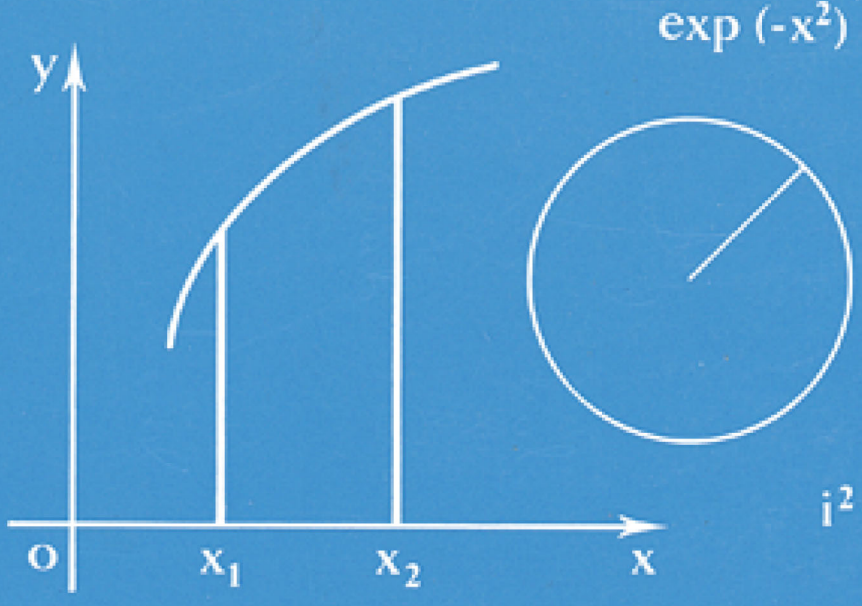
ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
/95Δ

ΑΝΩΤΕΡΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΣΧΟΛΕΣ
ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

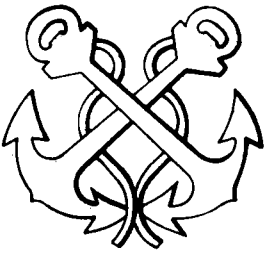
ΑΔΣΕΝ - ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Χρυσοστόμου Σύρκου - Γεωργίου Πουλοπούλου
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΑΔΣΕΝ/Α



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\,\Delta\xi_i$$

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
Α.Δ.Σ.Ε.Ν.
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Το ίδρυμα Ευγενίδου, μετά τα υπ' αρ. 2117.2/1/91 της 2.7.91, 2117.1/4/91 της 1.10.91 και 2117.1/5/91 της 22.10.91 έγγραφα του ΥΕΝ και προκειμένου να βοηθήσει τους σπουδαστές των ΑΔΣΕΝ στη μελέτη των μαθημάτων τους, απεφάσισε κατ' εξαίρεση να προβεί στην προσωρινή εκτύπωση του βιβλίου Ανώτερα Μαθηματικά ΑΔΣΕΝ/Μηχανικών, όπως αυτό παραδόθηκε από τους συγγραφείς.

Είναι προφανές ότι, εφ' όσον δεν έχει τηρηθεί η πάγια διαδικασία συγγραφής, ελέγχου και εκδόσεως του βιβλίου, η οποία ακολουθείται απαρεγκλίτως από την Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδου, τόσο η έκταση της ύλης του βιβλίου, όσο το περιεχόμενο και η στάθμη του, δεν εκφράζουν τις απόψεις της επιτροπής, αλλά μόνον των συγγραφέων.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Ι Δ Ρ Υ Μ Α Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΔΣΕΝ - ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΥ ΣΥΡΚΟΥ – ΓΙΩΡΓΟΥ ΠΟΥΛΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΔΣΕΝ - ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ
2006

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο "ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ" για τους σπουδαστές των ΑΔΣΕΝ περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών για τους Μηχανικούς των Ανωτέρων Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού, ως τα νέα αναλυτικά προγράμματα αναφέρουν.

Βάση για τη συγγραφή της εργασίας αυτής αποτέλεσαν τα βιβλία που είχαμε κυκλοφορήσει για τους σπουδαστές των ΑΔΣΕΝ Πλοιάρχων – Μηχανικών – Ραδιοτηλεγραφητών.

Οι ενότητες Συναρτήσεις, Παράγωγοι και Ορισμένο Ολοκλήρωμα δίνονται αναμορφωμένες.

Έχει καταβληθεί προσπάθεια, ώστε κάθε ενότητα να δίνεται με απλότητα και σαφήνεια χωρίς μακροσκελείς αποδείξεις, εμπλουτισμένη με παραδείγματα για την πλήρη κατανόησή της.

Η εργασία έχει γραφεί με γνώμονα τις δυνατότητες των σπουδαστών ΑΔΣΕΝ και θα κυκλοφορήσει υπό μορφή σημειώσεων από το ίδρυμα Ευγενίδη για το τρέχον ακαδημαϊκό έτος.

Ευελπιστούντες στη γόνιμο κριτική των συναδέλφων και των σπουδαστών, παραδίδουμε την εργασία μας με εκτίμηση, κι εμπιστοσύνη σε κείνους που θα τη χρησιμοποιήσουν.

Οι συγγραφείς

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1.ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1 Ορισμός.

Καλείται πίνακας μxν (ή μήτρα ή matrix μxν) ένα σύνολο αριθμών (ή στοιχείων ενός σώματος) διατεταγμένων σε ορθογώνιο σχήμα, με μ γραμμές και ν στήλες :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\nu} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & a_{\mu 3} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\nu} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & a_{\mu 3} & \dots & a_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας **A** είναι της τάξεως μν.

Συνήθως το ορθογώνιο σχήμα περικλείεται μεταξύ δύο αγκυλών [] ή δύο παρενθέσεων (). Σε κάθε στοιχείο του πίνακα βάζουμε δύο δείκτες, από τους οποίους ο πρώτος δείχνει τη γραμμή και ο δεύτερος τη στήλη στην οποία ανήκει το στοιχείο. Ο πιο πάνω πίνακας μπορεί να γραφεί και ως $A_{\mu\nu}=[a_{ij}]$ με $i=1,2,3,\dots,\mu$ και $j=1,2,3\dots,\nu$.

1.2 Είδη πινάκων

Αν μ=1 τότε ο πίνακας παίρνει τη μορφή : $[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots\ a_{1\nu}]$ και λέγεται πίνακας γραμμή.

Αν ν=1 τότε ο πίνακας παίρνει τη μορφή :

$$\begin{bmatrix} \alpha 11 \\ \alpha 21 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha \mu 1 \end{bmatrix}$$

και λέγεται πίνακας στήλη.

Αν μ=ν ο πίνακας λέγεται τετραγωνικός πίνακας ν τάξεως

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . . . & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & . . . & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & . . . & \alpha_{33} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & . . . & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ αποτελούν την <u>κύρια διαγώνιο (πρώτη διαγώνιο)</u> του πίνακα και καλούνται διαγώνια στοιχεία αυτού.

Διαγώνιος πίνακας καλείται ο τετραγωνικός πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία εκτός από τα στοιχεία της πρώτης (κυρίας) διαγωνίου είναι <u>μηδενικά</u> :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & . . . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & . . . & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & . . . & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & . . . & \alpha_\nu \end{bmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu \neq 0$$

Βαθμωτός πίνακας καλείται ο διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι <u>ίσα</u> :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

Μοναδιαίος ή **ταυτοτικός** πίνακας καλείται ο βαθμωτός πίνακας του οποίου τα στοιχεία της πρώτης διαγωνίου είναι ίσα με την <u>μονάδα</u>.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Μηδενικός πίνακας καλείται ο πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι <u>μηδέν</u>.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος πίνακας δοσμένου πίνακα Α καλείται ο πίνακας που προκύπτει από τον Α εναλλάσσοντας τις γραμμές με τις στήλες.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ :Ο πίνακας είναι μαθηματικό σύμβολο και ΔΕΝ σημαίνει κάποια πράξη μεταξύ των στοιχείων του.

1.3 Γινόμενο πινάκων

Ορισμός: Γινόμενο του πίνακα $A=[a_{ij}]$ τάξεως νμ επί τον πίνακα $B=[\beta_{jk}]$ τάξεως μρ λέγεται ο πίνακας $\Gamma=[\gamma_{ik}]$ τάξεως νρ,του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ik} είναι το άθροισμα των γινομένων των μ στοιχείων της ι γραμμής του Α με τα αντίστοιχα μ στοιχεία της κ στήλης του Β.
Δηλαδή :

$$\gamma_{ik}=a_{i1}\beta_{1k}+a_{i2}\beta_{2k}+\ldots a_{i\mu}\beta_{\mu k}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\beta_{11}+a_{12}\beta_{21}+a_{13}\beta_{31} & a_{11}\beta_{12}+a_{12}\beta_{22}+a_{13}\beta_{32} \\ a_{21}\beta_{11}+a_{22}\beta_{21}+a_{23}\beta_{31} & a_{21}\beta_{12}+a_{22}\beta_{22}+a_{23}\beta_{32} \end{bmatrix}$$

Εδώ ο πίνακας Α ήταν τάξεως 2x3 και ο πίνακας Β 3x2. Δηλαδή πίνακες συμβιβαστούς στον πολλαπλασιασμό. Το γινόμενο είναι πίνακας Γ τάξεως 2x2.

1.4 Ίσοι πίνακες – Αντίθετοι πίνακες

Ορισμοί.

Δύο πίνακες $A=a[_{ij}]$, $B=[\beta_{ij}]$ καλούνται ίσοι αν είναι της ίδιας τάξεως και έχουν ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία, δηλαδή $[a_{ij}]=\beta[_{ij}]$ για κάθε i, j.

Δύο πίνακες που είναι της ίδιας τάξεως και έχουν αντίθετα αντίστοιχα στοιχεία τους λέγονται αντίθετοι $A=[a_{ij}]$, $-A=[-a_{ij}]$.

2. ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

2.1 Ορισμοί

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα νxν αντιστοιχεί ένας αριθμός (ή γενικότερα ένα πολυώνυμο) που καλείται ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα τάξεως ν.

Δηλαδή ορίζουσα ν τάξεως καλείται, το πλήθος ν^2 στοιχείων ενός σώματος που τοποθετούμε κατά ένα τρόπο σε σχήμα τετραγώνου, δηλαδή σε ν οριζόντιες γραμμές που έχουν ν στοιχεία η καθεμιά και ν στήλες με ν στοιχεία.

Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε ένα μόνο γράμμα, που φέρνει 2 δείκτες που μεταβάλλονται από 1 ως ν.

Ο πρώτος δείκτης δείχνει την τάξη της γραμμής και ο δεύτερος την τάξη της στήλης. Το τετράγωνο που δημιουργήθηκε το βάζομε μέσα σε δύο κατακόρυφες ευθείες.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα αυτή αναπτύσσεται κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης, αφού προσθέσουμε όλα τα γινόμενα που προκύπτουν όταν κάθε στοιχείο της γραμμής ή της στήλης πολλαπλασιασθεί επί τον συντελεστή του.

Συντελεστής στοιχείου ορίζουσας είναι το γινόμενο της ελάσσονας ορίζουσας του στοιχείου επί $(-1)^{\kappa+\lambda}$ όπου κ είναι η τάξη της γραμμής και λ η τάξη της στήλης.

Ελάσσων ορίζουσα: Καλείται ελάσσων ορίζουσα στοιχείου ορίζουσας, η ορίζουσα που προκύπτει αν διαγράψουμε τη γραμμή και τη στήλη που ανήκει το στοιχείο.

Ορίζουσα δεύτερης τάξης. Εάν μια ορίζουσα έχει $2^2=4$ στοιχεία, καλείται ορίζουσα δεύτερης τάξης.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

που εξ'ορισμού είναι ίση με :

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Ορίζουσα τρίτης τάξης. Εάν μια ορίζουσα έχει $3^2=9$ στοιχεία καλείται ορίζουσα τρίτης τάξης.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα αυτή αναπτύσσεται με το γενικό κανόνα ως εξής :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Κανόνας Sarus. Ειδικά μια ορίζουσα τρίτης τάξης αναπτύσεται και με έναν κανόνα, που λέγεται κανόνας Sarus. Με τον κανόνα αυτόν, δεξιά της τρίτης στήλης, γράφουμε τις δύο πρώτες στήλες.

Μετά λαμβάνουμε το αλγεβρικό άθροισμα των γινομένων όπως στο σχήμα :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & + & + & - & - & - \\ \backslash & \backslash & \backslash & / & / & / \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2.2 Ιδιότητες οριζουσών

1. Εάν σε μια ορίζουσα οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές (αφού διατηρηθεί η τάξη των) η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \quad \text{άρα}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{\nu 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

2. Εάν σε μια ορίζουσα εναλλάξουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες η ορίζουσα αλλάζει σημείο.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma, \qquad \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \beta\gamma - \alpha\delta \text{ άρα } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{\nu 2} & a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

3. Εάν σε μια ορίζουσα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης έχουν κοινό παράγοντα, ο κοινός αυτός παράγοντας βγαίνει εκτός ορίζουσας.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \lambda\beta \\ \gamma & \lambda\delta \end{vmatrix} = \alpha\lambda\delta - \gamma\lambda\beta = \lambda(\alpha\delta - \gamma\beta) = \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{\nu 1} & \lambda a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

4. Εάν σε μια ορίζουσατα στοιχεία δύο γραμμών ή στηλών είναι ίσα ή ανάλογα, τοτε η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta - \alpha\beta = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \rho\alpha & \rho\beta \end{vmatrix} = \rho\alpha\beta - \rho\alpha\beta = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \rho\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \rho\alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \rho\alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0$$

5. Εάν σε μια ορίζουσα όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι ίσα με μηδέν, τότε η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} + \dots + 0 \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{(\nu-1)2} & \dots & \alpha_{(\nu-1)\nu} \end{vmatrix}$$

$= 0$

6. Εάν σε μια ορίζουσα προσθέσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης στα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή στήλης (τα στοιχεία της γραμμής ή της στήλης που προστίθενται παραμένουν όπως είναι) τότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ \gamma+\delta & \delta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)\delta - (\gamma+\delta)\beta = \alpha\delta + \beta\delta - \beta\gamma - \beta\delta =$$

$$= \alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}+\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+\alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2}+\alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

7. Εάν σε μια ορίζουσα αφαιρέσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης από τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή στήλης, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta \\ \gamma-\delta & \delta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\delta - (\gamma-\delta)\beta = \alpha\delta - \beta\delta - \beta\gamma + \beta\delta =$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} - \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} - \alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

8. Εάν σε μια ορίζουσα προσθέσουμε στα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης (ή αφαιρέσουμε από τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης) τα στοιχεία όλων των γραμμών ή των στηλών της ορίζουσας, η τιμή της δεν αλλάζει.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \eta \\ \vartheta & \kappa & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \pm \beta \pm \gamma & \beta & \gamma \\ \delta \pm \varepsilon \pm \eta & \varepsilon & \eta \\ \vartheta \pm \kappa \pm \lambda & \kappa & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \pm \alpha_{12} \pm \dots \pm \alpha_{1\nu} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} \pm \alpha_{22} \pm \dots \pm \alpha_{2\nu} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} \pm \alpha_{\nu 2} \pm \dots \pm \alpha_{\nu\nu} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

9. Εάν σε μια ορίζουσα ν-οστής τάξης προσθέσω τα στοιχεία ν-1 γραμμών ή στηλών και το άθροισμα το προσθέσω στη ν-οστή στήλη (ή το αφαιρέσω από τη ν-οστή στήλη) η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \pm (a_{11}+a_{12}+\dots+a_{1(\nu-1)}) \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \pm (a_{21}+a_{22}+\dots+a_{2(\nu-1)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \pm (a_{\nu 1}+a_{\nu 2}+\dots+a_{\nu(\nu-1)}) \end{vmatrix}$$

Σημείωση : Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

δείχνει με ποιό τρόπο μπαίνουν εμπρός από τις ελάσσονες ορίζουσες το + ή το − όταν αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης.

2.3 Πολλαπλασιασμός οριζουσών

Το γινόμενο δύο οριζουσών της ίδιας τάξεως δίνεται από ορίζουσα της αυτής τάξεως, της οποίας τα στοιχεία σε κάθε γραμμή είναι αθροίσματα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων των γραμμών της πρώτης επί τα στοιχεία των γραμμών ή στηλών της δεύτερης.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12} & \alpha_{11}\beta_{21} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{12} & \alpha_{21}\beta_{21} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix}$$

ή

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix}$$

Το γινόμενο οριζουσών 3ης τάξεως δίνει :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζω γραμμές με γραμμές

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{13}\beta_{13} & \alpha_{11}\beta_{21}+\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{23} & \alpha_{11}\beta_{31}+\alpha_{12}\beta_{32}+\alpha_{13}\beta_{33} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{12}+\alpha_{23}\beta_{13} & \alpha_{21}\beta_{21}+\alpha_{22}\beta_{22}+\alpha_{23}\beta_{23} & \alpha_{21}\beta_{31}+\alpha_{22}\beta_{32}+\alpha_{23}\beta_{33} \\ \alpha_{31}\beta_{11}+\alpha_{32}\beta_{12}+\alpha_{33}\beta_{13} & \alpha_{31}\beta_{21}+\alpha_{32}\beta_{22}+\alpha_{33}\beta_{23} & \alpha_{31}\beta_{31}+\alpha_{32}\beta_{32}+\alpha_{33}\beta_{33} \end{vmatrix}.$$

ή πολλαπλασιάζοντας γραμμές με στήλες

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{13}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{32} & \alpha_{11}\beta_{13}+\alpha_{12}\beta_{23}+\alpha_{13}\beta_{33} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\alpha_{23}\beta_{31} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\alpha_{23}\beta_{32} & \alpha_{21}\beta_{13}+\alpha_{22}\beta_{23}+\alpha_{23}\beta_{33} \\ \alpha_{31}\beta_{11}+\alpha_{32}\beta_{21}+\alpha_{33}\beta_{31} & \alpha_{31}\beta_{12}+\alpha_{32}\beta_{22}+\alpha_{33}\beta_{32} & \alpha_{31}\beta_{13}+\alpha_{32}\beta_{23}+\alpha_{33}\beta_{33} \end{vmatrix}$$

<u>Σημείωση</u>: Για να είναι δυνατός ο πολλαπλασιασμός δύο οριζουσών πρέπει οι ορίζουσες να είναι της ίδιας τάξης. Εάν οι ορίζουσες δεν είναι της ίδιας τάξης, συμπληρώνουμε τη μικρότερης τάξης ορίζουσα με νέα στοιχεία, χωρίς να μεταβληθεί η τιμή της. Για να γίνει αυτό αρκεί να θέσουμε νέα στοιχεία, στην μεν κύρια διαγώνιο ίσα προς 1 στις δε υπόλοιπες θέσεις ίσα προς 0.

2.4 Λυμένες ασκήσεις.

1. Να αναπτυχθεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1+\psi \end{vmatrix}$$

Λύση

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1+\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & 1+\chi-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1+\psi-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} \chi & 0 \\ 0 & \psi \end{vmatrix} = \chi \cdot \psi$$

Αφαίρεσα την πρώτη γραμμή από την δεύτερη και από την τρίτη.

Αναπτύσσοντας με τον κανόνα του Sarus

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1+\psi \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} + & + & + & - & - & - \\ \backslash & \backslash & \backslash\ / & / & / & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & \backslash & \backslash/ & /\backslash & / & \\ 1 & 1+\chi & 1 & 1 & 1+\chi & \\ & / & /\backslash & /\backslash & \backslash & \\ 1 & 1 & 1+\psi & 1 & 1 & \end{matrix} = 1(1+\chi)(1+\psi) +$$

$$+ 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1(1+\chi)1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1(1+\psi) =$$

$$= 1 + \psi + \chi + \chi\psi + 1 + 1 - 1 - \chi - 1 - 1 - \psi = \chi\psi$$

2. Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας :

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix}$$

Λύση

Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη το άθροισμα της δεύτερης και της τρίτης.

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta+(\beta-\gamma+\gamma-\alpha) & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma+(\gamma-\alpha+\alpha-\beta) & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha+(\alpha-\beta+\beta-\gamma) & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ 0 & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix} = 0$$

3. Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζω τα στοιχεία της πρώτης γραμμής επί 2, επί 3, επί 8 και τα αφαιρώ από τη δεύτερη, την τρίτη, την τέταρτη γραμμη αντίστοιχα .

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15-2\cdot3 & 29-2\cdot2 & 2-2\cdot1 & 14-2\cdot4 \\ 16-3\cdot3 & 19-3\cdot2 & 3-3\cdot1 & 17-3\cdot4 \\ 33-8\cdot3 & 39-8\cdot2 & 8-8\cdot1 & 38-8\cdot4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 25 & 0 & 6 \\ 7 & 13 & 0 & 5 \\ 9 & 23 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

Αφαιρώ από την τελευταία γραμμή τη δεύτερη

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 25 & 0 & 6 \\ 7 & 13 & 0 & 5 \\ 9-9 & 23-25 & 0-0 & 6-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 25 & 0 & 6 \\ 7 & 13 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της τρίτης στήλης.

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 9 & 25 & 6 \\ 7 & 13 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής.

$$= -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(45-42) = 2\cdot3 = 6$$

4. Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma+\delta \\ \alpha & 2\alpha+\beta & 3\alpha+2\beta+\gamma & 4\alpha+3\beta+2\gamma+\delta \\ \alpha & 3\alpha+\beta & 6\alpha+3\beta+\gamma & 10\alpha+6\beta+3\gamma+\delta \end{vmatrix}$$

Λύση

Αφαιρώ την πρώτη γραμμή από τις άλλες γραμμές.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha-\alpha & \alpha+\beta-\beta & \alpha+\beta+\gamma-\gamma & \alpha+\beta+\gamma+\delta-\delta \\ \alpha-\alpha & 2\alpha+\beta-\beta & 3\alpha+2\beta+\gamma-\gamma & 4\alpha+3\beta+2\gamma+\delta-\delta \\ \alpha-\alpha & 3\alpha+\beta-\beta & 6\alpha+3\beta+\gamma-\gamma & 10\alpha+6\beta+3\gamma+\delta-\delta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma \\ 0 & 2\alpha & 3\alpha+2\beta & 4\alpha+3\beta+2\gamma \\ 0 & 3\alpha & 6\alpha+3\beta & 10\alpha+6\beta+3\gamma \end{vmatrix} =$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης.

$$= \alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma \\ 2\alpha & 3\alpha+2\beta & 4\alpha+3\beta+2\gamma \\ 3\alpha & 6\alpha+3\beta & 10\alpha+6\beta+3\gamma \end{vmatrix} =$$

Πολλαπλασιάζω την πρώτη γραμμή επί 2, επί 3 και την αφαιρώ από την δεύτερη και τη τρίτη γραμμή αντίστοιχα.

$$= \alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma \\ 2\alpha-2\alpha & 3\alpha+2\beta-2(\alpha+\beta) & 4\alpha+3\beta+2\gamma-2(\alpha+\beta+\gamma) \\ 3\alpha-3\alpha & 6\alpha+3\beta-3(\alpha+\beta) & 10\alpha+6\beta+3\gamma-3(\alpha+\beta+\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma \\ 0 & \alpha & 2\alpha+\beta \\ 0 & 3\alpha & 7\alpha+3\beta \end{vmatrix} =$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης.

$$= \alpha \cdot \alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha+\beta \\ 3\alpha & 7\alpha+3\beta \end{vmatrix} =$$

Πολλαπλασιάζω την πρώτη γραμμή επί 3 και την αφαιρώ από την δεύτερη γραμμή

$$= \alpha^2 \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha+\beta \\ 3\alpha-3\alpha & 7\alpha+3\beta-3(2\alpha+\beta) \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha+\beta \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2\alpha^2 = \alpha^4$$

5. Να δειχθεί ότι :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \chi & \psi & \omega \\ \chi^3 & \psi^3 & \omega^3 \end{vmatrix} = (\omega - \psi)(\omega - \chi)(\chi - \psi)(\chi + \psi + \omega).$$

Λύση

Αφαιρώ από τη δεύτερη στήλη την τρίτη και από την τρίτη στήλη την πρώτη στήλη.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ \chi & \psi-\omega & \omega-\chi \\ \chi^3 & \psi^3-\omega^3 & \omega^3-\chi^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \chi & \psi-\omega & \omega-\chi \\ \chi^3 & (\psi-\omega)(\psi^2+\psi\omega+\omega^2) & (\omega-\chi)(\omega^2+\omega\chi+\chi^2) \end{vmatrix}$$

Βγάζω κοινό παράγοντα από τη δεύτερη στήλη το ψ−ω και από την τρίτη στήλη το ω−χ.

$$= (\psi-\omega)(\omega-\chi) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \chi & 1 & 1 \\ \chi^3 & \psi^2+\psi\omega+\omega^2 & \omega^2+\omega\chi+\chi^2 \end{vmatrix} =$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.

$$= (\psi-\omega)(\omega-\chi) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \psi^2+\psi\omega+\omega^2 & \omega^2+\omega\chi+\chi^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\psi-\omega)(\omega-\chi)(\omega^2+\omega\chi+\chi^2-\psi^2-\psi\omega-\omega^2) = (\psi-\omega)(\omega-\chi)[\omega(\chi-\psi)+(\chi+\psi)(\chi-\psi)] =$$

$$= (\omega - \psi)(\omega - \chi)(\chi - \psi)(\chi + \psi + \omega).$$

6. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu2\chi \\ \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu2\chi & \sigma\upsilon\nu3\chi \\ \sigma\upsilon\nu2\chi & \sigma\upsilon\nu3\chi & \sigma\upsilon\nu4\chi \end{vmatrix} = 0$$

<u>Λύση</u>
Προσθέτω στην τρίτη στήλη την πρώτη

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu2\chi + 1 \\ \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu2\chi & \sigma\upsilon\nu3\chi + \sigma\upsilon\nu\chi \\ \sigma\upsilon\nu2\chi & \sigma\upsilon\nu3\chi & \sigma\upsilon\nu4\chi + \sigma\upsilon\nu2\chi \end{vmatrix} =$$

Χρησιμοποιώ τους τύπους συν2χ = 2συν²χ − 1 και
συνΑ + συνΒ = 2συν((Α+Β)/2)συν((Α−Β)/2)

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\chi & 2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1 + 1 \\ \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu 2\chi & 2\sigma\upsilon\nu 2\chi\sigma\upsilon\nu\chi \\ \sigma\upsilon\nu 2\chi & \sigma\upsilon\nu 3\chi & 2\sigma\upsilon\nu 3\chi\sigma\upsilon\nu\chi \end{vmatrix} =$$

Βγάζω κοινό παράγοντα από την τρίτη στήλη το 2συνχ.

$$2\sigma\upsilon\nu\chi \begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu\chi \\ \sigma\upsilon\nu\chi & \sigma\upsilon\nu 2\chi & \sigma\upsilon\nu 2\chi \\ \sigma\upsilon\nu 2\chi & \sigma\upsilon\nu 3\chi & \sigma\upsilon\nu 3\chi \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

Αφού η τελευταία ορίζουσα έχει δύο στήλες ίδιες.

7. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$$

<u>Λύση</u>
Αφαιρώ την τρίτη στήλη από την πρώτη και την δεύτερη.

$$\begin{vmatrix} \alpha^2-\gamma^2 & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2 \\ \alpha-\gamma & \beta-\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma) & (\beta+\gamma)(\beta-\gamma) & \gamma^2 \\ \alpha-\gamma & \beta-\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Βγάζω κοινό παράγοντα το (α−γ) από την πρώτη στήλη και το (β−γ) από τη δεύτερη στήλη.

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix}\alpha+\gamma & \beta+\gamma & \gamma^2\\ 1 & 1 & \gamma\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής.

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix}\alpha+\gamma & \beta+\gamma\\ 1 & 1\end{vmatrix} = (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta-\gamma) = (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta).$$

8. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix}\alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2\\ \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta).$$

Λύση

Από την πρώτη στήλη αφαιρώ τη δεύτερη, από τη δεύτερη στήλη αφαιρώ την τρίτη και από την τρίτη αφαιρώ την τέταρτη.

$$\begin{vmatrix}\alpha^3-\beta^3 & \beta^3-\gamma^3 & \gamma^3-\delta^3 & \delta^3\\ \alpha^2-\beta^2 & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2-\delta^2 & \delta^2\\ \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\delta & \delta\\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) & (\beta-\gamma)(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2) & (\gamma-\delta)(\gamma^2+\gamma\delta+\delta^2) & \delta^3\\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) & (\beta-\gamma)(\beta+\gamma) & (\gamma-\delta)(\gamma+\delta) & \delta^2\\ \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\delta & \delta\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Βγάζω κοινό παράγοντα από την πρώτη στήλη το (α−β) από τη δεύτερη το (β−γ) και από την τρίτη το (γ−δ).

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)\begin{vmatrix} \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 & \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2 & \gamma^2+\gamma\delta+\delta^2 & \delta^3 \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\delta & \delta^2 \\ 1 & 1 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της τέταρτης γραμμής.

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)\begin{vmatrix} \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 & \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2 & \gamma^2+\gamma\delta+\delta^2 \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\delta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Αφαιρώ από την πρώτη στήλη τη δεύτερη και από τη δεύτερη στήλη την τρίτη.

$$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)\begin{vmatrix} \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-\beta^2-\beta\gamma-\gamma^2 & \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-\gamma^2-\gamma\delta-\delta^2 & \gamma^2+\gamma\delta+\delta^2 \\ \alpha+\beta-\beta-\gamma & \beta+\gamma-\gamma-\delta & \gamma+\delta \\ 1-1 & 1-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)\begin{vmatrix} (\alpha^2-\gamma^2)+(\alpha\beta-\beta\gamma) & (\beta^2-\delta^2)+(\beta\gamma-\gamma\delta) & \gamma^2+\gamma\delta+\delta^2 \\ \alpha-\gamma & \beta-\delta & \gamma+\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)\begin{vmatrix} (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)+\beta(\alpha-\gamma) & (\beta-\delta)(\beta+\delta)+\gamma(\beta-\delta) & \gamma^2+\gamma\delta+\delta^2 \\ \alpha-\gamma & \beta-\delta & \gamma+\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Κοινός παράγοντας στην πρώτη στήλη το (α−γ) και στη δεύτερη στήλη το (β−δ).

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\begin{vmatrix} (\alpha+\gamma)+\beta & (\beta+\delta)+\gamma & \gamma^2+\gamma\delta+\delta^2 \\ 1 & 1 & \gamma+\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής.

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\begin{vmatrix} \alpha+\gamma+\beta & \beta+\delta+\gamma \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\alpha+\gamma+\beta-\beta-\delta-\gamma) =$$
$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\alpha-\delta).$$

9. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+3)(\alpha-1)^3$$

<u>Λύση</u>
Προσθέτω στην πρώτη στήλη όλες τις άλλες στήλες

$$\begin{vmatrix} \alpha+1+1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\alpha+1+1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1+1+\alpha+1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1+1+1+\alpha & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha+3 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha+3 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha+3 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

Κοινός παράγοντας στην πρώτη στήλη το (α+3).

$$=(\alpha+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix} =$$

Αφαιρώ την πρώτη γραμμή από όλες τις άλλες γραμμές.

$$=(\alpha+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1-1 & \alpha-1 & 1-1 & 1-1\\ 1-1 & 1-1 & \alpha-1 & 1-1\\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & \alpha-1\end{vmatrix} = (\alpha+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1\end{vmatrix}$$

Στη δεύτερη γραμμή στη τρίτη γραμμή και στη τέταρτη γραμμή κοινός παράγοντας το $(\alpha-1)$.

$$(\alpha+3)(\alpha-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης.

$$(\alpha+3)(\alpha-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (\alpha+3)(\alpha-1)^3\cdot 1 = (\alpha+3)(\alpha-1)^3$$

10. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix}\chi & \alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha & \chi & \alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha & \chi & \alpha\\ \alpha & \alpha & \alpha & \chi\end{vmatrix} = 0$$

Λύση
Προσθέτω στην πρώτη στήλη τις άλλες στήλες.

$$\begin{vmatrix} \chi+\alpha+\alpha+\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha+\chi+\alpha+\alpha & \chi & \alpha & \alpha \\ \alpha+\alpha+\chi+\alpha & \alpha & \chi & \alpha \\ \alpha+\alpha+\alpha+\chi & \alpha & \alpha & \chi \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \chi+3\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \chi+3\alpha & \chi & \alpha & \alpha \\ \chi+3\alpha & \alpha & \chi & \alpha \\ \chi+3\alpha & \alpha & \alpha & \chi \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

Κοινός παράγοντας στην πρώτη στήλη ο $(\chi+3\alpha)$.

$$(\chi+3\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \chi & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & \chi & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha & \chi \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

Αφαιρώ την πρώτη γραμμή από όλες τις άλλες γραμμές.

$$(\chi+3\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1-1 & \chi-\alpha & \alpha-\alpha & \alpha-\alpha \\ 1-1 & \alpha-\alpha & \chi-\alpha & \alpha-\alpha \\ 1-1 & \alpha-\alpha & \alpha-\alpha & \chi-\alpha \end{vmatrix} = (\chi+3\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \chi-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi-\alpha \end{vmatrix}$$

$= 0$

Στη δεύτερη στη τρίτη και στην τέταρτη γραμμή κοινός παράγοντας $(\chi-\alpha)$.

$$(\chi+3\alpha)(\chi-\alpha)^3\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

Αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης

$$(\chi+3\alpha)(\chi-\alpha)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\chi+3\alpha)(\chi-\alpha)^3 = 0 \Longrightarrow$$

$\chi+3\alpha = 0$ ή $(\chi-\alpha)^3=0 \Longrightarrow \chi=-3\alpha$ ή $\chi=\alpha$ τριπλή ρίζα

2.5 Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}7 & 5 & 8 & 4\\ 13 & 9 & 12 & 10\\ 10 & 7 & 11 & 6\\ 6 & 4 & 7 & 3\end{vmatrix}$$

Απάντηση: 1 Απάντηση: 0

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{vmatrix}15-2\chi & 11-3\chi & 7-\chi\\ 11 & 17 & 14\\ 10 & 16 & 13\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}4\chi & 6\chi+2 & 8\chi+1\\ 6\chi+2 & 9\chi+3 & 12\chi\\ 8\chi+1 & 12\chi & 16\chi+2\end{vmatrix}=0$$

Απάντηση: $\chi=4$ Απάντηση: $\chi=-11/97$

3. Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 1+\chi & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\psi & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\omega \end{vmatrix}$$

Απάντηση : $\chi\psi z\omega + \chi\psi z + \chi\psi\omega + \chi z\omega + \psi z\omega$.

4. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma)^3$$

5. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} \chi+\psi & \psi+\omega & \omega+\chi \\ \psi+\omega & \omega+\chi & \chi+\psi \\ \omega+\chi & \chi+\psi & \psi+\omega \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \chi & \psi & \omega \\ \psi & \omega & \chi \\ \omega & \chi & \psi \end{vmatrix}$$

3. Γραμμικά συστήματα ν πρωτοβάθμιων εξισώσεων με ν αγνώστους

3.1 Κάθε σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = \beta_1\\
&\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = \beta_2\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad (1)\\
&\alpha_{\nu 1}\chi_1 + \alpha_{\nu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}\chi_\nu = \beta_\nu
\end{aligned}$$

λέγεται σύστημα ν πρωτοβαθμίων εξισώσεων με ν αγνώστους.

3.2 Συστήματα Cramer.

Ένα γραμμικό σύστημα ν πρωτοβάθμιων εξισώσεων με ν αγνώστους λέγεται σύστημα Cramer, όταν η ορίζουσα Δ που σχηματίζουν οι συντελεστές των αγνώστων είναι διάφορος του μηδενός.

Το σύστημα Cramer έχει μία και μόνο μία λύση και η τιμή κάθε αγνώστου είναι ίση με το κλάσμα, που έχει αριθμητή την ορίζουσα που προκύπτει από τη Δ, αν οι συντελεστές των αγνώστων αντικατασταθούν στη Δ από τους γνωστούς όρους του συστήματος (δεύτερα μέλη), παρονομαστή δε τη Δ.

Δηλαδή το γραμμικό σύστημα της μορφής (1) με άγνωστους $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ έχει μία και μόνο μία λύση όταν:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{και} \quad \chi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\chi_2=\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \beta_\nu & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \dots \quad \chi_\nu=\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \beta_\nu \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Ο τρόπος της λύσης του συστήματος λέγεται <u>κανόνας του Cramer</u>.
Αν $\Delta=0$ τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή είναι αόριστο.

3.3 Λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθεί το σύστημα:
$2\chi+3\psi-\omega=-10, \quad \chi-\psi+2\omega=15, \quad 3\chi+2\psi-\omega=-5$

<u>Λύση</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}=2+18-2-3-8+3=10$$

$$\Delta_\chi=\begin{vmatrix} -10 & 3 & -1 \\ 15 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -10 & 3 \\ 15 & -1 \\ -5 & 2 \end{matrix}=-10-30-30+5+40+45=20$$

$$\Delta_\omega=\begin{vmatrix} 2 & -10 & -1 \\ 1 & 15 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -10 \\ 1 & 15 \\ 3 & -5 \end{matrix}=-30-60+5+45+20-10=-30$$

$$\Delta_\omega = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -10 \\ 1 & -1 & 15 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 10+135-20-30-60+15 = 50$$

(+ + + − − −)

$$\chi = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \psi = \frac{\Delta_\omega}{\Delta} = \frac{-30}{10} = -3 \qquad \omega = \frac{\Delta_\omega}{\Delta} = \frac{50}{10} = 5$$

2. Να λυθεί με τον κανόνα του Cramer το σύστημα:
$\alpha\chi+\psi+\omega=1, \quad \chi+\alpha\psi+\omega=\alpha, \quad \chi+\psi+\alpha\omega=\alpha^2$

Λύση

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

Προσθέτω στην πρώτη στήλη τις άλλες στήλες

$$\begin{vmatrix} \alpha+1+1 & 1 & 1 \\ 1+\alpha+1 & \alpha & 1 \\ 1+1+\alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

κοινός παράγοντας στην πρώτη στήλη το $(\alpha+2)$

$$\Delta = (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

αφαιρώ την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη και την τρίτη

$$\Delta = (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & \alpha-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix}$$

από τη δεύτερη και τρίτη γραμμή κοινός παράγων το $(\alpha-1)$

$$\Delta = (\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (\alpha+2)(\alpha-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \alpha & 1\\ \alpha^2 & 1 & \alpha\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha-1 & \alpha-1 & 1-1\\ \alpha^2-1 & 1-1 & \alpha-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha-1 & \alpha-1 & 0\\ (\alpha-1)(\alpha+1) & 0 & \alpha-1\end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-1)(\alpha-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ \alpha+1 & 0 & 1\end{vmatrix} = (\alpha-1)^2\begin{vmatrix}1-1 & 1-1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ \alpha+1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)^2\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ \alpha+1 & 0 & 1\end{vmatrix} = (\alpha-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha+1 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha-1)^2(\alpha+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & \alpha^2 & \alpha\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1-\alpha & \alpha-1 & 1-1\\ 1-\alpha & \alpha^2-1 & \alpha-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -(\alpha-1) & \alpha-1 & 0\\ -(\alpha-1) & (\alpha-1)(\alpha+1) & \alpha-1\end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)(\alpha-1)\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & \alpha+1 & 1\end{vmatrix} = (\alpha-1)^2\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1-\alpha & \alpha+1-1 & 1-1\end{vmatrix} =$$

$$(\alpha-1)^2\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1-\alpha & \alpha & 0\end{vmatrix}=(\alpha-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1-\alpha & \alpha\end{vmatrix}=(\alpha-1)^2(-\alpha+1+\alpha)=(\alpha-1)^2$$

$$\Delta_\omega=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & \alpha\\ 1 & 1 & \alpha^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha-1\\ 1-\alpha & 1-1 & \alpha^2-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -(\alpha-1) & \alpha-1 & \alpha-1\\ -(\alpha-1) & 0 & (\alpha-1)(\alpha+1)\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha-1)(\alpha-1)\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & \alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha-1)^2\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -1-\alpha & 1-1 & 1-1\\ -1 & 0 & \alpha+1\end{vmatrix}=$$

$$=(\alpha-1)^2\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -1-\alpha & 1-1 & 1-1\\ -1 & 0 & \alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha-1)^2\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ -(\alpha+1) & 0 & 0\\ -1 & 0 & \alpha+1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)(\alpha-1)^2\begin{vmatrix}-(\alpha+1) & 0\\ -1 & \alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha-1)^2(+1)^2.$$

Με την προϋπόθεση ότι το σύστημα είναι Cramer δηλαδή $\Delta\neq 0 \Leftrightarrow (\alpha+2)(\alpha-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq -2,\ \alpha\neq 1$ έχομε:

$$\chi=\frac{\Delta_x}{\Delta}=-\frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

$$\psi=\frac{\Delta_\omega}{\Delta}=\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha+2}$$

$$\omega=\frac{\Delta_\omega}{\Delta}=\frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha+2)}$$

3. Να λυθεί το σύστημα:

$$3\chi + 2\psi - z + \omega = 6$$
$$x - \psi + 2z + 3\omega = -9$$
$$2\chi - 3\psi + z - \omega = -3$$
$$\chi + \psi - 3z + 2\omega = 2$$

<u>Λύση</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1+2\cdot 3 & -1+2\cdot 2 & 2+2(-1) & 3+2\cdot 1 \\ 2+3 & -3+2 & 1+(-1) & -1+1 \\ 1-3\cdot 3 & 1-2\cdot 3 & -3-3(-1) & 2-3\cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 0 \\ -8 & -5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(7 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot (-8) + 5 \cdot 5 \cdot (-5) - 5 \cdot (-1) \cdot 5 - 3 \cdot 0 \cdot (-1) - 7 \cdot (-5) \cdot 0) = -(7 - 125 - 40 + 15) = -(-143) = 143$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 \\ -9 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 \\ -9+2\cdot 6 & -1+2\cdot 2 & 2+2(-1) & 3+2\cdot 1 \\ -3+6 & -3+2 & 1+(-1) & -1+1 \\ 2-3\cdot 6 & 1-2\cdot 3 & -3-3(-1) & 2-3\cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -16 & -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -16 & -5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \\ \backslash & \backslash & \backslash & / & / & / \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & \\ & \backslash & /\backslash & \backslash/ & / & \\ 3 & -1 & 0 & 3 & -1 & \\ & / & \backslash/ & \backslash/ & \backslash & \\ -16 & -5 & -1 & -16 & -5 & \end{matrix}) = -(3-75-80+9) = -(-143) = 143$$

$$\Delta_\omega = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -9 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 & 1 \\ 1+2\cdot 3 & -9+2\cdot 6 & 2+2(-1) & 3+2\cdot 1 \\ 2+3 & -3+6 & 1+(-1) & -1+1 \\ 1-3\cdot 3 & 2-6\cdot 3 & -3-3(-1) & 2-3\cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & -16 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \\ -8 & -16 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \\ -8 & -16 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \\ \backslash & \backslash & \backslash & / & / & / \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 0 & \\ & \backslash & /\backslash & \backslash/ & / & \\ 5 & 3 & 0 & 5 & 3 & \\ & / & \backslash/ & \backslash/ & \backslash & \\ -8 & -16 & -1 & -8 & -16 & \end{matrix}) = -(-6-400+120) = -(-286) = 286$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}3 & 2 & 6 & 1\\ 1 & -1 & -9 & 3\\ 2 & -3 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2 & 6 & 1\\ 1-3\cdot 3 & -1-3\cdot 2 & -9-3\cdot 6 & 3-3\cdot 1\\ 2+3 & -3+2 & -3+6 & -1+1\\ 1-2\cdot 3 & 1-2\cdot 2 & 2-2\cdot 6 & 2-3\cdot 1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 2 & 6 & 1\\ -8 & -7 & -27 & 0\\ 5 & -1 & 3 & 0\\ -5 & -3 & -10 & 0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-8 & -7 & -27\\ 5 & -1 & 3\\ -5 & -3 & -10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-8 & -7 & -27\\ 5 & -1 & 3\\ 0 & -4 & -7\end{vmatrix}$$

$$+\quad +\quad +\quad -\quad -\quad -$$

$$\begin{matrix}\backslash & \backslash & \backslash & / & / & /\\ -8 & -7 & -27 & -8 & -7 & \\ & \backslash & /\backslash & \backslash/ & / & \\ 5 & & -1 & 3 & 5 & -1\\ & / & \backslash/ & \backslash/ & \backslash & \\ 0 & -4 & -7 & 0 & -4 & \end{matrix}$$

$$=-(5-1+3+5-1)=-(-56+540-96-245)=-(143)=-143$$

$$\Delta_\omega=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 2 & -9\\ 2 & -3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 6\\ 1+2\cdot 3 & -1+2\cdot 2 & 2+2(-1) & -6+2\cdot 6\\ 2+3 & -3+2 & 1+(-1) & -3+6\\ 1-3\cdot 3 & 1-2\cdot 3 & -3-3(-1) & 2-3\cdot 6\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 6\\ 7 & 3 & 0 & 3\\ 5 & -1 & 0 & 3\\ -8 & -5 & 0 & -16\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}7 & 3 & 3\\ 5 & -1 & 3\\ -8 & -5 & -16\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 0\\ 5 & -1 & 3\\ -8 & -5 & -16\end{vmatrix}$$

```
  +     +     +      -     -     -
    \     \     \   /     /     /
     2     4     0     2     4
       \     /\    \/    /
=-(  5     -1    3     5    -1  )=-(32-96+30+320)=-(286)=-286
       /    \/     \/    \
     -8    -5   -16    -8    -5
```

οπότε:

$$\chi=\Delta_x/\Delta=143/143=1, \qquad \psi=\Delta_\omega/\Delta=286/143=2, \qquad z=\Delta_z/\Delta=-143/143=-1$$

$$\omega=\Delta_\omega/\Delta=-286/143=-2$$

3.4 Λύση συστημάτων Cramer με τη βοήθεια πινάκων

Κάθε γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους με τη βοήθεια των πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \vdots \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta\nu \end{bmatrix}$$

και αν καλέσουμε Α τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, Χ τον πίνακα των αγνώστων και Β τον πίνακα των σταθερών όρων του γραμμικού συστήματος έχουμε :

$$\mathbf{A \cdot X = B}$$

3.5 Συμπληρωματικά θεωρήματα.

<u>Θεώρημα 1.</u>

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα Α τάξεως νxν, υπάρχει ο τετραγωνικός πίνακας I_ν τάξεως νxν που λέγεται <u>μοναδιαίος πίνακας</u> και ισχύει:

$A \cdot I_\nu = I_\nu \cdot A = A$ (ύπαρξη μοναδιαίου πίνακα).

Θεώρημα 2.
Έστω ο τετραγωνικός πίνακας Α, τάξεως νxν. Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας Α'τάξεως νxν, ώστε να ισχύει : $A \cdot A' = A' \cdot A = I_\nu$, ο Α' είναι μοναδικός γράφεται A^{-1} και λέγεται αντίστροφος του Α (ύπαρξη αντίστροφου πίνακα).

Η τεχνική για την εύρεση του αντίστροφου πίνακα ενός τετραγωνικού πίνακα Α τάξεως νxν του οποίου η ορίζουσα ν-οστής τάξεως είναι διάφορη του μηδενός είναι η εξής:

1. Βρίσκουμε την ορίζουσα του δοσμένου πίνακα Α.
2. Βρίσκουμε τον ανάστροφο πίνακα του Α.
3. Κάθε στοιχείο του ανάστροφου το αντικαθιστούμε με το συντελεστή του στοιχείου στην ορίζουσα του Α.
4. Διαιρούμε όλα τα στοιχεία του νέου πίνακα που προέκυψε μετά την αντικατάσταση από τον ανάστροφοδια της ορίζουσας του Α.

Δηλαδή για να βρω τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

εκτελώ τις εξής εργασίες:
1. Βρίσκω την ορίζουσα Δ του πίνακα Α

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Βρίσκω τον ανάστροφο πίνακα του Α

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3. Από την ορίζουσα του Α βρίσκω τους συντελεστές των στοιχείων

$$\text{Συντελεστής του } a_{11} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{του } a_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{του } a_{31} = +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\text{του } a_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{του } a_{22} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{του } a_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \text{του } a_{13} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{του } a_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \text{του } a_{33} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Έτσι δημιουργούμε πίνακα αντικαθιστώντας στον ανάστροφο πίνακα, τα στοιχεία του με τους συντελεστές του:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Εάν όλα τα στοιχεία του τελευταίου τα διαιρέσω με την ορίζουσα Δ έχω τον αντίστροφο πίνακα του Α. Έτσι με βάση τα συμπληρωματικά θεωρήματα ο πίνακας Α του $A \cdot X = B$ είναι τετραγωνικός πίνακας νxν με ορίζουσα ν-οστής τάξης, διάφορη του μηδενός, άρα έχει αντίστροφο πίνακα, A^{-1}. Πολλαπλασιάζοντας την $A \cdot X = B$ από αριστερά με τον πίνακα A^{-1} έχουμε:

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Δηλαδή οι λύσεις του συστήματος Cramer.

Σημείωση: Στη λύση έγινε αποδεκτό ότι η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Παράδειγμα
Να λυθεί με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα:

$$\begin{aligned} 4\chi + 3\psi + 2\omega &= 4 \\ \chi - \psi + 3\omega &= 12 \\ 2\chi + \psi - \omega &= -3 \end{aligned}$$

Λύση
ο πίνακας Α των συντελεστών των αγνώστων είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

που είναι τετραγωνικός και έχει ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

(+ + + − − −)

$$= 4+18+2+4-12+3 = 19 \neq 0$$

Το σύστημα επομένως είναι Cramer αφού $\Delta \neq 0$. Από την ορίζουσα Δ βρίσκω τους συντελεστές των στοιχείων:

Συντελεστής του 4 : $+\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1-3 = -2$

του 1 : $-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-2) = 5$

του 2 : $+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9+2 = 11$

του 3 : $-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-6) = 7$

του −1 : $+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-4 = -8$

του 1 : $-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(12-2) = -10$

του 2 : $+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3$

του 3 : $-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$

του −1 : $+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4-3 = -7$

Δημιουργώ έναν νέο πίνακα A αντικαθιστώντας στον ανάστροφο πίνακα του A, τα στοιχεία του με τους συντελεστές τους.

Ανάστροφος του A : $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ο νέος πίνακας είναι:

$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 11 \\ 7 & -8 & -10 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$ διαιρώ τα στοιχεία αυτού δια $\Delta = 19 \neq 0$ και ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} του A είναι ο:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/19 & 5/19 & 11/19 \\ 7/19 & -8/19 & -10/19 \\ 3/19 & 2/19 & -7/19 \end{bmatrix}$$

και το προς λύση σύστημα γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ με } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ και } X = \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix}$$

γίνεται: $A \cdot X = B$ και $X = A^{-1}B$

Άρα

$$\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/19 & 5/19 & 11/19 \\ 7/19 & -8/19 & -10/19 \\ 3/19 & 2/19 & -7/19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ <==>}$$

$$\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/19 + 60/19 - 33/19 \\ 28/19 - 96/19 + 30/19 \\ 12/19 + 24/19 + 21/19 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/19 \\ -38/19 \\ 57/19 \end{bmatrix}$$

$\chi=1, \quad \psi=-2, \quad \omega=3.$

4. Τυχόντα γραμμικά συστήματα.

4.1 Κάθε σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \alpha_{13}\chi_3 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = \beta_1 \\
&\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \alpha_{23}\chi_3 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = \beta_2 \\
&\alpha_{31}\chi_1 + \alpha_{32}\chi_2 + \alpha_{33}\chi_3 + \ldots + \alpha_{3\nu}\chi_\nu = \beta_3 \\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&\alpha_{\nu 1}\chi_1 + \alpha_{\nu 2}\chi_2 + \alpha_{\nu 3}\chi_3 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}\chi_\nu = \beta_\nu \\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&\alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \alpha_{\mu 3}\chi_3 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu = \beta_\mu
\end{aligned}$$

είναι γραμμικό σύστημα μ πρωτοβάθμιων εξισώσεων με ν αγνώστους μ>ν.

Για να λύσουμε το σύστημα αυτό καλούμε μ−ν=ρ και παραλείποντας ρ εξισώσεις, λαμβάνουμε σύστημα ν .εξισώσεων με ν αγνώστους. Εάν όλες οι ορίζουσες ν−τάξεως είναι διάφορες του μηδενός και όλες οι ορίζουσες (ν+1)−τάξεως είναι ίσες με το μηδέν, τότε η λύση του συστήματος των ν εξισώσεων με ν αγνώστους είναι λύση του τυχόντος γραμμικού συστήματος και το σύστημα είναι συμβιβαστό. Αν οι ορίζουσες ν+1 τάξεως είναι ίσες με το μηδέν, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, είναι ασυμβίβαστο.

4.2 Παραδείγματα

1. Να λυθεί το σύστημα:
$\alpha_1\chi_1 + \beta_1\chi_2 = \rho_1$
$\alpha_2\chi_1 + \beta_2\chi_2 = \rho_2$
$\alpha_3\chi_1 + \beta_3\chi_2 = \rho_3$ που είναι σύστημα 3 πρωτοβάθμιων εξισώσεων με 2 αγνώστους. Εαν παραλείψουμε επομένως μ-ν=3-2=1 εξισώσεις, λαμβάνουμε σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

π.χ $\alpha_1\chi_1 + \beta_1\chi_2 = \rho_1$
$\alpha_2\chi_1 + \beta_2\chi_2 = \rho_2$ πού για να έχει λύση πρέπει:

$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ Για να είναι η λύση αυτή και λύση του συστήματος πρέπει και οι ορίζουσες 2+1=3 τάξεως να είναι 0:

$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \rho_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \rho_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \rho_3 \end{vmatrix} = 0$ Αν $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \rho_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \rho_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \rho_3 \end{vmatrix} \neq 0$ τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

2. Να λυθεί το σύστημα:
$\alpha_1\chi_1 + \beta_1\chi_2 = \rho_1$
$\alpha_2\chi_1 + \beta_2\chi_2 = \rho_2$
$\alpha_3\chi_1 + \beta_3\chi_2 = \rho_3$
$\alpha_4\chi_1 + \beta_4\chi_2 = \rho_4$ που είναι σύστημα 4 πρωτοβαθμίων εξισώσεων με 2 αγνώστους. Εάν παραλείψουμε επομένως μ-ν=4-2=2 εξισώσεις, λαμβάνουμε σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ Για να είναι η λύση αυτή και λύση του συστήματος πρέπει και οι ορίζουσες 2+1=3 τάξεως να είναι 0 και το σύστημα είναι συμβιβαστό. Αν οι τρίτης τάξεως ορίζουσες είναι διάφορες του μηδενός τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \rho_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \rho_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \rho_3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \rho_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \rho_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \rho_4 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \rho_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \rho_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \rho_4 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \rho_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \rho_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \rho_4 \end{vmatrix}$

5. Ομογενή γραμμικά συστήματα.

Εάν στο γραμμικό σύστημα μ πρωτοβαθμίων εξισώσεων με τους ν αγνώστους, οι γνωστοί όροι $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ είναι όλοι μηδέν το σύστημα λέγεται ομογενές.

Για την αναζήτηση λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος χρησιμοποιούνται διάφορες έννοιες από την θεωρία των πινάκων, τις οποίες και δίδομε.

Βαθμός πίνακα.

Ορισμός : Καλείται βαθμός πίνακα ο ακέραιος αριθμός ρ, όταν είναι δυνατό δια παραλείψεως ν-ρ γραμμών και μ-ρ στηλών του δοσμένου πίνακα μxν να λάβουμε οριζουσα τάξεως ρ, μη μηδενική, ενώ κάθε οριζουσα ανώτερης τάξης του ρ, που προκύπτει δι' αποκοπής στηλών και γραμμών του πίνακα να είναι ίση με μηδέν.

Έτσι ένας πίνακας είναι βαθμού 1, όταν μερικά από τα στοιχεία του είναι $\neq 0$ και όλες οι οριζουσες $2^{ης}$ τάξης του πίνακα είναι μηδέν. Ένας πίνακας είναι βαθμού 2, αν δεν μηδενίζονται όλες οι οριζουσες $2^{ης}$ τάξης και μηδενίζονται όλες οι οριζουσες $3^{ης}$ τάξης. Ένας πίνακας είναι βαθμού 3, αν δεν μηδενίζονται όλες οι οριζουσες $3^{ης}$ τάξης και μηδενίζονται όλες οι οριζουσες $4^{ης}$ τάξης.

5.1 Παράδειγμα. Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Στον πίνακα αυτόν η μοναδική οριζουσα $4^{ης}$ τάξης είναι μηδέν αφού έχει δύο στήλες ίδιες. Επίσης όλες οι οριζουσες $3^{ης}$ τάξης που προκύπτουν με αποκοπή μιας γραμμής και μιας στήλης, είναι μηδέν, αφού πάλι έχουν δύο στήλες ίδιες. Αν αναζητήσουμε τις οριζουσες $2^{ης}$ τάξης βρίσκουμε ότι υπάρχει οριζουσα $2^{ης}$ τάξης διάφορη του μηδενός.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 16 - 4 = 12 \neq 0$$

Άρα ο βαθμός του πίνακα είναι 2.

5.2 Στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ενός πίνακα

Στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ενός πίνακα μxν καλούνται:

α. Η εναλλαγή δύο γραμμών.
β. Ο πολλαπλασιασμός όλων των στοιχείων μιας γραμμής επί τον αυτό αριθμό διάφορο του μηδενός.
γ. Ο γραμμικός συνδυασμός δύο γραμμών. Δηλαδή αν $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iν}$ και $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jν}$ είναι δύο γραμμές του πίνακα και αντικαταστήσουμε τη μία με $ka_{i1}+la_{j1}, ka_{i2}+la_{j2}, \ldots, ka_{iν}+la_{jν}$ όπου $k \cdot l \neq 0$. Όμοια ορίζονται οι στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ στηλών.

Θεώρημα
Ο βαθμός ενός πίνακα δεν αλλάζει αν εκτελεστούν στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ή επί των στηλών του.

Ορισμός
Δύο πίνακες $A_{μν}$ και $B_{μν}$ λέγονται ισοδύναμοι όταν ο $B_{μν}$ προέρχεται από τον $A_{μν}$ με εκτέλεση οσωνδήποτε στοιχειωδών πράξεων μεταξύ των γραμμών ή των στηλών του $A_{μν}$.
Οι ισοδύναμοι πίνακες είναι του ίδιου βαθμού.

5.3 Τριγωνική μορφή πίνακα

Ορισμός. Ενας πίνακας λέμε ότι έχει τριγωνική μορφή, όταν σε κάθε γραμμή μετά την πρώτη, το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο έχει προ αυτού περισσότερα μηδενικά απ'ότι έχει το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της πιο πάνω γραμμής και όταν το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής ανήκει σε στήλη της οποίας όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά.

Παραδείγματα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Κάθε πίνακας μ·ν μετατρέπεται με τις στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ή των στηλών σε ισοδύναμο πίνακα τριγωνικής μορφής.

Θεώρημα
Ο βαθμός πίνακα τριγωνικής μορφής είναι ίσος με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.
Έτσι οι πιο πάνω τριγωνικής μορφής πίνακες είναι βαθμού 3,2,3 αντίστοιχα.

Παραδείγματα. Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Αφαιρούμε από την τέταρτη γραμμή τη δεύτερη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3-3 & 3-2 & 3-0 & 4-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Αφαιρούμε από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη γραμμή πολλαπλασιασμένη επί 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3-3\cdot 1 & 2-3\cdot 2 & 0-3(-1) & 2-3\cdot 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

Εναλλάσσουμε τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή κατάλληλα και την προσθέτουμε στις άλλες γραμμές.

$$\begin{bmatrix} 1-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & -1-2\cdot 3 & 4-2\cdot 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0+4\cdot 0 & -4+4\cdot 1 & 3+4\cdot 3 & -10+4\cdot 2 \\ 0-0 & 1-1 & 3-1 & 2-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Εναλλάσσουμε τις δύο τελευταίες στήλες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Προσθέτουμε στη δεύτερη γραμμή την τρίτη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας είναι τριγωνικός και έχει τρεις μη μηδενικές γραμμές, άρα είναι βαθμού 3.

5.4 Λύση ομογενούς γραμμικού συστήματος

Το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\chi_1 + a_{12}\chi_2 + a_{13}\chi_3 + \ldots + a_{1\nu}\chi_\nu = 0\\
&a_{21}\chi_1 + a_{22}\chi_2 + a_{23}\chi_3 + \ldots + a_{2\nu}\chi_\nu = 0\\
&a_{31}\chi_1 + a_{32}\chi_2 + a_{33}\chi_3 + \ldots + a_{3\nu}\chi_\nu = 0\\
&\quad\vdots\\
&a_{\nu 1}\chi_1 + a_{\nu 2}\chi_2 + a_{\nu 3}\chi_3 + \ldots + a_{\nu\nu}\chi_\nu = 0\\
&\quad\vdots\\
&a_{\mu 1}\chi_1 + a_{\mu 2}\chi_2 + a_{\mu 3}\chi_3 + \ldots + a_{\mu\nu}\chi_\nu = 0
\end{aligned}$$

των μ πρωτοβάθμιων εξισώσεων με τους ν αγνώστους, έχει πάντα μια τουλάχιστον λύση την $\chi_1=\chi_2=\ldots=\chi_\nu=0$, αφού ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και ο επαυξημένος πίνακας, που δημιουργείται από τον πίνακα συντελεστών των αγνώστων με πρόσθεση της στήλης με στοιχεία 0, είναι του ίδιου βαθμού.

Εάν ο βαθμός δ του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων του ομογενούς συστήματος είναι μικρότερος από το πλήθος ν των αγνώστων ($\delta<\nu$) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $\nu-\delta$ αυθαίρετους αγνώστους.

Εάν δίνεται ότι το ομογενές σύστημα έχει λύση και διαφορη της μηδενικής τότε η ορίζουσα των συντελεστών του είναι μηδέν.

5.5 Παραδείγματα

1. Να βρεθούν οι τιμες του λ για τις οποίες το σύστημα:

$\lambda\chi - 2\psi = \chi$

$\chi - \lambda\psi = \psi$ έχει λύση διάφορη του μηδενός.

Λύση

$\lambda\chi - 2\psi = \chi \qquad (\lambda-1)\chi - 2\psi = 0$

$\qquad\qquad <==>$

$\chi - \lambda\psi = \psi \qquad \chi - (\lambda+1)\psi = 0$ που είναι γραμμικό και ομογενές σύστημα. Για να έχει επομένως μη μηδενική λύση πρέπει και αρκεί η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι ίση με μηδέν.

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)(\lambda-1) - 1(-2) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda^2-1)+2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^2+1+2=0 \Leftrightarrow -\lambda^2+3=0 \Leftrightarrow -\lambda^2=-3 \Leftrightarrow$$

$\lambda^2=3 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}$

2. Να λυθεί το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} 2\chi_1 - 3\chi_2 + 4\chi_3 + \chi_4 &= 0 \\ \chi_1 + \chi_3 - \chi_4 &= 0 \\ 3\chi_1 - 3\chi_2 + 5\chi_3 &= 0 \\ 4\chi_1 - 3\chi_2 + 6\chi_3 - \chi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Λύση

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

Εναλλάσσουμε τις στήλες: η 4η γίνεται 1η, η 1η γίνεται 3η, η 3η γίνεται 4η

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim$$

Προσθέτουμε την 1η γραμμή στη 2η γραμμή και στην 4η γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim$$

Αφαιρούμε από την 3η γραμμή τη 2η και από την 4η γραμμή τη 2η πολλαπλασιασμένη επί 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός είναι τριγωνικός και είναι βαθμού 2, όσες οι μη μηδενικές γραμμές του

Δηλαδή στο ομογενές αυτό σύστημα ο βαθμός δ του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων του είναι δ=2 και ο αριθμός των αγνώστων ν=4. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Σημείωση: Αφού σ'όλα τα ομογενή συστήματα ο επαυξημένος πίνακας είναι του ίδιου βαθμού με τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων.

Τις λύσεις τις βρίσκουμε ως εξής:

$$\begin{matrix} 2\chi_1 - 3\chi_2 = -4\chi_3 - \chi_4 \\ \chi_1 = -\chi_3 + \chi_4 \end{matrix} \quad <==> \quad \begin{matrix} \chi_1 = -\chi_3 + \chi_4 \\ \chi_2 = 2\chi_3 + 3\chi_4 \end{matrix}$$

Οι χ_3 και χ_4 αυθαίρετοι άγνωστοι.

5.6 Άλυτες ασκήσεις

1. Να λυθούν με τον κανόνα του Cramer τα συστήματα:

α) $\chi + \psi + \omega = 1$
$\alpha\chi + \beta\psi + \gamma\omega = \kappa$
$\alpha^2\chi + \beta^2\psi + \gamma^2\omega = \kappa^2$

Απάντηση: $\chi = \dfrac{(\kappa-\alpha)(\kappa-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$ $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma$

τα ψ,ω κυκλικώς.

β) $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma\omega = \kappa$
$\alpha^2\chi + \beta^2\psi + \gamma^2\omega = \kappa^2$
$\alpha^3\chi + \beta^3\psi + \gamma^3\omega = \kappa^3$

Απάντηση: $\chi = \dfrac{\kappa(\kappa-\beta)(\gamma-\kappa)}{\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}$

$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \alpha \neq \gamma,\ \alpha\beta\gamma \neq 0$

τα ψ,ω κυκλικώς.

2. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $4\chi_1+5\chi_2+2\chi_3-5\chi_4=0$
$-3\chi_1+8\chi_2-2\chi_3-\chi_4=4$
$-10\chi_1+11\chi_2-6\chi_3+3\chi_4=3$

Απάντηση: Ο βαθμός του πίνακα συντελεστών των αγνώστων είναι 2, ενώ ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα είναι 3 άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

β) $\chi_1-\chi_2+2\chi_3+\chi_4=2$
$4\chi_1+2\chi_2+\chi_3=1$
$4\chi_1+2\chi_2+2\chi_3+2\chi_4=3$

Απάντηση: $\chi_1=-\frac{4}{5}\chi_3-\frac{3}{5}\chi_4+1$ $\chi_2=-\frac{6}{5}\chi_3+\frac{2}{5}\chi_4-1$

χ_3, χ_4 αυθαίρετοι άγνωστοι.

1. Φανταστικοί αριθμοί

1.1 Ιστορικό

Πολλά θέματα των μαθηματικών μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών παρέμεναν άλυτα, όπως π.χ. ο μετασχηματισμός του τριωνύμου του δεύτερου βαθμού :

$$\varphi(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha[(\chi+\beta/(2\alpha))^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)/(4\alpha^2)]$$

σε διαφορά δύο τετραγώνων όταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, η λύση της εξίσωσης $\chi^2+\alpha^2=0$ κ.λ.π.

Για να δοθεί λύση στα θέματα αυτά επινοήθηκε ένα νέο σύνολο αριθμών, που ονομάσθηκε **σύνολο φανταστικών αριθμών**.

Για να γίνει δεκτό το σύνολο αυτό πρέπει να υπακούει στους γνωστούς νόμους των πραγματικών αριθμών. Δεχόμαστε επομένως ότι το νέο σύνολο των φανταστικών αριθμών υπακούει στους γνωστούς νόμους των πραγματικών αριθμών.

Επειδή κάθε σύνολο αριθμών έχει μια μονάδα, έτσι και το σύνολο των φανταστικών αριθμών έχει μονάδα, που την συμβολίζομε με το γράμμα i, αρχικό της λέξης imagineure και την ονομάζομε φανταστική μονάδα. Ορίζομε δε $i^2=-1$ και $(-i)^2=-1$.

Σημειώνουμε ότι ο Gauss πρώτος και ο Euler αργότερα χρησιμοποίησε τη σχέση $\sqrt{-1}=\pm i$.

1.2 Ορισμός φανταστικών αριθμών

Φανταστικός αριθμός λέγεται κάθε αριθμός που γίνεται με την επανάληψη της φανταστικής μονάδας i, ή της αντίθετης της $-i$ και των μερών αυτής.

Η γνωστή μορφή του φανταστικού αριθμού είναι βi όπου $\beta\in R^*$. Έτσι για κάθε $\beta\in R^*$ ισχύει $\sqrt{\beta}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{|\beta|}=\pm i\sqrt{|\beta|}$.

1.3 Ακέραιες δυνάμεις της φανταστικής μονάδας

Για κάθε $\nu\in N^*$ ισχύει:

$i^{4\nu}=1$, $i^{4\nu+1}=i$, $i^{4\nu+2}=-1$, $i^{4\nu+3}=-i$, $i^{-\nu}=1/i^{\nu}$

Απόδειξη

$$i^k = \begin{cases} i^{2\rho} = \begin{cases} (i^2)^\rho = (i^2)^{2\nu} = i^{4\nu} = (-1)^{2\nu} = 1 \\ (i^2)^\rho = (i^2)^{2\nu+1} = i^{4\nu+2} = (-1)^{2\nu+1} = -1 \end{cases} \\ i^{2\rho+1} = \begin{cases} (i^2)^\rho i = (i^2)^{2\nu} i = i^{4\nu} i^1 = i^{4\nu+1} = (-1)^{2\nu} i = i \\ (i^2)^\rho i = (i^2)^{2\nu+1} i = i^{4\nu+2} i^1 = i^{4\nu+3} = (-1)^{2\nu+1} i = -i \end{cases} \end{cases}$$

1.4 Παράδειγμα.

Δυνάμεις του i:

Θέτουμε

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1,$$

εξ'αυτών

$i^3 = i^2 i = -1i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ ή $i^4 = i^{4 \cdot 1} = 1$

$i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i$ ή $i^5 = i^{4+1} = i$

$i^6 = i^5 i = i \cdot i = i^2 = -1$ ή $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$ ή $i^6 = i^{4+2} = -1$

$i^7 = i^6 i = -1i = -i$ ή $i^7 = i^{4+3} = -i$

$i^8 = i^7 i = -ii = -i^2 = -(-1) = 1$ ή $i^8 = i^{4(2)} = 1$

$i^9 = i^8 i = 1i = i$ ή $i^9 = i^{4(2)+1} = i$

$i^{10} = i^9 i = ii = i^2 = -1$ ή $i^{10} = i^{4(2)+2} = -1$

$i^{11} = i^{10} i = -1i = -i$ ή $i^{11} = i^{4(2)+3} = -i$ κ.λ.π.

2. Μιγαδικοί αριθμοί

2.1 Ιστορικό

Τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών τη θεμελίωσαν οι D'Alembert, Euler και Gauss.

2.2 Ορισμοί

Κάθε αριθμό της μορφής $\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in R$, ονομάζουμε **μιγαδικό αριθμό**, με α πραγματικό μέρος και β φανταστικό μέρος.
Η μορφή $\alpha+\beta i$ λέγεται **καρτεσιανή μορφή**.

Επειδή με $\beta=0$ είναι $\alpha=\alpha+0i$ και με $\alpha=0$ είναι $\beta i=0+\beta i$ $(\beta\neq 0)$ κάθε αριθμός πραγματικός ή φανταστικός μπορεί να τεθεί σε μορφή μιγαδικού αριθμού. Δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών περιέχει τα σύνολα των πραγματικών και των φανταστικών αριθμών.

Εάν συμβολίσουμε με R το σύνολο των πραγματικών αριθμών με I το σύνολο των φανταστικών αριθμών και με C το σύνολο των μιγαδικών αριθμών έχομε:
$R\subset C$, $I\subset C$, $R\cap I=\varnothing$ $R\cup I=C$.

Κάθε μιγαδικό αριθμό μπορούμε να τον συμβολίσουμε με διατεταγμένο ζεύγος που έχει πρώτο στοιχείο το πραγματικό μέρος και δεύτερο το φανταστικό μέρος $z=(\alpha,\beta)$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$.
Έτσι κάθε πραγματικός αριθμός παίρνει τη μορφή $(\alpha,0)$, $\alpha\in R$.
Κάθε φανταστικός αριθμός παίρνει τη μορφή $(0,\beta)$, $\beta\in R^*$.

Αν θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$ ονομάζουμε:

α) Πραγματικό μέρος του z, τον αριθμό α και συμβολίζουμε με $Re(z)=\alpha$.
β) Φανταστικό μέρος του z, τον αριθμό β και συμβολίζουμε με $Im(z)=\beta$.

2.3 Ισότητα–πρόσθεση–πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών

Στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε:

α) Την ισότητα.

Έστω $z_1=(\alpha_1,\beta_1)$, $z_2=(\alpha_2,\beta_2)$ τότε $z_1=z_2$ αν και μόνο αν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$.
Η ισότητα δύο μιγαδικών αριθμών έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $z=z$ για κάθε $z \in C$ <u>ανακλαστική</u>.

2. $z_1=z_2 \iff z_2=z_1$ για κάθε $z_1,z_2 \in C$ <u>συμμετρική</u>.

3. Εάν $z_1=z_2$ και $z_2=z_3$ τότε $z_1=z_3$ για κάθε $z_1,z_2,z_3 \in C$ <u>μεταβατική</u>.

β) Την πρόσθεση.

Έστω $z_1=(\alpha_1,\beta_1)$, $z_2=(\alpha_2,\beta_2)$. Ονομάζουμε άθροισμα των μιγαδικών αριθμών z_1,z_2, ένα μιγαδικό αριθμό $z=(\alpha,\beta)$ όταν και μόνο όταν ισχύει $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$. Συμβολίζουμε δε $z=z_1+z_2$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η πρόσθεση, στο σύνολο των μιγαδικών, έχει πάντα έννοια και είναι μονοσήμαντα εκτελεστή, αφού το ίδιο συμβαίνει στο R. Η πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $z_1+z_2 = z_2+z_1$ για κάθε $z_1,z_2 \in C$ <u>αντιμεταθετική</u>.

2. $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ για κάθε $z_1,z_2,z_3 \in C$ <u>προσεταιριστική</u>.

3. <u>Υπαρξη ουδέτερου στοιχείου</u>. Για κάθε $z \in C$ υπάρχει $z^* \in C$ τέτοιος ώστε $z+z^*=z$. Ο z^* έχει τη μορφή $(0,0)$ και είναι μοναδικός.

<u>Απόδειξη</u>.

Έστω $z=\alpha+\beta i$, $(\alpha,\beta \in R)$ και $z^*=\chi+\psi i$ $(x,\psi \in R)$ τότε πρέπει $z+z^* = z \iff (\alpha+\beta i) + (\chi+\psi i) = \alpha+\beta i \iff (\alpha+\chi) + (\beta+\psi)i = \alpha+\beta i \iff \alpha+\beta=\alpha$ και $\beta+\psi=\beta$ άρα $\chi=0$ και $\psi=0$ και μοναδικά.

4. <u>Υπαρξη αντίθετου στοιχείου</u>. Για κάθε $z \in C$ υπάρχει $z^* \in C$ τέτοιος ώστε $z+z^*=0$. Αν $z=\alpha+\beta i$ τότε $z^*=-\alpha-\beta i$, ο z^* είναι μοναδικός και συμβολίζεται $z^*=-z$.

<u>Απόδειξη</u>

Με $z=\alpha+\beta i$ και $z^*=\chi+\psi i$ έχω

$z+z^*=0 \iff (\alpha+\beta i) + (x+\psi i) = 0 \iff (\alpha+\chi) + (\beta+\psi)i = 0+0i \implies$

$\alpha+\chi=0$ και $\beta+\psi=0$ ==> $\chi=-\alpha$ και $\psi=-\beta$ και μοναδικά.

5. Ιδιότητα διαγραφής.
Εάν $z_1=z_2$ τότε $z_1+z=z_2+z$ για κάθε $z_1,z_2,z \in C$.

γ) **Τον πολλαπλασιασμό.**

Έστω $z_1=(\alpha_1,\beta_1)$, $z_2=(\alpha_2,\beta_2)$. Ονομάζουμε γινόμενο των μιγαδικών αριθμών z_1,z_2, ένα μιγαδικό αριθμό $z=(\alpha,\beta)$ όταν και μόνο όταν $\alpha=\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2$ και $\beta=\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2$. Συμβολίζουμε $z=z_1\cdot z_2$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι ο πολλαπλασιασμός στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών έχει πάντα έννοια και είναι μονοσήμαντα εκτελεστός αφού το ίδιο συμβαίνει και στο R.
Ο πολλαπλασιασμός στους μιγαδικούς αριθμούς έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$, για κάθε $z_1,z_2 \in C$ αντιμεταθετική.

2. $(z_1\cdot z_2)z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$ για κάθε $z_1,z_2,z_3 \in C$ προσεταιριστική

3. Υπαρξη ουδέτερου στοιχείου. Για κάθε $z \in C$ υπάρχει $z^* \in C$ τέτοιος ώστε $z\cdot z^*=z$. Ο z^* έχει τη μορφή $(1,0)$ είναι μοναδικός και ονομάζεται μονάδα, 1 για ευκολία.

Απόδειξη

Έστω $z=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in R^*)$ και $z^*=\chi+\psi i$ $(\chi,\psi \in R)$

τότε ισχύει

$$z\cdot z^*=z \iff (\alpha+\beta i)(\chi+\psi i)=\alpha+\beta i \iff (\alpha\chi-\beta\psi)+(\alpha\psi+\beta\chi)i=\alpha+\beta i$$

$$\iff \begin{cases} \alpha\chi-\beta\psi=\alpha \\ \alpha\psi+\beta\chi=\beta \end{cases} \quad \text{άρα} \quad D=\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2 \neq 0$$

$$D_\chi=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{vmatrix}=\alpha\beta-\alpha\beta=0 \qquad D_\psi=\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2$$

$$\text{και } \chi=\frac{D_\chi}{D}=\frac{0}{\gamma^2+\beta^2}=0\ ,\qquad \psi=\frac{D_\psi}{D}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$$

4. Υπαρξη αντιστρόφου στοιχείου. Για κάθε $z\in C$ $(z\neq 0)$ υπάρχει z^* τέτοιος ώστε $z\cdot z^*=1$. Αν $z=(\alpha,\beta)$, ο z^* έχει τη μορφή:

$$z^*=\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\ ,\ \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$ και συμβολίζεται με $1/z$ ή z^{-1}.

Απόδειξη

Έστω $z=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta\in R^*)$ και $z^*=\chi+\psi i$ $(\chi,\psi\in R)$

τότε ισχύει

$$z\cdot z^*=1 \Leftrightarrow (\alpha+\beta i)(\chi+\psi i)=1+0i \Leftrightarrow (\alpha\chi-\beta\psi)+(\alpha\psi+\beta\chi)i=1+0i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\chi-\beta\psi=1\\ \alpha\psi+\beta\chi=0\end{cases}\qquad \text{και}\quad D=\begin{vmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2\neq 0$$

$$D_\chi=\begin{vmatrix}1 & -\beta\\ 0 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha\ ,\qquad D_\psi=\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 0\end{vmatrix}=-\beta$$

$$\text{άρα } \chi=\frac{D_\chi}{D}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\ ,\qquad \psi=\frac{D_\psi}{D}=\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

5. Ιδιότητα της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό.

$z_1=z_2 \Leftrightarrow z_1\cdot z=z_2\cdot z$ για κάθε $z_1,z_2,z\in C$.

6. Επιμεριστική ιδιότητα. Ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πρόσθεση, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών:

$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ για κάθε $z_1,z_2,z_3 \in C$.

2.4 Θεωρήματα.

1. Η εξίσωση $z_1+z=z_2$ με $z_1,z_2,z \in C$ έχει μοναδική λύση στο C την $z = z_2 + (-z_1)$.

Απόδειξη

Αφού $z_1 \in C$ και $-z1 \in C$ άρα:

$z_1+z=z_2 \Leftrightarrow (-z_1) + (z_1+z) = (-z_1) + z_2 \Leftrightarrow (-z_1+z_1) + z =$

$= z_2 + (-z_1) \Leftrightarrow z = z_2 + (-z_1)$ ονομάζεται διαφορά z_1 από z_2 και συμβολίζεται με z_2-z_1 και η πράξη ευρέσεως της ονομάζεται αφαίρεση.

2. Η εξίσωση $z_1 \cdot z=z_2$ με $z_1,z_2,z \in C$, $z_1 \neq 0$ έχει μοναδική λύση στο C την

$$z=z_2z_1^{-1}.$$

Απόδειξη

Αφού $z_1 \in C$ και $z_1 \neq 0$ υπάρχει $z^{-1} \in C$ και επομένως

$z_1 \cdot z = z_2 \Leftrightarrow z_1^{-1}(z_1.z) = (z_1^{-1}.z_1)z = z_1^{-1}z_2 \Leftrightarrow 1 \cdot z = z_2z_1^{-1}$

$\Leftrightarrow z = z_2z_1^{-1}$.

Η μοναδική λύση ονομάζεται πηλίκο του z_2 δια z_1, συμβολίζεται και με z_2/z_1 και η πράξη ευρέσεως του ονομάζεται διαίρεση.

2.5 Λυμένες ασκήσεις.

1. Αν $z = (-1,\sqrt{3})$ να υπολογισθεί ο z^2.

Λύση

$$z^2 = z\cdot z = (-1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3}) = (-1(-1)-\sqrt{3}\sqrt{3}) + (-1\sqrt{3}+(-1)\sqrt{3})i =$$

$$= (+1-3) + (-2\sqrt{3})i = -2-2i\sqrt{3}.$$

2. Να δειχθεί ότι το $1-i$ ικανοποιεί την εξίσωση $z^4+4=0$.

Λύση

$$(1-i)^4 + 4 = 1^4 - 4\cdot 1^3 i + 6\cdot 1^2 i^2 - 4\cdot 1\cdot i^3 + i^4 + 4 =$$

$$= 1 - 4i + 6\cdot 1\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot(-1)i + (-1)^2 + 4 =$$

$$= 1 - 4i - 6 + 4i + 1 + 4 = 0.$$

Άρα ο μιγαδικός αριθμός $1-i$ επαληθεύει την εξίσωση και επομένως είναι ρίζα της.

3. Να ευρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί χ,ψ ώστε να ισχύει:

$$2\chi - 3\psi i - 4\psi = 8 + (2-\chi)i.$$

Λύση

$$2\chi - 3\psi i - 4\psi = 8 + (2-\chi)i \Longleftrightarrow (2\chi-4\psi) + (-3\psi)i = 8 + (2-\chi)i$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\chi-4\psi = 8 \\ -3\psi = 2-\chi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \chi-2\psi = 4 \\ \chi-3\psi = 2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3+2 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12+4 = -8 \qquad D_\psi = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-4 = -2$$

$$\text{και } \chi = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-1} = 8, \qquad \psi = \frac{D_\psi}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

4. Η παράσταση :

$$\frac{1}{3+4i} + \frac{1}{3-4i}$$

να γραφεί υπό μορφή $\alpha+\beta i$.

Λύση

$$\frac{1}{3+4i} + \frac{1}{3-4i} = \frac{3-4i}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3-4i+3+4i}{3^2-4^2i^2}$$

$$= \frac{6}{9-16(-1)} = \frac{6}{9+16} = \frac{6}{25} = \frac{6}{25} + 0i$$

5. Να γίνει γινόμενο παραγόντων το:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

Λύση

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta/2 + \beta^2 + (\beta/2)^2 - (\beta/2)^2 =$

$(\alpha+\beta/2)^2 + \beta^2 - \beta^2/4 = (\alpha+\beta/2)^2 + (4\beta^2-\beta^2)/4 = (\alpha+\beta/2)^2 + 3\beta^2/4 =$

$(\alpha+\beta/2)^2-3\beta^2/4(-1) = (\alpha+\beta/2)^2-(3\beta^2/4)i^2 = (\alpha+\beta/2)^2-(\sqrt{3}\beta i/2)^2 =$

$(\alpha+\beta/2+(\beta\sqrt{3}/2)i)(\alpha+\beta/2-(\beta\sqrt{3}/2)i)$.

3. Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

3.1 Ορισμός.

Ονομάζουμε συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ το μιγαδικό αριθμό $z=\alpha-\beta i$ και τον συμβολίζουμε με $\bar{z}$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού:

1) $\bar{i}=-i$

2) $\bar{\bar{z}}=z$ για κάθε $z \in C$.

3) $z+\bar{z} = 2Re(z)$ και $z-\bar{z} = 2Im(z)$ για κάθε $z \in C$.

4) $z\cdot\bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$ για κάθε $z \in C$.

<u>Απόδειξη</u>

1) $i=0+i$, $\bar{i}=0-i=-i$

Έστω $z=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in R)$

2) $\bar{\bar{z}}=\overline{\overline{(\alpha+\beta i)}}=\overline{(\alpha-\beta i)}=\alpha+\beta i=z$

3) $z+\bar{z}=(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha=2Re(z)$

$z-\bar{z}=(\alpha+\beta i)-(\alpha-\beta i)=2\beta=2Im(z)$

4) $z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-\beta^2 i^2=\alpha^2-\beta^2(-1)=\alpha^2+\beta^2=(Re(z))^2+(Im(z))^2$

3.2 Θεωρήματα

1. Αν $z \in C$ και ισχύει $z=\bar{z}$ τότε ο z είναι πραγματικός και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω $z=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in R)$ τότε η $z=\bar{z}$ γράφεται:

$\alpha+\beta i = \overline{\alpha+\beta i} \Rightarrow \alpha+\beta i = \alpha+(-\beta)i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\alpha \\ \beta=-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\alpha \\ 2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha: \text{οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός} \\ \beta=0 \end{cases}$$

άρα $z = \alpha+0i = \alpha \in R$

Αντίστροφα:

Έστω $z=\alpha \in R \Rightarrow z=\alpha+0i$ και $\bar{z}=\alpha-0i$ άρα $z=\bar{z}$.

2. Εάν $z \in C$ και ισχύει $\bar{z}=-z$ τότε ο z είναι φανταστικός και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω $z=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in R)$ τότε η $z=-\bar{z}$ γράφεται:

$\alpha+\beta i = -(\alpha-\beta i) \Rightarrow \alpha+\beta i = -\alpha+\beta i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\alpha \\ \beta=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha=0 \\ \beta=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta: \text{οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.} \end{cases}$$

άρα $z = \alpha+\beta i = 0+\beta i = \beta i$ φανταστικός.

Αντίστροφα:

$z = \beta i \Leftrightarrow z = 0+\beta i \Leftrightarrow \bar{z} = 0-\beta i \Leftrightarrow -\bar{z} = 0+\beta i$ άρα $z=-\bar{z}$.

3.3 Συζυγείς και πράξεις

1) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

Απόδειξη

Έστω $z=\alpha+\beta i \quad (\alpha,\beta \in R)$

$z = \alpha+\beta i \iff -z = -\alpha-\beta i \iff \overline{(-z)} = -\alpha+\beta i$

$\bar{z} = \alpha-\beta i \iff -\bar{z} = -\alpha+\beta i$ άρα $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

2) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

Απόδειξη

Έστω $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i \quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in R$

$\overline{z_1+z_2} = \overline{(\alpha_1+\beta_1 i) + (\alpha_2+\beta_2 i)} = \overline{(\alpha_1+\alpha_2) + (\beta_1+\beta_2)i} =$

$(\alpha_1+\alpha_2) - (\beta_1+\beta_2)i = (\alpha_1-\beta_1 i) + (\alpha_2-\beta_2 i) = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

3) Και επαγωγικά για κάθε $\nu \geq 2$ για $z_1,z_2,z_3,\ldots,z_\nu \in C$ έχομε:

$\overline{z_1+z_2+z_3+\ldots+z_\nu} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\ldots+\bar{z}_\nu$

4) $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$

Απόδειξη

Έστω $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i \quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in R$

τότε

$\overline{z_1-z_2} = \overline{(\alpha_1+\beta_1 i) - (\alpha_2+\beta_2 i)} = \overline{(\alpha_1-\alpha_2) + (\beta_1-\beta_2)i} =$

$(\alpha_1-\alpha_2) - (\beta_1-\beta_2)i = (\alpha_1-\beta_1 i) - (\alpha_2-\beta_2 i) = \bar{z}_1-\bar{z}_2.$

5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Απόδειξη

Έστω $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ $\quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in R$

τότε

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i)} = \overline{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i} =$$

$$(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) - (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$$

και

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(\alpha_1+\beta_1 i)} \cdot \overline{(\alpha_2+\beta_2 i)} = (\alpha_1-\beta_1 i) \cdot (\alpha_2-\beta_2 i) =$$

$$(\alpha_1\alpha_2-(-\beta_1)(-\beta_2)) + (\alpha_1(-\beta_2)+\alpha_2(-\beta_1))i =$$

$$(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) + (-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)i = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) - (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$$

άρα $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

6) Και επαγωγικά για $\nu \geq 2$ για $z_1,z_2,z_3,\ldots,z_\nu \in C$ έχομε:

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ldots z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} \ldots \overline{z_\nu}$$

7) $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$

Απόδειξη

$$\overline{(z^\nu)} = \overline{z \cdot z \ldots z} = \overline{z} \cdot \overline{z} \ldots \overline{z} = (\overline{z})^\nu \qquad z \in C.$$

8) $\overline{(1/z)} = (1/\overline{z})$ για κάθε $z \in R$ με $z \neq 0$.

Απόδειξη

Θέτομε $z_1=1/z \iff z_1 \cdot z=1 \iff \overline{z_1 \cdot z}=\overline{1} \iff \overline{z_1} \cdot \overline{z}=1 \iff \overline{z_1}=1/\overline{z}$

άρα $\overline{(1/z)}=1/\overline{z}$.

9) $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z}_1/\overline{z}_2 \quad z_2 \neq 0$

Απόδειξη

Θέτομε $z=z_1/z_2 \iff z\cdot z_2=z_1 \iff \overline{z\cdot z_2}=\overline{z}_1 \iff \overline{z}\cdot\overline{z}_2=\overline{z}_1 \iff$

$\overline{z}=\overline{z}_1/\overline{z}_2 \iff \overline{(z_1/z_2)}=\overline{z}_1/\overline{z}_2$.

3.4 Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $(2+3i)(3+4i)$.

Λύση

$\overline{(2+3i)(3+4i)} = \overline{(2+3i)}\,\overline{(3+4i)} = (2-3i)(3-4i) =$

$= (2\cdot 3-(-3)(-4)) + (2(-4)+3(-3))i = (6-12) + (-8-9)i = -6-17i$

Άλλος τρόπος

$\overline{(2+3i)(3+4i)} = \overline{(2\cdot 3-3\cdot 4) + (2\cdot 4+3\cdot 3)i} = \overline{(6-12) + (8+9)i} =$

$\overline{-6+17i} = -6-17i$.

2. Αν $z_1, z_2 \in C$ να δειχθεί ότι: $z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση

Έστω $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ $\quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in R$

τότε

$z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} = (\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2-\beta_2 i) + (\alpha_2+\beta_2 i)(\alpha_1-\beta_1 i) =$

$= (\alpha_1\alpha_2-\beta_1(-\beta_2))+(\alpha_1(-\beta_2)+\alpha_2\beta_1)i+(\alpha_1\alpha_2-\beta_2(-\beta_1))+(\alpha_2(-\beta_1)+\alpha_1\beta_2)i =$

$= (\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i + (\alpha_1\alpha_2+\beta_2\beta_1) - (\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i =$

$= 2(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)$ που είναι πραγματικός αριθμός ως άθροισμα γινομένων πραγματικών αριθμών.

3. Να λυθεί η εξίσωση: $z^2 + \bar{z} = 0$, $z \in C$.

Λύση

Έστω $z=\chi+\psi i$ με $\chi,\psi \in R$ τότε $z^2 = (\chi+\psi i)^2 = x^2 + 2\chi\psi i - (\psi i)^2 =$

$= x^2 + 2\chi\psi i - \psi^2 = (x^2-\psi^2) + 2\chi\psi i$

$\bar{z} = \chi-\psi i$ άρα η δοθείσα γίνεται:

$z^2+\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (x^2-\psi^2)+2\chi\psi i+\chi-\psi i = 0 \Leftrightarrow (x^2-\psi^2+\chi) + (2\chi\psi-\psi)i =$

$= 0 + 0i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\psi^2+\chi = 0 \\ 2\chi\psi-\psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\psi^2+\chi = 0 \\ (2\chi-1)\psi = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi=0 \text{ ή } \chi=1/2 \text{ άρα}$$

$x^2-\psi^2+\chi = 0$ και $\psi=0$

$\chi^2+\chi=0$ και $\psi=0$

Άρα $\chi=0$ ή $\chi=-1$ με $\psi=0$

ή

$x^2-\psi^2+\chi = 0$ και $\chi=1/2$

$(1/2)^2-\psi^2+1/2 = 0$ και $\chi=1/2$

Άρα $\psi=\sqrt{3}/2$ ή $\psi=-\sqrt{3}/2$ με $\chi=1/2$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$z_1=0+0i$, $z_2=-1+0i$, $z_3=1/2+(\sqrt{3}/2)i$, $z_4=1/2-(\sqrt{3}/2)i$.

4. Να δειχθεί ότι αν η εξίσωση $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ με $a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ και $a_\nu \neq 0$, έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό z έχει ρίζα και το $\bar{z}$.

Λύση

Αφού z είναι ρίζα της εξίσωσης ισχύει:

$a_\nu z^\nu + a_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \Leftrightarrow$

$\overline{a_\nu z^\nu + a_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\overline{a_\nu z^\nu} + \overline{a_{\nu-1}z^{\nu-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \bar{a}_0 = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\bar{a}_\nu \bar{z}^\nu + \bar{a}_{\nu-1}\bar{z}^{\nu-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\bar{a}_\nu (\bar{z})^\nu + \bar{a}_{\nu-1}(\bar{z})^{\nu-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = 0$ που δηλώνει ότι ο $\bar{z}$ είναι ρίζα της δοθείσης εξίσωσης.

4. Τετραγωνικές ρίζες μιγαδικού αριθμού

4.1 Ορισμός.

Τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in R)$ ονομάζεται κάθε μιγαδικός z τέτοιος ώστε $z^2=\alpha+\beta i$.

Εάν z_1 είναι κια τετραγωνική ρίζα τότε ισχύει $z_1^2=\alpha+\beta i$. Εάν z_2 είναι επίσης τετραγωνική ρίζα τότε ισχύει $z_2^2=\alpha+\beta i$. Επομένως $z_1^2=z_2^2 \Leftrightarrow z_1^2-z_2^2=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2)=0 \Leftrightarrow z_1=z_2$ ή $z_1=-z_2$. Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $\alpha+\beta i$ έχει δύο το πολύ τετραγωνικές ρίζες.

Οι ρίζες αυτές είναι:

1) Εάν ο μιγαδικός είναι της μορφής $\alpha+0i \in R$ τότε οι τετραγωνικές του ρίζες είναι $\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$ όπου $\alpha>0$.
Αν $\alpha<0$ οι τετραγωνικές του ρίζες είναι $i\sqrt{\alpha}$, $-i\sqrt{\alpha}$.
Αν $\alpha=0$ οι τετραγωνικές του ρίζες είναι 0.

2) Εάν ο μιγαδικός αριθμός είναι της μορφής $\alpha+\beta i$ με $\beta\neq 0$ τότε αν $\chi+\psi i$ είναι μια τετραγωνική ρίζα του $\alpha+\beta i$ ισχύει:

$(\chi+\psi i)^2=\alpha+\beta i \iff \chi^2+2\chi\psi i+\psi^2 i^2=\alpha+\beta i \iff (\chi^2-\psi^2)+2\chi\psi i=\alpha+\beta i \iff$

$(\chi^2-\psi^2)=\alpha$ και $2\chi\psi=\beta$.

Επειδή $\beta\neq 0 \Rightarrow \chi\psi\neq 0 \Rightarrow \chi\neq 0$, $\psi\neq 0$ και επομένως $\psi=\beta/(2\chi)$ και

$\chi^2-(\beta/(2\chi))^2 = \alpha \Rightarrow 4\chi^4-4\alpha\chi^2-\beta^2 = 0$ και καλώντας $\chi^2=\omega$ έχομε:

$4\omega^2-4\alpha\omega-\beta^2=0$.

Η εξίσωση αυτή έχει γινόμενο ριζών $-\beta^2$ που είναι αρνητικό.
Επομένως η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και ετερόσημες.
Επειδή $\omega=\chi^2 > 0$ η αρνητική ρίζα ω απορρίπτεται. Εάν $\omega_1>0$ και $\omega_2<0$ τότε :

$\chi^2=\omega_1 \Rightarrow \chi_1=\sqrt{\omega_1}$ και $\chi_2=-\sqrt{\omega_1}$.

Επομένως

$\psi_1=\beta/(2\sqrt{\omega_1})$ και $\psi_2=\beta/(-2\sqrt{\omega_1})$. Άρα οι δύο τετραγωνικές ρίζες του

$\alpha+\beta i$ είναι:

$\sqrt{\omega_1}+\beta/(2\sqrt{\omega_1})$, $-\sqrt{\omega_1}-\beta/(2\sqrt{\omega_1})$.

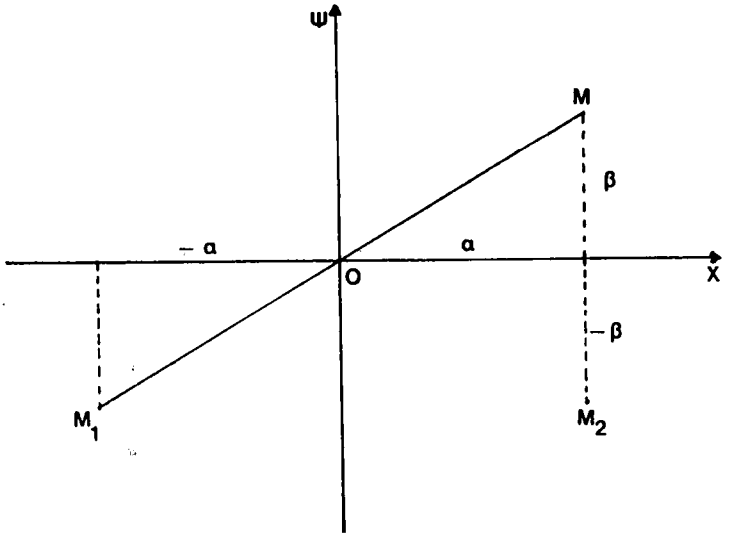
5. Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού αριθμού

Οι μιγαδικοί αριθμοί σαν διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών, μπορούν να παρασταθούν με τα σημεία των ορθογώνιων αξόνων.

Έτσι ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in R)$ απεικονίζεται σε ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ του επιπέδου που έχει τετμημένη α και τεταγμένη β. Αντιστρόφως το σημείο $M(\alpha,\beta)$ με συντεταγμένες (α,β) αντιστοιχεί σε ένα μόνο ορισμένο μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$. Επομένως υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχεία μεταξύ των μιγαδικών αριθμών δηλαδή του RxR και των σημείων του επιπέδου. Στο επίπεδο αυτό οι άξονες των τετμημένων και των τεταγμένων ονομάζονται αντίστοιχα: άξονας των πραγματικών αριθμών, άξονας των φανταστικών αριθμών, το δε επίπεδο λέγεται μιγαδικό ή πολικό επίπεδο. Επίσης μπορούμε να έχομε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των μιγαδικών αριθμών $M(\alpha,\beta)$ και των διανυσματικών ακτίνων του OM επιπέδου.

Παρατήρηση 1. Δύο αντίθετοι μιγαδικοί αριθμοί απεικονίζονται σε σημεία που έχουν αντίθετες συντεταγμένες, δηλαδή σε σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή 0 των αξόνων.

Παρατήρηση 2. Δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί απεικονίζονται σε σημεία που έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες, δηλαδή σε σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα χ'χ.

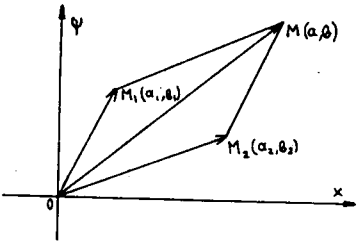


5.1 Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών

Έστω $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ με εικόνα το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM_2}$. Τότε το άθροισμα $z_1+z_2=z$ έχει εικόνα το άθροισμα:

$$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM}$$

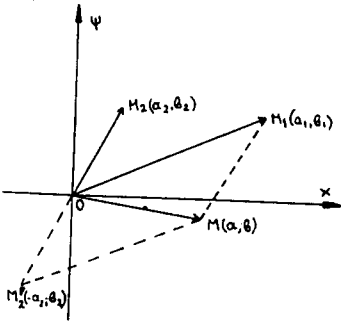
και ισχύει $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$.



Επίσης η διαφορά $z_1 - z_2 = z$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$. Γιατί $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$. Η εικόνα όμως του $-z_2$ είναι η $\overrightarrow{OM_2'}$ συμμετρική της $\overrightarrow{OM_2}$ ως προς το 0. Έτσι

$$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_2O}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2'}=\overrightarrow{OM}$$

και ισχύει $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$.



Πράδειγμα

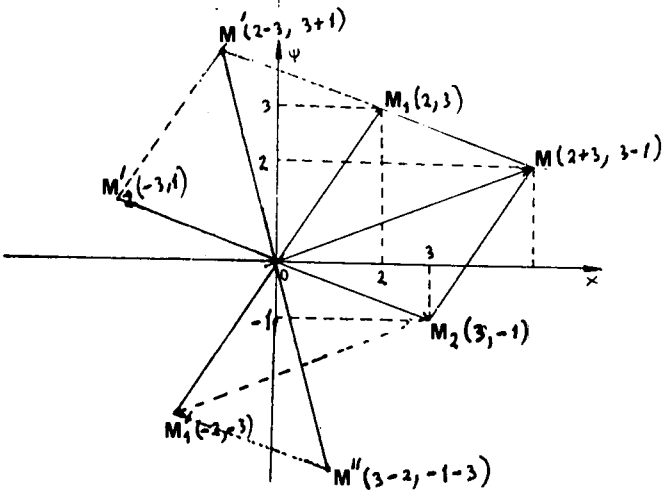
Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοι $z_1=2+3i$, $z_2=3-i$. Να παρασταθεί γεωμετρικά το z_1+z_2, z_1-z_2, z_2-z_1.

Λύση

$z_1+z_2=(2+3i)+(3-i)=5+2i$ $OM(5,2)$

$z_1-z_2=(2+3i)-(3-i)=-1+4i$ $OM'(-1,4)$

$z_2-z_1=(3-i)-(2+3i)=1-4i$ $OM''(1,-4)$



6. Μέτρο μιγαδικού αριθμού

6.1 Ορισμός

Ονομάζουμε μέτρο ή απόλυτη τιμή του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ το μη αρνητικό αριθμό $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Εάν M η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ έχει μέτρο $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Το μέτρο του $\overrightarrow{OM}$ λέγεται και μέτρο (απόλυτη τιμή) του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $|z|\geq 0$ για κάθε $z \in C$.

2. $z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2=|z|^2$

3. Αν $z=\alpha \in R$ τότε $|OM|=\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

4. $z=0 \iff |z|=0$

5. $|z|=|\alpha+\beta i|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=|\alpha-\beta i|=|-\alpha-\beta i|=|-\alpha+\beta i|$ δηλαδή

$$|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|$$

6. Αν $z \in R$ τότε $z=\bar{z}$ άρα $|z|^2=z\cdot\bar{z}=z\cdot z=z^2$

αντίστροφα: αν $|z|^2=z^2 \Rightarrow z\cdot\bar{z}=z^2 \Rightarrow \bar{z}=z$

άρα $z \in R$

7. Αν $z \in I$ τότε $z=-\bar{z}$ άρα $|z|^2=z\cdot\bar{z}=z\cdot(-z)=-z^2$

αντίστρόφα: αν $|z|^2=-z^2 \Rightarrow z\cdot\bar{z}=-z^2 \Rightarrow \bar{z}=-z$

άρα $z \in I$

Σημείωση: η $|z|^2=z^2$ ισχύει μόνο για τους πραγματικούς αριθμούς.

8. Αν $|z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \iff z.\bar{z}=1 \iff \bar{z}=1/z$

6.2 Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού: $\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^3}$

Λύση

$$\left|\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^3}\right| = \frac{|(1+i)||(\sqrt{3}+i)^3|}{|(1-i\sqrt{3})^3|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}\,(\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2})^3}{(\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2})^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{4})^3}{(\sqrt{4})^3} = \sqrt{2}$$

2. Εάν $|z-8|=|z-2|$ τότε $Re(z)=5$ και αντίστροφα.

Λύση

$|z-8|=|z-2| \Leftrightarrow |z-8|^2=|z-2|^2 \Leftrightarrow (z-8)\overline{(z-8)}=(z-2)\overline{(z-2)} \Leftrightarrow$

$(z-8)(\bar{z}-8)=(z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}-8z-8\bar{z}+64=z\cdot\bar{z}-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow -6z-6\bar{z}=$

$=-60 \Leftrightarrow z+\bar{z}=10 \Leftrightarrow 2Re(z)=10 \Leftrightarrow Re(z)=5.$

3. Να απόδειχθεί ότι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

Λύση

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} =$

$(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-$

$z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2 = 2z_1\bar{z}_1+2z_2\bar{z}_2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2.$

4. Να αποδειχθεί ότι αν $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$ τότε $|z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_2|$.

Λύση

Από την $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ (παράδειγμα 3) λαμβάνουμε

$|z_1|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_1|^2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=3|z_1|^2 \Leftrightarrow$

$|z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_1| \Leftrightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_2|.$

7. Πολική – τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

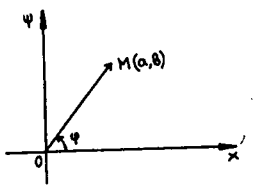
7.1 Όρισμα – μέτρο μιγαδικού αριθμού.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ $\alpha,\beta \in R$. Τότε οι παραστάσεις $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ έχουν έννοια στο R και ο z μπορεί γραφεί $z=\alpha+\beta i=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+i\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$ και επειδή

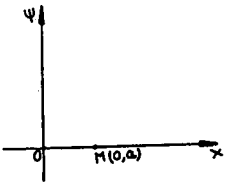
$-1 \le \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \le 1$, $-1 \le \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \le 1$ μπορούμε να θέσουμε

$$\text{συν}\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \text{ημ}\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad (1)$$

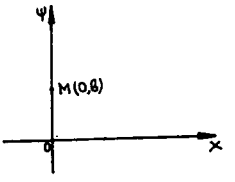
Όπως είναι γνωστό υπάρχουν άπειρες γωνίες θ που επαληθεύουν τις σχέσεις (1). Από αυτές υπάρχει ακριβώς μία που πληροί τις (1) και την $-\pi < \theta \le \pi$. Αυτήν τη μία την καλούμε <u>πρωτεύον όρισμα</u> του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ (Argument(z) ή Argz). Γεωμετρικώς το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ παριστάνει την κυρτή γωνία που σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας Ox με τη διανυσματική ακτίνα OM.



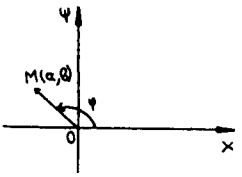
ορισμα $(\alpha,\beta)=\varphi<\pi/2$



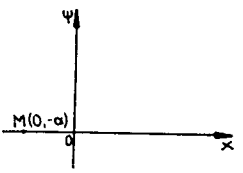
ορισμα $(0,\alpha)=0$



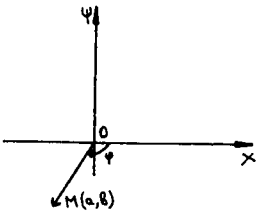
ορισμα $(0,\beta)=\pi/2$



όρισμα $(\alpha,\beta)=\varphi$
$\pi/2<\varphi<\pi$



ορισμα $(0,-\alpha)=\pi$



ορισμα $(\alpha,\beta)=-\varphi$

Επίσης έχομε ορίσει ως μέτρο ρ του z τον μη αρνητικό αριθμό $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (Modulus z).

Έτσι ο $z=\alpha+\beta i$ γράφεται:

$z=\alpha+\beta i=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$. Η μορφή $\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ που παίρνει ο μιγαδικός αριθμός z λέγεται <u>τριγωνομετρική μορφή</u> ή <u>πολική μορφή</u> αυτού.

Κάθε μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i\neq 0$ έχει ακριβώς <u>μια τριγωνομετρική μορφή – πολική μορφή</u> $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho^{i\theta}$, όπου ρ το μέτρο του και θ το όρισμα του $(-\pi < \theta \leq \pi)$.

<u>Αντιστρόφως</u>: Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (ρ,θ) με $\rho>0$ και $-\pi < \theta \leq \pi$ υπάρχει ακριβώς ένας μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i\neq 0$ με τριγωνομετρική μορφή $\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho^{i\theta}$, αυτός είναι ο μιγαδικός αριθμός $\alpha+\beta i$ με $\alpha=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\beta=\rho\eta\mu\theta$.

Παραδείγματα

1. Να γραφεί υπό τριγωνομετρική – πολική μορφή ο μιγαδικός αριθμός $z=1+i\sqrt{3}$.

<u>Λύση</u>

$\rho = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\ \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha/\rho = 1/2$, $\eta\mu\theta = \beta/\rho = \sqrt{3}/2$ άρα $\theta=\pi/3$ $(-\pi < \theta \leq \pi)$

Άρα $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=2(\sigma\upsilon\nu(\pi/3)+i\eta\mu(\pi/3))$ και $z=2^{i\pi/3}$.

2. Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός $z=3(συν(π/4)+iημ(π/4))$ υπό καρτεσιανή μορφή $α+βi$.

Λύση

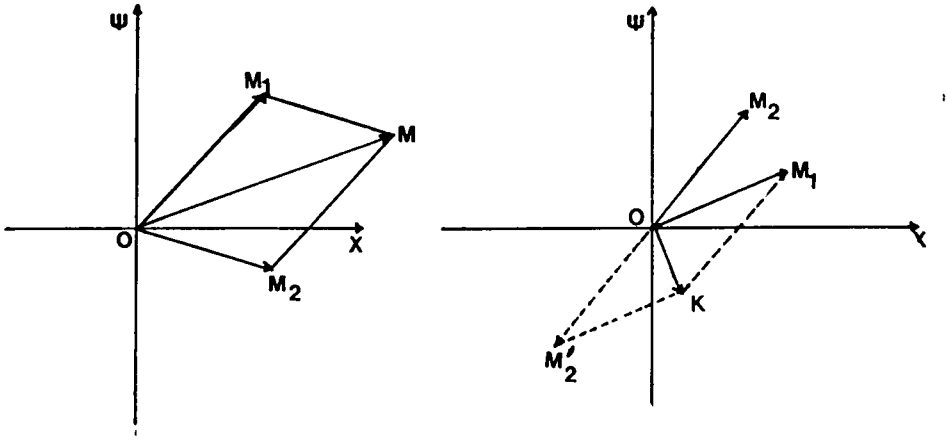
Έχομε $ρ=3$ και $συνθ=α/ρ$, $ημθ=β/ρ$ ==> $συν(π/4)=α/3$, $ημ(π/4)=β/3$ ==>

$√2/2=α/3$, $√2/2=β/3$ ==> $2α=3√2$, $2β=3√2$ ==> $α=3√2/2$, $β=3√2/2$

άρα $z=3√2/2+i3√2/2$.

8. Πράξεις και μέτρο μιγαδικών αριθμών.

8.1 Μέτρο του αθροίσματος-της διαφοράς δύο μιγαδικών.



Έστω $z_1=α_1+iβ_1$, $z_2=α_2+iβ_2$ δύο μιγαδικοί αριθμοί και OM_1, OM_2 οι διανυσματικές ακτίνες τους αντίστοιχα, τότε στο άθροισμα τους $z_1+z_2 = (α_1+α_2)+(β_1+β_2)i$ αντιστοιχεί η διανυσματική ακτίνα OM ως φαίνεται στο σχήμα (1). Στη δε διαφορά $z_1-z_2 = (α_1-α_2)+(β_1-β_2)i$ αντιστοιχεί η διανυσματική ακτίνα OK ως φαίνεται στο σχήμα (2).

Από το τρίγωνο OM_1M έχομε:

$||\overrightarrow{OM_1}|-|\overrightarrow{M_1M}|| \leq |\overrightarrow{OM}| \leq |\overrightarrow{OM_1}|+|\overrightarrow{M_1M}|$ <==>

$||\overrightarrow{OM_1}|-|\overrightarrow{OM_2}|| \leq |\overrightarrow{OM}| \leq |\overrightarrow{OM_1}|+|\overrightarrow{OM_2}|$ <==>

$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

αν στη τελευταία αντικαταστήσουμε το z_2 με $-z_2$ αυτή γράφεται:

$||z_1|-|-z_2|| \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|-z_2|$ <==>

$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

και επαγωγικά

$|z_1+z_2+...+z_\nu| \leq |z_1|+|z_2|+...+|z_\nu|$

και επειδή $z_1+z_2 = (\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i$ και $z_1-z_2 = (\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)i$

έχομε:

$|z_1+z_2|=\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2}$, $|z_1-z_2|=\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2}$.

8.2 Μέτρο και όρισμα του γινομένου μιγαδικών, γεωμετρική παράσταση γινομένου.

Έστω $z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1)$ $z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)$ δύο μιγαδικοί αριθμοί υπό την τριγωνομετρική τους μορφή. Τότε

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2) + (\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2+\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2)i] =$

$= \rho_1\rho_2[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)]$

Δηλαδή το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών υπό την τριγωνομετρική τους μορφή, είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων τους και όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων τους.

Δηλαδή $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ και ένα όρισμα του z_1z_2 τη γωνία $\theta_1+\theta_2$

και επαγωγικά για $\nu \geq 2$

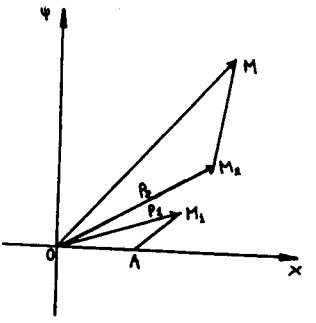
$|z_1z_2...z_\nu|=|z_1||z_2|...|z_\nu|$ και ένα όρισμα του $z_1z_2...z_\nu$ την

$\theta_1+\theta_2+...+\theta_\nu$.

Αν $z_1=z_2=...=z_\nu=z$ τότε το $|z_1z_2...z_\nu|=|z_1||z_2|...|z_\nu|$ γίνεται

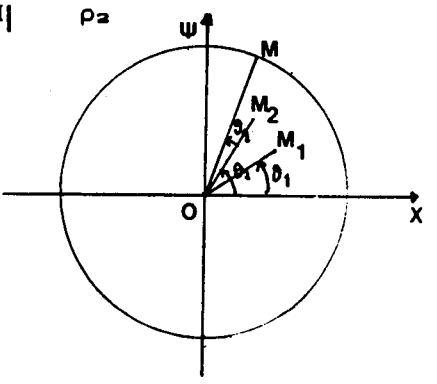
$|z^\nu|=|z|^\nu$ $(\nu \in N^*)$ και ένα όρισμα του z^ν η γωνία $\nu\theta$

Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν διανυσματικές ακτίνες OM_1, OM_2 αντίστοιχα.



Στον άξονα Οχ λαμβάνουμε σημείο Α με τετμημένη 1. Έτσι $\overrightarrow{OA}$ μοναδιαίο διάνυσμα και $A\hat{O}M_1=\theta_1$, $A\hat{O}M_2=\theta_2$. Σχηματίζουμε το τρίγωνο OAM_1. Ακολούθως κατασκευάζομε τρίγωνο OM_2M με πλευρά OM_2 και $M_2\hat{O}M=\theta_1$ και $OM_2\hat{M}=O\hat{A}M_1$. Τότε τα τρίγωνα OAM_1 και OM_2M είναι όμοια και ισχύει η αναλογία:

$$\frac{|\overrightarrow{OM_1}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM_2}|} \Longrightarrow \frac{\rho_1}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{1}{\rho_2} \Longleftrightarrow |\overrightarrow{OM}|=\rho_1\rho_2$$



Έτσι το σημείο M είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού που έχει μέτρο $\rho_1\rho_2$ και όρισμα τη γωνία $\widehat{XOM}=\widehat{XOM_2}+\widehat{M_2OM}=\theta_1+\theta_2$. Άρα το M είναι εικόνα του γινομένου z_1z_2 των μιγαδικών αριθμών. Η απλούστερα: εικόνα του z_1z_2 είναι η τομή του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή O και ακτίνα $\rho_1\rho_2$ και της τελικής πλευράς της γωνίας που έχει αλγεβρική τιμή $\theta_1+\theta_2$.

8.3 Ισότητα μιγαδικών.

