



ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΟΙΑΡΧΟΥΣ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΣ ΛΑΛΟΥ

ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Κεφάλαιο 1: Στοιχεία Άλγεβρας

1.1	Άλγεβρικές παραστάσεις	2
1.1.1	Οι πραγματικοί αριθμοί	2
1.1.2	Πράξεις αλγεβρικών παραστάσεων	4
1.1.3	Αξιοσημείωτες ταυτότητες	5
1.2	Εξισώσεις	5
1.2.1	Εξίσωση 1 ^{ου} βαθμού	6
1.2.2	Εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	7
1.3	Γραμμικά συστήματα	10
1.4	Άλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων	11
1.5	Απόλυτο και σχετικό σφάλμα	14
1.6	Συμμεγείς αριθμοί	16
1.6.1	Συμμεγείς με μονάδες μέτρησης χρόνου	16
1.6.2	Συμμεγείς με μονάδες μέτρησης γωνιών	18
	Ασκήσεις	18

Κεφάλαιο 2: Γραφήματα

2.1	Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων	21
2.2	Σχεδιασμός γραφημάτων από δεδομένα	22
2.3	Γραφήματα βασικών συναρτήσεων	26
2.4	Μελέτη γραφημάτων δεδομένων πλοίου	30
2.4.1	Υδροστατικό διάγραμμα πλοίου	30
2.4.2	Καμπύλες ευστάθειας	31
2.5	Γραφική επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων	34
	Ασκήσεις	35

Κεφάλαιο 3: Αναλογία, μεταβολή και παρεμβολή

3.1	Αναλογίες	37
3.2	Κλίμακες	38
3.3	Ανάλογα ποσά	39
3.4	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	40
3.5	Η έννοια της γραμμικής παρεμβολής	41

3.6 Εφαρμογές της γραμμικής παρεμβολής στην Ναυτιλία	42
Ασκήσεις	45

Κεφάλαιο 4: Γεωμετρία

4.1 Βασικές γεωμετρικές έννοιες	47
4.2. Στοιχεία και είδη τριγώνων	50
4.3 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία	52
4.4 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα	54
4.5 Ισότητα τριγώνων	55
4.6 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος	57
4.7 Ομοιότητα τριγώνων	58
4.8 Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών	59
4.9 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου	60
4.9.1 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	61
4.9.2 Μέτρο τόξου	61
4.9.3 Εγγεγραμμένη γωνία	62
4.10 Τετράπλευρα	63
4.10.1 Παραλληλόγραμμο – Ιδιότητες παραλληλογράμμου	63
4.10.2 Ειδικά παραλληλόγραμμο	64
4.10.3 Τραπεζίο	65
4.11 Αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου	66
4.12 Γεωμετρικές κατασκευές	67
Ασκήσεις	70

Κεφάλαιο 5: Επίπεδη τριγωνομετρία

5.1 Μονάδες μέτρησης γωνιών	71
5.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας	71
5.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$	73
5.4 Τύποι αναγωγής τριγωνομετρικών αριθμών στο 1° τεταρτημόριο	75
5.4.1 Παραπληρωματικές γωνίες	75
5.4.2 Συμπληρωματικές γωνίες	76
5.4.3 Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°	76
5.5 Τριγωνομετρικές ταυτότητες	77
5.6 Επίλυση τυχαίου τριγώνου	78
5.6.1 Θεώρημα 1: Νόμος Ημιτόνων	78
5.6.2 Θεώρημα 2: Νόμος Συνημιτόνων	81
5.7 Γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων	83
5.8 Εφαρμογές επίπεδης τριγωνομετρίας στην Ναυτιλία	85
5.8.1 Διόπτρευση	85
5.8.2 Τρίγωνο πλεύσης – Υπολογισμός λοξοδρομικής απόστασης	87
5.8.3 Πλους επί παραλλήλου	90
5.8.4 Εφαρμογές του Νόμου Ημιτόνων και Συνημιτόνων	92
Ασκήσεις	94

Κεφάλαιο 6: Μετρήσεις

6.1	Μονάδες μέτρησης	97
6.1.1	Μονάδες μέτρησης μήκους	97
6.1.2	Μονάδες μέτρησης εμβαδού	97
6.1.3	Μονάδες μέτρησης όγκου	97
6.2	Υπολογισμός εμβαδού και περιμέτρου πολυγώνων	98
6.2.1	Εμβαδόν και περίμετρος τετραγώνου	98
6.2.2	Εμβαδόν και περίμετρος ορθογωνίου	98
6.2.3	Εμβαδόν και περίμετρος παραλληλογράμμου	99
6.2.4	Εμβαδόν και περίμετρος τριγώνου	99
6.2.5	Εμβαδόν και περίμετρος τραπεζίου	99
6.3	Μετρήσεις κύκλου	102
6.3.1	Μήκος κύκλου και τόξου	102
6.3.2	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος	102
6.4	Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος στερεών σχημάτων	104
6.4.1	Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος πρίσματος	105
6.4.2	Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και κύβος	106
6.4.3	Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος κυλίνδρου	106
6.4.4	Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος κώνου	107
6.4.5	Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος πυραμίδας	108
6.4.6	Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος σφαίρας	109
	Ασκήσεις	109

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Κεφάλαιο 7: Διανύσματα

7.1	Η έννοια του διανύσματος	112
7.2	Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων	114
7.2.1	Πρόσθεση διανυσμάτων	114
7.2.2	Αφαίρεση διανυσμάτων	117
7.3	Πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα	117
7.4	Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	118
7.5	Εφαρμογές διανυσμάτων στην επίλυση προβλημάτων	120
	Ασκήσεις	122

Κεφάλαιο 8: Σφαιρικά τρίγωνα

8.1	Σφαίρα	123
8.1.1	Κύκλοι σφαίρας	123
8.1.2	Άξονας και πόλοι κύκλου	123
8.1.3	Γωνίες στον χώρο	124
8.1.4	Σφαιρική γωνία	124

