,\text{eV} - (-13{,}6\,\text{eV}) = -1{,}5\,\text{eV} + 13{,}6\,\text{eV}) = 12{,}09\,\text{eV}$.

δ) Στο σχήμα 17.2.3 φαίνονται οι πιθανές μεταβάσεις κατά την αποδιέγερση προς τη θεμελιώδη.

ε) $hf_{31} = E_3 - E_1 = -1{,}5\,\text{eV} - (-13{,}6\,\text{eV}) = -1{,}5\,\text{eV} + 13{,}6\,\text{e}) = 12{,}09\,\text{eV}$.

$hf_{32} = E_3 - E_2 = -1{,}5\,\text{eV} - (-3{,}4\,\text{eV}) = -1{,}5\,\text{eV} + 3{,}4\,\text{eV}) = 1{,}89\,\text{eV}$.

$hf_{33} = E_2 - E_2 = -3{,}4\,\text{eV} - (-13{,}6\,\text{eV}) = -3{,}4\,\text{eV} + 13{,}6\,\text{eV}) = 10{,}02\,\text{eV}$.



Σχ. 17.2.3

Παρατηρήσεις.

1) Επειδή η μονάδα joule (J) για την ενέργεια είναι πολύ μεγάλη σε σύγκριση με τις ενέργειες των ηλεκτρονίων των ατόμων, γίνεται χρήση μιας μικρότερης μονάδας ενέργειας, το 1 eV (ηλεκρονιοβόλτ) και τα πολλαπλάσιά του 1 MeV = 10^6 eV, και 1 GeV = 10^9 eV.

Το 1eV ισούται με την ενέργεια ενός στοιχειώδους φορτίου $q = e$, όταν αυτό επιταχυνθεί σε διάφορα δυναμικού 1 volt. Η σχέση που συνδέει το 1 eV με το joule προκύπτει πολύ εύκολα ως εξής:

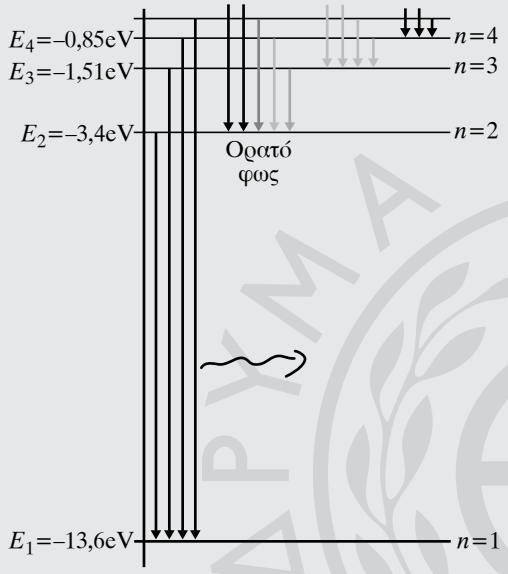
$$1\,\text{eV} = 1e \times 1\,\text{V} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C} \times 1\,\text{V} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}.$$

2) Όταν το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου βρίσκεται στην τροχιά με τη μικρότερη ακτίνα, έχει τη χαμηλότερη δυνατή ενέργεια

$E_1 = -13{,}6$ eV και λέμε ότι το άτομο είναι στη χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση (θεμελιώδη ενεργειακή στάθμη).

3) Η ενέργεια στις επόμενες στάθμες υπολογίζεται με τη σχέση $E_n = E_1/n^2$, όπου $n = 1, 2$ 3... ο κύριος κβαντικός αριθμός.

Οι ενεργειακές καταστάσεις E_2, E_3, E_4,... με ενέργεια μεγαλύτερη απ' τη θεμελιώδη ονομάζονται διεγερμένες καταστάσεις του ατόμου (σχ. 17.2.2).



Σχ. 17.2.2

Οι επιτρεπόμενες ενεργειακές στάθμες για το άτομο του υδρογόνου και οι πιθανές αποδιεγέρσεις.

17.2.2 Διέγερση και αποδιέγερση του ατόμου.

Όταν σε ένα άτομο προσφέρομε ενέργεια, είναι δυνατόν κάποιο από τα ηλεκτρόνιά του να μεταβεί από μια τροχιά χαμηλής ενέργειας σε μια άλλη με υψηλότερη ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρόνιο παραμένει στην υψηλότερη ενεργειακή στάθμη για μικρό χρονικό διάστημα και επιστρέφει στη θεμελιώδη κατάσταση εκπέμποντας τη διαφορά ενέργειάς του, με ένα ή περισσότερα φωτόνια, ανάλογα με το αν η επιστροφή γίνει με ένα ή περισσότερα διαδοχικά άλματα προς διαδοχικές ενεργειακές στάθμες.

Η διαδικασία απορροφήσεως ενέργειας και η μετάβαση του ατόμου σε ανώτερη ενεργειακή στάθμη ονομάζεται ***διέγερση του ατόμου***. Η κατάσταση που βρίσκεται το άτομο μετά τη διέγερση ονομάζεται ***διεγερμένη κατάσταση*** και η ενέργεια που απορροφά για να βρεθεί στη διεγερμένη κατάσταση ονομάζεται ***ενέργεια διεγέρσεως***.

Η διαδικασία της αυθόρμητης επιστροφής στη θεμελιώδη κατάσταση ονομάζεται ***αποδιέγερση του ατόμου***. Κατά την αποδιέγερση, εκπέμπεται από το άτομο φωτόνιο με ενέργεια ίση με τη διάφορα των ενεργειακών σταθμών, ανάμεσα στις οποίες έγινε η αποδιέγερση $hf = E_\text{i} - E_\text{f}$, όπου hf η ενέργεια του φωτονίου που εκπέμπεται κατά την αποδιέγερση, h η σταθερά του Plank $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J/s, f η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου, ενώ E_i και E_f η αρχική και η τελική ενεργειακή κατάσταση, ανάμεσα στις οποίες πραγματοποιήθηκε μια μετάβαση.

Η διέγερση ενός ατόμου είναι δυνατόν να προκληθεί με κρούση με σωματίδιο ή με απορρόφηση ακτινοβολίας. Διέγερση με κρούση μπορούμε να επιτύχομε επιταχύνοντας ηλεκτρόνια ή ιόντα σε ηλεκτρικό πεδίο, τα οποία στη συνεχεία προσκρούουν στα άτομα ενός αερίου και τους μεταβιβάζουν μέρος ή όλο το ποσό της ενέργειάς τους.

Διέγερση με απορρόφηση ακτινοβολίας έχομε στην περίπτωση που το άτομο απορροφά φωτόνιο κατάλληλης ενέργειας και μεταβαίνει από τη θεμελιώδη σε ανώτερη ενεργειακή κατάσταση (διεγερμένη). Για να έχομε διέγερση με απορρόφηση ακτινοβολίας, πρέπει το φωτόνιο να έχει ενέργεια ακριβώς ίση με την ενεργειακή διαφορά της θεμελιώδους από τη διεγερμένη στάθμη.

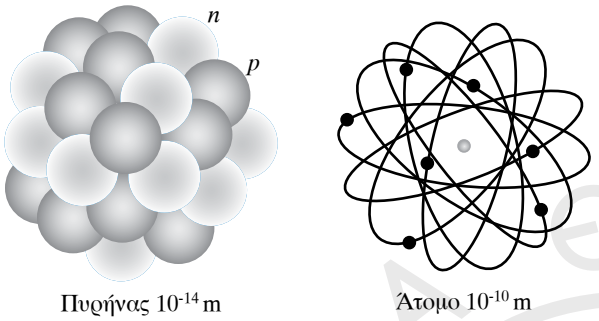
17.2.3 Ιονισμός ατόμου.

Σε μια διαδικασία ίδια μ' αυτήν της διεγέρσεως είναι δυνατόν το σωματίδιο ή το φωτόνιο που προσφέρει ενέργεια στο άτομο να έχει αρκετά μεγάλη ενέργεια, με αποτέλεσμα κατά την αλληλεπίδραση το ηλεκτρόνιο του ατόμου να απορροφήσει ικανό ποσό ενέργειας, ώστε να απομακρυνθεί εκτός του ηλεκτρικού πεδίου του πυρήνα και το άτομο να μετατραπεί σε θετικό ιόν. Περιγράφομε την κατάσταση αυτή ως ιονισμό ή ιοντισμό του ατόμου και την ενέργεια που απαιτείται για να συμβεί αυτό, ενέργεια ιονισμού ή ιοντισμού. Η ενέργεια ιονισμού υπολογίζεται από τη διαφορά $E_\text{ion} = E_\infty - E_\text{I}$, όπου $E_\infty = 0$, είναι η ενέργεια που αντιστοιχεί σε κατάσταση που το ηλεκτρόνιο είναι εκτός του ηλεκτρικού πεδίου του πυρήνα, σε άπειρη απόσταση απ' αυτόν ή σε πολύ μεγάλη απόσταση με κινητική ενέργεια ίση με μηδέν.

17.3 Δομή του πυρήνα, ασταθείς πυρήνες.

17.3.1 Δομή του πυρήνα.

Σήμερα γνωρίζομε ότι ο ***πυρήνας*** του ατόμου έχει ακτίνα της τάξεως μεγέθους μεταξύ των 10^{-15} m και 10^{-14} m, ενώ η ακτίνα του ***ατόμου*** είναι τις τάξεως των 10^{-10} m. Δηλαδή ο πυρήνας είναι περίπου δέκα χιλιάδες φορές μικρότερος απ' το άτομο (σχ. 17.3.1).



Σχ. 17.3.1
Διαστάσεις πυρήνα και ατόμου.

Οι πυρήνες όλων των ατόμων αποτελούνται από μικροσκοπικά σωματίδια, τα οποία ονομάζονται ***νουκλεόνια*** και τα διακρίνομε σε ***πρωτόνια (p)*** και ***νετρόνια(n)***. Τα πρωτόνια και τα νετρόνια διατηρούν μία συνεχή και αέναη κίνηση και όλα συγκρατούνται στον πυρήνα με την επίδραση ισχυρών πυρηνικών δυνάμεων, οι οποίες στην περίπτωση των πρωτονίων υπερνικούν τις ηλεκτρικές απωστικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους.

Τα πρωτόνια και τα νετρόνια έχουν σχεδόν το ίδιο μέγεθος και την ίδια περίπου μάζα, η οποία είναι περίπου 1836 φορές μεγαλύτερη απ' τη μάζα του ηλεκτρονίου.

Διαφέρουν ως προς το ηλεκτρικό φορτίο. Το πρωτόνιο φέρει το στοιχειώδες θετικό φορτίο $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Το νετρόνιο δεν φέρει φορτίο, είναι ηλεκτρικά ουδέτερο. Άρα το συνολικό φορτίο του πυρήνα είναι ίσο με το άθροισμα των φορτίων των πρωτονίων του. Κάθε πυρήνας περιβάλλεται από μία περιοχή με ακτίνα πολύ μεγαλύτερη απ' την ακτίνα του (χιλιάδες φορές), μέσα στην οποία περιφέρονται τα ηλεκτρόνια του ατόμου, που είναι ίσα σε αριθμό με τα πρωτόνιά του και συγκρατούνται στην περιοχή λόγω των ηλεκτρικών ελκτικών δυνάμεων που ασκούνται απ' τον πυρήνα.

Ο απλούστερος πυρήνας είναι ο πυρήνας του υδρογόνου, που αποτελείται από ένα πρωτόνιο. Τα διαφορετικά στοιχεία τα καθορίζει ο διαφορετικός αριθμός των πρωτονίων στον πυρήνα τους. Είναι δυνατόν και μάλιστα είναι πολύ συχνό το φαινόμενο, να έχομε πυρήνες του ίδιου στοιχείου (ίδιος αριθμός πρωτονίων), που να έχουν διαφορετικό αριθμό νετρονίων. Οι πυρήνες αυτοί ονομάζονται ***ισότοποι***.

Οι πυρήνες και τα αντίστοιχα χημικά στοιχεία, που έχουν συγκεκριμένο αριθμό νετρονίων και πρωτονίων λέγονται ***νουκλίδια***.

Για να δώσομε πληροφορίες σχετικές με τη δομή του πυρήνα, χρησιμοποιούμε τους αριθμούς *Z, N,* και *A*.

Ο ***αριθμός Z*** ονομάζεται ***ατομικός αριθμός*** και είναι ο αριθμός των πρωτονίων του πυρήνα. Ο ατομικός αριθμός καθορίζει το στοιχείο στο οποίο ανήκει το άτομο. Όλα τα άτομα ενός στοιχείου έχουν τον ίδιο ατομικό αριθμό, δηλαδή τον ίδιο αριθμό πρωτονίων. Για παράδειγμα, αναφέρομε το οξυγόνο, που έχει ατομικό αριθμό 8, δηλαδή τα άτομα του οξυγόνου έχουν πυρήνες με 8 πρωτόνια πάντα, ενώ ο άνθρακας έχει ατομικό αριθμό 6, δηλαδή τα άτομα του άνθρακα έχουν πυρήνες με 6 πάντα πρωτόνια.

Ο ***αριθμός N*** ονομάζεται ο ***αριθμός των νετρονίων του πυρήνα.*** Ο αριθμός των νετρονίων παίζει σημαντικό ρόλο στη σταθερότητα του πυρήνα. Για τα πρώτα είκοσι ευσταθή νουκλίδια, ο αριθμός των νετρονίων είναι περίπου ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων, ενώ τα βαρύτερα νουκλίδια έχουν αριθμό νετρονίων μεγαλύτερο από τον αριθμό των πρωτονίων.

Ο ***αριθμός A*** ονομάζεται ***μαζικός αριθμός*** και είναι ο αριθμός των πρωτονίων και των νετρονίων του πυρήνα, δηλαδή $A = Z + N$. Συμβολικά το νουκλίδιο παριστάνεται με το ${}^{A}_{Z}X$, όπου X είναι το σύμβολο του χημικού στοιχείου. Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρομε το στοιχείο ουράνιο που γράφεται ${}^{238}_{92}U$. Από το συμβολισμό αυτό λαμβάνομε την πληροφορία ότι έχει 92 πρωτόνια και $(238 - 92) = 146$ νετρόνια. Ο παραπάνω συμβολισμός είναι χρήσιμος για να διακρίνομε τους ισότοπους πυρήνες.

Παρατηρήσεις.

1) Τα ισότοπα ενός στοιχείου έχουν ίδιο αριθμό ηλεκτρονίων λόγω του ίδιου αριθμού πρωτονίων. Επομένως, τα ισότοπα στοιχεία παρουσιάζουν τις ίδιες χημικές ιδιότητες, επειδή αυτές καθορίζονται από το πλήθος των ηλεκτρονίων του ατόμου. Διαφορετικά ισότοπα ενός στοιχείου είναι δυνατόν να παρουσιάζουν διαφορετικές φυσικές ιδιότητες, όπως

σημείο βρασμού, σημείο τήξεως, πυκνότητα κ.ά.. Τα ισότοπα μπορεί να είναι σταθερά (ευσταθή) ή ασταθή. Ένα ασταθές ισότοπο διασπάται ραδιενεργά και μεταπίπτει συνήθως σ' ένα σταθερό ισότοπο άλλου στοιχείου.

