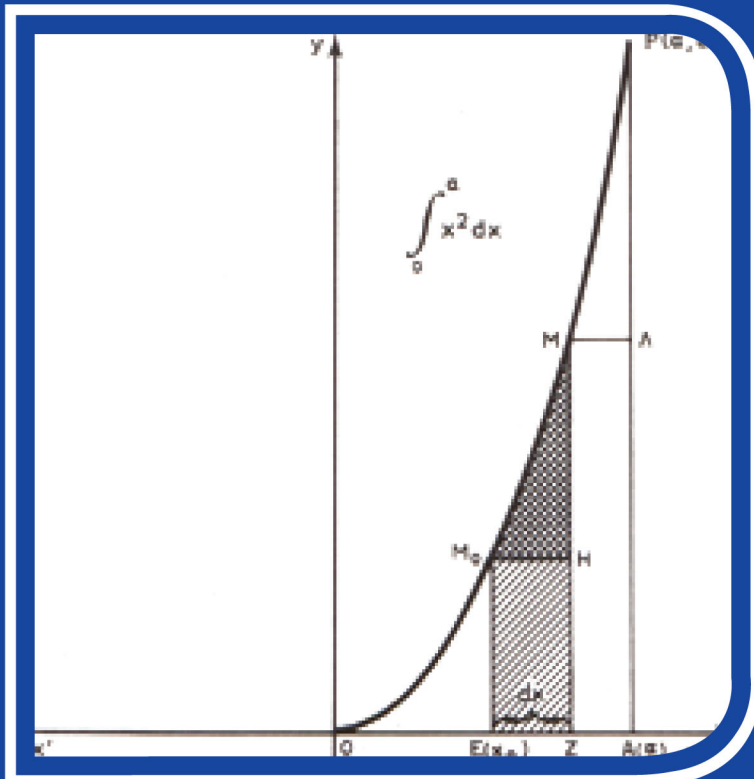


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στρατή Παπαδοπούλου
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ





Α' ΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤΡΑΤΗ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΑΘΗΝΑ
1978

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ὁ Ἰδρυτής καί χορηγός τοῦ «Ἰδρύματος Εὐγενίδου», πολὺ νωρὶς πρόβλεψε καί σχημάτισε τὴν πεποίθησιν ὅτι ἡ ἄρτια κατάρτιση τῶν τεχνικῶν μας, σέ συνδυασμὸ μέ τὴν ἐθνικὴ ἀγωγή, θά ἦταν ἀναγκαῖος καί ἀποφασιστικός παράγοντας τῆς προόδου τοῦ Ἔθνους μας.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴ ὁ Εὐγενίδης ἐκδήλωσε μέ τὴ γενναιόφρονα πράξιν εὐεργεσίας, νά κληροδοτήσῃ σεβαστὸ ποσὸ γιὰ τὴ σύστασιν Ἰδρύματος πού θά εἶχε σκοπὸ νά συμβάλλῃ στὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς Ἑλλάδας.

Ἔτσι τὸ Φεβρουάριον τοῦ 1956 συστάθηκε τὸ «Ἰδρυμα Εὐγενίδου», τοῦ ὁποῖου τὴν διοίκησιν ἀνέλαβε ἡ ἀδελφὴ του κυρία Μαριάνθη Σίμου, σύμφωνα μέ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτη.

Ἀπὸ τὸ 1956 μέχρι σήμερα ἡ συμβολὴ τοῦ Ἰδρύματος στὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευσιν πραγματοποιεῖται μέ διάφορες δραστηριότητες. Ὅμως ἀπ' αὐτὲς ἡ σημαντικότερη, πού κρίθηκε ἀπὸ τὴν ἀρχὴ ὡς πρώτης ἀνάγκης, εἶναι ἡ ἐκδοσὴ βιβλίων γιὰ τοὺς μαθητὲς τῶν τεχνικῶν σχολῶν.

Μέχρι σήμερα ἐκδόθηκαν 150 τόμοι βιβλίων, πού ἔχουν διατεθεῖ σέ πολλὰ ἑκατομμύρια τεύχη, καί καλύπτουν ἀνάγκες τῶν Κατώτερων καί Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ Ὑπ. Παιδείας, τῶν Σχολῶν τοῦ Ὁργανισμοῦ Ἀπασχολήσεως Ἑργατικοῦ Δυναμικοῦ (ΟΑΕΔ) καί τῶν Δημοσίων Σχολῶν Ἑμπορικοῦ Ναυτικοῦ.

Μοναδικὴ φροντίδα τοῦ Ἰδρύματος σ' αὐτὴ τὴν ἐκδοτικὴν του προσπάθειαν ἦταν καί εἶναι ἡ ποιότητα τῶν βιβλίων, ἀπὸ ἀποψη ὅχι μόνον ἐπιστημονικὴ, παιδαγωγικὴ καί γλωσσικὴ, ἀλλὰ καί ἀπὸ ἀποψη ἐμφανίσεως, ὥστε τὸ βιβλίον νά ἀγαπηθεῖ ἀπὸ τοὺς νέους.

Γιὰ τὴν ἐπιστημονικὴ καί παιδαγωγικὴ ποιότητα τῶν βιβλίων, τὰ κείμενα ὑποβάλλονται σέ πολλὰς ἐπεξεργασίας καί βελτιώνονται πρὶν ἀπὸ κάθε νέα ἐκδοσιν.

Ἰδιαιτέρη σημασία ἀπέδωσε τὸ Ἰδρυμα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν στὴν ποιότητα τῶν βιβλίων ἀπὸ γλωσσικὴ ἀποψη, γιατί πιστεύει ὅτι καί τὰ τεχνικὰ βιβλία, ὅταν εἶναι γραμμένα σέ γλῶσσα ἄρτια καί ὁμοίομορφη ἀλλὰ καί κατάλληλη γιὰ τὴ στάθμην τῶν μαθητῶν, μποροῦν νά συμβάλλουν στὴν γλωσσικὴ διαπαιδαγώγησιν τῶν μαθητῶν.

Ἔτσι μέ ἀπόφασιν πού πάρθηκε ἤδη ἀπὸ τὸ 1956 ὅλα τὰ βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Τεχνίτη, δηλαδὴ τὰ βιβλία γιὰ τίς Κατώτερες Τεχνικὲς Σχολές, ὅπως ἀργότερα καί γιὰ τίς Σχολές τοῦ ΟΑΕΔ, εἶναι γραμμένα σέ γλῶσσα δημοτικὴ μέ βάση τὴν γραμματικὴν τοῦ Τριανταφυλλίδου, ἐνῶ ὅλα τὰ ἄλλα βιβλία εἶναι γραμμένα στὴν ἀπλὴ καθαρεύουσα. Ἡ γλωσσικὴ ἐπεξεργασία τῶν βιβλίων γίνεται ἀπὸ φιλόλογους τοῦ Ἰδρύματος καί ἔτσι ἐξασφαλίζεται ἡ ἐνιαία σύνταξις καί ὁρολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Ἡ ποιότητα τοῦ χαρτιοῦ, τὸ εἶδος τῶν τυπογραφικῶν στοιχείων, τὰ σωστά σχήματα καὶ ἡ καλαίσθητη σελιδοποίηση, τὸ ἐξώφυλλο καὶ τὸ μέγεθος τοῦ βιβλίου περιλαμβάνονται καὶ αὐτὰ στίς φροντίδες τοῦ Ἰδρύματος.

Τὸ Ἰδρυμα θεώρησε ὅτι εἶναι ὑποχρέωσή του, σύμφωνα μέ τὸ πνεῦμα τοῦ ἰδρυτῆ του, νά θέσει στήν διάθεση τοῦ Κράτους ὅλη αὐτή τήν πείρα του τῶν 20 ἐτῶν, ἀναλαμβάνοντας τήν ἔκδοση τῶν βιβλίων καὶ γιά τίς νέες Τεχνικές καί Ἑπαγγελματικές Σχολές καὶ τὰ νέα Τεχνικά καί Ἑπαγγελματικά Λύκεια.

Τά χρονικά περιθώρια γι' αὐτή τήν νέα ἐκδοτική προσπάθεια ἦταν πολύ περιορισμένα καὶ ἴσως γι' αὐτό, ἰδίως τὰ πρῶτα βιβλία αὐτῆς τῆς σειρᾶς, νά παρουσιάσουν ἀτέλειες στή συγγραφή ἢ στήν ἐκτύπωση, πού θά διορθωθοῦν στή νέα τους ἔκδοση. Γι' αὐτό τὸ σκοπὸ ἐπικαλούμαστε τήν βοήθεια ὄλων ὅσων θά χρησιμοποιήσουν τὰ βιβλία, ὥστε νά μᾶς γνωστοποιήσουν κάθε παρατήρησή τους γιά νά συμβάλλουν καὶ αὐτοὶ στή βελτίωση τῶν βιβλίων.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ἀλέξανδρος Ι. Παπᾶς, Ὁμ. Καθηγητῆς ΕΜΠ, Πρόεδρος.

Χρυσόστομος Φ. Καβονίδης, Διπλ.-Μηχ.-Ἡλ. ΕΜΠ, Διοικητῆς Ο.Τ.Ε., Ἀντιπρόεδρος.

Μιχαήλ Γ. Ἀγγελόπουλος, Τακτικὸς Καθηγητῆς ΕΜΠ, Διοικητῆς ΔΕΗ.

Παναγώτης Χατζηιωάννου, Μηχ.-Ἡλ. ΕΜΠ, Γεν. Δ/ντῆς Ἑπαγ/κῆς Ἑκπ. Ὑπ. Παιδείας.

Ἐπιστημ. Σύμβουλος, **Γ. Ροῦσσος**, Χημ.-Μηχ. ΕΜΠ.

Σύμβουλος ἐπὶ τῶν ἐκδόσεων τοῦ Ἰδρύματος, **Κ. Α. Μανάφης**, Μόν. Ἐπικ. Καθηγητῆς Παν/μίου Ἀθηνῶν.

Γραμματεὺς, **Δ. Π. Μεγαρίτης**.

Διατελέσαντα μέλη ἢ σύμβουλοι τῆς Ἐπιτροπῆς

Γεώργιος Κακριδῆς † (1955 - 1959) Καθηγητῆς ΕΜΠ, **Ἄγγελος Καλογεράς** † (1957 - 1970)

Καθηγητῆς ΕΜΠ, **Δημήτριος Νιάνιαν** (1957 - 1965) Καθηγητῆς ΕΜΠ, **Μιχαήλ Σπετσίερης** (1956 - 1959), **Νικόλαος Βασιώτης** (1960 - 1967) **Θεόδωρος Κουζέλης** (1968 - 1976) Μηχ.-Ἡλ. ΕΜΠ.

Εἰδικὸς Ἐπιστημονικὸς Σύμβουλος γιά τὸ βιβλίον Μαθηματικά, **Ν. Κρητικός**, ὁμ. Καθηγητῆς **Ε. Μ. Π.**

ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Οι εφαρμογές, πού ακολουθοῦν μετὰ ἀπὸ κάθε ἐνότητα, ἀποσκοποῦν, ὅπως εἶναι φανερό, στὴν ἐμπέδωση τῶν ἐννοιῶν καὶ τῶν ιδιοτήτων. Ὁ δάσκαλος θὰ ἐκλέξει αὐτὲς πού θεωρεῖ καταλληλότερες. Πάντως ὅσες ἔχουν γραφεῖ μὲ μικρὰ στοιχεῖα μποροῦν νὰ παραλειφθοῦν ἂν ὁ διαθέσιμος χρόνος δὲν εἶναι ἐπαρκής, ἢ νὰ χρησιμοποιοῦν σὲ μιὰ ἐνδεχόμενη ἐπανάληψη. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ ὕλικὸ πού, μέσα στὸ σῶμα τῆς βασικῆς θεωρίας, δίνεται μὲ μικρὰ στοιχεῖα.

Τὸ πλῆθος τῶν ἀσκήσεων εἶναι ἀναμφισβήτητα μεγάλο· δὲν πρέπει ὁμῶς νὰ δημιουργηθεῖ ἡ ἐντύπωση ὅτι ἐπιβάλλεται νὰ διδαχθοῦν ὅλες. Εἶναι ἔτσι γιὰ νὰ ἔχει κι' ἐδῶ ὁ δάσκαλος τὴν εὐχέρεια ἐπιλογῆς μέσα ἀπὸ ἓνα ποικίλο καὶ πλούσιο σύνολο θεμάτων. Ἐξάλλου κι' ὁ μαθητὴς θὰ πρέπει νὰ βρίσκει μέσα στὸ σχολικὸ του βιβλίο, ὅταν ἐπιθυμεῖ, ἄρκετὸ ὕλικὸ γιὰ ἐξάσκηση.

Στὴν ἐνότητα 21 γίνεται σὲ ἄρκετὴ ἔκταση ἡ μελέτῃ τῆς συνάρτησης τοῦ τύπου $y = ax^2 + bx + \gamma$. Ἐντούτοις προηγεῖται στὴν 7.2 μιὰ βασικότερη περιγραφή τῆς εἰδικότερης μορφῆς $y = ax^2 + bx$. Αὐτὸ ἔγινε γιὰ νὰ διευκολυνθεῖ ἡ διδασκαλία, στὴ Μηχανικῇ, τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως ($s = v_0 t + 1/2 \gamma t^2$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ. ΡΗΤΟΙ - ΑΡΡΗΤΟΙ (ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ)

1.1 Ὁ ρητός ἀριθμός.

Τό «ἀπλούστερο εἶδος» ἀριθμῶν εἶναι οἱ **ἀκέραιοι ἀριθμοί**. οἱ θετικοί, οἱ ἀρνητικοί ἀκέραιοι καί ὁ μηδέν.

Δηλαδή τό σύνολο:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Ἄν τώρα συμπεριλάβομε καί τά κλάσματα (τά πηλικά ἀκεραίων), δηλαδή καί τούς ἀριθμούς τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\beta}$ (π.χ. $\frac{-5}{7} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$ κτλ.), ὅπου α καί β ἀκέραιοι (μέ $\beta \neq 0$), τότε ἔχομε τό σύνολο τῶν **ρητῶν ἀριθμῶν**.

Ὡστε: **Ρητός ἀριθμός εἶναι** εἴτε ἕνας **ἀκέραιος** εἴτε **μιά κλάση ἰσων κλασμάτων**.

Στίς περισσότερες πρακτικές ἐφαρμογές οἱ ὑπολογισμοί μας γίνονται καί σήμερα, ὅπως ἐδῶ καί χιλιάδες χρόνια, μέ τή χρησιμοποίηση μόνο ρητῶν ἀριθμῶν. Καί ἐπειδή τό ἀριθμητικό μας σύστημα εἶναι τό δεκαδικό, μᾶς ἔρχεται συχνά βολικότερη ἡ γραφή τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, π.χ. $\frac{4}{10}$, $-\frac{25}{100}$ κτλ., μέ τή μορφή δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, π.χ. 0,40, -0,25 κτλ.

Αὐτός εἶναι ἕνας ἀπό τούς λόγους πού κάνουν χρήσιμη τή μετατροπή ἑνός ὁποιουδήποτε κλάσματος σέ δεκαδικό ἀριθμό καί, ὅπως γνωρίζομε, αὕτη γίνεται ἂν διαιρέσομε τόν ἀριθμητή μέ τόν παρονομαστή τοῦ κλάσματος.

Τό κλάσμα π.χ. $\frac{25}{8}$ εἶναι ἴσο μέ τόν δεκαδικό ἀριθμό 3,125, διότι:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 10 \overline{) 25} \\ \underline{20} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

Υπάρχουν όμως και κλάσματα, που δεν μετατρέπονται σε δεκαδικούς με περιορισμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Τέτοια είναι όλα εκείνα τα **ανάγωγα κλάσματα** των οποίων οι παρονομαστές έχουν ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη διαφορετικό από 2 και 5, π.χ. αριθμούς όπως οι 3, 7, 11 κτλ.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις παίρνουμε δεκαδικούς αριθμούς με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, των οποίων όμως τα δεκαδικά ψηφία από μία θέση και πέρα επαναλαμβάνονται πανομοιότυπα και με την αυτή σειρά. Αυτό του είδους οι δεκαδικοί αριθμοί λέγονται **περιοδικοί**.

Νά μερικά παραδείγματα τέτοιων κλασμάτων:

$$\text{I)} \frac{1}{3} = 0,333\dots, \quad \text{II)} \frac{7}{9} = 0,777\dots, \quad \text{III)} \frac{16}{11} = 1,4545\dots,$$

$$\text{IV)} \frac{13}{15} = 0,8666\dots$$

Διότι:	1	<u>3</u>	7	<u>9</u>	16	<u>11</u>	13	<u>15</u>
	10	0,33	70	0,77...	50	1,4545...	130	0,866...
	10		70		60		100	
	1		7		50		100	
	...		...		60		10	
					5		...	
					...			

Όπως βλέπουμε, στα τρία πρώτα παραδείγματα η **περίοδος** (ή ομάδα των επαναλαμβανομένων ψηφίων) αρχίζει άμέσως μετά την υποδιαστολή, πράγμα που δεν συμβαίνει στο τέταρτο παράδειγμα.

Γιά νά μήν επαναλαμβάνομε συνεχώς την περίοδο γράφομε συμβολικά τους περιοδικούς δεκαδικούς ως εξής: $0,\dot{3}$, $0,\dot{7}$, $1,\dot{4}\dot{5}$, $0,8\dot{6}$.

Τό ενδιαφέρον μέ τούς περιοδικούς αριθμούς είναι ότι, και οι τερματιζόμενοι δεκαδικοί και οι άκέραιοι άκόμα μπορούν νά γραφοῦν, αν θέλομε, ως περιοδικοί αριθμοί.

*Έτσι π.χ. ο δεκαδικός $0,999\dots = 0,\dot{9}$ δεν είναι άλλος από τη μονάδα.

Πράγματι: αν $\alpha = 0,999\dots$, τότε $10\alpha = 9,999\dots = 9 - 0,999\dots = 9 - \alpha \Rightarrow 9\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 1$.

*Επίσης ο δεκαδικός $1,15$ μπορεί νά γραφεί $1,14\dot{9}$ διότι:

$$\text{αν } x = 1,14\dot{9}, \text{ τότε } 100x = 114,\dot{9} = 114 + 0,\dot{9} = 114 + 1 = 115 \Rightarrow$$

$$x = \frac{115}{100} = 1,15.$$

*Εξάλλου κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί νά γραφεί ως κλάσμα.

Τά ακόλουθα παραδείγματα, όπως ακριβώς και τά δυο άμέσως προηγούμενα, μᾶς ξεηγούν τόν τρόπο εργασίας γιά τή μετατροπή ενός περιοδικού δεκαδικού σε κλάσμα.

Οί περιοδικοί δεκαδικοί $0,\dot{3}\dot{4}$ και $0,12\dot{8}$ νά μετατραπούν σέ κλάσματα.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \alpha &= 0,3434 \dots \Rightarrow 100\alpha = 34,3434 \dots = 34 + 0,3434 \dots = 34 + \alpha \\ \Rightarrow 99\alpha &= 34 \Rightarrow \alpha = \frac{34}{99}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έπίσης: } \beta &= 0,12\dot{8} \Rightarrow 100\beta = 12,8 = 12 + 0,8 = 12 + \frac{8}{10} = \frac{116}{10} \Rightarrow \\ \beta &= \frac{116}{100} = \frac{29}{25}. \end{aligned}$$

1 · 2 Ό άρρητος αριθμός.

Ό περιοδικός δεκαδικός αριθμός, πού είναι ένας άτερμάτιστος δεκαδικός αριθμός, έπειδή είναι ίσος μ' έναν άκεραίο ή ένα κλάσμα άκεραίων, είναι καλόμετο μέλος μέσα στό σύνολο των μέχρι τώρα αριθμών.

Γιατί λοιπόν σ' έναν άτερμάτιστο δεκαδικό, αλλά μή περιοδικό, νά άρνη-
θοῦμε τήν ύπόσταση τοῦ αριθμοῦ;

Αριθμοί, όπως π.χ. οί: $0,151151115 \dots$, $1,010010001 \dots$, είναι δεκα-
δικοί μέ άπερίοριστο πλήθος ψηφίων, αλλά δέν είναι ίσοι πρὸς κανένα κλάσμα
άκεραίων· διότι κάθε τέτοιο κλάσμα είναι ίσο μ' έναν περιοδικό δεκαδικόν αριθμό.

Αριθμοί σάν τούς προηγούμενους λέγονται **άρρητοι**.

Δηλαδή: **Άρρητος αριθμός είναι ένας άτερμάτιστος δεκαδικός αριθμός όχι
περιοδικός.**

Τό σύνολο όλων των ρητών και όλων των άρρήτων αριθμών είναι τό
σύνολο **R** των **πραγματικών αριθμών**.

Σχετικά μέ τίς πράξεις μεταξύ ρητών και άρρήτων έχουμε νά παρατηρήσουμε τά παρακάτω:

I) Τό άθροισμα ενός ρητοῦ p και ενός άρρήτου α είναι άρρητος.

Πράγματι: δέν μπορεί νά είναι $\alpha + p = p_1 = \text{ρητός}$, διότι τότε θά ήταν $\alpha = p_1 - p$
δηλαδή ένας άρρητος θά ήταν ίσος μέ ένα ρητό.

II) Τό γινόμενο ενός άρρήτου α επί ένα ρητό $p \neq 0$ είναι άρρητος.

Πράγματι: δέν μπορεί νά είναι $p \cdot \alpha = p' = \text{ρητός}$, διότι τότε θά ήταν $\alpha = \frac{p'}{p}$ δηλαδή
ένας άρρητος θά ήταν ίσος μ' ένα ρητό.

III) Τό άθροισμα (ή διαφορά) και τό γινόμενο (τό πηλίκο) δύο άρρητων μπορεί νά είναι
ή ρητός ή άρρητος.

Αν π.χ. προσθέσουμε τούς άρρήτους αριθμούς:

$$0,681181118 \dots$$

$$1,318818881 \dots$$

$$\text{παίρνομε: } \frac{1,999999999 \dots}{1} = 2.$$

Ενώ, αν προσθέσουμε τούς άρρήτους $0,121221222 \dots$ και $0,414114111 \dots$, παίρνομε τόν
έπίσης άρρητο $0,535335333 \dots$.

Παρακάτω θά συναντήσουμε και γινόμενα άρρήτων νά μᾶς δίνουν άλλοτε ρητούς και
άλλοτε άρρήτους αριθμούς.

Κατά τούς ύπολογισμούς, στίς πρακτικές εφαρμογές, στή θέση ενός άρρήτου, παίρνομε
έναν προσεγγιστικό τερματιζόμενο δεκαδικό, παραλείποντας, από κάποια θέση και πέρα, τά
δεκαδικά ψηφία τοῦ άρρήτου.

1·3 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1) Για ποιές άκεραιες τιμές του x ή παράσταση $\frac{4}{x+2}$ παίρνει άκεραιες τιμές;

Είναι φανερό ότι, για να παίρνει τό άλγεβρικό κλάσμα $K = \frac{4}{x+2}$ άκεραιες τιμές πρέπει ή τιμή τής παραστάσεως $x+2$ να είναι ένας διαιρέτης του 4. Διαιρέτες όμως του 4 είναι οί άκεραίοι $-1, +1, -2, +2, -4, +4$. Έτσι πρέπει να έχουμε: $x+2 = -1 \Rightarrow x = -3$ και άντίστοιχα $K = -4$; $x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$ και $K = 4$; $x+2 = -2 \Rightarrow x = -4$ και $K = -2$; $x+2 = 2 \Rightarrow x = 0$ και $K = 2$; $x+2 = -4 \Rightarrow x = -6$ και $K = -1$; $x+2 = 4 \Rightarrow x = 2$ και $K = 1$.

2) Νά βρεθοῦν τ' αποτελέσματα τών πράξεων: I) $0,4\dot{5} + 0,5\dot{4}$ II) $0,9\dot{1} - 0,4\dot{1}\dot{9}$ III) $0,3\dot{6} \cdot (-0,8\dot{3})$.

I) Έχουμε $0,4\dot{5} + 0,5\dot{4} = 0,9 = 1$.

II) Γράφομε τόν αριθμό $0,9\dot{1} = 0,919191 \dots$ και ως εξής: $0,9 + 0,01919 \dots = 0,9 + 0,0\dot{1}\dot{9}$ δμοια $0,4\dot{1}\dot{9} = 0,4 + 0,0\dot{1}\dot{9}$. Έτσι παίρνομε:
 $0,9\dot{1} - 0,4\dot{1}\dot{9} = (0,9 + 0,0\dot{1}\dot{9}) - (0,4 + 0,0\dot{1}\dot{9}) = (0,9 - 0,4) + (0,0\dot{1}\dot{9} - 0,0\dot{1}\dot{9}) = 0,5$.

Μπορούμε επίσης να μετατρέψομε (άν θέλομε) και τούς δυό περιοδικούς

σε κλάσματα. Έτσι έχουμε $0,9\dot{1} = \frac{91}{99}$ και $0,4\dot{1}\dot{9} = \frac{4,1\dot{9}}{10} = \frac{4 \frac{19}{99}}{10} = \frac{415}{990}$

και συνεπώς $0,9\dot{1} - 0,4\dot{1}\dot{9} = \frac{91}{99} - \frac{415}{990} = \frac{910}{990} - \frac{415}{990} = \frac{495}{990} = \frac{1}{2} = 0,5$.

III) Έχουμε:

$$\begin{aligned} 0,3\dot{6} \cdot (-0,8\dot{3}) &= \frac{36}{99} \cdot \left(-\frac{8,3}{10}\right) = -\frac{4}{11} \cdot \frac{8 \frac{3}{9}}{10} = -\frac{4}{11} \cdot \frac{8 \frac{1}{3}}{10} = \\ &= -\frac{4}{11} \cdot \frac{25}{30} = -\frac{4}{11} \cdot \frac{5}{6} = -\frac{10}{33} = -\frac{30}{99} = -0,3\dot{0}. \end{aligned}$$

3) Νά καθορισθοῦν οί άκεραιες και θετικές τιμές * τών x και y για τίς όποιες πραγματοποιείται ή ισότητα: $(x+1)(y+2) = 2xy$.

Έχουμε $(x+1)(y+2) = 2xy \Leftrightarrow xy + 2x + y + 2 = 2xy \Leftrightarrow 2xy - xy - 2x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow xy - 2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow x(y-2) - (y-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(x-1) = 4$.

Έπειδή ό x πρέπει να παίρνει τιμές άκεραιες και θετικές (καθώς εξάλλου και ό y), και έπειδή ή τιμή $x = 1$ άποκλείεται, γι' αυτό θά έχουμε $x \geq 2$: ή παράσταση $x-1$ θά παίρνει συνεπώς τιμή θετικού άκεραίου και μάλιστα διαιρέτη του 4.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι έχουμε: } & \left. \begin{array}{l} x-1=1 \\ y-2=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=6 \end{array} \right. \\ \text{ή } & \left. \begin{array}{l} x-1=2 \\ y-2=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \end{array} \right. \\ \text{ή ακόμα } & \left. \begin{array}{l} x-1=4 \\ y-2=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

*Οί άκεραίοι θετικοί αριθμοί όνομάζονται και φυσικοί.

1 · 4 Άσκησης.

1. Απλοποιήστε την παράσταση $K = \frac{\alpha\beta^{-3} \cdot (\alpha^{-1}\beta^3)^4 \cdot (\alpha\beta^{-1})^2}{\alpha^{-2}\beta \cdot (\alpha^2\beta^{-1})^3 \cdot \alpha^{-1}\beta}$ και υπολογίστε την τιμή της για $\alpha = 10^{-3}$ και $\beta = -10^{-2}$.

2. Ποιόν αριθμό δηλώνει η παράσταση $\frac{[(-12)^{-2}]^{-3} \times 75^{-4} \times (-4)^{-2}}{(25^{-3})^4 \times 18^2 \times 10^4}$;

3. Δίνεται η παράσταση $[x^{(2^v)} + y^{(2^v)}] \cdot [x^{(2^v)} - y^{(2^v)}]$, με $v \in \mathbb{N}$ (v φυσικός).

I) Πώς αλλιώς μπορεί να γραφεί η παράσταση; II) Νά βρεθεί η αριθμητική της τιμή για $x = 10^4$, $y = 10^8$ και $v = 2$.

4. I) Τα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{62}{21}$ νά γραφούν με δεκαδική μορφή.

II) Οι δεκαδικοί αριθμοί $2,1\dot{9}$, $5,4\dot{2}\dot{3}$ και $-2,17\dot{3}\dot{5}$ νά μετατραπούν σε κλάσματα.

5. "Αν οι α, β, γ παίρνουν θετικές ρητές τιμές και τέτοιες ώστε $\alpha\beta\gamma = 1$, νά βρεθεί η τιμή της παραστάσεως $\frac{\alpha}{\alpha\beta + \alpha + 1} + \frac{\beta}{\beta\gamma + \beta + 1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha + \gamma + 1}$.

(Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε τους όρους του πρώτου κλάσματος επί γ και του δεύτερου επί $\alpha\gamma$ και αντικαταστήστε τό γινόμενο $\alpha\beta\gamma$ με 1).

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΡΙΖΩΝ

2 · 1 Νιοστή ρίζα πραγματικού αριθμού.

α) **Τετραγωνική ρίζα θετικού άκεραίου.** Έπειδή $(-1)^2 = (+1)^2 = 1$, $(-2)^2 = (+2)^2 = 2^2 = 4$, $(-3)^2 = (+3)^2 = 3^2 = 9$, κτλ., οι άκεραιοι θετικοί (οι φυσικοί) αριθμοί 1, 4, 9, ..., λέγονται **τετράγωνοι** αριθμοί. Θέλομε έτσι νά δηλώσωμε ότι, για τούς φυσικούς 1, 4, 9, ..., υπάρχουν άκεραιοι (οί $\{-1, 1\}$, $\{-2, 2\}$, $\{-3, 3\}$, ...) πού τά τετράγωνά τους δίνουν αντίστοιχα τούς προηγούμενους άκεραίους.

Οί αριθμοί $\{+1, -1\}$, $\{+2, -2\}$, $\{+3, -3\}$, ... λέγονται, όπως ξέρομε, **τετραγωνικές ρίζες** (θετική - άρνητική) αντίστοιχα τών αριθμών 1, 4, 9, ...

Γράφομε $\sqrt{1} = 1$ και $-\sqrt{1} = -1$, $\sqrt{4} = 2$ και $-\sqrt{4} = -2$, $\sqrt{9} = 3$ και $-\sqrt{9} = -3$ και διαβάζομε π.χ : θετική τετραγωνική ρίζα του 9 είναι ό 3· άρνητική τετραγωνική ρίζα του 9 είναι ό -3.

(Συνομότερα: Τετραγωνική ρίζα του 9 ίσον 3·
πλην τετραγωνική ρίζα του 9 ίσον -3)

Τί γίνεται όμως μ' ένα φυσικό αριθμό πού δέν είναι τετράγωνος αριθμός, πού δέν προκύπτει δηλαδή από τό τετράγωνο άλλου άκεραίου;

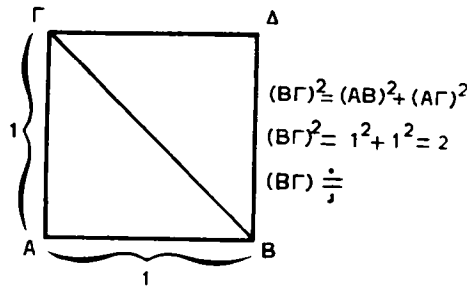
Υπάρχει π.χ. αριθμός πραγματικός πού τό τετράγωνό του νά ίσοῦται μέ 2;

Αποδεικνύεται ότι: Όταν ένας φυσικός αριθμός δεν έχει ως τετραγωνική ρίζα άλλο φυσικό, τότε δεν θα έχει ως τετραγωνική ρίζα ούτε πηλίκo άκεραίων, δηλαδή ούτε ρητό αριθμό.

Έτσι, αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός α για τον οποίο έχουμε $\alpha^2 = 2 \iff \alpha = \sqrt{2}$, αυτός δεν μπορεί να είναι ρητός.

Η εξίσωση $x^2 = 4$ ή $x^2 - 4 = 0$, που γράφεται επίσης $(x - 2)(x + 2) = 0$, λέμε ότι έχει ρίζες (λύσεις) τους αριθμούς -2 και $+2$.

Τί θα γίνει με την εξίσωση $x^2 = 2$; Θα πούμε ότι δεν έχει λύση; Κι ακόμα τί θα γίνει με τη διαγώνιο τετραγώνου $AB\Delta\Gamma$ (σχ. 2.1) που η πλευρά του AB είναι ίση με τη μονάδα μήκους; Δεν θα τη μετρήσουμε;



Σχ. 2.1.

Βλέπουμε λοιπόν πόσο επιτακτική είναι η ανάγκη της επέκτασως των ρητών αριθμών.

Η θετική τετραγωνική ρίζα του 2, και γενικά κάθε μή τετράγωνου φυσικού, υπάρχει και είναι ένας άρρητος (ασύμμετρος) αριθμός, δηλαδή ένας ατερμάτιστος δεκαδικός μη περιοδικός.

Τον αριθμό αυτόν τον σημειώνουμε συμβολικά $\sqrt{2}$ (και όμοια $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ κλπ.), αλλά στις εφαρμογές παίρνουμε στη θέση του έναν προσεγγιστικό δεκαδικό με περιορισμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Παρατηρήσεις: I) Ένω ένας θετικός άκεραίος και γενικά ένας θετικός πραγματικός έχει δυό τετραγωνικές ρίζες, μία θετική και μία αρνητική, ένας αρνητικός πραγματικός δεν έχει ως τετραγωνική ρίζα πραγματικών αριθμό. Διότι τό τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι αριθμός θετικός ή μηδέν. Δεν υπάρχει π.χ. $\sqrt{-25}$ (ως πραγματικός αριθμός), διότι και $(+5)^2 = 25$ και $(-5)^2 = 25$.

II) Δεν πρέπει να γράφουμε π.χ. $\sqrt{49} = -7$, αλλά $-\sqrt{49} = -7$, επειδή συμφωνήσαμε να παραστήσουμε με $\sqrt{49}$ τη θετική τετραγωνική ρίζα του 49 και ένας μαθηματικός συμβολισμός είναι σκόπιμο να έχει ένα και μόνο νόημα.

β) Κυβική ρίζα άκεραίου. Έπειδή $(-1)^3 = -1$, $1^3 = 1$, $(-2)^3 = -8$, $(+2)^3 = 2^3 = 8$ κλπ., λέμε ότι οι κυβικές ρίζες των αριθμών -1 , 1 , -8 , 8 είναι

αντίστοιχα οι αριθμοί -1 , 1 , -2 , 2 και γράφουμε:

$$\sqrt[3]{-1} = 1, \sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{-8} = -2, \sqrt[3]{8} = 2 \text{ κτλ.}$$

Κάθε άκεραίος αριθμός που δεν έχει ως κυβική ρίζα άκεραιο αριθμό, δεν έχει ως κυβική ρίζα ούτε πηλίκο άκεραίων· ή κυβική ρίζα ενός τέτοιου αριθμού είναι πάλι ένας άρρητος (άσύμμετρος) αριθμός.

Κάθε θετικός άκεραίος και γενικά κάθε θετικός πραγματικός έχει μία και μόνο πραγματική κυβική ρίζα· κι αυτή είναι ένας θετικός αριθμός.

$$\text{π.χ. } \sqrt[3]{27} = 3, \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}.$$

Κάθε άρνητικός άκεραίος και γενικά κάθε άρνητικός πραγματικός έχει μία και μόνο πραγματική κυβική ρίζα· κι αυτή είναι ένας άρνητικός αριθμός.

$$\text{π.χ. } \sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = -\frac{2}{5} = -\sqrt[3]{\frac{8}{125}}.$$

γ) Νιοστή ρίζα πραγματικού αριθμού.

*Αν α ένας πραγματικός αριθμός (θετικός ή άρνητικός) και n φυσικός περιττός ≥ 3 ($n = 3, 5, 7, \dots$), τότε υπάρχει ένας και μόνο πραγματικός β (θετικός ή άρνητικός αντίστοιχα) για τον οποίο έχουμε: $\beta^n = \alpha$. Ο β λέγεται νιοστή

ρίζα του α και γράφουμε: $\beta = \sqrt[n]{\alpha}$.

*Αν α ένας θετικός πραγματικός και n άρτιος ($n = 2, 4, 6, \dots$), τότε υπάρχουν δύο αντίθετοι πραγματικοί αριθμοί γ και δ ($\gamma > 0$, $\delta < 0$, $\gamma + \delta = 0$) για τους οποίους έχουμε: $\gamma^n = \alpha$ και $\delta^n = \alpha$. Ο γ λέγεται θετική νιοστή ρίζα του α και ο δ άρνητική νιοστή ρίζα του α και γράφουμε:

$$\gamma = \sqrt[n]{\alpha}, \quad \delta = -\sqrt[n]{\alpha}.$$

$$\text{Π.χ. } 2 = \sqrt[4]{16}, -2 = -\sqrt[4]{16}, \frac{3}{5} = \sqrt[4]{\frac{81}{625}}, -\frac{3}{5} = -\sqrt[4]{\frac{81}{625}}.$$

*Αν α άρνητικός και n άρτιος, τότε δεν υπάρχει πραγματική νιοστή ρίζα του α . Οι συμβολισμοί π.χ. $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[6]{-64}$ δεν έχουν νόημα πραγματικού αριθμού.

Στό συμβολισμό $\sqrt[n]{\alpha}$ το σύμβολο $\sqrt[n]{}$ λέγεται ριζικό, ο φυσικός n δείκτης της ρίζας και ο αριθμός α υπόρριζο.

Σύμφωνα με τον παραπάνω όρισμό έχουμε πάντα $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι όταν $n = 2$, ή $\sqrt[2]{\alpha}$ ταυτίζεται με την τετραγωνική ρίζα του α ($\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$) και όταν $n = 3$, ή $\sqrt[3]{\alpha}$ ταυτίζεται με την κυβική ρίζα του α .

Σημαντική Παρατήρηση (προσοχή!). Δεν επιτρέπεται να γράφουμε $\sqrt[n]{a^2} = a$ (επειδή συμβαίνει να είναι $(a)^2 = a^2$), αν δεν γνωρίζουμε ότι ο a παίρνει θετικές τιμές ή μηδέν. Τό σωστό είναι να γράφουμε σε κάθε περίπτωση $\sqrt[n]{a^2} = |a|$. Διότι: αν γράψουμε $\sqrt[n]{a^2} = a$ και στον a δώσουμε π.χ. την τιμή -7 , τότε θα πρέπει να γράψουμε $\sqrt[n]{(-7)^2} = -7$, ενώ είναι $\sqrt[n]{(-7)^2} = \sqrt[n]{49} = 7 = |-7|$.

Τό ίδιο ισχύει και για τις παραστάσεις $\sqrt[n]{a^4}$, $\sqrt[n]{a^6}$ κλπ. γράφουμε δηλαδή $\sqrt[n]{a^4} = |a|$, $\sqrt[n]{a^6} = |a|$.

Άσκησης

1. Δίνεται η παράσταση $X = a + \sqrt[n]{a^2}$. Αν στον a δώσουμε την τιμή -5 να βρεθεί η τιμή της X .

Κάποιος γράφει: $X = a + \sqrt[n]{a^2} = a + a = 2a = 2 \cdot (-5) = -10$.

Είναι σωστό αυτό;

2. Να επιλυθεί η εξίσωση $3x + \sqrt[n]{(x-2)^2} - 2 = 0$, στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Κάποιος βρίσκει $3x + \sqrt[n]{(x-2)^2} - 2 = 0 \iff 3x + x - 2 - 2 = 0 \iff 4x - 4 = 0 \iff 4x = 4 \iff x = 1$.

Εισάγουμε $x = 1$ στην εξίσωση και βρίσκουμε $3 \cdot 1 + \sqrt[n]{(1-2)^2} - 2 = 3 + \sqrt[n]{(-1)^2} - 2 = 3 + \sqrt[n]{1} - 2 = 3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$. Πού είναι λοιπόν τό λάθος και ποιός είναι ο σωστός τρόπος επιλύσεως;

2.2 Ιδιότητες των ριζών πραγματικών αριθμών.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων θα στηριχθεί στην επόμενη βασική ιδιότητα.

Αν οι πραγματικοί αριθμοί a και β είναι ομόσημοι, τότε:

$$a^n = \beta^n \implies a = \beta$$

Δηλαδή: αν δυνάμεις, με τόν ίδιο εκθέτη, ομοσήμων πραγματικών αριθμών είναι ίσες, τότε και οι αριθμοί αυτοί θα είναι ίσοι.

Ιδιότητα I. Αν a θετικός ($a > 0$) και n περιττός ≥ 3 τότε $-\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-a}$.

(Π.χ. $-\sqrt[5]{32} = -2 = \sqrt[5]{-32}$, διότι $(-2)^5 = -2^5 = -32$).

Απόδειξη: Αν $\sqrt[n]{a} = \beta$ θα είναι $-\sqrt[n]{a} = -\beta(1)$. αλλά $\beta^n = a \implies (-\beta)^n = ((-1) \cdot \beta)^n = (-1)^n \cdot \beta^n = -\beta^n = -a$ (επειδή n περιττός) δηλαδή $(-\beta)^n = -a \implies -\beta = \sqrt[n]{-a}(2)$. Από τις (1) και (2) έχουμε: $-\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-a}$.

Ιδιότητα II. Έχουμε: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a : \beta} = \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}}$ και εφόσον $a \geq 0$ και $\beta > 0$, όταν n άρτιος φυσικός.

$$(\text{π.χ. } \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{16} = 2, \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{-9} = \sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -\sqrt[5]{3^5} = -3, \\ \sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{625 : (-5)} = \sqrt[3]{-125} = -5, \frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\frac{128}{2}} = \sqrt[6]{64} = 2).$$

Απόδειξη: Έχουμε $(\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$ και $(\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta})^n = \alpha\beta$ δηλαδή $(\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha\beta})^n$. Άρα και $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$.

$$\text{Όμοια συμπεραίνουμε ότι: } \sqrt[n]{\alpha} : \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha : \beta} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Ιδιότητα III. Έχουμε: $\alpha \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \cdot \beta}$, όταν α και α^n είναι ομόσημοι αριθμοί.

$$(\text{π.χ. } -2 \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 9} = \sqrt[3]{-72}, -2 \cdot \sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = -\sqrt[4]{80}).$$

Παρατήρηση: Όταν n άρτιος, υποτίθεται ότι ο β είναι θετικός και αν $\alpha < 0$, τότε πρέπει να γράφουμε $\alpha \cdot \sqrt[n]{\beta} = -\sqrt[n]{\alpha^n \cdot \beta}$ και $\sqrt[n]{\alpha^n \cdot \beta} = |\alpha| \sqrt[n]{\beta}$.

Απόδειξη: Αν α και α^n είναι ομόσημοι αριθμοί, τότε οι $\alpha \sqrt[n]{\beta}$ και $\sqrt[n]{\alpha^n \beta}$ είναι επίσης ομόσημοι. Έξάλλου είναι $(\alpha \sqrt[n]{\beta})^n = \alpha^n (\sqrt[n]{\beta})^n = \alpha^n \beta$ και $(\sqrt[n]{\alpha^n \beta})^n = \alpha^n \beta$ δηλαδή $(\alpha \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha^n \beta})^n$. Άρα και $\alpha \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta}$.

$$\text{Ιδιότητα IV. Έχουμε: } \sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[nm]{\alpha}.$$

$$(\text{π.χ. } \sqrt[3]{\sqrt[5]{-10}} = \sqrt[15]{-10}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2).$$

Παρατήρηση: Αν και ένας μόνο από τους δείκτες m, n είναι άρτιος, τότε θεωρούμε ότι $\alpha \geq 0$.

Απόδειξη: Είναι $(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}})^{nm} = ((\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}})^n)^m = (\sqrt[m]{\alpha})^m = \alpha$ και $(\sqrt[m]{\alpha})^{nm} = \alpha$ δηλαδή $(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}})^{nm} = (\sqrt[m]{\alpha})^{nm}$. Άρα και $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[nm]{\alpha}$.

Ιδιότητα V. Έχουμε: $(\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$ (όπου m φυσικός ≥ 2).

$$(\text{π.χ. } (\sqrt[3]{-9})^2 = \sqrt[3]{81}, (\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}).$$

Παρατήρηση: Αν n άρτιος θεωρούμε ότι $\alpha \geq 0$.

Απόδειξη: Είναι $((\sqrt[p]{\alpha})^{\mu})^{\nu} = (\sqrt[p]{\alpha})^{\mu\nu} = ((\sqrt[p]{\alpha})^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\mu}$ και $(\sqrt[p]{\alpha^{\mu}})^{\nu} = \alpha^{\mu} \cdot$ δηλαδή $[(\sqrt[p]{\alpha})^{\mu}]^{\nu} = (\sqrt[p]{\alpha^{\mu}})^{\nu}$. Άρα και $(\sqrt[p]{\alpha})^{\mu} = \sqrt[p]{\alpha^{\mu}}$.

Ιδιότητα VI. Έχουμε: $\sqrt[p]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[p]{\alpha^{\mu}}^{\rho}$ (όπου ρ φυσικός ≥ 2).

(Π.χ. $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$, $\sqrt[3]{(-2)^5} = -\sqrt[3]{2^5} = -\sqrt[6]{2^{10}}$).

Παρατήρηση: Όταν η τιμή της $\sqrt[p]{\alpha^{\mu}}$ είναι άρνητικός αριθμός και ο πολλαπλασιαστής ρ είναι άρτιος, πρέπει να γράφουμε

$$\sqrt[p]{\alpha^{\mu}} = -\sqrt[p]{\alpha^{\mu\rho}} \quad \text{και} \quad \sqrt[p]{\alpha^{\mu\rho}} = -\sqrt[p]{\alpha^{\mu}}.$$

Απόδειξη: Είναι $(\sqrt[p]{\alpha^{\mu\rho}})^{\nu\rho} = \alpha^{\mu\rho}$ και $(\sqrt[p]{\alpha^{\mu}})^{\nu\rho} = ((\sqrt[p]{\alpha^{\mu}})^{\nu})^{\rho} = (\alpha^{\mu})^{\rho} = \alpha^{\mu\rho}$. δηλαδή $(\sqrt[p]{\alpha^{\mu\rho}})^{\nu\rho} = (\sqrt[p]{\alpha^{\mu}})^{\nu\rho}$. Άρα και $\sqrt[p]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[p]{\alpha^{\mu}}$.

2.3 Πράξεις μεταξύ ριζών.

Όταν έχουμε να εκτελέσουμε πράξεις μεταξύ ριζών, ουσιαστικά εφαρμόζουμε τις προηγούμενες ιδιότητες, αν θέλουμε (και αν μπορούμε) να συμπτύξουμε τη δοσμένη αριθμητική παράσταση.

Τό άθροισμα ριζών που δεν έχουν τόν ίδιο δείκτη και τόν ίδιο υπόρριζο αριθμό δεν μπορούμε να τό δώσουμε απλούστερα, με μία μόνο ρίζα. Η αριθμητική π.χ. παράσταση $4 \cdot \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{7}$ δεν μπορεί να συμπτυχθεί. Αν μās χρειάζεται ο αριθμός που δίνει, έστω κατά προσέγγιση, την τιμή αυτής της παραστάσεως, αντικαθιστούμε την κάθε ρίζα με μία προσεγγιστική δεκαδική τιμή της.

Μέ τά παρακάτω παραδείγματα θα γίνει κατανοητό πώς γίνονται οι πράξεις μεταξύ ριζών.

I) Νά γραφεί όσο γίνεται απλούστερα ή αριθμητική παράσταση:

$$3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}.$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250} &= 3 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 2\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - 2\sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \\ &= 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

II) Νά γίνουν οι επόμενες πράξεις:

$$\alpha) \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \quad \beta) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{3} \quad \gamma) \sqrt[6]{100} : \sqrt[4]{32} \quad \delta) \sqrt[5]{xy^3} \cdot \sqrt[3]{x^2y}.$$

Έχουμε: $\alpha) \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3$. Έδω βλέπουμε ότι, τό γινόμενο δυό άρρήτων αριθμών μπορεί να είναι ένας άκέραιος αριθμός (δηλαδή ρητός).

β) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{4 \cdot 27} = \sqrt[6]{108}$. Σ' αυτό τό παράδειγμα βλέπουμε ότι τό γινόμενο δυό άρρήτων αριθμών μπορεί νά είναι πάλι άρρητος.

$$\gamma) \sqrt[6]{100} : \sqrt[4]{32} = \sqrt[6]{10^2} : \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[12]{(10^2)^2} : \sqrt[12]{(2^5)^3} = \sqrt[12]{10^4 : 2^{15}} = \\ = \sqrt[12]{(2 \cdot 5)^4 : 2^{15}} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 5^4 : 2^{15}} = \sqrt[12]{\frac{2^4 \cdot 5^4}{2^{15}}} = \sqrt[12]{\frac{2 \cdot 5^4}{2^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2 \cdot 5^4}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[12]{1250}.$$

(Παρατηρήστε ότι ό κοινός δείκτης 12 είναι τό ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τών δεικτών 6 καί 4).

$$\delta) \sqrt[5]{xy^3} \cdot \sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[15]{(xy^3)^3} \cdot \sqrt[15]{(x^2y)^5} = \sqrt[15]{x^3y^9} \cdot \sqrt[15]{x^{10}y^5} = \\ = \sqrt[15]{x^3y^9x^{10}y^5} = \sqrt[15]{x^{13}y^{14}}.$$

Γενικό συμπέρασμα. Για νά πολλαπλασιάσουμε ή νά διαιρέσουμε ρίζες, πρέπει, εφαρμόζοντας τίς ιδιότητες, νά μετατρέψουμε τά ριζικά σέ άλλα ισοδύναμα μέ τόν ίδιο δείκτη.

2.4 Εφαρμογές καί παραδείγματα.

1) Νά βρεθεί ή τιμή τής αριθμητικής παραστάσεως $\frac{\sqrt{631}}{\sqrt{2}}$, κατά προσέγγιση $\frac{1}{10}$.

$$\text{*Έχουμε: } \frac{\sqrt{631}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{631}{2}} = \sqrt{\frac{631 \cdot 50}{100}} = \frac{\sqrt{31550}}{10}.$$

*Η $\sqrt{31550}$ κατά προσέγγιση μονάδας είναι 177.

3'15'50	177
1	27 347
215	7 7
189	189 2429
2650	
2429	
221	

$$\text{*Άρα: } \frac{\sqrt{31550}}{10} \approx \frac{177}{10} = 17,7.$$

2) Τά κλάσματα $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$ νά τρα-

πούν σέ άλλα ισοδύναμα μέ ρητό παρονομαστή.

$$\text{*Έχουμε: 1) } \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{-\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{II)} \quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \\ = \frac{4-2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

$$\text{III)} \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{2+2\sqrt{6}+3}{2-3} = -5-2\sqrt{6}.$$

$$\text{IV)} \quad \text{Σύμφωνα με την ταυτότητα } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \text{ έχουμε} \\ \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1} = \frac{(\sqrt[3]{3}-1)[(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} \cdot 1 + 1^2]}{(\sqrt[3]{3}+1)((\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} \cdot 1 + 1^2)} = \frac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)}{(\sqrt[3]{3})^3 + 1^3} = \\ = \frac{2-2\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}{3+1} = \frac{2(1-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})}{4} = \frac{1-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}.$$

3) *N' αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.*

Παρατηρούμε αρχικά ότι άκεραιος δεν είναι, διότι $1^2 = 1$ και $2^2 = 4$.

*Αποδεικνύουμε ακολουθώς ότι δεν μπορεί να είναι ούτε πηλίκιο άκεραίων.

*Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ θετικοί άκεραιοι πρώτοι μεταξύ τους, για το οποίο έχουμε $\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 = 2$, ή Ισοδύναμα $\kappa^2 = 2\lambda^2$ (1).

*Επειδή ο 2 διαιρεί τον κ^2 , έπεται ότι θα διαιρεί και τον κ διότι αν ο 2 δεν είναι διαιρέτης του κ , αν δηλαδή ο κ δεν είναι άρτιος αριθμός, τότε ούτε ο κ^2 θα είναι άρτιος. Θα έχουμε λοιπόν $\kappa = 2\mu$ (όπου μ φυσικός), όποτε η σχέση (1) γράφεται: $4\mu^2 = 2\lambda^2$, άρα $\lambda^2 = 2\mu^2$ (2). 'Η (2) όμως λέει ότι και ο λ είναι διαιρετός διά 2· δηλαδή πρέπει να είναι και $\lambda = 2\nu$ (όπου ν φυσικός). Έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι άκεραιοι κ και λ πρέπει να είναι (και οι δύο) άρτιοι και συνεπώς όχι πρώτοι μεταξύ τους. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι είχαμε θεωρήσει τους κ και λ πρώτους μεταξύ τους. Έτσι βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατό να βρούμε ένα ρητόν αριθμό που το τετράγωνό του να είναι ίσο με 2. Αυτό πλέον σημαίνει ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ένας άρρητος (άσύμμετρος) αριθμός.

4) *N' αποδειχθεί ότι ο αριθμός $3 + 5\sqrt{2}$ είναι άρρητος.*

*Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος ενώ ο 5, ως άκεραιος, είναι ρητός. Άλλά το γινόμενο ενός άρρητου επί ένα ρητό (διαφορετικό από μηδέν) είναι ένας άρρητος αριθμός. Έτσι ο αριθμός $5\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Το άθροισμα επίσης ενός ρητού και ενός άρρητου είναι αριθμός άρρητος και επομένως τελικά ο αριθμός $3 + 5\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

5) *Αν ρ, ρ' ρητοί, και α άρρητος, τέτοιοι ώστε $\rho + \rho'\alpha = 0$, τότε κατανάγκη $\rho = \rho' = 0$.*

*Ας υποθέσουμε ότι ο ρ' είναι ένας ρητός μή μηδενικός, τότε θα έχουμε

$$\rho + \rho'\alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{\rho}{\rho'} = \text{ρητός}$$

δηλαδή θα ήταν ένας άρρητος ίσος μ' ένα ρητό, πράγμα άτοπο. Πρέπει λοιπόν αναγκαστικά να είναι $\rho' = 0$. Άλλά όταν $\rho' = 0$, γίνεται και $\rho = 0$.

6) *N' αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.*

*Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{7} + \sqrt{3} = \rho$ = ρητός· τότε θα είναι $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = \rho^2$ = ρητός ή

$7 + 3 + 2\sqrt[3]{21} = \rho_1 =$ ρητός ή $2\sqrt[3]{21} = \rho_1 - 10 =$ ρητός. Άλλα $2\sqrt[3]{21}$ είναι άρρητος (γιατί;) και συνεπώς θα είχαμε ένα ρητό ίσο μ' έναν άρρητο. Άρα ο $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}$ είναι άρρητος.

Παρατήρηση: Από τὰ παραδείγματα τῆς ἐφαρμογῆς 2 γίνεται φανερό ὅτι ἀπλουστεύεται ὁ προσεγγιστικός ὑπολογισμός ἑνός κλάσματος ριζῶν ὅταν χρησιμοποιήσουμε ἕνα ἰσοδύναμο κλάσμα μέ ρητό παρονομαστή.

2.5 Ἀσκήσεις.

1. Ποιοί ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς εἶναι ρητοί καί ποιοί ἄρρητοι;

I) 0,357357... · II) 1,12211221... · III) 0,12345678910111213141516...
IV) -2,019464646... · V) 0,14916253649... (παραθέτομε διαδοχικά τὰ ψηφία τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ...).

2. Νά γραφοῦν μέ τόν ἀπλούστερο δυνατὸ τρόπο οἱ παρακάτω ἀριθμητικές παραστάσεις:

$$\text{I)} \quad 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{56}.$$

$$\text{II)} \quad \sqrt[3]{-0,003} + 5\sqrt[3]{24} + 0,1\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{50} - 4\sqrt[3]{98}.$$

$$\text{III)} \quad \sqrt[4]{\frac{32}{243}} + \sqrt[4]{\frac{2}{243}} + 5\sqrt[8]{\frac{4}{9}} - 4\sqrt[4]{\sqrt{\frac{32 \cdot 5^4}{3}}}.$$

3. Νά γίνουν οἱ σημειούμενες πράξεις:

$$\text{I)} \quad -7\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{15}.$$

$$\text{II)} \quad (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{5} + 2) \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{5} - 2).$$

$$\text{III)} \quad (\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{-18}) : \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 27}.$$

$$\text{IV)} \quad (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}) \cdot (\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}) \cdot (\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}) \cdot (\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}).$$

$$\text{V)} \quad \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt[3]{32}}}.$$

$$\text{VI)} \quad \sqrt[3]{25\alpha^3 \sqrt{\frac{\beta^2}{3\alpha^2}}} \cdot \sqrt[3]{5\alpha \sqrt{\frac{|\beta|}{3\alpha^4}}} \quad (\alpha \neq 0).$$

$$\text{VII)} \quad \sqrt[3]{\alpha\beta x^2 y^3} : \sqrt[3]{-\alpha^2 \beta^2 x^4 y^6}.$$

$$\text{VIII)} \quad \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 - x + 1}}{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}} + \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{\sqrt[3]{x^3 - x + 1}} \right).$$

4. Τά ακόλουθα κλάσματα νά τραποῦν σέ ἄλλα ἰσοδύναμα μέ ρητούς παρονομαστές.

$$\text{I)} \quad \frac{-4}{3\sqrt[3]{5}} \quad \text{II)} \quad \frac{2}{\sqrt[3]{9}} \quad \text{III)} \quad \frac{9}{\sqrt[3]{8}} \quad \text{IV)} \quad \frac{3\sqrt[3]{25}}{-\sqrt[3]{36}} \quad \text{V)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + 1}$$

$$\text{VI)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{5}} \quad \text{VII)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7}} \quad \text{VIII)} \quad \frac{1}{2 + \sqrt[3]{2}}$$

$$\text{IX)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}} \quad \text{X)} \quad \frac{1}{1 - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}.$$

5. Ν' αποδειχθεί ότι καθένας από τούς αριθμούς: α) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{17}}$, β) $\sqrt{13} + \sqrt{14}$ είναι ά-
σύμμετρος αριθμός.

6. 'Υπάρχουν ρητοί κ και λ για τούς οποίους νά έχομε $\sqrt{7} = \kappa\sqrt{5} + \lambda\sqrt{3}$;

7. 'Αν α, β, γ, δ και x ρητός > 0 και όχι τετράγωνο ρητού, νά βρῆτε πότε είναι
δυνατή ή ισότητα $\alpha + \beta\sqrt{x} = \gamma + \delta\sqrt{x}$.

8. Τό κλάσμα $\frac{3+5\sqrt{7}}{9-4\sqrt{7}}$ νά γραφεί υπό τή μορφή $\alpha + \beta\sqrt{7}$, όπου α και β ρητοί.

9. Νά βρεθεί ή τιμή τῆς παραστάσεως: $A = \frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ για
 $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

10. Νά βρεθεί ή τιμή τῆς παραστάσεως: $B = \frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ για 1) $x = 2 + \sqrt{3}$ και
II) $x = 2 - \sqrt{3}$.

11. Θεωρούμε τήν έκφραση: $y = \sqrt{(x+2)^2 - \sqrt{(x-2)^2}}$. Ποιές είναι οί διάφορες μορ-
φές πού μπορεί νά πάρει ή y, για όλες τίς διάφορες πραγματικές τιμές του x;

12. Θεωρούμε τήν έκφραση: $y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

I) Για ποιές πραγματικές τιμές του x ή y έχει νόημα πραγματικού αριθμού;

II) 'Απλοποιήστε αυτή τήν έκφραση, αφού πρώτα υπολογίσετε τήν y^2 . Νά γίνει επαλή-
θευση για $x = \frac{4}{3}$ και $x = 3$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

3·1 'Αναγκαιότητα του διανύσματος.

Μās πληροφορήσαν ότι ένα πυροβόλο έκτοξεύει βλήματα πού έχουν στό
ξεκίνημά τους «ταχύτητα» ίση π.χ. μέ 2500 km/h.

Είναι άραγε δυνατό, μόνο μ' αυτό τό στοιχείο, νά καθορίσoμε τήν τροχιά
πού θά διαγράψει ένα βλήμα αυτού του πυροβόλου και νά βρούμε σε ποιο ση-
μείο του έδάφους (περίπου τουλάχιστον) θά προσκρούσει τό βλήμα;

Καί αν δέν έχει κανείς τίς απαραίτητες γνώσεις για νά αντιμετωπίσει ένα
τέτοιο πρόβλημα, είναι εύκολο νά συμπεράνει ότι: «χρειαζόμαστε ακόμα (τουλά-
χιστον) και τή γωνία $\hat{\omega}$, πού σχηματίζει ό σωλήνας ΚΑ [σχ. 3·1 (α)] του
πυροβόλου μέ τήν προβολή του Οx πάνω στον όρίζοντα».

Βλέπoμε λοιπόν ότι, δέν είναι αρκετό τό φυσικό μέγεθος, πού ονομάσαμε
ταχύτητα, νά δίνεται μ' ένα μόνον αριθμό (όπως 2500 km/h). Πρέπει νά συνο-
δεύεται και από πληροφορίες σχετικά μέ τόν τρόπο «ένεργείας του». Πρέπει
δηλαδή νά γνωρίζoμε πάνω σε ποιά εύθεια και μέ ποιά φορά «ένεργει» ή ταχύ-

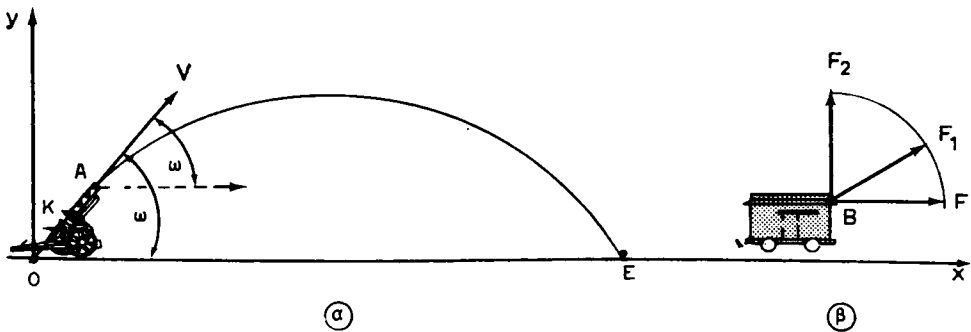
τητα, αν θέλουμε να οδηγηθούμε σε σωστά και πλήρη συμπεράσματα σχετικά με τ' αποτελέσματά της.

Έτσι, στο παράδειγμά μας, την ταχύτητα του βλήματος την παραστήσαμε με τό βέλος $\vec{AV}$.

Στό σχήμα 3·1 (β) εμφανίζεται μία άλλη παρόμοια περίπτωση.

Αν σ' ένα σημείο B του όχηματος ενεργήσει μία δύναμη, τό αποτέλεσμα της δράσεώς της θά εξαρτηθεί και από τόν «τρόπο ενεργείας» αυτής της δυνάμεως.

Έστω και αν οι δυνάμεις, πού δηλώνονται με τά βέλη $\vec{BF}$, $\vec{BF}_1$, $\vec{BF}_2$, έχουν την ίδια ένταση, οι συνέπειες της εφαρμογής τους δέν είναι οι ίδιες.



Σχ. 3·1.

Παρουσιάζεται κι εδώ ή ίδια αναγκαιότητα, όπως προηγούμενα με την ταχύτητα· πρέπει δηλαδή να γνωρίζουμε, πέρα από την ένταση (τό μέτρο) μιās δυνάμεως, και την εϋθεία ενεργείας αλλά και τή φορά της.

Υπάρχουν τελικά δυό είδη φυσικῶν μεγεθῶν:

α) Εκείνα πού μπορούν να ὀρισθοῦν με τή χρησιμοποίηση ἑνός ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμός αὐτός είναι τό **μέτρο** τοῦ μεγέθους καί τά μεγέθη αὐτά λέγονται **ἀριθμητικά** ἢ **βαθμωτά**. Τέτοια π.χ. μεγέθη είναι ή **μάζα**, ὁ **ὄγκος**, ή **πυκνότητα**, ή **θερμοκρασία** ἑνός σώματος, ή **ἀπόσταση** μεταξύ δύο πόλεων.

β) Ὅλα ἐκείνα πού ἀπαιτοῦν γιά τόν πλήρη καθορισμό τους μία ἔνδειξη ὡς πρὸς τόν «τρόπο ενεργείας τους»· αὐτά πού δέν μπορούν να ὀρισθοῦν χωρίς τή μεσολάβηση τῶν ἐννοιῶν τῆς **διευθύνσεως** καί **τῆς φοράς**, αὐτά πού ἐμφανίζονται μ' ἕνα συμφυή **προσανατολισμό**.

Τά μεγέθη αὐτά, ὅπως ή **δύναμη**, ή **ταχύτητα**, ή **ἐπιτάχυνση**, ή **πίεση** κλπ., λέγονται **διανυσματικά μεγέθη**.

Ἡ λέξη **διάνυσμα** μᾶς θυμίζει γενικά ὄχι μόνο τή «μετάβαση» ἀπό μιάν ἀρχική κατάσταση A σέ μία τελική B, ἀλλά ἀκόμα καί τόν «τρόπο μεταβάσεως» ἀπό τήν κατάσταση A στή B.

Σύμφωνα μ' αὐτή τήν ἰδέα, πολλῶν εἰδῶν μεταβολές θά μπορούσαν να χαρακτηρισθοῦν ὡς διανύσματα. Ἐτσι π.χ., μολονότι ή **θερμοκρασία** είναι

Ένα αριθμητικό μέγεθος, αυτό που χαρακτηρίζει τη μεταβολή της θερμοκρασίας γύρω από ένα σημείο A, συναρτήσει της διευθύνσεως, είναι ένα διάνυσμα.

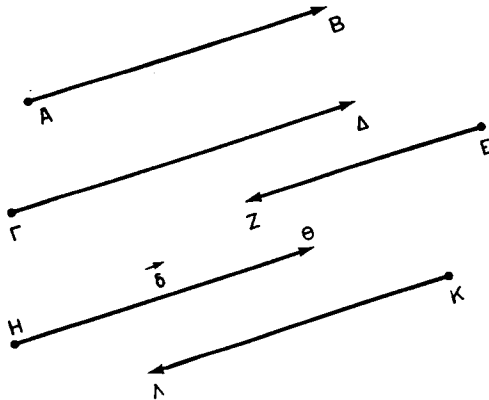
Τί είναι λοιπόν τό διάνυσμα;

Πρίν περάσουμε στη διεξοδική μελέτη του διανύσματος, καί κλείνοντας αυτή την εισαγωγή, θα μπορούσαμε, σύμφωνα καί μέ τά προηγούμενα, νά δώσομε τήν επόμενη απάντηση: **Διάνυσμα είναι ή μαθηματική εικόνα — ή μαθηματική παράσταση — ενός διανυσματικού μεγέθους.**

3 · 2 Τό εφαρμοστό διάνυσμα καί τά στοιχεία του.

Μιά κατάλληλη επινόηση γιά τήν παράσταση ενός προσανατολισμένου μεγέθους θα ήταν κάθε τί που θα επέτρεπε νά όρίσομε συγχρόνως ένα ποσό, μιά διεύθυνση καί μιά φορά.

Δυό σημεία A καί B στο χώρο (σχ. 3 · 2) όταν τό ένα (έστω τό A) χα-



Σχ. 3 · 2.

ρακτηρίζεται ως **άρχή** καί τό άλλο (τό B) ως **πέρας**, μαζί μέ τό τμήμα που όρίζουν αυτά τά σημεία, είναι μιά καλή εικόνα διανυσματικού μεγέθους.

Γι' αυτό τό λόγο:

Όνομάζομε εφαρμοστό διάνυσμα ένα εϋθύγραμμο τμήμα, μέ όρισμένα άκρα, μαζί μέ μιά φορά πάνω σ' αυτό τό τμήμα.

Έτσι δυό σημεία A καί B, ένω όρίζουν ένα καί μόνο τμήμα (τό AB ή τό BA άδιάφορα), μάς παρέχουν δυό διαφορετικά διανύσματα· τό ένα μέ άρχή τό A καί πέρας τό B (συμβολικά: $\vec{AB}$) καί τό άλλο μέ άρχή τό B καί πέρας τό A (συμβολικά: $\vec{BA}$).

Δυό εφαρμοστά διανύσματα, που κείνται στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλες ευθείες, λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά διανύσματα**. λέμε άκόμα, σ' αυτή τήν περίπτωση, ότι τά διανύσματα έχουν τήν **ίδια διεύθυνση**. Π.χ. όλα τά εφαρμοστά διανύσματα του σχήματος 3 · 2 έχουν τήν ίδια διεύθυνση.

Σέ κάθε σύνολο παραλλήλων εὐθειῶν, σέ κάθε δηλαδή διεύθυνση, ἀνήκουν δύο ἀντίθετες φορές (κατευθύνσεις).

Δύο παράλληλα ἐφαρμοστά διανύσματα, ἂν ἔχουν καί τήν ἴδια φορά, λέγονται **ὁμόρροπα**: δύο παράλληλα ἐφαρμοστά διανύσματα μέ ἀντίθετες φορές, λέγονται **ἀντίρροπα**.

Τά ἐφαρμοστά π.χ. διανύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{\Gamma\Delta}$ (σχ. 3.2) εἶναι ὁμόρροπα, ἐνῶ τά $\vec{AB}$ καί $\vec{EZ}$ εἶναι ἀντίρροπα.

Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται **ἴσα** (ἢ ἰσοδύναμα) ἂν εἶναι ὁμόρροπα καί ἰσομήκη, ὅπως π.χ. τά διανύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{H\Theta}$ (σχ. 3.2).

Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται **ἀντίθετα** ἂν εἶναι ἀντίρροπα καί ἰσομήκη, ὅπως π.χ. τά διανύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{KL}$ (ἢ τά $\vec{AB}$ καί $\vec{BA}$, σχ. 3.2).

Ἀπό ὅσα ἀναφέραμε προκύπτει ἀβίαστα τό ἀκόλουθο σημαντικό συμπέρασμα: «Κάθε ἐφαρμοστό διάνυσμα ἔχει τρία γνωρίσματα, τρία στοιχεία: α) **διεύθυνση** (ἢ εὐθεία ὅπου κεῖται* τό διάνυσμα καί κάθε παράλληλη πρὸς αὐτή), β) **φορά** καί γ) **μήκος**».

Ἐδῶ εἶναι ἀναγκαῖο νά γίνει ἡ διευκρίνιση ὅτι τά προηγούμενα ἀναφέρονται σέ διανύσματα τῶν ὁποίων τά ἄκρα εἶναι διαφορετικά. Καί τοῦτο διότι εἶναι σκόπιμο (ὅπως θά δοῦμε καί παρακάτω) νά δεχθοῦμε τήν ὑπαρξη τοῦ (λεγόμενου) **μηδενικοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος**: δηλαδή ἑνός (συμβατικοῦ) διανύσματος, στό ὁποῖο ἡ ἀρχή καί τό πέρας συμπίπτουν.

Δύο οποιαδήποτε ἐφαρμοστά μηδενικά διανύσματα $\vec{AA}$, $\vec{BB}$, εἶναι ἴσα, διότι: α) τά μήκη τους εἶναι ἴσα (ὡς μηδενικά)· β) μπορούμε νά πάρουμε ὡς κοινὴ διεύθυνσή τους δύο εὐθεῖες, ἀπὸ τά Α καί Β, παράλληλες μεταξύ τους· γ) δεχόμεστε τέλος ὅτι ἔχουν καί τήν ἴδια φορά (ὅποια θέλομε πάνω στά στηρίγματά τους).

3·3 Τό ἐλεύθερο διάνυσμα.

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, τά διάφορα ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ χώρου διαμερίζονται σέ κλάσεις ἴσων μεταξύ τους διανυσμάτων.

Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα ἀπὸ διαφορετικές κλάσεις εἶναι ἄνισα, διότι, γιά νά ἀνήκουν σέ διαφορετικές κλάσεις, θά διαφέρουν σ' ἓνα τουλάχιστον ἀπὸ τά τρία στοιχεία (διεύθυνση, φορά, μήκος).

Ἐνα ἀπειροσύνολο ἀπὸ ἴσα μεταξύ τους ἐφαρμοστά διανύσματα λέγεται **ἐλεύθερο διάνυσμα** ἢ συντόμως **διάνυσμα**.

Συνεπῶς ἓνα (ἐλεύθερο) διάνυσμα εἶναι μιά κλάση ἴσων ἐφαρμοστών διανυσμάτων, δηλαδή ἐφαρμοστών διανυσμάτων πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, τήν ἴδια φορά καί τό ἴδιο μήκος.

Γι' αὐτό μπορούμε ἀκόμα νά λέμε ὅτι: **Διάνυσμα** (μὴ μηδενικό) εἶναι τό σύ-

* Ἡ εὐθεία ὅπου κεῖται ἓνα ἐφαρμοστό διάνυσμα λέγεται καί φορές ἡ στήριγμα τοῦ διανύσματος.

στημα μιᾶς διεύθυνσεως, μιᾶς φοράς, συσχετισμένης μ' αὐτή τή διεύθυνση, καί ἑνός μήκους $\neq 0$: μηδενικό δέ διάνυσμα εἶναι τὸ σύστημα μιᾶς ὁποιασδήποτε διεύθυνσεως, μιᾶς ὁποιασδήποτε συσχετισμένης φοράς καί τοῦ μηδενικοῦ μήκους.

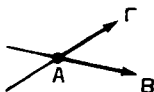
Ἐνα ἐλεύθερο διάνυσμα ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ κάποιο ἐφαρμοστό καί σημειώνεται συνήθως μ' ἕνα μικρὸ γράμμα ἐπιγραμμισμένο μ' ἕνα βέλος, ὅπως: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ (σχ. 3·2). Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα διάνυσμα εἶναι μηδενικό θά γράφομε: $\vec{\alpha} = \vec{0}$. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\delta}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ ἕνα ἐφαρμοστό $\vec{H\Theta}$ θά γράφομε $\vec{\delta} = \vec{H\Theta}$.

Μέτρο ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$ λέγεται τὸ μήκος ὁποιοῦδήποτε ἀπὸ τὰ ἐφαρμοστά διανύσματα πού ἀπαρτίζουν τὸ (ἐλεύθερο) διάνυσμα $\vec{\delta}$: συμβολικά γράφομε $|\vec{\delta}|$.

Στὴ Γεωμετρία καί τὴ Φυσική γίνεται συχνά χρῆση τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος. Ἐτσι π.χ. ἡ μεταφορὰ ἑνός σχήματος καθορίζεται μ' ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα. Ἐπίσης μιὰ δύναμη, πού ἐνεργεῖ πάνω σ' ἕνα σῶμα, καθορίζεται ἀπὸ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα, ὅταν δέν παίζει ρόλο τὸ σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως.

3·4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

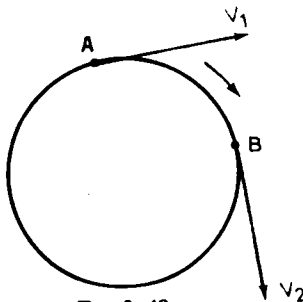
1) Μποροῦμε, γιά τὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{AG}$, τοῦ σχήματος 3·4α νά θέσουμε τὸ ἐρώτημα: Ἐχουν τὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{AG}$ τὴν ἴδια ἢ διαφορετικές φορές;



Σχ. 3·4α.

Ὁχι. Διότι τὰ διανύσματα αὐτὰ ἀνήκουν σέ διαφορετικές διευθύνσεις καί δυὸ διανύσματα μποροῦν νά ἔχουν τὴν ἴδια ἢ ἀντίθετες φορές μόνον ὅταν ἀνήκουν στὴν ἴδια διεύθυνση.

2) Ἐνα κινητὸ κινεῖται ὁμαλὰ πάνω σέ κυκλική τροχιά· διανύει δηλαδή ἴσα κυκλικά τόξα σέ ἴσους χρόνους. Πῶς θά παραστήσουμε τὴν ταχύτητά του; Εἶναι σωστή ἡ διατύπωση: «Τὸ κινητὸ διατηρεῖ σταθερὴ ταχύτητα» (σχ. 3·4β);



Σχ. 3·4β.

1) Τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ, σ' ἕνα σημεῖο Α τῆς τροχιάς του, θά τὴν παραστήσουμε

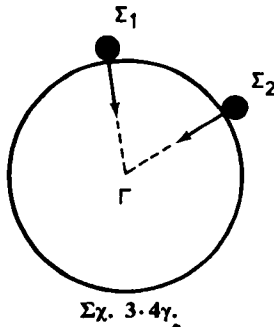
μ' ένα διάνυσμα πάνω στην εφαπτομένη του κύκλου, στο σημείο A. Τό διάνυσμα αυτό έχει ως άρχή τό σημείο A.

11) 'Η διατύπωση δέν είναι σωστή, διότι οι ταχύτητες $\vec{AV}_1$ και $\vec{BV}_2$, σέ διαφορετικά σημεία τής τροχιάς, έχουν διαφορετικές διευθύνσεις και συνεπώς δέν μπορούν νά είναι ίσες.

'Εκείνο πού μπορούμε νά πούμε στην προκειμένη περίπτωση είναι: «τό μέτρο τής ταχύτητας του κινητού διατηρείται σταθερό»: δηλαδή έχουμε: $|\vec{AV}_1| = |\vec{AV}_2|$.

3) Τό βάρος ενός σώματος είναι αριθμητικό ή διανυσματικό μέγεθος (σχ. 3.4γ);

Τό βάρος ενός σώματος (Σ) είναι δύναμη· είναι ή δύναμη μέ τήν όποία τό (Σ) έλκεται από τή Γῆ [όταν τό (Σ) βρίσκεται πάνω στή Γῆ]. "Αρα τό βάρος είναι διανυσματικό μέγεθος. Σκόπιμο είναι νά παρατηρήσουμε ότι, τό βάρος ενός σώματος αλλάζει διεύθυνση από τόπο σέ τόπο,



διότι κάθε φορά έχει φορέα τήν εϋθεία πού συνδέει τό σώμα μέ τό κέντρο τής Γῆς. 'Εξάλλου και ή αριθμητική τιμή του βάρους, ενός και του ίδιου σώματος, δέν είναι ή ίδια σ' όλα τά σημεία τής Γῆς. Καί αν ακόμα θεωρήσουμε, λόγω τής αμελητέας διαφορής, σταθερή τήν αριθμητική τιμή του βάρους ενός σώματος πάνω στή Γῆ, αυτή αλλάζει πάρα πολύ όταν τό ίδιο σώμα βρεθεί π.χ. πάνω στή Σελήνη.

3.5 Άσκήσεις.

1. Ποιά κοινά γνωρίσματα έχουν οι ταχύτητες όλων των αυτοκινήτων πού κινούνται πάνω στον ίδιο δρόμο;

2. Τί είδους τετράπλευρο όρίζουν τά άκρα δυό ίσων εφαρμοστών διανυσμάτων, πού δέν κείνται στην αυτή εϋθεία;

3. Δίνεται ένα εφαρμοστό διάνυσμα $\vec{AB}$ και ένα άλλο $\vec{\Gamma\Delta}$ τό όποιο μετατοπίζεται πάνω στο φορέα του (ε) και για τό όποιο γνωρίζουμε ότι $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB}$. Τί έχετε νά πείτε για τήν εϋθεία (ε) και για τά ζεύγη των διανυσμάτων $(\vec{A\Gamma}, \vec{B\Delta})$ πού όρίζονται για κάθε θέση του $\vec{\Gamma\Delta}$;

4. Θεωρούμε ένα κυρτό τραπέζιο ABΓΔ μέ βάσεις τίς πλευρές AB και ΓΔ. "Ας είναι E, Z, H και Θ τά μέσα άντιστοίχως των πλευρών AD, BG και των διαγωνίων AG, BD. "Εφόσον τά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ μετατοπίζονται πάνω στους φορείς τους, τί έχετε νά πείτε για τά διανύσματα $\vec{EZ}$ και $\vec{H\Theta}$; "Αν ειδικότερα είναι $|\vec{AB}| = |\vec{\Gamma\Delta}|$ τί είναι τά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ και τί τό διάνυσμα $\vec{H\Theta}$;

5. Τί έχετε νά πείτε για τήν ταχύτητα του βλήματος, στο σχήμα 3.1, αν τό κινητό διαγράφει τή σημειούμενη τροχιά;

6. Νά βρείτε και νά αναφέρετε διάφορα αριθμητικά και διανυσματικά μεγέθη.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

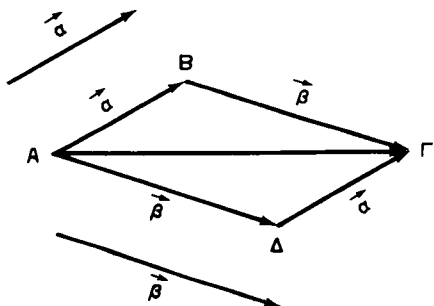
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

4.1 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων.

α) Άθροισμα εφαρμοστών και ελεύθερων διανυσμάτων.

Δυό εφαρμοστά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ (σχ. 4.1α), τέτοια ώστε το πέρας του ενός νά ταυτίζεται με την αρχή του άλλου, λέγονται **διαδοχικά**.

Άθροισμα δυό διαδοχικών εφαρμοστών διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ (σχ. 4.1α) λέγεται το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$, δηλαδή εκείνο που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του δεύτερου. Γράφομε: $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$.



Σχ. 4.1α.

Άθροισμα δυό ελεύθερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγεται το ελεύθερο διάνυσμα που αντιπροσωπεύεται από ένα εφαρμοστό διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$ (σχ. 4.1α), αν το $\vec{A\Gamma}$ είναι το άθροισμα δυό διαδοχικών εφαρμοστών διανυσμάτων, που αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα το $\vec{\alpha}$ και το $\vec{\beta}$. Αν δηλαδή είναι $\vec{\alpha} = \vec{AB}$ και $\vec{\beta} = \vec{B\Gamma}$, τότε έχουμε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$.

Αν τά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha_1}$ είναι δυό αντίθετα διανύσματα και $\vec{AB}$ είναι ένας αντιπρόσωπος του $\vec{\alpha}$ (σχ. 4.1α), τότε το $\vec{BA}$ θά είναι ένας αντιπρόσωπος του $\vec{\alpha_1}$. Έτσι θά έχουμε $\vec{\alpha} + \vec{\alpha_1} = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

Τό άθροισμα δηλαδή δυό αντίθετων διανυσμάτων είναι το μηδενικό διάνυσμα.

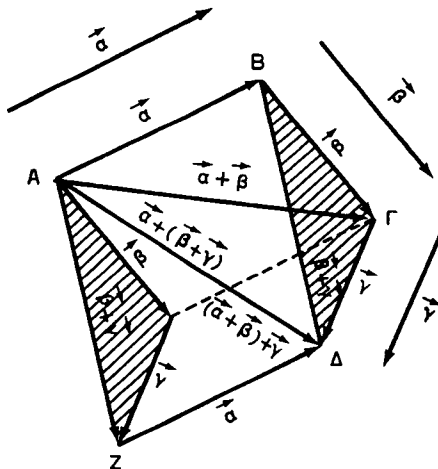
β) **Ιδιότητες του άθροισματος.** Για το άθροισμα τών διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές, και από την πρόσθεση τών αριθμών, ιδιότητες:

$$1) \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} \text{ (αντιμεταθετική ιδιότητα).}$$

11) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα).

Τό σχήμα 4.1α μᾶς παρέχει, σύμφωνα με τίς ιδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου, μιά γεωμετρική ἐπιβεβαίωση τῆς ἀντιμεταθετικῆς ιδιότητος.

Ἡ προσεταιριστική ιδιότητα ἐπίσης, γίνεται προφανῆς στό σχήμα 4.1β, καί προκύπτει ἀπό τίς βασικές ιδιότητες τοῦ τριγώνου καί τοῦ παραλληλογράμμου.



Σχ. 4.1β.

Ὅπως καί στήν πρόσθεση τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔτσι κι ἐδῶ μπορούμε, μέ τόν ἴδιο τρόπο (στηριζόμενοι στίς προηγούμενες ιδιότητες), νά ἐπεκτείνουμε τό νόημα τοῦ ἀθροίσματος δυό διανυσμάτων σέ περισσότερα ἀπό δυό.

Ἔτσι π.χ. ἔχομε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta}$.

Παρατηρήσεις: 1) Νά πῶς γίνεται πρακτικά ἡ πρόσθεση δυό ἢ περισσότερων διανυσμάτων, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, ..., πού κείνται στό ἴδιο ἐπίπεδο. Μέ ἀρχή τυχαῖο σημεῖο A (σχ. 4.1β) σχεδιάζομε ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\vec{AB}$ ἴσο μέ τό $\vec{\alpha}$. Ἀκολουθῶς μέ ἀρχή τό B σχεδιάζομε ἐφαρμοστό διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$ ἴσο μέ τό $\vec{\beta}$. Ὁμοίᾳ μέ ἀρχή τό Γ σχεδιάζομε ἐφαρμοστό διάνυσμα ἴσο μέ τό $\vec{\gamma}$ κ.ο.κ. Ἀθροισμα τῶν διανυσμάτων θά εἶναι τό διάνυσμα μέ ἀρχή τό A καί πέρασ τό πέρασ τοῦ τελευταίου ἀπό τά θεωρούμενα διαδοχικά διανύσματα.

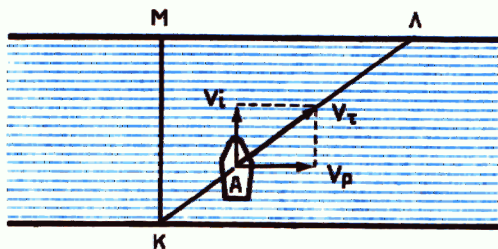
11) Εἶδαμε παραπάνω, ὅτι τό ἄθροισμα δυό ἀντιθέτων διανυσμάτων εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα. Γενικά, τό ἄθροισμα διαδοχικῶν ἐφαρμοστών (καί μή μηδενικῶν) διανυσμάτων εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα, ἂν τό πέρασ τοῦ τελευταίου διανύσματος ταυτίζεται μέ τήν ἀρχή τοῦ πρώτου.

Ἔχομε π.χ. (σχ. 4.1β) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta A} = \vec{AA} = \vec{0}$.

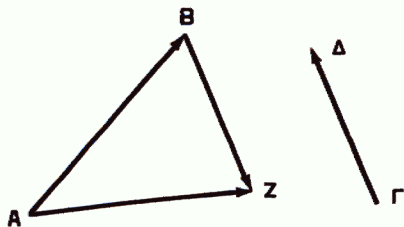
Νά λοιπόν γιατί εἶναι σκόπιμη ἡ εἰσαγωγή τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος μέσα στό σύνολο τῶν διανυσμάτων.

Σημείωση: Τό νόημα πού δόθηκε στό ἄθροισμα δυό διανυσμάτων συμβιβάζεται μέ τή «φυσική συμπεριφορά» δυό ὁμοειδῶν διανυσματικῶν μεγεθῶν, ὅταν αὐτά ἐνεργοῦν συγχρόνως.

Έτσι π.χ. αν A είναι ένα ποταμόπλοιο (σχ. 4·1γ), $\vec{AV}_p$ η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού και $\vec{AV}_i \perp \vec{AV}_p$ ή ταχύτητα που αναπτύσσει τό ποταμόπλοιο σέ νερά πού ήρεμοῦν, τότε: τό ποταμόπλοιο A θά κινηθεῖ τελικά σάν νά εἶχε ταχύτητα τήν $\vec{AV}_T$, πού αὐτή δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τή σύνθεση τῶν ταχυτήτων $\vec{AV}_p$ καί $\vec{AV}_i$. εἶναι δέ $\vec{AV}_T = \vec{AV}_p + \vec{AV}_i$. Ἐτσι τό ποταμόπλοιο θά κινηθεῖ κατὰ μήκος τῆς εὐθείας $ΚΛ$ καί ὄχι τῆς $ΚΜ$, πού εἶναι παράλληλη τῆς AV_i (κάθετη πρὸς τή διεύθυνση τοῦ ρεύματος).



Σχ. 4·1γ.



Σχ. 4·1δ.

γ) Διαφορά ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ από ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ λέγεται ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$, αν γιά τό $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$.

Εἶναι δηλαδή $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma} \iff \vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Ἄν $\vec{\beta}_1$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$, τότε ἔχομε $\vec{\alpha} + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Πράγματι: $\vec{\beta} + (\vec{\alpha} + \vec{\beta}_1) = \vec{\beta} + (\vec{\beta}_1 + \vec{\alpha}) = (\vec{\beta} + \vec{\beta}_1) + \vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Ὡστε: Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα διάνυσμα $\vec{\beta}$ ἀπό ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε στό $\vec{\alpha}$ τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἐτσι στό σχῆμα 4·1δ ἔχομε:

$$\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB} + \vec{BZ} = \vec{AZ}, \text{ ἄν } \vec{BZ} = \vec{\Delta\Gamma}.$$

4·2 Γινόμενο διανύσματος ἐπὶ πραγματικόν αριθμό.

Ὀνομάζομε γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ ἐπὶ ἕνα πραγματικόν ἀριθμό $\lambda \neq 0$, ἕνα διάνυσμα $\vec{\beta}$ πού ἔχει: I) διεύθυνση τήν ἴδια μέ τή διεύθυνση τοῦ $\vec{\alpha}$ II) φορά τήν ἴδια ἢ ἀντίθετη πρὸς τή φορά τοῦ $\vec{\alpha}$, καθόσον $\lambda > 0$ ἢ $\lambda < 0$ καί III) μέτρο ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τοῦ $\vec{\alpha}$ ἐπὶ τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ λ ($|\vec{\beta}| = |\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$).

Ἄν $\lambda = 0$ εἴτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ὀρίζεται: $\lambda \vec{\alpha} = \vec{0}$.

Γιά τό γινόμενο διανύσματος ἐπὶ πραγματικόν ἀριθμό ἰσχύουν οἱ παρακάτω ιδιότητες:

I) $\kappa(\lambda \vec{\alpha}) = (\kappa\lambda) \vec{\alpha} = (\lambda\kappa) \vec{\alpha} = \lambda(\kappa \vec{\alpha})$, ὅπου κ καί λ πραγματικοί ἀριθμοί.

$$\text{II)} (\kappa + \lambda) \vec{\alpha} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\alpha}.$$

Δηλαδή: 'Η πράξη του πολλαπλασιασμού διανύσματος επί πραγματικών αριθμών είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση των αριθμών.

$$\text{III)} \lambda (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}.$$

Δηλαδή: 'Η πράξη είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση των διανυσμάτων.

'Από τη σχέση $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$ (μέ $\vec{\alpha} \neq 0$) παράγεται και ο λόγος δύο παραλλήλων διανυσμάτων. Λέμε δηλαδή, ότι ο λόγος ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ προς ένα παράλληλο και μη μηδενικό $\vec{\alpha}$ είναι ο πραγματικός αριθμός λ , και γράφουμε $\frac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}} = \lambda$, όταν και μόνο είναι $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$.

Παρατήρηση: Τό διάνυσμα $(-1) \cdot \vec{\alpha}$ είναι, σύμφωνα με τον όρισμό του γινομένου διανύσματος επί πραγματικών αριθμών, τό αντίθετο του $\vec{\alpha}$. 'Αντί $(-1) \cdot \vec{\alpha}$ γράφουμε συνήθως $-\vec{\alpha}$.

4.3 'Εφαρμογές και παραδείγματα.

1) 'Αν ή ταχύτητα $\vec{AV}_p$ — στο σχήμα 4.1γ — έχει μέτρο 6 km/h και ή $\vec{AV}_i$, 8 km/h τότε νά βρεθεί: I) Τό μέτρο της ταχύτητας $\vec{AV}_t$. II) ό χρόνος που χρειάζεται τό πλοίο γιά τά περάσει από τή μιάν όχθη του ποταμού στην άλλη, αν τό πλάτος του ποταμού είναι 150 μέτρα.

$$\text{I)} \text{ 'Από τό όρθογώνιο τρίγωνο } AV_p V_t \text{ έχουμε: } |\vec{AV}_p|^2 + |\vec{V}_p V_t|^2 = |\vec{AV}_t|^2 \text{ δηλαδή } |\vec{AV}_t|^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow |\vec{AV}_t| = 10 \text{ km/h.}$$

II) 'Από τά όμοια τρίγωνα $AV_p V_t$ και ΛMK παίρνουμε:

$$\frac{\Lambda K}{AV_t} = \frac{MK}{V_p V_t} \Rightarrow K\Lambda = 150 \text{ m} \cdot \frac{10 \text{ km/h}}{8 \text{ km/h}} = 187,5 \text{ m.}$$

$$\text{'Ο χρόνος } t = \frac{s \text{ διάστημα}}{|\vec{u}| \text{ μέτρο ταχύτητας}} = \frac{187,5 \text{ m}}{10 \text{ km/h}} \quad (1)$$

$$\text{άλλά } 10 \text{ km/h} = \frac{10000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{25}{9} \text{ m/s} \text{ και ή τιμή της (1) γίνεται } \frac{187,5 \cdot 9}{25} \text{ s} = 67,5 \text{ s} = 1 \text{ λεπτό και } 7,5 \text{ δευτερόλεπτα.}$$

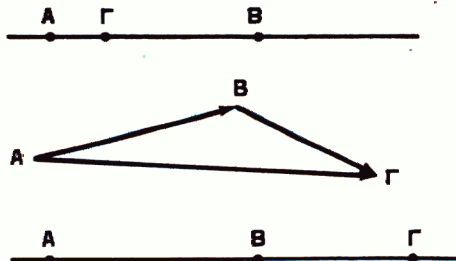
2) Θεωρούμε τρία διαφορετικά σημεία A, B, Γ και γράφουμε τις σχέσεις:

$$\text{I)} \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} \quad \text{II)} \quad AB + B\Gamma = A\Gamma \quad (\text{σχ. 4.3α}).$$

Τί παρατηρήσεις έχετε νά διατυπώσετε γι' αυτές τις σχέσεις;

'Η πρώτη σχέση έκφράζει τό άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων, και είναι σωστή, σύμφωνα με τον όρισμό, γιά όποιαδήποτε σημεία A, B, Γ , είτε αυτά άνήκουν είτε δέν άνήκουν στην ίδια εύθεία.

Ἡ δεύτερη σχέση ἀναφέρεται σέ εὐθύγραμμα τμήματα (ὄχι σέ διανύσματα) καί εἶναι σωστή μόνο σέ μιᾷ ἐιδικῇ περίπτωσιν· ὅταν τὰ σημεῖα εἶναι συνευθειακά καί ἐφόσον τό Β κείται μεταξύ τῶν Α καί Γ. Σέ κάθε ἄλλῃ περίπτωση ἔχομε $AB + B\Gamma > A\Gamma$.

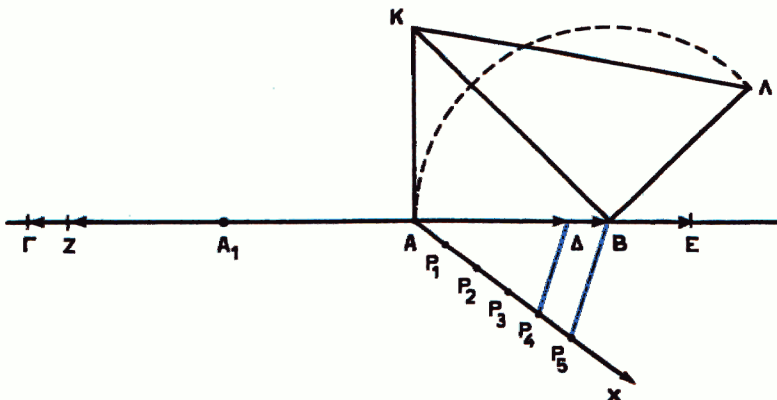


Σχ. 4.3α.

Δέν εἶναι χωρίς ἀξία νά παρατηρήσουμε ἀκόμα (γιά ἄλλῃ μιᾷ φορά) ὅτι $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}$, ἐνῶ τό ἄθροισμα $AB + B\Gamma + \Gamma A$ δίνει τήν περίμετρο τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

3) Ἄν $\vec{AB}$ ἔνα ἐφαρμοστό διάνυσμα, νά κατασκευασθοῦν πάνω στό φορέα του διανύσματα ἴσα πρός $-2 \cdot \vec{AB}$, $\frac{4}{5} \cdot \vec{AB}$, $\sqrt{2} \cdot \vec{AB}$ καί $-\sqrt{3} \cdot \vec{AB}$.

Γιά νά ὀρίσουμε ἕνα διάνυσμα ἴσο μέ $-2\vec{AB}$ παίρνομε, πάνω στήν ἡμιευθεία τήν ἀντίθετη τῆς ἡμιευθείας AB , δύο διαδοχικά τμήματα ἴσα μέ τό τμήμα AB , τά AA_1 καί $A_1\Gamma$ (σχ. 4.3β).



Σχ. 4.3β.

Τότε διάνυσμα $\vec{A\Gamma} = -2\vec{AB}$.

Γιά νά ὀρίσουμε διάνυσμα ἴσο μέ $\frac{4}{5} \cdot \vec{AB}$, φέρομε τυχαία ἡμιευθεία Ax καί πάνω σ' αὐτή παίρνομε τά διαδοχικά καί ἴσα μεταξύ τους τμήματα AP_1 , P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_5 (τό πρῶτο αὐθαίρετα)· ἀκολουθῶς φέρομε τήν P_5B καί ἀπό τό P_4 τήν παράλληλῃ εὐθεία πρὸς τήν P_5B .

Αν Δ το σημείο τομής αυτής της τελευταίας με την ημιευθεία AB, τότε διάνυσμα $\vec{AD} = \frac{4}{5} \vec{AB}$.

Για τον προσδιορισμό διανυσμάτων ίσων με $\sqrt{2} \cdot \vec{AB}$ και $-\sqrt{3} \cdot \vec{AB}$ εκτελούμε τα επόμενα βήματα. Με μία κάθετη πλευρά την AB σχεδιάζουμε το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο KAB ($\angle KAB = 90^\circ$, $KA = KB$). Ακολουθώντας φέρουμε τη $BL \perp BK$ και παίρνουμε τμήμα BL ίσο με AB.

Έχουμε: $(KB)^2 = (AB)^2 + (AK)^2 = 2(AB)^2 \implies KB = \sqrt{2} \cdot AB$ και

$(KL)^2 = (KB)^2 + (BL)^2 = 2(AB)^2 + (AB)^2 = 3(AB)^2 \implies KL = \sqrt{3} \cdot AB$.

Έτσι βλέπουμε ότι το τμήμα KB έχει μέτρο το γινόμενο του μέτρου του AB επί τον πραγματικό αριθμό $\sqrt{2}$ και το KL το γινόμενο του μέτρου του AB επί τον αριθμό $\sqrt{3}$. Παίρνουμε τώρα, πάνω στην ημιευθεία AB, τμήμα AE ίσο με το KB και, πάνω στην αντίθετη ημιευθεία της AB, τμήμα AZ ίσο με KL. Το διάνυσμα $\vec{AE}$ είναι τότε ίσο με $\sqrt{2} \cdot \vec{AB}$ και το $\vec{AZ}$ ίσο με $-\sqrt{3} \cdot \vec{AB}$.

4.4 Ασκήσεις.

1. Νά υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG}$ αν:

Ι) $|\vec{AB}| = |\vec{BG}| = 8 \text{ cm}$ και γωνία $\widehat{ABG} = 120^\circ$ II) $|\vec{AB}| = 5 \text{ cm}$, $|\vec{BG}| = 12 \text{ cm}$ και γωνία $\widehat{ABG} = 90^\circ$.

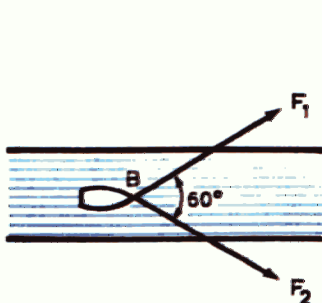
2. Ι) Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο ABΓΔ και ακολουθώντας προσδιορίστε τα διανύσματα:

$$\vec{AB} + \vec{GD} \text{ και } \vec{AB} - \vec{GD}.$$

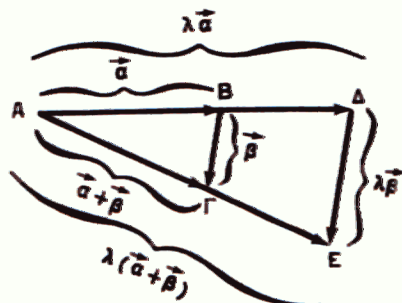
II) Σχεδιάστε ένα τετράπλευρο ABΓΔ και ακολουθώντας προσδιορίστε τα διανύσματα:

$$\vec{AB} + \vec{BG}, \vec{AD} + \vec{DG}, \vec{DG} + \vec{GB}, \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} + \vec{DA}, \vec{AD} - \vec{AB} \text{ και } \vec{AB} - \vec{DG}.$$

3. Δυό εργάτες τραβούν, από τις όχθες ενός καναλιού (ο ένας από τη μία και ο άλλος από την άλλη), μία βάρκα (σχ. 4.4α). Αν ο καθένας ασκεί δύναμη εντάσεως 20 kρ και τα σκοινιά έλξεως σχηματίζουν γωνία 60° , νά καθορισθεί η διεύθυνση κινήσεως της βάρκας και η δύναμη που ασκείται πάνω της.



Σχ. 4.4α.



Σχ. 4.4β.

4. Με τη βοήθεια του σχήματος 4.4β και στηριζόμενοι στις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων ν' αποδείξετε την ιδιότητα $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

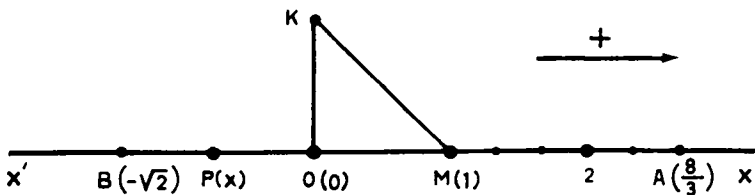
Η ΕΥΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΝΩ
Σ' ΑΥΤΗ

5.1. Προσανατολισμένη ευθεία - άξονας. Τετμημένη σημείου.

Όπως όλοι γνωρίζουμε, πάνω σέ μία ευθεία διακρίνομε δυό αντίθετες φορές· δηλαδή δυό τρόπους διατάξεως τών σημείων της.

Αν λοιπόν, πάνω σέ μία άπέρατη ευθεία xx' (σχ. 5.1), ή μία άπό τίς δυό φορές (κατευθύνσεις) χαρακτηριστεί ως **θετική φορά** (καί συνεπώς ή άλλη ως **άρνητική**), τότε αύτή ή ευθεία λέγεται **προσανατολισμένη**.

Σημείωση: Παίρνομε συνήθως ως θετική φορά αύτή πού δηλώνομε μέ τήν έκφραση «άπ' άριστερά πρós τά δεξιά».



Σχ. 5.1.

Προχωρούμε τώρα στόν έφοδιασμό μιās προσανατολισμένης ευθείας καί μέ άλλα στοιχεία.

Παίρνομε άρχικά πάνω στήν προσανατολισμένη ευθεία ένα σημείο O (όποιο θέλομε) καί θεωρούμε τίς δυό ήμιευθείες μέ άρχή τό O . Αύτή πού διαγράφεται κατά τή θετική φορά θά τήν όνομάζομε **θετική ήμιευθεία**, μέ άρχή τό O , καί τήν άλλη **άρνητική**.

Όρίζομε άκολούθως, στή θετική ήμιευθεία, ένα σημείο M (σχ. 5.1), τέτοιο ώστε τό τμήμα OM νά είναι εκείνο πού θέλομε νά χρησιμοποιούμε ως μονάδα μήκους.

Τό σημείο M , όπως καί τό τμήμα OM , λέγεται **μοναδιαίο**· επίσης καί τό διάνυσμα $\vec{OM}$ λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Όταν όλα αύτά έχουν γίνει, λέμε ότι έχομε όρίσει πάνω στήν ευθεία έναν **άξονα**· ή συντομότερα:

«**Η ευθεία έγινε ένας άξονας**».

Τώρα μπορούμε ν' άντιστοιχίσομε σέ κάθε σημείο του άξονα ένα καί μόνον ένα πραγματικόν αριθμό.

Στήν άρχή O του άξονα άντιστοιχίζεται ό αριθμός μηδέν καί στό σημείο M ό αριθμός 1.

Σ' ένα σημείο A του **θετικού ήμιάξονα** άντιστοιχίζεται ό θετικός αριθμός

πού προκύπτει ἀπὸ τὴ μέτρηση τοῦ τμήματος OA μὲ μονάδα τὸ OM . Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι καὶ τὸ μέτρο τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$.

Σ' ἓνα σημεῖο B τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονα ἀντιστοιχίζεται ἓνας ἀρνητικὸς ἀριθμὸς· ὁ ἀντίθετος ἀκριβῶς τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$.

Ἀντίστροφα, ἓνας πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἀντίστοιχος ἑνὸς καὶ μόνο σημείου τοῦ ἄξονα. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. $\frac{8}{3}$ εἶναι ἀντίστοιχος τοῦ σημείου A τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα (σχ. 5.1), ἂν βέβαια τὸ τμήμα OA προκύπτει ἀπὸ τὸ ἄθροισμα δυὸ τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ OM καὶ δυὸ τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ τρίτο τοῦ OM . Ὁμοίᾳ ὁ ἀριθμὸς $-\sqrt{2}$ εἶναι ἀντίστοιχος τοῦ σημείου B τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονα, ἂν τὸ τμήμα OB εἶναι ἴσο μὲ τὴν ὑποτείνουσα KM τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου KOM (σχ. 5.1).

Ἔτσι ἔχομε κατασκευάσει μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ ὄλων τῶν σημείων τοῦ ἄξονα καὶ ὄλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν· ἔχομε, ὅπως λέμε, κατασκευάσει τὴν εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ **πραγματικὸς ἀριθμὸς**, πού ἀντιστοιχίζεται σ' ἓνα σημεῖο P ἑνὸς ἄξονα, λέγεται **τετμημένη** αὐτοῦ τοῦ σημείου.

Σημειώνομε γενικὰ τὴν τετμημένη π.χ. μὲ τὸ γράμμα x · καὶ δηλώνομε ὅτι τὸ σημεῖο P ἔχει τετμημένη x μὲ τὴ γραφὴ $P(x)$. Οἱ συμβολισμοὶ π.χ. $A\left(\frac{8}{3}\right)$ καὶ $B(-\sqrt{2})$ σημαίνουν ὅτι τὸ A ἔχει τετμημένη $\frac{8}{3}$ καὶ τὸ B , $-\sqrt{2}$.

Σημείωση: Εἶναι εὐκόλο νὰ προσδιορίσουμε τὸ σημεῖο ἐκεῖνο ἑνὸς ἄξονα πού ἔχει τετμημένη ἓναν ἀκέραιο καὶ γενικὰ ἓνα ρητὸ ἀριθμὸ. Στὴν περίπτωσιν πού ὁ x εἶναι ἀκέραιος, παίρνομε —μὲ τὸ διαβήτη μας— καὶ μὲ ἀρχὴ τὸ O , v (δπου $v = |x|$) διαδοχικὰ τμήματα ἴσα πρὸς τὸ μοναδιαῖο OM , πάνω στὸ θετικὸ ἡμιάξονα ἂν $x > 0$ καὶ πάνω στὸν ἀρνητικὸ ἂν $x < 0$.

Ἄν ὁ x ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$ (δπου α καὶ β ἀκέραιοι πρῶτοι μεταξὺ τους καὶ $\beta > 0$), τότε χωρίζομε τὸ τμήμα OM (μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη —ὅπως μαθαίνομε στὴ Γεωμετρίᾳ) σὲ β ἴσα μέρη καὶ ἐπαναλαμβάνομε, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ O , ὅπως προηγουμένως (πάνω στὸ θετικὸ ἢ τὸν ἀρνητικὸ ἡμιάξονα, καθόσον $\alpha > 0$ ἢ $\alpha < 0$), ἓνα ἀπὸ τὰ κομμάτια αὐτὰ τοῦ OM τόσες φορές ὅσες ἀπαιτεῖ ὁ φυσικὸς $|\alpha|$.

Τὸ σημεῖο στὸ ὁποῖο καταλήγομε κάθε φορὰ, εἶναι τὸ ζητούμενο σημεῖο.

Στὴ Γεωμετρίᾳ μαθαίνομε ὅτι εἶναι δυνατό νὰ κατασκευάζομε, μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη, τμήματα πού τὸ μέτρο τους δίνεται (σχετικὰ μ' ἓνα μοναδιαῖο τμήμα OM) ἀπὸ ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$, δπου α καὶ β θετικοὶ ἀκέραιοι καὶ ὄχι τετράγωνα ἀκεραίων.

Ἔτσι μπορούμε σχετικὰ εὐκόλα νὰ προσδιορίσουμε καὶ σημεῖα πού ἔχουν τετμημένες π.χ. τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{3}$, $-\sqrt{\frac{7}{5}}$, $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Σ' ἓναν ἀσύμμετρο, τέλος, ἀριθμὸ τῆς μορφῆς $x = \alpha, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ (ἢ $x = -\alpha, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$), δπου α ἀκέραιος θετικὸς καὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ μιὰ γνωστὴ μας διαδοχὴ δεκαδικῶν ψηφίων, ἀντι-

στοιχίζεται ένα και μόνο σημείο, πάνω σ' έναν άξονα, έστω και αν δεν μπορούμε να τό προσδιορί-
ζουμε με τόν κανόνα και τό διαβήτη.

Τό σημείο αυτό τό έντοπίζουμε με τόν έξής τρόπο:

Θεωρούμε τό άπειρο πλήθος τμημάτων $P_n \Sigma_n$ με τετμημένες τών άκρων τους αντίστοιχα:

$$\rho_n = \alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} \quad \text{καί} \quad \sigma_n = \rho_n + \frac{1}{10^n}, \quad \text{αν } \alpha > 0$$

$$\text{ή} \quad \rho_n = -\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}\right) \quad \text{καί} \quad \sigma_n = \rho_n - \frac{1}{10^n}, \quad \text{αν } x = -\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

Τά παραπάνω τμήματα, πού άποτελούν μιά άτεράτιστη διαδοχή, έχουν τής ακόλουθες ιδιότητες:

Ι) Τό καθένα άπ' αυτά (έκτός φυσικά άπό τό πρώτο) βρίσκεται μέσα στό προηγούμε-
νο. (Τό τμήμα $P_{k+1} \Sigma_{k+1}$ είναι μέρος το $P_k \Sigma_k$).

ΙΙ) Τό μήκος του $P_n \Sigma_n$ είναι ίσο με τό $\frac{1}{10^n}$ του μοναδιαίου μήκους· συνεπώς μπορεί
νά γίνει μικρότερο άπό όποιοδήποτε δοσμένο μήκος, άρκεί ό δείκτης n νά πάρει κατάλληλα με-
γάλη τιμή.

Έτσι καταλήγουμε στό συμπέρασμα ότι όλα τά παραπάνω τμήματα έχουν τελικά ένα και
μόνο κοινό σημείο· τό σημείο αυτό είναι εκείνο πού έχει ως τετμημένη τόν προηγούμενο
άριθμό x .

Άσκηση: Νά γίνει ή άναζήτηση του σημείου πού έχει για τετμημένη τόν άριθμό $x =$
 $= 1,56556556 \dots$

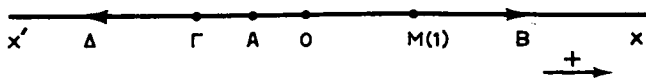
Παρατηρήστε ότι:

$$\text{Τό τμήμα } P_1 \Sigma_1 \text{ όρίζεται άπό τούς άριθμούς } \rho_1 = 1 + \frac{5}{10}, \quad \sigma_1 = 1 + \frac{6}{10}$$

$$\gg \gg P_2 \Sigma_2 \gg \gg \gg \rho_2 = 1 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}, \quad \sigma_2 = 1 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} \text{ κτλ.}$$

5.2 Τετμημένη διανύσματος παραλλήλου πρός άξονα.

Θεωρούμε έναν άξονα $x'x$ και πάνω σ' αυτόν (ή σέ εύθειες παράλληλές του)
παίρνουμε διάφορα έφαρμοστά διανύσματα, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ κτλ. (σχ. 5.2).



Σχ. 5.2.

Θά όνομάζουμε **τετμημένη ενός διανύσματος** $\overrightarrow{AB}$, πού είναι παράλληλο πρός
έναν άξονα $x'x$ ή κείται πάνω σ' αυτόν, τό λόγο $\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}}$, όπου $\overrightarrow{OM}$ τό μο-
ναδιαίο διάνυσμα του άξονα. Γράφουμε συμβολικά $\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}}$, όπότε $\overrightarrow{AB} =$
 $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Ἡ τετμημένη ενός διανύσματος είναι θετικός αριθμός, ἂν φορά τοῦ διανύσματος είναι ἐκείνη πού χαρακτηρίστηκε ὡς θετική φορά τοῦ ἄξονα· ἰσοῦται τότε ἡ τετμημένη μέ τό μέτρο τοῦ διανύσματος. (Στό σχῆμα 5.2 εἶναι $\overline{AB} > 0$).

*Ἄν τό διάνυσμα ἔχει φορά τήν ἀρνητική τοῦ ἄξονα, τότε ἡ τετμημένη του ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό τόν ἀντίθετο τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος. (Στό σχῆμα 5.2 εἶναι $\overline{\Gamma\Delta} < 0$).

*Ἄν P ἔνα σημεῖο τοῦ ἄξονα, τότε ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{OP}$, ὅπου O ἡ ἀρχή, ταυτίζεται μέ τήν τετμημένη τοῦ σημείου P.

Εἶναι ἐξάλλου φανερό ὅτι δύο ἴσα εφαρμοστά διανύσματα* ἐνός ἄξονα ἔχουν ἴσες τετμημένες καί ἀντίστροφά, ἂν οἱ τετμημένες δύο εφαρμοστών διανυσμάτων, πάνω στόν αὐτόν ἄξονα, εἶναι ἴσες, τότε καί τά διανύσματα θά εἶναι ἴσα.

*Ἀκόμα εἶναι εὐκόλο νά συμπεράνομε ὅτι: ὁ λόγος δύο διανυσμάτων, παραλλήλων πρός ἕναν ἄξονα, ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν τετμημένων τους.

$$\left(\text{Ἄν } \vec{\alpha} \text{ καί } \vec{\beta} \text{ δύο παράλληλα διανύσματα πρός ἕναν ἄξονα, τότε } \frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \right).$$

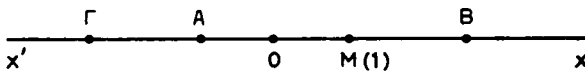
5.3 Πρόταση τοῦ Chasles (Σάλ).

Παίρνομε ἕναν ἄξονα $x'x$ καί πάνω σ' αὐτόν τρία τυχαῖα σημεῖα A, B, Γ (σχ. 5.3).

Γιά τίς τετμημένες $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$ καί $\overline{A\Gamma}$ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ καί $\overrightarrow{A\Gamma}$ ἰσχύει ἡ ἐπόμενη σχέση:

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma} \text{ (σχέση Σάλ).}$$

Δηλαδή: Τό ἄθροισμα τῶν τετμημένων δύο διανυσμάτων, παραλλήλων πρός ἄξονα, ἰσοῦται μέ τήν τετμημένη τοῦ ἄθροίσματος τῶν διανυσμάτων.



Σχ. 5.3.

*Ἀπόδειξη: Ἐπειδή τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, εἶναι διαδοχικά, ἰσχύει (σύμφωνα μέ τό γνωστό ὅρισμό) ἡ σχέση $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ (1).

*Ἄν $\vec{\mu} = \overrightarrow{OM}$ (ὅπου $\overrightarrow{OM}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα), τότε $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{\mu}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \overline{B\Gamma} \cdot \vec{\mu}$ καί $\overrightarrow{A\Gamma} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu}$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται:

$$\overline{AB} \cdot \vec{\mu} + \overline{B\Gamma} \cdot \vec{\mu} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu} \text{ ἢ (σύμφωνα μέ τόν ἐπιμεριστικό νόμο) } (\overline{AB} + \overline{B\Gamma}) \vec{\mu} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{\mu} \text{ (2).}$$

*Ἀλλά ἀπό τή (2) συμπεραίνομε ὅτι $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$ (γιατί;)

* Ἐνα διάνυσμα πού μετατοπίζεται πάνω στό φορέα του λέγεται συνήθως ὀλισθαίνον διάνυσμα.

Ένα σημαντικό πόρισμα. Άς είναι A και B σημεία (διαφορετικά) ενός άξονα με τετμημένες αντίστοιχα α και β ($\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$).

Έχουμε: $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB}$ (σχέση του Chasles για τα σημεία A, O, B)

$$\text{ή } \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB} \text{ δηλαδή } \boxed{\overline{AB} = \beta - \alpha}$$

Όστε: Η τετμημένη ενός διανύσματος πάνω σέ άξονα ίσούται με τή διαφορά τής τετμημένης τής άρχής από τήν τετμημένη του πέρατος του διανύσματος.

Παρατηρήσεις: I) Δέν πρέπει νά μᾶς διαφεύγει τό γεγονός, ὅτι ἡ προηγούμενη σχέση τοῦ Chasles εἶναι μιᾶ σχέση ἀριθμητική. (Σημειώνεται στό πρῶτο μέλος τῆς τό ἄθροισμα δυό πραγματικῶν ἀριθμῶν).

II) Ἡ σχέση $\overline{AB} + \overline{BG} = \overline{AG}$ δέν ἔχει νόημα ἂν τά σημεία A, B, Γ δέν ἀνήκουν στόν αὐτόν άξονα (ἂν δηλαδή εἶναι κορυφές τριγώνου), διότι τότε οἱ φορές τῶν διανυσμάτων δέν συσχετίζονται.

III) Ἡ σχέση $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{AG}|$ ἔχει νόημα γιά ὅποιαδήποτε σημεία, ἀλλά δέν ἀληθεύει ὅταν τά σημεία δέν ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία ἢ ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία ἀλλά δέν ἔχουν κατάλληλη διάταξη.

Μποροῦμε νά γράφομε (γιά κάθε περίπτωση) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BG}| \geq |\overrightarrow{AG}|$ (ὑποτίθεται ὅτι χρησιμοποιήθηκε τό ἴδιο τμήμα ὡς μονάδα μετρήσεως).

Ἡ ἰσότητα ἰσχύει ὅταν τά σημεία A, B, Γ εἶναι συνευθειακά καί τό B κείται μεταξύ τῶν A καί Γ .

IV) Ἡ σχέση $\overline{AB} + \overline{BG} = \overline{AG}$ μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἐξῆς:
 $\overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GA} = 0$ διότι: $\overline{AB} + \overline{BG} = \overline{AG} \iff \overline{AB} + \overline{BG} - \overline{AG} = 0 \iff \overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GA} = 0.$

5.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ἄν $A(x_1)$ καί $B(x_2)$ σημεία άξονα καί K τό μέσο τοῦ AB , τότε ἡ τετμημένη τοῦ K ἰσοῦται μέ $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

(Δηλαδή: Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου ενός τμήματος, πάνω σέ άξονα, ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν άκρῶν τοῦ τμήματος).

Έχουμε: $\overline{OK} = \overline{OA} + \overline{AK}$. ἀλλά $\overline{OA} = x_1$ καί $\overline{AK} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$ (γιατί;)

$$\text{Συνεπῶς } \overline{OK} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

2. I) Ἄν A, B, Γ, Δ ὅποιαδήποτε σημεία ενός άξονα, τότε:

$$\overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GD} = \overline{AD}.$$

II) Ἄν $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$ σημεία μέ ὅποιαδήποτε διάταξη πάνω σ' ἕναν άξονα, τότε $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n} = \overline{P_1P_n}$.

$$I) \text{ Έχουμε: } \overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GA} = (\overline{AB} + \overline{BG}) + \overline{GA} = \overline{AG} + \overline{GA} = \overline{AA}.$$

$$II) \text{ Έχουμε: } \begin{aligned} \overline{P_1P_3} + \overline{P_3P_5} &= \overline{P_1P_5} \\ \overline{P_1P_5} + \overline{P_5P_7} &= \overline{P_1P_7} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\overline{P_1P_{v-1}} + \overline{P_{v-1}P_v} = \overline{P_1P_v} \cdot \text{προσθέτομε τά όμώνυμα μέλη τών παρα-}$$

πάνω Ισοτήτων και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &(\overline{P_1P_3} + \overline{P_3P_5} + \overline{P_5P_7} + \dots + \overline{P_{v-1}P_v}) + \overline{P_1P_3} + \overline{P_3P_5} + \dots + \overline{P_{v-1}P_v} = \\ &= \overline{P_1P_3} + \overline{P_1P_5} + \dots + \overline{P_1P_{v-1}} + \overline{P_1P_v} \longrightarrow \overline{P_1P_3} + \overline{P_3P_5} + \dots + \overline{P_{v-1}P_v} = \overline{P_1P_v} \end{aligned}$$

$$3) \text{ Άν } A, B, \Gamma, \Delta \text{ σημεία άξονα ν' άποδείχθει ότι: } \overline{AA^s} \cdot \overline{BG} + \overline{AB^s} \cdot \overline{GA} + \overline{AG^s} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{GA} = 0.$$

$$\text{Έχουμε } \overline{AA^s} \cdot \overline{BG} = (\alpha - \delta)^s \cdot (\gamma - \beta) = \gamma\alpha^s - 2\alpha\delta\gamma + \gamma\delta^s - \beta\alpha^s + 2\alpha\delta\beta - \beta\delta^s.$$

$$\text{Όμοια } \overline{AB^s} \cdot \overline{GA} = \alpha\beta^s - 2\beta\delta\alpha + \alpha\delta^s - \gamma\beta^s + 2\beta\gamma\delta - \gamma\delta^s \text{ και } \overline{AG^s} \cdot \overline{AB} = \beta\gamma^s - 2\gamma\delta\beta + \beta\delta^s - \alpha\gamma^s + 2\gamma\delta\alpha - \alpha\delta^s.$$

$$\text{Έτσι παίρνουμε } \overline{AA^s} \cdot \overline{BG} + \overline{AB^s} \cdot \overline{GA} + \overline{AG^s} \cdot \overline{AB} = \gamma\alpha^s + \alpha\beta^s + \beta\gamma^s - \beta\alpha^s - \gamma\beta^s - \alpha\gamma^s \quad (1).$$

$$\text{Έξάλλου } \overline{AB} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{GA} = (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma) = -\alpha\beta^s - \gamma\alpha^s - \beta\gamma^s + \beta\alpha^s + \gamma\beta^s + \alpha\gamma^s \quad (2).$$

Άπό τίς (1) και (2) παίρνουμε τελικά τή ζητούμενη (προσθέτοντας τά όμώνυμα μέλη).