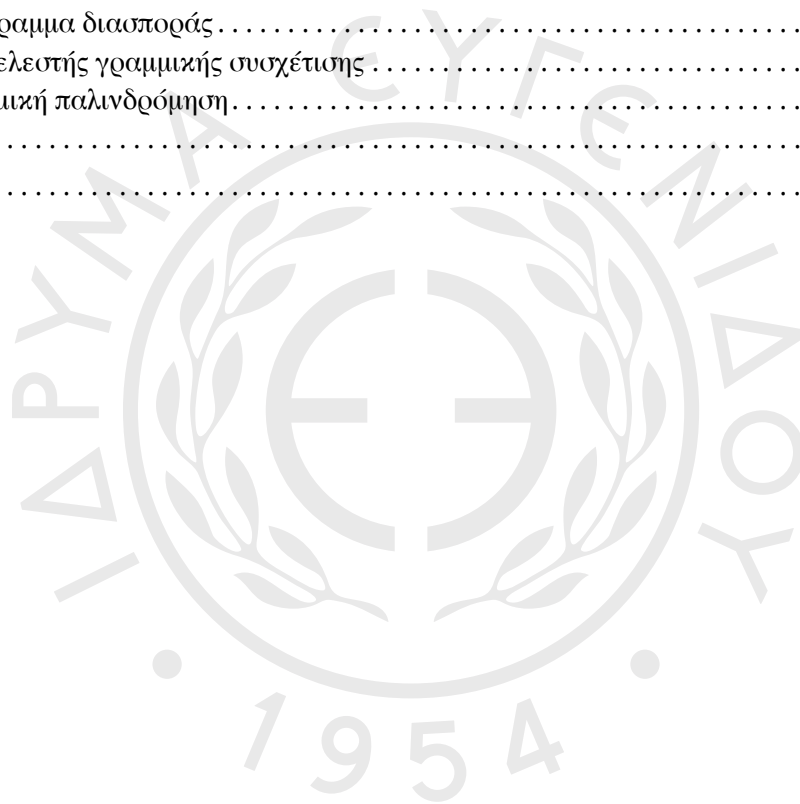
8.2 Σφαιρικό τρίγωνο.	125
8.2.1 Βασικές ιδιότητες σφαιρικού τριγώνου.	126
8.2.2 Είδη σφαιρικών τριγώνων.	126
8.2.3 Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα.	127
8.2.4 Πολικό τρίγωνο.	128
8.3 Επίλυση ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου.	129
8.3.1 Κανόνες Napier.	129
8.3.2 Θεωρήματα τεταρτημορίων.	130
8.3.3 Μεθοδολογία επίλυσης ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου.	131
8.4 Επίλυση ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου.	134
8.5 Επίλυση τυχαίου σφαιρικού τριγώνου.	135
8.6 Εφαρμογές σφαιρικής τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία και την Αστρονομία.	140
8.6.1 Τρίγωνο ορθοδρομίας.	140
8.6.2 Υπολογισμός ορθοδρομικής απόστασης και αρχικής πορείας.	141
8.6.3 Τύποι υπολογισμού ορθοδρομικής απόστασης και αρχικής πορείας στη Ναυτιλία.	143
8.6.4 Κορυφαίο σημείο ορθοδρομίας.	145
8.6.5 Τύποι υπολογισμού συντεταγμένων κορυφαίου σημείου στη Ναυτιλία.	146
8.6.6 Στοιχεία ουράνιας σφαίρας.	147
8.6.7 Τρίγωνο θέσης.	149
Ασκήσεις.	151

Κεφάλαιο 9: Κωνικές τομές

9.1 Ο κύκλος.	153
9.1.1 Εξίσωση κύκλου με κέντρο και ακτίνα ρ	153
9.1.2 Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων.	155
9.2 Η παραβολή.	156
9.2.1 Εξίσωση παραβολής.	156
9.2.2 Εξίσωση εφαπτομένης παραβολής.	158
9.2.3 Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής.	159
9.3 Η έλλειψη.	160
9.3.1 Εξίσωση έλλειψης.	160
9.3.2 Χαρακτηριστικά της έλλειψης.	161
9.3.3 Εξίσωση εφαπτομένης έλλειψης.	161
9.3.4 Ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης.	162
9.3.5 Εκκεντρότητα έλλειψης.	162
9.4 Η υπερβολή.	163
9.4.1 Εξίσωση υπερβολής.	163
9.4.2 Εξίσωση εφαπτομένης υπερβολής.	164
9.4.3 Ασύμπτωτες υπερβολής.	165
9.4.4 Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής.	165
9.4.5 Εκκεντρότητα υπερβολής.	166
Ασκήσεις.	167

Κεφάλαιο 10: Στατιστική

10.1	Βασικές έννοιες	169
10.2	Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων	170
10.2.1	Πίνακες κατανομής συχνοτήτων	170
10.2.2	Ομαδοποίηση δεδομένων	176
10.2.3	Γραφικές παραστάσεις	177
10.3	Μέτρα θέσης και διασποράς	180
10.3.1	Μέτρα θέσης	180
10.3.2	Μέτρα διασποράς	184
10.3.3	Συντελεστής μεταβλητότητας	186
10.4	Γραμμική συσχέτιση	191
10.4.1	Διάγραμμα διασποράς	191
10.4.2	Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης	192
10.5	Απλή γραμμική παλινδρόμηση	194
	Ασκήσεις	196
	Βιβλιογραφία	199



ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Κεφάλαιο 1: Στοιχεία Άλγεβρας

Κεφάλαιο 2: Γραφήματα

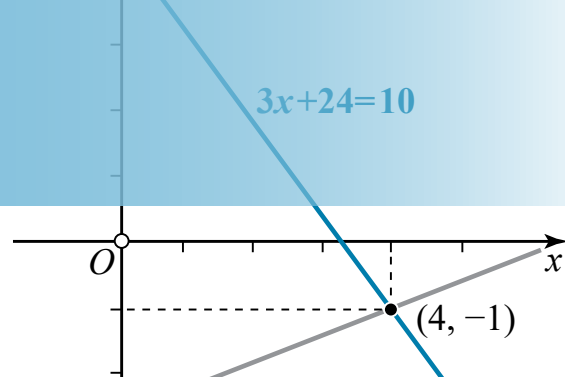
Κεφάλαιο 3: Αναλογία, μεταβολή και παρεμβολή

Κεφάλαιο 4: Γεωμετρία

Κεφάλαιο 5: Επίπεδη τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 6: Μετρήσεις

Στοιχεία Άλγεβρας



Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά σε βασικές γνώσεις άλγεβρας, όπως δυνάμεις, ταυτότητες, εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού και γραμμικά συστήματα. Οι περισσότερες έννοιες είναι ήδη γνωστές από το σχολείο, οπότε γίνεται μια επανάληψη αυτών, δίνοντας έμφαση σε ναυτικές εφαρμογές.

1.1 Αλγεβρικές παραστάσεις

1.1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί

Υπενθυμίζουμε τα σύνολα των αριθμών, με τους αντίστοιχους συμβολισμούς τους:

1) Το σύνολο των **φυσικών αριθμών**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

2) Το σύνολο των **ακέραιων αριθμών**:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

3) Το σύνολο των **ρητών αριθμών**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \mid \mu, \nu \text{ ακέραιοι με } \nu \neq 0 \text{ και } \text{ΜΚΔ}(\mu, \nu) = 1 \right\}$$

Δηλαδή, **ρητός** λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος.