2) Στη Γη συναντούμε 83 στοιχεία σε αξιόλογη ποσότητα. Από αυτά, τα είκοσι παρουσιάζουν μόνο ένα σταθερό ισότοπο, ενώ τα υπόλοιπα εμφανίζουν περισσότερα από δύο, με μέσο όρο τα τρία ισότοπα, ενώ σε μερικά στοιχεία έχομε έως και 10 σταθερά ισότοπα. Λαμβάνοντας υπόψη όλους τους ισότοπους πυρήνες που προκύπτουν για τα διάφορα στοιχεία, φτάνομε σε έναν αριθμό περίπου 2500 διαφορετικών πυρήνων.

3) Τα ισότοπα των διαφόρων στοιχείων υπάρχουν σε διάφορα ποσοστά στη φύση ανάλογα με το στοιχείο. Για παράδειγμα, στον άνθρακα συναντούμε το ισότοπο ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ σε ποσοστό 99 %, ενώ τα άλλα ισότοπα ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ και ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ σε πολύ μικρά ποσοστά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τα ισότοπα ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$, ${}^{59}_{27}\mathrm{Co}$ να βρεθεί ο αριθμός των πρωτονίων, των νετρονίων και των ηλεκτρονίων τους. Να επαναληφθεί για τα ιόντα ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}^{+}$, ${}^{59}_{27}\mathrm{Co}^{+}$.

Λύση

Για το ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ έχομε ατομικό αριθμό $Z = 27$, άρα 27 πρωτόνια και 27 ηλεκτρόνια. Νετρόνια $N = A - Z = 60 - 27 = 33$.

Για το άτομο ${}^{59}_{27}\mathrm{Co}$ έχομε ατομικό αριθμό $Z = 27$, άρα 27 πρωτόνια και 27 ηλεκτρόνια Νετρόνια $N = A - Z = 59 - 27 = 32$.

Για το ιόν ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}^{+}$ έχομε ατομικό αριθμό $Z=27$, άρα πρωτόνια 27 και ηλεκτρόνια $Z-1 = 26$. Νετρόνια $N = A - Z = 60 - 27 = 33$.

Για το ιόν ${}^{59}_{27}\mathrm{Co}^{+}$ έχομε ατομικό αριθμό $Z=27$, άρα πρωτόνια 27 και ηλεκτρόνια $Z-1 = 26$. Νετρόνια $N = A - Z = 59 - 27 = 32$.

17.3.2 Πυρηνική σταθερότητα (ευστάθεια) και αστάθεια.

Προηγουμένως αναφέραμε ότι τα περισσότερα στοιχεία έχουν έναν αριθμό ισοτόπων, που είναι σταθερά ή ασταθή. Η σταθερότητα ενός πυρήνα εξαρτάται από τις πυρηνικές και τις ηλεκτρικές δυνάμεις που ασκούνται στο εσωτερικό του. Πιο αναλυτικά, μπορούμε να αναφέρομε:

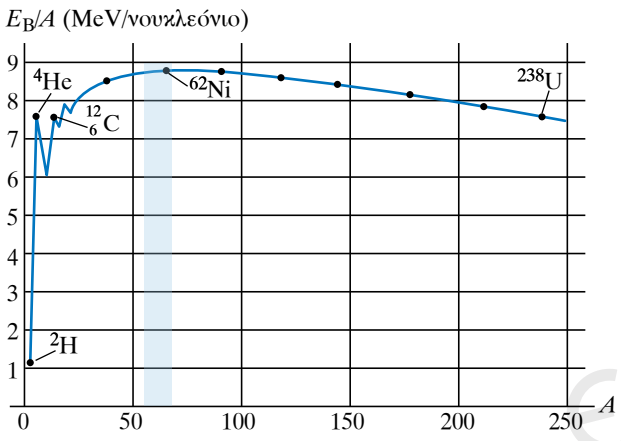
Μεταξύ νετρονίου και νετρονίου, μεταξύ νετρονίου και πρωτονίου και μεταξύ πρωτονίου και πρωτονίου, αναπτύσσεται μια πολύ ισχυρή, δύναμη, που την ονομάζομε ***πυρηνική***. Επίσης, ανάμεσα στα πρωτόνια αναπτύσσεται ηλεκτρική απωστική δύναμη. Η ισχυρή πυρηνική δύναμη είναι αλληλεπίδραση πολύ μικρής εμβέλειας, ασκείται μόνο μεταξύ γειτονικών νουκλεονίων και είναι το ίδιο ισχυρή για τα ζεύγη p-p, p-n, n-n. Η απωστική ηλεκτρική δύναμη μεταξύ των πρωτονίων έχει μεγαλύτερη εμβέλεια, αλλά δεν είναι τόσο ισχυρή, όσο η πυρηνική. Άρα στα γειτονικά νουκλεόνια κυριαρχεί η ισχυρή πυρηνική δύναμη. Τα προβλήματα σταθερότητας εμφανίζονται σε μεγάλους πυρήνες, όπου λόγω του μεγέθους τους η απωστική ηλεκτρική δύναμη ανταγωνίζεται την ισχυρή πυρηνική.

Ένα μέτρο της σταθερότητας ενός πυρήνα είναι η ***ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο.***

Η μάζα του πυρήνα $M_{\pi,}$ είναι μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των νουκλεονίων του ($Zm_p + + \mathrm{N}m_n$), όταν αυτά βρίσκονται σε ελεύθερη κατάσταση. Αυτή η διαφορά μάζας ονομάζεται ***έλλειμμα μάζας*** και υπολογίζεται από τη σχέση $\Delta M = Zm_p + \mathrm{N}m_n - M_\pi$. Δηλαδή όταν κατά τη σύνδεσή τους τα νουκλεόνια σχηματίζουν πυρήνα ένα μέρος της μάζας τους μετατρέπεται σε ενέργεια που απομακρύνεται από το σύστημα ($E_B = \Delta M \times c^2$). Έτσι, το σύστημα που προκύπτει έχει μικρότερη ενέργεια και είναι πιο ευσταθές. Η ενέργεια που ισοδυναμεί με το έλλειμμα μάζας ονομάζεται ***ενέργεια συνδέσεως*** E_B και εκφράζει την ενέργεια που πρέπει να προσφέρομε στον πυρήνα, για να απομακρύνομε τα νουκλεόνιά του σε αποστάσεις τέτοιες, που να μην αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Διαιρώντας την ενέργεια συνδέσεως ενός πυρήνα με το πλήθος των νουκλεονίων του, προκύπτει το μέγεθος ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο (E_B/A), που αποτελεί μέτρο της σταθερότητας του πυρήνα. Οι περισσότεροι πυρήνες έχουν ενέργεια συνδέσεως με τιμές από 7 MeV/νουκλεόνιο έως 9 MeV/νουκλεόνιο. Οι πυρήνες με τις μεγαλύτερες

τιμές της ενέργειας συνδέσεως ανά νουκλεόνιο είναι σταθερότεροι πυρήνες (σχ. 17.3.2).



Σχ. 17.3.2

Η ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο των πυρήνων σε συνάρτηση με το μαζικό αριθμό.

Παρατηρήσεις.

1) Στην ατομική και πυρηνική φυσική, για τη μέτρηση των μαζών των σωματιδίων η μονάδα μάζας (1 kg) που χρησιμοποιείται στο SI είναι πολύ μεγάλη και δεν είναι πολύ εύχρηστη. Για τον λόγο αυτό, συνηθίζομε να μετράμε τις μάζες των ατόμων, των πυρήνων και των σωματιδίων σε ατομικές μονάδες μάζας (amu), που συμβολίζεται και με το (u). ***Η ατομική μονάδα μάζας ορίζεται ως το 1/12 της μάζας του ουδέτερου ατόμου του ισοτόπου*** $^{12}_6$**C** ***(άνθρακα 12) στη θεμελιώδη του κατάσταση.*** Η σχέση της ατομικής μονάδας μάζας amu με το kg είναι:

$$1\ \text{amu} = 1\ \text{u} = 1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$ ή διαφορετικά $$1\ \text{kg} = 6 \times 10^{26}\ \text{u}.$$

Σύμφωνα με την αρχή ισοδυναμίας μάζας-ενέργειας $E = mc^2$, 1 u ισοδυναμεί με ενέργεια 931,48 MeV ή με $14{,}92 \times 10^{-11}$ J.

2) Οι πυρήνες με μαζικό αριθμό από 56 έως 60 έχουν τη μέγιστη ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο και είναι οι σταθερότεροι πυρήνες. Οι πυρήνες με πολύ μεγάλους μαζικούς αριθμούς δεν είναι σταθεροί και εύκολα διασπώνται με ***σχάση*** σε πυρήνες μικρότερου μαζικού αριθμού, π.χ. η σχάση του ουρανίου $^{236}_{92}$U σε στρόντιο $^{92}_{38}$Sr και βάριο $^{141}_{56}$Ba.

Οι πυρήνες με πολύ μικρούς μαζικούς αριθμούς μπορούν κάτω από ορισμένες συνθήκες να ενώνονται με ***σύντηξη*** προς πυρήνες μεγαλυτέρου μαζικού αριθμού, π.χ. 4 πυρήνες υδρογόνου ($^1_1$H) με σύντηξη δίνουν ένα σταθερό πυρήνα ηλίου $^4_2$He.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί η ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο για το ισότοπο του $^{238}_{92}$U, αν γνωρίζετε ότι η πυρηνική μάζα του ουρανίου 238 είναι $M_\pi = 238{,}000\,272$ u και $m_p = 1{,}007\,276$ u $m_n = 1{,}008\,665$ u.

Λύση

Για να υπολογιστεί η ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο (E_B/A), υπολογίζομε αρχικά το έλλειμμα μάζας του πυρήνα:

$\Delta M = Zm_p + \text{N}m_n - M_\pi$.

$\Delta M = 92 \times 1{,}00\,727$ u $+ 146 \times 1{,}008\,665$ u $- 238{,}000\,272$ u.

$\Delta M = 92{,}669\,392$ u $+ 146{,}265\,09$ u $- 238{,}000\,272$ u $\Delta M = 1{,}934\,21$ u.

Άρα για την ενέργεια συνδέσεως έχομε:

$$E_\text{B} = 1{,}934\,21 \times 931{,}48\ \text{MeV} = 1801{,}678\ \text{MeV}$$

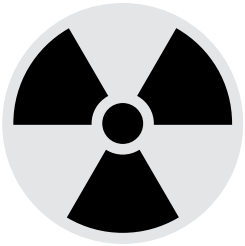
και διαιρώντας με τον αριθμό νουκλεονίων υπολογίζομε την ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο:

$$\left(\frac{\text{E}_\text{B}}{\text{A}}\right) = \frac{1801{,}678\text{MeV}}{238} = 7{,}57\text{MeV}.$$

17.4 Ραδιενέργεια α, β, γ.

Η πυρηνική ασταθεία είναι πολύ σημαντικό φαινόμενο. Κάθε διάσπαση ενός ασταθούς πυρήνα συνοδεύεται από έκλυση σημαντικής ποσότητας ενέργειας με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και κινητικής ενέργειας σωματιδίων. Η ενέργεια αυτή που απελευθερώνεται απ' τις πυρηνικές μεταβολές ονομάζεται ***ραδιενέργεια***. Στο σχήμα 17.4.1 παρουσιάζεται το διεθνές σύμβολο της ραδιενέργειας.

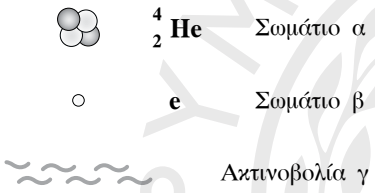
Η ραδιενέργεια ανακαλύφθηκε από τον Henry Becquerel το 1895, ο οποίος διαπίστωσε ότι το ορυκτό ουράνιο εξέπεμπε μια άγνωστη μέχρι τότε ακτι-



Σχ. 17.4.1
Το σύμβολο της ραδιενέργειας τοποθετείται σε κάθε περιοχή, στην οποία υπάρχουν ραδιενεργές ακτινοβολίες ή ραδιενεργά υλικά.

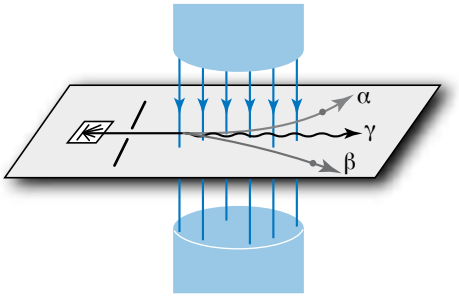
νοβολία, αρκετά ισχυρή. Σημαντικές έρευνες για το παραπάνω φαινόμενο έγιναν στη συνέχεια από τον Πιερ και τη Μαρία Κιουρί, που ανακάλυψαν άλλα δύο ραδιενεργά στοιχεία, το ράδιο και το πολώνιο. Για τις μελέτες τους τις σχετικές με τη ραδιενέργεια τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1903.

Από τις πρώτες μελέτες που έγιναν ανακαλύφθηκε ότι μπορούμε να διακρίνομε κυρίως τρεις τύπους ραδιενέργειας, που ονομαστήκαν αντίστοιχα, ***ακτίνες α***, ***β*** και ***γ*** (σχ. 17.4.2).



Σχ. 17.4.2
Σωμάτιο α, σωμάτιο β και ακτινοβολία γ.

Ο διαχωρισμός τους είναι σχετικά εύκολος και μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση ισχυρού ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου, διότι η ακτίνες α και οι ακτίνες β είναι σωματίδια που φέρουν φορτίο αντίθετου προσήμου, άρα κατά τη διέλευσή τους από ένα μαγνητικό πεδίο εκτρέπονται διαφορετικά, ενώ οι ακτίνες γ είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, οπότε δεν εκτρέπεται από το πεδίο (σχ. 17.4.3).

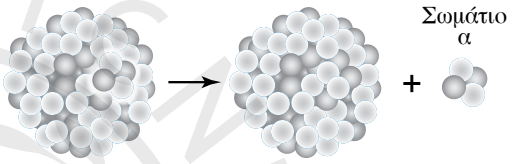


Σχ. 17.4.3
Οι ακτινοβολίες α, β, γ, διαχωρίζονται εύκολα με τη χρήση μαγνητικού πεδίου.

17.4.1 Ραδιενέργεια τύπου α.

Ένας τρόπος απελευθερώσεως πυρηνικής ενέργειας είναι η εκπομπή σωματιδίων α από τους ασταθείς πυρήνες. Το σωμάτιο α αποτελείται από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια, δηλαδή είναι ένας πυρήνας ηλίου $^4_2$He.

Μπορούμε να περιγράψομε τη διάσπαση α με την παρακάτω εξίσωση $^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^4_2\mathrm{He}$, στην οποία διαπιστώνομε διάσπαση του ασταθούς πυρήνα ^A_ZX, τον οποίο ονομάζομε ***μητρικό***. Από τη διάσπαση προκύπτει ο νέος πυρήνας ($^{A-4}_{Z-2}$Y) και το σωμάτιο α ($^4_2$He) (σχ. 17.4.4). Ο νέος πυρήνας λέγεται ***θυγατρικός πυρήνας*** ($^{A-4}_{Z-2}$Y), είναι σταθερότερος από το μητρικό, μπορεί όμως να είναι και αυτός ραδιενεργός.