5.5 Άσκήσεις.

1. Πάνω σέ άξονα θεωρούμε:

I) Τά σημεία A (7,5) και B (2,3). νά καθορισθεί ή τετμημένη και τό μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

II) Τό σημείο $\Delta \left(-\frac{6}{7}\right)$ και τό εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ μέ τετμημένη -2. Νά καθορισθεί τό μέτρο του διανύσματος και ή τετμημένη του E.

2. Δίνονται τά σημεία A, B, Γ, Δ ενός άξονα για τά όποία έχουμε:

$$\overline{AB} = -8, \overline{BG} = -3 \text{ και } \overline{GA} = +5. \text{ Νά βρεθούν οι άριθμοί } \overline{GA}, \overline{AA}, \overline{AB}, \overline{BG} + \overline{AA}.$$

3. Πάνω σ' άξονα παίρνουμε τά σημεία A(-1), B $\left(-\frac{17}{5}\right)$, Γ $(\sqrt{2})$ και Δ(4).

I) Νά όρισθούν οι άριθμοί $\overline{AB}, \overline{AG}, \overline{AA}, \overline{GB}$.

II) Άν O ή άρχή του άξονα και πάρομε σάν νέα άρχή τό σημείο O_1 για τό όποίο $\overline{OO_1} = -2$, νά βρεθούν οι νέες τετμημένες των σημείων A, B, Γ και Δ.

(Υποτίθεται ότι διατηρούμε τό μήκος του μοναδιαίου διανύσματος).

4. Άν A, B, Γ σημεία ενός άξονα, K τό μέσο του AB και Λ τό μέσο του BG τότε:

$$I) \overline{GA} + \overline{GB} = 2\overline{GK} \text{ και } II) \overline{AB} \cdot \overline{AG} = \overline{AA^s} - \overline{GA^s}.$$

5. Δίνεται σέ άξονα ένα εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τό όποίο έχει τετμημένη $\overline{AB} = 8$. Νά κατασκευασθεί τό σημείο P του άξονα για τό όποίο είναι:

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{4}{9} \text{ ή } -\frac{3}{2} \text{ ή } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ή } \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

6. Άν για τά σημεία ενός άξονα ισχύει ή Ισότητα $\overline{AB^s} + \overline{BG^s} + \overline{GA^s} = 0$, τότε δύο τουλάχιστον άπ' αυτά συμπίπτουν. (Υπόδειξη: εφαρμόστε τήν ταυτότητα

$$\alpha^s + \beta^s = (\alpha + \beta)^s - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \text{ στο άθροισμα } \overline{AB^s} + \overline{BG^s}.$$

7. "Αν A, B, Γ, Δ σημεία ενός άξονα τότε:

I) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

II) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$.

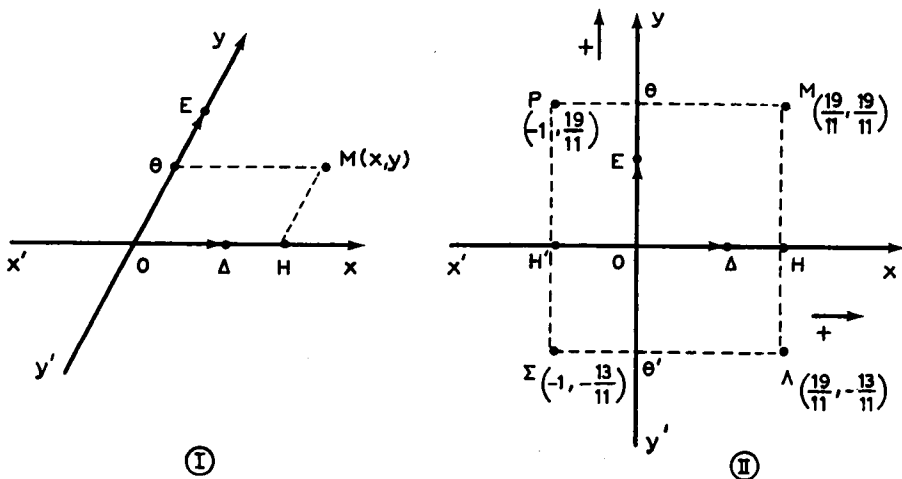
8. "Αν $A(\alpha), B(\beta), P(x)$ σημεία ενός άξονα και τέτοια ώστε να έχουμε $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \lambda$, να υπολογισθεί ή τετμημένη x του P συναρτήσει των α, β και λ .

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

6.1 Συντεταγμένες σημείου ως προς δύο άξονες.

Παίρνουμε πάνω σ' ένα επίπεδο δυό τεμνόμενες ευθείες $x'x$ και $y'y$ και ως είναι O τό σημείο τής τομής τους [σχ. 6.1 (I και II)]. Προσανατολίζουμε τις ευθείες και, μέ κοινή άρχή τό σημείο τομής τους O , καθορίζουμε τά μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{OD}$ και $\overrightarrow{OE}$, αντίστοιχα πάνω στή $x'x$ και $y'y$. Έτσι έχουμε κατασκευάσει στό επίπεδο ένα σύστημα δυό άξόνων.



Σχ. 6.1.

Μέ βάση αυτό τό σύστημα (και κάθε παρόμοιο), μπορούμε νά αντίστοιχίζουμε κάθε σημείο M του επιπέδου πρὸς ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν και αντίστροφα κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν πρὸς ένα και μόνο σημείο του επιπέδου.

Νά πῶς πραγματώνεται αὐτή ή αντίστοιχία.

Ἀπό τό σημείο M φέρνουμε τίς παράλληλες πρὸς τίς $y'y$ και $x'x$ και ὡς εἶναι H και Θ τά σημεία τομής τους μέ τούς άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Ἡ τετμημένη τοῦ H , ὁ λόγος δηλαδή $x = \frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{OA}}$, θά λέγεται τώρα

τετμημένη τοῦ σημείου M καί ἡ τετμημένη τοῦ Θ , ὁ λόγος $y = \frac{\overrightarrow{O\Theta}}{\overrightarrow{OE}}$, θά

λέγεται (γιά διάκριση) **τεταγμένη τοῦ σημείου M** .

Οἱ δύο αὐτοί ἀριθμοί x καί y λέγονται μαζί **καρτεσιανές ἢ παράλληλες συντεταγμένες τοῦ σημείου M** . καί γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα σημείο M ἔχει συντεταγμένες τοὺς ἀριθμούς π.χ. $-\frac{\sqrt{6}}{5}$ καί 49 γράφομε $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{5}, 49\right)$.

Τό ζεῦγος (x, y) , τῶν συντεταγμένων ἑνός σημείου M , εἶναι ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχίζεται σ' αὐτό τό σημείο.

Ἀντίστροφα, ἂν (x, y) εἶναι ἕνα δοσμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε σ' αὐτό ἀντιστοιχίζεται — πάντα μέ βάση τό σύστημα τῶν ἀξόνων πού ἔχομε κατασκευάσει — ἕνα καί μόνο σημείο M τοῦ ἐπιπέδου. Τό σημείο M προσδιορίζεται μέ τήν ἀκόλουθη διαδικασία.

Πάνω στόν ἄξονα $x'x$ τῶν τετμημένων παίρνομε ἐκεῖνο τό σημείο H πού ἔχει τετμημένη x καί πάνω στόν ἄξονα $y'y$ τῶν τεταγμένων παίρνομε ἐκεῖνο τό σημείο Θ πού ἔχει τετμημένη y .

Ἀπό τό H φέρνομε παράλληλη πρός τήν $y'y$ καί ἀπό τό Θ παράλληλη πρός τήν $x'x$. Τό σημείο τομῆς αὐτῶν τῶν δύο εὐθειῶν πού φέραμε εἶναι τό μοναδικό σημείο τοῦ ἐπιπέδου πού ἀντιστοιχίζεται στό ζεῦγος (x, y) .

Τό σημείο πού ὀρίζεται π.χ. ἀπό τό ζεῦγος $(-2, 5)$ εἶναι, ὅπως εὐκόλα βλέπομε, διαφορετικό ἀπό τό σημείο πού ὀρίζεται ἀπό τό ζεῦγος $(5, -2)$. Ἐφόσον βέβαια ὁ ἀριθμός πού κατέχει τήν πρώτη θέση εἶναι πάντα ἡ τετμημένη, καί ὁ ἐπόμενος ἡ τεταγμένη. Βλέπομε συνεπῶς ὅτι, τά ζεύγη $(-2, 5)$ καί $(5, -2)$ εἶναι διαφορετικά (δέν εἶναι ἴσα), μολονότι ἀποτελοῦνται ἀπό τά ἴδια στοιχεῖα. Τέτοια ζεύγη, ὅπου ἡ ἀλλαγὴ τῆς σειρᾶς τῶν στοιχείων συνεπάγεται καί ἀλλαγὴ τοῦ «ἀντικειμένου» πού ἐκφράζουν, λέγονται **διατεταγμένα ζεύγη**.

Ὅταν λοιπόν δίνομε ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς συντεταγμένες ἑνός σημείου, δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι, ὁ πρῶτος ἀριθμός θά εἶναι πάντα ἡ τετμημένη τοῦ σημείου καί ὁ δεύτερος ἡ τεταγμένη.

Τά σημεία τοῦ ἄξονα $x'x$ δίνονται τώρα μέ ζεύγη, τῶν ὁποίων τό δεύτερο στοιχεῖο εἶναι ὁ ἀριθμός 0. δηλαδή μέ ζεύγη τῆς μορφῆς $(x, 0)$. Ὅμοια τά σημεία τοῦ ἄξονα $y'y$ δίνονται μέ ζεύγη, τῶν ὁποίων τό πρῶτο στοιχεῖο εἶναι ὁ ἀριθμός 0, δηλαδή μέ ζεύγη τῆς μορφῆς $(0, y)$. Ἡ ἀρχή τέλος τῶν ἀξόνων δίνεται ἀπό τό ζεῦγος $(0, 0)$.

Ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ ἄξονες μπορεῖ, ἀπό λογική ἀποψη, νά εἶναι ὁποιαδήποτε. Ἐντούτοις οἱ περισσότεροι τύποι καί ἐξισώσεις, πού μορφώνομε μέ τίς συντεταγμένες ἢ γιά τίς συντεταγμένες σημείων, εἶναι ἀπλούστεροι ὅταν οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι.

Γι' αυτό τό λόγο κυρίως θά παίρνομε από δώ και πέρα, χωρίς εξαίρεση, τούς άξονες όρθογώνιους.

Έξάλλου τά μήκη τών μοναδιαίων διανυσμάτων μπορεί γενικά νά είναι άνισα· συνηθίζεται όμως, έκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις, νά παίρνονται ίσομήκη.

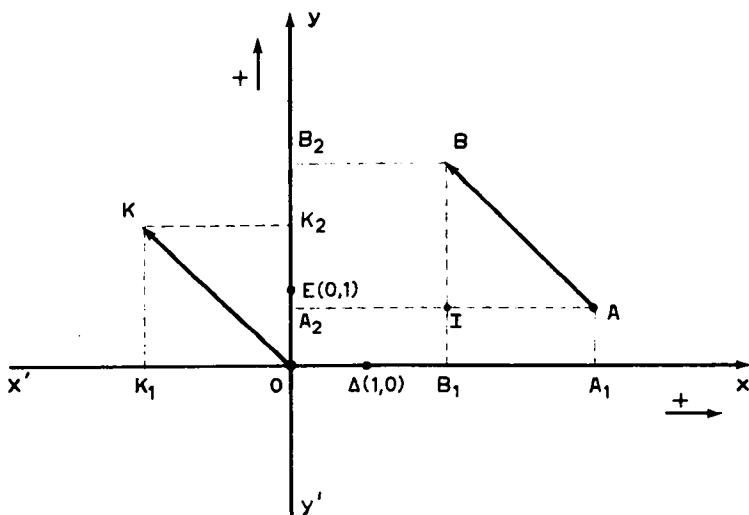
Ένα τέτοιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, όπου δηλαδή οί άξονες είναι όρθογώνιοι και τά μοναδιαία διανύσματα είναι ίσομήκη, λέγεται **όρθοκανονικό**.

Παρατήρηση: Είναι εύκολο νά διαπιστώσομε ότι:

Όταν ένα σημείο άνήκει στο έσωτερικό τής πρώτης γωνίας $\widehat{xOy}$ (Ox, Oy οί θετικοί ήμιάξονες), τότε και οί δύο συντεταγμένες είναι θετικοί αριθμοί· όταν άνήκει στο έσωτερικό τής 2ης γωνίας $\widehat{y'Ox}$, τότε είναι $x < 0$ και $y > 0$ · όταν άνήκει στο έσωτερικό τής τρίτης γωνίας $\widehat{x'Oy'}$ είναι $x < 0$ και $y < 0$ · όταν τέλος άνήκει στο έσωτερικό τής τέταρτης γωνίας $\widehat{y'Ox}$ είναι $x > 0$ και $y < 0$.

6.2 Συντεταγμένες διανυσμάτων στο επίπεδο και βασικές σχέσεις.

α) Συντεταγμένες εφαρμοστού και έλευθέρου διανύσματος. Πάνω σ' ένα επίπεδο κατασκευάζομε ένα **όρθοκανονικό σύστημα άξόνων**· και άς είναι $\vec{AB}$ ένα εφαρμοστό διάνυσμα του έπιπέδου (σχ. 6.2 α). Φέρνομε τήν $AA_1 \perp x'x$



Σχ. 6.2α.

και τήν $BB_1 \perp x'x$ · επίσης τίς AA_2 και BB_2 κάθετες στην $y'y$. Τά σημεία A_1 και B_1 λέγονται (όρθές) προβολές τών A και B αντίστοιχα πάνω στον άξονα $x'x$, και τά A_2, B_2 προβολές τών A, B στον άξονα $y'y$. Τά εφαρμοστά διανύσματα $\vec{A_1B_1}$ και $\vec{A_2B_2}$ είναι οί προβολές του $\vec{AB}$ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Ἡ τετμημένη $\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha$ τοῦ $\overrightarrow{A_1B_1}$ λέγεται **τετμημένη** καὶ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ λέγεται **τεταγμένη** τοῦ $\overrightarrow{AB}$. οἱ δύο μαζί λέγονται (καρτεσιανές) **συντεταγμένες** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

Ἐπειδὴ: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} \implies x_1 + \alpha = x_2$, θὰ εἶναι:

$$\boxed{\alpha = x_2 - x_1} \quad \text{ὁμοία παίρνουμε} \quad \boxed{\beta = y_2 - y_1}$$

Δηλαδή: «Παίρνουμε τὶς συντεταγμένες προβολές ἑνὸς διανύσματος, ἂν ἀπὸ τὶς συντεταγμένες τοῦ πέρατος ἀφαιρέσουμε τὶς ὁμώνυμες συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του».

Ἄς σχεδιάσουμε τώρα τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$, ἴσο πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$, μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων (σχ. 6.2 α).

Ἀπὸ τὰ ἴσα τρίγωνα AB_1 καὶ OK_1 παίρνουμε $\overrightarrow{OK_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$ καὶ $\overrightarrow{OK_2} = \overrightarrow{K_1K} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

«Δυὸ ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἔχουν ἴσες ὁμώνυμες συντεταγμένες».

Ἰσχύει βέβαια καὶ τὸ ἀντίστροφο· ὅτι δηλαδή:

«Ἄν οἱ ὁμώνυμες συντεταγμένες δυὸ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων εἶναι ἴσες, τότε τὰ διανύσματα θὰ εἶναι ἴσα».

Εἶναι χρήσιμο νὰ παρατηρήσουμε ἐδῶ ὅτι ἕνα ὁποιοδήποτε ἐλεύθερο διάνυσμα στὸ ἐπίπεδο μπορεῖ νὰ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων· καὶ ἀκόμα, ὅτι οἱ συντεταγμένες ἑνὸς διανύσματος μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων ταυτίζονται μέ τὶς συντεταγμένες τοῦ πέρατος αὐτοῦ τοῦ διανύσματος.

Ὑστερα ἀπὸ τοὺς προηγούμενους ὁρισμούς καὶ τὶς ιδιότητές τους, καὶ ἐπειδὴ σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζεται (μέ βάση ἕνα σύστημα ἀξόνων) ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντίστροφα σ' ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχίζεται ἕνα καὶ μόνο σημεῖο ἢ, πράγμα πού εἶναι τὸ ἴδιο, ἕνα καὶ μόνο ἐφαρμοστὸ διάνυσμα μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, μποροῦμε νὰ λέμε:

«Μεταξύ ὅλων τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία».

Σημείωση: Τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων τὰ ὀνομάζουμε μερικές φορές καὶ **διανυσματικές ἀκτίνες**.

β) Συντελεστής διευθύνσεως διανύσματος. Θέλομε τώρα νὰ βροῦμε σχέσεις μεταξύ παραλλήλων διανυσμάτων καὶ τῶν συντεταγμένων τους.

Γιὰ νὰ ἀπλοποιήσουμε τὸ ἔργο μας θὰ πάρουμε διανύσματα μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων (γιατί;)

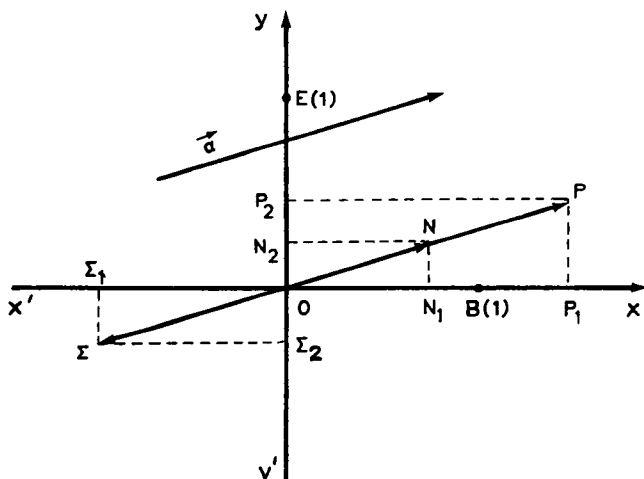
Ἐὰν θεωρήσουμε λοιπὸν τὰ ὁμόρροπα διανύσματα $\vec{ON}$, $\vec{OP}$ καὶ τὸ $\vec{OS}$ ἀντίρροπο τῶν προηγουμένων (σχ. 6.2β). Ἀπὸ τὰ ὁμοία τρίγωνα OP_1P καὶ ON_1N παίρνουμε:

$$\frac{\vec{OP}}{\vec{ON}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{ON_1}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{N_1N}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{ON_2}} \Rightarrow \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{ON_2}}{\overline{ON_1}}. \quad (1)$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὰ ὁμοία τρίγωνα OP_1P καὶ $OS_1\Sigma$ παίρνουμε:

$$\frac{\vec{OP}}{\vec{OS}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OS_1}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{\Sigma_1\Sigma}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OS_2}} \Rightarrow \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}. \quad (2)$$

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχομε: $\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{ON_2}}{\overline{ON_1}} = \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}.$



Σχ. 6.2β.

Ὡστε: «Ἄν δύο μὴ μηδενικά διανύσματα εἶναι παράλληλα, τότε οἱ συντεταγμένες τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ ἄλλου».

Ἰσχύει βέβαια καὶ τὸ ἀντίστροφο· δηλαδή:

«Ἄν οἱ συντεταγμένες ἑνὸς διανύσματος εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς ὁμώνυμες συντεταγμένες ἑνὸς ἄλλου, τότε αὐτὰ τὰ διανύσματα εἶναι παράλληλα».

Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι: ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένη ἑνὸς μὴ μηδενικοῦ διανύσματος $\vec{a}$ (ἔχι παράλληλου πρὸς τὸν $y'y$) μένει σταθερὸς (ἀναλλοίωτος) μέσα σ' ὅλο τὸ σύνολο τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ $\vec{a}$.

Ἄρα ὁ λόγος αὐτὸς χαρακτηρίζει τὴ διεύθυνση τοῦ διανύσματος καὶ γι' αὐτὸ ὀνομάζεται συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ λέμε: «Δυὸ διανύσματα ἔχουν τὸν ἴδιο συντελεστὴ διευθύνσεως ὅταν καὶ μόνο τὰ διανύσματα αὐτὰ εἶναι παράλληλα».

Παρατηρήσεις: ι) Κάθε διάνυσμα παράλληλο προς τον άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη μηδέν (γιατί;) και συνεπώς ο συντελεστής διεθύνσεως των διανυσμάτων των παραλλήλων προς τον άξονα των τετμημένων ίσοῦται με μηδέν.

ii) Κάθε διάνυσμα παράλληλο προς τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν και συνεπώς ένα τέτοιο διάνυσμα δέν έχει για συντελεστή διεθύνσεως έναν αριθμό. Συμφωνάμε νά λέμε ότι τά διανύσματα αυτά έχουν συντελεστή διεθύνσεως τό άπειρο (∞). Γνώρισμα των διανυσμάτων των παραλλήλων προς τον άξονα των τεταγμένων είναι ή ιδιότητα ότι έχουν τετμημένη μηδέν καθώς και ή ιδιότητα νά έχουν συντελεστή διεθύνσεως τό ∞ .

Σημείωση: Συντελεστής διεθύνσεως μιᾶς εὐθείας λέγεται ο συντελεστής διεθύνσεως ενός οποιουδήποτε διανύσματος παραλλήλου προς την εὐθεία.

γ) Μέτρο διανύσματος συναρτήσσει των συντεταγμένων του. Ὃς είναι $\vec{OP}$ τό ἔφαρμοστό διάνυσμα, με ἀρχή την ἀρχή των ἀξόνων, τό ἴσο προς ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ (α_1, α_2). Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο OP_1P (σχ. 6·2 β: P_1 ή προβολή τοῦ P στην εὐθεία $x'x$) παίρνομε: $|\vec{OP}|^2 = (\overline{OP_1})^2 + (\overline{P_1P})^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.

Ἀρα για τό μέτρο $|\vec{\alpha}|$ ενός διανύσματος $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$ ἔχομε (σ' ένα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων) :

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

6·3 Ἐφαρμογές και παραδείγματα.

1) Ν' ἀποδειχθεῖ ότι: Ὃ τετμημένη καθώς και ή τεταγμένη τοῦ ἀθροίσματος $\vec{a} + \vec{b}$, δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$, ἰσοῦται με τό ἀθροισμα των τετμημένων και ἀντίστοιχα των τεταγμένων των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Παίρνομε δύο διαδοχικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ ἴσα ἀντιστοίχως προς τό $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ($\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$). Ἀν A_1, B_1 και Γ_1 είναι οἱ προβολές των A, B και Γ πάνω στον άξονα των τετμημένων, τότε (σύμφωνα με τή σχέση Chasles) θά ἔχομε: $\overline{A_1\Gamma_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1\Gamma_1}$. ἀλλά $\overline{A_1\Gamma_1}$ είναι ή τετμημένη τοῦ $\vec{A\Gamma}$, ἀθροισματος των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, και $\overline{A_1B_1}, \overline{B_1\Gamma_1}$ οἱ τετμημένες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ἀντιστοίχως.

Ὅμοια ἐργαζόμαστε και για τίς τεταγμένες. (Νά γίνει τό σχήμα).

2) Νά ἔκφραστοῦν οἱ συντεταγμένες (x', y') τοῦ μέσου M ενός τμήματος AB , τοῦ ἐπιπέδου xOy , συναρτήσσει των συντεταγμένων των ἄκρων τοῦ τμήματος.

Ὃς είναι $A_1(x_1), B_1(x_2)$ οἱ προβολές των A και B στον άξονα $x'x$ και $A_2(y_1), B_2(y_2)$ οἱ προβολές τους στον άξονα $y'y$.

Ἰσχύει τό θεώρημα: «Ὃ προβολή τοῦ μέσου ενός τμήματος, πάνω σ' έναν άξονα, είναι τό μέσο τῆς προβολῆς τοῦ τμήματος.» (Νά γίνει ή ἀπόδειξη).

Έτσι, αν $M_1(x')$ είναι η προβολή του M στον άξονα $x'x$ θά έχουμε:

$\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1}$ ή $x' - x_1 = x_2 - x'$ (1). (Γνωρίζουμε ότι: η τετμημένη διανύματος ισοῦται με τή διαφορά τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τήν τετμημένη τοῦ πέρατος).

Τελικά ἀπὸ τήν (1) παίρνομε $x' = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Έργαζόμαστε ὁμοία καί στὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων καί παίρνομε:

$$y' = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

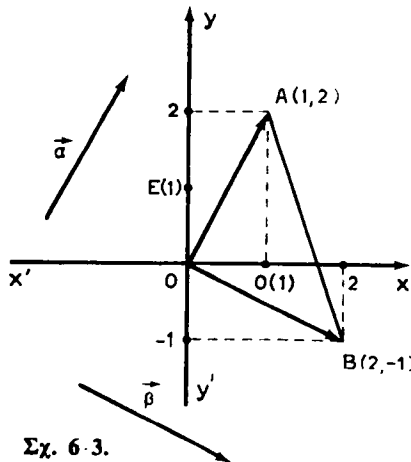
3) Ἄν (v_1, v_2) οἱ συντεταγμένες ἑνὸς ἐλεύθερου διανύματος $\vec{v}$ καί $\vec{\delta}$ καί $\vec{\epsilon}$ τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, τότε $\vec{v} = v_1\vec{\delta} + v_2\vec{\epsilon}$.

Ἄς εἶναι $\vec{OA} = \vec{v}$ (ὅπου O ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων) καί A_1, A_2 οἱ προβολές τοῦ A στοὺς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$ ἀντίστοιχα.

$$\begin{aligned}\text{Ἔχομε: } \vec{OA} &= \vec{OA_1} + \vec{A_1A} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} = \vec{OA_1} \cdot \vec{\delta} + \vec{OA_2} \cdot \vec{\epsilon} = \\ &= v_1\vec{\delta} + v_2\vec{\epsilon}.\end{aligned}$$

4) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ διευθύνσεις τῶν διανυσμάτων $\vec{a}(1,2)$ καί $\vec{b}(2,-1)$ εἶναι ὀρθογώνιες μεταξύ τους. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε γιὰ τοὺς συντελεστὲς διεύθυνσεως αὐτῶν τῶν διανυσμάτων (σχ. 6·3).

Θεωροῦμε τίς διανυσματικές ἀκτίνες $\vec{OA} = \vec{a}$ καί $\vec{OB} = \vec{b}$ (σχ. 6·3) καί ὀρίζομε τίς συντεταγμένες τοῦ $\vec{AB}$ δηλαδή $\vec{AB}(2-1, -1-2)$ ἥτοι $\vec{AB}(1, -3)$.



$$\text{Ἔχομε: } |\vec{OA}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \quad \text{καί} \quad |\vec{OB}|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

$$\text{καί} \quad |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 = 10. \quad \text{Ἀλλὰ καί} \quad |\vec{AB}|^2 = 1^2 + (-3)^2 = 10.$$

$$\text{ἄρα} \quad |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 = |\vec{AB}|^2 \quad \text{καί} \quad \widehat{AOB} = 90^\circ.$$

Συντελεστής διεύθυνσεως του $\vec{\alpha}$ είναι ο αριθμός $\lambda_1 = \frac{2}{1} = 2$ και του $\vec{\beta}$ ο αριθμός $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

5) Θεωρούμε τά σημεία $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ και $P(3, 1)$. Νά προσδιορισθεί ο λόγος $\frac{\vec{OM}}{\vec{OP}}$, αν M τό σημείο τομής των OP και AB και νά βρεθούν οι συντεταγμένες του M .

Έχουμε: $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$ (I). Άς είναι $\frac{\vec{OM}}{\vec{OP}} = \kappa$ και $\frac{\vec{AM}}{\vec{AB}} = \lambda$, όποτε

$$\vec{OM} = \kappa \cdot \vec{OP} \text{ και } \vec{AM} = \lambda \cdot \vec{AB}. \text{ Έτσι ή (I) γίνεται } \kappa \cdot \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB} \text{ (2).}$$

Είναι όμως $\vec{OP} = 3\vec{\delta} + \vec{\epsilon}$ (βλέπε εφαρμογή 3) και $\vec{AB} = -2\vec{\delta} + \vec{\epsilon}$ (διότι οι συντεταγμένες του $\vec{AB}$ είναι $(0-2, 1-0) = (-2, 1)$).

$$\begin{aligned} \text{Ή (2) τώρα γράφεται: } \kappa(3\vec{\delta} + \vec{\epsilon}) &= 2\vec{\delta} + \lambda(-2\vec{\delta} + \vec{\epsilon}) \quad \eta \\ 3\kappa\vec{\delta} + \kappa\vec{\epsilon} &= (2-2\lambda)\vec{\delta} + \lambda\vec{\epsilon}. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι δυό ίσα διανύσματα έχουν ίσες όμώνυμες συντεταγμένες. Άρα πρέπει νά έχουμε $3\kappa = 2 - 2\lambda$ (I) και $\kappa = \lambda$ (II).

Άπό τό σύστημα των (I) και (II) παίρνουμε $\kappa = \lambda = \frac{2}{5}$.

$$\text{Είναι λοιπόν } \vec{OM} = \frac{2}{5} \vec{OP}, \left(\frac{\vec{OM}}{\vec{OP}} = \frac{2}{5} \right), \quad \eta \quad \vec{OM} = \frac{2}{5} (3\vec{\delta} + \vec{\epsilon}) = \frac{6}{5} \vec{\delta} + \frac{2}{5} \vec{\epsilon}.$$

Όστε οι συντεταγμένες του M είναι $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

6·4 Ασκήσεις.

1. Σέ σχέση μ' ένα όρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων νά σχεδιασθεί διάνυσμα μέ συντεταγμένες $(-2, 2)$. Άκολούθως νά κατασκευασθεί ή εύθεια ή παράλληλη πρós αυτό τό διάνυσμα, πού διέρχεται άπό τό σημείο $A(-4, \sqrt{6})$.

2. Διάνυσμά $\vec{ZP}$ έχει συντεταγμένες $\left(8, -\frac{7}{9}\right)$. αν πέρας είναι τό $P(-1, -1)$, νά βρεθούν οι συντεταγμένες τής άρχής του. Άκολούθως νά όρισθουν οι συντεταγμένες εκείνου του σημείου

M τής ZP για τό όποιο έχουμε $\frac{\vec{ZM}}{\vec{MP}} = -\frac{1}{3}$.

3. Δίνονται τά σημεία $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(0, 3)$.

1) Νά όρισθουν οι συντεταγμένες του σημείου Δ για τό όποιο έχουμε $\vec{AD} = \vec{\Gamma B}$.

11) Ν' άποδειχθεί ότι τό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ένα όρθογώνιο και ίσοσκελές τρίγωνο.

4. Δίνονται τὰ διανύσματα $\vec{\alpha} \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2} \right)$ καὶ $\vec{\beta}(-6, \beta_2)$. Νά βρεθεῖ ἡ τεταγμένη β_2 τοῦ β , ἂν γνωρίζουμε ὅτι $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$.

5. Δίνονται τὰ διανύσματα $\vec{\alpha}(-4, 7)$ καὶ $\vec{\beta}(5, -3)$.

I) Νά ὁρισθοῦν οἱ συντεταγμένες, τὰ μέτρα καὶ οἱ συντελεστές διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ καὶ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

II) Ποιὸς εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $4\vec{\beta} + 5\vec{\alpha}$;

III) Νά σχεδιασθεῖ ἕνας ἀντιπρόσωπος γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ προηγούμενα διανύσματα, μέ ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

6. Δίνονται τὰ διανύσματα $\vec{\alpha}(-9, 13)$, $\vec{\beta} \left(3, -\frac{13}{3} \right)$, $\vec{\gamma}(-18, 26)$, $\vec{\zeta}(-8, 12)$ καὶ $\vec{\eta}(9, 12)$. Ὑπάρχουν μεταξύ αὐτῶν παράλληλα διανύσματα; Ἄν ναι, εἶναι τότε αὐτὰ ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα;

7. Δίνονται τὰ διανύσματα $\vec{\alpha}(11, -5)$, $\vec{\beta}(3x - 1, y + 2)$, $\vec{\gamma}(4 - x, 5 + 2y)$, $\vec{\kappa}(3, 4)$, $\vec{\lambda}(-20, 15)$.

I) Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν x καὶ y , ἂν τὰ διανύσματα $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ καὶ $3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ εἶναι ἀντίστοιχα παράλληλα πρὸς τὰ $\vec{\kappa}$ καὶ $\vec{\lambda}$.

II) Τί εἶναι οἱ διευθύνσεις τῶν $\vec{\kappa}$ καὶ $\vec{\lambda}$ μεταξύ τους;

8. Δίνονται τὰ σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$ καὶ $\Gamma(0, -1)$. I) Νά καθορισθεῖ τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

II) Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ καὶ $\vec{GP}$ ἂν M , N καὶ P εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA καὶ AB ἀντιστοίχως.

III) Νά διαπιστώσετε ὅτι οἱ εὐθεῖες AM , BN καὶ GP ἔχουν κοινὸ σημεῖο καὶ νά προσδιορίσετε τίς συντεταγμένες του.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ

$$y = \alpha x^2 + \beta x \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ καὶ } \alpha \neq 0.$$

7·1 Διανυσματική καὶ ἀναλυτική ἐξίσωση εὐθείας.

α) Διανυσματική ἐξίσωση εὐθείας. Θέλομε νά βροῦμε σχέσεις τίς ὁποῖες νά ἱκανοποιοῦν ἀποκλειστικῶς τὰ σημεία μιᾶς εὐθείας στὸ ἐπίπεδο, δηλαδή οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς, μέ βάση ἕνα σύστημα συντεταγμένων. Κάθε τέτοια σχέση θά λέγεται **ἐξίσωση εὐθείας στὸ ἐπίπεδο** (σχ. 7·1).

Μιά εὐθεῖα εἶναι ὁρισμένη ἂν δίνονται δύο σημεία τῆς ἢ ἕνα σημεῖο τῆς καὶ ἕνα ὄχι μηδενικὸ διάνυσμα, πρὸς τὸ ὁποῖο ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλη.

Ἄς θεωρήσουμε λοιπὸν ἕνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων καὶ μιὰ εὐθεῖα (ε) ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ καὶ $B(x_2, y_2)$ ἢ (πράγμα τὸ ἴδιο) ἀπὸ τὸ σημεῖο $A(x_1, y_1)$ καὶ ἀπὸ τὸ μὴ μηδενικὸ διάνυσμα $\vec{v}(v_1, v_2)$, πρὸς τὸ ὁποῖο ἡ (ε) εἶναι παράλληλη. Θά ἀναζητήσουμε μιὰ διανυσματικὴ σχέση τὴν ὁποία νά ἱκανοποιοῦν τὰ σημεία τῆς εὐθείας μας καὶ μόνον αὐτά.

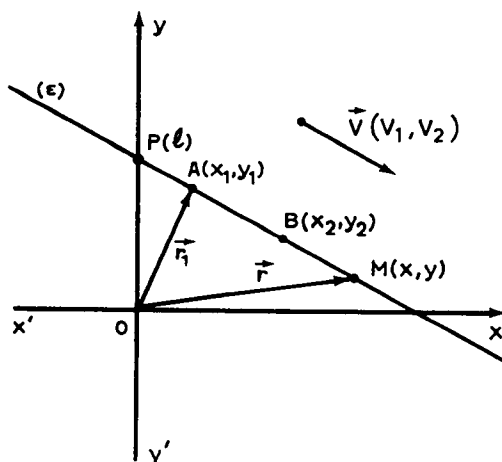
Πρός τοῦτο παίρνομε τυχαῖο σημεῖο M τῆς (ϵ) καὶ φέρνομε τὴ σταθερὴ διανυσματικὴ ἀκτῖνα $\vec{r}_1 = \vec{OA}$ καὶ τὴ μεταβλητὴ $\vec{r} = \vec{OM}$.

Γιὰ κάθε σημεῖο M τῆς (ϵ) ἔχομε: $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$ (1). Ἀλλὰ $\vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$ ἢ $\vec{AM} = t \cdot \vec{v}$, ὅπου t ὁ κατάλληλος κάθε φορά πραγματικός ἀριθμός μέ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάζομε τὸ διάνυσμα $\vec{AB}$ (ἢ τὸ $\vec{v}$) γιὰ νὰ προκύπτει τὸ συγγραμμικὸ τοῦ διάνυσμα $\vec{AM}$.

Ἔτσι ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{AB} \quad \eta \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{v}} \quad (2)$$

Ἡ μεταβλητὴ t , πού παίρνει ἐδῶ πραγματικὲς τιμές, λέγεται **παράμετρος**.



Σχ. 7.1.

Ἀντίστροφα, ἂν δώσομε στὴν παράμετρο t μιὰ τυχαία πραγματικὴ τιμὴ, τότε τὸ δεύτερο μέλος τῆς εξισώσεως (2) παρέχει διάνυσμα πού τὸ πέρας τοῦ κεῖται ἐπὶ τῆς (ϵ) , ἂν βέβαια ἡ ἀρχὴ τοῦ διανύσματος εἶναι τὸ σημεῖο O . Πράγματι: $\vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{AB}$ ἢ $\vec{OM} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{OM} - \vec{OA} = t \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$. τὰ ἐφαρμοστά διανύσματα συνεπῶς $\vec{AM}$ καὶ $\vec{AB}$ εἶναι συγγραμμικά καὶ, ἐπειδὴ ἔχουν κοινὴ ἀρχή, ἔπεται ὅτι τὰ στηρίγματά τους συμπίπτουν.

Ἡ σχέση (2), πού, γιὰ τίς διάφορες πραγματικὲς τιμές τῆς t , παρέχει τίς διανυσματικὲς ἀκτῖνες τῶν σημείων τῆς θεωρούμενης εϋθείας καὶ μόνον αὐτές, λέγεται **διανυσματικὴ (παραμετρικὴ) εξίσωση τῆς εϋθείας**.

β) Ἀναλυτικὴ εξίσωση εϋθείας. Ὡς εἶναι (x, y) οἱ συντεταγμένες τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνας $\vec{OM} = \vec{r}$ καὶ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) καὶ (v_1, v_2) οἱ συντε-

ταγμένες αντίστοιχα της διανυσματικής ακτίνας $\vec{OA}$, του σημείου B και του διανύσματος $\vec{v}$ (σχ. 7.1).

Μπορούμε τότε στη θέση της εξίσωσης (2) νά γράψουμε τις ακόλουθες δυό εξισώσεις: [Βλέπε και εφαρμογή 6.3 (1)].

$$\left. \begin{aligned} y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} y &= y_1 + t \cdot v_2 \\ x &= x_1 + t \cdot v_1 \end{aligned} \right.$$

ή ακόμα τις εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} y - y_1 &= t(y_2 - y_1) \\ x - x_1 &= t(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} y - y_1 &= t \cdot v_2 \\ x - x_1 &= t \cdot v_1 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

*Αν $x_2 - x_1 \neq 0$ ($x_2 \neq x_1$) και $t \neq 0$, τότε από τις εξισώσεις (3) με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \eta \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{v_2}{v_1}} \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) εκφράζει την αλληλεξάρτηση των συντεταγμένων των σημείων μιās ευθείας μή παράλληλης προς τόν άξονα $y'y'$ · αυτής που ορίζεται από τά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) ή αυτής που είναι παράλληλη προς τό ελεύθερο διάνυσμα (v_1, v_2) και διέρχεται από τό σημείο (x_1, y_1) . Η εξίσωση αυτή, καθώς και κάθε άλλη που προκύπτει απ' αυτή μέ κατάλληλο μετασχηματισμό, λέγεται **αναλυτική εξίσωση ευθείας**.

*Επειδή οι ίσοι λόγοι $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{v_2}{v_1}$ είναι ο κοινός συντελεστής διευθύνσεως, έστω α , τών διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{v}$ και συνεπώς και της ευθείας (ϵ), ή εξίσωση (4) γράφεται:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \alpha} \quad (5)$$

Και λέμε ότι: ή (5) είναι ή **αναλυτική εξίσωση της ευθείας**, που δέν είναι παράλληλη προς τόν άξονα $y'y'$, διέρχεται από τό σημείο (x_1, y_1) και έχει συντελεστή διευθύνσεως α .

*Αν ως αρχικό σημείο (x_1, y_1) της ευθείας πάρουμε τό σημείο τομής της μέ τόν άξονα $y'y'$, δηλαδή εκείνο γιά τό όποιο έχομε $x_1 = 0$ και $y_1 = \beta$, τότε ή εξίσωση (5) γίνεται

$$\boxed{y = ax + \beta} \quad (6)$$

Μπορούμε τώρα νά λέμε γενικά ότι: ή **εξίσωση (6) είναι ή εξίσωση μιās ευθείας που διέρχεται από τό σημείο $(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως ίσο μέ α** .

Διότι και αντίστροφως τά σημεία του επιπέδου, τών όποίων οι συντεταγ-

μένες (x, y) ικανοποιούν την ξίσωση (6), κείνται σέ μιά καί τήν ίδια ευθεία.

Πράγματι ή ξίσωση $y = ax + \beta$ προκύπτει, μέ άπαλοιφή τοῦ t , από τό σύστημα τῶν παραμετρικῶν εξισώσεων

$$y = \beta + t \cdot \alpha$$

$$x = 0 + t \cdot 1, \quad \text{καί αὐτές οἱ τελευταῖες μποροῦν νά ἀντικαταστα-}$$

θοῦν ἀπό τή διανυσματική ξίσωση $\vec{OM} = \vec{OP} + t \cdot \vec{\alpha}$, ὅπου P τό σημεῖο τοῦ ἄξονα $y'y$ μέ συντεταγμένες $(0, \beta)$ καί $\vec{\alpha}$ τό διάνυσμα μέ συντεταγμένες $(1, \alpha)$.

Ἡ ξίσωση μιᾶς ευθείας παράλληλης πρὸς τόν ἄξονα $x'x$ εἶναι :

$$\boxed{y = \beta}, \quad \text{διότι ὁ συντελεστής διευθύνσεως κάθε τέτοιας ευθείας εἶναι μηδέν.}$$

Ἡ ξίσωση μιᾶς ευθείας παράλληλης πρὸς τόν ἄξονα $y'y$ (ὅποτε ὁ συντελεστής διευθύνσεως δέν εἶναι ἀριθμός) εἶναι $\boxed{x = \gamma}$, ὅπου γ ή τετμημένη τοῦ σημείου τομῆς τῆς ευθείας μέ τόν ἄξονα $x'x$ (γιατί;).

Ὁ ἄξονας $x'x$ ἔχει ὡς ξίσωση τήν $\boxed{y = 0}$ καί ὁ ἄξονας $y'y$ ἔχει ὡς ξίσωση τήν $\boxed{x = 0}$

Ἡ ξίσωση $y = ax$ ($a \neq 0$) εἶναι ή ξίσωση μιᾶς ευθείας πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἁξόνων.

Άσκηση: Νά σχεδιασθεῖ ή γραφική παράσταση τῆς εξισώσεως $4x - 5y + 7 = 0$. Ἐπίσης νά ὁρισθεῖ ὁ συντελεστής διευθύνσεως της καί νά βρεθοῦν τά σημεία τομῆς τῆς ευθείας μέ τούς ἁξόνες.

7.2 Γραφική παράσταση τῆς εξισώσεως $y = ax^2 + bx$ μέ $a \neq 0$ (ὡς πρὸς ἓνα ὀρθογώνιο σύστημα ἁξόνων).

α) Γραφική παράσταση τῆς $y = ax^2$. Θέλομε νά σχεδιάσουμε τό επίπεδο ἐκεῖνο σχῆμα πού τά σημεία του ἔχουν συντεταγμένες (x, y) , οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τήν ξίσωση $y = ax^2$.

Πρὸς τοῦτο κάνομε τίς ἀκόλουθες παρατηρήσεις:

I) Στό σχῆμα μας (σχ. 7.2α) ἀνήκει ή ἀρχή τῶν ἁξόνων διότι γιά $x = 0$ ἔχομε καί $y = 0$.

II) Γιά δύο ἀντίθετες τιμές τῆς x , ή y παίρνει τήν ίδια τιμή, διότι $a \cdot (-x_1)^2 = ax_1^2$. Τά ζεύγη ὁμως σημείων μέ συντεταγμένες (x_1, y_1) καί $(-x_1, y_1)$ εἶναι προφανῶς συμμετρικά ὡς πρὸς τόν ἄξονα $y'y$ (γιατί;). Ἀρα ή γραφική παράσταση τῆς $y = ax^2$ δέχεται ἄξονα συμμετρίας τήν ευθεία $y'y$.

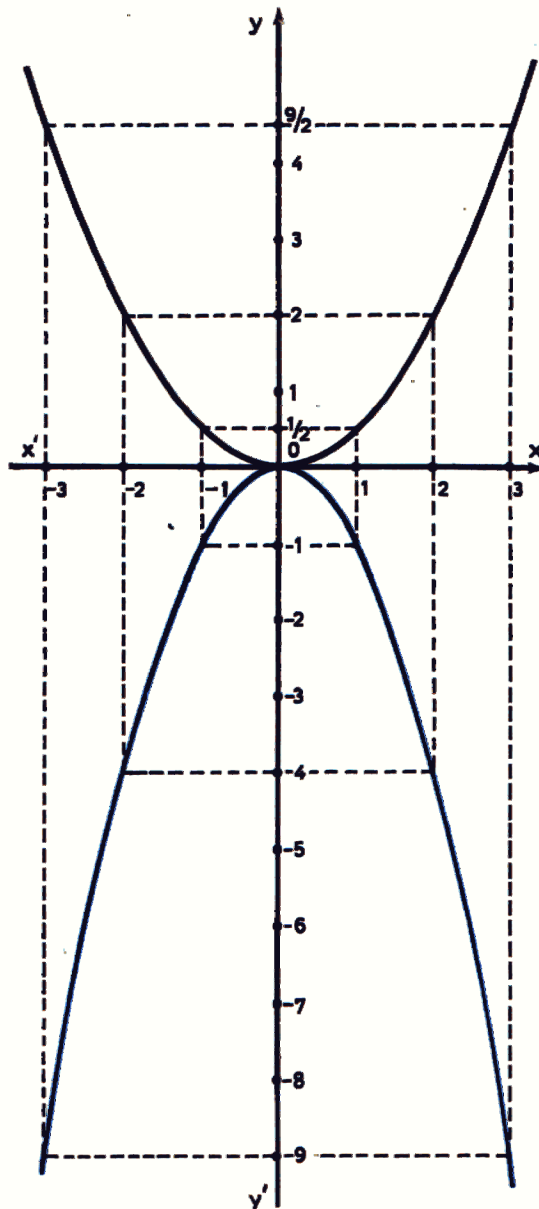
III) Ὄταν $a > 0$ ή παράσταση ax^2 παίρνει θετική τιμή $\forall^* x \in \mathbb{R} - \{0\}$ καί γίνεται μηδέν γιά $x = 0$. ή τιμή λοιπόν $y = 0$ εἶναι ή ἐλάχιστη τιμή τῆς y . Ἡ τιμή τῆς ax^2 αὐξάνεται ἀπεριόριστα, ὅταν ή $|x|$ αὐξάνεται ἀπεριόριστα.

IV) Ὄταν $a < 0$ ή παράσταση ax^2 παίρνει ἀρνητική τιμή $\forall^* x \in \mathbb{R} - \{0\}$. συνεπῶς ή τιμή τώρα $y = 0$ (γιά $x = 0$) εἶναι ή μέγιστη τιμή τῆς y .

Ἡ τιμή τῆς ax^2 ἐλαττώνεται ἀπεριόριστα, ὅταν ή $|x|$ αὐξάνεται ἀπεριόριστα.

Ὑστερα ἀπ' αὐτά, δίνοντας στό x διάφορες τιμές προσδιορίζομε τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ y καί τοποθετοῦμε τά σημεία, μέ συντεταγμένες τά ζεύγη (x, y) πού προκύπτουν. Ἀκολούθως σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση πού εἶναι μιά ἀπέρατη ἀνοικτή καμπύλη.

* Τό σύμβολο $\forall^*$ σημαίνει: «γιά κάθε».



Σχ. 7.2α.

Στό σχήμα 7.2α έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $y = \frac{1}{2}x^2$ και $y = -x^2$. Προς τούτο έχουμε τοποθετήσει τα σημεία $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$, $(-2, 2)$, $(2, 2)$, $(-3, \frac{9}{2})$, $(3, \frac{9}{2})$ για την πρώτη και τα σημεία $(-3, -9)$, $(3, -9)$, $(-2, -4)$, $(2, -4)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ για τη δεύτερη.

β) Γραφική παράσταση τής $y = \alpha x^2 + \beta x$ (μέ $\alpha \neq 0$ καί $\beta \neq 0$). Παρατηρούμε καταρχήν ότι ή γραφική παράσταση διέρχεται από τήν άρχή τών άξόνων καί τέμνει άκόμα τόν άξονα

$$x'x \text{ στό σημείο } -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \text{διότι } \alpha x^2 + \beta x = 0 \iff x(\alpha x + \beta) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

Γιά νά βγάλομε χρήσιμα συμπεράσματα δίνομε στήν παράσταση $\alpha x^2 + \beta x$ μιá καταλληλότερη μορφή. Έτσι γράφομε:

$$y = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x \right) = \alpha \left(x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

δηλαδή:
$$y = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}.$$

Παρατηρώντας τώρα τή νέα μορφή τής ξίσώσεως φτάνομε στό άκόλουθα συμπεράσματα:

I) Μέ $\alpha > 0$ είναι $\alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ καί συνεπώς ή τιμή $-\frac{\beta^2}{4\alpha}$ είναι ή ελάχιστη τιμή τής y · καί παίρνει αυτή τήν τιμή γιά $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, γιά τήν όποία μηδενίζεται ή $\alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$.

Η τιμή τής y αύξάνεται άπεριόριστα όταν ή $|x|$ αύξάνεται άπεριόριστα.

II) Μέ $\alpha < 0$ είναι $\alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ καί συνεπώς τώρα ή τιμή $-\frac{\beta^2}{4\alpha}$ είναι ή μέγιστη τιμή τής y .

Η τιμή τής y ελαττώνεται άπεριόριστα όταν ή $|x|$ αύξάνεται άπεριόριστα.

III) "Αν x' καί x'' δυό τιμές τοῦ x γιά τίς όποίες εϑομε $x' + \frac{\beta}{2\alpha} = \rho$ καί $x'' + \frac{\beta}{2\alpha} = -\rho$, γιά τίς όποίες δηλαδή οί τιμές τής παραστάσεως $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ είναι άριθμοί άντίθετοι, θά εϑομε:

$$\begin{aligned} y' &= \alpha \left(x' + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} = \alpha \rho^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} \text{ καί } y'' = \alpha \left(x'' + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} = \\ &= \alpha (-\rho)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} = \alpha \rho^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}. \text{ Άρα } y' = y''. \text{ Τά σημεία όμως τά όποία εϑουν τετμημένες} \\ x' &= \rho - \frac{\beta}{2\alpha} \left(\iff x' + \frac{\beta}{2\alpha} = \rho \right) \text{ καί } x'' = -\rho - \frac{\beta}{2\alpha}, \text{ καί τών όποίων οί τεταγμένες} \\ &\text{είναι ίσες, είναι δυό σημεία συμμετρικά ως πρός τήν εϑθεία μέ ξίσωση } X = -\frac{\beta}{2\alpha}, \text{ πού είναι} \\ &\text{μιá εϑθεία παράλληλη πρός τόν άξονα } y'y \text{ (γιατί;).} \end{aligned}$$

Βλέπομε λοιπόν ότι ή γραφική παράσταση τής ξίσώσεως εϑει άξονα συμμετρίας τήν εϑθεία $X = -\frac{\beta}{2\alpha}$, ή όποία διέρχεται από τό σημείο τής γραφικής παραστάσεως μέ τήν ελάχιστη ή τή μέγιστη τεταγμένη, καθόσον $\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$.

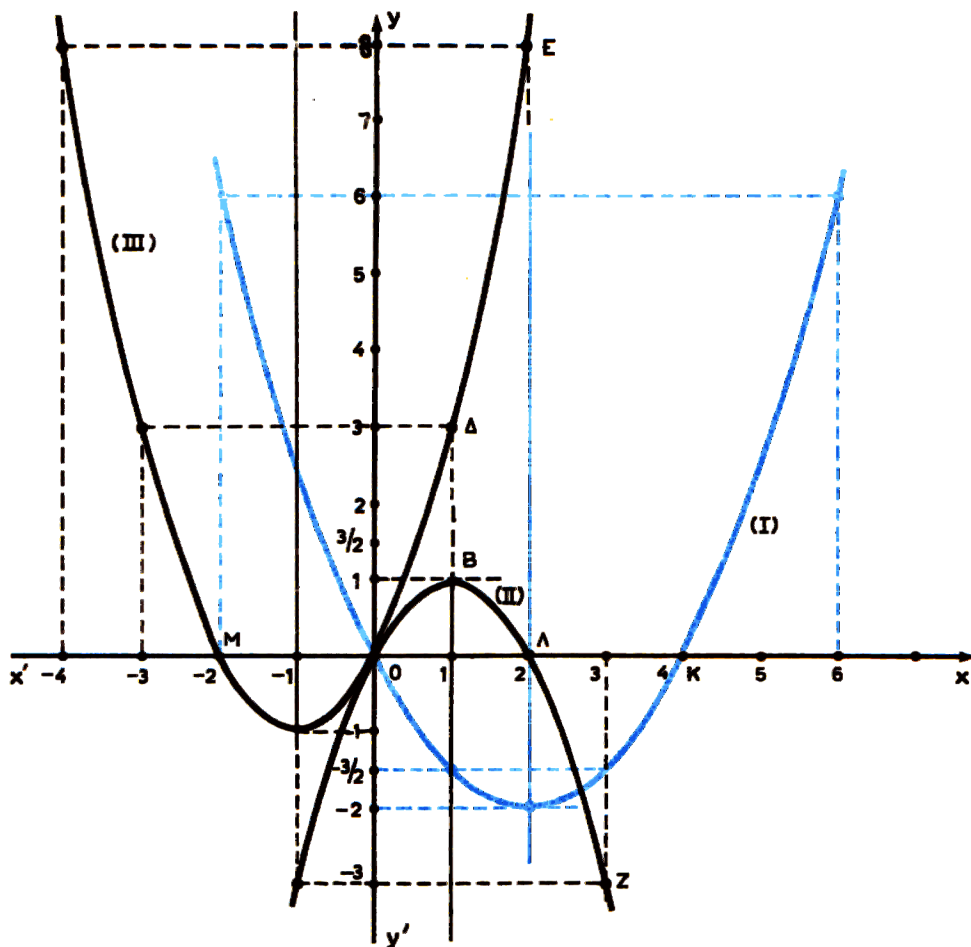
Γιά εφαρμογή θά σχεδιάσομε τίς γραφικές παραστάσεις τών άκόλουθων ξίσώσεων:

$$(I) \quad y = \frac{1}{2} x^2 - 2x \quad (II) \quad y = -x^2 + 2x \quad \text{καί} \quad (III) \quad y = x^2 + 2x.$$

Η (I) γράφεται $y = \frac{1}{2} (x-2)^2 - 2$. Γιά $x = 0$ καί $x = 4$ εϑομε $y = 0$ · δηλαδή ή γραφική παράσταση τέμνει τόν άξονα $x'x$ στό σημείο 0 καί 4. Κατασκευάζομε τόν παρακάτω πίνακα άντίστοιχων τιμών

x	-2	0	1	2	3	4	6
y	6	0	-3/2	-2	-3/2	0	5

και τοποθετούμε τα παραστατικά σημεία· άκολούθως [σχ. 7·2β (I)] σχεδιάζουμε την καμπύλη, παρατηρώντας συγχρόνως ότι τα σημεία $(-2, 6)$, $(6, 6)$ καθώς και $(1, -\frac{3}{2})$, $(3, -\frac{3}{2})$ είναι συμμετρικά ως προς την εϋθεία με εξίσωση $X = 2$ και ότι τό σημείο $(2, -2)$ τής γραφικής παραστάσεως είναι έκείνο με την ελάχιστη τεταγμένη.



Σχ. 7·2β.

Ἡ (II) γράφεται $y = -(x-1)^2 + 1$. Ἡ καμπύλη τέμνει τόν άξονα τών τετμημένων στά σημεία 0 καί 2. Για $x = 1$ έχομε τή μέγιστη τεταγμένη, πού είναι $y = 1$. Ἀξονας συμμετρίας είναι ἡ εϋθεία $X = 1$. Μερικά σημεία τής καμπύλης είναι τά: $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, -3)$ [σχ. 7·2β (II)].

Ἡ (III) γράφεται $y = (x+1)^2 - 1$. Τά σημεία τομής τής γραφικής με τόν άξονα x' είναι τά 0 καί -2. Για $x = -1$ έχομε τήν ελάχιστη τεταγμένη, ίση με $y = -1$. Ἀξονας συμμετρίας είναι ἡ εϋθεία $X = -1$. Τά σημεία $(-4, 8)$, $(-3, 3)$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 8)$, ανήκουν στήν καμπύλη [σχ. 7·2β (III)].

7·3 Εφαρμογές και παραδείγματα.

1) Δίνεται η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου A, B, Γ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί και $|A| + |B| > 0$ δηλαδή οι A και B όχι συγχρόνως μηδέν. Τί παριστάνει η εξίσωση σε σχέση μ' ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων στο επίπεδο;

Αν $A = 0$, η εξίσωση γίνεται $By + \Gamma = 0$ ή $y = -\frac{\Gamma}{B}$. Η τελευταία όμως εξίσωση παριστάνει, όπως πλέον γνωρίζουμε, ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή όποια τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $-\frac{\Gamma}{B}$. Εφόσον και $\Gamma = 0$ ή ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$.

Αν $B = 0$, τότε παίρνουμε $x = -\frac{\Gamma}{A}$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $-\frac{\Gamma}{A}$. Εφόσον και $\Gamma = 0$ ή ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα $y'y$.

Αν $A \neq 0$ και $B \neq 0$, τότε παίρνουμε $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $-\frac{\Gamma}{B}$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως $-\frac{A}{B}$, δηλαδή είναι παράλληλη προς το διάνυσμα με συντεταγμένες $(B, -A)$. Το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ έχει τετμημένη $-\frac{\Gamma}{A}$ (γιατί;).

Αν $\Gamma = 0$ (μέ $|A| + |B| > 0$), η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2) Δίνονται οι εξισώσεις $Ax + By + \Gamma = 0$ και $A'x + B'y + \Gamma' = 0$, με όλες τις σταθερές $(A, B, \Gamma, A', B', \Gamma')$ μη μηδενικές. Τί έχετε να πείτε για τις ευθείες που παριστάνουν, αν είναι $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'}$; Νά διατυπωθεί ένα παράδειγμα.

Οι εξισώσεις γράφονται ισοδύναμα :

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$ και $y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{\Gamma'}{B'}$ αλλά από την ισότητα $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ παίρνουμε $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ ή $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ και από την $\frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'} \Rightarrow -\frac{\Gamma'}{B'} = -\frac{\Gamma}{B}$. Οι ευθείες κατά συνέπεια συμπίπτουν.

Δύο τέτοιες εξισώσεις είναι π.χ. οι ακόλουθες:

$$5x - 9y + 12 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{5}{3}x - 3y + 4 = 0.$$

Σημείωση: Εφόσον $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{\Gamma}{\Gamma'}$, τότε είναι φανερό ότι οι ευθείες μας είναι παράλληλες χωρίς να συμπίπτουν.

3) Δίνεται ή ευθεία $(ε)$ με εξίσωση $x - 2y + 2 = 0$.

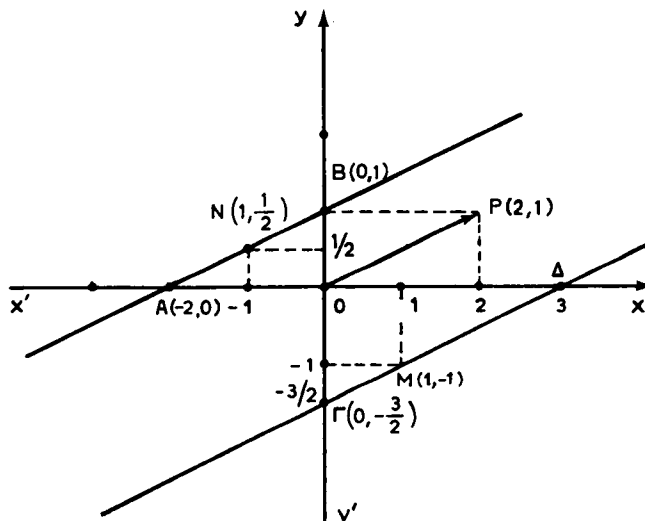
α) Νά σχεδιασθεί: I) ὕστερα ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸ ἑνὸς σημείου τῆς καὶ ἑνὸς παράλληλου διανύσματος· II) μὲ τὸν προσδιορισμὸ δύο σημείων τῆς.

β) Νά βρεθεῖ ή εξίσωση εὐθείας $(ε')$ ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο $M(1, -1)$ καὶ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν $(ε)$.

γ) Νά βρεθοῦν τὰ σημεία τομῆς τῆς $(ε')$ μὲ τοὺς ἄξονες.

α) Ἐπιλύνομε τὴν εξίσωση ὡς πρὸς y καὶ ἔχομε $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Ἐνα σημεῖο τῆς εὐθείας εἶναι τὸ $(0,1)$ · αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ σημεῖο τομῆς τῆς μὲ τὸν ἄξονα $y'y'$ (σχ. 7.3α). Ἐνα διάνυσμα παράλληλο τῆς $(ε)$ εἶναι τὸ διάνυσμα $\vec{OP}$ μὲ συντεταγμένες τοῦ πέρατος $(2,1)$.



Σχ. 7.3α.

Γιὰ νά σχεδιάσουμε τὴν $(ε)$ φέρνομε ἀπὸ τὸ $B(0,1)$ τὴν παράλληλη εὐθεῖα πρὸς τὴν OP . Γιὰ νά βροῦμε ἕνα δεῦτερο σημεῖο τῆς $(ε)$ δίνομε στὸ x μιά τυχαία τιμὴ $\neq 0$ καὶ ὀρίζομε, ἀπὸ τὴν εξίσωση, τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ y . Ἐτσι π.χ. γιὰ $x = -1$ παίρνομε $y = \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{2}$ · ὥστε ἕνα δεῦτερο σημεῖο τῆς εὐθείας εἶναι τὸ $N(-1, \frac{1}{2})$. Θὰ μπορούσαμε βέβαια νά βροῦμε τὸ σημεῖο τομῆς τῆς $(ε)$ μὲ τὸν ἄξονα $x'x'$ · ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νά δώσουμε στὸ y τὴν τιμὴ 0.

β) Ἐφοῦ ή $(ε')$ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν $(ε)$ θὰ εἶναι παράλληλη πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{OP}$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχει εξίσωση τῆς μορφῆς $y = \frac{1}{2}x + \beta_1$ (2). Γιὰ νά ἔχομε τὴν εξίσωση τῆς $(ε')$ ἀρκεῖ τώρα νά βροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ β_1 . Ἐπειδὴ

ή (ε') διέρχεται από το σημείο $M(1, -1)$, φανερό είναι ότι οι συντεταγμένες του M πρέπει να πληρούν την εξίσωση (2). Άρα πρέπει να έχουμε:

$$-1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \beta_1 \implies \beta_1 = -\frac{3}{2}.$$

Ωστε η εξίσωση της (ε') είναι ή:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad x - 2y - 3 = 0.$$

Το σημείο τομής της (ε') με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $\Gamma\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ και το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ έχει τετμημένη:

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \implies x = 3.$$

Σημείωση: Γνωρίζοντας το συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας, που ισοϋται με $\frac{1}{2}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση (5) της παραγράφου 7.1 (β), οπότε βρίσκουμε: $\frac{y+1}{x-1} = \frac{1}{2} \iff x - 2y - 3 = 0$.

4. Δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$. Νά βρεθεί η συνθήκη που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των A, B, Γ εφόσον τα σημεία αυτά ανήκουν σε μία ευθεία όχι παράλληλη προς την $y'y$.

Ας είναι $y = \alpha x + \beta$ ή εξίσωση της ευθείας όπου κείνται τα σημεία, τότε πρέπει να έχουμε:

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta \quad (1), \quad y_2 = \alpha x_2 + \beta \quad (2) \quad \text{και} \quad y_3 = \alpha x_3 + \beta \quad (3).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε (αν αφαιρέσουμε τα ομώνυμα μέλη)

$$y_1 - y_2 = \alpha(x_1 - x_2) \quad (1') \quad \text{και} \quad \text{από τις (1) και (3)} \quad y_1 - y_3 = \alpha(x_1 - x_3) \quad (2').$$

$$\text{Από τις (1') και (2')} \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}.$$

5. Δίνονται οι ακόλουθες τριάδες εξισώσεων:

- I) $y = a_1x + \beta_1, \quad y = a_2x + \beta_2, \quad y = a_3x + \beta_3$ (όπου $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$ και $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$)
 II) $y = a_1x + \beta_1, \quad y = a_2x + \beta_2, \quad y = \beta_3$ (όπου $a_1 \neq a_2$ και $a_1 \cdot a_2 \neq 0$)
 III) $y = ax + \beta, \quad y = \kappa, \quad x = \lambda$ (όπου $a \neq 0$)
 IV) $y = ax + \beta, \quad y = a'x + \beta', \quad x = \lambda$ (όπου $a \cdot a' \neq 0$ και $a \neq a'$)

Νά δοσθεί σε καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές, ώστε οι τρεις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις να έχουν κοινό σημείο.

I) Για να βρούμε το κοινό σημείο των ευθειών $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$, επιλύουμε το σύστημα αυτών των δύο εξισώσεων και παίρνουμε τιμές $x = \frac{\beta_2 - \beta_1}{a_1 - a_2}$ και $y = \frac{a_1\beta_2 - a_2\beta_1}{a_1 - a_2}$. Οι προηγούμενες τιμές είναι οι συντεταγμένες του κοινού σημείου. Το σημείο αυτό ανήκει και στην τρίτη ευθεία αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση $y = a_3x + \beta_3$. Έτσι βρίσκουμε: $\frac{a_1\beta_2 - a_2\beta_1}{a_1 - a_2} = a_3 \cdot \frac{\beta_2 - \beta_1}{a_1 - a_2} + \beta_3 \implies a_1\beta_2 + a_2\beta_3 + a_3\beta_1 = a_1\beta_3 + a_2\beta_1 + a_3\beta_2 \quad (1)$.

II) Βάζουμε στις δυο πρώτες εξισώσεις όπου y την τιμή β , και εξισώνουμε τις τιμές του x που παίρνουμε απ' αυτές τις εξισώσεις.

Έτσι βρίσκουμε τη σχέση $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$.

Στήν ίδια σχέση καταλήγουμε αν στήν παραπάνω ισότητα (1) μηδενίσουμε το α_2 .

III) Άρκει οι τιμές $y = \kappa$ και $x = \lambda$ να ικανοποιούν την εξίσωση $y = \alpha x + \beta$. Έτσι παίρνουμε $\kappa = \lambda\alpha + \beta$.

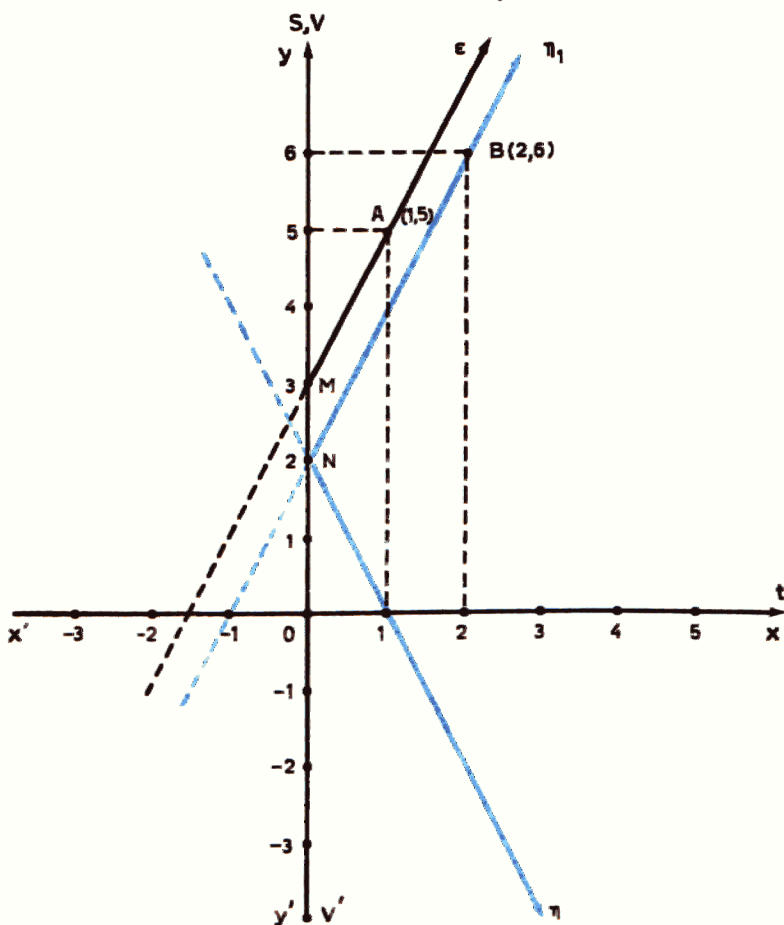
IV) Έχομε $y = \alpha\lambda + \beta$ και $y = \alpha'\lambda + \beta'$ και άκοιούθως $\alpha\lambda + \beta = \alpha'\lambda + \beta'$.

6. I) Κινητό κινείται σιόν άζονα $y'y$ με ταχύτητα σταθερή και κατά τή φορά και κατά τό μέτρο, ίσο πρός 2 cm/s . Νά γίνει ή γραφική παράσταση τής εξισώσεως πού δίνει τήν τεταγμένη τοῦ κινητοῦ (δηλαδή τό διάστημα ὅπως συνήθως λέμε) συναρτήσσει τοῦ χρόνου t . Ἡ θέσις N τοῦ κινητοῦ γιά $t = 0$ ἔχει τεταγμένη 3 (ἀρχικό διάστημα $ON = 3 \text{ cm}$).

II) Δυό κινητά κινούνται πάνω σέ ὁμόρροπους άζονες και ἔχουν κίνηση ὁμαλά μεταβαλλόμενη. Τό σχετικό μέτρο τής ταχύτητας τοῦ πρώτου δίνεται ἀπό τήν εξίσωση $v = 2 - 2t$ και τοῦ δευτέρου ἀπό τήν $v = 2 + 2t$.

(Οἱ ἀρχικές ταχύτητες και γιά τά δυό κινητά είναι ἀπολύτως 2 cm/s . Τό πρώτο παρουσιάζει στήν ἀρχή ἐπιβράδυνση 2 cm/s^2 και τό δεύτερο ἔχει ἐπιτάχυνση 2 cm/s^2).

Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν εξισώσεων τής ταχύτητας τῶν κινητῶν.



Σχ. 7.3β.

1) 'Η ξίσωση γιά τό διάστημα στήν περίπτωση αϑτή είναι: $s = v_0 + vt$, δηλαδή $s = 3 + 2t$ (1). Σχεδιάζομε τήν εϑεία πού εϑει ξίσωση τήν παραπάνω, ώς πρός ένα ορθοκανονικό σύστημα άξόνων καί όπου στόν ήμιάξονα Ox σημειώνεται ή μέτρηση τοϑ χρόνου καί στόν ήμιάξονα Oy ή μέτρηση τοϑ διαστήματος (σχ. 7.3 β). 'Η εϑεία μέ ξίσωση τήν παραπάνω (1) τέμνει τόν άξονα $y'y$ στό σημείο $M(0, 3)$. Επίσης ένα άλλο σημείο τής εϑείας είναι π.χ. τό $A(1, 5)$.

'Η γραφική παράσταση τοϑ διαστήματος συναρτήσσει τοϑ χρόνου είναι ή ήμιευθεία $M\xi$.

II) Σχεδιάζομε τίσ εϑείες μέ ξισώσεις $v = 2 - 2t$ καί $v = 2 + 2t$, όπου τώρα στόν άξονα $y'y$ σημειώνεται ή μέτρηση τής ταχύτητας (σχ. 7.3 β).

'Η γραφική παράσταση τής πρώτης είναι ή ήμιευθεία $N\eta$, όπου N τό σημείο τομής τής εϑείας $y = 2 - 2x$ μέ τόν άξονα τών ταχυτήτων, δηλαδή τό σημείο μέ συντεταγμένες $(0, 2)$. Τό μέτρο τοϑ $\vec{ON}$ είναι τό μέτρο τής άρχικής ταχύτητας. 'Η ήμιευθεία $N\eta$ τέμνει τόν ήμιάξονα Ox στό σημείο $(1, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι στό χρόνο 1' ή ταχύτητα εϑει μηδενιστεί. 'Ακολουθως ή ταχύτητα παίρνει άρνητικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι άλλαξε ή φορά κινήσεως τοϑ κινητοϑ.

'Η γραφική παράσταση τής δεύτερης είναι ή ήμιευθεία $N\eta_1$ πού ορίζεται άπό τά σημεία $N(0, 2)$ καί π.χ. $B(2, 6)$.

7. 'Αν τά διαστήματα στίς παραπάνω κινήσεις (έφαρμογή 6 II) δίνονται άπό τίσ ξισώσεις: $s = 2t - t^2$ καί $s = 2t + t^2$ αντίστοιχα, τότε νά γίνουν οί γραφικές τους παραστάσεις.

Οί ξισώσεις αϑτές δέν είναι άλλες άπό τίσ ξισώσεις (II) καί (III) τής παραγράφου 7.2 (β) (σχ. 7.2β).

'Από τήν καμπύλη (II) θά κρατήσομε όμως μόνο τό άπεριόριστο τόξο $OB\Lambda Z$ (σχ. 7.2β). Παρατηρούμε ότι κατá τό χρονικό διάστημα άπό 0 έως 1, τό διάστημα, ή άπόσταση δηλαδή τοϑ κινητοϑ άπό τήν άφετηρία του, αύξάνεται, ενώ κατá τό χρονικό διάστημα άπό 1 έως 2 τό διάστημα ελαττώνεται. Στό χρόνο 2 τό κινητό εϑει επανέλθει στήν άφετηρία του.

'Από τήν καμπύλη (III) θά κρατήσομε τό άπέρατο τόξο ODE . 'Εδω τό διάστημα συνεχώς αύξάνεται.

7.4 Άσκήσεις.

1. Νά λυθοϑν γραφικά τά συστήματα:

$$\text{I) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

(Δηλαδή νά σχεδιασθοϑν οί εϑείες πού εϑουν ξισώσεις αϑτές τοϑ συστήματος (I) — ύστερα τοϑ (II)— καί νά βρεθεί τό σημείο τής τομής τους, εφόσον ύπάρχει).

2. Νά λυθεί γραφικά ή άνίσωση: $2x + 3y - 6 > 0$.

(Δηλαδή νά εντοπισθοϑν τά σημεία τοϑ επιπέδου, τά όποία, ώς πρός ένα σύστημα άξόνων, εϑουν συντεταγμένες (x, y) πού δίνουν θετική αριθμητική τιμή στό πολυώνυμο $2x + 3y - 6$).

'Υπόδειξη: 'Αφοϑ σχεδιάσετε τήν εϑεία $2x + 3y - 6 = 0$ παρατηρήστε (καί άποδείξτε) ότι οί συντεταγμένες τών σημείων τοϑ ενός ήμιεπιπέδου, ώς πρός αϑτή τήν εϑεία, δίνουν στό πολυώνυμο $2x + 3y - 6$ θετική τιμή καί ότι οί συντεταγμένες τών σημείων τοϑ άλλου ήμιεπιπέδου δίνουν στό $2x + 3y - 6$ τιμή άρνητική.

3. Ν' άποδειχθεί ότι οί εϑείες $4x - 5y = 1$, $-8x + 10y = 2$, $3x + 2y = 0$, $6x + 4y = -1$ σχηματίζουν παραλληλόγραμμο καί νά βρεθοϑν οί συντεταγμένες τών κορυφών αϑτοϑ τοϑ παραλληλογράμμου. 'Ακολουθως ν' άποδειχθεί ότι οί διαγωνίες διχοτομοϑνται, άφοϑ πρώτα βρεθοϑν οί ξισώσεις τών εϑείων τών διαγωνίων.

Ποιά τά μέτρα τών πλευρών καί τών διαγωνίων τοϑ παραλληλογράμμου; Νά σχεδιαστοϑν οί 6 παραπάνω εϑείες.

4. Νά ὁρισθεῖ ἡ τιμὴ τοῦ λ ἔτσι ὥστε οἱ εὐθεῖες, $4x - 2y = 1$, $3x + 9y - 12 = 0$ καὶ $(\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y - 7\lambda + 13 = 0$ νὰ ἔχουν κοινὸ σημεῖο.

5. Νά πάρετε στὸ σχέδιό σας 4 σημεῖα A, B, Γ, Δ (μέ τις συντεταγμένες τους ὡς πρὸς ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα) ποὺ νὰ εἶναι κορυφές κυρτοῦ τετραπλεύρου καὶ ἀκολουθῶς νὰ βρῆτε:

I) Τίς ἐξισώσεις τῶν πλευρικῶν εὐθειῶν τοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ καὶ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν του.

II) Τίς συντεταγμένες τῶν μέσων E, Z, H, Θ, K καὶ Λ τῶν πλευρῶν AB, BΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ ἀντιστοίχως.

III) Τίς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν EH, ΖΘ καὶ ΚΛ καὶ τὰ μέτρα αὐτῶν τῶν τμημάτων.

IV) Τίς ἐξισώσεις καὶ τὰ μέτρα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ καθὼς καὶ τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων.

Ν' ἀποδείξετε τέλος ὅτι οἱ εὐθεῖες EH, ΖΘ καὶ ΚΛ διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, τοῦ ὁποῖου νὰ βρῆτε τίς συντεταγμένες.

6. I) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τὰ σημεῖα $(-4, 3)$, $(1, \frac{11}{7})$ καὶ $(3, 1)$ κεῖνται στὴν ἴδια εὐθεῖα. Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσή της καὶ ποῦ τέμνει τοὺς ἀξόνους; Νά γίνῃ ἡ σχεδίαση τῆς εὐθείας.

II) Νά ὁρισθεῖ ἡ τιμὴ τοῦ x , ἔτσι ὥστε τὰ σημεῖα $(x, -4)$, $(2, -2)$ καὶ $(-5, \frac{3}{7})$ νὰ κεῖνται στὴν ἴδια εὐθεῖα.

7. Νά γίνουν οἱ γραφικὲς παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων:

I) $y = -2x^2$. II) $y = 3x^2$. III) $y = 7x^2 + 6x$. IV) $y = -3x^2 + 2x$.

V) $y = x^2 - 4y$. VI) $y = -x^2 - 9$.

8. Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τριῶν εὐθειῶν ποὺ ὁρίζονται ὡς ἑξῆς: ἡ πρώτη διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $(7, 0)$ καὶ $(0, -11)$, ἡ δευτέρη ἀπὸ τὰ $(\frac{4}{5}, \sqrt{5})$ καὶ $(\sqrt{3}, -6)$ καὶ ἡ τρίτη διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν $x + y - 1 = 0$ καὶ $x - y + 2 = 0$ καὶ εἶναι παράλληλη πρὸς τὸ διάνυσμα $(1, \sqrt{2})$.

Νά γίνῃ ἡ σχεδίαση τῶν παραπάνω εὐθειῶν.

9. Δίνονται οἱ εὐθεῖες α) $4x - 6y - 1 = 0$ καὶ β) $3x + 2y = 0$. Ἀφοῦ παρατηρήσετε ὅτι αὐτές εἶναι ἀντίστοιχα παράλληλες πρὸς τὰ διανύσματα $(6, 4)$ καὶ $(-2, 3)$, ν' ἀποδείξετε ἀκολουθῶς ὅτι οἱ εὐθεῖες εἶναι κάθετες. Νά γίνῃ τὸ κατάλληλο σχέδιο.

10. Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας ποῦ: α) διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων καὶ εἶναι κάθετη πρὸς τὸ διάνυσμα $(2, -4)$. β) διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν $y = -4$ καὶ $x = 2$ καὶ εἶναι κάθετη πρὸς τὸ διάνυσμα $(8, 4)$. Νά σχεδιασθοῦν οἱ εὐθεῖες.

11. Νά γίνουν οἱ γραφικὲς παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων $4y = x^2$ καὶ $2x + 4y + 1 = 0$ καὶ νὰ ἐξετασθεῖ ἂν οἱ γραμμὲς αὐτές ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

12. Δίνονται τὰ σημεῖα A(-5, 5), B(7, 2) καὶ Γ(-1, -1). I) Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ABΓ καὶ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ διάμεσοι αὐτές διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο. Ποιὲς εἶναι οἱ συντεταγμένες αὐτοῦ τοῦ σημείου; Νά γενικευθεῖ ἡ ἀπόδειξη γιὰ τίς διάμεσοι τυχαίου τριγώνου. II) Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν ὑψῶν στὸ παραπάνω τρίγωνο καὶ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες αὐτές ἔχουν κοινὸ σημεῖο. III) Νά βρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν διαμέσων καὶ τῶν ὑψῶν.

Άσκησης για επανάληψη.

1. Θεωρούμε τό κλάσμα $\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\alpha_2 x + \beta_2}$, όπου οι $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ είναι ρητοί μη μηδενικοί και δ x άρρητος. Νά βρεθεί ή συνθήκη πού πρέπει νά ικανοποιούν οι $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ γιά νά είναι τό κλάσμα ρητός αριθμός.

2. Ν' αποδειχθεί ότι ό αριθμός

$$A = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^{10}} + \dots + \frac{1}{10^{\frac{n(n+1)}{2}}} + \dots \text{ είναι άρρητος.}$$

(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι: $A = 0,1010010001 \dots$).

3. Νά συγκρίνετε τούς αριθμούς $5 - 2\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{45 - 20\sqrt[3]{5}}$ επίσης τούς αριθμούς $4 + 2\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{7 + \sqrt[3]{48}}$.

4. Ν' αποδειχθεί ότι ό αριθμός

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \text{ είναι ρητός αριθμός.}$$

(Υπόδειξη: Θέσατε $\kappa = 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$ και $\lambda = -3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$ και ακόλου-

θως γράψτε: $x^3 = (\sqrt[3]{\kappa} - \sqrt[3]{\lambda})^3 = \kappa - \lambda - 3\sqrt[3]{\kappa} \cdot \sqrt[3]{\lambda} (\sqrt[3]{\kappa} - \sqrt[3]{\lambda}) = \dots$)

5. Ποιά σημεία πάνω σ' έναν άξονα $x'x$ παριστάνει καθεμιά από τίς ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha) 3x - 1 > 2 \quad \beta) x - \sqrt[3]{2} < 1.$$

6. Άν γιά τά σημεία A, B, Γ, Δ ενός άξονα ισχύει ή ισότητα $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}} = -\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}$, ν' αποδειχθεί ότι $2(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι οι τετμημένες τών A, B, Γ, Δ αντίστοιχα.

7. Μέ κέντρο τήν άρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος και άκτίνα μέτρου 2 σχεδιάζομε κύκλο πού τέμνει τόν ήμιάξονα Ox στό A. Ακολουθώσ σχεδιάζομε τό κανονικό έξάγωνο, τό έγγεγραμμένο σ' αυτόν τόν κύκλο, πού έχει μιά κορυφή του τό σημείο A. Νά βρεθούν οι συντεταγμένες τών άλλων κορυφών του έξαγώνου.

8. Νά βρεθεί ή άναλυτική και ή διανυσματική εξίσωση τής εὐθείας πού διέρχεται από τά σημεία A (6, -8) και B (1, -5) και τής εὐθείας πού διέρχεται από τό σημείο B (1, -5) και είναι παράλληλη πρós τήν εὐθεία $-2x + 9y - 10 = 0$.

9. Νά βρεθεί ή διανυσματική και ή συνήθης άναλυτική εξίσωση τής εὐθείας, τής οποίας οι άναλυτικές παραμετρικές εξισώσεις είναι $x = 7 - 3t$ και $y = 13 + 21t$.

10. Νά όριστεί ή τιμή τής παραμέτρου λ έτσι, ώστε οι εὐθείες $(\lambda - 2)x = (\lambda - 1)y + 1$ και $-2\lambda x + (2\lambda + 5)y = 3$ α) νά είναι παράλληλες και β) νά ταυτίζονται.

11. Θεωρούμε τήν εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$. Ν' αποδειχθεί ότι τό σύνολο τών σημείων του επιπέδου, τών οποίων οι συντεταγμένες τήν επαληθεύουν, άποτελείται από δυό εὐθείες, τίς οποίες νά προσδιορίσετε και νά σχεδιάσετε.

(Υπόδειξη: Τό πολυώνυμο $x^2 + y^2 + 2xy - 1$ νά γίνει γινόμενο πρωτοβαθμίων ως πρós x και y πολυωνύμων).

12. Δίνονται τά σημεία A $(\frac{1}{2}, -1)$, B $(-\frac{3}{4}, 2)$ και K (2, 2). Άν τό K είναι τό κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ, νά βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

8·1 'Η σημασία καί τό νόημα τοῦ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ. 'Ο μιγαδικός ἀριθμός.

α) 'Ο φανταστικός ἀριθμός. Ἐπειδή $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, βλέπουμε ἀμέσως ὅτι τό πολυώνυμο $x^2 - 1$ ἔχει ὡς ρίζες — ἀριθμούς πού τό μηδενίζουν — τοὺς ἀριθμούς 1 καί -1 . Ἡ ἐξίσωση $x^2 - 1 = 0$ ἢ ἡ ἰσοδύναμή της $x^2 = 1$, ἔχει, ὅπως ἀλλιῶς λέμε, ὡς λύσεις τοὺς ἀριθμούς 1 καί -1 , δηλαδή τή θετική καί τήν ἀρνητική τετραγωνική ρίζα τῆς μονάδας.

Ὅμοια παρατηροῦμε ὅτι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 4 = 0$ ἢ τῆς ἰσοδύναμῆς της $x^2 = 4$, εἶναι οἱ ἀριθμοί 2 καί -2 , δηλαδή ἡ $\sqrt{4}$ καί ἡ $-\sqrt{4}$.

Οἱ ἐξισώσεις ὁμως $x^2 = -1$ καί $x^2 = -4$, καί ἄλλες παρόμοιες, δέν ἔχουν λύσεις μέσα στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Διότι, ὅπως γνωρίζουμε, τό τετράγωνο ὁποιουδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμός θετικός, ἂν δέν εἶναι μηδέν.

Ἄν λοιπόν δέν εἴμαστε ἐτοιμοί νά περάσουμε σ' ἕνα ἄλλο εἶδος ἀριθμῶν, πέρα ἀπό τοὺς πραγματικούς, θά πρέπει νά δεχθοῦμε ὅτι ἐξισώσεις, ὅπως οἱ παραπάνω, δέν ἔχουν λόγο ὑπάρξεως μέσα στή Μαθηματική Θεωρία καί πολὺ περισσότερο στίς ἐφαρμογές· θά πρέπει δηλαδή νά «συμβιβαστοῦμε μ' ἕνα ἀδιέξοδο»· ἀλλά κάτω τέτοιο εἶναι ἀδιανόητο γιά τήν ἀνθρώπινη νόηση.

Παραδεχόμαστε λοιπόν τήν ὑπαρξη ἑνός νέου ἀριθμοῦ i τοῦ ὁποίου τό τετράγωνο νά εἶναι ἴσο μέ -1 : $i^2 = -1$, ἄρα $i = \sqrt{-1}$.

Ἔτσι ἔχομε :

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1}$$

Ὁ ἀριθμός αὐτός i ὀνομάστηκε **φανταστική μονάδα**.

Ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ i μ' ἕνα πραγματικό ἀριθμό λ μᾶς δίνει, ὅταν $\lambda \neq 0$, τό νέο ἀριθμητικό σύμβολο λi πού καλεῖται **φανταστικός ἀριθμός**.

Οἱ ἀριθμοί π.χ. $\frac{9}{11}i$, $-\frac{7}{29}i$, $52i$, $\sqrt{3 - \sqrt{5}}i$ εἶναι φανταστικοί ἀριθμοί.

Τόν αριθμό $1 \cdot i$ τόν ταυτίζουμε με τόν i , τόν αριθμό $(-1) \cdot i$ τόν ταυτίζουμε με τόν $-i$ και τόν αριθμό τέλος $0 \cdot i$ τόν ταυτίζουμε με τό 0 .

Η εξίσωση τώρα $x^2 + 1 = 0$ έχει λύσεις τούς αριθμούς i και $-i$, διότι $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ και $(-i)^2 + 1 = [(-1) \cdot i]^2 + 1 = (-1)^2 \cdot i^2 + 1 = 1 \cdot (-1) + 1 = 0$. Επίσης η εξίσωση $x^2 + 4 = 0$ έχει λύσεις τούς αριθμούς $2i$ και $-2i$, διότι $(2i)^2 + 4 = 2^2 \cdot i^2 + 4 = 4 \cdot (-1) + 4 = 0$ και $(-2i)^2 + 4 = (-2)^2 \cdot i^2 + 4 = 4 \cdot (-1) + 4 = 0$.

Η σημασία της επινοήσεως του φανταστικού αριθμού, για την ανάπτυξη των μαθηματικών θεωριών, αλλά και για τις εφαρμογές, κάνει την ώρα της εμφάνισής του μιά από τις ευτυχέστερες ώρες της Μαθηματικής Έπιστήμης.

Σχετικά με τό νόημα της εκφράσεως i^k , όπου k μη άρνητικός άκέραιος (θετικός ή μηδέν) έχουμε νά σημειώσουμε τά ακόλουθα.

Θέλομε πρώτα νά έχουμε: $i^k \cdot i^\lambda = i^{k+\lambda}$, $(i^k)^\lambda = i^{k\lambda}$.

Δεύτερο όρίζομε: τό i^1 ίσο με i και τό $i^0 = 1$.

Ίσχύει τότε: $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -1$ και $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

Άσκηση. Παρατηρώντας ότι κάθε άκέραιος θετικός k μπορεί νά γραφεί με τή μορφή $4\rho + \nu$, όπου ρ μη άρνητικός άκέραιος και $\nu = 0$ ή 1 ή 2 ή 3 , νά βρῆτε πόσες και ποιές είναι οι τιμές τής συμβολικής παραστάσεως i^k .

Παρατήρηση: Η ιδιότητα $(\sqrt{\alpha})^2 = \sqrt{\alpha^2}$ ισχύει μόνον όταν $\alpha \geq 0$, δηλαδή όταν ή $\sqrt{\alpha}$ είναι πραγματικός αριθμός. Δέν πρέπει λοιπόν νά γράφομε $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2}$. Έτσι θά πέφταμε στο λάθος:

$$-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

β) Ο μιγαδικός αριθμός. Κάθε παράσταση τής μορφής $\alpha + \beta i$, όπου α και β όποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, θά λέγεται **μιγαδικός αριθμός**.

Οι παραστάσεις π.χ. $-19 + \sqrt{7}i$, $\frac{13}{3} - \frac{3}{13}i$, $(6 - \sqrt{2}) + (7 - \sqrt{3})i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Ταυτίζομε όμως όλους τούς αριθμούς τής μορφής $\alpha + 0 \cdot i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, με τούς πραγματικούς, και όλους τούς αριθμούς τής μορφής $0 + \beta \cdot i$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$, με τούς φανταστικούς.

Ο αριθμός $0 + 0i$ ταυτίζεται με τόν αριθμό 0 δηλαδή:

$$\alpha + \beta i = 0 \text{ αν και μόνον αν } \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

8·2 Οι πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών.

Οι θεμελιώδεις πράξεις μέσα στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών γίνονται σύμφωνα με τή διαδικασία και με τήν εφαρμογή των ίδιων νόμων που ισχύουν για τις πράξεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Συνέπεια αυτού είναι ότι τά άποτελέσματα τής εφαρμογής των τεσσάρων

πράξεων σέ μιγαδικούς, άν δέν είναι πραγματικοί άριθμοί, είναι όπωςσδήποτε μιγαδικοί.

Έτσι γιά τήν πρόσθεση και τήν άφαίρεση δύο μιγαδικών άριθμών έχουμε:

$$i) (\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta i + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i.$$

$$ii) (\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta i - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i.$$

Τό άθροισμα δύο άντιθέτων μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $-\alpha - \beta i$ είναι μηδέν. Πράγματι $\alpha + \beta i + (-\alpha - \beta i) = (\alpha - \alpha) + (\beta - \beta)i = 0 + 0i = 0$.

Ένα σημαντικό πόρισμα: «Δύο μιγαδικοί άριθμοί είναι ίσοι άν και μόνο άν τά πραγματικά τους μέρη είναι ίσα και τά φανταστικά τους επίσης ίσα».

Διότι $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \iff (\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = 0 \iff (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i = 0$. Άλλά τότε πρέπει και άρκεϊ νά είναι $\alpha - \gamma = 0$ και $\beta - \delta = 0$, δηλαδή $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

Γιά τόν πολλαπλασιασμό δύο μιγαδικών έχουμε:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) &= \alpha\gamma + \beta\gamma i + \alpha\delta i + \beta\delta i^2 = \\ &= \alpha\gamma + \beta\delta(-1) + \beta\gamma i + \alpha\delta i = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)i. \end{aligned}$$

Είναι ενδιαφέρον νά παρατηρήσουμε ότι: $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 - (\beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 \cdot i^2 = \alpha^2 - \beta^2 \cdot (-1) = \alpha^2 + \beta^2$ και έπειδή οί μιγαδικοί άριθμοί $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ λέγονται συζυγείς, νά διατυπώσουμε τήν ιδιότητα: τό γινόμενο $z \cdot \bar{z}$ δύο συζυγών μιγαδικών άριθμών είναι άριθμός πραγματικός και μάλιστα θετικός ή 0.

Άς δοϋμε τώρα τί είναι ό άντίστροφος άριθμός ενός μιγαδικού άριθμού $z = \alpha + \beta i$, ό όποιος θά σημειώνεται μέ $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha + \beta i}$ ($\alpha + \beta i \neq 0$).

Σύμφωνα μέ τό νόημα του άντιστρόφου, αυτός πρέπει νά είναι ένας μιγαδικός άριθμός $x + yi$ τέτοιος ώστε $(x + yi) \cdot (\alpha + \beta i) = 1$ (1).

Άπό τήν προηγούμενη ισότητα (1) παίρνομε: $\alpha x - \beta y + (\beta x + \alpha y)i = 1$ (2).

Η ισότητα (2) ισχύει άν και μόνον άν

$$\begin{aligned} \alpha x - \beta y &= 1 \quad \text{και} \\ \beta x + \alpha y &= 0 \end{aligned} \quad (3).$$

Άπό τήν επίλυση του συστήματος (3) παίρνομε

$$x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{και} \quad y = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{1}{\alpha + \beta i} = x + yi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot i.$$

Βρίσκομε συντομότερα τόν άντίστροφο του $\alpha + \beta i$ άν πολλαπλασιάσουμε τούς όρους του κλάσματος $\frac{1}{\alpha + \beta i}$ επί τό συζυγή του $\alpha + \beta i$ δηλαδή:

$$\frac{1}{\alpha + \beta i} = \frac{\alpha - \beta i}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta i)} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot i.$$

Ο αντίστροφος του i είναι ίσος με τον αντίθετο του i .

$$\text{Πράγματι } \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i.$$

Γενικά για το πηλίκο $(\alpha + \beta i) : (\gamma + \delta i)$, δύο μιγαδικών, όπου $\gamma + \delta i \neq 0$,

$$\begin{aligned} \text{έχουμε: } (\alpha + \beta i) : (\gamma + \delta i) &= \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = (\alpha + \beta i) \cdot \frac{1}{\gamma + \delta i} = \\ &= (\alpha + \beta i) \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} - \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \cdot i \right) = \\ &= \frac{\alpha\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma i}{\gamma^2 + \delta^2} - \frac{\alpha\delta i}{\gamma^2 + \delta^2} - \frac{\beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \cdot i^2 = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2}. \\ \text{Συντομότερα: } \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} &= \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \\ &= \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \cdot i. \end{aligned}$$

Για τις δυνάμεις με βάση μιγαδικό αριθμό και έκθετη πραγματικών άκεραιο, ισχύουν όσα ξέρομε και για τις δυνάμεις με βάση πραγματικό αριθμό. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta i)^0 &= 1, \quad (\alpha + \beta i)^1 = \alpha + \beta i, \quad (\alpha + \beta i)^k \cdot (\alpha + \beta i)^\lambda = (\alpha + \beta i)^{k+\lambda} \\ (\alpha + \beta i)^k : (\alpha + \beta i)^\lambda &= (\alpha + \beta i)^{k-\lambda}, \quad [(\alpha + \beta i)^k]^\lambda = (\alpha + \beta i)^{k\lambda}, \\ [(\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i)]^k &= (\alpha + \beta i)^k \cdot (\gamma + \delta i)^k. \end{aligned}$$

$$\text{*Αν } \mu \text{ άρνητικός άκεραίος, τότε } (\alpha + \beta i)^\mu = \frac{1}{(\alpha + \beta i)^{-\mu}}.$$

Σημαντική παρατήρηση: *Αν με τά σύμβολα z και $\bar{z}$ δηλώνομε δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς, τότε ισχύουν οι ισότητες:

$$1) \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2} \quad 2) \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2} \quad 3) \bar{z}_1 : \bar{z}_2 = \overline{z_1 : z_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Δηλαδή: «Τό άθροισμα (ή διαφορά) και τό γινόμενο (τό πηλίκο) τών συζυγών δύο μιγαδικών αριθμών, ίσοῦται αντίστοιχα με τό συζυγή του άθροίσματος (της διαφοράς) και του γινομένου (του πηλίκου) αὐτῶν τῶν αριθμῶν».

Ἡ απόδειξη είναι εύκολη και μπορεί νά δοθεῖ ὡς άσκηση.

***Άσκηση.** Παρατηρώντας ότι κάθε άρνητικός άκεραίος μ μπορεί νά γραφεί ὑπό τή μορφή $\mu = -4k + \nu$, όπου k θετικός άκεραίος και $\nu = 0$ ή 1 ή 2 ή 3 , νά βρεθοῦν ὅλες οι διαφορετικές τιμές τής παραστάσεως i^μ .

8.3 Μέτρο και γραφική παράσταση μιγαδικού.

α) Τό μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού. Μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta i$ ονομάζομε τόν μή άρνητικό πραγματικό αριθμό $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

$$\text{Γράφομε: } |z| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

$$\text{Εῖναι προφανές ότι: } |\alpha + \beta i| = |\alpha - \beta i| = |-\alpha + \beta i| = |-\alpha - \beta i|.$$

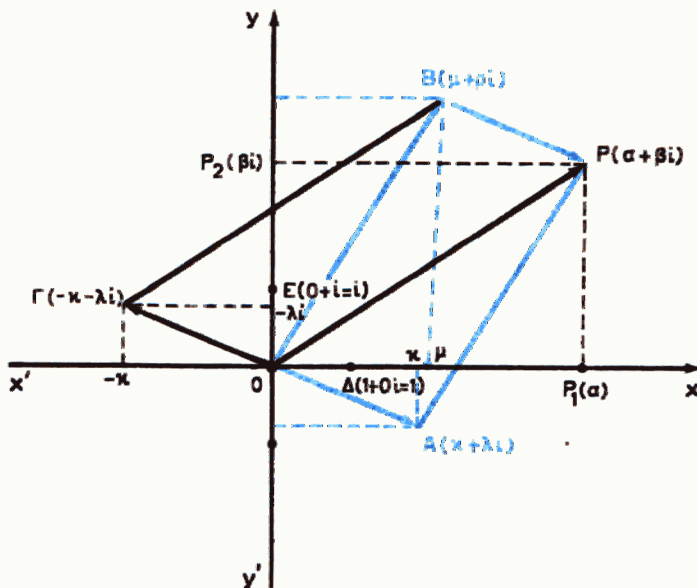
Ἐπίσης είναι :

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}, \text{ διότι } z \cdot \bar{z} = (\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2.$$

Προσοχή: Ἄν $z = \alpha + \beta i$ (μέ $\beta \neq 0$), τότε $z^2 \neq |z|^2$.

$$\begin{aligned} \text{Διότι } z^2 &= (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i + (\beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \beta^2 \cdot i^2 = \\ &= \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i, \quad \text{ἐνῶ } |z|^2 = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2 = \alpha^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

β) Γραφική παράσταση μιγαδικού. Ἄν σ' ἓνα ἐπίπεδο πάρουμε ἓνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων καί ἀκολουθῶς συμφωνήσουμε τά σημεῖα τοῦ ἀξονα τῶν τετμημένων νά εἶναι οἱ γεωμετρικές εἰκόνες τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐνῶ τά σημεῖα τοῦ ἄξονα τῶν τεταγμένων οἱ γεωμετρικές εἰκόνες τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν, τότε κάθε σημεῖο P τοῦ ἐπιπέδου, μέ συντεταγμένες (α, β) , θά εἶναι ἡ γεωμετρική εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha + \beta i$ (σχ. 8-3). ἀντίστροφα, κάθε μιγαδικός ἀριθμός $\alpha + \beta i$ θά ἔχει εἰκόνα ἓνα καί μόνο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, ἀκριβῶς ἐκεῖνο πού ἔχει συντεταγμένες (α, β) .



Σχ. 8-3.

Ἐνα τέτοιο ἐπίπεδο, ὅπου κάθε σημεῖο του ἀντιστοιχίζεται σ' ἓνα καί μόνο μιγαδικό ἀριθμό καί ἀντίστροφα κάθε μιγαδικός ἀριθμός σ' ἓνα καί μόνο σημεῖο, λέγεται συνήθως μιγαδικό πεδίο.

Ἐπειδή ἡ διανυσματική ἀκτίνα $\vec{OP}$ ἔχει συντεταγμένες τῆς ἴδιας τῆς συντεταγμένες τοῦ $P(\alpha, \beta)$, μποροῦμε νά θεωροῦμε ὡς γραφική (γεωμετρική) παράσταση τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$ τή διανυσματική ἀκτίνα $\vec{OP}$.

$$\text{Ἐξάλλου ἔχομε ἀκόμα } |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |\vec{OP}|.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, όπως ένα διάνυσμα εκφράζεται μέσω ενός διατεταγμένου ζεύγους πραγματικών αριθμών, έτσι και ένας μιγαδικός αριθμός είναι ουσιαστικά ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών.

Αυτή η αντιστοιχία του μιγαδικού αριθμού προς ένα διάνυσμα επεκτείνεται και ανάμεσα στο άθροισμα ή τη διαφορά δύο μιγαδικών αριθμών προς το άθροισμα ή τη διαφορά δύο διανυσμάτων.

Όπως ακριβώς το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$, με συντεταγμένες αντίστοιχα (κ, λ) και (μ, ρ) , είναι το διάνυσμα $\vec{OP}$ (σχ. 8.3) με συντεταγμένες $\alpha = \kappa + \mu$ και $\beta = \lambda + \rho$, έτσι και το άθροισμα των μιγαδικών $\kappa + \lambda i$ και $\mu + \rho i$ είναι ο μιγαδικός $(\kappa + \mu) + (\lambda + \rho)i$ με συνθετικά μέρη τά $(\kappa + \mu)$ και $(\lambda + \rho)i$.

Ακόμα, όπως $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OP} \iff \vec{OB} = \vec{OP} - \vec{OA} \iff \vec{OB} = \vec{OP} + \vec{OG}$, όπου $\vec{OG}$ το αντίθετο του $\vec{OA}$, έτσι όμοια έχουμε $\mu + \rho i = (\alpha + \beta i) - (\kappa + \lambda i) \iff \mu + \rho i = \alpha + \beta i + (-\kappa - \lambda i) \iff \mu + \rho i = (\alpha - \kappa) + (\beta - \lambda)i$, αν $(\mu + \rho i) + (\kappa + \lambda i) = \alpha + \beta i$.

8.4 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Αν $z = \alpha + \beta i$ και $z' = \gamma + \delta i$ ν' αποδειχθεί ότι:

$$I) |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad II) \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0).$$

$$III) |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

$$I) \text{ Έχουμε: } z \cdot z' = (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$$

$$\text{και συνεπώς } |z \cdot z'| = \sqrt{(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2} =$$

$$= \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\delta^2} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}$$

$$\text{επίσης } |z| \cdot |z'| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}$$

$$\begin{aligned} II) \text{ Έχουμε: } \left| \frac{z}{z'} \right| &= \left| z \cdot \frac{1}{z'} \right| = |z| \cdot \left| \frac{1}{z'} \right| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left| \frac{\gamma - \delta i}{\gamma^2 + \delta^2} \right| = \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \delta^2)^2} + \frac{\delta^2}{(\gamma^2 + \delta^2)^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma^2 + \delta^2}{(\gamma^2 + \delta^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma^2 + \delta^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} = \frac{|z|}{|z'|}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} III) \text{ Έχουμε: } |z + z'| &= \sqrt{(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2} \quad \text{και} \quad |z| + |z'| = \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}. \end{aligned}$$

Πρέπει συνεπώς ν' αποδείξουμε ότι :

$$\sqrt{(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \quad (1)$$

Ἐπειδή καί τά δύο μέλη τῆς σχέσεως (1) εἶναι ≥ 0 , ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή σχέση πού παίρνομε ἄν ὑψώσουμε τά μέλη τῆς (1) στό τετράγωνο.

Ἀρκεῖ λοιπόν νά ἀποδείξομε ὅτι:

$$\begin{aligned} (\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2 &\leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot (\gamma^2 + \delta^2)} \Leftrightarrow \\ \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma + \beta^2 + \delta^2 + 2\beta\delta &\leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) (\gamma^2 + \delta^2)} \\ \Leftrightarrow \alpha\gamma + \beta\delta &\leq \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) (\gamma^2 + \delta^2)} \quad (2) \end{aligned}$$

Ἄν $\alpha\gamma + \beta\delta < 0$, τότε ἡ (2) ἰσχύει καί συνεπῶς καί ἡ (1).

Ἄν $\alpha\gamma + \beta\delta \geq 0$, τότε ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή σχέση πού παίρνομε ἄν ὑψώσουμε τά μέλη τῆς (2) στό τετράγωνο. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma + \beta\delta \leq \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) (\gamma^2 + \delta^2)} &\Leftrightarrow (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2) (\gamma^2 + \delta^2) \Leftrightarrow \\ \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta &\leq \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 \Leftrightarrow \\ 0 &\leq \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha\delta - \beta\gamma)^2. \end{aligned}$$

Ἡ τελευταία ὁμως σχέση ἰσχύει γιά ὅποιεσδήποτε πραγματικές τιμές τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ἄρα ἡ (2) ἰσχύει σέ κάθε περίπτωση καί συνεπῶς καί ἡ (1).

2. Ἄν $\beta\delta \neq 0$ νά βρεθεῖ ἡ συνθήκη, ἡ ἀναγκαία καί ἰκανή, γιά νά εἶναι τό γινόμενο τῶν μὴ πραγματικῶν ἀριθμῶν $(\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i)$ πραγματικός ἀριθμός.

Ἐχομε $(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$ καί γιά νά εἶναι τό γινόμενο αὐτό πραγματικός ἀριθμός πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\alpha\delta + \beta\gamma = 0$ (1). Ἡ σχέση (1) ἰσχύει ἢ ὅταν $\alpha = 0$, ὁπότε καί $\gamma = 0$ (ἐπειδὴ $\beta \neq 0$) ἢ ὅταν, μέ $\alpha \neq 0$, $\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\delta}{\beta}$.

Παραδείγματα: 1) $(-15i) \cdot 2i = -30 \cdot i^2 = (-30) \cdot (-1) = 30$.

2) $(2 + 4i) \cdot (1 - 2i) = 2 - 4i + 4i - 8i^2 = 10$.

3. Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός πού παριστάνει ἡ ἔκφραση $(2 - i)^{-3}$.

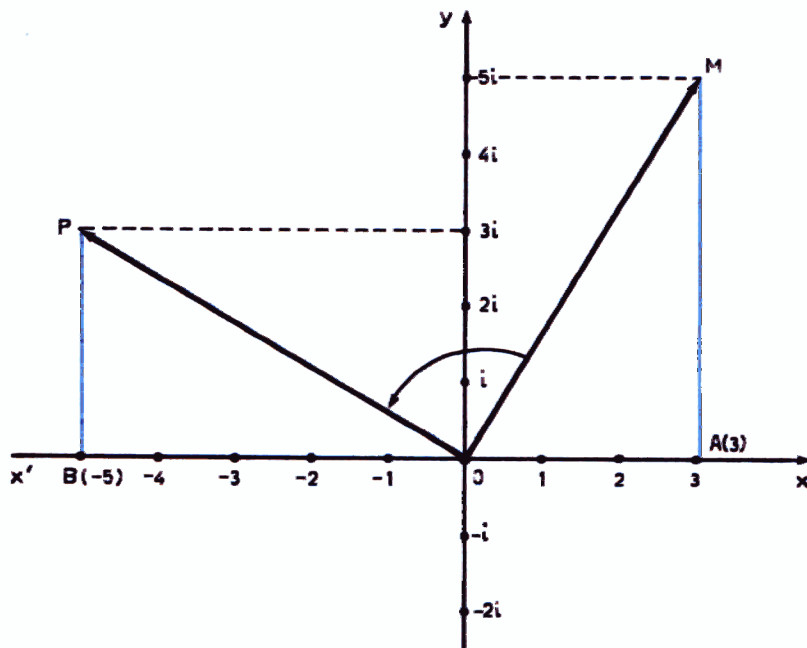
$$\begin{aligned} \text{Ἐχομε: } (2 - i)^{-3} &= \frac{1}{(2 - i)^3} = \frac{1}{2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3} = \\ &= \frac{1}{8 - 12i - 6 + i} = \frac{1}{2 - 11i} = \frac{2 + 11i}{(2 - 11i)(2 + 11i)} = \frac{2 + 11i}{4 + 121} = \frac{2}{125} + \frac{11}{125}i. \end{aligned}$$

4. Ἄν $z = a + \beta i$, πότε $|z| = 0$;

Ἐπειδὴ $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ἔπεται ὅτι θά εἶναι $|z| = 0$ ὅταν καί μόνο $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0$, δηλαδή ὅταν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. ἀλλά ἡ τελευταία ἰσότητα ἀληθεύει (γιά πραγματικούς α καί β) ἄν καί μόνον ἄν $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$.

5. Δίνεται ὁ μιγαδικός $3 + 5i$. Νά γίνει ἡ γραφική του παράσταση καθώς καί ἡ γραφική παράσταση τοῦ $i \cdot (3 + 5i) = -5 + 3i$. Τί παρατηρεῖτε γιά τά διανύσματα $\vec{OM}$ καί $\vec{OP}$ ἄν M καί P εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν $3 + 5i$ καί $-5 + 3i$ ἀντιστοίχως; Γενικεύεται ἡ ιδιότητα πού βρήκατε; Δηλαδή ἰσχύει γιά κάθε ζεύγος μιγαδικῶν τῆς μορφῆς $a + \beta i$, $i(a + \beta i) = -\beta + \alpha i$;

Τα ορθογώνια τρίγωνα OAM και PBO (σχ. 8.4) είναι ίσα (γιατί;), οπότε $\widehat{BOP} = \widehat{OMA}$ και συνεπώς $\widehat{BOP} + \widehat{AOM} = 90^\circ$. Άρα η γωνία $\widehat{MOP}$ είναι ορθή. Ο πολλαπλασιασμός λοιπόν του μιγαδικού $3 + 5i$ επί i ισοδυναμεί με τη στροφή του αντίστοιχου διανύσματος $\vec{OM}$ κατά 90° και με φορά αντίθετη της φοράς στροφής των δεικτών του ρολογιού.



Σχ. 8.4.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για οποιονδήποτε μιγαδικό και αποδεικνύεται όμοια. Έξάλλου, αν $K(\alpha + \beta i)$ και $L(-\beta + \alpha i)$, τότε το διάνυσμα $\vec{LK}$ έχει συντεταγμένες $(\alpha + \beta, \beta - \alpha)$. Κατόπιν αυτού έχουμε:

$$\begin{aligned} |\vec{LK}|^2 &= (\alpha + \beta)^2 + (\beta - \alpha)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2), \quad |\vec{OK}|^2 = |\alpha + \beta i|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = |-\beta + \alpha i|^2 = \\ &= |\vec{OL}|^2 \text{ και επομένως } |\vec{OK}|^2 + |\vec{OL}|^2 = |\vec{LK}|^2. \end{aligned}$$

Άρα το τρίγωνο KOL είναι ορθογώνιο στο O και ισοσκελές (2η απόδειξη).

8.5 Ασκήσεις.

1. Ποιούς μιγαδικούς αριθμούς παριστάνουν τα κλάσματα:

$$-\frac{1}{i}, \frac{1}{1+i}, \frac{1+5i}{1-5i}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}, \frac{1}{i^2}, -\frac{1}{i^{20}}, \frac{i}{i^{20}}, \frac{\alpha+\beta i}{\beta-\alpha i} \text{ (με } \beta-\alpha i \neq 0),$$

$$\frac{\alpha+\beta v-(\alpha v-\beta)i}{1-vi} \text{ (με } v \in \mathbb{N}).$$

2. Να βρεθούν τ' αποτελέσματα των πράξεων:

$$\text{I) } (2\sqrt{3}+5i)(\sqrt{3}-i) \quad \text{II) } (1+2i)(2+i):(3-3i).$$

$$\text{III)} \frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i} + \frac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i} \text{ (μέ } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \text{). IV) } (-5 + 7i)^3 : (2 + 3i).$$

$$\text{V)} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6} i \right) + (2 - i)^2 \right] : (1 - i)^3.$$

$$3. \text{ "Αν } z = \alpha + \beta i, \text{ ν' αποδειχθεί ότι } |z| \geq \frac{|\alpha| + |\beta|}{\sqrt{2}}$$

$$4. \text{ I) Νά επιλυθεί ή εξίσωση } 5ix + 2i = -i + 3x.$$

II) Νά βρεθεί ή συνθήκη ή αναγκαία και ικανή για νάχει ή εξίσωση $(\alpha + \beta i)x = \gamma + \delta i$, με $\alpha + \beta i \neq 0$, πραγματική λύση.

5. I) Ν' αποδειχθεί ότι $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ (δηλαδή για κάθε άκεραιο k).

II) Νά βρεθούν όλες οι διαφορετικές τιμές της παραστάσεως $(1 + i^{2n}) \cdot (1 + i^n)$, όταν $n \in \mathbb{N}$.

6. Με βάση ένα όρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων νά γίνει ή γραφική παράσταση τών μιγαδικών $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$, $z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{12}i$, $z_3 = \frac{7}{4} + \frac{2}{3}i$ καθώς και του μιγαδικού $z_1 + z_2 + z_3$.

7. 'Ο μιγαδικός $6 + 5i$ νά γραφεί με τη μορφή $\alpha(2 + i) + \beta(2 - i)$, όπου α και β πραγματικοί.

8. Νά βρεθούν τὰ ζεύγη (x, y) πραγματικών αριθμών τὰ όποία ίκανοποιούν την εξίσωση $(4 - 5i)x + (17 - 23i)y = 6 - 4i$.

9. Νά βρεθεί ή συνθήκη ή αναγκαία και ικανή για νά είναι: I) $(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i)$ φανταστικός αριθμός. II) $(\alpha + \beta i) : (\gamma + \delta i)$ φανταστικός αριθμός.

$$10. \text{ "Αν } \omega_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ και } \omega_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ν' αποδειχθεί ότι:}$$

$$\text{I) } \omega_1^2 = \omega_2^2 = 1. \text{ II) } \omega_1^2 + \omega_1 + 1 = \omega_2^2 + \omega_2 + 1 = 0. \text{ III) } \omega_1^3 = \omega_2^3 \text{ και } \omega_1^2 = \omega_1.$$

$$11. \text{ "Αν } z = \alpha + \beta i \text{ και } z' = \gamma + \delta i, \text{ ν' αποδειχθεί ότι } ||z| - |z'||| \leq |z \pm z'|.$$

('Υπόδειξη: Μπορείτε νά χρησιμοποιήσετε τη γεωμετρική παράσταση τών z και z').

12. "Αν για τούς αριθμούς α και β έχουμε $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = 1$, νά βρεθεί ή τιμή της παραστάσεως $\alpha^2 + \beta^2$. Τί συμπεραίνετε για τó είδος τών αριθμών α και β από την τιμή πού βρήκατε;

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΚΑΙ Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ. ΕΙΔΟΣ ΡΙΖΩΝ.

9 · 1 "Εννοια της εξισώσεως δευτέρου βαθμού. 'Επίλυση τών μορφών $ax^2 + \beta x = 0$, $ax^2 + \gamma = 0$.

Κάθε παράσταση της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$, όπου α, β, γ δοσμένοι αριθμοί καί $\alpha \neq 0$, λέγεται πολυώνυμο του x δευτέρου βαθμού.

"Αν ειδικότερα οί α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε μιλάμε για ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.

'Εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο λέγεται ή σχέση:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \text{ με } a \neq 0,$$

αν μ' αυτή δηλώνομε ότι αναζητούμε τίς τιμές του x , πού μηδενίζουν τό πολυώνυμο.

Οι τιμές πού μηδενίζουν τό πολυώνυμο λέγονται **ρίζες** ή **λύσεις** τής εξίσωσης. *Αν οί σταθεροί α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε έχομε μιά δευτεροβάθμια εξίσωση μέ πραγματικούς συντελεστές. Σ' όλα τά επόμενα θά θεωροῦμε εξισώσεις μέ πραγματικούς συντελεστές.

Ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ τῶν ριζῶν μιᾶς εξισώσεως λέγεται **ἐπίλυση** τῆς εξισώσεως.

Εἶναι πολύ εὐκολή ή επίλυση τῶν εξισώσεων:

$$\alpha x^2 + \beta x = 0 \quad (1) \quad \text{καί} \quad \alpha x^2 + \gamma = 0 \quad (2) \quad (\mu\acute{\epsilon} \alpha \neq 0).$$

Γιά τήν (1) ἔχομε: $\alpha x^2 + \beta x = 0 \implies x(\alpha x + \beta) = 0$. ἐπομένως ή εξίσωση ἔχει ὡς ρίζες τοὺς ἀριθμούς $x_1 = 0$ καί $x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Γιά τή (2) ἔχομε: $\alpha x^2 + \gamma = 0 \implies x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$. ἐπομένως ή εξίσωση ἔχει τίς λύσεις $x_1 = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ καί $x_2 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$. *Αν $-\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, οί ρίζες εἶναι δύο ἀντίθετοι πραγματικοί ἀριθμοί· ἂν $-\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, οί ρίζες εἶναι δύο ἀντίθετοι φανταστικοί ἀριθμοί· ἂν $\gamma = 0$, ή εξίσωση ἔχει τή λύση $x_1 = x_2 = 0$.

Παραδείγματα:

Νά λυθοῦν οί εξισώσεις: I) $4x^2 - 9 = 0$ καί II) $4x^2 + 1 = 0$.

Γιά τήν (I) ἔχομε:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2} \quad \text{καί} \quad \text{γιά τή (II)} \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2} i.$$

Γιά τήν εξίσωση $\alpha x^2 = 0$ ($\alpha \neq 0$) λέμε: ἔχει διπλή ρίζα τό μηδέν.

9 · 2 Ὁ τύπος τῶν λύσεων τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ($\mu\acute{\epsilon} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ καί $\alpha \neq 0$). Εἶδος τῶν ριζῶν.

Γιά τήν επίλυση τῆς γενικότερης εξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἀκολουθοῦμε τήν παρακάτω διαδικασία:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 &\iff 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 0 \iff \\ 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma &\iff (2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma \implies \\ 2\alpha x + \beta &= \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \quad (1) \quad \text{καί} \quad 2\alpha x + \beta = -\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \quad (2) \implies \\ x_1 &= \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \end{aligned}$$

*Ὡστε :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \alpha\gamma}$$

Ἡ παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ λέγεται διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

καί τής εξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. άπ' αύτή διακρίνει κανείς τό είδος τών ριζών τής εξισώσεως.

Δηλαδή :

i) *Αν $\Delta < 0$ έχομε ώς ρίζες δυό συζυγείς μιγαδικούς άριθμούς.

ii) *Αν $\Delta = 0$ οί ρίζες είναι πραγματικές καί ίσες.

(*Έχομε μιά διπλή ρίζα πραγματική: $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$).

iii) *Αν $\Delta > 0$ οί ρίζες είναι δυό άριθμοί πραγματικοί καί άνισοί.

Παραδείγματα:

Νά λυθοῦν οί εξισώσεις: I) $x^2 + 4x + 53 = 0$. II) $49x^2 + 28x + 4 = 0$.
καί III) $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$.

Γιά τήν (I) έχομε: $x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{4 - 53} = -2 \pm \sqrt{-49}$. δηλαδή
 $x_1 = -2 - 7i$ καί $x_2 = -2 + 7i$.

Οί ρίζες τής (II) είναι: $x_{1,2} = -\frac{14}{49} \pm \frac{1}{49} \sqrt{14^2 - 4 \cdot 49} =$
 $-\frac{14}{49} \pm \frac{1}{49} \sqrt{196 - 196}$. δηλαδή $x_1 = x_2 = -\frac{2}{7}$.