4) Το σύνολο των **άρρητων αριθμών** $\mathbb{Q}'$ που περιλαμβάνει τους αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν την μορφή κλάσματος, όπως για παράδειγμα:

$$\pi \simeq 3,14 \quad e \simeq 2,71 \quad \sqrt{2}, \sqrt{3} \text{ κ.ά.}$$

5) Το σύνολο των **πραγματικών** $\mathbb{R}$ αριθμών που αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους. Προφανώς ισχύει: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

– Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Η δύναμη με βάση έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό a και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό $n \geq 1$ συμβολίζεται με a^n και είναι το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a . Δηλαδή:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

$$\text{Άρα: } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9, \quad (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Παρατήρηση

Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι όταν η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης είναι άρτιος τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι θετικός αριθμός, ενώ όταν η βάση είναι αρνητικός και ο εκθέτης περιττός, τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός.

$$v = 10 \text{ knots} \quad x = 10 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	240

$$v = 15 \text{ knots} \quad x = 15 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	360

$$v = 20 \text{ knots} \quad x = 20 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	480

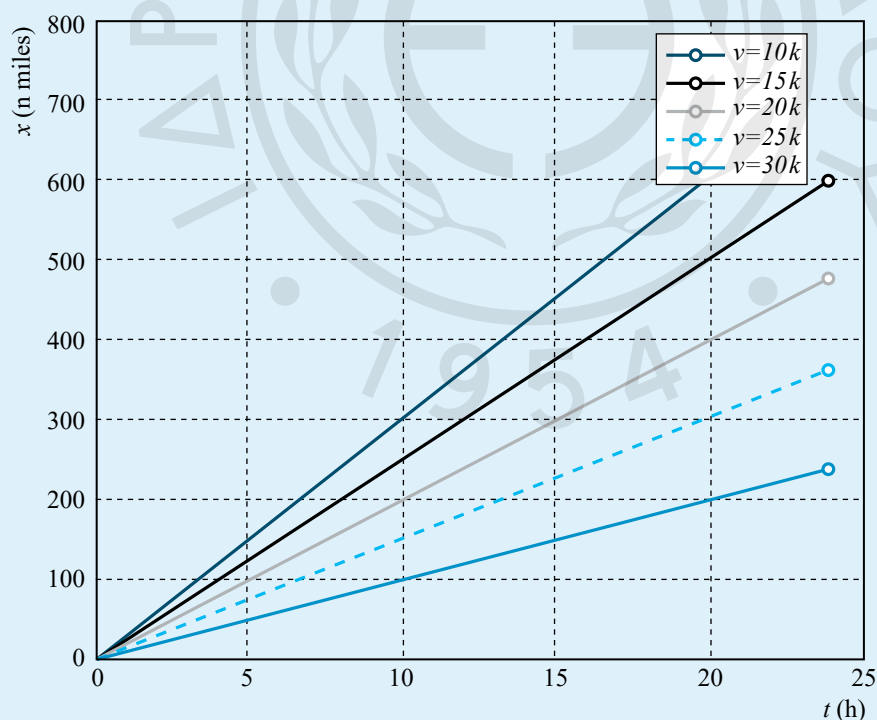
$$v = 25 \text{ knots} \quad x = 25 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	600

$$v = 30 \text{ knots} \quad x = 30 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	720

Στη συνέχεια θα παραστήσουμε γραφικά τις 5 ευθείες. Στον οριζόντιο άξονα θα τοποθετηθεί ο χρόνος t . Οι τιμές που θα βάλουμε είναι από 0 έως 24 h, οπότε θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το βήμα 5. Η απόσταση x που θα μπει στον κατακόρυφο άξονα έχει τιμές από 0 έως 720. Επομένως ένα κατάλληλο βήμα είναι 100 (σχ. 2.6)



Σχ. 2.6

α) Από το γράφημα βλέπουμε ότι για $t=12$ h η αντίστοιχη τεταγμένη του σημείου του γραφήματος ($v=25$ knots) είναι 300. Άρα όταν το πλοίο κινείται με ταχύτητα 25 knots, σε 12 h θα διανύσει 300 ν.μ. (σχ. 2.7).

β) Στον κατακόρυφο άξονα βρίσκουμε την τιμή 300. Από το γράφημα ($v=20$ knots) βλέ-

Ασκήσεις

1. Να δοθεί γράφημα $y=f(x)$ για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

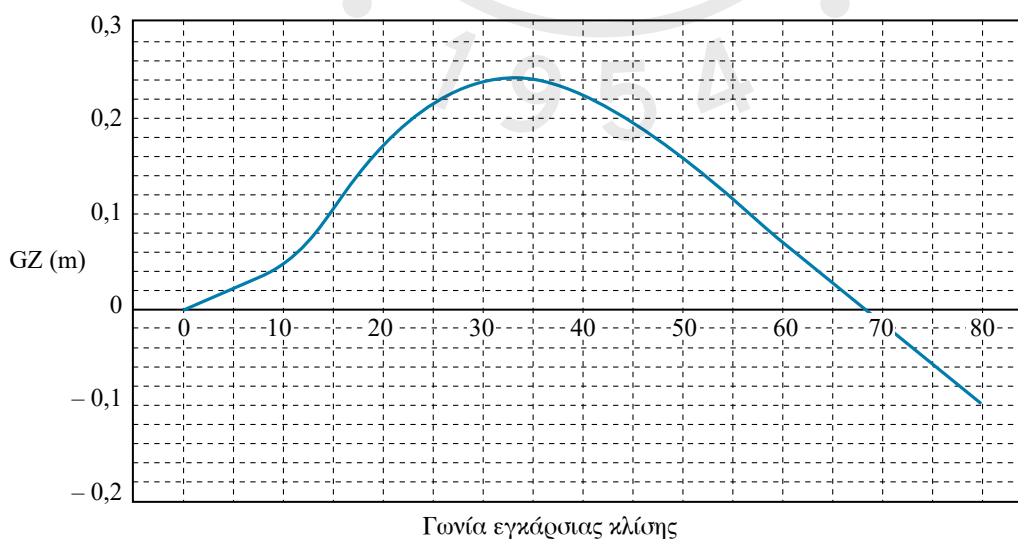
x	y
200	30
500	62
760	82
850	70
1100	60

2. Να δοθεί γράφημα $y=f(x)$ όπου x : εκτόπισμα σε και y βύθισμα σε m για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Εκτόπισμα x	Βύθισμα y (m)
21.800	5,00
20.892	4,80
19.951	4,60
19.023	4,40
18.192	4,20
16.268	4,00

3. Στο σχήμα 2.22 φαίνεται η καμπύλη στατικής ευστάθειας ενός πλοίου. Να βρεθούν:

- Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για κλίση $\varphi = 25^\circ$.
- Η γωνία για την οποία μεγιστοποιείται ο GZ και η μέγιστη τιμή του GZ .
- Η περιοχή θετικής ευστάθειας.
- Η γωνία μηδενικής ευστάθειας, όπου ο GZ αποκτά μηδενική τιμή.



Σχ. 2.22

4. Να υπολογιστεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς όταν το εκτόπισμα του πλοίου είναι

τμήματος ΓΔ, αλλά και απόσταση των σημείων Γ και Δ. Στη πράξη, για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα μέτρησης. Αυτή η μονάδα είναι το **μέτρο (m)** και οι υποδιαιρέσεις της. (Οι μονάδες μέτρησης μήκους θα μελετηθούν διεξοδικά στο κεφ. 6.)

Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB συμβολίζεται (AB) ή πιο απλά AB. Δηλαδή με το σύμβολο **AB** εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το ευθύγραμμο τμήμα AB, αλλά και το μήκος αυτού. Στο βιβλίο αυτό θα αναφερόμαστε στο μήκος του AB γράφοντας απλά AB.

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται το εσωτερικό του σημείο M τέτοιο ώστε $AM=MB$ (σχ. 4.5).



Σχ. 4.5

– Είδη γωνιών

Θεωρούμε δύο ημιευθείες Ox και Oy με κοινή αρχή O . Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2 . Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται **γωνία** (σχ. 4.6).

Η μικρότερη ονομάζεται **κυρτή γωνία** και η μεγαλύτερη **μη κυρτή γωνία**.

Το σημείο O λέγεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες Ox και Oy **πλευρές** της γωνίας.

1) Συμβολισμός γωνίας

Η γωνία του σχήματος 4.7 μπορεί να συμβολιστεί με τους εξής τρόπους:

α) Γωνία $\hat{\omega}$

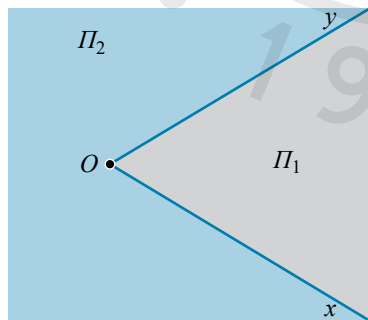
β) Γωνία $x\hat{O}y$

γ) Γωνία $A\hat{O}B$ (το μεσαίο γράμμα είναι η κορυφή της γωνίας)

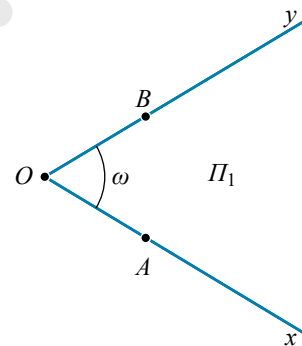
δ) Γωνία $\hat{O}$

Αν οι ημιευθείες Ox και Oy ταυτίζονται, η κυρτή γωνία λέγεται **μηδενική γωνία** [σχ. 4.8(α)] και η μη κυρτή **πλήρης γωνία** [σχ. 4.8(β)]. Αν οι ημιευθείες Ox , Oy είναι αντικείμενες, τότε κάθε μία από τις δύο γωνίες (κυρτή και μη κυρτή) λέγεται **ευθεία γωνία** [σχ. 4.8(γ)].

Σε κάθε γωνία αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό που ονομάζεται **μέτρο** της γωνίας. Ως μο-



Σχ. 4.6



Σχ. 4.7



(α)



(β)



(γ)

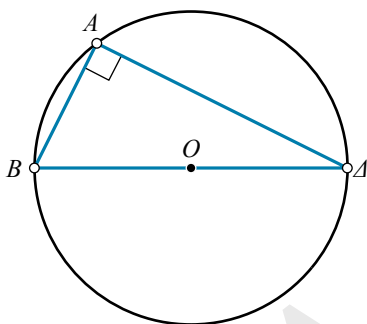
Σχ. 4.8

(α) Μηδενική γωνία, (β) πλήρης γωνία και (γ) ευθεία γωνία

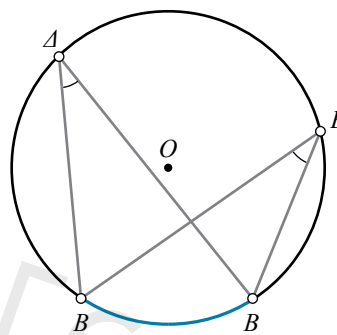
2) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Δηλαδή στο σχήμα 4.50

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BA\Delta}}{2} = 90^\circ$$

3) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα. Δηλαδή στο σχήμα 4.51 $\hat{A} = \hat{E}$.



Σχ. 4.50



Σχ. 4.51



Παράδειγμα 4.4

Στο σχήμα 4.52 η BD είναι διάμετρος και $\hat{A} = 40^\circ$. Να βρεθούν:

α) Οι γωνίες του τριγώνου BΓΔ.

β) Το τόξο ΓΔ.

Λύση

α) $\hat{\Delta} = \hat{A} = 40^\circ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο BΓ.

Η BΓΔ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, δηλαδή:

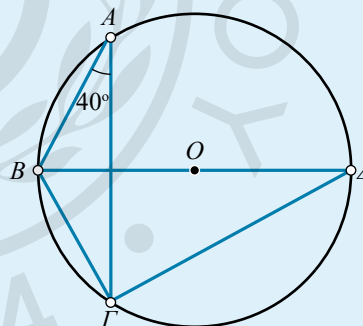
$$\widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{BA\Delta}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Στο τρίγωνο BΓΔ ισχύει:

$$\Delta\hat{B}\Gamma + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 50^\circ$$

β) Η ΓΒΔ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ΓΔ. Άρα:

$$\Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 50^\circ = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 100^\circ$$



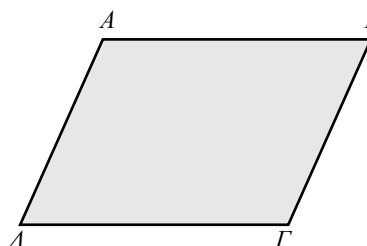
Σχ. 4.52

4.10 Τετράπλευρα

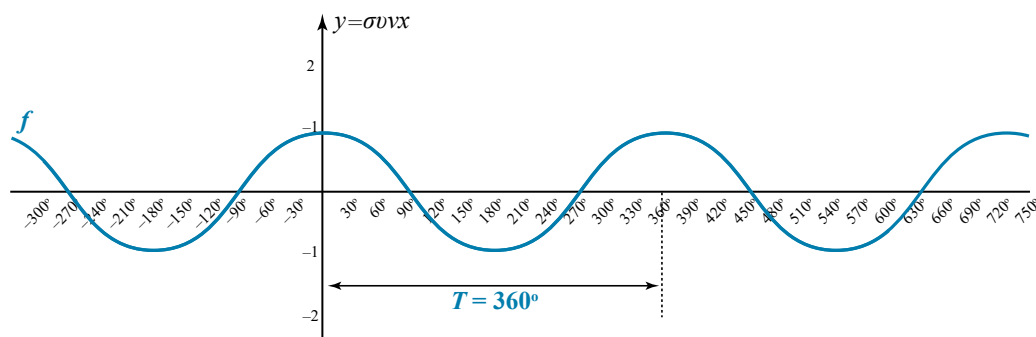
4.10.1 Παραλληλόγραμμο – Ιδιότητες παραλληλογράμμου

Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.53 το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$

