ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

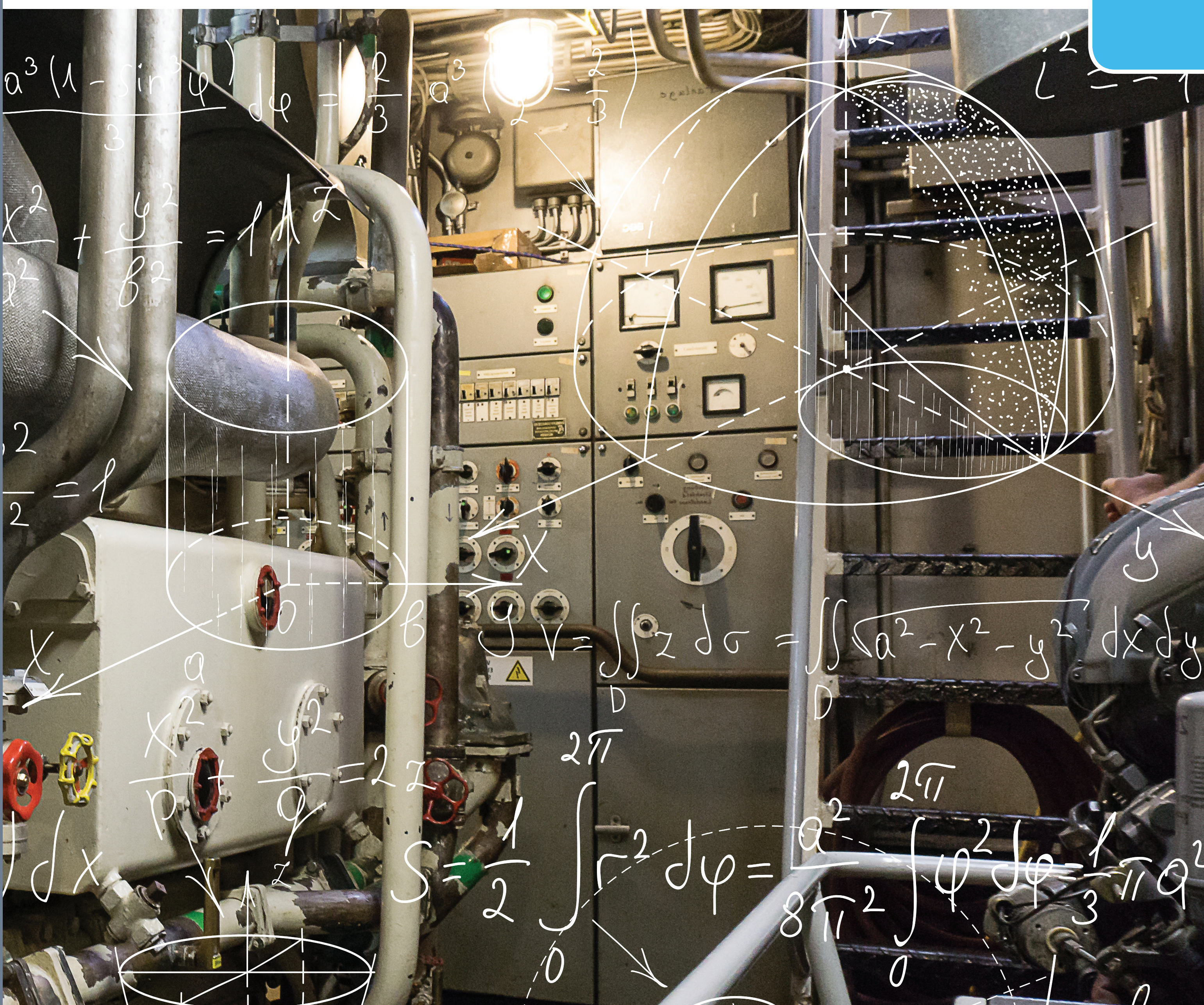
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΚΟΥ ΚΟΥΤΡΑ

β΄ έκδοση

ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1: Πίνακες

Κεφάλαιο 2: Ορίζουσες

Κεφάλαιο 3: Γραμμικά συστήματα

Κεφάλαιο 4: Μιγαδικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 5: Συναρτήσεις

Κεφάλαιο 6: Παράγωγοι

Κεφάλαιο 7: Ολοκληρώματα

Κεφάλαιο 8: Διαφορικές εξισώσεις

Κεφάλαιο 9: Στατιστική

Κεφάλαιο 10: Πιθανότητες

1

ΠΙΝΑΚΕΣ

Οι πίνακες είναι ένα από τα χρησιμότερα «εργαλεία» των μαθηματικών, αφού μας δίνουν τη δυνατότητα να παρουσιάσουμε με συνοπτικό τρόπο ένα σύνολο στοιχείων, έτσι ώστε να μπορούμε να λαμβάνουμε από αυτόν εύκολα και γρήγορα τις πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν. Παράλληλα, με τον ορισμό καταλλήλων πράξεων μεταξύ πινάκων, μπορούμε να παίρνουμε ως αποτέλεσμα νέους πίνακες, που μας δίνουν πρόσθετες πληροφορίες για το πρόβλημα που μελετάμε.

	Νίκες		Ισοπαλίες		Ήττες	
Ομάδες	**εντός**	**εκτός**	**εντός**	**εκτός**	**εντός**	**εκτός**
1η	13	11	2	1	0	3
2η	10	9	2	2	3	4
3η	8	6	4	4	3	5

α) Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή τριών πινάκων Α, Β, Γ, που να περιέχουν ο Α τις νίκες, ο Β τις ισοπαλίες και ο Γ τις ήττες κάθε ομάδας, διατηρώντας την σειρά παρουσίασης των δεδομένων.

β) Αν για κάθε νίκη η ομάδα παίρνει 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία 2 βαθμούς και για κάθε ήττα 1 βαθμό, να δημιουργήσετε τον πίνακα ο οποίος δίνει:
– Τους βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα στο πρωτάθλημα εντός και εκτός έδρας.
– Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εντός έδρας.
– Τους συνολικούς βαθμούς που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα εκτός έδρας.

γ) Να γράψετε τα δεδομένα υπό μορφή δύο πινάκων Δ, Ε που να περιέχουν ο Δ τις εντός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας και ο Ε τις εκτός έδρας νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα που δίνει τις συνολικές (εντός και εκτός έδρας) νίκες, ισοπαλίες και ήττες της κάθε ομάδας.

Λύση.