*Η (III) μās δίνει: $x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}} =$
 $= \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{1^2 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}} =$
 $= \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{1^2 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} =$
 $= \frac{1 + \sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3})}{4} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ καί } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

9.3 Μιά σημαντική ιδιότητα τών εξισώσεων 2ου καί άνωτέρου βαθμού.

«Όταν ένα πολυώνυμο $P(x)$, μέ πραγματικούς συντελεστές, έχει ως ρίζα ένα μιγαδικό άριθμό $\kappa + \lambda i$ ($\lambda \neq 0$), τότε θά έχει ως ρίζα καί τό συζυγή του $\kappa - \lambda i$ ».

*Απόδειξη: Κατασκευάζομε τό δευτεροβάθμιο ως προς x πολυώνυμο $[x - (\kappa + \lambda i)] \cdot [x - (\kappa - \lambda i)] = [(x - \kappa) - \lambda i] \cdot [(x - \kappa) + \lambda i] = (x - \kappa)^2 + \lambda^2$, τό όποιο έχει προφανώς ως ρίζες τούς συζυγείς μιγαδικούς $\kappa + \lambda i$, $\kappa - \lambda i$.

*Αν διαιρέσομε τό θεωρούμενο πολυώνυμο $P(x)$, διά τοῦ $(x - \kappa)^2 + \lambda^2$, θά βροῦμε ένα πηλίκο $\Pi(x)$ καί ένα υπόλοιπο τό πολύ πρώτου βαθμοῦ, δηλαδή τής μορφής $\delta x + \epsilon$, όπου δ καί ϵ πραγματικές σταθερές (γιατί;).

*Έτσι θά έχομε τήν ταυτότητα:

$$P(x) = [(x - \kappa)^2 + \lambda^2] \cdot \Pi(x) + \delta x + \epsilon \quad (1)$$

Γιά $x = \kappa + \lambda i$ από την (1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} P(\kappa + \lambda i) &= [(\kappa + \lambda i - \kappa)^2 + \lambda^2] \cdot \Pi(\kappa + \lambda i) + \delta(\kappa + \lambda i) + \varepsilon = \\ &= [(\lambda i)^2 + \lambda^2] \cdot \Pi(\kappa + \lambda i) + \delta\kappa + \varepsilon + \delta\lambda i = \\ &= 0 \cdot \Pi(\kappa + \lambda i) + \delta\kappa + \varepsilon + \delta\lambda i = \delta\kappa + \varepsilon + \delta\lambda i. \end{aligned}$$

Αλλά $P(\kappa + \lambda i) = 0$, διότι ο αριθμός $\kappa + \lambda i$ είναι ρίζα του $P(x)$, και συνεπώς έχουμε $\delta\kappa + \varepsilon + \delta\lambda i = 0$. Η τελευταία ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\delta\kappa + \varepsilon = 0$ (I) και $\delta\lambda = 0$ (II). Από τη (II), και επειδή $\lambda \neq 0$, παίρνουμε $\delta = 0$, οπότε η (I) μάς δίνει και $\varepsilon = 0$.

Ωστε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι διαιρετό δια του $(x - \kappa)^2 + \lambda^2$, δηλαδή η ταυτότητα (1) γίνεται:

$$P(x) = [(x - \kappa)^2 + \lambda^2] \cdot \Pi(x).$$

Ο αριθμός όμως $\kappa - \lambda i$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $(x - \kappa)^2 + \lambda^2$, άρα θά είναι ρίζα και του $P(x)$.

Πόρισμα: Αν πολυώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$), με πραγματικούς συντελεστές, έχει ως ρίζα αριθμό μιγαδικό $\kappa + \lambda i$ ($\lambda \neq 0$), τότε θά έχει ως δεύτερη τό συζυγή του $\kappa - \lambda i$.

Άσκηση: Αφού διαπιστώσετε ότι η εξίσωση $x^2 - 2\sqrt{5}x + 6 = 0$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{5} + i$, νά βρῆτε την άλλη της ρίζα, χωρίς νά επιλύσετε την εξίσωση.

9.4 Εφαρμογές και παραδείγματα.

1. Νά επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$I) \frac{3}{x-5} + \frac{2x}{x-3} = 5 \quad II) \frac{x}{x+6} - \frac{1}{x-4} = -\frac{10}{(x-4)(x+6)}.$$

Γιά νά επιλύσουμε μία κλασματική εξίσωση, όπως οι προηγούμενες, βρίσκουμε και επιλύουμε μία ισοδύναμη άκεραία (δηλαδή μία εξίσωση της οποίας τά μέλη είναι πολυώνυμα), εφαρμόζοντας τις γνωστές ιδιότητες τών εξισώσεων. Δηλαδή:

α) «Αν και στά δύο μέλη μιᾶς εξισώσεως προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό ἢ τήν ἴδια παράσταση τών ἀγνώστων, τότε προκύπτει εξίσωση ισοδύναμη μέ τήν ἀρχική».

β) «Αν πολλαπλασιάσουμε ἢ διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη μιᾶς εξισώσεως μέ παράσταση, πού δέν μηδενίζεται μέσα στό σύνολο στό ὁποῖο ἐργαζόμαστε, προκύπτει εξίσωση ισοδύναμη μέ τήν ἀρχική».

Μετά τήν επίλυση τῆς ἀκεραίας εξισώσεως, πού προκύπτει μέ τήν ἀπαλοιφή τών παρονομαστών μιᾶς κλασματικῆς, πρέπει νά ἐλέγχομε μήπως κάποια ἀπό τίς λύσεις πού βρήκαμε μηδενίζει παρονομαστή, γιά νά μή τήν συμπεριλάβομε στόν πίνακα τών λύσεων τῆς ἀρχικῆς.

$$1) \text{ Έχουμε: } \frac{3}{x-5} + \frac{2x}{x-3} = 5 \iff 3(x-3) + 2x(x-5) = 5(x-5)(x-3)$$

(1) μέ $(x-5)(x-3) \neq 0$. Η (1) μετά την επιμεριστική εκτέλεση των πολλαπλασιασμών, τή μεταφορά όλων των όρων στο ένα μέλος και τής αναγωγής, γράφεται $x^2 - 11x + 28 = 0$ και άπ' αυτή παίρνομε $x_1 = 4$, $x_2 = 7$. Έπειδή οι τιμές αυτές δέν μηδενίζουν τό ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $(x-5)(x-3)$ των παρονομαστών, είναι λύσεις και τής αρχικής εξίσωσης.

11) Μετά τήν απαλοιφή των παρονομαστών παίρνομε:

$$x(x-4) - (x+6) = -10 \quad (2) \quad \text{μέ} \quad (x+6)(x-4) \neq 0.$$

Η (2) γράφεται $x^2 - 5x + 4 = 0$, από τήν όποία έχομε $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$. Η x_2 όμως μηδενίζει τόν παράγοντα $x-4$ και συνεπώς απορρίπτεται. Έτσι λύση τής αρχικής είναι μόνο ό αριθμός 1.

2. Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις όταν μπαίνουν στη σειρά σε κύκλωμα, δίνουν όλική αντίσταση 9 ohm, ενώ όταν μπαίνουν παράλληλα, δίνουν όλική αντίσταση 2 ohm. Νά βρεθούν οι αντιστάσεις.

Αν x ή μιá αντίσταση, τότε ή άλλη θά είναι $9-x$, διότι ή όλική αντίσταση, όταν συνδέονται αντιστάσεις στη σειρά, ίσοῦται μέ τό άθροισμα των μερικών αντιστάσεων. Όταν οι αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα, ισχύει ή σχέση

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{\text{ολ}}} \quad \text{Έτσι έχομε τήν εξίσωση } \frac{1}{x} + \frac{1}{9-x} = \frac{1}{2} \implies \\ \implies 2(9-x) + 2x = x(9-x) \implies x^2 - 9x + 18 = 0 \implies x_1 = 3 \text{ και } x_2 = 6.$$

Όταν λοιπόν ή μιá αντίσταση είναι 3 ohm, ή άλλη είναι 6 ohm.

3. Σε μιá επιχείρηση εργάζονται 15 πρόσωπα, τεχνικοί και εργάτες. Για εργασία μιās ημέρας οι τεχνικοί εισπράξαν 1500 drx. και οι εργάτες 3240. Αν τό μεροκάματο του τεχνικού υπερβαίνει τό μεροκάματο του εργάτη κατά 230 drx. νά βρεθεί τό πλήθος των τεχνικών, τό πλήθος των εργατών και τό μεροκάματο κάθε κατηγορίας.

Αν x είναι τό πλήθος των τεχνικών, τό πλήθος των εργατών θά είναι $15-x$. Τό μεροκάματο κάθε τεχνικού είναι $\frac{1500}{x}$ και κάθε εργάτη $\frac{3240}{15-x}$. Έτσι έχομε τήν εξίσωση $\frac{1500}{x} - \frac{3240}{15-x} = 230$ ή $\frac{150}{x} - \frac{324}{15-x} = 23$.

Μέ επίλυση αὐτῆς τῆς εξίσωσης παίρνομε: $x_1 = 3$ και $x_2 = \frac{750}{23}$. Η τιμή $\frac{750}{23}$ δέν είναι αποδεκτή γιά τό πρόβλημά μας. Η τιμή $x = 3$ σημαίνει ότι ή επιχείρηση έχει 3 τεχνικούς και συνεπώς $15-3 = 12$ εργάτες. Τό μεροκάματο κάθε τεχνικού είναι $\frac{1500}{3} = 500$ drx. και του κάθε εργάτη $500 - 230 = 270$ drx.

4. Με κατάλληλες γραφικές κατασκευές να ελέγξετε αν οι εξισώσεις: I) $x^2 - 2x - 3 = 0$, II) $x^2 - 2x + 1 = 0$ και III) $2x^2 + x + 1 = 0$, έχουν πραγματικές λύσεις και στην περίπτωση που υπάρχουν να βρείτε αυτές τις λύσεις.

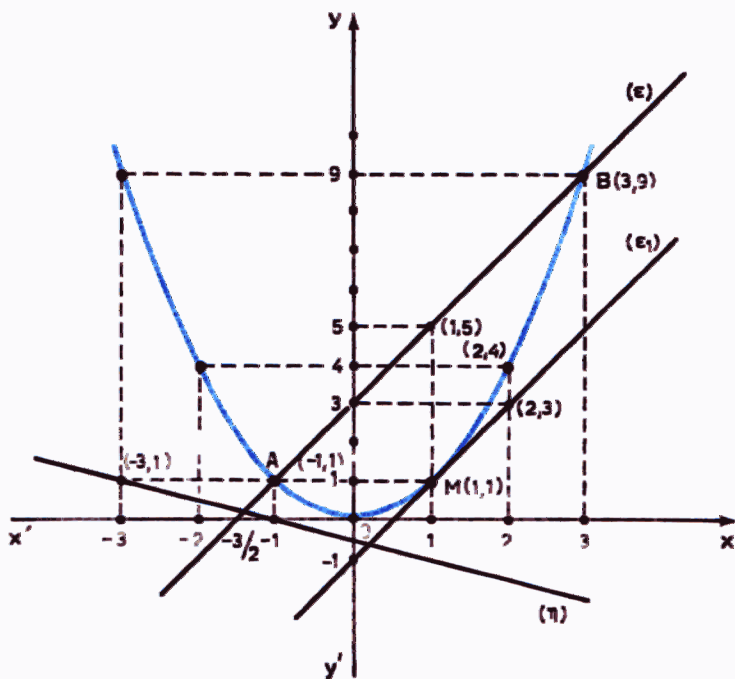
Γράφουμε άρχικά τις εξισώσεις ως ακολούθως:

$$I) \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x^2 = 2x + 3.$$

$$II) \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x^2 = 2x - 1.$$

$$III) \quad 2x^2 + x + 1 = 0 \iff 2x^2 = -x - 1 \iff x^2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

I) Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $y = x^2$ και $y = 2x + 3$ (σχ. 9.4). Αν οι προηγούμενες γραφικές έχουν κοινό σημείο, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τιμή του x (ή τετμημένη του κοινού σημείου) για την οποία οι τιμές των x^2 και $2x + 3$ γίνονται ίσες. Οι πραγματικές δηλαδή λύσεις (αν υπάρχουν) της εξίσωσης $x^2 = 2x + 3$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων με εξισώσεις $y = x^2$ και $y = 2x + 3$. Έτσι στο σχήμα 9.4 βλέπουμε: η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y = 2x + 3$ έχει δυο κοινά σημεία, τα $A(-1, 1)$ και $B(3, 9)$, με τη γραφική παράσταση της $y = x^2$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $x^2 = 2x + 3$ έχει δυο λύσεις πραγματικές, τις τετμημένες -1 και 3 των σημείων A και B .



Σχ. 9.4.

II) Η ευθεία (ϵ_1) που έχει εξίσωση την $y = 2x - 1$ έφάπτεται με τη γραφική παράσταση της $y = x^2$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $x^2 = 2x - 1$ έχει μία διπλή ρίζα, την τετμημένη 1 του σημείου έπαφής.

III) Η ευθεία $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ δεν έχει κοινό σημείο με την καμπύλη $y = x^2$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $x^2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ δεν έχει πραγματικές λύσεις.

5. 'Αφού διαπιστώσετε ότι τό πολυώνυμο $\varphi(x) \equiv x^6 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$ έχει ρίζες τούς αριθμούς $-i$ και $1 + i$ νά βρῆτε άκολουθώς και τις άλλες ρίζες του.

Είναι $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ και $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$. Άρα $\varphi(i) = -1 + 2 \cdot (-i) - 1 + 2i + 2 = -1 - 2i - 1 + 2i + 2 = 0$. Έχομε επίσης $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, $(1 + i)^3 = (1 + i)^2 (1 + i) = 2i(1 + i) = -2 + 2i$ και $(1 + i)^4 = ((1 + i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$ και συνεπώς $\varphi(1 + i) = -4 + 2(-2 + 2i) + 2i + 2(1 + i) + 2 = -4 - 4 + 4i + 2i + 2 = -6 + 6i \neq 0$.

Έπειδή τό $\varphi(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές και έχει ρίζες τούς αριθμούς $-i$ και $1 + i$, έπεται ότι θά έχει επίσης ρίζες και τούς αριθμούς i και $1 - i$. Αυτό σημαίνει ότι τό $\varphi(x)$ διαιρείται άπό τό πολυώνυμο

$$(x - i)(x + i)[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = (x^2 + 1)[(x - 1) + i][(x - 1) - i] = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2.$$

Έκτελοῦμε τή διαίρεση τοῦ $\varphi(x)$ μέ τό $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ και βρίσκομε πηλίκο τό $x^2 + 2x + 1$.

Άρα $\varphi(x) = (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 1)$ και οι άλλες ρίζες τοῦ $\varphi(x)$ θά είναι οι λύσεις τῆς εξίσωσεως $x^2 + 2x + 1 = 0$. Η εξίσωση αὐτή έχει διπλή ρίζα τόν αριθμό -1 .

6. Νά βρεθοῦν οι τιμές τῆς παραμέτρου λ ἔτσι, ὥστε ἡ ἐξίσωση $(\lambda^2 + 2)x^2 - (2\lambda - 1)x + 1 = 0$ νά έχει: I) δύο ἴσες ρίζες· II) ρίζες πραγματικές και ἄνισες· III) ρίζες μὴ πραγματικές.

Η διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου είναι $\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 + 2) \cdot 1 = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 - 8 = -4\lambda - 7$.

Ίσες ρίζες ἔχομε όταν $\Delta = 0$, δηλαδή ἐδῶ όταν $-4\lambda - 7 = 0 \implies \lambda = -\frac{7}{4}$. Πραγματικές ἄνισες ἔχομε όταν $-4\lambda - 7 > 0 \implies \lambda < -\frac{7}{4}$ και μὴ πραγματικές όταν $-4\lambda - 7 < 0 \implies \lambda > -\frac{7}{4}$.

7. Ν' ἀποδειχθεῖ ότι κάθε ἐξίσωση πού προκύπτει ἀπό τή σχέση $x^2 + (\beta + \alpha)x + \alpha\beta - \gamma^2 = 0$, γιά ὅποιεσδήποτε πραγματικές τιμές τῶν α, β, γ , έχει λύσεις πραγματικές.

Άρκεί νά ἀποδείξομε ότι $\Delta = (\beta + \alpha)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma^2) \geq 0$.

Πράγματι $\Delta = \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\gamma^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\gamma^2$, και ἡ παράσταση αὐτή παίρνει θετικές τιμές ἢ μηδέν γιά ὅποιεσδήποτε πραγματικές τιμές τῶν α, β, γ (γιατί;).

8. Ἄν πολυώνυμο $\varphi(x)$ μέ ρητούς συντελεστές έχει ρίζα ἀριθμό τῆς μορφῆς $\kappa + \lambda\sqrt{\rho}$, ὅπου κ, λ, ρ ρητοί και ρ ὄχι τετράγωνο ρητοῦ, τότε τό $\varphi(x)$ θά έχει ὡς ρίζα και τόν ἀριθμό $\kappa - \lambda\sqrt{\rho}$ ($\lambda \neq 0$).

Κατασκευάζομε τό πολυώνυμο

$[x - (\kappa + \lambda\sqrt{\rho})] \cdot [x - (\kappa - \lambda\sqrt{\rho})] = [(x - \kappa) - \lambda\sqrt{\rho}][(x - \kappa) + \lambda\sqrt{\rho}] = (x - \kappa)^2 - \lambda^2\rho$, τό ὁποῖο έχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς $\kappa + \lambda\sqrt{\rho}$ και $\kappa - \lambda\sqrt{\rho}$.

Διαιροῦμε τό $\varphi(x)$ μέ τό $(x - \kappa)^2 - \lambda^2\rho$ και παίρνομε ἕνα πηλίκο $\Pi(x)$ και ὑπόλοιπο ἕνα πρωτοβάθμιο τό πολύ πολυώνυμο $\delta x + \epsilon$, ὅπου δ και ϵ είναι ρητοί ἀριθμοί (γιατί;).

Έτσι ἔχομε τήν ταυτότητα: $\varphi(x) = [(x - \kappa)^2 - \lambda^2\rho] \Pi(x) + \delta x + \epsilon$.

Άπ' αὐτή παίρνομε τή $\varphi(\kappa + \lambda\sqrt{\rho}) = 0 = 0 \cdot \Pi(\kappa + \lambda\sqrt{\rho}) + \delta(\kappa + \lambda\sqrt{\rho}) + \epsilon \implies (\delta\kappa + \epsilon) + \delta\lambda\sqrt{\rho} = 0$. Η τελευταία ισότητα ισχύει ἂν και μόνο $\delta\kappa + \epsilon = 0$ (1) και $\delta\lambda = 0$ (2). Ἀπό τή (2), και ἐπειδή $\lambda \neq 0$, παίρνομε $\delta = 0$, ὁπότε ἀκολουθῶς ἀπό τήν (1) και $\epsilon = 0$.

Ωστε $\varphi(x) = [(x - \kappa)^2 - \lambda^2\rho] \Pi(x)$, δηλαδή τό $\varphi(x)$ έχει ρίζα και τόν ἀριθμό $\kappa - \lambda\sqrt{\rho}$.

9·5 Άσκησης.

1. Νά επιλυθούν οι εξισώσεις: I) $x^2 + 2x - 3 = 0$ II) $x^2 - 6x + 13 = 0$
 III) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ IV) $9x^2 - 24x + 16 = 0$ V) $-3x^2 - 10x + 3 = 0$ VI) $2x^2 - 9 = 0$
 VII) $18x^2 + 29x = 0$ VIII) $x^2 + (\alpha - 2x)^2 = (\alpha - 3x)^2$ IX) $(\alpha - x)^2 + (x - \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2$

$$X) (\beta - \gamma)x^2 + (\gamma - \alpha)x + (\alpha - \beta) = 0 \quad XI) \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 1} + 2 + \frac{1}{x - 1} = 0$$

$$XII) \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x + 3} = 0.$$

2. Χωρίς νά λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις νά βρεθεί τό είδος τών ριζών τους.

$$I) x^2 - 11x + \frac{65}{2} = 0 \quad II) 3x^2 - 7x + 2 = 0 \quad III) 5x^2 + 4\sqrt{5}x + 4 = 0.$$

3. Νά λυθούν στο σύνολο $\mathbb{R}$ οι εξισώσεις: I) $x^2 + |4 - x| + 6x = 0$

$$II) x^2 - 5\sqrt{x^2} + 6 = 0.$$

4. 'Αφού διαπιστώσετε ότι τό πολυώνυμο $x^3 - 13x^2 + 39x - 27$ έχει ρίζα τόν αριθμό 1 νά βρῆτε ἀκολουθῶς τίς ἄλλες .του ρίζες.

5. Βλῆμα πυροβόλου ρίχνεται κατακόρυφα πρὸς τὰ ἄνω μέ ἀρχική ταχύτητα μέτρου 720 m/s. Σέ πόσο χρόνο θά βρίσκεται σέ ὕψος 6700 m (ἐπιτάχυνση βαρύτητας 10 m/s²).

6. Γιά ποιές πραγματικές τιμές τοῦ λ ἡ εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 5)x + \lambda^2 + 1 = 0$ έχει ρί-
 ζες: I) ἴσες· II) πραγματικές καί ἄνισες· III) μὴ πραγματικές;

7. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εξισώσεις: I) $x^3 - 2ax + a^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$ καί

$$II) ax^2 - (2a + \beta)x + \beta = 0 \quad (a \neq 0)$$

ἔχουν ρίζες πραγματικές γιά ὅλες τίς πραγματικές τιμές τῶν α, β, γ.

8. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εξισώσεις: I) $x^3 - 2ax + a^2 - \beta^2 - 2\beta - 1 = 0$ καί

II) $x^3 - 2ax + a^2 - \beta^2 + 2\gamma\beta - \gamma^2 = 0$ ἔχουν ρίζες ρητές γιά ὅλες τίς ρητές τιμές τῶν α, β, γ.

9. Νά καθορισθεῖ τό είδος τῶν ριζῶν τῆς εξισώσεως $\frac{a^2}{x+1} - \frac{\gamma^2}{x} = \beta^2$ ἂν οἱ α, β, γ εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου.

10. Νά βρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέριοι τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα ἔχουν ἄθροισμα 365.

11. Νά βρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέριοι τῶν ὁποίων τό γινόμενο ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμά τους.

12. Νά βρεθοῦν οἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἂν ἔχει ἐμβαδόν 1643 m² καί περίμετρο 168 m.

13. 'Όταν ἀπό τό γινόμενο δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀφαιρέσουμε τόν 16, βρίσκουμε τόν μικρότερο ἀπὸ τοὺς δύο. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

14. 'Ενα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο ἔχει ἐμβαδόν 108 m². Τό μήκος του ἰσοῦται μέ τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ πλάτους του. Νά βρεθοῦν οἱ διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου.

15. Δυὸ σιδηρόδρομοι ξεκίνησαν συγχρόνως ἀπὸ δυὸ τόπους Α καί Β, πού ἀπέχουν 3300 km, καί κινούμενοι ἀντίθετα συναντήθηκαν μετὰ 30 h. 'Αν αὐτὸς πού ἀναχώρησε ἀπὸ τόν τόπο Α χρειάζεται 11 ὥρες περισσότερες ἀπὸ τόν ἄλλο, γιά νά κάνει τή διαδρομὴ ΑΒ, νά βρεθοῦν οἱ μέσες ταχύτητες τῶν τραινῶν.

16. I) 'Αν ΒΓ εἶναι μιά χορδὴ σέ κύκλο (Κ) καί Α εἶναι ἓνα σημεῖο τῆς εὐθείας ΒΓ, ἐκτὸς τοῦ (Κ), καί ΑΜ ἐφαπτομένη τοῦ (Κ), ν' ἀποδειχθεῖ μέ τή βοήθεια τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΜΒ καί ΑΓΜ ὅτι (ΑΜ)² = (ΑΒ) (ΑΓ).

II) 'Αν ΒΓ = 3 cm καί ΑΜ = 2 cm νά βρεθεῖ τό μήκος ΑΒ, ἐφόσον τό Β κεῖται μεταξύ Α καί Γ.

17. Γιά νά μετρήσουμε τό βάθος μιᾶς κατακόρυφης χαράδρας ἀφήσαμε νά πέσει μιά πέτρα. Μετὰ 6 s ἀκούσαμε τόν ἤχο τῆς προσκρούσεως στό βάθος τῆς χαράδρας. Νά ὑπολογισθεῖ τό βάθος ἂν ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου εἶναι 340m/s καί ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας 9,80 m/s².

ΕΝΟΤΗΤΑ 10

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ VİÈTE (BIET) ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

10 · 1 Τό άθροισμα $x_1 + x_2$ και τό γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ τών ριζών τής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Έπειδή οί ρίζες τής έξιώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) είναι :

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\Delta = \beta^2 - 4a\gamma)$$

$$\text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{Έχουμε:} \quad x_1 + x_2 = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta}) + (-\beta - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2\beta}{2a} = -\frac{\beta}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad x_1 x_2 &= \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta}) \cdot (-\beta - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \\ &= \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4a\gamma)}{4a^2} = \frac{4a\gamma}{4a^2} = \frac{\gamma}{a}. \end{aligned}$$

$$\text{Ώστε:} \quad \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}} \quad (\text{τύποι του Viète}).$$

Μέ τή βοήθεια αὐτῶν τῶν τύπων θά μετατρέψουμε τώρα τό δευτεροβάθμιο, ὡς πρὸς x , τριώνυμο σέ γινόμενο πρωτοβαθμίων διωνύμων.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} ax^2 + \beta x + \gamma &= a \left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} \right) = a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Ώστε:

$$\boxed{ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

Άσκηση 1. Άφού διαπιστώσετε ὅτι ὁ αριθμός -2 είναι μιá ρίζα τής έξιώσεως $x^2 + 6x + 8 = 0$, νά βρῆτε τήν ἄλλη τής ρίζα.

$$\text{Λύση: Πράγματι } (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Άπό } x_1 + x_2 &= -6 \Rightarrow -2 + x_2 = -6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_2 = -6 + 2 \Rightarrow x_2 = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ή: άπό } x_1 \cdot x_2 &= 8 \Rightarrow (-2) \cdot x_2 = 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{8}{-2} = -4. \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Νά κατασκευασθοῦν οί έξιώσεις 2ου βαθμού πού έχουν ὡς ρίζες: ἡ

$$\begin{aligned} \text{Λύση: 1) Άπό } x_1 &= -\frac{3}{7} \text{ και } x_2 = 2 \text{ προ-} \\ \text{κύπτει } x_1 + x_2 &= -\frac{3}{7} + 2 = \frac{11}{7} = -\frac{-11}{7} \end{aligned}$$

πρώτη τούς αριθμούς $-\frac{3}{7}$
 και 2 ή δεύτερη τούς $2 + \sqrt{3}$
 και $2 - \sqrt{3}$ ή τρίτη τόν α-
 ριθμό $5i$ και ή τέταρτη τόν
 αριθμό $1 + 5i$.

και $x_1 \cdot x_2 = \frac{-6}{7}$. Έτσι έχουμε την εξίσωση
 $7x^2 - 11x - 6 = 0$ (γιατί;).

II) Είναι $x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$
 και $x_1 \cdot x_2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$
 και συνεπώς έχουμε $x^2 - 4x + 1 = 0$.

III) Έπειδή ή μία ρίζα είναι ό $5i$, ή άλλη
 θά είναι ό $-5i$ (υποτίθεται ότi ζητᾶμε εξίσω-
 ση μέ πραγματικούς συντελεστές). Έχομε
 λοιπόν $x_1 - x_2 = 5i + (-5i) = 0$ και $x_1 \cdot x_2 =$
 $= 5i \cdot (-5i) = -25 \cdot i^2 = 25$. ἄρα ή εξίσωση
 είναι ή $x^2 + 25 = 0$.

IV) Έπειδή $x_1 = 1 + 5i$, τότε $x_2 = 1 - 5i$.
 Έχομε συνεπώς $x_1 + x_2 = 2$ και $x_1 \cdot x_2 = 26$
 και ή εξίσωση είναι ή $x^2 - 2x + 26 = 0$.

Άσκηση 3. Τό τριώνυμο
 $4x^2 - 4x - 1$ νά γίνει γινό-
 μενο πρωτοβαθμίων παρα-
 γόντων.

Λύση: Βρίσκομε τίς ρίζες τοῦ τριωνύμου:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Κατόπιν αὐτοῦ ἔχομε: $4x^2 - 4x - 1 =$

$$= 4 \left(x - \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= (2x - 1 + \sqrt{2})(2x - 1 - \sqrt{2}).$$

Παρατήρηση: Όταν δύο δευτεροβάθμιες εξισώσεις ἔχουν τίς ίδιες ρίζες,
 τότε καθεμιᾶ εξίσωση προκύπτει ἀπό τήν ἄλλη μέ πολλαπλασιασμό ἐπὶ ἓνα στα-
 θερό ὄχι μηδενικό παράγοντα. Πράγματι: Ἄν οἱ εξισώσεις $ax^2 + bx + \gamma = 0$
 καί $\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma' = 0$ (μέ $\alpha' \neq 0$) ἔχουν ὡς ρίζες τοὺς ἴδιους πραγματικούς
 ἢ μιγαδικούς ἀριθμούς x_1, x_2 , τότε θά ἔχομε $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\beta'}{\alpha'}$ καί
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha'}$. ἂν συνεπῶς θέσομε:

$\frac{\alpha'}{\alpha} = \rho$, τότε $\alpha' = \alpha\rho$, $\beta' = \beta\rho$, $\gamma' = \gamma\rho$. Έτσι ή δεύτερη εξίσωση γίνεται:
 $\alpha\rho x^2 + \beta\rho x + \gamma\rho = 0 \iff \rho(ax^2 + \beta x + \gamma) = 0 \iff ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.

**10.2 Ειδικότερα συμπεράσματα για τίς ρίζες δευτεροβαθμίου τριωνύμου (μέ
 πραγματικούς συντελεστές).**

Όταν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, τότε οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ είναι κατα-
 νάγκη πραγματικές καί ἄνισες $\left(\frac{\gamma}{\alpha} = x_1 \cdot x_2 < 0 \right)$.

Άρκεϊ νά παρατηρήσουμε ότι στήν περίπτωση μή πραγματικῶν ριζῶν τό γινόμενό τους εἶναι θετικός ἀριθμός· ἐπίσης καί όταν οἱ ρίζες εἶναι ἴσες, ὁπότε εἶναι ἀναγκαστικά πραγματικές (γιατί;), πάλι τό γινόμενο εἶναι ἀριθμός θετικός (ἤ μηδέν), διότι πρόκειται γιά τό τετράγωνο ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔτσι ἔχομε τό παρακάτω **σημαντικό συμπέρασμα**:

I) Ὄταν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, τότε οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$ εἶναι πραγματικές καί ἄνισες καί μάλιστα ἐτερόσημες· καί δέν ἔχομε ἀνάγκη, σ' αὐτή τήν περίπτωση, νά πληροφορηθοῦμε τό εἶδος τῶν ριζῶν ἀπό τή διακρίνουσα.

Ἄν τώρα εἶναι καί $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$ (τό ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός), τότε ἡ ἀρνητική ρίζα ἔχει ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερη ἀπό τή θετική (ἂν $x_1 < 0$ καί $x_2 > 0$, τότε $|x_1| > x_2$, γιατί;).

Ἄν ὁμως $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, τότε ἡ ἀρνητική ρίζα ἔχει ἀπόλυτη τιμή μικρότερη ἀπό τή θετική ($|x_1| < x_2$).

II) Ὄταν $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$ ἡ μιὰ (τουλάχιστον) ρίζα εἶναι μηδενική· καί αὐτό συμβαίνει ὅταν καί μόνον ὅταν $\gamma = 0$. Ἡ ἄλλη ρίζα ἰσοῦται μέ $-\frac{\beta}{\alpha}$ Πρόκειται γιά τήν ἐξίσωση $ax^2 + bx = 0$ (μέ $\alpha \neq 0$).

III) Ὄταν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ δέν μποροῦμε νά γνωρίζομε κατά πόσο τό τριώνυμο ἔχει ρίζες πραγματικές ἤ ὄχι. Ἐδῶ θά κατασκευάσουμε τή διακρίνουσα· καί πρέπει νά εἶναι, ὅπως ξέρομε, $\Delta \geq 0$, γιά νάχομε ρίζες πραγματικές.

Ἄν αὐτό συμβαίνει, οἱ πραγματικές ρίζες εἶναι ὁμόσημες, ἀφοῦ τό γινόμενό τους $x_1x_2 > 0$.

Ἄν ἐπιπλέον $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, οἱ ὁμόσημες ρίζες εἶναι καί οἱ δύο θετικές, ἐνῶ ἂν $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$ οἱ ρίζες εἶναι καί οἱ δύο ἀρνητικές.

10·3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ἄν x_1 καί x_2 οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, νά βρεθοῦν οἱ τύποι πού ἐκφράζουν, συναρτήσει τῶν a, β, γ , τίς παραστάσεις:

$$I) x_1^2 + x_2^2 \quad II) x_1^{-2} + x_2^{-2} \quad III) x_1^3 + x_2^3 \quad IV) x_1^{-3} + x_2^{-3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ἔχομε: } I) \quad x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{2\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

$$\text{II)} \quad x_1^{-2} + x_2^{-2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{\frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\gamma^2}.$$

$$\text{III)} \quad x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \\ = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{-\beta^3}{\alpha^3} + \frac{3\beta\gamma}{\alpha^2} = \frac{3\alpha\beta\gamma - \beta^3}{\alpha^3}.$$

$$\text{IV)} \quad x_1^{-3} + x_2^{-3} = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_2^3 + x_1^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{\frac{3\alpha\beta\gamma - \beta^3}{\alpha^3}}{\frac{\gamma^3}{\alpha^3}} = \frac{3\alpha\beta\gamma - \beta^3}{\gamma^3}.$$

2. I) *Αν δ και ε είναι θετικοί ρητοί και δ ένας τουλάχιστον όχι τετράγωνο ρητού, ν' αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $x = \sqrt{\delta} + \sqrt{\varepsilon}$ και $y = \sqrt{\delta} - \sqrt{\varepsilon}$ είναι και οι δύο άρρητοι, εφόσον βέβαια $\delta \neq \varepsilon$.

II) Δίνεται η παράσταση $\sqrt{\kappa + \sqrt{\lambda}}$, όπου κ, λ θετικοί ρητοί και λ όχι τετράγωνο ρητού. Νά βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι κ και λ , ώστε να υπάρχουν δύο ρητοί αριθμοί ρ και σ για τους οποίους $\sqrt{\kappa + \sqrt{\lambda}} = \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma}$.

I) *Αν ένας από τους αριθμούς δ και ε είναι τετράγωνο ρητού, τότε η ιδιότητα προφανώς ισχύει (γιατί;).

Θεωρούμε λοιπόν και τους δύο όχι τετράγωνα ρητών· τότε έχουμε $xy = \delta - \varepsilon = \text{ρητός} \neq 0$. *Αν λοιπόν ένας από τους x, y υποτεθεί ρητός, τότε θα πρέπει και ο άλλος να είναι ρητός· αποκλείεται όμως να είναι και οι δύο ρητοί, διότι $x + y = 2\sqrt{\delta} = \text{άρρητος}$. *Ωστε οι αριθμοί x και y είναι άρρητοι.

II) *Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ρητοί ρ και σ τέτοιοι ώστε :

$$\sqrt{\kappa + \sqrt{\lambda}} = \sqrt{\rho} + \sqrt{\sigma} \quad (1).$$

Τετραγωνίζουμε την (1) και παίρνουμε:

$$\kappa + \sqrt{\lambda} = \rho + \sigma + 2\sqrt{\rho\sigma} \implies \kappa - (\rho + \sigma) = \sqrt{4\rho\sigma} - \sqrt{\lambda} \quad (2).$$

*Από την ισότητα (2) συμπεραίνουμε ότι $\sqrt{4\rho\sigma} - \sqrt{\lambda} = 0$, διότι, αν $\sqrt{4\rho\sigma} - \sqrt{\lambda} \neq 0$, τότε ο αριθμός $\sqrt{4\rho\sigma} - \sqrt{\lambda}$, σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα (I), θα είναι ένας άρρητος αριθμός, ίσος με τον ρητό $\kappa - (\rho + \sigma)$ · πράγμα άτοπο.

$$\text{*Ετσι έχουμε: } \sqrt{4\rho\sigma} - \sqrt{\lambda} = 0 \implies \sqrt{4\rho\sigma} = \sqrt{\lambda} \implies 4\rho\sigma = \lambda \implies \rho\sigma = \frac{\lambda}{4} \quad (3) \text{ και } \kappa - (\rho + \sigma) = 0 \implies \rho + \sigma = \kappa \quad (4).$$

*Από τις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί ρ και σ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \kappa x + \frac{\lambda}{4} = 0$ (γιατί;).

$$\text{Οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης είναι } x_{1,2} = \frac{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \lambda}}{2}, \text{ και,}$$

ἐπειδὴ εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, ἔπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\kappa^2 - \lambda$ θὰ εἶναι τετράγωνο ρητοῦ, θὰ ἔχομε δηλαδή $\kappa^2 - \lambda = \mu^2$, ὅπου μ ρητός (θετικός). τότε παίρνομε $\rho = \frac{\kappa + \mu}{2}$ καὶ $\sigma = \frac{\kappa - \mu}{2}$.

Ἀντιστρόφως, ἡ παράσταση $\sqrt{\kappa \pm \sqrt{\lambda}}$ ἀναλύεται στὸ ἄθροισμα (ἀντίστοιχα τὴ διαφορά) τῶν ἀπλῶν ριζικῶν $\sqrt{\frac{\kappa + \mu}{2}}$, $\sqrt{\frac{\kappa - \mu}{2}}$, ἂν $\mu = \sqrt{\kappa^2 - \lambda}$, ὅπου μ ρητός· διότι $\sqrt{\kappa \pm \sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{2}} \pm \sqrt{\frac{\kappa - \mu}{2}} \iff \kappa \pm \sqrt{\lambda} = \frac{\kappa + \mu}{2} + \frac{\kappa - \mu}{2} \pm 2\sqrt{\frac{\kappa^2 - \mu^2}{4}} \iff \kappa \pm \sqrt{\lambda} = \kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - (\kappa^2 - \lambda)}$.

Παράδειγμα: Νά τραπῇ σέ ἄθροισμα (ἀντίστοιχα διαφορά) ἀπλῶν ριζικῶν ἡ παράσταση $\sqrt{9 \pm \sqrt{56}}$.

Εἶναι $9^2 - 56 = 81 - 56 = 25 = 5^2$. ἄρα

$$\sqrt{9 \pm \sqrt{56}} = \sqrt{\frac{9+5}{2}} \pm \sqrt{\frac{9-5}{2}} = \sqrt{7} \pm \sqrt{2}.$$

3. Νά χρησιμοποιήσετε τὴ μορφή $a(x-x_1)(x-x_2)$, τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv ax^2 + \beta x + \gamma$ γιὰ νά προσδιορίσετε γιὰ ποιές πραγματικές τιμές τοῦ x ἔχομε $\varphi(x) > 0$ καὶ γιὰ ποιές $\varphi(x) < 0$. Ἀκολουθῶς γιὰ ἐφαρμογὴ νά ἐπιλύσετε τὶς ἀνισώσεις: α) $x^2 + x + 1 > 0$. β) $-x^2 + x - 1 > 0$. γ) $-x^2 + 8x - 16 < 0$. δ) $100x^2 - 100x + 21 < 0$. (Στὸ σύνολο $\mathbb{R}$).

I) Ὃταν $\Delta > 0$ καὶ $x_1 < x_2$ τότε: ἂν $x < x_1 < x_2 \implies x - x_1 < 0$ καὶ $x - x_2 < 0$, ὁπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. ἐπίσης ἂν $x_1 < x_2 < x \implies x - x_1 > 0$ καὶ $x - x_2 > 0$, ὁπότε πάλι $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Ἄν ὅμως $x_1 < x < x_2$ θὰ εἶναι $x - x_1 > 0$ καὶ $x - x_2 < 0$, ὁπότε $(x - x_1)(x - x_2) < 0$.

Ὡστε: Μὲ $\alpha > 0$ καὶ μὲ $x < x_1 < x_2$ ἢ $x_1 < x_2 < x$ ἔχομε $\varphi(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2) > 0$. ἐνῶ μὲ $x_1 < x < x_2$ εἶναι $\varphi(x) < 0$.

Μὲ $\alpha < 0$ καὶ $x < x_1 < x_2$ ἢ $x_1 < x_2 < x$ εἶναι $\varphi(x) < 0$, ἐνῶ μὲ $x_1 < x < x_2$ εἶναι $\varphi(x) > 0$.

II) Ὃταν $\Delta = 0$, ἔχομε $\varphi(x) = \alpha(x - \rho)^2$, ὅπου $\rho = x_1 = x_2$. Ἄν τῶρα $\alpha > 0$, τότε $\alpha(x - \rho)^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{\rho\}$ καὶ ἂν $\alpha < 0$, τότε $\alpha(x - \rho)^2 < 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{\rho\}$.

III) Ὃταν $\Delta < 0$ τὸ $\varphi(x)$ γράφεται:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \alpha[x - (\kappa + \lambda i)][x - (\kappa - \lambda i)] = \alpha[(x - \kappa) - \lambda i] \cdot [(x - \kappa) + \lambda i] = \\ &= \alpha[(x - \kappa)^2 + \lambda^2] \end{aligned}$$

(ὅπου $\kappa + \lambda i$, $\kappa - \lambda i$ οἱ μὴ πραγματικές ρίζες τοῦ τριωνύμου). Ἡ παράσταση $(x - \kappa)^2 + \lambda^2$ παίρνει θετική τιμὴ $\forall x \in \mathbb{R}$ (γιατί;), συνεπῶς θὰ εἶναι

$\varphi(x) = \alpha[(x - \kappa)^2 + \lambda^2] > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, αν $\alpha > 0$, και $\varphi(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, αν $\alpha < 0$.

α) **Τό τριώνυμο** $x^2 + x + 1$ έχει $\Delta < 0$ και έπειδή $\alpha = 1 > 0$ είναι $x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η ανίσωση $x^2 + x + 1 > 0$ αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x .

β) **Τό τριώνυμο** $-x^2 + x - 1$ έχει $\Delta < 0$. Είναι όμως $\alpha = -1 < 0$ και συνεπώς γίνεται $-x^2 + x - 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

γ) Είναι $-x^2 + 8x - 16 < 0 \iff x^2 - 8x + 16 > 0 \iff (x - 4)^2 > 0$. Άρα η ανίσωση αληθεύει $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$.

δ) **Οι ρίζες** του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 0,3 και 0,7. Έπειδή $\alpha = 100 > 0$, τό τριώνυμο γίνεται αρνητικός αριθμός για τις τιμές του x τις μεταξύ των 0,3 και 0,7 ($0,3 < x < 0,7$). Ωστε η ανίσωση αληθεύει $\forall x \in (0,3, 0,7)$.

4. Δίνεται η σχέση $x^2 + (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ προκύπτει από την (1) και μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x . Για ποιές τιμές του λ παίρνομε εξισώσεις στις οποίες ισχύει μία από τις επόμενες συνθήκες; I) Οι ρίζες είναι αντίθετοι αριθμοί. II) Οι ρίζες είναι αντίστροφοι αριθμοί. III) Έχομε $x_1 = 2x_2$. IV) Έχομε $x_1 + 2x_2 = -5$. V) Είναι $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

I) Θέλομε νά έχομε $x_1 + x_2 = 0$. Άρα πρέπει και άρκει νά είναι $-(\lambda + 2) = 0 \implies \lambda = -2$.

II) Θέλομε νά είναι $x_1 \cdot x_2 = 1$. Έπομένως πρέπει και άρκει νά είναι $2\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{2}$.

III) Πρέπει και άρκει νά ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις $x_1 = 2x_2$ (α), $x_1 + x_2 = -(\lambda + 2)$ (β) και $x_1 \cdot x_2 = 2\lambda$ (γ). Από τις (α) και (β) έχομε $x_2 = \frac{-(\lambda + 2)}{3}$ και $x_1 = \frac{-2(\lambda + 2)}{3}$, όποτε, εισάγοντας αυτές τις τιμές στη (γ), προκύπτει ή ως προς λ εξίσωση $\frac{2(\lambda + 2)(\lambda + 2)}{9} = 2\lambda \iff \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, από την όποια παίρνομε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$.

IV) Τώρα μαζί με τις παραπάνω σχέσεις (β) και (γ) πρέπει και άρκει νά ισχύει και ή $x_1 + 2x_2 = -5$ (δ). Από τις (β) και (δ) έχομε $x_2 = \lambda - 3$ και $x_1 = 1 - 2\lambda$, όποτε από τη (γ) προκύπτει ή εξίσωση $2\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$, από την όποια παίρνομε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.

V) Έπειδή $x_1^2 + x_2^2 = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$, θά έχομε έδω την εξίσωση $(\lambda + 2)^2 - 4\lambda = 5$. έπιλύοντας αυτή την εξίσωση παίρνομε $\lambda = \pm 1$.

(Νά βρῆτε τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις που προκύπτουν για όσες τιμές του λ προσδιορίσαμε και νά επαληθεύσετε τις αντίστοιχες σχέσεις των ριζών).

10 · 4 Άσκησης.

1. Νά κατασκευασθοῦν 4 εξισώσεις δευτέρου βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, που νάχουν ως ρίζες: ή πρώτη τόν αριθμό $\frac{1}{3} + i\sqrt{3}$ · ή δεύτερη τούς αριθμούς $\frac{3}{4}$ και $-\frac{5}{6}$ · ή τρίτη τούς $\kappa^2 + 1$ και 2κ , όπου κ ένας πραγματικός αριθμός · ή τέταρτη τούς λ^3 και $2 - 2\lambda$, όπου $\lambda = 1 + i$.

2. Νά γίνουν γινόμενα πρωτοβαθμίων ως προς x διωνύμων τὰ τριώνυμα :

I) $77x^2 - 33x + 3$ · II) $x^2 - 10x + 27$ · III) $\alpha^2x^2 + \alpha(\beta - \gamma)x - \beta\gamma$ ·

IV) $4\alpha^2x^2 + 24\alpha\delta x + 11\delta^2$ · ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$).

3. Άν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 + 5x + 3 = 0$, νά βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων $\rho_1^2 + \rho_2^2, \rho_1^3 + \rho_2^3, \rho_1^4 + \rho_2^4, \rho_1^{-4} + \rho_2^{-4}$ καί $|\rho_1| + |\rho_2|$, χωρίς νά επίλυθῃ ἡ εξίσωση.

4. Νά κατασκευασθῇ ἐξίσωση δευτέρου βαθμοῦ πού νά ἔχει ὡς ρίζες τὰ μέτρα τῶν ριζῶν τῆς $x^2 - 8x + 25 = 0$.

5. Δίνεται ἡ σχέση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1). Γιά ποιές τιμές τοῦ $\lambda \in \mathbb{R}$ προκύπτουν ἀπό τήν (1) ἐξισώσεις τῶν ὁποίων οἱ ρίζες x_1 καί x_2 ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ ἢ τή συνθήκη $x_1^2 = x_2 + 4$.

6. Νά ὁρισθῇ τό σύνολο τιμῶν τοῦ $\lambda \in \mathbb{R}$ γιά τίς ὁποῖες οἱ ρίζες ρ_1 καί ρ_2 τῶν ἐξισώσεων, πού προκύπτουν ἀπό τή $x^2 + x + \lambda = 0$, ἱκανοποιοῦν τή σχέση $\rho_1^3 + \rho_1\rho_2(2\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_2 = 1$.

(Υπόδειξη: Μπορεῖτε στή σχέση πού θέλομε νά ἰσχύει νά ἀντικαταστήσετε τό $\rho_1 \cdot \rho_2$ μέ λ , τό $\rho_1 + \rho_2$ μέ -1 καί τό ρ_1^2 μέ $-\rho_1 - \lambda$, διότι $\rho_1^2 + \rho_1 + \lambda = 0$).

ΕΝΟΤΗΤΑ 11

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ ΣΕ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ

Γενικός ὁρισμός: Κάθε σχέση τῆς μορφῆς $\varphi(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, ὅπου $\varphi(x)$ πολὺνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές καί $a_0 \neq 0$, θά λέγεται ἀκεραία ἀλγεβρική ἐξίσωση τοῦ x , μέ πραγματικούς συντελεστές, νιοστοῦ βαθμοῦ, ἐφόσον μ' αὐτή τή σχέση θέλομε νά δηλώσουμε ὅτι ζητᾶμε τίς τιμές τοῦ x , πραγματικές ἢ ὄχι, πού μηδενίζουν τό πολὺνυμο.

Ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε ἀκεραία ἀλγεβρική ἐξίσωση, νιοστοῦ βαθμοῦ, ἔχει n ρίζες.

Σ' ὅλες τίς ἐξισώσεις πού θά μελετήσουμε παρακάτω οἱ συντελεστές θά θεωροῦνται πάντα πραγματικοί.

11 · 1 Ἀντίστροφες ἐξισώσεις.

Ἄν μιά ἀκεραία ἀλγεβρική ἐξίσωση, μέ κάθε ρίζα της $\rho \neq 0$, συμβαίνει νά ἔχει ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό $\frac{1}{\rho}$, ἀντίστροφο τοῦ ρ , τότε αὐτή ἡ ἐξίσωση θά λέγεται **ἀντίστροφη**. Ἡ δευτεροβάθμια π.χ. ἐξίσωση $ax^2 + \beta x + \alpha = 0$ (μέ $\alpha \neq 0$) εἶναι μιά ἀντίστροφη ἐξίσωση, διότι, ἂν ρ_1, ρ_2 οἱ ρίζες της, τότε $\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

α) **Τρίτου βαθμοῦ ἀντίστροφες** εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

(I) $ax^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ καί (II) $ax^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$ μέ $\alpha \neq 0$. (Ὅποτε δέν ὑπάρχει μηδενική ρίζα. Γιατί;).

Πράγματι ἂν ρ εἶναι μιά ρίζα τῆς (I), ἂν δηλαδή $a\rho^3 + \beta\rho^2 + \beta\rho + \alpha = 0$, τότε θά εἶναι καί $\alpha \cdot \frac{1}{\rho^3} + \beta \cdot \frac{1}{\rho^2} + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = \frac{\alpha + \beta\rho + \beta\rho^2 + a\rho^3}{\rho^3} = \frac{0}{\rho^3} = 0$.

Συνεπώς και ό $\frac{1}{\rho}$ θα είναι επίσης ρίζα της (I). Τό ίδιο ισχύει και για τη (II).

Θά επιλύσουμε εδώ την εξίσωση (I): όμοια γίνεται και η επίλυση της (II).

$$* \text{Έχουμε: (I)} \iff \alpha(x^3 + 1) + \beta x(x + 1) = 0 \iff$$

$$\alpha(x + 1)(x^2 - x + 1) + \beta x(x + 1) = 0 \iff$$

$$(x + 1)(\alpha x^2 - \alpha x + \alpha + \beta x) = 0 \iff (x + 1)[\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha] = 0.$$

Η (I) συνεπώς έχει ως ρίζες τόν αριθμό -1 και τις ρίζες ρ_1, ρ_2 της $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$, πού είναι αντίστροφοι αριθμοί, διότι $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$.

Παρατήρηση: Μιά εξίσωση τρίτου βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστον μία ρίζα πραγματική. Γενικά μία εξίσωση περιττού βαθμού (3ου, 5ου, κτλ.) έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα: και αν έχει περισσότερες πραγματικές, τό πλήθος τους θά είναι περιττό. Και τούτο διότι οί μή πραγματικές εμφανίζονται κατά ζεύγη συζυγών αριθμών.

β) Τετάρτου βαθμού αντίστροφες είναι οί εξισώσεις της μορφής:

$$(III) \alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0 \text{ και } (IV) \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0.$$

Πράγματι αν ρ μία ρίζα της (III), αν δηλαδή $\alpha \rho^4 + \beta \rho^3 - \beta \rho - \alpha = 0$

$$\begin{aligned} \text{τότε και} \quad \alpha \cdot \frac{1}{\rho^4} + \beta \cdot \frac{1}{\rho^3} - \beta \cdot \frac{1}{\rho} - \alpha &= \frac{\alpha + \beta \rho - \beta \rho^3 - \alpha \rho^4}{\rho^4} = \\ &= \frac{-(\alpha \rho^4 + \beta \rho^3 - \beta \rho - \alpha)}{\rho^4} = \frac{0}{\rho^4} = 0. \end{aligned}$$

Επίσης αν $\alpha \rho^4 + \beta \rho^3 + \gamma \rho^2 + \beta \rho + \alpha = 0$, τότε και

$$\alpha \cdot \frac{1}{\rho^4} + \beta \cdot \frac{1}{\rho^3} + \gamma \cdot \frac{1}{\rho^2} + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = \frac{\alpha + \beta \rho + \gamma \rho^2 + \beta \rho^3 + \alpha \rho^4}{\rho^4} = 0.$$

Γιά την (III) έχουμε:

$$(III) \iff \alpha(x^4 - 1) + \beta x(x^2 - 1) = 0 \iff$$

$$\alpha(x^2 - 1)(x^2 + 1) + \beta x(x^2 - 1) = 0 \iff (x^2 - 1)(\alpha x^2 + \alpha + \beta x) = 0 \iff$$

$$(x - 1)(x + 1)(\alpha x^2 + \beta x + \alpha) = 0. \text{ Η (III) συνεπώς έχει ως ρίζες τούς αριθμούς } 1, -1 \text{ και τις ρίζες της αντίστροφης δευτεροβάθμιας } \alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0.$$

Γιά νά επιλύσουμε την (IV), και έπειδή γνωρίζουμε ότι δέν υπάρχει μηδενική ρίζα, διαιρούμε διά x^2 , όποτε προκύπτει ή ίσοδύναμη εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \beta \cdot \frac{1}{x} + \alpha \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \text{ ή } \alpha \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \beta \left(x + \frac{1}{x} \right) + \gamma = 0 \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Θέτομε τώρα } x + \frac{1}{x} &= y \quad (2) \text{ και έπειδή } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = \\ &= y^2 - 2 \text{ ή (1) γράφεται: } \alpha(y^2 - 2) + \beta y + \gamma = 0 \text{ ή } \alpha y^2 + \beta y + \gamma - 2\alpha = 0 \quad (3). \end{aligned}$$

Αν y_1 και y_2 είναι οί ρίζες της (3), τότε από τη (2) προκύπτουν οί ακόλουθες δυό αντίστροφες δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0 \text{ και } x^2 - y_2 x + 1 = 0.$$

γ) Πέμπτου βαθμού αντίστροφες είναι οι εξισώσεις της μορφής:

$$(V) \quad \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad \text{καί}$$

$$(VI) \quad \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha = 0.$$

Ο έλεγχος γίνεται όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Θά επιλύσουμε έδω την (VI). όμοια άκριβώς επιλύεται και ή (V).

$$\begin{aligned} \text{*Έχουμε: (VI) } &\Leftrightarrow \alpha(x^5 - 1) + \beta x(x^3 - 1) + \gamma x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + \beta x(x - 1)(x^2 + x + 1) + \gamma x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &(x - 1)(\alpha x^4 + \alpha x^3 + \alpha x^2 + \alpha x + \alpha + \beta x^3 + \beta x^2 + \beta x + \gamma x^2) = 0 \Leftrightarrow \\ &(x - 1)[\alpha x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha] = 0. \text{*Έτσι βλέπο-} \\ &\text{με ότι ή (VI) έχει ως ρίζες τόν αριθμό 1 και τίς ρίζες της αντίστροφης εξισώ-} \\ &\text{σεως 4ου βαθμού } \alpha x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0. \end{aligned}$$

11 · 2 Διωνυμες εξισώσεις.

Διωνυμη εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0$ (1), όπου $\alpha \cdot \beta \neq 0$, k, λ μή άρνητικοί άκέραιοι και $k \neq \lambda$.

*Αν $k > \lambda$, ή εξίσωση (1) γράφεται $x^\lambda \cdot (\alpha x^{k-\lambda} + \beta) = 0$.

Αυτή έχει ως ρίζα τόν αριθμό 0 μέ βαθμό πολλαπλότητας λ (άν $\lambda \in \mathbb{N}$) και τίς ρίζες της $\alpha x^{k-\lambda} + \beta = 0$ ή της $x^{k-\lambda} + \frac{\beta}{\alpha} = 0$ (2).

Ουσιαστικά λοιπόν μās ενδιαφέρουν οι εξισώσεις της μορφής (2), δηλαδή εξισώσεις της μορφής $x^m + p = 0$, όπου m φυσικός ≥ 3 και p ένας πραγματικός αριθμός.

Θά περιοριστούμε έδω στην επίλυση τών μορφών που μās ύποδεικνύουν τά παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Νά λυθούν οι εξισώσεις (I) $x^3 - 1 = 0$ και (II) $x^3 + 1 = 0$.

Γιά την (I) έχουμε: (I) $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. *Αρα ή (I) έχει ως ρίζες τόν αριθμό 1 και τίς ρίζες της $x^2 + x + 1 = 0$, που είναι

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{καί} \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

*Έπειδή $1^3 = 1$, $\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ και $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$, οι αριθμοί $1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας.

*Η (II) γράφεται $(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$ και συνεπώς ρίζες αυτής είναι οι αριθμοί $-1, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$. Οί αριθμοί αυτοί είναι οι κυβικές ρίζες του -1 .

Σημείωση: Οί ρίζες τών εξισώσεων (I) και (II) είναι και ρίζες της εξισώσεως $x^6 - 1 = 0$

$$\text{διότι: } x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 = 0 \\ x^3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Παρατήρηση: Όμοια επιλύεται κάθε ξισωση της μορφής $x^3 \pm \alpha = 0$, όπου $\alpha > 0$. Άρκει νά γράψομε :

$$x^3 \pm (\sqrt[3]{\alpha})^3 = 0 \iff (x \pm \sqrt[3]{\alpha})(x^2 \mp \sqrt[3]{\alpha}x + \sqrt[3]{\alpha^2}) = 0.$$

Παράδειγμα 2. Νά λυθοῦν οἱ ξισώσεις: (III) $x^4 - 1 = 0$ καί (IV) $x^4 + 1 = 0$.

Ἡ (III) γράφεται: $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$ καί ἐπομένως ρίζες της εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $-1, 1, -i, i$.

Ἡ (IV) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς: $x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = 0 \iff$
 $(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = 0 \iff (x^2 + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2}) = 0.$

Ἔτσι ρίζες τῆς (IV) εἶναι οἱ ρίζες τῶν ἀντιστρόφων δευτεροβαθμίων ξισώσεων $x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0$ καί $x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$.

Ἀπ' αὐτές παίρνομε τίς τιμές $\frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$ καί $\frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$.

Σημείωση: Οἱ ρίζες τῶν ξισώσεων (III) καί (IV) εἶναι καί ρίζες τῆς ξισώσεως $x^8 - 1 = 0$ διότι: $x^8 - 1 = 0 \iff (x^4 - 1)(x^4 + 1) \iff \begin{cases} x^4 - 1 = 0 \\ x^4 + 1 = 0. \end{cases}$

Παρατήρηση: Όμοια ἐπιλύονται καί οἱ ξισώσεις $x^4 - \alpha = 0$ καί $x^4 + \alpha = 0$, ὅπου $\alpha > 0$ Ἀρκει νά γράψομε:

$$\begin{aligned} \text{τὴν πρώτη } (x^2)^2 - (\sqrt[4]{\alpha^2})^2 &= 0 \iff (x^2 + \sqrt[4]{\alpha^2})(x^2 - \sqrt[4]{\alpha^2}) = 0 \\ \text{καὶ τὴ δεύτερη } x^4 + 2\sqrt[4]{\alpha}x^2 + \alpha - 2\sqrt[4]{\alpha}x^2 &= 0 \iff \\ (x^2 + \sqrt[4]{\alpha})^2 - \sqrt[4]{4\alpha}x^2 &= (x^2 + \sqrt[4]{\alpha})^2 - (\sqrt[4]{4\alpha}x)^2 = 0 \iff \\ (x^2 + \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{4\alpha}x)(x^2 + \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{4\alpha}x) &= 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Νά λυθοῦν οἱ ξισώσεις (V) $x^5 - 1 = 0$ καί (VI) $x^5 + 1 = 0$.

Ἡ (V) γράφεται: $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ καί συνεπῶς ἔχει ὡς λύσεις τὸν ἀριθμὸ 1 καί τίς ρίζες τῆς ἀντίστροφης $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Αὐτὴ ἡ τελευταία γράφεται:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= 0 \iff \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0 \iff \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 &= 0 \iff \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \implies \\ \left(x + \frac{1}{x}\right) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ἔτσι ἔχομε τίς δυὸ ἐπόμενες ξισώσεις:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

ἀπὸ τίς ὁποῖες προκύπτουν οἱ παρακάτω 4 τιμές:

$$\frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{καὶ} \quad \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ἡ (VI) γράφεται: $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$ καί ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ προηγούμενα παίρνομε ὡς ρίζες τοὺς ἀριθμοὺς:

$$-1, \frac{1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Σημείωση: Οί ρίζες τών ήξιώσεων (V) καί (VI) είναι καί ρίζες τής ήξιώσεως $x^{10} - 1 = 0$ διότι αυτή γράφεται $(x^5 - 1)(x^5 + 1) = 0$.

Παρατήρηση: Όμοια έπιλύεται κάθε ήξιωση τής μορφής $x^5 \pm \alpha = 0$, όπου $\alpha > 0$. Άρκει νά γραφεί ώς ήξης:

$$(x^5 \pm \sqrt[5]{\alpha}) (x^4 \mp \sqrt[5]{\alpha} x^3 \pm \sqrt[5]{\alpha^2} x^2 \mp \sqrt[5]{\alpha^3} x \pm \sqrt[5]{\alpha^4}) = 0.$$

11 · 3 Τριώνυμες ήξιώσεις.

Τριώνυμη ήξιωση λέγεται κάθε ήξιωση τής μορφής $ax^k + bx^l + \gamma x^m = 0$ (1), όπου $ab\gamma \neq 0$ καί k, l, m όχι άρνητικοί άκέραιοι καί διαφορετικοί μεταξύ τους.

Έδω θά ένδιαφερθούμε μόνο γιά κείνες τίς τριώνυμες ήξιώσεις στίς όποίες οί εκθέτες k, l, m ίκανοποιούν τήν ισότητα $k - l = l - m$. ($k > l > m$).

Μέ τήν προηγούμενη προϋπόθεση ή ήξιωση (1) γράφεται

$$x^m (ax^{k-m} + bx^{l-m} + \gamma) = 0 \quad \eta$$

$x^m (ax^{k-l+\lambda-m} + bx^{l-m} + \gamma) = 0 \quad \eta \quad x^m (ax^{2(l-m)} + bx^{l-m} + \gamma) = 0$
ή άκόμα $x^m (ax^{2\nu} + bx^\nu + \gamma) = 0$ (2), άν θέσουμε $l - m = \nu$.

Ή ήξιωση (2) έχει ώς ρίζα τόν άριθμό 0 μέ βαθμό πολλαπλότητας m καί τίς ρίζες τής ήξιώσεως $ax^{2\nu} + bx^\nu + \gamma = 0$ (3).

Τό θέμα μας λοιπόν είναι ουσιαστικά ή έπίλυση μιās ήξιώσεως τής μορφής (3).

Πρός τούτο θέτομε στήν (3) $x^\nu = y$ (4) καί παίρνομε τή δευτεροβάθμια ήξιωση $ay^2 + by + \gamma = 0$ (5).

Γιά κάθε ρίζα τής (5) θά έχομε άκολούθως νά έπιλύσομε, σύμφωνα μέ τήν (4), κι άπό μιά διώνυμη ήξιωση.

Ή πιό άπλή τριώνυμη ήξιωση είναι ή $ax^4 + bx^2 + \gamma = 0$ πού λέγεται διτετράγωνη. Γιά τήν έπίλυσή της άρκει νά έπιλύσομε τή δευτεροβάθμια $ay^2 + by + \gamma = 0$, πού λέγεται έπιλύουσα καί ύστερα νά θεωρήσομε τίς ήξιώσεις $x^2 = y_1$ καί $x^2 = y_2$, όπου y_1 καί y_2 οί ρίζες τής έπιλύουσας. Έτσι θά πάρομε τίς ήξης 4 ρίζες τής άρχικής ήξιώσεως: $x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}$ καί $x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}$. (Ύποθέσαμε ότι $ab\gamma \neq 0$).

11 · 4 Άρρητες ήξιώσεις.

*Αν $A = \sqrt[n]{\varphi(x)} + f(x)$ ή $A = \sqrt[n]{\varphi(x)} + \sqrt[m]{f(x)}$ ή $A = \sqrt[n]{\varphi(x)} + \sqrt[m]{f(x)} + g(x)$ κτλ., όπου $\varphi(x), f(x), g(x)$ πολυώνυμα τού x καί m, n φυσικοί ≥ 2 , τότε θά όνομάζομε **άρρητη ήξιωση** τή σχέση $A = 0$, έφόσον μ' αυτή έννοούμε ότι ζητάμε νά βρούμε τίς τιμές τού x πού μηδενίζουν τήν παράσταση A .

Έπειδή γιά νά έπιλύσομε μιάν άρρητη ήξιωση, καταφεύγομε σέ μιά συνέπειά της, πού έχει μορφή άκεραίας ήξιώσεως, καί έπειδή οί λύσεις αύτής τής τελευταίας δέν είναι πάντα όλες λύσεις καί τής άρχικής, είναι άνάγκη νά έλέγχομε ποιές άπ' αυτές τίς τιμές έπαληθεύουν τήν άρρητη ήξιωση.

Θά αναζητήσουμε ἐδῶ μόνο πραγματικές λύσεις καὶ τέτοιες ὥστε οἱ ρίζες ἀρτίας τάξεως νά παίρνουν τιμές πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀκόμα θά περιορίστοῦμε σέ μερικές ἀπλές μορφές καὶ θά ἐξηγήσουμε τή διαδικασία ἐπιλύσεώς τους μέ παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωση $3x = 5 + \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $3x - 5 = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ (1). Ἄν τετραγωνίσουμε τά μέλη τῆς (1) παίρνομε: $(3x - 5)^2 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow 5x^2 - 17x + 14 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{17 \pm 3}{10} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{7}{5}$.

Ἡ τιμή 2 εἶναι λύση τῆς ἄρρητης ἐξισώσεως, διότι :

$5 + \sqrt{-2^2 + 4 \cdot 2 - 3} = 5 + \sqrt{-4 + 8 - 3} = 5 + \sqrt{1} = 6 = 3 \cdot 2$ ἡ τιμή $\frac{7}{5}$ ἀπορρίπτεται διότι $3 \cdot \frac{7}{5} - 5 = -\frac{4}{5} = -\sqrt{-\left(\frac{7}{5}\right)^2 + 4 \cdot \frac{7}{5} - 3} = -\sqrt{-\frac{49}{25} + \frac{28}{5} - 3} = -\sqrt{\frac{16}{25}}$, ἐνῶ μέ τό νόημα πού δώσαμε στό δεύτερο μέλος τῆς (1) πρέπει ἡ παράσταση $3x - 5$ νά γίνεται ≥ 0 (ὅταν θέσουμε $x = \frac{7}{5}$).

Μποροῦμε ἐξαρχῆς νά σημειώσουμε τίς ἐπιβαλλόμενες συνθήκες ἀπό τό νόημα πού θέλομε νά ἔχουν τά μέλη τῆς ἐξισώσεως. Ἔτσι μαζί μέ τήν ἐξίσωση $(3x - 5)^2 = -x^2 + 4x - 3$ (2) γράφομε καί $3x - 5 \geq 0$ (3) καί ζητᾶμε νά βροῦμε πραγματικές τιμές τῆς μεταβλητῆς x πού ικανοποιοῦν συγχρόνως τίς σχέσεις (2) καί (3). Τό αἶτημα, ἡ παράσταση $-x^2 + 4x - 3$ νά μή γίνεται ἀρνητικός ἀριθμός ἐξασφαλίζεται ἀπό τήν ἴδια τήν ἐξίσωση (2) ἀφοῦ $(3x - 5)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ἐπειδή $3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$, βλέπομε ἀμέσως ὅτι ἀπό τίς ρίζες $x_1 = 2$ καί $x_2 = \frac{7}{5}$ τῆς (2) μόνο ἡ x_1 εἶναι παραδεκτή ἀφοῦ $2 > \frac{5}{3}$ ἐνῶ $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$.

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωση $\sqrt{x-2} - 5 = \sqrt{4x-3}$.

Ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή $\sqrt{x-2} = 5 + \sqrt{4x-3}$ καί αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα τῶν σχέσεων $(\sqrt{x-2})^2 = (5 + \sqrt{4x-3})^2$ (1), $x - 2 \geq 0$ (2) καί $4x - 3 \geq 0$ (3) (γιατί;).

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) παίρνομε $x \geq 2$ καί $x \geq \frac{3}{4}$. ἄρα ικανοποιοῦνται καί οἱ δύο συνθήκες γιά $x \geq 2$ (2'). Ἡ (1) γράφεται :

$$x - 2 = 25 - 4x - 3 - 10\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow -3x - 24 = 10\sqrt{4x-3} \quad (1').$$

Ἀπό τή σχέση (1') συμπεραίνομε ὅτι πρέπει νά εἶναι $-3x - 24 \geq 0 \Rightarrow -3x \geq 24 \Rightarrow x \leq -8$ αὐτή ὅμως δέν συμβιβάζεται μέ τή (2'). Ἀρα ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι ἀδύνατη μέσα στό $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3. Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωση $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-7} = 2\sqrt{5-x}$.

Θεωροῦμε ἀρχικά τήν ἰσοδύναμη $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x-7} + 2\sqrt{5-x}$ (1). Πρέπει νά ἔχομε $x + 5 \geq 0$, $2x - 7 \geq 0$ καί $5 - x \geq 0$ ἡ $x \geq -5$, $x \geq \frac{7}{2}$ καί $x \leq 5$. Οἱ τρεῖς αὐτές

σχέσεις ικανοποιούνται συγχρόνως για τις τιμές του διαστήματος $\frac{7}{2} \leq x \leq 5$ (2). Τετραγωνίζουμε τώρα τα μέλη της (1) και παίρνουμε:

$$x + 5 = 2x - 7 + 4(5 - x) + 4\sqrt{(2x - 7)(5 - x)} \iff 3x - 8 = 4\sqrt{(2x - 7)(5 - x)} \quad (1').$$

Από την (1') συμπεραίνουμε ότι πρέπει να είναι $3x - 8 \geq 0$ δηλαδή $x \geq \frac{8}{3}$ (3).

Επειδή όμως $\frac{8}{3} < \frac{7}{2}$, οι τιμές του διαστήματος (2) ικανοποιούν και τη σχέση (3).

Έτσι έχουμε καταλήξει στο σύστημα των σχέσεων (1') και (2). Τετραγωνίζουμε τώρα τα μέλη της (1') και φθάνουμε στη δευτεροβάθμια εξίσωση $41x^2 - 320x + 624 = 0$ της οποίας οι ρίζες είναι $x_1 = 4$ και $x_2 = \frac{156}{41}$.

Επειδή και οι δύο αυτές τιμές ικανοποιούν τη συνθήκη (2) έπεται ότι και οι δύο είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Αν έκτελούσαμε μόνο τα βήματα που μās οδηγήσανε στην παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση, τότε θα έπρεπε να ελέγξουμε κατά πόσο οι ρίζες της 4 και $\frac{156}{41}$ επαληθεύουν την εξίσωση (1) και θα επιβεβαιώναμε έτσι τό προηγούμενο τελικό συμπέρασμα.

$$\left(\text{Πράγματι έχουμε: } \sqrt{2 \cdot 4 - 7} + 2\sqrt{5 - 4} = \sqrt{1} + 2\sqrt{1} = 3 \text{ και } \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3. \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \sqrt{2 \cdot \frac{156}{41} - 7} + 2\sqrt{5 - \frac{156}{41}} &= \sqrt{\frac{25}{41}} + 2\sqrt{\frac{49}{41}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{41}} + \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{41}} = \frac{19}{\sqrt{41}} \text{ και } \sqrt{\frac{156}{41} + 5} = \sqrt{\frac{361}{41}} = \frac{19}{\sqrt{41}}. \end{aligned}$$

11.5 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τά α, β, γ για να έχει ή εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (μέ $\alpha \neq 0$) I) δύο μόνο πραγματικές λύσεις, II) και τις τέσσερις λύσεις πραγματικές.

I) Για να έχει ή εξίσωσή μας δύο μόνο πραγματικές λύσεις πρέπει και άρκει ή επιλύουσα $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ να έχει μιά λύση $y_1 \geq 0$ και μιά λύση $y_2 < 0$.

Τότε από τη σχέση $x^2 = y_1$ θά πάρουμε δύο πραγματικές τιμές του x , τις $x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}$, που είναι δύο αντίθετοι πραγματικοί άριθμοί, ή $x_1 = x_2 = 0$ όταν $y_1 = 0$. Έχουμε όμως $y_1 > 0$ και $y_2 < 0$ αν και μόνον αν $y_1 \cdot y_2 < 0$, δηλαδή

αν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, και $y_1 = 0$ μέ $y_2 < 0$ αν $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$, δηλαδή $\gamma = 0$, και $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$

δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} > 0$.

Όστε, ή διτετράγωνη εξίσωση έχει δύο μόνο λύσεις πραγματικές, εφόσον $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ ή $\gamma = 0$ και $\frac{\beta}{\alpha} > 0$.

Για να έχει ή διτετράγωνη εξίσωση και τις τέσσερις ρίζες της πραγματικές

πρέπει και αρκεί η επιλύουσα να έχει και τις δύο ρίζες της πραγματικές, θετικές ή μηδέν· δηλαδή να έχουμε $y_1 \geq 0$ και $y_2 \geq 0$. Προς τοῦτο πρέπει και αρκεί να ισχύουν συγχρόνως οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\Delta \geq 0 \quad (\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0), \quad \frac{\gamma}{\alpha} \geq 0 \quad \text{και} \quad -\frac{\beta}{\alpha} \geq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\beta}{\alpha} \leq 0.$$

2. *Νά επιλυθεί η εξίσωση.*

$$2(x^2 + 3x + 2)^4 + 5x(x^2 + 3x + 2)^3 - 5x^3(x^2 + 3x + 2) - 2x^4 = 0 \quad (1)$$

Παρατηρώντας ότι $x \neq 0$, διαιρούμε διά x^4 και παίρνουμε:

$$2 \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x} \right)^4 + 5 \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x} \right)^3 - 5 \frac{x^2 + 3x + 2}{x} - 2 = 0.$$

Αν τώρα θέσουμε $\frac{x^2 + 3x + 2}{x} = y$ (2), προκύπτει η αντίστροφη ως προς y εξίσωση $2y^4 + 5y^3 - 5y - 2 = 0$ (3).

Αυτή είναι της μορφής (III) παράγρ. 11.1 (β) και από την επίλυσή της παίρνουμε τις τιμές $-2, -1, -\frac{1}{2}$ και 1 .

Έτσι έχουμε να λύσουμε τελικά τις επόμενες 4 δευτεροβάθμιες εξισώσεις, που προκύπτουν από τη σχέση (2):

$$x^2 + 3x + 2 = -2x, \quad x^2 + 3x + 2 = -x, \quad x^2 + 3x + 2 = -\frac{x}{2} \quad \text{και} \quad x^2 + 3x + 2 = x.$$

3. *Τό τριώνυμο $4a^2x^4 - (\beta^2 + 4a^2\gamma^2)x^2 + \beta^2\gamma^2$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$, να γίνει γινόμενο πρωτοβαθμίων ως προς x παραγόντων.*

Θέτουμε $x^2 = y$ και παίρνουμε τό τριώνυμο $\varphi(y) = 4a^2y^2 - (\beta^2 + 4a^2\gamma^2)y + \beta^2\gamma^2$. Οι ρίζες του $\varphi(y)$, είναι $-\frac{\beta^2}{4a^2}$ και γ^2 . Έτσι έχουμε

$$\varphi(y) = 4a^2 \left(y - \frac{\beta^2}{4a^2} \right) (y - \gamma^2) = (4a^2y - \beta^2) (y - \gamma^2).$$

Στό παραπάνω γινόμενο θέτουμε $y = x^2$ και βρίσκουμε $(4a^2x^2 - \beta^2) (x^2 - \gamma^2) = (2ax + \beta) (2x - \beta) (x + \gamma) (x - \gamma)$.

11 · 6 Άσκησης.

1. *Νά βρεθούν οι ρίζες των πολωνύμων:*

$$4x^4 - 36, \quad 3x^4 - 4x^2, \quad x^4 - 6x^2 + 10, \quad x^4 + 2x^2 - 8, \quad 4x^4 + 625, \quad x^4 - 25x^2 + 144$$

και να γραφούν τά πολωνύμια ως γινόμενα πρωτοβαθμίων ή και δευτεροβαθμίων πολωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

2. *Νά επιλυθούν οι εξισώσεις:* I) $x^6 - 72x^3 + 512 = 0$ II) $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$ III) $32x^5 + 243 = 0$ (δηλαδή ή: $2^5x^5 + 3^5 = 0$).

3. *Νά επιλυθούν οι εξισώσεις:* I) $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0$ και II) $x^6 - 6x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

4. *Νά επιλυθεί η εξίσωση $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.*

(Υπόδειξη: *Νά διαιρέσετε με x^2 και να θέσετε $x - \frac{1}{x} = y$).*

5. Νά επιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

$$I) x - 15 = \sqrt{-x^2 + 8x + 105} \quad II) x = 5 + \sqrt{2x^2 - 8x + 1} \quad III) -\sqrt{x-1} + 3 = \sqrt{3x-2}$$

$$IV) 2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30 \quad V) \sqrt[3]{x+21} + \sqrt[3]{14-x} = 5$$

$$VI) 2x + \sqrt{3x+1} = 4 \quad VII) \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{4-2x} + \sqrt[3]{3x+9} = 0$$

6. Νά επιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

$$I) \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{1}{(x-1)^2} \quad II) 6x^2 + \frac{7}{x^2} = 13 \quad III) (x^2-5)^2 + x^2 - 7 = 0$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 12

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ

Όρισμοί. Ένα σύστημα εξισώσεων πρώτου βαθμού λέγεται επίσης και γραμμικό.

Όταν σ' ένα σύστημα εξισώσεων μιά τουλάχιστον εξίσωση είναι, ως προς έναν ή περισσότερους άγνωστους, δευτέρου, τρίτου κλπ. βαθμού, τότε τό σύστημα λέγεται μή πρωτοβάθμιο ή μή γραμμικό σύστημα.

Δέν υπάρχει γενική μέθοδος γιά τήν επίλυση ενός μή πρωτοβαθμίου συστήματος. Κατά περίπτωση, μέ αντικαταστάσεις άγνώστων και κατάλληλους μετασχηματισμούς, επιδιώκομε νά φτάσομε σέ σύστημα άπλούστερο από τό δοσμένο, όπουμποροῦν πλέον νά εφαρμοστοῦν οἱ τρόποι επίλυσεως τῶν γραμμικῶν συστημάτων.

Έντούτοις είναι δυνατό νά διακρίνομε μερικές ειδικές κατηγορίες μή γραμμικῶν συστημάτων, σέ καθεμιά από τίς όποῖεςμπορεῖ νά υποδειχθεῖ μιά κατάλληλη μέθοδος επίλυσεως.

Σημείωση: Σ' όλα τά παρακάτω οἱ συντελεστές θά θεωροῦνται πραγματικοί αριθμοί.

12 · 1 Συστήματα αναγόμενα σέ γραμμικά.

I) Νά επιλυθεῖ τό σύστημα $ax = by$ και $γx + δy = 0$, όπου $αβγδ \neq 0$.

Εἶναι φανερό ότι τό σύστημα έχει πρώτα τή μηδενική λύση, δηλαδή ἐπαληθεύεται γιά $x = 0$ και $y = 0$. Θά αναζητήσομε κι άλλες λύσεις ἐκτός τῆς μηδενικῆς.

Άπό τήν πρώτη εξίσωση, ἐπειδή θεωροῦμε τώρα τό $x \neq 0$, παίρνομε $α = by$ και συνεπῶς $y = \frac{α}{β}$. Ἡ τιμή αὐτή εἰσάγεται στή δεύτερη και προκύπτει $γx + δ \cdot \frac{α}{β} = 0$, από τήν όποία ἔχομε ὡς αντίστοιχη τιμή τοῦ x τήν τιμή $-\frac{αδ}{βγ}$.

Ώστε οι λύσεις του συστήματος είναι $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ και

$$\left(x_2 = -\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, y_2 = \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

II) Νά επιλυθεί το σύστημα :

$$\frac{y\omega}{2\omega + 3y} = -2, \quad \frac{\omega x}{3x + 4\omega} = 3 \quad \text{και} \quad \frac{xy}{6y - 7x} = 4.$$

Παρατηρούμε ότι αποκλείεται να έχουμε $xy\omega = 0$ και επομένως το σύστημα γράφεται και ως εξής :

$$\frac{2\omega + 3y}{y\omega} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{3x + 4\omega}{\omega x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{6y - 7x}{xy} = \frac{1}{4}$$

ή ακόμα $2 \cdot \frac{1}{y} + 3 \cdot \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{2}, \quad 3 \cdot \frac{1}{\omega} + 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

και $6 \cdot \frac{1}{x} - 7 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$. Θέτουμε $\frac{1}{x} = x', \quad \frac{1}{y} = y'$ και $\frac{1}{\omega} = \omega'$

και το προηγούμενο σύστημα γίνεται : $2 \cdot y' + 3 \cdot \omega' = -\frac{1}{2} \quad (1)$

$$3 \cdot \omega' + 4 \cdot x' = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$6 \cdot x' - 7 \cdot y' = \frac{1}{4} \quad (3)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) και παίρνουμε :

$$4x' - 2y' = \frac{5}{6} \quad \text{ή} \quad 2x' - y' = \frac{5}{12} \quad (4)$$

Από το σύστημα των (3) και (4) βρίσκουμε $x' = \frac{1}{3}$ και $y' = \frac{1}{4}$. Εισάγουμε

την τιμή $y' = \frac{1}{4}$ στην (1) και παίρνουμε $\omega' = -\frac{1}{3}$. Έτσι βρίσκουμε τελικά

ότι το σύστημα ικανοποιείται με: $x = 3, y = 4, \omega = -3$.

III) Νά επιλυθεί το σύστημα $4x^2 - y^2 + 6y = 9, x^2 + 6xy + 9y^2 = 1$.

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $4x^2 - (y^2 - 6y + 9) = 0$ ή $(2x)^2 - (y - 3)^2 = 0$ ή ακόμα $(2x + y - 3)(2x - y + 3) = 0$ (1). Η δεύτερη γράφεται όμοια $(x + 3y)^2 - 1 = 0$ ή $(x + 3y + 1)(x + 3y - 1) = 0$ (2).

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) παίρνουμε τὰ ακόλουθα πρωτοβάθμια συστήματα.

$$(III\alpha) \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \quad (III\beta) \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(III\gamma) \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \quad (III\delta) \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

IV) Νά επιλυθεί τό σύστημα: $(x + y)(y + \omega) = 1$, $(y + \omega)(\omega + x) = 4$,
 $(\omega + x)(x + y) = 9$.

Θέτομε $x + y = \kappa$, $y + \omega = \lambda$ καί $\omega + x = \mu$ καί τό δοσμένο σύστημα γίνεται $\kappa\lambda = 1$ (1),
 $\lambda\mu = 4$ (2) καί $\mu\kappa = 9$ (3).

Πολλαπλασιάζομε τίς (1), (2) καί (3) κατά μέλη καί παίρνομε $\kappa^2\lambda^2\mu^2 = 36$ καί τελικά
 $\kappa\lambda\mu = 6$ (4) καί $\kappa\lambda\mu = -6$ (5).

Συνδυάζοντας τήν (4) μέ τήν (1), (2) καί (3) διαδοχικά παίρνομε $\mu = 6$, $\kappa = \frac{3}{2}$ καί
 $\lambda = \frac{2}{3}$. 'Επίσης άπό τήν (5) σέ συνδυασμό πάλι μέ τίς (1), (2) καί (3) παίρνομε $\mu = -6$,
 $\kappa = -\frac{3}{2}$ καί $\lambda = -\frac{2}{3}$. 'Ετσι έχομε τά παρακάτω δύο γραμμικά συστήματα:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \frac{3}{2} \\ y + \omega = \frac{2}{3} \\ \omega + x = 6 \end{array} \right\} \text{ (I) } \quad \text{καί} \quad \text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = -\frac{3}{2} \\ y + \omega = -\frac{2}{3} \\ \omega + x = -6. \end{array} \right.$$

12 · 2 Συστήματα στά όποία μιά μόνο εξίσωση είναι δευτεροβάθμια.

'Αν σ' ένα σύστημα μιά μόνο εξίσωση είναι δευτεροβάθμια καί οί άλλες πρωτοβάθμιες, τότε ή επίλυση τοῦ συστήματος ανάγεται τελικά στήν επίλυση μιᾶς δευτεροβάθμιας εξισώσεως. Αυτό γίνεται έφικτό άν άπό τό σύστημα τῶν πρωτοβαθμίων εξισώσεων έκφράσομε συναρτήσει ενός άγνώστου όλους τούς άλλους καί αντικαταστήσομε μέ τίς έκφράσεις αυτές, στή δευτεροβάθμια εξίσωση, τούς αντίστοιχους άγνώστους.

I) Νά επιλυθεί τό σύστημα $x^2 + 2xy - y^2 + x + y - 1 = 0$ καί $x - y = 1$.

'Από τή δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x = y + 1$. εἰσάγομε αὐτή τήν έκφραση τοῦ x στήν πρώτη εξίσωση καί παίρνομε τή δευτεροβάθμια ὡς πρὸς y εξίσωση $2y^2 + 6y + 1 = 0$.

'Από τήν τελευταία παίρνομε $y = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$, ὁπότε ἔχομε ἀντίστοιχα καί γιά τό $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

II) Νά επιλυθεί τό σύστημα $x^2 - xy + y^2 = 3$, $x + y - \omega = 0$, $x - y + 3\omega = 8$.

'Επιλύομε τό σύστημα τῶν δύο πρωτοβαθμίων εξισώσεων ὡς πρὸς x καί y καί παίρνομε $x = 4 - \omega$ (1) καί $y = 2\omega - 4$ (2). Τίς έκφράσεις αυτές τῶν x καί y συναρτήσει τοῦ ω τίς εἰσάγομε στήν πρώτη εξίσωση, ὁπότε προκύπτει ή δευτεροβάθμια ὡς πρὸς ω εξίσωση: $7\omega^2 - 36\omega + 45 = 0$. 'Από αὐτή βρίσκομε $\omega_1 = 3$ καί $\omega_2 = \frac{15}{7}$. Τέλος ἀπό τίς (1) καί (2) παίρνομε ἀντίστοιχα $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{13}{7}$ καί $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{2}{7}$.

'Ωστε τό σύστημα ἔχει τίς λύσεις

$$(x_1 = 1, y_1 = 2, \omega_1 = 3) \quad \text{καί} \quad \left(x_2 = \frac{13}{7}, y_2 = \frac{2}{7}, \omega_2 = \frac{15}{7}\right).$$

III) Νά επιλυθεί το σύστημα $x + y^2 - 3y = 1$ και $2x - 3y^2 + 10y = 14$.

Στό σύστημα αυτό είναι βέβαια και οι δύο εξισώσεις δευτεροβάθμιες ως προς y . Αν όμως απαλείψουμε μεταξύ των εξισώσεων το y^2 , τότε περνάμε σ' ένα ισοδύναμο σύστημα, στο οποίο ή μία εξίσωση είναι πρωτοβάθμια.

Πρός τοῦτο ἀπὸ τὴν πρώτη ἐξίσωση παίρνομε $y^2 = 1 - x + 3y$. βάζοντας ἀκολουθῶς τὴν ἔκφραση αὐτὴ τοῦ y^2 στὴ δεύτερη παίρνομε: $5x + y = 17$. Ἐτσι τελικὰ ἔχομε τὸ ἰσοδύναμο, πρὸς τὸ ἀρχικὸ, σύστημα $5x + y = 17$ (1) καὶ $x + y^2 - 3y - 1 = 0$ (2).

Ἀπὸ τὴν (1) προκύπτει τώρα $y = 17 - 5x$ (1') καὶ ἀκολουθῶς ἀπὸ τὴν (2) $25x^2 - 154x + 237 = 0$. Ἀπὸ τὴν τελευταία ἐξίσωση παίρνομε $x_1 = 3$ καὶ $x_2 = \frac{79}{25}$, ὁπότε ἀπὸ τὴν (1') ἔχομε ἀντίστοιχα $y_1 = 2$ καὶ $y_2 = \frac{6}{5}$.

12·3 Συστήματα συμμετρικά.

Ἐνα σύστημα μέ δυὸ ἀγνώστους λέγεται συμμετρικὸ ὅταν οἱ ἐξισώσεις του εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, δηλαδή ὅταν δέν μεταβάλλονται μέ ἑναλλαγή τῶν ἀγνῶστων.

Ἐνα συμμετρικὸ σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ δυὸ ἀγνώστους ἀνάγεται τελικὰ στοῦ ἀπλοῦστερο σύστημα αὐτῆς τῆς μορφῆς πού εἶναι τό: $x + y = \alpha$ καὶ $xy = \beta$.

Λύση αὐτοῦ τοῦ τελευταίου συστήματος εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ (γιατί;).

I) Νά ἐπιλυθεῖ τὸ σύστημα $x^2 + y^2 = 3$ (1) καὶ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ (2).

Ἡ (1) γράφεται $(x + y)^2 - 2xy = 3$ (1') καὶ ἡ (2) $\frac{x + y}{xy} = 1$ (2').

Θέτομε στὶς (1') καὶ (2') $x + y = \phi$ (3) καὶ $xy = \omega$ (4), ὁπότε προκύπτει τὸ σύστημα $\phi^2 - 2\omega = 3$ (5) καὶ $\phi = \omega$ (6). Ἀπὸ τίς (5) καὶ (6) παίρνομε $\omega^2 - 2\omega - 3 = 0$, δηλαδή $\omega_1 = \phi_1 = 3$ καὶ $\omega_2 = \phi_2 = -1$. Ἐτσι σύμφωνα καὶ μέ τίς (3) καὶ (4) ἔχομε τὰ παρακάτω δύο ἀπλά συμμετρικά συστήματα:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ xy = 3 \end{array} \right\} (\alpha) \quad \text{καὶ} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{array} \right\} (\beta)$$

Τό (α) ἔχει λύση τὸ ζεῦγος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $z^2 - 3z + 3 = 0$ καὶ τό (β) τὸ ζεῦγος τῶν ριζῶν τῆς $z^2 + z - 1 = 0$.

II) Νά ἐπιλυθεῖ τὸ σύστημα $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 9$ καὶ $xy(x + 2)(y + 2) = 18$.

Γράφομε τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος μέ τὸν ἐξῆς τρόπο:

$$x(x + 2) + y(y + 2) = 9 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad x(x + 2) \cdot y(y + 2) = 18 \quad (2).$$

Θέτομε τώρα στὶς (1) καὶ (2) $x(x + 2) = \phi$ καὶ $y(y + 2) = \omega$, ὁπότε προκύπτει τὸ σύστημα $\phi + \omega = 9$ καὶ $\phi \cdot \omega = 18$. Οἱ τιμές τῶν ϕ καὶ ω εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $z^2 - 9z + 18 = 0$.

Δηλαδή: $\phi = 3$ καὶ $\omega = 6$ ἢ $\phi = 6$ καὶ $\omega = 3$.

Ἐτσι παίρνομε τὸ παρακάτω σύστημα ὡς πρὸς x καὶ y .

$$\left\{ \begin{array}{l} x(x + 2) = 3 \\ y(y + 2) = 6 \end{array} \right. \quad \text{ἢ} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(x + 2) = 6 \\ y(y + 2) = 3 \end{array} \right.$$

12·4 Συστήματα όμογενή.

Όμογενές σύστημα δύο εξισώσεων δευτέρου βαθμού με δύο άγνωστους, ονομάζουμε κάθε σύστημα της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \delta \quad \text{καί} \quad \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2 = \delta'.$$

Γιά νά επιλύσουμε ένα τέτοιο σύστημα χρησιμοποιούμε τό μετασχηματισμό $y = t \cdot x$.

I. Νά επιλυθεί τό σύστημα $2y^2 + 3xy - 5x^2 = 0$ καί $y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$.

Είναι φανερό ότι τό σύστημα έχει τή μηδενική λύση, δηλαδή οί εξισώσεις επαληθεύονται γιά $x = 0$ καί $y = 0$.

Θά εξετάσουμε αν υπάρχουν καί άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής.

Θεωρούμε ότι είναι $x \neq 0$ καί διαιρούμε τά μέλη καί τών δύο εξισώσεων διά x^2 . Έτσι παίρνουμε:

$$2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3 \frac{y}{x} - 5 = 0 \quad \text{καί} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} - 3 = 0$$

$$\eta \quad 2t^2 + 3t - 5 = 0 \quad (1) \quad \text{καί} \quad t^2 + 2t - 3 = 0 \quad (2). \quad \left(\text{Βάλαμε } \frac{y}{x} = t\right).$$

Τό σύστημά μας έχει καί άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής εφόσον οί ως πρós t εξισώσεις (1) καί (2) έχουν κοινή λύση. Από τήν (1) παίρνουμε $t_1 = 1$ καί $t_2 = -\frac{5}{2}$ καί από τή (2) $t' = 1$ καί $t'' = -3$.

Έχομε λοιπόν $t_1 = t' = 1$, δηλαδή $\frac{y}{x} = 1$ ή $y = x$.

Όστε τό δοσμένο σύστημα δέχεται ως λύση όποιοδήποτε ζεύγος ίσων τιμών τών x καί y .

II. Νά επιλυθεί τό σύστημα $2x^2 - y^2 - 4xy = 6$ καί $-x^2 + 3y^2 + xy = -3$.

Βάζουμε $y = tx$ καί τότε οί εξισώσεις γράφονται $2x^2 - t^2x^2 - 4tx^2 = 6$ καί $-x^2 + 3t^2x^2 + tx^2 = -3$ ή $x^2(2 - t^2 - 4t) = 6$ (1) καί $x^2(-1 + 3t^2 + t) = -3$ (2).

Έπειδή γιά $x = 0$ οί άρχικές εξισώσεις μάς δίνουν ή πρώτη $y^2 = -6$ καί ή δεύτερη $y^2 = -1$ καί αυτές οί σχέσεις είναι άσυμβίβαστες, συνάγομε ότι είναι $x \neq 0$. Άρα μπορούμε νά διαιρέσουμε τίς (1) καί (2) κατά μέλη καί νά πάρουμε $\frac{2 - t^2 - 4t}{-1 + t + 3t^2} = -2$ (3). Από τήν επίλυση της (3) προκύπτουν οί τιμές $t_1 = 0$ καί $t_2 = \frac{2}{5}$. Οί τιμές αυτές του t είναι καί οί δύο άποδεκτές, διότι δέν μηδενίζουν τόν παρονομαστή $-1 + t + 3t^2$.

Γιά $t = 0$ από τήν (1) παίρνουμε $x^2 \cdot 2 = 6$ καί $x = \pm \sqrt{3}$,
ένω $y = 0 \cdot x = 0$.

Γιά $t = \frac{2}{5}$ από την (1) προκύπτει $x^2 \cdot \frac{6}{25} = 6$ και $x = \pm 5$, ενώ αντίστοιχα $y = tx = \frac{2}{5} \cdot (\pm 5) = \pm 2$.

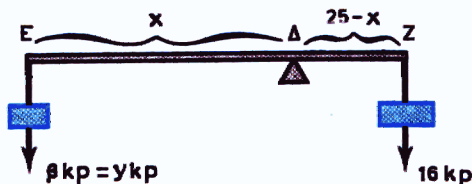
Οι λύσεις του συστήματος είναι λοιπόν τὰ ζεύγη $(x = \pm \sqrt{3}, y = 0)$ και $(x = \pm 5, y = \pm 2)$.

12.5 Εφαρμογές και παραδείγματα.

1. Μοχλός EZ μήκους 25 dm στηρίζεται σέ σημείο Δ, μεταξύ E και Z. "Όταν στό σημείο E τοποθετούμε βάρος 1 kp, ισορροπούμε στό Z βάρος β kp." Όταν τοποθετούμε στό E τό βάρος β kp, τότε στό Z χρειαζόμαστε βάρος 16 kp γιά νά έχομε ισορροπία. Νά βρεθούν τό βάρος β και ή θέση του υπομοχλίου.

"Ας παραστήσουμε μέ x τήν απόσταση ΕΔ και μέ y τό βάρος β (σχ. 12.5). Τό τμήμα ΔΖ θά έχει μήκος $25 - x$. Σύμφωνα μέ τή συνθήκη ισορροπίας του μοχλού θά έχομε τό σύστημα: $x \cdot 1 = y(25 - x)$ (1) και $x \cdot y = 16(25 - x)$ (2). Έπειδή $xy \neq 0$, μπορούμε νά διαιρέσουμε τίς εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη, όποτε προκύπτει ή εξίσωση $\frac{1}{y} = \frac{y}{16}$. "Απ' αυτήν έπεται $y^2 = 16$ και $y = \pm 4$.

"Η μόνη άποδεκτή τιμή είναι ή $y = 4$, διότι ή αριθμητική τιμή του βάρους είναι έδω θετική. Γιά $y = 4$ ή (1) μäs δίνει $x = 20$ dm.



Σχ. 12.5.

2. Νά προσδιορισθεί αριθμός, του οποίου τό τετράγωνο νά ισούται μέ $1 + 2i$.

"Ας παραστήσουμε μέ $x + yi$ τόν ζητούμενο αριθμό· τότε πρέπει νά έχομε: $(x + yi)^2 = 1 + 2i$. Έπειδή όμως $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ έπεται ότι $x^2 - y^2 + 2xyi = 1 + 2i$ (1).

"Αλλά, όπως γνωρίζομε, δυό μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι άν και μόνον άν τά πραγματικά τους μέρη είναι ίσα και τά φανταστικά τους επίσης ίσα. Έτσι από τή σχέση (1) φθάνομε στό σύστημα $x^2 - y^2 = 1$ (2) και $xy = 1$ (3). Πρέπει νά σημειώσουμε άπαρχής ότι μόνο οι πραγματικές λύσεις του συστήματος τών (2) και (3) είναι άποδεκτές γιά τό πρόβλημά μας.

"Από τήν (3) έχομε $y = \frac{1}{x}$, όποτε ή (2) γίνεται $x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow$

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

"Έπειδή ό αριθμός $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ είναι άρνητικός, θά κρατήσομε μόνο τήν τιμή

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ και έτσι θα πάρουμε ως τιμές του } x \text{ τις ακόλουθες } x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

$$\text{'Αντίστοιχα οι τιμές του } y \text{ είναι } y = \pm \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}}.$$

"Ωστε οι άριθμοί που ίκανοποιούν τή συνθήκη του προβλήματος είναι οι:

$$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + i \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}} \text{ και } -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} - i \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}}.$$

12 · 6 Άσκήσεις.

1. Νά επιλυθούν τά συστήματα:

$$\text{I) } 4x + 3y = 7$$

$$\text{II) } 2x^2 - 5y^2 = 3$$

$$\text{III) } x^2 + y^2 = 25$$

$$xy = 1$$

$$x^2 + 3y^2 = 7$$

$$x + y = 7$$

$$\text{IV) } x^2 + y^2 = 25$$

$$\text{V) } x^3 - y^3 = 37$$

$$\text{VI) } 8x^3 + y^3 = 16$$

$$xy = 12$$

$$x - y = 1$$

$$2x + y = 4.$$

2. Νά επιλυθούν τά συστήματα:

$$\text{I) } x^2 + y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$$

$$3x - 2y - 1 = 0$$

$$\text{II) } x^2 + y - 7 = 0$$

$$2x^2 - 5y^2 + 37 = 0 \text{ ('Υπόδειξη: Νά λύσετε τήν πρώτη ως προς } y)$$

3. Νά επιλυθεί τό σύστημα:

$$x^2 + y^2 - x - y = 48 \text{ και } x + y + xy = 31$$

('Υπόδειξη: Νά γράψετε $x + y = \varphi$ και $xy = \omega$).

4. *Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ νά επιλυθούν τά συστήματα:

$$\text{I) } \frac{y\omega}{\beta\omega + \gamma\gamma} = \alpha, \quad \frac{\omega x}{\gamma x + \alpha\omega} = \beta, \quad \frac{xy}{\alpha y + \beta x} = \gamma.$$

$$\text{II) } xy\omega = \alpha(xy - y\omega + \omega x), \quad xy\omega = \beta(xy + y\omega - \omega x), \quad xy\omega = \gamma(-xy + y\omega + \omega x).$$

Άσκήσεις για επανάληψη

1. Δυό αυτοκίνητα αναχωρούν συγχρόνως από μιά πλατεία πόλεως Α για νά μεταβούν σέ πόλη Β που απέχει από τήν Α 300 km. Τό πρώτο διατηρεί μέση ταχύτητα κατά 12 km/h μεγαλύτερη από τήν ταχύτητα του δευτέρου και φτάνει στήν πόλη Β 50 min νωρίτερα από τό δεύτερο. Νά βρεθούν οι μέσες ταχύτητες τών αυτοκινήτων.

2. Τό έμβαδό ίσοσκελούς τριγώνου είναι 20 cm². Τό άθροισμα τής βάσεως του και του ύψους στή βάση είναι 18 cm. Νά βρεθούν τά μέτρα πλευρών του τριγώνου.

3. Σέ κύκλο μέ άκτίνα 5 cm έχομε έγγράφει ίσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Τό άθροισμα τής βάσεως ΒΓ και του ύψους σ' αυτή είναι 8 cm. Νά βρεθούν τό βέλος του μικρού τόξου $\widehat{ΒΓ}$ και τό έμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Όρθογωνίου παραλληλογράμμου ή διαγωνίος ίσοῦται μέ 20 m και τό έμβαδόν του είναι 192 m². Νά βρεθούν οι διαστάσεις του όρθογωνίου.

5. Όρθογώνιο τρίγωνο είναι έγγεγραμμένο σέ κύκλο άκτίνας 19,5 cm και έχει έμβαδόν 270 cm². Νά βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου.

6. Κατακόρυφος βαρομετρικός σωλήνας έχει μήκος 90 cm και διατομή 1 cm². Η ύδραργυρική στήλη έχει ύψος 76 cm. Άν βάλομε, μέσα στόν κενό χώρο του ύδραργυρικού σωλήνα, 4 cm³ άτμοσφαιρικού άέρα, άπ' αυτόν που περιβάλλει τό βαρόμετρο, πόσο θα κατέβει ή στάθμη του ύδραργύρου μέσα στό σωλήνα;

7. Ποταμόπλοιο εκτελεί τη συγκοινωνία ανάμεσα σε δύο παρόχθιες πόλεις Α και Β, ενός ποταμού. Όταν κινείται αντίθετα προς το ρεύμα χρειάζεται, για να διανύσει την απόσταση ΑΒ, 12 h περισσότερο από το χρόνο που χρειάζεται όταν κινείται με τη φορά του ρεύματος. Αν η απόσταση ΑΒ είναι 72 km και η ταχύτητα που αναπτύσσει το ίδιο το ποταμόπλοιο είναι πάντα η ίδια και ίση με 8 km/h, να βρεθεί η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού.

8. Μπαταρία έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη $E = 8 \text{ V}$ και παρουσιάζει έσωτερική αντίσταση $r = 2 \text{ Ohm}$. Να βρεθεί η αντίσταση R που πρέπει να συνδέσουμε με τους πόλους της μπαταρίας έτσι, ώστε η ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα να ισούται με $P = 6 \text{ W}$.

$$\left(\text{Ένταση ρεύματος: } I = \frac{E}{R + r}, \text{ ισχύς } P = R \cdot I^2 \right).$$

9. Αντιαεροπορικό βλήμα ρίχτηκε κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 850 m/s. Μετά 10 s άκουστηκε η έκρηξη του βλήματος. Να βρεθεί σε τί ύψος έγινε η έκρηξη. (Ταχύτητα ήχου 340 m/s).

10. Δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Το ύψος του είναι 10 dm, η διαγώνιος του $10\sqrt{2}$ dm και το δοχείο χωράει 480 κιλά νερό. Να βρεθούν οι διαστάσεις της βάσεως του δοχείου.

11. Κόλινος τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 408 cm^3 . Το ύψος της πυραμίδας είναι 12 cm και η πλευρά της μιάς βάσεως ίση με 9 cm. Να βρεθεί η πλευρά της άλλης βάσεως.

12. 1) Να αποδειχθεί ότι ένας μόνον αριθμός $z_0 \in \mathbb{C}$ υπάρχει τέτοιος ώστε $\forall z \in \mathbb{C}$ να έχουμε $z_0 + z = z$.

(Με το σύμβολο $\mathbb{C}$ εννοούμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών).

II) Να αποδειχθεί ότι ένας μόνον αριθμός $z_1 \in \mathbb{C}$ υπάρχει, τέτοιος ώστε, $\forall z \in \mathbb{C}$, να έχουμε $z_1 \cdot z = z$.

13. Υπάρχει αριθμός άλλος, εκτός των 1 και -1 , που να ισούται με τον αντίστροφό του;

14. Αν για τους μιγαδικούς z_1 και z_2 έχουμε $|z_1| = |z_2| = 1$, ν' αποδειχθεί ότι ο μιγαδικός $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός.

(Υπόδειξη: Να λάβετε υπόψη ότι $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z| = |\bar{z}|$ και ν' αποδείξετε ότι $z = \bar{z}$).

15. Αν οι μιγαδικοί x, y, ω έχουν μέτρο 1, ν' αποδειχθεί ότι

$$|x + y + \omega| = |xy + y\omega + \omega x|.$$

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$).

16. Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου αν $|1 - z| = |i - z|$.

17. Να βρείτε το σύνολο των σημείων $P(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία έχουμε $z + \bar{z} = |z|$.

18. Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{I)} \quad \alpha(\beta - \gamma)x^2 + \beta(\gamma - \alpha)x + \gamma(\alpha - \beta) = 0, [\alpha(\beta - \gamma) \neq 0].$$

$$\text{II)} \quad (\alpha + \beta)^2 x^2 - (\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2)x - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = 0, (\alpha + \beta \neq 0).$$

$$\text{III)} \quad (\alpha + \beta)x^2 - (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x + 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0, (\alpha + \beta \neq 0).$$

19. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$. να βρεθεί το πλήθος των λύσεων στο σύνολο $\mathbb{R}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις: I) όταν $\alpha\gamma < 0$ · II) όταν $\alpha\gamma > 0$ και $\Delta > 0$ ·

III) όταν $\gamma = 0$ · IV) όταν $\Delta = 0$ ($\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$).

(Υπόδειξη: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις: $x \geq 0$ και $x < 0$).

20. Ν' αποδειχθεί ότι είναι δυνατό να βρούμε δύο ρητούς θετικούς x και y , τέτοιους ώστε $30 - 12\sqrt{6} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ και ακολούθως ο αριθμός $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$ να γραφεί απλούστερα.

21. Θεωρούμε την εξίσωση $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Χωρίς να προσδιοριστούν οι ρίζες της x_1 και x_2 , να κατασκευασθεί εξίσωση 2ου βαθμού ή όποια να έχει ως ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ και $\rho_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ και άλλη με ρίζες $x' = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}$ και $x'' = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$.

22. Νά επιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις: I) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ · II) $4x^4 - 17x^2 + 18 = 0$ ·
III) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$ · IV) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

23. Νά επιλυθοῦν γραφικά τὰ συστήματα:

I) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 2x - 3$ · II) $y = 2x^2$, $y = 3x - 1$ · III) $y = x^2 + 2x$, $y = 5x - 2$.

24. Νά επιλυθοῦν τὰ συστήματα:

I) $\frac{y}{2} = \frac{3}{4}x$, $xy = 54$ · II) $3x^2 + 4y^2 = 16$, $3y^2 + 4x^2 = 19$ ·

III) $3x - 3y = 9$, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ · IV) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$, $2x + 2y = 10$ ·

V) $xy = 9$, $x^2 + y^2 = 82$ · VI) $xy = 20$, $2x^2 - 6xy + 2y^2 = 88$ ·

VII) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} = \frac{10}{9}$, $xy = 6$ · VIII) $xy + 41y = 456$, $4y + 2x = 42$ ·

IX) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 149$, $2x + 2y = 40$ · X) $\frac{15}{3x+9} + \frac{4}{2y-2} = 2$, $\frac{1}{x} - \frac{3}{4y} = \frac{1}{4}$ ·

XI) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \alpha$, $xy = \alpha^2 - \beta^2$ · XII) $\alpha\beta x - \alpha\beta y = \alpha^2 - \beta^2$, $xy - 1 = 0$.

25. Τό γινόμενο δυό αριθμῶν εἶναι 120 καί ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων τους 44. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

26. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 13 cm. Ἄν ἐλαττώσουμε τό μήκος τῆς μιᾶς καθέτου κατά 2 cm καί αὐξήσουμε τό μήκος τῆς ἄλλης κατά 1 cm βρίσκουμε τρίγωνο ἰσοεμβαδικό μέ τό ἀρχικό. Νά βρεθοῦν οἱ κάθετες πλευρές τοῦ τριγώνου.

27. Νά ὁρισθοῦν οἱ πραγματικές τιμές τοῦ λ γιά τίς ὁποῖες οἱ ἐξισώσεις πού προκύπτουν ἀπό τή σχέση $(\lambda - 1)x^4 - 4x^2 + (\lambda + 2) = 0$ νά ἔχουν ὅλες τίς ρίζες τους πραγματικές.

28. Νά επιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις: I) $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ · II) $\sqrt{x^2 - 3} + 5 = x$ ·

III) $\sqrt{x^2 - x + 1} = x - 2$ · IV) $\sqrt{4x + 9} - \sqrt{2x - 4} = \sqrt{2x + 1}$ ·

V) $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{2x - 4} = 3$ · VI) $\sqrt{\frac{x}{2} - 1} - \sqrt{\frac{x}{2} - 5} = 1$ ·

VII) $\sqrt{6x + 8} + \sqrt{3x + 5} = 7$ · VIII) $\sqrt{5x - 2} - \sqrt{5x - 4} = 3$ ·

IX) $\frac{\sqrt{2x+7} + \sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{2x-5}} = \frac{3}{2}$ · X) $\frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{1-x^2}} = x$ ·

29. Νά επιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις: I) $(2x - 3)(x + 1)^3(-3x + 5)(2x^2 + 7) < 0$ ·

II) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x^2 + 18x - 9 < 0$ (νά γίνει τό α' μέλος γινόμενο παραγόντων)·

III) $x^7 + 8x^4 - x^3 - 8 < 0$ · IV) $x^6 - x^4 - 4x^2 + 4 > 0$.

30. Νά επιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

I) $\frac{x^2 - 4x + 3}{3 - 2x} < 1 - x$ καί II) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} < \frac{3}{x-3}$

καί νά ἐξετασθεῖ ἂν ἔχουν κοινές λύσεις.

(Ἑπόδειξη: Ἀφοῦ γράψετε κάθε ἀνίσωση μέ τή μορφή $\frac{A}{B} < 0$ ἀκολούθως νά γράψετε $\frac{A}{B} < 0 \iff A \cdot B < 0$).

31. Ἄν οἱ ἀριθμοί γ καί δ εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $(x - \alpha)(x - \beta) - \kappa = 0$, τότε οἱ α καί β θά εἶναι ρίζες τῆς $(x - \gamma)(x - \delta) + \kappa = 0$.

(Ἑπόδειξη: Παρατηρήστε ὅτι, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση, πρέπει νά ἰσχύει ἡ ταυτότητα $(x - \alpha)(x - \beta) - \kappa = (x - \gamma)(x - \delta)$.)

32. Νά επιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$.

(Ἑπόδειξη: Νά κάνετε τήν ἀντικατάσταση $x^2 + x = y$).

33. Νά επιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x(x - 1)(x - 2) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)$.

(Ἑπόδειξη: Παρατηρήστε ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει ὡς ρίζα τόν ἀριθμό α).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ. ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 13

ΜΕΤΡΗΣΗ ΓΩΝΙΑΣ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

13 · 1 Μέτρηση γωνίας μέσω κυκλικού τόξου.

Ἐπειδὴ στὴ Γεωμετρία ἡ ὀρθή γωνία εἶναι ἐκείνη πρὸς τὴν ὁποία συγκρίνομε ὅλες τὶς ἄλλες γωνίες, θὰ ἦταν φυσικὸ νὰ χρησιμοποιήσουμε ὡς μονάδα γιὰ τὴ μέτρηση τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθή γωνία.

Ἐντούτοις, στὶς πρακτικὲς ἐφαρμογές τουλάχιστο, μιὰ τέτοια μονάδα γωνιῶν, πού «καλύπτει» τὸ τέταρτο ἑνὸς ἐπιπέδου, δέν εἶναι κατάλληλη· διότι λόγω τοῦ μεγέθους τῆς δέν ἐπιτρέπει νὰ γίνεται ἄμεσα αἰσθητὴ μιὰ μικρὴ διαφορά ἀνάμεσα σέ γωνίες.

Γι' αὐτὸ χρησιμοποιοῦνται ὡς μονάδες καὶ τρεῖς ἄλλες γωνίες, μικρότερες ἀπὸ ὀρθή, τὶς ὁποῖες περιγράφουμε ἀμέσως παρακάτω.

Ἐχει ἐπικρατήσει ἐδῶ καὶ χιλιάδες χρόνια νὰ χωρίζουμε μιὰ περιφέρεια κύκλου σέ 360 ἴσα μέρη· καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη τὸ ὀνομάζουμε τόξο μιᾶς **μοίρας**. Ὄταν ὁμως λέμε ὅτι τὸ κυκλικὸ τόξο $\widehat{AB}$, σ' ἓνα κύκλο (Κ) (σχ. 13 · 1), εἶναι π.χ. τόξο 45 μοιρῶν (συμβολικὰ 45°), δέν δίνουμε τὸ μῆκος τοῦ τόξου, δηλαδὴ τὸ μέτρο του μέ βάσει ἐκεῖνο τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχομε γενικὰ ἐκλέξει ὡς μονάδα μήκους (π.χ. τὸ cm ἢ τὸ m)· δηλώνουμε ἀπλῶς ὅτι πρόκειται γιὰ ἓνα τόξο, σ' ἓναν κάποιον κύκλο, τὸ ὁποῖο ἰσοῦται μέ τὰ $\frac{45}{360}$ τῆς περιφέρειας αὐτοῦ τοῦ κύκλου.

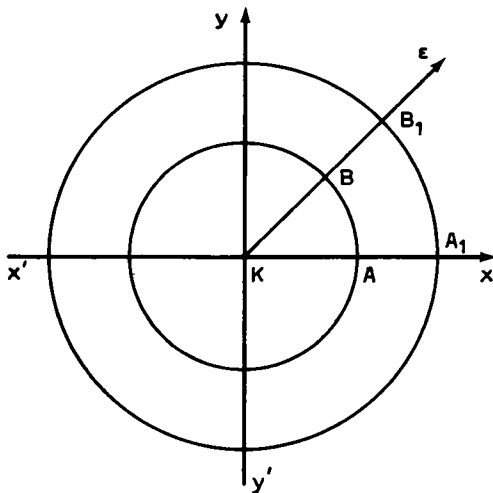
Ἐξάλλου, ὅπως μαθαίνομε στὴ Γεωμετρία, δυὸ ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες, στὸν ἴδιο κύκλο ἢ σέ ἴσους κύκλους, ἀντιστοιχίζονται σέ ἴσα τόξα καὶ γενικότερα ὁ λόγος δύο ἐπικέντρων γωνιῶν, στὸν ἴδιο κύκλο, ἰσοῦται μέ τὸ λόγο τῶν ἀντιστοιχῶν τόξων*. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ πάρουμε ὡς μονάδα γωνιῶν τὴν ἐπικέντρη γωνία πού ἀντιστοιχεῖ σ' ἓνα κυκλικὸ τόξο μιᾶς μοίρας καὶ νὰ θεωροῦμε

* Ἀντίστοιχο τόξο μιᾶς ἐπικέντρης γωνίας λέγεται τὸ ἐντὸς τῆς γωνίας τόξο τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖο ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα τομῆς τῆς περιφέρειας μέ τὶς πλευρές τῆς γωνίας.

ώς μέτρο μιās γωνίας τό μέτρο σέ μοίρες του αντίστοιχου κυκλικού τόξου σ' έναν κύκλο όπου ή γωνία είναι επίκεντρη (σχ. 13·1).

Είναι γνωστό ότι κάθε μοίρα χωρίζεται σέ 60 πρώτα λεπτά ($1^\circ = 60'$) καί κάθε πρώτο λεπτό σέ 60 δεύτερα ($1' = 60''$).

Έχει χρησιμοποιηθεί επίσης, για τή μέτρηση τόξων ενός καί του ίδιου κύκλου, τό $\frac{1}{400}$ τής περιφέρειας του χρησιμοποιουμένου κάθε φορά κύκλου. Αυτό τό τόξο λέγεται τόξο ενός βαθμού (συμβολικά 1^β). Ο βαθμός υποδιαιρείται σέ δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά.



Σχ. 13·1.

Υπάρχει τέλος ένας ακόμα, συχνά χρησιμοποιούμενος, τρόπος για τή μέτρηση κυκλικών τόξων καί γωνιών.

Εκλέγομε ως μοναδιαίο τόξο, πάνω σέ μιá οποιαδήποτε κυκλική περιφέρεια, ένα τόξο του οποίου τό μήκος ισούται μέ τό μήκος τής ακτίνας του κύκλου που χρησιμοποιούμε.

Ένα τέτοιο τόξο λέγεται τόξο ενός **ακτινίου** (radian, 1 rad) καί ή επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σ' αυτό τό τόξο λέγεται γωνία ενός **ακτινίου**.

Επειδή τό μήκος τής περιφέρειας κύκλου ισούται μέ $2\pi r$, όπου r τό μήκος τής ακτίνας καί π ό γνωστός αριθμός 3,14..., συμπεραίνουμε ότι ή περιφέρεια του όποιοιδήποτε κύκλου έχει μέτρο $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ ακτίνια· έτσι κάθε περιφέρεια κύκλου «εὐθειοποιημένη» έχει μήκος ίσο προς 2π (6,28 περίπου) ακτίνες της.

Η ήμιπεριφέρεια ισούται μέ π rad καί τό τέταρτο περιφέρειας μέ $\frac{\pi}{2}$ rad. Αντίστοιχα μιá **πλήρης γωνία** έχει μέτρο σέ ακτίνια ίσο μέ 2π , μιá **άπλωτή (εὐθεία) γωνία** έχει μέτρο ίσο μέ π καί μιá **όρθή γωνία** ίσο μέ $\frac{\pi}{2}$.

Αν μ , α και β είναι τὰ μέτρα ενός τόξου ή μιᾶς γωνίας, σέ μοίρες, ἀκτίνια καί βαθμούς ἀντίστοιχα, τότε ἰσχύει γι' αὐτά, ὅπως εὐκόλα συνάγεται, ή παρακάτω σχέση:

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{200}$$

(Τό μήκος τόξου μιᾶς μοίρας, σ' ἓναν κύκλο μέ ἀκτίνα r , μέ τήν κοινή μονάδα μήκους, εἶναι $\frac{2\pi r}{360}$ καί συνεπῶς τό μήκος τῶν μ° θά εἶναι $\frac{2\pi r}{360} \cdot \mu = \frac{\pi r \mu}{180}$. Ἐξάλλου τὰ α ἀκτίνια ἔχουν μήκος αr . ἄρα $\frac{\pi r \mu}{180} = r \alpha$ ή $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$).

13·2 Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί όξείας γωνίας.

α) Ἡμίτονο καί συνημίτονο όξείας μή μηδενικῆς γωνίας. Θεωροῦμε μιᾶ όξεία γωνία $\widehat{\Gamma}$ (σχ. 13·2) καί ἀπό τὰ διάφορα σημεῖα $B, B_1, B_2, \dots$ τῆς μιᾶς πλευρᾶς, π.χ. τῆς $\Gamma\eta$, φέρνομε τίς κάθετες $BA, BA_1, BA_2, \dots$, πρὸς τήν ἄλλη πλευρά, τή $\Gamma\epsilon$.

Ἐχομε ἔτσι σχηματίσει μιᾶ κλάση ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ($\triangle \widehat{\Gamma}AB, \triangle \widehat{\Gamma}AB_1, \triangle \widehat{\Gamma}AB_2, \dots$).

Γνωρίζομε ἀπό τή Γεωμετρία ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{AB}{\Gamma B} = \frac{A_1 B_1}{\Gamma B_1} = \frac{A_2 B_2}{\Gamma B_2} = \dots \quad (1) \quad \text{καί}$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Gamma A_1}{\Gamma B_1} = \frac{\Gamma A_2}{\Gamma B_2} = \dots \quad (2).$$

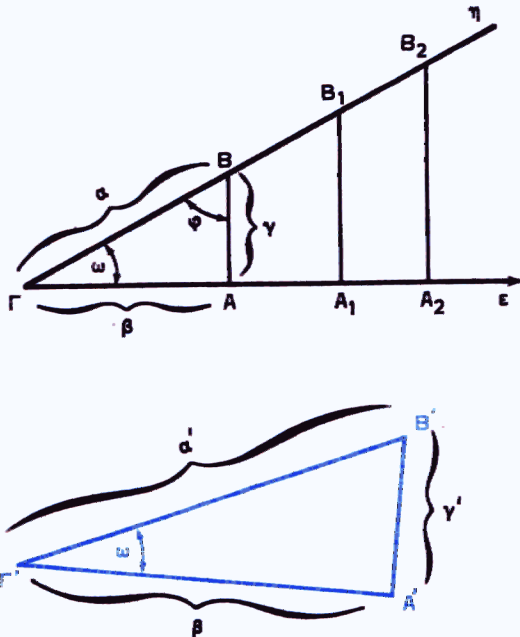
Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι σέ μιᾶ δοσμένη ὄχι μηδενική όξεία γωνία $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοιχίζονται, μέ τόν προηγούμενο τρόπο, δύο θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί λ_1 καί λ_2 ($0 < \lambda_1 < 1$ καί $0 < \lambda_2 < 1$) ἀπό τούς ὁποίους ὁ πρῶτος ἰσοῦται μέ τό λόγο τῆς ἀποστάσεως BA ενός σημείου B τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας ἀπό τήν ἄλλη τῆς πλευρά, πρὸς τήν ἀπόσταση ΓB αὐτοῦ τοῦ σημείου ἀπό τήν κορυφή Γ τῆς γωνίας· ὁ δεύτερος ἰσοῦται μέ τό λόγο τῆς προβολῆς ΓA τῆς ΓB πάνω στή $\Gamma\epsilon$, πρὸς τή ΓB .