Σχ. 17.4.4
Διάσπαση α.

Στη διάσπαση α ισχύει η αρχή διατηρήσεως του φορτίου, και η αρχή διατηρήσεως του αριθμού νουκλεονίων. Δηλαδή ο αριθμός των πρωτονίων στο δεξί μέλος της εξισώσεως είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων στο αριστερό μέρος της εξισώσεως και το ίδιο συμβαίνει με το άθροισμα πρωτονίων και νετρονίων στα δύο μέλη της εξισώσεως. Η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά τη διάσπαση α προέρχεται απ' τη διαφορά των μαζών ανάμεσα στον μητρικό πυρήνα και το άθροισμα μάζας, του σωματίου α και του θυγατρικού πυρήνα.

Παράδειγμα διασπάσεως α αποτελεί η ραδιενεργός διάσπαση του ουρανίου ($^{235}_{92}$U) σε σωμάτιο α, ($^4_2$He) και θόριο ($^{234}_{90}$Th).

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^4_2\mathrm{He}$$

Τα σωμάτια α είναι φορτισμένα και δέχονται δυνάμεις από ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία, οπότε αλληλεπιδρούν πολύ με την ύλη, με αποτέλεσμα να χάνουν σχετικά εύκολα την ενέργειά τους κατά τη διέλευσή τους απ' αυτήν. Η διεισδυτική τους ικανότητα είναι πολύ μικρή και μπορούν να σταματήσουν ακόμα και σ' ένα απλό φύλλο χαρτί.

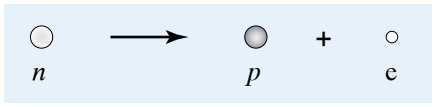
17.4.2 Ραδιενέργεια τύπου β.

Είναι η ενέργεια που εκπέμπεται στη διάσπαση

β, δηλαδή το φαινόμενο κατά το οποίο εκπέμπεται από τον πυρήνα ένα ηλεκτρόνιο (β^-) ή ένα ποζιτρόνιο (β^+). Η εκπομπή σωματίου β^- οφείλεται στον μετασχηματισμό ενός νετρονίου n του πυρήνα σ' ένα πρωτόνιο p, ένα ηλεκτρόνιο e και ένα αντινετρίνο $\bar{\nu}_e$ (σχ. 17.4.5).

$$^1_1\mathrm{n} \rightarrow {}^0_1\mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$$

Δηλαδή, ένα νετρόνιο μετατρέπεται σε πρωτόνιο και εκπέμπει ένα σωματίδιο β^-.



Σχ. 17.4.5
Διάσπαση β. Ένα νετρόνιο μετατρέπεται σε πρωτόνιο και εκπέμπει ένα σωματίδιο β^-.

Κατά τη διάσπαση β, ο θυγατρικός πυρήνας που προκύπτει έχει σε σχέση με το μητρικό:

1) Ατομικό αριθμό Z μεγαλύτερο κατά 1, δηλαδή έχομε μεταστοιχείωση.

2) Αριθμό νετρονίων μικρότερο κατά 1, αλλά ο συνολικός αριθμός των νουκλεονίων διατηρείται κατά τη μεταστοιχείωση.

Παράδειγμα ραδιενεργής διασπάσεως τύπου β αποτελεί η μεταστοιχείωση του άνθρακα 14 ($^{14}_6\mathrm{C}$), και σε άζωτο ($^{14}_7\mathrm{N}$), όπως περιγράφει η εξίσωση:

$$^{14}_6\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_7\mathrm{N} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$$

Επίσης, παράδειγμα αποτελεί και η διάσπαση του ραδιενεργού ισότοπου του κοβαλτίου 60 ($^{60}_{27}\mathrm{Co}$) σε νικέλιο ($^{60}_{28}\mathrm{Ni}$) με ταυτόχρονη εκπομπή ακτινοβολίας β (e^-) $^{60}_{27}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$.

Τα σωμάτια β, (ηλεκτρόνια e^- ή ποζιτρόνια e^+) φέρουν φορτίο και επομένως αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά με την ύλη, με αποτέλεσμα να περιορίζεται η διεισδυτική τους ικανότητα. Τα σωμάτια β μπορούν να διαπεράσουν φύλλα αλουμινίου πάχους μερικών εκατοστών και να σταματήσουν από φύλλα μολύβδου με πάχος μικρότερο του εκατοστού.

17.4.3 Ραδιενέργεια τύπου γ.

Ο θυγατρικός πυρήνας που προκύπτει από μία διάσπαση α ή μία διάσπαση β βρίσκεται συχνά σε διεγερμένη κατάσταση. Στη συνέχεια, μεταπίπτει από τη διεγερμένη κατάσταση στη θεμελιώδη εκπέμποντας ένα η περισσότερα φωτόνια. Τα φωτόνια που εκπέμπονται απ' τις αποδιεγέρσεις των πυρήνων, έχουν πολύ υψηλές ενέργειες και αποτελούν την ακτινοβολία γ.

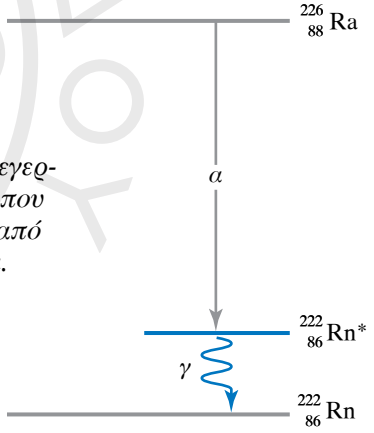
Να παρατηρήσομε εδώ ότι κατά την εκπομπή ακτινοβολίας γ δεν έχομε μεταστοιχείωση, δηλαδή δεν μεταβάλλεται ούτε ο ατομικός αριθμός Z, ούτε ο μαζικός αριθμός A του πυρήνα. Τα φωτόνια δεν φέρουν φορτίο και για τον λόγο αυτό, αν ακτινοβολία γ διέλθει από μαγνητικό ή ηλεκτρικό πεδίο, δεν εκτρέπεται.

Παράδειγμα αποδιεγέρσεως πυρήνα που εκπέμπει ακτίνες γ αποτελεί το διεγερμένο ραδόνιο $^{222}_{86}\mathrm{Rn}^*$, που προκύπτει απ' τη διάσπαση α του ραδίου $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ (σχ. 17.4.6).

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn}^* + {}^4_2\mathrm{He}$$

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn}^* \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + \gamma$$

Η ακτινοβολία γ είναι πολύ διεισδυτική. Είναι ικανή να περάσει αρκετά εκατοστά μολύβδου πριν απορροφηθεί. Τα φωτόνια των ακτίνων γ, όταν διέρχονται από την ύλη, είτε μένουν ανεπηρέαστα, είτε απορροφώνται εξ ολοκλήρου από τα υλικά.



Σχ. 17.4.6
Αποδιέγερση διεγερμένου πυρήνα που έχει προέλθει από διάσπαση α.

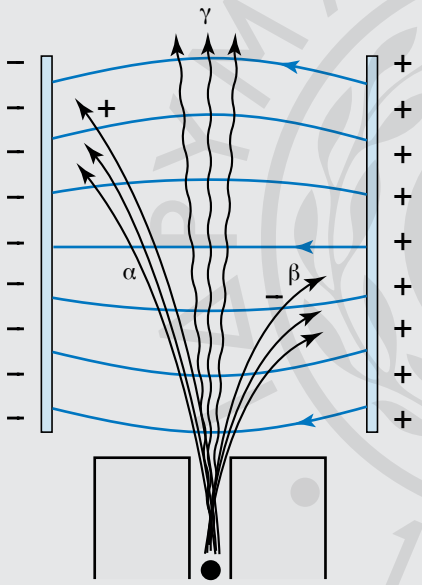
Παρατηρήσεις.

1) Μπορούμε συνοπτικά να παραθέσομε τα βασικά χαρακτηριστικά των τριών τύπων ακτινοβολίας στον πίνακα 17.4.

2) Όταν έχομε ραδιενεργή δέσμη που εμπεριέχει και τους τρεις τύπους ακτινοβολίας, μπορούμε να επιτύχομε διαχωρισμό των ακτίνων α, β, γ, με τη χρήση ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου, αξιοποιώντας τις διαφορές που έχουν στο φορτίο. Λόγω διαφορετικού φορτίου και μάζας, έχομε διαφορετικές εκτροπές ως προς την κατεύθυνση, αλλά και τη γωνία εκτροπής (σχ. 17.4.3, 17.4.7).

Πίνακας 17.4
Ιδιότητες των ακτινοβολιών α, β, γ.

	Ραδι-ενέργεια τύπου α	***Ραδι-ενέργεια τύπου β***	***Ραδι-ενέργεια τύπου γ***
Φύση	Πυρήνες $^4_2\mathrm{He}$	Ηλεκτρό-νια e	Φωτόνια
Φορτίο	+2	–1	0
Σχετική μάζα	4	1/1836	0
Διεισδυ-τικότητα	Μικρή	Μέτρια	Μεγάλη
Προστασία	Εύκολη	Δύσκολη	Πολύ δύσκολη



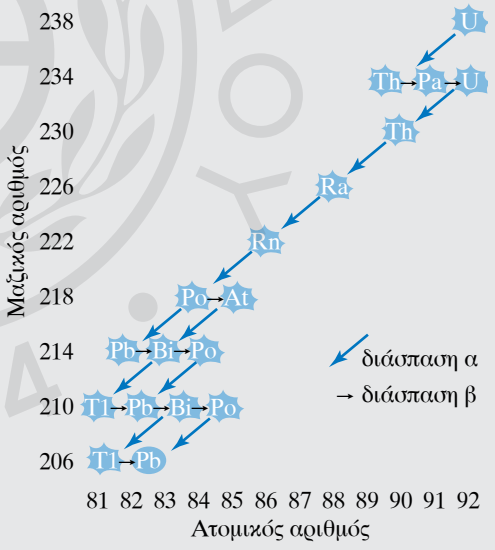
Σχ. 17.4.7
Εκτροπή ραδιενεργών ακτινοβολιών από ηλεκτρικό πεδίο.

3) Στη φύση, αρκετά ισότοπα στοιχείων είναι ραδιενεργά και διασπώνται, διαμορφώνοντας ένα επίπεδο φυσικής ραδιενέργειας που μπορεί να παρουσιάζει μικρές ή και μεγάλες διαφορές από τόπο σε τόπο, ανάλογα με τους γεωλογικούς σχηματισμούς της περιοχής.

4) Εκτός από τα φυσικά ραδιοϊσότοπα, έχουμε τη δυνατότητα να παρασκευάζομε και τεχνητά, βομβαρδίζοντας σταθερούς πυρήνες με βραδέα νετρόνια. Κατά τον βομβαρδισμό, ο πυρήνας συλλαμβάνει ένα νετρόνιο και γίνεται ασταθής, ώστε να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα εκεί όπου υπάρχει ανάγκη. Για παράδειγμα αυτό συμβαίνει στην παραγωγή κοβαλτίου 60, που χρησιμοποιείται για την καταπολέμηση κακοήθων όγκων.

$$^{59}_{27}\mathrm{Co} + ^1_0\mathrm{n} \rightarrow ^{60}_{27}\mathrm{Co} + \gamma$$
$$^{60}_{27}\mathrm{Co} \rightarrow ^{60}_{28}\mathrm{Ni} + ^0_{-1}\beta + \gamma$$

5) Συχνά συμβαίνει να διασπάται ένας ραδιενεργός πυρήνας και ο θυγατρικός που προκύπτει να είναι και αυτός ραδιενεργός (ασταθής) και να συμβαίνει μια σειρά διαδοχικών διασπάσεων, μέχρι να καταλήξομε σε σταθερό πυρήνα, για παράδειγμα όταν ο ραδιενεργός πυρήνας του ουρανίου 238 διασπάται, ακολουθούν 14 διαδοχικές διασπάσεις που συμπεριλαμβάνουν 8 διασπάσεις α και 6 διασπάσεις β, μέχρι να καταλήξει στο σταθερό μόλυβδο 206 (σχ. 17.4.8).



Σχ. 17.4.8
Σειρά διαδοχικών διασπάσεων του ουρανίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το ραδιενεργό ισότοπο θάλλιο $^{210}_{81}\mathrm{Tl}$ διασπάται με δύο διαδοχικές διασπάσεις β^- και μία διάσπαση α. Να υπολογιστεί ο ατομικός

και μαζικός αριθμός του πυρήνα που προκύπτει. Να γραφούν οι αντίστοιχες πυρηνικές αντιδράσεις.

Λύση

Σε κάθε μία διάσπαση β^-, ο ατομικός αριθμός αυξάνεται κατά 1, και ο μαζικός παραμένει σταθερός. Σε κάθε διάσπαση α, ο ατομικός αριθμός μειώνεται κατά δύο και ο μαζικός κατά τέσσερα. Άρα μετά από δύο διασπάσεις β^- και μία διάσπαση α ο ατομικός αριθμός θα είναι ίδιος και ο μαζικός θα είναι ελαττωμένος κατά τέσσερα. Δηλαδή ο τελικός θυγατρικός πυρήνας είναι ισότοπος του αρχικού ($^{210}_{81}\mathrm{Tl} \rightarrow {}^{206}_{81}\mathrm{Tl}$).

$^{210}_{81}\mathrm{Tl} \rightarrow {}^{210}_{82}\mathrm{Pb} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$, διάσπαση β^-.

$^{210}_{82}\mathrm{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\mathrm{Bi} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$, διάσπαση β^-.

$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{206}_{81}\mathrm{Tl} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$, διάσπαση α.

17.5 Νόμος των ραδιενεργών μετατροπών.

Όταν έχομε μία ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, παρατηρούμε συνεχή εκπομπή ακτινοβολίας λόγω της διασπάσεως των πυρήνων του υλικού. Η διαδικασία διασπάσεως των πυρήνων είναι ένα φαινόμενο που ακολουθεί τους νόμους της Στατιστικής. Ο ρυθμός διασπάσεως είναι χαρακτηριστικός για κάθε ραδιενεργό υλικό. Αν το υλικό δεν βρεθεί κάτω από πολύ ακραίες συνθήκες, ο ρυθμός διασπάσεως παραμένει ανεξάρτητος από τη θερμοκρασία, την πίεση και τη χημική ή τη φυσική κατάσταση μιας ουσίας.