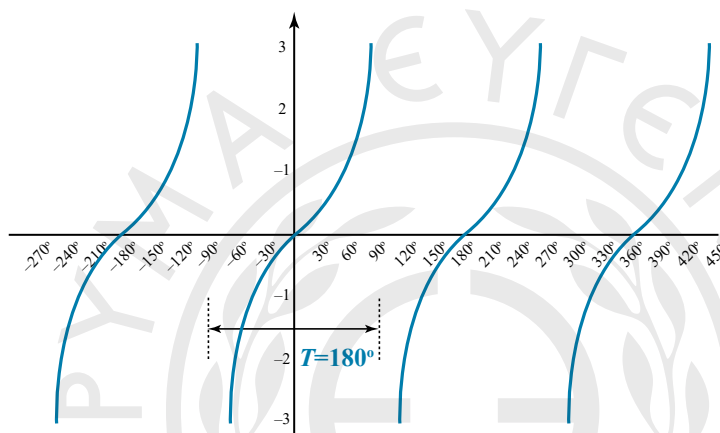


Σχ. 4.53



Σχ. 5.20

Το γράφημα της συνάρτησης $y = \sin x$



Σχ. 5.21

Το γράφημα της συνάρτησης $y = \cot x$

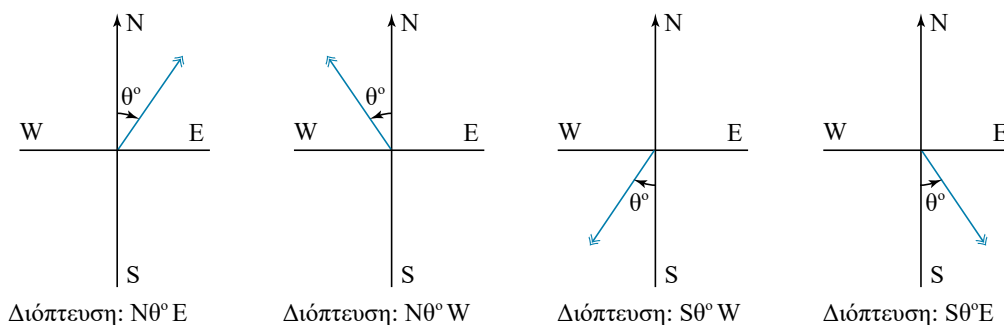
5.8. Εφαρμογές επίπεδης τριγωνομετρίας στην Ναυτιλία

5.8.1 Διόπτευση

Διόπτευση ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ κάποιας γραμμής αναγωγής και της κατεύθυνσης ενός αντικειμένου στον ορίζοντα.

Στη Ναυτιλία χρησιμοποιούμε την τεταρτοκυκλική και την ολοκυκλική διόπτευση.

1) Στην **τεταρτοκυκλική** διόπτευση μετράμε τη γωνία από Βορρά ή Νότο προς Ανατολή ή Δύση. Η γωνία παίρνει τιμές από 0° έως 90° , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.22.



Σχ. 5.22

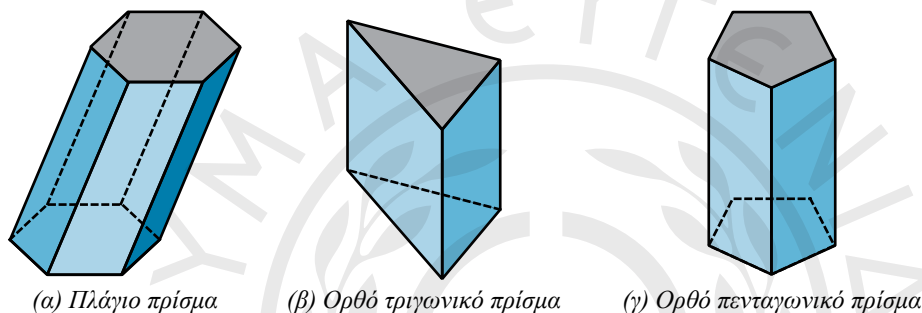
Τεταρτοκυκλική διόπτευση

Τα στερεά εκ περιστροφής με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα. Τα στερεά αυτά ονομάζονται έτσι γιατί σχηματίζονται κατά την περιστροφή επιπέδων σχημάτων.

6.4.1 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος πρίσματος

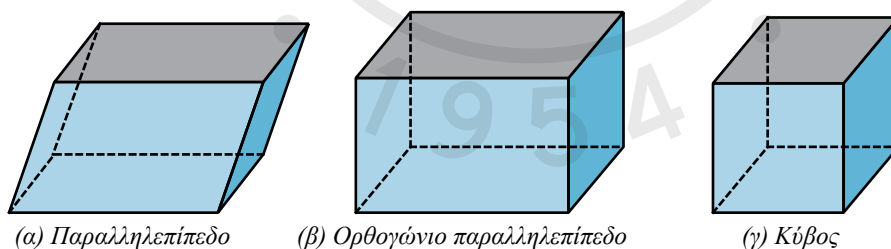
Πρίσμα ονομάζεται το πολύεδρο που έχει δύο απέναντι έδρες ίσες και παράλληλες και όλες τις άλλες έδρες του παραλληλόγραμμα. Οι παράλληλες έδρες λέγονται **βάσεις** του πρίσματος, ενώ όλες οι υπόλοιπες έδρες που περικλείονται μεταξύ των επιπέδων των βάσεων λέγονται **παράπλευρες έδρες**. Οι πλευρές των εδρών λέγονται **ακμές**. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα στα επίπεδα των βάσεων και είναι κάθετο σε αυτά λέγεται **ύψος** του πρίσματος. **Ορθό** λέγεται το πρίσμα που οι έδρες του είναι κάθετες στις βάσεις του, διαφορετικά λέγεται **πλάγιο**.

Ένα πρίσμα παίρνει την ονομασία του από το σχήμα των βάσεών του. Αν είναι τρίγωνα τότε το πρίσμα λέγεται τριγωνικό, αν είναι εξάγωνα εξαγωνικό κ.λπ. (σχ. 6.15).



Σχ. 6.15

Αν και οι βάσεις ενός πρίσματος είναι παραλληλόγραμμα, τότε το πρίσμα λέγεται **παραλληλεπίπεδο**. Αν το πρίσμα είναι ορθό και οι βάσεις είναι ορθογώνια, το πρίσμα λέγεται **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**. Ειδικότερα, αν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις ακμές ίσες, λέγεται **κύβος** (σχ. 6.16).