Ἀντίστροφα, σ' ἓναν ὀρισμένο θετικό ἀριθμό λ (μέ $0 < \lambda < 1$) ἀντιστοιχίζεται μέ τόν προηγούμενο τρόπο, ὅταν δηλαδή ὁ λ ἔχει τό νόημα τοῦ ἑνός ή τοῦ ἄλλου λόγου, μιᾶ καί μόνο γωνία $\widehat{\omega}$ · διότι ἂν κατασκευάσομε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $A'B'\Gamma'$ (σχ. 13·2) τέτοια ὥστε $\lambda = \frac{AB}{\Gamma B} = \frac{A'B'}{\Gamma'B'}$

$\left(\text{ή } \lambda = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Gamma' A'}{\Gamma' B'} \right)$, τὰ τρίγωνα θά είναι ὁμοία καί θά ἔχομε $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$.

Ὡστε μέ κάθε ὀξεία μή μηδενική γωνία $\widehat{\omega}$ συνδέονται δύο πραγματικοί θετικοί ἀριθμοί, καθένας ἀπό τούς ὁποίους μπορεῖ νά χαρακτηρίζει τή γωνία.

Ὁ πρῶτος $\left(\lambda_1 = \frac{\gamma}{\alpha} \right)$ λέγεται ἡμίτονο τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ (συμβολικά: $\eta\mu\omega$) καί ὁ δεύτερος $\left(\lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha} \right)$ συνημίτονο τῆς $\widehat{\omega}$ (συμβολικά: $\sigma\upsilon\nu\omega$).



Σχ. 13-2.

Ἔτσι, σύμφωνα καί μέ τά παραπάνω, μπορούμε νά διατυπώσουμε τούς ἀκόλουθους ὁρισμούς:

Ἡμίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι κάθετης πλευρᾶς πρὸς τήν ὑποτείνουσα.

Συνημίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο λέγεται ὁ λόγος τῆς προσκείμενης κάθετης πλευρᾶς πρὸς τήν ὑποτείνουσα.

Ἄν δηλαδή $AB\Gamma$ εἶναι ἓνα ὀρθογώνιο τρίγωνο (σχ. 13-2) μέ $\widehat{A} = 1^\circ$ καί εἶναι γ, β, α τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν $AB, \Gamma A$ καί ΓB ἀντιστοίχως καί $\widehat{\omega}, \widehat{\varphi}$ τὰ μέτρα σέ μοῖρες τῶν γωνιῶν $\widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{B}$, τότε:

$\eta\mu\widehat{\omega} = \sigma\upsilon\nu\widehat{\varphi} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\widehat{\varphi} = \sigma\upsilon\nu\widehat{\omega} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 90^\circ$	τύποι (I).
---	------------

Είναι πάντα $0 < \eta\mu x < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ για τήν οποιαδήποτε όχι μηδενική όξεία γωνία x .

Γιά τή μηδενική γωνία $\widehat{\varphi}$ ($\widehat{\varphi} = 0^\circ$) όρίζομε $\eta\mu\varphi^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu\varphi^\circ = 1$ και για τήν όρθή γωνία $\widehat{\omega}$ ($\widehat{\omega} = 90^\circ$), $\eta\mu\omega^\circ = 1$, $\sigma\upsilon\nu\omega^\circ = 0$.

Σημαντική παρατήρηση (ιδιότητα). Άπό τούς τύπους (I) βλέπομε άμέσως ότι: Τό ήμίτονο μιās όξείας γωνίας ίσοῦται μέ τό συνημίτονο τής συμπληρωματικής της γωνίας και τό συνημίτονο μέ τό ήμίτονο τής συμπληρωματικής. Μποροῦμε δηλαδή για κάθε όξεία γωνία x νά γράφομε:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(90^\circ - x) \quad (I')$$

β) Έφαπτομένη και συνεφαπτομένη όξείας γωνίας. Όπως οί λόγοι $\frac{\gamma}{\alpha}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ μένουν σταθεροί για κάθε γωνία $\widehat{\omega}$ (σχ. 13.2), τό ίδιο σταθερός μένει και ό λόγος $\frac{\gamma}{\beta}$, καθώς επίσης και ό αντίστροφός του $\frac{\beta}{\gamma}$.

Ό πρώτος λόγος λέγεται έφαπτομένη και ό δεύτερος συνεφαπτομένη τής όξείας γωνίας $\widehat{\omega}$ (σχ. 13.2). (Συμβολικά: $\epsilon\varphi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{\beta}{\gamma}$).

Μποροῦμε λοιπόν νά διατυπώσομε τούς ακόλουθους όρισμούς:

Έφαπτομένη μιās όξείας γωνίας σέ όρθογώνιο τρίγωνο λέγεται ό λόγος τής άπέναντι κάθετης πλευρᾶς πρὸς τήν προσκείμενη.

Συνεφαπτομένη μιās όξείας γωνίας σέ όρθογώνιο τρίγωνο λέγεται ό λόγος τής προσκείμενης κάθετης πλευρᾶς πρὸς τήν άπέναντι.

Όστε: ἂν $AB\Gamma$ όρθογώνιο τρίγωνο (σχ. 13.2) μέ $\widehat{A} = 1^\circ$ και $\widehat{\omega} = \widehat{\Gamma}$, $\widehat{\varphi} = \widehat{B}$, $\gamma = (AB)$, $\beta = (GA)$ και $\alpha = (B\Gamma)$, τότε :

$$\epsilon\varphi\widehat{\omega} = \sigma\varphi\widehat{\varphi} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \epsilon\varphi\widehat{\varphi} = \sigma\varphi\widehat{\omega} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \left| \quad \widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 90^\circ \right. \quad (II)$$

Ή έφαπτομένη καθώς και ή συνεφαπτομένη όξείας γωνίας $\neq 0^\circ$ μπορεί νά είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός, διότι ό λόγος $\frac{\gamma}{\beta}$ (και έπομένως και ό αντίστροφος) μπορεί νά πάρει οποιαδήποτε θετική τιμή. Όρίζομε έπιπλέον ως $\epsilon\varphi 0^\circ = \sigma\varphi 90^\circ = 0$ δέν όρίζεται όμως $\epsilon\varphi 90^\circ$ και $\sigma\varphi 0^\circ$.

Τό ήμίτονο, τό συνημίτονο, ή έφαπτομένη και ή συνεφαπτομένη μιās (όξείας) γωνίας λέγονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** τής γωνίας.

Σημαντική παρατήρηση (ιδιότητα): Άπό τούς τύπους (II) συμπεραίνομε ότι : Ή έφαπτομένη μιās μή μηδενικής όξείας γωνίας ίσοῦται μέ τή συνεφαπτομένη τής συμπληρωματικής της γωνίας και ή συνεφαπτομένη μέ τήν έφαπτομένη τής συμπληρωματικής.

Μπορούμε δηλαδή για κάθε όξεία γωνία x να γράφουμε:

$$\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi(90^\circ - x) \quad \text{και} \quad \sigma\varphi x = \varepsilon\varphi(90^\circ - x) \quad (II')$$

13·3 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. *Νά βρεθούν τά μέτρα σέ άκτίνια τών γωνιών $\mu_1 = 18^\circ$, $\mu_2 = 30^\circ$, $\mu_3 = 36^\circ$, $\mu_4 = 45^\circ$, $\mu_5 = 54^\circ$, $\mu_6 = 60^\circ$, $\mu_7 = 72^\circ$, $\mu_8 = 120^\circ$, $\mu_9 = 135^\circ$ και $\mu_{10} = 150^\circ$.*

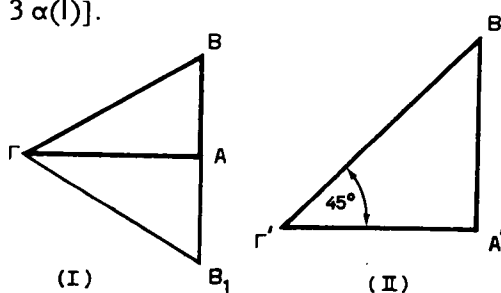
Έχουμε: $\frac{\alpha_1}{\pi} = \frac{18}{180} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$ rad. Όμοια βρίσκουμε:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{5} \text{ rad}, \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, \quad \alpha_5 = \frac{3\pi}{10} \text{ rad}, \quad \alpha_6 = \frac{\pi}{3} \text{ rad},$$

$$\alpha_7 = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}, \quad \alpha_8 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}, \quad \alpha_9 = \frac{3\pi}{4} \text{ και } \alpha_{10} = \frac{5\pi}{6}.$$

2. *Νά βρεθούν οί τριγωνομετρικοί αριθμοί τών γωνιών 30° , 45° και 60° .*

1) Θεωρούμε όρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) μέ γωνία $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$, όπότε ή $\widehat{B} = 60^\circ$ [σχ. 13·3 α(1)].



Σχ. 13·3α.

Όρίζουμε τό B_1 συμμετρικό του B ως προς τό A . τό τρίγωνο τότε $B\Gamma B_1$ είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο (γιατί;). Έτσι έχουμε $AB = \frac{1}{2} BB_1 = \frac{1}{2} B\Gamma$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Έξάλλου } (\Gamma A)^2 &= (B\Gamma)^2 - (AB)^2 = (B\Gamma)^2 - \left(\frac{1}{2} B\Gamma\right)^2 = (B\Gamma)^2 - \frac{1}{4} (B\Gamma)^2 = \\ &= \frac{3(B\Gamma)^2}{4} \Rightarrow \Gamma A = \frac{B\Gamma \sqrt{3}}{2} \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Έπομένως } \eta\mu 30^\circ = \eta\mu \widehat{A\Gamma B} = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 30^\circ &= \eta\mu 60^\circ = \frac{\Gamma A}{B\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon\varphi 30^\circ = \sigma\varphi 60^\circ = \frac{AB}{\Gamma A} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot B\Gamma}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi 30^\circ = \varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{\Gamma A}{AB} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

II) Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A'B'G'$ ($\widehat{A'} = 1^\circ$), στο οποίο συνεπώς οι όξείες γωνίες θά είναι 45° ή καθεμιά [σχ. 13.3 α (II)]. *Αν κ ή μιά κάθετη πλευρά τότε: $(B'G')^2 = (A'G')^2 + (A'B')^2 = 2\kappa^2 \Rightarrow B'G' = \kappa\sqrt{2}$.

$$\text{*Αρα } \eta\mu 45^\circ = \frac{\kappa}{\kappa\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ \text{ και } \epsilon\phi 45^\circ = \sigma\phi 45^\circ = \frac{\kappa}{\kappa} = 1.$$

*Ωστε:

$$\begin{aligned} \eta\mu 30^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 30^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta\mu 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \epsilon\phi 30^\circ &= \sigma\phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma\phi 30^\circ = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \epsilon\phi 45^\circ = \sigma\phi 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

3. Νά κατασκευασθούν οι όξείες γωνίες φ, x, y, ω αν

$$I) \eta\mu \varphi = \frac{3}{5} \cdot \quad II) \sin x = 0,7 \cdot \quad III) \epsilon\phi y = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \quad IV) \sigma\phi \omega = \frac{3}{4}.$$

*Αρχικά πάνω σέ μίαν εϋθεία (ε) παίρνομε διαδοχικά τμήματα ίσα πρὸς ἓνα τμήμα κ (σχ. 13.3β)· καὶ ἄς εἶναι:

$$AB = 10\kappa, AG = 6\kappa, AD = 7\kappa, AE = 8\kappa, AZ = 4\kappa.$$

$$\text{Θά ἔχομε: } \frac{AG}{AB} = \frac{6\kappa}{10\kappa} = \frac{3}{5}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{7\kappa}{10\kappa} = \frac{7}{10} = 0,7,$$

$$\frac{AG}{AE} = \frac{6\kappa}{8\kappa} = \frac{3}{4}.$$

Γιά νά σχεδιάσουμε τή γωνία $\widehat{\varphi}$ φέρομε στό Γ ἡμιευθεία $\Gamma\epsilon_1$ κάθετη πρὸς τήν (ε) [$\Gamma\epsilon_1 \perp (\epsilon)$] καὶ μέ κέντρο τό Α καὶ ἀκτίνα ἴση πρὸς AB γράφομε κύκλο (σχ. 13.3β). *Αν αὐτός ὁ κύκλος τέμνει τή $\Gamma\epsilon_1$ στό Κ, τότε γωνία $\widehat{AKG} = \widehat{\varphi}$ · διότι $\eta\mu \widehat{AKG} = \frac{AG}{AK} = \frac{AG}{AB} = \frac{3}{5}$.

Γιά τή γωνία $\widehat{x}$ φέρομε τήν ἡμιευθεία $\Delta\epsilon_2$ κάθετη στήν (ε) καὶ ὀρίζομε τό σημεῖο τομῆς Λ μέ τόν κύκλο (Α, ΑΒ)· γωνία x εἶναι ἡ γωνία $\widehat{\Delta\Lambda\Lambda}$, διότι $\sin \widehat{\Delta\Lambda\Lambda} = \frac{AD}{AL} = \frac{AD}{AB} = 0,7$.

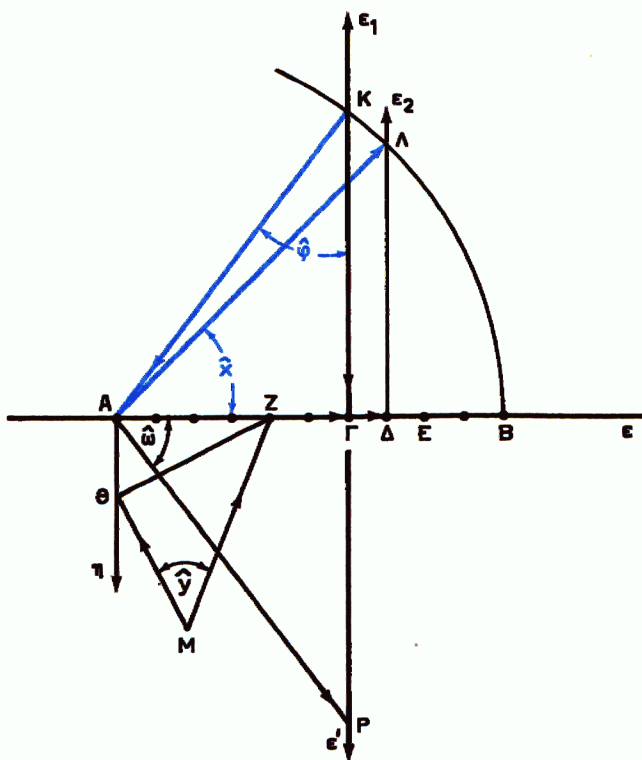
Γιά τή σχεδίαση τῆς $\widehat{\omega}$ παίρνομε πάνω στή $\Gamma\epsilon'$, ἡμιευθεία ἀντίθετη τῆς $\Gamma\epsilon_1$, τμήμα $\Gamma P = AE$ · τότε γωνία $\widehat{\Gamma\Lambda P} = \widehat{\omega}$, διότι $\sigma\phi \omega = \frac{AG}{\Gamma P} = \frac{AG}{AE} = \frac{3}{4}$.

Μένει τώρα νά σχεδιάσουμε τή γωνία $\widehat{y}$, γιά τήν ὁποία $\epsilon\phi y = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Πρὸς τοῦτο πρέπει ἀρχικά νά κατασκευάσουμε τμήμα ἴσο μέ $\kappa\sqrt{5}$ ἢ ἓνα πολλαπλάσιο τοῦ $\kappa\sqrt{5}$. Φέρομε λοιπόν στό Α τήν Αη κάθετη πρὸς τήν Αε καὶ ὀρίζομε, πάνω στήν Αη, τμήμα ΑΘ ἴσο π.χ. μέ 2κ . *Ἐτσι προκύπτει:

$$(\Theta Z)^2 = (A\Theta)^2 + (AZ)^2 = (2\kappa)^2 + (4\kappa)^2 = 20\kappa^2 \Rightarrow \Theta Z = 2\kappa\sqrt{5}.$$

Στό σημείο Θ υψώνουμε τώρα κάθετη προς τη ΘΖ και παίρνουμε πάνω σ' αυτή τό τμήμα ΘΜ ίσο μέ 4κ.

Ἡ ζητούμενη γωνία εἶναι ἡ $\widehat{\Theta\hat{M}Z}$, διότι $\varepsilon\varphi \gamma = \frac{z\theta}{\theta m} = \frac{2\kappa\sqrt{5}}{4\kappa} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



Σχ. 13.3β.

13 · 4 Ἀσκήσεις.

1. *Αν οι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ είναι ως οι αριθμοί 4, 5 και 6, αν δηλαδή

$$\frac{\widehat{A}}{4} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{\Gamma}}{6}, \text{ να βρεθούν τα μέτρα τους σε μοίρες, ακτίνια και βαθμούς.}$$

2. Ποιό είναι το μέτρο σε μοίρες του τόξου: Ι) ενός ακτινίου· ΙΙ) $\frac{7\pi}{15}$ ακτινίων.

3. Τό άθροισμα δύο τόξων ίσοῦται μέ 60° καί ἡ διαφορά τους μέ $0,18\pi \text{ rad}$. Νά βρεθοῦν τά μέτρα τῶν τόξων σέ μοῖρες καί σέ ἀκτίνια.

4. Νά κατασκευασθοῦν οἱ ὀξείες γωνίες φ , ω καὶ γ γιὰ τίς ὁποῖες ἔχομε:

I) $\eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}$ · II) $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{6}{13}$ · III) $\sigma\upsilon\nu\gamma = 0,9$.

Υπάρχει άραγε γωνία της οποίας τό ήμίτονο ίσοῦται μέ $\frac{\sqrt{50}}{7}$;

5. Νά κατασκευασθοῦν οἱ ὀξείες γωνίες θ_1 καὶ θ_2 γιὰ τίς ὁποῖες ἔχομε:

$$I) \varepsilon_{\varphi} \theta_1 = \sqrt{5} \cdot \quad II) \sigma_{\varphi} \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 14

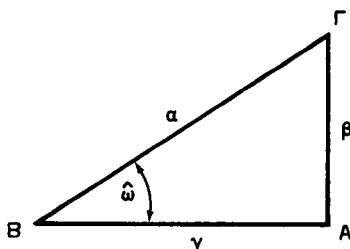
ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΑΥΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΓΩΝΙΑ

14·1 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμῶν ὀξείας γωνίας.

Ἄν $\hat{\omega}$ μιὰ ὀξεία γωνία σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1^\circ$, $\hat{\omega} = \hat{B}$: σχ. 14.1), θά ἔχομε, ὅπως πλέον γνωρίζομε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\beta}{\alpha} \text{ (I) καὶ } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\gamma}{\alpha} \text{ (II)}.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (I) καὶ (II) παίρνομε: $(\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 =$
 $= \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1.$



Σχ. 14.1.

Ὡστε: γιὰ κάθε ὀξεία γωνία ω ἰσχύει ἡ σχέση:

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	θεμελιώδης σχέση (1)
---	----------------------

(Ἡ σχέση (1) ἰσχύει καὶ γιὰ $\omega^\circ = 0^\circ$ ἢ $\omega^\circ = 90^\circ$).

Ἄν παρατηρήσομε τίς γνωστὲς ἐπίσης ἰσότητες $\epsilon\phi\omega = \frac{\beta}{\gamma}$ (III) καὶ $\sigma\phi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$ (IV) βλέπομε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς μὴ μηδενικῆς ὀξείας γωνίας εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι. Γι' αὐτὸ γράφομε:

$\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$	θεμελιώδης σχέση (2)
---	----------------------

Ἐξάλλου ἡ ἰσότητα (III) μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἑξῆς :

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta/\alpha}{\gamma/\alpha} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ καὶ ἡ (IV) } \sigma\phi\omega = \frac{\gamma/\alpha}{\beta/\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}.$$

Ὡστε:

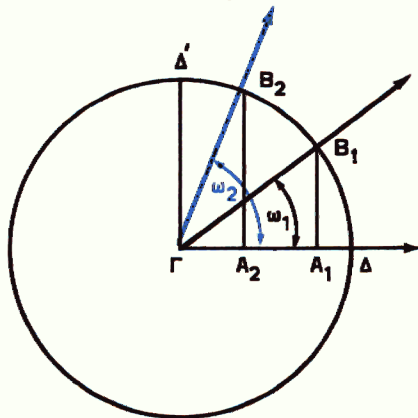
$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ καὶ } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	θεμελιώδεις σχέσεις (3)
--	-------------------------

14·2 Μεταβολή των τριγωνομετρικών αριθμών, όταν η γωνία $\hat{\omega}$ μεταβάλλεται στο διάστημα $[0^\circ, 90^\circ]^*$.

Όπως επανειλημμένα αναφέραμε πιο πάνω, τό ήμίτονο και τό συνημίτονο μιᾶς όξείας γωνίας είναι αριθμοί που μεταβάλλονται μέσα στο διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή έχουμε: $0 \leq \eta\mu x \leq 1$ και $0 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$. (όταν συμπεριλάβομε και τίς γωνίες 0° και 90°).

Η έφαπτομένη όμως, όπως και η συνεφαπτομένη, μπορεί νά παίρνει όποια-δήποτε θετική πραγματική τιμή· μεταβάλλεται και ή μιά και ή άλλη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Ής πάρομε τώρα δυό επίκεντρες όξείες γωνίες $\hat{\omega}_1 = \hat{\Delta\Gamma B_1}$ και $\hat{\omega}_2 = \hat{\Delta\Gamma B_2}$ μέ $\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2$ (σχ. 14.2), σ' ένα κύκλο (Γ, ρ) . Γιά νά βρούμε τούς τριγωνομετρικούς αριθμούς αυτών των γωνιών θά προβάλομε τά σημεία B_1 και B_2 πάνω στην ήμιευθεία $\Gamma\Delta$ και ἄς είναι A_1 και A_2 οί προβολές των B_1 και B_2 αντίστοιχως.



Σχ. 14.2.

Ήπό μιά έπισκόπηση τοῦ σχήματος 14.2 είναι προφανείς οί σχέσεις $A_1B_1 < A_2B_2$ (1), $\Gamma A_1 > \Gamma A_2$ (2) από τίς όποίες έχουμε έπίσης:

$$\frac{A_1B_1}{\rho} < \frac{A_2B_2}{\rho} \quad (1') \quad \text{και} \quad \frac{\Gamma A_1}{\rho} > \frac{\Gamma A_2}{\rho} \quad (2'),$$

όπου ρ ή ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

$$\text{Ήλλά} \quad \frac{A_1B_1}{\rho} = \frac{A_1B_1}{\Gamma B_1} = \eta\mu \omega_1, \quad \frac{A_2B_2}{\rho} = \eta\mu \omega_2, \quad \frac{\Gamma A_1}{\rho} = \frac{\Gamma A_1}{\Gamma B_1} = \sigma\upsilon\nu \hat{\omega}_1$$

$$\text{και} \quad \frac{\Gamma A_2}{\rho} = \sigma\upsilon\nu \omega_2.$$

Ήσπε:

$$\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 \implies \eta\mu \hat{\omega}_1 < \eta\mu \hat{\omega}_2 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu \hat{\omega}_1 > \sigma\upsilon\nu \hat{\omega}_2$$

* Άνοιχτό διάστημα αριθμών (α, β) , όπου α, β δυό άνισοι πραγματικοί αριθμοί ($\alpha < \beta$) λέγεται τό σύνολο των πραγματικών αριθμών x , που ίκανοποιούν τή σχέση $\alpha < x < \beta$. ένώ κλειστό $[\alpha, \beta]$ λέγεται τό σύνολο των x που ίκανοποιούν τή σχέση $\alpha \leq x \leq \beta$.

Ἡ σχέση (2) γράφεται ἰσοδύναμα $\frac{1}{\Gamma A_1} < \frac{1}{\Gamma A_2}$ (2''), ὁπότε ἀπὸ τίς (1) καὶ (2'') παίρνομε :

$$\frac{A_1 B_1}{\Gamma A_1} < \frac{A_2 B_2}{\Gamma A_2} \quad (3) \quad \eta \quad \frac{\Gamma A_1}{A_1 B_1} > \frac{\Gamma A_2}{A_2 B_2} \quad (4).$$

$$\text{Εἶναι ὁμως} \quad \frac{A_1 B_1}{\Gamma A_1} = \varepsilon\varphi \hat{\omega}_1, \quad \frac{A_2 B_2}{\Gamma A_2} = \varepsilon\varphi \hat{\omega}_2, \quad \frac{\Gamma A_1}{A_1 B_1} = \sigma\varphi \hat{\omega}_1$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\Gamma A_2}{A_2 B_2} = \sigma\varphi \hat{\omega}_2.$$

Ὡστε:

$$\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 \implies \varepsilon\varphi \hat{\omega}_1 < \varepsilon\varphi \hat{\omega}_2 \quad \text{καὶ} \quad \sigma\varphi \hat{\omega}_1 > \sigma\varphi \hat{\omega}_2$$

14·3 Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα.

1. Ἀποδείξτε ὅτι γιὰ τὴν ὁποιαδήποτε ὀξεία γωνία ω ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\eta\mu\omega = \frac{\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐχομε:} \quad \varepsilon\varphi\omega &= \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \implies \eta\mu\omega = \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \implies \eta\mu^2\omega = \\ &= \varepsilon\varphi^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega = \varepsilon\varphi^2\omega (1 - \eta\mu^2\omega) = \varepsilon\varphi^2\omega - \varepsilon\varphi^2\omega \eta\mu^2\omega \implies \\ \eta\mu^2\omega + \varepsilon\varphi^2\omega \eta\mu^2\omega &= \varepsilon\varphi^2\omega \implies \eta\mu^2\omega \cdot (1 + \varepsilon\varphi^2\omega) = \varepsilon\varphi^2\omega \implies \\ \eta\mu^2\omega &= \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \implies \eta\mu\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\varphi^2\omega}}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}} \implies \\ \eta\mu\omega &= \frac{\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}} \quad (\text{παίρνομε μόνο τὴ θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐπίσης:} \quad \varepsilon\varphi\omega &= \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \implies \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\omega \implies \\ \varepsilon\varphi^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega &= \eta\mu^2\omega \implies \varepsilon\varphi^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \implies \\ \varepsilon\varphi^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega &= 1 \implies \sigma\upsilon\nu^2\omega (\varepsilon\varphi^2\omega + 1) = 1 \implies \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega &= \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \implies \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}}. \end{aligned}$$

2. I) Ἄν $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί.

II) Ἄν $\sigma\varphi\theta = \frac{3}{4}$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί.

$$1) \text{ Ἐχομε: } \sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{5/13}{12/13} = \frac{5}{12} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{12}{5}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) Έχουμε: } \varepsilon\phi\theta &= \frac{4}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\phi^2\theta}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \\
 \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} &= \varepsilon\phi\theta \implies \eta\mu\theta = \varepsilon\phi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.
 \end{aligned}$$

3. Νά βρεθεί η τιμή της παραστάσεως:

$$A = 2 \eta\mu(15^\circ 38') \cdot \sigma\upsilon\nu(48^\circ 26') - \varepsilon\phi(47^\circ 35') \cdot \sigma\phi(30^\circ 32').$$

ΎΑπό ένα πίνακα τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν παίρνομε:

$$\begin{aligned}
 \text{I) } \eta\mu 15^\circ 40' &= 0,27004 \\
 \eta\mu 15^\circ 30' &= 0,26724
 \end{aligned}$$

$$\text{Διαφορά τιμῶν ἡμιτόνων γιὰ } 10' = 0,00280.$$

$$\text{Συνεπῶς γιὰ } 8' \text{ διαφορά: } \frac{8}{10} \cdot 0,00280 = 0,00224.$$

$$\text{ΎΑρα: } \eta\mu 15^\circ 38' = 0,26724 + 0,00224 = \mathbf{0,26948}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) } \sigma\upsilon\nu 48^\circ 20' &= 0,66480 \\
 \sigma\upsilon\nu 48^\circ 30' &= 0,66262
 \end{aligned}$$

$$\text{Διαφορά τιμῶν συνημιτόνων γιὰ } 10' = 0,00218.$$

$$\text{Συνεπῶς γιὰ } 6' \text{ διαφορά} = \frac{6}{10} \cdot 0,00218 = 0,001308 \simeq 0,00131$$

(τό σύμβολο $\simeq$ σημαίνει περίπου ἴσο).

$$\text{ΎΑρα: } \sigma\upsilon\nu 48^\circ 26' = 0,66480 - 0,00131 = \mathbf{0,66349}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{III) } \varepsilon\phi 47^\circ 40' &= 1,09770 \\
 \varepsilon\phi 47^\circ 30' &= 1,09131
 \end{aligned}$$

$$\text{Διαφορά τιμῶν ἑφαπτομένων γιὰ } 10' = 0,00639.$$

$$\text{Συνεπῶς γιὰ } 5' \text{ διαφορά} = \frac{5}{10} \cdot 0,00639 = 0,003195 \simeq 0,00320.$$

$$\text{ΎΑρα: } \varepsilon\phi 47^\circ 35' = 1,09131 - 0,00320 = \mathbf{1,09451}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV) } \sigma\phi 30^\circ 30' &= 1,69766 \\
 \sigma\phi 30^\circ 40' &= 1,68643
 \end{aligned}$$

$$\text{Διαφορά τιμῶν συνεφαπτομένης γιὰ } 10' = 0,01123.$$

$$\text{Συνεπῶς γιὰ } 2' \text{ διαφορά} = \frac{2}{10} \cdot 0,01123 = 0,002246 \simeq 0,00225.$$

$$\text{ΎΑρα: } \sigma\phi 30^\circ 32' = 1,69766 - 0,00225 = \mathbf{1,69541}.$$

Ἀκολουθῶς ἔχομε:

$$2\eta\mu(15^\circ 38') \cdot \sigma\upsilon\nu(48^\circ 26') = 2 \cdot 0,26948 \cdot 0,066349 = \\ = 0,1787972852 \cdot 2 = 0,3575945704 \simeq 0,35760.$$

$$\epsilon\phi(47^\circ 35') \cdot \sigma\phi(30^\circ 32') = 1,09451 \cdot 1,69541 = 1,8556431991 \simeq 1,85564.$$

$$\text{Καί τελικά: } A = 0,35760 - 1,85564 = -1,49804.$$

4. Ν' ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ταυτότητες:

$$I) \sigma\upsilon\nu^4\omega - \eta\mu^4\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega \quad II) \frac{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta} = \frac{1}{\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}.$$

$$III) 1 + \epsilon\phi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad IV) \frac{1 - 2\eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta} = \frac{1 - \epsilon\phi\theta}{1 + \epsilon\phi\theta} \quad (\theta \neq 45^\circ).$$

$$\text{Ἐχομε: } I) \sigma\upsilon\nu^4\omega - \eta\mu^4\omega = (\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega) \cdot (\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega) = \\ = 1 \cdot (\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega) = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega.$$

$$II) \frac{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta} = \frac{\frac{1}{\epsilon\phi\alpha} + \frac{1}{\epsilon\phi\beta}}{\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}} = \frac{\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}}{\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}} = \\ = \frac{(\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta) \cdot 1}{\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta(\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta)} = \frac{1}{\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}.$$

$$III) 1 + \epsilon\phi^2 x = 1 + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

$$IV) \frac{1 - 2\eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)} = \\ = \frac{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2}{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta} = \\ = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} = \frac{1 - \epsilon\phi\theta}{1 + \epsilon\phi\theta}.$$

5. Ἄν $\epsilon\phi x = 2$, νά βρεθεῖ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $K = \frac{2\eta\mu^2 x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1}{3\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2}$ χωρὶς νά ὑπολογισθοῦν προηγουμένα οἱ τιμές τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου.

$$\text{Ἡ παράσταση γράφεται: } K = \frac{2\eta\mu^2 x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{3\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)} = \\ = \frac{3\eta\mu^2 x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{5\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu^2 x}. \quad \text{Ἐξάλλου ἀπὸ } \epsilon\phi x = 2 \implies \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2 \implies$$

$\eta\mu x = 2 \sigma\upsilon\nu x$, ἐπομένως ἡ παράσταση K γίνεται:

$$K = \frac{3 \cdot (2\sigma\upsilon\nu x)^2 - 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{5\sigma\upsilon\nu^2 x + 4 \cdot 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2(2\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{12\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{5\sigma\upsilon\nu^2 x + 8\sigma\upsilon\nu^2 x + 8\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ = \frac{11\sigma\upsilon\nu^2 x}{21\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{11}{21}.$$

14·4 Άσκήσεις.

1. Άν για τὰ ημίτονα τῶν όξειῶν γωνιῶν x καί y ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\eta\mu x < \eta\mu y$, ποιά ἀνισότης θά ἰσχύει γιά τὰ συνημίτονά τους;

2. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση

$$\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu(90^\circ - x) + \epsilon\phi x \cdot \epsilon\phi(90^\circ - x)$$

εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό x , δηλαδή παίρνει τήν ἴδια τιμή γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ x ἀπό τό διάστημα $0^\circ < x < 90^\circ$.

3. Άν $\sigma\phi x = 2$ νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $\frac{\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}$.

4. Άν $\sigma\upsilon\nu \alpha = 0,6$ καί $\epsilon\phi \beta = 5$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$$\Pi = \eta\mu \alpha \cdot \sigma\phi(90^\circ - \beta) + \sigma\phi \alpha \cdot \eta\mu(90^\circ - \beta) + \sigma\phi(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \beta).$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 15

ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

15·1 Επίλυση ὀρθογωνίων τριγώνων.

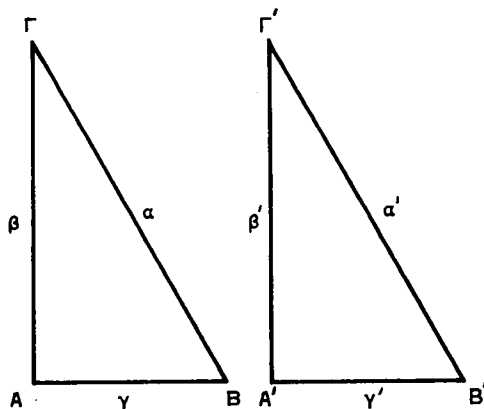
Εἶναι γνωστό ὅτι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $A'B'\Gamma'$ ($\widehat{A} = \widehat{A'} = 1^\circ$: σχ. 15·1) εἶναι ἴσα στίς ἐξῆς περιπτώσεις:

1) Ὄταν $\beta = \beta'$ καί $\gamma = \gamma'$.

2) Ὄταν $\gamma = \gamma'$ καί $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (ἢ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$).

3) Ὄταν $\alpha = \alpha'$ καί $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (ἢ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$).

4) Ὄταν $\alpha = \alpha'$ καί $\beta = \beta'$ (ἢ $\gamma = \gamma'$).



Σχ. 15·1.

Εἶναι συνεπῶς φανερό ὅτι: Ὄταν γνωρίζουμε τίς δύο κάθετες πλευρές ὀρθογωνίου τριγώνου, ἢ μιά κάθετη πλευρά καί μιά όξεία γωνία, ἢ τήν ὑποτείνουσα καί μιά όξεία γωνία ἢ τέλος τήν ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά, μπορούμε,

σέ καθεμιά ἀπ' αὐτές τὶς περιπτώσεις, νά κατασκευάσουμε οὐσιαστικά ἓνα καὶ μόνο ὀρθογώνιο τρίγωνο· διότι κάθε ἄλλο, κατασκευαζόμενο μέ τὰ ἴδια στοιχεῖα σέ ἄλλη θέση, θά εἶναι ἴσο μέ τό ἀρχικό.

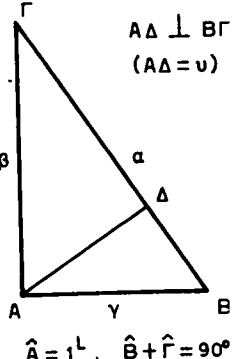
(Νά γίνουν οἱ κατασκευές στίς 4 παραπάνω περιπτώσεις).

Πρέπει, κατὰ συνέπεια, νά μπορούμε, σ' ὅλες τὶς παραπάνω περιπτώσεις, νά ὑπολογίζουμε, ἀπό τὰ μέτρα τῶν δοσμένων στοιχείων, τὰ μέτρα ὅλων τῶν ἄλλων στοιχείων τοῦ τριγώνου.

Αὐτό γίνεται μέ τή βοήθεια τῶν σχέσεων μεταξύ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου πού μάθαμε στή Γεωμετρία (πυθαγόρειες σχέσεις), καί τῶν σχέσεων μεταξύ πλευρῶν καί γωνιῶν πού γνωρίσαμε στά δύο προηγούμενα μαθήματα (τριγωνομετρικοί ἀριθμοὶ ὀξείας γωνίας).

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν μέτρων τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου συναρτῆσει τῶν μέτρων γνωστῶν στοιχείων του λέγεται **ἐπίλυση** τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Πρὶν προχωρήσουμε στὴν ἐπεξήγηση τῶν βασικῶν περιπτώσεων ἐπιλύσεως ὀρθογωνίου τριγώνου θεωροῦμε σκόπιμο νά παραθέσουμε ἐδῶ ἓνα συνοπτικό πίνακα μέ τοὺς σημαντικότερους τύπους γιὰ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο.

	$\beta^2 = (\Delta\Gamma)a, \gamma^2 = (B\Delta)a, \beta^2 + \gamma^2 = a^2, v^2 = (B\Delta)(\Delta\Gamma)$
	$\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\beta}{a}, \quad \eta\mu \Gamma = \sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{a},$ $\epsilon\varphi B = \sigma\varphi \Gamma = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \epsilon\varphi \Gamma = \sigma\varphi B = \frac{\gamma}{\beta}$
	$E = \frac{1}{2} \beta\gamma, \quad E = \frac{1}{2} av, \quad av = \beta\gamma, \quad \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{v^2}$ $(E = \text{ἐμβαδόν}).$

α) Ἐπίλυση ἀπὸ β καί γ . Ἀπὸ τή σχέση $\epsilon\varphi \widehat{B} = \frac{\beta}{\gamma}$ βρίσκομε τή γωνία $\widehat{B}$ καί ἀκολουθῶς τή $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{B}$.

Τὴν ὑποτείνουσα a τή βρίσκομε ἢ ἀπὸ τή σχέση $a^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ($a = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$) ἢ ἀπὸ τή σχέση $a = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ (ἀφοῦ τώρα γνωρίζομε καί τή γωνία $\widehat{B}$).

β) Ἐπίλυση ἀπὸ γ καί $\widehat{B}$. Ἐχομε ἀρχικά $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{B}$. Ἀκολουθῶς ἀπὸ τή σχέση $\beta = \gamma \epsilon\varphi B$ ὑπολογίζομε τὴν κάθετη πλευρά β καί ἀπὸ τή σχέση $a = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ βρίσκομε τὴν ὑποτείνουσα.

γ) Ἐπίλυση ἀπὸ a καί $\widehat{B}$. Ἐχομε πάλι $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{B}$. Ἀκολουθῶς ἀπὸ τὶς σχέσεις $\beta = a \eta\mu \widehat{B}$ καί $\gamma = a \sigma\upsilon\nu \widehat{B}$ ὑπολογίζομε τὶς κάθετες πλευρές β καί γ .

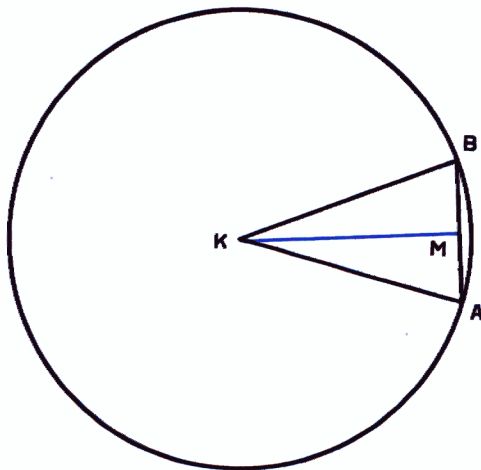
δ) Έπίλυση από α και β ($\alpha > \beta$). Από τη σχέση $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$ υπολογίζουμε τη γωνία $\widehat{B}$ και ακολούθως έχουμε και την $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{B}$. Για την πλευρά γ χρησιμοποιούμε τη σχέση $\gamma = \beta \cdot \sigma\phi \widehat{B}$.

Αν θέλουμε τό έμβαδόν μπορούμε νά χρησιμοποιήσουμε σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις τόν τύπο $E = \frac{1}{2} \beta \gamma$, άφου υπολογίσουμε τά μέτρα τών καθέτων πλευρών β και γ , στην περίπτωση πού δέν έχουν δοθεί.

15.2 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Σέ κύκλο μέ άκτίνα 3 cm έχουμε έγγράψει κανονικό δεκάγωνο. Νά υπολογισθούν ή πλευρά του κανονικού δεκαγώνου και ή άκτίνα του έγγεγραμμένου του κύκλου.

Αν AB είναι μία πλευρά του κανονικού δεκαγώνου του έγγεγραμμένου σέ κύκλο $(K, 3 \text{ cm})$, τότε θά είναι γωνία $\widehat{AKB} = 36^\circ$. Φέρνουμε την κάθετη KM στην AB και παρατηρούμε ότι στο όρθογώνιο τρίγωνο KMA γνωρίζουμε την ύποτείνουσα $KA = 3 \text{ cm}$ και τη γωνία $\widehat{AKM} = \frac{\widehat{AKB}}{2} = 18^\circ$ (σχ. 15.2 α).



Σχ. 15.2α.

Έτσι παίρνουμε $\lambda_{10} = AB = 2AM = 2KA \cdot \eta\mu 18^\circ = 6 \cdot \eta\mu 18^\circ$, και, έπειδή όπως βρίσκομε από τούς πίνακες $\eta\mu 18^\circ = 0,30902$, έχουμε $AB = 6 \cdot 0,30902 = 1,85412 \text{ cm} \approx 1,9 \text{ cm}$.

Η άκτίνα του έγγεγραμμένου κύκλου στό θεωρούμενο δεκάγωνο είναι ή KM και έχουμε $KM = KA \cdot \sigma\upsilon\nu 18^\circ = 3 \cdot 0,95106 = 2,85318 \text{ cm} \approx 2,9 \text{ cm}$.

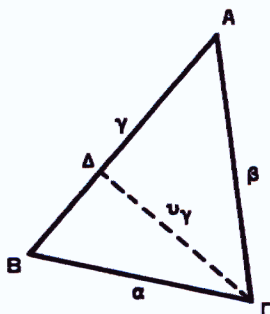
Σημείωση: Η πλευρά λ_{10} του έγγεγραμμένου σέ κύκλο (K, R) κανονικού

δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτίνας, δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο: $\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$
καὶ ἡ ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὸν τύπο:

$$\rho = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

2. Ἄν α, β, γ , τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν τριγώνου $AB\Gamma$, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ ἐμβαδόν του δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο: $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A$.

Φέρομε τὸ ὕψος $\Gamma\Delta$ στὴν AB (σχ. 15.2β). Μιά τουλάχιστον ἀπὸ τίς γωνίες $\hat{A}$ καὶ $\hat{B}$ θὰ εἶναι ὀξεία. Ἄς εἶναι λοιπὸν $\hat{A} < 1^\circ$. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ἔχομε: $\Gamma\Delta = \beta \eta\mu A(1)$.

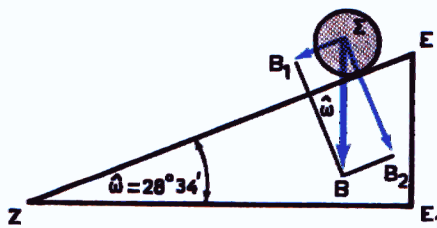


Σχ. 15.2β.

Γνωρίζομε ὅτι $E = \frac{1}{2} (AB) \cdot (\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \gamma \cdot (\Gamma\Delta)$. ἄρα λόγῳ τῆς (1) ἔχομε $E = \frac{1}{2} \gamma \beta \eta\mu A$.

3. Σφαῖρα βάρους 50 kg^* κυλίζει πάνω σὲ κεκλιμένο ἐπίπεδο μὲ γωνία κλίσεως ὡς πρὸς τὸν ὀρίζοντα $28^\circ 34'$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ δύναμη ποῦ θέτει σὲ κίνηση τὴ σφαῖρα. (*Ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἀμελητέα).

Τὸ βάρος $\vec{\Sigma B}$ ἀναλύεται σὲ δύο συνιστώσες, τὴ $\vec{\Sigma B}_2$ κάθετη πρὸς τὸ κεκλιμένο

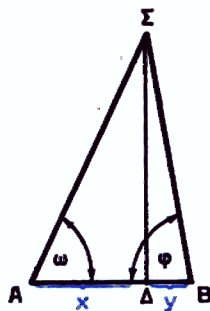


Σχ. 15.2γ.

επίπεδο ZE και τή $\vec{SB}_1$ παράλληλη πρὸς τὸ ZE (σχ. 15.2γ). Ἡ $\vec{SB}_2$ ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τήν ἀντίδραση τοῦ ZE · ἄρα ἡ δύναμη ποῦ κινεῖ τή σφαῖρα εἶναι ἡ $\vec{SB}_1$. Ἡ ἔνταση B_1 τῆς $\vec{SB}_1$ εἶναι $\therefore B_1 = B \cdot \eta\mu\omega$ δηλαδή $B_1 = 50 \cdot \eta\mu(28^\circ 34') = 50 \cdot 0,47818 \simeq 23,9 \text{ kg*}$.

4. Θέλοντας νά μετρήσουμε τήν ἀπόστασιν AS ἐνός σημείου S ἀπό σημείο A , πήραμε στήν περιοχὴ τοῦ A καί σέ ἀπόστασιν ἀπ' αὐτό ἴση μέ 20 m ἓνα σημείο B καί μ' ἓνα γωνιομετρικὸ ὄργανο μετρήσαμε τή γωνία $\hat{\omega} = \widehat{BAS}$ καί τή γωνία $\hat{\varphi} = \widehat{ABS}$ καί τίς βρήκαμε: $\hat{\omega} = 79^\circ$ καί $\hat{\varphi} = 82^\circ$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀπόστασιν SA .

Ἄς εἶναι $SD \perp AB$ καί ἄς παραστήσουμε μέ x τὸ τμήμα AD καί μέ y τὸ DB (σχ. 15.2δ). Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα SDA καί SDB παίρνομε $x = (SD) \cdot \sigma\varphi\omega$ καί $y = (SD) \cdot \sigma\varphi\varphi$ καί ἀκολουθῶς:



Σχ. 15.2δ.

$$x + y = (SD) \cdot \sigma\varphi\omega + (SD)\sigma\varphi\varphi = (SD) (\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\varphi) \quad (1).$$

Ἀλλὰ $x + y = AB = 20 \text{ cm}$, $\hat{\omega} = 79^\circ$ καί $\hat{\varphi} = 82^\circ$. Ἀρα ἡ (1) γράφεται

$$20 = (SD) (\sigma\varphi 79^\circ + \sigma\varphi 82^\circ) = (SD) \cdot (0,19438 + 0,14054) =$$

$$= (SD) \cdot 0,33492 \implies (SD) = \frac{20}{0,33492} \text{ m} \simeq 59,72 \text{ m}.$$

Ὑπολογίζομε τώρα τὸ SA ἀπὸ τὸν τύπο $SA = \frac{SD}{\eta\mu\omega}$. ἔτσι ἔχομε $SA =$

$$= \frac{59,72}{\eta\mu 79^\circ} = \frac{59,72}{0,98163} \simeq 60,84 \text{ m}.$$

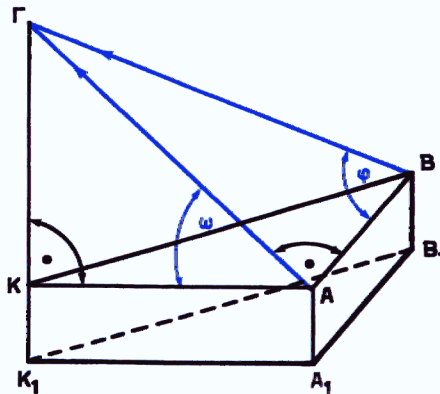
5. Θέλουμε νά βροῦμε τὸ ὕψος τῆς κορυφῆς Γ ἐνός βουνοῦ ἀπὸ ἓνα ὀρισμένο ὀριζόντιο ἐπίπεδο $K_1A_1B_1$. (K_1 ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Γ στό ἐπίπεδο $K_1A_1B_1$).

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ σημείο A , ὅπου βρίσκεται ἡ διόπτρα τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου AA_1 ($AA_1 \perp KA_1B_1$), σκοπεύομε τήν κορυφή Γ καί βρίσκομε, πάνω στό κατακόρυφο ἐπίπεδο $ΓK_1A_1A$, τή γωνία $\widehat{\Gamma AK}$ ($AK \perp ΓK_1$) ἴση μέ $\hat{\omega}$. Ἀκολουθῶς τοποθετοῦμε κατακόρυφο στύλο BB_1 , ἴσο μέ AA_1 , σέ τέτοια θέση ὥστε γωνία $\widehat{\Gamma AB} = 90^\circ$ καί με-

τρᾶμε καί τή γωνία $\widehat{AB\Gamma}$, τήν ὁποία βρίσκουμε ἴση μέ φ° . Ποιό εἶναι τό ὕψος ΓK_1 τοῦ βουνοῦ; (Μήκος $AB = A_1B_1 = \mu$).

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο $\Gamma K A$ ($\widehat{K} = 90^\circ$) ἔχομε $\Gamma K = \Gamma A \eta \mu \omega$ (1) (σχ. 15.2 ε). Ἀπό τό ἐπίσης ὀρθογώνιο τρίγωνο $\Gamma A B$ ἔχομε $\Gamma A = AB \epsilon \varphi \varphi = \mu \cdot \epsilon \varphi \varphi$ (2).

Ἡ (1) λόγω τῆς (2) γίνεται $\Gamma K = \mu \epsilon \varphi \varphi \eta \mu \omega$, ὁπότε $\Gamma K_1 = \mu + \mu \epsilon \varphi \varphi \eta \mu \omega$.



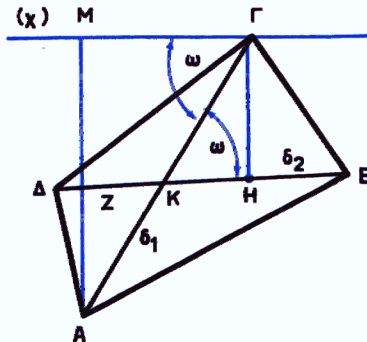
Σχ. 15.2ε.

6. Ἄν δ_1 καί δ_2 τά μέτρα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου καί ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ τετραπλεύρου δίνεται ἀπό τόν τύπο $E = \frac{1}{2} \delta_1 \delta_2 \eta \mu \omega$.

Θεωροῦμε ἕνα κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Ἄς εἶναι AZ καί ΓH οἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν A καί Γ ἀπό τή διαγώνιο $B\Delta$ (σχ. 15.2 στ). Θά ἔχομε:

$$\begin{aligned} E(ΑΒΓΔ) &= E(ΑΒΔ) + E(ΓΒΔ) = \frac{1}{2} (B\Delta) \cdot (AZ) + \frac{1}{2} (B\Delta) \cdot (\Gamma H) = \\ &= \frac{1}{2} (B\Delta) [(AZ) + (\Gamma H)] = \frac{1}{2} \delta_2 \cdot [(AZ) + (\Gamma H)] \quad (1). \end{aligned}$$

Φέρομε τή $\Gamma x \parallel B\Delta$ καί ἄς εἶναι M τό σημεῖο τομῆς τῆς Γx μέ τήν AZ . Ἀπό τό ὀρθο-



Σχ. 15.2στ.

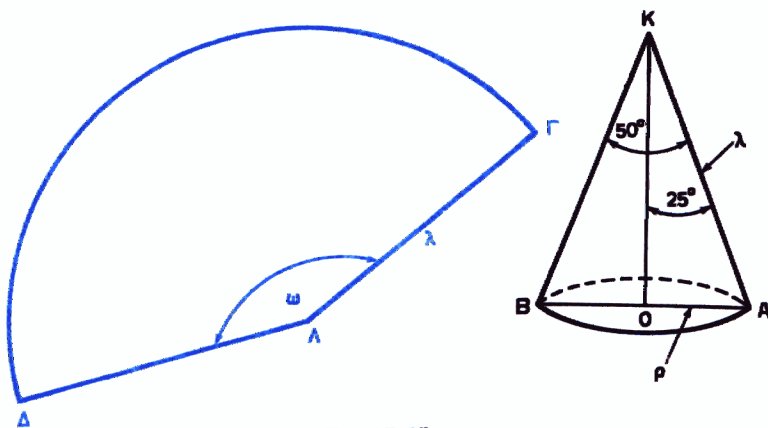
γώνιο παραλληλόγραμμο $ZMΓΗ$ έχουμε $ZM = ΓΗ$, όπότε ή (1) γράφεται:

$$E(ABΓΔ) = \frac{1}{2} \delta_2 [(AZ) + (ZM)] = \frac{1}{2} \delta_2 \cdot (AM) \quad (2).$$

Από τό όρθογώνιο τρίγωνο $AMΓ$ προκύπτει $(AM) = (AG) \cdot \eta\mu \widehat{MΓA} = \delta_2 \eta\mu \omega$. Έτσι ή σχέση (2) γίνεται $E(ABΓΔ) = \frac{1}{2} \delta_2 \delta_2 \eta\mu \omega$.

7. Όρθός κυκλικός κώνος έχει γωνία κορυφής ίση μέ 50° . Νά βρεθεί ή γωνία του κυκλικού τομέα πού παίρνουμε από τό ανάπτυγμα της κυρτής επιφανείας του κώνου.

Τό ανάπτυγμα της κυρτής επιφανείας όρθου κυκλικού κώνου είναι ένας κυκλικός τομέας σέ κύκλο μέ ακτίνα ίση πρός τή γενέτειρα λ της κωνικής επιφανείας καί μέ τόξο ίσο πρός τό μήκος 2π ρ της περιφερείας της βάσεως του κώνου (σχ. 15. 2ζ).



Σχ. 15. 2ζ.

Ή γωνία ω του ανάπτυγματος θά έχει μέτρο σέ ακτίνα ίσο μέ $\frac{2\pi\rho}{\lambda}$. Άλλά $\rho = \lambda\eta\mu 25^\circ$ καί συνεπώς $\omega = \frac{2\pi\lambda\eta\mu 25^\circ}{\lambda} = 2\pi\eta\mu 25^\circ$ καί σέ μοίρες $\omega^\circ = 360^\circ \cdot \eta\mu 25^\circ = 360^\circ \cdot 0,42262 = 152,1432^\circ \approx 152^\circ 8' 36''$.

15. 3 Άσκήσεις.

1. Τρίγωνο $ABΓ$ έχει $AB = 18$ m, $AG = 22$ m καί $\widehat{BAΓ} = 29^\circ 44'$. Νά υπολογισθεί τό έμβαδόν του τριγώνου.
2. Τά μέτρα των διαγωνίων κυρτού τετραπλεύρου είναι $\delta_1 = 4,5$ cm καί $\delta_2 = 37$ mm καί ή γωνία τους ίσούται μέ $18^\circ 25'$. Νά υπολογισθεί τό έμβαδόν του τετραπλεύρου.
3. Κατακόρυφος στύλος έχει ύψος 2,40 m καί ρίχνει σκιά, πάνω σέ όριζόντιο έδαφος, μήκρυσ 1,38 m. Νά βρεθεί τό ύψος του Ήλίου, δηλαδή ή γωνία πού σχηματίζουν οι άκτίνες του μέ τόν όρίζοντα.
4. Διάνυσμα στό έπίπεδο έχει μέτρο 2,4 cm καί ό φορέας του σχηματίζει μέ τόν άξονα x'x γωνία $35^\circ 18'$. Νά υπολογισθούν τά μέτρα των προβολών του διανύσματος στους άξονες. (Τό σύστημα θεωρείται όρθοκανονικό μέ μονάδα μήκους 1 cm).

5. Σέ ἀνηφορικό δρόμο, σέ κάθε 20 m τό ὕψος αὐξάνεται κατὰ 0,8 m. Ν' βρεθεῖ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ δρόμου.

6. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι 120° καί ἡ $\widehat{G}$ 20° . Ἄν τό ὕψος στή ΒΓ ἔχει μέτρο ἴσο μέ 18 cm, νά ὑπολογισθοῦν τά μέτρα τῶν πλευρῶν καί τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου.

7. Ἡ περίμετρος ρόμβου ἰσοῦται μέ 144 cm καί ἡ μιά του διαγώνιος μέ 60 cm. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες τοῦ ρόμβου.

8. Δύναμη ἐντάσεως F ἔχει ἀναλυθεῖ σέ δύο ὀρθογωνίες συνιστώσες οἱ ὁποῖες ἔχουν ἐνταση $F_1 = 12 \text{ kg}^*$, $F_2 = 18 \text{ kg}^*$. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες πού σχηματίζουν οἱ διευθύνσεις τῶν $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ μέ τήν $\vec{F}$ καί ἡ ἐνταση τῆς $\vec{F}$.

9. Δίνεται ἰσοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel GD$, $BG = AD$) μέ $AB = 32 \text{ cm}$, $GD = 19 \text{ cm}$ καί $BG = 9,5 \text{ cm}$. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τραπέζιου.

10. Δυό κύκλοι μέ διαμέτρους $d_1 = 20 \text{ cm}$ καί $d_2 = 9 \text{ cm}$ ἐφάπτονται ἐξωτερικά. Νά σχεδιασθοῦν οἱ κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες τῶν κύκλων καί νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία αὐτῶν τῶν ἐφαπτομένων.

11. Δύναμη ἐντάσεως $F = 48 \text{ kg}^*$ νά ἀναλυθεῖ σέ δύο ὀρθογωνίες συνιστώσες, τέτοιες ὥστε ἡ διέθυνση τῆς μιᾶς νά σχηματίζει μέ τή διέθυνση τῆς F γωνία $29^\circ 37'$. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἐντάσεις τῶν συνιστωσῶν.

12. Θεωροῦμε κύκλο μέ διάμετρο 12 cm καί τά ἐγγεγραμμένα σ' αὐτόν κανονικά πολύγωνα: α) ὀκτάγωνο, β) δωδεκάγωνο, γ) πεντάγωνο καί δ) δεκάγωνο. Νά ὑπολογίσετε μέ τή βοήθεια πινάκων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τά μέτρα τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων, τίς ἀκτίνες τῶν ἐγγεγραμμένων σ' αὐτά κύκλων καθὼς καί τά ἐμβαδά τῶν πολυγώνων. Νά ἐπαληθεύσετε ἔπειτα ὅτι ἡ πλευρά τοῦ δεκαγώνου, ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου μαζί μέ τήν πλευρά τοῦ πενταγώνου ἀποτελοῦν μιά πυθαγόρεια τριάδα (δηλ. $\lambda_{10}^2 + R^2 = \lambda_5^2$).

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη.

1. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων: I) $2\eta\mu x \text{ συν } x - \text{συν}^2 x$ καί

II) $3\sigma\varphi^2(90^\circ - x) + \epsilon\varphi^2\omega - 1$ γιά $x = 30^\circ$ καί $\omega = 30^\circ$.

2. Ἄν M τό μέσον ἑνός κυκλικοῦ τόξου $\widehat{AB}$ σέ κύκλο (O, R) , τότε τό κέντρο βάρους K τοῦ $\widehat{AB}$ βρίσκεται πάνω στήν ἀκτίνα OM καί σέ ἀπόσταση ἀπό τό M : $\delta = \frac{R}{\varphi} \left(\varphi - 2\eta\mu \frac{\varphi}{2} \right)$,

ὅπου φ τό μέτρο σέ ἀκτίνια τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$. Ἐνῶ τό κέντρο βάρους Λ τοῦ κυκλικοῦ τομέα AOB , κείμενο κι αὐτό πάνω στήν OM , δίνεται ἀπό τόν τύπο $OL = \frac{4R\eta\mu \frac{\varphi}{2}}{3\varphi}$. Νά ὀρισθοῦν τό κέντρο βάρους τόξου 60° καί τό κέντρο βάρους τοῦ κυκλικοῦ τομέα τῶν 60° σέ κύκλο ἀκτίνας 10 cm.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τοῦ ὁποῖου ἡ πλευρά AB ἰσοῦται μέ 13,4 cm καί ἡ διαγώνιος BD μέ 17,1 cm. Ἄν $\widehat{ABD} = 90^\circ$, νά ὑπολογισθοῦν ἡ πλευρά AD , οἱ γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου, τό ἐμβαδόν του, οἱ γωνίες πού σχηματίζουν οἱ διαγώνιες μέ τίς πλευρές, αἱ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

4. Παραλληλόγραμμο ἔχει ἴσες τίς διαγωνίες του καί τό μήκος καθεμιᾶς εἶναι 22 cm. Ἄν μιά πλευρά τοῦ παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ 16 cm, νά βρεθοῦν ἡ ἄλλη πλευρά, οἱ γωνίες τῶν διαγωνίων μέ τίς πλευρές, ἡ γωνία τῶν διαγωνίων καί τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου.

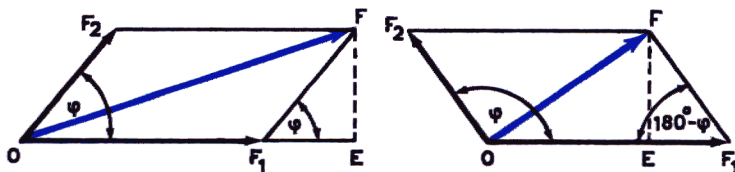
5. "Αν $\epsilon\phi x = 4$ νά βρεθεί ή τιμή τής παραστάσεως $\frac{\eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x}$, χωρίς νά υπολογισθούν τό ήμίτονο καί τό συνημίτονο.

6. Νά βρεθούν, μέ τή βοήθεια πινάκων, οι τιμές τών παραστάσεων:

I) $2\eta\mu 50^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 50^\circ \eta\mu 40^\circ - \epsilon\phi(17^\circ 33') \cdot \epsilon\phi(72^\circ 27')$

II) $\sigma\upsilon\nu(69^\circ 47') - \eta\mu(20^\circ 13') - \epsilon\phi 32^\circ \cdot \epsilon\phi 58^\circ$.

7. "Αν F_1 καί F_2 είναι οι έντάσεις δυό δυνάμεων πού ενεργούν σέ ύλικο σημείο υπό γωνία $\varphi \neq 90^\circ$, τότε ν' αποδείξετε ότι ή ένταση F τής συνισταμένης δίνεται από τόν τύπο $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \sigma\upsilon\nu \varphi$ ή $F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \sigma\upsilon\nu (180^\circ - \varphi)$ καθόσον ή φ είναι όξεία ή άμβλεία (σχ. 15. 3).



Σχ. 15.3.

(Υπόδειξη: "Αν $FE \perp OF_1$, νά εκφράσετε τά F_1E καί FE συναρτήσει τής F_2 καί τής γωνίας φ ή $180^\circ - \varphi$ από τό όρθογώνιο τρίγωνο FEF_1 καί άκολούθως νά εφαρμόσετε τό πυθαγόρειο θεώρημα στό τρίγωνο OEF).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 16

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

16·1 Ἀριθμητική πρόοδος.

α) **Εἰσαγωγικά:** Ὄταν μέ κάποιον τρόπο ἔχομε ἀντιστοιχίσει στόν καθένα ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ἓνα καί μόνον ἓνα ἀριθμό, τότε λέμε ὅτι ἔχομε κατασκευάσει μιάν **ἀκολουθία ἀριθμῶν**.

Οἱ ἀριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ πού ἔχουν ἀντιστοιχισθεῖ στούς ἀριθμούς $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ λέγονται **ὄροι τῆς ἀκολουθίας**: **πρῶτος, δεύτερος, τρίτος, ..., νιοστός, ...**.

Ὑπάρχουν ποικίλες ἐκφράσεις μέ τή βοήθεια τῶν ὁποίων δίνουμε συνοπτικά καί προσδιορίζουμε τούς διάφορους ὄρους μιᾶς ἀκολουθίας. Οἱ ἀπλούστεροι καί συνηθέστεροι τρόποι ἐκφράσεως εἶναι: α) ἡ κατασκευή (ὅταν εἶναι δυνατό) ἑνός τύπου πού μᾶς παρέχει τόν κάθε ὄρο μιᾶς ἀκολουθίας συναρτήσας τῆς τάξεώς του, δηλαδή τοῦ φυσικοῦ n .

β) Ἡ διατύπωση τῆς ἐξαρτήσεως τοῦ κάθε ὄρου ἀπό τόν προηγούμενό του· ἡ διατύπωση αὐτή (ὅταν μπορεῖ νά γίνει) μᾶς ἐπιτρέπει νά προσδιορίζουμε ἀπό κάθε ὄρο τῆς ἀκολουθίας τόν ἀμέσως ἐπόμενό του, ἐφόσον βέβαια γνωρίζουμε τόν πρῶτον ὄρο τῆς ἀκολουθίας.

Λέμε π.χ. δίνεται ἡ ἀκολουθία μέ γενικόν ὄρο $\alpha_n = \frac{n^2 + 1}{n}$, ὅπου $n = 1, 2, 3, \dots$ καί ἐννοοῦμε τούς ἀριθμούς πού παίρνομε ἀπό τόν παραπάνω τύπο ὅταν ἀντικαταστήσουμε τό n διαδοχικά μέ $1, 2, 3, \dots$. Ἔτσι ἔχομε:

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{5}{2}, \alpha_3 = \frac{10}{3} \text{ κτλ.}$$

Λέμε ἐπίσης π.χ. μέ τόν ἄλλο τρόπο ἐκφράσεως: δίνεται ἡ ἀκολουθία μέ $\alpha_1 = \sqrt{2}$ καί $\alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}}$ γιά $n = 2, 3, \dots$ καί ἐννοοῦμε τήν ἀκολουθία πού ἔχει πρῶτον ὄρο τόν ἀριθμό $\sqrt{2}$, δεύτερο τόν $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, τρίτο τόν $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ..., νιοστό τόν $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$, κτλ.
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ ριζικά}}$$

Οί ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας δέν εἶναι κατανάγκη διαφορετικοί μεταξύ τους ἀριθμοί· μπορεῖ ὁρισμένοι ἀριθμοί νά ἐπαναλαμβάνονται ὥς ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας. Ἄς πάρουμε γιά παράδειγμα τήν ἀκολουθία μέ γενικόν ὅρο $\alpha_n = (-1)^n \cdot 2$, $n = 1, 2, \dots$. Ἔχομε: $\alpha_1 = (-1)^1 \cdot 2 = -2$, $\alpha_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$, $\alpha_3 = (-1)^3 \cdot 2 = -2$, $\dots$, $\alpha_n = -2$ ἢ 2 καθόσον n περιττός ἢ ἄρτιος. Ὡστε οἱ ἀριθμοί πού ἐπαναλαμβάνονται ὥς ὅροι αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας εἶναι οἱ ἀριθμοί -2 καί 2 · δηλαδή τό σύνολο τῶν ἀριθμῶν πού ἐμφανίζονται ὥς ὅροι σ' αὐτή τήν ἀκολουθία εἶναι τό διμελές σύνολο $\{-2, 2\}$. Ἄς θεωρήσουμε ἀκόμα τήν ἀκολουθία πού παράγεται μέ τόν ἀκόλουθο νόμο. Σέ κάθε φυσικό ἀντιστοιχίζουμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του διά 5 .

Ἔτσι ἔχομε $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 4$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 1$, $\alpha_7 = 2$, $\alpha_8 = 3$, $\alpha_9 = 4$, $\alpha_{10} = 0$, κτλ., διότι τά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$, διά τοῦ 5 εἶναι ἀντίστοιχα $1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, \dots$. Ὡστε ἐδῶ τό σύνολο τῶν ἀριθμῶν πού ἐμφανίζονται ὥς ὅροι τῆς ἀκολουθίας μας εἶναι τό $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Μπορεῖ ἀκόμα ὅλοι οἱ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας νά εἶναι ἴσοι· τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται **σταθερή**.

Παρακάτω θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικότερα μέ δύο σημαντικές ἀκολουθίες ἀριθμῶν· ἡ μιά λέγεται ἀριθμητική πρόοδος καί ἡ ἄλλη γεωμετρική.

β) **Ἀριθμητική πρόοδος** λέγεται μιά ἀκολουθία ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ ἂν καί μόνον ἂν ὑπάρχει σταθερά δ τέτοια ὥστε $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Δηλαδή: **Ἀριθμητική πρόοδος** λέγεται μιά ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας κάθε ὅρος (μετά τόν πρῶτο) προκύπτει ἀπό τόν προηγούμενό του ἂν τοῦ προσθέσουμε ἕναν ὁρισμένο, σέ κάθε περίπτωση, ἀριθμό.

Ὁ ὁρισμένος αὐτός ἀριθμός, ἔστω δ , λέγεται **διαφορά**, διότι $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Στά ἐπόμενα θά θεωρήσουμε ἀποκλειστικά ἀριθμητικές προόδους μέ πραγματικούς ὅρους.

Ἄν $\delta = 0$, τότε ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι ἴσοι· πρόκειται δηλαδή γιά μιά σταθερή ἀκολουθία. Γιά νά μήν ἔχομε αὐτή τήν τετριμμένη περίπτωση θά θεωροῦμε τή διαφορά $\delta \neq 0$.

Ἄν $\delta > 0$ ἡ πρόοδος λέγεται **αὐξουσα** καί ἂν $\delta < 0$ λέγεται **φθίνουσα**.

Μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τό νιοστό ὅρο μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου συναρτήσει τῆς τάξεώς του· ἀρκεῖ νά παρατηρήσουμε ὅτι: $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta$, $\alpha_3 = \alpha_2 + \delta = \alpha_1 + \delta + \delta = \alpha_1 + 2\delta$, $\alpha_4 = \alpha_3 + \delta = \alpha_1 + 2\delta + \delta = \alpha_1 + 3\delta$, κτλ. καί συνεπῶς:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\delta \quad (1)$$

Σημαντική ιδιότητα: Ἄν θεωρήσουμε ἕνα πλήθος διαδοχικῶν ὀρων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τότε:

$$\alpha_2 + \alpha_{n-1} = \alpha_3 + \alpha_{n-2} = \alpha_4 + \alpha_{n-3} = \dots = \alpha_{\mu+1} + \alpha_{n-\mu} = \alpha_1 + \alpha_n \quad (\mu < n).$$

$$\begin{aligned}\text{Πράγματι: } \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\nu-\mu} &= (\alpha_1 + \mu\delta) + [\alpha_1 + (\nu - \mu - 1)\delta] = \\ &= \alpha_1 + \alpha_1 + \mu\delta + \nu\delta - \mu\delta - \delta = \alpha_1 + \alpha_1 + (\nu - 1)\delta = \alpha_1 + \alpha_\nu.\end{aligned}$$

*Αν τό πλήθος πού θεωρούμε είναι περιττό, τότε υπάρχει μεσαῖος ὁρος καί αὐτός ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν δυό ἀκραίων ὁρων. Ἔτσι π.χ. γιά τό πλήθος $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ἔχομε:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_5}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_1 + 4\delta}{2} = \frac{2\alpha_1 + 4\delta}{2} = \alpha_1 + 2\delta = \alpha_3.$$

Άσκηση: Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι, μέ τή σειρά πού γράφηκαν, διαδοχικοί ὁροι ἀριθμητικῆς προόδου ἂν καί μόνον ἂν $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Σημείωση: Ὁ ἀριθμός $\frac{\alpha + \gamma}{2}$ λέγεται ἀριθμητικός μέσος τῶν α καί γ .

Γενικά μέσος ἀριθμητικός τῶν n ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ λέγεται ὁ ἀριθμός $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$.

Εἶναι χρήσιμο νά βροῦμε ἕναν τύπο πού νά ἐκφράζει τό ἄθροισμα ἑνός πλήθους διαδοχικῶν ὁρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

Θέλομε δηλαδή νά προσδιορίσουμε τό ἄθροισμα:

$$\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \quad (I)$$

Ἐπαναλαμβάνομε τό ἴδιο ἄθροισμα μέ ἀντίστροφη διάταξη τῶν ὁρων· δηλαδή γράφομε:

$$\Sigma_n = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1 \quad (II)$$

Τώρα προσθέτομε κατά μέλη τίς (I) καί (II) καί παίρνομε:

$$2 \Sigma_n = (\alpha_1 + \alpha_n) + (\alpha_2 + \alpha_{n-1}) + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_2) + (\alpha_n + \alpha_1) \quad (III)$$

Σύμφωνα ὅμως μέ τήν παραπάνω ιδιότητα τά ἄθροίσματα τῶν ζευγῶν τῆς (III) εἶναι ἴσα καί ἐπειδή τό πλήθος τους εἶναι n ἔχομε $2 \Sigma_n = (\alpha_1 + \alpha_n)n$ καί τελικά:

$$\Sigma_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n)n}{2} \quad (2)$$

*Αν στόν τύπο (2) ἀντικαταστήσουμε τόν α_n μέ τήν ἔκφραση τοῦ τύπου (1) παίρνομε:

$$\Sigma_n = \frac{[2\alpha_1 + (n-1)\delta]n}{2} \quad (3)$$

16 · 2 Γεωμετρική πρόοδος.

Μιά ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ λέγεται **γεωμετρική πρόοδος** ἂν καί μόνον ἂν εἶναι $\alpha_1 \neq 0$ καί $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ὅπου λ ἕνας ὁρισμένος ἀριθ-

μός $\neq 0$. Δηλαδή ο κάθε όρος μετά τον πρώτο προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί έναν όρισμένο αριθμό $\lambda \neq 0$.

Ο αριθμός $\lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ λέγεται **λόγος της προόδου**.

Αν $\lambda = 1$, η ακολουθία είναι σταθερή· έπειδή δεν ενδιαφερόμαστε για την τετριμμένη αυτή περίπτωση, θα θεωρούμε παρακάτω τό λόγο $\lambda \neq 1$.

Αν $|\lambda| > 1$, η γεωμετρική πρόοδος λέγεται **αύξουσα** και αν $|\lambda| < 1$ λέγεται **φθίνουσα**.

Έχουμε, όμοια με ό,τι είδαμε για την αριθμητική πρόοδο, $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda$, $\alpha_3 = \alpha_2 \cdot \lambda = \alpha_1 \cdot \lambda \cdot \lambda = \alpha_1 \lambda^2$, $\alpha_4 = \alpha_3 \cdot \lambda = \alpha_1 \lambda^2 \cdot \lambda = \alpha_1 \lambda^3$ και γενικά

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}} \quad (1)$$

Γιά νά βρούμε τό άθροισμα S_n τών n πρώτων διαδοχικών όρων, μιās γεωμετρικής προόδου, εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned} S_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \\ &= \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_2 \cdot \lambda + \dots + \alpha_{n-3} \cdot \lambda + \alpha_{n-2} \cdot \lambda + \alpha_{n-1} \cdot \lambda = \\ &= \alpha_1 + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) = \alpha_1 + \lambda(S_n - \alpha_n) \implies \\ S_n &= \alpha_1 + \lambda S_n - \lambda \alpha_n \implies S_n - \lambda S_n = \alpha_1 - \alpha_n \lambda \implies (1 - \lambda)S_n = \alpha_1 - \alpha_n \lambda \implies \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{\alpha_1 - \alpha_n \lambda}{1 - \lambda}} \quad (\text{μέ } \lambda \neq 1) \quad (2)$$

Αν αντικαταστήσουμε στόν τύπο (2) τό α_n μέ τήν έκφραση τοῦ τύπου (1) παίρνομε:

$$\boxed{S_n = \frac{\alpha_1 - \alpha_1 \lambda^n}{1 - \lambda}} \quad (3)$$

Άσκηση 1: Ν' άποδειχθεϊ ότι $\alpha_{m+1} \cdot \alpha_{n-m} = \alpha_1 \cdot \alpha_n$ (όπου $\alpha_1, \alpha_{m+1}, \alpha_{n-m}, \alpha_n$ όροι γεωμετρικής προόδου και $m < n$).

Άσκηση 2: Ν' άποδειχθεϊ ότι τρεις θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι, μέ τή σειρά πού γράφηκαν, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνον αν $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$.

Σημείωση: Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** τών θετικών αριθμών α και γ .

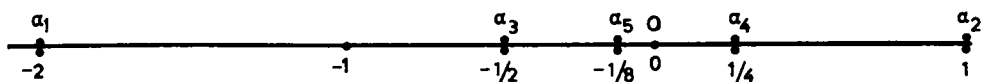
16.3 Φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

Έχει μεγάλη σημασία η φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος και για τη θεωρία και για τις εφαρμογές. Αυτό όφείλεται πριν απ' όλα στο γεγονός ότι προχωρών-

τας σέ νέους συνεχώς όρους, μιās όποιασδήποτε φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, μπορούμε νά πλησιάζουμε όσο θέλουμε τόν άριθμό μηδέν.

*Ας πάρουμε γιά παράδειγμα τήν πρόοδο μέ $\alpha_1 = -2$ καί $\lambda = -\frac{1}{2}$. οί διαδοχικοί όροι της είναι: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{1}{4}$, $\dots$, $\alpha_n = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \pm \frac{1}{2^{n-2}}$ καθόσον n άρτιος ή περιττός.

Στό σχήμα 16.3 έχομε σημειώσει πάνω στόν άξονα τών πραγματικών άριθμών μερικούς όρους τής παραπάνω άκολουθίας. Βλέπομε ότι τά παραστατικά σημεία τών όρων τής άκολουθίας βρίσκονται έναλλάξ άριστερά καί δεξιά τοῦ σημείου 0, αλλά σέ όλο καί μικρότερη απόσταση άπ' αὐτό τό σημείο.



Σχ. 16.3.

Είναι σχετικά εύκολο νά διαπιστώσουμε τήν άκόλουθη ιδιότητα: όποιασδήποτε άριθμό $\varepsilon > 0$ κι άν θεωρήσουμε είναι πάντα δυνατό νά βρούμε κατάλληλη τιμή n_0 τοῦ δείκτη n , τέτοια ώστε νά έχουμε $|\alpha_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

*Ας δώσουμε στόν ε π.χ. τήν τιμή $\frac{5}{261}$. Θέλομε νά έχουμε $|\alpha_n| < \frac{5}{261}$, δηλαδή $\left| \pm \frac{1}{2^{n-2}} \right| < \frac{5}{261}$ ή $\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{5}{261} \iff 2^{n-2} > \frac{261}{5} = 52,2$. Έπειδή $2^5 = 32$ ένώ $2^6 = 64$, έχομε $2^{8-2} > \frac{261}{5}$. έπεται λοιπόν ότι ό πρώτος όρος τοῦ όποιου η απόλυτη τιμή είναι μικρότερη από $\frac{5}{261}$ είναι ό 8ος (έδω δηλαδή $n_0 = 8$). Ωστε $|\alpha_n| < \frac{5}{261} \quad \forall n \geq 8$.

Κάθε άκολουθία πού, όπως η φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος, παρουσιάζει τήν παραπάνω ιδιότητα, νά μπορούμε δηλαδή μέσω τών όρων της νά πλησιάζουμε όσο θέλουμε τόν άριθμό 0 είτε άπ' άριστερά του είτε άπό δεξιά του είτε κι άπό τά δύο μέρη, λέγεται **μηδενική άκολουθία**. Καί λέμε ότι: ό όρος α_n , μιās μηδενικής άκολουθίας, τείνει πρός τό μηδέν ή έχει όριο τό μηδέν όταν ό φυσικός n αυξάνεται άπεριόριστα καί τείνει στό $+\infty$.

Γράφομε συμβολικά: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ (limes = όριο).

*Αλλά η φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος δέν είναι άπλως μόνο μία μηδενική άκολουθία: συμβαίνει επιπλέον τό άθροισμα όσωνδήποτε όρων μιās φθίνουσας γεωμετρικής προόδου νά μήν ξεπερνά άπολύτως έναν όρισμένο άριθμό: καί

όταν τό πλήθος n τῶν ὄρων πού προσθέτομε τείνει στό $+\infty$, τότε τό ἄθροισμα αὐτό ἔχει ὄριο ἓναν ὁρισμένο ἀριθμό. Αὐτό τόν ἀριθμό θά προσδιορίσουμε τώρα.

Γνωρίζομε ὅτι: $S_n = \frac{a_1 - a_1 \lambda^n}{1 - \lambda}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων μιᾶς ὁποιασδήποτε γεωμετρικῆς προόδου μέ $\lambda \neq 1$. Γράφομε τόν προηγούμενο τύπο ὡς ἑξῆς:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - \lambda} - \frac{a_1}{1 - \lambda} \cdot \lambda^n$$

Ἀλλά ἡ ἀκολουθία $\frac{a_1}{1 - \lambda} \cdot \lambda^n$ εἶναι μηδενική, δηλαδή ἔχομε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1}{1 - \lambda} \cdot \lambda^n \right) = 0 \quad \text{ἄρα:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - \lambda} = S.$$

Ἐκφράζομε τό παραπάνω ἀποτέλεσμα λέγοντας ὅτι:

Τό ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων μιᾶς φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου εἶναι ἴσο μέ:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - \lambda}} \quad (4)$$

Στό προηγούμενο παράδειγμα μέ $a_1 = -2$ καί $\lambda = -\frac{1}{2}$ παίρνομε:

$$S = \frac{-2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

16.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν -7 καί 11 νά παρεμβληθοῦν 23 ἀριθμοί καί τέτοιοι ὥστε μαζί μέ τούς -7 καί 11 νά ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὄρους ἀριθμητικῆς προόδου.

Ζητᾶμε οὐσιαστικά νά βροῦμε τή διαφορά σέ μιά ἀριθμητική πρόοδο μέ $a_1 = -7$ καί $a_{25} = 11$.

Σύμφωνα μέ τόν τύπο (1) τῆς παραγράφου 16.1(β) ἔχομε

$$a_{25} = a_1 + 24 \cdot \delta, \text{ δηλαδή } \text{ἔδῳ } 11 = -7 + 24\delta \implies \delta = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

2. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 5 καί 20480 νά παρεμβληθοῦν 11 ἀριθμοί καί τέτοιοι ὥστε μαζί μέ τούς 5 καί 11 νά ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὄρους γεωμετρικῆς προόδου.

Σύμφωνα μέ τόν τύπο $a_{13} = a_1 \cdot \lambda^{12}$ [τύπος (1), παράγρ. 16.2] θά ἔχομε: $20480 = 5 \cdot \lambda^{12} \implies \lambda^{12} = 4096 = 64^2 = (2^6)^2 = 2^{12} \implies \lambda = 2$.

3. *Νά βρεθούν πέντε αριθμοί που νά είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν τό άθροισμά τους ισούται μέ 20 και ό 5ος ισούται μέ τό τριπλάσιο του 1ου.*

Θά παραστήσουμε μέ x τό μεσαίο όρο και μέ y τή διαφορά· τότε οί όροι μας θά είναι οί: $x - 2y$, $x - y$, x , $x + y$, $x + 2y$. Έτσι θά έχομε τό σύστημα:

$(x - 2y) + (x - y) + x + (x + y) + (x + 2y) = 20$ (1) και $x + 2y = 3(x - 2y)$ (2). Από τήν (1) παίρνομε $x = 4$ και άκολουθώσ από τήν (2) $y = 1$. Οί ζητούμενοι συνεπώς αριθμοί είναι οί 2, 3, 4, 5, 6.

4. *Νά βρεθούν τά άθροίσματα:* α) $A_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. β) $A_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. γ) $A_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

(Νά έκφρασθούν δηλαδή τά A_1 , A_2 , A_3 συνοπτικά, μ' έναν τύπο, συναρτήσει του n).

α) Η άκολουθία τών φυσικών αριθμών είναι μία αριθμητική πρόοδος μέ πρώτον όρο τόν αριθμό 1 και διαφορά πάλιν 1.

$$\text{Έχομε συνεπώς } A_1 = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

β) Για τόν ύπολογισμό του A_2 θά χρησιμοποιήσουμε τήν ταυτότητα $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Δίνομε στό x διαδοχικά τίς τιμές 1, 2, 3, ..., n και έχομε:

$$\text{Γιά } x = 1: \quad 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$\text{Γιά } x = 2: \quad 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$\text{Γιά } x = 3: \quad 4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$\dots \dots \dots = \dots \dots \dots$$

$$\text{Γιά } x = n: \quad (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Προσθέτομε τώρα κατά μέλη τίς n παραπάνω ισότητες και παίρνομε:

$$\begin{aligned} 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n+1)^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + 3 \cdot A_2 + 3 \cdot A_1 + n \\ \Rightarrow (n+1)^3 &= (n+1) + 3A_2 + 3A_1 \Rightarrow 3A_2 = (n+1)^3 - (n+1) - 3A_1 = \\ &= (n+1)(n^2 + 2n) - \frac{3n(n+1)}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

γ) Για τόν ύπολογισμό του A_3 θά χρησιμοποιήσουμε τήν ταυτότητα $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$. Αν εργαστούμε όπως στην περίπτωση (β) βρίσκομε:

$$A_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

(Νά εφαρμοσθεί ή διαδικασία και νά γίνουν οί πράξεις και οί άναγωγές).

5. *Ν' άποδειχθούν οί τύποι: I) $a_n = a_1 + (n-1)\delta$ (τής αριθμητικής προόδου). II) $a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$ (τής γεωμετρικής προόδου).*

Βάζομε όπου $n = 1$ και βρίσκομε:

$$\begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ \text{γιά τήν αριθμητική πρόοδο} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ \text{γιά τή γεωμετρική πρόοδο} \end{array}$$

Υποθέτουμε ότι οι σχέσεις ισχύουν για $n = k$, όπου k κάποια τιμή του φυσικού n , και θ' αποδείξουμε ότι τότε θα ισχύουν κατανάγκη και για την επόμενη τιμή, δηλαδή για $n = k + 1$.

Εστω ότι $a_k = a_1 + (k - 1)\delta$.

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό δ και παίρνουμε:

$$a_k + \delta = a_1 + k\delta.$$

Αλλά $a_k + \delta = a_{k+1}$ άρα

$$a_{k+1} = a_1 + k\delta.$$

Εστω ότι $a_k = a_1 \cdot \lambda^{k-1}$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί λ και παίρνουμε:

$$a_k \cdot \lambda = a_1 \lambda^k.$$

Αλλά $a_k \cdot \lambda = a_{k+1}$ άρα

$$a_{k+1} = a_1 \cdot \lambda^k.$$

Αφού οι σχέσεις μας ισχύουν για $n = 1$, θα ισχύουν, σύμφωνα με το δεύτερο μέρος της αποδείξεως, και για $n = 2$, τιμή επόμενη της 1· άκολουθως, και για τον ίδιο λόγο, θα ισχύουν για $n = 3$ κ.ο.κ. Έτσι βλέπουμε ότι θα ισχύουν για $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αυτή η μέθοδος αποδείξεως λέγεται μέθοδος της τελείας (ή μαθηματικής) επαγωγής και μπορεί να χρησιμοποιείται σε σχέσεις που οι μεταβλητές τους παίρνουν τιμές φυσικού αριθμού.

Για άσκηση να γίνει με την παραπάνω μέθοδο ή απόδειξη των τύπων:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{και} \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

6. Το άθροισμα 4 αριθμών, που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής πρόοδου, ισούται με 20· το άθροισμα των αντιστρόφων τους ισούται με $\frac{25}{24}$. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Θα παραστήσουμε με $\alpha - 3\delta$ τον πρώτον όρο και 2δ τη διαφορά. Έτσι οι όροι μας θα εκφράζονται με τις παραστάσεις: $\alpha - 3\delta$, $\alpha - \delta$, $\alpha + \delta$, $\alpha + 3\delta$ και θα πάρουμε το σύστημα $(\alpha - 3\delta) + (\alpha - \delta) + (\alpha + \delta) + (\alpha + 3\delta) = 20$ (1) και

$$\frac{1}{\alpha - 3\delta} + \frac{1}{\alpha - \delta} + \frac{1}{\alpha + \delta} + \frac{1}{\alpha + 3\delta} = \frac{25}{24} \quad (2)$$

Από την (1) παίρνουμε $\alpha = 5$, οπότε η (2) γίνεται:

$$\frac{1}{5 - 3\delta} + \frac{1}{5 - \delta} + \frac{1}{5 + \delta} + \frac{1}{5 + 3\delta} = \frac{25}{24} \quad (3)$$

Από την (3) καταλήγουμε στη διτετράγωνη εξίσωση $9\delta^4 - 154\delta^2 + 145 = 0$ από την οποία βρίσκουμε: $\delta_{1,2} = \pm 1$ και $\delta_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{145}}{3}$.

Έτσι για $\delta = 1$ π.χ. οι αριθμοί είναι 2, 4, 6, 8.

7. Ν' αποδειχθεί ότι $0, \dot{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Ο περιοδικός δεκαδικός $0, \dot{9} = 0,999 \dots$ είναι το άθροισμα $0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots =$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots \quad \text{των άπειρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής πρόοδου με}$$

$$\alpha_1 = \frac{9}{10} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{1}{10}. \quad \text{Άρα} \quad S = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

Τό άθροισμα επίσης $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ είναι τό άθροισμα τών άπείρων όρων τής φθίνουσας γεωμετρικής προόδου μέ $a_1 = \frac{1}{2}$ καί $\lambda = \frac{1}{2}$. Άρα $S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

8. Έχει καταθεθεί κεφάλαιο K δραχμών καί άνατοκίζεται κατ' έτος πρós $\varepsilon\%$. Νά βρεθεί πόσο θά γίνει τό κεφάλαιο μετά n έτη.

Ό τόκος τής 1 δραχμής γιά ένα έτος είναι $\frac{\varepsilon}{100} = \tau$. Τό κεφάλαιο K στό τέλος του πρώτου έτους θά έχει γίνει, μέ τόν τόκο, $K + K\tau = K(1 + \tau)$.

Στό τέλος του 2ου έτους τό κεφάλαιο θά έχει γίνει $K(1 + \tau) + K(1 + \tau) \cdot \tau = K(1 + \tau)^2$. Έτσι στό τέλος του n -στού έτους τό κεφάλαιο θά έχει γίνει $K(1 + \tau)^n$.

9. Καταθέτομε στην άρχή κάθε χρόνο κεφάλαιο K δραχμών μέ άνατοκισμό $\varepsilon\%$. Νά βρεθεί τό όλικό ποσό πού μπορούμε νά εισπράξουμε μετά n έτη.

Η πρώτη κατάθεση θά μείνει στόν τόκο n έτη καί θά γίνει (βλέπε προηγούμενο πρόβλημα) $K(1 + \tau)^n$, ($\tau = \frac{\varepsilon}{100}$). Η 2η κατάθεση θά γίνει $K(1 + \tau)^{n-1}$, άφού θά μείνει στόν τόκο $n-1$ έτη, όμοια καί οι υπόλοιπες. Η τελευταία θά μείνει στόν τόκο ένα έτος καί θά γίνει $K(1 + \tau)$. Έχομε λοιπόν νά βρούμε τό άθροισμα τών n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου μέ πρώτον όρο τόν $K(1 + \tau)$ καί λόγο $1 + \tau$. Άρα

$$K_{\text{ολικό}} = \frac{K(1 + \tau) - K(1 + \tau)^{n+1}}{1 - (1 + \tau)} = \frac{K(1 + \tau) [(1 + \tau)^n - 1]}{\tau}.$$

10. Δόθηκε δάνειο A δραχμών μέ άνατοκισμό πρós $\varepsilon\%$ καί μέ τή συμφωνία νά εξοφληθεί μέ n ίσες δόσεις πού θά καταβάλλονται στό τέλος κάθε έτους. Κάθε δόση θεωρείται άνατοκισόμενη, πρós όφελος του χρεώστη, μέ τό ίδιο επιτόκιο. Νά ύπολογισθεί ή έτήσια δόση γιά τήν εξόφληση του δανείου.

Τό κεφάλαιο A μετά n έτη θά έχει γίνει $A(1 + \tau)^n$, ($\tau = \frac{\varepsilon}{100}$). Αν ύποθέσουμε ότι x είναι ή έτήσια δόση, τότε ή πρώτη θά μείνει στόν τόκο $n-1$ έτη καί θά έχει γίνει στό τέλος τής χρονικής περιόδου $x(1 + \tau)^{n-1}$. Όμοια οι άλλες δόσεις θά καλύπτουν αντίστοιχα τά ποσά $x(1 + \tau)^{n-2}$, $x(1 + \tau)^{n-3}$, ..., x . Πρέπει λοιπόν νά ισχύει ή ισότητα:

$$x + x(1 + \tau) + \dots + x(1 + \tau)^{n-1} = A(1 + \tau)^n \quad (1).$$

Τό πρώτο μέλος τής (1) είναι τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τής $γ$. προόδου μέ πρώτον όρο τόν x καί λόγο $1 + \tau$. Άρα ισούται μέ $\frac{x(1 + \tau)^n - x}{(1 + \tau) - 1} = \frac{x(1 + \tau)^n - x}{\tau}$.

Έτσι ή εξίσωση (1) γίνεται $\frac{x(1 + \tau)^n - x}{\tau} = A(1 + \tau)^n$ καί άπ' αυτήν παίρνουμε $x = \frac{A\tau(1 + \tau)^n}{(1 + \tau)^n - 1}$.

16.5 Άσκήσεις.

1. Νά βρεθοῦν 5 διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου άν τό άθροισμά τους ισούται μέ 5 καί τό γινόμενό τους μέ 280.

2. Τρεῖς αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Τό γινόμενό τους ισού-

ται με 8 και η διαφορά του πρώτου από τον τρίτο ίσούται με -3 . Νά βρεθούν οι αριθμοί.

(Υπόδειξη: Νά συμβολίσετε τους αριθμούς με $\frac{\alpha}{\lambda}$, α , $\alpha\lambda$).

3. Ι) 'Ο αριθμός $4,21717\ldots = 4,2\dot{1}\dot{7}$ νά γραφεί με τή μορφή κλάσματος.

ΙΙ) Ν' αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $0,9$ και $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \ldots$ είναι ίσοι.

4. "Αν κ και λ φυσικοί ($\mu\kappa < \lambda$), ν' αποδειχθεί ότι τό πλήθος τών φυσικῶν από τοῦ κ ἔως καί τοῦ λ εἶναι $\lambda - \kappa + 1$ καί νά βρεθῇ τό ἄθροισμά τους.

5. Οἱ ἀριθμοί πού ἐκφράζουν τά μέτρα τῆς ἀκμῆς, τῆς ἐπιφανείας καί τοῦ ὄγκου ἑνός κύβου εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Νά βρεθῇ ἡ πλευρά τοῦ κύβου.

6. Τέσσαρες ἀριθμοί εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καί ἔχουν ἄθροισμα $\frac{17}{4}$ καί γινόμενο $\frac{33}{128}$. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

7. Σ' ἓνα τετράγωνο πλευρᾶς $\alpha = 8$ cm ἐγγράφομε ἄλλο τετράγωνο πού ἔχει ὡς κορυφές τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου. Στό δεύτερο ἐγγράφομε μέ τόν ἴδιο τρόπο ἓνα τρίτο τετράγωνο καί θεωροῦμε ὅτι αὐτή ἡ διαδικασία συνεχίζεται ἀπεριόριστα. Νά βρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων αὐτῶν τῶν ἀπείρων τετραγώνων.

8. Θεωροῦμε τρίγωνο ΒΑΓ ὀρθογώνιο στό Α. "Αν ΑΔ ἡ κάθετη στή ΒΓ καί ΑΜ ἡ διάμεσος στή ΒΓ θά σημειώσουμε μέ α , β , γ τά μέτρα τῶν πλευρῶν καί μέ ν , μ , κ καί λ τά μέτρα τῶν ΑΔ, ΑΜ, ΒΔ καί ΔΓ ἀντιστοίχως. Ν' αποδειχθεί ὅτι:

Ι) Οἱ ἀριθμοί κ , μ , λ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

ΙΙ) Οἱ ἀριθμοί κ , ν , λ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 17

Ο ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΕ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥΣ

17.1 Ἐννοια τοῦ λογαρίθμου στό σύνολο $\mathbb{R}$ καί ιδιότητες.

α) **Εἰσαγωγικά:** Θεωροῦμε ἓναν πραγματικό ἀριθμό $\alpha > 0$ κι ἓνα θετικό κλάσμα (πηλίκο ἀκεραίων) $\frac{\kappa}{\lambda}$ καί γράφομε τή συμβολική παράσταση $\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$. Αὐτή, ὅπως βλέπουμε, ἔχει τή μορφή δυνάμεως μέ βάση τόν α καί ἐκθέτη τόν ρητό ἀριθμό $\frac{\kappa}{\lambda}$.

Θέλομε νά ἰσχύουν καί ἐδῶ οἱ γνωστές ιδιότητες τῶν δυνάμεων μέ ἀκέραιους ἐκθέτες. Δηλαδή, ἂν κ , λ , μ , ν φυσικοί καί α , β θετικοί πραγματικοί θέλομε νά ἔχομε:

$$a^{\frac{\kappa}{\lambda}} \cdot a^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\kappa\nu + \lambda\mu}{\lambda\nu}}, \quad a^{-\frac{\kappa}{\lambda}} = \frac{1}{a^{\frac{\kappa}{\lambda}}}, \quad a^{\frac{\kappa}{\lambda}} : a^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\kappa\nu - \lambda\mu}{\lambda\nu}},$$

$$(a \cdot \beta)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = a^{\frac{\kappa}{\lambda}} \cdot \beta^{\frac{\kappa}{\lambda}}, \quad (a : \beta)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = a^{\frac{\kappa}{\lambda}} : \beta^{\frac{\kappa}{\lambda}}, \quad \left(a^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}}.$$

"Υστερα ἀπ' αὐτά, τό νόημα πού ἀποκτᾶ ἡ παράσταση $\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ εἶναι:

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\lambda]{\alpha}\right)^\kappa \cdot \text{διότι: } \left(\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^\lambda = \alpha^\kappa \text{ και } \left(\sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa}\right)^\lambda = \alpha^\kappa. \text{ Έτσι π.χ.:}$$

$$25^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{25^3} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125.$$

Θά όρίσουμε τώρα και την έννοια του συμβόλου α^x , όπου x ένας άσύμμετρος αριθμός. Έστω π.χ. $x = \sqrt{2}$.

Παίρνουμε την ακολουθία των πραγματικών αριθμών

$$1, \quad 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad 1,41421, \dots,$$

πού έχει σαν όρους τις διαδοχικές κατέλλειψη προσεγγιστικές τιμές του άσυσμμετρου $\sqrt{2}$, και άς θεωρήσουμε αντίστοιχα την ακολουθία με όρους $7^1, 7^{1,4} = 7^{\frac{14}{10}}, 7^{1,41} = 7^{\frac{141}{100}}, 7^{1,414}, 7^{1,4142}, 7^{1,41421} \dots$. Αποδεικνύεται ότι ή ακολουθία αυτή έχει όριο έναν αριθμό μεταξύ $7^{1,41} \approx 15,5$ και $7^{1,42} \approx 15,9$ τόν αριθμό αυτό τόν όρίζουμε ώς δύναμη του 7 με έκθέτη τόν $\sqrt{2}$ και τόν συμβολίζουμε με $7^{\sqrt{2}}$.

Γενικά: Αν $a > 0$ και x ένας άσύμμετρος με δεκαδικό ανάπτγμα $\beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots$, τότε καλούμε δύναμη του a με έκθέτη x (συμβολικά a^x) τό όριο της ακολουθίας $a^{\beta_0}, a^{\beta_0, \beta_1}, a^{\beta_0, \beta_1 \beta_2}, a^{\beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3}, \dots, a^{\beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n}, \dots$, πού αποδεικνύεται ότι υπάρχει. Τό όριο αυτό είναι φυσικά ένας θετικός αριθμός.

Στήν πράξη ή δύναμη a^x την αντικαθιστούμε μ' έναν όρο της προηγούμενης ακολουθίας, ανάλογα με την επιθυμητή προσέγγιση.

Βασική ιδιότητα: Για κάθε $a > 0$ και $a \neq 1$ και κάθε $\beta > 0$ υπάρχει ένας και μόνον ένας πραγματικός x , τέτοιος ώστε

$$a^x = \beta$$

Ο αριθμός x , πού, σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, όρίζεται μονοσήμαντα, όταν δοθεί ό θετικός και διάφορος από ή μονάδα αριθμός a , για κάθε θετικό β , λέγεται λογάριθμος του β με βάση τόν a και συμβολίζεται με: $\log_a \beta = x$.

$$\text{Δηλαδή έχουμε: } \log_a \beta = x \iff a^x = \beta$$

$$a > 0, a \neq 1 \text{ και } \beta > 0$$

Αν ειδικά $a = 10$, θά γράφουμε $\log \beta$ αντί $\log_{10} \beta$.

Ο λογάριθμος αυτός με βάση τό 10 λέγεται δεκαδικός λογάριθμος.

Έπειδή π.χ. $5^3 = 125$, $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$, $0,0001 = 10^{-4}$, $1000 = 10^3$, έπεται ότι $\log_5 125 = 3$, $\log_7 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}$ και οί δεκαδικοί λογάριθμοι των αριθμών 0,0001 και 1000 ($\log 0,0001$, $\log 1000$) είναι αντίστοιχα οί αριθμοί -4 και 3.

Σημαντικές παρατηρήσεις: 1) Αν $a > 0$ και v φυσικός τότε, σύμφωνα με την παράγραφο 17.1 (α), ή $\sqrt[v]{a}$ μπορεί νά γράφεται $a^{\frac{1}{v}}$.

II) Σύμφωνα με τούς παραπάνω ορισμούς οι άρνητικοί αριθμοί δεν έχουν λογάριθμο στο σύνολο $\mathbb{R}$.

III) Έπειδή $a^0 = 1$ (για $\forall a \neq 0$) και $a^1 = a$, έπεται ότι $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$, όποια κι αν είναι ή λογαριθμική βάση $a > 0$.

β) Ιδιότητες : I) «Αν $\beta > 0$ και $\gamma > 0$, τότε $\log_a (\beta\gamma) = \log_a \beta + \log_a \gamma$. Δηλαδή : ό λογάριθμος του γινομένου δύο θετικών παραγόντων ίσούται με τό άθροισμα των λογαρίθμων αυτών των παραγόντων» ($a > 0$ και $a \neq 1$).

Πράγματι : Άς είναι $\alpha^x = \beta$ και $\alpha^y = \gamma$, δηλαδή $x = \log_a \beta$ και $y = \log_a \gamma$. Θά έχομε $\beta\gamma = \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$ και συνεπώς $\log_a (\beta\gamma) = x + y = \log_a \beta + \log_a \gamma$.

II) «Αν $\beta > 0$ και $\gamma > 0$, τότε $\log_a (\beta : \gamma) = \log_a \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) = \log_a \beta - \log_a \gamma$.

Δηλαδή : ό λογάριθμος του πηλίκου δύο θετικών αριθμών ίσούται με τό λογάριθμο του αριθμητή μείον τό λογάριθμο του παρονομαστή» ($a > 0$, $a \neq 1$).

Πράγματι : Άν $\alpha^x = \beta$ και $\alpha^y = \gamma$, τότε $\beta : \gamma = \alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$ και συνεπώς $\log_a (\beta : \gamma) = x - y = \log_a \beta - \log_a \gamma$.

III) «Αν $\beta > 0$ και $\mu \in \mathbb{R}$, τότε $\log_a \beta^\mu = \mu \cdot \log_a \beta$ ($a > 0$, $a \neq 1$)».

Δηλαδή : ό λογάριθμος μιås δυνάμεως ενός θετικού αριθμού β ίσούται με τό γινόμενο του εκθέτη της δυνάμεως επί τό λογάριθμο του αριθμού β .

Πράγματι : Άπό $\alpha^x = \beta$ έπεται $\beta^\mu = (\alpha^x)^\mu = \alpha^{\mu x}$ και συνεπώς $\log_a \beta^\mu = \mu x = \mu \cdot \log_a \beta$.

IV) «Όταν ή λογαριθμική βάση a είναι αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας (όπως όταν $a = 10$), τότε $\log_a \beta > 0$, αν $\beta > 1$ και $\log_a \beta < 0$, αν $\beta < 1$ ».

Διότι όταν $a > 1$, τότε είναι :

$$\alpha^x > 1 \quad \text{για} \quad x > 0$$

$$\alpha^x = 1 \quad \text{για} \quad x = 0 \text{ και}$$

$$\alpha^x < 1 \quad \text{για} \quad x < 0$$

V) «Αν $a > 1$ και $\beta > 0$, $\gamma > 0$, τότε ισχύει ή ισοδυναμία : $\beta \geq \gamma > 0 \iff \log_a \beta \geq \log_a \gamma$ ».

$$\text{Έχομε: } \beta \geq \gamma \iff \frac{\beta}{\gamma} \geq 1 \iff \log_a \frac{\beta}{\gamma} \geq 0 \iff \log_a \beta - \log_a \gamma \geq 0$$

$$\iff \log_a \beta \geq \log_a \gamma.$$

Παρατήρηση : Έπειδή $\forall \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι $\beta^2 > 0$, αν δεν γνωρίζομε ειδικά ότι $\beta > 0$ δεν πρέπει νά γράφομε $\log \beta^2 = 2 \log \beta$, αλλά $\log \beta^2 = 2 \log |\beta|$.

17.2 Προσδιορισμός του δεκαδικού λογαρίθμου ενός αριθμού και αντίστροφα του αριθμού από τό λογάριθμό του.

Σ' όλα τά παρακάτω οι θεωρούμενοι λογάριθμοι θά είναι δεκαδικοί.

Είναι φανερό ότι κάθε αριθμός της μορφής $10^μ$, όπου $μ$ άκεραιος, έχει ως δεκαδικό λογάριθμο τόν άκεραίο αριθμό $μ$.

$$\text{Γιά παράδειγμα οί αριθμοί } 0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}, 0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1},$$

$1 = 10^0, 10 = 10^1, 100 = 10^2, 1000 = 10^3$, έχουν ως (δεκαδικούς) λογαρίθμους τούς αριθμούς $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ αντίστοιχως.

Κάθε θετικός αριθμός A , πού δέν είναι ίσος πρός δύναμη του 10 μέ άκεραιον εκθέτη, έχει ως λογάριθμο έναν αριθμό αποτελούμενο από ένα άκεραίο μέρος και ένα δεκαδικό μέρος. Τό δεκαδικό μέρος είναι συνήθως ένα κατά προσέγγιση συμπλήρωμα του άκεραίου μέρους της τιμής του λογαρίθμου και τό παίρνομε από πίνακες· τό άκεραίο μέρος, τό όποίο λέγεται **χαρακτηριστικό** του λογαρίθμου, τό βρίσκομε μόνοι μας.

Γιά νά καταλάβομε τή διαδικασία μέ τήν όποία προσδιορίζεται ό λογάριθμος ενός αριθμού $A > 0$, θά άναζητήσομε και θά βρούμε τό λογάριθμο μερικῶν αριθμῶν· στόχος μας είναι νά φτάσομε στά συμπεράσματα πού χρησημοποιούμε κατά τήν εφαρμογή τῶν λογαρίθμων στους πρακτικούς υπολογισμούς.

Νά βρεθοῦν, λοιπόν, οί λογάριθμοι τῶν αριθμῶν :

$$A_1 = 754, A_2 = 47,48 \text{ καί } A_3 = 0,754.$$

I) Ἐχομε: $100 < 754 < 1000$ καί επομένως, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα V τῆς παράγρ. 17·1 (β), $\log 100 < \log 754 < \log 1000$, δηλαδή $2 < \log 754 < 3$. Ἐτσι τό άκεραίο μέρος (τό χαρακτηριστικό) του λογαρίθμου του 754 είναι 2 · στους πίνακες βλέπομε ότι τό δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου του 754 είναι ό $0,87737$. Ἐχομε συνεπῶς $\log 754 = 2,87737$.

II) Ἐπειδή $A_2 = 47,48 = \frac{4748}{100}$, θά ἔχομε $\log 47,48 = \log \frac{4748}{100} = \log 4748 - \log 100 = \log 4748 - 2$. Ἀλλά από τή σχέση $1000 < 4748 < 10000$ παίρνομε $\log 1000 < \log 4748 < \log 10000$, δηλαδή $3 < \log 4748 < 4$. Στους πίνακες βρίσκομε ὡς δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου του 4748 τό: $0,67651$. Ἄρα $\log 4748 = 3,67651$, ὁπότε $\log 47,48 = 3,67651 - 2 = 1,67651$.

$$\text{III) Γράφομε } A_3 = 0,754 = \frac{754}{1000} \text{ καί ἀκολουθῶς}$$

$$\log A_3 = \log 754 - \log 1000 = \log A_1 - 3 = 2,87737 - 3.$$

Ἡ διαφορά $2,87737 - 3$ είναι βέβαια ό άρνητικός αριθμός $-0,12263$ και αὐτός είναι ό λογάριθμος του A_3 · ὁμως προτιμᾶμε νά γράφομε $\log A_3 = 2,87737 - 3 = 2 + 0,87737 - 3 = -1 + 0,87737$. Κατ' αὐτό τόν τρόπο τό δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου του $0,754$ μένει τό ἴδιο μέ τό δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου του 754 και ἀλλάζει μόνο τό χαρακτηριστικό.

Ἔτσι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων τῆς μονάδας, πού αὐτοὶ εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί, θὰ δίνονται ὡς ἄθροισμα ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀκεραίου καὶ ἑνὸς θετικοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Συνηθίζουμε, ἀντὶ γιὰ τὴ γραφή $-1 + 0,87737$, νὰ γράφουμε συντόμως $\bar{1},87737$.

Ὑστερα ἀπὸ τὰ παραπάνω μπορούμε νὰ διατυπώσουμε τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα :

1. Τὸ χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ $A > 1$ εἶναι ὁ μὴ ἀρνητικός ἀκέραιος $(0, 1, 2, 3, \dots)$ πού προκύπτει ὅταν ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ A ἀφαιρέσουμε τὸν ἀριθμὸ 1.

2. Τὸ χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ A μὲ $0 < A < 1$, εἶναι ἕνας ἀρνητικός ἀκέραιος: ὁ ἀντίθετος τοῦ φυσικοῦ πού ἐκφράζει τὴν τάξη, μετὰ τὴν ὑποδιαστολή, τοῦ πρώτου μὴ μηδενικοῦ ψηφίου στό δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ A .

3. Ὄταν πολλαπλασιάσουμε (ἀντίστοιχα διαιρέσουμε) ἕναν ἀριθμὸ $A > 0$ μὲ 10^n , ὅπου $n \in \mathbb{N}$, τότε βρίσκουμε τὸ λογάριθμο τοῦ ἐξαγομένου ἂν στὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A προσθέσουμε τὸν ἀριθμὸ n (ἀντίστοιχα τὸν $-n$) καὶ διατηρήσουμε ἀναλλοίωτο τὸ δεκαδικὸ μέρος.

Γιὰ νὰ ἐφαρμόσουμε τὰ προηγούμενα θὰ βροῦμε ἀκόμα ἐδῶ τὸ λογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ 0,052687. Τὸ χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι ὁ ἀρνητικός ἀκέραιος -2 : τὸ δεκαδικὸ μέρος ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 52687 ἢ τοῦ 5268,7.

Ἐπειδὴ οἱ πίνακες πού διαθέτομε συνήθως δὲν περιέχουν τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων ἀριθμῶν μεγαλυτέρων ἀπὸ 10000, θὰ προσδιορίσουμε τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 5268,7 μὲ τὴν ἐπόμενη διαδικασία:

$$\text{Δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ } 5269 = 72173$$

$$\text{Δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ } 5268 = 72165$$

Σὲ διαφορὰ ἀριθμῶν κατὰ 1 ἀντιστοιχεῖ διαφορὰ λογαρίθμων κατὰ 8 μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Σὲ διαφορὰ ἀριθμῶν κατὰ 0,7 θὰ ἔχομε: διαφορὰ λογαρίθμων $0,7 \cdot 8 = 5,6 = 5$ μονάδες 5ης δεκαδικῆς τάξεως καὶ 6 μονάδες 6ης δεκαδικῆς τάξεως. Συνεπῶς τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 5268,7 εἶναι: $0,72165 + 0,000056 = 0,721706$.

$$\text{Ἄρα: } \log 0,052687 = \bar{2},721706 \simeq \bar{2},72171.$$

Θὰ ἀσχοληθοῦμε τώρα λίγο καὶ μὲ τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα: δηλαδή πῶς προσδιορίζεται ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου γνωρίζουμε τὸ λογάριθμο.

Ἄν $\log A = 4,69701$, νὰ βρεθεῖ ὁ ἀριθμὸς A .

Ἀναζητοῦμε στοὺς πίνακες τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων τὸν ἀριθμὸ 69701. Αὐτὸς ὁ ἴδιος δὲν ὑπάρχει, ἀλλὰ βρίσκουμε τοὺς 69697 καὶ 69705 μετὰξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται. Στὰ δεκαδικὰ μέρη 0,69697 καὶ 0,69705 ἀντιστοιχίζονται οἱ ἀριθμοὶ 4977 καὶ 4978. Ἐπομένως:

$$\text{Δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ } 4978 = 69705$$

$$\text{Δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ } 4977 = 69697$$

Σὲ διαφορὰ ἀριθμῶν κατὰ 1 διαφορὰ λογαρίθμων $\quad \quad \quad = \quad \quad \quad 8$ μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως.

Σε διαφορά λογαρίθμων $69701 - 69697 = 4$ μονάδων πέμπτης δεκαδικής τάξεως αντιστοιχεί διαφορά αριθμών x όπου $x \cdot 8 = 4 \implies x = \frac{4}{8} = 0,5$. Άρα ο αριθμός 4977,5 είναι ένας αριθμός του οποίου ο λογάριθμος έχει δεκαδικό μέρος ίσο με 0,69701. Έπειδή όμως το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι 4, έπεται ότι το άκεραίο μέρος του ζητούμενου αριθμού είναι ένας πενταψήφιος άκεραίος αριθμός. Άρα τελικά ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 49775.

17.3 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Αν $\log \alpha = \bar{1},34522$, $\log \beta = \bar{7},49784$ και $\log \gamma = \bar{8},28441$ νά βρεθεί ο

λογάριθμος του αριθμού: $K = \frac{\alpha^5 \sqrt[4]{\beta}}{\gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \log K &= \log(\alpha^5 \sqrt[4]{\beta}) - \log \gamma = \log \alpha^5 + \log \sqrt[4]{\beta} - \log \gamma = \\ &= 5 \log \alpha + \frac{1}{4} \log \beta - \log \gamma = 5 \cdot \bar{1},34522 + \frac{1}{4} \cdot \bar{7},49784 - \bar{8},28441. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άλλά: } \bar{1},34522 \cdot 5 &= (-1 + 0,34522) \cdot 5 = -5 + 1,72610 = \\ &= -5 + 1 + 0,72610 = -4 + 0,72610 = \bar{4}, 72610. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{7},49784 \cdot \frac{1}{4} &= (-7 + 0,49784) : 4 = (-8 + 1,49784) : 4 = \\ &= \frac{-8}{4} + \frac{1,49784}{4} = -2 + 0,37446 = \bar{2},37446. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } K &= \bar{4},72610 + \bar{2},37446 - \bar{8},28441 = \\ &= (-4 + 0,72610) + (-2 + 0,37446) - (-8 + 0,28441) = \\ &= (-4 - 2) + 0,72610 + 0,37446 + 8 - 0,28441 = 2 + 1,10056 - 0,28441 = \\ &= 2,81615. \end{aligned}$$

2. Νά υπολογισθεί με τη χρησιμοποίηση λογαρίθμων ο αριθμός $A = \frac{2,45 \cdot \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt{6342}}{0,52 \cdot 13^4}$ κατά προσέγγιση $\frac{1}{1000}$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \log A &= \log(2,45 \cdot \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt{6342}) - \log(0,52 \cdot 13^4) = \\ &= \log 2,45 + \log \sqrt[5]{7} + \log \sqrt{6342} - \log 0,52 - \log 13^4 = \\ &= \log 2,45 + \frac{1}{5} \log 7 + \frac{1}{2} \log 6342 - \log 0,52 - 4 \log 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Χρησιμοποιώντας πίνακες βρίσκουμε } \log 2,45 &= 0,38917, \log 7 = 0,84510, \log 6342 = \\ &= 3,80223, \log 0,52 = \bar{1},71600, \log 13 = 1,11394 \cdot \text{άκολουθως } \frac{1}{5} \log 7 = 0,16902, \\ \frac{1}{2} \log 6342 &= 1,901115, 4 \cdot \log 13 = 4,45576. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{'Επομένως } \log A = 0,38917 + 0,16902 + 1,901115 - (\bar{1},71600 + 4,55576) = \\ & = 2,459331 - 4,27176 = (2 + 0,45931) - (4 + 0,27176) = (2 - 4) + (0,45931 - 0,27176) = \\ & = \bar{2},18755. \text{ 'Ακολουθως βρίσκομε } A \simeq 0,015. \end{aligned}$$

17.4 'Ασκήσεις.

1. Νά υπολογισθεί με τη βοήθεια λογαρίθμων ο αριθμός:

$$A = \frac{\frac{5}{12} + \frac{9}{12} - 6 \cdot \left(2 + \frac{7}{30}\right)}{\frac{28}{5} - \frac{9}{10}} \cdot \frac{27}{60} \cdot (6,042 + 3,555 + 4,431) \cdot \sqrt[3]{69}.$$

(Ύποδειξη: 'Επειδή $A < 0$ θά υπολογίσετε πρώτα τόν $-A$).

2. Νά υπολογισθεί ή ακτίνα σφαίρας από χαλκό βάρους 3500 kg^* και ειδικού βάρους $8,92 \text{ kg}^*/\text{dm}^3$. 'Ακολουθως νά βρεθεί ή επιφάνεια τής σφαίρας.

3. Σιδερένιο δοκάρι έχει μήκος $4,8 \text{ m}$ και διατομή κανονικό εξάγωνο πλευράς 4 cm . 'Αν τό ειδικό βάρος του σιδήρου είναι $7,87 \text{ g}^*/\text{cm}^3$ νά υπολογισθεί τό βάρος του δοκαριού σε kg^* .

4. Ν' αποδειχθεί ότι $\log_{\alpha} K = \frac{\log_{\beta} K}{\log_{\beta} \alpha} \iff \log_{\beta} K = \log_{\alpha} K \cdot \log_{\beta} \alpha$ (α, β, K θετικοί αριθμοί) και γιά εφαρμογή νά βρείτε τό $\log_5 100$ με τη βοήθεια τών δεκαδικών λογαρίθμων.

ΕΝΟΤΗΤΑ 18

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

18.1 'Εκθετικές εξισώσεις.

'Ορισμοί. Κάθε σχέση τής μορφής $\mu k^{\delta x + \varepsilon} = \nu \lambda^{\delta' x + \varepsilon'}$ (1), όπου $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ ορισμένοι θετικοί πραγματικοί και $\delta, \delta', \varepsilon, \varepsilon'$ πραγματικοί αριθμοί με ένα τουλάχιστον από τούς δ, δ' όχι μηδενικό, θά λέγεται **έκθετική εξίσωση**, αν μ' αὐτή τή σχέση ἐννοοῦμε ὅτι ζητᾶμε νά προσδιορίσουμε τίς πραγματικές τιμές του x γιά τίς ὁποῖες οἱ παραστάσεις $\mu k^{\delta x + \varepsilon}$ καί $\nu \lambda^{\delta' x + \varepsilon'}$ παίρνουν ἴσες τιμές.

'Επειδή $\mu k^{\delta x + \varepsilon} = \nu \lambda^{\delta' x + \varepsilon'} \iff \mu k^{\delta x} \cdot \kappa^{\varepsilon} = \nu \lambda^{\delta' x} \cdot \lambda^{\varepsilon'} \iff$
 $(\kappa^{\delta})^x = \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{\lambda^{\varepsilon'}}{\kappa^{\varepsilon}} \cdot (\lambda^{\delta'})^x$, δηλαδή $A^x = \rho \cdot B^x$, (θέσαμε $\kappa^{\delta} = A$, $\frac{\nu \lambda^{\varepsilon'}}{\mu \kappa^{\varepsilon}} = \rho$ καί $\lambda^{\delta'} = B$), καί ἐπειδή $A^x = \rho \cdot B^x \iff \left(\frac{A}{B}\right)^x = \rho$, συμπεραίνουμε ὅτι ἐξισώσεις τής μορφής (1) παίρνουν τελικά τή μορφή:

$$a^x = \beta$$

(2)

Παρατήρηση: 'Η μορφή (2) δέν εἶναι ή μοναδική μορφή ἐκθετικῆς ἐξισώσεως. 'Εμεῖς ὁμως θά περιοριστοῦμε ἐδῶ σέ ἐξισώσεις αὐτῆς τῆς μορφῆς ή σέ ἄλλες, πού, ὅπως ή (1), ἀνάγονται στή μορφή (2).

Γιά νά ἐπιλύσουμε τήν ἐξίσωση (2) ἐξισώνουμε ἀρχικά τούς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν τῆς. 'Ετσι ἔχομε: $a^x = \beta \iff x \cdot \log a = \log \beta$ καί συνεπῶς

$x = \frac{\log \beta}{\log \alpha}$. *Αν όμως $\beta = \alpha^p$, όπου p ρητός, τότε από $\alpha^x = \alpha^p$ παίρνουμε άμεσα $x = p$.