α) Οι πίνακες A, B, Γ, που δίνουν αντίστοιχα τις νίκες, τις ισοπαλίες και τις ήττες κάθε ομάδας είναι οι εξής:

$$A=\begin{bmatrix}13 & 11\\ 10 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας X που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός και εκτός έδρας, θα έχει τη μορφή $X = 3A + 2B + \Gamma$, οπότε:

$$X=3\begin{bmatrix}13 & 11\\ 10 & 9\\ 8 & 6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39 & 33\\ 30 & 27\\ 24 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\\ 8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43 & 38\\ 37 & 35\\ 35 & 31\end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας X_1 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εντός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της πρώτης στήλης του X, ενώ ο πίνακας X_2 που δίνει τους συνολικούς βαθμούς κάθε ομάδας εκτός έδρας θα είναι ένας πίνακας-στήλη που αποτελείται από τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του X. Επομένως:

$$X_1=\begin{bmatrix}43\\ 37\\ 35\end{bmatrix},\qquad X_2=\begin{bmatrix}38\\ 35\\ 31\end{bmatrix}.$$

γ) Έχουμε

$$\Delta=\begin{bmatrix}13 & 2 & 0\\ 10 & 2 & 3\\ 8 & 4 & 3\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}11 & 1 & 3\\ 9 & 2 & 4\\ 6 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$\varGamma = \begin{bmatrix} 118 & 39 \\ 70 & 22 \\ 51 & 17 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $\varGamma$ ονομάζεται ***γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β*** και συμβολίζεται με $A \cdot B$ ή απλώς AB. Είναι φανερό ότι το στοιχείο γ_{11} του πίνακα $\varGamma$ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα, το γ_{12} αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 2ης στήλης του B και προσθέσουμε τα γινόμενα κ.ο.κ.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω περιγράφεται στη γενική περίπτωση από το επόμενο πλαίσιο.

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{\mu\times\nu}$ και $B = [\beta_{ij}]_{\nu\times\lambda}$, τότε ορίζουμε ως ***γινόμενο του πίνακα*** A ***με τον πίνακα*** B, και το συμβολίζουμε με AB, τον πίνακα τύπου $\mu\times\lambda$, του οποίου το στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της i γραμμής του A με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της j στήλης του B. Επομένως:

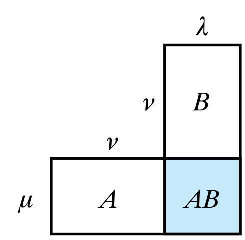
$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \dots + \alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}.$$

Η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.

j στήλη

$$i\ \text{γραμμή} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & \beta_{1j} & \cdots \\ \cdots & \beta_{2j} & \cdots \\ \cdots & \beta_{3j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \beta_{\nu j} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \gamma_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι για να μπορούν να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα $\varGamma = AB$ με τον τύπο που αναφέραμε προηγουμένως, θα πρέπει ο αριθμός των στηλών του πίνακα Α να είναι ίδιος με τον αριθμό των γραμμών του Β (σχ. 1.1).



Σχ. 1.1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τα γινόμενα AE, EA και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τον πίνακα A.

Στην περίπτωση που σε μια εξίσωση του συστήματος λείπει ένας ή περισσότεροι από τους αγνώστους, τότε θεωρούμε ότι ο άγνωστος ή οι άγνωστοι έχουν συντελεστή το μηδέν.

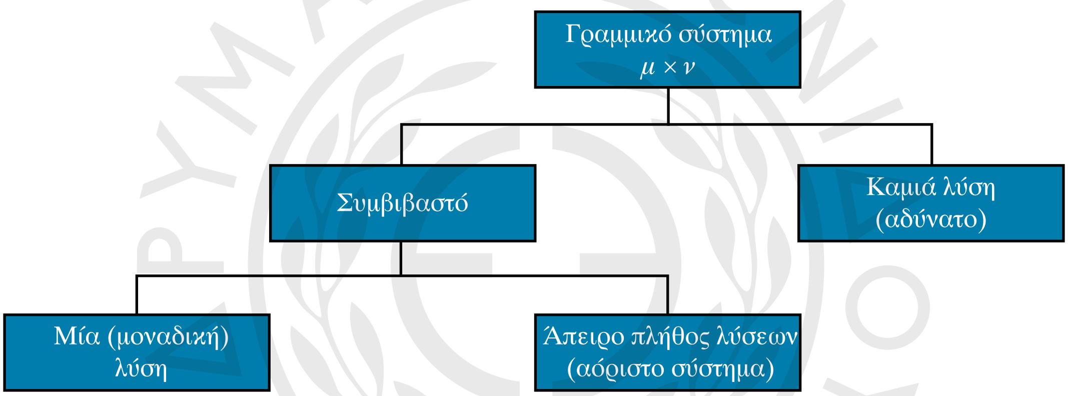
Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις λύσεις ενός συστήματος ονομάζεται ***επίλυση*** του συστήματος. ΄Ενα γραμμικό σύστημα που έχει μία τουλάχιστον λύση ονομάζεται ***συμβιβαστό***, ενώ όταν δεν έχει λύσεις ονομάζεται ***αδύνατο.***

Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις ονομάζονται ***ισοδύναμα.*** Για παράδειγμα, τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad (\Sigma) \qquad\qquad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad (\Sigma')$$

είναι ισοδύναμα, αφού και τα δύο έχουν μοναδική λύση τη $x = 1, y = 2$ δυάδα (1,2). Συμβολικά τότε θα γράφουμε $(\Sigma)\sim(\Sigma')$.

Αποδεικνύεται ότι ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα έχει είτε μία μοναδική λύση, είτε άπειρες λύσεις. Δεν μπορεί δηλαδή να έχει δύο, τρεις ή οποιοδήποτε άλλο πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Συνοπτικά έχουμε:



Αν στο γραμμικό σύστημα $\mu \times \nu$ οι σταθεροί όροι $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ είναι όλοι μηδέν, τότε το σύστημα ονομάζεται ***ομογενές.***

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί σύντομα ως μία ισότητα με τη βοήθεια της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων. Πράγματι, επιστρέφοντας στο Παράδειγμα ΙΙ, μπορούμε να παρουσιάσουμε τις τέσσερεις εξισώσεις του συστήματος (3.1.4) ως ισότητα δύο πινάκων–στηλών με τον εξής τρόπο:

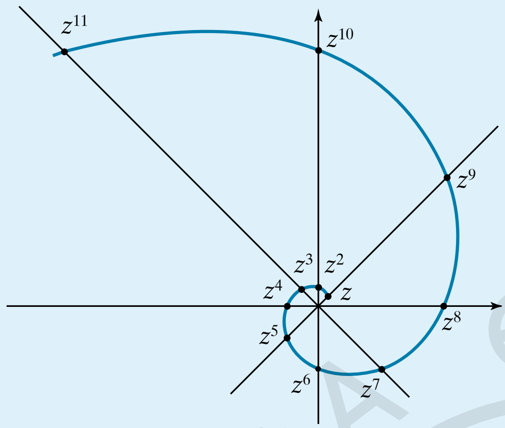
$$\begin{bmatrix} 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \\ 40x_1 + 60x_2 + 60x_3 \\ 120x_1 + 40x_2 + 40x_3 \\ 20x_1 + 60x_2 + 40x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

Ορίζοντας τους πίνακες,

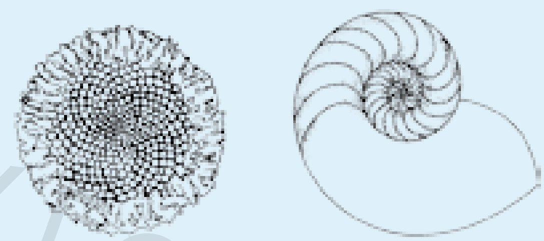
$$A = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 60 & 60 \\ 120 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 40 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 520 \\ 380 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται ***ισογωνιακή σπείρα*** (σχ. 4.6α).