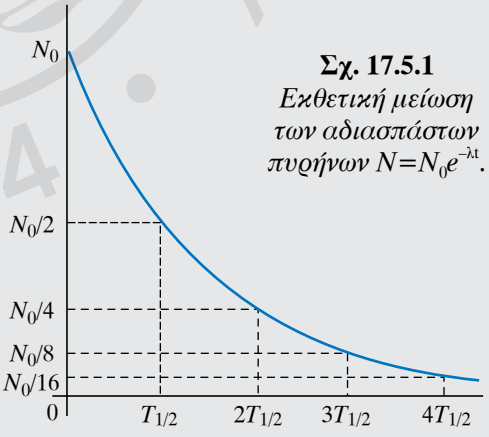
Ας υποθέσομε ότι έχομε ένα ραδιενεργό υλικό, το οποίο τη χρονική στιγμή που αρχίζομε τη μελέτη μας έχει N ραδιενεργούς πυρήνες αδιάσπαστους, στο επόμενο στοιχειώδες χρονικό διάστημα $\mathrm{d}t$ θα έχομε έναν αριθμό διασπάσεων $\mathrm{d}N$ ανάλογο του αρχικού αριθμού N, δηλαδή $\mathrm{d}N = -\lambda N\, \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = -\lambda N$ (νόμος των ραδιενεργών μετατροπών). Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ των αδιασπάστων πυρήνων είναι ανάλογος του πλήθους τους N κάθε χρονική στιγμή. Η σταθερά λ είναι χαρακτηριστική για κάθε ραδιενεργό υλικό. Μεγάλη τιμή της σταθεράς λ σημαίνει μεγάλο ρυθμό διασπάσεως, δηλαδή το ραδιενεργό υλικό διασπάται γρήγορα, ενώ αντίστοιχα τα ραδιενεργά υλικά που διασπώνται αργά έχουν μικρή σταθερά διασπάσεως.

Παρατηρήσεις.

1) Ο ρυθμός διασπάσεως $\left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|$ ενός ραδιενεργού υλικού ονομάζεται ***ενεργότητα*** του υλικού και αναφέρεται σε δεδομένη χρονική στιγμή. Η ενεργότητα ενός δείγματος εξαρτάται απ' το πλήθος των αδιασπάστων πυρήνων και τη φύση του υλικού που αποτελεί το δείγμα. Μονάδα ενεργότητας στο SI είναι το ***1 becquerel*** (Bq) που είναι ίσο με μία διάσπαση ανά δευτερόλεπτο $\left(1\mathrm{Bq} = \frac{1\text{διάσπαση}}{1\mathrm{s}}\right)$.

Επίσης, η ενεργότητα μετρείται σε ***curie (Ci)***, που ισοδυναμεί με $3{,}7 \times 10^{10}$ διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο, δηλαδή $1\ \mathrm{Ci} = 3{,}7 \times 10^{10}\ \mathrm{Bq}$.

2) Λύνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση του ρυθμού των διασπάσεων (νόμος ραδιενεργών μετατροπών) προκύπτει η χρονική εξάρτηση των αδιασπάστων πυρήνων N ενός υλικού, το οποίο, όταν $t = 0$, έχει N_0 αδιάσπαστους πυρήνες. Έχομε $N = N_0 e^{-\lambda t}$, δηλαδή παρατηρούμε ότι οι αδιάσπαστοι πυρήνες ακολουθούν μια εκθετική μείωση με τον χρόνο (σχ. 17.5.1).



Σχ. 17.5.1
Εκθετική μείωση των αδιασπάστων πυρήνων $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

17.5.1 Χρόνος υποδιπλασιασμού και μέσος χρόνος ζωής ραδιενεργού υλικού.

Ένα πολύ χρήσιμο και σημαντικό μέγεθος που σχετίζεται άμεσα με τον ρυθμό διασπάσεων ενός ραδιενεργού υλικού είναι ο χρόνος υποδιπλασια-

σμού ή χρόνος ημιζωής του υλικού.

Χρόνος υποδιπλασιασμού ή ***χρόνος ημιζωής*** είναι ο χρόνος, στον οποίο ο αριθμός των αδιασπάστων ραδιενεργών πυρήνων έχει μειωθεί στο μισό ($N = N_0/2$) του αρχικού αριθμού N_0.

Γνωρίζοντας τη σταθερά λ ενός ραδιενεργού υλικού, μπορούμε να υπολογίσομε τον χρόνο ημιζωής του και αντίστροφα.

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \qquad \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}},$$

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda T_{1/2}}, \quad -\ln 2 = -\lambda T_{1/2} \qquad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda} \text{ όμως } \ln 2 \approx 0{,}693 \text{ άρα και } \lambda \approx \frac{0{,}693}{T_{1/2}}.$$

Ένα άλλο μέγεθος που χαρακτηρίζει τα ραδιενεργά υλικά είναι ο μέσος χρόνος ζωής τ, δηλαδή η κατά μέσον όρο διάρκεια ζωής ενός πυρήνα. Ισούται με το χρονικό διάστημα, μετά την παρέλευση του οποίου ο αρχικός αριθμός των πυρήνων N_0 θα έχει μειωθεί στον αριθμό $N = N_0/e$, που σημαίνει ότι θα έχει διασπαστεί το 63,2% των αρχικών πυρήνων. Ο μέσος χρόνος ζωής τ σχετίζεται με τη σταθερά διασπάσεως λ με τη σχέση:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx \frac{T_{1/2}}{0{,}693}.$$

Παρατηρήσεις.

1) Ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ένα μέτρο της σταθερότητας ενός ραδιενεργού υλικού. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του $T_{1/2}$, τόσο πιο σταθερό είναι το υλικό. Παρατηρώντας τους χρόνους ημιζωής που συναντάμε στην έρευνά μας, διαπιστώνομε πολύ μεγάλες διαφορές. Από τη μία έχομε ραδιενεργούς πυρήνες με μικρούς χρόνους ημιζωής της τάξεως 10^{-3} s ή και πολύ μικρότερους σε διάφορα στοιχειώδη σωματίδια και απ' την άλλη χρόνους ημιζωής της τάξεως 10^{15} χρόνια.

2) Ο χρόνος ημιζωής αποτελεί μια χρήσιμη παράμετρο, με την οποία μπορούμε να υπολογίζομε την ηλικία γεωλογικών δειγμάτων, απολιθωμάτων και οργανικών υπολειμμάτων από οργανισμούς που αναπτύχθηκαν στο παρελθόν.

Η μέθοδος ονομάζεται ***ραδιοχρονολόγηση*** και στηρίζεται στη σύγκριση της ενεργότητας των δειγμάτων, την οποία εμφανίζουν τη στιγμή της αναλύσεως, σε σχέση με την ενεργότητα που έχουν όταν σχηματίζονται. Για τη ραδιοχρονολόγηση των οργανικών δειγμάτων εργαζόμαστε ως εξής: μετράμε την ενεργότητα ανά μονάδα μάζας στα δείγματα που έχομε προσδιορίζοντας το ποσοστό του ραδιενεργού άνθρακα $^{14}_{6}C$, που έχει απομείνει στο υλικό και την αναλογία που έχει διαμορφωθεί ανάμεσα στον άνθρακα $^{14}_{6}C$ και στον άνθρακα $^{12}_{6}C$. Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τον χρόνο ημιζωής του $^{14}_{6}C$, υπολογίζομε το χρονικό διάστημα που πέρασε από τον θάνατο του οργανισμού μέχρι σήμερα. Στο σημείο αυτό, να αναφέρομε ότι ο $^{14}_{6}C$ διασπάται με διάσπαση β σε $^{14}_{7}N$ και έχει χρόνο ημιζωής τα 5730 χρόνια. Σε κάθε ζωντανό οργανισμό η αναλογία μεταξύ του άνθρακα $^{14}_{6}C$ και του άνθρακα $^{12}_{6}C$ παραμένει σταθερή και ίση περίπου με $1{,}3 \times 10^{-12}$, επειδή ο ζωντανός οργανισμός προσλαμβάνει απ' το φυσικό περιβάλλον συνεχώς άνθρακα και αποβάλλει διοξείδιο του άνθρακα. Με τον θάνατό του η διαδικασία αυτή διακόπτεται, οπότε το ποσοστό του άνθρακα $^{14}_{6}C$ μειώνεται λόγω της ραδιενεργούς διασπάσεώς του. Όσον αφορά στη ραδιοχρονολόγηση πετρωμάτων, συνήθως συγκρίνομε τις συγκεντρώσεις κάποιου από τα στοιχεία που έχει αρχικά το πέτρωμα. Για παράδειγμα μπορούμε να συγκρίνομε τα στοιχεία ^{40}K, και ^{40}Ar, γνωρίζοντας ότι το πέτρωμα έχει αρχικά μόνο ^{40}K, όπου διασπάται με χρόνο ημιζωής $1{,}28 \times 10^{9}$ s σε ^{40}Ar.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Διαθέτομε ραδιενεργό δείγμα του ισοτόπου του μολύβδου $^{210}_{82}Pb$ μάζας 1 g. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του είναι $T_{1/2} = 8$ h.

α) Σε πόσες ώρες η ποσότητα του αδιάσπαστου μολύβδου θα είναι 0,25 g;

β) Να υπολογιστεί η ποσότητα που θα παραμείνει μετά από 24 h.

Λύση

1ος τρόπος:

α) Σε χρόνο $t_1 = T_{1/2} = 8\,\text{h}$ θα έχει παραμείνει αδιάσπαστη ποσότητα $m_1 = m_0/2 = 0{,}5\,\text{g}$.

Σε χρόνο $t_2 = 2T_{1/2} = 16\,\text{h}$ θα έχει παραμείνει αδιάσπαστη ποσότητα $m_2 = \dfrac{m_1}{2} = \dfrac{m_0}{4} = 0{,}25\,\text{g}$.

β) Σε χρόνο $t_2 = 3T_{1/2} = 24\,\text{h}$ θα έχει παραμείνει αδιάσπαστη ποσότητα

$$m_2 = \frac{m_2}{2} = \frac{(m_0/4)}{2} = 0{,}125\,\text{g}.$$

2ος τρόπος:

Όπως γνωρίζομε, για μια ποσότητα ουσίας n (σε mol) ισχύει: $n = \dfrac{m}{m_\text{A}} = \dfrac{N}{N_\text{A}}$, όπου m η μάζα της ουσίας, m_A η ατομική μάζα, N ο αριθμός των ατόμων της ουσίας και N_A η σταθερά του Avogadro (το πλήθος των ατόμων ανά mol ουσίας). Άρα $N = N_\text{A}\dfrac{m}{m_\text{A}}$ και αρχικά είχαμε $N_0 = N_\text{A}\dfrac{m_0}{m_\text{A}}$, οπότε από την εξίσωση των αδιασπάστων ραδιενεργών πυρήνων $N = N_0 e^{-\lambda t}$ προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση για τη μάζα του ραδιενεργού υλικού $m = m_0 e^{-\lambda t}$. Επομένως:

$$\text{α)}\ m = m_0 e^{-\lambda t},\quad 0{,}25 = 1e^{-\lambda t},\quad e^{-\lambda t} = 0{,}25,$$

$$e^{-\lambda t} = 1/4,\quad -\lambda t = \ln\cdot 1/4$$

$$t = \frac{-\ln 4}{-\lambda},\ t = \frac{-\ln 2^2}{-(\ln 2/T_{1/2})},\ t = \frac{-2\ln 2}{-(\ln 2/T_{1/2})},$$

$$t = 2T_{1/2},\ t = 2\times 8\text{h},\ t = 16\text{h}$$

$$\text{β)}\ m = m_0 e^{-\lambda t}\ \text{ή (στις κατάλληλες μονάδες)}$$

$$m = 1e^{-\lambda\times 2} \Rightarrow m = e^{-(\ln 2/T_{1/2})\times 24} \Rightarrow m = e^{-\ln 2\times 24/8}$$

$$m = e^{-3\ln 2},\ m = e^{\ln 2^{-3}},$$

$$m = 2^{-3}\text{g},\ m = 1/8\,\text{g},\ m = 0{,}125\,\text{g}.$$

2. Ένα ραδιενεργό ισότοπο έχει αρχικά N_0 ραδιενεργούς πυρήνες. Να υπολογιστεί σε πόσους χρόνους ημιζωής του θα έχει διασπαστεί το 99 % της αρχικής του ποσότητας.

Λύση

Όταν έχει διασπαστεί το 99% της αρχικής του ποσότητας, θα έχει παραμείνει αδιάσπαστο το 1 %. Άρα:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}\ \text{ή}\ \frac{N_0}{100} = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{ή}\ \ \frac{1}{100} = 1e^{-\lambda t}\ \text{ή}\ \ \ln\frac{1}{100} = \ln e^{-\lambda t}\ \text{ή}$$

$$\ln 10^{-2} = -\lambda t\ \text{άρα}\ \ -\lambda t = \ln 10^{-2}\ \text{άρα}$$

$$-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t = \ln 10^{-2}\ \text{ή}\ \ t = \frac{\ln 10^{-2}}{-\ln 2}T_{1/2}\ \text{ή}$$

$$t = \frac{-2\ln 10}{-\ln 2}T_{1/2}\ \text{ή}\ \ t = \frac{2\ln 10}{\ln 2}T_{1/2}\ \text{οπότε}$$

$$t = \frac{2\times 2{,}30}{0{,}693}T_{1/2}\ \text{τελικώς}\ \ t = 6{,}64T_{1/2}.$$

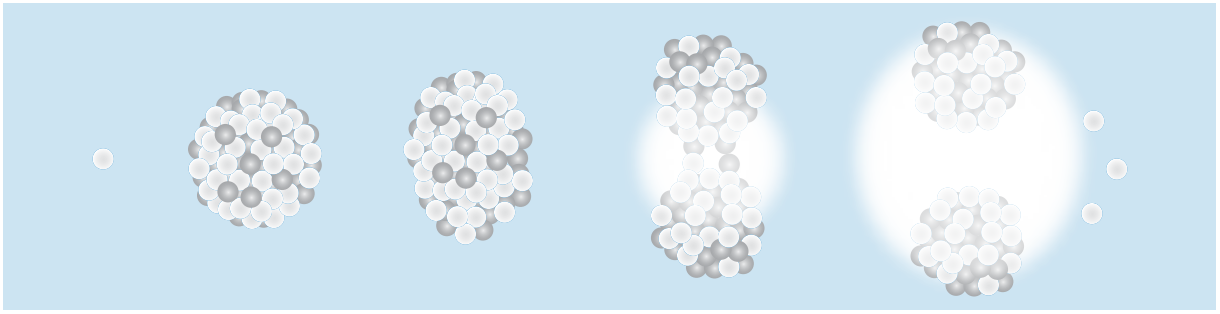
17.5.2 Πυρηνική σχάση και σύντηξη.

Σημαντικά ποσά ραδιενέργειας απελευθερώνονται κατά την πυρηνική σχάση και την πυρηνική σύντηξη.