Σχ. 6.16

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας

$$E_{\pi} = \Pi_{\text{βάσης}} \cdot \upsilon$$

Είναι προφανές ότι για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας αρκεί να προσθέσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης με το εμβαδόν των δύο βάσεων:

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας

$$E_{\text{ολ}} = 2E_{\text{βάσης}} + E_{\pi}$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Κεφάλαιο 7: Διανύσματα

Κεφάλαιο 8: Σφαιρικά τρίγωνα

Κεφάλαιο 9: Κωνικές τομές

Κεφάλαιο 10: Στατιστική

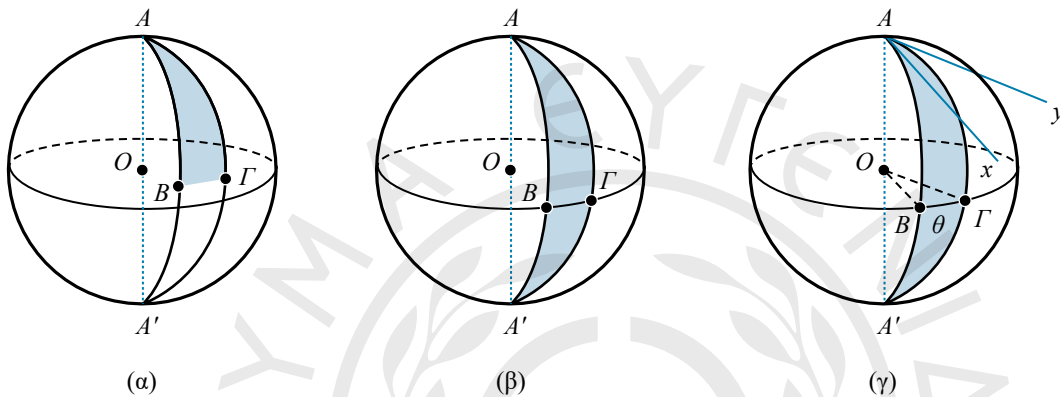
– Ιδιότητες σφαιρικής γωνίας

1) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο της διέδρης γωνίας την οποία σχηματίζουν τα επίπεδα που περιέχουν τις πλευρές της. Στο σχήμα 8.7 η διέδρη γωνία έχει ακμή τη διάμετρο AA' και έδρες τα δύο ημιεπίπεδα που περιέχουν τα τόξα $\widehat{ABA'}$ και $\widehat{AB\Gamma'}$ αντίστοιχα.

2) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου του ισημερινού κύκλου της κορυφής, το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών της. Το μέτρο αυτού του τόξου είναι ίσο με την επίκεντρη γωνία του ισημερινού κύκλου, η οποία βαίνει σε αυτό [σχ. 8.7(γ)].

Επομένως ισχύει:

$$\widehat{xAy} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{BO\Gamma} = \theta$$



Σχ. 8.7

8.2 Σφαιρικό τρίγωνο

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των τόξων τριών μέγιστων κύκλων μικρότερων του ημικυκλίου, τα οποία δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Στο σχήμα 8.8 τρεις μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και σχηματίζεται το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία τομής A, B, Γ των μέγιστων κύκλων ονομάζονται **κορυφές του σφαιρικού τριγώνου**.

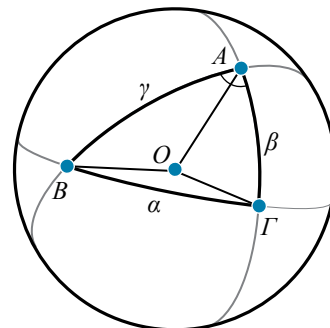
Αν ενώσουμε το κέντρο O της σφαίρας με τις κορυφές A, B, Γ , σχηματίζεται η τριέδρη γωνία $O.AB\Gamma$. Λέμε ότι στην τριέδρη αυτή γωνία αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$.

– Κύρια στοιχεία σφαιρικού τριγώνου

1) Τα τόξα των τριών μέγιστων κύκλων ονομάζονται **πλευρές** του σφαιρικού τριγώνου. Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου του σχήματος 8.8 είναι τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ και συμβολίζονται και με μικρά γράμματα γ, α, β αντίστοιχα. Κάθε πλευρά είναι τόξο μικρότερο του ημικυκλίου, δηλαδή είναι μικρότερη από 180° . Το **μέτρο της πλευράς** είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε αυτό. Δηλαδή:

$$\widehat{BO\Gamma} = \alpha \quad \widehat{AO\Gamma} = \beta \quad \widehat{AOB} = \gamma$$

2) Οι γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ονομάζονται **γωνίες του σφαιρικού τριγώνου**, συμβολίζονται με A, B, Γ και έχουν το ίδιο μέτρο με τις διέδρες γωνίες A, B, Γ αντίστοιχα. Ισοδύναμα, οι γωνίες A, B και Γ του σφαιρικού τριγώνου είναι οι επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μέγιστων κύκλων σε κάθε



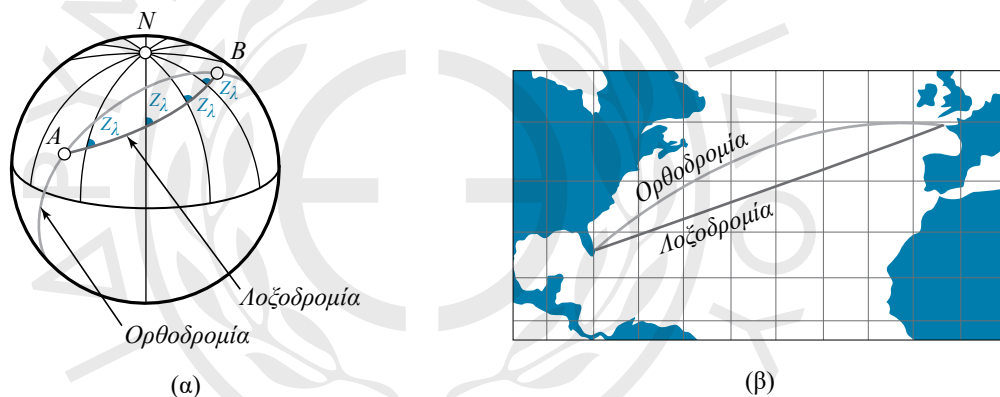
Σχ. 8.8

8.6 Εφαρμογές σφαιρικής τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία και την Αστρονομία

Η σφαιρική τριγωνομετρία έχει εφαρμογές σε σημαντικά προβλήματα της Ναυτιλίας. Δύο πολύ σημαντικά σφαιρικά τρίγωνα είναι το τρίγωνο ορθοδρομίας και το τρίγωνο θέσης. Το **τρίγωνο ορθοδρομίας** είναι σφαιρικό τρίγωνο της γήινης σφαίρας, και η σημαντικότερη εφαρμογή του είναι ο υπολογισμός της απόστασης που διανύει ένα πλοίο που εκτελεί ορθοδρομία. Το **τρίγωνο θέσης** είναι σφαιρικό τρίγωνο της ουράνιας σφαίρας, με κορυφές το Ζενίθ (Ζ) του παρατηρητή, τον άνω ουράνιο πόλο (Π) και τη θέση ενός αστέρα (Σ). Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές του τριγώνου θέσης είναι ο προσδιορισμός των γεωγραφικών συντεταγμένων της θέσης ενός παρατηρητή.