Τέτοιες γραμμές τις συναντάμε αρκετά συχνά στη φύση. Για παράδειγμα, τα κέρατα ορισμένων ζώων, ο σπόρος του ηλιοτροπίου [σχ. 4.6β(α)] κ.λπ. έχουν παρόμοια μορφή. Εντυπωσιακή ομοιότητα με τη σπείρα αυτή έχει και το όστρακο του ναυτίλου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.6β(β).



Σχ. 4.6α
Ισογωνιακή σπείρα



σπόρος ηλιοτροπίου
(α)

όστρακο ναυτίλου
(β)

Σχ. 4.6β

Ασκήσεις.

4.6.1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta\,\mathrm{i}$ τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1=\frac{1}{(1+\mathrm{i})^5},\quad z_2=\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16},\quad z_3=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{100},$$

4.6.2. Να γράψετε στη μορφή α + β i τους μιγαδικούς αριθμούς

$$[2(\text{συν}10^0+\mathrm{i}\,\text{ημ}10^0)]^{-6},\quad \left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-5},\quad \left[3\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\,\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{-6}.$$

4.6.3. Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $z=\dfrac{(\text{ημ}\theta-\mathrm{i}\,\text{συν}\theta)^{10}}{(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta)^5}$.

4.6.4. Αν $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ και $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $z_1^{600}+z_2^{600}$ και $z_1^{600}-z_2^{600}$.

4.6.5. Αν $z=1-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z^3 και $(1-z)^8$.

4.7 Νιοστές ρίζες μιγαδικού αριθμού – Λύση εξισώσεων στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

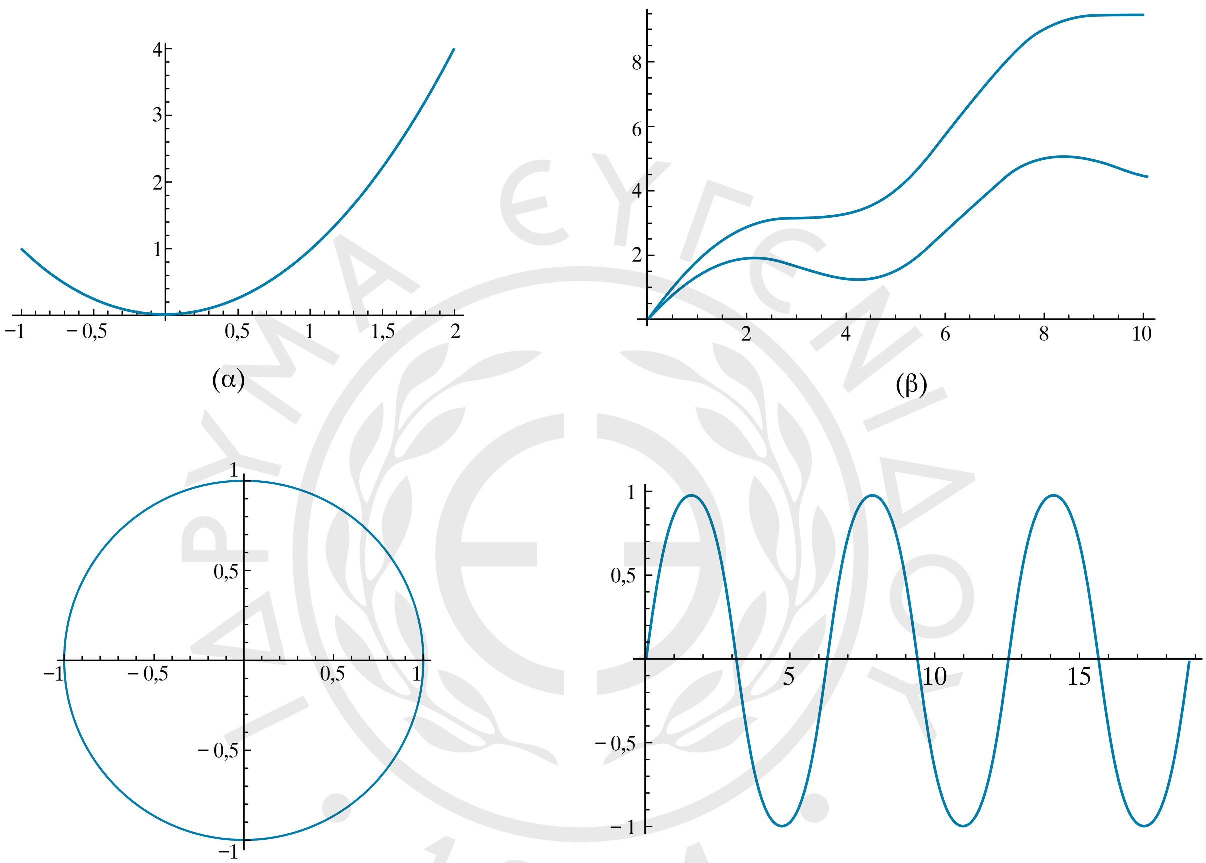
Στο παράδειγμα 4.3.2 διαπιστώσαμε ότι οι μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την εξίσωση $z^2=3+4\mathrm{i}$ είναι οι $z_1=2+\mathrm{i}$ και $z_2=-2-\mathrm{i}$. Σημειώσαμε μάλιστα ότι κάθε μιγαδικός $z=x+y\,\mathrm{i}$, για τον οποίο ισχύει $z^2=\alpha+\beta\,\mathrm{i}$, ονομάζεται ***τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού*** $\alpha+\beta\mathrm{i}$. Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε τη νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού ως εξής:

β) Η προβολή της C_f στον άξονα των y (δηλ. το σύνολο των τεταγμένων όλων των σημείων της C_f) δίνει το σύνολο τιμών της (σχ. 5.1η).

Για παράδειγμα, παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$ που δίνεται στο σχήμα 5.1θ, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο

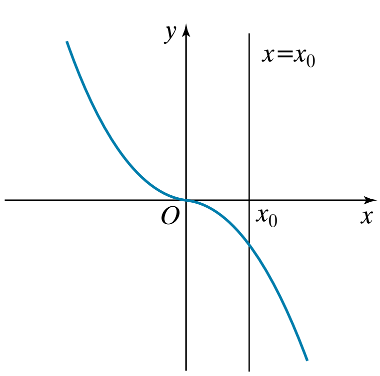
$$A=(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[\frac{4}{3},+\infty).$$

(όπως ακριβώς το βρήκαμε στο παράδειγμα 5.1.3), ενώ το σύνολο τιμών της είναι το $B=[0,+\infty)$.