Παραδείγματα : Νά επιλυθούν οι εξισώσεις : I) $5^x = 0,4$ · II) $9^x = 2187$.

$$\begin{aligned} \text{*Έχουμε: I) } x \cdot \log 5 &= \log 0,4 \iff x = \frac{\log 0,4}{\log 5} \approx \frac{1,60206}{0,69897} = \\ &= \frac{-1 + 0,60206}{0,69897} = -\frac{39794}{69897} \end{aligned}$$

$$\text{II) } 9^x = 2187 \iff 9^x = 3^7 \iff 9^x = (\sqrt{9})^7 \iff 9^x = 9^{\frac{7}{2}} \implies x = \frac{7}{2}.$$

*Εξισώσεις της μορφής $\kappa\alpha^{2x} + \lambda\alpha^x\beta^x + \mu\beta^{2x} = 0$ (3), όπου κ, λ, μ όχι μηδενικοί πραγματικοί και α, β θετικοί, ανάγονται σε εξισώσεις της μορφής (2) ύστερα από την παρακάτω διαδικασία.

*Αρχικά διαιρούμε τά μέλη της (3) διά β^{2x} και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \kappa \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + \lambda \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \mu &= 0 \quad (4). \text{ Θέτουμε τώρα στην (4) } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y \\ \text{και παίρνουμε } \kappa y^2 + \lambda y + \mu &= 0 \quad (5). \text{ *Αν } y_1 \text{ ρίζα της (5) και είναι } y_1 > 0 \text{ τότε} \\ \text{έχουμε } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x &= y_1 \text{ και άκολούθως } x \cdot \log \frac{\alpha}{\beta} = \log y_1 \implies x = \log y_1 : \log \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\log y_1}{\log \frac{\alpha}{\beta}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα : Νά επιλυθεί η εξίσωση $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{*Έχουμε: } 3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 &= 0 \iff 3^2 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0 \iff \\ \iff 9 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 3 &= 0 \quad (1). \text{ Θέτουμε στην (1) } 3^x = y \text{ και παίρνουμε} \\ 9y^2 - 28y + 3 &= 0 \text{ της οποίας οι ρίζες είναι } y_1 = \frac{1}{9} \text{ και } y_2 = 3. \text{ *Έτσι τελικά} \\ \text{έχουμε } 3^x &= \frac{1}{9} = 3^{-2} \implies x_1 = -2 \text{ και } 3^x = 3 = 3^1 \implies x_2 = 1. \end{aligned}$$

18.2 Λογαριθμικές εξισώσεις.

***Ορισμοί :** Λογαριθμικές εξισώσεις λέγονται σχέσεις της μορφής $A(\log x)^* = B(\log x)$ (1), εφόσον έννοούμε ότι αναζητούμε θετικές τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες οι παραστάσεις A και B γίνονται ίσες καθώς και σχέσεις της μορφής $\kappa \cdot \log A(x) = \mu \cdot \log B(x)$ (2) με $\kappa \mu \neq 0$, εφόσον έννοούμε ότι αναζητούμε πραγματικές τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες οι παραστάσεις $A(x)$

* Ο συμβολισμός $A(\log x)$ σημαίνει μία παράσταση A που εξαρτιέται από τό $\log x$.

καί $B(x)$ παίρνουν θετικές τιμές καί οί παραστάσεις $\kappa \cdot \log A(x)$, $\mu \cdot \log B(x)$, γίνονται ίσες.

Ἡ ἐπίλυση μιᾶς λογαριθμικῆς εξισώσεως ἀνάγεται συνήθως στήν ἐπίλυση μιᾶς ἀπό τίς παρακάτω ἀπλές μορφές λογαριθμικῶν εξισώσεων: $\log x = \log \alpha$, $\log f(x) = \log \alpha$, $\log f(x) = \log \varphi(x)$, ὅπου $f(x)$ καί $\varphi(x)$ ρητές ἢ ἄρρητες παραστάσεις τοῦ x . Οἱ λύσεις αὐτῶν, ὅταν ὑπάρχουν, προκύπτουν ἀντίστοιχα ἀπό τίς εξισώσεις $x = \alpha$, $f(x) = \alpha$, $f(x) = \varphi(x)$.

Παραδείγματα: Νά ἐπιλυθοῦν οἱ εξισώσεις: I) $(\log x)^2 - \log x + 2 = 0$. II) $2 \log(2x + 1) = \log 7 + \log(3x - 2)$.

I) Θέτομε $\log x = y$ καί παίρνομε $y^2 - y - 2 = 0$ (Iα). Οἱ λύσεις τῆς (Iα) εἶναι $y_1 = -1$ καί $y_2 = 2$. Ἔτσι ἀπό $\log x = -1$ ἔχομε $x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ καί ἀπό $\log x = 2$ ἔπεται $x = 10^2 = 100$.

II) Ἡ εξίσωση γράφεται ἰσοδύναμα: $\log(2x + 1)^2 = \log[7(3x - 2)]$ (IIα).

Ἡ εξίσωση (IIα) ἱκανοποιεῖται ἀπό τίς πραγματικές λύσεις (ἂν ὑπάρχουν) τῆς $(2x + 1)^2 = 7(3x - 2)$ (IIβ), δεδομένου ὅτι $(2x + 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Λύσεις τῆς (IIβ) εἶναι οἱ ἀριθμοί $\frac{5}{4}$ καί 3 καί συνεπῶς αὐτοί εἶναι λύσεις καί τῆς (II).

18.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ εξίσωση: $11^{2x-1} = 19$.

$$\begin{aligned} \text{Ἔχομε: } 11^{2x-1} = 19 &\Leftrightarrow 11^{2x} \cdot 11^{-1} = 19 \Leftrightarrow (11^2)^x \cdot \frac{1}{11} = 19 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 121^x = 209 \Rightarrow x \log 121 = \log 209 \Rightarrow x = \frac{\log 209}{\log 121} \approx \frac{2,32015}{2,08279} = \\ &= \frac{232015}{208279}. \end{aligned}$$

2. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ εξίσωση: $5^{7x-1} = 25\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \text{Ἔχομε: } 5^{7x-1} = 25\sqrt{5} &\Leftrightarrow 5^{7x-1} = 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5^{7x-1} = 5^{2+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5^{7x-1} = 5^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 7x-1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ εξίσωση: $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$.

Ἔχομε: $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$ (1). Θέτομε $3^x = y$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται $y^2 - 7y - 18 = 0$ (2). Λύσεις τῆς (2) εἶναι οἱ τιμές $y_1 = -2$ καί $y_2 = 9$. Ἡ τιμή -2 ἀπορρίπτεται ($3^x > 0$), ἐνῶ ἀπό τήν τιμή 9 παίρνομε $3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

4. Νά επιλυθεί η εξίσωση $5(\log x)^2 = 8 \log x + 4$.

Έχουμε: $5(\log x)^2 = 8 \log x + 4 \Leftrightarrow 5(\log x)^2 - 8 \log x - 4 = 0$ (1).
 Θέτουμε στην (1) $\log x = y$ και παίρνουμε $5y^2 - 8y - 4 = 0$ (2). Ρίζες της (2) είναι οι αριθμοί $y_1 = -\frac{2}{5}$ και $y_2 = 2$. Έτσι έχουμε $\log x = -\frac{2}{5}$ και $\log x = 2$ και άπ' αυτές αντίστοιχα $x = 10^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{10^{\frac{2}{5}}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt[5]{0,01} \simeq 0,4$ και $x = 10^2 = 100$.

5. Νά επιλυθεί η εξίσωση: $\log(2x-1) + \log(5x-13) = 1$.

Έχουμε: $\log(2x-1) + \log(5x-13) = 1 \Leftrightarrow \log[(2x-1)(5x-13)] = \log 10 \Rightarrow (2x-1)(5x-13) = 10 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{10}$ και $x_2 = 3$. Η τιμή $\frac{1}{10}$ απορρίπτεται διότι οι παραστάσεις $2x-1$ και $5x-13$ παίρνουν για $x = \frac{1}{10}$ αρνητικές τιμές.

6. Νά επιλυθεί το σύστημα: $4^{2x-3} \cdot 2^{y+2} = 1024$ (I) και $3^{x-2} \cdot 3^{y+1} = \frac{1}{9}$ (II).

Οι εξισώσεις (I) και (II) γράφονται ισοδύναμα $(2^2)^{2x-3} \cdot 2^{y+2} = 2^{10}$ ή $2^{4x+y-4} = 2^{10}$ (Iα) και $3^{x+y-1} = 3^{-2}$ (IIα). Από τις (Iα) και (IIα) παίρνουμε το γραμμικό σύστημα $4x + y - 4 = 10$ και $x + y - 1 = -2$ από το οποίο έχουμε $x = 5$ και $y = -6$.

7. Νά επιλυθεί το σύστημα $\log x + \log y = 1$ (I) και $x + y = 11$ (II) ($x > 0, y > 0$).

Η (I) είναι ισοδύναμη με $\log(xy) = \log 10 \Rightarrow xy = 10$. Έτσι έχουμε το δευτεροβάθμιο σύστημα $xy = 10$ (Iα) και $x + y = 11$ (II) από το οποίο παίρνουμε $x = 1$ και $y = 10$ ή $x = 10$ και $y = 1$.

8. Νά επιλυθεί το σύστημα $xy = 1000$, $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{x^{\log x}}$.

Λογαριθμίζουμε τά μέλη των δυό εξισώσεων και παίρνουμε $\log x + \log y = 3$ (1) και $\log x - \log y = \frac{1}{3} \log(x^{\log x})$ ή $3(\log x - \log y) = (\log x)^2$ (2). Θέτουμε $\log x = \varphi$ και $\log y = \omega$ και παίρνουμε το σύστημα $\varphi + \omega = 3$ (1') και $3(\varphi - \omega) = \varphi^2$ (2'). Από την επίλυση του συστήματος των (1') και (2') παίρνουμε $\varphi = 3$ και $\omega = 0$, οπότε ή $\log x = 3$ μάς δίνει $x = 1000$ και από την $\log y = 0$ προκύπτει $y = 1$.

18.4 Ασκήσεις.

1. Νά επιλυθεί η εξίσωση $5^{x+1} - 5^{x-1} + 5^{x-2} = 121$.

2. Νά επιλυθούν οι εξισώσεις: 1) $3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}$

II) $\sqrt{3^{4x} + 1} + \sqrt{2 \cdot 3^{4x} + 3} = 5$. (Υπόδειξη: Νά θέσετε $3^{4x} = y$ και νά επιλύσετε πρώτα την άρρητη εξίσωση $\sqrt{y+1} + \sqrt{2 \cdot y + 3} = 5$).

3. Νά επιλυθούν οι εξισώσεις: I) $\log(x-1) + 3\log \sqrt[3]{90x+10} = 4$.
 II) $5^{\log 2x} + 3 \cdot 5^{4-\log 2x} = 100$.

4. Νά επιλυθούν οι εξισώσεις: I) $3^{x+1} + \frac{54}{3^x} = 83$ · II) $100 \cdot 10^x = \sqrt[3]{100^5}$
 ($x \in \mathbb{N}$) · III) $2^{x+1} + 4^x = 80$ · IV) $2^x + 4^x = 272$ · V) $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ ·
 VI) $3^{x+2} + 9^x + 1 = 810$.

5. Νά επιλυθούν οι εξισώσεις: I) $\log x = 3 \log 18 - 4 \log 12$ · II) $5 \log x - \log 288$
 $= 3 \cdot \log \frac{x}{2}$ · III) $3^{x+1} + \frac{32}{3^x} = 20$ · IV) $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$ ·

V) $\frac{x^{\log x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{10}$ ·

Άσκησης για επανάληψη.

1. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($a \neq 0$), νά ορισθούν οι α, β, γ έτσι ώστε οι αριθμοί $\rho_1, \alpha, \beta, \gamma, \rho_2$, με τη σειρά που γράφηκαν, νά είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Υπόδειξη: Γράψτε $\rho_1 = \beta - 2\delta, \alpha = \beta - \delta, \beta, \gamma = \beta + \delta, \rho_2 = \beta + 2\delta$ και χρησιμοποιείτε και τις σχέσεις $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\alpha}{\beta}, \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$).

2. Γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτον όρο $a_1 = 3$ και λόγο $\lambda = -2$. Νά σχηματίσετε εξίσωση $x^2 + \kappa_n x + \lambda_n = 0$ που νάχει ως ρίζες τους όρους a_n και a_{n+1} της προόδου. Ακολουθώς ν' αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_n = \frac{\kappa_n}{\lambda_n}, n = 1, 2, 3, \dots$ είναι μία φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος και νά βρῆτε τό άθροισμα τών άπείρων όρων της.

3. Νά βρεθεί τό άθροισμα όλων τών άκεραίων που είναι μεγαλύτεροι από 100 και μικρότεροι από 1000 και που διαιρούμενοι διά 11 άφήνουν υπόλοιπο 5.

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι οι αριθμοί είναι της μορφής $11\mu + 5$, όπου $\mu \in \mathbb{N}$ και ότι η ελάχιστη τιμή του $\mu = 9$, ενώ η μέγιστη τιμή του $\mu = 90$).

4. Νά επιλυθούν οι εξισώσεις: I) $5^{x-1} = \sqrt[3]{5} \cdot 3^x - \frac{1}{2} - 2 \cdot 5^{x-1}$
 II) $-\frac{1}{3} \log(2x-4) + \log \sqrt[3]{x+2} = \frac{1}{3}$.

5. Νά επιλυθεί ή εξίσωση $10^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\log x} = x^2 \sqrt{x}$.

(Υπόδειξη: Νά πάρτε τους λογαρίθμους και τών δύο μελών).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

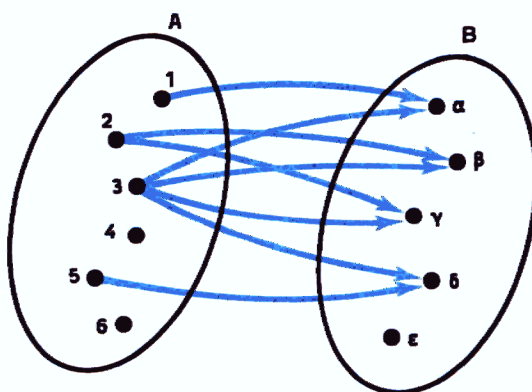
ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 19

ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ. ΜΕΛΕΤΗ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

19.1 Τί είναι ή συνάρτηση. Πραγματικές συναρτήσεις.

α) Εισαγωγικά : "Ας θεωρήσουμε δυό μη κενά σύνολα A και B και ας είναι π.χ. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ (σχ. 19.1 α). "Ας υποθέσουμε ακόμα ότι, κατά κάποιον τρόπο, ένα τουλάχιστον στοιχείο του συνόλου A συνδέεται μ' ένα ή περισσότερα στοιχεία του συνόλου B .



Σχ. 19.1 α.

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε, ότι έχουμε μιά διμελή (μιά δυαδική) σχέση από τό σύνολο A (πρώτο σύνολο) πρός τό σύνολο B (δεύτερο σύνολο).

"Έχουμε όρίσει, κατ' αυτό τόν τρόπο, ένα σύνολο R διατεταγμένων ζευγών με πρώτα στοιχεία από τό A και δεύτερα από τό B .

Στή σχέση πού εμφανίζει παραστατικά τό σχήμα 19.1 α τό σύνολο R είναι: $R = \{(1, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta), (3, \gamma), (3, \delta), (5, \delta)\}$ και τό σχέδιο, στό όποιο έχουμε μαρκάρει με βέλη όλα τά διατεταγμένα ζεύγη τής σχέσεως πού θεωρούμε, λέγεται γράφημα τής σχέσεως.

"Όλα τά στοιχεία $x \in A$, καθένα από τά όποια έχει ένα (τουλάχιστον)

αντίστοιχο $y \in B$, αποτελούν ένα υποσύνολο του A που λέγεται **πεδίο ορισμού** της σχέσεως. Στο παράδειγμά μας πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $\Delta = \{1, 2, 3, 5\} \subset A$.

Όλα τα στοιχεία $y \in B$, καθένα από τα οποία είναι αντίστοιχο ενός (τουλάχιστον) $x \in A$, αποτελούν ένα υποσύνολο του B που λέγεται **πεδίο τιμών** της σχέσεως. Στο παράδειγμά μας πεδίο τιμών είναι το σύνολο $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Για να δηλώσουμε συμβολικά ότι ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) , με $x \in A$ και $y \in B$, ανήκει σ' ένα σύνολο R μίας σχέσεως σ από το A προς το B γράφουμε:

$$A \ni x \xrightarrow{\sigma} y \in B \quad \text{καί διαβάζουμε:}$$

«Στό x του A αντιστοιχίζεται, μέσω της σ , τό y του B ». Τα σύμβολα x και y , που παίρνουν τιμές μέσα στα σύνολα A και B αντίστοιχα, που αντιπροσωπεύουν δηλαδή διάφορα στοιχεία των δύο συνόλων, λέγονται **μεταβλητές**· και τό x λέγεται ειδικότερα **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ τό y λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Θά θεωρήσουμε τώρα και τό σύνολο

$S = \{(\alpha, 1), (\beta, 2), (\gamma, 2), (\alpha, 3), (\beta, 3), (\gamma, 3), (\delta, 3), (\delta, 5)\}$, δηλαδή τό σύνολο των ζευγών που παράγονται από τά ζεύγη και μόνο του παραπάνω συνόλου R με έναλλαγή των στοιχείων τους.

Ένω τό σύνολο R είναι ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $A \times B$, τό σύνολο S είναι υποσύνολο του γινομένου $B \times A$.

Η σχέση που δίνεται από τό σύνολο S , και ή όποια είναι μία σχέση από τό σύνολο B (πρώτο σύνολο) προς τό σύνολο A (δεύτερο σύνολο), λέγεται **αντίστροφη** εκείνης που δίνεται από τό σύνολο R .

Δηλαδή: Δυό σχέσεις, που δίνονται από τά σύνολα διατεταγμένων ζευγών R και S , λέγονται **αντίστροφες**, όταν και μόνον όταν τά ζεύγη της μιάς είναι αντίστροφα των ζευγών της άλλης.

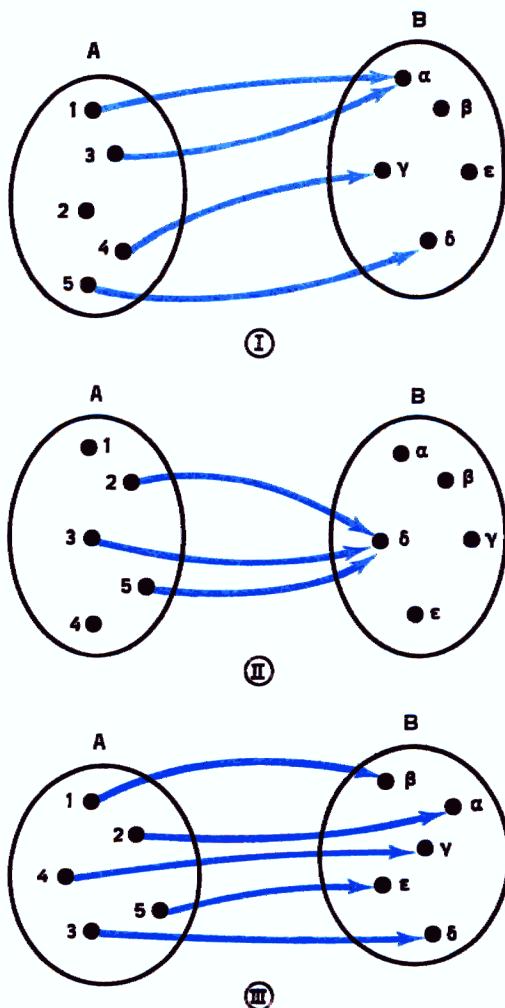
Αν τό σύνολο R παριστάνει τήν πρώτη σχέση, τότε τό σύνολο S της αντίστροφης σχέσεως συνηθίζουμε να τό σημειώνουμε με τό συμβολισμό R^{-1} , που θυμίζει τό συμβολισμό με τόν όποιο στην Αριθμητική σημειώνουμε τόν αντίστροφο ενός μή μηδενικού αριθμού.

Είναι πολύ εύκολο, αλλά και πολύ χρήσιμο, να παρατηρήσουμε ότι: **πεδίο τιμών μιάς σχέσεως R είναι τό πεδίο ορισμού της αντίστροφής της R^{-1} και πεδίο ορισμού της R τό πεδίο τιμών της R^{-1} .**

β) **Όρισμός της συναρτήσεως**: Ας παρατηρήσουμε προσεκτικά τίς σχέσεις που παριστάνουν τά γραφήματα του σχήματος 19·1 β. Διαπιστώνουμε ότι και στίς τρείς περιπτώσεις που εικονίζονται δέν υπάρχει στοιχείο του A στό όποιο ν' αντιστοιχίζονται περισσότερα από ένα στοιχεία του B , πράγμα που δέν συμβαίνει στό γράφημα του σχήματος 19·1 α. Έκεί στό στοιχείο 2 του A αντιστοιχίζονται τό β και τό γ του B και στό 3 του A τά α , β , γ και δ του B .

Τό κοινό γνώρισμα που διακρίναμε στίς σχέσεις που εκφράζονται από τά γραφήματα του σχήματος 19·1 β, I, II και III κατατάσσει αυτές τίς σχέσεις

σέ μιά ιδιαίτερη κατηγορία πολύ σημαντική και για τὰ Μαθηματικά και για τὶς ἐφαρμογές· οἱ σχέσεις αὐτές λέγονται **συναρτήσεις**.



Σχ. 19·1 β.

Δηλαδή: Μιά δυαδική σχέση, από ένα σύνολο A πρὸς ένα σύνολο B , λέγεται **συνάρτηση** ἂν καὶ μόνον ἂν σέ κάθε στοιχείο τοῦ A ἀντιστοιχίζεται ἓνα τὸ πολὺ στοιχείο τοῦ B .

Μπορεῖ, σέ μιά συνάρτηση, σέ δύο ἢ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ πρώτου συνόλου νά ἀντιστοιχίζεται τὸ ἴδιο στοιχείο τοῦ δευτέρου συνόλου· αὐτὸ π.χ. συμβαίνει στὸ γράφημα τοῦ σχήματος 19·1 β (I) γιὰ τὰ στοιχεῖα 1 καὶ 3 τοῦ A , τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντίστοιχο τὸ στοιχείο $\alpha \in B$. Μπορεῖ ἀκόμα σέ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ τῆς συναρτήσεως νά ἀντιστοιχίζεται τὸ ἴδιο στοιχείο τοῦ B · τότε λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι **σταθερὴ** [σχ. 19·1 β (II)].

Γιά να δηλώσουμε συμβολικά ότι έχουμε μία συνάρτηση από ένα σύνολο A προς ένα σύνολο B γράφουμε:

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \in B \quad \text{καί διαβάζουμε:}$$

«Στό x του A αντιστοιχίζεται, μέσω της συναρτήσεως f , τό y του B ». Συνηθίζουμε όμως, όταν μάλιστα είναι γνωστά από πριν τά σύνολα A καί B , να χρησιμοποιούμε τόν συντομότερο συμβολισμό: $y = f(x)$.

Η αντίστροφη σχέση μιās συναρτήσεως δέν είναι κατανάγκη συνάρτηση· γιά να συμβαίνει αυτό πρέπει κάθε στοιχείο του δευτέρου συνόλου να είναι αντίστοιχο ενός τό πολύ στοιχείου του πρώτου συνόλου. Έτσι από τίς συναρτήσεις πού απεικονίζονται στό σχήμα 19·1 β μόνο στην τρίτη συνάρτηση ή αντίστροφη σχέση είναι επίσης συνάρτηση.

Όταν καί ή αντίστροφη σχέση μιās συναρτησιακής σχέσεως συμβαίνει να είναι συνάρτηση, τότε αυτή ή σχέση λέγεται **άμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία**.

Έπειδή στά παραπάνω παραδείγματα τά σύνολα A καί B ήταν διαφορετικά, δέν πρέπει ν' αποκομίσουμε τήν έντύπωση ότι αποκλείεται να είναι καί ίσα. Ορίζουμε δηλαδή καί σχέσεις, καί ιδιαίτερα συναρτήσεις, μέσα σ' ένα καί τό ίδιο σύνολο A . Δηλαδή συναρτήσεις πού είναι όρισμένες μέσα σ' ένα σύνολο A καί πού παίρνουν συγχρόνως τιμές από τό ίδιο τό σύνολο A .

γ) **Πραγματικές συναρτήσεις.** Αν τό δεύτερο σύνολο μιās συναρτήσεως, αυτό δηλαδή όπου ή συνάρτηση παίρνει τίς τιμές της, είναι τό σύνολο $\mathbf{R}$ τών πραγματικών αριθμών, τότε ή συνάρτηση λέγεται **πραγματική**. Αν επιπλέον καί τό πρώτο σύνολο είναι τό σύνολο $\mathbf{R}$ ή ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}$, τότε μιλάμε γιά **πραγματική συνάρτηση μιās πραγματικής μεταβλητής**.

Μιά ακολουθία π.χ. πραγματικών αριθμών είναι μία πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής μέ πρώτο σύνολο καί πεδίο όρισμού συγχρόνως τό σύνολο $\mathbf{N}$ τών φυσικών αριθμών· διότι, όπως γνωρίζουμε, σέ μιάν ακολουθία πραγματικών αριθμών, κάθε φυσικός αριθμός έχει αντίστοιχο ένα καί μόνον έναν πραγματικόν αριθμόν.

Από δώ καί πέρα θά ασχοληθούμε αποκλειστικά μέ πραγματικές συναρτήσεις μιās πραγματικής μεταβλητής καί όταν θά μιλάμε γιά συνάρτηση θά εννοούμε πάντα μία συνάρτηση αυτής της κατηγορίας.

19·2 Πεδία όρισμού καί τιμών τών πραγματικών συναρτήσεων.

Θεωρούμε μία σχέση μέ πρώτο σύνολο A (σύνολο άφετηρίας) τό σύνολο $\mathbf{R}$ τών πραγματικών αριθμών καί μέ δεύτερο σύνολο B (σύνολο καταλήξεως) πάλι τό σύνολο $\mathbf{R}$ τών πραγματικών· δηλαδή $A = B = \mathbf{R}$. Κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) αυτής της σχέσεως είναι τότε ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών καί παριστάνεται, όπως γνωρίζουμε, στό επίπεδο, μ' ένα σημείο.

Τό σύνολο τών παραστατικών σημείων μιās τέτοιας σχέσεως είναι μία κατάλληλη όπτική παράσταση της σχέσεως καί λέγεται, σ' αυτήν ειδικά τήν περίπτωση, **γραφική (ή γεωμετρική) παράσταση της σχέσεως**.

$$\text{τύπο: } y = \frac{(x-5)\sqrt{4x-16}}{x^2-12x+35}. \text{ αυτός γράφεται επίσης: } y = \frac{(x-5)\sqrt{4(x-4)}}{(x-5)(x-7)}.$$

‘Η $\sqrt{4(x-4)} = 2\sqrt{x-4}$ είναι πραγματικός αριθμός εφόσον $x-4 \geq 0$, δηλαδή για $x \geq 4$. Άρα από τό πεδίο όρισμοῦ αποκλείεται τό διάστημα $(-\infty, 4)$.

Έξάλλου εξαιροῦνται καί οί τιμές $x = 5$ καί $x = 7$, διότι αυτές μηδενίζουν τόν παρονομαστή. Ωστε τελικά τό εὔρύτερο πεδίο όρισμοῦ τῆς συναρτήσεως μας εἶναι ἡ ένωση τῶν διαστημάτων $[4, 5) \cup (5, 7) \cup (7, +\infty)$.

Εἶναι σκόπιμο καί πολλές φορές χρήσιμο νά καθορίζομε καί τό πεδίο τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως. Ἄν τυχόν μᾶς ἔρχεται δύσκολος ὁ ἄσμεος προσδιορισμός αὐτοῦ τοῦ πεδίου, τότε κατασκευάζομε τήν αντίστροφη σχέση καί βρίσκομε αὐτῆς, ἂν μπορούμε, τό πεδίο όρισμοῦ· τό πεδίο όρισμοῦ τῆς αντίστροφης σχέσεως εἶναι τό πεδίο τιμῶν τῆς ἀρχικῆς.

Πρέπει νά τονίσομε σ’ αὐτή τή θέση ὅτι : Ἄν σέ μιᾶ σχέση μέ τό σύμβολο x δηλώνομε τά στοιχεῖα τοῦ πρώτου συνόλου A καί μέ τό y τά στοιχεῖα τοῦ δευτέρου συνόλου B τότε, στήν αντίστροφη σχέση, μέ τό x θά δηλώσομε τίς τιμές ἀπό τό B , ἀφοῦ τώρα πρώτο σύνολο εἶναι τό B , καί μέ y τίς ἀντίστοιχες τιμές ἀπό τό A , ἀφοῦ τό A εἶναι τώρα τό δεύτερο σύνολο.

Ἄν π.χ. $(-1, 2), (0, 5), \left(\frac{4}{7}, \sqrt{3}\right)$ εἶναι μερικά διατεταγμένα ζεύγη μιᾶς σχέσεως R , τότε στήν αντίστροφη σχέση R^{-1} θά συναντήσομε ἀντιστοιχῶς τά ζεύγη $(2, -1), (5, 0)$ καί $\left(\sqrt{3}, \frac{4}{7}\right)$.

Καί ἐνῶ στήν ἀρχική σχέση παίρνομε τίς τιμές $-1, 0$ καί $\frac{4}{7}$ πάνω στόν ἄξονα $x'x$ καί ἀντίστοιχα τίς τιμές $2, 5, \sqrt{3}$ πάνω στόν ἄξονα $y'y$, ὅταν θέλομε νά προσδιορίσομε τά παραστατικά σημεῖα τῶν προηγουμένων ζευγῶν, γιά νά τοποθετήσομε τά παραστατικά σημεῖα τῆς ἀντίστροφης σχέσεως R^{-1} θά πάρουμε τίς τιμές $2, 5$ καί $\sqrt{3}$ πάνω στόν ἄξονα $x'x$ καί ἀντίστοιχα τίς τιμές $-1, 0, \frac{4}{7}$ πάνω στόν ἄξονα $y'y$.

Υστερα ἀπό τά προηγούμενα προκύπτουν δύο σημαντικά συμπεράσματα :

I) Ἄν $y = f(x)$ εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς σχέσεως R μεταξύ τῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x καί y , τότε βρίσκομε τήν ἐξίσωση τῆς ἀντίστροφης σχέσεως R^{-1} ἂν ἐναλλάξομε, μέσα στήν ἐξίσωση τῆς R , τά γράμματα x καί y · δηλαδή ἡ R^{-1} ἐκφράζεται μέ τήν ἐξίσωση $x = f(y)$.

II) Οἱ γραφικές παραστάσεις δύο ἀντιστρόφων σχέσεων (συναρτήσεων) εἶναι σχήματα συμμετρικά ὡς πρὸς τήν εὐθεῖα, πού διχοτομεῖ τήν πρώτη καί τρίτη γωνία τῶν ἀξόνων.

Πράγματι : Ἄν $M_1(x_1, y_1)$ εἶναι ἓνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως (κ)

(σχ. 19 · 2 α) μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$, τότε θα υπάρχει στή γραφική παράσταση (κ_1) τῆς ἀντίστροφης σχέσεως $x = f(y)$ τό σημεῖο $P(x_2 = y_1, y_2 = x_1)$, δηλαδή τό σημεῖο πού ἔχει ὡς τετμημένη τήν τεταγμένη τοῦ M καί ὡς τεταγμένη τήν τετμημένη τοῦ M . Δέν εἶναι δύσκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι τά σημεία M καί P εἶναι δυό σημεία συμμετρικά ὡς πρὸς τή διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'O'y'}$.

Τὴν ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$, ὅταν ἡ σχέση εἶναι συνάρτηση, τὴ συμβολίζομε συνήθως μέ $y = f^{-1}(x)$.

Θά ἐφαρμόσουμε τά προηγούμενα σέ δυό ἀπλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = 5x - 7$. Ποιὸς τύπος δίνει τὴν ἀντίστροφη σχέση; Εἶναι ἡ ἀντίστροφη σχέση συνάρτηση; Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῶν σχέσεων.

Ἡ παράσταση $5x - 7$, πού εἶναι ἓνα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο τοῦ x , μᾶς δίνει μιὰ συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό σύνολο $\mathbf{R}$, διότι $\forall x \in \mathbf{R}$ τό πολυώνυμο $5x - 7$ παίρνει μιὰ καί μόνο μιὰ πραγματική τιμὴ. Ἡ ἀντίστροφη σχέση δίνεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση $x = 5y - 7$, ἄρα τὴν $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$ πού ὀρίζει ἐπίσης συνάρτηση. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως εἶναι τό σύνολο $\mathbf{R}$ πού εἶναι πεδίο τιμῶν τῆς ἀρχικῆς.

Ὅπως ξέρομε, οἱ δυό παραπάνω ἐξισώσεις παριστάνουν εὐθεῖες· ἐδῶ λέμε ὅτι οἱ γραφικὲς παραστάσεις τῶν δυὸ αὐτῶν ἀντιστρόφων **γραμμικῶν συναρτήσεων** εἶναι δυό εὐθεῖες συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὴ διχοτόμο δ'δ τῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'O'y'}$. (Νά γίνεῖ τό σχῆμα).

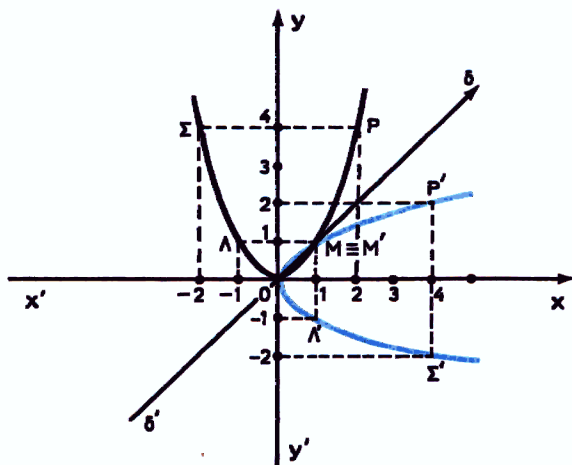
Παράδειγμα 2. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $y = x^2$ μέ $x \in \mathbf{R}$.

Νά καθορισθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῆς σχέσεως πού προκύπτει μεταξὺ x καί y καί νά γίνεῖ ἡ γραφικὴ παράσταση αὐτῆς καθὼς καί τῆς ἀντίστροφης σχέσεως.

Ἡ σχέση εἶναι προφανῶς συνάρτηση, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διότι τό μονώνυμο x^2 παίρνει, γιὰ κάθε $x \in \mathbf{R}$, μιὰ καί μόνο μιὰ πραγματική τιμὴ.

Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς $y = x^2$ εἶναι ἡ καμπύλη ΣΛΟΜΡ (σχ. 19 · 2 β), ὅπου $\Sigma(-2, 4)$, $\Lambda(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $M(1, 1)$ καί $P(2, 4)$ εἶναι μερικά παραστατικά σημεία τῆς γραφικῆς παραστάσεως. Ἡ ἀντίστροφη σχέση δίνεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση $x = y^2$ · ἡ ἐξίσωση αὕτη εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $y = \sqrt{x}$ καί $y = -\sqrt{x}$. Ἔτσι βλέπομε ὅτι ἡ ἀντίστροφη σχέση δέν εἶναι συνάρτηση, διότι σέ μιὰ θετική τιμὴ τοῦ x ἀντιστοιχίζονται δυὸ ἀντίθετες τιμές τοῦ y . Π.χ. γιὰ $x = 4$ παίρνομε $y = 2$ καί $y = -2$. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως $y = \pm \sqrt{x}$ εἶναι τό σύνολο τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ($x \geq 0$)· ἄρα αὐτό εἶναι τό πεδίο τιμῶν τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως $y = x^2$ ($y \geq 0$). Ἐνῶ

ή εξίσωση $x = y^2$ δέν όρίζει συνάρτηση y τοῦ x , ή καθεμιά χωριστά άπό τίς έξισώσεις $y = \sqrt{x}$ καί $y = -\sqrt{x}$ όρίζει συνάρτηση μέ κοινό πεδίο όρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. ή μία έχει πεδίο τιμών τό σύνολο τῶν μή άρνητικῶν πραγματικῶν καί ή άλλη τῶν όχι θετικῶν πραγματικῶν άριθμῶν.



Σχ. 19.2 β.

Ή γραφική παράσταση τῆς μιᾶς είναι τό τόξο OMP', συμμετρικό τοῦ OMP ($M \equiv M'$) ὡς πρός τή διχοτόμο δ'δ τῆς xOy , καί ή γραφική παράσταση τῆς άλλης είναι τό τόξο OΛ'Σ', συμμετρικό τοῦ τόξου OΛΣ. Ή καμπύλη P'MOΛ'Σ' είναι συμμετρική τῆς ΣΛOMP ὡς πρός τήν εὐθεία δ'δ. Λέμε επίσης ότι ή καμπύλη ΣΛOMP έχει εξίσωση τήν $y = x^2$ καί ή P'MOΛ'Σ' τήν $x = y^2$.

19.3 Μονοτονία συναρτήσεων. Ἀκρότατα.

α) Αὐξουσες καί φθίνουσες συναρτήσεις. Ὑς θεωρήσουμε μιᾶ συνάρτηση $f(x)$ όρισμένη τουλάχιστο μέσα σ' ένα διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$. Ὑν, γιά δυό όποιοσδήποτε διαφορετικές τιμές x_1, x_2 τοῦ Δ μέ $x_1 < x_2$ έχομε $f(x_1) \leq f(x_2)$, τότε ή συνάρτηση $f(x)$ λέγεται αὐξουσα μέσα στό διάστημα $[\alpha, \beta]$. ἂν ειδικότερα μέ $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$, ή συνάρτηση λέγεται γνησίως αὐξουσα.

Ὅμοια, όταν μέ $x_1 < x_2$ έχομε $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε ή συνάρτηση $f(x)$ λέγεται φθίνουσα· καί έφόσον $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$, ή $f(x)$ λέγεται γνησίως φθίνουσα.

Μιά συνάρτηση πού είναι αὐξουσα ή φθίνουσα λέγεται μονότονος. Μιά συνάρτηση είναι συγχρόνως αὐξουσα καί φθίνουσα ἂν καί μόνον ἂν είναι σταθερή (γιατί;).

Βασική εφαρμογή: Ν' άποδειχθεῖ ότι ή συνάρτηση $y = ax + \beta$ είναι γνησίως αὐξουσα ἂν $a > 0$ καί γνησίως φθίνουσα ἂν $a < 0$, σ' όλο τό πεδίο τῶν πραγματικῶν άριθμῶν (τό πεδίο όρισμοῦ της).

I) Μέ $\alpha > 0$, $x_1 < x_2 \implies \alpha x_1 < \alpha x_2 \implies \alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta$, δηλαδή $y_1 < y_2$: Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

II) Μέ $\alpha < 0$, $x_1 < x_2 \implies \alpha x_1 > \alpha x_2 \implies \alpha x_1 + \beta > \alpha x_2 + \beta$, δηλαδή $y_1 > y_2$: Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Ένα σημαντικό θεώρημα: "Αν μιά συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (άντιστοιχα φθίνουσα) με πεδίο ορισμού ένα σύνολο πραγματικών αριθμών Δ και πεδίο τιμών ένα σύνολο E επίσης πραγματικών αριθμών, τότε η αντίστροφη σχέση $f^{-1}(x)$ είναι επίσης συνάρτηση και είναι και αυτή αύξουσα (άντιστοιχα φθίνουσα) με πεδίο ορισμού τό E και πεδίο τιμών τό Δ .

Απόδειξη: "Επειδή μέ $x_1 < x_2$ έχουμε πάντα $f(x_1) < f(x_2)$ [άντιστοιχα $f(x_1) > f(x_2)$] παρατηρούμε ότι σέ δύο διαφορετικές τιμές του x αντιστοιχίζονται δύο διαφορετικές τιμές του $y = f(x)$: δηλαδή δέν υπάρχει τιμή του y (στοιχείο του E) πού νά είναι άντίστοιχη δυό ή περισσότερων τιμών του x (στοιχείων του Δ). Αυτό σημαίνει ότι ή άντιστοιχία μεταξύ των x και y είναι άμφιμονοσήμαντη. Καί όταν μιά άντιστοιχία είναι άμφιμονοσήμαντη, τότε καί ή άντίστροφη σχέση μιås συναρτήσεως είναι πάλι συνάρτηση." Όταν στίς τιμές $x_1 < x_2$ αντιστοιχίζονται μέσω της $f(x)$ τιμές $y_1 < y_2$ (άντιστοιχα $y_1 > y_2$), τότε άντίστροφα σέ τιμές $y_1 < y_2$ (ή $y_1 > y_2$) θά αντιστοιχίζονται διά της $f^{-1}(x)$ τιμές $x_1 < x_2$. Δηλαδή τό είδος της μονοτονίας (αύξουσα - φθίνουσα) της άρχικής συναρτήσεως διατηρείται καί στην άντίστροφη.

β) Μέγιστα καί ελάχιστα συναρτήσεων: "Ας θεωρήσουμε τή συνάρτηση $y = -2x^2 + 5$ πού έχει πεδίο ορισμού τό $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $-2x^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ καί έπομένως $-2x^2 + 5 \leq 5$. Η τιμή όμως 5 είναι αυτή πού άντιστοιχίζεται στην τιμή $x=0$, δηλαδή $5 = f(0)$. "Ωστε $5 = f(0) \geq -2x^2 + 5 \forall x \in \mathbb{R}$. Η τιμή λοιπόν $5 = f(0)$ είναι ή μεγαλύτερη τιμή πού μπορεί νά πάρει ή συνάρτηση καί αυτό συμβαίνει για $x=0$. Γι' αυτό λέμε ότι: "Η συνάρτηση $-2x^2 + 5$ παρουσιάζει μέγιστο στό σημείο 0" ή τιμή $f(0)$ καλεΐται **μεγίστη τιμή** της συναρτήσεως $f(x)$.

"Αν θεωρήσουμε τή συνάρτηση $y = 2x^2 + 5$, τότε έχουμε $5 = f(0) \leq 2x^2 + 5 \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα ή τιμή τώρα $f(0)$ είναι ή μικρότερη τιμή πού παίρνει ή συνάρτηση. Γι' αυτό λέμε ότι: "Η συνάρτηση $2x^2 + 5$ παρουσιάζει **ελάχιστο** στό σημείο 0" ή τιμή $f(0)$ καλεΐται **ελάχιστη τιμή** της συναρτήσεως $f(x)$.

Γενικά: Λέμε ότι μιά συνάρτηση $f(x)$, όρισμένη σ' ένα διάστημα Δ , παρουσιάζει **όλικό μέγιστο** σ' ένα σημείο x_0 του Δ , άν καί μόνον άν είναι $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in \Delta$.

Επίσης λέμε ότι μιά συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει **όλικό ελάχιστο** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Δ , άν καί μόνον άν είναι $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in \Delta$.

Τήν τιμή $f(x_0)$ όνομάζουμε **άντίστοιχα μεγίστη ή ελάχιστη τιμή** της συναρτήσεως $f(x)$.

"Αν για ένα σημείο ρ ενός διαστήματος ($\alpha < x < \beta$), πού περιέχεται στό πεδίο ορισμού μιås συναρτήσεως, συμβαίνει νά έχουμε $f(x) \leq f(\rho)$ (άντιστοιχα

$f(x) \leq f(\rho) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε λέμε ότι ή $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (άντιστοιχα τοπικό ελάχιστο) στο σημείο ρ .

Τά τοπικά μέγιστα καί ελάχιστα μις συναρτήσεως τά ονομάζομε μαζί (τοπικά) άκρότατα.

19.4 Μελέτη καί γραφική παράσταση μις συναρτήσεως.

Η μονοτονία καί τό σχετικό θέμα τών άκροτάτων, αν υπάρχουν, είναι από τά πιό σημαντικά γνωρίσματα μις συναρτήσεως καί γι' αυτό σ' αυτά αναφέρονται τά πρώτα έρωτήματα πού θέτομε όταν μελετάμε μιά συνάρτηση. Άς σημειωθεί ότι ή άπάντηση σ' αυτά δίνει χρήσιμες πληροφορίες για νά επιτύχομε τή σχεδίαση τής γραφικής παραστάσεως, πού είναι τό άναγκαίο συμπλήρωμα τής όλης σπουδής τών μεταβολών τής συναρτήσεως.

Η γραφική παράσταση πέρα από τό ότι δίνει μιά συνοπτική εικόνα τών ιδιοτήτων καί τών ιδιαιτέρων χαρακτηριστικών μις συναρτήσεως, μπορεί νά είναι ή άφετηρία για τήν έξαγωγή αξιολόγων συμπερασμάτων, κυρίως όταν άποτελεί τήν έποπτική έκφραση τής άλληλεπιδράσεως δύο φυσικών μεταβλητών μεγεθών.

Οί γνώσεις πού μέχρι τώρα διαθέτομε μς επιτρέπουν νά διατυπώσομε τούς ακόλουθους κανόνες για τή μελέτη καί τή σχεδίαση τής γραφικής παραστάσεως μις δοσμένης συναρτήσεως $y = f(x)$.

I) Καθορίζομε τό πεδίο όρισμού τής συναρτήσεως καί, αν μς είναι βολικό, καί τό πεδίο τιμών.

II) Προσδιορίζομε εκείνα τά διαστήματα, μέσα στο πεδίο όρισμού, στα όποια ή συνάρτηση είναι αύξουσα καί εκείνα στα όποια είναι φθίνουσα.

III) Βρίσκομε τά τοπικά άκρότατα. Είναι τά σημεία εκείνα στην περιοχή τών όποιων αλλάζει τό είδος τής μονοτονίας. Αν π.χ. άριστερά μις τιμής x_0 του x ($x < x_0$) ή συνάρτηση είναι αύξουσα καί δεξιά ($x > x_0$) είναι φθίνουσα, τότε στη θέση x_0 έχουμε τοπικό μέγιστο· αν αντίθετα άριστερά του x_0 ή συνάρτηση είναι φθίνουσα καί δεξιά του x_0 αύξουσα, τότε στη θέση x_0 έχουμε τοπικό ελάχιστο.

IV) Προσδιορίζομε (αν μπορούμε) τίς πραγματικές τιμές τής ανεξάρτητης μεταβλητής x πού μηδενίζουν τήν παράσταση $f(x)$. Έτσι καθορίζομε τά σημεία, στα όποια ή γραφική παράσταση τέμνει τόν άξονα $x'x$.

Η τιμή $f(0)$ είναι ή τεταγμένη του σημείου, στο όποιο ή συνάρτηση τέμνει τόν άξονα $y'y$.

V) Τοποθετούμε στο σχέδιό μας όλα τά σημεία πού έχουμε προσδιορίσει, δηλαδή τά άκρότατα καί τά σημεία τομής τής γραφικής με τούς άξονες (αν καί όσα υπάρχουν). Ακολουθως δίνοντας μερικές άκόμα τιμές στη μεταβλητή x , με προσωπική έκτίμηση, βρίσκομε κι άλλα σημεία τής γραφικής παραστάσεως καί μετά προβαίνομε στη σχεδίασή της.

Σημαντική Παρατήρηση : Όταν έχουμε προσδιορίσει τό πεδίο τιμών μις συναρτήσεως, είναι συχνά πολύ εύκολο νά διακρίνομε τά τοπικά της άκρότατα.

Σημείωση : Μπορούμε τις διάφορες πραγματικές συναρτήσεις, που δίνονται μέσω «άλγεβρικών τύπων», να τις κατατάξουμε σε κατηγορίες, σύμφωνα με τα ειδικά χαρακτηριστικά που εμφανίζουν. Η αναγνώριση της κατηγορίας στην οποία υπάγεται μια συνάρτηση μάς διευκολύνει πολλές φορές στη μεθόδευση της μελέτης. Θα αναφέρομε έδω τα σημαντικότερα για μας είδη συναρτήσεων.

I) Πολυωνυμική συνάρτηση : Είναι κάθε συνάρτηση της μορφής:
 $y = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$, όπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ όρισμένοι πραγματικοί αριθμοί και $n, n-1, \dots$ φυσικοί.

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση μπορεί να έχει ως πεδίο ορισμού της όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ - μπορεί να είναι ορισμένη παντού μέσα στο $\mathbb{R}$ - (γιατί;).

II) Ρητή συνάρτηση : Είναι κάθε συνάρτηση της μορφής $y = \frac{P(x)}{P(x)}$, όπου $P(x)$ και $P(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Μια ρητή συνάρτηση μπορεί να είναι ορισμένη σ' όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών με εξαίρεση εκείνων των τιμών που ένδεχόμενα μηδενίζουν τον παρονομαστή (γιατί;).

III) Άρτια συνάρτηση : Έτσι ονομάζεται μια συνάρτηση $y = f(x)$ που παίρνει την ίδια τιμή για αντίθετες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι συναρτήσεις π.χ. $y = x^2 + 1$, $y = 2x^4 + x^2 + 1$ είναι άρτιες (γιατί;). Όταν έχουμε μελετήσει μια άρτια συνάρτηση για τις θετικές π.χ. τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε γνωρίζουμε τί ισχύει και για τις αρνητικές τιμές του πεδίου ορισμού της.

IV) Περιττή συνάρτηση : Έτσι ονομάζεται μια συνάρτηση που παίρνει αντίθετες τιμές για αντίθετες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η συνάρτηση π.χ. $y = x^3 + x$ είναι μια περιττή συνάρτηση, διότι:

$$(-x_0)^3 + (-x_0) = -x_0^3 - x_0 = -(x_0^3 + x_0).$$

19.5 Εφαρμογές και παραδείγματα.

1. Να καθορισθούν τα πεδία ορισμού και τιμών της συναρτήσεως με τύπο

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Έπειδή το πολυώνυμο $x^2 + 1$ δέν μηδενίζεται για καμιά πραγματική τιμή του x , έπεται ότι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως είναι το $\mathbb{R}$. Παίρνομε τώρα την αντίστροφη σχέση $x = \frac{2y}{y^2 + 1} \Rightarrow xy^2 - 2y + x = 0$ (1).

Οι τιμές του y σ' αυτή τη σχέση προκύπτουν από τον τύπο: $y = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}$

(2) (μέ $x \neq 0$): είναι δηλαδή οι λύσεις της δευτεροβάθμιας ως προς y εξισώσεως (1). Πρέπει όμως ή μεταβλητή x να παίρνει τέτοιες πραγματικές τιμές ώστε ο τύπος (2) να μάς δίνει πραγματικές τιμές και για τό y : άρα πρέπει να έχουμε: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Για $x = 0$ από την (1) παίρνομε $y = 0$.

Τό πεδίο ορισμού της σχέσεως (1) είναι λοιπόν τό κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ και συνεπώς αυτό είναι τό πεδίο τιμών της άρχικης συναρτήσεως. Έτσι μπορούμε νά πούμε ότι ή τιμή -1 είναι ή ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως και ή τιμή 1 ή μεγίστη.

2. Θεωρούμε τή συνάρτηση που δίνεται από τήν εξίσωση $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}$.

I) Νά βρεθεί τό πεδίο ορισμού της. II) Νά καθορισθούν, αν υπάρχουν, τά τοπικά άκρότατα.

Έπειδή $x^2 - 1 = 0$ για $x = -1$ και $x = 1$, συμπεραίνουμε ότι τό πεδίο ορισμού είναι: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Παίρνουμε άκολουθώς τήν

αντίστροφη σχέση: $x = \frac{y^2 + 2y + 3}{y^2 - 1} \implies (x - 1)y^2 - 2y - (x + 3) = 0$ (1).

Για $x = 1$ έχουμε $y = -2$, για $x \neq 1$ έχουμε $y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + (x-1)(x+3)}}{x-1}$.

Τό πεδίο ορισμού της (1) καθορίζεται από τή σχέση: $1 + (x-1)(x+3) \geq 0 \iff x^2 + 2x - 2 \geq 0 \iff x^2 + 2x + 1 - 3 \geq 0 \iff (x+1)^2 \geq 3 \iff |x+1| \geq \sqrt{3}$. Άρα $x+1 \leq -\sqrt{3}$ ή $x+1 \geq \sqrt{3}$, έπομένως $x \leq -1 - \sqrt{3}$ ή $x \geq -1 + \sqrt{3}$. Συνεπώς τό πεδίο τιμών της άρχικης συναρτήσεως είναι ή ένωση τών διαστημάτων $(-\infty, -1 - \sqrt{3}]$ και $[-1 + \sqrt{3}, +\infty)$. Η τιμή $y_1 = -1 - \sqrt{3}$ είναι τοπικό μέγιστο και ή τιμή $y_2 = -1 + \sqrt{3}$ τοπικό ελάχιστο.

3. Νά γίνει ή μελέτη και ή γραφική παράσταση τών συναρτήσεων: I) $y = 10^x$ και II) $y = \log x$.

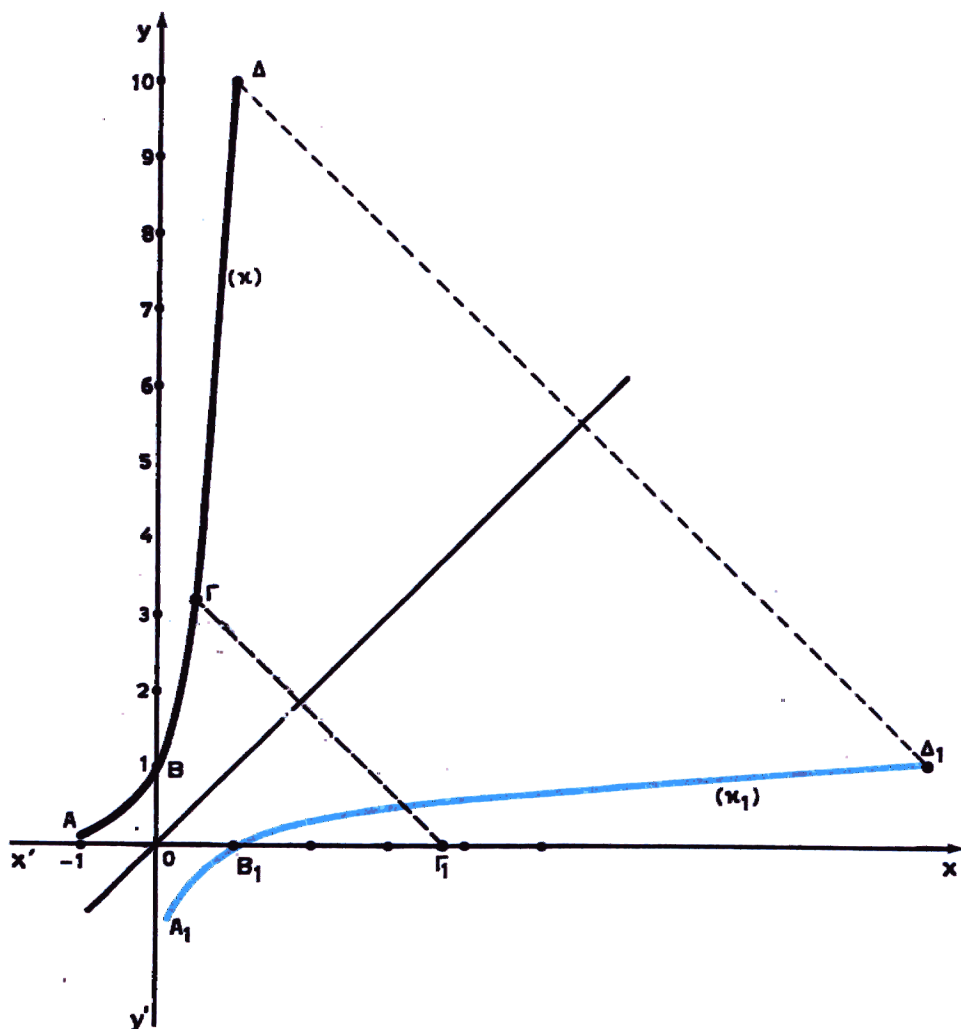
I) Η συνάρτηση $y = 10^x$ λέγεται έκθετική συνάρτηση, διότι για κάθε $y > 0$ έχουμε και μιá έκθετική εξίσωση ως προς x . Πεδίο ορισμού της συναρτήσεως είναι τό σύνολο $\mathbb{R}$.

Μέ $0 \leq x_1 < x_2$ έχουμε $1 \leq 10^{x_1} < 10^{x_2}$, αλλά και από $x_1 < x_2 \leq 0 \implies -x_1 > -x_2 \geq 0 \implies 10^{-x_1} > 10^{-x_2} \geq 1 \implies \frac{1}{10^{x_1}} > \frac{1}{10^{x_2}} \geq 1 \implies 10^{x_1} < 10^{x_2} \leq 1$. Άρα ή συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο τό πεδίο ορισμού της. Παρατηρούμε έπιπλέον ότι: όταν τό x αύξάνει άπεριόριστα και τείνει, όπως λέμε, προς τό $+\infty$, τότε και τό y τείνει στό $+\infty$. ένώ, όταν τό x τείνει στό $-\infty$, τό $y = \frac{1}{10^{-x}}$ τείνει στό 0. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι πεδίο τιμών της συναρτήσεως είναι τό σύνολο τών θετικών πραγματικών αριθμών.

Μερικά ζεύγη αντιστοιχών τιμών τών x και y	x	-2	-1	0	1/2	1	2
	y	1/100	1/10	1	$\sqrt{10}$	10	100

Κατασκευάζουμε τόν παραπάνω πίνακα αντιστοιχών τιμών τών x και y και,

ὡς πρὸς ἓνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, σημειώνομε μερικὰ σημεία ὅπως τὰ $A \left(-1, \frac{1}{10}\right)$, $B(0, 1)$, $\Gamma \left(\frac{1}{2}, \sqrt{10}\right)$ καὶ $\Delta(1, 10)$ καὶ μέ τῇ βοήθειᾳ αὐτῶν τῶν σημείων σχεδιάζομε τὴ γραφικὴ παράστασι τῆς συναρτήσεως (σχ. 19·5).



Σχ. 19·5.

Ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν ἀντιστοιχῶν τιμῶν ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴ γραφικὴ παράστασι βλέπομε πόσο «γρήγορα κατεβαίνουν» οἱ τιμές τῆς y πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ x παίρνει ὁλοένα μικρότερες ἀρνητικὲς τιμές καὶ ἀντίθετα πόσο «γρήγορα ἀνεβαίνουν» πρὸς τὸ $+\infty$ ὅταν ἡ x παίρνει ὁλοένα μεγαλύτερες θετικὲς τιμές.

Παρατηρούμε ότι, όταν τό σημείο Α τής καμπύλης μέ έξίσωση $y = 10^x$ (σχ. 19·5) μετατοπίζεται πρὸς τ' ἄριστερά, ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τήν εὐθεία $x'x$ γίνεται ὅλο καί μικρότερη καί τείνει στό μηδέν.

Ἐκφράζομε αὐτὴ τήν ιδιότητα λέγοντας ὅτι ἡ καμπύλη (κ) ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $x'x$.

Γενικά λέμε ὅτι, ἓνας ἀπεριόριστος κλάδος ἐπίπεδης γραμμῆς ἔχει ἀσύμπτωτη μιὰ εὐθεία (ϵ) τοῦ ἐπιπέδου, ἂν ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τήν (ϵ) ἑνὸς σημείου πού διαγράφει τὸν ἀπεριόριστο κλάδο ἔχει ὄριο τό μηδέν. Π.χ. ὁ ἀπεριόριστος κλάδος $y = \frac{1}{x}$

γιά $0 < x \leq 1$ τῆς γραμμῆς μέ έξίσωση $y = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $x = 0$ (τὸν ἄξονα $y'y$) καί ὁ ἀπεριόριστος κλάδος $y = x + \frac{1}{x}$ γιά

$1 \leq x < +\infty$ τῆς γραμμῆς μέ έξίσωση $y = x + \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $y = x$ (διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{xOy}$).

II) Ἡ συνάρτηση $y = \log x$ λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση** διότι γιά κάθε $y \in \mathbb{R}$ ἔχομε καί μιὰ λογαριθμική έξίσωση ὡς πρὸς x . Ἡ συνάρτηση αὐτὴ εἶναι ἡ **ἀντίστροφη** τῆς προηγουμένης. Πράγματι, ἂν στήν έξίσωση $y = 10^x$ ἐναλλάξομε τὰ γράμματα x καί y , παίρνομε $x = 10^y$ · ἀλλὰ ἡ ὡς πρὸς y επίλυση αὐτῆς τῆς τελευταίας δέν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τήν $y = \log x$.

Ἡ συνάρτηση ἔχει πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}^+$ (εἶναι τό πεδίο τιμῶν τῆς $y = 10^x$) καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R}$ (τό πεδίο ὀρισμοῦ τῆς $y = 10^x$). Εἶναι καί αὐτὴ γνησίως αὐξοῦσα σ' ὅλο τό πεδίο ὀρισμοῦ τῆς. Ὄταν ἐναλλάξομε τίς ἀντίστοιχες τιμές τῶν x καί y , τίς ὁποῖες ἔχομε προσδιορίσει γιά τήν προηγούμενη συνάρτηση, παίρνομε ζεύγη ἀντιστοιχῶν τιμῶν τῆς $y = \log x$. Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεώς μας εἶναι ἡ γραμμὴ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, συμμετρικὴ τῆς $AB\Gamma\Delta$ ὡς πρὸς τήν εὐθεία μέ έξίσωση $y = x$ (τὴν διχοτόμο δηλαδή τῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'O'y'}$). Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ὁ κλάδος $y = \log x$ γιά $0 < x \leq 1$ τῆς καμπύλης (κ_1) ἔχει ἀσύμπτωτη τήν εὐθεία $y'y$.

4. Ἐν x καί ω δύο μεταβλητές μέ $x \geq 0$ καί $\omega \geq 0$ καί $x + \omega = a$, ὅπου a σταθερά > 0 , ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: «τό γινόμενο $x\omega$ γίνεται μέγιστο, ὅταν $x = \omega = \frac{a}{2}$ ».

Ἐν θέσομε $y = x\omega$ καί ἀντικαταστήσομε τό ω μέ $a - x$ (λόγω τῆς $x + \omega = a$) ἔχομε τὴ συνάρτηση $y = x(a - x) = -x^2 + ax$ (1) μέ πεδίο ὀρισμοῦ τό διάστημα $0 \leq x \leq a$. Βρίσκομε τό πεδίο τιμῶν τῆς (1) ἂν τήν ἐπιλύσομε ὡς πρὸς x καί ἀπαιτήσομε ἡ δευτεροβάθμια ὡς πρὸς x έξίσωση $x^2 - ax + y = 0$ (2) νά ἔχει πραγματικές λύσεις. Πρὸς τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $a^2 - 4y \geq 0$ (γιατί;): δηλαδή $y \leq \frac{a^2}{4}$.

Άρα τό πεδίο τιμών της (1) είναι τό διάστημα $\left[0, \frac{\alpha^2}{4}\right]$ καί ή μεγίστη τιμή της συναρτήσεως (τοῦ γινομένου $x\omega$) εἶναι $\frac{\alpha^2}{4}$.

Γιά $y = \frac{\alpha^2}{4}$ ή (2) ἔχει ἴσες ρίζες, τίς $x_1 = x_2 = \frac{\alpha}{2}$.

Ὡστε μέ $x = \omega = \frac{\alpha}{2}$ τό γινόμενο $x\omega$ παίρνει τή μεγαλύτερη δυνατή τιμή, ἴση μέ $\frac{\alpha^2}{4}$.

5. Ἄν x καί ω δύο μεταβλητές μέ $x > 0$ καί $\omega > 0$ καί $x\omega = \kappa^2$, ὅπου κ ὁρισμένος θετικός ἀριθμός, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: «Τό ἄθροισμα $x + \omega$ γίνεται ἐλάχιστο ὅταν $x = \omega = \kappa$ ».

Θέτομε $y = x + \omega$ ὁπότε, λόγω της $x\omega = \kappa^2$, ἔχομε τή συνάρτηση $y = x + \frac{\kappa^2}{x}$ (1). Πεδίο ὁρισμοῦ της (1) εἶναι τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν. Τό πεδίο τιμών τό βρίσκομε ἂν ἐπιλύσομε τήν (1) ὡς πρός x . Ἐχομε $y = x + \frac{\kappa^2}{x} \iff x^2 - yx + \kappa^2 = 0$ (2). Ἀπαιτοῦμε τώρα ή (2) νά ἔχει ὡς πρός x λύσεις πραγματικές. Πρός τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $y^2 - 4\kappa^2 \geq 0$ (γιατί;) ή $y^2 \geq 4\kappa^2$ δηλαδή $y \geq 2\kappa$ (διότι $y > 0$). Ἀρα τό πεδίο τιμών της (1) εἶναι τό διάστημα $[2\kappa, +\infty)$ καί ή ἐλαχίστη τιμή της συναρτήσεως (τοῦ ἀθροίσματος $x + \omega$) εἶναι 2κ . Γιά $y = 2\kappa$ ή (2) ἔχει ἴσες ρίζες τίς $x_1 = x_2 = \frac{y}{2} = \kappa$. Ὡστε μέ $x = \omega = \kappa$ τό ἄθροισμα $x + \omega$ παίρνει τή μικρότερη δυνατή τιμή, ἴση μέ 2κ .

6. I) Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα μέ τήν ἴδια περίμετρο 2α ποῖό ἔχει τό μέγιστο ἐμβαδόν;

II) Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα μέ τό ἴδιο ἐμβαδόν κ^2 ποῖό ἔχει τήν ἐλαχίστη περίμετρο;

I) Ἄν x καί ω οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχομε $x + \omega = \alpha$. Σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα 4 τό ἐμβαδόν $x\omega$ γίνεται μέγιστο ὅταν $x = \omega = +\frac{\alpha}{2}$. Τό τετράγωνο λοιπόν μέ πλευρά $\frac{\alpha}{2}$ ἔχει τό μέγιστο ἐμβαδόν, ἴσο μέ $\frac{\alpha^2}{4}$.

II) Ἄν x καί ω οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχομε $x\omega = \kappa^2$.

Σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα 5 ή ἡμιπερίμετρος $x + \omega$ γίνεται ἐλάχιστη ὅταν $x = \omega = \kappa$. Ἔτσι πάλι τό τετράγωνο, μέ πλευρά τώρα ἴση πρός κ , ἔχει τήν ἐλαχίστη περίμετρο.

7. Οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ ἄς ἔχουν τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ καί τά πεδία τιμών τους ἄς εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τότε: ἂν καί οἱ δύο

συναρτήσεις είναι αύξουσες (φθίνουσες) θά είναι αύξουσα (άντίστοιχα φθίνουσα) και η συνάρτηση $f(x) \cdot g(x)$.

Με $x_1 < x_2$ έχουμε $0 < f(x_1) \leq f(x_2)$ [ή $f(x_1) \geq f(x_2) > 0$] και συγχρόνως $0 < g(x_1) \leq g(x_2)$ [ή $g(x_1) \geq g(x_2) > 0$].

*Αρα θά είναι και $0 < f(x_1) \cdot g(x_1) \leq f(x_2) \cdot g(x_2)$ [ή $f(x_1) g(x_1) \geq f(x_2) g(x_2) > 0$].

Σημείωση : Όπως ξέρομε, όταν έχουμε ανισότητες ομοιόστροφες με θετικούς όρους μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

19 · 6 Άσκησης.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. Νά καθορισθουν τά πεδία ορισμού και τιμών, νά εξετασθεί η συνάρτηση ως προς τή μονοτονία και νά γίνει η γραφική της παράσταση.

(Ύπόδειξη : Γιά $x \neq \pm 1$ μπορείτε νά χρησιμοποιήσετε αντί $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}$ τήν έκφραση $y = \frac{x-2}{x+1}$).

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = |4x - 6| + 6$. Νά γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση τής συναρτήσεως.

(Ύπόδειξη : Νά διακρίνετε δύο περιπτώσεις: $4x - 6 \leq 0$ και $4x - 6 \geq 0$).

3. Νά βρεθούν τά πεδία τιμών και νά γίνουν οι γραφικές παραστάσεις τών συναρτήσεων: I) $y = \frac{|x|}{x}$. II) $y = A_k(x)$, όπου μέ τό συμβολισμό $A_k(x)$ έννοούμε, γιά κάθε πραγματική τιμή x , τόν μεγαλύτερο άκέραιο πού δέν ξεπερνά τό x , δηλαδή $A_k(x) \leq x < A_k(x) + 1$. Π.χ. $A_k\left(-\frac{15}{4}\right) = -4$, $A_k(\sqrt{53}) = 7$, $A_k(-17) = -17$.

4. Νά βρεθούν τά άκρότατα (άν υπάρχουν) τών συναρτήσεων: I) $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$. II) $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$. III) $y = \frac{5x}{x^2 + x + 1}$.

5. Νά γίνει η γραφική παράσταση τών συναρτήσεων: I) $y = 2^x$ · II) $y = \log_2 x$.

6. *Αν οι συναρτήσεις f και g , μέ τό ίδιο πεδίο ορισμού, είναι και οι δυο αύξουσες (άντίστοιχα φθίνουσες), τότε και η συνάρτηση $f + g$ θά είναι επίσης αύξουσα (άντίστοιχα φθίνουσα).

7. *Αν f είναι μιά μονότονη συνάρτηση σ' ένα διάστημα $\alpha < x < \beta$ και k μιά σταθερά, νά εξετάσετε από άποψη μονοτονίας τίς συναρτήσεις: $f + k$, kf , $\frac{1}{f}$ (εφόσον $f > 0$), f^2 και $\sqrt{f}$ (εφόσον $f \geq 0$).

8. *Από όλα τά ορθογώνια τρίγωνα μέ τό ίδιο έμβαδόν (έστω τό k^2) ποιο είναι εκείνο πού έχει τήν πιό μικρή ύποτείνουσα;

ΕΝΟΤΗΤΑ 20

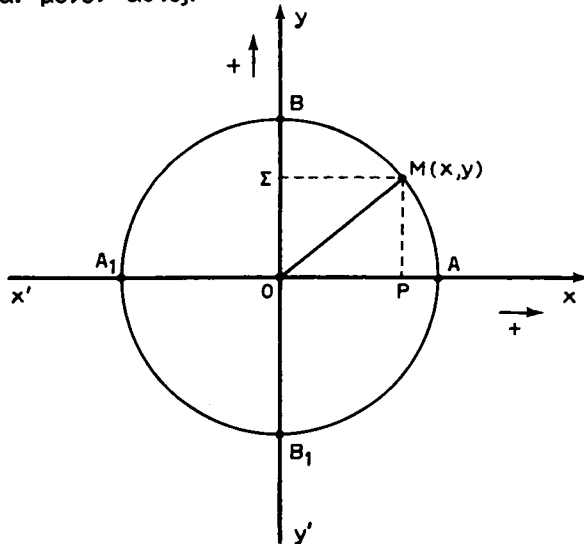
Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ Η ΕΛΛΕΙΨΗ

20 · 1 Η εξίσωση κύκλου μέ κέντρο τήν άρχή τών άξόνων.

Θεωρούμε έναν κύκλο * πού έχει ως κέντρο τήν άρχή O ενός ορθοκανονικού

* Όταν έδω μιλάμε γιά κύκλο, έννοούμε δ,τι μέχρι τώρα καλούσαμε περιφέρεια κύκλου.

συστήματος αξόνων και άκτινα ίση με ρ (ρ τό μέτρο ενός δοσμένου τμήματος). Θέλομε νά βροῦμε μιά σχέση πού νά ικανοποιούν οί συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ κύκλου καί μόνον αὐτές.



Σχ. 20.1.

*Ας πάρομε ἓνα τυχαῖο σημεῖο $M(x, y)$ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 20.1). ἂν P καί Σ εἶναι οἱ προβολές τοῦ M στούς ἀξονες $x'x$ καί $y'y$ ἀντιστοιχῶς, θά ἔχομε $\overline{OP} = x$ καί $\overline{PM} = \overline{OS} = y$. Γιά ν' ἀνήκει τό σημεῖο $M(x, y)$ στόν κύκλο (O, ρ) , πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $|\vec{OM}| = \rho$ ἢ $|\vec{OM}|^2 = \rho^2$. Ἀλλά εἶναι πάντα (γιά κάθε σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου) $x^2 + y^2 = |\vec{OM}|^2$ καί συνεπῶς ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά ἀνήκει ἓνα σημεῖο $M(x, y)$ στόν κύκλο (O, ρ) , εἶναι

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

(1)

Ἡ σχέση (1), ἐπειδή ικανοποιεῖται ἀπό τά σημεῖα τοῦ κύκλου (O, ρ) καί μόνον ἀπ' αὐτά, λέγεται **ἐξίσωση αὐτοῦ τοῦ κύκλου**.

*Αν ἐπιλύσομε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρὸς y θά πάρομε $y^2 = \rho^2 - x^2$ καί τελικά:

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad (1\alpha) \quad \text{ἢ} \quad y = -\sqrt{\rho^2 - x^2} \quad (1\beta).$$

*Ἐτσι βλέπομε ὅτι σέ κάθε κατάλληλη πραγματική τιμή τοῦ x ($|x| < \rho$) ἀντιστοιχίζονται δύο ἀντίθετες τιμές τοῦ y . Ἄρα ἡ σχέση (1) δέν εἶναι συνάρτηση· χωρίζεται ὁμως σέ δύο συναρτήσεις, τίς (1α) καί (1β), μέ κοινὸ πεδίο ὁρισμοῦ. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων (1α) καί (1β) προσδιορίζεται ἀπὸ τήν σχέση $\rho^2 - x^2 \geq 0$. Ἔχομε $\rho^2 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \rho^2 \iff |x| \leq \rho \iff -\rho \leq x \leq \rho$ δηλαδή τό πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό κλειστὸ διάστημα $[-\rho, \rho]$.

Πεδίο τιμών της σχέσεως (1) είναι τό ίδιο διάστημα $[-\rho, \rho]$, διότι η σχέση μας είναι συμμετρική ως προς x και y . Ειδικά, πεδίο τιμών της συναρτήσεως (1α) είναι τό διάστημα $[0, \rho]$, ενώ της (1β) είναι τό διάστημα $[-\rho, 0]$.

Η συνάρτηση (1α) είναι αύξουσα στό διάστημα $[-\rho, 0]$ και φθίνουσα στό διάστημα $[0, \rho]$ (γιατί;) και έχει ως γραφική παράσταση τό ήμικύκλιο A_1BA (σχ. 20·1), ενώ η συνάρτηση (1β) είναι φθίνουσα στό διάστημα $[-\rho, 0]$ και αύξουσα στό $[0, \rho]$ και έχει ως γραφική παράσταση τό ήμικύκλιο A_1B_1A .

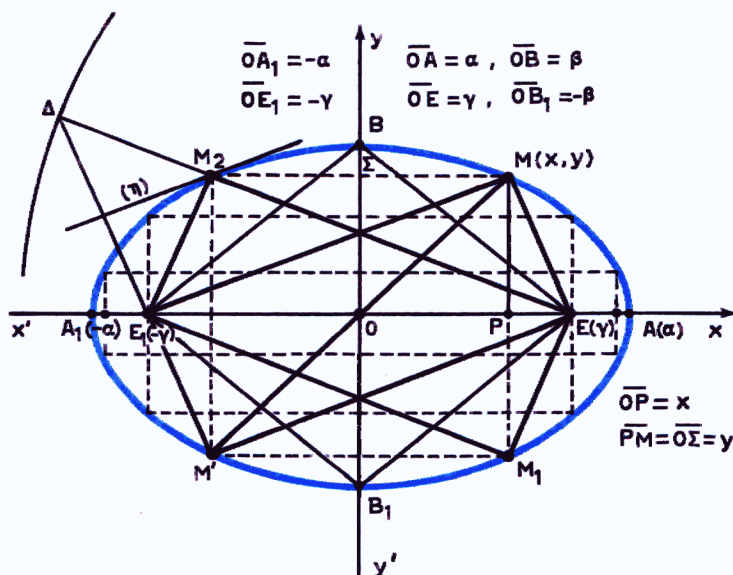
20·2 Η Έλλειψη και η εξίσωσή της.

α) **Όρισμός της έλλειψεως.** Αν E_1 και E είναι δυό οποιαδήποτε όρισμένα σημεία ενός επιπέδου και $2a$ ένα οποιοδήποτε δοσμένο τμήμα μέ $2a > E_1E$, τότε τό σύνολο τών σημείων M του επιπέδου, γιά τά όποία έχομε $ME_1 + ME = 2a$ (1) λέγεται έλλειψη.

Δηλαδή: Έλλειψη λέγεται ό γεωμετρικός τόπος τών σημείων M ενός επιπέδου, τά όποία έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δυό δοσμένα σημεία E_1 και E του επιπέδου ($ME_1 + ME = 2a > E_1E > 0$).

Τά σταθερά σημεία E_1 και E λέγονται **εστίες** της έλλειψεως.

Σχεδιάζομε τήν ευθεία E_1E και επίσης τήν ευθεία $y'y$ τή μεσοκάθετη στό τμήμα E_1E (σχ. 20·2). Είναι πολύ εύκολο ν' άποδείξομε ότι οί ευθείες E_1E και



Σχ. 20·2.

$y'y$ είναι άξονες (όρθης) συμμετρίας του τόπου και συνεπώς τό σημείο τομής O τών E_1E και $y'y$ ($O \equiv$ μέσο του E_1E) είναι κέντρο συμμετρίας. Πράγματι αν M είναι ένα τυχαίο σημείο της έλλειψεως, τότε τό M_1 , συμμετρικό του M ως προς τήν E_1E , τό M_2 συμμετρικό του M ως προς τήν $y'y$ καθώς και τό M' συμμετρικό του M ως προς O ανήκουν επίσης στον τόπο.

Φανερό είναι ακόμα ότι τα σημεία B_1 και B του άξονα $y'y$, για τα όποια έχουμε $EB_1 = EB = \alpha$, καθώς και τα σημεία A_1 , A του άξονα E_1E , για τα όποια έχουμε $OA_1 = OA = \alpha$, ανήκουν στον τόπο μας.

Θά παραστήσουμε με 2γ το τμήμα E_1E και με 2β το τμήμα B_1B από το ορθογώνιο τρίγωνο BOE παίρνουμε:

$$\beta^2 = a^2 - \gamma^2 \quad (II)$$

Με τα σύμβολα α , β , γ θά έννοοῦμε καί τὰ μέτρα τῶν τμημάτων OA , OB καί OE ἀντιστοίχως. Τὰ τμήματα 2α καί 2β λέγονται ἀντίστοιχα **μεγάλος** καί **μικρός ἄξονας** τῆς ἐλλείψεως.

β) Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως. Ὑστερα ἀπὸ τὰ παραπάνω εἶναι φυσικὸ νὰ ζητήσουμε τὴν ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς τὸ ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων πού εἶναι φτιαγμένο πάνω στοὺς ἄξονες συμμετρίας τοῦ τόπου. Τὸν πρῶτο ἄξονα $x'x$ θά τὸν πάρουμε πάνω στὴν E_1E με θετικὴ κατεύθυνση ἀπὸ τὸ E_1 πρὸς τὸ E .

Θέλομε νὰ βροῦμε, ὅπως καί γιὰ τὸν κύκλο, τὴ σχέση πού ἱκανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων μιᾶς ἐλλείψεως καί μόνο αὐτές.

*Ὡς θεωρήσουμε ἓνα σημεῖο $M(x, y)$ τοῦ τόπου (τῆς ἐλλείψεως) τοῦ ὁποῖου οἱ προβολές στοὺς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$ εἶναι ἀντίστοιχα τὰ σημεία P καί Σ (σχ. 20 · 2). τότε $\overline{OP} = x$ καί $\overline{PM} = \overline{O\Sigma} = y$.

Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα E_1PM καί EPM ἔχομε:

$$(ME_1)^2 = (\overline{E_1P})^2 + (\overline{PM})^2 \quad (III) \quad \text{καί} \quad (ME)^2 = (\overline{EP})^2 + (\overline{PM})^2 \quad (IV).$$

Ἀλλὰ $\overline{E_1P} = \overline{E_1O} + \overline{OP} = \gamma + x$ καί $\overline{EP} = \overline{EO} + \overline{OP} = -\gamma + x$ (σχέση Chasles).

Ἔτσι οἱ ἰσότητες (III) καί (IV) γράφονται ἀντίστοιχα:

$$(ME_1)^2 = (x + \gamma)^2 + y^2 \implies ME_1 = \sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} \quad (III\alpha)$$

$$(ME)^2 = (x - \gamma)^2 + y^2 \implies ME = \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2} \quad (IV\alpha)$$

Συνδυάζοντας τίς σχέσεις (I), (IIIα) καί (IVα) ἔχομε τὴν ἐξίσωση:

$$\sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2) + 2\gamma x} + \sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2) - 2\gamma x} = 2\alpha \quad (2).$$

Τετραγωνίζομε τὰ μέλη τῆς (2) καί παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + \gamma^2 + y^2) + 2\sqrt{[(x^2 + \gamma^2 + y^2) + 2\gamma x][(x^2 + \gamma^2 + y^2) - 2\gamma x]} &= 4\alpha^2 \\ \implies \sqrt{(x^2 + \gamma^2 + y^2)^2 - 4\gamma^2 x^2} &= 2\alpha^2 - (x^2 + \gamma^2 + y^2) \quad (2'). \end{aligned}$$

Τετραγωνίζομε πάλι τὰ μέλη τῆς (2') καί παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} (x^2 + \gamma^2 + y^2)^2 - 4\gamma^2 x^2 &= 4\alpha^4 + (x^2 + \gamma^2 + y^2)^2 - 4\alpha^2(x^2 + \gamma^2 + y^2) \implies \\ \alpha^2(x^2 + \gamma^2 + y^2) - \gamma^2 x^2 &= \alpha^4 \implies \\ \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^2 \gamma^2 - \gamma^2 x^2 &= \alpha^4 \implies \\ (\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 &= \alpha^4 - \alpha^2 \gamma^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2). \end{aligned}$$

Ἡ τελευταία λόγω τῆς (II) γράφεται:

$$\boxed{\beta^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 \beta^2} \quad (3) \quad \text{ἢ διαιρώντας καὶ τὰ} \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \quad (4)$$

δυσὲς μέλη διὰ $\alpha^2 \beta^2$

Ὡστε οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ τόπου θὰ ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωση (3) (πού εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν (4)).

Ἀντίστροφα, κάθε σημείο M τοῦ ὁποῦ οἱ συντεταγμένες (x, y) ἱκανοποιοῦν τὴν (3) ἀνήκει στὸν τόπο – στήν ἑλλειψη μὲ ἄξονες 2α καὶ 2β.

Πράγματι: Ἡ (3) γράφεται διαδοχικὰ: $(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2) \implies$
 $\alpha^2 x^2 - \gamma^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2 \gamma^2 \implies x^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2 + y^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \implies x^2 + y^2 + y^2 =$
 $= \alpha^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2$ (5). Ἀπὸ τὴν (5) παίρνομε τὶς ἀκόλουθες δυσὲς ἰσοδύναμες ἐξισώσεις:

$$x^2 + y^2 + 2\gamma x + y^2 = \alpha^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2 + 2\alpha \cdot \frac{\gamma}{\alpha} x \quad [\text{προσθέσαμε καὶ στὰ δυσὲς μέλη τῆς (5) τὸ } 2\gamma x].$$

$$x^2 + y^2 - 2\gamma x + y^2 = \alpha^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2 - 2\alpha \cdot \frac{\gamma}{\alpha} x \quad [\text{ἀφαιρέσαμε καὶ ἀπὸ τὰ δυσὲς μέλη τῆς (5) τὸ } 2\gamma x].$$

$$\text{ἢ } (x + \gamma)^2 + y^2 = \left(\alpha + \frac{\gamma x}{\alpha}\right)^2 \quad (5\alpha) \quad \text{καὶ } (x - \gamma)^2 + y^2 = \left(\alpha - \frac{\gamma x}{\alpha}\right)^2 \quad (5\beta).$$

Ἐπειδὴ $|x| \leq \alpha$ (διότι $\alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 - \beta^2 x^2 \geq 0$) καὶ $0 < \gamma < \alpha$, θὰ εἶναι:

$$\alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} > 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha - \frac{\gamma x}{\alpha} > 0.$$

$$\left(\text{Παρατηρήστε: } |x| \leq \alpha \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma}{\alpha} < 1 \implies \frac{\gamma}{\alpha} |x| < \alpha \iff -\alpha < \frac{\gamma}{\alpha} x < \alpha, \right.$$

$$\left. \text{δηλαδή } -\alpha < \frac{\gamma}{\alpha} x \quad \text{ἢ} \quad 0 < \alpha + \frac{\gamma}{\alpha} x \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma}{\alpha} x < \alpha \quad \text{ἢ} \quad 0 < \alpha - \frac{\gamma}{\alpha} x \right)$$

Σύμφωνα μ' αὐτὲς τὶς παρατηρήσεις οἱ ἐξισώσεις (5α) καὶ (5β) γράφονται ἀντίστοιχα:

$$\sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} \quad (6\alpha), \quad \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2} = \alpha - \frac{\gamma x}{\alpha} \quad (6\beta).$$

Προσθέτοντας τὶς (6α) καὶ (6β) κατὰ μέλη παίρνομε:

$$\sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2} = 2\alpha, \quad \text{δηλαδή } ME_1 + ME = 2\alpha.$$

Ὑστερα ἀπ' ὅλα τὰ παραπάνω μποροῦμε πλέον νὰ λέμε ὅτι:

Ἐξίσωση μιᾶς ἐλλείψεως μὲ ἐστιακὴ ἀπόσταση 2γ ($E_1 E = 2\gamma$) καὶ μεγάλον ἄξονα $2a$ ($a > \gamma > 0$) εἶναι ἡ ἐξίσωση (3) ἢ (4) ἰσοδυνάμως, ὅπου $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$ (2β ὁ μικρὸς ἄξονας).

Σημείωση : Γιὰ νὰ σχεδιάσουμε μιὰ ἑλλειψη μποροῦμε νὰ πάρουμε ἓνα λεπτό νῆμα νάυλον καὶ νὰ καρφώσουμε τὰ ἄκρα του σὲ δυσὲς σημεῖα E_1, E πού ἔχουν ἀπόσταση μικρότερη ἀπὸ τὸ μήκος τοῦ νήματος.

Ὑστερα μὲ τὴν ἄκρη τοῦ μολυβιοῦ μας τεντώνομε τὸ νῆμα καί, μετατοπίζοντας συνεχῶς τὸ μολύβι, γράφομε μιὰ γραμμὴ. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ εἶναι μιὰ

έλλειψη μέ έστίς τά σημεία E_1 καί E καί μέγáλoν άξoνα ίσο πρós τό μήκος τοῦ νήματος.

Έφαρμoγή : Νά σχεδιασθεῖ ή έλλειψη μέ έξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. (Νά λάβετε μοναδιαῖο μήκος τό 1 cm).

Περιγραφή : Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνομε ένα τμήμα E_1E ίσο μέ 6 cm ($2\gamma = 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 2\sqrt{25 - 16} = 2 \cdot 3$). Όρίζομε πάνω στήν E_1E τά σημεία A_1, A γιά τά όποία $OA_1 = OA = 5$ cm (O μέσο τοῦ E_1E , $2\alpha = 10$ cm) καί πάνω στή μεσοκάθετη τοῦ E_1E τά σημεία B_1, B γιά τά όποία $OB_1 = OB = 4$ cm ($2\beta = 8$ cm). Τά σημεία A_1, A, B_1, B άνήκουν στήν έλλειψη πού θέλομε νά σχεδιάσομε. Άκολουθώς έργαζόμαστε, μ' ένα νήμα μήκους 10 cm, όπως περιγράφομε παραπάνω.

Ένας άλλος τρόπος σχεδιάσεως είναι νά προσδιορίσομε άρκετά σημεία τής έλλείψεως μέ τήν παρακάτω άπλή γεωμετρική κατασκευή καί ύστερα νά χαράξομε τήν καμπύλη πού περνά άπ' αυτά τά σημεία.

Μέ κέντρο τή μιά έστία, έστω τήν E , καί άκτίνα ίση μέ 2α γράφομε κύκλο (σχ. 20 · 2). Παίρνομε τώρα ένα τυχαῖο σημείο Δ τοῦ κύκλου ($E, 2\alpha$) καί κατασκευάζομε τήν εὐθεία (η) μεσοκάθετη στό τμήμα $E_1\Delta$. Άν ή (η) τέμνει τήν $E\Delta$ στό M_2 θά έχομε $M_2E_1 + M_2E = M_2\Delta + M_2E = E\Delta = 2\alpha$ άρα τό M_2 είναι σημείο τής έλλείψεως. [Παρατηρήστε ότι ή (η) είναι έφαπτομένη στήν καμπύλη].

(Νά γίνει τό πλήρες σχέδιο τής έλλείψεως μέ τήν παραπάνω έξίσωση).

γ) Έ έλλειψη ως γραφική παράσταση δυό συναρτήσεων. Έ σχέση πού προκύπτει άπό τήν έξίσωση (3) δέν είναι συνάρτηση, διότι σέ μιά κατάλληλη πραγματική τιμή τοῦ x ($|x| \leq \alpha$) άντιστοιχοῦν γενικά δυό άντίθετες πραγματικές τιμές τοῦ y .

Έπιλύομε τήν έξίσωση (3) ως πρós y καί παίρνομε τίς άκόλουθες δυό εκφράσεις:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad (7\alpha)$$

$$\text{καί} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \quad (7\beta).$$

Οί εκφράσεις αυτές μάς δίνουν συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο όρισμοῦ πού προκύπτει άπό τή σχέση $\alpha^2 - x^2 \geq 0$. Άλλά $\alpha^2 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \alpha^2 \iff |x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$ άρα τό πεδίο όρισμοῦ τών συναρτήσεων (7α) καί (7β) είναι, όπως είδαμε καί παραπάνω, τό διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

Βρίσκομε τό πεδίο τιμών τής y στή σχέση (3), δηλαδή τήν ένωση τών πεδίων τιμών τών (7α) καί (7β), άν έπιλύομε τήν (3) ως πρós x . Έτσι παίρνομε $x = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 - y^2}$, όπότε έχομε: $\beta^2 - y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq \beta^2 \iff |y| \leq \beta \iff -\beta \leq y \leq \beta$.

Ώστε τό πεδίο τιμών τής y στή σχέση (3) είναι τό διάστημα $[-\beta, \beta]$ καί

ειδικότερα, τό πεδίο τιμών της (7α) είναι τό διάστημα $[0, \beta]$ καί της (7β) τό διάστημα $[-\beta, 0]$.

Ἡ συνάρτηση (7α) ἔχει ὡς γραφική παράσταση τήν ἡμιέλλειψη A_1BA ἀπό τή μεριά τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα Oy (σχ. 20·2) καί ἡ συνάρτηση (7β) ἔχει ὡς γραφική παράσταση τήν ἡμιέλλειψη A_1B_1A .

20·3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. *Νά μελετηθεῖ ὡς πρὸς τή μονοτονία ἡ συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τόν τύπο:*

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \text{ μέ } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ στό διάστημα } \Delta = [-\alpha, \alpha].$$

*Ὡς πάρομε τά σημεία x_1, x_2 μέ $-\alpha \leq x_1 < x_2 \leq 0$ ἔχομε διαδοχικά:
 $-\alpha \leq x_1 < x_2 \leq 0 \implies \alpha^2 \geq x_1^2 > x_2^2 \geq 0 \implies -\alpha^2 \leq -x_1^2 < -x_2^2 \leq 0 \implies$
 $0 \leq \alpha^2 - x_1^2 < \alpha^2 - x_2^2 \leq \alpha^2 \implies 0 \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_1^2) < \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_2^2) \leq \beta^2$
 $\implies \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x_1^2} < \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x_2^2}$, δηλαδή: $y_1 < y_2$.

*Ὡστε στό διάστημα $[-\alpha, 0]$ ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὐξουσα.

Περναίμε τώρα στό ὑπόλοιπο διάστημα $[0, \alpha]$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ. *Ἐχομε:
 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \alpha \implies 0 \leq x_1^2 < x_2^2 \leq \alpha^2 \implies 0 \geq -x_1^2 > -x_2^2 \geq -\alpha^2 \implies$
 $\alpha^2 \geq \alpha^2 - x_1^2 > \alpha^2 - x_2^2 \geq 0 \implies \beta^2 \geq \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_1^2) > \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x_2^2) \geq 0$,
 ἄρα: $y_1 > y_2$.

*Ὡστε στό διάστημα $[0, \alpha]$ ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Στή θέση $x = 0$ ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο· αὐτό εἶναι ἴσο μέ β ($y_{\max} = \beta$).

*Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $y = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ εἶναι γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $[-\alpha, 0]$ καί γνησίως αὐξουσα στό διάστημα $[0, \alpha]$ καί ὅτι παρουσιάζει ἐλάχιστο στή θέση $x = 0$, τό ὁποῖο ἰσοῦται μέ $-\beta$. Διακρίνουμε αὐτά τά συμπεράσματα ἂν ρίξουμε μιά ματιά στή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων, δηλαδή στή γραμμή πού ἔχει ἐξίσωση τή $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$.

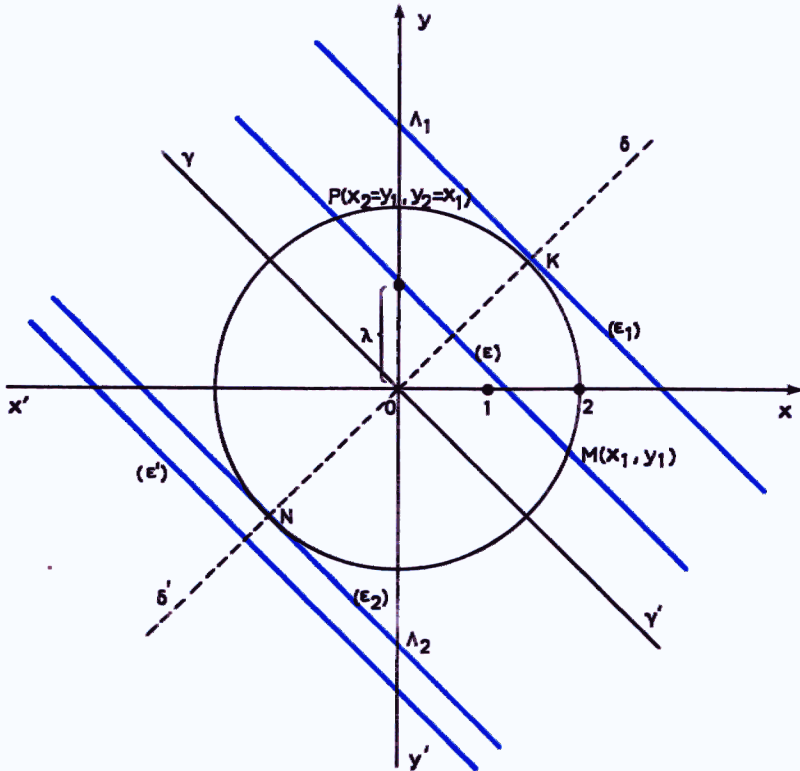
2. *Νά γίνει ἡ γραφική λύση τοῦ συστήματος $x^2 + y^2 = 4$ (I) καί $x + y = \lambda$ (II). Ἐφαρμογή γιά $\lambda = 2\sqrt{2}$.*

Σχεδιάζουμε τόν κύκλο μέ κέντρο τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων καί μέ ἀκτίνα ἴση μέ 2 καί τήν εὐθεία μέ ἐξίσωση τή (II) ἢ τήν ἰσοδύναμή της $y = -x + \lambda$ (σχ. 20·3 α). *Ἀν οἱ γραμμές αὐτές ἔχουν κοινά σημεία, τότε τό σύστημα ἔχει πραγματικές λύσεις· εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων. Τά κοινά λοιπόν σημεία τῶν γραμμῶν πού παριστάνουν οἱ ἐξισώσεις (I) καί (II) μᾶς παρέχουν γραφικά τίς πραγματικές λύσεις τοῦ συστήματος.

Οἱ εὐθείες (ε) μέ ἐξισώσεις $y = -x + \lambda$ εἶναι παράλληλες πρὸς τή διχοτόμο γ'γ τῶν γωνιῶν $\widehat{x'Oy}$ καί $\widehat{y'Ox}$ (γιατί;) καί ὅσες ἀπ' αὐτές τίς εὐθείες τέμνουν τόν κύκλο $(O, 2)$ θά τόν τέμνουν σέ σημεία συμμετρικά ὡς πρὸς τήν δ'δ, διχοτόμο τῶν γωνιῶν $\widehat{x'Oy'}$ καί $\widehat{x'Oy}$.

Οι τιμές της παραμέτρου λ είναι οι τεταγμένες των σημείων τομής των ευθειών (ϵ) με τον άξονα $y'y$.

Ας είναι (ϵ_1) η ευθεία με εξίσωση $y = -x + 2\sqrt{2}$, Λ_1 τό σημείο τομής της με την $y'y$ και K τό σημείο τομής της με την $\delta'\delta$. Τό ὀρθογώνιο στό K τρίγωνο $OK\Lambda_1$ είναι ἰσοσκελές· ἐπομένως $2(OK)^2 = (O\Lambda_1)^2$, δηλαδή $2(OK)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow OK = 2$. Ἀρα ἡ ευθεία (ϵ_1) ἐφάπτεται



Σχ. 20.3 α.

στόν κύκλο (O) στό σημείο K . Αυτό σημαίνει ότι τό σύστημα $x^2 + y^2 = 4$ καί $x + y = 2\sqrt{2}$ ἔχει οὐσιαστικά μιά πραγματική λύση.

Όμοια βλέπουμε ότι καί ἡ ευθεία (ϵ_2) , μέ εξίσωση $y = -x - 2\sqrt{2}$, ἐφάπτεται στόν κύκλο στό σημείο N , ἀντιδιαμετρικό τοῦ K . Ὑστερα ἀπ' αὐτά είναι φανερό ότι:

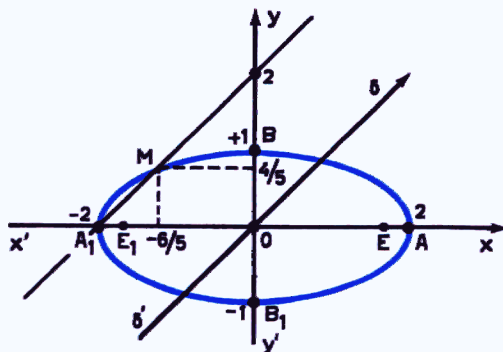
Όταν $-2\sqrt{2} < \lambda < 2\sqrt{2}$, τό σύστημα ἔχει δύο πραγματικές λύσεις· όταν $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$ τό σύστημα ἔχει μιά διπλή πραγματική λύση καί όταν $\lambda < -2\sqrt{2}$ ἢ $\lambda > 2\sqrt{2}$, τό σύστημα δέν ἔχει πραγματικές λύσεις.

3. Νά γίνει ἡ γραφική λύση τοῦ συστήματος: $x^2 + 4y^2 = 4$ [I] καί $y = x + 2$ [II].

Ἡ εξίσωση (I) είναι εξίσωση ἑλλείψεως μέ μεγάλον ἄξονα 4 καί μικρό $2\left(\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1\right)$

καί ἡ (II) είναι εξίσωση ευθείας παράλληλης πρὸς τή διχοτόμο $\delta'\delta$ τῶν γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'Oy'}$ πού τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημείο 2.

Σχεδιάζουμε αυτές τις γραμμές (σχ. 20·3 β) και βλέπουμε ότι έχουν κοινά σημεία τα $A_1(-2, 0)$ και $M(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$. αυτά τα σημεία αποτελούν και τη γραφική λύση του συστήματος των (I) και (II).



Σχ. 20·3 β.

20·4 Άσκησης.

1. Νά βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ με κορυφές τα σημεία B $(-2, 0)$, Γ $(2, 0)$ και A $(0, 5)$.

2. Νά βρεθεί η εξίσωση του κύκλου του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A $(-4, 3)$, B $(3, -4)$, Γ $(1, -2\sqrt{6})$.

3. Νά σχεδιασθούν οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων: I) $6x^2 + 6y^2 = 30$. II) $x^2 + 2y^2 = 2$. III) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. IV) $25x^2 + 49y^2 = 1225$.

4. Νά βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία $y = 2x + \lambda$ να είναι εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = 6$.

5. Νά γίνει η γραφική παράσταση των σχέσεων: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Τι παρατηρείτε για τη γραμμή που παριστάνει η δεύτερη εξίσωση;

6. Ν' αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 4$ παριστάνει κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $(1, 0)$ και ακτίνα μέτρο 2.

7. Νά χαραχθεί η γραφική παράσταση της εξίσωσης $x^2 + (y+1)^2 = 4$.

8. Νά σχεδιασθεί η γραφική παράσταση της σχέσεως $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Ποιά είναι η θέση της αρχής των αξόνων ως προς αυτή τη γραφική παράσταση;

ΕΝΟΤΗΤΑ 21

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΥΠΟ $y = ax^2 + bx + \gamma$. Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

21·1 Μελέτη και γραφική παράσταση της συναρτήσεως που δίνεται από τον άλγεβρικό τύπο: $y = ax^2 + bx + \gamma$ ($a, b, \gamma \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

Ή σχέση $y = ax^2 + bx + \gamma$ (1) παράγει μία συνάρτηση y του x ορισμένη

παντού μέσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, όπως εξάλλου κάθε πολυώνυμο του x · διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $ax^2 + bx + \gamma$ παίρνει μία και μόνο μία πραγματική τιμή.

Για την παραπέρα μελέτη της συναρτήσεως θα μετασχηματίσουμε το δευτεροβάθμιο ως προς x τριώνυμο σε μία καταλληλότερη για το σκοπό μας μορφή (βλέπε και παράγραφο 7.2).

$$\begin{aligned}\text{Γράφομε: } y &= ax^2 + bx + \gamma = a \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \\ &= a \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = a \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right] = \\ &= a \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.\end{aligned}$$

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, καθόσον $\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$.

1) $\alpha > 0$: Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συναρτήσεως άρχικά στο διάστημα: $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$.

$$\begin{aligned}\text{*Έχουμε: } x_1 < x_2 \leq -\frac{\beta}{2\alpha} &\implies x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} < x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \leq 0 \implies \\ \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 &> \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \geq 0 \implies a \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 > a \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \geq 0 \\ \implies a \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} &> a \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.\end{aligned}$$

Δηλαδή $y_1 > y_2 \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Άρα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Θα εξετάσουμε τώρα το ίδιο ζήτημα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$.

$$\begin{aligned}\text{*Έχουμε: } -\frac{\beta}{2\alpha} \leq x_1 < x_2 &\implies 0 \leq x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} < x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \implies \\ 0 \leq \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 &< \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \implies 0 \leq a \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 < a \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \\ \implies \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \leq a \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} &< a \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.\end{aligned}$$

Δηλαδή $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \leq y_1 < y_2$. Άρα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Ώστε, με $\alpha > 0$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα, όταν το x παίρνει τιμές στο

διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και αύξουσα, όταν τό x παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Συνεπώς για τήν τιμή $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ή συνάρτηση παίρνει ελαχίστη τιμή και αυτή είναι: $y_{\text{ελαχ}} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

II) $\alpha < 0$. Ακολουθώντας άκριβώς τήν παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε ότι:

Η συνάρτηση (μέ $\alpha < 0$) είναι γνησίως αύξουσα όταν τό x παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα όταν τό x παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Για τήν τιμή $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ή συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή, τήν $y_{\text{μεγ}} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

Στήν πρώτη περίπτωση ($\alpha > 0$) τό πεδίο τιμών είναι τό διάστημα $\left[\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}, +\infty\right)$ και στή δεύτερη περίπτωση ($\alpha < 0$) τό διάστημα $\left(-\infty, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right]$.

Τό σημείο μέ συντεταγμένες $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right)$ λέγεται **κορυφή** τής γραφικής παραστάσεως τής συναρτήσεως.

Αν $x' = -\frac{\beta}{2\alpha} + \rho$ και $x'' = -\frac{\beta}{2\alpha} - \rho$ δυό τιμές συμμετρικές ως προς τήν τιμή $-\frac{\beta}{2\alpha}$, όποτε έχομε $x' + \frac{\beta}{2\alpha} = \rho$ και $x'' + \frac{\beta}{2\alpha} = -\rho$ ($\rho > 0$), τότε θά είναι $y' = \alpha \left(x' + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha\rho^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} =$
 $= \alpha \cdot (-\rho)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha \left(x'' + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = y''$.

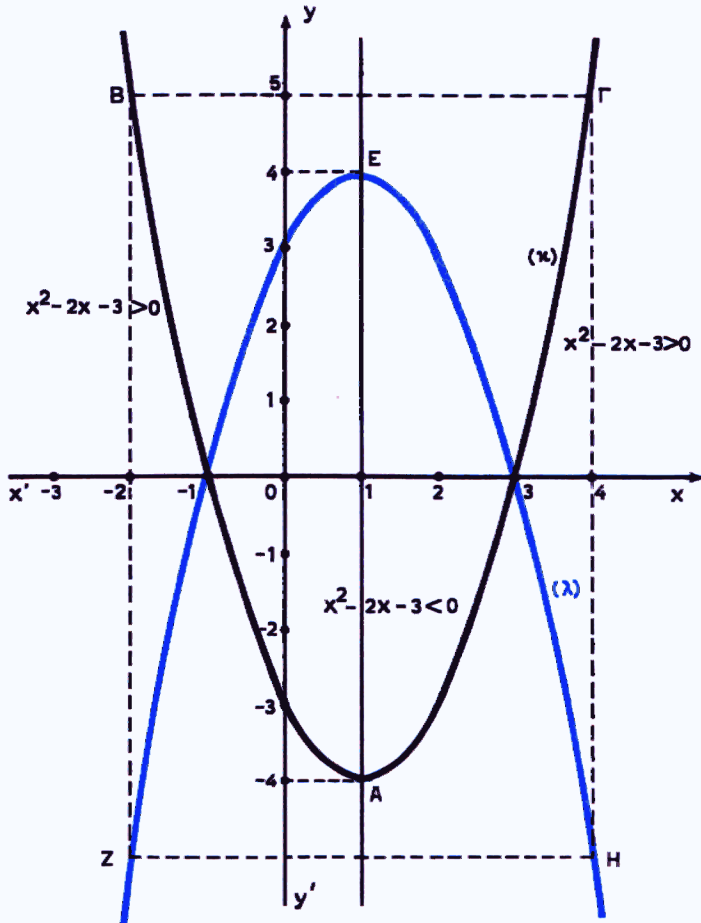
Όστε σέ κάθε ζεύγος συμμετρικών, ως προς τήν $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τιμών του x αντιστοιχίζεται ή αυτή τιμή του y .

Από τήν παραπάνω ιδιότητα προκύπτουν δυό αξιόλογα συμπεράσματα:

I) Η γραφική παράσταση τής συναρτήσεως έχει άξονα συμμετρίας τήν εὐθεία πού διέρχεται από τήν κορυφή τής γραφικής παραστάσεως και είναι παράλληλη προς τόν άξονα $y'y$, δηλαδή τήν εὐθεία μέ εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

II) Η αντίστροφη προς τή συνάρτηση σχέση δεν είναι συνάρτηση, διότι σε μία τιμή του y αντιστοιχίζονται έν γενεί δυό διαφορετικές τιμές του x .

Γιά νά σχεδιάσoμε τή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως φτιάχνoμε πρώτα έναν πίνακα αντιστοιχίων τιμών των x καί y : ακολουθώs τοποθετούμε τήν κορυφή τής καμπύλης, χαράσσομε τόν άξoνα συμμετρίας καί μαρκάρoμε τά παραστατικά σημεία, των όποιων έχoμε καθορίσει τίς συντεταγμένες (σχ. 21·1).



Σχ. 21·1.

Μεταξύ των σημείων πού προκαταβολικά έχoμε προσδιορίσει είναι καί τό σημείο τομής τής καμπύλης μέ τόν άξoνα $y'y'$ αυτό έχει συντεταγμένες $(0, \gamma)$.

Έπίσης, άν ή εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (2) έχει ρίζες πραγματικές, τότε προσδιορίζοντας αυτές τίς ρίζες έχoμε τά κοινά σημεία τής γραφικής παραστάσεως μέ τόν άξoνα $x'x$.

Αν οι πραγματικές ρίζες (όταν υπάρχουν) τής εξίσώσεως (2) είναι τέτοιοι αριθμοί πού τά αντίστοιχά τους σημεία πάνω στον άξoνα $x'x$ τοποθετούνται μέ δυσκολία, τότε προτιμάμε νά σχεδιάσoμε τή γραφική παράσταση χρησιμοποιώντας άλλα σημεία καί νά ποριστούμε τά κοινά της σημεία μέ τόν άξoνα $x'x$ μετά τή σχεδίαση τής γραφικής παραστάσεως. Σ' αυτή τήν

περίπτωση, έπειδή οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παραστάσεως και του άξονα x' είναι οι τιμές που μηδενίζουν τό πολυώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, λέμε ότι έχομε κάνει τή γραφική έπίλυση της έξισώσεως $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

Αν ή έξιωση (2) έχει ίσες ρίζες, τότε ή εϋθεία $x'x$ θά είναι έφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως.

Στό σχήμα 21.1 έχομε σχεδιάσει τίς γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που προκύπτουν από τούς τύπους:

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \text{ (I) και } y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4 \text{ (II)}.$$

Τά πολυώνυμα $x^2 - 2x - 3$, $-x^2 + 2x + 3$ παίρνουν αντίθετες τιμές για τήν ίδια τιμή του x . συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (I) και (II) είναι σχήματα συμμετρικά ως προς τήν εϋθεία $x'x$.

Γιά τή σχεδίαση της (I) χρησιμοποιήθηκαν τά σημεία $(-2, 5)$, $(-1, 0)$, $(1, -4)$, $(3, 0)$ και $(4, 5)$ και για τή σχεδίαση της (II) τά σημεία $(-2, -5)$, $(-1, 0)$, $(1, 4)$, $(3, 0)$ και $(4, -5)$.

*Αν ή έξιωση (2) δέν έχει ρίζες πραγματικές, τότε ή γραφική παράσταση της (1) δέν θάχει κοινά σημεία μέ τόν άξονα $x'x$ και αν $a > 0$, ή καμπύλη θά έχει τή μορφή της (u) (σχ. 21.1) και θά βρίσκεται ολόκληρη στό ήμιεπίπεδο που έχει σύνορο τήν $x'x$ και περιέχει τόν θετικό ήμιάξονα Oy, αν όμως $a < 0$ ή καμπύλη θά έχει τή μορφή της (λ) (σχ. 21.1) και θά βρίσκεται ολόκληρη στό ήμιεπίπεδο μέ $y < 0$.

Μέ τή σχεδίαση της γραφικής παραστάσεως έχομε και τή γραφική έπίλυση της άνωσώσεως $ax^2 + bx + \gamma > 0$ (άντίστοιχα $ax^2 + bx + \gamma < 0$), διότι από τό σχήμα προκύπτουν άμεσα οι τιμές του x για τίς όποιες έχομε $y > 0$ (άντίστοιχα $y < 0$).

21.2 Η έξιωση της παραβολής μέ άξονα τετμημένων τόν άξονα συμμετρίας της.

α) **Ορισμός και έξιωση της παραβολής.** Παραβολή λέγεται ό γεωμετρικός τόπος των σημείων ενός επιπέδου καθένα από τά όποια απέχει έξίσου από μία δοσμένη εϋθεία (δ) του επιπέδου, και από ένα δοσμένο σημείο E, που δέν ανήκει στη (δ). Τό σημείο E λέγεται έστία και ή εϋθεία (δ) **διευθετούσα** της παραβολής.

Φέρομε από τό E τήν εϋθεία $x'x$ κάθετη στη διευθετούσα και άς είναι K τό σημείο τομής της μέ τή (δ) (σχ. 21.2).

Είναι προφανές ότι ό τόπος δέχεται άξονα (όρθης) συμμετρίας τήν εϋθεία EK· δηλαδή αν M ένα σημείο της παραβολής, τότε και τό M', συμμετρικό του M ως προς τήν EK, θ' ανήκει στον τόπο. Επίσης είναι φανερό ότι και τό μέσο O του τμήματος KE θ' ανήκει-στον τόπο.

Θά αναζητήσομε τώρα τήν έξιωση της παραβολής στό σύστημα που έχει άξονα των τετμημένων πάνω στην εϋθεία EK μέ θετική κατεύθυνση από τό K προς τό E και άξονα τεταγμένων πάνω στην εϋθεία τήν κάθετη προς τήν KE στό μέσο O του KE.

Στό παραπάνω σύστημα άξόνων τό σημείο O (μέσο του EK) ανήκει στην εϋθεία $y'y$ και όλα τά άλλα σημεία της παραβολής κείνται στό ήμιεπίπεδο που έχει σύνορο τήν $y'y$ και περιέχει τόν θετικό ήμιάξονα Ox (σχ. 21.2). Αυτό σημαίνει ότι τό σημείο O θά έχει τετμημένη μηδέν και όλα τά άλλα σημεία της παραβολής θά έχουν θετικές τετμημένες.

Θά παραστήσομε τό μέτρο του $\vec{KE}$ μέ α ($\alpha > 0$), όπότε οι συντεταγμένες

βολή πρέπει καί αρκεί, σύμφωνα μέ τήν (3), νά ἔχομε: $\left(-\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2$, δηλαδή:

$$\boxed{y^2 = 2\alpha x} \quad (4)$$

Ὡστε, στό σύστημα ἀξόνων πού περιγράψαμε πιό πάνω, ἡ ἔξιωση (4) εἶναι ἡ ἔξιωση παραβολῆς τῆς ὁποίας ἡ ἑστία ἔχει ἀπόσταση α ἀπό τή διευθετούσα.

Ἡ ἔξιωση (4) δέν ὁρίζει συνάρτηση y τοῦ x διότι σέ κάθε $x > 0$ ἀντιστοιχίζονται, μέσω τῆς (4), δυό ἀντίθετες τιμές τοῦ y .

Μποροῦμε ὅμως, ἂν θέλομε, νά πάρομε στή θέση τῆς (4) τό ἰσοδύναμό της ζευγὸς ἔξιώσεων $y = \sqrt{2\alpha x}$ (4_I) καί $y = -\sqrt{2\alpha x}$ (4_{II}), καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες ὁρίζει καί μιά συνάρτηση y τοῦ x μέ κοινὸ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ἡ (4_I) ἔχει πεδίο τιμῶν τό διάστημα $[0, +\infty)$ καί γραφικὴ παράσταση τὸν «ἀπεριόριστο βραχίονα» $OM \dots$ (σχ. 21·2), ἐνῶ ἡ (4_{II}) ἔχει πεδίο τιμῶν τό διάστημα $(-\infty, 0]$ καί γραφικὴ παράσταση τὸν «ἀπεριόριστο βραχίονα» $OM' \dots$. Προφανῶς ἡ (4_I) εἶναι γνησίως αὐξουσα ἐνῶ ἡ (4_{II}) εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Στό σχῆμα 21·2 ἔχομε σχεδιάσει (μέ μπλέ χάραξη) εἰδικά τήν παραβολή μέ ἔξιωση $y^2 = 4x$ ($y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$, $\alpha = 2$).

Γιά τή σχεδίαση χρησιμοποιήσαμε τὸν παρακάτω πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν.

x	0	1	2	3	4
y	0	-2, 2	$-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$	-4, 4

Ἐξάλλου μποροῦμε νά μαρκάρομε ὅσα θέλομε σημεία τῆς παραβολῆς μέ τήν ἀκόλουθη ἀπλὴ γεωμετρικὴ κατασκευή.

Παίρνομε ἓνα τυχαῖο σημεῖο Z τῆς (δ) καί φέρνομε τήν EZ . Στό Z ὑψώνομε τήν εὐθεῖα $Z\Sigma$ τήν κάθετη πρὸς τή (δ) καί κατασκευάζομε καί τή μεσοκάθετη $\Theta\eta$ τοῦ EZ . Τό σημεῖο τομῆς, ἔστω M , τῆς $Z\Sigma$ μέ τή $\Theta\eta$ εἶναι σημεῖο τοῦ τόπου, διότι $MZ = ME$ καί $MZ \perp (\delta)$: ἡ εὐθεῖα ΘM εἶναι μάλιστα ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης στό σημεῖο M . (Παρατηρήστε ὅτι τό μέσο τοῦ EZ θά εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῆς EZ μέ τήν $y'y$).

β) Ἀντιστροφή τῆς σχέσεως πού ὁρίζει ἡ ἔξιωση $y^2 = 2\alpha x$ (4) μέ $\alpha > 0$. Ἐναλλάσσοντας τά γράμματα x καί y στήν ἔξιωση (4) παίρνομε, ὅπως γνωρί-

ζομε, τήν εξίσωση που μᾶς δίνει τή σχέση τήν αντίστροφη εκείνης που ὀρίζει ἡ παραπάνω εξίσωση. Ἔχομε δηλαδή τήν εξίσωση $y = \frac{1}{2\alpha} x^2$ (5) μέ $\alpha > 0$.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ εξίσωση (5) εἶναι τῆς μορφῆς $y = ax^2 + bx + \gamma$, ὅπου $\beta = 0$ καί $\gamma = 0$, καί παρέχει συνεπῶς συνάρτηση μέ πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς (5) θά εἶναι, ὅπως γνωρίζομε, μιά καμπύλη συμμετρική τῆς παραβολῆς μέ εξίσωση τήν $y^2 = 2ax$, ὡς πρὸς τή διχοτόμο Οζ τῶν γωνιῶν $\widehat{x'Oy'}$ καί $\widehat{x'Oy}$ (σχ. 21 · 2). Διαπιστώνομε λοιπόν ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς (5) εἶναι μιά παραβολή μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $y'y$, διευθετούσα τῆ (δ') συμμετρική τῆς (δ) ὡς πρὸς τήν Οζ καί ἐστὶν τό σημείο Ε' συμμετρικό τοῦ Ε ὡς πρὸς τήν Οζ ἐπίσης. Μποροῦμε μάλιστα νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς (5) προκύπτει μέ στροφή τῆς παραβολῆς (4) περί τό Ο κατὰ 90° καί μέ φορά τέτοια ὥστε ὁ ἡμιάξονας Οχ νά ταυτιστεῖ μέ τόν ἡμιάξονα Οy.

Στό σχῆμα 21 · 2 ἔχομε σχεδιάσει τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως που ὀρίζει ἡ εξίσωση $y = \frac{1}{4} x^2$. χρησιμοποιήσαμε συνεπῶς τόν παραπάνω πίνακα παίρνοντας ὅμως τίς τιμές 0, ∓ 2 , $\mp 2\sqrt{2}$, $\mp 2\sqrt{3}$ καί ∓ 4 στόν ἄξονα $x'x$ καί τίς ἀντίστοιχες τιμές 0, 1, 2, 3, 4 στόν ἄξονα $y'y$.

Εἶναι προφανές τώρα ὅτι παραβολή εἶναι ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως που προκύπτει ἀπό εξίσωση τῆς μορφῆς $y = ax^2 + bx + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. ἡ διαφορά εἶναι ὅτι ὁ ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς τῆς παραβολῆς εἶναι ἡ εὐθεία μέ εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ πάνω στήν ὁποία βρίσκεται ἡ ἐστία τῆς καμπύλης καί πρὸς τήν ὁποία εἶναι κάθετη ἡ διευθετούσα της. Ἐξάλλου μποροῦμε εὐκόλα νά ἐπαληθεύσουμε ὅτι ἡ ἐστία ἔχει συντεταγμένες $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 + 1}{4\alpha} \right)$ καί ἡ διευθετούσα ἔχει εξίσωση $y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 - 1}{4\alpha}$.

(Παρατηρήστε: $y = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \Leftrightarrow y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$, ὁπότε, θέτοντας $Y = y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ καί $x + \frac{\beta}{2\alpha} = X$, παίρνομε $X^2 = \frac{1}{\alpha} Y = 2 \cdot \frac{1}{2\alpha} Y$. Ἔτσι βλέπομε ὅτι ἡ ἐστία ἀπέχει ἀπό τήν κορυφή ἀπόσταση $Y_1 = \frac{1}{4\alpha}$ καί συνεπῶς παίρνομε:

$$y_1 - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{1}{4\alpha} \Rightarrow y_1 = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 + 1}{4\alpha}$$

21.3 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. *Επιλύοντας την εξίσωση $y = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$) ως προς x να βρῆτε το πεδίο τιμών της συναρτήσεως που ὀρίζει αὐτή ἡ εξίσωση.*

Έχομε: $y = ax^2 + bx + \gamma \Leftrightarrow ax^2 + bx + \gamma - y = 0$ (I). Ἡ εξίσωση (I) πρέπει νά ἔχει πραγματικές λύσεις ὡς πρὸς x : γι' αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ διακρίνουσά της $\Delta = b^2 - 4a \cdot (\gamma - y)$ νά μὴ γίνεταί ἀρνητικός ἀριθμός. Δηλαδή πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχομε: $b^2 - 4a(\gamma - y) \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4a\gamma + 4ay \geq 0 \Leftrightarrow 4ay \geq 4a\gamma - b^2$ (2). Τώρα διακρίνομε δύο περιπτώσεις, καθόσον $a > 0$ ἢ $a < 0$.

I) Ὄταν $a > 0$ ἀπὸ τὴ (2) παίρνομε $y \geq \frac{4a\gamma - b^2}{4a}$ (2α). Ἡ (2α) μᾶς

λέει ὅτι τὸ πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ διάστημα $\left[\frac{4a\gamma - b^2}{4a}, +\infty \right)$ καί ὅτι ἡ τιμὴ $\frac{4a\gamma - b^2}{4a}$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη. (Μεγίστη δὲν ὑπάρχει).

II) Ὄταν $a < 0$ ἀπὸ τὴ (2) παίρνομε $y \leq \frac{4a\gamma - b^2}{4a}$ (2β). Ἡ (2β) μᾶς

λέει ὅτι τὸ πεδίο τιμῶν εἶναι τώρα τὸ διάστημα $\left(-\infty, \frac{4a\gamma - b^2}{4a} \right]$ καί ὅτι ἡ τιμὴ $\frac{4a\gamma - b^2}{4a}$ εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως. (Ἐλαχίστη δὲν ὑπάρχει).