Αν θ_1, θ_2 είναι ορίσματα των μιγαδικών z_1, z_2 αντιστοίχως τότε υπάρχουν κ_1, $\kappa_2 \in Z$ τέτοια ώστε :

$$\theta_1=Arg(z_1)+2\kappa_1\pi$$
$$\theta_2=Arg(z_2)+2\kappa_2\pi$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχομε:

$$\theta_1-\theta_2=Arg(z_1)-Arg(z_2)+2(\kappa_1-\kappa_2)\pi \qquad (1)$$

επειδή για το πρωτεύον όρισμα ισχύει

$$\left.\begin{array}{l}-\pi < Arg(z_1) \le \pi \\ -\pi < Arg(z_2) \le \pi\end{array}\right\} \quad <==> \quad \left.\begin{array}{l}-\pi < Arg(z_1) \le \pi \\ \pi > -Arg(z_2) \ge -\pi\end{array}\right\} \quad <==>$$

$$-\pi < Arg(z_1) \le \pi$$

$$-\pi \le -Arg(z_2) < \pi$$

Υποθέτοντας $Arg(z_1) \neq Arg(z_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη

$$-2\pi < Arg(z_1)-Arg(z_2) < 2\pi.$$

Άρα δεν υπάρχει $\kappa \in Z$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\theta_1-\theta_2=2\kappa\pi$.
Αν $Arg(z_1)=Arg(z_2)$ τότε η (1) δίνει $\theta_1-\theta_2=2\lambda\pi$ όπου $\lambda=\kappa_1-\kappa_2$. Άρα αν $Arg(z_1)=Arg(z_2)$ <==> υπάρχει $\kappa \in Z$ τέτοιο ώστε $\varphi_1-\varphi_2=2\kappa\pi$.

Δηλαδή
Για να είναι δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί ίσοι πρέπει και αρκεί να έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά δύο οποιονδήποτε ορισμάτων τους να είναι πολλαπλάσιο του 2π.

8.4 Μέτρο και όρισμα του αντιστρόφου ενός μιγαδικού - του πηλίκου δύο μιγαδικών - γεωμετρική παράσταση.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi) \neq 0$, με φ ένα όρισμα του και θ ένα όρισμα του αντιστρόφου του $1/z$. Τότε $z\cdot 1/z=1$. Το γινόμενο $z\cdot 1/z$ έχει όρισμα το άθροισμα $\theta+\varphi$ και από την ισότητα $z\cdot 1/z=1$ παίρνουμε $\text{Arg}(z\cdot 1/z) = \text{Arg}(1) + 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z$ $\Leftrightarrow$ $\theta+\varphi=2\kappa\pi$ $\Leftrightarrow$ $\theta=-\varphi$. Και επειδή $|z\cdot 1/z|=|1|$ $\Leftrightarrow$ $|z||1/z|=1$ $\Leftrightarrow$ $|1/z|=1/|z|$.

Δηλαδή ο αντίστροφος ενός μιγαδικού $z\neq 0$ έχει μέτρο τον αντίστροφο του μέτρου του z και όρισμα το αντίθετο ενός ορίσματος του z.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta))$$ όπου θ ένα όρισμα του z.

Αν $z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1) \neq 0$, $z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2) \neq 0$ με θ_1, θ_2 ορίσματα τότε:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2}$$ και επειδή ένα όρισμα του z_1 είναι το θ_1 και ένα όρισμα του $1/z_2$ είναι το $-\theta_2$ ένα όρισμα του γινομένου $z_1 1/z_2$ είναι το άθροισμα

$$\theta_1+(-\theta_2)=\theta_1-\theta_2$$

και

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

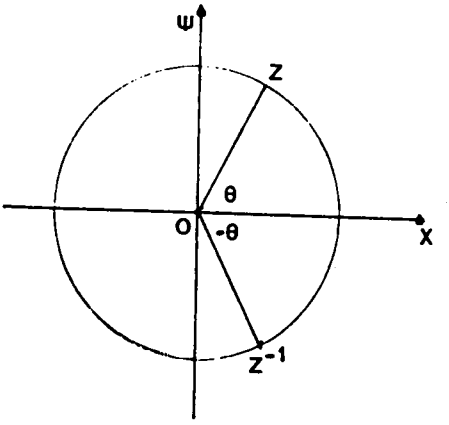
Δηλαδή

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)).$$

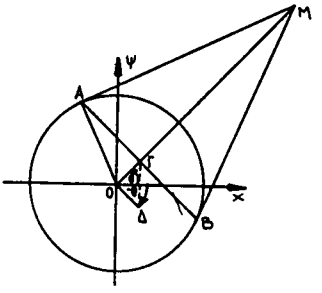
Για τη γεωμετρική παράσταση του $1/z$ $z\neq 0$ διακρίνομε 3 περιπτώσεις:

α) $|z|=1$, β) $|z|>1$, γ) $|z|<1$.

α) Αν $|z|=1$ τότε $z=συνθ+iημθ \neq 0$ και $z^{-1}=1/z=συν(-θ)+iημ(-θ)$ οπότε η εικόνα του z^{-1} είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον άξονα χ.



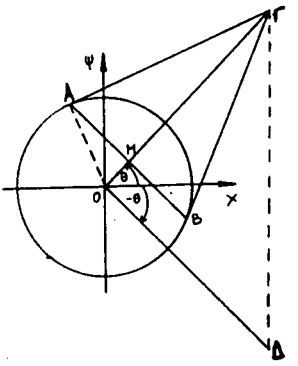
β) Έστω $z=|z|(συνθ+iημθ)$ με εικόνα το σημείο Μ και $|z|>1$. Εάν ΜΑ, ΜΒ οι εφαπτόμενες του κύκλου από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ έχουν: $|\overrightarrow{OΓ}|\cdot|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OA}|^2$ (το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς στην υποτείνουσα). Επειδή $|\overrightarrow{OM}|=|z|$ και $|\overrightarrow{OA}|=1$ έχω $|\overrightarrow{OΓ}|\cdot|z|=1 \leftrightarrow |\overrightarrow{OΓ}|=1/|z|$.



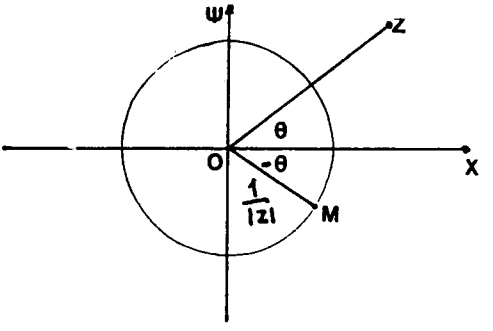
Αν Δ είναι το συμμετρικό του Γ ως προς τον Οχ έχω $|\overrightarrow{OΓ}|=|\overrightarrow{OΔ}|$. Έτσι το Δ έχει όρισμα $-θ$ και μέτρο ίσο με $1/|z|$. Άρα το Δ είναι εικόνα του $1/z$ με $|z|>1$.

γ) Έστω $z=|z|(συνθ+iημθ)$ με εικόνα το σημείο Μ και $|z|<1$. Στο Μ φέρνομε κάθετη επι την ΟΜ που τέμνει τον κύκλο στα Α, Β. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα Α,Β συναντούν την ΟΜ στο σημείο Γ.

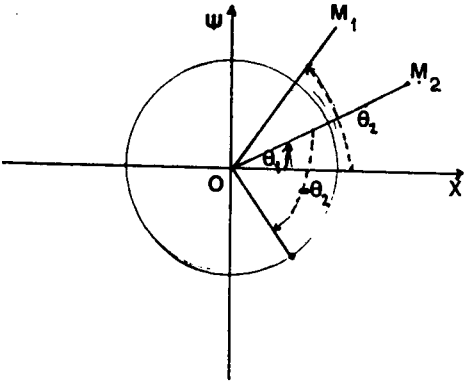
Βρίσκω το Δ συμμετρικό του Γ ως προς τον άξονα Οχ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ παίρνω: $|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{O\Gamma}||\overrightarrow{OM}|$.



Επειδή $|\overrightarrow{OM}|=|z|$ και $|\overrightarrow{OA}|=1$ έχω $1^2=|\overrightarrow{O\Gamma}||z| \Leftrightarrow |\overrightarrow{O\Gamma}|=1/|z|$. Έτσι το Δ έχει όρισμα $-\theta$ και μέτρο $1/|z|$ Άρα το Δ είναι εικόνα του $1/z$ με $|z|<1$. Την εικόνα του $1/z$ μπορούμε να τη βρούμε και ως τομή του κύκλου $(0,1/|z|)$ και της τελικής πλευράς της γωνίας $-\theta$.



Την εικόνα του πηλίκου την λαμβάνουμε ως τομή του κύκλου $(0,|z_1|/|z_2|)$ και της τελικής πλευράς της γωνίας $\theta_1-\theta_2$.



Σημείωση: Γνωρίζουμε ότι όταν ο μιγαδικός $z\neq 0$ έχει ένα όρισμα θ ένα όρισμα του $z^ν$ είναι το νθ και ότι ισχύει $|z^ν|=|z|^ν$ όταν $ν\in N^*$. Αν κ αρνητικός ακέραιος τότε επειδή ισχύει $κ=-ν$ έχω:

$$|z^κ|=|z^{-ν}|=|1/z^ν|=1/|z^ν|=1/|z|^ν=|z|^{-ν}=|z|^κ$$

και αφού ο νθ είναι ένα όρισμα του $z^ν$ έχομε ότι $-νθ=κθ$ που είναι όρισμα του $1/z^ν=z^{-ν}=z^κ$.

9. Τύπος του De Moivre.

Για το μιγαδικό αριθμό z που έχει μέτρο ρ και ένα όρισμα θ γνωρίζουμε ότι για κάθε ν ακέραιο ο $z^ν$ έχει μέτρο $ρ^ν$ και ένα όρισμα νθ.

Έτσι αν $z=ρ(συνθ+iημθ)$ τότε:

$$z^ν=ρ^ν(συν(νθ)+iημ(νθ))$$

που είναι ο τύπος του De Moivre.

Εφαρμογές: Ο τύπος του De Moivre χρησιμοποιείται και για την εύρεση των τριγωνομετρικών αριθμών των πολλαπλάσιων ενός τόξου θ από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του θ.

Παραδείγματα
1. Να υπολογιστούν τα $ημ(2θ)$, $συν(2θ)$.

Λύση
$(συνθ+iημθ)^2=συν(2θ)+iημ(2θ)$ τύπος De Moivre <==>

$συν^2θ+i2συνθημθ+i^2ημ^2θ=συν(2θ)+iημ(2θ)$ <==>

$(συν^2θ-ημ^2θ)+i2συνθημθ=συν(2θ)+iημ(2θ)$ <==>

$συν(2θ)=(συν^2θ-ημ^2θ)$ $\quad ημ(2θ)=2συνθημθ$.

2. Να υπολογισθούν τα: ημ(3θ), συν(3θ).

Λύση

$(συνθ+iημθ)^3=συν(3θ)+iημ(3θ)$ τύπος De Moivre <==>

$συν^3θ+3συν^2θiημθ+3συνθi^2ημ^2θ+i^3ημ^3θ-συν(3θ)+iημ(3θ)$ <==>

$συν^3θ-3συν^2θiημθ-3συνθημ^2θ-iημ^3θ=συν(3θ)+iημ(3θ)$ <==>

$(συν^3θ-3συνθημ^2θ)+(3συν^2θημθ-ημ^3θ)i=συν(3θ)+iημ(3θ)$ <==>

$συν(3θ)=συν^3θ-3συνθημ^2θ$, $ημ(3θ)=3συν^2θημθ-ημ^3θ$.

10. Ρίζες μιγαδικών αριθμών.

10.1 Ορισμός.

Ονομάζεται ν-οστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού α κάθε μιγαδικός αριθμός z τέτοιος ώστε:

$$z^ν=α$$

10.2 Ν-οστές ρίζες μιγαδικού αριθμού.

Εστω ένας μιγαδικός αριθμός $α\neq 0$ με μέτρο ρ και ένα όρισμα του θ. Δηλαδή $α=ρ(συνθ+iημθ)$. Για να είναι ένας μιγαδικός αριθμός $z=|z|(συνφ+iημφ)$ ν-οστή ρίζα του α πρέπει και αρκεί:

$$z^ν=α \iff |z|^ν(συν(νφ)+iημ(νφ))=ρ(συνθ+iημθ)$$

αυτή η ισότητα δίνει $|z|^ν=ρ$ και ότι υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος ώστε $νφ=θ+2κπ$ που δίνουν $|z|=\sqrt[ν]{ρ}$ και $φ=(θ+2κπ)/ν$. Επομένως ν-οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού α είναι κάθε αριθμός της μορφής:

$$z_κ=\sqrt[ν]{ρ}[συν((θ+2κπ)/ν)+iημ((θ+2κπ)/ν)] \quad κ=0,1,2,...ν-1.$$

10.3 Γεωμετρική παράσταση των ν-οστών ριζών μιγαδικού.

Ο μιγαδικός αριθμός $\alpha=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ έχει τις εξής ν-οστές ρίζες:

για $\kappa=0$ $z_0=\sqrt[\nu]{\rho}(\sigma\upsilon\nu(\theta/\nu)+i\eta\mu(\theta/\nu))$

για $\kappa=1$ $z_1=\sqrt[\nu]{\rho}(\sigma\upsilon\nu(\theta/\nu+2\pi/\nu)+i\eta\mu(\theta/\nu+2\pi/\nu))$

για $\kappa=2$ $z_2=\sqrt[\nu]{\rho}(\sigma\upsilon\nu(\theta/\nu+4\pi/\nu)+i\eta\mu(\theta/\nu+4\pi/\nu))$

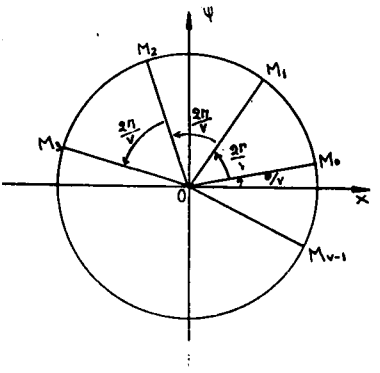
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

για $\kappa=\nu-1$ $z_{\nu-1}=\sqrt[\nu]{\rho}(\sigma\upsilon\nu(\theta/\nu+2\pi(\nu-1)/\nu)+i\eta\mu(\theta/\nu+2\pi(\nu-1)/\nu))$

Παρατηρούμε ότι οι ν-οστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού α έχουν το ίδιο μέτρο και ότι τα ορίσματα τους έχουν αρχική τιμή θ/ν, που αυξάνει διαρκώς κατά $2\pi/\nu$. Αυτό σημαίνει ότι, αν λάβουμε τις εικόνες $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{\nu-1}$ στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες αυτές θα βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $\sqrt[\nu]{\rho}$, που δε κορυφές κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σ'αυτόν τον κύκλο.



10.4 Ν-οστές ρίζες της μονάδας.

Έστω $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$, $\rho>0$ μια λύση της εξίσωσης :

$$z^{\nu}=1$$

τότε

$[\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)]^{\nu}=1(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0) \Leftrightarrow$

$\rho^{\nu}(\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi)+i\eta\mu(\nu\varphi))=1(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0) \Leftrightarrow$

$\rho^{\nu}=1 \qquad\qquad \rho=1$

και $\qquad\qquad \Leftrightarrow$

$\nu\varphi=2\kappa\pi \quad \kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1 \qquad\qquad \varphi=2\kappa\pi/\nu \quad \kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1$

Επομένως οι ν, διαφορετικές ανά δύο, ν-οστές ρίζες της μονάδας είναι:

για $\kappa=0$ $z_0=\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0$

για $\kappa=1$ $z_1=\sigma\upsilon\nu(2\pi/\nu)+i\eta\mu(2\pi/\nu)$

για $\kappa=2$ $z_2=\sigma\upsilon\nu(4\pi/\nu)+i\eta\mu(4\pi/\nu)$

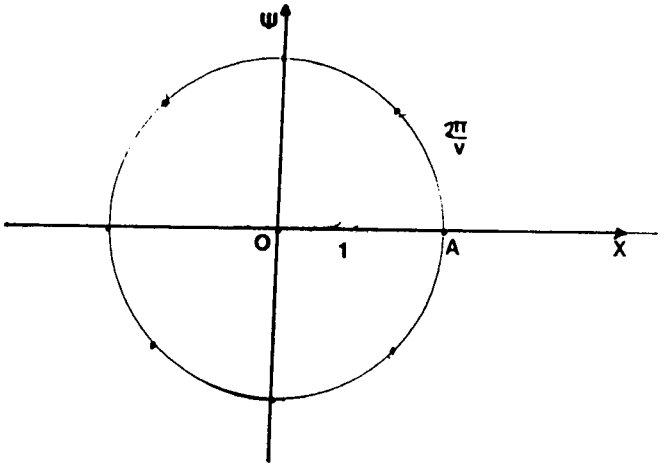
.....

.....

.....

για $\kappa=\nu-1$ $z_{\nu-1}=\sigma\upsilon\nu(2\pi(\nu-1)/\nu)+i\eta\mu(2\pi(\nu-1)/\nu)$

Οι ν-οστές ρίζες του 1 έχουν κοινό μέτρο 1 και τα ορίσματα δύο διαδοχικών ριζών διαφέρουν κατά $2\pi/\nu$. Έτσι οι εικόνες τους, στο μιγαδικό επίπεδο, είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1.



10.5 Ιδιότητες ν-οστών ριζών της μονάδας.

1) Ο αντίστροφος της ρίζας z_κ είναι η ρίζα $z_{\nu-\kappa}$ δηλαδή ισχύει:

$$z_\kappa \cdot z_{\nu-\kappa}=1.$$

Γενικά $$z_\kappa \cdot z_{\nu-\kappa}=z_1^\kappa . z_1^{\kappa-\lambda}=z_1^\nu=1.$$

2) $z_0+z_1+z_2+\ldots+z_{\nu-1}=0$

Αφού

$$z_0+z_1+z_2+\ldots+z_{\nu-1} = 1+z_1+z_1^2+\ldots+z_1^{\nu-1} = \frac{z_1^\nu-1}{z_1-1} = \frac{1-1}{z_1-1} = \frac{0}{z_1-1} = 0$$

αφού $z_1^\nu=1$.

10.6 Παραδείγματα.

1. Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες της μονάδας.

<u>Λύση</u>

$\alpha=1=\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0$

$z=\sqrt[3]{1}[\sigma\upsilon\nu((0+2\kappa\pi)/3)+i\eta\mu((0+2\kappa\pi)/3)]$ $\kappa=0,1,2$

$z_0=1$ $z_1=\sigma\upsilon\nu(2\pi/3)+i\eta\mu(2\pi/3)$ $z_2=\sigma\upsilon\nu(4\pi/3)+i\eta\mu(4\pi/3)$

Για τις οποίες ισχύουν

$z_1^3=(\sigma\upsilon\nu(2\pi/3)+i\eta\mu(2\pi/3))^3=\sigma\upsilon\nu 2\pi+i\eta\mu 2\pi=1+i0=1$ όπως αναμενόταν.

$z_2^2 = (\sigma\upsilon\nu(4\pi/3)+i\eta\mu(4\pi/3))^2 = \sigma\upsilon\nu(8\pi/3)+i\eta\mu(8\pi/3) =$

$= \sigma\upsilon\nu(2\pi+2\pi/3)+i\eta\mu(2\pi+2\pi/3) = \sigma\upsilon\nu(2\pi/3)+i\eta\mu(2\pi/3) = z_1$ όπως αναμενόταν.

$z_0+z_1+z_2 = 1+z_1+z_1^2 = (z_1^3-1)/(z_1-1) = (1-1)/(z_1-1) = 0$ όπως αναμενόταν.

2. Να λυθεί η εξίσωση $z^3=1+i\sqrt{3}$.

Λύση

Θέτομε τον μιγαδικό αριθμό $1+i\sqrt{3}$ υπό τριγωνομετρική μορφή:

$|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$ και $συνθ=1/2$, $ημθ=\sqrt{3}/2$.

Άρα το πρωτεύον όρισμα του είναι $θ=π/3$ και έτσι:

$1+i\sqrt{3}=2(συν(π/3)+iημ(π/3))$.

Αν ο μιγαδικός αριθμός $ρ(συνθ+iημθ)$ είναι μια λύση τότε:

$ρ^3(συν(3θ)+iημ(3θ))=2(συν(π/3)+iημ(π/3)) <==>$

$ρ^3=2$ $\qquad\qquad$ $ρ=\sqrt[3]{2}$

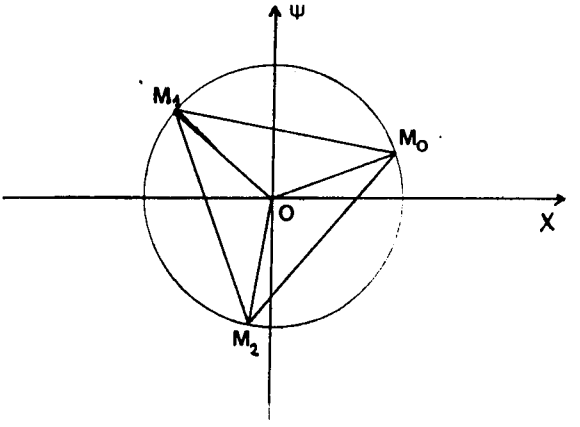
και $\qquad\qquad <==>$

$3φ=2κπ+π/3$ $\quad κ=0,1,2$ $\qquad\qquad$ $φ=(2κπ+π/3)/3$ $\quad κ=0,1,2$

για $κ=0$: $z_0=\sqrt[3]{2}(συν(π/9)+iημ(π/9))$

για $κ=1$: $z_1=\sqrt[3]{2}(συν(7π/9)+iημ(7π/9))$

για $κ=2$: $z_2=\sqrt[3]{2}(συν(13π/9)+iημ(13π/9))$.



11. Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$. Διαφορίζοντας έχομε:

$$\frac{dz}{d\theta} = z' = \rho'(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)+\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)' = 0+\rho((\sigma\upsilon\nu\theta)+(i\eta\mu\theta)') =$$

$$= \rho(-\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta) = \rho(i^2\eta\mu\vartheta + i\sigma\upsilon\nu\vartheta) = i\rho(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta) = iz$$

Άρα

$$\frac{dz}{d\theta} = iz \Longrightarrow dz = i\cdot z\cdot d\theta \Longleftrightarrow \frac{dz}{z} = id\theta \quad \text{και ολοκληρώνοντας:}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int id\theta \Longrightarrow \ln z = i\theta+c$$

θέτοντας στην $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$, $\theta=0$ έχομε:

$z=\rho(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0) \Longleftrightarrow z=\rho$ και η $\ln z=i\theta+c$ δίνει $\ln\rho=i0+c \Longleftrightarrow c=\ln\rho$

άρα $\ln z=i\theta+\ln\rho \Longleftrightarrow \ln z-\ln\rho=i\theta \Longleftrightarrow \ln(z/\rho)=\ln e^{i\theta} \Longleftrightarrow z/\rho=e^{i\theta}$

$\Longleftrightarrow z=\rho e^{i\theta}$

Έτσι αν ρ_1,ρ_2 τα μέτρα και θ_1,θ_2 τα πρωτεύοντα ορίσματα δύο μιγαδικών αριθμών z_1,z_2 αντίστοιχα, έχομε:

$z_1=\rho_1 e^{i\vartheta_1} \neq 0$, $z_2=\rho_2 e^{i\vartheta_2} \neq 0$ και επομένως

$$z_1\cdot z_2=\rho_1 e^{i\vartheta_1}\ \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i\theta_1+i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z1}{z2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\theta_1-i\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

12. Νεπέρειος λογάριθμος μιγαδικού αριθμού.

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho e^{i\theta}$. Λογαριθμίζοντας παίρνουμε:

$$\ln z=\ln\rho+\ln e^{i\theta} \Leftrightarrow \ln z=\ln\rho+i\theta\ln e \Leftrightarrow \ln z=\ln\rho+i\theta.$$

Αφού με ln συμβολίζομε το νεπέρειο λογάριθμο, δηλαδή το λογάριθμο που έχει βάση $e=2.72...$. Εδώ το όρισμα θ θεωρήθηκε πρωτεύον: $\theta \in (-\pi,\pi)$.
Έτσι $\ln z=\ln\rho+i\theta$, $\theta \in (-\pi,\pi)$ και γενικά $\ln z=\ln\rho+i(2\kappa\pi+\theta)$ $\theta \in (-\pi,\pi)$.

Με βάση την τελευταία σχέση, λογαριθμίζεται και κάθε αρνητικός αριθμός, αφού μπορεί να τεθεί υπό εκθετική μορφή θεωρούμενος ως μιγαδικός.
Έτσι αν $\alpha \in R_-^*$ τότε $-\alpha \in R_+^*$ και επειδή $\alpha=\alpha+0i$ έχομε: $|\alpha|=-\alpha$ και

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\alpha}{|\alpha|}=\frac{\alpha}{-\alpha}=-1, \qquad \eta\mu\theta=\frac{0}{|\alpha|}=0 \qquad \text{άρα } \theta=-\pi$$

και επομένως $\alpha=-\alpha(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi)=-\alpha e^{i\pi}$ και $\ln\alpha=\ln|\alpha|+i\theta=\ln(-\alpha)+i\pi$.

Σημείωση: Στις παραγράφους 11 και 12 χρησιμοποιήθηκαν έννοιες που αναπτύσσονται στα κεφάλαια: Συναρτήσεις – Αόριστο ολοκλήρωμα – Διαφορικές εξισώσεις.

13. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3} \quad \nu \in N$$

Λύση

$$A = i^{\nu}+i^{\nu}i+i^{\nu}i^2+i^{\nu}i^3 = i^{\nu}(1+i+i^2+i^3) = i^{\nu}(1+i-1-i) = i^{\nu}0 = 0$$

2. Για ποιές τιμές των χ,ψ ισχύει η ισότητα:

$(2-i)\chi+(3+i)\psi=7-i \quad \chi,\psi \in R$

Λύση

$(2-i)\chi+(3+i)\psi = 7-i \Leftrightarrow 2\chi-i\chi+3\psi+i\psi = 7-i \Leftrightarrow$

$(2\chi-3\psi)+(-\chi+\psi)i = 7-i$ και σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας δύο μιγαδικών αριθμών έχομε:

$$\begin{matrix} 2\chi-3\psi = 7 \\ -\chi+\psi = -1 \end{matrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3 = 5 \neq 0$$

$$D_\chi = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 7+3 = 10 , \qquad D_\psi = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2+7 = 5$$

$$\text{και } \chi = \frac{D_\chi}{D} = \frac{10}{5} = 2 , \qquad \psi = \frac{D_\psi}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

3. Να εκφραστούν οι επόμενοι μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή:
α) $1+i\sqrt{3}$ β) $-3+3i$ γ) $-\sqrt{3}-i$ δ) $2-2i$

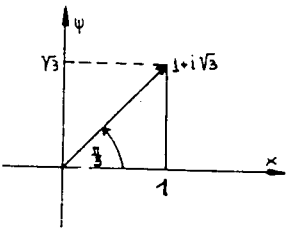
Λύση

α) $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=1/2$, $\eta\mu\theta=\sqrt{3}/2$ και επειδή $-\pi<\theta\leq\pi$ $\Rightarrow \theta=\pi/3$ επομένως: $1+i\sqrt{3}=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=2((\sigma\upsilon\nu(\pi/3)+i\eta\mu(\pi/3))$

και υπό εκθετική μορφή:

$$1+i\sqrt{3}=\rho^{i\theta}=2^{i\pi/3}$$

$$1+i\sqrt{3}=\rho e^{i\theta}=2e^{i\pi/3}$$



β) $|-3+3i|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

$\eta\mu\theta=-3/(2\sqrt{3})=(-3\sqrt{3})/(2\sqrt{3}\sqrt{3})=(-3\sqrt{3})/(2\cdot 3)=-\sqrt{3}/2$

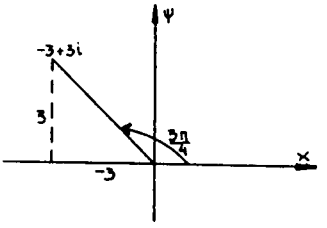
$\sigma\upsilon\nu\theta=3/(2\sqrt{3})=\sqrt{3}/2$ και επειδή $-\pi<\theta\leq\pi \Rightarrow \theta=3\pi/4$

άρα

$-3+3i=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=3\sqrt{2}((\sigma\upsilon\nu(3\pi/4)+i\eta\mu(3\pi/4))$

και η εκθετική μορφή

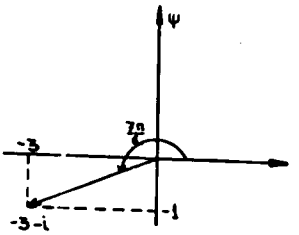
$-3+3i=\rho\angle\theta=3\sqrt{2}\angle 3\pi/4=3\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$



γ) $|-\sqrt{3}-i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\sigma\upsilon\nu\theta=-\sqrt{3}/2$, $\eta\mu\theta=-1/2$ και επειδή $-\pi<\theta\leq\pi \Rightarrow \vartheta=-\frac{5\pi}{6}$ ή $\vartheta=\frac{7\pi}{6}$

άρα $-\sqrt{3}-i=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=2(\sigma\upsilon\nu(7\pi/6)+i\eta\mu(7\pi/6))$ και υπό εκθετική μορφή $-\sqrt{3}-i=2\angle 7\pi/6=2e^{i7\pi/6}$



δ) $|2-2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2\cdot 2^2}=2\sqrt{2}$

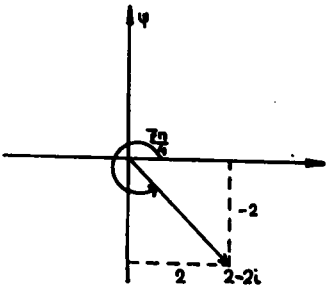
$συνθ=2/(2\sqrt{2})=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$, $ημθ=-2/(2\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}=-\sqrt{2}/2$ και

επειδή $-\pi<\theta\leq\pi$ $\Rightarrow$ $\vartheta=\frac{\pi}{4}$ ή $\vartheta=\frac{7\pi}{4}$

άρα $2-2i=\rho(συνθ+iημθ)=2\sqrt{2}(συν(7\pi/4)+iημ(7\pi/4))$

και υπό εκθετική μορφή

$2-2i=2\sqrt{2}e^{i7\pi/4}=2\sqrt{2}e^{i7\pi/4}$



4. Αν $|z+2|\leq 4$ να βρεθεί το ελάχιστο και το μέγιστο της παράστασης $κ = |z+3|$ αν υπάρχει.

<u>Λύση</u>

$κ = |z+3| = |(z+2)+1| \leq |z+2|+|1| \leq 4+1 = 5$

άρα η μέγιστη τιμή του κ είναι ο αριθμός 5

επίσης

$\kappa = |z+3| = |(z+2)+1| \geq |1|-|z+2| \geq |1-4| = 3$

άρα η ελάχιστη τιμή του κ είναι 3.

5. Αν $z=\sigma\upsilon\nu\varphi-i\eta\mu\varphi$ να δειχθεί ότι:

$$(1+z)^{\kappa}=2^{\kappa}\sigma\upsilon\nu^{\kappa}(\varphi/2)[\sigma\upsilon\nu(\kappa\varphi/2)-i\eta\mu(\kappa\varphi/2)].$$

Απόδειξη

$(1+z)^{\kappa}=(1+\sigma\upsilon\nu\varphi-i\eta\mu\varphi)^{\kappa}=(1+2\sigma\upsilon\nu^2(\varphi/2)-1-i2\eta\mu(\varphi/2)\sigma\upsilon\nu(\varphi/2))^{\kappa}=$

$(2\sigma\upsilon\nu^2(\varphi/2)-i2\eta\mu(\varphi/2)\sigma\upsilon\nu(\varphi/2))^{\kappa}=[2\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)(\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)-i\eta\mu(\varphi/2))]^{\kappa}=$

$=2^{\kappa}\sigma\upsilon\nu^{\kappa}(\varphi/2)[\sigma\upsilon\nu(-\varphi/2)+i\eta\mu(-\varphi/2)]^{\kappa}=$

$=2^{\kappa}\sigma\upsilon\nu^{\kappa}(\varphi/2)[\sigma\upsilon\nu(-\kappa\varphi/2)+i\eta\mu(-\kappa\varphi/2)]=$

$=2^{\kappa}\sigma\upsilon\nu^{\kappa}(\varphi/2)[\sigma\upsilon\nu(\kappa\varphi/2)-i\eta\mu(\kappa\varphi/2)].$

6. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών zγια τους οποίους ισχύει:

$$|z+1-i|=2$$

Λύση

$|z+1-i|=2 \Leftrightarrow |z-(-1+i)|=2$. Η σχέση αυτή εκφράζει ότι η απόσταση των εικόνων του z, από την εικόνα κ του αριθμού $-1+i$ είναι σταθερή και ίση με 2. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου κ και ακτίνας 2.

Παρατήρηση: Αν η σχέση είχε τη μορφή $|z+1-i|\leq 2$, ο γεωμετρικός τόπος θα ήταν κυκλικός δίσκος κέντρου Α και ακτίνας 2.

7. Να δειχθεί ότι:

$$\eta\mu\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

και με τη βοήθεια αυτών να υπολογιστούν τα ημ(3θ), συν(3θ).

Απόδειξη

$e^{i\theta}=1e^{i\theta}$ ==>ότι το $e^{i\theta}$ είναι εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού με ρ=1 και ένα όρισμα θ.

$e^{-i\theta}=1e^{i(-\theta)}$ ==> ότι το $e^{-i\theta}$ είναι η εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού με ρ=1 και ένα όρισμα -θ.

Άρα

$e^{i\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$ $\qquad$ $e^{i\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$

$\qquad\qquad\qquad\qquad <==>$

$e^{-i\theta}=\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)$ $\qquad$ $e^{-i\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\eta\mu\theta$ <==> $\eta\mu\theta=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/(2i)$

και προσθέτοντας κατά μέλη:

$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\sigma\upsilon\nu\theta$ <==> $\sigma\upsilon\nu\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2$

$$\eta\mu^3\theta = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = \frac{(e^{i\theta})^3-3(e^{i\theta})^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2-(e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} =$$

$$= \frac{e^{i3\theta}-3e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}}{8i^3} = \frac{e^{i3\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-i3\theta}}{8i^2i} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{(e^{i3\theta}-e^{-i3\theta})}{2i} - 3\frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2i}\right) = -\frac{1}{4}(\eta\mu(3\theta)-3\eta\mu\theta)$$

άρα

<u>ημ(3θ)=3ημθ-4ημ³θ</u>.

$$\sigma\upsilon\nu^3\theta = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3}{2^3} = \frac{(e^{i\theta})^3+3(e^{i\theta})^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2+(e^{-i\theta})^3}{2^3} =$$

$$= \frac{e^{i3\theta}+3e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}}{8} = \frac{e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}}{8} =$$

$$= \frac{(e^{i3\theta}+e^{-i3\theta})+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{8} = \frac{1}{4}\left(\frac{(e^{i3\theta}+e^{-i3\theta})}{2} + 3\frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu(3\theta)+3\sigma\upsilon\nu\theta)$$

άρα

$$\sigma\upsilon\nu^3\theta = \frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu(3\theta)+3\sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^3\theta = (\sigma\upsilon\nu(3\theta)+3\sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(3\theta)=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta$$

8. Να λυθεί η εξίσωση $z^5=-243$.

<u>Λύση</u>

Γράφω τον -243 υπό τριγωνομετρική μορφή:

$-243=-243+0i=243(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi)$ αφού $\rho=|-243|=243$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=-243/243$

$=-1$ και $\eta\mu\theta=0/243=0$ και επειδή $-\pi<\theta\leq\pi \Rightarrow \theta=\pi$.

Έτσι

$z^5=243(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi) \Leftrightarrow z_\kappa=\sqrt[5]{243}[\sigma\upsilon\nu((\pi+2\kappa\pi)/5)+i\eta\mu((\pi+2\kappa\pi)/5)]$

$\kappa=0,1,2,3,4.$

Άρα

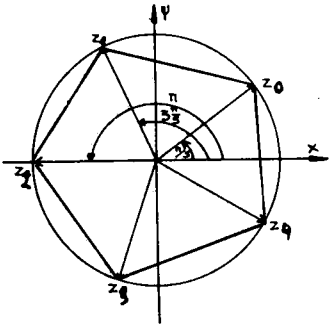
$z_0=3[\sigma\upsilon\nu(\pi/5)+i\eta\mu(\pi/5)]=3e^{i\pi/5}$

$z_1=3[\sigma\upsilon\nu((\pi+2\pi)/5)+i\eta\mu((\pi+2\pi)/5)]=3[\sigma\upsilon\nu(3\pi/5)+i\eta\mu(3\pi/5)]=3e^{i3\pi/5}$

$z_2=3[\sigma\upsilon\nu((\pi+4\pi)/5)+i\eta\mu((\pi+4\pi)/5)]=3[\sigma\upsilon\nu(5\pi/5)+i\eta\mu(5\pi/5)]=3e^{i5\pi/5}$

$z_3=3[\sigma\upsilon\nu((\pi+6\pi)/5)+i\eta\mu((\pi+6\pi)/5)]=3[\sigma\upsilon\nu(7\pi/5)+i\eta\mu(7\pi/5)]=3e^{i7\pi/5}$

$z_4=3[\sigma\upsilon\nu((\pi+8\pi)/5)+i\eta\mu((\pi+8\pi)/5)]=3[\sigma\upsilon\nu(9\pi/5)+i\eta\mu(9\pi/5)]=3e^{i9\pi/5}$



Οι τιμές του z που επαληθεύουν την εξίσωση έχουν εικόνες τα σημεία z_0,z_1,z_2,z_3,z_4 που είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου, ως φαίνεται στο σχήμα.

9. Να λυθεί η εξίσωση: $z^4=i$.

<u>Λύση</u>

Γράφω τον i υπό την τριγωνομετρική μορφή:

$\rho=|i|=|0+1i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=0$, $\eta\mu\theta=1 \Rightarrow \theta=\pi/2$ αφού $-\pi<\theta\leq\pi$

Έτσι $i=1[\sigma\upsilon\nu(\pi/2)+i\eta\mu(\pi/2)]$

Άρα η εξίσωση γράφεται:

$z^4=1[συν(π/2)+iημ(π/2)]$ ==>

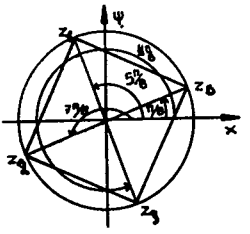
==> $z_κ=\sqrt[4]{1}[συν((π/2+2κπ)/4)+iημ((π/2+2κπ)/4)]$ κ=0,1,2,3 και

$z_0=συν((π/2)/4)+iημ((π/2)/4)]=συν(π/8)+iημ(π/8)=e^{iπ/8}$

$z_1=συν((π/2+2π)/4)+iημ((π/2+2π)/4)]=συν(5π/8)+iημ(5π/8)=e^{i5π/8}$

$z_2=συν((π/2+4π)/4)+iημ((π/2+4π)/4)]=συν(9π/8)+iημ(9π/8)=e^{i9π/8}$

$z_3=συν((π/2+6π)/4)+iημ((π/2+6π)/4)]=συν(13π/8)+iημ(13π/8)=e^{i13π/8}$



Οι τιμές του z που επαληθεύουν την εξίσωση έχουν εικόνες τα σημεία z_0,z_1,z_2,z_3 που είναι κορυφές τετραγώνου.

10. Να λυθεί η εξίσωση: $(1+z)^{2ν}+(1-z)^{2ν}=0$.

Λύση

$$(1+z)^{2ν} = -(1-z)^{2ν} \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2ν} = -1$$ με τον περιορισμό ότι

$z \neq 1+0i$. Γράφω το −1 υπό την τριγωνομετρική του μορφή.

$ρ=|-1|=1$ και $συνθ=-1/1=-1$, $ημθ=0/1=0$ ==> $θ=π$ αφού $-π<θ≤π$

και $-1=1(συνπ+iημπ)$.

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\nu} = \sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sqrt[2\nu]{\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+z}{1-z} = \sigma\upsilon\nu((\pi+2\kappa\pi)/(2\nu))+i\eta\mu((\pi+2\kappa\pi)/(2\nu)) \text{ με } \kappa=0,1,2,\ldots,2\nu-1$$

και αν καλέσουμε $(\pi+2\kappa\pi)/(2\nu)=\bar{\varphi}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi=\omega$ έχομε:

$$\frac{1+z}{1-z} = \omega \Leftrightarrow 1+z = \omega-\omega z \Leftrightarrow (\omega+1)z = \omega-1 \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{\omega-1}{\omega+1} \Leftrightarrow z = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi-1}{\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi+1} = \frac{(\sigma\upsilon\nu\varphi-1)+i\eta\mu\varphi}{(\sigma\upsilon\nu\varphi+1)+i\eta\mu\varphi} =$$

$$= \frac{(1-2\eta\mu^2(\varphi/2)-1)+i2\eta\mu(\varphi/2)\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)}{(2\sigma\upsilon\nu^2(\varphi/2)-1+1)+i2\eta\mu(\varphi/2)\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)} =$$

$$= \frac{-2\eta\mu^2(\varphi/2)+i2\eta\mu(\varphi/2)\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)}{2\sigma\upsilon\nu^2(\varphi/2)+i2\eta\mu(\varphi/2)\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)} = \frac{2\eta\mu(\varphi/2)[-\eta\mu(\varphi/2)+i\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)]}{2\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)[\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)+i\eta\mu(\varphi/2)]}$$

$$= \frac{i\eta\mu(\varphi/2)[-\eta\mu(\varphi/2)+i\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)]}{i\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)[\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)+i\eta\mu(\varphi/2)]} = i\varepsilon\varphi(\varphi/2)\frac{[-\eta\mu(\varphi/2)+i\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)]}{[i\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)+i^2\eta\mu(\varphi/2)]} =$$

$$= i\varepsilon\varphi(\varphi/2) = i\varepsilon\varphi((\pi+2\kappa\pi)/(4\nu)) \text{ με } \kappa=0,1,2,3,\ldots,2\nu-1.$$

Ακολουθίες

1. Εννοια της ακολουθίας

Ορισμός

Εστω **Α** ένα μη κενό σύνολο αντικειμένων. Καλούμε <u>ακολουθία</u> στοιχείων του συνόλου **Α**, κάθε απεικόνιση του συνόλου **Ν** των φυσικών αριθμών στο σύνολο **Α**. Δηλαδή σε κάθε φυσικό αριθμό, ν, να αντιστοιχεί ένα στοιχείο a_ν του συνόλου **Α**.

Η ακολουθία συμβολίζεται σύντομα $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ ή $a_\nu \mid N$. Ετσι μπορώ να συμβολίσω: $N \ni \nu \dashrightarrow a_\nu \in A$. Τον όρο a_ν τον καλούμε ν-οστό όρο της ακολουθίας τον δε φυσικό αριθμό δείκτη του όρου a_ν.

<u>Σημείωση</u>: Αν $A \subseteq R$ τότε η ακολουθία λέγεται <u>ακολουθία πραγματικών αριθμών</u> : $N \dashrightarrow R$.

<u>Παραδείγματα</u>

α) Η ακολουθία των φυσικών αριθμών, δηλαδή η ακολουθία $1,2,3,\ldots,\nu,\ldots$, της οποίας ο γενικός όρος είναι ο αριθμός ν, $a_\nu=\nu \mid \nu=1,2,\ldots$.

β) Η ακολουθία των τετραγώνων των φυσικών αριθμών, δηλαδή η ακολουθία $1^2,2^2,3^2,\ldots,\nu^2,\ldots$, της οποίας ο γενικός όρος είναι ν^2, $a_\nu=\nu^2 \mid \nu=1,2,\ldots$.

γ) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_\nu=1+(-1)^\nu$ δηλαδή η ακολουθία: $0,2,0,2,\ldots,0,2,\ldots$ που γράφεται:

$$a_\nu = \begin{cases} 2, & \text{όταν } \nu \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{όταν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$$

δ) Η ακολουθία: $-1,\ 1/2,\ -1/3,\ldots,\ (-1)^\nu 1/\nu,\ \ldots,$ με γενικό όρο τον

$$a_\nu = (-1)^\nu 1/\nu \mid \nu=1,2,\ldots$$

2. Πράξεις μεταξύ ακολουθιών

Μεταξύ των ακολουθιών $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ και $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$

Ορίζονται:

I. Η ισότητα. Οι ακολουθίες $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ και $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλούνται ίσες τότε και μόνο τότε αν ισχύει:

$$\alpha_\nu = \beta_\nu \text{ για κάθε } \nu \in N .$$

II. Άθροισμα των $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ και $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται η ακολουθία

$$(\alpha_\nu+\beta_\nu) \mid \nu=1,2,\ldots$$

αναλυτικά $\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ldots,\ \alpha_\nu+\beta_\nu,\ldots$

III. Διαφορά της $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ μείον $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται η ακολουθία

$$(\alpha_\nu-\beta_\nu) \mid \nu=1,2,\ldots$$

αναλυτικά $\alpha_1-\beta_1,\ \alpha_2-\beta_2,\ldots,\ \alpha_\nu-\beta_\nu,\ldots$

IV. Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού κ επί την ακολουθία $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται η ακολουθία:

$$\kappa\cdot\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$$

αναλυτικά $\kappa\alpha_1,\ \kappa\alpha_2,\ \ldots,\ \kappa\alpha_\nu,\ldots$

V. Γινόμενο της ακολουθίας $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ επί την ακολουθία $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται η ακολουθία:

$$\alpha_\nu\cdot\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$$

αναλυτικά $\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2,\ldots,\ \alpha_\nu\beta_\nu,\ldots$

VI. Πηλίκο της ακολουθίας $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ δια της ακολουθίας $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$, με $\beta_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in N$, καλείται η ακολουθία,

που έχει όρους τα πηλίκα των αντιστοίχων όρων των ακολουθιών, δηλαδή η ακολουθία:

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \mid \nu=1,2,..$$

αναλυτικά $\alpha_1/\beta_1,\ \alpha_2/\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu/\beta_\nu,\ldots$

VII. Τετραγωνική ρίζα της ακολουθίας $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ με $\alpha_\nu \geq 0$ για κάθε $\nu \in N$, καλείται η ακολουθία:

$$\sqrt{\alpha_\nu} \mid \nu=1,2,\ldots$$

αναλυτικά $\sqrt{\alpha_1},\ \sqrt{\alpha_2},\ldots,\ \sqrt{\alpha_\nu},\ldots$

VIII. Απόλυτη τιμή της ακολουθίας $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται η ακολουθία:

$$|\alpha_\nu| \mid \nu=1,2,\ldots$$

αναλυτικά $|\alpha_1|,\ |\alpha_2|,\ldots,\ |\alpha_\nu|,\ldots$

3. Φραγμένες ακολουθίες

Ορισμοί

1. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται φραγμένη άνω εν R, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός S τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha_\nu \leq S$ για κάθε $\nu \in N$ και ο αριθμός S καλείται άνω φράγμα της ακολουθίας.

2. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται φραγμένη κάτω εν R, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός T τέτοιος ώστε να ισχύει $T \leq \alpha_\nu$ για κάθε $\nu \in N$ και ο αριθμός T καλείται κάτω φράγμα της ακολουθίας.

3. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται <u>φραγμένη εν R</u>, τότε και μόνο τότε, αν η ακολουθία αυτή είναι και προς τα άνω και προς τα κάτω φραγμένη εν R. Δηλαδή αν

$$a_\nu \leq S \leq |S| \leq \varphi \quad \text{για κάθε } \nu \in N$$

$$a_\nu \geq T \geq -|T| \geq -\varphi \quad \text{για κάθε } \nu \in N$$

και φ αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος των $|T|$ και $|S|$.
Άρα ισχύει:

$$-\varphi \leq a_\nu \leq \varphi \quad \text{για κάθε } \nu \in N$$

ή ισοδύναμα $|a_\nu| \leq \varphi$ για κάθε $\nu \in N$.

4. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ καλείται <u>απολύτως φραγμένη</u> άν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός φ τέτοιος ώστε $|a_\nu| \leq \varphi$ για κάθε $\nu \in N$. Ο αριθμός φ καλείται φράγμα της ακολουθίας $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$

<u>Σημείωση</u>: Ισχύει η ισοδυναμία:
a_ν φραγμένη <==> a_ν απολύτως φραγμένη.

5. Μια ακολουθία φραγμένη άνω έχει άπειρα φράγματα. Από τα άνω φράγματα το μικρότερο το ονομάζουμε <u>Supremum</u> της ακολουθίας και το συμβολίζουμε με $\sup a_\nu$, $\nu \in N^*$.

6. Μια ακολουθία φραγμένη κάτω έχει άπειρα φράγματα. Από τα κάτω φράγματα το μεγαλύτερο καλείται <u>Infimum</u> της ακολουθίας και συμβολίζεται με $\inf a_\nu$, $\nu \in N^*$.

<u>Σημείωση</u>: Το Supremum και το Infimum, αν υπάρχουν είναι μοναδικά.

4. Μονότονες ακολουθίες

<u>Ορισμοί</u>

1. Εάν ισχύει $a_\nu \leq a_{\nu+1}$, για κάθε $\nu \in N$ θα λέμε ότι η ακολουθία $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι <u>αύξουσα</u> και θα το συμβολίζομε $a_\nu \uparrow$ <==> $a_\nu \leq a_{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in N$.

2. Εάν ισχύει $a_\nu \geq a_{\nu+1}$, για κάθε $\nu \in N$ θα λέμε ότι η ακολουθία $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι <u>φθίνουσα</u> και θα το συμβολίζουμε $a_\nu\downarrow$ $\langle==\rangle$ $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in N$.

3. Εάν ισχύει $a_\nu < a_{\nu+1}$, για κάθε $\nu \in N$ θα λέμε ότι η ακολουθία $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι <u>γνησίως αύξουσα</u> και θα το συμβολίζουμε $a_\nu\uparrow$ $\langle==\rangle$ $a_\nu < a_{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in N$.

4. Εάν ισχύει $a_\nu > a_{\nu+1}$, για κάθε $\nu \in N$ θα λέμε ότι η ακολουθία $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι <u>γνησίως φθίνουσα</u> και θα το συμβολίζουμε $a_\nu\downarrow$ $\langle==\rangle$ $a_\nu > a_{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in N$.

5. Μια ακολουθία $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ που ανήκει στις παραπάνω κατηγορίες λέγεται <u>μονότονη ακολουθία</u>. Ειδικά αν η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται <u>γνησίως μονότονη ακολουθία</u>.

<u>Σημείωση</u>: Αν $a_{\nu+1}=a_\nu$ για κάθε $\nu \in N$ θα λέμε ότι η ακολουθία $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι <u>σταθερή</u>.

5. Καθορισμός είδους μονότονης ακολουθίας

Για τον καθορισμό του είδους μονοτονίας μιας ακολουθίας εφαρμόζουμε έναν από τους τρόπους:

1. Εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu$$

Έτσι αν

α) $\Delta_\nu > 0$ $\langle==\rangle$ $a_\nu\uparrow$

β) $\Delta_\nu < 0$ $\langle==\rangle$ $a_\nu\downarrow$

γ) $\Delta_\nu \geq 0$ $\langle==\rangle$ $a_\nu\uparrow$

δ) $\Delta_\nu \leq 0$ $\langle==\rangle$ $a_\nu\downarrow$

2. Αν όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι ομόσημοι (οπότε είναι μη μηδενικοί), τότε συγκρίνουμε το λόγο:

$$\Lambda_\nu = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$$

με τη μονάδα. Έτσι αν

α) $\Lambda_\nu > 1 \Leftrightarrow a_\nu \uparrow$

β) $\Lambda_\nu < 1 \Leftrightarrow a_\nu \downarrow$

γ) $\Lambda_\nu \geq 1 \Leftrightarrow a_\nu \uparrow$

δ) $\Lambda_\nu \leq 1 \Leftrightarrow a_\nu \downarrow$

6. Η έννοια της υπακολουθίας

Ορισμός

Υπακολουθία μιας ακολουθίας $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ λέγεται κάθε ακολουθία $\beta_\nu=a_{\kappa_\nu}$, $\nu \in N$, όπου κ_ν είναι ακολουθία φυσικών αριθμών γνησίως αύξουσα.

Προτάσεις

1. Αν η ακολουθία a_ν είναι φραγμένη, τότε και κάθε υπακολουθία της είναι φραγμένη.

2. Αν μια τουλάχιστον υπακολουθία της ακολουθίας a_ν δεν είναι φραγμένη τότε και η ακολουθία a_ν δεν είναι φραγμένη.

3. Αν μιά ακολουθία a_ν είναι γνησίως αύξουσα τότε κάθε υπακολουθία αυτής είναι γνησίως αύξουσα.

4. Αν η ακολουθία a_ν είναι αύξουσα και μια υπακολουθία της είναι φραγμένη άνω τότε και η ακολουθία a_ν είναι φραγμένη άνω.

7. Η έννοια P(ν) ισχύει τελικά για κάθε ν ∈ N

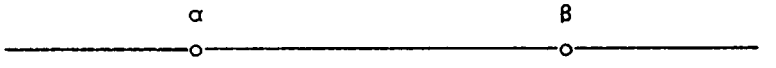
Όταν λέμε ότι μια πρόταση P(ν) ισχύει τελικά για κάθε ν ∈ N, εννοούμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $ν_κ$ τέτοιος ώστε για κάθε $ν>ν_κ$ η P(ν) είναι αληθής.

Δηλαδή είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι αν η πρόταση P(ν), ν ∈ N, ισχύει τελικά για κάθε ν ∈ N, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών για το οποίο η P(ν) δεν ισχύει.

8. Η έννοια της περιοχής

Βοηθητικές έννοιες.
Διαστήματα πραγματικών αριθμών.

I. Ανοικτό διάστημα, με άκρα α,β και α<β, καλούμε το υποσύνολο του R: { χ ∈ R : α < χ < β } και το συμβολίζομε με (α,β) ή



Στο ανοικτό διάστημα δεν συμπεριλαμβάνονται τα άκρα α,β.

II. Κλειστό διάστημα, με άκρα α,β και α<β, καλούμε το υποσύνολο του R: { χ ∈ R : α ≤ χ ≤ β } και το συμβολίζομε με [α,β] ή



Στο κλειστό διάστημα συμπεριλαμβάνονται τα άκρα α,β.

III. Ημιανοικτό διάστημα από δεξιά ή κλειστό μόνο αριστερά με άκρα α,β και α<β, καλούμε το υποσύνολο του R: {χ ε R : α ≤ χ < β} και το συμβολίζομε [α,β) ή



Στο ημιανοικτό διάστημα από δεξιά συμπεριλαμβάνεται το άκρο α.

IV. Ημιανοικτό διάστημα από αριστερά ή κλειστό μόνο δεξιά με άκρα α,β και α<β καλούμε το υποσύνολο του R: $\{ \chi \in R : \alpha < \chi \leq \beta \}$ και το συμβολίζομε $(\alpha,\beta]$ ή



Στο ημιανοικτό διάστημα από αριστερά συμπεριλαμβάνεται το άκρο β.

Τα διαστήματα που ορίσαμε καλούνται πεπερασμένα.

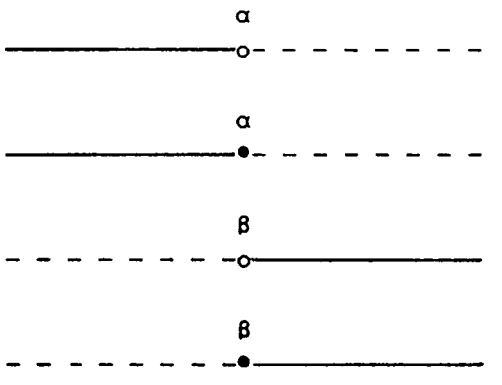
V. Κατ'επέκταση των πιο πάνω διαστημάτων έχομε και τα:

$(-\infty,\alpha) = \{\chi \in R: \chi < \alpha\}$

$(-\infty,\alpha] = \{\chi \in R: \chi \leq \alpha\}$

$(\beta,+\infty) = \{\chi \in R: \beta < \chi\}$

$[\beta,+\infty) = \{\chi \in R: \beta \leq \chi\}$

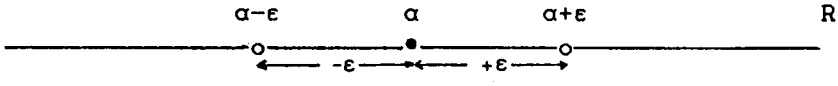


Τα δύο πρώτα διαστήματα καλούνται απέραντα αριστερά, τα δε δύο τελευταία καλούνται απέραντα δεξιά.

VI. Το διάστημα $(-\infty,+\infty)$ είναι το $\tilde{R}$ και γράφουμε: $\tilde{R} = (-\infty,+\infty)$.

Ο ρ ι σ μ ό ς

Περιοχή ή γειτονιά ενός σημείου α. Έστω ένας πραγματικός αριθμός α ($\alpha \in R$) και ένας θετικός αριθμός ε, τότε ορίζουμε το ανοικτό διάστημα $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ που λέγεται περιοχή ή γειτονιά του σημείου α της ευθείας των πραγματικών αριθμών, με κέντρο το α και ακτίνα ε.



Η περιοχή με κέντρο το σημειο α και ακτίνα ε συμβολίζεται: $\mathcal{B}(\alpha,\varepsilon)=(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)=\{ \chi \in R : \alpha-\varepsilon < \chi < \alpha+\varepsilon \}$ και επειδή ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha-\varepsilon < \chi < \alpha+\varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < \chi-\alpha < \varepsilon \Longleftrightarrow |\chi-\alpha| < \varepsilon$$

έχομε: $\chi \in \mathcal{B}(\alpha,\varepsilon) \Longleftrightarrow |\chi-\alpha| < \varepsilon$.
Εάν ζητώ τη γειτονιά του μηδενός θέτω α=0 και έχω: $\mathcal{B}(0,\varepsilon)=(-\varepsilon,+\varepsilon)=\{ \chi \in R : -\varepsilon < \chi < \varepsilon\}$.

9. Μηδενικές ακολουθίες

Έστω $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι η ακολουθία αυτή είναι μηδενική και θα συμβολίζομε $\alpha_\nu \longrightarrow 0$ ή $\lim \alpha_\nu = 0$, τότε και μόνο τότε, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει δείκτης ν_o που εξαρτάται από τον ε, έτσι ώστε $|\alpha_\nu| < \varepsilon$ για κάθε $\nu>\nu_o(\varepsilon)$.
Συμβολικά:

$$\alpha_\nu \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \quad \nu > 0 \quad \nu_o : |\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \nu > \nu_o \qquad (\forall = \text{για κάθε})$$
$$(\exists = \text{υπάρχει})$$

Παραδείγματα

1. Να δειχθεί ότι η $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι μηδενική.

Απόδειξη
Έστω $\varepsilon>0$ τότε $|1/\nu|<\varepsilon \Longleftrightarrow 1/\nu < \varepsilon \Longleftrightarrow 1/\varepsilon < \nu \Longleftrightarrow \nu > 1/\varepsilon$. Άρα αν εκλέξουμε ως $\nu_o = [1/\varepsilon]$ ή οποιοδήποτε μεγαλύτερο του, τότε έχομε:
$\forall \nu \in N, \nu > \nu_o \Longrightarrow \nu > 1/\varepsilon \Longrightarrow 1/\nu > \varepsilon$ που σημαίνει $1/\nu \longrightarrow 0$.

Σημείωση: Ο συμβολισμός $[1/\varepsilon]$ σημαίνει ακέραιο μέρος του $1/\varepsilon$. Ορίζομε δε ως ακέραιο μέρος ενός δεκαδικού αριθμού τον πλησιέστερο προς αυτόν μικρότερο ακέραιο:
$[2,7]=2 \quad [-2,7]=-3$.

2. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_\nu = (1+1/\nu)^3 - 1 \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι μηδενική.

Απόδειξη
Έστω $\varepsilon>0$ τότε : $|a_\nu| = |(1+1/\nu)^3 - 1| = (1+1/\nu)^3 - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow$

$(1+1/\nu)^3 < 1+\varepsilon \Leftrightarrow 1+1/\nu < \sqrt[3]{1+\varepsilon} \Leftrightarrow 1/\nu < -1+\sqrt[3]{1+\varepsilon} \Leftrightarrow$

$$\nu > \frac{1}{-1+\sqrt[3]{1+\varepsilon}} \quad \text{άρα}$$

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \exists \nu_o(\varepsilon) = \left[\frac{1}{-1+\sqrt[3]{1+\varepsilon}}\right] : |a_\nu| < \varepsilon$$

$\forall \nu>\nu_o(\varepsilon)$ που σημαίνει ότι $(1+1/\nu)^3 - 1 \dashrightarrow 0$.

Σημείωση: Και εδώ ο συμβολισμός $\left[\frac{1}{-1+\sqrt[3]{1+\varepsilon}}\right]$ σημαίνει ακέραιο μέρος του $\frac{1}{-1+\sqrt[3]{1+\varepsilon}}$.

Επίσης στα παραδείγματα 1 και 2 απαιτήσαμε $|a_\nu|<\varepsilon$ και απαίτηση αυτή μας οδήγησε ισοδύναμα σε σχέση της μορφής $\nu > f(\varepsilon)$ που μας επετρέπει να λέμε ότι η a_ν είναι μηδενική γιατί η $|a_\nu| < \varepsilon$ ισχύει ισοδύναμα $\forall \varepsilon>0$ και $\forall \nu>\nu_o(\varepsilon)$ με $\nu_o(\varepsilon) = [f(\varepsilon)]$.

10. Ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών

1. Αν $a_\nu \dashrightarrow 0 \Leftrightarrow -a_\nu \dashrightarrow 0$ ως και $|a_\nu| \dashrightarrow 0$

2. Αν $a_\nu \dashrightarrow 0$ τότε $a_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι φραγμένη.

3. Αν $\left.\begin{matrix} a_\nu \dashrightarrow 0 \\ \beta_\nu \dashrightarrow 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_\nu \pm \beta_\nu \dashrightarrow 0$

4. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow 0$ και β_ν φραγμένη $\Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \dashrightarrow 0$

5. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow 0$ και $\beta_\nu \dashrightarrow 0$ $\Rightarrow \alpha_\nu \cdot \beta_\nu \dashrightarrow 0$

6. Αν $\beta_\nu \dashrightarrow 0$ $\Rightarrow \alpha_\nu \dashrightarrow 0$

και τελικά $|\alpha_\nu| \leq |\beta_\nu|$

11. Συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών
έννοια του ορίου

Ο ρ ι σ μ ό ς

Μια ακολουθία α_ν | $\nu=1,2,\ldots$ λέμε ότι <u>συγκλίνει</u> στον πραγματικό αριθμό α (ή τείνει στον πραγματικό αριθμό α) όταν και μόνο όταν η ακολουθία $\alpha_\nu-\alpha$ είναι μηδενική.

Συμβολικά : $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \Leftrightarrow \alpha_\nu-\alpha \dashrightarrow 0$.

Τον πραγματικό αριθμό α ονομάζομε <u>όριο</u> ή <u>οριακή τιμή</u> της ακολουθίας και αντί να γράφουμε $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha$, γράφουμε: $\lim \alpha_\nu = \alpha$. Έτσι ο ορισμός της συγκλίνουσας ακολουθίας διατυπώνεται:

$$\lim \alpha_\nu = \alpha \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} \lim(\alpha_\nu-\alpha) = 0$$

lim σύμπτηξη του λατινικού όρου limes που θα πει ΟΡΙΟ.

Αποδεικνύεται ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει ακριβώς ένα όριο.

12. Ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών

1. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \Rightarrow -\alpha_\nu \dashrightarrow -\alpha$ ή ισοδύναμα

$$\lim \alpha_\nu = \alpha \Rightarrow \lim(-\alpha_\nu) = -\alpha.$$

2. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \Rightarrow |\alpha_\nu| \dashrightarrow |\alpha|$ ή ισοδύναμα

$$\lim \alpha_\nu = \alpha \Rightarrow \lim|\alpha_\nu| = |\alpha|$$

Το αντίστροφο δεν αληθεύει πάντοτε, δηλαδή αν η ακολουθία $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ συγκλίνει προς το $|\alpha|$ δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha$.

Παρατήρηση

Αν παραλείψουμε τους κ πρώτους όρους μιας συγκλίνουσας, στο α, ακολουθίας $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$, η ακολουθία που προκύπτει συγκλίνει πάλι στο α.

Δηλαδή

$\lim \alpha_\nu = \alpha \Rightarrow \lim \alpha_{\nu-1} = \alpha,\ \lim \alpha_{\nu-2} = \alpha,\ \ldots,\ \lim \alpha_{\nu-\kappa} = \alpha$

και

$\lim \alpha_\nu = \alpha \Rightarrow \lim \alpha_{\nu+1} = \alpha,\ \lim \alpha_{\nu+2} = \alpha,\ \ldots,\ \lim \alpha_{\nu+\kappa} = \alpha$

3. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \\ \beta_\nu \dashrightarrow \alpha\end{matrix}\right| \Rightarrow \alpha_\nu - \beta_\nu \dashrightarrow 0$

ή ισοδύναμα

Αν $\left.\begin{matrix}\lim \alpha_\nu = \alpha \\ \lim \beta_\nu = \alpha\end{matrix}\right| \Rightarrow \lim(\alpha_\nu - \beta_\nu) = 0$

4. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \Rightarrow \alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ είναι φραγμένη

5. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \\ \beta_\nu \dashrightarrow \beta\end{matrix}\right| \Rightarrow \alpha_\nu \pm \beta_\nu \dashrightarrow \alpha \pm \beta$

ή ισοδύναμα

Αν $\left.\begin{matrix}\lim \alpha_\nu = \alpha \\ \lim \beta_\nu = \beta\end{matrix}\right| \Rightarrow \lim(\alpha_\nu \pm \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu \pm \lim \beta_\nu = \alpha \pm \beta$

6. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \Longrightarrow \lambda\alpha_\nu \dashrightarrow \lambda\alpha \quad \forall\ \lambda \in R$

ή ισοδύναμα

Αν $\lim \alpha_\nu = \alpha \Longrightarrow \lim(\lambda\alpha_\nu) = \lambda \lim \alpha_\nu = \lambda\alpha$

7. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \\ \beta_\nu \dashrightarrow \beta\end{matrix}\right| \Longrightarrow \xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu \dashrightarrow \xi\alpha + \eta\beta \qquad \xi, \eta \in R$

ή ισοδύναμα

Αν $\left.\begin{matrix}\lim \alpha_\nu = \alpha \\ \lim \beta_\nu = \beta\end{matrix}\right| \Longrightarrow \lim(\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \lim(\xi\alpha_\nu) + \lim(\eta\beta_\nu) =$

$= \xi \lim \alpha_\nu + \eta \lim \beta_\nu = \xi\alpha + \eta\beta$

8. Αν $\left.\begin{matrix}\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \\ \beta_\nu \dashrightarrow \beta\end{matrix}\right| \Longrightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \dashrightarrow \alpha\beta$

ή ισοδύναμα

Αν $\left.\begin{matrix}\lim \alpha_\nu = \alpha \\ \lim \beta_\nu = \beta\end{matrix}\right| \Longrightarrow \lim(\alpha_\nu\beta_\nu) = \lim(\alpha_\nu)\lim(\beta_\nu) = \alpha\beta$

9. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha \neq 0$ και $\alpha_\nu \neq 0 \quad \forall\ \nu \in N$ τότε η ακολουθία

$1/\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ συγκλίνει στον αριθμό $1/\alpha$. Δηλαδή

$$\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lim \alpha_\nu}$$

10. Αν $\alpha_\nu \dashrightarrow \alpha$, $\beta_\nu \dashrightarrow \beta \quad 0$ και $\beta_\nu \quad 0 \quad \forall\nu \quad N$
τότε ισχύει:

$$\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim \alpha_\nu}{\lim \beta_\nu}$$

11. Αν οι ακολουθίες $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$, $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ συγκλίνουν και ισχύει τελικά $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ τότε θα έχομε:

$$\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu$$

12. Αν οι ακολουθίες $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$, $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$, είναι συγκλίνουσες και υπάρχει $\nu_o \in N$ τέτοιος ώστε $\forall\nu > \nu_o$ να είναι $\alpha_\nu \leq \beta_\nu$ τότε:

$$\lim \alpha_\nu \leq \lim \beta_\nu$$

13. Έστω μια ακολουθία $\beta_\nu \mid \nu=1,2,\dots$. Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\dots$, $\gamma_\nu \mid \nu=1,2,\dots$ με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για $\nu > \nu_0$ $(\nu_0 \in N)$ να είναι : $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \gamma_\nu$ τότε και η β_ν έχει το ίδιο όριο.

14. Αν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ με $\alpha_\nu > 0 \mid \nu=1,2,\dots$, $\kappa=2,3,4,\dots$ τότε:

$$\lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = \sqrt[\kappa]{\lim \alpha_\nu}$$

13. Χρήσιμες προτάσεις

1. Να δειχθεί ότι $\forall\, \omega \in R$ με $|\omega|<1 \Longrightarrow \lim \omega^\nu = 0$.

Απόδειξη
Αν $\omega = 0 < 1$ τότε η πρόταση είναι προφανής.

Αν $\omega \neq 0$ έχομε: $0 < |\omega| < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{|\omega|} > 1$. Άρα $\exists\, \theta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{|\omega|} = 1+\theta,\ \theta>0 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{|\omega|}\right)^\nu = (1+\theta)^\nu \geq 1+\nu\theta \quad \text{(ανισότητα Bernoulli)}$$

$$\Longleftrightarrow |\omega|^\nu < \frac{1}{\nu\theta} = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\theta} .$$

Αλλά $\dfrac{1}{\theta}\,\dfrac{1}{\nu} \longrightarrow 0$ αφού $\theta \in R$ και $\dfrac{1}{\nu} \longrightarrow 0$

σύμφωνα με την ιδιότητα 6 της παραγράφου 12. Άρα $\lim \omega^\nu = 0$.

Παρατήρηση: Κάθε απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχει όριο το μηδέν.

2. Έστω $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\dots$ μια ακολουθία με θετικούς όρους. Αν υπάρχει $\omega<1$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \omega \mid \nu=1,2,\dots \quad \text{τότε} \quad \lim \alpha_\nu = 0$$

Απόδειξη

$\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \omega \Longleftrightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu\omega$. Άρα για

$\nu=1$ έχομε $\alpha_2 < \omega\alpha_1$

$\nu=2$ έχομε $\alpha_3 < \omega\alpha_2$

$\nu=3$ έχομε $\alpha_4 < \omega\alpha_3$

.....

.....

$\nu=\nu$ έχομε $\alpha_\nu < \omega\alpha_{\nu-1}$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνομε: $\alpha_\nu \leq \alpha_1\omega^{\nu-1}$. Αλλά $\alpha_1\omega^{\nu-1}$ είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος αφού $\omega < 1$, επομένως ισχύει:

$$\lim \alpha_1\omega^{\nu-1} = 0 \quad \text{άρα} \quad \lim \alpha_\nu = 0.$$

3. Να δειχθεί ότι $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$, $\nu=2,3,4,...$

Απόδειξη
Για κάθε $\nu \in N^*$ είναι $\sqrt[\nu]{\nu} > 1$ ή $\sqrt[\nu]{\nu} - 1 \geq 0$.
Αν θέσομε $\beta_\nu = \sqrt[\nu]{\nu} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\nu} = 1 + \beta_\nu$ (1)
Από τη ανισότητα του Bernoulli έχομε

$$\sqrt{\nu} = (1+\beta_\nu)^\nu \geq 1 + \nu\beta_\nu > \nu\beta_\nu \quad \text{άρα}$$

$$\beta_\nu < \frac{1}{\sqrt{\nu}} \quad \text{ή} \quad |\beta_\nu| < \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \quad \text{αλλά} \quad \lim \frac{1}{\sqrt{\nu}} = 0 \quad \text{άρα}$$

$\lim \beta_\nu = 0.$

Από τη σχέση (1) έχομε :

$$\sqrt[\nu]{\nu} = (1+\beta_\nu)^2 = 1 + 2\beta_\nu + \beta_\nu^2 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\nu} - 1 = 2\beta_\nu + \beta_\nu^2 \quad \text{άρα}$$

$$\lim (\sqrt[\nu]{\nu} - 1) = \lim (2\beta_\nu + \beta_\nu^2) = 2 \lim \beta_\nu + \lim\beta_\nu^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim (\sqrt[\nu]{\nu} - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$

4. Να δειχθεί ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha} = 1 \quad \forall\ \alpha > 0.$

Απόδειξη
(α) Αν $\alpha \geq 1$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow \beta_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha-1} \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = \beta_\nu+1$

και υψώνοντας στην ν-οστή δύναμη έχομε:

$$\alpha = (\beta_\nu + 1)^\nu \geq 1 + \nu\beta_\nu \geq \nu\beta_\nu \Longleftrightarrow \alpha > \nu\beta_\nu \Longleftrightarrow \alpha - \frac{1}{\nu} > \beta_\nu \Longleftrightarrow$$

$$\beta_\nu < \alpha - \frac{1}{\nu}, \quad \text{αλλά} \quad \lim\left(\alpha - \frac{1}{\nu}\right) = 0 \quad \text{άρα} \quad \lim \beta_\nu = 0 \quad \text{δηλαδή}$$

$$\lim\left(\sqrt[\nu]{\alpha} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1.$$

(β) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $1/\alpha > 1$ και σύμφωνα με την (α)

$$\lim\left(\sqrt[\nu]{1/\alpha}\right) = 1 \quad \text{ή} \quad \lim \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}} = 1 \Longleftrightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$$

Άρα $\forall\, \alpha > 0$ είναι $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

5. Να δειχθεί ότι: Αν $\alpha_\nu > 0 \mid \nu = 1,2,\ldots$ και $\lim \alpha_\nu = \alpha$ τότε $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

<u>Απόδειξη</u>
Επειδή $\lim \alpha_\nu = \alpha$ τότε $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \nu_0(\varepsilon): |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon, \; \forall \nu > \nu_0(\varepsilon)$
ή ισοδύναμα $\forall \varepsilon > 0 \;\exists \nu_0(\varepsilon): \alpha - \varepsilon < \alpha_\nu < \alpha + \varepsilon \;\; \forall \nu > \nu_0(\varepsilon)$.
Άρα για $\varepsilon = \alpha/2 > 0$ έχομε:

$$\alpha - \frac{\alpha}{2} < \alpha_\nu < \alpha + \frac{\alpha}{2} \quad \forall \nu > \nu_0(\varepsilon) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} < \alpha_\nu < \frac{3\alpha}{2} \quad \forall \nu > \nu_0(\varepsilon) \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha/2} < \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \sqrt[\nu]{3\alpha/2} \qquad \forall \nu > \nu_0(\varepsilon)$$

Αλλά $\lim \sqrt[\nu]{\alpha/2} = 1$ και $\lim \sqrt[\nu]{3\alpha/2} = 1$ (όπως δείχτηκε στην πρόταση 4, αφού $\alpha > 0$).

Έτσι $\lim(\sqrt[\nu]{\alpha/2}) \leq \lim(\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}) \leq \lim(\sqrt[\nu]{3\alpha/2}) \Longrightarrow$
$1 \leq \lim(\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}) \leq 1 \Longrightarrow \lim(\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}) = 1.$

6. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu \mid \nu = 1,2,\ldots$ με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu}$ $\forall \nu \in N$ είναι μονότονη και φραγμένη άρα συγκλίνει στο R.

Απόδειξη
Επειδή $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\sqrt{3}$ ==> $\alpha_2 > \alpha_1$ άρα η $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$ ισχύει για $\nu=1$. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu=\kappa$ δηλαδή $\alpha_{\kappa+1} > \alpha_\kappa$ (1). Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$ δηλαδή $\alpha_{\kappa+2} > \alpha_{\kappa+1}$. Δηλαδή πρέπει να δειχθεί :
$\sqrt{2+\alpha_{\kappa+1}} > \sqrt{2+\alpha_\kappa}$ ==> $2+\alpha_{\kappa+1} > 2+\alpha_\kappa$ ==> $\alpha_{\kappa+1} > \alpha_\kappa$ που ισχύει από την (1).

Επαγωγικά τώρα θα δείξουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη άνω (κάτω είναι φραγμένη από το πρώτο όρο της) αφού είναι γνησίως αύξουσα. Για να βρούμε το φράγμα αυτής ονομάζουμε χ το πιθανό όριο και έχομε:

$$\lim \alpha_\nu = \chi \quad \text{και} \quad \lim \alpha_{\nu+1} = \chi$$

οπότε η αρχική αναδρομική σχέση δίνει την εξίσωση:
$\chi = \sqrt{2+\chi}$ <==> $\chi^2 - \chi - 2 = 0$ ==> $\chi_1 = 2$, $\chi_2 = -1$.
Άρα αν η α_ν είναι φραγμένη το 2 πρέπει να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (Supremum). Έχομε $\alpha_1=1<2$, δηλαδή $\alpha_\nu<2$, για $\nu=1$.

Δεχόμαστε ότι ισχύει $\alpha_{\kappa+1} < 2$.
Θα δείξουμε ότι $\alpha_{\kappa+2} < 2$ <==> $\sqrt{2+\alpha_{\kappa+1}} < 2$ <==> $2+\alpha_{\kappa+1} < 4$ <==>

$\alpha_{\kappa+1} < 2$ που ισχύει. Άρα $\alpha_\nu < 2$ $\forall\ \nu \in N$.

Συνεπώς η (α_ν) είναι φραγμένη με $1 \le \alpha_\nu \le 2$ $\forall\ \nu \in N$.
Άρα $\lim \alpha_\nu = 2$.

14. Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες

Θ ε ώ ρ η μ α:

Καθε μονότονος και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει σ'έναν πραγματικό αριθμό και αν είναι αύξουσα και φραγμένη προς τα άνω, συγκλίνει στο άνω πέρας της S, (Supremum), ενώ αν είναι φθίνουσα και φραγμένη προς τα κάτω συγκλίνει στο κάτω πέρας της I (Infimum).
Συμβολικά:
Αν ↑ και φραγμένη άνω ==> $\lim \alpha_\nu = S$

Αν ↓ και φραγμένη κάτω ==> $\lim \alpha_\nu = I$

15. Ο αριθμός e

Εξέχουσα θέση στα μαθηματικά έχουν οι ακολουθίες :

$$\alpha_\nu = (1 + \frac{1}{\nu})^\nu \quad \text{και} \quad \beta_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}$$

όπου ν! διαβάζεται "ν παραγοντικό" και σημαίνει
ν! = 1·2·3....(ν−1)ν.
Οι ακολουθίες α_ν και β_ν συγκλίνουν στο ίδιο όριο = e και είναι αύξουσες.

Απόδειξη

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{(1 + 1/(\nu+1))^{\nu+1}}{(1+1/\nu)^\nu} = \frac{(1 + 1/(\nu+1))^{\nu+1}}{(1+1/\nu)^{\nu+1}} (1 + \frac{1}{\nu}) =$$

$$\left(\frac{(\nu+1+1)/(\nu+1)}{(\nu+1)/\nu}\right)^{\nu+1} (1 + \frac{1}{\nu}) = \left[\frac{\nu(\nu+2)}{(\nu+1)^2}\right]^{\nu+1} (1 + \frac{1}{\nu}) =$$

$$\left[\frac{\nu^2 + 2\nu + 1 - 1}{(\nu+1)^2}\right]^{\nu+1} (1 + \frac{1}{\nu}) = \left[\frac{(\nu+1)^2 - 1}{(\nu+1)^2}\right]^{\nu+1} (1 + \frac{1}{\nu})$$

$$= \left[1 - \frac{1}{(\nu+1)^2}\right]^{\nu+1} (1 + \frac{1}{\nu}) = (1 + \frac{1}{\nu+1})^{\nu+1} (1 - \frac{1}{\nu+1})^{\nu+1} (1 + \frac{1}{\nu}) >$$

$$(1 - \frac{1}{\nu+1})(1 + \frac{1}{\nu}) = (\frac{\nu+1-1}{\nu+1})(\frac{\nu+1}{\nu}) = (\frac{\nu}{\nu+1})(\frac{\nu+1}{\nu}) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} > 1 \Rightarrow q_{\nu+1} > \alpha_\nu \quad \forall\ \nu \in N \quad \text{άρα η } \alpha_\nu \uparrow$$

$$\text{και } \beta_{\nu+1} - \beta_\nu = (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \frac{1}{(\nu+1)!}) -$$

$$- (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}) = \frac{1}{(\nu+1)!} > 0 \Rightarrow$$

$\beta_{\nu+1} > \beta_\nu \quad \forall \ \nu \in N$ άρα η β_ν ↑

Επίσης αποδεικνύεται ότι οι ακολουθίες

$$\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu , \qquad \beta_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}$$

1) Είναι φραγμένες άνω.
2) Οι όροι της α_ν ΔΕΝ είναι μεγαλύτεροι των όρων της β_ν.
3) $2 \leq \alpha_\nu < \beta_\nu < 3$.
4) Έχουν κοινό όριο τον αριθμό e.

16. Υπολογισμός του αριθμού e κατά προσέγγιση

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\right) =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \ldots .$$

Έτσι μια προσέγγιση του e μπορεί να είναι:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2 + \frac{12}{24} + \frac{4}{24} + \frac{1}{24}$$

$$= 2\,\frac{17}{24} = 2,708\,4 \quad \text{δηλαδή} \quad e \approx 2,708 \quad \text{ή ακριβέστερα}$$

$$e \approx 2,718281828459045235 36...$$

Σημείωση: Ο αριθμός e:
1. Δεν είναι ρητός

2. Δεν υπολογίζεται με τη βοήθεια αλγεβρικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές.
3. Είναι μη αλγεβρικός αριθμός (υπερβατικός).

17. Γενίκευση της έννοιας του ορίου

1. Τα σύμβολα +οο και −οο

Έστω μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_\nu \mid \nu=1,2,\ldots$ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΗ. Η ακολουθία αυτή ΔΕΝ συγκλίνει προς πραγματικό αριθμό, γιατί αν συνέκλινε προς πραγματικό αριθμό τότε θα ήταν φραγμένη (ιδιότητα 4 των συγκλινουσών ακολουθιών), που είναι άτοπο.

Στην περίπτωση που η ακολουθία α_ν είναι ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΗ και ΑΥΞΟΥΣΑ, λέμε ότι ΑΠΕΙΡΙΖΕΤΑΙ ΘΕΤΙΚΑ ή ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ στο +οο, (το σύμβολο +οο διαβάζεται: συν άπειρο) και ισχύει ο γενικός ορισμός:

$$\lim \alpha_\nu = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

Στην περίπτωση που η ακολουθία α_ν είναι ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΗ και ΦΘΙΝΟΥΣΑ, λέμε ότι ΑΠΕΙΡΙΖΕΤΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΑ ή ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ στο −οο ή τείνει στο −οο, (το σύμβολο −οο διαβάζεται: μείον άπειρο) και ισχύει ο γενικός ορισμός:

$$\lim \alpha_\nu = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): \alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

Σημείωση: Τα σύμβολα −οο, +οο θεωρούνται διάφορα μεταξύ τους, γιατί δεν είναι δυνατόν να είναι συγχρόνως $\lim \alpha_\nu = +\infty$ και $\lim \alpha_\nu = -\infty$.

2. Τα σύμβολα −οο και +οο και η διάταξη των πραγματικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι για τις συγκλίνουσες ακολουθίες ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = \alpha, \quad \alpha \in R \\ \lim \beta_\nu = \beta, \quad \beta \in R \\ \alpha_\nu \leq \beta_\nu, \quad \forall \nu \in N \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \leq \beta$$

Για να ισχύει το πιο πάνω και στις περιπτώσεις που η μια από τις οριακές τιμές α, β είναι τα σύμβολα −οο, +οο ορίζομε διάταξη στο $R \cup \{-\infty, +\infty\} = \tilde{R}$. Έτσι δεχόμενοι ότι ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = \alpha, \quad \alpha \in R \\ \lim \beta_\nu = +\infty \\ \alpha_\nu \leq \beta_\nu, \quad \forall \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \leq +\infty$$

Όμοια μπορούμε να ορίσουμε: $-\infty < \alpha \quad \forall \alpha \quad R$ και $-\infty < +\infty$.

3. Επιτρεπτές και μη επιτρεπτές πράξεις μεταξύ των συμβόλων +οο, −οο.

Στο σύνολο $R \cup \{-\infty, +\infty\} = \tilde{R}$ μπορούν να ορισθούν οι πράξεις πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση χωρίς να οδηγούμεθα σε αντιφάσεις. Οι πράξεις αυτές ορίζονται ως επεκτάσεις των αντιστοίχων πράξεων στο R.

Ο ρ ι σ μ ο ί:

$\alpha + (+\infty) = (+\infty) + \alpha = +\infty \qquad \forall \alpha \in R$

$\alpha + (-\infty) = (-\infty) + \alpha = -\infty \qquad \forall \alpha \in R$

$\alpha(+\infty) = (+\infty)\alpha = +\infty \qquad \forall \alpha \in R^+$

$\alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = -\infty \qquad \forall \alpha \in R^+$

$\alpha(+\infty) = (+\infty)\alpha = -\infty \qquad \forall \alpha \in R^-$

$\alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = +\infty \qquad \forall \alpha \in R^-$

$\frac{\alpha}{+\infty} = \frac{\alpha}{-\infty} = 0 \qquad \forall \alpha \in R$

4. Ιδιότητες

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \dashrightarrow +\infty \\ \beta_\nu \dashrightarrow \chi, \ \chi \in R \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \dashrightarrow -\infty \\ \beta_\nu \dashrightarrow \chi, \ \chi \in R \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \dashrightarrow +\infty \\ \beta_\nu \dashrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \dashrightarrow +\infty$$

$\alpha_\nu \dashrightarrow -\infty$ ┐
$\beta_\nu \dashrightarrow -\infty$ ┘ ⟹ $\alpha_\nu + \beta_\nu \dashrightarrow -\infty$

$\alpha_\nu \dashrightarrow -\infty \implies (-\alpha_\nu) \dashrightarrow +\infty$

$\alpha_\nu \dashrightarrow +\infty \implies (-\alpha_\nu) \dashrightarrow -\infty$

$\alpha_\nu \dashrightarrow +\infty$ ┐
$\beta_\nu \dashrightarrow \chi,\ \chi > 0$ ┘ ⟹ $\alpha_\nu\beta_\nu \dashrightarrow +\infty$

$\alpha_\nu \dashrightarrow -\infty$ ┐
$\beta_\nu \dashrightarrow \chi,\ \chi > 0$ ┘ ⟹ $\alpha_\nu\beta_\nu \dashrightarrow -\infty$

$\alpha_\nu \dashrightarrow +\infty$ ┐
$\beta_\nu \dashrightarrow \chi,\ \chi < 0$ ┘ ⟹ $\alpha_\nu\beta_\nu \dashrightarrow -\infty$

$\alpha_\nu \dashrightarrow -\infty$ ┐
$\beta_\nu \dashrightarrow \chi,\ \chi < 0$ ┘ ⟹ $\alpha_\nu\beta_\nu \dashrightarrow +\infty$

$\alpha_\nu \dashrightarrow \chi,\ \chi \in R$ ┐
$\beta_\nu \dashrightarrow +\infty$ ┘ ⟹ $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \dashrightarrow 0$
$\beta_\nu \neq 0 \quad \forall \nu \in N$

$\alpha_\nu \dashrightarrow \chi,\ \chi \in R$ ┐
$\beta_\nu \dashrightarrow -\infty$ ┘ ⟹ $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \dashrightarrow 0$
$\beta_\nu \neq 0 \quad \forall \nu \in N$

5. Επιτρεπτές πράξεις.

$(+\infty) + \chi = \chi + (+\infty) = +\infty \qquad \forall \chi \in R$
$(-\infty) + \chi = \chi + (-\infty) = -\infty \qquad \forall \chi \in R$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
$-(-\infty) = +\infty$
$-(+\infty) = -\infty$
$(+\infty)(+\infty) = +\infty$

$$\frac{\chi}{+\infty} = 0 \qquad \forall \chi \in R$$

$$(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$
$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$\frac{\chi}{-\infty} = 0 \qquad \forall \chi \in R$$

6. Μη επιτρεπτές πράξεις.

$+\infty - (+\infty)$	$-\infty + (+\infty)$	$0(-\infty)$	$(+\infty)0$
	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$(-\infty)0$	---	---	---
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
---	---	---	-
$+\infty$	0	0	0

$$\frac{\alpha}{-} \ , \quad \alpha \in R.$$
$$0$$

18. Λυμένες ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+1} - \nu$ έχει όριο το μηδέν.

Λύση
Για κάθε $\nu \in N^*$ είναι $\alpha_\nu > 0$, οπότε έχομε:

$$|\alpha_\nu| = \sqrt{\nu^2+1} - \nu = \frac{(\sqrt{\nu^2+1} - \nu)(\sqrt{\nu^2+1} + \nu)}{\sqrt{\nu^2+1} + \nu} = \frac{(\nu^2+1) - \nu^2}{\sqrt{\nu^2+1} + \nu} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v^2+1}+v} < \frac{1}{\sqrt{v^2}} = \frac{1}{v}$$

Επειδή όμως είναι $\lim \frac{1}{v} = 0$, έχομε $\lim \alpha_v = 0$.

2. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_v = 2v(\sqrt{v^3+1} - \sqrt{v^3})$ $v \in N$ έχει όριο το μηδέν.

Λύση

$$\alpha_v = 2v(\sqrt{v^3+1} - \sqrt{v^3}) = 2v \frac{(\sqrt{v^3+1} - \sqrt{v^3})(\sqrt{v^3+1} + \sqrt{v^3})}{(\sqrt{v^3+1} + \sqrt{v^3})} =$$

$$= 2v \frac{(\sqrt{v^3+1})^2 - (\sqrt{v^3})^2}{\sqrt{v^3+1} + \sqrt{v^3}} = 2v \frac{v^3 + 1 - v^3}{\sqrt{v^3+1} + \sqrt{v^3}} = \frac{2v}{\sqrt{v^3+1} + \sqrt{v^3}} \leq$$

$$\leq \frac{2v}{\sqrt{v^3} + \sqrt{v^3}} = \frac{2v}{2v\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v}} \quad \text{και επειδή } \lim \frac{1}{\sqrt{v}} = 0$$

έχομε: $\lim \alpha_v = 0$.

3. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_v = \sqrt[3]{v+6} - \sqrt[3]{v+5}$ $v \in N$ έχει όριο το μηδέν.

Λύση

Ισχύει $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \Longrightarrow \alpha-\beta = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$

Αν θέσουμε $\alpha = \sqrt[3]{v+6}$, $\beta = \sqrt[3]{v+5}$ έχομε

$$|\alpha_v| = \sqrt[3]{v+6} - \sqrt[3]{v+5} = \frac{(\sqrt[3]{v+6})^3 - (\sqrt[3]{v+5})^3}{(\sqrt[3]{v+6})^2 + \sqrt[3]{v+5}\sqrt[3]{v+6} + (\sqrt[3]{v+5})^2} -$$

$$= \frac{(v+6)-(v+5)}{(\sqrt[3]{v+6})^2+\sqrt[3]{(v+5)(v+6)}+(\sqrt[3]{v+5})^2} < \frac{1}{(\sqrt[3]{v})^2+\sqrt{v}+(\sqrt[3]{v})^2} =$$

$$\frac{1}{3(\sqrt[3]{v})^2} \le \frac{1}{3(\sqrt[3]{v})} \le \frac{1}{3\sqrt{v}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}} \quad \text{και επειδή } \lim \frac{1}{\sqrt{v}} = 0 \quad \text{έχομε}$$

$\lim a_v = 0.$

4. Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_v = \dfrac{2\cdot 5^v - 3^{2v}}{6^v + 4^{2v+1}}$

Λύση

Έχομε: $a_v = \dfrac{2\cdot 5^v - 9^v}{6^v + 4\cdot 16^v} = \dfrac{(2\cdot 5^v - 9^v)/16^v}{(6^v + 4\cdot 16^v)/16^v} =$

$$\frac{2(5/16)^v - (9/16)^v}{(6/16)^v + 4(16/16)^v} = \frac{2(5/16)^v - (9/16)^v}{(6/16)^v + 4}$$

Επειδή όμως $|5/16| < 1$, $|9/16| < 1$, $|6/16| < 1$ ισχύει

$\lim (5/16)^v = \lim (9/16)^v = \lim (6/16)^v = 0.$

Επομένως $\lim a_v = \dfrac{2\cdot 0 - 0}{0 + 4} = \dfrac{0}{4} = 0.$

5. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_v = (4v^2+1)/(v^2+3v+2)$.

Λύση

$$a_v = \frac{v^2(4+1/v^2)}{v^2(1+3/v+2/v^2)} = \frac{4+1/v^2}{1+3/v+2/v^2}$$ Εφαρμόζοντας την ιδιότητα

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad \text{με } g(x) \neq 0 \text{ και } \lim g(x) \neq 0$$

$$\text{παίρνομε} \quad \lim a_\nu = \frac{\lim (4+1/\nu^2)}{\lim (1+3/\nu+2/\nu^2)} = \frac{4 + \lim 1/\nu^2}{1 + \lim 3/\nu + \lim 2/\nu^2} =$$

$$= \frac{4 + 0}{1 + 0 + 0} = 4/1 = 4 \qquad \text{αφού} \quad \lim (1+3/\nu+2/\nu^2) \neq 0$$

Παρατήρηση: Γενικά το όριο ακολουθίας με γενικό όρο της μορφής πηλίκου, με βαθμό πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο είναι ίσο με το πηλίκο των συντελεστών των μεγιστοβαθμίων όρων.

6. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_\nu = \frac{\nu+3}{\nu^2+\nu-1} \mid \nu=1,2,\ldots$

Λύση

$$\lim a_\nu = \lim \frac{\nu+3}{\nu^2+\nu-1} = \lim \frac{\nu(1+3/\nu)}{\nu^2(1+1/\nu-1/\nu^2)} =$$

$$= \lim \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\lim (1+3/\nu)}{\lim (1+1/\nu-1/\nu^2)} = 0 \frac{1 + 0}{1 + 0 - 0} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Παρατήρηση: Γενικά το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο της μορφής πηλίκου με βαθμό πολυωνύμου αριθμητή μικρότερο από το βαθμό πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μηδέν.

7. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_\nu = \frac{2\nu^3+3\nu-1}{\nu^2+5}$.

Λύση

$$\lim a_\nu = \lim \frac{2\nu^3+3\nu-1}{\nu^2+5} = \lim \frac{\nu^3(2+3/\nu^2-1/\nu^3)}{\nu^2(1+5/\nu^2)} =$$

$$= \lim \nu \lim \frac{2+3/\nu^2-1/\nu^3}{1+5/\nu^2} = +\infty \frac{2 + 0 + 0}{1 + 0} = (+\infty)2 = +\infty$$

Παρατήρηση: Γενικά το όριο ακολουθίας με γενικό όρο υπό μορφή πηλίκου και με βαθμό πολυωνύμου αριθμητή μεγαλύτερου του βαθμού πολυωνύμου παρονομαστή είναι ίσο με +οο.

8. Να δειχθεί ότι οι ακολουθίες με γενικό όρο:

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu^2+1}{3\nu^2+2}, \quad \beta_\nu = \frac{2\nu-1}{3\nu+7}, \quad \gamma_\nu = \sqrt{(4\nu+3)/(9\nu+2)}$$

έχουν το ίδιο όριο.

Λύση

$$\lim \alpha_\nu = \lim \frac{2\nu^2+1}{3\nu^2+2} = \lim \frac{\nu^2(2+1/\nu^2)}{\nu^2(3+2/\nu^2)} = \lim \frac{2+1/\nu^2}{3+2/\nu^2} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim \beta_\nu = \lim \frac{2\nu-1}{3\nu+7} = \lim \frac{\nu(2-1/\nu)}{\nu(3+7/\nu)} = \lim \frac{2-1/\nu}{3+7/\nu} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim \gamma_\nu = \lim \sqrt{(4\nu+3)/(9\nu+2)} = \lim \frac{\sqrt{\nu(4+3/\nu)}}{\sqrt{\nu(9+2/\nu)}} = \frac{\sqrt{\lim (4+3/\nu)}}{\sqrt{\lim (9+2/\nu)}} =$$

$$\frac{\sqrt{4}+0}{\sqrt{9}+0} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

9. Να δειχθεί ότι $\lim \sqrt[\nu]{(4\nu+1)/(3\nu+2)} = 1$.

Λύση

Επειδή $\lim \frac{4\nu+1}{3\nu+2} = \frac{4}{3} > 0$ σύμφωνα με την πρόταση 13 ($\lim \alpha_\nu = 1$ αν $\alpha_\nu > 0$)

έχομε

$\lim \sqrt[\nu]{(4\nu+1)/(3\nu+2)} = 1$.

10. Να δειχθεί ότι $\lim \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+7^\nu} = 7$.

Λύση
$\sqrt[\nu]{7^\nu} < \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+7^\nu} < \sqrt[\nu]{3\cdot 7^\nu}$ ==>

$7 < \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+7^\nu} < 7\sqrt[\nu]{3}$ και επειδή $\lim 7\sqrt[\nu]{3} = \lim(7)\lim(\sqrt[\nu]{3})$

$= 7\cdot 1 = 7$ σύμφωνα με την πρόταση 13, έχομε

$\lim \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+7^\nu} = 7$.

11. Να δειχθεί ότι $\lim \sqrt[\nu+1]{\nu} = 1$.

Λύση
$\lim \sqrt[\nu+1]{\nu} = \lim \sqrt[\nu+1]{(\nu+1)\nu/(\nu+1)} =$

$\lim \sqrt[\nu+1]{\nu+1}\ \lim \sqrt[\nu+1]{(\nu+1)/(\nu+1) - 1/(\nu+1)} = 1\lim \sqrt[\nu+1]{1 - 1/(\nu+1)}$

επειδή όμως για κάθε $\nu \in N$ ισχύει:

$$-\frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{\nu+1} < 1 \Rightarrow \sqrt[\nu+1]{1/2} \le \sqrt[\nu+1]{1 - 1/(\nu+1)} < \sqrt[\nu+1]{1}$$

και επειδή $\lim \sqrt[\nu+1]{1/2} = 1$ και $\lim \sqrt[\nu+1]{1}$

η ακολουθία $\sqrt[\nu+1]{1 - 1/(\nu+1)}$ περιέχεται μεταξύ δύο ακολουθιών που έχουν το ίδιο όριο, οπότε και αυτή έχει το ίδιο όριο με αυτές

$\lim \sqrt[\nu+1]{1 - 1/(\nu+1)} = 1$

άρα και $\lim \sqrt[\nu+1]{\nu} = 1$.

12. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{(1/4)^\nu + (3/5)^\nu}$.

Λύση
Επειδή $(3/5)^\nu < (1/4)^\nu + (3/5)^\nu < (3/5)^\nu + (3/5)^\nu$ αφού $1/4 < 3/5$ και

$(1/4)^{\nu} < (3/5)^{\nu} \Rightarrow \sqrt[\nu]{(3/5)^{\nu}} < \sqrt[\nu]{(1/4)^{\nu} + (3/5)^{\nu}} < \sqrt[\nu]{2(3/5)^{\nu}} \Rightarrow$

$3/5 < \sqrt[\nu]{(1/4)^{\nu} + (3/5)^{\nu}} < 3/5 \sqrt[\nu]{2}$ και επειδή $\lim \sqrt[\nu]{2} = 1$

σύμφωνα με την πρόταση 13 $\lim \sqrt[\nu]{(1/4)^{\nu} + (3/5)^{\nu}} = 3/5$.

13. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_{\nu} = \sqrt[\nu]{\nu^2-3\nu+5}$.

Λύση
Για $\nu \geq 3$ έχομε: $\nu^2 \geq 3\nu \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu \geq 0$ και $5 < 5 + (\nu^2-3\nu)$

Άρα $\sqrt[\nu]{5} \leq \sqrt[\nu]{\nu^2-3\nu+5} < \sqrt[\nu]{\nu^2+5} < \sqrt[\nu]{\nu^2+5\nu^2} \Rightarrow$

$\sqrt[\nu]{5} \leq \sqrt[\nu]{\nu^2-3\nu+5} < \sqrt[\nu]{6\nu^2} \Rightarrow$

$\sqrt[\nu]{5} \leq \sqrt[\nu]{\nu^2-3\nu+5} < \sqrt[\nu]{6}\sqrt[\nu]{\nu^2}$ και επειδή

$\lim \sqrt[\nu]{5} = 1$ $\lim \sqrt[\nu]{6} = 1$ και $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2} = \lim \sqrt[\nu]{\nu}.\lim \sqrt[\nu]{\nu} =$

$= 1 \cdot 1 = 1$ έχομε:

$\lim \sqrt[\nu]{\nu^2-3\nu+5} = 1$.

Συναρτήσεις

Συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής

1. Προέλευση της έννοιας της συναρτήσεως.

Κατά την εξέταση κάποιου φυσικού φαινομένου για να εκφράσουμε, στη γλώσσα των μαθηματικών, τις αμοιβαίες σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των φυσικών μεγεθών, χρησιμοποιούμε την έννοια της συνάρτησης.

Η έννοια του μεγέθους είναι βασική έννοια για τις εφαρμοσμένες επιστήμες.

Κατά την εξέταση ενός φυσικού φαινομένου τα μεγέθη που παρουσιάζονται κατατάσσονται σε σταθερά και μεταβλητά. Η κατάταξη αυτή είναι σχετική και εξαρτάται από τις εκάστοτε συνθήκες.

Ένα μέγεθος χαρακτηρίζεται ως σταθερό, αν κατά την εξέταση του διατηρεί την ίδια τιμή. Ένα μέγεθοςχαρακτηρίζεται ως μεταβλητό, αν κατά την εξέταση του αλλάζει τιμή.

Άλλα μεγέθη μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή, άλλα υπόκεινται σε περιορισμούς. Ένα μεταβλητό μέγεθος λαμβάνει τιμές από ένα ορισμένο υποσύνολο R. Συνήθως η μεταβλητή τιμή του μεγέθους συμβολίζεται με ένα από τα γράμματα: $x, \psi, z, \omega, t, \ldots$

Οι σταθερές τιμές του μεγέθους συμβολίζονται συνήθως με τα πρώτα γράμματα του αλφαβήτου.

Εάν κατά την εξέταση κάποιου φυσικού φαινομένου συναντώνται δύο μεγέθη, η μεταβλητή x και η μεταβλητή ψ έτσι ώστε: σε κάθε τιμή x του πρώτου μεγέθους να αντιστοιχεί ακριβώς μια τιμή ψ του δεύτερου μεγέθους, η τιμή x του πρώτου μεγέθους λέγεται τότε <u>ανεξάρτητη μεταβλητή τιμή</u> και η τιμή ψ του δεύτερου μεγέθους λέγεται, <u>εξαρτημένη μεταβλητή τιμή</u>. Το είδος της εξαρτήσεως λέγεται: μια <u>μονότιμος</u> συνάρτηση με μια ελεύθερη μεταβλητή. Αυτό συμβολίζεται με $\psi=f(x)$, όπου f δηλώνει το είδος της εξάρτησης.

2. Μαθηματικός ορισμός της έννοιας της συναρτήσεως.

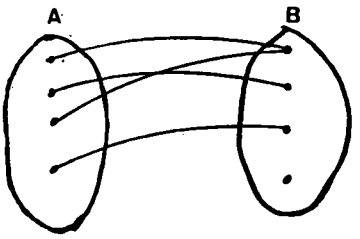
Έστω Α και Β δύο οποιαδήποτε μη κενά σύνολα. Καλούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και τιμές αυτής στο Β, μια απεικόνιση του συνόλου Α στο σύνολο Β, δια της οποίας σε κάθε στοιχείο χ του Α αντιστοιχεί ένα στοιχείο ψ του Β. Σημειώνουμε δε $f|A$

$$\text{Συμβολικά: } f:A \dashrightarrow B \text{ ή } A \xrightarrow{f} \psi \in B.$$

Τη σχέση $\psi=f(x)$ για κάθε $\chi \in A$ καλούμε τύπο της συνάρτησης.

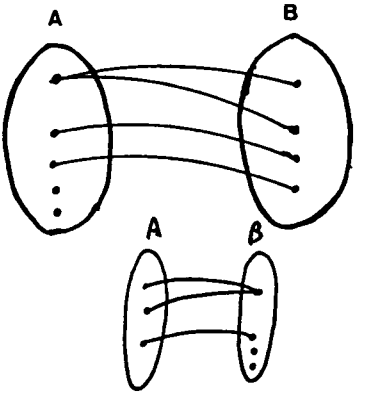
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f|A$ το συμβολίζομε με $f(A) = \psi \in B$ με την ιδιότητα: Υπάρχει $\chi \in A$ με $f(x) = \psi$.

Παράδειγμα



Τα σύνολα Α και Β <u>ορίζουν</u> συνάρτηση.

Αντιπαράδειγμα



Τα σύνολα Α και Β <u>δεν ορίζουν</u> συνάρτηση.

Γράφημα της συνάρτησης $f|A$ με τύπο $\psi=f(x)$ είναι το σύνολο των ζευγών (χ,ψ) που επαληθεύουν την $\psi=f(x)$. Συμβολικά αν $G(f)$ το γράφημα έχομε:

$$G(f) = \{\chi,\psi \in RxR : \chi \in A \text{ και } \psi=f(x)\}$$

2.1 Ίσες συναρτήσεις

Δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α είναι <u>ίσες</u> όταν για κάθε $x \in A$ είναι $f_1(x)=f_2(x)$.

<u>Παράδειγμα</u>
Έστω οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x)=x^2+3$ και f_2 με $f_2(x)=x^4+3$ με κοινό πεδίο ορισμού: $A=\{-1,0,1\}$ τότε:

$f_1(-1) = 4 = f_2(-1)$
$f_1(0) = 3 = f_2(0)$
$f_1(1) = 4 = f_2(1)$

Δηλαδή για κάθε $x \in A=\{-1,0,1\}$ έχομε $f_1(x)=f_2(x)$ άρα $f_1=f_2$.

Αν όμως για πεδίο ορισμού λάβουμε το $\{0,1,3\}$ παρατηρούμε ότι $f_1(3)=12$, $f_2(3)=24$ δηλαδή $f_1(3) \neq f_2(3)$. Άρα οι συναρτήσεις f_1 και f_2 δεν είναι ίσες.

2.2 Πραγματικές συναρτήσεις

Έστω Α το μη κενό υποσύνολο. Μια συνάρτηση $f|A$ με τιμές στο R καλείται <u>πραγματική συνάρτηση</u>. Μια πραγματική συνάρτηση $f|A$ με πεδίο ορισμού Α R καλείται πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Οι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής παρίστανται γεωμετρικώς στο επίπεδο.

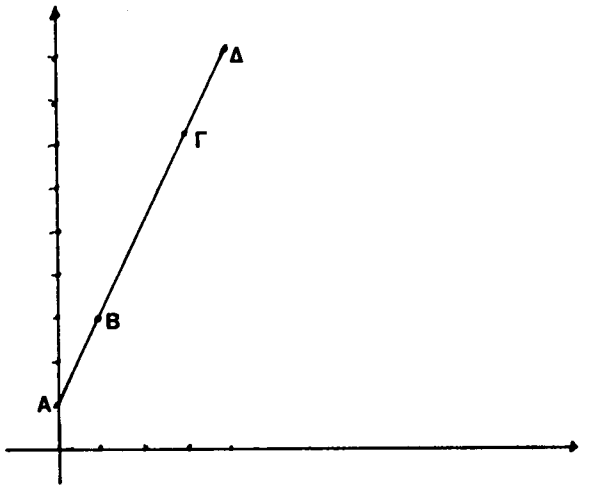
Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f|A$ με τύπο $\psi=f(x)$ είναι το σύνολο σημείων του επιπέδου ορθοκανονικού συστήματος αξόνων όπου οι συντεταγμένες (x,ψ) του κάθε σημείου είναι λύση της εξίσωσης $\psi=f(x)$.

2.3 Περιορισμός - επέκταση συνάρτησης

Αν $f: A_1 \longrightarrow B$ και $A_1 \subset A$, θα ονομάζουμε <u>περιορισμό</u> της f στο A_1 την συνάρτηση $g: A_1 \longrightarrow B$ που ορίζεται από τη σχέση $g(x)=f(x)$ για κάθε $x \in A_1$. Τότε η f λέγεται <u>επέκταση</u> της g στο Α.

<u>Παράδειγμα</u>
Έστω οι συναρτήσεις f με $f(x)=2x+1$, $x \in [0,4]$ και g με $g(x)=2x+1$, $x \in [1,3]$.

Εδώ έχομε $[1,3] \subset [0,4]$ και για κάθε $\chi \in [1,3]$ είναι $f(x)=g(x)=-2x+1$. Άρα η g είναι ένας περιορισμός της f στο $[1,3]$ και η f μια επέκταση της f στο $[0,4]$.



Στο σχήμα η γραφική παράσταση της g είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και η γραφική παράσταση της f είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ.

2.4 Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω F_A το σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το Α. Αν $f_1, f_2, f \in F_A$, ορίζεται:

I) Το άθροισμα f_1+f_2 των συναρτήσεων f_1 και f_2 ως $(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ στο Α.

II) Η αντίθετη $-f$ της f ως $(-f)(x)=-f(x)$ στο Α.

III) Το γινόμενο λf με $\lambda \in R$ ως $(\lambda f)(\chi)=\lambda f(x)$ στο Α.

IV) Το γινόμενο f_1f_2 των f_1 και f_2 ως $(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)$ στο Α.

V) Τη συμμετρική $\frac{1}{f}$ της f ως $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ στο $A'=$

$=\{\chi \in A: f(x) \neq 0\}$.

VI) Το πηλίκο $\frac{f_1}{f_2}$ των f_1 και f_2 ως $\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ στο

$A_1 = \{x \in A: f_2(x) \neq 0\}$.

VII) Τη διαφορά $f_1 - f_2$ ως το άθροισμα $f_1 + (-f_2)$ και άρα $(f_1-f_2)(x) = f_1(x)-f_2(x)$ στο A.

VIII) Το γραμμικό συνδυασμό $\alpha f_1+\beta f_2$ ως $(\alpha f_1+\beta f_2)(x) = \alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$.

Σημείωση 1: Αν η f_1 έχει πεδίο ορισμού το A και η f_2 το B τότε η f_1+f_2 καθώς και η f_1f_2 ορίζονται ως προηγουμένως στο σύνολο $A \cap B$.

Σημείωση 2: Ως άθροισμα, γινόμενο των συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}, f_\nu$ με $\nu \in N$ και $\nu>2$ ορίζομε:

το $(f_1 + f_2 + \ldots + f_{\nu-1}) + f_\nu$

και

το $(f_1 \cdot f_2 \ldots f_{\nu-1})f_\nu$ αντίστοιχα.

2.5 Ιδιότητες των πράξεων

Έστω f_1, f_2, f_3 πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής με πεδίο ορισμού το A.

Επειδή $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ πραγματικοί αριθμοί ισχύουν οι ιδιότητες:

Αντιμεταθετική

$f_1 + f_2 = f_2 + f_1$ για την πρόσθεση

$f_1f_2 = f_2f_1$ για τον πολλαπλασιασμό

Προσεταιριστική

$(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$ για την πρόσθεση

$(f_1f_2)f_3 = f_1(f_2f_3)$ για τον πολλαπλασιασμό

Επιμεριστική

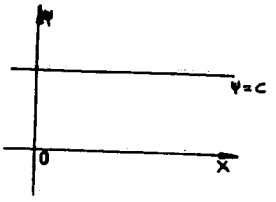
$(f_1 + f_2)f_3 = f_1f_3 + f_2f_3$ του πολλαπλασιασμού προς την πρόσθεση.

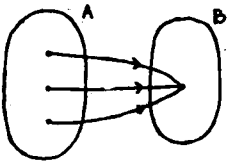
Ουδέτερο στοιχείο
Για την πρόσθεση: Υπάρχει συνάρτηση g για την οποία έχομε για κάθε $x \in A$, $g(x)=0$. Τότε για κάθε πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής x, ισχύει $f+g = g+f = f$.
Για τον πολλαπλασιασμό: Υπάρχει πραγματική συνάρτηση g μιας πραγματικής μεταβλητής x που για κάθε $x \in A$ έχομε $g(x)=1$. Τότε για κάθε f ισχύει $fg = gf = f$.

3. Ειδικές συναρτήσεις

3.1 Σταθερή συνάρτηση.

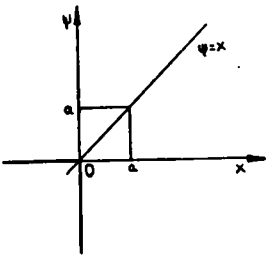
Ορίζομε τη συνάρτηση f εκ των F_A (F_A: το σύνολο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A) για την οποία έχομε:
Για κάθε $x \in A$, $f(x)=c$.
Αν $A=R$ η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία $\psi=c$.

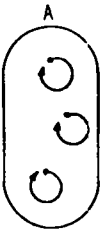




3.2 Ταυτοτική συνάρτηση

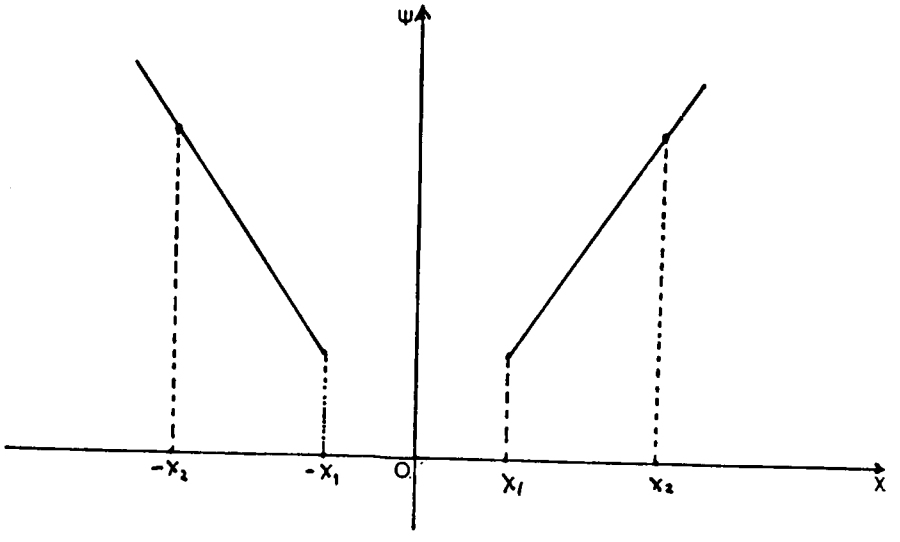
Ορίζομε τη συνάρτηση f εκ των F_A για την οποία έχομε: Για κάθε $x \in A$, $f(x)=x$.
Αν $A=R$ η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $x=\psi$.



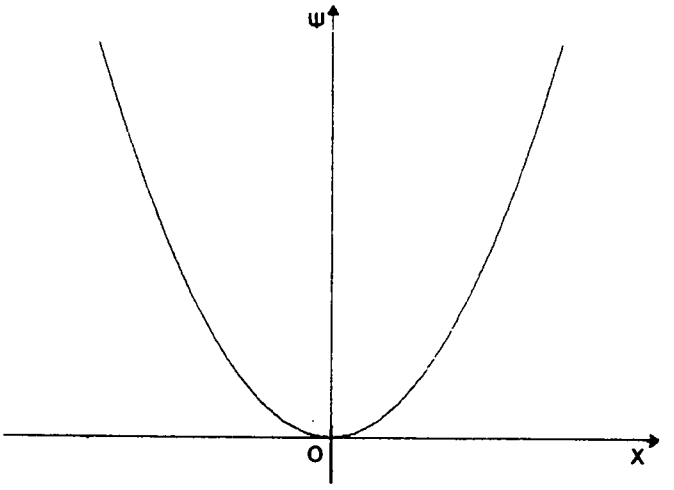


3.3 Άρτια συνάρτηση

Ορίζομε τη συνάρτηση f εκ των F_A για την οποία έχομε: Για κάθε $x \in A$, ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$. Η άρτια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση με άξονα συμμετρίας τον ψ'ψ.

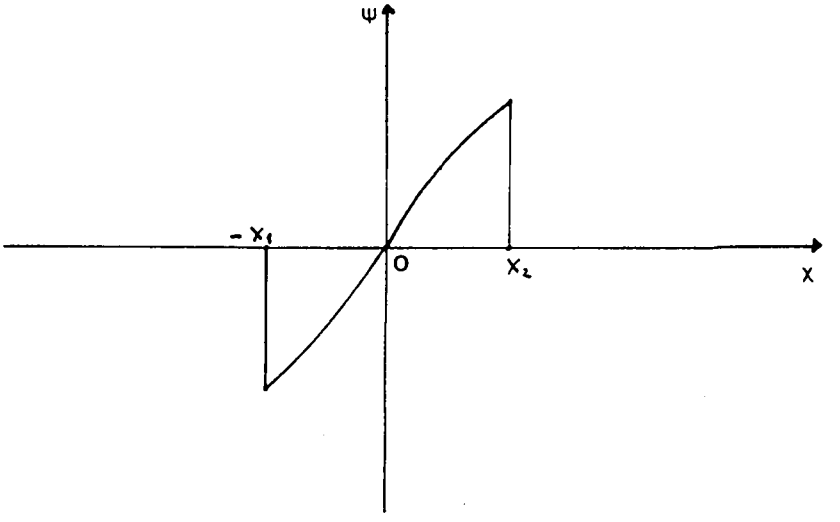


Παράδειγμα
Η συνάρτηση f με $f(x)=x^2|R$ είναι άρτια γιατί: Για κάθε $\chi \in R$ ισχύει: $-\chi \in R$, $f(-x)=x^2=f(x)$. Και γραφικά για να φανεί η συμμετρία ως προς τον άξονα ψ'ψ.