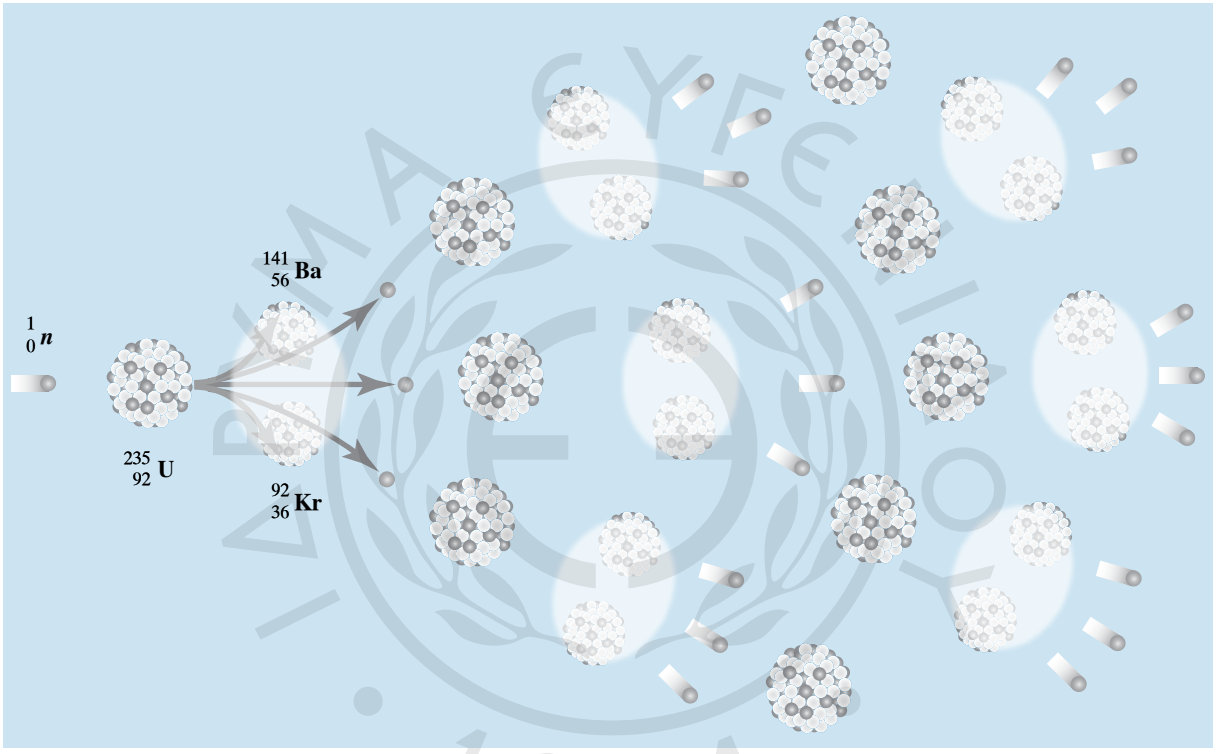
Η πυρηνική σχάση είναι μία διαδικασία, κατά την οποία ένας βαρύς πυρήνας βομβαρδίζεται και απορροφά νετρόνια χαμηλής ενέργειας και στη συνέχεια διασπάται σε μικρότερους πυρήνες απελευθερώνοντας ενέργεια (σχ. 17.5.2). Η ενέργεια που απελευθερώνεται προκύπτει από τη διαφορά μάζας μεταξύ των προϊόντων διασπάσεως και των αρχικών αντιδρώντων. Δηλαδή $E_{\sigma\chi} = (M_{\alpha\nu\tau} - M_{\pi\varrho})\cdot c^2$, όπου $E_{\sigma\chi}$ η ενέργεια που απελευθερώνεται από τη σχάση, $M_{\alpha\nu\tau}$ η μάζα των αντιδρώντων, $M_{\pi\varrho}$ η μάζα των προϊόντων και c η ταχύτητα του φωτός. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η σχάση του ουρανίου ${}^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}\text{n}$ (σχ. 17.5.3).

Η σχάση είναι μια πυρηνική αντίδραση που αυτοσυντηρείται, αν το σχάσιμο υλικό έχει μάζα μεγαλύτερη από μία κρίσιμη τιμή, όποτε έχομε αλυσιδωτή αντίδραση σχάσεως.

Τα νετρόνια που απελευθερώνονται από μία



Σχ. 17.5.2
Πυρηνική σχάση μετά την απορρόφηση νετρονίου.

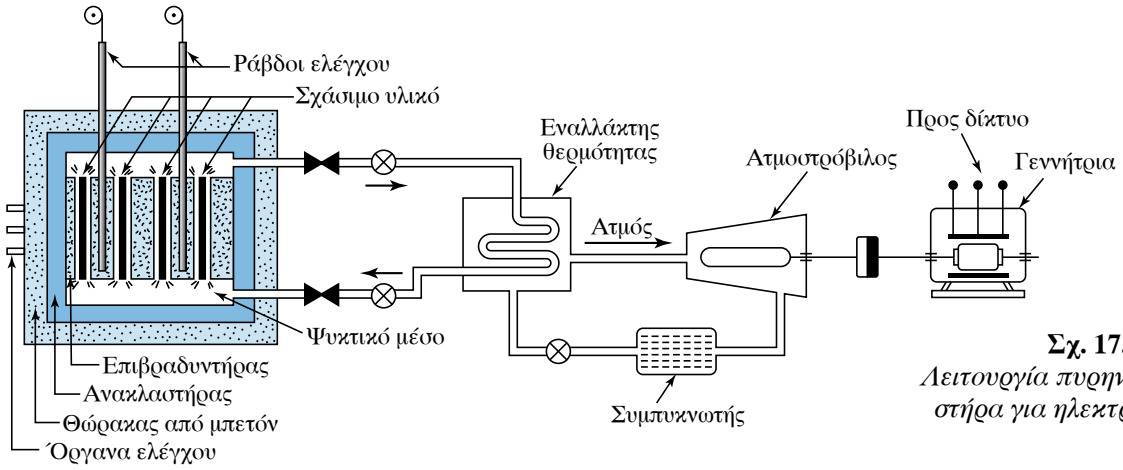


Σχ. 17.5.3
Αλυσιδωτή πυρηνική σχάση.

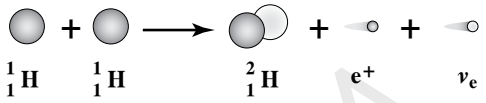
αντίδραση προκαλούν νέες αντιδράσεις. Μια αλυσιδωτή αντίδραση μπορεί να είναι μη ελεγχόμενη και να γίνει εκρηκτική, όπως συμβαίνει στην ατομική βόμβα (σχ. 17.5.3). Είναι επίσης δυνατόν να τη μετατρέψομε σε ελεγχόμενη, παρεμβάλλοντας στη σχάσιμη μάζα υλικά, τα οποία απορροφούν τα νετρόνια που πλεονάζουν και έτσι διατηρούμε σταθερό ρυθμό διασπάσεων στο σχάσιμο υλικό. Ελεγχομένη σχάση είναι αυτή που συμβαίνει στους πυρηνικούς αντιδραστήρες, που μας παρέχουν ενέργεια προς εκμετάλλευση (σχ. 17.5.4). Η παραγωγή ενέργειας με σχάση στους πυρηνικούς αντιδραστήρες εμπεριέχει πάντα σημαντικό κίνδυνο πυρηνικού ατυχήματος με σοβαρές επιπτώσεις για τη ζωή στον πλανήτη. Επίσης, απ' τις αντιδράσεις σχάσεως έχομε πάντα σημαντικά και επικίνδυνα ραδιενεργά απόβλητα.

Αντίθετη διαδικασία απ' τη σχάση, έχομε στην ***πυρηνική σύντηξη***, που είναι διαδικασία συνενώσεως ελαφρών πυρήνων για το σχηματισμό ενός βαρύτερου και σταθερότερου πυρήνα, με ταυτόχρονη απελευθέρωση ενέργειας, που προέρχεται από τη διαφορά μάζας προϊόντων – αντιδρώντων (σχ. 17.5.5, 17.5.6).

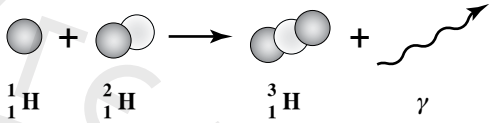
Χαρακτηριστικό παράδειγμα πυρηνικής συντήξεως είναι η αντίδραση που συμβαίνει στον Ήλιο.



Σχ. 17.5.4
Λειτουργία πυρηνικού αντιδραστήρα για ηλεκτροπαραγωγή.



Σχ. 17.5.5
Πυρηνική σύντηξη δύο πυρήνων υδρογόνου (δύο πρωτόνια).



Σχ. 17.5.6
Πυρηνική σύντηξη υδρογόνου και δευτερίου.

Στο εσωτερικό του Ήλιου, υπό την επίδραση υψηλών θερμοκρασιών και πιέσεων, συντήκονται 4 πυρήνες υδρογόνου ^1_1H και παράγουν ήλιο ^4_2He, όπως περιγράφεται στην εξίσωση $4\,^1_1H \rightarrow {}^4_2He + 2e^+ + \gamma + 2\nu_e$. Για να συμβεί σύντηξη μεταξύ πυρήνων, πρέπει να πλησιάσουν αρκετά κοντά, ώστε να υπερνικηθούν οι ηλεκτρικές απωστικές δυνάμεις και να επικρατήσουν οι ισχυρές πυρηνικές. Η διαδικασία αυτή απαιτεί υψηλές ενέργειες της τάξεως 0,7 MeV για τους πυρήνες, άρα και ιδιαίτερα υψηλές θερμοκρασίες της τάξεως εκατομμυρίων βαθμών, όπου τα άτομα έχουν ιονιστεί πλήρως και βρίσκονται σε μια κατάσταση που ονομάζεται ***πλάσμα***.

Για τον λόγο αυτό, η κατασκευή συστημάτων που θα μπορούν να φιλοξενούν αντιδράσεις πυρηνικής συντήξεως είναι σε πειραματικό στάδιο. Αν κατορθώσομε τελικά να παράγομε μαζικά ενέργεια με τη χρήση της πυρηνικής συντήξεως, θα λύσομε το πρόβλημα της ενέργειας στον πλανήτη μας. Η πυρηνική σύντηξη δεν εμφανίζει τους κίνδυνους της πυρηνικής σχάσεως και δεν έχει σημαντική ποσότητα από ραδιενεργά απόβλητα. Η πυρηνική σύντηξη είναι εύκολα ελεγχόμενη και το καύσιμο, που θα είναι το δευτέριο, υπάρχει στο νερό των θαλασσών.

17.6 Απαριθμητής Geiger-Müller και μέτρηση της ραδιενέργειας.

Η ραδιενέργεια είναι ιοντίζουσα ακτινοβολία, δηλαδή προκαλεί ιοντισμό στην ύλη. Όταν σωματίδια υψηλής ενέργειας, όπως σωματίδια α ή β, διέρχονται μέσα από την ύλη, αποσπούν ηλεκτρόνια από τα άτομα που παρεμβάλλονται στην πορεία τους, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ελεύθερα ηλεκτρόνια και θετικά ιόντα. Σ' αυτήν την αλληλεπίδραση οφείλονται οι βλάβες που προκαλεί η ραδιενέργεια στους διάφορους ιστούς. Η ίδια αλληλεπίδραση είναι αυτή που κάνει σχετικά εύκολη την ανίχνευση ραδιενεργών ακτινοβολιών και τη μέτρησή τους. Μερικές απ' τις συσκευές που χρησιμοποιούνται είναι ο θάλαμος νέφους, ο θάλαμος φυσαλίδων, ο θάλαμος σπινθηρισμών για την ανίχνευση και απαριθμητές για τη μέτρηση, όπως ο απαριθμητής σπινθηρισμών και ο πιο διαδεδομένος απαριθμητής (ή μετρητής) Geiger–Muller (σχ. 17.6.1).

Ο μετρητής Geiger-Müller αποτελείται από ένα κεντρικό σύρμα, που βρίσκεται μέσα σε μεταλλικό κύλινδρο. Ο κύλινδρος περιέχει αέριο σε χαμηλή πίεση, ενώ το σύρμα βρίσκεται σε θετικό δυναμικό ως προς τον κύλινδρο (σχ. 17.6.2).

Όταν η ραδιενεργός ακτινοβολία εισέρχεται στον θάλαμο, ιοντίζει άτομα του αερίου απελευθερώνοντας ηλεκτρόνια, τα οποία κινούνται λόγω της διαφοράς δυναμικού προς το θετικό σύρμα, ενώ τα αρνητικά ιόντα κινούνται προς το αρνητικό περίβλημα. Η κίνηση θετικών και αρνητικών φορτίων δημιουργεί έναν ηλεκτρικό παλμό, ο οποίος ενισχύεται

Σχ. 17.6.1
Ο μετρητής Geiger-Müller.

και καταγράφεται απ' τον απαριθμητή που παράγει και αντίστοιχο ηχητικό σήμα.

17.7 Δοσιμετρία, μέτρα ασφαλείας και προφυλάξεις.

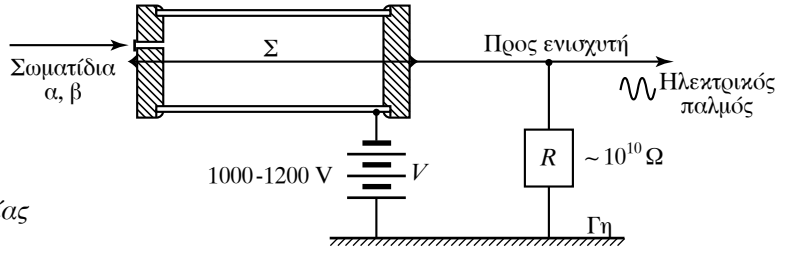
Η ραδιενέργεια υπάρχει στον πλανήτη μας από την πρώτη στιγμή της δημιουργίας του. Κάθε έμβιο πλάσμα, όπως και ο άνθρωπος, είναι προσαρμοσμένο να δέχεται καθημερινά διάφορες ποσότητες ακτινοβολίας, μιας και είναι αναπόσπαστο μέρος του φυσικού περιβάλλοντος που ζει και αναπτύσσεται. Μετά τη ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας και τις πολλές εφαρμογές της ραδιενέργειας στη ζωή μας (ιατρική, τεχνολογία τροφίμων, μηχανολογία, στρατιωτική τεχνολογία), τα ποσά ακτινοβολίας που δέχεται ό άνθρωπος αυξήθηκαν, κι έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη να έχομε μονάδες ραδιενέργειας που να εκφράζουν όχι μόνο το επίπεδο ραδιενέργειας ενός υλικού, αλλά να συνδέονται με την απορρόφηση ακτινοβολίας από έναν οργανισμό και τις βιολογικές επιπτώσεις που προκαλούνται.

Διακρίνομε τις μονάδες ραδιενέργειας σε τρεις ομάδες:

1) Οι μονάδες της ***πρώτης ομάδας*** εκφράζουν τη ραδιενέργεια που εκπέμπει ένα υλικό ή μια πυρηνική διεργασία, με πιο σημαντικές το 1 curie (Ci) και στο SI το 1 becquerel (Bq). Το 1 curie (Ci) αντιστοιχεί στη ραδιενέργεια που απελευθερώνεται από ποσότητα υλικού όπου συμβαίνουν $3{,}7\times10^{10}$ διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο. Είναι πολύ μεγάλη μονάδα και γι' αυτό χρησιμοποιούνται συνήθως τα υποπολλαπλάσιά της $1\text{mCi} = 10^{-3}\text{Ci}$ ή $\mu\text{Ci} = 10^{-6}\text{C}$. Στο SI μονάδα ραδιενέργειας είναι το 1 becquerel (Bq), που αντιστοιχεί σε μία ραδιενεργή διάσπαση ανά δευτερόλεπτο. Είναι προφανές ότι η σχέση που συνδέει τις δύο μονάδες είναι $1\text{ Ci} = 3{,}7\times10^{10}$ Bq.