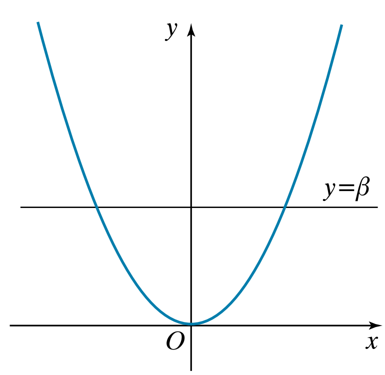


(α) (β) (γ) (δ)

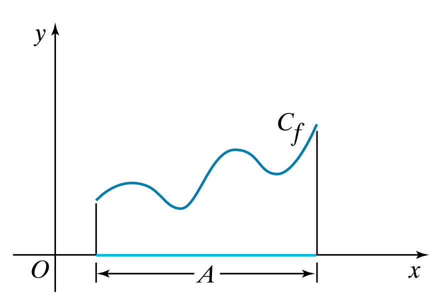
Σχ. 5.1δ



Σχ. 5.1ε



Σχ. 5.1στ



Σχ. 5.1ζ

Η τιμή της f στο σημείο (1,2,3) είναι προφανώς η απόσταση του σημείου $M(1,2,3)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$ και βρίσκεται ίση με:

$$f(1,2,3)=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\text{ , δηλαδή } (OM)=\sqrt{14}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.7.1.

Να βρείτε και να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δύο μεταβλητών

$$f(x,y)=\sqrt{-x^2+y}.$$

Ποιο είναι το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης;

Λύση.

Το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλες τις δυάδες εκείνες (x,y) για τις οποίες ο τύπος της συνάρτησης f μπορεί να εφαρμοστεί και να δώσει ως αποτέλεσμα έναν πραγματικό αριθμό. Επομένως θα πρέπει

$$-x^2+y\geq 0 \Rightarrow y\geq x^2. \tag{6.7.1}$$

Αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $y=x^2$, τότε είναι φανερό από την (6.7.1) ότι ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης παίρνουμε όλα τα σημεία εκείνα που βρίσκονται επάνω ή στο εσωτερικό της παραβολής $y=x^2$ (σχ. 6.7β).

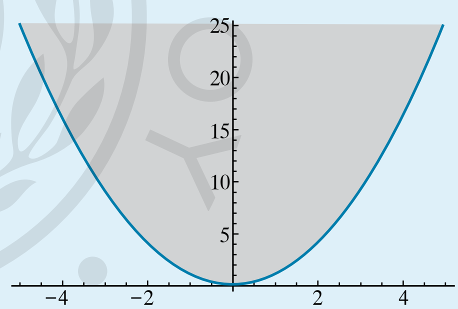
Επιπλέον είναι προφανές ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών, αφού:

$$z=f(x,y)=\sqrt{-x^2+y}\geq 0$$

για κάθε ζεύγος (x,y) με $y\geq x^2$ και επιπλέον, για κάθε $z\geq 0$ μπορούμε να βρούμε (τουλάχιστον ένα) ζεύγος (x,y) με $y\geq x^2$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$z=\sqrt{-x^2+y}\Leftrightarrow -x^2+y=z^2$$

(θα μπορούσαμε, π.χ. να πάρουμε $x=0, y=z^2$).



Σχ. 6.7β

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$z=f(x,y)=50-x^2-y^2-xy. \tag{6.7.2}$$

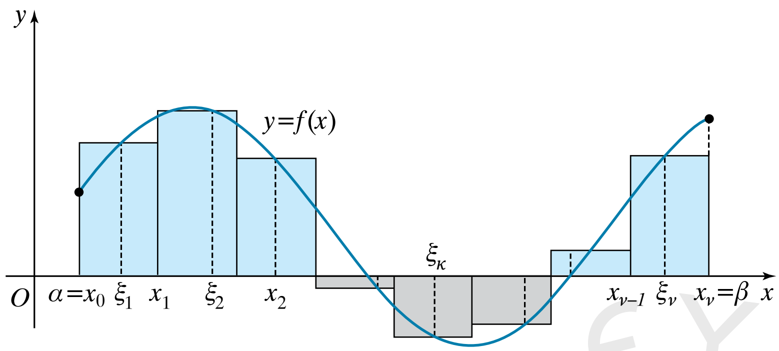
Αν στην παραπάνω συνάρτηση κρατήσουμε σταθερή την ανεξάρτητη μεταβλητή y και παραγωγίσουμε ως προς x, τότε θα έχουμε

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{d}{dx}(50-x^2-y^2-xy)=0-2x-0-y=-2x-y.$$

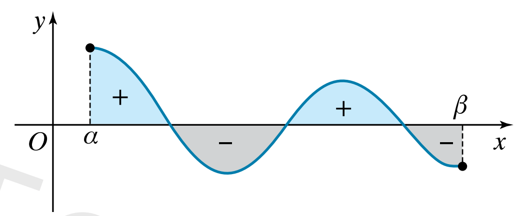
Ο συμβολισμός $\frac{d}{dx}f(x,y)$ στον παραπάνω τύπο παριστάνει την παράγωγο της $z=f(x,y)$ ως προς x όταν κρατήσουμε το y σταθερό και ονομάζεται ***μερική παράγωγος της f ως προς x.*** Συνήθως, για τη μερική παράγωγο της f ως προς x, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.3δ και 7.3ε)[2].



Σχ. 7.3δ



Σχ. 7.3ε

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εισήχθηκε παραπάνω μόνο για την περίπτωση που ισχύει $\alpha<\beta$ (αλλιώς δεν έχει νόημα να μιλάμε για διάστημα $[\alpha, \beta]$). Μπορούμε ωστόσο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha=\beta$ ή $\alpha>\beta$, δεχόμενοι τις εξής συμβάσεις:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx, \text{ για } \alpha>\beta.$$

Θα αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στους υπολογισμούς της τιμής του χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στον ορισμό του (ο οποίος είναι γενικά δύσχρηστος).

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ και $\alpha, \beta, \gamma, \in\Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ (σχ. 7.3στ). Αν συμβολίσουμε με Ω το χωρίο $A\Gamma\Delta Z$, με Ω_1 το $ABEZ$ και με Ω_2 το $B\Gamma\Delta E$, είναι φανερό ότι ισχύει $E(\Omega)= E(\Omega_1)+E(\Omega_2)$.