2. *Νά ἐπιλυθεῖ γραφικὰ τὸ σύστημα $y^2 = 4x$ (I) καὶ $5y = 4x + 4$ (II).*

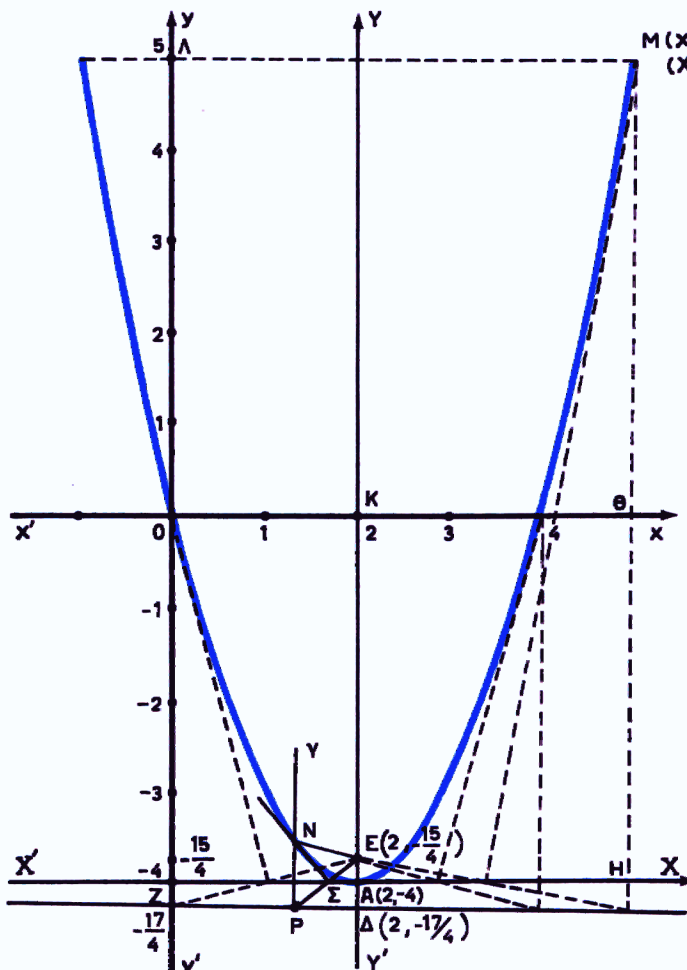
Σχεδιάζομε στὸ ἴδιο σύστημα ἀξόνων τὶς γραμμὲς ποὺ παριστάνουν οἱ ἐξιώσεις (I) καὶ (II). Ὅπως πλέον γνωρίζομε, ἡ (I) εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς μὲ ἐστία τὸ σημεῖο $E(1, 0)$ καὶ διευθετούσα τὴν εὐθεῖα μὲ ἐξίσωση $x = -1$. ἡ (II) εἶναι ἡ ἐξίσωση εὐθείας (σχ. 21.2). Ὄταν ὅπως συμβαίνει στὸ παράδειγμά μας, οἱ γραμμὲς (I) καὶ (II) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, τότε τὸ σύστημα ἔχει δύο πραγματικές λύσεις καὶ φυσικὰ οἱ λύσεις αὐτὲς δίνονται ἀπὸ τὶς συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων. Ἄν ἡ εὐθεῖα ἦταν ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, τότε τὸ σύστημα θά εἶχε δύο ἴσες πραγματικές λύσεις καὶ ἂν εὐθεῖα καὶ καμπύλη δὲν εἶχαν κοινὸ σημεῖο, τὸ σύστημα δὲν θά εἶχε πραγματικές λύσεις.

3. *Δίνεται ἡ ἐξίσωση $y = x^2 - 4x$. Νά σχεδιασθεῖ ἡ παραβολὴ τὴν ὁποία παριστάνει ἀφοῦ πρῶτα προσδιοριστοῦν ἡ ἐστία καὶ ἡ διευθετούσα τῆς παραβολῆς καὶ τοποθετηθοῦν μερικὰ σημεῖα τῆς καμπύλης μὲ γεωμετρικὴ κατασκευὴ.*

Γράφομε πρῶτα τὴν ἐξίσωση ὡς ἐξῆς: $y = (x - 2)^2 - 4$ (1) καὶ ὀρίζομε σ' ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων τὸ σημεῖο $A(2, -4)$. Ἡ εὐθεῖα $Y'AY$ μὲ ἐξίσωση $x = 2$ εἶναι, ὅπως γνωρίζομε, ἄξονας συμμετρίας τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (1) καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο $A(2, -4)$ (σχ. 21.3). Γιά $x = 2$ ἡ συνάρτηση ποὺ ὀρίζει ἡ (1) παίρνει τὴν ἐλαχίστη τιμὴ τῆς $y = -4$ καὶ τὸ ἀντίστοιχο παραστατικὸ σημεῖο εἶναι βέβαια τὸ A .

Φέρνουμε τώρα από τό Α την εϋθεία $X'AX$ παράλληλη πρὸς τήν $x'x$, ἄρα κάθετη στήν AY .

Ἐὰς εἶναι $M(x, y)$ ἓνα σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (1). Θέτομε τό ἐρώτημα: τί μορφή θά πάρει ἡ (1) ἂν θεωρήσομε σάν ἄξονες συντεταγμένων τούς $X'AX$ καί $Y'AY$ μέ ἀρχή τό Α, μοναδιαῖα τμήματα ἴσα πρὸς τά μοναδιαῖα



Σχ. 21.3.

τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος καί μέ θετικές κατευθύνσεις τίς ἴδιες μέ τίς θετικές κατευθύνσεις τῶν πρώτων ἄξόνων;

Ἐὰς εἶναι (X, Y) οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου $M(x, y)$ στό νέο σύστημα.

Θά ἔχομε: $X = \overline{AH} = \overline{K\Theta} = \overline{K\Theta} + \overline{O\Theta} = -2 + x$ καί $Y = \overline{HM} = \overline{Z\Lambda} = \overline{ZO} + \overline{O\Lambda} = 4 + y$. ἑπομένως ἡ (1), πού γράφεται καί μέ τή μορφή $y + 4 = (x - 2)^2$, θά μετασχηματισθεῖ στήν $Y = X^2$ (2) ὡς πρὸς τό νέο σύστημα ἄξόνων (σχ. 21.3).

Ἡ ἐξίσωση ὁμως (2) πού γράφεται $X^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot Y$ εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς παραβολῆς πού ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα $Y'Y$ τῶν τεταγμένων καί ἐστία τό σημεῖο $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Ὡστε ἡ παραβολή πού ἔχει ἐξίσωση τή (2) θά ἔχε ἐστία τό σημεῖο E μέ συντεταγμένες $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονες, καί ἄρα $\left(2, -\frac{15}{4}\right)$ ὡς πρὸς τοὺς παλιούς, καί διευθετούσα τήν εὐθεῖα μέ ἐξίσωση $Y = -\frac{1}{4}$ ὡς πρὸς τό νέο σύστημα, ἄρα τήν εὐθεῖα μέ ἐξίσωση

$$y = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4} \text{ ὡς πρὸς τό ἀρχικό.}$$

Γιὰ νά βροῦμε γραφικὰ ἓνα σημεῖο τῆς παραβολῆς (1) παίρνομε ἓνα σημεῖο P τῆς διευθετούσας καί στό P ὑψώνομε τήν $P\gamma$ κάθετη πρὸς τήν $P\Delta$ (τῇ διευθετούσῃ). ἀκολουθῶς σχεδιάζομε τήν EP καί, ἂν Σ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῆς μέ τήν $X'AX$, τότε στό Σ ὑψώνομε κάθετη πρὸς τήν EP . ἂν N εἶναι τό σημεῖο τομῆς αὐτῆς τῆς κάθετης μέ τή $P\gamma$, τότε τό N εἶναι σημεῖο τῆς παραβολῆς (γιατί;).

4. Δίνεται ἡ συνάρτηση πού ὀρίζει ἡ ἐξίσωση $y = x^2 + 2x + 4$ (I) καί θεωροῦμε καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = \lambda x$ (II). Νά βρεθοῦν ἐκεῖνες οἱ πραγματικές τιμές τῆς παραμέτρου λ , γιὰ τίς ὁποῖες οἱ εὐθεῖες πού προκύπτουν ἀπὸ τή (II) εἶναι ἐφαπτομένες τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (I).

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (I) τό y μέ λx καί παίρνομε τήν ὡς πρὸς x ἐξίσωση $x^2 + (2 - \lambda)x + 4 = 0$ (III). Γιὰ νά ἐφάπτεται μιὰ εὐθεῖα τῆς δέσμης* (II) στὴ γραφικὴ παράσταση τῆς (I) πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωση (III) νά ἔχει διπλὴ ρίζα. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεῖα καί ἡ καμπύλη (I) θά ἔχουν δυὸ ταυτιζόμενα κοινὰ σημεία. Πρέπει λοιπὸν νά ἔχομε: Διακρίνουσα τῆς (III) $= (2 - \lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $\lambda^2 - 4\lambda - 12$ εἶναι $\lambda_1 = -2$ καί $\lambda_2 = 6$.

Ὡστε οἱ εὐθεῖες τῆς δέσμης (II) πού ἐφάπτονται στήν παραβολή (I) ἔχουν ἐξίσωση $y = 6x$ καί $y = -2x$.

(Νά γίνεи τό σχῆμα καί νά βρεθοῦν τὰ σημεία ἐπαφῆς).

20 · 4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνεи ἡ μελέτη καί νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικὲς παραστάσεις στό ἴδιο σύστημα ἁξόνων τῶν συναρτήσεων πού ὀρίζουν οἱ ἐξισώσεις: I) $y = x^2 + 2$ · II) $y = x^2 - 2$. Τί παρατηρεῖτε σχετικὰ μέ τὴ μορφή τῶν δυὸ γραφικῶν παραστάσεων;

2. Νά γίνεи ἡ μελέτη καί ἡ χάραξη τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν σχέσεων πού ὀρίζουν οἱ ἐξισώσεις :

$$\text{I)} y = \frac{1}{3}x^2 \cdot \text{II)} y^2 = 3x \cdot \text{III)} y = \frac{1}{3}x^2 + 1 \cdot \text{IV)} y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

* Τό σύνολο τῶν εὐθειῶν (II) ἀποτελεῖ μιὰ δέσμη εὐθειῶν πού διέρχονται ἀπὸ τήν ἀρχή τῶν ἁξόνων.

3. Νά επιλυθούν γραφικά οι άνισώσεις:

$$\text{I) } -x^2 + x + 20 > 0 \quad \text{II) } x^2 - x + 1 < 0 \quad \text{III) } x^2 - 3x + 9 > 0.$$

4. Νά γίνει ή μελέτη και ή γραφική παράσταση της συναρτήσεως που όρίζει ή εξίσωση $y = x^2 - |x|$.

5. Θεωρούμε τή γραφική παράσταση (C) της συναρτήσεως που όρίζει ή εξίσωση $y = x^2$, σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, και μία ευθεία (δ) που διέρχεται από τό σημείο $A(0, +1)$ και έχει συντελεστή διευσθύνσεως λ. 'Η (δ) τέμνει τή (C) στά σημεία M_1, M_2 , τών οποίων οι προβολές στον άξονα $x'x$ είναι $B(x_1)$ και $\Gamma(x_2)$ άντιστοίχως. 'Αποδείξτε ότι: I) τό γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ έχει μία τιμή άνεξάρτητη από τό λ. II) τό τρίγωνο $BA\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

6. I) Νά προσδιοριστούν τά διαστήματα μονοτονίας και τά πεδία τιμών τών συναρτήσεων $y = x^2 - 4x + 3$ και $y = -x^2 + 6x - 5$. II) Νά γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις στό ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και νά ύπολογιστούν οι συντεταγμένες τών κοινών σημείων τους. III) Νά εξηγήσετε πώς, από τίς παραπάνω γραφικές παραστάσεις, παίρνομε τίς λύσεις της άνίσώσεως $x^2 - 4x + 3 < -x^2 + 6x - 5$;

ΕΝΟΤΗΤΑ 22

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΥΠΟ $y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$. Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΚΑΙ Η
ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

22.1 Οι συναρτήσεις τίς όποιες όρίζουν εξισώσεις της μορφής: $y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$. (1)

(όπου: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$, $\gamma \neq 0$ και $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ μέ συνέπεια τήν $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

'Ερμηνεία τών συνθηκών που επιβάλαμε στίς σταθερές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Μέ $\gamma = 0$ και $\delta \neq 0$ θά είχαμε $y = \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta}{\delta}$. δηλαδή εξίσωση ευθείας.

*Αν $\gamma \neq 0$, αλλά $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, θά είχαμε $y = \frac{0}{\gamma x + \delta} = 0$

$$\forall x \in \left[\mathbf{R} - \left\{ \frac{\delta}{\gamma} \right\} \right].$$

*Αν $\gamma \neq 0$ και $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \delta = \beta$. Καλούμε ρ τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\gamma}$ και έχομε $\alpha = \rho\gamma$, $\beta = \rho\delta$. 'Επομένως στην προκειμένη περίπτωση είναι $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\rho\gamma x + \rho\delta}{\gamma x + \delta} = \frac{\rho(\gamma x + \delta)}{\gamma x + \delta} = \rho = \text{σταθερά για}$

$$\forall x \in \left[\mathbf{R} - \left\{ \frac{\delta}{\gamma} \right\} \right].$$

Οί παραπάνω συνθήκες έχουν λοιπόν επιβληθεί για νά έχομε ένα νέο τύπο συναρτήσεως. 'Η συνάρτηση του νέου αυτού τύπου (1) λέγεται **όμογραφική**.

α) 'Η άπλούστερη εξίσωση της μορφής (1) είναι προφανώς ή εξίσωση $y = \frac{\beta}{x}$ (2), μέ $\beta \neq 0$, και μέ τή συνάρτηση που παρέχει αυτή ή εξίσωση θά άσχοληθοίμε άρχικά.

Πεδίο ορισμού της συναρτήσεως (2) είναι τό σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$. έπειδή $y = \frac{\beta}{x} \implies x = \frac{\beta}{y}$, συμπεραίνουμε ότι και τό πεδίο τιμών είναι τό ίδιο σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$.

Θά μελετήσουμε τή συνάρτηση ως πρός τή μονοτονία πρώτα στό διάστημα $(-\infty, 0)$ και ύστερα στό διάστημα $(0, +\infty)$, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις, καθόσον $\beta > 0$ και $\beta < 0$.

I) $\beta > 0$: $x_1 < x_2 < 0 \implies \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} < 0 \implies \frac{\beta}{x_2} < \frac{\beta}{x_1} < 0 \implies y_2 < y_1$. Άρα στό διάστημα $(-\infty, 0)$ ή συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Περνάμε τώρα στό δεύτερο διάστημα. Έχουμε: $0 < x_1 < x_2 \implies 0 < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \implies 0 < \frac{\beta}{x_2} < \frac{\beta}{x_1} \implies y_2 < y_1$. Άρα και στό διάστημα $(0, +\infty)$ ή συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Η συνάρτηση δέν παρουσιάζει τοπικά άκρότατα, διότι, σέ καθένα από τά διαστήματα, όπου είναι ορισμένη, ή μονοτονία της δέν αλλάζει είδος.

Όταν ή x παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(-\infty, 0)$, τότε και ή $y = \frac{\beta}{x}$ (μέ $\beta > 0$) παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(-\infty, 0)$. Όταν ή x παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(0, +\infty)$, τότε και ή y παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(0, +\infty)$.

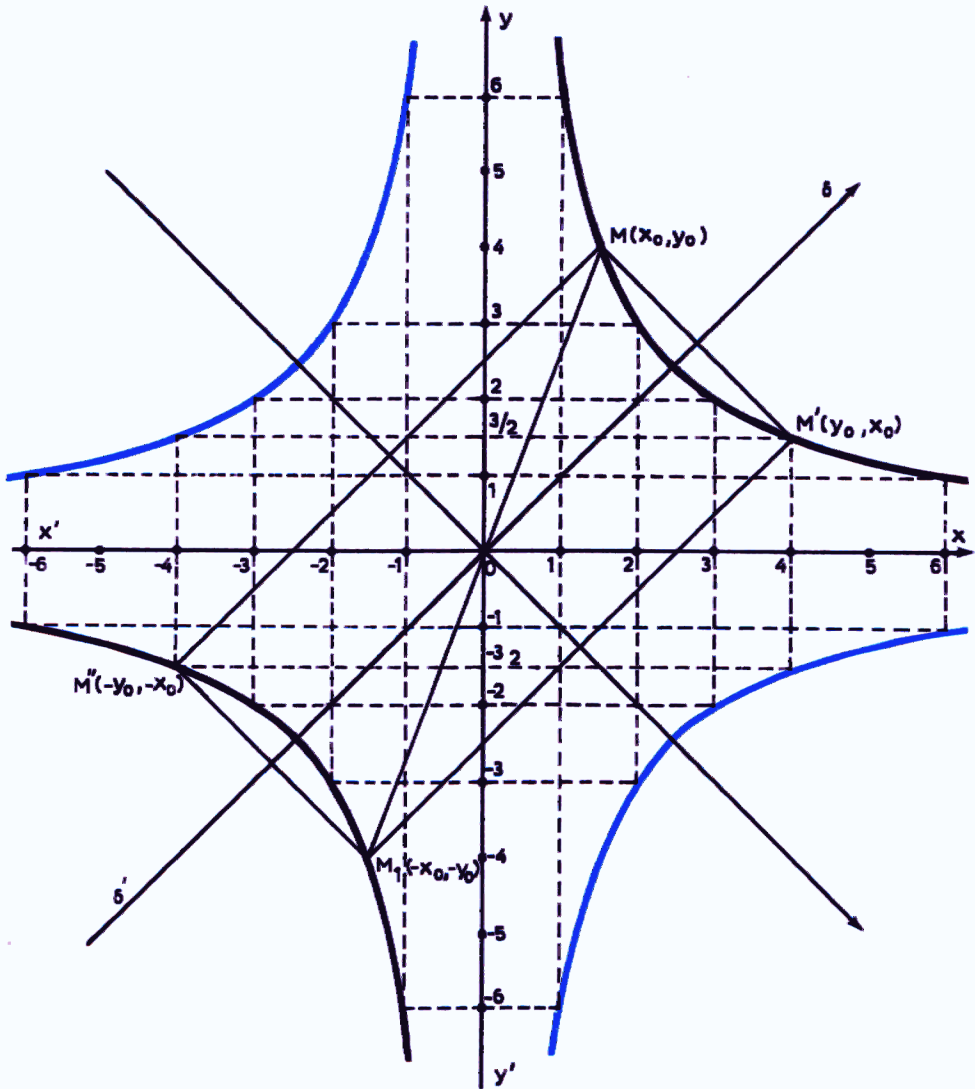
Αυτό σημαίνει ότι ή γραφική παράσταση της συναρτήσεως άποτελείται από δύο μέρη (κλάδους) από τά όποία τό ένα βρίσκεται μέσα στην τρίτη γωνία $x'Oy'$ και τό άλλο μέσα στην πρώτη γωνία $x'Oy$ των άξόνων (σχ. 22·1 α).

II) $\beta < 0$: Μέ τόν ίδιο τρόπο εργασίας, όπως στην πρώτη περίπτωση ($\beta > 0$), βγάζουμε τά αντίστοιχως όμοια συμπεράσματα. Δηλαδή: Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι τώρα ή συνάρτηση γνησίως αύξουσα καθώς επίσης και στό διάστημα $(0, +\infty)$. Δέν παρουσιάζει τοπικά άκρότατα, διότι και στά δύο διαστήματα διατηρεί τό είδος της μονοτονίας της.

Όταν ή x παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(-\infty, 0)$ τώρα ή $y = \frac{\beta}{x}$ παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(0, +\infty)$ και όταν ή x παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(0, +\infty)$ ή y παίρνει τίς τιμές του διαστήματος $(-\infty, 0)$ (σχ. 22·1 α: μπλέ χάραξη).

Ο άξονας $y'y$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως, διότι όταν $x \longrightarrow 0$ από άρνητικές (άντίστοιχα θετικές) τιμές, τότε ή παράσταση $\frac{\beta}{x}$ τείνει στό $-\infty$ (άντίστοιχα στό $+\infty$) εφόσον $\beta > 0$ και τείνει στό $+\infty$ (άντίστοιχα στό $-\infty$) άν $\beta < 0$.

Ο άξονας επίσης x' είναι ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως, διότι όταν $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$, τότε $y \rightarrow 0$.



22.1 α.

Διατυπώνουμε μερικές ακόμα σημαντικές παρατηρήσεις σχετικά με τη γραφική παράσταση της συναρτήσεώς μας.

Ας θεωρήσουμε ένα ζεύγος αντίστοιχων τιμών (x_0, y_0) και τό σημείο $M_0(x_0, y_0)$ πού αντιστοιχίζεται σ' αυτό τό ζεύγος· τότε θά έχομε:

$$y_0 = \frac{\beta}{x_0} \iff y_0 x_0 = \beta.$$

Τό σημείο $M'(x' = y_0, y' = x_0)$ είναι συμμετρικό του M_0 ως προς την δ'δ (σχ. 22·1 α) διχοτόμο των γωνιών $\widehat{x'Oy'}$ και $\widehat{xOy}$. τό $M''(x'' = -y_0, y'' = -x_0)$ είναι συμμετρικό του M_0 ως προς την ε'ε διχοτόμο των γωνιών $\widehat{yOx'}$ και $\widehat{y'Ox}$. τό σημείο τέλος $M_1(x_1 = -x_0, y_1 = -y_0)$ είναι συμμετρικό του M_0 ως προς την αρχή των αξόνων. Έχουμε όμως $y_0x_0 = \beta \iff x_0y_0 = \beta$, δηλαδή $y'x' = \beta$. $y_0x_0 = \beta \iff x_0y_0 = \beta \iff (-x_0) \cdot (-y_0) = \beta$, δηλαδή $y'' \cdot x'' = \beta$. $y_0 \cdot x_0 = \beta \iff (-y_0)(-x_0) = \beta$, δηλαδή $y_1x_1 = \beta$.

Όστε αν M_0 είναι ένα σημείο της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως με τύπο $y = \frac{\beta}{x}$, τότε τά συμμετρικά του M_0 ως προς τίς διχοτόμους των γωνιών των αξόνων και τό συμμετρικό ως προς την αρχή ανήκουν επίσης στή γραφική παράσταση. Δηλαδή ή γραφική παράσταση της συναρτήσεως έχει τίς διχοτόμους των γωνιών των αξόνων ως άξονες (όρθης) συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας (σχ. 22·1 α).

Ύστερα άπ' όλα τά παραπάνω, μέ τή χρησιμοποίηση και μερικών παραστατικών σημείων των όποιων έχουμε προσδιορίσει τίς συντεταγμένες, σχεδιάζουμε τή γραφική παράσταση.

Στό σχήμα 22·1 α, χρησιμοποιώντας και τόν παρακάτω πίνακα αντίστοιχων τιμών, έχουμε σχεδιάσει τίς γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \frac{6}{x} \quad \text{και} \quad y = -\frac{6}{x}.$$

x	1	2	3	4	6
y	6	3	2	$\frac{3}{2}$	1
y.	-6	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1

Παρατήρηση : Έπειδή $y = \frac{\beta}{x} \iff x = \frac{\beta}{y}$, βλέπομε ότι ή αντίστροφη συνάρτηση ταυτίζεται μέ τήν αρχική, πράγμα έξάλλου πού φαίνεται και άπό τή γραφική παράσταση, ή όποία έχει άξονα συμμετρίας τή διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

β) Στηριζόμενοι στά προηγούμενα συμπεράσματα θά μελετήσουμε τώρα τή γενική μορφή : $y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$ (3) της όμογραφικής συναρτήσεως.

Παρατηρούμε άρχικά ότι πεδίο όρισμού της συναρτήσεως είναι τό σύνολο $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$. Για νά βρούμε τό πεδίο τιμών επιλύουμε τήν έξίσωση $y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$

ως προς x και παίρνουμε $x = \frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha}$. Έτσι βρίσκουμε ως πεδίο τιμών τό σύνολο $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$. (γιατί;).

Για την παραπέρα μελέτη της συναρτήσεως γράφουμε την εξίσωση (3) με την

$$\text{εξής μορφή: } y = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta - \frac{\alpha \delta}{\gamma}}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{\beta \gamma - \alpha \delta}{\gamma}}{\gamma \left(x + \frac{\delta}{\gamma} \right)} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{\beta \gamma - \alpha \delta}{\gamma^2}}{x + \frac{\delta}{\gamma}}.$$

$$\text{δηλαδή γράφουμε: } y = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\kappa}{x + \frac{\delta}{\gamma}} \quad (4).$$

$\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)$ είναι τό πηλίκο της διαιρέσεως του $\alpha x + \beta$ διά του $\gamma x + \delta$ και $\beta - \frac{\alpha \delta}{\gamma}$ τό υπόλοιπο· θέσαμε $\frac{\beta \gamma - \alpha \delta}{\gamma^2} = \kappa$.

Θά καλέσουμε Y την παράσταση $y - \frac{\alpha}{\gamma}$ και X την $x + \frac{\delta}{\gamma}$. Έτσι ή (4)

$$\text{θά γραφεί: } Y = \frac{\kappa}{X} \quad (5).$$

Παρατηρώντας την (5) σέ συνδυασμό με την (4) καί λαμβάνοντας υπόψη τίς προηγούμενες διαπιστώσεις τίς σχετικές με τή μορφή (5) καταλήγουμε στά ακόλουθα συμπεράσματα:

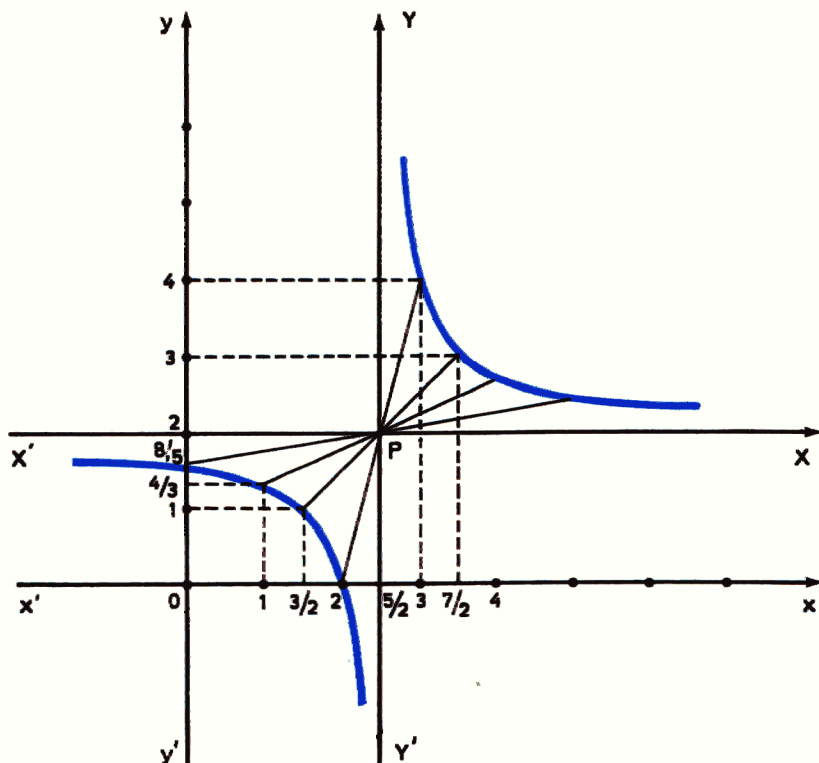
Η γραφική παράσταση της (4) έχει άσύμπτωτη την ευθεία $X'X$ (σχ. 22.1 β) με εξίσωση $y = \frac{\alpha}{\gamma}$ (έχομε $y \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}$, όποτε $Y \rightarrow 0$, όταν $x \rightarrow \pm \infty$, όποτε καί $X \rightarrow \pm \infty$): αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. Επίσης ή ευθεία $Y'Y$ με εξίσωση $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, παράλληλη της $y'y$, είναι άσύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως, έπειδή όταν $x \rightarrow -\frac{\delta}{\gamma}$, όποτε $X \rightarrow 0$, τότε y καί $Y \rightarrow \pm \infty$.

Όταν $\kappa > 0$ ή συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα** καί στά δύο διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma} \right)$ καί $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty \right)$ του πεδίου όρισμού της. Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως αποτελείται από δύο κλάδους πού βρίσκονται μέσα στίς γωνίες XPY καί $X'PY'$ τών άσυμπτώτων (σχ. 22.1 β).

Όταν $\kappa < 0$ ή συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα** καί στά δύο διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma} \right)$ καί $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty \right)$ καί ή γραφική της παράσταση

άποτελείται από δύο κλάδους μέσα στις γωνίες YPX' και $Y'PX$ των άσυμπτωτων.

Καί στις δυό περιπτώσεις τά δυό μέρη τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τῖς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν άσυμπτῶτων καί ὡς πρὸς τό σημεῖο τομῆς τῶν άσυμπτῶτων.



Σχ. 22.1 β.

Στό σχῆμα 22.1 β, χρησιμοποιώντας τά παραπάνω συμπεράσματα καί τόν παρακάτω πίνακα αντίστοιχων τιμῶν, ἔχομε σχεδιάσει τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση:

$$y = \frac{4x-8}{2x-5} = 2 + \frac{2}{2x-5}.$$

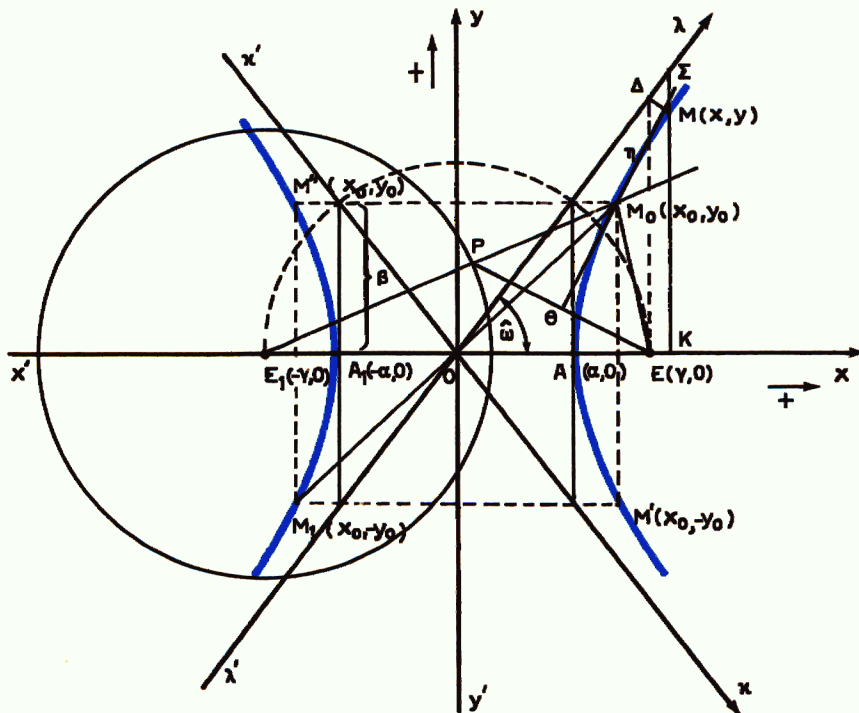
x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{3}$	1	0	4	3

22.2 Ἡ ὑπερβολή καί ἡ ἐξίσωσή της.

α) Ὁρισμός καί ἐξίσωση. Ὑπερβολή λέγεται ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ενός ἐπιπέδου πού ἔχουν διαφορά ἀποστάσεων, ἀπό δυό δοσμένα ση-

μεία E_1 και E του επιπέδου, ίση μ' ένα δοσμένο τμήμα $2a < E_1E = 2\gamma$ (σχ. 22.2 α). Στόν τόπο συνεπώς ανήκει κάθε σημείο M για τό όποιο έχουμε $ME_1 - ME = 2a$ και κάθε σημείο M για τό όποιο έχουμε $ME - ME_1 = 2a$.

Τά σημεία E_1, E λέγονται έστίες και ή απόσταση $E_1E = 2\gamma$ έστιακή απόσταση τής ύπερβολής. Είναι φανερό ότι ή ευθεία E_1E καθώς και ή $y'y$, μεσοκάθετη του EE_1 , είναι άξονες (όρθης) συμμετρίας του τόπου· συνεπώς και τό μέσο O του E_1E (τό σημείο τομής των $E_1E, y'y$) είναι κέντρο συμμετρίας τής ύπερβολής (σχ. 22.2 α).



Σχ. 22.2 α.

Θά προτιμήσουμε για σύστημα συντεταγμένων αυτό πού έχει πρώτον άξονα $x'x$ πάνω στην E_1E και δεύτερο τόν $y'y$, δηλαδή τούς άξονες συμμετρίας τής καμπύλης.

Θέλομε τώρα στό παραπάνω σύστημα νά βρούμε τή σχέση πού ίκανοποιούν οί συντεταγμένες των σημείων του τόπου μας και μόνον αυτές· νά βρούμε δηλαδή τήν εξίσωση τής ύπερβολής. Έφαρμόζοντας ανάλογη διαδικασία μ' εκείνη πού χρησιμοποιήσαμε για νά προσδιορίσουμε τήν εξίσωση τής ελλείψεως βρίσκομε:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\gamma^2 - a^2} = 1} \quad (6)$$

ή, θέτοντας $y^2 - \alpha^2 = \beta^2$,

$$(7\alpha) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \iff \boxed{\beta^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 \beta^2} \quad (7\beta)$$

β) Ἡ υπερβολή γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων.

*Αν επιλύσουμε τήν (7β) ως προς y παίρνουμε:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \quad (8\alpha) \quad \text{καί} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \quad (8\beta).$$

Παρατηρούμε συνεπώς ότι ἡ ἐξίσωση 7(α ἢ β) δὲν ὀρίζει συνάρτηση y τοῦ x , διότι σέ μιά κατάλληλη τιμή τῆς μεταβλητῆς x ἀντιστοιχίζονται δύο ἀντίθετες τιμές τῆς y (οἱ 8α, 8β).

Καθεμιά ὁμως ἀπό τίς σχέσεις (8α), (8β), πού μαζί ἀποτελοῦν ἓνα ζευγάρι ἐξισώσεων ἰσοδύναμο πρὸς τήν (7β), ὀρίζει συνάρτηση μέ κοινὸ πεδίο ὀρισμοῦ τήν ἔνωση διαστημάτων $(-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty)$.

(Πράγματι: $x^2 - \alpha^2 \geq 0 \iff x^2 \geq \alpha^2 \iff |x| \geq \alpha \iff \{x \geq \alpha \text{ ἢ } x \leq -\alpha\}$).

Πεδίο τιμῶν τῆς (8α) εἶναι τὸ διάστημα $[0, +\infty)$ καί τῆς (8β) τὸ διάστημα $(-\infty, 0]$ (γιατί;).

Ἡ καμπύλη ἀποτελεῖται συνολικά ἀπὸ δύο πανομοιότυπα μέρη πού καλοῦμε κλάδους ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἔχει δύο «ἀπεριόριστους βραχίονες», συμμετρικούς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$.

Ὁ δεξιὰ κλάδος τῆς υπερβολῆς «ἀρχίζει» ἀπὸ τὸ σημεῖο $A(\alpha, 0)$ [δεξιὰ κορυφή τῆς υπερβολῆς: (σχ. 22·2 α)] καί «ἀναπτύσσεται» στὰ δεξιὰ τοῦ ἄξονα $y'y$. Ὁ ἀριστερὰ κλάδος εἶναι συμμετρικός τοῦ προηγουμένου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$ καθὼς καί ὡς πρὸς τήν ἀρχή τῶν ἄξόνων καί ἔχει κορυφή τὸ σημεῖο $A_1(-\alpha, 0)$.

Οἱ βραχίονες $AM_0 \dots$, καί $AM'' \dots$, αὐτοὶ δηλαδή πού κεῖνται στὸ ἡμιεπίπεδο $y > 0$ (σχ. 22·2 α), ἀποτελοῦν τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως (8α), ἐνῶ οἱ ἄλλοι δύο βραχίονες ἀποτελοῦν τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς (8β).

Ἡ εὐθεῖα $\lambda'\lambda$ μέ ἐξίσωση $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ (σχ. 22·2 α) εἶναι μιά ἀσύμπτωτη τῆς υπερβολῆς.

Πράγματι: Ἐὰν εἶναι $M(x, y)$ ἓνα σημεῖο τοῦ δεξιὰ ἄνω βραχίονα τῆς υπερβολῆς καί $MK \perp x'x$ [$K \in (x'x)$], $M\Delta \perp \lambda'\lambda$.

*Αν Σ τὸ σημεῖο τομῆς τῆς MK μέ τήν $\lambda'\lambda$, τότε θά ἔχομε $\overline{K\Sigma} = \frac{\beta}{\alpha} x$,

$$\overline{KM} = y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \quad \text{καί} \quad \overline{M\Sigma} = \overline{K\Sigma} - \overline{KM} = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} > 0.$$

Άλλά $M\Delta = M\Sigma \cdot \eta\mu \widehat{M\Sigma\Delta} = M\Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu \widehat{xO\Sigma} = M\Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu \omega$. άρα:

$$\begin{aligned} M\Delta &= \left(\frac{\beta}{\alpha} x - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \right) \sigma\upsilon\nu \omega = \frac{\beta \sigma\upsilon\nu \omega}{\alpha} \cdot (x - \sqrt{x^2 - \alpha^2}) = \\ &= \frac{\beta \sigma\upsilon\nu \omega}{\alpha} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - \alpha^2})(x + \sqrt{x^2 - \alpha^2})}{x^2 + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\beta \sigma\upsilon\nu \omega}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{x^2 + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \\ &= \epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu \omega \cdot \frac{\alpha^2}{x^2 + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{x^2 + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} \cdot \eta\mu \omega. \end{aligned}$$

Όταν όμως $x \rightarrow \infty$, τότε $\frac{\alpha^2}{x^2 + \sqrt{x^2 - \alpha^2}} \rightarrow 0$, όπότε και $M\Delta \rightarrow 0$.

Όμοια άποδεικνύομε ότι και ή εύθεία κ'κ, συμμετρική τής λ'λ ως πρός τούς άξονες, μέ εξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha} x$, είναι μιά δεύτερη άσύμπτωτη τής ύπερβολής.

Γιά νά σχεδιάσομε μιά ύπερβολή, τής όποίας γνωρίζομε τήν έστιακή άπόσταση $E_1E = 2\gamma$ και τό τμήμα 2α (ή τά μέτρα αὐτῶν τῶν τμημάτων), παίρνομε δυό σημεία E_1, E , σέ άπόσταση 2γ , και εκλέγομε όπως παραπάνω τούς άξονες συντεταγμένων· ακολουθως σχεδιάζομε τίσ άσύμπτωτες και τοποθετοῦμε και τίσ κορυφές $A(\alpha, 0), A_1(-\alpha, 0)$. Ύστερα μέσω τῶν εξισώσεων (8α) και (8β) προσδιορίζομε μερικά σημεία τής ύπερβολής και τελικά προβαίνομε στή χάραξη τής γραμμής.

Μποροῦμε εξάλλου νά προσδιορίσομε γραφικά όσα θέλομε σημεία τής καμπύλης, εφαρμόζοντας τήν άκόλουθη άπλή γεωμετρική κατασκευή. Μέ κέντρο τή μιά έστία, έστω τήν E_1 , και άκτίνα ίση μέ 2α γράφομε κύκλο. Άν P είναι ένα όποιοδήποτε σημείο τοῦ κύκλου ($E_1, 2\alpha$), μή κείμενο πάνω στόν άξονα $x'x$, φέρομε τή μεσοκάθετη $\Theta\eta$ τοῦ EP και όρίζομε τό σημείο τομής τής M_0 (σχ. 22·2 α) μέ τήν εύθεία E_1P . Τό σημείο M_0 είναι ένα σημείο τής ύπερβολής, διότι $M_0P = M_0E$ και συνεπώς $|M_0E_1 - M_0E| = |M_0E_1 - M_0P| = E_1P = 2\alpha$.

Άν σέ μιά ύπερβολή έχομε ειδικότερα $\gamma = \alpha\sqrt{2}$, όπότε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2$, τότε ή εξίσωσή τής γίνεται:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2 = \frac{\gamma^2}{2}} \quad (9)$$

Μιά τέτοια ύπερβολή ονομάζεται **ισοσκελής** και οί άσύμπτωτες αὐτῆς είναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν άξόνων, και συνεπώς κάθετες μεταξύ τους.

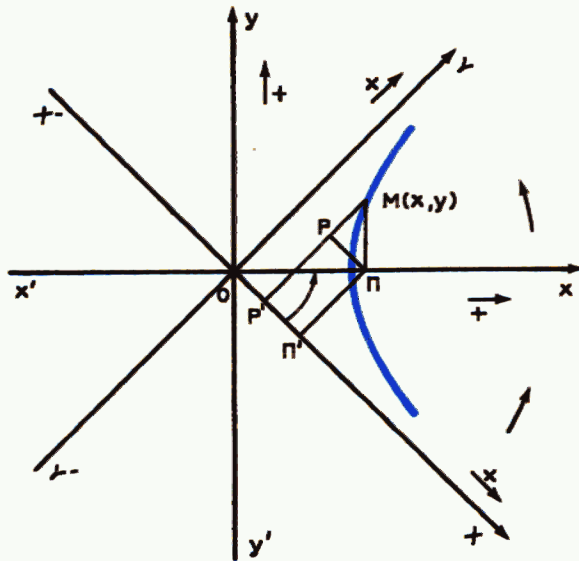
Θά αναζητήσομε τώρα τήν εξίσωση τής ισοσκελοῦς ύπερβολής ως πρός άξονες συντεταγμένων τίσ όρθογώνιες άσύμπτωτες αὐτῆς.

Παίρνομε γιά άξονα τετμημένων $X'OX$ τήν άσύμπτωτη πού έχει εξίσωση

(ως προς τους αρχικούς άξονες) $y = -x$ και για άξονα τεταγμένων $Y'OY$ τήν ασύμπτωτη με εξίσωση $y = x$ (σχ. 22 · 2 β).

Τις θετικές φορές $\vec{OX}$ και $\vec{OY}$ τις εκλέγουμε έτσι ώστε να είναι $\widehat{XOx} = +45^\circ$ και $\widehat{xOY} = +45^\circ$.

Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου θα έχει ως προς τό νέο σύστημα XOY συντεταγμένες (X, Y) που τη σχέση τους προς τις παλιές (x, y) τη βρίσκουμε εύκολα παρατηρώντας τό σχήμα 22 · 2 β.



Σχ. 22 · 2 β.

$$\begin{aligned} \text{Ήκριβώς έχομε: } X &= \overline{OP'} = \overline{OP'} + \overline{P'P} = \overline{OP'} - \overline{P'Π'} = \overline{OP'} - \overline{ΠΠ} = \\ &= \overline{OP} \cdot \sin 45^\circ - \overline{ΠM} \cdot \eta\mu 45^\circ = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$(MP' \perp X'X, MP \perp x'x, ΠΠ' \perp X'X \text{ και } ΠP \parallel X'X).$$

$$\begin{aligned} Y &= \overline{P'M} = \overline{P'P} + \overline{PM} = \overline{Π'Π} + \overline{PM} = \overline{OP} \cdot \eta\mu 45^\circ + \overline{ΠM} \cdot \sin 45^\circ = \\ &= x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ώστε ή μετάβαση από τις παλιές συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου M του επιπέδου στις νέες συντεταγμένες του (X, Y) γίνεται βάσει τών σχέσεων

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x-y}{\sqrt{2}} & (10\alpha) \\ Y &= \frac{x+y}{\sqrt{2}} & (10\beta) \end{aligned} \right\} \text{ που ισοδυναμοῦν μέ τις } \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$$

Όπως είδαμε παραπάνω οι συντεταγμένες (x, y) — ως προς τό αρχικό σύστημα xOy — κάθε σημείου M της Ισοσκελούς υπερβολής ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 - y^2 = \alpha^2 \iff (x - y)(x + y) = \alpha^2 = \frac{\gamma^2}{2}$ (11).

Εισάγοντας στην (11) τις εκφράσεις των $x - y$ και $x + y$, από τις (10α), (10β), μέσω των X και Y αντίστοιχα, παίρνομε τη σχέση $X \cdot Y = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\gamma^2}{4}$.

Από την τελευταία σχέση ποριζόμαστε την $Y = \frac{\alpha^2}{2X}$, ή όποια μᾶς λέει ότι η μεταβλητή Y είναι μιά όμογραφική συνάρτηση της μεταβλητῆς X .

Μπορούμε λοιπόν, ἂν ἀναφερθοῦμε σέ ὅσα ἐκθέσαμε στίς παραγράφους 22.1 (α) καί 22.1 (β), νά συμπεράνομε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ὁμογραφικῶν συναρτήσεων, πού σχεδιάσαμε ἐκεῖ, εἶναι ἰσοσκελεῖς ὑπερβολές.

Σημείωση : Ὁ κύκλος, ἡ ἔλλειψη, ἡ παραβολή καί ἡ ὑπερβολή λέγονται μαζί **κωνικές τομές**. Διότι, ὅπως ἀποδεικνύεται, μποροῦμε νά πάρομε αὐτές τίς καμπύλες ὡς τομές ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἀπό ἐπίπεδο.

22.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά γίνει ἡ μελέτη καί νά σχεδιασθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού ὀρίζουν οἱ εξισώσεις: I) $y = \frac{3}{2x - 1}$ καί II) $y = \frac{x - 1}{x}$.

I) Ἡ συνάρτηση ἔχει πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$ (γιατί;). Εἶναι γνησίως φθίνουσα καί στά δυό διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right)$, $\left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$ τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ της. Ἔχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $y = 0$ (τόν ἄξονα $x'x$) καί $x = \frac{1}{2}$. Ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δυό κλάδους μέσα στήν πρώτη καί τρίτη γωνία τῶν ἀσυμπτῶτων.

Χρησιμοποιώντας καί τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν νά χαράξετε τή γραφική παράσταση.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{3}{5}$	-1	-3	3	1

II) Ἔχομε $y = \frac{x - 1}{x} = 1 + \frac{-1}{x}$. Ἡ συνάρτηση ἔχει πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$. Εἶναι γνησίως αὐξουσα

καί στά δύο διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ της. Ἐχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $y = 1$ καί $x = 0$ (τόν ἄξονα $y'y$).

Ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους μέσα στή δευτέρα καί τέταρτη γωνία τῶν ἀσυμπτῶτων. Χρησιμοποιώντας καί τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν νά χαράξετε τή γραφική παράσταση.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	3	0	$\frac{1}{2}$

2. α) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ὀρίζει ἡ ἐξίσωση $y = \frac{-6x-7}{2x+4}$ (I). Παρατηρώντας ὅτι αὐτή ἡ γραφική παράσταση εἶναι μιᾶ ἰσοσκελῆς ὑπερβολή νά καθορίσετε τίς ἐστίες της.

β) Νά βρεθοῦν οἱ ἐξιώσεις τῶν εὐθειῶν πού διέρχονται ἀπό τό σημεῖο $(0, -\frac{7}{4})$ καί ἐφάπτονται στήν ὑπερβολή (I).

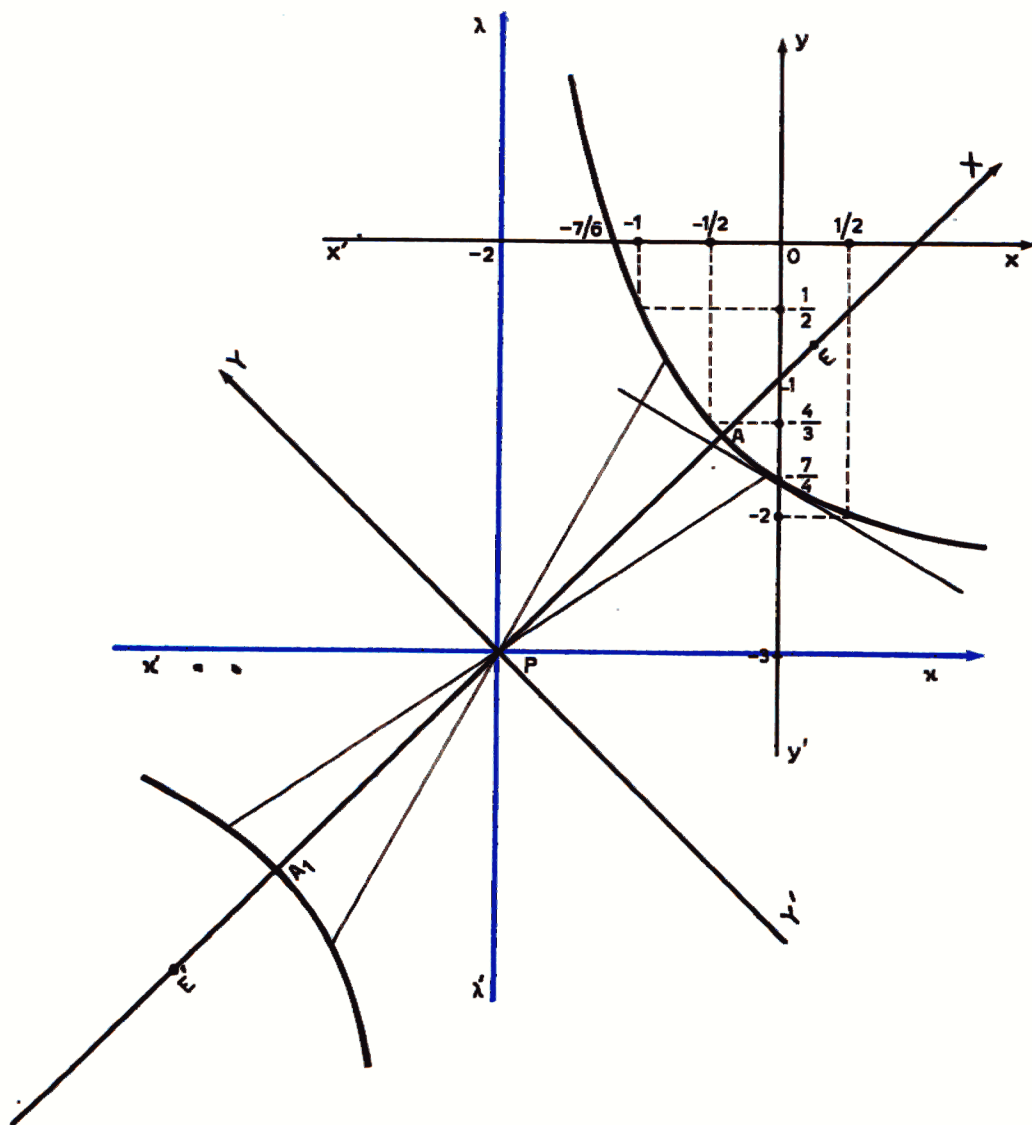
α) Γράφουμε ἀρχικά τήν (I) ὡς ἐξῆς: $y = -3 + \frac{5}{2x+4}$ (II). Ἀσύμπτωτες τῆς καμπύλης εἶναι οἱ εὐθεῖες $y = -3$ καί $x = -2$ (σχ. 22·3). Τά πεδία ὀρισμοῦ καί τιμῶν εἶναι ἀντιστοιχῶς τά σύνολα $\mathbb{R} - \{-2\}$ καί $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Γιά τή σχεδίαση χρησιμοποιήθηκε καί ὁ παρακάτω πίνακας ἀντίστοιχων τιμῶν:

x	$-\frac{7}{6}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{4}$	-2

Ἄν θέσουμε $y+3=\lambda$ καί $2x+4=2\kappa$, τότε ἡ ἐξίσωση (II) γράφεται κλ $= \frac{5}{2}$ (III). Μέ ἄξονες συντεταγμένων τίς ἀσύμπτωτες κ'κ καί λ'λ ἡ (III) θά εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (I). Εἶναι λοιπόν ἡ καμπύλη μιᾶ ἰσοσκελῆς ὑπερβολῆς, τῆς ὁποίας οἱ ἐστίες E_1 καί E κεῖνται στή διχοτόμο $X'X$ τῆς γωνίας $\widehat{KPL}$ καί ἀπέχουν ἀπό τό σημεῖο τομῆς P τῶν κ'κ καί λ'λ ἀπόσταση ἴση μέ $\gamma = \sqrt{2 \cdot 5}$ (διότι $\frac{\gamma^2}{4} = \frac{5}{2}$).

Ἡ ἐξίσωση τῆς καμπύλης μέ ἄξονες συντεταγμένων $X'X$ καί $Y'Y$, διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀσυμπτῶτων, εἶναι $X^2 - Y^2 = 10$ ($\alpha^2 = \frac{\gamma^2}{2}$).



22.3.

β) "Ας είναι δ ο συντελεστής διεύθυνσεως μιᾶς εὐθείας ποῦ διέρχεται ἀπὸ

τὸ σημεῖο $(0, -\frac{7}{4})$. τότε ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς τῆς εὐθείας θά εἶναι: $\frac{y + \frac{7}{4}}{x} =$

$$= \delta \iff y = \delta x - \frac{7}{4} \quad (1).$$

Τά κοινά σημεία τῶν γραμμῶν (I) καί (I) θά ἔχουν ἴσες τεταγμένες καί οἱ τετμημένες τους συνεπῶς θά ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση $\frac{-6x-7}{2x+4} = \delta x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4\delta x^2 + (8\delta + 5)x = 0$ (2). Γιά νά εἶναι ὁμως μιά εὐθεία τῆς μορφῆς (1) ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς (I) πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ρίζες τῆς (2) νά εἶναι ἴσες. Τότε ἡ εὐθεία καί ἡ καμπύλη ἔχουν δύο ταυτιζόμενα κοινά σημεία. Ἐπειδή ἡ (2) ἔχει μιά ρίζα τό μηδέν γιά $\forall \delta \in \mathbb{R}$, συμπεραίνομε ὅτι αὐτή πρέπει νά εἶναι διπλή. Πρὸς τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $8\delta + 5 = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{5}{8}$ (γιατί;).

Ὡστε ὑπάρχει μιά καί μόνο ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $(0, -\frac{7}{4})$, αὐτή πού ἔχει συντελεστή διεθυνσεως $-\frac{5}{8}$. εἶναι λοιπόν ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = -\frac{5}{8}x - \frac{7}{4}$. Τό σημεῖο ἐπαφῆς ἔχει τετμημένη μηδέν καί συνεπῶς εἶναι τό σημεῖο $(0, y = \frac{-6 \cdot 0 - 7}{2 \cdot 0 + 4} = -\frac{7}{4})$ τῆς ὑπερβολῆς. Βρήκαμε ἔτσι τήν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας στό σημεῖο $(0, -\frac{7}{4})$ τῆς ὑπερβολῆς.

22.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά γίνει ἡ μελέτη καί νά χαραχθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν σχέσεων πού ὁρίζουν οἱ ἐξισώσεις: I) $y = \frac{-3}{5x+10}$ II) $y = \frac{7x}{4x-10}$ III) $x^2 - y^2 = 8$.

$$\text{IV)} \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{V)} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2. Δίνεται ἡ σχέση πού ὁρίζει ἡ ἐξίσωση $2xy + 4x - 3y - 2 = 0$. I) Νά γίνει ἡ μελέτη τῆς. II) Νά γίνει ἡ γραφική παράστασή τῆς σ' ἓνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων. III) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι ἡ γραφική παράσταση εἶναι μιά ἰσοσκελῆς ὑπερβολή νά βρῆτε τίς συντεταγμένες τῶν ἐστιῶν καί τῶν κορυφῶν αὐτῆς τῆς ὑπερβολῆς.

3. Νά δοθοῦν γραφικά οἱ πραγματικές λύσεις (ἂν ὑπάρχουν) σέ καθένα ἀπό τά ἀκόλουθα συστήματα: 1) $2xy + 4x - 3y - 2 = 0$ (I) καί $y = 2x - 1$ (II). 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (I) καί $y = x - 5$ (II).

4. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $y = \frac{1}{x-1}$ (I). α) Νά βρεθοῦν ἐκεῖνες οἱ εὐθεῖες — ἂν ὑπάρχουν — πού διέρχονται ἀπό τό σημεῖο $(1, -1)$ καί ἐφάπτονται στή γραφική παράσταση τῆς (I). β) Ὑπάρχουν ἄραγε εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{XOY}$ πού νά ἐφάπτονται στή γραφική παράσταση τῆς (I);

5. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $x^2 - y^2 = 9$ (I). α) Νά βρεθοῦν — ἂν ὑπάρχουν — οἱ εὐθεῖες πού εἶναι παράλληλες πρὸς τό διάνυσμα $\vec{v}$ $(4, -3)$ καί ἐφάπτονται στήν καμπύλη πού παριστάνει

ή (I). β) Αφού διαπιστώσετε ότι το σημείο (5, 4) ανήκει στην καμπύλη (I) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο (5, 4).

Άσκησης για επανάληψη.

1. Να βρεθούν γραφικά οι πραγματικές λύσεις του συστήματος:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (I) \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (II).$$

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Είναι άραγε δυνατό να βρούμε δύο συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$ από τις οποίες η πρώτη να είναι άρτια, η δεύτερη περιττή και τέτοιες ώστε να είναι $f(x) = g(x) + h(x)$;

(Ύπόδειξη: Παρατηρήστε ότι πρέπει να έχουμε $\frac{1+x}{1-x} = g(x) + h(x)$, αλλά και $\frac{1-x}{1+x} = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$).

3. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συναρτήσεως που παρέχει ο τύπος $y = \frac{1}{A_k(x) - 1}$.

(Ύπόδειξη: Για το πεδίο ορισμού εξετάστε για ποιά x μηδενίζεται ο παρονομαστής $A_k(x) - 1$. Για το πεδίο τιμών παρατηρήστε ότι: Αν $v \in \mathbb{N}$, τότε $\forall x$ με $-v \leq x < -(v-1)$ είναι $A_k(x) = -v$ και συνεπώς $y = -\frac{1}{v+1}$, ενώ $\forall x$ με $v \leq x < v+1$ είναι $A_k(x) = v$ και συνεπώς $y = \frac{1}{v-1}$ (με $v \neq 1$)).

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$. I) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

II) Αν x_1, x_2 δύο διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και y_1, y_2 οι αντίστοιχες τιμές της συναρτήσεως θα παραστήσουμε με Δx τη διαφορά $x_2 - x_1$ και με Δy τη διαφορά $y_2 - y_1$. Να μελετήσετε το πρόσημο του λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ για να βρείτε μέσω αυτού το είδος της μονοτονίας της συναρτήσεως.

(Ύπόδειξη: Παρατηρήστε ότι, όταν $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ σ' ένα διάστημα $\alpha < x < \beta$, τότε η συνάρτηση y είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα και ότι, όταν $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, τότε είναι γνησίως φθίνουσα).

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $y = \frac{|x| - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - |x|}{x^2 - 2|x| + 1}$.

Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της και να γράψετε τον τύπο της με τον απλούστερο δυνατό τρόπο.

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $y = x - 2 + \frac{x(x^2 - 1)}{|x^2 - 1|}$. Να γίνει η μελέτη της συναρτήσεως ως προς τη μονοτονία και να χαραχθεί η γραφική της παράσταση.

(Ύπόδειξη: Να εργαστείτε χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, +\infty)$ του πεδίου ορισμού της).

7. Δίνεται η υπερβολή (Υ) με εξίσωση $\gamma x = 6$. I) Αφού σχεδιάσετε την (Υ) (ως προς

ένα ορθοκανονικό σύστημα) να μαρκάρετε τὰ σημεία της Α, Β, Γ με τετμημένες αντίστοιχα 1, -2 και 3. 11) Νά σχηματίσετε τήν έξιωση τής κάθετης από τό Α πρὸς τή ΒΓ καί ν' αποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία αὐτὴ τέμνει τήν (Υ) στοῦ ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

(Ἑπόδειξη: Ἀφοῦ ὑπολογίσετε τίς συντεταγμένες τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Δ τῆς κάθετης από τό Α πρὸς τή ΒΓ με τήν ὑπερβολή (Υ), ἀποδείξτε ὅτι ἡ ΔΓ εἶναι κάθετη πρὸς τήν ΑΒ).

8. Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση ποῦ παρέχει ὁ τύπος $y = \frac{|x-1|}{(x-1) \cdot |x|}$ καί νά γίνεῖ ἡ γραφικὴ τῆς παράστασης σ' ἓνα ὀρθοκανονικό σύστημα.

(Ἑπόδειξη: Νά διακρίνετε τρεῖς περιπτώσεις. 1) $x < 0$ · 2) $0 < x < 1$ · 3) $x > 1$ καί νά ἐργαστεῖτε στά διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ χωριστά).

9. Νά ἀποδείξετε ὅτι τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν τῆς παραβολῆς $y^2 = 2ax$ ἀνήκουν σὲ εὐθεῖα παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τῆς παραβολῆς.

(Ἑπόδειξη: Ἄν $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ δυὸ σημεία τῆς παραβολῆς, ὁ συντελεστής διευθύνσεως: $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (1) διατηρεῖται ὁ ἴδιος γιὰ ὅλες τίς παράλληλες χορδές πρὸς τήν P_1P_2 .

Ἀπὸ $y_2^2 = 2ax_2$, $y_1^2 = 2ax_1$ καί ἀπὸ τήν (1) ἀποδείξτε ὅτι ἡ τεταγμένη $\frac{y_1 + y_2}{2}$ τοῦ μέσου Μ τοῦ P_1P_2 μένει σταθερή).

10. Μὲ τὴ μέθοδο ποῦ ὑποδείξαμε στὴν προηγούμενη ἀσκηση ν' ἀποδείξετε τὸ ἑξῆς: Τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν τῆς ἑλλείψεως $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ἀντίστοιχα τῆς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) ἀνήκουν σὲ μιὰ εὐθεῖα ποῦ περνᾷ ἀπὸ τό κέντρο συμμετρίας τῆς ἑλλείψεως (ἀντίστοιχα τῆς ὑπερβολῆς).

11. Θεωροῦμε τήν ἑλλειψη $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ καί τήν εὐθεῖα $y = \lambda x + \mu$ ὅπου λ δοσμένη σταθερά καί μ μεταβλητή. Νά προσδιοριστοῦν οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς μ γιὰ τίς ὁποῖες ἡ εὐθεῖα ἔχει δυό, ἓνα ἢ κανένα κοινὸ σημεῖο μετὰ τήν ἑλλειψη.

12. Θεωροῦμε τήν ὑπερβολή $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Νά δείξετε χρησιμοποιώντας ἑξιώσεις: 1) ὅτι ἡ ὑπερβολή δὲν ἔχει κοινὰ σημεία μετὰ τίς ἀσύμπτωτές τῆς, 2) ὅτι κάθε παράλληλη πρὸς μιὰν ἀσύμπτωτη τέμνει τήν ὑπερβολή σ' ἓνα μοναδικὸ σημεῖο καί 3) ὅτι ἡ εὐθεῖα $y = \lambda x + \mu$ (λ , μ δοσμένες σταθερές, ἢ $\lambda \neq \pm \frac{b}{a}$) ἔχει μετὰ τήν ὑπερβολή δυό, ἓνα ἢ κανένα κοινὰ σημεία καθὼς $b^2 - a^2\lambda^2 + \mu^2$ εἶναι > 0 , $= 0$ ἢ < 0 . Πῶς κατανέμονται στοὺς κλάδους τὰ σημεία τομῆς, ὅταν ὑπάρχουν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

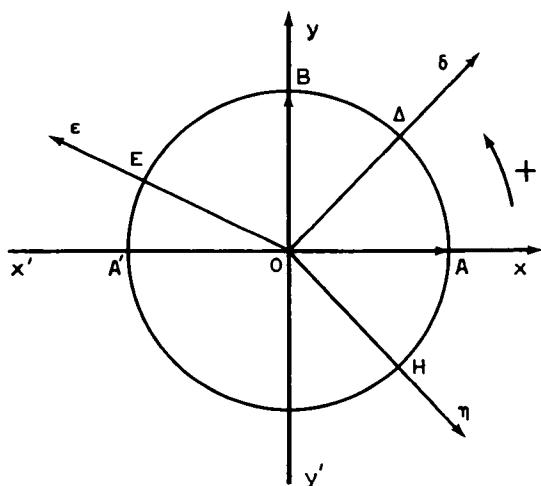
ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 23

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙ-
ΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ. ΓΩΝΙΑ ΑΞΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ - ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΑΞΟΝΩΝ

23 · 1 Προσανατολισμένος κύκλος. Έπέκταση της έννοιας του τόξου και της γωνίας.

α) Προσανατολισμένος κύκλος. Είναι φανερό ότι πάνω σ' έναν κύκλο, ξε-
κινώντας από οποιοδήποτε σημείο του Α (σχ. 23 · 1), μπορούμε νά κινηθούμε



Σχ. 23·1.

κατά δύο διαφορετικούς τρόπους. Καθένας από τούς δυό αυτούς τρόπους λέ-
γεται φορά κινήσεως πάνω στόν κύκλο.

Όταν τή μιá φορά κινήσεως, πάνω σ' έναν κύκλο, τήν όρίσομε ως **θετική**
καί τήν αντίθετή της ως **άρνητική**, τότε ό κύκλος λέγεται **προσανατολισμένος**.
Σέ κάθε φορά κινήσεως πάνω σ' έναν κύκλο αντιστοιχίζεται, στό επίπεδό του,
καί μιá φορά στροφής μιās ήμικυκλίας Ox (σχ. 23 · 1), γύρω από τήν άρχή της O .

Ός θετική φορά κινήσεως πάνω σ' έναν κύκλο καί στροφής στό επίπεδό του

θεωρούμε συνήθως την αντίθετη προς τη φορά στροφής των δειχτών ενός ρολογιού τοποθετημένου πάνω στο επίπεδο.

β) Τόξο σέ προσανατολισμένο κύκλο. 'Ως τόξο σ' ένα προσανατολισμένο κύκλο δέν θά θεωρούμε — όπως μέχρι τώρα — μόνο ένα μέρος του κύκλου. Γενικότερα: **Θά ονομάζουμε τόξο, σέ προσανατολισμένο κύκλο, μιά οποιαδήποτε διαδρομή πάνω στον κύκλο ή οποία έχει βέβαια μιά ορισμένη φορά, ένα ορισμένο σημείο ως άρχή και ένα επίσης ορισμένο ως πέρας.**

"Ετσι τώρα έχουμε τόξα θετικά και αρνητικά και τόξα μέ μέτρο μεγαλύτερο (απολύτως) από 2π (ή 360°). 'Ακόμα: μ' ένα ορισμένο σημείο A ως άρχή κι ένα ορισμένο σημείο Δ ως πέρας (σχ. $23 \cdot 1$) έχουμε άπειρα θετικά και άπειρα αρνητικά τόξα. ("Ενα τόξο είναι θετικό ή αρνητικό καθόσον ή φορά διαγραφής του είναι εκείνη που εκλέξαμε ως θετική ή ή αντίθετή της).

Σχετικό μέτρο ενός τόξου (σέ προσανατολισμένο κύκλο) ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό που προκύπτει όταν μετρήσουμε τό τόξο μέ μιά μονάδα (άκτίνιο π.χ. ή μοίρα) και στό εξαγόμενο της μετρήσεως προτάξουμε τό $+$ ή $-$ καθόσον τό τόξο είναι θετικό ή αρνητικό.

"Αν A και Δ δύο σημεία πάνω σ' ένα προσανατολισμένο κύκλο, τότε έχουμε τό πρώτο, δεύτερο κτλ. θετικό τόξο $\widehat{A\Delta}$, όταν ξεκινώντας από τό A (άρχή) και κινούμενοι κατά τη θετική φορά φτάνουμε γιά πρώτη, δεύτερη κ.ο.κ. φορά στό σημείο Δ (πέρας). "Όταν ή κίνησή μας γίνεται μέ την αρνητική φορά έχουμε αντίστοιχα τό πρώτο, δεύτερο κτλ. αρνητικό τόξο $\widehat{A\Delta}$ καθόσον έχουμε φτάσει στό πέρας Δ γιά πρώτη, δεύτερη κ.ο.κ. φορά.

"Αν θ° (α άκτίνια) είναι τό σχετικό μέτρο του πρώτου θετικού τόξου $\widehat{A\Delta}$, τότε παίρνουμε τά (σχετικά) μέτρα x όλων των τόξων $\widehat{A\Delta}$ από τον τύπο:

$$x = 360^\circ \kappa + \theta^\circ \quad \eta \quad x = 2\kappa\pi + a$$

όπου κ άκέραιος θετικός, αρνητικός ή και μηδέν.

Παρατηρήσεις: I) 'Ο παραπάνω τύπος μάς δίνει τά μέτρα όλων των τόξων, μέ ορισμένη άρχή και ορισμένο πέρας, όταν τό θ° εκφράζει τό σχετικό μέτρο ενός όποιουδήποτε τόξου και όχι μόνο του πρώτου θετικού (γιατί;).

II) "Όταν ή άρχή και τό πέρας μιās διαδρομής, πάνω σέ προσανατολισμένο κύκλο, συμπίπτουν, τότε συμφωνούμε νά θεωρούμε ως πρώτο τόξο τό μηδενικό, τό όποιο άκριβώς έχει και μέτρο μηδέν. Τό πρώτο θετικό έχει, σ' αυτή την περίπτωση, σχετικό μέτρο 360° ενώ τό πρώτο αρνητικό έχει σχετικό μέτρο -360° . Γενικά τά σχετικά μέτρα όλων των τόξων, των όποίων ή άρχή και τό πέρας συμπίπτουν, μάς τά δίνει ή παράσταση $360^\circ \kappa$ (ή $2\kappa\pi$) όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ) **'Επέκταση της έννοίας της γωνίας.** "Όπως μέ δύο σημεία A και Δ πάνω σέ προσανατολισμένο κύκλο όρίζουμε άπειρα θετικά και άπειρα αρνητικά τόξα

$\widehat{ΑΔ}$, όμοια με δυό ήμιευθείες $ΟΑ$ και $ΟΔ$ (σχ. 23 · 1) με κοινή άρχή $Ο$ όρίζομε, πάνω σ' ένα επίπεδο στο όποιο έχομε καθορίσει θετική φορά στροφής (προσανατολισμένο επίπεδο), άπειρες θετικές και άπειρες άρνητικές γωνίες με πλευρές τίς ήμιευθείες $ΟΑ$ και $ΟΔ$.

Έτσι έχομε τήν πρώτη, δεύτερη κτλ. θετική γωνία $(\widehat{ΟΑ}, \widehat{ΟΔ})$, με πρώτη πλευρά τήν ήμιευθεία $ΟΑ$ και δεύτερη πλευρά τήν $ΟΔ$, έφόσον θεωρούμε ότι ή $ΟΑ$ έχει στραφεί περί τό $Ο$ κατά τή θετική φορά και έχει εφαρμόσει γιά πρώτη, δεύτερη κ.ο.κ. φορά με τήν $ΟΔ$. Όταν ή στροφή τής $ΟΑ$ γίνεται με τήν άρνητική φορά, τότε παίρνομε τήν πρώτη, δεύτερη κ.ο.κ άρνητική γωνία, με πρώτη πλευρά τήν $ΟΑ$ και δεύτερη τήν $ΟΔ$, έφόσον ή $ΟΑ$ έχει πάλι εφαρμόσει με τήν $ΟΔ$ γιά πρώτη, δεύτερη κ.ο.κ φορά.

Αν θ° (ή α) είναι τό σχετικό μέτρο μιδς προσανατολισμένης γωνίας $(\widehat{\vec{ΟΑ}}, \widehat{\vec{ΟΔ}})$, τότε τό μέτρο κάθε άλλης $(\widehat{\vec{ΟΑ}}, \widehat{\vec{ΟΔ}})$, δίνεται — όπως και γιά τά τόξα — από τόν τύπο $x = 360^\circ \kappa + \theta^\circ$ (ή $x = 2\kappa\pi + \alpha$) όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Αν οί πλευρές $ΟΑ, ΟΔ$ συμπίπτουν, τότε έχομε γωνίες με μέτρα $360^\circ \kappa$ και αν οί πλευρές $ΟΑ, ΟΔ$ είναι αντίθετες ήμιευθείες, τότε έχομε γωνίες με μέτρα $360^\circ \kappa + 180^\circ$.

23 · 2 Τριγωνομετρικός κύκλος. Γωνία δύο άξόνων - Γωνία άξονα και διανύσματος.

α) Σ' έναν προσανατολισμένο κύκλο ($Ο$) παίρνομε συνήθως ένα σημείο A ως κοινή άρχή διαφόρων τόξων του, όταν κυρίως θέλομε νά βρούμε σχέσεις άναφερόμενες σ' ένα ή περισσότερα τόξα αυτού του κύκλου. Επιπλέον θεωρούμε πάνω στη διαμετρική ευθεία $A'OA$ (A' σημείο αντιδιαμετρικό του A , σχ. 23 · 1)

έναν άξονα $x'Ox$, με μοναδιαίο διάνυσμα τό $\vec{OA}$.

Τόν άξονα αυτόν τόν ονομάζομε **άξονα τών συνημιτόνων**.

Ένας τέτοιος κύκλος καλείται **τριγωνομετρικός**.

Δηλαδή: Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ένας προσανατολισμένος κύκλος στον όποιο σάν μονάδα μήκους θεωρείται ή άκτίνα του και στον όποιο έχομε όρίσει ένα σημείο του ως άρχή τών τόξων.

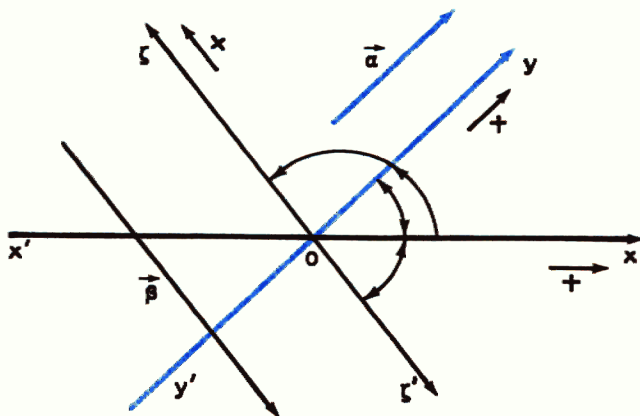
Μαζί με τόν άξονα πού διέρχεται από τήν άρχή τών τόξων θεωρούμε κι ένα δεύτερο άξονα $y'Oy$ (σχ. 23 · 1) με θετική κατεύθυνση τήν ήμιευθεία Oy γιά τήν όποία ή πρώτη θετική γωνία $(\widehat{Ox}, \widehat{Oy})$ είναι όρθή. Τόν άξονα αυτόν τόν ονομάζομε **άξονα τών ήμιτόνων**.

Έχομε έτσι όρίσει, σ' έναν τριγωνομετρικό κύκλο, ένα όρθοκανονικό σύστημα άξόνων με άρχή τό κέντρο του κύκλου και όπου τά μήκη τών μοναδιαίων διανυσμάτων τους είναι ίσα με τήν άκτίνα του κύκλου.

β) Γωνία άξονα και διανύσματος — γωνία δύο άξόνων.

Όρισμοί: Κατεύθυνση ενός όχι μηδενικού διανύσματος $\vec{a}$ θά ονομάζομε τήν όποιαδήποτε ήμιευθεία Oy (σχ 23 · 2) πού έχει τήν ίδια διεύθυνση και φορά με τή διεύθυνση και τή φορά του διανύσματος.

Γωνία άξονα και διανύσματος, σ' ένα προσανατολισμένο επίπεδο, ονομάζουμε την οποιαδήποτε γωνία που έχει πρώτη πλευρά τον θετικό ήμιάξονα και δεύτερη πλευρά την ήμιευθεία με άρχή την άρχή του άξονα και κατεύθυνση την κατεύθυνση του διανύσματος.



Σχ. 23.2.

Στό σχήμα π.χ. 23 · 2 γωνία του άξονα $x'x$ και του διανύσματος $\vec{a}$ είναι μία γωνία με πρώτη πλευρά την ήμιευθεία Ox και δεύτερη πλευρά την ήμιευθεία Oy , αν η Oy είναι παράλληλη και ομόρροπη προς το διάνυσμα $\vec{a}$. Όμοια, γωνία του άξονα $x'x$ και του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι μία γωνία $(\widehat{Ox, Oz'})$, αν η Oz' είναι ήμιευθεία παράλληλη και ομόρροπη προς το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Γωνία δύο άξόνων ονομάζουμε τή γωνία των θετικών κατευθύνσεων αυτών των άξόνων. Στό σχήμα 23 · 2 γωνία των άξόνων $x'x$ και $y'y$ είναι μία γωνία $(\widehat{Ox, Oy})$ και γωνία των άξόνων $x'x$ και $z'z$ είναι μία γωνία $(\widehat{Ox, Oz})$.

23 · 3 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Τό άθροισμα δύο ή περισσοτέρων διαδοχικών τόξων, πάνω σ' έναν προσανατολισμένο κύκλο, είναι ίσο με ένα τόξο που έχει άρχή την άρχή του πρώτου και πέρας τό πέρας του τελευταίου.

"Ας θεωρήσουμε αρχικά δυό διαδοχικά τόξα $\widehat{AE}$ και $\widehat{ED}$. "Αν φ τό μέτρο του πρώτου θετικού από τά τόξα $\widehat{AE}$ και ω τό μέτρο του πρώτου από τά θετικά τόξα $\widehat{ED}$, τότε τό μέτρο του τόξου $\widehat{AD}$ που θεωρήσαμε θά δίνεται από την παράσταση $360^\circ\kappa + \varphi$ και του τόξου $\widehat{ED}$ από την παράσταση $360^\circ\lambda + \omega$, όπου κ και λ κατάλληλοι ακέραιοι αριθμοί (σχ. 23 · 1).

"Έτσι τό άθροισμα των δυό τόξων που θεωρήσαμε θά έχει σχετικό μέτρο

$360^\circ \kappa + \varphi + 360^\circ \lambda + \omega = 360^\circ (\kappa + \lambda) + \varphi + \omega = 360^\circ \mu + \varphi + \omega$, όπου $\mu \in \mathbf{Z}$.
 Άλλά $\varphi + \omega$ είναι τό τόξο πού παίρνομε όταν αναχωρούμε από τό Α καί, κινούμενοι κατά τή θετική φορά, φτάνομε στό σημείο Ε γιά πρώτη φορά καί άκολουθως συνεχίζομε τήν κίνησή μας, πάντα μέ τήν ίδια φορά, γιά νά φτάσομε στό σημείο Δ. Είναι δηλαδή τό τόξο μέ μέτρο $\varphi + \omega$ ένα τόξο πού έχει άρχή τήν άρχή Α του πρώτου τόξου $\widehat{AE}$ καί πέρας τό πέρας Δ του πρώτου τόξου $\widehat{ED}$. Τότε όμως καί τό τόξο $360^\circ \mu + \varphi + \omega$, γιά όποιαδήποτε άκεραία τιμή του μ , είναι ένα τόξο μέ άρχή τό Α καί πέρας τό Δ.

Αν τώρα πάρομε τρία π.χ. διαδοχικά τόξα $\widehat{AD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EH}$ (σχ. 23 · 1) θά έχομε $\widehat{AD} + \widehat{DE} + \widehat{EH} = (\widehat{AD} + \widehat{DE}) + \widehat{EH}$. Τό άθροισμα δυό τόξων από τά $\widehat{AD}$ καί $\widehat{DE}$ θά είναι ένα τόξο μέ άρχή τό Α καί πέρας τό Ε, δηλαδή ένα τόξο $\widehat{AE}$. άκολουθως τό άθροισμα ενός τόξου $\widehat{AE}$ καί ενός τόξου $\widehat{EH}$ είναι ένα τόξο $\widehat{AH}$. Τό ίδιο άληθεύει καί γιά τέσσερα κτλ. διαδοχικά τόξα.

Αν στά διάφορα τόξα $\widehat{AD}$, $\widehat{DE}$, κτλ. ενός προσανατολισμένου κύκλου (σχ. 23 · 1) άντιστοιχίζομε τίς επίκεντρες γωνίες $(\widehat{OA}, \widehat{OD})$ $(\widehat{OD}, \widehat{OE})$ κτλ., τότε μποροῦμε νά διατυπώσομε γιά γωνίες μιάν όμοια πρός τήν παραπάνω πρόταση.

Δηλαδή: Τό άθροισμα δυό ή περισσότερων διαδοχικών γωνιών είναι ίσο μέ μιά γωνία πού έχει ως πρώτη πλευρά τήν άρχική πλευρά της πρώτης γωνίας καί ως δεύτερη πλευρά τή δεύτερη πλευρά της τελευταίας γωνίας.

Είναι προφανή τώρα τά άκόλουθα δυό άντίστοιχα πρός τίς παραπάνω προτάσεις πορίσματα.

ι) Κάθε τόξο $\widehat{AD}$ μπορεί ν' αναλυθεί σέ άθροισμα δυό τόξων $\widehat{AH}$ καί $\widehat{HD}$, όπου Η ένα όποιοδήποτε δοσμένο σημείο του κύκλου καί $\widehat{AH}$ ένα όποιοδήποτε από τά τόξα μέ άρχή τό Α καί πέρας τό Η.

ιι) Κάθε γωνία $(\widehat{OA}, \widehat{OD})$ μπορεί ν' αναλυθεί σέ άθροισμα δυό γωνιών $(\widehat{OA}, \widehat{OH})$ καί $(\widehat{OH}, \widehat{OD})$, όπου ΟΗ μιά όποιαδήποτε δοσμένη ήμικυκλίδια μέ άρχή τήν κορυφή της γωνίας καί $(\widehat{OA}, \widehat{OH})$ μιά όποιαδήποτε από τίς γωνίες μέ άρχική πλευρά τήν ΟΑ καί τελική τήν ΟΗ.

Παρατήρηση: Τό μέτρο του δεύτερου τόξου $\widehat{HD}$ [άντίστοιχα της δεύτερης γωνίας $(\widehat{OH}, \widehat{OD})$] τό καθορίζομε κατάλληλα καί άνάλογα μέ τό μέτρο του πρώτου τόξου $\widehat{AH}$ [άντίστοιχα της πρώτης γωνίας $(\widehat{OA}, \widehat{OH})$].

2. Αν μέ x παραστήσομε τά μέτρα όλων των τόξων μέ άρχή ένα σημείο Α καί πέρας ένα άλλο Α προσανατολισμένου κύκλου, ποιά είναι τότε τά σημεία όλων των τόξων: I) $\frac{x}{2}$. II) $\frac{x}{3}$;

1) 'Ας είναι α τό μέτρο σέ άκτίνια τοῦ πρώτου θετικοῦ τόξου $\widehat{AD}$. τότε θά ἔχομε:
 $x = 2\kappa\pi + \alpha$ (1). 'Αρα $\frac{x}{2} = \kappa\pi + \frac{\alpha}{2}$. 'Αν ὁ ἀκέραιος κ εἶναι ἄρτιος, δηλαδή $\kappa = 2\rho$ ($\rho \in \mathbb{Z}$)
 τότε ἔχομε ἕνα ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν τόξων $\frac{x}{2}$, ὑποσύνολο πού μποροῦμε νά παραστή-
 σουμε μέ $\frac{x_1}{2} = 2\rho\pi + \frac{\alpha}{2}$ (2). 'Όταν $\kappa = 2\rho + 1$ (περιττός) ἔχομε τό συμπληρωματικό ὑπο-
 σύνολο τῶν τόξων $\frac{x}{2}$, δηλαδή τό $\frac{x_2}{2} = 2\rho\pi + \pi + \frac{\alpha}{2}$ (3). 'Όλα τά τόξα πού δίνονται
 ἀπό τόν τύπο (2) ἔχουν πέρασ τό μέσο ἔστω M τοῦ πρώτου θετικοῦ τόξου $\widehat{AD}$. τότε ὁμως ὅλα
 τά τόξα πού δίνονται ἀπό τόν τύπο (3) ἔχουν πέρασ τό σημεῖο M' ἀντιδιαμετρικό τοῦ M , διότι
 ὅταν s' ἕνα τόξο $2\rho\pi + \frac{\alpha}{2} = \widehat{AM}$ προσθέσουμε τό τόξο π , τότε παίρνομε ἕνα τόξο $\widehat{AM}'$.

II) 'Από τή σχέση (1) παίρνομε $\frac{x}{3} = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ (4). 'Αλλά $\kappa = 3\lambda + \nu$ ὅπου $\nu = 0$
 ἢ 1 ἢ 2. 'Ετσι ἡ (4) γράφεται $\frac{x}{3} = 2\lambda\pi + \frac{2\nu\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ (4').

Μέ $\nu = 0$ παίρνομε $\frac{x_1}{3} = 2\lambda\pi + \frac{\alpha}{3}$ (5), μέ $\nu = 1$ παίρνομε $\frac{x_2}{3} =$
 $= 2\lambda\pi + \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}$ (6) καί μέ $\nu = 2$, $\frac{x_3}{3} = 2\lambda\pi + \frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}$ (7). 'Από τούς τύπους
 (5), (6) καί (7) συμπεραίνομε ὅτι τά τόξα $\frac{x}{3}$ λήγουν σέ τρία σημεῖα τά ὁποῖα εἶναι κορυφές
 ἰσοπλεύρου τριγώνου (γιατί;).

3. *N' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν τόξων πού παρέχουν οἱ τύποι $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ καί
 $y = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$ μέ $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ εἶναι τό ἴδιο μέ τό σύνολο τῶν τόξων πού παρέχει ὁ τύπος:
 $\omega = (2\rho - 1)\frac{\pi}{2}$, ὅπου $\rho \in \mathbb{Z}$.*

Παρατηροῦμε ὅτι $\omega = \rho\pi - \frac{\pi}{2}$. 'Αν ὁ ἀκέραιος ρ εἶναι ἄρτιος ($\rho = 2\lambda$) τότε:
 $\omega_1 = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} = y$. ἂν ὁ ἀκέραιος ρ εἶναι περιττός ($\rho = 2\kappa + 1$) τότε:
 $\omega_2 = (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} = x$.

23 · 4 'Ασκήσεις.

1. 'Αν τό πρώτο θετικό τόξο $\widehat{AD}$, σέ προσανατολισμένο κύκλο, ἔχει μέτρο 45° νά βρε-
 θοῦν ἐκεῖνα ἀπό τά τόξα $\widehat{AD}$ πού τά μέτρα τους περιέχονται στά διαστήματα $(-4280^\circ, -4195^\circ)$
 καί $(5200^\circ, 5291^\circ)$.

2. 'Αν μέ x παραστήσουμε τά μέτρα ὅλων τῶν τόξων πού ἔχουν ἀρχή ἕνα σημεῖο A
 καί πέρασ ἕνα σημεῖο Δ προσανατολισμένου κύκλου, τότε: I) *N' ἀποδείξετε ὅτι τά τόξα μέ κοινή*
ἀρχή τό A καί μέτρα $\frac{x}{4}$ ἔχουν πέρατα τίς κορυφές ἑνός τετραγώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύ-
κλο. II) Ποῦ λήγουν τά τόξα μέ κοινή ἀρχή τό A καί μέτρα $\frac{x}{5}, \frac{x}{6}$ κτλ.;

3. *N' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν τόξων πού παρέχουν οἱ τύποι $x = 2\kappa\pi + \alpha$ καί*

$\omega = 2\lambda\pi + \pi - \alpha$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ ταυτίζεται με τό σύνολο τών τόξων που παρέχει ο τύπος $y = (-1)^\mu \alpha + \mu\pi$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$.

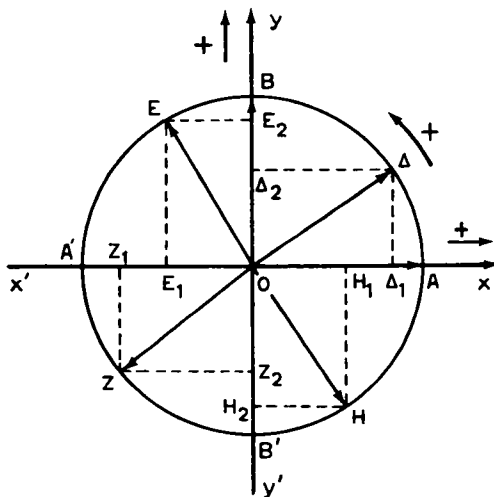
4. Ν' αποδειχθεί ότι τό σύνολο τών τόξων που παρέχουν οι δύο τύποι $x = 30^\circ\kappa$ και $y = 90^\circ\lambda + 45^\circ$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$, είναι τό ίδιο με τό σύνολο τών τόξων που παρέχουν οι τρεις τύποι μαζί $\varphi = 45^\circ\mu$, $\psi = 90^\circ\nu + 30^\circ$ και $\omega = 90^\circ\rho - 30^\circ$, όπου $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{Z}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 24

ΟΙ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

24.1 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συν x και ημ x.

α) Οι συναρτήσεις συν x, ημ x. Κατασκευάζουμε έναν τριγωνομετρικό κύκλο $(0, R = 1, \curvearrowright +)$, τοποθετούμε τούς άξονες συνημιτόνων Ox και ημιτόνων Oy και παίρνουμε και ένα τόξο με άρχή την άρχή A τών τόξων και πέρας ένα όποιοδήποτε σημείο Δ (ή E ή Z ή H, σχ. 24.1) πάνω στον κύκλο.



Σχ. 24.1.

Ἡ διανυσματική ἀκτίνα $\vec{OA}$ που διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή A τοῦ τόξου $\widehat{AD}$ λέγεται συνηθώς ἀρχική ἀκτίνα τοῦ τόξου καί αὐτή που διέρχεται ἀπό τό πέρας Δ τοῦ τόξου, λέγεται τελική.

*Ὡς εἶναι Δ_1 καί Δ_2 οἱ προβολές τοῦ Δ στόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων καί τῶν ἡμιτόνων ἀντιστοίχως. Τότε:

1) Ὀνομάζουμε συνημίτονο ἐνός τόξου $\widehat{AD}$, μέ ἀρχή A τήν ἀρχή τῶν τόξων, τό σχετικό μέτρο τῆς προβολῆς $\vec{OA}_1$ τῆς τελικῆς ἀκτίνας $\vec{OD}$ πάνω στόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.

Μ' ἄλλα λόγια, τό συνημίτονο εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ διανύσματος $\vec{OD}$

(ή, πράγμα τό ίδιο, τοῦ πέρατος Δ τοῦ τόξου), στο ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, μέ ἄξονα τετμημένων τόν Ox , ἄξονα τεταγμένων τόν Oy καί μέ μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\vec{OA}$.

Ἄν x εἶναι τό σχετικό μέτρο ἑνός τόξου $\widehat{AD}$, τότε συνημίτονο τοῦ x εἶναι ὁ ἀριθμός $\overline{OD_1}$. (Συμβολικά: $\text{συν } x = \overline{OD_1}$).

ii) Ὀνομάζουμε ἡμίτονο ἑνός τόξου $\widehat{AD}$ τό σχετικό μέτρο τῆς προβολῆς $\vec{OD_2}$ τῆς τελικῆς ἀκτίνας $\vec{OA}$ πάνω στόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.

Δηλαδή τό ἡμίτονο εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ διανύσματος $\vec{OA}$ στο ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων πού περιγράψαμε παραπάνω. (Συμβολικά: $\text{ἡμ } x = \overline{OD_2}$).

Σέ κάθε τόξο μέ σχετικό μέτρο ἕναν ἀριθμό $x \in \mathbb{R}$, ἀντιστοιχίζεται ἔτσι ἕνας καί μόνον ἕνας πραγματικός ἀριθμός ὡς συνημίτονο καί ἕνας καί μόνον ἕνας ὡς ἡμίτονο. Εἶναι προφανές ἐξάλλου ὅτι ὅλα τά (προσημασμένα) τόξα μέ τά ἴδια ἄκρα ἔχουν τό ἴδιο συνημίτονο καί τό ἴδιο ἡμίτονο. Συνεπῶς δυό τόξα τῶν ὁποίων τά μέτρα διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 360° (ἢ τοῦ 2π), ἔχουν ἴσα συνημίτονα καί ἴσα ἡμίτονα.

$$\begin{aligned} \text{Συμβολικά:} \quad & \text{συν}(360^\circ \kappa + x) = \text{συν } x \\ & \text{ἡμ}(360^\circ \kappa + x) = \text{ἡμ } x \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{καί} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Γιά τά τόξα π.χ. } 750^\circ, 390^\circ, 30^\circ, -330^\circ, -690^\circ \text{ ἔχομε } & \text{συν } 750^\circ = \text{συν } 390^\circ = \\ = \text{συν } 30^\circ = \text{συν } (-330^\circ) = \text{συν } (-690^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{καί} \quad \text{ἡμ } 750^\circ = \text{ἡμ } 390^\circ = \\ = \text{ἡμ } 30^\circ = \text{ἡμ } (-330^\circ) = \text{ἡμ } (-690^\circ) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ἀντιστοιχίζοντας σέ κάθε προσημασμένο τόξο x τό συνημίτονό του καί τό ἡμίτονό του ἔχομε κατασκευάσει δυό πραγματικές συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

$$\text{Γράφομε συμβολικά:} \quad \boxed{y = \text{συν } x} \quad (1) \quad , \quad \boxed{y = \text{ἡμ } x} \quad (2)$$

Ὅπως εὐκόλα προκύπτει ἀπό τήν ἐποπτεία τοῦ σχήματος 24.1 καί σύμφωνα μέ τούς ὁρισμούς, πεδίο τιμῶν καί γιά τίς δυό συναρτήσεις εἶναι τό διάστημα $[-1, 1]$.

Ἔχομε δηλαδή γιά ὁποιοδήποτε τόξο x :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \text{συν } x \leq 1 \iff |\text{συν } x| \leq 1 \\ -1 &\leq \text{ἡμ } x \leq 1 \iff |\text{ἡμ } x| \leq 1 \end{aligned}$$

Σχετικά με τὰ διαστήματα μονοτονίας τῶν συναρτήσεων (1) καὶ (2) μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε τὰ ἀκόλουθα προφανή συμπεράσματα:

$$I) \quad 0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \sin 0 \geq \sin x_1 > \sin x_2 \geq \sin \frac{\pi}{2} = 0 \\ 0 = \eta\mu 0 \leq \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \leq \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$$

Δηλαδή: Στὸ διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τὸ συνημίτονο εἶναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση καὶ τὸ ἡμίτονο γνησίως ἀύξουσα. Καὶ οἱ δύο παίρνουν τὶς τιμές τοῦ διαστήματος $[0, 1]$.

$$II) \quad \frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sin \frac{\pi}{2} \geq \sin x_1 > \sin x_2 \geq \sin \pi = -1 \\ 1 = \eta\mu \frac{\pi}{2} \geq \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2 \geq \eta\mu \pi = 0. \end{cases}$$

Στὸ διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ καὶ οἱ δύο συναρτήσεις εἶναι γνησίως φθίνουσες. Τὸ συνημίτονο παίρνει ἀντίστοιχα τὶς τιμές τοῦ διαστήματος $[-1, 0]$ καὶ τὸ ἡμίτονο τὶς τιμές τοῦ διαστήματος $[0, 1]$.

$$III) \quad \pi \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} -1 = \sin \pi \leq \sin x_1 < \sin x_2 \leq \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \\ 0 = \eta\mu \pi \geq \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2 \geq \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1. \end{cases}$$

Στὸ διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ τὸ συνημίτονο εἶναι συνάρτηση γνησίως ἀύξουσα καὶ τὸ ἡμίτονο γνησίως φθίνουσα. Καὶ οἱ δύο παίρνουν τὶς τιμές τοῦ διαστήματος $[-1, 0]$.

$$IV) \quad \frac{3\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 2\pi \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin x_1 < \sin x_2 \leq \sin 2\pi = 1 \\ -1 = \eta\mu \frac{3\pi}{2} \leq \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \leq \eta\mu 2\pi = 0. \end{cases}$$

Στὸ διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ καὶ οἱ δύο συναρτήσεις εἶναι γνησίως ἀύξουσες. Τὸ συνημίτονο παίρνει τὶς τιμές τοῦ διαστήματος $[0, 1]$ καὶ τὸ ἡμίτονο τὶς τιμές τοῦ διαστήματος $[-1, 0]$.

Καταγράφουμε συνοπτικὰ τὰ προηγούμενα συμπεράσματα στὸν ἐπόμενο πίνακα:

x	0°	90°	180°	270°	360°
	↓	↓	↓	↓	↓
συν x	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1
ημ x	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

Όταν για μία συνάρτηση $f(x)$, με πεδίο ορισμοῦ τό $\mathbb{R}$, υπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος ὥστε νά ἔχομε $f(x) = f(x + \omega) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **περιοδική** μέ **περίοδο** τόν ἀριθμό ω .

Ἐπειδή $\sin(2\pi + x) = \sin x$ καί $\eta\mu(2\pi + x) = \eta\mu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνομε ὅτι οἱ συναρτήσεις $\sin x$ καί $\eta\mu x$ εἶναι περιοδικές μέ περίοδο 2π . Ἀλλά καί κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $2k\pi$, ὅπου $k \in \mathbb{Z}$, εἶναι περίοδος τῶν δυό συναρτήσεων, ἀφοῦ $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ καί $\eta\mu(2k\pi + x) = \eta\mu x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ καί $\forall k \in \mathbb{Z}$. ὁ ἀριθμός 2π εἶναι ἀπλῶς ἡ ἐλαχίστη θετική περίοδος.

β) Θεμελιώδης σχέση. Ὅποια θέση κι ἂν ἔχει τό πέρας Δ ἑνός τόξου, πάνω σ' ἓνα τριγωνομετρικό κύκλο, ἰσχύει ἡ σχέση: $\overline{OD_1^2} + \overline{\Delta_1\Delta_2^2} = |\overrightarrow{OD}|^2(\alpha)$, ὅπου Δ_1 ἡ προβολή τοῦ Δ στόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων (σχ. 24·1), (γιατί;). Ἀλλά $\overline{OD_1} = \sin x$, $\overline{\Delta_1\Delta} = \overline{OD_2} = \eta\mu x$, $|\overrightarrow{OD}| = 1$. ἄρα ἡ σχέση (α) γράφεται:

$$\sin^2 x + \eta\mu^2 x = 1 \quad (3)$$

Ξαναβρήκαμε δηλαδή τόν τύπο πού εἶδαμε στήν παράγραφο 14·1 νά ἰσχύει ἀρχικά γιά τόξα x μέ $0 \leq x \leq 90^\circ$.

Σημείωση: Ὅρίζομε ὡς **τέμνουσα** ἑνός τόξου x τόν ἀντίστροφο ἀριθμό τοῦ συνημιτόνου τοῦ x καί ὡς **συντέμνουσα** τοῦ x τόν ἀντίστροφο ἀριθμό τοῦ ἡμιτόνου τοῦ x , ἐφόσον $\sin x \neq 0$ καί $\eta\mu x \neq 0$.

$$\text{Συμβολικά:} \quad \boxed{\text{τεμ } x = \frac{1}{\sin x}} \quad (4) \quad \boxed{\text{στεμ } x = \frac{1}{\eta\mu x}} \quad (5)$$

Πεδίο ορισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\text{τεμ } x$ μπορεῖ νά εἶναι π.χ. τό ἀνοιχτό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ καί γενικά κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, ὅπου $k \in \mathbb{Z}$, (γιατί;).

Πεδίο ορισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\text{στεμ } x$ μπορεῖ νά εἶναι π.χ. τό διάστημα $(0, \pi)$ καί γενικά κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $(k\pi, (k+1)\pi)$ ὅπου $k \in \mathbb{Z}$, (γιατί;).

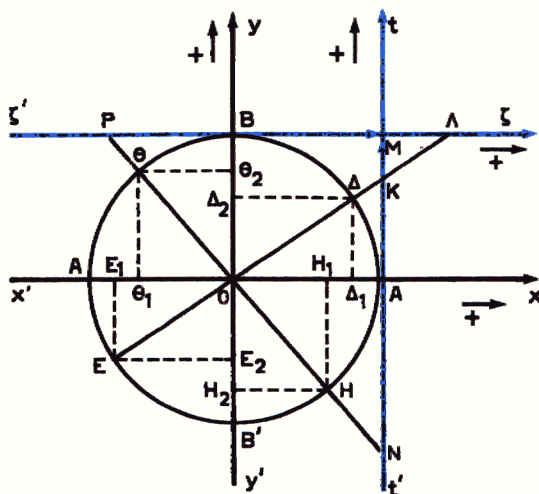
Πεδίο τιμών των δύο συναρτήσεων (4) και (5) είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, (γιατί;).

Άσκηση: Υπάρχει άραγε τόξο φ για το οποίο έχουμε $\tan \varphi = -\frac{9}{10}$ και

τόξο ω για το οποίο έχουμε $\sec \omega = \frac{11}{12}$;

24.2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$.

α) Οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$. Στο σημείο A — άρχή των τόξων σ' ένα τριγωνομετρικό κύκλο (σχ. 24.2) — κατασκευάζουμε την ευθεία τ'τ έφαπτομένη



Σχ. 24.2.

του κύκλου και πάνω σ' αυτή ορίζουμε άξονα με άρχή τό A και μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{AM}$ ίσο πρὸς τό $\vec{OB}$, τό μοναδιαίο δηλαδή του άξονα $y'y$ των ήμιτόνων. Τόν άξονα τ'τ τον ονομάζουμε άξονα των έφαπτομένων.

Φέρνουμε άκόμα και την ευθεία ζ'ζ, έφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B, πέρασ του πρώτου τεταρτημορίου (σχ. 24.2) και ορίζουμε πάνω σ' αυτή άξονα με άρχή τό B και μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{BM}$ ίσο πρὸς τό $\vec{OA}$, τό μοναδιαίο δηλαδή του άξονα $x'x$ των ήμιτόνων. Τόν άξονα ζ'ζ τον ονομάζουμε άξονα των συνεφαπτομένων.

Άς είναι τώρα Δ τό πέρασ ενός τόξου και K, Λ τά σημεία τομής της ευθείας OΔ με τούς άξονες τ'τ και ζ'ζ αντίστοιχως· τότε τό σχετικό μέτρο του $\vec{AK}$ τό ονομάζουμε έφαπτομένη του τόξου $\widehat{AD}$ και τό σχετικό μέτρο του $\vec{BL}$ συνεφαπτομένη του $\widehat{AD}$. Δηλαδή:

Έφαπτομένη ενός τόξου $\widehat{ΑΔ}$ (Α ή άρχή των τόξων) λέγεται τό σχετικό μέτρο του διανύσματος που έχει άρχή τό σημείο Α καί πέρας τό σημείο τομής του άξονα των έφαπτομένων με την εύθεια ΟΔ της τελικής άκτίνας.

Συμβολικά: $\epsilon\phi x = \overline{AK}$ (σχ. 24 · 2).

Συνεφαπτομένη ενός τόξου $\widehat{ΑΔ}$ λέγεται τό σχετικό μέτρο του διανύσματος που έχει άρχή τό πέρας Β του πρώτου τεταρτημορίου καί πέρας τό σημείο τομής του άξονα των συνεφαπτομένων με την εύθεια ΟΔ της τελικής άκτίνας.

Συμβολικά: $\sigma\phi x = \overline{BL}$ (σχ. 24 · 2).

Παρατηρήσεις: Γιά τά τόξα που έχουν πέρας τό σημείο Β ή τό Β', αντιδιαμετρικό του Β, δέν όρίζεται έφαπτομένη, διότι οι ήμιευθείες ΟΒ καί ΟΒ' είναι παράλληλες προς την εύθεια ί'τ. "Ωστε κάθε τόξο που έχει μέτρο $k\pi + \frac{\pi}{2}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, δέν έχει έφαπτομένη.

Έπίσης για τά τόξα που λήγουν στό σημείο Α ή στό Α', αντιδιαμετρικό του Α, δέν όρίζεται συνεφαπτομένη, διότι οι ήμιευθείες ΟΑ καί ΟΑ' είναι παράλληλες προς την εύθεια ζ'ζ. "Ωστε κάθε τόξο που έχει μέτρο $k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, δέν έχει συνεφαπτομένη.

Έπειδή σέ κάθε τόξο, μέ εξαίρεση τά τόξα $k\pi + \frac{\pi}{2}$ για την έφαπτομένη καί τά τόξα $k\pi$ για τή συνεφαπτομένη, αντιστοιχίζεται ένας καί μόνον ένας πραγματικός αριθμός ως έφαπτομένη καί ένας καί μόνον ένας ως συνεφαπτομένη, έχουμε δυό άκόμα, σχετικές μ' ένα τόξο, συναρτήσεις μέ τύπους:

$$y = \epsilon\phi x \quad (6)$$

$$y = \sigma\phi x \quad (7)$$

Η (6) έχει πεδίο όρισμού τό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ καί γενικά κάθε διάστημα της μορφής $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ καί ή (7) τό διάστημα $(0, \pi)$ καί γενικά κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi, (k+1)\pi)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, (γιατί;).

Πεδίο τιμών καί για τίς δυό συναρτήσεις είναι όλο τό σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών (γιατί;).

Γιά τά διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων $\epsilon\phi x$ καί $\sigma\phi x$, από την έποπτεία του σχήματος καί τούς όρισμούς προκύπτουν τά άκόλουθα συμπεράσματα, που καταγράφουμε συνοπτικά στους παρακάτω πίνακες.

x	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
		↓		↓	
εφ x	$-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$	$-\infty$	↗ 0 ↗

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
		↓		↓	
σφ x	$+\infty$	↘ 0 ↘	$-\infty$	$+\infty$	↘ 0 ↘

Παρατηρώντας τό σχήμα και συμφωνα μέ τούς όρισμούς συμπεραίνουμε ότι:

Τόξα πού έχουν τό ίδιο πέρας (καί τήν ίδια πάντα άρχή) ή πέρατα συμμετρικά ως πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου (άντιδιαμετρικά σημεία) έχουν τήν ίδια έφαπτομένη και τήν ίδια συνεφαπτομένη. Δυό τέτοια όμως τόξα διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ π (ή τῶν 180°). Άρα $\epsilon\phi(x + \kappa\pi) = \epsilon\phi x$ και $\sigma\phi(x + \kappa\pi) = \sigma\phi x$ · οί συναρτήσεις λοιπόν $\epsilon\phi x$ και $\sigma\phi x$ είναι περιοδικές μέ ελάχιστη θετική περίοδο τόν άριθμό π .

β) Θεμελιώδεις τύποι. Άν H τό πέρας ενός τόξου μέ μέτρο x , H_1 ή προβολή τοῦ H στόν άξονα τῶν συνημιτόνων (σχ. 24 · 2) και N τό σημείο τομῆς τῆς OH μέ τόν άξονα τῶν έφαπτομένων, τότε άπό τά όμοια τρίγωνα OH_1H και ON , και άνεξάρτητα άπό τή θέση τοῦ H πάνω στόν κύκλο (έφόσον $H \neq B$ και B'),

$$\text{παίρνομε : } \frac{\overline{OH_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{H_1H}}{\overline{AN}} \quad (\beta).$$

Άλλά $\overline{OH_1} = \text{συν } x$, $\overline{OA} = 1$, $\overline{H_1H} = \overline{OH_2} = \eta\mu x$ και $\overline{AN} = \epsilon\phi x$ · άρα ή σχέση (β) γράφεται:

$$\frac{\text{συν } x}{1} = \frac{\eta\mu x}{\epsilon\phi x} \Rightarrow \boxed{\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\text{συν } x} = \eta\mu x \cdot \text{τεμ } x} \quad (8)$$

Έπίσης άν E τό πέρας ενός τόξου μέ μέτρο x , E_2 ή προβολή τοῦ E στόν άξονα τῶν ήμιτόνων και Λ τό σημείο τομῆς τῆς OE μέ τόν άξονα τῶν συνεφαπτομένων, τότε άπό τά όμοια τρίγωνα OE_2E και $OB\Lambda$ ($E \neq A$ και A') παίρνομε:

$$\frac{\overline{OE_2}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{E_2E}}{\overline{B\Lambda}} \quad (\gamma).$$

Άλλά $\overline{OE_2} = \eta\mu x$, $\overline{OB} = 1$, $\overline{E_2E} = \overline{OE_1} = \text{συν } x$ και $\overline{B\Lambda} = \sigma\phi x$ · άρα ή σχέση (γ) γράφεται:

$$\frac{\eta\mu x}{1} = \frac{\text{συν } x}{\sigma\phi x} \Rightarrow \boxed{\sigma\phi x = \frac{\text{συν } x}{\eta\mu x} = \text{συν } x \cdot \text{στεμ } x} \quad (9)$$

Οί συναρτήσεις πού προκύπτουν άπό τούς τύπους $y = \text{συν } x$, $y = \eta\mu x$, $y = \epsilon\phi x$, $y = \sigma\phi x$, $y = \text{τεμ } x$, $y = \text{στεμ } x$ λέγονται **τριγωνομετρικές ή κυκλικές συναρτήσεις** και οί άριθμοί $\text{συν } x$, $\eta\mu x$, $\epsilon\phi x$, $\sigma\phi x$, $\text{τεμ } x$, $\text{στεμ } x$ **τριγωνομετρικοί άριθμοί** τοῦ τόξου x .

Σημείωση : Έπειδή σέ κάθε τόξο $\widehat{AD}$, ενός τριγωνομετρικοῦ κύκλου ($O, R = 1$, γ^+) άντιστοιχίζεται και μιá προσανατολισμένη επίκεντρη γωνία, μιá γωνία δηλαδή πού έχει άρχική πλευρά τήν OA και τελική τήν OD και σχε-

τικό μέτρο τό μέτρο τοῦ ἀντίστοιχου τόξου $\widehat{AD}$, συμπεραίνομε ὅτι:μποροῦμε νά μιᾶμε γιά ἡμίτονο, συνημίτονο, ἔφαπτομένη καί συνεφαπτομένη μιᾶς ὁποιασδήποτε προσημασμένης (θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς) γωνίας ἐννοώντας ἀντίστοιχα τό ἡμίτονο, συνημίτονο, τήν ἔφαπτομένη καί συνεφαπτομένη τοῦ τόξου πού ἔχει τό ἴδιο σχετικό μέτρο μέ τή θεωρούμενη γωνία.

Ἄς παρατηρήσομε: Ὄταν τό πέρας ἑνός τόξου x εἶναι σημεῖο τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, τότε τό τόξο ἔχει ὅλους τοὺς τριγωνομετρικούς του ἀριθμούς θετικούς. Ὄταν τό πέρας εἶναι σημεῖο τοῦ β' τεταρτημορίου, τότε τό τόξο ἔχει τό ἡμίτονο καί τή συντέμνουσα θετικούς ἀριθμούς καί ὅλους τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἀρνητικούς· ὅταν τό πέρας εἶναι σημεῖο τοῦ γ' τεταρτημορίου τότε ἡ ἔφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ὅλοι οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί ἀρνητικοί· τέλος ὅταν τό πέρας εἶναι σημεῖο τοῦ δ' τεταρτημορίου τότε τό συνημίτονο καί ἡ τέμνουσα εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ὅλοι οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου εἶναι ἀρνητικοί.

24.3 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Ὡς πρὸς ἓνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων νά γίνει ἡ γραφικὴ παράσταση τῶν συναρτήσεων:

$$I) \quad y = \eta \mu x \quad \text{καί} \quad y = \sigma \nu x \quad \text{γιά} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi.$$

$$II) \quad y = \epsilon \phi x \quad \text{γιά} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$III) \quad y = \sigma \phi x \quad \text{γιά} \quad 0 < x < \pi \quad \text{καί} \quad \pi < x < 2\pi.$$

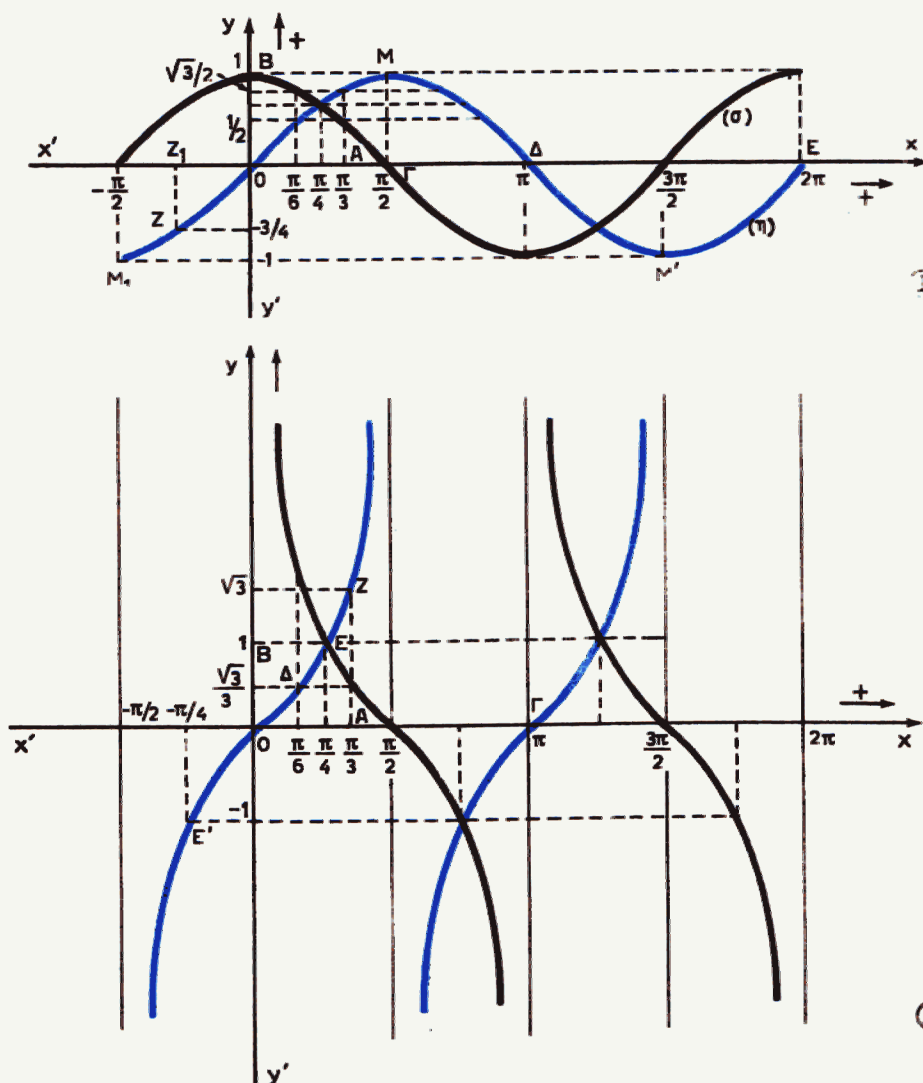
Κατασκευάζομε ἀρχικά ἓνα ζευγὸς ὀρθογωνίων προσανατολισμένων εὐθειῶν $x'y$ καί $y'y$ καί πάνω στή θετικὴ ἡμιευθεία Ox παίρνομε ἓνα τμήμα OA μήκους $\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ [σχ. 24.3 (I)]. Σημειώνομε πάνω στὸν ἄξονα $x'x$ καί τὰ

σημεῖα $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Ἀκολουθῶς πάνω στή θετικὴ ἡμιευθεία Oy παίρνομε ἓνα τμήμα $OB = OA \approx 1,05$ καί τό θεωροῦμε ὡς μοναδιαῖο γιά τὸν ἄξονα $y'y$.

1_a) Πάνω στὸν ἄξονα $y'y$ τοποθετοῦμε τὰ σημεῖα $\eta \mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\eta \mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta \mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta \mu \frac{\pi}{2} = 1$, προσδιορίζομε τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου μέ συντεταγμένες $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ καί σχεδιά-

ζομε τό τόξο OM. Είναι εύκολο νά παρατηρήσουμε ότι: τό τόξο MΔ είναι συμμετρικό τοῦ OM ὡς πρὸς τήν ΜΓ καί τό τόξο ΔΜ'Ε συμμετρικό τοῦ OMA ὡς πρὸς τό σημεῖο Δ· ἐπίσης τό OM₁ εἶναι συμμετρικό τοῦ OM ὡς πρὸς τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων.



Σχ. 24.3.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $\eta \mu x$, ἐφόσον πεδίο ὁρισμοῦ τῆς εἶναι ὅλο τό σύνολο $\mathbb{R}$, εἶναι μιὰ ἀπεριόριστη «κυματοειδής» γραμμή (η) [σχ. 24.3 (I)], πού λέγεται ἡμιτονοειδής καμπύλη καί πού ἀποτελεῖται ἀπό τόξα ἴσα πρὸς τό OMAΔΜ'Ε· καθένα ἀπ' αὐτά τά ἴσα τόξα μπορεῖ νά προκύψει ἀπό

τό προηγούμενό του, στή σειρά, μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο πρὸς τὸ $\vec{OE}$ ἢ ἀπὸ τὸ ἐπόμενό του στή σειρά μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο πρὸς τὸ $\vec{EO} = -\vec{OE}$.

ιβ) Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $\sin x$ γίνεται μέ τὴν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε γιὰ τὸ ἡμίτονο καὶ εἶναι καμπύλη (σ) [σχ. 24·3 (I)] ἴση πρὸς τὴν ἡμιτονοειδή. Μπορεῖ μάλιστα νά προκύψει καὶ μέ μεταφορά τῆς ἡμιτονοειδοῦς κατά διάνυσμα ίσο πρὸς τὸ $\vec{GO}$.

II) Γιά νά σχεδιάσουμε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $\cos x$ ὀρίζομε τὰ σημεῖα μέ συντεταγμένες $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ καὶ χαράσσομε τὸν βραχίονα ΟΔΕΖ... [σχ. 24·3 (II)], ὁ ὁποῖος ἔχει ἀσύμπτωτη τὴν εὐθεῖα $x = \frac{\pi}{2}$. Ὁ βραχίονας ΟΕ'... εἶναι συμμετρικὸς τοῦ ΟΔ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴ Ο καὶ ἔχει ἀσύμπτωτη τὴν εὐθεῖα $x = -\frac{\pi}{2}$. Ἔτσι γιὰ τὸ διάστημα

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ παίρνομε ἓναν ἀπεριόριστο κλάδο μέ δύο βραχίονες συμμετρικοὺς ὡς πρὸς τὸ σημεῖο Ο (0, 0). Γιά τὸ διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ἔχομε, ὡς γραφικὴ παράσταση, ἓναν κλάδο ἴσο πρὸς τὸν προηγούμενο, πού προκύπτει ἀπ' αὐτόν μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ἴσο μέ $\vec{OG}$ (ὅπου $|\vec{OG}| \approx \pi$) [σχ. 24·3 (II)].

III) Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς $\sec x$ γίνεται μέ τὴν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε γιὰ τὴν ἐφαπτομένη καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσους ἀπεριόριστους κλάδους πού ἔχουν ἀσύμπτωτες τὶς εὐθεῖες... $x = -\pi, x = 0, x = \pi, x = 2\pi, \dots$

Παρατήρηση: Ὅπως καὶ ἀπὸ τὸ σχῆμα 24·3 (I) βλέπομε, τὰ σημεῖα τῶν γραφικῶν παραστάσεων μέ τεταγμένες -1 καὶ $+1$ εἶναι τοπικὰ ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων $y = \eta\mu x$ καὶ $y = \sigma\upsilon\nu x$.

2. Νά σημειωθοῦν πάνω στὸν τριγωνομετρικὸ κύκλο τὰ πέρατα τῶν τόξων πού δίνουν τὶς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $4\eta\mu x + 3 = 0$ καὶ νά βρεθεῖ γραφικὰ ἐκείνη ἡ λύση πού περιέχεται στὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Παρατηροῦμε ἀρχικὰ ὅτι $4\eta\mu x + 3 = 0 \iff \eta\mu x = -\frac{3}{4}$.

I) Πάνω στὸν ἀρνητικὸ ἡμιάξονα Ογ' παίρνομε σημεῖο Ρ τέτοιο ὥστε $\overline{OP} = -\frac{3}{4}$ καὶ ἀπ' αὐτὸ φέρνομε εὐθεῖα (ε) παράλληλη πρὸς τὸν ἀξονα $x'x$.

Αν η (ε) τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία Κ και Λ, αυτά είναι τα πέρατα όλων των τόξων με αρχή το σημείο Α που δίνουν τις άπειρες λύσεις της εξίσωσης (γιατί;). (Νά γίνει το σχήμα).

II) Αφού σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = \eta\mu x$ [σχ. 24 · 3 (I)], φέρνουμε από το σημείο του άξονα $y'y$ με τεταγμένη $-\frac{3}{4}$ ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει το μέρος της καμπύλης (η), το περιεχόμενο μεταξύ των ευθειών $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$, έστω στο Ζ. Αν Z_1 ή προβολή του Ζ στον άξονα $x'x$, τότε η τετμημένη του Z_1 δίνει εκείνη τη λύση (σέ ακτίνια) της εξίσωσης ή όποια περιέχεται στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (Νά υπολογισθεί κατά προσέγγιση).

24 · 4 Ασκήσεις.

1. Νά γίνει ή γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

I) $y = \eta\mu x - \frac{1}{2}$ στο διάστημα $-\pi < x < \pi$.

II) $y = 1 - \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $0 < x < 2\pi$.

III) $y = 2 + \epsilon\phi x$ στο διάστημα $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

VI) $y = -2 + \sigma\phi x$ στο διάστημα $0 < x < \pi$.

2. Νά γίνει ή γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

I) $y = \sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{2})$ στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

II) $y = \eta\mu(x - \frac{\pi}{3})$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$.

3. I) Νά σημειωθούν πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο τα πέρατα των τόξων που δίνουν τις λύσεις των εξισώσεων: α) $5\sigma\upsilon\nu x + 4 = 0$ β) $-3\epsilon\phi x + 4 = 0$ γ) $2\eta\mu x - \sqrt{2} = 0$.

II) Νά βρεθούν γραφικά οι λύσεις των προηγούμενων εξισώσεων οι περιεχόμενες στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. Νά βρεθεί ή ελάχιστη θετική περίοδος των συναρτήσεων:

$$\eta\mu 2x, \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{4}, \epsilon\phi(-4x), \sigma\phi(\frac{5x}{3}).$$

5. Αν $\sigma\phi \omega = -\frac{5}{7}$ με $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$, νά βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί του ω .