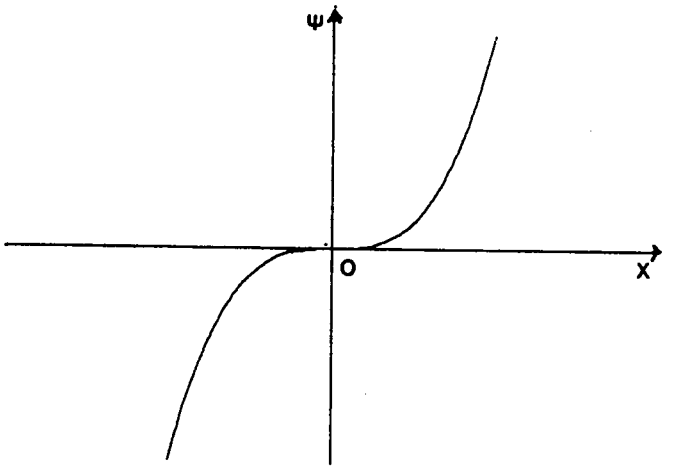


3.4 Περιττή συνάρτηση

Ορίζομε τη συνάρτηση f εκ των F_A για την οποία έχομε: Για κάθε $\chi \in A$ ισχύει: $-\chi \in A$ και $f(-x)=-f(x)$. Η περιττή συνάρτηση έχει γραφική παράσταση με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

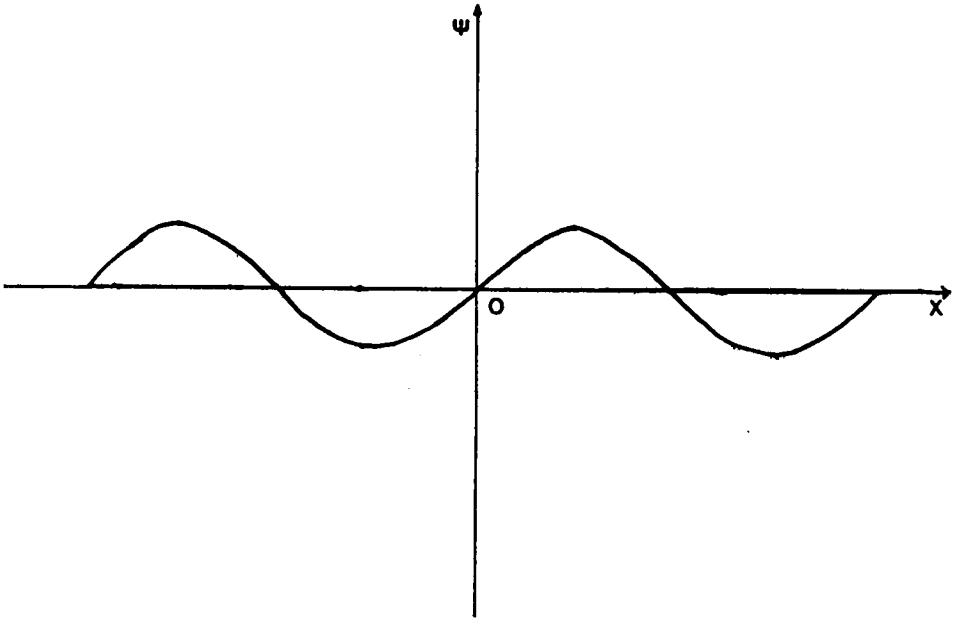


Παράδειγμα
Η συνάρτηση f με $f(x)=x^3|R$ είναι περιττή γιατί για κάθε $\chi \in R$ ισχύει: $-\chi \in R$, $f(-x)=-x^3=-f(x)$. Και γραφικά για να φανεί η συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων.



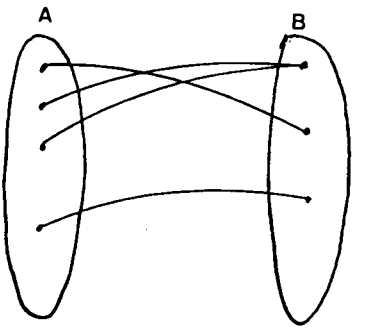
3.5 Περιοδική συνάρτηση

Ορίζομε τη συνάρτηση f εκ των F_A ώστε αν υπάρχει $\tau \in R-\{0\}$ που να δίνει $\chi \in A$, $(\chi+\tau) \in A$ και $f(x+\tau)=f(x)$. Ο αριθμός τ είναι η περίοδος της f.



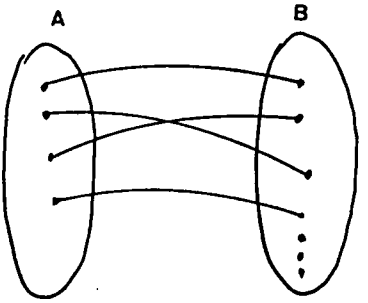
4. Είδη συναρτήσεων

4.1 Συνάρτηση επί, λέγεται η συνάρτηση εκ των F_A στην οποία <u>κάθε στοιχείο</u> του B είναι εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείου του A. Δηλαδή το πεδίο τιμών της f ταυτίζεται με το B.

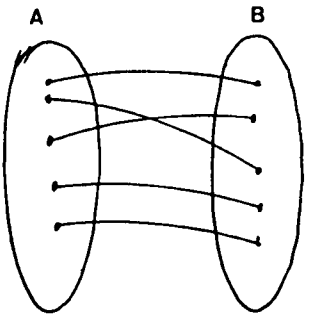


$f(A) = B$

4.2 Συνάρτηση ένα προς ένα (1-1), λέγεται η συνάρτηση εκ των F_A, στην οποία σε διαφορετικά στοιχεία του A αντιστοιχίζονται διαφορετικά στοιχεία του B. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



4.3 Συνάρτηση ένα προς ένα (1-1) και επί, λέγεται η συνάρτηση εκ των F_A στην οποία <u>κάθε στοιχείο</u> του B είναι εικόνα <u>ενός και μόνο</u> στοιχείου του A. Δηλαδή $f(A) = B$ και για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



4.4 Αντίστροφη συνάρτηση

Μια συνάρτηση f του A στο B είναι μια σχέση (διμελής) του A στο B. Άρα ορίζεται και η αντίστροφη σχέση (συμβολικά f^{-1}) του B στο A.

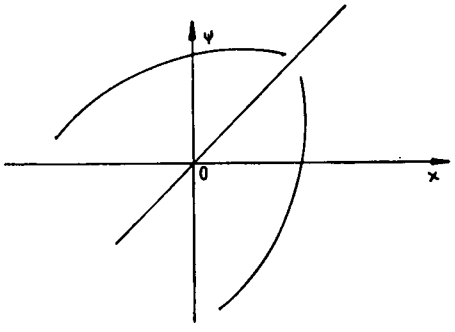
Για να είναι και η f^{-1} συνάρτηση πρέπει η f να είναι συνάρτηση 1-1 και επί.

Αν η f είναι συνάρτηση επί, η f^{-1} μπορεί να μην είναι συνάρτηση γιατί σε ένα στοιχείο του B είναι δυνατόν να αντιστοιχίζονται διαφορετικά στοιχεία του A.

Επίσης αν η f είναι συνάρτηση 1-1, η f^{-1} μπορεί να μην είναι συνάρτηση γιατί είναι δυνατόν να υπάρχει στοιχείο του B που να μην είναι αντίστοιχο κάποιου στοιχείου του A.

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ότι το (x,f(x)) ανήκει στη γραφική παράσταση της ψ=f(x).

Αν παραστήσουμε γραφικά τις f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων, οι γραφικές τους παραστάσεις θα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ψ=x που διχοτομεί την πρώτη και την τρίτη γωνία των ορθογωνίων αξόνων.

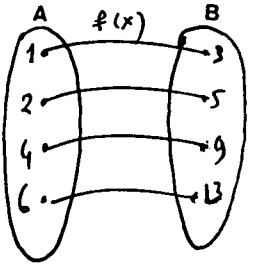


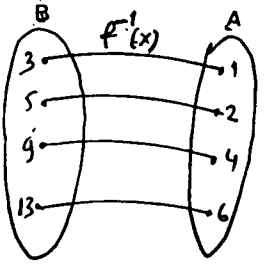
Σημείωση: Στην περίπτωση που η f^{-1} είναι πολυσήμαντη διαλέγουμε συνήθως μια από τις τιμές της στο κάθε σημείο, ορίζοντας έτσι μια μονοσήμαντη συνάρτηση την οποία καλούμε κλάδο της f^{-1}.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση f με $\psi=x^2$ έχει δισήμαντη αντίστροφη την f^{-1} με $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{\psi}$ και $\psi\geq 0$. Για να βρούμε τον ένα κλάδο της θεωρούμε τον περιορισμό της f με $\psi=f_0(x)=x^2$ και πεδίο ορισμού το R^+. Έτσι η αντίστροφη f^{-1} είναι $\chi=\sqrt{\psi}$ (θετική τετραγωνική ρίζα) που καλούμε και κύριο κλάδο της f^{-1}.

Παράδειγμα

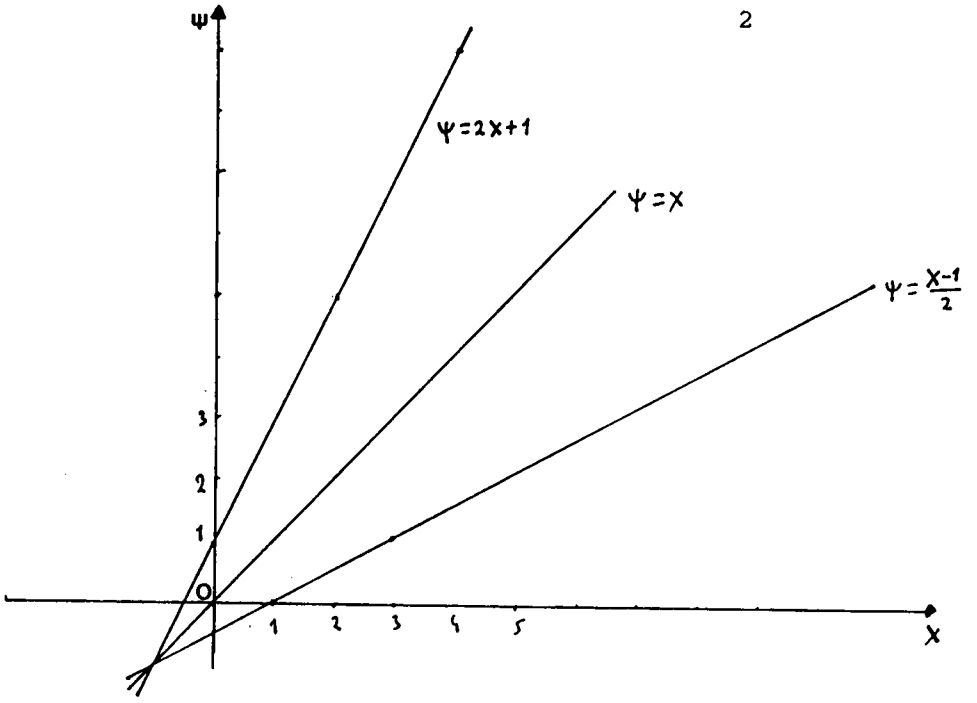
Η συνάρτηση f: A-->B με f(x)=2x+1 και A={1,2,4,6}, B={3,5,9,13} είναι 1-1 και επί γιατί κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα ενός μόνο στοιχείου του A και για κάθε $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.





Άρα ορίζεται η αντίστροφος της f, η f^{-1} με $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$ αφού

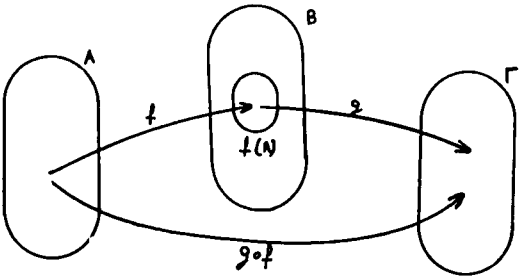
$\psi = 2x+1 \Rightarrow x = 2\psi+1 \Leftrightarrow x-1 = 2\psi \Leftrightarrow \psi = \frac{\chi-1}{2}$.



4.5 Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες στο A και B αντίστοιχα. Τότε για κάθε $x \in A$ ορίζεται ο αριθμός $f(x)$ με την f. Αν $f(x) \in B$ ορίζεται ο αριθμός $g(f(x))$ με την g. Αν περιορίσουμε την f στο σύνολο $A'=\{x \in A : f(x) \in B\}$ τότε ορίζουμε μια νέα συνάρτηση η οποία σε κάθε $x \in A'$ αντιστοιχίζει τον $g(f(x))$, που τον ονμάζουμε σύνθεση των σσυναρτήσεων f και g. Συμβολικά: Αν $A, B \subseteq R$ μη κενά σύνολα και $f: A \to R$, $g: B \to R$ και $f(A) \subseteq B$ τότε ορίζεται μια συνάρτηση $g \circ f$ με τον εξής κανόνα $(g \circ f)(x)=g(f(x))$ $x \in A$ που δίνει $f(A) \subseteq B$ και λέγεται σύνθεση των f και g.

Παραστατικά



Παράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=2x-1 | A=[-1,5]$ και g με $g(x)=x^2+1 | B=[-5,7]$. Να ορισθούν οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση

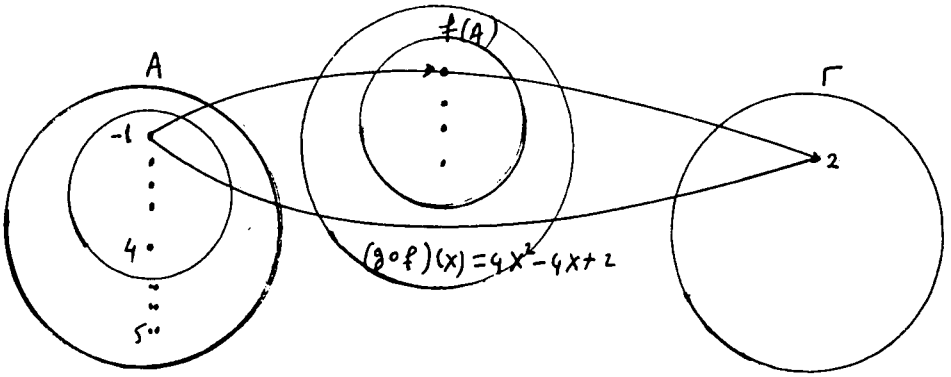
Θεωρούμε το σύνολο $A'=\{x \in A: f(x) \in B\} = \{x \in A: -5 \le 2x-1 \le 7\}$. Για να ορίζεται η $g \circ f$ πρέπει $A' \neq \emptyset$ εδώ

$$\begin{array}{l} -5 < 2x-1 < 7 \\ x \in A \end{array} \Big\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} -4 \le 2x \le 8 \\ -1 \le x \le 5 \end{array} \Big\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} -2 \le x \le 4 \\ -1 \le x \le 5 \end{array} \Big\} \Longleftrightarrow$$

$$-1 \le x \le 4.$$

Άρα η $g \circ f$ ορίζεται στο $A'=[-1,4]$ και έχει τύπο $(g \circ f)(x) =$

$= g(f(x)) = (2x-1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 + 1 = 4x^2 - 4x + 2.$



Επίσης έχομε $B' = \{x \in B: g(x) \in A\} = \{x \in B: -1 \le x^2+1 \le 5\}$

$$-1 \le x^2+1 \le 5 \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big]$$
$$x \in B \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big]$$

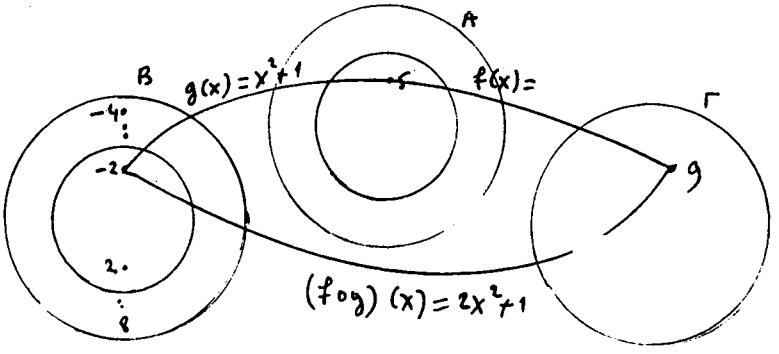
$\Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big]$ $\Longleftrightarrow$ $-2 \le x^2 \le 4$ $\Longleftrightarrow$ $0 \le x^2 \le 4$ $\Longleftrightarrow$

$\Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big]$ $-4 \le x \le 8$ $-4 \le x \le 8$

$$-2 \le x \le 2 \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big]$$
$$-4 \le x \le 8 \quad \Big] \quad \Big| \quad \Big]$$

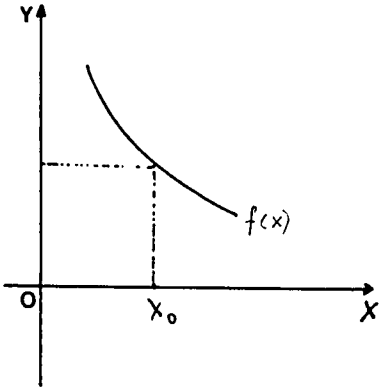
$\Longleftrightarrow -2 \le x \le 2$ Άρα $B' = [-2,2]$ <> οπότε ορίζεται η

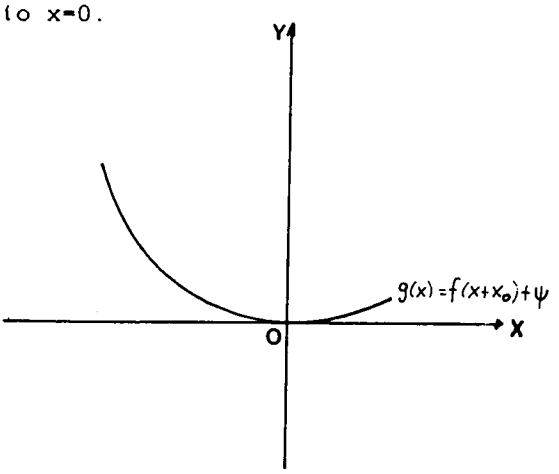
$f \circ g$ ως $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2+1)-1 = 2x^2+1$



4.6 Μετατοπίσεις

Αν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση και κ ένας πραγματικός αριθμός τότε η συνάρτηση g με $g(x)=f(x+κ)$ προκύπτει μετατοπίζοντας τη γραφική παράσταση της f, οριζοντίως κατά-κ ώστε το σημείο x=κ να πάει στο σημείο x=0.



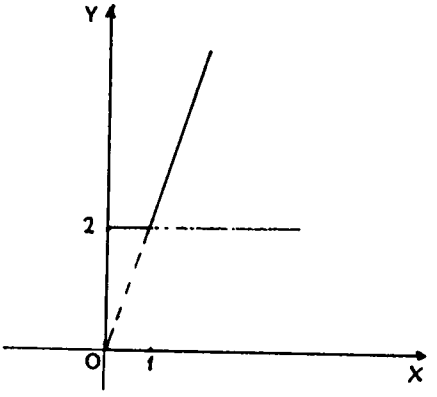


Για μετατόπιση στην κάθετη κατεύθυνση παίρνομε $h(x)=f(x)+\beta$.

4.7 Τμηματικά ορισμένες συναρτήσεις

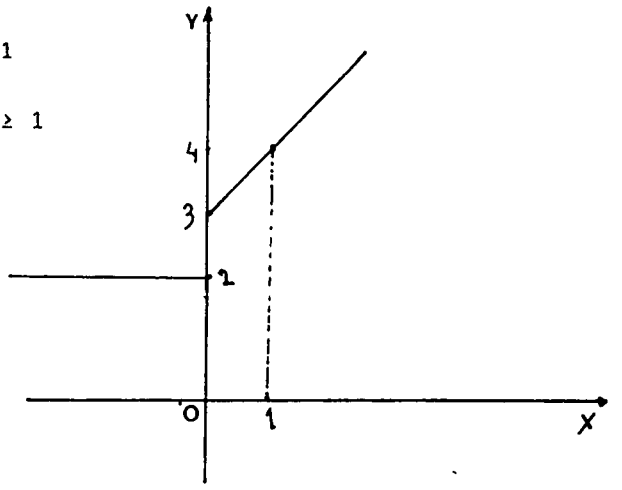
Οι συναρτήσεις που προκύπτουν από άλλες στοιχειώδεις με διάφορους συνδυασμούς, λέμε ότι δίδονται σε αναλυτική μορφή. Έτσι συχνά χρησιμοποιούμε και συναρτήσεις που ορίζονται με διαφορετικούς τύπους σε διάφορα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού τους, όπως π.χ.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ για } x \le 1 \\ 2x \text{ για } x \ge 1 \end{cases}$$



Παρατήρηση: Στο σημείο $x_0=1$ οι τιμές συμπίπτουν.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ για } x \leq 1 \\ x+3 \text{ για } x \geq 1 \end{cases}$$



Παρατήρηση: Στο σημείο $x_0=1$ οι τιμές δεν συμπίπτουν, τότε λέμε ότι η f έχει βηματική ασυνέχεια στο σημείο 1.

5. Μονοτονία συναρτήσεων

Μια συνάρτηση f ορισμένη στο A ονομάζεται:

1) Γνησίως αύξουσα ($f \uparrow$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \dashrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2) Γνησίως φθίνουσα ($f \downarrow$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \dashrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3) Αύξουσα ($f \uparrow$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \dashrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

4) Φθίνουσα ($f \downarrow$) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \dashrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα χαρακτηρίζεται γνησίως μονότονη.

Μια συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα χαρακτηρίζεται μονότονη.

Το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης καθορίζεται και από το πρόσημοτου λόγου μεταβολής:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

Ετσι η f είναι στο $A_1 \subseteq A$:

<u>Γνησίως αύξουσα</u>, $f \uparrow$, όταν $x_1, x_2 \in A_1$, $\lambda > 0$.

<u>Γνησίως φθίνουσα</u>, $f \downarrow$, όταν. $x_1, x_2 \in A_1$, $\lambda < 0$

<u>Αύξουσα</u>, $f \uparrow$, όταν $x_1, x_2 \in A_1$, $\lambda \geq 0$.

<u>Φθίνουσα</u>, $f \downarrow$, όταν $x_1, x_2 \in A_1$, $\lambda \leq 0$.

Επειδή για μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο Α ισχύει $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ και με $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Ομοια και για κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Δηλαδή κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι συνάρτηση 1-1.

<u>Παράδειγμα</u>
Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση:

$$f \text{ με } f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Λύση
Για κάθε $x_1, x_2 \in R-\{2\}$ έχομε:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1/(x_1-2) - x_2/(x_2-2)}{x_1 - x_2} =$$

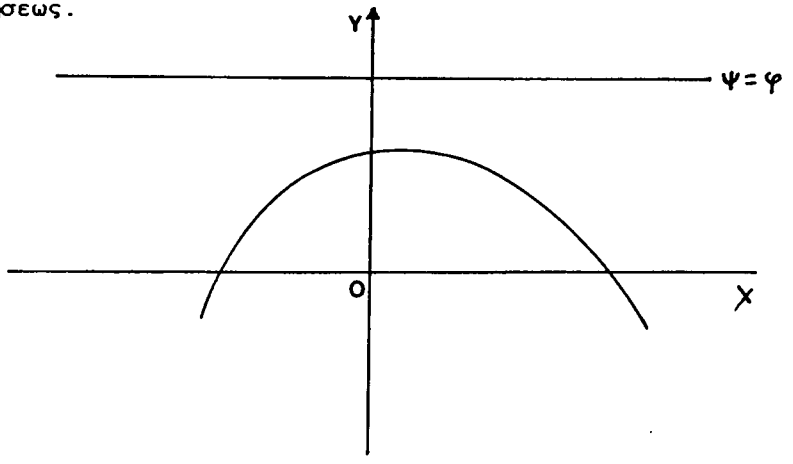
$$= \frac{x_1x_2 - 2x_1 - x_1x_2 + 2x_2}{(x_1-2)(x_2-2)(x_1-x_2)} = \frac{-2(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)\cdot(x_1-x_2)} = \frac{-2}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

Έτσι αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $x_1<2$, $x_2<2$ $\Rightarrow$ $x_1-2<0$, $x_2-2<0$ άρα $(x_1-2)(x_2-2) > 0$ οπότε $\lambda<0$ άρα στο $(-\infty, 2)$ η f (γνησίως φθίνουσα).
Αν $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $x_1>2$, $x_2>2$ $\Rightarrow$ $x_1-2>0$, $x_2-2>0$ οπότε $\lambda<0$ άρα και στο $(2, +\infty)$ η f (γνησίως φθίνουσα).

6. Φραγμένη συνάρτηση

Ο ρ ι σ μ ο ί
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται:

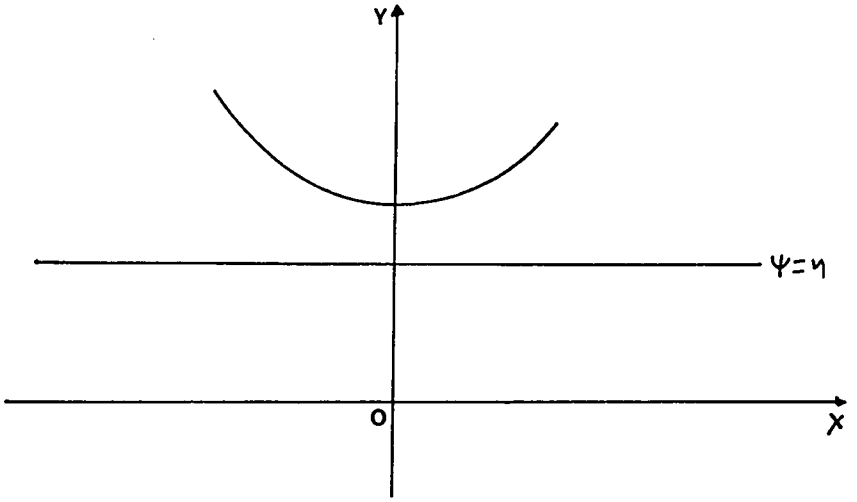
1) <u>Φραγμένη άνω</u> όταν υπάρχει $\varphi \in R$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq \varphi$ $x \in A$. Δηλαδή αν μια συνάρτηση f έχει άνω φράγμα, το φ, <u>όλα</u> τα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται "<u>κάτω</u>" από την ευθεία $\psi=\varphi$. Ο φ και κάθε μεγαλύτερος του αριθμός λέγεται <u>άνω φράγμα</u> της συναρτήσεως.



2) <u>Φραγμένη κάτω</u> όταν υπάρχει $n \in R$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq n \qquad x \in A$$

Δηλαδή αν μια συνάρτηση f έχει κάτω φράγμα το n, <u>όλα</u> τα σημεία της γραφικής της παράστασης βρίσκονται "<u>πάνω</u>" από την ευθεία $\psi=n$. Ο n και κάθε μικρότερος του αριθμός λέγεται <u>κάτω φράγμα</u> της συναρτήσεως.



Γενικά μια συνάρτηση λέγεται <u>φραγμένη</u> όταν είναι φραγμένη άνω και φραγμένη κάτω.

<u>Σημείωση</u>: Αν υπάρχει το μέγιστο στοιχείο ψ_o του πεδίου τιμών της $f|A$, τότε υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $x_o \in A$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq \psi_o = f(x_o) \qquad x \in A$$

Η τιμή $f(x_o)=\psi_o$ είναι η μέγιστη τιμή της συναρτήσεως. Όμοια: αν υπάρχει το ελάχιστο στοιχείο ψ_o του πεδίου τιμών της $f|A$, τότε υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $x_o \in A$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq \psi_o = f(x_o) \qquad x \in A$$

Η τιμή $f(x_o) = \psi_o$ είναι η ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως.

<u>Παράδειγμα</u>
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + 3x + 2$ είναι: I) Φραγμένη κάτω στο $A_1=(2,+\infty)$, II) Φραγμένη στο $A_2=(1,3)$.

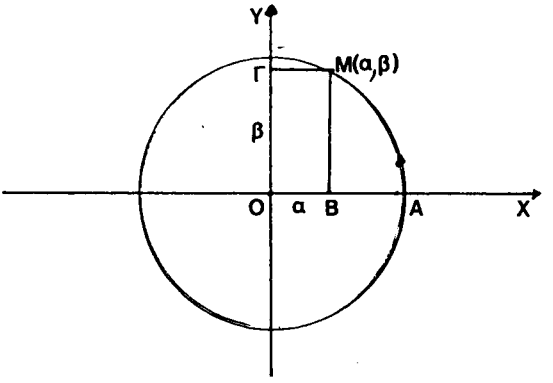
Λύση
I) Για κάθε $x \in (2,+\infty)$ είναι $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ και $3x > 6$. Άρα $x^2 + 3x + 2 > 4 + 6 + 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 > 12$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$. Δηλαδή η f είναι φραγμένη κκάτω στο $(2,+\infty)$ και ο 12 είναι ένα <u>κάτω</u> φράγμα της.

II) Για κάθε $x \in (1,3)$ είναι $1 < x < 3 \Rightarrow 1 < x^2 < 9$ και $3 < 3x < 9$ άρα $1+3 < x^2 + 3x < 9+3 \Leftrightarrow 4 < x^2 + 3x < 12 \Leftrightarrow 4+2 < x^2 + 3x + 2 < 12+2 \Leftrightarrow 6 < x^2 + 3x + 2 < 14$. Επομένως η f είναι φραγμένη στο $(1,3)$.

7. Βασικές συναρτήσεις

7.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Έστω ο τριγωνομετρικός κύκλος με αρχή Α και Οχψ το προσαρτημένο σ'αυτόν σύστημα αναφοράς. Ο πραγματικός αριθμός χ απεικονίζεται με την κανονική απεικόνιση στο τέλος του τόξου ΑΜ που είναι προσανατολισμένο κατά το πρόσημο του χ και έχει μήκος $|\chi|$.

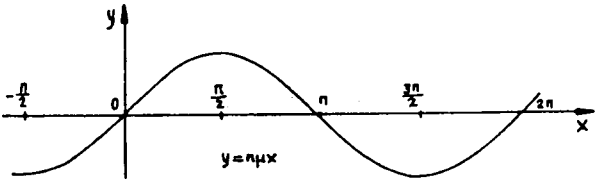


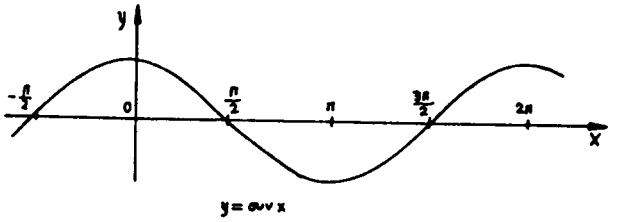
Αν (α,β) είναι οι συντεταγμένες του Μ, ως προς το σύστημα Οχψ και αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε $x \in R$ την τετμημένη α του $M=\varphi(\chi)$, τότε ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση, πραγματικής μεταβλητής, που ονομάζεται συνημίτονο και συμβολίζεται με συν ή cos. Είναι δηλαδή $x \in R$, $συνχ=cosχ=$τετμημένη α του $M=\varphi(\chi)$.

Όμοια ορίζεται η συνάρτηση ημίτονο, συμβολικά ημ ή sin. Δηλαδή $x \in R$, $ημχ=sinχ=$τετμημένη β του $M=\varphi(\chi)$.

$M=\varphi(\chi)$, $α=συνχ=cosχ$, $β=ημχ=sinχ$.

Οι συναρτήσεις ημχ, συνχ είναι φραγμένες: $-1 \leq συνχ \leq 1$, $-1 \leq ημχ \leq 1$. Επίσης $\chi \in R$, $\kappa \in Z$ ισχύει $συνχ=συν(2\kappa\pi+\chi)$, $ημχ=ημ(2\kappa\pi+\chi)$. Σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων οι συναρτήσεις $\psi=ημχ$, $\psi=συνχ$ παρίστανται:





$y = \sigma\upsilon\nu x$

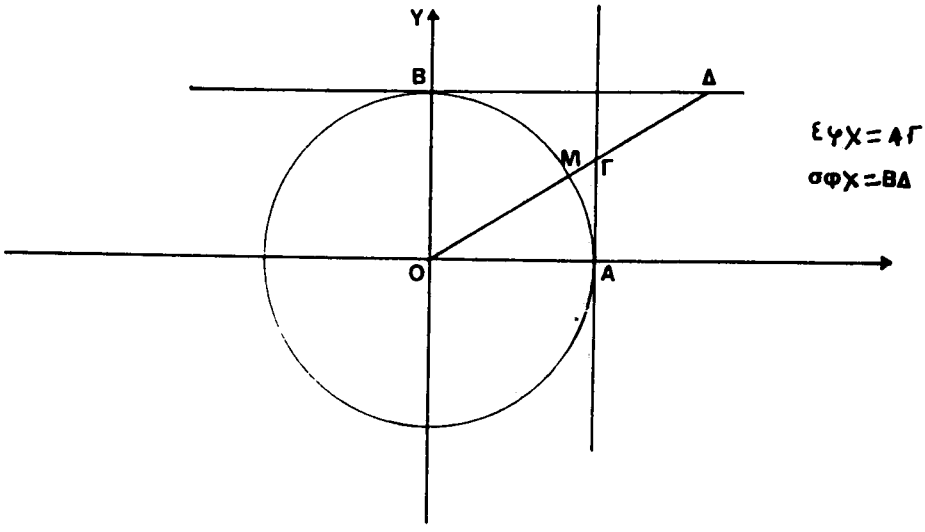
Η συνάρτηση συνχ είναι συνεχής στο R, γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα $[(2\kappa+1)\pi, 2(\kappa+1)\pi]$ και γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα $[2\kappa\pi, (2\kappa+1)\pi]$, $\kappa \in Z$.

Η συνάρτηση ημχ είναι συνεχής στο R, γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα $[2\kappa\pi-\pi/2, 2\kappa\pi+\pi/2]$ και γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημο $[2\kappa\pi+\pi/2, 2\kappa\pi+3\pi/2]$, $\kappa \in Z$.

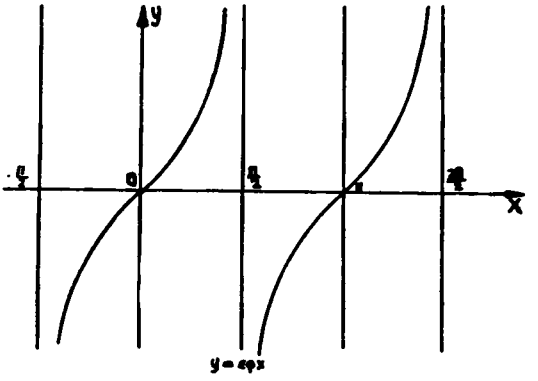
Επίσης ορίζονται οι συναρτήσεις:

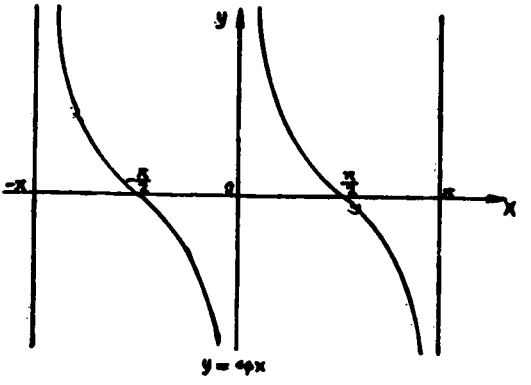
$$\varepsilon\varphi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} \mid \chi \neq \kappa\pi + \pi/2, \quad \kappa = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\sigma\varphi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} \mid \chi \neq \kappa\pi, \quad \kappa = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$



Οι συναρτήσεις εφχ και σφχ σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων παρίστανται:





Η συνάρτηση εφχ | (-π/2,π/2) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση σφχ | (-π/2,π/2) είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Ισχύουν δε

$$\lim_{\chi\to\pi/2^-} \varepsilon\varphi\chi = +\infty \,, \qquad \lim_{\chi\to\pi/2^+} \varepsilon\varphi\chi = -\infty$$

$$\lim_{\chi\to-\pi/2^-} \varepsilon\varphi\chi = +\infty \,, \qquad \lim_{\chi\to-\pi/2^+} \varepsilon\varphi\chi = -\infty$$

$$\lim_{\chi\to\pi^-} \sigma\varphi\chi = -\infty \,, \qquad \lim_{\chi\to\pi^+} \sigma\varphi\chi = +\infty$$

$$\lim_{\chi\to0^-} \sigma\varphi\chi = -\infty \,, \qquad \lim_{\chi\to0^+} \sigma\varphi\chi = +\infty$$

7.2 Αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (κυκλομετρικές συναρτήσεις)

Η συνάρτηση χ=ημψ αντιστρέφεται σε κάθε κλειστό διάστημα [2κπ-π/2,2κπ+π/2] αντίστοιχα [2κπ+π/2,2κπ+3π/2], κ ∈ Ζ. Την αντίστροφη της χ=ημψ σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά τα συμβολίζομε:

$$\psi=\text{τοξ}_\kappa\eta\mu\chi \;|\; -1 \le \chi \le 1 \,, \quad \kappa \in Z$$

$$\psi=\tilde{\text{τ}}\text{οξ}_\kappa\eta\mu\chi \;|\; -1 \le \chi \le 1 \,, \quad \kappa \in Z$$

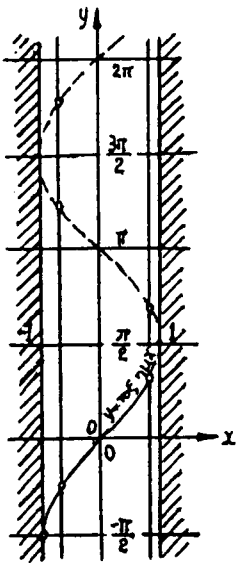
Κάθε συνάρτηση ψ=τοξ$_\kappa$ημχ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Κάθε συνάρτηση ψ=$\tilde{\text{τ}}$οξ$_\kappa$ημχ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Επίσης ισχύει:

$$\psi = \text{τοξ}_\kappa\eta\mu\chi = \text{τοξ}_0\eta\mu\chi + 2\kappa\pi \;|\; \kappa=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

$$\psi = \tilde{\text{τ}}\text{οξ}_\kappa\eta\mu\chi = -\tilde{\text{τ}}\text{οξ}_0\eta\mu\chi + (2\kappa+1)\pi \;|\; -1 \le \chi \le 1$$



Η συνάρτηση χ=συνψ αντιστρέφεται σε κάθε κλειστό διάστημα [2κπ,(2κ+1)π] αντίστοιχα [(2κ+1)π,2(κ+1)π] την αντίστροφη της χ=συνψ σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά τη συμβολίζομε:

$$\psi = \text{το}\xi_{\kappa}\text{συν}\chi \mid -1 \leq \chi \leq 1$$

αντίστοιχα

$$\psi = \tilde{\text{το}}\xi_{\kappa}\text{συν}\chi \mid -1 \leq \chi \leq 1 \ , \ \kappa \in Z$$

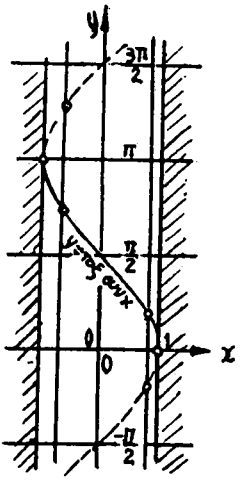
Κάθε συνάρτηση των $\psi = \text{το}\xi_{\kappa}\text{συν}\chi$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Κάθε συνάρτηση των $\psi = \tilde{\text{το}}\xi_{\kappa}\text{συν}\chi$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Επίσης ισχύει:

$$\psi = \text{το}\xi_{\kappa}\text{συν}\chi = \text{το}\xi_{o}\text{συν}\chi + 2\kappa\pi \mid \kappa=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

$$\psi = \tilde{\text{το}}\xi_{\kappa}\text{συν}\chi = -\tilde{\text{το}}\xi_{o}\text{συν}\chi + 2(\kappa+1)\pi \mid -1 \leq \chi \leq 1$$



Η συνάρτηση χ=εφψ αντιστρέφεται σε κάθε ανοικτό διάστημα (κπ-π/2,κπ+π/2) κ ∈ Z και συμβολίζεται

$$\psi=\text{τοξ}_\kappa\varepsilon\varphi\chi \mid -\infty < \chi < +\infty \qquad \kappa \in Z$$

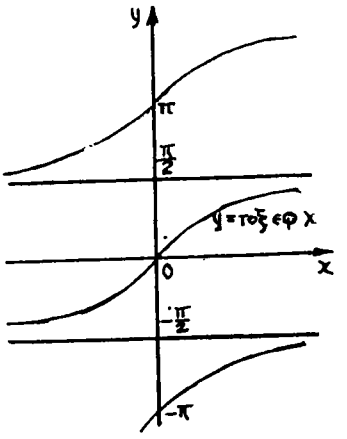
Κάθε ψ=τοξ$_\kappa$εφχ είναι συνεχώς και γνησίως αύξουσα.

Επίσης ισχύουν

$$\lim_{\chi\to+\infty} \text{τοξεφχ} = \pi/2 \qquad \lim_{\chi\to-\infty} \text{τοξεφχ} = -\pi/2$$

και

$$\text{τοξ}_\kappa\varepsilon\varphi\chi = \kappa\pi + \text{τοξ}_o\varepsilon\varphi\chi$$



Η συνάρτηση χ=σφψ αντιστρέφεται σε κάθε ανοικτό διάστημα (κπ,(κ+1)π) κ ∈ Ζ και συμβολίζεται

$$\psi=\text{τοξ}_{\kappa}\sigma\varphi\chi \mid -\infty < \chi < +\infty \qquad \kappa \in Z$$

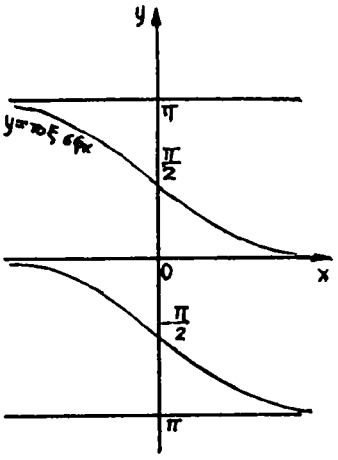
Κάθε ψ=τοξ$_κ$σφχ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Επίσης ισχύουν

$$\lim_{\chi\to+\infty} \text{τοξσφχ} = 0 \qquad \lim_{\chi\to-\infty} \text{τοξσφχ} = \pi$$

και

$$\tilde{\text{τοξ}}_{\kappa}\sigma\varphi\chi = \kappa\pi + \text{τοξ}_{o}\sigma\varphi\chi$$



$\text{τοξ}_{\kappa}\text{σφ}x = \kappa\pi + \text{τοξ}_{0}\text{σφ}x$

7.3 Εκθετική συνάρτηση

Για κάθε $0 < \alpha < 1$ μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f, η οποία σε κάθε $x \in R$ αντιστοιχίζει το θετικό αριθμό α^x. Δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση f του R στο R^*_+ με $f(x)=\alpha^x$. Η f λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α.

Για την εκθετική συνάρτηση έχομε:

I) Αν $\alpha>1$ τότε η α^x είναι γνησίως αύξουσα και

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$$

II) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε η α^x είναι γνησίως φθίνουσα και

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$$

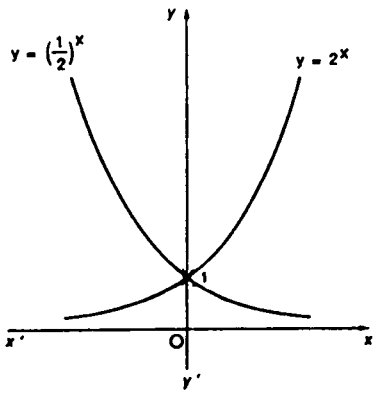
III) Αν α=1 τότε το $α^x$ είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή 1.

Παράδειγμα
Για α = 2 > 1 έχομε $f(x)=2^x$.

Για α = 1/2 < 1 έχομε $f(x)=(1/2)^x$.

Για α = 1 έχομε $f(x)=1^x=1$ σταθερή

και γραφικά:



$α=\frac{1}{2}<1$ η $ψ=(\frac{1}{2})^x$ ↓

$α=2>1$ η $ψ=2^x$ ↑

Η συνάρτηση $α^x$ είναι συνεχής στη R.

Η $ψ=α^x$ με $α=e\approx2,72... >1$ παίρνει τη μορφή $ψ = e^x$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

Επίσης ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

7.4 Λογαριθμική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση $f: R \dashrightarrow R^*_+$ με $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ είναι:

I. Γνησίως μονότονη

II. Συνάρτηση 1-1

III. Συνάρτηση επί

Ορίζεται επομένως η αντίστροφη συνάρτηση που είναι και αυτή 1-1 και επί.

Την αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης με βάση το α την συμβολίζομε $\log_a$ και την ονομάζουμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α.

$$a^x = \psi \Longleftrightarrow \log_a\psi = \chi \quad \text{και} \quad \chi \in R^*_+ , \quad a^{\log_a x} = \chi$$

Επίσης ισχύουν:

$$\log_a 1 = 0 , \quad \log_a a = 1 , \quad \log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

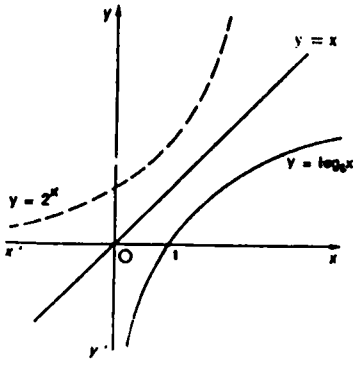
$$\log_a(x_1+x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2 : \ x_1, x_2 \in R^*_+$$

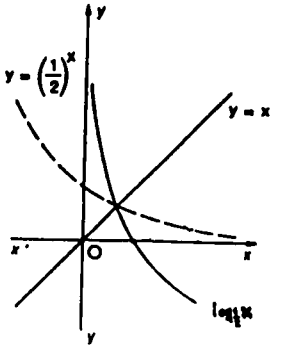
$$\log_a \chi^\psi = \psi \log_a \chi \quad (\chi \in R^*_+ , \ \psi \in R)$$

Αν $a>1$ τότε $\log_a$ και $\lim\limits_{\chi\dashrightarrow+\infty} \log_a\chi = +\infty$, $\lim\limits_{\chi\dashrightarrow 0^+} \log_a\chi = -\infty$

Αν $0<a<1$ τότε $\log_a$ και $\lim\limits_{\chi\dashrightarrow+\infty} \log_a\chi = -\infty$, $\lim\limits_{\chi\dashrightarrow 0^+} \log_a\chi = -\infty$

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχής στο R^*_+.





Σημείωση: Αν θεωρήσουμε την εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x)=e^x$ τότε η αντίστροφη της λογαριθμική συμβολίζεται με ln (αντί $\log_e$) και ο αριθμός lnx λέγεται φυσικός (Νεπέρειος) λογάριθμος του χ. Αν ως βάση θεωρηθεί ο αριθμός 10 αντί $\log_{10}$ γράφουμε log.

7.5 Υπερβολικές συναρτήσεις και οι αντίστροφες των

Ορίζουμε ως υπερβολικό ημίτονο sinhx, υπερβολικό συνημίτονο coshx, υπερβολική εφαπτομένη tghx και υπερβολική συνεφαπτομένη ctghx τις συναρτήσεις:

$$\text{sinhx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \mid -\infty < \chi < +\infty$$

$$\text{coshx} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \mid -\infty < \chi < +\infty$$

$$\text{tgx} = \frac{\text{sinhx}}{\text{coshx}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \mid -\infty < x < +\infty$$

$$\text{ctgx} = \frac{\text{coshx}}{\text{sinhx}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \mid -\infty < \chi < 0 \text{ και } 0 < \chi < +\infty$$

Η συνάρτηση sinhx είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$.

Η συνάρτηση coshx είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η συνάρτηση tghx είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$.

Η συνάρτηση ctghx είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ $(0,+\infty)$.

Ισχύουν δε:

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$$

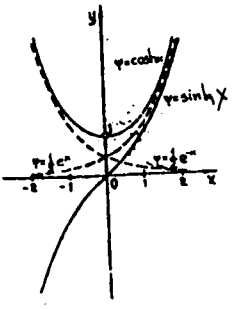
$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$$

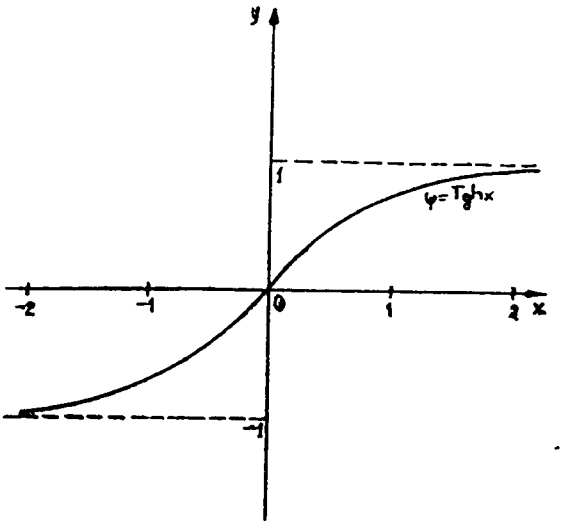
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tgh} x = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x = -1$$

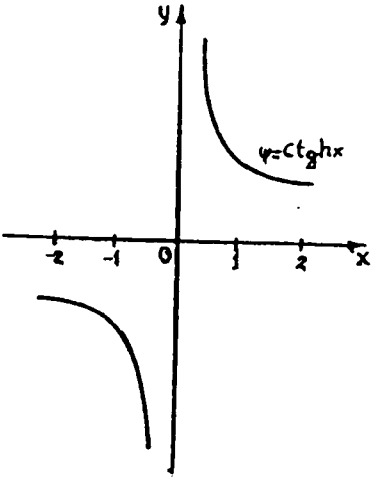
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ctgh} x = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ctgh} x = -1$$

$$\lim_{x\to0^+} \operatorname{ctgh} x = -\infty \qquad \lim_{x\to0^-} \operatorname{ctgh} x = -\infty$$

Σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων οι υπερβολικές συναρτήσεις παρίστανται ως εξής:




y
1
y=Tgh x
-2
-1
0
1
2
x
-1


y
y=ctgh x
-2
-1
0
1
2
x

Για τις υπερβολικές συναρτήσεις ισχύει:

α) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Απόδειξη

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^x e^{-x} = e^0 = 1$$

β) $\sinh(x+\psi) = \sinh x\cosh\psi + \cosh x\sinh\psi.$

Απόδειξη

$$\sinh x\cosh\psi + \cosh x\sinh\psi = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2} =$$

$$= \frac{e^{x+\psi} + e^{x-\psi} - e^{\psi-x} - e^{-(x+\psi)}}{4} + \frac{e^{x+\psi} - e^{x-\psi} + e^{\psi-x} - e^{-(x+\psi)}}{4} =$$

$$= \frac{2e^{x+\psi} - 2e^{-(x+\psi)}}{4} = \frac{e^{x+\psi} - e^{-(x+\psi)}}{2} = \sinh(x+\psi).$$

γ) $\cosh(x+\psi) = \cosh x\cosh\psi + \sinh x\sinh\psi.$

δ) $(\cosh x + \sinh x)^k = \cosh kx + \sinh kx = e^{kx} \mid k=0,1,2,\ldots$

Απόδειξη

$$(\cosh x + \sinh x)^k = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^k = \left(\frac{2e^x}{2}\right)^k = e^{kx} = \frac{2e^{kx}}{2} =$$

$$= \frac{e^{kx} + e^{kx}}{2} = \frac{e^{kx} + e^{kx} + e^{-kx} - e^{-kx}}{2} = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} + \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} =$$

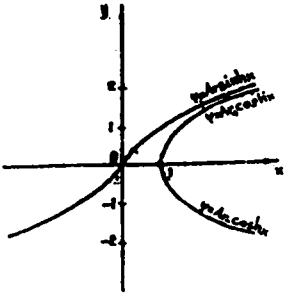
$$= \text{coshkx} + \text{sinhkx}.$$

Η αντίστροφη συνάρτηση της $x=\sinh\psi \mid -\infty < \psi < +\infty$ υπάρχει, είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής και συμβολίζεται με

$$\psi = \text{Arsinh}x = \log(x+\sqrt{x^2+1}) \mid -\infty < x < +\infty$$

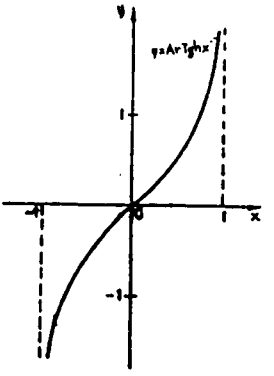
Η αντίστροφη συνάρτηση της $x=\cosh\psi \mid -\infty < \psi < +\infty$ είναι δίτιμος (έχει δύο κλάδους), ο ένας κλάδος παριστά μια γνησίως αύξουσα και συνεχή συνάρτηση, ο δε άλλος κλάδος παριστά μια γνησίως φθίνουσα και συνεχή συνάρτηση, συμβολίζονται δε:

$$\left.\begin{array}{l} \psi = \text{Ar}_+\text{cosh}x = \log(x+\sqrt{x^2-1}) \\ \psi = \text{Ar}_-\text{cosh}x = \log(x-\sqrt{x^2-1}) \end{array}\right| \; 1 \le x \le +\infty$$



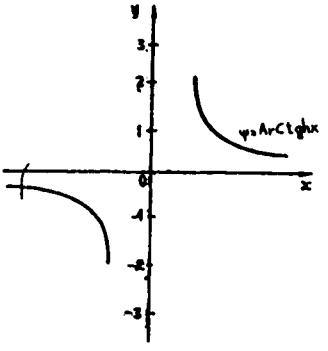
Η αντίστροφη συνάρτηση της x=tghψ | $-\infty < \psi < +\infty$ είναι μονότιμος συνάρτηση γνησίως φθίνουσα και συνεχής, συμβολίζεται με:

$$\psi = \text{Artgh}x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \mid -1 < x < 1$$



Η αντίστροφη συνάρτηση της x=ctghx | $-\infty < \psi < 0$ και $0 < \psi < +\infty$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $1 < \chi < +\infty$ και $-\infty < \chi < -1$ συμβολίζεται δε με:

$$\psi = \text{Arctgh}x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \mid -\infty < x < -1 \text{ και } 1 < \chi < +\infty$$



Για τις υπερβολικές συναρτήσεις ισχύουν: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ και επειδή η σχέση $x^2 - \psi^2 = 1$ είναι η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής, αν θέσουμε $x=\cosh x$, $\psi=\sinh x$ συμπεραίνουμε ότι τα $\cosh x$ ή $\sinh x$ ονομάζονται <u>υπερβολικές συναρτήσεις</u>.

$$\sinh(x+\psi) = \sinh x\cosh\psi + \cosh x\sinh\psi$$

$$\cosh(x+\psi) = \cosh x\cosh\psi + \sinh x\sinh\psi$$

$(\cosh x + \sinh x)^k = \cosh kx + \sinh kx = e^{kx}$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

8. Όριο μεταβλητής - όριο συνάρτησης

8.1 Όριο μεταβλητής

Ο ρ ι σ μ ο ί: Καλούμε όριο της μεταβλητής χ, ($\chi_1, \chi_2, \ldots$ η ακολουθία των τιμών της), αν για κάθε $\varepsilon>0$ (όσο θέλουμε μικρό) προσδιορίζουμε μια τιμή της χ, ώστε για όλες τις επόμενες να ισχύει:

$$|\chi-\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \chi-\alpha < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha-\varepsilon < \chi < \alpha+\varepsilon$$

τότε λέμε ότι η μεταβλητή χ τείνει στο α και σημειώνουμε $\chi \to \alpha$ ή $\lim \chi = \alpha$ (δηλαδή μπορούμε να προσδιορίσουμε μια τιμή της μεταβλητής χ τέτοια ώστε, για όλες τις επόμενες τιμές της να αληθεύει η σχέση $|\chi-\alpha| < \varepsilon$).

Θα λέμε ότι η μεταβλητή χ τείνει στο οο και θα σημειώνουμε $\chi \to$ οο ή $\lim x =$ οο, αν για κάθε $M > 0$ (όσο θέλουμε μεγάλο) ισχύει $|\chi| > M$.

Ειδικότερα

Θα λέμε ότι η μεταβλητή χ τείνει στο +οο και θα σημειώνουμε $\chi \to +$οο ή $\lim \chi =$ +οο, αν για κάθε $M > 0$ (όσο θέλουμε μεγάλο) ισχύει $\chi > M$.
(Δηλαδή μπορούμε να βρούμε τιμή της μεταβλητής χ από την οποία όλες οι επόμενες επαληθεύουν τη σχέση $\chi > M$).

Ομοίως θα λέμε ότι η μεταβλητή χ τείνει στο $-\infty$ και θα σημειώνουμε $\chi \dashrightarrow -\infty$ ή $\lim \chi = -\infty$ αν για κάθε $M > 0$ (όσο θέλουμε μεγάλο) ισχύει $\chi < -M$.
(Δηλαδή μπορούμε να βρούμε τιμή της μεταβλητής χ από την οποία όλες οι επόμενες τιμές να επαληθεύουν τη σχέση $\chi < -M$).

Παραδείγματα

1. Το όριο της μεταβλητής χ που έχει ακολουθία τιμών $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/\nu$ είναι το μηδέν.

Απόδειξη
Για κάθε $\varepsilon > 0$ (όσο θέλουμε μικρό) ισχύει:

$$\left| \frac{1}{\nu} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |1/\nu| < \varepsilon \Leftrightarrow 1/\nu < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > 1/\varepsilon$$

Δηλαδή προσδιορίσαμε μια τιμή της μεταβλητής χ, την $1/\varepsilon$ ώστε όλες οι επόμενες τιμές της να επαληθεύουν τη σχέση:

$$|\chi_\nu - 0| < \varepsilon \ , \quad \text{με } \nu \geq [1/\varepsilon] + 1$$

άρα $\chi \dashrightarrow 0$ ή $\lim \chi = 0$. Και με συγκεκριμένο ε:

Έστω $\varepsilon = 0{,}001$ τότε $\nu > \dfrac{1}{0{,}001} = 1000$. Τότε για όλα τα

$$\nu \geq \left[\frac{1}{0{,}001}\right] + 1 = 1000 + 1 = 1001 \quad \text{και μετά ισχύει:}$$

$$\left|\frac{1}{1001} - 0\right| < 0{,}001 \Rightarrow \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000} \quad \text{που είναι αληθινό}$$

$$\left|\frac{1}{1002} - 0\right| < 0{,}001 \Rightarrow \frac{1}{1002} < \frac{1}{1000} \quad \text{που είναι αληθινό}$$

Άρα $\chi \dashrightarrow 0$ ή $\lim \chi = 0$.

2. Εστω η μεταβλητή χ με ακολουθία τιμών $3,5/2,7/3,\ldots,(2\nu+1)/\nu$ | $\nu \in N$. Να δειχθεί ότι η χ έχει όριο το 2.

Απόδειξη
Για κάθε $\varepsilon>0$ (όσο θέλουμε μικρό) ισχύει:

$$\left|\frac{2\nu+1}{\nu}-2\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{2\nu+1-2\nu}{\nu}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon}$$

Δηλαδή προσδιορίσαμε μια τιμή της μεταβλητής χ, ώστε όλες οι επόμενες τιμές να επαληθεύουν τη σχέση $|\chi_\nu-2| < \varepsilon$, με $\nu \geq [1/\varepsilon] + 1$ άρα $\chi \dashrightarrow 3$ ή $\lim \chi = 3$.

3. Εστω η μεταβλητή χ με ακολουθία τιμών $1,8,27,\ldots,\nu^3$ | $\nu \in N$. Να δειχθεί ότι η χ έχει όριο το $+\infty$.

Απόδειξη
Εστω $M > 0$ (όσο θέλομε μεγάλο) ισχύει:

$\nu^3 > M \Longrightarrow \nu > \sqrt[3]{M}$ για $\nu \geq [\sqrt[3]{M}] + 1$. Άρα η μεταβλητή $\chi \dashrightarrow +\infty$ ή $\lim \chi = +\infty$ και για συγκεκριμένο M όσο θέλουμε μεγάλο:

Εστω $M = 1000 > 0$ τότε ισχύει:

$\nu^3 > 1000 \Longrightarrow \nu > \sqrt[3]{1000} \Longrightarrow \nu > 10$ που σημαίνει ότι για ν:11,12,13,... έχομε

$$11^3 > 1000, \quad 12^3 > 1000, \ldots, \nu^3 > 1000$$

άρα η μεταβλητή $\chi \dashrightarrow +\infty$.

Αντιπαράδειγμα

Η μεταβλητή χ με ακολουθία τιμών:

$$\chi_1 = \frac{1}{3}, \chi_2 = 1+\frac{1}{2}, \chi_3 = \frac{1}{5}, \chi_4 = 1+\frac{1}{4}, \chi_5 = \frac{1}{7}, \chi_6 = 1+\frac{1}{6}.$$

$$\ldots, \chi_{2\kappa+1} = \frac{1}{2\kappa+3}, \quad \chi_{2\kappa+2} = 1 + \frac{1}{2\kappa+2}, \ldots \quad \kappa=0,1,2,3,\ldots$$

Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ (όσο θέλουμε μικρό) ισχύει:

$$\left|\frac{1}{2\kappa+3} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\kappa+3} < \varepsilon \Leftrightarrow 2\kappa\varepsilon + 3\varepsilon > 1 \Leftrightarrow 2\kappa\varepsilon > 1-3\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \kappa > \frac{1-3\varepsilon}{2} \quad \text{και}$$

$$\left|1 + \frac{1}{2\kappa+2} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\kappa+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 2\kappa\varepsilon+2\varepsilon < 1 \Leftrightarrow 2\kappa\varepsilon > 1-2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \kappa > \frac{1-2\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή για όλα τα $\kappa > \left[\frac{1-3\varepsilon}{2}\right] + 1$ ισχύει η $\left|\frac{1}{2\kappa+3} - 0\right| < \varepsilon$ (1)

και για $\kappa > \left[\frac{1-2\varepsilon}{2}\right] + 1$ ισχύει η $\left[1 + \frac{1}{2\kappa+2} - 1\right] < \varepsilon$ (2).

Δηλαδή για τον $\kappa+1$ όρο και μετά ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2). Επομένως η μεταβλητή χ έχει "ΔΥΟ ΟΡΙΑ" άρα λέμε ότι <u>δεν έχει όριο</u>.

8.2 Όριο συνάρτησης

8.2.1 Όριο πεπερασμένος αριθμός όταν $x \to x_0$.

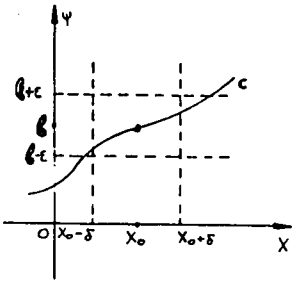
Έστω $\psi = f(x) \mid A$ μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής και ένας αριθμός $x_0 \in A$, στην περιοχή του οποίου ορίζεται η συνάρτηση και ενδεχομένως να μην ορίζεται για $x = x_0$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $\psi = f(x)$ έχει όριο τον πραγματικό αριθμό β, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ (όσο θέλουμε μικρό) μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα δ εξαρτώμενο από το ε, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ώστε για κάθε $x \neq x_0$, να ισχύει η σχέση:

$$|f(x) - \beta| < \varepsilon \text{ υπό την προυπόθεση } |x - x_0| < \delta.$$

Δηλαδή εάν $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ τότε $|f(x) - \beta| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - \beta < \varepsilon \Leftrightarrow \beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$ που σημαίνει:
Όταν ο x παίρνει τιμές στη περιοχή κέντρου x_0 και ακτίνας δ, οι τιμές της $f(x)$ βρίσκονται στην περιοχή κέντρου β και ακτίνας ε.
Σημειώνουμε δε
Αν $x \to x_0$ ή $\lim x = x_0$ τότε $f(x) \to \beta$ ή $\lim f(x) = \beta$ ή συνοπτικότερα

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$$

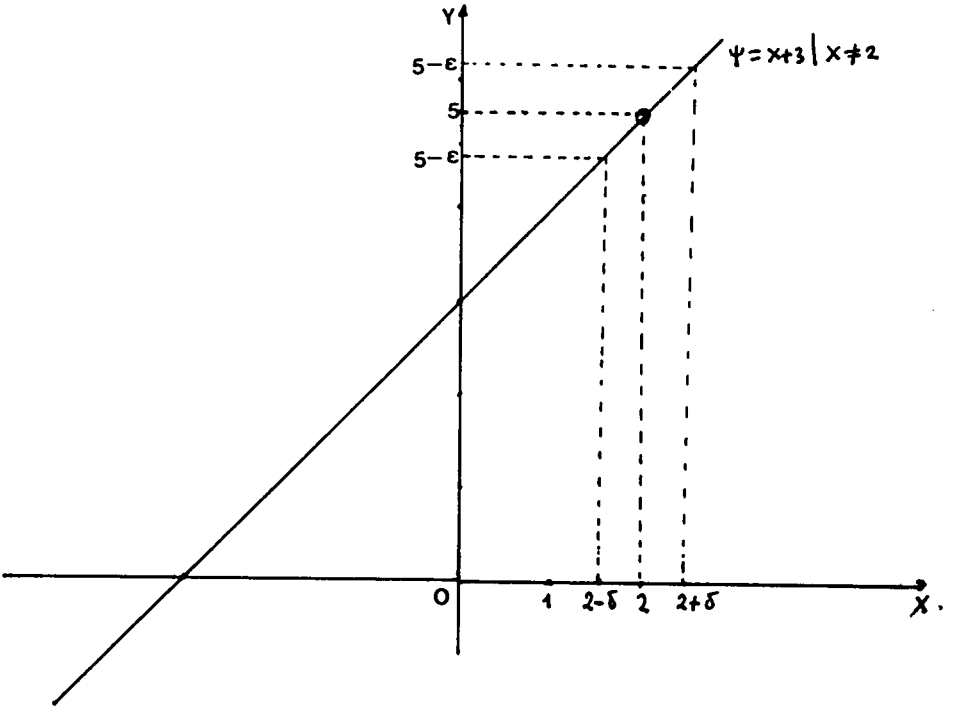


Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το όριο της $\psi=f(x)=\frac{(\chi+3)(\chi-2)}{\chi-2}$ | $A=R-\{2\}$ όταν $\chi\dashrightarrow 2$.

Λύση

Η $\psi = f(x)$ γράφεται $\psi=\chi+3$, που έχει γραφική παράσταση



Από την παρατήρηση του σχήματος φαίνεται ότι όταν ο χ παίρνει τιμές στην περιοχή του 2, τότε η $f(x)=x+3$ παίρνει τιμές στην περιοχή του αριθμού 5.

Η διαφορετικά

Όταν ο χ πλησιάζει στο 2 είτε από μεγαλύτερες είτε από μικρότερες τιμές τότε η συνάρτηση $f(x)=x+3$ παίρνει τιμές που πλησιάζουν στον αριθμό 5 είτε από μεγαλύτερες είτε από μικρότερες τιμές.

Έτσι όσο η διαφορά της μεταβλητής χ από τον αριθμό 2 γίνεται απολύτως όσο μικρή θέλουμε, τόσο και η διαφορά των τιμών της $f(x)$ από τον αριθμό 5 γίνεται επίσης μικρή. Αν π.χ. θέσουμε $\chi=2,001$ έχομε απόλυτη τιμή διαφοράς $|2 - 2,001| = 0,001$ και $f(2,001)$ =

= 2,001 + 3 = 5,001 άρα απόλυτη τιμή διαφοράς |5 - 5,001| = 0,001.

Αν χ=1,009 έχομε απόλυτη τιμή διαφοράς |2 - 1,009| = 0,001 και f(1,009) = 3 + 1,009 = 4,009 και απόλυτη τιμή διαφοράς |5 - 4,009| = 0,001.

Άρα

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+3) = 5$$

2. Να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{x\to 1} (2x+1) = 3$$

Απόδειξη
Έστω ε > 0, τότε |2χ+1-3| < ε <--> |2χ-2| < ε <--> 2|χ-1| < ε

<--> |χ-1| < ε/2.

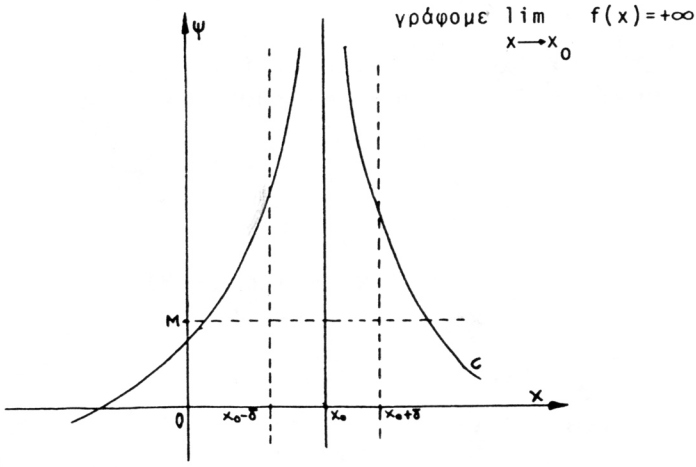
Άρα αν εκλέξουμε ως δ το ε/2 έχομε 0 < |χ-1| < δ <-->

|2χ+1-3| <ε που σημαίνει $\lim_{x\to 1} (2x+1) = 3$.

8.2.2 Όριο το +οο όταν χ-->χ$_o$

Έστω μια συνάρτηση ψ=f(x)|A μια πραγματική συνάρτηση και ένας αριθμός χ$_o$ ∈ A στην περιοχή του οποίου ορίζεται η f(x). Θα λέμε ότι η συνάρτηση έχει όριο στο χ$_o$ το +οο όταν για κάθε M>0 (όσο θέλουμε μεγάλο) υπάρχει δ>0, τέτοιο ώστε |χ-χ$_o$| < δ --> f(x) > M για κάθε χ ∈ A και γράφουμε:

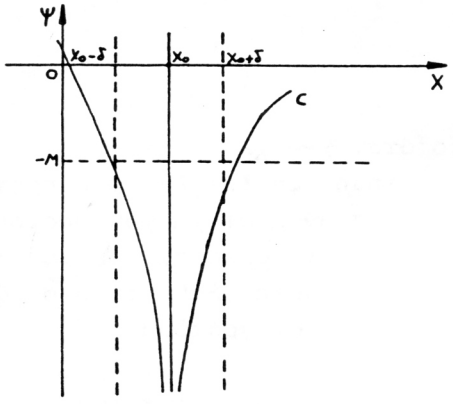
$$\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$$



8.2.3 Όριο το -οο όταν χ-->χο.

Έστω μια συνάρτηση ψ=f(x)|A μια πραγματική συνάρτηση και ένας αριθμός χο ε Α στην περιοχή του οποίου ορίζεται η f(x). Θα λέμε ότι η συνάρτηση έχει όριο στο χο το -οο, όταν για κάθε M>0 (όσο θέλουμε μεγάλο), υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε |χ-χο| < δ ==> f(x) > -M για κάθε χ ε Α και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty$$



8.3 Όριο συνάρτησης στο +οο

8.3.1 Όριο πεπερασμένος αριθμός όταν χ-->+οο.

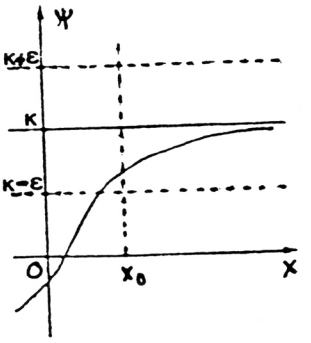
Έστω ψ=f(x) μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α που δεν είναι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο +οο τον αριθμό κ ε R, όταν για κάθε ε>0 υπάρχει χο ε Α τέτοιο ώστε για κάθε χ ε Α , χ>χο να ισχύει |f(x)-κ| < ε ή ισοδύναμα

$$|f(x)-\kappa| < \varepsilon \Leftrightarrow \kappa-\varepsilon < f(x) < \kappa+\varepsilon$$

και γράφουμε:

$$\lim_{\chi \to +\infty} f(x) = \kappa$$

Η ευθεία ψ=κ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της ψ=f(x).



Παράδειγμα

Να δειχθει ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x-1} = 2$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού

$A=(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για $\chi \in (1,+\infty)$ έχομε:

$$\left|\frac{2\chi-3}{\chi-1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2\chi-3-2\chi+2}{\chi-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{\chi-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\chi-1} < \varepsilon$$

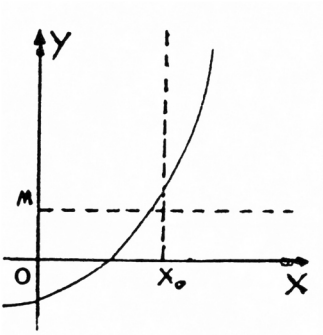
αφού $\chi > 1$ και $\chi-1 > 0$. Άρα $\chi-1 > 1/\varepsilon \Leftrightarrow \chi > 1 + 1/\varepsilon$. Αν εκλέξουμε ως $\chi_o=1+1/\varepsilon$, έχομε για κάθε $\chi \in A$ με $\chi > \chi_o \Rightarrow$

$\left|\frac{2\chi-3}{\chi-1} - 2\right| < \varepsilon$ που σημαίνει $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x-1} = 2$.

8.3.2 Όριο το +οο όταν χ-->+οο

Έστω $\psi=f(x)$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, που δεν είναι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο +οο, το +οο όταν για κάθε $M>0$ υπάρχει $\chi_o>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\chi \in A$, $\chi>\chi_o$ να ισχύει $f(x) > M$ ή ισοδύναμα: $f(x) > M \Leftrightarrow f(x) \in (M,+\infty)$ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$



Παράδειγμα
Να δειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$.

Απόδειξη
Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$. Αφού πρέπει $\chi^2-4 \geq 0$. Έστω $M > 0$ τότε έχομε:

$$\sqrt{x^2-4} > M \Leftrightarrow x^2-4 > M^2 \Leftrightarrow x^2 > 4 + M^2 \Leftrightarrow x^2 > \sqrt{4 + M^2}$$

Επομένως αν εκλέξουμε $\chi_o \geq \sqrt{4+M^2}$ τότε για κάθε $x \in A$, $x > x_o$ $\Rightarrow \sqrt{x^2-4} > M$ άρα $\lim \sqrt{x^2-4} = +\infty$.

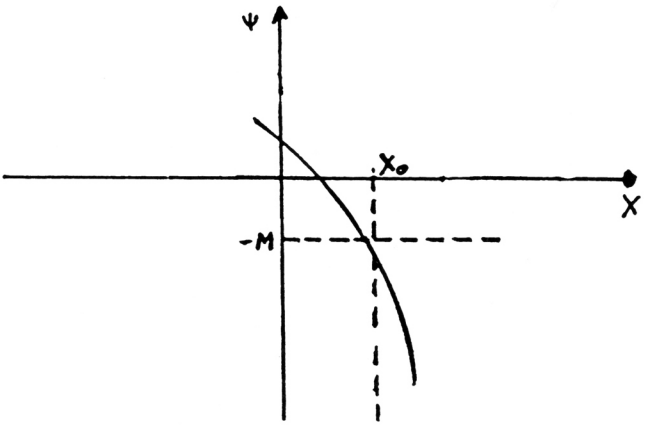
8.3.3 Όριο το $-\infty$ όταν $\chi\to+\infty$.

Έστω $\psi=f(x)$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, που δεν είναι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο $+\infty$ το $-\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\chi_o > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\chi_o \in A$ με $\chi > \chi_o$ να ισχύει $f(x) < -M$ ή ισοδύναμα:

$$f(x) < -M \Leftrightarrow f(x) \in (-\infty,-M)$$

και γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$



Παράδειγμα
Να δειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty} (-x^2+2) = -\infty$.

Απόδειξη
Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=-x^2+2$ έχει πεδίο ορισμού το R. Έστω $M > 0$ τότε για $x \in (0,+\infty)$ έχομε:

$-\chi^2+2 < -M \Leftrightarrow -\chi^2 < -2-M \Leftrightarrow \chi^2 > M+2$ (θεωρούμε $M > -2$) $\Leftrightarrow$

$\chi > \sqrt{M+2}$.
Αν εκλέξουμε:
$\chi_o \geq \sqrt{M+2}$ έχομε για κάθε $\chi \in (0,+\infty)$, $\chi > \chi_o \Rightarrow -\chi^2+2 < -M$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2+2) = -\infty$$

Σημείωση: Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x)-k] = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [-f(x)] = -k$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [-f(x)] = -\infty$$

8.4 Όριο συνάρτησης στο $-\infty$

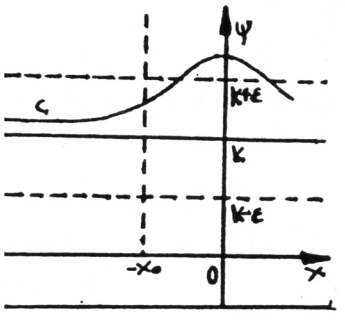
8.4.1 Όριο πεπερασμένος αριθμός όταν $x\to-\infty$

Έστω μια συνάρτηση $\psi=f(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, που δεν είναι φραγμένο κάτω. Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο $-\infty$ τον αριθμό $\kappa \in R$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_o > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $x < -x_o$ ισχύει:

$$|f(x)-\kappa| < \varepsilon \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |f(x)-\kappa| < \varepsilon \Leftrightarrow \kappa-\varepsilon < f(x) < \kappa+\varepsilon$$

και γράφουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \kappa$$



Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-1}{x+2} = 5$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+2}$ έχει πεδίο ορισμού το

$A = (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$.

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε για $\chi < -2$ έχομε:

$$\left|\frac{5x-1}{x+2} - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5x-1-5x-10}{x+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-11}{x+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\frac{11}{-(\chi+2)} < \varepsilon \quad (\text{αφού } \chi < -2 \Leftrightarrow \chi+2 < 0 \text{ και } |\chi+2| = -(\chi+2))$$

$$\text{Έτσι} \quad \frac{11}{\chi+2} > -\varepsilon \Leftrightarrow 11 < -\varepsilon(\chi+2) \Leftrightarrow -(\chi+2) > \frac{11}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\chi+2 < -\frac{11}{\varepsilon} \Leftrightarrow \chi < \frac{-11}{\varepsilon} - 2 \Leftrightarrow \chi < -\left(\frac{11}{\varepsilon} + 2\right) .$$

Έτσι αν εκλέξουμε $\chi_o \geq \dfrac{11}{\varepsilon} + 2$, τότε για κάθε $\chi < \chi_o$ ισχύει:

$$\left|\frac{5x-1}{x+2} - 5\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-1}{x+2} = 5$$

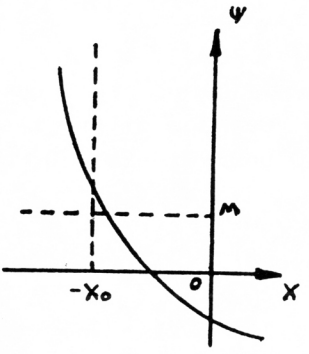
8.4.2 Όριο το +οο όταν χ-->-οο

Έστω μια συνάρτηση ψ=f(x) με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, που δεν είναι φραγμένο κάτω, θα λέμε ότι η f έχει όριο στο -οο το +οο, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\chi_o > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε χ ε Α με $\chi < -\chi_o$ να ισχύει:

$$f(x) > M \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad f(x) > M \Leftrightarrow f(x) \in (M,+\infty)$$

και γράφουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$



Παράδειγμα
Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to-\infty} (x^2-2x) = +\infty$.

Απόδειξη
Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-2x$ έχει πεδίο ορισμού το R. Περιορίζοντας την f στο R_- , δηλαδή $x \le 0$ έχομε $x^2-2x > M$ για $M > 0$ τότε $\chi^2-2\chi-M > 0$, $\Delta=4+4M$ και

$$\chi_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4M}}{2}$$

και

$$\chi_1 = \frac{2 - \sqrt{4+4M}}{2} < \chi_2 = \frac{2 + \sqrt{4+4M}}{2}$$

Άρα $\chi < \chi_1$ αφού $\chi \in R_-$.

Αν εκλέξουμε $\chi_o = -\frac{2 - \sqrt{4+4M}}{2}$ έχομε:

Για κάθε $\chi < -\chi_o \Longrightarrow \chi^2-2\chi > M$ που σημαίνει $\lim_{x\to-\infty} (x^2-2x) = +\infty$

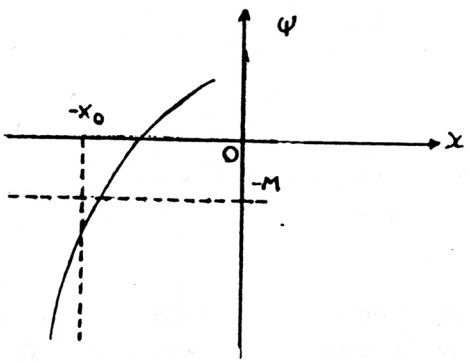
8.4.3 Όριο το $-\infty$ όταν $\chi\to-\infty$

Έστω μια συνάρτηση $\psi=f(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, που δεν είναι φραγμένο κάτω. Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο $-\infty$ το $-\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\chi_o > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\chi \in A$, $\chi < -\chi_o$ να ισχύει:

$f(x) < -M$ ή ισοδύναμα $f(x) < -M \Longleftrightarrow f(x) \in (-\infty,-M)$

και γράφουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$



Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ έχει πεδίο ορισμού

$A = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$.

Έστω $M > 0$ τότε για κάθε $\chi < -1$ έχομε : $\frac{\chi^2}{\chi+1} < -M \Leftrightarrow$

$x^2 < -M(x+1) \Leftrightarrow x^2 > -Mx-M$ (αφού $\chi+1 < 0$) $\Leftrightarrow \chi^2+M\chi+M > 0$

και

$\Delta = M^2 - 4M = M(M-4)$ και για $M > 4$

$$x_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M(M-4)}}{2}$$

Άρα

$$x < \frac{-M - \sqrt{M(M-4)}}{2} \quad \text{ή} \quad x > \frac{-M + \sqrt{M(M-4)}}{2}$$

και περιορίζοντας την f στο $(-\infty,-1)$ και παίρνοντας $x_o = \frac{-M - \sqrt{M(M-4)}}{2}$ έχομε για κάθε $\chi \in (-\infty,-1)$ με $\chi < -\chi_o \Rightarrow \frac{\chi^2}{\chi+1} < -M$ που σημαίνει $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$

Σημείωση: Ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} [f(x)-k] = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} [-f(x)] = -k$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} [-f(x)] = -\infty$$

8.5 Πλευρικά όρια συνάρτησης

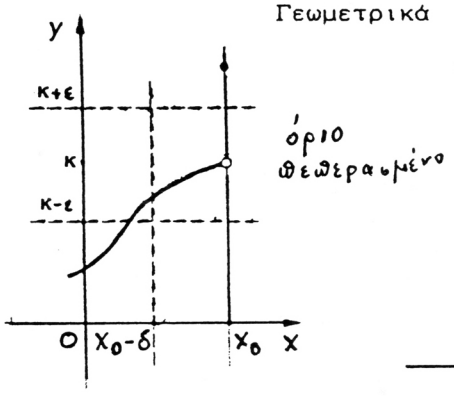
Το όριο μιας συνάρτησης $\psi=f(x)|A$ το μελετήσαμε στην περιοχή ενός αριθμού $\chi_0 \in A$, στην οποία περιοχή αυτή η συνάρτηση είναι ορισμένη (ενδεχομένως $\chi<>\chi_0$). Η μελέτη έγινε είτε από μικρότερες είτε από μεγαλύτερες τιμές από το χ_0.

Αν όμως η μελέτη της $\psi=f(x)$ γίνεται στο διάστημα $(\chi_0-\delta, \chi_0)$, με $\delta > 0$ (όσο θέλουμε μικρό), τότε ο χ παίρνει τιμές που πλησιάζουν στο χ_0 μόνο από μικρότερες τιμές προς το χ_0, που συμβολίζεται $\chi-->\chi_0^-$ και γράφουμε:

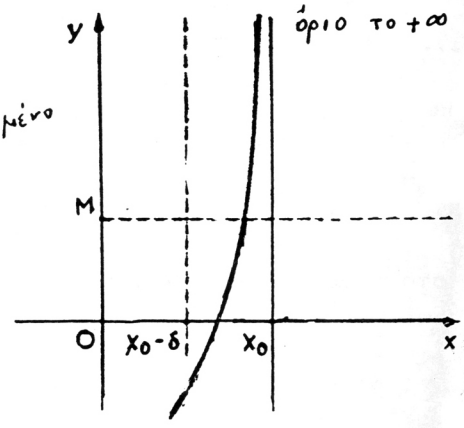
$$\lim_{x-->x_0^-} f(x) = k \ , \quad k \in R$$

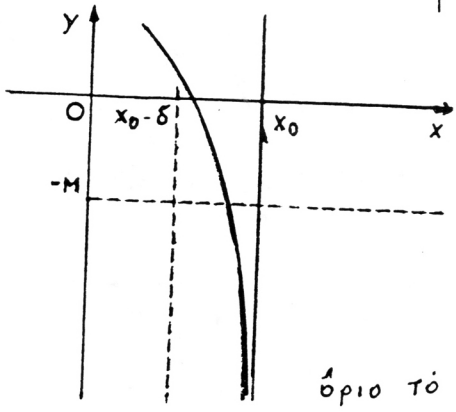
που ονμάζεται αριστερό όριο της $f(x)$ στο χ_0.

Γεωμετρικά



όριο
θεωρούμενο





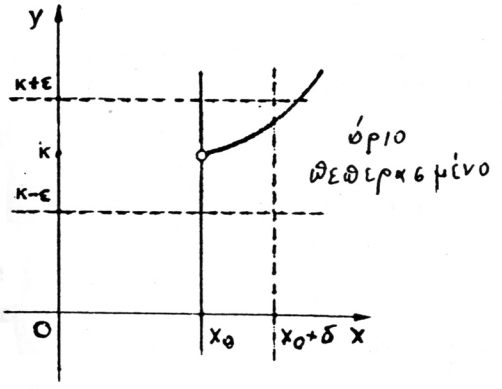
όριο το $-\infty$

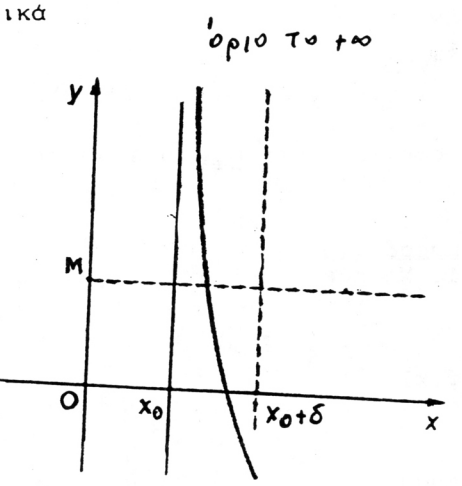
Αν η μελέτη της $\psi=f(x)$ γίνεται στο διάστημα $(\chi_o, \chi_o+\delta)$ με $\delta > 0$, τότε ο χ παίρνει τιμές που πλησιάζουν στο χ_o μόνο από μεγαλύτερες τιμές προς το χ_o, που συμβολίζεται $\chi \dashrightarrow \chi_o^+$ και γράφουμε:

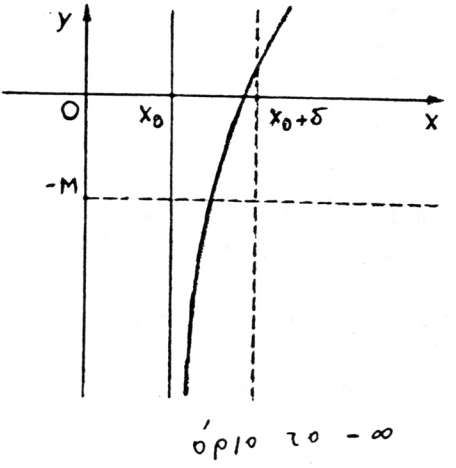
$$\lim_{x \dashrightarrow x_o^+} f(x) = \lambda \ , \quad \lambda \in R$$

που ονομάζεται <u>δεξιό</u> όριο της f(x) στο α.

Γεωμετρικά







Τα όρια κ, λ ονομάζονται <u>πλευρικά όρια</u>.

Αποδεικνύεται ότι αν

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$$

τότε υπάρχει το όριο της f(x) στο α και γράφουμε:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \kappa = \lambda$$

Αν

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) \neq \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$$

τότε λέμε ότι <u>δεν</u> υπάρχει όριο της f(x) στο α.

<u>Παραδείγματα</u>
1. Να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο της

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2\ , & x \leq 2 \\ 9-x\ , & x > 2 \end{cases} \qquad \text{για } x\to 2\ .$$

<u>Λύση</u>
Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια της f(x)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3x+1) = 3\cdot 2 + 1 = 7$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (9-x) = 9 - 2 = 7$$

Δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 7$$

Συνεπώς τα πλευρικά όρια της συνάρτησης συμπίπτουν άρα

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 7$$

2. Να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο της συνάρτήσεως $f(x)=\varepsilon\varphi\chi$ στο $\pi/2$.

Λύση
Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια της $f(x)$

$$\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} \varepsilon\varphi\chi = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^+} \varepsilon\varphi\chi = +\infty$$

Άρα

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \varepsilon\varphi\chi \neq \lim_{x\to\pi/2^+} \varepsilon\varphi\chi$$

Επομένως το $\lim_{\chi\to\pi/2} \varepsilon\varphi\chi$ δεν υπάρχει.

3. Να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο της

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$$ στο 1.

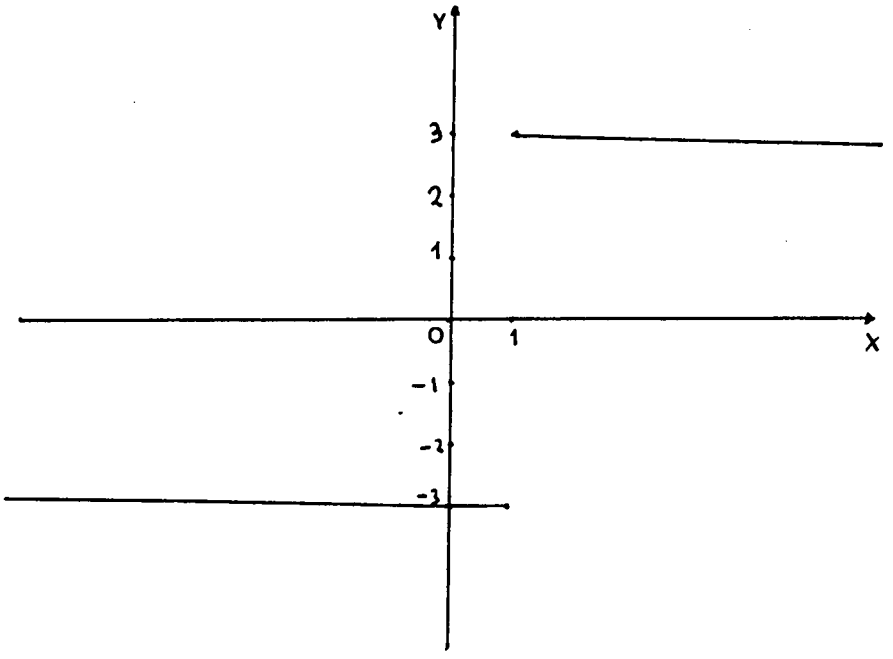
Λύση
Βρίσκομε τα πλευρικά όρια της συναρτήσεως

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = 3$$

Άρα

$$\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο της συναρτήσεως στο σημείο 1.



4. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|(x+1)}{x} = -1$

<u>Απόδειξη</u>

Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{|x|(x+1)}{x}$ έχει πεδίο ορισμού $A=R^*=R-\{0\}$. Ο περιορισμός της f στο $(-\infty,0)$ είναι η συνάρτηση f_1 με

$$f_1(x) = \frac{-x(x+1)}{x}$$

Αφού για κάθε $x \in (-\infty,0)$ η $|x|=-x$ άρα $f_1(x)=x+1$. Εστω τώρα ότι $\varepsilon > 0$ τότε

$$|f_1(x) + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |-(x+1) + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |-x| = |x| < \varepsilon$$

Επομένως αν $0 < \delta \leq \varepsilon$ θα έχομε για κάθε $x \in (-\infty,0)$

$$|x| < \delta \Rightarrow |f_1(x) + 1| < \varepsilon$$

που σημαίνει $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x) = -1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

5. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty$

Απόδειξη

Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x}$ έχει πεδίο ορισμού $A=R^*$.

Το Α περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(0,\beta)$ και ο περιορισμός της f στο διάστημα $(0,\beta)$ είναι

$$f_1(x) = \frac{x+2}{x} .$$

Έστω $M > 0$ τότε για κάθε $\chi > 0$ με $\frac{\chi+2}{\chi} > M \Leftrightarrow x+2 > xM \Leftrightarrow$

$2 > xM - x \Leftrightarrow x < \frac{2}{M-1}$ $(M > 1)$.

Έτσι αν εκλέξουμε $\delta > 0$ με $\delta \leq 1/(M-1)$ θα έχομε για κάθε

$\chi \in R^*_+$, $x < \delta \Rightarrow f_1(x) > M$ που σημαίνει $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty .$$

8.6 Ασύμπτωτες της ψ=f(x)

Κατακόρυφη ασύμπτωτη της ψ=f(x). Στη γεωμετρική ερμηνεία των πλευρικών ορίων στο χ_o, όταν αυτά είναι $+\infty$ ή $-\infty$ η ευθεία $\chi=\chi_o$ καλείται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και η αναζήτηση της περιορίζεται στα σημεία $\chi_o \in R$, στα οποία δεν ορίζεται η f της ψ=f(x).

Οριζόντια ασύμπτωτη της ψ=f(x). Στη γεωμετρική ερμηνεία του $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ ή στο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$ η ευθεία ψ=k καλείται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Πλάγια ασύμπτωτη της ψ=f(x). Η ευθεία με εξίσωση ψ=λχ+β καλείται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, όταν $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$ ή $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$.

Ερμηνεύεται δε:

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$

ή

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$

Αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ή $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ τότε λ=0 και η ευθεία ψ=λχ+β γίνεται ψ=β. Άρα υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Παραδείγματα

1. Να εξετασθεί αν η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Λύση

Η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το R. Έστω ε > 0 τότε έχομε:

$$\left|\frac{1}{2+x^2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2+x^2}<\varepsilon \Leftrightarrow 1<2\varepsilon+\varepsilon x^2 \Leftrightarrow 1-2\varepsilon<\varepsilon x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2>\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow x^2-\left[\sqrt{(1-2\varepsilon)/\varepsilon}\right]^2>0 \Leftrightarrow$$

$(x - \sqrt{(1-2\varepsilon)/\varepsilon})(x + \sqrt{(1-2\varepsilon)/\varepsilon}) > 0$.

Άρα $x < -\sqrt{(1-2\varepsilon)/\varepsilon} < 0$ ή $x > \sqrt{(1-2\varepsilon)/\varepsilon} > 0$, $\varepsilon > 1/2$.

Αν $\chi < 0$ εκλέγομε $\chi_o \geq \sqrt{(1-2\varepsilon)/\varepsilon}$ και τότε για κάθε $\chi < -\chi_o$ είναι

$$\left|\frac{1}{2+\chi^2}\right| < \varepsilon$$

που σημαίνει

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2+\chi^2} = 0 .$$

Αν $\chi > 0$ εκλέγομε $\chi_o \geq \sqrt{(1-2\varepsilon)/\varepsilon}$ και τότε για κάθε $\chi > \chi_o$ είναι

$$\left|\frac{1}{2+\chi^2}\right| < \varepsilon$$

που σημαίνει

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\chi^2} = 0 .$$

Άρα η ευθεία $\psi=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{2+x^2} .$$

2. Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \dfrac{3x^2-x+2}{x-1}$

Λύση

Αν η ευθεία $\psi=\lambda\chi+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f θα είναι

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2-x+2)/(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2-x+2)}{x(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2-x+2)}{x^2-x} = 3 .$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{3x^2-x+2}{x-1} - 3x\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+2-3x^2+3x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{x-1} = 2 .$$

Άρα η $\psi = \lambda\chi+\beta = 3\chi + 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της

$$f(x) = \frac{3x^2-x+2}{x-1} .$$

8.7 Ιδιότητες ορίου συνάρτησης

I. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $f(x) > 0$

τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

II. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $f(x) < 0$

τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

III. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και σε μια περιοχή του $-\infty$ είναι $f(x) > 0$

τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

IV. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και σε μια περιοχή του $-\infty$ είναι $f(x) < 0$

τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

V. Αν μια συνάρτηση f έχει στο $x_0 \in R$ όριο το μηδέν και η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0, τότε η $f\cdot g$ έχει στο x_0 επίσης όριο μηδέν.

VI. Για τις συναρτήσεις f και g έστω ότι σε μια περιοχή του x_0 ισχύει:

$$|g(x)| \leq f(x)$$

τότε αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ τότε ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

VII. Λέμε ότι μια συνάρτηση f <u>δεν έχει</u> στο x_0 πεπερασμένο όριο, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε σε <u>κάθε</u> διάστημα Δx_0 υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

VIII. Αν μια συνάρτηση f έχει στο x_0 πεπερασμένο όριο κ, τότε είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0.

IX. Αν μια συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο τότε σε μια περιοχή του x_0 οι τιμές της f έχουν πρόσημο το πρόσημο του ορίου της.

8.8 Όρια και πράξεις

I. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 πεπερασμένα όρια τότε:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g) = \lim_{x\to x_0} f + \lim_{x\to x_0} g$$

$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g) = \lim_{x\to x_0} f \cdot \lim_{x\to x_0} g$$

για κάθε $\lambda \in R$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f) = \lambda \lim_{x\to x_0} f$$

Αν $\lim_{x\to x_0} g \neq 0$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} g}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}$$

Αν $\lim_{x\to x_0} f > 0$ και $\nu \in N^*-\{1\}$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f} = \sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0} f}$$

II. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, που δεν είναι φραγμένο άνω και στο +οο, έχουν πεπερασμένα όρια τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g) = \lim_{x\to+\infty} f + \lim_{x\to+\infty} g$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f\cdot g) = \lim_{x\to+\infty} f \cdot \lim_{x\to+\infty} g$$

για κάθε $\lambda \in R$

$$\lim_{x\to+\infty}(\lambda f) = \lambda \lim_{x\to+\infty} f$$

Αν $\lim_{x\to+\infty} g \neq 0$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} g}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f}{\lim_{x\to+\infty} g}$$

Αν $\lim_{x\to+\infty} f > 0$ και $\nu \in N^*-\{1\}$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[\nu]{f} = \sqrt[\nu]{\lim_{x\to+\infty} f}$$

III. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, που δεν είναι φραγμένο κάτωστο −οο, έχουν πεπερασμένα όρια τότε ισχύουν τα της ιδιότητας II αρκεί το $\lim_{x\to+\infty}$ να αντικατασταθεί με το $\lim_{x\to-\infty}$

IV. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο χ_0 το +οο τότε:

1. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη κάτω σε μια περιοχή του x_0, είναι

$$\lim_{x\to x_0} (f+g) = +\infty$$

2. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη κάτω σε μια περιοχή του x_0 από θετικό αριθμό είναι

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g) = +\infty$$

3. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη άνω σε μια περιοχή του x_0 από αρνητικό αριθμό είναι

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g) = -\infty$$

V. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

VI. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και σε μια περιοχή του x_0 είναι

$f(x) > 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

$f(x) < 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

8.9 Εφαρμογή: Όριο ρητής συνάρτησης

1. Το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι ίσο με το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) του μεγιστοβάθμιου όρου της:

Δηλαδή αν $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_0$ και $a_\nu \neq 0$

έχομε για $\chi \neq 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu\chi^\nu) = +\infty$

αν $\alpha_\nu > 0$ ή $\lim\limits_{\chi\to+\infty} (\alpha_\nu\chi^\nu) = -\infty$ αν $\alpha_\nu < 0$

και $\lim\limits_{\chi\to-\infty} (\alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0) = \lim\limits_{\chi\to-\infty} (\alpha_\nu\chi^\nu) = -\infty$

αν $\alpha_\nu < 0$ και ν άρτιος ή $+\infty$ αν $\alpha_\nu < 0$ και ν περιττός ή $+\infty$ αν $\alpha_\nu > 0$ και ν άρτιος ή $-\infty$ αν $\alpha_\nu > 0$ και ν περιττός.

2. Το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) κάθε ρητής συνάρτησης ισούται με το όριο $+\infty$ ($-\infty$) του λόγου των μεγιστοβαθμίων όρων του αριθμητή και του παρονομαστή.

Δηλαδή αν $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_\mu\chi^\mu + \beta_{\mu-1}\chi^{\mu-1} + \ldots + \beta_0}$ και $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$

για $\chi \neq 0$ έχω:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_\nu\chi^\nu}{\beta_\mu\chi^\mu} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha_\nu\chi^\nu}{\beta_\mu\chi^\mu} .$$

8.10 Όρια βασικών συναρτήσεων

1. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\eta\mu\chi} = 1$.

Λύση

Γνωρίζομε ότι $|\eta\mu\chi| < |\chi| < |\varepsilon\varphi\chi|$ (η απόδειξη στη παρ. 10.3)

$$\frac{|\eta\mu\chi|}{|\eta\mu\chi|} < \frac{|\chi|}{|\eta\mu\chi|} < \frac{|\varepsilon\varphi\chi|}{|\eta\mu\chi|} \Leftrightarrow 1 < \frac{|\chi|}{|\eta\mu\chi|} < \left|\frac{\eta\mu\chi/\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}\right| \Leftrightarrow$$

$$1 < \left|\frac{\chi}{\eta\mu\chi}\right| < \frac{1}{|\sigma\upsilon\nu\chi|} .$$

Αλλά όμως για $\chi \in (-\pi/2,\pi/2)-\{0\}$, οι χ και $\eta\mu\chi$ είναι ομόσημοι και $\sigma\upsilon\nu\chi > 0$ έτσι

$$1 < \frac{\chi}{\eta\mu\chi} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$ και επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0} \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ έχομε

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\eta\mu x} = 1$$

2. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

<u>Λύση</u>
Γνωρίζομε ότι $|\eta\mu\chi| < |\chi| < |\varepsilon\varphi\chi|$ <==>

$$\frac{|\eta\mu\chi|}{|\eta\mu\chi|} < \frac{|\chi|}{|\eta\mu\chi|} < \frac{|\varepsilon\varphi\chi|}{|\eta\mu\chi|} \Leftrightarrow 1 < \frac{|\chi|}{|\eta\mu\chi|} < \left|\frac{\eta\mu\chi/\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}\right| \Leftrightarrow$$

$$1 < \frac{|\chi|}{|\eta\mu\chi|} < \frac{1}{|\sigma\upsilon\nu\chi|} \Leftrightarrow 1 > \frac{|\eta\mu\chi|}{|\chi|} > |\sigma\upsilon\nu\chi| \Leftrightarrow$$

$$|\sigma\upsilon\nu\chi| < \left|\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right| < 1$$ και επειδή για $\chi \in (-\pi/2,\pi/2)-\{0\}$, οι χ και $\eta\mu\chi$ είναι ομόσημοι και $\sigma\upsilon\nu\chi > 0$ έχομε:

$$\sigma\upsilon\nu\chi < \frac{\eta\mu\chi}{\chi} < 1$$ και επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0} \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ έχομε

$$\lim_{\chi\to 0} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1 .$$

3. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{\chi \to 0} \frac{\varepsilon\varphi\chi}{\chi} = 1$.

Λύση

$\frac{\varepsilon\varphi\chi}{\chi} = \frac{1}{\chi}\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ και επειδή $\lim_{\chi \to 0} \sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{\chi \to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1}{\lim_{\chi \to 0} \sigma\upsilon\nu\chi} = 1$$

Άρα $$\lim_{\chi \to 0} \frac{\varepsilon\varphi\chi}{\chi} = \lim_{\chi \to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot \lim_{\chi \to 0} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1 \cdot 1 = 1$$

4. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{\chi \to +\infty} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\eta\mu\chi}{\chi} \mid R^*$, είναι γινόμενο της συνάρτησης ημχ που είναι φραγμένη επί την συνάρτηση $1/\chi$ που έχει όριο στο $+\infty$ το 0 έχομε:

$$\lim_{\chi \to +\infty} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 0 .$$

5. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{\chi \to 0} (\chi \cdot \eta\mu\frac{1}{\chi}) = 0$.

Λύση

Για κάθε $\chi \in R^*$ είναι $|\chi \cdot \eta\mu\frac{1}{\chi}| = |\chi||\eta\mu\frac{1}{\chi}| \leq |\chi|$ και επειδή $\lim_{\chi \to 0} \chi = 0$ εφ'όσον ισχύει.

$|g(x)| \leq |f(x)|$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ τότε και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

έχομε

$$\lim_{\chi\to 0} (\chi\cdot \eta\mu\frac{1}{\chi}) = 0 .$$

6. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Λύση

Για $\chi \in R$ θεωρούμε $\nu \in N^*$ τέτοιο ώστε $\nu > -\chi \Leftrightarrow \nu+\chi > 0$ τότε $1 + \chi/\nu > 0$ και σύμφωνα με την ανισότητα του Bernoulli έχομε:

$(1+\chi/\nu)^\nu \geq 1 + \nu\chi/\nu \Leftrightarrow (1+\chi/\nu)^\nu \geq 1 + \chi \Rightarrow$

$\lim (1+\chi/\nu)^\nu \geq 1+\chi \Leftrightarrow e^\chi \geq 1+x.$

Θέτομε όπου χ το $-\chi$ και έχομε $e^{-\chi} \geq 1-x \Leftrightarrow 1/e^\chi \geq 1-x \Leftrightarrow$

$$e^\chi \leq \frac{1}{1-x} .$$

Άρα $1+x \leq e^\chi \leq \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leq e^\chi-1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 \Leftrightarrow$

$$x \leq e^\chi-1 \leq \frac{1-1+x}{1-x} \Leftrightarrow x \leq e^\chi-1 \leq \frac{x}{1-x} .$$

Αν $x > 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{e^\chi-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$.

Αν $x < 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{e^\chi-1}{x} \geq \frac{1}{1-x}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1$ έχομε

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

7. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$.

Λύση

Υποθέτουμε $x > 1$ τότε ισχύει $[x] \le x < [x] + 1 \Longrightarrow$

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]} \Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{[x]} .$$

Από την τελευταία παίρνομε :

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \quad \text{και} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]+1} \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Επίσης επειδή ισχύει

$$[x] \le x \le [x] + 1 \quad \text{έχομε} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]+1}$$

Επομενως ισχύει:

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]+1} \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Δηλαδή

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Εάν θέσουμε $g(x)=[x]$ και $f(x)=\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu}$ έχομε

$$f(g(x)) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}$$

και επειδή

$$\text{I. } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{II. } \lim_{v\to+\infty} f(v) = \lim_{v\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{v} = \lim_{v\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{v+1}\left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{-1}\right]$$

$$= \lim_{v\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{v+1} \lim_{v\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{v+1\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{v+1} \lim_{v\to+\infty} \left(\frac{1}{1 + 1/(v+1)}\right) = e^{\frac{1}{1 + \lim 1/(v+1)}} =$$

$$e^{\frac{1}{1+0}} = e$$

λαμβάνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = e$$

Επίσης αν θέσουμε $f_1(v) = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}$ έχομε

$$f_1(g(x)) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \quad \text{και επειδή}$$

$$\lim_{v\to+\infty} f_1(v) = \lim_{v\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1} = \lim_{v\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v}\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{1}\right] =$$

$$= \lim_{v\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v} \lim_{v\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{1} = e(1+0) = e \quad \text{λαμβάνουμε}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty} f_1(g(x)) = e$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

8. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha\in R$ ισχύει $\lim\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu}=e^{\alpha}$.

Λύση

I. Αν $\alpha=0$ έχομε $\lim(1+0)^{\nu}=e^{0}\Longrightarrow 1=1$ προφανής.

II. Αν $\alpha\neq 0$ έχομε $(1+\alpha/\nu)^{\nu}=\left(1+\frac{1}{(\nu/\alpha)}\right)^{\nu}=\left[\left(1+\frac{1}{(\nu/\alpha)}\right)^{\nu/\alpha}\right]^{\alpha}$

και αν θέσουμε $x_\nu=\nu/\alpha$ (η ακολουθία x_ν με γενικό όρο ν/α έχει όριο το $+\infty$) έχομε

$$\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu}=\left[\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu}\right]^{\alpha}\quad\text{και}\quad\lim(1+\alpha/\nu)^{\nu}=$$

$$\lim_{x_\nu\to+\infty}\left[(1+1/x_\nu)^{x_\nu}\right]^{\alpha}=\left[\lim_{x_\nu\to+\infty}(1+1/x_\nu)^{x_\nu}\right]^{\alpha}=e^{\alpha}$$

9. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\chi\in R$ ισχύει $e^{x}\geq 1+x$.

Λύση

Για κάθε $\chi\in R$ θεωρούμε $\nu\in N^{*}$ ώστε $\nu>-\chi\Longleftrightarrow\nu+\chi>0$ και

$$\frac{\nu+\chi}{\nu}>0\Longleftrightarrow\frac{\nu}{\nu}+\frac{\chi}{\nu}>0\Longleftrightarrow 1+\frac{\chi}{\nu}>0$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα του Bernoulli λαμβάνουμε

$$(1+\chi/\nu)^{\nu}\geq 1+\nu\chi/\nu=1+\chi\Longrightarrow$$

$$\lim(1+x/\nu)^{\nu}\geq\lim(1+x)\Longrightarrow e^{x}\geq 1+x.$$

202

13. Να δειχθεί ότι για $x > -1$, $x \neq 0$, $\alpha \in R^*$ ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$$

Λύση
Επειδή $x+1 > 0$ ισχύει $x+1 = e \iff x = e-1$

Άρα

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \frac{(e^x)^{\alpha}-1}{e^x-1} = \frac{e^{x\alpha}-1}{\frac{x\alpha}{x\alpha}\,(e^x-1)} = \frac{e^{x\alpha}-1}{x\alpha}\cdot\frac{x\alpha}{x} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \lim_{x\alpha \to 0} \frac{e^{x\alpha}-1}{x\alpha}\cdot\alpha = 1\cdot\alpha = \alpha$$

9. Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, λέγεται <u>συνεχής</u>, στο σημείο $x_0 \in \Delta$, όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή: Μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ, είναι <u>συνεχής</u> τότε και μόνο τότε, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta$,

$$|x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

Γραφικά: Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζεται το ορθογώνιο των ευθειών $\psi = f(x_0)-\varepsilon$, $\psi = f(x_0)+\varepsilon$ και $x = x_0-\delta$, $x = x_0+\delta$. Έτσι η γραφική

11. Να αποδειχθεί ότι $\ln x \le x-1$.

Λύση
Στη σχέση $e^x \ge 1+x$ θέτομε όπου x το x-1

$e^{x-1} \ge 1+x-1 \Leftrightarrow e^{x-1} \ge x$ και επειδή $x \in R^*$ ισχύει:

$\ln e^{x-1} \ge \ln x \Leftrightarrow x-1 \ge \ln x \Leftrightarrow$

$$\ln x \ge x+1$$

12. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

Λύση
Στη σχέση $\ln x \le x-1$ θέτομε όπου x το 1/x:

$$\ln \frac{1}{x} \le \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \le \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \ln x \ge -\frac{1-x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln x \ge \frac{x-1}{x}$$ και επομένως

$$\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1$$ η οποία δίνει

I. για $x > 1$: $\dfrac{(x-1)/x}{x-1} \le \dfrac{\ln x}{x-1} \le \dfrac{x-1}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \le \dfrac{\ln x}{x-1} \le 1$

και

II. για $0 < x < 1$: $\dfrac{(x-1)/x}{x-1} \ge \dfrac{\ln x}{x-1} \ge \dfrac{x-1}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \ge \dfrac{\ln x}{x-1} \ge 1$

και επειδή $\lim\limits_{x\to 1} 1/x = 1$ έχομε $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

13. Να δειχθεί ότι για $x > -1$, $x \neq 0$, $\alpha \in R^*$ ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$$

Λύση
Επειδή $x+1 > 0$ ισχύει $x+1 = e^k \Leftrightarrow x = e^k-1$

Άρα

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \frac{(e^k)^{\alpha}-1}{e^k-1} = \frac{e^{k\alpha}-1}{k\alpha} \cdot \frac{k\alpha}{e^k-1} = \frac{e^{k\alpha}-1}{k\alpha} \cdot \frac{\alpha \ln x}{x} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \lim_{k\alpha \to 0} \frac{e^{k\alpha}-1}{k\alpha} \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \ln x}{x} = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha$$

9. Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, λέγεται <u>συνεχής</u>, στο σημείο $x_0 \in \Delta$, όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι:

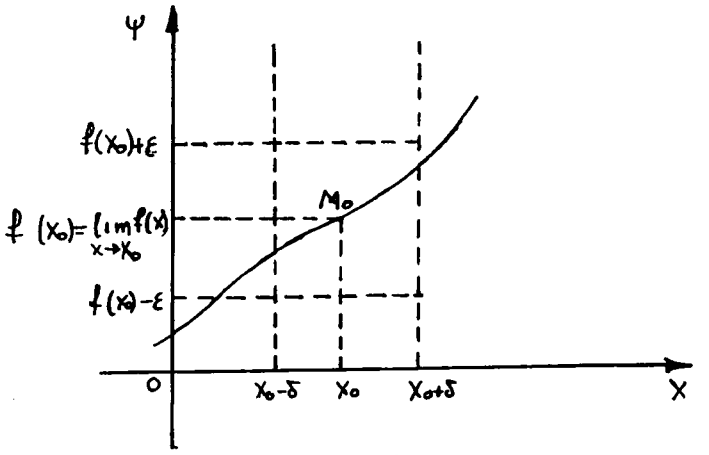
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή: Μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ, είναι <u>συνεχής</u> τότε και μόνο τότε, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta$,

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

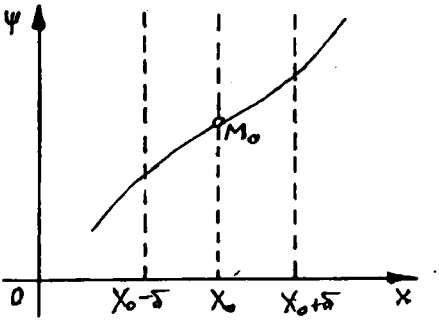
Γραφικά: Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζεται το ορθογώνιο των ευθειών $\psi=f(x_0)-\varepsilon$, $\psi=f(x_0)+\varepsilon$ και $x=x_0-\delta$, $x=x_0+\delta$. Έτσι η γραφική

παράσταση της $\psi=f(x)$ δεν μπορεί να διακόπτεται στο σημείο $M_o(x_o, f(x_o))$ αφού μέσα στο ορθογώνιο δεν βρίσκεται μόνο το M_o αλλά και άλλα γειτονικά του σημεία με τετμημένες στο $(x_o\varepsilon, x_o+\delta)$.



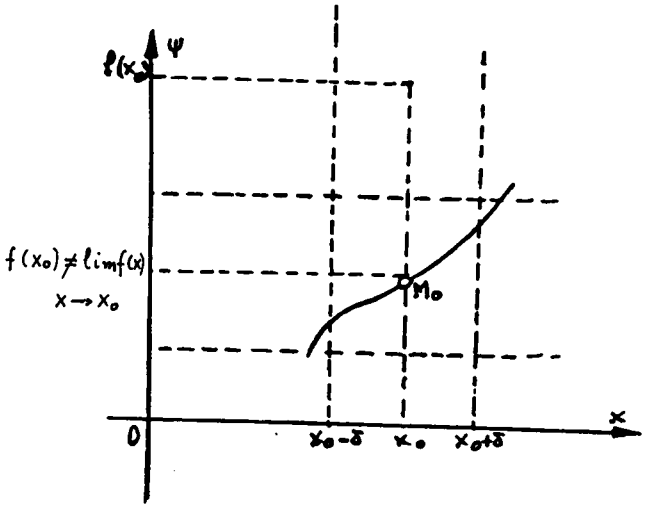
<u>Δεν γίνεται λόγος για συνέχεια συνάρτησης</u>

1. Όταν η συνάρτηση δεν ορίζεται στο x_o. Η γραφική παράσταση της $\psi=f(x)$ διακόπτεται στο σημείο M_o, αφού δεν ορίζεται στο x_o.