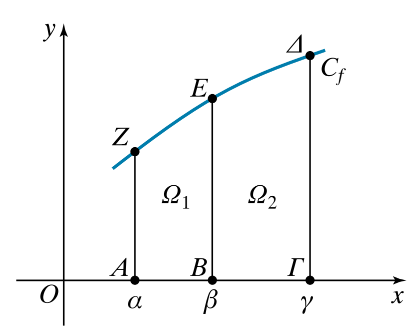
Όμως

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx, \quad E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \; E(\Omega_2) = \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx,$$

οπότε θα έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για ***οποιαδήποτε*** σημεία $\alpha, \beta, \gamma \in\Delta$ (ανεξάρτητα της διάταξής τους) και για ***οποιαδήποτε*** συνεχή συνάρτηση f. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα:

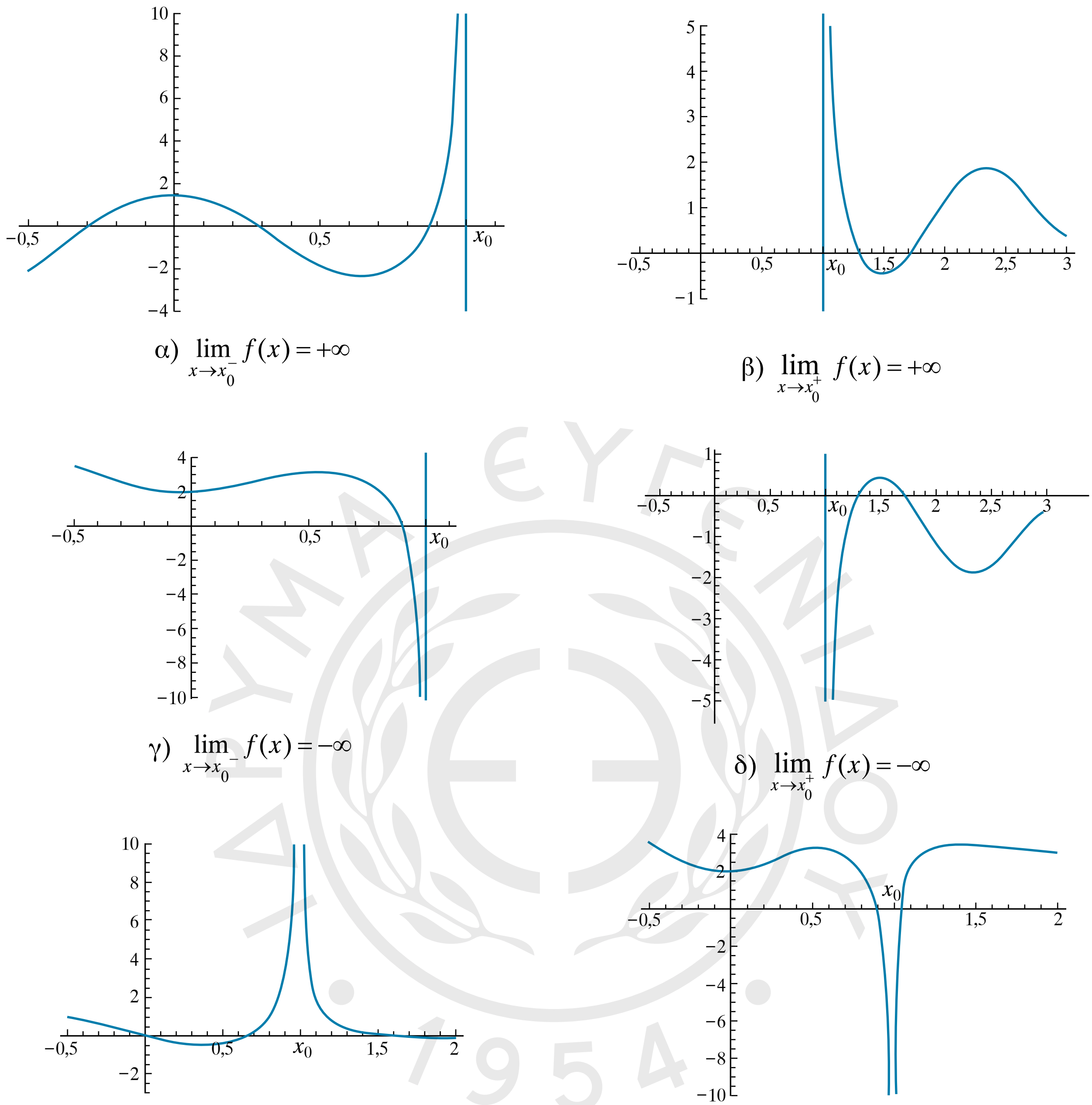


Σχ. 7.3στ

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in\Delta$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

2. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε παραπάνω για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μπορεί να ακολουθηθεί και για ορισμένες συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς, π.χ. για μονότονες συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ωστόσο, στο πλαίσιο του παρόντος εγχειριδίου θα περιοριστούμε στη μελέτη ολοκληρωμάτων συνεχών μόνο συναρτήσεων.



α) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

β) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

γ) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

δ) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

ε) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

στ) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Σχ. 5.6ιδ

α) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

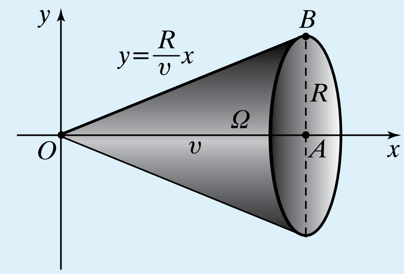
β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Ισχύουν επίσης τα παρακάτω αποτελέσματα για *μη πεπερασμένα* όρια:

M_1 α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε η $f(x)$ θα λαμβάνει θετικές τιμές ($f(x) > 0$) κοντά στο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.1.

Το ορθογώνιο τρίγωνο OAB του σχήματος 7.6στ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, δημιουργώντας κατά την περιστροφή του έναν κώνο ύψους $\upsilon=(OA)$ και ακτίνας βάσης R. Να βρείτε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο του κώνου αυτού συναρτήσει των υ και R.



Σχ. 7.6στ

Λύση.

Η κλίση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $O(0,0)$ και $B(\upsilon, R)$ είναι ίση με $\lambda=R/\upsilon$. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OB θα περιγράφεται από τον τύπο:

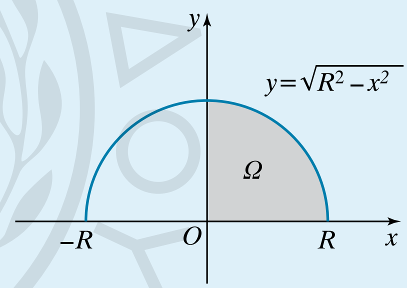
$$f(x)=\lambda x=\frac{R}{\upsilon}x,\ 0\le x\le \upsilon\ .$$

Επομένως, ο όγκος V_f του στερεού που παράγεται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_f=\pi\int_0^{\upsilon}\left(\frac{R}{\upsilon}x\right)^2dx=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon}x^2dx=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\upsilon}=\pi\frac{R^2}{\upsilon^2}\frac{\upsilon^3}{3}=\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6.2.

Να υπολογίσετε, με χρήση ολοκληρωμάτων, τον όγκο σφαίρας ακτίνας R.



Σχ. 7.6ζ

Λύση.