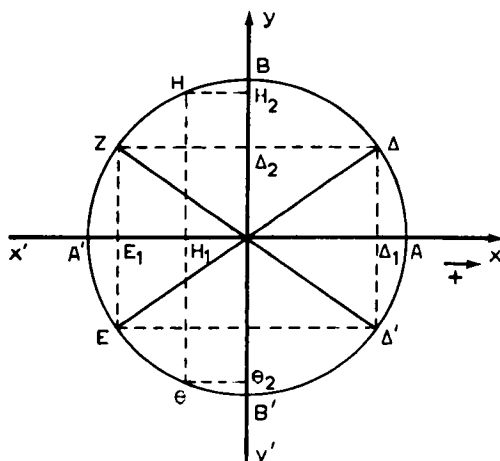
ΕΝΟΤΗΤΑ 25

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΥ ΤΟΞΟΥ ΣΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΤΟΞΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ $(0^\circ, 45^\circ)$

25 · 1 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών δύο αντίθετων τόξων — δύο τόξων που διαφέρουν κατά 180° — δύο τόξων παραπληρωματικών.

α) Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών δύο τόξων με αντίθετα σχετικά μέτρα.

Εύκολα βλέπουμε ότι δύο τόξα, πάνω σε τριγωνομετρικό κύκλο, που έχουν την ίδια αρχή Α και των οποίων τα μέτρα είναι δύο αντίθετοι αριθμοί x και $-x$, θα έχουν ως πέρατα δύο σημεία, έστω Η και Θ, συμμετρικά ως προς τον άξονα των συνημιτόνων (σχ. 25 · 1).



Σχ. 25.1.

Συνεπώς οι προβολές των Η και Θ στον άξονα των συνημιτόνων θα ταυτίζονται και στον άξονα των ημιτόνων θα είναι σημεία συμμετρικά ως προς το κέντρο του κύκλου. Αυτό σημαίνει ότι δύο αντίθετα τόξα έχουν τό ίδιο συνημίτονο και αντίθετα ημίτονα.

Όστε: $\boxed{\sin(-x) = \sin x} \quad (1\alpha), \quad \boxed{\eta\mu(-x) = -\eta\mu x} \quad (1\beta) \quad \text{και}$
έπομένως:

$$\epsilon\phi(-x) = \frac{\eta\mu(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\eta\mu x}{\sin x} = -\epsilon\phi x \quad (1\gamma) \quad \text{και} \quad \sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x \quad (1\delta).$$

β) Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών δύο τόξων των οποίων

τά μέτρα διαφέρουν κατά 180° . *Αν σ' ένα τόξο $\widehat{AD}$ (σχ 25 · 1) πού έχει μέτρο x προσθέσουμε ένα διαδοχικό του τόξο $\widehat{DE}$ μέ μέτρο 180° , τότε θά πάρομε ένα τόξο $\widehat{AE}$ τοῦ ὁποῖου τό πέρας E θά εἶναι τό ἀντιδιαμετρικό σημεῖο τοῦ D . Οἱ προβολές ὁμως πάνω στοὺς ἄξονες συνημιτόνων καί ἡμιτόνων δύο σημείων D καί E συμμετρικῶν ὡς πρὸς τό κέντρο εἶναι σημεία ἐπίσης συμμετρικά ὡς πρὸς τό κέντρο.

Αὐτό σημαίνει ὅτι δύο τόξα τῶν ὁποίων τά μέτρα διαφέρουν κατά 180° ἔχουν ἀντίθετα συνημίτονα καί ἀντίθετα ἡμίτονα.

$$\text{*Ὡστε: } \boxed{\sin(180^\circ + x) = -\sin x} \quad (2\alpha) \quad \boxed{\eta\mu(180^\circ + x) = -\eta\mu x} \quad (2\beta)$$

*Εξάλλου γνωρίζομε ὅτι [παράγρ. 24 · 2 (α)]:

$$\epsilon\phi(180^\circ + x) = \epsilon\phi x \quad (2\gamma) \quad \text{καί} \quad \sigma\phi(180^\circ + x) = \sigma\phi x \quad (2\delta).$$

γ) Σχέσεις μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τόξων παραπληρωματικῶν.

*Ορισμός: Δυό τόξα λέγονται παραπληρωματικά ὅταν τά σχετικά μέτρα τους (σέ μοῖρες) ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μέ 180° . *Αν ἐπομένως x εἶναι τό (σχετικό) μέτρο ἑνός τόξου, τότε τό μέτρο τοῦ παραπληρωματικοῦ του θά εἶναι ἴσο μέ $180^\circ - x$. Τά τόξα π.χ. 512° καί $-332^\circ = 180^\circ - 512^\circ$ εἶναι παραπληρωματικά.

Πορίσματα τῶν σχέσεων α) καί β): *Ἐχομε:

$$\begin{aligned} \eta\mu(180^\circ - x) &= \eta\mu[180^\circ + (-x)] = -\eta\mu(-x) = \eta\mu x \quad \text{καί} \\ \sin(180^\circ - x) &= -\sin(-x) = \sin x. \end{aligned}$$

$$\text{*Ὡστε: } \boxed{\eta\mu(180^\circ - x) = \eta\mu x} \quad (3\alpha) \quad \boxed{\sin(180^\circ - x) = \sin x} \quad (3\beta)$$

$$\text{καί συνεπῶς: } \boxed{\epsilon\phi(180^\circ - x) = -\epsilon\phi x} \quad (3\gamma) \quad \text{καί} \quad \boxed{\sigma\phi(180^\circ - x) = -\sigma\phi x} \quad (3\delta)$$

Παρατηρήσεις: I) *Αν D τό πέρας ἑνός τόξου $\widehat{AD}$ μέ μέτρο x , τό πέρας τοῦ τόξου μέ μέτρο $-x$ θά εἶναι τό συμμετρικό D' τοῦ D ὡς πρὸς τόν ἄξονα $A'A$. *Ακολουθῶς τό τόξο μέ μέτρο $-x + 180^\circ = 180^\circ - x$ (παραπληρωματικό τοῦ x) θά ἔχει πέρας τό σημεῖο Z , συμμετρικό τοῦ D' ὡς πρὸς τό κέντρο O . *Αλλά τότε τό Z εἶναι τό συμμετρικό τοῦ D ὡς πρὸς τόν ἄξονα $B'B$.

*Ὡστε: Τά πέρατα δύο τόξων παραπληρωματικῶν μέ κοινή ἀρχή τό A εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.

$$\begin{aligned} \text{(II) Εἶναι: } \sin(360^\circ - x) &= \sin(-x + 360^\circ) = \sin(-x) = -\sin x \\ \eta\mu(360^\circ - x) &= \eta\mu(-x + 360^\circ) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x \\ \epsilon\phi(360^\circ - x) &= \epsilon\phi(-x + 360^\circ) = \epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x \\ \sigma\phi(360^\circ - x) &= \sigma\phi(-x + 360^\circ) = \sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x. \end{aligned}$$

III) *Επειδὴ $\sin(-x) = -\sin x$ καί $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ἐπεταὶ ὅτι ἡ συνάρτηση $\sin x$ εἶναι ἄρτια καί ἡ συνάρτηση $\eta\mu x$ εἶναι περιττή.

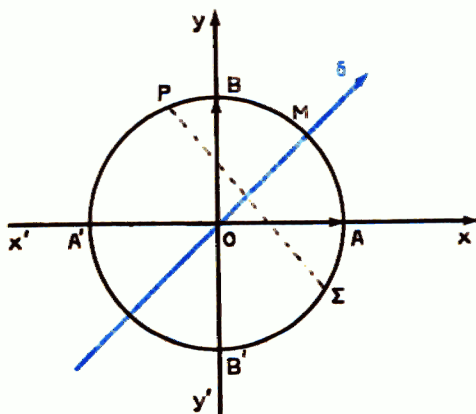
25.2 Σχέσεις των τριγωνομετρικών αριθμών δύο συμπληρωματικών τόξων.

Όρισμός: Δυό τόξα λέγονται συμπληρωματικά όταν τά σχετικά μέτρα τους (σέ μοίρες) έχουν άθροισμα ίσο μέ 90° . "Αν επομένως x είναι τό μέτρο ενός τόξου, τότε τό μέτρο τοῦ συμπληρωματικοῦ του θά είναι ίσο μέ $90^\circ - x$.

Τά τόξα π.χ. -3981° καί $4071^\circ = 90^\circ - (-3981^\circ) = 90^\circ + 3981^\circ$ είναι συμπληρωματικά.

Λήμμα: Τά πέρατα δυό τόξων συμπληρωματικών, μέ κοινή άρχή ένα σημείο A πάνω σέ τριγωνομετρικό κύκλο, είναι σημεία συμμετρικά ως πρός τή διχοτόμο των γωνιών $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{x'O'y'}$ ($x'x$ καί $y'y$ οί άξονες συνημιτόνων καί ημιτόνων αντίστοιχως).

Απόδειξη: "Ας είναι x τό σχετικό μέτρο ενός προσημασμένου τόξου $\widehat{AP}$ πάνω σ' έναν τριγωνομετρικό κύκλο (σχ. 25.2) καί άς είναι Σ τό πέρας τοῦ τόξου $\widehat{AS}$ μέ σχετικό μέτρο $90^\circ - x$.



Σχ. 25.2.

Θεωρούμε τό μέσο M τοῦ πρώτου τεταρτημορίου $\widehat{AB}$ καί εκείνο άπό τά τόξα $\widehat{AM}$ πού έχει σχετικό μέτρο 45° . "Εχομε: $\widehat{AP} + \widehat{AS} = 90^\circ = 2\widehat{AM} \Rightarrow \widehat{AP} - \widehat{AM} = \widehat{AM} - \widehat{AS} \Rightarrow \widehat{AP} + \widehat{MA} = \widehat{AM} + \widehat{SA} \Rightarrow \widehat{MA} + \widehat{AP} = \widehat{SA} + \widehat{AM}$ (I). "Αλλά δυό διαδοχικά τόξα έχουν άθροισμα ένα τόξο μέ άρχή τήν άρχή τοῦ πρώτου καί πέρας τό πέρας τοῦ δευτέρου (βλέπε εφαρμογή 1, παράγρ. 23.3). "Αρα ή (I) γράφεται:

$$\widehat{MP} = \widehat{SM} \quad \eta \quad \widehat{MP} = -\widehat{MS} \quad (II).$$

"Επειδή τά τόξα $\widehat{MP}$ καί $\widehat{MS}$ είναι δυό αντίθετα τόξα μέ κοινή άρχή τό M , τά πέρατα αὐτῶν P καί S θά είναι σημεία συμμετρικά ως πρός τήν εὐθεία OM διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{xOy}$.

Όταν δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων γνωρίζουμε ότι η τετμημένη του καθενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου (παράγρ. 19·2).

Έδω η τετμημένη του Σ είναι τό συνημίτονο του τόξου $\widehat{AS}$ (μέ μέτρο $90^\circ - x$) και η τεταγμένη του Ρ, τό ήμίτονο του τόξου $\widehat{AP}$ (μέ μέτρο x). Επίσης η τεταγμένη του Σ είναι τό ήμίτονο του $\widehat{AS}$ και η τετμημένη του Ρ είναι τό συνημίτονο του x .

Άρα, ύστερα και από τό παραπάνω λήμμα, συμπεραίνουμε ότι :

$$\boxed{\sin(90^\circ - x) = \eta\mu x} \quad (4\alpha) \quad \boxed{\eta\mu(90^\circ - x) = \sigma\upsilon\nu x} \quad (4\beta)$$

$$\text{καί άκολουθώς } \varepsilon\varphi(90^\circ - x) = \sigma\varphi x \quad (4\gamma) \quad \text{καί} \quad \sigma\varphi(90^\circ - x) = \varepsilon\varphi x \quad (4\delta).$$

Σημαντική παρατήρηση : Χρησιμοποιώντας τά προηγούμενα μπορούμε νά ποριστούμε τούς τριγωνομετρικούς άριθμούς ενός όποιουδήποτε προσημασμένου τόξου από τούς τριγωνομετρικούς άριθμούς ενός καταλλήλου τόξου του διαστήματος $[0^\circ, 45^\circ]$.

Άς πάρουμε γιά παράδειγμα τό τόξο μέ μέτρο -1560° .

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \eta\mu(-1560^\circ) &= \eta\mu[360^\circ \cdot (-5) + 240^\circ] = \eta\mu 240^\circ = \\ &= \eta\mu(180^\circ + 60^\circ) = -\eta\mu 60^\circ = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \sigma\upsilon\nu(-1560^\circ) &= \sigma\upsilon\nu[360^\circ \cdot (-5) + 240^\circ] = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ \\ &= -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Θά μπορούσαμε ν' άκολουθήσουμε και την εξής πορεία:

$$\begin{aligned} \eta\mu(-1560^\circ) &= -\eta\mu 1560^\circ = -\eta\mu(360^\circ \cdot 4 + 120^\circ) = -\eta\mu 120^\circ = \\ &= -\eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = -\eta\mu 60^\circ = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ. \\ \sigma\upsilon\nu(-1560^\circ) &= \sigma\upsilon\nu 1560^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ \cdot 4 + 120^\circ) = \sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ \\ &= -\eta\mu 30^\circ. \end{aligned}$$

25·3 Δύο σημαντικές εφαρμογές.

Άν Α, Β, Γ τά μέτρα των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ και α, β, γ τά μέτρα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχως, τότε :

$$1) \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad (\text{Νόμος των ήμιτόνων}).$$

$$2) \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sigma\upsilon\nu A \quad (\text{Νόμος του συνημιτόνου}).$$

1. Όταν γωνία Α = 90° , [σχ. 25·3 (1)], τότε γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \iff \frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{καί} \quad \eta\mu \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \iff \frac{\alpha}{1} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{καί συνεπώς}$$

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}. \quad \text{Άρα ή σχέση ισχύει.}$$

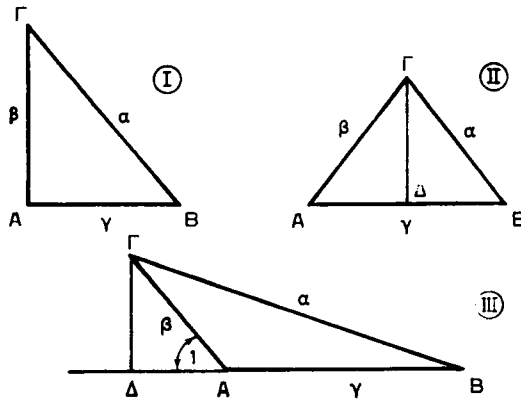
Θεωρούμε τώρα ένα οξυγώνιο τρίγωνο [σχ. 25.3 (II)] και άς είναι $\Gamma\Delta \perp AB$.

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Gamma\Delta B$ και $\Gamma\Delta A$ παίρνουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \iff \Gamma\Delta = \beta \eta\mu A \quad (1) \quad \text{καί} \quad \eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \iff \Gamma\Delta = \alpha \eta\mu B \quad (2).$$

$$\text{Από τις (1) και (2) προκύπτει: } \alpha \eta\mu B = \beta \eta\mu A \iff \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}.$$

Επειδή με όμοιο τρόπο παίρνουμε και $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ έπεται ότι η σχέση ισχύει.



Σχ. 25.3.

Άς είναι τώρα τό τρίγωνο άμβλυγώνιο στό A [σχ. 25.3 (III)]. Έχομε

$$\eta\mu A_1 = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \iff \Gamma\Delta = \beta \eta\mu A_1 \quad (1'). \quad \text{Από τις (1')} \quad \text{και} \quad (2) \quad \text{έχομε} \quad \alpha \eta\mu B = \beta \eta\mu A_1.$$

άλλά $\eta\mu A_1 = \eta\mu A$, διότι οι γωνίες A και A_1 είναι παραπληρωματικές, και δυό παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ήμίτονα· άρα πάλι

$$\alpha \eta\mu B = \beta \eta\mu A \iff \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}.$$

Ωστε η σχέση (1) ισχύει σέ κάθε περίπτωση.

2. Από τό ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ [σχ. 25.3 (II) και (III)] παίρνουμε $\alpha^2 = (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta B)^2$ (3). Αν ή γωνία A είναι οξεία ή (3) γράφεται:

$$\alpha^2 = (\Gamma\Delta)^2 + (\gamma - A\Delta)^2 = (\Gamma\Delta)^2 + \gamma^2 + (A\Delta)^2 - 2\gamma \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A, \quad \text{διότι} \quad \sin A = \frac{A\Delta}{\beta} \iff A\Delta = \beta \sin A.$$

$$\text{Αν γωνία } A > 90^\circ \text{ ή (3) γράφεται: } \alpha^2 = (\Gamma\Delta)^2 + (\gamma + A\Delta)^2 = (\Gamma\Delta)^2 + \gamma^2 + (A\Delta)^2 + 2\gamma(A\Delta) = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma(A\Delta) = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \sin A_1.$$

Επειδή όμως $\sin A_1 = -\sin A$, μιά και οι γωνίες $\widehat{A_1}$ και $\widehat{A}$ είναι παραπλη-

ρωματικές και οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετα συνημίτονα, παίρνομε πάλι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A$.

Παρατήρηση : Είναι φανερό ότι ισχύουν επίσης οι σχέσεις:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \sin B \quad \text{και} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin \Gamma.$$

25.4 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. I) Πότε δύο τόξα έχουν ίσα ημίτονα; II) πότε ίσα συνημίτονα; και III) πότε ίσες έφαπτόμενες και συνεφαπτόμενες;

I) Δυό τόξα έχουν ίσα ημίτονα αν και μόνον αν τά πέρατα των τόξων ταυτίζονται ή είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των ημιτόνων, διότι τότε και μόνον τά πέρατα των τόξων έχουν την ίδια προβολή πάνω στον άξονα των ημιτόνων. (Υποθέτομε πάντοτε ότι τά τόξα έχουν την ίδια αρχή A).

Αν λοιπόν x είναι τό μέτρο ενός τόξου, τότε κάθε τόξο y πού δίνεται από τον τύπο $y = 2k\pi + x$ ($k \in \mathbb{Z}$) έχει τό ίδιο ημίτονο μέ τό x , διότι κάθε τέτοιο τόξο έχει πέρας τό πέρας του x . Γνωρίζομε εξάλλου ότι δυό παραπληρωματικά τόξα έχουν πέρατα συμμετρικά ως προς τον άξονα των ημιτόνων· άρα και τό τόξο $\pi - x$ θα έχει τό ίδιο ημίτονο μέ τό τόξο x καθώς και κάθε άλλο τόξο y πού έχει τό ίδιο πέρας μέ τό $\pi - x$, δηλαδή κάθε τόξο y πού δίνεται από τον τύπο $y = 2k\pi + \pi - x$.

Ωστε δυό τόξα x και y έχουν ίσα ημίτονα εφόσον ικανοποιούν μίαν από τίς σχέσεις:

$y = x + 2k\pi \iff y - x = 2k\pi$ $y = -x + 2k\pi + \pi \iff y + x = (2k + 1)\pi$	όπου $k \in \mathbb{Z}$
--	-------------------------

II) Δυό τόξα έχουν ίσα συνημίτονα αν και μόνον αν τά πέρατα των τόξων συμπίπτουν ή είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των συνημιτόνων.

Αν x τό μέτρο ενός τόξου, τό αντίθετό του $-x$ έχει ως πέρας τό συμμετρικό του πέρατος του x ως προς τον άξονα των συνημιτόνων.

Έτσι κάθε τόξο y πού δίνεται από τον τύπο $y = 2k\pi + x$ ή από τον τύπο $y = 2k\pi - x$ έχει τό ίδιο συνημίτονο μέ τό τόξο x · διότι τά τόξα $2k\pi + x$ έχουν τό ίδιο πέρας μέ τό x και τά τόξα $2k\pi - x$ έχουν τό ίδιο πέρας μέ τό $-x$.

Ωστε δυό τόξα x και y έχουν ίσα συνημίτονα εφόσον ικανοποιούν μίαν από τίς σχέσεις:

$y = 2k\pi \pm x \iff y \mp x = 2k\pi$	$k \in \mathbb{Z}$
--	--------------------

III) Δυό τόξα έχουν ίσες έφαπτόμενες και συνεφαπτόμενες αν και μόνον αν τά πέρατα των τόξων συμπίπτουν ή είναι συμμετρικά ως προς τό κέντρο του κύκλου [παράγρ. 24.2 (α)].

Έπομένως τά μέτρα x και y δύο τέτοιων τόξων συνδέονται με τη σχέση:

$$y = κπ + x \iff y - x = κπ$$

2. Νά καθορισθεί τό πλήθος τών διαφορετικῶν τιμῶν τῆς παραστάσεως $\eta\mu \frac{2κπ}{5}$, όταν δ κ παίρνει ὅλες τίς ἀκέραιες τιμές.

Έχουμε $\kappa = 5\lambda + \upsilon$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$ και $\upsilon = 0$ ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4 . Έτσι ἡ παράσταση γράφεται:

$$\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{5} = \eta\mu \frac{2(5\lambda + \upsilon)\pi}{5} = \eta\mu \left(\frac{10\lambda\pi}{5} + \frac{2\upsilon\pi}{5} \right) = \eta\mu \left(2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{5} \right).$$

Άλλά $\eta\mu \left(2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{5} \right) = \eta\mu \frac{2\upsilon\pi}{5}$. Άρα οἱ διαφορετικές τιμές τῆς παραστάσεως $\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{5}$ θά εἶναι ὡσες οἱ τιμές τῆς $\eta\mu \frac{2\upsilon\pi}{5}$, οἱ ὁποῖες εἶναι τό πολύ πέντε. Γιά $\upsilon = 0$ παίρνουμε $\eta\mu 0 = \eta\mu 0^\circ = 0$. γιά $\upsilon = 1$ παίρνουμε $\eta\mu \frac{2\pi}{5} = \eta\mu 72^\circ$. γιά $\upsilon = 2$ έχουμε $\eta\mu \frac{4\pi}{5} = \eta\mu 144^\circ$. γιά $\upsilon = 3$ έχουμε $\eta\mu \frac{6\pi}{5} = \eta\mu 216^\circ$ και τέλος όταν $\upsilon = 4$ προκύπτει $\eta\mu \frac{8\pi}{5} = \eta\mu 288^\circ$.

Έπειδή $\eta\mu 144^\circ = \eta\mu (180^\circ - 36^\circ) = \eta\mu 36^\circ$, $\eta\mu 216^\circ = \eta\mu (180^\circ + 36^\circ) = -\eta\mu 36^\circ$, $\eta\mu 288^\circ = \eta\mu (360^\circ - 72^\circ) = -\eta\mu 72^\circ$, συμπεραίνουμε ὅτι και οἱ πέντε παραπάνω τιμές τοῦ $\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{5}$ εἶναι διαφορετικές.

3. Νά ἐκφραστοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $90^\circ + x$, $270^\circ - x$ και $270^\circ + x$ συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου x .

Έχουμε:

$$I) \quad \eta\mu (90^\circ + x) = \eta\mu [90^\circ - (-x)] = \sigma\upsilon\nu (-x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu (90^\circ + x) = \sigma\upsilon\nu [90^\circ - (-x)] = \eta\mu (-x) = -\eta\mu x$$

$$\epsilon\phi (90^\circ + x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x} = -\sigma\phi x \quad \text{και} \quad \sigma\phi (90^\circ + x) = \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\epsilon\phi x.$$

$$II) \quad \eta\mu (270^\circ - x) = \eta\mu [180^\circ + (90^\circ - x)] = -\eta\mu (90^\circ - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu (270^\circ - x) = \sigma\upsilon\nu [180^\circ + (90^\circ - x)] = -\sigma\upsilon\nu (90^\circ - x) = -\eta\mu x$$

$$\epsilon\phi (270^\circ - x) = \sigma\phi x \quad \text{και} \quad \sigma\phi (270^\circ - x) = \epsilon\phi x.$$

$$III) \quad \eta\mu (270^\circ + x) = \eta\mu [180^\circ + (90^\circ + x)] = -\eta\mu (90^\circ + x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu (270^\circ + x) = \sigma\upsilon\nu [180^\circ + (90^\circ + x)] = -\sigma\upsilon\nu (90^\circ + x) = \eta\mu x$$

$$\epsilon\phi (270^\circ + x) = -\sigma\phi x \quad \text{και} \quad \sigma\phi (270^\circ + x) = -\epsilon\phi x.$$

4. Νά γίνει ἡ ἐπίλυση, δηλαδή ὁ ὑπολογισμός τῶν βασικῶν ἀγνώστων στοιχείων, τῶν ἀκολουθῶν τεσσάρων τριγῶνων:

$$I) \quad \Deltaίνονται: \alpha = 15 \text{ m}, \quad \widehat{B} = 75^\circ \quad \text{και} \quad \widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

$$II) \quad \Deltaίνονται: \beta = 20 \text{ m}, \quad \gamma = 10 \text{ m} \quad \text{και} \quad \widehat{A} = 130^\circ.$$

$$III) \quad \Deltaίνονται: \alpha = 18 \text{ m}, \quad \beta = 12 \text{ m} \quad \text{και} \quad \gamma = 10 \text{ m}.$$

$$IV) \quad \Deltaίνονται: \alpha = 8 \text{ m}, \quad \widehat{\Gamma} = 30^\circ \quad \text{και} \quad \gamma = 6 \text{ m}.$$

$$I) \text{ Έχουμε } \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Έφαρμόζοντας άκολουθως τό νόμο τών ήμιτόνων έχομε $\frac{15}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 60^\circ}$
 καί έπομένως: $\beta = \frac{15 \cdot \eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 45^\circ} \simeq \frac{15 \cdot 0,96593}{0,70711} \simeq 20,49 \text{ m}$ καί $\gamma = \frac{15 \cdot \eta\mu 60^\circ}{\eta\mu 45^\circ} =$
 $= \frac{15 \cdot 0,86603}{0,70711} \simeq 18,37 \text{ m}$. Έμβαδόν $= \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 20,49 \cdot 18,37 \cdot \eta\mu 45^\circ \simeq$
 $\simeq 10,245 \cdot 18,37 \cdot 0,70711$.

(Νά γίνει ό ύπολογισμός τοῦ έμβαδοῦ μέ τή χρήση λογαριθμικῶν πινάκων).

II) Έφαρμόζομε τό νόμο τοῦ συνημιτόνου στήν πλευρά α καί παίρνομε:

$$\alpha^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \sin 130^\circ = 500 + 400 \sin 50^\circ \simeq 100 (5 + 4 \cdot 0,64279) =$$

$$= 757,116 \implies \alpha \simeq 27,51 \text{ m}.$$

Άπό τή σχέση $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ παίρνομε $\eta\mu B = \frac{\beta \eta\mu A}{\alpha} = \frac{20 \cdot \eta\mu 130^\circ}{27,51}$.

Άφοῦ ύπολογίσομε τή γωνία $\widehat{B}$ προσδιορίζομε άκολουθως καί τή γωνία $\widehat{\Gamma}$ άπό τήν ισότητα $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 50^\circ - \widehat{B}$.

(Νά γίνει ό ύπολογισμός τών γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ καί τοῦ έμβαδοῦ τοῦ τριγώνου).

III) Έχομε $18^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \sin A \implies \sin A = -\frac{80}{2 \cdot 12 \cdot 10} =$
 $= -\frac{1}{3} \simeq -0,33333 \implies \sin (180^\circ - A) \simeq 0,33333 \implies 180^\circ - A \simeq 70^\circ 31' 45'' \implies$
 $\implies A \simeq 109^\circ 28' 15''$.

Άπό τή σχέση $\frac{18}{\eta\mu (109^\circ 28' 15'')} = \frac{12}{\eta\mu B}$ βρίσκομε τή γωνία $\widehat{B}$ καί ύστερα καί τή γωνία $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = (180^\circ - \widehat{A}) - \widehat{B} \simeq 70^\circ 32' 45'' - \widehat{B}$.

IV) Έφαρμόζοντας τό νόμο τών ήμιτόνων παίρνομε:

$$\frac{8}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{6}{\eta\mu 30^\circ} = 12.$$

Άκολουθως $\eta\mu A = \frac{2}{3} \simeq 0,66667$ καί $\widehat{A} = 41^\circ 48' 37''$ (1) ή $\widehat{A}' = 180^\circ -$
 $- (41^\circ 48' 37'') = 138^\circ 11' 23''$ (2). Μέ τήν τιμή (1) τής γωνίας $\widehat{A}$ έχομε $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{\Gamma}) =$
 $= 180^\circ - (71^\circ 48' 37'') = 108^\circ 11' 23''$, όποτε άπό τόν τύπο τών ήμιτόνων παίρνομε $\beta =$
 $= 12 \eta\mu (108^\circ 11' 23'') = 12 \eta\mu (71^\circ 48' 37'')$.

Έπειδή $(138^\circ 11' 23'') + 30^\circ = 168^\circ 11' 23'' < 180^\circ$ έπεται ότι καί ή τιμή (2) τής $\widehat{A}$ είναι άποδεκτή, όποτε ως τιμή τής $\widehat{B}$ προκύπτει $\widehat{B}' = 180^\circ - (168^\circ 11' 23'') = 11^\circ 48' 37''$. τό μέτρο τώρα τής πλευράς β είναι: $\beta' = 12 \eta\mu (11^\circ 48' 37'')$.

Βλέπομε ότι στήν περίπτωση (IV) τό πρόβλημά μας επιδέχεται δυό λύσεις.

(Νά γίνει ό ύπολογισμός τών μέτρων τών πλευρῶν β καί β').

23.5 Άσκήσεις.

1. Άν Α, Β, Γ, Δ είναι οί γωνίες κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τότε $\eta\mu(A+B) = -\eta\mu(\Gamma+\Delta)$, $\sin(A+B) = \sin(\Gamma+\Delta)$, $\epsilon\phi(A+B) = -\epsilon\phi(\Gamma+\Delta)$.

2. *Αν για τή γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\sin 2A = \sin A$ νά βρεθεί ή γωνία Α.

3. Νά βρεθεί ή τιμή τής παραστάσεως: $\sin 170^\circ - \eta\mu 280^\circ - \epsilon\phi 280^\circ \cdot \epsilon\phi 350^\circ$.

(*Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι: $170^\circ = 180^\circ - 10^\circ$, $280^\circ = 270^\circ + 10^\circ$, $350^\circ = 360^\circ - 10^\circ$).

4. Νά βρεθούν όλα τά τόξα ω τοῦ διαστήματος $[-15358^\circ, -14689^\circ]$ για τά όποια έχουμε $|\eta\mu \omega| = \frac{1}{2}$.

5. Συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου x νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων: $x - \frac{\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2} + x$, $-x - 3\pi$, $\frac{5\pi}{2} + x$.

6. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν τόξων x για τά όποια έχουμε:

$$\text{I)} \quad \eta\mu \left(2x - \frac{\pi}{5} \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{μέ } 0 \leq x < 2\pi.$$

$$\text{II)} \quad \sin \left(-3x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\eta\mu \left(4x - \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{μέ } 0 < x \leq 2\pi.$$

$$\text{III)} \quad \epsilon\phi \left(x - \frac{\pi}{12} \right) \cdot \sigma\phi \left(5x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \quad \text{μέ } -\pi < x \leq \pi.$$

7. *Αν για τίς γωνίες $\hat{\varphi}$ καί $\hat{\omega}$ έχουμε $\sin \frac{\varphi + 3\omega}{2} = \sin \frac{\varphi - \omega}{2}$, ν' ἀποδειχθεῖ ότι αὐτές δέν μποροῦν νά εἶναι γωνίες τριγώνου.

8. Ν' ἀποδειχθεῖ ότι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ή ἰσότητα $2r = \frac{\alpha}{\eta\mu A}$, όπου $2r$ εἶναι ή διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου στό ΑΒΓ.

9. Νά βρεθοῦν όλες οἱ διαφορετικές τιμές τῶν: $\sin \frac{k\pi}{2}$, $\epsilon\phi \frac{k\pi}{5}$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

10. Νά γίνει ή επίλυση τῶν παρακάτω τριγώνων όταν γνωρίζουμε: I) $\alpha = 16,5$ m, $\upsilon_\beta = 8,8$ m καί $\hat{B} = 36^\circ$. (υ_β εἶναι τό ὕψος στήν πλευρά β). II) $r = 14$ m, $\alpha = 15,8$ m, $\hat{B} = 108^\circ$. III) $r = 6,4$ m, $\hat{A} = 72^\circ$, $\hat{\Gamma} = 22,5^\circ$. IV) $\upsilon_\alpha = 8,24$ m, $\beta = 10,47$ m, $\gamma = 12,86$ m.

ΕΝΟΤΗΤΑ 26

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

26.1 Πολικές συντεταγμένες σημείου.

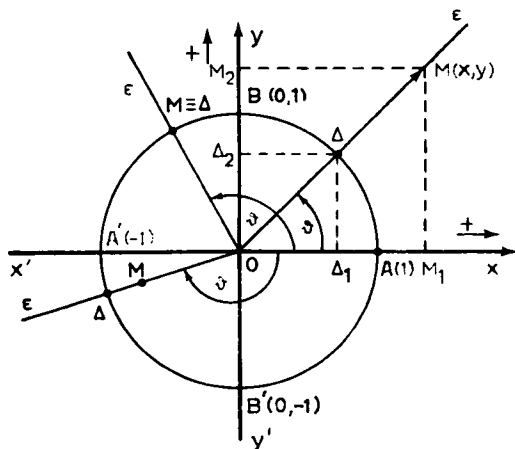
*Ας θεωρήσουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα άξόνων ($x'x$, $y'y$) καί άς πάρομε ένα σημείο $M(x, y)$ τοῦ ἐπιπέδου, σημειώνοντας μέ ρ τό μέτρο τοῦ διανύσματος $\vec{OM}$ ($\rho = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (σχ. 26.1)).

*Αν τό σημείο M κείται στό ήμιεπίπεδο $y > 0$, τότε άπ' όλες τίς προσανατολισμένες γωνίες τοῦ άξονα $x'x$ καί τοῦ διανύσματος $\vec{OM}$, δηλαδή άπό τίς γωνίες μέ πρώτη πλευρά τόν θετικό ήμιάξονα $\vec{Ox}$ καί δεύτερη τήν ήμιευθεία OM , θά θεωρούμε ἐδῶ ἐκείνη τή γωνία θ τής όποίας τό σχετικό μέτρο εἶναι ἀριθμός

του διαστήματος $(0, \pi)$. Άν το M είναι σημείο του ημιάξονα Ox , τότε τό μέτρο τῆς θ θά είναι μηδέν καί ἄν τό M είναι σημείο του Ox' , θά είναι π .

Στήν περίπτωση ὅπου τό M ἀνήκει στό ἡμιεπίπεδο $y < 0$, τότε θά θεωροῦμε ὡς γωνία του ἄξονα $x'x$ καί του διανύσματος $\vec{OM}$ τήν πρώτη ἀρνητική γωνία μέ ἀρχική πλευρά τήν ἡμιευθεία Ox καί τελική πλευρά τήν ἡμιευθεία OM . Συννεπῶς τό σχετικό μέτρο τῆς θ θά είναι τώρα ἕνας ἀριθμός του διαστήματος $(-\pi, 0)$.

Ἔτσι σέ κάθε σημείο M του ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζεται ἕνας καί μόνον ἕνας



Σχ. 26.1.

ἀριθμός του διαστήματος $(-\pi, \pi]$ ὡς σχετικό μέτρο τῆς γωνίας μέ πρώτη πλευρά τήν ἡμιευθεία Ox καί δεύτερη τήν OM .

Ἀντίστροφα σέ κάθε γωνία θ , μέ μέτρο ἕναν ἀριθμό του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, ἀντιστοιχίζεται μιά καί μόνο μιά ἡμιευθεία $O\epsilon$, ὡς δεύτερη πλευρά τῆς γωνίας θ μέ πρώτη πλευρά τήν Ox . Πάνω σ' αὐτή τήν ἡμιευθεία $O\epsilon$ μπορούμε ἀκολουθῶς νά καθορίσουμε ἕνα καί μόνον σημείο M , ἄν δοθεῖ τό μέτρο (τό μήκος) ρ του διανύσματος $\vec{OM}$.

Ὡστε: Σέ κάθε σημείο M ἀντιστοιχίζεται, μέ τίς παραπάνω συμφωνίες, ἕνα καί μόνον ζεῦγος ἀριθμῶν ρ καί θ , ἀπό τούς ὁποίους ρ εἶναι τό μέτρο του $\vec{OM}$ ($\rho = |\vec{OM}|$) καί θ τό σχετικό μέτρο τῆς πρώτης μή ἀρνητικῆς ἢ ἀρνητικῆς γωνίας $(Ox, \widehat{OM})$. Ἀντίστροφα σέ κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (ρ, θ) , μέ $\rho > 0$ καί $-\pi < \theta \leq \pi$, ἀντιστοιχίζεται ἕνα καί μόνον σημείο του ἐπιπέδου: τό σημείο M γιά τό ὁποῖο ἔχομε $|\vec{OM}| = \rho$ πάνω στή μοναδική ἡμιευθεία $O\epsilon$ γιά τήν ὁποία γωνία $\theta = (Ox, \widehat{O\epsilon})$.

Τό μέτρο ρ του $\vec{OM}$ λέγεται **πολική ἀκτίνα** καί ἡ γωνία θ **πολική γωνία**

του σημείου M · και οι δύο αριθμοί μαζί λέγονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου. Το σημείο O — ή άρχή του ὀρθοκανονικοῦ συστήματος συντεταγμένων — λέγεται **πόλος** και ὁ θετικός ἡμιάξονας Ox **πολικός ἄξονας** τοῦ θεωρούμενου συστήματος πολικῶν συντεταγμένων.

Σημείωση: Ὁ πόλος τοῦ συστήματος — ή άρχή τοῦ συνδεμένου ὀρθοκανονικοῦ συστήματος xOy — ἔχει πολική ἀκτίνα μηδέν, ἀλλά πολική γωνία ἀπροσδιόριστη.

26 · 2 Σχέσεις πολικῶν καί καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Τριγωνομετρική παράσταση μιγαδικοῦ.

Θά σχεδιάσουμε τώρα τόν κύκλο μέ κέντρο τήν άρχή O τῶν άξόνων καί ἀκτίνα $R = |\vec{OA}| = |\vec{OB}|$ ὅπου A καί B τά μοναδιαία σημεία τῶν άξόνων (σχ. 26 · 1).

Ἐχομε ἔτσι ἕναν τριγωνομετρικό κύκλο μέ άξονα συνημιτόνων τόν άξονα τετμημένων $x'x$ καί ἡμιτόνων τόν άξονα $y'y$.

Ἄς εἶναι Δ τό σημείο τομῆς τοῦ κύκλου ($O, R = 1$) μέ τήν ἡμιευθεία OM , ὅπου M ἕνα σημείο τοῦ ἐπιπέδου μέ καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) καί πολικές (ρ, θ) καί ἄς εἶναι ἀκόμη Δ_1 καί M_1 οἱ προβολές στόν άξονα $x'x$ τῶν Δ καί M ἀντίστοιχα καί Δ_2, M_2 οἱ προβολές τῶν ἰδίων σημείων στόν άξονα $y'y$.

Ἀπό τά ὁμοία τρίγωνα $O\Delta_1\Delta$ καί OM_1M ἔχομε:

$$\frac{|\vec{OM}|}{|\vec{O\Delta}|} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{O\Delta_1}} = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{\Delta_1\Delta}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{O\Delta_2}} \quad (1)$$

Ἀλλά $|\vec{OM}| = \rho$, $|\vec{O\Delta}| = 1$, $\overline{OM_1} = x$, $\overline{O\Delta_1} = \text{συν}\theta$, $\overline{O\Delta_2} = \eta\mu\theta$ καί συνεπῶς, ἄν $\text{συν}\theta \neq 0$ καί $\eta\mu\theta \neq 0$, ἡ (1) γράφεται: $\frac{\rho}{1} = \frac{x}{\text{συν}\theta} = \frac{y}{\eta\mu\theta}$ (2).

Ἀπό τή (2) παίρνομε:

$$\boxed{x = \rho \text{συν}\theta} \quad (3) \quad \text{καί} \quad \boxed{y = \rho \eta\mu\theta} \quad (4)$$

$$\text{καί} \quad \text{συν}\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}, \quad \epsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0.$$

Παρατήρηση: Οἱ τύποι $x = \rho \text{συν}\theta$, $y = \rho \eta\mu\theta$, $\text{συν}\theta = \frac{x}{\rho}$, $\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}$

ἰσχύουν προφανῶς καί γιά $\theta = 0$ ἢ $\frac{\pi}{2}$.

Ἄν τώρα συμφωνήσουμε ἡ εὐθεία $y'y$ νά εἶναι ἡ εὐθεία τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν yi , τότε τό σημείο M μέ ὀρθογώνιες συντεταγμένες (x, y) θά εἶναι ἡ γεωμετρική παράσταση τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $x + yi$.

*Αρα ο μιγαδικός $x + yi$ μπορεί, σύμφωνα με τις σχέσεις (3) και (4), να γραφεί:

$$\boxed{x + yi = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)} \quad (5)$$

όπου ρ είναι τό μέτρο του μιγαδικού αριθμού $x + yi$, ίσο με $\sqrt{x^2 + y^2}$, και θ είναι ή πολική γωνία του σημείου M που τώρα λέγεται *όρισμα* του μιγαδικού.

Η παραπάνω έκφραση (5) ενός μιγαδικού αριθμού, μέσω του μέτρου και του όρισμάτος του, λέγεται *τριγωνομετρική παράσταση ή μορφή* του μιγαδικού.

Εφαρμογή: Ο μιγαδικός $\sqrt{3} - i$ νά γραφεί με την τριγωνομετρική μορφή.

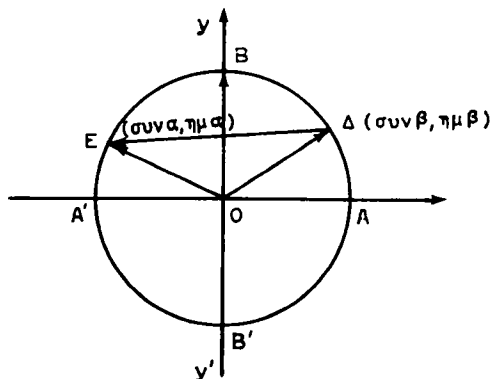
Είναι $x = \sqrt{3}$, $y = -1$. άρα $\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Ακολουθώς:

$\cos \theta = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin \theta = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{2}$, και ή μόνη γωνία από τό διάστημα $(-\pi, \pi]$ που έχει συνημίτονο ίσο με $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και ήμίτονο ίσο με $-\frac{1}{2}$ είναι ή γωνία με μέτρο $-\frac{\pi}{6}$.

$$\text{Ώστε: } \sqrt{3} - i = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

26.3 Εφαρμογές και παραδείγματα.

1. Θεωρούμε δύο τόξα $\widehat{AE}$ και $\widehat{AD}$ σέ τριγωνομετρικό κύκλο με κοινή άρχή την άρχή A των τόξων και τά όποια έχουν μέτρα α και β αντίστοιχως. Νά εκφρασθεί τό συνημίτονο του τόξου $\alpha - \beta$ συναρτήσει των συνημιτόνων και ήμιτόνων των τόξων α και β .



Σχ. 26.3.

Τό σύστημα των άξόνων συνημιτόνων και ήμιτόνων είναι ένα όρθοκανονικό σύστημα στο επίπεδο του θεωρούμενου τριγωνομετρικού κύκλου και οί

συντεταγμένες (x_1, y_1) του Δ και (x_2, y_2) του E είναι αντίστοιχα $x_1 = \sin \beta$, $y_1 = \eta\mu \beta$ και $x_2 = \sin \alpha$, $y_2 = \eta\mu \alpha$ (σχ. 26·3).

Έτσι συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα $\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$ έχει συντεταγμένες $x' = \sin \alpha - \sin \beta$ και $y' = \eta\mu \alpha - \eta\mu \beta$ και μέτρο:

$$|\vec{DE}| = \sqrt{(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\eta\mu \alpha - \eta\mu \beta)^2}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα το νόμο του συννημιτόνου στο τρίγωνο $OΔE$ και παίρνουμε:

$$|\vec{DE}|^2 = |\vec{OD}|^2 + |\vec{OE}|^2 - 2 |\vec{OD}| \cdot |\vec{OE}| \sin(\widehat{OD, OE}), \text{ δηλαδή:}$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\eta\mu \alpha - \eta\mu \beta)^2 = 1 + 1 - 2 \sin(\alpha - \beta) \implies$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta + \eta\mu^2 \alpha + \eta\mu^2 \beta - 2 \eta\mu \alpha \eta\mu \beta =$$

$$= 2 - 2 \sin(\alpha - \beta) \implies$$

$$\implies 2 - 2(\sin \alpha \sin \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta) = 2 - 2 \sin(\alpha - \beta) \implies$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta} \quad (1)$$

Σημείωση: Στηριζόμενοι στον παραπάνω τύπο (1) παίρνουμε επίσης:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin \alpha \sin(-\beta) + \eta\mu \alpha \eta\mu(-\beta) = \sin \alpha \sin \beta - \eta\mu \alpha \eta\mu \beta.$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \sin[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta + \eta\mu(90^\circ - \alpha) \eta\mu \beta = \eta\mu \alpha \sin \beta + \sin \alpha \eta\mu \beta.$$

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu[\alpha + (-\beta)] = \eta\mu \alpha \cdot \sin(-\beta) + \sin \alpha \eta\mu(-\beta) = \eta\mu \alpha \sin \beta - \sin \alpha \eta\mu \beta.$$

Έτσι

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta} \quad (1)$$

$$\boxed{\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu \alpha \sin \beta - \sin \alpha \eta\mu \beta} \quad (2)$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \eta\mu \alpha \eta\mu \beta} \quad (3)$$

$$\boxed{\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu \alpha \sin \beta + \sin \alpha \eta\mu \beta} \quad (4)$$

2. I) Νά εκφραστούν τό $\eta\mu 2\alpha$ και τό $\sin 2\alpha$ συναρτήσει των $\eta\mu \alpha$, $\sin \alpha$.
II) Νά δοθούν τά $\eta\mu 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ και $\epsilon\phi 2\alpha$ συναρτήσει της $\epsilon\phi \alpha$.

I) Θέτοντας, στους παραπάνω τύπους (3) και (4), $\beta = \alpha$ παίρνουμε:

$$\boxed{\sin 2\alpha = \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha} \quad (5) \quad \text{και} \quad \boxed{\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu \alpha \sin \alpha} \quad (6)$$

$$\text{II) Έχουμε } \eta\mu 2\alpha = \frac{2 \eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \eta\mu^2 \alpha} = \frac{\frac{2\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} + \frac{\eta\mu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}} = \frac{2\epsilon\varphi \alpha}{1 + \epsilon\varphi^2 \alpha} \quad (7)$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \eta\mu^2 \alpha} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} - \frac{\eta\mu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} + \frac{\eta\mu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}} = \frac{1 - \epsilon\varphi^2 \alpha}{1 + \epsilon\varphi^2 \alpha} \quad (8)$$

(εφόσον $\sigma\upsilon\nu \alpha \neq 0$).

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\frac{2\epsilon\varphi \alpha}{1 + \epsilon\varphi^2 \alpha}}{\frac{1 - \epsilon\varphi^2 \alpha}{1 + \epsilon\varphi^2 \alpha}} = \frac{2\epsilon\varphi \alpha}{1 - \epsilon\varphi^2 \alpha} \quad (9) \quad (\text{εφόσον } \epsilon\varphi \alpha \neq 1).$$

3. Άν $z_1 = \rho_1 (\sigma\upsilon\nu \theta_1 + i \eta\mu \theta_1)$ και $z_2 = \rho_2 (\sigma\upsilon\nu \theta_2 + i \eta\mu \theta_2)$ νά βρεθεί:

I) τό γινόμενο $z_1 \cdot z_2$ και II) τό πηλίκο $z_1 : z_2$.

I) Είλναι: $z_1 \cdot z_2 =$

$$\begin{aligned} &= \rho_1 \rho_2 (\sigma\upsilon\nu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 + i^2 \eta\mu \theta_1 \eta\mu \theta_2 + i \eta\mu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 + i \sigma\upsilon\nu \theta_1 \eta\mu \theta_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\sigma\upsilon\nu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 - \eta\mu \theta_1 \eta\mu \theta_2) + i (\eta\mu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 + \sigma\upsilon\nu \theta_1 \eta\mu \theta_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i \eta\mu(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Ωστε: Τό γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών έχει μέτρο τό γινόμενο τών μέτρων τών παραγόντων και ὄρισμα τό ἄθροισμα τών ὀρισμάτων.

II) Έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \theta_1 + i \eta\mu \theta_1}{\sigma\upsilon\nu \theta_2 + i \eta\mu \theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu \theta_1 + i \eta\mu \theta_1)(\sigma\upsilon\nu \theta_2 - i \eta\mu \theta_2)}{(\sigma\upsilon\nu \theta_2 + i \eta\mu \theta_2)(\sigma\upsilon\nu \theta_2 - i \eta\mu \theta_2)} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 - i^2 \eta\mu \theta_1 \eta\mu \theta_2 + i \eta\mu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 - i \eta\mu \theta_2 \sigma\upsilon\nu \theta_1}{\sigma\upsilon\nu^2 \theta_2 + \eta\mu^2 \theta_2} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [(\sigma\upsilon\nu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 + \eta\mu \theta_1 \eta\mu \theta_2) + i (\eta\mu \theta_1 \sigma\upsilon\nu \theta_2 - \eta\mu \theta_2 \sigma\upsilon\nu \theta_1)] = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\sigma\upsilon\nu (\theta_1 - \theta_2) + i \eta\mu (\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Ωστε: Τό πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών έχει μέτρο τό πηλίκο τών μέτρων και ὄρισμα τή διαφορά τών ὀρισμάτων.

Συμπεράσματα: 1. Άν $z_1 = \rho_1 (\sigma\upsilon\nu \theta_1 + i \eta\mu \theta_1)$,

$z_2 = \rho_2 (\sigma\upsilon\nu \theta_2 + i \eta\mu \theta_2)$, ..., $z_n = \rho_n (\sigma\upsilon\nu \theta_n + i \eta\mu \theta_n)$, τότε:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n \cdot [\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]. \quad (\alpha)$$

(Νά γίνει ή απόδειξη μέ τή μέθοδο τής τελείας επαγωγής).

2. *Αν $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = \rho (\sin \theta + i \eta \mu \theta)$, τότε από την (α) παίρνουμε:

$$z^n = \rho^n [\sin(n\theta) + i \eta \mu(n\theta)] \quad (\beta) \quad \text{Τύπος του Μοίντε (Μοάβρ)}$$

*Εφαρμογή του τύπου (β): *Νά βρεθούν οι κυβικές ρίζες του $-i$.*

$$\text{Είναι: } -i = 1 \cdot \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

*Εστω $z = \rho(\sin \theta + i \eta \mu \theta)$ ένας μιγαδικός για τον οποίο έχουμε: $z^3 = -i$. Σύμφωνα με τον τύπο του Μοίντε πρέπει να είναι $\rho^3 (\sin 3\theta + i \eta \mu 3\theta) = 1 \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$. Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε

$\rho^3 = 1$, άρα $\rho = 1$, και $3\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. Για $k = 0$ παίρνουμε $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$, για

$k = 1$, $\theta_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ και για $k = 2$ έχουμε $\theta_3 = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

*Όταν στον k δώσουμε άλλες ακέραιες τιμές παίρνουμε τόξα που διαφέρουν από τα παραπάνω $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{7\pi}{6}$, κατά πολλαπλάσιο του 2π . συνεπώς τα συνημίτονα και τα ημίτονά τους είναι τα ίδια με εκείνα των τριών παραπάνω τόξων.

*Αρα οι τιμές που μπορεί να πάρει ο z είναι:

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho \left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}, \quad z_2 = \\ &= \rho \left(\sin \frac{\pi}{2} + i \eta \mu \frac{\pi}{2} \right) = i, \quad z_3 = \rho \left(\sin \frac{7\pi}{6} + i \eta \mu \frac{7\pi}{6} \right) = \\ &= \rho \left[\sin\left(-2\pi + \frac{7\pi}{6}\right) + i \eta \mu\left(-2\pi + \frac{7\pi}{6}\right) \right] = \\ &= \rho \left[\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

26.4 Ασκήσεις.

1. *Αν $\epsilon \phi \alpha = \frac{3}{4}$ και $\sigma \phi \beta = \frac{5}{12}$ και τό τόξο α λήγει στο τρίτο τεταρτημόριο ενώ τό β λήγει στο πρώτο να βρεθούν: τό $\eta \mu (\alpha - \beta)$ και τό $\sin (\alpha + \beta)$.

2. Ν' αποδειχθεί ότι $\eta \mu (\alpha + \beta) \sin \beta - \sin (\alpha + \beta) \eta \mu \beta = \eta \mu \alpha$.

3. Οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z' = -1 - i\sqrt{3}$, $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = (1-i)^2$ να γραφούν με την τριγωνομετρική μορφή.

4. Νά βρεθεί τό μέτρο καί τό ὄρισμα καθενός ἀπό τούς μιγαδικούς: $z = (1 + i)^6$, $z' = i(-\sqrt[3]{3} + i) \cdot (2 - 2\sqrt[3]{3}i) \cdot (4 - 4i)$.

5. Νά ἐκφρασθεῖ ἡ $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$ καί ἡ $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$ συναρτήσῃ τῶν $\epsilon\phi\alpha$ καί $\epsilon\phi\beta$, ἂν $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ καί $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$.

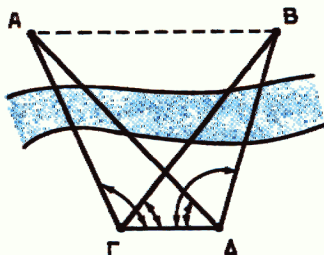
6. Νά προσδιορισθεῖ μιγαδικός z τέτοιος ὥστε $z^4 = 1 + i\sqrt[3]{3}$.

7. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta$.

8. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $\sin x + \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} + x\right) = 0$.

Άσκήσεις γιά ἐπανάληψη.

1. Θέλομε νά μετρήσουμε τήν ἀπόσταση τῶν σημείων A καί B τά ὁποῖα μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ἀπό τίς θέσεις Γ καί Δ (στήν περιοχή τῶν ὁποίων βρισκόμαστε), ἀλλά εἶναι ἀπρόσιτα λόγω φυσικῶν ἐμποδίων καί δέν μποροῦμε νά μετρήσουμε ἄμεσα μίαν ἀπόσταση π.χ. σάν τή ΔB (σχ. 26·4). Ἀναγκαστικά λοιπόν ἀκολουθοῦμε τήν παρακάτω διαδικασία. Μετῶμε τό μήκος $\Gamma\Delta$ καί τίς γωνίες $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\varphi}$, $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{x}$, $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{y}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta B} = \widehat{\omega}$. Πῶς ἀπό τά στοιχεῖα $\Gamma\Delta = \lambda$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{\omega}$ θά ὑπολογίσουμε τό μήκος AB ;



Σχ. 26·4.

(Υπόδειξη : Στό τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, ἐφαρμόζοντας τό νόμο τῶν ἡμιτόνων, βρίσκουμε τήν πλευρά $A\Delta$. Ὅμοια ὑπολογίζουμε τήν πλευρά $B\Delta$ τοῦ τριγώνου $\Gamma\Delta B$ καί κατόπιν, ἐφαρμόζοντας τό νόμο τοῦ συνημιτόνου στό τρίγωνο $AB\Delta$, ὑπολογίζουμε τήν AB).

2. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού ὀρίζουν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

$$I) \quad y = 2 \epsilon\phi\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) \quad II) \quad y = 3 \sigma\phi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2.$$

3. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $\eta\mu x + \eta\mu\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ καί γιά ἐφαρμογή ν' ἀποδείξετε ὅτι :

«Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν στιγμιαίων τιμῶν τῶν ἡλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων τῶν τριῶν φάσεων, σ' ἓνα ἀνεξάρτητο τριφασικό σύστημα, εἶναι ἴσο μέ μηδέν».

[Υπόμνηση: Οἱ ἡλεκτρεγερτικές δυνάμεις τῶν τριῶν φάσεων δίνονται ἀπό τούς τύπους:

$$E_1 = V_0 \eta\mu \omega t, \quad E_2 = V_0 \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad E_3 = V_0 \eta\mu\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)].$$

4. "Αν $z = \sin \theta + i \eta \mu \theta$ ν' αποδειχθεί ότι $z^n + z^{-n} = 2 \sin(n\theta)$ και $z^n - z^{-n} = 2i \eta \mu(n\theta)$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

5. Νά βρεθούν οι αριθμοί $(-1 + i\sqrt{3})^{29}$, $(2\sqrt{3} + 2i)^{123}$.

6. "Αν τὰ τόξα α και β περιέχονται στο άνοικτό διάστημα $(0, \pi)$, ν' αποδειχθεί ότι: $\eta \mu(\alpha + \beta) < \eta \mu \alpha + \eta \mu \beta$.

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι: $-1 < \sin \alpha < 1$ και $-1 < \sin \beta < 1$ και πολλαπλασιάστε τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπί $\eta \mu \beta$ και τῆς δεύτερης ἐπί $\eta \mu \alpha$).

7. Ν' αποδειχθούν οι ταυτότητες: I) $1 + \sigma \varphi^2 x = \frac{1}{\eta \mu^2 x} (x \neq \kappa \pi)$.

$$\text{II)} \quad \frac{\frac{1}{\sin x} - \sin x}{\frac{1}{\eta \mu x} - \eta \mu x} = \varepsilon \varphi^3 x \left(x \neq \kappa \pi \text{ και } x \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{III)} \quad \frac{1}{\sin^2 \omega} = 1 + \frac{\varepsilon \varphi \omega}{\sigma \varphi \omega} \left(\omega \neq \kappa \pi, \omega \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{VI)} \quad \frac{\varepsilon \varphi \omega + \sigma \varphi \omega}{\varepsilon \varphi \omega - \sigma \varphi \omega} = \frac{1}{\sin^2 \omega (\varepsilon \varphi^2 \omega - 1)} \left(\omega \neq \kappa \pi, \omega \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \omega \neq \kappa \pi \pm \frac{\pi}{4} \right).$$

8. Ν' αποδείξετε ότι $\eta \mu^2 x = \frac{1}{1 + \sigma \varphi^2 x}$ και $\sin^2 x = \frac{\sigma \varphi^2 x}{1 + \sigma \varphi^2 x} \forall x \neq \kappa \pi$.

9. Ν' αποδειχθεί ότι $2(1 - \eta \mu x \eta \mu y) \geq \sin^2 x + \sin^2 y$ για όποιαδήποτε τόξα x και y .

(Υπόδειξη: Αντικαταστήστε τὰ $\sin^2 x$ και $\sin^2 y$ με $1 - \eta \mu^2 x$ και $1 - \eta \mu^2 y$).

10. Ποῦ πρέπει νά λήγει ένα τόξο x για νά ισχύει ἡ σχέση $\varepsilon \varphi x + \sigma \varphi x \geq 2$.

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε αρχικά ότι οι αριθμοί $\varepsilon \varphi x$ και $\sigma \varphi x$ τοῦ ἴδιου τόξου x είναι αντίστροφοι και συνεπῶς ὁμόσημοι· ἄρα ἔδῳ θετικοί).

11. Ν' αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$\text{I)} \quad \eta \mu^2 \theta \varepsilon \varphi \theta + \sin^2 \theta \sigma \varphi \theta + 2 \eta \mu \theta \sin \theta = \varepsilon \varphi \theta + \sigma \varphi \theta.$$

$$\text{II)} \quad (1 + \varepsilon \varphi y)(1 + \sigma \varphi y) \eta \mu y \sin y = (\eta \mu y + \sin y)^2 \left(y \neq \kappa \pi, y \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{III)} \quad \frac{1}{\eta \mu^2 \omega \sin^2 \omega} = \varepsilon \varphi^2 \omega + \sigma \varphi^2 \omega + 2.$$

12. Νά ὀρισθεῖ ἡ τιμή τοῦ λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ὥστε ἡ παράσταση:

$A = \eta \mu^6 x + \sin^6 x + \lambda(\eta \mu^4 x + \sin^4 x)$ νά είναι ανεξάρτητη από τήν τιμή τοῦ x .

[Υπόδειξη: Ἐφαρμόστε τίς ταυτότητες $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta$ ($\alpha + \beta$) και $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ με $\alpha = \eta \mu^2 x$ και $\beta = \sin^2 x$].

13. "Αν $\frac{\varepsilon \varphi x - \varepsilon \varphi y}{1 + \varepsilon \varphi x \cdot \varepsilon \varphi y} = -\frac{\eta \mu y \sin y}{3 - \sin^2 y}$, τότε θά είναι και $2\varepsilon \varphi x = 3\varepsilon \varphi y$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 27

ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

27.1 Όριακές τιμές συναρτήσεων.

α) Ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή τείνει πρὸς μίαν ὀρισμένη πραγματική τιμή.

Παράδειγμα 1ο. Ἄς πάρουμε τή συνάρτηση μέ τύπο $f(x) = 4x - 1$ πού, ὅπως ξέρομε, εἶναι ὀρισμένη σ' ὅλο τό σύνολο $\mathbb{R}$.

Γιά $x = 2$ ἔχομε ἀντίστοιχα $y = f(2) = 7$.

Ὅταν δίνουμε στό x τιμές μεγαλύτερες ἢ μικρότερες τοῦ 2, ἀλλά ὅλο καί πιο γειτονικές στήν τιμή 2, διαπιστώνουμε, ἀπό τόν παρακάτω πίνακα, ὅτι οἱ ἀντίστοιχες τιμές τοῦ y εἶναι ὅλο καί πιο κοντινές στόν ἀριθμό 7 (ἀντίστοιχα μεγαλύτερες ἢ μικρότερες).

x	1,7	1,8	1,9	1,99	2	2,01	2,1	2,2	2,3
y	5,8	6,2	6,6	6,96	7	7,04	7,4	7,8	8,2

Μποροῦμε ν' ἀποδείξουμε ὅτι σέ κάθε δοσμένο ἀριθμό $\varepsilon > 0$ εἶναι δυνατό ν' ἀντιστοιχιστεῖ ἓνας ἀριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ὥστε: γιά κάθε τιμή τοῦ x γιά τήν ὁποία εἶναι $|x - 2| < \delta$ νά ἔχομε ἀντίστοιχα $|f(x) - 7| < \varepsilon$.

Πράγματι: Θέλομε νά ἔχομε $|(4x - 1) - 7| < \varepsilon$, ὅπου ε ἓνας αὐθαίρετα δοσμένος θετικός ἀριθμός. Εἶναι $|4x - 1 - 7| < \varepsilon \iff 4|x - 2| < \varepsilon \iff |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \iff -\frac{\varepsilon}{4} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{4} \iff 2 - \frac{\varepsilon}{4} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{4}$.

Γιά ἀριθμό δ μποροῦμε λοιπόν νά πάρουμε τόν $\frac{\varepsilon}{4}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

ὅταν ὁ x παίρνει τιμές μέσα στό διάστημα $\left(2 - \frac{\varepsilon}{4}, 2 + \frac{\varepsilon}{4}\right)$, τότε οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς $f(x)$ θά διαφέρουν ἀπό τήν τιμή 7 λιγότερο ἀπό ε .

Ἄν π.χ. θέλομε νά ἔχομε $|f(x) - 7| < 0,04$, τότε ὁ x πρέπει καί ἀρκεῖ νά παίρνει τιμές μέσα στό διάστημα $(1,99, 2,01)$.

Έκφράζουμε τήν παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ότι:

Όταν x τείνει προς τόν (ἀριθμό) 2, ἡ συνάρτηση $f(x) = 4x - 1$ ἔχει ὀριακή τιμή (ἔχει ὄριο) τόν (ἀριθμό) 7.

Γράφουμε συμβολικά: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$ (limes = ὄριο).

Παρατηροῦμε ὅτι, στό παράδειγμά μας, ἡ ὀριακή τιμή τῆς συναρτήσεως, ὅταν $x \rightarrow 2$, εἶναι ἡ ἴδια ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως πού ἀντιστοιχίζεται στήν τιμή $x = 2$ τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς.

Παράδειγμα 2ο. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή συνάρτηση μέ τύπο:

$$g(x) = \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2}, \text{ ἡ ὁποία εἶναι ὀρισμένη στό σύνολο } \mathbb{R} - \{2\}.$$

Τιμές τῆς συναρτήσεως $g(x)$ εἶναι οἱ τιμές τοῦ πολυωνύμου:

$$4x - 1 = \frac{(x - 2)(4x - 1)}{x - 2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, [4x^2 - 9x + 2 = (x - 2)(4x - 1)].$$

$$\text{Ἄρα: } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 7.$$

Ἐδῶ παρατηροῦμε τά ἑξῆς: Μολονότι ἡ συνάρτηση δέν εἶναι ὀρισμένη στή θέση 2, μολονότι δηλαδή δέν ὑπάρχει στήν τιμή 2 ἀντίστοιχη τιμή τῆς συναρτήσεως, ὑπάρχει ὁμως ὀριακή τιμή ὅταν $x \rightarrow 2$. ὑπάρχει, μ' ἄλλα λόγια, ἀριθμός (ἐδῶ εἶναι ὁ ἀριθμός 7) πρὸς τόν ὁποῖο «ἀδιάκοπα πλησιάζουν» οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως καθόσον οἱ τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς γίνονται ὁλοένα πιο γειτονικές μέ τόν 2.

Παράδειγμα 3ο. Θά πάρομε τώρα τή συνάρτηση μέ τύπο $\varphi(x) = x + \frac{|x|}{x}$.

Αὕτη εἶναι ὀρισμένη στό σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$. Ἐπειδὴ γιά $\forall x < 0$ ἡ παραπάνω παράσταση γράφεται $x + \frac{-x}{x} = x - 1$, ἐνῶ γιά $\forall x > 0$ γράφεται

$x + \frac{x}{x} = x + 1$, καί ἐπειδὴ ὁ ἀριθμός μηδέν δέν ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, σκεφτόμαστε ὅτι ἔχει ἐνδιαφέρον ν' ἀσχοληθοῦμε μέ τή «συμπεριφορά» τῆς συναρτήσεως γύρω ἀπὸ τή θέση $x = 0$.

Ἔτσι διακρίνομε δύο περιπτώσεις, καθόσον $x < 0$ ἢ $x > 0$, καί ἀναζητοῦμε (ἂν ὑπάρχει) ὀριακή τιμή τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$, ὅταν «ὁ x τείνει στό μηδέν μέσω ἀρνητικῶν τιμῶν» ἢ, ὅπως ἀλλιῶς λέμε, ὅταν «ὁ x τείνει στό μηδέν ἀπὸ ἀριστερά» καί ἐπίσης ὅταν «ὁ x τείνει στό μηδέν ἀπὸ δεξιά» (ὅταν ὁ x τείνει στό μηδέν μέσω θετικῶν τιμῶν).

Σημειώνομε συμβολικά γιά τίς δύο περιπτώσεις ἀντίστοιχα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) \quad \Bigg| \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$$

Καί έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 \quad \left| \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \right.$$

Όπως βλέπουμε, η όριακή τιμή της συναρτήσεως, όταν ο x τείνει στο 0 μέσω αρνητικών τιμών, είναι διαφορετική από την όριακή της τιμή, όταν ο x τείνει στο μηδέν μέσω θετικών τιμών. Τά δυό (διαφορετικά) αυτά όρια τά λέμε **μονόπλευρα**.

Επειδή στο παράδειγμά μας, τά δυό μονόπλευρα όρια, απ' άριστερά και δεξιά του μηδενός, είναι διαφορετικά, λέμε ότι **η συνάρτηση δεν έχει όριο στη θέση μηδέν**.

Παράδειγμα 4ο. Θεωρούμε ακόμα τή συνάρτηση που παρέχει η εξίσωση $y = \text{Ακ} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$, ή όποια είναι όρισμένη παντού μέσα στο $\mathbb{R}$. Ζητάμε, αν υπάρχει, τό $\lim_{x \rightarrow 0} y$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$, ενώ $f(x) = 0$ για $\forall x \neq 0$,

διότι $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Άρα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$.

Όστε στην προκειμένη περίπτωση ή συνάρτηση, που είναι όρισμένη στη θέση $x = 0$, έχει καί όριακή τιμή όταν $x \rightarrow 0$, αλλά αυτή ή όριακή τιμή είναι διαφορετική από την τιμή που παίρνει ή συνάρτηση για $x = 0$. Είναι δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$.

Παράδειγμα 5ο. Θά πάρομε τέλος τή συνάρτηση μέ τύπο $\sigma(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$,

της όποιας πεδίο όρισμού είναι τό σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$. Είναι εύκολο ν' αποδείξομε ότι για όποιονδήποτε αυθαίρετα δοσμένο αριθμό $M > 0$ υπάρχει αντίστοιχα ένα διάστημα τιμών του x , στην περιοχή του αριθμού 1, για τό όποιο έχουμε:

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M.$$

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι: } \frac{4}{(x-1)^2} > M &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{M} \Leftrightarrow (x-1)^2 < \frac{4}{M} \Leftrightarrow \\ |x-1| < \frac{2}{\sqrt{M}} &\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{M}} < x-1 < \frac{2}{\sqrt{M}} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{2}{\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

Αν π.χ. $M = 10000$, για νά έχουμε $y > 10000$ πρέπει καί άρκεί ό x νά παίρνει τιμές στό διάστημα $1 - \frac{2}{100} < x < 1 + \frac{2}{100}$ δηλαδή στό $0,98 < x < 1,02$.

Εκφράζουμε τήν παραπάνω ιδιότητα λέγοντας: όταν ο x τείνει στον αριθμό 1, ή συνάρτηση $\sigma(x)$ τείνει στο $+\infty$ ή ότι έχει όριο τό $+\infty$. Γράφουμε συμβολικά: $\lim_{x \rightarrow 1} \sigma(x) = +\infty$.

Όμοια για τή συνάρτηση μέ τύπο $y = -\frac{4}{(x-1)^2}$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{4}{(x-1)^2} \right) = -\infty.$$

Γιά τή συνάρτηση όμως μέ τύπο $\rho(x) = \frac{1}{x-1}$, πού έχει τό ίδιο πεδίο ορισμού μέ τή $\sigma(x)$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \rho(x) = -\infty \quad (\text{διότι για } \forall x < 1 \text{ είναι } \frac{1}{x-1} < 0).$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \rho(x) = +\infty \quad (\text{διότι για } \forall x > 1 \text{ είναι } \frac{1}{x-1} > 0).$$

Δηλαδή ή συνάρτηση $\rho(x)$ δέν έχει ως όριο τό ίδιο «προσσημασμένο άπειρο» όταν $x \rightarrow 1$ άπ' άριστερά ή άπό δεξιά του 1. Άρα ή συνάρτηση $\rho(x)$ δέν έχει όριο στή θέση 1.

β) 'Η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξάνει άπολύτως άπεριόριστα και τείνει μέσω θετικών (άντίστοιχα άρνητικών) τιμών προς τό $+\infty$ (άντίστοιχα προς τό $-\infty$).

Άς θεωρήσουμε πάλι τήν παραπάνω συνάρτηση μέ τύπο $\rho(x) = \frac{1}{x-1}$.

Είναι εύκολο νά πεισθοῦμε ότι ή $\rho(x)$ παίρνει τιμές άπολύτως μικρότερες άπό όποιονδήποτε αριθμό $\varepsilon > 0$, άρκεί ο x νά παίρνει τιμές άπολύτως μεγαλύτερες άπό κατάλληλα οριζόμενο αριθμό $M > 0$.

$$\text{Πράγματι: Είναι } \left| \frac{1}{x-1} \right| < \varepsilon \iff |x-1| > \frac{1}{\varepsilon} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x-1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x-1 < -\frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x < 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

Άν π.χ. θέλουμε νά είναι $\left| \frac{1}{x-1} \right| < \frac{1}{1000}$ πρέπει και άρκεί νά δίνουμε στό x τιμές $> 1 + 1000 = 1001$ ή $< 1 - 1000 = -999$.

Εκφράζουμε τήν παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ότι ή συνάρτηση $\rho(x)$ έχει όριο τό μηδέν, όταν $x \rightarrow -\infty$ ή $x \rightarrow +\infty$.

$$\text{Γράφουμε συμβολικά: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x) = 0$$

καί συνοπτικότερα: $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = 0$

Όμοια συμπεραίνουμε ότι π.χ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) = 2$.

Ας πάρουμε όμως και τή συνάρτηση μέ τύπο $y = 25x^2$. Παρατηρούμε ότι για όποιονδήποτε δοσμένο αριθμό $M > 0$ μπορούμε πάντοτε νά προσδιορίσουμε έναν $P > 0$ τέτοιον ώστε για τιμές του x (θετικές ή αρνητικές) μέ $|x| > P$ νά είναι $25x^2 > M$.

Πράγματι: είναι $f(x) = 25x^2 > M \iff |x| > \frac{\sqrt{M}}{5} \iff$

$$\iff \begin{cases} x > \frac{\sqrt{M}}{5} \\ \text{ή} \\ x < -\frac{\sqrt{M}}{5} \end{cases} \quad \text{Αν π.χ. } M = 90000 \text{ θά έχουμε } y > 90000 \quad \forall x > \frac{300}{5} = 60$$

$$\text{ή} \quad x < -\frac{300}{5} = -60.$$

Εκφράζουμε τήν ιδιότητα αυτή λέγοντας: όταν x τείνει στο $\pm \infty$ ή συνάρτηση τείνει στο $+\infty$ (ή έχει όριο τό $+\infty$).

Γράφουμε συμβολικά: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Όμοια συμπεραίνουμε ότι: π.χ.: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

27.2 Ιδιότητες τών ορίων.

α) Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $\varphi(x)$ και $g(x)$ έχουν τό ίδιο πεδίο ορισμού και σέ μιά θέση $x = x_0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ και είναι πάντα

$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = l$.

β) Θεωρούμε δυό συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ μέ τό ίδιο πεδίο ορισμού και υποθέτουμε ότι σέ μιά θέση $x = x_0$ ή μέ $x \rightarrow \pm \infty$ οι συναρτήσεις έχουν όριακές τιμές ορισμένους πραγματικούς αριθμούς. Τότε για τά όρια αυτά θά ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

I) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

II) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

III) $\lim [f(x) : g(x)] = \lim f(x) : \lim g(x)$, εφόσον $\lim g(x) \neq 0$.

IV) $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ για κάθε τιμή του πεδίου ορισμού.

$$\vee) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

$$\vee\iota) \text{ "Αν } \kappa \text{ σταθερά, τότε } \lim_{x \rightarrow \infty} [\kappa f(x)] = \kappa \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

γ) Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ με τό ίδιο πεδίο ορισμού και υποθέτουμε ότι σε μία θέση $x = x_0$ ή με $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$ ή μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις έχει όριο ένα προσημασμένο άπειρο ($+\infty$ ή $-\infty$). Σ' αυτές τις περιπτώσεις ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Ι) "Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm \infty$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \pm \infty \text{ εφόσον } \kappa > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \mp \infty \text{ εφόσον } \kappa < 0.$$

ΙΙ) "Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm \infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

ΙΙΙ) "Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$, τότε και

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$ · επίσης με $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$.

Πράξεις με όριακές τιμές: Οι προηγούμενες ιδιότητες (β) και (γ) περιέχονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα, όπου με φ , ω συμβολίζουμε δύο συναρτήσεις και με φ_0 , ω_0 τις όριακές τους τιμές αντίστοιχα, όταν αυτές είναι πραγματικοί αριθμοί.

φ	ω	$\varphi + \omega$	$\varphi \cdot \omega$	$\frac{\varphi}{\omega}$
φ_0	ω_0	$\varphi_0 + \omega_0$	$\varphi_0 \cdot \omega_0$	$\frac{\varphi_0}{\omega_0} (\omega_0 \neq 0)$
φ_0	∞	∞	∞ (άν $\varphi_0 \neq 0$)	0
∞	ω_0	∞	∞ (άν $\omega_0 \neq 0$)	∞
0	0	0	0	;
0	∞	∞	;	0
∞	0	∞	;	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	;
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;
$+\infty$	$-\infty$	;	$-\infty$	;
$-\infty$	$+\infty$	;	$-\infty$	;

Σημείωση: Υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις έχουν τό ίδιο πεδίο ορισμού και ότι έχουν όριο έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ή ένα προσημασμένο άπειρο, όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ ή $x \rightarrow \pm \infty$.

Τά έρωτηματικά, όπου υπάρχουν, έχουν τό νόημα ότι ή όριακή τιμή του άθροίσματος ή του γινομένου ή του πηλίκου, στίς αντίστοιχες περιπτώσεις, δέν καθορίζεται από τά πρίν και μονοσήμαντα μέσω των όριακών τιμών των δυό αρχικών συναρτήσεων· υπάρχει — όπως συνήθως διατυπώνουμε — άπροσδιοριστία.

Αν π.χ. $\varphi(x) \rightarrow 0$ και $\omega(x) \rightarrow 0$ (μέ $x \rightarrow x_0$ ή $x \rightarrow \pm \infty$), τό πηλίκο $\frac{\varphi(x)}{\omega(x)}$ μπορεί κατά περίπτωση νά έχει όριο τό 0 ή έναν άλλο πραγματικό αριθμό ή τό $+\infty$ ή τό $-\infty$ ή ακόμα νά μήν έχει κανένα όριο.

Παρακάτω στίς εφαρμογές θά προσδιορίσουμε τίς όριακές τιμές σέ μερικές περιπτώσεις άπροσδιοριστίας.

δ) Δυό σημαντικές ιδιότητες για τίς όριακές τιμές πολυωνύμων.

1. Όπως είδαμε και στό 1ο παράδειγμα [παράγρ. 27 · 1 (α)], ή όριακή τιμή ενός πολυωνύμου $f(x)$ σέ κάθε θέση $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι ή ίδια ή τιμή πού παίρνει τό πολυώνυμο για $x = x_0$ · δηλαδή έχουμε πάντοτε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Τό όριο ενός πολυωνύμου του x , όταν $x \rightarrow \pm \infty$, είναι τό ίδιο μέ τό όριο του μεγιστοβαθμίου όρου του πολυωνύμου.

Δηλαδή: αν $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ (μέ $a_0 \neq 0$), τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 x^n \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0 x^n.$$

Πράγματι :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(a_0 x^n) \cdot \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0 x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0 x^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0 x^n} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 x^n) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0 x} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0 x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 x^n), \end{aligned}$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0 x} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0 x^n} \right) = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1.$$

Παρατηρήσεις : I) Θά ονομάζουμε πόλο μιās ρητής συναρτήσεως $y = f(x)$ κάθε τιμή $x = \alpha \in \mathbb{R}$ για την όποια έχουμε $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty$. Ή ευθεία μέ εξίσωση $x = \alpha$ (παράλληλη στον άξονα $y'y$) είναι τότε μιá ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως.

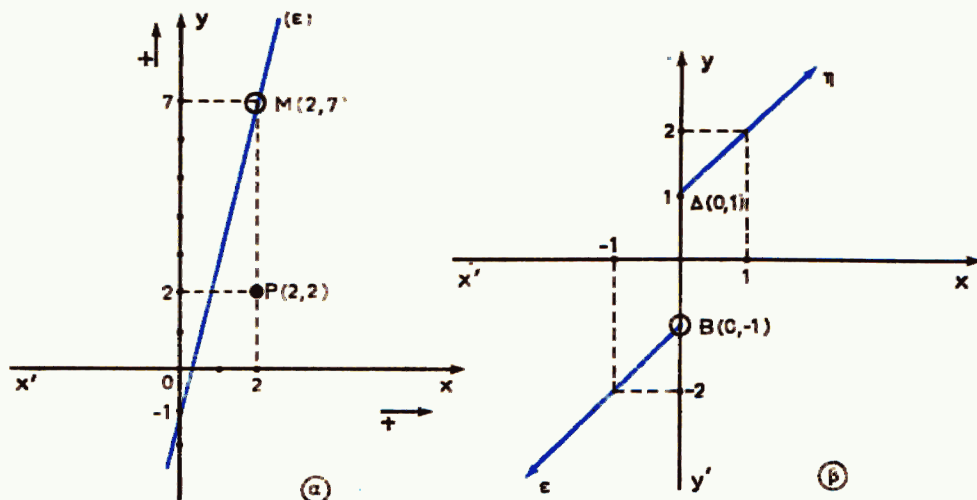
II) Τά σύμβολα $+\infty$, $-\infty$ δέν πρέπει σέ καμιά περίπτωση νά θεωρούνται ως αριθμοί.

27.3 Συναρτήσεις συνεχείς. Σημεία άσυνεχίας.

α) Γνωρίζουμε πλέον ότι κάθε πολυώνυμο $f(x)$ είναι συνάρτηση ορισμένη παντού μέσα στο $\mathbb{R}$ και ότι η τιμή που παίρνει η συνάρτηση, για μία οποιαδήποτε τιμή x_0 του x , ταυτίζεται με την όριακή τιμή της συναρτήσεως σ' αυτή τη θέση x_0 .

Έκφράζουμε αυτή την ιδιότητα συνοπτικά λέγοντας ότι: **η συνάρτηση είναι συνεχής παντού μέσα στο πεδίο ορισμού της.**

Ας πάρουμε όμως τη συνάρτηση με τύπο $g(x) = \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2}$, που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{2\}$ και ισοδυναμεί με την $f(x) = 4x - 1 \quad \forall x \neq 2$. Η γραφική παράσταση της $y = 4x - 1$ είναι μία ευθεία (ϵ) που ορίζεται π.χ. από τα σημεία $(0, -1)$ και $(2, 7)$ [σχ. 27.3 (α)].



Σχ. 27.3.

Επειδή η $y = g(x)$ εξομοιώνεται με την $f(x)$ για κάθε τιμή του x εκτός από την 2, έπεται ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι η ευθεία (ϵ) με εξαίρεση του σημείου $M(2, 7)$. Εξάλλου γνωρίζουμε [παράδειγμα 2, παράγρ. 27.1 (α)] ότι $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 7$. Λέμε πάλι ότι η $g(x)$ είναι συνεχής σε κάθε θέση από το

σύνολο $\mathbb{R} - \{2\}$. Για την τιμή $x = 2$ δεν μπαίνει ζήτημα συνέχειας της $g(x)$, μία και η τιμή αυτή δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.

Ας θεωρήσουμε τώρα και τις δύο συναρτήσεις $g_1(x)$, $g_2(x)$ που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{για } x = 2 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 2 & \text{για } x = 2 \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι πλέον παντοῦ ὁρισμένες μέσα στο $\mathbb{R}$. Ἐπίσης $\lim_{x \rightarrow 2} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4x-1) = 7 = \lim_{x \rightarrow 2} g_2(x)$.

Γιὰ τὴ $g_1(x)$ ἔχομε $\lim_{x \rightarrow 2} g_1(x) = g_1(2)$ καὶ συνεπῶς ἡ $g_1(x)$ εἶναι συνεχὴς καὶ στὴ θέση 2. Ἡ $g_2(x)$ ὅμως δὲν εἶναι συνεχὴς στὴ θέση 2, διότι ἡ ὁριακὴ τῆς τιμὴ 7, ὅταν $x \rightarrow 2$, δὲν συμπίπτει μὲ τὴν τιμὴ $g_2(2) = 2$ τῆς συναρτήσεως γιὰ $x = 2$.

Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς $g_1(x)$ εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε) [σχ. 27·3 (α)] μαζί καὶ μὲ τὸ σημεῖο $M(2, 7)$, ἐνῶ τῆς $g_2(x)$ εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε) χωρὶς τὸ σημεῖο $M(2, 7)$, ἀλλὰ μαζί μὲ τὸ σημεῖο $P(2, 2)$.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα μποροῦμε νὰ συμπεράνομε τὸν παρακάτω ὁρισμό: Μιὰ συνάρτηση $f(x)$ λέγεται συνεχὴς σὲ μιὰ θέση x_0 τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς ἂν καὶ μόνον ἂν ἔχει ὁριακὴ τιμὴ ὅταν $x \rightarrow x_0$ καὶ ἡ ὁριακὴ αὐτὴ τιμὴ ταυτίζεται μὲ τὴν τιμὴ $f(x_0)$ τῆς συναρτήσεως γιὰ $x = x_0$.

Μιὰ συνάρτηση λέγεται συνεχὴς στὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ἂν εἶναι συνεχὴς σὲ κάθε θέση $x = x_0$ ἀπὸ τὸ πεδίο αὐτό.

Τώρα μποροῦμε νὰ καταλάβομε ὅτι ἡ συνάρτηση ποὺ ὁρίζει ὁ τύπος:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + \frac{|x|}{x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

δὲν εἶναι συνεχὴς στὴ θέση 0, διότι ἡ συνάρτηση δὲν ἔχει ὁριακὴ τιμὴ ὅταν $x \rightarrow 0$ [παράδειγμα 3, παράγρ. 27·1 (α)].

Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς παραπάνω συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς ἡμιευθεῖες B_e (χωρὶς τὴν ἀρχὴ B) καὶ Δ_η (μὲ τὴν ἀρχὴ Δ) ποὺ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ γραφικὲς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x - 1$ μὲ $x < 0$ καὶ $y = x + 1$ μὲ $x \geq 0$ [σχ. 27·3 (β)].

Ὅμοια ἡ συνάρτηση $y = A \kappa \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$ [παράδειγμα 4, παράγρ. 27·1 (α)]

δὲν εἶναι συνεχὴς στὴ θέση 0, διότι, ἂν καὶ ἔχει ὁριακὴ τιμὴ ὅταν $x \rightarrow 0$, αὐτὴ ἡ ὁριακὴ τιμὴ δὲν ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴ τῆς συναρτήσεως γιὰ $x = 0$. [Εἶναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ἐνῶ $f(0) = 1$].

$x \rightarrow 0$

β) Νά τώρα μερικές ἀξιόλογες ιδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

1. Ἄν δύο συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς σ' ἓνα καὶ τὸ ἴδιο διάστημα $[a, b]$ τότε: τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενό τους εἶναι ἐπίσης συνεχὴς συνάρτηση στὸ διάστημα $[a, b]$. ἀκόμα τὸ πηλίκο εἶναι συνεχὴς συνάρτηση γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ $x \in [a, b]$ ποὺ δὲ μηδενίζει τὸν παρονομαστή.

2. "Αν μιά συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε παίρνει τουλάχιστο μιά φορά κάθε τιμή περιεχόμενη μεταξύ $f(a)$ και $f(\beta)$. Ειδικά, αν $f(a)$ και $f(\beta)$ είναι αριθμοί ετερόσημοι, ή $f(x)$ μηδενίζεται τουλάχιστο για μιά τιμή $x = x_0$ μέ $a < x_0 < \beta$.

Παρατηρήσεις. 'Ο προσδιορισμός τών οριακών τιμών συναρτήσεων αποσκοπεῖ κυρίως στόν καθορισμό τῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ στά ἄκρα τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ τῆς ἢ στίς περιοχές τιμών τοῦ x πού δέν ἀνήκουν στό πεδίο ὀρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Ἡ ἐξέταση τῆς συνεχείας, πού θεμελιώνεται πάνω στήν οριακή τιμή, ἀποτελεῖ μέρος τῆς ἔρευνας γιά τή συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως γύρω ἀπό κάθε σημείο τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ τῆς.

"Όταν ἡ συνάρτηση δέν εἶναι συνεχής σέ κάποια θέση, τότε ἐκεῖ παρουσιάζεται μιά «διακοπή», ἕνα «κενό», ἕνα «πήδημα» στίς τιμές τῆς συναρτήσεως. Ἔχομε μιά ἄμεση ἐποπτική εἰκόνα αὐτοῦ τοῦ «χάσματος» ἀν κατασκευάσουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως· τότε στά σημεία ἀσυνεχείας βλέπομε ὅτι ἡ γραμμή «κόβεται» καί ἡ γραφική παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό ξεχωριστά κομμάτια.

27.4 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Δίνονται οἱ παρακάτω τρεῖς συναρτήσεις μέ τύπους :

$$I) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \quad \cdot \quad II) g(x) = \frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} \quad \cdot \quad III) h(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1}.$$

Νά βρεθοῦν τά πεδία ὀρισμοῦ καί τά $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ καί $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

Καί οἱ τρεῖς συναρτήσεις ἔχουν πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}$, διότι οἱ παρονομαστές δέν μηδενίζονται μέ πραγματικές τιμές τοῦ x . Ἐπειδή μέ $x \rightarrow \infty$ οἱ ἀριθμητές καί οἱ παρονομαστές τείνουν στό ἄπειρο, δέν μπορούμε νά ἐφαρμόσουμε τόν κανόνα τοῦ πηλίκου.

$$\text{Ἔχομε : } I) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \quad \text{καί τώρα :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

$$II) g(x) = \frac{x^2 \left(4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} \quad \text{καί ἀκολουθῶς :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{III) } h(x) = \frac{x^3 \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = x \cdot \frac{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \text{ και συνεπώς}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \\ &= -\infty \cdot \frac{2 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = -\infty \cdot 2 = -\infty. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Μπορούμε να βγάλουμε τό εξής γενικό συμπέρασμα: "Όταν έχουμε μία ρητή συνάρτηση (πηλίκιο πολυωνύμων) τότε: αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή το όριο της συναρτήσεως, για $x \rightarrow \infty$, είναι τό μηδέν· αν αριθμητής και παρονομαστής είναι πολυώνυμα του αὐτοῦ βαθμοῦ, τό όριο είναι τό πηλίκιο τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβαθμίων ὀρων· αν ὁ αριθμητής είναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου από τόν βαθμό τοῦ παρονομαστή, τότε τό όριο τῆς συναρτήσεως είναι ένα προσημασμένο ἄπειρο (για $x \rightarrow \pm \infty$).

$$2. \text{ Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο } y = (x - 2)^2 + \sqrt{\frac{4|x|}{x^2 + 2}}.$$

Νά βρεθεῖ τό $\lim_{x \rightarrow 0} y$.

$$\text{Ἔχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)^2 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4|x|}{x^2 + 2}} = 2^2 + 0 = 4.$$

$$3. \text{ Δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο } y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \text{ καί πεδίο ὀρισμοῦ}$$

τό $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Νά βρεθοῦν τά $\lim_{x \rightarrow 1} y$ καί $\lim_{x \rightarrow -2} y$.

Ἐπειδή μέ $x = 1$ μηδενίζεται ὁ αριθμητής καί ὁ παρονομαστής, ἔπεται ὅτι δέν μπορούμε νά ἐφαρμόσουμε τόν κανόνα τοῦ πηλίκου.

$$\text{Ἔχουμε: } y = \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x^2 + 1}{x + 2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}.$$

$$\text{ἄρα: } \lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)} = \frac{2}{3}.$$

Όταν $x \rightarrow -2$ τότε $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5$, ενώ τό $x + 2$ τείνει στο μη-

δέν μέσω αρνητικών τιμών, όταν $x \rightarrow -2^-$, καί μέσω θετικών τιμών όταν $x \rightarrow -2^+$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = -\infty \quad \text{καί}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = +\infty.$$

4. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$, όρισμένη στό $\mathbb{R}$ (γιατί;). Νά βρεθούν τά $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ καί $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$.

Πεδίο όρισμοῦ είναι τό $\mathbb{R}$ διότι $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έπειδή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x + 3)} = +\infty$$

$$\text{καί} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty, \quad \text{έπεται ότι} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty.$$

$$\text{Έπειδή} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty, \quad \text{έπε-}$$

ται ότι δέν μπορούμε νά εφαρμόσουμε τόν κανόνα τοῦ ἀθροίσματος $[+\infty + (-\infty)] \div$.

Γι' αυτό πρώτα μετασχηματίζουμε κατάλληλα τήν παράσταση. Γράφουμε:

$$y = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \frac{(x^2 + 2x + 3) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} =$$

$$= \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \frac{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \quad (\text{μέ } x \neq 0). \quad \text{Τώρα παίρνουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) + 1}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)}$.

Άραγε μπορεί να είναι συνεχής παντού μέσα στο $\mathbb{R}$; Αν όχι, μήπως υπάρχει δυνατότητα με κατάλληλη συμπλήρωση του όρισμού να εξουδετερώσουμε την ασυνέχεια όπου υπάρχει;

Η συνάρτηση είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που δεν μηδενίζει τον παρονομαστή. Έπειδή οι τιμές $x = -2$ και $x = 1$ μηδενίζουν τον παρονομαστή δεν μπορούν ν' ανήκουν στο πεδίο ορισμού· συνεπώς γι' αυτές δεν μπαίνει ζήτημα συνέχειας. Έπειδή $\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{2}{3}$ (βλέπε το παραπάνω παράδειγμα 3), ως θεωρή-

σομε τη συνάρτηση που ορίζει ο τύπος $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{1, -2\} \\ \frac{2}{3} & \text{για } x = 1 \end{cases}$

τότε η νέα συνάρτηση είναι συνεχής και στη θέση 1.

Για την τιμή $x = -2$ όμως δεν έχουμε τη δυνατότητα να επεκτείνουμε τον όρισμό έτσι ώστε η προκύπτουσα συνάρτηση να είναι συνεχής στη θέση $x = -2$,

διότι $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = +\infty$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{για } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{για } x = 1 \\ 4-x & \text{για } x > 1. \end{cases}$$

Νά μελετηθεί ως προς τη συνέχεια μέσα στο πεδίο ορισμού της και νά γίνει η γραφική της παράσταση.

Οι συναρτήσεις $y = x$ και $y = 4 - x$ είναι παντού συνεχείς μέσα στο $\mathbb{R}$. συνεπώς και η $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1)$, $(1, +\infty)$.

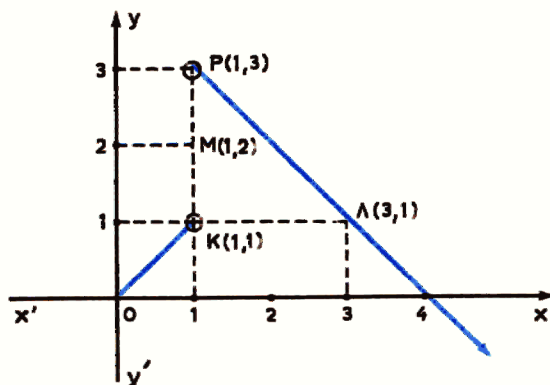
Απομένει λοιπόν να εξετάσουμε τί συμβαίνει στη θέση $x = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4-x) = 3.$$

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στη θέση 1 (άφου $f(1) = 2$), αλλά δεν έχει όριακή τιμή σ' αυτή τη θέση, διότι τά μονόπλευρα όρια είναι διαφορετικά· συνεπώς στη θέση 1 η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια.

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συναρτήσεως αποτελείται από

τό τμήμα OK χωρίς τό σημείο K(1, 1) (σχ. 27.4 α), από τό άπομονωμένο σημείο M(1, 2) καί από τήν ήμιευθεία PL χωρίς τήν άρχή της P(1, 3).

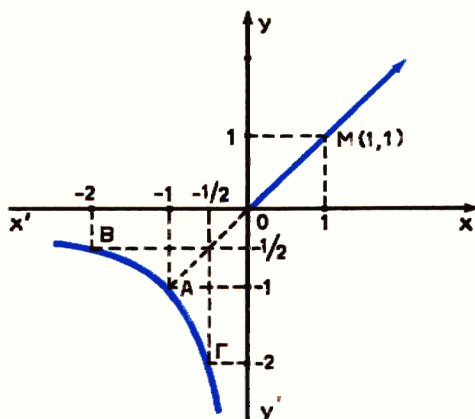


Σχ. 27.4 α.

7. Θεωρούμε τή συνάρτηση που όρίζει ό τύπος:

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \forall x < 0. \end{cases}$$

Νά μελετηθεί ως προς τή συνέχεια καί νά γίνει ή γραφική της παράσταση.



Σχ. 27.4 β.

Έπειδή ή συνάρτηση $y = x$ είναι παντού συνεχής μέσα στό $\mathbb{R}$ καί ή $y = \frac{1}{x}$ επίσης παντού συνεχής μέσα στό $\mathbb{R} - \{0\}$, έπεται ότι καί ή $f(x)$ είναι συνεχής μέσα στό $\mathbb{R} - \{0\}$.

Θά εξετάσουμε λοιπόν τί συμβαίνει στη θέση $x = 0$.

$$\text{*Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\text{*Ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \text{ *Ωστε η συνάρτησή μας είναι άσυνε-$$

χής στη θέση 0.

*Η γραφική της παράσταση (σχ. 27.4β) αποτελείται από τόν κλάδο με $y < 0$ της ίσοσκελούς υπερβολής $yx = 1$ και από τήν ήμιευθεία ΟΜ.

27.5 Άσκησης.

$$1. \text{ Νά βρεθούν τὰ παρακάτω όρια: I) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \cdot \text{ II) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}.$$

$$\text{III) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^2 - 6x + 2}}{3 - \sqrt{10x^2 - 19x + 10}} \cdot \text{ IV) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 3} \cdot \text{ V) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{2x^2 + x - 3}.$$

$$\text{VI) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x + 4} \cdot \text{ VII) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x + 4} \cdot \text{ VIII) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}{x + 3}.$$

$$\text{IX) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}{2x + 3} \cdot \text{ X) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9}{(x - 2)^2} \cdot \text{ XI) } \lim_{x \rightarrow 5^+} (7 + \sqrt{x - 5}).$$

$$\text{XII) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} \cdot \text{ XIII) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} \cdot \text{ XIV) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - x}.$$

$$\text{XV) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - x}.$$

$$2. \text{ Δίνεται η συνάρτηση που όρίζει ο τύπος } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(x-1)}{x} & \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}. \\ 1 & \text{γιά } x = 0 \end{cases}$$

Νά μελετηθεί ως πρὸς τή συνέχεια καί νά γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Θεωρούμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 10} - 2x$.

α) Νά καθοριστεί τό πεδίο όρισμού της· β) νά βρεθούν τὰ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$.

γ) νά βρεθεί τό $\lim_{x \rightarrow 1} y$.

$$4. \text{ Νά βρεθούν τὰ παρακάτω όρια: I) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1} \cdot \text{ II) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}.$$

$$\text{III) } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1} \cdot \text{ IV) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1} \cdot \text{ V) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 5}{|x|x}.$$

$$\text{VI) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 5}{|x|x} \cdot \text{ VII) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x}{x - 2} \cdot \text{ VIII) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x}{x - 2}.$$

$$\text{IX) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5} \cdot \text{ X) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5}.$$

$$\text{XI) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} \cdot \text{ XII) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 + 5x^3 - 1}{x^6 + x^2 - 7}.$$

$$\text{XIII)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3} x^3 + \sqrt[2]{2} x^2 + 1}{2x^3 + x + 1} \cdot \text{XIV)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}.$$

$$\text{XV)} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x^2).$$

5. Νά μελετηθοῦν ὡς πρὸς τὴ συνέχεια καὶ νά παρασταθοῦν γραφικὰ οἱ συναρτήσεις πού ὀρίζονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$\text{I)} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{γὰρ } x = 0 \end{cases} \quad \text{II)} g(x) = \begin{cases} x & \text{ἀν } x \in [0, 1] \\ 2 + x & \text{ἀν } x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$\text{III)} \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ἀν } x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{ἀν } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{IV)} \sigma(x) = \begin{cases} |x| & \text{γὰρ } x < 0 \\ x & \text{γὰρ } 0 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{γὰρ } x \geq 2 \end{cases}$$

$$6. \text{ Γιά ποιές τιμές τοῦ } x > 1 \text{ ἔχομε: } \alpha) \frac{5}{3} - \frac{5x+9}{3x-3} < \frac{1}{1000}.$$

$$\beta) \frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 < \frac{1}{100} \quad \gamma) \frac{\sqrt[3]{4x+1}}{\sqrt[3]{4x-2}} - 1 < \frac{1}{100};$$

$$7. \text{ Γιά ποιές τιμές τοῦ } x \text{ ἔχομε } |f(x)| > 1000 \text{ ἀν:}$$

$$\alpha) f(x) = x^3 \quad \beta) f(x) = 2x^3 - 458 \quad \gamma) f(x) = (x+1) \sqrt[3]{|x+1|}.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 28

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

28.1 Τό νόημα καὶ ἡ σημασία τῆς παραγώγου.

α) Εἰσαγωγικά. Ὅλα σχεδόν τὰ φαινόμενα μέ τὰ ὁποῖα ἀσχολοῦνται οἱ φυσικές ἐπιστῆμες καὶ τὰ προβλήματα πού ἀντιμετωπίζει ἡ τεχνική, ἐκφράζονται μέσω συναρτήσεων. Μελετώντας αὐτές τίς συναρτήσεις καὶ τίς συναφεῖς γραφικές τους παραστάσεις, ποριζόμαστε χρήσιμες πληροφορίες γιά τήν ἐξέλιξη τῶν φαινομένων μέσα σέ κατάλληλα ἐκλεγμένα διαστήματα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν. Οἱ μέχρι τώρα γνώσεις μας γιά τίς ὀριακές τιμές μᾶς ἐπιτρέπουν νά κάνομε μερικές διαπιστώσεις ὡς πρὸς τὴ συμπεριφορὰ μιᾶς συναρτήσεως ἐντὸς ἢ στὰ ἄκρα τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ της· καὶ πρὶν ἀπ' ὅλα ὡς πρὸς τὴ συνέχεια. Ἔτσι μποροῦμε νά ξέρομε ἀν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἀλλάζει ἢ ὄχι μέ «ἄλματα», ἀν καὶ πότε αὐτὴ αὐξάνεται ἀπεριόριστα· ἀν μ' ἄλλα λόγια ἡ ἀντίστοιχη γραφικὴ παράσταση θά εἶναι ἢ ὄχι μιὰ «ἀδιάσπαστη», μιὰ ἀπεριόριστη ἢ ὄχι γραμμὴ. Δέν μποροῦμε ὅμως, μόνο μέσω τῆς συνεχείας, νά διαπιστώσομε πόσο μεγάλη εἶναι, σέ διάφορες θέσεις, ἡ «τάση μεταβολῆς» τῆς συναρτήσεως καὶ ἀντίστοιχα πόσο ἀπότομα θά ἀνέρχεται ἢ θά κατέρχεται ἡ γραφικὴ παράστασή της σέ μιὰ ὀρισμένη περιοχὴ. Οὔτε ξέρομε νά βρίσκομε, ἀν ὑπάρχουν καὶ σέ ποιές θέσεις, τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως.

Ἡ ἀπάντηση σέ τέτοια ἐρωτήματα, πού γιά τίς ἐφαρμογές ἔχουν μεγάλη σημασία, κάνει ἀναγκαῖα μιὰ νέα χρῆση τῆς ἰδέας τοῦ ὁρίου.

Μ' αυτή πετυχαίνομε νά δώσουμε μέ σαφήνεια καί πληρότητα τό νόημα καί τήν εξίσωση τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας σέ καμπύλη, σ' ἕνα σημείο της, καί νά μεταφέρομε σέ μιά καμπύλη τήν ἔννοια τῆς «κλίσεως» μιᾶς εὐθείας.

Ἔτσι γεννήθηκε, μέσω τῶν ὁριακῶν τιμῶν, μιά νέα μαθηματική ἔννοια πού ἔπαιξε καθοριστικό ρόλο στήν παραπέρα ἀνάπτυξη τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλά καί τῶν ἄλλων Ἐπιστημῶν καί τῆς Τεχνικῆς.

Ἡ ἔννοια αὕτη εἶναι ἡ **παράγωγος** καί μ' αὕτη θ' ἀσχοληθοῦμε λίγο στά παρακάτω.

β) Μιά πρώτη ἰδέα γιά τήν παράγωγο καί τό διαφορικό.

Ἡ πιό ἀπλή σχέση ἀνάμεσα σέ δυό ἀλληλοεξαρτώμενα μεταβλητά ποσά εἶναι ἡ σχέση τῆς ἀναλογίας· δηλαδή ἡ σχέση πού δίνεται ἀπό τόν ἀλγεβρικό τύπο $y = ax$ (1), ὅπου a ἕνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός $\neq 0$ καί x, y μεταβλητές. Ὡς πάρομε ὁμῶς τή συνάρτηση πού ὀρίζει ὁ κάπως γενικότερος τύπος $y = ax + \beta$ (2), ὅπου β ἐπίσης ἕνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός. Τό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο (2) μᾶς ὀρίζει στό $\mathbb{R}$ τήν ἀπλούστερη, ὅπως ξέρομε, συνάρτηση μετά τή σταθερή $y = c$.

Θά θεωρήσουμε τώρα ἕνα ἀρχικό ζεῦγος ἀντιστοιχῶν τιμῶν (x_0, y_0) τῆς (2) καί ἀκολουθῶς ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο ζεῦγος (x, y) ἀντιστοιχῶν τιμῶν· τότε θά ἔχομε $y_0 = ax_0 + \beta$ καί $y = ax + \beta$ καί συνεπῶς $y - y_0 = a(x - x_0)$ (3).

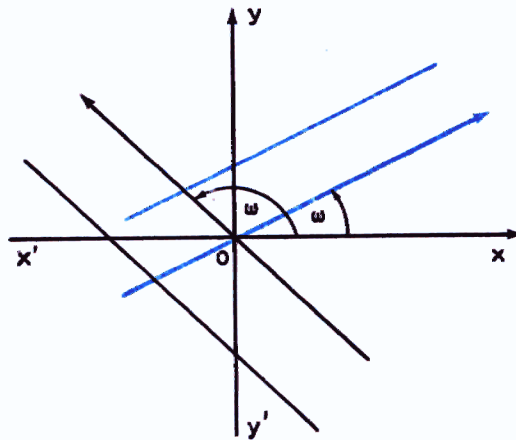
Θά παριστάνομε τή θετική ἢ ἀρνητική διαφορά τιμῶν $x - x_0$ μέ Δx καί θά τήν ὀνομάζομε, γιά συντομία, «αὔξηση» τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς· ἐπίσης τή διαφορά $y - y_0$ θά τήν παριστάνομε μέ Δy καί θά τήν ὀνομάζομε αὔξηση τῆς συναρτήσεως. Ἡ (3) τώρα γράφεται $\Delta y = a \cdot \Delta x$ (3').

Ἀπό τήν (3') συμπεραίνομε ὅτι ἡ αὔξηση Δy τῆς συναρτήσεως, ἀπό μιά ἀρχική τιμή y_0 σέ μιάν ἄλλη y , εἶναι ἀνάλογη πρὸς τήν ἀντίστοιχη αὔξηση Δx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς· δηλαδή ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, τῶν ἀντιστοιχῶν αὐξήσεων (μεταβολῶν), διατηρεῖται σταθερός καί εἶναι ἀνεξάρτητος ὄχι μόνο ἀπό τήν τιμή x ἀλλά καί ἀπό τήν ἀρχική τιμή x_0 . Ἔτσι γιά νά βρίσκομε κάθε φορά τήν αὔξηση Δy τῆς y πού ἀντιστοιχίζεται σέ μιά δοσμένη αὔξηση Δx τῆς x δέν ἔχομε παρά νά πολλαπλασιάζομε αὕτη τήν αὔξηση Δx ἐπὶ τό σταθερό συντελεστή a .

Γνωρίζομε ἐξάλλου ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς (2), σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, εἶναι μιά εὐθεία καί ὅτι ὁ σταθερός συντελεστής a εἶναι ὁ συντελεστής διευσυνσεως αὐτῆς τῆς εὐθείας· διαπιστώνομε ἐπιπλέον ὅτι ὁ συντελεστής αὐτός ἰσοῦται μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας πού σχηματίζει ἡ εὐθεία μέ τόν ἄξονα Ox (εφω = a : σχ. 28 · 1 α).

Ὡς πάρομε τώρα τή συνάρτηση μέ τύπο: $y = 2x^2$ (4). Γιά μιά τιμή x_0 τοῦ x θά ἔχομε $y_0 = 2x_0^2$ καί συνεπῶς: $\Delta y = y - y_0 = 2x^2 - 2x_0^2$ (5).

Ἐπειδὴ $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = \Delta x + x_0$, ἡ (5) γίνεται:



Σχ. 28.1 α.

$\Delta y = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 2x_0^2 + 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x_0^2 = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$
δηλαδή έχουμε τελικά: $\Delta y = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$ (6).

Παρατηρούμε τώρα ότι: "Αν από το δεύτερο μέλος της ισότητας (6) ελειτουργ ο όρος $2(\Delta x)^2$, τότε η αύξηση Δy της συναρτήσεως, πού θά ήταν ίση με $4x_0 \cdot \Delta x$, θά εξαρτιόταν βέβαια από την αρχική τιμή x_0 της μεταβλητής, αλλά πάντως θά ήταν ανάλογη προς την αύξηση Δx αυτής της μεταβλητής (μέ συντελεστή αναλογίας τό $4x_0$).

Κατά συνέπεια είναι φυσικό νά αναζητήσουμε κάτω από ποιές συνθήκες η επίδραση της παρουσίας του όρου $2(\Delta x)^2$ θά μπορούσε νά μειωθεί έτσι ώστε στην περιοχή τουλάχιστο της θέσεως x_0 (δηλαδή για τιμές x γειτονικές προς την x_0) νά ισχύει κατά προσέγγιση η αναλογία μεταξύ Δx καί Δy .

"Ας θεωρήσουμε ως αρχική τιμή x_0 την τιμή 1· τότε:

$$\Delta y = y - 2 = 4\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Μέ $\Delta x = 0,1$ παίρνουμε $\Delta y = 0,4 + 0,02 = 0,42$.

Κρατώντας, από την όλική αύξηση 0,42, τό μέρος $4\Delta x = 0,4 = 0,40$, κάνουμε σφάλμα ίσο με $\frac{0,02}{0,42} = \frac{1}{21}$ της όλικής αύξήσεως της συναρτήσεως.

"Αν ως Δx πάρουμε $\frac{1}{100}$ π.χ., τότε $\Delta y = 0,04 + 0,0002 = 0,04002$ · αν

κρατήσουμε τώρα τό μέρος $4\Delta x = 0,04$, τό σφάλμα μας περιορίζεται στο $\frac{0,0002}{0,0402} = \frac{2}{402} = \frac{1}{201}$ της όλικής αύξήσεως της συναρτήσεως. "Ετσι βλέ-

πουμε ότι όσο πιά μικρή είναι η $|\Delta x|$, τόσο πιά μικρό μέρος της όλικής αύξήσεως Δy «χάνουμε» αν κρατήσουμε μόνο τό κομμάτι $4\Delta x$. "Όταν λοιπόν τό μέρος

$2(\Delta x)^2$ μπορεί να είναι αμελητέο, σέ σχέση με την ολική αύξηση Δy , τότε το μέρος $4\Delta x$ μπορεί να θεωρείται ως το «κύριο μέρος» αυτής της αύξησης Δy και συνεπώς «περίπου ισοδύναμο» με την όλη αύξηση.

Θά μιλήσουμε τώρα κάπως γενικότερα, άλλ' όπωσδήποτε με τρόπο πού μάς είναι γνώριμος ύστερα από την προηγούμενη θεωρία για τίς όριακές τιμές.

Γυρίζουμε στή σχέση (6) και διαπιστώνουμε: I) "Όταν $\Delta x \rightarrow 0$, δηλαδή όταν $x \rightarrow x_0$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} (y - y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [4x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 0.$

"Όστε όταν ή αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής τείνει στο μηδέν, τότε και ή αύξηση της συναρτήσεως $f(x) = 2x^2$ τείνει στο μηδέν. Αυτό όμως σημαίνει ότι ή συνάρτησή μας είναι συνεχής στή θέση x_0 διότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (y - y_0) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} y = y_0 \text{ δηλαδή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

II) Διαιρώντας και τά δύο μέλη της (6) διά Δx παίρνουμε $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x$ και βλέπουμε ότι ό λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ των αύξήσεων συναρτήσεως και ανεξάρτητης μεταβλητής εξαρτάται και από την αρχική τιμή x_0 και από την αύξηση Δx της μεταβλητής x .

"Αν όμως $\Delta x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0$), τότε:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 4x_0.$$

"Η παραπάνω όριακή τιμή $4x_0$ του πηλίκου διαφορών (αύξήσεων) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ για $x \rightarrow x_0$, πού εξαρτάται πλέον μόνο από την αρχική τιμή x_0 , είναι ό συντελεστής με τον όποιο πρέπει να πολλαπλασιάζουμε την αύξηση Δx της ανεξάρτητης μεταβλητής για να παίρνουμε τό «κύριο μέρος» $4x_0 \cdot \Delta x$ της ολικής αύξησης της συναρτήσεως.

"Ο συντελεστής $4x_0$ λέγεται παράγωγος της συναρτήσεως $f(x) = 2x^2$ στή θέση x_0 . τό δέ γινόμενο $4x_0 \Delta x$, πού αντικαθιστά την ολική αύξηση Δy , όταν τό $2(\Delta x)^2$ θεωρείται αμελητέο, λέγεται διαφορικό της $f(x)$ στή θέση x_0 και τό συμβολίζουμε με dy για να τό διακρίνουμε από την αύξηση Δy .

"Ας σημειωθεί ότι στήν ειδική περίπτωση της γραμμικής συναρτήσεως $y = ax + \beta$ τό διαφορικό dy είναι ίσο με την αύξηση Δy .

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι, σέ μία θέση } x_0, \text{ έχομε } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(ax + \beta) - (ax_0 + \beta)}{x - x_0} = \\ &= \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a \text{ και συνεπώς } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \text{ δηλαδή ή παράγωγος} \end{aligned}$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι ο λόγος } \lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

είναι ο συντελεστής διεύθυνσεως του διανύσματος $\vec{MP}$ και συνεπώς και της ευθείας MP.

$$\text{*Αρα η εξίσωση } \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (7) \text{ είναι η}$$

εξίσωση της ευθείας MP.

*Όταν τό σημείο P μετατοπίζεται πάνω στην καμπύλη και τείνει προς τό σημείο M, τότε ή τετμημένη του x τείνει στό x_0 και συνεπώς ή αύξηση $x - x_0 = \Delta x$ τείνει στό 0· αλλά τότε, έπειδή ύποθέσαμε ότι ή συνάρτηση είναι συνεχής, θά έχομε και $f(x) - f(x_0) = \Delta y \rightarrow 0$.

Μέ τίς παραπάνω προϋποθέσεις ($x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$), τό πηλίκο διαφορών (αυξήσεων) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ παίρνει τήν «άπροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ » και μπορεί νά έχει ή όχι όριακή τιμή έναν πραγματικό αριθμό.

*Αν συμβαίνει νά είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = l, \text{ ό-$$

που l ένας όρισμένος πραγματικός αριθμός, τότε: ή ευθεία μέ εξίσωση τήν $\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = l$ ή $y = f(x_0) + l(x - x_0)$ ονομάζεται έφαπτομένη της γραφικής

παραστάσεως της $f(x)$ στό σημείο M ($x_0, y_0 = f(x_0)$) και ό αριθμός l παράγωγος της $f(x)$ στή θέση x_0 .

Συμβολικά ό l σημειώνεται μέ $f'(x_0)$ · δηλαδή γράφομε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (8)$$

*Επομένως ή εξίσωση της έφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως γράφεται:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (9)$$

*Εφόσον ύπάρχει τό όριο του πηλίκου $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$, για $x \rightarrow x_0$,

λέμε ότι ή συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίζεται (έχει παράγωγο) στή θέση x_0 . *Αν ή συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγωγο σέ κάθε σημείο ενός διαστήματος Δ από τό

πεδίο ορισμού της, τότε, αντιστοιχίζοντας σε κάθε $x \in \Delta$ την τιμή της παραγώγου $f'(x)$, κατασκευάζουμε μία νέα συνάρτηση που λέγεται **παράγωγος** συν-

Τό γινόμενο της παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ επί την αύξηση Δx της ανεξάρτητης μεταβλητής θά τό λέμε διαφορικό της $f(x)$ καί θά τό θεωρούμε ισοδύναμο μέ την όλική αύξηση της συναρτήσεως, όταν $\Delta x \rightarrow 0$. συναρτήσεως, όταν $\Delta x \rightarrow 0$.

Έξάλλου, όπως είδαμε πιό πάνω, ή αύξηση Δx της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι ίση μέ τό διαφορικό dx της συναρτήσεως $y = x$. Έτσι έχουμε γενικά:

$$dy = f'(x)dx \iff \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (10)$$

Παρατηρήσεις: I) 'Η τριγωνομετρική έφαπτομένη της γωνίας φ ($\epsilon\varphi \varphi$) που ή εύθεια MP σχηματίζει μέ τόν άξονα $x'x$ (σχ. 28 · 1 β) ίσοϋται, όπως ξέρομε, μέ τό συντελεστή διεϋθύνσεως της εύθειας MP , ό όποιός λέγεται καί **κλίση** της εύθειας πρός τόν άξονα $x'x$. Από τό σχήμα 28 · 1 β προκύπτει τώρα ότι, όταν υπάρχει παράγωγος $f'(x_0)$ στή θέση x_0 , τότε ή κλίση $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ της εύ-

θείας MP έχει όριο τόν αριθμό $f'(x_0)$ γιά $x \rightarrow x_0$. Συνεπώς ή κλίση $f'(x_0)$ της έφαπτομένης της γραφικής παραστάσεως στό σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ είναι ίση μέ την τριγωνομετρική έφαπτομένη της γωνίας $\hat{\omega}$ που ή έφαπτομένη εύθεια σχηματίζει μέ τόν άξονα $x'x$: $f'(x_0) = \epsilon\varphi \omega$. 'Η γωνία ω είναι όξεία ή άμβλεία καθόσον $f'(x_0) \leq 0$ ή $f'(x_0) > 0$.

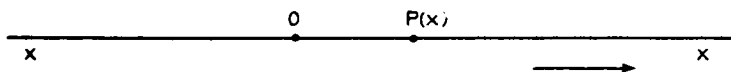
II) Όταν τό πεδίο ορισμού μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ καί τό x_0 είναι τό άριστερό άκρο του διαστήματος ($x_0 = \alpha$), τότε παίρνουμε τό $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ καί έφόσον αυτό υπάρχει λέμε ότι ή συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγωγο στή θέση α από δεξιά. Όμοια αν υπάρχει τό $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$, τότε λέμε ότι ή $f(x)$ έχει παράγωγο στή θέση β άπ' άριστερά. 'Η άπ' άριστερά ή άπό δεξιά παράγωγος σε μία θέση λέγεται **μόνo-πλευρη παράγωγος**.

Σημείωση: Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση ορισμένη, συνεχής καί παραγωγίσιμη μέσα σ' ένα διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ καί έστω $\sigma(x)$ ή παράγωγος (συνάρτηση) της $f(x)$. Αν καί ή $\sigma(x)$ παραγωγίζεται επίσης μέσα στό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ή παράγωγος $\sigma'(x)$ της $\sigma(x)$ λέγεται δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ καί σημειώνεται συμβολικά μέ $f''(x)$. 'Η $\sigma(x) = f'(x)$ λέγεται τότε πρώτη παράγωγος της $f(x)$.

Όμοια μιλάμε καί γιά τρίτη κλπ παράγωγο της $f(x)$, όταν βέβαια υπάρχει.

28.2 Μιά εφαρμογή στη Φυσική.

Θεωρούμε πάνω σ' έναν άξονα $x'x$ ένα κινητό σημείο P (σχ. 28.2), του οποίου η θέση, για τό χρονικό διάστημα πού πραγματοποιείται ή κίνηση, είναι όρισμένη σέ κάθε χρονική στιγμή t .



Σχ. 28.2.

Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι ή τετμημένη x δίνεται από μία γνωστή συνάρτηση $x = f(t)$ (1) του χρόνου t .

Αν ή συνάρτηση (1) είναι γραμμική, δηλαδή αν $x = \lambda t + \beta$ όπου λ και β όρισμένοι πραγματικοί αριθμοί και $\lambda \neq 0$, τότε τό κινητό διανύει, πάνω στην τροχιά του $x'x$, σέ ίσους χρόνους ίσα διανύσματα. Μ' άλλα λόγια έχουμε $f(t) - f(t_0) = \lambda(t - t_0) = \lambda(t' - t'_0) = f(t') - f(t'_0)$ αν $t - t_0 = t' - t'_0$.

Συνεπώς τό πηλίκο $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ μένει σταθερό για όλα τά Δt . Αύτός

ό σταθερός λόγος λέγεται, στην προκειμένη περίπτωση, **μέτρο της ταχύτητας** (ή **συντομότερα ταχύτητα**) του κινητού και ή κίνηση χαρακτηρίζεται ως **ίσοταχής ή όμαλή ευθύγραμμη**.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ή συνάρτηση (1) δέν είναι γραμμική· τότε τό πηλίκο $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ δέν θά διατηρείται σταθερό στά διάφορα χρονικά διαστήματα $t - t_0$.

Αυτό τό (μεταβαλλόμενο) πηλίκο τό όνομάζουμε **μέση ταχύτητα για τό χρονικό διάστημα $t - t_0$** .

Μέ την προϋπόθεση ότι υπάρχει, προσδιορίζουμε άκολουθως τό:

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$. αυτό τό όριο, πού είναι ή παράγωγος

της $f(t)$ στη θέση t_0 , λέγεται **ταχύτητα του P κατά τη χρονική στιγμή t_0** .

Αν μέ $V(t)$ παραστήσουμε την παράγωγο (συνάρτηση) $f'(t)$ της $f(t)$, για κάθε χρονική στιγμή t από τό χρονικό διάστημα όπου πραγματοποιείται ή κίνηση, τότε ή εξίσωση $V = V(t)$ είναι ή εξίσωση της ταχύτητας για την παραπάνω χρονική περίοδο.

28.3 Εφαρμογές και παραδείγματα.

1. *Η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησεως είναι μηδέν.*

Πράγματι: Αν $f(x) = c$, όπου c μία σταθερά, τότε: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0 \text{ για όποιοσδήποτε διαφορετικές τιμές } x \text{ και } x_0. \text{ Άρα}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

2. Η παράγωγος της γραμμικής συναρτήσεως $y = ax + \beta$ (μέ $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$) είναι: $f'(x) = a$.