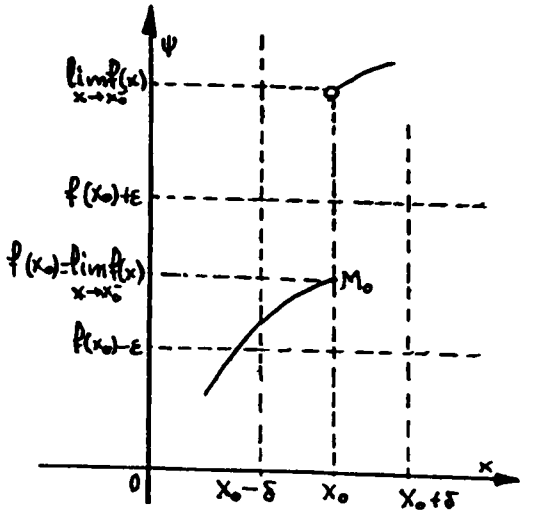


2. Όταν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$.

Η γραφική παράσταση της $\psi=f(x)$ διακόπτεται στο σημείο M_0 αφού $f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$.



3. Όταν δεν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0. Η γραφική παράσταση της $\psi=f(x)$ διακόπτεται στο σημείο M_0, αφού δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.



Στις περιπτώσεις αυτές δηλαδή όταν: 1) <u>Δεν ορίζεται</u> η $f(x)$ στο σημείο $M_o(x_o, f(x_o))$ ή 2) Όταν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_o, αλλά είναι <u>διαφορετικό</u> από το $f(x_o)$ ή 3) Όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_o} f(x)$, τότε λέμε ότι <u>η f είναι ασυνεχής στο x_o</u>.

9.1 Παραδείγματα

1. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{αν } x \le 0 \\ 2-4x & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_o=0$.

<u>Λύση</u>

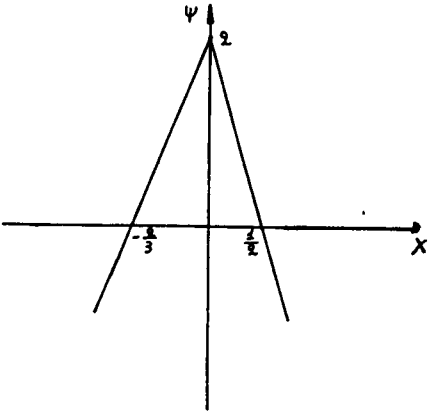
Έχομε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(3x+2) = 2.$

και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2-4x) = 2$

Άρα υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο σημείο $x_o=0$ και επειδή $f(x_o)=f(0)=2$ έχομε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$$

Άρα η f συνεχής στο $x_o=0$.



2. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4)/(x-2) & \text{αν } x \neq 2 \\ 0 & \text{αν } x=2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$.

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-2)(x+2)/(x-2) & \text{αν } x \neq 2 \\ 0 & \text{αν } x=2 \end{cases} \quad <==> \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{αν } x \neq 2 \\ 0 & \text{αν } x=2 \end{cases}$$

και $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4.$

και επειδή $f(2)=0$ έχομε $\lim_{x\to 2} (x+2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2)$

Δηλαδή υπάρχει το όριο στο σημείο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$. Άρα η συνάρτηση είναι <u>ασυνεχής</u> στο $x_0=2$.

3. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x)=x-\sqrt{x-[x]}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=-2$ ([x] ακέραιο μέρος της x).

Λύση

Εξετάζομε τις περιπτώσεις:

I. Για $x=-2$, έχομε: $f(-2)=-2-\sqrt{-2-(-2)}=-2$.

II. Για $x \in (-2,-1)$ είναι $f(x)=x-\sqrt{x-(-2)}=x-\sqrt{x+2}$.

III. Για $x \in (-3,-2)$ είναι $f(x)=x-\sqrt{x-(-3)}=x-\sqrt{x+3}$.

Άρα

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -2-\sqrt{-2+3} = -2-\sqrt{1} = -2-1 = -3$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -2-\sqrt{-2+2} = -2$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

Δηλαδή <u>δεν υπάρχει</u> το όριο της $f(x)=-2$. Άρα στο -2 η συνάρτηση είναι ασυνεχής.

9.2 Πλευρική συνέχεια

Μια συνάρτηση f ορισμένη στο $x_o \in A$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, τότε και μόνο τότε αν είναι συνεχής και από δεξιά και από αριστερά στο x_o.

<u>Παράδειγμα</u>
Η συνάρτηση f με $f(x)=(2|x-3|)/5$ είναι συνεχής στο $x_o=3$.

<u>Λύση</u>
Η f ορίζεται στο $x_o=3$ και είναι $f(3)=2\cdot 0/5=0$. Για να είναι συνεχής η f αρκεί να δείξουμε

$$\lim_{x\to 3} \frac{2|x-3|}{5} = 0$$

Πράγματι, για $x \geq 3$ έχομε $f(x)=\frac{2(x-3)}{5}$ και $\lim_{x\to 3^+} f(x) =$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2(x-3)}{5} = 0 \text{ (αφού } x-3>0 \Rightarrow |x-3| = x-3)$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής από δεξιά στο 3. Ομοίως για $x < 3$ έχομε

$$f(x) = \frac{-2(x-3)}{5} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{-2(x-3)}{5} = 0 \quad (\text{αφού } x-3<0$$

$\Rightarrow |x-3| = -(x-3))$

Δηλαδή η f είναι συνεχής από αριστερά στο 3. Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=3$.

9.3 Συνέχεια και πράξεις

Θ ε ω ρ ή μ α τ α.

1. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$ και $\lambda \in R$ τότε και η $\lambda \cdot f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$.

2. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα Δ. Αν f και g συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$ τότε και οι συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$.

3. Έστω οι συναρτήσεις f,g ορισμένες στο διάστημα Δ. Αν f και g συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις $1/g$, f/g είναι συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$.

4. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ. Αν f συνεχής στο $x_0 \in \Delta$ και $\kappa=2,3,\ldots$, τότε η $\sqrt[\kappa]{f}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$.

10. Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

10.1 Συνέχεια πολυωνυμικής συνάρτησης

Βοηθητική πρόταση. Η ταυτοτική συνάρτηση $f(x)=x$ είναι συνεχής στο R.

Απόδειξη

$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 = f(x_0)$. Άρα η $f(x)=x$ συνεχής στο R.

Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_\nu \neq 0$, η πολυωνυμική συνάρτηση . Επειδή η συνάρτττηση $f(x)=x$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $x \cdot x \cdot x \ldots x = x^\nu$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Αφού η x^ν είναι συνεχής συνάρτηση και $a_\nu \in R$, η $a_\nu . x^\nu$ είναι συνεχής συνάρτηση. Επομένως και η $P(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

10.2 Συνέχεια ρητής συνάρτησης

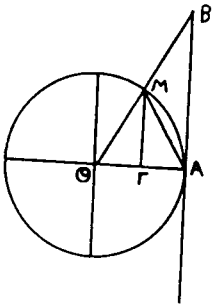
Κάθε ρητή συνάρτηση ως πηλίκο πολυωνυμικών συναρτήσεων, που είναι συνεχείς, είναι συνεχής συνάρτηση.

10.3 Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Βοηθητική πρόταση. Για κάθε $x \in R^*$ ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο O και σ'αυτόν το τόξο $\overset{\frown}{AM}$ με αλγεβρική τιμή $x \in (-\pi/2, \pi/2) - \{0\}$.
Τότε έχομε:



$$E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu ου\ OAM} < E_{\tau ομέα\ OAM} < E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu ου\ OAB}$$

$$\frac{1}{2}(OA)(M\Gamma) < \frac{1}{2}(OA)|\overset{\frown}{AM}| < \frac{1}{2}(OA)(AB)$$

$$\text{ή} \qquad 1|M\Gamma| < 1|x| < 1|\varepsilon\varphi x|$$

και τελικά $|\eta\mu x| < |x| < |\varepsilon\varphi x|$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2) - \{0\}$.

10.3.2 Συνέχεια ημιτόνου

Για κάθε $\chi_o \in R$ έχομε:

$$|\eta\mu\chi - \eta\mu\chi_o| = 2|\eta\mu[(\chi-\chi_o)/2]||\sigma\upsilon\nu[(\chi+\chi_o)/2]| \leq 2|\eta\mu[(\chi-\chi_o)/2]|$$

αφού $|\sigma\upsilon\nu[(\chi+\chi_o)/2]| \leq 1$.

Και επειδή σύμφωνα με τη βοηθητική πρόταση έχομε:

$$2|\eta\mu[(\chi-\chi_o)/2]| < 2|(\chi-\chi_o)/2| = |\chi-\chi_o| \Rightarrow$$

$$|\eta\mu\chi - \eta\mu\chi_o| > 2|\eta\mu[(\chi-\chi_o)/2]| < |\chi-\chi_o|$$

και επειδή $\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$ έχομε:

$\lim_{x\to x_0}|\eta\mu x-\eta\mu x_0| = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\eta\mu x = \eta\mu x_0$

Δηλαδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Άρα η συνάρτηση ημχ είναι συνεχής στο R.

10.3.3 Συνέχεια συνημιτόνου

Για κάθε $x_0 \in R$ έχομε:

$|\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x_0| = |-2\eta\mu[(x+x_0)/2]\cdot\eta\mu[(x-x_0)/2]| =$

$2|\eta\mu[(x+x_0)/2]|\cdot|\eta\mu[(x-x_0)/2]| \leq 2\cdot 1|\eta\mu[(x-x_0)/2]|$ αφού

$|\eta\mu[(x+x_0)/2]| < 1$ και επειδή

$2|\eta\mu[(x-x_0)/2]| \leqslant |(x-x_0)/2| = |x-x_0|$ σύμφωνα με τη βοηθητική

πρόταση $\Longrightarrow |\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x_0| < 2|\eta\mu[(x-x_0)/2]| < |x-x_0| \Longrightarrow$

$|\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x_0| < |x-x_0|$ και επειδή $\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$ έχομε

$\lim_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$. Άρα η συνάρτηση συνχ είναι συνεχής στο R.

10.3.4 Συνέχεια εφαπτομένης και συνεφαπτομένης

Οι συναρτήσεις $f(x) = \varepsilon\varphi x = \eta\mu x/\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\varphi x = \sigma\upsilon\nu x/\eta\mu x$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις.

10.3.5 Συνέχεια εκθετικής συνάρτησης

Βοηθητική πρόταση. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ $(a>0)$ είναι συνεχής στο $x_o=0$. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Απόδειξη
Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει: $|x| < \delta \Rightarrow |a^x-1| < \varepsilon$.

Διακρίνομε δύο περιπτώσεις:

I. Έστω $a > 1$. Γνωρίζομε τότε ότι $\lim \sqrt[\nu]{a} = 1 \Rightarrow \lim (\sqrt[\nu]{a}-1) = 0$. Άρα υπάρχει $\nu_o \in N$, τέτοιο ώστε να έχομε $a^{1/\nu}-1 < \varepsilon$ για $\nu > \nu_o$.

Ειδικότερα ισχύει: $a^{1/(\nu_o+1)}-1 < \varepsilon$. Εκλέγουμε $\delta=1/(\nu_o+1)$ τότε για κάθε x με $0 < x < \delta$ έχομε $a^x-1 < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$.
Αν $-\delta < x < 0$ είναι $0 < -x < \delta$. Αν επομένως θέσουμε $\psi=-x$ έχομε:

$$\lim_{x\to 0^-} a^{-x} = \lim_{\psi\to 0^+} a^{\psi} = 1 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{a^x} = 1. \text{ Δηλαδή } \lim_{x\to 0^-} a^x = 1.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

II. Έστω $0 < a < 1$ τότε έχομε $1/a > 1$ και σύμφωνα με την περίπτωση (I) ισχύει:

$$\lim \left(\frac{1}{a}\right)^x = 1 \Rightarrow \lim \frac{1}{a^x} = 1 \quad \text{και άρα} \quad \lim a^x = 1$$

Σημείωση: Αν $a=e$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

Για την εκθετική συνάρτηση ισχύει: $\lim_{x \to x_o} a^x = a^{x_o}$.

Απόδειξη

$\lim_{x \to x_o} a^x = \lim_{h \to 0} a^{x_o+h} = \lim_{h \to 0} (a^{x_o}a^h) = a^{x_o} \cdot \lim_{h \to 0} a^h = a^{x_o} \cdot 1 = a^{x_o}$

Άρα $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. Επομένως η a^x συνεχής στο R.

10.3.6 Συνέχεια λογαριθμικής συνάρτησης

Η f με τύπο $f(x)=a^x$ είναι μια " 1-1 και επί " συνεχής συνάρτηση του R στο R_+^*. Επομένως και η αντίστροφη της f^{-1} : $f^{-1}(x) = \log_a x$ είναι συνεχής.

11. Συνάρτηση πολλών μεταβλητών

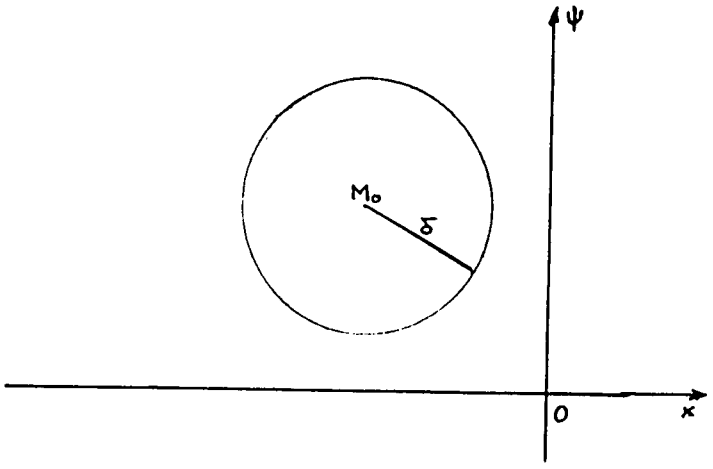
Βοηθητικές έννοιες

α. Κυκλική γειτονιά.

Το σύνολο των σημείων $M(\chi,\psi)$ (του επιπέδου των χ,ψ) που οι συντεταγμένες επαληθεύουν μια ανισότητα της μορφής

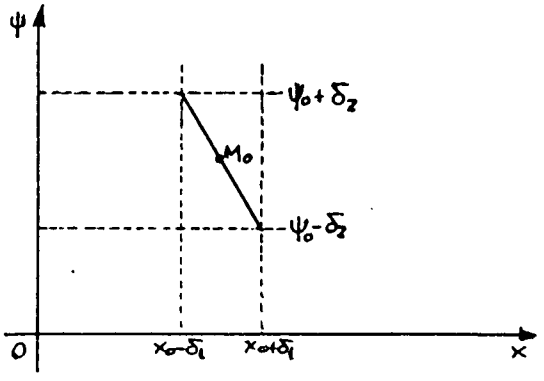
$$(\chi-\chi_o)^2 + (\psi-\psi_o)^2 < \delta^2$$

όπου $\delta > 0$, λέγεται κυκλική γειτονιά ή απλώς γειτονιά του σημείου $M_o(\chi_o,\psi_o)$ και αποτελείται από το σύνολο των σημείων που είναι εσωτερικά του κύκλου $(\chi-\chi_o)^2 + (\psi-\psi_o)^2 = \delta^2$.



β. Ορθογωνιακή γειτονιά.

Το σύνολο των σημείων $M(\chi,\psi)$ που οι συντεταγμένες του επαληθεύουν ένα σύστημα της μορφής $|\chi-\chi_0| < \delta_1$, $|\psi-\psi_0| < \delta_2$ όπου δ_1,δ_2 τυχόντες θετικοί αριθμοί, λέγεται ορθογωνιακή γειτονιά ή απλώς γειτονιά του σημείου $M_0(\chi_0,\psi_0)$ και αποτελείται από το σύνολο των σημείων, που περικλείονται από τις ευθείες $\chi = \chi_0 \pm \delta_1$ $\psi = \psi_0 \pm \delta_2$.



γ. Ένα σημείο Μ λέγεται εσωτερικό σημείο ενός σημειοσυνόλου, όταν υπάρχει κάποια γειτονιά του σημείου, της οποίας όλα τα σημεία ανήκουν στο σημειοσύνολο.

δ. Ένα σημείο Μ λέγεται εξωτερικό σημείο ενός σημειοσυνόλου, όταν υπάρχει κάποια γειτονιά του σημείου, της οποίας κανένα σημείο δεν ανήκει στο σημειοσύνολο.

ε. Ένα σημείο Μ λέγεται οριακό σημείο ενός σημειοσυνόλου, όταν σε κάθε γειτονιά αυτού υπάρχουν άπειρα σημεία του σημειοσυνόλου. (Σημείωση: Το οριακό σημείο μπορεί να μην είναι σημείο του σημειοσυνόλου).

στ. Ένα σημείο Μ λέγεται μεμονωμένο σημείο ενός σημειοσυνόλου, όταν υπάρχει μια γειτονιά αυτού που δεν περιέχει άλλο σημείο του σημειοσυνόλου.

Ορισμοί

Ένα σύμβολο f καλείται συνάρτηση των μεταβλητών $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ και σημειώνουμε $f=f(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ όταν σε κάθε σύστημα τιμών $(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ των μεταβλητών αυτών η f λαμβάνει τιμές ορισμένες πραγματικές και πεπερασμένες.

Όταν για κάθε σύστημα των μεταβλητών η f λαμβάνει μια τιμή καλείται μονοσήμαντος.

Όταν για κάθε σύστημα μεταβλητών η f λαμβάνει περισσότερες της μιας τιμής, καλείται πολυσήμαντος.

Το σύνολο των συστημάτων τιμών των μεταβλητών $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ για τα οποία ορίζεται η συνάρτηση καλείται πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.

Η αντίστοιχη του f με τις τιμές $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ γίνεται με ένα ορισμένο νόμο, που εκφράζεται με τύπο που συνδέει τις ανεξάρτητες μεταβλητές $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ με το σύμβολο $f(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ (συνάρτηση f).

Παραδείγματα

1. Ο όγκος κυλίνδρου V είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, της ακτίνας της βάσης R και του ύψους υ. Εκφράζεται δε από τον τύπο $V=\pi R^2\upsilon$. Δηλαδή είναι $V=f(R,\upsilon)$.

2. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x,\psi,z) = x^2 + \psi^2 + \ln z$, έχει πεδίο ορισμού το χωρίο του τρισδιάστατου χώρου χ,ψ,z, που αποτελείται από τα σημεία που έχουν $z>0$, δηλαδή από τα σημεία που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο $z=0$.

3. Η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi,\psi) = \pm 1/\psi\sqrt{1-\chi^2-\psi^2}$ είναι πολυσήμαντη (δισήμαντη) με πεδίο ορισμού το σημειοσύνολο του επιπέδου των χ,ψ για τον οποίο ισχύει $1-\chi^2-\psi^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\chi^2-\psi^2 \geq -1 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2 \leq 1$ και $\psi \neq 0$. Δηλαδή τα σημεία του κυκλικού δίσκου που έχουν κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, εκτός των σημείων που βρίσκονται στον χ-άξονα.

12. Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ο ρ ι σ μ ο ί

1. Λέμε ότι ένα μεταβλητό σημείο $M(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ έχει όριο ή τείνει στο σταθερό σημείο $M_0(a_1,a_2,\ldots,a_\nu)$, όταν οι συντεταγμένες του σημείου M τείνουν στις συντεταγμένες του M_0 αντιστοίχως, δηλαδή: $\chi_i \to a_i$, $(i=1,2,\ldots,\nu)$ και συμβολίζομε $M \to M_0$.

2. Λέμε ότι ένα μεταβλητό σημείο $M(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ έχει όριο ή τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$ όταν τπυλάχιστον μια από τις συντεταγμένες του σημείου M τείνει στο $+\infty,-\infty$.

3. Έστω μια συνάρτηση f(M) μονοσήμαντα ορισμένη σε ένα σημειοσύνολο και M_0 ένα οριακό σημείο του σημειοσυνόλου

τότε ορίζουμε:

α) Η συνάρτηση f(M) για $M \to M_0$ έχει όριο ή τείνει στον αριθμό κ, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε θετικό αριθμό $\delta=\delta(\varepsilon)$, τέτοιο ώστε, για όλα τα M για τα οποία είναι $0 < |MM_0| < \delta$,

ισχύει η ανισότητα $|f(M)-\kappa| < \varepsilon$. Συμβολίζομε δε $\lim_{M\to M_o} f(M) = \kappa$ ή $f(M)\to\kappa$ όταν $M\to M_o$.

β) Η συνάρτηση $f(M)$ για $M\to M_o$ έχει όριο το $+\infty,-\infty$ όταν για οποιοδήποτε δοσμένο θετικό αριθμό θ, μπορούμε να βρούμε τον αριθμό $\delta=\delta(\theta)$, τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία M για τα οποία είναι $0 < |MM_o| < \delta$ ισχύει η ανισότητα $f(M) > \theta$ ή αντίστοιχα (για το $-\infty$) $f(M) > -\theta$. Συμβολίζουμε δε $\lim_{M\to M_o} f(M) = +\infty$, $\lim_{M\to M_o} f(M) = -\infty$

γ) Η συνάρτηση $f(M)$, για $M\to\infty$, έχει όριο τον αριθμό κ, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε θετικό αριθμό $\delta=\delta(\varepsilon)$, τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία M για τα οποία $|MO| > \delta$ (O η αρχή των αξόνων), είναι $|f(M)-\kappa| < \varepsilon$. Συμβολίζομε δε $\lim_{M\to M_o} f(M) = \kappa$.

δ) Η συνάρτηση $f(M)$, για $M\to\infty$ έχει όριο το $+\infty,-\infty$ όταν για οποιοδήποτε θετικό αριθμό θ μπορούμε να βρούμε αριθμό $\delta=\delta(\theta)$, τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία M για τα οποία $|MO| > \delta$ (O η αρχή των αξόνων), είναι $f(M) > \theta$, αντίστοιχα για το $-\infty$, $f(M) < -\theta$.

13. Ιδιότητες του ορίου σσυναρτήσεων πολλών μεταβλητών

1. $$\lim_{M\to M_o} [f_1(M) + f_2(M) + \ldots + f_\kappa(M)] = \lim_{M\to M_o} f_1(M) + \lim_{M\to M_o} f_2(M) + \ldots + \lim_{M\to M_o} f_\kappa(M)$$

2. $$\lim_{M\to M_o} [f_1(M)\cdot f_2(M) \ldots f_\kappa(M)] = \lim_{M\to M_o} f_1(M)\cdot\lim_{M\to M_o} f_2(M) \ldots \lim_{M\to M_o} f_\kappa(M)$$

$$3.\ \lim_{M\to M_o} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim_{M\to M_o} f(M)}{\lim_{M\to M_o} g(M)}$$

με $g(M)\neq 0$ και $\lim_{M\to M_o} g(M) \neq 0$.

14. Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η συνάρτηση $f(M)$ όπου $M(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ λέγεται <u>συνεχής</u> στο σημείο $M_o(a_1,a_2,\ldots,a_\nu)$, όταν είναι μονοσήμαντα ορισμένη σε μια γειτονιά του σημείου αυτού και όταν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε αριθμό $\delta=\delta(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία M για τα οποία είναι $|MM_o| < \delta$ να ισχύει $|f(M)-f(M_o)| < \varepsilon$. Η συνάρτηση $f(M)$ λέγεται <u>συνεχής</u> μέσα σε ένα σημειοσύνολο όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του σημειοσυνόλου.

Η συνάρτηση $f(M)$ λέγεται <u>ασυνεχής</u> σε ένα σημείο ή σε ένα σημειοσύνολο όταν δεν είναι συνεχής στο σημείο ή στο σημειοσύνολο.

Δηλαδή για να είναι η $f(M)$ συνεχής σε ένα οριακό σημείο M_o πρέπει να είναι 1) μονοσήμαντα ορισμένη στη γειτονιά του M_o 2) να υπάρχει το $\lim_{M\to M_o} f(M)$ και 3) να ισχύει $\lim_{M\to M_o} f(M) = f(M_o)$.

Για τη συνάρτηση $f(M)$ με $M(\chi,\psi,z)$ και $M_o(\chi_o,\psi_o,z_o)$ οριακό σημείο του σημειοσυνόλου ορισμού λέμε:
Η συνάρτηση $f(\chi,\psi,z)$ είναι συνεχής στο οριακό σημείο $M_o(\chi_o,\psi_o,z_o)$ όταν 1) η $f(\chi,\psi,z)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη στη γειτονιά του M_o, 2) υπάρχει το όριο της $f(\chi,\psi,z)$ για $\chi\to\chi_o$, $\psi\to\psi_o$, $z\to z_o$ και 3) $\lim_{\substack{\chi\to\chi_o\\ \psi\to\psi_o\\ z\to z_o}} f(\chi,\psi,z) = f(\chi_o,\psi_o,z_o)$.

ή ισδύναμα:

Η συνάρτηση $f(\chi,\psi,z)$ καλείται συνεχής στο σημείο $M_o(\chi_o,\psi_o,z_o)$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμός δ που εξαρτάται από το ε και από το $M_o(\chi_o,\psi_o,z_o)$, τέτοιος ώστε όταν·

$$(\chi-\chi_o)^2 + (\psi-\psi_o)^2 + (z-z_o)^2 < \delta^2(\varepsilon,M_o)$$

να είναι:

$$|f(\chi,\psi,z)-f(\chi_o,\psi_o,z_o)| < \varepsilon$$

Για τη συνάρτηση $f(\chi,\psi)$ λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο $M_o(\chi_o,\psi_o)$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon,M_o)$, τέτοιος ώστε όταν

$$(\chi-\chi_o)^2 + (\psi-\psi_o)^2 < \delta^2(\varepsilon,M_o)$$

να είναι:

$$|f(\chi,\psi)-f(\chi_o,\psi_o)| < \varepsilon$$

<u>Σημείωση</u>: Μια συνάρτηση περισσοτέρων μεταβλητών που είναι συνεχής, είναι και συνεχής συνάρτηση ως προς κάθε μεταβλητή της. Το αντίστροφο δεν αληθεύει πάντα.

<u>Παράδειγμα</u>
Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi,\psi)$ με τύπο

$$f(\chi,\psi) = \begin{cases} [\chi\psi(\chi^2-\psi^2)]/(\chi^2+\psi^2) & \text{αν } \chi^2+\psi^2 > 0 \\ 0 & \text{αν } \chi=\psi=0. \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

<u>Λύση</u>
Η συνάρτηση $f(\chi,\psi)$ ορίζεται μονοσήμαντα για κάθε σημείο του επιπέδου των χ,ψ και δίνει

$$|f(\chi,\psi) - f(0,0)| = |[\chi\psi(\chi^2-\psi^2)]/(\chi^2+\psi^2) - 0| =$$

$$[\chi\psi(\chi^2-\psi^2)]/(\chi^2+\psi^2) \le \chi\psi \le (\chi^2+\psi^2)/2 \qquad \text{αφού}$$

$$0 < \frac{|\chi^2-\psi_2|}{\chi^2+\psi_2} < 1 \quad \text{και} \quad 2|\chi\psi| \leq \chi^2+\psi_2 \quad \text{από την ταυτότητα}$$

$$|\chi|^2 + |\psi|_2 - 2|\chi||\psi| \geq 0.$$

∴ Έτσι αν θεωρήσουμε τα σημεία της κυκλικής γειτονιάς που επαληθεύουν την ανισότητα $\chi^2+\psi_2 < 2\varepsilon$ έχομε $|f(\chi,\psi)-f(0,0)| \leq \varepsilon$. Επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής στην αρχή των αξόνων. Εδώ $\delta=\delta(\varepsilon)=2\varepsilon$.

Παράγωγοι

1. Ιστορικό

Η έννοια της παραγώγου συναρτήσεως οφείλεται κατ'αρχήν στον Άγγλο φυσικομαθηματικό I.Newton ο οποίος προσπαθούσε να δώσει μαθηματική έκφραση στις έννοιες της στιγμιαίας ταχύτητας και επιτάχυνσης και ακολούθως στον Γερμανό φυσικό και φιλόσοφο G.W.Leibniz ο οποίος προσπαθούσε να γενικεύσει την έννοια της εφαπτομένης.

Από τότε απεδείχθη ότι η παράγωγος είναι ισχυρό μέσο για την αντιμετώπιση πολλών μαθηματικών προβλημάτων, όπως π.χ. η εύρεση ολοκληρωμάτων που στην ουσία είναι υπολογισμός εμβαδών.

2. Η έννοια της παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού τυχαίο υποσύνολο A του R και x_o κάποιο σημείο του διαστήματος αυτού. Τότε ορίζεται μια συνάρτηση

$$\kappa(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

που έχει έννοια για κάθε $x \in A$ με $x \neq x_o$ ή

$$\kappa(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f|A$ παραγωγίζεται στο σημείο $\chi_o \in A$ όταν υπάρχει η οριακή τιμή της $\kappa(\chi)$ με $\chi \to \chi_o$ $(\Delta\chi \to 0)$. Την οριακή αυτή τιμή της $\kappa(\chi)$ τη συμβολίζουμε με $f'(\chi_o)$. Δηλαδή

$$f'(\chi_o) = \lim_{\chi \to \chi_o} \frac{f(\chi)-f(\chi_o)}{\chi-\chi_o}, \qquad f'(\chi_o) = \lim_{\Delta\chi \to 0} \frac{f(\chi+\Delta\chi)-f(\chi)}{\Delta\chi}$$

καλείται <u>παράγωγος</u> της $f|A$ στο σημείο χ_o ή ακριβέστερα <u>πρώτη παράγωγος</u>.

<u>Γενικότερα</u>. Υπολογίζοντας την παράγωγο της f στα σημεία χ για τα οποία υπάρχει η οριακή τιμή της $\kappa(\chi)$, βρίσκομε μια συνάρτηση την οποία επίσης ονομάζομε πρώτη παράγωγο της f. Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f|A$ έχει παράγωγο στα σημεία $\chi \in A$, τότε η παράγωγος της συναρτήσεως $f'|A$ στο $\chi \in A$ καλείται δεύτερη παράγωγος και συμβολίζεται $f''(\chi)$. Με την τέλεια επαγωγή και την παραδοχή ότι υπάρχει η ν-οστή παράγωγος της f, $f^{(\nu)}(\chi)|A$ ορίζομε την $(\nu+1)$ παράγωγο, $f^{(\nu+1)}(\chi)$.

<u>Σημείωση</u>: Ο συμβολισμός $f', f'', \ldots, f^{(\nu)}$ για την πρώτη, τη δεύτερη, ..., την ν-οστή παράγωγο οφείλεται στον Lagrange.

Ο συμβολισμός $\frac{df}{d\chi} = \frac{d\psi}{d\chi}$, αν $\psi=f(\chi)$, $\chi \in A$ για την πρώτη παράγωγο,

$\frac{d^2f}{d\chi^2} = \frac{d^2\psi}{d\chi^2}$ για τη δεύτερη παράγωγο και $\frac{d^\nu f}{d\chi^\nu} = \frac{d^\nu \psi}{d\chi^\nu}$ για την ν-οστή

οφείλεται στον Leibniz.

Ο συμβολισμός $\dot{f}$, $\ddot{f}$, ... για την πρώτη, τη δεύτερη παράγωγο κ.λ.π. οφείλεται στον Newton.

<u>Παράδειγμα</u>

Η παράγωγος της συναρτήσεως $f(x)=x^3|R$ στο σημείο $x_o=2$ είναι:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} =$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + x2 + 2^2) = 2^2 + 2\cdot 2 + 2^2 = 3\cdot 2^2 = 3\cdot 4 = 12$$

Γενικότερα:

(1) Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c|R$ είναι μηδέν.

$$k(x) = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{c-c}{x-x_o} = \frac{0}{x-x_o} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = 0$$

(2) Η παράγωγος της γραμμικής συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta|R$ με $\alpha,\beta \in R$ είναι:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{(\alpha x+\beta)-(\alpha x_o+\beta)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\alpha(x-x_o)}{x-x_o} = \alpha$$

(3) Η παράγωγος της $f(x)=x^\nu|R$, με $\nu \in N^*$ στο $x_o \in R$ είναι:

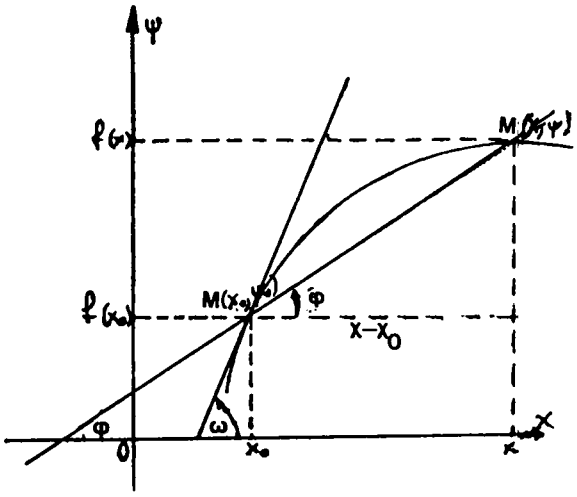
$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{x^\nu-x_o^\nu}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_o + \ldots + x_o^{\nu-1})$$

$$= x_o^{\nu-1} + x_o^{\nu-2}x_o + \ldots + x_o^{\nu-1} = \nu\cdot x_o^{\nu-1}.$$

Η παράγωγος της $f(x)=\alpha x^\nu|R$ με $\nu \in N^*$ στο $x_o \in R$ είναι $\alpha\nu x_o^{\nu-1}$.

Σημείωση: Η $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, $x > 0$ ισχύει και για $\nu=0$, αφού $(x^0) = 0x^{0-1}=0$.

3. Γεωμετρική σημασία της παραγώγου



Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f. Έστω $M_o(\chi_o,\psi_o=f(x_o))$, $M(x,\psi=f(x))$ δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f.

Ο ρ ι σ μ ό ς: Η ευθεία (ε) ονομάζεται εφαπτομένη της καμπύλης (L) στο σημείο $M_o(\chi_o,\psi_o=f(x_o))$, αν η γωνία $\widehat{MM_o}$ε τείνει στο μηδέν όταν το σημείο M τείνει επί της καμπύλης (L) στο σημείο M_o.

Ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας MM_o είναι:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Εάν η f παραγωγίζεται στο χ_o τότε υπάρχει το

$$\lim_{\chi\to\chi_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) = \lim_{\chi\to\chi_o} \varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\omega$$

Δηλαδή $f'(x_o)=\varepsilon\varphi\omega$. Επομένως: Αν η συνάρτηση έχει παράγωγο σε κάποιο σημείο, τότε στο σημείο αυτό υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής και η

παράγωγος στο σημείο αυτό είναι ίση με το συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης αυτής στο σημείο αυτό. Αυτή είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου.

Η εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $M_o(\chi_o, \psi_o=f(\chi_o))$ είναι $\psi - f(\chi_o) = f'(\chi_o)(\chi-\chi_o)$. Ερμηνεύοντας επομένως την παράγωγο:

$$\frac{df}{d\chi} = \lim_{\chi \to \chi_o} \frac{f(\chi) - f(\chi_o)}{\chi - \chi_o}$$ ως κλίση της καμπύλης $\psi=f(\chi)$ -

στο αντίστοιχο σημείο της, εννοώντας την κλίση εφω της εφαπτομένης της ευθείας.

Αν η παράγωγος στο σημείο $\chi_o \in \Delta$ (Δ πεδίο ορισμού της f) μηδενίζεται, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\chi_o, f(\chi_o))$ είναι η $\psi=f(\xi)$. Δηλαδή η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλος προς τον άξονα των χ.

Ορισμός: Καλούμε ευθεία κάθετο προς το διάγραμμα της συνάρτησης $f|\Delta$ στο σημείο $(\chi_o, f(\chi_o))$ την ευθεία του επιπέδου των (χ,ψ) την κάθετο προς την εφαπτομένη στο σημείο αυτό. Η εξίσωση της καθέτου στο $(\chi_o, f(\chi_o))$ είναι η:

$$\chi-\chi_o = f'(\chi_o)\cdot(f(\chi_o)-\psi)$$

Αν $f'(\chi_o)=0$ τότε $\chi=\chi_o$ δηλαδή η κάθετος είναι παράλληλος στον άξονα των ψ.

Παραδείγματα

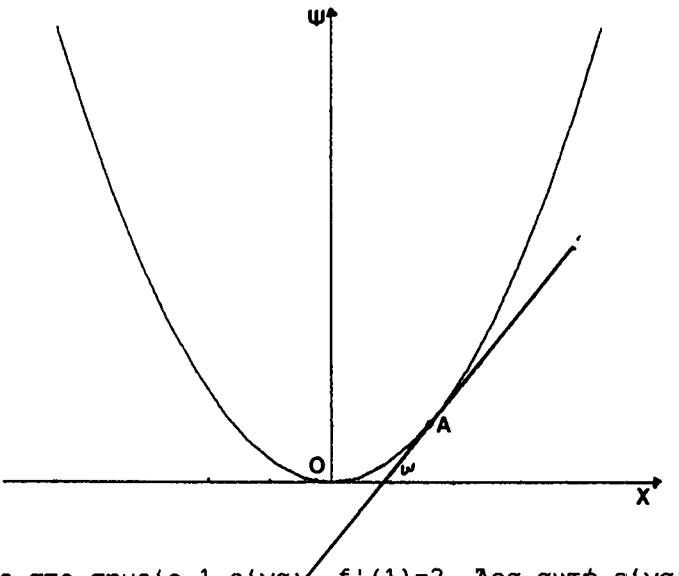
1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $\chi=1$ της καμπύλης $\psi=\chi^2$.

Λύση

Η παράγωγος στο σημείο 1 είναι:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) =$$

$1 + 1 = 2.$



Επομένως στο σημείο 1 είναι f'(1)=2. Άρα αυτή είναι και η κλίση εφω=2 της εφαπτομένης ευθείας. Εφ'όσον η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο A(1,2·1²=2) έχει εξίσωση:

$$\frac{\psi-\psi_o}{\chi-\chi_o} = \frac{\psi-f(1)}{\chi-1} = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \frac{\psi-2}{\chi-1} = 2$$

2. Δίνεται η υπερβολή ψ=f(x)=α²/x|R* και α≠0. Να υπολογισθεί η γωνία του άξονα των χ με την εφαπτομένη της υπερβολής στο $\chi_o=\alpha$.

Λύση
Η παράγωγος στο $\chi_o=\alpha$ είναι

$$f'(\alpha) = \lim_{\chi\to\alpha}\frac{f(\chi)-f(\alpha)}{\chi-\alpha} = \lim_{\chi\to\alpha}\frac{\alpha^2/\chi-\alpha^2/\alpha}{\chi-\alpha} = \lim_{\chi\to\alpha}\frac{(\alpha^3-\alpha^2\chi)/(\alpha\chi)}{\chi-\alpha} =$$

$$= \lim_{\chi\to\alpha}\frac{-\alpha^2(\chi-\alpha)/(\alpha\chi)}{\chi-\alpha} = \lim_{\chi\to\alpha}\frac{-\alpha}{\chi} = \frac{-\alpha}{\alpha} = -1.$$

Άρα η κλίση της εφαπτομένης της υπερβολής στο $\chi_o=\alpha$ είναι εφω=-1 --> εφω=εφ(7π/4) <--> ω=7π/4 (ω = γωνία εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο (α,α²/α) και του άξονα των χ).

3. Να βρεθεί με ποιά γωνία τέμνει τον άξονα των χ η καμπύλη $\psi=f(x)=\ln x|R^*_+$.

Λύση
Η ζητούμενη γωνία είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των χ με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο τομής τους. Δηλαδή τομή της $\psi=0$ με $\psi=\ln x$ με $x > 0$. Τότε $\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^0 \Leftrightarrow x=e^0 \Leftrightarrow x=1$. Άρα η $\psi=\ln x$ τέμνει τον άξονα των χ στο σημείο (1,0).
Η παράγωγος της $\psi=\ln x$ στο σημείο $x_0=1$ είναι:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης της υπερβολής στο $x_0=1$ είναι $\varepsilon\varphi\omega=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\pi/4) \Rightarrow \omega=\pi/4$.

4. Η έννοια της παραγώγου στη μηχανική

Η φυσική ερμηνεία της παραγώγου εξαρτάται από την φυσική ερμηνεία της αντίστοιχης συνάρτησης. Έστω $M(\chi,\psi,z)$ η θέση του σημείου M κατά τη χρονική στιγμή t και $M_0(\chi_0,\psi_0,z_0)$ η θέση του M_0 κατά τη χρονική στιγμή t_0. Οι συντεταγμένες των θέσεων είναι συναρτήσεις του χρόνου: $x=f_1(t)$, $\psi=f_2(t)$, $z=f_3(t)$. Αν το υλικό σημείο κινείται στον άξονα των χ τότε η κίνηση περιγράφεται από μια συνάρτηση της μορφής $x=x(t)$ που δίνει τη θέση του σημείου τη χρονική στιγμή t. Αν διανύσει στη συνέχεια απόσταση Δx σε χρόνο Δt τότε ο λόγος $\Delta x/\Delta t$ είναι η μέση ταχύτητα κατά τη χρονική διάρκεια $[t,t+\Delta t]$. Την παράγωγο

$$x' = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

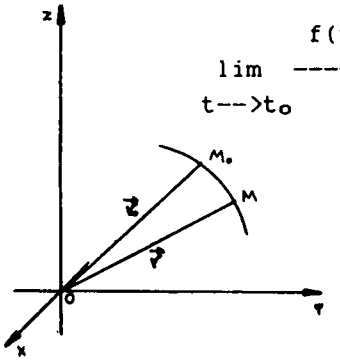
την ερμηνεύουμε ως στιγμιαία ταχύτητα του υλικού σημείου κατά τη χρονική στιγμή t.

Γενικά υπάρχει μια απεικόνιση f η οποία αντιστοιχεί σε κάθε χρονική στιγμή t το αντίστοιχο διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$. Τότε

1) Ορίζομε <u>μέση ταχύτητα</u> του κινητού μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t_o το πηλίκο

$$\frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

2) Ορίζομε <u>στιγμιαία ταχύτητα</u> $v_o(t)$ του κινητού κατά την χρονική στιγμή t_o το



$$\lim_{t\to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} = \frac{df}{dt}\Big|_{t=t_o} = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=t_o}$$

3) Ορίζομε <u>στιγμιαία επιτάχυνση</u> $\gamma(t_o)$ του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t_o το

$$\lim_{t\to t_o} \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o} = \frac{dv}{dt}\Big|_{t=t_o} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=t_o}$$

<u>Παραδείγματα</u>

1. Ένα κινητό κινείται πάνω σε μια καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = t^3+2t$, $\psi = 4\eta\mu 3t$, $z=5\sigma\upsilon\nu 3t$, όπου t ο χρόνος. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε κάθε χρονική στιγμή, καθώς και η ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή t=0.

<u>Λύση</u>

Το διάνυσμα θέσεως του κινητού είναι:

$\vec{r} = x\vec{i} + \psi\vec{j} + z\vec{k} = (t^3+2t)\vec{i} + (4\eta\mu 3t)\vec{j} + (5\sigma\upsilon\nu 3t)\vec{k}$ και τότε

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (3t^2+2)\vec{i} + (4\cdot 3\sigma\upsilon\nu 3t)\vec{j} + (5\cdot 3(-\eta\mu 3t))\vec{k} \quad \text{και}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (6t)\vec{i} + (12\cdot 3\cdot\eta\mu(-3t))\vec{j} - (15\cdot 3\cdot\sigma\upsilon\nu 3t)\vec{k} \quad \text{και}$$

για $t=0$ έχω $\vec{v} = (3\cdot 0^2+2)\vec{i} + (12\cdot\sigma\upsilon\nu 0)\vec{j} + (-15\eta\mu 0)\vec{k} \Leftrightarrow$

$\vec{v} = 2\vec{i} + 12\vec{j}$ οπότε $|\vec{v}| = \sqrt{2^2+12^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$.

2. Δύο κινητά αναχωρούν ταυτόχρονα από το σημείο (0,0) και οι εξισώσεις κινήσεως είναι $f_1(t)=3t^3-2t^2-t$ και $f_2(t)=2t^3-t^2+t$ αντίστοιχα. Να βεθούν οι ταχύτητες των κινητών κατά την τελευταία τους συνάντηση.

Λύση

Τα κινητά συναντώνται όταν $f_1(t)=f_2(t) \Rightarrow 3t^2-2t^2-t = 2t^3-t^2+t$

$\Leftrightarrow t^3-t^2-2t = 0 \Leftrightarrow t(t^2-t-2) = 0 \Leftrightarrow t(t-2)(t+1) = 0 \Leftrightarrow$

$t=0$, $t=2$, $t=-1$ (η τιμή $t=-1$ απορρίπτεται ως αρνητική).

Έτσι η τελευταία συνάντηση έγινε τη χρονική στιγμή $t=2$sec από την στιγμή εκκίνησης. Έτσι

$$v_1(2) = \frac{df_1}{dt}\Big|_{t=2} = (9t^2-4t-1)\Big|_{t=2} = 27$$

$$v_2(2) = \frac{df_2}{dt'}\Big|_{t=2} = (6t^2-2t+1)\Big|_{t=2} = 21$$

3. Υλικό σημείο κινείται στον χ-άξονα και η εξίσωση κινήσεως του είναι $x=t^2-t$. Να βρεθεί η ταχύτητα του v ως συνάρτηση του χρόνου t.

Λύση

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d(t^2-t)}{dt} = 2t-1.$$

5. Πλευρικές παράγωγοι

Την παράγωγο την ορίσαμε ως όριο συνάρτησης στο x_o από μικρότερες και από μεγαλύτερες του x_o τιμές. Μπορούμε όμως το όριο αυτό να το αναζητήσουμε, αν υπάρχει, είτε από μικρότερες του x_o τιμές είτε από μεγαλύτερες του x_o τιμές.

Εάν η συνάρτηση f με $\psi=f(x)$ ορισμένη στο $A \subseteq R$ και $x_o \in A$, τα όρια:

$$\lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

ονομάζονται <u>πλευρικές παράγωγοι</u> ή <u>παράγωγος από αριστερά</u> όταν $x \to x_o^-$, ή <u>παράγωγος από δεξιά</u> όταν $x \to x_o^+$. Αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της f και είναι ίσες μεταξύ τους τότε η συνάρτηση παραγωγίζεται στο σημείο αυτό.

5.1 Παράγωγοι διαφόρων τάξεων

Η παράγωγος f' μιας συναρτήσεως f είναι μια νέα συνάρτηση και ενδεχομένως να είναι παραγωγίσιμη σ'ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Έτσι ορίζεται μια άλλη συνάρτηση, η παράγωγος f' της f, που λέγεται <u>δεύτερη παράγωγος</u> της f. Η δεύτερη παράγωγος της f ως συνάρτηση ενδεχομένως να είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Έτσι ορίζεται μια άλλη συνάρτηση, η παράγωγος f'' της f που λέγεται <u>τρίτη παράγωγος</u> της f και συμβολίζεται με f'''.

Γενικά για ν≥2 η παράγωγος της ν-1 παραγώγου της f (αν υπάρχει) λέγεται ν-οστή παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Αν υπάρχει η $f^{(\nu)}$ λέμε ότι η f είναι ν-φορές παραγωγίσιμη.

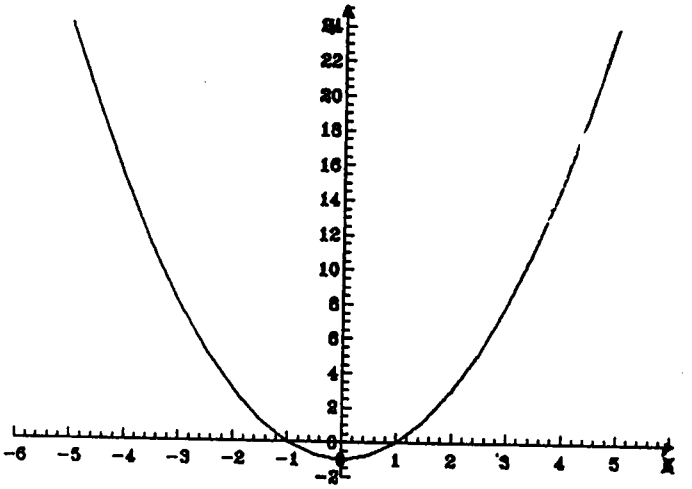
Τον συμβολισμό $f^{(\nu)}$ τον χρησιμοποιούμε για ν≥4, αφού γράφομε για την πρώτη, δεύτερη, τρίτη τέταρτη παράγωγο f', f'', f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$,... .

Παραδείγματα

1. Για τη συνάρτηση f με $f(x)=x^2-1|R$, έχομε

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{(x^2-1)-(x_o^2-1)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{x^2-x_o^2}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{(x-x_o)(x+x_o)}{x-x_o}$$

$x_o+x_o = 2x_o$.



Δηλαδή η παράγωγος στο R είναι f'(x)=2x. Αν θεωρήσουμε όμως την f ορισμένη στο [1,+∞) τότε η παράγωγος είναι πάλι f'(x)=2x, αλλά τώρα μόνο για τα σημεία [1,+∞). Ειδικά στο σημείο 1 θα εννοούμε μονόπλευρη παράγωγο μόνο εκ δεξιών $f(1^+)=2\cdot 1=2$.

2. Η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}\,|\,R^+$ είναι συνεχής στο R^+. Έτσι για κάθε $x>0$ βρίσκομε:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x_o})^2} = \lim_{x\to x_o} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_o})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_o})(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_o}+\sqrt{x_o}} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

Άρα $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x>0$.

Στο σημείο $\chi_o=0$ πρέπει να υπολογίσουμε την εκ δεξιών παράγωγο, δηλαδή για $\chi\to 0^+$. Δηλαδή

$$f'(0^+) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\chi}} = +\infty$$

Επομένως η παράγωγος $f(0^+)$ δεν υπάρχει με την έννοια ότι δεν είναι <u>άπειρη</u>. Επομένως η παράγωγος της f με $f(x)=\sqrt{x}$ στο σημείο $\chi^o=0$ δεν υπάρχει.

3. Η συνάρτηση f με $f(x)=|x|\ |\ R$. Η παράγωγος της στο σημείο $\chi=\chi_o$ βρίσκεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ αν } x \geq 0 \\ -x \text{ αν } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{τότε}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{Δηλαδή} \quad f'(0^+) \neq f'(0^-)$$

Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της f με $f(x)=|x|\ |R$ στο σημείο $x_o=0$.

4. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+|x+3|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=-3$.

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+3 & \text{για } x \geq -3 \\ x^2-x-3 & \text{για } x \leq -3 \end{cases}$$

$$f'(-3^+) = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x^2+x+3)-[(-3)^2+(-3)+3]}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x^2-9)+(x+3)}{x+3} =$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)(x+3)+(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3^+} (x-3+1) = -3-3+1 = -5.$$

$$f'(-3^-) = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x^2-x-3)-[(-3)^2-(-3)-3]}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x^2-9)-(x+3)}{x+3} =$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{(x-3)(x+3)-(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3^-} (x-3-1) = -3-3-1 = -7.$$

Άρα $f'(-3^+)<>f'(-3^-)$. Δηλαδή η από δεξιά παράγωγος στο σημείο -3 είναι διαφορετική από την από αριστερά παράγωγο στο ίδιο σημείο. Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο σημείο -3.

6. Λογιστικοί κανόνες παραγώγισης

6.1 Παράγωγος αθροίσματος δύο συναρτήσεων

Αν f_1 με $\psi_1=f_1(x)|A$ και f_2 με $\psi_2=f_2(x)|A$, $A \subseteq R$ και υπάρχουν οι $f'_1(x)$ και $f'_2(x)$ τότε ισχύει:

$$(f_1(x) \pm f_2(x))' = f'_1(x) \pm f'_2(x)$$

Απόδειξη

$$(f_1(x) \pm f_2(x))'_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f_1(x) \pm f_2(x)) - (f_1(x_0) \pm f_2(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(f_1(x) - f_1(x_0)) \pm (f_2(x) - f_2(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = f'_1(x_0) \pm f'_2(x_0).$$

6.2 Παράγωγος γινομένου δύο συναρτήσεων

Για τις συναρτήσεις του 6.1 ισχύει:

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f'_1(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f'_2(x)$$

Απόδειξη

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))'_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) \cdot f_2(x) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) \cdot f_2(x) + f_1(x_0) \cdot f_2(x) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) - f_1(x_0) \cdot f_2(x)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)[f_1(x) - f_1(x_0)] + f_1(x_0)[f_2(x) - f_2(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)[f_1(x) - f_1(x_0)]}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x_0)[f_2(x) - f_2(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} f_2(x) \lim_{x \to x_0} \frac{[f_1(x) - f_1(x_0)]}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f_1(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{[f_2(x) - f_2(x_0)]}{x - x_0}$$

$= f'_1(x_0)\cdot f_2(x_0) + f_1(x_0)\cdot f'_2(x_0)$.

Σημείωση: Αν $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$ τότε η

$(f_1(x)\cdot f_2(x))' = f'_1(x)\cdot f_2(x) + f_1(x)\cdot f'_2(x)$ γίνεται

$(f(x)\cdot f(x))' = f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x) \Leftrightarrow$

$([f(x)]^2)' = 2f(x)\cdot f'(x)$ και για $\nu\geq 2$

$([f(x)]^\nu)' = \nu[f(x)]^{\nu-1}\cdot f'(x)$.

Απόδειξη
Για $\nu=2$ η πρόταση ισχύει. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu=\kappa$

$([f(x)]^\kappa)' = \kappa[f(x)]^{\kappa-1}\cdot f'(x)$

και επειδή

$([f(x)]^{\kappa+1})' = ([f(x)]^\kappa f(x))' = ([f(x)]^\kappa)'f(x) + [f(x)]^\kappa f'(x) =$

$\kappa[f(x)]^{\kappa-1}f'(x)f(x) + [f(x)]^\kappa f'(x) = \kappa[f(x)]^\kappa f'(x) + [f(x)]^\kappa f'(x)$

$= (\kappa+1)[f(x)]^\kappa f'(x)$ δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $\nu=\kappa+1$ άρα ισχύει για όλα τα $\nu \in N^*$.

Για τις αρνητικές δυνάμεις έχομε:

$$[(f(x))^{-\nu}]' = [1/(f(x))^\nu]' = \frac{1'(f(x))^\nu - [(f(x))^\nu]'\cdot 1}{[(f(x))^\nu]^2} =$$

$$\frac{-\nu(f(x))^{\nu-1}f'(x)}{[f(x)]^{2\nu}} = -\nu[f(x)]^{\nu-1-2\nu}f'(x) = -\nu[f(x)]^{-\nu-1}f'(x)$$

και για $\alpha \in R$ έχομε

$[(f(x))^\alpha]' = \alpha(f(x))^{\nu-1}f'(x)$ για τα σημεία του πεδίου ορισμού όπου υπάρχει η $f'(x)$ και ισχύει $f(x)>0$.

Παράδειγμα
$f(x) = x^{\alpha} \mid x > 0 \quad \alpha \in R$, τότε

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ και γενικά

$$f^{\nu}(x) = \alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-\nu+1)x^{\alpha-\nu}$$

6.3 Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων

6.3.1 Αν f με $\psi=f(x)\mid A$ και υπάρχει η $f'(x)\mid A$ και $f(x_o)\neq 0$ για κάποιο $x_o \in A$ τότε

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x_o} = -\frac{f'(x_o)}{[f(x_o)]^2}$$

Απόδειξη

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{1/f(x) - 1/f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{[f(x_o)-f(x)]/[f(x_o)f(x)]}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left(\frac{1}{f(x_o)f(x)} \cdot \frac{f(x_o) - f(x)}{x - x_o}\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x_o)f(x)} \lim_{x\to x_o} \left(-\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\right) = \frac{1}{f(x_o)f(x_o)} (-f'(x_o))$$

$$= -\frac{f'(x_o)}{[f(x_o)]^2}$$

6.3.2 Αν f_1 με $\psi_1=f_1(x)\mid A$ και f_2 με $\psi_2=f_2(x)\mid A$, $A \subseteq R$ και για κάποιο $x_o \in A$ ισχύει $f_2(x_o)\neq 0$ και υπάρχουν οι $f'_1(x)\mid A$ και $f'_2(x_o)\mid A$ τότε

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f'_1(x)f_2(x) - f'_2(x)f_1(x)}{[f_2(x)]^2}$$

Απόδειξη

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)'_{x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{f_1(x)/f_2(x) - f_1(x_o)/f_2(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{f_1(x)f_2(x_o) - f_1(x_o)f_2(x)}{f_2(x)f_2(x_o)(x-x_o)} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{f_1(x)f_2(x_o) - f_1(x_o)f_2(x_o) - f_1(x_o)f_2(x) + f_1(x_o)f_2(x_o)}{f_2(x)f_2(x_o)(x-x_o)} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{1}{f_2(x)f_2(x_o)} \left[\lim_{x\to x_o} \frac{f_2(x_o)[f_1(x)-f_1(x_o)]}{x - x_o} - \right.$$

$$\left. - \lim_{x\to x_o} \frac{f_1(x_o)[f_2(x)-f_2(x_o)]}{x - x_o} \right] =$$

$$= \frac{1}{f_2(x_o)f_2(x_o)} [f_2(x_o)f'_1(x_o) - f_1(x_o)f'_2(x_o)] =$$

$$\left(\frac{f_1(x_o)}{f_2(x_o)}\right)' = \frac{f'_1(x_o)f_2(x_o) - f'_2(x_o)f_1(x_o)}{[f_2(x_o)]^2} .$$

6.4 Έστω η συνάρτηση f με $\psi=f(x)|A$ και ότι υπάρχει η $f'(x)|A$ και $k \in R$ τότε

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}(f(x))$$

Απόδειξη

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = \lim_{x\to x_0}\frac{kf(x)-kf(x_0)}{x-x_0} = k\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k\frac{d}{dx}(f(x))$$

6.5 $(1/f(x))' = -(f'(x)/[fx)]^2)$ με x τέτοιο ώστε να υπάρχει η $f(x)$ και $f(x)\neq 0$.

Απόδειξη

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{1'f(x) - f'(x)1}{[f(x)]^2} = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

6.6 Παράγωγος ρητής συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_0}$$

όπου ν,μ ακέραιοι ≥ 0 και

$\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$.

Η συνάρτηση αυτή έχει νόημα για κάθε x, που είναι διάφορο των πραγματικών ριζών του παρονομαστού. Αν υπάρχουν οι παράγωγοι του αριθμητή και του παρονομαστή, τότε υπάρχει η παράγωγος της $f(x)$ και βρίσκεται με τους κανόνες της παραγώγισης.

7. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω οι συναρτήσεις $\psi=f(x)|A_1\subseteq R$ και $x=\varphi(t)|A_2\subseteq R$. Δηλαδή A_1 ένα διάστημα της μεταβλητής x και A_2 ένα διάστημα της μεταβλητής t. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των τιμών της $\varphi|A_2$ είναι το $\varphi(A_2)$ και είναι υποσύνολο του διαστήματος A_1. Τότε η σύνθετη συνάρτηση

$\Phi(t)=f(\varphi(t))$ έχει έννοια για κάθε $t \in A_2$. Υποθέτουμε επίσης ότι για $\tau \in A_2$ υπάρχουν: η παράγωγος $\varphi'(\tau)=\lambda$ με $\lambda \in R$ και η $f'(\xi)=\mu$ με $\mu \in R$ και $\varphi(\tau)=\xi \in A_1$. Τότε ισχύει:

$$\frac{df(\varphi(t))}{dt} = \frac{df(\xi)}{dx}.\frac{d\varphi(\tau)}{dt} = \mu\cdot\lambda$$

ή ευκολότερα

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

Παράδειγμα
Εάν $\psi=x^3+1$ και $x=1/(3t+1)$ έχομε:

$$\frac{d\psi}{dx} = (x^3+1)'_x = 3x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{3t+1}\right)'_t = \frac{-(3t+1)'}{(3t+1)^2} = \frac{-3}{(3t+1)^2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dx}.\frac{dx}{dt} = 3x^2\,\frac{-3}{(3t+1)^2} = 3\,\frac{1}{(3t+1)^2}\,\frac{-3}{(3t+1)^2} = \frac{-9}{(3t+1)^4}$$

8. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με $\psi_1=f(x)|A=(\alpha,\beta)$, $\alpha < \beta \in R$, γνησίως μονότονη και συνεχής στο R και $\psi_2=g(x)|f(A)$ η αντίστροφη της f που είναι επίσης γνησίως μονότονη και συνεχής στο f(A).

Υποθέτουμε ότι για ένα σημείο ξ, με $\alpha < \xi < \beta$ υπάρχει η παράγωγος $f'(t)$ που είναι διάφορη του μηδενός. Τότε υπάρχει και

η παράγωγος ττης αντίστροφης συνάρτησης $g(x)|f(A)$ στο σημείο $\eta=f(\xi) \in f(A)$ και ισχύει

$$g'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} \quad \text{και ευκολότερα} \quad \frac{d\psi}{dx} = 1/(dx/d\psi)$$

Γιατί αν $\psi=\psi(x)$ μια συνάρτηση και $x=x(\psi)$ η αντίστροφη της έχομε:

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx} \Longleftrightarrow 1 = \frac{dx}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx} \Longleftrightarrow \frac{d\psi}{dx} = 1/(dx/d\psi)$$

Παραδείγματα

1. Έστω η συνάρτηση $\psi=3x+1$ η αντίστροφη αυτής $\psi-1=3x \Longleftrightarrow x=\frac{\psi-1}{3}$

και επομένως

$$\frac{d\psi}{dx} = (3x+1)'_x = 3$$

και

$$\frac{dx}{d\psi} = \left(\frac{\psi-1}{3}\right)' = \frac{1}{3}(\psi-1)' = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

που επαληθεύει ότι η μια είναι αντίστροφος της άλλης.

2. Η συνάρτηση $\psi=\sqrt[\nu]{x}=x^{1/\nu}$ έχει αντίστροφη $x=\psi^{\nu}$. Άρα

$$\frac{d\psi}{dx} = 1/(dx/d\psi) = \frac{1}{(\psi^{\nu})'_{\psi}} = \frac{1}{\nu\cdot\psi^{\nu-1}} = \frac{1}{\nu(x^{1/\nu})^{\nu-1}}$$

ή παραγωγίζοντας τα μέλη της $x=\psi^{\nu}$ ως προς ψ έχομε:

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{d\psi^{\nu}}{d\psi} \Longleftrightarrow \frac{dx}{d\psi} = \nu\cdot\psi^{\nu-1} \Longleftrightarrow \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\nu\cdot\psi^{\nu-1}} \Longleftrightarrow \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\nu(\sqrt[\nu]{x})^{\nu-1}}$$

$$\frac{d\sqrt[\nu]{x}}{dx} = \frac{1}{\nu(\sqrt[\nu]{x})^{\nu-1}}$$

που για $\nu=2$ δίνει $\psi=\sqrt{x}=x^{1/2}$ και

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2(x^{1/2})^{2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{για} \quad x > 0.$$

Γενίκευση της 6.2. Να βρεθεί η παράγωγος της $[f(x)]^{\mu/\nu}$.

Λύση
Θέτομε $g(x)=[f(x)]^{\mu/\nu}$ υψώνουμε και τα δύο μέλη στη ν-οστή δύναμη

$[g(x)]^{\nu}=[f(x)]^{\mu}$ παραγωγίζοντας τα δύο μέλη (ίσες συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους) παίρνουμε:

$$\nu[g(x)]^{\nu-1}g'(x) = \mu(f(x))^{\mu-1}f'(x) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{\mu(f(x))^{\mu-1}f'(x)}{\nu[g(x)]^{\nu-1}} = \frac{\mu(f(x))^{\mu-1}f'(x)}{\nu[(f(x))^{\mu/\nu}]^{\nu-1}} = \frac{\mu}{\nu}\frac{(f(x))^{\mu-1}}{f(x)^{\mu-\mu/\nu}}.f'(x) =$$

$$\frac{\mu}{\nu}.(f(x))^{\mu-1-\mu+\mu/\nu}f'(x) = \frac{\mu}{\nu}(f(x))^{\frac{\mu}{\nu}-1}\cdot f'(x)$$

οπότε $(\sqrt{f(x)})' = [(f(x))^{1/2}]' = \frac{1}{2}f(x)^{1/2-1}f'(x) =$

$$= \frac{1}{2}[f(x)]^{-1/2}f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Παράδειγμα
Να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

Λύση
$f(x)=(x^2+3)^{1/2} \Rightarrow f'(x)=[(x^2+3)^{1/2}]' = 1/2\ (x^2+3)^{1/2-1}(x^2+2)' =$

$$\frac{1}{2}(x^2+3)^{-1/2}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

9. Παράγωγος πλεγμένης συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση ψ με $\psi=f(x)|R$ που ικανοποιεί την εξίσωση $F(x,\psi)=0$. Τότε λέμε ότι η ψ δεν εκφράζεται άμεσα δια μέσου της x. Παράδειγμα η εξίσωση του κύκλου $x^2+\psi^2=R^2$.

Για να παραγωγίσουμε την $F(x,\psi)=0$, παραγωγίζομε τα μέλη της ως προς x, δηλαδή $F_x'(x,\psi)=0$, θεωρώντας το ψ ως συνάρτηση του x και μετά λύνουμε την $F_x'(x,\psi)=0$ ως προς ψ'.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Να υπολογισθεί η παράγωγος της πλεγμένης συνάρτησης $\psi=\psi(\chi)$ που ικανοποιεί την ισότητα $\chi^3+\chi^2\psi-\chi\psi^2+\psi^3 = 0$.

<u>Λύση</u>

Παραγωγίζοντας και στα δύο μέλη της ως προς χ παίρνομε

$$(\chi^3)'_x + (\chi^2\psi)'_x - (\chi\psi^2)'_x + (\psi^3)'_x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\chi^2 + \chi^2\psi'_x + (\chi^2)'_x\psi - \chi'_x\psi^2 - \chi(\psi^2)'_x + 3\psi^2\psi'_x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\chi^2 + \chi^2\psi' + 2\chi\psi - 1\cdot\psi^2 - \chi 2\psi\psi' + 3\psi^2\psi' = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\chi^2 - 2\chi\psi + 3\psi^2)\psi' = -3\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2 \Leftrightarrow$$

$$\psi' = \frac{-3\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2}{\chi^2 - 2\chi\psi + 3\psi^2} .$$

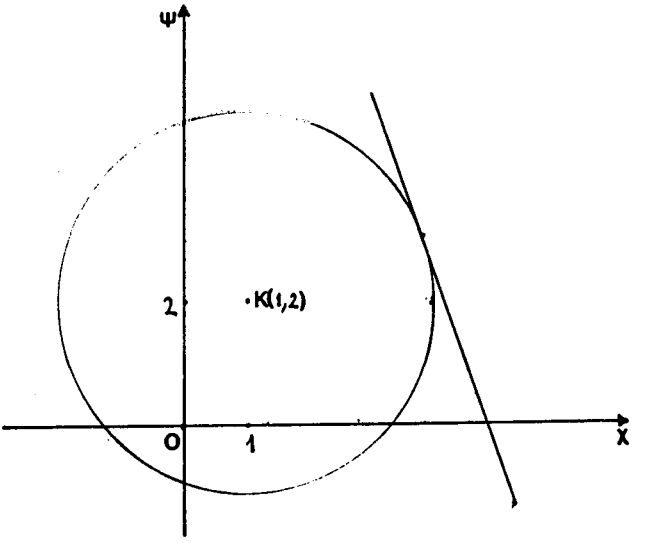
2. Να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου $(\chi-1)^2 + (\psi-2)^2 = 9$ στο σημείο $(2\sqrt{2}+1, 3)$.

Λύση

Βρίσκομε την παράγωγο της πλεγμένης συνάρτησης $\psi=\psi(\chi)$, παραγωγίζοντας την δοθείσα

$$[(\chi-1)^2]' + [(\psi-2)^2]' = 0 \Leftrightarrow 2(\chi-1) + 2(\psi-2)\psi' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\psi' = \frac{-2(\chi-1)}{2(\psi-2)} \Rightarrow \psi'(2\sqrt{2}+1,3) = -\frac{2\sqrt{2}+1-1}{3-2} = \frac{-2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$$



και επομένως η εφαπτομένη στο δοσμένο σημείο έχει εξίσωση:

$$\frac{\psi-3}{\chi-(2\sqrt{2}+1)} = -2\sqrt{2}$$

10. Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

10.1 Παράγωγος ημιτόνου.

$$\frac{d\eta\mu x}{dx} = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Απόδειξη

$$\frac{d\eta\mu x}{dx} = \lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\eta\mu[(x-x_0)/2]\sigma\upsilon[(x+x_0)/2]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{(x-x_0)/2\to 0} \frac{\eta\mu[(x-x_0)/2]}{(x-x_0)/2} \lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = 1\cdot\sigma\upsilon\left(\frac{x_0+x_0}{2}\right) = \sigma\upsilon x_0$$

Αφού ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

και γενικότερα παράγωγος του $\eta\mu(f(x))$:

$$\frac{d\eta\mu(f(x))}{dx} = f'_{(x)}\sigma\upsilon f(x)$$

Απόδειξη

$\psi=\eta\mu f(x)$. Καλούμε $f(x)=t$ και τότε $\psi=\eta\mu t$ και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

έχομε: $\frac{d\eta\mu(f(x))}{dx} = \frac{d\eta\mu t}{dt}\cdot\frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow \frac{df(x)}{dx} = \sigma\upsilon t\cdot f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{df(x)}{dx} = f'(x)\cdot\sigma\upsilon f(x)$$

$$\text{και παράγωγος του } \eta\mu^{\nu}x\text{: } \frac{d\eta\mu^{\nu}x}{dx} = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x$$

Απόδειξη

$\psi=\eta\mu^{\nu}x$ καλούμε $\eta\mu x=t$ και τότε $\psi=t^{\nu}$ και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \quad \text{έχομε} \quad \frac{d\eta\mu^{\nu}x}{dx} = \frac{dt^{\nu}}{dt}\cdot\frac{d\eta\mu x}{dx} \Leftrightarrow \frac{d\eta\mu^{\nu}x}{dx} = \nu\cdot t^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\eta\mu^{\nu}x}{dx} = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x$$

$$\text{και παράγωγος του } \eta\mu^{\nu}f(x)\text{: } \frac{d\eta\mu^{\nu}f(x)}{dx} = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}f(x)\sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)$$

Απόδειξη

$\psi=\eta\mu^{\nu}f(x)$. Καλούμε $f(x)=t \Leftrightarrow \psi=\eta\mu^{\nu}t$ και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \quad \text{έχομε} \quad \frac{d\eta\mu^{\nu}f(x)}{dx} = \frac{d\eta\mu^{\nu}t}{dt}\cdot\frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\eta\mu^{\nu}f(x)}{dx} = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}t\cdot\sigma\upsilon\nu t\cdot f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\eta\mu^{\nu}f(x)}{dx} = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$$

10.2 Παράγωγος συνημιτόνου.

$$\frac{d\sigma\upsilon\nu x}{dx} = -\eta\mu x \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty,+\infty)$$

Απόδειξη

$$\frac{d\sigma\upsilon\nu x}{dx} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-2\eta\mu[(x-x_0)/2]\cdot\eta\mu[(x+x_0)/2]}{x - x_0}$$

$$= -\lim_{(x-x_0)/2\to 0}\frac{\eta\mu[(x-x_0)/2]}{(x-x_0)/2}.\lim_{x\to x_0}\eta\mu[(x+x_0)/2] = -1\cdot\eta\mu[(x_0+x_0)/2] =$$

$$= -\eta\mu x_0$$

και γενικότερα παράγωγος του συνf(x): $\dfrac{d\sigma\upsilon\nu f(x)}{dx} = -f'(x)\cdot\eta\mu f(x)$

Απόδειξη

ψ=συνf(x). Καλούμε f(x)=t και τότε ψ=συνt και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}.\frac{dt}{dx} \quad \text{έχομε} \quad \frac{d\sigma\upsilon\nu f(x)}{dx} = \frac{d\sigma\upsilon\nu t}{dt}.\frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\sigma\upsilon\nu f(x)}{dx} = -\eta\mu t\cdot f'(x) \Leftrightarrow \frac{d\sigma\upsilon\nu f(x)}{dx} = -f'(x)\cdot\eta\mu f(x)$$

και παράγωγος του $\sigma\upsilon\nu^{\nu}x$: $\dfrac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{dx} = -\nu\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\cdot\eta\mu x$

Απόδειξη

ψ=$\sigma\upsilon\nu^{\nu}x$ καλούμε συνx=t και τότε ψ=t^{ν} και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$ έχομε $$\frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{dx} = \frac{dt^{\nu}}{dt}\cdot\frac{d\sigma\upsilon\nu x}{dx} \Leftrightarrow \frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{dx} = \nu\cdot t^{\nu-1}(-\eta\mu x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{dx} = -\nu\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x$$

και η παράγωγος του $\sigma\upsilon\nu^{\nu}f(x)$: $$\frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}f(x)}{dx} = \nu\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}f(x)\eta\mu f(x)f'(x)$$

Απόδειξη

$\psi=\sigma\upsilon\nu^{\nu}f(x)$. Καλούμε $f(x)=t \Leftrightarrow \psi=\sigma\upsilon\nu^{\nu}t$ και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$ έχομε $$\frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}f(x)}{dx} = \frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}t}{dt}\cdot\frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}f(x)}{dx} = -\nu\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}t\cdot\eta\mu t\cdot f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}f(x)}{dx} = -\nu\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}f(x)\cdot\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$$

10.3 Παράγωγος εφαπτομένης.

$$\frac{d\varepsilon\varphi x}{dx} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x \quad \text{για κάθε } x \in (\kappa\pi-\pi/2, \kappa\pi+\pi/2), \ \kappa \in Z$$

Απόδειξη

$$\frac{d\varepsilon\varphi x}{dx} = \lim_{x\to x_o}\frac{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x_o}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\eta\mu x/\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x_o/\sigma\upsilon\nu x_o}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x_o - \eta\mu x_o\cdot\sigma\upsilon\nu x}{(x-x_o)\sigma\upsilon\nu x.\sigma\upsilon\nu x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\eta\mu(x-x_o)}{(x-x_o)\sigma\upsilon\nu x.\sigma\upsilon\nu x_o} =$$

$$= \lim_{x-x_o\to 0} \frac{\eta\mu(x-x_o)}{(x-x_o)} . \lim_{x\to x_o} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x.\sigma\upsilon\nu x_o} = 1\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x_o.\sigma\upsilon\nu x_o} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x_o}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x_o + \eta\mu^2 x_o}{\sigma\upsilon\nu^2 x_o} = 1 + \frac{\eta\mu^2 x_o}{\sigma\upsilon\nu^2 x_o} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$$

ή

$$\frac{d\varepsilon\varphi x}{dx} = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{\eta\mu' x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu' x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\cdot(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

και παράγωγος της $\varepsilon\varphi f(x)$: $\frac{d\varepsilon\varphi f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$

<u>Απόδειξη</u>

$\psi=\varepsilon\varphi f(x)$. Καλούμε $f(x)=t$ και τότε $\psi=\varepsilon\varphi t$ και επειδή

$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ έχομε $\frac{d\varepsilon\varphi f(x)}{dx} = \frac{d\varepsilon\varphi t}{dt}\cdot\frac{df(x)}{dx}$ <==>

$$\frac{d\varepsilon\varphi f(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}.f'(x) = f'(x)/\sigma\upsilon\nu^2 f(x)$$

και παράγωγος της $\varepsilon\varphi^{\nu}x$: $\dfrac{d\varepsilon\varphi^{\nu}x}{dx} = \nu\cdot\varepsilon\varphi^{\nu-1}x\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη

$\psi=\varepsilon\varphi^{\nu}x$ καλούμε $\varepsilon\varphi x=t$ και τότε $\psi=t^{\nu}$ και επειδή

$\dfrac{d\psi}{dx} = \dfrac{d\psi}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$ έχομε $\dfrac{d\varepsilon\varphi^{\nu}x}{dx} = \dfrac{dt^{\nu}}{dt}\cdot\dfrac{d\varepsilon\varphi x}{dx} = \nu\cdot t^{\nu-1}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Longleftrightarrow$

$\dfrac{d\varepsilon\varphi^{\nu}x}{dx} = \nu\cdot\varepsilon\varphi^{\nu-1}x\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

και η παράγωγος της $\varepsilon\varphi^{\nu}f(x)$: $\dfrac{d\varepsilon\varphi^{\nu}f(x)}{dx} = \nu\cdot\varepsilon\varphi^{\nu-1}f(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$

Απόδειξη

$\psi=\varepsilon\varphi^{\nu}f(x)$. Καλούμε $f(x)=t \Longleftrightarrow \psi=\varepsilon\varphi^{\nu}t$ και επειδή

$\dfrac{d\psi}{dx} = \dfrac{d\psi}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$ έχομε $\dfrac{d\varepsilon\varphi^{\nu}f(x)}{dx} = \dfrac{d\varepsilon\varphi^{\nu}t}{dt}\cdot\dfrac{df(x)}{dx} \Longleftrightarrow$

$\dfrac{d\varepsilon\varphi^{\nu}f(x)}{dx} = \nu\cdot\varepsilon\varphi^{\nu-1}t\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\cdot f'(x) = \nu\cdot\varepsilon\varphi^{\nu-1}t\cdot\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$

$\dfrac{d\sigma\upsilon\nu^{\nu}f(x)}{dx} = -\nu\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}f(x)\cdot\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$

10.4 Παράγωγος συνεφαπτομένης

$$\frac{d\sigma\varphi x}{dx} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} = -(1+\sigma\varphi^2 x) \quad \text{για κάθε } x \in (\kappa\pi,(\kappa+1)\pi),\ \kappa \in Z$$

Απόδειξη.

$$\frac{d\sigma\varphi x}{dx} = \lim_{x\to x_o}\frac{\sigma\varphi x - \sigma\varphi x_o}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\sigma\upsilon\nu x/\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x_o/\eta\mu x_o}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x_o - \sigma\upsilon\nu x_o\cdot\eta\mu x}{(x-x_o)\eta\mu x.\eta\mu x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\eta\mu(x-x_o)}{(x-x_o)\eta\mu x.\eta\mu x_o} =$$

$$= -\lim_{x-x_o\to 0}\frac{\eta\mu(x-x_o)}{(x-x_o)} . \lim_{x\to x_o}\frac{1}{\eta\mu x.\eta\mu x_o} = -1\cdot\frac{1}{\eta\mu x_o.\eta\mu x_o} = \frac{1}{\eta\mu^2 x_o}$$

ή

$$\frac{d\sigma\varphi x}{dx} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu' x\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu' x}{\eta\mu^2 x} = \frac{-\eta\mu x\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x)}{\eta\mu^2 x} = -\left(\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}\right) = -(1+\sigma\varphi^2 x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

και παράγωγος $\sigma\varphi^{\nu}x$:

$$\frac{d\sigma\varphi^{\nu}x}{dx} = -\nu\cdot\sigma\varphi^{\nu-1}x\ \frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

και παράγωγος $\sigma\varphi^{\nu}f(x)$:

$$\frac{d\sigma\varphi^{\nu}f(x)}{dx} = -\nu\cdot\sigma\varphi^{\nu-1}f(x)\ \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)} .$$

11. Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης

11.1 Παράγωγος της $\psi=e^x$.

$\psi=e^x$, $x \in (-\infty,+\infty)$: $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$

Απόδειξη

$$\frac{de^x}{dx} = \lim_{x\to x_o} \frac{e^x - e^{x_o}}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{e^{(x-x_o)+x_o} - e^{x_o}}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{e^{x-x_o}e^{x_o} - e^{x_o}}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{e^{x_o}(e^{x-x_o} - 1)}{x - x_o} = \lim_{x-x_o\to 0} \frac{e^{x-x_o} - 1}{x - x_o} \cdot \lim_{x\to x_o} e^{x_o} = 1\cdot e^{x_o} = e^{x_o}$$

και γενικότερα: Αν $\psi=e^{f(x)}$ έχομε $\dfrac{de^{f(x)}}{dx} = f'(x)\cdot e^{f(x)}$

Απόδειξη

$\psi=e^{f(x)}$, θέτομε $f(x)=t$ τότε $\psi=e^t$ και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$ έχομε $\dfrac{de^{f(x)}}{dx} = \dfrac{de^t}{dt}\cdot\dfrac{df(x)}{dx} \Longleftrightarrow \dfrac{de^{f(x)}}{dx} = e^t\cdot f'(x)$

$$\frac{de^{f(x)}}{dx} = e^{f(x)}\cdot f'(x) .$$

11.2 Παράγωγος της $\psi=\alpha^x$.

$$\psi=\alpha^x\ ,\quad x\in(-\infty,+\infty),\quad \alpha>0:\ \frac{d\alpha^x}{dx}=\alpha^x\cdot\ln\alpha$$

Απόδειξη

Επειδή $\psi=\alpha^x \Leftrightarrow \ln\psi=x\ln\alpha \Rightarrow \psi=e^{x\ln\alpha}$ θέτομε

$t=x\ln\alpha$ οπότε $\psi=e^t$ και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ \text{έχομε}\quad \frac{d\alpha^x}{dx}=\frac{de^t}{dt}\cdot\frac{d(x\ln\alpha)}{dx}\Leftrightarrow \frac{d\alpha^x}{dx}=e^t\cdot\ln\alpha$$

$$\frac{d\alpha^x}{dx}=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha \Leftrightarrow \frac{d\alpha^x}{dx}=\alpha^x\cdot\ln\alpha.$$

11.3 Παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης $\psi=\ln x$.

$$\psi=\ln x,\quad x\in(0,+\infty):\ \frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$$

Απόδειξη

$$(\ln x)'=\lim_{x\to x_o}\frac{\ln x-\ln x_o}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\ln(x/x_o)}{x_o(x/x_o-1)}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{x_o}\cdot\lim_{x/x_o\to 1}\frac{\ln(x/x_o)}{(x/x_o-1)}=\frac{1}{x_o}\cdot 1=\frac{1}{x_o}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

και γενικότερα: $d\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ εφ'όσον υπάρχει η f(x) και ισχύει

$f(x) > 0$.

Απόδειξη

$\psi=\ln f(x)$, καλούμε $t = f(x) > 0$ τότε $\psi=\ln t$ και επειδή

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \quad \text{έχομε} \quad \frac{d\ln f(x)}{dx} = \frac{d\ln t}{dt}\cdot\frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow \frac{d\ln f(x)}{dx} = \frac{1}{t}\cdot f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\ln f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

και ακόμη: $\frac{d[f(x)]^{g(x)}}{dx} =$

$$= g(x)\cdot[f(x)]^{g(x)-1}\cdot f'(x) + [f(x)]^{g(x)} g'(x)\cdot\ln f(x)$$

εφ'όσον υπάρχουν οι $f'(x)$, $g'(x)$ και $f(x) > 0$.

Απόδειξη

$\psi=[f(x)]^{g(x)} \Leftrightarrow \ln\psi = g(x)\cdot\ln f(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

παραγωγίζοντας κατά μέλη έχομε:

$$\frac{d[f(x)]^{g(x)}}{dx} = \frac{de^{g(x)\ln f(x)}}{dx} = (g(x)\cdot\ln f(x))'\cdot e^{g(x)\ln f(x)} =$$

$$= [g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\ln' f(x)]\cdot[f(x)]^{g(x)} =$$

$$= \left[g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\cdot[f(x)]^{g(x)} =$$

$= [f(x)]^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot [f(x)]^{g(x)-1} \cdot f'(x)$.

Εφαρμογή: $(x^x)' = x \cdot x^{x-1} \cdot x' + x^x \cdot x' \cdot \ln x = x^x + x^x \ln x =$

$= x^x(1+\ln x) = x^x(\ln e + \ln x) = x^x \cdot \ln(e \cdot x)$ με $x > 0$.

12. Παράγωγος κυκλομετρικών συναρτήσεων

12.1 Η παράγωγος του βασικού κλάδου της συναρτήσεως $\psi = \text{τοξημ}x$ υπάρχει για κάθε ψ με $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ και είναι

$$\frac{d\,\text{τοξημ}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad | \; -1 < x < 1$$

Απόδειξη
Η $\psi = \text{τοξημ}x$ είναι αντίστροφη της $x = \text{ημ}\psi$ όταν $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. Παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς ψ έχομε:

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{d\,\text{ημ}\psi}{d\psi} \Leftrightarrow \frac{dx}{d\psi} = \text{συν}\psi \Leftrightarrow \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\text{συν}\psi} \Leftrightarrow \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2\psi}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\,\text{τοξημ}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad | \; -1 < x < 1$$

και επειδή

$$\text{τοξ}_\kappa\text{ημ}x = 2\kappa\pi + \text{τοξ}_o\text{ημ}x \quad | \; \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\widetilde{\text{τοξ}_\kappa\text{ημ}x} = (2\kappa+1)\pi - \text{τοξ}_o\text{ημ}x \quad | \; -1 < x < 1$$

έχομε

$$\frac{d\,\text{τοξ}_\kappa\eta\mu x}{dx} = \frac{d\,\text{τοξ}_o\eta\mu x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left| \text{ για κάθε } x \text{ με } -1 < x < 1 \right.$$

$$\frac{d\,\widetilde{\text{τοξ}}_\kappa\eta\mu x}{dx} = -\frac{d\,\text{τοξ}_o\eta\mu x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left| \kappa=0,\pm1\ \pm2,\ldots \right.$$

οπότε αν $\psi=d\widetilde{\text{τοξ}}\eta\mu x$ με $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$, $-1 < x < 1$ έχομε

$$\frac{d\,\widetilde{\text{τοξ}}\eta\mu x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

12.2 Η παράγωγος του βασικού κλάδου της συναρτήσεως $\psi=\text{τοξσυν}\chi$ για κάθε ψ με $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ υπάρχει και είναι

$$\frac{d\,\text{τοξσυν}\chi}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left| -1 < \chi < 1 \right.$$

Απόδειξη
Η $\psi=\text{τοξσυν}\chi$ είναι αντίστροφη της $\chi=\sigma\upsilon\nu\psi$. Παραγωγίζοντας ως προς ψ έχομε:

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{d\,\sigma\upsilon\nu\psi}{d\psi} \Leftrightarrow \frac{d\chi}{d\psi} = -\eta\mu\psi \Leftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1}{-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\psi}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\,\text{τοξσυν}\chi}{d\chi} = -\frac{1}{\sqrt{1-\chi^2}}$$

και επειδή

$$\text{τοξ}_\kappa\sigma\upsilon\nu x = 2\kappa\pi + \text{τοξ}_o\sigma\upsilon\nu x \quad \left| \kappa=0,\pm1\ \pm2,\ldots \right.$$

$$\widetilde{\text{τοξ}}_\kappa\sigma\upsilon\nu x = (2\kappa+1)\pi - \text{τοξ}_o\sigma\upsilon\nu x \quad \left| -1 < x < 1 \right.$$

έχομε

$$\frac{d\,\text{τοξ}_\kappa\text{συν}x}{dx} = \frac{d\,\text{τοξ}_o\text{συν}x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Big| \quad \kappa=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\frac{d\,\widetilde{\text{τοξ}}_\kappa\text{συν}x}{dx} = -\frac{d\,\text{τοξ}_o\text{συν}x}{dx} = -\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Big| \quad -1 < x < 1$$

οπότε αν $\psi=\widetilde{\text{τοξ}}\text{συν}x$ με $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$, $-1 < x < 1$ έχομε

$$\frac{d\,\widetilde{\text{τοξ}}\text{συν}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

12.3 Η παράγωγος του βασικού κλάδου της συναρτήσεως $\psi=\text{τοξεφ}x$ υπάρχει για κάθε $x \in R$ και είναι

$$\frac{d\,\text{τοξεφ}x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

<u>Απόδειξη</u>
Η συνάρτηση $\psi=\text{τοξεφ}x$ είναι αντίστροφη της $x=\text{εφ}\psi$. Παραγωγίζοντας τα μέλη της $x=\text{εφ}\psi$ ως προς ψ έχομε:

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{d\,\text{εφ}\psi}{d\psi} \Leftrightarrow \frac{dx}{d\psi} = \frac{1}{\text{συν}^2\psi} = \frac{\text{συν}^2\psi + \text{ημ}^2\psi}{\text{συν}^2\psi} = 1 + \text{εφ}^2\psi = 1 + x^2$$

Άρα

$$\frac{d\,\text{τοξεφ}x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{και επειδή}$$

$$\text{τοξ}_\kappa\text{εφ}x = \kappa\pi + \text{τοξ}_o\text{εφ}x \quad \Big| \quad -\infty < x < +\infty,\ \kappa=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

έχομε

$$\frac{d\tau o\xi_\kappa \varepsilon\varphi\chi}{d\chi} = \frac{d\tau o\xi_o \varepsilon\varphi\chi}{d\chi} = \frac{1}{1+\chi^2} \quad \left| \begin{array}{l} \kappa=0,\pm1,\pm2,\ldots \\ \\ -oo < \chi < +oo \end{array} \right.$$

12.4 Η παράγωγος του βασικού κλάδου της συναρτήσεως $\psi=\tau o\xi\sigma\varphi\chi$ υπάρχει για κάθε $\chi \in R$ και είναι

$$\frac{d\tau o\xi\sigma\varphi\chi}{d\chi} = \frac{-1}{1+\chi^2}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $\psi=\tau o\xi\sigma\varphi\chi$ είναι αντίστροφη της $\chi=\sigma\varphi\psi$. Παραγωγίζοντας τα μέλη της $\chi=\sigma\varphi\psi$ ως προς ψ έχομε:

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{d\sigma\varphi\psi}{d\psi} \Leftrightarrow \frac{d\chi}{d\psi} = \frac{-1}{\eta\mu^2\psi} = -\frac{\sigma\upsilon\nu^2\psi + \eta\mu^2\psi}{\eta\mu^2\psi} = -(1+\sigma\varphi^2\psi) = -(1+\chi^2)$$

Άρα

$$\frac{d\tau o\xi\sigma\varphi\chi}{d\chi} = \frac{-1}{1+\chi^2}$$ και επειδή

$\tau o\xi_\kappa\sigma\varphi\chi = \kappa\pi + \tau o\xi_o\sigma\varphi\chi \quad | \; -oo < \chi < +oo,\ \kappa=0,\pm1,\pm2,\ldots$

έχομε

$$\frac{d\tau o\xi_\kappa\sigma\varphi\chi}{d\chi} = \frac{d\tau o\xi_o\sigma\varphi\chi}{d\chi} = \frac{-1}{1+\chi^2} \quad \left| \begin{array}{l} \kappa=0,\pm1,\pm2,\ldots \\ \\ -oo < \chi < +oo \end{array} \right.$$

13. Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων

13.1 Παράγωγος υπερβολικού ημιτόνου

$$\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x \mid -\infty < x < +\infty$$

Απόδειξη

$$\frac{d\sinh x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{de^x}{dx} - \frac{de^{-x}}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x \mid -\infty < x < +\infty$$

13.2 Παράγωγος υπερβολικού συνημιτόνου

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x \mid -\infty < x < +\infty$$

Απόδειξη

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{de^x}{dx} + \frac{de^{-x}}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-e^{-x})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x \mid -\infty < x < +\infty$$

13.3 Παράγωγος υπερβολικής εφαπτομένης

$$\frac{dtghx}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - tgh^2 x \mid -oo < x < +oo$$

Απόδειξη

$$\frac{dtghx}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{sinhx}{coshx}\right) = \frac{(sinhx)'coshx - (coshx)'sinhx}{\cosh^2 x} =$$

$$= \frac{coshx \cdot coshx - sinhx \cdot sinhx}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - tgh^2 x.$$

13.4 Παράγωγος υπερβολικής συνεφαπτομένης

$$\frac{dctghx}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - ctgh^2 x \mid -oo < x < 0 \quad \text{και} \quad 0 < x < +oo$$

Απόδειξη

$$\frac{dctghx}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{coshx}{sinhx}\right) = \frac{(coshx)'sinhx - (sinhx)'coshx}{\sinh^2 x} =$$

$$= \frac{sinhx \cdot sinhx - coshx \cdot coshx}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-(\cosh^2 x - \sinh^2 x)}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x} - \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} = 1 - ctgh^2 x.$$

13.5 Παράγωγος της $\psi=\text{Arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ με $-\infty < x < +\infty$

$$\frac{d\,\text{Arsinh}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad | \quad -\infty < x < +\infty$$

Απόδειξη

Η $\psi=\text{Arsinh}x$ είναι αντίστροφη της $x=\sinh\psi$ | $-\infty < \psi < +\infty$. Παραγωγίζοντας τα μέλη της $x=\sinh\psi$ ως προς ψ έχομε:

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{d\sinh\psi}{d\psi} = \cosh\psi = \sqrt{1+\sinh^2\psi} = \sqrt{1+x^2}$$

άρα $$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

13.6 Παράγωγος της $\psi = \text{Ar}_+\cosh x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ και $\psi = \text{Ar}_-\cosh x = \ln(x-\sqrt{x^2-1})$ | $1 \leq x < +\infty$.

$$\frac{d\,\text{Ar}_+\cosh x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} , \qquad \frac{d\,\text{Ar}_-\cosh x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad 1 < x < +\infty$$

Απόδειξη

Η αντίστροφη της $x=\cosh\psi$ | $-\infty < \psi < +\infty$ είναι δίτιμος. Ο ένας κλάδος της είναι $\psi = \text{Ar}_+\cosh x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ και ο άλλος κλάδος της είναι $\psi = \text{Ar}_-\cosh x = \ln(x-\sqrt{x^2-1})$ | $1 < x < +\infty$.

Επομένως

$$\frac{d\,\text{Ar}_+\cosh x}{dx} = \frac{d\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{dx} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+(x^2+1)'/(2\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})} =$$

$$\frac{1+2x/(2\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{(\sqrt{x^2-1}+x)/(\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

και

$$\frac{dAr_cosh x}{dx} = \frac{d\ln(x-\sqrt{x^2-1})}{dx} = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})'}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1-(x^2-1)'/(2\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})} =$$

$$\frac{1-2x/(2\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)/(\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{-(x-\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

13.7 Παράγωγος της $\psi = Artgh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \mid -1 < x < 1$

$$\frac{dArtgh x}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \mid -1 < x < 1$$

<u>Απόδειξη</u>
Επειδή

$$Artgh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \mid -1 < x < 1$$ έχομε:

$$\frac{dArtgh x}{dx} = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{[(1+x)/(1-x)]'}{(1+x)/(1-x)} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{[1(1-x)-(-1)(1+x)]/(1-x)^2}{(1+x)/(1-x)} = \frac{1}{2}\frac{(1-x+1+x)/(1-x)^2}{(1+x)/(1-x)} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{2(1-x)}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Επειδή η ψ=Artghx είναι αντίστροφη της x=tghψ, παραγωγίζοντας τα μέλη αυτής ως προς ψ έχομε

$$\frac{dx}{d\psi}=\frac{dtgh\psi}{d\psi}=1-tgh^2\psi=1-x^2 \Leftrightarrow \frac{d\psi}{dx}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{dArtghx}{dx}=\frac{1}{1-x^2}\ .$$

13.8 Παράγωγος της $\psi = Arctghx = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ | $-\infty<x<-1$ και $1<x<+\infty$

$$\frac{dArctghx}{dx}=\frac{1}{1-x^2} \mid -\infty < x < -1\ ,\ \ 1 < \chi < +\infty$$

<u>Απόδειξη</u>
Επειδή

$$Ar\psi tghx = \frac{1}{2}\ln\frac{\chi+1}{\chi-1} \mid -\infty < x < -1\ ,\ \ 1 < x < +\infty$$ έχομε:

$$\frac{dArctghx}{dx}=\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{2}\frac{[(x+1)/(x-1)]'}{(x+1)/(x-1)}=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{[1(x-1)-1(x+1)]/(x-1)^2}{(x+1)/(x-1)}=-\frac{1}{2}\frac{(x-1-x-1)/(x-1)^2}{(x+1)/(x-1)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{-2(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}=-\frac{1}{2}\frac{-2}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$$

ή

Επειδή η ψ=Arctghx είναι αντίστροφη της x=ctghψ, παραγωγίζοντας τα μέλη αυτής ως προς ψ έχομε

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{dctgh\psi}{d\psi} = 1 - ctgh^2\psi = 1 - x^2 \Leftrightarrow \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dArctghx}{dx} = \frac{1}{1-x^2} .$$

14. Συνοπτικός πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων

$c'=0$, $x'=1$, $(x^\nu)'=\nu\cdot x^{\nu-1}$, $(ax^\nu)'=a\cdot\nu\cdot x^{\nu-1}$, $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$
$c \in R$, $x \in R$, $\alpha \in R$, $\nu \in N$

$[(f(x))^\nu]' = \nu(f(x))^{\nu-1}f'(x)$, $\nu \in N$, f συνάρτηση με τύπο f(x)

$[(f(x))^{-\nu}]' = -\nu(f(x))^{-\nu-1}f'(x)$, $\nu \in N$, f συνάρτηση με τύπο f(x)

$$(\sqrt[\nu]{x})' = \frac{1}{\nu(\sqrt[\nu]{x})^{\nu-1}} \qquad \nu \in N^* , \quad x > 0$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x > 0$$

$$[(f(x))^{\mu/\nu}]' = \frac{\mu}{\nu}(f(x))^{(\mu/\nu)-1}f'(x) \qquad \mu,\nu \in N^*, \quad f(x) > 0$$

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \ , \quad f(x) > 0$$

$$(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi \ , \quad \chi \in (-\infty,+\infty)$$

$$(\eta\mu^{\nu}\chi)' = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi \ , \quad \chi \in (-\infty,+\infty)$$

$$(\eta\mu f(x))' = f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x) \ , \quad f \text{ συνάρτηση με τύπο } f(x)$$

$$(\eta\mu^{\nu} f(x))' = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x) \ , \quad \nu \in N \ , \ f(x) \text{ τύπος της } f$$

$$(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi \ , \quad \chi \in (-\infty,+\infty)$$

$$(\sigma\upsilon\nu^{\nu}\chi)' = -\nu\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\chi\cdot\eta\mu\chi \ , \quad \chi \in (-\infty,+\infty) \ , \quad \nu \in N$$

$$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x)\cdot f'(x) \ , \quad f \text{ συνάρτηση με τύπο } f(x)$$

$$(\sigma\upsilon\nu^{\nu} f(x))' = -\nu\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-1} f(x)\cdot\eta\mu f(x)\cdot f'(x), \ \nu \in N, \ f(x) \text{ τύπος της } f$$

$$(\varepsilon\varphi\chi)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = 1 + \varepsilon\varphi^2\chi \ , \quad \chi \in (\kappa\pi-\pi/2,\kappa\pi+\pi/2), \ \kappa=0,\pm1,\pm2,..$$

$$(\varepsilon\varphi^{\nu}\chi)' = \nu\cdot\varepsilon\varphi^{\nu-1}\chi\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} \qquad \nu \in N$$

$$(\varepsilon\varphi f(x))' = \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \qquad f(x) \in (\kappa\pi-\pi/2,\kappa\pi+\pi/2)$$

$$(\varepsilon\varphi^{\nu} f(x))' = \nu\cdot\varepsilon\varphi^{\nu-1} f(x)\cdot\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$$

$$(\sigma\varphi\chi)' = -\frac{1}{\eta\mu^2\chi} = -(1 + \sigma\varphi^2\chi), \quad \chi \in (\kappa\pi,(\kappa+1)\pi), \ \kappa=0,\pm1,\pm2,..$$

$$(\tau o\xi\eta\mu\chi)' = \frac{1}{\sqrt{1-\chi^2}}, \quad -1 < \chi < 1$$

$$(\tau o\tilde{\xi}\eta\mu\chi)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\chi^2}}, \quad -1 < \chi < 1$$

$$(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\chi)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\chi^2}}, \quad -1 < \chi < 1$$

$$(\tau o\tilde{\xi}\sigma\upsilon\nu\chi)' = \frac{1}{\sqrt{1-\chi^2}}, \quad -1 < \chi < 1$$

$$(\tau o\xi\varepsilon\varphi\chi)' = \frac{1}{1+\chi^2}, \quad -oo < \chi < +oo$$

$$(\tau o\xi\sigma\varphi\chi)' = \frac{-1}{1+\chi^2}, \quad -oo < \chi < +oo$$

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad -oo < x < +oo$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad -oo < x < +oo$$

$$(\tgh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tgh^2 x, \quad -oo < x < +oo$$

$$(\ctgh x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \ctgh^2 x, \quad -oo < x < 0, \quad 0 < x < +oo$$

$$(\mathrm{Ar}\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad -oo < x < +oo$$

$$(\mathrm{Ar}_{+}\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad 1 < x < +\infty$$

$$(\mathrm{Ar}_{-}\cosh x)' = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad 1 < x < +\infty$$

$$(\mathrm{Artgh}x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < +1$$

$$(\mathrm{Arctgh}x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < +\infty$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in (-\infty,+\infty)$$

$$\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$\ln(-x))' = \frac{-1}{x}, \quad x < 0$$

$$\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln\alpha, \quad \chi \in (-\infty,+\infty), \quad \alpha > 0$$

$$e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}, \quad \text{εφ'όσον υπάρχει η } f'(x) \text{ και είναι } f(x)>0$$

$$\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \text{εφ'όσον υπάρχει η } f'(x) \text{ και είναι } f(x)>0$$

$$(f(x))^{g(x)}]' = g(x)\cdot[f(x)]^{g(x)-1}\cdot f'(x) + [f(x)]^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot \ln f(x)$$

15. Παράγωγος και συνέχεια

15.1 Θ ε ώ ρ η μ α: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o, τότε είναι συνεχής στο x_o.

Απόδειξη
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o ισχύει:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x)$$

Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Επειδή $f(x) - f(x_o) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.(x - x_o)$ έχομε

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] = \lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.(x - x_o)\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\right] . \lim_{x \to x_o} (x - x_o) = f'(x_o) \cdot 0 = 0$$

Άρα

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Σημείωση: Η ύπαρξη της παραγώγου μιας συναρτήσεως έχει ως συνέπεια τη συνέχεια της συναρτήσεως. Το αντίστροφο δεν συμβαίνει πάντα. Δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο σημείο δεν είναι σίγουρα παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα
Η συνάρτηση f με $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, η παράγωγος όμως στο σημείο αυτό δεν υπάρχει αφού

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} |x| = +1$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^-} |x| + \lim_{x\to 0^+} |x| = 0$$

16. Η έννοια του διαφορικού μιας συναρτήσεως

16.1 Ορισμοί

Έστω μια συνάρτηση f με $\psi=f(x) \mid \alpha < x < \beta$ και $\chi \in (\alpha,\beta)$. Τότε συμβολίζομε με $h=\Delta\chi\neq 0$ μια "μεταβολή" της μεταβλητής στο σημείο x, τέτοια ώστε $(x+\Delta x) \in (\alpha,\beta)$. Σ'αυτή τη "μεταβολή" της μεταβλητής x αντιστοιχεί μια "μεταβολή" της συναρτήσεως f(x) ή "μεταβολή" της εξαρτημένης μεταβλητής ψ και συμβολίζομε με $\Delta f(x)=\Delta\psi$.
Δηλαδή για $(x+\Delta x) \in (\alpha,\beta)$ έχομε

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \Delta\psi$$

Επειδή $\psi' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta\psi}{\Delta x} = \dfrac{d\psi}{dx}$

οπότε

$$d\psi = \psi' dx$$

Τότε λέμε ότι το $d\psi$ είναι διαφορικό της συναρτήσεως στο σημείο x. Αν υπάρχει η παράγωγος της συναρτήσεως σε όλα τα σημεία του

πεδίου ορισμού της τότε ορίζεται και το διαφορικό της συναρτήσεως για όλα αυτά τα σημεία.

Έστω μια συνάρτηση $\psi=f(x)|A$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in A$, τότε $df(x) = f'(x)dx$. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει και η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ για κάθε $x \in A$ τότε ορίζομε ως <u>διαφορικό δευτέρας τάξεως</u> της συνάρτησης $f(x)|A$ την παράσταση $d^2f(x)=d(d(f(x))$ που υπολογίζεται ως εξής:

$$d^2f(x)=d(d(f(x))=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)\cdot dx\cdot dx=f''(x)dx^2$$

Δηλαδή

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ορίζεται το διαφορικό ν-οστής τάξης της συνάρτησης $f(x)|A$, ανυπάρχει η παράγωγος ν-τάξης καθώς και ν−1 τάξης στο Α. Δηλαδή ορίζεται:

$d^\nu f(x) = d(d^{\nu-1}f(x)dx)$ και επειδή $d^{\nu-1}f(x) = f^{(\nu-1)}(x)dx^{\nu-1}$

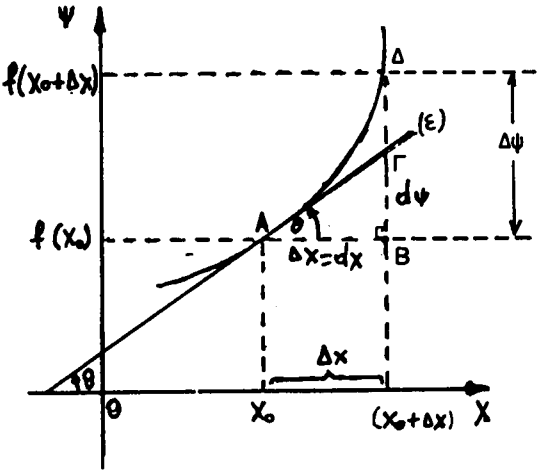
έχομε:

$$d^\nu f(x) = f^{(\nu)}(x)dx^\nu \quad \text{άρα} \quad \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = f^\nu(x)$$

<u>Παράδειγμα</u>
Να βρεθεί το διαφορικό της $\psi = \eta\mu^2 3\chi$.

<u>Λύση</u>
$d\psi = (\eta\mu^2 3\chi)'d\chi = 2\eta\mu 3\chi\cdot\sigma\upsilon\nu 3\chi\cdot 3\cdot d\chi = \eta\mu 6\chi\cdot 3d\chi = 3\eta\mu 6\chi d\chi$.

16.2 Γεωμετρική σημασία του διαφορικού



Εστω ότι η γραφική παράσταση της ψ=f(x) στο' σύστημα των ορθογωνίων αξόνων είναι η καμπύλη (c). Θεωρούμε τα σημεία $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και $\Delta(\chi_0+\Delta\chi, f(\chi_0+\Delta\chi))$ καθώς και την εφαπτομένη (ε) της καμπύλης στο σημείο Α. Τότε

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\Delta\chi}.$$ Επειδή $\varepsilon\varphi\theta = f'(\chi_0)$ έχομε: $\text{ΒΓ} = f'(\chi_0)\Delta\chi$.

Είναι όμως $d\psi = f'(\chi_0)d\chi$ και $\Delta\chi = d\chi$ οπότε $\text{ΒΓ} = d\psi$. Δηλαδή το διαφορικό μιας συναρτήσεως στο σημείο χ_0 και σε μεταβολή χ_0 της μεταβλητής, είναι ίσο με την "αύξηση" κατά τον άξονα των ψ, της εφαπτομένης ε, της καμπύλης c, στον χ_0.

16.3 Πρακτική χρησιμότητα των διαφορικών

Για τη συνάρτηση $\psi = f(\chi)$ | Α το διαφορικό $d\psi = df$ για $|d\chi|$ αρκετά μικρό είναι ίσο κατά προσέγγιση με τη μεταβολή Δf της συναρτήσεως. Επομένως στις πρακτικές εφαρμογές για σχετικά μικρές μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής χ, μπορούμε να λαμβάνουμε το διαφορικό df αντί της Δf.

Για να γίνει κατανοητή η σχέση μεταξύ της αυξήσεως της συναρτήσεως και διαφορικού δίδομε το παράδειγμα:

Έστω $f(x)=x^2$ για $x=1$ και $dx=\Delta x=0,01$. Τότε

$f'(x)=2x$ και $f'(1)=2\cdot 1=2$. Άρα $df(1)=f'(1)dx=2\cdot 0,01=0,02$ και

$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + (\Delta x)^2 + 2x\Delta x - x^2 =$

$= (\Delta x)^2 + 2x\Delta x$ άρα

$\Delta f(1) = (0,01)^2 + 2\cdot 1\cdot 0,01 = 0,01(0,01 + 2) = 0,01\cdot 2,01 = 0,0201$

Δηλαδή $df(1)=0,02$ και $\Delta f(1)=0,0201$. Λάθος: 0,001

για $x=1$, $dx=\Delta x=0,1$

$df(1)=2\cdot 0,1=0,2$

$\Delta f(1) = (0,1)^2 + 2\cdot 1\cdot 0,1 = 0,1(0,1 + 2) = 0,1\cdot 2,1 = 0,21$
Λάθος: 0,01

για $x=1$, $dx=\Delta x=1$

$df(1)=2\cdot 1=2$

$\Delta f(1)=1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 = 3$ Λάθος: 1

για $x=1$, $dx=\Delta x=10$

$df(1)=2\cdot 10=20$

$\Delta f(1)=10^2 + 2\cdot 1\cdot 10 = 100 + 20 = 120$ Λάθος: 100

17. Εφαρμογές των παραγώγων

17.1 Ακρότατα συνάρτησης - ορισμοί

Λέμε ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει ή έχει τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο) σ'ένα σημείο $x_o \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

Για κάθε $x \in A$, $|x-x_o| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_o)$ τοπικό μέγιστο
ή
Για κάθε $x \in A$, $|x-x_o| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_o)$ τοπικό ελάχιστο

Λέμε ότι η f έχει σ'ένα σημείο τοπικό ακρότατο, όταν η f έχει στο σημείο αυτό τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

17.2 Θεώρημα του Fermat

Αν μια συνάρτηση f με $\psi=f(x)$

1) Ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Α.
2) Παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o \in A$.
3) Είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

Τότε

$$f'(x_o) = 0$$

Απόδειξη

Έστω ότι η f(x) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_o τότε έχομε: $f(x) \leq f(x_o)$ και για κάθε σημείο $x \neq x_o$ μιας αριστερής περιοχής του x_o ισχύει $x < x_o$. Δηλαδή $f(x)-f(x_o) \leq 0$ και $x-x_o < 0$. Επομένως

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0 \quad \text{και} \quad f'(x_o^-) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

και για κάθε σημείο $x \neq x_o$ μιας δεξιάς περιοχής του x_o ισχύει $x > x_o$. Δηλαδή $f(x)-f(x_o) \leq 0$ και $x-x_o > 0$. Επομένως

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \le 0 \quad \text{και} \quad f'(x_o^+) = \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \le 0$$

και επειδή η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο x_o ισχύει:

$$f'(x_o^-) = f'(x_o^+) \quad \text{άρα} \quad f'(x_o) = 0$$

Εάν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_o έχομε $f(x) \ge f(x_o)$ και σε μια περιοχή αριστερά του x_o ισχύει $x < x_o$. Δηλαδή $f(x) - f(x_o) \ge 0$ και $x-x_o < 0$ οπότε:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \le 0 \quad \text{και} \quad f'(x_o^-) = \lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \le 0$$

και σε μια περιοχή δεξιά του x_o ισχύει $x>x_o$. Δηλαδή $f(x) - f(x_o) \ge 0$ και $x-x_o > 0$ οπότε:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \ge 0 \quad \text{και} \quad f'(x_o^+) = \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \ge 0$$

και επειδή f(x) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o ισχύει:

$$f'(x_o^-) = f'(x_o^+) \quad \text{άρα} \quad f'(x_o) = 0$$

Παρατηρήσεις

1. Ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συναρτήσεως σ'ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακρότατου της συναρτήσεως στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα
Η συνάρτηση f με $f(x)=2x^3|R$ έχει παράγωγο $f'(x)=6x^2$ με τιμή στο $x_o=0$: $f'(0)=6\cdot 0^2=0$. Η f όμως δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο $x_o=0$. Γιατί για $x < 0$ είναι $f(x)=2x^3<0$ και για $x > 0$ είναι $f(x)=2x^3>0$. Δηλαδή δεν ισχύει το $f(x) \le f(x_o)$ ή $f(x) \ge f(x_o)$ για κάθε $x \in R$.
Αν η μελέτη της $f(x)=2x^3$ γίνει στο διάστημα $[-1,1]$ το σημείο -1 είναι θέση ελαχίστου το δε σημείο $+1$ είναι θέση μεγίστου, η παράγωγος όμως $f'(x)$ δεν μηδενίζεται στα σημεία αυτά αφού

$f'(-1)=-6$ και $f'(1)=6$. Άρα είναι ουσιώδες για το θεώρημα του Fermat το σημείο να είναι <u>εσωτερικό</u> του διαστήματος ορισμού της συναρτήσεως.

2. Η υπόθεση ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in A$ δεν είναι ικανή για τον μηδενισμό της παραγώγου, αλλά αναγκαία.

<u>Παράδειγμα</u>
Η συνάρτηση f με $f(x)=2x+1 \mid [0,1]$ έχει μέγιστο στο $x_0=1$, γιατί για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) = 2x+1 \leq 2\cdot 1+1 = 3 = f(1)$. Αλλά η παράγωγος της στο σημείο αυτό είναι $f'(1)=2 \neq 0$.

17.2.1 Παράδειγμα

Να βρεθούν τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{e^x}$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

<u>Λύση</u>
Οι συναρτήσεις με τύπους $f_1(x)=\eta\mu x$, $f_2(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμες. Άρα η συνάρτηση $g(x) = f_1(x) + f_2(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επίσης η συνάρτηση με τύπο $\tau(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη. Έτσι και η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{e^x}$$

είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως

$$f'(x) = \frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'e^x - (e^x)'(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)e^x - e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)}{(e^x)^2} = \frac{-2e^x\eta\mu x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{-2\eta\mu x}{e^{x}}$$

Άρα πιθανά ακρότατα θα έχομε όταν $0 \leq x \leq 2\pi$ και αν

$$f'(x) = \frac{-2\eta\mu x}{e^{x}} = 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\pi.$$

ή $x = 2\pi$.

17.3 Θεώρημα του Rolle

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο f(x) ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

I. η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
II. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)
III. ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$.

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ του διαστήματος (α,β) για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ είναι φραγμένη σ'αυτό. Επομένως υπάρχει $\chi_1 \in [\alpha,\beta]$ που η $f(\chi)$ λαμβάνει τη μικρότερη τιμή και $\chi_2 \in [\alpha,\beta]$ που η $f(\chi)$ λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή. Δηλαδή ισχύει:

$$f(\chi_1) \leq f(\chi) \leq f(\chi_2) \quad \text{για κάθε} \quad \chi \in (\alpha,\beta)$$

Αν το χ_1 είναι εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$ σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat ισχύει $f'(\chi_1)=0$ και θέτοντας $\chi_1=\xi$ έχομε για $\alpha < \xi < \beta$ $f'(\xi)=0$. Αν το χ_1 το χ_1 ταυτίζεται με ένα από τα α,β θα έχομε:

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\chi_1) < f(\chi_2)$$

Οπότε το χ_2 δεν ταυτίζεται με τα άκρα α,β. Τότε επειδή $\chi_2 \in [\alpha,\beta]$ το χ_2 είναι εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$ και σύμφωνα με το θεώρημα

του **Fermat** ισχύει $f'(\chi_2)=0$ και θέτοντας $\chi_2=\xi$ έχομε για $\alpha < \xi < \beta$ $f'(\xi)=0$.

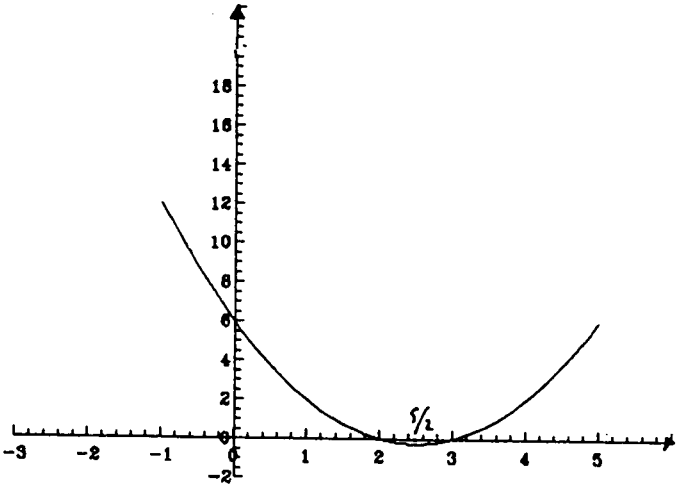
Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ η $f'(\chi)=0$ για κάθε $\chi \in (\alpha,\beta)$ άρα και $f'(\xi)=0$ για $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Παρατηρήσεις: Οι συνθήκες του θεωρήματος Rolle είναι ικανές όχι όμως και αναγκαίες για να υπάρχει $\chi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\chi)=0$.