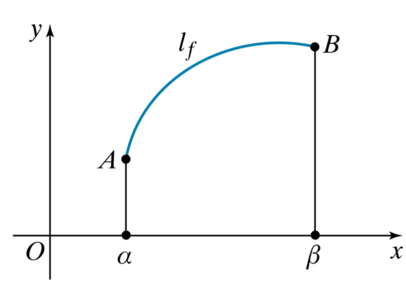
Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $0\le x\le R,$ από τις ευθείες $x=0$ και $x=R$ και από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.6ζ). Όταν το χωρίο Ω περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, θα δημιουργήσει ένα στερεό όγκου

$$V_f=\pi\int_0^R(\sqrt{R^2-x^2}\ )^2dx=\pi\int_0^R(R^2-x^2)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\pi(R^3-\frac{R^3}{3})=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Ο όγκος της σφαίρας ακτίνας R θα βρίσκεται αν πάρουμε το διπλάσιο από το προηγούμενο ολοκλήρωμα, δηλαδή είναι ίσος με

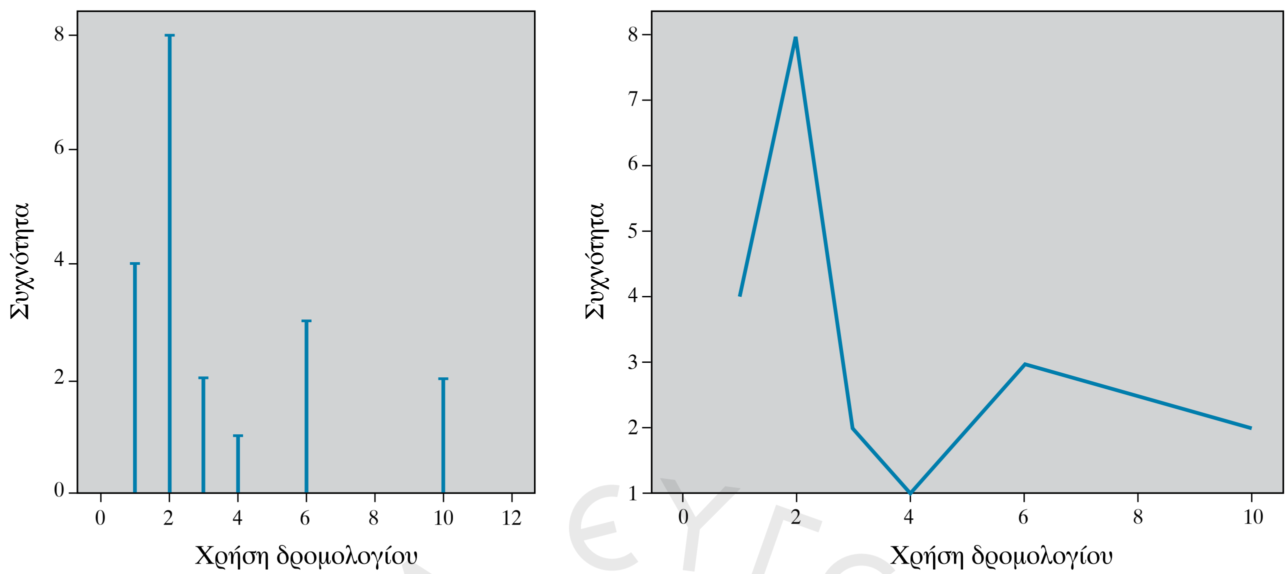
$$V=2V_f=\frac{4}{3}\pi R^3\ .$$

Τα ορισμένα ολοκληρώματα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του μήκους της καμπύλης της γραφικής παράστασης C_f μιας συνεχούς συνάρτησης που αντιστοιχεί σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Συνήθως αναφερόμαστε σ' αυτό με την ονομασία ***μήκος τόξου*** της καμπύλης $y=f(x)$ από το α έως το β (ή ισοδύναμα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$) και θα το συμβολίζουμε με $l_f\,(\alpha,\,\beta)$ ή απλά l_f (σχ. 7.6η).



Σχ. 7.6η

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με συνεχή



Σχ. 9.2β

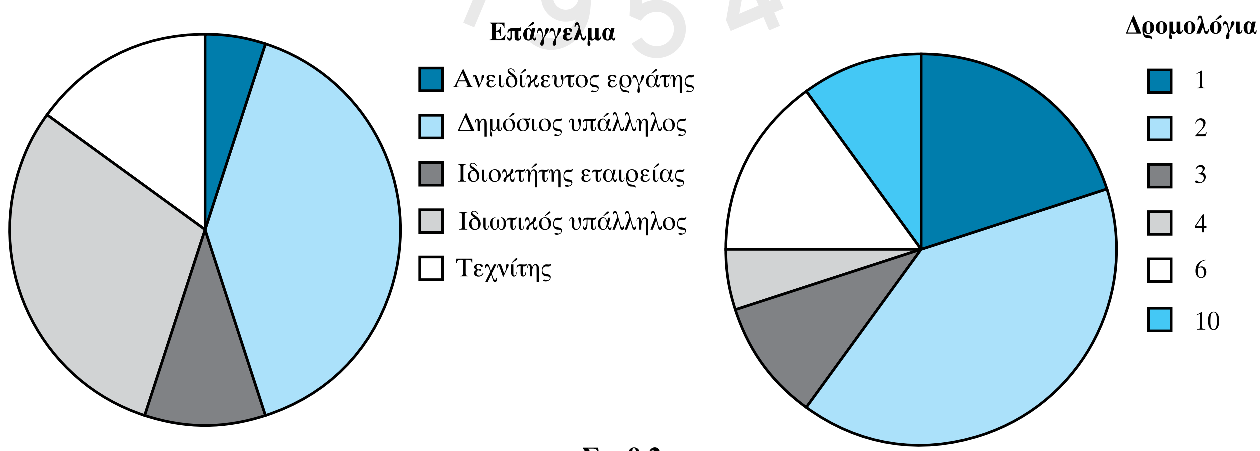
Διάγραμμα συχνοτήτων (α) και πολύγωνο συχνοτήτων (β)
για τη μεταβλητή X: «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2

διαφορετικές τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει, έτσι ώστε τα εμβαδά (ή ισοδύναμα, τα τόξα τους) να είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i. Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με θ_i το τόξο του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή t_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή σχετικές συχνότητες f_i, τότε θα έχουμε:

$$\theta_i = \nu_i \frac{360^{\circ}}{\nu} = 360^{\circ} f_i \quad \text{για} \quad i=1,2,\ldots,\kappa.$$

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες, αφού σε αντίθετη περίπτωση το σχήμα που προκύπτει περιέχει πάρα πολλούς μικρούς κυκλικούς τομείς, με αποτέλεσμα να χάνει την περιγραφική του αξία.

Στο σχήμα 9.2γ δίνεται το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «*Επάγγελμα*» και «*Μηνιαία χρήση του δρομολογίου*» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2.