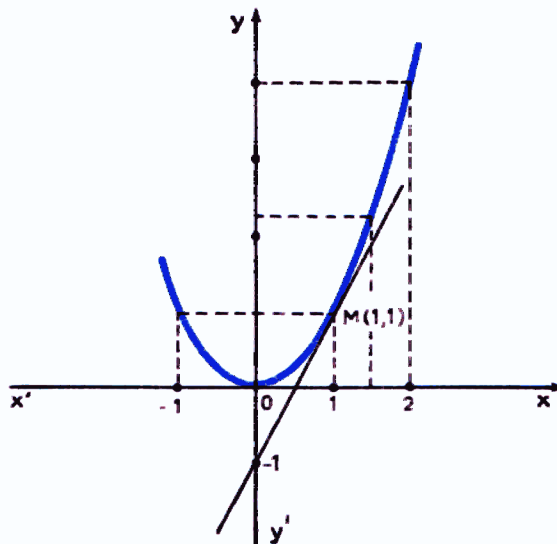
$$\text{Πράγματι: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a \quad \forall x \neq x_0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$$

3. Νά βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως με τύπο $y = x^2$ (I) και ακολουθώς νά προσδιοριστούν οι εξισώσεις των εθιζών που εφάπτονται στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$ της γραφικής παραστάσεως της (I).

$$\text{Έχουμε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \quad \forall x \neq x_0.$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$



Σχ. 28-3.

Έπειδή η παράγωγος της x^2 στη θέση x_0 είναι $2x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η παράγωγος συνάρτηση της x^2 είναι $2x$. Ωστε $(x^2)' = 2x$.

Τό σημείο της γραφικής παραστάσεως της (I) με $x = 0$ (σχ. 28·3) είναι η άρχή των άξόνων. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $O(0, 0)$ είναι:

$$\frac{y-0}{x-0} = 0 \rightarrow y = 0. \text{ πρόκειται συνεπώς για τον άξονα } x'x.$$

Τό σημείο της γραφικής παραστάσεως με $x = 1$ είναι τό $M(1, 1)$ (σχ. 28·3), διότι από την (I) παίρνουμε $f(1) = 1^2 = 1$.

Έπειδή η παράγωγος συνάρτηση της x^2 είναι $2x$, έπεται ότι η παράγωγος στη θέση 1 ισούται με $2 \cdot 1 = 2$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(1, 1)$ είναι: $\frac{y-1}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$.

28·4 Άσκησης.

1. α) Νά βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησεως με τύπο $y = 5x^2 + 7x - 6$ (α).

β) Νά βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η) πού εφάπτονται με τη γραφική παράσταση της (α) στά σημεία της με τετμημένες $-0,7$ και -1 αντίστοιχα. γ) Νά ύπολογιστεί η γωνία της (η) με τον άξονα $x'x$.

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = x^3$ (α). I) Νά βρεθεί η παράγωγος της (α). II) Νά προσδιοριστούν οι εξισώσεις των ευθειών πού εφάπτονται στη γραφική παράσταση της (α) στά σημεία με τετμημένες 0, -1 και $+1$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $y = \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$. νά βρεθεί η παράγωγος της.

ΕΝΟΤΗΤΑ 29

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

29·1 Ιδιότητες των παραγώγων. Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων.

α) Ό άπευθείας προσδιορισμός της παραγώγου βάσει του όρισμού της είναι εύκολος μόνο για λίγες βασικές συναρτήσεις.

Γιά την παραγωγήιση άλλων συναρτήσεων χρησιμοποιούμε τά άποτελέσματα πού βρίσκομε με τον παραπάνω άμεσο προσδιορισμό σέ συνδυασμό με όρισμένες γενικές ιδιότητες των παραγώγων.

Παρακάτω έκθέτομε πρώτα αυτές τίς γενικές ιδιότητες.

Πρόταση 1. Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη μέσα σ' ένα διάστημα Δ είναι καί συνεχής μέσα στο ίδιο διάστημα.

Πράγματι : Από $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ με $x \neq x_0$, συμ-

περαίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$

Άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ · ή τελευταία ισότητα σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 του διαστήματος Δ .

Τό αντίστροφο δεν αληθεύει. Δηλαδή μπορεί μιá συνάρτηση νά είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου όρισμού της, χωρίς νά είναι αναγκαστικά και παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Άς πάρουμε γιά παράδειγμα τή συνάρτηση μέ τύπο $y = |x|$, ή όποία είναι παντού συνεχής μέσα στό $\mathbb{R}$, άκόμα και στό σημείο 0· διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$
 $= f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 = f(0)$.

Έντούτοις ή $|x|$ δέν έχει παράγωγο στή θέση 0 διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$

Άς θεωρήσουμε άκόμα τή συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt[3]{x}$. Ή συνάρτηση είναι παντού συνεχής μέσα στό $\mathbb{R}$ · όμως στή θέση 0 δέν έχει ως παράγωγο έναν

πραγματικό άριθμό. Πράγματι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty. \text{ Έτσι, ή συνάρτηση } \sqrt[3]{x} \text{ δέν έχει}$$

παράγωγο γιά $x = 0$ μολονότι είναι συνεχής στή θέση 0. Λέμε όμως μερικές φορές, επεκτείνοντας τήν έννοια τής παραγώγου, ότι ή παράγωγος στό σημείο 0 είναι τό σύν άπειρο. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι ή γραφική παράσταση τής $y = \sqrt[3]{x}$ έχει έφαπτομένη στό σημείο $O(0, 0)$ (στήν άρχή τών άξόνων) τόν άξονα Oy .

Πρόταση 2. Άν οί συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίζονται σ' ένα διάστημα Δ , τότε και οί συναρτήσεις $f(x) + g(x)$ και $f(x) - g(x)$ παραγωγίζονται στό ίδιο διάστημα και μάλιστα είναι $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

[Δηλαδή ή παράγωγος του άθροίσματος (άντίστοιχα τής διαφοράς) δύο συναρτήσεων ίσοϋται μέ τό άθροισμα (άντίστοιχα τή διαφορά) τών παραγώγων].

Πράγματι μέ $x \neq x_0$ έχουμε:
$$\frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \frac{[f(x) - f(x_0)] \pm [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \text{ Άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

δηλαδή $[f(x_0) \pm g(x_0)]' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

Παρατήρηση: Η ιδιότητα $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ γενικεύεται για ένα οποιοδήποτε πλήθος συναρτήσεων. Δηλαδή $[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$, εφόσον οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες μέσα σ' ένα κοινό διάστημα. (Νά γίνει η απόδειξη με μαθηματική έπαγωγη).

Πρόταση 3. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίζονται μέσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε και η συνάρτηση $f(x) \cdot g(x)$ παραγωγίζεται και είναι $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Πράγματι με $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \\ &+ f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Επειδή η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής και συνεπώς έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Ωστε $[f(x_0) \cdot g(x_0)]' = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Παρατήρηση. Η ιδιότητα γενικεύεται. Δηλαδή $[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) + \dots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \dots \cdot f_n'(x)$, εφόσον οι συναρτήσεις παραγωγίζονται μέσα σ' ένα κοινό διάστημα Δ .

(Νά γίνει η απόδειξη με τη μέθοδο της μαθηματικής έπαγωγης).

Πόρισμα: Αν $f(x)$ μιά συνάρτηση παραγωγίσιμη (σ' ένα διάστημα) και c μιά σταθερά $\neq 0$, τότε $(cf(x))' = cf'(x)$.

Εφαρμογή. «Είναι $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ και $(ax^n)' = nax^{n-1}$, αν $n \in \mathbb{N}$ ».

Πράγματι, σύμφωνα με τη γενίκευση της προτάσεως 3 έχουμε:

$$(x^n)' = (x \cdot x \cdot \dots \cdot x)' = x' \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x + x \cdot x' \cdot x \cdot \dots \cdot x + \dots + x \cdot x \cdot \dots \cdot x' = nx^{n-1}, \text{ διότι } x' = 1.$$

Ακολουθώντας, σύμφωνα και με τό άμέσως προηγούμενο πόρισμα, έχουμε $(ax^n)' = nax^{n-1}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα. Νά βρεθεί η παράγωγος του πολυωνύμου $\sqrt{5}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 1$.

Σύμφωνα με την πρόταση 2 και την παραπάνω εφαρμογή παίρνουμε:

$$\left(\sqrt{5}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 1\right)' = 4\sqrt{5}x^3 - \frac{7}{2} \cdot 2x^1 + 0 = 4\sqrt{5}x^3 - 7x.$$

Πρόταση 3. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίζονται μέσα σ' ένα διάστημα Δ και είναι $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Delta$, τότε:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{για } x \in \Delta).$$

Θά βρούμε πρώτα την παράγωγο της $\frac{1}{g(x)}$. Με $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \quad \text{και συνεπώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}.$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = \frac{1}{g^2(x_0)}$ [διότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ αφού η $g(x)$ σάν παραγωγίσιμη είναι και συνεχής] και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -g'(x_0).$$

$$\text{Άρα: } \left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Τώρα, σύμφωνα και με τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right]' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Εφαρμογή: Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $y = x^{-v}$ όπου $v \in \mathbb{N}$. Είναι $(x^{-v})' = -v \cdot x^{-v-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι έχουμε: } (x^{-v})' &= \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^v - 1 \cdot (x^v)'}{x^{2v}} = \\ &= \frac{0 - vx^{v-1}}{x^{2v}} = -\frac{vx^{v-1}}{x^{2v}} = -v \cdot \frac{1}{x^{2v-v+1}} = -v \cdot \frac{1}{x^{v+1}} = -v \cdot x^{-v-1}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση : Βλέπουμε (στην παραπάνω εφαρμογή) ότι ο κανόνας παραγωγίσεως δυνάμεως με έκθετη φυσικό (εφαρμογή προτάσεως 3) ισχύει και σε δύναμη με έκθετη αρνητικό άκραιο.

β) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$, $\sigma\phi x$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες παντού μέσα στο πεδίο ορισμού τους (τά μέτρα τῶν τόξων δίνονται σε ακτίνια).

1) Έχουμε για τό ήμίτονο : $\eta\mu x - \eta\mu x_0 = 2\eta\mu \frac{x - x_0}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2}$ * . Άλλά

$$\left| \eta\mu \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \quad (\text{γιατί;}) \quad \text{και} \quad \left| \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1. \quad \text{Άρα:}$$

$$\left| \eta\mu x - \eta\mu x_0 \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1 = |x - x_0| \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι και $\lim_{x \rightarrow x_0} |\eta\mu x - \eta\mu x_0| = 0$ και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τό συνημίτονο είναι συνάρτηση συνεχής.

Ός πρός τήν εφαπτομένη $= \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και τή συνεφαπτομένη $= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ αρ-

κεϊ νά παρατηρήσουμε ότι είναι πηλίκα συνεχῶν συναρτήσεων και συνεπώς είναι κι αὐτές συνεχείς [βλέπε πρόταση 1 τῆς παραγράφου 27.3 (β)].

11) Προσδιορίζουμε τώρα τίς παραγώγους : Έχουμε: $\frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} =$

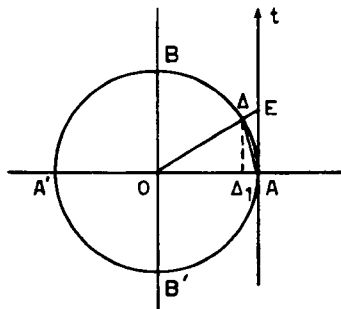
$$\begin{aligned} &= \frac{2\eta\mu \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2} = \frac{\eta\mu \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2} = \\ &= \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2x_0 + \Delta x}{2} = \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right), \quad (x = x_0 + \Delta x). \end{aligned}$$

Θ' αποδείξουμε ότι : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = 1$. Παίρνουμε σ' έναν τριγωνομετρικό

κύκλο ένα θετικό τόξο $\widehat{A\Delta} = \omega$ rad όπου $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ (σχ 29.1) και ἄς είναι Ε τό σημείο τομῆς τῆς τελικῆς ἀκτίνιας τοῦ τόξου μέ τόν ἄξονα Ατ τῶν εἰς

* Ἄν θέσουμε $x = \alpha + \beta$ και $y = \alpha - \beta$, ἡ σχέση $\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta) = 2\eta\mu \beta \sigma\upsilon\nu \alpha$ γράφεται $\eta\mu x - \eta\mu y = 2\eta\mu \beta \sigma\upsilon\nu \alpha$. Ἄλλά ἀπό $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha - \beta \implies \frac{x + y}{2} = \alpha$, $\frac{x - y}{2} = \beta$ και συνεπώς $\eta\mu x - \eta\mu y = 2\eta\mu \frac{x - y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x + y}{2}$.

πτομένων. Έχουμε: έμβαδόν τριγώνου $(\overset{\Delta}{\text{O}}\overset{\Delta}{\text{A}}\overset{\Delta}{\text{D}}) < \text{έμ. κυκλικού τομέα } (\text{O}\overset{\Delta}{\text{A}}\overset{\Delta}{\text{D}}) < \text{έμ. τριγώνου } \text{O}\overset{\Delta}{\text{A}}\overset{\Delta}{\text{E}} \Rightarrow \frac{1}{2} |\vec{\text{O}\overset{\Delta}{\text{A}}} \cdot \overline{\Delta_1\overset{\Delta}{\text{D}}} < \pi \cdot |\vec{\text{O}\overset{\Delta}{\text{A}}}|^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} < \frac{1}{2} |\vec{\text{O}\overset{\Delta}{\text{A}}} \cdot \overline{\text{A}\overset{\Delta}{\text{E}}}$ και έπειδή $|\vec{\text{O}\overset{\Delta}{\text{A}}}| = 1$, παίρνομε: $\overline{\Delta_1\overset{\Delta}{\text{D}}} < \omega < \overline{\text{A}\overset{\Delta}{\text{E}}} \text{ (I)}$. Άλλά $\overline{\Delta_1\overset{\Delta}{\text{D}}} = \eta\mu \omega$ και



Σχ. 29.1.

$\overline{\text{A}\overset{\Delta}{\text{E}}} = \epsilon\phi \omega$ και συνεπώς ή σχέση (I) γράφεται $\eta\mu \omega < \omega < \epsilon\phi \omega \Rightarrow 1 < \frac{\omega}{\eta\mu \omega} < \frac{1}{\sin \omega} \Rightarrow 1 > \frac{\eta\mu \omega}{\omega} > \sin \omega \text{ (II)}$. Έπειδή $0 < \sin \omega < 1$

(για τόξα του άνοικτου διαστήματος $(0, \frac{\pi}{2})$) και έπειδή $\lim_{\omega \rightarrow 0} \sin \omega = 1$

(τό συνημίτονο είναι συνάρτηση συνεχής) συμπεραίνομε από τή (II) ότι και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = 1$. Άν $\omega < 0$ γράφομε $\frac{\eta\mu \omega}{\omega} = \frac{\eta\mu (-\omega)}{(-\omega)}$ και βρίσκομε

πάλι $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = \lim_{-\omega \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu (-\omega)}{-\omega} = 1 \cdot (\omega < 0 \Leftrightarrow -\omega > 0)$.

Ύστερα άπ' αυτό παίρνομε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) =$$

$= 1 \cdot \sin(x_0) = \sin x_0$. [Είναι $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \sin(x_0)$ διότι τό συνημί-

τονο είναι συνάρτηση συνεχής].

Ώστε :

$$(\eta\mu x)' = \sin x$$

Όμοια βρίσκομε ότι :

$$(\sin x)' = -\eta\mu x$$

Γιά τήν εφ x καί σφ x ἔχομε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x (\eta\mu x)' - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\text{καί } (\sigma\varphi x)' = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \right)' = - \frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

$$\text{Ώστε: } \boxed{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \quad \text{καί} \quad \boxed{(\sigma\varphi x)' = - \frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

29.2 Ἡ παράγωγος τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως μιᾶς δοσμένης συναρτήσεως $y = f(x)$.

Ἄν ἡ ἀντίστροφη σχέση $x = \sigma(y)$ μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἶναι ἐπίσης συνάρτηση καί ἡ $f(x)$ ἔχει σ' ἓνα διάστημα (α, β) παράγωγο $f'(x) \neq 0$, τότε καί ἡ $\sigma(y)$ ἔχει παράγωγο στό πεδίο ὁρίσμου της καί εἶναι $\sigma'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ σέ ἀντίστοιχες θέσεις x καί y .

Ἄς εἶναι (x_0, y_0) καί (x, y) ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x, y στίς συναρτησιακές σχέσεις $y = f(x)$ καί $x = \sigma(y)$. Θέτομε $\Delta x = x - x_0$ καί $\Delta y = y - y_0$. Ἐπειδή ἡ $f(x)$ ὡς παραγωγίσιμη εἶναι καί συνεχῆς ἔχομε

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{καί} \quad \text{συνεπῶς} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0. \quad \text{Εἶναι ὁμως} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \quad \text{ἄρα:}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \text{Ώστε ὄχι μόνο}$$

ὑπάρχει τό $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$, δηλαδή ἡ παράγωγος $\sigma'(y_0)$, ἀλλά εἶναι καί

$$\sigma'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ἐφαρμογή 1. Νά βρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = \sqrt{x} \ (1)$, ἂν $x > 0$.

Ἀντίστροφη τῆς (1) εἶναι ἡ συνάρτηση $x = y^2$ μέ $y > 0$. Ἔχομε σύμφωνα

$$\text{μέ τόν παραπάνω τύπο: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ἄμεσος προσδιορισμός:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Έφαρμογή 2. Νά βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως μέ τύπο:

$$y = \sqrt[\lambda]{x} = x^{\frac{1}{\lambda}} \quad (2), \text{ όπου } \lambda \text{ φυσικός } > 2 \text{ και } x > 0.$$

Αντίστροφη της (2) είναι η συνάρτηση $x = y^\lambda$ με $y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } (\sqrt[\lambda]{x})' &= \frac{1}{(y^\lambda)'} = \frac{1}{\lambda y^{\lambda-1}} = \frac{1}{\lambda (\sqrt[\lambda]{x})^{\lambda-1}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt[\lambda]{x^{\lambda-1}}} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} = \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1}{\lambda}-1}. \end{aligned}$$

29.3 Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως.

Αν σέ μιά συνάρτηση $y = f(\omega)$ αντικαταστήσουμε τή μεταβλητή ω με μιά συνάρτηση άλλης μεταβλητής x , αν δηλαδή θέσουμε $\omega = g(x)$, τότε η προκύπτουσα συνάρτηση $y = f(g(x))$ λέγεται **σύνθετη συνάρτηση**. Αν π.χ. έχουμε $y = \eta\mu \omega$ (I) και $\omega = 5x$ (II), τότε λέμε ότι η συνάρτηση $y = \eta\mu(5x)$ (III) προέρχεται από τή σύνθεση των συναρτήσεων (II) και (I).

Γιά νά βρούμε τήν παράγωγο της συναρτήσεως (III) ως προς x πρέπει νά χρησιμοποιήσουμε τήν παράγωγο της (I) ως προς ω και τήν παράγωγο της ω ως προς x . Πρός τοῦτο χρησιμοποιούμε τόν τύπο τοῦ διαφορικοῦ ὁ ὁποῖος (ὅπως ἀποδεικνύεται) ἰσχύει πάντοτε. Δηλαδή γράφομε γιά τήν (I): $dy = (\eta\mu \omega)' d\omega$ ἀκολουθῶς ἀπό τήν (II) ἔχομε $d\omega = (5x)' dx$ καί συνεπῶς $dy = (\eta\mu \omega)' (5x)' dx = (\sigma\upsilon\nu \omega) \cdot 5 \cdot dx = (5\sigma\upsilon\nu 5x) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5\sigma\upsilon\nu 5x$. Ὡστε $(\eta\mu 5x)'_x = 5\sigma\upsilon\nu 5x$.

[Ὁ συμβολισμός $(\eta\mu 5x)'_x$ σημαίνει: «Ἡ παράγωγος τοῦ $\eta\mu 5x$ ὡς πρὸς x »].

Γενικά. Ἐστω $y = f(\omega)$ καί $\omega = g(x)$. Θέλομε νά βρούμε τήν παράγωγο της $y = f(g(x))$ ὡς πρὸς x (τήν y'_x).

$$\text{Έχουμε: } dy = f'_\omega(\omega) \cdot d\omega = f'_\omega(\omega) \cdot g'_x(x) \cdot dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'_\omega(\omega) \cdot g'_x(x).$$

δηλαδή

$$y'_x = y'_\omega \cdot \omega'_x$$

Έφαρμογή. Νά βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως μέ τύπο $y = x^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{x^\kappa}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ καί $x > 0$.

Ἐπειδή $x^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\kappa$, γράφομε $\omega = x^{\frac{1}{\lambda}}$ (I) καί $y = \omega^\kappa$ (II). Ἀκολουθῶς

$$\text{παιρνομε } y'_x = (\omega^{\kappa})'_{\omega} \cdot \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)' = \kappa \omega^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \kappa \left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot x^{\frac{\kappa-\lambda}{\lambda}} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot x^{\frac{\kappa}{\lambda}-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Παρατήρηση. Έπειδή και } \left(x^{-\frac{\kappa}{\lambda}}\right)' &= \left(\frac{1}{x^{\frac{\kappa}{\lambda}}}\right)' = \frac{-\left(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)'}{\left(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^2} = \\ &= \frac{-\frac{\kappa}{\lambda} x^{\frac{\kappa}{\lambda}-1}}{x^{\frac{2\kappa}{\lambda}}} = -\frac{\kappa}{\lambda} \cdot x^{\frac{\kappa-\lambda}{\lambda}} : x^{\frac{2\kappa}{\lambda}} = -\frac{\kappa}{\lambda} x^{-\frac{\kappa}{\lambda}-1}, \text{ συμπεραίνουμε ότι ο} \end{aligned}$$

κανόνας της παραγωγίσεως δυνάμεως ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι ένα πηλίκo άκεραίων.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει συνοπτικά τὰ προηγούμενα συμπεράσματα.

Συνάρτηση	c σταθερά	x	$f(x) \pm g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) : g(x)$	$\frac{x^p}{p = \text{ρητός} \neq 0}$	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	$f(\omega), \omega = g(x)$
Παράγωγος	0	1	$f'(x) \pm g'(x)$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	$\frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$	$p x^{p-1}$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$f' \omega = f'_{\omega} \cdot \omega' x$

29.4 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Νά εξεταστεί αν η συνάρτηση με τύπο $y = |x^2 - 1|$ (1) έχει παράγωγο στο σημείο $x = 1$.

Έπειδή για $x \geq 1$ (καθώς και για $x \leq -1$) ή (1) γράφεται $y = x^2 - 1$ ενώ για $-1 < x < 1$ ή (1) γράφεται $y = 1 - x^2$, θά αναζητήσουμε μονόπλευρες παραγώγους στη θέση 1.

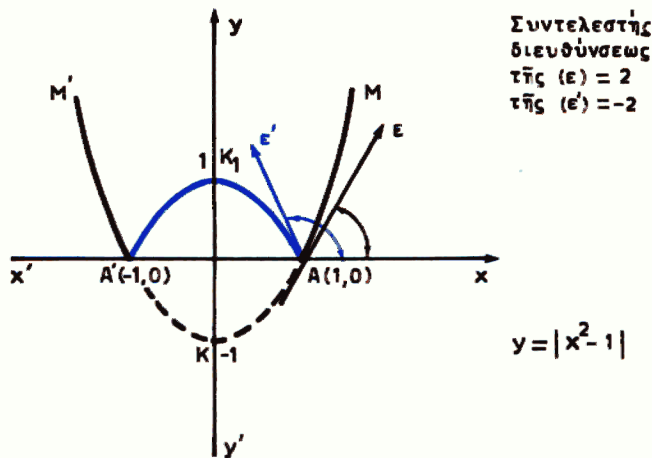
$$\begin{aligned} \text{Μέ } x_0 = 1 \text{ και } \Delta x > 0 \text{ έχουμε: } y_0 &= x_0^2 - 1, y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - 1 = \\ &= x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - 1 = (x_0^2 - 1) + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta y = 2x_0 \Delta x + \\ &+ (\Delta x)^2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Μέ } x_0 = 1 \text{ και } -1 < \Delta x < 0 \text{ έχουμε: } y_0 &= 1 - x_0^2, y_0 + \Delta y = 1 - (x_0 + \Delta x)^2 = \\ &= (1 - x_0^2) - 2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2 = y_0 - 2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2x_0 - \Delta x \Rightarrow \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -2x_0 = -2. \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε η συνάρτησή μας δεν έχει παράγωγο στη θέση 1, διότι έχει βέβαια μονόπλευρες παραγώγους από αριστερά και από δεξιά του σημείου 1,

άλλα αυτές δέν συμπίπτουν. Ἡ συνάρτηση εἶναι πάντως στή θέση 1 συνεχής, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$



Σχ. 29·4.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό τό παραβολικό τόξο $A'K_1A$ (σχ. 29·4) καί τούς βραχίονες $A'M'$, AM τῆς παραβολῆς $M'KM$ μέ ἐξίσωση $y = x^2 - 1$. τό τόξο $A'K_1A$ μέ τήν μπλέ χάραξη εἶναι συμμετρικό τοῦ $A'KA$ ὡς πρὸς τόν ἄξονα $x'x$.

2. Νά βρεθοῦν οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων μέ τύπους:

I) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ · II) $y = \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$ μέ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ · III) $y = \sin^3 2x$.

I) Θέτομε $\omega = x^2 + 1$ καί $y = \sqrt{\omega}$. Ἀκολουθῶς ἔχομε:

$$y'_x = (\sqrt{\omega})' \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

II) Θέτομε $\omega = 4x - \frac{\pi}{2}$ καί $y = \varepsilon\varphi \omega$ καί παίρνομε: $y'_x =$

$$(\varepsilon\varphi \omega)' \cdot \left(4x - \frac{\pi}{2}\right)' = \frac{1}{\sin^2 \omega} \cdot 4 = \frac{4}{\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{\eta\mu^2 4x}.$$

III) Θέτομε $\varphi = 2x$, $\omega = \sin \varphi$ καί $y = \omega^3$, ὁπότε: $y'_x =$

$$(\omega^3)' \cdot (\sin \varphi)' \cdot (2x)' = 3\omega^2 \cdot (-\eta\mu \varphi) \cdot 2 = -6 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \eta\mu \varphi = -6\eta\mu 2x \sin^2 2x.$$

29 · 5 Άσκησης.

1. Νά βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων με τύπους:

$$\text{I)} y = (x^2 + 3x - 6)^2 \cdot \text{II)} y = x^2(x + 2)^2(x + 3) \cdot \text{III)} y = \tan x + \sec x \text{ με } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{IV)} y = \frac{6x^5 - 8x^3 + 1}{4x^4 + 2x^2 + 7} \cdot \text{V)} y = \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \text{VI)} y = \sqrt[3]{\eta\mu x} \text{ με } 0 < x < \pi \cdot \text{VII)} y = \sqrt[3]{\epsilon\phi x} \text{ με } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

2. Νά βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος καθεμιάς από τις συναρτήσεις που δίνονται με τούς παρακάτω τύπους: I) $y = \sin^2 \frac{5x}{4}$ · II) $y = \sqrt[3]{\sigma\phi^2 4x}$ με $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

$$\text{III)} y = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^3} \cdot \text{IV)} y = \frac{\sin x - \eta\mu x}{\sqrt[3]{\eta\mu 2x}} \text{ με } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

3. I) Υπολογίστε τις παραγώγους 1ης, 2ης, 3ης και 4ης τάξεως των συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $\sin x$ (x δηλώνει ακτίνια). Τί παρατηρείτε;

II) Υπολογίστε τις παραγώγους 1ης και 2ης τάξεως των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu(ax + \beta)$ και $g(x) = \sin(ax + \beta)$, όπου α και β σταθερές.

III) Υπολογίστε την παράγωγο της συναρτήσεως $\sigma(\omega) = \eta\mu\omega$, όπου ω δηλώνει μοίρες.

(Υπόδειξη: Νά λάβετε υπόψη ότι μεταξύ των μέτρων ω και x ενός και του ίδιου τόξου σε μοίρες και αντίστοιχα σε ακτίνια ισχύει η σχέση: $\omega = \frac{180^\circ}{\pi} x$ · άρα $\Delta\omega = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \Delta x$).

$$4. \text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ Αποδείξτε ότι, αν } \varphi'(p) = 0, \text{ τότε } \varphi(p) = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

(Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ έχουν παραγώγους στη θέση $x = p$ και ότι $g(p) \neq 0$ και $g'(p) \neq 0$).

ΕΝΟΤΗΤΑ 30

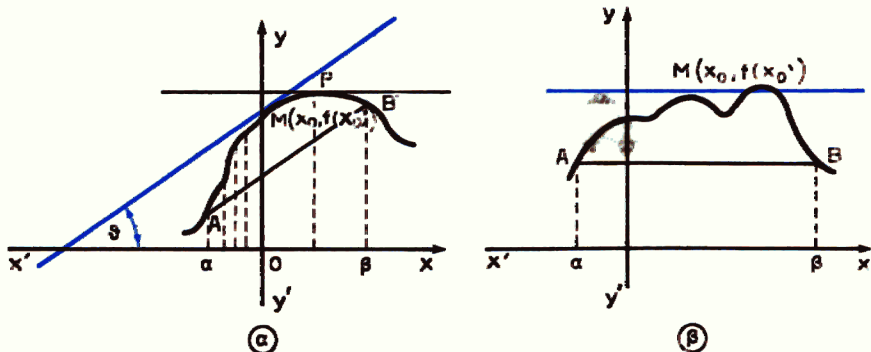
ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

30 · 1 Τό Θεώρημα της μέσης τιμής και η μονοτονία.

α) Άς θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχή και παραγωγίσιμη τουλάχιστο σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και άς υποθέσουμε ότι η γραμμή AMPB [σχ. 30 · 1 (α)] είναι η γραφική παράστασή της.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο του τόξου AP, όπου η συνάρτηση είναι αύξουσα, ο συντελεστής διεύθυνσεως της εφαπτομένης είναι θετικός (ή κλίση $\epsilon\phi > 0$) και ελαττώνεται διαρκώς καθόσον οι τιμές των τεταγμένων αυξάνουν. Στο σημείο P, όπου η τεταγμένη παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή από όλες εκείνες που αντιστοιχίζονται στις τιμές του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, η εφαπτομένη της καμπύλης έχει γίνει παράλληλη προς τον άξονα x' .

Στά σημεία του τόξου PB, όπου η συνάρτηση είναι φθίνουσα, οι συντελεστές διευθύνσεως των εφαπτομένων είναι αρνητικοί (εφθ < 0). Ξέρομε όμως ότι ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης, σ' ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παραστάσεως μιάς συναρτήσεως $f(x)$, είναι η παράγωγος της $f(x)$ στή θέση x_0 .



Σχ. 30.1.

Είναι λοιπόν φανερό ότι: η παράγωγος μιάς συναρτήσεως $f(x)$ — όταν υπάρχει — συνδέεται σε κάθε θέση του πεδίου ορισμού της $f(x)$ άμεσα με τον τρόπο μεταβολής της συναρτήσεως γύρω από το θεωρούμενο σημείο.

Πιο συγκεκριμένα: με τη βοήθεια της παραγώγου μπορούμε να βρίσκομε τὰ διαστήματα και τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας μιάς συναρτήσεως και νὰ προσδιορίζομε τὰ σημεία στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησή μας ἐμφανίζει τοπικά ἀκρότατα.

Τὰ θεωρήματα πού ἀκολουθοῦν ἔχουν σάν σκοπὸ νὰ ἐξυπηρετήσουν τοὺς παραπάνω στόχους.

Θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ.

«Ἄν $f(x)$ μιά συνάρτηση συνεχῆς καὶ παραγωγίσιμη σ' ἓνα διάστημα $[a, b]$,

τότε ὑπάρχει ἀριθμὸς $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος, ὥστε $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (1)».

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ δια-

νύσματος $\overrightarrow{AB}$ [σχ. 30 · 1 (α)] καὶ συνεπῶς καὶ τῆς εὐθείας AB καὶ ἐπειδὴ $f'(x_0)$ εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς εὐθείας τῆς εφαπτομένης στὸ σημεῖο M τῆς καμπύλης AMPB, εἶναι φανερό ὅτι ἡ γεωμετρικὴ ἐρμηνεία τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς εἶναι ἡ παρακάτω:

«Ἄν μιά καμπύλη AMB (A, B τὰ ἄκρα τῆς) ἔχει εφαπτομένη σὲ κάθε σημεῖο τῆς, τότε ὑπάρχει ἓνα τουλάχιστο σημεῖο M τῆς καμπύλης ὅπου ἡ εφαπτομένη εἶναι παράλληλη πρὸς τὴ χορδὴ AB».

* Ἄν εἰδικότερα συμβαίνει νὰ εἶναι $f(a) = f(b)$, τότε ἀπὸ τὴν σχέση (1)

παίρουμε $f'(x_0) = 0$. Έτσι προκύπτει ή παρακάτω πρόταση που ονομάζεται **θεώρημα του Rolle**.

«Αν μιιά συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $[α, β]$ καί είναι $f(α) = f(β)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (α, β)$ γιά τό όποιο έχομε $f'(x_0) = 0$ ».

Ή από γραφική άποψη σημαίνει ότι υπάρχει σημείο M του τόξου AMB [σχ. 30 · 1 (β)] στό όποιο ή έφαπτομένη είναι παράλληλη πρós τόν άξονα $x'x$.

β) Στηριζόμενοι στό θεώρημα τής μέσης τιμής βγάζομε τήν παρακάτω πολύ σημαντική συνέπεια γιά τή μονοτονία μιās συναρτήσεως.

«Θεωροϋμε μιιά συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $[α, β]$. Αν $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [α, β]$, τότε ή $f(x)$ είναι αύξουσα μέσα σ' αυτό τό διάστημα. Αν $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [α, β]$, τότε ή $f(x)$ είναι φθίνουσα μέσα στό ίδιο διάστημα».

Πράγματι: Άς είναι x_1 καί x_2 δυό τιμές του διαστήματος $[α, β]$ μέ $x_2 > x_1$, τότε, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τής μέσης τιμής, υπάρχει αριθμός $\rho \in (x_1, x_2)$ τέτοιος ώστε $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\rho)$ (2). Αν τώρα είναι $f'(\rho) \geq 0$, από τήν (2) παίρνομε $f(x_2) \geq f(x_1)$ (άφοϋ $x_2 > x_1 \iff x_2 - x_1 > 0$)· δηλαδή ή συνάρτηση είναι αύξουσα. Αν όμως $f'(\rho) \leq 0$, τότε έχομε (πάλι από τήν (2)) $f(x_2) \leq f(x_1)$ · δηλαδή ή συνάρτηση είναι φθίνουσα.

30 · 2 Ή μονοτονία καί τά άκρότατα.

Είναι ένδιαφέρον νά έξετάσομε τώρα πώς, μέσω τής παραγώγου, μπορούμε νά άναγνωρίσομε άν υπάρχουν τοπικά άκρότατα μιās συναρτήσεως καί σέ ποιά σημεία του πεδίου όρισμοϋ τής. Ή παρακάτω πρόταση ύποδεικνύει τή διαδικασία πού πρέπει τελικά νά άκολουθήσομε.

Θεωροϋμε μιιά συνάρτηση $f(x)$ συνεχή καί παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(α, β)$.

I) Αν ή $f(x)$ δέχεται σέ μιιά θέση $x_0 \in (α, β)$ τοπικό άκρότατο, τότε ή (πρώτη) παράγωγος σ' αυτή τή θέση θά ίσοϋται μέ μηδέν ($f'(x_0) = 0$).

II) Αντίστροφα: Αν γιά μιιά τιμή $x_0 \in (α, β)$ είναι $f'(x_0) = 0$, δέν έπεται κατανάγκη ότι ή $f(x)$ θά παρουσιάζει στή θέση x_0 τοπικό άκρότατο. Γιά νά συμβαίνει αυτό άρκεί επιπλέον οι τιμές τής παραγώγου άριστερά καί δεξιά του σημείου x_0 (γιά τό όποιο έχομε $f'(x_0) = 0$), σ' ένα διάστημα πού περιέχει τόν αριθμό x_0 , νά είναι έτερόσημες.

Πράγματι:

I) Έστω ότι ή $f(x)$ παρουσιάζει στή θέση x_0 τοπικό μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα διάστημα $(κ, λ)$ πού περιέχει τόν αριθμό x_0 ($κ < x_0 < λ$), στό όποιο έχομε $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (κ, λ)$, είτε είναι ό $x < x_0$ είτε είναι $x > x_0$, όπότε:

$$\text{άν } x < x_0, \text{ τότε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ καί}$$

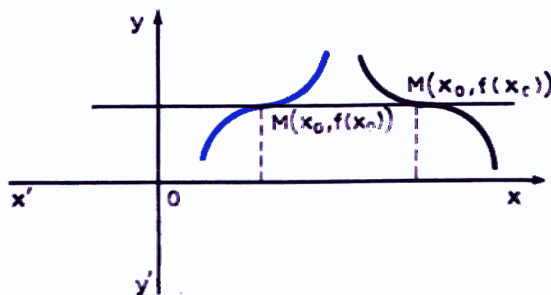
$$\text{αν } x > x_0, \text{ τότε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

$$\text{"Έτσι όμως: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0 \quad .$$

Άρα κατανάγκη $f'(x_0) = 0$.

II) Άντίστροφα, ή συνθήκη $f'(x_0) = 0$ δέν είναι μόνη της ίκανή για νά παρουσιάζει ή συνάρτηση τοπικό άκρότατο στη θέση x_0 . Σημαίνει βέβαια όπωσδήποτε ότι ή έφαπτομένη, στό σημείο τής γραφικής παραστάσεως τής $f(x)$ μέ τετμημένη x_0 , είναι παράλληλη πρός τόν άξονα x' . Μπορεί όμως ή γραφική παράσταση νά έχει στην περιοχή του σημείου $M_0(x_0, f(x_0))$ τή μιά ή τήν άλλη μορφή που έμφανίζει τό σχήμα 30·2, όπου βλέπομε ότι ή μονοτονία τής συναρτήσεως δέν αλλάζει κατά τή «διάβαση» τής συναρτήσεως από τήν τιμή x_0 .



Σχ. 30.2.

Όταν όμως ή παράγωγος από θετική άριστερά του x_0 μετατρέπεται σε άρνητική δεξιά του x_0 , τότε ή συνάρτηση από αύξουσα (άριστερά του x_0) μετατρέπεται σε φθίνουσα (δεξιά του x_0).

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τιμές του $x < x_0$ για τίς όποιες είναι $f(x_0) \geq f(x)$ και επίσης τιμές $x > x_0$ για τίς όποιες πάλι είναι $f(x_0) \geq f(x)$. Άρα στη θέση x_0 ή συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Όμοια, όταν ή παράγωγος από άρνητική άριστερά γίνεται θετική δεξιά του x_0 , τότε στη θέση x_0 ή συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό έλάχιστο.

Όστε: Μιά συνάρτηση $f(x)$, που έχει παράγωγο σ' ένα διάστημα (a, β) , παρουσιάζει σε μιά θέση $x_0 \in (a, \beta)$ τοπικό μέγιστο αν $f'(x_0) = 0$ και αν ή παράγωγος $f'(x)$ από θετική άριστερά γίνεται άρνητική δεξιά του x_0 . Επίσης παρουσιάζει τοπικό έλάχιστο αν $f'(x_0) = 0$ και αν ή $f'(x)$ από άρνητική άριστερά γίνεται θετική δεξιά του x_0 .

Γιά νά βρούμε λοιπόν σε ποιά σημεία του πεδίου όρισμού της μιά παραγω-

γίσιμη συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά άκρότατα προσδιορίζουμε τις τιμές που μηδενίζουν την παράγωγο και εξετάζουμε τὰ πρόσημα τῆς παραγώγου στίς περιοχές τῶν σημείων μηδενισμού τῆς.

Ἐκεῖ ὅπου τὰ πρόσημα ἀλλάζουν ἔχουμε τοπικά άκρότατα, ἐκεῖ ὅπου διατηροῦνται τοπικά άκρότατα δέν ὑπάρχουν.

Παράδειγμα : Θεωροῦμε τή συνάρτηση μέ τύπο :

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 6x + 1. \text{ Νά καθοριστοῦν τὰ δια-}$$

στήματα μονοτονίας καί τὰ τοπικά άκρότατα τῆς συναρτήσεως.

Ἔχουμε: $y' = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = x^4 - x^3 - 7x^2 + 7x + 6x - 6 =$
 $= x^3(x-1) - 7x(x-1) + 6(x-1) = (x-1)(x^3 - 7x + 6) =$
 $= (x-1)(x^3 - x - 6x + 6) = (x-1)[x(x^2-1) - 6(x-1)] =$
 $= (x-1)^2 \cdot [x(x+1) - 6] = (x-1)^2 \cdot (x^2 + x - 6). \text{ Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου}$
 $x^2 + x - 6$ εἶναι $x_1 = -3$ καί $x_2 = 2$ καί συνεπῶς $y' = (x-1)^2(x+3)(x-2)$.

Κατασκευάζουμε τώρα τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν καί μεταβολῶν, ἀφοῦ παρατηρήσαμε ὅτι γιά $\forall x \in (-3, 1) \cup (1, 2)$ ἡ παράσταση $(x-1)^2(x+3)(x-2)$ διατηρεῖται ἀρνητική, ἐπειδή τό $(x-1)^2$ εἶναι θετικό γιά $\forall x \neq 1$ καί τό γινόμενο $(x+3)(x-2)$ παίρνει ἀρνητικές τιμές στό διάστημα $(-3, 2)$.

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	μεγ ↗ ↓ $\frac{1433}{20}$ ↘ ελ ↘ ↓ $-\frac{19}{15}$ ↗				

30 · 3 Προσδιορισμός ὁριακῶν τιμῶν μέσω τῶν παραγώγων. Κανόνας τοῦ L'Hospital (Λοπιτάλ).

Τό παρακάτω θεώρημα, πού ἀναφέρεται συνήθως ὡς κανόνας τοῦ L'Hospital, μᾶς δίνει τή δυνατότητα νά ὑπολογίζουμε, μέσω τῶν παραγώγων, εὐκολα καί σύντομα διάφορες ὁριακές τιμές.

Θεώρημα. Ἄν δύο συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$, ὁρισμένες μέσα σ' ἓνα διάστημα $[a, b]$, μηδενίζονται γιά μιά τιμή $\rho \in [a, b]$ καί ἔχουν παραγώγους συνεχεῖς μέσα στό $[a, b]$, τότε $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. (Ἐφόσον τό $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ὑπάρχει).

$$\text{Πράγματι: Έχουμε } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho}}{\frac{g(x) - g(\rho)}{x - \rho}} = \frac{f'(x')}{g'(x'')} \text{ όπου } x' \in (x, \rho) \text{ και } x'' \in (x, \rho).$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \text{ [Είναι } \frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho} = f'(x') \text{ και } \frac{g(x) - g(\rho)}{x - \rho} = g'(x'') \text{ κατά τό θεώρημα τής μέσης τιμής].}$$

Σημείωση: Άποδεικνύεται ότι τό θεώρημα ίσχύει και όταν:
 $\lim_{x \rightarrow \rho} f(x) = \pm \infty$ και $\lim_{x \rightarrow \rho} g(x) = \pm \infty$.

$$\text{Έφαρμογή: Νά βρεθεί: I) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}. \text{ II) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi x}{x}.$$

$$\text{Έχουμε: I) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1} = 1.$$

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\epsilon\varphi x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1} = 1.$$

30.4 Έφαρμογές και παραδείγματα.

1. Γενικοί κανόνες γιά τή μελέτη των μεταβολών μις συναρτήσεως και γιά τή χάραξη τής γραφικής παραστάσεως.

I) Καθορίζομε τό πεδίο όρισμοϋ τής συναρτήσεως.

II) Άν ή τιμή $x = 0$ άνήκει στό πεδίο όρισμοϋ τής συναρτήσεως όρίζομε τήν τιμή $f(0)$ · είναι εκείνο τό σημείο τοϋ άξονα $y'y$ πού άνήκει στή γραφική παράσταση τής $f(x)$.

III) Προσδιορίζομε, άν μπορούμε, τίς ρίζες τής $f(x)$, δηλαδή τίς τιμές τοϋ x πού άπεικονίζονται στόν άριθμό μηδέν.

IV) Βρίσκομε τά σημεία άσυνεχείας άν ύπάρχουν, καθορίζοντας σέ ποιές θέσεις τά (ύπάρχοντα) μονόπλευρα όρια τής συναρτήσεως είναι διαφορετικά και σέ ποιές θέσεις ή τιμή τής συναρτήσεως δέν ταυτίζεται μέ τήν όριακή της τιμή.

V) Έπολογίζομε τήν παράγωγο τής συναρτήσεως και καθορίζομε τίς τιμές τοϋ x πού τή μηδενίζουν.

VI) Καθορίζοντας πότε ή παράγωγος παίρνει τιμές άρνητικές και πότε θετικές, βρίσκομε τά διαστήματα μονοτονίας και τά τοπικά άκρότατα τής συναρτήσεως (άν ύπάρχουν).

VII) Προσδιορίζομε τίς εξισώσεις των άσυμπτώτων, άν ύπάρχουν, και τίς σχεδιάζομε σ' ένα όρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

VIII) Τοποθετοϋμε, ως πρός τό παραπάνω σύστημα συντεταγμένων, όλα

τά σημεία που έχουμε προσδιορίσει, τά σημεία δηλαδή πάνω στους άξονες και τά ακρότατα.

ΙΧ) Βρίσκουμε μερικά ακόμα σημεία κατά προσωπική μας εκτίμηση και τελικά προβαίνουμε στη χάραξη της γραφικής παραστάσεως.

Παρατήρηση: Από τη γραφική παράσταση μπορούμε να διακρίνουμε και το πεδίο τιμών της συναρτήσεως.

Σημείωση για τον προσδιορισμό των ασυμπτώτων.

Όταν $y = \frac{\Pi(x)}{P(x)}$ είναι μία ρητή συνάρτηση, όταν δηλαδή οι παραστάσεις

$\Pi(x)$ και $P(x)$ είναι πολυώνυμα του x , βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως εφαρμόζοντας τους παρακάτω κανόνες:

α) *Αν ο παρονομαστής $P(x)$ είναι πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού από τον αριθμητή, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ (δηλαδή ο άξονας $x'x$) είναι ασύμπτωτη· διότι έχουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

β) *Αν τά πολυώνυμα $\Pi(x)$ και $P(x)$ είναι ισοβάθμια, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \kappa$, όπου κ ο λόγος του συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του $\Pi(x)$ προς το συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του $P(x)$, είναι ασύμπτωτη· διότι τότε έχουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Pi(x)}{P(x)} = \kappa$.

γ) *Αν για μία τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $P(\alpha) = 0$ και $\Pi(\alpha) \neq 0$, τότε η ευθεία με εξίσωση $x = \alpha$ είναι ασύμπτωτη (παράλληλη προς τον άξονα $y'y$)· διότι τότε έχουμε $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty$.

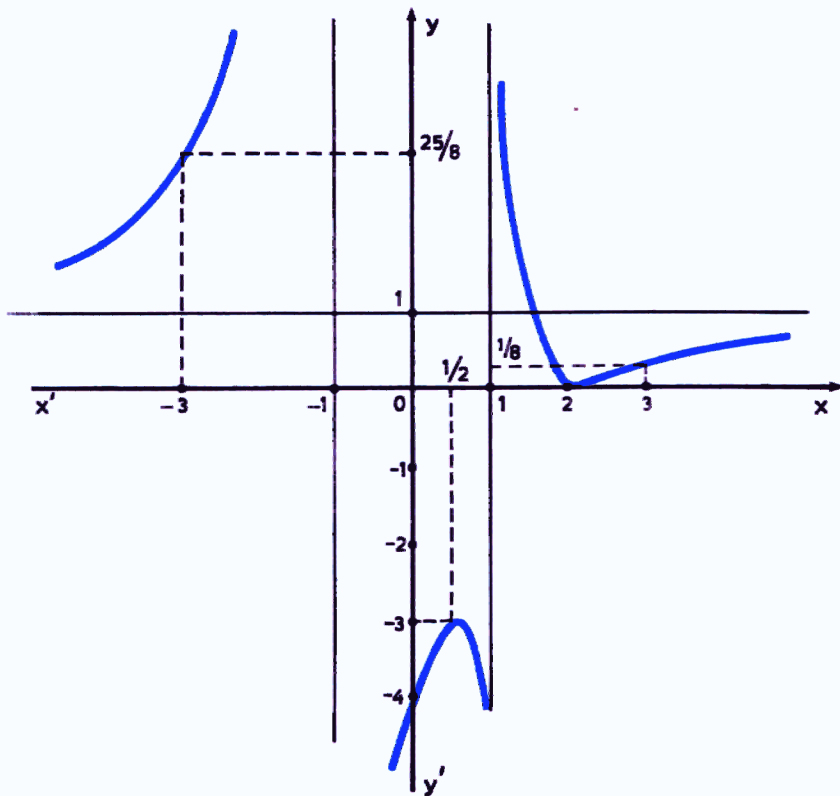
δ) *Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μονάδα μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε η γραφική παράσταση της συναρτήσεως έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda x + \beta$ είναι τό πηλίκο της (άλγοριθμικής) διαιρέσεως του $\Pi(x)$ διά του $P(x)$.

Παράδειγμα: Νά βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τύπους:

$$\text{I)} \quad y = \frac{x^2 + x + 2}{(x - 2)(x^2 + 1)} \quad \text{II)} \quad y = \frac{8x^2 + 7}{(2x - 6)(2x + 6)} \quad \text{III)} \quad y = \frac{4x^2 + 1}{2x - 1}.$$

Ασύμπτωτες της (I) είναι οι ευθείες με εξισώσεις $x = 2$ και $y = 0$ · της (II) οι ευθείες με εξισώσεις $x = 3$, $x = -3$ και $y = 2$ · ή (III) έχει ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $y = 2x + 1$ (επειδή $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x - 1} = 2x + 1 + \frac{2}{2x - 1}$).

2. Νά γίνει ή μελέτη καί νά σχεδιαστέι ή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως πού όρίζει ό τύπος $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+1)}$ (α) (σχ. 30.4 α).



Σχ. 30.4 α.

- I) Τό πεδίο όρισμοϋ τής συναρτήσεως είναι: $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
- II) Για $x = 0$ παίρνομε $y = -4$.
- III) Έχομε $y = 0$ για $x = 2$ [$f(2) = 0$], καί έπειδή ό άριθμός 2 είναι διπλή ρίζα τής έξισώσεως $\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+1)} = 0$, συμπεραίνομε ότι ή εϋθεία $x'x$ είναι έφαπτομένη τής γραφικής παραστάσεως στό σημείο $(2, 0)$.
- IV) Η συνάρτηση είναι παντοϋ συνεχής μέσα στό πεδίο όρισμοϋ της.
- V) Βρίσκομε $y' = \frac{2(x-2)(2x-1)}{(x^2-1)^2}$ (γ). Οι τιμές πού μηδενίζουν τήν y' είναι $x = \frac{1}{2}$ καί $x = 2$.
- VI) Έχομε $y' > 0$ για $x < \frac{1}{2}$ ή $x > 2$ καί $y' < 0$ για $\frac{1}{2} < x < 2$.

Κατασκευάζουμε τώρα τον παρακάτω πίνακα τιμών και μεταβολών.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
y'	0 ↙ +	+ 0 ↓ -	- 0 ↓ +	0 ↗		
y	1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $\mu\epsilon\gamma = -3$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\epsilon\lambda = 0$ ↗ 1			

Στή θέση $x = \frac{1}{2}$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο κι αυτό

$$\text{ισοϋται με } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = -3 \text{ και στή θέση } x = 2 \text{ το-}$$

πικό ελάχιστο ίσο με $f(2) = 0$.

VII) 'Ασύμπτωτες της γραφικής παραστάσεως είναι οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ (παράλληλες προς τον άξονα $y'y$), διότι όταν $x \rightarrow -1$ ή $x \rightarrow 1$ τότε $y \rightarrow \pm \infty$. Επίσης η ευθεία με εξίσωση $y = 1$ (παράλληλη προς τον άξονα $x'y$), διότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

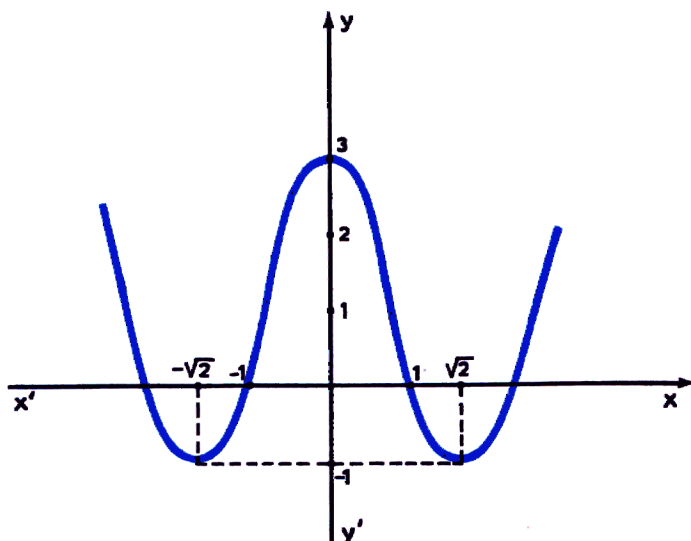
VIII) 'Ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τοποθετούμε τά σημεία $(0, -4)$, $(2, 0)$, σχεδιάζουμε τις ασύμπτωτες και όρίζουμε ακόμα και τά σημεία $\left(-3, \frac{25}{8}\right)$, $\left(3, \frac{1}{8}\right)$. 'Ακολουθως χαράσσουμε τή γραφική παράσταση.

Παρατηρώντας τή γραφική παράσταση εύκολα διαπιστώνουμε ότι τό πεδίο τιμών της συναρτήσεως είναι ή ένωση τών διαστημάτων $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

3. Νά μελετηθεῖ καί νά παρασταθεῖ γραφικά ή συνάρτηση $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

Η συνάρτηση, σάν πολυώνυμο, είναι ορισμένη και συνεχής παντού μέσω στο $\mathbb{R}$. Η παράγωγός της είναι $y' = 4x^3 - 8x$ και μηδενίζεται για $x = -\sqrt{2}$, 0 και $\sqrt{2}$. Με $x = 0$ παίρνουμε $y = 3$. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα και σχεδιάζουμε τή γραφική παράσταση της συναρτήσεως, χρησιμοποιώντας ότι ήδη βρήκαμε και τοποθετώντας και μερικά ακόμα σημεία (σχ. 30.4 β).

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$\xrightarrow{\text{ελ}}$	$\xrightarrow{\text{μεγ}}$	$\xrightarrow{\text{ελ}}$	$+\infty$



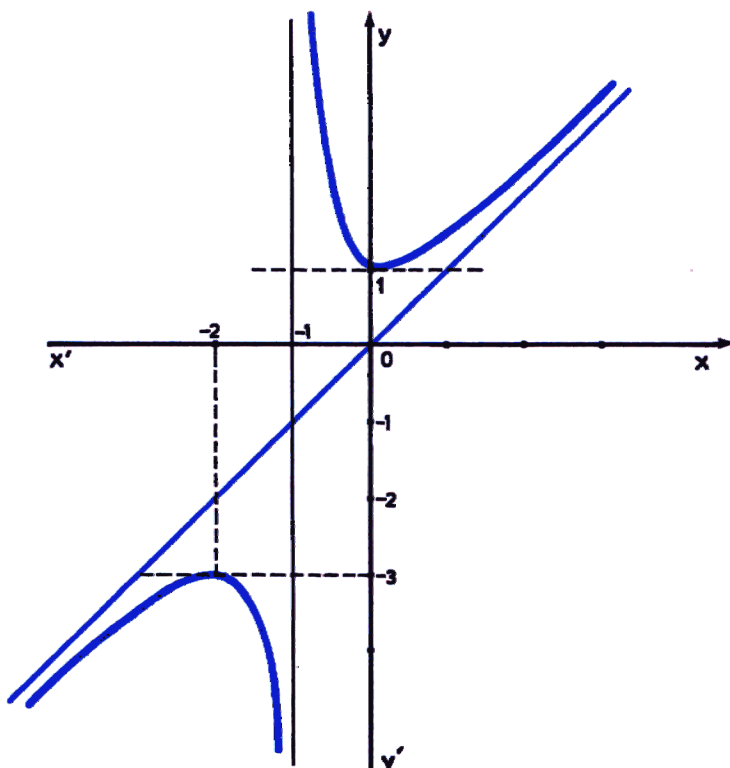
Σχ. 30·4 β.

4. Νά γίνει ή μελέτη τής συναρτήσεως μέ τύπο $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ καί νά χαραχθεί ή γραφική τής παράστασης.

Πεδίο όρισμού τής συναρτήσεως είναι τό σύνολο $\mathbb{R} - \{-1\}$. Ή παράγωγός τής είναι: $y' = \frac{(x+2)x}{(x+1)^2}$. Στά σημεία -2 καί 0 , γιά τά όποία έχομε $f'(-2) = 0$ καί $f'(0) = 0$, ή συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά άκρότατα, διότι στήν περιοχή αύτών των σημείων αλλάζει ή μονοτονία τής συναρτήσεως. Ή παρακάτω πίνακας έκφράζει τήν όλη μεταβολή τής συναρτήσεώς μας· χρησιμοποιώντας τά περιλαμβανόμενα σ' αυτόν καί τίς εύθείες $y = x$ καί $x = -1$ πού είναι άσύμπτωτες, σχεδιάζομε τή γραφική παράσταση. (σχ. 30·4 γ).

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0
y	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\nearrow$
		$\text{μεγ} = -3$	$-\infty$	$+\infty$	$\text{ελ} = 1$

Σημείωση : Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ (πού είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των άξόνων) είναι πλάγια ασύμπτωτη, διότι άκραιο μέρος του πηλίκου του $x^2 + x + 1$ διά του $x + 1$ είναι τό μονώνυμο x .



Σχ. 30-4 γ.

5. Νά υπολογισθούν οι παρακάτω όριακές τιμές: I) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$.

II) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 4}{x^6 + 4x^5 - x^2 - 2x - 2}$. III) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^2}$.

IV) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sigma\phi x)$.

I) Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής μηδενίζονται με

$$x = \frac{\pi}{3}. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sin x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(1 - 2\sin x)'}{(x - \frac{\pi}{3})'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\eta\mu x}{1} = \sqrt{3}$$

II) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και τα δύο πολυώνυμα (άριθμητή, παρονομαστή) μηδενίζονται με $x = 1$. Συνεπώς παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 4)'}{(x^6 + 4x^5 - x^2 - 2x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{42x^6 - 20x^3 + 9x^2}{6x^5 + 20x^4 - 2x - 2} = \frac{31}{22}.$$

III) Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{2x}$. Έπειδή οι παραστάσεις $1 - \sigma\upsilon\nu x$ και $2x$ μηδενίζονται και οι δύο με $x = 0$ εφαρμόζουμε ξανά τον κανόνα του L'Hospital και παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{2} = 0.$$

$$\text{IV) Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sigma\phi x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\phi x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma\phi x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(\eta\mu^2 x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

30.5 Ασκήσεις.

1. Νά γίνει η μελέτη, ως προς τη μονotonία και τα άκρότατα, των συναρτήσεων που δίνονται από τους παρακάτω τύπους: I) $y = \frac{x+1}{x-1}$ · II) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ·

III) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 30x$ · IV) $y = (x+2)^2(2x-7)$ · V) $y = x - \eta\mu 2x$ · VI) $y = x + \epsilon\phi x$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

2. Ως εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής ν' αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις:

I) Αν η παράγωγος μιās συναρτήσεως $f(x)$ ίσούται με μηδέν σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (α, β) , τότε η $f(x)$ είναι σταθερή σ' αυτό το διάστημα.

II) Αν δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ έχουν ίσες (πεπερασμένες) παραγώγους σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (α, β) , τότε οι συναρτήσεις θα διαφέρουν, σ' αυτό το διάστημα, κατά σταθερόν αριθμό.

3. Νά μελετηθούν και νά παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\text{I) } y = \frac{5x+6}{7x-11} \cdot \text{ II) } y = x^4 + x^2 + 1 \cdot \text{ III) } y = x^3 - 3x - 2 \cdot \text{ IV) } y = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x \cdot$$

$$\text{V) } y = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 2x - 8}.$$

4. Νά υπολογισθούν οι παρακάτω οριακές τιμές:

$$I) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \varepsilon\phi x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\frac{1}{\varepsilon\phi x}} \quad II) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x}{\eta\mu 5x}.$$

$$III) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi 10x}{4x} \quad IV) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi 8x}{\varepsilon\phi 4x} \quad V) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{x - \pi}.$$

$$VI) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \quad VII) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}.$$

5. Νά βρεθεί πολυώνυμο της μορφής $x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ μηδενιζόμενο διά $x = 0$ και τό όποιο παίρνει τοπικά άκρότατα στις θέσεις $x = -\frac{7}{3}$ και $x = 1$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 31

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

31 · 1 Ένα πρόβλημα και πώς λύεται με μιά μέθοδο του Αρχιμήδη.

α) «Θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση, ως προς ένα όρθοκανονικό σύστημα άξόνων, $y = x^2$.

Παίρνουμε ένα σημείο $A(\alpha)$ του θετικού ημιάξονα $\vec{Ox}$ και όρίζουμε και τό αντίστοιχο σημείο $P(\alpha, \alpha^2)$ της παραβολής.

Θέλωμε νά υπολογίσουμε τό έμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται μεταξύ του τόξου OP της παραβολής, του ημιάξονα $\vec{Ox}$ και της $PA \perp Ox$. Τό μικτόγραμμο αυτό σχήμα θά τό λέμε **παραβολικό χωρίο**.

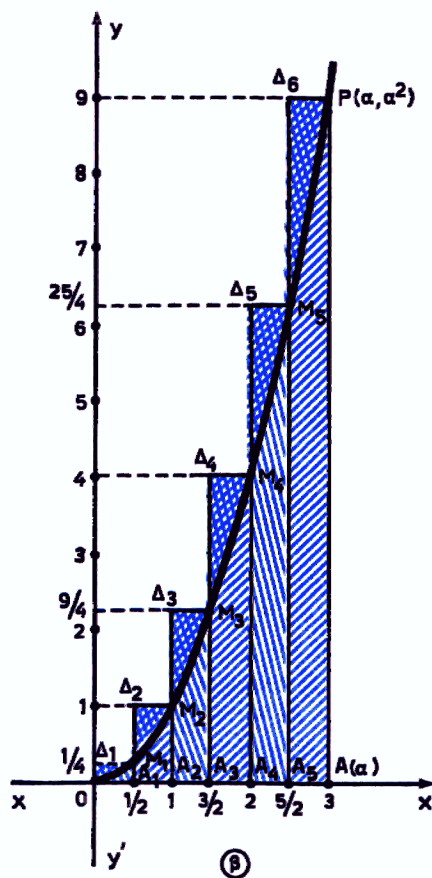
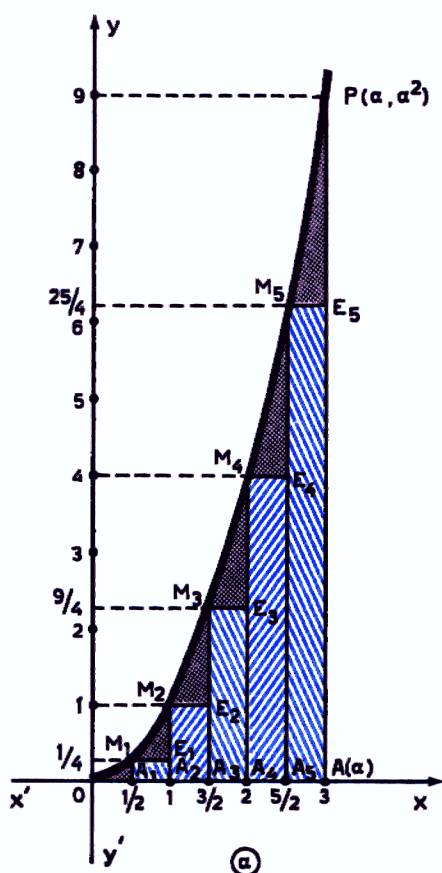
Χωρίζουμε τό τμήμα OA σέ ίσα μέρη, π.χ. σέ 6, μέ τά σημεία $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \equiv A$ και κατασκευάζουμε: I) τά έσωτερικά στό παραβολικό χωρίο όρθογώνια $A_1 M_1 E_1 A_2$ ($A_1 M_1 \perp Ox$, $M_1 E_1 \parallel Ox$, $M_2 A_2 \perp Ox$), $A_2 M_2 E_2 A_3$ ($E_2 A_3 \perp Ox$, $M_2 E_2 \parallel Ox$), $A_3 M_3 E_3 A_4$, $A_4 M_4 E_4 A_5$ και $A_5 M_5 E_5 A$ [σχ. 31 · 1 α(α)]. και II) τά έξωτερικά $OA_1 M_1 \Delta_1$ ($M_1 \Delta_1 \perp Oy$), $A_1 A_2 M_2 \Delta_2$ ($M_2 \Delta_2 \perp Oy$, $\Delta_2 A_1 \parallel Oy$), $A_2 A_3 M_3 \Delta_3$, $A_3 A_4 M_4 \Delta_4$, $A_4 A_5 M_5 \Delta_5$ και $A_5 A P \Delta_6$ [σχ. 31 · 1 α(β)].

Παρατηρούμε ότι: τό έμβαδόν E του παραβολικού χωρίου OAP περιέχεται μεταξύ των δύο άθροισμάτων.

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= 0 + (A_1 M_1 E_1 A_2) + (A_2 M_2 E_2 A_3) + (A_3 M_3 E_3 A_4) + (A_4 M_4 E_4 A_5) + \\ &+ (A_5 M_5 E_5 A_6) = 0 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{3\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{4\alpha}{6}\right)^2 \\ &+ \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{5\alpha}{6}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{6}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2). \end{aligned}$$

$$\text{Καί } \Sigma_6 = (OA_1 M_1 \Delta_1) + (A_1 A_2 M_2 \Delta_2) + (A_2 A_3 M_3 \Delta_3) + (A_3 A_4 M_4 \Delta_4) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ (A_4 A_5 M_5 \Delta_5) + (A_5 A P \Delta_6) = \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{3\alpha}{6}\right)^2 + \\
 &+ \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{4\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{5\alpha}{6}\right)^2 + \frac{\alpha}{6} \cdot \left(\frac{6\alpha}{6}\right)^2 = \\
 &= \left(\frac{\alpha}{6}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \cdot \text{δηλαδή έχουμε } \sigma_6 < E < \Sigma_6. \\
 &\left[\text{Είναι } OA_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = A_4 A_5 = A_5 A = \frac{\alpha}{6}, A_1 M_1 = \right. \\
 &= \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2, (A_2 M_2)^2 = \left(\frac{2\alpha}{6}\right)^2, \dots, AP = \left(\frac{6\alpha}{6}\right)^2 = \alpha^2 \left. \right].
 \end{aligned}$$



Σχ. 31.1.

Γενικά αν χωρίσουμε τό τμήμα OA σέ n ίσα μέρη θά έχομε πάντα ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\sigma_n < E < \Sigma_n$ (I), όπου:

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 \cdot (0 + 1^2), \sigma_3 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 \cdot (0 + 1^2 + 2^2), \dots, \sigma_n =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{v}\right)^3 \cdot [0 + 1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2], \text{ και } \Sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{1}\right)^3 \cdot 1^2, \Sigma_2 =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2), \Sigma_3 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2), \dots,$$

$$\Sigma_v = \left(\frac{\alpha}{v}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2).$$

Έπειδή $\Sigma_v - \sigma_v = \alpha^3 \cdot \frac{1}{v}$ και συνεπώς $\lim_{v \rightarrow \infty} (\Sigma_v - \sigma_v) =$

$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\alpha^3 \cdot \frac{1}{v} \right) = \alpha^3 \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} = 0$, έπεται ότι $\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_v$. Άρα λόγω της (1) πρέπει νά έχομε $E = \lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_v$.

Γιά νά βροῦμε λοιπόν τό έμβαδόν E τοῦ παραπάνω παραβολικοῦ χωρίου ἀρκεί νά ὑπολογίσουμε τό $\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v$ (ή τό $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_v$).

Εἶναι $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$ (βλέπε εφαρμογή 4

τῆς παραγράφου 16.4) καί έπομένως $\Sigma_v = \left(\frac{\alpha}{v}\right)^3 \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} =$

$$= \frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{v^3} = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{v+1}{v} \cdot \frac{2v+1}{v} = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(2 + \frac{1}{v}\right).$$

άλλά $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right) = 1$ καί $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{v}\right) = 2$ καί συνεπώς

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \frac{\alpha^3}{6} \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right) \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{v}\right) = \frac{\alpha^3}{6} \cdot 2 = \frac{\alpha^3}{3}.$$

ώστε:

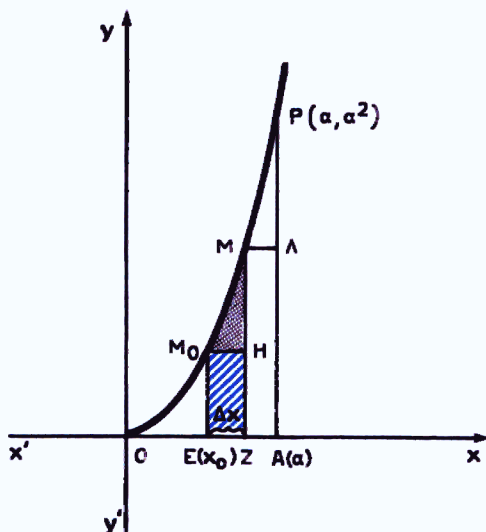
$$E = \frac{\alpha^3}{3}$$

Ο τρόπος πού χρησιμοποιήσαμε πίο πάνω γιά νά ὑπολογίσουμε τό έμβαδόν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου εἶναι ἡ διατύπωση, στή σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, τῆς μεθόδου πού χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης γιά νά επιλύσει αὐτό τό πρόβλημα καί άλλα παρόμοια.

Ἡ μέθοδος αὕτη ὀνομάστηκε **μέθοδος τῆς ἐξαντλήσεως** καί ἡ ἀνάπτυξή της ἔδωσε γένεση σ' ἕναν κλάδο τῶν Μαθηματικῶν πού λέγεται **ολοκληρωτικός Λογισμός**. αὐτός παρέχει γενικές μεθόδους γιά τήν πραγμάτευση ὄχι μόνο τοῦ προβλήματος τοῦ έμβαδοῦ μικτογράμμων επιπέδων σχημάτων ἀλλά καί ποικίλων ἄλλων ζητημάτων ἀπό τά Μαθηματικά, ἀπό τίς φυσικές Ἐπιστήμες

καί τήν Τεχνική. Κεντρική έννοια τοῦ κλάδου εἶναι τό «όλοκλήρωμα», τό «όρισμένο» καί τό «άόριστο», πού παρουσιάζομε σύντομα ἀμέσως παρακάτω.

β) Θεωροῦμε ξανά τό παραβολικό χωρίο OAP , μιὰ τιμή $x_0 > 0$, τό ἀντίστοιχο σημεῖο $E(x_0)$ τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων καί τό ἀντίστοιχο σημεῖο $M_0(x_0, x_0^2)$ τῆς παραβολῆς $y = x^2$ (σχ. 31.1 β).



Σχ. 31.1 β.

Ἄς εἶναι ἀκολούθως Δx μιὰ αὐξηση τῆς μεταβλητῆς x καί $Z(x = x_0 + \Delta x)$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2)$ τά ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ ἄξονα καί τῆς παραβολῆς. Φέρνομε τέλος καί τήν $M_0H \perp ZM$. Τό μικτόγραμμο χωρίο $EZMM_0$, μέρος τοῦ ἀρχικοῦ παραβολικοῦ χωρίου OAP [P τό σημεῖο μέ συντεταγμένες (α, α^2)] ἀποτελεῖται ἀπό τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο $EZH M_0$ καί τό μικτόγραμμο τρίγωνο M_0HM . εἶναι δέ ἐμβ. $(EZHM_0) = \overline{EM_0} \cdot \overline{EZ} = x_0^2 \cdot \Delta x$ ($\Delta x > 0$).

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει μιὰ συνάρτηση $\Phi(x)$, τέτοια ὥστε νά ἔχομε $\Delta\Phi(x) = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = x_0^2 \cdot \Delta x + \text{ἐμβ. } (M_0HM)$ καί τῆς ὁποίας τό διαφορικό στή θέση x_0 εἶναι τό $x_0^2 \Delta x = x_0^2 dx$ ἔτσι ἔχομε

$$\boxed{d\Phi(x) = x_0^2 dx} \quad (1)$$

Παίρνοντας τό διαφορικό $x_0^2 dx$ ἀντί γιὰ τήν ὀλική αὐξηση $\Delta\Phi = x_0^2 \Delta x + \text{ἐμβ. } (M_0HM)$ τῆς $\Phi(x)$ ἀντικαθιστοῦμε τήν «παραβολική ταινία» EM_0MZ μέ τό ὀρθογώνιο EM_0HZ .

Ἄς υποθέσουμε τώρα ὅτι τό παραβολικό χωρίο OAP ἔχει χωρισθεῖ σέ

«λεπτές» παραβολικές ταινίες με πλάτος μικρότερο ή ίσο προς τό ΕΖ και ἄς θεωρήσουμε τό ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ὅπως τό ΕΜ₀ΗΖ, ἄθροισμα πού θά συμβολίσουμε μέ Σx²dx.

Ὅσο πιά μικρό ἐκλέγεται τό ΕΖ = Δx, τόσο πιά μικρή θά εἶναι ἡ διαφορά τοῦ Σx²dx ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἐμβασδῶν τῶν ταινιῶν, ὅπως ἡ Μ₀ΕΖΜ, πού συναποτελοῦν τό παραβολικό χωρίο ΟΑΡ.

Ὅταν Δx → 0, ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει τό ὄριο τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἐμβασδῶν τῶν παραπάνω ὀρθογωνίων, πού τό καθένα τους ἔχει ὄριο τό μηδέν καί πού τό πλῆθος τους ἔχει ὄριο τό ἀπειρο, καί ὅτι αὐτό τό ὄριο ἰσοῦται μέ Φ(α) - Φ(0), ὅπου Φ(x) ἡ συνάρτηση τοῦ διαφορικοῦ τύπου (1), δηλαδή μιά συνάρτηση μέ παράγωγο x² (Φ'(x) = x²).

Ἐπειδή $\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)' = x^2$, ὅπου c μιά αὐθαίρετη σταθερά, καταλαβαίνομε ὅτι Φ(x) = $\frac{1}{3}x^3 + c$. Ἔχομε λοιπόν $\lim_{x=0}^{x=a} x^2 dx = \Phi(a) - \Phi(0) = \left(\frac{1}{3}a^3 + c\right) - \left(\frac{1}{3}0^3 + c\right) = \frac{1}{3}a^3$.

Τό παραπάνω ὄριο τό ὀνομάζομε ὀρισμένο ὀλοκλήρωμα τῆς f(x) = x², καθώς καί τοῦ διαφορικοῦ τῆς x²dx, ἀπό 0 ἕως α καί τό παριστάνομε συμβολικά μέ:

$$\int_0^a x^2 dx$$

Οἱ ἀκραῖες τιμές 0 καί α τῆς μεταβλητῆς x λέγονται ἄκρα τοῦ ὀλοκληρώματος.

Ἡ συνάρτηση Φ(x) = $\frac{1}{3}x^3 + c$, μέ c αὐθαίρετη σταθερά, πού ἔχει ὡς παράγωγο τή συνάρτηση x², λέγεται ὀριστο ὀλοκλήρωμα τοῦ διαφορικοῦ x²dx ἢ παράγουσα (συνάρτηση) τῆς f(x) = x² καί συμβολίζεται, κατ' ἀντιστοιχία πρὸς τό ὀρισμένο ὀλοκλήρωμα, μέ

$$\int x^2 dx$$

Ἔτσι ἀπό τόν διαφορικό τύπο (1) παίρνομε τόν τύπο:

$$\int d\Phi(x) = \int x^2 dx = \Phi(x) = \frac{1}{3}x^3 + c \quad (2)$$

γ) Γενικά μπορούμε νά διατυπώσουμε τὰ ακόλουθα :

*Αν $f(x)$ είναι μιὰ συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχουν στο $[\alpha, \beta]$ συναρτήσεις $\Phi(x)$ τέτοιες ώστε νά είναι $\Phi'(x) = f(x)$ γιά $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Οί συναρτήσεις αυτές διαφέρουν ή μιὰ από τήν ἄλλη κατά μιὰ σταθερά· ἔτσι ἂν $\varphi(x)$ είναι μιὰ ἀπ' αὐτές, τότε ὅλες οἱ ἄλλες δίνονται ἀπό τόν τύπο $\Phi(x) = \varphi(x) + c$ ὅπου c σταθερά.

Κάθε συνάρτηση $\Phi(x) = \varphi(x) + c$ λέγεται **ἀόριστο ολοκλήρωμα** (ἀκριβῶς ἐπειδή ή τιμή τῆς σταθερᾶς c ἀφήνεται ἀπροσδιόριστη) ή **παράγουσα** τῆς $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ καί συμβολίζεται μέ $\int f(x)dx$.

*Ἐτσι ἔχομε $(\int f(x) dx)' = (\Phi(x))' = (\varphi(x) + c)' = f(x)$ καί συνεπῶς $d \int f(x)dx = d(\varphi(x) + c) = (\varphi(x) + c)'dx = f(x)dx$.

*Ἡ διαφορά $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = (\varphi(\beta) + c) - (\varphi(\alpha) + c)$ λέγεται **ὀρισμένο ολοκλήρωμα τῆς $f(x)$ ἀπό α ἔως β** , ἐπειδή είναι ἕνας ὀρισμένος ἀριθμός ἀνεξάρτητος ἀπό τήν τιμή τῆς c , καί συμβολίζεται μέ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

*Αν $f(x) \geq 0$ γιά $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε τό $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τοῦ ἐπιπέδου χωρίου πού περικλείεται ἀπό τόν ἄξονα $x'x$, ἀπό τή γραφική παράσταση τῆς $y = f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$, ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, καί ἀπό τίς δύο εὐθεῖες $x = \alpha$ καί $x = \beta$ τίς παράλληλες πρὸς τόν ἄξονα $y'y$.

Σημείωση : Μονάδα ἐμβαδοῦ είναι τό τετράγωνο μέ πλευρά τό κοινό μήκος τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τῶν δύο ἄξόνων συντεταγμένων.

Παράδειγμα : *Ἐστω $f(x) = \lambda x + \mu$ γιά $x \in \mathbb{R}$ μέ λ καί μ σταθερές· τότε:

$$\int (\lambda x + \mu) dx = \frac{1}{2} \lambda x^2 + \mu x + c \text{ καί } \int_{x_1}^{x_2} (\lambda x + \mu) dx =$$

$$\lambda (x_2^2 - x_1^2) + \mu (x_2 - x_1).$$

*Από τὰ παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι : Γιά νά ὑπολογίσουμε ἕνα ὀρισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ἀρκεῖ νά βροῦμε τό ἀόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$, δηλαδή μιὰ συνάρτηση $\Phi(x)$ μέ $\Phi'(x) = f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$.

*Ἐχομε τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = [\Phi(x)]_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$.

$$\text{Π.χ. } \int_{-2}^2 x^4 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 = \frac{1}{5} \cdot 2^6 = \frac{64}{5}.$$

31.2 Θεμελιώδεις ιδιότητες τοῦ ολοκληρώματος.

Σύμφωνα μέ τοὺς προηγούμενους ὁρισμούς είναι εὐκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι γιά τό ολοκλήρωμα ἰσχύουν οἱ παρακάτω βασικές ιδιότητες:

I) Ἐν $f(x)$ μιὰ συνάρτηση συνεχῆς σ' ἓνα διάστημα $[a, \beta]$ καὶ $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, τότε $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx$.

II) Ἐν $x_1, x_2, x_3 \in [a, \beta]$, τότε $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx$.

III) Μέ $c = \text{σταθερά}$ ἰσχύει: $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$ καὶ $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$.

IV) Ἐν $f(x)$ καὶ $g(x)$ δύο συναρτήσεις συνεχεῖς στό διάστημα $[a, \beta]$, τότε $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Πραγματικά, ἂν $\Phi(x) = \int f(x) dx$ καὶ $\Omega(x) = \int g(x) dx$ εἶναι δύο παράγουσες τῶν $f(x)$ καὶ $g(x)$ ἀντιστοίχως, τότε $\Phi(x) + \Omega(x)$ εἶναι μιὰ παράγουσα τῆς $f(x) + g(x)$ καὶ ἐπομένως:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= [\Phi(x) + \Omega(x)]_a^b = (\Phi(\beta) + \Omega(\beta)) - (\Phi(\alpha) + \Omega(\alpha)) = \\ &= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) + \Omega(\beta) - \Omega(\alpha) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Άσκηση. Νά γίνει ἡ ἀπόδειξη τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων I ἕως καὶ III.

31.3 Μερικά στοιχειώδη ολοκληρώματα.

I) Ἐχομε: $\left(\frac{1}{\kappa+1} x^{\kappa+1} \right)' = x^\kappa$, ἐφόσον $\kappa \neq -1$, καὶ

συνεπῶς $\int x^\kappa dx = \frac{1}{\kappa+1} \cdot x^{\kappa+1} + c$ (1), (μέ $\kappa \neq -1$), ὅπου c αὐθαίρετη σταθερή.

$$\text{II) } (\eta \mu x)' = \sigma \nu x \implies \int \sigma \nu x dx = \eta \mu x + c \quad (2)$$

$$\text{III) } (-\sigma \nu x)' = \eta \mu x \implies \int \eta \mu x dx = -\sigma \nu x + c \quad (3)$$

$$\text{IV) } (\epsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sigma \nu^2 x} \implies \int \frac{dx}{\sigma \nu^2 x} = \epsilon \varphi x + c \quad (4)$$

$$\text{V) } (-\sigma \varphi x)' = \frac{1}{\eta \mu^2 x} \implies \int \frac{dx}{\eta \mu^2 x} = -\sigma \varphi x + c. \quad (5)$$

Κλείνουμε ἐδῶ τὰ ἐλάχιστα στοιχεῖα τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, ποῦ ἐκθέσαμε σ' αὐτό τό κεφάλαιο, παραθέτοντας τὰ λόγια μέ τὰ ὁποῖα ἀρχίζει τό ἐξαίρετο βιβλίο του «Διαφορικός καὶ Ὁλοκληρωτικός Λογισμός» ὁ καθηγητής τοῦ Τεχνολογικοῦ Ἰνστιτούτου τῆς Καλιφόρνιας Τόμ Ἀποστολ

«Η τόσο μεγάλη πρόοδος, πού στά τελευταία εκατό χρόνια σημειώθηκε στην Έπιστήμη καί στην Τεχνολογία, κατά μεγάλο μέρος όφείλεται στην ανάπτυξη τών Μαθηματικών.

Ό κλάδος τών Μαθηματικών πού είναι γνωστός μέ τό όνομα Διαφορικός καί Όλοκληρωτικός Λογισμός χρησιμεύει σάν ένα φυσικό καί πολυδύναμο έργαλειό γιά τήν πραγμάτευση ποικιλίας προβλημάτων πού παρουσιάζονται στή Φυσική, στην Άστρονομία, στή Μηχανολογία, στή Χημεία, στή Γεωλογία, στή Βιολογία καθώς καί σέ άλλα πεδία τής ανθρώπινης δραστηριότητας, ανάμεσα στά όποια θά πρέπει νά κατατάξουμε, στά τελευταία μάλλον χρόνια, καί τίς κοινωνικές Έπιστήμες . . . ».

31.4 Έφαρμογές καί παραδείγματα.

1. Νά βρεθοῦν τά παρακάτω άόριστα ολοκληρώματα:

$$I) \int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx \cdot II) \int \sqrt{x} dx \cdot III) \int \sqrt[5]{x^3} dx \cdot IV) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Έχομε: $I) \int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int dx =$
 $= 4 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int 1 dx = 4 \cdot \frac{1}{4} x^4 + 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 +$
 $+ x + c = x^4 + x^3 + x^2 + x + c.$

$$II) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} x^{1 + \frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

(για $x \geq 0$).

$$III) \int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{8} \cdot x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + c \quad (\text{για } x \geq 0).$$

$$IV) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \cdot x^{-\frac{1}{2} + 1} + c = 2 x^{\frac{1}{2}} + c =$$

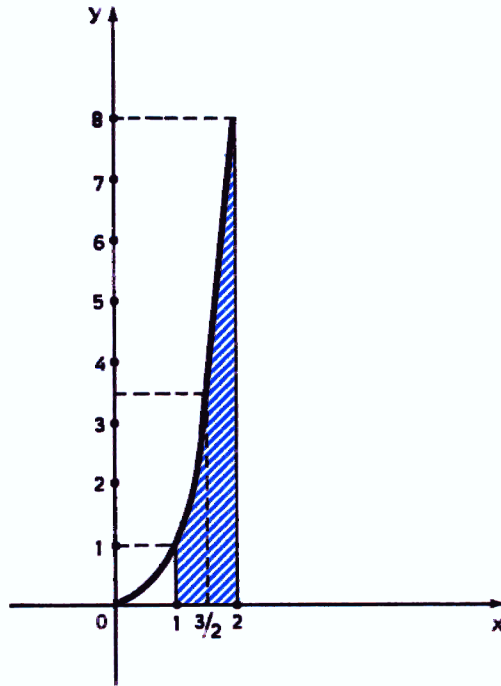
$$= 2 \sqrt{x} + c \quad (\text{για } x \geq 0).$$

2. Η γραφική παράσταση τής συναρτήσεως μέ τύπο $y = x^3$ λέγεται κυβική παραβολή. Νά βρεθεί τό έμβადόν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου τής παραπάνω κυβικής παραβολής, μεταξύ τών εύθειών $x = 1$ καί $x = 2$ (σχ. 31.4α).

Ζητάμε τήν τιμή τοῦ όρισμένου ολοκληρώματος $\int_1^2 x^3 dx$.

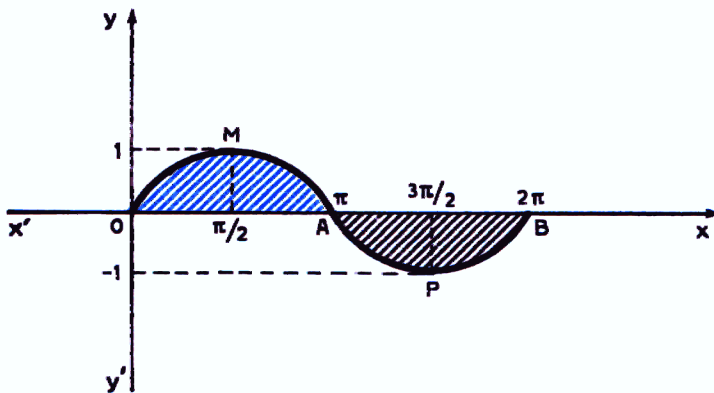
Έπειδή $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c$, έχομε:

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + c \right]_1^2 = \left(\frac{1}{4} 2^4 + c \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + c \right) = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$



Σχ. 31.4 α.

3. Νά βρεθεί τό εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της ημιτονοειδούς καμπύλης $y = \eta\mu x$, από τή θέση $O (0, 0)$ έως τή θέση 2π , καί του άξονα $\vec{Ox}$ (σχ. 31.4 β).



Σχ. 31.4 β.

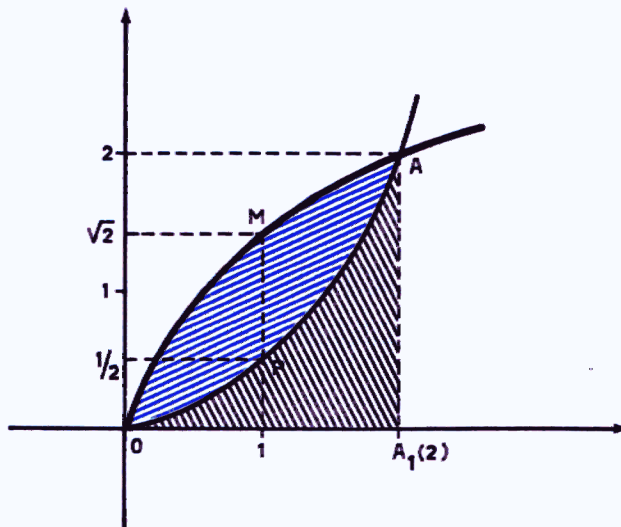
Έπειδή τά μικτόγραμμα σχήματα OMA καί APB είναι ίσα θά έχουν καί ίσα έμβαδά.

Ἡ συνάρτηση ὁμως $\eta\mu x$ παίρνει ἀρνητικές τιμές στό διάστημα $(\pi, 2\pi)$ καί εἶναι ἐπίσης $\int_{\pi}^{2\pi} \eta\mu x = \left[-\sigma\upsilon\nu x \right]_{\pi}^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi - (-\sigma\upsilon\nu \pi) = -1 - (+1) = -2 < 0$.

Ἄν δέν θέλομε νά μιλάμε καί γιά ἀρνητικό ἐμβαδόν, ὑπολογίζομε τό ἐμβαδόν τοῦ ΟΜΑ, πού ἰσοῦται μέ $\int_0^{\pi} \eta\mu x \, dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu \pi - (-\sigma\upsilon\nu 0) = 2$, καί τό διπλασιάζομε γιά νά ἔχομε τό ἐμβαδόν ἀπό τή θέση $O(0,0)$ ἕως τή θέση 2π .

4. Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις πού δίνονται γιά $x \geq 0$ ἀπό τοὺς τύπους $y = \frac{1}{2}x^2$ (I) καί $y = \sqrt{2x}$ (II) ὡς πρός τό αὐτό ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς.

Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου ΟΜΑΡΟ τό περιεχόμενο μεταξύ τῶν τόξων ΟΡΑ καί ΟΜΑ τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν (I) καί (II), ὅπου Α τό κοινό τους σημεῖο ἐκτός ἀπό τό Ο (σχ. 31.4 γ).



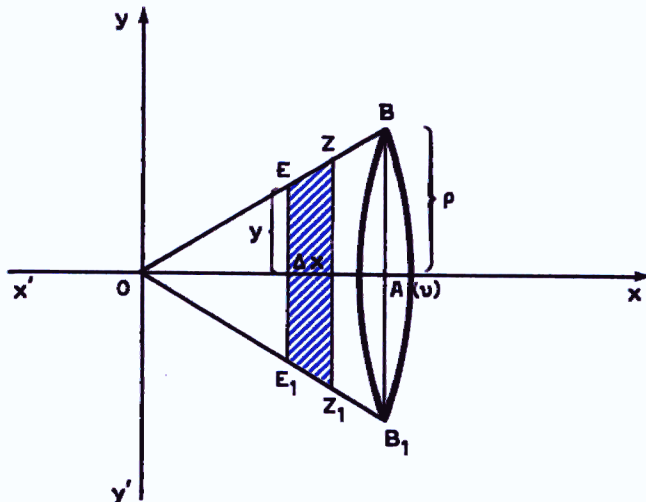
Σχ. 31.4 γ.

Γιά νά βροῦμε τό 2ο κοινό σημεῖο ἐξισώνομε τά δεύτερα μέλη τῶν (I) καί (II). Παίρνομε $\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2x} \implies \frac{1}{4}x^4 = 2x \implies x^3 = 8 \implies x = 2$. Ἄρα τό 2ο κοινό σημεῖο Α τῶν γραμμῶν ἔχει συντεταγμένες $\left(2, \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2\right)$.

Εἶναι εὐκόλο, μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος, νά καταλάβομε ὅτι τό ζητούμενο ἐμβαδὸ εἶναι: $E = \int_0^2 \sqrt{2x} \, dx - \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 \, dx$.

Έχουμε $\sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{x} \, dx = \sqrt{2} \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \sqrt{2} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2^3} =$
 $= \frac{2}{3} \sqrt{2^4} = \frac{8}{3}$ και $\frac{1}{2} \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$ και συνε-
 πώς $E = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

5. Νά υπολογισθεί ό όγκος κώνου μέ ύψος u και άκτίνα βάσεως ρ (σχ. 31.4δ).



Σχ. 31.4δ.

Ό κώνος παράγεται μέ μιά πλήρη περιστροφή ενός όρθογωνίου τριγώνου OAB ($\hat{A} = 1^\circ$), μέ κάθετες πλευρές $OA = u$ και $AB = \rho$, γύρω στην ευθεία OA. Θεωρούμε όρθοκανονικό σύστημα άξόνων μέ θετικό ήμιάξονα $\vec{Ox}$ την ήμιευθεία OA. Τό τραπέζιο EE_1Z_1Z παράγει κατά την περιστροφή έναν κόλouro κώνο· αντί γι' αυτόν θά πάρουμε τόν κύλινδρο μέ όγκο $\pi y^2 dx$.

Ό όγκος του κώνου ίσοϋται μέ: $V = \int_0^u \pi y^2 dx$. Άλλά $\frac{y}{x} = \frac{\rho}{u} \Rightarrow$
 $y = \frac{\rho}{u} x$ και συνεπώς $V = \int_0^u \pi \frac{\rho^2}{u^2} x^2 dx = \frac{1}{3} \pi \rho^2 u$.

31.5 Άσκήσεις.

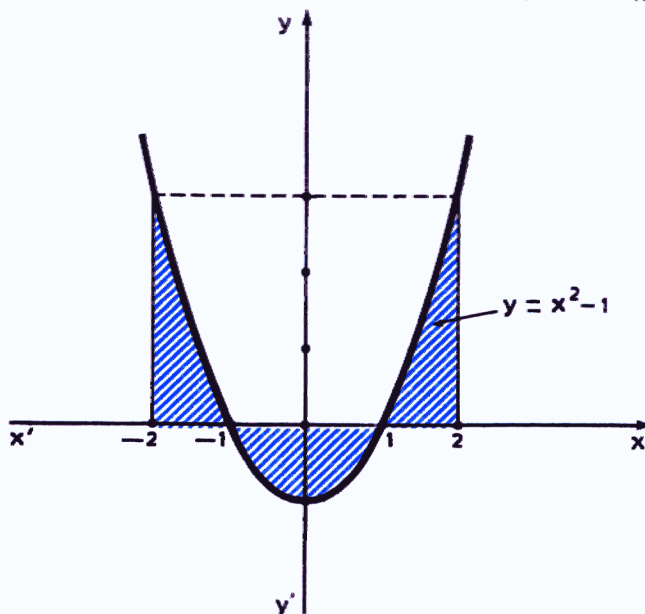
1. Νά βρεθούν τά παρακάτω άόριστα ολοκληρώματα:

I) $\int (2x^8 - 4x^5 + 3x^2) \, dx$ · II) $\int x^{\frac{8}{9}} \, dx$ · III) $\int \sin^2 x \, dx$ και $\int \eta \mu^2 x \, dx$ ·

(Χρησιμοποιήστε τό μετασχηματισμό $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 + \sin 2x)$ και $\eta \mu^2 x = \frac{1}{2} (1 - \sin 2x)$)

$$\text{IV)} \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{d 2x}{\sin^2 2x} \quad \text{V)} \int \frac{dx}{\eta\mu^2 2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d 2x}{\eta\mu^2 2x} \quad \text{VI)} \int \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) dx \\ \text{VII)} \int \eta\mu \left(4x - \frac{\pi}{2} \right) dx.$$

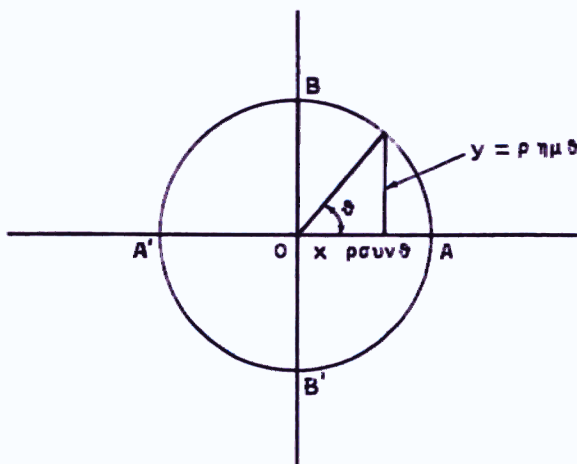
2. Νά υπολογισθεί τό έμβαδόν τών τριών διαγραμμισμένων χωρίων του σχήματος 31.5 α.



Σχ. 31.5 α.

3. Νά υπολογισθεί τό έμβαδόν τών χωρίων που όρίζονται από τήν καμπύλη μέ εξίσωση $y = x^2 - 2x - 3$, από τούς άξονες συντεταγμένων καί από τήν εύθεία μέ εξίσωση $x = \frac{7}{2}$.

4. Ύπολογίζοντας τό ολοκλήρωμα $\int_0^p y dx$, όπου $y = \rho \eta\mu \theta$ καί $x = \rho \sigma\upsilon\upsilon\eta \theta$ νά βρείτε τό έμβαδόν κύκλου άκτίνας ρ (σχ. 31.5 β).



Σχ. 31.5 β.

(Υπόδειξη: $dx = -\rho \eta \mu \theta d\theta$, $\int_0^{\rho} y dx = -\rho^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \eta \mu^2 \theta d\theta$).

5. Νά υπολογισθεί τό άθροισμα τών έμβαδών τών χωρίων πού όρίζονται άπό τή γραμμή μέ έξίσωση $y = \sin x$ καί άπό τό τμήμα του άξονα Ox μέ άκρα τό σημείο O καί τό σημείο $\frac{3\pi}{2}$.

6. Νά προσδιορισθοϋν οι έξισώσεις τών παραβολών ($y = ax^2 + bx + \gamma$) πού διέρχονται άπό τά σημεία $(-1, 0)$ καί $(3, 0)$ καί ή μιά έχει κορυφή τό σημείο $(1, -2)$ καί ή άλλη τό $(1, 1)$. άκολούθως νά υπολογισθεί τό έμβαδόν του πεπερασμένου χωρίου πού περιέχεται μεταξύ τών δυό παραβολών.

7. Η δύναμη πού άσκοϋμε γιά νά επιβάλομε σ' ένα έλατήριο επιμήκυνση x είναι ίση μέ kx , όπου k μιά θετική σταθερά πού εξαρτάται άπό τό έλατήριο. Τό δαπανόμενο έργο γιά ν' αύξήσομε τήν επιμήκυνση κατά Δx είναι $kx \cdot \Delta x$. Νά βρεθεί τό όλικό έργο πού άπαιτείται γιά μιά επιμήκυνση s άπό τή θέση 0 .

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $W_{ολ} = \int_0^s kx dx$).

Άσκήσεις γιά επανάληψη.

1. Νά προσδιορισθοϋν τά παρακάτω όρια:

I) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ · II) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3}$.

III) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ · IV) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - x \right)$ · V) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4+1} - x \right)$.

VI) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^3}{x^3-5^3}$ · VII) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sin 2x}{x^2}$ · VIII) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x-2\eta \mu x}$.

IX) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ · X) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3} \right]$.

XI) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$ · XII) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon \varphi 5x}{\eta \mu 7x}$ · XIII) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta \mu 3x}{2x-3\eta \mu 2x}$.

XIV) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin x} - \epsilon \varphi x \right]$ · XV) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[(\alpha^2-x^2) \epsilon \varphi \frac{\pi x}{2\alpha} \right]$ · XVI) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-\eta \mu x}{\sqrt{1-\sin x}}$

XVII) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu 3x}{1-2 \sin x}$.

2. Νά γίνει ή μελέτη τής συναρτήσεως πού όρίζει ή εξίσωση $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ καί νά κατασκευαστεί ή παραστατική της καμπύλη (Κ). Άκολουθως νά προσδιοριστεί ή έφαπτομένη τής (Κ) στό σημείο Ο (0,0).

3. Θεωρούμε τή συνάρτηση $f(x)$ πού δίνεται από τόν τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} & \text{για } x \neq 0. \\ 1 & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Νά μελετηθεί ως πρós τή συνέχεια καί νά γίνει ή γραφική της παράσταση.

4. Μé πεδίο όρισμού τό διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ θεωρούμε τή συνάρτηση $f(x)$ πού δίνεται από τόν τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\eta\mu x} & \text{για } x \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Νά εξετάσετε άν ή συνάρτηση είναι συνεχής στή θέση $x = 0$.

5. Δίνεται ή συνάρτηση πού όρίζει ή εξίσωση $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - ax$, μέ $a \in \mathbb{R}$. νά βρεθούν τά όρια αúτης τής συναρτήσεως όταν $x \rightarrow \pm \infty$.

6. Δίνεται ή συνάρτηση μέ τύπο $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Νά βρεθεί τό $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lambda$ καί άκολουθως τό $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - \lambda x)$, όταν $x \rightarrow \pm \infty$.

7. Θεωρούμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ καί πεδίο όρισμού τό διάστημα $[0, +\infty)$.

Ι) Νά άποδείξετε ότι ή συνάρτηση αúτη είναι γνησίως αύξουσα μέσα σ' όλο τό πεδίο όρισμού της.

ΙΙ) Νά δώσετε τήν έκφραση τής αντίστροφης συναρτήσεως $y = f^{-1}(x)$ καί άκολουθως νά σχεδιάσετε τίς γραφικές παραστάσεις τών συναρτήσεων $f(x)$ καί $f^{-1}(x)$ στό ίδιο όρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

8. Νά βρεθούν οι παράγωγοι τών συναρτήσεων πού δίνονται από τούς παρακάτω τύπους:

$$\text{Ι) } y = x^3(x+1)^2 \quad \text{ΙΙ) } y = \frac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^3} \quad \text{ΙΙΙ) } y = 2x^2: \sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{ΙV) } y = (x + \sqrt{1+x^2})^3 \cdot (x - \sqrt{1+x^2})^4 \quad \text{V) } y = \eta\mu^2 \frac{x}{4} : \sqrt{1 + \sin^2 \frac{x}{5}}.$$

$$\text{VI) } y = \frac{\epsilon\phi x}{1 + \sigma\phi^2 x} \left(\text{μέ } 0 < x < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$9. \text{ Ι) Νά βρεθούν τά: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) \text{ καί } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \eta\mu \frac{1}{x}.$$

ΙΙ) Θεωρούμε τίς συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ πού δίνονται από τούς παρακάτω τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} x \eta\mu \frac{1}{x} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Νά εξετάσετε αν οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στη θέση $x = 0$.

$$10. \text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } f(x) \text{ με τύπο: } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3 \pi |x|}{x^2} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Νά εξετάσετε αν είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στη θέση $x = 0$.

$$11. \text{Θεωρούμε τη συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο } f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

I) Νά βρείτε τά πεδία ορισμού και τιμών. II) νά διαμορφώσετε τον τύπο της αντίστροφης συναρτήσεως $f^{-1}(x)$. III) νά σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις και των δυο συναρτήσεων στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση που δίνεται από την εξίσωση $y = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$) και γράφουμε τη σχέση του θεωρήματος της μέσης τιμής με τη μορφή:

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x+\theta h), \text{ όπου } h > 0 \text{ και } 0 < \theta < 1.$$

Ν' αποδείξετε ότι ο αριθμός θ παίρνει μία ορισμένη τιμή, ανεξάρτητη από τις τιμές των α, β, γ, x και h , και νά δώσετε μία γεωμετρική έρμηνεία σ' αυτή την ιδιότητα.

13. Νά γίνει ή μελέτη και ή γραφική των συναρτήσεων που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$I) y = \sqrt[3]{x(x-1)} + \sqrt[3]{x(x+1)} \quad II) y = \sqrt[3]{x^3 - x} \quad III) y = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

14. Νά βρείτε τις γωνίες των γραμμών με εξισώσεις:

$$\alpha) y = x^2 \text{ και } y = \frac{1}{2}x \quad \beta) y = x^3 + x^2 \text{ και } y = 2x. \text{ (Δηλαδή τη γωνία των εφαπτομένων στα κοινά σημεία).}$$

15. Προσδιορίστε συναρτήσεις $f(x)$ για τις οποίες έχουμε:

$$I) f'(x) = -4 \quad II) f'(x) = 5x - 3 \quad III) f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad IV) f''(x) = 7.$$

$$V) f''(x) = \eta\mu x \quad VI) f''(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad VII) f''(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x.$$

16. Νά εξετάσετε αν ή συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot |x|$ έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στις θέσεις $x = 0$ και $x = 1$.

17. Δίνεται ή συνάρτηση με τύπο $y = -\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1$. I) Νά γίνει ή γραφική της παράστασης. II) Νά βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτομένες της γραφικής παραστάσεως στις θέσεις -1 και $+1$, με τον άξονα $x'x$. III) Σέ ποιά θέση ή εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την $x'x$.

18. Νά βρεθούν τά ολοκληρώματα:

$$I) \int (x+1)(x+2)^2 dx \quad II) \int x \sqrt{1+x^2} dx \quad III) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$IV) \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)} dx \quad V) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\varphi^2 x} dx \quad VI) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu 2x} dx.$$

$$VII) \int (\alpha \sigma\upsilon\nu^2 \omega t + \beta \eta\mu^2 \omega t) dt \quad VIII) \int \sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu 2x dx.$$

$$IX) \int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu 2x dx.$$

19. I) Νά υπολογίσετε τά ὀρισμένα ὀλοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{-1}^1 4x^3 dx \quad \text{καί} \quad \beta) \int_{-2}^2 4x^4 dx.$$

II) Νά υπολογίσετε τό ἔμβασόν τοῦ χωρίου μεταξύ τοῦ ἄξονα $x'x$, τῶν εὐθειῶν $x = -1$ καί $x = 1$, καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = 4x^4$.

III) Νά υπολογίσετε τό ἔμβασόν τοῦ χωρίου μεταξύ τοῦ ἄξονα $x'x$, τῶν εὐθειῶν $x = -2$ καί $x = 2$, καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = 4x^3$.

IV) Νά υπολογίσετε τό ἔμβασόν τοῦ χωρίου μεταξύ τῶν τόξων τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν $y = 4x^3$ καί $y = 4x^4$ πού ὀρίζονται ἀπό τά κοινά σημεῖα αὐτῶν τῶν γραμμῶν.

Τιμές τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων								
Μοίρες	Ἡμίτονο							
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
Συνημίτονο								
	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°	Μοίρες

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων								
Μοίρες	Συνημίτονο							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Μοίρες
Ημίτονο								

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων								
Μοίρες	Εφαπτομένη							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46984	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Μοίρες
Συνεφαπτομένη								

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων								
Μοίρες	Συνεφαπτομένη							
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°	Μοίρες
Έφαπτομένη								

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Παράγρ.

Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Πραγματικοί αριθμοί και ρίζες. Διανύσματα και πράξεις στα διανύσματα. Καρτεσιανές συντεταγμένες. Έξισωση εὐθείας στο επίπεδο

Ένότητα 1: Τά διάφορα είδη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ρητοί - ἄρρητοι (συνοπτική περιγραφή τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) 1

1 - 1	Ὁ ρητὸς ἀριθμὸς.....	1
1 - 2	Ὁ ἄρρητος ἀριθμὸς	3
1 - 3	Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα.....	4
1 - 4	Ἀσκήσεις.....	5

Ένότητα 2: Ρίζες πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ πράξεις μεταξύ ριζῶν... 5

2 - 1	Νιοστή ρίζα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ	5
2 - 2	Ἰδιότητες τῶν ριζῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.....	8
2 - 3	Πράξεις μεταξύ ριζῶν	10
2 - 4	Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα	11
2 - 5	Ἀσκήσεις	13

Ένότητα 3: Τὸ νόημα καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος 14

3 - 1	Ἀναγκαιότητα τοῦ διανύσματος	14
3 - 2	Τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα καὶ τὰ στοιχεῖα του.....	16
3 - 3	Τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα.....	17
3 - 4	Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα	18
3 - 5	Ἀσκήσεις.....	19

Ένότητα 4: Πράξεις μέ διανύσματα 20

4 - 1	Ἀθροισμα καὶ διαφορά διανυσμάτων.....	20
4 - 2	Γινόμενο διανύσματος ἐπὶ πραγματικὸ ἀριθμὸ.....	22
4 - 3	Ἐφαρμογές καὶ παραδείγματα.....	23
4 - 4	Ἀσκήσεις.....	25

Ένότητα 5: Ἡ εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ διάνυσμα πάνω σ' αὐτή 26

5 - 1	Προσανατολισμένη εὐθεῖα-ἄξονας. Τετμημένη σημείου	26
5 - 2	Τετμημένη διανύσματος παραλλήλου πρὸς ἄξονα.....	28
5 - 3	Πρόταση τοῦ Chasles (Σάλ)	29

Παράγρ.		Σελ.
5 - 4	Έφαρμογές και παραδείγματα	30
5 - 5	Άσκήσεις	31
	Έν ο τ η τ α 6 : Καρτεσιανές συντεταγμένες σημείων και διανυσμάτων στο επίπεδο	32
6 - 1	Συντεταγμένες σημείου ως προς δύο άξονες	32
6 - 2	Συντεταγμένες διανυσμάτων στο επίπεδο και βασικές σχέσεις	34
6 - 3	Έφαρμογές και παραδείγματα	37
6 - 4	Άσκήσεις	39
	Έν ο τ η τ α 7 : Έξισωση ευθείας στο επίπεδο. Γραφική παράσταση της εξίσωσης $y = ax^2 + bx$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$	40
7 - 1	Διανυσματική και αναλυτική εξίσωση ευθείας	40
7 - 2	Γραφική παράσταση της εξίσωσης $y = ax^2 + bx$ με $a \neq 0$ (ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων)	43
7 - 3	Έφαρμογές και παραδείγματα	47
7 - 4	Άσκήσεις	51
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Τό μιγαδικό πεδίο. Έξισώσεις Β' και άνωτέρου βαθμού	
	Έν ο τ η τ α 8 : Ό μιγαδικός αριθμός και οι πράξεις μέσα στο σύνολο των μιγαδικών	54
8 - 1	Η σημασία και τό νόημα του φανταστικού αριθμού. Ό μιγαδικός αριθμός	54
8 - 2	Οι πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών	55
8 - 3	Μέτρο και γραφική παράσταση μιγαδικού	57
8 - 4	Έφαρμογές και παραδείγματα	59
8 - 5	Άσκήσεις	61
	Έν ο τ η τ α 9 : Η εξίσωση δευτέρου βαθμού και ή επίλυσή της. Είδος ριζών	62
9 - 1	Έννοια της εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Επίλυση των μορφών $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + \gamma = 0$	62
9 - 2	Ό τύπος των λύσεων της $ax^2 + bx + \gamma = 0$, (μέ $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$). Είδος των ριζών	63
9 - 3	Μιά σημαντική ιδιότητα των εξισώσεων 2ου και άνωτέρου βαθμού	64
9 - 4	Έφαρμογές και παραδείγματα	65
9 - 5	Άσκήσεις	69
	Έν ο τ η τ α 10 : Τύποι του Viète (Βιέτ) και εφαρμογές	70
10 - 1	Τό άθροισμα $x_1 + x_2$ και τό γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών της $ax^2 + bx + \gamma = 0$	70
10 - 2	Ειδικότερα συμπεράσματα για τίς ρίζες δευτεροβαθμίου τριωνύμου (μέ πραγματικούς συντελεστές)	71
10 - 3	Έφαρμογές και παραδείγματα	72
10 - 4	Άσκήσεις	75

Παράγρ.	Σελ.
Έν ό τ η τ α 11: Έξιώσεις αναγόμενες σέ δευτεροβάθμιες	76
11 - 1 Αντίστροφες έξιώσεις	76
11 - 2 Διώνυμες έξιώσεις	78
11 - 3 Τριώνυμες έξιώσεις	80
11 - 4 Άρρητες έξιώσεις	80
11 - 5 Έφαρμογές και παραδείγματα	82
11 - 6 Άσκήσεις	83
Έν ό τ η τ α 12: Συστήματα έξιώσεων βαθμού άνωτέρου του πρώτου.....	84
12 - 1 Συστήματα αναγόμενα σέ γραμμικά	84
12 - 2 Συστήματα στά όποια μιά μόνο έξιώση είναι δευτεροβάθμια	86
12 - 3 Συστήματα συμμετρικά	87
12 - 4 Συστήματα όμογενή	88
12 - 5 Έφαρμογές και παραδείγματα	89
12 - 6 Άσκήσεις	90
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Κυκλικό τόξο και γωνία. Τριγωνομετρικοί άριθμοί όξείας γωνίας. Έπίλυση όρθογωνίου τριγώνου	
Έν ό τ η τ α 13: Μέτρηση γωνίας. Τριγωνομετρικοί άριθμοί όξείας γωνίας	93
13 - 1 Μέτρηση γωνίας μέσω κυκλικού τόξου	93
13 - 2 Τριγωνομετρικοί άριθμοί όξείας γωνίας	95
13 - 3 Έφαρμογές και παραδείγματα	98
13 - 4 Άσκήσεις	100
Έν ό τ η τ α 14: Σχέσεις των τριγωνομετρικών άριθμών μιās γωνίας και μεταβολή αυτών μέ τή γωνία	101
14 - 1 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών άριθμών όξείας γωνίας	101
14 - 2 Μεταβολή των τριγωνομετρικών άριθμών, όταν ή γωνία $\hat{\omega}$ μεταβάλλεται στό διάστημα $[0^\circ, 90^\circ]$	102
14 - 3 Έφαρμογές και παραδείγματα	103
14 - 4 Άσκήσεις	106
Έν ό τ η τ α 15: Έπίλυση όρθογωνίων τριγώνων - Έφαρμογές.....	106
15 - 1 Έπίλυση όρθογωνίων τριγώνων	106
15 - 2 Έφαρμογές και παραδείγματα	108
15 - 3 Άσκήσεις	112
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Άριθμητική και Γεωμετρική πρόοδος. Λογάριθμοι. Λογαριθμικές και έκθετικές έξιώσεις	
Έν ό τ η τ α 16: Άριθμητική και Γεωμετρική πρόοδος	115
16 - 1 Άριθμητική πρόοδος	115

Παράγρ.	Σελ.
16 - 2	Γεωμετρική πρόοδος 117
16 - 3	Φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος 118
16 - 4	Έφαρμογές και παραδείγματα 120
16 - 5	Άσκήσεις 123
Έν ό τ η τ α 17: Ό λογάριθμος και ύπολογισμοί μέ λογαρίθμους 124	
17 - 1	Έννοια του λογαρίθμου στό σύνολο $\mathbb{R}$ και ιδιότητες 124
17 - 2	Προσδιορισμός του δεκαδικού λογαρίθμου ενός αριθμού και αντίστροφα του αριθμού από τό λογάριθμό του 126
17 - 3	Έφαρμογές και παραδείγματα 129
17 - 4	Άσκήσεις 130
Έν ό τ η τ α 18: Έκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις 130	
18 - 1	Έκθετικές εξισώσεις 130
18 - 2	Λογαριθμικές εξισώσεις 131
18 - 3	Έφαρμογές και παραδείγματα 132
18 - 4	Άσκήσεις 133
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Βασική μελέτη πραγματικών συναρτήσεων. Έξισώσεις κωνικών τομών	
Έν ό τ η τ α 19: Γενικά γιά συναρτήσεις. Πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. Μελέτη - γραφική παράσταση 135	
19 - 1	Τί είναι ή συνάρτηση. Πραγματικές συναρτήσεις 135
19 - 2	Πεδία όρισμού και τιμών τών πραγματικών συναρτήσεων 138
19 - 3	Μονοτονία συναρτήσεων. Άκρότατα 142
19 - 4	Μελέτη και γραφική παράσταση μιās συναρτήσεως 144
19 - 5	Έφαρμογές και παραδείγματα 145
19 - 6	Άσκήσεις 150
Έν ό τ η τ α 20: Ό κύκλος και ή έλλειψη 150	
20 - 1	Έξισωση κύκλου μέ κέντρο τήν άρχή τών άξόνων 150
20 - 2	Έξισωση έλλειψης μέ κέντρο τήν άρχή τών άξόνων 152
20 - 3	Έφαρμογές και παραδείγματα 156
20 - 4	Άσκήσεις 158
Έν ό τ η τ α 21: Έξισωση παραβολής μέ τύπο $y = ax^2 + bx + \gamma$. Έξισωση παραβολής και ή έξισωσή της	
21 - 1	Μελέτη και γραφική παράσταση τής συναρτήσεως πού δίνεται από τόν άλγεβρικό τύπο: $y = ax^2 + bx + \gamma$ ($a, b, \gamma \in \mathbb{R}, a \neq 0$) 158
21 - 2	Έξισωση παραβολής μέ άξονα τετμημένων τόν άξονα συμμετρίας της 162
21 - 3	Έφαρμογές και παραδείγματα 166
21 - 4	Άσκήσεις 168

Παράγρ.	Σελ.
Ένότητα 22: ΈΗ συνάρτηση μέ τύπο $y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$. ΈΗ ύπερβολή καί ή έξίσωσή της.....	169
22 - 1 Οί συναρτήσεις τίς όποιές όρίζουν έξισώσεις τής μορφής $y = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$...	169
22 - 2 ΈΗ ύπερβολή καί ή έξίσωσή της	174
22 - 3 Έφαρμογές καί παραδείγματα	179
22 - 4 Άσκήσεις	182
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Κυκλικές συναρτήσεις. Τριγωνομετρική παράσταση μιγαδικού	
Ένότητα 23: Έπέκταση τής έννοίας του τόξου καί τής γωνίας. Τριγωνομετρικός κύκλος. Γωνία άξονα καί διανύσματος - Γωνία δύο άξόνων	185
23 - 1 Προσανατολισμένος κύκλος. Έπέκταση τής έννοίας του τόξου καί τής γωνίας	185
23 - 2 Τριγωνομετρικός κύκλος. Γωνία δύο άξόνων - Γωνία άξονα καί διανύσματος	187
23 - 3 Έφαρμογές καί παραδείγματα	188
23 - 4 Άσκήσεις	190
Ένότητα 24: Οί κυκλικές συναρτήσεις καί οί μεταξύ τους σχέσεις...	191
24 - 1 Οί τριγωνομετρικές συναρτήσεις συν x καί ημ x	191
24 - 2 Οί τριγωνομετρικές συναρτήσεις εφ x καί σφ x	195
24 - 3 Έφαρμογές καί παραδείγματα	198
24 - 4 Άσκήσεις	201
Ένότητα 25: Άναγωγή των τριγωνομετρικών αριθμών προσημασμένου τόξου στους τριγωνομετρικούς αριθμούς τόξου του διαστήματος (0°, 45°)	202
25 - 1 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών δύο αντίθέτων τόξων - δύο τόξων πού διαφέρουν κατά 180° - δύο τόξων παραπληρωματικών.....	202
25 - 2 Σχέσεις των τριγωνομετρικών αριθμών δύο συμπληρωματικών τόξων.....	204
25 - 3 Δυό σημαντικές έφαρμογές.....	205
25 - 4 Έφαρμογές καί παραδείγματα	207
25 - 5 Άσκήσεις	209
Ένότητα 26: Πολικές συντεταγμένες σημείου καί τριγωνομετρική παράσταση μιγαδικού	210
26 - 1 Πολικές συντεταγμένες σημείου.....	210
26 - 2 Σχέσεις πολικών καί καρτεσιανών συντεταγμένων. Τριγωνομετρική παράσταση μιγαδικού.....	212
26 - 3 Έφαρμογές καί παραδείγματα	213
26 - 4 Άσκήσεις	216
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΈΗ παράγωγος μιås συναρτήσεως. Έφαρμογή τής παραγωγού στη μελέτη συναρτήσεων. Τό ολοκλήρωμα	
Ένότητα 27: Όριακή τιμή καί συνέχεια συναρτήσεως	219
27 - 1 Όριακές τιμές συναρτήσεων	219

Παράγρ.	Σελ.
27 - 2	Ίδιότητες τῶν ὁρίων..... 223
27 - 3	Συναρτήσεις συνεχείς. Σημεία ἀσυνεχείας..... 226
27 - 4	Ἐφαρμογές καί παραδείγματα..... 228
27 - 5	Ἀσκήσεις..... 233
Ἐνότητα 28: Ἐννοια τῆς παραγώγου. Βασικές ἐφαρμογές..... 234	
28 - 1	Τό νόημα καί ἡ σημασία τῆς παραγώγου..... 234
28 - 2	Μιά ἐφαρμογή στή Φυσική..... 241
28 - 3	Ἐφαρμογές καί παραδείγματα..... 241
28 - 4	Ἀσκήσεις..... 243
Ἐνότητα 29: Παράγωγοι στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως..... 243	
29 - 1	Ίδιότητες τῶν παραγῶγων. Παράγωγοι στοιχειωδῶν συναρτήσεων..... 243
29 - 2	Ἡ παράγωγος τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως μιᾶς δοσμένης συναρτήσεως $y = f(x)$ 249
29 - 3	Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως..... 250
29 - 4	Ἐφαρμογές καί παραδείγματα..... 251
29 - 5	Ἀσκήσεις..... 253
Ἐνότητα 30: Μελέτη συναρτήσεων μέσω τῶν παραγῶγων..... 253	
30 - 1	Τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς καί ἡ μονοτονία..... 253
30 - 2	Ἡ μονοτονία καί τὰ ἀκρότατα..... 255
30 - 3	Προσδιορισμός ὁριακῶν τιμῶν μέσω τῶν παραγῶγων. Κανόνας τοῦ L'Hospital (τοῦ Λοπιτάλ)..... 257
30 - 4	Ἐφαρμογές καί παραδείγματα..... 258
30 - 5	Ἀσκήσεις..... 264
Ἐνότητα 31: Τό ὁλοκλήρωμα..... 265	
31 - 1	Ἕνα πρόβλημα καί πῶς λύεται μέ μιά μέθοδο τοῦ Ἀρχιμήδη..... 265
31 - 2	Θεμελιώδεις ἰδιότητες τοῦ ὁλοκληρώματος..... 270
31 - 3	Μερικά ἀτοιχειώδη ὁλοκληρώματα..... 271
31 - 4	Ἐφαρμογές καί παραδείγματα..... 272
31 - 5	Ἀσκήσεις..... 275
Πίνακες τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων..... 281	