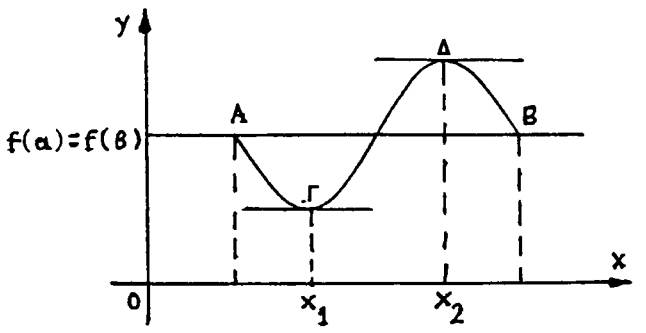
17.3.1_Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2-3\chi+2$ με πεδίο ορισμού το $[0,5]$. Η $f'(\chi)=2\chi-3$ μηδενίζεται στο σημείο $3/2$ που είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Όμως η υπόθεση $f(0)=f(5)$ δεν ισχύει αφού $f(0)=2$ και $f(3)=25-15+2=12$.

2. Η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2-5\chi+6$ με πεδίο ορισμού το R. Στο διάστημα $[1,4]$ (I) η $f(\chi)$ είναι συνεχής (II) η f είναι παραγωγίσιμη (III) ισχύει $f(1)=1^2-5\cdot 1+6=2$ και $f(4)=4^2-5\cdot 4+6=-16-20+6=2$ δηλαδή $f(1)=f(4)$. Επομένως υπάρχει σημείο $\xi \in (1,4)$ ώστε $f'(\xi)=0$. Εδώ $\xi=5/2$ γιατί $f'(\chi)=2\chi-5$ και $f'(5/2)=2\cdot 5/2-5=0$.



17.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.



Από γεωμετρικής απόψεως το θεώρημα του Rolle σημαίνει ότι: Στο τόξο της καμπύλης ΑΒ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης είναι παράλληλη στον άξονα του χ.

17.3.3 Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f με $f(\chi)=\sqrt{4-\chi^2}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle.

<u>Απόδειξη</u>

Η συνάρτηση f με $f(\chi)=\sqrt{4-\chi^2}$ είναι:

(I) ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-2,2]$ αφού $4-\chi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow (\chi+2)(\chi-2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \chi \leq 2$.

(II) παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2,2)$

$$f'(\chi) = (\sqrt{4-\chi^2})' = \frac{(4-\chi^2)'}{2\sqrt{4-\chi^2}} = \frac{-2\chi}{2\sqrt{4-\chi^2}} = \frac{-\chi}{\sqrt{4-\chi^2}}$$

(III) $f(2) = \sqrt{4-2^2} = 0$, $f(-2) = \sqrt{4-(-2)^2} = 0$ άρα $f(2)=f(-2)$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ στο οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$. Πράγματι εδώ $\xi=0 \in (-2,2)$ για το οποίο ισχύει

$$f'(0) = \frac{-0}{\sqrt{4-0^2}} = \frac{0}{\sqrt{4}} = 0$$

17.3.4 Εφαρμογή

Εάν η πολυωνυμική συνάρτηση $f(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\chi + \alpha_0$ έχει μ το πλήθος πραγματικές ρίζες (διάφορες μεταξύ τους), η παράγωγος αυτής έχει $\mu-1$ το πλήθος πραγματικές ρίζες, διάφορες μεταξύ τους.

Απόδειξη

Έστω $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ οι ρίζες της $f(\chi)$.

Επειδή $f(\rho_\kappa)=f(\rho_{\kappa+1})=0$ για κάθε $\kappa=1,2,\ldots,\mu-1$ στο διάστημα $[\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1}]$ είναι συνεχής, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(\rho_k)=f(\rho_{k+1})$. Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα υπάρχει $\chi_\kappa \in (\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1})$ τέτοιο ώστε $f'(\chi_\kappa)=0$. Το πλήθος των διαστημάτων $[\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1}]$ είναι $\mu-1$. Υπάρχουν επομένως $\mu-1$ διαφορετικές μεταξύ των ρίζες της $f'(\chi)$.

17.4 Θεώρημα μέσης τιμής ή Θεώρημα Lagrange

Αν η συνάρτηση f με $\psi=f(\chi)$ με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι:

I. Συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

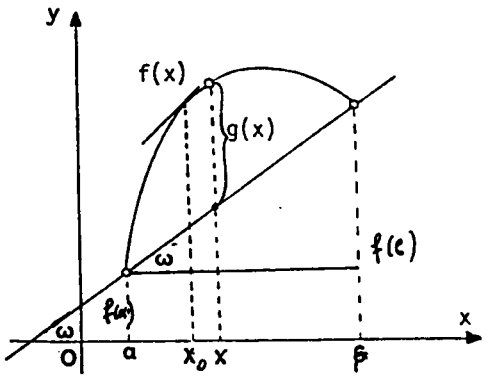
II. Παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Τότε στο (α,β) υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο χ_0 τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\chi_0)$$

Θεωρούμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ της οποίας η κλίση κ είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \kappa = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$



Τότε η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι:

$$\frac{\psi - f(\alpha)}{\chi - \alpha} = \kappa \Longleftrightarrow \psi = f(\alpha) + \kappa(\chi-\alpha)$$

έχομε επομένως τη συνάρτηση $\varepsilon(\chi) = f(\alpha) + \kappa(\chi-\alpha)$. Ορίζοντας τη συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi) - \varepsilon(\chi) = f(\chi) - [f(\alpha) + \kappa(\chi-\alpha)]$ διαπιστώνουμε $g(\alpha) = f(\alpha) - [f(\alpha) + \kappa(\alpha-\alpha)] = 0$

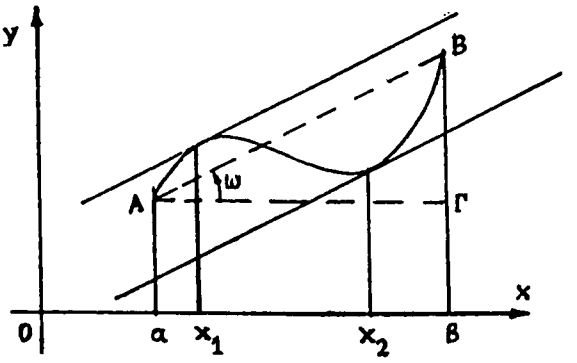
$$g(\beta) = f(\beta) - \left[f(\alpha) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\beta-\alpha)}(\beta-\alpha)\right] = f(\beta) - [f(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha)] =$$

$$= f(\beta) - f(\beta) = 0.$$

Άρα ισχύει $g(\alpha)=g(\beta)$. Επίσης η g ως διαφορά των $f(\chi)$ και $\varepsilon(\chi)$ που είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Καθώς και $g'(\chi)=f'(\chi)-\kappa$ υπάρχει αφού η $f(\chi)$ και $\varepsilon(\chi)$ είναι παραγωγίσιμες. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει χ_o εσωτερικό του διαστήματος (α,β) ώστε $g'(\chi_o) = 0 \Longleftrightarrow g'(\chi_o) = f'(\chi_o)-\kappa = 0 \Longleftrightarrow f'(\chi_o) = \kappa \Longleftrightarrow$

$$f'(\chi_o) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

17.4.1 Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Lagrange



Από γεωμετρικής απόψεως παρατηρούμε στο σχήμα ότι στη γραφική παράσταση της καμπύλης $\psi=f(\chi)$ υπάρχουν εφαπτομένες σε κάθε σημείο της. Επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης είναι παράλληλη στη χορδή AB.

17.4.2 Παράδειγμα

Με τη βοήθεια του θεωρήματος της μέσης τιμής να δείξετε ότι:

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < e^{\beta}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση f με $f(x)=e^x$ είναι:

I. συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

II. παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $x_c \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_o) = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha}$$

και επειδή $f'(x) = (e^x)' = e^x$ είναι $f'(x_o)=e^{x_o}$. Άρα

$$e^{x_o} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$$

και επειδή $\alpha < x_o < \beta$ και η f γνησίως αύξουσα έχομε: $e^\alpha < e^{x_o} < e^\beta$ επομένως

$$e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta$$

17.4.3 Συνέπειες του θεωρήματος της μέσης τιμής

I. Αν η συνάρτηση f με τύπο f(x) είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x)=0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

II. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους f(x) και g(x) με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Αν ισχύει:

α) f και g παραγωγίσιμες στο Δ.

β) $f'(x)=g'(x)$

Τότε

υπάρχει σταθερή συνάρτηση τ ορισμένη στο Δ, τέτοια ώστε να ισχύει $f = g + \tau$.

17.5 Ασκήσεις

17.5.1 Να επαληθευθεί το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση: $\psi=f(x)=x^2-8x+12$ στο διάστημα [2,6].

Λύση

Η $\psi=f(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση άρα είναι συνεχής στο R, επομένως και στο [1,3] καθώς και παραγωγίσιμη στο διάστημα (1,3). Επίσης, επειδή $f(2)=2^2-8\cdot2+12=0$ και $f(6)=6^2-8\cdot6+12=0$, ισχύει $f(2)=f(6)$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Επειδή

$f'(x)=2x-8 \Rightarrow f'(\xi)=2\xi-8=0 \Leftrightarrow 2\xi=8 \Leftrightarrow \xi=4$.

16.5.2 Να επαληθευθεί το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $\psi=f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα $[0,\pi]$.

Λύση
Η συνάρτηση ψ=f(x)=ημx είναι συνεχής στο [0,π] και παραγωγίσιμη στο (0,π) και επειδή f(0)=ημ0=0 και f(π)=ημπ=0, ισχύει f(0)=f(π) επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ξ ∈ (0,π) τέτοιο ώστε f'(ξ)=0. Επειδή f'(x)=(ημx)'=συνx ==> f'(ξ₀)=συνξ=0 ==> ξ=π/2.

17.6 Μονοτονία συναρτήσεων

17.6.1 Αν μια συνάρτηση f(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα [α,β], τότε, αν η παράγωγος της f(x) είναι θετική στο εσωτερικό του [α,β] τότε η f(x) είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη
Αν η f'(x) > 0 τότε για δύο τυχαία σημεία x_1, x_2 του διαστήματος [α,β] με $x_1 < x_2$ έχομε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

για κάποιο ξ με $x_1 < \xi < x_2$. Οπότε f'(ξ)>0 και επομένως

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

και επειδή $x_1 < x_2$ ==> $x_2 - x_1 > 0$ και επομένως $f(x_2) > f(x_1)$. Δηλαδή με $x_1 < x_2$ ==> $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

17.6.2 Αν μια συνάρτηση f(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα [α,β], τότε, αν η παράγωγος της f(x) είναι αρνητική στο εσωτερικό του [α,β] τότε η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη
Αν η f(x) < 0 τότε για δύο τχόντα σημεία x_1,x_2 του διαστήματος [α,β] με $x_1 < x_2$, έχομε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

για κάποιο ξ με $x_1 < \xi < x_2$. Οπότε $f'(\xi)<0$ και επομένως

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

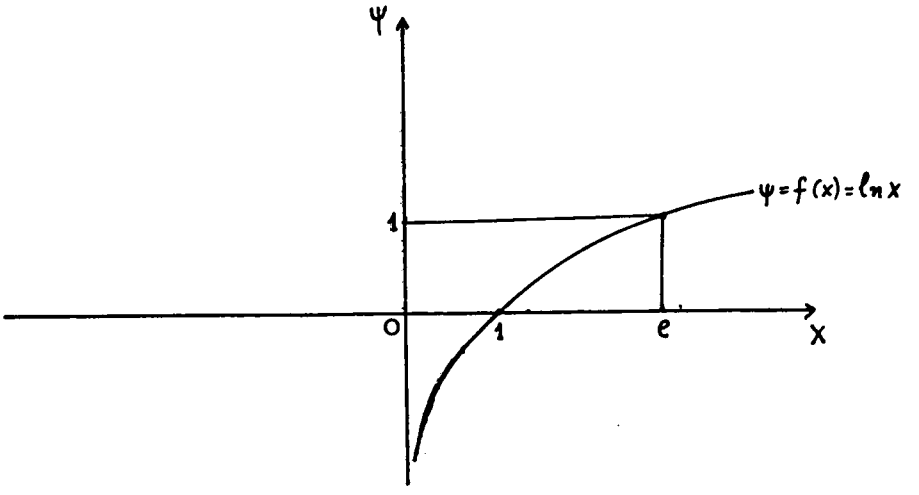
και επειδή $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0$ και έχομε $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Longleftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$. Δηλαδή με $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Σημείωση: Αν για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x) \geq 0$ τότε η f είναι αύξουσα.
Αν για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x) \leq 0$ τότε η f είναι φθίνουσα.

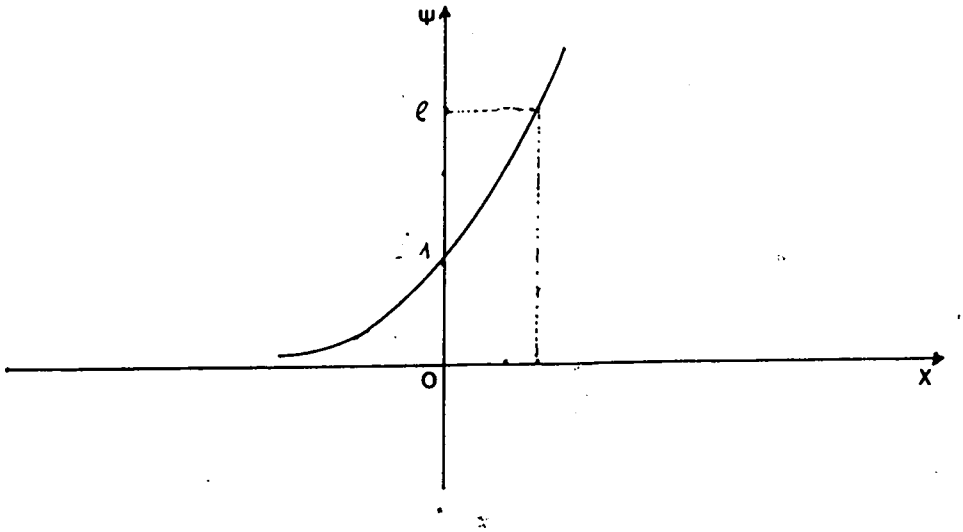
17.6.3 Παραδείγματα

1. Η λογαριθμική συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln x$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα, γιατί για κάθε $x \in R^*_+$ είναι

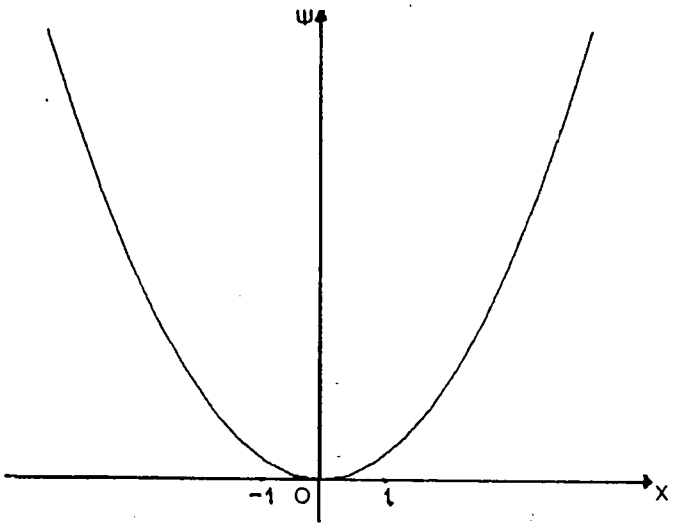
$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$$



2. Η κθετική συνάρτηση f με $f(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα γιατί για κάθε $x \in R$ είναι $f'(x)=(e^x)'=e^x>0$



3. Η συνάρτηση f με $f(x)=x^2$ έχει $f'(x)=(x^2)'=2x$ και άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0$. Επίσης $f'(x)<0$ για κάθε $x<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x<0$.
Για $x=0$ έχομε ελάχιστο της f γιατί $0 \leq x^2 = f(x)$.



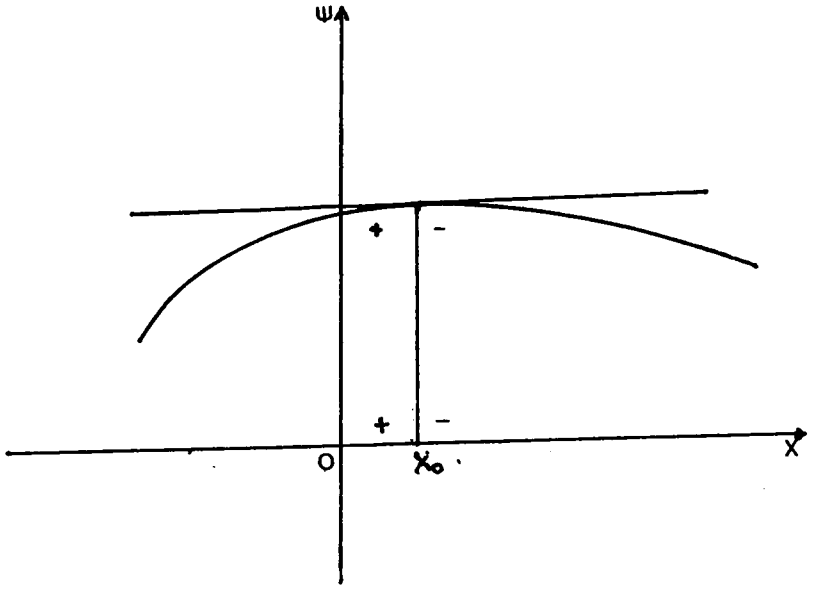
17.7 Τοπικά ακρότατα

Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο x_o αν $f(x_o)$ που είναι η μέγιστη τιμή της f σε κάποιο διάστημα που περιέχει το σημείο αυτό στο εσωτερικό του.

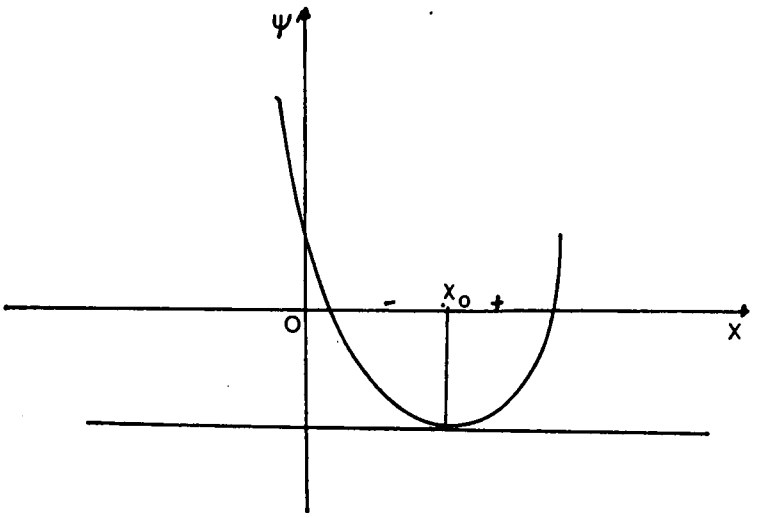
Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχι τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο x_o αν $f(x_o)$ που είναι η ελάχιστη τιμή της f σε κάποιο διάστημα που περιέχει το σημείο αυτό στο εσωτερικό του.
Τότε γενικά λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο.

Αν το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f αλλάζει όταν μεταβαίνουμε από αριστερά του σημείου στα δεξιά του, τότε στο σημείο αυτό η συνάρτηση έχει τοπικό ακρότατο.

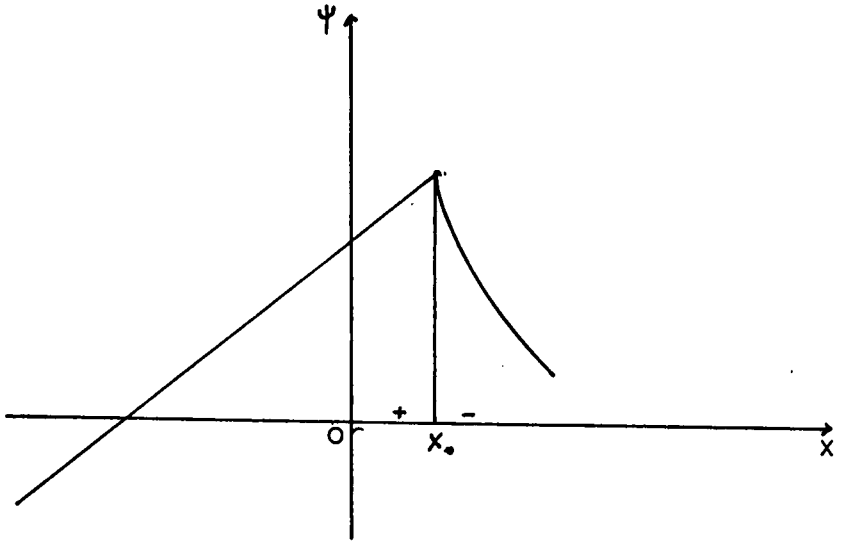
Αν κατά τη μετάβαση από τα αριστερά προς τα δεξιά του σημείου το πρόσημο της πρώτης παραγώγου αλλάζει από θετικό σε αρνητικό τότε στο σημείο αυτό έχομε τοπικό μέγιστο.



Αν κατά τη μετάβαση από τα αριστερά ενός σημείου προς τα δεξιά του, το πρόσημο της πρώτης παραγώγου αλλάζει από αρνητικό σε θετικό τότε στο σημείο αυτό έχομε τοπικό ελάχιστο.



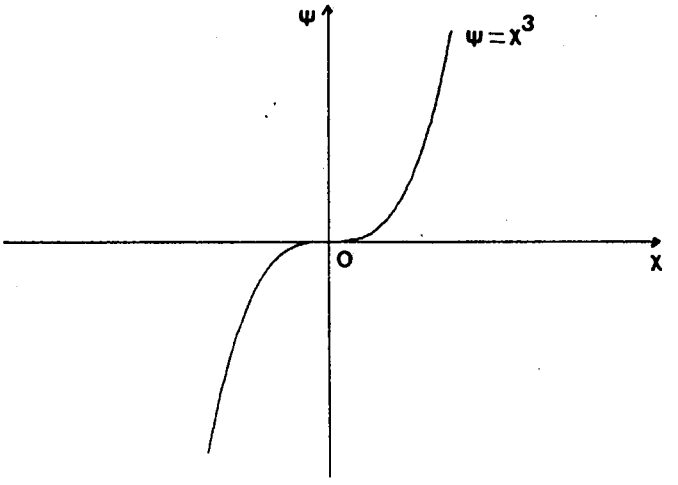
Στο σημείο τοπικού ακροτάτου η συνάρτηση μπορεί να μην έχει παράγωγο, άν όμως έχει παράγωγο τότε η παράγωγος αυτή μηδενίζεται στο σημείο αυτό. (Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο του τοπικού ακρότατου είναι παράλληλη στον άξονα των χ, άρα κλίση μηδέν όπως φαίνεται στα προηγούμενα σχήματα). Στο πιο κάτω σχήμα η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_o, χωρίς όμως να έχει παράγωγο στο x_o.



Δηλαδή τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησηςόταν αυτή έχει παράγωγο εμφανίζονται αποκλειστικά στα σημεία που η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται. Αν υπάρχουν σημεία που η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο τότε η συνάρτηση στα σημεία αυτά έχει τοπικό ακρότατο όταν τηρούνται οι προυποθέσεις που αναφέραμε (δηλαδή αν το πρόσημο της παραγώγου αλλάζει μεταβαίνοντας από αριστερά του σημείου προς τα δεξιά του σημείου).

Γενικά σ'ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης που η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται μπορεί η συνάρτηση να πααρουσιάζει τοπικό ακρότατο μπορεί και όχι. Αυτό εξαρτάται από το αν αλλάζει σημείο η πρώτη παράγωγος.

Παράδειγμα
Η συνάρτηση f με $f(x)=x^3$ έχει παράγωγο $(x^3)'=3x^2$ που μηδενίζεται στο σημείο $x=0$, χωρίς η συνάρτηση να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, αφού το πρόσημο της παραγώγου δεν αλλάζει μεταβαίνοντας από τα αριστερά προς τα δεξιά του μηδέν.



Γενικά σημεία στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται, καλούνται στάσιμα σημεία.

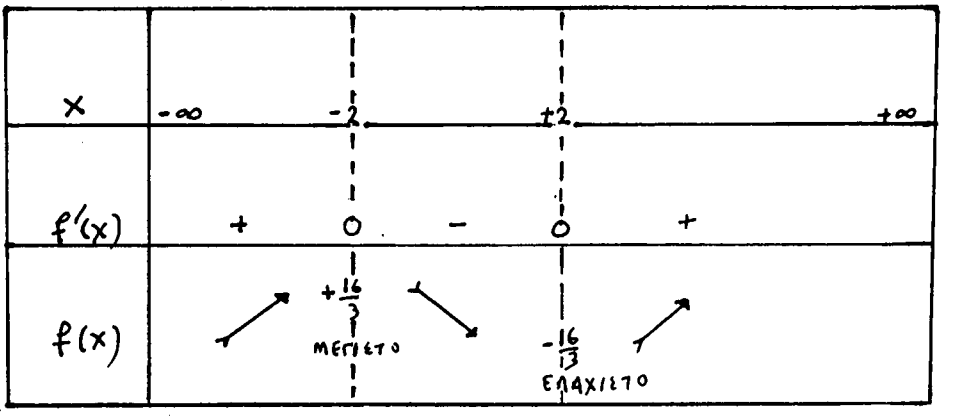
17.7.1 Παράδειγμα

Η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ έχει παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{3}3x^2-4=x^2-4=$ $(x-2)(x+2)$ που μηδενίζεται στο $x=2$ και $x=-2$.

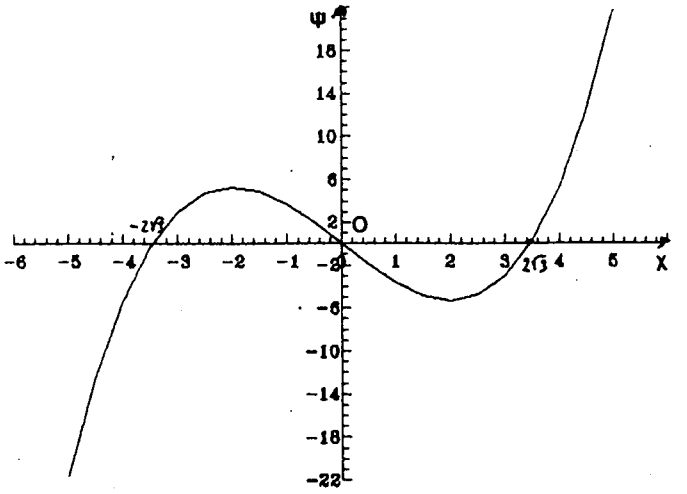
Άρα $f'(2)=0$ και $f'(-2)=0$. Επίσης $f'(x)=(x+2)(x-2)>0$ για κάθε $x \in (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ και $f'(x)=(x+2)(x-2)>0$ για κάθε $x \in (-2,2)$. Άρα η f είναι αύξουσα στο $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ και φθίνουσα στο $(-2,2)$.

Επειδή $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-2]$ και $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x \in [-2,2]$ η f παρουσιάζει στο σημείο -2 τοπικό μέγιστο $f(-2)=16/3$.

Επίσης επειδή $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x \in [-2,2]$ και $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x \in [2,+\infty)$ η f παρουσιάζει στο σημείο 2 τοπικό ελάχιστο $f(2)=-16/3$.



Για να γίνουν περισσότερο παραστατικά αυτά δίδομε και τη γραφική παράσταση.



17.7.2 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2+5$ | R είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R και $f'(x)=3x^2-18x$ οπότε μηδενίζεται για $x=0$, $x=6$ και επειδή $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0]$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0,6]$ στο σημείο 0 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $f(0)=5$ και επειδή $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0,6]$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [6,+\infty)$, στο σημείο 6 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $f(6)=103$.

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$
$f'(x)$	+	−		
$f(x)$	↗	5 ↘ ΜΕΓΙΣΤΟ	−103 ↗ ΕΛΑΧΙΣΤΟ	

17.7.3 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=e^{(x-1)/x} \mid R^*$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R^*.

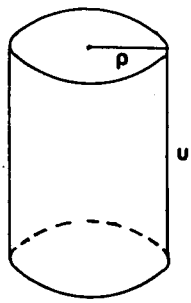
$$f'(x) = (e^{(x-1)/x})' = \left(\frac{x-1}{x}\right)' e^{(x-1)/x} = \frac{1}{x^2} e^{(x-1)/x}$$

Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R^*. Άρα δεν παρουσιάζει ακρότατα.

17.7.4 Παράδειγμα

Θέλομε να κατασκευάσουμε κυλινδρικό δοχείο δοσμένης χωριτικότητας V. Ζητούνται οι διαστάσεις του δοχείου ώστε να χρησιμοποιήσουμε το ελάχιστο υλικό για την κατασκευή του.

Λύση



Εστω ρ η ακτίνα του κυλινδρικού δοχείου και υ το ύψος του. Τότε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας είναι: $E=2\pi\rho^2+2\pi\rho\upsilon$ και ο όγκος του $V=\pi\rho^2\upsilon \Leftrightarrow \upsilon=V/(\pi\rho^2)$ και $E=2\pi\rho^2+2\pi\rho V/(\pi\rho^2) \Leftrightarrow E(\rho)=2\pi\rho^2+2V/\rho$ με $\rho > 0$ και

$$E'(\rho) = 4\pi\rho + \frac{(2V)'\rho - \rho' 2V}{\rho^2} = 4\pi\rho + (-2V)/\rho^2 = \frac{4\pi\rho^3 - 2V}{\rho^2}$$

που μηδενίζεται όταν $\frac{4\pi\rho^3 - 2V}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi\rho^3 - 2V = 0 \Leftrightarrow$

$$4\pi\rho^3 = 2V \Leftrightarrow \rho^3 = \frac{2V}{4\pi} \Leftrightarrow \rho = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

και για $E'(\rho) \geq 0$ για κάθε $\rho \in (-\infty, (V/(2\pi))^{1/3}]$ και $E'(\rho) \leq 0$ για κάθε $\rho \in [(V/(2\pi))^{1/3}, +\infty)$ οπότε στο $\rho=(V/(2\pi))^{1/3}$ η $E(\rho)$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Οπότε οι διαστάσεις του κυλινδρικού δοχείου για να έχομε την ελάχιστη χρησιμοποίηση υλικού είναι:

$$\rho = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} \quad \text{και} \quad \upsilon = \frac{V}{\pi\rho^2} = \frac{V}{\pi(V/(2\pi))^{2/3}} = \frac{V}{\pi V^{2/3}/(2\pi)^{2/3}} =$$

$$= \frac{V 2^{2/3}\pi^{2/3}}{\pi V^{2/3}} = 2^{2/3}V^{1/3}\pi^{-1/3} = \frac{2^{2/3}V^{1/3}}{\pi^{1/3}} .$$

17.7.5 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{όταν } x \geq 0 \\ -x & \text{όταν } x \leq 0 \end{cases}$$

αυτή είναι συνεχής στο R και παραγωγίσιμη στο R^* γιατί

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \quad \text{και}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \quad \text{και επομένως} \quad f'(0^+) \neq f'(0^-)$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$. Στο σημείο $x_o=0$ η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής και η παράγωγος αυτής εκατέρωθεν του 0 αλλάζει σημείο αφού είναι $f'(x)=-1<0$ για κάθε $x<0$ και $f'(x)=1>0$ για κάθε $x>0$. Άρα στο σημείο $x_o=0$ η συνάρτηση $f(x)=|x|$ έχει ελάχιστο $f(0)=0$.

18. Η δεύτερη παράγωγος στη μελέτη των συναρτήσεων

18.1 Ορισμός δευτέρας παραγώγου - Φυσική ερμηνεία - Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω μια συνάρτηση f τότε η παράγωγος της $\frac{df}{dx}$ ή f' είναι επίσης παράγωγος.

Παραγωγίζοντας την πρώτη παράγωγο βρίσκομε τη <u>δεύτερη</u> παράγωγο της f

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2} \quad \text{ή} \quad (f')' = f''$$

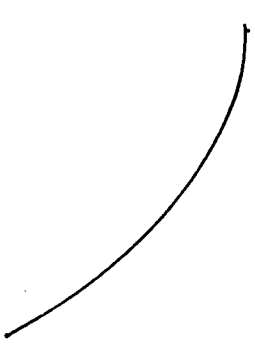
και συνεχίζοντας

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = \frac{d^3f}{dx^3} \quad \text{ή} \quad (f'')' = f'''$$

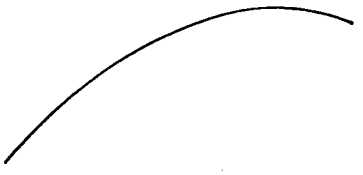
Επίσης χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., $f^{(\nu)}$ για την πρώτη, τη δεύτερη, ..., ν-οστή παράγωγο που δεν πρέπει να τον συγχέομε με τις δυνάμεις f^1, f^2, ..., f^ν.

Αν η συνάρτηση f περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου στον χ-άξονα (x=x(t)) τότε η πρώτη παράγωγος ερμηνεύεται ως στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t. Η δεύτερη παράγωγος της f που περιγράφει την κίνηση του υλικού στον χ-άξονα ερμηνεύεται ως στιγμιαία επιτάχυνση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή t.

Αν η δεύτερη παράγωγος είναι θετική σημαίνει ότι η πρώτη παράγωγος, δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης ευθείας αυξάνει και τότε γεωμετρικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως θα έχει τα κοίλα προς τα πάνω.



Αν η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική σημαίνει ότι η πρώτη παράγωγος, δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης ευθείας ελαττώνεται και τότε γεωμετρικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως θα έχει τα κοίλα προς τα κάτω.



18.2 Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f: A-->R και χ_o ένα σημείο του διαστήματος $\Delta \subseteq A$. Έστω επίσης ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ με f'' συνεχή στο χ_o και ότι $f'(\chi_o)=0$ ενώ $f''(\chi_o)\neq 0$.

Τότε:

I. Αν $f''(\chi_o) > 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο χ_o.

II. Αν $f''(\chi_o) < 0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο χ_o.

<u>Απόδειξη</u>

Έχομε: $$f''(\chi_o) = \lim_{\chi \to \chi_o} \frac{f'(\chi) - f'(\chi_o)}{\chi - \chi_o}$$. Αν $f'(\chi_o)=0$ λαμβάνομε

$$f''(\chi_o) = \lim_{\chi \to \chi_o} \frac{f'(\chi)}{\chi - \chi_o}$$

I. Έστω $f''(\chi_o) > 0$ τότε σύμφωνα με την παρ.8.7 ιδιότητα X του κεφαλαίου <u>Συναρτήσεις</u> υπάρχει περιοχή του χ_o, $(\chi_o-\delta,\chi_o+\delta)$ τέτοια ώστε για κάθε $\chi \in (\chi_o-\delta,\chi_o+\delta)$ με $\chi\neq\chi_o$ οι τιμές της συναρτήσεως f έχουν πρόσημο το πρόσημο του ορίου. Δηλαδή

$$\frac{f'(\chi)}{\chi - \chi_o} > 0$$

Έτσι για κάθε $\chi \in (\chi_o-\delta,\chi_o)$ έχομε $f'(\chi)<0$ ενώ για κάθε $\chi \in (\chi_o,\chi_o+\delta)$ έχομε $f'(\chi) > 0$ και επειδή $f'(\chi_o)=0$ ==> ότι το $f(\chi_o)$ είναι το ελάχιστο της f.

II. Αν $f''(\chi) < 0$ τότε ισχύει

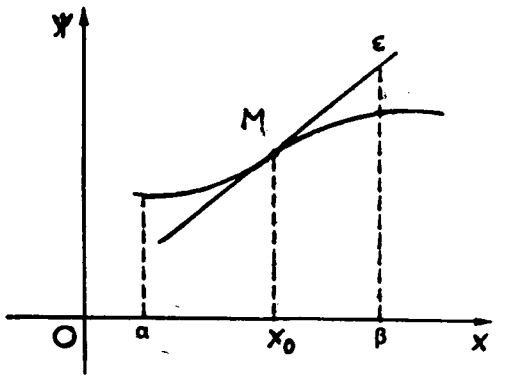
$$\frac{f'(\chi)}{\chi - \chi_o} < 0$$

Έτσι για κάθε $\chi \in (\chi_o-\delta,\chi_o)$ έχομε $f'(\chi) > 0$ ενώ για κάθε $\chi \in (\chi_o,\chi_o+\delta)$ έχομε $f'(\chi) < 0$ και επειδή $f'(\chi_o)=0$ ==> ότι το $f(\chi_o)$ είναι το μέγιστο της f.

Σημείωση: Το θεώρημα αυτό μας δίνει συνθήκες ικανές για την ύπαρξη τοπικών ακροτάτων. Πρέπει να παρατηρήσουμε και εδώ ότι οι συνθήκες $f'(\chi_o)=0$ και $f''(\chi_o)<>0$ δεν είναι αναγκαίες για την ύπαρξη ακροτάτων στο χ_o. Η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^4$ έχει δεύτερη παράγωγο $f''(\chi)=12\chi^2$ που η τιμή της στο 0 είναι $f''(0)=0$. Η συνάρτηση όμως f έχει στο 0 ελάχιστο το $f(0)=0$ αφού για κάθε $\chi \in R$ είναι $f(\chi)=\chi^4 \geq 0 = f(0)$.

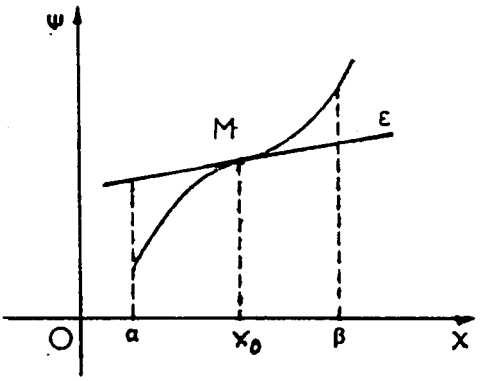
18.3 Σημεία καμπής

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ'ένα διάστημα (α,β) και μηδενίζεται σ'ένα σημείο $\chi_o \in (\alpha,\beta)$ αλλάζοντας πρόσημο μεταβαίνοντας από αριστερά του χ_o προς τα δεξιά, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο χ_o.



Σχήμα 1

Αν η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται στο $\chi_o \in (\alpha,\beta)$ και είναι θετική στο διάστημα (α,χ_o) και αρνητική στο (χ_o,β) τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται εκατέρωθεν της εφαπτομένης της στο σημείο $M(\chi_o,f(\chi_o))$ και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο (α,χ_o) και τα κοίλα προς τα κάτω στο (χ_o,β). Σχήμα 1.



Σχήμα 2.

Αν η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται στο $\chi_o \in (\alpha,\beta)$ και είναι αρνητική στο διάστημα (α,χ_o) και θετική στο (χ_o,β) τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται εκατέρωθεν της εφαπτομένης της στο σημείο $M(\chi_o,f(\chi_o))$ και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο (α,χ_o) και τα κοίλα προς τα πάνω στο (χ_o,β). Σχήμα 2.

Και στις δύο περιπτώσεις το σημείο Μ λέγεται <u>σημείο καμπής</u> της γραφικής παράστασης της f.

<u>Σημείωση</u>: Η συνθήκη $f''(\chi_o)=0$ δεν είναι ικανή για να είναι το χ_o σημείο καμπής όπως φαίνεται στη συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^4$ που έχει $f'(\chi)=4\chi^3$ και $f''(\chi)=12\chi^2$ ==> $f''(0)=0$ και όμως στο $\chi_o=0$ η συνάρτηση δεν παρουσιάζει σημείο καμπής αλλά ελάχιστο, αφού για κάθε $\chi \in R$ είναι $f(\chi) \geq 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί η δεύτερη παράγωγος δεν αλλάζει σημείο μεταβαίνοντας από αριστερά προς τα δεξιά του μηδενόςαφού $f''(\chi)=12\chi^2>0$ για κάθε $\chi \in R$.

18.3.1 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=x^3|R$ έχει ένα σημείο καμπής το $x_o=0$ γιατί η δεύτερη παράγωγος της $f''(x)=(f'(x))'=(3x^2)'=6x$ μηδενίζεται στο $x_o=0$ και μεταβαίνοντας από αριστερά του μηδενός στα δεξιά του

αλλάζει πρόσημο αφού $f''(x)=6x<0$ για κάθε $x<0$ και $f''(x)=6x>0$ για κάθε $x>0$.

18.3.2 Παράδειγμα

Η συνάρτηση x^4-24x^2 παρουσιάζει καμπή στα σημεία $x_0=-2$ και $x_0=2$ γιατί η δεύτερη παράγωγος της $f''(x)=(f'(x))'=(4x^3-48x)'=12x^2-48=12(x^2-4)=12(x+2)(x-2)$ μηδενίζεται στα σημεία $x_0=-2$, $x_0=2$.
Επειδή δε $f''(-2)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (-\infty,2)$, $f''(x)<0$ για κάθε $x \in (-2,2)$ παρουσιάζει καμπή στο -2.
Επίσης επειδή $f''(2)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x \in (-2,2)$, $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$ παρουσιάζει καμπή στο 2.

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
$x+2$	$-$		0	$+$		$+$	
$x-2$	$-$			$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	

Για να έχει η συνάρτηση πλάγια ασύμπτωτη με εξίσωση της μορφής $\psi=\lambda x+\mu$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-\lambda x] = \mu$$

Αφού συγκεντρώσουμε όλα τα στοιχεία της συναρτήσεως, κάνουμε πινακογράφηση αυτών και προχωρούμε στη χάραξη της γραφικής παράστασης.

18.4 Παραδείγματα

1. Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού είναι $A = R - \{ \pm 1 \}$ διότι πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

γ) $f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow$ f περιττή

δ) Ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ η f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες $x=1$ και $x=-1$.

Εδώ βαθ.αριθμητή > βαθ.παρανομαστή άρα υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη της μορφής $\psi = \lambda x + \mu$, όπου

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-1/x^2} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

και

$$\mu = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} =$$

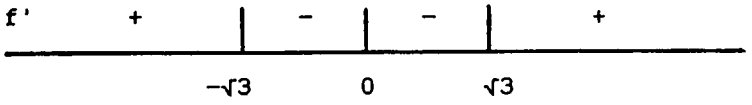
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x}{1-1/x^2} = 0 \Rightarrow \mu = 0.$$

Οπότε η ψ=χ είναι πλάγια ασύμπτωτη για την f.

$$\varepsilon)\ f'(x) = \frac{(x^3)'(x^2-1) - (x^3)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Longleftrightarrow x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$x = 0\ ,\quad x = \sqrt{3}\ ,\quad x = -\sqrt{3}$$



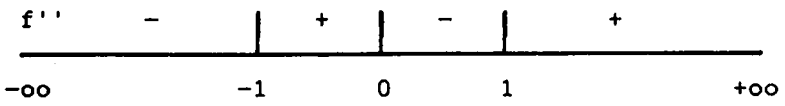
Από το σχήμα συμπεραίνουμε τα εξής:

1) f ↑ $(-\infty,\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$ και f ↓ $(-\sqrt{3},\sqrt{3}) - \{\pm 1\}$

2) Στο $x = -\sqrt{3}$ έχει μέγιστο $f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}/2$.
Στο $x = \sqrt{3}$ έχει ελάχιστο $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}/2$.

$$3)\ f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \quad \text{και} \quad f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Ακόμα για το πρόσημο της f''(x) έχομε:



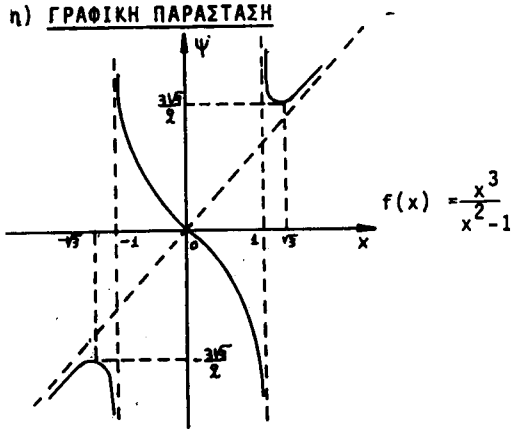
Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι:

1) f κυρτή στο $(-1,0) \cup (1,+\infty)$
2) f κοίλη στο $(-\infty,-1) \cup (0,1)$
3) το x=0 είναι θέση σημείου καμπής.

ΠΙΝΑΚΑΣ

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
f'	+		0	-	-		0	-	-		0		+
f''	-		-		+		0	-	+		+		+
f	↗		↘		↘		↘		↘		↗		↗
			max				Σ.Κ				min		

η) ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



2. Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Λύση

α) Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \Rightarrow D_f = R - \{-1\}$

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f(0) = 0$

γ) Ασύμπτωτες

$\lim_{x \to -1} f(x) = \pm\infty$ η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη με εξίσωση $x = -1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(1+1/x)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(1+1/x)} = 1$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη με εξίσωση $\psi = 1$.

$$\delta)\ f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0,$$

για κάθε $x \in R - \{-1\}$.
Άρα f ↑ για κάθε $x \in R - \{-1\}$ και βέβαια δεν υπάρχουν ακρότατα.

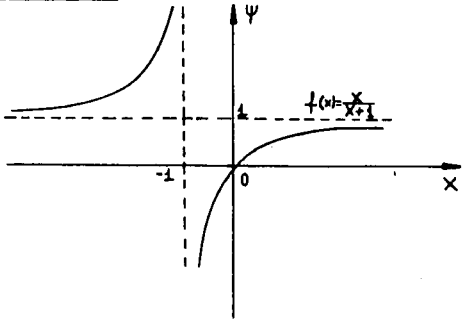
$$\varepsilon)\ f''(x) = \left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]' = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow$ f κυρτή στο $(-\infty,-1)$ και
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > -1 \Rightarrow$ f κοίλη στο $(-1,+\infty)$.

ΠΙΝΑΚΑΣ

x	$-\infty$	-	-1	0	1	$+\infty$
f'	+		+	+	+	
f"	+		-	-	-	
f	↗		↗	0 ↗	↗	

3) ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



3. Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{-x^2}$

Λύση

α) $D_f = R$

β) $f(x) <> 0$ για κάθε $x \in R$

γ) $f(-x) = e^{[-(-x)^2]} = e^{(-x^2)} = f(x)$ ==> άρτια

δ) Ασύμπτωτες

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{(-x^2)} = 0$ η ευθεία με εξίσωση $\psi = 0$ είναι

οριζόντια ασύμπτωτη της f.

ε) $f'(x) = -2xe^{(-x^2)}$

$f'(x) = 0 <==> x = 0$

$f'(x) > 0 <==> -2xe^{(-x^2)} > 0 <==> x < 0$ και

$f'(x) < 0 <==> -2xe^{(-x^2)} < 0 <==> x > 0$

Άρα f ↑ στο $(-\infty,0)$ και f ↓ στο $(0,+\infty)$. Επειδή δε η f' αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά του 0 ==> για $x=0$ η f παρουσιάζει ακρότατο και μάλιστα τοπικό μέγιστο $f(0)=e^0$ ==> $f(0)=1$.

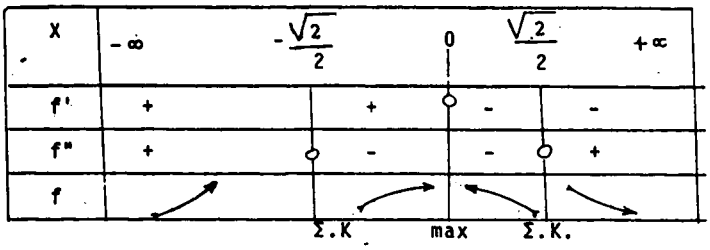
στ) $f''(x) = (-2xe^{(-x^2)})' = 2e^{(-x^2)}(2x^2-1)$

$f''(x) = 0 <==> 2e^{(-x^2)}(2x^2-1) = 0 <==> x = \pm\sqrt{2}/2$

$f''(x) > 0 <==> x \in (-\infty,-\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2,+\infty)$

$f''(x) < 0 <==> x \in (-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$

Επειδή δε η f αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά των $-\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$ τα σημεία $\pm\sqrt{2}/2$ είναι θέσεις σημείων καμπής.



18.5 Τύπος Taylor

Αν οι συναρτήσεις $f, f', f'', \ldots, f^{(\nu)}$, $\nu \in N$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα Δ και η $f^{(\nu+1)}$ υπάρχει σε κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος Δ, τότε για κάθε $(\alpha,\beta) \in \Delta$ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!}.f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^{\nu}}{\nu!}.f^{(\nu)}(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^{\kappa}(\beta-\xi)^{\nu-\kappa+1}}{\kappa\cdot\nu!}.f^{(\nu+1)}(\xi)$$

με $\kappa \leq \nu+1$, $\kappa \in N^*$ <u>Τύπος Taylor</u>

Τον όρο $R_{\nu} = \frac{(\beta-\alpha)^{\kappa}(\beta-\xi)^{\nu-\kappa+1}}{\kappa\cdot\nu!}.f^{(\nu+1)}(\xi)$ τον ονομάζουμε υπόλοιπο του Taylor ο οποίος για $\kappa = 1$ γίνεται:

$$R_\nu = \frac{(\beta-\xi)^\nu(\beta-\alpha)}{\nu!}.f^{(\nu+1)}(\xi)$$ <u>υπόλοιπο Cauchy</u>

Ενώ για $\kappa = \nu+1$

$$R_\nu = \frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.f^{(\nu+1)}(\xi)$$ <u>υπόλοιπο Lagrange</u>

Τέλος ο τύπος Taylor με το υπόλοιπο Lagrange γίνεται:

$$1.\ f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\xi)$$

Αν θέσομε στον τύπο (1) όπου $\beta = \chi+\alpha$, $\chi \in \Delta$ έχομε:

$$2.\ f(\chi+\alpha) = f(\alpha) + \frac{\chi}{1!}f'(\alpha) + \ldots + \frac{\chi^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\alpha) + \frac{\chi^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\theta)$$

με $0 < \theta < 1$

Τέλος αν ΟΕΔ τότε ο τύπος (2) για $\alpha=0$ γίνεται:

$$3.\ f(\chi) = f(0) + \frac{\chi}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{\chi^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(0) + R_\nu$$ <u>Τύπος Mac Laurin</u>

18.5.1 Παραδείγματα

1. Να αναπτυχθεί κατά τις αύξουσες δυνάμεις του $\chi-2$ η συνάρτηση $f(x) = e^x$.

<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) για $\alpha = 2$

$f(x) = e^x$ $\qquad$ $f(2) = e^2$

$f'(x) = e^x \qquad f'(2) = e^2$

$f''(x) = e^x \qquad f''(2) = e^2$

$f'''(x) = e^x \qquad f'''(2) = e^2$

.....

.....

.....

$f^{(\nu)}(x) = e^x \qquad f^{(\nu)}(2) = e^2$

Αρα ο τύπος Taylor

$$f(\chi) = f(\alpha) + \frac{\chi-\alpha}{1!}f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\chi-\alpha)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\alpha)$$

δίνει:

$$f(\chi) = e^2 = e^2 + \frac{\chi-2}{1!}e^2 + \frac{(x-2)^2}{2!}e^2 + \frac{(x-2)^3}{3!}e^2 + \ldots + \frac{(\chi-2)^\nu}{\nu!}e^2 + \ldots$$

2. Να αναπτυχθεί ως προς τις δυνάμεις του χ η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

<u>Λύση</u>
Εφαρμόζουμε τον τύπο (3) (Mac Laurin)

$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(0) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{1} = -1$

$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(x+1)^3} \qquad f'''(0) = 1\cdot 2$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{(x+1)^{\nu}} \qquad f^{(\nu)}(0) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!$$

Αντικαθιστώντας στη σειρά Mac Laurin έχομε

$$f(x) = \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{\nu-1}x^{\nu}}{\nu} + \ldots.$$

3. Να αναπτυχθεί σε σειρά ως προς τις δυνάμεις του x η $f(x)=\eta\mu x$.

<u>Λύση</u>
Έχομε

$$f(x) = \eta\mu x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(x+\pi/2) \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\eta\mu x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(x+3\pi/2) \qquad f'''(0) = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(\nu)}(x) = \eta\mu(x+\pi\nu/2) \qquad f^{(\nu)}(0) = \eta\mu(\pi\nu/2)$$

Άρα με αντικατάσταση στη σειρά Mac Laurin έχομε:

$$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{\nu}\eta\mu(\pi\nu/2)}{\nu!}$$

Στη σειρά αυτή το x μετράται σε ακτίνια.

18.6 Κανόνας του L'Hospital

Ο κανόνας αυτός χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ορίων συναρτήσεων με τη βοήθεια παραγώγων.

Αν οι συναρτήσεις f και g με τύπους αντίστοιχα f(x) και g(x) είναι παραγωγίσιμες στην περιοχή του σημείου α (εξαιρείται το α) με $g'(x) \neq 0$ στην περιοχή του α και αν

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0 \ , \ \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty \ , \ \lim_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} f'(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g'(x)}$$

Αν κατά την εφαρμογή του κανόνα του L'Hospital τα όρια των f',g' στο α είναι 0 ή ±οο , τότε το όριο της f'/g' θα είναι ίσο με το όριο της f''/g'' στο α κ.ο.κ. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

18.6.1 Παραδείγματα

1. Να ευρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f με τύπο f(x)=lnx και g με τύπο $g(x)=\sqrt{x-1}$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (1,+οο).

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{1-1} = 0$

και επειδή $g'(x) = (\sqrt{x-1})' = \dfrac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \neq 0$ για κάθε $x > 1$

ισχύουν οι προϋποθέσεις του κανόνα του L'Hospital. Άρα ισχύει

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}}{x}=\frac{2\cdot 0}{1}=0$$

2. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f με τύπο $f(x)=x^2-1$ και g με τύπο $g(x)=x^3-1$ είναι παραγωγίσιμες στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)=0$

Και επειδή $(x^3-1)'=3x^2\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του κανόνα του L'Hospital. Άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(x^3-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{3x^2}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1^2}=\frac{2}{3}$$

3. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f με $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ και g με τύπο $g(x)=x-\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμες στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-e^{-x}-2x)=e^0-e^{-0}-20=1-1-0=0$

και $\lim\limits_{x\to 0}(x-\eta\mu x)=0-0=0$

και επειδή $(x-\eta\mu x)'=1-\sigma\upsilon\nu x\neq 0$ για κάθε $x\neq 2k\pi$, ισχύουν οι προϋποθέσεις του κανόνα του L'Hospital. Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{e^0+e^{-0}}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1+1}{1}=2$$

Αφού $\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)=0$, $\lim_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$, $\lim_{x\to 0}(e^x-e^{-x})=0$

και $\lim_{x\to 0}\eta\mu x=0$.

4. Να βρεθεί το $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x}{x^5}$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f με τύπο $f(x)=e^x$ και g με τύπο $g(x)=x^5$ είναι παραγωγίσιμες στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επίσης $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}x^5=\pm\infty$

και επειδή $(x^5)'=5x^4\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$ ισχύει ο κανόνας του L'Hospital και έχω

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^5)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(5x^4)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5\cdot 4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(5\cdot 4\cdot x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5\cdot 4\cdot 3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(5\cdot 4\cdot 3x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=+\infty$$

Ο κανόνας του L'Hospital εφαρμόσθηκε 4 φορές αφού οι συναρτήσεις $5x^4$, $5\cdot4x^3$, $5\cdot4\cdot3x^2$, $5\cdot4\cdot3\cdot2x$ είναι παραγωγίσιμες και έχουν όρια το +οο όταν x-->+οο και είναι ≠ 0 καθώς και οι παράγωγοι αυτών είναι <> 0 για κάθε x ≠ 0.

18.7 Μερική παράγωγος

Μέχρις εδώ ασχοληθήκαμε με συναρτήσεις μιας μόνο μεταβλητής. Όπως όμως ξέρουμε υπάρχουν και συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών όπως $z=f(x,\psi)$ ή $z=f(x,\psi,\omega)$, $z=f(x,\psi,\omega...)$.

Στην περίπτωση δύο μεταβλητών θα εξετάσουμε την παραγώγιση και ας δούμε έναν πολύ απλό νόμο.
Τον νόμο όγκου V, πιέσεως P και θερμοκρασίας T, που είναι

$$V = C\frac{T}{P}$$

α) Αν υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία T μεταβάλλεται ενώ η πίεση P παραμένει σταθερά τότε

$$\frac{dV}{dT} = C\frac{1}{P}$$

β) Αν υποθέσουμε ότι η πίεση P μεταβάλλεται ενώ η θερμοκρασία T παραμένει σταθερά τότε

$$\frac{dV}{dP} = -C\frac{T}{P^2}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ύπαρξη δύο ανεξάρτητων μεταβλητών συνεπάγεται την δημιουργία δύο παραγώγων. Οι παράγωγοι αυτές λέγονται μερικές παράγωγοι.

Για να γίνεται διάκριση μεταξύ της παραγώγου και της μερικής παραγώγου θα χρησιμοποιούμε αντί του συμβόλου "d" το "∂".

Έτσι λοιπόν οι πιο πάνω μερικές παράγωγοι θα συμβολίζονται αντίστοιχα:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \kappa \frac{1}{P}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\kappa \frac{T}{P^2}$$

Γενικότερα εάν $z=f(x,\psi)$ όταν γράφουμε $\frac{\partial z}{\partial x}$ θα εννοούμε την x σαν μεταβλητή και την ψ σαν σταθερά.

Ενώ με $\frac{\partial z}{\partial \psi}$ θα εννοούμε την ψ σαν μεταβλητή και την x σαν σταθερά.

Με την βοήθεια του ορισμού που δώσαμε στο κεφάλαιο περί παραγώγων θα μπορούμε να έχομε για τις μερικές παραγώγους της $z=f(x,\psi)$

$$\alpha)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\psi) - f(x,\psi)}{\Delta x}$$

$$\beta)\quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = \lim_{\Delta \psi \to 0} \frac{f(x,\psi+\Delta\psi) - f(x,\psi)}{\Delta \psi}$$

Το ίδιο κάνουμε αν έχομε συνάρτηση της μορφής $z=f(x,\psi,z)$.

18.7.1 Παραδείγματα

1. $z = x^2 + 2y$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,,$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2$

2. $z = 2x^3y + 5x^2y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y + 10xy^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 + 10x^2y$$

3. $z = \eta\mu(x+y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sigma\upsilon\nu(x+y) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sigma\upsilon\nu(x+y)$$

4. $z = \eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu^2 y + e^{2x+1}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sigma\upsilon\nu x + 2x\sigma\upsilon\nu^2 y + 2e^{2x+1} \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2\sigma\upsilon\nu y \cdot \eta\mu y$$

18.7.2 Γεωμετρική σημασία της μερικής παραγώγου

Όπως γνωρίζουμε μια συνάρτηση με μια ανεξάρτητη μεταβλητή παρίσταται στο επίπεδο με μια γραμμή.

Αν όμως υπάρχουν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές η συνάρτηση $f(x,y)$ μπορεί να παρασταθεί με μια επιφάνεια δηλ. χρησιμοποιούνται συντεταγμένες σε τρεις διαστάσεις.

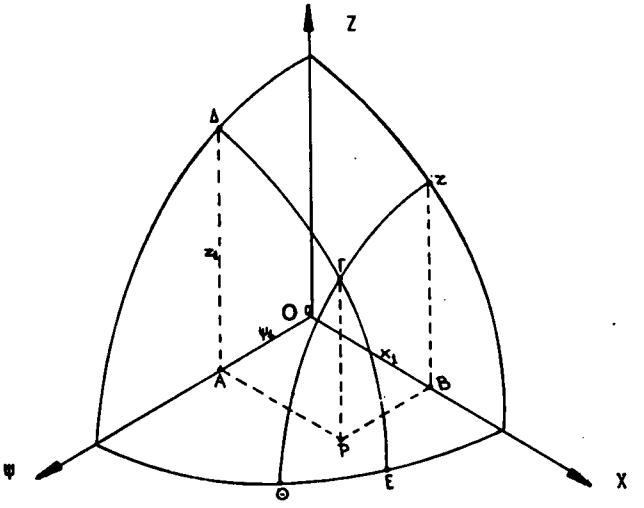
Εάν έχομε το σημείο $\Gamma(x_1,y_1,z_1)$ τότε το σύνολο όλων αυτών των σημείων που ικανοποιούν την $z=f(x,y)$ θα βρίσκεται πάνω σε μια επιφάνεια.

1) Έστω y σταθερή και με τιμή y_1 τότε η ΔΓΕ θα παριστάνει τις μεταβολές της z ως προς x όταν η y είναι σταθερή.

Συνεπώς η μερική παράγωγος $\frac{\partial z}{\partial x}$ θα παριστάνει τον συντελεστή

διευθύνσεως της εφαπτομένης της καμπύλης που αντιστοιχεί σε μια δεδομένη τιμή της x. Π.χ. όταν $x=x_1$ το Γ είναι το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης και η εφαπτομένη της καμπύλης ΔΓΕ στο Γ

παριστάνει την τιμή της $\frac{\partial z}{\partial x}$ όταν $x=x_1$.



2) Έστω x σταθερή και με τιμή x_1. Τότε η καμπύλη ΖΓΘ παριστάνει τις μεταβολές της z ως προς y.

Η $\frac{\partial z}{\partial y}$ παριστάνει την εφαπτομένη της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο της για αντίστοιχες τιμές των y και z.

18.7.3 Μερικές παράγωγοι ανωτέρου βαθμού

Οι μερικές παράγωγοι μιας συναρτήσεως $z=f(x,y)$ είναι οι ίδιες συναρτήσεις των μεταβλητών που περιέχουν και έτσι μπορούν να έχουν τις μερικές παραγώγους των.

α) Έτσι εάν η $\frac{\partial z}{\partial x}$ παραγωγιστεί ως προς x, αυτό θα παριστάνεται με

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ και συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

β) Επειδή είναι και συνάρτηση της y, μπορεί να παραγωγισθεί ως προς y. Έτσι έχομε:

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ που συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

γ) Ομοίως η $\frac{\partial z}{\partial y}$ μπορεί να παραγωγισθεί ως προς x και y.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ που συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Παρατήρηση: Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

αυτό ισχύει στις συνηθισμένες περιπτώσεις, υπάρχουν όμως περιπτώσεις που αυτό δεν συμβαίνει.

18.7.4 Ολικό διαφορικό

Όταν μια συνάρτηση $y = f(x)$ παραγωγίζεται έχομε $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Αν αυτό γραφεί στη μορφή $dy = f'(x)dx$ τότε το διαφορικό dy της εξαρτημένης μεταβλητής y εκφράζεται συναρτήσει του διαφορικού dx της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Θα προσπαθήσουμε τώρα εάν έχομε την z=f(x,y) να βρούμε μια έκφραση μεταξύ των dz,dx και dy.
Έστω z=f(x,y) (1)
Ας υποθέσουμε ότι η x αυξάνει κατά Δx η y κατά Δy και η z αντίστοιχα κατά Δz.
Τότε

$$z+\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) \qquad (2)$$

Δι'αφαιρέσεως των (1) και (2) έχομε

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \qquad (3)$$

Αν μεταβάλλεται μόνο η y και αυξηθεί κατά Δy το αποτέλεσμα εκφράζεται από την $f(x,y+\Delta y)$ (4).
Αν μεταβάλλεται μόνο η x και αυξηθεί κατά Δx το αποτέλεσμα εκφράζεται από την $f(x+\Delta x,y)$.
Από την (3) και. (4) έχομε:

$$\Delta z = \frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y \qquad (5)$$

Αν Δx και Δy τείνουν στο μηδέν τότε στο όριο η

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}$$

γίνεται μερική παράγωγος της $f(x,y+\Delta y)$ όταν μεταβάλλεται μόνο η x και η y παραμένει σταθερά.
Η έκφραση όμως αυτή όταν και η Δy-->0 παίρνει τη μορφή

$$\frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Έτσι αυτή γίνεται η μερική παράγωγος της f(x,y) δηλ. $\frac{\partial z}{\partial x}$

Στο όριο μας επίσης η $\dfrac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y$ παριστάνει την

μερική παράγωγο της f(x,y) δηλαδή $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Επίσης στο όριο, με τον συνηθισμένο συμβολισμό οι Δx, Δy, Δz γίνονται τα διαφορικά dx, dy, dz.
Άρα αν αντικαταστήσουμε για τους αντίστοιχους όρους της (5) θα έχομε

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

Γενικότερα εάν έχομε την σχέση

u = F(x,y,z,...,t) για το ολικό διαφορικό θα έχομε:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots + \frac{du}{dt}dt$$

18.8 Ολικά διαφορικά ανώτερης τάξεως

Έστω η συνάρτηση z=f(x,y) με τις μερικές της παραγώγους συνεχείς. Τότε έχομε από την προηγούμενη παράγραφο ότι:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad (1)$$

Ονομάζομε ολικό διαφορικό δευτέρας τάξεως της z=f(x,y) το ολικό διαφορικό του πρώτου ολικού διαφορικού dz της (1) δηλαδή:

d(dz) θα συμβολίζομε δε d^2z

Ομοίως τρίτο ολικό διαφορικό d^3z κ.ο.κ.

Για το d^2z έχομε:

$$d^2z = d(dz) = d\left[\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right]dx + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$\mathbf{dz^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}$$

Παρατήρηση: Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι οι συντελεστές των ολικών διαφορικών ανώτερης τάξης ακολουθούν τους συντελεστές του $(\alpha+\beta)^{\nu}$.

18.9 Ολική παράγωγος

Εστω $x=x(t)$, $y=y(t)$ τότε από τον τύπο του ολικού διαφορικού θα έχομε:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$

Η παράσταση αυτή ονομάζεται ολική παράγωγος της z, ως προς x και y, που και αυτές εξαρτώνται από την y.

Γενικότερα αν $u = f(x,y,z,\ldots)$ τότε

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} + \ldots$$

18.10 Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

Οι μερικές παράγωγοι μας λύνουν το πρόβλημα της εύρεσης παραγώγου μιας πεπλεγμένης συνάρτησης.

Έστω αν $z = f(x,y) =$ σταθερά
Τότε τα διαφορικά της είναι μηδέν επομένως ο τύπος

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$$

γίνεται

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$$

18.11 Παραδείγματα

1. Αν $z = \sqrt{x^2+y^2}$ να βρείτε το dz αν x=15, y=20, dx=5/8, dy=-5/16.

Λύση

Έχομε: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Άρα

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x\cdot 5/8 - y\cdot 5/16}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και μετά την αντικατάσταση

$$dz = \frac{15\cdot 5/8 - 20\cdot 5/16}{\sqrt{15^2+20^2}} = \frac{75/8 - 50/8}{\sqrt{625}} = \frac{\frac{50}{8}}{\frac{25}{1}} = \frac{1}{8}$$

2. Αν $P = \frac{E^2}{R}$ να βρείτε το dP.

<u>Λύση</u>
Έχομε:

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2} \quad \text{άρα} \quad dP = \frac{2E}{R}dE - \frac{E^2}{R^2}dR$$

3. Αν $z=2x^3 - xy^3 + y^2 = 0$ βρείτε την $\frac{dy}{dx}$.

<u>Λύση</u>
Έχομε:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - y^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2 + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 - y^3}{3xy^2 + 2y}$$

4. Να βρείτε τον συντελεστή διευθύνσεως της εφαπτομένης της καμπύλης $z = x^2 + xy + y^2 + 4 = 0$ στο σημείο $(2,-2)$.

Λύση

Έχομε: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y$

άρα

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

συνεπώς $\varepsilon\varphi\omega = \frac{dy}{dx}$ στο σημείο $(2,-2)$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} .$$

5. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}$ εάν $z = x^2 + 3xy + 5y^2$ και $x=\eta\mu t$, $y=\sigma\upsilon\nu t$.

Λύση

Έχομε: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y$

$$\frac{dx}{dt} = \sigma\upsilon\nu t , \quad \frac{dy}{dt} = -\eta\mu t$$

άρα $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x + 3y)\sigma\upsilon\nu t - (3x + 10y)\eta\mu t .$$

6. Εάν $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = e^{-t}$, $y = e^t$, βρείτε το $\frac{dz}{dt}$

<u>Λύση</u>

Έχομε: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$

$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}$, $\frac{dy}{dt} = e^t$

άρα $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2\frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2 + y^2}$

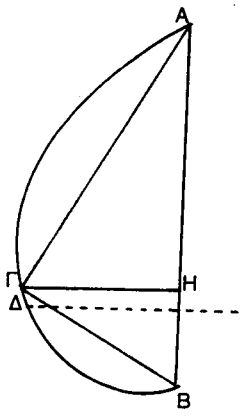
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1.1 Ιστορικό

Στο διαφορικό Λογισμό μας δίνεται η δυνατότητα να αναλύσουμε ένα φυσικό φαινόμενο, όταν είναι γνωστός και σε μαθηματική γλώσσα διατυπωμένος με μια συνάρτηση, ο "Νόμος" που διέπει το φυσικό φαινόμενο. Αν π.χ. είναι μαθηματικώς δεδομένη η τροχιά ενός κινητού σε σχέση με το χρόνο, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα με τη βοήθεια της παραγώγου.

Πολλές φορές όμως εμφανίζεται η αντίθετη ανάγκη, δηλαδή ζητείται η συνάρτηση της οποίας η παράγωγος λαμβάνει ορισμένες τιμές, που είναι γνωστές από κάποιο πείραμα. Οι συναρτήσεις αυτές χαρακτηρίζονται ως ολοκληρώματα.

Ο όρος προήλθε από το πρόβλημα του καθορισμού του εμβαδού ενός τμήματος μιας επιφάνειας που περικλείεται από μια καμπύλη. Οι Αρχαίοι Έλληνες το ονόμαζαν "πρόβλημα του τετραγωνισμού", αφού αντιμετώπιζαν το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ορισμένων επιφανειών με το μετασχηματισμό τους σε ισοδύναμα τετράγωνα. (Παράδειγμα: οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη). Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) με τη "μέθοδο της εξαντλήσεως", υπολόγισε το εμβαδόν παραβολικού χωρίου με τον τετραγωνισμό. Έτσι υπολόγισε ότι το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος ΑΒΔ είναι ίσο με τα 4/3 του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. Η ιδέα του Αρχιμήδη είναι η "εξάντληση" της μετρούμενης επιφάνειας με μια ακολουθία εμβαδών. Την ιδέα αυτή του Αρχιμήδη την αξιοποίησε ο Κέπλερ (1571-1630 μ.Χ.) για τον υπολογισμό όγκων διαφόρων στερεών όπως π.χ. του βαρελιού. Ο Λάιμπνιτζ (1646-1716 μ.Χ.) και ο Νεύτων (1643-1727 μ.Χ.) ανακάλυψαν ότι η "ολοκλήρωση" και η "διαφόριση" είναι αντίστροφες έννοιες. Έτσι εμφανίστηκε το Αόριστο Ολοκλήρωμα.



Σχήμα 1

1.2 Η Εννοια του Ολοκληρώματος

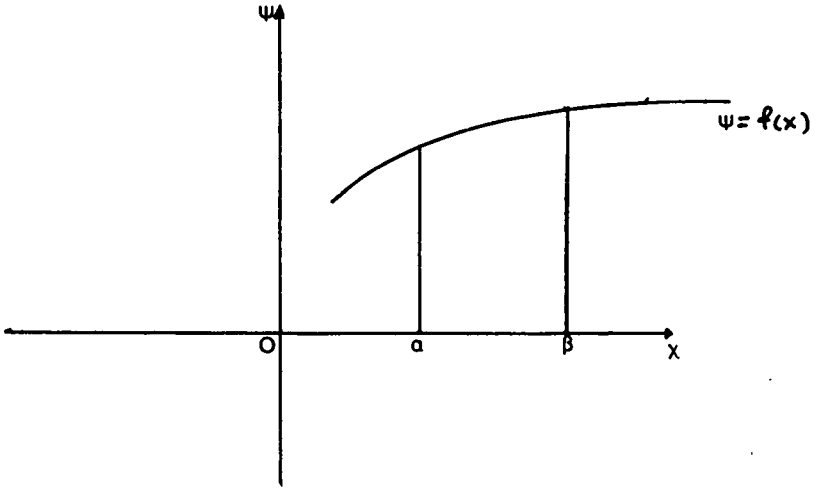
Η μαθηματική σημασία της λέξεως ολοκλήρωμα, διασαφηνίζεται πλήρως στην εύρεση περιοχών που έχουν σχέση με καμπύλες, όγκο ποικίλων στερεών, μήκους καμπύλων, κέντρου βάρους και σε άλλες εφαρμογές.

Η άλλη μαθηματική σημασία του ρήματος ολοκληρώνω, είναι να βρεθεί μια συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι δεδομένη.

Στη Γεωμετρία μάθαμε τον τρόπο ευρέσεως εμβαδών ορισμένων πολυγώνων, ορθογωνίων, τριγώνων, παραλληλογράμμων, τραπεζοειδών, κύκλων και άλλων. Πράγματι, το εμβαδόν ενός πολυγώνου μπορεί να βρεθεί με τη διαίρεση αυτού σε τρίγωνα. Το εμβαδόν ενός κύκλου μπορεί να υπολογιστεί από το γνωστό τύπο $E=\pi R^2$. Η ιδέα πίσω απ' αυτόν τον τύπο είναι μια λεπτή ιδέα ορίου του εμβαδού εγγεγραμένου στον κύκλο κανονικού πολυγώνου, όταν ο αριθμός των πλευρών του απεριορίστως διπλασιάζεται. Μια παρόμοια ιδέα υπάρχει στην επεξήγηση που αμέσως τώρα εισάγουμε.

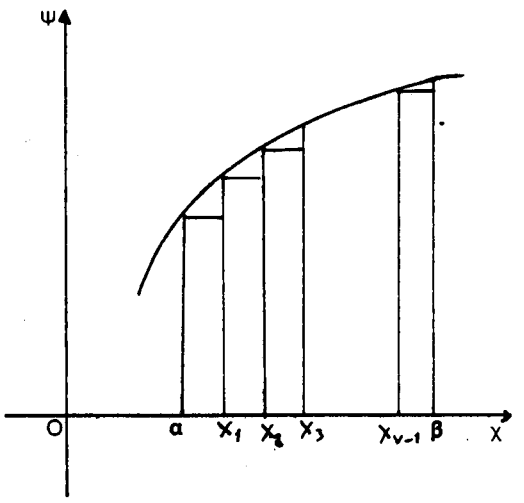
1.3 Εποπτική Ανάλυση της Εννοιας του Ολοκληρώματος

Ας υποθέσουμε ότι $y=f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του x στο κλειστό διάστημα $\alpha\leq x\leq\beta$. Για απλούστευση θα υποθέσουμε επίσης ότι η $f(x)$ είναι θετική για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Εδώ θεωρούμε το πρόβλημα υπολογισμού ενός εμβαδού, που ορίζεται από το χωρίο που βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως μεταξύ των ευθειών $x=\alpha$, $x=\beta$ και "πάνω" από τον x άξονα.



Σχήμα 2

Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου αυτού, χωρίζουμε το χωρίο σε ν λεπτές λωρίδες του τύπου $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με γραμμές κάθετες προς τον άξονα των x δια μέσου των σημείων x=α, x=β και πολλά ενδιάμεσα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$. Χρησιμοποιούμε ένα εγγεγραμμένο ορθογώνιο για να προσεγγίσουμε το εμβαδόν της λωρίδας $\alpha M_0 M_1 x_1$ από το σκιερό ορθογώνιο ύψους αM_0 και βάσης αx_1. Το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου είναι $f(\alpha)\cdot(x_1-\alpha)=f(\alpha)\cdot\Delta x$, αφού το μήκος του ύψους αM_0 είναι η τιμή της f στο x=α και το μήκος της βάσεως είναι $x_1-\alpha=\Delta x$.



Σχήμα 3

Ομοίως, το εμβαδόν του ορθογωνίου στη δεύτερη λωρίδα είναι $f(x_1)\cdot\Delta x$. Στην τριτη λωρίδα είναι $f(x_2)\cdot\Delta x$. Στη

.....

.....

νιοστή λωρίδα είναι $f(x_{\nu-1})\cdot\Delta x$. Αρα το εμβαδόν του χωρίου είναι το άθροισμα των εμβαδών αυτών των στοιχειωδών ορθογωνίων, που όσο περισσότερα είναι, τόσο πλησιέστερα είμαστε στην ορθή τιμή του εμβαδού. Η καμπύλη που χρησιμοποιήσαμε έχει ανοδική κλίση στο $[\alpha,\beta]$.

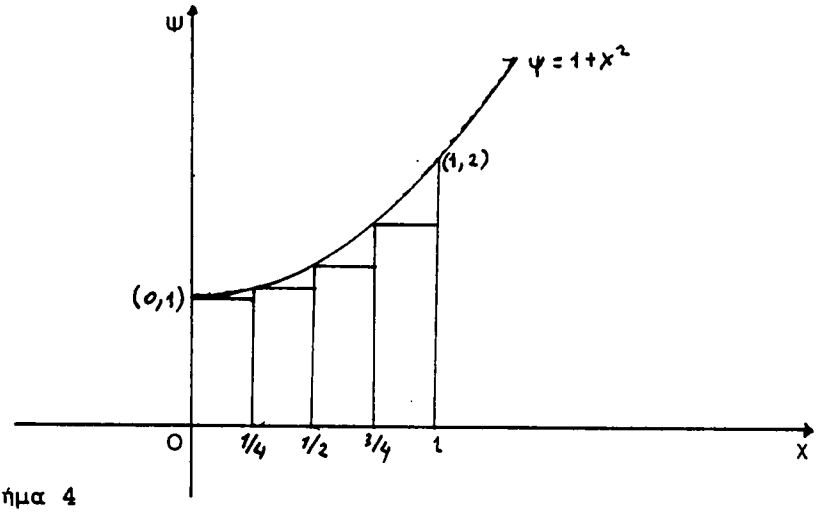
Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=1+x^2$, όπου α=0, β=1 και ν=4, θεωρώ επίσης ν-1=4-1=3 σημεία: $x_1=1/4$, $x_2=1/2$, $x_3=3/4$ που διαιρούν το διάστημα [0,1] σε 4 υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=1/4$ το καθένα. Τα εγγεγραμμένα ορθογώνια έχουν εμβαδά (Σχήμα 4):

$f(0)\cdot\Delta x = (1+0^2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=\frac{16}{64}$

$f(\frac{1}{4})\cdot\Delta x = (1+\frac{1}{16})\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{64}\cdot f(\frac{1}{2})\cdot\Delta x = (1+\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{20}{64}$ $f(\frac{3}{4})\cdot\Delta x = (1+\frac{9}{16})\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{64}$

Επομένως το άθροισμα αυτών των εμβαδών είναι $\frac{16+17+20+25}{64}=\frac{78}{64}=$ 1.21875 τετραγωνικές μονάδες. Το εμβαδόν όμως που είναι "κάτω"

από την καμπύλη και "πάνω" απο τον x άξονα είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των τεσ- σάρων εγγεγραμμένων ορθογωνίων. Περιμένουμε επομένως το εμβαδόν αυτό να είναι μεγαλύτερο από



Σχήμα 4

1.21875. Στην πραγματικότητα είναι ίσο με 4/3, δηλαδή 8% περιπου περισσότερο από όσο βρήκαμε εδώ.

1.4 Εμβαδό Χωρίου που Περικλείεται από Καμπύλη με Καθοδική Κλίση

Η περίπτωση αυτή εικονίζεται στο Σχήμα 5, όπου εξετάζεται η καμπύλη στο διάστημα [α,β].

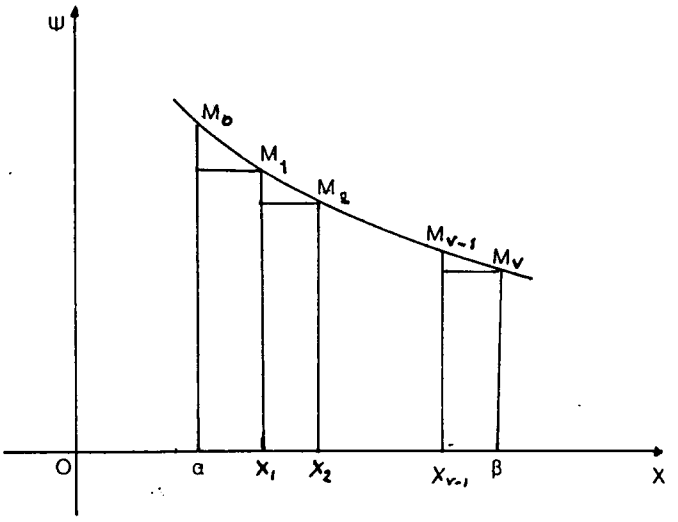
Τότε το υψος καθε ορθογωνίου είναι το μήκος της δεξιάς του άκρης και έχουμε:

Εμβαδό 1ου ορθογωνίου $f(x_1)\cdot\Delta x$
Εμβαδό 2ου ορθογωνίου $f(x_2)\cdot\Delta x$
Εμβαδό 3ου ορθογωνίου $f(x_3)\cdot\Delta x$
.....
.....
Εμβαδό τελ ορθογωνίου $f(\beta)\cdot\Delta x$

Εμβαδόν χωρίου = το άθροισμα των ορθογωνίων.

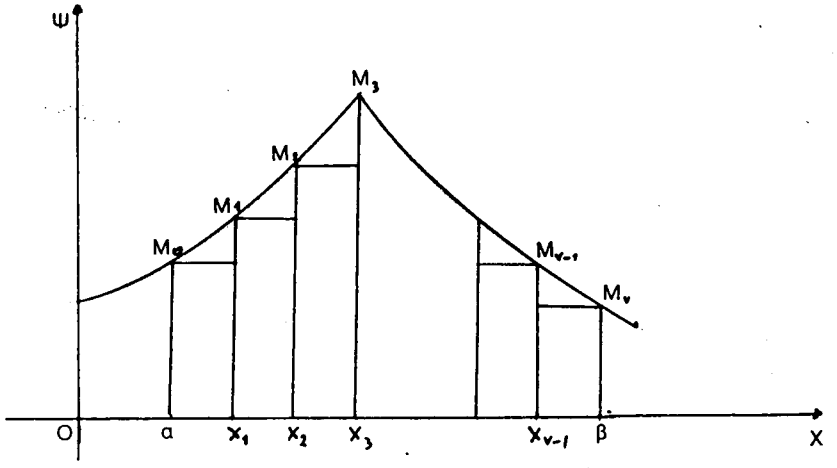
Γενικότερα, η καμπύλη μπορεί σε διαστήματα του [α,β] να υψώνεται και σε άλλα διαστήματα να κατεβαίνει, όπως στο Σχήμα 6.

Τότε μεταξύ των α, x_1 υπάρχει ένας αριθμός γ_1 ώστε το εμβαδόν του



Σχήμα 5

εγγεγραμμένου ορθογωνίου να είναι $E_1=f(\gamma_1)\cdot\Delta x$. Επίσης στο δεύτερο κλειστό διάστημα $[x_1,x_2]$, υπάρχει αριθμός γ_2 ώστε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου ορθογωνίου να είναι $E_2=f(\gamma_2)\cdot\Delta x$, κ.λπ.. Έτσι, το άθροισμα των εμβαδών αυτών των εγγεγραμμένων ορθογωνίων είναι:



Σχήμα 6

$$\Sigma_\nu = f(\gamma_1)\cdot\Delta x + f(\gamma_1)\cdot\Delta x + \ldots f(\gamma_\nu)\cdot\Delta x = \sum_{K=1}^{\nu} f(\gamma_K)\cdot\Delta x$$

Εμείς θεωρούμε το εμβαδόν ως <u>όριο</u> των αθροισμάτων των εμβαδών των

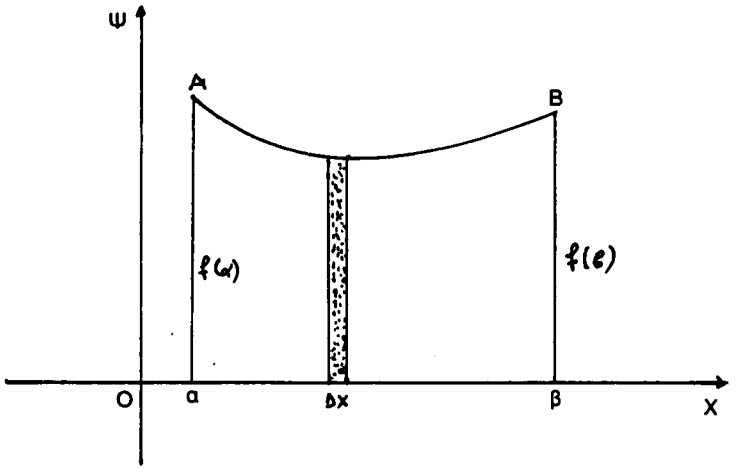
εγγεγραμμένων ορθογωνιων όταν το κοινό βασικό τους μήκος Δx πλησιάζει στο μηδέν και ο αριθμός τους αυξάνει απεριόριστα.

$$A = \lim_{\nu\to\infty} \left[f(\gamma_1)\cdot\Delta x + f(\gamma_1)\cdot\Delta x + \ldots f(\gamma_\nu)\cdot\Delta x \right] = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\chi=1}^{\nu} f(\gamma_\chi)\cdot\Delta x$$

2. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

2.1 Εννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προήλθε από το πρόβλημα του εμβαδού ενός τμήματος επιπεδου, που ορίζεται από το τόξο μιας καμπύλης, από το x-άξονα και τις ευθείες x=α, x=β (Σχήμα 7).



Σχήμα 7

Μια προσέγγιση του εμβαδού αυτού του μέρους δίνεται από το άθροισμα των λεπτών "ταινιών" λωρίδων, όπως στο Σχήμα. Το εμβαδόν του τμήματος ΑαβΒ του επιπέδου, χαρακτηρίζεται ως **ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ** της συναρτήσεως f από το α ως το β και συμβολίζεται με

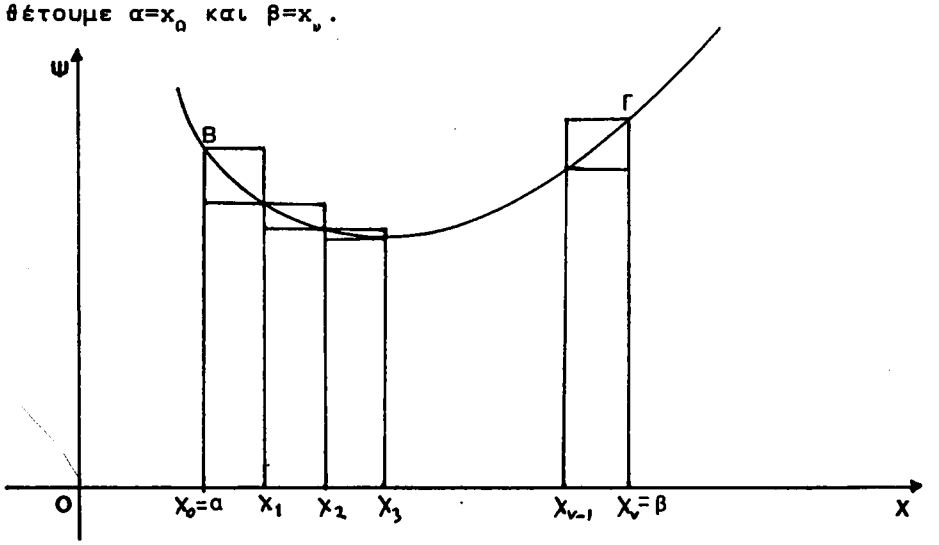
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Το σύμβολο ∫ προήλθε από το γράμμα S, αρχικό της λέξης Suma = Αθροισμα.

Σημείωση: Ως τώρα για την προσέγγιση του εμβαδού επιπέδου τμήματος, χρησιμοποιήσαμε εμβαδά εγγεγραμμένων ορθογωνίων. Η προσέγγιση μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια περιγεγραμμένων ορθογωνίων.

2.2 Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα ως Οριο

Εστω μια πραγματική συνάρτηση f(x) με πεδίο ορισμού το [α,β] και ΒΓ η γραφική της παράσταση στο ορθογώνιο σύστημα xOy. Εστω f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β]. Χωρίζουμε το διάστημα [α,β] σε ν ίσα μέρη Δx_i (i=1,2,...,ν) με μήκος $\Delta x=\frac{1}{\nu}(\beta-\alpha)$ με τα σημεία $x_1,x_2,\ldots,x_{\nu-1}$ θέτουμε $\alpha=x_0$ και $\beta=x_\nu$.



Σχήμα 8

Εστω M_i η μέγιστη τεταγμένη της γραφικής παράστασης ΒΓ στο διάστημα $[x_{i-1},x_i]$ και ε_i η ελάχιστη τεταγμένη της ΒΓ στο ίδιο διάστημα (Σχήμα 8). Ορίζονται τότε τα εξής δύο αθροίσματα εμβαδών ταινιών:

1. $$A_\nu = (x_1-x_0)m_1 + (x_2-x_1)m_2 + \ldots + (x_\nu-x_{\nu-1})m_\nu =$$

$$\Delta x m_1 + \Delta x m_2 + \ldots + \Delta x m_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \Delta x$$

2. $$K_\nu = (x_1-x_0)\varepsilon_1 + (x_2-x_1)\varepsilon_2 + \ldots + (x_\nu-x_{\nu-1})\varepsilon_\nu =$$

$$\Delta x \varepsilon_1 + \Delta x \varepsilon_2 + \ldots + \Delta x \varepsilon_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i \Delta x$$

Λέμε τότε ότι ο αριθμός A_ν είναι το ΑΝΩ ΑΘΡΟΙΣΜΑ το αντίστοιχο στη συνάρτηση f για το χωρισμό του διαστήματος [α,β].

Ο δε αριθμός K_ν είναι το ΚΑΤΩ ΑΘΡΟΙΣΜΑ το αντίστοιχο στη συνάρτηση f για το χωρισμό του διαστήματος [α,β].

Ο χωρισμός του [α,β] με τα σημεία $x_1,x_2,\ldots,x_{\nu-1}$ λέγεται ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ

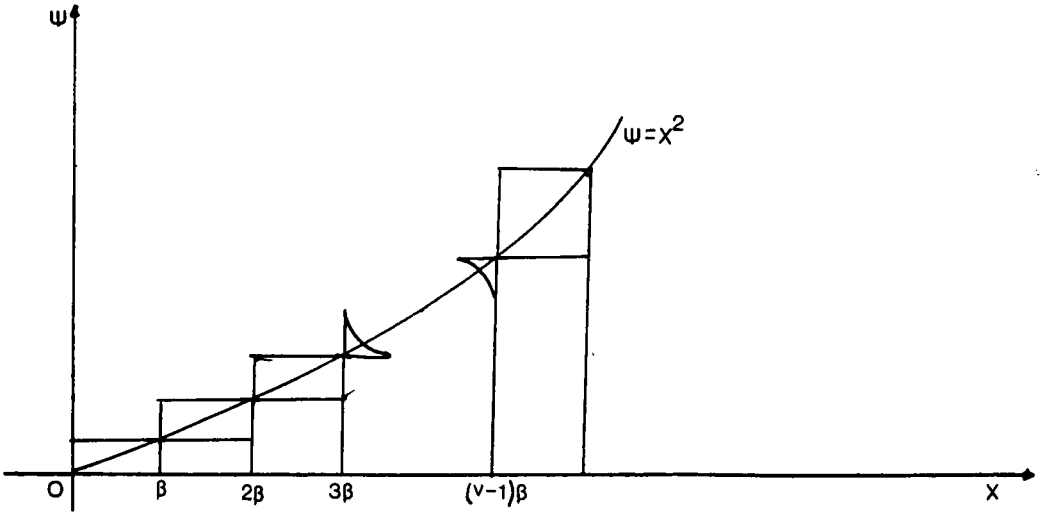
του [α,β]

Στσι από το σχημα γινεται αντιληπτό ότι οι διαφορές $m_\nu - \varepsilon_\nu$ και $A_\nu - K_\nu$ τείνουν προς το μηδέν όταν ο ν αυξάνει και ότι τόσο το K_ν όσο και το A_ν πλησιαζουν όλο και περισσότερο προς το εμβαδον του μέρους ΑΒΓΔ του επιπέδου. Με την υπόθεση ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε αποδεικνυεται οτι οι ακολουθίες K_ν και A_ν έχουν κοινό όριο έναν πραγματικο αριθμο. Αυτός ο πραγματικός αριθμός λέμε ότι είναι: ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ της f από α ως β και το συμβολίζουμε $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Δηλαδή:

$$\lim_{\nu\to+\infty} \sum_{i=1}^{\nu} m_i \Delta x = \lim_{\nu\to+\infty} \sum_{i=1}^{\nu} m_i \Delta x = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος του επιπέδου που περικλείεται από την παραβολή $y=x^2$ του x-άξονα και των ευθειών x=0, x=α (Σχήμα 9).



Σχήμα 9.

Διαιρούμε το διάστημα [0,α] σε ν ίσα τμήματα μήκους $\beta=\frac{\alpha}{\nu}$. Η συνάρτηση $y=x^2$ είναι αύξουσα στο διάστημα [0,α]. Τότε έχουμε:
Κάτω άθροισμα $K_\nu = 0 + 1^2\beta^2\beta + 2^2\beta^2\beta + \ldots + (\nu-1)^2\beta^2\beta =$

$$= \beta^3[1^2+2^2+\ldots+(\nu-1)^2] = \beta^3\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6} = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^3\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6} =$$

$= \frac{\alpha^3}{6}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}\cdot\frac{\nu}{\nu}\cdot\frac{2\nu-1}{\nu} = \frac{\alpha^3}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdot 1\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)$ και

Ανω άθροισμα $A_\nu = 1^2\beta^2\beta + 2^2\beta^2\beta + \ldots + (\nu-1)^2\beta^2\beta =$

$= \beta^3[1^2+2^2+\ldots+(\nu-1)^2] = \beta^3\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^3\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} =$

$= \frac{\alpha^3}{6}\cdot\frac{\nu}{\nu}\cdot\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{2\nu+1}{\nu} = \frac{\alpha^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right).$

Εχουμε τότε: $\lim_{\nu\to+\infty} K_\nu = \frac{\alpha^3}{6}\cdot(1-0)\cdot 1\cdot(2-0) = \frac{\alpha^3}{6}\cdot 2 = \frac{\alpha^3}{3}$

και: $\lim_{\nu\to+\infty} A_\nu = \frac{\alpha^3}{6}\cdot 1\cdot(1+0)\cdot(2+0) = \frac{\alpha^3}{6}\cdot 2 = \frac{\alpha^3}{3}$.

Αρα $\varepsilon = \int_0^\alpha x^2dx = \lim_{\nu\to+\infty} K_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} A_\nu = \frac{\alpha^3}{3}$.

2.2 Αναλυτικός Ορισμός του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Από την εποπτική θεώρηση του ορισμένου ολοκληρώματος ο Riemann (1826-1886) οδηγήθηκε στον ακόλουθο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

Εστω $f(x)|[\alpha,\beta]$ μια τυχούσα πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x. Εστω επίσης ότι η f είναι φραγμένη και ότι το διάστημα $[\alpha,\beta]$ έχει χωριστεί σε ν υποδιαστήματα με μήκη $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_\nu$ και λ_ν το μέγιστο μήκος αυτών. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ το τυχαίο από τα πιο πάνω διαστήματα, και S_i το supremum της f, και I_i το infimum της f, που υπάρχει γιατί η f θεωρήθηκε φραγμένη. Αν θέσουμε:

$A_\nu = S_1\Delta x_1 + S_2\Delta x_2 + \ldots + S_\nu\Delta x_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} S_i\Delta x_i$

$K_\nu = I_1\Delta x_1 + I_2\Delta x_2 + \ldots + I\Delta x_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} I_i\Delta x$ έχουμε το $_\nu A$ ως άνω άθροισμα και το K_ν ως κάτω άθροισμα στη διαμέριση αυτή του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ με τα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Αποδεικνύεται τότε ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις τα αθροίσματα K_ν και A_ν έχουν κοινό όριο έναν πραγματικό αριθμό. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι η ακολουθία:

$$E_\nu = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i$$

με ξ_i τυχαίο σημείο του διαστηματος $[x_i, x_{i+1}]$ έχει όριο το κοινό όριο των ακολουθιών K_ν, A_ν ανεξάρτητα του ποια είναι τα ενδιάμεσα αυτά σημεία ξ_i. Επομένως: Αν για $\lambda_\nu \longrightarrow 0$, υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i$ και είναι ανεξάρτητο των σημείων x_i και των ενδιαμέσων σημείων ξ_i, τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και το όριο αυτό το λέμε ολοκλήρωμα της f από α έως β και το συμβολίζουμε με:

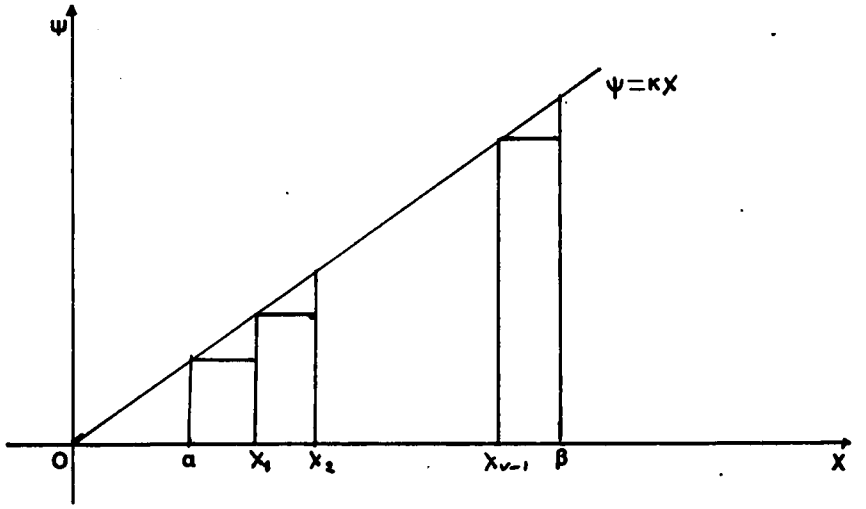
$\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Στο συμβολισμό αυτό, η f λέγεται ολοκληρωτέα συνάρτηση. Τα α, β άκρα της ολοκλήρωσης, το α κάτω άκρο και το β άνω άκρο και η x μεταβλητή ολοκλήρωσης.

Αρα ορισμένο ολοκλήρωμα της f με άκρα x=α, x=β είναι το:

$$\lim_{\nu\to+\infty} \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

2.3 Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν "κάτω" από την $y = k\cdot x$ όπως στο Σχήμα 10, με α, β θετικούς και α<β.



Σχήμα 10

Εστω ν φυσικός αριθμός, διαιρεί το διάστημα [α,β] σε υποδιαστήματα με μήκος $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $x_1=\alpha+\Delta x$, $x_2=\alpha+2\Delta x$, ...,

$x_{\nu-1}=\alpha+(\nu-1)\Delta x$, $x_\nu=\beta$. Τα εγγεγραμμένα ορθογώνια έχουν εμβαδόν:

$f(\alpha)\cdot\Delta x = k\cdot\alpha\cdot\Delta x$

$f(x_1)\cdot\Delta x = k\cdot(\alpha+\Delta x)\cdot\Delta x$

$f(x_2)\cdot\Delta x = k\cdot(\alpha+2\Delta x)\cdot\Delta x$

.....

.....

$f(x_{\nu-1})\cdot\Delta x = k\cdot[\alpha+(\nu-1)\Delta x]\cdot\Delta x$

$S_\nu = k\cdot[\alpha+(\alpha+\Delta x)+(\alpha+2\Delta x)+\ldots+(\alpha+(\nu-1)\Delta x]\cdot\Delta x =$

$= k\cdot[\nu\alpha+(1+2+\ldots+(\nu-1)\Delta x]\cdot\Delta x = k\cdot[\nu\alpha+\frac{1+(\nu-1)}{2}(\nu-1)\Delta x]\cdot\Delta x =$

$= k\cdot[\nu\alpha+\frac{\nu(\nu-1)}{2}\Delta x]\cdot\Delta x = k\cdot[\alpha+\frac{(\nu-1)}{2}\Delta x]\cdot\nu\cdot\Delta x$ και επειδή $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ έχουμε:

$S_\nu = k\cdot[\alpha+\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}]\cdot\nu\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu} = k\cdot[\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}]\cdot(\beta-\alpha)$

Το εμβαδόν κάτω από από το γράφημα είναι το όριο του S_n του $\nu\longrightarrow+\infty$ και επειδή $\frac{1}{\nu}\longrightarrow 0$ όταν $\nu\longrightarrow+\infty$ έχω:

$\lim\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) = \lim\left(1-\frac{1}{\nu}\right) = 1-0=1$ και έτσι:

$\lim S_n = k\cdot(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2})\cdot(\beta-\alpha) = k\cdot(\frac{2\alpha+\beta-\alpha}{2})\cdot(\beta-\alpha) = \frac{k\alpha+k\beta}{2}\cdot(\beta-\alpha)$

Δηλαδή το εμβαδόν ενός τραπεζίου που έχει βάσεις στην περίπτωση που εξετάζουμε τις κάθετες $k\alpha$ και $k\beta$ και ύψος $(\beta-\alpha)$.

2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν "κάτω" από την $y=x^2$ ως στο Σχήμα 11 με $0<x<\beta$.

Λύση.

Διαιρούμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\beta/\nu$ με τα σημεία $x_1=\Delta x$, $x_2=2\Delta x$, ..., $x_{\nu-1}=(\nu-1)\Delta x$. Τα εγγεγραμμένα τότε ορθογώνια έχουν εμβαδά:

$f(0)\Delta x = 0$

$f(x_1)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x$

.....

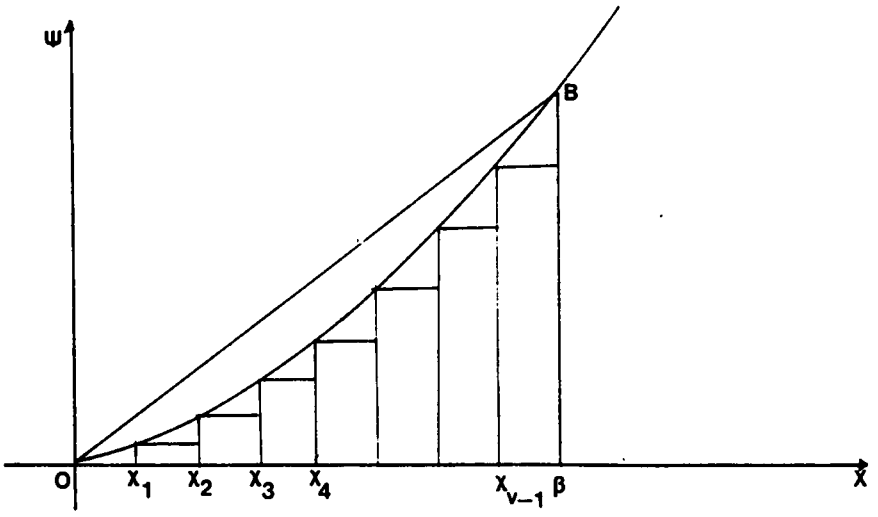
.....

$f(x_{\nu-1})\Delta x = [(\nu-1)\Delta x]^2\Delta x$

Το άθροισμα αυτών των εμβαδών είναι:

$S_\nu = [1^2+2^2+3^2+\ldots+(\nu-1)^2](\Delta x)^3 = \frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}\cdot(\frac{\beta}{\nu})^3 =$

$\frac{\beta^3}{6}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}\cdot\frac{\nu}{\nu}\cdot\frac{2\nu-1}{\nu} = \frac{\beta^3}{6}\cdot(1-\frac{1}{\nu})\cdot1\cdot(2-\frac{1}{\nu})$



Σχήμα 11

Θεωρώντας το εμβαδόν ως όριο του S_ν με $\nu \longrightarrow +\infty$, έχουμε:

$$E = \lim_{\nu\longrightarrow+\infty} S_\nu = \frac{\beta^3}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = \frac{\beta^3}{3} = \frac{\beta}{3}\cdot\beta^2$$

που δείχνει ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι το 1/3 της βάσης του β επί το $f(\beta)=\beta^2$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒβ όπως γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη γεωμετρία, είναι το 1/2 της βάσης β επί το ύψος $f(\beta)=\beta^2$. Δηλαδή $E_{\tau\rho\iota\gamma.\,O\beta\beta} = \frac{1}{2}\cdot\beta\cdot\beta^2$. Δηλαδή $E_{\tau\rho\iota\gamma.\,O\beta\beta} > E_{\chi\omega\rho\acute{\iota}ου}$ όπως πράγματι διαπιστώνεται και στο σχήμα.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

3.1 Με εναλλαγή των άκρων ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα αλλάζει πρόσημο

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$$

Απόδειξη:

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i$ όπου τα Δx_i έχουν θετικό ή αρνητικό πρόσημο, ενώ στο $\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i$ τα Δx_i έχουν αντίθετο πρόσημο (αφού αλλάζει η φορά της ολοκλήρωσης σε σχέση με τη φορά της προηγούμενης).

3.2 Αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση έχει τη μορφή $k \cdot f(x)$ όπου k σταθερός παράγοντας, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} kf(x)dx = k\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Απόδειξη:

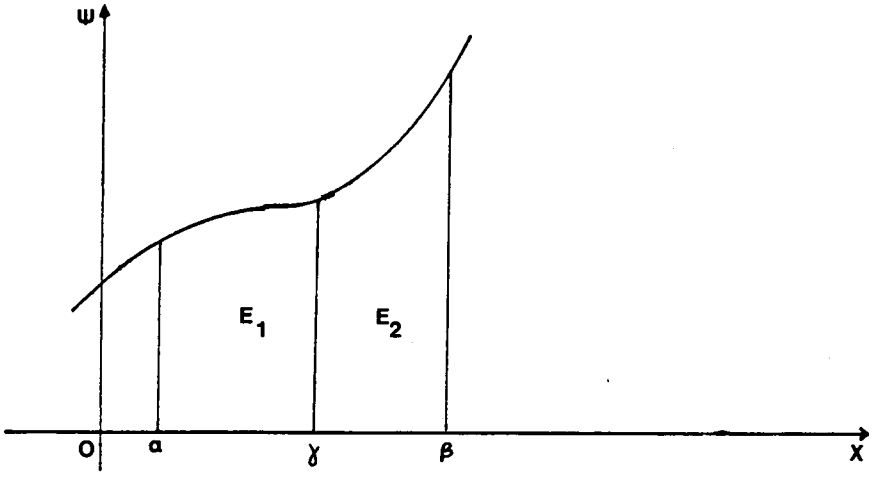
$$\int_{\alpha}^{\beta} kf(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty} \sum_{i=1}^{\nu} kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\nu\to+\infty} \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

3.3 Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και γ είναι ένα σημείο αυτού του διαστήματος, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Απόδειξη:

Το γ μπορεί να ληφθεί ως σημείο της διαμέρισης του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Έτσι το $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο αθροίσματα, το ένα απο α έως γ και το αλλο απο γ έως β. Επειδή το όριο του αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα των ορίων των όρων του



Σχήμα 12

αθροίσματος, ισχύει η αποδεικτέα.

Αυτή η ιδιότητα ερμηνεύεται γεωμετρικά στο Σχήμα 12.

3.4 Το ολοκλήρωμα του αθροίσματος δύο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων f_1 και f_2, σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, είναι ίσο με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων των f_1 και f_2 στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(f_1(x)+f_2(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}f_1(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta}f_2(x)dx$$

Απόδειξη:

$$\sum_{i=1}^{\nu}(f_1(x_i)+f_2(x_i))\Delta x = \sum_{i=1}^{\nu}f_1(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{\nu}f_2(x_i)\Delta x \text{ και}$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i=1}^{\nu}(f_1(x_i)+f_2(x_i))\Delta x = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i=1}^{\nu}f_1(x_i)\Delta x + \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i=1}^{\nu}f_2(x_i)\Delta x .$$

Δηλαδή: $\int_{\alpha}^{\beta}(f_1(x)+f_2(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}f_1(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta}f_2(x)dx$

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει: $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

4. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha\in\Delta$, $\beta\in\Delta$ τότε υπάρχει πάντοτε ένα σημείο γ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx = f(\gamma)(\beta-\alpha)$.

Γνωρίζουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f(x) ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ παίρνει μέσα στο κλειστό διάστημα μια μέγιστη τιμή μ και μια ελάχιστη τιμή ε. Αν επιπλέον παίρνει μόνο θετικές τιμές τότε σύμφωνα με τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος ισχύει:

$$\varepsilon(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \leq \mu(\beta-\alpha)$$

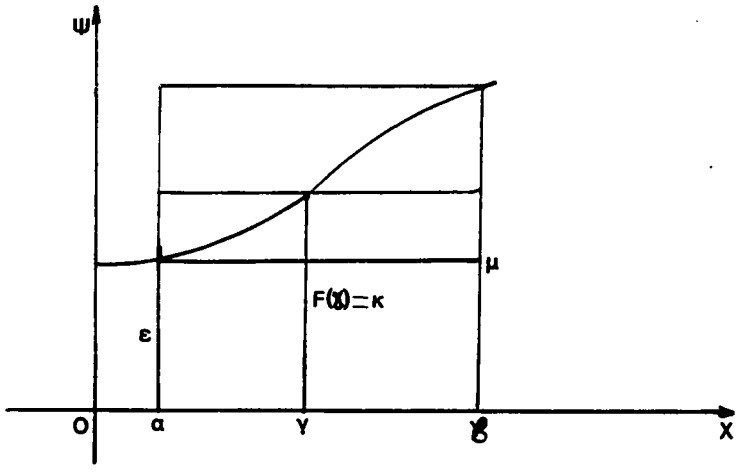
Δηλαδή, γεωμετρικώς ερμηνευόμενο: το εμβαδόν που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη, βρίσκεται μεταξύ των εμβαδών των ορθογωνίων που έχουν κοινή βάση $(\beta-\alpha)$ και ύψη ε και μ αντίστοιχα. Επομένως πρέπει να υπάρχει κάποια τιμή κ μεταξύ των ε και μ, $\varepsilon \leq \kappa \leq \mu$ για την οποία το ορθογώνιο με βάση $(\beta-\alpha)$ και ύψος $\kappa = f(\gamma)$ έχει εμβαδό ίσο με $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ (Σχήμα 13).

Επειδή η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής, υπάρχει πάντα ένα σημείο $x\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $\kappa = f(\gamma)$. Αρα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx = (\beta-\alpha)f(\gamma) \text{ με } \gamma\in[\alpha,\beta].$$

Αν το γ γραφτεί $\gamma = \alpha+\theta(\beta-\alpha)$, όπου θ κατάλληλος αριθμός μεταξύ 0 και 1, τότε έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)f[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)], \qquad 0 \le \vartheta \le 1.$$



Σχήμα 13

5. Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Αν στο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ το άνω άκρο της ολοκλήρωσης θεωρηθεί ως μεταβλητή x, τότε για κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μια τιμή του ολοκληρώματος. Δηλαδή συνάρτηση F με $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(\gamma)d\gamma$ ορισμένη στο διάστημ [α,β]. Αν η f είναι συνεχής, τότε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού ισχύει:

$\int_{x}^{x+\Delta x} f(\gamma)d\gamma = \Delta x \cdot f(x+\vartheta\Delta x)$ και επειδή ισχύει:

$F(x+\Delta x)-F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(\gamma)d\gamma$ έχουμε:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(\gamma)d\gamma = f(x+\vartheta\Delta x)$$

Και επειδή f συνεχής, ισχύει: $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\vartheta\Delta x) = f(x)$.

Αρα: $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$. Δηλαδή $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(\gamma)d\gamma$ τότε:

$F'(x) = f(x)$.

Η συνάρτηση αυτή F της οποίας η παράγωγος είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση f, λέμε ότι είναι μία **ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** ή μία **ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ**

της f. Επειδή δύο αρχικές συναρτήσεις της f έχουν για κάθε x του διαστηματος ολοκλήρωσης την ίδια παράγωγο, η παράγωγος της διαφοράς των δύο αυτών αρχικων συναρτήσεων είναι ίση με μηδέν. Αρα τότε από το θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, έπεται ότι η διαφορά δύο οποιωνδήποτε αρχικών συναρτήσεων της f ειναι μια σταθερα. Δηλαδή για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f υπάρχει μια οικογενεια από αρχικές συναρτήσεις, που ανά δύο διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία σταθερά. Κάθε αρχική συνάρτηση μιας συναρτήσεως f λέμε τοτε οτι ειναι ενα ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ της f και το συμβολίζουμε με $\int f(x)dx$.

6. ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΔΙΑΦΟΡΑ

Είδαμε προηγουμένως οτι η F με $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(\gamma)d\gamma$ ειναι μια αρχική συνάρτηση της f. Ετσι το Αόριστο Ολοκλήρωμα της f γράφεται: $\int f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} f(\gamma)d\gamma + C = F(x) + C$. Αν $x = \beta$, τότε έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma)d\gamma = F(\beta) + C$ και επειδή:

$\int_{\alpha}^{\alpha} f(\gamma)d\gamma = 0 = F(\alpha) + C \Leftrightarrow F(\alpha) = -C$ έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma)d\gamma = F(\beta) - F(\alpha) = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Παραδείγματα:

1. $\int_{0}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x\Big|_{0}^{\pi/2} = \eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu 0 = 1-0 = 1$

2. $\int_{0}^{\pi} 4\eta\mu x dx = 4\int_{0}^{\pi} \eta\mu x dx = 4(-\sigma\upsilon\nu x)\Big|_{0}^{\pi} = 4[-\sigma\upsilon\nu\pi-(-\sigma\upsilon\nu 0)] = 4(1+1) = 4\cdot 2 = 8$

3. $\int_{0}^{3} -x^2 dx = -\int_{0}^{3} x^2 dx = -(\frac{x^3}{3})\Big|_{0}^{3} = -(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}) = -\frac{27}{3} = -9$

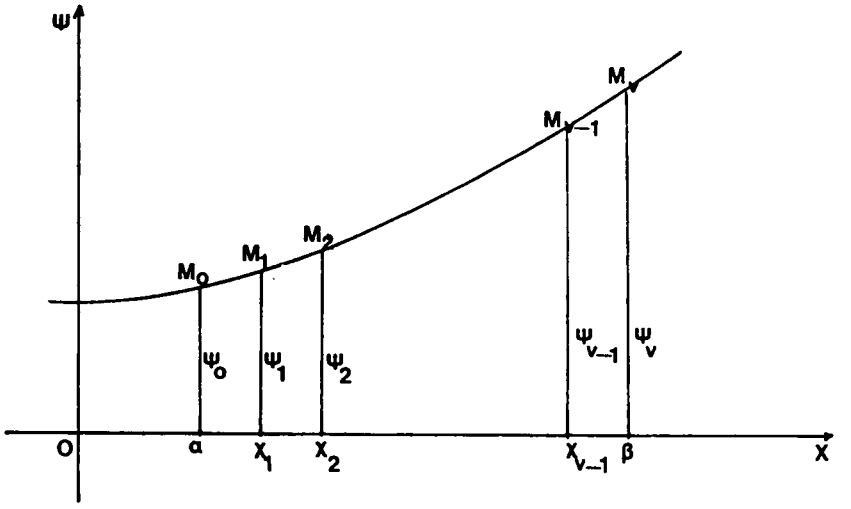
4. $\int_{1}^{2} (3-\frac{6}{x^2})dx = \int_{1}^{2} 3dx - \int_{1}^{2} \frac{6}{x^2}dx = 3x\Big|_{1}^{2} - (-\frac{6}{x})\Big|_{1}^{2} = (3\cdot 2-3\cdot 1) - [-\frac{6}{2}-(-\frac{6}{2})] = 6-3+3-6 = 0$

5. $\int_{1}^{0} (3-4x^2)dx = \int_{0}^{1} (4x^2-3)dx = (\frac{4x^3}{3} - 3x)\Big|_{0}^{1} = 4\frac{1^3}{3} - 3\cdot 1 = \frac{4}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{5}{3}$

7 ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

7.1 Μέθοδος των τραπεζίων

Εστω μια συνάρτηση f(x) ορισμένη και συνεχής στο [α,β] και f(x) ≥ 0 για κάθε x∈[α,β], τότε για y = f(x) έχουμε:



Σχήμα 14

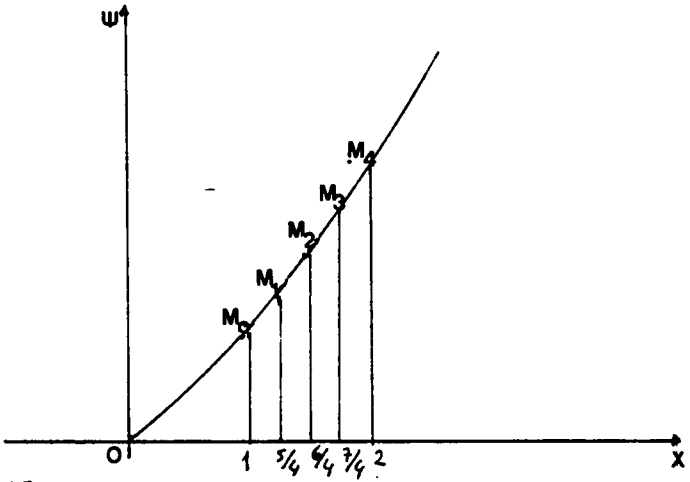
Το διάστημα [α,β] το έχουμε διαιρέσει σε ν ίσα μέρη μήκους $h = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $x_1=\alpha+h$, $x_2=\alpha+2h$, ..., $x_{\nu-1}=\alpha+(\nu-1)h$ και $x_0=\alpha$ και $x_\nu=\beta$. Τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_{\nu-1}}^{\beta} f(x)dx = \sum_{x=1}^{\nu} \int_{x_{x-1}}^{x_x} f(x)dx$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται κατά προσέγγιση από το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων $\alpha M_0 M_1 x_1$, $x_1 M_1 M_2 x_2$, κ.λπ. Από τη στοιχειώδη Γεωμετρία το εμβαδόν ενός τραπεζίου με βάσεις β_1, β_2 και ύψος υ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\upsilon$. Έτσι, εδώ έχουμε:
$\Sigma = \frac{1}{2}(y_0+y_1)h + \frac{1}{2}(y_1+y_2)h + \ldots + \frac{1}{2}(y_{\nu-2}+y_{\nu-1})h + \frac{1}{2}(y_{\nu-1}+y_\nu)h =$
$\frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{\nu-1} + y_\nu)$ και επειδή:
$y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_{\nu-1} = f(x_{\nu-1})$, $y_\nu = f(x_\nu)$ έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx A = \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{\nu-1} + y_\nu)$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\int_1^2 x^2dx$ με τη μέθοδο των τραπεζίων για ν=4 και να συγκριθεί το αποτέλεσμα με την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος αυτού.