2) Τη ***δεύτερη ομάδα*** απαρτίζουν οι μονάδες που εκφράζουν την ποσότητα της ακτινοβολίας που απορροφάται από έναν οργανισμό. Η πρώτη μονάδα που χρησιμοποιήθηκε ήταν το 1 rad (radiation absorbed dose), που ισοδυναμεί με την ποσότητα ακτινοβολίας, η οποία μεταφέρει ενέργεια 10^{-2} J ανά kg της μάζας σώματος που την απορροφά. Μια άλλη μονάδα που είναι μονάδα του SI είναι το 1 gray (Gy), που ισοδυναμεί με μεταφερόμενη ενέργεια 1 J ανά kg σώματος που την απορροφά. Η σχέση των δύο μονάδων είναι $1\text{ Gy} = 10^2$ rad.

3) Στην ***τρίτη ομάδα*** συναντάμε τις μονάδες, που έχουν σχέση με τις βιολογικές επιπτώσεις που προκαλεί η απορροφούμενη ακτινοβολία. Η ανάγκη για τη θέσπιση αυτών των μονάδων της τρίτης ομάδας προήλθε από το γεγονός ότι ίδια δόση ακτινοβολίας σε rad προκαλεί βλάβες σ' έναν άνθρωπο ανάλογα με το είδος της. Για παράδειγμα αν πρόκειται για ακτίνες α ή για ακτίνες γ. Η μονάδα που χρησιμοποιούμε είναι το 1 rem (radiation equivalent man) και εκφράζει συγκεκριμένο βιολογικό αποτέλεσμα, που προκαλείται στον άνθρωπο από απορρόφηση ακτινοβολίας. Ισοδυναμεί με το βιολογικό αποτέλεσμα που προκαλείται από ραδιενέργεια 1 rad ακτινών Χ ή γ. Το rem είναι ανεξάρτητο απ' το είδος της



Σχ. 17.6.2
Σχηματική παράσταση λειτουργίας του μετρητή Geiger-Müller.

ραδιενεργούς ακτινοβολίας που απορροφάται από το σώμα. Στο SI μονάδα είναι το sievert (Sv), που σχετίζεται με ανάλογο τρόπο με το Gy.

Οι ακτινοβολίες βλάπτουν τον οργανισμό, γιατί προκαλούν ιοντισμό και διέγερση στα άτομα και έτσι παράγονται ιόντα και ελεύθερες ρίζες, οι οποίες είναι δραστικές σε χημικές μεταβολές. Η δράση τους προκαλεί αλλαγές στο DNA και RNA των κυττάρων ή προκαλεί προβλήματα στη δράση των ενζύμων και αλλαγές στη λειτουργία των κυττάρων. Θα μπορούσαμε να διακρίνομε τα αποτελέσματα της απορροφήσεως ακτινοβολίας από τον άνθρωπο σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία εντάσσομε τις βιολογικές βλάβες, που προκαλούνται στο ίδιο το άτομο που δέχεται την ακτινοβολία, οι οποίες μπορεί να είναι άμεσες ή να εμφανιστούν μετά από πολύ καιρό, και στη δεύτερη κατηγορία να εντάξομε τις γενετικές βλάβες, δηλαδή αυτές που θα παρουσιαστούν στους απογόνους του λήπτη της ραδιενέργειας. Σχετικά με τις απορροφημένες δόσεις ραδιενέργειας, αναφέρομε ότι ραδιενεργές δόσεις του μεγέθους των 25 rem προκαλούν μείωση των λευκών αιμοσφαιρίων. Δόση (25 – 100) rem προκαλεί αιματολογικές αλλοιώσεις και συμπτώματα κοπώσεως ή ναυτίας, ενώ δόση (100 – 200) rem προκαλεί σοβαρή μείωση των λευκών αιμοσφαιρίων, κόπωση και εμετούς. Δόση (200 – 400) rem προκαλεί βλάβες στο μυελό των οστών, στον σπλήνα και για το 50% των ατόμων που εκτέθηκαν θα είναι θανατηφόρα. Δόση πάνω από 600 rem προκαλεί τον θάνατο στο άτομο που την έλαβε. Οι δόσεις ακτινοβολίας μεταξύ 200 rem έως και 700 rem, που είναι εντοπισμένες σε μικρές περιοχές του σώματος προκαλούν μόνο τοπικές βλάβες στα κύτταρα διαφόρων οργάνων. Τα πιο ευαίσθητα όργανα στη ραδιενέργεια είναι τα όργανα αναπαραγωγής, τα μάτια, ο σπλήνας, ο μυελός των οστών.

Ο άνθρωπος δέχεται ακτινοβολία από διάφορες πηγές στη διάρκεια της ζωής του. Οι κυριότερες πηγές είναι το έδαφος, τα κτήρια, οι ακτινογραφίες για ιατρικούς λόγους, το ίδιο το ανθρώπινο σώμα, αλλά και κοσμική ακτινοβολία.

Η μέση ετήσια δόση που προσλαμβάνει ο άνθρωπος εξαρτάται από την περιοχή, το υψόμετρο αλλά και τον τρόπο ζωής του (π.χ. αν ταξιδεύει πολύ συχνά με αεροπλάνα, αν βρίσκεται πολλές ώρες μπροστά σε μια παλιά οθόνη κ.λπ.). Η ακτινοβολία που απορροφά ένας άνθρωπος φαίνεται ότι δρα προσθετικά στη ζωή του.

Έχει υπολογιστεί ότι μια μέση απορρόφηση ακτινοβολίας για έναν σημερινό άνθρωπο είναι περίπου 0,2 rem το χρόνο, ενώ ένα μέσο ανεκτό όριο που τίθεται για όλο το σώμα είναι περίπου 0,5 rem τον χρόνο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Όταν το άτομο του υδρογόνου βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση, ο κύριος κβαντικός αριθμός είναι $n=1$ και η ενέργεια του ατόμου είναι $E_1=-13{,}6$ eV. Να υπολογιστεί η ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση ($n=2$), στη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση ($n=3$) και στην τρίτη διεγερμένη κατάσταση ($n=4$).

2. Ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται σε διεγερμένη κατάσταση με ενέργεια –0,85 eV. Να βρεθεί σε ποια διεγερμένη κατάσταση βρίσκεται το άτομο, αν είναι γνωστό ότι στη θεμελιώδη κατάσταση έχει ενέργεια $E_1=-13{,}6$ eV.

3. Να υπολογιστεί η ενέργεια, που πρέπει να απορροφήσει το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου για να μεταβεί:

α) Από τη θεμελιώδη στάθμη ($n=1$) στην πρώτη διεγερμένη ($nv=2$).

β) Από την πρώτη διεγερμένη στάθμη ($n=2$) στη δεύτερη διεγερμένη στάθμη ($n=3$).

γ) Από τη δεύτερη διεγερμένη στάθμη ($n=3$) στην τρίτη διεγερμένη στάθμη ($n=4$).

4. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι δυνατόν να έχομε διέγερση στο άτομο του υδρογόνου από τη θεμελιώδη ενεργειακή στάθμη $E_1=-13{,}6$ eV και να βρεθούν οι ενεργειακές καταστάσεις, στις οποίες μπορεί να διεγερθεί το άτομο:

α) Με πρόσκρουση σε αυτό ηλεκτρονίου ενέργειας 5,6 eV.

β) Με πρόσκρουση σε αυτό ηλεκτρονίου ενέργειας 12,2 eV.

γ) Όταν βομβαρδιστεί με φωτόνια ενέργειας $hf=5{,}6$ eV.

δ) Όταν βομβαρδιστεί με φωτόνια ενέργειας $hf=12{,}2$ eV.

ε) Όταν βομβαρδιστεί με φωτόνια ενέργειας $hf=12{,}09$ eV.

στ) Όταν βομβαρδιστεί με φωτόνια ενέργειας $hf=10{,}2$ eV.

5. Ένα άτομο υδρογόνου είναι διεγερμένο στη δεύτερη ενεργειακή κατάσταση ($n=3$) και μπορεί να αποδιεγερθεί εκπέμποντας φωτόνια με τους παρακάτω πιθανούς τρόπους:

α) Με απευθείας μετάβαση στη θεμελιώδη στάθμη ($n = 1$).

β) Με μετάβαση αρχικά στη διεγερμένη στάθμη $n=2$ και στη συνέχεια μετάβαση στη θεμελιώδη στάθμη ($n = 1$).

Να υπολογιστούν σε κάθε περίπτωση οι ενέργειες των φωτονίων που εκπέμπονται και να συγκριθεί η ολική ενέργεια του πρώτου τρόπου με την ολική ενέργεια του δεύτερου τρόπου.

6. Πόση ενέργεια πρέπει να έχει ένα φωτόνιο, ώστε να προκαλέσει διέγερση σε ένα άτομο υδρογόνου στην ενεργειακή στάθμη με $n = 3$. Να υπολογιστούν επίσης οι συχνότητες των φωτονίων που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν κατά την αποδιέγερση. Η ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως είναι $E_1 = -13{,}6$ eV. Δίνεται η σταθερά του Plank $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J/S.

7. Να υπολογιστεί η ενέργεια που πρέπει να απορροφήσει ένα άτομο υδρογόνου για να ιονιστεί, αν αρχικά βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση με $E_1 = -13{,}6$ eV

8. Να υπολογιστούν για τα παρακάτω άτομα ο αριθμός των πρωτονίων, των νετρονίων και των ηλεκτρονίων που έχουν τα:

α) ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$, ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$,

β) ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$,

γ) ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$, ${}^{239}_{93}\mathrm{Np}$, ${}^{240}_{93}\mathrm{Np}$.

9. Να υπολογιστεί ο αριθμός των πρωτονίων, των νετρονίων και των ηλεκτρονίων στα παρακάτω άτομα και ιόντα:

${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}$, ${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}^{2+}$, ${}^{39}_{19}\mathrm{K}$, ${}^{39}_{19}\mathrm{K}^{+}$, ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$, ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}^{-}$.

10. Ένας πυρήνας έχει ενέργεια συνδέσεως $E = 5$ MeV. Να υπολογιστεί το έλλειμμα μάζας του. Δίνεται ότι:
$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$,
$c = 3 \times 10^{8}$ m/s,
$1\,\mathrm{u} = 1{,}6055\times10^{-27}$ kg.

11. Να συγκρίνετε τις ενέργειες συνδέσεως ανά νουκλεόνιο για τους ισότοπους πυρήνες του υδρογόνου, ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$. Δίνονται οι ατομικές μάζες:
$m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}007\,865$ u, $m_{{}^{2}_{1}\mathrm{H}} = 2{,}014\,102$ u,
$m_{{}^{3}_{1}\mathrm{H}} = 3{,}016\,049$ u, $m_{\mathrm{e}} = 0{,}000\,549$ u,
$m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\,276$ u, $1\,\mathrm{u} = 931{,}48$ MeV.

12. Ο πυρήνας του στοιχείου ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, μετά από δύο διαδοχικές διασπάσεις α, μεταστοιχειώνεται σε ${}^{216}_{84}\mathrm{Po}$. Να υπολογιστεί ο ατομικός αριθμός Z και ο μαζικός αριθμός A του αρχικού πυρήνα.

13. Να βρεθεί ο ατομικός αριθμός Z και ο μαζικός αριθμός A του πυρήνα που προκύπτει μετά από δύο διαδοχικές διασπάσεις του ραδιενεργού ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Η πρώτη είναι διάσπαση α και η δεύτερη διάσπαση β^-. Να γράψετε τις αντίστοιχες πυρηνικές αντιδράσεις.

14. Να υπολογιστούν οι αδιάσπαστοι πυρήνες ενός τεχνητού ραδιοϊσοτόπου 24 h (ώρες) μετά την παρασκευή του, αν η αρχική του ποσότητα υπολογίζεται σε 2×10^{5} πυρήνες και γνωρίζομε ότι ο χρόνος ημιζωής του είναι 3 h (ώρες).

15. Το ιώδιο 128, ${}^{128}\mathrm{I}$, είναι ένα ραδιοϊσότοπο με διάφορες εφαρμογές στην ιατρική και έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 25 min. Να υπολογιστεί το ραδιενεργό ποσοστό, που έχει παραμείνει σ' έναν ασθενή 5 h μετά την έναρξη της εφαρμογής.

16. Στο εργαστήριο φυσικής από μετρήσεις σε ραδιενεργό δείγμα ραδόνιου ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ πρόεκυψε ότι η ενεργότητά του μειώνεται στο 1/16 της αρχικής τιμής μετά από 364,8 h. Να υπολογιστεί ο χρόνος ημιζωής του ραδονίου.

17. Να υπολογιστεί η σταθερά λ του ραδιενεργού κοβαλτίου, αν γνωρίζετε ότι ο χρόνος ημιζωής του είναι 272 ήμερες.

18. Ένα ραδιενεργό ισότοπο του άνθρακα ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια. Να υπολογίσετε πόσους ραδιενεργούς πυρήνες έχει ένα ραδιενεργό δείγμα τη στιγμή που η ενεργότητά του είναι 2000 Bq. Να βρεθεί η ενεργότητα που θα παρουσιάζει το συγκεκριμένο δείγμα σε 11 460 χρόνια.

19. Με τη συσκευή Geiger-Muller μετράμε ένα ραδιενεργό δείγμα φωσφόρου ${}^{32}_{15}\mathrm{P}$, που έχει χρόνο ημιζωής 15 ημέρες. Η αρχική μέτρηση δίνει 5000 διασπάσεις ανά λεπτό. Να υπολογιστεί η ενεργότητα του δείγματος δύο μήνες μετά την αρχική μέτρηση.