8.6.1 Τρίγωνο ορθοδρομίας

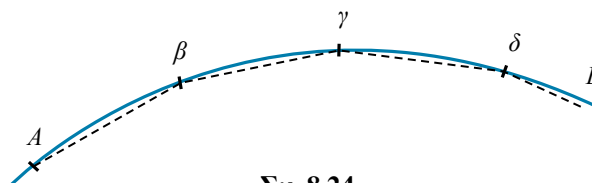
Στην Ναυτιλία, η πλεύση από ένα σημείο αναχώρησης Α προς ένα σημείο προορισμού Β μπορεί να γίνει είτε με λοξοδρομία, είτε με ορθοδρομία, είτε με συνδυασμό αυτών των δύο πλεύσεων (μεικτός ή σύνθετος πλους). Ήδη, στο κεφάλαιο 5, έχουμε μελετήσει την λοξοδρομική πλεύση. Είδαμε ότι κατά την λοξοδρομία, το πλοίο διατηρεί σταθερή πορεία, η οποία τέμνει τους μεσημβρινούς υπό την ίδια γωνία [σχ. 8.23(α)]. Επειδή όμως το πλοίο κινείται σε μικρό κύκλο (εκτός αν η λοξοδρομία είναι πάνω σε μεσημβρινό ή τον ισημερινό), δεν διανύεται η μικρότερη δυνατή απόσταση.



Σχ. 8.23

(α) Απεικόνιση λοξοδρομίας και ορθοδρομίας στη σφαίρα
(β) Απεικόνιση λοξοδρομίας και ορθοδρομίας στον μερκατορικό χάρτη

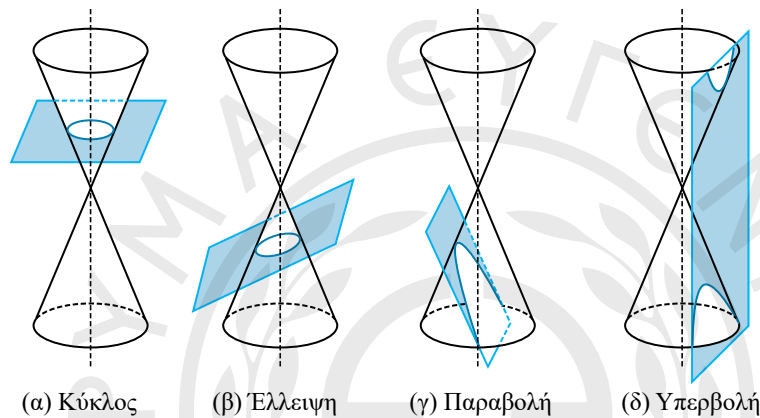
Ορθοδρομία ή **ορθοδρομικό τόξο** ονομάζεται το μικρότερο από 180° τόξο μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο τόπους. Ανάμεσα σε δύο τόπους υπάρχουν άπειρα τόξα που τους συνδέουν. Το μικρότερο τόξο που τους ενώνει είναι το τόξο που ανήκει σε μέγιστο κύκλο, δηλαδή το ορθοδρομικό τόξο. Η πλεύση ενός πλοίου που κινείται πάνω σε μέγιστο κύκλο, ονομάζεται **ορθοδρομική πλεύση**. Δηλαδή, κατά την ορθοδρομική πλεύση, διανύεται η μικρότερη δυνατή απόσταση για να πάμε από έναν τόπο σε έναν άλλον. Το ορθοδρομικό τόξο τέμνει τους μεσημβρινούς υπό διαφορετική γωνία τον καθένα. Αυτό σημαίνει ότι για να κινείται ένα πλοίο πάνω σε ορθοδρομικό τόξο πρέπει να αλλάζει την πορεία του συνεχώς. Αυτό που συμβαίνει στην πράξη είναι ότι το πλοίο κινείται πάνω σε τεθλασμένη γραμμή (σχ. 8.24),



Σχ. 8.24

Κωνικές τομές

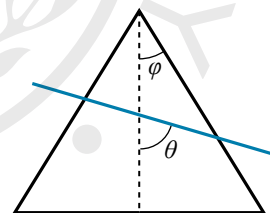
Κωνική τομή ονομάζεται μια **καμπύλη** που προκύπτει από την τομή ενός επιπέδου με δύο ίσες ορθές άπειρες κωνικές επιφάνειες που έχουν κοινή κορυφή και οι άξονες περιστροφής τους είναι αντικείμενες ημιευθείες. Η θέση του επιπέδου ως προς τον κώνο καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής. Όλες οι δυνατές τέτοιες καμπύλες παρουσιάζονται στο σχήμα 9.1.



Σχ. 9.1

Τέμνοντας την άπειρη κωνική επιφάνεια με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα της παίρνουμε έναν κώνο. Έστω ότι φ είναι η ημιγωνία της κορυφής του κώνου και θ η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο της κωνικής τομής με το ύψος του κώνου (σχ. 9.2):

- 1) Εάν το επίπεδο είναι κάθετο στο ύψος του κώνου η κωνική τομή είναι ένας **κύκλος**.
- 2) Εάν ισχύει $\varphi < \theta$, τότε η κωνική τομή είναι μια **έλλειψη**.
- 3) Εάν $\varphi = \theta$, δηλαδή το επίπεδο της κωνικής τομής είναι παράλληλο προς μια γενέτειρα του κώνου, η κωνική τομή είναι **παραβολή**.
- 4) Εάν $\varphi > \theta$, τότε η κωνική τομή είναι **υπερβολή**.



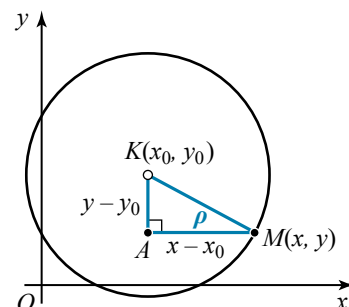
Σχ. 9.2

9.1 Ο κύκλος

9.1.1 Εξίσωση κύκλου με κέντρο και ακτίνα ρ

Έστω Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και C ο κύκλος με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ (σχ. 9.3). Είδαμε στο κεφάλαιο 4 ότι ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση ρ από το κέντρο του κύκλου. Άρα ένα σημείο $M(x, y)$ θα είναι σημείο του κύκλου αν και μόνον αν:

$$(KM) = \rho$$



Σχ. 9.3

2) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \frac{y \cdot y_1}{a^2} + \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$$

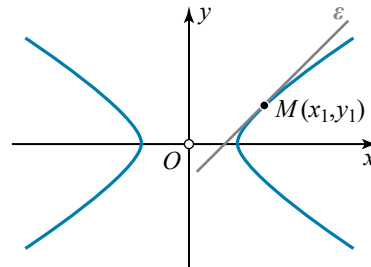
9.4.3 Ασύμπτωτες υπερβολής

Έστω η υπερβολή με εξίσωση

$$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Ονομάζουμε **ασύμπτωτες** της υπερβολής C τις ευθείες με εξίσωση (σχ. 9.18):

$$\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{a}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{a}x$$



Σχ. 9.18

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου $K1MN$ με κορυφές τα σημεία $K(a, \beta)$, $A(a, -\beta)$, $M(-a, -\beta)$ και $N(-a, \beta)$. Το ορθογώνιο αυτό λέγεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής (σχ. 9.19). Οι ασύμπτωτες βοηθούν στον σχεδιασμό της υπερβολής. Παρατηρούμε ότι οι κλάδοι της υπερβολής «πλησιάζουν» τις ευθείες ε_1 και ε_2 χωρίς όμως να τις ακουμπούν.