Σχήμα 15

Λύση: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$x_0 = \alpha = 1$ $\qquad y_0 = f(x_0) = 1^2 = 16/16$

$x_1 = \alpha+h = 1+1/4 = 5/4$ $\qquad y_1 = f(x_1) = (5/4)^2 = 25/16$

$x_2 = \alpha+2h = 1+2/4 = 6/4$ και $\qquad y_2 = f(x_2) = (6/4)^2 = 36/16$

$x_3 = \alpha+3h = 1+3/4 = 7/4$ $\qquad y_3 = f(x_3) = (7/4)^2 = 49/16$

$x_4 = \beta = 2$ $\qquad y_4 = f(x_4) = (8/4)^2 = 64/16$

Και έτσι:

$\Sigma = \frac{\beta-\alpha}{2\nu}\cdot(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4)$ γίνεται:

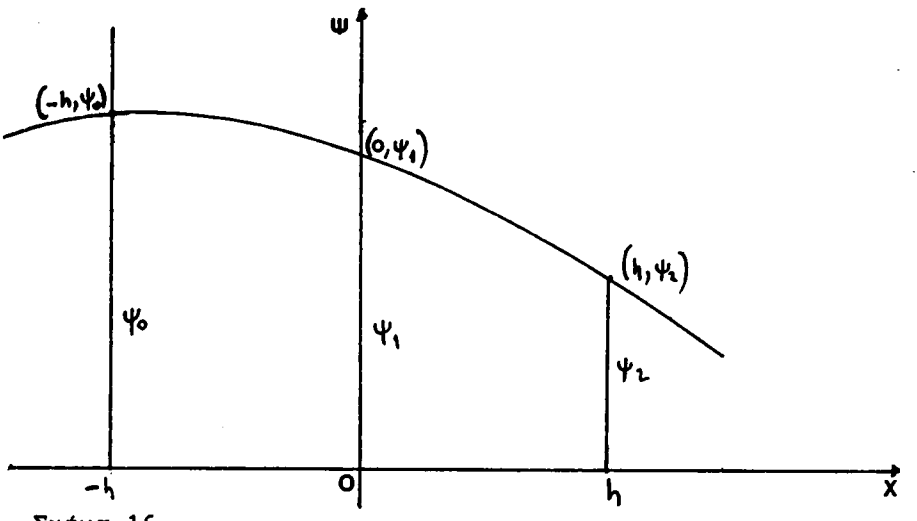
$$\Sigma = \frac{2-1}{2\cdot 4}\cdot\left(\frac{16}{16} + 2\cdot\frac{25}{16} + 2\cdot\frac{36}{16} + 2\cdot\frac{49}{16} + \frac{64}{16}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{300}{16} = \frac{1}{8}\cdot\frac{75}{4} = \frac{75}{32} = 2.34375.$$

Η ακριβής τιμή του $\int_1^2 x^2dx$ είναι $\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{8}{3}-\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33333$.

Δηλαδή η μέθοδος του τραπεζίου έδωσε αποτέλεσμα κατά 2.3475−2.33333 = 0.01042 μεγαλύτερο του ορθού.

7.2 Μέθοδος Simpson

Μια άλλη προσεγγιστική μέθοδος υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος είναι η μεθοδος του Simpson που για το εμβαδον του χωρίου που βρίσκεται κατω από την παραβολη $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και μεταξύ των ευθειών $x=-h$ και $x=+h$ και του $x-$ άξονα, δίνεται από τον τύπο $\Sigma = \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + y_2)$ (Σχήμα 16).



Σχήμα 16.

$\Sigma = \int_{-h}^{+h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx = (\frac{1}{3}\cdot\alpha x^3+\frac{1}{2}\cdot\beta x^2+\gamma x)\Big|_{-h}^{+h} = (\frac{1}{3}\cdot\alpha h^3+\frac{1}{2}\cdot\beta h^2+\gamma h) -$
$- [\frac{1}{3}\cdot\alpha(-h)^3+\frac{1}{2}\cdot\beta(-h)^2+\gamma(-h)] = \frac{1}{3}\cdot\alpha h^3+\frac{1}{2}\cdot\beta h^2+\gamma h+\frac{1}{3}\cdot\alpha h^3-\frac{1}{2}\cdot\beta h^2+\gamma h =$
$\frac{2}{3}\cdot\alpha h^3+2\gamma h=\frac{h}{3}\cdot(2\alpha h^2+6\gamma)$, που για τα σημεία $(-h,y_0)$, $(0,y_1)$, (h,y_2)

παίρνουμε από την παραβολή $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ αντίστοιχα $y_0 = \alpha h^2-\beta h+\gamma$, $y_1 = 1$ και $y_2=\alpha h^2+\beta h+\gamma$ και από αυτά: $\gamma = y_1$, $\alpha h^2-\beta h = y_0-y_1$, $\alpha h^2+\beta h = y_2-y_1$ και με πρόσθεση κατά μέλη των δύο τελευταίων σχέσεων :

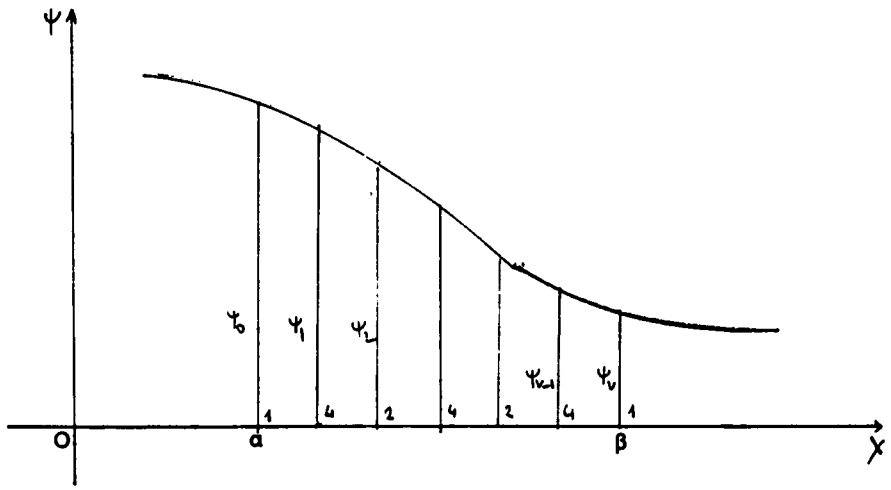
$2\alpha h^2 = y_0+y_2-2y_1$, άρα το Σ γράφεται:

$\Sigma = \frac{h}{3}\cdot[(y_0+y_2-2y_1)+6y_1)] = \frac{h}{3}\cdot(y_0+4y_1+y_2)$

Γενικά αν δοθεί η συνάρτηση $y=f(x)$ με $f(x)\geq 0$, και ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω του $y=f(x)$ και μεταξύ των ευθειών $x=\alpha$, $x=\beta$ και του $x-$ άξονα, χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $x_0= \alpha$, $x_1= \alpha+h$, $x_2= \alpha+2h$, ..., $x_\nu= \alpha+\nu h= \beta$. Τότε ο τύπος του Simpson που δίνει το εμβαδόν είναι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx \Sigma = \frac{h}{3}\cdot(y_0+ 4y_1+ 2y_2+ 4y_3+ 2y_4+ \ldots+ 2y_{\nu-2}+ 4y_{\nu-1} +y_\nu).$$

(Σχήμα 17)



Σχήμα 17.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 4x^3dx$ με τη μέθοδο του Simpson για ν=4.

Λύση: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $h = \frac{\beta-\alpha}{\nu} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

$x_0 = \alpha = 0$ $\qquad y_0 = f(x_0) = 4\cdot 0^3 = 0$

$x_1 = \alpha+h = 0+1/4 = 1/4$ $\qquad y_1 = f(x_1) = 4\cdot(1/4)^3 = 1/16$

$x_2 = \alpha+2h = 0+2/4 = 1/2$ και $\qquad y_2 = f(x_2) = 4\cdot(1/2)^3 = 1/2$

$x_3 = \alpha+3h = 0+3/4 = 3/4$ $\qquad y_3 = f(x_3) = 4\cdot(3/4)^3 = 27/16$

$x_4 = \alpha+4h = 0+4/4 = 1$ $\qquad y_4 = f(x_4) = 4\cdot(1)^3 = 4$

Ετσι, ο τύπος του Simpson δίνει:

$$\Sigma = \frac{h}{3}\cdot(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot(0+4\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{27}{16}+4) =$$

$$\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{4}+1+\frac{27}{4}+4) = \frac{1}{12}\cdot(5+\frac{28}{4}) = \frac{1}{12}\cdot(5+7) = \frac{1}{12}\cdot 12 = 1.$$

8. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

8.1 Εμβαδά επιπέδων τμημάτων

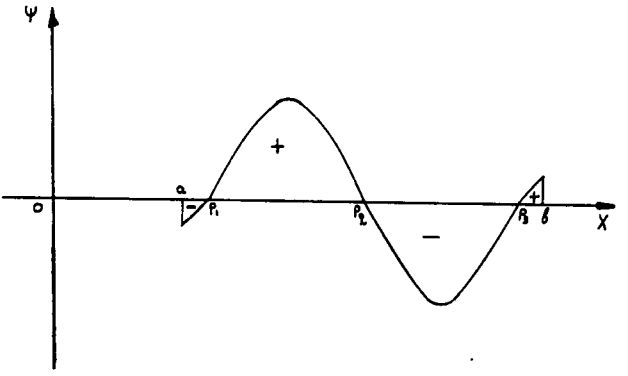
Ας δοθεί μια συνάρτηση f με f(x) ολοκληρώσιμη στο διαστημα $[\alpha,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E$.

Αν $f(x)\geq 0$ τότε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $E\geq 0$ και το E είναι το εμβαδόν του τμήματος του επιπέδου που περιορίζεται μεταξύ της γραφικής παραστασης της f, των ευθειών $x=\alpha$, $x=\beta$ και του x- άξονα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων x0y.

Αν $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $E\leq 0$, η γραφική παράσταση της

Ε είναι κατω του άξονα x και ο αριθμος |Ε|=-Ε, είναι το εμβαδόν του τμηματος κάτω του x- άξονα, που οριζεται απο τη γραφικη παρασταση της f, των ευθειών x=α, x=β και του x- άξονα σε ένα ορθοκανονικό συστημα αξόνων x0y.

Αν η f(x) είναι ορισμενη και συνεχης στο [α,β] αλλά στο διαστημα [α,β] αλλάζει προσημο, τότε η f(x) εχει πλήθος πεπερασμενων ριζών: ρ_1, ρ_2, ..., $\rho_k \in [\alpha,\beta]$, όπου $f(\rho_k) = 0$ με k=0,1,2, ...,κ.



Σχήμα 18.

Αν χωριζοντας το διάστημα [α,β] σε υποδιαστήματα, φροντίσουμε ωστε τα σημεία της διαμέρισης να συμπίπτουν με τα ρ_1, ρ_2, ..., ρ_k τότε έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left|\int_{\alpha}^{\rho_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{\rho_k}^{\beta} f(x)dx\right|$$

Αν ζητουμε να βρούμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών y=f(x) και των ευθειών x=α, x=β, τότε με τη βασική προϋπόθεση ότι οι f(x) και g(x) είναι ορισμένες και συνεχείς στο [α,β] έχουμε:

I Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τοτε $E = \int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$

II Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $E = \int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$

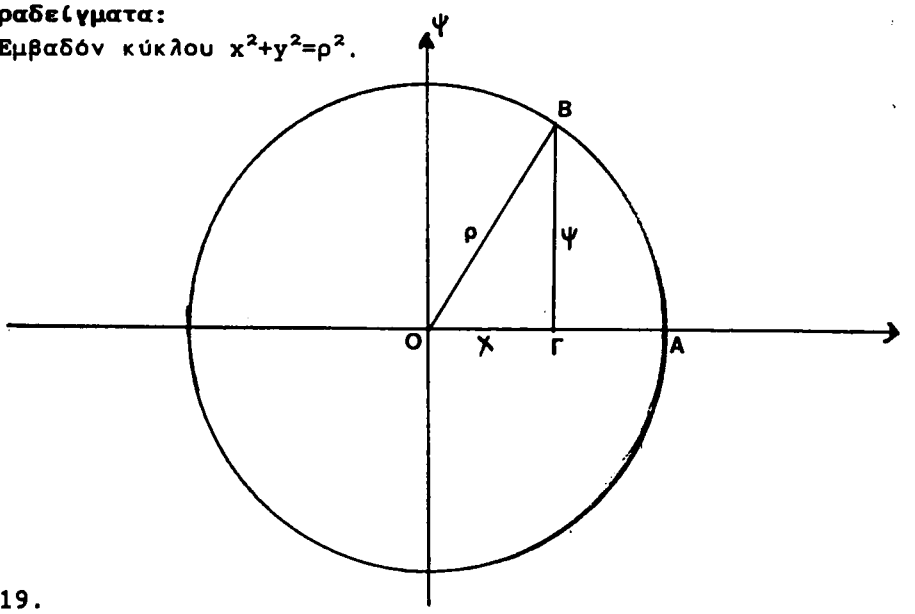
III Αν για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$ έχουμε $f(x)\geq g(x)$ και για καθε $x\in[\gamma,\beta]$ έχουμε $f(x)<g(x)$ όπου $\gamma\in(\alpha,\beta)$, τότε:

$$E = \int_{\alpha}^{\gamma}[f(x)-g(x)]dx + \int_{\gamma}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$$

IV Αν ζητείται το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπυλών $y=f(x)$ και $y=g(x)$ που δεν δίνονται τα όρια ολοκλήρωσης, τότε εξισώνουμε τις $f(x)$, $g(x)$ και λύνοντας την εξίσωση $f(x) = g(x)$ βρίσκουμε τις ρίζες της, που είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των καμπυλών. Θέτοντας δε στις $y=f(x)$ και $y=g(x)$ τις τιμές των ριζών της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, βρίσκουμε τις αντίστοιχες τεταγμένες των σημείων τομής των καμπυλών. Έτσι έχουμε τα όρια ολοκλήρωσης και εφαρμόζουμε τα ανάλογα με τα I. II. III.

8.2 Παραδείγματα:

8.2.1 Εμβαδόν κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$.



Σχήμα 19.

Επειδή υπάρχει συμμετρία και προς τους δύο άξονες, υπολογίζουμε το εμβαδόν του ενός τετάρτου, κι έτσι το εμβαδόν που ορίζει ο κύκλος είναι τετραπλάσιο. Το ένα τέταρτο του κύκλου βρίσκεται κάτω από το τόξο με εξίσωση $y = \sqrt{\rho^2-x^2} > 0$ από $x=0$ έως $x=\rho$. Επειδή $x=\rho\eta\mu\omega$ και $dx=\rho\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$, έχουμε:

$$\frac{1}{4}\cdot E = \int_{\theta}^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}\,dx$$ κι εφ' όσον $\eta\mu\omega=\frac{x}{\rho} \Leftrightarrow \omega=\tau\circ\xi\eta\mu\frac{x}{\rho}$ που για $x=0$ δίνει

$\omega=0$ και για $x=\rho$ δίνει $\omega=\tau\circ\xi\eta\mu 1=\pi/2$. Επίσης $\chi=\rho\eta\mu\omega$ και $dx=\rho\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$. Έτσι έχουμε:

$\frac{1}{4}\cdot E = \int_0^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\rho^2-\rho^2\eta\mu^2\omega}\,\rho\sigma\upsilon\nu\omega d\omega = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\rho^2(1-\eta\mu^2\omega}\,\rho\sigma\upsilon\nu\omega d\omega =$

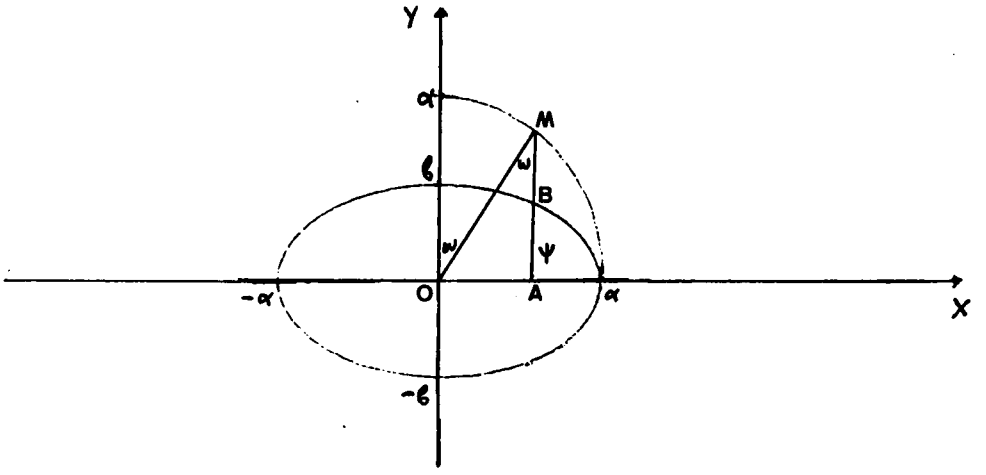
$\int_0^{\pi/2}\rho\rho\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\omega d\omega = \int_0^{\pi/2}\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega = \rho^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2}d\omega = \frac{\rho^2}{2}\int_0^{\pi/2}d\omega +$

$\frac{\rho^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu 2\omega d\omega = \frac{\rho^2}{2}\omega|_0^{\pi/2} + \frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\eta\mu 2\omega|_0^{\pi/2} = (\frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\rho^2}{2}\cdot 0) + (\frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\eta\mu 2\frac{\pi}{2} -$

$\frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\eta\mu 0) = (\frac{\rho^2\pi}{4} - 0) + (\frac{\rho^2}{4}\cdot 0 - 0) = \frac{\rho^2\pi}{4}$.

Αρα $E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\omega\upsilon} = 4\cdot\frac{\rho^2\pi}{4} = \pi\rho^2$.

8.2.2 Εμβαδόν ελλειψεως $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$



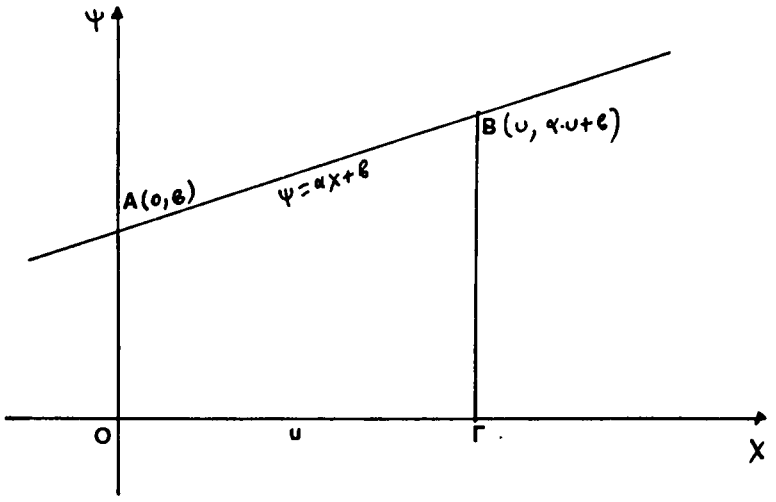
Σχήμα 20

Επειδή υπάρχει συμμετρία και προς τους δύο άξονες, υπολογίζουμε το εμβαδόν του ενός τετάρτου και έτσι το εμβαδόν που ορίζει η έλλειψη είναι τετραπλάσιο. Το τέταρτο της επιφάνειας της έλλειψης βρίσκεται κάτω του τόξου με εξίσωση $y = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2} > 0$ από $x=0$ έως $x=\alpha$. Η προβάλουσα ευθεία το σημείο $B(x,y)$ της έλλειψης στον άξονα των x, τέμνει τον κύκλο $(0,\alpha)$ στο σημείο M. Αν ονομάσουμε ω τη γωνία που σχηματίζει η OM με τον Oy, τότε από τον ορισμό του ημιτόνου της γωνίας ω στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM, έχουμε $\eta\mu\omega = x/\alpha \Longrightarrow x = \alpha\eta\mu\omega$ και αντικαθιστώντας στην:

$y = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2-\alpha^2\eta\mu^2\omega} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2(1-\eta\mu^2\omega)} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\omega =$

βσυνω και dx = d(αημω) = ασυνωdω κι επειδή ημω=x/α $\Rightarrow$ ω = τοξημ$\frac{x}{\alpha}$ που για x = 0 έχουμε ω=0 και για x = π/2 έχουμε ω = τοξημ1 = π/2. Ετσι $\frac{1}{4}E = \int_0^{\pi/2} \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \beta\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu\omega d\omega = \int_0^{\pi/2} \alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega =$ $\alpha\beta\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega = \alpha\beta\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2} d\omega = \alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\omega + \alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu 2\omega d\omega =$ $\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\omega\Big|_0^{\pi/2} + \alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\eta\mu 2\omega\Big|_0^{\pi/2} = (\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\cdot 0) + (\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\cdot\eta\mu 2\frac{\pi}{2} -$ $\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}\cdot\eta\mu 0) = \alpha\beta\cdot\frac{\pi}{4}$. Αρα $E_{\text{έλλειψης}} = 4\cdot\alpha\beta\cdot\frac{\pi}{4} = \pi\alpha\beta$.

8.2.3 Εμβαδόν τραπεζίου που βρίσκεται κάτω της ευθείας y = αx+β, πάνω του x- άξονα και μεταξύ των ευθειών x=0 και x=υ.



Σχήμα 21

(ΟΑ) = β, (ΓΒ) = αυ+β, ΟΓ = υ

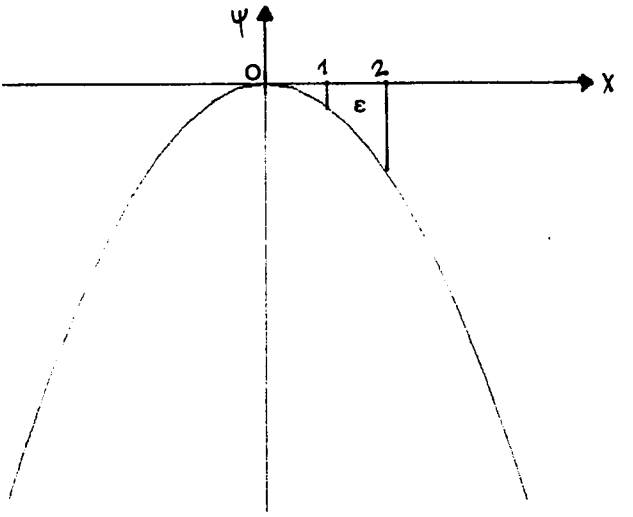
$E = \int_0^{\upsilon}(\alpha x+\beta)dx = \int_0^{\upsilon}\alpha x dx + \int_0^{\upsilon}\beta dx = (\alpha\frac{x^2}{2} + \beta x)\Big|_0^{\upsilon} = (\frac{\alpha\upsilon^2}{2} + \beta\upsilon) - (\frac{\alpha\upsilon^2}{2}$ $+\beta\upsilon) = \frac{\upsilon}{2}\cdot[(\alpha\upsilon+\beta)+\beta] = \frac{\upsilon}{2}\cdot[(\Gamma B)+(OA)]$

δηλαδή ο γνωστός τύπος από τη Γεωμετρία.

8.2.4 Εμβαδόν χωρίου μεταξύ y = f(x) = $-x^2$ των ευθειών x = 1, x = 2 και του x- άξονα.

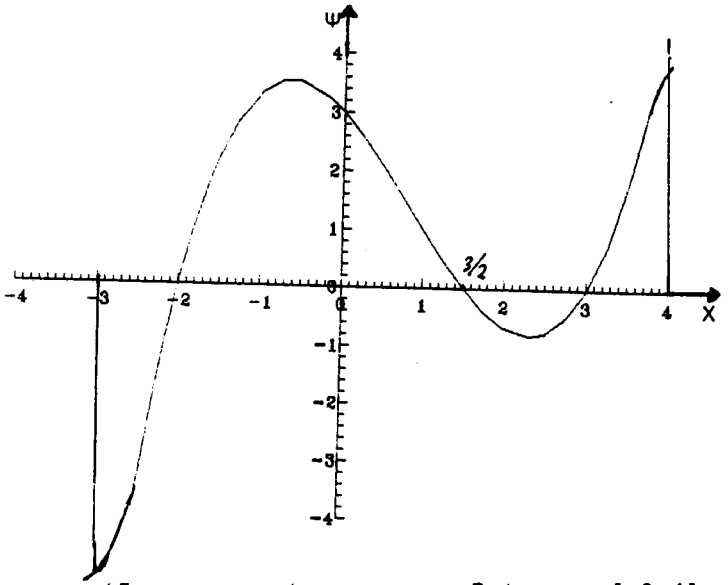
$\varepsilon = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_1^2 -x^2dx = -\int_1^2 x^2dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = -\frac{2^3}{3} + \frac{1^3}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3} =$ $-\frac{7}{3}$.

$E = |\varepsilon| = |-\frac{7}{3}| = \frac{7}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.



Σχημα 22

8.2.5 Εμβαδόν μέρους του επιπέδου που περιορίζεται από την καμπύλη $y = f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{5}{6}\cdot x^2 - \frac{3}{2}\cdot x + 3$ των ευθειων $x = -3$, $x = 4$ και του x- άξονα.



Σχήμα 23

Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης στο διάστημα [-3,4].

$\frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{5}{6}\cdot x^2 - \frac{3}{2}\cdot x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - 9x + 18 = 0.$

Για την εύρεση των ριζών χρησιμοποιώ το σχήμα Horner.

2	-5	-9	18	-2
	-4	18	-18	
2	-9	9	0	3
	6	-9		
2	-3	0		$\frac{3}{2}$
	3			
2	0			

Ολες οι ρίζες βρίσκονται στο διάστημα $[-3,4]$. Ετσι από το Σχήμα 23 έχουμε:

$$E = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)dx\right| + \left|\int_{-2}^{3/2} f(x)dx\right| + \left|\int_{3/2}^{3} f(x)dx\right| + \left|\int_{3}^{4} f(x)dx\right| .$$

Και επειδή $E(x) = \int \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{5}{6}\cdot x^2 - \frac{3}{2}\cdot x + 3\right)dx = \frac{x^4}{12} - \frac{5}{18}x^3 - \frac{3}{4}x + 3x$.

Αρα:

$$E = \left|E(x)\right|_{-3}^{-2}\left| + \left|E(x)\right|_{-2}^{3/2}\right| + \left|E(x)\right|_{3/2}^{3}\left| + \left|E(x)\right|_{3}^{4}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{5}{6}(-2)^2 - \frac{3}{2}(-2) + 3\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - \frac{5}{6}(-3)^2 - \frac{3}{2}(-3) + 3\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{(-\frac{3}{2})^3}{3} - \frac{5}{6}(-\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}(-\frac{3}{2}) + 3\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{5}{6}(-2)^2 - \frac{3}{2}(-2) + 3\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{(-3)^3}{3} - \frac{5}{6}(-3)^2 - \frac{3}{2}(-3) + 3\right) - \left(\frac{(-\frac{3}{2})^3}{3} - \frac{5}{6}(-\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}(-\frac{3}{2}) + 3\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{4^3}{3} - \frac{5}{6}\cdot 4^2 - \frac{3}{2}\cdot 4 + 3\right) - \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5}{6}\cdot 3^2 - \frac{3}{2}\cdot 3 + 3\right)\right| =$$

$$= |-5.444 + 1.5| + |2.997 + 5.444| + |1.5 - 2.297| + |3.556 - 1.5|$$

$$= 5.444 - 1.5 + 2.997 + 5.444 - 2.297 - 1.5 + 3.556 - 1.5 =$$

$$= 15.238 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

8.2.6 Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των καμπύλων $y = f(x) = e^x$, $y = g(x) = e^{-x}$ και των ευθειών $x = 1$, $x = 2$.

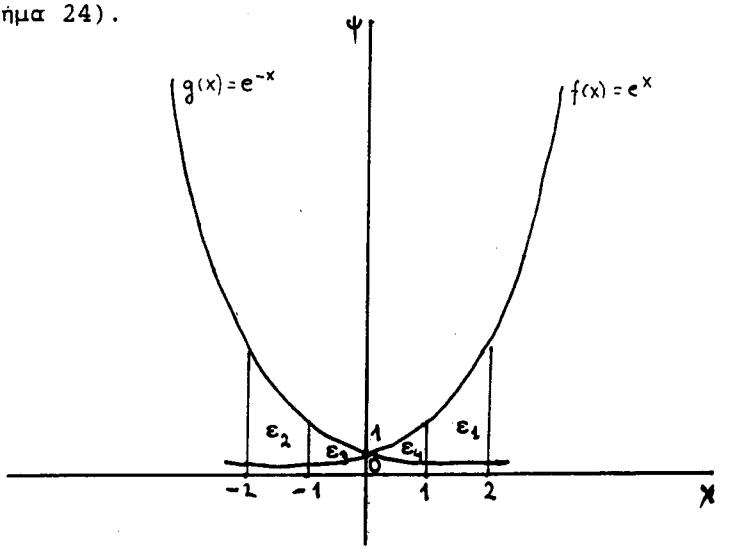
Επειδή $f(x) - g(x) = e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x}$ και επειδή για κάθε $x\in[1,2]$ ισχύει $e^x>1$, έχουμε $e^x+1>0$, $e^x-1>0$. Αρα $\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x} > 0$, επομένως $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[1,2]$. Ετσι:

$$E_1 = \int_1^2 [f(x)-g(x)]dx = \int_1^2 e^x dx - \int_1^2 e^{-x} dx = \int_1^2 e^x dx + \int_1^2 e^{-x} d(-x) =$$

$$e^x|_1^2 + e^{-x}|_1^2 = (e^2-e^1) + (e^{-2}-e^{-1}) = e^2-e+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e} = \frac{e^4-e^3+1-e}{e^2} =$$

$$\frac{e^3(e-1)-(e-1)}{e^2} = \frac{(e-1)(e^3-1)}{e^2} .$$

8.2.7 Να βρεθεί το εμβαδόν του χωριου που περιλαμβάνεται μεταξύ των καμπυλων $y = f(x) = e^x$, $y = g(x) = e^{-x}$ και των ευθειων $x = -1$, $x = -2$ (Σχήμα 24).



Σχήμα 24

Επειδή για κάθε $x\in[-2,-1]$ ισχύει $e^x<1$ έχουμε $e^x+1>0$, $e^x-1<0$ άρα $\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x} < 0$, επομένως $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in[-2,-1]$. Ετσι

$$\int_{-1}^{-2} e^{-x}dx - \int_{-1}^{-2} e^x dx = -e^{-x}|_{-1}^{-2} - e^x|_{-1}^{-2} = [-e^1-(-e^2)] - (e^{-1}-e^{-2}) =$$

$$-e+e^2-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2} = \frac{e^4-e^3+1-e}{e^2} = \frac{e^3(e-1)-(e-1)}{e^2} = \frac{(e-1)(e^3-1)}{e^2} .$$

8.2.8 Να βρεθεί το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ των καμπύλων $y = f(x) = e^x$, $y = g(x) = e^{-x}$ και των ευθειών $x = -1$, $x = 1$ (Σχήμα 24).

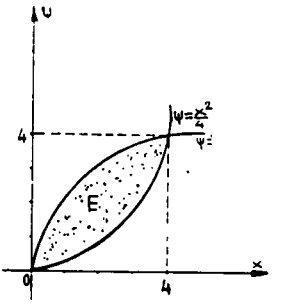
$$f(x)-g(x) = \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x}$$

Επειδή για κάθε $x\in[-1,0]$ η $e^x<1$ έχουμε $e^x-1<0$, $e^x+1>0$. Άρα $f(x)-g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, κι επειδή για κάθε $x\in[0,1]$ η $e^x>1$ έχουμε $e^x-1>0$, $e^x+1>0$. Άρα $f(x)-g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$. Έχουμε:

$E=E_1+E_2 = \int_{-1}^{0}(e^{-x}-e^x)dx + \int_{0}^{1}(e^{-x}-e^x)dx = (-e^{-x}-e^x)|_{-1}^{0} - (e^x+e^{-x})|_{0}^{1}$

$= [(-e^{-0}-e^0)-(-e^{-1}-e^1)] + [(e^1+e^{-1})-(e^0+e^{-0})] = -1-1+e+e^{-1}+e+e^{-1}-1-1 = -4 + 2e + 2e^{-1}$.

3.2.9 Να βρεθεί το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ των καμπυλών $y = f(x) = 2\sqrt{x}$ και $y = g(x) = x^2/4$ (Σχήμα 25).



x	0	1	4
$2\sqrt{x}$	0	2	4
$\frac{x^2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	4

Σχήμα 25

Επιλύουμε την εξίσωση $2\sqrt{x} = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 4x = \frac{x^4}{16} \Leftrightarrow 64x = x^4 \Rightarrow 64x - x^4 = 0 \Leftrightarrow x(64-x^3) \Leftrightarrow x = 0$ ή $4^3-x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, ($x=0$, $x=4$ οι πραγματικές ρίζες της $2\sqrt{x} = \frac{x^2}{4}$).. Δηλαδή για :

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ και $g(x) = 0$

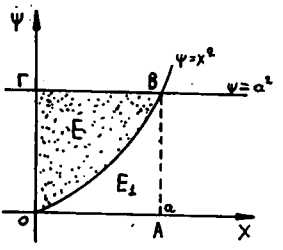
$x = 4 \Rightarrow f(x) = 4$ και $g(x) = 4$

κι επειδή $2\sqrt{x} \geq 0$ για κάθε $x\in[0,4]$, ως και $x^2/4 \geq 0$ για κάθε $x\in[0,4]$, έχουμε $x(4-x) \geq 0$ κι επειδή $4^2+4x+x^2 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αρα και για κάθε $x\in[0,4]$, παιρνω $x(4-x)(4^2+4x+x^2) \geq 0 \Leftrightarrow x(4^3-x^3) \geq 0 \Leftrightarrow x(64-x^3) \geq 0 \Leftrightarrow 64x-x^4 > 0 \Leftrightarrow 4x \geq \frac{x}{16}^4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq \frac{x}{4}^2$ δηλαδή $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x\in[0,4]$. Αρα :

$E = \int_0^4 (f(x)-g(x))dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4})dx = (2\cdot\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1})|_0^4 =$

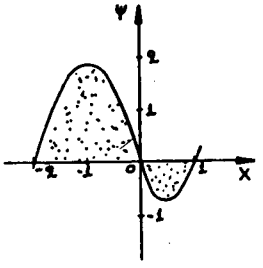
$(2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = 2\cdot\frac{4^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4^3}{3} = 2\cdot\frac{(2^3)^{2/2}}{3/2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4\cdot4^2}{3} =$
$2\cdot\frac{2^3\cdot2}{3} - \frac{4^2}{3} = 32/3 - 16/3 = 16/3$ τετραγωνικές μονάδες.

8.2.10 Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφανειας που ορίζεται από την καμπύλη $y = x^2$, τον y- άξονα και την ευθεία $y = \alpha^2$.



$E = (OAB\Gamma) - E_1$
$(OAB\Gamma) = \beta\cdot\upsilon = \alpha\cdot\alpha^2 = \alpha^3$
$E_1 = \int_0^{\alpha} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\alpha} = \frac{\alpha^3}{3}$
Αρα $E = \alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3} = \frac{3\alpha^3-\alpha^3}{3} =$
$\frac{2\alpha^3}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

8.2.11 Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη $y = x^3+x^2-2x$ και τον x- άξονα.



Είναι $y = x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$, οπότε η καμπύλη τέμνει τους άξονες στα σημεία $(-2,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι
$\int_0^{1} (x^3+x^2-2x)dx +$
$\int_{-2}^{0} -(x^3+x^2-2x)dx =$
$= (\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{0} - (\frac{x^4}{4} +$
$\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = -(\frac{(-2)^4}{4} +$

$\frac{(-2)^3}{3} - 2\cdot\frac{(-2)^2}{2}) - (\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot\frac{1^2}{2}) = -(4 - 8/3 - 4) - (1/4 + 1/3 - 1)$
$= \frac{8}{3} - (\frac{3+4-12}{12}) = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$ τετραγωνικές μονάδες.

9. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

9.1 Εισαγωγή – Ορισμός

Οσα έχουμε αναφέρει περί του ορισμένου ολοκληρωματος $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ προϋποθέτουν:

I. Το διάστημα $[\alpha,\beta]$ που πρεπει να είναι ορισμένη η συνάρτηση $f(x)$ να είναι περιορισμένο.

II. Η συνάρτηση $f(x)$ να είναι παντού συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Εδώ θα γενικεύσουμε την εννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ορίζοντας:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ όταν ισχύει μία από τις συνθήκες:

1) Το διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι απεριόριστο, δηλαδή της μορφής $(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,+\infty)$..

2) Η συνάρτηση $f(x)$ που πρέπει να ολοκληρωθεί έχει ένα ή περισσότερο πλήθος σημείων ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$.

9.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με $[\alpha,\beta]$ Απεριόριστο

9.2.1 Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ γίνεται $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta f(x)dx$, έχουμε εξ ορισμού:

$$\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$, του x- άξονα και της $x = \alpha$. (Σχήμα 26)

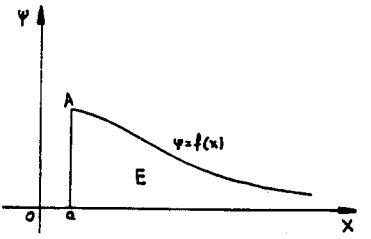
Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Αρα:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = \lim_{\beta\to+\infty} (\text{τοξεφx})\Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} (\text{τοξεφβ}-\text{τοξεφ1}) =$$

$$\lim_{\beta\to+\infty} \text{τοξεφβ} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$



Γεωμετρική Ερμηνεία

Σχημα 26

9.2.2 Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,\beta]$.

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ γίνεται $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$ και αν υπάρχει το $\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, έχουμε εξ ορισμού:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του μέρους του επιπεδου που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης y = f(x) του x- άξονα και της ευθείας x = β. (σχήμα 27)

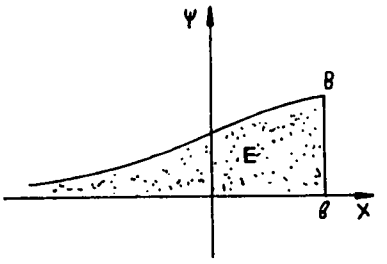
Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx$.

Η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0]$.

Αρα: $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} e^{2x}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} e^{2x}\cdot\frac{1}{2}\cdot de^{2x} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{\alpha\to-\infty} (e^{2x})\Big|_{\alpha}^{0} =$

$\frac{1}{2}\cdot\lim_{\alpha\to-\infty} (e^{0} - e^{2\alpha}) = \frac{1}{2}\cdot\lim_{\alpha\to-\infty} (1 - e^{2\alpha}) = \frac{1}{2}\cdot(1 - \lim_{\alpha\to-\infty} e^{2\alpha}) = \frac{1}{2}\cdot(1-0) = \frac{1}{2}$.

Γεωμετρική ερμηνεία



Σχήμα 27

9.2.3 Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$.

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ γίνεται $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$ και το $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$, όπου $\gamma\in(-\infty,+\infty)$, εξ ορισμού έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$ και του x-άξονα. (Σχήμα 28)

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

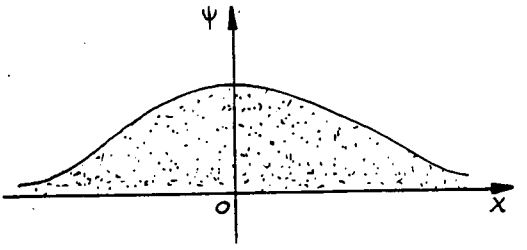
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$. Αρα για $\gamma=0\in(-\infty,+\infty)$ γράφουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx =$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{de^x}{1+(e^x)^2} + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} (\text{τοξεφε}^x)\Big|_{\alpha}^{0} +$$

$$\lim_{\beta\to+\infty}(\text{τοξεφε}^{x})\Big|_{0}^{\beta} = \lim_{\alpha\to-\infty}(\text{τοξεφε}^{0}-\text{τοξεφε}^{\alpha}) + \lim_{\beta\to+\infty}(\text{τοξεφε}^{\beta}-\text{τοξεφε}^{0}) =$$

$$(\text{τοξεφ1}-\lim_{\alpha\to-\infty}\text{τοξεφε}^{\alpha}) + (\lim_{\beta\to+\infty}(\text{τοξεφε}^{\beta}-\text{τοξεφ1}) = \text{τοξεφ1}-0+\frac{\pi}{2}-\text{τοξεφ1}=\frac{\pi}{2}$$



Σχήμα 28

9.3 Γενικευμένα Ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ με f(x) να έχει σημεία ασυνέχειας στο [α,β]

9.3.1 Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής για κάθε $x\in[\alpha,\beta)$, αλλά ασυνεχής στο $x = \beta$. ΤΟΤΕ ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\alpha}^{\beta-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}[F(\beta-\varepsilon)-F(\alpha)]$ όπου F(x) παράγουσα της f(x) και υπάρχει το όριό της. (σχήμα 29)

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

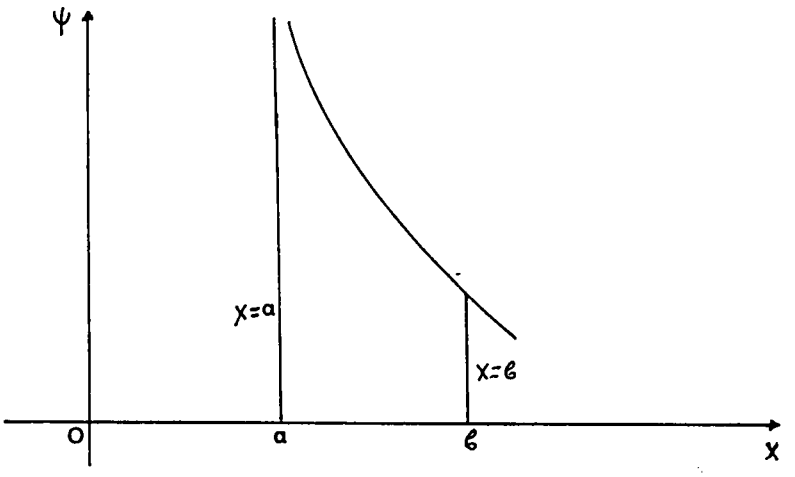
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ είναι συνεχής στο [0,3) και ασυνεχής στο x = 3. Αρα:

$\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{0}^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ και θέτοντας $x = 3^+$ έχουμε:

$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9t^2} = \sqrt{9(1-t^2)} = 3\sqrt{1-t^2}$ και $dx = 3dt$. Επομένως:

$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{3dt}{3\sqrt{1-t^2}} = \text{τοξημ}t = \text{τοξημ}\frac{x}{3} = F(x)$. Αρα:

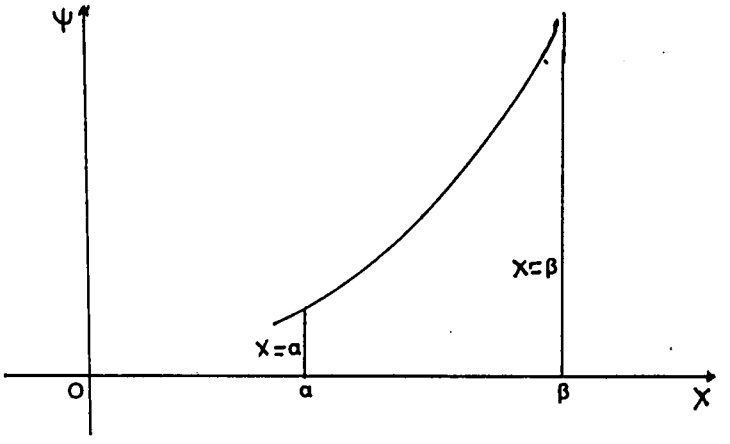
$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[(F(3-\varepsilon)-F(0)] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\tau\circ\xi\eta\mu\frac{3-\varepsilon}{3} - \tau\circ\xi\eta\mu\frac{0}{3}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\tau\circ\xi\eta\mu\frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \tau\circ\xi\eta\mu\frac{3}{3} = \tau\circ\xi\eta\mu 1 = \frac{\pi}{2}$.



Σχήμα 29

9.3.2 Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ αλλά ασυνεχής στο σημείο $x = \alpha$, ΤΟΤΕ ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\alpha+\varepsilon}^\beta f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[F(\beta)-F(\alpha+\varepsilon)]$ όπου $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$ και υπάρχει το όριό της.



Σχήμα 30

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

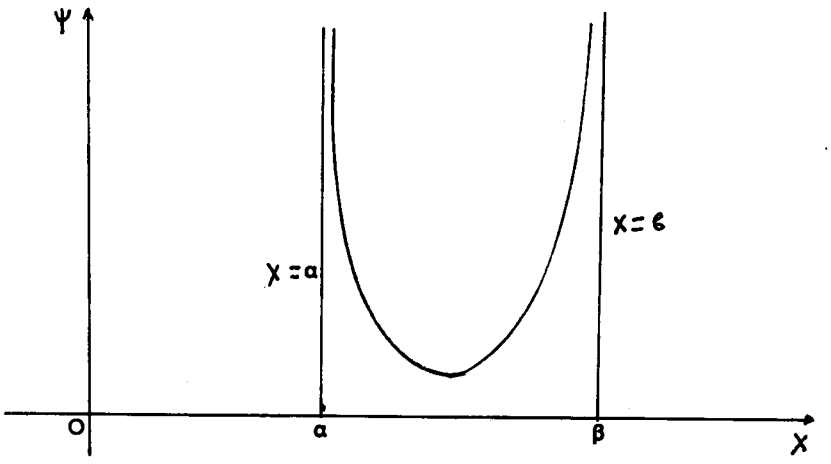
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,5]$ και ασυνεχής στο σημείο $x = 0$. Άρα:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^5 x^{-1/2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\Big|_{0+\varepsilon}^5 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[2\cdot x^{1/2}]_{0+\varepsilon}^5 =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[2\cdot 5^{1/2} - 2\cdot(0+\varepsilon)^{1/2}] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2\sqrt{5} - 2\sqrt{0+\varepsilon}) = (2\sqrt{5} - 2\sqrt{0+0}) = 2\sqrt{5}$$

9.3.3 Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο (α,β) και ασυνεχής στα άκρα $x = \alpha$ και $x = \beta$. ΤΟΤΕ ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \eta\to 0^+}}\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\eta} f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \eta\to 0^+}}[F(\beta-\eta)-F(\alpha+\varepsilon)]$$ όπου $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$ και το όριό της υπάρχει:



Σχήμα 31

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-2,2)$ και ασυνεχής στα άκρα $x = -2$, $x = 2$. Άρα ισχύει:

$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \eta\to 0^+}} \int_{-2+\varepsilon}^{2-\eta} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \eta\to 0^+}} [\text{τοξημ}\frac{x}{2}]_{-2+\varepsilon}^{2-\eta} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \eta\to 0^+}} (\text{τοξημ}\frac{2-\varepsilon}{2} - \text{τοξημ}\frac{\varepsilon-2}{2}) = \text{τοξημ}1 - \text{τοξημ}(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$. Αφου:

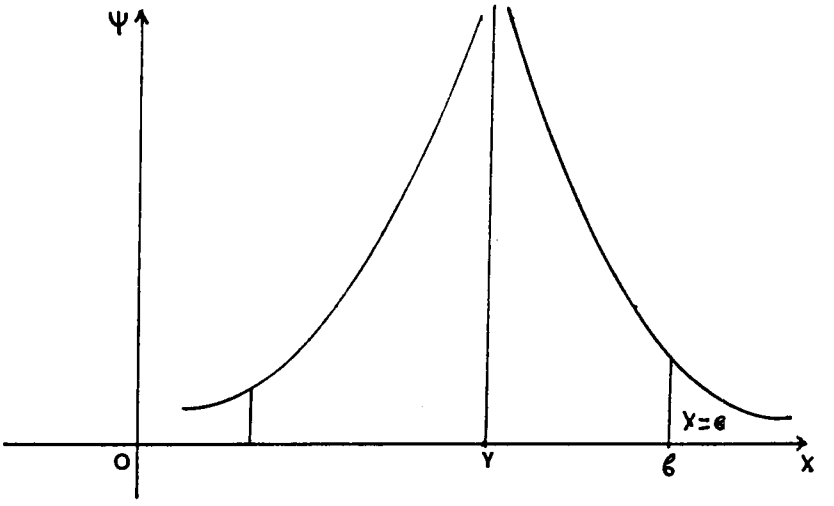
$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2dt}{\sqrt{4-4t^2}} = \int \frac{2dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{τοξημ}t = \text{τοξημ}\frac{x}{2}$

όπου $x = 2t$ και επομενως $dx = 2dt$.

9.3.4 Η συναρτηση $f(x)$ ειναι συνεχης σε ολα τα σημεια του διαστηματος $[\alpha,\beta]$ πλην του σημειου $\gamma\in(\alpha,\beta)$, ΤΟΤΕ ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [F(\gamma-\varepsilon)-F(\alpha)] +$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} [F(\beta)-F(\gamma+\varepsilon)]$ οπου $F(x)$ παραγουσα της $f(x)$ και τα ορια υπάρχουν.



Σχήμα 32

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του $[0,3]$ εκτός του σημείου $x=1\in[0,3]$. Αρα έχουμε:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\tfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}]_0^{1-\varepsilon} +$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\tfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}]_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\tfrac{3}{2}(1-\varepsilon-1)^{2/3}-\tfrac{3}{2}(0-1)^{2/3}] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\tfrac{3}{2}(3-1)^{2/3}$$

$$+\tfrac{3}{2}(1+\varepsilon-1)^{2/3}] = \tfrac{3}{2}(0) - \tfrac{3}{2}(-1)^{2/3} + \tfrac{3}{2}(2)^{2/3} - \tfrac{3}{2}(0) = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{4} =$$

$$\tfrac{3}{2}(-1 + \sqrt[3]{4}\ )$$

Αφού $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int (x-1)^{-1/3}dx = \frac{(x-1)^{-1/3+1}}{-1/3+1} = \frac{(x-1)^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}$.

9.3.5 Η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i \in [\alpha,\beta]$ που είναι ασυνεχής. ΤΟΤΕ ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_\alpha^{\xi_1-\varepsilon_1} f(x)dx + = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0^+}}\int_{\xi_1+\varepsilon_1}^{\xi_2-\varepsilon_2} f(x)dx +$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_2\to 0^+\\ \varepsilon_3\to 0^+}}\int_{\xi_2+\varepsilon_2}^{\xi_3-\varepsilon_3} f(x)dx + \ldots + \lim_{\substack{\varepsilon_{i-1}\to 0^+\\ \varepsilon_i\to 0^+}}\int_{\xi_{i-1}+\varepsilon_{i-1}}^{\xi_i-\varepsilon_i} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_i\to 0^+}\int_{\xi_i+\varepsilon_i}^{\beta} f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}[F(\xi_1-\varepsilon_1)-F(\alpha)] + \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0^+}}[F(\xi_2-\varepsilon_2)-F(\xi_1-\varepsilon_1)] + \ldots +$$

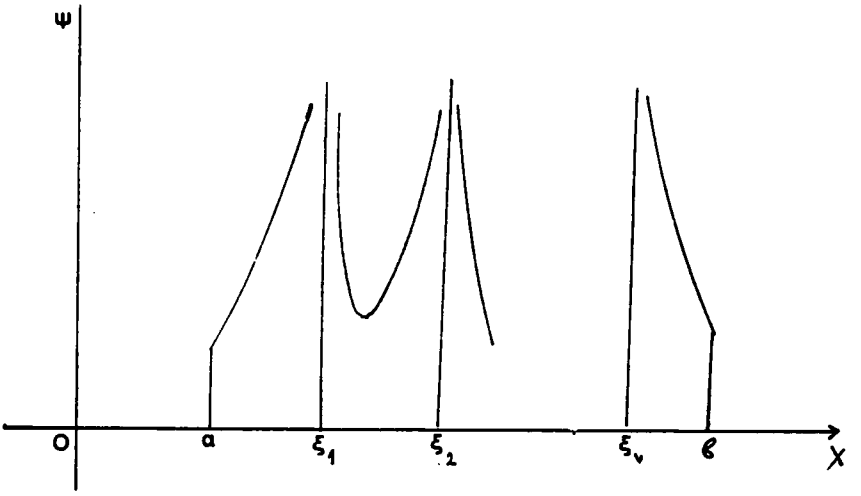
$$\lim_{\substack{\varepsilon_{i-1}\to 0^+\\ \varepsilon_i\to 0^+}}[F(\xi_i-\varepsilon_i)-F(\xi_{i-1}-\varepsilon_{i-1})] + \lim_{\varepsilon_i\to 0^+}[F(\beta)-F(\xi_i-\varepsilon_i)]$$

όπου $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$ και τα όρια υπάρχουν.

Σημείωση: Στις περιπτώσεις που η συνάρτηση $f(x)$ έχει ένα ή περρισσότερα σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχουν τα όρια, λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη με τη γενικευμένη έννοια στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Επίσης τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει, ή ότι έχει έννοια ή ότι συγκλίνει.

Αν το όριο ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ή ΥΠΑΡΧΕΙ και είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$ τότε λέμε: ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι ολοκληρώσιμη με τη γενικευμένη έννοια στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, το δε γενικευμένο

ολοκλήρωμα ότι ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ¬ ότι ΔΕΝ εχει εννοια, ή ότι ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ.



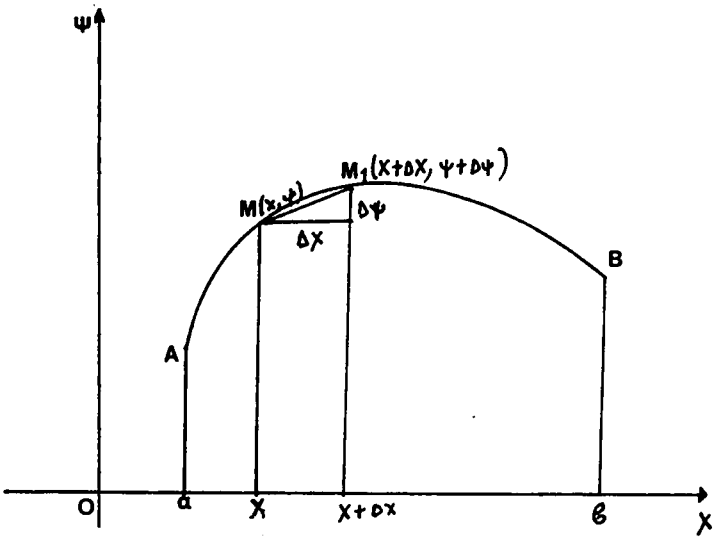
Σχημα 33

10 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

10.1 Ορισμός: Καλούμε μήκος ενός τόξου μιας καμπύλης το όριο προς το οποίο τείνει το μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής εγγεγραμμένης στο τόξο, όταν το πλήθος των σημείων της τεθλασμένης γραμμής τείνει στο +∞ και το μήκος καθε πλευρας τεινει στο μηδέν.

10.2 Υπολογισμός του μήκους τόξου καμπύλης σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη και συνεχή στο $[\alpha,\beta]$. Αν η καμπύλη που παριστάνει αυτή η συνάρτηση έχει παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ και AB το τόξο αυτής του οποίου τα άκρα έχουν τετμημένες α και β αντίστοιχα και αντίστοιχες τιμές του t t_α, t_β. Υποθέτουμε επίσης ότι όταν η παράμετρος t διατρεχει το $[t_\alpha, t_\beta]$ το αντίστοιχο σημείο $M(x(t),y(t))$ διαγράφει το τόξο AB της καμπύλης. Αν $M(x,y)$ και $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ είναι δύο γειτονικά σημεία του τόξου AB, που αντιστοιχουν στις τιμές της παραμέτρου t και $t+\Delta t$, το μήκος της χορδής MM_1 δίνεται απο τον τύπο:



Σχήμα 34

$$|MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \Leftrightarrow |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}}\cdot\Delta t = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2}+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}}\cdot\Delta t$$

οπότε:

$$\lim_{\Delta t\to 0}|MM_1| = \sqrt{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t \Leftrightarrow$$

$$MM_1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt$$

Αν η καμπύλη ανήκει στο χώρο των τριών διαστάσεων και έχει παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, τότε:

$$MM_1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

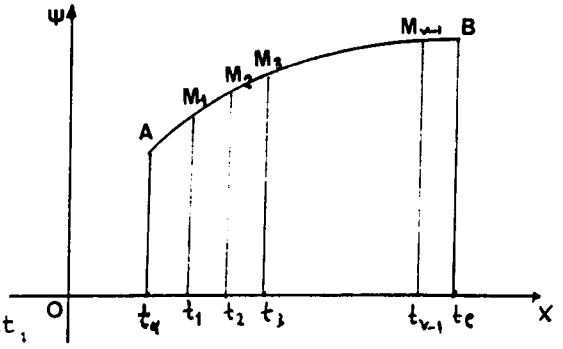
Διαιρούμε το διάστημα $[t_\alpha, t_\beta]$ σε ν ίσα μέρη με τα σημεία t_1, t_2, t_3, ..., $t_{\nu-1}$. Εστω M_1, M_2, M_3, ..., $M_{\nu-1}$ τα αντίστοιχα σημεία του τόξου AB, τότε για κάθε χορδή $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, ..., $\overline{M_{\nu-1}B}$ έχουμε:

$$|\overline{AM_1}| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_\alpha}{\Delta t_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_\alpha}{\Delta t_\alpha}\right)^2} \cdot \Delta t_\alpha$$

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta t_1}\right)^2} \cdot \Delta t_1$$

$$|\overline{M_2M_3}| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_2}{\Delta t_2}\right)^2} \cdot \Delta t_2$$

$$|\overline{M_{\nu-1}B}| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_{\nu-1}}{\Delta t_{\nu-1}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_{\nu-1}}{\Delta t_{\nu-1}}\right)^2} \cdot \Delta t_\nu$$



όπου: $\Delta x_\nu = x(t_{\nu+1})-x(t_\nu)$, $\Delta y_\nu = y(t_{\nu+1})-y(t_\nu)$, $\Delta t_\nu = t_{\nu+1}-t_\nu$, όπου $\nu\in\{\alpha=0,1,2,\ldots,\nu-1,\nu=\beta\}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη εχουμε:

$$|\overline{AM_1}| + |\overline{M_1M_2}| + |\overline{M_2M_3}| + \ldots + |\overline{M_{\nu-1}B}| = L =$$

$$= \sum_{i=\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \cdot \Delta t_i$$ όπου $i\in\{\alpha,1,2,3,\ldots,\nu-1,\beta\}$ και:

$$\lim_{\nu\to+\infty} L = \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{i=\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \cdot \Delta t_i$$ και

$$S = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

και στο χώρο των τριών διαστάσεων:

$$S = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

Αν η καμπύλη δίνεται από τη συνάρτηση $y = \varphi(x)$ τότε θεωρούμε $x = x$ και $y = \varphi(x)$ οπότε:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad \text{ή} \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

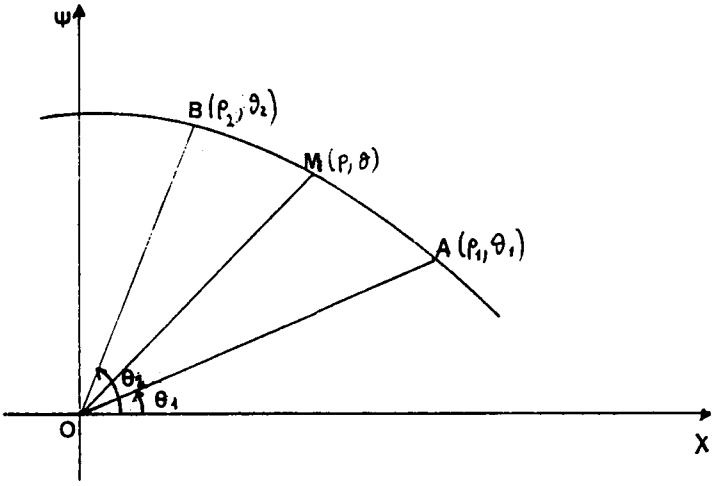
Αν η καμπύλη δίνεται απο τις εξισώσεις $y = \varphi(x)$, $z = G(x)$, τότε θεωρούμε $x = x$ και:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

10.3 Υπολογισμός μήκους τόξου επιπέδου καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες.

Εστω η επίπεδος καμπύλη με πολική εξίσωση $\rho = \rho(\vartheta)$ και AB ένα

τοξο αυτης $A(\rho_1,\vartheta_1)$, $B(\rho_2,\vartheta_2)$ και $M(\rho,\vartheta)$ σε πολικες συντεταγμένες



Σχήμα 35

και $M(x,y)$ σε καρτεσιανες. Επειδή $x = \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$ και $y = \rho\eta\mu\vartheta$ και $dx = \sigma\upsilon\nu\vartheta d\rho - \rho\eta\mu\vartheta d\vartheta$ και $dy = \eta\mu\vartheta d\rho + \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta$ και

$(dx)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\vartheta(d\rho)^2 + \rho^2\eta\mu^2\vartheta(d\vartheta)^2 - 2\rho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta d\rho d\vartheta$

$(dy)^2 = \eta\mu^2\vartheta(d\rho)^2 + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(d\vartheta)^2 + 2\rho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta d\rho d\vartheta$

και προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη:

$(dx)^2+(dy)^2 = (d\rho)^2(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\eta\mu^2\vartheta)+\rho^2(d\vartheta)^2(\eta\mu^2\vartheta+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta) \Leftrightarrow$

$(dx)^2+(dy)^2 = (d\rho)^2+\rho^2(d\vartheta)^2$ κι επειδή:

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ εχουμε $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{d\rho^2+\rho^2(d\vartheta)^2}$ ή

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(d\vartheta)^2\left[\frac{d\rho^2}{d\vartheta^2}+\rho^2\right]}$ $= S = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta.$

10.4 Παραδείγματα:

10.4.1 Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = \sqrt{x^3}+1$ που βρίσκεται μεταξύ των σημείων $(0,0)$ και $(1,2)$

Λύση:

$\frac{dy}{dx} = (\sqrt{x^3}+1)' = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{3}{2}x^{1/2}$ και

$\frac{dy}{dx} = (\frac{3}{2}\cdot x^{1/2})^2 = \frac{9}{4}\cdot x$. Αρα ο τύπος

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot dx$$

Υπολογίζουμε το $\int \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot dx = \frac{4}{9}\int \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1+\frac{4}{9}x\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{(1+\frac{9}{4}x)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} =$

$\frac{4}{9}\cdot\frac{(1+\frac{9}{4}x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}$

Αρα: $S = \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}1)^3} + \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}0)^3} =$

$\frac{8}{27}\sqrt{(\frac{13}{4})^3} + \frac{8}{27}\sqrt{(1)^3} = \frac{8}{27}\cdot\frac{13}{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{8}{27} = \frac{8}{27}(\frac{13\sqrt{13}}{8}+1) =$

$\frac{8}{27}(\frac{13\sqrt{13}+8}{8}) = \frac{13\sqrt{13}+8}{27}$.

10.4.2 Να υπολογιστεί το μήκος τόξου της καμπύλης $\rho = 2e^{\theta}$ με $\theta\in[0,2\pi]$.

Λύση:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\ d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{(2e^{\theta})^2+[(2e^{\theta})']^2}\ d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{4e^{2\theta}+(2e^{\theta})^2}\ d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{4e^{2\theta}+4e^{2\theta}}\ d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{8e^{2\theta}}\ d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{8}e^{\theta}d\theta = \sqrt{8}\int_0^{2\pi}e^{\theta}d\theta = \sqrt{8}e^{\theta}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{8}e^{2\pi} - \sqrt{8}e^{0} = \sqrt{8}(e^{2\pi}-1).$$

11. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

11.1 Εννοια του Αορίστου Ολοκληρώματος

Εστω οι πραγματικες συναρτησεις F και f ορισμένες σε ένα διαστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Στην παραγραφο 5 είδαμε οτι η συνάρτηση F είναι μια ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ η ΕΝΑ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ της f στο Δ, τοτε και μόνο τότε αν υπαρχει η παραγωγος της f στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ ή $dF(x) = f(x)dx$ για καθε $x \in \Delta$. Συμβολίζουμε τοτε:

$$\int f(x)dx = F(x) \,|\Delta$$

Το συμβολο $\int$ ονομάζεται συμβολο ολοκληρωσεως.

Απο τον ορισμο που δώσαμε συμπαεραίνουμε ότι:
Οι παραγουσες των 2x, ημx, συνx, e^x είναι αντίστοιχα οι: x^2, $-$συνx, ημx, e^x, αφού:
$(x^2)' = 2x$, $(-\text{συν}x)' = \text{ημ}x$, $(\text{ημ}x)' = \text{συν}x$, $(e^x)' = e^x$.

Στην παραγραφο 5 είδαμε ότι κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f υπάρχει μια οικογένεια απο αρχικες συναρτησεις που ανά δύο διαφερουν μεταξύ τους κατά μία σταθερά.

Ετσι ο συμβολισμός $\int f(x)dx \,|\Delta$ συμβολίζει κάθε παράγουσα της f κι έτσι μπορουμε να γραψουμε:

$$\int f(x)dx = F(x) + C|\Delta$$

Δηλαδή οι παράγουσες μιας συναρτήσεως είναι μια οικογένεια καμπύλων απείρου πλήθους.

Στις πρακτικές εφαρμογές είναι αναγκαίο να βρεθεί συγκεκριμμένη ή συγκεκριμμένες παραγουσες για τις συνθήκες του προβλήματος που μελετάμε. Αυτο επιτυγχάνεται με τον προσδιορισμό της σταθεράς C, που και οριστικοποιει την παράγουσα.

Παράδειγμα:

Εστω ότι δίνεται για υπολογισμό το ολοκλήρωμα $I = \int f(x)dx$ που για κάποια συνθήκη του προβλήματος $x = \alpha$, πρέπει να λάβει μια ορισμένη τιμη $I = \beta$. Η σταθερά ολοκλήρωσης προσδιορί- ζεται ως εξής:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Για τη συγκεκριμενη συνθήκη εχουμε:

$$F(\alpha) + C = \beta \Leftrightarrow C = \beta - F(\alpha).$$

11.2 Ιδιότητες του Αορίστου Ολοκληρώματος

I. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C \mid \Delta\subseteq\mathbb{R}$ και $k\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

$(\int kf(x)dx)' = kf(x)dx$ και

$(k\int f(x)dx)' = k(\int f(x)dx)' = kf(x)dx$

Δηλαδή οι συναρτήσεις $\int kf(x)dx$ και $k\int f(x)dx$ έχουν ίσες παραγώγους άρα ισχύει η I.

II. $\int[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\ldots+\int f_\nu(x)dx \mid \Delta\subseteq\mathbb{R}$

Απόδειξη

$(\int[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]dx)' = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)$

$(\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\ldots+\int f_\nu(x)dx)' = (\int f_1(x)dx)'+(\int f_2(x)dx)'+\ldots+$

$(\int f_\nu(x)dx)' = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)$

Αρα ισχύει η II.

III. $(\int f(x)dx)' = [F(x)+C]' = f(x)$

IV. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

V. $\int dF(x) = F(x) + C$

} Από τον ορισμό του ολοκληρώματος

11.3 Λογιστικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης

1. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ για κάθε $\mu\in\mathbb{R}-\{-\}$, $-\infty<x<+\infty$, $C\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

$(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1})' = \frac{1}{\mu+1}\cdot(\mu+1)x^{\mu+1} = x^\mu$.

2. $\int x^{-1}dx = \int dx/x = \ln|x| + C \quad -\infty<x<0, \quad 0<x<+\infty$

3. $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C \quad -\infty<x<+\infty, \quad \alpha>0, \quad \alpha\neq 1$

γιατί $(\frac{\alpha^x}{\ln\alpha})' = \frac{1}{\ln\alpha}(\alpha^x)' = \frac{1}{\ln\alpha}\alpha^x\ln\alpha = \alpha^x$

5. $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x dx + C \quad -\infty<x<+\infty$

6. $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + C \qquad -\infty < x < +\infty$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + C \qquad -\infty < x < +\infty$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu x + C \qquad -1 < x < +1$

9. $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + C \qquad k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

10. $\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\sigma\varphi x + C \qquad k\pi < x < (k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

11. $\int \cosh x dx = \sinh x + C \qquad -\infty < x < +\infty$

12. $\int \sinh x dx = -\cosh x + C \qquad -\infty < x < +\infty$

13. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int (1 - tgh^2 x) dx = tghx + C \qquad -\infty < x < +\infty$

14. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \int (ctgh^2 x - 1) dx = -ctghx + C \qquad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < +\infty$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Arsinhx + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C \qquad -\infty < x < +\infty$

16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = Artghx + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad -1 < x < +1$

12. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

12.1 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

Με τη μέθοδο αυτή, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή x της προς ολοκλήρωση συναρτήσεως, με κατάλληλη συνάρτηση που περιέχει μια νέα μεταβλητή t. Έτσι, οδηγούμαστε σε γνωστά ή σε απλούστερα ολοκληρώματα.

Για να υπάρχει η δυνατότητα της αντικατάστασης πρέπει:

I $f(x)|\Delta$ συνεχής στο Δ

II $x = \varphi(t)$ με $\varphi(t)$ ορισμένη σε κατάλληλο διάστημα Δ_1, τέτοιο ώστε το σύνολο των τιμών της $\varphi(t)$ να συμπίπτει με το Δ.

III $\varphi'(t)|\Delta_1$ να είναι συνεχής συνάρτηση στο Δ_1.
IV $\varphi'(t)\neq 0$, για κάθε $t\in\Delta_1$.
Έτσι η $\varphi(t)$ είναι γνησίως μονότονη και συνεχής στο Δ_1 και υπάρχει η αντίστροφος αυτής.

Επομένως ισχύει:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \,|\Delta_1$$

Παραδείγματα:

12.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int (f(x))^{\mu}f'(x)dx$, $\mu\neq -1$.

Λύση

Θέτουμε $f(x) = t \Leftrightarrow f'(x)dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{f'(x)}$. Άρα:

$$\int (f(x))^{\mu}f'(x)dx = \int t^{\mu}f'(x)\frac{dt}{f'(x)} = \int t^{\mu}dt = \frac{t^{\mu+1}}{\mu+1} + C = \frac{(f(x))^{\mu+1}}{\mu+1} + C$$

12.1.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int e^{f(x)}f'(x)dx$

Λύση

Θέτουμε $f(x) = t \Leftrightarrow f'(x)dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{f'(x)}$. Άρα:

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = \int e^{t}f'(x)\frac{dt}{f'(x)} = \int e^{t}dt = e^{t} + C = e^{f(x)} + C$$

12.1.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu(f(x))f'(x)dx$

Λύση

Θέτουμε $f(x) = t \Leftrightarrow f'(x)dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{f'(x)}$. Άρα:

$$\int \eta\mu(f(x))f'(x)dx = \int \eta\mu t f'(x)\frac{dt}{f'(x)} = \int \eta\mu t dt = -\sigma\upsilon\nu t + C =$$
$$-\sigma\upsilon\nu(f(x)) + C.$$

12.1.4 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int (x^3+2)^4 3x^2dx$

Λύση

Θέτουμε $x^3+2 = t \Leftrightarrow d(x^3+2) = dt \Leftrightarrow 3x^2dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{3x^2}$. Άρα:

$$\int (x^3+2)^4 3x^2dx = \int t^4 3x^2\frac{dt}{3x^2} = \int t^4dt = \frac{t^{4+1}}{4+1} + C = \frac{t^5}{5} = \frac{(x^3+2)^5}{5} + C \quad .$$

12.1.5 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \sqrt{x^4+1}\,x^3dx$.

Λύση

Θέτουμε $x^4+1 = t \Leftrightarrow d(x^4+1) = dt \Leftrightarrow 4x^3dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{4x^3}$. Αρα:

$\int\sqrt{x^4+1}x^3dx = \int\sqrt{t}x^3\frac{dt}{4x^3} = \frac{1}{4}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$

$\frac{\sqrt{t^3}}{6} + C = \frac{t\sqrt{t}}{6} + C = \frac{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}{6} + C$.

12.2 Ολοκλήρωση Κατά Μέρη

Η μέθοδος βασίζεται στην ιδιότητα:

$\int(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x))dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\ldots+\int f_\nu(x)dx$

Παραδείγματα:

12.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int(2x^2+3x+2)dx$.

Λύση

$\int(2x^2+3x+2)dx = \int 2x^2dx + \int 3xdx + \int 2dx = 2\int x^2dx + 3\int xdx + 2\int dx =$

$\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

12.2.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int(\sqrt[3]{x^2}+\eta\mu x)dx.$

Λύση

$\int(\sqrt[3]{x^2}+\eta\mu x)dx = \int\sqrt[3]{x^2}dx + \int\eta\mu xdx = \int x^{2/3}dx + \int\eta\mu xdx = \frac{x^{5/3}}{5/3} -$

$\sigma\upsilon x + C = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} - \sigma\upsilon x + C = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} - \sigma\upsilon x + C$.

12.2.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int(x^2+1)\sqrt[3]{x}dx$.

Λύση

$\int(x^2+1)\sqrt[3]{x}dx = \int(x^2+1)x^{1/3}dx = \int(x^{7/3}+x^{1/3})dx = \int x^{7/3}dx + \int x^{1/3}dx =$

$\frac{x^{10/3}}{10/3} + \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{10} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C = \frac{3x\sqrt[3]{x^4}}{10} + \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$.

12.2.4 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})dx$.

Λύση

$\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})dx = \int(e^x-\frac{1}{x^2})dx = \int e^xdx - \int\frac{dx}{x^2} = e^x - \int x^{-2}dx = e^x -$

$\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = e^x + \frac{1}{x} + C$.

12.3 Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες (Παραγοντική Ολοκλήρωση)

Εστω δύο συναρτησεις της μεταβλητής x, u = u(x) και υ = υ(x) παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Διαφοριζοντας το γινομενο τους έχουμε:

$$d(uv) = udv + vdu \Leftrightarrow udv = d(uv) - vdu.$$

Ολοκληρωνοντας τα μελη της τελευταίας παιρνουμε:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \Leftrightarrow \boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Τύπος παραγοντικης ολοκλήρωσης

Ο τύπος αυτός αξιοποιείται ή με απ' ευθείας εφαρμογή ή με κατάλληλους μετασχηματισμούς ώστε να προσδιορίζονται οι συναρτησεις u και υ.

Ετσι αν:

I. Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι της μορφής:

Εκθετική συνάρτηση επί ημίτονο ή επί συνημίτονο η επι πολυωνυμική συνάρτηση: δηλαδή $\varphi(x)e^{kx}$ κι εφ' όσον ισχύει: $e^{kx}dx = \frac{1}{k}d(e^{x})$ έχω:

$\int\varphi(x)\cdot e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int\varphi(x)de^{kx}$ οπότε ισχύει ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης με $u = \varphi(x)$ και $v = e^{kx}$.

II. Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι της μορφής:

Πολυωνυμική συνάρτηση επί ημίτονο ή επι συνημίτονο ή επί λογάριθμο, τότε επειδή ισχύουν:

$\eta\mu xdx = -d\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu xdx = d\eta\mu x$, έχουμε αντίστοιχα:

$\int\varphi(x)\eta\mu xdx = -\int\varphi(x)d\sigma\upsilon\nu x$ και $\int\varphi(x)\sigma\upsilon\nu xdx = \int\varphi(x)d\eta\mu x$ με $u = \varphi(x)$, $v = \sigma\upsilon\nu x$ ή $v = \eta\mu x$ του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Στην περιπτωση $\int\varphi(x)\ln xdx$ ο μετασηματισμός γινεται στη $\varphi(x)$, οπότε προκύπτουν οι συναρτήσεις u και υ.

Παραδείγματα:

12.3.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int xe^{x}dx$.

Λύση

Επειδή $e^{x}dx = de^{x}$ έχουμε:

$\int xe^{x}dx = \int xde^{x} = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C.$

12.3.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^{2}e^{x}dx$.

Λύση

Επειδή $e^x dx = de^x$ έχουμε:

$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2\int x de^x$

$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

12.3.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int (3x^2+1)e^x dx$.

Λύση:

Επειδή $e^x dx = de^x$ έχουμε:

$\int (3x^2+1)e^x dx = \int (3x^2+1)de^x = (3x^2+1)e^x - \int e^x d(3x^2+1) = (3x^2+1)e^x -$

$\int e^x 6x dx = (3x^2+1)e^x - 6\int x de^x = (3x^2+1)e^x - 6(xe^x - \int e^x dx) = 3x^2 e^x$

$+ e^x - 6xe^x + 6e^x + C = 3x^2 e^x - 6xe^x + 7e^x + C.$

12.3.4 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^3 e^{2x} dx$.

Λύση:

Επειδή $de^{2x} = 2e^{2x}dx \Longrightarrow e^{2x}dx = \frac{1}{2}de^{2x}$ έχουμε:

$\int x^3 e^{2x} dx = \int x^3 \frac{1}{2} de^{2x} = \frac{1}{2}\int x^3 de^{2x} = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx^3 = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} -$

$\frac{1}{2}\int e^{2x} 3x^2 dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{1}{2}3\int x^2 \frac{1}{2} de^{2x} = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int x^2 de^{2x} = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} -$

$\frac{3}{4}(x^2 e^{2x} - \int e^{2x} dx^2) = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}\int e^{2x} 2x dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x}$

$+ \frac{3}{4}\cdot 2\int x \frac{1}{2} de^{2x} = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\int x de^{2x} = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} +$

$\frac{3}{4}(xe^{2x} - \int e^x dx) = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{4}\int e^{2x}\frac{1}{2} d2x = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} -$

$\frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\, e^{2x} + C = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}\, e^{2x} + C$

12.3.5 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int e^x \eta\mu 2x dx$.

Λύση:

$\int e^x \eta\mu 2x dx = \int \eta\mu 2x de^{2x} = e^x \eta\mu 2x - \int e^x d\eta\mu 2x = e^x \eta\mu 2x - \int e^x \sigma\upsilon\nu 2x 2dx =$

$e^x \eta\mu 2x - 2\int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx = e^x \eta\mu 2x - 2(e^x \sigma\upsilon\nu 2x - \int e^x d\sigma\upsilon\nu 2x) = e^x \eta\mu 2x -$

$2e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2\int e^x(-\eta\mu 2x)d2x = e^x \eta\mu 2x - 2e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 2\cdot 2\int e^x \eta\mu 2x dx =$

$e^x \eta\mu 2x - 2e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 4\int e^x \eta\mu 2x dx$.

Αρα:

$\int e^x \eta\mu 2x dx = e^x \eta\mu 2x - 2e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 4\int e^x \eta\mu 2x dx \Leftrightarrow 5\int e^x \eta\mu 2x dx = e^x \eta\mu 2x -$

$2e^x \sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \int e^x \eta\mu 2x dx = \frac{1}{5}\, e^x \eta\mu 2x - \frac{2}{5}\, e^x \sigma\upsilon\nu 2x + C$

12.3.6 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$.

Λύση:

$\int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx = \int \sigma\upsilon\nu 2x de^x = e^x \sigma\upsilon\nu 2x - \int e^x d\sigma\upsilon\nu 2 = e^x \sigma\upsilon\nu 2x - \int e^x(-2\eta\mu 2x dx) = e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2\int \eta\mu 2x de^x = e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2(e^x \eta\mu dx - \int e^x d\eta\mu 2x) = e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 2\int e^x 2\sigma\upsilon\nu 2x dx$ οπότε:

$\int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx = e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 2\cdot 2\int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx \Leftrightarrow 5\int e^x 2\sigma\upsilon\nu 2x dx = e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x \Leftrightarrow \int e^x 2\sigma\upsilon\nu 2x dx = \frac{1}{5} e^x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{2}{5} e^x \eta\mu 2x + C.$

12.3.7 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^2 \eta\mu x dx$.

Λύση:

Επειδή ισχύει: $d\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x dx$ έχουμε:

$\int x^2 \eta\mu x dx = -\int x^2 d\sigma\upsilon\nu x = -(x^2 \sigma\upsilon\nu x - \int \sigma\upsilon\nu x dx^2) = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + \int \sigma\upsilon\nu x 2x dx = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2\int x \sigma\upsilon\nu x dx = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2\int x d\eta\mu x = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2(x\eta\mu x - \int \eta\mu x dx) = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x - 2(-\sigma\upsilon\nu x) + C = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x + C.$

12.3.8 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^2 \sigma\upsilon\nu x dx$.

Λύση:

Επειδή ισχύει $d\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x dx$ έχουμε:

$\int x^2 \sigma\upsilon\nu x dx = \int x^2 d\eta\mu x = x^2 \eta\mu x - \int \eta\mu x dx^2 = x^2 \eta\mu x - \int \eta\mu x 2x dx = x^2 \eta\mu x - 2\int \eta\mu x dx = x^2 \eta\mu x + 2\int d\sigma\upsilon\nu x = x^2 \eta\mu x + 2(x\sigma\upsilon\nu x - \int \sigma\upsilon\nu x dx) = x^2 \eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x + C.$

12.3.9 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^2 \ln x dx$.

Λύση:

$\int x^2 \ln x dx = \int \ln x \frac{dx^3}{3} = \frac{1}{3}\int \ln x dx^3 = \frac{1}{3}(x^3 \ln x - \int x^3 d\ln x) = \frac{1}{3}(x^3 \ln x - \int x^3 \frac{1}{x} dx) = \frac{1}{3}(x^3 \ln x - \int x^2 dx) = \frac{1}{3}(x^3 \ln x - \frac{x^{2+1}}{2+1}) + C = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^2 + C.$

13. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$\int \eta\mu^{2k} x dx$, $\int \sigma\upsilon\nu^{2k} x dx$, $\int \eta\mu^{2k} x \sigma\upsilon\nu^{2k} x dx$, $\int (\ln x)^\nu dx$

13.1 Να αποδειχτεί ο αναγωγικός τύπος

$$\int \eta\mu^{\nu}x\,dx = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx \ , \ \nu\in\mathbb{N} \ (\nu \text{ άρτιος})$$

Απόδειξη:

$$\int \eta\mu^{\nu}x\,dx = \int \eta\mu^{\nu-1}x\eta\mu x\,dx = \int \eta\mu^{\nu-1}x\,d(\sigma\upsilon\nu x) = -\int \eta\mu^{\nu-1}x\,d\sigma\upsilon\nu x =$$

$$-(\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x - \int \sigma\upsilon\nu x\,d(\eta\mu^{\nu-1}x)) = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x +$$

$$+ \int \sigma\upsilon\nu x(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x\sigma\upsilon\nu x\,dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^{\nu-2}x\,dx =$$

$$-\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int (1-\eta\mu^2 x)\eta\mu^{\nu-2}x\,dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x +$$

$$+ (\nu-1)\int (\eta\mu^{\nu-2}x - \eta\mu^{\nu-2}\eta\mu^2 x)\,dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx -$$

$$- (\nu-1)\int \eta\mu^{\nu}x\,dx. \quad \text{Αρα:}$$

$$\int \eta\mu^{\nu}x\,dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx - \nu\int \eta\mu^{\nu}x\,dx + \int \eta\mu^{\nu}x\,dx \ .$$

Επομένως: $\nu\int \eta\mu^{\nu}x\,dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx$. Αρα:

$$\int \eta\mu^{\nu}x\,dx = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx$$

13.3.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \eta\mu^4 x\,dx$.

Λύση:

Ο αναγωγικός τύπος $\int \eta\mu^{\nu}x\,dx = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx$ για $\nu=4$ δίνει:

$$\int \eta\mu^4 x\,dx = -\frac{\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x}{4} + \frac{3}{4}\int \eta\mu^2 x\,dx.$$

Ο ίδιος τύπος για $\nu=2$ δίνει:

$$\int \eta\mu^2 x\,dx = -\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2} + \frac{1}{2}\int \eta\mu^0 x\,dx = -\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2} + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2} + \frac{1}{2}x$$

Επομένως:

$$\int \eta\mu^4 x\,dx = -\frac{\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2} + \frac{1}{2}x\right) + C =$$

$$-\frac{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}{4} + \frac{3}{8}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{8}x + C \ .$$

13.2 Να αποδειχτεί ο αναγωγικός τύπος:

$$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\,dx \ , \ \nu\in\mathbb{N} \ (\nu \text{ άρτιος})$$

Απόδειξη:

$$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,d\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x -$$

$$- \int \eta\mu x\,d\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x - \int \eta\mu x(\nu-1)\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x(-\eta\mu x)\,dx =$$

$$\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x + (\nu-1)\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\,dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x +$$

$+ (\nu-1)\int(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x + (\nu-1)\int(\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x - \sigma\upsilon\nu^{\nu}x)dx =$
$\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x + (\nu-1)\int\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx - (\nu-1)\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx$. Οπότε:
$\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x + (\nu-1)\int\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx - \nu\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx + \int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx.$

Αρα:

$\nu\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x + (\nu-1)\int\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx$. Επομενως:
$\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx$.

13.2.1 Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα: $\int\sigma\upsilon\nu^4 x dx$.

Λύση:

Ο αναγωγικος τύπος $\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx$ για $\nu=4$ δίνει:

$\int\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x}{4} + \frac{3}{4}\int\sigma\upsilon\nu^2 x dx.$

Ο ίδιος τύπος για $\nu=2$ δίνει:

$\int\sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{2} + \frac{1}{2}\int\sigma\upsilon\nu^0 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{2} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{2} + \frac{1}{2}x$.

Αρα:

$\int\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x}{4} + \frac{3}{4}(\frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{2} + \frac{1}{2}x) + C =$
$\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x}{4} + \frac{3}{8}\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x + \frac{3}{8}x + C$.

13.3 Το ολοκλήρωμα της μορφής $\int\eta\mu^{2k}x\sigma\upsilon\nu^{2k}x dx$

ανάγεται σε μία από τις δύο προηγούμενες μορφές αφού:
$\eta\mu^{2k}x = (\eta\mu^2 x)^k = (1-\sigma\upsilon\nu x)^k$ οπότε το ολοκλήρωμα ανάγεται σε άθροισμα ολοκληρωμάτων της μορφης $\int\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx$ ή αν μετασχηματίσουμε το $\sigma\upsilon\nu^{2k}x = (\sigma\upsilon\nu^2 x)^k = (1-\eta\mu x)^k$ το ολοκλήρωμα ανάγεται σε άθροισμα ολοκληρωμάτων της μορφης $\int\eta\mu^{\nu}x dx$.

13.3.1 Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα: $\int\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^2 x dx$.

Λύση:

$\int\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^2 x dx = \int\sigma\upsilon\nu^2 x(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)dx = \int(\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^4 x)dx = \int\sigma\upsilon\nu^2 x dx -$
$- \int\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{2} + \frac{x}{2} - (\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x}{4} + \frac{3\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{8} + \frac{3}{8}x) + C =$
$\frac{4\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{8} + \frac{4}{8}.x - \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x}{4} - \frac{3\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}{8} - \frac{3}{8}.x + C = \frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x + x}{8} -$
$- \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x}{4} + C$.

13.4 Να αποδειχτεί ο αναγωγικός τύπος:

$\int(\ln x)^\nu dx = x(\ln x)^\nu - \nu\int(\ln x)^{\nu-1}dx \ , \quad \nu\in\mathbb{N}$

Απόδειξη:

$\int(\ln x)^\nu dx = x(\ln x)^\nu - \int x d(\ln x)^\nu = x(\ln x)^\nu - \int x\nu(\ln x)^{\nu-1}\frac{1}{x}dx =$

$x(\ln x)^\nu - \nu\int(\ln x)^{\nu-1}dx$.

13.4.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int(\ln x)^3 dx$.

Λύση:

Ο αναγωγικός τύπος $\int(\ln x)^\nu dx = x(\ln x)^\nu - \nu\int(\ln x)^{\nu-1}dx$ για $\nu=3$ δίνει:

$\int(\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3\int(\ln x)^2 dx.$

Ο ίδιος τύπος για $\nu=2$ δίνει:

$\int(\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\int\ln x dx.$ Ομοίως για $\nu=1$ δίνει:

$\int\ln x dx = x(\ln x)^1 - 1\int(\ln x)^0 dx = x\ln x - x.$ Ετσι:

$\int(\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3[x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x)] + C =$

$x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$.

14 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων των ρητών συναρτήσεων της μορφής $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$, όπου $f(x)$ και $g(x)$ ακέραια πολυώνυμα του x και $g(x)\neq 0$, ανάγεται σε ειδικές κατηγορίες που κατατάσσονται ως εξής:

14.1 Α' κατηγορία Ολοκληρώσεως Ρητών Συναρτήσεων:

Ο αριθμητής πολυώνυμο μηδενικού βαθμού ως προς x, ο δε παρονομαστής τριώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x.

Στην κατηγορία αυτή διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

I Παρονομαστής με Διακρίνουσα θετική,

II Παρονομαστής με Διακρίνουσα μηδέν,

III Παρονομαστής με Διακρίνουσα αρνητική.

14.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{ax^2+\beta x+\gamma}$ με $a\neq 0$, $\Delta=\beta^2-4a\gamma>0$ και $ax^2+\beta x+\gamma\neq 0$.

Λύση:

Εφ' όσον $\Delta>0$ και $a\neq 0$, έχουμε: $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $ax^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$. Οπότε:

$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \int\frac{dx}{\alpha(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}$.

Το κλάσμα όμως $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} \equiv \frac{A}{(x-x_1)}\cdot\frac{B}{(x-x_2)} \Leftrightarrow 1 \equiv A(x-x_2) + B(x-x_1)$ (1)

Για $x=x_1$ η (1) δίνει $1 = A(x_1-x_2) + B(x_1-x_1) \Leftrightarrow A = \frac{1}{x_1-x_2}$ αφού $x_1\neq x_2$.

Για $x=x_2$ η (1) δίνει $1 = A(x_2-x_2) + B(x_2-x_1) \Leftrightarrow B = \frac{1}{x_2-x_1}$ αφού $x_1\neq x_2$. Έτσι έχουμε:

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{\alpha}\int\left(\frac{\frac{1}{x_1-x_2}}{x-x_1} + \frac{\frac{1}{x_2-x_1}}{x-x_2}\right)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}\int\frac{dx}{x-x_1} +$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x_2-x_1}\int\frac{dx}{x-x_2} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}\int\frac{d(x-x_1)}{x-x_1} - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}\int\frac{d(x-x_2)}{x-x_2} =$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}(\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2| + C = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C.$$

Σημείωση: Ο προσδιορισμός των Α και Β στην ανάλυση του $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} \equiv \frac{A}{(x-x_1)}\cdot\frac{B}{(x-x_2)}$ μπορεί να γίνει και ως εξής:

$0x + 1 = Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1 \Leftrightarrow 0x + 1 \equiv (A+B)x + (-Ax_2 - Bx_1)$.

Οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ -Ax_2 - Bx_1 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1A + 1B = 0 \\ -x_2A - x_1B = 1 \end{array} \quad \text{και } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2 & -x_1 \end{vmatrix} = -x_1+x_2\neq 0$$

$$D_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_1 \end{vmatrix} = -1 \text{ και } D_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -x_2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Άρα: $A = D_A/D = \frac{1}{x_1-x_2}$ και $B = D_B/D = \frac{1}{x_2-x_1}$

Υπενθύμιση: $dx = d(x\pm C)$.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$ | $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

Λύση:

$\alpha=1,\ \beta=-3,\ \gamma=1\quad \Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-3)^2-4\cdot1\cdot2 = 9-8 = 1 > 0$

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=1\\ \frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$

και $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. Αρα:

$\int\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-1)}$. Αναλύοντας το κλάσμα $\frac{1}{(x-2)(x-1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων έχουμε:

$\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{(x-2)}\cdot\frac{B}{(x-1)}\Leftrightarrow 1\equiv A(x-1)+B(x-2)$ (1)

Για $x=2$ η (1) δίνει: $1=A(2-1)+B(1-1)\Leftrightarrow A=1$

Για $x=1$ η (1) δίνει: $1=A(1-1)+B(1-2)\Leftrightarrow B=-1$

Ετσι:

$\int\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-1)}=\int(\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x-1})dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{-dx}{x-1}\int\frac{d(x-2)}{x-2}-$

$-\int\frac{d(x-1)}{x-1}=\ln|x-2|-\ln|x-1|+C=\ln|\frac{x-2}{x-1}|+C.$

14.1.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{ax^2+\beta x+\gamma}$ με $\alpha\neq0$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$ και $ax^2+\beta x+\gamma\neq0$.

Λύση:

Εφ' όσον $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$, έχουμε: $x_{1,2}=\frac{-\beta}{2\alpha}$ και $ax^2+\beta x+\gamma=\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2$. Αρα

$\int\frac{dx}{ax^2+\beta x+\gamma}=\int\frac{dx}{\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2}=\frac{1}{\alpha}\int(x+\frac{\beta}{2\alpha})^{-2}d(x+\frac{\beta}{2\alpha})=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(x+\frac{\beta}{2\alpha})^{-2+1}}{-2+1}+C=$

$\frac{-2}{\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})}+C.$

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{x^2-6x+9}\mid\mathbb{R}-\{3\}$

Λύση:

$\alpha=1$, $\beta=-6$, $\gamma=9$ και $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$. Αρα:

$x_1=x_2=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-6)}{2\cdot1}=3$ και $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Επομένως:

$\int\frac{dx}{x^2-6x+9}=\int\frac{dx}{(x-3)^2}=\int(x-3)^{-2}d(x-3)=\frac{(x-3)^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{x-3}+C$

14.1.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{ax^2+\beta x+\gamma}$ με $\alpha\neq0$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ και $ax^2+\beta x+\gamma\neq0$.

Λύση:

Ο γνωστός τύπος $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha[(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}]$ για $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} = \lambda$ και για $x+\frac{\beta}{2\alpha} = \omega\sqrt{\lambda}$ γίνεται:

$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha[(\omega\sqrt{\lambda})^2+\lambda] = \alpha(\omega^2\lambda+\lambda) = \alpha\lambda(\omega^2+1)$ και επειδή:

$d(x+\frac{\beta}{2\alpha}) = d(\omega\sqrt{\lambda}) \Leftrightarrow dx = \sqrt{\lambda}d\omega$ γράφουμε:

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \int\frac{\sqrt{\lambda}d\omega}{\alpha\lambda(\omega^2+1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha\lambda}\int\frac{d\omega}{\omega^2+1} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha\lambda}\cdot\text{τοξεφ}\omega + C = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha\lambda}\cdot\text{τοξεφ}(\frac{x+\frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\lambda}}) + C$$

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{x^2-2x+10}$ | R

Λύση:

$\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=10,\ \Delta = (-2)^2-4\cdot1\cdot10 = 4-40 = -36 < 0.$

Ο τύπος $\alpha[(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}]$ γίνεται:

$x^2-2x+10 = 1[(x+\frac{-2}{2\cdot1})^2+\frac{36}{4\cdot1^2}] = (x-1)^2+9.$

Καλώ $x-1 = \sqrt{9}\omega \Leftrightarrow x-1 = 3\omega \Leftrightarrow d(x-1) = d(3\omega) \Leftrightarrow dx = 3d\omega$ και $\omega = \frac{x-1}{3}$. Έτσι:

$x^2-2x+10 = (3\omega)^2+9 = 9\omega^2+9 = 9(\omega^2+1)$ και

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+10} = \int\frac{3d\omega}{9(\omega^2+1)} = \frac{3}{9}\int\frac{d\omega}{\omega^2+1} = \frac{1}{3}\cdot\text{τοξεφ}\omega + C = \frac{1}{3}\cdot\text{τοξεφ}(\frac{x-1}{3}) + C .$$

14.2 Β' Κατηγορία Ολοκληρώσεως Ρητών Συναρτήσεων:

Ο αριθμητής πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς x, ο δε παρονομαστής τριώνυμο $\beta^{ου}$ βαθμού ως προς x.

Και στην κατηγορία αυτή διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

I Παρονομαστής με Διακρίνουσα θετική,

II Παρονομαστής με Διακρίνουσα μηδέν,

III Παρονομαστής με Διακρίνουσα αρνητική.

Γενικά, στην κατηγορία αυτή προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τον αριθμητή ως παράγωγο του παρονομαστή, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με κατάλληλο αριθμό και προσθέτωντας και αφαιρώντας στον αριθμητή κατάλληλο αριθμό. Δηλαδή

$\int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ Η παράγωγος του παρονομαστή είναι: $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)' = 2\alpha x+\beta.$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος

$\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ με τον αριθμό $\frac{2\alpha}{\kappa}$. Ετσι:

$$\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{\frac{2\alpha}{\kappa}(\kappa x+\lambda)}{\frac{2\alpha}{\kappa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} = \frac{2\alpha x+\frac{2\alpha\lambda}{\kappa}}{\frac{2\alpha}{\kappa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} = \frac{2\alpha x+\beta+\frac{2\alpha\lambda}{\kappa}-\beta}{\frac{2\alpha}{\kappa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} =$$

$$= \frac{2\alpha x+\beta}{\frac{2\alpha}{\kappa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} + \frac{\frac{2\alpha\lambda}{\kappa}-\beta}{\frac{2\alpha}{\kappa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}$$

Επομένως: $\int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \int\frac{2\alpha x+\beta}{\frac{2\alpha}{\kappa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}dx + \int\frac{\frac{2\alpha\lambda}{\kappa}-\beta}{\frac{2\alpha}{\kappa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}dx =$

$$\frac{1}{\frac{2\alpha}{\kappa}}\int\frac{d(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \frac{\frac{2\alpha\lambda}{\kappa}-\beta}{\frac{2\alpha}{\kappa}}\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{\kappa}{2\alpha}\ln|\alpha x^2+\beta x+\gamma| + \frac{2\alpha\lambda-\beta\kappa}{2\alpha}\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

όπου το $\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ υπολογίζεται ως ολοκλήρωμα $A^{\eta\varsigma}$ Κατηγορίας.

Ειδικότερα, το ολοκλήρωμα $\int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ όταν η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι θετική ή μηδέν, υπολογίζεται και με τη βοήθεια της ανάλυσης του παρονομαστή σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

I $\quad \Delta > 0, \quad \rho_1 \neq \rho_2$

$$\int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \int\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}dx = \frac{1}{\alpha}\int\frac{\kappa x+\lambda}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)}dx \text{ και}$$

$$\frac{\kappa x+\lambda}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)} \equiv \frac{A}{x-\rho_1}\cdot\frac{B}{x-\rho_2} \Leftrightarrow \kappa x+\lambda \equiv A(x-\rho_2)+B(x-\rho_1) .$$

Για $x=\rho_1$ λαμβάνω $\kappa\rho_1+\lambda = A(\rho_1-\rho_2)+B(\rho_1-\rho_1) \Leftrightarrow A = \frac{\kappa\rho_1+\lambda}{\rho_1-\rho_2}$

Για $x=\rho_2$ λαμβάνω $\kappa\rho_2+\lambda = A(\rho_2-\rho_2)+B(\rho_2-\rho_1) \Leftrightarrow B = -\frac{\kappa\rho_2+\lambda}{\rho_1-\rho_2}$

Αρα: $\int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{\alpha}\left(\int\frac{\frac{\kappa\rho_1+\lambda}{\rho_1-\rho_2}}{x-\rho_1}dx - \int\frac{\frac{\kappa\rho_2+\lambda}{\rho_1-\rho_2}}{x-\rho_2}dx\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\kappa\rho_1+\lambda}{\rho_1-\rho_2}\cdot\ln|x-\rho_1| -$

$$- \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\kappa\rho_2+\lambda}{\rho_1-\rho_2}\cdot\ln|x-\rho_2| + C.$$

II $\quad \Delta = 0, \quad \rho_1 = \rho_2$

$\int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{(x-\rho)^2}$ και

$\frac{\kappa x+\lambda}{(x-\rho)^2} \equiv \frac{A}{(x-\rho)^2} + \frac{B}{(x-\rho)} \Leftrightarrow \kappa x+\lambda \equiv A+Bx-B\rho \Leftrightarrow \kappa x+\lambda \equiv Bx+(A-B\rho)$
οπότε $B = \kappa$ και $A-B\rho = \lambda \Leftrightarrow A-\kappa\rho = \lambda \Leftrightarrow A = \lambda+\kappa\rho$. Αρα:

$$\int\frac{(\kappa x+\lambda)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{\alpha}\int\frac{\lambda+\kappa\rho}{(x-\rho)^2}dx + \frac{1}{\alpha}\int\frac{\kappa}{x-\rho}dx = \frac{\lambda+\kappa\rho}{\alpha}\int(x-\rho)^{-2}dx = \frac{\kappa}{\alpha}\int\frac{dx}{x-\rho} =$$
$$\frac{\lambda+\kappa\rho}{\alpha}\cdot\frac{(x-\rho)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{\kappa}{\alpha}\ln|x-\rho| + C = -\frac{\lambda+\kappa\rho}{\alpha}\cdot\frac{1}{x-\rho} + \frac{\kappa}{\alpha}\ln|x-\rho| + C$$

Παραδείγματα:

14.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{(x+3)dx}{x^2+x-2}$ | $R-\{1,-2\}$

Λύση:

Η παράγωγος του παρονομαστή είναι $2x+1$.

Επιδιώκοντας να μετασχηματίσω τον αριθμητή σε παράγωγο του παρονομαστή, πολλαπλασιάζω τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος που ολοκληρώνω επί 2 και ακολούθως προσθέτω στον αριθμητή 1 και αφαιρώ 1.

$$\int\frac{(x+3)dx}{x^2+x-2} = \int\frac{2(x+3)dx}{2(x^2+x-2)} = \int\frac{2x+6+1-1}{2(x^2+x-2)}dx = \int\frac{2x+1}{2(x^2+x-2)}dx + \int\frac{(6-1)}{2(x^2+x-2)}dx =$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x-2)}{x^2+x-2} + \frac{5}{2}\int\frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x-2| + \frac{5}{2}(\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|) + C =$$
$$\frac{1}{2}\ln|(x-1)(x+2)| + \frac{5}{6}\ln|x-1| - \frac{5}{6}\ln|x+2| + C = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| +$$
$$+ \frac{5}{6}\ln|x-1| - \frac{5}{6}\ln|x+2| + C = \frac{8}{6}\ln|x-1| - \frac{2}{6}\ln|x+2| + C =$$
$$+ \frac{4}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$$

Το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$ ως ολοκλήρωμα $A^{ης}$ Κατηγορίας υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-2) = 1+8 = 9 > 0 \text{ άρα } x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \begin{cases}\frac{-1+3}{2} = 1\\ \frac{-1-3}{2} = -2\end{cases}$$

Επομένως $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ και έτσι

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow 1 \equiv A(x+2)+B(x-1) \quad (1)$$

Για $x=1$ η (1) δίνει: $1 = A(1+2)+B(1-1) \Leftrightarrow A = 1/3$

Για $x=-2$ η (1) δίνει: $1 = A(-2+2)+B(-2-1) \Leftrightarrow B = -1/3$

Αρα: $\int\frac{dx}{x^2+x-2} = \int(\frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2})dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| -$

$\frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$

Σημείωση: Το ολοκλήρωμα $\int\frac{(x+3)dx}{x^2+x-2}$ αφού ο παρονομαστής αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων με ρίζες πραγματικές επιλύεται και ως ολοκλήρωμα $A^{ης}$ Κατηγορίας:

$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1}\cdot\frac{B}{x+2}$. Αφού $\Delta = 1^2-4(-2) = 9$ και $x_{1,2} = \frac{-1+3}{2} = \{_{-2}^{1}$

Αρα $x+3 = A(x+2)+B(x-1)$

που για $x=1$ δίνει: $1+3 = A(1+2)+B(1-1) \Leftrightarrow A = 4/3$

και για $x=-2$ δίνει: $-2+3 = A(-2+2)+B(-2-1) \Leftrightarrow B = -1/3$

Ετσι: $\int\frac{(x+3)dx}{x^2+x-2} = \int(\frac{4/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2})dx = \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2} =$

$+ \frac{4}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$

14.2.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2-2x+1}$ | $\mathbb{R}-\{1\}$

Λύση:

Η παράγωγος του παρονομαστή είναι $2x-2$.

Επιδιώκοντας να μετασχηματίσω τον αριθμητή σε παράγωγο του παρονομαστή πολλαπλασιάζω τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος του ολοκληρώματος επί 2/3 και ακολούθως προσθέτω 2 και αφαιρώ 2.

$$\int\frac{(3x-2)dx}{x^2-2x+1} = \int\frac{\frac{2}{3}(3x-2)dx}{\frac{2}{3}(x^2-2x+1)} = \int\frac{2x-\frac{4}{3}+2-2}{\frac{3}{2}(x^2-2x+1)}dx = \frac{1}{2/3}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+1} +$$

$$\frac{1}{2/3}\int\frac{(-4/3+2)dx}{x^2-2x+1} = \frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1} + \frac{3}{2}\int\frac{2/3dx}{x^2-2x+1} = \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x-1)^2 + \int(x-1)^{-2}dx = \frac{3}{2}2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Σημείωση: Το ολοκλήρωμα $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2-2x+1}$ υπολογίζεται και ως ολοκλήρωμα $A^{ης}$ Κατηγορίας με $\Delta = (-2)^2-4\cdot1\cdot1 = 4-4 = 0$ και $\rho_1=\rho_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2\cdot1} = 1.$

$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} \Leftrightarrow 3x-2 = A+B(x-1) \Leftrightarrow 3x-2 = A+Bx-B \Leftrightarrow 3x-2 = Bx+(A-B)$, οπότε $B = 3$ και $A-B = -2 \Leftrightarrow A-3 = -2 \Leftrightarrow A = 1$. Αρα:

$$\int\frac{(3x-2)dx}{x^2-2x+1} = \int\frac{1}{(x-1)^2}dx + \int\frac{3}{x-1}dx = \int(x-1)^{-2}dx + 3\ln|x-1| =$$
$$3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

14.2.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{(x-3)dx}{x^2+4x+8}$ | R

Λύση:

Η παράγωγος του παρονομαστή είναι 2x−2.

Επιδιώκοντας να μετασχηματίσω τον αριθμητή σε παράγωγο του παρονομαστή πολλαπλασιάζω τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος του ολοκληρώματος επί 2 και ακολούθως προσθέτω 4 και αφαιρώ 4.

$$\int\frac{(x-3)dx}{x^2+4x+8} = \int\frac{2(x-3)dx}{2(x^2+4x+8)} = \int\frac{2x-6+4-4}{2(x^2+4x+8)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+8)} + \frac{1}{2}\int\frac{-10dx}{(x^2+4x+8)}$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8} - \frac{1}{2}10\int\frac{dx}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - \frac{5}{2}\text{τοξεφ}(\frac{x+2}{2}) + C.$$

Αφού $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$ είναι ολοκλήρωμα $A^{ης}$ Κατηγορίας με $\Delta = 4^2-4\cdot1\cdot8 = 16-32 = -16 < 0$. οπότε:

$x^2+4x+8 = (x+\frac{4}{2\cdot1})^2 + \frac{16}{4} = (x+2)^2 + 4 = (2\omega)^2 + 4 = 4\omega^2 + 4$ όπου $x+2 = 2\omega$. Αρα $\omega = \frac{x+2}{2}$ και $dx = 2d\omega$ και

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8} = \int\frac{2d\omega}{4\omega^2+4} = \frac{2}{4}\int\frac{d\omega}{\omega^2+1} = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\omega + C = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}(\frac{x+2}{2}) + C.$$

14.3 Γ' Κατηγορία Ολοκληρώσεως Ρητών Συναρτήσεων:

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής της προς ολοκλήρωση συνάρτησης είναι τριώνυμα $\beta^{ου}$ βαθμού ως προς x

$$\int\frac{\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1}{\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2}dx$$

Στην κατηγορία αυτή εκτελούμε τη διαίρεση κι έτσι προκύπτουν ολοκληρώματα $A^{ης}$ ή $B^{ης}$ Κατηγορίας Ρητών Συναρτήσεων

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1x^2 + \beta_1x + \gamma_1 & \alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2 \\ \hline -\alpha_1x^2 - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2}x - \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2} & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ \hline (\beta_1-\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2})x + (\gamma_1-\frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2}) & \end{array}$$

Ετσι:

$$\int\frac{\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1}{\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2}dx = \int\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{(\beta_1-\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2})x + (\gamma_1-\frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2})}{\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2}\right)dx =$$

$$\int\frac{\alpha_1}{\alpha_2}dx + \int\frac{(\beta_1-\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2})x + (\gamma_1-\frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2})}{\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2}dx = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x + \text{Ολοκλήρωμα } A^{\eta\varsigma} \text{ ή } B^{\eta\varsigma}$$

Κατηγορίας Ρητών Συναρτήσεων.

Παραδείγματα:

14.3.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{3x^2-3x+1}{x^2-x-2}dx \mid \mathbb{R}-\{-1,2\}$

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 3x + 1 & x^2-x-2 \\ \hline -3x^2 + 3x + 6 & 3 \\ \hline 7 & \end{array}$$

Ετσι: $\int\frac{3x^2-3x+1}{x^2-x-2}dx = \int\left(3 + \frac{7}{x^2-x-2}\right)dx = \int 3dx + \int\frac{7dx}{x^2-x-2} = 3x + 7(\frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x-1|) + C = 3x + \frac{7}{3}\ln|\frac{x-2}{x-1}| + C.$

Αφού το $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$ είναι $A^{\eta\varsigma}$ Κατηγορίας Περίπτωση I και υπολογίζεται ως εξής:

Διακρίνουσα Παρονομαστή = $\Delta = (-1)^2-4\cdot1\cdot(-2) = 1+8 = 9$ και:

$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \{_{-1}^{2}$ και $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$.

Αρα: $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow 1 = A(x+1) + B(x-2)$

που για $x = 2$ δίνει: $1 = A(2+1) + B(2-2) \Leftrightarrow A = 1/3$

και για $x = -1$ δίνει: $1 = A(-1+1) + B(-1-2) \Leftrightarrow B = -1/3$

Επομένως: $\int\frac{dx}{x^2-x-2} = \int\frac{1/3}{x-2}dx - \int\frac{1/3}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C = \frac{1}{3}\ln|\frac{x-2}{x+1}| + C.$

14.3.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{2x^2-5x+3}{x^2-x-2}dx \mid \mathbb{R}-\{-1,2\}$

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x + 3 & x^2-x-2 \\ -2x^2 + 2x + 4 & \hline 2 \\ \hline -3x + 7 & \end{array}$$

Αρα: $\int\frac{2x^2-5x+3}{x^2-x-2}dx = \int\left(2 + \frac{-3x+7}{x^2-x-2}\right)dx = \int 2dx + \int\frac{-3x+7}{x^2-x-2}dx =$

$2x - \frac{10}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + C.$

Αφού το $\int\frac{-3x+7}{x^2-x-2}dx$ υπολογίζεται ως εξής:

Διακρίνουσα Παρονομαστή = $\Delta = (-1)^2-4\cdot1\cdot(-2) = 1+8 = 9 > 0$

$x_{1,2} = \frac{1\pm3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ και $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ κι έτσι:

$\frac{-3x+7}{x^2-x-2} = \frac{-3x+7}{(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow -3x+7 \equiv A(x+1) + B(x-2)$

που για $x = 2$ δίνει: $-3\cdot2+7 = A(2+1) + B(2-2) \Leftrightarrow A = 1/3$

και για $x = -1$ δίνει: $-3\cdot(-1)+7 = A(-1+1) + B(-1-2) \Leftrightarrow B = -10/3$

κι επομένως: $\int\frac{-3x+7}{x^2-x-2}dx = \int\frac{1/3}{x-2}dx + \int\frac{-10/3}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2|$

$- \frac{10}{3}\ln|x+1| + C.$

14.3.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+1}dx \mid \mathbb{R}-\{-1\}$

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 2 & x^2+2x+1 \\ -x^2 - 2x - 1 & \hline 1 \\ \hline -x + 1 & \end{array}$$

κι έτσι: $\int\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+1}dx = \int\left(1 + \frac{-x+1}{x^2+2x+1}\right)dx = \int dx + \int\frac{-x+1}{x^2+2x+1}dx =$

$x - \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + C.$

Αφού το ολοκλήρωμα $\int\frac{-x+1}{x^2+2x+1}dx$ υπολογίζεται ως εξής:

$\frac{-x+1}{x^2+2x+1} = \frac{-x+1}{(x+1)^2} \equiv \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow -x+1 \equiv A+B(x+1) \Leftrightarrow -x+1 \equiv A+Bx+B$

$\Leftrightarrow -x+1 \equiv Bx+(A+B)$ οπότε: $B = -1$ και $A+B = 1 \Leftrightarrow A-1 = 1 \Leftrightarrow A = 2$

κι έτσι: $\int\frac{-x+1}{x^2+2x+1}dx = \int\left(\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int\frac{2dx}{(x+1)^2} - \int\frac{dx}{x+1} =$

$2\int(x+1)^{-2}dx - \int\frac{dx}{x+1} = 2\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} - \ln|x+1| + C = -\frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + C$

14.3.5 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+5}dx \mid \mathbb{R}$

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+2 & x^2+2x+5 \\ \hline -x^2-2x-5 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Έτσι: $\int\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+5}dx = \int\left(1+\frac{-3}{x^2+2x+5}\right)dx = \int dx + \int\frac{-3}{x^2+2x+5}dx = x - 3\int\frac{dx}{x^2+2x+5} = x - \text{τοξεφ}(\frac{x+1}{2}) + C.$

Αφού το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$ υπολογίζεται ως εξής:

Διακρίνουσα Παρονομαστή $= \Delta = 2^2-4\cdot1\cdot5 = 4-20 = -16 < 0$ και

$x^2+2x+5 = (x+\frac{2}{2\cdot1})^2 + \frac{16}{4\cdot1^2} = (x+1)^2+4.$

Καλώντας $x+1 = 2\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow dx = 2d\omega$ έχουμε: $x^2+2x+5 = (2\omega)^2+4 = 4\omega^2+4$ κι έτσι:

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\frac{d\omega}{4\omega^2+4} = \frac{2}{4}\int\frac{d\omega}{\omega^2+1} = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\omega + C = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}(\frac{x+1}{2}) + C.$$

14.3.6 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+5}dx \mid \mathbb{R}$

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x+2 & x^2+2x+5 \\ \hline -x^2-2x-5 & 1 \\ \hline x-3 & \end{array}$$

Έτσι: $\int\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+5}dx = \int\left(1+\frac{x-3}{x^2+2x+5}\right)dx = \int dx + \int\frac{x-3}{x^2+2x+5}dx = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - 2\text{τοξεφ}(\frac{x+1}{2}) + C.$

Αφού το ολοκλήρωμα $\int\frac{x-3}{x^2+2x+5}dx$ υπολογίζεται ως εξής:

Επιδιώκοντας να μετασχηματίσουμε τον αριθμητή σε παράγωγο του παρονομαστή ($(x^2+2x+5)' = 2x+2$), πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή επί 2. Ακολούθως προσθέτουμε στον αριθμητή 2 και αφαιρούμε 2.

$$\int\frac{x-3}{x^2+2x+5}dx = \int\frac{2x-6}{2(x^2+2x+5)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-6+2-2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx +$$

$+\frac{1}{2}\int\frac{-8}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}dx - \frac{8}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) -$
$4\cdot\frac{1}{2}\text{τοξεφ}(\frac{x+1}{2}) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - 2\text{τοξεφ}(\frac{x+1}{2}) + C.$

Αφού $x^2+2x+5 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ εφ' όσον $\Delta < 0$ και $\int\frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}(\frac{x+1}{2})$ όπως υπολογίστηκε στο παράδειγμα 14.3.5

14.4 Δ' Κατηγορία Ολοκληρώσεως Ρητών Συναρτήσεων:

Ο παρονομαστής της Συναρτήσεως εναι πολυώνυμο ανωτέρου του $\beta^{ου}$ βαθμού ως προς x, με ρίζες: Πραγματικές απλές ή Πραγματικές πολλαπλές ή Μιγαδικές (φανταστικές) απλές, Μιγαδικές (φανταστικές) πολλαπλές ή Πραγματικές και Φανταστικές.