20. Ένα οργανικό δείγμα από μία ανασκαφή ραδιοχρονολογείται με τη μέτρηση του ραδιενεργού άνθρακα 14, ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Το δείγμα καίγεται και παράγεται 1g CO_2, στο οποίο μετράμε 0,0098 διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο. Αν γνωρίζετε ότι η ενεργότητα 1 g ατμοσφαιρικού CO_2 είναι 0,255 Bq ανά γραμμάριο, να υπολογίσετε την ηλικία του δείγματος. Δίνεται ότι ο χρόνος ημιζωής του άνθρακα ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ είναι 5730 χρόνια.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Α

Αγωγός 186
Αδράνεια 43
Αερόστατο 118
Ακτίνα επιβατική 24
Αλεξικέραυνο 176
Αμοιβαία επαγωγή 222
Αμπέρ 9
Αμπερόμετρο 187
Ανάκλαση 283
Ανάκλαση ολική 287
Ανρί (1 H) 223
Αντιηλεκτρεγερτική δύναμη κινητήρα 203
Αντικατοπτρισμός 289
Αντιστάσεις 185
Αντίσταση εσωτερική πηγής 194
Αντιστάσεις παθητικές 90
Αντιστάσεις στο εναλλασσόμενο ρεύμα 234
Αντιστάσεις ωφέλιμες 90
Αντίσταση σωμάτων εντός υγρού 120
Αντίσταση ωμική 184
Αντίσταση χωρητική 236
Άνωση 116
Άνωση δυναμική 122
Απλές μηχανές 90
Απλή αρμονική ταλάντωση 251
Απόλυτο μηδέν 127
Απομονωμένο σύστημα 49
Αριθμός ατομικός 300
Αριθμός μαζικός 300
Αριθμός Reynolds κρίσιμος 120
Αρτεσιανό φρέαρ (πηγάδι) 112
Αρχή ανεξαρτησίας κινήσεων 31
Αρχή Αρχιμήδη 116
Αρχή διατηρήσεως ενέργειας 84
Αρχή διατηρήσεως ηλεκτρικού φορτίου 162
Αρχή διατηρήσεως στροφορμής 69
Αρχή δυνατών έργων 90
Αρχή συγκοινωνούντων δοχείων 111
Αρχή Fermat 284
Αρχή Pascal για ρευστά 105
Ασφάλειες 203
Ατμόσφαιρα (1 atm) 103
Άτομο 296
Ατόμου αποδιέγερση 299
Ατόμου διέγερση 299
Ατόμου ιονισμός 299
Ατμοί κορεσμένοι 157
Ατομική μονάδα μάζας 302
Αυτεπαγωγή 222

Β

Βαρόμετρο μεταλλικό 110
Βαρούλκο 94
Βαρύτητα 3
Βατ (1 W) 86
Βατόμετρο 246
Βατώριο 77
Βεληνεκές 33, 34, 35
Βέμπερ (1Wb) 219, 220
Βεντούζα 104
Βεντουρίμετρο 116
Βήμα κοχλία 95
Βολή οριζόντια 32
Βολή πλάγια 33
Βολτ (1 V) 194
Βολταμπέρ (V x A) 246
Βολτόμετρο 187
Βραχυκύκλωμα 202
Βρόχος 195
Bernoulli απόδειξη 115
Bernoulli εφαρμογές 115

Γ

Γαλόνι 2
Γείωση 174
Γωνία ανακλάσεως 283
Γωνία διαθλαστική 290
Γωνία διατμήσεως 53
Γωνία εκτροπής 290
Γωνία προσπτώσεως 283
Γωνία στρέψεως 53

Δ

Δείκτης διαθλάσεως 285
Διάθλαση 284
Διασκεδασμός 289

Διάστημα 15
Διαστολή γραμμική 133
Διαστολή νερού 134
Διάτμηση 53
Διατοιχισμός 258
Διάχυση 283
Διεγέρτης 255
Διεθνές σύστημα μονάδων 1, 8
Διηλεκτρική αντοχή διηλεκτρικού 192
Διηλεκτρική αντοχή μονωτή 191
Διηλεκτρική σταθερά 163, 191
Δοκιμαστικό σφαιρίδιο 180
Δυνάμεις που ασκεί το υγρό 108, 109
Δύναμη 41
Δύναμη αδράνειας (ή Δύναμη του D' Alembert) 45
Δύναμη διαγείρουσα 255
Δυνάμεις εξ αποστάσεως 41
Δυνάμεις εξ επαφής 41
Δύναμη επαναφοράς 252
Δύναμη ηλεκτρική 160
Δύναμη κεντρομόλος 62
Δύναμη κινητήρια 91
Δύναμη φυγόκεντρος 46, 62
Δύναμη Coriollis 46
Δύναμη Laplace 215
Δυνάμεις διατμητικές 53
Δυνάμεις διατηρητικές 79
Δυνάμεων ανάλυση 42
Δυνάμεων ζεύγος 55
Δυνάμεων πεδίο 83
Δυνάμεων σύνθεση 55, 56
Δυνάμεων συνισταμένη 41
Δυνάμεως συνιστώσες 42
Δυναμική ενέργεια 81
Δυναμικού διαφορά 170
Δυναμικές γραμμές 166, 209
Δυναμό 243

Ε

Ειδικό βάρος 6
Ειδική αντίσταση 186
Είδωλα πραγματικά 284, 292
Είδωλα φανταστικά 284, 292
Εκκρεμές απλό 256
Εκκρεμές φυσικό 257
Ελαστικότητα 52
Ελεύθερη εκτόνωση 142
Εμβαδόν 2
Εμπέδηση 236
Εναλλακτήρας μονοφασικός 242
Εναλλακτήρας τριφασικός 242
Ενέργεια διεγέρσεως 299
Ενέργεια συνδέσεως 301
Εντροπία 152
Εξαεριστήρας πλοίου 115
Εξάτμιση 156
Εξάχνωση 156
Επαγωγέας 241
Επαγώγιμο 241
Επιτάχυνση 17
Επιτάχυνση βαρυτική 4
Επιτάχυνση γωνιακή 26
Επιτάχυνση επιτρόχια 18, 26
Επιτάχυνση κεντρομόλος 18
Επιτάχυνση μέση 17
Επιτάχυνση στιγμιαία 17
Εργάτης 95
Έργο δυνάμεως 76, 77, 78
Έργο ελατηρίου 78
Έργο κατά τη στροφική κίνηση 88
Έργο κινητήριο και ανθιστάμενο 83
Έργο τριβής 78
Εστιακή απόσταση 292
Εσωτερική ενέργεια 136
Έτος φωτός 1
Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση 20
Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση 18, 19
Εφελκυσμός 52

Η

Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) πηγής 194
Ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή 222
Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια 168
Ηλεκτρική εκκένωση 174
Ηλεκτρική ενέργεια 201
Ηλεκτρική πηγή 193
Ηλεκτρικό ισοδύναμο θερμότητας 202
Ηλεκτρικό πεδίο 164
Ηλεκτρικό ρεύμα 183
Ηλεκτρικό ρεύμα συνεχές 193
Ηλεκτρικό φορτίο 160
Ηλεκτρικός σπινθήρας 174
Ηλεκτρικού ρεύματος συμβατική φορά 193
Ηλεκτροκινητήρας 217
Ηλεκτρομαγνήτης 214
Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή 219
Ηλεκτρονιοβόλτ 77
Ημιαγωγοί 186
Ήχος 272
HP (Αγγλικός ίππος) 86

Θ

Θεμελιώδη φυσικά μεγέθη 8
Θεμελιώδης εξίσωση στροφικής κινήσεως 67, 69
Θεμελιώδης νόμος στροφικής κινήσεως 258
Θεμελιώδης νόμος υδροστατικής 106
Θερμίδα 129
Θερμικές τάσεις 134
Θερμική μηχανή 143
Θερμοκρασία βρασμού 157
Θερμοκρασία Curie 210
Θερμόμετρα 127, 128
Θερμότητα 128
Θερμότητα βρασμού 158
Θερμότητα τήξεως 158
Θερμότητα Joule 202
Θερμότητας δεξαμενή 143
Θερμότητας διάδοση 130, 131, 132
Θερμοχωρητικότητα 129
Θερμοχωρητικότητα γραμμομοριακή 129
Θερμοχωρητικότητα ειδική 128
Θλίψη 52
Θεώρημα έργου – ενέργειας στη στροφική κίνηση 89
Θεώρημα διατηρήσεως ορμής 49
Θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας 152
Θεώρημα μέγιστης ισχύος 204
Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας 80
Θεώρημα ροπών (ή Θεώρημα Varignon) 55
Θεώρημα του κέντρου πολλών παραλλήλων δυνάμεων 57
Θεώρημα ώθησης ορμής 51
Θεώρημα Steiner (ή Θεώρημα παραλλήλων αξόνων) 66
Θεώρημα Torricelli (εκροή υγρού από οπή) 113

Ι

Ιδανικό κάτοπτρο 133
Ιδανικά αέρια 136
Ιδιοσυχνότητα 255
Ιδιοσυχνότητα κυκλική 239
Ιόν 161
Ισοδυναμική επιφάνεια 172
Ισορροπία στερεού 59
Ισορροπίας είδη 60
Ισχύς 86
Ισχύς άεργος (ή αβαττική) 246
Ισχύς εναλλασσομένου ρεύματος 231
Ισχύς κύματος 275
Ισχύς πραγματική 246
Ισχύς ροπής δυνάμεως 89
Ισχύς μέση 234
Ισχύς φαινόμενη 246
Ισχύος τρίγωνο 247

Κ

Καμπύλη τήξεως 155
Κανονικές συνθήκες 155
Κανόνας Lenz 221
Καντήλα 9
Κατανομή Maxwell – Boltzmann 149
Καταστατική εξίσωση 135
Κατώφλι ακουστικότητας 275
Κβαντωμένο μέγεθος 162
Κεκλιμένο επίπεδο 91
Κέλβιν 9
Κέντρο ανώσεως 116
Κέντρο βάρους 57, 58, 59
Κέντρο μάζας 49
Κέντρο παραλλήλων δυνάμεων 57
Κιλοβατώρα (ή κιλοβατώριο) 77
Κίνηση 14
Κίνηση απόλυτη 29
Κίνηση ελικοειδής 32
Κίνηση ιστιοφόρου 123
Κίνηση μεταβαλλόμενη 17
Κίνηση μεταφορική 61
Κίνηση ομαλή κυκλική 23
Κίνηση περιοδική 23
Κίνηση στροφική 61
Κίνηση σχετική 29, 30
Κινήσεως εξίσωση 14
Κινητήρες 86
Κινητήρες μονοφασικοί 247
Κινητήρες τριφασικοί 247
Κινητική ενέργεια 80
Κινητική ενέργεια στερεού σε περιστροφή 88
Κινητική θεωρία 151
Κινήσεως περιστροφικής μετάδοση 27
Κόρος 2
Κλάδος 195
Κλίμακα Celsius 127
Κλίμακα Fahrenheit 127
Κλίμακα Kelvin 127
Κλωβός 247
Κλωβός Faraday 180
Κόμβος 195
Κοχλίας (ή γρύλος) 95
Κυβικό μέτρο 2
Κύκλος Carnot 143, 144
Κύκλωμα δευτερεύον 240
Κύκλωμα πρωτεύον 240
Κύμα 272
Κύριοι κεντρικοί άξονες αδρανείας 65

Λ

Λαμπτήρας πυρακτώσεως 202
Λόγος μετασχηματισμού 241
Λίτρο 2

Μ

Μαγνητικό δίπολο 209
Μαγνητικό πεδίο 209
Μαγνητικό πεδίο ρεύματος 211
Μαγνητική απόκλιση 211
Μαγνητική διαπερατότητα κενού 212
Μαγνητική έγκλιση 211
Μαγνητική επαγωγή 209
Μάζα 3
Μάζα αδρανειακή 5
Μάζας έλλειμμα 301
Μανόμετρα 111
Μέθοδος διπλής αναρτήσεως 58
Μέλαν σώμα 133
Μετατόπιση 15
Μεταβολή αδιαβατική 141
Μεταβολή αντιστρεπτή 138
Μεταβολή ισεντροπική 153
Μεταβολή ισοβαρής 140
Μεταβολή ισόθερμη 139
Μεταβολή ισόχωρη 140
Μεταβολή κυκλική 141
Μετασχηματιστές 240
Μέτρο στρέψεως 54
Μέτρο Young 52
Μετρητής Geiger – Muller 310
Μήκος 1
Μήκος κύματος 273
Μηχανική ενέργεια 84
Μηχανικής ενέργειας μεταβολή 85
Μιλιμπάρ (1 mbar) 103
Μονωτές 186
Μοχλοί 91
Μοχλών είδη 92
Μπαρ (1 bar) 103
Μπουζί 175

Ν

Ναυτικό μίλι 1
Νετρόνια 300
Νιούτον 41
Νουκλεόνια 300
Νουκλίδια 300
Νόμοι αντιστάσεως 120
Νόμοι θερμοδυναμικής 138
Νόμος παγκόσμιας έλξεως 3
Νόμος ραδιενεργών μετατροπών 306
Νόμος συνέχειας 101
Νόμος Bernoulli 114
Νόμος Biot – Savart 212
Νόμος Boyle – Mariotte 135
Νόμος Charles 135
Νόμος Coulomb 162
Νόμος Faraday (ή Νόμος επαγωγής) 220
Νόμος Gauss 168
Νόμος Gay – Lussac 135
Νόμος Hooke 52
Νόμος Kirchhoff 1ος 195
Νόμος Kirchhoff 2ος 196
Νόμος Ohm 184
Νόμος Neumann 222
Νόμος Newton 1ος (ή Αξίωμα της αδράνειας) 42
Νόμος Newton 2ος (ή Θεμελιώδης Νόμος της μηχανικής) 43
Νόμος Newton 3ος (Αξίωμα δράσεως – αντιδράσεως) 44
Νόμος Snell 286
Νόμος Stefan-Boltzmann 133
Νόμος Stokes 120

Ο

Όγκος 2
Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση 27
Ομαλή κυκλική κίνηση 23
Οπλισμοί πυκνωτή 188
Οπτικές ίνες 288
Όριο αναλογίας 53
Όριο αντοχής 52
Όριο ελαστικότητας 52
Ορμή 48

Π

Παραμόρφωση εφελκυσμού 52
Παρασκιά 283
Παροχή 100
Παρσέκ 1
Πασκάλ (1 Pa) 102
Πεδίο ανομοιογενές 168
Πεδίο ομογενές 167
Πεδίο ροής 99
Πείραμα Torricelli 107
Περίοδος 23, 250
Περιοχές Weiss 210
Πηγή πεδίου 164
Πηνίο 213
Πηνίο πρωτεύον 240

Πηνίο δευτερεύον 240
Πηνία αποπνικτικά 236
Πίεση 102
Πίεση απόλυτη 111
Πίεση ατμοσφαιρική 103
Πίεση δυναμική 114
Πίεση μανομετρική 111
Πίεση ολική 114
Πίεση στατική 114
Πίεση υδροστατική 106
Πίεση υψομετρική 114
Πίεσης ατμοσφαιρικής μεταβολή 108
Πίεσης ατμοσφαιρικής μέτρηση 110
Πλάσμα 310
Πλαστική περιοχή 53
Πλωτές δεξαμενές 118
Πολύσπαστο 93
Ποτενσιόμετρο 186
Πρότυπο Rutherford 297
Πρίσματα 290
Πρίσματα ολικής ανακλάσεως 290
Πρωτόνια 300
Πτώση ελεύθερη 22
Πτώση σωμάτων στον αέρα 121
Πτώση τάσεως 194
Πυκνότητα 6
Πυκνότητα επιφανειακή 179
Πυκνότητα ρεύματος 184
Πυκνότητα φορτίου 179
Πυκνωτής 168, 188
Πυκνωτής επίπεδος 188
Πυκνωτής ηλεκτρολυτικός 190
Πυκνωτής μεταβλητός 189
Πυκνωτής πολωμένος 189
Πυκνωτής σφαιρικός 189
Πυκνωτής χάρτου 189
Πυκνωτή φόρτιση / εκφόρτιση 190
Πυκνωτή φορτισμένου ενέργεια 190
Πυρήνα δομή 300
Πυρηνική δύναμη 301
Πυρηνική σύντηξη 308, 309
Πυρηνική σχάση 308
Πυρήνες ατόμων 296
Πυρήνες ισότοποι 300

Ρ

Ραδιενέργεια 302
Ραδιενέργεια τύπου α 303
Ραδιενέργεια τύπου β 303
Ραδιενέργεια τύπου γ 304
Ραδιοχρονολόγηση 307
Ρεύμα ενεργό 229
Ρεύμα επαγωγικό 221
Ρεύμα μονοφασικό 242
Ρεύμα ολικό 198
Ρεύμα συνεχές 193
Ρεύμα τριφασικό 243, 244
Ρεύματα παράλληλα 217
Ρεύματα Foucault 224
Ρευματική γραμμή 99
Ρεύματος γεννήτρια 241
Ρεύματος συμβατική φορά 193
Ρευστά 99
Ροή 99
Ροή ημιμόνιμη 99
Ροή μόνιμη 99
Ροή μαγνητική 218
Ροή τυρβώδης 119
Ροοστάτης 186
Ροπή δυνάμεως 54, 55
Ροπή αδρανείας 64
Ροπή ζεύγους 55
Ροπή κατευθύνουσα 53
Ρυθμιστής Watt 63