Σχ. 9.2γ

Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις μεταβλητές «Επάγγελμα»
και «Μηνιαία χρήση του δρομολογίου» των δεδομένων του πίνακα 9.2.2

Μια χρήσιμη έκφραση για τη διαφορά δύο συνόλων είναι η εξής

$$A - B = AB'.$$

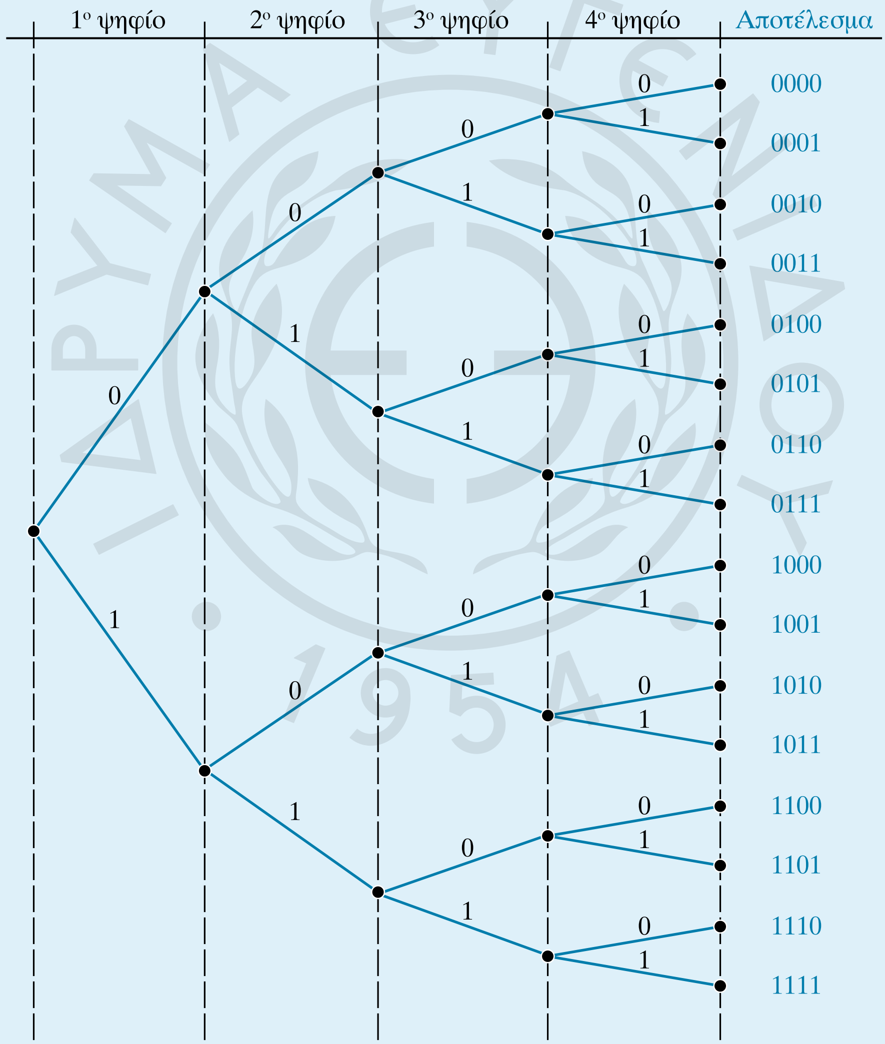
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.2.1.

Ας θεωρήσουμε έναν πομπό, ο οποίος εκπέμπει τριψήφια δυαδικά σήματα, δηλαδή κάθε σήμα του (λέξη) αποτελείται από 4 ψηφία τύπου 0-1 π.χ. 1010,0010,1110. Σύμφωνα με το επόμενο δενδροδιάγραμμα, ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από 16 στοιχεία, τα οποία δίνονται αναλυτικά στη στήλη «Αποτέλεσμα». Ας ορίσουμε στη συνέχεια τα εξής ενδεχόμενα:

A_i: το σήμα περιέχει ακριβώς i μηδενικά, $i = 0{,}1, 2, 3, 4$,

B: στο σήμα υπάρχουν τουλάχιστον δύο «0»,

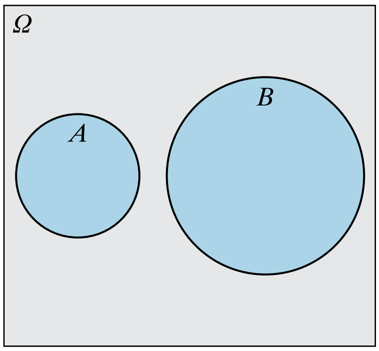
Γ: το σήμα περιέχει ακριβώς τρία ίδια ψηφία,



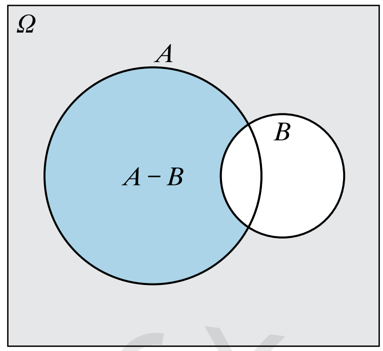
Δ: το σήμα περιέχει τουλάχιστον ένα «1» και ένα «0»,

Εξετάζοντας προσεκτικά το δενδροδιάγραμμα, καταλήγουμε στις επόμενες αναλυτικές εκφράσεις για τα ενδεχόμενα A_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$:

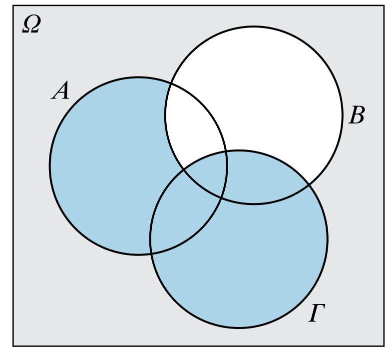
δεχόμενα. Για παράδειγμα, αν $A, B, Γ$ είναι τρία ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου $Ω$, το ενδεχόμενο «συμβαίνει το A και όχι το B ή συμβαίνει το $Γ$» αντιστοιχεί στο σύνολο $(A - B) \cup Γ$ και επομένως η διαγραμματική του παράσταση θα δίνεται από το σχήμα 10.2η.



Σχ. 10.2στ
Ξένα ενδεχόμενα



Σχ. 10.2ζ
Διαφορά ενδεχομένων



Σχ. 10.2η
$(A - B) \cup Γ$

Για τις πράξεις μεταξύ ενδεχομένων ισχύει ένας μεγάλος αριθμός ιδιοτήτων, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες όταν θέλουμε να απλοποιήσουμε πολύπλοκες παραστάσεις. Μερικές από αυτές δίνονται στη συνέχεια.