Στις περιπτώσεις αυτές αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων και το κλάσμα σε άθροισμα απλουστέρων κλασμάτων.

Παραδείγματα:

14.4.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x+1}{x^3+2x^2}dx \mid \mathbb{R}-\{0,-2\}$

Λύση:

$\int\frac{x+1}{x^3+2x^2}dx = \int\frac{x+1}{x^2(x+2)}dx$.Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x+1}{x^2(x+2)}$ σε άθροισμα απλουστέρων κλασμάτων ως εξής:

$\frac{x+1}{x^2(x+2)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{\Gamma}{x+2} \Leftrightarrow x+1 \equiv A(x+2) + Bx(x+2) + \Gamma x^2 \Leftrightarrow x+1 \equiv$
$Ax+2A+Bx^2+2Bx+\Gamma x^2 \Leftrightarrow 0x^2+1x+1 \equiv (B+\Gamma)x^2+(A+2B)x+2A$

Αρα: $B+\Gamma = 0$

$A+2B = 1$

$2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$. Αρα $\frac{1}{2}+2B = 1 \Leftrightarrow 2B = \frac{1}{2} \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}$ και $\frac{1}{4}+\Gamma =$
$= 0 \Leftrightarrow \Gamma = -\frac{1}{4}$.

Αρα: $\int\frac{x+1}{x^2(x+2)}dx = \int\frac{1/2dx}{x^2} + \int\frac{1/2dx}{x} + \int\frac{-1/4dx}{x+2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}$
$= \frac{1}{2}\int x^{-2}dx + \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+2| = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C.$

14.4.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{x^2-x} \mid \mathbb{R}-\{0,-1,1\}$

Λύση:

$\int\frac{dx}{x^2-x} = \int\frac{dx}{x(x^2-1)} = \int\frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$. Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{1}{x(x+1)(x-1)}$ σε άθροισμα απλουστέρων κλασμάτων:

$\frac{1}{x(x+1)(x-1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{x-1} \Leftrightarrow 1 \equiv A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+\Gamma x(x+1) \Leftrightarrow$
$1 \equiv Ax^2-A+Bx^2-Bx+\Gamma x^2+\Gamma x \Leftrightarrow 0x^2+0x+1 \equiv (A+B+\Gamma)x^2+(\Gamma-B)x+(-A)$. Αρα:

$A+B+\Gamma = 0$

$\Gamma-B = 0$

$-A = 1 \Leftrightarrow A = -1$ και: $B+\Gamma = 1$

$\Gamma-B = 0$

$2\Gamma = 1 \Leftrightarrow \Gamma = \frac{1}{2}$ και $B = \frac{1}{2}$

και έτσι: $\int\frac{dx}{x^2-x} = \int\frac{dx}{x(x+1)(x-1)} = \int\frac{-1dx}{x} + \int\frac{1/2dx}{x+1} + \int\frac{1/2dx}{x-1} = -\ln|x| +$
$+ \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$

14.4.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$ | $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Λύση:

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ σε αθροισμα απλουστέρων κλασμάτων:

$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2} \Leftrightarrow x \equiv A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+\Gamma(x-1)$

$\Leftrightarrow x \equiv Ax^2+2Ax+A+Bx^2-B+\Gamma x+\Gamma \Leftrightarrow 0x^2+0x+1x \equiv (A+B)x^2+(2A+\Gamma)x+(A-B-\Gamma)$

Αρα: $A+B = 0 \Leftrightarrow B = -A$

$2A+\Gamma = 1 \Leftrightarrow \Gamma = 1-2A$

$A-B-\Gamma = 0 \Leftrightarrow A-(-A)-(1-2A) = 0 \Leftrightarrow A+A-1+2A = 0 \Leftrightarrow 4A = 1 \Leftrightarrow$
$A = \frac{1}{4}$ και $B = -\frac{1}{4}$ και $\Gamma = 1-2\cdot\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \Gamma = \frac{1}{2}$. Ετσι:

$\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int\frac{1/4}{x-1}dx + \int\frac{-1/4}{x+1}dx + \int\frac{1/2}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{d(x+1)}{x+1}$
$+ \frac{1}{2}\int(x+1)^{-2}d(x+1) = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C =$
$\frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

14.4.4 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$ | $\mathbb{R}$

Λύση:

Ο παρονομαστής γράφεται: $x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2)$
αφού $x^4+3x^2+2 = (x^2)^2+3x^2+2$ και $\Delta = 3^2-4\cdot2 = 9-8 = 1$ και

$x^2_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} = \{^{-1}_{-2}$ Ετσι:

$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$ και

$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+2} \Leftrightarrow x^3+x^2+x+2 \equiv (Ax+B)(x^2+2)+(\Gamma x+\Delta)(x^2+1)$
$\Leftrightarrow 1x^3+1x^2+1x+2 \equiv (A+\Gamma)x^3+(B+\Delta)x^2+(2A+\Gamma)x+(2B+\Delta)$. Αρα:
$A+\Gamma = 1$, $B+\Delta = 1$, $2A+\Gamma = 1$, $2B+\Delta = 2$. Ετσι: $\Gamma = 1-A$ και η $2A+\Gamma = 1$ γίνεται $2A+1-A = 1 \Leftrightarrow A = 0$.
Αρα η $A+\Gamma = 1$ δίνει: $0+\Gamma = 1 \Leftrightarrow \Gamma = 1$ και η $B+\Delta = 1$ δίνει $\Delta = 1-B$ και η $2B+\Delta = 2$ γίνεται: $2B+1-B = 2 \Leftrightarrow B = 1$ και $\Delta = 1-1 \Leftrightarrow \Delta = 0$.

Ετσι: $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int\left(\frac{0x+1}{x^2+1} + \frac{1x+0}{x^2+2}\right)dx = \int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{x}{x^2+2}dx = \text{τοξεφ}x +$
$+ \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \text{τοξεφ}x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C.$

14.4.5 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx \mid R$

Λύση:

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{\Gamma x+B}{x^2+1} \Leftrightarrow 2x^3 \equiv Ax+B+(\Gamma x+\Delta)(x^2+1) \Leftrightarrow$
$2x^3+0x^2+0x+0 \equiv \Gamma x^3+\Delta x^2+(A+\Gamma)x+(B+\Delta)$. Αρα:
$\Gamma = 2$, $\Delta = 0$, $A+\Gamma = 0$, $B+\Delta = 0 \Leftrightarrow A = -2$, $B = 0$, $\Gamma = 2$, $\Delta = 0$
Και έτσι: $\int\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \int\left(\frac{-2x+0}{(x^2+1)^2} + \frac{2x+0}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{-2xdx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{2xdx}{x^2+1} =$
$-\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = -\int(x^2+1)^{-2}d(x^2+1) + \ln(x^2+1) =$
$-\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1} + \ln(x^2+1) + C = \frac{1}{x^2+1} + \ln(x^2+1) + C.$

14.4.6 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx \mid R-\{-1,1\}$

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^4-1 \\ \hline -x^4+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Αρα: $\frac{x^4}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1}$

και επειδή $x^4-1 = (x^2)^2-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ έχουμε:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{\Gamma}{x+1} + \frac{\Delta}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$1 \equiv (Ax+B)(x+1)(x-1)+\Gamma(x^2+1)(x-1)+\Delta(x^2+1)(x+1) \Leftrightarrow$$

$0x^3+0x^2+0x+1 \equiv (A+\Gamma+\Delta)x^3+(B-\Gamma+\Delta)x^2+(-A+\Gamma+\Delta)x+(-B-\Gamma+\Delta)$. Αρα:

$A+\Gamma+\Delta = 0$

$B-\Gamma+\Delta = 0$

$-A+\Gamma+\Delta = 0$ και $B-\Gamma+\Delta = 0$ (+) και $A+\Gamma+\Delta = 0$ (−)

$-B-\Gamma+\Delta = 1$ $\quad B+\Gamma-\Delta = -1$ $\quad -A+\Gamma+\Delta = 0$

$2B = -1$ $\quad 2A = 0$

$B = -\frac{1}{2}$ $\quad A = 0$

και $\Gamma+\Delta = 0$

$-\Gamma+\Delta = 1+B = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (+)

$2\Delta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta = \frac{1}{4}$ και $\Gamma = -\frac{1}{4}$

Ετσι: $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx = \int(1 + \frac{0x-1/2}{x^2+1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/4}{x-1})dx = \int dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} -$

$- \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} = x - \frac{1}{2}$τοξεφx $- \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C =$

$x - \frac{1}{2}$τοξεφx $+ \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + C.$

15 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ημx, συνx

15.1 Μορφή ολοκληρώματος $\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$

Γενικά στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους $\eta\mu x = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$ καλούμε $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \omega$ οπότε $x = 2$τοξεφω και $dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$ και $\eta\mu x = \frac{2\omega}{1+\omega^2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ και έτσι το ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως ως προς ω.

Ειδικά όταν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι αρτίου βαθμού ως προς ημx και συνx τότε χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους $\eta\mu^2x = \frac{\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x}$, $\sigma\upsilon\nu^2x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}$, καλούμε $\varepsilon\varphi x = \omega$ οπότε $x =$ τοξεφω και $dx = \frac{d\omega}{1+\omega^2}$ και $\eta\mu^2x = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2x = \frac{1}{1+\omega^2}$. Και έτσι το ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συναρτήσεως ως προς ω.

Παραδείγματα:

15.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}dx$

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} \sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x+1 & \sigma\upsilon\nu x+1 \\ \hline -\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x & \sigma\upsilon\nu x \\ \hline 1 & \end{array}$$

Ετσι: $\int\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}dx = \int(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1})dx = \int\sigma\upsilon\nu x dx + \int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x+1} =$

$\eta\mu x + \varepsilon\varphi\frac{x}{2} + C.$

Αφού το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x+1}$ υπολογίζεται ως εξής:

Κάλουμε $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \omega$ οπότε $x = 2\tau\circ\xi\varepsilon\varphi\omega$ και $dx = \frac{d\omega}{1+\omega^2}$ έτσι ο τύπος:

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$ γίνεται $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$. Αρα:

$$\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x+1} = \int\frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}+1} = \int\frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1-\omega^2+1+\omega^2}{1+\omega^2}} = \int\frac{2d\omega}{2} = \int d\omega = \omega + C = \varepsilon\varphi\frac{x}{2} + C.$$

15.1.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{\eta\mu^4x\sigma\upsilon\nu^2x}$

Λύση:

Καλώντας $\varepsilon\varphi x = \omega$ οπότε $x = \tau\circ\xi\varepsilon\varphi\omega$ και $dx = \frac{d\omega}{1+\omega^2}$ οι τύποι:

$\eta\mu^2x = \frac{\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x}$, $\sigma\upsilon\nu^2x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}$ γίνονται $\eta\mu^2x = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}$, $\sigma\upsilon\nu^2x = \frac{1}{1+\omega^2}$

και το ολοκλήρωμα

$$\int\frac{dx}{\eta\mu^4x\sigma\upsilon\nu^2x} = \int\frac{\frac{d\omega}{1+\omega^2}}{(\frac{\omega^2}{1+\omega^2})^2\cdot\frac{1}{1+\omega^2}} = \int\frac{\frac{d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1\cdot\omega^4}{(1+\omega^2)^2(1+\omega^2)}} = \int\frac{(1+\omega^2)d\omega}{\omega^4} =$$

$$\int\frac{(1+2\omega^2+\omega^4)d\omega}{\omega^4} = \int\frac{d\omega}{\omega^4} + 2\int\frac{\omega^2d\omega}{\omega^4} + \int\frac{\omega^4d\omega}{\omega^4} = \int\omega^{-4}d\omega + 2\int\omega^{-2}d\omega + \int d\omega =$$

$$\frac{\omega^{-4+1}}{-4+1} + 2\frac{\omega^{-2+1}}{-2+1} + \omega + C = -\frac{1}{3\omega^3} - \frac{2}{\omega} + \omega + C = -\frac{1}{3\varepsilon\varphi^3x} - \frac{2}{\varepsilon\varphi x} + \varepsilon\varphi x + C$$

15.2 Β' Μορφή Ολοκληρώσεως Ρητών Συναρτήσεων ως προς ημx, συνx: $\int$ημκxσυνλxdx, $\int$ημκxημλxdx, $\int$συνκxσυνλxdx

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους μετατροπής γινομένων σε αθροίσματα:

$2\eta\mu\kappa x\sigma\upsilon\nu\lambda x = \eta\mu(\kappa x+\lambda x)+\eta\mu(\kappa x-\lambda x)$

$2\eta\mu\kappa x\eta\mu\lambda x = \sigma\upsilon\nu(\kappa x-\lambda x)-\sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda x)$

$2\sigma\upsilon\nu\kappa x\sigma\upsilon\nu\lambda x = \sigma\upsilon\nu(\kappa x-\lambda x)+\sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda x)$

κι έτσι τα ολοκληρώματα ανάγονται σε άθροισμα απλουστέρων ολοκληρωμάτων.

Στην κατηγορία αυτή ανάγονται και τα ολοκληρώματα της μορφής:

$\int 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx = \int \eta\mu 2x dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu 2x d2x = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x + C$

$\int \eta\mu^2 x dx = \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x d2x =$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x + C$

$\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x d2x =$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x + C$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τους τύπους: $2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x$

$\sigma\upsilon\nu 2x = 1-2\eta\mu^2 x \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x = 1-\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x-1 \Leftrightarrow 1+\sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

Παραδείγματα:

15.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \eta\mu 3x\sigma\upsilon\nu 2x dx$.

Λύση:

$\int \eta\mu 3x\sigma\upsilon\nu 2x dx = \int \frac{1}{2}[\eta\mu(3x+2x)+\eta\mu(3x-2x)]dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu 5x dx + \frac{1}{2}\int \eta\mu x dx =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \eta\mu 5x d5x + \frac{1}{2}\int \eta\mu x dx = -\frac{1}{10}\sigma\upsilon\nu 5x - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x + C.$

15.2.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \eta\mu 4x\eta\mu 2x dx$

Λύση:

$\int \eta\mu 4x\eta\mu 2x dx = \int \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(4x-2x)-\sigma\upsilon\nu(4x+2x)]dx = \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx - \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 6x dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x d2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int \sigma\upsilon\nu 6x d6x = \frac{1}{4}\eta\mu 2x - \frac{1}{12}\eta\mu 6x + C.$

15.2.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \sigma\upsilon\nu 5x\sigma\upsilon\nu 2x dx$

Λύση:

$\int \sigma\upsilon\nu 5x\sigma\upsilon\nu 2x dx = \int \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(5x-2x)+\sigma\upsilon\nu(5x+2x)]dx = \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 3x dx + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 7x dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int \sigma\upsilon\nu 3x d3x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\int \sigma\upsilon\nu 7x d7x = \frac{1}{6}\eta\mu 3x - \frac{1}{14}\eta\mu 7x + C.$

15.3 Γ' Κατηγορία Ολοκληρώσεως Ρητών Συναρτήσεων ως προς ημx, συνx $\int \eta\mu^{\mu} x \sigma\upsilon\nu^{\kappa} x dx$

15.3.1 I Περίπτωση: ν περιττός, κ άρτιος

Λύση:

Καλούμε συνx = ω, οπότε $dx = -\frac{d\omega}{\eta\mu x}$ κι έτσι:

$\int \eta\mu^{\nu} x \sigma\upsilon\nu^{\kappa} x dx = \int \eta\mu^{\nu} x \omega^{\kappa} (-\frac{d\omega}{\eta\mu x}) = -\int \eta\mu^{\nu-1} x \omega^{\kappa} d\omega$.

Επειδή ν περιττός $\Rightarrow$ ν-1 άρτιος, οπότε $\frac{\nu-1}{2} \in \mathbb{N}$ και:

$\eta\mu^{\nu-1} x = (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^{(\nu-1)/2} = (1-\omega^2)^{(\nu-1)/2}$. Αρα:

$\int \eta\mu^{\nu} x \sigma\upsilon\nu^{\kappa} x dx = -\int (1-\omega^2)^{(\nu-1)/2} \omega^{\kappa} d\omega$ που ο υπολογισμός του ανάγεται σε αθροίσματα απλών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^4 x dx$

Λύση:

Καλούμε συνx = ω, οπότε $dx = -\frac{d\omega}{\eta\mu x}$ κι έτσι:

$\int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int \eta\mu^2 x \omega^4 (-\frac{d\omega}{\eta\mu x}) = -\int \eta\mu^2 x \omega^4 d\omega = -\int (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\omega^4 d\omega =$

$-\int (1-\omega^2)\omega^4 d\omega = -\int (\omega^4-\omega^6) d\omega = -\int \omega^4 d\omega + \int \omega^6 d\omega = -\frac{\omega^{4+1}}{4+1} + \frac{\omega^{6+1}}{6+1} + C =$

$-\frac{\omega^5}{5} + \frac{\omega^7}{7} + C = -\frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5} + \frac{\sigma\upsilon\nu^7 x}{7} + C.$

15.2.2 II Περίπτωση: ν άρτιος, κ περιττός

Λύση:

Καλούμε ημx = ω οπότε $dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x}$ κι έτσι:

$\int \eta\mu^{\nu} x \sigma\upsilon\nu^{\kappa} x dx = \int \omega^{\nu} \sigma\upsilon\nu^{\kappa} x \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x} = -\int \sigma\upsilon\nu^{\kappa-1} x \omega^{\nu} d\omega$

Επειδή κ περιττός $\Rightarrow$ κ-1 άρτιος και $\frac{\kappa-1}{2} \in \mathbb{N}$ και:

$\sigma\upsilon\nu^{\kappa-1} x = (1-\eta\mu^2 x)^{(\kappa-1)/2} = (1-\omega^2)^{(\kappa-1)/2}$. Αρα:

$\int \eta\mu^{\nu} x \sigma\upsilon\nu^{\kappa} x dx = \int \omega^{\nu} (1-\omega^2)^{(\kappa-1)/2} d\omega.$

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\eta\mu^4 x} dx$

Λύση:

Καλούμε ημx = ω οπότε $dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x}$ κι έτσι:

$\int \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\eta\mu^4 x} dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\omega^4} \cdot \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\omega^4} d\omega = \int \frac{(1-\eta\mu^2 x)^2}{\omega^4} d\omega = \int \frac{(1-\omega^2)^2}{\omega^4} d\omega =$

$$\int\frac{1-2\omega^2+\omega^4}{\omega^4}d\omega = \int\frac{d\omega}{\omega^4} - 2\int\frac{\omega^2}{\omega^4}d\omega + \int\frac{\omega^4}{\omega^4}d\omega = \int\omega^{-4}d\omega - 2\int\omega^{-2}d\omega + \int d\omega =$$

$$\frac{\omega^{-4+1}}{-4+1} - 2\frac{\omega^{-2+1}}{-2+1} + \omega + C = \frac{\omega^{-3}}{-3} - 2\frac{\omega^{-1}}{-1} + \omega + C = -\frac{1}{3\omega^3} + \frac{2}{\omega} + \omega + C =$$

$$-\frac{1}{3\eta\mu^3 x} + \frac{2}{\eta\mu x} + \eta\mu x + C.$$

16 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $\int\varepsilon\varphi^x x dx$, $\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^x x}$

16.1 Ι Περίπτωση: κ άρτιος

Εδώ ακολουθούμε την πορεία της πρώτης μορφής ολοκληρώσεως ρητών συναρτήσεων ως προς ημx, συνx με εκθέτες αρτίους.

Παραδείγματα:

16.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\varepsilon\varphi^4 x dx$

Λύση:

Καλούμε $\varepsilon\varphi x = \omega \Leftrightarrow x = \tau\circ\xi\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{1+\omega^2}$. Ετσι:

$$\int\varepsilon\varphi^4 x dx = \int\omega^4\frac{d\omega}{1+\omega^2} = \int\frac{\omega^4}{1+\omega^2}d\omega .$$

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} \omega^4 & \omega^2+1 \\ \hline -\omega^4-\omega^2 & \omega^2-1 \\ \hline -\omega^2 & \\ \hline \omega^2+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Αρα: $\int\varepsilon\varphi^4 x dx = \int\frac{\omega^4}{1+\omega^2}d\omega = \int(\omega^2-1+\frac{1}{1+\omega^2})d\omega = \int\omega^2 d\omega - \int d\omega + \int\frac{d\omega}{1+\omega^2} =$

$$\frac{\omega^3}{3} - \omega + \tau\circ\xi\varepsilon\varphi\omega + C = \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{3} - \varepsilon\varphi x + x + C.$$

16.1.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^2 x}$

Λύση:

Καλούμε $\varepsilon\varphi x = \omega \Leftrightarrow x = \tau\circ\xi\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{1+\omega^2}$. Ετσι:

$\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^2 x} = \int\frac{\frac{d\omega}{1+\omega^2}}{\omega^2} = \int\frac{d\omega}{\omega^2(1+\omega^2)}$ και αναλύοντας το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)} \equiv \frac{A}{\omega^2} + \frac{B}{\omega} + \frac{\Gamma\omega+\Delta}{1+\omega^2} \Leftrightarrow 1 \equiv A(1+\omega^2) + B\omega(1+\omega^2) + (\Gamma\omega+\Delta)\omega^2 \Leftrightarrow$$

$$1 \equiv A+A\omega^2+B\omega+B\omega^3+\Gamma\omega^3+\Delta\omega^2 \Leftrightarrow 0\omega^3+0\omega^2+0\omega+1 \equiv (B+\Gamma)\omega^3+(A+\Delta)\omega^2+B\omega+A$$

$$\left.\begin{array}{l} B+\Gamma = 0 \\ A+\Delta = 0 \\ B = 0 \\ A = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0+\Gamma = 0 \Leftrightarrow \Gamma = 0 \\ 1+\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = -1 \\ B = 0 \\ A = 1 \end{array}$$

Έτσι:

$$\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^2 x} = \int\frac{d\omega}{\omega^2(1+\omega^2)} = \int(\frac{1}{\omega^2} + \frac{-1}{1+\omega^2})d\omega = \int\frac{d\omega}{\omega^2} - \int\frac{d\omega}{1+\omega^2} = \frac{\omega^{-2+1}}{-2+1} - \text{τοξεφω} + C = \frac{\omega^{-1}}{-1} - \text{τοξεφω} + C = -\frac{1}{\omega} - \text{τοξεφω} + C = -\frac{1}{\varepsilon\varphi x} - x + C = -\sigma\varphi x + x + C.$$

Η απλούστερα:

$$\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^2 x} = \int\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}dx = \int\frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}dx = \int\frac{dx}{\eta\mu^2 x} - \int dx = -\sigma\varphi x - x + C.$$

16.2 II Περίπτωση κ περιττός:

Τότε στη μορφή $\int\varepsilon\varphi^x x dx$ κάλούμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ οπότε $dx = -\frac{d\omega}{\eta\mu x}$, στη δε μορφή $\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^x x}$ καλούμε $\eta\mu x = \omega$ οπότε $dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x}$. Έτσι λαμβάνουμε ολοκληρώματα ρητής συναρτήσεως ως προς ω.

Παραδείγματα:

16.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\varepsilon\varphi^7 x dx$

Λύση:

Καλούμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ οπότε $dx = -\frac{d\omega}{\eta\mu x}$ κι έτσι:

$$\int\varepsilon\varphi^7 x dx = \int\frac{\eta\mu^7 x}{\sigma\upsilon\nu^7 x}dx = \int\frac{\eta\mu^7 x}{\omega^7}(-\frac{d\omega}{\eta\mu x}) = \int\frac{\eta\mu^6 x}{\omega^7}(-d\omega) = -\int\frac{(\eta\mu^2 x)^3}{\omega^7}d\omega =$$

$$\int\frac{(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^3}{\omega^7}d\omega = -\int\frac{(1-\omega^2)^3}{\omega^7}d\omega = -\int\frac{1-3\omega^2+3\omega^4-\omega^6}{\omega^7}d\omega = -\int\frac{d\omega}{\omega^7} + 3\int\frac{\omega^2}{\omega^7}d\omega -$$

$$-\int\frac{\omega^4}{\omega^7}d\omega + \int\frac{\omega^6}{\omega^7}d\omega = -\int\omega^{-7}d\omega + 3\int\omega^{-5}d\omega - 3\int\omega^{-3}d\omega + \int\omega^{-1}d\omega =$$

$$-\frac{\omega^{-6}}{-6} + 3\frac{\omega^{-4}}{-4} - 3\frac{\omega^{-2}}{-2} + \ln|\omega| + C = \frac{1}{6\omega^6} - \frac{3}{4\omega^4} + \frac{3}{2\omega^2} + \ln|\omega| + C =$$

$$\frac{1}{6\sigma\upsilon\nu^6 x} - \frac{3}{4\sigma\upsilon\nu^4 x} + \frac{3}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} + \ln|\sigma\upsilon\nu x| + C.$$

16.2.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^5 x}$

Λύση:

Καλούμε $\eta\mu x = \omega$ οπότε $dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x}$. Έτσι:

$$\int\frac{dx}{\varepsilon\varphi^5 x} = \int\frac{dx}{\eta\mu^5 x/\sigma\upsilon v^5 x} = \int\frac{\sigma\upsilon v^5 x}{\eta\mu^5 x}dx = \int\frac{\sigma\upsilon v^5 x}{\omega^5}\cdot\frac{d\omega}{\sigma\upsilon v x} = \int\frac{\sigma\upsilon v^4 x d\omega}{\omega^5} =$$

$$\int\frac{(\sigma\upsilon v^2 x)^2}{\omega^5}d\omega = \int\frac{(1-\eta\mu^2 x)^2}{\omega^5}d\omega = \int\frac{(1-\omega^2)^2}{\omega^5}d\omega = \int\frac{1-2\omega^2+\omega^4}{\omega^5}d\omega = \int\frac{d\omega}{\omega^5} -$$

$$- 2\int\frac{\omega^2 d\omega}{\omega^6} + \int\frac{\omega^4 d\omega}{\omega^5} = \int\omega^{-5}d\omega - 2\int\omega^{-3}d\omega + \int\omega^{-1}d\omega =$$

$$\frac{\omega^{-4}}{-4} - 2\frac{\omega^{-2}}{-2} + \ln|\omega| + C = -\frac{1}{4\omega^4} + \frac{1}{\omega^2} + \ln|\omega| + C =$$

$$-\frac{1}{4\eta\mu^4 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} + \ln|\eta\mu x| + C.$$

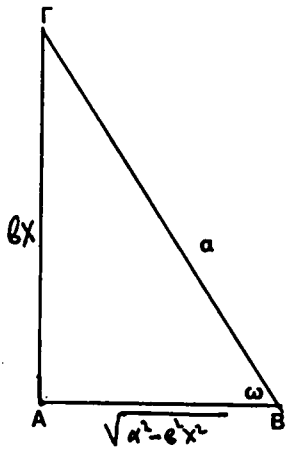
17 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενική Μορφή: $A = \int R(x,\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2})dx$, $B = \int R(x,\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2})dx$,
$\Gamma = \int R(x,\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2})dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να αναχθούν με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε γνωστά ολοκληρώματα. Οδηγός για το μετασχηματισμό των ολοκληρωμάτων αυτών είναι η υπόριζος ποσότητα, που μας οδηγεί σε κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Έτσι, την πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που αναφέρεται στη μεταβλητή συνάρτηση, την εκφράζουμε με τη βοήθεια άλλης πλευράς του ορθογωνίου τριγώνου και του ημιτόνου ή της εφαπτομένης ή του συνημιτόνου μιας των οξειών γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου.

17.1 Α Μορφή: $\int R(x,\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2})dx$

Η υπόριζος ποσότητα μας οδηγεί στην κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα α και κάθετη πλευρά βx, οπότε η άλλη κάθετη πλευρά του κατασκευασθέντος ορθογωνίου τριγώνου είναι $\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}$. Τότε η πλευρά που έχει τη μεταβλητή x εκφράζεται συναρτήσει της πλευράς α και του ημιτόνου της απέναντι γωνίας:
$\eta\mu\omega = \frac{\beta\cdot x}{\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}\eta\mu\omega$ και $dx = \frac{\alpha}{\beta}\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$. Έτσι η παράσταση $\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}$ με $\alpha > \beta x$ και $-\frac{\pi}{2} \le \omega \le \frac{\pi}{2}$ γράφεται:



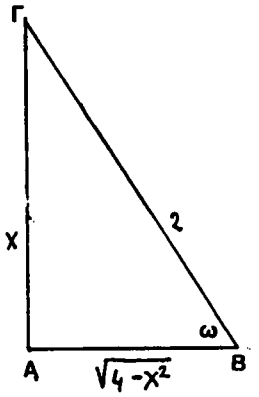
$\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\eta\mu^2\omega}$
$= \alpha\sqrt{1-\eta\mu^2\omega} = \alpha\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega} =$ ασυνω. Το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς ω.

Παραδείγματα:

17.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Λύση:

Η υπόριζος ποσότητα $4-x^2$ μας οδηγεί στην κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 2 και κάθετη πλευρά x, οπότε η άλλη κάθετη πλευρά είναι $x^2\sqrt{4-x^2}$.



Τότε η πλευρά x εκφράζεται συναρτήσει της υποτείνουσας 2 και του ημιτόνου της απέναντί της γωνίας ω:
$\eta\mu\omega = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\eta\mu\omega$ και $dx = 2\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$, όπου $0<x<2$.
Ετσι:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{4\eta\mu^2\omega\sqrt{4-4\eta\mu^2\omega}} = \int \frac{2\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{4\eta\mu^2\omega 2\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{4\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu\omega} = \int \frac{d\omega}{4\eta\mu^2\omega} =$$

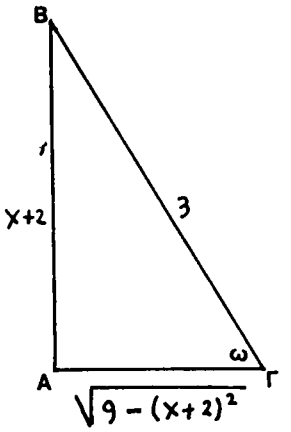
$-\frac{1}{4}\sigma\varphi\omega + C = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$, αφού σύμφωνα με το τρίγωνο που κατασκευάστηκε προκύπτει ότι: $\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

Η με αλγεβρική μέθοδο:

Επειδή $\eta\mu\omega = \frac{x}{2}$ έχω $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1-\eta\mu^2\omega} = \sqrt{1-(x/2)^2} = \sqrt{1-x^2/4} = \sqrt{\frac{4-x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$. Κι επειδή $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{\sqrt{4-x^2}/2}{x/2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

17.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$

Λύση:



Η υπόριζος ποσότητα $9-(x+2)^2$ μας οδηγεί στην κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 3 και κάθετη πλευρά x+2, με $0<x+2<3 \Rightarrow -2<x<1$ οπότε η άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου είναι $\sqrt{9-(x+2)^2}$. Τότε η πλευρά x+2 εκφράζεται συναρτήσει της υποτείνουσας 3 και του ημιτόνου ω:

$\eta\mu\omega = \frac{x+2}{3} \Rightarrow x+2 = 3\eta\mu\omega \Leftrightarrow x = 3\eta\mu\omega-2$ και $dx = 3\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$. Έτσι:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int \frac{(3\eta\mu\omega-2)^2 3\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{\sqrt{9-(3\eta\mu\omega)^2}} = \int \frac{(9\eta\mu^2\omega-12\eta\mu\omega+4)\ 3\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{3\sqrt{1-3\eta\mu\omega^2}} =$$

$$\int 9\eta\mu^2\omega d\omega - \int 12\eta\mu\omega d\omega + \int 4d\omega = 9\int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2} d\omega - 12\int \eta\mu\omega d\omega + 4\int d\omega =$$

$$9\int \frac{d\omega}{2} - 9\int \frac{\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{2} - 12(-\sigma\upsilon\nu\omega) + 4\omega = \frac{9}{2}\omega - 9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2\omega d2\omega + 12\sigma\upsilon\nu\omega +$$

$$+ 4\omega = \frac{9}{2}\omega - \frac{9}{4}\eta\mu 2\omega + 12\sigma\upsilon\nu\omega + 4\omega + C = \frac{17}{2}\omega - \frac{9}{4}\eta\mu 2\omega + 12\sigma\upsilon\nu\omega + C.$$

Και επειδή $\omega = \tau o\xi\epsilon\phi(\frac{x+2}{3})$ και $\eta\mu\omega = \frac{x+2}{3}$ οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1-\eta\mu\omega^2} = \sqrt{1-(\frac{x+2}{3})^2}\ \sqrt{\frac{9-(x+2)^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-(x+2)^2}}{3}$$

Η όπως προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο που κατασκευάσαμε:

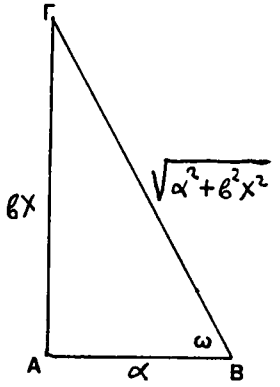
$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{9-(x+2)^2}}{3}$. Εχουμε:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \frac{17}{2}\tau o\xi\eta\mu(\frac{x+2}{3}) - 9(\frac{x+2}{3})\frac{\sqrt{9-(x+2)^2}}{3} + 12\frac{\sqrt{9-(x+2)^2}}{3} + C =$$

$$\frac{17}{2}\tau o\xi\eta\mu(\frac{x+3}{2}) - 3(x+2)\sqrt{9-(x+2)^2} + 12\sqrt{9-(x+2)^2} + C.$$

17.2 Β Μορφή: $\int R(x,\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2})dx$

Η υπόριζος ποσότητα μας οδηγεί σε κατασκευή ορθογωνίου τρίγωνου με κάθετες πλευρές α και βx, οπότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου είναι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}$. Τότε η πλευρά που έχει τη μεταβλητή x εκφράζεται συναρτήσει της κάθετης πλευράς α και της εφαπτομένης της απέναντι της πλευράς γωνίας ω:



$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta x}{\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}\varepsilon\varphi\omega$ και $dx = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}d\omega$ οπότε η ρίζα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}$ γράφεται: $\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\varepsilon\varphi^2\omega} = \sqrt{\alpha^2(1+\varepsilon\varphi^2\omega)}$

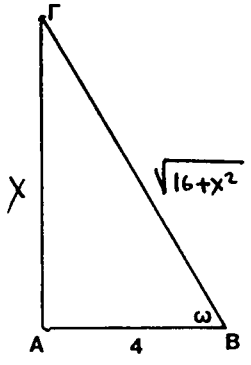
$= \alpha\sqrt{1+\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \alpha\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \alpha\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \alpha\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ με $\alpha > 0$.

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς ω.

17.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{16+x^2}}$

Λύση:

Η υπόριζος ποσότητα $16+x^2$ μας οδηγεί σε κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 4 και x, οπότε η υποτείνουσα είναι: $\sqrt{16+x^2}$. Έτσι η πλευρά που έχει τη μεταβλητή x εκφράζεται συναρτήσει της πλευράς 4 και της εφαπτομένης της γωνίας ω με $x>0$.



$\varepsilon\varphi\omega = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 4\varepsilon\varphi\omega$ και $dx = \frac{4d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ και:

$\sqrt{16+x^2} = \sqrt{16+(4\varepsilon\varphi\omega)^2} = \sqrt{16+16\varepsilon\varphi^2\omega} = \sqrt{16(1+\varepsilon\varphi^2\omega)} =$

$= 4\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \frac{4}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. Ετσι το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16+x^2}} = \int \frac{\frac{4d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{16\varepsilon\varphi^2\omega\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\omega}} = \int \frac{\frac{4d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{16\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\cdot\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\omega}} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{16\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{16}\int \eta\mu^{-2}\omega d\eta\mu\omega$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{\eta\mu^{-2+1}\omega}{-2+1} + C = -\frac{1}{16}\eta\mu\omega + C = -\frac{1}{16\cdot\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}} + C = -\frac{\sqrt{16+x^2}}{16x} + C$$

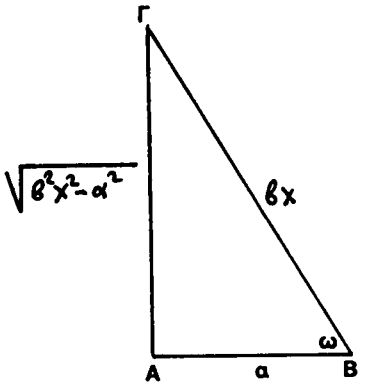
Αφού $\eta\mu\omega = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}$ εφ' όσον $\varepsilon\varphi\omega = \frac{x}{4}$ και $\eta\mu\omega = \frac{\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}} = \frac{x/4}{\sqrt{1+\frac{x^2}{16}}} =$

$\frac{x/4}{\frac{\sqrt{16+x^2}}{4}} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}$ ή απ' ευθείας από το ορθογώνιο τρίγωνο:

$\eta\mu\omega = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}$.

17.3 Γ Μορφή: $\int R(x,\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2})dx$

Η υπόριζος ποσότητα μας οδηγεί σε κατασκρυή ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα βx και κάθετη πλευρά α, οπότε η άλλη κάθετη πλευρά είναι: $\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}$. Τότε η πλευρά που έχει τη μεταβλητή x εκφράζεται συναρτήσει της κάθετης πλευράς α και του συνημιτόνου της γωνίας ω του τριγώνου με $\beta x>\alpha \Longrightarrow x>\frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha,\beta>0$.



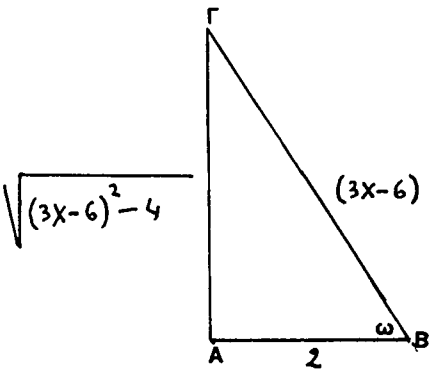
$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\alpha}{\beta x} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $dx = \frac{\alpha\varepsilon\varphi\omega}{\beta\sigma\upsilon\nu\omega}d\omega$, αφού $dx = d\frac{\alpha}{\beta\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{-(\sigma\upsilon\nu\omega)'}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}d\omega =$ $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}d\omega = \frac{\alpha\varepsilon\varphi\omega}{\beta\sigma\upsilon\nu\omega}$. Ετσι η ρίζα $\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}$ γράφεται:

$\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2} = \sqrt{\beta^2.\frac{\alpha^2}{\beta^2\sigma\upsilon^2\omega} - \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2(\frac{1-\sigma\upsilon^2\omega}{\sigma\upsilon^2\omega})} = \alpha\sqrt{\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon^2\omega}} =$ αεφω με α>0 και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς ω.

17.3.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{(\sqrt{9x^2-36x+32})^3}$

Λύση:

Επειδή $9x^2-36x+32 = 9x^2-36x+32+4-4 = 9x^2-36x+36-4 = (3x-6)^2-4$. Επομένως η υπόριζος ποσότητα αυτή μας οδηγεί στην κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 3x-6 και κάθετη πλευρά 2, οπότε η άλλη κάθετη πλευρά είναι: $\sqrt{(3x-6)^2-2^2}$. Τότε η πλευρά που έχει τη μεταβλητή x εκφράζεται συναρτήσει της πλευράς 2 και του συνημιτόνου της γωνίας ω με $3x-6>2 \Leftrightarrow x>8/3$



$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{3x-6} \Leftrightarrow 3(x-2)\sigma\upsilon\nu\omega = 2 \Leftrightarrow x-2 = \frac{2}{3\sigma\upsilon\nu\omega} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3\sigma\upsilon\nu\omega} + 2$ και $dx = \frac{\varepsilon\varphi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}d\omega$ και:

$\sqrt{9x^2-36x+32} = \sqrt{9(x-2)^2-4} = \sqrt{9\frac{4}{9\sigma\upsilon^2\omega} - 4} = \sqrt{4(\frac{1}{\sigma\upsilon^2\omega}-1)} =$ 2εφω. Ετσι:

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{9x^2-36x+32})^3} = \int\frac{\frac{2}{3}\varepsilon\varphi\omega d\omega}{(2\varepsilon\varphi\omega)^3} = \int\frac{\frac{2\varepsilon\varphi\omega}{3\sigma\upsilon\nu\omega}d\omega}{8\varepsilon\varphi^3\omega} = \int\frac{1}{12\sigma\upsilon\nu\omega\varepsilon\varphi^2\omega}d\omega =$$

$$\frac{1}{12}\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon^2\omega}}d\omega = \frac{1}{12}\int\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu^2\omega}d\omega = \frac{1}{12}\int\eta\mu^{-2}\omega d\eta\mu\omega = \frac{1}{12}.\frac{\eta\mu^{-2+1}\omega}{-2+1} + C =$$

$$-\frac{1}{12\eta\mu\omega} + C = \frac{-1}{12.\frac{\sqrt{9x^2-36x+32}}{3(x-2)}} + C = -\frac{x-2}{\sqrt{9x^2-36x+32}} + C.$$

Αφού συνω = $\frac{2}{3(x-2)}$ και ημω = $\sqrt{1-\frac{4}{9(x-2)^2}}$ = $\sqrt{\frac{9(x-2)^2-4}{9(x-2)^2}}$ = $\frac{\sqrt{9x^2-36x+36-4}}{3(x-2)}$ = $\frac{\sqrt{9x^2-36x+32}}{3(x-2)}$ ή από το ορθογώνιο τρίγωνο:

ημω = $\frac{\sqrt{(3x-6)^2-4}}{3x-6}$ = $\frac{\sqrt{9x^2-36x+32}}{3(x-2)}$

18 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$

Επειδή $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, διακρίνοντας περιπτώσεις εκτελούμε τους εξής μετασχηματισμούς:

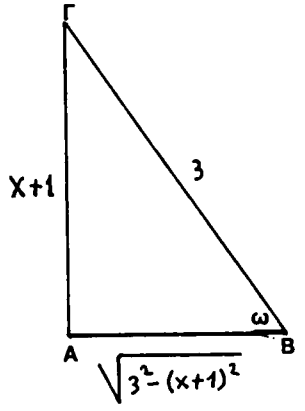
18.1 Ι Περίπτωση: $\alpha < 0$, $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} > 0$

Θέτουμε: $\alpha = -\kappa^2$, $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = \lambda^2$, θεωρούμε το $x+\frac{\beta}{\alpha}$ ως x. Έτσι η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}} = \sqrt{-\kappa x^2+\lambda^2} = \sqrt{\lambda^2-\kappa^2x^2}$. Δηλαδή ολοκλήρωμα της μορφής $\int R(x,\sqrt{\lambda^2-\kappa^2x^2})dx$.

18.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{(\sqrt{-x^2-2x+8})^3}$

Λύση:

Επειδή $-x^2-2x+8 = -1(x+\frac{-2}{2(-1)})^2+\frac{4(-1)8-2^2}{4(-1)} = -(x+1)^2+9$ η ρίζα γράφεται: $\sqrt{-x^2-2x+8} = \sqrt{-(x+1)^2+9} = \sqrt{3^2-(x+1)^2}$. Η υπόριζος ποσότητα μας οδηγεί σε κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 3 και κάθετη πλευρά x+1 (όπου $0<x+1<3 \Leftrightarrow -1<x<2$) οπότε η άλλη κάθετη πλευρά είναι: $\sqrt{3^2-(x+1)^2}$. Τότε η πλευρά x+1 εκφράζεται συναρτήσει της υποτείνουσας 3 και του ημιτόνου της γωνίας ω: ημω = $\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow$ x+1 = 3ημω και dx = 3συνωdω.



Ετσι το ολοκλήρωμα γράφεται: $\int\frac{dx}{(\sqrt{-x^2-2x+8})^3} = \int\frac{dx}{(\sqrt{-(x+1)^2+9})^3} =$

$\int\frac{3\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{(\sqrt{9-9\eta\mu^2\omega})^3} = \int\frac{3\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{(3\sqrt{1-\eta\mu^2\omega})^3} = \int\frac{3\sigma\upsilon\nu\omega d\omega}{27\sigma\upsilon\nu^3\omega} = \frac{1}{9}\int\frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{9}\varepsilon\varphi\omega + C$

$= \frac{1}{9}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{9-(x+1)^2}} + C = \frac{1}{9}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+8}} + C.$

Αφού $\eta\mu\omega = \frac{x+1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{9}} = \sqrt{\frac{9-(x+1)^2}{9}}$ οπότε:

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{(x+1)/3}{\sqrt{\frac{9-(x+1)^2}{9}}} = \frac{x+1}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$ ή από το ορθογώνιο τρίγωνο που κατασκευάσαμε:

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{x+1}{\sqrt{3^2-(x+1)^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$

18.2 II Περίπτωση: $\alpha > 0$, $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} > 0$

Θέτουμε: $\alpha = \kappa^2$, $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = \lambda^2$, θεωρούμε το $x+\frac{\beta}{\alpha}$ ως x. Ετσι η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}} = \sqrt{\kappa x^2+\lambda^2}$

Δηλαδή ολοκλήρωμα της μορφής $\int R(x,\sqrt{\lambda^2+\kappa^2x^2})dx$.

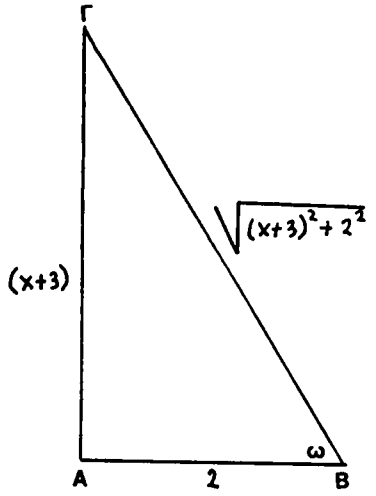
18.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$

Λύση:

Επειδή $x^2+6x+13 = (x+\frac{6}{2\cdot1})^2+\frac{4\cdot1\cdot13-6^2}{4\cdot1} = (x+3)^2+4$. Η υπόριζος ποσότητα μας οδηγεί στην κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές x+1, 2 ($x+3>0 \Leftrightarrow x > -3$) οπότε η υποτείνουσά του είναι: $\sqrt{(x+3)^2+2^2}$. Τότε η κάθετη πλευρά (x+3) εκφράζεται συναρτήσει της άλλης κάθετης πλευράς 2 και της εφαπτομένης της γωνίας ω του τριγώνου. Τότε: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow x+3 = 2\varepsilon\varphi\omega$ και $dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ Ετσι:

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+4}} = \int\frac{2d\omega/\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sqrt{4\varepsilon\varphi^2\omega+4}} = \int\frac{2d\omega/\sigma\upsilon\nu^2\omega}{2\sqrt{1/\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \int\frac{d\omega/\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}} =$

$\int \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.



Κι επειδή: $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}}$ καλούμε $\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} = t \Rightarrow \frac{\omega}{2} = \tau\circ\xi\varepsilon\varphi t \Leftrightarrow \omega =$

$2\tau\circ\xi\varepsilon\varphi t$ και $d\omega = \frac{2dt}{1+t^2}$ έχουμε:

$$\int \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{(1-t)(1+t)} = \int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}\right)dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$\int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = -\int \frac{d(1-t)}{1-t} + \int \frac{d(1+t)}{1+t} = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + C =$$

$$\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}}{1-\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\frac{\eta\mu\omega/2}{\sigma\upsilon\nu\omega/2}}{1-\frac{\eta\mu\omega/2}{\sigma\upsilon\nu\omega/2}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}+\eta\mu\frac{\omega}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}-\eta\mu\frac{\omega}{2}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{(\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}+\eta\mu\frac{\omega}{2})(\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}-\eta\mu\frac{\omega}{2})}{(\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}-\eta\mu\frac{\omega}{2})(\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}-\eta\mu\frac{\omega}{2})}\right| + C = \ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}+\eta\mu^2\frac{\omega}{2}+2\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}-\eta\mu^2\frac{\omega}{2}}\right| + C =$$

$$\ln\left|\frac{1+\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right| + C.$$

Ομως, από το ορθογώνιο τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχουμε:

$\eta\mu\omega = \frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2+2^2}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+13}}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{\sqrt{(x+3)^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+6x+13}}$. Επομένως:

$$\int\frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \ln\left|\frac{1+\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+13}}}{\dfrac{2}{\sqrt{x^2+6x+13}}}\right| + 'C =$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6x+13}+(x+3)}{2}\right| + C = \ln|\sqrt{x^2+6x+13}+(x+3)| - \underline{\ln|2| + C} =$$

$= \ln|\sqrt{x^2+6x+13}+(x+3)| + K$. Αρα:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = \ln|\sqrt{x^2+6x+13}+(x+3)| + K$$

Σημείωση: Τα A και B υπολογίστηκαν ως εξής:

$\frac{2}{(1-t)(1+t)} \equiv \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Leftrightarrow 2 \equiv A+At+B-Bt \Leftrightarrow 0t+2 \equiv (A-B)t+(A+B)$.

Αρα: $A-B = 0$ και $A+B = 2 \Leftrightarrow A = B$ και $A+A = 2 \Leftrightarrow 2A = 2 \Leftrightarrow$

$A = B = 1$.

18.3 III Περίπτωση: $\alpha > 0$, $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} < 0$

Θέτουμε: $\alpha = \kappa^2$, $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = -\lambda^2$, θεωρούμε το $x+\frac{\beta}{\alpha}$ ως x. Ετσι η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}} = \sqrt{\kappa x^2-\lambda^2}$.
Δηλαδή ολοκλήρωμα της μορφής $\int R(x,\sqrt{\lambda^2-\kappa^2x^2})dx$.

18.3.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

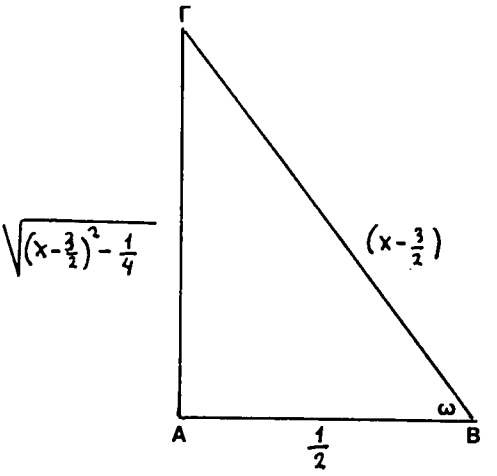
Λύση:

Επειδή $x^2-3x+2 = (x+\frac{-3}{2\cdot1})^2+\frac{4\cdot1\cdot2-3^2}{4\cdot1} = (x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$.
Η υπόριζος ποσότητα μας οδηγεί σε κατασκευή ορθο- γωνίου τριγώνου με υποτεί- νουσα $(x-\frac{3}{2})$ και κάθετη πλευρά $\frac{1}{2}$, οπότε η άλλη κά- θετη πλευρά είναι: $\sqrt{(x-3/2)^2-1/4}$. Τότε η υποτείνουσα $(x-3/2)$ εκφρά- ζεται συναρτήσει της κάθε- της πλευράς μήκους $1/2$ και του συνημιτόνου της γωνίας ω:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1/2}{x-3/2} \Leftrightarrow x-\frac{3}{2} = \frac{1/2}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Leftrightarrow x-\frac{3}{2} = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } dx = \frac{-(2\sigma\upsilon\nu\omega)'}{4\sigma\upsilon\nu^2\omega} =$$

$\frac{2\eta\mu\omega d\omega}{4\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\omega} \Leftrightarrow dx = \frac{\varepsilon\varphi\omega}{2\sigma\upsilon\nu\omega}d\omega$ οπότε: $\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{(x-3/2)^2+1/4} =$

$\sqrt{(\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\omega})^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon^2\omega} - \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon^2\omega}{\sigma\upsilon^2\omega}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\omega.$



Ετσι: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \int\frac{\frac{\varepsilon\varphi\omega}{2\sigma\upsilon\nu\omega}d\omega}{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\omega} = \int\frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \ln|\frac{1+\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}|$ όπως υπολογίστηκε στο 17.2.1

Από το ορθογώνιο τρίγωνο όμως έχουμε:

$\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{(x-3/2)^2+1/4}}{x-3/2} = \frac{\sqrt{x^2-3x+9/4-1/4}}{x-3/2} = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-3/2}$

και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1/2}{x-3/2}$.Επομένως:

$\ln|\frac{1+\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}| + C = \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-3/2}}{\frac{1/2}{x-3/2}}\right| + C = \ln|\frac{(x-3/2)\sqrt{x^2-3x+2}}{1/2}| =$

$\ln|(x-3/2)\sqrt{x^2-3x+2}| + \ln\frac{1}{2} + C$. Αρα:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \ln|(x-3/2)\sqrt{x^2-3x+2}| + K.$$

Θέσαμε: $\ln\frac{1}{2} + C = K$

19 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΗ ΜΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Την ολοκλήρωση των αρρήτων συναρτήσεων την αντιμετωπίσαμε ως εδώ με κατάλληλη τριγωνομετρική αντικατάσταση. Σε αυτήν την ενότητα θα πετύχουμε την ολοκλήρωση μερικών μορφών αρρήτων συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση, όχι τριγωνομετρική, υπό ορισμένες προϋποθέσεις:

ΜΟΡΦΗ $\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$. Προϋποθέσεις: Το $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma \neq 0$ και σε κάποιο διάστημα του συνόλου των πραγματικών αριθμών λαμβάνει θετικές τιμές.
Τότε

19.1 Αν $\alpha > 0$ θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x-\omega) \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x^2-2x\omega+\omega^2) \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha x^2-2\alpha x\omega+\alpha\omega^2 \Leftrightarrow$

$x = \frac{\alpha\omega^2-\gamma}{\beta+2\alpha\omega}$ και $dx = \frac{2\alpha\omega(\beta+2\alpha\omega)-2\alpha(\alpha\omega^2-\gamma)}{(\beta+2\alpha\omega)^2}d\omega = \frac{2\alpha(\beta\omega+2\alpha\omega^2-\alpha\omega^2+\gamma)}{(\beta+2\alpha\omega)^2}d\omega \Leftrightarrow$

$dx = \frac{2\alpha(\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma)}{(\beta+2\alpha\omega)^2}d\omega$

Οπότε το $\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$ μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς ω.

19.1.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x-3}}$

Λύση:

$\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-3) = 1+12 = 13 \neq 0$ και $\alpha = 1 > 0$.

Θέτουμε: $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x-\omega) \Rightarrow \sqrt{x^2+x-3} = x-\omega$. Οπότε: $x^2+x-3 = x^2-2x\omega+\omega^2 \Leftrightarrow x+2x\omega = \omega^2+3 \Leftrightarrow x = \frac{\omega^2+3}{1+2\omega}$ και $dx = \frac{2\omega(1+2\omega)-2(\omega^2+3)}{(1+2\omega)^2}d\omega$

$\Leftrightarrow dx = \frac{2\omega+4\omega^2-2\omega^2-6}{(1+2\omega)^2}d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{2\omega^2+2\omega-6}{(1+2\omega)^2}d\omega$. Ετσι:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}} = \int\frac{\frac{2\omega^2+2\omega-6}{(1+2\omega)^2}d\omega}{x-\omega} = \int\frac{\frac{2(\omega^2+\omega-3)}{(1+2\omega)^2}d\omega}{\frac{\omega^2+3}{1+2\omega}-\omega} = \int\frac{\frac{2(\omega^2+\omega-3)}{(1+2\omega)^2}d\omega}{\frac{\omega^2+3-\omega-2\omega^2}{1+2\omega}} =$$

$$\int\frac{(1+2\omega)2(\omega^2+\omega-3)}{-(\omega^2+\omega-3)(1+2\omega)^2}d\omega = -\int\frac{2d\omega}{(1+2\omega)} = -\int\frac{d(1+2\omega)}{1+2\omega} = -\ln|1+2\omega| + C =$$

$$-\ln|1+2x-\sqrt{x^2+x-3}| + C$$

Αφού: $\sqrt{x^2+x-3} = x-\omega$ οπότε: $\omega = x-\sqrt{x^2+x-3}$.

19.2 Αν $\gamma > 0$ τότε θέτουμε: $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \omega x+\sqrt{\gamma} \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma = \omega^2x^2+2\omega x\sqrt{\gamma}+\gamma \Leftrightarrow \alpha x^2-\omega^2x^2+\beta x-2\omega x\sqrt{\gamma} = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x-\omega^2x+\beta-2\omega\sqrt{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\omega^2)x = 2\omega\sqrt{\gamma}-\beta \Leftrightarrow x = \frac{2\omega\sqrt{\gamma}-\beta}{\alpha-\omega^2}$ και $dx = \frac{2\sqrt{\gamma}(\alpha-\omega^2)-(-2\omega)(2\omega\sqrt{\gamma}-\beta)}{(\alpha-\omega^2)^2}d\omega$

$\Leftrightarrow dx = \frac{2\alpha\sqrt{\gamma}-2\omega^2\sqrt{\gamma}+4\omega^2\sqrt{\gamma}-2\beta\omega}{(\alpha-\omega^2)^2}d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{2\omega^2\sqrt{\gamma}-2\beta\omega+2\alpha\sqrt{\gamma}}{(\alpha-\omega^2)^2}d\omega$. Ετσι το $\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$ μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς ω.

19.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+5}}$

Λύση:

$\Delta = 1^2-4\cdot(-1)\cdot5 = 1+20 = 21 \neq 0$ και $\gamma = 5 > 0$. Ετσι θέτουμε:

$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \omega x+\sqrt{\gamma} \Rightarrow \sqrt{-x^2+x+5} = \omega x+\sqrt{5} \Leftrightarrow -x^2+x+5 = \omega^2x^2+2\omega x\sqrt{5}+5$

$\Leftrightarrow -x^2-\omega^2x^2+x-2\omega x\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow -x(x+\omega^2x-1+2\omega\sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow (1+\omega^2)x-1+2\omega\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow (1+\omega^2)x = 1-2\omega\sqrt{5} \Leftrightarrow x = \frac{1-2\omega\sqrt{5}}{1+\omega^2}$

και $dx = \frac{-2\sqrt{5}(1+\omega^2)-2\omega(1-2\omega\sqrt{5})}{(1+\omega^2)^2}d\omega = \frac{-2\sqrt{5}-2\omega^2\sqrt{5}-2\omega+4\omega^2\sqrt{5}}{(1+\omega^2)^2}d\omega \Leftrightarrow$

$dx = \frac{2\omega^2\sqrt{5}-2\omega-2\sqrt{5}}{(1+\omega^2)^2}d\omega$. Ετσι:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+5}} = \int\frac{\frac{2\omega^2\sqrt{5}-2\omega-2\sqrt{5}}{(1+\omega^2)^2}d\omega}{\omega\cdot\frac{1-2\omega\sqrt{5}}{1+\omega^2}+\sqrt{5}} = \int\frac{\frac{2\omega^2\sqrt{5}-2\omega-2\sqrt{5}}{(1+\omega^2)^2}d\omega}{\frac{\omega-2\omega^2\sqrt{5}+\sqrt{5}+\omega^2\sqrt{5}}{1+\omega^2}} =$$

$$\int\frac{2(\omega^2\sqrt{5}-\omega-\sqrt{5})(1+\omega^2)}{-(\omega^2\sqrt{5}-\omega-\sqrt{5})(1+\omega^2)^2}d\omega = -\int\frac{2d\omega}{1+\omega^2} = -2\text{τοξεφ}\omega + C =$$

$$2\text{τοξεφ}\frac{\sqrt{-x^2+x+5}-\sqrt{5}}{x} + C$$

Αφού: $\sqrt{-x^2+x+5} = \omega x+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+x+5}-\sqrt{5} = \omega x \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{-x^2+x+5}-\sqrt{5}}{x}$

19.3 Το $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει $\Delta > 0$, δηλαδή δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες. Τότε:
$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$. Θέτουμε: $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = (x-x_1)\omega \Leftrightarrow$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma = (x-x_1)^2\omega^2 \Leftrightarrow \alpha(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2\omega^2 \Leftrightarrow \alpha(x-x_2) =$
$(x-x_1)\omega^2 \Leftrightarrow \alpha x-\alpha x_2 = \omega^2 x-\omega^2 x_1 \Leftrightarrow (\alpha-\omega^2)x = \alpha x_2-\omega^2 x_1 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha x_2-\omega^2 x_1}{\alpha-\omega^2}$
και $dx = \frac{-2x_1\omega(\alpha-\omega^2)+2\omega(\alpha x_2-\omega^2 x_1)}{(\alpha-\omega^2)^2}d\omega \Leftrightarrow$
$dx = \frac{-2\alpha x_1\omega+2x_1\omega^3+2\alpha\omega x_2-2x_1\omega^3}{(\alpha-\omega^2)^2}d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{2\alpha\omega(x_2-x_1)}{(\alpha-\omega^2)^2}d\omega$ και έτσι το ολοκλήρωμα $\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$ μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς ω.

19.3.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+3x-2}}$

Λύση:
$\Delta = 3^2-4\cdot(-1)\cdot(-2) = 9-8 = 1 > 0$, $x_{1,2} = \frac{-3\pm1}{2\cdot(-1)} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$
και $-x^2+3x-2 = -1(x-1)(x-2)$. Γενικά θέτουμε: $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = (x-x_1)\omega$
$\Rightarrow \sqrt{-x^2+3x-2} = (x-1)\omega \Leftrightarrow -x^2+3x-2 = (x-1)^2\omega^2 \Leftrightarrow -1(x-1)(x-2) =$
$(x-1)^2\omega^2 \Leftrightarrow -(x-2) = (x-1)\omega^2 \Leftrightarrow -x+2 = x\omega^2-\omega^2 \Leftrightarrow 2+\omega^2 = x(1+\omega^2) \Leftrightarrow$
$x = \frac{2+\omega^2}{1+\omega^2}$ και $dx = \frac{2\omega(1+\omega^2)-2\omega(2+\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{2\omega^3+2\omega-2\omega^3-4\omega}{(1+\omega^2)^2}d\omega \Leftrightarrow$
$dx = \frac{-2\omega}{(1+\omega^2)^2}d\omega$. Έτσι:
$\sqrt{-x^2+3x-2} = (x-1)\omega = (\frac{\omega^2+2}{\omega^2+1}-1)\omega = (\frac{\omega^2+2-\omega^2-1}{\omega^2+1})\omega = \frac{\omega}{\omega^2+1}$ και:
$x-2 = \frac{\omega^2+2}{\omega^2+1}-2 = \frac{\omega^2+2-2\omega^2-2}{\omega^2+1} = \frac{-\omega^2}{\omega^2+1}$
$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+3x-2}} = \int \frac{\frac{-2\omega}{(1+\omega^2)^2}d\omega}{\frac{-\omega^2}{\omega^2+1}\cdot\frac{\omega}{\omega^2+1}} = \int \frac{-2\omega(\omega^2+1)^2 d\omega}{-\omega^2\omega(\omega^2+1)^2} = \int \frac{2d\omega}{\omega^2} = 2\int \omega^{-2}d\omega$$

$$= 2\frac{\omega^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{2}{\omega} + C = -2\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+3x-2}} + C = 2\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{-x^2+3x-2}} + C =$$

$$-2\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} + C.$$

Αφού: $\sqrt{-x^2+3x-2} = (x-1)\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{-x^2+3x-2}}{x-1}$ και $\frac{1}{\omega} = \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

20. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $A = \int\frac{x^\nu dx}{\sqrt{\alpha x+\beta}}$ και $B = \int x^\nu\sqrt{\alpha x+\beta}dx$

Θέτουμε $\alpha x+\beta = \omega^2 \Leftrightarrow \alpha x = \omega^2-\beta \Leftrightarrow x = \frac{\omega^2-\beta}{\alpha}$ και $dx = \frac{1}{\alpha}2\omega d\omega$

Οπότε:

20.1 $A = \int\frac{x^\nu dx}{\sqrt{\alpha x+\beta}} = A = \int\frac{\frac{(\omega^2-\beta)^\nu}{\alpha^\nu}\cdot\frac{2\omega d\omega}{\alpha}}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{2}{\alpha^{\nu+1}}\int\frac{(\omega^2-\beta)^\nu\omega d\omega}{\omega} =$

$\frac{2}{\alpha^{\nu+1}}\int(\omega^2-\beta)^\nu d\omega$ και

20.2 $B = \int x^\nu\sqrt{\alpha x+\beta}dx = \int\left(\frac{\omega^2-\beta}{\alpha}\right)^\nu\sqrt{\omega^2}\ \frac{2\omega d\omega}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^{\nu+1}}\int\omega^2(\omega^2-\beta)^\nu d\omega$

Δηλαδή μετά την ανάπτυξη του διωνύμου $(\omega^2+\beta)^\nu$ με τον τύπο του Νεύτωνα, λαμβάνουμε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς ω.

20.1.1 να υπολογιστει το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$

Λύση:

$\alpha x+\beta = x+1$. Επομένως θέτουμε: $x+1 = \omega^2 \Leftrightarrow x = \omega^2-1$ και $dx = 2\omega d\omega$.

Ετσι: $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}} = \int\frac{(\omega^2-1)^3 2\omega d\omega}{\sqrt{\omega^2}} = \int\frac{(\omega^6-3\omega^4+3\omega^2-1)2\omega d\omega}{\omega} = 2\int\omega^6 d\omega -$

$6\int\omega^4 d\omega + 6\int\omega^2 d\omega - 2\int d\omega = \frac{2\omega^7}{7} - \frac{6\omega^5}{5} + \frac{6\omega^3}{3} - 2\omega + C =$

$\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{(x+1)} + C =$

$\sqrt{x+1}\cdot[\frac{2}{7}(x+1)^2 - \frac{6}{5}(x+1)^2 + 2(x+1) - 2] + C$

20.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^2\sqrt{2x+1}\ dx$

Λύση:

$ax+\beta = 2x+1$. Θέτουμε: $2x+1 = \omega^2 \Leftrightarrow x = \frac{\omega^2-1}{2}$ και $dx = \frac{1}{2}2\omega d\omega \Leftrightarrow$ $dx = \omega d\omega$. Αρα:

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int\left(\frac{\omega^2-1}{2}\right)^2\sqrt{\omega^2}\;\omega d\omega = \frac{1}{4}\int(\omega^4-2\omega^2+1)\omega\omega d\omega =$$

$$\frac{1}{4}\left(\int\omega^6 d\omega - 2\int\omega^4 d\omega + \int\omega^2 d\omega\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\omega^7}{7} - 2\frac{\omega^5}{5} + \frac{\omega^3}{3}\right) + C =$$

$$\frac{1}{4}\omega^3\left(\frac{1}{7}\omega^4 - \frac{2}{5}\omega^2 + \frac{1}{3}\right) + C = \frac{1}{4}\sqrt{(2x+1)^3}\left(\frac{\left(\sqrt{(2x+1)^3}\right)^4}{7} - \frac{2\left(\sqrt{(2x+1)^3}\right)^2}{5}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\right) + C = \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{2x+1}\left(\frac{(2x+1)^2}{7} - \frac{2(2x+1)}{5} + \frac{1}{3}\right) + C.$$

21 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

21.1 Να βρεθεί η εξίσωση των καμπύλων των οποίων η κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο $M(x,y)$ είναι $3x^2y$, καθώς και η εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το σημείο $(0,8)$

Λύση:

Εφ' όσον η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $M(x,y)$ της οικογένειας των καμπύλων είναι $3x^2y$ ισχύει:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int 3x^2dx \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{3x^3}{3} + C \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = x^3 + C \Leftrightarrow \ln|y| = x^3 + \ln|K| \Leftrightarrow \ln|y| - \ln|K| = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = x^3 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{K}\right| = \ln[(\exp(x^3)] \Leftrightarrow \left|\frac{y}{K}\right| = \exp(x^3) \Leftrightarrow$$

$$|y| = |K|\cdot e^{x^3} \qquad (1)$$

Για $x = 0$, $y = 8$, η (1) δίνει: $|8| = |K|\cdot e^0 \Leftrightarrow |K| = 8 \Leftrightarrow$ $K = \pm 8$. Οπότε η καμπύλη που διέρχεται από το σημείο $(0,8)$ είναι η:

$$y = \pm 8e^{x^3}$$

21.1 Για μια συγκεκριμένη καμπύλη ισχύει: $y'' = 2$. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης αν γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο $(2,6)$ με κλίση εφαπτομένης 10.

Λύση:

Εφ' όσον $y'' = 2 \Leftrightarrow (y')' \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y') = 2 \Leftrightarrow d(y') = 2dx \Leftrightarrow$

$\int d(y') = \int 2dx \Leftrightarrow y' = 2x + C$.

Επειδή η κλίση της εφαπτομενης που διέρχεται από το σημείο (2,6) είναι 10 ισχύει:

$2x + C = 10 \Leftrightarrow 2\cdot 2 + C = 10 \Leftrightarrow C = 6$ οπότε:

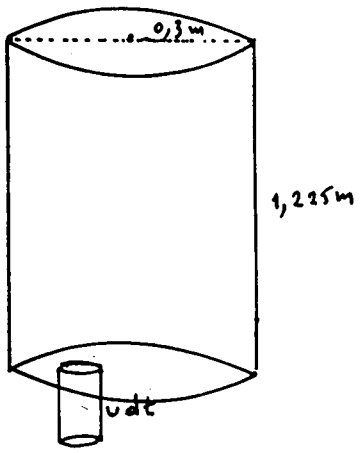
$y' = 2x + 6$ και $\frac{dy}{dx} = 2x + 6 \Leftrightarrow dy = (2x+6)dx \Leftrightarrow \int dy = \int (2x+6)dx \Leftrightarrow$
$y = \int 2xdx + \int 6dx \Leftrightarrow y = \frac{2x^2}{2} + 6x + K \Leftrightarrow y = x^2 + 2x + K$
και επειδή η καμπύλη αυτή περνάει από το σημείο (2,6) έχουμε:
$6 = 2^2 + 6\cdot 2 + K \Leftrightarrow 6 = 4 + 12 + K \Leftrightarrow -10 = K$. Αρα:
$y = x^2+6x-10$.

21.3 Ενα κυλινδρικό δοχείογεματο νερό έχει ακτίνα βάσεως 0.3 m και ύψος 1.225 m. Στον πυθμένα του δοχείου υπάρχει οπή ακτίνας 0.225 m από την οποία εκρέει το νερό με ταχύτητα $0.6\sqrt{2gh}$ m/sec, όπου $g = 9.8$ m/sec^2 και h το βάθος από την επιφάνεια του νερού. Ζητείται ο χρόνος που απαιτείται για να αδειάσει το δοχείο.

Λύση:

Το νερό που εκρέει σε χρόνο dt δημιουργεί έναν κύλινδρο ύψους udt, ακτίνας 0.025 m και όγκου $V_1 = \pi(0.025)^2 udt$ m^3 $\Leftrightarrow V_1 = \pi(0.025)^2 \cdot 0.6\sqrt{2gh}\cdot dt$.

Επίσης αν -dh είναι η ελάττωση του ύψους του νερού στο δοχείο σε χρόνο dt, η ελάττωση του όγκου του νερού στο δοχείο σε χρόνο dt είναι $V_2 = -\pi(0.3)^2 dh$ m^3.



Επομένως: $V_1 = V_2 \Leftrightarrow$

$\pi(0.025)^2\sqrt{2gh}dt = -\pi(0.3)^2 dh \Leftrightarrow dt =$

$$\frac{-0.3\cdot 0.3dh}{(0.025)^2\cdot 0.6\sqrt{2\cdot 9.8h}} =$$

$$\frac{-0.3dh}{(0.025)^2\cdot 2\sqrt{19.6h}} =$$

$$\frac{-0.3dh}{0.025\cdot 0.05\cdot\sqrt{19.6h}} =$$

$$\frac{-3dh}{0.025\cdot 0.5\cdot 4.43\sqrt{h}} =$$

$$\frac{-3000000dh}{25\cdot 5\cdot 443\sqrt{h}} = \frac{-3000000dh}{55375\sqrt{h}} =$$

$-54\frac{dh}{\sqrt{h}}$.

Αρα: $\int dt = \int -54\frac{dh}{\sqrt{h}} \Leftrightarrow t = \int h^{-1/2}dh \Leftrightarrow t = -54\frac{h^{1/2}}{1/2} + C \Leftrightarrow$

$t = -108\sqrt{h} + C$ (1)

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $h = 1.225$ m, οπότε η (1) δίνει:

$0 = -108\sqrt{1.225} + C \Leftrightarrow C \approx 108 \cdot 1.11 \approx 120$

Αρα: $t = -108\sqrt{h} + 120$. Οταν αδειάσει το δοχείο είναι $h = 0$, οπότε:

$t = 120$ sec $= 2$ min.

Διαφορικές εξισώσεις

1. Ορισμοί

Στις αλγεβρικές εξισώσεις οι άγνωστοι ζητούνται στο πεδίο των πραγματικών αριθμών ή στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών. Υπάρχουν όμως προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις των οποίων οι άγνωστοι είναι συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών καθώς και παράγωγοι διαφόρων τάξεων των συναρτήσεων αυτών. Οι εξισώσεις του είδους αυτού, ονομάζονται **διαφορικές εξισώσεις**.

Οι διαφορικές εξισώσεις, των οποίων οι άγνωστοι είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής ονομάζονται <u>συνήθεις διαφορικές εξισώσεις</u>.

Παραδείγματα μορφών διαφορικών εξισώσεων:

$$(\chi^2-\chi)\psi'+[(1+\alpha+\beta)\chi-\gamma]\psi'+\alpha\beta\psi=0$$

$$\chi^2\psi''+(\chi^2-\nu^2)\psi=0$$

$$\psi'+\chi\psi=0$$

$$(\chi^2+\psi^2)+(\chi\psi+\chi^2)\psi'=0$$

Οι διαφορικές εξισώσεις, των οποίων οι άγνωστοι είναι συναρτήσεις περισσοτέρων της μιας μεταβλητών, περιέχουν μερικές παραγώγους, ονομάζονται <u>διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους</u>.

Παραδείγματα

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\chi^2} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

<u>Τάξη</u> διαφορικής εξίσωσης ονομάζουμε τη μεγαλύτερη τάξη της παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Παραδείγματα

Η διαφορική εξίσωση $\psi'=3\chi+2$ είναι πρώτης τάξεως γιατί περιέχει παράγωγο πρώτης τάξεως μόνο.

Οι διαφορικές εξισώσεις $e^{\psi}\psi''+2(\psi')^2=1$, $(\psi'')^3+3(\psi')^7+\psi^3(\psi')^2=5\chi$ είναι δεύτερης τάξεως, αφού η ανώτερη παράγωγος που περιέχουν είναι η δεύτερης τάξεως.

Η διαφορική εξίσωση $4\psi'''+\eta\mu\chi\cdot\psi''+2\chi\psi=0$ είναι τρίτης τάξεως, αφού η ανώτερη παράγωγος που περιέχει είναι τρίτης τάξεως.

Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης, που κάθε μέλος της μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της, είναι η δύναμη στην οποία εμφανίζεται η μεγαλύτερη παράγωγος.

Παραδείγματα

Η εξίσωση $(\psi'')^3+2(\psi')^6+\psi^3(\psi')^2=6\chi$ είναι τρίτου βαθμού, επειδή η ανώτερη παράγωγος (εδώ είναι η δεύτερη παράγωγος) έχει υψωθεί στην τρίτη δύναμη.

Οι εξισώσεις $\psi''+3(\psi')^2-\psi=2$ και $\psi'''+\psi''+\chi\psi=0$ είναι πρώτου βαθμού, γιατί η ανώτερης τάξης παράγωγος είναι υψωμένη στην τρίτη δύναμη.

Σημείωση: Δεν μπορούμε να μιλάμε πάντα για βαθμό διαφορικής εξίσωσης, γιατί τα μέλη της δεν γράφονται πάντα ως πολυώνυμα της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της. (Εδώ είναι η τρίτη παράγωγος) είναι υψωμένη στην πρώτη δύναμη.

Λύση διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη συνάρτηση ψ και ανεξάρτητη μεταβλητή χ, σε κάποιο διάστημα Δ, καλείται μια συνάρτηση $\psi(\chi)$ που επαληθεύει την διαφορική εξίσωση για κάθε χ που ανήκει στο Δ.

Παραδείγματα

1. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $\psi=\kappa\cdot\eta\mu\chi+\lambda\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$ όπου κ,λ αυθαίρετες σταθερές είναι λύση της $\psi''+\psi=0$.

Λύση

Παραγωγίζοντας έχομε: $\psi'=(\kappa\cdot\eta\mu\chi)'+(\lambda\cdot\sigma\upsilon\nu\chi)'=\kappa\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-\lambda\cdot\eta\mu\chi$
$\psi''=(\kappa\cdot\sigma\upsilon\nu\chi)'-(\lambda\cdot\eta\mu\chi)'=-\kappa\cdot\eta\mu\chi-\lambda\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$

οπότε

$\psi''+\psi=(-\kappa\cdot\eta\mu\chi-\lambda\cdot\sigma\upsilon\nu\chi)+(\kappa\cdot\eta\mu\chi+\lambda\cdot\sigma\upsilon\nu\chi)=0$

άρα η ψ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης στο $(-\infty,+\infty)$.

2. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $\psi=\chi^2+1$ ικανοποιεί την εξίσωση $(\psi')^2-4\psi+4=0$.

Λύση

Παραγωγίζοντας έχομε: $\psi'=(\chi^2+1)'=2\chi$ επομένως $(\psi')^2-4\psi+4=(2\chi)^2-4(\chi^2+1)+4=4\chi^2-4\chi^2-4+4=0$.

Άρα η ψ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης.

3. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $\psi=2\chi^2-2$ είναι λύση της. $(\psi')^2+\psi^2=-2$.

Λύση

Η ψ δεν είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης γιατί το πρώτο μέλος της είναι θετικό ενώ το δεύτερο είναι αρνητικό. Δηλαδή εδώ η διαφορική εξίσωση είναι αδύνατη.

Μερική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι μια οποιαδήποτε λύση της.

Γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι το σύνολο όλων των λύσεων της.

Αρχικές - συνοριακές τιμές. Πολλές φορές ζητάμε η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης να ικανοποιεί και ορισμένες συμπληρωματικές συνθήκες για τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σε ένα σημείο του διαστήματος των λύσεων. Τότε έχομε να επιλύσουμε πρόβλημα αρχικών τιμών και τις συμπληρωματικές συνθήκες τις καλούμε αρχικές συνθήκες.

Σε άλλες περιπτώσεις οι συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται σε περισσότερα σημεία του διαστήματος των λύσεων. Τότε έχομε να επιλύσουμε πρόβλημα συνοριακών τιμών και τις συμπληρωματικές συνθήκες τις ονομάζουμε συνοριακές συνθήκες.

Παραδείγματα

1. Το πρόβλημα $3\psi''-2\psi'=e^x$ για $\psi(\pi)=\alpha$ και $\psi'(\pi)=\beta$ είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών γιατί οι συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται σ'ένα σημείο το $\chi=\pi$.

2. Το πρόβλημα $3\psi''-2\psi'=e^x$ για $\psi(1)=\alpha$ και $\psi'(0)=\beta$ είναι ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών γιατί οι συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται σε δύο σημεία $\chi=1$ και $\chi=0$.

Λύση προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών καλείται μια συνάρτηση που επαληθεύει την διαφορική εξίσωση και όλες τις συμπληρωματικές συνθήκες.

Παράδειγμα
Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $\psi=\eta\mu\chi$ είναι λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών $\psi''+\psi=0$, με $\psi(0)=0$ και $\psi'(0)=1$.

Λύση

Παραγωγίζοντας βρίσκομε :

$\psi'=(\eta\mu\chi)'=\sigma\upsilon\nu\chi$, $\psi''=(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-\eta\mu\chi$.

οπότε

$\psi''+\psi=-\eta\mu\chi+\eta\mu\chi=0$

άρα η ψ=ημχ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης. Έχομε επίσης ψ(0)=ημ0=0 και ψ'(0)=συν0=1. Άρα ικανοποιούνται και οι αρχικές συνθήκες. Επομένως η συνάρτηση ψ=ημχ είναι μια λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών.

2. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.

Γενική μορφή: Η διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές έχει τις εξής μορφές:

$$A(\chi)+B(\psi)\psi'=0 \quad \text{ή} \quad \psi'=A(\chi)B(\psi)$$

Λύση της $A(\chi)+B(\psi)\psi'=0$.

Αυτή γράφεται:

$$A(\chi)+B(\psi)\frac{d\psi}{d\chi}=0 \iff B(\psi)d\psi=-A(\chi)d\chi$$

Ολοκληρώνοντας έχομε:

$$\int B(\psi)d\psi=\int -A(\chi)d\chi+c$$

που είναι και η γενική λύση της δοθείσης

Λύση της $\psi'=A(\chi)B(\psi)$.

Αυτή γράφεται:

$$\frac{d\psi}{d\chi}=A(\chi)B(\psi) \iff d\psi=A(\chi)B(\psi)dx \iff \frac{d\psi}{B(\psi)}=A(\chi)d\chi$$

Ολοκληρώνοντας έχομε:

$$\int \frac{d\psi}{B(\psi)}=\int A(\chi)d\chi+c$$

που είναι και η γενική λύση της δοθείσης.

Σημείωση: Το πρόβλημα των αρχικών τιμών όταν η εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές αντιμετωπίζεται αν λύσουμε τη διαφορική εξίσωση και μετά να προσδιορίσουμε τη σταθερά c, έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη.

Παραδείγματα.

2.1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\chi-\psi^2\psi'=0$.

Λύση

$$\chi-\psi^2\frac{d\psi}{d\chi}=0 \Longleftrightarrow \chi d\chi=\psi^2 d\psi.$$

Ολοκληρώνοντας έχομε:

$$\int\chi d\chi=\int\psi^2 d\psi+c \Longleftrightarrow \frac{\chi^2}{2}=\frac{\psi^3}{3}+c \Longleftrightarrow 3\chi^2=2\psi^3+6c \Longleftrightarrow$$

$$\psi^3=\frac{-\kappa+3\chi^2}{2} \Longleftrightarrow \psi=\left(\frac{-\kappa+3\chi^2}{2}\right)^{1/3} \quad \text{όπου } \kappa=6c.$$

2.1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(3+\psi^2)+\chi\psi\psi'=0$.

Λύση

$$(3+\psi^2)+\chi\psi\psi'=0 \Longleftrightarrow (3+\psi^2)+\chi\psi\frac{d\psi}{d\chi}=0 \Longleftrightarrow (3+\psi^2)d\chi+\chi\psi d\psi=0 \Longleftrightarrow$$

$$(3+\psi^2)d\chi=-\chi\psi d\psi \Longleftrightarrow \frac{(3+\psi^2)d\chi}{(3+\psi^2)\chi}=\frac{-\chi\psi d\psi}{(3+\psi^2)\chi} \Longleftrightarrow \frac{d\chi}{\chi}=-\frac{\psi d\psi}{3+\psi^2}$$

Ολοκληρώνοντας, έχομε:

$$\int\frac{d\chi}{\chi}=-\frac{1}{2}\int\frac{2\psi d\psi}{3+\psi^2}+c \Longleftrightarrow \ln|\chi|=-\frac{1}{2}\int\frac{d(3+\psi^2)}{(3+\psi^2)}+c \Longleftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \ln|\chi| = -1/2\cdot\ln|3+\psi^2| + c \Leftrightarrow 2\ln|\chi| + \ln|3+\psi^2| = 2c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(\chi^2(3+\psi^2)) = \ln e^{2c} \Leftrightarrow \chi^2(3+\psi^2) = e^{2c} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+\psi^2 = \kappa/\chi^2 \Leftrightarrow \psi^2 = \kappa/\chi^2 - 3 \Leftrightarrow \psi^2 = (\kappa-3\chi^2)/\chi^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \psi = \sqrt{(\kappa-3\chi^2)}/|\chi|$.

2.1.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\chi(2+\psi^2)+\psi(2+\chi^2)\psi'=0$.

Λύση

$$\chi(2+\psi^2)+\psi(2+\chi^2)\psi' = 0 \Leftrightarrow \chi(2+\psi^2)+\psi(2+\chi^2)\frac{d\psi}{d\chi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi(2+\psi^2)d\chi = -\psi(2+\chi^2)d\psi \Leftrightarrow \frac{\chi(2+\psi^2)d\chi}{(2+\psi^2)(2+\chi^2)} = \frac{-\psi(2+\chi^2)d\psi}{(2+\psi^2)(2+\chi^2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\chi d\chi}{(2+\chi^2)} = \frac{-\psi d\psi}{(2+\psi^2)}$$

Ολοκληρώνοντας έχομε:

$$\int\frac{2\chi d\chi}{(2+\chi^2)} = -\int\frac{2\psi d\psi}{(2+\psi^2)} + c \Leftrightarrow \int\frac{d(2+\chi^2)}{(2+\chi^2)} = -\int\frac{d(2+\psi^2)}{(2+\psi^2)} + c \Leftrightarrow$$

$\ln(2+\chi^2) = -\ln(2+\psi^2) + c \Leftrightarrow \ln(2+\chi^2) + \ln(2+\psi^2) = c \Leftrightarrow$

$\ln((2+\chi^2)(2+\psi^2)) = \ln e^c \Leftrightarrow (2+\chi^2)(2+\psi^2) = \kappa \quad (e^c=\kappa) \Leftrightarrow$

$2+\psi^2 = \kappa/(2+\chi^2) \Leftrightarrow \psi^2 = \kappa/(2+\chi^2) - 2 \Leftrightarrow$

$\psi = \sqrt{(\kappa/(2+\chi^2) - 2)}$.

2.1.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\chi\psi(2+\chi^2)\psi'=(2+\psi^2)$.

Λύση

$$\chi\psi(2+\chi^2)\psi' = (2+\psi^2) \Leftrightarrow \chi\psi(2+\chi^2)\frac{d\psi}{d\chi} = (2+\psi^2) \Leftrightarrow$$

$$\chi\psi(2+\chi^2)d\psi = (2+\psi^2)d\chi \Leftrightarrow \frac{\chi\psi(2+\chi^2)d\psi}{\chi(2+\chi^2)(2+\psi^2)} = \frac{(2+\psi^2)d\chi}{\chi(2+\chi^2)(2+\psi^2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\psi d\psi}{2+\psi^2} = \frac{d\chi}{\chi(2+\chi^2)}$$

Ολοκληρώνοντας έχομε:

$$\int\frac{\psi d\psi}{2+\psi^2} = \int\frac{d\chi}{\chi(2+\chi^2)} + c \Leftrightarrow \int\frac{2\psi d\psi}{2+\psi^2} = \int\frac{2d\chi}{\chi(2+\chi^2)} + 2c \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{d(\psi^2+2)}{2+\psi^2} = \int\left(\frac{1}{\chi} - \frac{\chi}{2+\chi^2}\right)d\chi + c \Leftrightarrow \ln(2+\psi^2) = \int\frac{d\chi}{\chi} - \int\frac{\chi d\chi}{2+\chi^2} + c$$

$$\ln(2+\psi^2) = \ln|\chi| - \frac{1}{2}\int\frac{d(2+\chi^2)}{2+\chi^2} + c \Leftrightarrow$$

$$\ln(2+\psi^2) = \ln|\chi| - \frac{1}{2}\ln(\chi^2+2) + c \Leftrightarrow$$

$$2\ln(2+\psi^2) + \ln(\chi^2+2) = 2\ln|\chi| + \ln\kappa \quad (2c=\ln\kappa) \Leftrightarrow$$

$$\ln((2+\psi^2)^2(\chi^2+2)) = \ln(\kappa\chi^2) \Leftrightarrow (2+\psi^2)^2(\chi^2+2) = \kappa\chi^2$$

Αφού το $\frac{2d\chi}{\chi(2+\chi^2)}$ αναλύεται ως εξής:

$$\frac{2}{\chi(2+\chi^2)} = \frac{A}{\chi} + \frac{B\chi+\Gamma}{\chi^2+2} \Leftrightarrow 2 = A\chi^2 + 2A + B\chi^2 + \Gamma\chi \Leftrightarrow$$

$0\chi^2 + 0\chi + 2 = (A+B)\chi^2 + \Gamma\chi + 2A \Leftrightarrow$

$A+B=0\ ,\quad \Gamma=0\ ,\quad 2A=2 \Leftrightarrow A=1\ ,\quad 1+B=0 \Leftrightarrow B=-1$

Άρα $\dfrac{2}{\chi(\chi^2+2)} = \dfrac{1}{\chi} + \dfrac{-\chi}{\chi^2+2}$.

2.1.5 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$e^x dx - \psi d\psi = 0,\quad \psi(0)=1$$

Λύση

Η δοθείσα γράφεται $e^x dx = \psi d\psi$ ολοκληρώνοντας τα μέλη της έχομε

$$\int e^x dx = \int \psi d\psi + c \Leftrightarrow e^x = \frac{\psi^2}{2} + c \Leftrightarrow 2e^x = \psi^2 + 2c \Leftrightarrow$$

$2e^x - \kappa = \psi^2$ όπου $\kappa=2c \Leftrightarrow \psi=\sqrt{(2e^x-\kappa)}$.

Για να ικανοποιείται η συνθήκη $\psi(0)=1$, πρέπει η $\psi(\chi)=\sqrt{(2e^x-\kappa)}$ να δίνει:

$\psi(0)=\sqrt{(2e^0-\kappa)}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2-\kappa=1} \Leftrightarrow 2-\kappa=1 \Leftrightarrow \kappa=1$

άρα

$\psi=\sqrt{2e^x-1}$.

2.1.6 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$(\chi^2+1)d\chi + \frac{1}{\psi} d\psi = 0\ ,\quad \psi(-1)=1$$

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε:

$$\int (\chi^2+1)d\chi + \int_{\psi}^{1} -d\psi = c \Leftrightarrow \frac{\chi^3}{3} + \chi + \ln|\psi| = c \Leftrightarrow$$

$$\chi^3 + 3\chi + 3\ln|\psi| = 3c \Leftrightarrow \ln|\psi|^3 = \kappa - \chi^3 - 3\chi \quad (\kappa=3c) \Leftrightarrow$$

$$\ln|\psi|^3 = \ln e^{\kappa-\chi^3-3\chi} \Leftrightarrow |\psi|^3 = e^{\kappa-\chi^3-3\chi} \Leftrightarrow$$

$$|\psi| = \sqrt[3]{e^{\kappa-\chi^3-3\chi}} \quad \text{και επειδή } \psi(-1)=1 \text{ η}$$

$$|\psi(\chi)| = \sqrt[3]{e^{\kappa-\chi^3-3\chi}} \quad \text{δίνει} \quad 1 = \sqrt[3]{e^{\kappa-(-1)^3-3(-1)}} \Leftrightarrow$$

$$1 = \sqrt[3]{e^{\kappa+1+3}} \Leftrightarrow 1 = e^{\kappa+4} \Leftrightarrow \kappa+4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -4.$$

Άρα

$$\psi(\chi) = \sqrt[3]{e^{-4-\chi^3-3\chi}} \Leftrightarrow \psi = (e^{-4-\chi^3-3\chi})^{1/3} \Leftrightarrow$$

$$\psi = e^{1/3(-4-\chi^3-3\chi)}.$$

2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.

Γενική μορφή: $f(x,\psi)dx + g(x,\psi)d\psi = 0$, όπου $f(x,\psi)$, $g(x,\psi)$ ομογενείς συναρτήσεις ως προς χ, ψ του ίδιου βαθμού ομογένειας.

Δηλαδή

$$f(x,\psi) = \chi^{\mu}F(\psi/\chi) \quad \text{και} \quad g(x,\psi) = \chi^{\mu}Q(\psi/\chi) \quad (1)$$

ή

$$f(x,\psi) = \psi^{\mu}F(\chi/\psi) \quad \text{και} \quad g(x,\psi) = \psi^{\mu}Q(\chi/\psi) \quad (2)$$

Έτσι με βάση την (1) η δοσμένη διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\chi^{\mu}F(\psi/\chi)dx + \chi^{\mu}Q(\psi/\chi)d\psi = 0 \quad \text{που για } \chi^{\mu} \neq 0 \text{ δίδει}$$

$$F(\psi/\chi)dx + Q(\psi/\chi)d\psi = 0 \Leftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{F(\psi/\chi)}{Q(\psi/\chi)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = P(\psi/\chi).$$

Για να βρούμε τη γενική λύση αυτής θέτομε $\psi/\chi=\omega \Leftrightarrow \psi=\chi\omega$ οπότε

$$d\psi = \omega dx + x d\omega \Leftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi}$$

Έτσι η δοθείσα γράφεται

$$\omega + \chi\frac{d\omega}{dx} = P(\omega)$$

που δίνει

$$\chi d\omega = P(\omega)dx - \omega dx \Leftrightarrow$$

$$\chi d\omega = (P(\omega) - \omega)dx \Leftrightarrow \frac{d\omega}{P(\omega) - \omega} = \frac{d\chi}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{d\omega}{P(\omega) - \omega} = \int\frac{d\chi}{\chi} + c \Leftrightarrow \int\frac{d\omega}{P(\omega) - \omega} = \ln|\chi| + \ln|\kappa| \quad (c=\ln|\kappa|)$$

$$\int\frac{d\omega}{P(\omega) - \omega} = \ln|\kappa\chi| \Leftrightarrow \ln|\kappa\chi| = \ln e^{\left(\int\frac{d\omega}{P(\omega) - \omega}\right)} \Leftrightarrow$$

$$|\kappa\chi| = e^{\int\frac{d\omega}{P(\omega) - \omega}}.$$

Επίσης με βάση την (2) η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται:

$\psi^{\mu}F(\chi/\psi)dx + \psi^{\mu}Q(\chi/\psi)d\psi = 0$ που για $\psi^{\mu}<>0$ δίδει

$$F(\chi/\psi)dx + Q(\chi/\psi)d\psi = 0 \Leftrightarrow \frac{d\chi}{d\psi} = -\frac{Q(\chi/\psi)}{F(\chi/\psi)} \Leftrightarrow \frac{dx}{d\psi} = P(\chi/\psi)$$

και για να βρούμε τη γενική λύση θέτομε:

$$\chi/\psi=\omega \Leftrightarrow \chi=\psi\omega \quad \text{και} \quad dx=d(\psi\omega) \Leftrightarrow dx=\omega d\psi+\psi d\omega \Leftrightarrow \frac{dx}{d\psi} = \omega+\psi\frac{d\omega}{d\psi}$$

Έτσι η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\omega + \psi\frac{d\omega}{d\psi} = P(\omega) \Leftrightarrow \omega d\psi + \psi d\omega = P(\omega)d\psi \Leftrightarrow$$

$$\psi d\omega = (P(\omega)-\omega)d\psi \Leftrightarrow \frac{d\omega}{P(\omega)-\omega} = \frac{d\psi}{\psi}$$

ολοκληρώνοντας λαμβάνομε:

$$\int\frac{d\omega}{P(\omega)-\omega} = \int\frac{d\psi}{\psi} + c \Leftrightarrow \int\frac{d\omega}{P(\omega)-\omega} = \ln|\psi| + \ln|\kappa| \quad (\text{όπου } c=\ln|\kappa|)$$

$$\ln|\kappa\psi| = \ln e^{\left(\int\frac{d\omega}{P(\omega)-\omega}\right)} \Leftrightarrow |\kappa\psi| = e^{\left(\int\frac{d\omega}{P(\omega)-\omega}\right)}.$$

Παραδείγματα

2.2.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\chi d\psi - (\psi-\chi)d\chi = 0.$$

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι ομογενής αφού οι παραστάσεις $f(x,\psi)=-(\psi-\chi)$, $g(x,\psi)=\chi$ είναι ομογενείς πρώτου βαθμού. Δηλαδή η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής:

$$f(\chi,\psi)d\chi + g(x,\psi)d\psi = 0$$

και γράφεται:

$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\psi-\chi}{\chi} \quad \text{ή} \quad \frac{d\chi}{d\psi}=\frac{\chi}{\psi-\chi}$$

οπότε υπάρχουν δύο τρόποι λύσης.

1ος τρόπος. Θέτομε $\psi/\chi=\omega \quad (\chi<>0) \Leftrightarrow \psi=\chi\omega$ και $\frac{d\psi}{d\chi}=\omega+\chi\frac{d\omega}{d\chi}$

έτσι έχομε: $\omega+\chi\frac{d\omega}{d\chi}=\frac{\chi\omega-\chi}{\chi} \Leftrightarrow \omega+\chi\frac{d\omega}{d\chi}=\frac{\chi(\omega-1)}{\chi} \Leftrightarrow$

$\omega d\chi+\chi d\omega=(\omega-1)d\chi \Leftrightarrow \omega d\chi+\chi d\omega=\omega d\chi-d\chi \Leftrightarrow \chi d\omega=-d\chi \Leftrightarrow$

$d\omega=-\frac{d\chi}{\chi}$ και από τη διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

και ολοκληρώνοντας λαμβάνομε:

$$\int d\omega=-\int\frac{d\chi}{\chi}+c \Leftrightarrow \omega=-\ln|\chi|+\ln|\kappa| \quad (\text{όπου } c=\ln|\kappa|) \Leftrightarrow$$

$\omega=\ln|\kappa/\chi| \Leftrightarrow \psi/\chi=\ln|\kappa/\chi| \Leftrightarrow \psi=\chi\ln|\kappa/\chi|$.

2ος τρόπος. Γράφω τη δοθείσα υπό τη μορφή $\frac{d\chi}{d\psi}=\frac{\chi}{\psi-\chi}$ και

θέτοντας $\chi/\psi=\omega \Leftrightarrow \chi=\psi\omega \Leftrightarrow \frac{d\chi}{d\psi}=\omega+\psi\frac{d\omega}{d\psi}$

έχω $\omega+\psi\frac{d\omega}{d\psi}=\frac{\psi\omega}{\psi-\psi\omega} \Leftrightarrow \omega+\psi\frac{d\omega}{d\psi}=\frac{\psi\omega}{\psi(1-\omega)} \Leftrightarrow$

$\omega(1-\omega)d\psi+\psi(1-\omega)d\omega=\omega d\psi \Leftrightarrow \omega d\psi-\omega^2 d\psi+\psi d\omega-\psi\omega d\omega=\omega d\psi \Leftrightarrow$

$\omega^2 d\psi=\psi(1-\omega)d\omega \Leftrightarrow \frac{\psi(1-\omega)d\omega}{\psi\omega^2}=\frac{\omega^2 d\psi}{\psi\omega^2} \Leftrightarrow \frac{(1-\omega)d\omega}{\omega^2}=\frac{d\psi}{\psi} \Leftrightarrow$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνοντας λαμβάνομε:

$$\int\frac{(1-\omega)d\omega}{\omega^2} = \int\frac{d\psi}{\psi} + c \Longleftrightarrow \int\omega^{-2}d\omega - \int\frac{d\omega}{\omega} = \int\frac{d\psi}{\psi} + c \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\omega^{-1}}{-1} - \ln|\omega| = \ln|\psi| + \ln|\kappa| \quad (\text{όπου } c=\ln|\kappa|) \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\omega} = \ln|\omega\psi\kappa| \Longleftrightarrow -\frac{1}{\chi/\psi} = \ln|\psi\kappa\chi/\psi| \Longleftrightarrow -\frac{\psi}{\chi} = \ln|\kappa\chi| \Longleftrightarrow$$

$$\psi = -\chi\ln|\kappa\chi| \Longleftrightarrow \psi = \chi\ln|1/(\kappa\chi)| \Longleftrightarrow \psi = \chi\ln|\lambda/\chi| \quad \text{όπου } \lambda=1/\kappa.$$

2.2.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(\chi^2+\psi^2)d\chi + \chi\psi d\psi = 0.$$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση είναι ομογενής αφού οι παραστάσεις $f(x,\psi)=\chi^2+\psi^2$, $g(\chi,\psi)=\chi\psi$ είναι ομογενείς δεύτερου βαθμού. Δηλαδή η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής

$$f(x,\psi)d\chi + g(\chi,\psi)d\psi = 0$$

και γράφεται:

$$\frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi\psi} \quad \text{ή} \quad \frac{d\chi}{d\psi} = -\frac{\chi\psi}{\chi^2+\psi^2}$$

οπότε υπάρχουν δύο τρόποι λύσης.

1ος τρόπος. Θέτομε $\psi/\chi=\omega \Longleftrightarrow \psi=\chi\omega$ και $\frac{d\psi}{d\chi} = \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi}$

έτσι η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = -\frac{\chi^2+\chi^2\omega^2}{\chi\chi\omega} \Leftrightarrow \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = -\frac{\chi^2(1+\omega^2)}{\chi^2\omega} \quad (\chi<>0) \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 d\chi + \chi\omega d\omega = -1 d\chi - \omega^2 d\chi \Leftrightarrow (2\omega^2+1)d\chi = -\chi\omega d\omega \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2\omega^2+1)d\chi}{(2\omega^2+1)\chi} = \frac{-\chi\omega d\omega}{(2\omega^2+1)\chi} \Leftrightarrow \frac{d\chi}{\chi} = -\frac{\omega d\omega}{(2\omega^2+1)} \Leftrightarrow \int\frac{d\chi}{\chi} = -\int\frac{\omega d\omega}{(2\omega^2+1)} + c$$

$$\Leftrightarrow 4\int\frac{d\chi}{\chi} = -\int\frac{4\omega d\omega}{(2\omega^2+1)} + 4c \Leftrightarrow 4\int\frac{d\chi}{\chi} = -\int\frac{d(2\omega^2+1)}{(2\omega^2+1)} + 4c \Leftrightarrow$$

$$4\ln|\chi| = -\ln(2\omega^2+1) + 4c \Leftrightarrow \ln x^4 + \ln(2\psi^2/\chi^2+1) = \ln|\kappa|$$

$$(\ln|\kappa| = 4c)$$

$$\ln\left|\chi^4\left(\frac{2\psi^2}{\chi^2}+1\right)\right| = \ln|\kappa| \Leftrightarrow 2\chi^2\psi^2 + \chi^4 = |\kappa| \Leftrightarrow \psi^2 = \frac{|\kappa| - \chi^4}{2\chi^2}$$

$$\Leftrightarrow \psi = \sqrt{(|\kappa| - \chi^4)/(2\chi^2)}.$$

2ος τρόπος. Η δοθείσα γράφεται $\frac{d\chi}{d\psi} = -\frac{\chi\psi}{\chi^2+\psi^2}$. Θέτομε $\chi/\psi = \omega \Leftrightarrow$

$\chi = \omega\psi$ και $\frac{d\chi}{d\psi} = \omega + \psi\frac{d\omega}{d\psi}$ οπότε η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\omega + \psi\frac{d\omega}{d\psi} = -\frac{\psi^2\omega}{\psi^2(\omega^2+1)} \Leftrightarrow \omega + \psi\frac{d\omega}{d\psi} = -\frac{\omega}{\omega^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\omega(\omega^2+1)d\psi + \psi(\omega^2+1)d\omega = -\omega d\psi \Leftrightarrow$$

$$(\omega^3+\omega+\omega)d\psi = -\psi(\omega^2+1)d\omega \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\omega^3+2\omega)d\psi}{(\omega^3+2\omega)\psi} = \frac{-\psi(\omega^2+1)d\omega}{(\omega^3+2\omega)\psi} \Leftrightarrow \frac{d\psi}{\psi} = \frac{-(\omega^2+1)d\omega}{(\omega^2+2)\omega}$$ και ολοκληρώνοντας

$$\int\frac{d\psi}{\psi} = \int\frac{-(\omega^2+1)d\omega}{(\omega^2+2)\omega} + c \Leftrightarrow \ln|\psi| = -\int(\frac{A}{\omega} + \frac{B\omega+\Gamma}{\omega^2+2})d\omega + c \Leftrightarrow$$

$$\ln|\psi| = -\int\frac{1/2d\omega}{\omega} - \int\frac{1/2\omega d\omega}{\omega^2+2} + c \Leftrightarrow \ln|\psi| = -\frac{1}{2}\int\frac{d\omega}{\omega} - \frac{1}{4}\int\frac{d(\omega^2+2)}{\omega^2+2} + c$$

$$\Leftrightarrow \ln|\psi| = -\frac{1}{2}\ln|\omega| - \frac{1}{4}\ln(\omega^2+2) + c \Leftrightarrow$$

$$4\ln|\psi| = -2\ln|x/\psi| - \ln(\chi^2/\psi^2+2) + \ln|\kappa| \quad (\text{όπου } \ln|\kappa|=c)$$

$$\ln\psi^4 = \ln\frac{|\kappa|}{\chi^2/\psi^2(\chi^2/\psi^2+2)} \Leftrightarrow \psi^4 = \frac{|\kappa|\psi^4}{\chi^4+2\chi^2\psi^2} \Leftrightarrow \chi^4+2\chi^2\psi^2 = |\kappa|$$

$$\Leftrightarrow 2\chi^2\psi^2 = \kappa - \chi^4 \Leftrightarrow \psi = \sqrt{(|\kappa|-\chi^2)/2\chi^2}.$$

Αφού τα A,B υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{A}{\omega} + \frac{B\omega+\Gamma}{\omega^2+2} = \frac{\omega^2+1}{\omega(\omega^2+2)} \Leftrightarrow 1\omega^2 + 0\omega + 1 = A\omega^2 + 2A + B\omega^2 + \Gamma\omega \Leftrightarrow$$

$A+B=1$, $\Gamma=0$, $2A=1$, $\Leftrightarrow A=B=1/2$.

2.2.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\psi' = \frac{2\psi^4+\chi^4}{\chi\psi^3}$$

Λύση

$$\psi' = \frac{2\psi^4+\chi^4}{\chi\psi^3} \Longleftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{2\psi^4+\chi^4}{\chi\psi^3} \Longleftrightarrow (2\psi^4+\chi^4)d\chi - \chi\psi^3 d\psi = 0$$

Δηλαδή είναι διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$f(x,\psi)d\chi + g(\chi,\psi)d\psi = 0$$

με $f(x,\psi)=\chi^4+2\psi^4$, $g(\chi,\psi)=-\chi\psi^3$ που είναι παραστάσεις ομογενείς τετάρτου βαθμού.

Θέτομε $\psi/\chi=\omega \Longleftrightarrow \psi=\chi\omega$ και $\frac{d\psi}{d\chi} = \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi}$

άρα η $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{2\psi^4+\chi^4}{\chi\psi^3}$ γράφεται $\omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = \frac{2\chi^4\omega^4+\chi^4}{\chi\chi^3\omega^3} \Longleftrightarrow$

$$\omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = \frac{\chi^4(2\omega^4+1)}{\chi^4\omega^3} \Longleftrightarrow \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = \frac{2\omega^4+1}{\omega^3} \Longleftrightarrow$$

$$\omega^4 d\chi + \omega^3\chi d\omega = 2\omega^4 d\chi + d\chi \Longleftrightarrow \omega^3\chi d\omega = (\omega^4+1)d\chi \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\omega^3\chi d\omega}{(\omega^4+1)\chi} = \frac{(\omega^4+1)d\chi}{(\omega^4+1)\chi} \Longleftrightarrow \frac{\omega^3 d\omega}{\omega^4+1} = \frac{d\chi}{\chi}$$ και ολοκληρώνοντας

$$\int \frac{\omega^3 d\omega}{\omega^4+1} = \int \frac{d\chi}{\chi} + c \Longleftrightarrow \frac{1}{4}\int \frac{4\omega^3 d\omega}{\omega^4+1} = \int \frac{d\chi}{\chi} + c \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{d(\omega^4+1)}{(\omega^4+1)} = \ln|\chi| + c \Longleftrightarrow \frac{1}{4}\ln|\omega^4+1| = \ln|\chi| + c \Longleftrightarrow$$

$$\ln|\omega^4+1| = 4\ln|\chi| + 4c \Longleftrightarrow \ln|\psi^4/\chi^4+1| = \ln|\chi^4| + \ln|\kappa|$$

$(\ln|\kappa|=4c)$

$$\ln\left|\frac{\psi^4+\chi^4}{\chi^4}\right| - \ln|\chi^4| = \ln|\kappa| \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{\psi^4+\chi^4}{-\chi^4\chi^4}\right| = \ln|\kappa| \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\psi^4+\chi^4}{\chi^8} = |\kappa| \Longleftrightarrow \psi^4+\chi^4 = |\kappa|\chi^8 \Longleftrightarrow \psi^4 = |\kappa|\chi^8 - \chi^4.$$

2.2.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\psi d\chi - (\chi+\sqrt{\chi\psi})d\psi = 0.$$

Λύση

Θεωρώ $f(\chi,\psi)=\psi$, $g(\chi,\psi)=-(\chi+\sqrt{\chi\psi})$ έτσι η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής:

$$f(\chi,\psi)d\chi + g(\chi,\psi)d\psi = 0.$$

Δηλαδή είναι ομογενής αφού οι παραστάσεις ψ, $-(\chi+\sqrt{\chi\psi})$ είναι ομογενείς πρώτου βαθμού. Επομένως η δοθείσα γράφεται:

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\psi}{\chi+\sqrt{\chi\psi}} \quad \text{και θέτοντας } \psi/\chi=\omega \Longleftrightarrow \psi=\chi\omega \text{ και } \frac{d\psi}{d\chi} = \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi}$$

οπότε έχομε:

$$\frac{\chi\omega}{\chi+\sqrt{\chi\chi\omega}} = \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} \Longleftrightarrow \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = \frac{\chi\omega}{\chi(1+\sqrt{\omega})} \Longleftrightarrow$$

$$\omega(1+\sqrt{\omega})d\chi + \chi(1+\sqrt{\omega})d\omega = \omega d\chi \Longleftrightarrow \omega d\chi+\omega\sqrt{\omega}d\chi - \omega d\chi = -\chi(1+\sqrt{\omega})d\omega$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\omega\sqrt{\omega}d\chi}{\chi\omega\sqrt{\omega}} = \frac{-\chi(1+\sqrt{\omega})d\omega}{\chi\omega\sqrt{\omega}} \Longleftrightarrow -\frac{d\chi}{\chi} = \frac{(1+\sqrt{\omega})d\omega}{\omega\sqrt{\omega}}$$

ολοκληρώνοντας έχομε:

$$-\int\frac{d\chi}{\chi} = \int\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}d\omega + \int\frac{\sqrt{\omega}d\omega}{\omega\sqrt{\omega}} + c \Leftrightarrow -\ln|\chi| = \int\omega^{-3/2}d\omega + \int\frac{d\omega}{\omega} + c \Leftrightarrow$$

$$-\ln|\chi| = \frac{\omega^{-3/2+1}}{-3/2+1} + \ln|\omega| + c \Leftrightarrow -\ln|\chi| = \frac{\omega^{-1/2}}{-1/2} + \ln|\omega| + \ln|\kappa|$$

$$-\ln|\chi| = \frac{-2}{\sqrt{\omega}} + \ln|\kappa\omega| \Leftrightarrow -\ln|\chi| - \ln|\kappa\omega| = \frac{-2}{\sqrt{\omega}} \Leftrightarrow \ln|\chi\kappa\omega| = \frac{2}{\sqrt{\omega}}$$

$$\Leftrightarrow \ln|\chi\kappa\psi/\chi| = \frac{2}{\sqrt{\psi/\chi}} \Leftrightarrow \ln|\kappa\psi| = \frac{2\sqrt{\chi}}{\sqrt{\psi}} \Leftrightarrow \ln|\kappa\psi| = \ln e^{2\sqrt{\chi}/\sqrt{\omega}}$$

$$\kappa\psi = e^{2\sqrt{\chi}/\sqrt{\omega}} \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{\kappa}e^{2\sqrt{\chi}/\sqrt{\omega}}.$$

2.2.5 Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών:

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{3\chi^2-\psi^2}{2\chi\psi} \quad \text{με } \psi(1) = 1$$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση είναι ομογενής. Θέτω $\psi/\chi=\omega$ $(\chi\lessgtr 0) \Leftrightarrow \psi=\chi\omega$ και

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi}$$

Έτσι η δοσμένη διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = \frac{3\chi^2-\chi^2\omega^2}{2\chi\chi\omega} \Leftrightarrow \omega + \chi\frac{d\omega}{d\chi} = \frac{\chi^2(3-\omega^2)}{2\chi^2\omega} \Leftrightarrow$$

$$2\omega^2 d\chi + 2\omega\chi d\omega = 3d\chi - \omega^2 d\chi \Leftrightarrow 3\omega^2 d\chi - 3d\chi = -2\omega\chi d\omega \Leftrightarrow$$

$$3(1-\omega^2)d\chi = 2\omega\chi d\omega \Leftrightarrow \frac{3(1-\omega^2)d\chi}{(1-\omega^2)\chi} = \frac{2\omega\chi d\omega}{(1-\omega^2)\chi} \Leftrightarrow \frac{3d\chi}{\chi} = \frac{2\omega d\omega}{1-\omega^2}$$

που είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνοντας έχομε:

$$\int\frac{3d\chi}{\chi} = -\int\frac{2\omega d\omega}{\omega^2-1} + c \Leftrightarrow 3\int\frac{d\chi}{\chi} = -\int\frac{d(\omega^2-1)}{\omega^2-1} + c \Leftrightarrow$$

$$3\ln|\chi| = -\ln|\omega^2-1| + c \Leftrightarrow \ln|\chi|^3 + \ln|\psi^2/\chi^2-1| = \ln|\kappa| \Leftrightarrow$$

$$\ln\left|\chi^3\frac{\psi^2-\chi^2}{\chi^2}\right| = \ln|\kappa| \Leftrightarrow \chi(\psi^2-\chi^2) = |\kappa| \Leftrightarrow \chi\psi^2-\chi^3 = |\kappa| \Leftrightarrow$$

$$\psi^2 = \frac{|\kappa|+\chi^3}{\chi} \Leftrightarrow \psi = \sqrt{(|\kappa|+\chi^3)/\chi}$$ που είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Για να πληρούται η συνθήκη $\psi(1)=1$ πρέπει η $\psi(\chi)=\sqrt{(|\kappa|+\chi^3)/\chi}$ να δίδει $\psi(1)=\sqrt{(|\kappa|+1^3)/1} \Leftrightarrow |\kappa|+1=1 \Leftrightarrow \kappa=0$.

Άρα για $\psi(1)=1$ η μερική λύση είναι $\psi=\sqrt{\chi^2} \Leftrightarrow \psi=|\chi|$.

3. Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενείς Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Γενική μορφή: $\psi' = f\left(\frac{\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1}{\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2}\right)$

Για να αναγάγουμε τη μορφή αυτής της διαφορικής εξίσωσης σε ομογενή, επιχειρούμε μετασχηματισμούς αναλόγως περιπτώσεων.

3.1 $$\psi' = f\left(\frac{\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1}{\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2}\right) \quad \text{με} \quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} \neq 0.$$

Λύση

1ος τρόπος : Θέτομε

$$\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1 = \omega \qquad \alpha_1 d\chi+\beta_1 d\psi = d\omega$$

διαφορίζοντας λαμβάνομε

$$\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2 = \varphi \qquad \alpha_2 d\chi+\beta_2 d\psi = d\varphi.$$

Τις δύο τελευταίες σχέσεις τις θεωρούμε ως σύστημα με αγνώστους $d\chi$, $d\psi$. Εφ'όσον

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} \neq 0.$$

είναι σύστημα Cramer και επιλυόμενο δίνει τις τιμές των $d\chi$, $d\psi$. Αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε ομογενή διαφορική εξίσωση που επιλύεται θέτοντας $\omega/\varphi=t$.

2ος τρόπος : Επιλύομε το σύστημα

$$\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1 = 0$$

$$\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2 = 0.$$

Έστω (χ_1, ψ_1) η λύση του. Καλούμε $\chi=\chi_1+\omega$, $\psi=\psi_1+\varphi$. Διαφορίζοντες λαμβάνουμε:

$$d\chi=d\omega \quad , \quad d\psi=d\varphi.$$

Έτσι η δοσμένη διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = f\left(\frac{\alpha_1(\chi_1+\omega)+\beta_1(\psi_1+\varphi)+\gamma_1}{\alpha_2(\chi_1+\omega)+\beta_2(\psi_1+\varphi)+\gamma_2}\right) \Longleftrightarrow \frac{d\varphi}{d\omega} = f\left(\frac{(\alpha_1\chi_1+\beta_1\psi_1+\gamma_1)+\alpha_1\omega+\beta_1\varphi}{(\alpha_2\chi_1+\beta_2\psi_1+\gamma_2)+\alpha_2\omega+\beta_2\varphi}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d\varphi}{d\omega} = f\left(\frac{\alpha_1\omega+\beta_1\varphi}{\alpha_2\omega+\beta_2\varphi}\right) \quad \text{αφού } \alpha_1\chi_1+\beta_1\psi_1+\gamma_1 = 0 \text{ και } \alpha_2\chi_1+\beta_2\psi_1+\gamma_2 = 0.$$

εφ'όσον χ_1, ψ_1 λύση του συστήματος:

$$\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1 = 0$$

$$\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2 = 0.$$

Έτσι η διαφορική εξίσωση μετετράπει σε ομογενή και λύνεται καλώντας $\varphi/\omega=t$.