Σ

Σημαντικά ψηφία 10
Σημείο δρόσου 159
Σημείο τήξεως ατμοσφαιρικό 156
Σημείο τήξεως μπαρικό 156
Σημείο τριπλό 156
Σίφωνας 104
Σιφώνιο 104
Σκιά αντικειμένου 282
Σταθερά αποσβέσεως 254
Σταθερά επαναφοράς 252
Σταθερά παγκόσμιας έλξεως 3
Σταθερά Plank 281
Σταθερά Stefan-Boltzmann 133
Στάθμη εντάσεως 275
Στάθμες ενεργειακές 297
Στρέψη 53
Στροφορμή 68, 69
Συλλέκτης 241
Σύνθεση κινήσεων 29, 30
Συνδεσμολογία αντιστάσεων 198
Συνδεσμολογία πυκνωτών 192, 193
Συνδεσμολογία πηγών συνεχούς ρεύματος 200, 201
Συσσωρευτής ηλεκτρικής ενέργειας 204
Συσσωρευτής μολύβδου 205
Συσσωρευτή φόρτιση / εκφόρτιση 205, 206
Συστήματα αδρανειακά 43, 45
Συστήματα μη αδρανειακά 45
Συστήματα μονάδων 7

Συχνότητα 24, 250
Συνισταμένη 41
Συντελεστής αποδόσεως μηχανής 87
Συντελεστής αποδόσεως μετασχηματιστή 241
Συντελεστής αποσβέσεως 254
Συντελεστής αυτεπαγωγής αγωγού 223
Συντελεστής ισχύος 246
Συντελεστής στατικής τριβής 47
Σύγκρουση πλοίων 116
Συντηρητικές δυνάμεις 83
Συντονισμός 239
Σφάλμα τυχαίο 9
Σφάλμα συστηματικό 9
Σφόνδυλος 67
Σχέση μεταδόσεως 28
Σχετική διαπερατότητα υλικού 215
Σχετική διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού 191
Sonar 277

Τ

Ταλαντώσεις 250
Τάση ατμών 157
Τάση ενεργός 229
Τάση εφελκυσμού 52
Τάση ολική 198
Τάση πολική 194, 244
Τάση φασική 244
Ταχύτητα αρχική 20
Ταχύτητα γραμμική 26
Ταχύτητα γωνιακή 25
Ταχύτητα εξόδου 178
Ταχύτητα μέση 16
Ταχύτητα στιγμιαία 16
Τετραγωνικό μέτρο 2
Τζουλ 8, 77
Τορ (1 Torr) 103
Τριβή 46
Τριβή ολισθήσεως (ή κινητική τριβή) 46
Τριβή οριακή στατική 46
Τριβή στατική 46, 47
Τριβή υγρών εσωτερική 119
Τροχιά 14
Τροχιά κυκλοειδής 32
Τροχιά παραβολική 32
Τροχαλία 92
Τροχαλία ελεύθερη (ή τρελή) 92
Τροχαλία μεικτή 93
Τροχαλία παγία (ή σταθερή) 92
Tesla 218

Υ

Υγρασία απόλυτη 158
Υγρασία σχετική 159
Υγροδείκτης – υδροδείκτης 112
Υγρόμετρα 159
Υδραυλικό πιεστήριο 105
Υδροστατική πίεση 106
Υδροστατικό παράδοξο 109
Υλικό αδιαφανές 282
Υλικό διαφανές 282
Υλικό ημιδιαφανές 282
Υπέρηχοι 276
Υπόηχοι 276
Υπομόχλιο 91
Ύψος μέγιστο 34

Φ

Φαινόμενο ηλεκτρικό 160
Φαινόμενο Corona 180
Φαινόμενο Doppler 277
Φαινόμενο Joule 202
Φαινόμενο Magnus 122, 123
Φαινόμενη ανύψωση 289
Φαράντ (1 F) 188
Φυγοκεντρικός διαχωριστήρας 64
Φακοί 291
Φακοί αποκλίνοντες 291
Φακοί λεπτοί 290
Φακοί συγκλίνοντες 291
Φακού μεγέθυνση 293
Φλέβα 100
Φορτίο πυκνωτή 188
Φωτεινή ακτίνα 282
Φωτόνιο 281
Φωτός δέσμη 282
Φωτός διάδοση 281
Φως Διοσκούρων 174

Χ

Χιλιόγραμμο 3
Χιλιοστό υδραργύρου 103
Χρόνος καθόδου 34
Χρόνος υποδιπλασιασμού 307
Χρυσός κανόνας μηχανικής 91
Χωρητικότητα αγωγού 187

Ψ

Ψυκτικές μηχανές 145

Ω

Ώθηση δυνάμεως 51
Ώθηση ροπής 89

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Einstein A., Infeld L., «Η εξέλιξη των ιδεών στη φυσική», μετφ. Ευτύχης Μπιτσάκης, Εκδόσεις Δωδώνη, 1978.

Haber – Schaim U, Dodge J., Walter J., «P.S.S.C. Φυσική», 6η έκδοση, μετφ. Θανάσης Κωστίκας, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1995.

Haber – Schaim U., Dodge J., Walter J., «P.S.S.C. Φυσική. Εργαστηριακός οδηγός», μετφ. Θανάσης Κωστίκας, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1992.

Halliday D., Resnic R., «Ασκήσεις Φυσικής», Μέρος Α′ και Β′, μετφ. Γ. Πνευματικός, Γ. Πεπονίδης, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού, 2009.

Halliday D., Resnic R., «Φυσική», Μέρος Α′ και Β′, μετφ. Γ. Πνευματικός, Γ. Πεπονίδης, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού, 1976.

Serway R. A., Moses C. J., Moyer C.A., «Σύγχρονη Φυσική», μετφ. Ζουπάνου Γ., Λιαροκάπη Ε., Παπαδόπουλου Σ., Ράπτη Κ., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

Serway R. A., «Physics for scientists and engineers», Τόμοι 1 – 4, μετφ. Λ. Ρεσβάνης, Εκδόσεις Λ. Ρεσβάνη, 1990.

Young D. H., «Πανεπιστημιακή Φυσική», Τόμοι 1 και 2, μετφ. Ε. Αναστασάκης, Σ. Δ. Π. Βλασσόπουλος, Ε. Δρης, Η. Σ. Ζουμπούλης, Η. Κ. Κατσούφης, Γ. Κουρούκλης, Ε. Μάνεσης, Κ. Ε. Παρασκευαΐδης, Μ. Πιλάνιας, Κ. Χριστοδουλίδης, Εκδόσεις Παπαζήση, 1994.

Αλεξάκη Ν., Αμπατζή Σ., Γκουγκούση Γ., Κουντούρη Β., Μοσχοβίτη Ν., Οβαδία Σ., Πετρόχειλου Κ., Σαμπράκου Μ., Ψαλίδα Α., «Φυσική Β′ Λυκείου» Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β..

Αλεξόπουλου Κ. Δ., «Γενική Φυσική ΙΙΙ. Ατομική και πυρηνική φυσική», Εκδόσεις Ολυμπία, 1995.

Αλεξόπουλου Κ. Δ., «Γενική Φυσική V. Οπτική», Εκδόσεις Ολυμπία, 1992.

Αλεξόπουλου Κ. Δ., Διονυσίου Ι. Μαρίνου, «Ασκήσεις Φυσικής Α′. Μηχανική, Ακουστική, Θερμότητα», Εκδόσεις Ολυμπία, 1990.

Αλεξόπουλου Κ. Δ., Διονυσίου Ι. Μαρίνου, «Ασκήσεις φυσικής Β′. Οπτική - Ηλεκτρομαγνητισμός. Ατομική και πυρηνική φυσική.», Εκδόσεις Ολυμπία, 1990.

Αλεξόπουλου Κ. Δ., Διονυσίου Ι. Μαρίνου, «Γενική Φυσική ΙΙ. Ηλεκτρισμός», Εκδόσεις Ολυμπία, 1993.

Αλεξόπουλου Κ. Δ., Διονυσίου Ι. Μαρίνου, «Φυσική Ι. Μηχανική, Ακουστική, Θερμότητα», Εκδόσεις Ολυμπία, 1992.

Αντωνίου Ν., Δημητριάδη Π., Καμπούρη Κ., Παπαμιχάλη Κ., Παπατσίμπα Λ., Χατζητσομπάνη Θ,. «Φυσική Γ′ Γυμνασίου», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2007.

Βασιλακόπουλου Σ., «Εφαρμοσμένη ηλεκτρολογία. Ηλεκτρικά όργανα μετρήσεως», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1981.

Βλάχου Ι., Ζάχου Κ., Κόκκοτα Π., Τιμοθέου Γ., «Φυσική Γ′ Λυκείου», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 1995.

Βλάχου Ι., Κόκκοτα Π., Γραμματικάκη Ι., Περιστερόπολου Π., Καραπαναγιώτη Β., Τιμοθέου Γ., «Φυσική γενικής παιδείας Α′ Λυκείου», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2007.

Βολάνη Π. Α., «Φυσική για τις δέσμες Ι και ΙΙ», Τόμοι Α′, Β′, Γ′, Εκδόσεις Gutenberg, 1983, 1983, 1984.

Βυθούνη Π. Α., «Τεχνική Μηχανική. Αντοχή των υλικών», Έκδοση ε′, Αθήνα, 1993.

Γεωργακάκου Π., Σκαλωμένου Α., Σφαρνά Ν., Χριστακόπουλου Ι., «Φυσική Γενικής Παιδείας Γ′ τάξης ενιαίου Λυκείου», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2006.

Γκρος Γ., «Αντοχή υλικών», Έκδοση β′, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1985.

Γκρος Γ., Λαζαρίδη Λ., «Μηχανική», Έκδοση β′, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1985.

Δημόπουλου Μ.Γ., «Μεθοδική φυσική Α′– Β′ Λυκείου», Έκδοση 4η, τεύχος β′, Εκδοτικός όμιλος συγγραφέων καθηγητών, 1993.

Δρη Ε., «Ενέργεια (Πηγές – Εφαρμογές – Εναλλακτικές λύσεις.)», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1996.

Δρη Ε., «Κλασσική δυναμική», Ε.Μ.Π./Δημόκριτος, 2011.

Δρη Ε., Ανδρακάκου Κ., Βελέντζα Α., Γάτσιου Ι., Διαμαντή Ν., Κρίκου Κ., Πιερράκου Ν., «Φυσική της Β΄ Λυκείου. Θετικής & Τεχνολογικής κατεύθυνσης.», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2000.

Δρη Ε., Ανδρακάκου Κ., Βελέντζα Α., Γάτσιου Ι., Διαμαντή Ν., Κρίκου Κ., Πιερράκου Ν.,«Φυσική της Γ΄ Λυκείου. Θετικής & Τεχνολογικής κατεύθυνσης», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2000.

Δρη Ε., Σχοινά Α. «Βιβλίο του Καθηγητή φυσικής PSSC», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1992.

Ζήσου Α. Α., «Φυσική Ι Μηχανική - θερμότητα», Εκδόσεις Σύγχρονη εκδοτική, 1999.

Θεοφιλόπουλου Κ. Π., «Ηλεκτροτεχνία, τόμος 1ος», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1975.

Ιωάννου Α., Ντάνου Γ., Πήττα Ά., Ράπτη Σ., «Φυσική Β Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2006.

Ιωάννου Α., Ντάνου Γ., Πήττα Ά., Ράπτη Σ., «Φυσική Γ΄ Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2006.

Καίσαρα Δ. Αλεξόπουλου, Διονυσίου Ι. Μαρίνου, «Γενική Φυσική Ι. Μηχανική», Εκδόσεις Ολυμπία, 1992.

Καίσαρα Δ. Αλεξόπουλου, Διονυσίου Ι. Μαρίνου, «Γενική Φυσική IV. Θερμότητα», Εκδόσεις Ολυμπία, 1992.

Καρύδη Γ., Κοκκινάκη Γ., «Ηλεκτροτεχνία ΙΙ», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1985.

Κόκκοτα Π., Κρέμου Δ., «Φυσική Α΄ Λυκείου», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 1995.

Κορωνάκη Π. Σ., «Μηχανική Ρευστών», ΄Εκδοση 3η, Εκδόσεις ΙΩΝ, 2005.

Κωστόπουλου Δ., Παπαχρήστου Π., Σκούντζου Π., Χαλκιά Κ., «Φυσική 1ου και 2ου κύκλου για Τ.Ε.Ε.», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 2009.

Λιώτσιου Κ., «Σημειώσεις Φυσικής ΙΙ», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 2008.

Μάζη Ε. Α., «Φυσική Β΄ Λυκείου», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 1995.

Μαυρομματάκου Κ. Α., «Φυσική (Μηχανική των ρευστών, θερμότητα)», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1999.

Μαυρομματάκου Κ. Α., «Φυσική (Μηχανική των στερεών)», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1998.

Μαυρομματάκου Κ. Α., «Φυσική, τόμος α΄», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1979.

Μαυρομματάκου Κ. Α., «Φυσική, τόμος β΄», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1981.

Μπρατάκου Ά., «Φυσική», Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β., 1981.

Πάντζαλη Ν., «Μηχανική των ρευστών», Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 2008.

Παπά Κ. Α., «Ηλεκτρολογία. Συνεχές ρεύμα», τόμος 1ος, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1974.

Περράκη Α. Β., «Ηλεκτροτεχνία», Τόμοι 1ος και 2ος, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 2000, 2001.

Πρωτοπαπά Ν., «Φυσική Γ΄ Γυμνασίου», Εκδόσεις Πατάκη, 2008.

Σαββάλα Κ. Άγγελου και Σπύρου «Φυσική Β΄ Λυκείου, θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης», Τεύχος Β΄, Εκδόσεις Σαββάλας, 2009.

Σαββάλα Κ. Άγγελου και Σπύρου, «Προβλήματα ηλεκτρισμού», Εκδόσεις Σαββάλα, 1982.

Σαββάλα Κ. Άγγελου και Σπύρου, «Προβλήματα θερμοδυναμικής, ταλαντώσεων, κυματικής», Εκδόσεις Σαββάλα, 1984.

Σαββάλα Κ. Άγγελου και Σπύρου, «Προβλήματα μηχανικής», 3η ΄Εκδοση, Εκδόσεις Σαββάλα, 1983.

Τεύχη του περιοδικού «Φυσικός κόσμος» της Ενώσεως Ελλήνων Φυσικών.

Τσουκαλά Ζ., «Φυσική ΙΙ», τόμοι 1ος, 2ος, Εκδόσεις Ιδρύματος Ευγενίδου, 1986, 1988.

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (περ. 620 π.Χ. - περ. 546 π.Χ.), ο πρώτος από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, ήταν μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, μηχανικός, μετεωρολόγος και ιδρυτής της Ιωνικής Σχολής της φυσικής φιλοσοφίας στη Μίλητο.
Βιβλιοθήκη John Rylands στο Μάντσεστερ, Ηνωμένο Βασίλειο.

ISBN 978-960-337-154-0