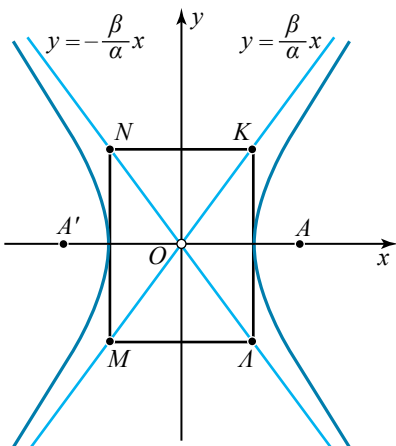
Αν η υπερβολή έχει εξίσωση $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, τότε οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y = \frac{a}{\beta}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -\frac{a}{\beta}x$$

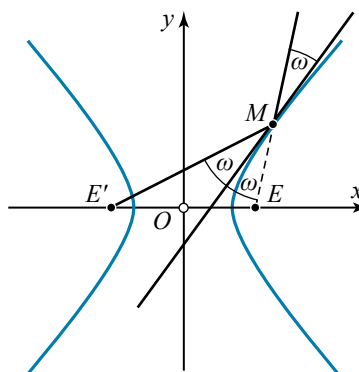
9.4.4 Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'ME$, όπου E, E' οι εστίες της υπερβολής (σχ. 9.20).

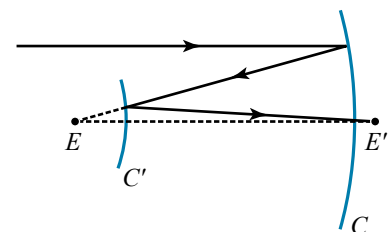
Η φυσική ερμηνεία της ανακλαστικής ιδιότητας της υπερβολής είναι η εξής: μια ακτίνα φωτός, (η προέκταση του ME προς τα πάνω στο σχ. 9.20) κατευθυνόμενη προς την μία εστία της υπερβολής, όταν ανακλάται στην επιφάνεια αυτής (στο σημείο M), διέρχεται από την άλλη εστία. Η ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής, σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες των άλλων κωνικών τομών έχει εφαρμογή στην κατασκευή των ανακλαστικών τηλεσκοπίων, καθώς και στη ναυσιπλοΐα για τον προσδιορισμό του στίγματος των πλοίων (σχ. 9.21).



Σχ. 9.19



Σχ. 9.20



Σχ. 9.21



Παράδειγμα 10.4

Να κατασκευαστούν τα κυκλικά διαγράμματα των μεταβλητών:

- α) «Κατηγορία πλοίου» του παραδείγματος 10.1 και
 β) «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι» του παραδείγματος 10.3.

Λύση

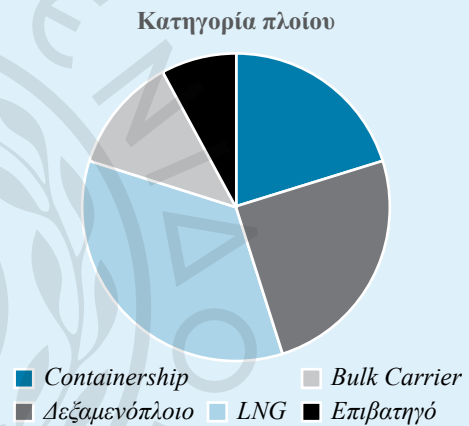
α) Η τελευταία στήλη του πίνακα 10.10 περιέχει τον υπολογισμό των γωνιών του κυκλικού διαγράμματος

β) Στην τελευταία στήλη του πίνακα 10.11 υπολογίζονται οι γωνίες για το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής».

Στο σχήμα 10.4 αποτυπώνεται το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Κατηγορία πλοίου» και στο σχήμα 10.5 αποτυπώνεται το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι».

Πίνακας 10.10

	v_i	f_i	$a_i = \frac{v_i}{n} \cdot 360^\circ$
Containership	8	0,2	$\frac{8}{40} \cdot 360^\circ = 72^\circ$
Δεξαμενόπλοιο	10	0,25	$\frac{10}{40} \cdot 360^\circ = 90^\circ$
LNG	14	0,35	$\frac{14}{40} \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Bulk Carrier	5	0,12	$\frac{5}{40} \cdot 360^\circ = 45^\circ$
Επιβατικό	3	0,075	$\frac{3}{40} \cdot 360^\circ = 27^\circ$
ΣΥΝΟΛΟ	40	1	360°



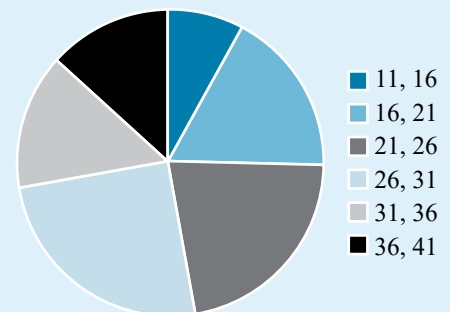
Σχ. 10.4

Κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Κατηγορία πλοίου»

Πίνακας 10.11

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές	Συχν.	Σχετική Συχνότητα	Σχετική συχνότητα ποσοστό
[,)	x_i	v_i	$f_i = \frac{v_i}{n}$	$a_i = \frac{360}{n} \cdot v_i = 360f_i$
[11, 16)	13,5	3	0,075	$0,075 \cdot 360^\circ = 27^\circ$
[16, 21)	18,5	7	0,175	$0,175 \cdot 360^\circ = 63^\circ$
[21, 26)	23,5	9	0,225	$0,225 \cdot 360^\circ = 81^\circ$
[26, 31)	28,5	10	0,25	$0,25 \cdot 360^\circ = 90^\circ$
[31, 36)	33,5	6	0,15	$0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$
[36, 41)	38,5	5	0,125	$0,125 \cdot 360^\circ = 45^\circ$

Χρόνος παραμονής στο λιμάνι
σε λεπτά



Σχ. 10.5

Κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι»

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους σπουδαστές A' και B' εξαμήνου της σχολής Πλοιάρχων των Ακαδημιών Εμπορικού Ναυτικού. Στόχος του είναι να αποκτήσουν οι σπουδαστές τις απαραίτητες γνώσεις Μαθηματικών, που θα χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια των σπουδών τους στην Ακαδημία, αλλά και στην μετέπειτα εργασία τους στο πλοίο. Περιλαμβάνει βασικές γνώσεις Άλγεβρας, Ευκλείδειας και Αναλυτικής Γεωμετρίας, Στατιστικής, Επίπεδης και Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Όλα τα κεφάλαια, αλλά ιδιαιτέρως η Επίπεδη και η Σφαιρική Τριγωνομετρία, περιλαμβάνουν εφαρμογές στη ναυτιλία.