3.1.1 Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(2\chi+3\psi+1)d\chi + (3\chi+4\psi+1)d\psi = 0.$$

Λύση
Η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$\frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{2\chi+3\psi+1}{3\chi+4\psi+1}$, που είναι της μορφής $\psi' = f\left(\frac{\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1}{\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2}\right)$ με

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 8-9 = -1 <> 0.$$

1ος τρόπος λύσης: Θέτομε $2\chi+3\psi+1=\omega$, $3\chi+4\psi+1=\varphi$. Διαφορίζοντες έχομε:

$$2d\chi+3d\psi=d\omega\ ,\quad 3d\chi+4d\psi=d\varphi.$$

Τις δύο τελευταίες εξισώσεις τις θεωρούμε σύστημα με αγνώστους $d\chi$, $d\psi$, το οποίο επιλυόμενο δίνει:

$$dx = \frac{\begin{vmatrix}d\omega & 3\\ d\varphi & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}} = \frac{4d\omega-3d\varphi}{-1} = -4d\omega+3d\varphi.$$

$$d\psi = \frac{\begin{vmatrix} 2 & d\omega \\ 3 & d\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2d\varphi-3d\omega}{-1} = 3d\omega-2d\varphi$$

Έτσι η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\omega}{\varphi} \Leftrightarrow \frac{3d\omega-2d\varphi}{3d\varphi-4d\omega} = \frac{\omega}{\varphi} \Leftrightarrow 3\varphi d\omega - 2\varphi d\varphi = -3\omega d\varphi + 4\omega d\omega \Leftrightarrow$$

$$(3\varphi-4\omega)d\omega = (2\varphi-3\omega)d\varphi \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{3\varphi-4\omega}{2\varphi-3\omega} \text{ που είναι ομογενής.}$$

Για τη λύση της καλούμε $\varphi/\omega=t \Leftrightarrow \varphi=\omega t$ και $\frac{d\varphi}{d\omega} = t + \frac{dt}{d\omega}\omega$ έτσι

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{3\omega t-4\omega}{2\omega t-3\omega} \qquad \frac{dt}{d\omega} = \frac{\omega(3t-4)}{\omega(2t-3)}$$

$$\frac{td\omega+\omega dt}{d\omega} = \frac{3t-4}{2t-3} \Leftrightarrow 2t^2d\omega+2\omega tdt-3td\omega-3\omega dt = 3td\omega-4d\omega \Leftrightarrow$$

$$(2t^2-6t+4)d\omega = \omega(-2t+3)dt \Leftrightarrow 2(t^2-3t+2)d\omega = -\omega(2t-3)dt \Leftrightarrow$$

$$2\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2t-3}{t^2-3t+2}dt \Leftrightarrow 2\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{d(t^2-3t+2)}{t^2-3t+2} \Leftrightarrow$$

$$2\int\frac{d\omega}{\omega} = -\int\frac{d(t^2-3t+2)}{t^2-3t+2} + c \Leftrightarrow 2\ln|\omega| = -\ln|t^2-3t+2| + c \Leftrightarrow$$

$$\ln|t^2-3t+2| = \ln|\kappa| - \ln|\omega^2| \Leftrightarrow \ln|t^2-3t+2| = \ln|\kappa/\omega^2|$$

$(\ln|\kappa|=c)$

$t^2-3t+2 = \kappa/\omega^2 \Leftrightarrow \varphi^2/\omega^2-3\varphi/\omega+2 = |\kappa|/\omega^2 \Leftrightarrow$

$\varphi^2-3\varphi\omega+2\omega^2 = |\kappa|$ και

$(3\chi+4\psi+1)^2-3(3\chi+4\psi+1)(2\chi+3\psi+1)+2(2\chi+3\psi+1)^2 = |\kappa| \Leftrightarrow$

$(9\chi^2+16\psi^2+1+24\chi\psi+6\chi+8\psi) - (18\chi^2+27\chi\psi+9\chi+24\chi\psi+36\psi^2+12\psi+16\chi+9\psi+3) +$

$(8\chi^2+18\psi^2+2+24\chi\psi+8\chi+12\psi) = |\kappa| \Leftrightarrow$

$-\chi^2-2\psi^2-3\chi\psi-\chi-\psi = |\kappa| \Leftrightarrow \chi^2+2\psi^2+3\chi\psi+\chi+\psi = |\kappa|.$

2ος τρόπος λύσης: επιλύουμε το σύστημα

$$2\chi+3\psi+1 = 0$$

$$3\chi+4\psi+1 = 0$$

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}} = \frac{-4+3}{8-9} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \psi = \frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}} = \frac{-2+3}{8-9} = \frac{1}{-1} = -1$$

Θέτομε $\chi=1+\omega$, $\psi=-1+\varphi$ οπότε $d\chi=d\omega$, $d\psi=d\varphi$, έτσι η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{2(1+\omega)+3(-1+\varphi)+1}{3(1+\omega)+4(-1+\varphi)+1} \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{2+2\omega-3+3\varphi+1}{3+3\omega-4+4\varphi+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{2\omega+3\varphi}{3\omega+4\varphi}$$ που είναι ομογενής διαφορική εξίσωση.

Θέτομε $\varphi/\omega=t \Leftrightarrow \varphi=\omega t$ και $\frac{d\varphi}{d\omega} = t+\omega\frac{dt}{d\omega}$ οπότε $t+\omega\frac{dt}{d\omega} = -\frac{2\omega+3\varphi}{3\omega+4\varphi}$

$$\Leftrightarrow \frac{td\omega + \omega dt}{d\omega} = -\frac{\omega(2+3t)}{\omega(3+4t)} \Leftrightarrow \frac{td\omega + \omega dt}{d\omega} = \frac{-2-3t}{3+4t} \Leftrightarrow$$

$$3td\omega + 3\omega dt + 4t^2 d\omega + 4\omega t dt = -2d\omega - 3td\omega \Leftrightarrow$$

$$(4t^2 + 6t + 2)d\omega = -\omega(3+4t)dt \Leftrightarrow 2(2t^2 + 3t + 1)d\omega = -\omega(3+4t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{2d\omega}{-\omega} = \frac{(4t+3)}{(2t^2+3t+1)}dt \Leftrightarrow -2\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d(2t^2+3t+1)}{(2t^2+3t+1)} \Leftrightarrow$$

$$-2\int\frac{d\omega}{\omega} = \int\frac{d(2t^2+3t+1)}{(2t^2+3t+1)} + c \Leftrightarrow -2\ln|\omega| = \ln|2t^2+3t+1| + c \Leftrightarrow$$

$\ln|\kappa| - \ln|\omega^2| = \ln|2t^2+3t+1|$ όπου $c=-\ln|\kappa| \Leftrightarrow$

$\ln|\kappa/\omega^2| = \ln|2t^2+3t+1| \Leftrightarrow |\kappa|/\omega^2 = 2t^2+3t+1 \Leftrightarrow$

$2\varphi^2/\omega^2+3\varphi/\omega+1 = |\kappa|/\omega^2 \Leftrightarrow 2\varphi^2+3\varphi\omega+\omega^2 = |\kappa|.$

Επειδή $\chi=1+\omega \Leftrightarrow \chi-1=\omega$ και $\psi=-1+\varphi \Leftrightarrow \psi+1=\varphi$ έχομε:

$2(\psi+1)^2+3(\psi+1)(\chi-1)+(\chi-1)^2 = |\kappa| \Leftrightarrow$

$2\psi^2+4\psi+2+3\chi\psi-3\psi+3\chi-3+\chi^2-2\chi+1 = |\kappa| \Leftrightarrow \chi^2+2\psi^2+3\chi\psi+\chi+\psi = |\kappa|.$

3.2 $\psi' = f\left(\frac{\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1}{\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2}\right)$ με $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0.$

Λύση

Επειδή

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \lambda \Longleftrightarrow \alpha_1=\lambda\alpha_2 \ , \quad \beta_1=\lambda\beta_2$$

τότε η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\psi' = f\left(\frac{\lambda\alpha_2\chi+\lambda\beta_2\psi+\gamma_1}{\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2}\right) \Longleftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = f\left(\frac{\lambda(\alpha_2\chi+\beta_2\psi)+\gamma_1}{(\alpha_2\chi+\beta_2\psi)+\gamma_2}\right)$$

Αν επομένως θέσουμε $\alpha_2\chi+\beta_2\psi=\omega$ λαμβάνομε :

$$\alpha_2 d\chi + \beta_2 d\psi = d\omega \Longleftrightarrow \beta_2\frac{d\psi}{d\chi} + \alpha_2 = \frac{d\omega}{d\chi} \Longleftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1}{\beta_2}\left(\frac{d\omega}{d\chi} - \alpha_2\right)$$

οπότε

$$\frac{1}{\beta_2}\left(\frac{d\omega}{d\chi} - \alpha_2\right) = f\left(\frac{\lambda\omega+\gamma_1}{\omega+\gamma_2}\right)$$

που είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

3.2.1 Παράδειγμα. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(\chi+\psi)d\chi + (3\chi+3\psi-4)d\psi = 0.$$

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι γράφεται: $\frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{\chi+\psi}{3\chi+3\psi-4}$

Δηλαδή είναι της μορφής:

$$\psi' = f\left(\frac{\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1}{\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2}\right) \quad \text{με} \quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix} = 3-3 = 0.$$

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{\chi+\psi}{3(\chi+\psi)-4}$$ αν θέσομε $\chi+\psi=\omega$ λαμβάνουμε $d\chi+d\psi=d\omega$ οπότε

$$1+\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{d\omega}{d\chi} \Leftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=\frac{d\omega}{d\chi}-1$$ οπότε η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{d\omega}{d\chi}-1=-\frac{\omega}{3\omega-4} \Leftrightarrow \frac{d\omega-d\chi}{d\chi}=-\frac{\omega}{3\omega-4} \Leftrightarrow$$

$$-3\omega d\chi+4d\chi+3\omega d\omega-4d\omega=-\omega d\chi \Leftrightarrow (4-2\omega)d\chi=(4-3\omega)d\omega \Leftrightarrow$$

$$-2(\omega-2)d\chi=-(3\omega-4)d\omega \Leftrightarrow 2d\chi=\frac{3\omega-4}{\omega-2}d\omega \Leftrightarrow$$

$$2d\chi=(3+\frac{2}{\omega-2})d\omega \Leftrightarrow 2\int d\chi=3\int d\omega+\int\frac{2}{\omega-2}d\omega \Leftrightarrow$$

$$2\chi=3\omega+2\ln|\omega-2|+c \Leftrightarrow 2x=3(x+\psi)+2\ln|\chi+\psi-2|+c \Leftrightarrow$$

$$x+3\psi+2\ln|\chi+\psi-2|=-c.$$

4. Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Ορισμοί.

Μια διαφορική εξίσωση $f(x,\psi)dx + g(x,\psi)d\psi = 0$ καλείται πλήρης ή αμέσως ολοκληρώσιμη αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi(x,\psi)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$d\varphi(x,\psi) = f(x,\psi)dx + g(x,\psi)d\psi.$$

Εάν οι συναρτήσεις $f(x,\psi)$ και $g(x,\psi)$ είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, τότε η εξίσωση:

$$f(x,\psi)dx + g(x,\psi)dx = 0$$

είναι πλήρης αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{\partial f(x,\psi)}{\partial \psi} = \frac{\partial g(x,\psi)}{\partial x}$$

Για να λύσουμε την πλήρη διαφορική εξίσωση υπολογίζουμε την $\varphi(x,\psi)$ από τις εξισώσεις :

$$\frac{\partial \varphi(x,\psi)}{\partial x} = f(x,\psi) \quad \text{και} \quad \frac{\partial g(x,\psi)}{\partial \psi} = g(x,\psi)$$

Ο υπολογισμός αυτός καταλήγει σε λύση της μορφής $\varphi(x,\psi)=c$.

Μια διαφορική εξίσωση $f(x,\psi)dx + g(x,\psi)d\psi = 0$ δεν είναι πάντα πλήρης. Μπορούμε όμως μερικές φορές να την μετασχηματίσουμε σε πλήρη διαφορική εξίσωση, πολλαπλασιάζοντας την με ένα παράγοντα της μορφής $\kappa(x,\psi)$ που τον καλούμε παράγοντα ολοκλήρωσης ή ολοκληρωτικό παράγοντα.

Επομένως

Μια συνάρτηση $\kappa(x,\psi)$ καλείται παράγοντας ολοκλήρωσης ή ολοκληρωτικός παράγοντας αν η διαφορική εξίσωση:

$$\kappa(x,\psi)[f(x,\psi)dx + g(x,\psi)d\psi] = 0$$

είναι πλήρης.

5. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Γενική μορφή: $\psi' + f(\chi)\psi = g(\chi)$.

5.1 Λύση της $\psi' + f(\chi)\psi = g(\chi)$.

Ένας παράγοντας ολοκλήρωσης της δοθείσης είναι:

$$\kappa(\chi,\psi) = e^{\int f(x)dx}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επομένως τα μέλη της με τον παράγοντα αυτόν, καθιστούμε τη διαφορική εξίσωση πλήρη. Δηλαδή προσδιορίζουμε συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι το πρώτο μέλος της δοθείσης επί τον ολοκληρωτικό παράγοντα.

$$\psi' + f(\chi)\psi = g(\chi) \Longleftrightarrow \psi' e^{\int f(x)dx} + f(x)\psi e^{\int f(x)dx} =$$

$$= g(x)e^{\int f(x)dx} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d(\psi e^{\int f(x)dx})}{d\chi} = g(x)e^{\int f(x)dx} \quad \text{και ολοκληρώνοντας}$$

$$\int d(\psi e^{\int f(x)dx}) = \int [g(x)e^{\int f(x)dx}]\, d\chi + c \Longleftrightarrow$$

$$\psi e^{\int f(x)dx} = \int [g(x)e^{\int f(x)dx}]\, d\chi + c \Longleftrightarrow$$

$$\psi = \frac{\int [g(x)e^{\int f(x)dx}]\,dx}{e^{\int f(x)dx}} + \frac{c}{e^{\int f(x)dx}}$$

Παραδείγματα

5.1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi' - 2\psi = 4$.

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής:

$\psi' + f(\chi)\psi = g(\chi)$ με $f(x)=-2$ και $g(x)=4$.

Δηλαδή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Έτσι ένας παράγοντας ολοκλήρωσης είναι:

$$e^{\int f(x)dx} = e^{\int -2dx} = e^{-2x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της δοθείσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης έχομε:

$$\psi' e^{-2x} - 2\psi e^{-2x} = 4e^{-2x} \Leftrightarrow \frac{d(\psi e^{-2x})}{d\chi} = 4e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$d(\psi e^{-2x}) = 4e^{-2x}d\chi$ και ολοκληρώνοντας

$$\int d(\psi e^{-2x}) = \int 4e^{-2x}d\chi + c \Leftrightarrow \psi e^{-2x} = -2\int e^{-2x}d(-2\chi) + c \Leftrightarrow$$

$$\psi e^{-2x} = -2e^{-2x} + c \Leftrightarrow \frac{\psi e^{-2x}}{e^{-2x}} = \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}} + \frac{c}{e^{-2x}} \Leftrightarrow$$

$$\psi = -2 + ce^{-2x}.$$

5.1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi' - 3\chi\psi = \chi$.

Λύση
Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $\psi'+f(\chi)\psi=g(\chi)$ με $f(\chi)=-3\chi$ και $g(\chi)=\chi$. Δηλαδή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Έτσι ένας παράγοντας ολοκλήρωσης είναι:

$$e^{\int f(x)dx} = e^{\int -3\chi dx} = e^{-3\int \chi dx} = e^{-3x^2/2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επομένως τα μέλη της δοθείσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης λαμβάνουμε:

$$\psi' e^{-3x^2/2} - 3\chi\psi e^{-3x^2/2} = \chi e^{-3x^2/2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(\psi e^{-3x^2/2})}{d\chi} = \chi e^{-3x^2/2} \Leftrightarrow d(\psi e^{-3x^2/2}) = \chi e^{-3x^2/2} d\chi \Leftrightarrow$$

$$\int d(\psi e^{-3x^2/2}) = \int \chi e^{-3x^2/2} d\chi \Leftrightarrow \psi e^{-3x^2/2} = -\frac{1}{3}\int e^{-3x^2/2} d(e^{-3x^2/2})$$

$$\Leftrightarrow \psi e^{-3x^2/2} = -\frac{1}{3} e^{3x^2/2} + c \Leftrightarrow \psi = -\frac{1}{3} + c e^{3x^2/2}.$$

5.2 Η συνάρτηση:

$$\psi = [e^{-\int f(x)dx}][c + \int (g(x)e^{\int f(x)dx})dx]$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης : $\psi' + f(x)\psi = g(x)$.

Απόδειξη
Θεωρώντας $g(x)=0$ η δοθείσα διαφορική εξίσωση λαμβάνει τη μορφή : $\psi' + f(x)\psi = 0$, η οποία λέγεται γραμμική ομογενής. Οι μεταβλητές αυτής χωρίζονται. Έτσι λαμβάνουμε:

$$\frac{d\chi}{d\psi} = -f(x)\psi \Longleftrightarrow \frac{d\psi}{\psi} = -f(x)dx$$ και ολοκληρώνοντας

$$\int\frac{d\psi}{\psi} = -\int f(x)dx + c \Longleftrightarrow \ln|\psi| = -\int f(x)dx + c \Longleftrightarrow$$

$$\ln|\psi| = \ln e^{\wedge}(-\int f(x)dx + c) \Longleftrightarrow |\psi| = e^{\wedge}(-\int f(x)dx + c) \Longleftrightarrow$$

$$\psi = e^{c}e^{\wedge}(-\int f(x)dx) \Longleftrightarrow \psi = \kappa e^{\wedge}(-\int f(x)dx)$$ η οποία για κ=1

δίνει μια μερική λύση $\psi_1=e^{\wedge}(-\int f(x)dx)$.

Για να βρούμε τη γενική λύση της δοθείσης διαφορικής εξίσωσης καλούμε $\psi=\psi_1 z$, όπου z μια άγνωστη συνάρτηση του χ και ψ_1 μια μερική λύση της ομογενούς $\psi'+ f(x)\psi = 0$. Παραγωγίζοντας την $\psi=\psi_1 z$ λαμβάνομε:

$$\psi' = \psi_1' z + \psi_1 z'$$

επομένως η δοθείσα γράφεται:

$$\psi_1' z + \psi_1 z' + f(x)\psi_1 z = g(x) \Longleftrightarrow (\psi_1' + f(x)\psi_1)z + \psi_1 z' = g(x)$$

και επειδή ψ_1 λύση της διαφορικής εξίσωσης $\psi'+ f(x)\psi = 0$ ισχύει:

$\psi_1'+ f(x)\psi_1 = 0$ άρα $0z + \psi_1 z' = g(x) \Longleftrightarrow \psi 1 z' = g(x) \Longleftrightarrow$

$$e^{\wedge}(-\int f(x)dx)z' = g(x)$$ αφού $\psi_1=e^{\wedge}(-\int f(x)dx) \Longleftrightarrow$

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\wedge}(\int f(x)dx) \Longleftrightarrow dz = g(x)e^{\wedge}(\int f(x)dx)\,dx$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int dz = \int [g(x)e^{\wedge}(\int f(x)dx)]\, dx + c \Longleftrightarrow z = \int [g(x)e^{\wedge}(\int f(x)dx)]dx + c$$

και επειδή $\psi=\psi_1$ η γενική λύση είναι

$$\psi = e^{\wedge}(-\int f(x)dx)[\int [g(x)e^{\wedge}(\int f(x)dx)]dx + c].$$

Παραδείγματα

5.2.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi' + \psi - \chi^2 = 0$.

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής : $\psi' + f(x)\psi = g(x)$ με $f(x)=1$ και $g(x)=x^2$. Επομένως η γενική λύση της δίνεται από τον τύπο :

$$\psi = e^{\wedge}(-\int f(x)dx)[\int [g(x)e^{\wedge}(\int f(x)dx)]dx + c]$$

$$\psi = e^{\wedge}(-\int 1dx)[\int [\chi^2 e^{\wedge}(\int 1dx)]dx + c] \Longleftrightarrow \psi = e^{-x}(\int \chi^2 e^x dx + c) \Longleftrightarrow$$

$$\psi = e^{-x}(\int \chi^2 de^x + c) = e^{-x}(\chi^2 e^x - \int e^x dx^2 + c) =$$

$$e^{-x}(\chi^2 e^x - 2\int x de^x + c) = e^{-x}[\chi^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) + c] \Longleftrightarrow$$

$$\psi = e^{-x}(\chi^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c) = \chi^2 - 2x + 2 + ce^{-x}.$$

5.2.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi' = 2\psi + e^x$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής : $\psi' + f(x)\psi = g(x)$ με $f(x) = -2$ και $g(x) = e^x$. Επομένως η γενική λύση της θα δίνεται από τον τύπο:

$$\psi = e^{(-\int f(x)dx)}\left[\int [g(x)e^{(\int f(x)dx)}]dx + c\right]$$

$$\psi = e^{(-\int -2dx)}\left[\int [e^x e^{(\int -2dx)}]dx + c\right] \Longleftrightarrow$$

$$\psi = e^{2x}\left(\int e^x e^{-2x}dx + c\right) = e^{2x}\left(\int e^{-x}dx + c\right) = e^{2x}\left(-\int e^{-x}d(-x) + c\right) =$$

$$e^{2x}(-e^{-x} + c) = -e^x + ce^{2x}.$$

5.2.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi' - \psi = \chi$.

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $\psi' + f(x)\psi = g(x)$ με $f(x) = -1$ και $g(x) = x$. Επομένως η γενική λύση της δίνεται από τον τύπο:

$$\psi = e^{(-\int f(x)dx)}\left[\int [g(x)e^{(\int f(x)dx)}]dx + c\right]$$

$$\psi = e^{(-\int -1dx)}\left[\int [xe^{(\int -1dx)}]dx + c\right] = e^{-(-x)}\left(\int xe^{-x}dx + c\right) \Longleftrightarrow$$

$$\psi = e^x\left(-\int xde^{-x} + c\right) = e^x\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx + c\right) \Longleftrightarrow$$

$$\psi = e^x\left(-xe^{-x} - \int e^{-x}d(-x) + c\right) = e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + c) \Longleftrightarrow$$

$$\psi = -\chi - 1 + ce^x.$$

6. Διαφορική εξίσωση Bernoulli

6.1 Γενική μορφή : $\frac{d\psi}{dx} + f(x)\psi = g(\chi)\psi^{\mu}$ με $\mu \in R - \{0,1\}$

Γενικός τρόπος λύσης.
Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της δοθείσης διαφορικής εξίσωσης επί $\psi^{-\mu}$

$$\psi^{-\mu}\frac{d\psi}{d\chi} + \psi^{-\mu}f(x)\psi = \psi^{-\mu}g(\chi)\psi^{\mu} \Leftrightarrow \psi^{-\mu}\frac{d\psi}{d\chi} + \psi^{1-\mu}f(x) = g(\chi).$$

Καλούμε $\psi^{1-\mu}=\omega=\omega(\chi)$. Παραγωγίζοντας λαμβάνουμε:

$$\frac{d\psi^{1-\mu}}{dx} = \frac{d\omega}{dx} \Leftrightarrow (1-\mu)\psi^{1-\mu-1}\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\omega}{dx} \Leftrightarrow \psi^{-\mu}\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{1-\mu}\frac{d\omega}{dx}$$ οπότε

αντικαθιστώντας έχομε: $\frac{1}{1-\mu}\frac{d\omega}{dx} + f(x)\omega = g(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{d\omega}{dx} + (1-\mu)f(x)\omega = (1-\mu)g(x) \Leftrightarrow \omega' + (1-\mu)f(x)\omega = (1-\mu)g(x)$$

που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση με εξαρτημένη μεταβλητή την ω.

Σημείωση
Η μορφή της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d\psi}{dx} + f(x)\psi = g(x)\psi^{\mu}$ μελετήθηκε εδώ για $\mu \in R - \{0,1\}$ γιατί για $\mu=0$ η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $\psi' + f(x)\psi = g(x)$ δηλαδή γραμμική, για $\mu=1$ είναι της μορφής:

$$\frac{d\psi}{dx} + f(x)\psi = g(x)\psi$$

δηλαδή χωριζομένων μεταβλητών.

Παραδείγματα

6.1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\psi' - \frac{1}{x}\psi = \frac{\ln x}{x}\psi^2 \quad x>0$$

Λύση

Η δοθείσα διαφρική εξίσωση είναι της μορφής:

$$\frac{d\psi}{dx} + f(x)\psi = g(x)\psi^{\mu} \quad \text{με } f(x)= -\frac{1}{x}, \quad g(x)=\frac{\ln x}{x} \quad \text{και } \mu=2$$

Δηλαδή διαφορική εξίσωση Bernoulli. Πολλαπλασιάζω τα μέλη της επί $\psi^{-\mu}=\psi^{-2}$ και λαμβάνω:

$$\psi^{-2}\psi' - \psi^{-2}\frac{1}{x}\psi = \psi^{-2}\frac{\ln x}{x}\psi^2 \iff$$

$$\psi^{-2}\frac{d\psi}{dx} - \psi^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} \qquad \text{καλούμε} \qquad \psi^{1-\mu}=\psi^{1-2}=\psi^{-1}=\omega$$

και παραγωγίζοντας λαμβάνουμε:

$$\frac{d}{dx}(\psi^{-1}) = \frac{d\omega}{dx} \iff -1\psi^{-1-1}\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\omega}{dx} \iff -\psi^{-2}\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\omega}{dx} \iff$$

$$\psi^{-2}\frac{d\psi}{dx} = -\frac{d\omega}{dx} \qquad \text{και αντικαθιστώντας}$$

$$-\frac{d\omega}{dx} - \omega\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} \iff \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{x}\omega = -\frac{\ln x}{x}$$

η τελευταία είναι γραμμική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{d\omega}{dx} + f(x)\omega = g(x) \quad \text{με } f(x)=\frac{1}{x} \quad \text{και } g(x)=-\frac{\ln x}{x}. \text{ Επομένως η γενική}$$

λύση της δίνεται από τον τύπο:

$$\omega = e^{(-\int f(x)dx)}\left[\int [g(x)e^{(\int f(x)dx)}]dx + c\right] \quad \text{και επειδή}$$

$$\int f(x)dx = \int_x^1 \frac{}{} dx = \ln x \quad \text{και} \quad e^{(-\int f(x)dx)} = e^{-\ln x} = \kappa \Leftrightarrow -\ln x = \ln\kappa$$

$$\Leftrightarrow \ln 1/x = \ln\kappa \Leftrightarrow 1/\chi = \kappa \Leftrightarrow e^{-\ln x} = 1/x \quad \text{και}$$

$$e^{(\int f(x)dx)} = e^{\ln x} = \mu \Leftrightarrow \ln x = \ln\mu \Leftrightarrow \chi = \mu \Leftrightarrow e^{\ln x} = x$$

$$\text{Λαμβάνουμε : } \omega = \frac{1}{\chi}\left(-\int \frac{\ln x}{x} x\, dx + c\right) = -\frac{1}{x}\left(\int \ln x\, dx + c\right) =$$

$$= -\frac{1}{x}\left(x\ln x - \int x d(\ln x) + c\right) = -\frac{1}{x}\left(x\ln x - \int x \frac{1}{x} dx + c\right) =$$

$$= -\frac{1}{x}\left(x\ln x - \int dx + c\right) = -\frac{1}{x}(x\ln x - x + c) = \frac{-x\ln x + x - c}{x}$$

οπότε:

$$\psi^{-1} = \frac{-x\ln x + x - c}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\psi} = \frac{-x\ln x + x - c}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\psi = \frac{\chi}{-x\ln x + x - c} .$$

6.1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d\psi}{dx} + 2x\psi = 2\chi^3\psi^3$$

Λύση
Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής:

$$\frac{dψ}{dx} + f(x)ψ = g(x)ψ^{μ} \quad με \quad f(x)= 2χ \quad , \quad g(x)=2χ^{3} \quad και \quad μ=3$$

Δηλαδή είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli. Πολλαπλασιάζω τα μέλη της επί $ψ^{-μ}=ψ^{-3}$ και λαμβάνω:

$$ψ^{-3}\frac{dψ}{dx} + ψ^{-3}2xψ = ψ^{-3}2χ^{3}ψ^{3} \Longleftrightarrow ψ^{-3}\frac{dψ}{dx} + ψ^{-2}2x = 2χ^{3}$$

καλούμε $ψ^{1-μ}=ψ^{1-3}=ψ^{-2}=ω$ και παραγωγίζοντας λαμβάνουμε:

$$\frac{d(ψ^{-2})}{dx} = \frac{dω}{dx} \Longleftrightarrow -2ψ^{-2-1}\frac{dψ}{dx} = \frac{dω}{dx} \Longleftrightarrow -2ψ^{-3}\frac{dψ}{dx} = \frac{dω}{dx} \Longleftrightarrow$$

$$ψ^{-3}\frac{dψ}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dω}{dx}$$ Έτσι η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$-\frac{1}{2}\frac{dω}{dx} + ω2χ = 2χ^{3} \Longleftrightarrow \frac{dω}{dx} - 4ωχ = -4χ^{3}$$

που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dω}{dx} + f(x)ω = g(x) \quad με \quad f(x)=-4x \quad και \quad g(x)=-4x^{3}.$$

Επομένως η γενική λύση της θα δίνεται από τον τύπο :

$$ω=e^{(-\int f(x)dx)}\left[\int [g(x)e^{(\int f(x)dx)}]dx + c\right] \quad και \quad επειδή$$

$$\int f(x)dx = \int -4xdx = -4\frac{x^2}{\chi} = -2x^2 \quad \text{και} \quad e^{\wedge}(-\int f(x)dx) = e^{\wedge}(2x^2)$$

$$\text{και} \quad e^{\wedge}(\int f(x)dx) = e^{\wedge}(-2x^2)$$

Λαμβάνουμε:

$$\omega = e^{\wedge}(2x^2)[\int -4x^3e^{\wedge}(-2x^2)dx + c] = e^{\wedge}(2x^2)[\int x^2(-4x)e^{\wedge}(-2x^2)dx + c]$$

$$= e^{\wedge}(2x^2)[\int x^2d(e^{\wedge}(-2x^2)) + c] = e^{\wedge}(2x^2)[x^2e^{\wedge}(-2x^2) - \int e^{\wedge}(-2x^2)dx^2 + c]$$

$$= e^{\wedge}(2x^2)[x^2e^{\wedge}(-2x^2) - \int e^{\wedge}(-2x^2)2xdx + c] =$$

$$= e^{\wedge}(2x^2)[x^2e^{\wedge}(-2x^2) - (-\frac{1}{2})\int e^{\wedge}(-2x^2)d(-2x^2) + c] =$$

$$= e^{\wedge}(2x^2)[x^2e^{\wedge}(-2x^2) + \frac{1}{2}e^{\wedge}(-2x^2) + c] = x^2 + \frac{1}{2} + ce^{\wedge}(2x^2)$$

Άρα

$$\psi^{-2} = \frac{2x^2 + 1 + 2ce^{\wedge}(2x^2)}{2} \Longleftrightarrow \psi^2 = \frac{2}{2x^2 + 1 + 2ce^{\wedge}(2x^2)} \Longleftrightarrow$$

$$\psi = \left(\frac{2}{2x^2 + 1 + 2ce^{\wedge}(2x^2)}\right)^{1/2}$$

6.1.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d\psi}{dx} - \frac{\psi}{2\chi} = 5\chi^2\psi^5$$

Λύση
Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής:

$$\frac{d\psi}{dx} + f(x)\psi = g(x)\psi^{\mu} \quad \text{με } f(x)=-1/2\chi \ , \ g(x)=5\chi^2 \quad \text{και} \quad \mu=5$$

Δηλαδή είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli. Πολλαπλασιάζω τα μέλη της με $\psi^{-\mu}=\psi^{-5}$ και λαμβάνω:

$$\psi^{-5}\frac{d\psi}{dx} - \psi^{-5}\frac{\psi}{2\chi} = \psi^{-5}5\chi^2\psi^5 \Leftrightarrow \psi^{-5}\frac{d\psi}{dx} - \psi^{-4}\frac{1}{2x} = 5\chi^2$$

Καλούμε $\psi^{1-\mu}=\psi^{1-5}=\psi^{-4}=\omega$ και παραγωγίζοντας λαμβάνουμε:

$$\frac{d(\psi^{-4})}{dx} = \frac{d\omega}{dx} \Leftrightarrow -4\psi^{-4-1}\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\omega}{dx} \Leftrightarrow -4\psi^{-5}\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\omega}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\psi^{-5}\frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{4}\frac{d\omega}{dx}$$ Έτσι η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$-\frac{1}{4}\frac{d\omega}{dx} - \omega\frac{1}{2\chi} = 5\chi^2 \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dx} + \frac{2}{x}\omega = -20\chi^2$$

Δηλαδή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$\frac{d\omega}{dx} + f(x)\omega = g(x) \quad \text{με } f(x)=2/x \quad \text{και } g(x)=-20x^2$$

Επομένως η γενική λύση της θα δίνεται από τον τύπο :

$$\omega = e^{\wedge}(-\int f(x)dx)[\int [g(x)e^{\wedge}(\int f(x)dx)]dx + c]$$

οπότε

$$\int f(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{dx}{x} = 2\ln x \quad \text{και} \quad e^{\wedge}(-\int f(x)dx) = e^{-2\ln x} = \kappa$$

λογαριθμίζω $-2\ln x = \ln\kappa \Leftrightarrow \ln\frac{1}{x^2} = \ln\kappa \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \kappa$

άρα $e^{\wedge}(-\int f(x)dx) = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$

και

$$e^{\wedge}(\int f(x)dx) = e^{2\ln x} = \lambda$$

λογαριθμίζω $2\ln x = \ln\lambda \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln\lambda \Leftrightarrow x^2 = \lambda$

άρα $e^{\wedge}(\int f(x)dx) = e^{2\ln x} = x^2$

Επομένως $\omega = \frac{1}{x^2}(\int -20x^2x^2dx + c) \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{x^2}(-20\int x^4dx + c) \Leftrightarrow$

$$\omega = \frac{1}{x^2}(-20\frac{x^5}{5} + c) = \frac{1}{x^2}(-4x^5 + c) = \frac{-4x^5 + c}{x^2}$$

και επειδή $\psi^{-4} = \omega$ έχω

$$\psi^{-4} = \frac{-4x^5 + c}{x^2} \Leftrightarrow \psi^4 = \frac{x^2}{-4x^5 + c}.$$

7. Διαφορική εξίσωση του Riccati

7.1 Γενική μορφή: $\psi' = f(x)\psi^2 + g(x)\psi + h(x)$ με $f(x)$, $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σ'ένα διάστημα (α,β). Για να βρούμε μια λύση της διαφορικής εξίσωσης του Riccati πρέπει να γνωρίζουμε μια μερική λύση αυτής, άλλως είναι αδύνατη η εύρεση μιας γενικής λύσης.

Έτσι με την υπόθεση ότι υπάρχει μια μερική λύση $\psi=\psi(\chi)=\psi_1$ ισχύει:

$$\psi_1' = f(x)\psi_1^2 + g(x)\psi_1 + h(x) \Leftrightarrow \psi_1' - f(x)\psi_1^2 - g(x)\psi_1 - h(x) = 0$$

Εκτελούμε το μετασχηματισμό $\psi = \psi_1(\chi) + \frac{1}{\omega(\chi)} = \psi_1 + \frac{1}{\omega}$ όπου $\omega(\chi)$ μια προσδιοριστέα λύση της διαφορικής εξίσωσης του Riccati.

Παραγωγίζουμε $\psi = \psi_1 + \frac{1}{\omega}$, $\psi' = (\psi_1 + \frac{1}{\omega})' \Leftrightarrow \psi' = \psi_1' + \frac{-\omega'}{\omega^2}$

και αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση του Riccati λαμβάνουμε:

$$\psi_1' - \frac{\omega'}{\omega^2} = f(x)(\psi_1 + \frac{1}{\omega})^2 + g(x)(\psi_1 + \frac{1}{\omega}) + h(x) \Leftrightarrow$$

$$\psi_1' - \frac{\omega'}{\omega^2} = f(x)\psi_1^2 + 2f(x)\psi_1\frac{1}{\omega} + f(x)\frac{1}{\omega^2} + g(x)\psi_1 + g(x)\frac{1}{\omega} + h(x)$$

$$\Leftrightarrow \psi_1' - f(x)\psi_1^2 - g(x)\psi_1 - h(\chi) - \frac{\omega'}{\omega^2} = f(x)2\psi_1\frac{1}{\omega} + f(x)\frac{1}{\omega^2} + g(x)\frac{1}{\omega}$$

Επειδή $\psi_1' - f(x)\psi_1^2 - g(x)\psi_1 - h(\chi) = 0$ έχομε

$$-\frac{\omega'}{\omega^2} = f(x)2\psi_1\frac{1}{\omega} + f(x)\frac{1}{\omega^2} + g(x)\frac{1}{\omega} \Leftrightarrow -\omega' = f(x)2\psi_1\omega + f(x) + g(x)\omega$$

$\Leftrightarrow \omega' + [2\psi_1 f(x) + g(x)]\omega = -f(x)$ που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και επιλύεται με το γνωστό τύπο.

Παραδείγματα

7.1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση : $\psi' = \frac{\chi-1}{2\chi^2}\psi^2 + \frac{1}{\chi}\psi - \frac{\chi-1}{2}$

όταν γνωρίζουμε ότι μια μερική λύση της είναι $\psi=\chi$.

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής:

$$\psi' = f(x)\psi^2 + g(x)\psi + h(x)$$

Δηλαδή είναι διαφορική εξίσωση του Riccati. Για την επίλυση της εκτελούμε το μετασχηματισμό $\psi=\chi+1/\omega$ όπου $\omega=\omega(\chi)$ προσδιοριστέα λύση της διαφορικής εξίσωσης και χ μια μερική λύση της.
Παραγωγίζοντας την $\psi=\chi+1/\omega$ λαμβάνομε $\psi'=1-\omega'/\omega^2$ και αντικαθιστώντας στη δοθείσα:

$$1 - \frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{\chi-1}{2\chi^2}\left(\chi + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{\chi}\left(\chi + \frac{1}{\omega}\right) - \frac{\chi-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{\chi-1}{2\chi^2}\chi^2 + \frac{\chi-1}{2\chi^2}2\chi\frac{1}{\omega} + \frac{\chi-1}{2\chi^2}\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\chi}\chi + \frac{1}{\chi}\frac{1}{\omega} - \frac{\chi-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{\chi-1}{2} + \frac{\chi-1}{\chi}\frac{1}{\omega} + \frac{\chi-1}{2\chi^2}\frac{1}{\omega^2} + 1 + \frac{1}{\chi}\frac{1}{\omega} - \frac{\chi-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{\chi-1}{\chi}\frac{1}{\omega} + \frac{\chi-1}{2\chi^2}\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\chi}\frac{1}{\omega} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\omega'}{\omega^2}\omega^2 = \frac{\chi-1}{\chi}\frac{1}{\omega}\omega^2 + \frac{\chi-1}{2\chi^2}\frac{1}{\omega^2}\omega^2 + \frac{1}{\chi}\frac{1}{\omega}\omega^2 \Leftrightarrow$$

$$-\omega' = \frac{\chi-1}{\chi}\omega + \frac{\chi-1}{2\chi^2} + \frac{1}{\chi}(-\omega) \Leftrightarrow -\omega' = \frac{1}{\chi}(-\omega(\chi-1+1)) + \frac{\chi-1}{2\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$-\omega' = \frac{1}{\chi}(-\omega\chi) + \frac{\chi-1}{2\chi^2} \Leftrightarrow -\omega' - \omega = \frac{\chi-1}{2\chi^2} \Leftrightarrow \omega' + \omega = -\frac{\chi-1}{2\chi^2}$$

που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση μορφής $\omega' + f(x)\omega = g(x)$ με $f(x)=1$ και $g(x)=-(x-1)/(2x^2)$ και επιλύεται από τον τύπο:

$$\omega = e^{-\int f(x)dx}\left[\int [g(x)e^{\int f(x)dx}]dx + c\right] \text{ οπότε}$$

$$\omega = e^{-\int 1dx}\left[\int [-\frac{\chi-1}{2\chi^2}e^{\int 1dx}]dx + c\right] \Leftrightarrow$$

$$\omega = e^{-x}\left(-\int \frac{x-1}{2x^2}e^{x}dx + c\right) = -\frac{e^{-x}}{2}\left(\int \frac{\chi}{x^2}e^{x}dx + \int \frac{-1}{x^2}e^{x}dx + c\right) =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\left(\int \frac{1}{x}e^{x}dx - \int \frac{1}{x^2}e^{x}dx + c\right) =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\left[\frac{1}{x}e^{x} - \int e^{x}d(1/x) - \int \frac{1}{x^2}e^{x}dx + c\right] =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\left[\frac{1}{x}e^{x} - \int \frac{-1}{x^2}e^{x}dx - \int \frac{1}{x^2}e^{x}dx + c\right] =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\left[\frac{1}{x}e^{x} + \int \frac{1}{x^2}e^{x}dx - \int \frac{1}{x^2}e^{x}dx + c\right] = -\frac{1}{2x} - \frac{c}{2}e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\omega = \frac{-1}{2\chi} - \frac{c}{2e^{x}} = \frac{-e^{x} - cx}{2xe^{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{2xe^{x}}{-e^{x} - cx} \quad \text{και η } \psi = \chi + \frac{1}{\omega}$$

γράφεται:

$$\psi = \chi + \frac{2xe^x}{-e^x - cx} = \frac{-xe^x - cx^2 + 2xe^x}{-e^x - cx} = \frac{xe^x - cx^2}{-e^x - cx} \Leftrightarrow$$

$$\psi = \frac{cx^2 - xe^x}{e^x + cx}$$

7.1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi' = -\psi^2 - \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}$ όταν γνωρίζουμε ότι μια μερική λύση είναι $\psi=1/\chi$.

Λύση

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι της μορφής

$$\psi' = f(x)\psi^2 + g(x)\psi + h(x)$$

Δηλαδή είναι διαφορική εξίσωση Riccati. Καλούμε $\psi = \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\omega}$ όπου $1/\chi$ μια μερική λύση της δοθείσης και $\omega=\omega(\chi)$ μια προσδιοριστέα λύση της. Παραγωγίζουμε την $\psi=1/\chi+1/\omega$, $\psi'=(1/\chi)'+(1/\omega)'=-1/\chi^2+(-\omega')/\omega^2$ Έτσι η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{-1}{\chi^2} - \frac{\omega'}{\omega^2} = -\left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\omega}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\omega}\right) + \frac{1}{\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{\chi^2} - \frac{\omega'}{\omega^2} = -\left(\frac{1}{\chi^2} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{2}{\chi\omega}\right) - \frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\omega\chi} + \frac{1}{\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{\chi^2} - \frac{\omega'}{\omega^2} = -\frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{\chi\omega} - \frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\omega\chi} + \frac{1}{\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{3}{\chi\omega} \Leftrightarrow \omega' = 1 + \frac{3\omega}{\chi} \Leftrightarrow \omega' - \frac{3\omega}{\chi} = 1$$

που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση μορφής: $\omega' + f(x)\omega = g(x)$ με $f(x)=-3/x$ και $g(x)=1$. Επομένως η λύση της δίνεται από τον τύπο:

$$\omega = e^{(-\int f(x)dx)}\left[\int [g(x)e^{(\int f(x)dx)}]dx + c\right]$$

και επειδή $\int f(x)dx = \int -\frac{3}{x}dx = -3\int\frac{dx}{x} = -3\ln x.$

Έτσι $e^{(-\int f(x)dx)} = e^{-(-3\ln x)} = e^{3\ln x} = \kappa$ και λογαριθμίζοντας:

$3\ln x = \ln\kappa \Leftrightarrow \ln x^3 = \ln\kappa \Leftrightarrow \kappa = x^3$ άρα $e^{(-\int f(x)dx)} = e^{3\ln x} =$

$= x^3$

και $e^{(\int f(x)dx)} = e^{-3\ln x} = \lambda$ λογαριθμίζοντας

$-3\ln x = \ln\lambda \Leftrightarrow \ln x^{-3} = \ln\lambda \Leftrightarrow \chi^{-3} = \lambda$ άρα

$e^{(\int f(x)dx)} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$ και ο τύπος γράφεται:

$$\omega = x^3\left(\int 1\cdot x^3dx + c\right) = x^3\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c\right) = x^3\left(\frac{x^{-2}}{-2} + c\right) = x^3\left(-\frac{1}{2x^2} + c\right)$$

$$= -\frac{x}{2} + cx^3 = \frac{2cx^3 - x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{2}{2cx^3 - x}$$ και επειδή $\psi = 1/\chi + 1/\omega$

η γενική λύση είναι $\psi = 1/\chi + 2/(2cx^3 - x)$.

8. Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις τάξεως η, με σταθερούς συντελεστές.

Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$f(\psi) = \frac{d^{\nu}\psi}{dx^{\nu}} + a_1\frac{d^{\nu-1}\psi}{dx^{\nu-1}} + a_2\frac{d^{\nu-2}\psi}{dx^{\nu-2}} + \ldots + a_{\nu-1}\frac{d\psi}{dx} + a_{\nu}\psi = 0,$$

όπου οι συντελεστές $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu}$ είναι σταθεροί αριθμοί. Θεωρούμε το πολυώνυμο :

$$f(\rho) = \rho^{\nu} + a_1\rho^{\nu-1} + a_2\rho^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1}\rho + a_{\nu}$$

που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην $f(\psi)=0$ το

$$\frac{d^{\nu}\psi}{dx^{\nu}} = \rho^{\nu}, \quad \frac{d^{\nu-1}\psi}{dx^{\nu-1}} = \rho^{\nu-1}, \quad \frac{d^{\nu-2}\psi}{dx^{\nu-2}} = \rho^{\nu-2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\psi}{dx} = \rho^{1} \text{ και } \psi=\rho^{0}=1$$

και το καλούμε <u>χαρακτηριστικό</u> πολυώνυμο της $f(\psi)=0$, τη δε εξίσωση

$$\rho^{\nu} + a_1\rho^{\nu-1} + a_2\rho^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1}\rho + a_{\nu} = 0$$

την καλούμε <u>χαρακτηριστική</u> εξίσωση της $f(\psi)=0$. Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $f(\psi)=0$ ανάγεται στην εύρεση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης γιατί ισχύει:

$$f(e^{\rho x}) = e^{\rho x}\cdot f(\rho).$$

Η σχέση αυτή προκύπτει αν θέσουμε $\psi=e^{\rho x}$ και παραγωγίσουμε ως προς χ διαδοχικά. Έχομε:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d(e^{\rho x})}{dx} = \rho e^{\rho x} \qquad a_\nu\psi = a_\nu e^{\rho x}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d(\rho e^{\rho x})}{dx} = \rho^2 e^{\rho x} \qquad a_{\nu-1}\frac{d\psi}{dx} = a_{\nu-1}\rho e^{\rho x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \Longrightarrow$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{\nu-1}\psi}{dx^{\nu-1}} = \ldots = \rho^{\nu-1}e^{\rho x} \qquad a_1\frac{d^{\nu-1}\psi}{dx^{\nu-1}} = a_1\rho^{\nu-1}e^{\rho x}$$

$$\frac{d^\nu\psi}{dx^\nu} = \ldots = \rho^\nu e^{\rho x} \qquad \frac{d^\nu\psi}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho x}$$

Άρα $f(\psi) = f(e^{\rho x}) = e^{\rho x}(a_\nu + a_{\nu-1}\rho + \ldots + a_1\rho^{\nu-1} + \rho^\nu)$

Για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $f(\psi)=0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Η εξίσωση $f(\rho)$ έχει ρίζες πραγματικές και απλές.
Τότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο:

$$\psi = c_1e^{\rho_1 x} + c_2e^{\rho_2 x} + c_3e^{\rho_3 x} + \ldots + c_\nu e^{\rho_\nu x}$$

<u>Παραδείγματα</u>
α) Να ευρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης :

$$\psi'' - 3\psi' + 2\psi = 0$$

<u>Λύση</u>
Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$f(\rho)=\rho^2-3\rho+2=0.$$

Οι ρίζες αυτής είναι ($\Delta = 3^2-4\cdot2 = 9-8 = 1$) $\rho_{1,2} = \frac{3\pm1}{2} \begin{cases} 4/2 = 2 \\ 2/2 = 1 \end{cases}$

$\rho_1 = 1$, $\rho_2=2$. Επομένως η γενική λύση είναι:

$$\psi = c_1e^{1\cdot x} + c_2e^{2x}$$

β) Να ευρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\psi'''- 2\psi''- 5\psi' + 6\psi = 0.$$

Λύση
Η χαρακτηριστική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$f(\rho) = \rho^3 - 2\rho^2 - 5\rho + 6 = 0.$$

Βρίσκω τις ρίζες της $\rho^3 - 2\rho^2 - 5\rho + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\rho^3 - 2\rho^2 + \rho - 6\rho + 6 = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho^2-2\rho+1) - 6(\rho-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\rho(\rho-1)^2 - 6(\rho-1) = 0 \Leftrightarrow (\rho-1)[\rho(\rho-1)-6] = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho-1)[\rho^2-\rho-6] = 0 \Leftrightarrow (\rho-1)[\rho^2-3\rho+2\rho-6] = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho-1)[\rho(\rho-3)+2(\rho-3)] \Leftrightarrow (\rho-1)(\rho-3)(\rho+2) = 0$

Άρα οι ρίζες της χααρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\rho_1=1, \rho_2=3, \rho_3=-2$ και η γενική λύση:

$$\psi=c_1e^{1x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x}.$$

2) Περίπτωση: Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές έχει ρίζες πραγματικές πολλαπλές. Εάν η χαρακτηριστική εξίσωση

$$f(\rho) = \rho^\nu + a_1\rho^{\nu-1} + a_2\rho^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1}\rho + a_\nu = 0$$

έχει τις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_\nu$ αντιστοίχως βαθμού πολλαπλότητας $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots, \kappa_\nu$ τότε οι

$e^{\rho_1 x}, \chi e^{\rho_1 x}, \chi^2 e^{\rho_1 x}, \ldots, \chi^{\kappa_1-1} e^{\rho_1 x}$

$e^{\rho_2 x}, \chi e^{\rho_2 x}, \chi^2 e^{\rho_2 x}, \ldots, \chi^{\kappa_2-1} e^{\rho_2 x}$

.....

.....

.....

$e^{\rho_\nu x}, \chi e^{\rho_\nu x}, \chi^2 e^{\rho_\nu x}, \ldots, \chi^{\kappa_\nu-1} e^{\rho_\nu}$

είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και' είναι πλήθους ν αφού

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\nu = \nu.$$

Άρα η γενική λύση είναι $\psi = \varphi_1(\chi)e^{\rho_1 x} + \varphi_2(\chi)e^{\rho_2 x} + \ldots + \varphi_\nu(\chi)e^{\rho_\nu x}$

όπου $\varphi_1(\chi)$ είναι αυθαίρετο πολυώνυμο κ_1-1 βαθμού

$\varphi_2(\chi)$ είναι αυθαίρετο πολυώνυμο κ_2-1 βαθμού

.....

$\varphi_\nu(\chi)$ είναι αυθαίρετο πολυώνυμο $\kappa_\nu-1$ βαθμού

Παραδείγματα

α) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi'''-3\psi'-2=0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης είναι:

$\rho^3 - 3\rho - 2 = 0$ που έχει ρίζες $\rho^3 - 3\rho - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\rho^3 - \rho - 2\rho - 2 = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho^2-1) - 2(\rho+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\rho(\rho+1)(\rho-1) - 2(\rho+1) = 0 \Leftrightarrow (\rho+1)(\rho^2-\rho-2) = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho+1)(\rho^2+\rho-2\rho-2) = 0 \Leftrightarrow (\rho+1)[(\rho(\rho+1)-2(\rho+1)] = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho+1)(\rho+1)(\rho-2) = 0$. Άρα οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\rho_1=-1$ διπλή και $\rho_2=2$ απλή. Δηλαδή $\kappa_1=2$ και $\kappa_2=1$.

Άρα η γενική λύση είναι:

$$\psi = \varphi_1(\chi)e^{-1x} + \varphi_2(\chi)e^{2x}$$

όπου $\varphi_1(\chi) = c_1 + c_2x$ βαθμού $2-1=1$

και $\varphi_2(\chi) = c_3$ βαθμού $1-1=0$

άρα η γενική λύση είναι: $\psi = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{2x}$ όπου c_1, c_2, c_3 αυθαίρετες σταθερές.

β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\psi^{(4)} + \psi^{(3)} - 3\psi'' - 5\psi' - 2\psi = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης είναι:

$\rho^4 + \rho^3 - 2\rho^2 - 5\rho - 2 = 0$

που έχει ρίζες $\rho^4 + \rho^3 - 3\rho^2 - 5\rho - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\rho^4 + \rho^3 - 3\rho^2 - 3\rho - 2\rho - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\rho^3(\rho+1) - 3\rho(\rho+1) - 2(\rho+1) = 0 \Leftrightarrow (\rho+1)(\rho^3-3\rho-2) = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho+1)(\rho^3--\rho-2\rho-2) = 0 \Leftrightarrow (\rho+1)[(\rho(\rho+1)(\rho-1) - 2(\rho+1)] = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho+1)(\rho+1)(\rho^2-\rho-2) = 0 \Leftrightarrow (\rho+1)(\rho+1)(\rho^2+\rho-2\rho-2) = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho+1)(\rho+1)[(\rho(\rho+1)-2(\rho+1)] = 0 \Leftrightarrow (\rho+1)^3(\rho-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\rho_1 = -1$ τριπλή και $\rho_2 = 2$ απλή δηλαδή $\kappa_1=3$ και $\kappa_2=1$.

Άρα η γενική λύση είναι $\psi = \varphi_1(\chi)e^{-1x} + \varphi_2(\chi)e^{2x}$ όπου

$\varphi_1(\chi) = c_1 + c_2x + c_3x^2$ βαθμού 3-1=2 και $\varphi_2(\chi)=c_4$ βαθμού 1-1=0.

Άρα η γενική λύση είναι $\psi=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x} + c_4e^{2x}$.

όπου c_1, c_2, c_3, c_4 αυθαίρετες σταθερές.

3) Περίπτωση: Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές έχει ρίζες μιγαδικές.
Εάν η διαφορική εξίσωση έχει ρίζες μιγαδικές απλές ή πολλαπλές της μορφής α+βi θα έχει ρίζα και τη συζυγή α−βi. Άρα η γενική λύση

$\psi = \varphi_1(\chi)e^{\rho_1 x} + \varphi_2(\chi)e^{\rho_2 x} + \ldots + \varphi_\nu(\chi)e^{\rho_\nu x}$

της περίπτωσης (2) για το τμήμα της γενικής λύσης που προέρχεται από τις ρίζες $\rho_1=\alpha+\beta i$ και $\rho_2=\alpha-\beta i$ είναι της μορφής :

$A = e^{(\alpha+\beta i)x}.\varphi_1(\chi) + e^{(\alpha-\beta i)x}.\varphi_2(\chi)$ όπου $\varphi_1(\chi)$ και $\varphi_2(\chi)$

αυθαίρετα πολυώνυμα κ-1 βαθμού (κ βαθμός πολλαπλότητος μιγαδικής ρίζας)

και επειδή $e^{\beta x i} = \sigma\upsilon\nu\beta x + i\eta\mu\beta\chi$ και $e^{-\beta x i} = \sigma\upsilon\nu\beta\chi - i\eta\mu\beta\chi$ έχομε

$A = e^{\alpha x}e^{\beta x i}.\varphi_1(\chi) + e^{\alpha x}e^{\beta x i}.\varphi_2(\chi) = e^{\alpha x}[e^{\beta x i}.\varphi_1(\chi) + e^{\beta x i}.\varphi_2(\chi)]$

$= e^{\alpha x}[(\sigma\upsilon\nu\beta x+i\eta\mu\beta\chi)\varphi_1(\chi) + (\sigma\upsilon\nu\beta x-i\eta\mu\beta\chi)\varphi_2(\chi)] =$

$= e^{\alpha x}[\sigma\upsilon\nu\beta x(\varphi_1(\chi)+\varphi_2(\chi)) + \eta\mu\beta\chi(i\varphi_1(\chi)-i\varphi_2(\chi))] =$

$= e^{\alpha x}[\sigma\upsilon\nu\beta x.\Pi_1(\chi) + \eta\mu\beta\chi.\Pi_2(\chi)]$ όπου $\Pi_1(\chi)$ και $\Pi_2(\chi)$ αυθαίρετα πολυώνυμα κ-1 βαθμού (κβαθμός πολλαπλότητας μιγαδικής ρίζας).

Παραδείγματα

α) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\psi'' + 9\psi = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι $\rho^2+9=0$ που έχει ρίζες

$\rho^2+9=0 \Leftrightarrow \rho^2-3^2i^2=0 \Leftrightarrow (\rho+3i)(\rho-3i)=0 \Leftrightarrow \rho_1=0+3i\ ,\ \rho_2=0-3i$

βαθμού πολλαπλότητας κ=1.

Άρα η γενική λύση $\psi=e_{\alpha x}[\Pi_1(\chi)\sigma\upsilon\nu\beta\chi + \Pi_2(\chi)\eta\mu\beta\chi]$

για $\alpha=0$, $\beta=3$ και $\Pi_1(\chi)=c_1$, $\Pi_2(x)=c_2$ αφού τα πολυώνυμα $\Pi_1(\chi)$, $\Pi_2(\chi)$ είναι αυθαίρετα βαθμού κ-1=0 , γίνεται

$\psi = e^{0x}(c_1\sigma\upsilon\nu2\chi + c_2\eta\mu2\chi) = c_1\sigma\upsilon\nu2\chi + c_2\eta\mu2\chi$ όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\psi^{(4)} + 8\psi'' + 16\psi = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\rho^4 + 8\rho^2 + 16 = 0$$

που έχει ρίζες $\rho^4 + 8\rho^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \psi=\rho^2$ και $\psi^2 + 8\psi + 16 = 0$

$\Leftrightarrow \psi=\rho^2$ και $(\psi+4)^2 = 0 \Leftrightarrow (\rho^2+4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho+2i)^2(\rho-2i)^2 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = 0+2i$ διπλή και $\rho_2 = 0-2i$ διπλή δηλαδή $\kappa=2$.

Άρα η γενική λύση $\psi = e^{\alpha x}[\Pi_1(\chi)\sigma\upsilon\nu\beta\chi + \Pi_2(\chi)\eta\mu\beta\chi]$ για $\alpha=0$, $\beta=2$

και $\Pi_1(\chi)=c_1+c_2x$, $\Pi^2(\chi)=c_3+c_4x$ αφού τα αυθαίρετα πολυώνυμα $\Pi_1(\chi)$ και $\Pi_2(\chi)$ είναι βαθμού $\kappa-1=2-1=1^{ου}$ γίνεται

$\psi = e^{0x}[(c_1+c_2x)\sigma\upsilon\nu2\chi + (c_3+c_4x)\eta\mu2\chi] =$

$= (c_1+c_2x)\sigma\upsilon\nu2\chi + (c_3+c_4x)\eta\mu2\chi$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

γ) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\psi^{(7)} + 16\psi^{(3)} = 0$.

<u>Λύση</u>
Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι $\rho^7+16\rho^3=0$ που έχει ρίζες:

$\rho^7 + 16\rho^3 = 0 \Leftrightarrow \rho^3(\rho^4+16) = 0 \Leftrightarrow \rho^3=0$ και $(\rho^4+16)=0 \Leftrightarrow$

$\rho_1=0$ τριπλή ρίζα δηλαδή $\kappa_1=3$ και $\rho^4+16+8\rho^2-8\rho^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(\rho^2+4)^2 - (\sqrt{8}\rho)^2 = 0 \Leftrightarrow (\rho^2+4-\sqrt{8}\rho)(\rho^2+4+\sqrt{8}\rho) = 0 \Leftrightarrow$

$\rho^2+4-\sqrt{8}\rho = 0$ και $\rho^2+4+\sqrt{8}\rho = 0$ οπότε

$$\rho_{2,3} = \frac{\sqrt{8} \pm \sqrt{8-16}}{2} = \frac{\sqrt{8} \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2i\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$\rho_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, απλή δηλαδή $\kappa_2=1$

$\rho_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ απλή δηλαδή $\kappa_3=1$

και η

$\rho^2 - \sqrt{8}\rho + 4 = 0$ δίνει

$\rho_4 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ απλή δηλαδή $\kappa_4=1$

$\rho_5 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ απλή δηλαδή $\kappa_5=1$

Άρα το τμήμα της γενικής λύσεως που προέρχεται από τις ρίζες της μορφής $\rho_2=\alpha+\beta i$, $\rho_3=\alpha-\beta i$ είναι

$e^{\alpha x}[\Pi_1(\chi)\sigma\upsilon\nu\beta\chi + \Pi_2(\chi)\eta\mu\beta\chi]$

Εδώ το τμήμα της γενικής λύσεως που προέρχεται από τις ρίζες

$\rho_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\rho_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ είναι

$e^{\sqrt{2}x}[c_4\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}\chi) + c_5\eta\mu(\sqrt{2}\chi)]$ αφού $\Pi_1=c_4$ πολυώνυμο αυθαίρετο

βαθμού 1-1=0 και $\Pi_2=c_5$ πολυώνυμο αυθαίρετο βαθμού 1-1=0.

Για το τμήμα της γενικής λύσης που προέρχεται από τις ρίζες

$\rho_4 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\rho_5 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ είναι

$e^{-\sqrt{2}x}[c_6\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}\chi) + c_7\eta\mu(\sqrt{2}\chi)]$ αφού $\Pi_1=c_6$ πολυώνυμο αυθαίρετο

βαθμού 1-1=0 και $\Pi_2=c_7$ πολυώνυμο αυθαίρετο βαθμού 1-1=0.

Το δε τμήμα της γενικής λύσεως που προέρχεται από την τριπλή ρίζα $\rho_1=0$ με $\kappa_1=3$ έχει τη μορφή

$(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{0x} = c_1 + c_2x + c_3x^2$ αφού το πολυώνυμο που είναι συντελεστής του $e^{\rho x}$ είναι βαθμού 3-1=2. Άρα η γενική λύση έχει τη μορφή:

$c_1 + c_2x + c_3x^2 + e^{\sqrt{2}x}[c_4\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}\chi) + c_5\eta\mu(\sqrt{2}\chi)] +$

$e^{-\sqrt{2}x}[c_6\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}\chi) + c_7\eta\mu(\sqrt{2}\chi)]$.

Ασκήσεις Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

1. $\psi'''-2\psi''-\psi'+2\psi=0$

2. $\psi'''-3\psi''+3\psi'-\psi=0$

3. $-\psi'''+\psi''-\psi'+\psi=0$

4. $\psi^{(4)}-\psi=0$

5. $\psi^{(4)}+4\psi'''-4\psi'-\psi=0$

6. $\psi^{(4)}+2\psi''+\psi=0$

7. $\psi^{(4)}-4\psi'''+7\psi''-4\psi'+6\psi=0.$

9 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές με δεύτερο μέλος <>0

Ορισμός: Κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση ν τάξεως με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή:

$$1)\ P_0\frac{d^\nu f}{dx^\nu}+P_1\frac{d^{\nu-1}f}{dx^{\nu-1}}+\ldots+P_{\nu-1}\frac{df}{dx}+P_\nu f=Q(x)$$ όπου

$P_0<>0$, $P_1,\ldots,P_{\nu-1}$, P_ν είναι σταθερές και $Q(x)$ είναι συνάρτηση του χ.

Κάθε διαφορική εξίσωση της ανωτέρω μορφής μετασχηματίζεται στη μορφή $R(D)f=Q$, οπότε μια μερική λύση της είναι η

$$f=\frac{1}{R(D)}Q.$$

Ανάλογα με τη μορφή της συναρτήσεως Q, η ανωτέρω μερική λύση μπορεί να απλουστευθεί.

<u>β) Εάν το δεύτερο μέρος της (1) είναι ένα πολυώνυμο P(χ) έστω μ βαθμού μ ∈ N</u>
Τότε η μερική λύση της (1) είναι:

$$f = \frac{1}{R(D)}P(\chi) = (\alpha_o + \alpha_1 D + \ldots + \alpha_\mu D^\mu)P(\chi) \quad , \alpha_o \neq 0$$

η οποία λαμβάνεται αναπτύσσοντας το $\frac{1}{R(D)}$ κατά τις αύξουσες δυνάμεις του D και έχοντας υπ'όψη ότι $D^n P(\chi)=0$ για $n>m$.

<u>Παράδειγμα</u>
Βρείτε μια μερική λύση της $(2D^2 + 2D + 3)\psi = \chi^2 + 2\chi - 1$.

Θεωρώ $\frac{1}{2D^2 + 2D + 3} = \alpha_o + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2$, $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2$ προσδιοριστέοι

$$\Leftrightarrow 1 = (2D^2 + 2D + 3)(\alpha_o + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_o = 1/3 \\ \alpha_1 = -2/9 \\ \alpha_2 = -2/27 \end{cases}$$

Οπότε η μερική λύση είναι $\psi = (\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \frac{2}{27}D^2)(x^2+2x-1) =$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x-1) - \frac{2}{9}D(x^2+2x-1) - \frac{2}{27}D^2(x^2+2x-1) =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x-1) - \frac{2}{9}\frac{d}{dx}(x^2+2x-1) - \frac{2}{27}\frac{d^2}{dx^2}(x^2+2x-1) =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x-1) - \frac{2}{9}(2x+2) - \frac{2}{27}(2) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{25}{27}$$

β) Εάν το δεύτερο μέλος της (1) είναι της μορφής e^{ax}, όπου α σταθερός αριθμός
Τότε η μερική λύση της (1) είναι:

$$f = \frac{1}{R(D)}e^{ax} = \frac{1}{R(a)}e^{ax} \qquad \text{αν} \quad R(a)\neq 0$$

Απόδειξη

$f = e^{ax}$, $Df = ae^{ax}$, $D^2f = a^2e^{ax}$, ... , $D^re^{ax} = a^re^{ax} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R(D)e^{ax} = \sum_{r=1}^{v} P_rD^re^{ax} = \sum_{r=1}^{v} P_ra^re^{ax} = R(a)e^{ax} \Rightarrow \frac{1}{R(D)}e^{ax} =$$

$$= \frac{1}{R(a)}e^{ax}.$$

Παράδειγμα
Βρείτε μια μερική λύση της $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\psi = e^{5x}$

Εδώ $R(D) = D^3 - 2D^2 - 5D + 6 = (D-1)(D-3)(D+2)$ και μια μερική λύση της είναι:

$$\psi = \frac{1}{(5-1)(5-3)(5+2)}e^{5x} = \frac{1}{4\cdot 2\cdot 7}e^{5x} = \frac{1}{56}e^{5x}$$

γ) Εάν το δεύτερο μέλος της (1) είναι της μορφής $\eta\mu(ax+b)$ ή $\sigma\upsilon\nu(ax+b)$, όπου a,b σταθερές
Τότε μια μερική λύση της (1) είναι αντίστοιχα:

$$f = \frac{1}{R(D^2)}\eta\mu(ax+b) = \frac{1}{R(-a^2)}\eta\mu(ax+b), \qquad R(-a^2)\neq 0$$

$$f = \frac{1}{R(D^2)}\,\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b) = \frac{1}{R(-\alpha^2)}\,\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b) \quad , \quad R(-\alpha^2)\neq 0$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε τη μέθοδο για $\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b)$.

$f = \sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b)$, $D^2f = -\alpha^2\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b)$, $D^4f = (-\alpha^2)^2\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b)$, ...

$D^{2r}f = (-\alpha^2)^r\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b)$ ==>

$$R(D^2)\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b) = \sum_{r=1}^{v} P_r D^{2r}\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b) = \sum_{r=1}^{v} P_r(-\alpha^2)^r\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b) =$$

$$R(-\alpha^2)\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b) = \frac{1}{R(D^2)}\,\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b) = \frac{1}{R(-\alpha^2)}\,\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+b)$$

Όμοια αποδεικνύεται η μέθοδος για $\eta\mu(\alpha\chi+b)$.

Παράδειγμα

Να βρείτε μια μερική λύση της $(D^2+4)\psi = \sigma\upsilon\nu 3\chi$

Εδώ $R(D^2) = D^2 + 4$ ==> $R(-\alpha^2) = -3^2 + 4 = -5$

Οπότε μια μερική λύση της είναι

$$\psi = -\frac{1}{5}\,\sigma\upsilon\nu 3\chi$$

Παρατήρηση : Παρατηρούμε ότι η μέθοδος ισχύει όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης είναι πολυώνυμο του D^2. Εάν αυτό είναι πολυώνυμο του D, προσπαθούμε να το μετασχηματίσουμε στην ανωτέρω μορφή.

Παράδειγμα
Να βρείτε μια μερική λύση της $(D^2 + 3D - 4) = \eta\mu 2\chi$.

Εδώ $R(D) = (D^2 + 3D - 4) = (D-1)(D+4) \Rightarrow$

$$\frac{1}{R(D)} = \frac{1}{(D-1)(D+4)} = \frac{(D+1)(D-4)}{(D-1)(D+4)(D+1)(D-4)} = \frac{D^2-3D-4}{(D^2-1)(D^2-4)}$$

και μια μερική λύση της είναι:

$$\psi = \frac{D^2-3D-4}{(D^2-1)(D^2-4)}\eta\mu 2\chi = \frac{1}{(-2^2-1)(-2^2-4)}(D^2-3D-4)\eta\mu 2\chi =$$

$$\frac{1}{40}(D^2\eta\mu 2\chi - 3D\eta\mu 2\chi - 4\eta\mu 2\chi) =$$

$$\frac{1}{40}(-4\eta\mu 2\chi - 6\sigma\upsilon\nu 2\chi - 4\eta\mu 2\chi) =$$

$$-\frac{1}{20}(4\eta\mu 2\chi + 3\sigma\upsilon\nu 2\chi).$$

δ) Το δεύτερο μέλος της (1) είναι της μορφής $e^{\alpha x}g(x)$, όπου α σταθερά και $g(x)$ συνάρτηση του χ.

Τότε μια μερική λύση της (1) είναι:

$$f = \frac{1}{R(D)} e^{\alpha x}g(x) = - e^{\alpha x} \frac{1}{R(D+\alpha)} g$$

Απόδειξη

$f = e^{\alpha x}g$, $Df = e^{\alpha x}g + e^{\alpha x}Dg = e^{\alpha x}(D+\alpha)$, ..., $D^r f = e^{\alpha x}(D+\alpha)^r g$

$$\Rightarrow R(D)e^{\alpha x}g = \sum_{r=1}^{v} P_r D^r(e^{\alpha x}g) = \sum_{r=1}^{v} P_r e^{\alpha x}(D+\alpha)^r g = e^{\alpha x}\sum_{r=1}^{v} P_r (D+\alpha)^r g =$$

$$= e^{\alpha x}R(D+\alpha)g$$

$$\text{οπότε } \frac{1}{R(D)}e^{\alpha x}g = e^{\alpha x}\frac{1}{R(D+\alpha)}g$$

Παραδείγματα

1) Βρείτε μια μερική λύση της $(D^2-4)\psi = \chi^2 e^{3x}$

Εδώ $R(D) = D^2-4 \Rightarrow R(D+\alpha) = (D+3)^2 - 4 = D^2 + 6D + 5$

και $g(x) = x^2$. Οπότε μια μερική λύση της είναι:

$$\psi = e^{3x}\frac{1}{D^2 + 6D + 5}x^2$$

και συνεχίζοντας όπως στο παράδειγμα της περίπτωσης α, λαμβάνουμε

$$\psi = e^{3x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{12}{25}x + \frac{62}{125}\right)$$

2) Βρείτε μια μερική λύση της $(D^2+2D+4)\psi = e^x \eta\mu 2\chi$

Εδώ $R(D) = D^2 + 2D + 4 = R(D+\alpha) = R(D+1) = (D+1)^2 + 2(D+1) + 4 =$

$= D^2 + 4D + 7$ και $g(x) = \eta\mu 2\chi$.

Οπότε μια μερική λύση της είναι:

$$\psi = e^{x} \frac{1}{D^2 + 4D + 7} \eta\mu 2\chi, \text{ και συνεχίζοντας όπως στο δεύτερο}$$

παράδειγμα της περιπτώσεως γ, λαμβάνουμε

$$\psi = -\frac{e^{x}}{73}(8\sigma\upsilon\nu 2\chi - 3\eta\mu 2\chi).$$

Τα παρακάτω παραδείγματα αναφέρονται σε συνδυασμούς των προηγούμενων περιπτώσεων.

Παραδείγματα

1) Βρείτε μια μερική λύση της

$$(D^3 + D^2 + D + 1)\psi = \eta\mu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi$$

Εδώ $R(D) = D^3 + D^2 + D + 1 = (D^2+1)(D+1)$

οπότε μια μερική λύση της είναι:

$$\psi = \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}(\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu 3\chi) = \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\eta\mu 2\chi + \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\sigma\upsilon\nu 3\chi$$

$$= \frac{D-1}{(D^2+1)(D^2-1)}\eta\mu 2\chi + \frac{D-1}{(D^2+1)(D^2-1)}\sigma\upsilon\nu 3\chi =$$

$$= \frac{1}{(-2^2+1)(-2^2-1)}(D-1)\eta\mu 2\chi + \frac{1}{(-3^2+1)(-3^2-1)}(D-1)\sigma\upsilon\nu 3\chi =$$

$$= \frac{1}{15}(D-1)\eta\mu 2\chi + \frac{1}{80}(D-1)\sigma\upsilon\nu 3\chi =$$

$$= \frac{1}{15}(D\eta\mu 2\chi - \eta\mu 2\chi) + \frac{1}{80}(D\sigma\upsilon\nu 3\chi - \sigma\upsilon\nu 3\chi) =$$

$$= \frac{1}{15}(2\sigma\upsilon\nu 2\chi - \eta\mu 2\chi) - \frac{1}{80}(3\eta\mu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi) =$$

2) Βρείτε μια μερική λύση της $(D^2+2D-3)\psi = \chi^2+3e^{2x}+4\eta\mu\chi$.

Εδώ $R(D) = D^2+2D-3 \Longrightarrow \frac{1}{R(D)} = \frac{1}{D^2+2D-3}$

οπότε μια μερική λύση της είναι:

$$\psi = \frac{1}{D^2+2D-3}(\chi^2+3e^{2x}+4\eta\mu\chi) =$$

$$= \frac{1}{D^2+2D-3}\chi^2 + 3\frac{1}{D^2+2D-3}e^{2x} + 4\frac{1}{D^2+2D-3}\eta\mu\chi \quad \text{κ.λ.π.}$$

Παρατήρηση: Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι για την εύρεση μιας μερικής λύσης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές. Στα όρια όμως αυτής της εργασίας, οι παραπάνω μέθοδοι είναι οι πιο σύντομες.

Για την γενική λύση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές ισχύει:

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ	=	ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ	+	ΜΕΡΙΚΗ ΛΥΣΗ

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{d^2\psi}{dx^2} - 4\psi = x^2e^{3x}$

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$(D^2-4)\psi = x^2e^{3x}$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι :

$(D^2-4)\psi = 0 \iff (D+2)(D-2)\psi = 0$

και η γενική λύση της είναι:

$\psi_{ОМ} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 1 της περιπτώσεως δ, μια μερική λύση της είναι η

$$\psi_{МЕР} = e^{3x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{12}{25}x + \frac{62}{125}\right)$$

Οπότε η γενική λύση της εξισώσεως είναι:

$$\psi = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + e^{3x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{12}{25}x + \frac{62}{125}\right) \Longrightarrow$$

$$\psi = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{125}e^{3x}(25x^2 - 60x + 62)$$

Μια εφαρμογή των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές στα ηλεκτρικά κυκλώματα

Βρείτε το ηλεκτρικό φορτίο q σαν συνάρτηση του χρόνου t όταν την χρονική στιγμή t=0 ισχύει:

$$q=0.05cb \quad \text{και} \quad i = \frac{dq}{dt} = 0 .$$

$$\text{Γενικά ισχύει } L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = E(t) \quad (i=dq/dt) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E(t) \qquad (1)$$

Εδώ δεν υπάρχει γεννήτρια, οπότε E(t)=0. Έτσι η (1) γίνεται:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 200\frac{dq}{dt} + 400000q = 0$$

<u>ομογενής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές</u>.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$D^2 + 200D + 400000 = 0$ και η γενική λύση της

$q = e^{-100t}(A\sigma\upsilon\nu 100\sqrt{39}t + B\eta\mu 100\sqrt{39}t)$ (2) όπου A,B προσδιοριστέοι

$$i = \frac{dq}{dt} = 100e^{-100t}[(\sqrt{39}B-A)\sigma\upsilon\nu 100\sqrt{39}t - (\sqrt{39}A+B)\eta\mu 100\sqrt{39}t] \quad (3)$$

Η (2) για t=0, q=0.05cb και η (3) για t=0, i=0 αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τα A,B.
Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε A=0.05 , B=0.0077
Οπότε η (2) τελικά παίρνει τη μορφή:

$q = e^{-100t}(0.05\sigma\upsilon\nu 100\sqrt{39}t + 0.0077\eta\mu 100\sqrt{39}t)$.

10 Μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace

1. **Ολωκληρωτικός μετασχηματισμός** μιας συναρτήσεως f με τύπο f(t) ονομάζεται κάθε συνάρτηση f με τύπο F(S) ώστε

$$F(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K(S,t)dt \quad (1)$$

Η συνάρτηση K(S,t) λέγεται "πυρήνας" του μετασχηματισμού. Ο πυρήνας K(S,t) παίρνει διάφορες μορφές ανάλογα με το πρόβλημα που επιλύουμε και έτσι προκύπτουν ποικιλίες ολοκληρωτικών μετασχηματισμών.

2. **Μετασχηματισμός Laplace.**

Αν στη σχέση (1) ο πυρήνας μετασχηματισμού K(S,t) λάβει τη μορφή $K(S,t) = e^{-st}$ για $t>0$, τα δε όρια ολοκληρώσεως γίνουν από 0 έως +οο αυτή γίνεται

$$F(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

που <u>ορίζεται</u> ως <u>μετασχηματισμός Laplace</u> (M.L) και που σε ορισμένες περιπτώσεις τον συμβολίζουμε και ως L[f(t)]. Αυτό μας επιτρέπει να δούμε το L με την έννοια του τελεστή που ενεργεί στην f(t) και την μετατρέπει σε F(S).

Ο τελεστής Laplace, με σύμβολο L, είναι γραμμικός τελεστής ισχύει δηλαδή η σχέση:

$$L\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\} = c_1L\{f_1(t)\} + c_2L\{f_2(t)\}$$

όπου $f_1(t)$ και $f_2(t)$ τύπος συναρτήσεων που έχουν M.L και c_1, c_2 σταθερές.

Ο μετασχηματισμός Laplace έχει το πλεονέκτημα να αντικαθιστά πολύπλοκες διαδικασίες ολοκλήρωσης με αλγεβρικές μεθόδους σε αλγεβρικές γραμμικές εξισώσεις. Δηλαδή προσφέρει κάτι ανάλογο μ'αυτό που επιτυγχάνουν οι λογάριθμοι που ως γνωστό τις πράξεις

του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης τις μετατρέπουν σε πρόσθεση και αφαίρεση.

Οι μετασχηματισμοί Laplace για διάφορες απλές μορφές της συνάρτησης f με f(t) δίνονται από τον πίνακα:

11 ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE

f(t)	F(S)
1	$\frac{1}{S}$
a	$\frac{a}{S}$
t^v	$\frac{v!}{S^{v+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{S-a}$
συνkt	$\frac{S}{S^2+k^2}$
ημkt	$\frac{k}{S^2+k^2}$
cosh(kt)	$\frac{S}{S^2-k^2}$
sinh(kt)	$\frac{k}{S^2-k^2}$

$e^{at}\sigma\upsilon\nu kt$	$\frac{S-a}{(S-a)^2+k^2}$
$e^{at}\eta\mu kt$	$\frac{k}{(S-a)^2+k^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(S+a)^2}$
$t\sigma\upsilon\nu kt$	$\frac{S^2-k^2}{(S^2+k^2)^2}$
$t\eta\mu kt$	$\frac{2kS}{(S^2+k^2)^2}$

Αποδείξεις των τύπων του πίνακα:

I. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)=1$.

$$F(S) = \int_0^{+\infty} 1e^{-st}dt = -\frac{1}{S}\int_0^{+\infty} d(e^{-st}) = \left[-\frac{1}{S}e^{-st}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{S}(e^{-\infty} - e^{0}) = -\frac{1}{S}(0-1) = \frac{1}{S}, \text{ αφού } S>0 \Longrightarrow -S(+\infty) = -\infty$$

$$\Longrightarrow e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0.$$

II. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)=t$.

$$F(S) = \int_0^{+\infty} te^{-st}dt \qquad \text{Επειδή όμως}$$

$$\int te^{-st}dt = -\frac{1}{S}\int td(e^{-st}) = -\frac{1}{S}(te^{-st} - \int e^{-st}dt) =$$

$$= -\frac{1}{S}(te^{-st} + \frac{1}{S}\int d(e^{-st}) = -\frac{te^{-st}}{S} - \frac{1}{S^2}e^{-st} + c$$

Έχομε

$$F(S) = [-\frac{te^{-st}}{S} - \frac{1}{S^2}e^{-st}]_0^{+\infty} = -[\frac{(+\infty)e^{-\infty}}{S} - \frac{0e^0}{S}] -$$

$$[\frac{e^{-\infty}}{S^2} - \frac{e^0}{S^2}] = -(0-0) - (0 - \frac{1}{S^2}) = \frac{1}{S^2} \qquad \text{αφού } S>0$$

III. Να βρεθεί ο M.L της $f(t) = t^\nu$.

Στο (1) έχομε βρει $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{S}$. Η ν - τάξεως μερική παράγωγος ως προς S στον τύπο αυτό δίνει:

$$\frac{\partial^\nu}{\partial S^\nu}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{\partial^\nu}{\partial S^\nu}(\frac{1}{S})$$

Είναι όμως

$$\frac{\partial^\nu}{\partial S^\nu}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial S_\nu}(e^{-st}dt) = \int_0^{+\infty}(-t)^\nu e^{-st}dt$$

Αφού

$$\frac{\partial}{\partial S}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial S}(e^{-st}dt) = \int_0^{+\infty}(-t)^1 e^{-st}dt$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{\partial}{\partial S}\int_0^{+\infty}(-t)^1 e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial S}(-t)^1 e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}(-t)^1\frac{\partial}{\partial S}(e^{-st}dt)$$

$$= \int_0^{+\infty}(-t)^2 e^{-st}dt \quad \text{κ.λ.π.}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial S^\nu}\left(\frac{1}{S}\right)(-) = (-1)^\nu\frac{\nu!}{S^{\nu+1}} \quad \text{Αφού}$$

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{S}\right)(-) = \frac{-1}{S^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left(\frac{1}{S}\right)(-) = \frac{\partial}{\partial S}\left(-\frac{1}{S^2}\right)(-) = \frac{1\cdot 2S}{S^4} = \frac{1\cdot 2}{S^3}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial S^3}\left(\frac{1}{S}\right)(-) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1\cdot 2}{S^3}\right) = \frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot S^2}{S^6} = \frac{-1\cdot 2\cdot 3}{S^4} \quad \text{κ.λ.π.}$$

και παραλείποντας το $(-1)^\nu$ έχομε

$$F(S) = \int_0^{+\infty} t^\nu e^{-st}dt = \frac{\nu!}{S^{\nu+1}} \qquad (\nu \geq 0, \quad S > 0)$$

IV. Να βρεθεί ο M.L. της $f(t) = e^{at}$.

$$F(S) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt =$$

$$= -\frac{1}{S-a}\int_0^{+\infty} de^{-(s-a)t} = -\frac{1}{S-a}[e^{-(s-a)t}] =$$

$$= -\frac{1}{S-a}[e^{-(s-a)(+\infty)} - e^{-(s-a)(0)}] = -\frac{1}{S-a}(0-1) = \frac{1}{S-a}$$

με $S > a \Longrightarrow S-a > 0 \Longrightarrow -(S-a) < 0 \Longrightarrow -(S-a)(+\infty) = -\infty$.

V. Να βρεθεί ο M.L της f(t) = συνkt και f(t) = ημkt.

Επειδή e^{ikt} είναι εκθετική μορφή μιγάδα με ρ=1 και όρισμα kt και το e^{-ikt} είναι εκθετική μορφή μιγάδα με ρ=1 και όρισμα -kt και έχομε:

$e^{ikt} = συνkt + iημkt$

$e^{-ikt} = συν(-kt) + iημ(-kt) = συνkt - iημkt$

άρα

$$e^{ikt} + e^{-ikt} = 2συνkt \Longrightarrow συνkt = \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt})$$

και

$$e^{ikt} - e^{-ikt} = 2iημkt \Longrightarrow ημkt = \frac{1}{2i}(e^{ikt} - e^{-ikt})$$

άρα

$$M.L \text{ του } συνkt = M.L\ \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt}) =$$

$$M.L\ \tau\omega\upsilon\ \frac{1}{2}e^{ikt} + M.L\ \tau\omega\upsilon\ \frac{1}{2}e^{-ikt} = \frac{1}{2}\frac{1}{S-ik} + \frac{1}{2}\frac{1}{S+ik} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{S+ik}{S^2-i^2k^2} + \frac{1}{2}\frac{S-ik}{S^2-i^2k^2} = \frac{2S}{2(S^2+k^2)} = \frac{S}{S^2+k^2}$$

$$\kappa\alpha\iota\ M.L\ \tau\omega\upsilon\ \eta\mu kt = M.L\ \frac{1}{2i}(e^{ikt} - e^{-ikt}) =$$

$$M.L\ \tau\omega\upsilon\ \frac{1}{2i}e^{ikt} - M.L\ \tau\omega\upsilon\ \frac{1}{2i}e^{-ikt} = \frac{1}{2i}\frac{1}{S-ik} - \frac{1}{2i}\frac{1}{S+ik} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{S+ik-S+ik}{S^2-i^2k^2}\right) = \frac{k}{S^2+k^2}$$

VI. Να υπολογιστεί ο M.L της $f(t) = \cosh(kt)$, $f(t) = \sinh(kt)$.

Επειδή $\cosh(kt) = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$ έχομε

$$M.L\ \tau\omega\upsilon\ \cosh(kt) = M.L\ \tau\omega\upsilon\ \frac{1}{2}e^{kt} + M.L\ \tau\omega\upsilon\ \frac{1}{2}e^{-kt} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{S-k} + \frac{1}{2}\frac{1}{S+k} = \frac{1}{2}\left(\frac{S+k+S-k}{S^2-k^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2S}{S^2-k^2} = \frac{S}{S^2-k^2}$$

και επειδή $\sinh(kt) = \frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt})$ έχομε

$$\text{M.L του } \sinh(kt) = \text{M.L του } \frac{1}{2} e^{kt} - \text{M.L του } \frac{1}{2} e^{-kt} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{S-k} - \frac{1}{2}\frac{1}{S+k} = \frac{1}{2}\left(\frac{S+k-S+k}{S^2-k^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2k}{S^2-k^2} = \frac{k}{S^2-k^2}.$$

1ο Βασικό θεώρημα

Αν ο μετασχηματισμός Laplace (M.L) μιας συναρτήσεως f(t) είναι F(S) τότε ο M.L της $e^{at}f(t)$ είναι F(S-a). Αυτό σημαίνει ότι για να βρούμε το M.L της $e^{at}f(t)$ βρίσκομε το M.L της f(t) και αντικαθιστούμε το S με S-a.

Απόδειξη

$$\text{Ο M.L της } f(t)e^{at} = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt =$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(S) \quad \text{και θέτοντας } S=S-a \text{ έχομε}$$

$$\text{M.L} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(S) = F(S-a).$$

Εφαρμογές

α) Να ευρεθεί ο M.L της $e^{at}\sigma\upsilon\nu kt$

παίρνομε f(t) = συνkt έχομε τότε

$$\text{M.L της } f(t) = \text{M.L του } \sigma\upsilon\nu kt = \frac{S}{S^2+k^2} \quad \text{και θέτοντας}$$

$S=S-a$ έχομε M.L του συνkt = $\dfrac{S-a}{(S-a)^2+k^2}$

β) Να ευρεθεί ο M.L της e^{at}ημkt

παίρνομε f(t) = ημkt έχομε τότε

M.L της f(t) = M.L του ημkt = $\dfrac{k}{S^2+k^2}$ και θέτοντας

$S=S-a$ έχομε M.L του ημkt = $\dfrac{k}{(S-a)^2+k^2}$.

2ο Βασικό θεώρημα

Αν F(S) είναι ο M.L της f(t) τότε ο M.L της $t^v f(t)$ είναι :

$$(-1)^v \frac{d^v F(S)}{dS^v} .$$

Εφαρμογές

α) Να βρεθεί ο M.L της t·συνkt

παίρνομε f(t) = συνkt έχομε τότε

F(S) = M.L της f(t) = M.L του συνkt = $\dfrac{S}{S^2+k^2}$ και

$$\text{M.L της tσυνkt} = (-1)\frac{d\frac{S}{S^2+k^2}}{dS} = (-1)\frac{S'(S^2+k^2)-(S^2+k^2)'S}{(S^2+k^2)^2} =$$

$$= (-1)\frac{1(S^2+k^2) - (2S)S}{(S^2+k^2)^2} = (-1)\frac{k^2-S^2}{(S^2+k^2)^2} = \frac{S^2-k^2}{(S^2+k^2)^2}.$$

β) Να βρεθεί ο M.L της τημkt

παίρνομε f(t) = ημkt έχομε τότε

$$F(S) = \text{M.L της } f(t) = \text{M.L του ημkt} = \frac{k}{S^2+k^2} \quad \text{και}$$

$$\text{M.L της τημkt} = (-1)\frac{d\frac{k}{S^2+k^2}}{dS} = (-1)\frac{k'(S^2+k^2) - (S^2+k^2)'k}{(S^2+k^2)^2} =$$

$$= (-1)\frac{0 - (2S)k}{(S^2+k^2)^2} = \frac{2Sk}{(S^2+k^2)^2}.$$

Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο M.L της $e^{-2t}συν4t$

Αν πάρουμε ως f(t) = συν4t έχομε

$$\text{M.L της } f(t) = \text{M.L του συν4t} = \frac{S^2}{S^2+4^2} = \frac{S^2}{S^2+16} \quad \text{και θέτοντας}$$

σ'αυτό όπου S το S−a = S − (−2) = S+2 έχομε

$$\text{M.L της } e^{-2t}συν4t = \frac{S+2}{(S+2)^2+16} = \frac{S+2}{S^2+4S+20}.$$

2. Να βρεθεί ο M.L της t^2e^{3t}

Αν πάρουμε $f(t) = t^2$ έχομε

$$\text{M.L της } f(t) = \text{M.L του } t^2 = \frac{2!}{S^{2+1}} = \frac{2!}{S^3} \quad \text{και θέτομε σ'αυτόν}$$

όπου S το S-a = S-3 έχομε M.L της $t^2e^{3t} = \frac{2!}{(S-2)^3}$.

12 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αν F(S) ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως f(t), λέμε ότι η f(t) είναι αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F(S) και γράφουμε:

$$f(t) = L^{-1}\{F(S)\}$$

όπου πάλι οι συναρτήσεις f(t) και F(S) συνδέονται με τη σχέση:

$$F(S) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$L^{-1}\{c_1F_1(S) + c_2F_2(S)\} = c_1L^{-1}\{F_1(S)\} + c_2L^{-1}\{F_2(S)\}$$

Για την εύρεση των αντίστροφων M.L χρησιμοποιούμε τον πίνακα της σελίδας 66.

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως:

$$F(S) = \frac{1}{S(S+1)}$$

$$\frac{1}{S(S+1)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+1} \Longleftrightarrow 1 = A(S+1) + BS$$ για $S=0$ έχομε

$1 = A(0+1) + B0 \Longrightarrow \underline{A=1}$

$S=-1$ έχομε $1 = A(-1+1) + B(-1) \Longrightarrow \underline{B=-1}$

Άρα

$$\frac{1}{S(S+1)} = \frac{1}{S} + \frac{-1}{S+1}$$

και

$$L^{-1}(1/S) = 1 \ , \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{S+1}\right) = e^{-t}$$

Άρα $$L^{-1}(F(S)) = L^{-1}\left(\frac{1}{S(S+1)}\right) = 1 - e^{-t} \ .$$

2. Να βρεθεί ο αντίστροφος M.L της $F(S) = \dfrac{S^3 + S^2 + S + 2}{S^4 + 3S^2 + 2}$

όπως υπολογίστηκε στη *σελίδα 385 αυτού του τόμου.*

$$\frac{S^3 + S^2 + S + 2}{S^4 + 3S^2 + 2} = \frac{S^3 + S^2 + S + 2}{(S^2 + 1)(S^2 + 2)} = \frac{1}{S^2+1} + \frac{S}{S^2+2}$$

Έτσι

$$L^{-1}(F(S)) = L^{-1}\left(\frac{S^3+S^2+S+2}{S^4+3S^2+2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{S^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{S}{S^2+2}\right) =$$

$$= L^{-1}\left(\frac{1}{S^2+1^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{S}{S^2+(\sqrt{2})^2}\right) = \eta\mu t + \sigma\upsilon\nu\sqrt{2}t$$

13 Μετασχηματισμός Laplace για παράγωγες συναρτήσεις

Έστω f μια συνάρτηση με τύπο f(t), συνεχής στο διάστημα (0,+oo) και f'(t) η παράγωγος της ως προς t.

Ο M.L της f'(t) είναι

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}df(t) = [e^{-st}f(t)] - \int_0^{+\infty} f(t)de^{-st} =$$

$$= f(0) + SF(S)$$

όπου f(0) είναι η τιμή της f(t) για t=0 και

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st}f(t) = 0$$

όμοια $\int_0^{+\infty} e^{-st}f''(t)dt = -f'(0) - Sf(0) + S^2F(S)$

και γενικά

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f^{(v)}(t)dt = -f^{(v-1)}(0) - Sf^{(v-2)}(0) - \ldots - S^{v-1}f(0) + S^vF(S)$$

Λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές με το μετασχηματισμό Laplace

Έστω $$a_v\frac{d^v\psi}{dx^v} + a_{v-1}\frac{d^{v-1}\psi}{dx^{v-1}} + \ldots + a_1\frac{d\psi}{dx} + a_0\psi = g(x)$$

η μορφή της γραμμικής Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές και έστω οι αρχικές συνθήκες

$\psi(0) = c_0$, $\psi'(0) = c_1$ ..... $\psi^{(\nu-1)}(0) = c_{\nu-1}$

Η λύση βασίζεται στο θεώρημα του μετασχηματισμού Laplace για παραγώγους συναρτήσεων.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε $\psi' - 2\psi = 0$ με $\psi(0) = 2$

Λύση: Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών έχομε:

$$\psi' - 2\psi = 0 \Leftrightarrow [S\psi - \psi(0)] - 2\psi = 0 \Leftrightarrow$$

$$S\psi - 2 - 2\psi = 0 \Leftrightarrow (S-2)\psi = 2 \Leftrightarrow \psi = \frac{2}{S-2}$$

και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace βρίσκομε:

$$\psi(\chi) = L^{-1}\left(\frac{2}{S-2}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{1}{S-2}\right) = 2e^{2x}$$

2. Να λυθεί η Δ.Ε $\psi' - 3\psi = e^{3x}$ με $\psi(0) = 0$.

Λύση: Παίρνοντας τις μετασχηματισμένες Laplace των δύο μελών έχομε

$$\psi' - 3\psi = e^{3x} \Leftrightarrow [S\psi - \psi(0)] - 3\psi = \frac{1}{S-3} \Leftrightarrow$$

$$S\psi - 0 - 3\psi = \frac{1}{S-3} \Leftrightarrow (S-3)\psi = \frac{1}{S-3} \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{(S-3)^2}$$

και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace βρίσκομε

$$\psi(\chi) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(S-3)^2}\right\} = xe^{3x} .$$

3. Να λυθεί η Δ.Ε $\psi' + \psi = \eta\mu x$, με $\psi(0) = 1$.

Λύση: Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο μελών έχομε

$$\psi' + \psi = \eta\mu x \Leftrightarrow [S\psi - \psi(0)] + \psi = \frac{1}{S^2+1} \Leftrightarrow$$

$$S\psi - 1 + \psi = \frac{1}{S^2+1} \Leftrightarrow (S+1)\psi = \frac{1}{S^2+1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\psi = \frac{1}{(S^2+1)(S+1)} + \frac{1}{S+1}$$

και αναλύοντας αυτό σε άθροισμα απλών κλασμάτων έχομε:

$$\frac{1}{(S^2+1)(S+1)} = \frac{A}{S+1} + \frac{BS+\Gamma}{S^2+1} \Leftrightarrow$$

$$1 = AS^2 + A + BS^2 + \Gamma S + BS + \Gamma \Leftrightarrow$$

$$1 = (A+B)S^2 + (B+\Gamma)S + (A+\Gamma) \quad \text{Άρα}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B = 0 \\ B+\Gamma = 0 \\ A+\Gamma = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} A+B = 0 \\ A-B = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = 1/2,\ B=-1/2,\ \Gamma=1/2$$

Άρα

$$\psi = \frac{1/2}{S+1} + \frac{-1/2S + 1/2}{S^2+1} + \frac{1}{S+1} \Leftrightarrow$$

$$\psi = \frac{3}{2}\frac{1}{S+1} - \frac{1}{2}\frac{S}{S^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{S^2+1}$$

και παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace έχομε

$$\psi(\chi) = -e^{-x} - -\sigma\upsilon\nu x + -\eta\mu x .$$
$$\quad 2 \quad\quad 2 \quad\quad 2$$

4. Να λυθεί η Δ.Ε $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4\chi = 3$ $(t>0)$ με $\chi(0)=2$ κα' $\chi'(0)=0$.

Λύση: Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο μελών έχομε

$[S^2X - Sx(0) - x'(0)] + 5[Sx - x(0)] = 3/S \Leftrightarrow$

$S^2x - 2S + 5(Sx-2) + 4x = 3/S \Leftrightarrow$

$S^3x - 2S^2 + 5S^2x - 10S + 4Sx = 3 \Leftrightarrow$

$(S^3 + 5S^2 + 4S)x = 3 + 2S^2 + 10S \Leftrightarrow$

$$x = \frac{2S^2+10S+3}{S^3+5S^2+4S} \Leftrightarrow x = \frac{2S^2+10S+3}{S(S^2+5S+4)} \Leftrightarrow x = \frac{2S^2+10S+3}{S(S+1)(S+4)}$$

και αναλύοντας σε απλά κλάσματα

$$x = \frac{2S^2+10S+3}{S(S+1)(S+4)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+1} + \frac{\Gamma}{S+4} \Leftrightarrow$$

$2S^2+10S+3 = A(S+1)(S+4) + BS(S+4) + \Gamma S(S+1)$ και για

$S=0$ έχομε $3 = A\cdot1\cdot4 \Leftrightarrow A = 3/4$

$S=-1$ έχομε $2-10+3 = B(-1)3 \Leftrightarrow B = 5/3$

$S=-4$ έχομε $32-40+3 = \Gamma(-4)(-4+1) \Leftrightarrow \Gamma = -5/12$

Άρα

$$\chi = \frac{3/4}{S} + \frac{5/3}{S+1} + \frac{-5/12}{S+4}$$

και παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace

$$\chi(t) = L^{-1}\left(\frac{3/4}{S}\right) + L^{-1}\left(\frac{5/3}{S+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{-5/12}{S+4}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4} 1 + \frac{5}{3} e^{-t} - \frac{5}{12} e^{-4t} .$$

5. Να λυθεί η Δ.Ε $\psi'' - \psi = \eta\mu\chi$ με $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$.

Λύση: Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο μελών έχομε

$$[S^2c - S\psi(0) - \psi'(0)] - \psi = \frac{1}{S^2+1} \quad \text{και επειδή } \psi(0)=0 \text{ και } \psi'(0)=1$$

έχομε

$$S^2\psi - 1 - \psi = \frac{1}{S^2+1} \Leftrightarrow (S^2-1)\psi = \frac{1}{S^2+1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\psi = \frac{1}{(S+1)(S-1)(S^2+1)} + \frac{1}{(S+1)(S-1)} \Leftrightarrow \psi = \frac{S^2+2}{(S+1)(S-1)(S^2+1)}$$

και αναλύοντας αυτό σε άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{S^2+2}{(S+1)(S-1)(S^2+1)} = \frac{A}{S+1} + \frac{B}{S-1} + \frac{\Gamma S+\Delta}{S^2+1} \Leftrightarrow$$

$$S^2+2 = A(S-1)(S^2+1) + B(S+1)(S^2+1) + (\Gamma S+\Delta)(S+1)(S-1) \Leftrightarrow$$

$$S^2+2 = A(S^3+S-S^2-1) + B(S^3+S+S^2+1) + (\Gamma S^3-\Gamma S+\Delta S^2-\Delta) \Leftrightarrow$$

$$S^2+2 = (A+B+\Gamma)S^3 + (-A+B+\Delta)S^2 + (A+B-\Gamma)S + (-A+B-\Delta)$$

Άρα

$$\left.\begin{array}{l} A+B+\Gamma = 0 \\ -A+B+\Delta = 1 \\ A+B-\Gamma = 0 \\ -A+B-\Delta = 2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 2\Gamma = 0 \Leftrightarrow \Gamma = 0$

$-A+B+\Delta = 1$

$-A+B-\Delta = 2$ αφαιρώ κατά μέλη

$2\Delta = -1 \Leftrightarrow \Delta = -1/2$

$$\begin{array}{r} A+B = 0 \\ -A+B = 3/2 \\ \hline 2B = 3/2 \\ B = 3/4 \\ A = -3/4 \end{array}$$

Έτσι $$\psi = \frac{-3/4}{S+1} + \frac{3/4}{S-1} + \frac{-1/2}{S^2+1}$$

και παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace έχομε

$$\psi(x) = L^{-1}\left\{\frac{-3/4}{S+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3/4}{S-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-1/2}{S^2+1}\right\}$$

$$\psi(x) = -\frac{3}{4}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{x} - \frac{1}{2}\eta\mu x \ .$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Πίνακες

1.1 Ορισμός 1
1.2 Είδη πινάκων 1
1.3 Γινόμενο πινάκων 4
1.4 Ίσοι πίνακες – αντίθετοι πίνακες 4

2. Ορίζουσες

2.1 Ορισμοί 5
2.2 Ιδιότητες οριζουσών 7
2.3 Πολλαπλασιασμός οριζουσών 11
2.4 Λυμένες ασκήσεις 13
2.5 Λυμένες ασκήσεις 25

3. Γραμμικά συστήματα ν πρωτοβάθμιων εξισώσεων με ν αγνώστους

3.1 Μορφή συστήματος 27
3.2 Σύστημα Cramer 27
3.3 Λυμένες ασκήσεις 28
3.4 Λύση συστημάτων Cramer με τη βοήθεια πινάκων 35
3.5 Συμπληρωματικά θεωρήματα 35

4. Τυχόντα γραμμικά συστήματα

4.1 Μορφή συστήματος 41
4.2 Παραδείγματα 42

5. Ομογρενή γραμμικά συστήματα

5.1 Βαθμός πίνακα – Παράδειγμα 43
5.2 Στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ενός πίνακα 44
5.3 Τριγωνική μορφή πίνακα 44
5.4 Λύση ομογενούς γραμμικού συστήματος 47
5.5 Παραδείγματα 47
5.6 Άλυτες ασκήσεις 49

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Φανταστικοί αριθμοί

1.1 Ιστορικό 51
1.2 Ορισμός φανταστικων αριθμών 51
1.3 Ακέραιες δυνάμεις της φανταστικής μονάδας 51
1.4 Παράδειγμα 52

2. Μιγαδικοί αριθμοί

2.1 Ιστορικό 53
2.2 Ορισμοί 53
2.3 Ισότητα - Πρόσθεση - Πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών 53
2.4 Θεωρήματα 57
2.5 Λυμένες ασκήσεις 58

3. Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

3.1 Ορισμός 60
3.2 Θεωρήματα 60
3.3 Συζυγείς και πράξεις 62
3.4 Λυμένες ασκήσεις 64

4. Τετραγωνικές ρίζες μιγαδικού αριθμού

4.1 Ορισμός 66

5. Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού

5.1 Γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών 69

6. Μέτρο μιγαδικού αριθμού

6.1 Ορισμός 70
6.2 Παραδείγματα 71

7. Πολική - Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

7.1 Όρισμα - μέτρο μιγαδικού αριθμού 73

8. Πράξεις και μέτρο μιγαδικών αριθμών

8.1 Μέτρο του αθροίσματος - της διαφοράς δύο μιγαδικών 75
8.2 Μέτρο και όρισμα του γινομένου μιγαδικών Γεωμετρική παράσταση 76

8.3 Ισότητα μιγαδικών 78
8.4 Μέτρο και όρισμα του αντιστρόφου ενός μιγαδικού
- του πηλίκου δύο μιγαδικών -
Γεωμετρική παράσταση 79

9. Τύπος του De Moivre 82

10. Ρίζες μιγαδικών αριθμών
10.1 Ορισμός 83
10.2 Νιοστές ρίζες μιγαδικού αριθμού 83
10.3 Γεωμετρική παράσταση των νιοστών ριζών
μιγαδικού 84
10.4 Νιοστές ρίζες της μονάδας 84
10.5 Ιδιότητες νιοστών ριζών της μονάδας 86
10.6 Παραδείγματα 86

11. Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού 88

12. Νεπέρειος λογάριθμος μιγαδικού αριθμού 89

13. Λυμένες ασκήσεις 89

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εννοια της ακολουθίας 99

2. Πράξεις μεταξύ ακολουθιών 100

3. Φραγμένες ακόλουθίες 101

4. Μονότονες ακολουθίες 102

5. Καθορισμός είδους μονότονης ακολουθίας 103

6. Εννοια της υπακολουθίας 104

7. Η έννοια P(ν) ισχύει τελικά για κάθε ν ε N 105

8. Η έννοια της περιοχής 105

9. Μηδενικές ακολουθίες 107

10. Ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών 108

11. Συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών – έννοια του ορίου 109

12. Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών 110

13. Χρήσιμες προτάσεις 112

14. Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες 115

15. Ο αριθμός e 116

16. Υπολογισμός του αριθμού e κατά προσέγγιση 117

17. Γενίκευση της έννοιας του ορίου 118

18. Λυμένες ασκήσεις 121

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Προέλευση της έννοιας της συνάρτησεως 128

2. Μαθηματικος ορισμός της έννοιας της συναρτήσεως

2.1 Ίσες συναρτήσεις 129
2.2 Πραγματικές συναρτήσεις 130
2.3 Περιορισμός - επέκταση συναρτήσεως 130
2.4 Πράξεις με συναρτήσεις 131
2.5 Ιδιότητες των πράξεων 132

3. Ειδικές συναρτήσεις

3.1 Σταθερή συνάρτηση 133
3.2 Ταυτοτική συνάρτηση 134
3.3 Άρτια συνάρτηση 134
3.4 Περιττή συνάρτηση 135
3.5 Περιοδική συνάρτηση 136

4. Είδη συναρτήσεων

4.1 Συνάρτηση επί 137
4.2 Συνάρτηση ένα προς ένα 137
4.3 Συνάρτηση ένα προς ένα και επί 137
4.4 Αντίστροφη συνάρτηση 138
4.5 Σύνθεση συναρτήσεων 140
4.6 Μετατοπίσεις 142
4.7 Τμηματικά ορισμένες συναρτήσεις 142

5. Μονοτονία συναρτήσεων 143

6. Φραγμένη συνάρτηση 145

7. Βασικές συναρτήσεις

7.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις 147
7.2 Αντίστροφος των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ... 150
7.3 Εκθετική συνάρτηση 154
7.4 Λογαριθμική συνάρτηση 156
7.5 Υπερβολικές συναρτήσεις και οι αντίστροφες των 157

8. Όριο μεταβλητής - Όριο συνάρτησης

8.1 Όριο μεταβλητής 163

8.2 Όριο συνάρτησης όταν χ-->χο 167
8.2.1 Όριο πεπερασμένος αριθμός όταν χ-->χο 167
8.2.2 Όριο το +οο όταν χ-->χο 169
8.2.3 Όριο το -οο όταν χ-->χο 170
8.3 Όριο συνάρτησης το +οο 171
8.3.1 Όριο πεπερασμένος αριθμός όταν χ-->+οο ... 171
8.3.2 Όριο το +οο όταν χ-->+οο 172
8.3.3 Όριο το -οο όταν χ-->+οο 173
8.4 Όριο συνάρτησης στο -οο 175
8.4.1 Όριο πεπερασμένος αριθμός όταν χ-->-οο ... 175
8.4.2 Όριο το +οο όταν χ-->-οο 177
8.4.3 Όριο το -οο όταν χ-->-οο 178
8.5 Πλευρικά όρια συνάρτησης 180
8.6 Ασύμπτωτες της ψ=f(x) 185
8.7 Ιδιότητες του ορίου συνάρτησης 188
8.8 Όρια και πράξεις 190
8.9 Εφαρμογή: Όριο ρητής συνάρτησης 192
8.10 Όρια βασικών συναρτήσεων 193

9. Συνέχεια συνάρτησης

9. Συνέχεια συνάρτησης 202
9.1 Παραδείγματα 205
9.2 Πλευρική συνέχεια 207
9.3 Συνέχεια και πράξεις 208

10. Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

10.1 Συνέχεια πολυωνυμικής συνάρτησης 209
10.2 Συνέχεια ρητής συνάρτησης 209
10.3 Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων 209
10.3.2 Συνέχεια ημιτόνου 210
10.3.3 Συνέχεια συνημιτόνου 211
10.3.4 Συνέχεια εφαπτομένης και συνεφαπτομένης 211
10.3.5 Συνέχεια εκθετικής συνάρτησης 212
10.3.6 Συνέχεια λογαριθμικής συνάρτησης 213

11. Συνέχεια πολλών μεταβλητών 213

12. Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών 216

13. Ιδιότητες ορίου συναρτήσεων πολλών μεταβλητών 217

14. Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών 218

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Ιστορικό 221

2. Η έννοια της παραγώγου 221

3. Γεωμετρική σημασία της παραγώγου 224

4. Η έννοια της παραγώγου στη μηχανική 227

5. Πλευρικές παράγωγοι

5. Πλευρικές παράγωγοι 230
5.1 Παράγωγοι διαφόρων τάξεων 230

6. Λογιστικοί κανόνες παραγώγισης

6.1 Παράγωγος αθροίσματος δύο συναρτήσεων 233
6.2 Παράγωγος γινομένου δύο συναρτήσεων 234
6.3 Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων 236

7. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης 238

8. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης 239

9. Παράγωγος πλεγμένης συνάρτησης 242

10. Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

10. Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων 244
10.1 Παράγωγος ημιτόνου 245
10.2 Παράγωγος συνημιτόνου 246
10.3 Παράγωγος εφαπτομένης 247
10.4 Παράγωγος συνεφαπτομένης 250

11. Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης

11. Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης 251
11.1 Παράγωγος της $\psi=e^x$ 251
11.2 Παράγωγος της $\psi=a^x$ 252
11.3 Παράγωγος της $\psi=\ln x$ 252

12. Παράγωγος κυκλομετρικών σσυναρτήσεων

12. Παράγωγος κυκλομετρικών συναρτήσεων 254

12.1 Παράγωγος της ψ=τοξημχ 254
12.2 Παράγωγος της ψ=τοξσυνχ 255
12.3 Παράγωγος της ψ=τοξεφχ 256
12.4 Παράγωγος της ψ=τοξσφχ 257

13. Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων
13. Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων 258
13.1 Παράγωγος υπερβολικού ημιτόνου 258
13.2 Παράγωγος υπερβολικού συνημιτόνου 258
13.3 Παράγωγος υπερβολικής εφαπτομένης 259
13.4 Παράγωγος υπερβολικής συνεφαπτομένης 259
13.5 Παράγωγος της ψ=Arsinhx 260
13.6 Παράγωγος της ψ=Arcoshx 260
13.7 Παράγωγος της ψ=Artghx 261
13.8 Παράγωγος της ψ=Arctghx 262

14. Συνοπτικός πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων 263

15. Παράγωγος και συνέχεια 267

16. Η έννοια του διαφορικού μιας συνάρτησης
16. Η έννοια του διαφορικού μιας συνάρτησης 268
16.1 Ορισμοί 268
16.2 Γεωμετρική σημασία του διαφορικού 270

17 Εφαρμογές παραγώγων
17.1 Ακρότατα συνάρτησης - ορισμοί 272
17.2 Θεώρημα του Fermat 272
17.3 Θεώρημα του Rolle 275
17.3.1 Παραδείγματα 276
17.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle 277
17.4 Θεώρημα μέσης τιμής ή θεώρημα του Lagrange ... 278
17.4.1 Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Lagrange 280
17.5 Ασκήσεις 281
17.6 Μονοτονία συναρτήσεων 282
17.7 Τοπικά ακρότατα 285

18. Η δεύτερη παράγωγος στην μελέτη
των συναρτήσεων

18. Η δεύτερη παράγωγος στην μελέτη
των συναρτήσεων 292
18.3 Σημεία καμπής 294
18.4 Παραδείγματα 297
18.5 Τύπος του Taylor 302
18.6 Κανόνας του L'Hospital 306
18.7 Μερική παράγωγος 309
18.7.1 Παραδείγματα 310
18.7.2 Γεωμετρική σημασία της μερικής
παραγώγου 311
18.7.3 Μερικές παράγωγοι ανωτέρου βαθμού 312
18.7.4 Ολικό διαφορικό 313
18.8 Ολικά διαφορικά ανώτερης τάξης 315
18.9 Ολική παράγωγος 316
18.10 Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων 317

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1.1 Ιστορικό 321
1.2 Η έννοια του Ολοκληρώματος 322
1.3 Εποπτική Ανάλυση της Εννοιας του Ολοκληρώματος 322
1.4 Εμβαδόν Χωρίου που Περικλείεται από Καμπύλη με Καθοδική Κλίση 324

2. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
2.1 Εννοια του Ορισμένου Ολοκληρωματος 326
2.2 Αναλυτικός Ορισμός του Ορισμένου Ολοκληρώματος 329
2.3 Παραδείγματα 330

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ 332

4. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ 334

5. Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ
ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ 335

6. ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΔΙΑΦΟΡΑ 336

7. ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
7.1 Μέθοδος Τραπεζίων 337
7.2 Μέθοδος Simpson 339

8. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
8.1 Εμβαδά Επιπέδων Χωρίων 340
8.2 Παραδείγματα 342

9. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
9.1 Εισαγωγή - Ορισμός 350

10. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ
10.1 Ορισμός 358
10.2 Υπολογισμός Μήκους Τόξου Καμπύλης σε Καρτεσιανές

Συντεταγμένες 358
10.3 Υπολογισμός Μήκους Τόξου Καμπύλης σε Πολικές Συντεταγμένες 361
10.4 Παραδείγματα 361

11. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
11.1 Εννοια του Αορίστου Ολοκληρώματος 363
11.2 Ιδιότητες του Αορίστου Ολοκληρώματος 364
11.3 Λογιστικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης 364

12. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ
12.1 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση 365
12.2 Ολοκλήρωση κατά Μέρη 367
12.3 Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες 368

13. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \eta\mu^{2\nu} x\,dx$, $\int \sigma\upsilon\nu^{2\nu} x\,dx$, $\int \eta\mu^{2\nu} x \sigma\upsilon\nu^{2\nu} x\,dx$, $\int (\ln x)^{\nu} dx$ 370

14. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 373

15. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ημx ΚΑΙ συνx 387

16. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \varepsilon\varphi^{\nu} x\,dx$, $\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi^{\nu} x}$ 391

17. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 394

18. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,dx$ 400

19. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΗ ΜΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ 405

20. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $A = \int \frac{x^{\nu} dx}{\sqrt{\alpha x+\beta}}$, $B = \int x^{\nu} \sqrt{\alpha x+\beta}\,dx$ 408

21. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 409

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Ορισμοί 412

2. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών ... 416

2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 421

3. Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης 431

4. Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης 439

5. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης 440

6. Διαφορική εξισωση του Bernoulli 446

7. Διαφορική εξίσωση Riccati 453

8. Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις τάξης η με σταθερούς συντελεστές 458

9. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές με δεύτερο μέλος <> 0 466

10. Μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace 476

11. Πίνακας μετασχηματισμών Laplace 477

12. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace 486

13. Μετασχηματισμός Laplace για παράγωγο συναρτήσεως 488

Περιεχόμενα 495

COPYRIGHT ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