Ι1. $A \cup B = B \cup A$	$AB = BA$
Ι2. $A \cup (B \cup Γ) = (A \cup B) \cup Γ$	$A(BΓ) = (AB)Γ$
Ι3. $A \cup (BΓ) = (A \cup B)(A \cup Γ)$	$A(B \cup Γ) = (AB) \cup (AΓ)$
Ι4. $A \cup A' = Ω$	$AA' = \varnothing$
Ι5. $(A')' = A$	
Ι6. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq Γ$, τότε $A \subseteq Γ$	
Ι7. Αν $A \subseteq B$, τότε $B' \subseteq A'$ και αντίστροφα.	
Ι8. Αν $A \subseteq B$, τότε $AB = A$ και $A \cup B = B$.	

Σημειώνουμε τέλος τους δύο επόμενους τύπους, οι οποίοι είναι γνωστοί με την ονομασία ***τύποι De Morgan***.

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου $Ω$, τότε ισχύουν οι τύποι

$$(A \cup B)' = A'B' \qquad (AB)' = A' \cup B'$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.2.2.

Έστω $A, B, Γ$ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $Ω$. Να εκφραστούν τα επόμενα ενδεχόμενα με χρήση πράξεων (ένωση, τομή, συμπλήρωμα) μεταξύ των $A, B, Γ$ και να παρασταθούν με διαγράμματα Venn.

α) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα $A, B, Γ$.
β) Κανένα από τα ενδεχόμενα $A, B, Γ$ δεν συμβαίνει.
γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα $A, B, Γ$.
δ) Συμβαίνει ένα τουλάχιστον από τα A, B και ένα τουλάχιστον από τα $B, Γ$.

ενός ενδεχομένου A, για το οποίο είναι γνωστές οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(A|B)$ και $P(A|B')$, όπου B είναι ένα δεύτερο ενδεχόμενο, το οποίο έχει σχέση με το A. Γεννάται λοιπόν το εξής λογικό ερώτημα:

Θα μπορούσαμε, χρησιμοποιώντας αυτά τα στοιχεία, να υπολογίσουμε τη (μη δεσμευμένη) πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A; Η απάντηση είναι καταφατική και δίνεται από την επόμενη πρόταση, γνωστή με την ονομασία ***θεώρημα ολικής πιθανότητας***.

Έστω B ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $0 < P(B) < 1$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A τον ίδιου δειγματικού χώρου, ισχύει ο τύπος

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'). \tag{10.8.1}$$

Για να διαπιστώσουμε την αλήθεια της (10.8.1), αρκεί να γράψουμε το ενδεχόμενο A στην μορφή $A = AB \cup AB'$ και να παρατηρήσουμε ότι τα ενδεχόμενα AB και AB' είναι ξένα. Επομένως

$$P(A) = P(AB) + P(AB') = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'). \tag{10.8.2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.8.1.

Θεωρούμε ένα δοχείο το οποίο περιέχει τέσσερεις μπλε και έξι γκρι σφαίρες (βλ. σχ. 10.7α). Εξάγουμε τυχαία μία από τις 10 σφαίρες και στη συνέχεια, χωρίς να επιστρέψουμε στο δοχείο τη σφαίρα που βγάλαμε, εξάγουμε μια δεύτερη.

Να υπολογισθεί η πιθανότητα στη δεύτερη εξαγωγή να επιλεχθεί γκρι σφαίρα.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που εισήχθησαν για το συγκεκριμένο πείραμα στο ξεκίνημα της ενότητας 10.7, εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(A_2)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο (10.8.1) για

$$A = A_2,\ B = A_1,\ B' = A_1' = B_1$$

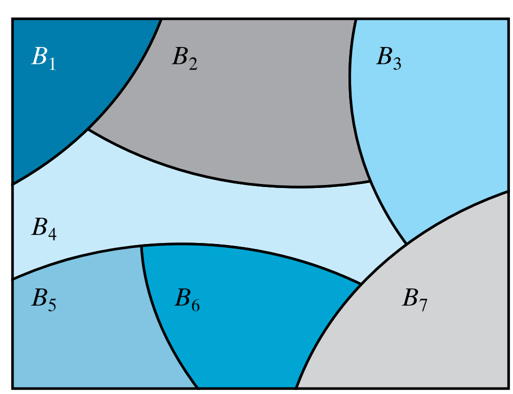
μπορούμε να γράψουμε

$$P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|B_1)P(B_1) = \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10} + \frac{6}{9}\cdot\frac{4}{10} = \frac{54}{90} = 60\%.$$

Ο τύπος (10.8.1) μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση που διαθέτουμε ν μη κενά ενδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ του δειγματικού χώρου, τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις

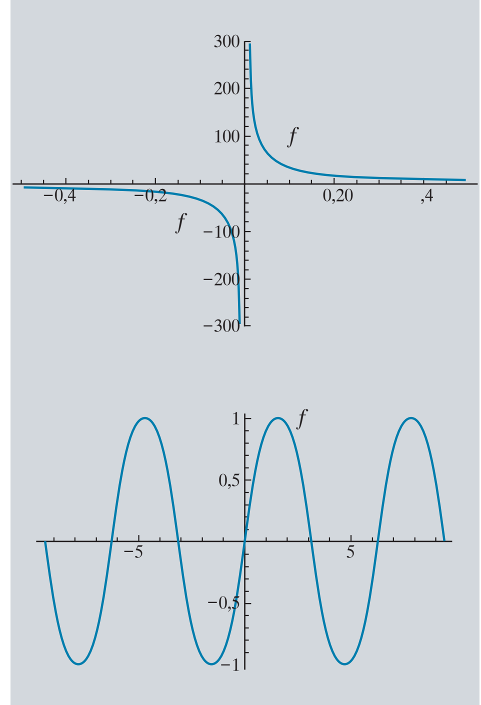
$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu = \Omega \text{ και } B_i B_j = \varnothing \text{ για } i \neq j.$$

Τέτοιες οικογένειες λέγονται ***διαμερίσεις*** του Ω (σχ. 10.8α).



Σχ. 10.8α
Διαμέριση του δειγματικού χώρου

Έστω $\{B_1, B_2, \ldots, B_\nu\}$ μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε να ισχύει $P(B_i) > 0$ για όλα τα $i = 1,2, \ldots, \nu$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύει



Το βιβλίο *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά* απευθύνεται στους σπουδαστές των Σχολών Μηχανικών των Ακαδημιών Εμπορικού Ναυτικού (ΑΕΝ). Καλύπτει πολλά διαφορετικά αντικείμενα των μαθηματικών, τα οποία βρίσκουν εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα που είτε παρουσιάζουν ενδιαφέρον από μόνα τους είτε αποτελούν αντικείμενο μελέτης για τους Μηχανικούς στο πλαίσιο άλλων μαθημάτων των ΑΕΝ. Πέραν των κλασικών μεθόδων των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (θεωρία πινάκων, μιγαδικοί αριθμοί, συναρτήσεις, παράγωγοι και ολοκληρώματα, διαφορικές εξισώσεις), περιέχονται και δύο κεφάλαια με τα οποία γίνεται μια εισαγωγή στις περιοχές της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων.

ISBN 978-960-337-184-7